

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THESE DE DOCTORAT D'ETAT

En Mathématiques Appliquées

**COMPARAISONS STOCHASTIQUES
ET APPLICATIONS**

par

Nadia OUKID

Devant le jury composé de :

F. Hannane	Professeur, U. de Blida	Président
A. Aissani	Professeur, U.S.T.H.B., Alger	Rapporteur
D. Aissani	Professeur, U. de Bejaia	Examineur
A. Derbala	Maître de conférences, U. de Blida	Examineur
S. Khouas	Maître de conférences, U. de Blida	Examinatrice
N. Djellab	Maître de conférences, U. de Annaba	Examinatrice

Blida, juin 2009.

RESUME

Les modèles de Files d'Attente constituent un outil théorique ou appliqué pour la modélisation, l'évaluation de performance et le contrôle de différents types de systèmes concrets (systèmes de production, systèmes informatiques...). Les modèles d'Attente développés ces dernières années tentent de tenir compte de l'influence des phénomènes de répétitions d'appels qui exercent une influence non négligeable sur les indices de performance de certains systèmes réels, tels que les systèmes de télécommunications. La conception de ces systèmes nécessite par leur complexité et leurs implications économiques, des outils d'aide qui permettent l'évaluation ou l'analyse des performances du système. Cette évaluation consiste à déterminer de manière qualitative et quantitative le comportement du système étudié, en vue de vérifier sa correction, d'optimiser l'utilisation de ses ressources et d'augmenter sa fiabilité.

A cet effet, plusieurs techniques d'évaluation ont été obtenues, ainsi que plusieurs méthodes de modélisation sont aujourd'hui utilisées. En raison de la complexité des résultats analytiques obtenus, plusieurs méthodes approximatives d'analyse des phénomènes de répétition d'appels ont été développées. Parmi les principales approches introduites ces dernières années, on trouve les méthodes de Comparaisons Stochastiques qui tentent d'éluder cette difficulté par l'obtention d'approximations ou d'encadrement des principales mesures de performance.

Dans cette thèse, nous étudions l'application de ces méthodes à une classe de modèles de files d'attente avec rappels et serveur non fiable.

Dans un premier temps, nous actualisons les travaux concernant les systèmes avec rappels fiables et/ou non fiables.

Dans un deuxième temps, nous considérons un système $GI/GI/1$ avec rappels et serveur non fiable et en moyennant une approche par comparaison stochastique, nous obtenons des estimations des périodes d'activité et d'inactivité. Ensuite, nous considérons le cas où les arrivées forment un processus de Sedyakin.

Nous obtenons des conditions de comparabilité pour une série de systèmes $M/G/1$ avec rappels et serveur non fiable et nous étudions également la monotonie de la chaîne de Markov incluse associée. et enfin nous donnons quelques illustrations numériques et graphiques.

Mots clés : Comparaisons Stochastiques, Systèmes avec Rappels, Fiabilité, Ordres Stochastiques, Distributions non paramétriques, période d'activité, Chaîne de Markov incluse, Borne, monotonie, Opérateur de transition, processus de Sedyakin.

Abstract

Queueing models serve as theoretical or applied tool for modeling, performance evaluation and control of several practical systems as production or communication systems. Models developed last years, try to take into account influence of call repetition phenomena which exert a non negligible influence on system performance indices. The design of these systems requires by their complexity and their implications economic support tools that allow evaluation or analysis of system performance. This evaluation is to determine of qualitative and quantitative behavior of the system studied, to verify its correction, optimize the use of its resources and increase its reliability.

To this end, several assessment techniques were obtained and several methods of modeling are now used. Because of the complexity of the analytical results obtained, several approximate methods of analysis of the phenomena repeated calls have been developed. Among the main approaches in recent years, we find the methods Stochastic Comparisons trying to avoid this difficulty by obtaining approximations or supervisory of the performance measures.

In this thesis, we study the application of these methods to a class of model queues with reminders and unreliable server.

As a first step, we update the work on retrial queues with breakdowns.

In a second step, we consider a $GI/GI/1$ retrial queue with breakdowns and by means of a stochastic comparison approach, we obtain estimates of the busy and idle periods. Then we consider the case where the arrivals form a Sedyakin process.

We obtain comparability conditions for $M/G/1$ retrial queues and breakdowns, we study also the monotonicity properties of embedded Markov chain. Finally we give some numerical and graphical illustrations.

Keywords : Stochastic Comparisons, Retrial queues, Reliability, Stochastic ordering, Ageing Distributions, Busy period, Embedded Markov Chain, Bounds, Monotonicity, Transition Operator, Sedyakin Process.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord Dieu Merci !

Je tiens à exprimer ma très vive reconnaissance envers mon directeur de thèse Monsieur Amar Aissani, professeur à l'USTHB, d'avoir encadré ce travail avec compétence et pour l'aide qu'il m'a apportée au cours de cette recherche. Son intérêt, sa patience, sa disponibilité et ses précieux conseils m'ont été d'un grand profit.

Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères et vifs remerciements et de ma plus profonde gratitude.

Je remercie également Monsieur Djamil Aissani professeur et directeur du laboratoire LAMOS à Béjaïa, de m'avoir accueilli au sein de son équipe et pour les conseils stimulants que j'ai eu l'honneur de recevoir de sa part.

Je remercie vivement mon frère Mohand Said pour son soutien, ses conseils et ses encouragements dont il a toujours fait preuve à mon égard. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude et de mon plus grand respect.

Mes remerciements vont à Monsieur A. Derbala pour ses précieux conseils et à Monsieur M. Chellali d'avoir lu et amélioré la rédaction en anglais d'un de mes articles.

Je tiens à remercier Madame S. Khouas pour ses précieux conseils.

Je profite de l'occurrence pour exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation. Je pense en particulier à Messieurs : M. Blidia, S. Manseur, O. Tami, O. Safar, F. Hanane et beaucoup d'autres.

Je remercie Monsieur F. Hanane pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Enfin, que les membres du jury trouvent ici l'expression de toute ma gratitude pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de juger ce travail.

DEDICACES

A la mémoire de mon père et de mon frère

A ma mère,

A mon mari et sa famille, en particulier à sa mère et son père

A mes enfants,

A mes frères et soeur,

A mes belles soeurs,

A mes neveux et nièces

A tout le personnel de la Faculté des Sciences.

TABLE DES MATIÈRES

RESUME

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

INTRODUCTION	10
1 SYSTEMES AVEC RAPPELS FIABLES ET / OU NON FIABLES	13
1.1 Introduction	13
1.2 Description d'un système avec rappels	14
1.3 Exemples de systèmes modélisés par desfiles d'attente avec rappels	15
1.4 Quelques modèles de files d'attente avec rappels	16
1.5 Conclusion	24
2 ORDRES STOCHASTIQUES ET DISTRIBUTIONS NON PARAMETRIQUES	25
2.1 Introduction	25
2.2 Notions de fiabilité	25
2.3 Principales opérations de fiabilité	26
2.3.1 Formation de systèmes cohérents	26
2.3.2 Addition des durées de vie	26
2.3.3 Mélange de distributions	26
2.3.4 Systèmes k parmi n	26
2.3.5 Systèmes k - consécutifs - sur- n	27
2.4 Ordres stochastiques	27
2.4.1 Définitions	27
2.4.2 Conservation des ordres stochastiques	30
2.5 Distributions non paramétriques	31
2.5.1 Introduction	31
2.5.2 Définitions	32
2.5.3 Caractérisation des distributions non paramétriques en terme des ordres stochastiques	33
2.5.4 Dominance stochastique	34

2.5.5	Définitions de nouvelles classes de distributions non paramétriques	34
2.5.6	Classification des lois non paramétriques	34
2.5.7	Conservation des classes de lois non paramétriques	36
2.6	Applications	37
2.7	Conclusion	42
3	ESTIMATION DE LA PERIODE D'ACTIVITE	43
3.1	Introduction	43
3.2	Description du modèle	43
3.3	Première borne pour la période d'activité	44
3.4	Borne pour la période d'inactivité	45
3.5	Seconde borne pour la période d'activité.	46
3.6	Processus d'arrivées de Sedyakin	49
3.7	Système avec rappels et pannes	50
3.8	Conclusion	53
4	INEGALITES STOCHASTIQUES POUR $M/G/1$ AVEC RAPPELS ET SER- VEUR NON FIABLE	54
4.1	Introduction	54
4.2	Inégalités stochastiques pour $M/G/1$ avec rappels	54
4.3	Description du modèle	56
4.4	Quelques outils préliminaires	58
4.5	Inégalités préliminaires	59
4.6	Monotonie de la chaîne de Markov incluse	61
4.6.1	Cas de pannes passives	61
4.6.2	Cas de pannes actives	67
4.7	Inégalités stochastiques de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système	68
4.7.1	Cas de pannes passives	68
4.7.2	Cas de pannes actives	69
4.8	Illustration numérique et graphique	69
4.9	Conclusion	81
	CONCLUSION ET PERSPECTIVES	82
	REFERENCES	83

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 4.1. Comparaison de \overline{P}_{nm} pour $n = 10, 11, 12$	72
Figure 4.2. Comparaison de \overline{P}_{nm} pour $n = 60, 61, 62$	72
Figure 4.3. Comparaison de \overline{P}_{nm} pour $n = 38, 39, 40$	75
Figure 4.4. Comparaison de \overline{P}_{nm} pour $n = 45, 46, 47$	75
Figure 4.5. Comparaison de \overline{P}_{nm} pour $n = 72, 73, 74$	78
Figure 4.6. Comparaison de \overline{P}_{nm} pour $n = 80, 81, 82$	78
Figure 4.7. Comparaison de $2\overline{\overline{P}}_{nm}$ et $\overline{\overline{P}}_{n-1m} + \overline{\overline{P}}_{n+1}$ pour $n = 4$	79
Figure 4.8. Comparaison de $2\overline{\overline{P}}_{nm}$ et $\overline{\overline{P}}_{n-1m} + \overline{\overline{P}}_{n+1}$ pour $n = 75$	80
Figure 4.9. Comparaison de $2\overline{\overline{P}}_{nm}$ et $\overline{\overline{P}}_{n-1m} + \overline{\overline{P}}_{n+1}$ pour $n = 97$	81
Tableau 4.1 Illustration du théorème 4.6.1 (1)	70
Tableau 4.2 Suite du tableau 4.1	71
Tableau 4.3 Illustration du théorème 4.6.1 (2)	73
Tableau 4.4 Suite du tableau 4.3	74
Tableau 4.5 Illustration du théorème 4.6.1 (3)	76
Tableau 4.6 Suite du tableau 4.5	77

INTRODUCTION

La théorie de files d'attente est née d'exigences pratiques liées à la nécessité de fournir aux décideurs des méthodes mathématiques d'aide à l'organisation rationnelle du service massif de clients, ou de phénomènes apparentés, et qui conduisent à la formation de files d'attente. Cette théorie constitue un outil théorique et pratique pour la modélisation stochastique, l'évaluation des performances et le contrôle de différents types de systèmes concrets (systèmes de production, systèmes informatiques...) [1].

Les modèles d'attente développés ces dernières années tentent de tenir compte de l'influence des phénomènes de répétitions d'appels qui exercent une influence non négligeable sur les indices de performance de certains systèmes réels, tels que les systèmes de télécommunications. Ces systèmes sont appelés systèmes de files d'attente avec rappels.

A notre connaissance, l'étude des modèles de files d'attente avec rappels remonte déjà aux travaux de KOSTEN [2] et CLOS [3]. Il faut attendre 1957 pour voir publié l'article de COHEN [4] lors de la modélisation d'un central téléphonique. Cet article contient une analyse systématique du modèle Markovien $M/M/m$. Ce n'est que vers les années 1970-1980 qu'on constate un regain d'intérêt pour cette catégorie de modèles, en raison de nouveaux développements technologiques des systèmes de télécommunications. Les systèmes avec rappels permettent en effet de mieux modéliser des protocoles spécifiques de communication, tels que *CSMA* (Carrier Sense Multiple Access) ou encore les disciplines Ring-back-when-free, Repeat-last-number, Auto-repeat ALEXANDROV [5]. Les progrès dans ce domaine sont résumés dans les travaux de synthèse de YANG & TEMPLETON [6], FALIN [7], AISSANI [8] et OUKID [10].

Parmi les travaux sur le sujet, très peu de modèles prennent en compte la fiabilité du serveur.

La théorie analytique actuelle de ces systèmes a une portée limitée en raison de la complexité des résultats connus. En effet, plusieurs formules analytiques (complexes) sont difficilement exploitables en pratique. C'est le cas de la fonction génératrice du nombre de clients dans un système $M/G/1$ avec rappels, qui est une fonction composée de la formule de "Pollaczek-Khintchine" et d'une intégrale (voir [7] et [8]). C'est pour cela que, lors de l'étude des systèmes concrets on est souvent amené à remplacer le système réel (généralement complexe), par un système plus simple et pour lequel il existe des résultats analytiques exploitables, ce qui a poussé les auteurs à tenter de développer des méthodes approximatives d'analyse des phénomènes de répétition d'appels. Parmi les principales approches développées ces dernières années, on trouve les méthodes de comparaisons stochastiques qui fournissent un outil d'aide à la décision pour l'étude et la conception de systèmes complexes. Elles permettent en effet, d'obtenir des estimations et de mettre en évidence des propriétés qualitatives lorsqu'on est confronté à des variables aléatoires ou des processus stochastiques :

- dont l'évolution probabiliste n'est pas suffisamment spécifiée. En pratique, les distributions paramétriques des modèles étudiés ne sont connues qu'à l'aide de données statistiques (pas toujours disponibles) ou à l'aide de l'intuition de l'ingénieur.
- dont l'étude analytique s'avère trop complexe, comme c'est le cas pour la majorité des modèles de files d'attente.
- qui restent dans le cadre des théories existantes mais dont les caractéristiques sont trop complexe pour un usage pratique.

Ces méthodes constituent aujourd'hui l'une des principales activités de recherche dans divers domaines scientifiques tels que l'économie, les finances, la recherche opérationnelle, la théorie de la décision, etc... En particulier, elles jouent un rôle important dans l'analyse des problèmes complexes de files d'attente et leurs applications en télécommunications, systèmes de production etc...

L'estimation par minoration et majoration fournit par exemple les modèles extrémaux lorsque les distributions paramétriques parcourent des classes données de distributions. Elle permet également de prouver l'optimalité et d'évaluer une politique optimale de gestion des stocks, ou une politique optimale d'ordonnancement décrite par des processus markoviens de décision.

Dans cette thèse, nous étudions l'application de ces méthodes à des modèles de files d'attente $M/G/1$ et $GI/GI/1$ avec rappels et lorsque le serveur sujet à des pannes aléatoires pour une maintenance corrective. Nous considérons également le cas de $GI/GI/1$ classique non fiable et le cas où les arrivées forment un processus de Sedyakin.

Pour le modèle $GI/GI/1$ classique et avec rappels et pannes actives et/ou passives, moyennant une approche par comparaison stochastique, nous obtenons des estimations par majoration et minoration pour la période d'activité.

Nous obtenons des conditions de comparabilité de modèles $M/G/1$ avec rappels et pannes actives et/ou passives, et nous étudions également la monotonie de la chaîne de Markov incluse d'un tel système.

Cette étude est structurée comme suit :

- Le chapitre 1 comporte une synthèse sur les systèmes de files d'attente avec rappels et serveur fiable et/ou non fiable, et actualisant celles de YANG & TEMPLETON [6], FALIN [7], AISSANI [8] et OUKID [10].
- Dans le chapitre 2, nous introduisons des outils préliminaires utiles pour ce travail : des notions générales de la théorie de fiabilité, des définitions et un récapitulatif des principaux théorèmes de conservation des ordres stochastiques pour les principales opérations de fiabilité (min, max, produit de convolution et mélange de distributions), ainsi que la relation entre les principaux ordres stochastiques. Nous définissons également les différentes distributions non paramétriques et nous présentons une classification systématique de ces

distributions basée sur la règle $S-SFR$ (S-Starting Failure Rate). Ensuite, nous résumons les propriétés de conservation connues par rapport aux principales opérations de fiabilité citées ci-dessus. Nous concluons ce chapitre par des applications.

- Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la période d'activité de systèmes $GI/GI/1$ classique et avec rappels non fiables et nous considérons le cas où les arrivées se font selon un processus de Sedyakin. En moyennant une approche par comparaison stochastique, nous obtenons des bornes sup et inf des périodes d'activité et d'inactivité de tels systèmes.
- Une partie du chapitre 4, est consacrée aux travaux de KHALIL et FALIN [11] concernant l'obtention de conditions de comparabilité de modèles $M/G/1$ avec rappels et serveur fiable, la monotonie de la chaîne de Markov incluse correspondante ainsi que la probabilité stationnaire du nombre de clients dans le système. Dans l'autre partie, nous présentons notre contribution à l'étude du modèle $M/G/1$ avec rappels et serveur non fiable, qui est sujet à des pannes aléatoires qui peuvent se produire aussi bien lorsqu'il est libre que lorsqu'il est actif. Nous obtenons des conditions de comparabilité de ces modèles et Pour chaque cas de pannes (active et passive), nous obtenons les conditions de monotonie des opérateurs de transitions des chaînes de Markov incluses correspondantes ainsi que les inégalités stochastiques de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système. Et enfin, un logiciel est conçu pour illustrer les résultats obtenus dans le chapitre 4.

CHAPITRE 1

SYSTEMES AVEC RAPPELS FIABLES ET / OU NON FIABLES

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue certains résultats consacrés aux modèles de files d'attente avec rappels fiables et/ou non fiables, afin de mieux souligner l'intérêt des méthodes de comparaisons stochastiques utilisées dans les chapitres suivants. Cette synthèse actualise celle de FALIN [7], AISSANI [8], TEMPLETON [9] et OUKID [10].

Dans les dernières décennies, les systèmes informatiques et téléphoniques, tendent à être de plus en plus complexes, intégrant des schémas de parallélisme, de non déterminisme, de communication et de synchronisation.

La conception de ces systèmes nécessite par sa complexité et ses implications économiques, des outils d'aide qui permettent l'évaluation ou l'analyse des performances du système. Cette évaluation consiste à déterminer de manière qualitative et quantitative le comportement du système étudié, en vue de vérifier sa correction, d'optimiser l'utilisation de ses ressources et d'augmenter sa fiabilité.

A cet effet, plusieurs techniques d'évaluation ont été développées, ainsi que plusieurs méthodes de modélisation sont aujourd'hui utilisées. On distingue principalement les modèles basés sur la théorie des files d'attente.

La théorie des files d'attente a été introduite pour l'étude et l'analyse des systèmes téléphoniques. Elle a été ensuite développée pour l'analyse des performances et la planification des systèmes de production, des systèmes informatiques et des réseaux de télécommunication.

La raison principale du succès de cette théorie est la combinaison de la puissance d'expression et de l'efficacité de la solution qu'elle offre cet outil.

La théorie classique des files d'attente envisage deux manières de résoudre le conflit qui se produit lorsqu'un client arrivant dans le système et trouve le serveur occupé :

- Le client arrivé se place dans la file d'attente et attend son tour selon l'une des disciplines : FIFO, LIFO ou Random.
- Le client peut quitter le système définitivement. C'est le système classique d'Erlang (avec

refus ou avec perte).

Une situation intermédiaire envisage la possibilité pour un client qui trouve le(s) serveur(s) occupé(s) de rappeler ultérieurement pour le service autant de fois que nécessaire, et à des intervalles de temps aléatoires, jusqu'à ce qu'il trouve le serveur apte à entamer son service, on parle alors de systèmes avec rappels ou encore avec répétitions d'appels.

Dans la terminologie anglo-saxonne, on utilise depuis quelques années le terme "Retrial Queueing Systems".

La description d'un système classique se fait avec ses éléments principaux : le processus d'arrivées, le mécanisme de service (disponibilité et nombre de serveurs, durée de service) et la discipline d'attente. Pour un système avec rappels, on doit ajouter un élément décrivant la loi des répétitions d'appels.

En fonction du modèle considéré, on pourra introduire d'autres éléments décrivant la fiabilité du serveur, les types de priorité, etc...

Les premières tentatives rigoureuses sur les systèmes avec rappels remontent aux travaux de Kosten, Clos et Cohen dans sa version la plus simple, lors de la modélisation du service d'abonnés dans un central téléphonique. Ce type de systèmes a été largement utilisé pour modéliser divers problèmes dans les systèmes de production, les systèmes informatiques, les réseaux de télécommunication, ainsi que les réseaux à commutation téléphonique pour la modélisation des fonctions "Auto-Repeat", "Repeat-Last-Number", "Ring-Back-When-Free" et le protocole CSMA (Carrier-Sense Multiple Access), protocole spécifique de communication dans les réseaux locaux. Il peut également modéliser le service des avions à l'atterrissage dans un aéroport (d'où l'origine du terme "entrer en orbite").

1.2 Description d'un système avec rappels

Un système d'attente avec rappels est un système composé de S ($S \geq 1$) serveurs identiques et indépendants, d'un buffer (positions d'attente) de capacité $K - S$ ($K \geq S$) et d'un orbite de capacité finie ou infinie. A l'arrivée d'un client, s'il y a un ou plusieurs serveurs libres et en bon état, le client sera immédiatement pris en charge et quitte le système à la fin de son service. Sinon, s'il y a des positions d'attente libres dans le buffer, le client le rejoindra. Par ailleurs, si tous les serveurs et toutes les positions d'attente du buffer occupés, il rejoint l'orbite et devient source d'appels secondaires, et il rappellera ultérieurement.

Tout client en orbite est supposé rappeler pour le service à des intervalles de temps suivant une loi de probabilité. Chacun de ces clients secondaires est traité comme un nouveau client qui arrive de l'extérieur du système (client primaire).

1.3 Exemples de systèmes modélisés par desfiles d'attente avec rappels

a) *Les réseaux à commutation par paquets*

Une grande attention a été constatée ces dernières années pour les réseaux à commutation par paquets.

Considérons un réseau de communication d'ordinateurs dans lequel on trouve un ensemble d'interface (IMP : Interface Message Processors) et des câbles qui les relient.

Un ordinateur hôte est connecté à l'un de ces interfaces. Si l'hôte veut envoyer un message à un autre hôte, il doit en premier lieu envoyer le message avec l'adresse de destination de l'hôte à l'interface à laquelle il est connecté. L'interface à son tour envoie le message à l'hôte destinataire si elle est connectée, ou indirectement via d'autres interfaces.

Considérons maintenant, en particulier l'interface à laquelle est connectée l'hôte. Supposons que des messages arrivent du monde extérieur selon une loi quelconque. Après réception du message, l'hôte l'envoie immédiatement à son interface et s'il y a un buffer libre dans l'interface, le message est accepté, dans le cas contraire, le message est rejeté et l'hôte doit réessayer une autre fois après une certaine période de temps. Le message rejeté sera stocké dans un buffer de l'hôte s'il existe des buffers libres, dans le cas contraire le message est rejeté par l'hôte, et on suppose qu'il est perdu.

Ce problème peut être modélisé comme un système de files d'attente avec rappels, à un seul serveur possédant des buffers (tampons). L'interface (IMP) est considérée comme le serveur et les buffers comme un espace d'attente. Le nombre de tampons de l'hôte constitue la capacité de l'orbite.

b) *Le protocole de communication CSMA*

Un réseau local simple est composé de stations interconnectées par un bus unique qui est le canal de communication. Ainsi, les stations communiquent les unes avec les autres via le bus qui peut être utilisé par une seule station à la fois.

Un des protocoles de communication le plus généralement utilisé dans les réseaux locaux est le protocole non-persistant CSMA qui est une méthode d'accès à un réseau local fondée sur la reconnaissance par les différentes stations de l'état de liaison (libre ou occupé) à un instant donné.

Sous ce protocole, des messages de longueur variable arrivent aux stations du monde

extérieur.

A la réception d'un message, la station le découpe en un nombre de paquets (de longueur fixe) et vérifie immédiatement si le bus est occupé ou libre.

S'il est libre, l'un de ces paquets est transmis via ce bus à la station de destination, et les autres paquets sont stockés dans le tampon pour une transmission ultérieure. Si par contre, le bus est occupé, tous les paquets sont stockés dans le buffer, et la station peut réessayer la transmission après une période de temps dite temps de rappels.

Ce problème peut être modélisé comme un système de files d'attente avec rappels à un seul serveur, qui est le bus, et les buffers des stations représentent l'orbite.

c) *Les systèmes informatiques à temps réel*

Considérons un système informatique à temps réel dans lequel il y a S ports et m terminaux ($m \geq S$).

Pour la connexion d'un terminal à l'ordinateur central, un port exactement doit être utilisé.

Les étudiants arrivent au centre de calcul pour utiliser l'ordinateur central pendant une durée de temps aléatoire.

Un étudiant qui arrive doit d'abord trouver un terminal libre pour se connecter. S'il n'y a aucun, l'étudiant tentera sa chance après une période aléatoire. Si par contre, il trouve un terminal libre, il doit envoyer des commandes pour demander la connexion à l'ordinateur. S'il y'a un port libre, le terminal est connecté à l'ordinateur ; autrement la requête sera mise dans une file d'attente et l'étudiant doit attendre jusqu'à ce qu'il y ait un port libre pour lui.

Ce système peut être modélisé par une file d'attente avec rappels à plusieurs " S " serveurs (ports), à un buffer (terminaux) de capacité m et un orbite de taille infinie.

Les ports correspondent aux serveurs et les terminaux sont modélisés par un buffer.

1.4 Quelques modèles de files d'attente avec rappels

1. Modèles Markoviens

Les modèles Markoviens sont des systèmes où les temps inter-arrivées primaires, les durées de service et les temps inter-rappels sont des variables aléatoires indépendantes et exponentiellement distribuées.

Considérons un système avec rappels à m serveurs. Le flot des arrivées primaires est poissonien de taux λ . Si un client primaire trouve au moins un serveur libre, il est immédiatement pris en charge. Sinon, il entre en orbite et devient source d'appels secondaires [4]. La durée de service est exponentielle de paramètre μ . La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentielle de paramètre θ .

Le système peut-être décrit par le processus Markovien $X(t) = \{C(t), N(t)\}$, d'espace d'états $S = \{0, 1, \dots, m\} \times N$, où $C(t)$ est le nombre de clients en cours de service à la date t et $N(t)$ est le nombre de clients en régime de rappels à la date t .

Soit

$$P_{ij}(t) = (C(t) = i, N(t) = j),$$

avec $i = 0, 1, \dots, m, j \geq 0$.

Les probabilités de transitions à l'état stationnaire sont données par :

Pour $0 \leq i \leq m - 1$

$$P_{ij}(k, l) = \begin{cases} \lambda, & \text{si } (k, l) = (i + 1, j), \\ i\mu, & \text{si } (k, l) = (i - 1, j), \\ j\theta, & \text{si } (k, l) = (i + 1, j - 1), \\ -(\lambda + i\mu + j\theta), & \text{si } (k, l) = (i, j), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $i = m$

$$P_{mj}(k, l) = \begin{cases} \lambda, & \text{si } (k, l) = (m, j + 1), \\ m\mu, & \text{si } (k, l) = (m - 1, j), \\ -(\lambda + m\mu), & \text{si } (k, l) = (m, j), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas $m = 1$, sous la condition d'ergodicité : $\rho = \lambda/\mu < 1$, les probabilités stationnaires existent et sont données par [7]

$$P_{0j} = \frac{\rho^j}{j! \mu^j} \prod_{i=0}^{j-1} (\lambda + i\mu) (1 - \rho)^{1+\lambda/\mu},$$

$$P_{1j} = \frac{\rho^{j+1}}{j! \mu^j} \prod_{i=1}^j (1 - \rho)^{1+\lambda/\mu}.$$

Toutes les mesures de performance s'obtiennent en utilisant les fonctions génératrices (voir [7]).

Le modèle $M/M/2/2$, a fait l'objet de l'article de HANSCHKE [12]. Ce dernier a montré que les fonctions génératrices partielles des probabilités d'états stationnaires peuvent-être exprimées en termes de fonctions hypergéométriques généralisées. Dans son article, il propose un

test simple pour obtenir les conditions suffisantes pour l'ergodicité des systèmes avec rappels et multi-serveurs.

Pour $m \geq 2$, il n'existe pas de formules analytiques explicites. Les résultats obtenus par COHEN [4] et HANSCHKE [12] sont difficilement exploitables dans des cas pratiques. Pour cela, de nombreuses approches ont été proposées :

- Méthodes numériques : [13].
- Méthodes asymptotiques : [7] et [14].

ARTALEJO [15] a également étudié, le comportement asymptotique avec forte intensité de rappels dans le cas du système $M/M/1$ avec des clients impatientes.

2. Modèles semi-Markoviens

Le Modèle $M/G/1$ avec rappels est le modèle le plus étudié par les spécialistes : [7], [16], [17], [18], [19], ([20], [21] ... et il existe une littérature abondante sur ses diverses propriétés (cf. [6], [22], ...).

Soit λ le taux du flot poissonnien des appels primaires. La durée de service τ est de loi générale, de moyenne $\frac{1}{\mu}$, de distribution $B(x)$ et de transformée de Laplace-Stieltjes $\hat{B}(s)$, $\text{Re}(s) > 0$. La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentielle de paramètre θ . La description du système est la suivante : On suppose que le $(i - 1)^{\text{ème}}$ appel termine son service à l'instant η_{i-1} (les appels sont numérotés dans l'ordre de service) et le serveur devient libre. Même s'il y a des clients dans le système, ils ne peuvent occuper le service immédiatement. Donc le $i^{\text{ème}}$ appel suivant, n'entre en service qu'après un intervalle de temps R_i durant lequel le canal est libre, bien qu'en général il y ait des clients qui attendent. A l'instant $\xi_i = \eta_{i-1} + R_i$, le $i^{\text{ème}}$ client débute le service durant un temps S_i . Tous les rappels qui arrivent durant ce temps de service n'influent pas sur le processus. Alors à l'instant $\eta_i = \xi_i + S_i$, le $i^{\text{ème}}$ client achève son service et le canal devient encore libre et ainsi de suite.

Le premier résultat sur le système $M/G/1$ avec rappel a été obtenu Par KEILSON, COZZOLINO et YOUNG [23] et ALEXANDROV [5], en utilisant la méthode de la variable auxiliaire. Ils ont obtenu les probabilités d'états et les fonctions génératrices du nombre de clients dans le système. L'état du système peut-être décrit par le processus

$$X(t) = \begin{cases} N(t), & \text{si } C(t) = 0, \\ \{C(t), N(t), \xi(t)\}, & \text{si } C(t) = 1. \end{cases}$$

Où, $N(t)$ est le nombre de clients en orbite à la date (t) et $\xi(t)$ est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^+ , et désignant :

- La durée de service écoulée à la date t .
- La durée de service résiduelle à la date t .

Notons

$$P_{0j}(t) = (C(t) = 0, N(t) = j),$$

et

$$P_{1j}(t, x) = (C(t) = 1, N(t) = j, x < \xi(t) < x + dx), j > 0.$$

Si $\lambda/\mu < 1$, le système est stable. La fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par

$$Q(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)\hat{B}(\lambda - \lambda z)}{\hat{B}(\lambda - \lambda z) - z} \frac{\phi(z)}{\phi(1)} \quad (1.1)$$

où

$$\phi(z) = \exp\left\{\frac{-\lambda}{\theta} \int_0^z \frac{1 - \hat{B}(\lambda - \lambda x)}{x - \hat{B}(\lambda - \lambda x)} dx\right\}$$

On aura alors,

$$Q(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)\hat{B}(\lambda - \lambda z)}{\hat{B}(\lambda - \lambda z) - z} \exp\left\{-\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - \hat{B}(\lambda - \lambda x)}{x - \hat{B}(\lambda - \lambda x)} dx\right\}. \quad (1.2)$$

La méthode de la chaîne de Markov induite a été utilisée pour la première fois par CHOO et CONOLLY [24] : Soit (X_i) la chaîne de Markov induite aux instants de départs, où $X_i = X(\eta_i)$ représente le nombre de clients dans le système après le $i^{\text{ème}}$ départ.

Il est clair que (X_i) est une chaîne de Markov et

$$X_{i+1} = X_i - \delta_{X_i} + \Delta_{i+1},$$

où Δ_i est le nombre d'appels primaires durant le service du $i^{\text{ème}}$ client. La variable aléatoire Δ_{i+1} ne dépend pas des événements qui se sont produits avant l'instant ξ_{i+1} du début de service du $(i + 1)^{\text{ème}}$ client.

La distribution de Δ_i est la suivante :

$$P(\Delta_i = k) = P_k = \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^k}{k!} dB(x)$$

La variable δ_{X_i} est une variable aléatoire de Bernoulli

$$\delta_{X_i} = \begin{cases} 1 & \text{si le } (i + 1)^{\text{ème}} \text{ client servi provient de l'orbite ,} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Elle a pour distribution

$$P(\delta_{X_i} = 1/X_i = n) = \frac{n\theta}{\lambda + n\theta},$$

et

$$P(\delta_{X_i} = 0/X_i = n) = \frac{\lambda}{\lambda + n\theta}.$$

Les probabilités de transition en un pas s'écrivent alors :

$$P_{ij} = \frac{i\theta}{\lambda + i\theta} P_{j-i+1} + \frac{\lambda}{\lambda + i\theta} P_{j-i}.$$

En posant

$$\pi(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)\hat{B}(\lambda - \lambda z)}{\hat{B}(\lambda - \lambda z) - z}$$

l'équation (1.1) s'écrira

$$Q(z) = \pi(z) \frac{\phi(z)}{\phi(1)}$$

Cette formule est appelée "décomposition stochastique" du système $M/G/1$ avec rappels ARTALEJO [15].

Si on note par \bar{n}_s le nombre moyen de clients dans le système, alors $\bar{n}_s = \bar{n}_\infty + \beta$, où β est la variable aléatoire de fonction génératrice $\frac{\phi(z)}{\phi(1)}$, et \bar{n}_∞ est le nombre moyen de clients dans le système $M/G/1$ classique avec attente.

$$\pi(z) = \frac{(1 - \rho)\hat{B}(\lambda - \lambda z)(1 - z)}{\hat{B}(\lambda - \lambda z) - z}.$$

Cette formule n'est autre que la formule de "Pollaczek-Khintchine" pour le nombre de clients dans le système $M/G/1$ (FIFO, ∞).

Cette décomposition a déjà été observée pour les systèmes avec vacation (caractérisés par le fait que le temps libre du serveur peut-être utilisé pour d'autres tâches extérieures [16]). Sa validité a été prouvé pour certaines classes de modèles avec rappels. A titre d'exemple, YANG et TEMPLETON [6] ont montré que cette décomposition est valable pour un système à loi d'arrivées générale. Artalejo et Falin [25] ont donné diverses applications de cette propriété de décomposition. En particulier, ils ont obtenu :

- a) Des relations explicites pour les moments factoriels de la taille de l'orbite et du nombre de clients dans le système de files d'attente sans rappels.
- b) La vitesse de convergence du système $M/G/1$ avec rappels vers le système $M/G/1$ classique quand le taux des rappels tend vers l'infini.
- c) La mesure de proximité entre les deux systèmes.

On doit noter que la complexité de la formule explicite de la transformée de Laplace du temps virtuel d'attente du système $M/G/1$ avec rappels, c'est à dire le temps entre l'arrivée et le début de service du client qui est en service (voir [18]), limite la propriété de la décomposition à la distribution conjointe de l'état du canal et de la taille de l'orbite. Donc, la validité de la propriété de décomposition pour le temps virtuel est une conjoncture.

Artalejo a obtenu la décomposition de la distribution stationnaire en trois composantes liées à la discipline de vacation, les rappels et la distribution de la taille du système $M/G/1$ ordinaire (sans rappels et sans vacation) [16]. Falin, Artalejo et Martin ont obtenu la décomposition stochastique pour les systèmes avec rappels et priorité FALIN [14].

Les caractéristiques du système $M/G/1$ avec rappels sont données dans [6] par :

Nombre moyen de clients dans le système :

$$\bar{n} = \rho + \frac{\lambda^2(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\theta(1-\rho)} \quad (1.3)$$

Nombre moyen de clients en orbite :

D'après les formules de Little, on a

$$\bar{n}_o = \bar{n} - \rho = \frac{\lambda^2(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\theta(1-\rho)} \quad (1.4)$$

Temps moyen d'attente et nombre moyen de rappels :

Le temps d'attente d'un client est mesuré à partir du temps d'entrée dans le système jusqu'au temps du commencement du service. Pour trouver le temps moyen d'attente \bar{w} , on utilise la formule de Little $\bar{n} = \bar{w}\lambda$. On aura

$$\bar{w} = \frac{\lambda(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{\theta(1-\rho)} \quad (1.5)$$

Une fois \bar{w} obtenu, il est aisé de déduire $\bar{\eta}$, le nombre moyen de rappels par client :

$$\bar{\eta} = \theta\bar{w} = \frac{\lambda\theta(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{1-\rho} \quad (1.6)$$

FALIN et ARTALEJO [26] ont étudié les systèmes avec rappels à source finie et ils ont fait l'analyse de la distribution des arrivées, la période d'occupation et le temps d'attente. Les périodes d'activité et d'inactivité de l'orbite d'un système $M/G/1$ ont fait l'objet de l'article [27] où ils obtiennent la probabilité conjointe des deux périodes et le nombre correspondant de clients servis pendant ces périodes ainsi que la relation entre la période d'activité de l'orbite et celle du système.

3. Modèles avec rappels non fiables

Les systèmes de files d'attente avec rappels, dans le cas d'un serveur sujet à des pannes, sont peu étudiés, nous pouvons citer les travaux de AISSANI ([28],[29]), KULKARNI et CHOI [30], ARTALEJO [15] et OUKID ([10], [31]).

Nous allons décrire succinctement les résultats obtenus sur ce thème.

Considérons le système $M/G/1$ avec rappels et serveur non fiable. Le flot des arrivées est poissonnien de taux λ . Si un appel primaire trouve le serveur libre et en bon état il est immédiatement pris en charge, sinon (si le serveur est occupé ou en panne) il rejoint l'orbite et rappelle ultérieurement jusqu'à ce qu'il trouve le serveur de nouveau disponible. Le flot des pannes du serveur lorsqu'il est inactif ($C(t) = 0$) est poissonnien de taux θ_0 (respectivement θ_1 ,

lorsque le serveur est actif). Soient $R_0(x)$ et $R_1(x)$ les fonctions de répartition pour chaque cas. Supposons que le serveur tombe en panne aussi bien lorsqu'il est libre que lorsqu'il est occupé. On peut distinguer les pannes selon leur nature [15] :

- **Pannes avec perte momentanée du client** : Dès que la panne se produit, le client entre en orbite.
- **Pannes avec perte définitive du client** : Dès que la panne se produit, le client quitte le système définitivement.
- **Pannes conservatrices** : Dès que la panne se produit, le client attend que la réparation soit terminée et le service reprend en tenant compte de la partie de service déjà acquise.
- **Pannes non conservatrices** : Le client attend que la réparation soit terminée, mais le service doit-être repris à zéro.

L'évolution du système peut-être décrite par le processus Markovien :

$$X(t) = \{C(t), N(t), E(t), \xi(t)\}, (t \geq 0)$$

où

$$C(t) = \begin{cases} 1, & \text{si le serveur est actif,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad E(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est en bon état,} \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\xi(t) = 0$ si $E(t) = 0$ et $C(t) = 0$.

$\xi(t)$ est la durée résiduelle de service du client en cours si $E(t) = 0$ et $C(t) = 1$.

$\xi(t)$ est la durée résiduelle de réparation si $E(t) = 1$.

$N(t)$ est le nombre de clients en orbite à la date t .

A l'état stationnaire, si $\rho = \lambda \int_0^\infty x dB(x) < 1$, la fonction génératrice du nombre de clients en orbite [15] est :

$$Q(z) = p_0 \frac{1-z}{\hat{B}(\lambda-\lambda z) - z} \left[1 + \frac{\theta_0 - \theta_0 \hat{R}_0(\lambda-\lambda z)}{\lambda - \lambda z} \right] \frac{K(z)}{K(1)},$$

$$K(z) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\theta} \int_0^z \frac{1 - \hat{B}(\lambda - \lambda y)}{\hat{B}(\lambda - \lambda y) - y} dy + \frac{\theta_0}{\theta} \int_0^z \frac{1 - \hat{R}_0(\lambda - \lambda y)}{\hat{B}(\lambda - \lambda y) - y} dy \right\},$$

$p_0 = (1 - \rho)/(1 + \theta_0 + r_{01})$ et $r_{01} = \int_0^\infty x dR_0(x)$.

On obtient aisément la distribution de $X(t) = N(t) + C(t)$, du nombre de clients dans le système

$$\phi(z) = \frac{\varphi(z)}{1 + \theta_0 \hat{r}_{01}} \left[1 + \frac{\theta_0 - \theta R_0(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} \right] \frac{L(z)}{L(1)},$$

$$L(z) = \exp \left\{ \frac{\theta_0}{\theta} \int_0^z \frac{1 - \hat{R}_0(\lambda - \lambda y)}{\hat{B}(\lambda - \lambda y) - y} dy \right\},$$

où $\varphi(z)$ est la formule de "Pollaczek-Khintchine" dans le système $M/G/1$ avec rappels et serveur absolument fiable.

ARTALEJO [15] a étudié le système $M/M/m$ avec rappels et clients non persistants dans le cas particulier de pannes actives. Les conditions d'ergodicité du système ont été établies. Dans le cas d'un seul serveur, il procède à l'étude de la distribution asymptotique des états, et donne un algorithme d'évaluation des moments de la période d'activité à l'aide de la méthode des équations de convolution de CHOO et CONOLLY [24]. En utilisant une approche recursive, il développe une méthode stable de calcul des probabilités stationnaires des états du système $M/G/1$ avec rappels et pannes actives.

WANG et CAO [32] considèrent un système $M/G/1$ avec rappels et serveur non fiable et donnent une analyse détaillée de la fiabilité du serveur ; en utilisant la méthode des variables supplémentaires, ils obtiennent des expressions explicites des principales mesures de fiabilité telles que : la disponibilité du serveur, la fréquence de Défaillance et la fonction de fiabilité du serveur. LI et WANG [33] étudient un système $M/G/1$ avec rappels et pannes du serveur et considèrent deux phases de service et feedback. Pour ce modèle, ils obtiennent la condition nécessaire et suffisante de la stabilité du système et en utilisant la méthode des variables supplémentaires, des mesures de performance du système et des indices de la fiabilité ont été obtenues.

4. Modèles avec rappels et arrivées par groupes

Les systèmes à arrivées par groupes ont été étudiés par FALIN [34] qui a considéré le cas des clients persistants. Ainsi, il a obtenu la fonction génératrice du nombre de clients dans le système. Plus tard plusieurs auteurs (ARTALEJO [35],...) ont présenté un algorithme d'approximation pour un système avec arrivées par lots et clients non persistants. Une analyse détaillée de ce modèle a été donné par FALIN [36] qui a étudié le régime transitoire et la période d'activité. Une autre approche a été proposée par YANG et TEMPLETON [6] où des expressions analytiques des caractéristiques probabilistes du modèle ont été obtenues, tels que le nombre moyen de clients dans le système, le nombre moyen de clients en orbite, le temps moyen d'attente d'un client et le nombre moyen de rappels par client.

Les résultats de ces travaux ont montré que l'hypothèse des arrivées par groupes ne complique pas le problème et en fait, les résultats de ce modèle sont similaires à ceux du modèle à arrivées par unité.

5. Modèles avec rappels multi-classes

Dans ce modèle, il y a n classes ou types de clients. Les clients primaires de type i arrivent selon un processus de poisson de taux λ_i , le taux de rappels associé est μ_i et la fonction de distribution des temps de service est $B_i(x)$.

Dans le cas où le service est exponentiel, Kornishov a obtenu un système d'équations linéaires pour le nombre moyen de clients dans le système à l'état stationnaire. Plus tard, Kulkarni a considéré le cas de deux types de clients avec des distributions des temps de service générales,

il a obtenu des formules analytiques concernant le nombre moyen de client de chaque type et le temps d'attente moyen d'un client. FALIN [37] a généralisé ce travail à une file d'attente $M/G/1$ avec rappels et n types de clients.

Différents problèmes théoriques pour les files multi-classes ont été exposés et résolus par KULKARNI [38]. LANGAIS et MOUTZOUKIS [39] ont étudié le système $M/G/1$ avec rappels à arrivées par groupe, deux types de clients, (prioritaires et non prioritaires) et avec vacation du serveur et ils ont obtenu la distribution stationnaire du système. Les mêmes auteurs ont étudié le système informatisé "Lecture-écriture" [40] qui est un modèle à N serveur et deux classes de clients lecture et écriture.

Une synthèse détaillée des files d'attente avec rappels à serveur unique et deux types de clients ainsi que leurs applications et les nouveaux résultats des différentes variantes de ce modèle est donnée par CHOI & CHANG [41] et LEE [42].

En théorie des systèmes de files d'attente avec rappels, il est souvent supposé que le flot des arrivées primaires est poissonnien. Néanmoins, ARTALEJO [43] considère des systèmes avec rappels, population homogène et suppose qu'on a un nombre K fini de sources identiques produisant un flot d'entrée quasi-aléatoire .

Pour les systèmes avec temps des rappels général, YANG and al. [44], en appliquant la propriété de la décomposition stochastique, proposent une méthode d'approximation efficace pour le calcul des probabilités stationnaires et les mesures de performance du système.

1.5 Conclusion

Cette revue montre les difficultés d'analyse des systèmes de files d'attente avec rappels [6], [7], [8], [45]. En raison de la complexité des résultats analytiques obtenus, différents auteurs ont tenté de développer des méthodes approximatives d'analyse des phénomènes de répétition d'appels . Parmi les principales approches développées ces dernières années, on trouve les méthodes de comparaisons stochastiques qui tentent d'éluder ces difficultés par l'obtention d'approximations ou d'encadrement (majorations et / ou minoration) des principales mesures de performance.

CHAPITRE 2

ORDRES STOCHASTIQUES ET DISTRIBUTIONS NON PARAMÉTRIQUES

2.1 Introduction

Ce chapitre comporte les outils mathématiques utilisés dans ce travail, notamment les ordres stochastiques et leurs applications aux opérations de fiabilité ainsi que les distributions d'âges issues de la théorie de fiabilité. cf. [46], [47], [48]

2.2 Notions de fiabilité

La fiabilité est un concept qui intéresse de nombreux domaines de l'activité humaine : économique, scientifique, technique, industriel et technologique. Elle est liée à des notions de sécurité de fonctionnement, de qualité, d'efficacité et de performance. Son objectif principal est l'analyse de la probabilité de défaillance (panne) d'un système et concerne plus particulièrement le domaine mathématique.

Dans certaines approches de modélisation, l'étude de la fiabilité se ramène à l'étude de la loi d'une variable aléatoire positive représentant la durée de vie d'un système ou d'un composant.

Soit X la durée de vie d'un système ou d'un composant de fonction de répartition F .

On introduit les notions et notations suivantes :

1. $F(x) = P[X \leq x]$ est la probabilité de défaillance durant l'intervalle $]0, x]$
2. $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ est la fonction de fiabilité (ou fonction de survie).
3. $X_t = (X - t/X > t)$ est la durée de survie ou durée de vie résiduelle d'un élément d'âge t de fonction de répartition F_t .
4. $\lambda(t) = \frac{f(t)}{F(t)}$ est le taux de défaillance (si la densité f de X existe).

Dans de nombreux problèmes pratiques, l'allure générale du taux de défaillance peut être décrite par une courbe "en baignoire". Dans ce cas, on distingue trois phases :

- 1^{ère} phase (période de rajeunissement) : $\lambda(t)$ est décroissant
- 2^{ème} phase (période de maturité) : $\lambda(t)$ est approximativement constant
- 3^{ème} phase (période de vieillissement) : $\lambda(t)$ est croissant

2.3 Principales opérations de fiabilité

2.3.1 Formation de systèmes cohérents

Parmi les structures cohérentes les plus usitées, on distingue :

- Système en série

Un système de n composants montés en série fonctionne si et seulement si tous ses éléments fonctionnent.

La durée de vie de ce système est $X = \min_{1 \leq i \leq n} (X_i)$ où (X_i) est la durée de vie du $i^{\text{ème}}$ élément.

- Système en parallèle

Un système de n composants montés en parallèle fonctionne si au moins un élément fonctionne.

La durée de vie de ce système est $X = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i)$.

2.3.2 Addition des durées de vie

Lorsqu'un composant en panne est remplacé par un autre de secours, la durée de vie totale accumulée est obtenue en additionnant les deux durées de vie (Redondance).

Si X et Y sont deux durées de vie indépendantes de fonction de répartition respectives F et G alors la fonction de répartition de la somme des deux durées de vie $X + Y$ est le produit de convolution de F et G

$$(F \star G)(x) = \int_0^x F(x-t)dG(t), x \geq 0.$$

2.3.3 Mélange de distributions

Soit $\{F_\alpha\}$ une famille de distributions où l'indice α est une variable aléatoire de distribution G .

On appelle mélange de distributions $\{F_\alpha\}$ relativement à G , la fonction de répartition F définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(x)dG(\alpha).$$

2.3.4 Systèmes k parmi n

Un système k parmi n est un système formé de n composants et qui fonctionne si et seulement si au moins k ($k \leq n$) composants fonctionnent.

2.3.5 Systèmes k - consécutifs - sur- n

Un système "k - consécutifs - sur-n" est un système formé de n composants disposés linéairement ou circulairement et qui tombe en panne si et seulement si k composants consécutifs sont en panne.

2.4 Ordres stochastiques

Plusieurs ordres stochastiques ont été introduits ces dernières années dans le but de comparer des variables aléatoires, des vecteurs, des processus aléatoires (problèmes de modélisation stochastique) et d'approcher des modèles complexes par des modèles simples.

En particulier en fiabilité, ces ordres sont introduits dans le but de comparer les éléments d'âges différents, de formaliser les différents stades de la vie d'un équipement en terme de lois non paramétriques.

La pratique usuelle de comparaison entre les variables aléatoires consiste à comparer leurs moyennes, leurs variances, leurs taux de défaillance ...

Dans cette partie, nous allons présenter les définitions et un récapitulatif des principaux théorèmes de conservation des ordres stochastiques pour les principales opérations de fiabilité : min, max, produit de convolution et mélange de distributions.

2.4.1 Définitions

Nous nous limiterons aux cas de variables aléatoires bien que la plupart de ces ordres admettent des versions multidimensionnelles.

1. Ordre Stochastique

Soient X et Y deux variables aléatoires et $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ leurs distributions respectivement.

On dit que X est stochastiquement inférieur ou inférieur en distribution à Y et on note

$$X \leq_{st} Y \text{ ssi } F(x) \geq G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cet ordre est parfois noté " \leq_d "

Une définition équivalente est donnée par :

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow E[H(X)] \leq E[H(Y)], \quad \forall H \text{ une fonction décroissante pour laquelle les moyennes existent.}$$

2. Ordre en taux de défaillance

Soient X et Y deux variables aléatoires non négatives de taux de défaillance λ et μ (resp.).

On dit que X est inférieur en ordre en taux de défaillance à Y et on note

$$X \leq_{hr} Y \text{ ssi } \lambda(t) \geq \mu(t), \quad t \geq 0.$$

Une définition équivalente est donnée par :

$$X \leq_{hr} Y \iff \frac{\bar{F}(t)}{\bar{G}(t)} \text{ est décroissante en } t$$

3. Ordre en taux de défaillance inverse

Soient X et Y deux variables aléatoires de distributions absolument continues, de taux de défaillance inverse $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ respectivement, avec $\bar{\lambda}(t) = \frac{d}{dt}(\log F(t))$ et $\bar{\mu}(t) = \frac{d}{dt}(\log G(t))$.

On dit que X est inférieur en ordre en taux de défaillance inverse à Y et on note

$$X \leq_{rh} Y \text{ ssi } \bar{\lambda}(t) \leq \bar{\mu}(t), \quad t \geq 0.$$

Une définition équivalente est donnée par :

$$X \leq_{rh} Y \iff \frac{F(t)}{G(t)} \text{ est décroissante en } t$$

4. Ordre en rapport de vraisemblance (Likelihood ratio order)

Soient X et Y deux v.a. continues.

On dit que X est inférieur en ordre en rapport de vraisemblance à Y et on note

$$X \leq_{lr} Y \text{ ssi } \frac{f(t)}{g(t)} \text{ est décroissante en } t \quad (t > 0).$$

Une définition équivalente est donnée par :

$$X \leq_{lr} Y \iff f(u)g(v) \geq f(v)g(u), \quad \forall u \leq v.$$

5. Ordre en moyenne de vie résiduelle : Soient X et Y deux v.a.

On dit que X est inférieur en moyenne de vie résiduelle à Y et on note

$$X \leq_{mrl} Y \text{ ssi } E(X - x/X > x) \leq E(Y - x/Y > x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Des définitions analogues sont données par :

$$(a) \quad X \leq_{mrl} Y \iff \frac{\int_t^\infty \bar{F}(u) du}{\int_t^\infty \bar{G}(u) du},$$

$$(b) \quad X \leq_{mrl} Y \iff \bar{G}(t) \int_t^\infty \bar{F}(u) du \leq \bar{F}(t) \int_t^\infty \bar{G}(u) du, \quad \forall t$$

$$(c) \quad X \leq_{mrl} Y \iff \frac{E[(X-t)^+]}{E[(Y-t)^+]} \text{ est décroissante en } t \text{ sur } \{t : E[(Y-t)^+] > 0\},$$

$$\text{où } a^+ = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ 0, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

6. Ordres convexe et concave

Soient X et Y deux v.a.

On dit que X est inférieur par rapport à l'ordre convexe (concave) à Y et on note

$$X \leq_{cx} Y \quad (X \leq_{cv} Y) \text{ ssi } E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)] \text{ pour toute fonction } \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ convexe (concave)}$$

$$\text{Par conséquent, on a : } X \leq_{cv} Y \iff Y \leq_{cx} X.$$

Notons que les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 définies par : $\phi_1(X) = X$ et $\phi_2(X) = -X$ sont convexes d'où on a :

$$X \leq_{cx} Y \Rightarrow E(X) = E(Y) \text{ à condition que les moyennes existent.}$$

La fonction ϕ définie par $\phi(X) = X^2$ est convexe, par conséquent, on a :

$X \leq_{cx} Y \Rightarrow \text{var}(X) \leq \text{var}(Y)$ lorsque $\text{var}(Y) < \infty$.

7. Ordre de variabilité

Soient X et Y deux v.a.

On dit que X est inférieur par rapport à l'ordre de variabilité à Y et on note

$X \leq_{disp} Y$ ssi $F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha) \leq G^{-1}(\beta) - G^{-1}(\alpha)$ pour $0 < \alpha \leq \beta < 1$.

De cette définition, on déduit que $X \leq_{disp} Y \iff X + c \leq_{disp} Y \quad \forall c \in \mathfrak{R}$.

Une définition équivalente est donnée par :

$X \leq_{disp} Y \iff g(G^{-1}(\alpha)) \leq f(F^{-1}(\alpha)) \quad \forall \alpha \in (0, 1)$.

8. Ordre monotone convexe et ordre monotone concave

Soient X et Y deux v.a.

On dit que X est inférieur par rapport à l'ordre convexe croissant (concave croissant) à Y , et on note

$X \leq_{icx} Y$ ($X \leq_{icv} Y$) ssi $E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$ pour toute fonction convexe croissante (concave croissante) $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

De la même manière, on peut définir l'ordre convexe décroissant (concave décroissant) noté \leq_{dcx} (\leq_{dcv}).

On a alors $X \leq_{dcx} Y$ ($X \leq_{dcv} Y$) ssi $E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$ pour toute fonction convexe décroissante (concave décroissante) $\phi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$.

Afin de faciliter l'utilisation de ces ordres, le tableau ci-dessous résume leurs définitions principales.

Tableau 2.1. Définitions principales des ordres stochastiques.

Ordre	Symbole	Définition
Stochastique	$X \leq_{st} Y$	$F(x) \geq G(x) \forall x \in \mathfrak{R}$
en taux de défaillance	$X \leq_{hr} Y$	$\lambda(t) \geq \mu(t), t \geq 0$
en taux de défaillance inverse	$X \leq_{rh} Y$	$\bar{\lambda}(t) \leq \bar{\mu}(t), t \geq 0$
en rapport de vraisemblance	$X \leq_{lr} Y$	$\frac{f(t)}{g(t)}$ est décroissante en t , ($t > 0$)
en moyenne de vie résiduelle	$X \leq_{mrl} Y$	$E(X - x/X > x) \leq E(Y - x/Y > x) \forall x \in \mathfrak{R}$
convexe	$X \leq_{cx} Y$	$E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$ pour $\phi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ convexe
concave	$X \leq_{cv} Y$	$E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$ pour $\phi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ concave
de variabilité	$X \leq_{disp} Y$	$F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha) \leq G^{-1}(\beta) - G^{-1}(\alpha), 0 < \alpha \leq \beta < 1$
monotone convexe	$X \leq_{icx} Y$	$E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$, ϕ convexe croissante
monotone concave	$X \leq_{icv} Y$	$E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$, ϕ concave croissante
en transformée de Laplace	$X \leq_L Y$	$E(e^{-sX}) \geq E(e^{-sY}) \forall s > 0$
en fonction génératrice	$X \leq_{mgf} Y$	$E(t^X) \geq E(t^Y), t \in (0, 1)$
en transformation convexe	$X \leq_c Y$	$G^{-1}F(x)$ est convexe en x sur le support de F
étoilé	$X \leq_{\star} Y$	$\frac{1}{x}G^{-1}F(x)$ est croissante en $x \geq 0$
super-additif	$X \leq_{su} Y$	$G^{-1}F(x+y) \geq G^{-1}F(x) + G^{-1}F(y) \forall x, y \geq 0$

2.4.2 Conservation des ordres stochastiques

Notons par \prec un ordre stochastique qui peut être l'un des ordres définis ci-dessus.

Conservation pour le produit de convolution

Soient (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, m$ un couple de variables aléatoires indépendantes tel que $X_i \prec Y_i$ $i = 1, 2, \dots, m$, alors $\sum_{i=1}^m X_i \prec \sum_{i=1}^m Y_i$.

Dans ce cas, on dit que \prec est conservé pour le produit de convolution.

Conservation pour le mélange de distributions

Soient X, Y et ϕ des v.a. telles que $[X/\phi = \theta] \prec [Y/\phi = \theta]$ pour tout θ , dans le support de ϕ , alors $X \prec Y$.

Conservation pour l'opération \min

Soit (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, m$ un couple de variables aléatoires tel que $X_i \prec Y_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ alors, $\min\{X_1, X_2, \dots, X_m\} \prec \min\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$.

Conservation pour l'opération \max

Soit (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, m$, un couple de variables aléatoires tel que $X_i \prec Y_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, alors $\max\{X_1, X_2, \dots, X_m\} \prec \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$.

Le tableau suivant résume la conservation des différents ordres stochastiques pour les opérations de fiabilité.

Tableau 2.2 : Conservation des ordres stochastiques pour les opérations de fiabilité.

Ordre / Opération	<i>min</i>	<i>max</i>	mélange de dist.	produit de conv.
Stochastique			oui	oui
en taux de défaillance	oui		oui	oui
en taux de défaillance inverse	oui		oui	oui
en rapport de vraisemblance	oui	oui		
en moyenne de vie résiduelle				oui
convexe			oui	oui
concave			oui	oui
de variabilité				non
monotone convexe			oui	oui
monotone concave			oui	oui
en transformée de Laplace	oui	oui	oui	oui
en fonction génératrice	oui	oui	oui	oui

2.5 Distributions non paramétriques

2.5.1 Introduction

L'étude des classes de distributions non paramétriques de survie ou de vieillissement (life or ageing distributions) a été motivée initialement par des problèmes issus de la théorie de fiabilité pour pallier aux difficultés liées au choix de la loi adéquate sur la base de durées statistiques (absence de données, données censurées ou aberrantes).

Elles sont utilisées actuellement dans la littérature scientifique en relation avec divers problèmes de modélisation stochastique (Fiabilité, Files d'attente, Ordonnancement, Analyse de survie (médecine) Environnement, etc...) pour l'étude quantitative (obtention d'inégalités) et qualitative (comparaison de modèles).

Dans cette partie, nous définissons les différentes distributions non paramétriques et nous présentons une classification systématique de ces distributions basée sur la règle $S - SFR$ (S-Starting Failure Rate). Ensuite, nous résumons les propriétés de conservation connues par rapport aux principales opérations de fiabilité : formation des systèmes cohérents (min, max), produit de convolution, mélange de distributions.

2.5.2 Définitions

On dit que la fonction de distribution F de moyenne μ finie est :

★ *IFR* (Increasing Failure Rate)

$$\text{si } \bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \text{ est non croissante en } t, \quad \forall x, t \geq 0.$$

Si f existe alors,

$$F \text{ est } IFR \iff \lambda(t) \text{ est non décroissant en } t, \quad \forall t \geq 0.$$

Notée parfois *IHR* (Increasing Hazard Rate).

★ *IFRA* (Increasing Failure Rate in Average)

$$\text{si } \Lambda(t) = -\frac{1}{t} \log \bar{F}(t) \text{ est non décroissant en } t, \quad \forall t \geq 0.$$

Notée aussi *IHRA*.

★ *NBU* (New Better than Used)

$$\text{si } \bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(y), \quad \forall x, y \geq 0.$$

★ *NBUE* (New Better than Used in Expectation)

$$\text{si } \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \leq \mu \bar{F}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

★ *HNBU* (Harmonic New Better than Used in Expectation)

$$\text{si } \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \leq \mu \exp\left(\frac{-t}{\mu}\right), \quad \forall t \geq 0.$$

★ *NBUC* (New Better than Used in Convex Ordering)

$$\text{si } \int_x^\infty \bar{F}(t+y) dy \leq \bar{F}(t) \int_x^\infty \bar{F}(y) dy, \quad \forall x \geq 0.$$

★ *NBUFR* (New Better than Used in Failure Rate)

$$\text{si } \lambda_F(0) \leq \lambda_F(x), \quad \forall x \geq 0.$$

Où $\lambda_F(t) = F(t)\lambda(t)$.

★ *NBUFRA* (New Better than Used in Failure Rate Average)

$$\text{si } \lambda_F(0) \leq \frac{1}{x} \int_0^x \lambda(u) du, \quad \forall x > 0.$$

★ *L* (Laplace)

$$\text{si } \int_0^\infty e^{-st} \bar{F}(t) dt \leq \frac{\mu}{1+s\mu} \quad \forall s, t \geq 0.$$

★ *NBU - t₀* (New Better than Used of age t₀)

$$\text{si } \bar{F}(x+t_0) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(t_0) \quad \forall x \geq 0.$$

★ *IMRL* (Increasing Mean Residual Life)

$$\text{ssi } \mu(t_2) \geq \mu(t_1), \quad \forall t_2 \geq t_1 \geq 0.$$

Où $\mu(t_i)$ est la durée de vie résiduelle moyenne d'un élément d'âge t_i .

Autrement dit; la moyenne de la durée de vie résiduelle X_t est non décroissante en t $\forall t \geq 0$.

★ *IVRL* (Increasing Variance of Residual Life)

$$\text{ssi } \sigma^2(t_2) \geq \sigma^2(t_1), \quad \forall t_2 \geq t_1 \geq 0.$$

★ *SIFR* (Stochastically Increasing Failure Rate)

$$\text{si } P(Y \geq \sum_{i=0}^{k+1} X_i / Y \geq \sum_{i=0}^k X_i) \leq P(Y \geq \sum_{i=0}^k X_i / Y \geq \sum_{i=0}^{k-1} X_i), \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

★ *SNBU* (Stochastically New Better than Used)

$$\text{si } P(Y \geq \sum_{i=0}^{k+1} X_i / Y \geq \sum_{i=0}^k X_i) \leq P(Y \geq X_{k+1}), \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

★ *sBt* (a survival curve S is better at age s than age t)

$$\text{si } \frac{\bar{F}(x+s)}{\bar{F}(x)} \leq \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)}, \quad \forall x \geq 0.$$

★ *NBU - A* (New Better than Used at age A)

$$\text{si } \bar{F}(x+t) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(t), \quad \forall x \geq 0, \forall t \in A \text{ où } A \in [0, \infty).$$

★ *ILR* (Increasing Likelihood Ratio)

$$\text{si } \frac{f(t+x)}{f(t)} \text{ est non décroissante en } t, \quad \forall x \geq 0.$$

★ *NIVRL* (Net Increasing Variance of Residual Life)

$$\text{si } \sigma^2(x) \leq \sigma^2(0), \quad \forall x \geq 0.$$

★ *SS* (Star-Shaped)

$$\text{si } \frac{f(x)}{x} \text{ est croissante pour tout } x \geq 0.$$

★ *DMRLHA* (Decreasing Mean Residual Life Harmonic Average)

$$\text{si } \left[\frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{\mu_F(u)} du \right]^{-1} \text{ est décroissant en } t.$$

Les définitions des classes de distributions duales sont obtenues à partir de celles données précédemment, mais en inversant les inégalités. On parlera dans ce cas, de (respectivement) *DFR*, *DFRA*, *NWU*, *NWUE*, *HNWUE*, *NWUC*, *NWUFR*, *NWUFRA*, *NWU - t₀*, *DMRL*, *DVRL*, *SDFR*, *SNWU*, *sWt*, *NWU - A*, *DLR*, *NDVRL*, *XSS*, *IMRLHA*.

2.5.3 Caractérisation des distributions non paramétriques en terme des ordres stochastiques

Les classes de distributions non paramétriques de survie ont été définies précédemment en terme des caractéristiques fiabilistes. Cependant, elles peuvent être également caractérisées en terme des ordres stochastiques .

En particulier,

- 1) X est *ILR* $\iff X_t \leq_{lr} X, \quad \forall t \geq 0.$
- 2) X est *IFR* $\iff X_t \leq_{hr} X, \quad \forall t \geq 0.$
- 3) X est *NBU* $\iff X_t \leq_{st} X, \quad \forall t \geq 0.$
- 4) X est *DMRL* $\iff X_t \leq_{mrl} X, \quad \forall t \geq 0.$
- 5) X est *NBUC* $\iff X_t \leq_{cx} X, \quad \forall t \geq 0.$

2.5.4 Dominance stochastique

L'ordre stochastique usuel (\leq_d ou \leq_{st}) est connu en théorie de l'Economie sous le nom de dominance stochastique d'ordre un, noté \leq_{FSD}

$$F \leq_{FSD} G \iff E_F[H(X)] \geq E_G[H(X)], \text{ pour toute fonction croissante } H.$$

De même, l'ordre convexe est appelé dominance stochastique d'ordre deux (type 1), noté \leq_{SSD_1} défini par :

$$F \leq_{SSD_1} G \iff \int_0^x F(t)dt \leq \int_0^x G(t)dt \forall x \iff E_F[H(X)] \geq E_G[H(X)], \quad \forall H(\cdot) \text{ croissante convexe.}$$

La dominance stochastique d'ordre deux (type 2) est liée à l'ordre concave défini par :

$$F \leq_{SSD_2} G \iff \int_x^\infty \bar{F}(t)dt \leq \int_x^\infty \bar{G}(t)dt, \quad \forall x \iff E_F[H(X)] \geq E_G[H(X)], \quad \forall H(\cdot), \text{ croissante concave.}$$

Les économistes définissent en outre la dominance stochastique d'ordre trois (type 1) qui est un ordre similaire à \leq_L .

$$F \leq_{TSD_1} G \iff \int_0^y \int_0^x F(t)dt dx \leq \int_0^y \int_0^x G(t)dt dx, \quad \forall 0 \leq y < \infty.$$

Et la dominance stochastique d'ordre trois (type 2)

$$F \leq_{TSD_2} G \iff \int_x^\infty \int_t^\infty \bar{F}(t)dt dx \leq \int_x^\infty \int_t^\infty \bar{G}(t)dt dx, \quad \forall 0 \leq x < \infty.$$

2.5.5 Définitions de nouvelles classes de distributions non paramétriques

F est :

★ $IFR(2)$ (Increasing Failure Rate Second Order)si

$$F_{t_1} \geq_{SSD_1} F_{t_2}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty.$$

★ $NBU(2)$ (New Better than Used Second Order)si

$$F \geq_{SSD_1} F_t, \quad 0 \leq t < \infty.$$

★ $HNBUE(3)$ (Harmonic New Better than Used in Expectation Third Order) si

$$Exp \geq_{TSD_2} F, \quad \text{où } F \text{ et } Exp \text{ ont la même moyenne.}$$

2.5.6 Classification des lois non paramétriques

FAGUIOLI & PALLERY [49] ont introduit de nouveaux ordres stochastiques basés sur une règle appelée règle $S - SFR$ (S-Starting Failure Rate) qui permet de donner une classification systématique des lois non paramétriques.

Soit X une variable aléatoire absolument continue. On définit

$$\bar{T}_0(x) = f(x),$$

et

$$\bar{T}_s(x) = \frac{\int_x^\infty \bar{T}_{s-1}(u) du}{\mu_{s-1}}, \forall s \geq 1,$$

où $\mu_s = \int_0^\infty \bar{T}_s(u) du$.

On définit aussi,

$$\lambda_{T_s(x)} = \frac{\bar{T}_{s-1}(x)}{\int_x^\infty \bar{T}_{s-1}(u) du} = \frac{-\frac{d}{dx} \bar{T}_s(x)}{\bar{T}_s(x)}, \forall s \geq 1.$$

On utilise $\bar{U}_s(x)$, $\lambda_{U_s(x)}$ et γ_s correspondant à $\bar{T}_s(x)$, $\lambda_{T_s(x)}$ et μ_s pour la variable Y .

a. Nouveaux ordres stochastiques

La règle $S - SFR$ définie ci-dessus permet de définir certains ordres stochastiques

1. $X \geq_{S-FR} Y$ si $\frac{\bar{T}_s(x)}{\bar{U}_s(x)}$ est non décroissant en $x \geq 0$.
2. $X \geq_{S-st} Y$ si $\frac{\bar{T}_s(x)}{\bar{U}_s(x)} \geq \frac{\bar{T}_s(0)}{\bar{U}_s(0)}$, $\forall x \geq 0$.
3. $X \geq_{S-cv} Y$ si $\int_0^x \frac{\bar{T}_s(u)}{\bar{T}_s(0)} du \geq \int_0^x \frac{\bar{U}_s(u)}{\bar{U}_s(0)} du$, $\forall x \geq 0$.
4. $X \geq_{S-cx} Y$ si $\int_x^\infty \frac{\bar{T}_s(u)}{\bar{T}_s(0)} du \geq \int_x^\infty \frac{\bar{U}_s(u)}{\bar{U}_s(0)} du$, $\forall x \geq 0$.

b. Distributions non paramétriques engendrées par les nouveaux ordres

On dit que X est :

- * $S - IFR$ si $\lambda_{T_s}(x)$ est non décroissant en x .
- * $S - IFRA$ si $\int_0^x \frac{\lambda_{T_s}(u)}{x} du$ est non décroissant en $x \geq 0$.
- * $S - NBU$ si $\bar{T}_s(t+x)\bar{T}_s(0) \leq \bar{T}_s(t)\bar{T}_s(x)$, $\forall x, t \geq 0$.
- * $S - NBUFR$ si $\lambda_{T_s(0)} \leq \lambda_{T_s(x)}$, $\forall x \geq 0$.
- * $S - NBUFRA$ si $\lambda_{T_s(0)} \leq \frac{1}{x} \int_0^x \lambda_{T_s(u)} du$, $\forall x \geq 0$.
- * $S - NBUCV$ si $\bar{T}_s(0) \int_0^x \bar{T}_s(t+u) du \leq \bar{T}_s(t) \int_0^x \bar{T}_s(u) du$, $\forall x, t \geq 0$.
- * $S - NBUCX$ si $\bar{T}_s(0) \int_x^\infty \bar{T}_s(t+u) du \leq \bar{T}_s(t) \int_x^\infty \bar{T}_s(u) du$, $\forall x, t \geq 0$.

c. Comparaison des nouvelles classes de distributions non paramétriques en terme des ordres stochastiques

- 1) Si X est $S - NBU \Rightarrow X$ est $S - NBUCV$.
- 2) Si X est $S - NBUCV \Rightarrow X$ est $S - NBUFR$.
- 3) Si X est $S - NBUCV \Rightarrow X$ est $(S + 1) - NBUFR$.
- 4) Si X est $S - NBU \Rightarrow X$ est $S - NBUCX$.
- 5) Si X est $(S + 1) - NBU \Rightarrow X$ est $S - NBUCX$.
- 6) Si X est $S - NBUCX \Rightarrow X$ est $(S + 1) - NBUFR$.

d. Classification des lois non paramétriques

La première classification des lois non paramétriques a été donnée par BRLow & PROSCHAN [50] sous forme de la chaîne d'implication suivante :

$$IFR \Rightarrow IFRA \Rightarrow NBU \Rightarrow NBUE.$$

$$DFR \Rightarrow DFRA \Rightarrow NWU \Rightarrow NWUE.$$

Les liens entre les différentes classes de lois non paramétriques basés sur la règle $S - SFR$ ont été présentés dans SAIDI [51].

2.5.7 Conservation des classes de lois non paramétriques

Le tableau suivant montre la conservation des classes de lois non paramétriques pour les principales opérations de fiabilité .

Tableau 2.3. Conservation des classes de lois non paramétriques pour les principales opérations de fiabilité

classe / Opération	Série	Parallèle	Convolution	Mélange	k-sur-n	k consécutif sur n
IFR	oui	non	oui	non	oui	non
DFR	oui		non	oui		
IFRA	oui	oui	oui	non		oui
DFRA	oui	oui	non	oui		
NBU	oui	oui	oui	non	oui	
NWU		non	non	non		
NBUE	non	oui	oui	non		
NWUE		non	non	non		
HNBUE	oui	oui	oui	non	oui	
HNWUE			non	oui		
NBU- t_0			non	non		
NWU- t_0			non	non		
NBUC		non	oui	non		
NWUC		non		non		
sBt	oui	oui	oui	non		
NBUFRA	oui	oui	oui	non	oui	
DMRL		oui	non			
IMRL				oui		
L^+	non		oui	non		
L^-		non	non	oui		

2.6 Applications

Dans cette section, nous allons présenter quelques applications des ordres stochastiques et distributions non paramétriques.

Exemple 1 : Une étude au sein de la raffinerie de pétrole de Skikda a été réalisée sur l'équipement de type "Compresseur du Magnaforming" dans le but d'optimiser la maintenance préventive. [52]

.

Les données ci-dessous représentent les données sur les défaillances ou censures du composant "Palier butée 230".

Tableau 2.4 : Les défaillances ou censures du composant "Palier butée 230".

Temps (jours)	Censures ou défaillances	$R(t)_{Kaplan-Meier}$
44	C	-
55	D	0.952
75	C	-
78	C	-
106	C	-
283	C	-
302	C	-
363	C	-
441	C	-
449	C	-
462	C	-
553	D	0.865
582	C	-
639	D	0.769
671	C	-
729	D	0.659
743	D	0.549
749	D	0.439
780	D	0.329
1027	D	0.219
1126	C	-

L'estimation de la fonction de survie a été faite en premier lieu par la méthode de Kaplan-Meier. C'est l'une des méthodes d'estimation qui prend en considération les censures. Les

résultats de l'estimation sont résumés dans le tableau 2.4.

Dans une seconde étape, l'estimation de la fonction de survie est faite en ajustant les données à la loi de Weibull à deux paramètres. L'estimation des deux paramètres de cette loi par la méthode des moindres carrés pondérés (MC) [52] donne les résultats suivants :

MC simple : $\beta = 1.40$, $\eta = 1288$, $z = 0.1940$.

MC pondérée : $\beta = 2.80$, $\eta = 889$, $z = 0.1060$.

où β est le paramètre de forme ;

η est le paramètre de position ;

z est le résidu.

Par suite, la fonction de survie s'écrit :

$$R(t) = \exp\left\{-\left(\frac{t}{889}\right)^{2.80}\right\}, \forall t \geq 0,$$

et le temps moyen de bon fonctionnement, est donné par

$$MTBF = \eta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = 787 \text{ jours.}$$

On utilise un test graphique basé sur la *TTT*-Statistique pour savoir à quelle classe de distribution non paramétrique (*IFR*, *IFRA*, *NBU*, ...) la loi considérée appartient. Le tableau suivant contient les résultats de ce test.

Tableau 2.5. Résultats du test ci-dessus.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	639	1382	2162	3189	3742	5220	5220	5275
$\frac{i}{r}$	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	1.000
α_i	0.190	0.384	0.587	0.778	0.860	0.944	0.998	1.000

A partir de la courbe (voir graphe (4.1) de SAIDI [51]); on remarque que les points relatifs au palier de butée 230 sont disposés selon une courbe concave d'où on conclut l'appartenance de ce composant à la classe de distribution *IFR*. Le calcul des bornes supérieure et inférieure de fiabilité de ce composant [51] basées sur le premier moment est résumé dans le tableau suivant :

Tableau 2.6. Bornes sup et inf de fiabilité du composant "Palier butée 230".

Temps	$R(t)_{Weibull}$	Borne inférieure	Borne supérieure
55	0.9995	0.9325	1
553	0.7674	0.4952	1
639	0.6725	0.4439	1
729	0.5634	0.3960	1
743	0.5460	0.3890	1
749	0.5385	0.3860	1
780	0.4999	0.371	1
1027	0.2236	0	0.5722
1030	0.2208	0	0.5685
1035	0.2163	0	0.5624
1040	0.2119	0	0.5565
1060	0.1946	0	0.5334
1080	0.1782	0	0.5115
1100	0.1627	0	0.4908
1200	0.0986	0	0.4014
1300	0.0551	0	0.3314
1400	0.0282	0	0.2756
1500	0.0132	0	0.2308

Exemple 2 : Estimation de la fiabilité de systèmes complexes par une méthode basée sur la notion de comparabilité stochastique et les concepts d'âge en fiabilité. [53] , [54]

1. Système redondant

Considérons un système (S) à deux éléments E_1 , assurant la fonction principale, et E_2 en redondance passive.

A l'instant initial $t = 0$, l'élément E_1 commence à fonctionner (E_2 est à l'arrêt). A l'instant de panne $t = X_0$, E_2 prend la relève, et E_1 commence à être réparé pendant un temps Y_1 . Si $Y_1 > X_1$, alors à $t = X_0 + X_1$, le système tombe en panne. Sinon, l'élément E_1 recommence à fonctionner à l'instant $t = X_0 + X_1$, etc... Les suites $\{X_i\}$ et $\{Y_i\}$ sont mutuellement indépendantes. On suppose que

X_0, X_1, \dots , sont des variables aléatoires indépendantes,

Y_0, Y_1, \dots , sont des variables aléatoires indépendantes,

Soit $N = \inf(n; X_n < Y_n)$ et T la durée de vie du système.

Ce modèle a été étudié par GNEDENKO, BELYAYEV et SOLOVYEV [55] dans le cas

où X_i suit une loi exponentielle de paramètre λ et Y_i arbitraire de fonction de distribution $R(t)$. Ils montrent que le temps moyen du bon fonctionnement jusqu'à la défaillance du système vaut

$$MTBF = \frac{1}{\lambda} + \frac{\frac{1}{\lambda}}{1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dR(t)}.$$

La méthode fonctionnelle de Stoyan [54] peut être utilisée pour l'étude de l'influence du temps de réparation sur le $MTBF$. C'est un problème qui se pose fréquemment au stade de la conception ou de l'exploitation.

Soient S_1 et S_2 deux systèmes redondants avec X_i suit une loi $Exp(\lambda_i)$, $i = 1, 2$.

Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ et $R_1 \leq_L R_2$, alors $E(T_1) \geq E(T_2)$.

Ce résultat permet d'obtenir des résultats du $MTBF$. Il est particulièrement important lorsque l'information sur la loi du temps de réparation est incomplète, par exemple limitée à un seul moment ou tout au plus la dispersion.

Supposons que seule l'information suivante est disponible : la moyenne du temps de réparation m et sa variance σ^2 . On peut montrer que l'élément minimal relativement à l'ordre \leq_L est : [53]

$$\omega\theta_0 + (1 - \omega)\theta_{\frac{m+\sigma^2}{m}}, \text{ avec } \omega = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+m^2},$$

$$\text{et la borne sup est la fonction dégénérée } \theta_m = \begin{cases} 0, & \text{si } X \leq m, \\ 1, & X > m. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement un encadrement du $MTBF$:

$$\frac{1}{\lambda} \left[1 + \frac{1}{1 - e^{-\lambda m}} \right] \leq E(T) \leq \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1 + \sigma^2/m^2}{1 - e^{(-\lambda m(1 + \sigma^2/m^2))}} \right].$$

Si de plus on sait que R est $NBUE$ avec $E(Y_j) = m$ alors,

$$\frac{1}{\lambda} \left[1 + \frac{1}{1 - e^{-\lambda m}} \right] \leq E(T) \leq \frac{1}{\lambda} \left[1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \lambda m}} \right].$$

Ce dernier résultat est une conséquence du fait que dans l'ensemble de toutes les fonctions de répartition de type $NBUE$, l'élément minimal par rapport à l'ordre \leq_L est $exp(\frac{1}{m})$ et l'élément maximal est la fonction dégénérée θ_m .

Étant donné un élément de taux de défaillance constant $\lambda = 2.10^{-4}$ défaillances /heure et le temps moyen de réparation et de $m = 0.6$ heures. Alors , si la loi de réparation est $NBUE$, on a

$$41674167 \leq MTBF \leq 41676666.57$$

2. Structure cohérente

Un système cohérent est un système tel que la fonction de structure est croissante, et chaque élément est essentiel.

Considérons un système cohérent dont tous les éléments sont neufs à l'instant initial $t = 0$

et qui ne peuvent être remplacés après la panne. Soit X_i la durée de vie du $i^{\text{ème}}$ élément de distribution $F_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, et soit X la durée de vie du système de distribution $G(t)$. Considérons S_1 et S_2 deux systèmes cohérents, de distribution G_1 et G_2 respectivement, alors

- a) Si $F_i^1 \leq_{st} F_i^2$, alors $G_1 \leq_{st} G_2$, $i = 1, \dots, n$.
 b) Si $\forall i = 1, \dots, n$, F_i est *IFR* avec $E(X_i) = m_i$ alors,

$$\bar{G}(t) \geq \exp\left(-t \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}\right), \quad \forall t < \min\{m_1, \dots, m_n\}. \quad (2.1)$$

Interprétation : En pratique, on suppose souvent que les éléments du système étudié

- 1) sont en série,
- 2) sont indépendants,
- 3) ont des fiabilités exponentielle des moyennes m_1, \dots, m_n respectivement.

Le résultat b) signifie que la partie gauche de l'inégalité (2.1) est une borne inférieure pour un système S_1 cohérent à composants :

- 4) associés (non indépendants)
- 5) ayant des fiabilités *IFR* de moyenne m_1, \dots, m_n respectivement

Exemple : Soit à concevoir un circuit électronique comportant 10 diodes, 4 transistors, 20 résistances et 10 condensateurs. Les composants de même type ont des fiabilités identiques de *MTBF*, diode $\mu_d = 500000$ heures ; transistor $\mu_t = 100000$ heures ; résistance $\mu_r = 1000000$ heures ; condensateur $\mu_c = 500000$ heures.

Alors, en vertu de (2.1), on peut prédire une borne inférieure de la fiabilité

$$\bar{F}(t) \geq e^{-0.0001t} \quad \text{pour } t < 100000 \text{ heures}$$

Cette borne inférieure est la fiabilité exacte pour une mission arbitraire de t heures dans les hypothèses 1), 2), et 3), le taux de défaillance (constant) du système est : $\lambda_{\text{système}} = 0.0001$.

3. Ordonnancement

Soit T la durée d'un projet qui peut être décrit à l'aide d'un réseau *PERT* ("program (ou project) evaluation and review technique" qui est une technique de gestion de projet qui permet de visualiser la dépendance des tâches et de procéder à leur ordonnancement) avec des durées des tâches indépendantes X_1, X_2, \dots, X_n . Étant donné N_1 et N_2 deux réseaux *PERT* de mêmes structures, alors

$$X_{i,1} \leq_{st} X_{i,2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_2.$$

Ce résultat permet d'étudier l'influence sur T des choix des différentes distributions *Beta* et de justifier l'usage des lois normales pour obtenir des solutions approchées au problème *PERT* en interprétant les lois normales comme des bornes des distributions des tâches.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les outils mathématiques utilisés pour cette étude, notamment les différents ordres stochastiques. La comparabilité est un moyen d'exprimer les inégalités entre variables et processus aléatoires. Il y est décrit leur application à certaines opérations de fiabilité.

Enfin, certaines propriétés des classes de distributions non paramétriques (classification, conservation) sont présentées, ainsi que leur caractérisation à l'aide des ordres stochastiques.

CHAPITRE 3

ESTIMATION DE LA PERIODE D'ACTIVITE

3.1 Introduction

L'étude analytique de nombreux modèles de files d'attente est très complexe et les résultats obtenus sont difficilement interprétable. Dans ce cas, on tente d'éviter cette difficulté par l'obtention d'approximations ou d'encadrements (majorations et/ou minorations) des principales mesures de performance.

Dans ce chapitre, nous obtenons des estimations des périodes d'activité et d'inactivité d'un système $GI/GI/1$ classique non fiable. Ensuite, nous considérons une extension aux modèles avec rappels et pannes actives et/ou passives et le cas où les arrivées forment un processus de Sedyakin.

3.2 Description du modèle

Considérons un système d'attente à un seul serveur sujet à des pannes aléatoires qui peuvent se produire aussi bien lorsque le serveur est libre que lorsqu'il est actif. Si un appel primaire trouve à son arrivée le serveur disponible (en bon état et libre), il est immédiatement pris en charge et si durant son service le serveur demeure en bon état, il quitte le système à la fin de son service. Si le serveur est bloqué (occupé ou en panne), alors le client quitte temporairement la zone de service et rappelle ultérieurement jusqu'à ce qu'il trouve le serveur de nouveau disponible et entame donc son service. Si le serveur tombe en panne, il est immédiatement pris en charge pour une réparation. Et si la panne se produit durant le service d'un client, alors le client entre en orbite avec une probabilité P ou quitte définitivement le système avec une probabilité $1 - P$. Ce type d'interruption est appelé P -interruption.

Soient $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$, $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ et $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ des suites de variables aléatoires indépendantes représentant respectivement, les durées d'inter-arrivées, durées de service, durées d'inter-rappels d'une même source secondaire. Et soit ξ , τ , η les variables aléatoires stationnaires de distributions respectives $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $V(\cdot)$; et de transformées de Laplace respectives $a(s) = E(\exp(-s\xi))$,

$b(s) = E(\exp(-s\tau))$, $v(s) = E(\exp(-s\eta))$; les $k^{\text{ème}}$ moments sont respectivement a_k, b_k, v_k , ($k = 1, 2, \dots$).

Soient $\hat{\xi}, \hat{\tau}, \hat{\eta}$ les durées résiduelles correspondantes, de distributions respectives $\hat{A}(\cdot), \hat{B}(\cdot), \hat{V}(\cdot)$; et de $k^{\text{ème}}$ moments $\hat{a}_k, \hat{b}_k, \hat{v}_k$ respectivement.

Notons par :

$C(t)$ le nombre de clients en cours de service à la date t ,

$S(t)$ le nombre de serveurs en panne à la date t ,

$R(t)$ le nombre de clients en orbite à la date t ,

$N(t)$ le nombre de clients dans le système à la date t .

Soit $D_0(x)$ la distribution de probabilité que le serveur tombe en panne dans l'intervalle $(t, t+x)$ sachant qu'il était libre à la date t et il n'y a aucune arrivée (primaire ou secondaire) durant $(t, t+x)$. De la même manière, soit $D_1(x)$ la distribution de probabilité que le serveur tombe en panne dans l'intervalle $(t, t+x)$ sachant qu'il était occupé à la date t . Notons par ψ_0, ψ_1 les durées de pannes correspondantes, et par α_0, α_1 les durées de réparations correspondantes de distributions $R_0(x), R_1(x)$.

3.3 Première borne pour la période d'activité

Une période d'activité est l'intervalle de temps (T, T') , où T est la date d'arrivée d'un client dans le système vide. T' est l'instant où pour la première fois le système redevient vide.

Remarquons que dans un système classique, la période d'inactivité du serveur coïncide avec celle du système; alors que dans un système avec rappels, la période d'activité du système contient un certain nombre de périodes d'inactivité du serveur. Ce fait complique énormément l'étude de la période d'activité et explique l'inadéquation des méthodes analytiques classiques.

Il faut noter que dans le cas d'un système non fiable, la période d'activité peut débuter soit par l'arrivée d'un appel primaire (événement A), soit par une panne qui se produit (événement B).

On a $P(A) = P_a = P(\psi_0 > \hat{\xi}) = \gamma$, $P(B) = P_b = P(\hat{\xi} > \psi_0) = \delta$.

Alors, on a

$$\gamma = \int_0^{\infty} \hat{A}(x) dD_0(x), \quad (3.1)$$

$$\delta = \int_0^{\infty} [1 - \hat{A}(x)] dD_0(x). \quad (3.2)$$

Soit β la durée de service avant la panne + la durée de réparation qui s'en suit, de distribution $G(\cdot)$.

Et soit

$$E(\beta) = \beta_1 \text{ et } E(\alpha_0) = \alpha_{01}. \quad (3.3)$$

En vertu de AISSANI [28], en régime stationnaire,

$$E(L) \geq \begin{cases} \beta_1, & \text{avec une probabilité } \gamma, \\ \alpha_{01}, & \text{avec une probabilité } \delta. \end{cases} \quad (3.4)$$

De (3.4), en prenant les espérances mathématiques nous obtenons une borne inférieure pour la période d'activité.

$$E(L) \geq \gamma\beta_1 + \delta\alpha_{01}, \quad (3.5)$$

où γ et δ sont donnés par (3.1) et (3.2).

Notons que cette borne est valable aussi bien pour le système classique $GI/GI/1$ que pour le système avec rappels. De plus, la durée moyenne de completion $\beta_1 = E(\beta)$ peut être évaluée explicitement dans certains cas particuliers : pour v (taux de rappels) = 0 [?, ?] et pour $v > 0$ AISSANI [28, 56] et KULKARNI [30]. Des exemples numériques sont donnés dans OUKID [10].

3.4 Borne pour la période d'inactivité

STOYAN [54] a montré que l'estimation de la période d'activité peut être obtenue par celle de la période d'inactivité et vice-versa. Dans ce qui suit, nous obtenons une borne pour la période d'inactivité.

Théorème 3.4.1. *Pour le système classique sans rappels mais avec panne,*

(i)

$$E(I) \geq \frac{1-P}{P} \{\gamma\beta_1 + \delta\alpha_{01}\}, \quad (3.6)$$

où $P = \lim_{t \rightarrow \infty} P \{ \text{le système est non vide à l'instant } t \}$.

(ii) Si A et D_0 sont NBU, alors

$$I \leq_d \min(\xi, \psi_0). \quad (3.7)$$

Preuve :

(i) En vertu de la théorie de renouvellement AISSANI [57] et BARLOW [50], la probabilité que le système soit non vide à un instant quelconque en régime stationnaire s'écrit

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} P \{ \text{le système est non vide à l'instant } t \} = \frac{E(L)}{E(L) + E(I)} \quad (3.8)$$

D'où

$$E(I) = \frac{1-P}{P} E(L) \quad (3.9)$$

Par conséquent, une borne pour $E(L)$ entraîne aussi une borne $E(I)$. Par exemple, en utilisant (3.9) et l'inégalité (3.5), nous obtenons (3.6).

Notons que cette borne peut être obtenue sous une forme plus explicite dans certains cas particuliers, OUKID [10], pour lesquels P est connue.

- (ii) On aura besoin du lemme issue de la théorie de fiabilité sur la conservation de la classe de distributions NBU par rapport aux opérations de fiabilité. BARLOW [50].

Lemme 3.4.1. *Si X et Y sont NBU, alors $Z = \min(X, Y)$ est aussi NBU.*

Nous avons par hypothèse, A et D_0 sont NBU, alors en vertu du lemme 3.4.1, il s'en suit que $\min(\xi, \psi_0)$ est aussi NBU. Ainsi,

$$P\{\min(\xi, \psi_0) > t + x / \min(\xi, \psi_0) > x\} \leq P\{\min(\xi, \psi_0) > t\}, (\forall t, x \geq 0).$$

Par la suite, on peut écrire

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \int_0^\infty [1 - P(\min(\xi, \psi_0) > t + x / \min(\xi, \psi_0) > x)] dF(x) \\ &\geq \int_0^\infty [1 - P(\min(\xi, \psi_0) > t)] dF(x) = \int_0^\infty P(\min(\xi, \psi_0) \leq t) dF(x) \end{aligned}$$

Où F est la distribution de la durée de séjour, d'où le résultat. Si A et D_0 sont seulement NBUE, alors $E(I) \leq_a E\{\min(\xi, \psi_0)\}$ puisque l'opération \min n'est pas conservée pour cette classe de distributions.

3.5 Seconde borne pour la période d'activité.

GNEDENKO & KOVALENKO [58] donnent la borne supérieure suivante pour la période d'activité d'un système $GI/GI/1$ ($v = 0$) :

$$E(L) < \max\{E(\beta), E(\alpha)\} / (1 - \rho) \quad (3.10)$$

Dans cette section, nous obtenons une borne inférieure et une nouvelle borne supérieure. (voir OUKID [59]).

Théorème 3.5.1. *Si la distribution d'arrivées A est NBU (NWU), alors*

$$E(L) \geq (\leq) \frac{\gamma\beta_1}{1 - \langle H_A, G \rangle} + \frac{\delta\alpha_{01}}{1 - \langle H_A, R_0 \rangle} \quad (3.11)$$

Où $\langle F, G \rangle = \int_0^\infty F(x) dG(x)$ et $H_A(t) = E\{v(t)\} = \sum A^{*n}(t)$ est la fonction de renouvellement de distribution fondamentale $A(\cdot)$ associé au processus d'arrivées $\{v(t), t \geq 0\}$.

Preuve : Les égalités stochastiques suivantes améliorent les inégalités dans (3.4)

$$L = \begin{cases} \beta + z'_1 + z'_2 + \dots + z'_{v(\beta)} & : P_a \\ \alpha + z''_1 + z''_2 + \dots + z''_{v(\alpha)} & : P_b \end{cases} \quad (3.12)$$

où $v(x)$ est le nombre d'arrivées durant la période x ; et $z'_j(z''_j)$ est une quasi période d'activité qui débute avec le début de service du $j^{\text{ème}}$ client arrivé durant la période β (resp α_{01}).

Modifions le système en remplaçant la durée résiduelle d'inter-arrivées $\widehat{\xi}_j$ par la durée d'inter-arrivées ξ_j de telle sorte à nous ramener à des quasi périodes d'activité $\{z_j\}$ identiquement distribuées avec L .

Maintenant, si A est NBU, alors $\widehat{\xi}_j \leq_d \xi_j$, $z'_j \leq z_j$ et $z''_j \leq z_j$

Par conséquent, nous obtenons

$$\beta + \sum_{j=1}^{v(\beta)} z_j \leq_d L : P_a, \quad (3.13)$$

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^{v(\alpha_0)} z_j \leq_d L : P_b. \quad (3.14)$$

Lemme 3.5.1. *STOYAN [54]*

Notons par $<$ un des ordres partiels $\leq_d, \leq_c, \leq_{cv}$ et supposons que $E(X), E(Y)$ sont bien définis et finis. Alors $X < Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$.

Le lemme suivant est une généralisation de l'identité de Wald dû à Prokhorov et Kolmogorov (voir le theorem 3.12, p. 169 de BARLOW [50]).

Lemme 3.5.2. *Soit $\{X_i, i \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées d'espérance finie $E(X_i) < \infty$, et soit N une variable aléatoire à valeurs entières non négatives tel que l'événement $\{N = n\}$ est indépendant de X_{n+1}, X_{n+2}, \dots pour tout $n = 1, 2, \dots$, alors*

$$E\left\{\sum_{i=1}^N X_i\right\} = E(N)E(X_i). \quad (3.15)$$

En utilisant les lemmes 3.5.1 et 3.5.2, nous obtenons

$$E(L/A) \geq E(\beta) + E(L/A)E(v(\beta)), \quad (3.16)$$

$$E(L/B) \geq E(\alpha_0) + E(L/B)E(v(\alpha_0)). \quad (3.17)$$

Le résultat désiré découle du théorème de l'espérance total, et de la définition de la fonction de renouvellement $E(v(\beta))$.

Corollaire 3.5.1. (i) Si A est NBUE, alors

$$E(L) \geq \frac{\gamma\beta_1}{2 - \lambda\beta_1} + \frac{\delta\alpha_{01}}{2 - \lambda\alpha_{01}}. \quad (3.18)$$

(ii) Si A est NWUE, alors

$$E(L) \leq \frac{\gamma\beta_1}{2 - \lambda\beta_1 - \lambda^2\sigma^2} + \frac{\delta\alpha_{01}}{2 - \lambda\alpha_{01} - \lambda^2\sigma^2}, \quad (3.19)$$

où $\sigma^2 = \text{var}(\xi)$.

Preuve : On a besoin des lemmes, de la théorie de renouvellement, suivants

Lemme 3.5.3. Pour chaque fonction de renouvellement H_A , avec $A \in \text{NBUE}$, on a

$$\lambda t - 1 \leq H_A(t) \leq \lambda t \quad (3.20)$$

La borne inf est valable $\forall A$, par contre, la borne sup est valable pour $A \in \text{NBUE}$.

Si $A \in \text{NWUE}$, alors

$$\lambda t \leq H_A(t) \leq \lambda t + \lambda^2 \text{var}(\xi) \quad (3.21)$$

Preuve :

(i) En utilisant la borne inf dans (3.20) et en la substituant dans (3.11), on a

$$\begin{aligned} E(L) &\geq \frac{\gamma\beta_1}{1 - \int_0^\infty H_A(t)dG(t)} + \frac{\delta\alpha_{01}}{1 - \int_0^\infty H_A(t)dR_0(t)} \\ &\geq \frac{\gamma\beta_1}{1 - \int_0^\infty (\lambda t - 1)dG(t)} + \frac{\delta\alpha_{01}}{1 - \int_0^\infty (\lambda t - 1)dR_0(t)} \\ &= \frac{\gamma\beta_1}{1 + \int_0^\infty dG(t) - \lambda \int_0^\infty tdG(t)} + \frac{\delta\alpha_{01}}{1 - \int_0^\infty dR_0(t) - \lambda \int_0^\infty tdR_0(t)} = \\ &\quad \frac{\gamma\beta_1}{2 - \lambda\beta_1} + \frac{\delta\alpha_{01}}{2 - \lambda\alpha_{01}}. \end{aligned}$$

(ii) En remplaçant (3.21) dans (3.11), nous obtenons

$$\begin{aligned} E(L) &\leq \frac{\gamma\beta_1}{1 - \lambda \int_0^\infty tdG(t) - \lambda^2 \text{var}(\xi) \int_0^\infty dG(t)} + \frac{\delta\alpha_{01}}{1 - \lambda \int_0^\infty tdR_0(t) - \lambda^2 \text{var}(\xi) \int_0^\infty dR_0(t)} \\ &\leq \frac{\gamma\beta_1}{1 - \lambda^2 \text{var}(\xi) - \lambda\beta_1} + \frac{\delta\alpha_{01}}{1 - \lambda^2 \text{var}(\xi) - \lambda\alpha_{01}}. \end{aligned}$$

Qui entraîne (3.19).

3.6 Processus d'arrivées de Sedyakin

Supposons maintenant que les arrivées forment un processus de Sedyakin, KOTLYAR [60], i.e. un processus de renouvellement markovien (RPMI) généré par la famille de fonctions de distributions

$$A(x/y) = \frac{A(x + \alpha(y)) - A(\alpha(y))}{1 - A(\alpha(y))}, \quad (3.22)$$

où $\alpha(y) \geq 0, y \in \mathbb{R}^+$, est une fonction de variation limitée ; $A(x)$ est la fonction de distribution non arithmétique telle que $A(x) = 0$ pour $x \leq 0$, et $A(x) < 1$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

Ce processus est introduit pour la première fois par ESARY, MARCHALL et PROSCHAN [61] comme un modèle de choc. Plus tard, RPMI a été identifié comme une classe indépendante de processus de renouvellement pour lequel on peut associer l'équation de renouvellement généralisée (GRE) définie sur la famille de distributions comme suit :

$$V(t) = g(t) - \int_0^t V(u) dA(t - u/u), t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.23)$$

ou sous forme

$$V = g + V \otimes A, \quad g(t) = 0 \text{ pour } t < 0. \quad (3.24)$$

Notons quelques propriétés de l'opération de convolutions prolongée \otimes [60] :

1. $A^{n\otimes} = - \int_0^t A^{(n-1)\otimes}(u) dA(t - u/u), n \geq 1,$
 $A^{0\otimes}(t) = 0, t \leq 0; A^{0\otimes} = 1, t \in \mathbb{R}^+; A^{1\otimes}(t) = A(t/0).$
2. Si la famille $A(x/y)$ consiste en une seule fonction de distribution $A(x)$, alors \otimes est l'opération de convolutions ordinaire.
3. Supposons que RPMI est formé par une séquences de variables aléatoires $\{\xi_{nn \geq 1}$ de distribution $A(x/y) = P\{\xi_n < x/S_{n-1} = y\}$, où $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, alors $P(S_n < t) = A^{n\otimes}(t).$
4. Soit F et G des fonctions mesurables bornées définies sur \mathbb{R}^+ , alors

$$(F + G) \otimes H = F \otimes H + G \otimes H.$$

5. Conditions d'existence et d'unicité de l'équation de renouvellement généralisée (GRE), ont été obtenues par Brown, Solomon et Stephens [?].

Soit $g = A^{0\otimes}(g = A(t/0)).$ Alors la solution de GRE (3.23) est la fonction

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{n\otimes}(t) \quad \text{et} \quad H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A^{n\otimes}(t), \quad (3.25)$$

où $H(t)$ est la fonction de renouvellement de RPMI, $H(0) = 0; M(t) = H(t) + 1.$ Par analogie avec le cas classique, $dH(t)$ est interprétée comme la probabilité de renouvellement dans l'intervalle $[t, t + dt).$ Si $g(t) = E(t)$, où $E(t) \neq A(t/0)$, alors la solution de la GRE (3.23) est la fonction de distribution $H(t)$ correspondante à un RPMI général ou à un processus général de Sedyakin .

6. Un processus de Sedyakin de fonction génératrice $\alpha(y) \equiv y, y \in \mathbb{R}^+$, est un processus homogène de Poisson avec la fonction principale $\Lambda(t) = -\log(\bar{A}(t))$, où $\bar{A}(t) = 1 - A(t)$. Après ces définitions, retournons maintenant à notre problème "système classique et pannes".

Théorème 3.6.1. *OUKID [62]*

Supposons que les arrivées dans un système $GI/GI/1$ et pannes sont décrites par un processus de Sedyakin généré par la famille de fonctions de distributions (3.22).

(i) Si la distribution A est NBU, alors (3.11) est une borne inf pour $E(L)$.

(ii) Si A est DFR, alors

$$E(L) \geq \frac{\gamma\beta_1}{1 + \langle \log \bar{A}, G \rangle} + \frac{\delta\alpha_{01}}{1 + \langle \log \bar{A}, R_0 \rangle}. \quad (3.26)$$

La preuve est basée sur ce qui suit

Lemme 3.6.1. *Supposons que la condition du théorème 3.6.1 est vérifiée.*

(i) Si A est IFR (DFR) et $\alpha(x) \leq x, x \in [0, t)$, alors

$$H(t) \leq (\geq) \Lambda(t) \quad (3.27)$$

(ii) Si A est NBU (NWU), alors

$$H(t) \leq (\geq) H_A(t) \quad (3.28)$$

Où H_A est la fonction de renouvellement d'un processus de renouvellement ordinaire décrit par la fonction de distribution $A(x)$.

Preuve du théorème 3.6.1 : Un raisonnement analogue à celui du théorème 3.5.1, nous conduit à (3.11). Si A est NBU, alors en utilisant (3.28) du lemme (3.6.1), on a (i) a lieu. La preuve de (ii) est similaire en utilisant (3.27) du lemme 3.6.1.

3.7 Système avec rappels et pannes

Considérons maintenant un système avec rappels lorsque $v > 0$. Une riche synthèse sur les systèmes avec rappels a été donnée par FALIN [7]. Cependant, le cas où le serveur est sujet à des pannes n'a pas été mentionné, puisque les premières tentatives dans cette direction n'ont apparues que récemment. AISSANI [56, 63], obtient les fonctions génératrices des distributions du nombre de clients dans le système et en orbite. Ce modèle a été étudié également par KULKARNI & CHOI [30] par la méthode des processus régénératifs. ARTALEJO [15] utilise une approche similaire et calcule des probabilités stationnaires des états d'un système Markovien avec seulement pannes actives (i.e. $D_0(x) \equiv 0$). La distribution asymptotique de la taille de la file d'un système $M/G/1$ avec rappels et pannes, en régime chargé, est obtenue dans

AISSANI [29], où il considère également les cas de maintenance préventive et corrective.

L'étude de la période d'activité d'un système avec rappels est très complexe et est étudiée dans quelques cas particuliers : la plupart des modèles sont étudiés sous des hypothèses restrictives (exponentialité de certaines distributions paramétriques,...).

Choo & Conolly [24] fournissent une procédure récursive de calcul des moments de la période d'activité pour le modèle $M/M/1$ avec rappels et serveur fiable.

Falin & Templeton [45] procèdent à l'étude de la période d'activité d'un système $M/G/1$ avec rappels, en utilisant la méthode des catastrophes.

Un algorithme d'évaluation des moments de la période d'activité dans le cas de rappels et pannes actives est donné par ARTALEJO [15] pour un système $M/M/1$. Cette partie est consacrée à ce problème où nous considérons une extension des résultats précédents dans le cas de rappels et pannes aléatoires.

Théorème 3.7.1. *OUKID [64]*

Considérons un système $GI/GI/1$ avec rappels et serveur non fiable

(i) Si A est NWU, alors

$$E(L) \leq \frac{\gamma[\beta_1 + \hat{a}_1 + \hat{v}_1 < H_A, G >]}{1 - < H_A, G >} + \frac{\delta[\alpha_{01} + \hat{a}_1 + \hat{v}_1 < H_A, R_0 >]}{1 - < H_A, R_0 >}. \quad (3.29)$$

(ii) Si A est NBU, \hat{A} et \hat{V} sont IFRA, alors

$$E(L) \geq \frac{\gamma[\beta_1 + \sum(\beta_1)]}{1 - < H_A, G >} + \frac{\delta[\alpha_{01} + \sum(\alpha_{01})]}{1 - < H_A, R_0 >}, \quad (3.30)$$

où

$$\sum(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(v(x) = k)}{\hat{a}_1^{-1} + k\hat{v}_1^{-1}}. \quad (3.31)$$

(iii) Si A est NWU, \hat{A} et \hat{V} sont DFRA, alors

$$E(L) \leq \frac{\gamma[\beta_1 + \sum(\beta_1)]}{1 - < H_A, G >} + \frac{\delta[\alpha_{01} + \sum(\alpha_{01})]}{1 - < H_A, R_0 >}. \quad (3.32)$$

Preuve : (i)

Dans un système avec rappels, la période d'inactivité du serveur s'écrit :

$$I_{v(\beta)} = \min(\hat{\xi}, \hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_{v(\beta)}), \quad I_{v(\alpha_0)} = \min(\hat{\xi}, \hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_{v(\alpha_0)}) \quad (3.33)$$

Un raisonnement analogue à celui du théorème 3.5.1, nous conduit à,

$$L = \begin{cases} \beta + I_{v(\beta)} + z'_1 + z'_2 + \dots + z'_{v(\beta)} & : P_a; \\ \alpha + I_{v(\alpha_0)} + z''_1 + z''_2 + \dots + z''_{v(\alpha)} & P_b. \end{cases} \quad (3.34)$$

Si A est NWU, alors, en utilisant la preuve du théorème 3.5.1 on a

$$\beta + I_{v(\beta)} + \sum_{j=1}^{v(\beta)} z_j \geq_d L : P_a; \quad \alpha_0 + I_{v(\alpha_0)} + \sum_{j=1}^{v(\alpha_0)} z_j \geq_d L : P_b \quad (3.35)$$

En utilisant l'identité de Wald, on a

$$E\left(\sum_{i=1}^{v(\beta)} L_j\right) = E(v(\beta))E(L_j) = E(v(\beta))E(L/A) \quad (3.36)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{v(\alpha_0)} L_j\right) = E(v(\alpha_0))E(L_j) = E(v(\alpha_0))E(L/B) \quad (3.37)$$

et en utilisant les lemmes 3.5.1 et 3.5.2, on obtient

$$E(L/A) \leq \frac{\beta_1 + E(I_{v(\beta)})}{1 - \langle H_A, G \rangle} \quad (3.38)$$

$$E(L/B) \leq \frac{\alpha_{01} + E(I_{v(\alpha_0)})}{1 - \langle H_A, R_0 \rangle} \quad (3.39)$$

En prenant l'espérance totale, on obtient

$$E(L) \leq \gamma \frac{\beta_1 + E(I_{v(\beta)})}{1 - \langle H_A, G \rangle} + \delta \frac{\alpha_{01} + E(I_{v(\alpha_0)})}{1 - \langle H_A, R_0 \rangle} \quad (3.40)$$

Il est clair que $E(I_{v(\beta)}) \leq E(\hat{\xi}) + E(\sum_{i=1}^{v(\beta)} \hat{\eta}_i) = E(\hat{\xi}) + E(v(\beta))\hat{v}_1 = \hat{a}_1 + \hat{v}_1 \langle H_A, G \rangle$

De la même manière, on obtient $E(I_{v(\alpha_0)}) \leq \hat{a}_1 + \hat{v}_1 \langle H_A, R_0 \rangle$

En substituant maintenant ces expressions dans (3.40) le résultat (3.29) a lieu.

Pour la preuve de (ii), on aura besoin des lemmes suivants de la théorie de fiabilité. BARLOW [50].

Lemme 3.7.1. Soit X_i (resp. Y_i), durée de vie du $i^{\text{ème}}$ élément du système S_1 (resp. S_2), de distribution F_i (resp. G_i) avec $E(X_i) = \mu_i$, et $F_i \leq_c G_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Soient, X_1, X_2, \dots, X_n (resp. Y_1, Y_2, \dots, Y_n) des variables aléatoires indépendantes.

Alors

$$E(\min(X_1, X_2, \dots, X_n)) \geq E(\min(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)).$$

En particulier,

Lemme 3.7.2. Supposons que les conditions du lemme 3.7.1 sont satisfaites. Si $G_i(x) = 1 - e^{-\mu_i x}$, et F_i est IFRA (DFRA), $i = 1, 2, \dots, n$, alors

$$E(\min(X_1, X_2, \dots, X_n)) \geq (\leq) \frac{1}{\sum_{i=1}^n \mu_i^{-1}}$$

Reprenons maintenant la preuve de (ii) du théorème 3.7.1. Supposons que les distributions de $\widehat{\xi}$ et \widehat{V} sont IFRA. En vertu du lemme 3.7.2, nous avons

$$E \min(\widehat{\xi}, \widehat{\eta}_1, \dots, \widehat{\eta}_k) \geq (\widehat{a}_1^{-1} + k\widehat{v}_1^{-1})^{-1}$$

En prenant l'espérance totale, le résultat en découle.

En inversant les inégalités de la preuve du point (ii), on obtient le point (iii).

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, en moyennant une approche par comparaison stochastique, nous avons obtenu des estimations des périodes d'activité et d'inactivité dans un système $GI/GI/1$ classique et serveur non fiable. Ensuite, nous avons considéré le cas où les arrivées forment un processus de Sedyakin. Enfin, nous avons considéré une extension de cette étude à un système $GI/GI/1$ avec rappels et serveur non fiable.

CHAPITRE 4

INEGALITES STOCHASTIQUES POUR $M/G/1$ AVEC RAPPELS ET SERVEUR NON FIABLE

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous obtenons des conditions de comparabilité de modèles $M/G/1$ avec rappels et serveur non fiable, nous étudions la monotonie de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse et nous obtenons également des inégalités pour la distribution du nombre de clients dans le système.

Ces résultats sont des extensions de ceux de KHALIL et FALIN [11], obtenus pour le système $M/G/1$ avec rappels et sans interruption de service (serveur absolument fiable).

La section suivante sera consacrée aux résultats de KHALIL et FALIN [11] que nous utilisons pour la suite du travail.

4.2 Inégalités stochastiques pour $M/G/1$ avec rappels

Considérons un système à un seul serveur. Les arrivées forment un processus de poisson de taux λ . Le temps de service est arbitraire de distribution $F(\cdot)$ et de transformée de Laplace \tilde{F} . Si un client arrive et trouve le serveur libre, il est immédiatement pris en charge et quitte le système à la fin de son service. Par contre, si un client trouve à son arrivée, le serveur occupé, il rejoint l'orbite et devient source d'appels secondaires. La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentielle de paramètre θ . Les suites de variables aléatoires représentant, les durées d'inter-arrivées, durées de service et durées d'inter-rappels d'une même source secondaire sont supposées mutuellement indépendantes.

L'état du système peut- être décrit par le processus

$$X(t) = \begin{cases} N(t), & \text{si } C(t) = 0, \\ \{C(t), N(t), \xi(t)\}, & \text{si } C(t) = 1. \end{cases}$$

(Voir Section 1.4 "Modèles semi- Markoviens").

Considérons le processus $\{X(t_i), i = 1, 2, \dots\}$ où $\{X(t_i)\}$ est le nombre de clients dans le système aux instants t_1, t_2, \dots où des clients terminent leur service et quittent le système. Ainsi, on définit un processus stochastique à temps discret : $\{X_n = X(t_n); n = 1, 2, \dots\}$ où t_n est l'instant de départ du $n^{\text{ième}}$ client.

La suite $\{X_n, n \geq 1\}$ est une chaîne de Markov incluse.

Proposition 4.2.1. *Si $\lambda^1 \leq \lambda^2$, $F^1 \leq_s F^2$, alors $\{K_n^1\} \leq_s \{K_n^2\}$.*

Où s dénote l'un des ordres : st , v ou L .

Avec $K_m = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} dF(x)$ (probabilité de m arrivées durant un service).

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov incluse $\{X_n, n \geq 1\}$, sont données par la formule suivante : [11]

$$\frac{\lambda}{\lambda + n\theta} K_{m-n} + \frac{n\theta}{\lambda + n\theta} K_{m-n+1}.$$

Soit T l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse, tel que pour chaque distribution $P = (P_n)_{n \geq 0}$, on associe une distribution $T_p = q = (q_m)_{m \geq 0}$ tel que

$$q_m = \sum_{n \geq 0} P_n P_{nm}.$$

Proposition 4.2.2. *L'opérateur T est monotone par rapport à l'ordre stochastique et l'ordre convexe, i.e. pour deux distributions P^1, P^2 on a $P^1 \leq_{st} (\leq_v) P^2$ implique $TP^1 \leq_{st} (\leq_v) TP^2$*

Soit $\Sigma^i, i = 1, 2$ un système $M/G/1$ avec rappels et serveur fiable de paramètre λ^i, θ^i, F^i . Notons, par T^i l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse de Σ^i , et par π_n^i la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système Σ^i .

Proposition 4.2.3. *Si $\lambda^1 \leq \lambda^2$, $\theta^1 \geq \theta^2$, $F^1 \leq_{st} (\leq_v) F^2$ alors, $T^1 \leq_{st} (\leq_v) T^2$, i.e. pour une distribution quelconque P , on a $T^1 P \leq_{st} (\leq_v) T^2 P$.*

Proposition 4.2.4. *Si $\lambda^1 \leq \lambda^2$, $\theta^1 \geq \theta^2$, $F^1 \leq_{st} (\leq_v) F^2$, alors $\{\pi_n^1\} \leq_{st} (\leq_v) \{\pi_n^2\}$.*

Dans le reste de ce chapitre, nous allons présenter notre contribution à ce sujet, en faisant l'extension à un système $M/G/1$ avec rappels et serveur non fiable.

4.3 Description du modèle

Considérons un système à un seul serveur non fiable. Les arrivées forment un processus de poisson de taux λ . Le temps de service est arbitraire de distribution $F(\cdot)$ et de transformée de Laplace \tilde{F} . Si un client arrive et trouve le serveur bloqué (en panne ou occupé), il rejoint l'orbite et devient source d'appels secondaires. Sinon, il est pris en charge et si durant son service, le serveur tombe en panne alors, il rejoint l'orbite avec une probabilité (C) ou quitte le système définitivement avec une probabilité $(1 - C)$. La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentielle de paramètre θ . La durée de panne passive (lorsque le serveur est libre) est exponentielle de taux η et la durée de sa réparation est arbitraire de distribution $G(\cdot)$. La durée de panne active (qui se produit lorsque le serveur est occupé) est exponentielle de taux μ et la durée de sa réparation est arbitraire de distribution $H(\cdot)$.

Construction de la chaîne de Markov incluse

Introduisons les notations suivantes :

$Q(t)$ = nombre de clients en orbite à la date t

$S(t)$ = état du serveur à la date t i. e.

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre (idle up) à l'instant } t, \\ 1, & \text{si le serveur est occupé à l'instant } t, \\ 2, & \text{si le serveur est en panne(down) à l'instant } t. \end{cases}$$

On peut construire une chaîne de Markov incluse de la manière suivante :

Soit :

T_n = instant où le serveur entre à l'état libre pour la $n^{\text{ième}}$ fois

$T_0 = 0$

$[T_{n-1}, T_n]$ est le $n^{\text{ième}}$ cycle

$I_n = k$ si le $n^{\text{ième}}$ cycle est de type k ($n \geq 1$)

Il y a 7 types de cycle

Type 1 Le serveur tombe en panne avant qu'il y ait une arrivée externe ou un rappel (panne passive)

$$P(I_{n+1} = 1/Q_n) = \frac{\eta}{\eta + \lambda + \theta Q_n},$$

durée du cycle prend fin à la fin du temps de réparation de loi $G(\cdot)$.

Type 2 Une arrivée externe a lieu avant une panne ou un rappel . Le temps de service est

interrompu par une panne, le client interrompu quitte le système

$$P((I_{n+1} = 2/Q_n) = \frac{\lambda}{\eta + \lambda + \theta Q_n} (1 - C)(1 - \tilde{F}(\mu)).$$

Type 3 Une arrivée externe a lieu avant une panne ou un rappel ; le temps de service est interrompu par une panne ; le client interrompu entre en orbite.

$$P((I_{n+1} = 3/Q_n) = \frac{\lambda}{\eta + \lambda + \theta Q_n} C[1 - \tilde{F}(\mu)].$$

Type 4 Un rappel a lieu avant une panne ou une arrivée externe ; le temps de service du client est interrompu par une panne ; le client interrompu quitte le système

$$P((I_n + 1 = 4/Q_n) = \frac{\theta Q_n}{\lambda + \eta + \theta Q_n} (1 - C)[1 - \tilde{F}(\mu)].$$

Type 5 Un rappel a lieu avant une panne ou une arrivée externe ; le temps de service du client est interrompu par une panne ; le client interrompu rejoint l'orbite

$$P((I_n + 1 = 5/Q_n) = \frac{\theta Q_n}{\lambda + \eta + \theta Q_n} C[1 - \tilde{F}(\mu)].$$

Type 6 Une arrivée externe avant une panne ou un rappel, et le service s'achève sans interruption

$$P((I_n + 1 = 6/Q_n) = \frac{\lambda}{\eta + \lambda + \theta Q_n} \tilde{F}(\mu).$$

Type 7 Un rappel avant une panne ou une arrivée externe, et le service s'achève sans interruption

$$P((I_n + 1 = 7/Q_n) = \frac{\theta Q_n}{\eta + \lambda + \theta Q_n} \tilde{F}(\mu).$$

Soit :

- $A(n)$ = nombre d'arrivées durant un temps de service jusqu'à ce qu'il soit interrompu par une panne (ci elle a lieu) dans le $n^{\text{ème}}$ cycle (cas 2 à 7) (service potentiel)
- $A_i(n)$ = nombre d'arrivées durant le temps de réparation après une panne passive dans le $n^{\text{ème}}$ cycle de type 1
- $A_b(n)$ = nombre d'arrivées durant le temps de réparation (après une panne active dans le $n^{\text{ème}}$ cycle de (type 2 à 5)

Les $\{A_i(n), n \geq 1\}$, $\{A_b(n), n \geq 1\}$ et $\{A(n), n \geq 1\}$ sont des suites de v.a.i. de variables génériques A_i, A_b et A respectivement. De plus, $A_i(n + 1)$, $A_b(n + 1)$ et $A(n + 1)$ sont indépendants de $\{Q_k, 0 \leq k \leq n\}$.

Soit U la durée de vie du serveur lorsqu'il est occupé, et supposons que cette v.a. est exponentielle de paramètre μ .

On a alors les formules de récurrence

$$Q_{n+1} = \begin{cases} Q_n + A_i(n+1), & \text{si } I_{n+1} = 1, \\ Q_n + A_b(n+1) + A(n+1), & \text{si } I_{n+1} = 2, \\ Q_n + A_b(n+1) + A(n+1) + 1, & \text{si } I_{n+1} = 3, \\ Q_n + A_b(n+1) + A(n+1) - 1, & \text{si } I_{n+1} = 4, \\ Q_n + A_b(n+1) + A(n+1), & \text{si } I_{n+1} = 5, \\ Q_n + A(n+1), & \text{si } I_{n+1} = 6, \\ Q_n + A(n+1) - 1, & \text{si } I_{n+1} = 7. \end{cases}$$

La v.a. Q_{n+1} ne dépend que de Q_n

$$P(Q_{n+1} = k/Q_n, Q_{n-1}, \dots, Q_1, Q_0) = P(Q_{n+1} = k/Q_n).$$

par conséquent, $\{Q_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov.

Posons

1. $g_k = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dG(x)$, $k = 0, 1, \dots$, la probabilité de k arrivées durant le temps de réparation après une panne passive. Alors, $E(Z^{A_i}) = \tilde{G}(\lambda - \lambda z)$.
2. $h_k = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dH(x)$, $k = 0, 1, \dots$, la probabilité de k arrivées durant le temps de réparation après une panne active. Alors, $E(Z^{A_b}) = \tilde{H}(\lambda - \lambda z)$.
3. $\rho_k = P(A = k/S < U) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \frac{e^{-\mu x}}{\tilde{F}(\mu)} dF(x)$ la probabilité de k arrivées durant le temps de service sachant que le service n'est pas interrompu. Alors, $E(Z^A/S < U) = \frac{1}{\tilde{F}(\mu)} \int_0^\infty e^{-\mu x} e^{-\lambda(1-z)x} dF(x) = \frac{\tilde{F}(\mu + \lambda - \lambda z)}{\tilde{F}(\mu)}$.
4. $a_k = P(A = K/S > U) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \mu \frac{e^{-\mu x}(1-F(x))}{1-\tilde{F}(\mu)} d(x)$ la probabilité de k arrivées durant le temps de service potentiel interrompu par une panne. Alors, $E(Z^A/S > U) = \frac{1}{1-\tilde{F}(\mu)} \int_0^\infty \mu e^{-\mu x} e^{-\lambda(1-z)x} (1-F(x)) d(x) = \frac{\mu}{\mu + \lambda - \lambda z} \frac{1-\tilde{F}(\mu + \lambda - \lambda z)}{1-\tilde{F}(\mu)}$.

4.4 Quelques outils préliminaires

Citons quelques résultats que nous utilisons par la suite.

Proposition 4.4.1. (Théorème 1.2.2. de STOYAN [54])

L'inégalité $\int_{-\infty}^\infty f(t) dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^\infty f(t) dF_2(t)$ est vraie pour toute fonction $f \in A_d(\mathbb{R})$ (classe des fonctions réelles non décroissantes) pour lesquelles les intégrales sont définies, ssi $F_1 \leq_{st} F_2$.

Proposition 4.4.2. (Théorème 1.3.1 de STOYAN [54])

L'inégalité $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dF_2(t)$ a lieu pour toute fonction $f \in A_v(\mathbb{R})$ (classe des fonctions réelles convexes et non décroissantes) pour lesquelles les intégrales sont définies ssi $F_1 \leq_v F_2$.

Proposition 4.4.3. (Théorème 4.2.3. de STOYAN [54])

Les opérateurs T^1 et T^2 satisfont l'inégalité $T^1 \prec T^2$ si et seulement si, leurs fonctions de transition P^1 et P^2 satisfont $P^1(x, \cdot) \prec P^2(x, \cdot)$; $\forall x \in E$.

4.5 Inégalités préliminaires

Lemme 4.5.1. [66]

1. Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $G^{(1)} \leq_{st} G^{(2)}$, alors $\{g_n^{(1)}\} \leq_{st} \{g_n^{(2)}\}$.
2. Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $H^{(1)} \leq_{st} H^{(2)}$, alors $\{h_n^{(1)}\} \leq_{st} \{h_n^{(2)}\}$.

Preuve : Montrons la condition 1.

Supposons que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $G^{(1)} \leq_{st} G^{(2)}$

par définition de \leq_{st} pour une loi discrète

$$\{g_n^{(1)}\} \leq_{st} \{g_n^{(2)}\} \Leftrightarrow \bar{g}_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{\infty} g_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{\infty} g_m^{(2)} = \bar{g}_n^{(2)}$$

d'où

$$\int_0^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(\lambda^{(1)}x)^m}{m!} e^{-\lambda^{(1)}x} dG^{(1)}(x) \leq \int_0^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(\lambda^{(2)}x)^m}{m!} e^{-\lambda^{(2)}x} dG^{(2)}(x) \quad (4.1)$$

La fonction $f_n(x; \lambda) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x}$ est croissante par rapport à λ et x . En effet :

$$\left(\frac{d}{dx} f_n(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} > 0\right).$$

$$\left(\frac{d}{d\lambda} f_n(x; \lambda) = x e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} > 0\right).$$

alors, en vertu de la proposition 4.4.1 on a

$$\int_0^{\infty} f_n(x; \lambda^1) dG^1(x) \leq \int_0^{\infty} f_n(x; \lambda^1) dG^2(x). \quad (4.2)$$

D'autre part d'après la monotonie de la fonction $f_n(x; \lambda)$ par rapport à λ

$$\int_0^{\infty} f_n(x; \lambda^1) dG^2(x) \leq \int_0^{\infty} f_n(x; \lambda^2) dG^2(x), \quad (4.3)$$

par conséquent, (4.1) découle de (4.2) et (4.3).

La condition 2. se démontre exactement de la même manière.

Lemme 4.5.2. [66]

1. Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $G^{(1)} \leq_v G^{(2)}$, alors $\{g_n^{(1)}\} \leq_v \{g_n^{(2)}\}$.
2. Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $H^{(1)} \leq_v H^{(2)}$, alors $\{h_n^{(1)}\} \leq_v \{h_n^{(2)}\}$.

Preuve : Montrons la condition 1.

Par définition : $\{g_n^{(1)}\} \leq_v \{g_n^{(2)}\} \iff \bar{g}_m^1 = \sum_{n=m}^{\infty} \bar{g}_n^1 \leq \bar{g}_m^2 = \sum_{n=m}^{\infty} \bar{g}_n^2 \iff$

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} f_m(x; \lambda^1) dG^1(x) \leq \int_0^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} f_m(x; \lambda^2) dG^2(x). \quad (4.4)$$

La fonction $\bar{f}_m(x; \lambda) = \sum_{n=m}^{\infty} f_n(x; \lambda)$ est croissante en λ (puisque chaque $f_n(x; \lambda)$ l'est.) et croissante et convexe en x . En effet :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} \bar{f}_m(x; \lambda) = \lambda^2 e^{-(\lambda x)} \frac{(\lambda x)^{m-2}}{(m-2)!} > 0\right)$$

En vertu de la proposition 4.4.2

$$\int_0^{\infty} \bar{f}_m(x; \lambda^1) dG^1(x) \leq \int_0^{\infty} \bar{f}_m(x; \lambda^1) dG^2(x). \quad (4.5)$$

et d'après la monotonie par rapport à λ

$$\int_0^{\infty} \bar{f}_m(x; \lambda^1) dG^2(x) \leq \int_0^{\infty} \bar{f}_m(x; \lambda^2) dG^2(x). \quad (4.6)$$

et (4.4) découle de (4.5) et (4.6).

De la même manière, on montre la condition 2.

Lemme 4.5.3. [67]

1. Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $G^{(1)} \leq_L G^{(2)}$, alors $\{g_n^{(1)}\} \leq_L \{g_n^{(2)}\}$.
2. Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $H^{(1)} \leq_L H^{(2)}$, alors $\{h_n^{(1)}\} \leq_L \{h_n^{(2)}\}$.

Preuve : Montrons la condition 1.

Par définition :

$$\{g_n^{(1)}\} \leq_L \{g_n^{(2)}\} \iff \tilde{G}^1(\lambda^1(1-z)) \geq \tilde{G}^2(\lambda^2(1-z)). \quad (4.7)$$

Mais $G^{(1)} \leq_L G^{(2)} \Rightarrow \tilde{G}^1(s) \geq \tilde{G}^2(s) \quad \forall s \geq 0$.

En particulier pour $s = \lambda^1(1-z)$, on a

$$\tilde{G}^1(\lambda^1(1-z)) \geq \tilde{G}^2(\lambda^1(1-z)). \quad (4.8)$$

Puisque toute transformée de Laplace est une fonction décroissante

$$\lambda^1 \leq \lambda^2 \Rightarrow \tilde{G}^2(\lambda^1(1-z)) \geq \tilde{G}^2(\lambda^2(1-z)). \quad (4.9)$$

Donc (4.7) découle de (4.8) et (4.9).

De la même manière on montre la condition 2.

4.6 Monotonie de la chaîne de Markov incluse

4.6.1 Cas de pannes passives

Considérons un système $M/G/1$ avec rappels, où le serveur n'est sujet à des pannes que lorsqu'il est libre (pannes passives). Supposons de plus que les pannes ne se produisent que si le système est vide.

Les probabilités de transitions en un pas de la chaîne de Markov incluse pour le système $M/G/1$ avec rappels et pannes passives du serveur sont données par la formule suivante :

$$P_{nm} = \begin{cases} \frac{\eta}{\lambda+\eta}g_m + \frac{\lambda}{\lambda+\eta}K_m, & \text{si } n = 0, \\ \frac{n\theta}{\lambda+n\theta}K_{m-n+1}, & \text{si } m = n-1, n \geq 1, \\ \frac{\lambda}{\lambda+n\theta}K_{m-n} + \frac{n\theta}{\lambda+n\theta}K_{m-n+1}, & \text{si } m \geq n, n \geq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $K_m = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} dF(x)$ (probabilité de m arrivées durant un service)

Soit T l'opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse. Pour chaque distribution $P = (P_n)_{n \geq 0}$, on associe une distribution $T_p = q = (q_m)_{m \geq 0}$ tel que

$$q_m = \sum_{n \geq 0} P_n P_{nm}.$$

Théorème 4.6.1. [68]

Si $G \leq_{st} F$, alors l'opérateur T est monotone, par rapport à l'ordre stochastique (\leq_{st}). i.e
 Pour deux distributions quelconques $P^{(1)}$ et $P^{(2)}$, l'inégalité $P^{(1)} \leq_{st} P^{(2)}$ implique

$$TP^{(1)} \leq_{st} TP^{(2)}.$$

Preuve : L'opérateur T est monotone par rapport à l'ordre stochastique " \leq_{st} " si et seulement si :

$$\bar{P}_{n-1m} \leq \bar{P}_{nm}, \quad \forall n, m \quad (4.10)$$

avec,

$$\begin{aligned} \bar{P}_{nm} &= \sum_{k=m}^{\infty} P_{nk} = \frac{\lambda}{\lambda + n\theta} \bar{K}_{m-n} + \frac{n\theta}{\lambda + n\theta} \bar{K}_{m-n+1} \\ &= \bar{K}_{m-n} - \frac{n\theta}{\lambda + n\theta} K_{m-n} \\ &= \bar{K}_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\theta} K_{m-n}, \end{aligned}$$

et

$$\bar{P}_{n-1m} = \bar{K}_{m-n+1} - \frac{n\theta}{\lambda + n\theta} K_{m-n+1}.$$

Dans le cas où $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \bar{P}_{nm} - \bar{P}_{n-1m} &= \bar{K}_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\theta} K_{m-n} - \bar{K}_{m-n+1} + \frac{n\theta}{\lambda + n\theta} K_{m-n+1} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + n\theta} K_{m-n} + \frac{n\theta}{\lambda + n\theta} K_{m-n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent l'inégalité (4.10) est vérifiée pour tout $n \geq 2$.

Étudions le cas $n = 1$. Ce qui entraîne l'étude de l'inégalité

$$\bar{P}_{0m} \leq \bar{P}_{1m}. \quad (4.11)$$

On a

$$\bar{P}_{0m} = \frac{\eta}{\lambda + \eta} \bar{g}_m + \frac{\lambda}{\lambda + \eta} \bar{K}_m,$$

et

$$\bar{P}_{1m} = \frac{\lambda}{\lambda + \theta} K_{m-1} + \bar{K}_m.$$

D'où

$$\bar{P}_{1m} - \bar{P}_{0m} = \bar{K}_m - \frac{\lambda}{\lambda + \eta} \bar{K}_m - \frac{\eta}{\lambda + \eta} \bar{g}_m + \frac{\lambda}{\lambda + \theta} K_{m-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\eta}{\lambda + \eta} \bar{K}_m - \frac{\eta}{\lambda + \eta} \bar{g}_m + \frac{\lambda}{\lambda + \theta} K_{m-1} \\
&= \frac{\eta}{\lambda + \eta} (\bar{K}_m - \bar{g}_m) + \frac{\lambda}{\lambda + \theta} K_{m-1}.
\end{aligned}$$

Il est clair que si $\bar{g}_m \leq \bar{K}_m$ alors, on a $\bar{P}_{0m} \leq \bar{P}_{1m}$. Or,

$$\bar{g}_m \leq \bar{K}_m \iff \sum_{n=m}^{\infty} g_n \leq \sum_{n=m}^{\infty} K_n,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\bar{g}_m \leq \bar{K}_m &\iff \sum_{n=m}^{\infty} g_n = \int_0^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} dG(x) \leq \sum_{n=m}^{\infty} K_n = \int_0^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} dF(x) \\
&\iff \int_0^{\infty} f_m(x, \lambda) dG(x) \leq \int_0^{\infty} f_m(x, \lambda) dF(x).
\end{aligned}$$

La fonction f_m est croissante en x et on a par hypothèse $G \leq_{st} F$ alors, en vertu de la proposition 4.4.1, l'inégalité (4.11) est vérifiée.

Par conséquent, l'opérateur T est monotone, par rapport à l'ordre stochastique.

En particulier, si les deux distributions G et F possèdent la même loi de probabilité i.e. $G =_{st} F$, alors l'opérateur T est monotone.

Théorème 4.6.2. *Si $F \leq_v G$, alors l'opérateur T est monotone, par rapport à l'ordre convexe (\leq_v). i.e*

Pour deux distributions quelconques $P^{(1)}$ et $P^{(2)}$, l'inégalité $P^{(1)} \leq_v P^{(2)}$ implique

$$TP^{(1)} \leq_v TP^{(2)}.$$

Preuve : L'opérateur T est monotone par rapport à l'ordre convexe " \leq_v " si et seulement si :

$$2\bar{\bar{P}}_{nm} \leq \bar{\bar{P}}_{n-1m} + \bar{\bar{P}}_{n+1m} \quad \forall n, m \quad (4.12)$$

avec,

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{P}}_{nm} &= \sum_{k=m}^{\infty} \bar{P}_{nk} = \frac{\lambda}{\lambda + n\theta} \bar{K}_{m-n} + \frac{n\theta}{\lambda + n\theta} \bar{K}_{m-n+1} \\
&= \bar{K}_{m-n} - \frac{n\theta}{\lambda + n\theta} \bar{K}_{m-n} \\
&= \bar{K}_{m-n} + \bar{K}_{m-n+1} - \frac{n\theta}{\lambda + n\theta} \bar{K}_{m-n} \\
&= \bar{K}_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + n\theta} \bar{K}_{m-n}.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\bar{P}_{n-1m} + \bar{P}_{n+1m} - 2\bar{P}_{nm} &= \bar{K}_{m-n+1} - \frac{(n-1)\theta}{\lambda + (n-1)\theta} \bar{K}_{m-n+1} \\
&\quad + \bar{K}_{m-n} + \frac{\lambda}{\lambda + (n+1)\theta} \bar{K}_{m-n-1} \\
&\quad - \bar{K}_{m-n} + \frac{n\theta}{\lambda + n\theta} \bar{K}_{m-n} - \bar{K}_{m-n+1} - \frac{\lambda}{\lambda + n\theta} \bar{K}_{m-n} \\
&= \bar{K}_{m-n} \left\{ -\frac{(n-1)\theta}{\lambda + (n-1)\theta} + \frac{n\theta}{\lambda + n\theta} + \frac{\lambda}{\lambda + (n+1)\theta} - \frac{\lambda}{\lambda + n\theta} \right\} \\
&\quad + \frac{(n-1)\theta}{\lambda + (n-1)\theta} \bar{K}_{m-n} + \frac{\lambda}{\lambda + (n+1)\theta} \bar{K}_{m-n-1} \\
&= \bar{K}_{m-n} \frac{2\lambda\theta^2}{(\lambda + (n-1)\theta)(\lambda + n\theta)(\lambda + (n+1)\theta)} + \frac{(n-1)\theta}{\lambda + (n-1)\theta} \bar{K}_{m-n} + \frac{\lambda}{\lambda + (n+1)\theta} \bar{K}_{m-n-1} \geq 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité (4.12) est vérifiée pour $n \geq 2$.

Montrons maintenant l'inégalité (4.12) pour $n = 1$.

On a

$$\begin{aligned}
&\bar{P}_{0m} + \bar{P}_{2m} - 2\bar{P}_{1m} \\
&= \frac{\eta}{\lambda + \eta} \bar{g}_m + \frac{\lambda}{\lambda + \eta} \bar{K}_m \\
&\quad + \frac{\lambda}{\lambda + 2\theta} \bar{K}_{m-2} + \bar{K}_{m-1} \\
&\quad + \frac{\theta}{\lambda + \theta} \bar{K}_{m-1} - \bar{K}_{m-1} - \bar{K}_m - \frac{\lambda}{\lambda + \theta} \bar{K}_{m-1} \\
&= \frac{\eta}{\lambda + \eta} \bar{g}_m + \frac{\lambda}{\lambda + \eta} \bar{K}_m + \frac{\lambda}{\lambda + 2\theta} (\bar{K}_{m-1} + \bar{K}_{m-2}) + \frac{\theta}{\lambda + \theta} \bar{K}_{m-1} - \bar{K}_m - \frac{\lambda}{\lambda + \theta} \bar{K}_{m-1} \\
&= \frac{\eta}{\lambda + \eta} \{ \bar{g}_m - \bar{K}_m \} + \bar{K}_{m-1} \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + 2\theta} + \frac{\theta}{\lambda + \theta} - \frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right\} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\theta} \bar{K}_{m-2} = \\
&\quad \frac{\eta}{\lambda + \eta} \{ \bar{g}_m - \bar{K}_m \} + \bar{K}_{m-1} \left\{ \frac{2\theta^2}{(\lambda + 2\theta)(\lambda + \theta)} \right\} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\theta} \bar{K}_{m-2}. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Il est clair que si $\bar{g}_m - \bar{K}_m \geq 0$ alors, on a (4.13) est ≥ 0 . Or

$$\bar{g}_m \geq \bar{K}_m \iff \int_0^\infty \sum_{n=m}^\infty \sum_{k=n}^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dG(x) \geq \int_0^\infty \sum_{n=m}^\infty \sum_{k=n}^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dF(x)$$

ce qui est équivalent à

$$\int_0^\infty \bar{f}_m(\lambda; x) dG(x) \geq \int_0^\infty \bar{f}_m(\lambda; x) dF(x)$$

On a (cf. preuve du lemme 4.5.2) la fonction $\bar{f}_m(\lambda; x)$ est croissante et convexe en x .

En vertu de la proposition 4.4.2

$$F \leq_v G \iff \bar{g}_m \geq \bar{K}_m,$$

d'où l'inégalité (4.12) en découle pour $n = 1$.

Par conséquent l'opérateur T est monotone par rapport à l'ordre convexe.

En particulier, si $G =_v F$, alors l'opérateur T est monotone.

Considérons maintenant Σ_1 et Σ_2 deux systèmes de files d'attente $M/G/1$ avec rappels et pannes passives de paramètres $\lambda^1, \theta^1, \eta^1, F^1(x), G^1(x)$ et $\lambda^2, \theta^2, \eta^2, F^2(x), G^2(x)$ respectivement. Notons par T^1, T^2 les opérateurs de transition associés aux chaînes de Markov incluses correspondantes.

Théorème 4.6.3. *Si*

$$\lambda^1 \leq \lambda^2, \quad \theta^1 \geq \theta^2, \quad \eta^1 \geq \eta^2, \quad F^1 \leq_{st} F^2, \quad G^1 \leq_{st} G^2 \quad \text{alors,} \quad T^1 \leq_{st} T^2,$$

i.e. pour une distribution quelconque P on a $T^1 P \leq_{st} T^2 P$.

Preuve : D'après la proposition 4.4.3, montrer $T^1 \leq_{st} T^2$, revient à montrer que :

$$\bar{P}_{nm}^1 \leq \bar{P}_{nm}^2, \quad \forall n \geq 1, \tag{4.14}$$

et

$$\bar{P}_{0m}^1 \leq \bar{P}_{0m}^2. \tag{4.15}$$

Or l'inégalité (4.14) $\iff \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + n\theta^1} \bar{K}_{m-n}^1 + \frac{n\theta^1}{\lambda^1 + n\theta^1} \bar{K}_{m-n+1}^1 \leq \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \bar{K}_{m-n}^2 + \frac{n\theta^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \bar{K}_{m-n+1}^2$.

D'une part, $F^1 \leq_{st} F^2 \implies \bar{K}_m^1 \leq \bar{K}_m^2, \quad \forall m$.

D'autre part, $\lambda^1 \leq \lambda^2$ et $\theta^1 \geq \theta^2$, impliquent $\frac{\lambda^1}{\theta^1} \leq \frac{\lambda^2}{\theta^2}$.

Alors, comme la fonction : $x \rightarrow \frac{x}{x+n}$ est croissante par rapport à x , on a

$\frac{\lambda^1}{\lambda^1 + n\theta^1} \leq \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + n\theta^2}$. Par la suite,

$$\begin{aligned} \bar{P}_{nm}^1 &= \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + n\theta^1} \bar{K}_{m-n}^1 + \frac{n\theta^1}{\lambda^1 + n\theta^1} \bar{K}_{m-n+1}^1 \\ &= \bar{K}_{m-n+1}^1 + \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + n\theta^1} \bar{K}_{m-n}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \overline{K}_{m-n+1}^1 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \overline{K}_{m-n}^1 \\
&= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \overline{K}_{m-n}^1 + \frac{n\theta^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \overline{K}_{m-n+1}^1 \\
&\leq \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \overline{K}_{m-n}^2 + \frac{n\theta^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \overline{K}_{m-n+1}^2 \\
&= \overline{P}_{nm}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (4.14) est vérifiée.

L'inégalité (4.15), est équivalente à $\frac{\eta^1}{\lambda^1 + \eta^1} \overline{g}_m^1 + \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + \eta^1} \overline{K}_m^1 \leq \frac{\eta^2}{\lambda^2 + \eta^2} \overline{g}_m^2 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \eta^2} \overline{K}_m^2$.

On a :

$\overline{g}_m^1 \leq \overline{g}_m^2$ et $\overline{K}_m^1 \leq \overline{K}_m^2$ (cf. lemme 4.5.1)

$\lambda^1 \leq \lambda^2$ et $\eta^1 \geq \eta^2$ impliquent,

$$\begin{aligned}
\overline{P}_{0m}^1 &= \frac{\eta^1}{\lambda^1 + \eta^1} \overline{g}_m^1 + \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + \eta^1} \overline{K}_m^1 \\
&\leq \frac{\eta^2}{\lambda^2 + \eta^2} \overline{g}_m^2 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \eta^2} \overline{K}_m^2 \\
&= \overline{P}_{0m}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (4.15) est vérifiée.

Théorème 4.6.4. *Si*

$\lambda^1 \leq \lambda^2$, $\theta^1 \geq \theta^2$, $\eta^1 \geq \eta^2$, $F^1 \leq_v F^2$, $G^1 \leq_v G^2$ alors, $T^1 \leq_v T^2$,

i.e. pour une distribution quelconque P on a $T^1 P \leq_v T^2 P$.

Preuve : D'après la proposition 4.4.3, prouver $T^1 \leq_v T^2$, revient à vérifier les inégalités numériques suivantes :

$$\overline{\overline{P}}_{nm}^1 \leq \overline{\overline{P}}_{nm}^2, \quad \forall n \geq 1, \quad (4.16)$$

$$\overline{\overline{P}}_{0m}^1 \leq \overline{\overline{P}}_{0m}^2. \quad (4.17)$$

Or l'inégalité (4.16) $\iff \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + n\theta^1} \overline{\overline{K}}_{m-n}^1 + \frac{n\theta^1}{\lambda^1 + n\theta^1} \overline{\overline{K}}_{m-n+1}^1 \leq \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \overline{\overline{K}}_{m-n}^2 + \frac{n\theta^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \overline{\overline{K}}_{m-n+1}^2$.

D'une part, $F^1 \leq_v F^2 \Rightarrow \overline{\overline{K}}_m^1 \leq \overline{\overline{K}}_m^2, \quad \forall m$

D'autre part,

$$\overline{\overline{P}}_{nm}^1 = \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + n\theta^1} \overline{\overline{K}}_{m-n}^1 + \frac{n\theta^1}{\lambda^1 + n\theta^1} \overline{\overline{K}}_{m-n+1}^1$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{\overline{K}}_{m-n+1}^1 + \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + n\theta^1} \overline{\overline{K}}_{m-n}^1 \\
&\leq \overline{\overline{K}}_{m-n+1}^1 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \overline{\overline{K}}_{m-n}^1 \\
&= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \overline{\overline{K}}_{m-n}^1 + \frac{n\theta^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \overline{\overline{K}}_{m-n+1}^1 \\
&\leq \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \overline{\overline{K}}_{m-n}^2 + \frac{n\theta^2}{\lambda^2 + n\theta^2} \overline{\overline{K}}_{m-n+1}^2 \\
&= \overline{\overline{P}}_{nm}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (4.16) est vérifiée.

$$\text{l'inégalité (4.17)} \iff \frac{\eta^1}{\lambda^1 + \eta^1} \overline{\overline{g}}_m^1 + \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + \eta^1} \overline{\overline{K}}_m^1 \leq \frac{\eta^2}{\lambda^2 + \eta^2} \overline{\overline{g}}_m^2 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \eta^2} \overline{\overline{K}}_m^2$$

Ainsi, l'inégalité (4.17) se déduit du lemme 4.5.3 et de la preuve du théorème 4.6.3 (inégalité (4.15)).

4.6.2 Cas de pannes actives

Considérons un système $M/G/1$ avec rappels non fiable où, le serveur ne tombe en panne que lorsqu'il est occupé (panne active). Le client interrompu, quitte la zone de service pour rappeler ultérieurement ou quitte définitivement le système. Dans ce cas, la durée de service peut être remplacée par une durée appelée durée de complétion, qui est l'intervalle de temps (I, I') , où I est la date où un client commence son service. I' est la date où le serveur est apte à entamer un nouveau service (qui peut éventuellement être le même client). Notons cette variable aléatoire par ζ de transformée de Laplace $f(s)$.

$f(s)$ est donnée par la formule suivante :

$$f(s) = \tilde{F}(s + \mu) + \frac{\mu \tilde{H}(s)(1 - \tilde{F}(s + \mu))}{s + \mu}.$$

Théorème 4.6.5. *Soit T l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse du système $M/G/1$ avec rappels et pannes actives.*

Si $G \leq_{st} (\geq v)V$ alors, l'opérateur T est monotone, i.e. pour deux distributions P^1, P^2 on a $P^1 \leq_{st} (\leq v)P^2$ implique $TP^1 \leq_{st} (\leq v)TP^2$.

Preuve : Pour la preuve de ce théorème, il suffit d'utiliser le théorème 4.6.2 et de remplacer la durée de service par la durée de complétion.

Théorème 4.6.6. *Si $\lambda^1 \leq \lambda^2$, $\theta^1 \geq \theta^2$, $\mu^1 \geq \mu^2$, $F^1 \leq_{st} F^2$ $H^1 \leq_{st} H^2$ alors, $T^1 \leq_{st} T^2$, i.e. pour une distribution quelconque P , on a $T^1 P \leq_{st} T^2 P$.*

Preuve : En utilisant la proposition 4.2.3 et en remplaçant la durée de service par la durée de complétion, le théorème ci-dessus est vérifié si $\lambda^1 \leq \lambda^2, \theta^1 \geq \theta^2, \zeta^1 \leq_{st} \zeta^2$.

On a $\zeta^1 \leq_{st} \zeta^2 \Rightarrow \zeta^1 \leq_L \zeta^2 \iff f^1(s) \geq f^2(s)$.

Or $f(s) = \tilde{F}(s + \mu) + \frac{\mu \tilde{H}(s)(1 - \tilde{F}(s + \mu))}{s + \mu}$.

D'où, si $\mu^1 \geq \mu^2, F^1 \leq_{st} F^2, H^1 \leq_{st} H^2$ impliquent $f^1(s) \geq f^2(s)$, d'où le résultat.

4.7 Inégalités stochastiques de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système

4.7.1 Cas de pannes passives

Théorème 4.7.1. *OUKID [69]*

Soit $\Sigma^i, i = 1, 2$ un système $M/G/1$ avec rappels et pannes passives, de paramètres $\lambda^i, \theta^i, \eta^i, F^i, G^i$ respectivement et soit π_n^i la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système Σ^i

Si $\lambda^1 \leq \lambda^2, \theta^1 \geq \theta^2, \eta^1 \geq \eta^2, F^1 \leq_{st} F^2, G^1 \leq_{st} G^2, G^2 \leq_{st} F^2$

Alors, on a

$$\{\pi_n^1\} \leq_{st} \{\pi_n^2\}$$

Preuve : Soit T^i l'opérateur de transitions associé à la chaîne de Markov incluse Y_n^i de matrice de transitions P^i .

On sait que la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système coïncide avec celle de la chaîne de Markov incluse associée, i.e.

Si $X(t)$ = nombre de clients dans le système et Y_k la chaîne de Markov incluse associée, alors on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = n\} = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{Y_k = n\} = \pi_n$$

Du théorème 4.6.1, $G^2 \leq_{st} F^2 \Rightarrow T^2$ est monotone.

Du théorème 4.6.3, on a :

$$\lambda^1 \leq \lambda^2, \theta^1 \geq \theta^2, \eta^1 \geq \eta^2, F^1 \leq_{st} F^2, G^1 \leq_{st} G^2 \Rightarrow T^1 \leq_{st} T^2$$

Or T^2 est monotone $\Rightarrow \forall P_1^2, P_2^2$ telles que $P_1^2 \leq_{st} P_2^2$, on a

$$T^2 P_1^2 \leq_{st} T^2 P_2^2 \tag{4.18}$$

$$\text{Et } T^1 \leq_{st} T^2 \Rightarrow \forall P = (P_n), \quad T^1 P \leq_{st} T^2 P \quad (4.19)$$

L'inégalité (4.19) est vérifiée pour toute distribution P , en particulier pour toutes les distributions P^1 d'où

$$T^1 P^1 \leq_{st} T^2 P^1 \quad (4.20)$$

Par conséquent, de (4.18), (4.19), (4.20) et de la proposition 4.4.3, on déduit

$$T^1 P^1 \leq_{st} T^2 P^2 \quad (4.21)$$

L'inégalité (4.21) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$P\{Y_k^1 = n\} = T^1 P_n^1 \leq_{st} T^2 P_n^2 = P\{Y_k^2 = n\}$$

En prenant les limites des deux termes quand k tend vers l'infini,

$$\{\pi_n^1\} = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{Y_k^1 = n\} \leq_{st} \lim_{k \rightarrow \infty} P\{Y_k^2 = n\} = \{\pi_n^2\}.$$

4.7.2 Cas de pannes actives

Théorème 4.7.2. Si $\lambda^1 \leq \lambda^2$, $\theta^1 \geq \theta^2$, $\mu^1 \geq \mu^2$, $F^1 \leq_{st} F^2$, $H^1 \leq_{st} H^2$ alors, $\{\pi_n^1\} \leq_{st} \{\pi_n^2\}$.

Preuve : En utilisant la proposition 4.2.4, la démonstration sera analogue à celle du théorème 4.6.6.

4.8 Illustration numérique et graphique

Dans cette dernière section, nous présentons une illustration numérique et graphique des résultats présentés dans le théorème 4.6.1, afin de montrer la monotonie par rapport à l'ordre stochastique de l'opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse ce qui revient à vérifier que $\forall n, m \quad \bar{P}_{n-1m} \leq \bar{P}_{nm}$.

Nous présentons ensuite une illustration graphique des résultats du théorème 4.6.2 qui donnent la monotonie par rapport à l'ordre convexe de l'opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse ce qui revient à vérifier que $2\bar{P}_{nm} \leq \bar{P}_{n-1m} + \bar{P}_{n+1m}$, $\forall n, m$.

Pour cela, nous considérons un système $M/G/1$ avec rappels et pannes passives où le service et la réparation suivent des distributions arbitraires. Nous avons considéré 3 exemples où $n = \overline{0, 100}$ et $m = \overline{0, 100}$, comme le montrent les figures ci-dessous.

Tableau 4.2 : Suite du tableau 4.1 pour $m = \overline{8, 14}$

n/m	8	9	10	11	12	13	14
0	0.000045	0.000014	0.0000049	0.0000016	0.0000005	0.00000017	0.00000005
1	0.000050	0.000015	0.0000051	0.0000016	0.0000005	0.00000018	0.00000006
2	0.000070	0.000019	0.0000059	0.0000018	0.0000006	0.00000018	0.00000006
3	0.000157	0.000037	0.0000093	0.0000025	0.0000007	0.00000021	0.00000006
4	0.000551	0.000116	0.000025	0.0000056	0.0000013	0.00000034	0.00000009
5	0.002400	0.000485	0.000099	0.000020	0.0000043	0.00000093	0.00000002
6	0.011215	0.002248	0.000451	0.000090	0.000018	0.0000037	0.00000007
7	0.053707	0.010747	0.002151	0.000430	0.000086	0.000017	0.0000034
8	0.260084	0.052022	0.010406	0.002081	0.000416	0.000083	0.000016
9	1	0.253581	0.050718	0.010144	0.002029	0.000405	0.000081
10	1	1	0.248365	0.049673	0.009934	0.001987	0.000397
11	1	1	1	0.244082	0.048816	0.009763	0.001952
12	1	1	1	1	0.240499	0.048100	0.009620
13	1	1	1	1	1	0.237457	0.047491
14	1	1	1	1	1	1	0.234842
15	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1

Nous vérifions dans ces deux tableaux que pour chaque n on a $\overline{P}_{n-1m} \leq \overline{P}_{nm}$.

Illustration graphique : Les figures (Figure 4.1, Figure 4.2) donnent une comparaison des $\bar{P}_{nm} = \sum_{k=m}^{\infty} P_{nk}$ pour différentes valeurs de n

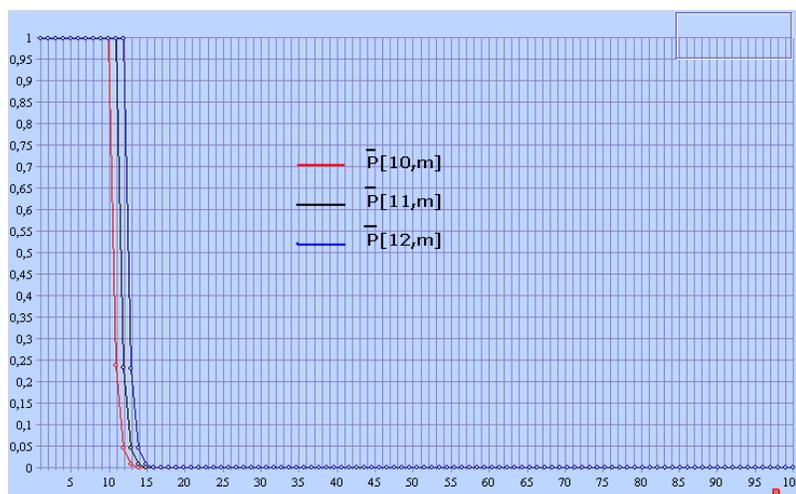


Figure 4.1: Comparaison de \bar{P}_{nm} pour $n = 10, 11, 12$

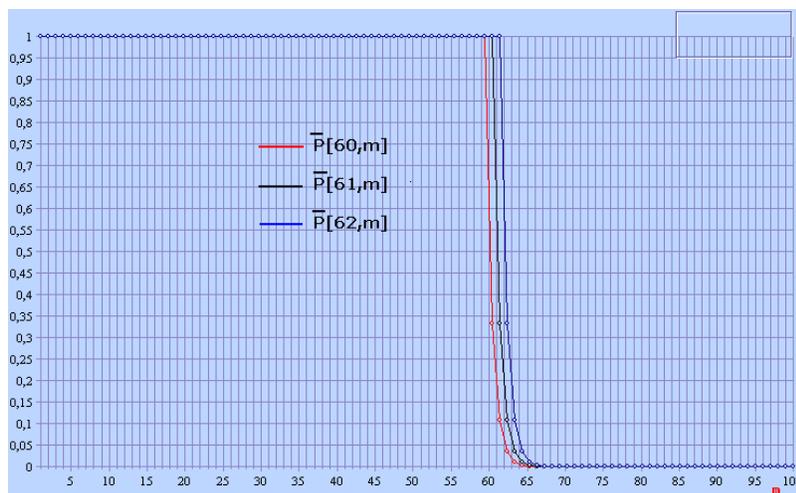


Figure 4.2: Comparaison de \bar{P}_{nm} pour $n = 60, 61, 62$

Exemple 2 : Dans cet exemple, pour un système $M/G/1$ avec rappels et pannes passives du serveur, nous considérons que le temps de service est exponentiel de taux 3 et la durée de réparation suit la distribution de Cox de taux = 1 avec une probabilité égale à 0.5 et de taux = 2 avec une probabilité égale à 0.5 et $\lambda = \eta = \theta = 1$.

Dans les tableaux (Tableau 4.3, Tableau 4.4), nous donnons \bar{P}_{nm} pour différentes valeurs de n et m .

Tableau 4.3 : Illustration du théorème 4.6.1 (2)

n / m	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0.458333	0.253472	0.155960	0.100718	0.066331	0.044017
1	1	0.927083	0.370659	0.185257	0.108042	0.068162	0.044475
2	1	1	0.745659	0.279007	0.131480	0.074022	0.045940
3	1	1	1	0.607132	0.213511	0.094530	0.051067
4	1	1	1	1	0.513561	0.169530	0.069817
5	1	1	1	1	1	0.450780	0.140129
6	1	1	1	1	1	1	0.407987
7	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1

Tableau 4.4 : Suite du tableau 4.3 pour $m = \overline{7, 13}$

n/m	7	8	9	10	11	12	13
0	0.029294	0.019516	0.013008	0.008671	0.005780	0.0038537	0.0025690
1	0.029408	0.019545	0.013015	0.008673	0.005781	0.0038538	0.0025691
2	0.029775	0.019637	0.013038	0.008678	0.005782	0.003854	0.0025692
3	0.031056	0.019957	0.013118	0.008698	0.005787	0.003855	0.0025695
4	0.035744	0.021129	0.013411	0.008772	0.005805	0.003860	0.0025706
5	0.053322	0.025523	0.014509	0.009046	0.005874	0.003877	0.0025749
6	0.120286	0.042264	0.018695	0.010092	0.006136	0.003942	0.0025913
7	0.378099	0.106718	0.034808	0.014121	0.007143	0.004194	0.002654
8	1	0.356718	0.097308	0.029746	0.011049	0.005170	0.002898
9	1	1	0.341058	0.090683	0.026283	0.008979	0.003850
10	1	1	1	0.329320	0.085942	0.023894	0.007579
11	1	1	1	1	0.320317	0.082488	0.022227
12	1	1	1	1	1	0.313257	0.079920
13	1	1	1	1	1	1	0.307598
14	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1

Nous remarquons que pour chaque n , la condition de la monotonie par rapport à l'ordre stochastique de l'opérateur de transition associé de la chaîne de Markov incluse

est vérifiée i.e. $\overline{P}_{n-1m} \leq \overline{P}_{nm}$.

Illustration graphique : Nous illustrons cet exemple par les figures suivantes :

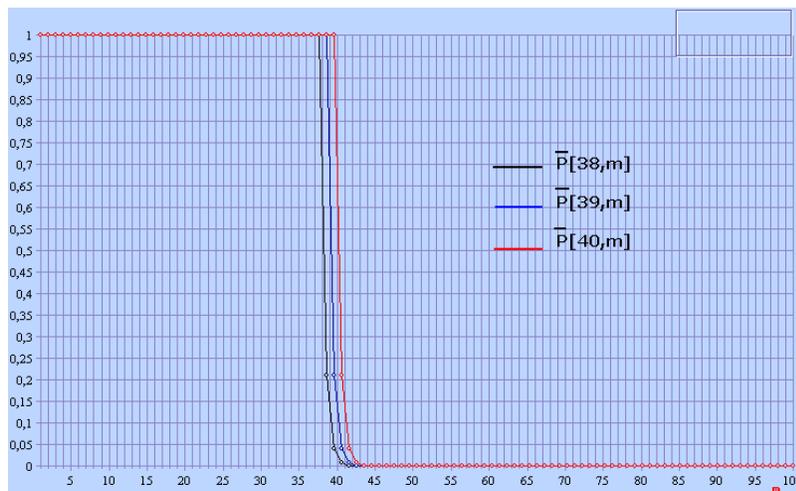


Figure 4.3: Comparaison de $\bar{P}_{nm} = \sum_{k=m}^{\infty} P_{nk}$ pour $n = 38, 39, 40$

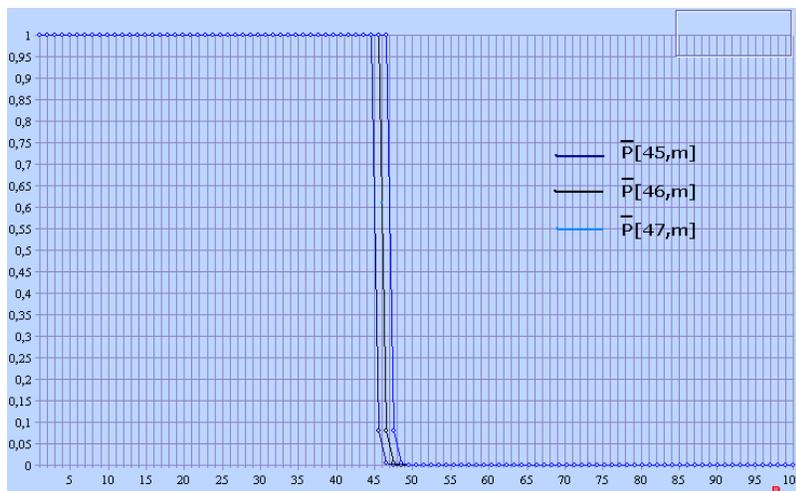


Figure 4.4: Comparaison de \bar{P}_{nm} pour $n = 45, 46, 47$

Tableau 4.6 : Suite du tableau 4.5 pour $m = \overline{8, 13}$

n/m	8	9	10	11	12	13
0	0.0000022	0.0000004	0.00000007	0.000000013	0.000000002	0.0000000004
1	0.0000043	0.0000007	0.00000011	0.000000018	0.000000003	0.0000000005
2	0.000016	0.0000023	0.00000034	0.000000051	0.000000007	0.000000001
3	0.000084	0.000012	0.0000017	0.00000024	0.000000035	0.000000004
4	0.000489	0.000072	0.000015	0.0000014	0.00000021	0.000000029
5	0.002865	0.000439	0.000065	0.0000094	0.0000013	0.00000018
6	0.016324	0.002636	0.000403	0.000059	0.0000086	0.0000012
7	0.086772	0.015263	0.002460	0.000376	0.000055	0.0000080
8	0.393022	0.082255	0.014422	0.0023205	0.000354	0.000052
9	1	0.378065	0.078587	0.013739	0.002206	0.000337
10	1	1	0.365696	0.075547	0.013172	0.002112
11	1	1	1	0.355295	0.072987	0.012695
12	1	1	1	1	0.346424	0.070800
13	1	1	1	1	1	0.338769
14	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1

Nous vérifions dans ces deux tableaux, pour chaque n , $\overline{P}_{n-1m} \leq \overline{P}_{nm}$.

Illustration graphique : Les figures ci-dessous donnent une comparaison de \bar{P}_{nm} pour différentes valeurs de n

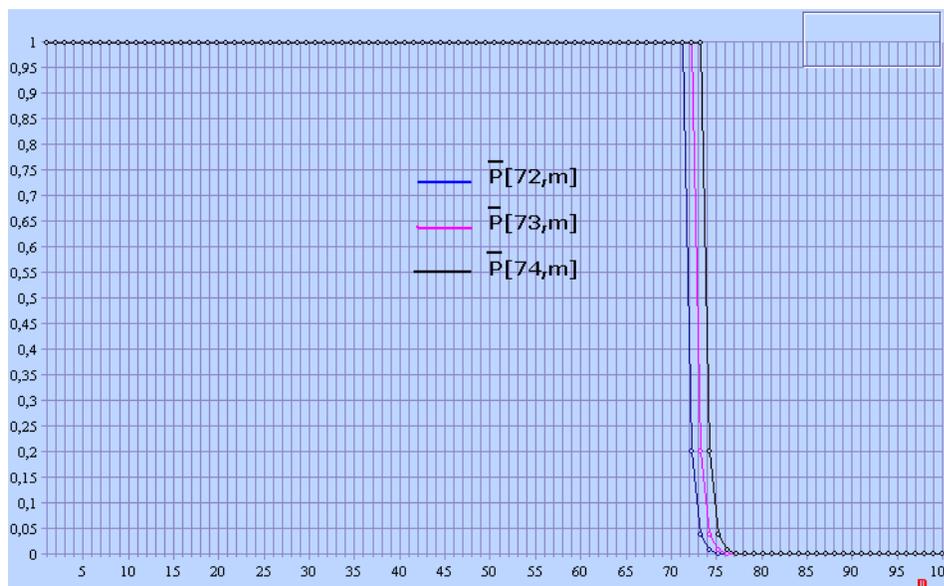


Figure 4.5: Comparaison de \bar{P}_{nm} pour $n = 72, 73, 74$

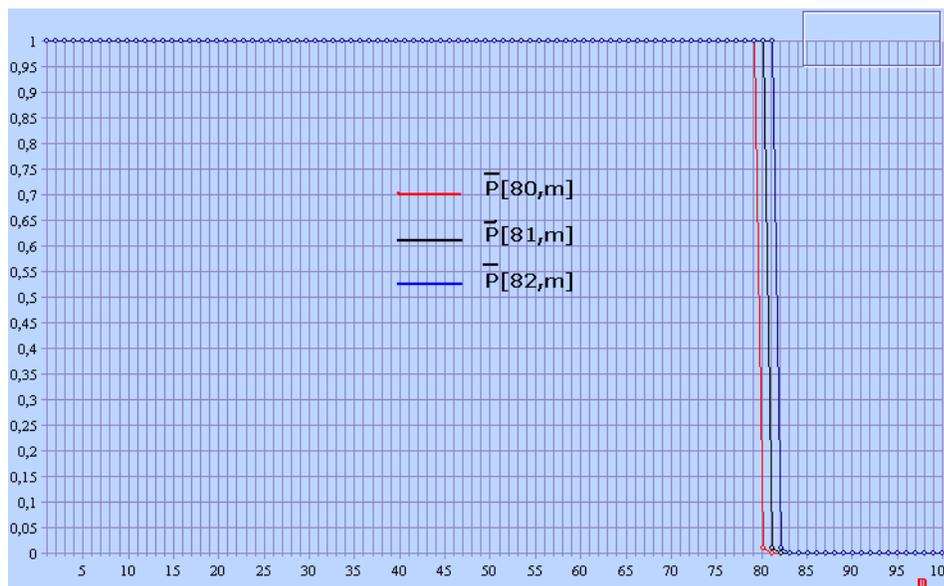


Figure 4.6: Comparaison de \bar{P}_{nm} pour $n = 80, 81, 82$

Illustration graphique de la monotonie par rapport à l'ordre convexe de l'opérateur de transition : Dans ce qui suit, nous illustrons les résultats du théorème 4.6.2 concernant la monotonie par rapport à l'ordre convexe de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse, i.e. nous vérifions que $2\bar{\bar{P}}_{nm} \leq \bar{\bar{P}}_{n-1m} + \bar{\bar{P}}_{n+1m}, \quad \forall n, m.$

Considérons les exemples précédents,

Pour l'exemple 1, nous posons $n = 4$ et nous montrons par la figure 4.7 que $2\bar{\bar{P}}_{4m} \leq \bar{\bar{P}}_{3m} + \bar{\bar{P}}_{5m}, \quad \forall m.$

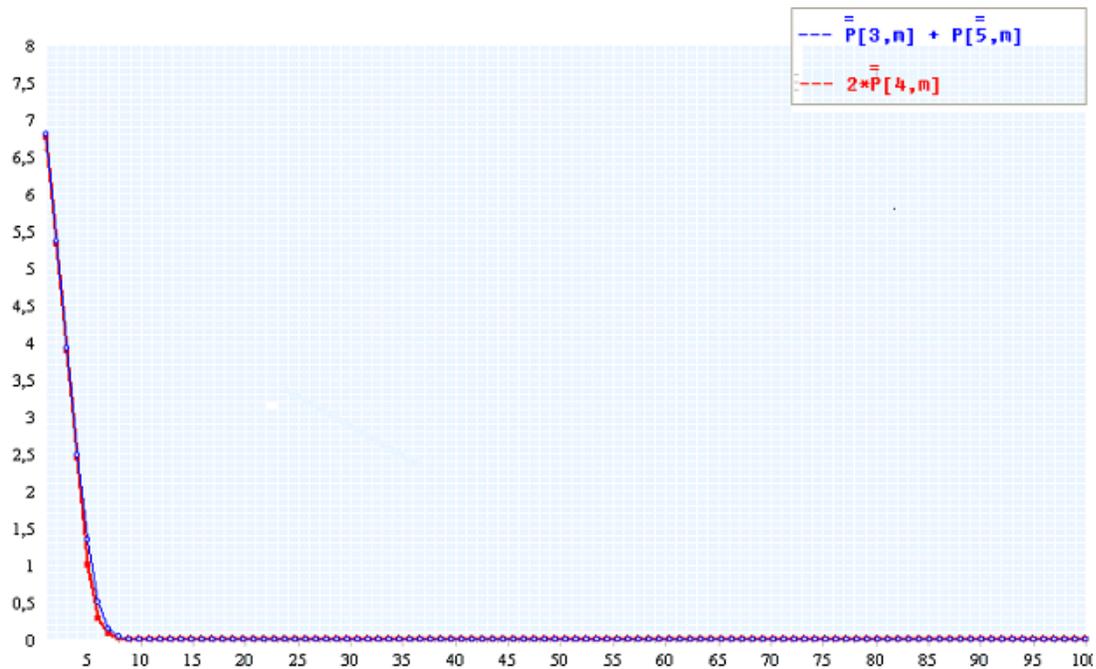


Figure 4.7: Comparaison de $2\bar{\bar{P}}_{nm}$ et $\bar{\bar{P}}_{n-1m} + \bar{\bar{P}}_{n+1m}$, pour $n = 4$.

Pour l'exemple 2, nous posons $n = 75$ et nous montrons par la figure 4.8 que $2\bar{P}_{75m} \leq \bar{P}_{74m} + \bar{P}_{76m}, \quad \forall m.$

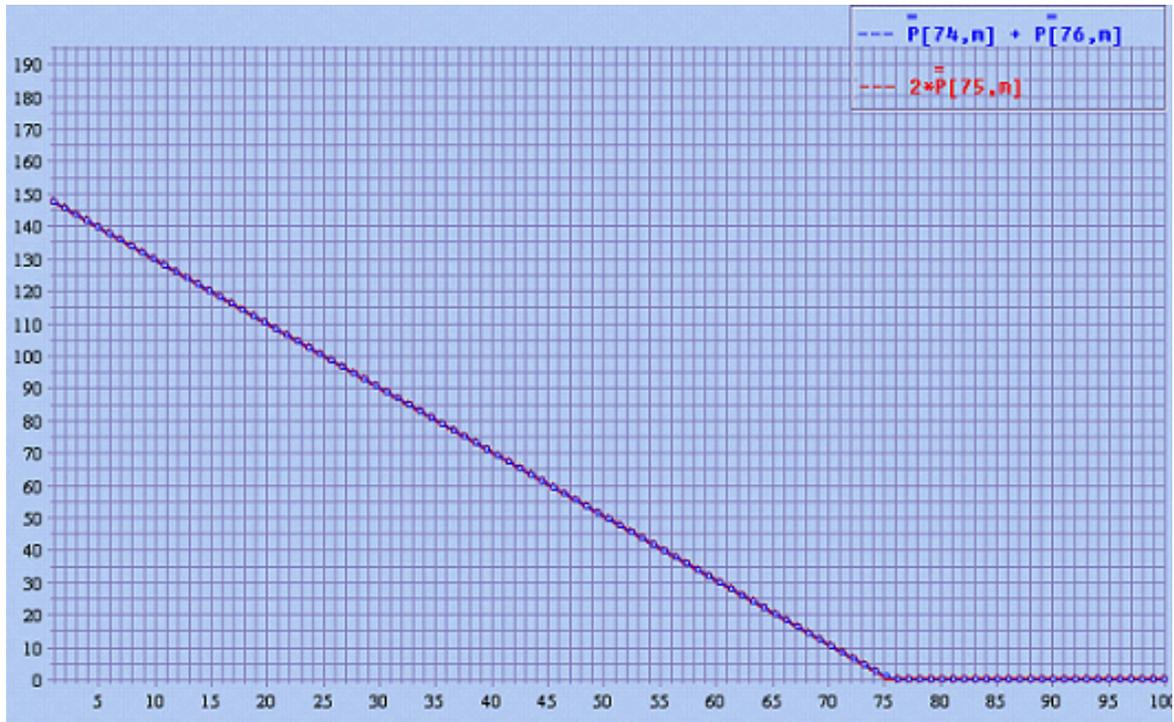


Figure 4.8: Comparaison de $2\bar{P}_{nm}$ et $\bar{P}_{n-1m} + \bar{P}_{n+1m}$ pour $n = 75$

Pour l'exemple 3, nous posons $n = 97$ et nous montrons par la figure 4.9 que

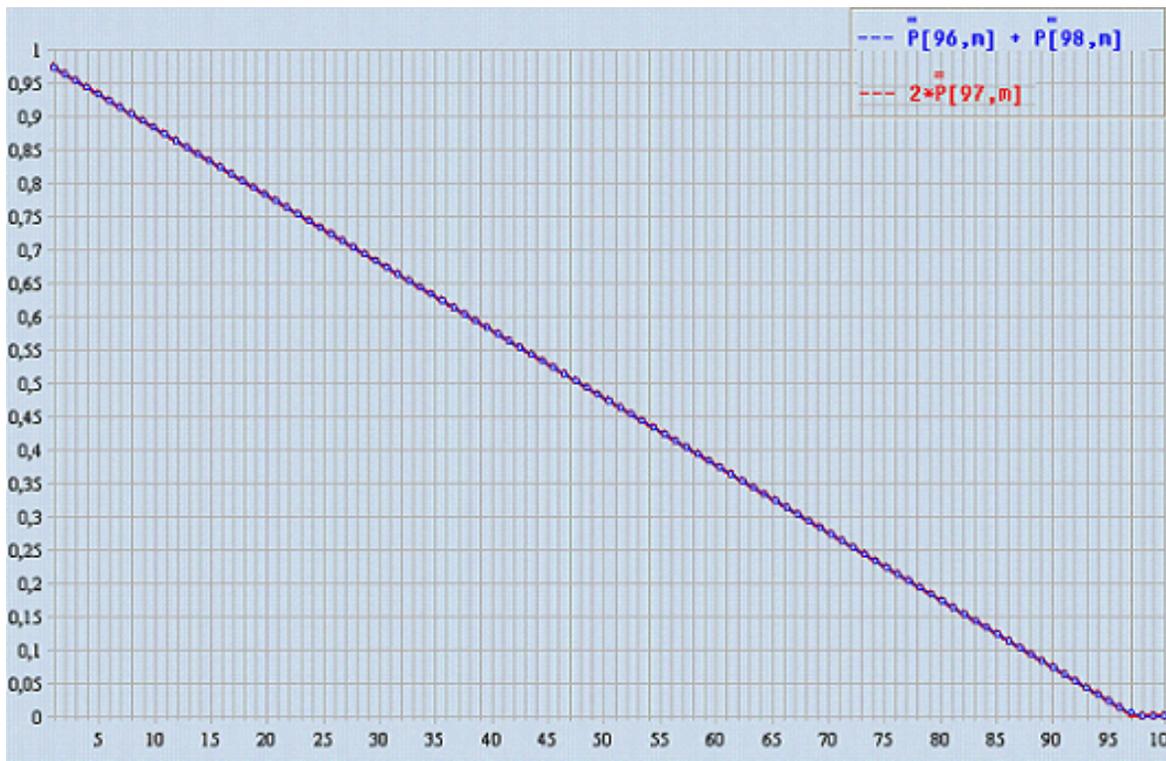
$$2\overline{\overline{P}}_{97m} \leq \overline{\overline{P}}_{96m} + \overline{\overline{P}}_{98m}, \quad \forall m.$$


Figure 4.9: Comparaison de $2\overline{\overline{P}}_{nm}$ et $\overline{\overline{P}}_{n-1m} + \overline{\overline{P}}_{n+1m}$, pour $n = 97$

4.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré le système $M/G/1$ avec rappels et serveur non fiable. Dans un premier temps, nous avons établi des inégalités stochastiques, suivant les ordres : stochastique, convexe et Laplace, permettant des estimations qualitatives de certains indices de performance de ce système. Ensuite, nous avons étudié la monotonie de sa chaîne de Markov incluse et nous avons obtenu des conditions sur les distributions paramétriques (d'arrivées, de service, de panne et de réparation) pour que les opérateurs de transition de deux systèmes $M/G/1$ avec rappels et pannes soient comparables stochastiquement et au sens de l'ordre convexe.

Nous donnons également des conditions similaires pour la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système.

Enfin, des illustrations numériques et graphiques sont données à l'aide d'un logiciel que nous avons conçu.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Cette étude met en évidence l'intérêt et les applications des méthodes de comparaisons stochastiques pour l'analyse des files d'attente avec rappels et lorsque le serveur est sujet à des pannes aléatoires.

Des estimations par minoration et majoration ont été obtenues pour la période d'activité d'un système avec rappels non fiable.

Nous avons obtenu des conditions de comparabilité des modèles $M/G/1$ avec rappels et serveur non fiable, qui est sujet à des pannes aléatoires qui peuvent se produire aussi bien lorsqu'il est libre que lorsqu'il est actif. Nous avons obtenu également les conditions sous lesquelles l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse est monotone ainsi que la comparaison stochastique des distributions du nombre de clients dans le système. Et enfin pour illustrer les résultats obtenus dans le chapitre 4, nous avons conçu un logiciel qui donne une illustration numérique et graphique de la monotonie de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse sous les conditions données.

Les résultats obtenus dans cette thèse, permettent d'envisager de nouvelles perspectives de recherche :

1. Extension des bornes obtenus dans le chapitre 3 à des systèmes $G/G/1$ qui est plus complexe.
2. Extension des résultats obtenus dans le chapitre 4 à d'autres mesure de performance et notamment :
 - a) Distribution du nombre de clients servis durant une période d'activité
 - b) Distribution du temps d'attente
3. Utiliser d'autres ordres partiels (concave, en taux de défaillance, en fonction génératrice ...).

REFERENCES

1. Artalejo J.R. and Gomez-Corral A. *Retrial Queueing Systems : A Computational Approach*. Springer, 2008.
2. Kosten L. "On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking", volume 59. *De Ingenieur* (dutch), 1947.
3. Clos C. "an aspect of the dialing behaviour of subscribers and its effect on the trunk plant". *Bell Syst. Tech. J.*, 27 :424–445, 1948.
4. Cohen J.W. "basic problem of telephone and influence of repeated calls". *Telecommunication Review*, 2 :49–100, 1957.
5. Alexandrov A.M. "a queueing system with repeated orders". *Engenneering Cybernetics Review*, 12(3) :1–4, 1974.
6. Yang T. and Templeton J.G.C. "a survey on retrial queues". *Queueing Systems*, 2 :203–233, 1987.
7. Falin G.I. "a survey of retrial queues". *Queueing Systems*, 7 :127– 168, 1990.
8. Aissani A. "a survey on retrial queueing systems". *Journées de Statistiques Appliquées, Alger*, pages 1–11, Avril 1994.
9. Templeton J.G.C. "retrial queues". *Top*, 7 :351–353, 1999.
10. Oukid N. Comparaisons Stochastiques de files d'attente. Master's thesis, Institut de Mathématiques, Université de Blida, juin 1995.
11. Khalil Z. and Falin G.I. "stochastic inequalities for M/G/1 retrial queues". *Operations Research letters*, 16 :285–290, 1994.
12. Hanschke T. "explicite formulas for the characteristics of the M/M/2/2 queue with repeated attempts". *J. Appl. Prob.*, 24 :486–494, 1987.
13. Falin G.I. "single-line repeated orders". *Queueing Systems Optimisation*, 17(5) :649–667, 1986.
14. Falin G.I., Artalejo J.R., and Martin M. "on the single server retrial queue with priority customers". *Queueing Systems*, 14 :439–445, 1993.
15. Artalejo J.R. "new results in retrial queueing systems with breakdown of the server". *Statistica Neerlandica*, 48 :23– 36, 1994.
16. Artalejo J.R. "analysis of an M/G/1 queue with constant repeated attempts and server vacations". *Computers. Ops. Res.*, 24 :493–504, 6 1997.

17. Greenberg B.S. and Wolf R.W. "an upper bound on the performance of queues with returning customers". *J. Appl. Prob.*, 24 :466–475, 1987.
18. Falin G.I. and Fricker G. "on the virtual waiting time in an M/G/1 retrial queue". *J. Appl. Prob.*, 28 :446–460, 1991.
19. Kulkarni V.G. and Liang H.N. "stability condition for a single -server retrial queue". *Adv. Appl. Prob.*, 25 :690–701, 1993.
20. Oukid N. and Aissani A. Comparaisons stochastiques de files d'attente avec rappels et serveur non fiable. *CNP'98, Tizi Ouzou*, pages 281–284, mai 1998.
21. Oukid N. and Aissani A. Inégalités pour m/g/1 avec serveur non fiable et rappels. *Rencontre 2000 des Mathématiciens Algériens, Alger*, Mai 2000.
22. Greenberg B.S. "M/G/1 queueing systems with returning customers". *J. Appl. Prob.*, 26 :152–163, 1989.
23. Keilson J., Cozzolino V.A., and Young H. "a service system with unfiled requests repeated". *Operations Research*, 16 :1126–1137, 1968.
24. Choo Q.H. and Conolly B. "new results in the theory of repeated orders queueing systems". *J. Appl. Prob.*, 16 :631–640, 1979.
25. Artalejo J.R. and Falin G.I. "stochastic decomposition for retrial queues". *Top*, 2(2) :01–14, 1994.
26. Falin G.I. and Artalejo J.R. "a finite source retrial queue". *European Journal of Operational Research*, 108 :409–424, 1998.
27. Artalejo J.R. and Falin G.I. "on the orbit characteristics of the M/G/1 retrial queue". *Naval Research Logistics*, 43 :1147–1161, 1996.
28. Aissani A. "unreliable Queueing with repeated orders". *Microelectronics reliability*, 33(14) :2093– 2106, 1993.
29. Aissani A. "on retrial queues with breakdowns". *Blida Scientific journal*, (1) :7– 13, 1995.
30. Kulkarni V.G. and Choi B.D. "retrial queue with server subject to breakdowns and repairs". *Queueing Systems*, 7 :191– 208, 1990.
31. Aissani A. and Oukid N. "Bounds for the mean busy and idle periods of some unreliable queues". *Journées de Statistiques Appliquées* , Alger, Avril 1994.
32. Wang J. and Cao J. "reliability analysis of the retrial queue with server breakdowns and repairs". *Queueing Systems*, 38 :363–380, 2001.
33. Li J. and Wang J. "an M/G/1 retrial queue with second multi-optional service, feedback and unreliable server". *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B*, 3 :252–262, 2006.

34. Falin G.I. "aggregate arrival of customers in one-line system with repeated calls". *Ukrainian Math. Journal*, 28 :437– 440, 1976.
35. Artalejo J.R. and Atencia I. On the single server retrial queue with batch arrivals. *Sankhya : The andian journal of statistics*, 66 :140–158, 2004.
36. Falin G.I. "functioning under nonsteady conditions of a single-channel system with group arrival of requests and repeated calls". *Ukrainian Math. Journal*, 33(4) :429– 432, 1981.
37. Falin G.I. "calculation of probabilistic of a multi-channel queue with repeated calls". *Vestnik Mosk. Univ. Ser.15 Vyshisl. mat. Cybernet*, 1 :35– 41, 1983.
38. Kulkarni V.G. "expected waiting times in a multiclass batch arrival retrial queue". *Journal of Applied Probability*, 23 :144– 154, 1986.
39. Langaris C. and Moutzoukis E. "a retrial queue with structured batch arrivals priorities and server vacation". *Queueing Systems*, 20 :341–361, 1995.
40. Langaris C. and Moutzoukis E. "a batch arrivals reader -writer queue with retrial writers". *Commun. Statist. Stochastic Models*, 13(3) :523–545, 1997.
41. Choi B.D. and Chang Y. "single sever retrial queues with priority calls". *Mathematical and Computer Modelling*, 30 :7– 32, 1999.
42. Lee Y.W. The M/G/1 feedback retrial queue with two types of customers. *Bull. Korean Math. Soc.*, 42, 2005.
43. Artalejo J.R. "retrial queues with a finite number of sources". *J. Korean Math. Soc.*, 35(3) :503–525, 1998.
44. Yang T. and al. "an approximation method for the M/G/1 retrial queue with general retrial times". *European Journal of Operational Research*, 76 :552–562, 1994.
45. Falin G.I. and Templeton J.G.C. *Retrial Queues*. Chapman and Hall, London, 1997.
46. Müller A. and Stoyan D. *Comparison methods for Stochastic Models and Risks*. General Appl. Prob. & Statis. Willey, 2002.
47. Cai J. and Wu Y. Under some generalized stochastic orders. *J. Appl. Prob.*, 30, 1996.
48. Utkin L.V. and Gurov S.V. *Generalised Ageing Lifetime Distribution Classes*. Department of Computer Science , St. Petersburg Forest Technical Academy, Russia, 1999.
49. Faguioli E. and Pellery F. "new partial ordering and applications". *Naval Research Logistics*, 40 :829– 842, 1993.
50. Barlow R.E. and Proshan F. *Statistical theory of reliability and life lesting*. Holt Rinehart and Winston Inc, New York, 1975.
51. Saidi G. Lois non paramétriques de survie : Classification et applications. Master's thesis, INPS, Ben-Aknoun, 1999.

52. Laggoune R. Analyse du retour d'expérience pour l'optimisation de la maintenance dans une raffinerie de pétrole .cas du compresseur du magnaforming de la raffinerie de skikda. Master's thesis, INHC Boumerdes, novembre 1998.
53. Oukid N. Evaluation de la fiabilité par calcul de bornes. *MFSI 2 , Bordj-el Bahri*, juin 1997.
54. Stoyan D. *Comparison methods for queues and other stochastic models*. Wiley, New York, 1983.
55. Gnedenko B.V., Belyayev YU.K., and Solovyev A.D. *Mathematical methods of Reliability theory*. Academic press. New York, 1969.
56. Aissani A. "on the M/G/1/1 Queueing System with repeated orders and unreliable server". *Journal of technology*, (6) :98– 123, 1988.
57. Aissani A. *Modèles stochastiques de la théorie de fiabilité*. Office des Publications Universitaires, Alger, 1992.
58. Gnedenko B. and Kovalenko I. *Introduction to queueing theory*. Nauka Weiner Bindery, Moscou, 1968.
59. Oukid N. and Aissani A. Estimation de la période d'activité de systèmes avc rappels non fiables. *RAMA III international, Béjaia*, mai 2002.
60. Kotlyar V. "nonstationary bounds of the characterstics of markovian renewal processes in classes of "aging" distribution". *Cybernetics*, (4) :559– 568, 1991.
61. Esary J.D., Marshall A.W., and Proshan F. "shock models and wear processes". *Ann. prob*, 1(4) :627–649, 1973.
62. Oukid N. and Aissani A. On the busy period for queues with breakdowns. *ACOR I , Ouagadougou (Burkina-Faso)*, Janvier 2003.
63. Aissani A. "influence des pannes des serveurs sur la distribution du nombre de clients en orbite dans un système M/G/1/0 avec rappels". *Technologies avancées*, (2) :23– 28, 1991.
64. Oukid N. and Aissani A. "bounds on busy period for queues with breakdowns". *Advances and Applications in Statistics*, 11 :137–156, 2009.
65. Oukid N. and Aissani A. Bounds on busy period for queues with breakdowns. *9 ième Atelier en Evaluation de performances, France*, 1-4 juin 2008.
66. Oukid N. and Aissani A. Inégalités pour M/G/1 avec serveur non fiable et rappels. *MOAD'2000 Sidi-Bel-Abbes*, octobre 2000.
67. Oukid N. and Aissani A. Inégalités pour M/G/1 avec serveur non fiable et rappels. *Rencontres Francophones de recherche opérationelle (FRANCORO II), Tunisie*, 1998.
68. Oukid N. and Aissani A. On the retrial queues with breakdowns. *Les Annales ROAD, ISOR'08*, (Special issue) :77–88, 2-6 novembre 2008.

69. Oukid N. and Aissani A. Comparaisons stochastiques de files d'attente avec rappels. *Colloque international sur : Méthodes et Outils d'Aide à la Décision, Saida, Novembre 2004.*
70. Aissani A. and Artalejo J.R. On the single server retrial queue subject to breakdowns. *Queueing systems*, 30 :309–321, 1998.