UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

FACULTE DES SCIENCES

Département de mathématiques

THESE DE DOCTORAT

en Mathématiques

Spécialité : Analyse Complexe

Par

F. Zohra ABDESSAMEUD épouse **DEMMAD**

Devant le jury composé de :

F. HANNANE	Professeur, U. de Blida	Président
K. BETINA	Professeur, U.S.T.H.B., Alger	Directeur de thèse
G. ROOS	Professeur, U. Poitiers , France	Co-directeur de thèse
M.S. HACHAICHI	Maître de conférences A, U.S.T.H.B., Alger	Examinateur
A. KESSI	Maître de conférences A, U.S.T.H.B., Alger	Examinateur
M. ROUAKI	Maître de conférences A, U. de Blida	Examinateur

Blida, ….2009.

À mes parents : Yemma et Baba ;

à l'amour de ma vie, Kamel ;

à mes enfants Rym, Nassim et Lina ;

à toute ma famille et à ma belle-famille.

RÉSUMÉ

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine complexe borné, homogène et cerclé, irréductible en tant que domaine symétrique. Soit $N(z,t)$ sa norme générique.

Pour $\mu > 0$ et m entier positif, G. ROOS et W. YIN [**1**] ont introduit une nouvelle classe de domaines dits de *Cartan–Hartogs*

$$\widehat{\Omega}_m\left(\mu\right) = \left\{\left(z, Z\right) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \left\|Z\right\|^2 < N\left(z, z\right)^{\mu}\right\}$$

et

$$\widehat{\Omega}_{m,p}\left(\mu\right) = \left\{\left(z, Z_1, Z_2\right) \in \Omega \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^p, \quad \left\|Z_1\right\|^2 + \left\|Z_1\right\|^{\frac{2}{\mu}} < N\left(z, z\right)\right\}.$$

Le *problème de Lu Qikeng* pour un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ consiste à déterminer si le noyau de Bergman $K_U(z,w)$ de ce domaine peut avoir des zéros. Ce problème a été posé par Lu Qikeng en 1966. Le nom de *conjecture de Lu Qikeng* a été donné (par M. Skwarsczynski en 1969) à l'hypothèse suivant laquelle le noyau de Bergman d'un ouvert n'aurait pas de zéros. Un domaine U sera appelé *domaine de Lu Qikeng* si son noyau de Bergman ne s'annule pas dans $U \times U$.

Nous montrons que le problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan–Hartogs se réduit à un problème algébrique, celui de la localisation des racines d'un polynôme, dit *polynôme représentatif de Bergman* du domaine $\widehat{\Omega}_m\left(\mu\right)$. Nous appliquons ensuite ce résultat pour résoudre le problème de Lu Qikeng pour tout m, et $\mu > 0$ quand le domaine de base est de dimension $d \leq 4$. Nous obtiendrons beaucoup d'exemples de domaines de Lu Qikeng et de domaines qui ne le sont pas.

L'observation de nombreux cas particuliers a amené Guy Roos, en 2004, à conjecturer certaines propriétés des coefficients C_j qui apparaissent dans l'expression du noyau de Bergman des domaines de Cartan–Hartogs. Dans la deuxième partie de cette thèse, nous résolvons une partie de ces conjectures. Les propriétés des coefficients C_j peuvent aider à étudier le noyau de Bergman des domaines de Cartan–Hartogs.

ملخّق

ليكن $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ميدانا مركّبا محدودا، متجانسا و دائريا، غير قابل للاختزال كميدان متناظر. لتكن $N(z,t)$ معياره العام .

ليكن $\mu > 0$ و m عدد طبيعي موجب، في 1998عرّف قي روص (G. Roos) و وايينغ ين (W . Yin) ميادين تسمى ميادين كارتون-أرتوقص (Cartan-Hartogs) بالشكل التالي :

$$\widehat{\Omega}_m\left(\mu\right) = \left\{ (z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N\left(z,z\right)^{\mu} \right\}$$

مسألة لو كي كنغ (Lu Qikeng) بالنسبة لميدان مفتوحU من $\mathbb{C}^n$ تتمثل في دراسة إمكانية وجود جذور لنواة بيرغمان (noyau de Bergman) $K_U(z,w)$ لهذا الميدان.

طرحت هذه المسألة في 1966 من طرف لو كي كنغ (Lu Qikeng) نفسه وسمّيت "ظن لو كي كنغ" (conjecture de Lu Qikeng) من طرف سوارسزنسكي (M. Skwarsczynski) في 1969. إذ أنّ هذا الأخير فرض أن نواة بيرغمان (noyau de Bergman) لميدان مفتوح لا يمكن أن تكون لها جذور.

يقال أن ميدان U من نوع لو كي كنغ (domaine de Lu Qikeng) إذا لم تكن هناك جذور لنواة بارغمان هذا الميدان في $U \times U$.

في الجزء الأول من هذه الرّسالة، نبيّن بأن مسألة لو كي كنغ بالنسبة لميادين كارتون-أرتوقص تختصر إلى مسألة جبرية تتمثّل في تحديد مجال جذور كثير حدود ممثل لنواة بارغمان للميدان$\widehat{\Omega}_m\left(\mu\right)$ ، درجته مساوية لبعد الميدان الأساس Ω .

نستعمل بعدها هذه النتيجة لحلّ مسألة لو كي كنغ لميادين كارتون-أرتوقص لكل $0 < \mu$ وm لمّا يكون بعد الميدان الأساس Ω ، $d \leq 4$. نحصّل على عدد كبير من الميادين من نوع لو كي كنغ و أخرى مخالفة.

بملاحظة عدّة حالات خاصّة، وضع قي روص في 2004 عدة ظنون تخصّ المعاملات C_j التي تظهر في صيغة نواة بارغمان لميادين كارتون-أرتوقص. في الجزء الثانى من هذه الرّسالة، نحلّ بعض هذه الظنون. خاصّيات المعاملات C_j تساعد على دراسة نواة بارغمان لميادين كارتون-أرتوقص.

ABSTRACT

Let Ω be an irreductible bounded circled homogenus symmetric domain in a complex vector space V. Let $N(z,t)$ be its generic norm.

For $\mu > 0$ and m positive integer, G. ROOS and W. YIN [**1**] introduced a new class of domains

$$\widehat{\Omega}_m(\mu) = \left\{(z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N(z,z)^\mu\right\}$$

and

$$\widehat{\Omega}_{m,p}(\mu) = \left\{(z,Z_1,Z_2) \in \Omega \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^p, \quad \|Z_1\|^2 + \|Z_1\|^{\frac{2}{\mu}} < N(z,z)\right\}.$$

These domains are called *Cartan–Hartogs domains* (with *base* Ω, *exponent* μ, *fiber dimension* m) and generalize various complex domains like *complex ellipsoids*.

The *Lu Qikeng problem* for a domain $U \subset \mathbb{C}^n$ consists in deciding whether the Bergman kernel $K_U(z,w)$ of this domain may vanish at some points of $U \times U$. A domain U is called a *Lu Qikeng domain* if its Bergman kernel is zero-free on $U \times U$.

We prove that the Lu Qikeng problem for $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is reduced to the localization of the roots of a polynomial. Applying this result, we solve the Lu Qikeng problem for Cartan–Hartogs domains for all m, $\mu > 0$ when the base is of dimension $d \leq 4$. This provides a lot of examples of Lu Qikeng and no-Lu Qikeng domains.

The observation of many cases lead Guy Roos, in 2004, to conjecture some properties of the coefficients C_j which appear in the expression of the Bergman kernel of Cartan–Hartogs domains. We study these coefficients and get many results.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement les professeurs K. Betina et Guy Roos de m'avoir donné l'opportunité de me lancer dans cette belle aventure mathématique.

Je ne saurais dire à quel point je leur suis reconnaissante, tant pour leur générosité humaine que pour leurs hautes compétences pédagogiques et mathématiques. J'ai énormément bénificié de leur enthousiasme, de leur disponibilité et de la grande liberté qu'ils m'ont accordée. Il ont aussi su me faire confiance et renforcé ma confiance en moi. Merci, chers maîtres, pour tout ce que vous m'avez appris.

Ma reconnaissance va aussi au président de jury F. Hannane professeur à l'université Saad Dahleb de Blida pour son talent, sa gentillesse, son professionnalisme et ses précieuses remarques.

Tous mes remerciements au professeur M. S. Hachaichi pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse. En fait, c'est lui qui m'a fait découvrir l'analyse complexe pendant mes premières années à l'université et c'est grâce à lui que j'ai pu continuer à faire de l'analyse complexe en post-graduation.

Toute ma gratitude aux professeurs A. Kessi et M. Rouaki pour avoir accepté d'être membres du jury de cette thèse, leur lecture et leurs remarques constructives.

Un grand merci à M. M. Bezzina, doyen de la faculté des sciences, à M. Belal, vice doyen chargé de la post-graduation, à M. Blidia professeur au département de mathématiques et président du conseil scientifique de la faculté des sciences pour leur professionnalisme et leur soutien.

Je ne remercierai jamais assez mes parents que j'aime tant et toute ma famille. Je termine mes remerciements en citant mon époux Kamel qui partage ma vie et mes ambitions et qui a su être patient et me soutenir ; mes enfants Rym, Nassim et Lina qui me comblent d'amour.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine complexe borné, homogène et cerclé, irréductible en tant que domaine symétrique. Soit $N(z,t)$ sa norme générique (cf. chapitre I, section 1). À un tel domaine sont associés des *invariants numériques* : les multiplicités a et b et le rang r (section 1). On note

$$d = \dim_{\mathbb{C}} \Omega = r + \frac{r\,(r-1)}{2} a + rb$$

et

$$g = 2 + a\,(r-1) + b$$

le *genre* du domaine Ω.

Pour $\mu > 0$ et m entier positif, G. ROOS et W. YIN [**1**] ont introduit une nouvelle classe de domaines dits de *Cartan-Hartogs*

$$\widehat{\Omega}_m\,(\mu) = \left\{(z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N\,(z,z)^{\mu}\right\}$$

et

$$\widehat{\Omega}_{m,p}\,(\mu) = \left\{(z,Z_1,Z_2) \in \Omega \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^p, \quad \|Z_1\|^2 + \|Z_1\|^{\frac{2}{\mu}} < N\,(z,z)\right\}.$$

Ces domaines généralisent les ellipsoïdes complexes, qui correspondent au cas où Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$. Ils sont en général non homogènes et leur noyau de Bergman ne peut pas être explicité par la méthode de L.K. HUA. Les auteurs ont utilisé le *principe d'inflation* décrit dans [**2**] pour expliciter le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m\,(\mu)$ et $\widehat{\Omega}_{m,p}\,(\mu)$ à partir de celui de $\widehat{\Omega}_1\,(\mu)$ et $\widehat{\Omega}_{1,1}\,(\mu)$. Dans [**1**], les auteurs utilisent la méthode de A. KORÀNYI qui ramène le calcul de l'*intégrale de Hua*

$$\int_{\Omega} N\,(z,z)^s\,\alpha^n$$

à l'*intégrale de Selberg* et montrent que celle-ci s'écrit

$$\int_{\Omega} N\,(z,z)^s\,\alpha^n = \frac{\chi\,(0)}{\chi\,(s)} \mathrm{vol}\,(\Omega)\,,$$

où χ est un polynôme dit *polynôme de Hua*. Ce polynôme s'écrit

(I) $$\chi(s) = \prod_{j=0}^{r} \left(s + 1 + (j-1)\frac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)a},$$

où $(s)_k$ désigne la factorielle croissante

$$(s)_k = s(s+1)\dots(s+k-1).$$

Les entiers a, b et r dans (I) sont les invariants numériques du domaine symétrique borné cerclé Ω et d sa dimension. Pour $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, la décomposition

(II) $$\frac{\chi(k\mu)}{\chi(0)} = \sum_{j=0}^{d} c_j(\mu) \frac{(k+1)_j}{j!}$$

et la fonction rationnelle associée

$$F_{\chi,\mu}(t) = \sum_{j=0}^{d} c_j(\mu) \left(\frac{1}{1-t}\right)^j$$

jouent un rôle important dans le calcul du noyau de Bergman $\widehat{K}_{m,\mu}$ des domaines de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$. En effet celui-ci s'écrit

$$\widehat{K}_{m,\mu}((z,Z),(w,W)) = \frac{1}{m!} \frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} F_\mu^m(\xi),$$

où

$$F_\mu^m(\xi) = \sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j(\mu) \frac{1}{(1-\xi)^{j+m+1}}$$

et

$$\xi((z,Z),(w,W)) = \frac{\langle Z, W\rangle}{N(z,w)^\mu}.$$

On a donc

(III) $$\widehat{K}_{m,\mu}((z,Z),(w,W)) = \frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} \eta^{m+1} P_\mu^m(\eta),$$

où

(IV) $$P_\mu^m(\eta) = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j(\mu) \eta^j$$

et

$$\eta((z,Z),(w,W)) = \frac{1}{1 - \xi((z,Z),(w,W))}.$$

Par référence à l'expression (III), le polynôme P_μ^m est dit *polynôme représentatif du noyau de Bergman* du domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$.

Le chapitre II de cette thèse est consacré au problème de *Lu Qikeng* pour les domaines de Cartan–Hartogs. Le *problème de Lu Qikeng* pour un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ consiste à déterminer si le noyau de Bergman $K_U(z,w)$ de ce domaine peut avoir des zéros. Ce problème a été posé par LU QIKENG en 1966. Le nom de *conjecture de Lu Qikeng* a été donné (par M. SKWARSCZYNSKI en 1969) à l'hypothèse suivant laquelle le noyau de Bergman d'un ouvert n'aurait pas de zéros. Un domaine U sera appelé *domaine de Lu Qikeng* si son noyau de Bergman ne s'annule pas dans $U \times U$. Dans un domaine de Lu Qikeng, il est possible de définir et d'étudier la *fonction représentative de Bergman* et son image appelée *domaine représentatif de Bergman*.

Nous montrons (théorème 6) que le problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan-Hartogs se réduit à la localisation, par rapport à la droite $\left\{\operatorname{Re}\eta = \frac{1}{2}\right\}$, des racines du polynôme P_μ^m défini par l'équation (IV). Nous appliquons ensuite ce théorème pour donner une solution complète du problème de Lu Qikeng pour les domaines $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ lorsque Ω est un domaine symétrique borné irréductible de dimension au plus 4.

Nos résultats [**3**] font apparaître la situation suivante, dont on conjecture qu'elle se généralise pour toute base Ω : pour Ω et $m \geq 1$ fixés, il existe $\mu_{\Omega,m}$, $0 < \mu_{\Omega,m} \leq \infty$ tel que $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_{\Omega,m}$. La borne $\mu_{\Omega,m}$ est caractérisée comme la plus petite racine positive du polynôme $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$; on a $\mu_{\Omega,m} = +\infty$ pour m assez grand. De plus, si le domaine Ω n'est pas un domaine de Lu Qikeng, i.e. si $\mu > \mu_{\Omega,m}$, il est possible de préciser le nombre de racines de P_μ^m dans $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$, de vérifier que celles-ci sont toujours réelles et de décrire la variété des points de $\widehat{\Omega}_m(\mu) \times \widehat{\Omega}_m(\mu)$ où le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ s'annule.

Les résultats obtenus lorsque la base Ω est un domaine symétrique irréductible de dimension au plus 4 (section 3) fournissent un grand nombre d'exemples de domaines de Lu Qikeng et de domaines qui n'ont pas cette propriété. Contrairement au cas générique d'un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, qui n'est pas de Lu Qikeng (cf. [**4**]), « la plupart » des domaines $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ sont des domaines de Lu Qikeng. En effet, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng pour $m \geq m_\Omega$ et pour tout $\mu > 0$, où m_Ω est un entier qui dépend de la base Ω ; pour $1 \leq m < m_\Omega$, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.

Les coefficients $c_j(\mu)$ qui apparaîssent dans l'équation (II) sont des polynômes de degré d en la variable μ divisibles par μ^j. On définit alors les polynômes

$$C_j(\mu) = \frac{1}{(d-j)!\mu^{d-j}} c_{d-j}(\mu) . \tag{V}$$

L'observation de nombreux cas particuliers a amené G. ROOS, en 2004, à conjecturer certaines propriétés des coefficients C_j définis par l'équation (V) (cf. section 2, conjectures 3.1 à 3.1). Les coefficients C_j apparaissent dans l'expression du noyau de Bergman des domaines de Cartan–Hartogs et leurs propriétés peuvent aider à l'étudier.

Les conjectures sus-citées ont été vérifiées à l'aide d'un logiciel de calcul formel pour beaucoup d'exemples où les entiers a, b et r sont les invariants numériques d'un domaine symétrique borné irréductible. Par ailleurs, elles semblent également être vérifiées si a, b et r ne proviennent pas d'un domaine symétrique borné (le polynôme de Hua est alors lié à l'intégrale de Selberg).

Dans le chapitre III, section 4, nous démontrons que les polynômes de Hua présentent une symétrie par rapport à $-\frac{g}{2}$, où g est le genre du domaine Ω (proposition 1). Nous utilisons ensuite cette propriété pour démontrer la conjecture 3.1.

Dans la section 5, nous traitons le cas où le domaine de base Ω est de rang 1 (la boule hermitienne). Nous démontrons une relation de récurrence (lemme 3) entre les coefficients C_j lorsque la dimension du domaine Ω augmente de 1. Nous utilisons ensuite cette relation pour démontrer le théorème 3 qui entraîne la conjecture 3.1 dans le cas où le domaine symétrique borné Ω est de rang 1 (type $I_{1,n}$). Bien que ce cas soit le plus simple, l'expression des coefficients C_j et certaines des conjectures sont non triviales.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS

1. Systèmes triples de Jordan

Un exposé détaillé sur les systèmes triples de Jordan peut être trouvé dans [**5**]. Dans cette section, nous allons rappeler quelques définitions et propriétés qui seront utilisées par la suite.

1.1. Définitions.

DÉFINITION I.1. *Un espace vectoriel complexe V de dimension finie est dit* système triple de Jordan hermitien *s'il est muni d'un triple produit*

$$V \times V \times V \to V$$
$$(x, y, z) \to \{xyz\}$$

(1) *bilinéaire complexe et symétrique par rapport à (x, z), antilinéaire complexe par rapport à y ;*

(2) *satisfaisant l'*identité de Jordan

$$\{xy\{uvw\}\} - \{uv\{xyw\}\} = \{\{xyu\}vw\} - \{u\{vxy\}w\}. \tag{I.I}$$

On introduit les opérateurs

$$D\,(x, y) : \quad V \to V \tag{I.II}$$

et

$$Q\,(x, y) : \quad V \to V, \tag{I.III}$$

définis par

$$D\,(x, y)\,z = Q\,(x, z)\,y = \{xyz\}\,.$$

Il est clair que la donnée des opérateurs $D\,(x, y)$ ou des opérateurs $Q\,(x, y)$ définit complètement le triple produit.

DÉFINITION I.2. *Un système triple de Jordan est dit* hermitien positif *si la forme sesquilinéaire*

$$(x, y) \mapsto (x|y) = \operatorname{Tr} D\,(x, y)$$

est un produit scalaire hermitien, c'est-à-dire si $\operatorname{Tr} D\,(x, x) > 0$ *pour tout* $x \neq 0$*, où* Tr *désigne la trace d'un opérateur de* $\operatorname{End}_{\mathbb{C}} V$*.*

L'opérateur quadratique $Q : V \longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ d'un système triple de Jordan est défini par

$$Q(x)y = \frac{1}{2}\{xyx\}.$$

L'identité fondamentale suivante découle de l'identité de Jordan :

$$Q(Q(x)y) = Q(x)Q(y)Q(x).$$

L'*opérateur de Bergman* est défini par

$$B(x, y) = I - D(x, y) + Q(x)Q(y), \tag{I.IV}$$

où I désigne l'opérateur identité de V. L'identité suivante :

$$Q(B(x, y)z) = B(x, y)Q(z)B(y, x).$$

découle également de l'identité de Jordan.

DÉFINITION I.3. *Soit V un système triple de Jordan hermitien positif. Un sous-espace vectoriel I de V est dit* idéal *de V si*

(1) $\{IVV\} \subset I$ *;*

(2) $\{VIV\} \subset I$*,*

où $\{IVV\}$ (resp.$\{VIV\}$) désigne le sous-espace vectoriel de V engendré par $\{xyz\}$, $(x, y, z) \in I \times V \times V$ (resp. $V \times I \times V$).

DÉFINITION I.4. *Un système triple de Jordan hermitien positif sera dit* simple *si ses seuls idéaux sont* 0 *et V lui-même.*

1.2. Décomposition de Peirce. Soit $(V, \{...\})$ un système triple de Jordan hermitien positif.

DÉFINITION I.5. *Les* puissances impaires *d'un élément x de V sont définies de la manière suivante*

$$x^{(1)} = x,$$
$$x^{(2p+1)} = Q(x)\, x^{(2p-1)}.$$

DÉFINITION I.6. *Un élément e de V est dit* tripotent *s'il vérifie $e^{(3)} = 2e$.*

THÉORÈME 1. *Soit e un tripotent de V ; l'opérateur $D(e,e)$ annule le polynôme*

$$T\,(T-1)\,(T-2)\,.$$

La démonstration de ce théorème utilise des identités découlant de l'identité de Jordan et peut être trouvée dans [**5**].

L'opérateur $D(e,e)$ est donc diagonalisable. Ses seules valeurs propres possibles sont 0, 1 et 2. Les sous-espaces propres sont

$$V_\alpha(e) = \{z \in V \quad | \quad D(e,e)\, z = \alpha z\}\,, \qquad \alpha \in \{0,1,2\}\,,$$

et on a la *décomposition* dite *de Peirce* de V relative au tripotent e :

$$V(e) = V_0(e) \oplus V_1(e) \oplus V_2(e)\,.$$

Deux tripotents e_1 et e_2 sont dits *orthogonaux* si $D(e_1, e_2) = 0$. Si e_1 et e_2 sont des tripotents orthogonaux, alors $D(e_1, e_{1)}$ et $D(e_2, e_2)$ commutent et $e_1 + e_2$ est aussi un tripotent.

Soient e et e' deux tripotents. On dit que e est *dominé* par e' et on note $e \preceq e'$, s'il existe un tripotent e_1 orthogonal à e vérifiant $e + e_1 = e'$. On dira que e est strictement dominé par e' et on note $e \prec e'$, si $e \preceq e'$ et $e \neq e'$.

La relation $\preceq$ est une relation d'ordre dans l'ensemble des tripotents de V. Un tripotent non nul e est dit *primitif* ou *minimal* s'il est minimal pour la relation d'ordre $\preceq$, en d'autres termes s'il n'est pas somme de deux tripotents non nuls orthogonaux. De même, un tripotent e est dit *maximal* s'il est maximal pour la relation d'ordre $\preceq$, donc s'il n'existe pas de tripotent non nul orthogonal à e.

1.3. Décomposition de Peirce simultanée. Soit V un système triple de Jordan hermitien positif. Soit $e^1, \dots, e^p$ une suite de tripotents telle que

$$0 \prec e^1 \prec \cdots \prec e^p.$$

Notons $e_1, \dots, e_p$ les tripotents définis par

$$e_1 = e^1, \dots, e_j = e^j - e^{j-1},$$

et $e = e_1 + \cdots + e_p = e^p$. Les tripotents $e_1, \dots, e_p$ sont deux à deux orthogonaux, les opérateurs $D(e_j, e_j)$ ($1 \leq j \leq p$) commutent et sont simultanément diagonalisables à valeurs propres dans $\{0, 1, 2\}$. On a

$$D(e, e) = D(e_1, e_1) + \cdots + D(e_p, e_p).$$

Les sous-espaces propres simultanés des $(D(e_j, e_j))_{1 \leq j \leq p}$ sont

$$V_{i_1}(e_1) \cap \cdots \cap V_{i_p}(e_p) \qquad i_j \in \{0, 1, 2\}; \quad 1 \leq j \leq p.$$

Comme $V_{i_1}(e_1) \cap \cdots \cap V_{i_p}(e_p) \subset V_{i_1 + \ldots + i_p}(e)$ et que seuls $V_0(e)$, $V_1(e)$ et $V_2(e)$ peuvent être non nuls, les seuls sous-espaces propres simultanés qui peuvent être non triviaux sont

$$\begin{aligned} *V_{\alpha\beta} &= V_{\alpha\beta}(e_1, \cdots, e_p) \\ &= \left\{ x \in V \mid D(e_j, e_j)\, x = \left(\delta_\alpha^j + \delta_\beta^j \right) x,\ 1 \leq j \leq p,\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq p \right\}. \end{aligned}$$

La décomposition

$$V = \bigoplus_{0 \leq \alpha \leq \beta \leq p} V_{\alpha\beta}$$

est dite *décomposition de Peirce simultanée* par rapport à $(e_1, \dots, e_p)$. Les sous-espaces propres de la décomposition de Peirce relativement au tripotent $e = e_1 + \ldots + e_p$ sont parmi (certains d'entre eux pouvant être nuls)

$$V_0(e) = V_{00} = \bigcap_{1 \leq j \leq p} V_0(e_j)$$

$$V_1(e) = \bigoplus_{0 \leq \alpha \leq p} V_{0\alpha}$$

$$V_2(e) = \bigoplus_{0 \leq \alpha \leq \beta \leq p} V_{\alpha\beta}.$$

DÉFINITION I.7. *Un* repère *de V est une suite* maximale $(e_1, \dots, e_r)$ *de tripotents primitifs deux à deux orthogonaux.*

Il existe des repères de V. Tous les repères de V ont le même nombre d'éléments, qui est le *rang* r de V.

DÉFINITION I.8. *Soit V un système triple de Jordan. Un* automorphisme *f de V est un isomorphisme complexe, linéaire de V vérifiant*

$$f\{xyz\} = \{f(x)\, f(y)\, f(z)\}.$$

Les automorphismes de V forment un groupe de Lie compact noté $\operatorname{Aut} V$.

THÉORÈME 2. [**5**] *Soit V un système triple de Jordan hermitien positif simple. Le groupe $\operatorname{Aut} V$ opère transitivement sur l'ensemble des repères de V. Pour un repère $e = (e_1, \dots, e_r)$ de V, soit $V_{jk}(e)$, $0 \leq j \leq k \leq r$ les sous-espaces propres de la décomposition de Peirce simultanée relativement à e. On a $V_{00}(e) = 0$; $V_{jj}(e) = \mathbb{C}e_j \quad (1 \leq j \leq r)$; tous les $V_{jk}(e)$ $(1 \leq j \leq k \leq r)$ ont la même dimension a et tous les $V_{0j}(e)$ $(1 \leq j \leq r)$ ont la même dimension b.*

DÉFINITION I.9. *Soit V un système triple de Jordan hermitien positif simple. Les invariants numériques de V sont*

$$a = \dim V_{jk}, \qquad 1 \leq j \leq k \leq r,$$

$$b = \dim V_{0j}(e), \qquad 1 \leq j \leq r,$$

où e est un repère de V. Le genre *g de V est le nombre défini par*

$$g = 2 + a(r-1) + b.$$

La dimension d de V est alors

$$d = r + a\frac{r(r-1)}{2} + br.$$

Soit V un système triple de Jordan hermitien positif. Tout $x \in V$ se décompose de manière unique sous la forme

$$x = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_p c_p,$$

où $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p > 0$ et $c_1, c_2, \dots, c_p$ sont des tripotents deux à deux orthogonaux. L'élément x est dit *régulier* si $p = r$; dans ce cas, $(c_1, c_2, \dots, c_r)$ est un repère de V. La décomposition $x = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_p c_p$ est dite *décomposition spectrale* de x.

DÉFINITION I.10. *La fonction* $x \mapsto \lambda_1$*, où* $x = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_p c_p$ *est la décomposition spectrale de* x *(*$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p > 0$*), est une norme sur* V*, dite* norme spectrale.

La boule unité (ouverte) Ω de la norme spectrale est un *domaine symétrique borné*, appelé domaine symétrique borné associé au système triple de Jordan hermitien positif V.

1.4. Polynôme générique minimal. Soit V un système triple de Jordan hermitien positif simple de rang r. Il existe des polynômes $m_1, \ldots, m_r$ définis sur $V \times \overline{V}$, homogènes de bidegrés respectifs $(1,1)$, ..., (r,r), tels que pour tout $x \in V$, x régulier, le polynôme

$$m(T,x,y) = T^r - m_1(x,y)T^{r-1} + \cdots + (-1)^r m_r(x,y) \tag{I.V}$$

satisfait

$$m(T,x,x) = \prod_{i=1}^{r}(T - \lambda_i^2), \tag{I.VI}$$

où $x = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_r c_r$ est la décomposition spectrale de x. On note $\overline{V}$ l'espace V muni de la structure complexe conjuguée. Le polynôme

$$m(T,x,y) = T^r - m_1(x,y)T^{r-1} + \cdots + (-1)^r m_r(x,y)$$

est dit *polynôme générique minimal* de V (en (x,y)). Le polynôme non homogène $N : V \times \overline{V} \to \mathbb{C}$ défini par

$$N(x,y) = m(1,x,y) \tag{I.VII}$$

est dit *norme générique*. On a

$$\begin{aligned} \det B(x,y) &= N(x,y)^g, \\ \operatorname{tr} D(x,y) &= g\, m_1(x,y). \end{aligned} \tag{I.VIII}$$

2. Noyau de Bergman

2.1. Définitions et propriétés. Soit D un domaine d'un espace vectoriel complexe V de dimension finie. Soit $\mathrm{Hol}\,(D)$ l'espace des fonctions holomorphes sur D muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Soit $\boldsymbol{H}(D)$ le sous-espace de $\mathrm{Hol}\,(D)$ formé par les fonctions holomorphes sur D à carré intégrable. $\boldsymbol{H}(D)$ est un *espace hilbertien de fonctions* *holomorphes* sur D [**6**] (i.e. l'injection $\boldsymbol{H}(D) \to \mathrm{Hol}(D)$ est continue). Par le théorème de représentation de Riesz, il existe une fonction $K_z \in \boldsymbol{H}(D)$ telle que pour tout $f \in \boldsymbol{H}(D)$ on ait

(I.IX) $$f(z) = \int_D K_z(w) f(w) d\lambda(w), \quad z \in D.$$

Soit $(\psi_n)_n$ une base orthonormale de $\boldsymbol{H}(D)$. Une telle base existe car $\boldsymbol{H}(D)$ est séparable. La fonction K_z s'écrit alors

$$K_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(w) \overline{\psi_n(z)}.$$

La fonction noyau de Bergman $K(w, \overline{z}) = K_z(w)$ est holomorphe en la première variable et anti-holomorphe en la deuxième. Elle vérifie $\overline{K(w, \overline{z})} = K(z, \overline{w})$ et $K(z, \overline{z}) \geq 0$. En effet,

$$\begin{aligned} \overline{K(w, \overline{z})} = \overline{K_z(w)} &= \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(w) \overline{\psi_n(z)}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) \overline{\psi_n(w)} = K_w(z) = K(z, \overline{w}) \end{aligned}$$

et

$$K(z, \overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n(z)|^2.$$

Soit D' un autre domaine de V et soit φ une application biholomorphe de D sur D'. On notera K' le noyau de Bergman de D'. On a alors la *formule de transformation* des noyaux suivante

(I.X) $$K(z, \overline{w}) = K'(\varphi(z), \varphi(\overline{w})) J_\varphi(z) \overline{J_\varphi(w)},$$

où J_φ désigne le Jacobien complexe de φ.

Le noyau de Bergman d'un domaine *borné* D d'un espace vectoriel de dimension finie, satisfait de plus

$$K(z, \overline{z}) > 0.$$

Ceci permet de définir

(I.XI) $$h_z(u, v) = \partial_u \partial_{\overline{v}} \log K(z, \overline{z}).$$

Ainsi définie, $h = h_z$ est une *métrique* hermitienne sur D, dite *métrique de Bergman* [**7**].

La relation (I.X) entraîne que tout biholomorphisme d'un domaine borné D dans un domaine borné D' est une *isométrie* lorsqu'on munit D et D' de leurs métriques de Bergman. Notons $\mathrm{Aut}(D)$ le groupe des automorphismes (biholomorphes) de D. Il résulte de (I.X) que la métrique de Bergman h est invariante sous l'action de $\mathrm{Aut}(D)$.

3. Domaines symétriques bornés

3.1. Définitions.

DÉFINITION I.11. *Un domaine borné* Ω *de* $\mathbb{C}^n$ *est dit* symétrique *si pour tout point* x *de* Ω*, il existe un automorphisme involutif* σ_x *pour lequel* x *est un point fixe isolé.*

DÉFINITION I.12. *Un domaine borné* Ω *de* $\mathbb{C}^n$ *est dit* homogène *si pour tout point* x *et* y *de* Ω*, il existe un automorphisme analytique* φ *de* Ω *vérifiant* $\varphi(x) = y$*.*

Dans [**8**], É. CARTAN a étudié les domaines bornés symétriques (*en dimension finie*) et a montré qu'ils étaient *homogènes* en utilisant la métrique de Bergman (I.XI). Un domaine symétrique borné Ω de $\mathbb{C}^n$ est dit *irréductible* s'il n'est pas produit de deux autres domaines symétriques bornés. Tout domaine symétrique borné est biholomorphe à un produit de domaines symétriques irréductibles.

DÉFINITION I.13. *Un domaine* Ω *de* $\mathbb{C}^n$ *est dit* cerclé *si* $\lambda x \in \Omega$ *pour tout* x *dans* Ω *et tout complexe* λ*,* $|\lambda| = 1$.

Un domaine symétrique borné est toujours biholomorphe à un domaine borné cerclé, qui est unique à une transformation linéaire près [**9**].

3.2. Système triple de Jordan associé à un domaine symétrique borné [**10**]. Soit Ω un domaine symétrique borné homogène et irréductible d'un espace vectoriel de dimension finie V. Soit K la composante connexe en l'identité du groupe de Lie compact des automorphismes de Ω qui laissent fixe 0. Soit ω la forme volume sur V, invariante par K et par les translations. Soit $\mathcal{K}$ le noyau de Bergman de Ω par rapport à la forme volume ω, c'est à dire le noyau reproduisant de l'espace de Hilbert $H(\Omega, \omega) = \mathrm{Hol}(\Omega) \cap L^2(\Omega, \omega)$. Soit h_z la métrique de Bergman (I.XI) au point $z \in \Omega$. On munit l'espace vectoriel V du produit scalaire

$$h_0(u, v) = \partial_u \partial_{\overline{v}} \log \mathcal{K}(z)\,|_{z=0}\ ,$$

ceci définit une métrique *hermitienne* sur V. L'espace vectoriel V muni du *triple produit* $\{\ldots\}$ défini comme suit

$$h_0(\{uvw\}, t) = \partial_u \overline{\partial}_v \partial_w \overline{\partial}_t \log \mathcal{K}(z)\,|_{z=0}$$

est un *système triple de Jordan hermitien*. En effet, l'dentité de Jordan (I.I) est satisfaite. La métrique de Bergman en 0 (et donc le produit scalaire sur V) est alors

$$h_0(u,v) = \operatorname{tr} D(u,v),$$

l'opérateur D étant défini dans (I.II). Rappelons qu'un système triple de Jordan est dit *hermitien positif* si $(u|v) = \operatorname{tr} D(u,v)$ est définie positive. Comme la métrique de Bergman d'un domaine borné est toujours définie positive, le système triple de Jordan associé à un domaine symétrique borné est hermitien positif. Le domaine symétrique borné irréductible Ω est alors la boule unité de la norme spectrale de V. L'*opérateur de Bergman* (I.IV), défini par

$$B(x,y) = I - D(x,y) + Q(x)Q(y),$$

où I désigne l'opérateur identité de V, satisfait la relation

$$h_z(u,v) = h_0(B(z,z)^{-1}u,v) \quad (z \in \Omega;\ u,v \in V).$$

Si $\Phi \in (\operatorname{Aut}\Omega)_0$, la composante de l'identité dans le groupe des automorphismes de Ω, la relation

$$B(\Phi x, \Phi y) = \mathrm{d}\Phi(x) \circ B(x,y) \circ \mathrm{d}\Phi(y)^* \tag{I.XII}$$

est vérifiée pour tout $x, y \in \Omega$, où * désigne l'adjoint par rapport à la métrique hermitienne h_0.

3.3. Noyau de Bergman d'un domaine symétrique borné. L.K. HUA a obtenu des formules explicites du noyau de Bergman des quatre types classiques de domaines de Cartan en utilisant le groupe des automorphismes $\operatorname{Aut}(\Omega)$. Cette méthode est dite *méthode de Hua*.

Une formule générale du noyau de Bergman, commune à tous les types de domaines de Cartan peut être obtenue en utilisant la théorie des systèmes triples de Jordan [**10**].

PROPOSITION 3. *Soit Ω un domaine symétrique borné. Le noyau de Bergman de Ω est*

$$\mathcal{K}(z) = \frac{1}{\operatorname{vol}(\Omega)} \frac{1}{N(z,z)^g}.$$

Démonstration. Soit ϕ un automorphisme de Ω. De (I.X), on a

$$\mathcal{K}(z,z) = \mathcal{K}(0,0) \left| J\phi(t) \right|^2. \tag{I.XIII}$$

De (I.XII)

$$B(\phi(z), \phi(t)) = \mathrm{d}\,\phi(z)\, B(z,t)\, \mathrm{d}\,\phi^*(z).$$

La relation (I.VIII)

$$\det B(z,z) = N(z,z)^g,$$

entraîne alors

$$N(\phi(t), \phi(t))^g = |J\phi(t)|^2 N(t,t)^g. \tag{I.XIV}$$

Si $\phi(z) = 0$, on a $N(0,0) = 1$ et par conséquent

$$N(t,t)^g = \frac{1}{|J\phi(t)|^2}. \tag{I.XV}$$

D'autre part le noyau de Bergman d'un domaine borné cerclé satisfait

$$\mathcal{K}(z, \overline{w}) = \mathcal{K}\left(ze^{it}, \overline{we^{it}}\right);$$

pour $w = 0$, on en déduit que $\mathcal{K}(z,0)$ est une constante. On a donc $\mathcal{K}(z,0) = \mathcal{K}(0,0)$. En appliquant la formule de reproduction (I.IX)

$$f(z) = \int_\Omega f(t)\, \overline{\mathcal{K}_t(z)}\, \mathrm{d}\,\lambda(z),$$

à la fonction $f \equiv 1$ on obtient

$$\mathrm{vol}(\Omega)\, \mathcal{K}(z,0) = \mathrm{vol}(\Omega)\, \mathcal{K}(0,0) = 1. \tag{I.XVI}$$

De (I.XIII), (I.XV) et (I.XVI), on a

$$\mathcal{K}(z) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} \frac{1}{N(z,z)^g}. \tag{I.XVII}$$

$\square$

3.4. Classification des domaines symétriques bornés. Ci-dessous la liste complète des domaines bornés cerclés irréductibles :

Type $I_{m,n}$ $(1 \leq m \leq n)$. $V = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ (espace des matrices $m \times n$ à termes complexes).

$$\Omega = \left\{x \in V \mid I_m - x^t\overline{x} \gg 0\right\}.$$

Type II_n $(n \geq 2)$. $V = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ (espace des matrices alternées d'ordre n).

$$\Omega = \{x \in V \mid I_n + x\overline{x} \gg 0\}.$$

Type III_n $(n \geq 1)$. $V = \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ (espace des matrices symétriques d'ordre n).

$$\Omega = \{x \in V \mid I_n - x\overline{x} \gg 0\}.$$

Type IV$_n$ $(n > 3)$. $V = \mathbb{C}^n$, $q(x) = \sum x_i^2$, $q(x,y) = 2\sum x_i y_i$. Le domaine Ω est défini par

$$1 - q(x,\overline{x}) + |q(x)|^2 > 0, \quad 2 - q(x,\overline{x}) > 0.$$

Type V. $V = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C}^{16}$, domaine de type exceptionnel de dimension 16..

Type VI. $V = \mathcal{H}_3(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C}^{27}$, domaine de type exceptionnel de dimension 27.

3.5. Norme générique.

Type I$_{m,n}$ $(1 \le m \le n)$. $V = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ (espace des matrices $m \times n$ à termes complexes).

$$N(x,y) = \mathrm{Det}(I_m - x\,{}^t\overline{y}).$$

Type II$_n$ $(n \ge 2)$. $V = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ (espace des matrices alternées d'ordre n).

$$N(x,y)^2 = \mathrm{Det}(I_n + x\overline{y}).$$

Type III$_n$ $(n \ge 1)$. $V = \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ (espace des matrices symétriques d'ordre n).

$$N(x,y) = \mathrm{Det}(I_n - x\overline{y}).$$

Type IV$_n$ $(n \ne 2)$. $V = \mathbb{C}^n$.

$$N(x,y) = 1 - q(x,\overline{y}) + q(x)q(\overline{y}).$$

Type V. $V = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

$$N(x,y) = 1 - (x|y) + (x^\sharp|y^\sharp).$$

Type VI. $V = \mathcal{H}_3(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

$$N(x,y) = 1 - (x|y) + (x^\sharp|y^\sharp) - \det x \det \overline{y}.$$

3.6. Invariants numériques d'un domaine symétrique borné irréductible. Le tableau suivant donne toutes les valeurs possibles de (a,b,r), ainsi que les valeurs correspondantes du genre

$$g = 2 + a\,(r-1) + b$$

et de la dimension d

$$d = \dim_{\mathbb{C}} \Omega = r + \frac{r\,(r-1)}{2}a + rb.$$

TABLEAU I.1. Invariants numériques d'un domaine symétrique borné irréductible

Type	a	b	r	g	d
$I_{m,n}\,(1 \leq m \leq n)$	2	$n-m$	m	$m+n$	mn
$II_n\,(n \geq 2, n=2p)$	4	0	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$2\,(n-1)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$II_n\,(n \geq 3, n=2p+1)$	4	2	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$2\,(n-1)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$III_n\,(n \geq 1)$	1	0	n	$n+1$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$IV_n\,(n > 2)$	$n-2$	0	2	n	n
V	6	4	2	12	16
VI	8	0	3	18	27

4. Intégrale de Hua

Soient V un STJHP (système triple de Jordan hermitien positif), r son rang, et $x = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_r c_r$ la décomposition spectrale de $x \in V$. Soit $\Omega = \{x \in V;\ |x| = |\lambda_1| < 1\}$ la boule unité pour la norme spectrale de V. On munit Ω de la forme α^n, α étant la forme de Kähler sur V,

$$\alpha = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\partial\overline{\partial} m_1,$$

où m_1 est le polynôme homogène définie dans (I.V). Le domaine Ω est alors symétrique, borné, cerclé et irréductible. On désigne par N sa norme générique (I.VII). Les invariants numériques de Ω seront notés a, b et r (où r est le rang de V).

PROPOSITION 4. *L'*intégrale de Hua $\int_\Omega N(z,z)^s \alpha^n(z)$ *de* Ω *est donnée par*

(I.XVIII) $$\int_\Omega N(z,z)^s \alpha^n = \frac{\chi(0)}{\chi(s)} \int_\Omega \alpha^n \qquad (\mathrm{Re}\, s > -1)$$

où

$$\chi(s) = \chi_{a,b,r}(s) = \prod_{j=1}^{r} \left(s + 1 + (j-1)\frac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)\frac{a}{2}}$$

et

$$(s)_k = s(s+1)\dots(s+k-1) = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}.$$

Pour la preuve de cette proposition, nous allons reprendre la démonstration proposée dans [**1**]. Les auteurs utilisent la méthode de A. KORÀNYI qui ramène le calcul de l'intégrale de Hua à l'intégrale de Selberg $S_n^{(a,b,c)}$,

$$S_n^{(a,b,c)} = \frac{1}{n!} \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1} (1-x_i)^{b-1} \prod_{1\le i<j\le n} |x_i - x_j|^{2c} \, \mathrm{d}\,\underline{x},$$

où $x = (x_1, ..., x_n)$ et $\mathrm{d}\,\underline{x} = \mathrm{d}\,x_1 .... \mathrm{d}\,x_n$. Dans [**11**], A. Selberg a montré que

$$S_n^{(a,b,c)} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(a+jc)\,\Gamma(b+jc)\,\Gamma((j+1)\,c)}{\Gamma(a+b+(n+j-1)\,c)\,\Gamma(c)}.$$

Notons $\mathfrak{F}$ la variété formée par les repères de V et V_{reg} l'ensemble des éléments réguliers de V, c'est à dire l'ensemble des éléments de V dont la décomposition spectrale est $\lambda_1 c_1 + ... + \lambda_r c_r$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r > 0$. L'application

$$\Phi : \mathfrak{F} \times \{(\lambda_1, ..., \lambda_r) \mid \lambda_1 > ... > \lambda_r > 0\} \to V_{\text{reg}}$$

$$((c_1, ..., c_r)\,; (\lambda_1, ..., \lambda_r)) \to \lambda_1 c_1 + ... + \lambda_r c_r$$

est un difféomorphisme. La restriction de Φ à $\mathfrak{F} \times T_r$, où

$$T_r = \{(\lambda_1, ..., \lambda_r) \mid 1 > \lambda_1 > ... > \lambda_r > 0\},$$

est un difféomorphisme sur $\Omega_{\text{reg}} = \Omega \cap V_{\text{reg}}$ (l'ensemble des éléments réguliers de Ω). L'image réciproque de la forme volume α^n par Φ est

$$\Phi^* \alpha^n = \Theta \wedge \prod_{j=1}^{r} \lambda_j^{2b+1} \prod_{1\le j<k\le r} \left(\lambda_j^2 - \lambda_k^2\right)^a \mathrm{d}\,\underline{\lambda},$$

Θ étant la forme volume sur $\mathfrak{F}$, invariante par les automorphismes [**5**].

LEMME 5. *Pour tout s, $\mathrm{Re}(s) > -1$, l'intégrale de Hua est donnée par*

(I.XIX)
$$\int\limits_{\Omega} N(x,x)^s \, \alpha^n = F(s) \operatorname{vol}(\mathfrak{F}) = \frac{F(s)}{F(0)} \operatorname{vol}(\Omega),$$

où $F(s) = \dfrac{1}{2^r} \displaystyle\prod_{j=0}^{n} \frac{\Gamma\left(b+1+(j-1)\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(s+1+(j-1)\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(j\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(s+b+2+(r+j-2)\frac{a}{2}\right)}.$

Démonstration. De (I.VI) et (I.VII) on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} N(x,x)^s \alpha^n &= \int\limits_{\Omega} \prod_{i=1}^{r} \left(1-\lambda_i^2\right)^s \alpha^n \\ &= \int\limits_{\mathfrak{F}\times T_r} \prod_{i=1}^{r} \left(1-\lambda_i^2\right)^s \Phi^* \alpha^n \\ &= \mathrm{vol}\,(\mathfrak{F}) \int_{T_r} \prod_{i=1}^{r} \left(1-\lambda_i^2\right)^s \prod_{j=1}^{r} \lambda_j^{2b+1} \prod_{1\le j<k\le r} \left(\lambda_j^2-\lambda_k^2\right)^a \mathrm{d}\,\underline{\lambda}.\end{aligned}$$

On pose $\lambda_j^2 = t_j$ pour obtenir

$$\int_{\Omega} N(x,x)^s \alpha^n = \frac{1}{2^r} \mathrm{vol}\,(\mathfrak{F}) \int_{S_r} \prod_{i=1}^{r} t_i^b (1-t_i)^s \prod_{1\le j<k\le r} (t_j-t_k)^a \,\mathrm{d}\,\underline{t},$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} N(x,x)^s \alpha^n &= \frac{1}{r!2^r} \mathrm{vol}\,(\mathfrak{F}) \int\limits_{[0,1]^r} \prod_{i=1}^{r} t_i^b (1-t_i)^s \prod_{1\le j<k\le r} |t_j-t_k|^a \,\mathrm{d}\,\underline{t} \\ &= \frac{1}{2^r} \mathrm{vol}\,(\mathfrak{F})\, S_r^{(b+1,s+1,a/2)} \\ &= \frac{1}{2^r} \mathrm{vol}\,(\mathfrak{F}) \prod_{j=1}^{r-1} \frac{\Gamma\left(b+1+j\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(s+1+j\frac{a}{2}\right)\Gamma\left((j+1)\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(b+s+2+(r+j-1)\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2^r} \mathrm{vol}\,(\mathfrak{F}) \prod_{j=1}^{r} \frac{\Gamma\left(b+1+(j-1)\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(s+1+(j-1)\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(j\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(b+s+2+(r+j-2)\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \\ &= \mathrm{vol}\,(\mathfrak{F})\, F(s)\,,\end{aligned}$$

où

$$F(s) = \frac{1}{2^r} \prod_{j=1}^{r} \frac{\Gamma\left(b+1+(j-1)\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(s+1+(j-1)\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(j\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(b+s+2+(r+j-2)\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

De plus

$$F(0) = \frac{1}{2^r} \prod_{j=1}^{r} \frac{\Gamma\left(b+1+(j-1)\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(1+(j-1)\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(j\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(b+2+(r+j-2)\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)},$$

d'où

$$\int_{\Omega} N(x,x)^s \alpha^n = \mathrm{vol}\,(\mathfrak{F})\, F(s) = \frac{F(s)}{F(0)} \mathrm{vol}\,(\Omega)\,.$$

$\square$

Si on pose

$$\frac{1}{\chi(s)} = \prod_{j=1}^{r} \frac{\Gamma\left(s+1+(j-1)\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(s+b+2+(r+j-2)\frac{a}{2}\right)},$$

on a

$$\frac{1}{\chi(0)} = \prod_{j=1}^{r} \frac{\Gamma\left(1+(j-1)\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(b+2+(r+j-2)\frac{a}{2}\right)}$$

et

$$\frac{\chi(0)}{\chi(s)} = \frac{F(0)}{F(s)}.$$

On en déduit que

$$\chi(s)\int_{\Omega} N(x,x)^{s}\,\alpha^{n} = \chi(0)\operatorname{vol}(\Omega).$$

On a donc

$$\chi(s) = \prod_{j=1}^{r} \frac{\Gamma\left(s+b+2+(r+j-2)\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(s+1+(j-1)\frac{a}{2}\right)}.$$

En changeant j en $r+1-j$ dans le numérateur on obtient

$$\chi(s) = \prod_{j=1}^{r} \frac{\Gamma\left(s+b+2+(2r-j-1)\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(s+1+(j-1)\frac{a}{2}\right)}.$$

De plus, on a

$$s+b+2+(2r-j-1)\frac{a}{2} = \left(s+1+(j-1)\frac{a}{2}\right)+\left(1+b+(r-j)\frac{a}{2}\right),$$

d'où l'expression du polynôme $\chi(s)$

(I.XX) $$\chi(s) = \prod_{j=1}^{r}\left(s+1+(j-1)\frac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)\frac{a}{2}}.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 4. Le polynôme (I.XX) est dit *polynôme de Hua*. Toutes ses racines sont entières ou demi-entières, négatives.

5. Espaces de Bergman à poids des domaines symétriques bornés

Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible, $N(z,t)$ sa norme générique. Pour s réel, on définit l'espace $H(\Omega, N(z,z)^{s})$ des fonctions holomorphes dans Ω telles que

$$\int_{\Omega} |f(z)|^{2} N(z,t)^{s}\omega(z) < \infty.$$

On munit $H(\Omega, N(z,t)^{s})$ du produit scalaire

$$(f,g) = \int_{D} \overline{f(z)}g(z)\,N(z,t)^{s}\omega(z).$$

La norme de $H(\Omega, N(z,t)^{s})$ est alors

$$\|f\|_{s}^{2} = \int_{\Omega} |f(t)|^{2} N(t,t)^{s}\,\omega(t).$$

Pour $s > -1$, l'espace $\boldsymbol{H}(\Omega, N(z,t)^s)$ est de dimension infinie (contient les monômes). C'est un *espace hilbertien de fonctions holomorphes* [**6**].

LEMME 6. *Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible, $N(z,t)$ sa norme générique, χ son polynôme de Hua. Pour $s > -1$, le noyau reproduisant de l'espace à poids $H(\Omega, N(z,z)^s)$ est*

$$K_{\Omega,s}(z,t) = C_s N(z,t)^{-g-s}, \tag{I.XXI}$$

où $C_s = \dfrac{\chi(s)}{\chi(0)\operatorname{vol}\Omega}$.

Démonstration. Si ϕ est un automorphisme de Ω, en utilisant (I.XIV), on a

$$\begin{aligned}
\|f\|_s^2 &= \int_\Omega |f(t)|^2 N(t,t)^s \omega(t) \\
&= \int_\Omega |f \circ \phi|^2 N(\phi(t), \phi(t))^s \omega(\phi(t)) \\
&= \int_\Omega |f \circ \phi|^2 N(t,t)^s |J\phi(t)|^{\frac{2s}{g}} |J\phi(t)|^2 \omega(t) \\
&= \left\| (f \circ \phi)\ (J\phi)^{\frac{s}{g}+1} \right\|_s^2 .
\end{aligned}$$

L'application $f \longmapsto (f \circ \phi)\ (J\phi)^{\frac{s}{g}+1}$ est donc un automorphisme de l'espace de Hilbert à poids $\boldsymbol{H}(\Omega, N(z,z)^s)$. Le noyau reproduisant de cet espace vérifie donc la relation de transformation

$$K_{\Omega,s}(z,z) = |J\phi(z)|^{\frac{2s}{g}+2} K_{\Omega,s}(\phi(z), \phi(z)).$$

Soit $z \in \Omega$ et $\phi \in \operatorname{Aut}\Omega$ tel que $\phi(z) = 0$; comme $N(0,0) = 1$, (I.XIV) implique

$$N(z,z)^g = |J\phi(z)|^{-2},$$

d'où

$$K_{\Omega,s}(z,z) = C_s N(z,z)^{-g-s}$$

avec $C_s = K_{\Omega,s}(0,0)$. On a donc

$$K_{\Omega,s}(z,t) = C_s N(z,t)^{-g-s},$$

les deux membres étant analytiques réels. En particulier,

$$K_{\Omega,s}(0,t) = C_s$$

$$1 = C_s \int N(t,t)^s \omega\,(t)\,;$$

d’où, en utilisant (I.XVIII),

$$C_s = \frac{\chi(s)}{\chi(0)\operatorname{vol}\Omega}.$$

□

CHAPITRE II

DOMAINES DE CARTAN–HARTOGS ET CONJECTURE DE LU QIKENG

1. Noyau de Bergman des domaines de Cartan-Hartogs

1.1. Noyau de Bergman virtuel. Soit V un espace vectoriel hermitien de dimension finie n, dont on note $\| \; \| = \| \; \|_V$ la norme hermitienne et $\omega_V(z) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\, \|z\|^2\right)^n$ la forme volume associée. Soit Ω un domaine de V et $p : \Omega \to]0, +\infty[$ une fonction continue positive sur Ω. L'espace des fonctions holomorphes sur Ω est noté $\mathrm{Hol}(\Omega)$. On note $\boldsymbol{H}(\Omega)$ l'espace de Bergman

$$\boldsymbol{H}(\Omega) = \boldsymbol{H}(\Omega, \omega_V) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\Omega) \mid \|f\|_\Omega^2 = \int_\Omega |f(z)|^2\, \omega_V(z) < \infty \right\}$$

et $H(\Omega, p) = H(\Omega, p\omega_V)$ l'espace de Bergman à poids

$$\boldsymbol{H}(\Omega, p\omega_V) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\Omega) \mid \|f\|_{\Omega,p}^2 = \int_\Omega |f(z)|^2\, p(z)\omega_V(z) < \infty \right\}.$$

Les produits scalaires de ces espaces de Hilbert sont notés respectivement $(\;|\;)_\Omega$ et $(\;|\;)_{\Omega,p}$. Le noyau de Bergman de Ω (noyau reproduisant de $\boldsymbol{H}(\Omega)$) est noté $K_\Omega(z,t)$; il est entièrement déterminé par la fonction analytique-réelle $\mathcal{K}_\Omega$:

$$\mathcal{K}_\Omega(z) = K_\Omega(z,z) \qquad (z \in \Omega)\,,$$

qui est aussi appelée noyau de Bergman de Ω. De la même manière, le noyau de Bergman à poids de (Ω, p) (noyau reproduisant de $\boldsymbol{H}(\Omega, p)$) est noté $K_{\Omega,p}(z,t)$ et est entièrement déterminé par $\mathcal{K}_{\Omega,p}(z) = K_{\Omega,p}(z,z)$.

DÉFINITION II.1. *Soient Ω un domaine dans V et $p : \Omega \to]0, +\infty[$ une fonction continue sur Ω. On note $K_{\Omega,p^k}(z,w)$ (resp. $\mathcal{K}_{\Omega,p^k}(z)$) le noyau de Bergman à poids de $\left(\Omega, p^k\right)$. On appelle* noyau de Bergman virtuel *de (Ω, p) la fonction définie par*

$$\text{(II.I)} \qquad L_{\Omega,p}\,(z,w;r) = L_0\,(z,w;r) = \sum_{k=0}^{\infty} K_{\Omega,p^k}(z,w) r^k \quad (z, w \in \Omega,\; r \in \mathbb{C}).$$

La fonction $\mathcal{L}_0(z,r) = L_0(z,z;r)$*, définie par*

$$\text{(II.II)} \qquad \mathcal{L}_{\Omega,p}(z,r) = \mathcal{L}_0(z,r) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{K}_{\Omega,p^k}(z) r^k \quad (z \in \Omega,\ r \geq 0)$$

est également appelée noyau de Bergman virtuel de (Ω, p)*.*

1.2. Noyau de Bergman des domaines de Hartogs. Soient V un espace vectoriel hermitien de dimension finie n, $\Omega \subset V$ et $p : \Omega \to]0, +\infty[$ une fonction continue positive sur Ω. On considère le *domaine de Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(p)$ au-dessus de Ω, défini par

$$\widehat{\Omega}_m(p) = \left\{(z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m \mid \|Z\|^2 < p(z)\right\}.$$

On munit ici $\mathbb{C}^m$ de la structure hermitienne standard et de la forme volume associée

$$\omega_m(Z) = \left(\tfrac{\mathrm{i}}{2\pi} \partial\overline{\partial} \|Z\|^2\right)^m.$$

Le domaine $\widehat{\Omega}_m(p)$ sera muni de la forme volume

$$\omega_V(z) \wedge \omega_m(Z).$$

Le théorème suivant montre comment calculer le noyau de Bergman des domaines de Hartogs $\widehat{\Omega}_m(p)$ $(m > 0)$ à partir du noyau de Bergman virtuel de (Ω, p). Une démonstration détaillée peut être trouvée dans [**12**].

THÉORÈME 1. *Le noyau de Bergman* $\widehat{K}_m$ *(resp.* $\widehat{\mathcal{K}}_m$*) de* $\widehat{\Omega}_m(p)$ *est égal à*

$$\text{(II.III)} \qquad \widehat{K}_m((z,Z),(w,W)) = L_m(z,w;\langle Z,W\rangle),$$

$$\text{(II.IV)} \qquad \widehat{\mathcal{K}}_m(z,Z) = \mathcal{L}_m\left(z, \|Z\|^2\right),$$

où

$$\text{(II.V)} \qquad L_m(z,w;r) = \tfrac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial r^m} L_0(z,w;r),$$

$$\text{(II.VI)} \qquad \mathcal{L}_m(z,r) = \tfrac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial r^m} \mathcal{L}_0(z,r).$$

Remarquons que les relations entre $\widehat{\mathcal{K}}_1$ et $\widehat{\mathcal{K}}_m$ données par (II.IV) et (II.VI) sont une autre formulation du principe d'*inflation* décrit dans [**2**].

Pour illustrer ce théorème, regardons le cas où $m = 1$. Toute fonction holomorphe sur le domaine de Hartogs $\widehat{\Omega}_1(p)$ s'ecrit

$$f(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)\,\zeta^k,$$

où f_k est une fonction holomorphe sur Ω. On a

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\widehat{\Omega}_1} &= \int_{\widehat{\Omega}_1} |f(z,\zeta)|^2\,\omega_V(z)\wedge\omega_1(\zeta) \\
&= \int_{\Omega}\omega_V(z)\int_{|\zeta|^2<p(z)} |f(z,\zeta)|^2\,\omega_1(\zeta) \\
&= \int_{\Omega}\omega_V(z)\left(\sum_{k=0}^{\infty}|f_k(z)|^2\,\frac{p^{k+1}(z)}{k+1}\right).
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\|f\|_{\widehat{\Omega}_1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\,\|f_k\|_{\Omega,p^{k+1}}\,. \tag{II.VII}$$

PROPOSITION 2. *Le noyau de Bergman $\widehat{\mathcal{K}}_1$ de $\widehat{\Omega}_1(p)$ est égal à*

$$\widehat{\mathcal{K}}_1(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,\mathcal{K}_{\Omega,p^{k+1}}(z)\,|\zeta|^{2k}\,. \tag{II.VIII}$$

Démonstration. Pour tout k fixé, soit $(\psi_{j,k})_{j\in J_k}$ une base hilbertienne de l'espace des fonctions holomorphes sur Ω muni du poids p^k. On a

$$\mathcal{K}_{\Omega,p^k}(z) = \sum_{j\in J_k}|\psi_{j,k}(z)|^2\,.$$

De (II.VII), $\left(\sqrt{k+1}\psi_{j,k+1}(z)\,\zeta^k\right)_k$ est une base hilbertienne de l'espace des fonctions holomorphes sur $\widehat{\Omega}_1$ et donc

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{K}}_1(z,\zeta) &= \sum_{j,k}(k+1)\,|\psi_{j,k+1}(z)|^2\,|\zeta|^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,\mathcal{K}_{\Omega,p^{k+1}}(z)\,|\zeta|^{2k}\,.
\end{aligned}$$

□

De (II.IV) et (II.II) on a

$$\mathcal{L}_1(z,r) = \frac{\partial}{\partial r}\mathcal{L}_0(z,r).$$

1.3. Noyau de Bergman des domaines de Cartan–Hartogs. Soit Ω un domaine symétrique borné irréductible ; on note N la norme générique de Ω. On considère le *domaine de Cartan–Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ construit au-dessus de Ω :

$$\widehat{\Omega}_m(\mu) = \left\{(z, Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N(z, z)^\mu\right\}. \tag{II.IX}$$

On note $\widehat{K}_{m,\mu}((z, Z), (w, W))$ le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ et

$$\widehat{\mathcal{K}}_{m,\mu}(z, Z) = \widehat{K}_{m,\mu}((z, Z), (z, Z)).$$

On note $L_{0,\mu}(z, w; r)$ le noyau de Bergman virtuel de $(\Omega, N(z, z)^\mu)$ et

$$\mathcal{L}_{0,\mu}(z, r) = L_{0,\mu}(z, w; r).$$

Soit χ le polynôme de Hua associé à Ω (I.XX) décomposé suivant les factorielles croissantes de k (III.III)

$$\chi(k\mu) = \sum_{j=0}^{d} c_j(\mu) \tfrac{(k+1)_j}{j!} = \textstyle\sum_{j=0}^{d} \mu^j C_{d-j}(\mu)(k+1)_j \tag{II.X}$$

THÉORÈME 3. *Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible. On a*

$$L_{0,\mu}(z, w, r) = \frac{C_\Omega}{N(z, w)^g} \sum_{j=0}^{d} c_j(\mu) \frac{1}{(1-\xi)^{j+1}}, \tag{II.XI}$$

$$\mathcal{L}_{0,\mu}(z, r) = \frac{C_\Omega}{N(z, z)^g} \sum_{j=0}^{d} c_j(\mu) \frac{1}{(1-X)^{j+1}}, \tag{II.XII}$$

où ξ et X sont les fonctions définies par

$$\xi(z, w, r) = \frac{r}{N(z, w)^\mu}, \qquad X(z, r) = \frac{r}{N(z, z)^\mu}$$

et $C_\Omega = \frac{1}{\chi(0)\,\mathrm{vol}\,\Omega}$.

Démonstration. De (I.XXI) et (II.X), on a

$$\begin{aligned} L_0(z, w; r) &= \sum_{k=0}^{\infty} K_{\Omega,p^k}(z, w) r^k = C_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} N(z, w)^{-g-k\mu} \chi(k\mu) r^k \\ &= \frac{C_\Omega}{N(z, w)^g} \sum_{k=0}^{\infty} \chi(k\mu) \xi^k \end{aligned}$$

où $\xi = \dfrac{r}{N(z,w)^{\mu}}$. De (II.X), on a pour $|\xi| < 1$

$$\begin{aligned} L_0\left(z,w;r\right) &= \frac{C_\Omega}{N(z,w)^g} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{d} c_j\left(\mu\right) \tfrac{(k+1)_j}{j!} \xi^k \\ &= \frac{C_\Omega}{N(z,w)^g} \sum_{j=0}^{d} \sum_{k=0}^{\infty} c_j\left(\mu\right) \tfrac{(k+1)_j}{j!} \xi^k \\ &= \frac{C_\Omega}{N(z,w)^g} \sum_{j=0}^{d} c_j\left(\mu\right) \tfrac{1}{(1-\xi)^{j+1}}. \end{aligned}$$

□

NOTATIONS. On note $F_\mu = F_\mu^0$ la fonction rationnelle

(II.XIII) $$F_\mu^0(\xi) = \sum_{j=0}^{d} c_j\left(\mu\right) \frac{1}{\left(1-\xi\right)^{j+1}}$$

et $P_\mu = P_\mu^0$ le polynôme

(II.XIV) $$P_\mu^0(\eta) = \sum_{j=0}^{d} c_j\left(\mu\right) \eta^j.$$

Plus généralement, pour m entier positif, on note F_μ^m la fraction rationnelle

(II.XV) $$F_\mu^m(\xi) = \sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j\left(\mu\right) \frac{1}{\left(1-\xi\right)^{j+m+1}}$$

et P_μ^m le polynôme

(II.XVI) $$P_\mu^m(\eta) = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j\left(\mu\right) \eta^j.$$

THÉORÈME 4. *Le noyau de Bergman du domaine*

$$\widehat{\Omega}_m\left(\mu\right) = \left\{ (z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N\left(z,z\right)^{\mu} \right\}$$

est

(II.XVII) $$\widehat{K}_{m,\mu}\left((z,Z),(w,W)\right) = \frac{1}{m!} \frac{C}{N\left(z,w\right)^{g+m\mu}} F_\mu^m(\xi),$$

où $\xi : \widehat{\Omega}_m\left(\mu\right) \times \widehat{\Omega}_m\left(\mu\right) \to \mathbb{C}$ *est définie par*

(II.XVIII) $$\xi\left((z,Z),(w,W)\right) = \frac{\langle Z, W\rangle}{N(z,w)^{\mu}}.$$

Démonstration. On a

$$L_{0,\mu}(z,w,r) = \frac{C}{N(z,w)^g} \sum_{j=0}^{d} c_j(\mu) \frac{1}{(1-\xi)^{j+1}},$$
$$\xi(z,w,r) = \frac{r}{N(z,w)^\mu}$$

et

$$\begin{aligned} L_{m,\mu}(z,w,r) &= \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial r^m} L_{0,\mu}(z,w,r) \\ &= \frac{1}{m!}\frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} \sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j(\mu) \frac{1}{(1-\xi)^{j+m+1}}. \end{aligned}$$

On en déduit le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$:

$$\widehat{K}_{m,\mu}((z,Z),(w,W)) = L_{m,\mu}(z,w;\langle Z,W\rangle) = \frac{1}{m!}\frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} F_\mu^m(\xi).$$

□

Soit $\eta : \widehat{\Omega}_m(\mu) \times \widehat{\Omega}_m(\mu) \to \mathbb{C}$ définie par

(II.XIX) $$\eta((z,Z),(w,W)) = \frac{1}{1-\xi((z,Z),(w,W))} = \frac{N(z,w)^\mu - \langle Z,W\rangle}{N(z,w)^\mu}.$$

Le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ s'écrit encore

(II.XX) $$\widehat{K}_{m,\mu}((z,Z),(w,W)) = \frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} \eta^{m+1} P_\mu^m(\eta).$$

DÉFINITION II.2. *Le polynôme*

(II.XXI) $$P_\mu^m(\eta) = \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j(\mu)\,\eta^j = \sum_{j=0}^{d} (m+1)_j C_{d-j}(\mu)\mu^j\eta^j$$

sera appelé polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$.

2. Problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan–Hartogs

Le *problème de Lu Qikeng* pour un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ consiste à déterminer si le noyau de Bergman $K_U(z,w)$ de ce domaine peut avoir des zéros. Un domaine U est appelé *domaine de Lu Qikeng* si son noyau de Bergman ne s'annule pas dans $U \times U$.

2.1. Motivation. Il est bien connu que les domaines simplement connexes de $\mathbb{C}$ sont biholomorphiquement équivalents au disque unité Δ de $\mathbb{C}$ par la *fonction de Riemann*. S. BERGMAN a montré que la fonction de Riemann associée à un domaine simplement connexe Ω de $\mathbb{C}$ peut être exprimée en fonction du noyau de Bergman, noté K, de Ω. En effet, si $\varphi : \Omega \to \Delta$ est une telle fonction, vérifiant $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(a)$ réelle et positive, alors elle est complètement déterminée par la fonction $\dfrac{K'(z,a)}{K(z,a)}$, où $K(z,t)$ désigne le noyau de Bergman de Ω et $K' = \dfrac{\partial K}{\partial \bar{t}}$ [**13**]. La fonction $\dfrac{K'(z,a)}{K(z,a)}$ est un biholomorphisme de Ω dans Δ. S. BERGMAN a introduit alors la notion de *domaine représentatif* qui serait l'image d'un domaine Ω de $\mathbb{C}$ par la fonction $\dfrac{K'(z,a)}{K(z,a)}$. Si le domaine Ω n'est pas simplement connexe, son noyau de Bergman doit avoir des zéros [**14**] ; la fonction $\dfrac{K'(z,a)}{K(z,a)}$ n'est donc pas définie.

Si Ω est un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, $K(z,t)$ son noyau de Bergman, les coordonnées représentatives de Bergman par rapport à un point a (voir [**15**]) sont définies par

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (g_{k,i})^{-1}(a) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \ln \frac{K(z,t)}{K(z,z)} \right)_{t=a}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

où

$$g_{i,k} = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z_k}} \ln K(z,z).$$

Ces coordonnées transforment a en 0 et leur matrice jacobienne complexe en a est égale à l'identité, elles ne sont pas définies si le noyau de Bergman admet des zéros. C'est ce qui a motivé LU QIKENG pour poser le problème de la non annulation du noyau de Bergman.

2.2. Problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan–Hartogs. Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible. On note $N(z,t)$ sa norme générique, χ son polynôme de Hua. Pour $\mu > 0$ et m entier positif, on considère le *domaine de Cartan-Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ construit au-dessus de Ω :

$$\widehat{\Omega}_m(\mu) = \left\{ (z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N(z,z)^{\mu} \right\}.$$

Le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ s'écrit (II.XX)

$$\widehat{K}_{m,\mu}((z,Z),(w,W)) = \frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} \eta^{m+1} P_{\mu}^{m}(\eta),$$

où le polynôme P_μ^m est le *polynôme représentatif du noyau de Bergman* (II.XXI), défini à partir du polynôme de Hua χ (I.XX) par les relations

$$\chi(k\mu) = \sum_{j=0}^{d} \mu^j C_{d-j}(\mu)\,(k+1)_j\,,$$

$$P_\mu^m(\eta) = \sum_{j=0}^{d} (m+1)_j \mu^j C_{d-j}(\mu)\eta^j,$$

et où la fonction η est définie par

$$\xi\left((z,Z),(w,W)\right) = \frac{\langle Z, W\rangle}{N(z,w)^\mu}, \tag{II.XXII}$$

$$\eta\left((z,Z),(w,W)\right) = \frac{1}{1-\xi\left((z,Z),(w,W)\right)}. \tag{II.XXIII}$$

LEMME 5. *Soient ξ et η les fonctions définies sur $\widehat{\Omega}_m(\mu)\times\widehat{\Omega}_m(\mu)$ par (II.XXII) et (II.XXIII). Alors l'image de ξ est le disque unité Δ de $\mathbb{C}$ et l'image de η est le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$.*

Démonstration. Le noyau de Bergman de Ω est

$$K(z,t) = C_0 N(z,t)^{-g},$$

avec $C_0 = (\operatorname{vol}\Omega)^{-1}$. De la propriété connue du noyau de Bergman :

$$|K(z,t)|^2 \le K(z,z)K(t,t), \tag{II.XXIV}$$

on déduit

$$|N(z,t)|^2 \ge N(z,z)N(t,t) \qquad (z,t\in\Omega). \tag{II.XXV}$$

Dans $\widehat{\Omega}_m(\mu)\times\widehat{\Omega}_m(\mu)$, on a donc

$$|\xi\left((z,Z),(t,T)\right)|^2 = \frac{|\langle Z,T\rangle|^2}{N(z,t)^{2\mu}} \le \frac{\|Z\|^2}{N(z,z)^\mu}\frac{\|T\|^2}{N(t,t)^\mu} < 1.$$

La fonction ξ prend donc ses valeurs dans le disque unité Δ de $\mathbb{C}$. Comme

$$\xi\left((0,Z),(0,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}Z)\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\|Z\|^2,$$

l'image de ξ est égale à Δ. □

L'expression (II.XX) du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ entraîne alors immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 6. *Le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si le polynôme P_μ^m ne s'annule pas dans $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$.*

Le problème de Lu Qikeng pour les domaines $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est ainsi ramené à la localisation des racines du polynôme P_μ^m, qui a le même degré que le polynôme de Hua χ et s'en déduit algébriquement.

3. Problème de Lu Qikeng pour une base de dimension au plus 4

Dans cette section, nous donnons la solution complète du problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$, lorsque la base Ω est un domaine borné symétrique irréductible de dimension au plus 4.

3.1. Cas où Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$. Le domaine Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$ et le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega}_m(\mu) &= \left\{(z,Z)\in\Omega\times\mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < \left(1-|z|^2\right)^\mu\right\}\\ &= \left\{(z,Z)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m, \quad |z|^2+\|Z\|^{2/\mu} < 1\right\}.\end{aligned}$$

On a (voir l'annexe 1)

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{(m-1)\mu}{2}+1,$$

qui est positif pour tout $\mu>0$ et tout $m\geq 1$. La racine de P_μ^m est donc toujours inférieure à $\frac{1}{2}$; d'où

THÉORÈME 7. *Si Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng pour tout $\mu>0$ et tout entier $m\geq 1$.*

Ce résultat facile et connu (voir par exemple [**16**]) n'est cité ici que pour comparaison avec les résultats qui suivront et parce qu'il illustre la méthode employée lorsque Ω est de dimension >1.

3.2. Cas où Ω est de type $I_{1,2}$. Le domaine Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^2$ et le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega}_m(\mu) &= \left\{(z,Z)\in\Omega\times\mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < \left(1-\|z\|^2\right)^\mu\right\}\\ &= \left\{(z,Z)\in\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^m, \quad \|z\|^2+\|Z\|^{2/\mu} < 1\right\}.\end{aligned}$$

Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)(s+2).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe 2)

$$P_\mu^m(\eta) = (1-\mu)(2-\mu) + 3(m+1)\mu(1-\mu)\eta + (m+1)(m+2)\mu^2\eta^2.$$

D'après le théorème 6, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si le polynôme $P_\mu^m(\eta)$ a toutes ses racines dans le demi plan $\left\{\operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\right\}$. D'après la proposition 1 ces racines sont dans le demi plan $\left\{\operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si

(II.XXVI) $$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0,$$

(II.XXVII) $$\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0.$$

On a (annexe 2)

$$\frac{1}{(m+1)\mu}\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3 + (m-1)\mu;$$

la condition (II.XXVII) est donc vérifiée pour tout $\mu > 0$ et tout $m \geq 1$.

On a d'autre part (annexe 2)

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{m(m-3)}{4}\mu^2 + \frac{3(m-1)}{2}\mu + 2.$$

Si $m \geq 3$, tous les coefficients de ce polynôme en μ sont non négatifs et on a $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ pour tout $\mu > 0$.

Si $m = 1$, on a

$$P_\mu^1\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 - \frac{\mu^2}{2},$$

qui est strictement positif si et seulement si $\mu < \mu_1 = 2$.

Si $m = 2$, on a

$$P_\mu^2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 + \tfrac{3}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\mu^2,$$

qui est strictement positif si et seulement si $\mu < \mu_2 = 4$. Les conditions (II.XXVII) et (II.XXVI) sont donc vérifiées pour $\mu < \mu_m$, μ_m étant la racine positive de $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, le domaine est de Lu Qikeng si et seulement si $\mu \leq \mu_m$. En conclusion :

THÉORÈME 8. *Soit Ω la boule unité de $\mathbb{C}^2$. Le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng*

– *pour $m = 1$, si et seulement si $\mu \leq 2$;*

– *pour $m = 2$, si et seulement si $\mu \leq 4$;*

– *pour* $m \geq 3$, *quel que soit* $\mu > 0$.

Si $m = 1$, ce résultat est dû à H.P. Boas, Siqi Fu, E. Straube ([**2**]) ; voir aussi [**16**]. Pour $m > 1$, les résultats du théorème sont nouveaux.

3.3. Cas où Ω est de type $I_{1,3}$. Le domaine Ω est la boule hermitienne de dimension 3. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)(s+2)(s+3).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe 3)

$$P_\mu^m(\eta) = (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu) + (m+1)\mu(1-\mu)(11-7\mu)\eta$$
$$+ 6(m+1)(m+2)(1-\mu)\mu^2\eta^2 + (m+1)(m+2)(m+3)\mu^3\eta^3.$$

On a

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = 6 + \tfrac{11(m-1)}{2}\mu + \tfrac{3m(m-3)}{2}\mu^2 + \tfrac{(m-1)\left(m^2-5m-2\right)}{8}\mu^3.$$

Pour $1 \leq m \leq 5$, soit μ_m l'unique racine positive du polynôme q_m défini par $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$. On a (cf. proposition 3)

$$0 < \mu_1 = \sqrt{2} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5.$$

Du théorème 7, on déduit la solution complète du problème de Lu Qikeng lorsque Ω est de type $I_{1,3}$:

THÉORÈME 9. *Soit* Ω *une boule hermitienne de dimension* 3. *Si* $m \geq 6$, *le domaine de Cartan-Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ *est un domaine de Lu Qikeng pour tout* $\mu \in]0, +\infty[$. *Si* $1 \leq m \leq 5$, *le domaine de Cartan-Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ *est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si* $0 < \mu \leq \mu_m$.

Pour $m = 1$, ce résultat a été obtenu par Weiping Yin ([**16**]) par une méthode différente mais essentiellement équivalente. Les résultats du théorème sont nouveaux pour $m > 1$.

3.4. Cas où Ω est de type IV_3. Le domaine Ω est la boule de Lie de dimension 3 (isomorphe au domaine symétrique associé à l'espace $\mathcal{S}_2(\mathbb{C})$ des matrices symétriques $(2,2)$). Les invariants numériques sont $a = 1$, $b = 0$, $r = 2$. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)\left(s+\tfrac{3}{2}\right)(s+2).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe 4)

$$P_\mu^m(\eta) = (1-\mu)(2-\mu)\left(\tfrac{3}{2}-\mu\right) + (m+1)\mu(1-\mu)\left(\tfrac{13}{2}-7\mu\right)\eta$$

$$+\,3(m+1)(m+2)\left(\tfrac{3}{2}-2\mu\right)\mu^2\eta^2+(m+1)\,(m+2)\,(m+3)\,\mu^3\eta^3.$$

On a

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{(m-1)\left(m^2-5m-2\right)}{8}\mu^3+\tfrac{9m(m-3)}{8}\mu^2+\tfrac{13(m-1)}{4}\mu+3.$$

Pour $1\leq m\leq 5$, soient q_m les polynômes définis par

$$q_m(\mu)=P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

et soit μ_m l'unique racine positive du polynôme q_m. On a (cf. proposition 8)

$$0<\mu_1=\tfrac{2}{\sqrt{3}}<\mu_2<\mu_3<\mu_4<\mu_5.$$

Du théorème 12, on déduit la solution complète du problème de Lu Qikeng lorsque Ω est de type IV_3 :

THÉORÈME 10. *Soit Ω une boule de Lie de dimension 3. Si $m\geq 6$, le domaine de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m\,(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng pour tout $\mu\in]0,+\infty[$. Si $1\leq m\leq 5$, le domaine de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m\,(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si $0<\mu\leq\mu_m$.*

Les résultats de ce théorème sont entièrement nouveaux.

3.5. Cas où Ω est de type $I_{1,4}$. Le domaine Ω est la boule hermitienne de dimension 4. Le polynôme de Hua est

$$\chi\,(s)=(s+1)\,(s+2)\,(s+3)\,(s+4)\,.$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m\,(\mu)$ est (voir annexe 5)

$$\begin{aligned}P_\mu^m(\eta)=&\,(1-\mu)(2-\mu)\,(3-\mu)\,(4-\mu)\\&+5(m+1)(1-\mu)(5-3\mu)(2-\mu)\mu\eta\\&+5(m+1)_2\,(1-\mu)\,(7-5\mu)\mu^2\eta^2\\&+10\,(m+1)_3\,(1-\mu)\mu^3\eta^3+(m+1)_4\,\mu^4\eta^4\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)=&\,(4+m\mu)\left[6+\tfrac{1}{4}(19m-25)\mu+m(m-5)\mu^2\right.\\&\left.+\,\tfrac{1}{16}(m^3-10m^2+15m+10)\mu^3\right].\end{aligned}$$

Pour $1 \leq m \leq 7$, soit μ_m la plus petite racine positive du polynôme q_m défini par $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$. On a (cf. proposition 13)

$$0 < \mu_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5 < \mu_6 < \mu_7.$$

Du théorème (18), on déduit la solution complète du problème de Lu Qikeng lorsque Ω est de type $I_{1,4}$:

THÉORÈME 11. *Soit Ω une boule hermitienne de dimension 4. Si $m \geq 8$, le domaine de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$est un domaine de Lu Qikeng pour tout $\mu \in]0, +\infty[$. Si $1 \leq m \leq 7$, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.*

Pour $m = 1$, ce résultat a été obtenu par Liyou Zhang et Jong-do Park (2006, non publié). Les résultats du théorème sont nouveaux pour $m > 1$.

3.6. Cas où Ω est de type IV_4. Le domaine Ω est la boule de Lie de dimension 4. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)(s+2)^2(s+3).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe 6)

$$\begin{aligned} P_\mu^m(\eta) = {} & (1-\mu)(2-\mu)^2(3-\mu) + (m+1)(1-\mu)(7-5\mu)(4-3\mu)\mu\eta \\ & + (m+1)_2(1-\mu)(23-25\mu)\mu^2\eta^2 + 2(m+1)_3(4-5\mu)\mu^3\eta^3 \\ & + (m+1)_4\mu^4\eta^4. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = {} & 12 + 14(m-1)\mu + \tfrac{23m(m-3)}{4}\mu^2 \\ & + (m-1)(m^2-5m-2)\mu^3 + \tfrac{m^3-10m^2+15m+10}{16}\mu^4. \end{aligned}$$

Pour $1 \leq m \leq 7$, soit μ_m la plus petite racine positive du polynôme q_m défini par $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$. On a (cf. proposition 19)

$$0 < \mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{23-\sqrt{337}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5 < \mu_6 < \mu_7.$$

Du théorème (24), on déduit la solution complète du problème de Lu Qikeng lorsque Ω est de type IV_4 :

THÉORÈME 12. *Soit* Ω *une boule de Lie de dimension* 4. *Si* $m \geq 8$, *le domaine de Cartan-Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ *est un domaine de Lu Qikeng pour tout* $\mu \in]0, +\infty[$. *Si* $1 \leq m \leq 7$, *le domaine* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ *est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si* $0 < \mu \leq \mu_m$.

Les résultats de ce théorème sont entièrement nouveaux.

CHAPITRE III

POLYNÔMES DE HUA

1. Définitions et notations

1.1. Polynômes du type de Hua. On considère un triplet (a, b, r) d'entiers naturels, avec $r > 0$. Le polynôme du type de Hua $\chi = \chi_{a,b,r}$ est le polynôme défini par

$$\chi(s) = \chi_{a,b,r}(s) = \prod_{j=1}^{r} \left(s + 1 + (j-1)\frac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)a}, \tag{III.I}$$

où $(s)_k$ désigne la factorielle croissante

$$(s)_k = s(s+1)\dots(s+k-1) = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}.$$

Le “genre" g et la “dimension" d sont définis par

$$g = 2 + a(r-1) + b,$$
$$d = r + rb + \frac{r(r-1)}{2}a.$$

On a

$$\deg \chi = d. \tag{III.II}$$

Dans le cas où a, b et r sont les invariants numériques d'un domaine symétrique borné irréductible Ω, le polynôme (III.I) apparaît lors du calcul de l'intégrale de Hua (proposition 4). le degré du polynôme χ est alors la dimension d du domaine Ω.

Si $r = 1$, le polynôme $\chi_{a,b,r}$ ne dépend pas de a et nous prendrons dans ce cas $a = 0$. On a alors

$$\chi_{0,b,1}(s) = (s+1)_{1+b}.$$

C'est le polynôme de Hua du domaine hermitien symétrique de type $I_{1,d}$ (boule hermitienne de dimension $d = 1 + b$), pour lequel $g = 2 + b = 1 + d$.

1.2. Décomposition suivant les factorielles croissantes. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[s]$ de degré d, et soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère la décomposition

$$P(\mu s) = \sum_{j=0}^{d} c_j(P,\mu) \frac{(s+1)_j}{j!}. \tag{III.III}$$

Motivation : Le noyau de Bergman des domaines de Cartan-Hartogs s'écrit à l'aide du polynôme de Hua (III.I) composé avec la fonction $\frac{1}{1-X}$. En appliquant la décomposition (III.III) au polynôme de Hua, les coefficients $c_j(P,\mu)$ apparaissent dans l'expression du noyau de Bergman (II.XX) et leurs propriétés (telle que la positivité) peuvent aider à l'étudier.

De (III.III) on a

$$c_k(P,\mu) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} P(-(j+1)\mu). \tag{III.IV}$$

Les coefficients c_k sont donc des polynômes de degré d en la variable μ, divisibles par μ^k. On définit alors les polynômes $C_{d-j}(P)$, pour $0 \leq j \leq d$, par

$$c_j(P,\mu) = j!\mu^j C_{d-j}(P,\mu).$$

De (III.III),

$$\begin{aligned} P(s) &= \sum_{j=0}^{d} c_j(P,\mu) \frac{\left(\frac{s}{\mu}+1\right)_j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{d} \frac{c_j(P,\mu)}{j!\mu^j} \prod_{k=1}^{j} (s+k\mu) \\ &= \sum_{j=0}^{d} C_{d-j}(P,\mu) \prod_{k=1}^{j} (s+k\mu). \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme du type de Hua $\chi = \chi_{a,b,r}$ défini par (III.I) s'écrit

$$\chi(s) = \sum_{j=0}^{d} C_j(\chi,\mu) \prod_{k=1}^{d-j} (s+k\mu) \tag{III.V}$$

où

$$C_j(P,\mu) = \frac{1}{(d-j)!\mu^{d-j}} \sum_{k=0}^{d-j} (-1)^k \binom{d-j}{k} \chi(-(1+k)\mu). \tag{III.VI}$$

2. Conjectures

L'observation de nombreux cas particuliers a amené G. ROOS, en 2004, a conjecturer certaines propriétés des coefficients C_j (III.VI) qui apparaissent dans l'expression du noyau de Bergman des domaines de Cartan-Hartogs. L'*exposant critique* $\mu_0 = \dfrac{g}{d+1}$ qui apparaît dans la conjecture 3.1 correspond également à une situation spéciale pour la métrique de Kähler–Einstein des domaines de Cartan-Hartogs. Les conjectures ci-dessous ont été vérifiées pour beaucoup d'exemples où les les entiers a, b et r sont les invariants numériques d'un domaine symétrique borné irréductible. Par ailleurs, ces conjectures semblent également vérifiées si a, b et r ne proviennent pas d'un domaine symétrique borné (le polynôme de Hua est alors lié à l'intégrale de Selberg). Les conjectures 3.1, 3.1 et 3.1 proviennent de l'étude du signe des coefficients C_j.

Soit $\chi = \chi_{a,b,r}$ le polynôme du type de Hua associé au triplet (a, b, r) :

$$\chi(s) = \chi_{a,b,r}(s) = \prod_{j=1}^{r} \left(s + 1 + (j-1)\frac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)a}.$$

On considère les polynômes $C_j(\mu)$ définis par (III.VI).

CONJECTURE 1. *On a $C_j(\mu) > 0$ pour tout j, $1 \leq j \leq d$, si et seulement si*

$$\mu < \mu_0 = \frac{g}{d+1}.$$

Si $\mu = \mu_0$, tous les coefficients $C_j(\mu)$ ($1 \leq j \leq d$) dans (III.V) sont strictement positifs, sauf $C_1(\mu_0) = 0$ et sauf pour le cas $r = 1$ (pour lequel $\mu_0 = 1$ et $C_j(1) = 0$ pour $1 < j \leq d$).

CONJECTURE 2. *Pour $0 \leq j \leq \left[\frac{d-1}{2}\right]$,*

$$C_{2j+1}\left(\frac{g}{d-2j+1}\right) = 0.$$

CONJECTURE 3. *Un entier positif p est racine de C_j si et seulement si*

$$1 \leq p < \frac{g}{d-j+1}.$$

CONJECTURE 4. *Pour $1 \leq j \leq d$, toutes les racines α de C_j sont dans le demi-plan $\{\operatorname{Re}\alpha > 0\}$. Soient m_j et M_j les bornes des modules des racines complexes de C_j :*

$$m_j = \min\{|\alpha| \,; C_j(\alpha) = 0\}, \quad M_j = \max\{|\alpha| \,; C_j(\alpha) = 0\}.$$

Alors

(1) *la suite* $(m_j)_{1\leq j\leq d}$ *est croissante ;*

(2) *la suite* $(M_j)_{1\leq j\leq d}$ *est croissante et vérifie*

(III.VII)
$$M_j \leq \frac{g}{d-j+1}.$$

Comme $m_1 = M_1 = \mu_0$, le point 1 de cette conjecture implique la conjecture 3.1 et la conjecture de l'exposant critique pour les domaines hermitiens symétriques.

3. Calcul du coefficient C_1

Soit le polynôme de Hua associé au triplet (a, b, r)

$$\chi(s) = \prod_{j=1}^{r} \left(s + 1 + (j-1)\frac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)a}.$$

Et soit α_i, $i = 1, ..., d$ les racines du polynôme χ. On note S_k les fonctions symétriques de Newton

$$S_k = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^k.$$

Soient

$$\sigma_k = \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq d} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_k}$$

les coefficients du développement

(III.VIII)
$$\chi(s) = s^d - \sigma_1 s^{d-1} + \sigma_2 s^{d-2} + ... + (-1)^k \sigma_k s^{d-k} + ... + (-1)^d \sigma_d.$$

D'autre part on a (III.V)

$$\chi(s) = \sum_{j=0}^{d} C_j(\mu) \prod_{k=1}^{d-j} (s + k\mu).$$

Notons β_{i_k} les racines du polynôme $\prod_{k=1}^{d-j}(s + k\mu)$; σ_k^{d-j} les fonctions symétriques élémentaires de ce polynôme

$$\sigma_k^{d-j} = \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq d-j} \beta_{i_1}\beta_{i_2}...\beta_{i_k};$$

et S_k^{d-j} les fonctions symétriques de Newton

$$S_k^{d-j} = \sum_{i=1}^{d-j} \alpha_i^k.$$

L'identification des coefficients de s^k dans (III.V) et (III.VIII), $k = 0, ..., d$ donne les équations suivantes

(III.IX) $$C_0(\mu) = 1$$

$$C_j(\mu) = (-1)^j \sigma_j - \sum_{k=1}^{j} (-1)^k \sigma_k^{d-j+k} C_{j-k}(\mu) \quad (1 \le j \le d).$$

Calcul de $C_1(\mu)$: On a

$$\sigma_1 = \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{1+b+(r-j)a} \left(-(j-1)\frac{a}{2} - k\right) = -\frac{gd}{2}$$

et

$$\sigma_1^d = \sum_{k=1}^{d} (-k\mu) = -\frac{d(d+1)}{2}\mu$$

d'où

(III.X) $$C_1(\mu) = \frac{d(d+1)}{2}\left(\frac{g}{d+1} - \mu\right).$$

Remarquons que l'exposant critique $\mu_0 = \dfrac{g}{d+1}$ apparaît dans l'expression du coefficient C_1 et que la partie de la conjecture 3.1 qui concerne ce coefficient est vérifiée : on a bien $C_1(\mu) > 0$ si $\mu < \mu_0$ et $C_1(\mu_0) = 0$.

4. Symétrie des polynômes de Hua

On se propose de démontrer que $\chi(-s) = (-1)^d \chi(s-g)$ pour tout s. Notons que ce qui va suivre est vrai pour tout triplet (a, b, r), qui ne correspond pas forcément aux invariants d'un domaine symétrique borné. Soit

(III.XI) $$g = 2 + a(r-1) + b.$$

Si (a, b, r) est associé à un domaine hermitien symétrique, g est le *genre* de Ω.

Soit $J = J_{a,b,r}$ l'ensemble d'indices

(III.XII) $$J = J_{a,b,r} = \{(j,k) \mid 1 \le j \le r,\ 1 \le k \le 1 + b + (r-j)a\}.$$

Le polynôme χ peut alors s'écrire

(III.XIII) $$\chi_{a,b,r}(s) = \prod_{(j,k)\in J_{a,b,r}} (s + \beta_{j,k}),$$

où la famille $(\beta_{j,k})_{(j,k)\in J}$ est définie par

(III.XIV) $$\beta_{j,k} = k + (j-1)\frac{a}{2}.$$

LEMME 1. *L'application* $(j,k) \to (j,k')$, $k' = 2 + b + (r-j)a - k$ *est une bijection de* $J_{a,b,r}$ *sur lui-même, pour laquelle*

(III.XV) $$\beta_{j,k} + \beta_{j,k'} = g.$$

Démonstration. Il est clair que $(j,k) \to (j,k')$ est une bijection de J sur lui-même. On a

$$\beta_{j,k} = k + (j-1)\frac{a}{2},$$
$$\beta_{j,k'} = 2 + b + (r-j)a - k + (j-1)\frac{a}{2},$$

d'où

$$\beta_{j,k} + \beta_{j,k'} = 2 + b + (r-1)a = g.$$

□

PROPOSITION 2. *Le polynôme* $\chi = \chi_{a,b,r}$ *vérifie*

(III.XVI) $$\chi(-s) = (-1)^d \chi(s-g).$$

Démonstration. On a

$$\chi(-s) = \prod_{(j,k)\in J} (-s + \beta_{j,k}) = \prod_{(j,k)\in J} (-s + g - \beta_{j,k'})$$
$$= (-1)^d \prod_{(j,k)\in J} (s - g + \beta_{j,k'}) = (-1)^d \chi(s-g).$$

□

La proposition 1 permet de démontrer la conjecture 3.1. En effet, si on pose $\mu_j = \dfrac{g}{d-2j+1}$, de (III.VI),

$$C_{2j+1}(\mu_j) = \frac{1}{\mu_j^{d-2j-1}(d-2j-1)!} \sum_{k=0}^{d-2j-1} (-1)^k \binom{d-2j-1}{k} \chi(-(1+k)\mu_j).$$

Notons

$$B_k(\mu_j) = (-1)^k \binom{d-2j-1}{k} \chi(-(1+k)\mu_j)$$
$$S = \sum_{k=0}^{d-2j-1} B_k(\mu_j)$$

Deux cas se présentent :

(1) Si d est impair :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{\frac{d-2j-1}{2}} B_k(\mu_j) + \sum_{k=\frac{d-2j+1}{2}}^{d-2j-1} B_k(\mu_j) \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{d-2j-1}{2}} B_k(\mu_j) + \sum_{k=0}^{\frac{d-2j-1}{2}-1} B_{d-2j-1-k}(\mu_j),
\end{aligned}$$

et donc

$$S = \left(\sum_{k=0}^{\frac{d-2j-1}{2}-1} B_k(\mu_j) + B_{d-2j-1-k}(\mu_j) \right) + B_{\frac{d-2j-1}{2}}(\mu_j)$$

or

$$\begin{aligned}
B_{\frac{d-2j-1}{2}}(\mu_j) &= (-1)^{\frac{d-2j-1}{2}} \binom{d-2j-1}{\frac{d-2j-1}{2}} \chi\left(-\left(1 + \frac{d-2j-1}{2}\right) \frac{g}{d-2j+1} \right) \\
&= (-1)^{\frac{d-2j-1}{2}} \binom{d-2j-1}{\frac{d-2j-1}{2}} \chi\left(-\frac{g}{2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

($\chi\left(-\frac{g}{2}\right) = 0$ découle de (III.XVI)). De plus

$$\begin{aligned}
B_{d-2j-1-k}(\mu_j) &= (-1)^{d-2j-1-k} \binom{d-2j-1}{d-2j-1-k} \chi\left(-(d-2j-k)\mu_j\right) \\
&= (-1)^{d-2j-1-k} \binom{d-2j-1}{k} \chi\left(-(d-2j-k)\mu_j\right) \\
&= (-1)^{d-2j-1-k} \binom{d-2j-1}{k} \chi\left((1+k)\mu_j - (d-2j+1)\mu_j\right) \\
&= -(-1)^{d+k} \binom{d-2j-1}{k} \chi\left((1+k)\mu_j - g\right) \\
&= -(-1)^{k} \binom{d-2j-1}{k} \chi\left(-(1+k)\mu_j\right) \\
&= -B_k(\mu_j).
\end{aligned}$$

On en conclut que $C_{2j+1}(\mu_j) = 0$.

(2) Si d est pair

$$S = \sum_{k=0}^{\frac{d-2j-2}{2}} B_k(\mu_j) + \sum_{\frac{d-2j}{2}}^{d-2j-1} B_k(\mu_j)$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{d-2j-2}{2}} B_k(\mu_j) + \sum_{k=0}^{\frac{d-2j-2}{2}} B_{d-2j-1-k}(\mu_j),$$

et donc

$$S = \sum_{k=0}^{\frac{d-2j-2}{2}} B_k(\mu_j) + B_{d-2j-1-k}(\mu_j)$$

$$= 0$$

car de (III.XVI),

$$B_{d-2j-1-k}(\mu_j) = -B_k(\mu_j).$$

Ceci achève la démonstration de la conjecture 3.1.

5. Cas de la boule hermitienne

Dans cette section, le domaine symétrique Ω sera considéré de rang 1, ses invariants numériques sont $(0, b, 1)$ et le polynôme de Hua s'écrit

(III.XVII) $$\chi_d(s) = (s+1)_d.$$

Dans ce cas $d = 1 + b$ et $g = 1 + d$, et la valeur de l'exposant critique est

$$\mu_0 = \frac{g}{d+1} = 1.$$

Notons C_j^d les coefficients de la décomposition (III.V) de χ_d.

LEMME 3. *Les coefficients C_j^d vérifient*

$$C_0^{d+1}(\mu) = C_0^d(\mu),$$

(III.XVIII) $$C_j^{d+1}(\mu) = C_j^d(\mu) + (d+2-j)\left[\frac{d+1}{d+2-j} - \mu\right] C_{j-1}^d(\mu).$$

Démonstration. De (III.XVII), on a

$$\chi_{d+1}(s) = (s+d+1)\,\chi_d(s)\,. \tag{III.XIX}$$

En utilisant (III.V) et (III.XIX), le polynôme χ_{d+1} s'écrit

$$\begin{aligned}
\chi_{d+1}(s) &= \sum_{j=0}^{d+1} C_j^{d+1}(\mu) \prod_{k=1}^{d+1-j}(s+k\mu) \\
&= (s+d+1)\sum_{j=0}^{d} C_j^{d}(\mu) \prod_{k=1}^{d-j}(s+k\mu) \\
&= \sum_{j=0}^{d} C_j^{d}(\mu) \prod_{k=1}^{d-j}(s+k\mu)\left[(s+(d+1-j)\mu+d+1-(d+1-j)\mu)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{d} C_j^{d}(\mu) \prod_{k=1}^{d+1-j}(s+k\mu) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{d} C_j^{d}(\mu) \prod_{k=1}^{d-j}(s+k\mu)\left[d+1-(d+1-j)\,\mu\right].
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{d}(C_j^{d+1}(\mu) - C_j^{d}(\mu)) \prod_{k=1}^{d+1-j}(s+k\mu) \\
&\quad = \sum_{j'=j+1=1}^{d+1} \left[(d+1)-(d+2-j)\,\mu\right] C_{j'-1}^{d}(\mu) \prod_{k=1}^{d+1-j'}(s+k\mu)\,,
\end{aligned} \tag{III.XX}$$

d'où les relations (III.XVIII). □

Remarquons que dans ce cas particulier, on a

$$C_0^d(\mu) = 1 \tag{III.XXI}$$

pour tout d.

THÉORÈME 4. *Les coefficients $C_j^d(\mu)$ de la décomposition (III.V) du polynôme de Hua χ_d sont positifs pour tout j, $1 \leq j \leq d$ si $\mu < 1$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension d. Supposons que dans $I_{1,n}$, tous les coefficients $C_j^n(\mu)$ sont positifs pour $\mu < 1$, et regardons $C_j^{n+1}(\mu)$ (dans $I_{1,n+1}$). Comme

$\dfrac{d+1}{d+2-j} - \mu > 0$ pour $\mu < 1$ et $1 \leq j \leq d$, le lemme 3 implique que les $C_j^{n+1}(\mu)$ sont positifs si $\mu < 1$ et $1 \leq j \leq d$. De plus

$$C_{d+1}^{d+1}(\mu) = \chi_{n+1}(-\mu) = (1-\mu)_{n+1}$$

est positif pour $\mu < 1$. $\square$

Le théorème 3 démontre la conjecture 3.1 dans le cas $I_{1,n}$ (rang 1). Dans ce cas particulier, $C_j(1) = 0$ pour tout j, $1 \leq j \leq n$.

CONCLUSION

Soit Ω un domaine symétrique borné irréductible ; on note N la norme générique de Ω et χ son polynôme de Hua. On note $d = \dim_{\mathbb{C}} \Omega$ et g son genre. On considère le *domaine de Cartan-Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ construit au-dessus de Ω :

$$\widehat{\Omega}_m(\mu) = \left\{(z, Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N(z, z)^{\mu}\right\}.$$

Le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$, noté $\widehat{K}_{m,\mu}((z, Z), (w, W))$, s'écrit

$$\widehat{K}_{m,\mu}((z, Z), (w, W)) = \frac{C}{N(z, w)^{g+m\mu}} \eta^{m+1} P_\mu^m(\eta),$$

où

$$P_\mu^m(\eta) = \sum_{j=1}^{d} (m+1)_j \, C_{d-j}(\mu) \, \mu^j \eta^j. \tag{III.XXII}$$

Les coefficients $C_j(\mu)$ dans l'equation (III.XXII) s'écrivent

$$C_j(\mu) = \frac{1}{(d-j)!\mu^{d-j}} \sum_{k=0}^{d-j} (-1)^k \binom{d-j}{k} \chi(-(1+k)\mu).$$

Le polynôme P_μ^m est dit polynôme *représentatif du noyau de Bergman* du domaine de Cartan–Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$.

Le *problème de Lu Qikeng* pour un domaine U de $\mathbb{C}^n$ consiste à déterminer si son noyau de Bergman s'annule dans $U \times U$. Un domaine sera dit de Lu Qikeng si son noyau de Bergman ne s'annule pas dans $U \times U$.

Pour les domaines de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$, ce problème est réduit par le théorème 6 à la localisation des racines du polynôme $P_\mu^m(\eta)$ dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\right\}$. En effet, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si toutes les racines du polynôme représentatif du noyau de Bergman P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$. Au chapitre II, nous avons déterminé quels domaines $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ sont des domaines de Lu Qikeng, pour tous les domaines symétriques Ω *de dimension inférieure ou égale à* 4. Nos résultats font apparaître la situation suivante, dont on conjecture qu'elle se généralise pour toute base Ω : pour Ω et $m \geq 1$ fixés, il existe $\mu_{\Omega,m}$, $0 < \mu_{\Omega,m} \leq \infty$ tel que $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_{\Omega,m}$. La borne $\mu_{\Omega,m}$ est caractérisée comme la plus petite racine positive du polynôme $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$; on a $\mu_{\Omega,m} = +\infty$ pour m assez grand. Dans ces cas, nous avons montré qu'il existe un entier m_0 et, pour chaque $m \leq m_0$, une valeur μ_m tels que

– si $m \leq m_0$, le domaine de Cartan–Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si $\mu \leq \mu_m$;
– si $m > m_0$, le domaine de Cartan–Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.

La valeur μ_m est la plus petite racine positive de $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$ et la valeur m_0 ne dépend que du domaine symétrique borné Ω.

Problèmes ouverts.

(1) Généraliser nos résultats au cas où le domaine de base Ω est un domaine symétrique borné de dimension quelconque. La méthode que nous avons utilisée pour résoudre le problème de Lu Qikeng dans le cas où la dimension du domaine Ω est au plus 4 ne s'applique que cas par cas, avec des calculs dont la complexité croît rapidement avec la dimension de Ω. D'autres méthodes sont nécessaires pour traiter le cas général.

(2) Les conjectures sur les $C_j(\mu)$ (section 2) proviennent de l'étude du signe des coefficients du polynôme représentatif de Bergman P_μ^m. En effet, la positivité des coefficients du polynôme P_μ^m par exemple est une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que toutes ses racines soient dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$. Il serait intéressant de voir comment interviennent les propriétés des coefficients C_j pour l'étude de la *stabilité* du polynôme représentatif du noyau de Bergman.

(3) Comprendre la transformation $\chi \mapsto P_{\chi,\mu}^m(\eta)$, lorsque χ est un polynôme quelconque, ou le polynôme de Hua d'un domaine borné symétrique, ou un polynôme du type de Hua ne correspondant pas nécessairement à un domaine symétrique.

(4) Étudier le domaine particulier $\widehat{\Omega}_m(\mu_m)$, où μ_m est la plus petite racine positive du polynôme représentatif de Bergman. Ce domaine est de Lu Qikeng, mais correspond à un cas limite (le noyau de Bergman s'annule en des points de la frontière de $\Omega \times \Omega$) et devrait avoir des propriétés particulières.

(5) Dans un domaine de Lu Qikeng, il est possible de définir la *fonction représentative de Bergman* et son image dite *domaine représentatif de Bergman*. À notre connaissance, aucun exemple de domaine représentatif de Bergman (sauf pour les domaines symétriques bornés cerclés) n'a été donné explicitement. Peut-on décrire le domaine représentatif de Bergman d'un domaine de Cartan–Hartogs dans le cas où il est un domaine de Lu Qikeng ?

ANNEXE A

LOCALISATION DES RACINES

Le problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ a été ramené à la localisation des racines du polynôme P_μ^m par rapport au demi-plan $\left\{\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\right\}$ (théorème 6). Nous rappelons ci-dessous le *critère de Routh–Hurwitz* qui permet de déterminer quand un polynôme à coefficients réels a toutes ses racines dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z < 0\}$. Dans les paragraphes suivants, nous en déduisons les critères utilisés pour résoudre le problème de Lu Qikeng pour un domaine de Cartan–Hartogs dont la base Ω est de dimension au plus 4.

1. Critère de Routh–Hurwitz

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n

(A.I) $$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n;$$

on suppose $a_0 > 0$. Le polynôme P est dit *stable* si toutes ses racines ont des parties réelles négatives.

L'étude de la stabilité des polynômes intervient dans la théorie du contrôle. En effet, l'équation caractéristique d'un système d'équations différentielles linéaires est un polynôme et la stabilité du système se traduit par le fait que toutes les racines de l'équation caractéristique soient dans le demi-plan négatif.

En 1875, le mécanicien anglais ROUTH a élaboré un algorithme qui permet de déterminer si un polynôme est stable (et plus généralement de localiser ses racines par rapport à $\{\operatorname{Re} z = 0\}$). Vingt ans plus tard, le mathématicien allemand HURWITZ a donné un critère équivalent, dans une forme différente, utilisant les déterminants (*déterminants de Hurwitz*)

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_0 & a_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

CRITÈRE (Critère de Routh–Hurwitz). *Toutes les racines du polynôme (A.I) ont des parties réelles négatives si et seulement si les n déterminants de Hurwitz sont positifs :*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \cdots, \quad \Delta_n > 0.$$

En 1914, les mathématiciens français LIÉNARD et CHIPART ont établi un critère de stabilité, différent de celui de Routh-Hurwitz, en constatant que lorsque les coefficients a_0, a_1 , $\cdots$, a_n sont positifs, les conditions sur la positivité des Δ_i ne sont pas indépendantes. Par exemple, pour $n = 4$, les conditions de stabilité se réduisent à $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_4 > 0$ et $\Delta_3 > 0$.

2. Polynômes de degré 2

Soit

$$Q(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2,$$

avec $a_0 > 0$. Les déterminants de Hurwitz sont

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2.$$

Le polynôme Q est stable si et seulement si on a

(A.II) $$a_1 > 0, \quad a_2 > 0.$$

PROPOSITION 1. *Le polynôme du second degré P a ses racines dans $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si le polynôme $Q(z) = P\left(\frac{1}{2} + z\right)$ est stable, c'est-à-dire si*

(A.III) $$P\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0.$$

Il est également facile d'établir cette proposition directement, sans recours au critère de Routh–Hurwitz.

3. Polynômes de degré 3

Soit

$$Q\left(z\right) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3,$$

avec $a_0 > 0$. Les déterminants de Hurwitz sont

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2.$$

Le polynôme Q est stable si et seulement si on a

$$a_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad a_3 > 0.$$

Comme $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3$, cette condition équivaut à

(A.IV) $$a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad \Delta_2 > 0.$$

Soit $P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ un polynôme de degré 3 à coefficients réels avec $\delta > 0$. Ce polynôme a ses racines dans $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si le polynôme $Q(z) = P\left(\frac{1}{2} + z\right)$ est stable. On a

$$Q\left(z\right) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3,$$

avec $a_3 = P\left(\frac{1}{2}\right)$, $a_2 = P'\left(\frac{1}{2}\right)$ et

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta + \gamma + \frac{3}{4}\delta & \delta \\ \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} + \frac{\delta}{8} & \gamma + \frac{3}{2}\delta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \beta + \gamma + \frac{3}{4}\delta & \delta \\ \alpha - \frac{\gamma}{4} - \frac{\delta}{4} & \gamma + \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta + \gamma + \delta & \delta \\ \alpha & \gamma + \delta \end{vmatrix}.$$

On en déduit

PROPOSITION 2. *Soit $P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ un polynôme de degré 3 à coefficients réels avec $\delta > 0$. Ce polynôme a toutes ses racines dans $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si on a*

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \tag{A.V}$$

$$\Delta_2 = (\gamma + \delta)(\beta + \gamma + \delta) - \alpha\delta > 0. \tag{A.VI}$$

4. Polynômes de degré 4

Soit

$$Q(z) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$$

un polynôme à coefficients réels avec $a_0 > 0$. Les déterminants de Hurwitz sont

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_4 \Delta_3.$$

Le polynôme Q est stable si et seulement tous les Δ_j sont positifs. Les conditions $\Delta_3 > 0$ et $\Delta_4 > 0$ sont équivalentes à

$$\Delta_3 > 0, \quad a_4 > 0. \tag{A.VII}$$

D'autre part, on a

$$\Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4$$

et les conditions (A.VII) et $a_3 > 0$ entraînent donc $\Delta_2 > 0$. Finalement, $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3$ et $a_2 > 0$ entraîne $a_1 > 0$ si les conditions précédentes sont réalisées. Le critère de Routh–Hurwitz est ainsi équivalent au critère de Liénard et Chipart, qui s'écrit ici

PROPOSITION 3. *Le polynôme à coefficients réels*

$$Q\left(z\right) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$$

($a_0 > 0$) est stable si et seulement si on a

(A.VIII) $$a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad \Delta_3 > 0.$$

Soit

$$P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4$$

un polynôme de degré 4 à coefficients réels avec $\varepsilon > 0$. Soit

$$Q\left(z\right) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$$

le polynôme $Q(z) = P\left(\frac{1}{2} + z\right)$. On a

$$\begin{aligned}
a_4 &= P\left(\tfrac{1}{2}\right) = \alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{4}\gamma + \tfrac{1}{8}\delta + \tfrac{1}{16}\varepsilon, \\
a_3 &= P'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \beta + \gamma + \tfrac{3}{4}\delta + \tfrac{1}{2}\varepsilon, \\
a_2 &= \tfrac{1}{2}P''\left(\tfrac{1}{2}\right) = \gamma + \tfrac{3}{2}\delta + \tfrac{3}{2}\varepsilon, \\
a_1 &= \tfrac{1}{6}P'''\left(\tfrac{1}{2}\right) = \delta + 2\varepsilon, \\
a_0 &= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Le polynôme de Hurwitz Δ_3 relatif à Q est

$$\begin{aligned}
\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} &= a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 \\
&= \left(\delta + 2\varepsilon\right)\left(\gamma + \tfrac{3}{2}\delta + \tfrac{3}{2}\varepsilon\right)\left(\beta + \gamma + \tfrac{3}{4}\delta + \tfrac{1}{2}\varepsilon\right) \\
&\quad - \left(\delta + 2\varepsilon\right)^2\left(\alpha + \tfrac{\beta}{2} + \tfrac{\gamma}{4} + \tfrac{\delta}{8} + \tfrac{\varepsilon}{16}\right) - \varepsilon\left(\beta + \gamma + \tfrac{3}{4}\delta + \tfrac{1}{2}\varepsilon\right)^2.
\end{aligned}$$

On a

(A.IX) $$\Delta_3 = \left(\varepsilon + \delta + \gamma + \beta\right)\left[\left(\varepsilon + \delta + \gamma\right)\left(\varepsilon + \delta\right) - \varepsilon\beta\right] - \left(2\varepsilon + \delta\right)^2 \alpha.$$

On a finalement, en appliquant cette relation et la proposition 3 :

PROPOSITION 4. *Soit*

$$P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4$$

un polynôme de degré 4 *à coefficients réels avec* $\varepsilon > 0$. *Les racines du polynôme* P *sont toutes situées dans* $\left\{\mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2}\right\}$ *si et seulement si* P *vérifie les conditions*

(A.X) $$P\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P''\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0,$$

(A.XI) $$\Delta_3 \equiv (\varepsilon + \delta + \gamma + \beta)\left[(\varepsilon + \delta + \gamma)(\varepsilon + \delta) - \varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon + \delta)^2 \alpha > 0.$$

ANNEXE B

TABLES

On trouvera ci-dessous pour les types indiqués de domaines bornés symétriques :

– le polynôme de Hua

$$\chi(s) = \prod_{j=1}^{r} \left(s + 1 + (j-1)\,\tfrac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)a} \;;$$

– les coefficients $C_j(\mu)$ de la décomposition

$$\chi\left(k\mu\right) = \sum_{j=0}^{d} \mu^j C_{d-j}\left(\mu\right)\left(k+1\right)_j \;;$$

– le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m\left(\mu\right)$

$$P_\mu^m(\eta) = \sum_{j=0}^{d} (m+1)_j C_{d-j}(\mu)\mu^j\eta^j \;;$$

– ses polynômes dérivés $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,\eta^k}P_\mu^m(\eta)$ $(1 \leq k < d)$;

– leurs valeurs pour $\eta = \frac{1}{2}$;

– en dimension 3, le déterminant de Hurwitz

$$\Delta_2 = \left(\gamma+\delta\right)\left(\beta+\gamma+\delta\right) - \alpha\delta$$

associé au polynôme $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}+\eta\right) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3$;

– en dimension 4, le déterminant de Hurwitz

$$\Delta_3 \equiv \left(\varepsilon+\delta+\gamma+\beta\right)\left[\left(\varepsilon+\delta+\gamma\right)\left(\varepsilon+\delta\right) - \varepsilon\beta\right] - \left(2\varepsilon+\delta\right)^2\alpha$$

associé au polynôme $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}+\eta\right) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3 + \varepsilon\eta^4$;

– éventuellement, les valeurs ci-dessus pour des valeurs particulières de m.

À partir de la dimension 3, les calculs ont été faits à l'aide de MATHEMATICA ; ils peuvent être vérifiés avec tout autre logiciel de calcul symbolique.

1. Type $I_{1,1}$

Le domaine Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}
\chi(s) &= s+1,\\
C_1(\mu) &= 1-\mu, \quad C_0(\mu) = 1,\\
P_\mu^m(\eta) &= 1-\mu+(m+1)\mu\eta,\\
P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) &= 1+\tfrac{m-1}{2}\mu.
\end{aligned}$$

2. Type $I_{1,2}$

Le domaine Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\chi(s) &= (s+1)(s+2),\\
C_0(\mu) &= 1, \quad C_1(\mu) = 3(1-\mu), \quad C_2(\mu) = (1-\mu)(2-\mu),\\
P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)+3(m+1)\mu(1-\mu)\eta+(m+1)_2\mu^2\eta^2.
\end{aligned}$$

2.1. Signe de $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = (2+m\mu)\left(1+\tfrac{m-3}{4}\mu\right).$$

PROPOSITION 1. *Pour* $m \geq 3$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ *est positif pour tout* $\mu > 0$. *Pour* $m \leq 2$, *le polynôme* q_m *admet une seule racine positive* μ_m *(*$\mu_1 = 2 < \mu_2 = 4$*) et* $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ *est positif ou nul si et seulement si* $0 < \mu \leq \mu_m$.

2.2. Signe de $\frac{\mathrm{d}\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3+(m-1)\mu.$$

PROPOSITION 2. *Pour tout* $m \geq 1$ *et pour tout* $\mu > 0$, *on a* $\frac{\mathrm{d}\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

3. Type $I_{1,3}$

Le domaine Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^3$. On a

$$\begin{aligned}
\chi(s) &= (s+1)(s+2)(s+3),\\
C_0(\mu) &= 1, \quad C_1(\mu) = 6(1-\mu),\\
C_2(\mu) &= (1-\mu)(11-7\mu), \quad C_3(\mu) = (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu),
\end{aligned}$$

$$P_\mu^m(\eta) = (1-\mu)(2-\mu)\,(3-\mu) + (m+1)(1-\mu)\,(11-7\mu)\,\mu\eta$$
$$+\,6(m+1)_2\,(1-\mu)\,\mu^2\eta^2 + (m+1)_3\,\mu^3\eta^3.$$

3.1. Signe de $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = q_m(\mu) = [4+(m-1)\mu]\,r_m(\mu),$$
$$r_m(\mu) = \tfrac{1}{8}\left(12+8(m-1)\mu+(m^2-5m-2)\mu^2\right).$$

Cas particuliers ($1 \leq m \leq 5$) :

$$r_1(\mu) = \tfrac{3}{4}\left(2-\mu^2\right),$$
$$r_2(\mu) = \tfrac{1}{2}(3+2\mu-2\mu^2),$$
$$r_3(\mu) = \tfrac{1}{2}(3+4\mu-2\mu^2),$$
$$r_4(\mu) = \tfrac{3}{4}(2+4\mu-\mu^2),$$
$$r_5(\mu) = \tfrac{1}{4}\left(6+16\mu-\mu^2\right).$$

Racines positives de q_m :

$$\mu_1 = \sqrt{2} < \mu_2 = \tfrac{1+\sqrt{7}}{2} < \mu_3 = 1+\sqrt{\tfrac{5}{2}} < \mu_4 = 2+\sqrt{6} < \mu_5 = 8+\sqrt{70}.$$

PROPOSITION 3. *Pour* $m \geq 6$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ *est positif pour tout* $\mu > 0$. *Pour* $m \leq 5$, *le polynôme* q_m *admet une seule racine positive* μ_m *et* $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ *est positif ou nul si et seulement si* $0 < \mu \leq \mu_m$.

3.2. Signe de $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$q_m^1(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 11+6\,(m-1)\,\mu+\tfrac{1}{4}\,(3m^2-9m-2)\,\mu^2.$$

Cas particuliers ($1 \leq m \leq 3$) :

$$q_1^1(\mu) = 11-2\mu^2,$$
$$q_2^1(\mu) = 11+6\mu-2\mu^2,$$
$$q_3^1(\mu) = 11+12\mu-\tfrac{1}{2}\mu^2.$$

Racines positives de q_m^1 ($1 \leq m \leq 3$) :

$$0 < \mu_1^1 = \sqrt{\tfrac{11}{2}} < \mu_2^1 = \tfrac{3+\sqrt{31}}{2} < \mu_3^1 = 12+\sqrt{166},$$
$$0 < \mu_m < \mu_m^1 \qquad (1 \leq m \leq 3).$$

PROPOSITION 4. *Pour $m \geq 4$, on a $\frac{\mathrm{d}\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 3$, le polynôme q_m^1 possède une seule racine positive μ_m^1 et est positif sur $[0, \mu_m^1]$.*

3.3. Signe de $\frac{\mathrm{d}^2\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^2}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{1}{(m+1)_2\mu^2}\frac{\mathrm{d}^2\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^2}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3\,(4 + (m-1)\mu)\,.$$

PROPOSITION 5. *On a*

$$\frac{\mathrm{d}^2\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^2}\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0$$

pour tout $\mu > 0$ et tout $m \geq 1$.

3.4. Déterminant de Hurwitz Δ_2. Soient $P_\mu^m(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3$ et $R_m(\mu)$ le polynôme défini par

$$R_m(\mu) = \Delta_2 = (\gamma + \delta)\,(\beta + \gamma + \delta) - \alpha\delta.$$

On a

$$S_m(\mu) = \frac{1}{(m+1)_2\mu^3} R_m(\mu) = [4 + (m-1)\mu]\,(3 + m\mu)T_m(\mu),$$
$$T_m(\mu) = 5m + 4 + (m^2 - 2m - 2)\mu.$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 2)$: $T_1(\mu) = 9 - 3\mu$, $T_2(\mu) = 14 - 2\mu$.

PROPOSITION 6. *Pour $m \geq 3$, on a $R_m(\mu) > 0$ pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 2$, le polynôme R_m admet une unique racine positive ν_m ($\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 7$) et on a $\nu_m > \mu_m$.*

3.5. Localisation des racines de P_μ^m.

THÉORÈME 7. *Soit Ω la boule hermitienne de dimension 3 et soit P_μ^m le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$. Pour $m \geq 6$, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ quel que soit $\mu > 0$. Pour $m \leq 5$, les racines du polynôme P_μ^m sont toutes dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$, où μ_m désigne l'unique racine positive de $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$.*

Démonstration. En rassemblant les résultats des propositions 3, 4, 6 et en appliquant la proposition 2, on conclut que toutes les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu < \mu_m$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$. □

4. Type IV_3

Le domaine Ω est la boule de Lie de dimension 3. Les invariants numériques sont $a = 1$, $b = 0$, $r = 2$. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)\left(s+\tfrac{3}{2}\right)(s+2).$$

Les coefficients de la décomposition de $\chi(k\mu)$ sont

$$C_0(\mu) = 1, \quad C_1(\mu) = 3\left(\tfrac{3}{2} - 2\mu\right),$$
$$C_2(\mu) = (1-\mu)\left(\tfrac{13}{2} - 7\mu\right),$$
$$C_3(\mu) = (1-\mu)(2-\mu)\left(\tfrac{3}{2} - \mu\right).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est

$$P_\mu^m(\eta) = (1-\mu)(2-\mu)\left(\tfrac{3}{2} - \mu\right) + (m+1)\mu(1-\mu)\left(\tfrac{13}{2} - 7\mu\right)\eta$$
$$+ 3(m+1)_2\left(\tfrac{3}{2} - 2\mu\right)\mu^2\eta^2 + (m+1)_3\,\mu^3\eta^3.$$

4.1. Signe de $P_\mu^m(\frac{1}{2})$. On a

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = q_m(\mu) = [3 + (m-1)\mu]\, r_m(\mu),$$
$$r_m(\mu) = \tfrac{1}{8}\left(8 + 6(m-1)\mu + (m^2 - 5m - 2)\mu^2\right).$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 5)$:

$$r_1(\mu) = \tfrac{1}{4}\left(4 - 3\mu^2\right),$$
$$r_2(\mu) = \tfrac{1}{4}(4 + 3\mu - 4\mu^2),$$
$$r_3(\mu) = \tfrac{1}{2}(1 + 2\mu)(2 - \mu),$$
$$r_4(\mu) = \tfrac{1}{4}\left(4 + 9\mu - 3\mu^2\right),$$
$$r_5(\mu) = \tfrac{1}{4}(4 + 12\mu - \mu^2).$$

Racines positives de q_m $(1 \leq m \leq 5)$:

$$\mu_1 = \tfrac{2}{\sqrt{3}} < \mu_2 = \tfrac{3+\sqrt{73}}{8} < \mu_3 = 2 < \mu_4 = \tfrac{9+\sqrt{129}}{6} < \mu_5 = 2(3 + \sqrt{10}).$$

PROPOSITION 8. *Pour $m \geq 6$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 5$, le polynôme q_m admet une seule racine positive μ_m et $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif ou nul si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.*

4.2. Signe de $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$q_m^1(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{13}{2} + \tfrac{9}{2}(m-1)\mu + \tfrac{1}{4}\left(3m^2 - 9m - 2\right)\mu^2.$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 3)$:

$$\begin{aligned} q_1^1(\mu) &= \tfrac{13}{2} - 2\mu^2, \\ q_2^1(\mu) &= \tfrac{1}{2}(1+\mu)(13-4\mu), \\ q_3^1(\mu) &= \tfrac{13}{2} + 9\mu - \tfrac{1}{2}\mu^2. \end{aligned}$$

Racines positives de q_m^1 $(1 \leq m \leq 3)$:

$$\begin{aligned} &0 < \mu_1^1 = \tfrac{\sqrt{13}}{2} < \mu_2^1 = \tfrac{13}{4} < \mu_3^1 = 9 + \sqrt{94}, \\ &0 < \mu_m < \mu_m^1 \qquad (1 \leq m \leq 3). \end{aligned}$$

PROPOSITION 9. *Pour* $m \geq 4$*, on a* $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $\mu \geq 0$*. Pour* $m \leq 3$*, le polynôme* q_m^1 *possède une seule racine positive* μ_m^1 *et est positif sur* $[0, \mu_m^1]$.

4.3. Signe de $\frac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\tfrac{1}{(m+1)_2\mu^2}\tfrac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3(3 + (m-1)\mu).$$

PROPOSITION 10. *On a* $\frac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $m \geq 1$ *et tout* $\mu > 0$.

4.4. Déterminant de Hurwitz Δ_2. Soient $P_\mu^m(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3$ et $R_m(\mu)$ le polynôme défini par

$$R_m(\mu) = \Delta_2 = (\gamma + \delta)(\beta + \gamma + \delta) - \alpha\delta.$$

On a

$$\begin{aligned} S_m(\mu) &= \tfrac{1}{(m+1)_2\mu^3}R_m(\mu) = \left[3 + (m-1)\mu\right] s_m(\mu), \\ s_m(\mu) &= \tfrac{35m+27}{4} + \tfrac{3(m-1)(4m+3)}{2}\mu + m\,(m-1)\left(m^2 - 2m - 2\right)\mu^2. \end{aligned}$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 2)$:

$$\begin{aligned} s_1(\mu) &= \tfrac{1}{2}(31 - 6\mu^2), \\ s_2(\mu) &= \tfrac{1}{4}\left(97 + 66\mu - 16\mu^2\right). \end{aligned}$$

PROPOSITION 11. *Pour* $m \geq 3$*, on a* $R_m(\mu) > 0$ *pour tout* $\mu > 0$*. Pour* $1 \leq m \leq 2$*, le polynôme* R_m *admet une unique racine positive* ν_m *et on a* $\nu_m > \mu_m$.

4.5. Localisation des racines de P_μ^m.

THÉORÈME 12. *Soit Ω un domaine symétrique de type IV_3 et soit P_μ^m le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$. Pour $m \geq 6$, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ quel que soit $\mu > 0$. Pour $m \leq 5$, les racines du polynôme P_μ^m sont toutes dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$,où μ_m désigne l'unique racine positive de $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$.*

Démonstration. En rassemblant les résultats des propositions 8, 9, 11 et en appliquant la proposition 2, on voit que toutes les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu < \mu_m$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$. □

5. Type $I_{1,4}$

Le domaine Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^4$. On a

(B.I) $$\chi(s) = (s+1)(s+2)(s+3)(s+4),$$

(B.II) $$C_0(\mu) = 1, \quad C_1(\mu) = 10(1-\mu)$$

(B.III) $$C_2(\mu) = 5(1-\mu)(7-5\mu),$$

(B.IV) $$C_3(\mu) = 5(1-\mu)(2-\mu)(5-3\mu),$$

(B.V) $$C_4(\mu) = (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu)(4-\mu).$$

Calcul du polynôme $P_\mu^m(\eta)$:

$$\begin{aligned} P_\mu^m(\eta) &= \sum_{j=0}^{4} (j+m)_j\, C_{4-j}(\mu)\, \mu^j \eta^j \\ &= C_4(\mu) + (1+m)\, C_3(\mu)\, \mu\eta + (1+m)_2\, C_2(\mu)\, \mu^2\eta^2 \\ &\quad + (1+m)_3\, C_1(\mu)\, \mu^3\eta^3 + (1+m)_4\, C_0(\mu)\, \mu^4\eta^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\mu^m(\eta) = &(1-\mu)(2-\mu)(3-\mu)(4-\mu) \\ &+ 5(1+m)(1-\mu)(2-\mu)(5-3\mu)\,\mu\eta \\ &+ 5(1+m)_2(1-\mu)(7-5\mu)\,\mu^2\eta^2 \end{aligned}$$

$$+ 10\,(1+m)_3\,(1-\mu)\,\mu^3\eta^3 + (1+m)_4\,\mu^4\eta^4.$$

$$\begin{aligned}
P_\mu^m(\eta) &= \left(35\mu^2 - 50\mu - 10\mu^3 + \mu^4 + 24\right) \\
&\quad + 5\,(1+m)\left(14\mu^3 - 21\mu^2 - 3\mu^4 + 10\mu\right)\eta \\
&\quad + 5\,(1+m)_2\left(5\mu^4 - 12\mu^3 + 7\mu^2\right)\eta^2 + 10\,(1+m)_3\left(\mu^3 - \mu^4\right)\eta^3 \\
&\quad + (1+m)_4\,\mu^4\eta^4.
\end{aligned}$$

5.1. Signe de $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right) &= \left[\frac{5}{8}m + \frac{15}{16}m^2 - \frac{5}{8}m^3 + \frac{1}{16}m^4\right]\mu^4 \\
&\quad + \left[\frac{15}{4}m - \frac{15}{2}m^2 + \frac{5}{4}m^3 + \frac{5}{2}\right]\mu^3 \\
&\quad + \left[\frac{35}{4}m^2 - \frac{105}{4}m\right]\mu^2 + [25m - 25]\,\mu + 24. \\
&= \frac{1}{16}m\left[10 + 15m - 10m^2 + m^3\right]\mu^4 \\
&\quad + \frac{5}{2}\left[\frac{3}{2}m - 3m^2 + \frac{1}{2}m^3 + 1\right]\mu^3 \\
&\quad + \frac{35}{4}m\,(m-3)\,\mu^2 + 25\,(m-1)\,\mu + 24 \\
&= \frac{1}{16}m\left[10 + 15m - 10m^2 + m^3\right]\mu^4 \\
&\quad + \frac{5}{4}\,(m-1)\left[m^2 - 5m - 2\right]\mu^3 \\
&\quad + \frac{35}{4}m\,(m-3)\,\mu^2 + 25\,(m-1)\,\mu + 24 \\
&= \frac{1}{16}\,(4 + m\mu)\,[96 + \mu\,(-100 + 76m + 16\,(-5+m)\,m\mu \\
&\qquad + \left(10 + m\,(15 + (-10+m)\,m)\right)\mu^2)\big]\,.
\end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned}
P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right) &= q_m(\mu) = (4 + m\mu) r_m(\mu), \\
r_m(\mu) &= 6 + \frac{19m - 25}{4}\mu + m(m-5)\mu^2 \\
&\quad + \frac{m^3 - 10m^2 + 15m + 10}{16}\mu^3.
\end{aligned}$$

Le polynôme $T(m) = 10 + 15m - 10m^2 + m^3$ a pour dérivée $T'(m) = 3m^2 - 20m + 15$. Cette dérivée est positive si $m \geq 6$.

Comme

$$T(7) = 10 + 15(7) - 10(7)^2 + (7)^3 = -32$$

et

$$T(8) = 10 + 15(8) - 10(8)^2 + (8)^3 = 2,$$

on a que pour $m \geq 8$, $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 7)$:

$$\begin{aligned}
r_1(\mu) &= (\mu - 4)\left(\mu^2 - \tfrac{3}{2}\right), \\
r_2(\mu) &= 6 + \tfrac{13}{4}\mu - 6\mu^2 + \tfrac{1}{2}\mu^3, \\
r_3(\mu) &= 6 + 8\mu - 6\mu^2 - \tfrac{1}{2}\mu^3, \\
r_4(\mu) &= 6 + \tfrac{51}{4}\mu - 4\mu^2 - \tfrac{13}{8}\mu^3, \\
r_5(\mu) &= 6 + \tfrac{35}{2}\mu - \tfrac{5}{2}\mu^3, \\
r_6(\mu) &= 6 + \tfrac{89}{4}\mu + 6\mu^2 - \tfrac{33}{12}\mu^3, \\
r_7(\mu) &= 6 + 27\mu + 14\mu^2 - 2\mu^3.
\end{aligned}$$

Racines positives des polynômes $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$: Ce sont les racines positives de $r_m(\mu)$

Racines positives de $r_1(\mu)$:

$r_1(\mu)$ admet 2 racines positives : 4 et $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Soit $\mu_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Racines positives de $r_2(\mu) = \dfrac{13}{2}\mu - 12\mu^2 + \mu^3 + 12$:

On a

$$\frac{dr_2}{d\mu}(\mu) = \frac{13}{2} - 24\mu + 3\mu^2,$$

$$\frac{d^2r_2}{d\mu^2}(\mu) = -24 + 6\mu,$$

$\dfrac{d^2r_2}{d\mu^2}(\mu) > 0$ si $\mu > 4$, donc $\dfrac{dr_2}{d\mu}(\mu)$ est croissante si $\mu > 4$, décroissante sinon. De plus, $\dfrac{dr_2}{d\mu}$ admet 2 racines positives : $4 - \frac{1}{6}\sqrt{498}$ (comprise entre $7 + \frac{1}{2}$ et $7 + \frac{1}{4}$) et $4 - \frac{1}{6}\sqrt{498}$ (comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$). La fonction $r_2(\mu)$ est donc croissante dans $\left]0, 4 - \frac{1}{6}\sqrt{498}\right[$, décroissante dans $\left]4 - \frac{1}{6}\sqrt{498}, 4 + \frac{1}{6}\sqrt{498}\right[$ et croissante dans $\left]4 + \frac{1}{6}\sqrt{498}, +\infty\right[$.

De plus $r_2\left(4-\frac{1}{6}\sqrt{498}\right) > 0$, $r_2\left(4+\frac{1}{6}\sqrt{498}\right) < 0$. Ceci implique que $r_2(\mu)$ admet 2 racines positives. L'une, qu'on appellera μ_2, appartient à l'intervalle $\left]\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right[$ (car $r_2\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ et $r_2\left(\frac{5}{4}\right) > 0$) ; l'autre est supérieure à 10 (car $r_2(10) < 0$). On a $\mu_1 < \mu_2$.

Racines positives de $r_3(\mu) = 6 + 8\mu - 6\mu^2 - \dfrac{1}{2}\mu^3$:

On a

$$\frac{dr_3}{d\mu}(\mu) = -\frac{3}{2}\mu^2 - 12\mu + 8,$$

$\dfrac{dr_3}{d\mu}(\mu)$ admet 2 racines $-\frac{8}{3}\sqrt{3}-4$ et $\frac{8}{3}\sqrt{3}-4$. La fonction $r_3(\mu)$ est donc croissante dans l'intervalle $\left]0,\frac{8}{3}\sqrt{3}-4\right[$ et décroissante dans $\left]\frac{8}{3}\sqrt{3}-4,+\infty\right[$. De plus $r_3(0)=6$, $r_3\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ et $r_3\left(\frac{7}{4}\right) < 0$. Donc $r_3(\mu)$ admet une seule racine positive μ_3, $\frac{3}{2} < \mu_3 < \frac{7}{4}$. On a $\mu_2 < \mu_3$).

Racines positives de $r_4(\mu) = 6 + \dfrac{51}{4}\mu - 4\mu^2 - \dfrac{13}{8}\mu^3$:

On a

$$\frac{dr_4}{d\mu}(\mu) = -\frac{39}{8}\mu^2 - 8\mu + \frac{51}{4},$$

$\dfrac{dr_4}{d\mu}(\mu)$ admet une seule racine positive $\alpha = \frac{1}{39}\sqrt{2}\sqrt{2501}-\frac{32}{39}$. Cette racine est inférieure à 1. La fonction $r_4(\mu)$ est donc croissante dans $]0,\alpha[$ et décroissante dans $]\alpha,+\infty[$. De plus, $r_4(0)=6$, $r_4(2) > 0$ et $r_4\left(\dfrac{9}{4}\right) < 0$. Donc $r_4(\mu)$ a une seule racine positive μ_4 telle que $2 < \mu_4 < \dfrac{9}{4}$. On a $\mu_3 < \mu_4$.

Racines positives de $r_5(\mu) = 6 + \dfrac{35}{2}\mu - \dfrac{5}{2}\mu^3$:

On a

$$\frac{dr_5}{d\mu}(\mu) = -\frac{15}{2}\mu^2 + \frac{35}{2}.$$

Cette dérivée admet une seule racine positive $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$. Cette racine est inférieure à 2. La fonction $r_5(\mu)$ est donc croissante dans $\left]0,\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right[$ et décroissante dans $\left]\sqrt{\dfrac{7}{3}},+\infty\right[$. De plus, $r_5(0)=6$, $r_5\left(\frac{11}{4}\right) > 0$ et $r_5(3) < 0$. Donc$r_5(\mu)$ admet une seule racine positive μ_5 telle que $\frac{11}{4} < \mu_5 < 3$. On a $\mu_4 < \mu_5$.

Racines positives de $r_6(\mu) = 6 + \dfrac{89}{4}\mu + 6\mu^2 - \dfrac{33}{12}\mu^3$:

On a

$$\frac{dr_6}{d\mu}(\mu) = -\frac{33}{4}\mu^2 + 12\mu + \frac{89}{4},$$

$\dfrac{dr_6}{d\mu}(\mu)$ admet une seule racine positive $\frac{1}{33}\sqrt{3513}+\frac{8}{11}$. Cette valeur est inférieure à 3. La fonction $r_6(\mu)$ est donc croissante dans $\left]0,\frac{1}{33}\sqrt{3513}+\frac{8}{11}\right[$ et décroissante dans $\left]\frac{1}{33}\sqrt{3513}+\frac{8}{11},+\infty\right[$.

De plus, $r_6(0) = 6$, $r_6(4) > 0$ et $r_6\left(\frac{9}{2}\right) < 0$. Donc $r_6(\mu)$ admet une seule racine positive μ_6 telle que $4 < \mu_6 < \frac{9}{2}$. On a $\mu_5 < \mu_6$.

Racines positives de $r_7(\mu) = 6 + 27\mu + 14\mu^2 - 2\mu^3$:

On a

$$\frac{dr_7}{d\mu}(\mu) = -6\mu^2 + 28\mu + 27,$$

$\dfrac{dr_7}{d\mu}(\mu)$ admet une seule racine positive $\frac{1}{6}\sqrt{358}+\frac{7}{3}$. Cette racine est inférieure à $\dfrac{11}{2}$. La fonction $r_7(\mu)$ est donc croissante dans $\left]0, \frac{1}{6}\sqrt{358}+\frac{7}{3}\right[$ et décroissante dans $\left]\frac{1}{6}\sqrt{358}+\frac{7}{3}, +\infty\right[$. De plus, $r_7(0) = 6$, $r_7(8) > 0$ et $r_7(9) < 0$. Donc $r_7(\mu)$ admet une seule racine positive μ_7 telle que $8 < \mu_7 < 9$. On a $\mu_6 < \mu_7$.

PROPOSITION 13. *Pour* $m \geq 8$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ *est positif pour tout* $\mu > 0$. *Pour* $m \leq 2$, *le polynôme* q_m *admet deux racines positives* $\mu_m = \mu_{m,1} < \mu_{m,2}$, *et* $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ *est positif ou nul si et seulement si* $0 < \mu \leq \mu_m$ *ou* $\mu \geq \mu_{m,2}$. *Pour* $3 \leq m \leq 7$, *le polynôme* q_m *admet une seule racine positive* μ_m *et* $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ *est positif ou nul si et seulement si* $0 < \mu \leq \mu_m$.

5.2. Signe de $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$q_m^1(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = (5 + (m-1)\mu)r_m^1(\mu),$$

$$r_m^1(\mu) = 10 + 5(m-1)\mu + \tfrac{m^2-5m-4}{2}\mu^2.$$

Cas particuliers ($1 \leq m \leq 5$) :

$$r_1^1(\mu) = 2(5 - 2\mu^2),$$

$$r_2^1(\mu) = 5(1+\mu)(2-\mu),$$

$$r_3^1(\mu) = 5(2 + 2\mu - \mu^2),$$

$$r_4^1(\mu) = 10 + 15\mu - 4\mu^2,$$

$$r_5^1(\mu) = 2(5 + 10\mu - \mu^2).$$

Racines positives de q_m^1 ($1 \leq m \leq 5$) :

m	1	2	3	4	5
μ_m^1	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	2	$\sqrt{3}+1$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{385}+15\right)$	$\sqrt{30}+5$

On a $0 < \mu_m < \mu_m^1$ ($1 \leq m \leq 5$).

PROPOSITION 14. *Pour* $m \geq 6$, *on a* $\frac{\mathrm{d}\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $\mu > 0$. *Pour* $m \leq 5$, *le polynôme* q_m^1 *possède une seule racine positive* μ_m^1 *et est positif sur* $[0, \mu_m^1]$.

5.3. Signe de $\frac{\mathrm{d}^2\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^2}\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$q_m^2(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)_2\mu^2}\tfrac{\mathrm{d}^2\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^2}\left(\tfrac{1}{2}\right) = (3m^2 - 9m - 4)\,\mu^2 + 30\,(m-1)\,\mu + 70.$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 3)$:

$$\begin{aligned} q_1^2(\mu) &= 10\,(7 - \mu^2)\,, \\ q_2^2(\mu) &= 10\,(7 + 3\mu - \mu^2)\,, \\ q_3^2(\mu) &= 2\,(35 + 30\mu - 2\mu^2)\,. \end{aligned}$$

Racines positives de q_m^2 $(1 \leq m \leq 3)$:

m	1	2	3
μ_m^2	$\sqrt{7}$	$\frac{1}{2}\sqrt{37} + \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{295} + \frac{15}{2}$

On a $0 < \mu_m < \mu_m^1 < \mu_m^2$ $(1 \leq m \leq 3)$ et $\mu_m^2 < \mu_{m,2}$ $(1 \leq m \leq 2)$.

PROPOSITION 15. *Pour* $m \geq 4$, *on a* $\frac{\mathrm{d}^2\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $\mu > 0$. *Pour* $m \leq 3$, *le polynôme* q_m^2 *possède une seule racine positive* μ_m^2 *et est positif sur* $[0, \mu_m^2]$.

5.4. Signe de $\frac{\mathrm{d}^3\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^3}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\tfrac{1}{(m+1)_3\mu^3}\tfrac{\mathrm{d}^3\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^3}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 12\,((m-1)\,\mu + 5)\,.$$

PROPOSITION 16. *On a* $\frac{\mathrm{d}^3\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^3}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $\mu > 0$ *et tout* $m \geq 1$.

5.5. Déterminant de Hurwitz Δ_3. Pour $P_\mu^m(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3 + \varepsilon\eta^4$, soit

$$F_m(\mu) = \Delta_3 \equiv (\varepsilon + \delta + \gamma + \beta)\,[(\varepsilon + \delta + \gamma)\,(\varepsilon + \delta) - \varepsilon\beta] - (2\varepsilon + \delta)^2\,\alpha.$$

On a

$$\begin{aligned} G_m(\mu) &= \tfrac{1}{(m+1)(m+1)_3\mu^6} F_m(\mu) = (5 + (m-1)\,\mu)^2\,(4 + m\mu)\,S_m\,(\mu) \\ S_m(\mu) &= \sum_{j=0}^{3} s_j(m)\mu^j, \end{aligned}$$

$$s_0(m) = 2\left(53 + 140m + 63m^2\right),$$

$$s_1(m) = -75 - 189m + 55m^2 + 81m^3,$$

$$s_2(m) = 2m\left(-5 - 52m - 15m^2 + 8m^3\right),$$

$$s_3(m) = 5 + 15m + 20m^2 - 4m^3 - 5m^4 + m^5.$$

Pour $m > 4$, les coefficients $s_j(m)$ sont tous positifs.

Cas particuliers :

$$S_1(\mu) = 32\,(\mu - 2)\,(\mu + 2)\,(\mu - 4)\,,$$

$$S_2(\mu) = 1170 + 415\mu - 521\mu^2 + 35\mu^3,$$

$$S_3(\mu) = 40\,(4 - \mu)\left(16\mu + \mu^2 + 13\right),$$

$$S_4(\mu) = 3242 + 5233\mu + 354\mu^2 - 127\mu^3.$$

Racines positives des polynômes S_m $(1 \leq m \leq 4)$:

- $S_1(\mu)$ admet deux racines positives $\sigma_1 = \sigma_{1,1} = 2$ et $\sigma_{1,2} = 4$.
- $S_2(\mu)$ a pour dérivée $\frac{dS_1}{d\mu}(\mu) = 105\mu^2 - 1042\mu + 415$. Cette dérivée admet deux racines positives, l'une dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et l'autre dans l'intervalle $]9, 10[$. L'étude des variations du polynôme $S_2(\mu)$ montre que ce dernier admet 2 racines positives : $2 < \sigma_{2,1} < \frac{5}{2}$ et $\dfrac{27}{2} < \sigma_{2,1} < 14$.
- $S_3(\mu)$ admet une seule racine positive $\sigma_3 = 4$.
- $S_4(\mu)$ admet une seule racine positive σ_4 comprise entre 8 et 9.

Les résultats ci-dessus peuvent être résumés dans le tableau suivant :

m	1	2	3	4
$\sigma_m = \sigma_{m,1} \simeq$	2	2.15132	4	8.19532
$\sigma_{m,2} \simeq$	4	13.8558		

On a $\mu_m^1 < \sigma_{m,1} < \sigma_{m,2}$ $(m = 1, 2)$ et $\mu_m^1 < \sigma_m$ $(m = 3, 4)$, où μ_m^1 est la racine positive de q_m^1.

PROPOSITION 17. *Pour $m > 4$, on a $F_m(\mu) > 0$ pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 4$, on a $F_m(\mu) > 0$ et $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^1}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ si et seulement si $\mu \leq \mu_m^1$.*

5.6. Localisation des racines de P_μ^m.

Théorème 18. *Les racines du polynôme P_μ^m sont toutes situées dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta \le \frac{1}{2}\right\}$*
– *pour $m \ge 8$ et pour tout $\mu > 0$;*
– *pour $1 \le m \le 7$, si et seulement si $0 < \mu \le \mu_m$, où μ_m est la plus petite racine positive de $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$.*

Démonstration. En rassemblant les résultats des propositions (13, 14, 15) et en appliquant la proposition 17, on voit que toutes les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta < \frac{1}{2}\right\}$ pour $0 < \mu < \mu_m$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta \le \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \le \mu_m$. □

6. Type IV_4

Le domaine Ω est la boule de Lie de dimension 4. Les invariants numériques sont $a = 2$, $b = 0$, $r = 2$. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)(s+2)^2(s+3).$$

Les coefficients de la décomposition de $\chi(\mu k)$ sont

$$C_0(\mu) = 1, \quad C_1(\mu) = 2(4-5\mu), \quad C_2(\mu) = (1-\mu)(23-25\mu),$$
$$C_3(\mu) = (1-\mu)(7-5\mu)(4-3\mu), \quad C_4(\mu) = (1-\mu)(2-\mu)^2(3-\mu).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est

$$\begin{aligned} P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)^2(3-\mu) + (m+1)(1-\mu)(7-5\mu)(4-3\mu)\mu\eta \\ &\quad + (m+1)_2(1-\mu)(23-25\mu)\mu^2\eta^2 + 2(m+1)_3(4-5\mu)\mu^3\eta^3 \\ &\quad + (m+1)_4\mu^4\eta^4. \end{aligned}$$

6.1. Signe de $P_\mu^m(\frac{1}{2})$. Soit

$$\begin{aligned} q_m(\mu) &= P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ &= 12 + 14(m-1)\mu + \tfrac{23}{4}m(m-3)\mu^2 \\ &\quad + (m-1)(m^2-5m-2)\mu^3 + \tfrac{1}{16}(m^3-10m^2+15m+10)\mu^4. \end{aligned}$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 7)$:

$$q_1(\mu) = \tfrac{1}{2}\left(24 - 23\mu^2 + 2\mu^4\right),$$

$$q_2(\mu) = \tfrac{1}{2}\left(24 + 28\mu - 23\mu^2 - 16\mu^3 + 2\mu^4\right),$$

$$q_3(\mu) = \tfrac{1}{2}\left(24 + 56\mu - 32\mu^3 - 3\mu^4\right),$$

$$q_4(\mu) = \tfrac{1}{2}\left(24 + 84\mu + 46\mu^2 - 36\mu^3 - 13\mu^4\right),$$

$$q_5(\mu) = \tfrac{1}{2}\left(24 + 112\mu + 115\mu^2 - 16\mu^3 - 25\mu^4\right),$$

$$q_6(\mu) = \tfrac{1}{2}\left(24 + 140\mu + 207\mu^2 + 40\mu^3 - 33\mu^4\right),$$

$$q_7(\mu) = 12 + 84\mu + 161\mu^2 + 72\mu^3 - 14\mu^4.$$

Racines positives des polynômes q_m $(1 \leq m \leq 7)$:

m	1	2	3	4	5	6	7
$\mu_{m,1} \simeq$	1.07732	1.21176	1.41824	1.74173	2.29476	3.42405	6.92986
$\mu_{m,2} \simeq$	3.21549	9.08062					

On note $\mu_m = \mu_{m,1}$ $(1 \leq m \leq 7)$.

PROPOSITION 19. *Pour* $m \geq 8$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ *est positif pour tout* $\mu > 0$. *On a*

(1) $P_\mu^1(\frac{1}{2}) \geq 0$ *pour* $0 < \mu \leq \mu_{m,1}$ *et* $\mu_{m,2} \leq \mu$ *(*$1 \leq m \leq 2$*) ;*

(2) $P_\mu^m(\frac{1}{2}) \geq 0$ *si* $0 < \mu \leq \mu_m = \mu_{m,1}$ *(*$3 \leq m \leq 7$*).*

6.2. Signe de $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$q_m^1(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left[4 + (m-1)\mu\right] r_m^1,$$

$$r_m^1(\mu) = 7 + 4(m-1)\mu + \tfrac{1}{2}\left(m^2 - 5m - 4\right)\mu^2.$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 5)$:

$$r_1^1(\mu) = 7 - 4\mu^2,$$

$$r_2^1(\mu) = 7 + 4\mu - 5\mu^2,$$

$$r_3^1(\mu) = 7 + 8\mu - 5\mu^2,$$

$$r_4^1(\mu) = (1+2\mu)(7-2\mu),$$
$$r_5^1(\mu) = \left(7+16\mu-2\mu^2\right).$$

Racines positives de q_m^1 $(1 \leq m \leq 5)$:

m	1	2	3	4	5
μ_m^1	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\simeq 1.649$	$\simeq 2.22829$	$\frac{7}{2}$	$\simeq 8.41588$

On a $0 < \mu_{m,1} < \mu_m^1 < \mu_{m,2}$ $(1 \leq m \leq 2)$ et $0 < \mu_m < \mu_m^1$ $(3 \leq m \leq 5)$.

PROPOSITION 20. *Pour* $m \geq 6$, *on a* $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $\mu \geq 0$. *Pour* $m \leq 6$, *le polynôme* q_m^1 *possède une seule racine positive* μ_m^1 *et est positif sur* $[0, \mu_m^1]$.

6.3. Signe de $\frac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$q_m^2(\mu) = \frac{1}{(m+1)_2\mu^2}\frac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) = 46 + 24(m-1)\mu + \left(3m^2 - 9m - 4\right)\mu^2.$$

Cas particuliers :

$$q_1^2(\mu) = 2(23 - 25\mu^2),$$
$$q_2^2(\mu) = 2\left(23 + 12\mu - 5\mu^2\right),$$
$$q_3^2(\mu) = 2\left(23 + 24\mu - 2\mu^2\right).$$

Racines positives de q_m^2 $(1 \leq m \leq 3)$:

m	1	2	3
μ_m^2	$\simeq 2.14476$	$\simeq 3.65764$	$\simeq 12.892$

On a $\mu_1^m < \mu_2^m$ $(1 \leq m \leq 3)$.

PROPOSITION 21. *On a* $\frac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $m \geq 4$ *et tout* $\mu > 0$. *Pour* $m \leq 3$, *le polynôme* q_m^2 *possède une seule racine positive* μ_m^2 *et est positif si* $0 < \mu < \mu_m^2$. *En particulier, on a* $\frac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour* $1 \leq m \leq 7$ *et* $0 < \mu \leq \mu_m$.

6.4. Signe de $\frac{\mathrm{d}^3 P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^3}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{1}{(m+1)_3\mu^3}\frac{\mathrm{d}^3 P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^3}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 12\left[4+(m-1)\mu\right].$$

PROPOSITION 22. *On a* $\frac{\mathrm{d}^3 P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^3}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $m \geq 1$ *et tout* $\mu > 0$.

6.5. Déterminant de Hurwitz Δ_3. Pour $P_\mu^m(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3 + \varepsilon\eta^4$, soit

$$F_m(\mu) = \Delta_3 \equiv (\varepsilon+\delta+\gamma+\beta)\left[(\varepsilon+\delta+\gamma)(\varepsilon+\delta) - \varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon+\delta)^2\alpha.$$

On a

$$\begin{aligned}
G_m(\mu) &= \tfrac{1}{(m+1)(m+1)_3\mu^6}F_m(\mu) = (4+(m-1)\mu)^2 S_m(\mu),\\
S_m(\mu) &= \sum_{j=0}^{4} s_j(m)\mu^j,\\
s_0(m) &= 160 + 481m + 225m^2,\\
s_1(m) &= 16\,(m-1)\left(9+31m+15m^2\right),\\
s_2(m) &= 2m\left(-35-196m-22m^2+47m^3\right),\\
s_3(m) &= 8\,(m-1)\left(-2-8m-15m^2-3m^3+2m^4\right),\\
s_4(m) &= m\left(5+15m+20m^2-4m^3-5m^4+m^5\right).
\end{aligned}$$

Pour $m > 4$, les coefficients $s_j(m)$ sont tous positifs.

Cas particuliers :

$$\begin{aligned}
S_1(\mu) &= 2\left(433-206\mu^2+16\mu^4\right),\\
S_2(\mu) &= 2\,(1+\mu)\left(1011+37\mu-315\mu^2+35\mu^3\right),\\
S_3(\mu) &= 4\left(907+1896\mu+672\mu^2-320\mu^3-30\mu^4\right),\\
S_4(\mu) &= 4\left(1421+4476\mu+3674\mu^2+276\mu^3-127\mu^4\right).
\end{aligned}$$

Racines positives des polynômes S_m $(1 \leq m \leq 4)$:

m	1	2	3	4
$\sigma_m = \sigma_{m,1} \simeq$	1.62651	2.12869	3.22913	7.03204
$\sigma_{m,2} \simeq$	3.19835	8.47286		

On a $\mu_m^1 < \sigma_{m,1} < \sigma_{m,2}$ ($m = 1, 2$) et $\mu_m^1 < \sigma_m$ ($m = 3, 4$), où μ_m^1 est la racine positive de q_m^1.

PROPOSITION 23. *Pour $m > 4$, on a $F_m(\mu) > 0$ pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 4$, on a $F_m(\mu) > 0$ et $\frac{\mathrm{d}\, P_\mu^1}{\mathrm{d}\, \eta}\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ si et seulement si $\mu \leq \mu_m^1$.*

6.6. Localisation des racines de P_μ^m.

THÉORÈME 24. *Les racines du polynôme P_μ^m sont toutes situées dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\, \eta \leq \frac{1}{2}\right\}$*
- *pour $m \geq 8$ et pour tout $\mu > 0$;*
- *pour $1 \leq m \leq 7$, si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$, où μ_m est la plus petite racine positive de $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$.*

Démonstration. En rassemblant les résultats des propositions 19, 20, 21, 22 et en appliquant la proposition 23, on voit que toutes les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\, \eta < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu < \mu_m$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\, \eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$. $\square$

ANNEX C

RESULTS

1. Introduction

Let Ω be an irreductible bounded circled homogenus symmetric domain in a complex vector space V. Let $N(z,t)$ be its generic norm (cf. [**5**]). To such domain Ω are attached numerical invariants: the multiplicities a and b, and the rank r. These three invariants characterize the domain up to isomorphism. Denote

$$d = \dim_{\mathbb{C}} \Omega = r + \frac{r(r-1)}{2} a + rb$$

and

$$g = 2 + a(r-1) + b$$

the *genus* of Ω.

For $\mu > 0$ and m a positive integer, G. ROOS and W. YIN [**1**] introduced a new class of domains

$$\widehat{\Omega}_m(\mu) = \left\{ (z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N(z,z)^{\mu} \right\}$$

and

$$\widehat{\Omega}_{m,p}(\mu) = \left\{ (z,Z_1,Z_2) \in \Omega \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^p, \quad \|Z_1\|^2 + \|Z_1\|^{\frac{2}{\mu}} < N(z,z) \right\}.$$

These domains are called *Cartan–Hartogs domains* (with *base* Ω, *exponent* μ, *fiber dimension* m) and generalize various complex domains like *complex ellipsoids*. They are not homogeneous and their Bergman kernel can not be calculated by Hua's method. The authors used the *inflation principle* described in [**2**] in order to calculate the Bergman kernel of $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ and $\widehat{\Omega}_{m,p}(\mu)$ from that of $\widehat{\Omega}_1(\mu)$ and $\widehat{\Omega}_{1,1}(\mu)$. In [**1**], the authors used the method of A. KORÀNYI reducing the calculation of the *Hua integral*

$$\int_{\Omega} N(z,z)^s \alpha^n$$

to the *Selberg integral* and proved that

$$\int_{\Omega} N(z,z)^s \alpha^n = \frac{\chi(0)}{\chi(s)} \mathrm{vol}(\Omega),$$

where χ is a polynomial called *Hua polynomial*. This polynomial is written

$$\chi\left(s\right)=\prod_{j=0}^{r}\left(s+1+\left(j-1\right)\frac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)a}, \tag{C.I}$$

where $\left(s\right)_{k}$ denote the raising factoriel

$$\left(s\right)_{k}=s\left(s+1\right)\ldots\left(s+k-1\right).$$

The integers a, b and r in (C.I) are the numerical invariants of the bounded symmetric domain Ω and d its dimension. Let $\mu\in\mathbb{R}$, $\mu>0$. The decomposition

$$\frac{\chi\left(k\mu\right)}{\chi\left(0\right)}=\sum_{j=0}^{d}c_{j}\left(\mu\right)\frac{\left(k+1\right)_{j}}{j!} \tag{C.II}$$

of $\chi\left(k\mu\right)$ along raising factorials with respect to k defines polynomials $c_{j}(\mu)$, which are of degree d in μ. This decomposition plays an important role in the computation of the Bergman kernel $\widehat{K}_{m,\mu}$ of Cartan–Hartogs domains $\widehat{\Omega}_{m}\left(\mu\right)$. Indeed, this kernel is written

$$\widehat{K}_{m,\mu}\left(\left(z,Z\right),\left(w,W\right)\right)=\frac{1}{m!}\frac{C}{N\left(z,w\right)^{g+m\mu}}F_{\mu}^{m}(\xi), \tag{C.III}$$

where

$$F_{\mu}^{m}(\xi)=\sum_{j=0}^{d}\frac{(j+m)!}{j!}c_{j}\left(\mu\right)\frac{1}{\left(1-\xi\right)^{j+m+1}}$$

and

$$\xi\left(\left(z,Z\right),\left(w,W\right)\right)=\frac{\langle Z,W\rangle}{N(z,w)^{\mu}}.$$

Therefore

$$\widehat{K}_{m,\mu}\left(\left(z,Z\right),\left(w,W\right)\right)=\frac{C}{N\left(z,w\right)^{g+m\mu}}\eta^{m+1}P_{\mu}^{m}(\eta), \tag{C.IV}$$

where

$$P_{\mu}^{m}(\eta)=\frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{d}\frac{(j+m)!}{j!}c_{j}\left(\mu\right)\eta^{j} \tag{C.V}$$

and

$$\eta\left(\left(z,Z\right),\left(w,W\right)\right)=\frac{1}{1-\xi\left(\left(z,Z\right),\left(w,W\right)\right)}.$$

Note that the degree of the polynomial P_{μ}^{m} with respect to η or μ is equal to the dimension d of Ω. The polynomial P_{μ}^{m} is called *representative polynomial of the Bergman kernel* of the domain $\widehat{\Omega}_{m}\left(\mu\right)$.

2. Lu Qikeng's problem for Cartan–Hartogs domains

In the first part of this thesis we investigate the *Lu Qikeng* problem for Cartan–Hartogs domains. The *Lu Qikeng problem* for a domain $U \subset \mathbb{C}^n$ consists in deciding whether the Bergman kernel $K_U(z, w)$ of this domain may vanish at some points of $U \times U$. A domain U is called a *Lu Qikeng domain* if its Bergman kernel is zero-free on $U \times U$. In a Lu Qikeng domain it is possible to define and study the *Bergman representative function* and its range, said *Bergman representative domain* (cf. [**15**], [**13**]).

We prove that the Lu Qikeng problem for $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ may be reduced to the localization of the roots of P_μ^m defined by (C.V) :

THEOREM. *The domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain if and only if all roots of P_μ^m are located in $\left\{\operatorname{Re}\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$.*

Applying this theorem, the Lu Qikeng problem is completely solved in [**3**] for all m, $\mu > 0$ when the base is of dimension $d \leq 4$. This provides a lot of examples of Lu Qikeng and no-Lu Qikeng domains. In contrast with the generic case of a bounded domain ("The Lu Qikeng conjecture fails generically", see [**4**]), "most" of the domains $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ are Lu Qikeng domains. Actually, the domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain for $m \geq m_\Omega$ and for all $\mu > 0$, where m_Ω is an integer depending on the base Ω; for $1 \leq m < m_\Omega$, there exists a positive real number μ_m such that the domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain if and only $0 < \mu \leq \mu_m$.

Our results (cf. [**3**]) are as follows:

1. If Ω is the unit disc $\Delta \subset \mathbb{C}$, the domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain for all $m \geq 1$ and all $\mu > 0$. This is well known and is recalled here only for sake of completeness.

2. If Ω is the Hermitian ball of dimension 2, the domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain if and only if

(1) $m = 1$, $\mu \leq 2$;

(2) $m = 2$, $\mu \leq 4$;

(3) $m \geq m_\Omega = 3$, for all $\mu > 0$.

For $m = 1$, the result is due to H.P. BOAS, SIQI FU, E. STRAUBE [**2**]; see also [**16**]. For $m > 1$, results are new.

3. If Ω is the Hermitian ball of dimension 3, for $1 \leq m \leq 5$, the polynomial q_m (of degree 2 or 3) defined by

$$q_m(\mu) = P_\mu^m \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

has a unique positive root μ_m and

$$0 < \mu_1 = \sqrt{2} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5.$$

The domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain if and only if

(1) $1 \leq m \leq 5$, $0 < \mu \leq \mu_m$;

(2) $m \geq m_\Omega = 6$, for all $\mu > 0$.

For $m = 1$, this result has been obtained by W. YIN [**16**], by a slightly different method. Results are new for $m > 1$.

4. If Ω is the Lie ball of dimension 3 (domain of type $IV_3 \simeq III_2$, symmetric matrices), the same type of result holds as in the preceding case, with different q_m and μ_m,

$$0 < \mu_1 = \tfrac{2}{\sqrt{3}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5,$$

but again $m_\Omega = 6$. Here the results are new for all m.

5. If Ω is the Hermitian ball of dimension 4, the polynomial q_m defined by

$$q_m(\mu) = P_\mu^m \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

– has two positive roots $\mu_m = \mu_{m,1} < \mu_{m,2}$ for $m = 1, 2$;
– has one positive root μ_m for $3 \leq m \leq 7$;
– is positive for all $\mu > 0$ if $m \geq m_\Omega = 8$.

Moreover,

$$0 < \mu_1 = \sqrt{\tfrac{3}{2}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5 < \mu_6 < \mu_7.$$

The domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain if and only if

(1) $1 \leq m \leq 7$, $0 < \mu \leq \mu_m$;

(2) $m \geq m_\Omega = 8$, for all $\mu > 0$.

For $m = 1$, this result has been obtained by Jong-do PARK and Liyou ZHANG (2006, unpublished). Results are new for $m > 1$.

6. If Ω is the Lie ball of dimension 4 (domain of type $IV_4 \simeq I_{2,2}$, 2×2 matrices), the same type of result as in the preceding case holds, with different q_m and μ_m,

$$0 < \mu_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{23 - \sqrt{337}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5 < \mu_6 < \mu_7.$$

and $m_\Omega = 8$. Here the results are new for all m.

Results may be summarized in the following theorem:

THEOREM. *Let Ω be an irreducible bounded circled homogeneous domain of dimension at most 4. Then the polynomial*

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

has 0, 1 or 2 positive roots. If q_m has no positive root, let $\mu_m = +\infty$; if q_m has one positive root, denote this root by $\mu_m = \mu_{m,1}$ and let $\mu_{m,2} = +\infty$; if $q_m$has two positive roots, denote these roots by $\mu_{m,1}$, $\mu_{m,2}$ and let $\mu_m = \mu_{m,1} < \mu_{m,2}$. The polynomial P_μ^m has

– *no root in $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$ if $0 < \mu \leq \mu_m$;*
– *one root in $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$ if $\mu_{m,1} < \mu \leq \mu_{m,2}$;*
– *two roots in $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$ if $\mu_{m,2} < \mu$.*

The Cartan–Hartogs domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain if and only if

$$0 < \mu \leq \mu_m.$$

The values of the positive roots of q_m are given in Table C.1.

Our results are obtained by the study of the polynomial P_μ^m for each case where Ω is of dimension at most 4. Computations involve only algebraic operations on polynomials and localization of their roots, and they can be checked with any software for symbolic calculus. The localization of the roots of P_μ^m with respect to $\left\{\operatorname{Re}\eta = \frac{1}{2}\right\}$ is easy in degree 1 or 2. In degrees 3 and 4, we use the following criteria, which result from the *Routh–Hurwitz criterion* (see [**17**, Chap. 15] and Propositions 2, 4).

CRITERION (Degree 3). *Let $P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ be a polynomial with real coefficients and $\delta > 0$. Then all roots of P are located in $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ if and only if*

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad \Delta_2 \equiv (\gamma + \delta)(\beta + \gamma + \delta) - \alpha\delta > 0.$$

TABLE C.1. Roots of q_m

Type	$I_{1,1} \simeq II_2$	$I_{1,2}$	$I_{1,3} \simeq II_3$	$III_2 \simeq IV_3$	$I_{1,4}$	$I_{2,2} \simeq IV_4$
$\mu_{1,1}$	$+\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\simeq 1.07732$
$\mu_{1,2}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	$\simeq 3.21549$
$\mu_{2,1}$	$+\infty$	4	$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{73}}{8}$	$\simeq 1.41518$	$\simeq 1.21176$
$\mu_{2,2}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\simeq 11.333$	$\simeq 9.08062$
μ_3	$+\infty$	$+\infty$	$1+\sqrt{\frac{5}{2}}$	2	$\simeq 1.61819$	$\simeq 1.41824$
μ_4	$+\infty$	$+\infty$	$2+\sqrt{6}$	$\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{\frac{43}{3}}\right)$	$\simeq 2.10335$	$\simeq 1.74173$
μ_5	$+\infty$	$+\infty$	$8+\sqrt{70}$	$2\left(3+\sqrt{10}\right)$	$\simeq 2.8029$	$\simeq 2.29476$
μ_6	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\simeq 4.22107$	$\simeq 3.42405$
μ_7	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\simeq 8.60867$	$\simeq 6.92986$

CRITERION (Degree 4). *Let $P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4$ be a polynomial with real coefficients and $\varepsilon > 0$. Then all roots of P are located in $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ if and only if*

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P''\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0,$$
$$\Delta_3 \equiv (\varepsilon+\delta+\gamma+\beta)\left[(\varepsilon+\delta+\gamma)(\varepsilon+\delta) - \varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon+\delta)^2\alpha > 0.$$

Sketch of proofs.

1. If Ω is the unit disc, P_μ^m has degree 1 and

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{(m-1)\mu}{2} + 1$$

is always positive.

2. If Ω is the Hermitian ball of dimension 2, the polynomial $P_\mu^m(\eta)$ has degree 2; its roots (real or imaginary conjugate) lie in $\left\{\operatorname{Re}\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ if and only if

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) \geq 0, \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) \geq 0.$$

Computation shows that

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{m(m-3)}{4}\mu^2 + \tfrac{3(m-1)}{2}\mu + 2,$$
$$q_m^1(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta}P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3 + (m-1)\mu;$$

the results easily follows by inspection of the special cases $m = 1$ and $m = 2$.

3. If Ω is the Hermitian ball of dimension 3, the polynomial $P_\mu^m(\eta)$ has degree 3. According to the above criterion for degree 3, all roots of $P_\mu^m(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3$ are located in $\left\{\mathrm{Re}\,\eta < \frac{1}{2}\right\}$ if and only if

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta}P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0,$$
$$\Delta_2 = (\gamma+\delta)(\beta+\gamma+\delta) - \alpha\delta > 0.$$

Direct computations show that the first condition implies the second. A study of the polynomials

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = 6 + \tfrac{11(m-1)}{2}\mu + \tfrac{3m(m-3)}{2}\mu^2 + \tfrac{(m-1)\left(m^2-5m-2\right)}{8}\mu^3$$

and their comparison give the results about the μ_m's. Computation of the third condition gives rise to a polynomial condition on μ and m, which again appears to be implied by

$$q_m(\mu) \geq 0.$$

4. If Ω is the Lie ball of dimension 3, the treatment is entirely analogous to the case of type $I_{1,3}$, with

$$q_m(\mu) = \tfrac{1}{8}(m-1)(m^2-5m-2)\mu^3 + \tfrac{9}{8}m(m-3)\mu^2 + \tfrac{13}{4}(m-1)\mu + 3.$$

5. If Ω is the Hermitian ball of dimension 4, the polynomial $P_\mu^m(\eta)$ has degree 4. According to the above criterion for degree 4, all roots of $P_\mu^m(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3 + \varepsilon\eta^4$ are located in $\left\{\mathrm{Re}\,\eta < \frac{1}{2}\right\}$ if and only if

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta}P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,\eta^2}P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0,$$
$$\Delta_3 \equiv (\varepsilon+\delta+\gamma+\beta)\left[(\varepsilon+\delta+\gamma)(\varepsilon+\delta) - \varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon+\delta)^2\alpha > 0.$$

The polynomial $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$ is equal to

$$\begin{aligned} q_m(\mu) &= P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ &= (4+m\mu)\left(6 + \tfrac{19m-25}{4}\mu + m(m-5)\mu^2 + \tfrac{m^3-10m^2+15m+10}{16}\mu^3\right). \end{aligned}$$

This polynomial has

– two positive roots $\mu_m = \mu_{m,1} < \mu_{m,2}$ for $m = 1, 2$;

– one positive root μ_m for $3 \leq m \leq 7$;

– no positive root for $m \geq 8$.

A case-by-case study shows that $0 < \mu \leq \mu_m$ implies

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta} P_\mu^m \left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,\eta^2} P_\mu^m \left(\tfrac{1}{2}\right) > 0.$$

Also, the condition $\Delta_3 > 0$ applied to P_μ^m gives a polynomial condition (in general of degree 6 w.r. to μ), which is shown to be satisfied for all μ such that $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta} P_\mu^m \left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$. Finally, P_μ^m has no root in $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$ if and only if $0 < \mu \leq \mu_m$ (with $\mu_m = +\infty$ for $m \geq m_\Omega = 8$). It is also possible to check that the number of roots of P_μ^m in $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$ is 1 for $\mu_m < \mu \leq \mu_{m,2}$, and 2 for $\mu > \mu_{m,2}$ (with $\mu_{m,2} = +\infty$ for $m \geq 3$); moreover, these roots are always real.

6. If Ω is the Lie ball of dimension 4, the treatment is entirely analogous to the case of type $I_{1,4}$, with

$$\begin{aligned} q_m(\mu) = P_\mu^m \left(\tfrac{1}{2}\right) &= 12 + 14(m-1)\mu + \tfrac{23m(m-3)}{4}\mu^2 \\ &\quad + (m-1)(m^2 - 5m - 2)\mu^3 + \tfrac{m^3 - 10m^2 + 15m + 10}{16}\mu^4. \end{aligned}$$

3. Hua polynomials

In the second part of this thesis, we study coefficients $c_j\left(\mu\right)$ which appear in (C.II). These coefficients are of degree d in μ and are divisible by μ^j. We define then the polynomials

(C.VI) $$C_j\left(\mu\right) = \frac{1}{(d-j)!\mu^{d-j}} c_{d-j}\left(\mu\right).$$

The observation of many cases brought Guy Roos, in 2004, to conjectured some properties of the coefficients C_j defined by the equation (C.VI). These coefficients appear in the expression of the Bergman kernel of Cartan–Hartogs domains and their properties can help in this study.

3.1. Conjectures.

CONJECTURE 1. We have $C_j(\mu) > 0$ for all j, $1 \leq j \leq d$, if and only if

$$\mu < \mu_0 = \frac{g}{d+1}.$$

CONJECTURE 2. If $0 \leq j \leq \left[\frac{d-1}{2}\right]$, the coefficients C_j satisfies

$$C_{2j+1}\left(\frac{g}{d-2j+1}\right) = 0.$$

For the Hermitian ball $I_{1,d}$ (rank 1), we have

$$C_3\left(\frac{g}{d-1}\right) = 0.$$

CONJECTURE 3. A positive integer p is a root of C_j if and only if

$$1 \leq p < \frac{g}{d-j+1}.$$

CONJECTURE 4. For $1 \leq j \leq d$, all root α of C_j is in the half plane $\{\operatorname{Re}\alpha > 0\}$. Denote m_j and M_j the bounds of modulus of the complex roots of C_j :

$$m_j = \min\left\{|\alpha|\,; C_j(\alpha) = 0\right\},$$
$$M_j = \max\left\{|\alpha|\,; C_j(\alpha) = 0\right\}.$$

Then

(1) the sequence $(m_j)_{1\leq j\leq d}$ is increasing ;

(2) the sequence $(M_j)_{1\leq j\leq d}$ is increasing and satisfy

$$M_j \leq \frac{g}{d-j+1}. \tag{C.VII}$$

These conjectures has been checked with the help of computer algebra in many significant cases where the integers a, b and r are the numerical invariants of an irreductible bounded symmetric domain. Moreover, they also seem to be verified if the integers a, b and r do not arise from a bounded symmetric domain (in this case, the Hua polynomial is related to the integral of Selberg).

3.2. Symmetry of Hua polynomials. We prove that the Hua polynomials are symmetric with respect to $-\dfrac{g}{2}$, where g is the genus of the bounded symmetric domain Ω:

PROPOSITION 1. *The polynomial* $\chi = \chi_{a,b,r}$ *satisfy*

$$\chi(-s) = (-1)^d\chi(s-g). \tag{C.VIII}$$

We use this property to prove conjecture 3.1.

3.3. Case of the Hermitian ball (rank 1). We treat the case where the rank of the domain Ω is equal to 1 (the Hermitian ball). The numerical invariants of Ω are $(0, b, 1)$ and the the Hua polynomial is written

$$\chi_d(s) = (s+1)_d \,. \tag{C.IX}$$

In this case $d = 1 + b$ and $g = 1 + d$ and the value of the critical exponent is

$$\mu_0 = \frac{g}{d+1} = 1.$$

Denote C_j^d the coefficients of the decomposition (C.VI) of χ_d. We prove a reccurence relation between the coefficients C_j when the dimension of Ω increases by 1 :

LEMME 2. *The coefficients C_j^d satisfy*

$$C_0^{d+1}(\mu) = C_0^d(\mu)\,,$$
$$C_j^{d+1}(\mu) = C_j^d(\mu) + (d+2-j)\left[\frac{d+1}{d+2-j} - \mu\right] C_{j-1}^d(\mu)\,.$$

We use this lemma to prove the following theorem

THÉORÈME 3. *The coefficients $C_j^d(\mu)$ of the decomposition (C.VI) of the Hua polynomial χ_d are positive for all j, $1 \leq j \leq d$ if $\mu < 1$.*

This theorem leads to the conjecture 3.1 in the case where the rank of the bounded symmetric domain Ω is 1 (type $I_{1,n}$). Although this case is the simplest, expression of the coefficients C_j and some of the conjectures are not trivial.

RÉFÉRENCES

[1] Yin Weiping, Lu Keping, Roos Guy, "New classes of domains with explicit Bergman kernel", *Science in China, Ser. A Mathematics*, **47**(2004), 352–371.

[2] Boas H., Fu Siqi, Straube E., "The Bergman kernel function: explicit formulas and zeroes", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**(3) (1999), 805–811.

[3] Demmad-Abdessameud, F. Zohra, "Polynômes de Hua, noyau de Bergman et conjecture de Lu Qikeng", *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino,* **67**(1) (2009), 55–89.

[4] Boas, Harold P., "The Lu Qi-Keng conjecture fails generically", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124** (1996), 2021–2027.

[5] Roos, Guy, Jordan triple systems, pp. 425–534, in *J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Korányi, Q.k. Lu, G. Roos, "Analysis and geometry on complex homogeneous domains"*, *Progress in Mathematics*, vol.**185**, Birkhäuser, Boston, 2000.

[6] J. Faraut, E.G.F. Thomas, "Invariant Hilbert spaces of holomorphic functions", *Journal of Lie theory* **9**(1999), 383–402.

[7] Helgason, S., "*Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces"*, Academic Press, New York, 1978.

[8] Cartan, É., "Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol.**11**, 1935, 116-162.

[9] Vigué, J.P. ,"Automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques", *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, série 4, **9** (1976), 203–282.

[10] Loos, Ottmar, "*Bounded symmetric domains and Jordan pairs*", Math. Lectures, Univ. of California, Irvine, CA, 1977.

[11] Selberg, A. "Bemerkninger om et multiplet integral", *Norske Mat. Tidsskr.*, **26**(1944), 71–78.

[12] Roos, Guy, "Weighted Bergman kernels and virtual Bergman kernels", *Proceedings SCV2004 Beijing*, *Science in China, Ser. A Mathematics*, **48** Supp.(2005), 225–237.

[13] Steven, Bell, "Bergman coordinates", *Studia Math.*, **176**(2006), 69–83.

[14] Suita, N. , Yamada, A. , "On the Lu Qi-keng conjecture", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **59**, (1976), 222–224.

[15] Matsuura, Shozo, "On the Lu Qi-keng conjecture and the Bergman representative domains", *Pacific J. Math.*, vol.**49** (2), 1973, 407-416.

[16] Yin Weiping, "Lu Qi-Keng conjecture and Hua domain" (dedicated to Lu Qi-Keng on the occasion of his 80th birthday), *Science in China (A Series)*, **51**(4) (2008), 803–818.

[17] Gantmacher F.R., "*Théorie des matrices, t.2, Questions spéciales et applications*", Dunod, Paris, 1965.

Ouvrages consultés

[18] Aronszajn, N., "Theory of reproducing kernels", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68**(1950), 337–404.

[19] Boas, Harold P., "Counterexample to the Lu Qi-keng conjecture", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **97**(1986), 374–375.

[20] D'Angelo J.P., "A note on the Bergman kernel", *Duke Math. J.*, **45**(2) (1978), 259–265.

[21] D'Angelo J.P., "An explicit computation of the Bergman kernel function", *J. Geom. Analysis,* **4**(1) (1994), 23–34.

[22] Engliš, M., "Zeros of the Bergman kernel of Hartogs domains", *Comment. Math. Univ. Carolinae* **41**(1) (2000), 199–202.

[23] Faraut, J., Korányi, A., "*Analysis on symmetric cones*", Clarendon Press, Oxford, 1994.

[24] Faraut, J., "Function spaces on complex semi-groups", pp. 1–100, *in J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Korányi, Q.k. Lu, G. Roos, "Analysis and geometry on complex homogeneous domains*", *Progress in Mathematics*, vol.**185**, Birkhäuser, Boston, 2000.

[25] Gong Sheng, Zheng Xuean, "The Bergman kernel function of the Reinhardt domains (I, II)" (in Chinese), *Science in China (A series; Chinese version),* **25**(1995), 580–590 and 683–692.

[26] Gong Sheng, Zheng Xuean, "The Bergman kernel function of some Reinhardt domains", *Trans. Amer. Math. Soc.,* **348**(5) (1996), 1771–1803.

[27] Korányi, A., "The volume of symmetric domains, the Koecher gamma function and an integral of Selberg", *Studia Sci. Math. Hungar.*, **17**(1982), 129–133.

[28] Korányi, A., "Function spaces on bounded symmetric domains", pp. 183–282, in *J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Korányi, Q.k. Lu, G. Roos, "Analysis and geometry on complex homogeneous domains"*, *Progress in Mathematics*, vol.**185**, Birkhäuser, Boston, 2000.

[29] Yin Weiping, "Two problems on Cartan domains", *J. of China Univ. of Sci. and Techn.*, **16**(2) (1986), 130–146.

[30] Yin Weiping, "The Bergman kernel on super-Cartan domain of the first type", *Science in China (A Series)*, **29**(7) (1999), 607–615.

[31] Yin Weiping, "The Bergman kernel on four types of super-Cartan domains", *Chinese Science Bulletin (A Series)*, **44**(13) (1999), 1391–1395.

[32] Xu Yichao, "On the Bergman functions of homogeneous bounded domains", *Sci. Sinica*, Special Issue II (1979), 80–90.