

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des Sciences
Département de mathématiques

THESE DE DOCTORAT

en mathématiques

Spécialité : Recherche opérationnelle

**ETUDE DE LA b-COLORATION ET
LA b-CONTINUITÉ DANS LES GRAPHEs**

Par

ZEMIR Zoham

Devant le jury composé de :

F. HANNANE	Professeur, U. de Blida	Président
M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida	Directeur de Thèse
F. MAFFRAY	Directeur de Recherche, CNRS France	Co-directeur de Thèse
M. ABBAS	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
H. BERRACHEDI	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
M. CHELLALI	Maître de Conférences, U. de Blida	Examineur

Blida, Mars 2011

REMECIEMENTS

Mes remerciements vont d'abord à mes deux directeurs de thèse Mostafa Blidia, professeur à l'université Saad Dahlab de Blida qui m'a initié dans le domaine passionnant de la coloration dans les graphes et qui m'a constamment soutenue orientée et conseillée; et Frédéric Maffray , professeur et maître de recherche au CNRS France pour ses conseils, les aides et facilités administratives durant mes séjours au Laboratoire Leibniz et GSOP, INPG Grenoble où à j'ai toujours été bien accueillie.

Je tiens à remercier vivement Monsieur **Farouk Hannane**, Professeur à l'Université Saad Dahlab de Blida, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens également à remercier: Messieurs **Abbas Moncef** et **Berrachedi hafid**, Professeurs à l'USTHB d'Alger, Monsieur **Mustapha Chellali**, Maître de conférences à l'université Saad Dahlab de Blida, dont la participation à ce jury m'honore.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous nous intéressons principalement à la notion de b -coloration dans les graphes et plus particulièrement dans les graphes réguliers.

Une classe de couleur est un ensemble de sommets stable coloré avec la même couleur et le minimum de classes de couleurs qui partitionnent l'ensemble des sommets est le nombre chromatique.

De nombreux paramètres de coloration propre sont dérivés du nombre chromatique. La plupart de ces paramètres minimisent le nombre de couleurs. D'autres paramètres cherchent à maximiser le nombre de couleurs, on cite entre autres le nombre a -chromatique et le nombre b -chromatique.

Dans un premier temps, on s'intéresse aux travaux de certains chercheurs concernant la b -coloration où on cite les résultats essentiels; en particulier ceux de Klavzar & Jakovac et El Sahili & Kouider où on donne une nouvelle preuve simple à leurs théorèmes.

Nous avons abordé la conjecture d'El Sahili & M. Kouider à laquelle on donne un contre exemple, on la reformule et on la démontre dans le cas des graphes d -réguliers de petits degrés.

Dans un second temps, on a montré la b -continuité des graphes cactus.

Finalement, on s'intéresse au nombre b -chromatique dans les graphes de Harary réguliers, où on donne des bornes et des valeurs exactes pour ce paramètre. Enfin on donne les valeurs exactes du nombre b -chromatique, b' -chromatique et b_t -chromatique dans le cas des graphes spider (araignée) complets.

ABSTRACT

In this thesis, we are primarily interested in the concept of b -coloring in graphs and in particular in regular graphs.

A class of color is a stable set of vertices colored with the same color and a minimum of color classes that partition the vertex set is the chromatic number. Many parameters are derived from proper coloring chromatic number. Most of these parameters minimize the number of colors. Other parameters are seeking to maximize the number of colors; we cite in this way the a -chromatic number and the b -chromatic number.

Initially, we are interested in the work of some researchers about the b -coloring and we cite the essential results, especially those of Klavzar & Jakovac and El Sahili & Kouider and we give a new simple proof to their theorems.

We discussed the conjecture of El Sahili & Kouider and we give a counterexample. So we reformulate and we prove it in the case of graphs d -regular with small degrees.

In a second step, we prove the b -continuity of cactus graphs.

Finally, we are interested on the b -chromatic number in regular Harary graphs, so we give bounds and exact values for this parameter. Then we give the exact values of the b -chromatic number, b' -chromatic number and b_t -chromatic number for a complete Spider graphs.

المخلص

في هذه المذكرة نهتم أساسا بمفهوم التلوين مسيطر و خاصة في البيانات المنتظمة. التلوين المسيطر هو تلوين أجود بحيث كل قسم لوني ق يحتوي على عنصر مجاور إلى عنصر آخر على الأقل من كل قسم لوني ق' مختلف عن ق.

العدد المسيطر المسمى $b(G)$ هو اكبر عدد من الأقسام اللونية في التلوين المسيطر في الحالة الأولى نهتم بأشغال بعض الباحثين المهتمين بالتلوين المسيطر نذكر في هذا السياق أهم النتائج و بالأخص نتائج كلا فزار مع جاكوفاك ثم الساحلي مع قويدر و نعطي برهانا جديدا و ابسط لنظريتهم و تطرقنا للمسألة المطروحة لقويدر و الساحلي حيث وجدنا لها مثال مضاد ثم أعدنا طرحها بشكل آخر في حالة البيانات d منتظمة أين تكون قيمة d صغيرة.

في الحالة الثانية نبرهن عن b -إستمرارية بيانات الصبار. أخيرا نهتم ببيانات هاراري المنتظمة حيث نعطي حدود و قيم مضبوطة للعدد اللوني المسيطر. ثم نعطي قيمة الأعداد اللونية المسيطرة $b(G)$, $b'(G)$, $b_l(G)$ في البيانات العنكبوتية.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS	
RESUME	
TABLE DES MATIERES	
LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES	
INTRODUCTION	09
1. Généralités sur la coloration et quelques résultats existants	13
1.1. Définitions générales dans les graphes	13
1.2. Graphes particuliers	15
1.3. Définitions de quelques opérations sur les graphes	16
1.4. Définitions de la coloration et de la coloration par liste	17
1.4.1. Définitions de base et exemples	17
1.4.2. Résultats existants sur la coloration par liste	18
1.4.3. Notion de a-coloration et b-coloration	19
1.5. Complexité algorithmique	22
2. Travaux élaborés sur le nombre b-chromatique et améliorations	24
2.1. Graphes de Kneser	24
2.2. Graphes cubiques	25
2.2.1 Nouvelle preuve du théorème 2.8	29
2.3. Nombre b-chromatique de graphes particuliers	39
3. La b-coloration dans les graphes d-réguliers	41
3.1. Résultats préliminaires	41
3.2. Nouvelle preuve du théorème de El-sahili et Kouider	43
3.3. Graphe régulier de petit degré et de maille au moins cinq	45

4. La b-coloration et la b-continuité dans les bloc-graphes et les cactus	57
4.1. Résultats élaborés par Irving et Manlove sur la détermination du nombre b-chromatique dans les arbres	57
4.1.1 b-coloration dans les arbres pivotés	57
4.1.2 b-coloration dans les arbres non pivotés	59
4.1.3 Détermination d'une b-coloration dans un arbre quelconque	66
4.2. Adaptation de l'algorithme aux blocs graphes	66
4.3. Notion de b-continuité	72
4.3.1. Quelques graphes non b-continus	73
4.3.2. b-continuité des graphes cactus	75
5. b-coloration dans les graphes de Harary et les graphes Spider complets	77
5.1. b-coloration dans les graphes de Harary	77
5.1.1. Définitions et résultats sur le nombre chromatique de graphes de Harary	77
5.1.2. Nos résultats sur le nombre b-chromatique de graphes de Harary	79
5.2. b-coloration sommet, arête et sommet-arête dans les graphes Spider complets	88
5.2.1. Définitions et résultats sur le nombre chromatique, indice chromatique, et nombre chromatique total dans les graphes Spider complets	91
5.2.2. Nos résultats sur les nombres b-chromatique, b'-chromatique et b_t -chromatique dans les graphes Spider complets	92
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	110
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	112

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Un graphe orienté G	13
Figure 1.2	Le joint de P_3 avec P_2	16
Figure 1.3	Le produit carré de P_3 avec P_2	17
Figure 1.4	Le biparti complet $K_{3,3}$ 3-liste colorable	19
Figure 1.5	Partition en stables correspondante à une a -coloration	20
Figure 1.6	Partition en stables correspondante à une b -coloration	20
Figure 2.1	Graphe pendu par les sommets $v_1, \dots, v_{\Delta+1}$	26
Figure 2.2	Graphe G_1	28
Figure 2.3	Graphes avec $ N_1(C_3) =2$ et $N_1(C_3)$ est un stable	29
Figure 2.4	Graphes avec $ N_1(C_3) =2$ et $N_1(C_3)$ est une arête	31
Figure 2.5	Graphe avec $ N_1(C_3) =3$ et $N_1(C_3)$ est un stable	31
Figure 2.6	Graphe avec $ N_1(C_3) =3$ et $N_1(C_3)$ contient une arête	32
Figure 2.7	Graphes avec $ N_1(C_3) =3$ et $N_1(C_3)$ contient deux arêtes	32
Figure 2.8	Graphe avec $ N_1(C_3) =3$ et $N_1(C_3)$ contient trois arêtes	33
Figure 2.9	Graphe avec $ N_1(C_4) =2$	33
Figure 2.10	Graphes avec $ N_1(C_4) =3$ et $N_1(C_4)$ est un stable	36
Figure 2.11	Graphes avec $ N_1(C_4) =3$ et $N_1(C_4)$ contient une arête	37
Figure 2.12	Graphes avec $ N_1(C_4) =3$ et $N_1(C_4)$ contient deux arêtes	38
Figure 2.13	Graphe avec $ N_1(C_4) =4$	38
Figure 3.1	Graphe de Petersen	43
Figure 3.2	Schéma de colorations possibles quand $d=5$	49
Figure 3.3	Schéma de colorations possibles quand $d=6$	53
Figure 4.1	Exemple de bloc graphe connexe avec $b(G) < m(G) - r$	68
Figure 4.2	Exemple de bloc graphe non connexe avec $b(G) < m(G) - r$	70
Figure 4.3	Le cube H_3 correspondant à $K_{4,4}$ moins un couplage parfait	73
Figure 5.1	Graphe total correspondant à la clique d'ordre 3	89
Figure 5.2	Graphe $S_{m,n}$	91
Figure 5.3	Graphe $S_{2,n}$	92

INTRODUCTION

La notion de graphe a été introduite par l'Anglais J. J. Sylvester en 1822, et ce n'est qu'en 1936 que paraît le premier livre sur la théorie des graphes, écrit par D. König. La théorie des graphes est apparue d'abord comme une curiosité mathématique avec le problème des ponts de Königsberg, quand Euler (en 1736) démontra qu'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville russe de Königsberg, une fois exactement et de revenir au point de départ. Elle est devenue une branche mathématique au début du $XX^{\text{ème}}$ siècle, grâce aux travaux de König, de Kuratowski de Cayley et plus récemment, de Berge, d'Erdős et de Harary. En 1852 un certain Guthrie a remarqué qu'il pouvait se contenter de quatre couleurs pour colorer une carte géographique de manière à pouvoir distinguer les régions qui la composent, d'où le problème posé: Toute carte géographique peut elle être coloriée avec quatre couleurs sans que deux pays voisins aient la même couleur? Ce problème n'a pu être résolu qu'en 1976 par K. Appel et W. Haken. La recherche d'une réponse à ce problème est à l'origine de nombreux résultats relatifs à la coloration dans les graphes.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, avec V (respectivement E) ensemble des sommets (respectivement arêtes). Une coloration propre est une application c de V dans IN telle que si deux sommets x et y sont adjacents, alors leurs couleurs correspondantes sont différentes (i.e $c(x) \neq c(y)$).

Une classe de couleur i est un ensemble de sommets stable de V colorés avec la même couleur i . Le nombre minimum de classes de couleurs qui partitionnent l'ensemble V est le nombre chromatique, noté $\chi(G)$ et une $\chi(G)$ -coloration est une coloration propre des sommets avec $\chi(G)$ couleurs. De nombreux paramètres de coloration propre sont dérivés du nombre chromatique $\chi(G)$, la plupart de ces paramètres minimisent le nombre de couleurs nécessaires pour colorer un graphe. Il existe d'autres paramètres qui cherchent à maximiser le nombre de couleurs. Parmi eux, on cite le nombre a -chromatique $\psi(G)$ et le nombre b -chromatique $b(G)$. Une manière de réduire le nombre de couleurs est d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleurs

en fusionnant des classes de couleurs différentes, d'où l'introduction de la a -coloration et du nombre a -chromatique par Harary, Hedetniemi et Prins [1]. Une a -coloration est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs différentes i et j , le sous graphe engendré par les deux classes de couleurs i et j , contient au moins une arête. Il est clair que le procédé de coloration cité précédemment est impossible à partir d'une a -coloration. Le nombre a -chromatique $\psi(G)$ est le nombre maximum de classes de couleurs dans une a -coloration.

Ceci a inspiré Irving et Manlove [2, 3] à introduire un autre procédé de coloration, en effet une autre manière de réduire le nombre de couleurs est d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleurs en transférant les sommets d'une même classe de couleur dans les autres classes de couleurs. D'où la définition de la coloration dominante.

Une coloration dominante est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur $j \neq i$. Ce sommet est dit sommet b -dominant pour la couleur i . Le nombre b -chromatique $b(G)$ est le nombre maximum de classes de couleurs dans une coloration dominante. Une coloration dominante avec $b(G)$ couleurs est dite b -coloration.

Toute $\chi(G)$ -coloration vérifie la définition de la coloration dominante et toute coloration dominante vérifie la définition d'une a -coloration. Ceci implique qu'on a toujours $\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G)$.

Aussi, une borne supérieure triviale de $b(G)$ est $\Delta(G)+1$ où $\Delta(G)$ est le degré maximum de G , puisque si v_i est un sommet b -dominant de couleur i , il est adjacent à au moins un sommet dans chacune des autres classes de couleurs, c'est à dire $d(v_i) \geq b(G) - 1$ d'où le résultat puisque $d(v_i) \leq \Delta$.

Irving et Manlove ont montré dans [2, 3] que le problème de décision associé au nombre b -chromatique est NP -Complet en général, même si on se restreint aux graphes bipartis et que le problème est polynomial pour le cas des arbres. D'autres résultats ont été développés dans le même sens par F. Maffray et son étudiante A. Silva qu'on citera dans

le chapitre 4.

L'absence d'algorithme polynomial pour la détermination d'un paramètre donné dans un graphe ne cesse d'inciter les chercheurs à établir des bornes qui encadrent le plus possible le paramètre en question ou de déterminer la valeur exacte de ce paramètre pour certaines classes de graphes.

Pour qu'un graphe G admette une coloration dominante avec k couleurs, il faut qu'il ait au moins k sommets de degré supérieur ou égal à $k - 1$, de cette observation, Irving et Manlove, ont défini le m -degré noté $m(G)$ qui donne une borne supérieure au nombre b -chromatique.

Cette thèse comporte six chapitres développés dans l'ordre suivant:

Le premier chapitre portera sur les généralités où nous introduisons les définitions de base ainsi que les notations usuelles.

Le deuxième chapitre est consacré aux travaux entrepris par certains chercheurs concernant la b -coloration dans les graphes nous citons entre autres ceux de Omoomi et Javadi, Klavsar et Jacovac, et enfin ceux de Kouider avec El Sahili et Mahéo.

Le troisième chapitre porte sur notre contribution dans la domaine de la b -coloration dans les graphes réguliers suite aux travaux de Kouider et El Sahili. Ainsi, nous donnons une autre preuve plus simple au théorème de Kouider et El Sahili, dont l'énoncé est le suivant: Si G est un graphe régulier de maille au moins 5 et ne contient pas de C_6 , alors G admet une b -coloration avec $d + 1$ couleurs. Enfin nous reformulons la conjecture posée par les mêmes auteurs et nous la démontrons pour les graphes avec de petits degrés.

Le quatrième chapitre traite du problème de la b -coloration dans les blocs graphes, dans ce cadre nous rappelons les travaux de Irving et Manlove sur les arbres que nous adopterons aux cas des blocs graphes. Nous citerons ensuite quelques résultats concernant la b -continuité principalement par Faik et Omoomi, d'où l'on déduit la b -continuité dans les graphes cactus.

Dans le chapitre cinq on donnera des bornes et des valeurs exactes au nombre b -chromatique dans des graphes de Harary particuliers, et on étudiera la b -coloration, b' -

coloration et la b_t -colorations des graphes Spider complets où nous proposerons des résultats.

On finit par une conclusion et des perspectives.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LA COLORATION ET QUELQUES RÉSULTATS EXISTANTS

1.1 Définitions générales dans les graphes

Un graphe $G = (V, E, g)$ est la donnée de deux ensembles; V ensemble des sommets et E est l'ensemble des arcs, g est une fonction d'incidence qui associe à chaque arc $e \in E$ une paire (u, v) (u pouvant être égal à v , et $u, v \in V$). La fonction g définit une relation binaire sur V . On peut donc noter l'arc $e \in E$ par son couple de sommets: $e = (u, v)$ ou $e = uv$. On remarque que si E est décrit par l'ensemble des couples, on peut omettre l'écriture de g .

Au vu de cette définition, on représente un graphe sur le plan par un graphique comme suit: les points du graphique représentent les sommets du graphe et les flèches entre deux points représentent les arcs. Par exemple le graphe de la FIGURE 1.1 avec $G = (V, E)$ où $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $E = \{aa, ab, bc, cc, cd, de, ee, ef, fa, fc, cf\}$ admet la représentation graphique suivante:

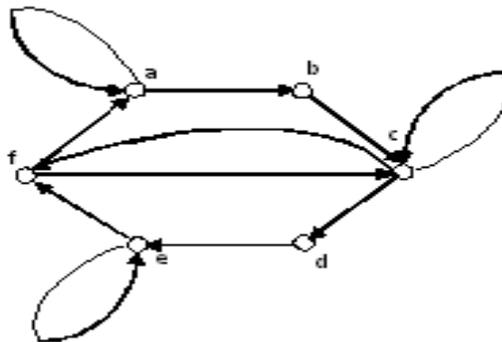


FIGURE 1.1.

Un arc de G de la forme aa est appelé une boucle. Pour un arc $e = ab$, le sommet a est son extrémité initiale et le sommet b son extrémité terminale.

Si le nombre maximum d'arcs allant d'un sommet à un autre est p , on dit que le graphe est de multiplicité p . On dira qu'un graphe est simple s'il n'a pas de boucle et est de multiplicité 1. Un graphe non simple est dit multiple.

On dit que y est un successeur de x s'il existe un arc xy et le nombre de successeurs de x est le degré extérieur de x et il est noté $d^+(x)$. On dit que y est un prédécesseur de x s'il existe un arc yx et le nombre de prédécesseurs de x est le degré intérieur de x et est noté $d^-(x)$.

Le degré d'un sommet x est le nombre d'arêtes ayant une extrémité en x . Dans l'exemple précédent $d^+(a) = d^-(a) = 2$ et $d(a) = 4$.

Lorsque la relation décrite par g est symétrique; c-à-d $xy \in E$ implique que $yx \in E$, alors on dira que le graphe $G = (V, E, g)$ est non orienté. Dans ce cas on confondra l'arc xy avec l'arc yx en utilisant le terme d'arête (x, y) où l'ordre ou disposition des éléments du couple ne joue aucun rôle.

Dans la suite, on ne considèrera que des graphes simples, finis non orientés. On note par $e = (u, v) \in V \times V$ toute arête du graphe et deux arêtes sont adjacentes si elles ont une extrémité commune. Une arête est dite incidente au sommet u si u est l'une de ses extrémités. Deux sommets u et v sont dits adjacents si le couple (u, v) est une arête de G , u et v sont dites extrémités de l'arête (u, v) dans G et dans ce cas u et v sont dits voisins; l'ensemble des voisins de u est noté $N(u)$ et le degré d'un sommet u noté $d(u)$ est le cardinal de $N(u)$, le degré maximum (respectivement le degré minimum) d'un graphe G est noté $\Delta(G)$ parfois Δ (respectivement $\delta(G)$). Pour plus de détails sur la terminologie utilisée, on se réfère au livre de C. Berge [4].

1.2 Graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, fini non orienté. H est dit un sous graphe de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$ et H est dit induit si $E(H)$ contient toutes les arêtes de G dont les extrémités sont dans $V(H)$. Si H n'est pas induit il est dit partiel. Pour définir un sous graphe induit de G , il suffit de considérer un sous ensemble K de $V(G)$, on dit que $K \subseteq V(G)$ engendre ou induit le sous graphe correspondant qui sera noté $G[K]$.

Un graphe à n sommets est complet (noté K_n) si pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ de V le couple (u, v) est une arête de G . Le graphe complémentaire de $G = (V, E)$ est le graphe, noté $\overline{G} = (V, E(K_n) - E(G))$. Une clique d'un graphe G est un sous ensemble de sommets de G qui engendre un graphe complet. Un stable d'un graphe G est un sous ensemble de sommets de G qui engendre un graphe sans arêtes. Un couplage est un ensemble d'arêtes de G deux à deux non adjacentes.

Une chaîne notée P_k de G de longueur $k - 1$ est le graphe décrit par la suite u_1, \dots, u_k , où pour tout $i = 1, \dots, k - 1$, (u_i, u_{i+1}) est une arête de G et $u_i \neq u_j$ pour tout $i \neq j$. Les sommets u_1 et u_k sont les extrémités de la chaîne P_k . On appelle distance de x à y notée $d(x, y)$; la longueur d'une plus courte chaîne de x à y . Le diamètre dans un graphe G notée $diam(G)$ est la distance maximum entre deux sommets de G , c-à-d $diam(G) = \max_{x, y \in V} (d(x, y))$. Un cycle de G de longueur k , noté C_k , est la chaîne décrite par u_1, \dots, u_k tel que le même arc ne figure pas deux fois dans la même séquence et où $u_1 = u_k$. Une corde dans une chaîne ou un cycle est une arête (u_i, u_j) avec $j \neq i \pm 1$. Un trou de longueur k , noté C_k est un cycle sans corde. Un antitrou noté $\overline{C_k}$ est le complémentaire d'un trou. La maille dans un graphe G est l'entier k le plus petit tel que C_k soit un trou dans le graphe G .

Un multiparti est un graphe $G = (V, E)$ où V peut être partitionné en p classes A_1, A_2, \dots, A_p , où deux sommets de la même classe ne sont jamais adjacents, en particulier un biparti est un multiparti avec $p = 2$. Un multiparti complet est un multiparti possédant toutes les arêtes possibles entre les ensembles de la partition de V . On note un multiparti complet avec la partition A_1, A_2, \dots, A_p par $K_{n_1 \dots n_p}$ où $n_i = |A_i|$ pour $i = 1, \dots, p$.

Un graphe $G = (V, E)$ est k -connexe si et seulement si il n'existe aucun sous ensemble non vide W de sommets de G tel que le nombre d'arêtes joignant W et $V \setminus W$ soit plus petit que k .

Le graphe des arêtes de G , noté $L(G)$, est le graphe d'incidence des arêtes de G , c'est à dire $V(L(G)) = E(G)$ et $E(L(G)) = \{(e, e') / \text{les arêtes } e \text{ et } e' \text{ sont adjacentes dans } G\}$.

1.3 Définitions de quelques opérations sur les graphes

Définition 1.1.

1°/ Le joint de deux graphes $K = (V(K), E(K))$ et $H = (V(H), E(H))$, noté $K \vee H$ est le graphe G défini par: $V(G) = V(K) \cup V(H)$ et $E(G) = E(K) \cup E(H) \cup \{(u, v), u \in V(K) \text{ et } v \in V(H)\}$

Exemple 1.2. $P_3 \vee P_2$ (voir FIGURE 1.2)

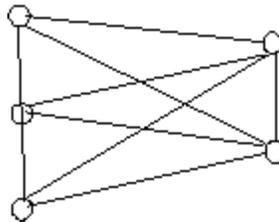


FIGURE 1.2.

2°/ La somme cartésienne de deux graphes $K = (V(K), E(K))$ et $H = (V(H), E(H))$, noté $K \square H$ est le graphe G défini par :

$$V(G) = \{(u, v); u \in V(K), v \in V(H)\}$$

$$E(G) = \left\{ \begin{array}{l} [(u_1, v_1), (u_2, v_2)]; (u_1 = u_2 \text{ et } (v_1, v_2) \in E(H)) \\ \text{ou } (v_1 = v_2 \text{ et } (u_1, u_2) \in E(K)) \end{array} \right\}$$

Exemple 1.3. $P_3 \square P_2$ (voir FIGURE 1.3)

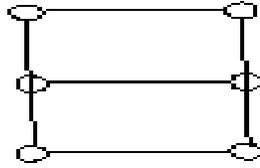


FIGURE 1.3.

1.4 Définitions de la coloration et de la coloration par liste

1.4.1 Définitions de base et exemples

a/ Etant donné un entier positif $k \geq 1$, une k -coloration d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ telle que pour toute arête (u, v) , on a $c(u) \neq c(v)$ on dira aussi que la coloration est propre. On dit que G est k -colorable s'il admet une k -coloration. Le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration est appelé le nombre chromatique, noté $\chi(G)$. Une classe de couleur i est un ensemble de sommets (stable) de V colorés avec la même couleur i . $\chi(G)$ est aussi le nombre minimum de stables qui partitionnent l'ensemble V .

b/ Etant donné un entier k , une k -arête-coloration d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $c : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ telle que pour toute paire d'arêtes adjacentes e et e' , on a $c(e) \neq c(e')$. Une k -arête-coloration de G est donc une k -coloration de $L(G)$. Le plus petit entier k tel que G admet une k -arête-coloration est appelé l'indice chromatique, noté $\chi'(G)$.

c/ Soit $G = (V, E)$ un graphe et $f, g : V \rightarrow \mathbb{N}$ deux fonctions. G est dit (f, g) -liste-colorable si étant donné (pour chaque sommet $v \in V$) un ensemble A_v de couleurs avec $|A_v| = f(v)$ on peut choisir un sous ensemble $B_v \subseteq A_v$ ou $|B_v| = g(v)$ tel que pour toute arête (u, v) de E , on ait $B_u \cap B_v = \emptyset$. De manière plus précise:

d/ Soit $G = (V, E)$ un graphe et $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction. G est dit f -liste-colorable si G est $(f, 1)$ -liste-colorable où 1 est l'application constante $g(v) = 1, \forall v \in V$

e/ Soit $G = (V, E)$ un graphe et une liste de couleurs permises $L(v), \forall v \in V$. On dit que G est L -liste-colorable s'il existe une coloration propre c des sommets de G telle que $c(v) \in L(v), \forall v \in V$. On en déduit:

f/ Soit $G = (V, E)$ un graphe et $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction. G est dit f -liste-colorable si pour toute liste de couleurs permises L sur les sommets de V où $|L(v)| = f(v), \forall v \in V$, G est L -liste-colorable.

g/ Soit $G = (V, E)$ un graphe et k un entier positif. On dit que G est k -liste-colorable si G est f -liste-colorable où f est l'application constante $f(v) = k, \forall v \in V$.

Ceci conduit à définir le nombre chromatique de liste $\chi_L(G)$ d'un graphe $G = (V, E)$ qui est le plus entier k tel que G est k -liste-colorable.

1.4.2 Résultats existants sur la coloration par liste

Théorème 1.4. [5] *Si G est un graphe 2-connexe, alors G est soit un cycle impair, soit une clique, soit G contient comme sous graphe induit un cycle pair avec au plus une corde.*

Théorème 1.5. [6] *Si G est un graphe connexe différent d'un graphe complet et d'un cycle impair, alors G est $\Delta(G)$ -liste colorable.*

Exemple 1.6. *L'exemple le plus simple est le $K_{3,3}$ qui est 3-liste-colorable mais pas 2-liste-colorable. (Voir FIGURE 1.4)*

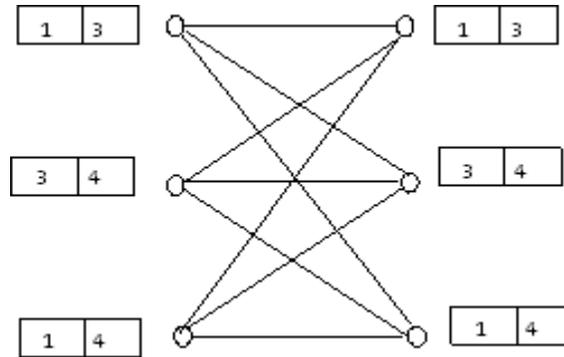


FIGURE 1.4.

1.4.3 Notion de a -Coloration et b -coloration

De nombreux paramètres de coloration propre sont dérivés du nombre chromatique $\chi(G)$, la plupart de ces paramètres minimisent le nombre de couleurs nécessaires pour colorer un graphe. Il existe d'autres paramètres qui cherchent à maximiser le nombre de couleurs. Parmi eux, on cite le nombre a -chromatique $\psi(G)$ et le nombre b -chromatique $b(G)$. Une manière de réduire le nombre de couleurs est d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleurs en fusionnant des classes de couleurs. Ce procédé de coloration cité est impossible quand il existe une arête entre toute paire de stables (voir FIGURE 1.5), d'où l'introduction de la a -coloration et du nombre a -chromatique par Harary, Hedetniemi et Prins [1].

Définition 1.7. *Une a -coloration est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs différentes i et j , le sous graphe engendré par les deux classes de couleurs i et j , contient au moins une arête.*

Le nombre a -chromatique, noté $\psi(G)$ est le nombre maximum de classes de couleurs dans une a -coloration.

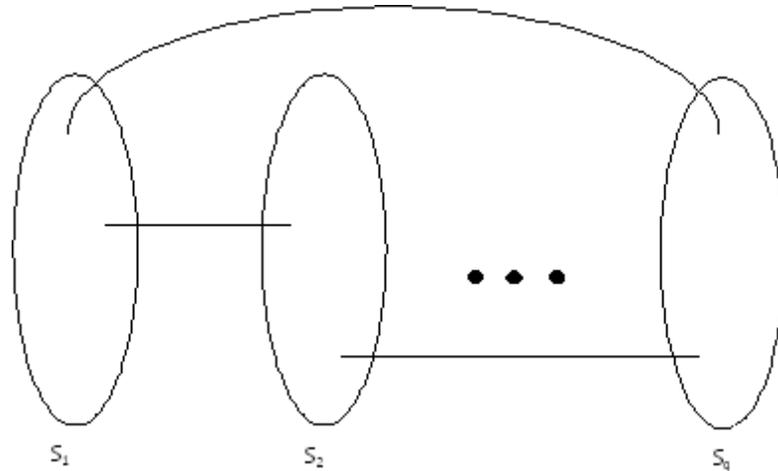


FIGURE 1.5.

Ceci a inspiré Irving et Manlove [2, 3] à introduire un autre procédé de coloration, en effet une autre manière de réduire le nombre de couleurs dans un graphe est d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleurs en transférant les sommets d'une même classe de couleur dans les autres classes de couleurs (voir FIGURE 1.6). D'où la définition de la coloration dominante ou la b -coloration.

Définition 1.8. *Une coloration dominante ou une b -coloration est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur $j \neq i$. Ce sommet est dit sommet b -dominant pour la couleur i .*

Le nombre b -chromatique, noté $b(G)$ est le nombre maximum de classes de couleurs dans une coloration dominante. Une coloration dominante avec $b(G)$ couleurs est dite b -coloration, et l'ensemble des sommets b -dominants est dit système b -dominant et est de cardinal $b(G)$.

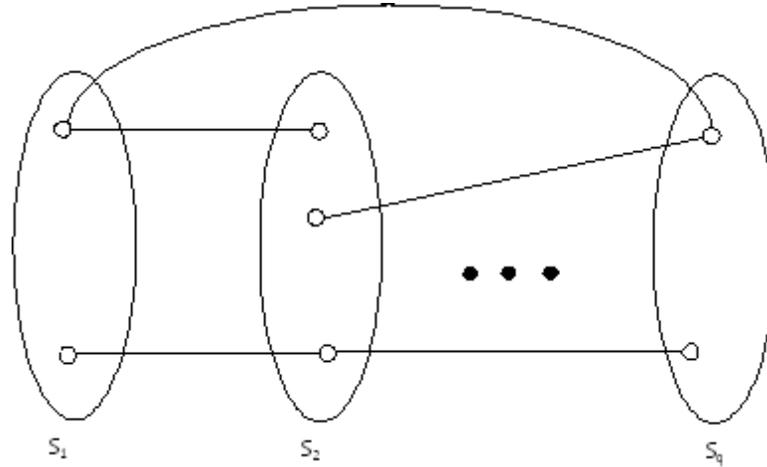


FIGURE 1.6.

Toute $\chi(G)$ -coloration vérifie la définition de la coloration dominante et toute coloration dominante vérifie la définition d'une a -coloration ceci implique qu'on a toujours $\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G)$ pour tout graphe G .

Aussi, une borne triviale de $b(G)$ est $\Delta(G) + 1$, puisque si v_i est un sommet b -dominant de couleur i , il est adjacent à au moins un sommet dans chacune des autres classes de couleurs, c'est à dire $d(v_i) \geq b(G) - 1$ d'où le résultat puisque $d(v_i) \leq \Delta(G)$.

On définit $m(G)$ comme étant le plus grand entier k tel que G admet k sommets de degré au moins $k - 1$. Il est simple de voir que tout graphe G satisfait la relation:

$$b(G) \leq m(G) \leq \Delta(G) + 1$$

La première inégalité est due au fait que si G admet une b -coloration avec k couleurs, alors G admet k sommets de degré au moins $k - 1$; la seconde inégalité découle de la définition même de $m(G)$.

L'absence d'algorithme polynomial pour la détermination d'un paramètre donné dans un graphe ne cesse d'inciter les chercheurs à établir des bornes qui encadrent le plus possible le paramètre en question ou de déterminer la valeur exacte ou approximative de ce paramètre pour certaines classes de graphes.

1.5 Complexité algorithmique

La théorie de la complexité s'intéresse à l'analyse de la difficulté des problèmes informatiques et plus précisément à leur résolution de manière efficace en tenant compte du temps de calcul et des données stockées en mémoire. Elle repose essentiellement sur la définition de classes de complexité.

Nous citons la classe \mathcal{P} des problèmes polynomiaux pouvant être résolus par un algorithme déterministe en un temps polynomial; la classe \mathcal{NP} des problèmes pouvant être résolus par un algorithme non-déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

Soit la classe de complexité \mathcal{C} contenant les classes $\mathcal{P}, \mathcal{NP}$ et autres. Un problème est dit \mathcal{C} -difficile si ce problème est au moins aussi dur que tous les problèmes de \mathcal{C} . On dit qu'un problème p se réduit à un problème q s'il existe un algorithme qui transforme une instance de p en une instance de q ; et donc si on dispose d'un algorithme qui résout le problème q on peut par conséquent résoudre le problème p , et donc le problème p est au moins aussi difficile que le problème q . Les problèmes les plus étudiés sont les problèmes \mathcal{NP} -complets, parce qu'on ne sait pas les résoudre efficacement à cause de leur indéterminisme. Il est clair que $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$, puisqu'un algorithme déterministe est un algorithme non déterministe particulier. La question qui se pose et qui reste toujours ouverte est la suivante: A t-on $\mathcal{NP} = \mathcal{P}$?. Par ailleurs la vérification de l'efficacité d'un algorithme se fait à une constante multiplicative près afin d'ignorer les variations qui ont lieu lors de changements tels une implantation, changement de langage ou d'ordinateur, dans ce cas on introduit les notations asymptotiques suivantes:

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^*$ une fonction quelconque. On définit l'ensemble des fonctions bornées supérieurement par un multiple de $f(n)$, à partir d'un certain rang n_0 par: $O(f(n)) = \{t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^* / (\exists c \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) [t(n) \leq cf(n)]\}$

Cette notion est utile par exemple lorsqu'on veut estimer une limite supérieure au temps que prendra un algorithme pour son exécution; (par temps d'exécution on entend le nombre d'étapes dont a besoin un algorithme pour son exécution); elle signifie qu'il

existe une constante réelle positive telle qu'un temps $cf(n)$ suffit pour l'exécution d'un algorithme et pour n assez grand.

Exemple 1.9. $n^3 - 3n^2 - n - 8 \in O(n^3)$

Il serait intéressant alors d'estimer une limite inférieure à ce temps, d'où l'ensemble des fonctions bornées inférieurement par un multiple de $f(n)$, à partir d'un certain rang n_0 : $\Omega(f(n)) = \{t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^* / (\exists c \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) [t(n) \geq cf(n)]\}$

Ce qui signifie qu'il existe une constante réelle positive telle que l'algorithme nécessite un temps supérieur à $cf(n)$ pour son exécution, pour n assez grand.

On serait d'avantage satisfaits si le temps d'exécution est borné à la fois inférieurement et supérieurement par des multiples réels positifs d'une même fonction. D'où la définition: $\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$ et $f(n) \in \Theta(g(n))$ si et seulement si:

$$(\exists c, d \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) [cg(n) \leq f(n) \leq dg(n)].$$

CHAPITRE 2

TRAVAUX ÉLABORÉS SUR LE NOMBRE b -CHROMATIQUE ET AMÉLIORATIONS.

Parmi les premières recherches sur le nombre b -chromatique dans les graphes furent celles de Kouider et Mahéo [7] où ils donnent la valeur exacte de ce nombre dans le cas de graphes simples tels que: S_n, P_n, C_n représentant dans l'ordre le stable, la chaîne et le cycle d'ordre n , et pour certaines valeurs de n .

Nous citons ici quelques résultats sur le nombre b -chromatique dans certaines classes de graphes. Les graphes réguliers sont intéressants dans l'étude du nombre b -chromatique car pour tout G graphe régulier on a $m(G) = \Delta(G) + 1$.

2.1 Graphes de Kneser

Soit $S = \{1, 2, \dots, n\}$ un ensemble de cardinalité n et V l'ensemble de tous les sous ensembles de S de cardinalité k , $n \geq 2k$. Le graphe de Kneser de paramètres n et k , noté $K(n, k)$ a pour ensemble de sommets l'ensemble V ; tel que deux sommets sont adjacents si et seulement si les sous ensembles correspondants sont disjoints, ceux sont en particulier des graphes réguliers.

En 1955 il a été conjecturé par Kneser dans [8] et plus tard démontré par Lovasz dans [9] que : $\chi(K(n, k)) = n - 2k + 2$. Le nombre b -chromatique du graphe de Kneser a été étudié pour la première fois par R. Javadi et B. Omoomi dans [10] où il est démontré que $b(K(n, 2)) = \Theta(n^2)$ et les résultats suivants:

Théorème 2.1. [10] *Pour tout entier $k \geq 3$, on a $b(K(2k + 1, k)) = k + 2$.*

Théorème 2.2. [10] *Si $n \equiv 5$ (modulo 6) alors $b(K(n, 2)) \geq \frac{n(n-1)}{6} - \frac{1}{3}$*

Théorème 2.3. [10] Pour tout entier positif $n; n \neq 8$, on a:

$$b(K(n, 2)) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n(n-1)}{6} \right\rfloor & \text{si } n \text{ impair} \\ \left\lfloor \frac{(n-1)(n-2)}{6} \right\rfloor + 3 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Remarque 2.4.

1. Si $n = 5$ ce qui correspond au graphe de Petersen dont le nombre b -chromatique a été calculé au chapitre 3 .
2. Si $n = 8$ le graphe est une exception où $b(K(8, 2)) = 9$.

Les auteurs des derniers résultats conjecturent que:

Conjecture 2.5. Pour tout entier n , on a: $b(K(n, k)) = \Theta(n^k)$.

Cette dernière conjecture fut démontrée par Hossein Hajiabolhassan dans [11].

2.2 Graphes cubiques

S. Klavzar et M. Jacovac [12] ont abordé une recherche sur le nombre b -chromatique dans les graphes réguliers. En effet ils ont traité en particulier le cas des graphes cubiques de maille 3 et 4, nous proposons ici une autre preuve de leur théorème qui réduit considérablement le nombre de cas itérés dans leur étude.

Pour cela on utilisera le resultat de Kratochvil, Tuza et Voigt dans [13] où ils remarquent que si dans un graphe G , il existe $\Delta(G) + 1$ sommets de degré $\Delta(G)$, telle que la distance entre toute paire de sommets est supérieure ou égale à quatre, alors le nombre b -chromatique du graphe G est $\Delta(G) + 1$.

Théorème 2.6. [13] Soit G un graphe contenant les sommets $v_1, \dots, v_{\Delta+1}$ de degré $\Delta(G)$ et $\text{dist}(v_i, v_j) \geq 4$ ($i \neq j$), alors on a $b(G) = \Delta(G) + 1$.

Preuve. Il suffit pour cela de colorer chaque sommet v_i avec la couleur i ; ($i = 1, 2, \dots, \Delta(G)+1$) et de colorer les sommets de $N(v_i)$ avec les couleurs $\{1, \dots, \Delta(G) + 1\} \setminus \{i\}$ de manière que toutes les couleurs apparaissent dans $N(v_i)$, ce qui donne la coloration propre dans le sous graphe induit par les sommets de $\cup N(v_i)$ pour $i = 1, \dots, \Delta(G) + 1$, puisque la distance entre deux sommets de $\{v_1, \dots, v_{\Delta(G)+1}\}$ est au moins quatre (voir FIGURE 2.1). On étend ensuite cette coloration au graphe entier, ceci est toujours possible étant donné qu'il y a au moins une couleur disponible qui n'apparaît pas dans le voisinage d'un sommet donné. Cette coloration est donc propre et dominante et les sommets b -dominants sont $v_1, \dots, v_{\Delta(G)+1}$. \square

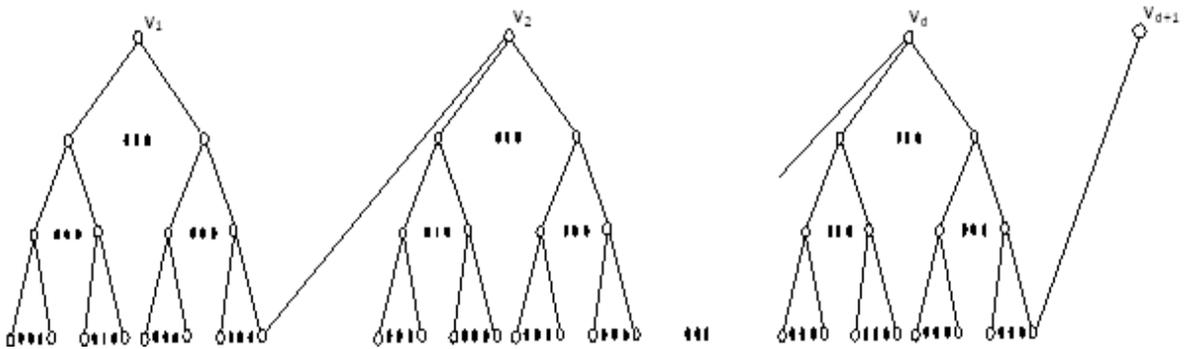


FIGURE 2.1.

Corollaire 2.7. Soit G un graphe d -régulier ($d \geq 2$) d'ordre au moins d^4 , alors on a $b(G) = d + 1$.

Preuve. Pour la démonstration il suffit de déterminer $d + 1$ sommets de degré chacun d telle que la distance entre chaque paire de sommets est au moins quatre et ensuite appliquer le théorème précédent. Pour le faire on prend un sommet v_1 qu'on supprime et on supprime ses voisins, les voisins de ses voisins et les voisins des voisins de ses voisins, on aurait donc supprimé : $d + 1 + d(d - 1) + d(d - 1)^2 < d^3$ c-à-d au plus d^3 sommets. On refait la même chose jusqu'à obtention de v_1, \dots, v_d , au total le nombre de sommets supprimés est strictement plus petit que d^4 . Il reste au moins un sommet v_{d+1} non supprimé. Les

sommets sont choisis de telle sorte que $dist(v_i, v_j) \geq 4, \forall i \neq j$; et donc d'après théorème précédent $b(G) = d + 1$. \square

D'après le corollaire, on peut dire que le nombre de graphes d -réguliers tels que $b(G) \leq d$ est fini et il est atteint pour les graphes d -réguliers d'ordre $n < d^4$.

S. Klavsar et M. Jacovac ont posé le problème suivant dans [12]:

Quels sont les graphes d -réguliers tels que $b(G) \leq d$, en fait ils ont répondu partiellement à cette question, en montrant que tous les graphes 3-réguliers sont 4- b -colorables à l'exception d'un nombre fini de graphes 3-réguliers qui sont tels que $b(G) < 4$.

Théorème 2.8. [12] *Soit G un graphe 3-régulier, alors on a $b(G) = 4$, sauf si $G = G_1, K_3 \square K_2, K_{3,3}$, le graphe de Petersen P et dans ce cas $b(P) = b(G_1) = b(K_3 \square K_2) = 3$ et $b(K_{3,3}) = 2$.*

Remarque 2.9.

1. *Noter que $b(P) = 3$ (voir [15, 14]) et que d'autre part il est facile de voir que $b(K_{3,3}) = 2$.*
2. $b(K_3 \square K_2) = 3$.
3. $b(G_1) = 3$.

En effet si nous supposons au contraire que $b(K_3 \square K_2) = 4$, on colore un des deux triangles avec les couleurs 1, 2, 3, dans ce cas un seul des sommets restants peut être coloré 4 donc il est le seul sommet b -dominant de couleur 4 et a besoin des autres couleurs dans son voisinage, pour cela les deux sommets restants peuvent être colorés 2 et 3 de manière que le sommet coloré 4 soit un sommet b -dominant, mais alors aucun sommet de couleur 2 ou 3 ne peut être sommet b -dominant, d'où $b(K_3 \square K_2) \leq 3$. Il est facile de trouver une 3- b -coloration en choisissant les sommets b -dominants sur un même triangle par exemple.

Maintenant on propose de montrer que $b(G_1) = 3$. Remarquer que dans G_1 (voir FIGURE 2.2) il existe deux types de sommets, pour cela on considère deux cas.

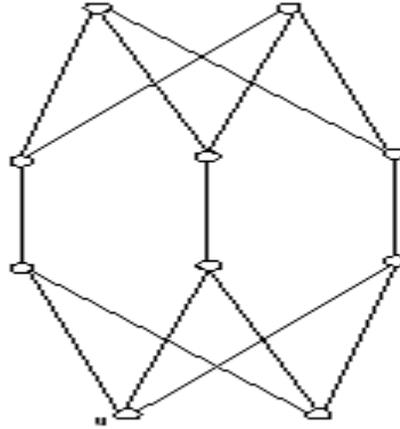


FIGURE 2.2.

Si on colore le sommet u avec la couleur 1, ses voisins sont colorés 2, 3, 4 le sommet restant dans le $K_{2,3}$ contenant le sommet u ne peut être coloré que 1, à ce moment aucun des sommets colorés 2, 3, 4 ne peut être b -dominant, ils ont tous deux sommets de la même couleur dans leur voisinage. D'autre part si l'un des sommets à distance 3 de u est b -dominant alors deux seulement peuvent l'être, il s'ensuit que les sommets b -dominants de couleurs 2, 3, 4 doivent être à distance 2 de u , ce qui est impossible puisque dans ce cas les deux sommets à distance 3 de u doivent être colorés 1.

Supposons maintenant que tous les sommets b -dominants sont à distance 1 et 2 du sommet u , alors seulement deux sommets b -dominants sont voisins de u , soient 1 et 2 leurs couleurs. Ces mêmes couleurs doivent apparaître à distance 2 de u et donc un des sommets colorés 3 ou 4 ne sera pas b -dominant, le graphe G_1 ne peut donc être que 4- b -colorable. Il est facile de trouver une 3- b -coloration en choisissant les sommets b -dominants le sommet u et ses deux voisins.

Nous fournissons dans ce qui suit une preuve courte du théorème de Klavzar et Jacovac, en utilisant d'une part le théorème précédent, la remarque 2.9 précédente puis une technique qu'on pense être meilleure puisqu'elle réduit considérablement le nombre de cas considérés par les auteurs et enfin le résultat du théorème cité dans [12].

Remarque 2.10. *D'après ce qui a été mentionné dans [13], on conclut que pour tout d ,*

il existe seulement un nombre fini de graphes d -réguliers G d'ordre n tels que $b(G) \leq d$, et donc pour les graphes 3-réguliers qui sont tels que $b(G) < 4$ on en a $n < 3^4$.

Nous montrons dans la suite qu'il existe seulement 4 graphes G , 3-réguliers tels que $b(G) < 4$.

2.2.1 Nouvelle preuve du Théorème 2.8

Soit C_n un cycle sans corde et $N_i(C_n)$ (appelé niveau), l'ensemble des sommets à distance i du cycle C_n .

Vu le théorème de [15, 14] voir aussi chapitre 3, il suffit d'étudier le cas où le plus petit cycle est C_3 ou C_4 .

Dans les différents cas étudiés, les sommets pleins (en noir) désignent les sommets b -dominants. Et on peut aussi voir que dans chacun des cas on peut étendre la coloration propre.

1° **Cas:** G contient un C_3 , il serait commode de prendre parmi les cycles à trois sommets celui dont $N_1(C_3)$ est de cardinalité maximum.

Il est clair que $1 \leq |N_1(C_3)| \leq 3$

Si $|N_1(C_3)| = 1$ alors $G = K_4$ et $b(K_4) = 4$.

Si $|N_1(C_3)| = 2$ alors les différentes possibilités sont:

Si les sommets de $N_1(C_3)$ forment un stable, on a (voir FIGURE 2.3):

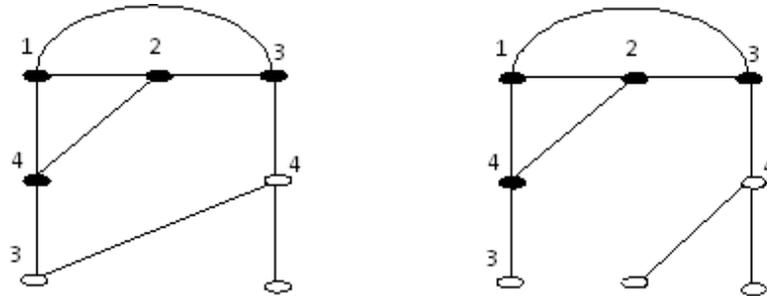
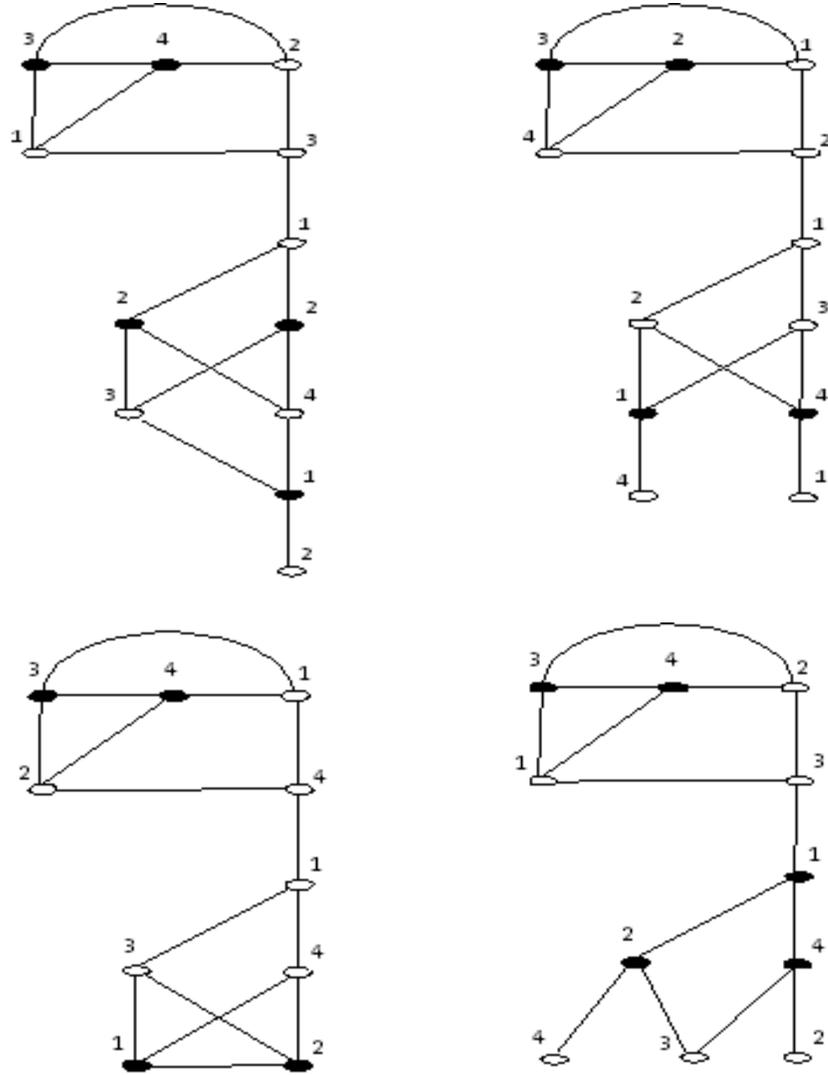


FIGURE 2.3.

Si les sommets de $N_1(C_3)$ sont reliés par une arête (voir FIGURE 2.4), au niveau deux on a un seul sommet d'où :



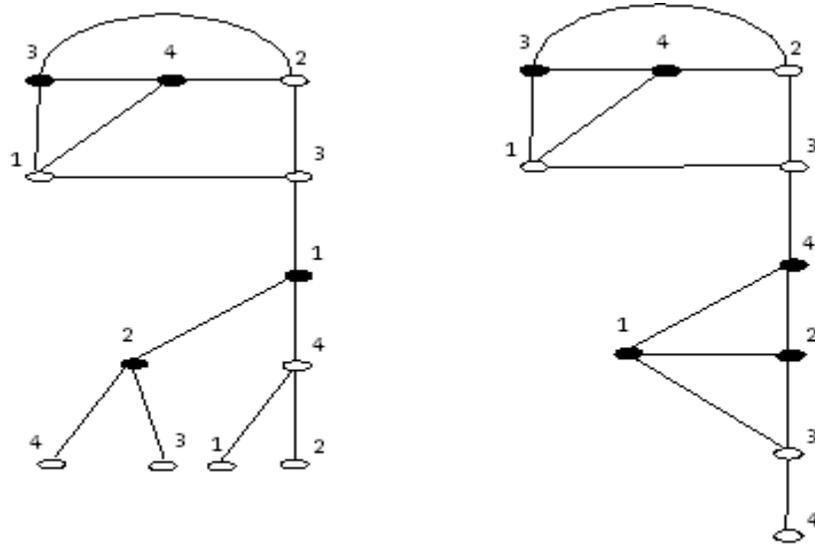


FIGURE 2.4.

Si $|N_1(C_3)| = 3$ alors les différentes possibilités sont:

$N_1(C_3)$ est stable (voir FIGURE 2.5):

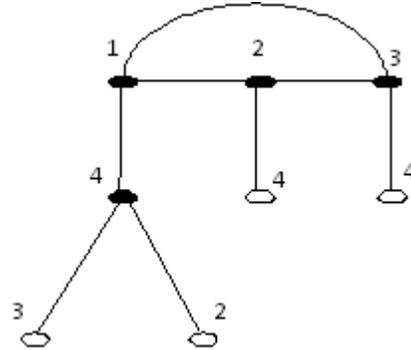


FIGURE 2.5.

$N_1(C_3)$ contient une arête (voir FIGURE 2.6):

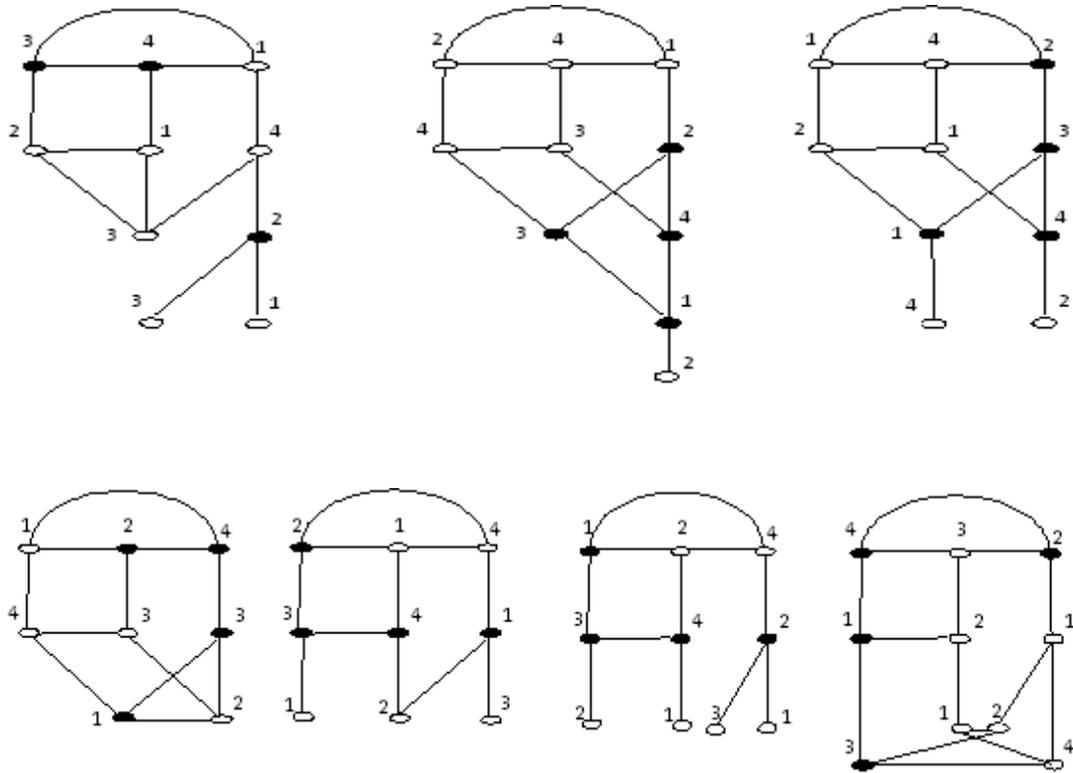


FIGURE 2.6.

$N_1(C_3)$ contient deux arêtes (voir FIGURE 2.7):

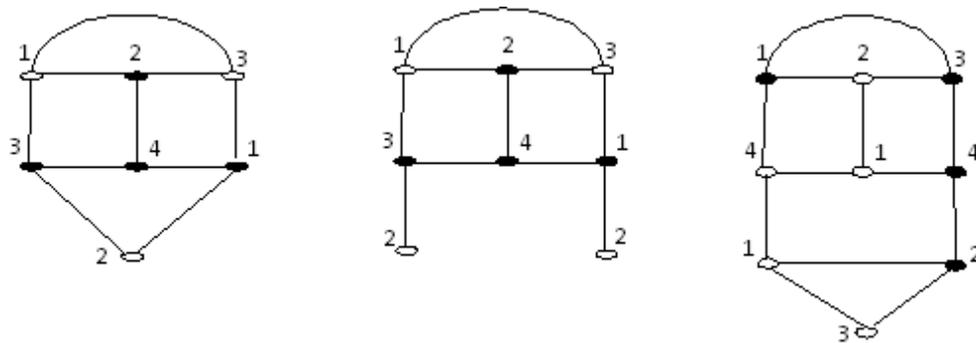


FIGURE 2.7.

$N_1(C_3)$ contient trois arêtes (voir FIGURE 2.8):

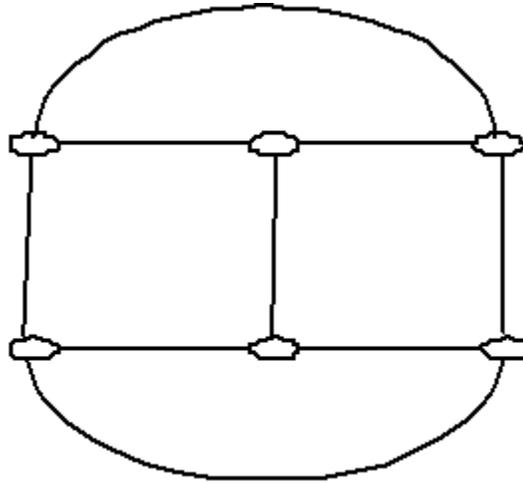


FIGURE 2.8. $K_3 \square K_2$ avec $b(G) = 3 < 4$

2° Cas: On suppose que G ne contient pas de C_3 et G contient un C_4 . Parmi tous les cycles à quatre sommets on considère celui dont $N_1(C_4)$ est de cardinalité maximum et en plus $N_1(C_4)$ contient un maximum d'arêtes. On peut remarquer que : $2 \leq |N_1(C_4)| \leq 4$

Si $|N_1(C_4)| = 2$, alors la seule possibilité est: (voir FIGURE 2.9). Sinon il existera un C_4 avec $|N_1(C_4)| > 2$.

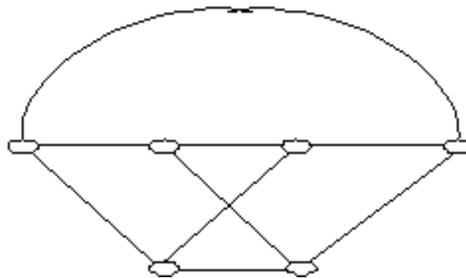
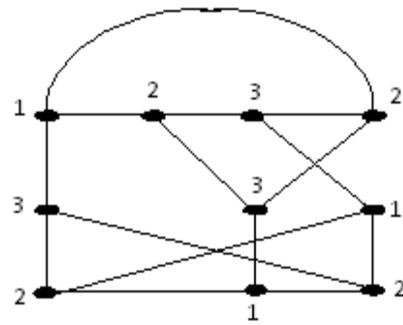
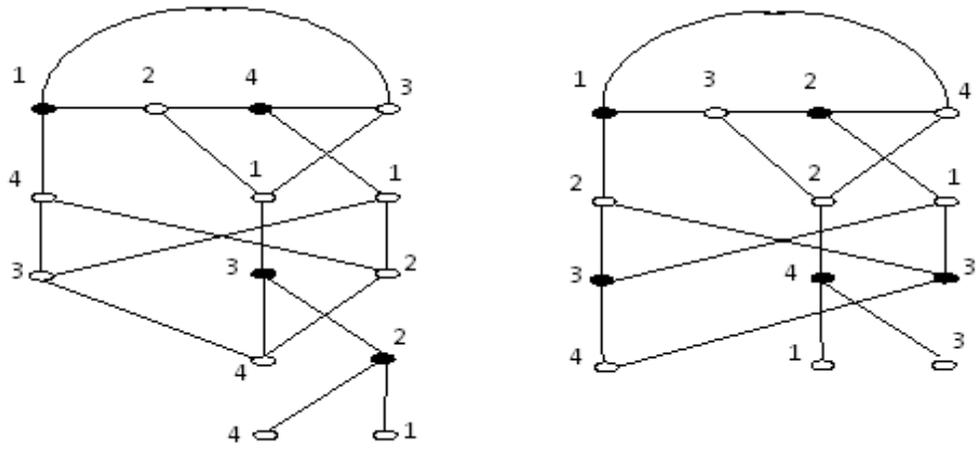


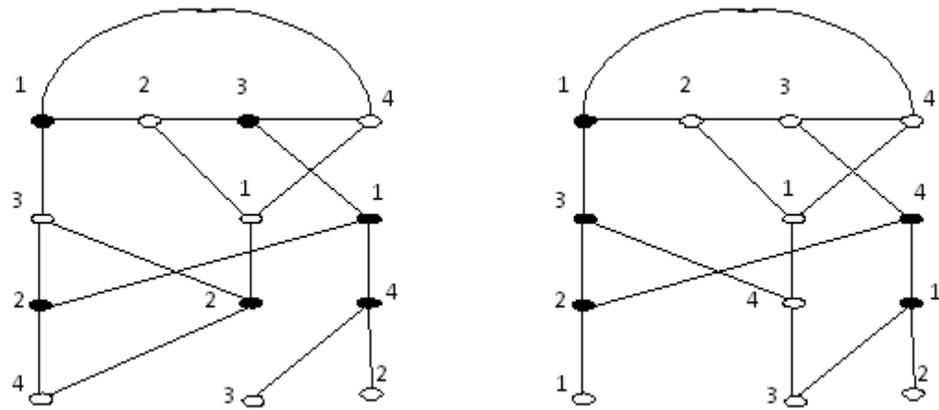
FIGURE 2.9. $K_{3,3}$ avec $b(G) = 2 < 4$

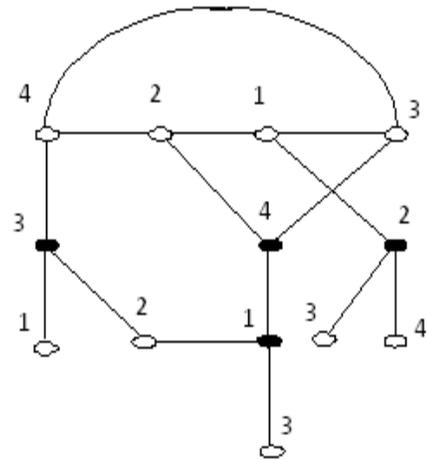
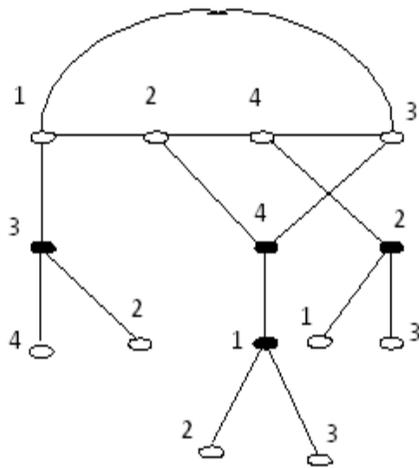
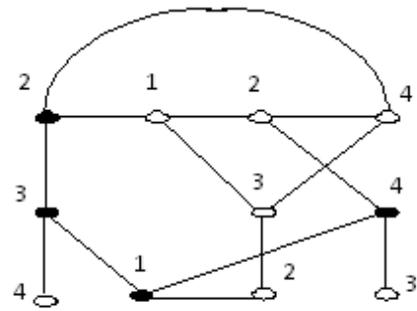
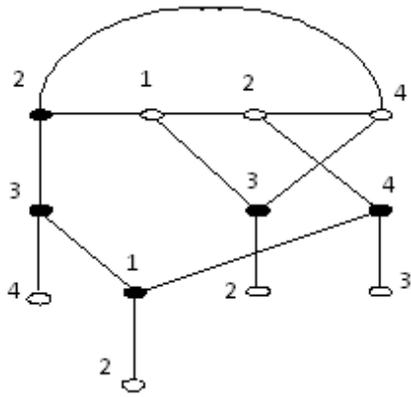
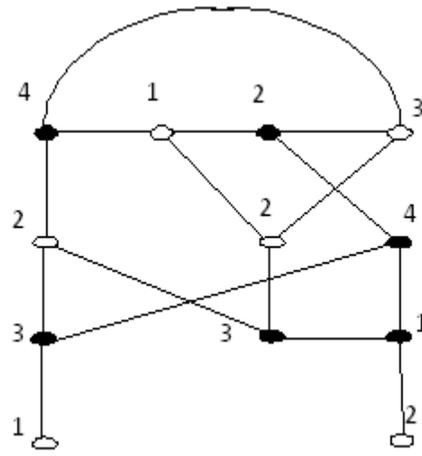
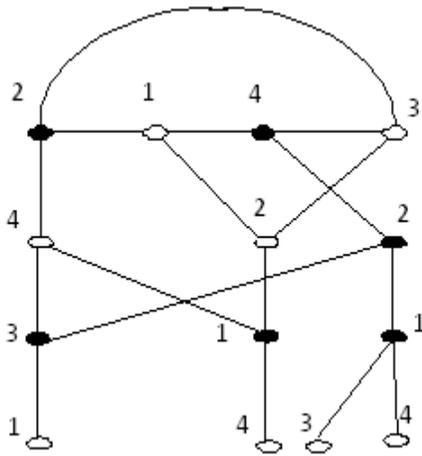
Si $|N_1(C_4)| = 3$, alors trois possibilités s'imposent:

1°/ $N_1(C_4)$ est un stable (voir FIGURE 2.10):



Graphe G_1 avec $b(G_1) = 3 < 4$





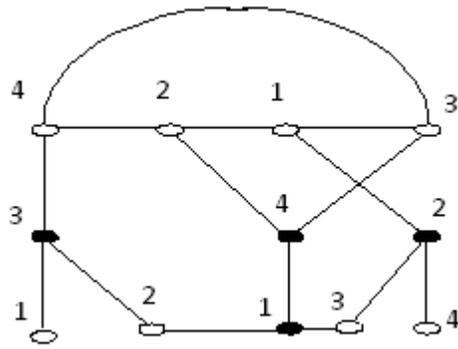
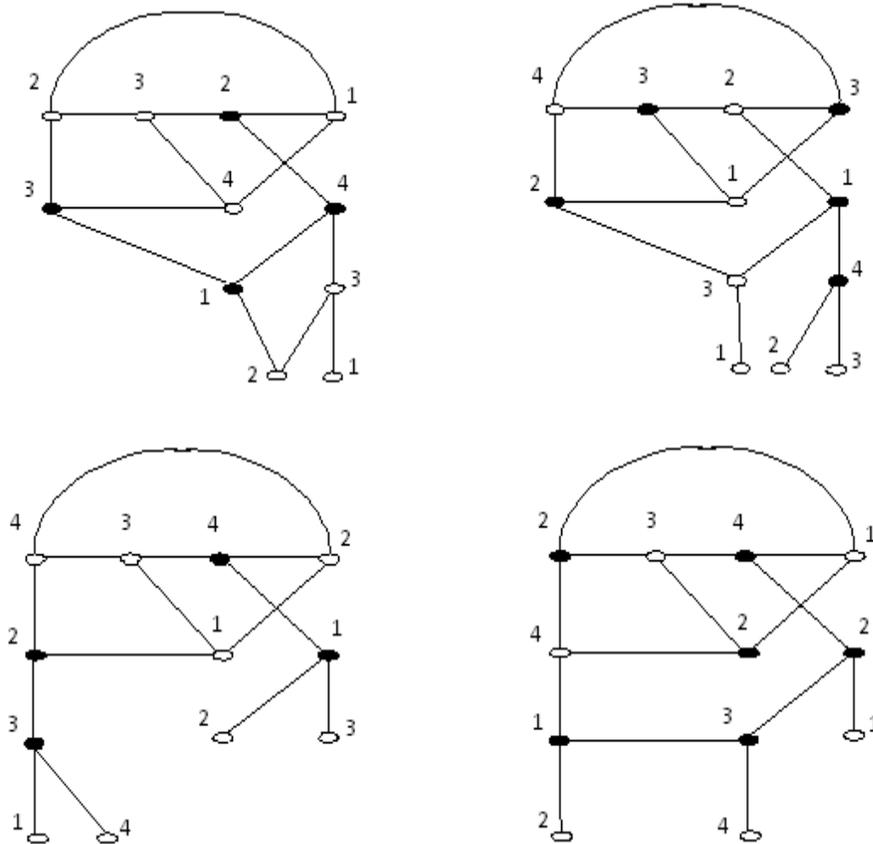


FIGURE 2.10.

$2^\circ / N_1(C_4)$ contient une arête (voir FIGURE 2.11):



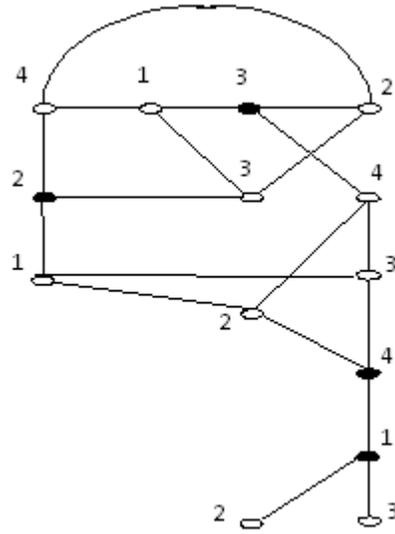
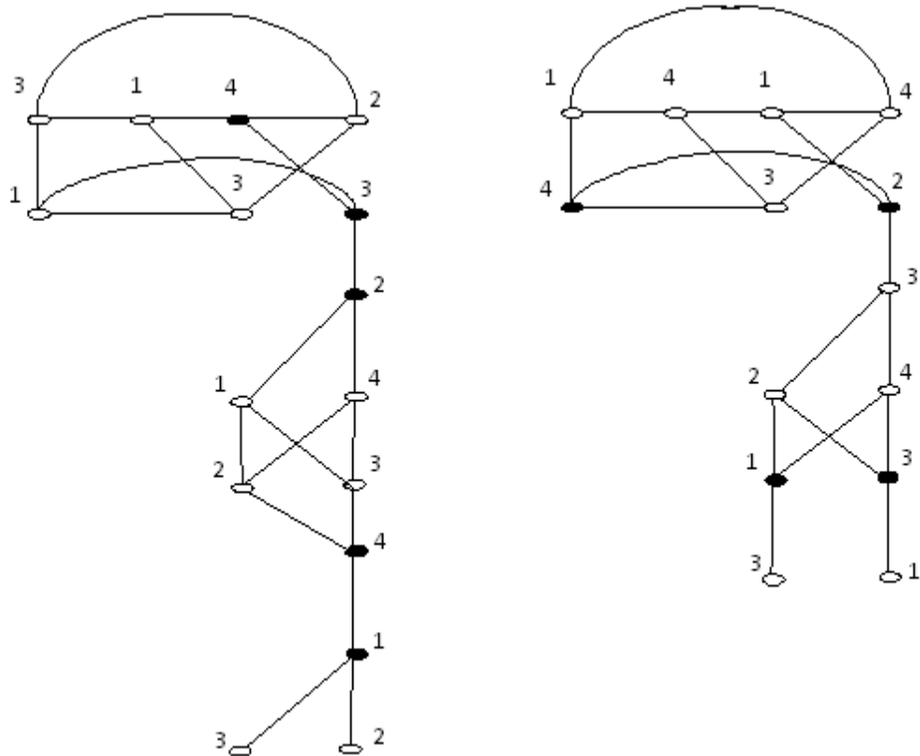


FIGURE 2.11.

$\mathfrak{3}^\circ / N_1(C_4)$ contient deux arêtes (voir FIGURE 2.12):



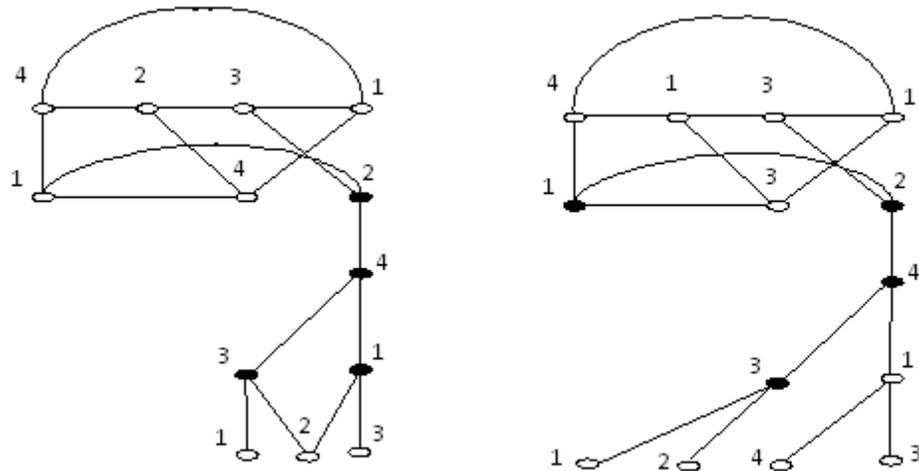


FIGURE 2.12.

4°/ $N_1(C_4)$ contient trois arêtes: Impossible sinon on crée un C_3 .

Si $|N_1(C_4)| = 4$, alors les sommets de C_4 sont toujours des sommets b -dominants même avec éventuellement des arêtes dans $N_1(C_4)$ (voir FIGURE 2.13). Et la b -coloration peut être étendue au graphe tout entier.

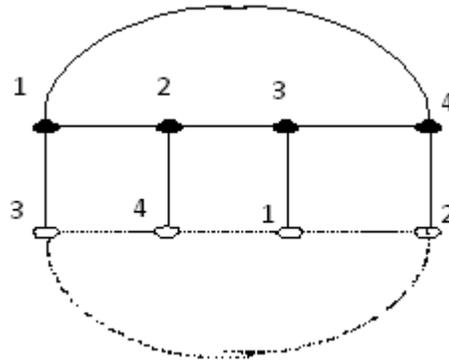


FIGURE 2.13.

Remarque 2.11. Dans les quatre cas rencontrés $P, G_1, K_3 \square K_2, K_{3,3}$ dont le $b(G) < 4$, nous avons remarqué que le diamètre est inférieur ou égal à 3.

Dans le cas général des graphes d -régulier, on pose le problème suivant:

Conjecture 2.12. G est un graphe d -régulier, si $b(G) \leq d$, alors on a $\text{diam}(G) \leq d$.

L'étude des graphes 4-réguliers s'avère déjà très compliquée, en utilisant la même technique; néanmoins nous espérons résoudre le problème pour $d = 4, 5, 6$.

Il serait donc naturel à présent de se poser la question suivante:

Problème ouvert : Quelle est la valeur exacte de $b(G)$ si G est un graphe d -régulier de maille 3 et 4, quand $d = 4, 5$ ou 6.

2.3 Nombre b-chromatique de graphes particuliers

Il est intéressant de rappeler les résultats de M. Kouider et M. Mahéo [7] et ceux de M. Kouider et C. T. Hoang [16]:

1. Si S_n, K_n, P_n, C_n sont respectivement un stable, un graphe complet, une chaîne et enfin un cycle d'ordres n , alors $b(S_n) = 1, b(K_n) = n, b(P_n) = b(C_n) = 3$ si $n \geq 5$.
2. Si $K_{n,p}$ est un biparti complet, alors $b(K_{n,p}) = 2, \forall n, p \in \mathbb{N}$.
3. $b(K_{1,n} \square K_{1,n}) = n + 2$ si $n \geq 2$.
4. $b(K_{1,n} \square P_k) = \min(k, n + 3), n \geq 3, k \geq 4$ sauf si $k = n + 3$ et $k = n + 4$ où $b(K_{1,n} \square P_k) = n + 2$.
5. $n \leq b(K_p \square K_n) \leq p(p - 1)$ si $p \leq n < p(p - 1)$ et $b(K_p \square K_n) = n$ si $n \geq p(p - 1)$.

Proposition 2.13. [7]:

1. $b(G \square H) \geq \max(b(G), b(H))$ pour tous graphes G et H .
2. Si G_1 et G_2 sont deux graphes disjoints, leurs joint est noté $G_1 \vee G_2$ et leur union est notée $G_1 + G_2$ on a: $b(G_1 \vee G_2) = b(G_1) + b(G_2)$ et

$$b(G_1 + G_2) \geq \max(b(G_1), b(G_2)).$$

D'autres part Benhaz Omoomi et Ramin Javadi dans [17], donnent les résultats suivants, en considérant l'ensemble des sommets du graphe $G_1 \square G_2$ comme une matrice $m \times n$ où chaque élément (i, j) de la matrice correspond à un sommet (i, j) de $G_1 \square G_2$ où $i \in V(G_1)$ et $j \in V(G_2)$ et chaque colonne induit une copie de G_1 et chaque ligne induit une copie de G_2 .

Théorème 2.14. [17] Pour tous entiers positifs $m, n \geq 4$ on a :

$$b(K_m \square C_n) = \begin{cases} m & \text{si } m \geq 2n \\ m + 1 & \text{si } m = 2n - 1 \\ m + 2 & \text{si } m \leq 2n - 2 \end{cases} .$$

Théorème 2.15. [17] Pour tous entiers positifs $m, n \geq 4$ on a :

$$b(K_m \square P_n) = \begin{cases} m & \text{si } m \geq 2n - 2 \\ m + 1 & \text{si } 2n - 5 \leq m \leq 2n - 3 \\ m + 2 & \text{si } m \leq 2n - 6 \end{cases} .$$

Théorème 2.16. [17] Pour tout entier positif $n \geq 2$ on a : $b(K_n \square K_n) \leq 2n - 2$.

Théorème 2.17. [17] Pour tout entier positif $n \geq 5$ on a : $b(K_n \square K_n) \geq 2n - 3$.

Ils finissent ensuite par la conjecture suivante :

Conjecture 2.18. [17] Pour tout entier positif $n \geq 5$ on a : $b(K_n \square K_n) = 2n - 3$

Pour contredire cette dernière il suffit de trouver un entier $n \geq 5$ pour lequel

$$b(K_n \square K_n) = 2n - 2.$$

CHAPITRE 3

LA b -COLORATION DANS LES GRAPHEs d -RÉGULIERS

Nous nous sommes intéressés à un problème récent concernant les graphes réguliers posé par El Sahili et Kouider dans [18] à savoir :

Est-il vrai qu'un graphe régulier G de maille $g(G) \geq 5$ satisfait $b(G) = d + 1$?

Nous répondons négativement à cette question, puisque le graphe de Petersen en est un contre exemple.

Nous proposons des résultats positifs dans le cas où $d \leq 6$ et où le graphe de Petersen est le seul contre exemple.

Ce travail a été accepté comme communication au colloque [14] et publié dans la revue *Discrete Applied Mathematics* [15].

3.1 Résultats préliminaires

Pour tout $k \geq 3$, on note C_k le cycle à k sommets.

Théorème 3.1. *Le graphe de Petersen a le nombre b -chromatique égal à 3.*

Preuve. Soit G le graphe de Petersen dont les sommets sont notés $v_1, \dots, v_5, w_1, \dots, w_5$, tels que les sommets v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 induisent un cycle d'ordre 5 et dans cet ordre, de même w_1, w_3, w_5, w_2, w_4 induisent un cycle d'ordre 5 dans cet ordre, où $v_i w_i$ est une arête pour tout $i = 1, \dots, 5$ (Voir FIGURE 3.1). Comme $\chi(G) = 3$ alors $b(G) \geq 3$. Supposons que G admet une b -coloration avec 4 couleurs. Notons par d_j ; $j = 1, 2, 3, 4$, les sommets b -dominants de couleur j et soit $D = \{d_1, \dots, d_4\}$ un système b -dominant de G . Rappelons que chaque sommet d_j doit avoir exactement un voisin de chacune des trois couleurs de 1 à 4 différente de celle de d_j . Supposons que les sommets de D induisent un stable; à cause de la symétrie

dans G nous supposons que $D = \{v_1, v_3, w_4, w_5\}$ où $d_1 = v_1, d_3 = v_3, d_2 = w_4, d_4 = w_5$. Sans perdre de généralité on colore 2 le sommet v_2 , et donc w_2 ne peut pas être coloré 2. Comme v_1 est b -dominant il doit avoir un voisin de couleur 4, qui ne peut être que w_1 et un voisin de couleur 3 qui ne peut être que v_5 . Comme v_3 est b -dominant il doit avoir un voisin de couleur 4 qui ne peut être que v_4 et un voisin de couleur 1 qui ne peut être que w_3 . Dans ce cas w_5 ne peut avoir la couleur 2 dans son voisinage, contradiction. Donc les sommets de D n'induisent pas un stable. Nous pouvons supposer que les sommets d_1 et d_2 sont adjacents et à cause de la symétrie dans G , on choisit $d_1 = v_1$ et $d_2 = v_2$ (puisque toutes les arêtes dans le graphe de Petersen jouent le même rôle). Dans ce cas n'importe où l'on place le sommet d_3 ; il existera un C_5 qui contient les sommets d_1, d_2, d_3 et comme tous les cycles dans le graphe de Petersen jouent le même rôle, on choisit d_3 l'un des sommets v_3, v_4, v_5 et à cause de la symétrie, on est conduit à considérer deux cas.

Cas 1: $d_3 = v_3$. Comme v_2 est b -dominant, il doit avoir un voisin de couleur 4 qui ne peut être que w_2 . Maintenant un des sommets v_4 ou v_5 , soit v_5 , ne doit pas prendre la couleur 4, comme v_1 est b -dominant il a un voisin de couleur 4 qui ne peut être que w_1 et un voisin de couleur 3 qui ne peut être que v_5 . Comme v_3 est b -dominant il a un voisin de couleur 4 qui ne peut être que v_4 et un voisin de couleur 1 qui ne peut être que w_3 . Remarquer que w_5 ne peut prendre que la couleur 2 et les seuls sommets de couleur 4 sont w_1, w_2, v_4 , chacun de ces quatres sommets ont deux voisins qui ont la même couleur et donc aucun d'eux ne peut être b -dominant, contradiction.

Cas 2: $d_3 = v_4$. Comme v_1 est b -dominant il a un voisin de couleur 3, qui ne peut être que w_1 et un voisin de couleur 4 qui ne peut être que v_5 . De même v_2 a un voisin de couleur 3 qui ne peut être que w_2 et un voisin de couleur 4 qui ne peut être que v_3 , mais dans ce cas v_4 a deux voisins de couleur 4, le sommet $d_3 = v_4$ ne peut pas être b -dominant, contradiction. □

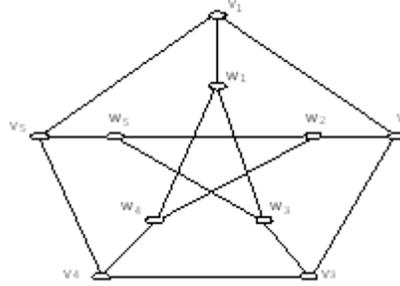


FIGURE 3.1. Graphe de Petersen

Dans la suite on aura besoin du résultat qui suit et pour lequel on proposera une nouvelle preuve. Cette preuve est plutôt similaire à celle de la Proposition 2 dans [18], elle s'avère importante pour la démonstration du Théorème 3.5 qui est assez compliquée.

Théorème 3.2. [18] *Tout graphe d -régulier de maille au moins 6 admet une b -coloration avec $d + 1$ couleurs.*

Preuve. Soit x un sommet de G et x_1, x_2, \dots, x_d ses voisins. Pour tout $i = 1, 2, \dots, d$ soit $N_i = N(x_i) \setminus \{x\}$ le voisinage ouvert de x_i sans le sommet x , alors chacun des N_i est un stable, sinon G contient un cycle de longueur trois et tous les N_i sont disjoints deux à deux sinon G admet un cycle de longueur quatre et enfin il n'y a aucune arête entre deux N_i sinon G contient un cycle de longueur cinq. On construit une coloration avec les $d + 1$ couleurs $0, 1, \dots, d$ de la manière suivante: On attribue la couleur 0 au sommet x et pour tout $i = 1, \dots, d$, on colore i les sommets x_i et on attribue aux sommets de N_i les couleurs de $\{1, \dots, d\} \setminus \{i\}$; enfin on colore les sommets restants de manière arbitraire en attribuant à chaque sommet v une couleur de l'ensemble $\{1, \dots, d\}$ qui ne se trouve pas déjà dans son voisinage. Il est clair que la coloration obtenue est une b -coloration, utilisant $d + 1$ couleurs et où les sommets x, x_1, x_2, \dots, x_d sont les sommets b -dominants. \square

3.2 Nouvelle preuve du théorème de El-sahili et Kouider

El-Sahili et Kouider ont montré le théorème suivant:

Théorème 3.3. [18] *Si G est un graphe régulier de maille au moins 5 et ne contient pas de C_6 , alors G admet une b -coloration avec $d + 1$ couleurs.*

On propose une nouvelle preuve du Théorème 3.3, en utilisant le théorème classique de Vizing sur la coloration par liste. On rappelle tout d'abord quelques définitions. Soit L une application associant à tout sommet v du graphe G un ensemble $L(v)$ de couleurs admissibles. Une L -coloration est une coloration c des sommets de G telle que $c(v) \in L(v)$ pour tout sommet v de G . Si G admet une L -coloration, on dit que G est L -colorable. Etant donné un entier k , G est k -liste-colorable s'il admet une L -coloration pour tout L tel que $|L(v)| \geq k$ pour tout $v \in V$. Le nombre liste-chromatique $\chi_L(G)$ est le plus petit entier k tel G est k -liste-colorable.

Théorème 3.4. [6, 19] *Soit G un graphe connexe différent du graphe complet et du cycle impair, alors G est Δ -liste colorable, où Δ est le degré maximum dans G .*

Preuve. (Preuve du Théorème 3.3) Le théorème est vrai pour $d = 0$ et $d = 1$. Si $d = 2$, alors G est l'union disjointe de cycles de longueur 5 et plus et donc $b(G) = 3$. Pour obtenir une b -coloration avec trois couleurs, il suffit de donner les couleurs 1, 2, 3, 1, 2 à cinq sommets consécutifs d'un cycle de G et d'étendre ensuite cette coloration aux autres sommets. Supposons maintenant que $d \geq 3$. Prenons un sommet arbitraire v de G et soit $N(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ les voisins de v . Pour $i = 1, \dots, d$, soit $N_i = N(v_i) \setminus \{v\}$ comme défini dans la preuve du Théorème 3.2 et soit G_v le sous graphe de G induit par $N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_d$. On établit dans le sous graphe G_v les observations suivantes. Considérons n'importe quel sommet x de G_v donc $x \in N_i$; $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Le sommet x n'a pas de voisins dans N_i , autrement G contient un cycle de longueur trois. Le sommet x ne peut avoir deux voisins y, z appartenant tous les deux au même N_j ; $j \neq i$, sinon x, y, v_j, z induira un cycle de longueur 4 dans G et x ne peut pas avoir deux voisins $y \in N_j$, $z \in N_k$ (avec i, j, k deux à

deux différents), sinon x, y, v_j, v, v_k, z induira un cycle de longueur 6 dans G . Ainsi, dans G_v tout sommet est de degré au plus 1.

Pour $i = 1, \dots, d$, posons $E_i = \{xy \mid x, y \in N(v_i) \setminus \{v\}, x \neq y\}$. Donc soit H_v le graphe obtenu à partir de G_v en ajoutant à son ensemble d'arêtes tous les éléments de $E_1 \cup \dots \cup E_d$ (donc chaque N_i est une clique dans H_v). Il s'ensuit d'après les observations précédentes que dans H_v , tout sommet a un degré au plus $d - 1$. D'ailleurs, si $d \geq 4$, alors les plus grandes cliques dans H_v sont induites par les ensembles N_i ($i = 1, \dots, d$), dont la taille est $d - 1$; et si $d = 3$ alors les plus grandes cliques dans H_v sont de taille 2. Nous montrons que:

$$\chi_L(H_v) \leq d - 1. \quad (3.1)$$

Supposons le contraire, c'est à dire $\chi_L(H_v) > d - 1$. Comme le degré maximum dans H_v est au plus $d - 1$, par le théorème de Vizing nous devons avoir soit (a) certaines composantes de H_v sont des graphes complets K_d , ou alors (b) $d - 1 = 2$ et certaines composantes de H_v sont des cycles impairs. Cependant, (a) est impossible puisque la plus grande clique dans H_v est de taille $d - 1$. Supposons maintenant que (b) a lieu. Donc $d = 3$, et donc le graphe H_v a six sommets, et donc l'unique cycle impair possible dans H_v est le C_5 , mais alors certains sommets de ce C_5 admettent deux voisins dans G_v , contradiction. Ceci montre (3.1).

On définit une affectation de listes L dans H_v comme suit: Si x est un sommet quelconque de H_v , on a $x \in N_i$ pour un certain $i \in \{1, \dots, d\}$, et nous affectons la liste $L(x) = \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}$ à x . Donc chaque sommet x de H_v satisfait $|L(x)| = d - 1$. D'après (3.1), il existe une L -coloration c de H_v . Nous étendons la coloration c à tout le graphe G comme suit. On donne la couleur 0 à v et la couleur i à v_i ($i = 1, \dots, d$); on colore alors les sommets restants arbitrairement, en donnant à tout sommet z une couleur de l'ensemble $\{0, 1, \dots, d\}$ différente de celle déjà affectée à l'un de ses voisins (l'extension de la coloration est possible puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour un sommet non coloré). Et donc on obtient une b -coloration de G utilisant $d + 1$ couleurs, il est clair que les sommets v, v_1, \dots, v_d sont b -dominants. Donc $b(G) = d + 1$. \square

3.3 Graphes réguliers de petit degré et de maille au moins cinq

Théorème 3.5. *Soit G un graphe d -régulier de maille $g(G) \geq 5$, différent du graphe de Petersen, et tel que $d \leq 6$. Alors $b(G) = d + 1$.*

Preuve. Nous distinguons les différentes valeurs du degré d .

Cas 1: $d = 1$. Alors G est union de graphes K_2 , et il est clair que $b(G) = 2 = d + 1$.

Cas 2: $d = 2$. Alors G est l'union disjointe de cycles, tous de longueur au moins 5.

On peut obtenir une b -coloration avec 3 couleurs en attribuant les couleurs 1, 2, 3, 1, 2 à cinq sommets consécutifs dans un cycle de G , et colorer le reste des sommets de G avec les couleurs 1, 2, 3 de manière gloutonne. Donc $b(G) = 3$.

Maintenant soit $d \geq 3$. On peut supposer que G contient un cycle de longueur 5, sinon le résultat est évident d'après le Theorem 3.2. Par conséquent dans la suite, plus bas dans les cas 3, 4, et 5, on considère x_1, \dots, x_5 cinq sommets de G induisant un cycle C et dans cet ordre.

Cas 3: $d = 3$. Pour tout $i = 1, \dots, 5$, soit u_i le voisin de x_i qui n'est pas dans le cycle C . D'abord nous supposons que l'arête $u_i u_{i+2}$ existe pour tout $i = 1, \dots, 5$. Alors les sommets $x_1, \dots, x_5, u_1, \dots, u_5$ induisent le graphe de Petersen et forment une composante connexe de G . Comme G lui même n'est pas un graphe de Petersen, il doit avoir une autre composante Z . Dans ce cas, on donne la couleur 1 à x_1, x_4 , la couleur 2 à x_2, u_5 , la couleur 3 à x_3, u_1 , et la couleur 4 à x_5, u_2, u_3 et à un certain z de Z , donner les couleurs 1, 2, 3 aux voisins de z . Donc x_1, x_2, x_3, z sont des sommets b -dominants de couleurs respectivement 1, 2, 3, 4, et cette coloration peut être étendue à une coloration de G avec quatre couleurs et de manière gloutonne quelconque.

Maintenant nous pouvons supposer, par symétrie, que $u_1 u_3$ n'est pas une arête de G . On construit une b -coloration avec 4 couleurs de manière que x_1, x_2, x_3, u_2 soient des sommets b -dominants de couleurs 1, 2, 3, 4 respectivement. Pour le faire, on donne d'abord la couleur 1 aux sommets x_1, x_4 , la couleur 2 à x_2 , la couleur 3 à x_3, x_5 , et la couleur 4 à u_1, u_2, u_3 . Noter que x_1, x_2, x_3 sont des sommets b -dominants de couleurs

1, 2, 3 respectivement. Maintenant considérons le sommet u_2 . Soient a, b les deux voisins de u_2 différents de x_2 (il est possible que $\{a, b\} \cap \{u_4, u_5\} \neq \emptyset$.) Noter que a et b ne sont pas adjacents à x_1, x_2, x_3 , sinon G va contenir un cycle de longueur 3 ou 4. Cependant, et pour la même raison, chacun des sommets a, b est adjacent à au plus un des sommets x_4, x_5 ; et si chacun d'eux est adjacent à un des deux sommets x_4, x_5 ce ne sera pas le même sommet; en d'autres termes l'ensemble des arêtes entre $\{a, b\}$ et $\{x_4, x_5\}$ forme un couplage de taille au plus deux. Donc il est possible de donner la couleur 1 à l'un des sommets a, b et la couleur 3 à l'autre sans que deux sommets adjacents ne prennent la même couleur. Maintenant u_2 est un sommet b -dominant de couleur 4. Finalement cette coloration peut être étendue à une coloration de G avec quatre couleurs et de manière gloutonne quelconque.

Cas 4: $d = 4$. Pour tout $i = 1, \dots, 5$, soit A_i l'ensemble des deux voisins de x_i qui ne se trouvent pas dans C . Ici toute application dans l'ensemble A_i est calculée modulo 5 à partir de l'ensemble $\{1, \dots, 5\}$. Comme G ne contient aucun cycle de longueur 3 ou 4, il est simple de voir que:

$$A_i \text{ est un ensemble stable;} \quad (3.2)$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j; \quad (3.3)$$

$$\text{Il n'y a pas d'arêtes entre } A_i \text{ et } A_{i+1}; \quad (3.4)$$

On construit une b -coloration de G avec cinq couleurs de manière que x_1, \dots, x_5 soient des sommets b -dominants de couleurs respectives $1, \dots, 5$, comme suit. Pour tout $i = 1, \dots, 5$, affecter la couleur i à x_i et les couleurs $i + 2$ et $i + 3$ (modulo 5) aux deux sommets de A_i . Le fait (3.4) et le fait que les deux couleurs attribuées aux sommets de A_i sont différentes des deux couleurs affectées aux sommets de A_{i+2} (resp. A_{i+3}), assure qu'aucune paire de sommets adjacents dans $A_1 \cup \dots \cup A_5$ ne reçoivent la même couleur. Ainsi tous les sommets de A_1, \dots, A_5 ont reçu une couleur, et chacun des sommets x_1, \dots, x_5 a dans son voisinage toutes les autres couleurs différentes de la sienne. Finalement, comme les sommets non colorés sont de degré 4, on peut les colorer successivement avec l'une des cinq couleurs,

et de manière gloutonne quelconque. Donc on obtient une b -coloration de G avec cinq couleurs.

Cas 5: $\mathbf{d} = \mathbf{5}$. Pour tout $i = 1, \dots, 5$, soit A_i l'ensemble des trois voisins de x_i qui ne sont pas dans C . Comme G ne contient aucun cycle de longueur 3 ou 4, il est simple de voir que :

$$A_i \text{ est un ensemble stable;} \quad (3.5)$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j; \quad (3.6)$$

$$\text{Il n'y a pas d'arêtes entre } A_i \text{ et } A_{i+1}; \quad (3.7)$$

$$\text{Tout sommet différent de } x_i \text{ a au plus un voisin dans } A_i. \quad (3.8)$$

Pour tout $i = 1, \dots, 5$, on peut trouver un voisin s_i de x_i tel que l'ensemble $\{s_1, \dots, s_5\}$ soit stable, comme suit. Prendre un sommet quelconque $s_1 \in A_1$, donc $s_3 \in A_3 \setminus N(s_1)$, $s_5 \in A_5 \setminus N(s_3)$, $s_2 \in A_2 \setminus N(s_5)$, et $s_4 \in A_4 \setminus (N(s_1) \cup N(s_2))$. De tels sommets existent à cause de (3.7) et (3.8). Il s'ensuit d'après cette construction que $\{s_1, \dots, s_5\}$ est en effet un ensemble stable. Le sommet s_1 sera noté x_6 . Pour $i = 1, \dots, 5$, soit $B_i = A_i \setminus \{s_i\}$; donc $|B_i| = 2$. Soit $B_6 = N(x_6) \setminus \{x_1\}$; donc $|B_6| = 4$. Comme G ne contient aucun cycle de longueur 3 ou 4, il est simple de voir que:

$$B_6 \text{ est un ensemble stable;} \quad (3.9)$$

$$B_6 \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_5) = \emptyset; \quad (3.10)$$

$$|B_6 \cap B_i| \leq 1 \text{ pour } i \in \{3, 4\}; \quad (3.11)$$

$$\text{Il n'y a pas d'arêtes entre } B_6 \text{ et } B_1; \quad (3.12)$$

$$\text{Tout sommet différent de } x_6 \text{ a au plus un voisin dans } B_6. \quad (3.13)$$

Notons que la condition (3.7) implique que:

$$\text{Il n'y a aucune arête entre } B_i \text{ et } B_{i+1} \text{ (} i \in \{1, \dots, 5\}, \text{ modulo } 5); \quad (3.14)$$

et les conditions (3.8) et (3.13) impliquent que:

$$\text{Les arêtes entre } B_i \text{ et } B_j \text{ forment un couplage (} i, j \in \{1, \dots, 6\}, i \neq j). \quad (3.15)$$

On construit une b -coloration de G avec six couleurs telle que x_1, \dots, x_6 soient des sommets b -dominants de couleurs respectives $1, \dots, 6$. On commence par attribuer la couleur i au sommet x_i pour tout $i = 1, \dots, 5$ et la couleur 6 aux sommets s_1, \dots, s_5 . Maintenant nous devons trouver un moyen afin d'attribuer les couleurs $i + 2$ et $i + 3$ (modulo 5) aux deux sommets de B_i , pour tous $i = 1, \dots, 5$; et les couleurs 2, 3, 4, 5 aux quatre sommets de B_6 . Nous considérons ce problème comme étant un problème de coloration par liste, où chaque sommet de B_i ($i = 1, \dots, 5$) possède une liste de couleurs permises $L_i = \{i + 2, i + 3\}$ et chaque sommet de B_6 possède une liste de couleurs permise $L_6 = \{2, 3, 4, 5\}$. Dans cette figure (voir FIGURE 3.2), chaque boîte représente un ensemble B_i avec sa liste L_i ; une ligne entre deux boîtes veut dire qu'on peut avoir des arêtes entre les ensembles correspondants, en accord avec la condition (3.15); et aucune ligne entre deux boîtes illustre les conditions (3.12) et (3.14). Durant notre procédure de coloration, nous dirons qu'un sommet x perd la couleur j si cette couleur doit être retirée de la liste de couleurs permises pour x (car elle a déjà été attribuée à un voisin de x).

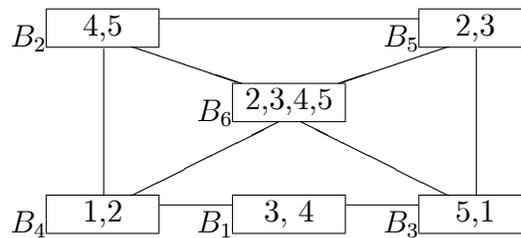


FIGURE 3.2. Si $d = 5$

Rappelons d'après (3.11) que B_6 ne peut avoir qu'un seul sommet commun avec un quelconque sommet de B_3, B_4 . Soient a, b, c, d les sommets de B_6 tels que: si $B_6 \cap B_3 \neq \emptyset$, alors a est (l'unique) sommet dans cette intersection; et si $B_6 \cap B_4 \neq \emptyset$, alors b est (l'unique) sommet dans cette intersection. Attribuer les couleurs 5, 2, 3, 4 respectivement aux sommets a, b, c, d .

D'après (3.7) il n'existe aucune arête entre B_i et B_{i+1} (modulo 5). Cependant, l'ensemble des couleurs que nous voulons attribuer à B_i et B_{i+2} (modulo 5) sont disjointes, donc

on peut ignorer les arêtes entre ces deux ensembles. Par conséquent on peut colorer les ensembles B_1, \dots, B_5 indépendamment l'un de l'autre sans aucun conflit entre deux quelconques des deux ensembles.

Par (3.12), on peut colorer les deux sommets de B_1 avec les couleurs 3 et 4. A cause de l'affectation des couleurs dans B_6 , et par (3.13), pour tout $j \in \{4, 5\}$ au plus un sommet de B_2 perd la couleur j , et cela pour deux sommets différents on attribue des valeurs différentes de j . Donc il est possible de colorer les deux sommets de B_2 avec les couleurs 4 et 5. On procède de la même manière pour B_5 avec les couleurs 2 et 3. Maintenant nous considérons B_3 . Si $a \in B_3$, alors a est un sommet de couleur 5 dans B_3 et le sommet restant dans B_3 peut être coloré 1. Si $a \notin B_3$ alors un sommet de B_3 peut perdre la couleur 5, mais il est encore possible de colorer les deux sommets de B_3 avec les couleurs 1 et 5. On procède de la même manière pour B_4 avec les couleurs 1, 2. Ainsi tous les sommets de B_1, \dots, B_6 ont reçu une couleur, et chacun des sommets x_1, \dots, x_6 a dans son voisinage toutes les autres couleurs différentes de la sienne. Finalement, comme les sommets non colorés sont de degré 5, on peut les colorer successivement avec une des six couleurs, et de manière gloutonne quelconque. Ainsi on obtient une b -coloration de G avec six couleurs.

Cas 6: $d = 6$. La preuve ici utilise des arguments similaires à ceux utilisés dans le cas $d = 5$, mais la situation est plus compliquée. Nous pouvons supposer que G contient un cycle de longueur 6, sinon le résultat découle du Theorem 3.3. Soient x_1, \dots, x_6 les six sommets de G qui induisent un cycle dans cet ordre. Toutes les observations faites ici sur l'ensemble A_i sont prises modulo 6 à partir de l'ensemble $\{1, \dots, 6\}$. Pour tout $i = 1, \dots, 6$, soit $A_i = N(x_i) \setminus \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$; donc $|A_i| = 4$. Comme G ne contient aucun

cycle de longueur 3 ou 4, il est simple de voir que:

$$A_i \text{ est un ensemble stable;} \quad (3.16)$$

$$A_i \cap A_{i+1} = \emptyset \text{ et } A_i \cap A_{i+2} = \emptyset; \quad (3.17)$$

$$|A_i \cap A_{i+3}| \leq 1; \quad (3.18)$$

$$\text{Il n'y a pas d'arêtes entre } A_i \text{ et } A_{i+1}; \quad (3.19)$$

$$\text{Tout sommet différent de } x_i \text{ a au plus un voisin dans } A_i. \quad (3.20)$$

Pour tout $i = 1, \dots, 6$, on trouve un voisin s_i de x_i tel que l'ensemble $\{s_1, \dots, s_6\}$ soit un stable, comme suit:

- Si $A_1 \cap A_4 \neq \emptyset$, soit s_1 et s_4 égaux à un sommet (unique) dans $A_1 \cap A_4$. Si $A_1 \cap A_4 = \emptyset$, soit s_1 un sommet quelconque de A_1 et s_4 un sommet quelconque dans $A_4 \setminus N(s_1)$ (s_4 existe par (3.20)).

- Si $A_3 \cap A_6 \neq \emptyset$, soit s_3 et s_6 égaux à (l'unique) sommet dans $A_3 \cap A_6$. Noter que, par (3.19), ce sommet n'est pas adjacent aux sommets s_1 et s_4 trouvés précédemment. Si $A_3 \cap A_6 = \emptyset$, soit s_3 un sommet quelconque dans $A_3 \setminus N(s_1)$ et s_6 est un sommet quelconque dans $A_6 \setminus (N(s_4) \cup N(s_3))$ (les sommets s_3 et s_6 existent par (3.20)).

- Si $A_5 \cap A_2 \neq \emptyset$, soit s_5 et s_2 égaux à (l'unique) sommet dans $A_5 \cap A_2$. Noter que, par (3.19), ce sommet n'est adjacent à aucun des sommets s_1, s_3, s_4, s_6 trouvés précédemment. Si $A_5 \cap A_2 = \emptyset$, alors, par (3.20), il y a au moins deux sommets dans $A_5 \setminus (N(s_1) \cup N(s_3))$ et au moins deux sommets dans $A_2 \setminus (N(s_4) \cup N(s_6))$; et encore par (3.20), parmi ces quatre sommets, il y a des sommets non-adjacents $s_5 \in A_5$ et $s_2 \in A_2$.

Il s'ensuit à partir de cette construction que $\{s_1, \dots, s_6\}$ est en effet un ensemble stable.

Le sommet s_1 sera noté x_7 . Pour $i = 1, \dots, 6$, soit $B_i = A_i \setminus \{s_i\}$; donc $|B_i| = 3$. Noter que B_1, \dots, B_6 sont deux à deux disjoints par (3.17), (3.18) et par la définition de $\{s_1, \dots, s_6\}$. Soit $B_7 = N(x_7) \setminus \{x_1\}$; donc $|B_7| = 5$. comme G ne contient aucun cycle de longueur 3

ou 4, il est simple de voir que:

$$B_7 \text{ est un ensemble stable;} \quad (3.21)$$

$$B_7 \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_6) = \emptyset; \quad (3.22)$$

$$|B_7 \cap B_i| \leq 1 \text{ pour } i \in \{3, 4, 5\}; \quad (3.23)$$

$$\text{Il n'y a pas d'arêtes entre } B_7 \text{ et } B_1; \quad (3.24)$$

$$\text{Tout sommet différent de } x_7 \text{ a au plus un voisin dans } B_7. \quad (3.25)$$

Notons que la condition (3.19) implique que:

$$\text{Il n'y a aucune arête entre } B_i \text{ et } B_{i+1} \text{ (} i \in \{1, \dots, 6\}, \text{ modulo 6)}; \quad (3.26)$$

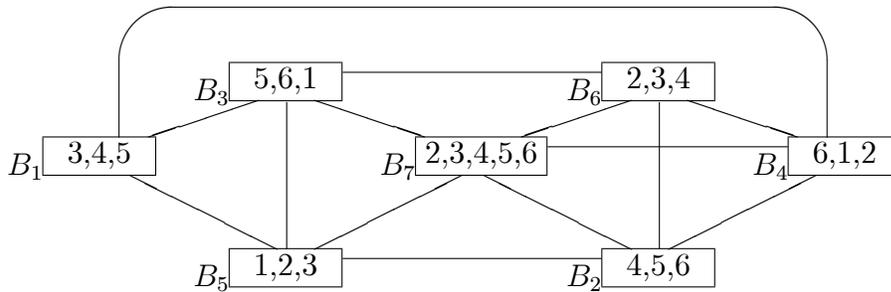
et les conditions (3.20) et (3.25) impliquent que:

$$\text{Les arêtes entre } B_i \text{ et } B_j \text{ forment un couplage (} i, j \in \{1, \dots, 7\}, i \neq j \text{)}. \quad (3.27)$$

et en particulier on a :

$$\begin{aligned} &\text{Si les ensembles } X \subseteq B_i \text{ et } Y \subseteq B_j \text{ sont tels que } |X| > |Y|, \text{ alors un sommet} \\ &\text{de } X \text{ n'a aucun voisin dans } Y. \end{aligned} \quad (3.28)$$

On construit une b -coloration de G avec sept couleurs telle que les sommets x_1, \dots, x_7 soient des sommets b -dominants de couleurs respectives $1, \dots, 7$. On commence par attribuer la couleur i au sommet x_i pour tout $i = 1, \dots, 6$ et la couleur 7 aux sommets $\{s_1, \dots, s_6\}$. Maintenant nous devons trouver une manière d'attribuer les couleurs $i + 2$, $i + 3$, $i + 4$ (modulo 6) aux trois sommets de B_i , pour tout $i = 1, \dots, 6$, et les couleurs 2, 3, 4, 5, 6 aux cinq sommets de B_7 . Nous voyons ce problème comme étant un problème de coloration par liste, où chaque sommet de B_i ($i = 1, \dots, 6$) admet une liste de couleurs permises $L_i = \{i + 2, i + 3, i + 4\}$ et tout sommet de B_7 admet la liste de couleurs permises $L_7 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Dans cette figure (voir FIGURE 3.3), chaque boîte représente un ensemble B_i avec sa liste L_i ; une ligne entre deux boîtes veut dire qu'il peut y avoir des arêtes entre les ensembles correspondants, en accord avec la condition (3.27); et aucune ligne entre deux boîtes illustre les conditions (3.24) et (3.26). Durant cette procédure de

FIGURE 3.3. Si $d = 6$

coloration, on dira qu'un sommet x perd la couleur j si cette couleur doit être retirée de la liste de couleur permises pour x . Rappelons que d'après (3.23) que B_7 peut avoir un sommet commun avec un des ensembles quelconques B_3, B_4, B_5 . Par symétrie on peut supposer $|B_7 \cap B_3| \geq |B_7 \cap B_5|$, en d'autres termes, si B_7 doit rencontrer un des deux ensembles B_3, B_5 alors il rencontrera B_3 . Définissons les sommets a, b, c de B_7 comme suit, où l'on distinguera deux cas:

Cas (i): $B_7 \cap B_4 \neq \emptyset$. Soit a (l'unique) sommet dans $B_7 \cap B_4$. Alors, si $B_7 \cap B_3 \neq \emptyset$, soit b (l'unique) sommet dans $B_7 \cap B_3$ (noter que b n'a aucun voisin dans B_4 par (3.19)); autrement, soit b un sommet dans $B_7 \setminus \{a\}$ qui n'a aucun voisin dans B_4 (un tel sommet existe par (3.27)). Finalement, si $B_7 \cap B_5 \neq \emptyset$, soit c le sommet de $B_7 \cap B_5$; autrement, soit c un sommet quelconque dans $B_7 \setminus \{a, b\}$.

Cas (ii): $B_7 \cap B_4 = \emptyset$. Si $B_7 \cap B_3 \neq \emptyset$, soit b (l'unique) sommet dans cette intersection (noter que b n'a aucun voisin dans B_4 par (3.19)); autrement, soit b un sommet dans B_7 qui n'a aucun voisin dans B_4 (un tel sommet existe par (3.27)). Alors, si $B_7 \cap B_5 \neq \emptyset$, soit c le sommet dans cette intersection; autrement, soit c un quelconque sommet dans $B_7 \setminus \{b\}$. Finalement, soit a un quelconque sommet dans $B_7 \setminus \{b, c\}$.

Noter que dans tous les cas les sommets a, b, c sont bien définis et différents puisque B_3, B_4, B_5 sont deux à deux disjoints comme il a été mentionné plus haut; et b n'a aucun voisin dans B_4 . Donc le sommet $d \in B_7$ est choisi comme suit:

Si $b \in B_3, c \in B_5, a$ a un voisin $v_5 \in B_5$ et v_5 a un voisin $v_3 \in B_3$, alors on choisit d dans

$B_7 \setminus \{a, b, c\}$ et non adjacent à v_3 (un tel sommet existe par (3.27)); autrement soit d un sommet quelconque dans $B_7 \setminus \{a, b, c\}$.

Finalement soit e le sommet restant dans B_7 . Attribuer les couleurs 2, 6, 3, 5, 4 respectivement à a, b, c, d, e . Prendre un sommet $f_2 \in B_2$ non adjacent à e et un sommet $f_6 \in B_6$ non adjacent à e ou f_2 ; de tels sommets existent par (3.20). Attribuer la couleur 4 à f_2 et à f_6 .

Soit $i \in \{1, \dots, 6\}$. Par (3.19) il n'existe aucune arête entre B_i et $B_{i-1} \cup B_{i+1}$. D'ailleurs, les ensembles de couleurs que nous voulons attribuer à B_i et à B_{i+3} sont disjoints, donc nous ignorons les arêtes entre les deux ensembles. Par conséquent on peut colorer $B_1 \cup B_3 \cup B_5$ et $B_2 \cup B_4 \cup B_6$ indépendamment l'un de l'autre et sans aucun conflit entre les deux ensembles.

Considérons B_2, B_4, B_6 . A cause de l'affectation des couleurs dans B_7 , et par (3.20), pour tout $j \in \{5, 6\}$ au plus un sommet de $B_2 \setminus \{f_2\}$ perd la couleur j (un sommet différent pour chaque j). Donc il est possible d'affecter les couleurs 5 et 6 aux deux sommets de $B_2 \setminus \{f_2\}$. De la même manière, pour tout $k \in \{2, 3\}$ au plus un sommet de $B_6 \setminus \{f_6\}$ perd la couleur k (un sommet différent pour chaque k), donc il est possible d'attribuer les couleurs 2 et 3 aux deux sommets de $B_6 \setminus \{f_6\}$. Appelons t le sommet de B_6 qui reçoit la couleur 2; donc t n'est pas adjacent à a .

On s'occupe de la coloration des sommets de B_4 . D'abord on suppose que $a \in B_4$ (cas (i)). Alors a est un sommet de couleur 2 dans B_4 (rappelons que a, t ne sont pas adjacents), et les deux sommets de $B_4 \setminus \{a\}$ perdent la couleur 2. A cause de l'affectation des couleurs dans $B_2 \cup B_6$, et par (3.20), au plus un sommet de B_4 peut perdre la couleur (couleur 6), et par le choix de b aucun autre sommet de B_4 ne peut perdre la couleur 6. Donc il est possible d'attribuer les couleurs 1 et 6 aux deux sommets de $B_4 \setminus \{a\}$. Maintenant supposons que $a \notin B_4$ (cas (ii)). A cause de l'affectation dans $B_7 \cup B_2 \cup B_6$, et par (3.20), au plus deux sommets de B_4 perdent la couleur 2, et par le choix de b au plus deux sommets de B_4 perdent la couleur 6. Donc il est possible d'attribuer les couleurs 1, 2, 6 aux trois sommets de B_4 . Ainsi, dans chacun des cas tous les sommets de

$B_2 \cup B_4 \cup B_6 \cup B_7$ ont reçu une couleur, et chacun des sommets x_2, x_4, x_6, x_7 a toutes les couleurs dans son voisinage qui sont différentes de la sienne.

Maintenant on s'occupe des ensembles B_3, B_5 . Nous supposons d'abord que $c \in B_5$, ce qui implique que $b \in B_3$ puisque $|B_7 \cap B_3| \geq |B_7 \cap B_5|$. Alors les sommets de $B_3 \setminus \{b\}$ perdent la couleur 6 et les sommets de $B_5 \setminus \{c\}$ perdent la couleur 3. A cause de l'attribution des couleurs dans B_7 , au plus un sommet v_3 de $B_3 \setminus \{b\}$ perd la couleur (couleur 5) et au plus un sommet v_5 de $B_5 \setminus \{c\}$ perd la couleur (couleur 2). On attribue la couleur 1 à v_3 et v_5 . Noter que, par le choix de d , on peut supposer que v_3 et v_5 ne sont pas adjacents. Donc on attribue la couleur 5 au troisième sommet de B_3 et la couleur 2 au troisième sommet de B_5 . Si nous supposons maintenant que $c \notin B_5$. A cause de l'attribution des couleurs dans B_7 , pour tout $j \in \{2, 3\}$ au plus un sommet de B_5 perd la couleur j (un sommet différent pour chaque j), donc un sommet $w_5 \in B_5$ ne perd aucune couleur. Si $b \in B_3$, alors les sommets de $B_3 \setminus \{b\}$ perdent la couleur 6, et à cause de l'affectation des couleurs dans B_7 , au plus un sommet v_3 de $B_3 \setminus \{b\}$ perd la couleur (couleur 5). Donc on attribue la couleur 1 à v_3 et la couleur 5 au sommet restant dans B_3 . A cause de cette affectation des couleurs dans B_3 , au plus un sommet de B_5 perd la couleur 1. Donc il est possible d'attribuer les couleurs 1, 2, 3 aux trois sommets de B_5 . Si $b \notin B_3$, pour tout $j \in \{5, 6\}$ au plus un sommet de B_3 perd la couleur j (un sommet différent pour chaque j), donc un sommet $w_3 \in B_3$ ne perd aucune couleur. Par (3.20), parmi les quatre sommets de $(B_3 \cup B_5) \setminus \{w_3, w_5\}$, deux ne sont pas adjacents, un dans B_3 et l'autre dans B_5 , auxquels on attribue la couleur 1. Donc il est possible d'attribuer les couleurs 5 et 6 au reste des sommets de B_3 et les couleurs 2 et 3 au reste des sommets de B_5 .

On s'occupe à présent de la coloration de B_1 . Rappelons que (3.22) et (3.24) ont lieu. A cause de l'attribution des couleurs dans B_3 , au plus un sommet de B_1 perd la couleur (couleur 5) et à cause de l'attribution des couleurs dans B_5 au plus un sommet de B_1 (il est possible que ce soit le même sommet) perd la couleur (couleur 3). Donc il est possible de colorer les trois sommets de B_1 avec les couleurs 3, 4, 5. Donc tous les sommets de $B_1 \cup B_3 \cup B_5$ ont été colorés, et chacun des sommets x_1, x_3, x_5 a dans son voisinage toutes

les couleurs sauf la sienne.

Finalement, comme les sommets non colorés sont de degré 6, on peut les colorer successivement avec une des sept couleurs, et de manière gloutonne quelconque. Donc on obtient une b -coloration de G avec sept couleurs. \square

La preuve utilisée plus haut illustre une technique qui peut, probablement être étendue au cas général. En effet on tente de construire une preuve similaire pour le graphe avec $d = 7$, mais il s'avère qu'elle devient de plus en plus compliquée.

Remarque 3.6. *Dans ce dernier cas (i.e. $d = 7$), on peut considérer le graphe appelé graphe Hoffman-Singleton noté HS , qui est le plus petit graphe 7-régulier de maille au moins 5. Ce graphe est très important, vu ses propriétés intéressantes entre autres sa grande structure de symétrie; voir [20, 21]. il est naturel de penser et d'espérer que HS peut fournir un contre exemple à la question de El-Sahili et Kouider. Mais malheureusement, le nombre b -chromatique de HS est 8 (il n'est pas difficile de construire une b -coloration de HS avec huit couleurs de manière qu'un sommet et ses voisins soient des sommets b -dominants de couleurs $1, \dots, 8$).*

En conclusion on reformule la question de El-Sahili et Kouider comme suit:

Conjecture 3.7. *Tout graphe d -régulier de maille au moins cinq, différent du graphe de Petersen, admet une b -coloration avec $d + 1$ couleurs.*

CHAPITRE 4

LA b -COLORATION ET LA b -CONTINUITÉ DANS LES BLOC-GRAPHES ET LES CACTUS

4.1 Résultats élaborés par Irving et Manlove sur la détermination du nombre b -chromatique dans les arbres

Irving et Manlove ont montré que le nombre chromatique $\chi(G)$ et le m -degré $m(G)$ constituent une borne inférieure et supérieure respectivement du nombre b -chromatique [2, 3] et que le problème de décision associé au nombre b -chromatique d'un graphe en général est un problème NP -complet, même si on se restreint aux graphes bipartis comme l'ont montré Kratochvil, Tuza et Voigt [13] et que la détermination du nombre b -chromatique dans un arbre est polynomial et enfin que si T est un arbre $b(T) = m(G)$ ou $m(G) - 1$. Nous rappelons dans la suite l'algorithme qui détermine le nombre b -chromatique dans les arbres.

4.1.1 b -coloration dans les arbres pivotés:

Définition 4.1.

1. Soient les sommets v_1, v_2, \dots, v_n d'un graphe G ordonnés tels que:

$$d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n),$$

où $d(v_i)$ est le degré de v_i . Le m -degré (noté $m(G)$ plus souvent m) de G est défini par : $m = \max\{i : d(v_i) \geq i - 1\}$

2. On appellera sommet dense v de G tout sommet vérifiant $d(v) \geq m - 1$.

Pour trouver le nombre b -chromatique dans un arbre, Irving et Manlove [2, 3] ont montré qu'on peut trouver presque toujours une b -coloration de l'arbre T en utilisant m couleurs sauf dans le cas suivant.

Définition 4.2. *Soit T un arbre, il est dit pivoté si T admet exactement m sommets denses et contient un sommet v distingué (appelé pivot), non dense tel que:*

a°/ *tout sommet dense est adjacent à v ou à un sommet dense adjacent à v ;*

b°/ *tout sommet dense adjacent à v et à un autre sommet dense est de degré $m - 1$.*

Remarque 4.3. *Reconnaître si un arbre $T = (V, E)$ d'ordre n est pivoté se fait en temps polynomial $O(n)$.*

Théorème 4.4. [2, 3] *Si $G = (V, E)$ est pivoté, alors $b(G) = m(G) - 1$*

Preuve. On note v le pivot de G , v_1, v_2, \dots, v_m , ($m < n$) les sommets denses de G , v_1, v_2, \dots, v_p ($p \leq m$) sont les sommets denses adjacents à v et v_1, v_2, \dots, v_q ($q \leq p$) sommets denses adjacents au sommet v qui ont au moins un sommet dense dans leur voisinage. On fait les observations suivantes:

- $p \geq 2$, sinon $p = 1$ et donc v_1 serait de degré m , contradiction avec $d(v_1) = m - 1$
- $q \geq 1$, sinon $q = 0$ et donc $p = m$ donc $d(v) = m$, ce qui implique que le sommet v est dense, contradiction.
- $p = 2$ on a forcément $q = 2$; sinon soient v_1 et v_2 les sommets voisins de v et v_3 le sommet voisin de v_1 ce qui contredit $d(v_1) = m - 1$.

On montre que $b(G) < m$. Supposons au contraire qu'il existe une b -coloration utilisant m couleurs telle que la couleur de v_i soit égale à i , $1 \leq i \leq m$, comme v ne peut prendre aucune couleur de 1 à p (sinon la coloration n'est pas propre dans T) ni aucune couleur

de $p + 1$ à m car $d(v_j) = m - 1$ ($1 \leq j \leq q$) et v_j ne peut être adjacent à deux sommets de la même couleur et donc v ne peut être coloré, contradiction. Donc $b(G) \leq m - 1$. On construit alors une $(m - 1)$ - b -coloration de l'arbre T de la manière suivante:

Comme $p \geq 2$ et $q \geq 1$, soient v_1 et v_2 les deux sommets denses adjacents au sommet v . Il existe un sommet v_r adjacent à v_1 ; pour $p + 1 \leq r \leq m$.

Détermination d'une $(m - 1)$ - b -coloration dans un arbre pivoté

Algorithme 1.

Étape 1: Colorer tout sommet v_i , $2 \leq i \leq m$ par la couleur i . Affecter les deux couleurs r et 2 aux sommets v et v_1 respectivement.

Étape 2: On colore les sommets non denses adjacents aux sommets denses. Pour le faire on construit les ensembles suivants:

$$R_i = \{2, 3, \dots, m\} \setminus \{i\}$$

et

$$C_i = \{c(v_j), 1 \leq j \leq n, v_j \in N(v_i), v_j \text{ coloré}\}, 2 \leq i \leq m,$$

l'ensemble des couleurs manquantes et existantes dans le voisinage de v_i respectivement; $U_i = \{v_j, m + 1 \leq j \leq n, v_j \in N(v_i), v_j \text{ non coloré}\}, 2 \leq i \leq m$ sont les sommets non colorés dans le voisinage de v_i . Par construction le sommet v_i ne peut être adjacent à deux sommets de même couleur. Donc $|C_i| + |U_i| = d(v_i) \geq m - 1 > m - 2 = |R_i|$ et puisque $C_i \subset R_i$ on a $|U_i| \geq |R_i \setminus C_i|$. Soit $R_i \setminus C_i = \{r_i^1, \dots, r_i^{n_i}\}$ et pour $\{u_i^1, \dots, u_i^{n_i}\}$ sommets choisis dans U_i où $n_i \geq 0$, on pose : $c(u_i^j) = r_i^j, 1 \leq j \leq n_i$.

Étape 3: Soit v_i sommet non coloré à l'étape 2 comme $d(v_i) < m - 1, m + 1 \leq i \leq n$. Chercher $j \in \{2, \dots, m\} \setminus C_i$ où $C_i = \{r_i^1, \dots, r_i^{n_i}\}$, poser ensuite $c(v_i) = j$.

□

4.1.2 b -coloration dans les arbres non pivotés :

Définition 4.5. Considérons V' l'ensemble des sommets denses de T et V'' est un sous ensemble de V' de cardinalité m , on dit que V'' encercle un sommet $v \in V \setminus V''$ si:

1. $\forall v_i \in V'', v_i \in N(v)$, où $v_i \in N(N(v) \cap V'')$
2. $\forall v_i \in V''$, si $v_i \in N(v)$ et $v_i \in N(V'')$, alors on a $d(v_i) = m - 1$.

Remarque 4.6. Si v est non dense et $V' = V''$, alors l'arbre T serait pivoté.

Définition 4.7. Soit V' l'ensemble des sommets denses de T et V'' est un sous ensemble de V' de cardinalité m . V'' est dit un bon ensemble relativement à G si :

1. V'' n'encercle aucun sommet de $V \setminus V''$
2. $\forall u \in V \setminus V''$ tel que $d(u) \geq m$, u est adjacent à un sommet v de V'' tel que $d(v) = m - 1$.

Lemme 4.8. [2, 3] Si $T = (V, E)$ est un arbre non pivoté, on peut toujours construire un bon ensemble.

Preuve. En effet, soit V' l'ensemble des sommets denses de T , en ordonnant les sommets denses suivant leurs degrés décroissants, on peut choisir un ensemble V'' de cardinalité m , de manière que tout sommet de $V \setminus V''$ ait un degré plus petit que m . Notons $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $V'' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. On suppose que:

1. V'' encercle un sommet $v \in V \setminus V''$ sinon V'' serait un bon ensemble
2. $v_i \in V'' \cap N(v), 1 \leq i \leq p$ ($p \leq m$)
3. $v_i \in V'' \cap N(v)$ et $v_i \in V'' \cap N(v_d), v_d \in V'', 1 \leq i \leq q$ ($q \leq p$).

Observons que :

- $p \geq 2$ sinon $p = 1$ et v_1 sera de degré m , alors qu'il est de degré $m - 1$.
- $q \geq 1$ sinon $q = 0$, donc $p = m$ ce qui entraîne v sommet dense, contradiction .
- Comme $q \geq 1, \exists r \in \{p + 1, \dots, m\}$ tel que $v_r \in V''$ et est adjacent à v_1 .

Deux cas s'imposent:

Cas 1. Si v est un sommet dense alors $d(v) = m - 1$ (puisque v est dense et $v \notin V''$ donc $d(v) < m$), Soit $W = (V'' \setminus \{v_2\}) \cup \{v\}$ et $|V''| = m$, le sommet v_2 existe puisque $p \geq 2$ et par le choix de V'' , v_2 est le seul sommet qui n'est pas dans W pouvant avoir un degré m puisque v_2 est adjacent à $v \in W$ et $d(v) = m - 1$ et W satisfait la condition 2 de la définition 4.7. On montre que W n'encercle aucun sommet de $V \setminus V''$. Si un sommet $t \notin W$ et si :

- t est adjacent à un sommet v_i , $p + 1 \leq i \leq m$, alors t est à distance 3 de $v \in W$.
- t est adjacent à un sommet v_i , $1 \leq i \leq p$, alors t est à distance 3 de tout sommet $v_k \in W$
- t est adjacent au sommet $v \in W$, alors t est à distance 3 de v_{p+1} et donc $v_2 \notin W$, $\exists v_{p+1} \in N(v_1)$ tel que v_2 soit à distance 3 de v_{p+1}

Cas 2. Si v est un sommet non dense: $|V'| \neq m$, sinon T est pivoté au sommet v contradiction. Donc $|V'| > m$, $\exists u \in V' \setminus V''$ et on pose $W = (V'' \setminus \{v_1\}) \cup \{u\}$ et supposons que W encercle un sommet x de $V \setminus W$, alors x serait le seul sommet de $V \setminus W$ se trouvant sur une chaîne reliant toute paire de sommets non adjacents de W . Mais les sommets v_1 et v n'appartiennent pas à W , et se trouvent sur une chaîne reliant les sommets v_2 et v_r de W ceci contredit le fait que W encercle un sommet x de $V \setminus W$. W est donc un ensemble bon car il vérifie la deuxième propriété de la définition 4.7, puisque $d(v) < m - 1$ et $d(v_1) = m - 1$ et tout sommet en dehors de W est de degré plus petit que m .

On construit par l'algorithme suivant un bon ensemble, pour cela, soit T un arbre avec l'ensemble des sommets $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et V' est l'ensemble des sommets denses de T .

Construction d'un bon ensemble dans un arbre non pivoté

Algorithme 2.

Étape 1 : Choisir $V'' \subset V'$ tel que $|V''| = m$, soit $V'' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ et $\forall v \in V \setminus V''$, $d(v) < m$ (un tel choix est possible par définition du m -degré).

Étape 2: Si V'' n'encercle aucun sommet $v \in V \setminus V''$, alors V'' est un ensemble bon. Sinon, $\exists v \in V \setminus V''$ tel que V'' encercle un sommet $v \in V \setminus V''$, aller à l'étape 3.

Étape 3: Tester $d(v)$.

Si $d(v) = m - 1$, tel que l'arête (v_1, v_2) n'existe pas, choisir $W = (V'' \setminus \{v_2\}) \cup \{v\}$ et W serait un bon ensemble.

Si $d(v) < m - 1$, aller à l'étape 4

Étape 4:

Si $|V'| = m$, G est pivoté, aller faire une $(m - 1)$ - b -coloration

Si $|V'| > m$, $W = (V'' \setminus \{v_1\}) \cup \{u\}$, $u \in V' \setminus V''$, W est un bon ensemble

Fin.

□

Théorème 4.9. [2, 3] Si T est un arbre non pivoté, alors on a $b(G) = m(G)$

Preuve. Notons $W = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ un bon ensemble de T qui existe car T est non pivoté, avec $c(v_i) = i \quad \forall i, 1 \leq i \leq m$. Il s'agit de montrer en premier lieu que cette coloration peut être étendue en une m - b -coloration partielle de T telle que v_i soient des sommets b -chromatiques et ensuite que cette coloration est étendue à une coloration b -chromatique dans tout le graphe utilisant m couleurs. Pour le faire, on pose $U = N(W) \setminus W$, et on partitionne U en deux sous ensembles appelés: U_i sous ensemble des sommets u intérieurs tels que u se trouve sur une chaîne de longueur au plus trois reliant deux sommets de W et U_0 sous ensemble des sommets extérieurs, respectivement. On commence par étendre la coloration aux sommets intérieurs, puis aux sommets extérieurs et enfin aux sommets de $V \setminus U$. On supposera que si dans W , $i < j$, alors le sommet v_i a au

moins autant de sommets intérieurs voisins que le sommet v_j ; supposons que : l'ensemble P des sommets v_1, v_2, \dots, v_p ont au moins deux sommets intérieurs voisins, l'ensemble Q des sommets v_{p+1}, \dots, v_q ont un seul sommet intérieur voisin et l'ensemble des sommets v_{q+1}, \dots, v_m n'ont aucun sommet intérieur voisin, remarquer que les sous ensembles P et Q peuvent être vides (W étant construit ainsi). On commence par colorer les sommets de P et Q , colorons d'abord ceux de P . Si $i \leq p$, les sommets intérieurs qui sont voisins des sommets v_1, v_2, \dots, v_{i-1} , sont colorés comme suit:

- a) Si un sommet intérieur u , prend la couleur k au moment ou on colore les sommets intérieurs voisins du sommet v_j , forcément il existe une chaîne (de longueur au plus 3) du sommet u vers v_k passant par v_j .
- b) Deux sommets voisins de v_j ne doivent pas avoir la même couleur (sinon $\exists v_k$ et $v_{k'}$ dans W qui ont la même couleur).
- c) Deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur.

Procédons alors à la coloration des sommets intérieurs voisins de v_i ($1 \leq i \leq p$) non colorés, pour celà appelons x_1, \dots, x_s les sommets intérieurs voisins de v_i , le sommet x_j ($1 \leq j \leq s$) étant un sommet voisin intérieur de v_i , il existe $v_{c_j} \in W, c_j \neq i, v_{c_j}$ à distance au plus deux de x_j , et x_j se trouve sur la chaîne allant de v_i à v_{c_j} . Les sommets v_{c_1}, \dots, v_{c_s} sont évidemment distincts sinon on peut créer un cycle de longueur ≥ 4 .

Si $s > 1$, on pose $c(x_j) = c_j$, puis en faisant une translation sur les couleurs on prendra, $c(x_j) = c_{j+1}$ et $c(x_s) = c_1$ et ceci ne contredit pas $a), b)$ ni $c)$.

Si $s = 1$, comme v_i a au moins deux sommets intérieurs voisins tous colorés sauf un qu'on note x_1 , il existe au moins x_i , sommet non coloré voisin intérieur de v_i , on pose $c(x_i) = c(x_1)$ et $c(x_i) = c(v_{c_i})$ tels que v_{c_i} et v_i sont dans W et x_i et x_1 se trouvent sur une chaîne d'extrémité v_i et v_{c_i} . On colore à présent les sommets intérieurs restants incolores, voisins de v_i ($p+1 \leq i \leq q$), pour cela, soient z_1, \dots, z_k les sommets en question et chaque v_i a exactement un seul sommet intérieur voisin parmi les z_j . z_j ($1 \leq j \leq k$) sont colorés de manière que:

- i) Cette coloration partielle soit propre.
- ii) Aucun sommet v_i de degré $m - 1$ n'a deux couleurs identiques dans son voisinage.

Posons:

$$c \in C \iff (v_c \in N(z_j)) \vee (\exists d, v_c \in N(v_d) \wedge v_d \in N(z_j) \wedge d(v_d) = m - 1, \text{ où } 1 \leq c, d \leq m.$$

Une couleur qui ne se trouve pas dans C vérifie i) et ii), de plus $C \neq \{1, \dots, m\}$ sinon W encercle z_j et donc il ne serait pas bon. Il existera donc toujours une couleur possible pour z_j , il suffit de lui donner une couleur qui ne soit pas dans son voisinage à distance un ou deux d'un sommet dence.

Les sommets extérieurs peuvent être colorés indépendamment puisqu'ils ne peuvent être adjacents entre eux, ni à un sommet coloré, excepté v_i . Pour colorer de tels sommets on considère $N(v_i)$, et afin de rendre b -dominants les sommets v_i , soient U_i l'ensemble des sommets voisins de v_i non colorés, C_i l'ensemble des couleurs existantes dans $N(v_i)$, R_i l'ensemble des couleurs manquantes dans $N(v_i)$, $R_i = \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$. Donner les $R_i \setminus C_i = \{r_1^i, \dots, r_{n_i}^i\}$ couleurs manquantes aux sommets $\{u_1^i, \dots, u_{n_i}^i\} \subseteq U_i$. Nous pouvons à présent étendre cette coloration à tout le graphe, on rappelle que tout sommet v restant incolore est tel que $d(v) \leq m - 1$, sinon $d(v) \geq m$, et par la deuxième propriété d'un ensemble bon, v est adjacent à un sommet w où $d(w) = m - 1$, mais un tel sommet v est déjà coloré, par conséquent, le sommet v peut toujours recevoir une couleur.

Détermination d'une m - b -coloration dans un arbre non pivoté

Algorithme 3.

Étape 1: Choisir $W = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ un ensemble bon et poser $c(v_i) = i, 1 \leq i \leq m$

Étape 2 : Considérer $U = N(W) \setminus W = U_i \cup U_0$. Où U_i sont les sommets de U se trouvant sur une chaîne de longueur au plus trois reliant deux sommets de W (sommets intérieurs). $U_0 = U \setminus U_i$ est l'ensemble des sommets extérieurs;

Ordonner les sommets de $W = \{v_1, \dots, v_m\}$ comme suit:

$$i < j \text{ si } |N(v_i) \cap U_i| \geq |N(v_j) \cap U_i|$$

Poser $W = \{v_1, \dots, v_p\} \cup \{v_{p+1}, \dots, v_q\} \cup \{v_{q+1}, \dots, v_m\}$ où :

$$|N(v_i) \cap U_i| \geq 2, \text{ si } 1 \leq i \leq p$$

$$|N(v_i) \cap U_i| = 1, \text{ si } p+1 \leq i \leq q$$

$$|N(v_i) \cap U_i| = 0, \text{ si } q+1 \leq i \leq m$$

Etape 3 : $N(v_i) \cap U_i = \{x_i, 1 \leq i \leq s\}$ est l'ensemble des sommets intérieurs non colorés voisins de v_i ($1 \leq i \leq p$).

Tester si $s > 1$:

- Si oui $c(v_j) = c_j \neq c_i = c(v_i)$ et $c(x_j) = c_{j+1}$ et $c(x_s) = c_1$ où $1 \leq j \leq s-1$.

- Si $s = 1$, x_1 est seul sommet intérieur voisin de v_i qui soit non coloré $c(x_1) = c(x_i)$, x_1 et $x_i \in N(v_i) \cap U_i$.

Etape 4 : z_i sommet intérieur voisin unique de v_i , $p+1 \leq i \leq q$

$$c \in C \iff (v_c \in N(z_j)) \vee (\exists d, v_c \in N(v_d) \wedge v_d \in N(z_j) \wedge d(v_d) = m-1) \text{ où } 1 \leq c, d \leq m$$

$c(z_i) = c_j \notin C$ et qui ne soit pas dans le voisinage de v_i

Etape 5 : Colorer les sommets extérieurs U_0 voisins de v_i et on pose:

U_i ensemble des sommets voisins de v_i non colorés = $\{v_j, m+1 \leq j \leq n \text{ et } v_j \in N(v_i) \text{ et } v_j \text{ non coloré}\}$.

C_i ensemble des couleurs existantes dans $N(v_i) = \{c(v_j) : 1 \leq j \leq n \text{ et } v_j \in N(v_i) \text{ et } v_j \text{ coloré}\}$.

R_i ensemble des couleurs manquantes dans $N(v_i)$, $R_i = \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$.

Donner les $R_i \setminus C_i = \{r_1^i, \dots, r_{n_i}^i\}$ couleurs manquantes aux sommets $\{u_1^i, \dots, u_{n_i}^i\} \subseteq U_i$.

Etape 6 : Tout sommet v_i restant incolore est tel que $d(v_i) \leq m-1$.

$C_i = \{r_1^i, \dots, r_{n_i}^i\}$ les couleurs existantes dans le voisinage de v_i .

Pour $j \in (\{1, \dots, m\} \setminus C_i)$, poser $c(v_i) = j$, couleur qui n'existe pas dans le voisinage de v_i .

□

Maintenant on peut formuler l'algorithme de détermination d'une b -coloration dans un arbre quelconque.

4.1.3 Détermination d'une b -coloration dans un arbre quelconque

Algorithme 4.

Début

Étape 1 : T arbre et V' ensemble des sommets denses de T .

Étape 2 : Choisir $V'' \subset V'$ ou $|V''| = m$ et $d(v) < m$ pour tout $v \in V \setminus V''$ (choisir les m premiers sommets ordonnés dans le sens

décroissant de leurs degrés) $V'' = \{v_1, \dots, v_m\}$.

Étape 3 : Tester si V'' encercle un sommet $v \in V \setminus V''$

Si V'' n'encercle aucun sommet de $V \setminus V''$, V'' est bon. Aller faire une m - b -coloration de T (Algorithme 3).

Sinon aller à l'étape 4.

Étape 4 : Déterminer v tel que $d(v) < m$

Si $d(v) = m - 1$, $W = (V'' \setminus \{v_2\}) \cup \{v\}$ est bon. Aller déterminer une m - b -coloration de T (Algorithme 3)

Sinon aller à l'étape 5.

Étape 5 : Si $|V''| > m$, déterminer $u \in V' \setminus V''$, et poser $W = (V'' \setminus \{v_1\}) \cup \{u\}$, W est bon. Aller faire une m - b -coloration (Algorithme 3).

Si $|V'| = m$, aller à l'étape 6.

Étape 6 : T est un arbre pivoté où $|V'| = |V''| = m$ et v est le pivot. Aller faire une $(m - 1)$ - b -coloration (Algorithme 1).

Fin.

4.2 Adaptation de l'algorithme aux bloc graphes

Nous nous sommes demandés si le résultat de Irving et Manlove pouvait s'appliquer à d'autres graphes et nous avons pensé l'étendre au cas des bloc graphes et adapter le même algorithme pour montrer que pour tout bloc graphe G le nombre b -chromatique est soit $m(G)$ soit $m(G) - 1$.

Définition 4.10. *Un bloc est un sous graphe induit 2-connexe maximal. Un graphe est un bloc graphe, si les composantes 2-connexes maximales de G sont des cliques.*

Remarque 4.11. *Un graphe est 2-connexe, s'il faut enlever au moins 2 sommets pour le déconnecter. Un K_2 est un graphe 2-connexe maximal.*

Définition 4.12. *Un cactus est un graphe tel que tout bloc est un cycle ou un K_2 , en particulier deux blocs ont au plus un sommet d'articulation en commun et n'ont aucune arête en commun.*

Problème 4.13. *Est-il vrai que pour les bloc graphes G , on a $m(G) - 1 \leq b(G) \leq m(G)$?*

Nous sommes arrivés à montrer qu'il existe un contre exemple à ce problème et donc nous avons établi le résultat suivant:

Théorème 4.14. *Pour tout entier r supérieur ou égal à 1, il existe un bloc graphe connexe G tel que le nombre b -chromatique $b(G) < m(G) - r$.*

Preuve. En effet, pour tout $r \geq 1$, on peut construire G comme suit:

Soit $Q = \{v_1, \dots, v_{|Q|}\}$ une clique de cardinalité $|Q| = (r + 2)^2 + 1$

Pour $i = 1, \dots, r + 2$, ajoutons l'ensemble des sommets W_i stable d'ordre $r + 2$ puis on relie tout sommet de W_i à v_i avec une arête.

On pose $W = W_1 \cup \dots \cup W_{r+2}$. Pour tout sommet w de W , ajoutons un ensemble de sommets X_w stable d'ordre $(r + 2)^2 + r + 1$ puis on relie tout sommet de X_w à w par une arête. Soit $X = \cup\{X_w \mid w \in W\}$. (voir FIGURE 4.1)

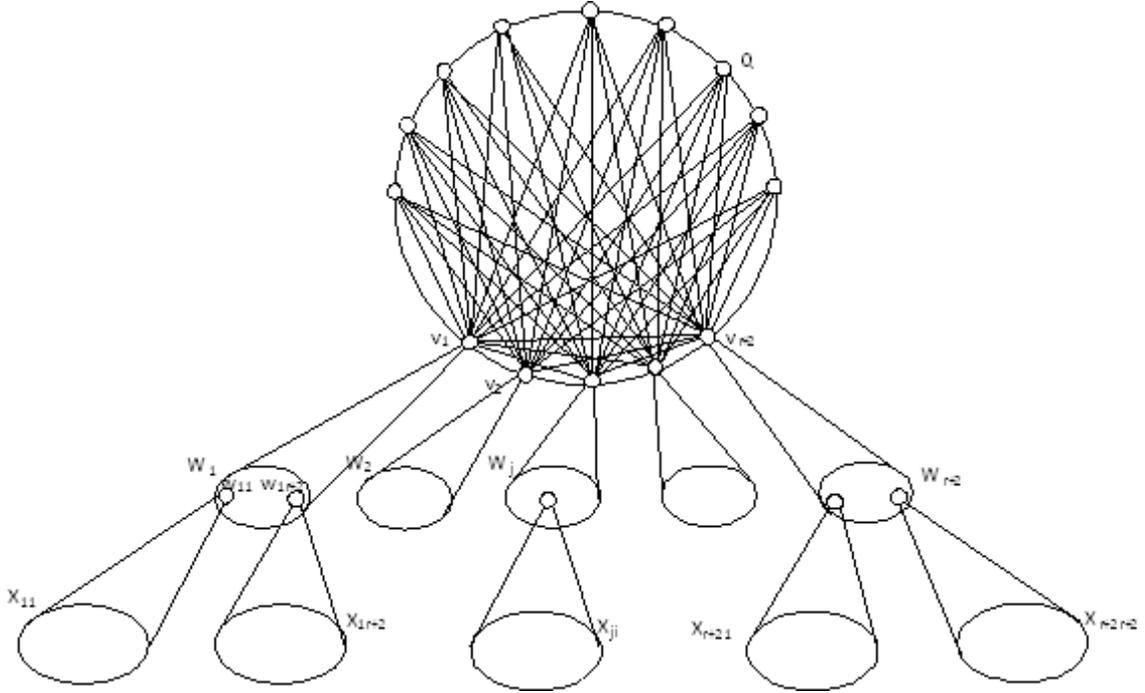


FIGURE 4.1.

Soit G le graphe dont l'ensemble des sommets est $Q \cup W \cup X$ et les arêtes comme décrites précédemment. Il est clair que le graphe ainsi construit G est un bloc graphe et Q est la seule clique maximale de taille au moins trois. Il est facile de montrer que le degré maximum Δ dans G est égal à $(r+2)^2 + r + 2$ et les sommets de degré Δ sont v_1, \dots, v_{r+2} et tous les sommets de W . Le nombre de ces sommets est $r + 2 + |W| = r + 2 + (r + 2)(r + 2) = \Delta$. D'où on peut déduire que $m(G) = \Delta$. Aussi on signale que les sommets de X ont chacun un degré égal à 1 et les sommets de $Q \setminus \{v_1, \dots, v_{r+2}\}$ ont chacun un degré égal à $(r + 2)^2 = \Delta - r - 2$.

Maintenant on montre que $b(G) < m(G) - r$. Supposons qu'au contraire le graphe G admet une b -coloration avec $k \geq m(G) - r = \Delta - r$ couleurs. Pour tout $j = 1, \dots, k$, soit d_j le sommet b -dominant de couleur j , et soit $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ un système b -dominant. Comme le degré de tout sommet d_j doit être au moins $k - 1 \geq \Delta(G) - r - 1$; on déduit que d_j ne peut se trouver dans X ni dans $Q \setminus \{v_1, \dots, v_{r+2}\}$ donc on a: $D \subset \{v_1, \dots, v_{r+2}\} \cup W$. Soit $t = |D \cap Q|$. Sans perdre de généralité, on peut supposer qu'on attribue les couleurs

$1, \dots, |Q|$ aux sommets de Q et que pour tout $j = 1, \dots, t$, on a $d_j = v_j$. Pour tout $j = 1, \dots, t$, comme v_j est un sommet b -dominant, il doit avoir un voisin de couleur h pour tout $h = |Q| + 1, \dots, k$, donc de tels sommets il y a au moins $k - |Q|$ et ils sont tous dans W_j . Donc W_j contient au plus $r + 2 - (k - |Q|)$ sommets dont les couleurs sont présentes dans Q . Pour $j = t + 1, \dots, r + 2$, l'ensemble W_j de cardinalité $r + 2$ peut contenir au moins autant de sommets que les sommets dont les couleurs sont présentes dans Q . Autrement dit, les sommets b -dominants $d_{t+1}, \dots, d_{|Q|}$, dont les couleurs sont présentes dans Q ne sont pas dans Q , par définition de t et donc ils sont dans W . Ceci implique que:

$$|Q| - t \leq t[r + 2 - (k - |Q|)] + (r + 2 - t)(r + 2),$$

$$(r + 2)^2 + 1 - t \leq t[r + 2 - (k - (r + 2)^2 - 1)] + (r + 2)^2 - t(r + 2).$$

Et donc $1 \leq t[(r + 2)^2 + 2 - k]$.

Mais cette inégalité ne peut avoir lieu car $k \geq \Delta - r = (r + 2)^2 + 2$. Donc G ne peut admettre une b -coloration avec $k \geq m(G) - r$ couleurs. On note que le graphe ainsi construit dans ce théorème est le plus petit qui n'est pas un arbre, dans le sens où il est un bloc graphe qui contient une seule clique maximale de taille au moins 3. \square

On pense que les blocs graphes pour lesquels on peut appliquer une version légèrement modifiée de l'algorithme de Irving et Manlove, correspondent à ceux dont les cliques sont de taille au plus 7, et dans ce cas peut être on peut arriver à montrer $m(G) - 1 \leq b(G) \leq m(G)$. Ceci nous amène à poser le problème suivant:

Problème 4.15. *Peut-on déterminer un algorithme polynomial similaire à celui de Irving et Manlove qui donne la valeur du nombre b -chromatique dans le cas des blocs graphes quand la taille q de la clique maximum est comprise entre 3 et 7 ($3 \leq q \leq 7$).*

En conclusion cet exemple montre que la valeur de $m(G) - b(G)$ peut être arbitrairement large; dans ce cadre F. Maffray avec A. Silva [22] ont trouvé un deuxième exemple plus simple construit et défini comme suit:

Soit r un entier positif et k un entier tel que $k \geq r$. Un r, k -gadget est le graphe G' obtenu à partir de la clique notée $C(G')$, $|C| = 2kr + 2r - k - 2$, à laquelle on ajoute deux sommets adjacents $v^1(G')$ et $v^2(G')$ qui sont adjacents à tous les sommets de la clique, puis on ajoute deux stables $S^1(G')$ adjacent à $v^1(G')$ et $S^2(G')$ adjacent à $v^2(G')$ tels que $|S^1(G')| = |S^2(G')| = k$ et enfin on ajoute pour tout $u \in S^1(G') \cup S^2(G')$ un stable S_u adjacent à u et tel que $|S_u| = 2kr + 2r - 2$ (voir une copie de la FIGURE 4.2).

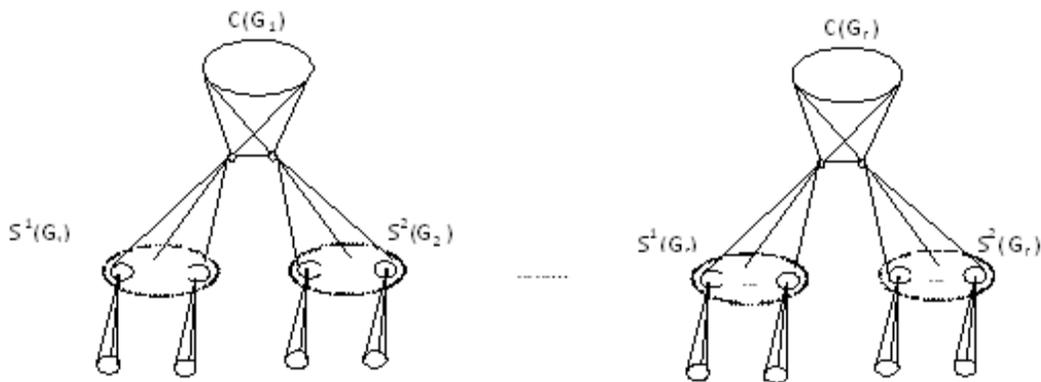


FIGURE 4.2.

Le graphe considéré sera donc la réunion disjointe de r fois (r, k) -gadgets G_1, G_2, \dots, G_r décrits plus haut (voir FIGURE 4.2), c'est un graphe non connexe contrairement à celui cité plus haut.

Pour $u \in C(G_i)$ $d(u) = 2kr + 2r - k - 2 - 1 + 2 = 2kr + 2r - k - 1$, $d(v^j(G_i)) = 2kr + 2r - k - 2 + 1 + k = 2kr + 2r - 1$.

Pour $u \in S^j(G_i)$, $j = 1, 2$; $d(u) = 2kr + 2r - 2 + 1 = 2kr + 2r - 1$ et $d(u) = 1$ pour tout autre sommet.

Donc le nombre de sommets de degré $2kr + 2r - 1$ est $r(2k + 2)$, tous les autres sommets sont de degré au plus $2kr + 2r - k - 1 < 2kr + 2r - 2$

On en déduit que $m(G) = 2kr + 2r$.

Considérons maintenant une coloration partielle de V' tel que tous les sommets de V' sont de couleurs différentes et V' admet $m(G) - r + 1$ sommets de degré $m(G) - r$.

Comme dans chaque G_i tout $u \in C(G_i)$ a un degré $d(u) = 2kr + 2r - k - 1 \leq m(G) - r - 1$ donc $u \notin V'$. Donc $V' \subset M(G)$ (où $M(G)$ est l'ensemble des sommets denses) et comme $|V'| > m(G) - r$ il doit forcément exister un gadget G_i tel que tout sommet dense de G_i soit dans V' .

Donc on sait qu'il existe $m(G) - r + 1 - (2k + 2)$ sommets de V' dont les couleurs peuvent être utilisées pour colorer les sommets de $C(G_i)$ et si nous utilisons toutes ces couleurs il en découle que le nombre de sommets incolores de $C(G_i)$ est

$$2kr + 2r - k - 2 - (m(G) - r + 1 - (2k + 2)) = k + r - 1.$$

Cependant afin de rendre les sommets $v^1(G')$ et $v^2(G')$ b -dominants on a besoin de couvrir les $2k$ couleurs qui apparaissent dans $S^1(G_i) \cup S^2(G_i)$ avec les $k + r - 1 < 2k$ sommets incolores restants dans $C(G_i)$, ce qui est non faisable. Donc $b(G) \leq m(G) - r$.

Le graphe ainsi construit est un bloc graphe où les cliques de taille maximum sont $C(G_i), 1 \leq i \leq r$.

Récemment F. Maffray et A. Silva [22] ont effectué un travail similaire à celui effectué par Irving et Manlove dans le cas des graphes outerplanaires de maille au moins 8, généralisant ainsi le résultat de Irving et Manlove sur les arbres; ainsi ils ont donné un algorithme polynomial pour la détermination du nombre b -chromatique pour ces graphes en utilisant la technique de graphe pivoté, non pivoté et de bon ensemble. Nous citons ci dessous les résultats, en commençant par définir les notions utilisées.

Définition 4.16. *Un graphe est dit outer-planaire s'il admet une représentation dans le plan tel que deux arêtes quelconques ne se croisent pas (ce qui définit un graphe planaire) de plus tous les sommets se trouvent sur la même face (région du plan limitée par des arêtes et tels que deux points arbitraires dans cette région peuvent être reliés par un trait qui ne rencontre ni sommets ni arêtes).*

Théorème 4.17. *Soit G un graphe, on a les équivalences suivantes:*

a) G est outer-planaire.

- b) G n'a pas de sous graphe qui est une subdivision de K_4 ou de $K_{2,3}$.
- c) G est planaire, et tout bloc de G est soit un sommet soit un K_2 ou alors un cycle.

Définition 4.18. Soit W un sous ensemble de l'ensemble des sommets denses noté $M(G)$ et u un sommet de $V \setminus W$. Soit v un sommet de W . On dit que le sommet u atteint le sommet v à l'intérieur de W si u est soit adjacent à v soit il existe un sommet $w \in W$ qui soit voisin commun à u et à v telque $d(w) = m(G) - 1$. Si le sommet u atteint tout sommet de W , on dit que W encercle le sommet u .

Définition 4.19. W de taille $m(G)$ est dit bon ensemble si :

- a) W n'encercle aucun sommet, et
- b) Tout sommet $x \in V \setminus W$ de degré $d(x) \geq m(G)$ est adjacent à un sommet $w \in W$ tel que $d(w) = m(G) - 1$.

Théorème 4.20. [22] G est un graphe outer-planaire de maille au moins 8, alors on a $m(G) - 1 \leq b(G) \leq m(G)$ et de plus $b(G)$ peut être calculé en un temps polynomial.

Théorème 4.21. [22] G est un graphe outer-planaire de maille au moins 8, si G n'a aucun bon ensemble, alors on a $b(G) = m(G) - 1$.

Théorème 4.22. [22] G est un graphe outer-planaire de maille au moins 8, si G admet un bon ensemble, alors on a $b(G) = m(G)$.

Remarque 4.23. Un arbre est aussi un graphe outer-planaire de maille supérieure à 8, d'où le résultat de Irving et Manlove sur le nombre b -chromatique des arbres.

4.3 Notion de b -continuité

Définition 4.24. Un graphe est dit b -continu si pour tout entier k positif, $\chi(G) \leq k \leq b(G)$, le graphe G admet une b -coloration avec k couleurs.

4.3.1 Quelques graphes non b -continus

Certains graphes admettent une b -coloration avec p couleurs et une b -coloration avec q couleurs telle que $p < q$, mais n'admettent pas de b -coloration avec r couleurs telle que $p < r < q$, où p, q, r sont des entiers positifs.

On cite à titre d'exemples,

- i) le graphe biparti complet d'ordre n , auquel on enlève un couplage parfait; graphe qui admet une b -coloration avec 2 et n couleurs et aucune b -coloration avec k couleurs où $2 < k < n$.
- ii) le cube est un graphe qui est b -colorable avec 2 couleurs, et b -colorable avec 4 couleurs mais qui n'admet aucune b -coloration avec 3 couleurs, voir FIGURE 4.3.

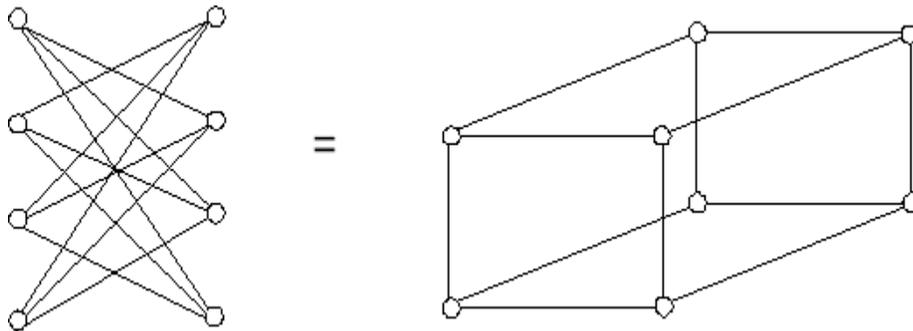


FIGURE 4.3.

La notion de b -continuité a été étudiée par plusieurs auteurs. Plus récemment dans [10] Ramin Javadi et Behnaz Omoomi ont abordé cette notion lors de leur étude des graphes de Kneser définis dans le Chapitre 2.

Pour $n \geq 17$, Ramin Javadi et Behnaz Omomi [10] montrent que: $K(n, 2)$ est b -continu; et très récemment dans [23] S. Shaebani montre que pour tout k entier naturel $K(2k+1, k)$ est b -continu.

Par ailleurs [24] T. Faik a démontré la b -continuité de quelques graphes simples, nous citons ci-dessous certains de ses résultats:

1. $\forall n \geq m \geq 2$, le graphe $K_{1,m} \square K_{1,n}$ est b -continu.
2. $\forall n \geq 3, m \geq 2$, le graphe $K_{1,n} \square P_m$, est b -continu.
3. $\forall n, m \geq 2$, le graphe $P_n \square P_m$ est b -continu.
4. $\forall n, m \geq 3$, le graphe $C_n \square C_m$ est b -continu.
5. Il en a déduit ensuite que pour $n_i \geq 6; 1 \leq i \leq k$, le nombre b -chromatique des graphes $P_{n_1} \square P_{n_2} \square \dots \square P_{n_k}$ et $C_{n_1} \square C_{n_2} \square \dots \square C_{n_k}$ est $2k + 1$ et que ces graphes sont b -continus, résultats démontrés par récurrence sur n .
6. On note par H_n l'hypercube d'ordre n . Sachant que le nombre b -chromatique de H_1 et de H_2 est 2, et celui de H_n est $n + 1, \forall n \geq 3$ (voir [25])

T. Faik [24] montre que l'hypercube H_n , est b -continu pour $n \neq 3$. Aussi il montre dans [24] que les graphes 3-réguliers sont b -continus sauf le cube H_3 et le cycle à 10 sommets auquel on ajoute une arête entre toute paire de sommets à distance 5 (noté $\overline{C_{10}}$), en effet $\overline{C_{10}}$ est b -colorable avec 2 et 4 couleurs et non b -colorable avec 3 couleurs et l'hypercube de dimension 3, est comme indiqué dans 4.3.1.

Problème 4.25. *Etude de la b -continuité du produit cartésien de $K_{1,n} \square C_m, P_n \square C_m$ et les graphes de Kneser dans le cas général.*

T. Faik [24] a ensuite démontré la b -continuité des graphes triangulés (graphes tels que tout cycle de longueur supérieur à quatre possède une corde) en construisant un algorithme qui réduit toute b -coloration avec $k > \chi(G)$ couleurs en une b -coloration avec $k - 1$ couleurs, d'où l'on déduit la b -continuité des arbres, des graphes d'intervalles (graphes représentant l'intersection des intervalles de IR) et enfin celle des blocs graphes.

En utilisant la même technique nous montrons la b -continuité des cactus (connexe), pour cela on définit les notions suivantes:

Définition 4.26. Soit C une b -coloration avec $b(G)$ couleurs d'un cactus (connexe) $G = (V, E)$, et $v \in V$ un sommet b -dominant de G . Le sommet v est dit extrême si le sous graphe G_v induit par les sommets de $V \setminus \{v\}$ contient exactement un sous graphe connexe (cactus) G_v^b , qui contient tous les autres sommets b -dominants du graphe cactus G pour la coloration C .

Lemme 4.27. Dans une b -coloration avec $b(G)$ couleurs de $G = (V, E)$ graphe cactus, il existe au moins deux sommets extrêmes, caractérisés par le $\max(d(v_i, v_j))$, où v_i, v_j sont des sommets b -dominants.

Preuve. Notons $B_C = \{v_1, \dots, v_m\}$ l'ensemble des sommets b -dominants de G , dit aussi système b -dominant, pour la coloration C . Supposons au contraire que pour tous v_i, v_j sommets b -dominants pour la coloration C , telle que $d(v_i, v_j)$ est maximum, v_i est sommet b -dominant non extrême, par définition les sommets $V \setminus \{v_i\}$ induisent au moins deux sous graphes connexes cactus qu'on note $G_{v_i}^1$ et $G_{v_i}^2$ tels que chacun contient des sommets b -dominants de C , supposons que $v_j \in G_{v_i}^1$, pour aller du sommet v_j à n'importe quel sommet b -dominant de $G_{v_i}^2$, on doit passer par le sommet v_i ce qui contredit le fait que $d(v_i, v_j)$ est maximum. \square

4.3.2 b -continuité des graphes cactus

Théorème 4.28. Le graphe cactus est b -continu.

Preuve. Nous adoptons les mêmes notations que celles de la définition précédente. Soit v un sommet extrême dans une coloration C , b -dominante d'un cactus G utilisant k ($k > 3$, sinon le graphe est b -continu) couleurs et G_v^b le sous graphe connexe contenant tous les autres sommets b -dominants. Le sommet v est adjacent à au plus deux sommets de chaque composante connexe de G , entre autre pour la composante G_v^b . Supposons que

le sommet v est coloré 1, et u le sommet adjacent à v dans G_v^b est coloré 2 si le voisinage de v dans G_v^b est un sommet (si le voisinage de v dans G_v^b est un cycle alors on considère les sommets u, w voisins de v sur ce cycle et colorés 2, 3 respectivement). Le graphe G_v étant un ensemble de cycles et d'arêtes comme un cycle est au plus b -colorable avec 3 couleurs, on recoloré tout le sous graphe cactus $G_v \setminus G_v^b$ avec les couleurs 2, 3, 4 de manière que tout sommet adjacent au sommet v soit de couleur 2 ou 3.

Deux cas peuvent avoir lieu:

Cas 1 : Le sommet v coloré 1 est unique pour sa couleur dans le système B_C , dans ce cas la couleur aura perdu son unique sommet b -dominant et donc tout autre sommet de G coloré 1 n'a pas toutes les couleurs dans son voisinage, il est donc possible de recolorer tout sommet de couleur 1 (y compris le sommet v) en utilisant une couleur qui n'existe pas dans son voisinage.

Cas 2 : Le sommet v n'est pas unique de couleur 1, dans ce cas nous considérons un nouveau sommet extrême mais dans la nouvelle coloration b -dominante utilisant k couleurs où on a perdu le sommet b -dominant v . Il est simple de vérifier que ce procédé nous permet de supprimer un et un seul sommet b -dominant à chaque itération. Après un nombre fini d'itérations une couleur perd tous ses sommets b -dominants et on peut appliquer le cas 1.

Donc il est simple de constater qu'on peut à chaque fois réduire une b -coloration avec k couleurs en une b -coloration avec $(k - 1)$ couleurs, $4 \leq k \leq b(G)$. \square

CHAPITRE 5

b -COLORATION DANS LES GRAPHEs DE HARARY ET LES GRAPHEs SPIDER COMPLETS

5.1 b -coloration dans les graphes de Harary

Ce travail a été présenté dans une communication au huitième colloque en combinatoire (8th FCC), Orsay-Paris, France en date de Juin-Juillet 2010 et soumis à la revue *Discrete Mathematics* [27, 28, 26].

5.1.1 Définitions et résultats sur le nombre chromatique de graphes de Harary

Etant donné un entier $2 \leq k < n$, on place n sommets autour d'un cycle également espacés. Si k est pair on forme le graphe $H_{k,n}$ en mettant une arête entre tout sommet et ses $\frac{k}{2}$ sommets les plus proches et cela dans les deux directions du cycle par rapport au sommet considéré. Si k est impair et n est pair on construit $H_{k,n}$ en mettant une arête entre tout sommet et ses $\frac{k-1}{2}$ sommets les plus proches et cela dans les deux directions du cycle par rapport au sommet considéré et entre le même sommet et celui qui lui est diamétralement opposé. Dans ces deux cas $H_{k,n}$ est régulier. Lorsque k et n sont impairs, $H_{k,n}$ est non régulier, et on construit $H_{k,n}$ à partir de $H_{k-1,n}$ en ajoutant les arêtes entre le sommet v_i et $v_{i+\frac{n-1}{2}}$ et cela pour tout $0 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$.

Il est clair que $H_{2,n} = C_n$ cycle d'ordre n et que $H_{m,m+1} = K_{m+1}$ graphe complet d'ordre $m+1$ et donc on a : $\chi(H_{2,n}) = 2$ si n est pair $\chi(H_{2,n}) = 3$ si n est impair, $\chi(H_{m,m+1}) = m+1$, $b(H_{2,n}) = 2$ si $n = 4$ et 3 sinon, enfin $b(H_{m,m+1}) = m+1$.

Des résultats concernant le même graphe avec le nombre chromatique ont été fournis par Adel P.Kazemi [29] à savoir:

- $H = H_{2m,n}$ ou alors $H = H_{2m+1,n}$ si $m \geq 2$, alors on a:

$$\chi(H) \geq \begin{cases} m+1 & m+1 \text{ divise } n \\ m+2 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $\chi(H_{2m,n}) \geq \chi(C_{n+1}), n \geq 1$

- $\chi(H_{3,2n+1}) \geq 3$

- $\forall n = (m+1)k + r$ où $k \geq r$, $\chi(H_{2m,n}) = \begin{cases} m+1 & \text{si } r = 0 \\ m+2 & \text{sinon} \end{cases}$

- Si $n = m(m+1) - i$ pour $2 \leq i \leq m$ et $m \geq \left\lceil \left(1 + \frac{\sqrt{4i+5}}{2}\right) \right\rceil$, alors on a $\chi(H_{2m,n}) = m+2$.

- Pour tout $n \geq m+1$ on a :

$$\chi(H_{2m+1,2n}) = \begin{cases} m+1 & \text{si } 2n = (m+1)t \text{ si } t \text{ est impair} \\ m+2 & \text{si } 2n = (m+2)t \text{ si } t \text{ est impair et } m+1 \text{ ne divise pas } t \end{cases}$$

- Pour tout $n \geq 2$, $\chi(H_{3,2n+1}) = 3$.

- Si $m+1$ ne divise pas n alors on a:

$$\chi(H_{2m+1,2n+1}) = \begin{cases} m+2 & \text{si } m \text{ pair et } n \text{ congru à } \frac{m}{2} \pmod{m+2} \text{ et} \\ & n \text{ non congru à } \frac{m}{2} \pmod{m+1} \\ m+2 & \text{si } m \text{ est impair } n \text{ congru à } \frac{m+1}{2} \pmod{m+2} \\ m+1 & \text{si } m \text{ pair et } n \text{ congru à } \frac{m}{2} \pmod{m+1} \end{cases}$$

Il finit ensuite par la question suivante:

Si $m \geq 3$ peut-on avoir $\chi(H_{2m,3m+2}) \neq m+2$?

Question à laquelle a répondu Abdollahzadeh et all.[30] en démontrant que:

$$\chi(H_{2m,3m+2}) = m + k + 1 \text{ où } k = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil.$$

Il montre en particulier que $\chi(H_{2m,3m+2}) = 6$ pour $m = 3$.

5.1.2 Nos résultats sur le nombre b -chromatique de graphes de Harary

Ici on s'intéresse au cas où k est pair.

Théorème 5.1. $H_{2m,n}$ est un graphe de Harary, alors on a:

$$b(H_{2m,n}) = \begin{cases} 2m + 1 & \text{si } n = 2m + 1 \text{ ou } n \geq 4m + 1 \\ 2m - \left\lfloor \frac{4m - n}{3} \right\rfloor & \text{si } \left\lceil \frac{5m + 3}{2} \right\rceil \leq n \leq 4m \\ \geq n - m - 1 & \text{si } 2m + 2 \leq n < \left\lceil \frac{5m + 3}{2} \right\rceil \end{cases}$$

Preuve. Nous distinguons quatre cas suivant l'ordre du graphe $H_{2m,n}$.

Cas 1. Si $n = 2m + 1$ alors $H_{2m,n}$ est une clique d'ordre $2m + 1$ et donc on peut voir que: $b(H_{2m,n}) = \chi(H_{2m,n}) = 2m + 1$.

Cas 2. Si $n \geq 4m + 1$, comme $\Delta(H_{2m,n}) = 2m$, alors $b(H_{2m,n}) \leq \Delta(H_{2m,n}) + 1 = 2m + 1$. Pour montrer l'égalité on construit une b -coloration utilisant $2m + 1$ couleurs $0, 1, 2, \dots, 2m$ de la manière suivante. Soit v_0, v_1, \dots, v_{n-1} les sommets du graphe $H_{2m,n}$ placés dans cet ordre autour d'un cycle. On attribue la couleur 0 au sommet v_0 . Comme $n \geq 4m + 1$, on commence par colorer les $4m$ sommets les plus proches de v_0 ; $2m$ sommets dans chacune des directions autour du cycle et suivant l'ordre donné aux sommets. On donne la couleur i au sommet v_i ; $i = 1, \dots, 2m$ et la couleur $i - (n - 2m - 1)$ au sommet v_i ; $i = n - 2m, \dots, n - 1$. Les sommets v_i et v_j sont adjacents si $i - m \leq j \leq i + m$ (modulo n). Un sommet v_i et un sommet v_j ont la même couleur si $i = j - (n - 2m - 1)$ pour $i \in \{1, \dots, 2m\}$ et $j \in \{n - 2m, \dots, n - 1\}$, et donc on a: $i - 2m - 1 \geq j = i + n - 2m - 1 \geq i + 4m + 1 - 2m - 1 = i + 2m$. D'où deux sommets de la même couleur ne sont pas adjacents, ce qui implique que la coloration partielle est propre. On peut facilement voir que les sommets v_i ; $i = 1, \dots, m$ et les sommets v_i ; $i = n - m, \dots, n - 1$ plus le sommet

v_0 sont b -dominants pour cette coloration partielle. Enfin nous étendons cette coloration partielle à une coloration propre du graphe $H_{2m,n}$ comme suit: On colore arbitrairement les sommets restants dans tout le graphe en attribuant à chaque sommet une couleur de l'ensemble $\{0, 1, \dots, 2m\}$ différente de celle déjà donnée dans son voisinage il s'agit en fait d'une extension par un algorithme glouton de coloration standard. On obtient une b -coloration utilisant $2m + 1$ couleurs dans laquelle les sommets $v_0, v_1, \dots, v_m, v_{n-m}, \dots, v_{n-1}$ sont des sommets b -dominants .

Cas 3. $\left\lceil \frac{5m+3}{2} \right\rceil \leq n \leq 4m$. On montre d'abord que: $b(H_{2m,n}) \leq 2m - \left\lfloor \frac{4m-n}{3} \right\rfloor$. Supposons le contraire, c'est à dire que: $H_{2m,n}$ admet une b -coloration utilisant k couleurs, $k \geq 2m - \left\lfloor \frac{4m-n}{3} \right\rfloor + 1$.

Fait 1. *Il existe au moins une classe de couleurs contenant un seul sommet.*

Preuve du Fait 1: Supposons au contraire que toute classe de couleurs contient au moins deux sommets, alors $n \geq 2k \geq 4m - 2 \left\lfloor \frac{4m-n}{3} \right\rfloor + 2$ et comme $\left\lfloor \frac{4m-n}{3} \right\rfloor \leq \frac{4m-n}{3}$, $n \geq 4m + 6$, contradiction, ce qui démontre le lemme. \square

Soient $0, \dots, k-1$ les couleurs utilisées dans une coloration b -dominante du graphe $H_{2m,n}$. Sans perdre de généralité soit v_0 l'unique sommet de couleur 0. Donc v_0 est un sommet b -dominant de couleur 0, il existe encore au moins $k - 1$ autres sommets b -dominants de couleurs distinctes.

Soient $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ les voisins de v_0 dans chacune des directions par rapport au sommet v_0 respectivement à droite et à gauche de v_0 tout autour du cycle. Soit x_i (resp. y_j) le dernier sommet b -dominant dans X (resp. Y). On posera $A = \{x_k \in X : k \leq i\}$ et $B = \{y_k \in Y : k \leq j\}$. Soit $Z = V \setminus (\{v_0\} \cup X \cup Y)$ l'ensemble des sommets non voisins de v_0 . Considérons V_{ij} (resp. $\overline{V_{ij}}$) l'ensemble des sommets entre x_i et y_j à droite et à gauche du sommet x_i et autour du cycle, tel que $v_0 \in V_{ij}$ et $v_0 \notin \overline{V_{ij}}$.

Dans le cas où : $3m + 1 \leq n \leq 4m$, alors $|Z| \geq n - (2m + 1) \geq m$; donc

$$|\overline{V_{ij}} \cup \{x_i, y_j\}| \geq |Z| + 2 \geq m + 2$$

de plus on a:

$$\begin{aligned}
|A| + |B| + 1 \geq k &\geq 2m - \left\lfloor \frac{4m-n}{3} \right\rfloor + 1 \geq 2m - \frac{4m-n}{3} + 1 \\
&\geq \frac{2m+n}{3} + 1 \geq \frac{2m+3m+4}{3} = \frac{5m+4}{3} = m + \frac{2m+4}{3} \\
&\geq m+2,
\end{aligned}$$

il en découle que $|V_{ij} \cup \{x_i, y_j\}| \geq m+2$, et donc x_i n'est pas adjacent à y_j .

Le dernier sommet b -dominant x_i dans A a besoin d'au moins $k-m$ couleurs qui sont attribuées aux derniers sommets b -dominants dans B , on aura besoin donc d'au moins $k-m$ sommets distincts portant ces mêmes couleurs et qui appartiennent à l'ensemble $V(H_{2m,n}) - (\{v_0\} \cup A \cup B)$, ces sommets doivent être adjacents au sommet x_i . Soit A' l'ensemble des sommets demandés par x_i . De la même manière soit y_j le dernier sommet b -dominant dans B et qui a besoin d'au moins $k-m$ couleurs attribuées aux derniers sommets b -dominants de A , on aura besoin donc d'au moins $k-m$ sommets distincts portant ces mêmes couleurs et qui appartiennent à l'ensemble $V(H_{2m,n}) - \{v_0\} \cup A \cup B$ et tous adjacents au sommet y_j . Soit B' l'ensemble des sommets demandés par y_j . Comme les couleurs demandées par x_i sont dans le voisinage de y_j et que les couleurs demandées par y_j sont dans le voisinage du sommet x_i , ces couleurs sont donc différentes, et donc A' et B' sont disjoints. On a alors:

$$\begin{aligned}
n &\geq |A| + |B| + |A'| + |B'| \geq k + 2(k-m) = 3k - 2m \\
&\geq 3\left(2m - \left\lfloor \frac{4m-n}{3} \right\rfloor + 1\right) - 2m = 4m - 3 \left\lfloor \frac{4m-n}{3} \right\rfloor + 3 \\
&\geq 4m - 4m + n + 3 = n + 3
\end{aligned}$$

contradiction.

Dans le cas où: $\left\lfloor \frac{5m+3}{2} \right\rfloor \leq n \leq 3m$.

Fait 2. X (resp. Y) contient au moins $\frac{m+2}{2}$ sommets b -dominants.

Preuve du Fait 2: Pour le voir supposer que X ou Y contient au plus $\frac{m}{2}$ sommets b -dominant. Donc $2m - \left\lfloor \frac{4m-n}{3} \right\rfloor + 1 \leq k \leq \frac{3m}{2} + 1$. ce qui donne $n \leq \frac{5m}{2}$, contradiction. \square

Fait 3. *Tous les sommets de $A \cup B$ sont b -dominants.*

Preuve du Fait 3: D'abord on montre que x_1 est un sommet b -dominant, supposer au contraire que x_1 coloré c_1 n'est pas un sommet b -dominant, cela veut dire que dans le voisinage de x_1 une certaine couleur c'_1 manque, ce qui implique que $Y \setminus \{y_m\}$ ne contient pas les couleurs c'_1 et c_1 . Comme v_0 est le seul sommet b -dominant de couleur 0, le sommet y_m prend forcément la couleur c'_1 . Donc $X \cup Y$ ne contient pas de sommets b -dominants de couleur c_1 , contradiction. On procède de la même manière pour montrer que y_1 est un sommet b -dominant. Supposons maintenant que A contient un sommet non b -dominant x_l couleur c_l . Soient x_p et x_q ; $p < l < q$ les plus proches sommets b -dominants dans les deux directions autour du cycle; à droite et à gauche de x_l respectivement. On note par F l'ensemble des sommets non b -dominants qui se trouvent entre x_p et x_q ; F est évidemment non vide, il contient au moins le sommet x_l . D'après le lemme 2, il est clair que $|F| \leq \frac{m-2}{2}$. Comme le sommet x_l est non b -dominant, alors dans le voisinage du sommet x_l il manque une certaine couleur disons c'_l , ce qui veut dire que l'ensemble V contient un seul sommet de couleur c'_l , puisque la couleur c'_l ne se trouve pas dans $N[x_l]$, elle se trouvera donc dans $M = V \setminus N[x_l]$. Mais puisque: $|M| = |V \setminus N[x_l]| = |V| - |N[x_l]| = n - 2m - 1 \leq 3m - 2m - 1 = m - 1$, alors le sous graphe $G[M]$ induit par M est une clique. Il existe donc un seul sommet y_h de couleur c'_l dans $G[M]$ et donc y_h est un sommet b -dominant, et donc $y_h \in B$. Les deux sommets x_p and x_q ont besoin de la couleur c'_l dans leur voisinage, ils sont donc adjacents au sommet y_h . On a alors: $n = |V_{ph}| + |\overline{V_{qh}}| + 2 + |F| \leq 2m + 1 + |F| \leq 2m + 1 + \frac{m-2}{2} = \frac{5m}{2}$, contradiction. \square

Soit B' l'ensemble des sommets b -dominants dans B telle qu'aucune couleur dans B' n'est répétée dans A . Soit y_t le dernier sommet dans Y , dont la couleur ne se repète pas dans A . y_t existe, sinon $k = 1 + |A| \leq m + 1$, contradiction. D'où y_t est un sommet b -dominant et donc $y_t \in B'$.

$$|A| + |B'| + |\{v_0\}| \geq k \geq 2m - \left\lfloor \frac{4m-n}{3} \right\rfloor + 1 \geq \frac{2m+n}{3} + 1 \geq \frac{3m}{2} + 2.$$

Fait 4. x_i est non adjacent à y_t .

Preuve du Fait 4: Supposons que x_i est adjacent à y_t , deux cas s'imposent: si $V_{it} \cup \{x_i, y_t\}$ induit une clique, donc $|V_{it} \cup \{x_i, y_t\}| \leq m + 1$ ($m + 1$ est la cardinalité maximum d'une clique dans $H_{2m,n}$). comme $|V_{it} \cup \{x_i, y_t\}| \geq |A| + |B'| + |\{v_0\}| \geq k$ et que $k \geq \frac{3m}{2} + 2$, alors $|V_{it} \cup \{x_i, y_t\}| \geq \frac{3m}{2} + 2$, contradiction. Donc $V_{it} \cup \{x_i, y_t\}$ n'induit pas une clique, c'est donc $\overline{V_{it}} \cup \{x_i, y_t\}$ qui induit une clique, dans ce cas comme tout sommet de A est b -dominant, y_t est adjacent à tous les sommets de A (sinon certains sommets de A ne peuvent avoir la couleur de y_t dans leurs voisinages). On en déduit que $H_{2m,n}$ est une clique contradiction avec l'hypothèse \square

Le dernier sommet b -dominant x_i dans A a besoin d'au moins $k - m$ couleurs qui sont attribuées à certains sommets b -dominants à la fin de B' , on aura donc besoin d'au moins $k - m$ sommets distincts auxquels on attribue ces couleurs et appartenant à l'ensemble $V(H_{2m,n}) - (\{v_0\} \cup A \cup B')$ et sont adjacents à x_i . Soit A' l'ensemble de ces sommets demandés par x_i . De manière similaire le dernier sommet b -dominant y_t dans B' aura besoin d'au moins $k - m$ couleurs qui sont attribuées à certains sommets b -dominants qui se trouvent à la fin de A , donc on a besoin d'au moins $k - m$ sommets distincts auxquels on attribue ces mêmes couleurs et qui appartiennent à l'ensemble $V(H_{2m,n}) - \{v_0\} \cup A \cup B'$ et sont adjacents à y_t . Soit B'_1 l'ensemble de ces sommets demandés par y_t . Comme les couleurs demandées par x_i sont les mêmes trouvées dans le voisinage de y_t et les couleurs demandées par y_t sont les mêmes trouvées dans le voisinage de x_i , ces couleurs sont différentes, donc A' et B'_1 sont disjoints, et donc:

$$\begin{aligned} n &\geq |A| + |B'| + |A'| + |B'_1| + 1 \geq k + 2(k - m) = 3k - 2m \\ &\geq 3\left(2m - \left\lfloor \frac{4m - n}{3} \right\rfloor + 1\right) - 2m = 4m - 3 \left\lfloor \frac{4m - n}{3} \right\rfloor + 3 \\ &\geq 4m - 4m + n + 3 = n + 3, \end{aligned}$$

D'où la contradiction. Donc dans tous les cas où $\left\lceil \frac{5m + 3}{2} \right\rceil \leq n \leq 4m$, on a bien $b(H_{2m,n}) \leq 2m - \left\lfloor \frac{4m - n}{3} \right\rfloor$. A présent on donne une b -coloration de $H_{2m,n}$ en utilisant

$2m - \left\lfloor \frac{4m - n}{3} \right\rfloor$ couleurs lorsque $\left\lceil \frac{5m + 3}{2} \right\rceil \leq n \leq 4m$. Soient v_1, v_2, \dots, v_n les sommets de $H_{2m,n}$ dans cet ordre autour du cycle. Posons $k = 2m - \left\lfloor \frac{4m - n}{3} \right\rfloor$, alors $n \leq 2k$, sinon $n > 2k$ d'où il en découle que $n > 4m$, contradiction. Comme $n \leq 2k$, on peut donner une b -coloration au graphe $H_{2m,n}$ de la manière suivante, colorer i tout sommet v_i ; $i = 1, \dots, k$ et colorer $i - (n - k)$ tout sommet v_i ; $i = k + 1, \dots, n$, suivant l'ordre des sommets sur le cycle. Les sommets v_i et v_j sont adjacents si $i - m \leq j \leq i + m$ l'addition est prise modulo $n + 1$. Un sommet v_i et un sommet v_j ont la même couleur si $i = j - (n - k)$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$ et $j \in \{k + 1, \dots, n\}$. Comme

$$\begin{aligned} |j - i| &= n - k = n - 2m + \left\lfloor \frac{4m - n}{3} \right\rfloor > n - 2m + \frac{4m - n}{3} - 1 \\ &= \frac{3n - 6m + 4m - n - 3}{3} = \frac{2n - 2m - 3}{3} \\ &\geq \frac{2 \frac{5m + 3}{2} - 2m - 3}{3} = m, \end{aligned}$$

deux sommets ayant la même couleur ne sont pas adjacents et donc la coloration est propre. De plus on peut facilement voir que les sommets v_i ; $i = 1, \dots, m + 1$ et les sommets v_i ; $i = n - k + m + 2, \dots, n$; où $k \leq m + 2$, sont des sommets b -dominants pour cette coloration propre.

Cas 4. $2m + 2 \leq n < \left\lceil \frac{5m + 3}{2} \right\rceil$.

Pour montrer que $b(H_{2m,n}) \geq n - m - 1$, on construit une b -coloration utilisant $n - m - 1$ couleurs comme suit. Soit v_1, v_2, \dots, v_n les sommets de $H_{2m,n}$ dans cet ordre et autour du cycle. Posons $k = n - m - 1$, alors $n \leq 2k$, dans le cas contraire on a $n > 2k$ ce qui implique que $n < 2m + 2$, contradiction. Comme $n \leq 2k$, on peut colorer tous les sommets de $H_{2m,n}$ en utilisant la b -coloration suivante, donner la couleur i à v_i ; $i = 1, \dots, k$ et la couleur $i - (n - k)$ au sommets v_i ; $i = k + 1, \dots, n$, selon l'ordre des sommets sur le cycle. Les sommets v_i et les sommets v_j sont adjacents si $i - m \leq j \leq i + m$ où l'addition est prise modulo $n + 1$. Les sommets v_i et les sommets v_j ont la même couleur si $i = j - (n - k)$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$ et $j \in \{k + 1, \dots, n\}$. et comme

$$|j - i| = n - k = n - n + m + 1 = m + 1,$$

deux sommets ayant la même couleur ne sont pas adjacents, ce qui implique que la coloration est propre. Aussi, on peut voir que les sommets $v_i; i = 1, \dots, m + 1$ et les sommets $v_i; i = n - k + m + 2, \dots, n$; où $k \leq m + 2$, sont b -dominants pour cette coloration propre, ce qui complète la preuve du théorème 1. \square

Proposition 5.2. *Soit $H_{2m,2m+3}$ le graphe de Harary, alors on a:*

$$n - m - 1 \leq b(H_{2m,2m+3}) \leq \left\lfloor \frac{6m + 9}{5} \right\rfloor.$$

De plus ces bornes sont atteintes.

Preuve. Soit c une b -coloration arbitraire du graphe de $H_{2m,2m+3}$. La première inégalité découle du Théorème 5.1. Soient $v_0, v_1, \dots, v_{2m+2}$ les sommets de $H_{2m,2m+3}$ dans cet ordre autour du cycle, montrons la seconde inégalité.

Comme $|Z| = |V \setminus (\{v_0\} \cup X \cup Y)| = 2$, chaque couleur est répétée au plus deux fois. Soit k_1 (resp. k_2) le nombre de classes de couleurs contenant un seul sommet (resp. deux sommets). Par une 1-classe (resp. 2-classe) on note la classe de couleur qui contient un seul sommet (resp. deux sommets). Donc $n = k_1 + 2k_2$ et $b = k_1 + k_2 = n - k_2 = 2m + 3 - k_2$.

Si $k_1 = 1$, alors $n - 1 = 2m + 2 = 2k_2$ ce qui implique que $k_2 = m + 1$. D'où $b = n - m - 1 = m + 2$.

Soit $k_1 \geq 3$, (k_1 est un entier impaire puisque le graphe $H_{2m,2m+3}$ est d'ordre impaire $2m + 3 = k_1 + 2k_2$). On montre que les deux voisins les plus proches, autour du cycle, d'un sommet b -dominant appartenant à une 1-classe sont des sommets b -dominants qui appartiennent tous deux à une 2-classe. Soit v_0 le sommet qui appartient à une 1-classe, v_1 et v_{n-1} ses plus proches voisins autour du cycle et v_{m+1}, v_{m+2} ses deux non voisins tels que $c(v_{m+1}) = a$ et $c(v_{m+2}) = b$. Alors on a forcément $c(v_1) = b$ et $c(v_{n-1}) = a$ où v_1 et v_{n-1} sont des sommets b -dominants, puisque les sommets v_{m+1} et v_{m+2} ne peuvent pas être adjacents au sommet v_0 et donc ne peuvent pas avoir la couleur 0 dans leur voisinage. Par conséquent deux sommets b -dominants appartenant tous deux à une 1-class ne sont pas consécutifs autour du cycle. On montre aussi que entre deux sommets b -dominants qui appartiennent chacun à une 1-class, il existe au moins deux sommets b -dominants appartenant chacun

à une 2-classe. Supposons le contraire, c'est à dire qu'entre deux sommets b -dominants appartenant à une 1-classe il existe un seul sommet b -dominant appartenant à une 2-classe. Sans perdre de généralité, soit v_0 et v_2 les sommets b -dominants qui appartiennent à une 1-classe, donc v_1 est un sommet de la 2-classe. Il est simple de vérifier que cette b -coloration est impossible. Par conséquent $k_2 \geq 2k_1$ et comme $n = k_1 + 2k_2$, $k_2 \geq \frac{2n}{5}$. Il en découle que:

$$b = 2m + 3 - k_2 \leq \left\lfloor \frac{3n}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6m + 9}{5} \right\rfloor.$$

Soit c une b -coloration utilisant $b(H_{2m,2m+3})$ couleurs (une application de V vers l'ensemble des entiers positifs (couleurs)).

Dans la suite on donne des exemples, qui donnent pour toute valeur de m une b -coloration où les sommets b -dominants sont indiqués par $*$ et qui montrent que les bornes trouvées dans la proposition sont atteintes.

1. $m = 1, n = 5, b(H_{2,5}) = n - m - 1 = \left\lfloor \frac{6m + 9}{5} \right\rfloor = 3$

sommets	v_0^*	v_1^*	v_2^*	v_3	v_4
b -coloration	0	1	2	0	2

2. $m = 6, n = 15, b(H_{12,15}) = n - m = \left\lfloor \frac{6m + 9}{5} \right\rfloor = 9$

sommets	v_0^*	v_1^*	v_2	v_3	v_4^*	v_5^*	v_6^*	v_7	v_8	v_9^*	v_{10}^*	v_{11}^*
b -coloration	0	1	5	7	2	3	4	8	1	5	6	7

v_{12}	v_{13}	v_{14}^*
2	4	8

3. $m = 11, n = 25, b(H_{22,25}) = n - m + 1 = \left\lfloor \frac{6m + 9}{5} \right\rfloor = 15$

sommets	v_0^*	v_1^*	v_2	v_3	v_4^*	v_5^*	v_6^*	v_7	v_8	v_9^*	v_{10}^*	v_{11}^*
b -coloration	0	1	8	10	2	3	4	11	13	5	6	7

v_{12}	v_{13}	v_{14}^*	v_{15}^*	v_{16}^*	v_{17}	v_{18}	v_{19}^*	v_{20}^*	v_{21}^*	v_{22}	v_{23}	v_{24}^*
14	1	8	9	10	2	4	11	12	13	5	7	14

$$4. m = 16, n = 35, b(H_{32,35}) = n - m + 2 = \left\lfloor \frac{6m + 9}{5} \right\rfloor = 21$$

sommets	v_0^*	v_1^*	v_2	v_3	v_4^*	v_5^*	v_6^*	v_7	v_8	v_9^*	v_{10}^*	v_{11}^*
b -coloration	0	1	11	13	2	3	4	14	16	5	6	7

v_{12}	v_{13}	v_{14}^*	v_{15}^*	v_{16}^*	v_{17}	v_{18}	v_{19}^*	v_{20}^*	v_{21}^*	v_{22}	v_{23}	v_{24}^*
17	19	8	9	10	20	1	11	12	13	2	4	14

v_{25}^*	v_{26}^*	v_{27}	v_{28}	v_{29}^*	v_{30}^*	v_{31}^*	v_{32}	v_{33}	v_{34}^*
15	16	5	7	17	18	19	8	10	20

$$5. m = 21, n = 45, b(H_{42,45}) = n - m + 3 = \left\lfloor \frac{6m + 9}{5} \right\rfloor = 27$$

sommets	v_0^*	v_1^*	v_2	v_3	v_4^*	v_5^*	v_6^*	v_7	v_8	v_9^*	v_{10}^*	v_{11}^*
b -coloration	0	1	14	16	2	3	4	17	19	5	6	7

v_{12}	v_{13}	v_{14}^*	v_{15}^*	v_{16}^*	v_{17}	v_{18}	v_{19}^*	v_{20}^*	v_{21}^*	v_{22}	v_{23}	v_{24}^*
20	22	8	9	10	23	25	11	12	13	26	1	14

v_{25}^*	v_{26}^*	v_{27}	v_{28}	v_{29}^*	v_{30}^*	v_{31}^*	v_{32}	v_{33}	v_{34}^*	v_{35}^*	v_{36}^*	v_{37}
15	16	2	4	17	18	19	5	7	20	21	22	8

v_{38}	v_{39}^*	v_{40}^*	v_{41}^*	v_{42}	v_{43}	v_{44}^*
10	23	24	25	11	13	26

$$\text{On note aussi que: } m = 26, n = 55, b(H_{52,55}) = n - m + 4 = \left\lfloor \frac{6m + 9}{5} \right\rfloor = 33. \quad \square$$

Il est simple de voir que cette b -coloration peut être généralisée vu les exemples, on peut facilement remarquer que $m = 5k + 1; k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$n = 2m + 3 = 10k + 5 \text{ et } b(G) = \frac{6m + 9}{5} = (n - m - 1) + \frac{m - 1}{5} = 6k + 3.$$

Les exemples donnés ci dessus cités suite à la dernière proposition fournissent un contre exemple à la conjecture posée par Effantin and Kheddouci dans [31].

Nous nous demandons par la suite si le problème suivant se résoud de la même manière:

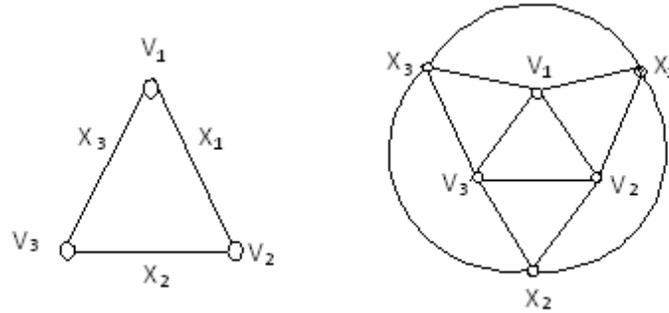
Problème 5.3. Soit $H_{2m+1,n}$ où n est pair un graphe de Harary, alors on a : Si $n \geq 6m+2$ ou $n = 2m + 2$, alors $b(H_{2m+1,n}) = 2m + 2$.

5.2 b -coloration sommet, arête et sommet-arête dans les graphes Spider complets

Suite aux résultats établis par Sadegh Rahimi Sharebaf [32], où il détermine le nombre sommet chromatique (le nombre chromatique classique), le nombre arête chromatique (l'indice chromatique classique), et enfin le nombre chromatique total dans les graphes de Spider complets, nous avons déterminé de notre part le nombre sommet b -chromatique, le nombre arête b -chromatique et enfin le nombre b -chromatique total pour les graphes Spider complets.

Définition 5.4. Soit $G = (V(G), E(G))$. On appelle graphe total du graphe G , noté $T(G)$, le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble $V(G) \cup E(G)$ et deux sommets dans $T(G)$ sont adjacents s'ils sont voisins dans G , par voisinage on insinue ce sommet est adjacent à un autre sommet ou ce sommet est incident à une arête ou l'arête est adjacente à une autre arête ou incidente à un sommet.

Exemple 5.5. Graphe complet K_3 et son graphe total correspondant $T(K_3)$ (voir FIGURE 5.1) .

FIGURE 5.1. Graphe H et son graphe total $T(H)$ **Remarque 5.6.**

- Si v est un sommet de G , alors le degré de v dans $T(G)$ est $d_T(v) = 2d(v)$.
- Si $x = uv$ est une arête de G , alors on a $d_T(x) = d(u) + d(v)$
- Si G est un graphe à p sommets et q arêtes, tels que le sommet noté v_i est de degré d_i ; $i = 1, \dots, p$, alors $T(G)$ est le graphe à $p_T = p + q$ sommets et à $q_T = 2q + \frac{1}{2} \sum d_i^2$ arêtes.

Nous donnons quelques définitions complémentaires sur la coloration suite au Chapitre 1.

Définition 5.7. Une coloration totale du graphe G est une application $c : E(G) \cup V(G) \mapsto K$, où K est un ensemble non vide qui définit un ensemble de couleurs. c est une coloration totale de G si non seulement deux sommets voisins et deux arêtes voisines ont des couleurs différentes mais aussi la couleur d'une arête quelconque est différente de celle de ses extrémités. G est dit k -total colorable s'il admet une coloration propre totale c où l'application; $c : E(G) \cup V(G) \mapsto K$ est telle que $|K| = k$. Le nombre total chromatique noté $\chi_T(G)$ est le plus petit k tel que G soit k -total colorable. Une

coloration total correspond à une coloration propre dans le graphe total. Un sous ensemble de sommets et d'arêtes colorés avec la même couleur correspond à un stable dans le graphe total $T(G)$ et à l'union d'un stable et un couplage dans le graphe initial G .

Définition 5.8. Une coloration dominante des sommets (resp. arêtes) de G ou b -coloration (resp. b' -coloration) de G est une coloration propre c des sommets (resp. arêtes) telle que $V(G)$ (resp. $E(G)$) peut être partitionné en stables (resp. couplage) dites classes de couleurs et que toute classe de couleur i contient au moins un sommet (resp. une arête) admettant un sommet voisin (resp. une arête voisine) dans toute autre classe, un tel sommet (resp. arête) est dit(e) sommet b -dominant (resp. arête b -dominante). G est dit k - b -sommet (resp. k - b -arête) colorable s'il admet une coloration dominante des sommets (resp. arêtes) telle que l'application : $c : V(G) \mapsto K$, est telle que $|| = k$ (resp. $c : E(G) \rightarrow K$, est telle que $|K| = k$). Le nombre b -sommet chromatique est le nombre b -chromatique noté $b(G)$. Le nombre b -arête chromatique ou le nombre $b'(G)$ -chromatique est le nombre maximum de couleurs utilisées pour que G soit k - b -arête colorable.

Remarque 5.9. Déterminer le nombre b' -chromatique dans le graphe G , revient à déterminer le nombre b -chromatique $b(L(G))$ dans le graphe des arêtes $L(G)$ ($L(G)$ est le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des arêtes et deux sommets sont adjacentes dans $L(G)$ si les arêtes correspondantes sont adjacentes dans G).

Définition 5.10. Une coloration dominante totale de G est une coloration propre dans $T(G)$ qui est dominante; c'est à dire telle que toute classe de couleur i dans le graphe total $T(G)$ contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur $j \neq i$, ce sommet est dit sommet b -dominant pour la couleur i dans $T(G)$. Le nombre b_t -chromatique est le nombre maximum de classes de couleurs dans une coloration dominante dans $T(G)$. Une coloration dominante avec $b_t(G)$ couleurs est notée b_t -coloration.

Définition 5.11. Un Spider est un arbre avec au plus un sommet de degré supérieur à deux, appelé centre du Spider noté o . (Si aucun sommet n'est de degré plus de deux, tout sommet du spider peut être un centre). Une branche d'un Spider est une chaîne issue du

centre o vers un sommet de degré un. Une étoile avec k branches est un Spider avec k branches toutes de longueur 1.

Si $m \geq 3$ est un entier on définit un graphe de Spider S_m comme un graphe obtenu à partir d'un Spider avec m branches P_1, P_2, \dots, P_m toutes de longueur au moins deux telles que deux sommets x et y appartenant à deux branches différentes P_i et P_j sont adjacents si $|i - j| \in \{1, m - 1\}$, et $d(x, o) = d(y, o)$ où o est le centre du Spider ($d(x, y)$ désigne la distance de x à y).

Nous considérons alors une sous classe de la classe des graphes S_m . Soit S_m un graphe de Spider ayant m branches P_1, P_2, \dots, P_m . Si toutes les branches sont de même longueur n et si pour tous sommets v_i, v_j appartenant successivement à P_i, P_j tels que $|i - j| \in \{1, m - 1\}$, on a v_i, v_j sont adjacents, alors le graphe Spider S_m est dit graphe Spider complet qu'on notera $S_{m,n}$ où $m \geq 3$ et $n \geq 2$ sont des entiers (voir Figure 5.2).

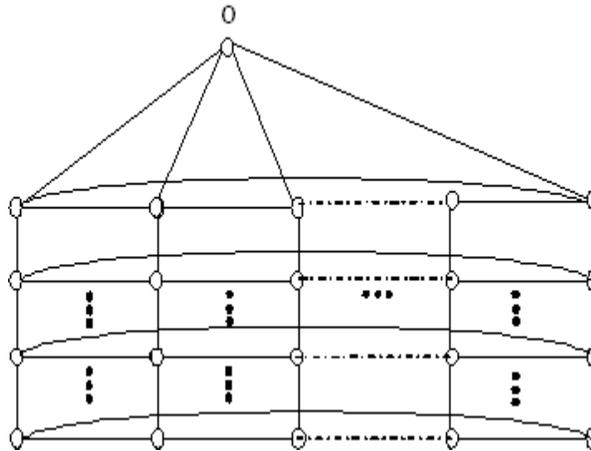


FIGURE 5.2. $S_{m,n}$

5.2.1 Résultats sur le nombre chromatique, indice chromatique, nombre chromatique dans les graphes spider complets

Sadegh Rahimi Sharebaf a démontré dans [32] les résultats suivants :

Théorème 5.12. [32] $\chi(S_{m,n}) = 3$ si n est pair, et $\chi(S_{m,n}) = 4$ si m est impair.

Théorème 5.13. [32] $\chi'(S_{m,n}) = \Delta(G)$.

Théorème 5.14. [32] $\chi_t(S_{m,n}) = \Delta(G) + 2$ si $m = 3, 4$.

Théorème 5.15. [32] $\chi_t(S_{m,n}) = \Delta(G) + 1$ si $m \geq 5$.

Corollaire 5.16. Pour tout graphe spider S_m tel que $m \geq 5$, $\chi'(S_m) = \Delta(G)$ et $\chi_t(S_m) = \Delta(G) + 1$ si $m \geq 5$.

Notre étude concerne la détermination des nombres b -chromatique, b' -chromatique et enfin b_t -chromatique du graphe $S_{m,n}$.

5.2.2 Nos résultats sur le nombre b -chromatique, b' -chromatique, nombre b_t -chromatique dans le graphe Spider complet

Notons que dans la suite, on généralise la définition de $S_{m,n}$ pour le cas où $m \geq 1$ et $n \geq 1$. Sans compter le sommet centre o qui est dans le niveau zéro, on a n niveaux (lignes) et m colonnes. On note par v_{ij} le sommet de $S_{m,n}$ qui est dans le niveau i et la colonne j . On note par $m(S_{m,n})$ le m -degré de $S_{m,n}$. On utilisera souvent le fait que $b(G) \leq m(G)$ (voir [2])

$S_{1,n}$ est la chaîne P_{n+1} . $S_{2,1}$ est le triangle et $S_{2,n}$ est le graphe de la Figure 5.3

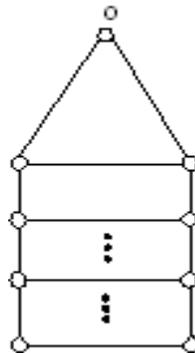


FIGURE 5.3. $S_{2,n}$

Théorème 5.17. *Soit $S_{m,n}$ un graphe Spider complet où m et n sont des entiers positifs.*

Alors on a :

$$b(S_{m,n}) = \begin{cases} 2 & \text{si } (m,n) \in \{(m,n) / m = 1 \text{ et } 1 \leq n \leq 3\} \\ 3 & \text{si } (m,n) \in \{(m,n) / m = 1 \text{ et } n \geq 4\} \cup \{(2,1), (2,2), (2,3), (4,1)\} \\ 4 & \text{si } (m,n) \in \{(m,n) / m = 2 \text{ et } n \geq 4\} \cup \{(m,n) / m \geq 5 \text{ et } n = 1\} \cup \\ & \{(m,n) / m = 3 \text{ et } 1 \leq n \leq 4\} \cup \{(3,2), (3,3), (3,4)\} \\ 5 & \text{si } (m,n) \in \{(m,n) / m = 3 \text{ et } n \geq 5\} \cup \{(m,n) / m \geq 4 \text{ et } n \geq 2\} \end{cases}$$

Preuve. Si $m = 1$, le graphe $S_{1,n}$ est réduit à une chaîne P_{n+1} , où $b(S_{1,n}) = 2$, pour $1 \leq n \leq 3$ et $b(S_{1,n}) = 3$, pour $n \geq 4$ (voir [16]).

Si $m = 2$, $m(S_{2,1}) = m(S_{2,2}) = b(S_{2,1}) = b(S_{2,2}) = 3$, il suffit de choisir les sommets du triangle dont un est le centre o , comme sommets b -dominants. $m(S_{2,3}) = 4$, supposons qu'on puisse faire une b -coloration utilisant quatre couleurs, les seuls sommets pouvant être b -dominants sont $v_{i1}, v_{i2}, 1 \leq i \leq 2$, il est simple de vérifier que seuls trois d'entre eux peuvent l'être. On peut voir que dans ce cas $b(S_{2,3}) = 3$, il suffit de choisir les sommets du triangle dont un est le centre o , comme sommets b -dominants. $m(S_{2,n}) = b(S_{2,n}) = 4$ si $n \geq 4$, choisir pour cela les sommets $v_{i1}, v_{i2}, 2 \leq i \leq 3$ comme sommets b -dominants, en donnant la couleur 1 à v_{21} et v_{42} , la couleur 2 à v_{22} et v_{41} , la couleur 3 à v_{12} et v_{31} et la couleur 4 à v_{11} et v_{32} . Ensuite on étend la coloration aux autres sommets non colorés, ceci est toujours possible vu que dans le voisinage de chaque sommet il y a au moins une couleur manquante.

Si $m = 3$, remarquer que si $n = i, 1 \leq i \leq 4$, le graphe $S_{3,n}$, contient i triangles ne contenant pas le centre o .

- $n = 1$ et $2, S_{3,1} = K_4, m(S_{3,n}) = b(S_{3,n}) = 4$, les sommets du K_4 sont choisis comme sommets b -dominants.

- $n = 3, m(S_{3,n}) = 5$, supposons qu'on peut faire une b -coloration utilisant cinq couleurs, il est simple de vérifier qu'on ne peut avoir plus d'un sommet b -dominant dans le niveau 1, donc on ne peut avoir plus de 4 sommets b -dominants (en comptant au plus trois sommets b -dominants dans le niveau deux), par conséquent $b(S_{3,n}) = 4$, il suffit pour celà de prendre

les sommets du K_4 (formé par o et les sommets du triangle du premier niveau) comme sommets b -dominants.

- $n = 4$, $m(S_{3,n}) = 5$, supposons qu'on peut faire une b -coloration avec cinq couleurs, comme dans le cas précédent on ne peut avoir plus d'un sommet b -dominant dans le niveau 1. Supposons qu'on a trois sommets b -dominants dans le niveau 2, on peut voir que le troisième sommet a toujours deux sommets de même couleur dans son voisinage, ce qui conduit à une impossibilité. En utilisant le même argument on peut vérifier aussi que dans le niveau trois on ne peut avoir plus de deux sommets b -dominants. Enfin en examinant d'une manière exhaustive tous les cas possibles lorsque le premier niveau contient un sommet b -dominant, le second niveau contient deux sommets b -dominants et le niveau trois contient deux sommets b -dominants, on arrive à une impossibilité. Donc $b(S_{3,4}) = 4$. Choisir les sommets du K_4 comme sommets b -dominants.

- $n \geq 5$, $m(S_{3,n}) = b(S_{3,n}) = 5$, le centre ne peut être b -dominant, car il est de degré 3, il suffit de donner la couleur 1 au sommet v_{11} , la couleur 2 au sommet v_{21} , la couleur 3 au sommet v_{31} , la couleur 4 au sommet v_{41} , et enfin la couleur 5 au sommet v_{32} et pour les rendre b -dominants on colore successivement les sommets $o, v_{12}, v_{13}, v_{22}, v_{23}, v_{33}, v_{42}, v_{43}, v_{51}$ avec les couleurs 5, 3, 4, 4, 5, 1, 2, 5, 1. Ensuite on étend la coloration aux autres sommets non colorés, ceci est toujours possible vu que dans le voisinage de chaque sommet il y a au moins une couleur manquante.

Si $m = 4$

- $n = 1$, $m(S_{4,n}) = 4$, supposons qu'on puisse faire une b -coloration du graphe en utilisant quatre couleurs. Si on colore les sommets $v_{1i}, 1 \leq i \leq 4$ avec les couleurs 1, 2, 3, 4, alors le centre o ne peut prendre aucune couleur. Si on choisit le centre o et 3 autres sommets parmi les $v_{1i}, 1 \leq i \leq 4$, ceci est impossible car dans le niveau un deux sommets seulement peuvent être b -dominants. Donc $b(S_{4,n}) = 3$. Pour faire une b -coloration utilisant trois couleurs choisir trois sommets sur un même triangle pris arbitrairement.

- $n \geq 2$, $m(S_{4,n}) = b(S_{4,n}) = 5$, il suffit de prendre le centre o et les sommets $v_{i2}, 1 \leq i \leq 4$, comme sommets b -dominants.

Si $m = 5$

$-n = 1$, $m(S_{5,n}) = b(S_{5,n}) = 4$, il suffit de prendre comme sommets b -dominants $o, v_{11}, v_{12}, v_{13}$ en leur donnant respectivement les couleurs 4, 1, 2, 3 et ensuite colorer respectivement les sommets v_{14}, v_{15} avec les couleurs 1, 3.

$-n = 2$, $m(S_{5,n}) = 5$, supposons qu'on puisse faire une b -coloration du graphe en utilisant cinq couleurs. Si on prend comme sommets b -dominants $v_{1i}, 1 \leq i \leq 5$, le centre o ne peut prendre aucune couleur. Supposons que le centre o est un sommet b -dominant, on peut vérifier qu'au plus trois sommets dans le niveau un peuvent être b -dominants, donc il est impossible d'avoir cinq sommets b -dominants vu que les sommets $v_{2i}, 1 \leq i \leq 5$ sont de degré 3, donc ne peuvent pas être choisis b -dominants. Donc $b(S_{5,n}) \leq 4$ et on donne une b -coloration utilisant quatre couleurs, il suffit de prendre comme sommets b -dominants $o, v_{11}, v_{12}, v_{13}$ en leur donnant respectivement les couleurs 4, 1, 2, 3. Colorer respectivement les sommets v_{14}, v_{15} avec les couleurs 1, 3 et ensuite étendre aisément la coloration.

$-n \geq 3$, $m(S_{5,n}) = b(S_{5,n}) = 5$, dans ce cas les sommets $o, v_{1i}; 1 \leq i \leq 2, v_{2i}; 1 \leq i \leq 2$, sont choisis b -dominants de couleurs respectives 1, 2, 3, 5, 4. On donne aux sommets $v_{13}, v_{15}, v_{23}, v_{25}, v_{31}, v_{32}$ respectivement les couleurs 4, 5, 1, 3, 1, 2. On peut étendre ensuite cette coloration partielle à tout le graphe puisque tout autre sommet est de degré au plus quatre.

Si $m \geq 6$ et $n = 1$, $m(S_{m,n}) = b(S_{m,n}) = 4$, il suffit de prendre comme sommets b -dominants $o, v_{1i}; 1 \leq i \leq 3$ en leur donnant respectivement les couleurs 1, 2, 3, 4 et en donnant les couleurs 2 et 4 aux sommets v_{14} et v_{1m} respectivement. On peut étendre ensuite cette coloration partielle à tout le graphe puisque tout autre sommet est de degré au plus trois.

Si $m \geq 6$ et $n \geq 2$, $m(S_{m,n}) = b(S_{m,n}) = 5$, il suffit de prendre comme sommets b -dominants $o, v_{1i}; 1 \leq i \leq 4$ en leur donnant respectivement les couleurs 1, 2, 3, 4, 5 et en donnant aux sommets $v_{15}, v_{1m}, v_2, v_{22}, v_{23}, v_{24}$ respectivement les couleurs 2, 5, 4, 5, 2, 3. On peut étendre ensuite cette coloration partielle à tout le graphe puisque tout autre sommet est de degré au plus quatre. \square

Dans la suite on note par $m'(G)$ le m -degre du graphe $L(G)$.

Théorème 5.18. *Soit $S_{m,n}$ un graphe Spider complet où m et n sont des entiers positifs.*

$$\text{Alors on a: } b'(S_{m,n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (m, n) = (1, 1) \\ 2 & \text{si } (m, n) \in \{(m, n) / m = 1 \text{ et } 2 \leq n \leq 4\} \\ 3 & \text{si } (m, n) \in \{(m, n) / m = 1 \text{ et } n \geq 5\} \cup \{(2, 1), (3, 1)\} \\ 4 & \text{si } (m, n) = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4)\} \\ 5 & \text{si } (m, n) \in \{(m, n) / m = 2 \text{ et } n \geq 5\} \cup \{(4, 1), (5, 1)\} \\ 6 & \text{si } (m, n) \in \{(3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (5, 2), (6, 1)\} \\ 7 & \text{si } \begin{cases} (m, n) \in \{(m, n) / m = 3 \text{ et } n \geq 5\} \cup \\ \{(m, n) / m = 4 \text{ et } n \geq 3\} \cup \\ \{(m, n) / m = 5 \text{ et } n \geq 3\} \cup \\ \{(m, n) / m = 6 \text{ et } n \geq 2\} \end{cases} \\ m & \text{si } (m, n) \in \{m \geq 7 \text{ et } n \geq 1\} \end{cases}$$

Preuve. Si $m = 1$, le graphe $S_{1,n}$ est réduit à une chaîne P_{n+1} .

$b'(S_{1,1}) = 1$ et $b'(S_{1,n}) = 2$ si $n = 2, 3, 4$; $b'(S_{1,n}) = 3$ si $n \geq 5$.

Si $m = 2$

- $n = 1$, $S_{2,1}$ est un triangle et on a: $m'(S_{2,1}) = b'(S_{2,1}) = 3$

- $n = 2$ ou 3 , $m'(S_{2,n}) = b'(S_{2,n}) = 4$, il suffit de colorer les arêtes du triangle $1, 2, 3$ arbitrairement, les arêtes (v_{11}, v_{21}) et (v_{12}, v_{22}) avec la couleur 4 et l'arête (v_{21}, v_{22}) avec la couleur 2, ainsi les arêtes du triangle avec l'arête (v_{11}, v_{21}) sont b' -dominantes.

- $n = 4$, $m'(S_{2,n}) = 5$, en citant d'une manière exhaustive tous les cas possible, on peut voir qu'on ne peut faire une 5 - b' -coloration. Donc $b'(G) = 4$, il suffit pour cela de prendre la même b' -coloration que précédemment.

- $n \geq 5$, $m'(S_{2,n}) = b'(S_{2,n}) = 5$, il suffit de colorer les arêtes (o, v_{12}) , (v_{41}, v_{42}) et (v_{11}, v_{21}) avec la couleur 1, les arêtes (o, v_{12}) , (v_{12}, v_{22}) et (v_{31}, v_{32}) avec la couleur 2, les arêtes (v_{11}, v_{12}) , (v_{31}, v_{41}) et (v_{42}, v_{52}) avec la couleur 3, les arêtes (v_{21}, v_{22}) , (v_{32}, v_{42}) et (v_{41}, v_{52}) avec la couleur 4, les arêtes (v_{21}, v_{31}) et (v_{22}, v_{32}) avec la couleur 5, ainsi les arêtes (v_{11}, v_{21}) , (v_{12}, v_{22}) , (v_{31}, v_{41}) , (v_{32}, v_{42}) et (v_{21}, v_{31}) sont b' -dominantes.

Si $m = 3$

- $n = 1$, $S_{3,1}$ est le graphe complet K_4 et $m'(S_{3,1}) = 5$, supposer qu'on fait une b' -coloration utilisant 5 couleurs, colorer 5 arêtes, sans perdre de généralité $(o, v_{1i}), 1 \leq i \leq 3$, (v_{11}, v_{12}) et (v_{12}, v_{13}) sont colorées successivement avec les couleurs 1, 2, 3, 4, 5 remarquer que seule l'arête de couleur 2 peut être b' -dominante. Alors que $b'(S_{3,1}) \leq 4$, mais là aussi par un raisonnement similaire, si on fait une b' -coloration utilisant 4 couleurs, on colore sans perdre de généralité $(o, v_{1i}), 1 \leq i \leq 3$, (v_{11}, v_{12}) arêtes arbitrairement avec les couleurs 1, 2, 3, 4, remarquer que l'arête de couleur 3 ne peut être b' -dominante. Donc $b'(S_{3,1}) = 3$. On donne une b' -coloration avec 3 couleurs en choisissant trois arêtes b' -dominantes dans un même triangle, et sans perdre de généralité, soit $(o, v_{1i}), 1 \leq i \leq 2$ et (v_{11}, v_{12}) arêtes b' -dominantes colorées respectivement 1, 2, 3, l'arête (o, v_{13}) colorée 3, (v_{12}, v_{13}) colorée 1 et (v_{11}, v_{13}) colorée 2.

- $n = 2$, $m'(S_{3,2}) = b'(S_{3,2}) = 6$, soient les arêtes $(o, v_{1i}), 1 \leq i \leq 3, (v_{11}, v_{21}), (v_{12}, v_{22}), (v_{13}, v_{23})$ colorées respectivement 1, 2, 3, 4, 6, 5 et on complète la coloration pour les rendre b' -dominantes comme suit: on donne la couleur 5 à l'arête (v_{11}, v_{12}) , la couleur 4 à l'arête (v_{12}, v_{13}) , la couleur 6 à l'arête (v_{11}, v_{13}) , la couleur 3 à l'arête (v_{21}, v_{22}) , la couleur 1 à l'arête (v_{22}, v_{23}) et la couleur 2 à l'arête (v_{21}, v_{23}) .

- $n = 3$, $m'(S_{3,3}) = 7$, supposons qu'on puisse faire une b' -coloration utilisant 7 couleurs, seules les 9 arêtes peuvent être b' -dominantes; les arêtes du niveau 1 et 2 et celles qui sont entre les deux. Constatons que deux au plus des 3 arêtes du niveau 1 peuvent être b' -dominantes; et deux au plus dans le niveau 2, ou entre les deux niveaux. Donc $b'(S_{3,3}) = 6$; choisir pour cela la même coloration que le cas précédent et comme les arêtes restantes sont adjacentes à au plus 5 autres alors il est possible de finir la coloration proprement.

- $n = 4$, $m'(S_{3,n}) = 7$, les seules arêtes qui peuvent être b' -dominantes dans une coloration à 7 couleurs, sont celles des niveaux 1, 2, 3 et celles qui sont entre ces trois niveaux; de manière similaire à celle adoptée dans le cas précédent on fait remarquer que deux arêtes peuvent être b' -dominantes dans le niveau 1, deux autres dans le niveau 2 ou entre les niveaux 1 et 2 et deux autres dans le niveau 3 ou entre les niveaux 2 et 3. Donc

$b'(S_{3,n}) = 6$, choisir pour cela la même coloration que le cas précédent, dans ce qui suit on colore les arêtes ayant 6 autres arêtes dans leurs voisinage de la manière suivante: affecter la couleur 1 aux arêtes (v_{21}, v_{31}) et (v_{32}, v_{33}) , la couleur 2 aux arêtes (v_{22}, v_{32}) et (v_{31}, v_{33}) , la couleur 3 aux arêtes (v_{23}, v_{33}) et (v_{31}, v_{32}) et comme les arêtes restantes sont adjacentes à au plus 5 autres alors il est possible de finir la coloration proprement.

- $n \geq 5$, $m'(S_{3,n}) = b'(S_{3,n}) = 7$; dans une coloration b' -dominante utilisant 7 couleurs, il suffit de choisir les arêtes suivantes comme arêtes b' -dominantes $(v_{11}, v_{12}), (v_{12}, v_{13}), (v_{21}, v_{22}), (v_{22}, v_{23}), (v_{32}, v_{33}), (v_{41}, v_{42}), (v_{41}, v_{43})$ de couleurs respectives 1, 2, 3, 5, 4, 6, 7 et compléter comme suit pour les satisfaire: (v_{21}, v_{23}) et (v_{31}, v_{33}) colorées avec la couleur 1, (v_{22}, v_{32}) et (v_{41}, v_{51}) colorées avec la couleur 2, $(o, v_{12}), (v_{32}, v_{42})$ et (v_{43}, v_{53}) colorées avec la couleur 3, $(o, v_{11}), (v_{13}, v_{23}), (v_{21}, v_{31})$ et (v_{42}, v_{43}) colorées avec la couleur 4, $(v_{11}, v_{13}), (v_{33}, v_{43})$ et (v_{42}, v_{52}) colorées avec la couleur 5, $(o, v_{13}), (v_{11}, v_{21})$ et (v_{23}, v_{33}) colorées avec la couleur 6, (v_{12}, v_{22}) et (v_{31}, v_{32}) colorées avec la couleur 7. Comme les arêtes restantes sont adjacentes à au plus 6 autres alors il est possible d'étendre la coloration pour tout le graphe puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour toute arête considérée.

Si $m = 4$

- $n = 1$, $m'(S_{4,n}) = b'(S_{4,n}) = 5$. Pour faire une b' -coloration utilisant 5 couleurs, il suffit de prendre $(o, v_{1i}), 1 \leq i \leq 4$, et (v_{12}, v_{13}) comme arêtes b' -dominantes respectivement colorées 1, 2, 3, 4, 5 et pour les satisfaire, on colore $(v_{11}, v_{12}), (v_{13}, v_{14}), (v_{11}, v_{14})$ respectivement 4, 1, 5.

- $n = 2$, $m'(S_{4,n}) = 7$, supposons qu'on puisse faire une b' -coloration utilisant 7 couleurs, les arêtes pouvant être b' -dominantes sont $(o, v_{i1}), 1 \leq i \leq 4, (v_{11}, v_{12}), (v_{12}, v_{13}), (v_{13}, v_{14}), (v_{11}, v_{14})$; si on choisit trois arêtes b' -dominantes parmi les arêtes $(o, v_{i1}), 1 \leq i \leq 4$, alors aucune arête du niveau 1 ne peut être b' -dominante. Donc $b'(S_{4,n}) = 6$. On donne une b' -coloration utilisant 6 couleurs où les arêtes b' -dominantes sont $(o, v_{i1}), 1 \leq i \leq 4, (v_{12}, v_{13}), (v_{12}, v_{22})$, colorées respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6; pour les satisfaire on colore 4 l'arête (v_{11}, v_{12}) ; 5 l'arête (v_{11}, v_{14}) ; 1 les arêtes $(v_{13}, v_{23}), (v_{14}, v_{24}), (v_{21}, v_{31})$ et ; 6 les arêtes (v_{13}, v_{14}) et (v_{11}, v_{21}) et colorer l'arête (v_{22}, v_{23}) avec la couleur 3; on peut ensuite finir la

coloration de manière propre.

- $n \geq 3$, $m'(S_{4,n}) = b'(S_{4,n}) = 7$ et on donne une b' -coloration utilisant 7 couleurs où les arêtes b' -dominantes sont $(o, v_{i1}), 1 \leq i \leq 4, (v_{13}, v_{23}), (v_{14}, v_{24}), (v_{21}, v_{22})$ colorées respectivement 1, 2, 3, 4, 6, 7, 5 et pour les satisfaire on colore avec la couleur 1 les arêtes $(v_{23}, v_{24}), (v_{22}, v_{32})$, avec la couleur 2 les arêtes $(v_{21}, v_{24}), (v_{23}, v_{33})$; avec la couleur 3 les arêtes $(v_{21}, v_{31}), (v_{24}, v_{34})$; avec la couleur 4 l'arête (v_{22}, v_{23}) , avec la couleur 5 les arêtes $(v_{11}, v_{12}), (v_{13}, v_{14})$, avec la couleur 6 les arêtes (v_{12}, v_{22}) et (v_{11}, v_{14}) ; avec la couleur 7 les arêtes (v_{12}, v_{13}) et (v_{11}, v_{21}) . Comme les arêtes restantes sont adjacentes à au plus 6 autres alors il est possible d'étendre la coloration pour tout le graphe puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour toute arête considérée.

Si $m = 5$

- $n = 1$, $m'(S_{5,n}) = b'(S_{5,n}) = 5$, dans une b' -coloration utilisant 5 couleurs on considère les arêtes b' -dominantes : $(o, v_{i1}), 1 \leq i \leq 5$; colorées respectivement 1, 2, 3, 4, 5; pour compléter la coloration on colore les arêtes $(v_{11}, v_{12}), (v_{12}, v_{13}), (v_{13}, v_{14}), (v_{14}, v_{15}), (v_{11}, v_{15})$ respectivement avec les couleurs 3, 4, 5, 1, 2.

- $n = 2$, $m'(S_{5,n}) = 7$, seules les arêtes $(o, v_{i1}) = i, 1 \leq i \leq 5$ et $(v_{1i}, v_{1(i+1)}), (v_{11}, v_{15}), 1 \leq i \leq 4$, peuvent être b' -dominantes. Si on choisit les arêtes $(o, v_{i1}) = i, 1 \leq i \leq 3$, b' -dominantes dans une b' -coloration utilisant 7 couleurs, alors aucune arête de couleur autres que celles déjà choisies ne sera b' -dominante. On a donc $b'(S_{5,2}) = 6$. Il est simple de trouver une b' -coloration utilisant 6 couleurs, en choisissant $(o, v_{i1}), 1 \leq i \leq 5$ colorées successivement 1, 2, 3, 4, 5 et (v_{13}, v_{14}) colorée 6 comme arêtes b' -dominantes, afin de les satisfaire on colore l'arête (v_{12}, v_{13}) avec la couleur 1, l'arête (v_{14}, v_{15}) avec la couleur 2, l'arête (v_{13}, v_{23}) avec la couleur 5, les arêtes (v_{11}, v_{15}) et (v_{12}, v_{22}) avec la couleur 6, pour compléter cette coloration on colore les arêtes $(v_{11}, v_{12}), (v_{11}, v_{21}), (v_{14}, v_{24})$ et (v_{15}, v_{25}) respectivement avec les couleurs 3, 2, 1, 1; puis finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour toute arête restante considérée.

- $n \geq 3$, $m'(S_{5,n}) = b'(S_{5,n}) = 7$. On donne une b' -coloration utilisant 7 couleurs où les arêtes b' -dominantes sont $(o, v_{i1}), 1 \leq i \leq 5, (v_{14}, v_{24}), (v_{15}, v_{25})$ colorées respec-

tivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, afin de les satisfaire on colore l'arête (v_{14}, v_{15}) avec la couleur 1, les arêtes (v_{23}, v_{24}) et (v_{21}, v_{25}) avec la couleur 2, l'arête (v_{24}, v_{25}) avec la couleur 3, l'arête (v_{25}, v_{35}) avec la couleur 4, l'arête (v_{24}, v_{34}) avec la couleur 5, les arêtes (v_{12}, v_{13}) et (v_{11}, v_{15}) avec la couleur 6, les arêtes (v_{11}, v_{12}) et (v_{13}, v_{14}) avec la couleur 7. Maintenant les arêtes restantes et qui ont 6 autres arêtes dans leur voisinage sont : (v_{11}, v_{21}) , (v_{21}, v_{22}) , (v_{12}, v_{22}) , (v_{22}, v_{23}) , (v_{13}, v_{23}) , colorées respectivement 2, 1, 3, 5, 4; puis finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour toute arête restante considérée.

Si $m = 6$

- $n = 1$, $m'(S_{6,1}) = b'(S_{m,1}) = 6$. Les arêtes b' -dominantes sont données par (o, v_{i1}) , $1 \leq i \leq 6$, colorées respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, puis finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour toute arête restante considérée.

- $n \geq 2$, $m'(S_{6,n}) = b'(S_{m,n}) = 7$. Les arêtes b' -dominantes sont données par (o, v_{i1}) , $1 \leq i \leq 6$ et (v_{14}, v_{15}) , colorées respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, puis finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour toute arête restante considérée.

Si $m \geq 7$, $n \geq 1$, $m'(S_{m,n}) = b'(S_{m,n}) = m$, Les arêtes b' -dominantes sont données par (o, v_{i1}) , $1 \leq i \leq m$, puis finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour toute arête restante considérée. \square

Corollaire 5.19. *Si $m \geq 7$, $n \geq 1$, alors on a $b'(S_{m,n}) = m = \Delta(L(S_{m,n}))$.*

Théorème 5.20. Soit $S_{m,n}$ un graphe Spider complet où m et n sont des entiers positifs.

Alors on a:

$$b_t(S_{m,n}) = \begin{cases} 3 & \text{si } (m,n) = \{(1,1), (1,2), (2,1)\} \\ 4 & \text{si } (m,n) \in \{(1,3)\} \\ 5 & \text{si } (m,n) \in \{(m,n)/m = 1 \text{ et } n \geq 4\} \cup \{(2,2)\} \\ 6 & \text{si } (m,n) \in \{(4,1), (2,3)\} \\ 7 & \text{si } \begin{cases} (m,n) \in \{(m,n)/m = 2 \text{ et } n \geq 4\} \\ \cup \{(2,3), (3,1), (3,2), (5,1), (6,1)\} \end{cases} \\ 8 & \text{si } (m,n) \in \{(3,3), (4,2), (5,2), (7,1)\} \\ 9 & \text{si } \begin{cases} (m,n) \in \{(m,n)/m = 3 \text{ et } n \geq 4\} \cup \\ \{m = 4 \text{ et } n \geq 3\} \cup \{m = 5 \text{ et } n \geq 3\} \cup \\ \{m = 6 \text{ et } n \geq 2\} \cup \{m = 7 \text{ et } n \geq 2\} \end{cases} \\ m+1 & \text{si } (m,n) \in \{(m,n)/m \geq 8 \text{ et } n \geq 1\} \end{cases}$$

Preuve. Les tableaux établis dans la suite donnent la b_t -coloration de $S_{m,n}$ pour les différentes valeurs de m et n , on utilisera * pour indiquer les sommets ou arêtes b_t -dominants.

Si $m = 1$, le graphe $S_{1,n}$ est réduit à une chaîne P_{n+1} et on a:

- $n = 1$, $m_t(S_{1,n}) = b_t(S_{1,n}) = 3$

sommets ou arêtes	o^*	v_{11}^*	$(o, v_{11})^*$
b_t -coloration	1	2	3

- $n = 2$, $m_t(S_{1,n}) = b_t(S_{1,n}) = 3$

sommets ou arêtes	o^*	v_{11}^*	v_{21}	$(o, v_{11})^*$	(v_{11}, v_{21})
b_t -coloration	1	3	2	2	1

- $n = 3$, $m_t(S_{1,n}) = b_t(S_{1,n}) = 4$

sommets ou arêtes	o	v_{11}^*	v_{21}^*	$(o, v_{11})^*$	$(v_{11}, v_{21})^*$	(v_{21}, v_{31})	v_{31}
b_t -coloration	1	3	1	2	4	2	3

- $n = 4$, $m_t(S_{1,n}) = b_t(S_{1,n}) = 5$

sommets ou arêtes	o	v_{11}^*	v_{12}^*	v_{13}^*	v_{14}	(o, v_{11})	$(v_{11}, v_{21})^*$
b_t -coloration	3	1	5	2	4	2	4

$(v_{21}, v_{31})^*$	(v_{31}, v_{41})
3	1

Si $n \geq 5$, $m_t(S_{1,n}) = b_t(S_{1,n}) = 5$, adopter la même coloration, finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour tous arête ou sommet restants considérés.

Si $m = 2$,

- $n = 1$, $m_t(S_{2,n}) = 5$ et $b_t(S_{2,n}) = 3$, car $S_{2,n}$ est un triangle, où à un sommet correspond une arête opposée et on ne peut prendre que l'un des deux; arête ou sommet; comme élément b_t -dominant, donc $b_t(S_{2,n}) = 3$.

sommets ou arêtes	o^*	v_{11}^*	v_{12}^*	(o, v_{11})	(o, v_{12})	(v_{11}, v_{12})
b_t -coloration	1	2	3	3	2	1

- $n = 2$, $m_t(S_{2,n}) = 6$. Si on suppose qu'il existe une coloration dominante totale utilisant 6 couleurs, les sommets et arêtes pouvant être b_t -dominantes sont $ov_{11}, ov_{12}, v_{11}, v_{12}, (v_{11}, v_{12}), (v_{11}, v_{21}), (v_{12}, v_{22})$ et en examinant tous les cas il est impossible de faire une b_t -coloration avec 6 couleurs. Donc $b_t(S_{2,2}) = 5$.

sommets ou arêtes	o	v_{11}^*	v_{12}	v_{21}	v_{22}	$(o, v_{11})^*$	(o, v_{12})
b_t -coloration	5	1	2	5	4	2	1

$(v_{11}, v_{12})^*$	$(v_{11}, v_{21})^*$	$(v_{12}, v_{22})^*$
3	4	5

- $n = 3$, $m_t(S_{2,n}) = 7$. Supposons qu'il existe une coloration dominante totale utilisant 7 couleurs, les sommets et arêtes pouvant être b_t -dominantes sont $v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}, (v_{11}, v_{12}), (v_{11}, v_{21}), (v_{21}, v_{22}), (v_{12}, v_{22})$ et si on colore 7 d'entre eux avec les couleurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et on veut les rendre b_t -dominants il est simple de voir que deux au moins parmi eux ne peuvent pas être b_t -dominants. Donc $b_t(S_{2,3}) = 6$.

sommets ou arêtes	v_{11}^*	v_{21}^*	v_{12}^*	v_{22}^*	v_{32}	$(v_{11}, v_{21})^*$	$(v_{11}, v_{12})^*$	(o, v_{11})
b_t -coloration	1	2	3	4	6	6	5	4

(o, v_{12})	(v_{21}, v_{31})	(v_{22}, v_{32})	(v_{12}, v_{22})	(v_{21}, v_{22})
6	3	1	2	5

Finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour

tous arête ou sommet restants considérés.

- $n \geq 4$, $m_t(S_{2,n}) = b_t(S_{2,n}) = 7$.

sommets ou arêtes	o	(o, v_{11})	(o, v_{12})	v_{11}^*	v_{12}^*	(v_{11}, v_{12})	v_{21}	v_{22}^*
b_t -coloration	3	2	7	1	5	4	7	6
(v_{11}, v_{21})	$(v_{12}, v_{22})^*$	v_{42}	(v_{21}, v_{22})	(v_{21}, v_{31})	$(v_{22}, v_{32})^*$	v_{31}	v_{32}^*	
6	2	1	1	6	3	2	4	
$(v_{31}, v_{32})^*$	(v_{31}, v_{41})	(v_{32}, v_{42})						
7	1	5						

Pour $n \geq 5$, on choisira les mêmes sommets et arêtes b_t -dominants puis on étend la coloration à tout le graphe.

Si $m = 3$,

- $n = 1$, $m_t(S_{3,n}) = 7$.

Remarquer que $S_{3,n}$ est un K_4 , et que les sommets $o, v_{11}, v_{12}, v_{13}$ jouent le même rôle, si on choisit un sommet quelconque b_t -dominant dans une coloration dominante totale utilisant 7 couleurs, on peut voir qu'au moins une classe de couleur ne peut avoir de sommet ou arête b_t -dominante donc $o, v_{11}, v_{12}, v_{13}$ ne peuvent être b_t -dominants. Il restera cependant 6 arêtes, ce qui n'est pas suffisant pour faire une coloration dominante totale avec 7 couleurs; alors $b_t(S_{3,n}) = 6$. Avec un raisonnement analogue les sommets ne peuvent être b_t -dominants, donc les arêtes sont toutes b_t -dominantes mais ceci ne peut être réalisé.

Donc $b_t(S_{3,n}) = 5$; on donne une b_t -coloration

sommets ou arêtes	o^*	$(o, v_{11})^*$	$(o, v_{12})^*$	$(o, v_{13})^*$	(v_{11}, v_{12})	(v_{12}, v_{13})
b_t -coloration	1	2	3	4	1	2
(v_{11}, v_{13})	v_{11}	v_{12}^*	v_{13}			
5	4	5	3			

- $n = 2$, $m_t(S_{3,n}) = 8$. Remarquer que seuls les sommets v_{1i} , $1 \leq i \leq 3$ et les arêtes (o, v_{1i}) , $1 \leq i \leq 3$, (v_{11}, v_{21}) , (v_{12}, v_{22}) , (v_{13}, v_{23}) , (v_{11}, v_{12}) , (v_{12}, v_{13}) , (v_{11}, v_{13}) peuvent être b_t -dominants.

Pour toute b_t -coloration utilisant 8 couleurs, on ne peut arriver à rendre b_t -dominants

qu'au plus 5 sommets ou arêtes. Donc $b_t(S_{3,2}) = 7$ et on donne une b_t -coloration utilisant 7 couleurs :

sommets ou arêtes	o^*	$(o, v_{11})^*$	$(o, v_{12})^*$	$(o, v_{13})^*$	v_{11}	v_{12}	v_{13}^*	(v_{11}, v_{12})
b_t -coloration	1	2	3	4	5	6	7	1
$(v_{12}, v_{13})^*$	(v_{11}, v_{13})	(v_{11}, v_{21})	(v_{12}, v_{22})	(v_{13}, v_{23})	v_{21}^*	v_{22}	v_{23}	(v_{21}, v_{22})
5	6	7	7	2	6	2	3	1
(v_{21}, v_{23})	(v_{22}, v_{23})							
4	6							

- $n = 3$, $m_t(S_{3,n}) = 9$; Remarquer que les seuls sommets et arêtes pouvant être b_t -dominants dans une b_t -coloration utilisant 9 couleurs sont v_{ij} , $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3$, (v_{11}, v_{12}) , (v_{12}, v_{13}) , (v_{11}, v_{13}) , (v_{11}, v_{21}) , (v_{12}, v_{22}) , (v_{13}, v_{23}) , (v_{21}, v_{22}) , (v_{22}, v_{23}) , (v_{21}, v_{23}) . Si on colore arbitrairement 9 sommets ou arêtes parmi ces derniers, et on veut les rendre b_t -dominants alors on ne peut avoir que 5 sommets b_t -dominants; donc $b_t(S_{3,n}) = 8$ et on donne une b_t -coloration utilisant 8 couleurs :

sommets ou arêtes	o	(o, v_{11})	(o, v_{12})	(o, v_{13})	v_{11}^*	v_{12}^*	v_{13}^*	(v_{11}, v_{12})
b_t -coloration	5	4	7	8	1	2	3	6
(v_{12}, v_{13})	(v_{11}, v_{13})	$(v_{11}, v_{21})^*$	(v_{12}, v_{22})	(v_{13}, v_{23})	v_{21}^*	v_{22}^*	v_{23}^*	
4	7	8	8	6	5	4	7	
(v_{21}, v_{22})	(v_{22}, v_{23})	(v_{21}, v_{23})	(v_{21}, v_{31})	$(v_{22}, v_{32})^*$	(v_{23}, v_{33})	v_{31}	v_{32}	
3	1	4	3	6	2	6	3	
v_{33}	(v_{31}, v_{32})	(v_{32}, v_{33})	(v_{31}, v_{33})					
8	5	7	1					

- $n \geq 4$, $m_t(S_{3n}) = b_t(S_{3n}) = 9$.

sommets ou arêtes	o	(o, v_{11})	(o, v_{12})	(o, v_{13})	v_{11}^*	v_{12}^*	v_{13}^*	(v_{11}, v_{12})
b_t -coloration	5	4	7	8	1	2	3	6
(v_{12}, v_{13})	(v_{11}, v_{13})	$(v_{11}, v_{21})^*$	(v_{12}, v_{22})	$(v_{13}, v_{23})^*$	v_{21}	v_{22}	v_{23}^*	(v_{21}, v_{22})
9	7	8	4	4	9	8	6	5

(v_{22}, v_{23})	(v_{21}, v_{23})	(v_{21}, v_{31})	(v_{22}, v_{32})	$(v_{23}, v_{33})^*$	v_{31}	v_{32}	v_{33}^*	(v_{31}, v_{32})
1	2	3	6	5	1	2	7	4
$(v_{32}, v_{33})^*$	(v_{31}, v_{33})	(v_{32}, v_{42})	(v_{33}, v_{43})	v_{43}				
9	8	1	3	4				

Finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour tous arête ou sommet restants considérés.

Si $m = 4$.

- $n = 1$, $m_t(S_{4,n}) = 7$. Supposons qu'on puisse faire une coloration b_t -dominante utilisant 7 couleurs, on colore le centre avec la couleur 7. Si le centre est dominant pour cette couleur alors on colore les arêtes (o, v_{1i}) , ($i = 1, 2, 3, 4$) choisies b_t -dominantes avec les couleurs 1, 2, 3, 4 et choisir deux sommets b_t -dominants parmi les quatre sommets adjacents au centre, sans perte de généralité on peut prendre ou bien v_{11}, v_{12} ou v_{11}, v_{13} colorés respectivement avec les couleurs 5, 6. Alors il est simple de voir que trois arêtes ou sommets ne peuvent être b_t -dominants. Même raisonnement pour le cas où on prend quatre sommets b_t -dominants et deux arêtes b_t -dominantes adjacents au centre. Si le centre est non b_t -dominant pour cette couleur alors cette couleur va être portée par une des arêtes $(v_{11}, v_{12}), (v_{12}, v_{13}), (v_{13}, v_{14}), (v_{11}, v_{14})$; alors sans perdre de généralité on choisit comme arête b_t -dominante colorée 7, (v_{12}, v_{13}) . Il est simple de vérifier qu'au moins une classe de couleur ne contient de sommet ou arête b_t -dominant. Donc $b_t(S_{4,n}) = 6$; et une b_t -coloration utilisant 6 couleurs est donnée.

sommets ou arêtes				o^*	$(o, v_{11})^*$	$(o, v_{12})^*$	$(o, v_{13})^*$	$(o, v_{14})^*$	$(v_{12}, v_{13})^*$
b_t -coloration				1	2	3	4	5	6
v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	(v_{11}, v_{12})	(v_{13}, v_{14})	(v_{11}, v_{14})			
3	2	5	2	1	1	6			

- $n = 2$, $m_t(S_{4,n}) = 9$. Les sommets et arêtes pouvant être b_t -dominants dans une coloration dominante totale utilisant 9 couleurs sont: $o; v_{1i}, (o, v_{1i}), 1 \leq i \leq 4; (v_{11}, v_{12}), (v_{12}, v_{13}), (v_{13}, v_{14}), (v_{11}, v_{14})$. On raisonne de manière similaire au cas précédent, en considérant le cas où le centre est b_t -dominant et le cas où il ne l'est pas et dans chacun des cas on

peut vérifier qu'on n'arrive pas à une 9 - b_t -coloration. Donc $b_t(S_{4,2}) = 8$.

sommets ou arêtes	o^*	$(o, v_{11})^*$	$(o, v_{12})^*$	$(o, v_{13})^*$	$(o, v_{14})^*$	$(v_{13}, v_{23})^*$	v_{23}		
b_t -coloration	1	2	3	4	5	7	2		
v_{24}	(v_{22}, v_{23})	(v_{21}, v_{24})	v_{11}	v_{12}	v_{13}^*	v_{14}	(v_{11}, v_{12})	(v_{12}, v_{13})	(v_{13}, v_{14})
4	5	2	6	5	8	7	7	6	3
(v_{11}, v_{14})	(v_{11}, v_{21})	(v_{12}, v_{22})	$(v_{14}, v_{24})^*$	(v_{23}, v_{24})	v_{21}	v_{22}	(v_{21}, v_{22})		
8	1	8	6	1	3	4	7		

- $n \geq 3$, $m_t(S_{4,n}) = b_t(S_{4,n}) = 9$.

sommets ou arêtes	o^*	$(o, v_{11})^*$	$(o, v_{12})^*$	$(o, v_{13})^*$	$(o, v_{14})^*$	$(v_{13}, v_{23})^*$		
b_t -coloration	1	2	3	4	5	9		
v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	(v_{11}, v_{12})	(v_{12}, v_{13})	(v_{13}, v_{14})	(v_{11}, v_{14})	$(v_{11}, v_{21})^*$
6	7	8	9	9	6	7	8	7
$(v_{12}, v_{22})^*$	$(v_{14}, v_{24})^*$	(v_{23}, v_{24})	v_{21}	v_{22}	(v_{21}, v_{22})	(v_{21}, v_{24})	(v_{21}, v_{31})	
8	6	2	3	2	5	1	4	
(v_{22}, v_{32})	(v_{23}, v_{33})	(v_{24}, v_{34})	(v_{22}, v_{23})	v_{23}	v_{24}	(v_{21}, v_{24})	(v_{21}, v_{31})	
4	3	3	1	5	4	1	4	
(v_{22}, v_{32})	(v_{23}, v_{33})	(v_{24}, v_{34})						
4	3	3						

Finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour tous arête ou sommet restants considérés.

Si $m = 5$,

- $n = 1$, $m_t(S_{5,n}) = b_t(S_{5,n}) = 7$.

sommets ou arêtes	o^*	$(o, v_{11})^*$	$(o, v_{12})^*$	$(o, v_{13})^*$	$(o, v_{14})^*$	$(o, v_{15})^*$	v_{11}	
b_t -coloration	1	2	3	4	5	6	3	
v_{12}	v_{13}^*	v_{14}	v_{15}	(v_{11}, v_{12})	(v_{12}, v_{13})	(v_{13}, v_{14})	(v_{14}, v_{15})	(v_{11}, v_{15})
2	7	6	5	7	5	3	7	1

- $n = 2$, $m_t(S_{5,n}) = 9$. Seules les arêtes (o, v_i) , $1 \leq i \leq 5$, $(v_i, v_{1(i+1)})$; $1 \leq i \leq 4$,

(v_{11}, v_{15}) et les sommets o, v_i , $1 \leq i \leq 5$, peuvent être b_t -dominants. En citant de manière

exhaustive toutes les manières de choisir les 9 sommets b_t -dominants, il est impossible de faire une $9-b_t$ -coloration. On a alors $b_t(S_{5,2}) = 8$.

sommets ou arêtes				o^*	$(o, v_{11})^*$	$(o, v_{12})^*$	$(o, v_{13})^*$	$(o, v_{14})^*$	$(o, v_{15})^*$	v_{11}
b_t -coloration				1	2	3	4	5	6	5
v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}^*	(v_{11}, v_{12})	(v_{12}, v_{13})	$(v_{11}, v_{15})^*$	(v_{13}, v_{14})			
7	8	2	8	8	1	7	7			
(v_{14}, v_{15})		(v_{11}, v_{21})		(v_{12}, v_{22})	(v_{13}, v_{23})	(v_{14}, v_{24})	(v_{15}, v_{25})	v_{25}		
4		1		2	2	8	3	5		

Le reste des sommets et arêtes sont de degré 6, on finit la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour tous arête ou sommet restants considérés.

- $n \geq 3$, $m_t(S_{5,n}) = b_t(S_{5,n}) = 9$.

sommets ou arêtes				o^*	$(o, v_{11})^*$	$(o, v_{12})^*$	$(o, v_{13})^*$	$(o, v_{14})^*$	$(o, v_{15})^*$	v_{11}^*
b_t -coloration				1	2	3	4	5	6	9
v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	(v_{11}, v_{12})	(v_{12}, v_{13})	(v_{11}, v_{15})	(v_{13}, v_{14})	(v_{14}, v_{15})		
5	8	2	3	8	9	7	7	8		
(v_{11}, v_{21})		$(v_{12}, v_{22})^*$		(v_{13}, v_{23})	(v_{14}, v_{24})	(v_{15}, v_{25})	v_{21}	(v_{21}, v_{22})	v_{22}	
4		7		7	9	9	6	1	2	
(v_{22}, v_{23})		(v_{23}, v_{24})		v_{24}	v_{25}^*	(v_{24}, v_{25})	(v_{21}, v_{25})	v_{35}		
6		4		1	8	7	2	5		
(v_{22}, v_{32})		(v_{25}, v_{35})								
4		4								

Finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour tous arête ou sommet restants considérés.

Si $m = 6$

- $n = 1$, $m_t(S_{6,n}) = b_t(S_{6,n}) = 7$.

sommets ou arêtes				o^*	$(o, v_{11})^*$	$(o, v_{12})^*$	$(o, v_{13})^*$	$(o, v_{14})^*$	$(o, v_{15})^*$
b_t -coloration				1	2	3	4	5	6

$(o, v_{16})^*$
7

Finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour tous arête ou sommet restants considérés.

- $n \geq 2$, $m_t(S_{6n}) = b_t(S_{6n}) = 9$.

sommets ou arêtes	o^*	$(o, v_{11})^*$	$(o, v_{12})^*$	$(o, v_{13})^*$	$(o, v_{14})^*$	$(o, v_{15})^*$				
b_t -coloration	1	2	3	4	5	6				
$(o, v_{16})^*$	v_{11}^*	v_{12}	v_{13}^*	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{21}	v_{23}	(v_{11}, v_{12})	(v_{12}, v_{13})
7	8	6	9	7	5	4	3	5	9	2
(v_{11}, v_{16})	(v_{13}, v_{14})	(v_{14}, v_{15})	(v_{15}, v_{16})	(v_{11}, v_{21})	(v_{12}, v_{22})					
5	8	1	8	7	8					
(v_{13}, v_{23})	(v_{14}, v_{24})	(v_{15}, v_{25})	(v_{16}, v_{26})							
3	9	9	9							

Finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour tous arête ou sommet restants considérés.

Si $m = 7$.

- $n = 1$, $m_t(S_{7,n}) = b_t(S_{7,n}) = 8$.

sommets ou arêtes	o^*	$(o, v_{11})^*$	$(o, v_{12})^*$	$(o, v_{13})^*$	$(o, v_{14})^*$	$(o, v_{15})^*$	$(o, v_{16})^*$
b_t -coloration	1	2	3	4	5	6	7
$(o, v_{17})^*$							
8							

Finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour tous arête ou sommet restants considérés.

- $n \geq 2$, $m_t(S_{7,n}) = b_t(S_{7,n}) = 9$.

sommets ou arêtes	o^*	$(o, v_{11})^*$	$(o, v_{12})^*$	$(o, v_{13})^*$	$(o, v_{14})^*$	$(o, v_{15})^*$	$(o, v_{16})^*$	
b_t -coloration	1	2	3	4	5	6	7	
$(o, v_{17})^*$	v_{11}	v_{16}	v_{17}^*	(v_{11}, v_{12})	(v_{11}, v_{17})	(v_{13}, v_{14})	(v_{15}, v_{16})	(v_{16}, v_{17})
8	5	2	9	9	4	9	9	3

(v_{17}, v_{27})	v_{27}
7	6

Finir la coloration proprement puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour tous arête ou sommet restants considérés.

Si $m \geq 8$ et $n \geq 1$, on a $m_t(S_{m,n}) = b_t(S_{m,n}) = m + 1$. Il suffit de prendre comme sommet et arêtes b_t -dominants le centre o et les arêtes $(o, v_{1i}), 1 \leq i \leq m$ en leur affectant les couleurs $1, \dots, m + 1$ respectivement puis étendre cette coloration à tout le graphe ceci est possible puisqu'il existe toujours une couleur disponible pour tous arête ou sommet restants. □

Conclusion

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés en particulier à la b -coloration des graphes et leur b -continuité. R. Irving et D. Manlove [2] ont montré que la détermination du nombre b -chromatique en général est NP -difficile mais peuvent trouver sa solution en un temps polynomial dans le cas des arbres, de son côté T. Faik [24] a montré que le problème de décision de la b -continuité d'un graphe est NP -complet.

Nous avons dans un premier temps rappelé, les résultats existants et récents sur la b -coloration dans les graphes, notamment ceux de Omoomi, Klavzar et enfin ceux de Kouider.

Nous avons ensuite amélioré la preuve du théorème de S. Klavzar et donné un contre exemple à la conjecture de El Sahili et Kouider qu'on a reformulé et montré pour le cas des petits degrés "Soit G un graphe d -régulier de maille au moins cinq, différent du graphe de Petersen et tel que $d \leq 6$. Alors $b(G) = d + 1$ ".

Aussi nous avons exposé l'algorithme de Irving et Manlove qui détermine le nombre b -chromatique dans un arbre et nous avons étudié la possibilité de son application pour le cas des bloc graphes. Par la suite nous avons étudié la b -continuité des graphes cactus .

Nous avons enfin déterminé des bornes et des valeurs exactes du nombre b -chromatique dans les graphes de Harary et les graphes spider (araignée) et infirmé le problème posé par Effantin et Kheddouci.

Beaucoup de problèmes restent ouverts dans ce domaine et peuvent être étudiés antérieurement tels que :

- 1) Quelle est la valeur exacte de $b(G)$ si G est un graphe d -régulier de maille 3 et 4, quand $d = 4, 5$ ou 6. (Suite à nos travaux et ceux de Klavzar)
- 2) Pour tout entier positif $n \geq 5$ on a : $b(K_n \square K_n) = 2n - 3$. (Suite aux travaux de Omoomi)
- 3) Tout graphe d -régulier de maille au moins 5, différent du graphe de Petersen admet une b -coloration avec $d + 1$ couleurs.

Bien que ces résultats et ceux obtenus avant soient importants, nous sommes loin de répondre aux nombreux problèmes posés dans le domaine de la b -coloration et la b -continuité.

RÉFÉRENCES

- [1] F. Harary, S. Hedetniemi. The achromatic number of a graph. *Journal of Combinatorial Theory* 8 (1970) 154–161.
- [2] R.W. Irving, D.F. Manlove. The b -chromatic number of graphs. *Discrete Appl. Math.* 91 (1999) 127–141.
- [3] D.F. Manlove. Minimaximal and maximinimal optimisation problems: a partial order-based approach. PhD thesis. Tech. Rep. 27, Comp. Sci. Dept., Univ. Glasgow, Scotland, 1998.
- [4] C. Berge. *Graphs*. North Holland, 1985.
- [5] P.Erdos, A.L. Rubin, H. Taylor, Choosability in graphs, PROC. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Arcata, California(1979), p. 125-157, Congruessus umerantium XXVI.
- [6] V.G. Vizing, Vertex colorings with given colors(en russe), *Methody discret. Analiz*, 29(1976), 3-10.
- [7] M. Kouider, M. Mahéo, Some bounds for the b -chromatique number of graph, *Discrete Mthematics* 256 (2002), 267–277.
- [8] M. Kneser, Aufgabe 300, *Jber. Deutsch. Math.-Verem*, 58 (1955), 27.
- [9] L. Lovasz, Kneser’s conjecture, Chromatic number and homotopy, *Journal of combinatorial Theory Series A* 25 (1978) 319–324.
- [10] R. Javadi and B. Omoomi, On b -coloring of Kneser graphs, *Discrete Mathematics* 309 (2009), 4399–4408.

- [11] H. Hajiabolhassan, on the b -chromatic number of Kneser Graphs, *Discrete Mathematics* 158 (2010) 232–234.
- [12] M. Jakovac, S. Klavzar, The b -chromatic number of cubic graphs, Manuscript, *Preprint Series Vol. 47* (2009) 1067, Univ. Of Ljubljana, Slovenia.
- [13] J. Kratochvil, Z. Tuza, M. Voigt, On the b -chromatic number of graphs, *Lecture Notes in Comput. Sci.* 2573 (2002) 310–320.
- [14] Mostafa Blidia, Frederic Maffray, Zoham Zémir, On b -colorings in régular graphs, COSI'2007, 11-13 juin 2007 - Oran Algérie
- [15] Mostafa Blidia, Frederic Maffray, Zoham Zémir, On b -colorings in régular graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 157 (2009) 1787–1793.
- [16] C.T. Hoàng, M. Kouider. On the b -dominating coloring of graphs. *Disc. Appl. Math.* 152 (2005) 176–186.
- [17] Ramin Javadi and Behnaz Omoomi, On b -coloring of cartesian product of graphs, *Ars Combinatoria*.
- [18] M. Kouider, A. El Sahili, About b -colouring of regular graphs, Rapport de Recherche No 1432, CNRS-Université de Paris Sud–LRI, 02/2006.
- [19] S. Gravier, Coloration et produits de graphes, Ph.D. Thesis, Univ. Grenoble, France, 1996.
- [20] P. Rowlinson, I. Sciriha. Some properties of the Hoffman-Singleton graph. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* 1 (2007) 438–445.
- [21] E.W. Weisstein. Hoffman-Singleton Graph. From MathWorld–A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Hoffman-SingletonGraph.html>
- [22] F. Maffray and A. Silva. b -colouring outerplanar graphs with large girth, soumis à *Discrete Mathematics*.

- [23] Saeed Shaebani, On b -continuity Of Kneser Graphs of type $KG(2k + 1, k)$, <http://arxiv.org/abs/0909.2770v1>.
- [24] T. Faik. La b -continuité des b -colorations: complexité, propriétés structurelles et algorithmes. PhD thesis, Univ. Orsay, France, 2005.
- [25] M. Kouider. b -chromatic number of a graph, subgraphs and degrees, Res. Rep. 1392, LRI, Univ. Orsay, France, 2004.
- [26] Zoham Zémir, Nouredine Ikhlef-Eschouf, Mostafa Blidia, Note on b -colorings in Harary graphs, COSI'2010, 18-20 Avril 2010, Ouargla, Algérie.
- [27] Z. Zoham; Note on b -colorings in Harary graphs, Colloque 8th FCC, LRI, Orsay, Paris, Juin-Juillet 2010, France.
- [28] Zoham Zémir, Nouredine Ikhlef-Eschouf, Mostafa Blidia, Note on b -colorings in Harary graphs, soumis à Discrete Mathematics.
- [29] P.Kazemi, Chromatic number in some graphs. International Mathematical Forum 2.2007, N° ,35,(1723-1727).
- [30] H Abollahzdeh Ahangar, L.Pushpalatha, On the chromatic number of some harary graphs. International Mathematical Forum, 4, 2009, n°.31,1511-1514
- [31] B. Effantin, H. Kheddouci. The b -chromatic number of some power graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 6 (2003) 45–54.
- [32] Sadegh Rahimi Sharebaf; Vertex, Edge and Total Coloring in Spider Graphs, Applied Mathematical science, Vol. 3, 2009, no. 18, 877-881
- [33] S. Corteel, M. Valencia-Pabon, J.-C. Vera. On approximating the b -chromatic number. *Disc. Appl. Math.* 146 (2005) 106–110.
- [34] M. Kouider, M. Zaker. Bounds for the b -chromatic number of some families of graphs. *Disc. Math.* 306 (2006) 617–623.