

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Modélisation Mathématique pour l'aide à la décision sur

**RECONNAISSANCE DE CERTAINS GRAPHES
DE TYPE HYPERCUBES**

Présenté par
SAHRAOUI Abdelkader

Devant le jury composé de :

M^r. M. BLIDIA

M^r. A. BERRACHEDI

M^r. M. CHELLALI

M^r. A. SEMRI

M^{elle}. N. KAHOUL

Prof, USDB, Blida

Prof, USTHB, Alger

MCA, USDB, Blida

MCA, USTHB, Alger

MCB, USTHB, Alger

Président

Promoteur

Examineur

Examineur

Invitée

RÉSUMÉ

L'ensemble des voisins communs à une distance donnée i d'un sommet u , noté $N_i(u)$, représente une propriété importante dans la classe des $(0, 2)$ -graphes (qui admet l'hypercube comme graphe maximum), où chaque paire de sommets a exactement deux voisins communs à distance 1 ou aucun.

À travers ce manuscrit et au chapitre 3 on donne une reconnaissance des $\{2, 2\}$ -graphes où chaque paire de sommets a exactement 2 voisins communs à distance 2 ou aucun.

Au chapitre 4 on essaye également de donner une reconnaissance des graphes $[4, 1, 8]$ -cycle réguliers où chaque chaîne de longueur 4 appartient à exactement un cycle de longueur 8 ou aucun.

ABSTRACT

The set of common neighbors at a given distance i of a vertex u , denoted $N_i(u)$, is an important property in the class of $(0, 2)$ -graphs (which admits the hypercube as a graph maximum), where each pair of vertices has two neighbors exactly one or none.

through this manuscript and in chapter 3 we give a recognition of the $\{2, 2\}$ -graphs where each pair of vertices has exactly 2 common neighbors at a distance 2 or none.

Chapter 4 is also trying to give recognition of $[4, 1, 8]$ -regular cycle graphs or each string of length 4 belongs to exactly one cycle of length 8 or none.

Table des matières

RÉSUMÉ	1
GÉNÉRALITÉS	9
1 GÉNÉRALITÉS	10
1.1 <u>Définitions de base</u>	10
1.1.1 <u>Graphes</u>	10
1.1.2 <u>Représentation d'un graphe</u>	10
1.1.3 <u>Degré et voisinage d'un sommet</u>	10
1.2 <u>Quelques graphes particuliers</u>	11
1.2.1 <u>Graphe complémentaire d'un graphe</u>	11
1.2.2 <u>Sous graphe, graphe partiel et sous graphe partiel d'un graphe</u>	12
1.2.3 <u>Graphes complets</u>	12
1.2.4 <u>Clique, stable et transversal</u>	13
1.2.5 <u>Couplage et recouvrement</u>	13
1.2.6 <u>Chaîne et cycle</u>	13
1.2.7 <u>Graphes connexes</u>	14
1.2.8 <u>Graphes Eulériens et graphes Hamiltoniens</u>	14
1.2.9 <u>Arbres et forêts</u>	15
1.2.10 <u>Graphe adjoint représentatif d'arêtes(line graph)</u>	16
1.2.11 <u>Graphes bipartis</u>	16
1.2.12 <u>Graphes multipartis complets</u>	17
1.3 <u>Distance</u>	18
1.4 <u>Graphes réguliers</u>	19
1.4.1 <u>Graphes semi-réguliers</u>	19
1.4.2 <u>Le graphe joint d'un graphe</u>	19
1.4.3 <u>Graphe équilibré</u>	20
1.4.4 <u>Graphe fortement régulier</u>	20
1.4.5 <u>Graphe biparti semi-régulier</u>	20
1.4.6 <u>Graphe retardé-régulier</u>	20
1.4.7 <u>Graphe retardé-semi-régulier</u>	21
1.5 <u>Homomorphisme, Isomorphisme et Homéomorphisme</u>	21
1.6 <u>Graphe sommet-transitif et graphe arête-transitive</u>	22
1.7 <u>Opérations sur les graphes</u>	22
1.7.1 <u>Produit carré</u>	22
1.7.2 <u>Produit catégoriel</u>	23

1.7.3	<u>Identification de sommets</u>	24
1.7.4	<u>Contraction d'une chaîne</u>	24
1.7.5	<u>Subdivision d'un graphe</u>	24
1.7.6	<u>Décomposition d'un graphe en niveaux</u>	25
Hypercube		25
2	Hypercubes	26
2.1	<u>Le graphe hypercube</u>	26
2.1.1	<u>Projection et anti-projection</u>	28
2.1.2	<u>Le graphe L_n^i</u>	28
2.2	<u>Graphes intervalles</u>	29
2.2.1	<u>Intervalle</u>	29
2.2.2	<u>Ensemble convexe</u>	30
2.2.3	<u>Graphes Intervalles-réguliers</u>	30
2.2.4	<u>Graphes intervalle-monotones</u>	30
2.3	<u>Les graphes impairs</u>	31
2.4	<u>Les graphes impairs étendus</u>	31
2.5	<u>Graphes médians</u>	32
2.6	<u>Les graphes barbell</u>	33
2.7	<u>Plongement de graphes</u>	33
2.7.1	<u>Plongement isométrique</u>	34
2.8	<u>Les $(0, \lambda)$-graphes</u>	34
2.9	<u>Les graphes cycles réguliers</u>	37
2.9.1	<u>Opérations sur les graphes cycle réguliers</u>	39
2.10	<u>La classe des graphes $[3, 1, 6]$-cycle induit réguliers</u>	39
2.10.1	<u>Opérations sur les graphes $[3, 1, 6]$-cycle induit réguliers</u>	40
Les $\{\lambda, \mu\}$-graphes		40
3	Les $\{\lambda, \mu\}$-graphes	41
3.1	<u>Le $\{\lambda, \mu\}$-graphe</u>	41
3.2	<u>$\{2, 2\}$-graphe</u>	42
3.3	<u>Opérations sur les $\{2, 2\}$-graphes</u>	68
Les Graphes $[4, 1, 8]$-cycle réguliers		68
4	Graphes $[4, 1, 8]$-cycle réguliers	69
4.1	<u>Graphes $[\mu, \lambda, 2\mu]$-cycle réguliers</u>	69
4.2	<u>Graphes $[4, 1, 8]$-cycle réguliers</u>	69
Bibliographie		87

Table des figures

1.1	Un graphe simple	11
1.2	Un graphe semi-Eulérien	15
1.3	Un graphe non Eulérien	15
1.4	Le dodécaèdre	16
1.5	Un arbre	16
1.6	Le graphe multiparti complet $K_{1,1,m}$	18
1.7	Le graphe $K_{1,1,2} = K_4 - e$	18
1.8	Le triangle	19
1.9	Le graphe joint de C_4	20
1.10	Deux graphe isomorphes	21
1.11	Le décomposition en niveaux	25
2.1	L'icosaèdre	35
2.2	Un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier	37
2.3	Un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier	39
3.1	C_{4k+2} avec $d(u, v) = 2$	41
3.2	C_{4k+2} avec $d(u, v) \neq 2$	42
3.3	C_{4k+1} ou C_{4k+3} avec $d(u, v) = 1$	42
3.4	Un $\{2, 2\}$ -graphe G	43
3.5	Un non $\{2, 2\}$ -graphe H	44
3.6	Un $\{2, 2\}$ -graphe H	46
3.7	La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 1 et 20	57
3.8	La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 2 et 16	59
3.9	La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 3 et 17	60
3.10	La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 4 et 18	61
3.11	La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 5 et 19	62
3.12	La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 6 et 11	63
3.13	La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 7 et 12	64
3.14	La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 8 et 13	65
3.15	La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 9 et 14	66
3.16	La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 10 et 15	67
4.1	Le graphe de désargues	69
4.2	La décomposition en niveaux du graphe de désargues	70
4.3	Le graphe de peterson	74
4.4	La chaîne $xyzv$	77

Liste des tableaux

1.1	un isomorphisme f	22
3.1	Le tableau des $N_2(u) \cap N_2(v)$	43
3.2	Le tableau des $ N_2(u) \cap N_2(v) $	44
3.3	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(1)$	57
3.4	Le tableau des $ N_i(v) \cap N_{4-i}(1) $	58
3.5	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(20)$	58
3.6	Le tableau des $ N_i(v) \cap N_{4-i}(20) $	58
3.7	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(2)$	59
3.8	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(18)$	60
3.9	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(3)$	60
3.10	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(17)$	61
3.11	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(4)$	61
3.12	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(18)$	62
3.13	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(5)$	62
3.14	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(19)$	63
3.15	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(6)$	63
3.16	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(11)$	64
3.17	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(7)$	64
3.18	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(12)$	65
3.19	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(8)$	65
3.20	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(13)$	66
3.21	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(9)$	66
3.22	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(14)$	67
3.23	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(10)$	67
3.24	Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(15)$	68

REMERCIEMENT

Le travail présenté dans ce manuscrit a été réalisé au sein du laboratoire LAID3 à l'université USTHB, dont je tiens à remercier mon directeur de thèse *M^r* BERRACHEDI Abdelhafid, professeur au USTHB, pour la confiance qu'il m'a accordé en me permettant de réaliser ce manuscrit sous sa direction et pour avoir bien voulu m'encadré et dirigé mon travail avec sérieux et grande compétence pendant ces années. Qu'il trouve ici tous mes remerciements pour sa présence permanente tant sur le plan professionnel que personnel.

Je tiens à remercier également les membres du jury :

M^r BLIDIA Mostafa, Professeur de L'USDB, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.

M^{elle} KAHOUAL Nawel docteur à USTHB, pour avoir accepté d'être membre invité de ce jury et pour la grande rigueur scientifique qu'elle a montré chaque fois que j'ai eu l'occasion de travailler avec elle, je lui suis très reconnaissant de l'attention qu'elle a portée à mes travaux.

M^r CHELLALI Mustapha et *M^r* SEMRI Ahmed, pour avoir accepté d'être membres de ce jury.

NOTATION

uv	Arête d'extrémités u et v .
$ A $	Cardinal de l'ensemble A .
C_n	Cycle induit de longueur n .
$\delta(G)$	Degré minimum du graphe G .
$\Delta(G)$	Degré maximum du graphe G .
$diam(G)$	Diamètre de G .
$D(A)$	Dimension cubique.
$d_G(u, v)$ (ou $d(u, v)$)	Distance entre les deux sommets u et v .
V	Ensemble des sommets d'un graphe (Vertex set).
E	Ensemble des arêtes d'un graphe (Edge set).
$e(u)$	éxcentricité du sommet u .
$G = (V, E)$	G un graphe, V son ensemble de sommets et E son ensemble d'arêtes.
\overline{G}	Graphe complémentaire du graphe G .
$L(G)$	Line graph du graphe G .
G^*	Graphe joint du graphe G .
$G = (V_1, V_2; E)$	Graphe biparti avec V_1 et V_2 ses partitions.
K_n	Graphe complet d'ordre n ou la clique d'ordre n .
K_4-e	Graphe complet K_4 sans l'arête e .
$K_{p,q}$	Graphe biparti complet.
$G \square H$	Graphe produit cartésien des deux graphes G et H .
$G \otimes H$	Graphe produit catégoriel des deux graphes G et H .
Q_n	L'hypercube de dimension n .
O_k	Graphe impair d'ordre k .
E_k	Graphe impair étendu d'ordre k .
L_n^k	Graphe engendré par les deux couches centrales de Q_n .
$I_G(u, v)$ (ou $I(u, v)$)	Intervalle .
$m_G(u, A)$	Nombre de voisins de u dans A .
C_n^p	Nombre de combinaisons (parties ou sous-ensembles) de p éléments choisis d'ensemble à n éléments.
$R(G)$	Rayon de G .
G'_V	Sous-graphe de G induit par V' .
H_k	Sous-graphe L_n^k du l'hypercube Q_{2k+1} .
K_3	Triangle.
$N_G(u)$ (ou $N(u)$)	Ensemble de voisins du sommet u .
$N_i(u)$	Ensemble de voisins à distance i du sommets u .
$N[u]$	Voisinage fermé du sommet u .

INTRODUCTION

La recherche opérationnelle représente un carrefour où se rencontrent les mathématiques, l'économie et l'informatique. Cette discipline a fait son apparition dans les années 30 du XX^{em} siècle malgré que déjà ses méthodes existaient depuis le $XVII^{em}$ siècle. Mais son réel apparition ne s'est développée qu'à partir du moment où les ordinateurs furent à la portée de tout le monde.

La théorie des graphes est un des outils les plus commode qui sert à étudier de nombreux problèmes, dans différents domaines (informatique, biologie, chimie, télécommunication etc..).

Parmi ses éléments, on trouve le graphe dit hypercube, noté Q_n , qui est le graphe dont l'ensemble des sommets est celui des n -uplets de $\{0, 1\}^n$, où deux sommets sont adjacents s'ils diffèrent en exactement une seule composante. Les hypercubes représentent un intérêt vu le nombre important de ses applications (micro processeur, réseaux de communications, architecture parallèle).

Certains graphes de type hypercube ont été étudiés comme ceux des graphes cycles réguliers, introduits par Mollard ([8]). Un graphe est dit $[\mu, \eta]$ -cycle régulier pour ($\mu \geq 2$ et $\eta \geq 1$) si toute chaîne de longueur μ appartient à exactement η cycles élémentaires d'un ensemble de cycles non vide C . Dans le cas où ν cycles élémentaires parmi les η cycles de C ont une même longueur γ ($\gamma \geq 2\mu$), le graphe est dit $[\mu, \nu, \gamma]$ -cycle régulier.

Un cas particulier de cette classe a été présenté dans [8] et repris par Berrachedi et Kahoul [24]; c'est celui des graphes $[3, 1, 6]$ -cycles réguliers où toute chaîne de longueur 3 appartient à exactement un unique 6-cycle. Une autre classe était l'objet de recherche par [24]. c'est celle des graphes $[3, 1, 6]$ -cycles induit réguliers où toute chaîne induite de longueur 3 à extrémités distinctes appartient à exactement un unique 6-cycle induit.

L'objet de ce manuscrit est l'étude de deux classes de graphes de type hypercube. Le premier chapitre est réservé aux notions générales et au vocabulaire nécessaire pour ce manuscrit. Tandis que dans le second chapitre, on cite quelques graphes réguliers, semi-réguliers et cycle réguliers. Au troisième chapitre, on donnera quelques résultats sur les $\{\lambda, \mu\}$ -graphes où chaque paire de sommets possède exactement λ voisins communs à distance μ ou aucun. Au quatrième chapitre, on verra certains résultats sur les graphes $[4, 1, 8]$ -cycles réguliers. Un graphe est dit $[4, 1, 8]$ -cycle régulier si toute chaîne de longueur 4 appartient à un unique 8-cycle.

Chapitre 1

GÉNÉRALITÉS

Dans ce qui suit on adoptera la terminologie de C.Berge [1], Bondy et Murty [10].

1.1 Définitions de base

1.1.1 Graphes

Un graphe $G = (V, E)$ consiste en un ensemble fini $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dit **ensemble de sommets** et un ensemble E de parties à deux éléments $\{u, v\}$ de V appelé **ensemble d'arêtes**.

Le nombre de sommets, $|V|$, est appelé **ordre** de G .

Pour une arête $e = \{u, v\}$, notée aussi uv , on dit que :

- ✓ u et v sont incidents à uv ;
- ✓ u et v sont les extrémités de uv ;
- ✓ u et v sont adjacents.

Deux arêtes sont dites **adjacentes** si elles ont une extrémité commune.

Une arête de type $\{u, u\}$ est **une boucle**.

Si une *arête* de type $\{u, v\}$ apparaît dans E , plus d'une fois elle est dite *arête multiple*.

1.1.2 Représentation d'un graphe

Un graphe est représenté dans le plan comme suit :

- ✓ Les sommets sont représentés par des points.
- ✓ Les arêtes sont représentées par des lignes reliant ces points.

1.1.3 Degré et voisinage d'un sommet

Un **graphe simple** est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples.

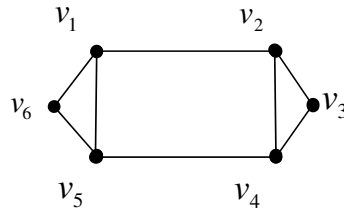


FIG. 1.1 – Un graphe simple

On ne considère que les graphes simples tout au long de ce manuscrit, sauf spécifications contraires.

Pour une arête uv , le *sommet* u est un voisin de v . L'ensemble de tous les voisins de u est noté $N_G(u)$ ou $N(u)$ (s'il n'a pas de confusion). On appelle **voisinage fermé** d'un sommet u , noté $N_G[u]$ ou $N[u]$, l'ensemble comportant le sommet u et tous ses voisins (i.e. $N[u] = N_G(u) \cup \{u\}$). Ainsi $N_G(u)$, (ou $N(u)$ s'il n'y a pas de confusion), est un **voisinage ouvert** de u .

Le degré d'un sommet u de G , noté $d(u)$ ou $d_G(u)$, est le nombre de voisins de u . Si tous les sommets de G ont un *même* degré d , alors G est régulier de degré d , on dira qu'il est d -régulier (le graphe de la figure 1.1 représente un graphe 3-régulier). Notons que :

✓ Pour tout graphe $G = (V, E)$,

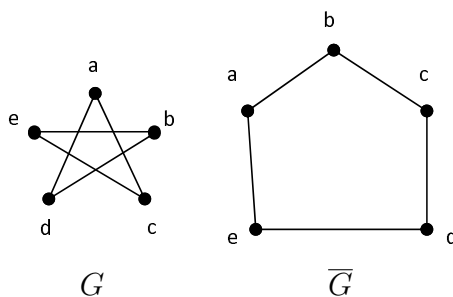
$$\sum_{u \in V(G)} d_G(u) = 2|E(G)|;$$

- ✓ Dans un graphe G , le nombre de sommets de degré impair est pair ;
- ✓ La valeur minimale des degrés, notée $\delta(G)$, est appelée le degré minimum de G . Tandis que la valeur maximale, notée $\Delta(G)$, est appelée le degré maximum de G ;
- ✓ Un sommet u est dit **pendant**, s'il est de degré 1 (i.e. $d_G(u) = 1$) ;
- ✓ **Un support** est un sommet adjacent à un sommet pendant ;
- ✓ Un sommet u est dit **isolé**, s'il est de degré 0 (i.e. $d_G(u) = 0$) ;
- ✓ Le nombre d'arêtes d'un graphe G reliant un sommet u à un ensemble de sommets A sera noté $m_G(u, A)$ ou $m(u, A)$ (s'il n'y a pas lieu de confusion).

1.2 Quelques graphes particuliers

1.2.1 Graphe complémentaire d'un graphe

Le graphe complémentaire $\overline{G}(V, \overline{E})$ d'un graphe simple $G = (V, E)$ possède V comme ensemble de sommets, deux sommets sont adjacents dans \overline{G} si et seulement s'ils ne le sont pas dans G , ($uv \in \overline{E} \Leftrightarrow uv \notin E$).



1.2.2 Sous graphe, graphe partiel et sous graphe partiel d'un graphe

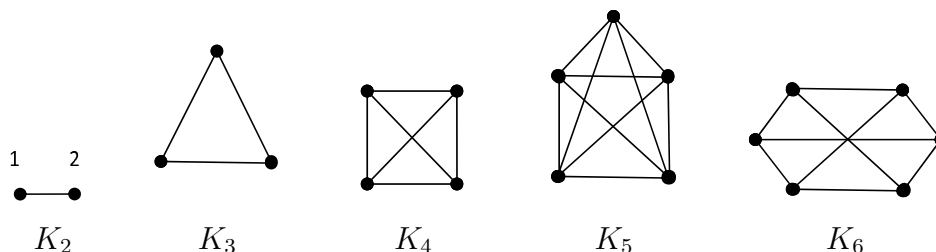
Un **sous graphe d'un graphe** $G = (V, E)$ est un graphe $G'(V', E')$ où l'ensemble de ses sommets V' est un sous-ensemble de V et celui de ses arêtes E' est un sous ensemble de E tel que toute arête de E' joint deux sommets de V' .

Si toutes les arêtes de G qui relient des sommets de V' sont dans E' , on dira que G' est **induit par** V' et il est noté $G_{V'}$.

Dans le cas où $V' = V$, on dira que G' est un graphe partiel de G .

1.2.3 Graphes complets

Un graphe simple G d'ordre n est dit **complet** si chaque paire de sommets de G sont adjacents, Il est noté K_n .



Le graphe K_3 est appelé triangle. le graphe K_n vérifie $\delta(K_n) = \Delta(K_n) = n - 1$.

Le graphe complet à n sommets est un graphe qui contient $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes et son diamètre vaut 1.

1.2.4 Clique, stable et transversal

On appelle **clique** de G un sous-graphe complet. On appelle **stable** un sous-graphe qui n'a pas d'arêtes. Un **transversal**, T d'un graphe G , est un sous-ensemble de sommets dans V , tel que toute arête dans E a une extrémité dans T .

1.2.5 Couplage et recouvrement

Étant donné un graphe simple $G = (V, E)$ sans sommets isolés. On appelle **couplage** un sous-ensemble d'arêtes E_0 de E deux à deux non-adjacentes. Un sommet u est dit **saturé par le couplage** E_0 s'il existe une arête de E_0 incidente à u . Un couplage E_0 est dit **parfait** s'il sature tout les sommets de G . Un **recouvrement**, R d'un graphe G , est un sous-ensemble d'arêtes dans E , tel que tout sommet dans V est incident à une arête dans R .

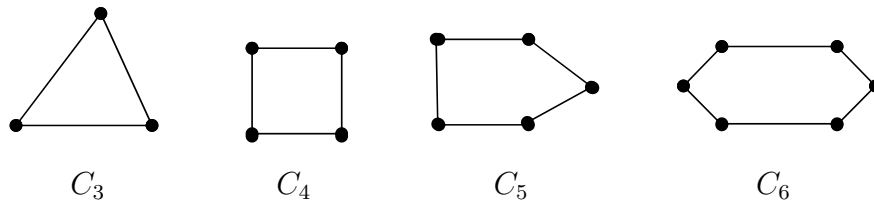
1.2.6 Chaîne et cycle

Une séquence de sommets distincts

$$ch = u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, u_p$$

dans G telle que toute paire de sommets consécutifs sont adjacents est appelée une **chaîne** reliant u_0 à u_p (ou une (u_0, u_p) -chaîne).

- ✓ Si $p \geq 2$, alors les sommets u_1, \dots, u_{p-1} sont des **sommets internes** de (u_0, u_p) -chaîne et u_0 et u_p sont ses extrémités.
- ✓ Sa longueur est le nombre de ses arêtes qui la constituent.
- ✓ Une chaîne qui n'utilise pas plus d'une fois :
 - ✓ chacun de ses sommets est dite **élémentaire**.
 - ✓ chacune de ses arête est dite **simple**.
- ✓ Une chaîne élémentaire est donc une chaîne simple.
- ✓ On note P_n une chaîne élémentaire à n sommets, donc elle est de longueur $n - 1$.
- ✓ Une chaîne est dite **induite** si aucune paire de ses sommets non consécutifs ne sont adjacents.
- ✓ On peut la définir aussi comme étant une chaîne dont l'ensemble des sommets engendre un sous-graphe qui est une chaîne.
- ✓ Deux chaînes à extrémités communes reliant deux sommets sont dits **sommets-disjointes** si leurs sommets internes respectifs sont distincts.
- ✓ Une plus courte chaîne dans G est appelée une **géodésique**.
- ✓ Dans un graphe G , on appelle cycle, une chaîne simple à extrémités confondues.
- ✓ Un cycle élémentaire de G et de **longueur** p appelé **p -cycle** est une chaîne simple et élémentaire sur p sommets $C = u_1, u_2, \dots, u_p, u_1$.
- ✓ La **maille** de G est la longueur du plus petit cycle dans G .
- ✓ Une arête joignant deux sommets non consécutifs d'un cycle C est appelée **corde**.



Dans le cas où le cycle est sans cordes, alors il est un **sous graphe induit** de G . Il est noté C_n .

Un cycle est **induit** si aucune paire de ses sommets non consécutifs ne sont adjacents.

Dans la suite, sauf spécifications contraires, On ne considérera que les chaînes et les cycles élémentaires.

1.2.7 Graphes connexes

Un graphe $G = (V, E)$ est connexe si entre toute paire de ses sommets u et v , il existe une (u, v) -chaîne. Un graphe $G = (V, E)$ non connexe consiste en une union disjointe de graphes connexes appelés composantes connexes de G . Dans un graphe connexe, un sommet est dit **d'articulation** si le sous-graphe obtenu en le supprimant n'est pas connexe et un **isthme** est une arête dont la suppression crée deux composantes ayant chacune au moins une arête. Un déconnectant dans un graphe connexe G est un ensemble d'arêtes F de E tel que le graphe $\hat{G} = (V, E - F)$ ayant V comme ensemble de sommets et $E - F$ comme ensemble d'arêtes n'est pas connexe. Pour un graphe simple $G = (V, E)$ connexe, d'ordre n . Sa connectivité $\kappa(G)$ est le nombre minimum de sommets dont l'élimination déconnecte G ou le réduit à un sommet unique. Un graphe G est dit h -connexe si sa connectivité $\kappa(G)$ est au moins h .

1.2.8 Graphes Eulériens et graphes Hamiltoniens

Graphes Eulériens

Une (u, v) -chaîne Eulérienne d'un graphe G est une chaîne passant une et une seule fois par chaque arête de G . Si $u = v$, alors la (u, u) -chaîne Eulérienne est dite cycle Eulérien. Un graphe G est semi-Eulérien s'il possède une chaîne Eulérienne. Un graphe G est Eulérien s'il possède un cycle Eulérien.

Plus simplement, on peut dire qu'un graphe est Eulérien (ou semi-Eulérien) s'il est possible de le dessiner sans lever le crayon (donc sans passer deux fois sur la même arête). Un graphe connexe admet une chaîne Eulérienne s'il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.

Un graphe connexe est Eulérien si et seulement si chacun de ses sommets a un degré pair.

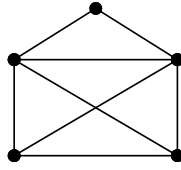


FIG. 1.2 – Un graphe semi-Eulérien

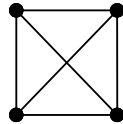


FIG. 1.3 – Un graphe non Eulérien

Un graphe ayant plus de deux sommets de degré impairs ne possède pas de chaîne Eulérienne.

Graphes Hamiltoniens

Une (u, v) -chaîne Hamiltonienne est une chaîne passant une et une seule fois par chaque sommet de G . Si $u = v$, alors la (u, u) -chaîne Hamiltonienne est dite cycle Hamiltonien. Un graphe G est semi-Hamiltonien s'il possède une chaîne Hamiltonienne. Un graphe G est Hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien.

À titre d'exemple, Le graphe complet K_n sont hamiltoniens.

Contrairement aux graphes Eulériens, il n'existe pas de caractérisation sur les graphes Hamiltoniens ou semi-Hamiltoniens. On peut cependant énoncer quelques propriétés et conditions suffisantes.

corollaire 1 (Dirac [14]). *Tout graphe G d'ordre $n \geq 3$ et de degré minimal $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ est un graphe Hamiltonien.*

Un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut être Hamiltonien. Si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle Hamiltonien (voir figure 1.4).

1.2.9 Arbres et forêts

Un graphe sans cycle est appelé une **forêt**. Une forêt connexe est un **arbre**. Donc un arbre est un graphe connexe sans cycle.

Les sommets pendants sont appelés **feuilles**. L'arbre contient au moins deux sommets pendants.

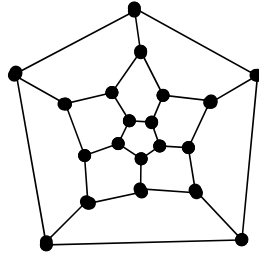


FIG. 1.4 – Le dodécaèdre

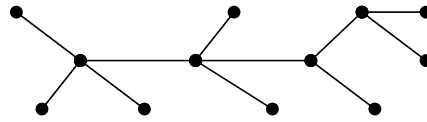


FIG. 1.5 – Un arbre

Théorème 1 (Berge [1]). *Soit T un arbre, les assertions suivantes sont équivalentes :*

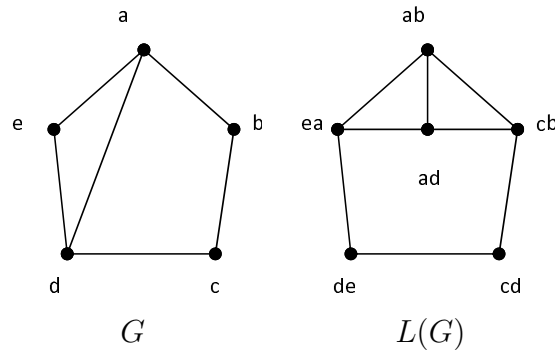
- ✓ T est connexe sans cycles ;
- ✓ T est sans cycles et admet $n - 1$ arêtes ;
- ✓ T est connexe et admet $n - 1$ arêtes ;
- ✓ T est sans cycles et en ajoutant une arête, on crée un cycle (et un seul). Autrement dit T est sans cycle mais $T + uv$ (où $u \in T, v \in T$) ne l'est pas.
- ✓ T est connexe, et si on supprime une arête quelconque, il n'est plus connexe. Autrement dit T est connexe mais $T - e$ ne l'est pas, pour toute arête e de T ;
- ✓ Toute paire de sommets est reliée par une chaîne et une seule.

1.2.10 Graphe adjoint représentatif d'arêtes(line graph)

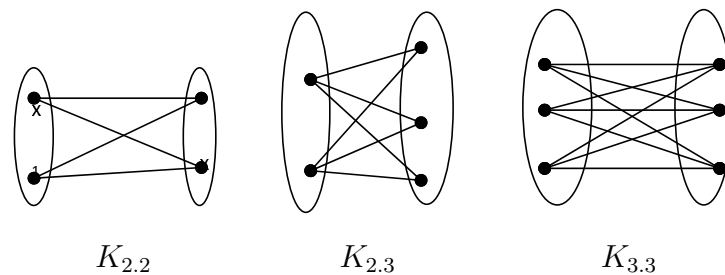
Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, où $E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ l'ensemble de ses arêtes. Line graph du graphe G , noté $L(G) = (V_{L(G)}, E_{L(G)})$, est le graphe dont chaque sommet représente une arête de G , $V_{L(G)} = E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ et deux sommet étant adjacents dans $L(G)$ si et seulement si les arêtes correspondantes dans G sont adjacentes.

1.2.11 Graphes bipartis

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti**, noté $G = (V_1; V_2; E)$, si l'ensemble de ses sommets admet une partition en deux stables disjoints V_1 et V_2 et où chaque arête a une et exactement une de ses extrémités dans une des deux parties V_1 ou V_2 .



- ✓ Un graphe est biparti s'il est sans cycle de longueur impair.
- ✓ Un arbre est sans cycle (donc biparti).
- ✓ Si toutes les arêtes possibles entre V_1 et V_2 sont dans G , alors G est le graphe biparti complet $K_{p,q}$ où p est le nombre de sommets de V_1 et q est le nombre de sommets de V_2 .



1.2.12 Graphes multipartis complets

Un graphe, simple $G = (V, E)$ d'ordre n , est dit multiparti complet si son ensemble de sommets V peut-être partitionner en k stables V_1, V_2, \dots, V_k $k \leq n$ où chaque sommet u de chaque partie V_i est adjacent à tous les sommets des partie V_j avec $i \neq j$ et $i, j = 1, 2, \dots, k$. Dans ce cas G est aussi dit k -parti complet et noté par K_{V_1, V_2, \dots, V_k} .

Un exemple du graphe multiparti complet est le graphe $K_{1,1,m}$, qui consiste en une arête uv reliée à m sommets w_1, w_2, \dots, w_m . (i.e. adjacents à u et v). (voir figure 1.6)

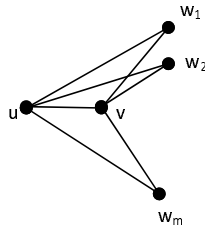


FIG. 1.6 – Le graphe multiparti complet $K_{1,1,m}$

Le graphe $K_{1,1,2}$ est aussi noté $K_4 - e$. (voir figure 1.7)

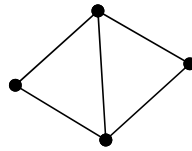


FIG. 1.7 – Le graphe $K_{1,1,2} = K_4 - e$

1.3 Distance

La **distance**, notée $d(u, v)$ ou $d_G(u, v)$, entre les sommets u et v dans G est la longueur d'une plus courte (u, v) -chaîne. **L'excentricité** d'un sommet u , notée $e(u)$, est la longueur de la plus grande longueur des plus courtes chaînes issues de u . Autrement dit :

$$\forall u \in V(G); e(u) = \max_{x \in V} d(x, u)$$

Le rayon, noté $R(G)$, est la plus petite excentricité dans G . Autrement dit :

$$R(G) = \min_{u \in V} e(u)$$

Le diamètre, noté $diam(G)$, est la plus grande excentricité dans G . Autrement dit :

$$diam(G) = \max_{u \in V} e(u)$$

Pour tout graphe G on a :

$$R(G) \leq diam(G) \leq 2R(G)$$

1. Un sommet u est :

✓ **un centre** de G si :

$$e(u) = R(G)$$

✓ un **antipodique** du sommet u si :

$$d(u, v) = e(u)$$

✓ dit **diamétral** si :

$$\forall u \in V(G); d(u, v) = \text{diam}(G)$$

2. Un graphe G est :

✓ **antipodique** si tout sommet admet un unique antipodique.

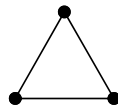
✓ dit **diamétral** si tout sommet admet un unique diamétral.

Dans un graphe G , le sommet v est dit **diamétral** de u , si :

$$d(u, v) = \text{diam}(G)$$

Le nombre de sommets diamétraux d'un sommet u donné peut varier de 0 à $n - 1$, si n est l'ordre de G . À titre d'exemple, dans le graphe K_3 on a :

$$R(G) = \text{diam}(G) = 1$$



K_3

FIG. 1.8 – Le triangle

1.4 Graphes réguliers

1.4.1 Graphes semi-réguliers

Un graphe est **semi-régulier**, dans [31], si chaque sommet possède le même nombre de sommets à distance 2. Les graphes semi-réguliers sont une extension des graphes réguliers. On définit $\text{deg}_2(v)$ le nombre de sommets qui sont à distance 2 de v dans un graphe donné.

1.4.2 Le graphe joint d'un graphe

Pour un graphe G , soit G^* le graphe obtenu à partir de G comme suit :
 $V(G^*) = V(G) \times \{1, 2, 3, 4\}$, (u, i) et (v, j) sont adjacents dans G^* si et seulement si une des trois conditions suivantes est satisfaite :

- ✓ $uv \in E(G)$ et $i = j$ et sont impairs.
- ✓ $uv \in E(G)$ et $i \neq j$ et sont pairs.
- ✓ $u = v$ et les parités de i et j sont différentes.

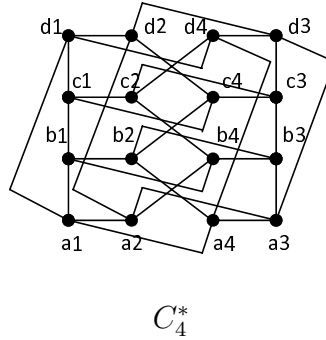


FIG. 1.9 – Le graphe joint de C_4

1.4.3 Graphe équilibré

Un graphe G est dit **équilibré** si et seulement si :

- (i) G est biparti.
- (ii) Chaque sous-ensemble de la partition contient le même nombre de sommets.

1.4.4 Graphe fortement régulier

Soit $G = (V, E)$ un graphe d -régulier avec $|V| = n$. G est dit **fortement régulier** s'il existe deux entiers λ et μ tels que pour toute paire de sommets u et v , on a :

- ✓ Si $u \in N(v) : |N_G(u) \cap N_G(v)| = \lambda$.
- ✓ Si $u \notin N(v) : |N_G(u) \cap N_G(v)| = \mu$.

Dans ce cas, on dit que G est fortement régulier de paramètres (n, d, λ, μ) .

1.4.5 Graphe biparti semi-régulier

[I. Gutman [15] et M. Mollard [24]] Un graphe biparti $G = (V_1, V_2; E)$ est dit semi-régulier s'il existe deux entiers p et q tels que pour tout u de V_1 , $d_G(u) = p$ et pour tout v de V_2 , $d_G(v) = q$. On dit aussi que G est (p, q) -semi-régulier. Un graphe (p, q) -semi-régulier est aussi dit graphe *bi-régulier*. Le line graph d'un (p, q) -semi-régulier est $(p + q - 2)$ -régulier.

1.4.6 Graphe retardé-régulier

Définition 1 (Peña, Gutman et Rada [13]). *On dit qu'un graphe G est **retardé-régulier** s'il existe deux entiers p et q tels que le nombre de chaînes de longueur p commençant par tout sommet u de G est égal à q .*

Le graphe connexe retardé-régulier est dit aussi (p, q) -régulier. Tout graphe retardé-régulier est régulier ou semi-régulier.

Proposition 1 (Peña, Gutman et Rada [13]). *Si G est un graphe connexe qui est exactement (p, q) -régulier, alors $p \geq 2$.*

Proposition 2 (Peña, Gutman et Rada [13]). *Le graphe d -régulier est un graphe $(1, d)$ -régulier. Le graphe (p, q) -semi-régulier est un graphe $(2, p, q)$ -régulier.*

1.4.7 Graphe retardé-semi-régulier

Définition 2 (N. Bourras [11]). *Soit $G = (V_1, V_2; E)$ un graphe connexe biparti. On dit que G est $(s; r, t)$ -régulier si le nombre de chaînes élémentaires de longueur s commençant par tout sommet u de V_1 (resp. de V_2) est égal à r (resp. à t). Un graphe $(s; r, t)$ -régulier sera appelé **retardé-semi-régulier**.*

Il se trouve que toute (u, v) -chaîne de longueur impair est un graphe retardé-semi-régulier qui est ni régulier ni semi-régulier.

1.5 Homomorphisme, Isomorphisme et Homéomorphisme

Le graphe G est homomorphe au graphe H s'il existe une application f de $V(G)$ dans $V(H)$ qui conserve l'adjacence. Autrement dit, une application f de $V(G)$ dans $V(H)$ vérifie

$$\forall u \in V(G), \forall v \in V(H); uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(H)$$

Un homéomorphisme de G dans H est un homomorphisme f de $V(G)$ dans $V(H)$ tel que pour toute arête uv de H , $f^{-1}(uv)$ induit une chaîne dans G . On dira aussi que G est une subdivision de H . Une application bijective f de $V(G)$ dans $V(H)$ définit un isomorphisme de G dans H si f et f^{-1} sont des homomorphismes. À titre d'exemple, les deux graphes G et H suivant sont isomorphes.

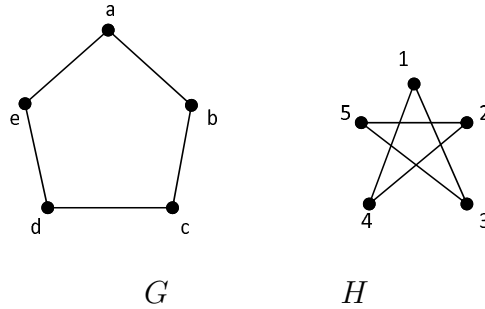


FIG. 1.10 – Deux graphes isomorphes

u	$f(u)$
a	1
b	3
c	5
d	2
e	4

TAB. 1.1 – un isomorphisme f

Dans le cas où $G = H$, f est dit automorphisme. Tout graphe isomorphe à son complémentaire est appelé auto-complémentaire.

1.6 Graphe sommet-transitif et graphe arête-transitive

G est un graphe sommet-transitif si pour toute paire de sommets u et v , il existe un automorphisme f sur G tel que :

$$v = f(u)$$

G est un graphe arête-transitive si pour chaque paire d'arêtes uu' et vv' , il existe un automorphisme f de G tel que :

$$vv' = f(uu')$$

G est un graphe distance-transitif si pour tout u, u', v et v' sommets de G tels que :

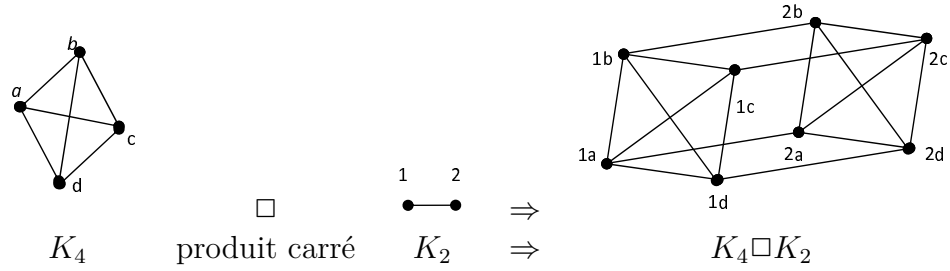
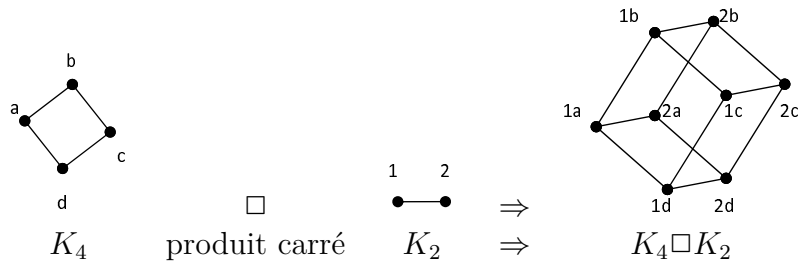
$$d(u, v) = d(u', v')$$

Il existe un automorphisme f sur G tel que $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$.

1.7 Opérations sur les graphes

1.7.1 Produit carré

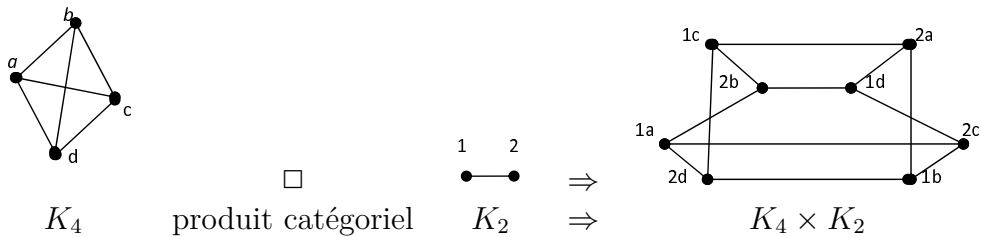
Le produit carré de deux graphes G et H est le graphe, noté $G \square H$, dont l'ensemble des sommets est le produit cartésien $V(G) \times V(H)$ et (u, v) et (u', v') sont adjacents dans $G \square H$ si et seulement si $(u = u' \text{ et } vv' \in E(H))$ ou $(uu' \in E(G) \text{ et } v = v')$.

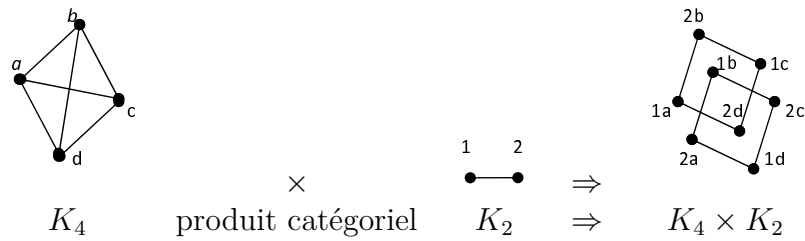


On note que le graphe $G \square H$ à $|V(G)| \cdot |V(H)|$ sommets et $|V(G)| \cdot |E(H)| + |E(G)| \cdot |V(H)|$ arêtes. Le diamètre du graphe $G \square H$ est la somme des diamètres des deux graphes G et H . i.e. $diam(G \square H) = diam(G) + diam(H)$

1.7.2 Produit catégoriel

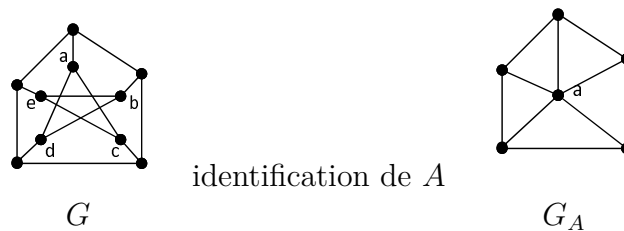
Le produit catégoriel des deux graphes G et H est le graphe, noté $G \times H$, dont l'ensemble des sommets est le produit cartésien $V(G) \times V(H)$ et où les sommets (u, v) et (u', v') sont adjacents dans $G \times H$ si et seulement si $(uu' \in E(G) \text{ et } vv' \in E(H))$.





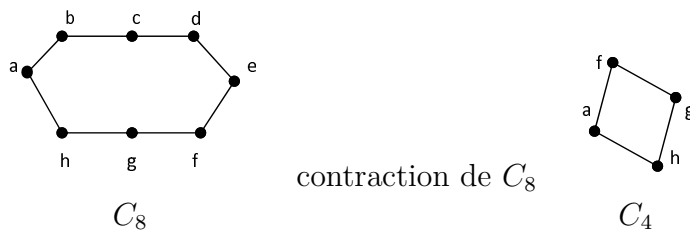
1.7.3 Identification de sommets

Soit A un sous-ensemble de sommets de $V(G)$. L'identification des sommets de A consiste à remplacer tous les sommets de A par un sommet a qui sera relié à tous les voisins des sommets de A . Le graphe obtenu est noté G_A .



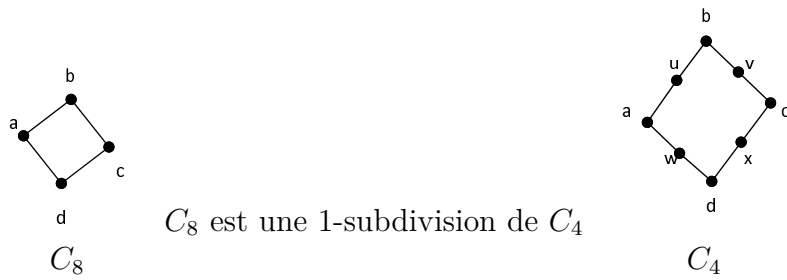
1.7.4 Contraction d'une chaîne

Soit C une chaîne de G dont tous les sommets internes sont de degré 2. La contraction de la chaîne C consiste à supprimer tous ses sommets internes et relier ses extrémités par une arête. La chaîne C est dite contractante.



1.7.5 Subdivision d'un graphe

Une **subdivision élémentaire** est un graphe obtenu à partir de G par insertion d'un sommet de degré deux sur une arête de G . Une **subdivision** de G est un graphe obtenu à partir de G par une succession de subdivisions élémentaires. Une **k -subdivision** de G est obtenu par insertion de k sommets sur chaque arête de G .



1.7.6 Décomposition d'un graphe en niveaux

Pour un sommet u , $N_i(u)$ est l'ensemble des sommets à distance i de u . L'ensemble des voisins de u est noté souvent par $N(u)$. Pour un graphe G , une décomposition en niveaux relative au sommet u est une partition des sommets :

$$N_0(u), N_1(u), \dots, N_p(u) \text{ où } p = e(u)$$

À titre d'exemple considérons le graphe G suivant :

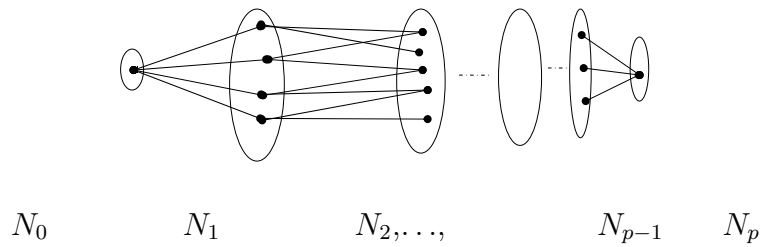
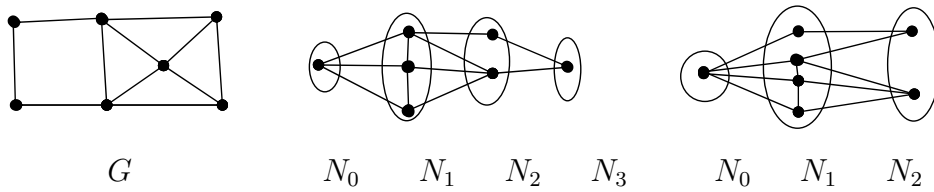


FIG. 1.11 – Le décomposition en niveaux



Chapitre 2

Hypercubes

2.1 Le graphe hypercube

L'hypercube de dimension n , noté Q_n , est le graphe dont l'ensemble des sommets est celui des n -uplets de $\{0, 1\}^n$, où deux sommets u et v sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent en exactement une seule composante.

Cette représentation de Q_n est dite vectorielle.

Une autre représentation, équivalente à la vectorielle dite ensembliste, consiste en les éléments de l'ensemble des parties d'un ensemble V , à n éléments, comme sommets et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si leur différence symétrique possède un élément.

Il s'ensuit que Q_n est le graphe de couverture du treillis booléen à 2^n éléments.

Le passage de la représentation ensembliste à la vectorielle se fait en étiquetant chaque partie A de V par sa fonction caractéristique.

Notons que l'hypercube Q_n est biparti, régulier de degré n , sommet-transitif.

Dans la décomposition en niveaux N_0, N_1, \dots, N_p de Q_n (voir 1.11), les niveaux N_i peut être vu comme étant l'ensemble de tous les sous-ensembles de cardinalité i de V , notés i -sous-ensemble.

On peut définir l'hypercube Q_n inductivement par

$$Q_0 = K_1; Q_1 = K_2 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2; Q_n = Q_{n-1} \square K_2.$$

Il est donc clair que Q_n ($n \geq 1$) est isomorphe à

$$Q_n = \underbrace{K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2}_{n \text{ fois}}$$

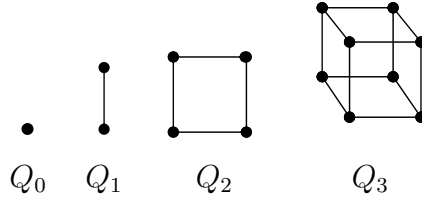
et donc que $Q_{n+m} = Q_n \square Q_m$.

Il se trouve que :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}; |N_i(G)| = C_n^i.$$

Le nombre de sommets de l'hypercube Q_n est :

$$\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n.$$



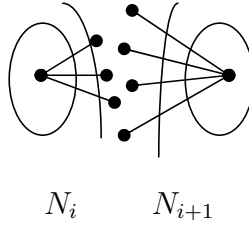
$$\forall x \in N_i; m(x, N_{i+1}) = n - i \text{ et } \forall y \in N_{i+1}; m(y, N_i) = i + 1.$$

Donc :

$$\forall x \in N_i(u); |N(x) \cap N_{i+1}(u)| = n - i \text{ et } \forall y \in N_{i+1}(u); |N(y) \cap N_i(G)| = i + 1.$$

$$\text{Si } n = 2k + 1 \text{ On a : } n - k = (2k + 1) - k = k + 1$$

$$n - i \quad i + 1$$



Dans l'hypercube Q_n on a : $R(Q_n) = \text{diam}(Q_n) = n$.

Pour tout sommet u , on obtient la même décomposition en niveaux (à isomorphisme près) de l'hypercube Q_n . L'hypercube Q_n :

✓ est n -régulier ;

✓ a 2^n sommets ;

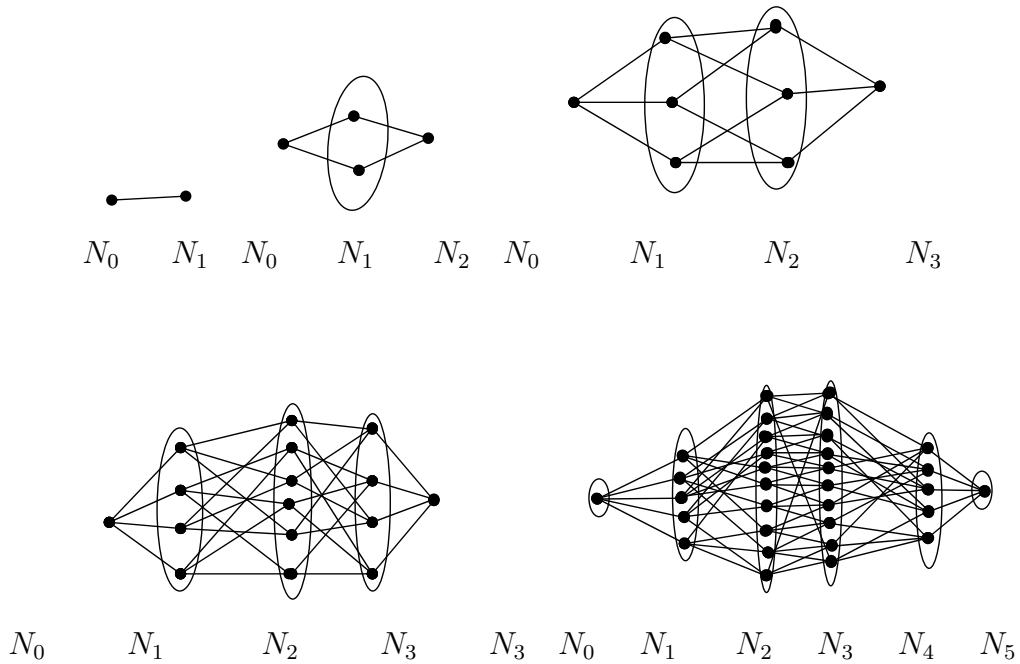
✓ a $n2^{n-1}$ arêtes ;

✓ est biparti.

Soit $N_0(u)N_1(u), N_2(u), \dots, N_p(u)$ la décomposition en niveaux de l'hypercube Q_n .

• En dénombrant les arêtes entre N_i et N_{i+1} , on obtient :

$$(n - i)C_n^i = (i + 1)C_n^{i+1}$$



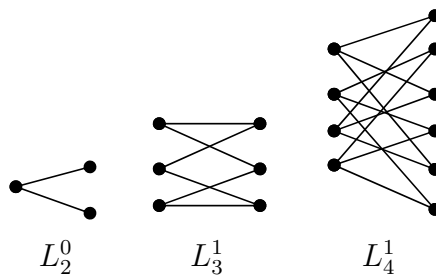
2.1.1 Projection et anti-projection

Une projection (resp. anti-projection) d'un sommet u d'un graphe G sur un ensemble de sommets S est un sommet v de S à distance minimum (resp. maximum) de u . i.e. v est une projection (resp. anti-projection) de u sur S si

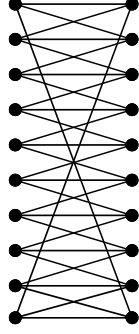
$$d(u, v) = \min_{x \in S} d(u, x) \text{ (resp. } d(u, v) = \max_{x \in S} d(u, x))$$

2.1.2 Le graphe L_n^i

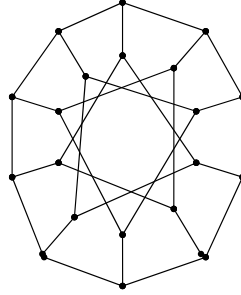
Le sous graphe induit par les deux niveaux consécutifs $N_i(u)$ et $N_{i+1}(u)$, de l'hypercube de degré n est noté L_n^i . Il se trouve que, le graphe L_n^i est un graphe biparti, semi-régulier de degrés $n - i + 1$ et i et d'ordre $C_n^i + C_n^{i+1}$. À titre d'exemple les graphes suivants sont semi-réguliers :



Un cas particulier intéressant est celui de L_{2k+1}^k , noté aussi H_k , le sous-graphe induit par les deux niveaux centraux N_k et N_{k+1} d'un hypercube Q_{2k+1} . Ce graphe est régulier de degré k .



$L_5^2 = H_2$



Le graphe de désargues

2.2 Graphes intervalles

2.2.1 Intervalle

[H.M. Mulder [29]] Soient u et v deux sommets d'un graphe G , L'intervalle $I_G(u, v)$ (ou $I(u, v)$ s'il n'y a pas de confusion) est l'ensemble des sommets de G appartenant aux plus courtes (u, v) -chaînes. Trivialement, un sommet $w \in I(u, v)$ si et seulement si :

$$d(u, w) + d(w, v) = d(u, v)$$

Nous désignerons par intervalle aussi bien l'ensemble $I(u, v)$ que le sous-graphe induit par $I(u, v)$.

On cite la proposition suivante :

Proposition 3. Soient u et v deux sommets d'un graphe G , alors :

- ✓ $u, v \in I(u, v)$.
- ✓ $I(u, v) = I(v, u)$.
- ✓ si $w \in I(u, v)$, alors $I(u, w) \subseteq I(u, v)$.
- ✓ si $w \in I(u, v)$, alors $I(u, w) \cap I(w, v) = \{w\}$.
- ✓ $w \in I(u, v)$ et $z \in I(u, v)$, alors $w \in I(z, v)$.

Pour tout triplet de sommets u, v et w d'un graphe G , il existe un sommet z dans $I(u, w) \cap I(u, v)$ tel que :

$$I(z, w) \cap I(z, v) = \{z\}$$

Soient u, v, w et z quatre sommets de G , z est l'unique sommet de $I(u, w) \cap I(u, v)$ tel que $I(z, w) \cap I(z, v) = \{z\}$ si et seulement si

$$I(u, w) \cap I(u, v) = I(u, z)$$

2.2.2 Ensemble convexe

Un ensemble S de sommets de G est **convexe** si :

$$\forall u, v \in S : I(u, v) \subseteq S$$

Un convexe S de G désigne l'ensemble des sommets de S aussi bien que le sous-graphe de G induit par S .

Proposition 4 (Van Den Cruyce [32]). *Un graphe G est un hypercube de dimension n si et seulement si l'ensemble de ses graphes convexes de G est*

$$\{Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$$

2.2.3 Graphes Intervalles-réguliers

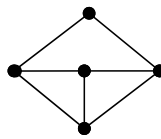
Un graphe G est **intervalle-régulier** si pour toute paire de sommets u et v de G , le nombre de voisins de u appartenant à $I(u, v)$ est égal à $d(u, v)$.

G est intervalle-régulier si et seulement si entre toute paire de sommets u et v il existe $d(u, v)$ (u, v) -géodésiques. (résultat montré par S.Foldes). Les hypercubes sont des graphes intervalle-réguliers bipartis.

2.2.4 Graphes intervalle-monotones

Une classe importante de graphes est celle des graphes dits intervalle-monotones. Ils sont des graphes où tout intervalle est convexe.

Si G est sans sous-graphe induit homomorphe à $K_{2,3}$ ou au graphe suivant alors G est intervalle-monotone.

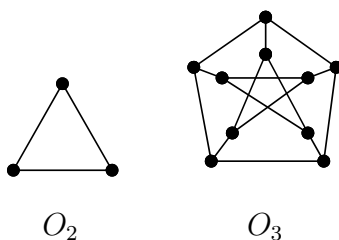


Une autre classe de graphes est celle des graphes dits intervalle-réguliers. Ils sont des graphes où pour toute paire de sommets u et v , le nombre des voisins de u appartenant à $I(u, v)$ est précisément la distance entre u et v . Les graphes intervalle-réguliers sont intervalle-monotones.

2.3 Les graphes impairs

Définition 3 (H.M. Mulder[30]). *Soit k un entier avec $k \geq 2$. Le graphe impair O_k possède les $(k - 1)$ -sous-ensembles de $\{1, 2, \dots, 2k - 1\}$ comme sommets et deux de ces sommets sont adjacents si leurs sous-ensembles correspondants sont disjoints.*

Le graphe O_k ($k \geq 2$) est distance-transitif et k -régulier. Les premiers graphes impairs sont le triangle $K_3 = O_2$ et le graphe de Petersen O_3 . Les graphes O_2 et O_3 sont de mailles 3 et 5 respectivement, tandis que pour O_k , pour $k \geq 4$, la maille est égale à 6.



2.4 Les graphes impairs étendus

Définition 4 (H.M. Mulder[30] et Madani [23]). *Le graphe impair étendu E_k ($k \geq 2$), a l'ensemble de sommets l'ensemble*

$$\{A \subseteq \{1, 2, \dots, 2k - 1\}; |A| \leq k - 1\}$$

Deux sommets A et B sont adjacents si et seulement si le cardinal de la différence symétrique $|A \Delta B|$ est égale à 1 ou $2k - 2$ (ils sont disjoints ou ils diffèrent en une seule composante).

Les premiers graphes impairs étendus sont K_4 et le graphe de Greenwood-Gleason 5-régulier suivant.

Les graphes impairs étendus (H.M. Mulder [28]) sont appelés aussi graphes de (Laborde-Mulder [23])

Le graphe E_k peut être obtenu de deux manières différentes :

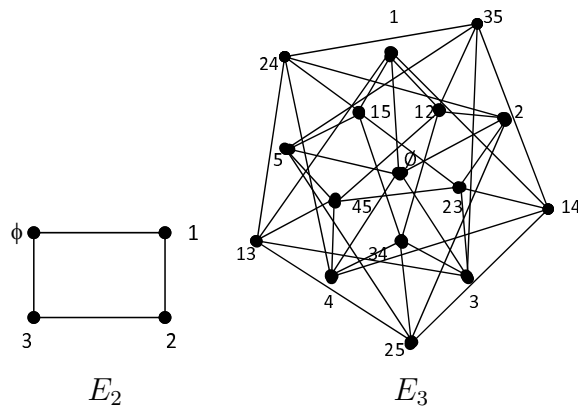
1. Identifier dans Q_{2k-1} toute paire de sommets diamétraux.
2. Relier dans Q_{2k-2} toute paire de sommets diamétraux.

Le graphe E_k est régulier de degré $2k - 1$. Il consiste en le demi-inférieur de Q_{2k-1} avec le graphe impair O_k sur le $(k - 1)^{\text{ième}}$ niveau.

Proposition 5 (Mulder [27], [28]). *Le graphe E_k est distance-transitif.*

Proposition 6 (Mulder [27], [28]). *Pour chaque paire de sommets A et B de E_k , le sous-graphe induit par $I(A, B)$ est l'hypercube $Q_{d(A,B)}$, de dimension $d(A, B)$.*

Proposition 7 (Mulder [27], [28]). *Le plus petit cycle impair dans E_k est de longueur $2k - 1$.*



2.5 Graphes médians

Un graphe G est médian si pour tout triplet u, v et w , il existe un unique sommet x appartenant simultanément à une plus courte (u, v) -chaîne, à une plus courte (v, w) -chaîne et à une plus courte (w, u) -chaîne.

En utilisant le concept d'intervalles, un graphe G est médian si pour tout triplet de sommets u, v et w on a :

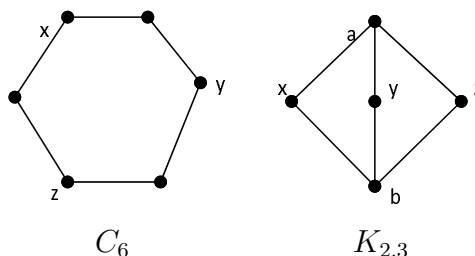
$$|I(u, v) \cap I(v, w) \cap I(w, u)| = 1$$

Autrement dit, il existe un unique sommet x de $V(G)$, tel que :

1. $d(u, v) = d(u, x) + d(x, v)$
2. $d(v, w) = d(v, x) + d(x, w)$
3. $d(w, u) = d(w, x) + d(x, u)$

Autrement dit, $d(u, v) + d(v, w) + d(w, u) = 2[d(u, x) + d(x, v) + d(x, w)]$. Les arbres sont des exemples de graphes médians. L'hypercube Q_n est un graphe médian de dimension n .

À titre d'exemple C_6 et $K_{2,3}$ ne sont pas des graphes médians.



Dans le graphe C_6 on a :

$$I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, x) = \emptyset$$

Dans le graphe $K_{2,3}$ on a :

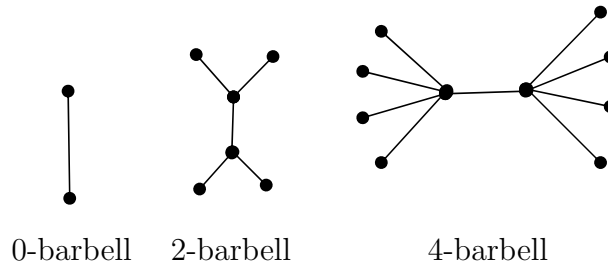
$$I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, x) = \{a, b\}$$

Proposition 8 (Mulder [28]). *Un graphe connexe $G = (V, E)$ est un hypercube si et seulement si G est un graphe médian régulier.*

2.6 Les graphes barbell

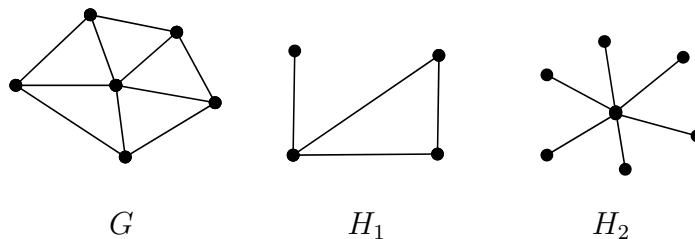
Définition 5 (Northup [31]). *Le graphe n -barbell est conçue en prenant une paire de sommets adjacents v_1 et v_2 et n nouveaux sommets adjacents à v_1 et n nouveaux sommets adjacents à v_2 .*

Voici quelques graphes n -barbell.



2.7 Plongement de graphes

Étant donné deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$, Un **plongement** d'un graphe G dans un graphe G' , est défini par la donnée d'une application injective φ de V dans V' et une application P_φ de E dans E' , qui associe à chaque arête uv de G une $(\varphi(u), \varphi(v))$ -chaîne de G' . Autrement dit, G' est **plongeable** dans G s'il existe un sous graphe de G isomorphe à G' .



H_1 est plongeable dans G et H_2 n'est pas plongeable dans G .

Conjecture 1 (I.HAVEL [16]). *Le graphe L_{2k+1}^k , admet une chaîne hamiltonienne.*

Autrement dit, H_k est hamiltonien.

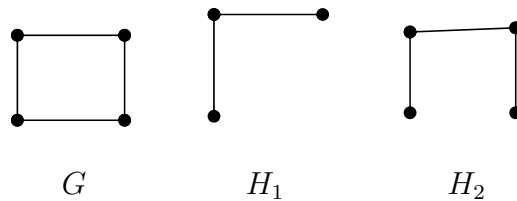
Cette conjecture est une conséquence des travaux de I.HAVEL à propos du problème de plongement de chaînes dans l'hypercube. Il se trouve que, Tout arbre est plongeable dans un hypercube.

Mais on peut considérer le problème suivant : " Étant donné un arbre T , quel est le plus petit n tel que : $T \subseteq Q_n$ ". Ce n est appelé **dimension cubique** notée par $D(A)$.

2.7.1 Plongement isométrique

Le plongement isométrique est un plongement qui conserve les distances entre sommets.

À titre d'exemple, H_1 est plongeable isométriquement dans G et H_2 n'est pas plongeable non isométriquement dans G .



2.8 Les $(0, \lambda)$ -graphes

Soit λ un entier, la notion de $(0, \lambda)$ -graphe ($\lambda \geq 2$) a été introduite par H.M.MULDER, c'est une généralisation du graphe de l'hypercube. Le graphe G est un $(0, \lambda)$ -graphe si toute paire de sommets distincts ont λ voisins communs ou aucun. Comme exemples de $(0, \lambda)$ -graphe, on peut citer :

K_1 , K_2 , $K_{\lambda+2}$, $K_{\lambda, \lambda}$ et $K_{\lambda+2, \lambda+2}$ moins un couplage parfait.

Le cas exclu $\lambda = 1$, engendre la classe des graphes sans 4-cycle.

On donne quelques propriétés et caractéristiques sur les $(0, \lambda)$ -graphes.

Proposition 9 (Mulder [27], [28]). *Un $(0, \lambda)$ -graphe est régulier.*

Proposition 10 (Mulder [27], [28]). *Soit G un $(0, \lambda)$ -graphe. Alors*

$$|I(u, v) \cap N(u)| \geq d(u, v) + \lambda - 2$$

pour toute paire de sommets u et v telle que $d(u, v) \geq 2$.

Proposition 11 (Mulder [27], [28]). *Soit G un $(0, \lambda)$ -graphe de degré n . Si $\text{diam}(G) \geq 4$, alors $n \geq \text{diam}(G) + 2\lambda - 4$.*

Proposition 12 (Mulder,[7]). *Soit G un graphe biparti connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes*

- ✓ G est un hypercube ;
- ✓ Tout intervalle dans G engendre un hypercube ;
- ✓ Tout intervalle dans G engendre un $(0, 2)$ -graphe ;
- ✓ Tout intervalle $I(u, v)$ dans G contient exactement $2^{d(u,v)}$ sommets ;
- ✓ Tout intervalle $I(u, v)$ dans G engendre un graphe avec exactement $d(u, v)2^{d(u,v)-1}$ arêtes.

Pour un $(0, \lambda)$ -graphe de degré n donné, le nombre de sommets est borné comme le montre le résultat suivant :

Proposition 13 (Mulder [27], [28]). *Soit G un $(0, \lambda)$ -graphe de degré n . Alors :*

$$1 + \frac{n(n+1)}{\lambda} \leq |V(G)| \leq 1 + n + \frac{(\lambda+1)!(n+\lambda)!}{\lambda+2!} \sum_{i=1}^p C_n^{\lambda+i}$$

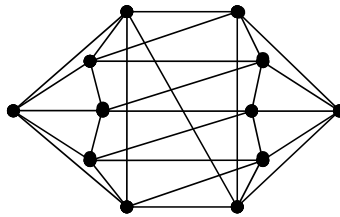
Pour un $(0, \lambda)$ -graphe biparti de degré n , la borne inférieure du nombre de sommets est différente de celle donnée dans la proposition précédente. On a :

Proposition 14 (Mulder [27],[28]). *Soit G un $(0, \lambda)$ -graphe de degré n . Alors :*

$$2 + 2 \frac{n(n+1)}{\lambda} \leq |V(G)| \leq 1 + n + \frac{(\lambda+1)!(n+\lambda)!}{\lambda+2!} \sum_{i=1}^p C_n^{\lambda+i}$$

Une classe importante de $(0, \lambda)$ -graphes est celle obtenue pour $\lambda = 2$. C'est la classe de graphes contenant strictement les hypercubes.

Nous pouvons citer aussi comme exemple le graphe de la figure suivante, connu sous le nom de **l'icosaèdre**.



L'icosaèdre

FIG. 2.1 – L'icosaèdre

Proposition 15 (Mulder [27],[28]). *Soit G un $(0, \lambda)$ -graphe de degré n . Alors :*

$$1 + \frac{n(n+1)}{2} \leq |V(G)| \leq 2^n$$

Pour les $(0, 2)$ -graphes bipartis, on a :

Proposition 16 (Mulder [27],[28]). *Soit G un $(0, 2)$ -graphe biparti de degré n . Alors :*

$$2 + n(n + 1) \leq |V(G)| \leq 2^n$$

Il se trouve que pour un degré n donné, l'hypercube Q_n est le seul $(0, 2)$ -graphe, n -régulier d'ordre 2^n . Ce résultat a été établi d'une part par Rao et Laborde et d'autre part par Mulder.

Proposition 17 (Laborde et Rao [21], Mulder [27],[28]). *Soit G un $(0, 2)$ -graphe. On a :*

1. G est régulier (notons n son degré).
2. $|V(G)| \leq 2^n$.
3. $|V(G)| = 2^n$ si et seulement si G est Q_n .

Une autre caractérisation de l'hypercube en tant que $(0, 2)$ -graphe est :

Proposition 18 (Mollard [24]). *Soit G un $(0, 2)$ -graphe de degré n . Alors :*

1. $\text{diam}(G) \leq n$.
2. $\text{diam}(G) = n$ si et seulement si G est Q_n .

Proposition 19 (Mollard [24]). *Soit G un $(0, 2)$ -graphe d -régulier, alors :*

1. $\text{diam}(G) \leq d$
2. $\text{diam}(G) = d$ si et seulement si G est Q_d .

Proposition 20 (Berrachedi [3]). *Soit G un $(0, 2)$ -graphe tel qu'il existe une mise à niveaux où tout 4-cycle rencontre 3 niveaux, alors G est un hypercube.*

On peut définir les $(0, 2)$ -graphes en termes de sommets et de chaînes, comme suit :

Définition 6. *On dira qu'un graphe G est un $(0, 2)$ -graphe si et seulement si pour toute paire u et v de sommets distincts de G , il existe soit exactement deux chaînes de longueur deux reliant u et v , soit aucune chaîne de longueur deux les reliant.*

Il y'a des différentes conjectures qui sont relatives à l'étude des $(0, 2)$ -graphes. On conjecturait l'hamiltonicité des $(0, 2)$ -graphes jusqu'à une date réssante où Berrachedi [3] et Berrachedi et Mollard [6] ont donnés une réponse. Il existe encore d'autres conjectures relatives aux $(0, 2)$ -graphes :

Conjecture 2. *Existence de $(0, 2)$ -graphes non sommet-transitifs.*

Conjecture 3. *Existence de $(0, 2)$ -graphes d'ordre impair.*

M. Mollard [26] a donné un élément de réponse à la dernière.

2.9 Les graphes cycles réguliers

Soient μ et η deux entiers avec $\mu \geq 2$, $\eta \geq 1$ et G un graphe de maille au moins μ . G est un graphe $[\mu, \eta]$ -cycle régulier s'il existe un ensemble non vide C de cycles élémentaires tels que toute chaîne de G de longueur μ appartient à exactement η cycles de C .

Dans le cas particulier où il existe ν cycles élémentaires parmi les η cycles de C , ayant une même longueur γ ($\gamma \geq 2\mu$), nous dirons que G est $[\mu, \nu, \gamma]$ -cycle régulier. À titre d'exemples on cite :

- ✓ Les $(0, \lambda)$ -graphes sont les graphes $[2, \lambda - 1, 4]$ -cycle réguliers.
- ✓ Le graphe impair O_k est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier, pour $k > 2$.
- ✓ Pour $k \geq 4$, E_k est un graphe $[3, 3, 6]$ -cycle régulier.
- ✓ Le sous-graphe G induits par deux niveaux consécutifs N_{i-1} et N_i d'un hypercubes Q_n est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier d'ordre $C_n^i + C_n^{i-1}$ et semi-régulier de degrés $n - i + 1$ et i .
- ✓ Un cas particulier intéressant est celui de L_{2k+1}^k , noté aussi H_k , le sous-graphe induit par les deux niveaux centraux N_k et N_{k+1} d'un hypercube de degré impair Q_{2k+1} est aussi un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier d'ordre $C_{2k+1}^k + C_{2k+1}^{k-1}$ et semi-régulier de degrés $n - k + 1$ et k .
- ✓ Ainsi, le graphe suivant $K_{3,3}$ est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier.

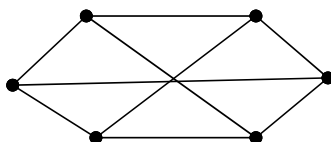


FIG. 2.2 – Un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier

lemme 1 (Mollard [24]). *Soient u_1, u_2, \dots, u_μ une chaîne de longueur $\mu - 1$ d'un graphe G , $[\mu, \eta]$ -cycle régulier. Alors $d(u_1) = d(u_\mu)$.*

lemme 2 (Mollard [24]). *Si G est un graphe $[\mu, \eta]$ -cycle régulier avec $\delta(G) \geq 3$, alors G est régulier ou semi-régulier.*

Il se trouve que, tout graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier est sans triangle. Donc ils sont sans $K_4 - e$.

L'hypercube est le graphe maximum des graphes $[2, 1, 4]$ -cycle réguliers pour son ordre par rapport à son degré, puisque les graphes $[2, 1, 4]$ -cycle réguliers ne sont autre que les graphes $(0, 2)$ -graphes.

Un graphe maximum pour les $[3, 1, 6]$ -cycle réguliers, pour un degré maximum donné, est H_k , le sous-graphe induit par les niveaux centraux N_{k-1} et N_k d'un hypercube Q_{2k-1} .

Proposition 21 (Mollard [24]). *Soit G un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier de degré maximum n . Alors :*

1. $|V(G)| \leq C_{2n}^n$;
2. $|V(G)| = C_{2n}^n$ si et seulement si G est le sous-graphe H_n .

L'hypercube est aussi le graphe de diamètre maximum des graphes $[2, 1, 4]$ -cycle réguliers pour un degré donné. D'une manière similaire, H_n est le graphe de diamètre maximum pour les graphes $[3, 1, 6]$ -cycle réguliers pour un degré donné.

Proposition 22 (Kahoul et Berrachedi [17]). *Soit G un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier de degré maximum $n \geq 2$. Alors*

1. $\text{diam}(G) \leq 2n + 1$;
2. $\text{diam}(G) = 2n + 1$ si et seulement si G est le sous-graphe H_n .

Les deux derniers résultats sont les conséquences dérecte des propositions si-dessous.

Proposition 23 (Mollard [24]). *Soit G un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier de degré maximum n et N_0, N_1, \dots, N_p une décomposition en niveaux arbitraire relative à un sommet de G . Soit u un sommet de N_i Alors :*

$$m(u, N_{i-1}) \geq \lceil \frac{i}{2} \rceil$$

Proposition 24 (Mollard [24]). *Soit G un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier de degré maximum n et N_0, N_1, \dots, N_p une décomposition en niveaux arbitraire relative à un sommet de G . Alors pour tout $k = 0, 1, \dots, n - 2$*

$$|N_{2k+1}| \leq \frac{n}{k+1} (C_{n-1}^k)^2$$

$$|N_{2k+2}| \leq \frac{n(n-k-1)}{(k+1)^2} (C_{n-1}^k)^2$$

Proposition 25 (Kahoul [17]). *Soient G un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier, avec $\delta(G) \geq 2$, et u, v deux sommets tels que $|N(u) \cap N(v)| \geq 2$. Alors u, v et tous les sommets de $N(u) \cap N(v)$ sont sur le même 6-cycle.*

Proposition 26 (Kahoul [17]). *Soient G un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier et $A = \{x, y, z, t, u, v\}$ l'ensemble des sommets d'un 6-cycle tel que $d(x, t) = 1$. Alors le sous-graphe induit par A , G_A , est isomorphe au graphe suivant.*

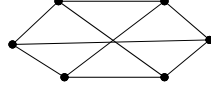


FIG. 2.3 – Un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier

Proposition 27 (Kahoul [17]). *G un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier, avec $\delta(G) \geq 2$. Alors :*

$$\forall u, v \in V(G); |N(u) \cap N(v)| \in \{0, 1, 3\}$$

Proposition 28 (Berrachedi et Kahoul [7]). *Soit G un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier de degré n et n' . Alors :*

$$1 + n \frac{n' + 2}{3} \leq |V(G)| \leq C_{2n}^n$$

Proposition 29 (Berrachedi et Kahoul [7]). *Soit G un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier de degré n . Alors :*

$$1 + n \frac{n + 2}{3} \leq |V(G)| \leq C_{2n}^n$$

2.9.1 Opérations sur les graphes cycle réguliers

Proposition 30 (Kahoul [17]). *Si G et H sont deux graphes $[3, 1, 6]$ -cycle réguliers sans 4-cycle, alors le graphe $G \otimes H$ est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier.*

Proposition 31 (Kahoul [17]). *Si G et H sont deux graphes $[3, 1, 6]$ -cycle réguliers, alors le graphe $G \otimes H$ est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier.*

Proposition 32 (Kahoul [17]). *$G \otimes K_2$ est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier si et seulement si G est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier.*

2.10 La classe des graphes $[3, 1, 6]$ -cycle induit réguliers

Définition 7 (Kahoul [17]). *On dit qu'un graphe G est $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier si toute chaîne induite de longueur 3, à extrémités distinctes, appartient à un unique 6-cycle induit.*

L'hypercube et les graphes $[3, 1, 6]$ -cycle réguliers sont des graphes $[3, 1, 6]$ -cycle induit réguliers.

Proposition 33 (Kahoul [17]). *Si G est un $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier, sans triangle, alors G est régulier ou semi-régulier.*

Proposition 34 (Kahoul [17]). *Soit G un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier de degré maximum n et N_0, N_1, \dots, N_p une décomposition en niveaux arbitraire relative à un sommet de G . Alors pour $k = 0, \dots, n - 2$:*

$$|N_{2k+1}| \leq \frac{n}{k+1} (C_{n-1}^k)^2$$

et

$$|N_{2k+2}| \leq \frac{n(n-k+1)^2}{k+1} (C_{n-1}^k)^2$$

Proposition 35 (Berrachedi et Kahoul [19]). *Le graphe Hypercube Q_n est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier.*

Proposition 36 (Berrachedi et Kahoul [19]). *Pour $k \geq 3$, le graphe impair étendu E_k est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier.*

Proposition 37 (Berrachedi et Kahoul [19]). *Si G est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier, alors G est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier.*

Proposition 38 (Berrachedi et Kahoul [19]). *Si G est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier, sans K_3 et sans 4-cycle, alors G est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier.*

Proposition 39 (Berrachedi et Kahoul [19]). *Soit G est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier. Alors pour toute paire de sommets u et v à distance 2 :*

$$d(u) = d(v)$$

Proposition 40 (Berrachedi et Kahoul [19]). *Si G est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier, alors G est régulier ou semi-régulier.*

Proposition 41 (Berrachedi et Kahoul [19]). *Si G est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier, sans K_3 et N_0, N_1, \dots, N_p une décomposition arbitraire de G et u un sommet dans N_i . Alors*

$$d^-(u) = m(u, N_{i-1}) \geq \lceil \frac{i}{2} \rceil$$

Proposition 42 (Berrachedi et Kahoul [19]). *Si G est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier, sans K_3 de degré maximum n et N_0, N_1, \dots, N_p une décomposition en niveaux relative à un sommet de degré n . Alors pour $k = 0, 1, \dots, n-2$*

$$|N_{2k+1}| \leq \frac{n}{k+1} (C_{n-1}^k)^2$$

et

$$|N_{2k+2}| \leq \frac{n(n-k-1)}{(k+1)^2} (C_{n-1}^k)^2$$

Proposition 43 (Kahoul [17]). *Si G est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier, de degré maximum n . Alors*

- $|V(G)| \leq C_{2n}^n$
- $|V(G)| = C_{2n}^n \Leftrightarrow G = H_n$

2.10.1 Opérations sur les graphes $[3, 1, 6]$ -cycle induit réguliers

Proposition 44 (Kahoul [17]). *Si G est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier, alors $G \times K_2$ est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier.*

Proposition 45 (Kahoul [17]). *Si G et H sont deux graphes $[3, 1, 6]$ -cycle induit réguliers, sans K_3 , alors $G \times K_2$ est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle induit régulier.*

Chapitre 3

Les $\{\lambda, \mu\}$ -graphes

3.1 Le $\{\lambda, \mu\}$ -graphe

Définition 8. *Un graphe G est dit $\{\lambda, \mu\}$ -graphe si chaque paire de sommets distincts u et v de $V(G)$ ont exactement λ voisins commun à distance μ de chacun d'eux ou aucun.*

Autrement dit, G est un $\{\lambda, \mu\}$ -graphe si :

$$\forall u, v \in V(G) : |N_\mu(u) \cap N_\mu(v)| \in \{0, \lambda\} \text{ où } N_\mu(u) = \{x \in V(G) / d(u, x) = \mu\}$$

Il se trouve que les $(0, \lambda)$ -graphes sont des $\{\lambda, 1\}$ -graphes.
Donc l'hypercube est un $\{2, 1\}$ -graphe.

Proposition 46. *Pour un entier positif n . ($n \geq 3$), on a :*

- (i)- *Si $n \equiv 2[4]$, C_n est un $\{1, \frac{n-2}{2}\}$ -graphe.*
- (ii)- *Si $n \equiv 1[4]$ ou $n \equiv 3[4]$, C_n est un $\{1, \frac{n-1}{2}\}$ -graphe.*
- (iii)- *Si $n \equiv 0[4]$, C_n , pour $n \geq 4$, est un graphe $\{2, \frac{n}{4}\}$ -graphe.*

Démonstration. Rappelons que C_n est un cycle sans corde sur n sommets. Soient u et v deux sommets.

(i)- Si $n \equiv 2[4]$.

Cas.1 : Si $d(u, v) = 2$, alors $|N_{\frac{n-2}{2}}(u) \cap N_{\frac{n-2}{2}}(v)| = 1$.

Cas.2 : Si $d(u, v) \neq 2$, alors $|N_{\frac{n-2}{2}}(u) \cap N_{\frac{n-2}{2}}(v)| = 0$.

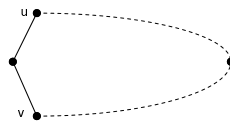


FIG. 3.1 – C_{4k+2} avec $d(u, v) = 2$

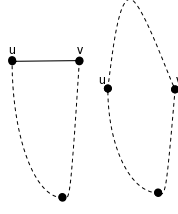


FIG. 3.2 – C_{4k+2} avec $d(u, v) \neq 2$

D'où C_n est un $\{1, \frac{n-2}{2}\}$ -graphe.

(ii)-Si $n \equiv 1[4]$ ou $n \equiv 3[4]$.

Si $d(u, v) = 1$, alors $|N_{\frac{n-1}{2}}(u) \cap N_{\frac{n-1}{2}}(v)| = 1$. (voir figure 3.3)

Si $d(u, v) \neq 1$, alors $|N_{\frac{n-1}{2}}(u) \cap N_{\frac{n-1}{2}}(v)| = 0$.

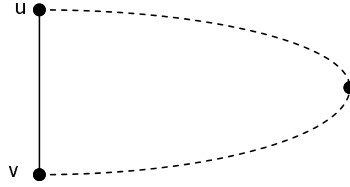


FIG. 3.3 – C_{4k+1} ou C_{4k+3} avec $d(u, v) = 1$

D'où C_n est un $\{1, \frac{n-1}{2}\}$ -graphe.

(iii)- Si $n \equiv 0[4]$

Si $d(u, v) < 2k$, $|N_k(u) \cap N_k(v)| = 0$ car sinon $d(u, v) = 2k$ absurde.

Si $d(u, v) = 2k$, $|N_k(u) \cap N_k(v)| = 2$.

D'où C_n est un $\{2, \frac{n}{2}\}$ -graphe.

□

3.2 $\{2, 2\}$ -graphe

lemme 3. *Le graphe G suivant est un $\{2, 2\}$ -graphe.*

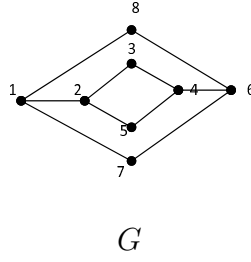


FIG. 3.4 – Un $\{2, 2\}$ -graphe G

Démonstration. Pour le graphe de la figure 3.4, le tableau suivant résume tous les ensembles des voisins communs à distance 2 de chaque paire de sommets.

	v	1	2	3	4	5	6	7
u	$N_2(v)$	$\{3, 5, 6\}$	$\{4, 7, 8\}$	$\{1, 5, 6\}$	$\{2, 7, 8\}$	$\{1, 3, 6\}$	$\{1, 3, 5\}$	$\{2, 4, 8\}$
1	$\{3, 5, 6\}$	/	/	/	/	/	/	/
2	$\{4, 7, 8\}$	\emptyset	/	/	/	/	/	/
3	$\{1, 5, 6\}$	$\{5, 6\}$	\emptyset	/	/	/	/	/
4	$\{2, 7, 8\}$	\emptyset	$\{7, 8\}$	\emptyset	/	/	/	/
5	$\{1, 3, 6\}$	$\{5, 6\}$	\emptyset	$\{1, 6\}$	\emptyset	/	/	/
6	$\{1, 3, 5\}$	$\{3, 5\}$	\emptyset	$\{1, 5\}$	\emptyset	$\{1, 3\}$	/	/
7	$\{2, 4, 8\}$	\emptyset	$\{4, 8\}$	\emptyset	$\{2, 8\}$	\emptyset	\emptyset	/
8	$\{2, 4, 7\}$	\emptyset	$\{4, 7\}$	\emptyset	$\{2, 7\}$	\emptyset	\emptyset	$\{2, 4\}$

TAB. 3.1 – Le tableau des $N_2(u) \cap N_2(v)$

D'où le tableau suivant qui montre que pour toute paire de sommets u et v on a bien

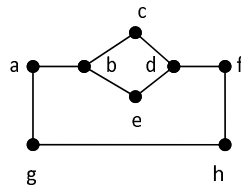
$$|N_2(u) \cap N_2(v)| \in \{0, 2\}$$

Donc le graphe G est bien un $\{2, 2\}$ -graphe. □

	v	1	2	3	4	5	6	7
u	$N_2(u) \backslash N_2(v)$	{3, 5, 6}	{4, 7, 8}	{1, 5, 6}	{2, 7, 8}	{1, 3, 6}	{1, 3, 5}	{2, 4, 8}
1	{3, 5, 6}	/	/	/	/	/	/	/
2	{4, 7, 8}	0	/	/	/	/	/	/
3	{1, 5, 6}	2	0	/	/	/	/	/
4	{2, 7, 8}	0	2	0	/	/	/	/
5	{1, 3, 6}	2	0	2	0	/	/	/
6	{1, 3, 5}	2	0	2	0	2	/	/
7	{2, 4, 8}	0	2	0	2	0	0	/
8	{2, 4, 7}	0	2	0	2	0	0	2

TAB. 3.2 – Le tableau des $|N_2(u) \cap N_2(v)|$

lemme 4. *Le graphe H suivant n'est pas un $\{2, 2\}$ -graphe.*



H

FIG. 3.5 – Un non $\{2, 2\}$ -graphe H

Démonstration. Le tableau 3.3 représente $N_2(u) \cap N_2(v)$ pour toute paire de sommets u et v du graphe précédent du graphe H .

	v	a	b	c	d	e	f	g
u	$N_2(v)$	$\{c, e, h\}$	$\{d, f, g\}$	$\{a, e, h\}$	$\{b, f, g\}$	$\{a, c, h\}$	$\{b, d, f\}$	$\{b, d, f\}$
	$N_2(u)$	$\{c, e, h\}$	$\{d, f, g\}$	$\{a, e, h\}$	$\{b, f, g\}$	$\{a, c, h\}$	$\{b, d, f\}$	$\{b, d, f\}$
a	$\{c, e, h\}$	/	/	/	/	/	/	/
b	$\{d, f, g\}$	\emptyset	/	/	/	/	/	/
c	$\{a, e, h\}$	$\{e\}$	\emptyset	/	/	/	/	/
d	$\{b, f, g\}$	$\{h\}$	\emptyset	\emptyset	/	/	/	/
e	$\{a, c, h\}$	$\{c\}$	\emptyset	$\{a, f\}$	\emptyset	/	/	/
f	$\{b, d, f\}$	$\{c, e\}$	$\{g\}$	$\{e\}$	\emptyset	\emptyset	/	/
g	$\{b, d, f\}$	\emptyset	$\{d\}$	$\{a\}$	\emptyset	$\{a\}$	\emptyset	/
h	$\{a, c, e\}$	\emptyset	\emptyset	$\{f\}$	$\{b\}$	$\{f\}$	\emptyset	\emptyset

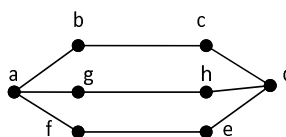
Ce qui donne par suite le tableau suivant qui prouve qu'il existe au moins une paire de sommets distincts

$$u \text{ et } v \text{ de } V(G) \text{ tel que } |N_2(u) \cap N_2(v)| \notin \{0, 2\}$$

	v	a	b	c	d	e	f	g
u	$N_2(v)$	$\{c, e, h\}$	$\{d, f, g\}$	$\{a, e, h\}$	$\{b, f, g\}$	$\{a, c, h\}$	$\{b, d, f\}$	$\{b, d, f\}$
	$N_2(u)$	$\{c, e, h\}$	$\{d, f, g\}$	$\{a, e, h\}$	$\{b, f, g\}$	$\{a, c, h\}$	$\{b, d, f\}$	$\{b, d, f\}$
a	$\{c, e, h\}$	/	/	/	/	/	/	/
b	$\{d, f, g\}$	0	/	/	/	/	/	/
c	$\{a, e, h\}$	1	0	/	/	/	/	/
d	$\{b, f, g\}$	1	0	0	/	/	/	/
e	$\{a, c, h\}$	1	0	2	0	/	/	/
f	$\{b, d, f\}$	2	1	1	0	0	/	/
g	$\{b, d, f\}$	0	1	1	0	1	0	/
h	$\{a, c, e\}$	0	0	1	1	1	0	0

On déduit que H n'est pas un $\{2, 2\}$ -graphe. □

lemme 5. *Le graphe H suivant est un $\{2, 2\}$ -graphe.*



Le graphe H

FIG. 3.6 – Un $\{2, 2\}$ -graphe H

Démonstration. Pour le graphe de la figure précédente, les deux tableaux suivants résument tous les voisins communs à distance 2 entre chaque paire de sommets u et v de $V(H)$ et le nombre de voisins entre eux. (voir tableau ?? et tableau ??)

	v	a	b	c	d	e	f	g
u	$N_2(v)$	$\{c, e, h\}$	$\{d, f, g\}$	$\{a, e, h\}$	$\{b, f, g\}$	$\{a, c, h\}$	$\{b, d, g\}$	$\{b, d, f\}$
a	$\{c, e, h\}$	/	/	/	/	/	/	/
b	$\{d, f, g\}$	\emptyset	/	/	/	/	/	/
c	$\{a, e, h\}$	$\{e, h\}$	\emptyset	/	/	/	/	/
d	$\{b, f, g\}$	\emptyset	$\{f, g\}$	\emptyset	/	/	/	/
e	$\{a, c, h\}$	$\{c, h\}$	\emptyset	$\{a, h\}$	\emptyset	/	/	/
f	$\{b, d, g\}$	\emptyset	$\{d, g\}$	\emptyset	$\{b, g\}$	\emptyset	/	/
g	$\{b, d, f\}$	\emptyset	$\{d, f\}$	\emptyset	$\{b, f\}$	\emptyset	$\{b, d\}$	/
h	$\{a, c, e\}$	$\{c, e\}$	\emptyset	$\{a, e\}$	\emptyset	$\{a, c\}$	\emptyset	\emptyset

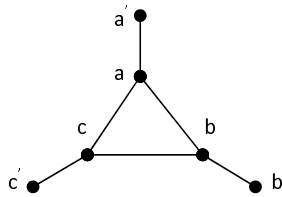
	v	a	b	b	c	d	e	f
u	$N_2(v)$	$\{d, f, g\}$	$\{a, e, h\}$	$\{b, f, g\}$	$\{a, c, h\}$	$\{b, d, g\}$	$\{b, d, f\}$	$\{b, d, f\}$
a	$\{c, e, h\}$	/	/	/	/	/	/	/
b	$\{d, f, g\}$	0	/	/	/	/	/	/
c	$\{a, e, h\}$	2	0	/	/	/	/	/
d	$\{b, f, g\}$	0	2	0	/	/	/	/
e	$\{a, c, h\}$	2	0	2	0	/	/	/
f	$\{b, d, g\}$	0	2	0	2	0	/	/
g	$\{b, d, f\}$	0	2	0	2	0	2	/
h	$\{a, c, e\}$	2	0	2	0	2	0	0

Ainsi, $\forall u, v \in V(H) (u \neq v) |N_2(u) \cap N_2(v)| \in \{0, 2\}$ □

lemme 6. Si G est un $\{2, 2\}$ -graphe non complet avec $\delta(G) \geq 3$, alors G est sans K_3 .

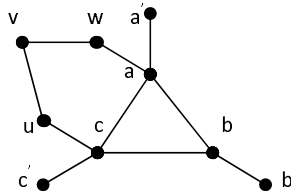
Démonstration. Soit abc un K_3 dans un $\{2, 2\}$ -graphe G .

$$\delta(G) \geq 3 \Rightarrow \exists a' \in N(a), b' \in N(b) \text{ et } c' \in N(c)$$



$$\left. \begin{array}{l} N_2(a) = \{b', c'\} \\ \text{et} \\ N_2(c) = \{a', b'\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(a) \cap N_2(c) = \{b'\}$$

Comme G est un $\{2, 2\}$ -graphe, il existe $v \neq b', v \in N_2(a) \cap N_2(c)$
 Donc il existe aussi, deux sommets $u \in N(c) \cap N(v)$ et $w \in N(v) \cup N(a)$



On a pour les deux sommets b et a' .

$$\left. \begin{array}{l} N_2(b) = \{a', c', u, w\} \\ \text{et} \\ N_2(a') = \{b, c, w\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(a') \cap N_2(b) = \{w\}$$

On a bien :

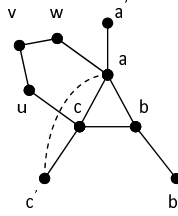
$$b \notin N_2(a') \cap N_2(b), c \notin N_2(a') \cap N_2(b) \text{ et } a' \notin N_2(a') \cap N_2(b)$$

Trois cas ont lieu :

1. Supposons que $c' \in N_2(a')$

On distingue trois sous-cas 01 :

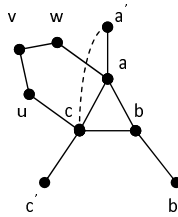
(a) sous-cas : $c' \in N(a)$ On a :



$$\left. \begin{array}{l} N_2(b) = \{a', c', u, w\} \\ \text{et} \\ N_2(c') = \{a', b, u, w\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(c') \cap N_2(b) = \{a', u, w\}$$

Absurde avec G un $\{2, 2\}$ -graphe.

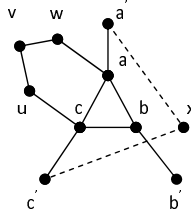
(b) Sous-cas 02 : $c \in N(a')$



$$\left. \begin{array}{l} N_2(b) = \{a', c', u, w\} \\ \text{et} \\ N_2(a') = \{b, c', u, w\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(a') \cap N_2(b) = \{c', u, w\}$$

Absurde avec G un $\{2, 2\}$ -graphe.

(c) Sous-cas 03 : $c' \notin N(a)$ et $c \notin N(a') \Rightarrow \exists x \in N_2(a') \cap N_2(c')$ On a :



$$\left. \begin{array}{l} N_2(c') = \{a, b, a', u\} \\ \text{et} \\ N_2(w) = \{b, c, a', u\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(c') \cap N_2(w) = \{b, a', u\}$$

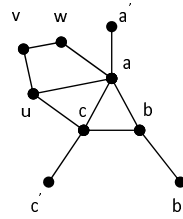
Absurde avec G un $\{2, 2\}$ -graphe.

Donc $c' \notin N_2(a')$

2. Supposons que $u \in N_2(a')$

Trois sous-cas ont lieu :

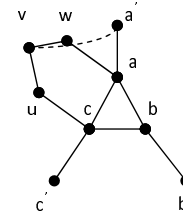
(a) $u \in N(a')$ On a :



$$\left. \begin{array}{l} N_2(u) = \{b, a', c', w\} \\ \text{et} \\ N_2(b) = \{a', c', u, w\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(b) \cap N_2(u) = \{a', c', w\}$$

Absurde avec G un $\{2, 2\}$ -graphe.

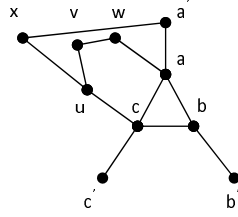
(b) $v \in N(a)$ On a :



$$\left. \begin{array}{l} N_2(b) = \{a', c', u, w\} \\ \text{et} \\ N_2(u) = \{a, b, a', c', w\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(b) \cap N_2(u) = \{a', c', w\}$$

Absurde avec G un $\{2, 2\}$ -graphe.

(c) $c' \notin N_2(a)$ et $c \notin N_2(a') \Rightarrow \exists x \in N_2(a') \cap N_2(c')$ On a :



$$\left. \begin{array}{l} N_2(b) = \{a', c', u, w\} \\ \text{et} \\ N_2(u) = \{a, b, a', c', w\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(b) \cap N_2(u) = \{a', c', w\}$$

Absurde avec G un $\{2, 2\}$ -graphe.

Donc $u \notin N^2(a')$

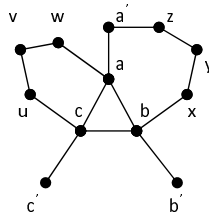
3. $c' \notin N_2(a')$ et $u \notin N_2(a')$ Comme G est un $\{2, 2\}$ -graphe.

$$N_2(b) \cap N_2(w) = \{u\} \Rightarrow \exists y \neq u, y \in N_2(b) \cap N_2(u)$$

Donc :

$$\exists x \in N(b) \cap N(y) \text{ et } \exists z \in N(a') \cap N(u)$$

On trouve dans ce cas :



$$\left. \begin{array}{l} N_2(a) = \{b', c', u, v, x, z\} \\ \text{et} \\ N_2(c) = \{a', b', v, w, x\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(a) \cup N_2(c) = \{b', v, x\}$$

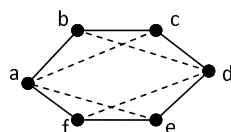
Absurde avec G un $\{2, 2\}$ -graphe.

Donc $N_2(b) \cup N_2(a') = \{u\}$. Contradiction avec G un $\{2, 2\}$ -graphe. □

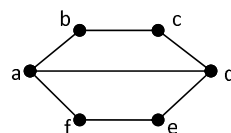
Proposition 47. Dans un $\{2, 2\}$ -graphe $G = (V, E)$, tout C_6 est sans corde.

Démonstration. Soient $G = (V, E)$ un $\{2, 2\}$ -graphe et a, b, c, d, e, f un C_6 de G .
 (i)-D'après le lemme précédent G est sans K_3 , alors

$$b \notin N(f), c \notin N(e), c \notin N(a), e \notin N(a), b \notin N(d) \text{ et } f \notin N(d)$$

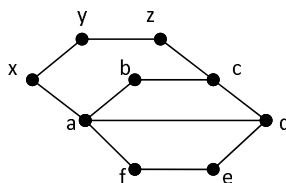


(ii)-Supposons $d \in N(a)$.



$$\left. \begin{array}{l} N_2(a) = \{c, e\} \\ \text{et} \\ N_2(c) = \{a, e\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(a) \cap N_2(c) = \{e\}$$

comme $a \notin N_2(a)$ et $c \notin N_2(c)$, alors il existe $y \neq e, y \in N_2(a) \cap N_2(c)$
 Autrement dit, il existe $x \in N(a) \cap N(y)$ et $z \in N(c) \cap N(y)$.

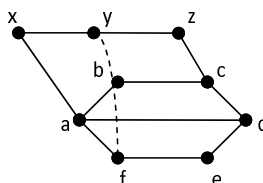


De même, on a :

$$\left. \begin{array}{l} N_2(a) = \{c, e, y\} \\ \text{et} \\ N_2(e) = \{a, c\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(a) \cap N_2(e) = \{c\}$$

comme $a \notin N_2(a)$ et $e \notin N_2(e)$.
 Supposons que : $y \in N_2(e)$
 Trois cas ont lieu :

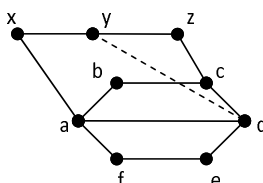
1. Si $y \in N(f)$.



$$\left. \begin{array}{l} N_2(f) = \{b, d, x, z\} \\ \text{et} \\ N_2(b) = \{d, f, x, z\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(x) \cap N_2(d) = \{d, x, z\}$$

D'où : $|N_2(f) \cap N_2(b)| = 3 > 2$. Absurde.

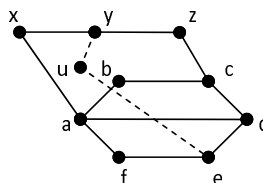
2. Si $y \in N(d)$.



$$\left. \begin{array}{l} N_2(d) = \{b, f, x, z\} \\ \text{et} \\ N_2(b) = \{d, f, x, z\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(x) \cap N_2(d) = \{f, x, z\}$$

D'où : $|N_2(d) \cap N_2(b)| = 3 > 2$. Absurde.

3. S'il existe un sommet u tel que : $u \in N(y) \cap N(e)$.



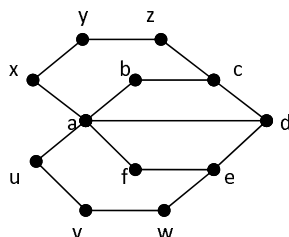
$$\left. \begin{array}{l} N_2(u) = \{d, f, x, z\} \\ \text{et} \\ N_2(b) = \{d, f, x, z\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(u) \cap N_2(d) = \{d, f, x, z\}$$

D'où : $|N_2(u) \cap N_2(b)| = 4 > 2$. Absurde.

S'il existe $v \neq c$, $v \in N_2(a) \cap N_2(e)$

Autrement dit, il existe $u \in N(a) \cap N(v)$ et $w \in N(e) \cap N(v)$.

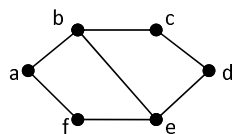
Dans ce cas :



$$\left. \begin{array}{l} N_2(x) = \{b, d, f, u, z\} \\ \text{et} \\ N_2(d) = \{b, f, u, w, x, z\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(x) \cap N_2(d) = \{b, f, u, z\}$$

D'où : $|N_2(x) \cap N_2(d)| = 4 > 2$. Absurde.

(iii)-Supposons $e \in N(b)$.

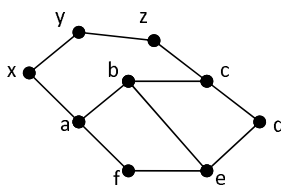


$$\left. \begin{array}{l} N_2(a) = \{c, e\} \\ \text{et} \\ N_2(c) = \{a, e\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(a) \cap N_2(c) = \{e\}$$

comme $a \notin N(a)$ et $c \notin N(c)$, alors il existe $y \neq e$, $y \in N_2(a) \cap N_2(c)$

Autrement dit, il existe $x \in N(a) \cap N(y)$ et $z \in N(c) \cap N(y)$.

De même,

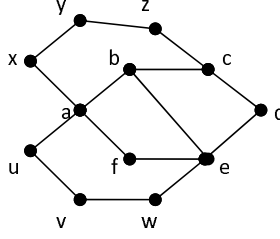


$$\left. \begin{array}{l} N_2(a) = \{c, e\} \\ \text{et} \\ N_2(c) = \{a, c\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(a) \cap N_2(e) = \{c\}$$

comme $a \notin N(a)$ et $e \notin N(e)$, alors il existe $v \neq c$, $v \in N_2(a) \cap N_2(e)$

Autrement dit, il existe $u \in N(a) \cap N(v)$ et $w \in N(e) \cap N(v)$.

Dans ce cas, on a



$$\left. \begin{array}{l} N_2(x) = \{b, f, u, z\} \\ \text{et} \\ N_2(d) = \{b, f, w, z\} \end{array} \right\} \Rightarrow N_2(x) \cap N_2(d) = \{b, f, z\}$$

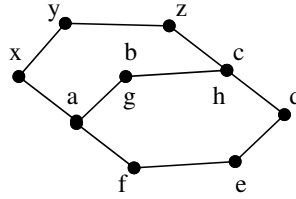
D'où $|N_2(x) \cap N_2(d)| = 3 > 2$. Absurde. □

Proposition 48. *Dans un $\{2, 2\}$ -graphe G , tout C_6 admet exactement une paire de sommets reliés par trois P_4 sommets-disjoints.*

Démonstration. Soit G un $\{2, 2\}$ -graphe et considérons a, b, c, d, e, f, a un C_6 . Trois cas ont lieu :

1. Aucune paire de sommets n'est reliés par trois P_4 sommets-disjoints.

On a :



$$\left. \begin{array}{l} N_2(a) = \{c, e\} \\ \text{et} \\ N_2(c) = \{a, e\} \end{array} \right\} \iff N_2(a) \cap N_2(c) = \{e\}$$

Comme $a \notin N_2(a)$ et $c \notin N_2(c)$, on peut distinguer deux sous-cas :

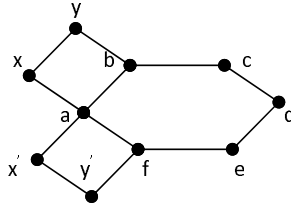
- (●) $\exists y \neq e, y \in N_2(a) \cap N_2(c)$ et $\exists x \in N(a) \cap N(y)$ et $\exists z \in N(c) \cap N(y)$.

Danc ce sous-cas :

$$\left. \begin{array}{l} N_2(x) = \{b, f, z\} \\ \text{et} \\ N_2(d) = \{b, f, z\} \end{array} \right\} \iff N_2(x) \cap N_2(d) = \{b, f, z\}$$

Donc, $|N_2(x) \cap N_2(d)| = 3 > 2$. Absurde.

- (●) $\exists y \neq e, y \in N_2(a) \cap N_2(c)$ et $\exists x \in N(a) \cap N(y)$ De meme $\exists y' \neq c, y' \in N_2(a) \cap N_2(e)$ et $\exists x' \in N(a) \cap N(y')$.

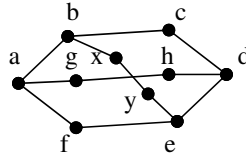


Dans ce sous-cas :

$$\left. \begin{array}{l} N_2(b) = \{x, x', d, f\} \\ \text{et} \\ N_2(f) = \{x, x', d, b\} \end{array} \right\} \iff N_2(b) \cap N_2(f) = \{x, x', d\}$$

Donc, $|N_2(b) \cap N_2(f)| = 3 > 2$. Absurde.

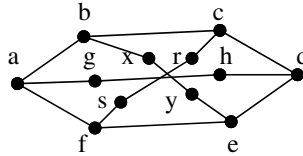
2. Exactement deux paires de sommets de C_6 sont reliés par trois P_4 sommets-disjoints. On a :



$$\left. \begin{array}{l} N_2(a) = \{c, e, h, x\} \\ \text{et} \\ N_2(c) = \{a, e, h, x\} \end{array} \right\} \iff N_2(a) \cap N_2(c) = \{e, h, x\}$$

Donc, $|N_2(a) \cap N_2(c)| = 3 > 2$. Absurde.

3. Exactement trois paires de sommets de C_6 sont reliés par trois P_4 sommets-disjoints. On a :



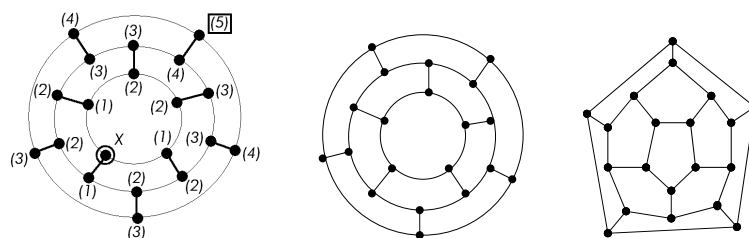
$$\left. \begin{array}{l} N_2(a) = \{c, e, h, s, x\} \\ \text{et} \\ N_2(e) = \{a, c, h, s, x\} \end{array} \right\} \iff N_2(a) \cap N_2(e) = \{c, e, h, s, x\}$$

Donc, $|N_2(a) \cap N_2(e)| = 4 > 2$. Absurde.

□

Le graphe suivant qui représente le dodécaèdre est un graphe de diamètre 5, de maille 5 et 3-régulier.

Le dodécaèdre est sans triangle et sans C_4 .

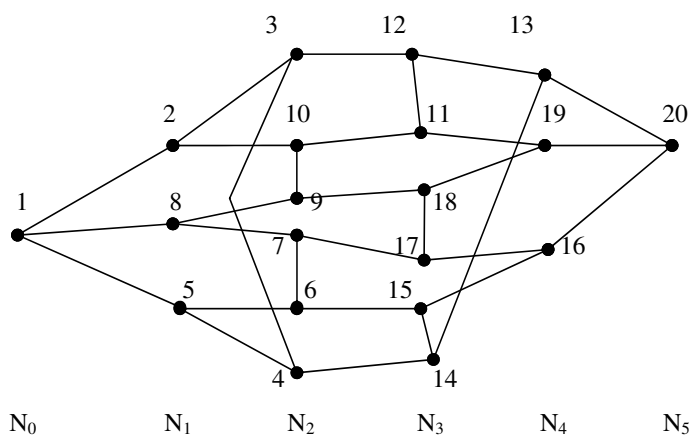


Dans ce graphe, si on prend un sommet quelconque x , alors 5 est l'excentricité de x . Autrement dit, la distance la plus courte, qui relie x et son sommet diamétral, est égale à 5.

Remarque 1. *Le dodécaèdre n'est pas un $\{2, 2\}$ -graphe.*

Car si on considère la décomposition de dodécaèdre à partir du sommet 1.

On a :



$$\left. \begin{array}{l} N_2(1) = \{3, 4, 6, 7, 9, 10\} \\ \text{et} \\ N_2(3) = \{1, 5, 10, 11, 13, 14\} \end{array} \right\} \iff N_2(a) \cap N_2(c) = \{10\}$$

lemme 7. Dans le dodécaèdre pour tout sommet u on a :

$$\forall v \in N_4(u); |N_i(u) \cap N_{4-i}(v)| = 2$$

Démonstration. Soit $N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5$ la décomposition en niveaux du dodécaèdre à partir du sommet $u = 1$. D'après la figure 3.7, on a

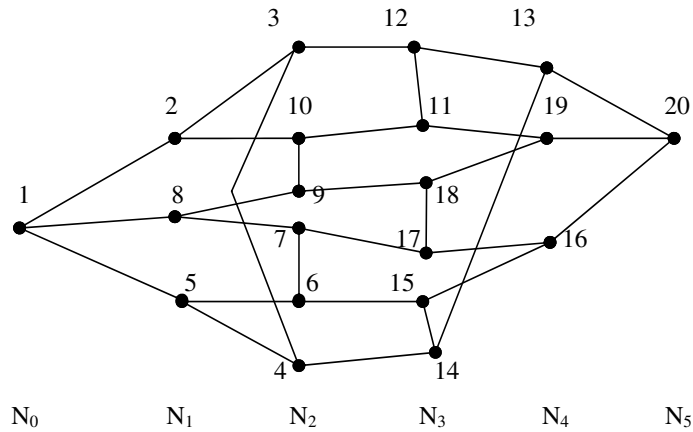


FIG. 3.7 – La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 1 et 20

$$N_4(1) = \{13, 16, 19\} \implies v \in \{13, 16, 19\}$$

Donc on prenant $u = 1$, le tableau suivant résume tous les

$$N_i(v) \cap N_{4-i}(1) \text{ pour tout } v \in \{13, 16, 19\}.$$

D'où le tableau suivant qui montre bien que tous les

$N_i(v) \cap N_{4-i}(1)$	$N_i(13) \cap N_{4-i}(1)$	$N_i(16) \cap N_{4-i}(1)$	$N_i(19) \cap N_{4-i}(1)$
v	13	16	19
3	2;5	5;8	2;8
2	3;4	6;7	9;10
1	12;14	15;17	11;18

TAB. 3.3 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(1)$

$$|N_i(v) \cap N_{4-i}(1)| = 2 \text{ pour tout } v \in \{13, 16, 19\}.$$

Donc, le dodécaèdre vérifie la propriété

$$|N_i(v) \cap N_{4-i}(1)| = 2 \text{ pour tout } v \in N_4(1).$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(1)$	$N_i(13) \cap N_{4-i}(1)$	$N_i(16) \cap N_{4-i}(1)$	$N_i(19) \cap N_{4-i}(1)$
$v \backslash i$	13	16	19
3	2	2	2
2	2	2	2
1	2	2	2

TAB. 3.4 – Le tableau des $|N_i(v) \cap N_{4-i}(1)|$

De même, on peut déduire la décomposition du dodécaèdre à partir du sommet $y = 20$ qui l'unique sommet diamétral de $x = 1$. On a alors,

$$\{N_i(20) = N_{5-i}(1) \text{ avec } i = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Donc :

$$N_4(20) = \{2, 5, 8\} \implies v \in \{2, 5, 8\}$$

Alors, le tableau suivant résume tous les

$$N_i(v) \cap N_{4-i}(20) \text{ pour tout } v \in \{2, 5, 8\}.$$

D'où le tableau suivant qui montre bien que

$N_i(v) \cap N_{4-i}(20)$	$N_i(2) \cap N_{4-i}(20)$	$N_i(5) \cap N_{4-i}(20)$	$N_i(8) \cap N_{4-i}(1)$
$v \backslash i$	2	5	8
3	13 ; 19	13 ; 16	16 ; 19
2	11 ; 12	14 ; 15	17 ; 18
1	3 ; 10	4 ; 6	7 ; 9

TAB. 3.5 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(20)$

$$|N_i(v) \cap N_{4-i}(20)| = 2 \text{ pour tout } v \in \{2, 5, 8\}.$$

Donc, le dodécaèdre vérifie la propriété

$N_i(v) \cap N_{4-i}(20)$	$N_i(2) \cap N_{4-i}(20)$	$N_i(5) \cap N_{4-i}(20)$	$N_i(8) \cap N_{4-i}(20)$
$v \backslash i$	2	5	8
3	2	2	2
2	2	2	2
1	2	2	2

TAB. 3.6 – Le tableau des $|N_i(v) \cap N_{4-i}(20)|$

$$|N_i(v) \cap N_{4-i}(20)| = 2 \text{ pour tout } v \in N_4(20)$$

On reprends le même travail avec chaque sommet x et son unique sommet diamétral y comme suit :

- $x = 2$ et $y = 16$.

On a :

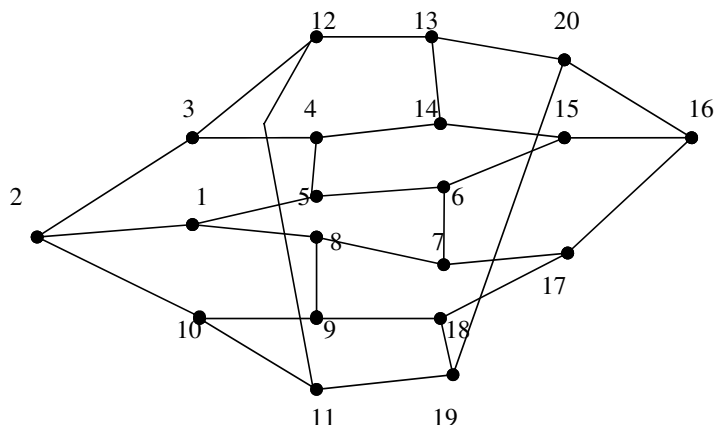


FIG. 3.8 – La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 2 et 16

$$N_4(2) = \{15, 17, 20\} \implies v \in \{15, 17, 20\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(u)$	$N_i(15) \cap N_{4-i}(2)$	$N_i(17) \cap N_{4-i}(2)$	$N_i(20) \cap N_{4-i}(2)$
$i \backslash v$	15	17	20
1	6;14	7;18	13;19
2	4;5	8;9	11;12
3	1;3	1;10	3;10

TAB. 3.7 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(2)$

$$N_4(16) = \{1, 3, 10\} \implies v \in \{1, 3, 10\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(u)$	$N_i(15) \cap N_{4-i}(2)$	$N_i(17) \cap N_{4-i}(2)$	$N_i(20) \cap N_{4-i}(2)$
$i \backslash v$	15	17	20
1	5;8	4;12	9;11
2	6;7	13;14	18;19
3	5;17	15;20	17;20

TAB. 3.8 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(18)$

- $x = 3$ et $y = 17$.

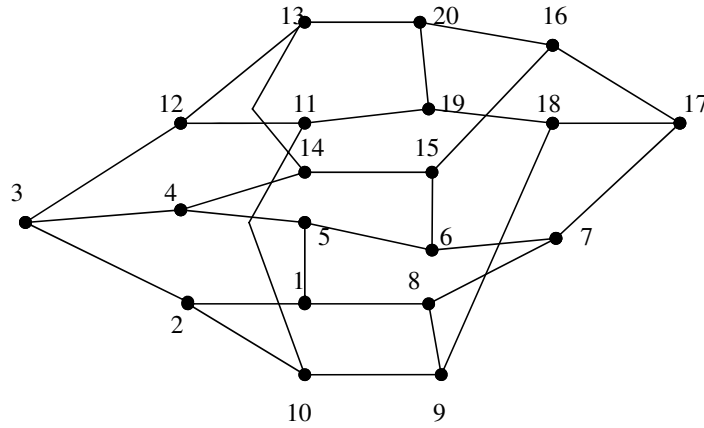


FIG. 3.9 – La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 3 et 17

$$N_4(3) = \{7, 16, 18\} \implies v \in \{7, 16, 18\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(u)$	$N_i(7) \cap N_{4-i}(3)$	$N_i(16) \cap N_{4-i}(2)$	$N_i(18) \cap N_{4-i}(2)$
$i \backslash v$	7	16	18
1	6;8	15;20	9;19
2	1;5	13;14	10;11
3	2;4	4;12	2;12

TAB. 3.9 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(3)$

$$N_4(17) = \{2, 4, 12\} \implies v \in \{2, 4, 12\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(17)$	$N_i(2) \cap N_{4-i}(17)$	$N_i(4) \cap N_{4-i}(17)$	$N_i(12) \cap N_{4-i}(17)$
$v \backslash i$	2	4	12
1	1;10	5;14	11;13
2	8;9	6;15	19;20
3	7;18	7;16	16;18

TAB. 3.10 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(17)$

- $x = 4$ et $y = 18$.

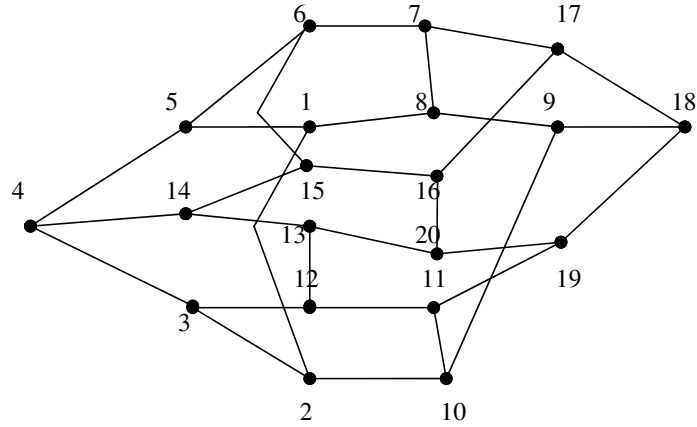


FIG. 3.10 – La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 4 et 18

$$N_4(4) = \{9, 16, 17\} \implies v \in \{9, 16, 17\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(4)$	$N_i(9) \cap N_{4-i}(4)$	$N_i(16) \cap N_{4-i}(4)$	$N_i(17) \cap N_{4-i}(4)$
$v \backslash i$	9	16	17
1	8;10	7;16	11;20
2	1;2	6;15	12;13
3	3;5	5;14	3;14

TAB. 3.11 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(4)$

$$N_4(18) = \{3, 5, 14\} \implies v \in \{3, 5, 14\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(18)$	$N_i(3) \cap N_{4-i}(18)$	$N_i(5) \cap N_{4-i}(18)$	$N_i(14) \cap N_{4-i}(18)$
v	3	5	14
i			
1	2;12	1;6	13;15
2	10;11	7;8	16;20
3	9;19	9;17	17;19

TAB. 3.12 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(18)$

- $x = 5$ et $y = 19$.

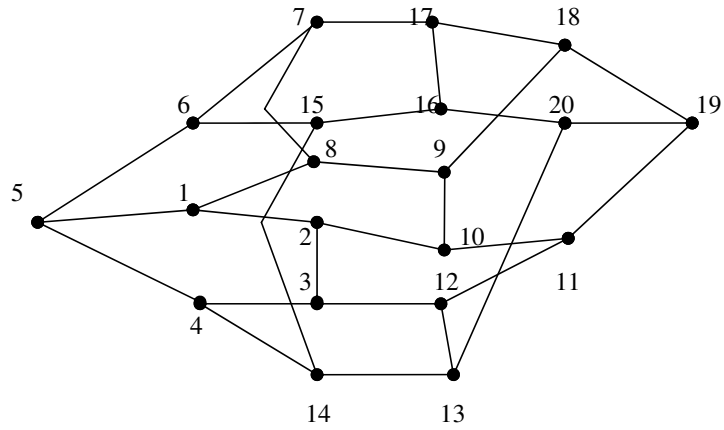


FIG. 3.11 – La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 5 et 19

$$N_4(5) = \{11, 18, 20\} \implies v \in \{11, 18, 20\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(5)$	$N_i(11) \cap N_{4-i}(5)$	$N_i(18) \cap N_{4-i}(5)$	$N_i(20) \cap N_{4-i}(5)$
v	11	18	20
i			
1	10;12	9;17	13;16
2	2;3	7;8	14;15
3	1;4	1;6	4;6

TAB. 3.13 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(5)$

$$N_4(19) = \{1, 4, 6\} \implies v \in \{1, 4, 6\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(19)$	$N_i(1) \cap N_{4-i}(19)$	$N_i(4) \cap N_{4-i}(19)$	$N_i(6) \cap N_{4-i}(19)$
$i \backslash v$	1	4	6
1	2;8	3;14	7;15
2	9;10	12;13	16;17
3	11;18	11;20	18;20

TAB. 3.14 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(19)$

- $x = 6$ et $y = 11$.

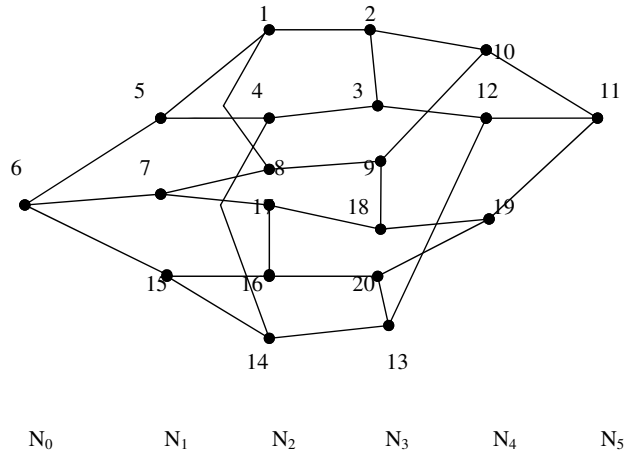


FIG. 3.12 – La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 6 et 11

$$N_4(6) = \{10, 12, 19\} \implies v \in \{10, 12, 19\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(6)$	$N_i(10) \cap N_{4-i}(6)$	$N_i(12) \cap N_{4-i}(6)$	$N_i(19) \cap N_{4-i}(6)$
$i \backslash v$	10	12	19
1	2;9	3;13	18;20
2	1;8	4;14	16;17
3	2;5	5;15	7;15

TAB. 3.15 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(6)$

$$N_4(11) = \{5, 7, 15\} \implies v \in \{5, 7, 15\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(11)$	$N_i(5) \cap N_{4-i}(11)$	$N_i(7) \cap N_{4-i}(11)$	$N_i(15) \cap N_{4-i}(11)$
v	5	7	15
i			
1	1;4	8;17	14;16
2	2;3	9;18	13;20
3	10;12	10;19	12;19

TAB. 3.16 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(11)$

- $x = 7$ et $y = 12$.

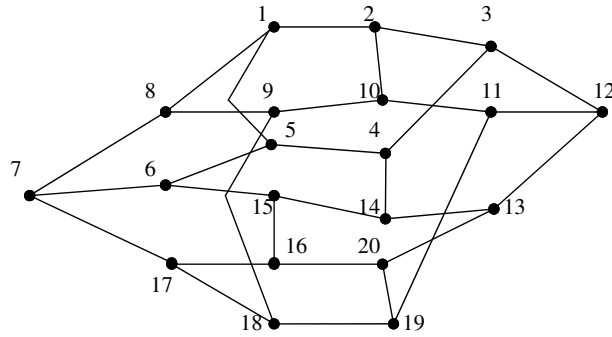


FIG. 3.13 – La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 7 et 12

$$N_4(7) = \{3, 11, 13\} \implies v \in \{3, 11, 13\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(7)$	$N_i(3) \cap N_{4-i}(7)$	$N_i(11) \cap N_{4-i}(7)$	$N_i(13) \cap N_{4-i}(7)$
v	3	11	13
i			
1	2;4	10;19	14;20
2	1;6	9;18	15;16
3	6;8	8;17	9;17

TAB. 3.17 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(7)$

$$N_4(20) = \{6, 8, 17\} \implies v \in \{6, 8, 17\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(20)$	$N_i(6) \cap N_{4-i}(20)$	$N_i(8) \cap N_{4-i}(20)$	$N_i(17) \cap N_{4-i}(20)$
v	6	8	17
i			
1	5;15	1;9	16;18
2	4;14	2;10	19;20
3	3;13	3;11	11;13

TAB. 3.18 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(12)$

- $x = 8$ et $y = 13$.

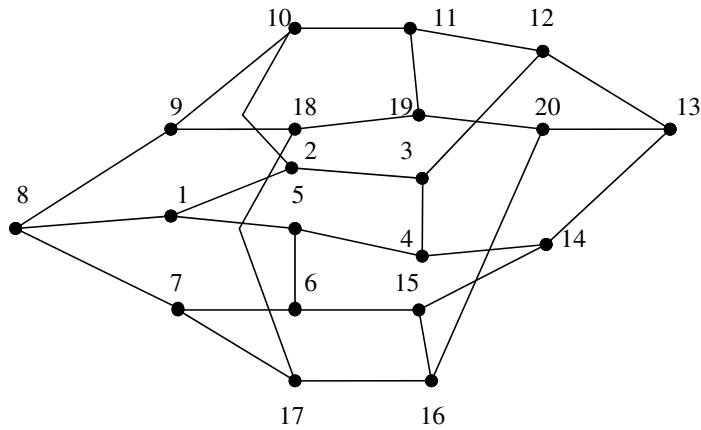


FIG. 3.14 – La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 8 et 13

$$N_4(8) = \{12, 14, 20\} \implies v \in \{12, 14, 20\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(8)$	$N_i(12) \cap N_{4-i}(8)$	$N_i(14) \cap N_{4-i}(8)$	$N_i(20) \cap N_{4-i}(8)$
v	12	14	20
i			
1	3;11	4;15	16;19
2	2;10	5;6	17;18
3	1;9	1;7	7;9

TAB. 3.19 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(8)$

$$N_4(13) = \{1, 7, 9\} \implies v \in \{1, 7, 9\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(13)$	$N_i(1) \cap N_{4-i}(13)$	$N_i(7) \cap N_{4-i}(13)$	$N_i(9) \cap N_{4-i}(13)$
$i \backslash v$	1	7	9
1	2;5	6;17	10;18
2	3;4	15;16	11;19
3	12;14	14;20	12;20

TAB. 3.20 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(13)$

- $x = 9$ et $y = 14$.

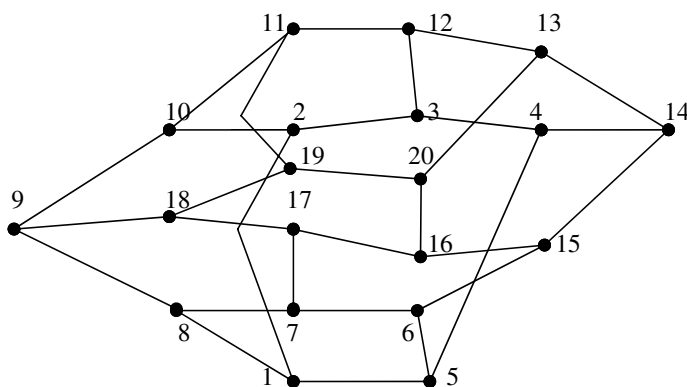


FIG. 3.15 – La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 9 et 14

$$N_4(9) = \{4, 13, 15\} \implies v \in \{4, 13, 15\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(9)$	$N_i(4) \cap N_{4-i}(9)$	$N_i(13) \cap N_{4-i}(9)$	$N_i(15) \cap N_{4-i}(9)$
$i \backslash v$	4	13	15
1	3;5	12;20	6;16
2	1;2	11;19	7;17
3	8;10	10;18	8;18

TAB. 3.21 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(9)$

$$N_4(14) = \{8, 10, 18\} \implies v \in \{8, 10, 18\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(14)$	$N_i(8) \cap N_{4-i}(14)$	$N_i(10) \cap N_{4-i}(14)$	$N_i(18) \cap N_{4-i}(14)$
$v \backslash i$	8	10	18
1	1;7	2;11	17;19
2	5;6	3;12	16;20
3	4;15	4;13	13;15

TAB. 3.22 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(14)$

• $x = 10$ et $y = 15$.

□

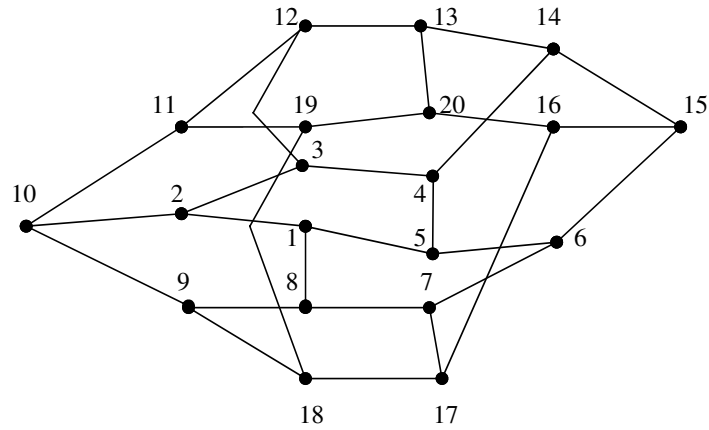


FIG. 3.16 – La décomposition du dodécaèdre à partir du sommet 10 et 15

$$N_4(10) = \{6, 14, 16\} \implies v \in \{6, 14, 16\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(10)$	$N_i(6) \cap N_{4-i}(10)$	$N_i(14) \cap N_{4-i}(10)$	$N_i(16) \cap N_{4-i}(10)$
$v \backslash i$	6	14	16
1	5;7	4;13	17;20
2	1;8	3;12	18;19
3	2;9	2;11	9;11

TAB. 3.23 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(10)$

$$N_4(15) = \{2, 9, 11\} \implies v \in \{2, 9, 11\}$$

$N_i(v) \cap N_{4-i}(15)$	$N_i(2) \cap N_{4-i}(15)$	$N_i(9) \cap N_{4-i}(15)$	$N_i(11) \cap N_{4-i}(15)$
v	2	9	11
i			
1	1;3	8;18	12;19
2	4;5	7;17	13;20
3	6;14	6;16	14;16

TAB. 3.24 – Le tableau des $N_i(v) \cap N_{4-i}(15)$

3.3 Opérations sur les $\{2, 2\}$ -graphes

Proposition 49. *si G et H sont deux $\{\lambda, \mu\}$ -graphes, alors le produit catégoriel $G \times H$ est un $\{\lambda, \mu\}$ -graphe.*

Démonstration. Soit $U = (u, u')$ et $V = (v, v')$ deux sommets de $G \times H$. Supposons que $|N_\mu(U) \cap N_\mu(V)| \neq 0$ et $W_1 = (w_1, w'_1) \in N_\mu(U) \cap N_\mu(V)$. Alors

$$w_1 \in N_\mu(u) \cap N_\mu(v) \text{ et } w_2 \in N_\mu(u') \cap N_\mu(v')$$

Puisque G et H sont $\{\lambda, \mu\}$ -graphes, alors ils existent $w_2, w_3, \dots, w_\lambda$ ($\lambda-1$) sommets de graphe G et $w'_2, w'_3, \dots, w'_\lambda$ ($\lambda-1$) sommets de graphe H tels que :

$$N_2(u) \cap N_2(v) = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_\lambda\}$$

et

$$N_\mu(u') \cap N_\mu(v') = \{w'_1, w'_2, w'_3, \dots, w'_\lambda\}$$

D'où

$$\{W_1, W_2, \dots, W_\lambda\} \subseteq N_\mu(U) \cap N_\mu(V) \text{ avec } W_i = (w_i, w'_i) \text{ pour } i = 1, \dots, \lambda$$

Donc, $|N_\mu(U) \cap N_\mu(V)| \geq \lambda$

Supposons qu'il existe

$$W_{\lambda+1} = (w_{\lambda+1}, w'_{\lambda+1}) \in N_\mu(U) \cap N_\mu(V)$$

avec

$$W_{\lambda+1} \neq W_i, \text{ pour } i = 1, \dots, \lambda$$

donc

$$w_{\lambda+1} \neq w_i \text{ ou } w'_{\lambda+1} \neq w'_i, \text{ pour } i = 1, \dots, \lambda$$

D'où

$$|N_\mu(u) \cap N_\mu(v)| > \lambda \text{ ou } |N_\mu(u') \cap N_\mu(v')| > \lambda$$

Absurde. □

Chapitre 4

Graphes $[4, 1, 8]$ -cycle réguliers

4.1 Graphes $[\mu, \lambda, 2\mu]$ -cycle réguliers

Définition 9. On appelle graphe $[\mu, \lambda, 2\mu]$ -cycle régulier le graphe connexe où toute chaîne de longueur μ appartient à exactement λ 2μ -cycles.

4.2 Graphes $[4, 1, 8]$ -cycle réguliers

Définition 10. Un graphe G est appelé graphe $[4, 1, 8]$ -cycle régulier si toute chaîne de longueur 4 appartient à un unique 8-cycle.

lemme 8. Le graphe de Désargues suivant est un graphe $[4, 1, 8]$ -cycle régulier.

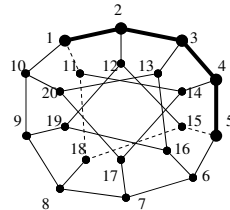


FIG. 4.1 – Le graphe de désagues

Démonstration. Soit la décomposition en niveaux du graphe de désargues à partir du sommet 1.

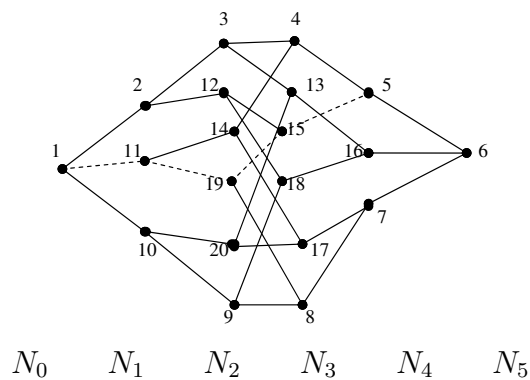
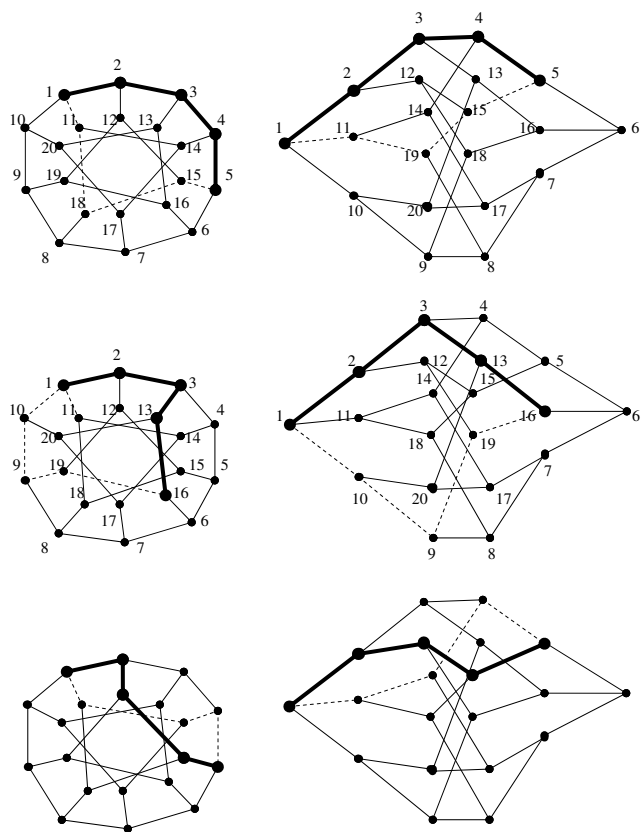
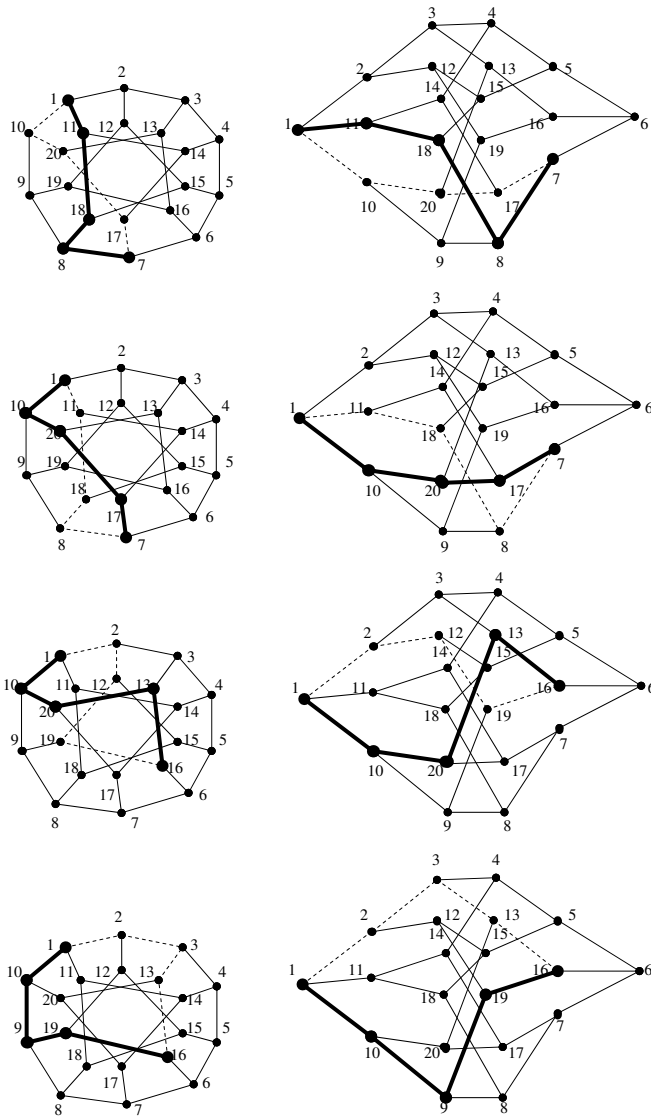


FIG. 4.2 – La décomposition en niveaux du graphe de désargues

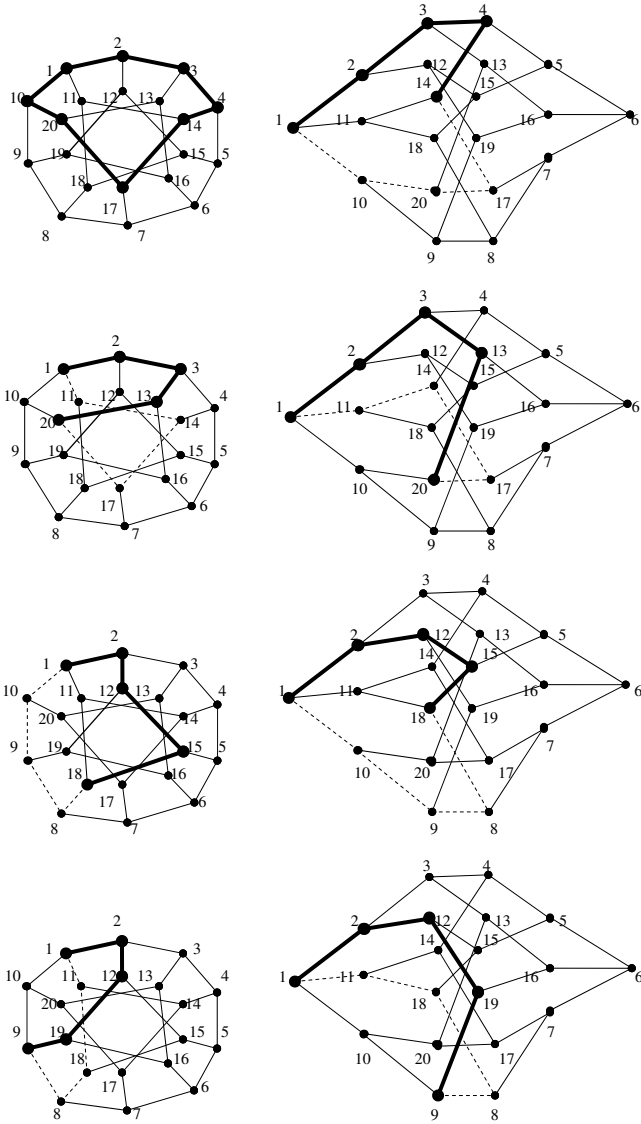
Considérons toutes les chaînes P_5 issues du sommet 1.
 Deux cas ont lieu :
 Cas 01 : P_5 rencontre 5 niveaux.





Cas 02 : P_5 rencontre 4 niveaux.

□



Remarque 2. *Le graphe de Petersen est régulier de maille 5 mais il n'est pas un $\{2, 2\}$ -graphe.*

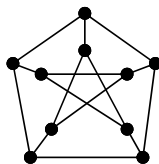
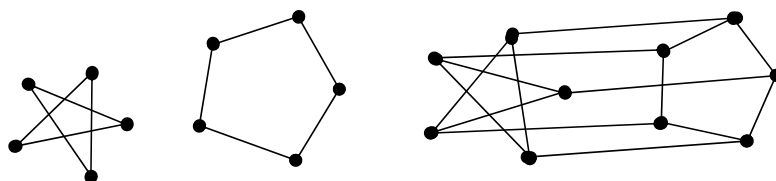


FIG. 4.3 – Le graphe de peterson

Remarque 3. *Le graphe de Petersen peut-être considéré comme le graphe C_5 relié avec sa copie par un couplage parfait comme suit :*



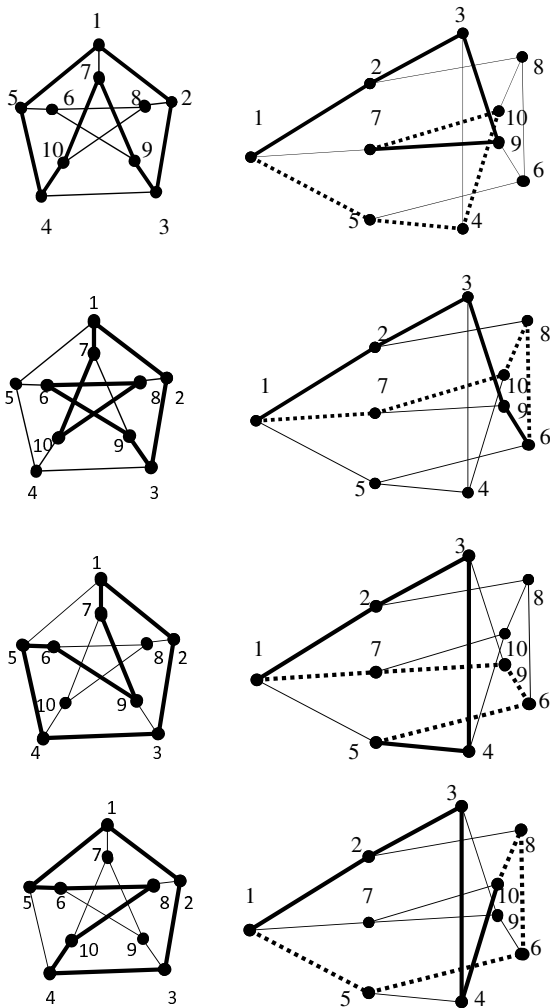
Proposition 50. *Le graphe de Petersen est un graphe $[4, 1, 8]$ -cycle régulier.*

Démonstration. Soit $\{N_0, N_1, N_2\}$ la décomposition en niveaux du graphe de Petersen.

Considérons toutes les chaînes P_5 issues du sommet 1.

Deux cas ont lieu :

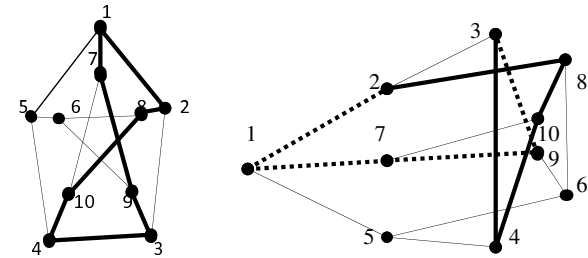
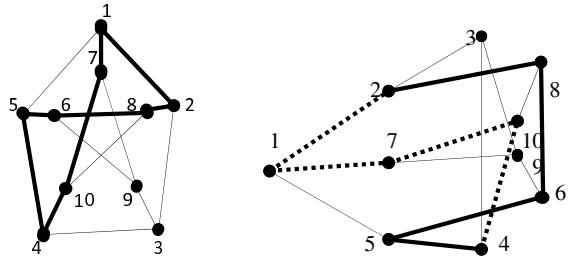
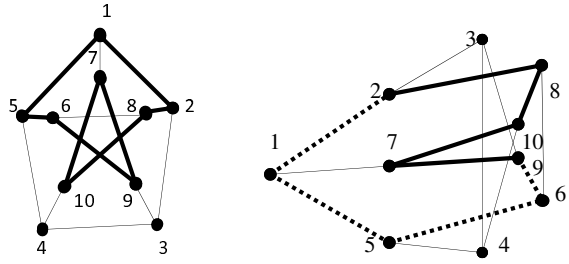
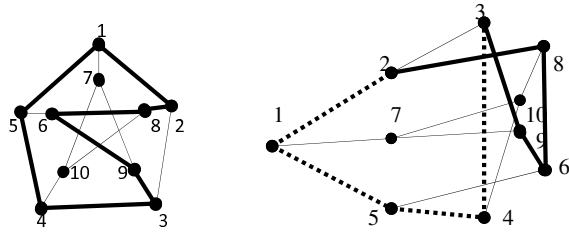
Cas 01 : P_5 rencontre les 3 niveaux. Toutes les P_5 en gras appartiennent à un



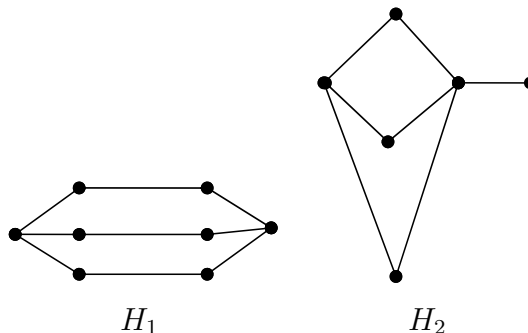
unique 8-cycle complété avec des arêtes pointillées.

Cas 02 : P_5 rencontre 2 niveaux seulement.

□



Proposition 51. *Si un $\{2, 2\}$ -graphe G de diamètre au moins 4 est sans H_1 et H_2 suivants, alors G est un $[4, 1, 8]$ -cycle régulier.*



Démonstration. Étant donné G un $\{2, 2\}$ -graphe et $ch = uxyzv$ une P_5 de G .

On a

$$N_2(u) \cap N_2(v) = \{y\} \text{ donc } \exists y_1 \in N_2(u) \cap N_2(v) \text{ et } y_1 \neq y$$

On peut distinguer les cas suivant :

1. **Cas 01** : Supposons $y_1 \in N(x) \cap N(z)$.

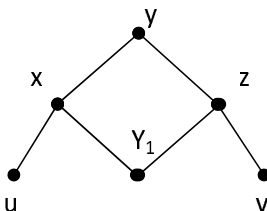


FIG. 4.4 – La chaîne $uxyzv$

On a :

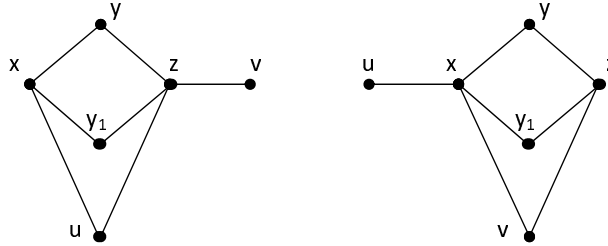
$$\begin{cases} N_2(u) = \{y, y_1\} \\ N_2(y) = \{u, y_1, v\} \end{cases}$$

Donc, $N_2(u) \cap N_2(y) = \{y_1\}$.

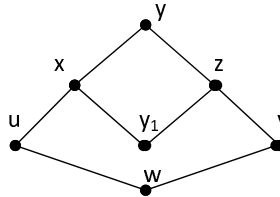
On sait que $y \notin N_2(y)$ et $u \notin N_2(u)$.

Supposons que $v \in N_2(u)$. Deux sous-cas ont lieu :

(a) Si $u \in N(z)$ ou $v \in N(x)$ on a H_2 .



(b) S' il existe $w \in N(u) \cap N(v)$ uxy_1zvwu est un C_6 ne contenant aucune paire de sommets reliés par trois P_4 .

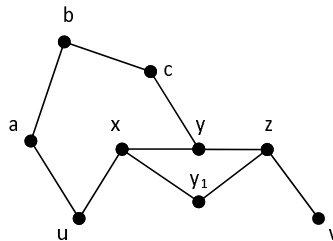


Donc $v \notin N_2(u)$.

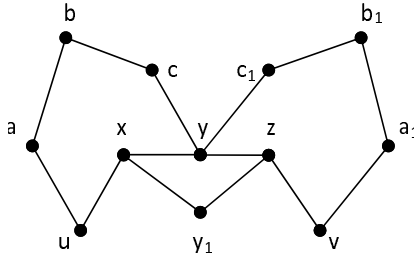
$v \notin N_2(u) \implies \exists b \in N_2(u) \cap N_2(y)$ et $b \neq y$.

Autrement dit :

$\exists a \in N(u) \cap N(b)$ et $c \in N(b) \cap N(y)$.



De même pour les deux sommets v et y on a :
 $\exists b_1 \in N_2(v) \cap N_2(y)$ et $b_1 \neq y_1$.



$$\begin{cases} N_2(u) = \{y, y_1, b\} \\ N_2(y_1) = \{u, v, y\} \end{cases}$$

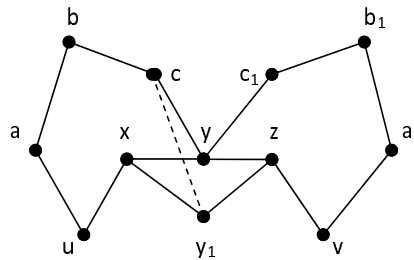
On sait que $v \notin N_2(u)$.

Si $b \in N_2(y_1)$.

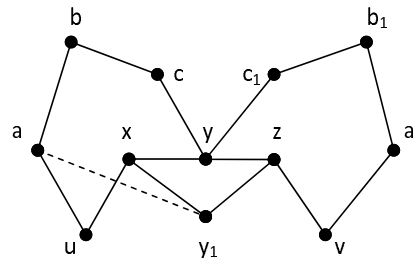
Alors Trois sous-cas ont lieu :

(a) **Sous-cas 1.1**

Si $c \in N(y_1) \implies b \in N_2(y_1)$ donc $N_2(y) \cap N_2(y_1) = \{u, v, b\}$. Absurde.

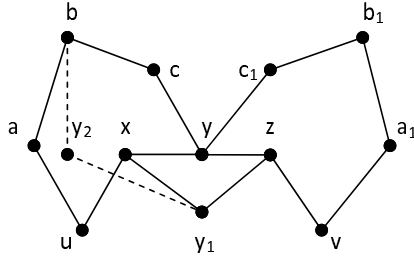


(b) **Sous-cas 1.2** $a \in N(y_1)$



$$\begin{cases} N_2(x) = \{a, c, c_1, z\} \\ N_2(z) = \{a, c, c_1, x\} \end{cases}$$

Donc, $N_2(x) \cap N_2(z) = \{a, c, c_1\} \implies |N_2(x) \cap N_2(z)| = 3 > 2$. Absurde.



(c) **Sous-cas 1.3**

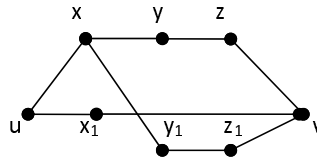
Si $\exists y_2 \in N(b) \cap N(y_1) \implies N_2(y) \cap N_2(y_1) = \{u, v, b\}$.

Absurde.

Donc $b \notin N_2(y_1)$

2. **Cas 02** : Supposons que $y_1 \in N(x)$ et $y_1 \notin N(z)$, alors $\exists z_1 \in N(y_1) \cap N(v)$.

On a :



$$\begin{cases} N_2(u) = \{y, y_1\} \\ N_2(y) = \{u, v, y_1\} \end{cases}$$

Donc, $N_2(u) \cap N_2(y) = \{y_1\}$.

Si $v \in N_2(u) \implies \exists x_1 \in N(u) \cap N(v)$ D'où H_1 est un sous graphe de G .

Absurde.(voir figure ??)

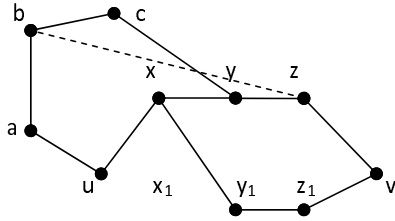
Si $\exists b \in N_2(u) \cap N_2(y)$ et $b \neq y_1$, alors $\exists a \in N(u) \cap N(b)$ et $\exists c \in N(y) \cap N(b)$.

On a dans ce cas :

$$\begin{cases} N_2(a) = \{c, x\} \\ N_2(c) = \{a, x, z\} \end{cases}$$

Si $z \in N_2(a)$. Trois sous-cas ont lieu :

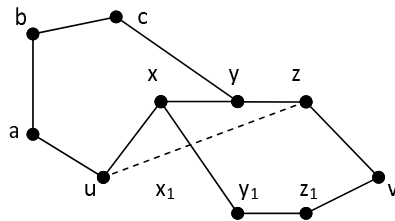
(a) Si $z \in N(b)$.



$$\begin{cases} N_2(u) = \{b, y, y_1\} \\ N_2(v) = \{b, y, y_1\} \end{cases}$$

Donc $N_2(u) \cap N_2(v) = \{b, y, y_1\}$. Absurde.

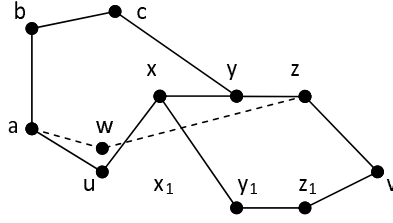
(b) Si $z \in N(u)$.



$$\begin{cases} N_2(y) = \{b, v, y_1, u\} \\ N_2(u) = \{b, y, y_1, v\} \end{cases}$$

Donc $N_2(y) \cap N_2(u) = \{b, v, y_1\}$. Absurde.

(c) Si $\exists w \in N(a) \cap N(z)$.

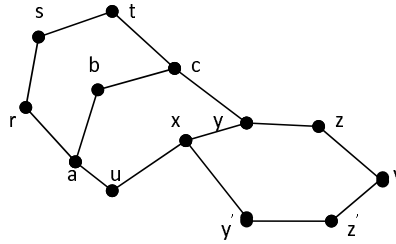


$$\begin{cases} N_2(v) = \{y, y_1, w\} \\ N_2(u) = \{b, y, y_1, w\} \end{cases}$$

Donc $N_2(u) \cap N_2(v) = \{y, y_1, w\}$. Absurde.

Alors $z \notin N_2(a) \cap N_2(c)$ D'où $N_2(a) \cap N_2(c) = \{x\} \implies \exists s \in N_2(a) \cap N_2(c)$.

Autrement dit : $\exists r \in N(a) \cap N(s)$ et $\exists t \in N(c) \cap N(s)$. D'où :



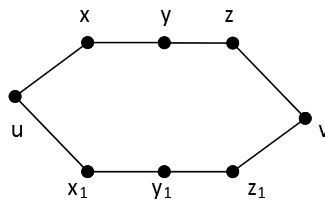
$$\begin{cases} N_2(r) = \{b, u, t\} \\ N_2(y) = \{b, u, t\} \end{cases}$$

Alors, $|N_2(r) \cap N_2(y)| = 3 > 2$. Absurde.

On procède de la même manière dans le cas où $y_1 \notin N(x)$ et $y_1 \in N(z)$.

3. **Cas 03** : $y_1 \notin N(x)$ et $y_1 \notin N(z)$ donc $\exists x_1 \in N(u) \cap N(y)$ et $\exists z_1 \in N(v) \cap N(y)$.

D'où $ch = uxyzv$ appartient au 8-cycle $uxyzvz_1y_1x_1u$.



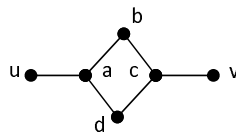
Ce 8-cycle est unique, car sinon $|N_2(u) \cap N_2(v)| > 2$. Absurde.

□

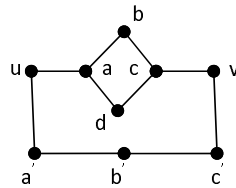
lemme 9. *Si un graphe G est un $[4, 1, 8]$ -cycle régulier avec $\delta(G) \geq 3$, alors G est sans C_4 .*

Démonstration. Supposons $G = (V, E)$ un graphe $[4, 1, 8]$ -cycle régulier admettant le C_4 $abcd$ comme sous-graphe.

Comme $d_G(a) \geq 3$ et $d_G(c) \geq 3$, il existe deux sommets u et v adjacents à a et c respectivement. D'où $ch = uabcv$ est une P_5 de longueur 4. Il existe trois sommets



a', b', c' tels que ch appartient au 8-cycle $uabcvc'b'a'u$. D'où $ch' = ua'b'c'v$ appartient,



au moins, au deux 8-cycles $ua'b'c'vcb'au$ et $ua'b'c'vcdau$. Absurde.

□

Proposition 52. *Tout graphe H isomorphe à un graphe $[4, 18]$ -cycle régulier G , est un graphe $[4, 1, 8]$ -cycle régulier.*

Démonstration. Soit G un graphe $[4, 1, 8]$ -cycle régulier.

• **Existences**

Soit f un isomorphisme du graphe G dans le graphe H et $ch' = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ une chaîne de longueur 4 du graphe H .

Il existe une chaîne $ch = u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ du graphe G , telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, 5\}; v_i = f(u_i)$$

La chaîne ch appartient à un unique 8-cycle $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_1$.

Il existe trois sommets v_6, v_7, v_8 du graphe H tels que $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1$ est un 8-cycle qui contient la chaîne ch' .

• **Unicité**

Supposons que la chaîne ch' appartient, au moins, au deux 8-cycles

$$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1 \text{ et } v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v'_6, v'_7, v'_8, v'_1$$

Alors la chaîne ch appartient à deux 8-cycles au moins. Absurde. \square

Proposition 53. *Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe $[4, 1, 8]$ -cycle régulier si pour tout sommet u de $V(G)$ et tout sommet v de $N_4(u)$,*

$$|N_i(v) \cap N_{4-i}(u)| = 2 \text{ pour tout } i \in \{1, 2, 3\}$$

avec $N_i(v)$ l'ensembles de tous les voisins de sommet v à distance i ($i \leq 3$).

Démonstration. Supposons G un graphe $[4, 1, 8]$ -cycle régulier. u un sommet de $V(G)$ et v un sommet de $N_4(u)$.

Il existe trois sommets x, y et z de $N_1(u)$, $N_2(u)$ et $N_3(u)$ respectivement tels que $ch = xyzv$ forme une P_5 .

ch appartient à un unique 8-cycle $xyzvz'y'x'u$.

Supposons l'existence de $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $|N_i(v) \cap N_{4-i}(u)| \neq 2$.

Pour $i = 1$, $|N_1(v) \cap N_3(u)| \neq 2$ est équivalent à dire que

$$|N_1(v) \cap N_3(u)| = 1 \text{ où } |N_1(v) \cap N_3(u)| \geq 3$$

• Si $|N_1(v) \cap N_3(u)| = 1$, alors $N_1(v) \cap N_3(u) = \{y\}$ donc ch n'appartient à aucun 8-cycle. Absurde.

• Si $|N_1(v) \cap N_3(u)| \geq 3$, il existe au moins deux sommets x' et x'' tels que :

$$N_1(v) \cap N_3(u) = \{x, x', x''\}.$$

Dans ce cas ch appartient, au moins, au deux 8-cycles

$$xyzvz'y'x'v \text{ et } xyzvz''y''x''u$$

Absurde. Même procédé pour $i = 2$, Si $|N_2(v) \cap N_2(u)| \neq 2$, alors

$$|N_2(v) \cap N_2(u)| = 1 \text{ où } |N_2(v) \cap N_2(u)| \geq 3$$

On procède de même pour $i = 3$, Si $|N_3(v) \cap N_1(u)| \neq 2$, alors

$$|N_3(v) \cap N_1(u) = 1 \text{ où } |N_3(v) \cap N_1(u)| \geq 3$$

□

lemme 10. *Le dodécaèdre est $[4, 1, 8]$ -cycle régulier.*

Démonstration. Soit $ch = uxyzv$ une (u, v) -chaîne de longueur 4 de dodécaèdre et $N_0(u), N_1(u), N_2(u), N_3(u), N_4(u), N_5(u)$ la décomposition de dodécaèdre à partir du sommet u .

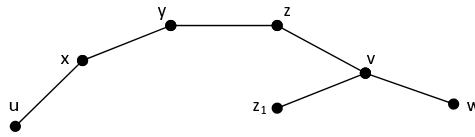
On sait que :

$$v \in N_4(u) \text{ et } |N_5(u)| = 1$$

car le dodécaèdre est de diamètre 5.

Posons $N_5(u) = \{w\}$, alors

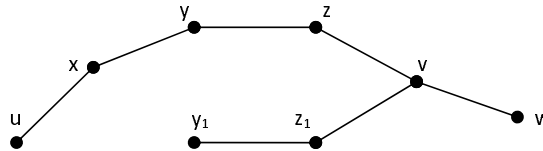
$$d(v) = 3 \Rightarrow \exists z_1 \in N_3(u) \cap N(v).$$



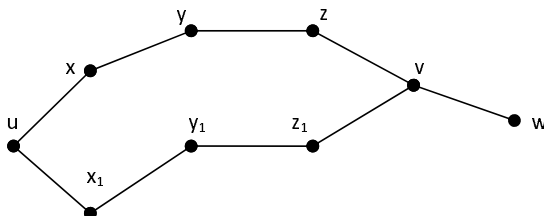
$z_1 \notin N(z)$ et $z_1 \notin N(y)$ car le dodécaèdre est sans K_3 et sans C_4 puisqu'il est de maille 5.

On a bien

$$z_1 \in N_3(u) \Rightarrow \exists y_1 \in N_2(u) \cap N(z_1).$$

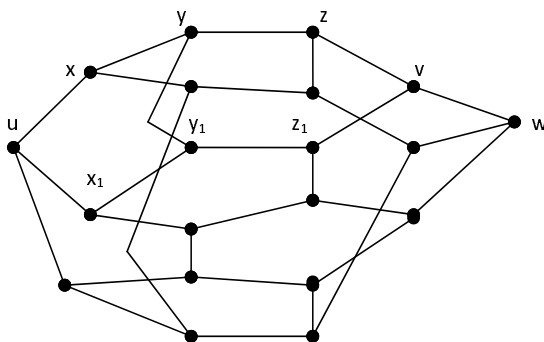


y_1 est unique car $|N_2(u)| = |N_3(u)| = 6$ et $|N_1(u)| = |N_4(u)| = 3$.
 par suite $y_1 \notin N(x)$ car le dodécaèdre est sans C_6 .
 D'où l'existence d'un unique sommet x_1 de $N_1(u)$ tel que $x_1 \in N(y_1)$.
 Donc la chaîne ch appartient au 8-cycle $uxyzvz_1y_1x_1u$.



Ce 8-cycle est unique car le dodécaèdre est sans C_4 et sans C_6 .

□



Conclusion

La classe de graphes cycles réguliers a été étudiée par au premier temps par ([24]) et beaucoup de résultats ont été donnés sur les graphes $[3, 1, 6]$ -cycles réguliers par ([17]). Une autre classe importante de graphes cycles réguliers était l'objet de l'étude faite par ([17]), c'est celle des graphes $[3, 1, 6]$ -cycles induits réguliers. Mais beaucoup de questions restent sans réponse et demande d'être résolues sur les graphes cycles réguliers.

Notre perspective et futur objet d'étude c'est trouver et donner plus de résultats et même essayer de caractériser les $\{\lambda, \mu\}$ -graphes et les graphes $[\mu, \lambda, 2\mu]$ -cycle réguliers

Dans quels cas les $\{\lambda, \mu\}$ -graphes sont graphes $[\mu, \lambda, 2\mu]$ -cycles réguliers et inversement ?

Existe-t-il une relation entre les $\{2, 2\}$ -graphes et les graphes $[4, 1, 8]$ -cycle réguliers ?

Dans quels cas les $\{2, 2\}$ -graphes sont des graphes $[4, 1, 8]$ -cycle réguliers ?

Le graphe de Petersen est un $[3, 1, 6]$ -cycle régulier et on a montré qu'il est aussi $[4, 1, 8]$ -cycle régulier. Existe-t-il une relation entre les graphes $[3, 1, 6]$ -cycle réguliers et les graphes $[4, 1, 8]$ -cycle réguliers ?

Bibliographie

- [1] C. Berge. Graphes et hypergraphes.. Claude Berge, Reading, Massachusetts, deuxième Edition, Dunod.
- [2] A.Berrachedi. Etude d'une classe de graphes bipartis.Thèse magistère, Université Houari Boumédiène,Alger 1985.
- [3] A. Berrachedi. Sur propriétés métriques de graphe de type hypercube. Thèse d'Etat, Université des sciences et de la Technologie Houari Boumédiène, 1997.
- [4] A. Berrachedi, I.Havel and H. M. Mulder. Spherical and clockwise Spherical graphs. Czechoslovak Mathematical Journal, 53 (128), 295-309,2003.
- [5] A. Berrachedi. Une nouvelle caractérisation de l'hypercube. 3^{ème} colloque Franco-Algérien de Recherche Opérationnelle. Alger mai 1992.
- [6] A. Berrachedi and M. Mollard. On two problems about $(0, 2)$ -graphs and interval regular graphs. Revue ARS Combinatoria, 49(1998), 303-309.
- [7] A. Berrachedi and N. Kahoul. Graphs with Induced 6-cycle. Actes du colloque sur l'optimisation et les systèmes d'information COSI'04, Tizi-ouzou-Algérie, 226-235, Juin 2004.
- [8] A. Berrachedi and N. Kahoul. Special cyclic construction in some particular graphs. Actes du colloque sur l'optimisation et les systèmes d'information COSI'06, Alger-Algérie, Juin 2006.
- [9] A. Berrachedi and N. Kahoul. An other characterization of an induced sub-graph of an hypercube. colloque sur l'optimisation et les systèmes d'information COSI'07, Oran-Algérie, Juin 2007.
- [10] A.J.Bondy and U.S.R.Murty. Graphs theory with applications. Springer, 1973.
- [11] N. Bourras. Etude de Quelques Graphes Semiréguliers.. Thèse de Magister, 2008.
- [12] G. Burosch, I. Havel, J-M. Laborde. Distance Monotone Graphs and a New Characterization of Hypercube. Discrete Mathematics, 110, 9-16, 1992.
- [13] J.A. de la Peña, I. Gutman and J. Rada. Retarded regular graphs are regular or semiregular. Linear and multilinear Algebra. in press.
- [14] G.A. Dirac. Some Theorems on abstract graphs.. Proc. London Math Soc, 3(1952) 69-81.
- [15] I. Gutman. Graph Theory.. Notes New York 44 (2003) 10-13.
- [16] I. Havel. On Hamiltonian Circuits and spanning Threes of Hypercubes. Casopispro pestovani matematiky, roc.109, Praha, 1984.

- [17] N. Kahoul. Sur une propriété de régularité cyclique dans les graphes.Thèse de magistère, Université Houari Boumediène, Alger 2002.
- [18] N. Kahoul et A.Berrachedi. Cycle Regularity and Hypercubes. British Combinatorial Conference 10 July 10-15, 2005.
- [19] N. Kahoul et A.Berrachedi. Cycle Regular Graphs of $(0, \lambda)$ -graph. Discrete Mathematics 2008.
- [20] M.Kobaissi. Plongement de graphes dans l'hypercubes. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2001.
- [21] J.M.Laborde and S.P.Rao Hebbare. Another Characterization of hypercubes. Discrete Mathematics (39), 161-166, 1982.
- [22] R. M. Madani. Sur l'existence de $\{0, 2\}$ -graphe d'ordre 18. Rpport de Recherche RR-887-I-, Institut Imag,Grenoble, Avril 1992.
- [23] R. M. Madani. Characterization of Laborde-mulder graphs (extended odd graphs). Discrete mathematics (150), 293-301, 1996.
- [24] M. Mollard. Cycle-regular graphs. Discrete Mathematics (89), 29-41, 1991.
- [25] M. Mollard. Interval-regularity does not lead to monotonicity. Discrete mathematics, 118, 233-237, 1993.
- [26] M. Mollard. Quelques problèmes combinatoires sur l'hypercube et les graphes de Hamming. Thèse d'Etat, Université de Joseph Fourier, 1989.
- [27] H. M. Mulder. The interval function of a graph Mathematsch Centrum, Amsterdam, 1980.
- [28] H. M. Mulder. $(0, \lambda)$ -graphs and n -cube. Discrete Mathematics (28), 179-188, 1979.
- [29] H. M. Mulder. The Interval function of a graph. Mathematical Centrum, Amsterdam, 1980.
- [30] H. M. Mulder. Interval-regular graph. Discrete Mathematics (41), 253-269, 1982.
- [31] A. Northup. A study of semiregular graphs.Research paper, STETSON University,2002.
- [32] P. Van den Cruyce. A characterization of the n -cube by convex subgraphs. Discrete Mathematics (41), 109-110, 1982.