UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Recherche Opérationnelle

SUR QUELQUES INVARIANTS DE DOMINATION DANS LES GRAPHES

Par
Boutrig Razika

Devant le jury composé de

M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida	Président
M. CHELLALI	Professeur Habilité en Mathématiques, U. de Blida	Promoteur
A. BERRACHEDI	Professeur, USTHB, Alger	Examinateur
I. BOUCHEMAKH	Professeur, USTHB, Alger	Examinateur

Blida, 07 Juillet 2011

ملـــــخص

ينصب اهتماماتنا في هذا البحث أساسا على السيطرة القوية والضعيفة في البيانات.

ليكن $G = (V, E)$ بيانا بسيطا برتبة n بحيث V تمثل مجموعة الرؤوس و E مجموعة الأضلاع. نقول عن المجموعة المسيطرة D أنها قوية (ضعيفة) إذا كان كل رأس v من $V- D$ مجاور لرأس u من D بحيث $deg(u) \geq deg(v)$ $\big(deg(u) \leq deg(v)\big)$. عدد السيطرة القوية (الضعيفة) للبيان G والذي نرمز له $\gamma_s(G)$ $(\gamma_w(G))$ هو الأصلي الأصغر لمجموعة مسيطرة قوية (ضعيفة) للبيان G.

في هذا البحث نقدم أولا بعض الحدود العليا لوسائط السيطرة القوية والضعيفة، نحسن فيها حدود عليا موجودة سلفا. كذلك نعطي خاصية الأشجار التي من أجلها $\gamma(T)$ و $\gamma_s(T)$ متساويين.

ثانيا, نبرهن أنه من أجل كل بيان مرتبط G ذات الرتبة $n \geq 3$ لدينا $\gamma_w(G) + t\,\gamma_s(G) \leq n$، حيث $t = \frac{3}{\Delta+1}$ من أجل كل بيان G, $t = \frac{3}{5}$ من أجل كل بيان كتلة و $t = \frac{2}{3}$ من أجل كل بيان دون مخالب.

في الأخير, ندرس بشكل مختصر k-السيطرة القوية (الضعيفة) المعرفة كما يلي: ليكن $k \geq 1$ عدد طبيعي. نقول عن المجموعة الجزئية D من المجموعة V أنها k-مسيطرة قوية (ضعيفة) للبيان G إذا كان كل رأس v من $V - D$ مسيطر عليه بقوة (بضعف) على مسافة أقل أو تساوي k برأس من D . عدد k-المسيطرة القوية (الضعيفة) للبيان G، والذي نرمز له بـ$\gamma_s^k(G)$ $(\gamma_w^k(G))$ هو الأصلي الأصغر لمجموعة k- مسيطرة قوية (ضعيفة) للبيان G.

من أجل $k = 1$ ، نحصل على التعريف السابق للسيطرة القوية والضعيفة. إذن من أجل كل بيان G، لدينا

$\gamma_w^1(G) = \gamma_w(G)$ و $\gamma_s^1(G) = \gamma_s(G)$

بعض النتائج المهمة قدمت في هذا البحث حول k-السيطرة القوية والضعيفة، على وجه الخصوص نقوم بعرض بعض الحدود والخصائص لوسائط k- السيطرة القوية والضعيفة. نبرهن أنه من أجل كل بيان مرتبط G حيث $\gamma_w(G) \geq 2$ $(\gamma_s(G) \geq 2)$ ومن أجل كل عدد طبيعي $k \geq 4$، لدينا $\gamma_w^k(G) < \gamma_w(G)$ $(\gamma_s^k(G) < \gamma_s(G))$. نعطي أيضا شرطا ضروريا من أجل كل بيان G حيث $\gamma_s^3(G) = \gamma_s(G)$.

RESUME

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à l'étude de la domination forte et faible dans les graphes.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n, où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. Un sous ensemble $D \subseteq V$ est un dominant faible (resp, fort) de G si chaque sommet $v \in V - D$ est adjacent à un sommet $u \in D$, où $\deg(v) \geq \deg(u)$ (resp, $\deg(v) \leq \deg(u)$). Le cardinal minimum d'un ensemble dominant faible (resp, fort) de G est appelé le nombre de domination faible (resp, forte), noté par $\gamma_w(G)$ (resp, $\gamma_s(G)$) de G.

Dans ce mémoire, on commence par présenter quelques bornes superieures sur les paramètres de domination forte et faible améliorant les bornes de Domke, Hattingh, Markus et Ungerer. Ainsi qu'une caractérisation des arbres pour lesquels le nombre de domination et le nombre de dominaton forte sont égaux.

Dans un second lieu, nous montrons que si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_w(G) + t\gamma_s(G) \leq n$, où $t = \frac{3}{\Delta+1}$ pour tout graphe G, $t = \frac{3}{5}$ si G est un graphe bloc et $t = \frac{2}{3}$ si G est un graphe sans griffes.

En dernier lieu, nous étudions d'une façon brève la k-domination forte et faible définie comme suit: Soit $k \geq 1$ un entier. Un sous ensemble $D \subseteq V$ est un k-dominant fort (resp, faible) de G si tout sommet v de $V - D$ est k-dominé fortement (resp, faiblement) par un sommet de D. Le nombre de k-domination forte (resp, nombre de k-domination faible), noté par $\gamma_s^k(G)$ (resp, $\gamma_w^k(G)$) est le cardinal minimum d'un ensemble k-dominant fort (resp, faible) de G. Pour $k = 1$, on retrouve la définition de la domination forte et faible usuelle. Donc pour tout G, $\gamma_s^1(G) = \gamma_s(G)$ et $\gamma_w^1(G) = \gamma_w(G)$.

Quelques résultats intéréssants sont obtenus dans ce sens, en particulier on présente quelques bornes et propriétés sur la k-domination forte et faible. On montre que pour tout graphe connexe G tel que $\gamma_s(G) \geq 2$ (resp, $\gamma_w(G) \geq 2$) et pour tout entier $k \geq 4$, $\gamma_s^k(G) < \gamma_s(G)$ (resp, $\gamma_w^k(G) < \gamma_w(G)$). On donne aussi une condition nécéssaire pour les graphes G tels que $\gamma_s^3(G) = \gamma_s(G)$ et nous caractérisons d'une façon descriptive des chenilles T telles que $\gamma_s^3(T) = \gamma_s(T)$.

ABSTRACT

In this thesis we are intersted in styding weak and strong domination in graphs.

Let $G = (V, E)$ be a simple graph of order n, with vertex set V and edge set E. A subset $D \subseteq V$ is a weak (strong, respectively) dominating set of G if every vertex $v \in V - S$ is adjacent to a vertex $u \in D$ such that $\deg_G(v) \geq \deg_G(u)$ ($\deg_G(v) \leq \deg_G(u)$, respectively). The weak (strong, respectively) domination number of G, denoted by $\gamma_w(G)$ ($\gamma_s(G)$, respectively), is the minimum cardinality of a weak (strong, respectively) dominating set of G. We first begin by giving some bounds on the strong and weak domination numbers in graphs improving those established by Domke, Hattingh, Markus and Ungerer. Moreover we provide a characterization of trees with equal domination and strong domination numbers.

We also give a relationship between the strong and weak domination numbers by showing that for every connected graph G of order $n \geq 3$, $\gamma_w(G) + t\gamma_s(G) \leq n$, where $t = 3/(\Delta + 1)$ if G is an arbitrary graph, $t = 3/5$ if G is a block graph, and $t = 2/3$ if G is a claw free graph.

Finally, we initiate the study of strong (weak, respectively) k-domination in graphs defined as follow: For a positive integer k, a subset $D \subseteq V$ is a weak (strong, respectively) k-dominating set of G if every vertex $v \in V - D$ is adjacent to a vertex $u \in D$ such that $d(u, v) \leq k$ and $\deg_G(v) \geq \deg_G(u)$ ($d(u, v) \leq k$ and $\deg_G(v) \leq \deg_G(u)$, respectively). The weak (strong, respectively) k-domination number of G, denoted by $\gamma_w^k(G)$ ($\gamma_s^k(G)$, respectively), is the minimum cardinality of a weak (strong, respectively) k-dominating set of G. We prove that for every connected graph G with $\gamma_s(G) \geq 2$ (resp, $\gamma_w(G) \geq 2$) and for every integer $k \geq 4$, $\gamma_s^k(G) < \gamma_s(G)$ (resp, $\gamma_w^k(G) < \gamma_w(G)$). Moreover, we give a necessary condition for graphs G with $\gamma_s^3(G) = \gamma_s(G)$ and we provide a descriptive characterization of caterpillars T with $\gamma_s^3(T) = \gamma_s(T)$.

REMERCIEMENTS

J'exprime mes vifs et sincères remerciements à Monsieur **Mustapha Chellali**, Professeur Habilité en Mathématiques à l'université Saad Dahlab de Blida qui a dirigé ce travail avec beaucoup de patience, pour l'aide qu'il ma apporté. Je le remercie également pour ses précieux conseils, ses encouragements et sa disponibilité.

Je remercie Monsieur **Mostapha Blidia**, Professeur à l'université de Blida pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

Je remercie également les professeurs **Abdelhafid BERRACHEDI** et **Isma BOUCHEMAKH** de l'U.S.T.H.B, qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer mon travail, et qui l'enrichiront par leurs précieuses remarques.

Je voudrais remercier aussi toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin et qui m'ont permis d'accomplir ce manuscrit jusqu'à la fin.

Je remercie profondément ma mère, mon père et ma famille, qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

INTRODUCTION

La représentation d'un problème par un dessin, un plan, une esquisse contribue souvent à sa compréhension. Le langage des graphes est construit, à l'origine sur ce principe. Nombre de méthodes, de propriétés et de procédures ont été pensées ou trouvées à partir d'un schéma pour être ensuite formalisées et développées. La théorie des graphes qui consiste à étudier les différentes proprietés de ces graphes est devenue un outil puissant de la recherche opérationnelle par la modélisation et la résolution de beaucoup de problèmes pratiques.

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au $XVIIIe$ siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels celui des ponts de Königsberg. En effet les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ. La marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales, réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,...

Un des concepts intéressants de la théorie des graphes est celui de la domination. Les premiers problèmes qui marquent le début de la théorie de la domination sont les problèmes des jeux des échecs. Grâce à Claude Berge elle est devenue un domaine théorique en 1958, et ce n'est qu'à partir de 1977 qu'elle connaîtra son expansion grâce aux travaux de Cockayne et Hedetniemi. Ses applications sont nombreuses et variées (réseaux de communications, de micro-processeurs, les problèmes de localisation, etc...).

Qu'est ce qu'un dominant dans un graphe ?

Un dominant dans un graphe est un sous ensemble de sommets, où tout sommet du graphe est ou bien dans cet ensemble ou bien adjacent à un sommet de cet ensemble. En général, le problème de chercher l'ensemble dominant ayant la petite ou la grande taille est un problème extrêmement difficile. Le cardinal minimum d'un tel ensemble est appelé le nombre de domination. Plusieurs types de domination sont définis sur la base de définition précédente en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants.

Nous étudions dans ce mémoire la notion de la domination forte et faible dans les graphes. La domination forte et faible a été présentée la première fois par Sampathkumar et Pushpa Latha dans [10].

Quatre principaux chapitres sont développés dans ce mémoire.

Le premier chapitre contient quelques définitions fondamentales et des notations de base de la théorie des graphes utilisées dans ce mémoire. On donne aussi un aperçu sur la domination dans les graphes. Des notions caractéristiques de chaque chapitre seront définies dans le chapitre lui-même.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons un état de l'art sur la domination forte et faible dans les graphes, en rappelant les principaux résultats existants.

Notre contribution se situe dans le troisième chapitre consacré à la domination forte et faible. Nous commençons le chapitre 3 par donner des bornes supérieures pour les paramètres de domination forte et faible améliorant ainsi les bornes de Domke, Hattingh, Markus et Ungerer. D'autre part, nous donnons une caractérisation des arbres pour lesquels le nombre de domination forte et le nombre de domination sont égaux. Nous nous intéresserons par la suite à étudier la relation entre le nombre de domination forte et le nombre de domination faible dans certaines classes de graphes (les graphes sans griffes et les blocs graphes) et les graphes en général. Ces résultats [24] ont été soumis et acceptés pour une publication internationale dans la revue Opuscula Mathematica. Aussi d'autres résultats seront exposés au colloque international COSI'2011 (Guelma) entre 24-28 Avril.

Dans le quatrième chapitre, nous présontons quelques résultats relatifs à la k-domination forte et faible. En particulier, nous établissons une condition nécéssaire et suffisante pour la minimalité (au sens de l'inclusion) des ensembles k-dominants forts et faibles ainsi quelques propriétés et résultats seront présentés sur la k-domination forte et faible dans les graphes.

Enfin, on termine par une conclusion générale sur nos travaux réalisés, et comme perspective, nous proposons quelques questions pour les recherches futures.

CHAPITRE 1

Généralités sur les graphes

Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons les définitions des notions utilisées tout au long de ce mémoire. Dans la seconde partie une brève présentation sur la domination dans les graphes sera donnée, on y présentra quelques paramètres de domination. Pour plus de détails sur la théorie des graphes, nous invitons le lecteur à consulter l'ouvrage de Berge [1] quant à la theorie de la domination on se refère aux ouvrages de Haynes, Hedetniemi et Slater [2].

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphe et sous graphes

Un graphe $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles, un ensemble fini de sommets V et un ensemble fini d'arêtes E. Le cardinal de V est appelé ordre de G, noté souvent par n. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets (u, v) notée par $e = uv$ ou bien $e = vu$, où u et v sont les extremités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que l'arête uv est incidente à ces deux sommets. Si l'arête $e = uu \in E$, alors e est dite une boucle.

Un graphe G est simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Tous les graphes considérés dans ce mémoire sont simples et finis.

La Figure 1.1 montre un graphe simple $G = (V, E)$ avec $V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{ab, ac, ad, bc, cd, ce\}$.

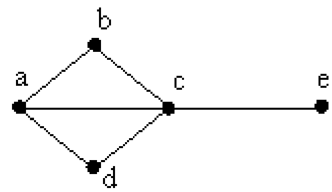


Figure 1.1: Un graphe simple $G = (V, E)$.

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le sous-graphe induit par S noté $G[S]$ ou $\langle S \rangle$ est le graphe ayant S comme ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs extrémités dans S. Pour l'exemple précédent, voir le sous-graphe induit par $S = \{b, c, d, e\}$ dans la Figure 1.2.

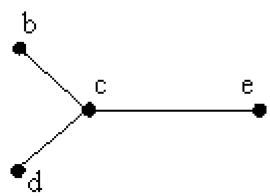


Figure 1.2: $G[S]$ le graphe induit par S.

Pour un sous-ensemble $F \subseteq E$, le graphe partiel de G engendré par F noté G_F est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et F. Voir le graphe partiel de G de la Figure 1.1 défini par $F = \{ab, ac, cd, ce\}$.

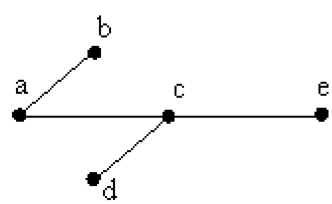


Figure 1.3: G_F le graphe partiel défini par F.

1.1.2 Voisinages

Le **voisinage ouvert** d'un sommet v dans G est $N_G(v) = N(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ et le **voisinage fermé** de v est $N_G[v] = N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Le non voisinage d'un sommet v est défini par l'ensemble $\overline{N}_v = V - N[v]$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, $N_G(S) = N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ est le voisinage ouvert et $N_G[S] = N[S] = N(S) \cup S$ est le voisinage fermé.

Pour le graphe G de la Figure 1.1, le voisinage ouvert du sommet c est $N(c) = \{a, b, d, e\}$ et son voisinage fermé est $N[c] = \{a, b, c, d, e\}$. Pour $S = \{b, d\}$, $N(S) = \{a, c\}$ et $N[S] = \{a, b, c, d\}$.

Le **voisinage privé** d'un sommet v par rapport à un ensemble S, noté $pn[v, S]$, est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont aucun autre voisin dans S autre que v, i-e: $pn[v, S] = \{u : N[u] \cap S = \{v\}\}$.

Le **voisinage privé externe** d'un sommet v par rapport à un ensemble S, noté $epn(v, S)$, est le voisinage privé $pn[v, S]$ de v dans $V - S$ tandis que le **voisinage privé interne** d'un sommet v par rapport à un ensemble S, noté $ipn(v, S)$, est le voisinage privé $pn[v, S]$ de v dans S. Par conséquent, $pn[v, S] = epn(v, S) \cup ipn(v, S)$.

1.1.3 Degré d'un sommet

Le **degré** d'un sommet $v \in V$ est $\deg_G(v) = \deg(v) = |N(v)|$. Un sommet de degré nul est dit **isolé** et un sommet de degré un est dit **pendant ou bien feuille,** tandis que son voisin est dit **sommet support**. On note par $L(G)$ l'ensemble des sommets pendants de G, $|L(G)| = l(G)$ et par $S(G)$ l'ensemble des sommets supports de G, $|S(G)| = s(G)$. L_v est l'ensemble des sommets pendants voisins à un sommet support v. Si $|L_v| = 1$, alors v est un **sommet support faible**, sinon ($|L_v| > 1$), v est un **sommet support fort**. Le **degré minimum** et **maximum** dans G, sont notés par $\boldsymbol{\delta}(G)$ et $\Delta(G)$, respectivement.

1.1.4 Chaîne et cycle

Une **chaîne** C dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, ..., v_k$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k-1, e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k-1$ représente la **longueur** de C (au sens des arêtes) et les sommets v_1 et v_k sont les **extrémités** de la chaîne C. Une chaîne est dite élémentaire (resp, simple) si tous ses sommets sont distincts (resp, les arêtes sont distinctes). Une corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une **chaîne.** Une chaîne **minimale** induite par n sommets, notée par P_n, est une chaîne élementaire sans corde.

Un **cycle** C_n est une chaîne simple dont les extrémités sont confondues.

1.1.5 Distance et diamètre

La **distance** entre deux sommets u et v d'un graphe G, notée $d_G(u,v) = d(u,v)$, est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v. L'**excentricité** d'un sommet v dans un graphe $G = (V,E)$ est $exc(v) = \max\{d(v,w) : w \in V\}$ et le **diamètre** de G est $Diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé **centre**.

1.2 Quelques graphes particuliers

• Un graphe G est dit **connexe** si pour toute paire de sommets du graphe, il existe une chaîne les reliant. Une **composante connexe** d'un graphe est un sous-graphe maximal (au sens de l'inclusion) connexe.

• Un graphe **complet** d'ordre n, noté K_n, est un graphe simple, où tous ses sommets sont de degré $n-1$. Ainsi deux sommets quelconques de K_n sont adjacents. Une **clique** est un sous-graphe complet d'un graphe G.

• Le **graphe complémentaire** de G, noté $\overline{G}$, est le graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans G. Voir la Figure 1.4 qui illustre un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

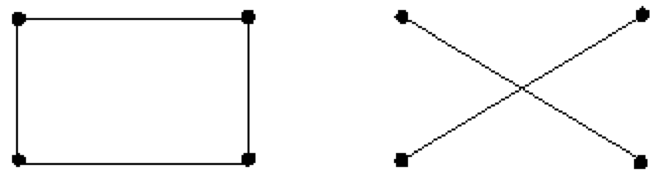


Figure 1.4: Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

• Un graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti** si l'on peut partitionner V en V_1 et V_2 tels que $\langle V_1 \rangle$ et $\langle V_2 \rangle$ ne contiennent pas d'arêtes. Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles impairs C_{2k+1}. Si de plus tout sommet de V_1 est adjacent à tout sommet de V_2, alors G sera dit un graphe biparti complet. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$. La Figure 1.5 illustre un graphe biparti complet $K_{2,3}$.

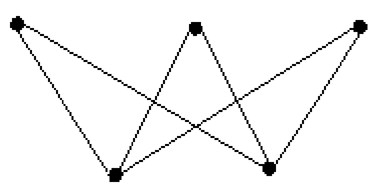


Figure 1.5: Un graphe biparti complet $K_{2,3}$.

• Un **arbre** est un graphe connexe et sans cycles, souvent noté par T. Un exemple d'un arbre T est représenté dans la Figure 1.6.

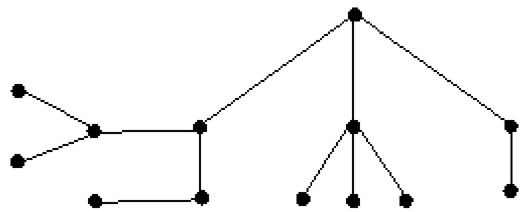


Figure 1.6: Un arbre T d'ordre $n = 13$, $s(T) = 4$ et $l(T) = 7$.

• une **forêt** est un graphe où chaque composante connexe est un arbre.

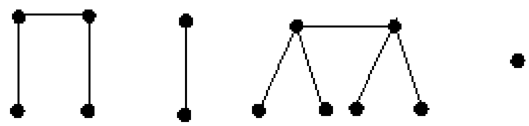


Figure 1.7: Une forêt à 4 composantes connexes.

• Une **étoile** est le graphe $K_{1,p}\,(p \geq 1)$. Le sommet de degré superieur est dit centre de l'étoile.

• Une **étoile double** $S_{p,q}$ est un arbre obtenu à partir de deux étoiles $K_{1,p}$, $K_{1,q}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres.

• Une **étoile subdivisée** SS_q est un arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,q}$ par la subdivision de chaque arête une seule fois.

•Un arbre est dit **chenille** si le graphe obtenu en supprimant toutes les feuilles est une chaîne.

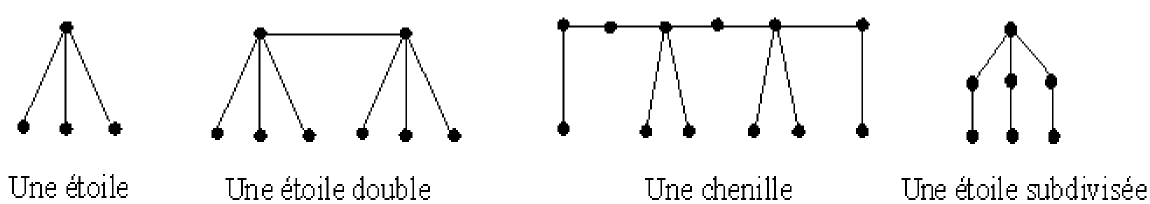


Figure 1.8.

• Un graphe est **sans griffes** s'il ne contient pas de sous graphe $K_{1,3}$.

• Un graphe est **triangulé** si tout cycle de longueur au moins quatre contient une corde.

• Un **cactus** est un graphe où toute arête appartient à au plus un cycle. Un cactus ayant un seul cycle est dit **unicycle**.

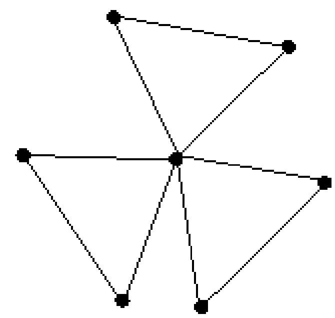


Figure 1.9: Un graphe cactus.

• Un graphe est k**-régulier** si tous les sommets sont de même degré k.

• La **couronne** d'un graphe H, noté par HoK_1, est obtenue à partir de H, où chaque sommet de H est adjacent à un sommet pendant. Par exemple, le graphe C_6oK_1 est illustré dans la Figure 1.10.

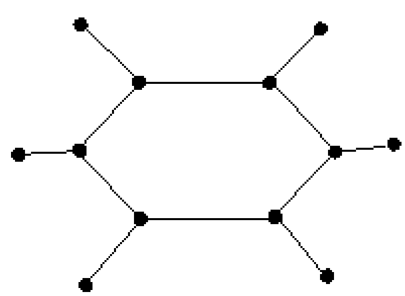


Figure 1.10.

• Un **bloc** dans un graphe G est un sous graphe connexe maximal n'admettant pas de sommets d'articulation (un sommet est d'articulation si sa suppression augmente le nombre de composontes connexes).

• Un **bloc graphe** G est un graphe dont tous les blocs sont complets. Si G ne possède pas de sommet d'articulation alors G est lui même un bloc. L'intersection de deux blocs contient au plus un sommet. La Figure 1.11 représente un graphe G à 4 blocs.

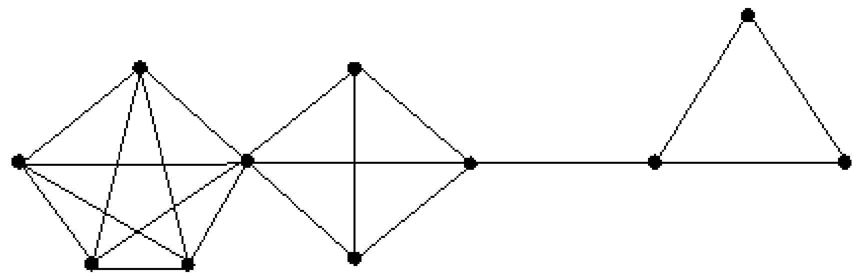


Figure 1.11: Un graphe bloc.

1.3 Aperçu sur la domination dans les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On dit qu'un sous-ensemble A de V est **minimal** (resp, **maximal**) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subsetneq A$ (resp, $B \supsetneq A$) tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$.

Nous dirons qu'un sous-ensemble A de V est **minimum** ou de **taille minimale** (resp, **maximum** ou de **taille maximale**) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$ et $|A| > |B|$ (resp, $|B| > |A|$).

Donnons maintenant la définition des ensembles dominants dans les graphes. Un sous ensemble S de V est un **dominant** si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G est appelé le **nombre de domination** et il est noté par $\gamma(G)$. Le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de G est appelé le **nombre de domination supérieur** et il est noté par $\Gamma(G)$.

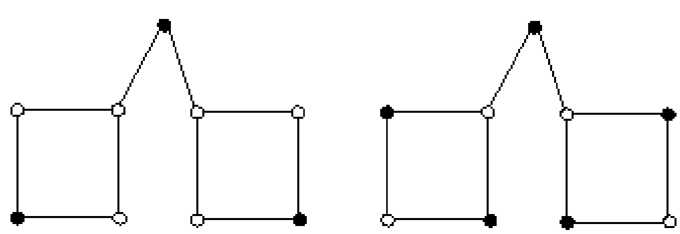


Figure 1.12 : Un graphe G, où $\gamma(G) = 3$ et $\Gamma(G) = 5$.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici quelques unes.

• Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V, |N[v] \cap S| \geq 1$.

• Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V, N[v] \cap S \neq \emptyset$.

• Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si $N[S] = V$.

Le concept de la domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16^{eme} siecle en Inde voir [3]. En 1862 De Jaenish [4] posa le problème suivant: Determiner le nombre de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum dans un échiquier $n \times n$ reste indeterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [5].

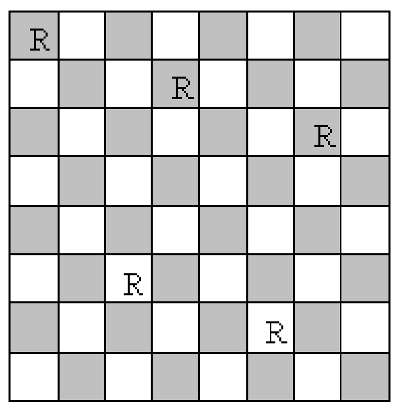


Figure 1.13 : Echiquier 8×8 avec 5 reines.

En 1958, Claude Berge [6] donna une formulation de la domination dans les graphes oriéntés. Le nombre de domination s'appelait alors le coefficient de stabilité externe.
L'appelation actuelle du nombre de domination est due à Ore [7] en 1962 qui utilisa la notation $\delta(G)$ pour désigner le nombre de domination dans un graphe non orienté. A l'exception de quelques résultats, la domination n'a connu sa véritable expansion qu'aprés la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [8] en 1977. Depuis l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs

paramètres de domination.

1.3.1 Quelques types de domination

Plusieurs types de domination sont définis en imposant des propriétés supplémentaires sur l'ensemble des sommets qui dominent, ou bien sur l'ensemble des sommets dominés, ou bien sur les deux à la fois. À signaler qu'il existe actuellement plus d'une centaine de types de domination et plus de 2000 articles réalisés sur la domination. Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres remarquables de Haynes, Hedetniemi et Slater ([2], [9]) .

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On définit le nombre de domination inférieur $\gamma(G : P)$ conditionné comme étant la taille minimum d'un ensemble dominant $S \subseteq V$ tel que la propriété P est satisfaite.

Remarque: $\gamma(G) \leq \gamma(G : P)$ *pour toute propriété* P *définie précédèment.*

Nous rappelons qu'un stable S dans un graphe G est un sous ensemble de sommets de G tel que le sous graphe induit par S, $\langle S \rangle$ est sans arêtes. Il est simple de voir que tout ensemble stable S est maximal si et seulement si S est un stable et un dominant, et tout stable maximal est un ensemble dominant minimal.

Décrivons quelques types les plus étudiés.

• **La domination stable:** Un sous ensemble $S \subseteq V$ est un dominant stable de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S ne contient pas d'arête. Le cardinal minimum (resp, maximum) d'un stable maximal de G noté $i(G)$ (resp, $\alpha(G)$) est appelé le **nombre de domination stable** (resp, le **nombre de stabilité**) de G.

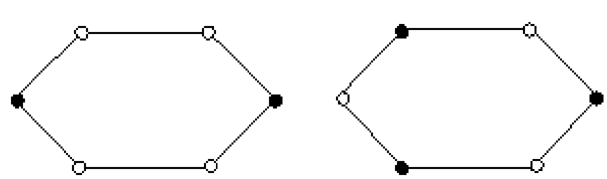


Figure 1.14: Un graphe, où $i\,(G) = 2$ et $\alpha\,(G) = 3$.

• **La domination multiple:** Un sous ensemble S de V est dit dominant multiple de G si tout sommet de $V - S$ possède au moins k voisins dans S. Le **nombre de domination multiple** noté par $\gamma_k(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant multiple de G.

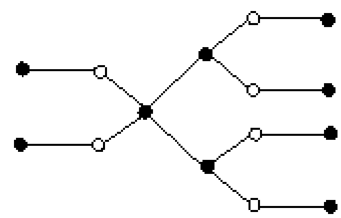


Figure 1.15: Un graphe G, où $\gamma_2(G) = 9$.

• **La domination restreinte:** Un sous ensemble $S \subseteq V$ est un dominant restreint de G si S est un dominant et le sous graphe induit par $V - S$ est sans sommets isolés. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant restreint de G est appelé le **nombre de domination resteinte** et il est noté par $\gamma_r(G)$.

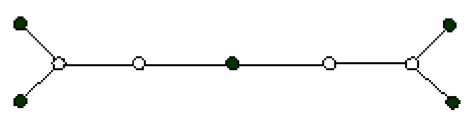


Figure 1.16: Un graphe G, où $\gamma_r(G) = 5$.

• **La domination double:** Un sous ensemble $S \subseteq V$ est un dominant double de G si tout sommet de V est dominé au moins 2 fois i-e: si $v \in S$ alors v a un voisin dans S et si $v \in V - S$, alors v a au moins deux voisins dans S. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de G est appelé le **nombre de domination double**, et il est noté par $\gamma_{\times 2}(G)$.

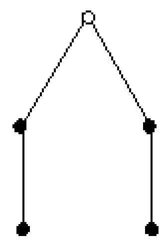


Figure 1.17: Un graphe G, où $\gamma_{\times_2}(G) = 4$.

CHAPITRE 2

La domination forte et faible dans les graphes

Dans ce chapitre, on exposera quelques résultats connus sur la domination forte et faible de façon générale.

2.1 Les ensembles dominants forts et faibles

2.1.1 Introduction

La notion d'ensemble dominant fort et faible a été introduite par Sampathkumar et Pushpa Latha [10] en 1996. Parmi les applications variées de theorie de la domination forte et faible, considérons un réseau routiers liant un certain nombre de villes. Dans un tel réseau, le degré d'un sommet v est le nombre de routes qui se rencontrent en v. Supposons que $\deg(u) \geq \deg(v)$. Naturellement, le traffic routiers en u est plus grand que celui en v. Si on considère le traffic routiers entre u et v, la priorité devant être donnée aux véhicules venant de u vers v. Donc, dans un certain sens, u domine fortement v et v domine faiblement u.

On commence par donner les définitions suivantes et une remarque qui seront utiles pour la suite.

Définition 2.1. *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $u, v \in V$. Alors u domine fortement* (*resp, faiblement*) *v si:*

i) $uv \in E$, *et*

ii) $\deg(u) \geq \deg(v)$ (*resp*, $\deg(u) \leq \deg(v)$).

Définition 2.2. *Un sous ensemble $S \subseteq V$ est un dominant fort (resp, faible) de G, noté SDS (resp, WDS) si tout sommet v de $V - S$ est dominé fortement* (*resp, faiblement*) *par un sommet $u \in S$. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant fort* (*resp, faible*) *de G est appelé le nombre de domination forte* (*resp, faible*), *noté $\gamma_s(G)$* (*resp, $\gamma_w(G)$*). *Un*

SDS (resp, WDS) de G de cardinal minimum est dit un $\gamma_s(G)$-ensemble (resp, $\gamma_w(G)$-ensemble).

Donnons une illustration par le graphe G de la Figure 2.1. L'ensemble $S = \{c, d\}$ est un dominant fort minimum du graphe G, d'où $\gamma_s(G) = 2$ et $S = \{a, b, e, f\}$ est un dominant faible minimum du graphe G, d'où $\gamma_w(G) = 4$.

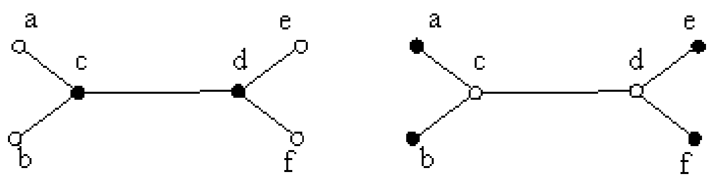


Figure 2.1: Un graphe G, où $\gamma_s(G) = 2$ et $\gamma_w(G) = 4$.

Il est à signaler que tout graphe G admet un dominant fort (resp, un dominant faible) car V est un tel ensemble.

Définition 2.3. *Un sous ensemble S de V est dit dominant fort (resp, faible) indépendant de G, noté $ISDS$ (resp, $IWDS$) si S est un dominant fort (resp, faible) et le sous graphe induit par S ne contient pas d'arêtes. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant fort (resp, faible) indépendant de G noté $i_s(G)$ (resp, $i_w(G)$) est appelé le nombre de domination forte (resp, faible) stable de G.*

La figure suivante représente un arbre T avec $i_s(T) = 5$ et $i_w(T) = 6$.

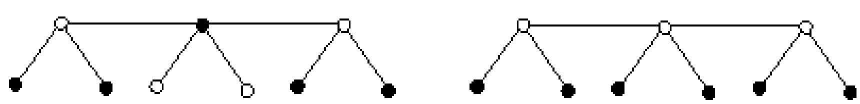


Figure 2.2: Un arbre T, avec $i_s(T) = 5$ et $i_w(T) = 6$.

Remarque 2.4. *Si v est un sommet pendant d'un graphe G, alors v appartient à tout ensemble dominant faible de G.*

Voici quelques valeurs exactes de $\gamma_s(G)$ et $\gamma_w(G)$ dans des familles de graphes spécifiques.

1. Pour tout cycle C_n, $\gamma_w(C_n) = \gamma_s(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.
2. pour toute chaîne non triviale P_n, $\gamma_s(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.
3. pour toute chaîne non triviale P_n, $\gamma_w(P_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{si } n \equiv 1 (\operatorname{mod} 3) \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 & \text{sinon} \end{cases}$
4. Pour une étoile $K_{1,t}$, $\gamma_w(K_{1,t}) = t$ et $\gamma_s(K_{1,t}) = 1$.

Dans ce qui suit, on présentra quelques propriétés et résulats existants.

Proposition 2.5 (Sampathkumar et Latha [10] 1996). *Soit D un ensemble dominant fort (resp, faible) minimal. Alors, pour tout $v \in D$, l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

(i) *Aucun sommet de D ne domine fortement (resp, faiblement) v.*

(ii) *Il existe un sommet $u \in V - D$ tel que v est l'unique sommet de D qui domine fortement (resp, faiblement) u.*

La proposition suivante donne une relation du type Nordhaus-Gaddum pour les nombres de domination forte et faible dans les arbres.

Proposition 2.6 (Sampathkumar et Latha [10] 1996). *Pour tout arbre $T \neq K_{1,p}$ d'ordre $n \geq 3$ avec s sommets supports,*

$$s + 2 \leq \gamma_s(T) + \gamma_s(\overline{T}) \leq n \text{ et } \gamma_w(T) + \gamma_w(\overline{T}) \leq 2n - 3.$$

L'un des problèmes intéressants est de caractériser les graphes G tels que $\gamma_s(G) = i_s(G)$ et $\gamma_w(G) = i_w(G)$. Sampathkumar et Latha ont donné une condition suffisante pour les graphes sans griffes pour que $\gamma_s(G) = i_s(G)$ et $\gamma_w(G) = i_w(G)$.

Proposition 2.7 (Sampathkumar et Latha [10] 1996). *Si G est un graphe sans griffes, alors $\gamma_s(G) = i_s(G)$ et $\gamma_w(G) = i_w(G)$.*

2.2 Bornes sur les paramètres de domination forte et faible

2.2.1 Bornes superieures sur $i_w(G)$ et $i_s(G)$

La proposition suivante donne une borne superieure sur $i_w(G)$ établie par Domke, Hattingh, Markus et Ungerer [11].

Proposition 2.8 (Domke, Hattingh, Markus et Ungerer [11] 2002)**.** *Si G est un graphe, alors* $i_w(G) \leq n - \delta(G)$.

Notons d'abord par $V_{\Delta(G)}$ l'ensemble des sommets de degré maximum et par $V_{\delta(G)}$ l'ensemble des sommets de degré minimum. Voici maintenant une caractérisation des graphes avec $i_w(G) = n - \delta(G)$ donnée dans [11].

Théorème 2.9 (Domke, Hattingh, Markus et Ungerer [11] 2002)**.** *Un graphe G satisfait $i_w(G) = n - \delta(G)$ si et seulement si $V - N(v)$ est indépendant pour tout $v \in V_\delta(G)$.*

La proposition qui suit établie par les mêmes auteurs donne une caractérisation des graphes connexes sans triangles G tel que $i_w(G) = n - \delta(G)$.

Proposition 2.10 (Domke, Hattingh, Markus et Ungerer [11] 2002)**.** *Soit G un graphe connexe sans triangles. Alors $i_w(G) = n - \delta(G)$ si et seulement si $G \in \left\{K_1, K_{n-\delta(G),\delta(G)}\right\}$.*

Dans [11], Domke, Hattingh, Markus et Ungerer ont donné des résultats similaires sur $i_s(G)$.

Proposition 2.11 (Domke, Hattingh, Markus et Ungerer [11] 2002)**.** *Si G est un graphe, alors* $i_s(G) \leq n - \Delta(G)$.

La caractérisation des graphes G vérifiant $i_s(G) = n - \Delta(G)$ est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.12 (Domke, Hattingh, Markus et Ungerer [11] 2002)**.** *Soit G un graphe. Alors $i_s(G) = n - \Delta(G)$ si et seulement si $V - N(v)$ est indépendant pour tout $v \in V_\Delta(G)$.*

Une caractérisation des graphes connexes sans triangles G satisfaisant $i_s(G) = n - \Delta(G)$ a été donnée dans [11].

Proposition 2.13 (Domke, Hattingh, Markus et Ungerer [11] 2002)**.** *Soit G un graphe connexe sans triangles. Alors $i_s(G) = n - \Delta(G)$ si et seulement si $G = K_1$ ou bien G est le sous graphe partiel du graphe $K_{\Delta(G),n-\Delta(G)}$ et si $n \neq 2\Delta(G)$, alors $V_{\Delta(G)}$ inclut dans l'ensemble biparti de $K_{\Delta(G),n-\Delta(G)}$ de taille $n - \Delta(G)$.*

2.2.2 Bornes superieures sur $\gamma_s(G)$ et $\gamma_w(G)$

Pour tout graphe G, chaque ensemble dominant faible (resp, fort) indépendant est un ensemble dominant faible (resp, fort) et ainsi $\gamma_w(G) \leq i_w(G)$ (resp, $\gamma_s(G) \leq i_s(G)$). Par conséquent, on trouve les résultats relatifs aux paramètres γ_s et γ_w de Sampathkumar et Latha.

Corollaire 2.14 (Sampathkumar et Latha [10] 1996)**.** *Si G est un graphe, alors*

$$\gamma_w(G) \leq n - \delta(G).$$

Corollaire 2.15 (Sampathkumar et Latha [10] 1996)**.** *Si G est un graphe, alors*

$$\gamma_s(G) \leq n - \Delta(G).$$

On s'intérèsse maintenant à la caractérisation des graphes pour lesquels la borne $\gamma_w(G) \leq n - \delta(G)$ est atteinte. Notons d'abord que si $\gamma_w(G) = n - \delta(G)$, alors on a aussi $i_w(G) = n - \delta(G)$.

Théorème 2.16 (Domke, Hattingh, Markus et Ungerer [11] 2002)**.** *Soit G un graphe. Alors $\gamma_w(G) = n - \delta(G)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

(1) $\delta(G) = n-1$, *i.e:* $G = K_n$,

(2) $\delta(G) = n-2$,

(3) $\delta(G) \leq n-3$ *et si* $v \in V_\delta(G)$, *alors* $V - N(v)$ *est indépendant et tout sommet dans* $N(v)$ *est de degré au moins* $\delta(G)+1$.

Pour les graphes connexes sans triangles on a:

Proposition 2.17 (Domke, Hattingh, Markus et Ungerer [11] 2002)**.** *Soit G un graphe connexe sans triangles. Alors $\gamma_w(G) = n - \delta(G)$ si et seulement si $G \in \{K_1, K_{1,1}, K_{2,2}\} \cup \left\{K_{\delta(G), n-\delta(G)},\ \text{où } \delta(G) \neq n/2\right\}$.*

Les mêmes auteurs donnent une condition nécéssaire et suffisante pour que la borne $\gamma_s(G) \leq n - \Delta(G)$ soit atteinte pour tout graphe G.

Théorème 2.18 (Domke, Hattingh, Markus et Ungerer [11] 2002)**.** *Soit G un graphe. Alors $\gamma_s(G) = n - \Delta(G)$ si et seulement si chaque sommet $v \in V_\Delta$ vérifie les deux conditions suivantes:*

(1) $V - N(v)$ *est indépendant, et*

(2) *Si* $u \in N(v)$ *est adjacent à* x *et* y *tel que* $x, y \in V - N[v]$, *alors* $\deg(u) < \max\{\deg(x), \deg(y)\}$.

Dans [12], Rautenbach a donné des autres bornes superieures sur γ_w en fonction de l'ordre n et le degré maximum Δ.

Théorème 2.19 (Rautenbach [12] 1998)**.** *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ et de degré maximum Δ. Alors $\gamma_w(G) \leq \frac{\Delta n}{\Delta+1}$, avec l'égalité si et seulement si G est une étoile $K_{1,\Delta}$.*

Les graphes extrémaux atteignant la borne du Theorème 2.19 sont de degré minimum 1. Alors pour un degré minimum élevé, Rautenbach a donnée une borne superieure meilleure en fonction de l'ordre n, le degré maximum Δ et minimum δ dans les corollaires qui suivent. Rautenbach introduit quelques notations supplémentaires.

Notation 2.20. *Pour tout sommet $v \in V$, on désigne le degré faible dans G par* $\deg_w(v) = |\{u \mid u \in N(v),\ \deg(u) \leq \deg(v)\}|$.

- $W(G)$ est l'ensemble de tous les sommets v de G tel que $\deg_w(v) = 0$. Il est clair que $W(G)$ est un ensemble indépendant.

- $S(G)$ est l'ensemble de tous les sommets x de G tel que $\deg(y) < \deg(x)$ pour tout $y \in N(x)$.

Théorème 2.21 (Rautenbach [12] 1998)**.** *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$, et de degré maximum Δ et minimum δ. Alors $\gamma_w(G) \leq \frac{\Delta n}{\Delta+1} - \frac{\delta-1}{\Delta+1}|W|$. Si $\delta \neq \Delta$, alors l'égalité si et seulement si G est un graphe biparti partitionné en deux ensemles $W(G)$ et $N(W(G))$, $\deg(w) = \delta$ pour tout $w \in W$ et $\deg(u) = \Delta$ pour tout $u \in N(W)$. Si $\delta = \Delta$, alors l'égalité si et seulement si $G = K_2$.*

Théorème 2.22 (Rautenbach [12] 1998)**.** *Pour tout graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ et de degré maximum Δ et minimum δ, $\gamma_w(G) \leq \frac{\Delta+\delta-1}{\Delta+2\delta-1}n$.*

Dans [13], Hattingh et Henning ont donné une autre borne superieure sur γ_s.

Théorème 2.23 (Hattingh et Henning [13] 1998)**.** *Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 2$, $\gamma_s(G) \leq \frac{2n-2}{3}$.*

Définition 2.24. *Un couplage dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes non adjacentes deux à deux. On note $\beta(G)$ par la taille maximale d'un couplage dans G, i-e: $\beta(G) = max\{|M| : M$ couplage dans $G\}$. Un couplage est dit parfait si $\beta(G) = n/2$.*

Dans [13], Hattingh et Henning ont montré que tout $\gamma_s(T)$-ensemble d'un arbre T d'ordre $n \geq 2$ et différent à une étoile subdivisée de centre de degré trois contient au plus $\frac{4n-1}{7}$ sommets de T. Cette borne a été généralisée pour une classe large des graphes par Rautenbach dans [14].

Nous présontons dans ce qui suit des familles de graphes nécéssaires pour la suite.

Définition 2.25. *Un cycle $S(G)$-alterné est un cycle $C = x_1y_1x_2y_2 \ldots x_ly_lx_1$ et $x_i \in S(G)$ pour $i = 1,\ldots,l$.*

Définition 2.26. *Soit $K(i)$ pour $i \in N$, le cactus défini par: $V(K(i)) = \{a_k \mid k = 1,\ldots,i+1\} \cup \{b_j \mid j = 1,\ldots,2i\}$ et $E(K(i)) = \{a_kb_{2k-1}, a_{k+1}b_{2k-1} \mid k = 1,\ldots,i\} \cup \{a_kb_{2k}, a_{k+1}b_{2k} \mid k = 1,\ldots,i\}$.*

Définition 2.27. *Soit $K'(i)$ pour $i \in N$, le cactus défini par:* $V(K'(i)) = V(K(i)) \cup \{c_j \mid j = 1,...,2i\} \cup \{d_k,e_k \mid k = 1,2,3,4\}$ *et* $E(K'(i)) = E(K(i)) \cup \{b_jc_j \mid j = 1,...,2i\} \cup \{d_ke_k \mid k = 1,2,3,4\} \cup . \{a_1d_1,a_1d_2,a_{i+1}d_3,a_{i+1}d_4\}$.

La classe $\mathcal{P}$: consiste en tous arbres T partitionnés en deux ensembles A et B tels que $\deg_T(a) \leq 4$ pour tout $a \in A$ et $\deg_T(b) = 2$ pour tout $b \in B$.

La classe $\mathcal{P}'$: Un graphe G appartient à cette classe si et seulement s'il peut être construit comme suit: soit $T' \in \mathcal{P}$ et A, B les deux ensembles de $\mathcal{P}$. Déffinissons l'ensemble de sommets de G par $V(G) = V(T') \cup \{b_{a,j},c_{a,j} \mid a \in A;\ j = 1,...,4 - \deg_T(a)\} \cup \{d_b \mid b \in B\}$ et $E(G) = E(T') \cup \{ab_{a,j},b_{a,j}c_{a,j} \mid a \in A;\ j = 1,...,4 - \deg_T(a)\} \cup \{bd_b \mid b \in B\} \cup M$, où M est un couplage arbitraire des sommets $\{b_{a,j} \mid a \in A;\ j = 1,...,4 - \deg_T(a)\}$.

Théorème 2.28 (Rautenbach [14] 2000)**.** *Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 2$ différent d'une étoile subdivisée de centre de degré trois et ne contient aucun cycle $S(G)$-alterné, $\gamma_s(G) \leq \frac{4n-1}{7}$. La borne est atteinte si et seulement si $G \in \mathcal{P}'$ ou $G = K_2$.*

Afin de donner une caractérisation des graphes pour lesquels la borne superieure du théorème suivant est atteinte, nous introduisons la famille de graphes ϕ. Un graphe G appartient à ϕ si et seulement si G peut être construit à partir d'un cactus $K'(i)$ pour $i \in N$ en ajoutant un couplage arbitraire des sommets $\{d_1,d_2,d_3,d_4\}$ à l'ensemble des arêtes de $K'(i)$.

Théorème 2.29 (Rautenbach [14] 2000)**.** *Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$ différent à une étoile subdivisée de centre de degré trois et que pour tout deux cycles $S(G)$-alternés ont des arêtes disjointes, $\gamma_s(G) \leq \frac{3n-2}{5}$. La borne est atteinte si et seulement si $G \in \phi$ ou $G \in \{P_4,C_4\}$.*

2.2.3 Borne inférieure sur $\gamma_w(G)$

Dans [15], Walikar et al ont montré que tout graphe G satisfait $\gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$. Du fait que pour tout $\gamma_w(G)$-ensemble S, S est un dominant de G. D'où $\gamma(G) \leq \gamma_w(G)$ pour tout graphe G et de plus $\gamma_w(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$. La précédente borne inférieure sur $\gamma(G)$ établie dans

[15] par Walikar et al a été améliorée pour $\gamma_w(G)$ par Rautenbach dans [12] en montrant que:

Théorème 2.30 (Rautenbach [12] 1998). *Soit G un graphe connexe d'ordre n, de degré maximum Δ, et de degré minimum δ. Alors* $\gamma_w(G) \geq \max\left\{|W(G)|, \frac{n+|W(G)|}{\Delta+1}, \frac{n+\Delta-\delta}{\Delta+1}\right\}$.

2.3 Les valeurs larges de γ_w

Lemme 2.31 (Hattingh et Rautenbach [16] 2002). *Soit $G = (V,E)$ un graphe tel que $V = \{v_1, v_2,..., v_n\}$ et* $\deg(v_1) \geq \deg(v_2) \geq ... \geq \deg(v_n)$. *Si $\gamma_w(G) = n - k$, pour $k \geq 1$, alors* $\deg(v_{k+1}) \leq k$.

Corollaire 2.32 (Hattingh et Rautenbach [16] 2002). *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors $\gamma_w(G) = n - 1$ si et seulement si $G \cong K_{1,n-1}$.*

Théorème 2.33 (Hattingh et Rautenbach [16] 2002). *Soit $G = (V,E)$ un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que $V = \{v_1, v_2,..., v_n\}$ et* $\deg(v_1) \geq \deg(v_2) \geq ... \geq \deg(v_n)$. *Alors $\gamma_w(G) = n - 2$ si et seulement si G satisfait l'une des conditions suivantes:*

1. *$G \in \{P_4, P_5, C_3, C_4\}$*

2. *G peut être construit à partir d'une étoile $K_{1,\, n-2}$ en subdivisant quelques arêtes une seule fois.*

3. *G peut être construit à partir d'une étoile $K_{1,\, n-3}$ en subdivisant quelques arêtes deux fois.*

4. *G peut être construit à partir d'une étoile $K_{1,\, n-2}$ en subdivisant l'arête uv une seule fois et en ajoutant une nouvelle arête uv*

5. $v_1v_2 \in E$, $\deg(v_2) \geq 3$ et $N(v_i) \in \{\{v_1\}, \{v_2\}\}$ *pour tout $i \geq 3$.*

6. $v_1v_2 \notin E$, $\deg(v_2) \geq 3$, $N(v_3) = \{v_1,v_2\}$ *et* $N(v_i) \subseteq \{v_1,v_2\}$ *pour tout $i \geq 4$.*

7. $v_1v_2 \in E$, $\deg(v_2) \geq 3$, $N(v_3) = \{v_1,v_2\}$ *et* $N(v_i) \subseteq \{v_1,v_2\}$ *pour tout $i \geq 4$.*

2.4 Bornes inférieures sur γ_w dans les arbres

Dans [16], Hattingh et Rautenbach ont donné une borne inférieure sur le nombre de domination faible dans les arbres.

Théorème 2.34 (Hattingh et Rautenbach [16] 2002). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 1$, alors $\gamma_w(T) \geq \lceil (n+2) / 3 \rceil$ pour $n \neq 2$.*

À noter aussi qu'une caractérisation constructive des arbres extrémaux atteignant la borne du théorème précédent a été donnée par Hattingh et Rautenbach dans le même article.

Dans ce qui suit, on présente des bornes inférieures sur le nombre de domination faible pour les arbres dont le nombre des sommets pendants et les sommets supports améliorent le Theorème 2.34.

Théorème 2.35 (Chellali [17] 2005). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 1$, avec ℓ sommets pendants et s sommets supports, alors $\gamma_w(T) \geq \lceil (n+2+\ell-s) \ / 3 \rceil$ pour $n \neq 2$.*

Proposition 2.36 (Chellali [17] 2005). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, avec ℓ sommets pendants et s sommets supports, alors $\gamma_w(T) \geq \gamma(T) + \ell - s$.*

Rappelons que le nombre de domination connexe noté par $\gamma_c(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant dont le sous graphe induit par cet ensemble est connexe. Dans [18], Duchet et Meyniel ont montré que tout graphe connexe G satisfaisant $\gamma(G) \geq (\gamma_c(G)+2)/3$. Puisque $\gamma_c(T) = n - \ell$ pour tout arbre T, ce qui implique que $\gamma(T) \geq (n+2-\ell)/3$. En utilisant cette borne et la proposition précédente, on obtient une deuxième borne inférieure sur $\gamma_w(T)$ qui améliore la borne du Théorème 2.34 pour $\ell > 2s$.

Corollaire 2.37 (Chellali [17] 2005). *T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_w(T) \geq \lceil (n+2+2\ell-3s)/3 \rceil.$$

2.5 Borne superieure sur γ_w dans les arbres

Le théorème suivant donne une borne superieure sur le nombre de domination faible pour les arbres.

Théorème 2.38 (Chellali [17] 2005)**.** *Si T est un arbre non trivial avec n sommets, ℓ sommets pendants et s sommets supports, alors $\gamma_w(T) \leq \lfloor (n + 2\ell + 2s - 3)/3 \rfloor$. Cette borne est atteinte.*

Définition 2.39. *Un dominant de G contenant tous les sommets pendants est dit dominant pendant. Le cardinal minimum d'un dominant pendant est noté par $\gamma_e(G)$.*

2.6 Relation entre γ_e, γ_w et i

La proposition suivante de Hattingh et Henning [19] donne une relation entre γ_e et i dans les arbres.

Proposition 2.40 (Hattingh et Henning [19] 1998)**.** *Pour tout arbre T,*

$$i(T) \leq \gamma_e(T).$$

Si $T \ncong K_2$ est un arbre, alors tout ensemble dominant faible de T est un ensemble dominant pendant de T, d'où $\gamma_e(T) \leq \gamma_w(T)$. En conséquence de la proposition précédente, on obtient la chaîne d'inégalité dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.41 (Hattingh et Henning [19] 1998)**.** *Si $T \ncong K_2$ est un arbre, alors $\gamma(T) \leq i(T) \leq \gamma_e(T) \leq \gamma_w(T)$.*

Les mêmes auteurs de [19] ont caractérisé les arbres extrémaux atteignant la borne $i(T) \leq \gamma_w(T)$.

Soit $\mathcal{F}_1$ la famille des arbres qui peut être obtenue à partir de la séquence d'arbres $T_1, T_2, ..., T_k$ $(k \geq 1)$, où $T_1 = P_2$, $T = T_k$ et si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu à partir de T_i par une des deux opérations définies ci-déssous.

Opération O_1 : Attacher une chaîne P_2 par une arête à un sommet de T_i qui n'est dans aucun $\gamma_e(T_i)$-ensemble.

Opération O_2 : Attacher une chaine $P_3 = uvw$ par l'arête ux, où x est un sommet appartient à un $\gamma_e(T_i)$-ensemble et $\deg_{T_i}(y) > \deg_{T_i}(x)$, pour tout $y \in N_{T_i}(x)$, et de plus attacher au moins $\deg_{T_i}(x) - 1$ chaînes P_2 disjoints à u.

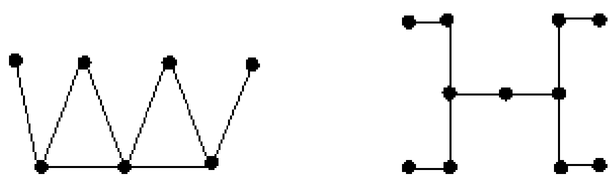
Théorème 2.42 (Hattingh et Henning [19] 1998)**.** *Soit T un arbre, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) $\gamma(T) = \gamma_w(T)$.

b) $T = K_2$ *ou* $T \in \mathcal{F}_1$.

c) $i(T) = \gamma_w(T)$.

Sampathkumar et Latha dans [10] ont montré que $\gamma_w(G)$ et $\gamma_s(G)$ sont incomparables. Par exemple, pour le graphe G_1 de la Figure 2.3, on a $\gamma_w(G) = 4$ et $\gamma_s(G) = 3$. D'autre part, pour le graphe G_2 de la Figure 2.3, $\gamma_w(G) = 5$ et $\gamma_s(G) = 6$.



G_1 G_2

Figure 2.3.

CHAPITRE 3

Contribution à l'étude de la domination forte et faible dans les graphes

3.1 Bornes superieures sur les paramètres de domination forte et faible

Nous proposons dans cette partie des bornes supérieures pour les paramètres de domination forte et faible améliorant ainsi les bornes de Domke, Hattingh, Markus et Ungerer. Voici d'abord un résultat nécéssaire pour la suite.

Théorème 3.1 (Köning [20] 1931)**.** *Si G est un graphe d'ordre n, alors*

$$\alpha(G) + \beta(G) \leq n.$$

La borne est atteinte pour tout graphe biparti.

Pour tout sommet v de G, notons par $\beta_v(G)$ le cardinal maximum d'un couplage du graphe induit par $\overline{N}_v$, i-e $\beta_v(G) = \beta(G\left[\overline{N}_v\right])$. On notera pour la suite $\beta_\delta(G)$ la quantité $\max\{\beta_v(G) \mid v \in V(G) \text{ et } \deg(v) = \delta(G)\}$ et par $\beta_\Delta(G)$ la quantité $\max\{\beta_v(G) \mid v \in V(G) \text{ et } \deg(v) = \Delta(G)\}$. Si v est un sommet de degré minimum (resp, maximum) pour lequel $\beta_v(G) = \beta_\delta(G)$ (resp, $\beta_v(G) = \beta_\Delta(G)$), alors on dit que v est un sommet w-bon (resp, un sommet s-bon). Il est à rappeler que $\beta_v(G)$ peut être calculé polynomialement (voir [21]) et par suite $\beta_\delta(G)$ et $\beta_\Delta(G)$ se calculent aussi polynomialement.

Proposition 3.2. *Pour tout graphe G d'ordre n,*

$$\gamma_w(G) \leq i_w(G) \leq n - \delta(G) - \beta_\delta(G).$$

Preuve. Soit v un sommet w-bon de G et soit Y un ensemble stable maximum du graphe induit par $\overline{N}_v$. Alors chaque $i_w(G)$-ensemble doit contenir v ou bien un sommet $u \in N(v)$ tel que $\deg(u) = \deg(v)$. Aussi, tout $i_w(G)$-ensemble contient au plus $|Y|$ sommets de $\overline{N}_v$. Ce qui implique que $i_w(G) \leq |Y| + 1 = \alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right) + 1$. D'aprés le Théorème 3.1, on a $\alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right) \leq \left|\overline{N}_v\right| - \beta_\delta(G)$. D'où $i_w(G) \leq \left|\overline{N}_v\right| - \beta_\delta(G) + 1 = n - (\delta(G) + 1) - \beta_\delta(G) + 1$ et donc $i_w(G) \leq n - \delta(G) - \beta_\delta(G)$. □

En utilisant le même raisonnement vu pour montrer $i_w(G) \leq n - \delta(G) - \beta_\delta(G)$, on peut montrer que $i_s(G) \leq n - \Delta(G) - \beta_\Delta(G)$.

Proposition 3.3. *Pour tout graphe G d'ordre n,*

$$\gamma_s(G) \leq i_s(G) \leq n - \Delta(G) - \beta_\Delta(G).$$

Preuve. Soit v un sommet s-bon de G et soit Y un ensemble stable maximum du graphe induit par $\overline{N}_v$. Alors chaque $i_s(G)$-ensemble doit contenir v ou bien un sommet $u \in N(v)$ tel que $\deg(u) = \deg(v)$. Aussi, tout $i_s(G)$-ensemble contient au plus $|Y|$ sommets de $\overline{N}_v$. Ce qui implique que $i_s(G) \leq |Y| + 1 = \alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right) + 1$. D'aprés le Théorème 3.1, on a $\alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right) \leq \left|\overline{N}_v\right| - \beta_\Delta(G)$. D'où $i_s(G) \leq \left|\overline{N}_v\right| - \beta_\Delta(G) + 1 = n - (\Delta(G) + 1) - \beta_\Delta(G) + 1$ et donc $i_s(G) \leq n - \Delta(G) - \beta_\Delta(G)$. □

On s'interesse maintenant à la caractérisation des graphes pour lesquels la borne de la Proposition 3.2 est atteinte. Notons d'abord que $\gamma_s(G) = \gamma_w(G) = \gamma(G)$ pour tout graphe régulier. Dans [22], Blidia, Chellali et Maffray ont donné une caractérisation complète des graphes reguliers qui vérifient $\gamma(G) = n - \Delta(G) - \beta_\Delta(G)$.

Avant de donner une condition nécéssaire pour que $i_w(G) = n - \delta(G) - \beta_\delta(G)$, il est utile de faire les observations suivantes.

Observation 3.4. *Soient G un graphe et v un sommet pendant de G, alors*

1) *v est dans tout ensemble dominant faible et par suite dans tout ensemble dominant faible independant,*

2) *Il existe un ensemble stable maximal contenant v.*

Observation 3.5. *Si G est un graphe et v un sommet pendant de G, alors $\alpha(G) = \alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right) + 1$.*

Preuve. Soit v un sommet pendant de G. Alors chaque ensemble stable maximal de G contient v ou bien son unique voisin et ainsi $\alpha(G) \leq \alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right) + 1$. Aussi, tout ensemble indépendant maximal du graphe induit par $\overline{N}_v$ peut être étendu à un ensemble independant de G en ajoutant le sommet v, d'où $\alpha(G) \geq \alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right) + 1$. Ce qui nous donne $\alpha(G) = \alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right) + 1$. $\square$

Voici maintenant une condition nécéssaire pour les graphes G tel que $i_w(G) = n - \delta(G) - \beta_\delta(G)$.

Proposition 3.6. *Pour tout graphe G, si $i_w(G) = n - \delta(G) - \beta_\delta(G)$, alors pour chaque sommet w-bon v, $\alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right) + \beta_\delta(G) = \left|\overline{N}_v\right|$. Dans ce cas , on a aussi $i_w(G) - 1 = \alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right)$.*

Preuve. Soit v un sommet w-bon de G et soit Y un ensemble indépendant maximum de $G\left[\overline{N}_v\right]$. Alors $i_w(G) \leq |Y|+1 = \alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right)+1$. Ce qui implique que $n-\delta(G)-\beta_\delta(G) \leq \alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right) + 1$ et d'où $\alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right) + \beta_\delta(G) \geq n - (\delta(G)+1) = \left|\overline{N}_v\right|$. Par le Théorème 3.1, on obtient l'égalité $\alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right) + \beta_\delta(G) = \left|\overline{N}_v\right|$. Comme $\beta_\delta(G) = n-\delta(G) - i_w(G)$, alors par substitution, on a $\alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right) + n - \delta(G) - i_w(G) = \left|\overline{N}_v\right| = n - \delta(G) - 1$. Il s'ensuit que $i_w(G) - 1 = \alpha\left(G\left[\overline{N}_v\right]\right)$. $\square$

Théorème 3.7. *Un arbre T satisfait $i_w(T) = n - 1 - \beta_\delta(T)$ si et seulement si $\alpha(T) = i_w(T)$.*

Preuve. supposons que T est un arbre tel que $i_w(T) = n - 1 - \beta_\delta(T)$. Alors par la Proposition 3.6, $i_w(T) - 1 = \alpha\left(T\left[\overline{N}_v\right]\right)$ pour tout sommet pendant w-bon v de T. Par l'Observation 3.5, on a $\alpha(T) = i_w(T)$.

Inversement, soit v un sommet pendant w-bon de T. Alors d'aprés l'Observation 3.5 et le Théorème 3.1, $i_w(T) - 1 = \alpha\left(T\left[\overline{N}_v\right]\right) = \left|\overline{N}_v\right| - \beta_\delta(T) = n - (1+1) - \beta_\delta(T)$ et d'où $i_w(T) = n - 1 - \beta_\delta(T)$. $\square$

Corollaire 3.8. *Pour tout arbre T, $\gamma_w(T) = n - 1 - \beta_\delta(T)$ si et seulement si $\gamma_w(T) = i_w(T) = \alpha(T)$.*

Problème 3.9. *Il serait intéressant de caractériser (par description ou construction) les arbres tel que $\gamma_w(T) = \alpha(T)$.*

3.2 Arbres T avec $\gamma_s(T) = \gamma(T)$

On commence par donner la définition suivante et quelques observations.

Définition 3.10. *Soit D un ensemble. Le voisinage fort privé d'un sommet $v \in D$ par rapport à D est l'ensemble noté $spn\,[v, D]$ des sommets du voisinage fermé de v qui sont dominés fortement uniquement par v, i-e: $spn\,[v, D] = \{u \in V\,(G) : N_s\,[u] \cap D = \{v\}\}$.*

Observation 3.11. *Si T est un arbre d'ordre au moins trois, alors il existe un $\gamma(T)$-ensemble qui contient tous les sommets supports.*

Observation 3.12. *Si T est un arbre d'ordre au moins trois, alors il existe un $\gamma_s(T)$-ensemble qui contient tous les sommets supports.*

Afin de caractériser les arbres pour lesquels les nombres de domination forte et de domination sont égaux; nous définissons la famille $\mathcal{F}$ de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence T_1, T_2,..., T_k $(k \geq 1)$ d'arbres, où $T_1 = K_{1,p}\,(p \geq 1)$, $T = T_k$, et si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des cinq opérations définies ci-dessous.

- **Opération** $\mathcal{O}_1$: Attacher p $(p \geq 1)$ sommets à une feuille d'un support fort de T_i.
- **Opération** $\mathcal{O}_2$: Attacher un nouveau sommet v et $p\,(p \geq 1)$ étoiles de centres u_1, u_2, ...,u_p dont l'une est d'ordre au moins $(p+1)$ en ajoutant les arêtes vu_i $\left(i = \overline{1, p}\right)$ et vw, où w est un sommet de T_i n'appartenant pas à un $\gamma_s\,(T_i)$-ensemble et dominé fortement par un sommet x de T_i avec $\deg_{T_i}(x) > \deg_{T_i}(w)$.
- **Opération** $\mathcal{O}_3$: Attacher p $(p \geq 1)$ étoiles de centres u_1, u_2,...,u_p dont l'une est d'ordre au moins $(p+1)$ en ajoutant les arêtes vu_i $\left(i = \overline{1, p}\right)$, où v est un sommet feuille de T_i dont le support w appartient à tout $\gamma_s\,(T_i)$-ensemble et vérifiant en plus $\gamma\,(T_i - v) = \gamma\,(T_i)$.
- **Opération** $\mathcal{O}_4$: Soit v une feuille de T_i dont le support est w vérifiant $\gamma\,(T_i - v) = \gamma\,(T_i)$. Attacher p étoiles non triviales $\left(2 \leq p \leq \deg_{T_i}(w) - 1\right)$ de centres u_1, u_2, ...,u_p chacune d'ordre au plus $\deg_{T_i}(w) - 2$ en ajoutant toutes les arêtes vu_i.

- **Opération** $\mathcal{O}_5$: Attacher un arbre H (voir Figure 3.1) par w à un sommet x de T_i par une arête wx, où x n'est dans aucun $\gamma(T_i)$-ensemble et de plus il est dominé fortement par y appartenant à un $\gamma_s(T_i)$-ensemble D tel que $\deg_{T_i}(y) > \deg_{T_i}(x)$ et y ayant un privé fort externe différent à x.

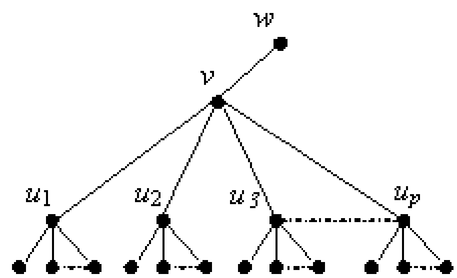


Figure 3.1: Arbre H tel que $p \geq 2$ et $\deg_H(v) > \deg_H(u_i)$, pour tout i.

Lemme 3.13. *Si* $T \in \mathcal{F}$, *alors* $\gamma_s(T) = \gamma(T)$.

Preuve. On utilise une induction sur le nombre d'opérations k exécutées pour construire l'arbre T. La propriété est vraie pour $T_1 = K_{1,t}$. Supposons maintenant que $k \geq 2$ et que tous les arbres $T \in \mathcal{F}$ pouvant être construit par une séquence de longueur au plus $k-1$ sont des (γ_s, γ)-arbres. Soit $T = T_k$, $T' = T_{k-1}$, et soit D un $\gamma_s(T)$-ensemble qui contient tous les sommets supports. Nous examinons les cas suivants: $\square$

Cas 1. T est obtenu à partir de T' par l'Opération $\mathcal{O}_1$.

Supposons que les sommets ajoutés sont attachés à la feuille u de T' dont le support est v. D'aprés le choix de D, $u, v \in D$. Alors $D \setminus \{u\}$ est un ensemble dominant fort de T', d'où $\gamma_s(T') \leq \gamma_s(T) - 1$. Comme v est dans tout $\gamma_s(T')$-ensemble, un tel ensemble peut être étendu à un ensemble dominant fort de T en ajoutant u. Donc $\gamma_s(T) \leq \gamma_s(T') + 1$ et l'égalité est obtenue. Aussi on peut voir facilement dans ce cas que $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$. Par induction sur T', on a $\gamma_s(T) = \gamma(T)$.

Cas 2. T est obtenu à partir de T' par l'Opération $\mathcal{O}_2$.

Dans ce cas $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \subset D$ et $v, w \notin D$ (sinon, on peut les remplacer par x dans D). $D - \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ est un dominant fort de T', d'où $\gamma_s(T') \leq \gamma_s(T) - p$. Maintenant puisque x appartient à un $\gamma_s(T')$-ensemble, un tel ensemble peut être étendu à un dominant fort de T en ajoutant les sommets $u_1, u_2, ..., u_p$, et d'où $\gamma_s(T) \leq \gamma_s(T')+p$. Par conséquent, $\gamma_s(T) = \gamma_s(T') + p$. D'autre part, il existe un ensemble dominant S de T contient les sommets $u_1, u_2, ..., u_p$ et ne contient pas v, d'où $S - \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ est un dominant de T' et $\gamma(T') \leq \gamma(T) - p$. Aussi tout $\gamma(T')$-ensemble peut être étendu à un dominant de T en ajoutant les sommets $u_1, u_2, ..., u_p$, alors $\gamma(T) \leq \gamma(T') + p$. Par conséquent $\gamma(T) = \gamma(T') + p$. Ce qui implique que $\gamma_s(T) = \gamma(T)$.

Cas 3. T est obtenu à partir de T' par l'Opération $\mathcal{O}_3$.

Tout $\gamma_s(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble dominant fort de T en ajoutant les sommets $u_1, u_2, ..., u_p$ (dans ce cas, v peut être dominé fortement par le centre de l'étoile dont l'ordre est $\geq p+1$), d'où $\gamma_s(T) \leq \gamma_s(T') + p$.

Soit S un $\gamma(T)$-ensemble qui contient tous les sommets supports, alors $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \subset S$, $v \notin S$ (sinon, le remplacer par w). Si $w \in S$, alors $S - \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ est un dominant de T', et d'où $\gamma(T') \leq \gamma(T) - p$. Sinon, si $w \notin S$, alors $S - \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ est un dominant de $T' - v$. Maintenant puisque $\gamma(T' - v) = \gamma(T')$, alors $\gamma(T') \leq \gamma(T) - p$. D'un autre coté, tout $\gamma(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble dominant de T en ajoutant $u_1, u_2, ..., u_p$, d'où $\gamma(T) \leq \gamma(T') + p$ et donc $\gamma(T) = \gamma(T') + p$.

Par conséquent, on a $\gamma(T) \leq \gamma_s(T) \leq \gamma_s(T') + p = \gamma(T') + p = \gamma(T)$, et ainsi $\gamma(T) = \gamma_s(T)$.

Cas 4. T est obtenu à partir de T' par l'Opération $\mathcal{O}_4$.

Par l'Observation 3.12, il y'a un $\gamma_s(T')$-ensemble D' qui contient tous les sommets supports, d'où $w \in D'$. Donc $D' \cup \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ est un ensemble dominant fort de T, d'où $\gamma_s(T) \leq \gamma_s(T') + p$. Aussi $v \notin D$, sinon le remplacer par w et donc $w \in D$ (à noter que v reste dominé fortement par w car $\deg_T(u_i) \leq \deg(w)$). D'où $D - \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ est un dominant fort de T' et $\gamma_s(T') \leq \gamma_s(T) - p$. Par conséquent, $\gamma_s(T) = \gamma_s(T') + p$. De la même manière que le cas 3 dans le cas précédent, on peut montrer aussi que $\gamma(T) = \gamma(T') + p$. Il s'ensuit que $\gamma_s(T) = \gamma(T)$.

Cas 5. T est obtenu à partir de T' par l'Opération $\mathcal{O}_5$.

Puisque tout $\gamma_s(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble dominant fort de T en ajoutant les sommets $v, u_1, u_2, ..., u_p$, d'où $\gamma_s(T) \leq \gamma_s(T') + p + 1$.

D'autre part, $u_i \in D\ \forall i$, $v \in D$, $w \notin D$ et $x \notin D$ (sinon, les remplacer par y). Donc $D - \{v, u_1, u_2, ..., u_p\}$ est un dominant fort de T', d'où $\gamma_s(T') \leq \gamma_s(T) - p - 1$. Il s'ensuit que $\gamma_s(T) = \gamma_s(T') + p + 1$. Il est facile de voir que $\gamma(T) \leq \gamma(T') + p + 1$. Maintenant si $\gamma(T) < \gamma(T') + p + 1$, alors il existe un $\gamma(T)$-ensemble S" tel que $u_i \in S$" $\forall i$, $v, w \notin S$", sinon les remplacer par x. D'où $x \in S$"pour dominer w. Dans ce cas, $S" - \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ est un dominant de T' contenant x. Alors $\gamma(T') \leq |S"| - p = \gamma(T) - p < \gamma(T') + p + 1 - p$, contradiction. Il s'ensuit que $\gamma(T) = \gamma(T') + p + 1$ et $\gamma_s(T) = \gamma(T)$.

Lemme 3.14. *Soit T un arbre d'ordre n. Si $\gamma_s(T) = \gamma(T)$, alors $T = K_1$ ou bien $T \in \mathcal{F}$.*

Preuve. Il est évident que $\gamma_s(K_1) = \gamma(K_1)$ et donc on suppose que $n \geq 2$. On utilise une induction sur l'ordre n de T. Si $diam(T) \in \{1, 2\}$, alors $T = K_{1,t}$ et T appartient à $\mathcal{F}$. Si $diam(T) = 3$ alors $T = S_{p,q}$ qui appartient à $\mathcal{F}$ puisque il est obtenu à partir de $K_{1,p+1}\ (p \geq 1)$ en utilisant l'Opération $\mathcal{O}_1$. Supposons que tout arbre T' d'ordre n' tel que $2 \leq n' < n$, satisfaisant $\gamma_s(T') = \gamma(T')$ est dans $\mathcal{F}$. Soit T un arbre d'ordre n tel que $\gamma_s(T) = \gamma(T)$. On peut supposer que T est de diamètre au moins quatre. Enracinons T vers un sommet r d'excentricité maximum, diam$(T) \geqslant 4$. Soit u le sommet support le plus loin de r et v, w le parent de u, v respectivement. Notons que $\deg_T(w) \geq 2$, car diam$(T) \geqslant 4$. Soit D un $\gamma_s(T)$-ensemble qui contient tous les sommets supports. Alors $u \in D$. Considérons les cas suivants.

Cas 1. v est un sommet support. Donc $v \in D$. Soit $T' = T - L_u$. Alors il est facile de voir que $\gamma(T') = \gamma(T) - 1$. Aussi $D - \{u\}$ est un ensemble dominant fort de T', d'où $\gamma_s(T') \leq \gamma_s(T) - 1$. Supposons maintenant que $\gamma_s(T') < \gamma_s(T) - 1$. Alors $\gamma_s(T') < \gamma_s(T) - 1 = \gamma(T) - 1 = (\gamma(T') + 1) - 1 = \gamma(T')$, et ainsi $\gamma_s(T') < \gamma(T')$, ce qui constitue une contradiction. Donc $\gamma_s(T') = \gamma_s(T) - 1$. Il s'ensuit que $\gamma_s(T') = \gamma(T')$ et par l'hypothèse d'induction sur T', $T' \in \mathcal{F}$. Par conséquent $T \in \mathcal{F}$ et T est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération $\mathcal{O}_1$.

Cas 2. v n'est pas un sommet support. Alors tout fils de v est un support. Notons par $v_1 = u, v_2, ..., v_p$, $(p \geq 1)$ les fils de v. Par notre choix de D, $\{v_1, v_2, ..., v_p\} \subset D$.

Cas 2.1. $v \notin D$. Alors v est dominé fortement par w ou l'un de ses fils.

Cas 2.1.1. v est dominé fortement par un fils, disons v_1. Donc T_{v_1} est une étoile d'ordre au moins $(p+1)$. Si $w \notin D$, alors w est dominé fortement par un sommet x

différent à v de T. Soit $T' = T - T_v$. Il est clair que $D - \{v_1, v_2..., v_p\}$ est un ensemble dominant fort et par suite un dominant de T', d'où $\gamma_s(T') \leq \gamma_s(T) - p$ et $\gamma(T') \leq \gamma(T) - p$. Puisque tout $\gamma(T')$-ensemble peut être étendu en un ensemble dominant de T en ajoutant les sommets $v_1, v_2, ..., v_p$, on a $\gamma(T) \leq \gamma(T') + p$, d'où l'égalité $\gamma(T') = \gamma(T) - p$. On a maintenant $\gamma(T') \leq \gamma_s(T') \leq \gamma_s(T) - p = \gamma(T) - p = \gamma(T')$. Par conséquent, $\gamma(T') = \gamma_s(T') = \gamma_s(T) - p$ et $D' = D \cap V(T')$ est un $\gamma_s(T')$-ensemble ne contenant pas w et w est dominé fortement par un sommet $x \in D'$ avec $\deg_{T'}(w) < \deg_{T'}(x)$. Par

hypothèse d'induction $T' \in \mathcal{F}$. D'où $T \in \mathcal{F}$, car il est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération O_2. Maintenant on suppose que $w \in D$ et soit $T' = (T - T_v) \cup \{v\}$. Alors tout

$\gamma(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble dominant de T en ajoutant les sommets $v_1, v_2, ..., v_p$, d'où $\gamma(T) \leq \gamma(T') + p$. Aussi $D - \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ est à la fois un dominant et dominant fort de T', d'où $\gamma_s(T') \leq \gamma_s(T) - p$ et $\gamma(T') \leq \gamma(T) - p$. Donc $\gamma(T) = \gamma(T') + p$. Maintenant on a $\gamma(T') \leq \gamma_s(T') \leq \gamma_s(T) - p = \gamma(T) - p = \gamma(T')$, d'où $\gamma(T') = \gamma_s(T')$.

D'autre part, il est à noter que $D - \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ est aussi un ensemble dominant de $T' - v$, d'où $\gamma(T' - v) \leq |D| - p = \gamma(T) - p$. Aussi, on peut voir que chaque $\gamma(T' - v)$-ensemble peut être étendu à un ensemble dominant de T en ajoutant les sommets $v_1, v_2, ..., v_p$, et donc $\gamma(T) \leq \gamma(T' - v) + p$. Ce qui nous donne $\gamma(T' - v) = \gamma(T) - p = \gamma(T')$. Le support w appartient à tout $\gamma_s(T')$-ensemble, sinon si on suppose qu'il existe un $\gamma_s(T')$-ensemble D' ne contenant pas w. Alors forcement $v \in D'$ et w est dominé fortement par un sommet autre que v. Dans ce cas $(D' \setminus \{v\}) \cup \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ est un ensemble dominant fort de T, d'où $\gamma_s(T) \leq \gamma_s(T') - 1 + p < \gamma_s(T') + p$, contradiction. On conclut que T est obtenu à partir de T'en utilisant l'Opération O_3, et par conséquent $T \in \mathcal{F}$.

Cas 2.1.2. v est dominé fortement par w. Dans ce cas, on peut supposer que $\deg_T(v) > \deg_T(v_i)$, pour tout i et que $\deg_T(v) = p + 1 \geq 3$. Soit $T' = (T - T_v) \cup \{v\}$ .Il est clair que $\gamma(T) \leq \gamma(T') + p$. Puisque $D \cap V(T')$ est un dominant fort de T'et donc un dominant de T', on a $\gamma_s(T') \leq \gamma_s(T) - p$ et $\gamma(T') \leq \gamma(T) - p$. D'où $\gamma(T) = \gamma(T') + p$. Maintenant on a $\gamma(T') \leq \gamma_s(T') \leq \gamma_s(T) - p = \gamma(T) - p = \gamma(T')$. On arrive à $\gamma_s(T') = \gamma_s(T) - p$, et par conséquent $\gamma_s(T') = \gamma(T')$.

Remarquons que tout $\gamma(T' - v)$-ensemble peut être étendu à un ensemble dominant de T en ajoutant les sommets $v_1, v_2, ..., v_p$, d'où $\gamma(T) \leq \gamma(T' - v) + p$. D'autre part, $D - \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ est un ensemble dominant de $T' - v$, d'où $\gamma(T' - v) \leq \gamma(T) - p$. Ce qui entraîne que $\gamma(T' - v) = \gamma(T) - p = \gamma(T')$. Par hypothèse d'induction $T' \in \mathcal{F}$. Donc $T \in \mathcal{F}$ car il est obtenu à partir de T' en utilisant l'Opération O_4.

Cas 2.2. $v \in D$, alors $\deg_T(v) > \deg_T(v_i)$ pour tout $i = \overline{1,p}$ et $\deg_T(v) \geq 3$. D'aprés le théorème de Ore sur la minimalité, w est l'unique privé de v dans D. On peut voir dans ce cas que w n'est pas un support et n'a pas des fils supports, d'où $\deg_T(w) = 2$. Soit x l'autre voisin de w. Alors $x \notin D$ et x est dominé fortement par un sommet y dans T tel que y possède un privé externe z fortement dominé, avec $z \neq x$, sinon $D \cup \{w\} \setminus \{v, y\}$ est un dominant meilleur. Soit $T' = T - T_w$. Alors $D \setminus \{v, v_1, v_2, ..., v_p\}$ est un dominant fort et par suite un dominant de T', d'où $\gamma(T') \leq \gamma_s(T') \leq \gamma_s(T) - p - 1 = \gamma(T) - p - 1$. A noter que x est dans aucun $\gamma(T')$-ensemble, sinon si on suppose qu'il existe un $\gamma(T')$-ensemble D' contenant x, alors $D' \cup \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ est un dominant de T, d'où $\gamma(T) \leq \gamma(T') + p < \gamma(T') + p + 1$, contradiction. Tout $\gamma(T')$-ensemble peut être étendu en un ensemble dominant de T en ajoutant les sommets $v, v_1, v_2, ..., v_p$, donc $\gamma(T) \leq \gamma(T') + p + 1$ et l'égalité est obtenue. D'où, on a $\gamma(T') = \gamma_s(T')$. $T' \in \mathcal{F}$ et ainsi $T \in \mathcal{F}$ puisque il est obtenu à partir de T'en utilisant l'Opération O_5. $\square$

3.3 Relation entre $\gamma_s(G)$ et $\gamma_w(G)$

En théorie des graphes, il est souvent question d'étudier les relations entre deux invariants et parfois entre plusieurs invariants (exemple, la chaîne d'inégalité entre les paramètres de domination dû à Cockayne, Hedetniemi et Miller [23]) dans un graphe en général ou dans des classes de graphes. Dans le papier introduisant la domination forte et faible dans les graphes, Sampathkumar et Pushpa Latha ont montré qu'un graphe G d'ordre n satisfait $\gamma_w(G) + \gamma_s(G) \leq n$ si G est un graphe d-équilibré (G admet un sd-ensemble D_1 et un wd-ensemble D_2 tel que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$). Cependant qu' il existe des graphes G pour lesquels $\gamma_w(G) + \gamma_s(G) > n$. Par exemple si G est une étoile subdivisée SS_q avec $q \geq 3$, alors $\gamma_w(SS_q) = \gamma_s(SS_q) = q + 1 = \frac{n+1}{2}$.

Dans ce contexte, nous nous intéréssons dans cette partie à étudier la relation entre le nombre de domination forte et le nombre de domination faible dans certaines classes de graphes et les graphes en général.

Lemme 3.15. *Si G est un graphe non trivial, alors il existe un $\gamma_s(G)$-ensemble D tel que pour tout sommet $x \in D$ ayant au moins un voisin dans $V \setminus D$, il existe un sommet $y \in V - D$ adjacent à x et $\deg(x) \geq \deg(y)$.*

Preuve. Parmi tous $\gamma_s(G)$-ensembles D, on choisit l'un qui satisfait $\sum_{u \in D} \deg(u)$ est maximum. Il est clair que le résultat est valide si $|V| = 2$. Soit $|V| \geq 3$ et supposons que D contient un sommet x tel que $N(x) \cap (V - D) \neq \emptyset$ et $\deg(y) > \deg(x)$ pour tout $y \in N(x) \cap (V - D)$. Alors $\{y\} \cup D - \{x\} = D'$ est un $\gamma_s(G)$-ensemble tel que $\sum_{u \in D'} \deg(u) > \sum_{u \in D} \deg(u)$, contradiction avec le choix de D. $\square$

Lemme 3.16. *Si G est un graphe non trivial, alors il existe un $\gamma_w(G)$-ensemble D tel que pour tout sommet $x \in D$ ayant au moins un voisin dans $V \setminus D$, il existe un sommet $y \in V - D$ adjacent à x et $\deg(x) \leq \deg(y)$.*

Preuve. Parmi tous $\gamma_w(G)$-ensemble D, on choisit l'un qui satisfait $\sum_{u \in D} \deg(u)$ est minimum. Il est clair que le résultat est valide si $|V| = 2$. Soit $|V| \geq 3$ et on suppose que D contient un sommet x tel que $N(x) \cap (V - D) \neq \emptyset$ et $\deg(y) < \deg(x)$ pour tout $y \in N(x) \cap (V - D)$. Alors $\{y\} \cup D - \{x\} = D'$ est un $\gamma_w(G)$-ensemble tel que $\sum_{u \in D'} \deg(u) < \sum_{u \in D} \deg(u)$, contradiction avec le choix de D. $\square$

Lemme 3.17. *Soit B un ensemble indépendant d'un graphe connexe G tel que $\deg(x) \geq 3$ pour tout $x \in B$. Alors:*

i) Si G est un graphe sans griffes, alors $3|B| \leq 2|N(B)|$.

ii) Si G est un graphe bloc, alors $2|B|+1 \leq |N(B)|$.

Preuve. (i) Soit E' l'ensemble des arêtes entre B et $N(B)$. Alors puisque $\deg(x) \geq 3$ pour tout $x \in B$, $3|B| \leq |E'|$. Aussi puisque G est sans griffes et B est indépendant, donc chaque sommet de G a au plus deux voisins dans B, ce qui implique que $|E'| \leq 2|N(B)|$. Par conséquent $3|B| \leq |E'| \leq 2|N(B)|$.

(ii) Supposons maintenant que G est un graphe bloc et soit $A = N(B)$. Considérons le graphe $G[(B,A)]$ induit par les sommets de B et A. Sans perte de généralité, On suppose que $G[(B,A)]$ est connexe, sinon on peut répéter la procédure décrite ci-dessous pour chaque composante connexe. Soient $v_1, v_2, ..., v_t$ les sommets de B et $A_1, A_2, ..., A_t$ les sous ensembles de A ordonnés comme suit: $A_1 = N(v_1) \cap A$ et pour $2 \leq k \leq t$, v_k est le sommet de B adjacent à un sommet de $\overset{k-1}{\underset{j=1}{\cup}} A_j$ et $A_k = N(v_k) \cap \left(A - \overset{k-1}{\underset{j=1}{\cup}} A_j \right)$. Puisque tout sommet de B est de degré au moins trois, on a $|A_1| \geq 3$. Aussi, puisque $G[(B,A)]$ est un graphe bloc connexe, alors chaque sommet v_k, pour $k \geq 2$, possède exactement un seul voisin dans $\overset{k-1}{\underset{j=1}{\cup}} A_j$ sinon on aura un cycle de longueur ≥ 4 ou bien $K_4 - \{e\}$. Doù $|A_k| \geq 2$ pour $2 \leq k \leq t$. Par conséquent, $|N(B)| = |A| = |A_1|+|A_2|+...+|A_t| \geq 3+2(t-1) = 2|B|+1$.
□

Lemme 3.18. *Soit B un ensemble indépendant d'un graphe sans griffes connexe G. Alors, $|B| \leq 2N(B)$.*

Preuve. Soit E' l'ensemble des arêtes entre B et $N(B)$. Alors puisque G est connexe, $|B| \leq |E'|$. Aussi puisque G est sans griffes et B est indépendant, donc chaque sommet de G a au plus deux voisins dans B, ce qui implique que $|E'| \leq 2|N(B)|$. Par conséquent $|B| \leq |E'| \leq 2|N(B)|$. □

Avant d'ennoncer les deux théorèmes qui fournissent une relation entre $\gamma_s(G)$ et $\gamma_w(G)$ en fonction de n pour les graphes en général, les graphes sans griffes et les graphes blocs. On rappelle les valeurs exactes de $\gamma_s(G)$ et $\gamma_w(G)$ pour les chaînes P_n et les cycles C_n.

Observation 3.19. *1) Pour tout cycle C_n, $\gamma_w(C_n) = \gamma_s(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.*

2) pour toute chaîne non triviale P_n, $\gamma_w(P_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil & si\ n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 & sinon \end{cases}$

et $\gamma_s(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Théorème 3.20. *Soit* G *un graphe connexe d'ordre* $n \geq 3$. *Alors* $\gamma_w(G) + \frac{3}{\Delta+1}\gamma_s(G) \leq n$.

i) Si G *est un graphe sans griffes, alors* $\gamma_w(G) + \frac{3}{5}\gamma_s(G) \leq n$, *et*

ii) Si G *est un graphe bloc, alors* $\gamma_w(G) + \frac{2}{3}\gamma_s(G) \leq \frac{3n-1}{3}$.

Preuve. Il est clair que si $n \geq 3$, alors $\Delta \geq 2$. Si $\Delta = 2$, alors G est ou bien un cycle C_n ou une chaîne P_n et par l'Observation 3.19, le resultat est vérifié. Supposons maintenant que $\Delta \geq 3$ et soit D un $\gamma_s(G)$-ensemble satisfaisant la proprieté du Lemme 3.15. Soient $A = \{x \in D : N(x) \cap (V - D) \neq \emptyset\}$ et $B = D - A$. D'aprés le choix fait sur D, $V - D$ faiblement domine A. Si $B = \emptyset$, alors $A = D$ et d'où $\gamma_w(G) \leq |V - D| = n - \gamma_s(G)$. Donc le résultat est aussi valide pour (i) et (ii) dans le cas où G est un graphe sans griffes ou bien un graphe bloc, respectivement. On peut supposer maintenant que $B \neq \emptyset$. Si B contient deux sommets adjacents u et v, alors l'un de $D - \{u\}$ ou $D - \{v\}$ est un dominant fort de G, d'où la contradiction. Par conséquent, B est un ensemble indépendant. Notons que chaque sommet de D est de degré au moins deux sinon $n = 2$ ou bien G n'est pas connexe. Aussi puisque $N(B) \subseteq A$, alors $\deg(u) \geq 3$ pour tout $u \in B$ car autrement $D - \{u\}$ est un sd-ensemble de G, et donc contradiction. Comme $V - D$ domine faiblement A, alors $(V - D) \cup B$ domine faiblement G, et d'où

$$\gamma_w(G) \leq |(V - D) \cup B| = n - |D| + |B|. \tag{3.1}$$

Il nous reste à examiner la relation entre $|B|$ et $|D|$ dans le cas où G est un graphe quelconque, graphe sans griffes et graphe bloc. Notons que $|D| = |B| + |A| \geq |B| + |N(B)|$. Soit $E(B, N(B))$ l'ensemble des arêtes entre B et $N(B)$. Comme $\deg(u) \geq 3$ pour tout $u \in B$ et $N(B) \subset D$, alors $3|B| \leq |E(B, N(B))|$. Ainsi tout sommet $y \in N(B)$ est de degré au plus $\Delta - 1$ autrement $D - N(y) \cap B$ devient un sd-ensemble de G, d'où la contradiction. Il s'ensuit que chaque sommet de $N(B)$ a au plus $\Delta - 2$ voisins dans B et d'où $|E(B, N(B))| \leq (\Delta - 2)|N(B)|$. Ce qui implique que $3|B| \leq |E(B, N(B))|$

$\leq (\Delta - 2)\,|N(B)|$ et donc $|N(B)| \geq \frac{3}{\Delta-2}\,|B|$. Comme $|D| \geq |B| + |N(B)|$, on obtient $|B| \leq \frac{\Delta-2}{\Delta+1}\,|D|$. Par substitution dans (3.1), on obtient $\gamma_w(G) \leq n - \frac{3}{\Delta+1}\,|D|$, d'où le résultat.

En utilisant le Lemme 3.17, on peut améliorer ce résultat pour les graphes sans griffes et les graphes blocs. Pour les graphes sans griffes, on a $3\,|B| \leq 2\,|N\,(B)|$ et donc $|N\,(B)| \geq \frac{3}{2}$ $|B|$. Comme $|D| \geq |B| + |N(B)|$, on obtient $|B| \leq \frac{2}{5}\,|D|$. Par substitution dans (3.1), on obtient $\gamma_w(G) \leq n - \frac{3}{5}\,|D|$, d'où le résultat. *Si G est un graphe bloc, alors* $2\,|B| + 1 \leq |N\,(B)|$ *et donc* $|B| \leq \frac{1}{3}\,(|D| - 1)$. Par substitution dans (3.1), on obtient $\gamma_w(G) \leq n - \frac{2}{3}\,|D| - \frac{1}{3}$, d'où $\gamma_w\,(G) + \frac{2}{3}\gamma_s\,(G) \leq \frac{3n-1}{3}$ □

En utilisant des argument similaires à ceux utilisés sur la preuve du théorème précédent vu à le resultat suivant.

Théorème 3.21. *Soit G un graphe sans griffes connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors*

$\gamma_s\,(G) + \frac{1}{3}\gamma_w\,(G) \leq n.$

Preuve. Il est clair que si $n \geq 3$, alors $\Delta \geq 2$. Si $\Delta = 2$, alors G est ou bien un cycle C_n ou une chaîne P_n et par l'Observation 3.19, le résultat est vérifié. Supposons maintenant que $\Delta \geq 3$ et soit D un $\gamma_w(G)$-ensemble satisfaisant la proprieté du Lemme 3.16. Soient $A = \{x \in D : N(x) \cap (V - D) \neq \emptyset\}$ et $B = D - A$. D'aprés le choix fait sur D, $V - D$ domine fortement A. Si $B = \emptyset$, alors $A = D$ et d'où $\gamma_w(G) \leq |V - D| = n - \gamma_s(G)$. On peut supposer maintenant que $B \neq \emptyset$. Si B contient deux sommets adjacents u et v, alors l'un de $D - \{u\}$ ou $D - \{v\}$ est un dominant faible de G, d'où la contradiction. Par conséquent, B est un ensemble indépendant. Comme $V - D$ domine fortement A, alors $(V - D) \cup B$ domine fortement G, et d'où

$$\gamma_s(G) \leq |(V - D) \cup B| = n - |D| + |B|\,. \tag{3.2}$$

Il nous reste à examiner la relation entre $|B|$ et $|D|$. Puisque chaque sommet x de A a un voisin dans $V - D$, alors x a au plus un voisin dans B sinon on aura une griffe. D'où $|B| \leq |N(B)| \leq |A|$. Notons que $|D| = |B| + |A| \geq |B| + |B| = 2\,|B|$. D'où $|B| \leq \frac{|D|}{2}$. Par substitution dans (3.2), on obtient $\gamma_s\,(G) + \frac{1}{3}\gamma_w\,(G) \leq n$. □

CHAPITRE 4

LA k-DOMINATION FORTE ET FAIBLE

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la k-domination forte (resp, faible). Ce concept que nous définissons analogiquement à la k-domination introduite par Meir et Moon [26] en 1975. Donnons d'abord la définition des ensembles k-dominants dans les graphes. Soit $k \geq 1$ un entier, un sous ensemble $D \subseteq V$ est un k-**dominant** si tout sommet de $V - D$ est adjacent à distance au plus k à un sommet de D. Le cardinal minimum d'un ensemble k-dominant de G est appelé le **nombre de k-domination**, noté $\gamma_k(G)$.

La figure suivante représente un graphe G avec $\gamma_2(G) = 2$.

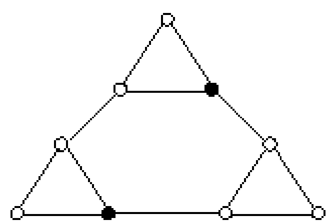


Figure 4.1: Un graphe G, où $\gamma_2(G) = 2$.

Introduisons quelques notations supplémentaires.

Notation 4.1. *Pour un sommet v de G, le k-**voisinage ouvert** est défini par l'ensemble $N_k(v) = \{u \in V : 1 \leq d(u,v) \leq k\}$ et le k-**voisinage fermé** de v est défini par $N_k[v] = N_k(v) \cup \{v\}$, i-e: $N_k[v] = \{u \in V : d(u,v) \leq k\}$. Pour $k = 1$, on retrouve $N_1(v) = N(v)$. Si $u \in N_k(v)$, on dira dans ce cas que u et v sont k-adjacents. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le k-voisinage ouvert est défini par $N_k(S) = \cup_{v \in S} N_k(v)$ et $N_k[S] = N_k(S) \cup S$ est le k-voisinage fermé de S. Le k-**degré** d'un sommet $v \in V$, noté $\deg_k(v) = |N_k(v)|$. Pour $k = 1$, $\deg_1(v) = \deg(v)$. Le k-**degré minimum** de G, noté $\delta_k(G) = \min\{\deg_k(v) : v \in V\}$ et le k-**degré maximum** de G, noté $\Delta_k(G) = \max\{\deg_k(v) : v \in V\}$.*

Avant de présenter quelques propriétés et résultats obtenus, nous donnons les trois définitions suivantes.

Définition 4.2. *Soit $k \geq 1$ un entier. Soient $G = (V, E)$ un graphe et $u, v \in V$. Alors on dit que u k-domine fortement (resp, faiblement) v si $d(u, v) \leq k$ et $\deg(u) \geq \deg(v)$ (resp, $\deg(u) \leq \deg(v)$). Le k-voisinage fort (resp, faible) ouvert de u est $N_s^k(u) = \{v \in N_k(u) : \deg(u) \geq \deg(v)\}$.*

Définition 4.3. *Soit $k \geq 1$ un entier. Un sous ensemble $S \subseteq V$ est un k-dominant fort (resp, faible) de G si tout sommet v de $V - S$ est k-dominé fortement (resp, faiblement) par un sommet $u \in S$. Le cardinal minimum d'un ensemble k-dominant fort (resp, faible) de G est appelé le **nombre de k-domination forte** (resp, **faible**), noté $\gamma_s^k(G)$ (resp, $\gamma_w^k(G)$). Un ensemble k-dominant fort (resp, faible) de G de cardinal minimum est dit un $\gamma_s^k(G)$-ensemble (resp, $\gamma_w^k(G)$-ensemble).*

Pour $k = 1$, on retrouve la définition de la domination forte et faible usuelle. Donc pour tout G, $\gamma_s^1(G) = \gamma_s(G)$ et $\gamma_w^1(G) = \gamma_w(G)$.

L'exemple de la Figure 4.2 représente un graphe G, où $\gamma_s^2(G) = 2$ et $\gamma_w^2(G) = 4$.

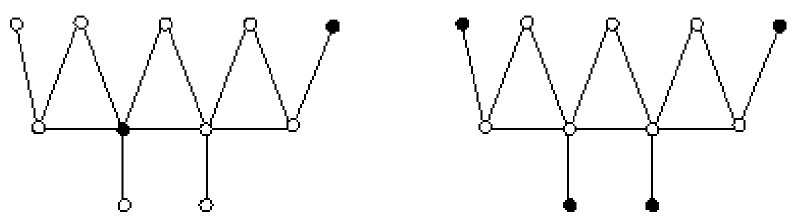


Figure 4.2: Un graphe G, où $\gamma_s^2(G) = 2$ et $\gamma_w^2(G) = 4$.

Définition 4.4. *Un sous ensemble $S \subseteq V$ est un k-dominant fort (resp, faible) indépendant de G si S est un k-dominant fort (resp, faible) et le sous graphe induit par S ne contient pas d'arêtes. Le cardinal minimum d'un ensemble k-dominant fort (resp, faible) indépendant de G est appelé le nombre de k-domination forte (resp, faible) stable, noté $i_s^k(G)$ (resp, $i_w^k(G)$).*

4.2 Minimalité d'un k-dominant fort (resp, faible)

L'étude de la minimalité se résume à chercher des conditions nécessaires et (ou) suffisantes pour qu'un ensemble k-dominant fort (resp, faible) soit minimal dans un graphe quelconque G.

Par le théorème suivant, on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble k-dominant fort (resp, faible) d'un graphe G sans sommets isolés soit minimal.

Théorème 4.5. *Soient $G = (V, E)$ un graphe sans sommets isolés et S un ensemble k-dominant fort (resp, faible) de G. Alors S est minimal si et seulement si chaque sommet $v \in S$ satisfait à l'une des conditions suivantes:*

1. *Aucun sommet de S k-domine fortement (resp,* faiblement) *le sommet v.*
2. *Il existe un sommet u de $V - S$ tel que:* $N_s^k(u) \cap S = \{v\}$ $\left(\text{resp, } N_w^k(u) \cap S = \{v\}\right)$.

Preuve. Montrons le théorème pour la k-domination forte. Soient G un graphe sans sommet isolés et S un ensemble k-dominant fort de G. Etablissons d'abord la condition nécessaire. Supposons que S est minimal. Alors pour tout sommet $v \in S$, l'ensemble $S - \{v\}$ n'est pas un ensemble k-dominant fort de G. Ceci implique qu'il existe un sommet $u \in (V - S) \cup \{v\}$ n'est pas k-dominé fortement par $S - \{v\}$. Maintenant, si $u = v$, alors v n'est pas k-dominé fortement par aucun sommet de S et donc on a la condition 1. Si $u \in V - S$, alors $N_s^k(u) \cap S = \{v\}$, d'où la condition 2.

Inversement, supposons que S est un ensemble k-dominant fort de G où tout sommet de S vérifie l'une des deux conditions du théorème. Supposons maintenant que S n'est pas minimal. Alors il existe un sommet $v \in S$ tel que $S - \{v\}$ est un k-dominant fort de G. Puisque $N_s^k(v) \cap S \neq \emptyset$, alors la condition 1 n'est pas vérifiée pour v. Aussi, puisque $S - \{v\}$ est un k-dominant fort de G, tout sommet de $V - S$ est k-dominé fortement par $S - \{v\}$, et donc la condition 2, n'est pas vérifiée aussi pour le sommet v, d'où la contradiction. On conclut donc que S est minimal. □

Définition 4.6. *La $k^{ième}$ puissance G^k d'un graphe connexe G (avec $k \in \mathbb{N}^*$) est un graphe, où $V\left(G^k\right) = V(G)$ et $uv \in E\left(G^k\right)$ si et seulement si $1 \leq d_G(u, v) \leq k$.*

Il est bien connu que $\gamma_k(G) = \gamma(G^k)$, i-e: le nombre de k-domination de G est le nombre de domination dans G^k. Par l'observation suivante, nous montrons que la k-domination forte et faible ne peut pas se déduire de la domination forte en utilisant les graphes puissances.

Observation 4.7. *Il existe des graphes connexes G, où $\gamma_s^k(G) \neq \gamma_s(G^k)$ et $\gamma_w^k(G) \neq \gamma_w(G^k)$.*

Preuve. Donnons une illustration par le graphe G de la Figure 4.3. L'ensemble $S = \{a, b\}$ est un 2-dominant fort minimum du graphe G, d'où $\gamma_s^2(G) = 2$ et $S = \{c\}$ est un dominant fort minimum du graphe G^2, d'où $\gamma_s(G^2) = 1$.

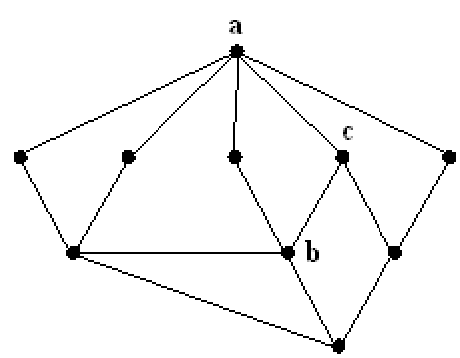


Figure 4.3: Un graphe G, où $\gamma_s^2(G) = 2$ et $\gamma_s(G^2) = 1$.

L'exemple de la Figure 4.4 montre que $\gamma_w^k(G) \neq \gamma_w(G^k)$. L'ensemble $S = \{c\}$ est un 3-dominant faible minimum du graphe G, d'où $\gamma_w^3(G) = 1$ et $S = \{d,e\}$ est un dominant faible minimum du graphe G^3, d'où $\gamma_w(G^3) = 2$.

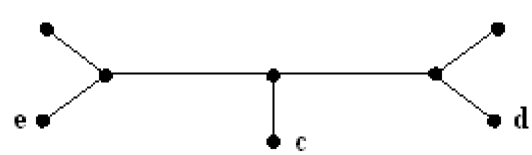


Figure 4.4: Un graphe G, où $\gamma_w^3(G) = 1$ et $\gamma_w(G^3) = 2$.

□

Proposition 4.8. *Pour toute chaîne P_n et tout cycle C_n d'ordre n, on a* $\gamma_s^k(P_n) = \gamma_s^k(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil$.

Preuve. Soit P_n une chaîne telle que $V(P_n) = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ et D un $\gamma_s^k(P_n)$-ensemble quelconque de taille q. Chaque sommet de D peut k-dominer fortement au plus $2k$ sommets de $V(P_n) - D$. Alors $2kq + q \geq n$, d'où $q \geq \frac{n}{2k+1}$. Ce qui implique que $\gamma_s^k(P_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil$. D'autre part, si $n \leq 2k+1$, alors $|D| = 1$ et le résultat est vrai. Si $n \geq 2k+2$, il est possible de voir que $D = \left\{v_{(2i-1)k+i},\ i = 1, ..., \left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil\right\}$ est un ensemble k-dominant fort de P_n de taille $\left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil$, d'où $\gamma_s^k(P_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil$. Par conséquent, $\gamma_s^k(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil$. En utilisant le même raisonnement pour montrer que $\gamma_s^k(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil$. $\square$

Proposition 4.9. *Pour tout graphe G sans sommets isolés,*

$$\begin{aligned} \gamma_k(G) &\leq \gamma_w^k(G) \leq \gamma_w(G), \\ \gamma_k(G) &\leq \gamma_s^k(G) \leq \gamma_s(G). \end{aligned}$$

Preuve. Tout $\gamma_w(G)$-ensemble (resp, $\gamma_s(G)$-ensemble) est un k-dominant faible (resp, fort) de G. D'où $\gamma_w^k(G) \leq \gamma_w(G)$ $\left(\text{resp, } \gamma_s^k(G) \leq \gamma_s(G)\right)$. Aussi, tout $\gamma_w^k(G)$-ensemble $\left(\text{resp, } \gamma_s^k(G)\text{-ensemble}\right)$ est un k-dominant de G. Alors $\gamma_k(G) \leq \gamma_w^k(G)$ (resp, $\gamma_k(G) \leq \gamma_s^k(G)$). $\square$

On donne un exemple de graphe G avec $\gamma_w^2(G) < \gamma_w(G)$.

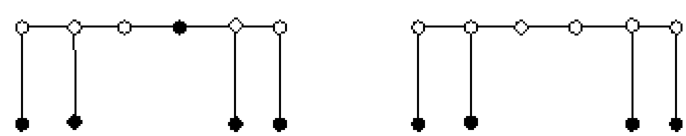


Figure 4.5: Un graphe G, où $\gamma_w(G) = 5$ et $\gamma_w^2(G) = 4$.

La Figure 4.6 montre un graphe G avec $\gamma_s^3(G) < \gamma_s(G)$.

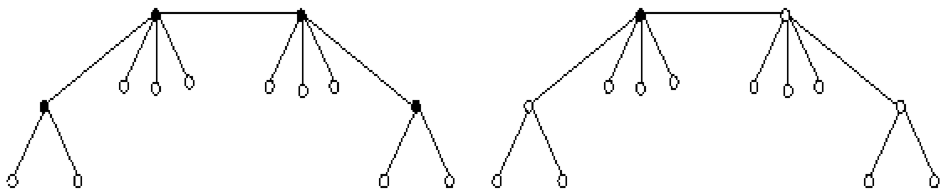


Figure 4.6: Un graphe G, où $\gamma_s(G) = 4$ et $\gamma_s^3(G) = 1$.

Problème 4.10. *Caractériser les graphes extremaux atteignants les bornes de la proposition précédente.*

4.3 Bornes superieures sur les nombres de k-domination forte et faible.

On notera pour la suite $\delta'_k(G)$ la quantité $max\{|N_k(v)| : v \in V \text{ et } \deg(v) = \delta(G)\}$ et $\Delta'_k(G)$ la quantité $max\{|N_k(v)| : v \in V \text{ et } \deg(v) = \Delta(G)\}$. Le non k-voisinage d'un sommet v noté par $\overline{N_v^k} = V - N_k[v]$.

Proposition 4.11. *Pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$,*

$$i_w^k(G) \leq n - \delta'_k(G).$$

Preuve. Soit v un sommet de k-degré $\delta'_k(G)$ et soit D un ensemble k-dominant faible indépendant du graphe induit par $\overline{N_v^k}$. Alors $D \cup \{v\}$ est un k-dominant faible indépendant de G, d'où $i_w^k(G) \leq |D| + 1 \leq n - \delta'_k(G) - 1 + 1 \leq n - \delta'_k(G)$. □

Problème 4.12. *Caractériser les graphes tels que $i_w^k(G) = n - \delta'_k(G)$.*

Corollaire 4.13. *Pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$,*

$$\gamma_w^k(G) \leq n - \delta'_k(G).$$

Définition 4.14. *Un sous ensemble $S \subseteq V$ est un k-indépendant de G si pour tout deux sommets quelconques u, v de S, $d(u, v) > k$.*

Avant de donner une condition nécessaire pour que $i_w^k(G) = n - \delta'_k(G)$, notons d'abord par $V_{\Delta'_k(G)}$ l'ensemble des sommets de k-degré $\Delta'_k(G)$ et par $V_{\delta'_k(G)}$ l'ensemble des sommets de k-degré $\delta'_k(G)$.

Proposition 4.15. *Si G est un graphe tel que $i_w^k(G) = n - \delta'_k(G)$, alors $V - N(v)$ est k-indépendant pour tout sommet $v \in V_{\delta'_k(G)}$.*

Preuve. Soit G un graphe tel que $i_w^k(G) = n - \delta'_k(G)$ et $v \in V_{\delta'_k(G)}$. Supposons que $V - N(v)$ n'est pas k-indépendant. Alors il existe deux sommets x, y différents à v qui sont k-adjacents. On peut supposer que $\deg(x) \leq \deg(y)$. Dans ce cas $V - (N(v) \cup \{x\})$ est un k-dominant faible indépendant meilleur, contradiction. Par conséquent $V - N(v)$ est un k-indépendant pour tout sommet $v \in V_{\delta'_k(G)}$. □

Proposition 4.16. *Pour tout graphe G et tout entier $k \geq 1$,*

$$i_s^k(G) \leq n - \Delta'_k(G).$$

Preuve. Soit v un sommet de k-degré $\Delta'_k(G)$ et soit D un ensemble k-dominant fort indépendant du graphe induit par $\overline{N_v^k}$. Alors $D \cup \{v\}$ est un k-dominant fort indépendant de G, d'où $i_s^k(G) \leq |D| + 1 \leq n - \Delta'_k(G)$. □

Problème 4.17. *Caractériser les graphes tel que $i_s^k(G) = n - \Delta'_k(G)$.*

Corollaire 4.18. *Soit $k \geq 1$ un entier. Pour tout graphe G,*

$$\gamma_s^k(G) \leq n - \Delta'_k(G).$$

Donnons une condition nécéssaire pour que $i_s^k(G) = n - \Delta'_k(G)$.

Proposition 4.19. *Si G est un graphe tel que $i_s^k(G) = n - \Delta'_k(G)$, alors $V - N(v)$ est k-indépendant pour tout sommet $v \in V_{\Delta'_k(G)}$.*

Preuve. Soit G un graphe tel que $i_s^k(G) = n - \Delta'_k(G)$ et $v \in V_{\Delta'_k(G)}$. Supposons que $V - N(v)$ n'est pas k-indépendant. Alors il existe deux sommets x, y différents à v sont k-adjacents. On peut supposer que $\deg(x) \geq \deg(y)$. Dans ce cas $V - (N(v) \cup \{x\})$ est un k-dominant fort indépendant meilleur, contradiction. Par conséquent $V - N(v)$ est un k-indépendant pour tout sommet $v \in V_{\Delta'_k(G)}$. □

Etant donné que $\gamma_s^k(G) \leq \gamma_s(G)$ et $\gamma_w^k(G) \leq \gamma_w(G)$ pour tout graphe G et pour tout entier $k \geq 1$, il est intéréssant de chercher dans quelles conditions l'inégalité est stricte. Voici deux propositions dans ce sens.

Proposition 4.20. *Soit G un graphe connexe tel que $\gamma_s(G) \geq 2$. Alors pour tout entier $k \geq 4$, $\gamma_s^k(G) < \gamma_s(G)$.*

Preuve. Soient D un $\gamma_s(G)$-ensemble et u,v deux sommets de D tel que $d(u,v) \leq 3$. Un tel couple de sommets existe dans D car $\gamma_s(G) \geq 2$ et G est connexe. On peut supposer que $\deg(u) \geq \deg(v)$. Dans ce cas u domine fortement à distance au plus quatre tous les sommets de $N_s(v) \cup \{v\}$. Doù $D - \{v\}$ est un k-dominant fort de G. Par conséquent, $\gamma_s^k(G) < \gamma_s(G), \forall\ k \geq 4$. $\square$

Proposition 4.21. *Soit G un graphe connexe tel que $\gamma_w(G) \geq 2$ et soit $k \geq 4$ un entier. Alors $\gamma_w^k(G) < \gamma_w(G)$.*

Preuve. Soit D un $\gamma_w(G)$-ensemble. Soit u,v deux sommets de D tel que $d(u,v) \leq 3$. Un tel couple de sommets existe dans D car $\gamma_w(G) \geq 2$ et G est connexe. On peut supposer que $\deg(u) \leq \deg(v)$. Dans ce cas u domine faiblement à distance au plus quatre tous les sommets de $N_s(v) \cup \{v\}$. Doù $D - \{v\}$ est un k-dominant faible de G. Par conséquent, $\gamma_w^k(G) < \gamma_w(G), \forall\ k \geq 4$. $\square$

L'éxemple de la Figure 4.7 représente un graphe G, où $\gamma_s^2(G) = \gamma_s(G) = 2$.

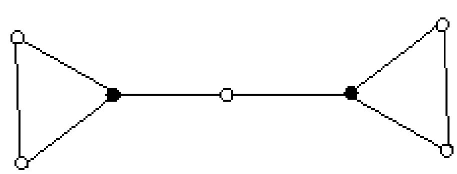


Figure 4.7: Un graphe G, où $\gamma_s^2(G) = \gamma_s(G) = 2$.

La figure suivante nous montre un graphe G avec $\gamma_s^3(G) = \gamma_s(G) = 2$.

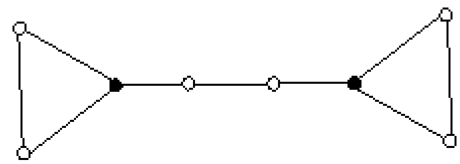


Figure 4.8: Un graphe G, où $\gamma_s^3(G) = \gamma_s(G) = 2$.

Avant de présenter la proposition suivante, nous donnons la définition de la domination parfaite dans les graphes introduite par Bange, Barkauskas et Slater [26] en 1988.

Définition 4.22. *Soient $G = (V, E)$ un graphe et S un sous ensemble de V. Alors S est dit un dominant parfait si tout sommet de V est dominé exactement une seule fois par S.*

Il est à noter que les ensembles dominants parfaits n'existent pas toujours, par exemple C_5 n'admet pas de tels ensembles. Aussi pour le graphe C_6, tout couple de sommets de C_6 à distance trois forme un dominant parfait.

Théorème 4.23 (Bange, Barkauskas et Slater [27] 1988)**.** *Si G admet un dominant parfait, alors tous les dominants parfaits ont la même taille $\gamma(G)$.*

Proposition 4.24. *Si G est un graphe tel que $\gamma_s^3(G) = \gamma_s(G)$, alors tout $\gamma_s(G)$-ensemble est un dominant parfait. En particulier $\gamma_s(G) = \gamma(G)$.*

Preuve. Soit G un graphe tel que $\gamma_s^3(G) = \gamma_s(G)$ et D un $\gamma_s(G)$-ensemble. Alors D est aussi un $\gamma_s^3(G)$-ensemble. Si $|D| = 1$, alors la proposition est vraie. Donc on suppose que $|D| \geq 2$. Soit u, v deux sommets quelconques de D avec $\deg(u) \geq \deg(v)$. Si u et v sont adjacents ou bien ont un voisin commun dans $V - D$, alors u domine fortement à distance au plus trois tous les sommets dans $N_s(v) \cup \{v\}$. Ceci entraine que $D - \{v\}$ est un 3-dominant fort de cardinal inférieur à $|D|$, contradiction. Donc tout couple de sommets de D sont à distance au moins trois entre eux. Par conséquent, D est un dominant parfait et par le Theorème 4.23, on a $\gamma_s(G) = \gamma(G)$. $\square$

Remarque 4.25. *La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie en général. Pour voir considérons le cube de la Figure 4.9. On a* $\gamma_s(G) = \gamma(G) = 2$ *et tout* $\gamma_s(G)$*-ensemble est un dominant parfait mais* $\gamma_s^3(G) = 1 \neq \gamma_s(G)$.

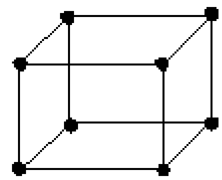


Figure 4.9.

À noter aussi que la réciproque de la Proposition 4.24 n'est pas vraie même pour le cas des arbres T. Prenons une chaîne P_6, où $\gamma_s(P_6) = \gamma(P_6) = 2$ et tout $\gamma_s(P_6)$-ensemble est un dominant parfait mais $\gamma_s^3(P_6) = 1 \neq \gamma_s(P_6)$.

Problème 4.26. *Caractériser les arbres pour lesquels le nombre de domination forte et le nombre de 3-domination forte sont égaux.*

Nous remarquons que la chaîne P_6 est une chenille qui ne vérifie pas $\gamma_s^3(G) = \gamma_s(G)$. Dans ce cas quelles sont les chenilles T qui vérifient $\gamma_s^3(T) = \gamma_s(T)$?

4.4 Caractérisation des chenilles T telles que $\gamma_s^3(T) = \gamma_s(T)$

Commençons par donner quelques observations utiles pour la suite.

Observation 4.27. *Si* T *est un arbre d'ordre* $n \geq 3$*, alors il existe un* $\gamma_s(T)$*-ensemble qui contient tous les sommets supports.*

Observation 4.28. *Si* T *est un arbre d'ordre* $n \geq 3$*, alors il existe un* $\gamma_s^3(T)$*-ensemble qui contient tous les sommets supports.*

Théorème 4.29. *Soit* T *une chenille. Alors* $\gamma_s^3(T) = \gamma_s(T)$ *si et seulement si* $T = K_{1,t}$, $(t \geq 1)$ *ou bien* $T \neq P_6$ *et la distance entre deux sommets supports consécutifs est trois.*

Preuve. Il est évident que $\gamma_s^3(K_{1,t}) = \gamma_s(K_{1,t})$. Donc supposons que T est une chenille différente d'une étoile telle que $\gamma_s^3(T) = \gamma_s(T)$. Il est clair que $T \neq P_6$ car $\gamma_s^3(P_6) = 1 < \gamma_s(P_6) = 2$. Soit D un $\gamma_s(T)$-ensemble qui contient tous les sommets supports de T. Par la Proposition 4.24, D est un dominant parfait, d'où la distance entre deux sommets supports consécutifs est ≥ 3. Supposons maintenant qu'il existe deux supports consécutifs u, v tel que $d(u,v) \geq 4$. Soit w un sommet tel que $d(u,w) = 3$. Rappelons que tous les sommets sur la chaîne reliant u et v sont de degré 2. Aussi, puisque D est parfait, on a $w \in D$. Remarquons que w et ses voisins sont 3-dominés fortement par $D - \{w\}$, d'où la contradiction. Par conséquent, on a le résultat.

Inversement, d'aprés la structure de T, l'ensemble des supports est un 3-dominant fort, cet ensemble est minimum par l'Observation 4.28. D'où $\gamma_s^3(T) = |S(T)|$. Par ailleurs $S(T)$ est aussi un dominant fort, d'où $\gamma_s(T) \leq \gamma_s^3(T) = |S(T)|$. L'égalité est obtenue par la Proposition 4.9. $\square$

CONCLUSION

Les travaux qui ont été réalisés dans ce mémoire concernent la domination forte et faible dans les graphes. Notre travail a été motivé par le fait que le nombre de publications sur ce sujet est relativement faible par rapport à d'autres paramètres de domination.

Ce travail a été couronné par l'obtention de quelques résultats dont une partie a été soumise et acceptée pour une publication internationale dans la revue Opuscula Mathematica. Aussi d'autres résultats seront exposés au colloque international COSI'2011 (Guelma).

En résumé, nous avons établi des bornes supérieures sur γ_w et γ_s offrant une amélioration de celles déjà connues pour ces paramètres. Aussi, nous avons caractérisé les arbres pour lesquels le nombre de domination et le nombre de domination forte sont égaux. Par la suite, nous avons établi une relation entre le nombre de domination forte et le nombre de domination faible dans certaines classes de graphes et les graphes en général.

Enfin, nous avons introduit la k-domination forte et faible, où des résultats intéréssants sont obtenus. Il nous semble que cette notion mérite d'être étudier plus profondement.

En plus des problèmes ouverts déjà cités dans le mémoire (problèmes 3.9, 4.12, 4.17 et 4.26), nous proposons d'autres problèmes pour des recherches futures.

1. Investir le coté algorithmique pour la détermination des nombres de domination (k-domination) forte et faible pour certaines classes de graphes.
2. Etudier les différentes propriétés des ensembles liés à la domination forte et faible (unicité, effet sur les paramètres de domination forte et faible lorsque le graphe G est modifié en supprimant un sommet, une arête, ou en ajoutant une arête et lors de la contraction d'une arête ou l'identification d'un couple de sommets).
3. Trouver des bornes inférieures et supérieures en fonction de la taille du graphe ou d'autres invariants sur les paramètres de domination (k-domination) forte et faible.
4. Etudier le paramètre de domination forte et faible supérieur.

Références

[1] C. Berge, Graphs and Hypergraphs. (*North Holland, Amsterdam,* 1973).

[2] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, Fundamentals of domination in Graphs. *Marcel Dekker New York*, 1998.

[3] S. T. Hedetniemi et R. C. Laskar, Introduction. *Discrete Mathematics*, 86 (1990) $3-9$.

[4] C. F De Jaennish, Application de l'analyse mathématique au jeu d'échecs. *Petrograd,* 1962.

[5] G.H Fricke, S.M, Hedetniemi, S. T.Hedetniemi, A.A.Merae, C.K.Wallis, M.S.Jacobson, H.W.Martin et W.D.Wealkley, Combinatorial problems checsboards. Abriesurvey, dans Graph theory, Combinatorics and applications.proc.seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and application of graphs, vol.1, Y.Alavi and A.Schwenk, Eds,Wiley, (1995) $507-528$.

[6] C. Berge, Théorie de graphes et ses applications. Dunod, Paris, 1958.

[7] O. Ore, Theory of graphs. *Amer. Math soc. Colloq. Publ.* 38 (1962).

[8] E. J. Cockayne et S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domination graphs. *Networks*, 7 (1977) 247-261.

[9] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, Domination in Graphs. Advanced Topics. *Marcel Dekker New York* 1998.

[10] E. Sampathkumar et L. P. Latha, Strong weak domination and domination balance in a graph. *Discrete Mathematics* 161 (1996) 235-242

[11] G. S. Domke, J. H. Hattingh, L. R. Markus et E. Ungerer, On parameters related to strong and weak in graphs. *Discrete Mathematics* 258 (2002) 1-11.

[12] D. Rautenbach, Bounds on the weak domination number. *Australasian journal of combinatorics* 18 (1998) 245-251.

[13] J. H. Hattingh et M. A. Henning, On strong domination in graphs. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 26 (1998) 73-92.

[14] D. Rautenbach, Bounds on the strong domination number. *Discrete Mathematics*, 215 (2000) 201-212.

[15] H. B. Walikar, B. D. Acharya et E. Sampathkumar, Recent developments in the theory of domination in graphs. *In MRI Lectures Notes in Math. Mahta Research Instit. Allahabad*, Volume 1, 1979.

[16] J. H. Hattingh et D. Rautenbach, Further results on weak domination in graphs. *Utilitas Mathematica* 61 (2002) 193-207.

[17] M. Chellali, On weak and restrained domination in trees. *AKCE J. Graphs. Combin*, 2, No. 1 (2005) 39-44.

[18] P. Duchet et H. Meyniel, On Hadwiger's number and the stability number. *Annals of Discrete Math.* 13 (1982) 71-74.

[19] J. H. Hattingh et M. A. Henning, Characterizations of trees with equal domination parameters. *Journal of Graph Theory* 34 (2000) 142-153.

[20] D. Köning, Graphs and matrices, *Mat. Fiz. Lapk* 38 (1931) 116-119. (Hungarian).

[21] J. Edmonds, Paths, trees and flowers. *Canad. J. Math.* 17 (1965), 449-467.

[22] M. Blidia, M. Chellali et F. Maffray, Extremal graphs for a new upper bound for domination parameters in graphs. *Discrete Mathematics*, 19-20 (2006) 2314-2326.

[23] E.J.Cockayne, S.T. Hedetniemi et D.J.Miller.Properts of heridetry hyper graphs and middle graphs. *Canad. Math. Bull* 21(1978), 461-468.

[24] R. Boutrig et M. Chellali, A note on a relation between the weak and strong domination numbers of a graph. *Opuscula Mathematica*, accepté.

[25] R. Boutrig et M. Chellali, Relation entre les nombres de domination forte et faible dans les graphes. COSI'11 (Guelma), accepté.

[26] A. Meir et J. W. Moon, Relations between packing and covering numbers of a tree. *Pacific J. Math.* 61 (1975) 225-233.

[27] D.W.Bange, A.E.Barkaukas et P.J.Slater. Efficient dominating sets in graphs. *In Applications of Discrete Mathématics, R.D. Ringeisen et F.S. Roberts, editors, SIAM, Philadelphia* (1988) 189-199.