

**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA**

**Faculté des sciences**

Département de mathématiques

**THESE DE DOCTORAT**

En Mathématiques

**CONTRIBUTIONS A L'ETUDE DE LA DOMINATION DOUBLE :  
GRAPHES CRITIQUES ET STABLES**

Par

**Soufiane KHELIFI**

Devant le jury composé de :

M. CHELLALI

Professeur, U. de Blida

Président

M. BLIDIA

Professeur, U. de Blida

Directeur de thèse

A. BERRACHEDI

Professeur, USTHB

Examineur

I. BOUCHEMAKH

Professeur, USTHB

Examineur

A. SEMRI

Maître de conférences (A), USTHB

Examineur

Blida, Janvier 2013

## ملخص

هدفنا في هذه الأطروحة هو دراسة البيانات الحرجة و البيانات المستقرة بالنسبة للسيطرة المضاعفة. مجموعة مسيطرة مضاعفة لبيان  $G = (V, E)$  هي مجموعة رؤوس  $S \subseteq V$  حيث يكون كل رأس من البيان إما داخل  $S$  و له جار على الأقل في  $S$  و إما خارج  $S$  و له جاران على الأقل في  $S$ . عدد السيطرة المضاعفة للبيان  $G$  هو الأصلي الأصغر لمجموعة مسيطرة مضاعفة و يرمز له  $\gamma_{\times 2}(G)$ .

نقول أن البيان  $G$  حرج (مستقر، على التوالي) بالنسبة للسيطرة المضاعفة إذا تغير  $\gamma_{\times 2}(G)$  (بقي ثابتاً، على التوالي) بعد حذف أي رأس أو بعد حذف أو إضافة أي حافة.

يخصص جزء من هذه الأطروحة للنتائج السابقة حول البيانات الحرجة و المستقرة بالنسبة للسيطرة المضاعفة. إضافاتنا ستخص أولاً البيانات التي يزيد عددها للسيطرة المضاعفة عند حذف أي حافة و المسماة البيانات  $\gamma_{\times 2}$ -حافة-محذوفة-حرجة، نبدأ بإعطاء شرط لازم و كاف لهذه البيانات، ثم نقدم تميزات لكل من البيانات المنتظمة، الأشجار، البيانات بدون  $P_4$  و البيانات بدون  $P_5$ . نعطي أيضاً تميزات للبيانات  $\gamma_{\times 2}$ -حافة-محذوفة-حرجة من أجل أعداد سيطرة مضاعفة صغيرة.

في المرحلة الثانية، نقوم بدراسة البيانات التي ينقص عددها للسيطرة المضاعفة حين حذف أي رأس ليس من الرؤوس الداعمة و المسماة البيانات  $\gamma_{\times 2}$ -رأس-حرجة، و البيانات التي يبقى عددها للسيطرة المضاعفة ثابتاً من أجل نفس التغيير و المسماة البيانات  $\gamma_{\times 2}$ -رأس-مستقرة. تثبت في البداية بعض الخاصيات المتعلقة بهاتين العائلتين من البيانات. ثم نعطي تميزاً وصفيًا للأشجار  $\gamma_{\times 2}$ -رأس-حرجة و تميزاً بنائياً للأشجار  $\gamma_{\times 2}$ -رأس-مستقرة.

## RESUME

Notre objectif dans cette thèse est d'étudier les graphes critiques et les graphes stables par rapport à la domination double. Un dominant double dans un graphe  $G = (V, E)$  est un ensemble de sommets  $S \subseteq V$  tel que tout sommet du graphe est ou bien dans  $S$  et possède au moins un voisin dans  $S$ , ou bien dans  $V - S$  et possède au moins deux voisins dans  $S$ . Le nombre de domination double de  $G$ , noté  $\gamma_{\times 2}(G)$ , est le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de  $G$ .

Le graphe  $G$  est dit critique (respectivement, stable) par rapport à la domination double si  $\gamma_{\times 2}(G)$  change (respectivement, reste inchangé) suite à la suppression de n'importe quel sommet, ou suite à l'ajout ou la suppression de n'importe quelle arête.

Une partie de cette thèse est consacrée à la présentation des résultats antérieurs obtenus pour les graphes critiques et stables par rapport à la domination double. Nos contributions concernent en premier lieu les graphes dont le nombre de domination double augmente lorsque n'importe quelle arête est supprimée, appelés graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-enlevée-critiques. Nous commençons par donner une condition nécessaire et suffisante les concernant, ensuite nous caractérisons les graphes réguliers, les arbres, les graphes sans  $P_4$  et les graphes sans  $P_5$ . Aussi, nous donnons des caractérisations des graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-enlevée-critiques pour de petits nombres de domination double.

En second lieu, nous abordons les graphes dont le nombre de domination double diminue quand n'importe quel sommet qui n'est pas un support est effacé, appelés graphes  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critiques, et les graphes dont le nombre de domination double reste inchangé pour la même modification, appelés graphes  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stables. Nous montrons au début quelques propriétés relatives à ces deux familles de graphes. Nous donnons ensuite une caractérisation descriptive des arbres  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critiques et une caractérisation constructive de la famille de tous les arbres  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stables.

## ABSTRACT

Our aim in this thesis is to study critical graphs and stable graphs with respect to double domination. A double dominating set of a graph  $G = (V, E)$  is a set of vertices  $S \subseteq V$  such that every vertex of the graph is either in  $S$  and has at least one neighbor in  $S$ , or in  $V - S$  and has at least two neighbors in  $S$ . The double domination number of  $G$ , denoted  $\gamma_{\times 2}(G)$ , is the minimum cardinality of a double dominating set of  $G$ .

The graph  $G$  is said to be double domination critical (respectively, stable) if  $\gamma_{\times 2}(G)$  changes (respectively, remains unchanged) upon the removal of any vertex, or the addition or the removal of any edge.

Part of this thesis is devoted to the presentation of previous results on double domination critical and stable graphs. Our contributions concern first the graphs whose the double domination number increases when any edge is deleted, called  $\gamma_{\times 2}$ -edge-removal-critical graphs. We give a necessary and sufficient condition for these graphs. Then we characterize regular graphs, trees,  $P_4$ -free graphs and  $P_5$ -free graphs. Also, we give characterizations for  $\gamma_{\times 2}$ -edge-removal-critical graphs with small double domination numbers.

Second, we investigate the graphs whose the double domination number decreases when any vertex different to a support is deleted, called  $\gamma_{\times 2}$ -vertex-critical graphs, and the graphs whose the double domination remains unchanged for the same modification, called  $\gamma_{\times 2}$ -vertex-stable graphs. We show at the beginning some properties for these two families of graphs. We then give a descriptive characterization of  $\gamma_{\times 2}$ -vertex-critical trees and a constructive characterization of the family of all  $\gamma_{\times 2}$ -vertex-stable trees.

## REMERCIEMENTS

Je tiens en premier à remercier très chaleureusement mon directeur de thèse Mostafa BLIDIA Professeur à l'université Saad Dahlab de Blida pour m'avoir introduit dans ce domaine passionnant de recherche, pour m'avoir orienté, conseillé et même bousculer quand il le fallait, pour sa confiance et sa générosité.

Mes remerciements les plus sincères vont aussi à Mustapha CHELLALI Professeur à l'université Saad Dahlab de Blida non seulement pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury, mais aussi pour sa disponibilité, son aide et son grand soutien dans les moments difficiles par lesquels je suis passé.

Je tiens à remercier également Abdelhafid BERRACHEDI et Isma BOUCHEMAKH Professeurs à l'USTHB ainsi que Ahmed SEMRI Maître de conférences à l'USTHB pour avoir eu la gentillesse d'accepter de faire partie du jury.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Frédéric Maffray Directeur de recherche au laboratoire G-SCOP de Grenoble pour m'avoir comblé, durant mes séjours aux laboratoires Leibniz et G-SCOP, par sa bonté et son assistance.

À titre plus personnel je remercie toutes les personnes qui m'ont soutenu et qui ont fait beaucoup de sacrifices pour me voir arriver à ce stade, en particulier mes parents et ma femme.

# TABLE DES MATIERES

f %of y,, u^ uvy

RÉSUMÉ

ABSTRACT

REMERCIEMENTS

TABLES DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION . . . . .	<b>9</b>
CHAPITRE 1. GÉNÉRALITÉS . . . . .	<b>13</b>
1.1. Définitions élémentaires de la théorie des graphes . . . . .	13
1.1.1. Graphe . . . . .	13
1.1.2. Voisinages et degrés . . . . .	14
1.1.3. Sous-graphe et graphe partiel . . . . .	15
1.1.4. Minimalité et maximalité d'un ensemble . . . . .	16
1.1.5. Connexité, distance, diamètre et excentricité . . . . .	16
1.1.6. Quelques invariants d'un graphe . . . . .	17
1.1.7. Graphes particuliers . . . . .	18
1.2. La domination dans les graphes . . . . .	19
1.2.1. Différentes définitions de la domination . . . . .	21
1.2.2. Paramètres de domination . . . . .	21
1.2.3. Applications de la domination . . . . .	23
1.2.4. Problèmes étudiés en domination . . . . .	24
1.3. Notions de graphes critiques et stables . . . . .	26



3.5. Graphes $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques pour $\gamma_{\times 2} = 2, 3$ ou $4$ . . . . .	70
CHAPITRE 4. GRAPHES CRITIQUES ET STABLES PAR RAPPORT AUX SOM- METS . . . . .	<b>72</b>
4.1. Résultats préliminaires . . . . .	72
4.2. Graphes $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critiques . . . . .	76
4.3. Graphes $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stables . . . . .	79
CONCLUSION ET PERSPECTIVES . . . . .	<b>93</b>
RÉFÉRENCES . . . . .	<b>96</b>

## LISTE DES FIGURES

FIGURE 1.1. un graphe $G$ . . . . .	14
FIGURE 1.2. $D_1 = \{v_1, v_3, v_6, v_8\}$ et $D_2 = \{v_4, v_7\}$ sont des ensembles dominants de $G$ . . . . .	20
FIGURE 1.3. L'opération $G - h$ . . . . .	27
FIGURE 1.4. Les opérations $G - eh$ et $G + ad$ . . . . .	27
FIGURE 2.1. Un graphe $G$ avec $\gamma_{\times 2}(G) = 6$ . . . . .	32
FIGURE 2.2. Le graphe $K_1 + K_2 + K_3 + K_1$ . . . . .	39
FIGURE 3.1. La construction de la famille $\mathcal{F}$ . . . . .	55
FIGURE 3.2. La famille $\mathcal{H}_1$ avec $k = 0$ . . . . .	66
FIGURE 3.3. Exemple de la famille $\mathcal{H}_1$ avec $k \geq 1$ . . . . .	66
FIGURE 3.4. La famille $\mathcal{H}_2$ avec $j = 0$ et $k = 0$ . . . . .	69
FIGURE 3.5. Exemple de la famille $\mathcal{H}_2$ avec $j \geq 1$ et $k \geq 1$ . . . . .	69
FIGURE 4.1. Le graphe $G_1$ . . . . .	74
FIGURE 4.2. Le graphe $G_2$ . . . . .	74
FIGURE 4.3. Les opérations de la construction de la famille $\mathcal{H}$ . . . . .	82

## INTRODUCTION

Il est bien connu que la théorie des graphes possède des origines qui remontent à 1736 quand Leonhard Euler (1707-1783) posa le célèbre problème des ponts de la ville russe de Königsberg, mais ce n'est qu'au début du XXème siècle, qu'elle s'est imposée comme une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger et Cayley, et plus récemment, ceux de Berge et d'Erdős et d'autres.

La théorie des graphes revendique actuellement de nombreuses applications dans les réseaux de télécommunication, les circuits électroniques, tous les types de réseaux de distribution, courriers, eau, gaz... et dans de nombreux problèmes de logistique, de transport ou de production. De manière générale, les graphes permettent de représenter simplement la structure, les connexions, les cheminements possibles d'un ensemble complexe comprenant un grand nombre de situations, en exprimant les relations et les dépendances entre ses éléments. Ils constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arêtes ou d'arcs si l'orientation est nécessaire.

Bien que le volet application occupe une stature du premier ordre dans la théorie des graphes, cette dernière comporte un autre volet au moins aussi important qui est la recherche fondamentale. En effet, il est impensable de vouloir traiter efficacement un problème réel sans posséder de solides bases théoriques, et c'est dans ce sens que les auteurs se sont intéressés aux nombreux domaines de recherche de la théorie des graphes comme la coloration, la connectivité, le couplage ou la domination dans les graphes.

La domination figure parmi les branches les plus étudiées de la théorie des graphes avec plus de 2000 articles publiés. Cette popularité est due non seulement à ses multi-

ples applications dans la vie réelle, mais aussi à la diversité d'axes de recherche qu'elle offre avec un grand nombre de problèmes qui ne sont pas encore résolus ou qui n'ont même pas été explorés.

Un ensemble dominant dans un graphe est un sous-ensemble de ses sommets tel que tout sommet de ce graphe, est ou bien dans cet ensemble ou bien adjacent à l'un des sommets de cet ensemble. Le nombre de domination d'un graphe est la taille minimale d'un ensemble dominant. De nombreux types de domination (ou paramètres de domination) sont définis en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants. En imposant, par exemple, que tout sommet d'un graphe (y compris ceux de l'ensemble dominant) est adjacent à un sommet du dominant, on a un type de domination appelé la domination totale, et si on impose que tout sommet du graphe soit dominé par au moins deux sommets de l'ensemble dominant, on a la domination double qui est l'objet principal de cette thèse. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant double est appelé nombre de domination double.

Pour un paramètre de domination donné, un graphe ayant subi une modification quelconque comme l'effacement d'un sommet, l'ajout ou l'effacement d'une arête peut voir ce paramètre de domination augmenter, diminuer ou rester inchangé. Si le paramètre de domination en question change lorsqu'un sommet quelconque est effacé ou lorsque n'importe quelle arête est ajoutée ou effacée, alors le graphe est dit critique, et dans le cas contraire, ce graphe est dit stable. Avant d'être étudiés pour les paramètres de domination, les concepts de criticité et de stabilité l'ont été pour d'autres paramètres comme la connectivité et le nombre chromatique et se sont révélés très utiles pour une compréhension plus profonde de ces paramètres.

Pour la domination, l'étude de la criticité et de la stabilité a été initiée par Walikar et Acharya dans un article consacré aux graphes critiques par rapport aux arêtes supprimées, avant que Sumner et Blitch ne publient un autre article portant sur les graphes critiques pour n'importe quelle arête ajoutée. Depuis, de nombreuses recherches dans ce sens ont été menées pour différents paramètres de domination.

Dans la présente thèse, nous nous intéressons aux graphes critiques et stables par rapport à la domination double, et ce pour les trois opérations (modifications) qui viennent d'être citées.

Le premier chapitre, consacré aux généralités, comporte trois parties. Nous donnons dans la première les définitions essentielles de la théorie des graphes qui sont utilisées dans cette thèse. Dans la deuxième partie, nous faisons une présentation de la domination dans les graphes. En effet, après un peu d'histoire, nous mettons en évidence les différents aspects pratiques et théoriques qui font de la domination un domaine de recherche si convoité. En dernier, nous donnons les différentes définitions liées aux notions de criticité et de stabilité pour un paramètre de domination quelconque, ainsi qu'un bref historique sur l'étude de ces deux notions pour le nombre de domination.

Nous commençons le second chapitre par une présentation des plus importantes propriétés de la domination double dans les graphes tout en énumérant les résultats les plus pertinents obtenus jusqu'à présent. Nous faisons ensuite le tour de ce qui a précédé nos contributions dans le domaine de la criticité et de la stabilité par rapport à la domination double. Les résultats élaborés par les auteurs des quatre articles existants seront présentés dans une section réservée à chaque article. Ces résultats concernent en particulier deux classes de graphes, ceux qui sont critiques par rapport aux arêtes ajoutées et ceux qui sont stables par rapport aux arêtes enlevées.

Le chapitre trois est consacré aux graphes arête-enlevée-critiques, c'est à dire les graphes dont le nombre de domination double augmente quand n'importe quelle arête est supprimée. Les résultats qui y sont présentés ont été obtenus en collaboration avec Blidia, Chellali et Maffray. Après l'évaluation de l'effet que peut entraîner la suppression d'une arête quelconque sur le nombre de domination double d'un graphe, une condition nécessaire et suffisante pour les graphes arête-enlevée-critiques est donnée, précédant des caractérisations des arbres, des graphes sans  $P_4$  et des graphes sans  $P_5$ . Pour terminer, nous donnons des caractérisations des graphes arête-enlevée-critiques pour des petits nombres de domination double.

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse aux graphes critiques et stables au sens des sommets supprimés par rapport à la domination double. Les résultats qui y figurent ont été obtenus en collaboration avec Chellali. Nous commençons par étudier l'effet de la suppression d'un sommet différent d'un sommet support sur le nombre de domination double d'un graphe. Nous donnons ensuite des propriétés des graphes dont le nombre de domination double diminue quand n'importe quel sommet (qui n'est pas un support) est effacé, ainsi qu'une caractérisation des arbres ayant cette propriété. Pour les graphes dont le nombre de domination double reste inchangé suite à la même modification, le résultat principal présenté est la construction de la famille de tous les arbres ayant cette propriété.

Pour terminer, cette thèse sera achevée par une conclusion générale qui portera sur l'ensemble du travail accompli et sur les perspectives dans ce domaine.

## CHAPITRE 1

### GENERALITES

Afin de faciliter la lecture de cette thèse, nous commençons par donner les définitions élémentaires de la théorie des graphes qui y sont utilisées. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre lui-même.

La deuxième partie de ce chapitre introductif sera consacrée à une présentation de la domination dans les graphes avec laquelle nous voulons familiariser le lecteur avec ce domaine et essayer de mettre en évidence sa grande importance aussi bien dans le plan théorique que pratique.

Pour plus de détails concernant les notions de théorie des graphes, le lecteur est invité à consulter les ouvrages de Berge [1] et de Chartrand et Lesniak [2], et ceux de Haynes, Hedetniemi et Slater [3] et [4] pour mieux assimiler les notions liées à la domination dans les graphes.

Dans la troisième et dernière partie de ce chapitre, nous donnerons les définitions des concepts de criticité et de stabilité pour un paramètre de domination quelconque. Nous ferons aussi un bref passage sur l'historique de l'étude de ces deux concepts pour le nombre de domination.

## 1.1 Définitions élémentaires de la théorie des graphes

### 1.1.1 Graphe

Un **graphe** est la donnée de deux ensembles finis  $V$  et  $E$ , où  $V$  est l'ensemble des **sommets**, et  $E$  est un ensemble de paires d'éléments de  $V$  appelées **arêtes**. Pour un graphe  $G$ , on notera  $V(G)$  l'ensemble de ses sommets et  $E(G)$  l'ensemble de ses arêtes,

ou simplement  $V$  et  $E$  si le contexte est explicite. Un graphe est dit **trivial** s'il ne possède qu'un seul sommet et aucune arête.

Si  $e = vu$  est une arête du graphe, on dit que  $u$  et  $v$  sont **les extrémités** de  $e$ , que  $u$  et  $v$  sont **adjacents** et que  $e$  est **incidente** à  $u$  et  $v$ . Dans ce cas, on dit aussi que  $u$  et  $v$  sont incidents à  $e$ . Deux arêtes distinctes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité commune.

Un graphe  $G$  est dit **simple** si tout couple de ses sommets est relié par au plus une arête et que toute arête de  $E(G)$  a ses extrémités distinctes.

**L'ordre** d'un graphe est le cardinal de son ensemble de sommets on le note d'habitude par  $n$ . Dans cette thèse, tous les graphes considérés sont simples.

**Exemple 1.1.** Le graphe  $G = (V, E)$  de la figure 1.1 est un graphe simple d'ordre 8, il est formé d'un ensemble de sommets  $V = \{a, b, c, d, u, v, x, y\}$  et d'un ensemble d'arêtes  $E = \{ab, ax, au, bv, bx, xu, xv, uy, vy, yc, yd\}$

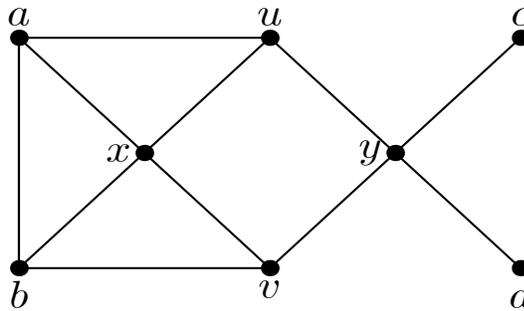


FIGURE 1.1. un graphe  $G$

### 1.1.2 Voisinages et degrés

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. **Le voisinage ouvert** d'un sommet  $v$  de  $G$  est l'ensemble de tous les sommets adjacents à  $v$ . Cet ensemble est noté  $N_G(v)$ . **Le voisinage fermé** de  $v$  est l'ensemble  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ . S'il n'y a pas risque de confusion, les voisinages ouvert et fermé d'un sommet  $v$  seront notés simplement par  $N(v)$  et  $N[v]$  respectivement.

Soit  $S$  un sous-ensemble de  $V$ . L'ensemble  $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$  est appelé voisinage ouvert de  $S$ , et l'ensemble  $N_G[S] = N_G(S) \cup S$  est son voisinage fermé. De même, nous utiliserons les notations  $N(S)$  et  $N[S]$  au lieu de  $N_G(S)$  et  $N_G[S]$  respectivement.

**Le degré** d'un sommet  $v \in V(G)$ , noté  $\deg_G(v)$ , est égal au cardinal de son voisinage ouvert. Un sommet de degré nul est dit un sommet **isolé** et un sommet de degré égal à un est dit sommet **pendant** ou **feuille**. Un sommet adjacent à au moins un sommet pendant est appelé sommet **support**. L'ensemble des sommets supports de  $G$  est noté par  $S(G)$  et l'ensemble des sommets pendants par  $L(G)$ .

**le degré maximum** d'un graphe  $G$ , noté  $\Delta(G)$ , est le maximum des degrés de ses sommets. Aussi, **le degré minimum** de  $G$ , noté  $\delta(G)$ , est le minimum des degrés des sommets de  $G$ . On a donc :

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v) \text{ et } \delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$$

S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira  $\deg(v)$ ,  $\Delta$  et  $\delta$  pour désigner respectivement  $\deg_G(v)$ ,  $\Delta(G)$  et  $\delta(G)$ .

### 1.1.3 Sous-graphe et graphe partiel

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. On appelle sous-graphe de  $G$ , un graphe  $G' = (V', E')$  tel que  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$ . Pour un sous-ensemble  $A \subseteq V$ , **le sous-graphe induit** par  $A$ , noté  $G[A]$  ou simplement  $\langle A \rangle$ , est le graphe ayant  $A$  pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de  $E$  ayant leurs deux extrémités dans  $A$ .

Etant donné un graphe  $G'$ , on dit que  $G$  est sans  $G'$  si  $G'$  n'est pas un des sous-graphes induits de  $G$ .

**Un graphe partiel** de  $G$  est un graphe obtenu en enlevant une ou plusieurs arêtes de  $G$ . Autrement dit, un graphe partiel de  $G$  est un graphe  $H$  ayant le même ensemble de sommets, et ayant comme ensemble d'arêtes, un sous-ensemble de  $E(G)$  :  $E(H) \subset E(G)$ .

### 1.1.4 Minimalité et maximalité d'un ensemble

Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $\mathcal{P}$  une propriété. Un sous-ensemble  $A$  de  $V$  est dit **minimal** par rapport à la propriété  $\mathcal{P}$  si aucun sous-ensemble strict de  $A$  ne vérifie cette propriété. Aussi,  $A$  est dit **maximal** par rapport à la propriété  $\mathcal{P}$ , si aucun sous-ensemble de  $V$  contenant  $A$  et différent de  $A$  ne vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ .

Un sous-ensemble  $B$  de  $V$  est dit **minimum** ou de **taille minimale** par rapport à la propriété  $\mathcal{P}$  si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous-ensemble de  $B$ ) ne vérifie cette propriété. D'une manière similaire, l'ensemble  $B$  est dit **maximum** ou de **taille maximale** par rapport à  $\mathcal{P}$ , si aucun ensemble plus grand que  $B$  (sans nécessairement le contenir) ne vérifie la propriété.

### 1.1.5 Connexité, distance, diamètre et excentricité

**Une chaîne**  $C$  dans un graphe  $G = (V, E)$  est une séquence finie  $[v_1, v_2, \dots, v_k]$  de sommets telle que pour chaque  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $v_i v_{i+1}$  soit une arête de  $G$ . Les sommets  $v_1$  et  $v_k$  sont appelés respectivement extrémité initiale et extrémité finale de la chaîne  $C$ . La longueur d'une chaîne est le nombre de ses arêtes ( $k - 1$  pour le cas de la chaîne  $C$  qui vient d'être définie). Une chaîne est dite **élémentaire** (respectivement, **simple**) si tous ses sommets sont distincts (respectivement, toutes ses arêtes sont distinctes). **Une corde** est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par  $n$  sommets, notée par  $P_n$ , est une chaîne élémentaire sans cordes.

Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire  $C_n$  induit par  $n$  sommets est un cycle dont les sommets sont distincts.

Le graphe  $G$  est **connexe** si toute paire de ses sommets est reliée par une chaîne. Si le graphe  $G$  est non connexe, une composante connexe est un sous-graphe maximal connexe.

**La distance** entre deux sommets  $u$  et  $v$ , notée  $d(u, v)$ , est la longueur d'une plus courte chaîne reliant  $u$  et  $v$ .

**Le diamètre** du graphe  $G$  est le maximum des distances entre deux de ses sommets, c'est-à-dire:

$$\text{diam}(G) = \underset{u,v \in V}{\text{Max}}(d(u, v)).$$

**L'excentricité** d'un sommet  $v$  dans  $G$  est:

$$\text{exc}(v) = \max \{d(u, v) : u \in V(G)\}.$$

Ainsi, le diamètre d'un graphe peut être défini comme l'excentricité maximale de ses sommets.

### 1.1.6 Quelques invariants d'un graphe

Les graphes  $G$  et  $H$  sont dits **isomorphes** s'il existe une application bijective  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  telle que pour toute paire de sommets  $x, y$  de  $G$ , l'arête  $xy \in E(G)$  si et seulement si l'arête  $f(x)f(y) \in E(H)$ .

Si deux graphes sont isomorphes, alors ils partagent de nombreuses propriétés qui sont appelées invariants (des deux graphes). En d'autres termes, **un invariant** d'un graphe est une propriété préservée par isomorphisme comme le nombre de ses sommets et le nombre de ses arêtes. Dans cette thèse, nous utiliserons plusieurs invariants d'un graphe. Voici les définitions de quelques uns.

**Un stable** dans un graphe  $G = (V, E)$ , appelé aussi, **ensemble indépendant**, est un sous-ensemble  $S \subseteq V$  de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal minimum (respectivement, maximum) d'un stable maximal de  $G$ , noté  $i(G)$  (respectivement,  $\alpha(G)$ ), est appelé **le nombre de domination stable** (respectivement, **le nombre de stabilité**) de  $G$ .

**Un couplage** dans un graphe  $G = (V, E)$  est un sous-ensemble d'arêtes non adjacentes deux à deux. On note par  $\beta(G)$  la taille maximale d'un couplage dans  $G$ . Le couplage  $M$  est dit **parfait** si tout sommet de  $V$  est incident à une arête de  $M$ . C'est-à-dire si  $\beta(G) = n/2$ . Dans un couplage  $M$ , deux sommets incidents à une arête du couplage seront dits **couplés**.

### 1.1.7 Graphes particuliers

#### *Graphe complet*

**Le graphe complet** d'ordre  $n$ , noté  $K_n$ , est le graphe dans lequel tous les sommets sont de degré  $n - 1$ . Ainsi, deux sommets quelconques d'un graphe complet  $K_n$  sont adjacents.

**Une clique** est un sous-graphe complet d'un graphe  $G$ . Une clique de  $p$  sommets est notée  $K_p$ .

#### *Graphe complémentaire*

Etant donné un graphe  $G$  d'ordre  $n$ , **le complémentaire** de  $G$ , noté  $\overline{G}$ , est le graphe dont l'ensemble de sommets est celui de  $G$ , et dont l'ensemble des arêtes est formé de toutes les arêtes de  $K_n$  qui ne sont pas présentes dans  $G$ .

#### *Graphe régulier*

Un graphe  $G$  est dit **régulier** si tous ses sommets ont le même degré. De plus,  $G$  est dit  **$k$ -régulier** si  $\deg_G(v) = k$  pour tout sommet  $v$  de  $G$ .

Ainsi, un graphe complet  $K_n$  est un graphe  $(n - 1)$ -régulier.

#### *Arbre et forêt*

**Un arbre** est un graphe connexe sans cycles. Un arbre comporte exactement  $(n - 1)$  arêtes, il est noté habituellement  $T$ .

**Une forêt** est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des arbres.

#### *Graphe biparti et graphe biparti complet*

Un graphe est dit **biparti** si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles  $V_1$  et  $V_2$  tels que les sous-graphes  $G[V_1]$  et  $G[V_2]$  ne contiennent aucune arête. Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycles de longueur impaire.

Un **graphe biparti complet** est un graphe biparti tel que pour toute paire de sommets  $v \in V_1$  et  $u \in V_2$ ,  $vu \in E$ . Si  $|V_1| = r$  et  $|V_2| = s$ , alors le graphe biparti complet est noté  $K_{r,s}$ .

*Etoile, étoile subdivisée et double étoile*

Un cas spécial d'un graphe biparti complet dans lequel  $|V_1| = 1$  et  $|V_2| = s$  est appelé **une étoile** et noté  $K_{1,s}$ . Le sommet de  $V_1$  est appelé **centre** ou **sommet central** de l'étoile.

L'opération de **subdivision** d'une arête  $uv$  d'un graphe  $G$  introduit un nouveau sommet  $w$  tel que  $E(G \cup \{w\}) = ((E(G) - \{uv\})) \cup \{uw, vw\}$ . On appelle **étoile subdivisée**  $K_{1,k}^*$  l'étoile dans laquelle toutes les arêtes sont subdivisées.

Une **double étoile**  $S_{r,s}$  est le graphe formé par les deux étoiles  $K_{1,r}$  et  $K_{1,s}$  avec une arête reliant les deux centres.

## 1.2 La domination dans les graphes

Nous considérons à présent les ensembles de sommets qui dominent tous les sommets d'un graphe. Un sous-ensemble  $D$  de  $V$  est **un dominant** du graphe  $G = (V, E)$  si tout sommet  $v \in V$  est ou bien dans  $D$  ou bien adjacent à un sommet de  $D$ . Le nombre de domination  $\gamma(G)$  est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de  $G$ . Un ensemble dominant de  $G$  de cardinal minimum est noté  $\gamma(G)$ -ensemble.

Prenons le graphe  $G$  de la figure 1.2. Il est évident que les ensembles  $D_1 = \{v_1, v_3, v_6, v_8\}$  et  $D_2 = \{v_4, v_7\}$  sont des ensembles dominants de  $G$ . De plus, nous pouvons facilement voir que  $\gamma(G) = 2$  (puisque'il n'existe aucun ensemble dominant de  $G$  de cardinal 1). On peut en déduire que  $D_2$  est un  $\gamma(G)$ -ensemble.

Bien que l'histoire de l'étude mathématique des ensembles dominants n'a commencé qu'à la fin des années 50 du 20<sup>ème</sup> siècle, le concept de domination semble avoir des origines qui remontent au 16<sup>ème</sup> siècle en Inde. Il s'agissait de couvrir (ou dominer)

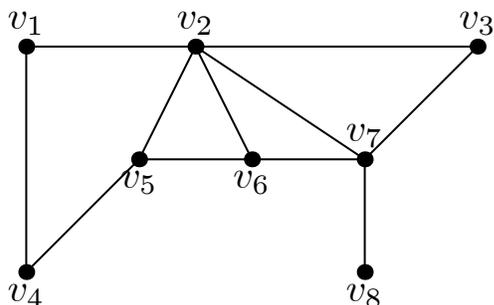


FIGURE 1.2.  $D_1 = \{v_1, v_3, v_6, v_8\}$  et  $D_2 = \{v_4, v_7\}$  sont des ensembles dominants de  $G$ .

l'ensemble des cases d'un échiquier par des pièces du jeu d'échecs. En 1862, De Jaenisch [5] a étudié le problème des reines dans un jeu d'échecs, il voulait déterminer le nombre minimum de reines pouvant être placées sur l'échiquier de telle sorte que toutes les cases de ce dernier soient attaquées ou occupées par une reine en un seul coup. Il est bien connu que pour un échiquier  $8 \times 8$ , ce nombre est de 5 reines, tandis que pour un échiquier  $n \times n$ , le nombre minimum de reines reste indéterminé.

En 1958, Claude Berge [6] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés et appela le nombre de domination **coefficient de stabilité externe**. En 1962, Ore [7] utilisa les appellations actuelles "**ensemble dominant**" et "nombre de domination" et nota le nombre de domination  $d(G)$  dans son livre de théorie des graphes.

Les premiers indices qui ont révélé le grand intérêt que portaient les chercheurs à la domination vers la fin du siècle précédent étaient l'article de Cockaine et Hedetniemi [8] publié en 1977 et le numéro spécial de discrete mathematics publié en 1990 par Hedetniemi et Laskar [9], consacré entièrement à la domination. La bibliographie de 1990 a révélé une augmentation impressionnante du nombre de références dans ce domaine qui, dans une période de 30 ans, est passé de 20 à 400 références. Cette croissance intensive est actuellement plus évidente avec plus de 2000 références dont 950 figurent dans le livre de Haynes, Hedetniemi et Slater [3] publié en 1998.

Cette grande popularité de la domination est certainement due à plusieurs aspects qui la rendent parmi les branches les plus étudiées en théorie des graphes et qui offrent

ainsi un grande variété d'opportunités de recherche. Quelques-uns de ces aspects seront développés dans les paragraphes suivants:

### 1.2.1 Différentes définitions de la domination

L'un des aspects les plus importants qui caractérisent la domination est l'existence de plusieurs définitions équivalentes d'un ensemble dominant dans un graphe. Nous citons à titre d'exemple quelques-unes. Pour plus de détails, voir le livre de Haynes et al. [3].

*Recouvrement de l'ensemble des sommets:*

L'ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant d'un graphe  $G$  si tout sommet de  $V - D$  possède au moins un voisin dans  $D$ .

*Intersection d'ensembles:*

L'ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant de  $G$  si pour tout sommet  $v \in V$ ,

$$|N[v] \cap D| \geq 1.$$

*Fonction de domination:*

Soit  $f$  la fonction  $f : V \rightarrow \{0, 1\}$  telle que pour tout sommet  $v \in V$ ,

$$\sum_{u \in N[v]} f(u) \geq 1.$$

### 1.2.2 Paramètres de domination

Un second aspect est la possibilité de former de nouveaux paramètres de domination. En effet, beaucoup de paramètres de domination ont été définis en combinant la domination avec une autre propriété dans les graphes. Ainsi, pour une propriété  $P$ , le nombre de domination conditionnelle  $\gamma(G : P)$  est le cardinal minimum d'un sous-ensemble  $D \subseteq V$  tel que le sous-graphe induit par  $D$  satisfait  $P$ . Par exemple, si on impose que  $G[D]$  soit connexe, nous aurons un type de domination appelé **domination**

**connexe**, et si on impose que  $G[D]$  soit un graphe complet, nous définissons ainsi un autre type de domination appelé **domination clique**. De plus, d'autres paramètres de domination sont obtenus en changeant la manière de dominer. Par exemple, si on impose que tout sommet à l'extérieur de l'ensemble dominant  $D$  possède  $k$  voisins dans  $D$ , on aura un autre type de domination appelé la  $k$ -**domination**.

De la même manière et suivant les critères imposés, des dizaines de paramètres de domination ont été définis. Dans cette thèse, nous ferons référence à plusieurs types de domination suivant le contexte. Nous donnons à présent leurs définitions dans un graphe  $G = (V, E)$ :

#### *La domination totale*

Un ensemble dominant total est un ensemble dominant  $S \subseteq V$  tel que le sous-graphe induit par  $S$  ne contient pas de sommets isolés. Le nombre de domination totale de  $G$ , noté  $\gamma_t(G)$ , est le cardinal minimum d'un dominant total.

#### *La domination couplée*

Un ensemble dominant couplé de  $G$  est un dominant dont le sous-graphe induit contient un couplage parfait. Le cardinal minimum d'un tel ensemble est appelé nombre de domination couplée de  $G$ . Il est noté par  $\gamma_{pr}(G)$ .

#### *La domination sécurisée*

Un ensemble dominant sécurisé de  $G$  est un ensemble dominant  $X$  avec la propriété que tout sommet  $u \in V - X$  est adjacent à un sommet  $v \in X$  tel que  $(X - \{v\}) \cup \{u\}$  est un ensemble dominant de  $G$ .

#### *La domination restreinte totale*

Un sous-ensemble  $S$  de  $V$  est appelé ensemble dominant restreint total de  $G$ , si tout sommet  $v \in V$  est adjacent à un sommet de  $S$  et tout sommet de  $V - S$  est adjacent à un sommet de  $V - S$ .

Il est à noter que d'après leurs définitions, la domination couplée, la domination totale et la domination restreinte totale ne sont définies que si le graphe est sans sommets isolés.

### 1.2.3 Applications de la domination

Un autre aspect qui rend la domination dans les graphes un domaine de recherche aussi convoité est le grand nombre de ses applications. En effet, beaucoup de situations réelles peuvent être modélisées par des problèmes étudiés en domination, et ce pour l'un ou l'autre de ses nombreux paramètres. A titre d'exemple, nous citons quelques applications dans différents domaines:

#### *Localisation des stations de radars*

Ce problème a été discuté par Berge dans [1]. Ayant un certain nombre d'endroits stratégiques à maintenir en surveillance, le problème consiste à trouver un ensemble de sites dans lesquels des radars doivent être posés dans le but que tous les sites soient surveillés. Bien entendu il serait plus rentable de déposer le moins possible de radars.

#### *Problème de communication dans un réseau*

Nous avons un réseau de villes avec des lignes de transmission. Il s'agit de trouver comment installer des stations de transmission dans certaines villes de telle sorte que n'importe quelle ville puisse recevoir un message depuis au moins une station de transmission. Ce problème a été présenté de manière détaillée par Liu dans [10].

A présent, la domination enregistre en force sa présence dans les domaines de la théorie des graphes ayant des applications dans des domaines importants comme les réseaux ad hoc, les réseaux biologiques, l'informatique distribuée, les réseaux sociaux ou les graphes du web (voir [11], [12] et [13]). Ces applications ont pour objectif de sélectionner un sous-ensemble de nœuds qui fournira certains services précis tel que tout nœud du réseau soit "proche" à un nœud du sous-ensemble. Les exemples suivants montrent que le concept de domination peut être appliqué pour la modélisation d'autres problèmes récents de la vie réelle:

### *Modélisation de réseaux biologiques*

Dans le but de comprendre les molécules d'ARN (acide ribonucléique), récemment, des chercheurs au "Courant Institute of Mathematical Sciences" ont utilisé la théorie des graphes pour modéliser les molécules d'ARN et ont fourni une base de données constituée d'arbres représentant des structures secondaires possibles de ces molécules. Dans leurs études, des chercheurs ont utilisé certains invariants de graphes afin d'identifier numériquement des motifs secondaires d'ARN, en particulier le nombre de domination qui est un invariant sensible au changement de la structure d'un arbre même si ce changement est minime. Pour plus de détails sur ces études, voir [14].

### *Modélisation de réseaux sociaux*

Les ensembles dominants peuvent être utilisés pour la modélisation de réseaux sociaux afin d'étudier la dynamique des relations entre un grand nombre d'individus dans différents domaines. Un réseau social est une structure sociale constituée d'individus ou de groupes d'individus liés par un ou plusieurs types spécifiques d'interdépendance. Le choix d'ensembles initiaux des individus ciblés est un problème important dans la théorie des réseaux sociaux. Dans leur article [15], Kelleher et Cozzens ont modélisé les réseaux sociaux en termes de théorie des graphes et ils ont montré que certains des ensembles d'individus à choisir peuvent être trouvés en utilisant les propriétés des ensembles dominants.

Grâce au grand nombre de types de domination, beaucoup de problèmes réels sont modélisés en termes d'autres paramètres de domination, et ce en fonction des conditions qui peuvent être exigées et suivant la spécificité du problème. D'autres applications seront présentées plus loin au moment de la définition des paramètres de domination pour lesquels des résultats en relation avec notre travail seront donnés.

#### **1.2.4 Problèmes étudiés en domination**

Un autre aspect est que la domination offre une grande variété d'axes de recherche, comme:

- L'élaboration de bornes pour le nombre de domination ou pour les différents paramètres de domination. Vu que la détermination de valeurs exactes pour ces paramètres est impossible dans la plupart des cas, les spécialistes en domination se sont orientés vers la recherche de bornes en fonction de l'ordre du graphe, de son degré minimum ou maximum, en fonction d'autres paramètres de domination, etc...

Aussi, une fois une borne est établie, il serait intéressant de chercher à caractériser les graphes qui la vérifient.

- L'étude algorithmique de la domination dans des classes particulières de graphes, sachant que le problème de détermination des paramètres de domination pour les graphes en général est NP-complet pour la majorité de ces paramètres. En effet, de nombreuses recherches d'algorithmes polynomiaux pour la détermination de paramètres de domination ont été menées dans des classes de graphes ayant des structures relativement simples comme les arbres, les graphes bipartis, les graphes triangulés, etc..
- La détermination de relations du type Nordhaus-Gaddum. Ce sont des relations qui, pour un paramètre de domination  $\mu(G)$  donné, sont formées de deux fonctions  $f_1(n, \delta, \Delta)$  et  $f_2(n, \delta, \Delta)$  telles que

$$\mu(G) + \mu(\overline{G}) \leq f_1(n, \delta, \Delta) \text{ et}$$

$$\mu(G)\mu(\overline{G}) \leq f_2(n, \delta, \Delta)$$

- L'étude de classes de graphes critiques ou stables par rapport aux différents paramètres de domination. Cet axe de recherche constitue l'objet de cette thèse, il s'agit d'étudier l'effet résultant de l'effacement ou de l'ajout d'une arête quelconque sur le paramètre de domination étudié, et de même étudier l'effet que peut donner l'effacement de n'importe quel sommet d'un graphe sur le paramètre de domination en question, sachant que suivant le cas, ces modifications dans un

graphe peuvent augmenter, faire baisser ou même laisser inchangés les paramètres de domination. Dans cette thèse, nous nous focaliserons sur un type de domination qui est la domination double.

### 1.3 Notions de graphes critiques et stables

Quand un paramètre de domination est étudié, il est évident que l'on soit intéressés par les graphes qui soient dans un sens critiques ou stables par rapport à ce paramètre. En effet, l'exploration des propriétés et de la structure de ces graphes renforce nos connaissances que nous voulons aussi profondes que possible pour n'importe quel paramètre étudié.

Dans l'exemple qui suit, donné par Haynes et al. dans [3], on peut voir que l'étude de la criticité et de la stabilité dans les graphes est d'une grande importance du point de vue pratique. En effet, il est important pour la conception d'un réseau, de prendre en compte sa tolérance aux pannes, en d'autres termes, sa capacité à fournir un service, même s'il contient un ou plusieurs composants défectueux. Le comportement d'un réseau en présence d'un défaut peut être analysé en déterminant l'effet que la suppression d'une arête (défaillance d'une liaison) ou d'un sommet (défaillance d'un processeur) de son graphe représentatif  $G$  a sur le critère de tolérance aux pannes. Par exemple, un  $\gamma(G)$ -ensemble représente un ensemble de processeurs de taille minimale pouvant communiquer directement avec tous les autres processeurs dans le système. S'il est nécessaire à l'ensemble des serveurs d'avoir cette propriété et que le nombre de processeurs désignés pour jouer le rôle de serveurs de fichiers soit limité, alors le nombre de domination  $\gamma(G)$  est le critère de tolérance aux pannes dans ce cas. Dans cet exemple, il est important que  $\gamma(G)$  ne doit pas augmenter quand le graphe est modifié en supprimant un sommet ou une arête. D'un autre côté, cette tolérance peut être assurée en ajoutant des arêtes. Par conséquent, dans ce cas, nous devons examiner les effets sur  $\gamma(G)$  lorsque  $G$  est modifié suite à la suppression d'un sommet, l'ajout ou la suppression d'une arête. Il faut signaler que d'autres modifications peuvent être appliquées sur un graphe et définir ainsi d'autres types de criticité et de stabilité.

Toutefois, dans cette thèse, nous nous contentons d'étudier les trois opérations citées ci-dessus et dont les définitions sont données ci-après dans un graphe  $G = (V, E)$ .

**Définition 1.2.** Soit  $v \in V(G)$ . La suppression de  $v$  du graphe  $G$  produit le graphe noté  $G - v$ , obtenu suite à l'effacement de  $v$  et de toutes les arêtes de  $G$  incidentes à  $v$ .

**Définition 1.3.** Soit  $e \in E(G)$ . La suppression de l'arête  $e$  du graphe  $G$  produit le graphe noté  $G - e$ , obtenu suite à l'effacement de  $e$  (ses extrémités restent).

**Définition 1.4.** Soit  $xy \in E(\overline{G})$ . L'ajout de l'arête  $xy$  au graphe  $G$  produit le graphe noté  $G + xy$  résultant de l'ajout d'une arête entre  $x$  et  $y$  dans le graphe  $G$ .

Voir des exemples de ces opérations dans les figures 1.3 et 1.4.

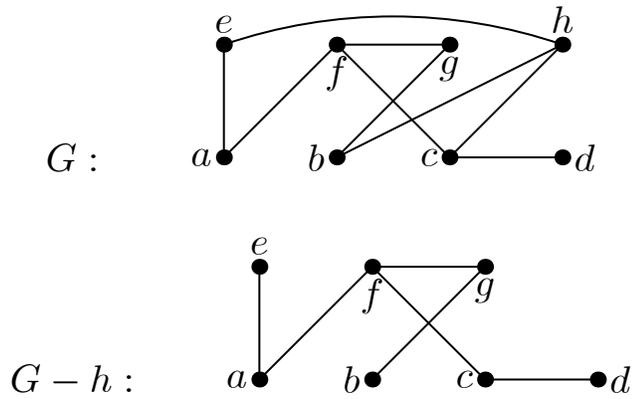


FIGURE 1.3. L'opération  $G - h$

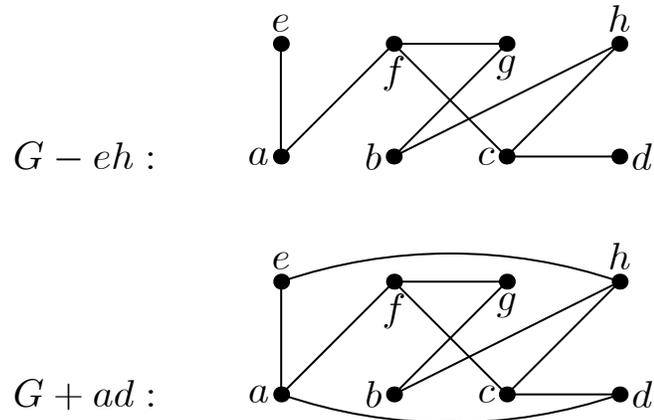


FIGURE 1.4. Les opérations  $G - eh$  et  $G + ad$

Nous arrivons maintenant à la définition des différents concepts liés aux graphes critiques et stables pour un paramètre de domination quelconque  $\pi$ . Notons que si à l'issue d'une modification quelconque d'un graphe  $G$  le paramètre  $\pi$  n'est plus défini, nous considérons par convention que  $\pi$  est infini pour le graphe obtenu.

Pour un paramètre de domination  $\pi$ , un graphe  $G$  est dit:

$\pi$ -arête-critique	si $\pi(G + e) < \pi(G)$ pour toute arête $e$ de $E(\overline{G})$
$\pi^+$ -arête-critique	si $\pi(G + e) > \pi(G)$ pour toute arête $e$ de $E(\overline{G})$
$\pi$ -arête-stable	si $\pi(G + e) = \pi(G)$ pour toute arête $e$ de $E(\overline{G})$
$\pi$ -arête-enlevée-critique	si $\pi(G - e) > \pi(G)$ pour toute arête $e$ de $E(G)$
$\pi^-$ -arête-enlevée-critique	si $\pi(G - e) < \pi(G)$ pour toute arête $e$ de $E(G)$
$\pi$ -arête-enlevée-stable	si $\pi(G - e) = \pi(G)$ pour toute arête $e$ de $E(G)$
$\pi$ -sommet-critique	si $\pi(G - v) < \pi(G)$ pour tout sommet $v$ de $V(G)$
$\pi^+$ -sommet-critique	si $\pi(G - v) > \pi(G)$ pour tout sommet $v$ de $V(G)$
$\pi$ -sommet-stable	si $\pi(G - v) = \pi(G)$ pour tout sommet $v$ de $V(G)$

De plus, si un graphe  $G$  vérifie l'une des propriétés définies ci-dessus, et si  $\pi(G) = k$ , alors la notation correspondante à cette propriété sera précédée par l'entier positif  $k$ . Par exemple, on dira que  $G$  est  $k$ - $\pi$ -arête-critique si  $\pi(G) = k$  et  $\pi(G + e) < k$  pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ .

Les concepts qu'on vient de définir ont motivé beaucoup de chercheurs à faire des études qui concernent différents paramètres de domination, mais bien évidemment le premier paramètre qui a été étudié est le nombre de domination  $\gamma$  quand Walikar et Acharya [16] et ensuite Bauer, Harary, Nieminen et Suffel [17] ont étudié les graphes pour lesquels le nombre de domination est altéré quand une arête quelconque est supprimée. Ces graphes satisfont  $\gamma(G - e) = \gamma(G) + 1$  pour toute arête de  $G$ . Pour plus de détails et de références, voir le chapitre 5 du livre [3].

Quelques années après la parution de l'article de Walikar et al. [16], Sumner et Blich [18] ont initié l'étude des graphes  $\gamma$ -arête-critiques. La plus grande partie de leurs résultats concernaient le cas  $1 \leq \gamma \leq 3$ , dont des caractérisations des graphes

1- $\gamma$ -arête-critiques et 2- $\gamma$ -arête-critiques. Le concept des graphes  $\gamma$ -arête-critiques a été ensuite étudié dans plusieurs articles comme [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25].

Les graphes  $\gamma$ -sommet-critiques ont été définis et abordés pour la première fois par Brigham, Chinn et Dutton dans [26, 27]. Ils ont exploré en particulier le cas  $\gamma = 2$ . Pour le cas  $\gamma \geq 3$ , l'étude des graphes  $\gamma$ -sommet-critiques est, jusqu'à présent, loin d'être achevée. Néanmoins, des propriétés structurelles de ces graphes ont été établies par les auteurs de [26, 27, 28, 29].

Les trois cas de stabilité ont été étudiés pour le nombre de domination dans quelques articles comme [16, 30, 31, 32, 33]. Il est à noter que ces études n'ont pas abouti à des caractérisations constructives des graphes  $\gamma$ -arête-stables et  $\gamma$ -sommet-stables.

Les références données dans ce paragraphe ne représentent, dans aucun cas, toute la littérature existante pour les neuf concepts qu'on a définis. Il s'agit juste de mettre en évidence le grand intérêt que donnent les chercheurs à cet axe de recherche sachant que ce que nous avons présenté, jusqu'à présent, ne concerne que la domination ordinaire.

Dans les prochains chapitres, nous présenterons les résultats obtenus pour la plupart des concepts de criticité et de stabilité par rapport à la domination double. Nous donnerons les résultats obtenus par d'autres chercheurs, ainsi que ceux que nous avons obtenus. Nous parlerons aussi, quand le contexte le permettra, d'études similaires menées pour d'autres types de domination.

## CHAPITRE 2

### LA DOMINATION DOUBLE ET RESULTATS ANTERIEURS

Le présent chapitre est composé de cinq parties. Dans la première, nous faisons un bref aperçu sur la domination double dans les graphes. Nous y donnons ses principales propriétés ainsi que les résultats les plus importants la concernant. Par cette présentation, nous voulons familiariser le lecteur avec ce type de domination tout en lui permettant de faire le tour de ce qui a été fait dans ce concept jusqu'à présent.

Les quatre autres parties de ce chapitre sont consacrées à la présentation des résultats antérieurs pour les graphes critiques et stables par rapport à la domination double. Ces résultats, qui figurent dans quatre articles, concernent deux classes de graphes, ceux dont le nombre de domination double diminue pour n'importe quelle arête ajoutée qui ont fait l'objet de trois articles, et ceux dont le nombre de domination double demeure stable pour n'importe quelle arête enlevée qui ont fait l'objet du dernier article. Nous avons préféré consacrer une section entière à chaque article afin de respecter la chronologie et les notations qui sont parfois propres à un article lui-même. Notons que les notations utilisées, étant celles utilisées par les auteurs des articles présentés, ne seront pas forcément utilisées dans d'autres contextes dans cette thèse.

## 2.1 Aperçu sur la domination double

### 2.1.1 Introduction

Avant d'introduire la définition d'un ensemble dominant double d'un graphe, nous présentons un concept plus général qui est la  $k$ -tuple domination. Ce type de domination a été introduit par Harary et Haynes dans [34]. Dans un graphe simple  $G = (V, E)$  et pour un entier positif  $k$ , un sous-ensemble  $D$  de  $V$  est dit un  **$k$ -tuple dominant**

si pour tout sommet  $v$  de  $V$ ,  $|N[v] \cap D| \geq k$ . En d'autres termes, ou bien  $v$  est un sommet de  $D$  et possède au moins  $k - 1$  voisins dans  $D$ , ou bien  $v$  est un sommet de  $V - D$  et possède au moins  $k$  voisins dans  $D$ . Ainsi,  $G$  possède un  $k$ -tuple dominant si et seulement si  $\delta(G) \geq k - 1$ . Le nombre de  $k$ -tuple domination de  $G$ , noté  $\gamma_{\times k}(G)$ , est le cardinal minimum d'un  $k$ -tuple dominant de  $G$ . Pour le cas particulier  $k = 1$ , on aura la 1-tuple domination qui n'est autre que la domination ordinaire. De nombreuses études ont été faites sur la  $k$ -tuple domination comme [34], [35], [36] et [37].

Dans leur même article [34], Harary et Haynes se sont focalisés sur un cas particulier de la  $k$ -tuple domination lorsque  $k = 2$ . Ils ont appelé ce type de domination **la domination double**. Dans cette thèse, nous notons le nombre domination double d'un graphe  $G$  par  $\gamma_{\times 2}(G)$ , bien que ce paramètre de domination a été noté dans la littérature par d'autres notations comme  $\gamma_d(G)$  ou  $dd(G)$ . Si  $D$  est un ensemble dominant double (EDD) de  $G$  de cardinal minimum,  $D$  est appelé  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble.

Afin de bien assimiler le concept de la domination double, considérons le graphe  $G$  de la figure 2.1. Nous nous proposons d'obtenir un dominant double  $S$  de  $G$  de cardinal minimum. Remarquons en premier qu'un sommet pendant ne peut appartenir à  $V - S$  puisque dans ce cas il ne peut pas être double dominé par  $S$ . Ainsi, tout sommet support et tout sommet pendant doivent impérativement appartenir à tout EDD d'un graphe. Par conséquent,  $S$  doit contenir l'ensemble  $\{v_1, v_4, v_7, v_8\}$ . Si on prend de plus le sommet  $v_2$  dans  $S$ , alors tous les sommets de  $G$  seront double dominés excepté le sommet  $v_5$  qui n'est dominé que par  $v_2$  et de ce fait, l'un des sommets  $v_5$  et  $v_6$  devrait appartenir à  $S$ . Il est clair que l'ensemble  $S$  qu'on a obtenu est un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble puisqu'on ne peut avoir un EDD de  $G$  de cardinal strictement inférieur à 6. Remarquons aussi que le sommet  $v_3$  ne peut appartenir à aucun  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble sinon on devrait prendre en plus des sommets pendants et des supports, deux sommets l'ensemble  $\{v_2, v_5, v_6\}$ , ce qui donnerait un dominant double de cardinal égal à 7.

La domination double est un type de domination riche en applications. Considérons à titre d'exemple le problème du placement des gardiens dans une prison. Un gardien placé sur un sommet  $v$  peut garder tous les sommets de son voisinage fermé. Dans

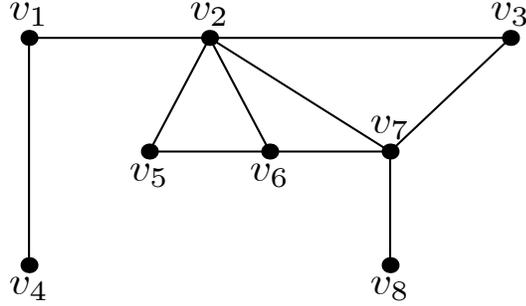


FIGURE 2.1. Un graphe  $G$  avec  $\gamma_{\times 2}(G) = 6$ .

ce cas, un ensemble dominant double  $D$  représente un ensemble de gardiens avec la propriété que tout prisonnier (un sommet de  $V - D$ ) soit surveillé par au moins deux gardiens, et chaque gardien (un sommet de  $D$ ) soit proche d'un autre gardien de telle sorte qu'ils s'assurent mutuellement aide et assistance en cas de besoin.

La domination double possède aussi des applications dans les réseaux informatique. Par exemple, si l'on considère que tout sommet qui appartient à un ensemble dominant assure un service (comme serveur de fichier, ou autre) dans un réseau. Dans ce cas, tout sommet possède un accès direct aux fichiers. Il est raisonnable préserver cet accès lorsque des serveurs de fichiers tombent en panne. Un ensemble dominant double assure la continuité du service puisque tout sommet peut accéder à au moins deux serveurs et possède donc au moins un serveur de secours, et aussi tout serveur possède au moins un serveur de sauvegarde. De plus, dans la conception de ce genre de réseaux, il est évident de chercher à minimiser le nombre de serveurs à cause de leur coût important.

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés à la domination double dans les graphes et ont obtenus des résultats dans plusieurs domaines de recherche étudiés en domination. Nous allons, dans ce qui suit, présenter brièvement quelques résultats en essayant de se focaliser sur ceux qui facilitent la compréhension des différentes propriétés de la domination double et, surtout, ceux qui ont un lien avec l'objet principal de cette thèse.

### 2.1.2 Existence et minimalité d'un ensemble dominant double

Le premier résultat devant être présenté est dû à Harary et Haynes dans leur article [34], il s'agit de l'existence d'un ensemble dominant double.

**Théorème 2.1 (Harary et al. [34]).** *Tout graphe sans sommets isolés possède un ensemble dominant double et donc un nombre de domination double.*

Pour n'importe quel type de domination, il est d'une grande importance d'étudier les conditions de minimalité d'un ensemble ayant la propriété requise. Pour la domination double, Chellali et Haynes [38] ont prouvé le théorème suivant:

**Théorème 2.2 (Chellali et al. [38]).** *Soient  $G$  un graphe sans sommets isolés et  $S$  un EDD de  $G$ . Alors  $S$  est minimal si et seulement si chaque sommet  $v \in S$  satisfait l'une des conditions suivantes:*

- 1)  $v$  est un sommet pendant dans  $\langle S \rangle$ .
- 2)  $v$  est adjacent à un sommet pendant dans  $\langle S \rangle$ .
- 3) Il existe un sommet  $u$  dans  $V - S$  tel que  $N(u) \cap S = \{v, w\}$ .

### 2.1.3 Valeurs exactes et bornes sur le nombre de domination double

Dans leur article [39], Liao et Chang ont montré que le problème de la détermination du nombre de domination double dans un graphe quelconque est NP-Complet. De plus, ils ont donné, dans le même article [39], un algorithme polynomial pour la recherche du nombre de domination double dans les graphes fortement triangulés.

Néanmoins, pour quelques classes de graphes, le nombre de domination double a été déterminé d'une manière exacte, (voir [34], [40] et [41]).

- $\gamma_{\times 2}(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ .
- $\gamma_{\times 2}(P_n) = \lceil \frac{2n+2}{3} \rceil$ .
- $\gamma_{\times 2}(K_n) = 2$  pour  $n \geq 2$ .

- $\gamma_{\times 2}(K_{r,s}) = 4$  pour  $r \geq 3$  et  $s \geq 3$ .
- $\gamma_{\times 2}(K_{1,t}) = t + 1$ .

Dans l'impossibilité de déterminer des valeurs exactes du nombre de domination double pour le cas général, de nombreuses bornes ont été établies, nous en citons ici quelques-unes:

**Théorème 2.3.** *Soit  $G$  un graphe sans sommets isolés ayant  $n$  sommets et  $m$  arêtes.*

*Alors:*

1- [Harray et al. [34]]

- $\gamma_{\times 2}(G) \geq \gamma(G) + 1$ .
- $2 \leq \gamma_{\times 2}(G) \leq n$ .
- $\gamma_{\times 2}(G) \geq \frac{4n-2m}{3}$ .
- $\gamma_{\times 2}(G) \geq \frac{2n}{\Delta+1}$ .

2- [Chellali et al. [38]]

- $\gamma_{\times 2}(G) \leq n + 1 - \delta$ .
- Si  $\delta \geq 2$ , alors  $\gamma_{\times 2}(G) \leq \frac{n+\gamma_t(G)}{2}$  et cette borne est atteinte.

Nous nous contentons dans ce paragraphe des bornes qui ont été données sans négliger de signaler qu'il existe dans la littérature un grand nombre de bornes incluant le nombre de domination double qui ont fait l'objet d'une multitude de travaux comme [38, 42, 43, 44].

#### 2.1.4 Résultats obtenus pour la domination double dans les arbres

Les arbres sont importants pour la compréhension de la structure des graphes et même dans la conception et de l'analyse des réseaux connexes. Ils sont parmi les classes de graphes les plus étudiées en domination et en théorie des graphes en général. Souvent, quand une propriété liée aux graphes est étudiée, il est judicieux de la comprendre pour

des classes particulières assez simples de graphes avant d'essayer de l'aborder pour le cas général.

Dans plusieurs articles, des chercheurs ont étudié la domination double dans la classe des arbres. Nous résumons dans ce paragraphe quelques résultats obtenus dans ce sens:

- L'élaboration d'un algorithme polynomial pour la recherche du nombre de domination double dans un arbre par Liao et Chang [39].
- L'établissement de plusieurs bornes incluant le nombre de domination double pour les arbres dans plusieurs articles comme [45, 40, 46, 47, 48]
- La construction d'une manière récursive des arbres ayant un ensemble dominant double minimum unique a été faite par Chellali et Haynes dans [49].
- La caractérisation des arbres  $T$  pour lesquels le nombre de domination double est égal au nombre de domination couplée. Ce travail a été accompli par Blidia, Chellali et Haynes dans [45].
- Les caractérisations des arbres dont le nombre de domination double est égal au nombre de domination totale plus un et des arbres dont le nombre de domination double est égal au nombre de 2-dominance plus un. Ces caractérisations ont été établies par Krzywkowski dans [50] et [51].
- La caractérisation des sommets qui appartiennent à tout ou à aucun ensemble dominant double minimum d'un arbre, et ce à l'aide d'un processus d'élagage ("pruning" en anglais) qui a été utilisé auparavant par Mynhardt pour le nombre de domination dans [52]. Cette caractérisation a été élaborée par Blidia, Chellali et Khelifi dans [53].

## 2.2 Graphes $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques

### 2.2.1 Introduction

Cette section est consacrée à la présentation des résultats obtenus par Haynes et Thacker dans leur article [54]. Ce même travail, avant d'être publié, a fait l'objet de la thèse de Master de Derrick Wayne Thacker [55] sous la direction de Teresa Haynes. Ils se sont intéressés aux graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques, ils ont caractérisé les cycles et les arbres ayant cette propriété. De plus, ils ont étudié les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques ayant un nombre de domination double égal à trois et quatre, mais avant ils ont commencé par donner quelques propriétés de ces graphes.

### 2.2.2 Propriétés des graphes $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques

Il est évident que l'ajout d'une arête à un graphe  $G$  ne peut augmenter son nombre de domination double. Ainsi, le fait d'ajouter une arête à  $G$  peut diminuer son nombre de domination double comme ça peut le laisser inchangé.

Les auteurs ont montré, dans la proposition suivante, que pour la domination double, ajouter une arête à un graphe peut diminuer son nombre de domination double d'au plus deux.

**Proposition 2.4 (Haynes et al. [54]).** *Soient  $G$  un graphe sans sommets isolés et l'arête  $uv \in E(\overline{G})$ . Alors  $\gamma_{\times 2}(G) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(G + uv) \leq \gamma_{\times 2}(G)$ .*

**Corollaire 2.5 (Haynes et al. [54]).** *Si  $\gamma_{\times 2}(G + uv) = \gamma_{\times 2}(G) - 2$ , alors tout  $\gamma_{\times 2}(G + uv)$ -ensemble contient les deux sommets  $u$  et  $v$ .*

Dans [56], Van der Merwe et al. ont appelé un graphe supercritique par rapport à la domination totale tout graphe dont nombre de domination totale est diminué de deux pour toute arête ajoutée. Van der Merwe et al. ont caractérisé ces graphes comme suit:

**Théorème 2.6 (Van der Merwe et al. [56]).** *Un graphe  $G$  est supercritique par rapport à la domination totale si et seulement si  $G$  est l'union d'au moins deux graphes*

*complets non-triviaux.*

Haynes et Thacker ont montré qu'il n'existe aucun graphe supercritique par rapport à la domination double (un graphe supercritique par rapport à la domination double est défini de la même manière).

**Théorème 2.7 (Haynes et al. [54]).** *Il n'existe pas de graphes supercritiques par rapport à la domination double.*

Une autre propriété donnée par les auteurs découle du fait que l'ajout d'une arête entre deux sommets supports d'un graphe ne diminue pas son nombre de domination double.

**Remarque 2.8 (Haynes et al. [54]).** *Si  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critique, alors l'ensemble des sommets supports de  $G$  induit un graphe complet.*

### 2.2.3 Arbres et Cycles $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques

Il est montré qu'il n'existe pas d'arbres arête-critiques par rapport à la domination et la domination totale (voir [18, 56]). Par contre, il existe des arbres qui sont  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques comme les étoiles  $K_{1,m}$ , où  $\gamma_{\times 2}(K_{1,m}) = m + 1$  et  $\gamma_{\times 2}(K_{1,m} + e) = m$  pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ . Dans la proposition suivante, les auteurs ont caractérisé les arbres  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques.

**Proposition 2.9 (Haynes et al. [54]).** *Un arbre  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critique si et seulement si  $T$  est une étoile ou une double étoile non-triviales.*

Ils ont aussi caractérisé les cycles  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques.

**Proposition 2.10 (Haynes et al. [54]).** *Un cycle  $C_n$  est  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critique si et seulement si  $n \in \{3, 4, 5\}$ .*

### 2.2.4 Graphes $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques ayant de petits nombres de domination double

Dans ce paragraphe, nous donnons les caractérisations établies par Thacker et Haynes pour des graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques possédant un nombre de domination double égal à 3 ou 4.

#### Graphes $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques

Dans le lemme suivant, les auteurs ont déterminé le diamètre d'un graphe  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique:

**Lemme 2.11 (Haynes et al. [54]).** *Si  $G$  est un graphe  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique, alors  $\text{diam}(G) = 2$ .*

Ils ont ensuite donné une caractérisation d'un graphe  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique en termes de son graphe complémentaire.

**Théorème 2.12 (Haynes et al. [54]).** *Un graphe  $G$  est  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique si et seulement si son complémentaire est ou bien*

- (a) *un graphe  $mK_2$  pour  $m \geq 2$ , ou bien*
- (b) *une galaxie non-vide avec exactement un sommet isolé.*

#### Graphes $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques

De même que pour les graphes  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques, les auteurs ont commencé par déterminer le diamètre des graphes  $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques.

**Lemme 2.13 (Haynes et al. [54]).** *Si  $G$  est un graphe  $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique, alors  $\text{diam}(G) \in \{2, 3\}$ .*

Dans le but de caractériser les graphes  $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques de diamètre 3, Haynes et Thacker ont utilisé le joint séquentiel de graphes défini par Akiyama et Harary comme suit: pour les graphes disjoints  $G_1, G_2, \dots, G_t$ , avec  $t \geq 3$ , le joint séquentiel,

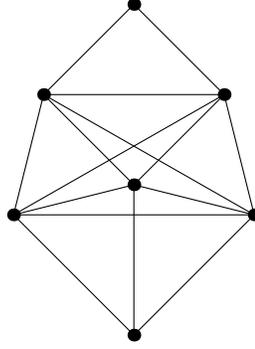


FIGURE 2.2. Le graphe  $K_1 + K_2 + K_3 + K_1$

noté  $G_1 + G_2 + \dots + G_t$ , est le graphe  $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_t$  avec toutes les arêtes possibles entre les sommets de  $G_i$  et  $G_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq t - 1$ . A titre illustratif, le graphe  $K_1 + K_2 + K_3 + K_1$  est montré dans la figure 2.2.

**Théorème 2.14 (Haynes et al. [54]).** *Un graphe  $G$  est  $4-\gamma_{\times 2}$ -arête-critique avec  $\text{diam}(G) = 3$  si et seulement si  $G$  est le joint séquentiel  $K_1 + K_s + K_t + K_1$  pour des entiers positifs  $s$  et  $t$ .*

Bien que les auteurs n'ont pas réussi à caractériser les graphes  $4-\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques avec un diamètre minimum, ils ont donné une caractérisation d'une sous-famille de ses graphes.

**Théorème 2.15 (Haynes et al. [54]).** *Soit  $G$  un graphe de diamètre  $\text{diam}(G) = 2$  ayant un sommet pendent. Alors  $G$  est  $4-\gamma_{\times 2}$ -arête-critique si et seulement si  $G = \{u_1\} \cup (K_1 + F)$  où  $F$  est une galaxie non vide d'étoiles non-triviales et  $u_1$  le support adjacent au sommet pendent.*

## 2.3 Quelques propriétés des couplages dans les graphes $4-\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques

### 2.3.1 Introduction

Nous nous intéressons dans cette partie aux travaux élaborés par Wang et Shan [57] qui concernent les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques, et qui viennent s'ajouter à ceux de

Haynes et Thacker présentés dans la section précédente. Wang et Shan se sont orientés en particulier vers l'étude des propriétés des couplages dans les graphes  $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques, et ce après avoir donné quelques propriétés plus générales dont certaines figurent aussi dans l'article de Haynes et Thacker [54].

Avant de commencer l'exploration des résultats que comporte l'article de Wang et Shan, nous donnons quelques définitions et notations qui y ont été utilisées.

Un ensemble déconnectant dans un graphe  $G = (V, E)$  connexe est un sous-ensemble  $S$  de  $V$  tel que  $G - S$  est un graphe non-connexe. Un graphe  $G$  est dit  $k$ -facteur-critique si  $G - S$  admet un couplage parfait pour tout ensemble  $S$  de  $k$  sommets dans  $G$ . Si  $k = 1$ , alors  $G$  est dit facteur-critique, et si  $k = 2$ ,  $G$  est appelé un graphe bicritique. Pour un ensemble  $S \subseteq V$ , les auteurs ont noté par  $\omega(G - S)$  le nombre des composantes connexes de  $G - S$ , et par  $\circ(G - S)$  le nombre de composantes connexes impaires de  $G - S$ . Pour une arête  $uv \in E(\overline{G})$ , ils ont noté par  $D_{uv}$  un dominant double de  $G + uv$  de cardinal minimum.

### **2.3.2 Propriétés des graphes $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques**

Les auteurs ont commencé par donner des résultats préliminaires qui leur ont été utiles pour montrer leurs résultats principaux. Les trois premières propriétés qu'ils ont présentées sont similaires à des résultats qui figurent dans l'article de Haynes et Thacker qui a fait l'objet de la section précédente, il s'agit du corollaire 2.5, du lemme 2.13 et du théorème 2.14.

Il sont arrivés aussi à donner les valeurs du nombre de stabilité  $\alpha$  pour les graphes sans  $K_{1,k}$   $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques.

**Lemme 2.16 (Wang et Shan [57]).** *Si  $G$  est un graphe sans  $K_{1,k}$   $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe, alors  $\alpha(G) \leq k$ .*

### 2.3.3 Propriétés des couplages dans les graphes $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques

Nous arrivons maintenant à la présentation des résultats principaux de Wang et Shan. Dans le premier, ils ont montré qu'un graphe  $G$  admet un couplage parfait si  $G$  est un graphe sans  $K_{1,4}$   $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe d'ordre pair  $\geq 6$  et qui n'appartient pas à une famille de graphes qu'ils ont appelée  $\mathcal{H}$ . La famille de graphes  $\mathcal{H}$  est définie comme suit: Pour un entier pair  $l \geq 4$ , soit  $H_l$  le graphe obtenu à partir du graphe complet  $K_l$  en ajoutant deux nouveaux sommets et les joindre à un sommet de  $K_l$ . Le graphe  $H_l$  obtenu par cette construction est un graphe sans  $K_{1,4}$   $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe d'ordre pair  $\geq 6$ . Par conséquent, tout graphe appartenant à la famille  $\mathcal{H}$ , formée des graphes  $H_l$  tels que  $l$  est un entier pair  $\geq 4$ , est un graphe qui ne comporte pas de couplage parfait.

**Théorème 2.17 (Wang et Shan [57]).** *Si  $G$  est un graphe sans  $K_{1,4}$   $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe d'ordre pair  $\geq 6$  et  $G \notin \mathcal{H}$ , alors  $G$  admet un couplage parfait.*

Il est à noter qu'il est nécessaire d'imposer que  $|V(G)| \geq 6$ . Par exemple, le graphe  $K_{1,3}$  d'ordre 4 qui est sans  $K_{1,4}$  connexe, est  $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique mais n'admet pas de couplage parfait.

Les deux derniers résultats établis par les auteurs relatent avec la bicriticité.

**Théorème 2.18 (Wang et Shan [57]).** *Soit  $G$  un graphe sans griffe 2-connexe  $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique d'ordre pair. Alors si  $\delta(G) \geq 3$ ,  $G$  est bicritique.*

**Théorème 2.19 (Wang et Shan [57]).** *Soit  $G$  un graphe sans  $K_{1,4}$  3-connexe  $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique d'ordre pair. Alors si  $\delta(G) \geq 4$ ,  $G$  est bicritique.*

## 2.4 Propriétés des couplages dans les graphes $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques

### 2.4.1 Introduction

Nous poursuivons la présentation des résultats qui concernent les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques avec un article de Wang et Kang [58]. Dans cet article, les auteurs continuent

l'étude des propriétés de couplages dans les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques, en particulier pour ceux ayant un nombre de domination double égal à trois ou quatre.

Pour un nombre de domination double égal à trois, Wang et Kang réussissent à montrer en premier qu'un graphe  $G$  admet un couplage parfait si  $G$  est un graphe  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe d'ordre pair. Ils montrent ensuite que  $G$  est facteur-critique si  $G$  est un graphe  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe d'ordre impair ayant un degré minimum d'au moins trois. En dernier, pour un nombre de domination double égal à quatre, les auteurs ont montré que  $G$  est facteur-critique si  $G$  est un graphe sans  $K_{1,4}$   $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe d'ordre impair avec  $\delta(G) \geq 2$ .

Les deux premiers résultats de Wang et Kang donnent une relation entre les graphes  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques et  $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques et le nombre de stabilité.

**Lemme 2.20 (Wang et Kang [58]).** *Si  $G$  est un graphe  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe, alors  $\alpha(G) = 2$ .*

**Lemme 2.21 (Wang et Kang [58]).** *Si  $G$  est un graphe sans  $K_{1,4}$   $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe, alors  $2 \leq \alpha(G) \leq 4$ .*

Les résultats principaux obtenus par les auteurs seront présentés dans les deux paragraphes suivants:

#### **2.4.2 Propriétés des couplages dans les graphes $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques**

Pour les graphes  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques, les auteurs ont réussi à montrer deux propriétés liées aux couplages.

**Théorème 2.22 (Wang et Kang [58]).** *Si  $G$  est un graphe  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe d'ordre pair, alors  $G$  admet un couplage parfait.*

**Théorème 2.23 (Wang et Kang [58]).** *Si  $G$  est un graphe  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe d'ordre impair avec  $\delta(G) \geq 2$ , alors  $G$  est facteur-critique.*

Les auteurs ont fait remarquer qu'il est nécessaire d'exiger que  $\delta(G) \geq 2$  dans le Théorème 2.23. En effet, si l'on considère le graphe  $G$  défini comme suit: Pour un entier pair  $n \geq 2$ , soit  $G$  le graphe obtenu à partir d'un graphe complet  $K_n$  en ajoutant un nouveau sommet en le reliant à un sommet  $v$  de  $K_n$ . Alors  $G$  est un graphe  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe d'ordre impair avec  $\delta(G) = 1$ , mais il est clair que  $G - v$  n'admet pas de couplage parfait.

### 2.4.3 Propriétés des couplages dans les graphes $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques

Wang et Kang se sont servis du théorème 2.17 (présenté dans la section précédente) pour montrer le résultat suivant relatif aux graphes  $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques:

**Théorème 2.24 (Wang et Kang [58]).** *Si  $G$  est un graphe sans  $K_{1,4}$   $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe d'ordre impair avec  $\delta(G) \geq 2$ , Alors  $G$  est un graphe facteur-critique.*

Dans le théorème précédent, l'hypothèse sur le degré minimum est la meilleure possible. Pour le justifier, les auteurs ont considéré le graphe  $G$  défini comme suit: Pour un entier impair  $n \geq 3$ , soit  $G$  le graphe obtenu à partir d'un graphe complet  $K_n$  en ajoutant deux nouveaux sommets et les joindre à un sommet, disons  $v$ , de  $K_n$ . Ainsi construit,  $G$  est un graphe sans  $K_{1,4}$   $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critique connexe d'ordre impair avec  $\delta(G) = 1$ . Mais  $G - v$  n'admet pas de couplage parfait et de ce fait  $G$  n'est pas un graphe facteur-critique.

## 2.5 Graphes $\gamma_{\times 2}$ -stables par rapport aux arêtes enlevées

### 2.5.1 Introduction

Nous nous intéressons dans cette section aux résultats obtenus par Chellali et Haynes dans [59]. Dans cet article, les auteurs ont initié l'étude des graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-enlevée-stables. Ils y donnent des propriétés de ces graphes, des exemples de classes de graphes connues, ainsi qu'une caractérisation pour les arbres.

Afin de simplifier les notations, nous écrirons graphe  $\gamma_{\times 2}$ -AE-stable au lieu de graphe  $\gamma_{\times 2}$ -arête-enlevée-stable.

Il est évident que si l'on enlève une arête non pendante d'un graphe, le nombre de domination double ne peut diminuer. Ceci a mené les auteurs à faire la remarque suivante:

**Remarque 2.25 (Chellali et al. [59]).** *Pour un graphe  $G$  et une arête  $uv \in E(G)$  tels que  $G$  et  $G - uv$  sont sans sommets isolés,  $\gamma_{\times 2}(G) \leq \gamma_{\times 2}(G - uv)$ .*

Il est à rappeler que le nombre de domination double n'est défini que pour des graphes ayant un degré minimum au moins égal à un. Par conséquent, les auteurs ont donné deux définitions différentes de la stabilité, suivant le degré minimum du graphe étudié. Ils ont aussi appelé une arête dont l'effacement ne change pas le nombre de domination double une **arête stable**.

**Définition 2.26 (Chellali et al. [59]).** *Un graphe  $G$  est appelé  $\gamma_{\times 2}$ -AE-stable si  $\gamma_{\times 2}(G - e) = \gamma_{\times 2}(G)$  pour toute arête  $e \in E(G)$ , autrement dit, toute arête de  $G$  est stable.*

Il s'ensuit de cette définition que si  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -AE-stable, alors son degré minimum est au moins égal à deux. Afin de considérer le cas des graphes ayant un degré minimum égal à un, les auteurs ont noté l'ensemble des arêtes non-pendantes d'un graphe  $G$  par  $F(G)$ .

**Définition 2.27 (Chellali et al. [59]).** *Un graphe  $G$  est appelé  $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stable si  $\gamma_{\times 2}(G - e) = \gamma_{\times 2}(G)$  pour toute arête  $e \in F(G)$ , autrement dit, toute arête non-pendante de  $G$  est stable.*

D'après les deux définitions précédentes, il est évident qu'un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -AE-stable est forcément  $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stable.

### 2.5.2 Exemples

Chellali et Haynes ont étudié la stabilité de quelques classes simples de graphes. Pour les graphes complets  $K_n$  avec  $n \geq 4$ , il existe deux sommets adjacents qui dominent  $K_n - e$  pour toute arête  $e \in E(K_n)$ , d'où la remarque suivante:

**Remarque 2.28 (Chellali et al. [59]).** *Le graphe complet  $K_n$ , avec  $n \geq 4$ , est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-stable.*

Il est simple de voir que  $K_3$  n'est pas  $\gamma_{\times 2}$ -AE-stable. Pour les graphes biparti complets  $K_{r,s}$ , les auteurs ont affirmé que l'étoile  $K_{1,s}$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stable. De plus, si  $2 \leq r \leq s$ , alors  $\gamma_{\times 2}(K_{r,s}) = 4$ , et le fait d'effacer n'importe quelle arête ne change pas le nombre de domination double.

**Remarque 2.29 (Chellali et al. [59]).** *Le graphe biparti complet  $K_{r,s}$ , avec  $2 \leq r \leq s$ , est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-stable.*

Les deux derniers exemples que les auteurs ont considérés sont les chaînes et les cycles.

**Proposition 2.30 (Chellali et al. [59]).** *Un cycle  $C_n$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-stable si et seulement si  $n \equiv 2 \pmod{3}$ .*

Puisque le degré minimum d'une chaîne non-triviale  $P_n$  est égal à un, alors il n'existe pas de chaîne  $\gamma_{\times 2}$ -AE-stable. Il est à noter aussi que les étoiles  $P_2$  et  $P_3$  sont  $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stables, et puisque l'effacement de l'arête centrale de la chaîne  $P_4$  ne change pas son nombre de domination double, alors  $P_4$  est une chaîne  $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stable aussi. Les auteurs ont montré que les graphes  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$  sont les seules chaînes  $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stables.

**Proposition 2.31 (Chellali et al. [59]).** *Une chaîne  $P_n$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stable si et seulement si  $n \in \{2, 3, 4\}$ .*

### 2.5.3 Graphes $\gamma_{\times 2}$ -AE-stables et arbres $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stables

Avant de caractériser les arbres  $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stables, Chellali et Haynes ont donné une condition nécessaire et suffisante pour les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -AE-stables (respectivement,  $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stables).

**Théorème 2.32 (Chellali et al. [59]).** *Un graphe  $G$  ayant un degré minimum  $\delta(G) \geq 2$  (respectivement  $\delta(G) = 1$ ) est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-stable (respectivement  $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stable) si et seulement si pour toute arête  $uv \in E(G)$  (respectivement,  $uv \in F(G)$ ), il existe un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble  $D$  tel que l'une des conditions suivantes soit vérifiée:*

- 1)  $u, v \in V(G) \setminus D$ , ou
- 2)  $u, v \in D$  et ni  $u$  ni  $v$  est un sommet pendant dans  $G[D]$ , ou
- 3) l'un des sommets  $u$  et  $v$  appartient à l'ensemble  $D$ , disons  $u \in D$  et  $v \notin D$ , et  $|N(v) \cap D| \geq 3$ .

Afin de caractériser les arbres  $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stables, les auteurs ont défini la famille  $H$  de tous les arbres  $T$  qui peuvent être obtenus d'une séquence d'arbres  $T_1, T_2, \dots, T_p$  ( $p \geq 1$ ), ou  $T_1 = P_2$ ,  $T = T_p$ , et si  $p \geq 2$ ,  $T_{i+1}$  peut être obtenu récursivement de  $T_i$  à l'aide de l'une des opérations suivantes:

- **Opération  $O_1$ :** Attacher un sommet et le joindre à n'importe quel sommet support de  $T_i$ .
- **Opération  $O_2$ :** Attacher une chaîne  $P_2 = xy$  et joindre  $x$  à n'importe quel sommet support de  $T_i$ .
- **Opération  $O_3$ :** Attacher une étoile subdivisée  $K_{1,k}^*$  ( $k \geq 2$ ) de centre  $x$  et joindre  $x$  à n'importe quel sommet  $w$  de  $T_i$ , avec la condition que si  $k = 2$ , alors  $w$  appartient à un  $\gamma_{\times 2}(T_i)$ -ensemble.

Les auteurs ont terminé leur article en montrant le théorème suivant caractérisant les arbres  $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stables:

**Théorème 2.33 (Chellali et al. [59]).** *Un arbre non-trivial  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-semi-stable si et seulement si  $T \in H$ .*

### CHAPITRE 3

## GRAPHES CRITIQUES PAR RAPPORT AUX ARETES ENLEVEES

Dans le présent chapitre, nous nous intéressons aux graphes dont le nombre de domination double augmente lorsqu'une arête quelconque est enlevée. Rappelons que l'étude des graphes dont le nombre de domination est altéré quand n'importe quelle arête est enlevée a été initiée par Walikar et Acharya dans [16]. Depuis, d'autres types de domination ont fait l'objet d'études similaires comme la domination stable [60], la domination sécurisée [61], la domination totale [62] ou encore la domination restreinte totale [63].

La plus grande partie des résultats qui sont présentés dans ce chapitre ont été élaborés en collaboration avec Blidia, Chellali et Maffray et ont fait l'objet d'un article publié dans *Australasian journal of combinatorics* [64] dans lequel nous avons initié l'étude de cette famille de graphes. Ces résultats ont été également acceptés comme communication dans COSI'2010 [65]. Les résultats les plus importants que nous avons obtenus concernent des classes particulières de graphes comme les arbres, les graphes sans  $P_4$  et les graphes sans  $P_5$  pour lesquels des caractérisations ont été établies, et ce grâce à une condition nécessaire et suffisante pour les graphes arête-enlevée-critiques en général.

Un graphe  $G$  est dit arête enlevée critique par rapport à la domination double ( $\gamma_{\times 2}$ -arête -enlevée-critique), ou simplement  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique, si pour toute arête  $e \in E(G)$ ,  $\gamma_{\times 2}(G - e) > \gamma_{\times 2}(G)$ . Si  $e$  est une arête pendante, alors le graphe partiel  $G - e$  contient un sommet isolé et dans ce cas, nous posons  $\gamma_{\times 2}(G - e) = +\infty$ . Par conséquent, montrer qu'un graphe est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique reviendrait à montrer que l'effacement de n'importe quelle arête non-pendante augmente le nombre de domination double. Notons que cette

définition a été utilisée pour d'autres paramètres de domination qui ne sont définis que pour des graphes sans sommets isolés (voir [62] et [63]). L'ensemble des arêtes non-pendantes du graphe  $G$  sera noté  $X_G \subseteq E(G)$ . Clairement, si  $X_G = \emptyset$ , alors  $G$  est une étoile non-triviale et donc  $G$  serait un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.

### 3.1 Premiers résultats

En présentant les propriétés de la domination double dans le chapitre 2, nous avons remarqué que tous les sommets supports et tous leurs sommets pendants doivent impérativement appartenir à tout ensemble dominant double d'un graphe. Nous commençons par formuler cette propriété qui sera utilisée pour montrer plusieurs résultats de ce chapitre.

**Remarque 3.1.** *Tout EDD d'un graphe contient tous ses supports et tous ses sommets pendants.*

Le fait d'enlever une arête non-pendante d'un graphe  $G$  peut changer son nombre de domination double ou le laisser inchangé. En effet, si on enlève l'arête incidente aux deux sommets supports d'une chaîne  $P_4$ , le nombre de domination double du graphe obtenu demeure 4. D'autre part, sachant que  $\gamma_{\times 2}(C_3) = 2$ , l'effacement de l'une des trois arêtes du cycle  $C_3$  produit une chaîne  $P_3$  ayant un nombre de domination double égal à 3. On peut de plus augmenter le nombre de domination double d'une chaîne  $P_8$  de deux si on enlève l'arête du milieu (pour avoir deux chaînes  $P_4$ ). Dans notre premier résultat, nous montrons que le fait d'effacer une arête non-pendante d'un graphe  $G$  peut augmenter le nombre de domination double de  $G$  d'au plus deux.

**Théorème 3.2 (Khelifi et al. [64]).** *Soit  $G$  un graphe sans sommets isolés. Alors  $\gamma_{\times 2}(G) \leq \gamma_{\times 2}(G - e) \leq \gamma_{\times 2}(G) + 2$  pour toute arête non-pendante  $e \in E(G)$ .*

Preuve. Soit  $e = xy$  une arête non-pendante de  $G$ . Il est clair que tout  $\gamma_{\times 2}(G - e)$ -ensemble est un ensemble dominant double de  $G$ , et donc  $\gamma_{\times 2}(G) \leq \gamma_{\times 2}(G - e)$ . Soit maintenant  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble. Si  $S \cap \{x, y\} = \emptyset$ , alors  $S$  est un EDD de  $G - e$  et donc  $\gamma_{\times 2}(G - e) \leq \gamma_{\times 2}(G)$ . Supposons, sans perte de généralité, que  $S \cap \{x, y\} = \{y\}$ .

Puisque  $x$  possède deux voisins dans  $S$ ,  $S \cup \{x\}$  est un EDD de  $G - e$  impliquant que  $\gamma_{\times 2}(G - e) \leq \gamma_{\times 2}(G) + 1$ . En dernier, supposons que  $\{x, y\} \subseteq S$ . Examinons trois cas.

Si les deux sommets  $x$  et  $y$  sont de degrés au moins deux dans  $G[S]$ , alors puisque  $e$  est une arête non-pendante,  $S$  reste un EDD de  $G - e$  d'où  $\gamma_{\times 2}(G - e) \leq \gamma_{\times 2}(G)$ . Supposons que  $x$  et  $y$  sont des sommets pendants dans  $G[S]$ . Puisque  $e = xy$  est une arête non-pendante, chacun de  $x$  et  $y$  possède un voisin dans  $V - S$ . Soient  $x', y' \in V - S$  les voisins de  $x$  et  $y$ , respectivement. Alors  $S \cup \{x', y'\}$  est un EDD de  $G - e$  et donc  $\gamma_{\times 2}(G - e) \leq \gamma_{\times 2}(G) + 2$ . Pour terminer, supposons, sans perte de généralité, que  $x$  est un sommet de degré un dans  $G[S]$ , et  $y$  de degré au moins deux dans  $G[S]$ . Puisque  $xy$  est une arête non-pendante, soit  $x' \in V - S$  un voisin quelconque de  $x$ . Alors  $S \cup \{x'\}$  est un EDD de  $G - e$ , et donc  $\gamma_{\times 2}(G - e) \leq \gamma_{\times 2}(G) + 1$ .  $\square$

Une conséquence immédiate du Théorème 3.2 est qu'il n'existe aucun graphe dont le nombre de domination double diminue suite à la suppression de n'importe quelle arête.

La remarque suivante découle directement du fait que la suppression d'une arête incidente à deux supports d'un graphe n'a aucune influence sur son nombre de domination double:

**Remarque 3.3 (Khelifi et al. [64]).** *Si  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique, alors  $G$  ne contient pas de supports adjacents.*

Aussi, effacer n'importe quelle arête non-pendante d'une étoile subdivisée  $K_{1,t}^*$  avec  $t \geq 3$  n'a pas d'influence sur le nombre de domination double. Ceci nous mène à la propriété suivante:

**Remarque 3.4 (Khelifi et al. [64]).** *Soit  $G$  le graphe obtenu d'une étoile subdivisée  $K_{1,r}^*$  ( $r \geq 2$ ) de centre  $y$  en ajoutant une arête joignant  $y$  à un sommet  $x$  d'un graphe non-trivial  $G'$ . Alors  $G$  n'est pas un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.*

Preuve. Supposons que  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique. Soient  $u_1, u_2, \dots, u_r$  les sommets supports de l'étoile subdivisée  $K_{1,r}^*$  et soit  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble. D'après

la Remarque 3.1, tout sommet  $u_i$  appartient à  $S$ . Si  $y \in S$ , alors le fait d'enlever n'importe quelle arête  $yu_i$  ne va pas augmenter le nombre de domination double de  $G$ . Par conséquent,  $y \notin S$  et donc  $S$  est un EDD de  $G - xy$  ce qui implique que  $\gamma_{\times 2}(G - e) \leq \gamma_{\times 2}(G)$ , une contradiction. On en conclut donc que  $G$  n'est pas un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.  $\square$

Notre objectif à présent est de mieux connaître les propriétés structurelles des graphes  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques. Soit  $G$  un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique et soit  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble. En se basant sur le fait que suite à l'effacement de n'importe quelle arête  $e \in X_G$ , l'ensemble  $S$  ne devrait plus être un EDD de  $G - e$ , une condition nécessaire et suffisante pour les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques est établie.

**Théorème 3.5 (Khelifi et al. [64]).** *Un graphe  $G$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique si et seulement si pour tout  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble  $S$  les conditions suivantes sont vérifiées.*

- i) Toute composante connexe de  $G[S]$  est une étoile.*
- ii)  $V - S$  est un ensemble indépendant.*
- iii) Tout sommet de  $V - S$  est de degré deux.*

Preuve. Supposons que  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique et soit  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble quelconque. Remarquons que le sous-graphe induit  $G[S]$  ne contient aucun cycle, sinon le fait d'enlever n'importe quelle arête du cycle n'augmenterait pas le nombre de domination double. Par conséquent,  $G[S]$  est une forêt. Si  $G[S]$  contient une composante connexe de diamètre au moins trois, alors il existe une arête sur la chaîne diamétrale d'une telle composante dont l'effacement n'augmente pas le nombre de domination double, une contradiction. Puisque  $G[S]$  ne contient pas de sommets isolés, alors toute composante connexe de  $G[S]$  est de diamètre au plus deux, ce qui implique que c'est une étoile. Supposons maintenant que  $V - S$  contient deux sommets adjacents  $x$  et  $y$ . Alors  $S$  reste toujours un EDD de  $G - xy$  et donc  $\gamma_{\times 2}(G - xy) \leq \gamma_{\times 2}(G)$ , une contradiction. Par conséquent,  $V - S$  est un ensemble indépendant. En dernier, supposons qu'il existe un sommet  $x \in V - S$  de degré au moins trois. D'après

la condition (ii)  $N(x) \subset S$ , et donc le fait d'enlever n'importe quelle arête incidente à  $x$  n'augmente pas le nombre de domination double, une contradiction.

Pour montrer la réciproque, on admet que pour tout  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble, les conditions (i), (ii) et (iii) sont satisfaites. Supposons que  $G$  n'est pas  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique, et soit  $uv$  une arête appartenant à  $X_G$  telle que  $\gamma_{\times 2}(G-uv) = \gamma_{\times 2}(G)$ . Soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(G-uv)$ -ensemble. Il est clair que  $D$  est un EDD de  $G$ . Puisque  $\gamma_{\times 2}(G-uv) = \gamma_{\times 2}(G)$ ,  $D$  est aussi  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble. Si  $\{u, v\} \cap D = \emptyset$ , alors  $D$  est un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble tel que  $V - D$  n'est pas un ensemble indépendant dans  $G$ . Ainsi au moins l'un des deux sommets  $u$  et  $v$  appartient à  $D$ . Supposons en premier que  $\{u, v\} \subset D$ . Alors  $u$  possède un voisin, disons  $x \neq v$ , dans  $D$  et d'une manière similaire,  $v$  possède un voisin  $y \neq u$  dans  $D$  (avec la possibilité que  $x = y$ ). Il s'ensuit que  $D$  est un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble tel que l'ensemble  $\{u, v, x, y\}$  induit soit un cycle  $C_3$ , un cycle  $C_4$  ou bien une chaîne  $P_4$  dans  $G[D]$ , une contradiction. Donc, sans perte de généralité, on suppose que  $u \in D$  et  $v \notin D$ . Alors  $v$  est dominé au moins par deux sommets de  $D$  dans  $G-uv$ . Mais alors la condition (iii) n'est pas vérifiée pour  $D$  dans  $G$  puisque  $v$  aurait au moins trois voisins. Par conséquent,  $D$  est un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble pour lequel les conditions (i), (ii) et (iii) ne sont pas satisfaites, une contradiction. Il s'ensuit que  $G$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.  $\square$

Le théorème 3.5 nous permet d'affirmer que tout sommet de degré au moins trois d'un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique doit impérativement appartenir à tout EDD de cardinal minimum.

**Corollaire 3.6 (Khelifi et al. [64]).** *Si  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique, alors tout  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble contient l'ensemble de tous les sommets de degré au moins trois.*

On peut en déduire aussi que si le degré minimum d'un graphe est au moins égal à trois, alors ce dernier n'est pas  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.

**Corollaire 3.7 (Khelifi et al. [64]).** *Si  $G$  est un graphe tel que  $\delta(G) \geq 3$ , alors  $G$  n'est pas  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.*

Nous donnons maintenant une remarque qui nous servira pour caractériser les graphes réguliers  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques.

**Remarque 3.8.** •  $[34] \gamma_{\times 2}(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ .

$$\bullet [40] \gamma_{\times 2}(P_n) = \begin{cases} 2n/3 + 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ 2 \lceil n/3 \rceil & \text{sinon} \end{cases}$$

**Proposition 3.9 (Khelifi et al. [64]).** *Pour  $k \geq 2$ , un graphe  $k$ -régulier connexe  $G$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique si et seulement si  $G = C_n$ , avec  $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ .*

Preuve. Supposons que  $G$  est un graphe  $k$ -régulier connexe. D'après le Corollaire 3.7,  $k \leq 2$ . Donc  $k = 2$  ce qui entraîne que  $G$  est un cycle. En utilisant la Remarque 3.8, nous pouvons voir sans peine que l'ordre  $n$  de  $G$  doit satisfaire  $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ .

La réciproque est simple à vérifier. □

Dans les trois prochaines sections, nous nous penchons vers des caractérisations de quelques classes de graphes  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques. Il s'agit des arbres, des graphes sans  $P_4$  et des graphes sans  $P_5$ .

### 3.2 Arbres $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques

Dans le but de faciliter l'étude des arbres, ceux-ci seront souvent enracinés. Un arbre  $T$  enraciné est une arborescence (arbre où les arêtes sont remplacées par des arcs) admettant un sommet  $r$  à partir duquel il existe un chemin vers tout autre sommet de  $T$ . Le sommet  $r$  dans ce cas est unique, on l'appelle **racine**. L'arbre  $T$  ainsi défini sera noté  $T_r$ . Pour un sommet  $v$  d'un arbre enraciné, le parent  $p(v)$  de  $v$  est l'unique sommet tel qu'il existe un arc de  $p(v)$  vers  $v$ . Le fils de  $v$  est un sommet  $u$  tel que  $p(u) = v$ . Un descendant de  $v$  est un sommet  $u$  pour lequel il existe un chemin de  $v$  à  $u$  dans  $T_r$ . Il est à noter que si l'on considère un arbre enraciné, l'orientation sera implicite et ainsi on parlera d'arêtes au lieu d'arcs. Nous notons pour un sommet  $v$  d'un arbre enraciné  $T$  :

$$C(w) = \{u \in V / u \text{ est un sommet fils de } w\},$$

$$D(w) = \{u \in V \mid u \text{ est un sommet descendant de } w\},$$

$$D[w] = D(w) \cup \{w\}, \text{ et}$$

$$T_w = D[w] \cap T.$$

Aussi, pour un arbre  $T$ , nous définissons **l'ensemble des sommets branches** comme l'ensemble de tous les sommets de  $T$  qui ont un degré au moins égal à trois. L'ensemble des sommets branches de  $T$  sera noté  $B(T)$ .

Afin de montrer les résultats principaux de cette section, nous aurons besoin de connaître le nombre de domination double d'un arbre obtenu d'un autre arbre en lui attachant un ou plusieurs sommets.

**Remarque 3.10 (Khelifi et al. [64]).** *Si  $T$  est un arbre obtenu d'un arbre non-trivial  $T'$  en attachant un sommet à un sommet support, alors  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 1$ .*

**Remarque 3.11 (Khelifi et al. [64]).** *Soit  $T$  un arbre obtenu d'un arbre non-trivial  $T'$  en attachant  $k$  ( $k \geq 1$ ) chaînes  $P_3 = a_i b_i c_i$  par les arêtes  $c_i x$  pour tout  $i$ , à un sommet  $x$  de  $T'$  qui appartient à au moins un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. Alors  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ .*

Preuve. Soit  $S'$  un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble contenant  $x$ . Alors  $S' \cup \{a_i, b_i : 1 \leq i \leq k\}$  est un EDD de  $T$  et donc  $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ . Soit maintenant  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble quelconque. D'après la Remarque 3.1,  $D$  contient  $a_i, b_i$  pour tout  $i$ . Si  $D$  contient trois sommets de l'ensemble  $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ , disons  $c_1, c_2, c_3$ , alors  $x \notin D$  (sinon  $D - \{c_1\}$  est un EDD de  $T$ ) et donc  $\{x\} \cup D - \{c_1, c_2\}$  serait un EDD de cardinal inférieur à celui de  $D$ , une contradiction. Par conséquent, tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble contient au plus deux sommets de l'ensemble  $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ . On peut supposer à présent, sans perte de généralité, que  $D \cap \{c_1, c_2, \dots, c_k\} = \emptyset$  (sinon, de tels sommets peuvent être remplacés par  $x$  ou/et un voisin de  $x$  dans  $T'$ ). Donc  $x$  appartient à  $D$  dans le but de double dominer tout sommet  $c_i$ , ce qui implique que  $\gamma_{\times 2}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T) - 2k$ . Il s'ensuit que  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ .  $\square$

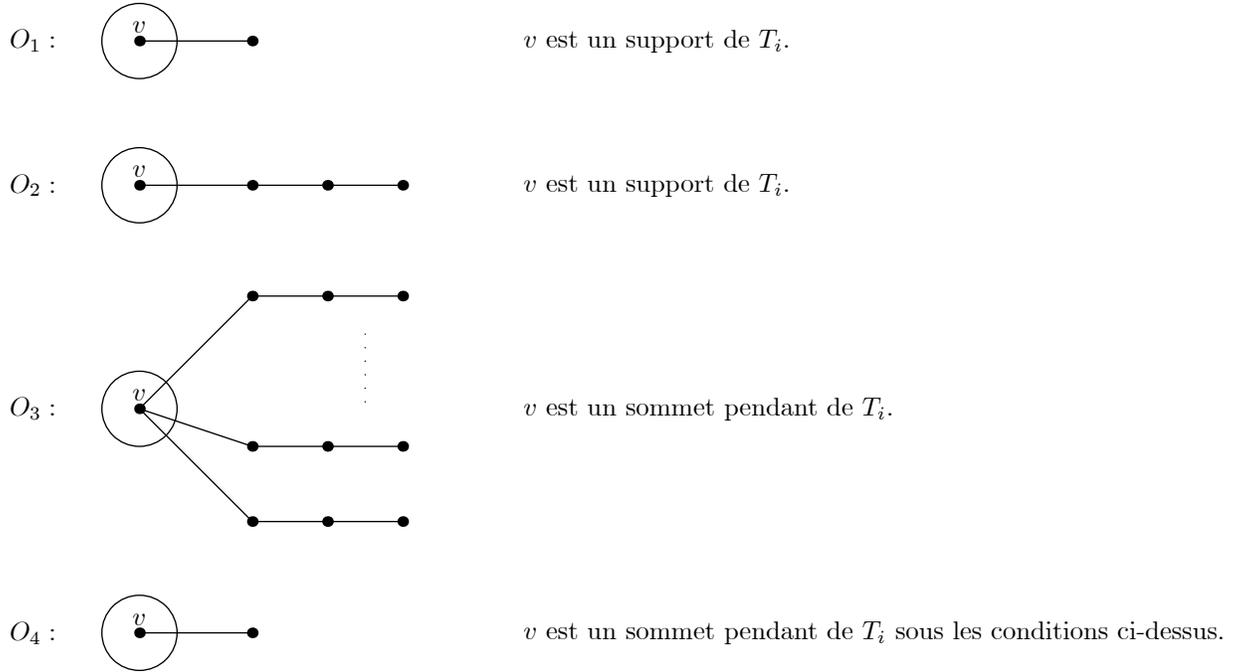
**Remarque 3.12 (Khelifi et al. [64]).** Soit  $T$  un graphe obtenu d'un arbre non-trivial  $T'$  en attachant un nouveau sommet  $x$  à un sommet pendant  $u$  dont le support  $v$  est adjacent à au moins une chaîne pendante  $P_3$ . Alors  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 1$ .

Preuve. Soient  $x_i y_i z_i$ , avec  $1 \leq i \leq k$ ,  $k$  chaînes pendantes  $P_3$  attachées à  $v$  par les arêtes  $vx_i$ . Il est clair que si  $S'$  est un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble, alors  $S' \cup \{x\}$  est un EDD de  $T$ , et donc  $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T') + 1$ . Soit maintenant  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble quelconque. Alors  $S$  contient les sommets  $x, u, y_i, z_i$  pour tout  $i$ , et sans perte de généralité,  $v \in S$  (sinon la minimalité de  $S$  implique que  $k = 1$  et  $x_1 \in S$ , et donc  $x_1$  peut être remplacé par  $v$  dans  $S$ ). Par conséquent,  $S \cap V(T')$  est un EDD de  $T'$  et donc  $\gamma_{\times 2}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T) - 1$  et le résultat s'ensuit.  $\square$

Nous arrivons maintenant à la caractérisation constructive de la famille des arbres  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques. On définit la famille  $\mathcal{F}$  de tous les arbres qui peuvent être obtenus à partir de la séquence d'arbres  $T_1, T_2, \dots, T_j$  ( $j \geq 1$ ) telle que  $T_1$  est une étoile  $K_{1,r}$  avec  $r \geq 1$ ,  $T = T_j$ , et si  $j \geq 2$ ,  $T_{i+1}$  peut être obtenu d'une manière récursive de  $T_i$  en utilisant l'une des opérations suivantes:

- **Opération  $\mathcal{O}_1$ :** Ajouter un nouveau sommet et le joindre à un sommet support de  $T_i$ .
- **Opération  $\mathcal{O}_2$ :** Ajouter une chaîne  $P_3$  et joindre l'un de ses sommets pendants à un support de  $T_i$ .
- **Opération  $\mathcal{O}_3$ :** Ajouter  $k$  ( $k \geq 1$ ) chaînes  $P_3$  et joindre un sommet pendant de chaque chaîne  $P_3$  au même sommet pendant de  $T_i$ .
- **Opération  $\mathcal{O}_4$ :** Ajouter un nouveau sommet  $u$  et le joindre à un sommet pendant  $v$  de  $T_i$  avec la condition que le support  $x$  adjacent à  $v$  dans  $T_i$  soit de degré  $k + 2$  et adjacent à  $k \geq 1$  chaînes pendantes  $P_3$  tel que tout voisin de  $x$  excepté  $v$  est de degré deux et n'appartient à aucun  $\gamma_{\times 2}(T_i)$ -ensemble.

Voir dans la figure 3.1 une description des quatres opérations de la construction de la famille  $\mathcal{F}$ .

FIGURE 3.1. La construction de la famille  $\mathcal{F}$ .

Rappelons que les sommets qui n'appartiennent à aucun ensemble dominant double minimum d'un arbre ont été caractérisés par Blidia, Chellali et Khelifi dans [53] et peuvent être déterminés en un temps polynomial.

Nous montrons en premier que tout arbre appartenant à la famille  $\mathcal{F}$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.

**Lemme 3.13 (Khelifi et al. [64]).** *Si  $T \in \mathcal{F}$ , alors  $T$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.*

*Preuve.* Soit  $T \in \mathcal{F}$ . Alors  $T$  peut être obtenu d'une séquence  $T_1, T_2, \dots, T_j$  ( $j \geq 1$ ) d'arbres telle que  $T_1$  est une étoile  $K_{1,r}$  avec  $r \geq 1$  et  $T = T_j$ , et si  $j \geq 2$ , alors  $T_{i+1}$  est obtenu  $T_i$  par l'une des quatre opérations définie ci-dessus. Nous procédons par induction sur  $j$ . Si  $j = 1$ , alors  $T$  est une étoile  $K_{1,r}$  et donc  $T$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.

Supposons que  $j \geq 2$  et que le résultat est vérifié pour tous les arbres  $T$  pouvant être construits à l'aide d'une séquence de longueur au plus  $j - 1$ . Soit  $T$  un arbre de  $\mathcal{F}$  construit à partir d'un arbre  $T' = T_{j-1}$ . Notons que par l'hypothèse d'induction,  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique. Examinons les quatre cas suivants:

**Cas 1.**  $T$  est obtenu de  $T'$  par l'Opération  $\mathcal{O}_1$ .

Soit  $v$  un sommet support de  $T'$  et soit  $u$  le nouveau sommet attaché à  $v$ . Il est clair que  $X_T = X_{T'}$  et d'après la Remarque 3.10,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 1$ . Nous allons montrer que  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique. Puisque  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique, l'effacement de n'importe quelle arête  $e \in X_{T'}$  produit deux sous-arbres  $T'_1$  et  $T'_2$  avec  $\gamma_{\times 2}(T' - e) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + \gamma_{\times 2}(T'_2) > \gamma_{\times 2}(T')$ . Aussi, le fait d'enlever  $e$  de  $T$  produit deux sous-arbres  $T_1$  et  $T_2$ , où  $T_1 = T'_1 \cup \{u\}$ . D'après la Remarque 3.10,  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 1$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(T - e) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \gamma_{\times 2}(T'_2) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 1 + \gamma_{\times 2}(T'_2) > \gamma_{\times 2}(T') + 1 = \gamma_{\times 2}(T)$ . Par conséquent,  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.

**Cas 2.**  $T$  est obtenu de  $T'$  par l'Opération  $\mathcal{O}_2$ .

Soit  $xyz$  la chaîne  $P_3$  ajoutée et attachée par une arête  $xv$  à un sommet support  $v$  de  $T'$ . Alors d'après la Remarque 3.11,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2$ . Pour montrer que  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique, nous considérons une arête  $e$  de  $X_T$ , où  $X_T = X_{T'} \cup \{vx, xy\}$ .

- Si  $e \in X_{T'}$ , alors enlever l'arête  $e$  de  $T'$  donne deux sous-arbres  $T'_1$  et  $T'_2$ , où  $v \in T'_1$  avec  $\gamma_{\times 2}(T' - e) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + \gamma_{\times 2}(T'_2) > \gamma_{\times 2}(T')$ . Aussi, effacer  $e$  de  $T$  produit deux sous-arbres  $T_1$  et  $T'_2$ , où  $T_1 = T'_1 \cup \{x, y, z\}$ . Maintenant, d'après la Remarque 3.11,  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 2$ . Donc  $\gamma_{\times 2}(T - e) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \gamma_{\times 2}(T'_2) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 2 + \gamma_{\times 2}(T'_2) > \gamma_{\times 2}(T') + 2 = \gamma_{\times 2}(T)$ .
- Si  $e = vx$ , alors effacer  $e$  de  $T$  produit les sous-arbres  $T_1$  et  $T_2 = xyz$ , où  $\gamma_{\times 2}(T_2) = 3$  et  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T) - 2$ . Donc  $\gamma_{\times 2}(T - vx) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \gamma_{\times 2}(T_2) = \gamma_{\times 2}(T) + 1 > \gamma_{\times 2}(T)$ .
- En dernier, si  $e = xy$ , alors  $T - e = T_1 \cup T_2$  où  $T_2 = yz$ . Il est clair que  $\gamma_{\times 2}(T_2) = 2$  et  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T) - 2 + 1 = \gamma_{\times 2}(T) - 1$ . Donc  $\gamma_{\times 2}(T - xy) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \gamma_{\times 2}(T_2) = \gamma_{\times 2}(T) + 1 > \gamma_{\times 2}(T)$ .

Nous pouvons en conclure que pour toute arête  $e \in X_T$ ,  $\gamma_{\times 2}(T - e) > \gamma_{\times 2}(T)$ , ce qui implique que  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.

**Cas 3.**  $T$  est obtenu de  $T'$  par l'Opération  $\mathcal{O}_3$ .

Soient  $x_i y_i z_i$ , avec  $1 \leq i \leq k$ ,  $k$  chaînes  $P_3$  attachées par les arêtes  $vx_i$  à un sommet pendant  $v$  de  $T'$  et soit  $T$  l'arbre obtenu. D'après la Remarque 3.11,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ . Soit  $u$  le sommet support de  $v$  dans  $T'$ . Nous montrons que  $u$  appartient à tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Il est clair que si  $u$  est un support dans  $T$ , alors  $u$  est dans tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Donc nous supposons que  $u$  n'est pas un support dans  $T$ , et soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble qui ne contient pas  $u$ . Notons que  $y_i, z_i \in D$  pour tout  $i$ . Aussi, pour double dominer  $v$ ,  $D$  contient un sommet  $w \neq v$  qui est voisin de  $u$  et adjacent à un sommet  $w'$  dans  $D$ . Maintenant si  $v \in D$ , alors la minimalité de  $D$  entraîne que  $|D \cap \{x_1, x_2, \dots, x_k\}| = 1$ , disons  $x_1 \in D$  mais alors  $D_1 = (D - \{x_1\}) \cup \{u\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble et donc  $D'_1 = D_1 \cap T'$  est un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. Si  $v \notin D$  et puisque  $u \notin D$ , alors  $k \geq 2$  et  $x_i \in D$  pour tout  $i$ . Si  $k \geq 3$ , alors  $\{v, u\} \cup D - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  serait un EDD de  $T$  de cardinal inférieur à celui de  $D$ , une contradiction. Ainsi,  $k = 2$ , mais alors  $D_2 = (D - \{x_1, x_2\}) \cup \{u, v\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble et donc  $D'_2 = D_2 \cap T'$  est un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. Dans les deux cas,  $D'_1$  et  $D'_2$  sont deux  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensembles contenant une chaîne  $P_4 = uvww'$  induite, ce qui contredit le fait que  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -critique. Par conséquent,  $u$  appartient à tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble.

A présent, nous montrons que  $T$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique. Considérons une arête quelconque  $e \in X_T = X_{T'} \cup \{uv, vx_i, x_i y_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ . Notons que toutes les arêtes  $vx_i$  et  $x_i y_i$  jouent le même rôle que  $vx_1$  et  $x_1 y_1$ , respectivement.

- $e \in X_{T'}$ . Soient  $T'_1$  et  $T'_2$  les sous-arbres obtenus par l'effacement de  $e$  de  $T'$ . Clairement puisque  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique,  $\gamma_{\times 2}(T' - e) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + \gamma_{\times 2}(T'_2) > \gamma_{\times 2}(T')$ . Aussi, enlever  $e$  de  $T$  produit les sous-arbres  $T_1$  et  $T_2$ , où  $T_1 = T'_1 \cup \{x_i, y_i, z_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ . D'après la Remarque 3.11,  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 2k$ . Il s'ensuit que  $\gamma_{\times 2}(T - e) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \gamma_{\times 2}(T'_2) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 2k + \gamma_{\times 2}(T'_2) > \gamma_{\times 2}(T') + 2k = \gamma_{\times 2}(T)$ .
- $e = uv$ . Alors  $T - e$  est une forêt constituée de deux composantes  $T_1$  et  $T_2$ , où  $T_2$  est un arbre obtenu d'une étoile  $K_{1,k}$  telle que toute arête est subdivisée deux fois. On

peut sans peine voir que  $D_2 = \{v, x_1, y_i, z_i \mid 1 \leq i \leq k\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T_2)$ -ensemble et donc  $\gamma_{\times 2}(T_2) = 2k + 2$ . Aussi, puisque tout  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble peut être étendu à un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble en ajoutant l'ensemble  $D_2$ , alors  $\gamma_{\times 2}(T_1) \geq \gamma_{\times 2}(T) - 2k - 2$ . Supposons maintenant que  $D_1$  est un  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble de  $\gamma_{\times 2}(T) - 2k - 2$ . Donc l'ensemble  $D = D_1 \cup D_2$  serait un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Si  $u \notin D_1$ , alors  $D$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble qui ne contient pas  $u$ , ce qui contredit le fait que  $u$  appartient à tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Alors  $u \in D_1$ , et donc  $D - \{x_1\}$  est un EDD plus petit que  $D$ , une contradiction. Par conséquent,  $\gamma_{\times 2}(T_1) > \gamma_{\times 2}(T) - 2k - 2$  et donc  $\gamma_{\times 2}(T - e) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \gamma_{\times 2}(T_2) > \gamma_{\times 2}(T) - 2k - 2 + 2k + 2 = \gamma_{\times 2}(T)$ .

- $e = vx_1$ . Alors  $T - e$  est une forêt formée de deux composantes  $T_1$  et  $T_2 = x_1y_1z_1$ , où  $\gamma_{\times 2}(T_2) = 3$ . Si  $k = 1$ , alors  $v$  est un sommet pendant dans  $T_1$  et d'après la Remarque 3.11,  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T) - 2$ . Si  $k \geq 2$ , alors du fait qu'il existe au moins un  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble qui contient  $v$  et donc par la Remarque 3.11,  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T) - 2$ . Dans tous les cas, nous avons  $\gamma_{\times 2}(T - e) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \gamma_{\times 2}(T_2) = \gamma_{\times 2}(T) + 1 > \gamma_{\times 2}(T)$ .
- $e = x_1y_1$ . Alors  $T - e$  est une forêt avec deux composantes  $T_1$  et  $T_2 = y_1z_1$ , où  $\gamma_{\times 2}(T_2) = 2$ . Puisque n'importe quel  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble peut être étendu à un EDD de  $T$  en ajoutant  $\{y_1, z_1\}$ ,  $\gamma_{\times 2}(T_1) \geq \gamma_{\times 2}(T) - 2$ . Supposons que  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T) - 2$ , et soit  $S_1$  un  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble. Puisque  $v$  est un support et  $x_1$  est un sommet pendant dans  $T_1$ , d'après la Remarque 3.1,  $\{v, x_1\} \subset S_1$ . Alors  $S = S_1 \cup \{y_1, z_1\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Maintenant si  $u \in S_1$ , alors  $S - \{x_1\}$  serait un EDD de cardinal inférieur à celui de  $S$ , ce qui est impossible. Donc  $u \notin S_1$ , mais alors  $S$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble qui ne contient pas  $u$ , ce qui contredit le fait que  $u$  appartient à tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Ainsi,  $\gamma_{\times 2}(T_1) > \gamma_{\times 2}(T) - 2$ . Par conséquent, nous avons  $\gamma_{\times 2}(T - e) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \gamma_{\times 2}(T_2) > \gamma_{\times 2}(T) - 2 + 2 = \gamma_{\times 2}(T)$ .

Dans tous les cas ci-dessus, on a  $\gamma_{\times 2}(T - e) > \gamma_{\times 2}(T)$  et donc  $T$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.

**Cas 4.**  $T$  est obtenu de  $T'$  par l'Opération  $\mathcal{O}_4$ .

Utilisons la même terminologie donnée dans l'Opération  $\mathcal{O}_4$  et soient  $v_i u_i z_i$ , avec  $1 \leq i \leq k$ , les  $k$  chaînes pendantes  $P_3$  attachées par les arêtes  $xv_i$  à  $x$ . D'après la Remarque 3.12,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 1$ . Soit maintenant  $e$  une arête quelconque de  $X_T = X_{T'} \cup \{xv\}$ .

- $e \in X_{T'} - \{xv_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ . Alors  $T' - e$  est une forêt constituée de deux composantes  $T'_1$  et  $T'_2$ , où  $x \in V(T'_1)$ , et puisque  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique,  $\gamma_{\times 2}(T' - e) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + \gamma_{\times 2}(T'_2) > \gamma_{\times 2}(T')$ . Aussi  $T - e$  est une forêt formée de deux composantes  $T_1$  et  $T'_2$ , où  $V(T_1) = V(T'_1) \cup \{u\}$ . Si  $k \geq 2$  ou bien  $e \neq v_1 u_1$ , alors d'après la Remarque 3.12,  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 1$ . Si  $k = 1$  et  $e = v_1 u_1$ , alors  $x$  est un support dans  $T'_1$  et  $T_1$ , et on a évidemment  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 1$ . Pour tous les cas, nous avons  $\gamma_{\times 2}(T - e) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \gamma_{\times 2}(T'_2) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 1 + \gamma_{\times 2}(T'_2) > \gamma_{\times 2}(T') + 1 = \gamma_{\times 2}(T)$ .
- $e = xv_i$  pour un certain indice  $i$ . Alors  $T' - e = T'_1 \cup T'_2$ , où  $x \in V(T'_1)$  et  $T'_2$  est une chaîne  $P_3$ . Aussi,  $T - e = T_1 \cup T'_2$ , où  $V(T_1) = V(T'_1) \cup \{u\}$ . Si  $k \geq 2$ , alors d'après la Remarque 3.12,  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 1$ . Supposons maintenant que  $k = 1$ , et donc  $e = xv_1$ . Clairement  $\gamma_{\times 2}(T_1) \leq \gamma_{\times 2}(T'_1) + 1$  puisque tout  $\gamma_{\times 2}(T'_1)$ -ensemble peut être étendu à un EDD de  $T_1$  en ajoutant le sommet  $u$ . Nous allons montrer que l'égalité est vérifiée pour la dernière inégalité. Supposons le contraire que  $\gamma_{\times 2}(T_1) < \gamma_{\times 2}(T'_1) + 1$ . On prétend au début que  $x$  n'appartient à aucun  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble. Supposons que  $D$  est un  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble contenant  $x$ . Alors par la Remarque 3.1,  $u, v \in D$ , mais alors l'ensemble  $D - \{v\}$  est un EDD de  $T'_1$  impliquant que  $\gamma_{\times 2}(T'_1) \leq |D| - 1 = \gamma_{\times 2}(T_1) - 1$ , une contradiction. Donc  $x$  n'appartient à aucun  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble. Maintenant puisque tout  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble peut être étendu à un EDD de  $T$  en ajoutant les sommets  $v_1, u_1, z_1$ , alors nous avons  $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T_1) + 3$ . Supposons que  $\gamma_{\times 2}(T) < \gamma_{\times 2}(T_1) + 3$ , c'est à dire  $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T_1) + 2$  et soit  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble quelconque. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $x$  appartient à  $S$  (si  $x \notin S$ , alors on peut remplacer  $v_1$  par  $x$  dans  $S$ ), et donc  $S' = S \cap V(T_1)$  est un EDD de  $T_1$ . Puisque  $v_1 \notin S$ ,  $u_1, z_1 \in S$ , il résulte que  $\gamma_{\times 2}(T_1) \leq |S'| =$

$\gamma_{\times 2}(T) - 2$ , d'où  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T_1) + 2$ . Ainsi  $S$  est un  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble qui contient  $x$ , ce qui contredit le fait que  $x$  n'appartient à aucun  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble. Par conséquent,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T_1) + 3$ . Soit maintenant  $S_1$  un  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble quelconque. D'après la Remarque 3.1,  $u, v \in S_1$  et puisque  $x \notin S_1$ , le deuxième voisin de  $v$ , disons  $y \in S_1$ . D'autre part,  $y$  doit avoir un voisin, disons  $z$ , dans  $S_1$ , impliquant que  $S = S_1 \cup \{x, u, z\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Maintenant d'après la Remarque 3.12,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 1$  et du fait que  $u, v \in S$ , nous pouvons affirmer que  $S'' = S - \{u\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble qui contient les sommets  $v, x, y$  et  $z$ , mais alors ces derniers sommets induisent une chaîne  $P_4$  dans  $G[S'']$ , une contradiction, puisque  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique. Par conséquent,  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 1$  pour  $k = 1$  et c'est aussi vrai pour  $k \geq 2$ . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(T - e) &= \gamma_{\times 2}(T_1) + \gamma_{\times 2}(T'_2) \\ &= \gamma_{\times 2}(T'_1) + 1 + \gamma_{\times 2}(T'_2) > \gamma_{\times 2}(T') + 1 = \gamma_{\times 2}(T). \end{aligned}$$

- $e = xv$ . Alors  $T - e = T_1 \cup T_2$ , où  $T_2$  est une chaîne  $P_2 = uv$ . Donc  $\gamma_{\times 2}(T - e) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \gamma_{\times 2}(T_2) = \gamma_{\times 2}(T_1) + 2$ . Nous pouvons affirmer aussi que  $\gamma_{\times 2}(T - e) \geq \gamma_{\times 2}(T)$  puisque tout EDD de  $T - e$  est un EDD de  $T$ . Supposons maintenant que  $\gamma_{\times 2}(T - e) = \gamma_{\times 2}(T_1) + 2 = \gamma_{\times 2}(T)$  et soit  $S_1$  un  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $x$  appartient à  $S_1$ . Notons que pour être double dominé dans  $T_1$ ,  $x$  possède un voisin, disons  $w$ , dans  $S_1$ . Alors  $S = S_1 \cup \{v, u\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble, et donc  $S' = S - \{u\}$  serait un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble qui contient  $w$ , une contradiction avec la construction exigeant qu'aucun voisin de  $x$  excepté  $v$  n'appartient à un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. Ainsi,  $\gamma_{\times 2}(T - e) > \gamma_{\times 2}(T)$ .

Par conséquent, dans tous les cas ci-dessus,  $\gamma_{\times 2}(T - e) > \gamma_{\times 2}(T)$  et donc  $T$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.  $\square$

A présent, nous sommes prêts pour caractériser les arbres  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques.

**Théorème 3.14 (Khelifi et al. [64]).** *Un arbre non-trivial  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique si et seulement si  $T \in \mathcal{F}$ .*

Preuve. Si  $T \in \mathcal{F}$ , alors d'après le Lemme 3.13,  $T$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique. Pour prouver la condition nécessaire, nous procédons par induction sur l'ordre  $n$  de  $T$ . Puisque les étoiles sont  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques et appartiennent à  $\mathcal{F}$ , et les double étoiles ne sont pas  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques (d'après la Remarque 3.3), nous supposons que  $T$  possède un diamètre supérieur ou égal à quatre. Le plus petit arbre de diamètre quatre est la chaîne  $P_5$  qui peut être obtenue d'une étoile  $K_{1,1}$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{O}_3$ . Donc la chaîne  $P_5$  appartient à la famille  $\mathcal{F}$ . Supposons maintenant que  $\text{diam}(T) = 4$  et  $T \neq P_5$ . Soit  $x_1x_2x_3x_4x_5$  la plus longue chaîne dans  $T$ . Il est clair que  $x_1, x_5$  sont des sommets pendants et  $x_2, x_4$  sont leurs supports, respectivement. Si  $\deg_T(x_3) = 2$ , alors au moins l'un des sommets  $x_2$  et  $x_4$  est un support adjacent à au moins deux sommets pendants. Donc  $T$  appartient à  $\mathcal{F}$  et résulte d'une chaîne  $P_5$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{O}_1$  sur  $x_2$  et/ou sur  $x_4$ . Si  $\deg_T(x_3) \geq 3$ , alors par la Remarque 3.3,  $x_3$  n'est pas un sommet support et donc tout voisin de  $x_3$  est un support, mais alors  $\gamma_{\times 2}(T - x_2x_3) \leq \gamma_{\times 2}(T)$ , ce qui contredit le fait que  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique. Ainsi, nous supposons que  $\text{diam}(T) \geq 5$ . Le plus petit arbre  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique de diamètre cinq c'est la chaîne  $P_6$  qui appartient à  $\mathcal{F}$  puisqu'elle peut être obtenue d'une étoile  $K_{1,2}$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{O}_3$ .

Soit  $n \geq 7$  et supposons que tout arbre  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique  $T'$  d'ordre  $2 \leq n' < n$  appartient à  $\mathcal{F}$ . Soient  $T$  un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique d'ordre  $n$  et  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble quelconque. Si un support de  $T$ , disons  $y$ , est adjacent à au moins deux sommets pendants, alors soit  $T'$  l'arbre obtenu de  $T$  en effaçant un sommet pendant adjacent à  $y$ . D'après la Remarque 3.10,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 1$ . Puisque  $X_{T'} = X_T$ , alors  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique. En utilisant l'hypothèse d'induction sur  $T'$ , on a  $T' \in \mathcal{F}$ . Il s'ensuit que  $T \in \mathcal{F}$ , puisqu'il est obtenu de  $T'$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{O}_1$ . Ainsi, nous pouvons supposer pour la suite de la preuve que tout support est adjacent à un seul sommet pendant.

Enracinons l'arbre  $T$  en un sommet  $x$  d'excentricité maximum  $\text{diam}(T)$ . Soit  $u$  un sommet à la distance  $\text{diam}(T) - 1$  de  $x$  sur une plus longue chaîne partant de  $x$ , et soit  $r$  un fils de  $u$  sur cette chaîne. Soient  $w_1, v$  les parents de  $u$  et  $w_1$ , respectivement. Il

est clair que  $r$  est un sommet pendant, et  $u$  un support tel que  $\deg_T(u) = 2$ . D'après la Remarque 3.3,  $w_1$  n'est pas un support. Maintenant si  $\deg_T(w_1) \geq 3$ , alors  $T_{w_1}$  est une étoile subdivisée et donc  $T$  est un arbre obtenu à partir d'un arbre  $T' = T - T_{w_1}$  et une étoile subdivisée  $T_{w_1}$  de centre  $w_1$  en ajoutant l'arête  $w_1v$ . Dans ce cas, d'après la Remarque 3.4,  $T$  n'est pas  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique, ce qui est une contradiction. Il s'ensuit que  $\deg_T(w_1) = 2$ . On considère les deux cas suivants:

**Cas 1.**  $v$  est un sommet support. Soit  $T' = T - \{r, u, w_1\}$ . Alors  $X_{T'} = X_T - \{vw_1, w_1u\}$  et d'après la Remarque 3.11,  $\gamma_{\times 2}(T') = \gamma_{\times 2}(T) - 2$ . Soit maintenant  $e$  une arête quelconque de  $X_{T'}$ . Alors  $T - e = T_1 \cup T_2$  et puisque  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique,  $\gamma_{\times 2}(T - e) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \gamma_{\times 2}(T_2) > \gamma_{\times 2}(T)$ . Sans perte de généralité, supposons que  $\{r, u, w_1\} \subset V(T_1)$ . Alors  $T_1$  peut être vu comme un arbre obtenu d'un arbre non-trivial  $T'_1$  en ajoutant une chaîne  $P_3 = ruw_1$  attachée par l'arête  $w_1v$  à  $v$ . D'après la Remarque 3.11,  $\gamma_{\times 2}(T'_1) = \gamma_{\times 2}(T_1) - 2$ . Notons que  $e \in E(T')$  et  $T' - e = T'_1 \cup T_2$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(T' - e) &= \gamma_{\times 2}(T'_1) + \gamma_{\times 2}(T_2) \\ &= \gamma_{\times 2}(T_1) - 2 + \gamma_{\times 2}(T_2) \\ &= \gamma_{\times 2}(T - e) - 2 > \gamma_{\times 2}(T) - 2 = \gamma_{\times 2}(T'). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'effacement de n'importe quelle arête  $e \in X_{T'}$  augmente le nombre de domination double de  $T'$  et ainsi  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique. Par induction sur  $T'$ , on a  $T' \in \mathcal{F}$  et donc  $T \in \mathcal{F}$  du fait que  $T$  est obtenu à partir de  $T'$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{O}_2$ .

**Cas 2.**  $v$  n'est pas un sommet support. Soit  $C(v) = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  l'ensemble des fils de  $v$ . Supposons en premier qu'aucun sommet de  $C(v)$  n'est un support. Remarquons que dans ce cas, tout sommet  $w_i$  joue le même rôle que  $w_1$  et donc  $\deg_T(w_i) = 2$  pour tout  $i$ . Si  $\deg_T(v) = 2$ , alors, sans perte de généralité, on peut supposer que  $v \in S$  (sinon  $w_1 \in S$  et  $w_1$  peut être remplacé par  $v$ ). Si  $\deg_T(v) \geq 3$ , alors d'après le Corollaire 3.6,  $v \in S$  et  $S$  ne contient aucun sommet de  $C(v)$ , autrement l'ensemble  $\{r, u, w_1, v\}$  induirait une chaîne  $P_4$  dans  $S$ , ce qui contredit le Théorème 3.5. Ainsi,

dans tous les cas  $S$  ne contient aucun sommet  $w_i$ . Soit  $y$  le parent de  $v$  et  $c(w_i)$  l'unique fils de  $w_i$  pour tout  $i$ . Soit  $T' = T - \bigcup_{i=1}^k T_{w_i}$ . Il est clair que  $v$  est un sommet pendant dans  $T'$  et  $X_{T'} = X_T - \{vw_i, w_i c(w_i), yv \mid 1 \leq i \leq k\}$ . En utilisant le même argument utilisé dans le Cas 1, on peut voir que  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique. Par l'hypothèse d'induction sur  $T'$ , on a  $T' \in \mathcal{F}$ . Donc  $T$  appartient à  $\mathcal{F}$ , et il est obtenu à partir de  $T'$  à l'aide de l'Opération  $\mathcal{O}_3$ .

Nous supposons maintenant qu'un sommet de l'ensemble  $C(v) - \{w_1\}$ , disons  $w$ , est un sommet support. Rappelons que puisque  $|C(v)| \geq 2$ , alors  $\deg_T(v) \geq 3$  et d'après le Corollaire 3.6,  $v \in S$ . Si  $w'' \in C(v) - \{w_1, w\}$  est un deuxième support, alors  $S$  reste un EDD de  $T - vw''$ , et donc  $\gamma_{\times 2}(T - vw'') \leq \gamma_{\times 2}(T)$ , une contradiction. Ainsi,  $w$  est l'unique sommet support dans  $C(v) - \{w_1\}$ . Soit  $w'$  le sommet pendant de  $w$ . Notons que  $w', w, v \in S$ . D'après le point (i) du Théorème 3.5, toute composante connexe de  $G[S]$  est une étoile, ce qui implique  $y \notin S$  et donc aucun sommet de  $C(v)$ , excepté  $w$ , n'appartient à  $S$ . Il s'ensuit que  $\deg_T(y) = 2$  sinon  $y \in S$  (d'après le Corollaire 3.6). Posons  $C(v) = \{w, w_1, w_2, \dots, w_k\}$ , où  $k \geq 1$ . Rappelons qu'on a bien  $\deg_T(w_i) = 2$  pour tout  $i$ . Soit maintenant  $T'$  l'arbre obtenu à partir  $T$  en effaçant le sommet pendant  $w'$ . Donc  $w$  est un sommet pendant dans  $T'$  et  $v$  est un sommet de  $T'$  qui est adjacent à au moins une chaîne pendante  $P_3$ . Par conséquent, d'après la Remarque 3.12,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 1$ . Nous montrons à présent que  $y$  n'appartient à aucun  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. Supposons le contraire qu'il existe un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble  $S'$  qui contient  $y$ . Puisque  $v, w \in S'$ , l'ensemble  $S' \cup \{w'\}$  serait un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble pour lequel  $\{y, v, w, w'\}$  induirait une chaîne  $P_4$ , une contradiction. De plus, puisque  $v, w$  sont dans tout  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble, alors pour tout  $i, w_i$  n'appartient à aucun  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble (sinon un tel ensemble moins  $w_i$  reste un EDD de  $T'$ ).

Dans ce qui suit, nous montrons que  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique. Soit  $e$  une arête quelconque de  $X_{T'} = X_T - \{vw\}$ . Alors  $T - e = T_1 \cup T_2$  et puisque  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique,  $\gamma_{\times 2}(T - e) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \gamma_{\times 2}(T_2) > \gamma_{\times 2}(T)$ . Nous examinons les trois cas suivants:

**Cas 2.1**  $e = vw_i$  pour un certain indice  $i$ , où  $1 \leq i \leq k$ . Supposons que  $T_2 = T_{w_i}$  et

$T_1$  est le sous-arbre contenant  $v$ . Puisque  $e \in E(T')$ ,  $T' - e = T'_1 \cup T_2$ . Nous prétendons que  $\gamma_{\times 2}(T'_1) = \gamma_{\times 2}(T_1) - 1$ . Afin de le montrer, nous considérons séparément les cas  $k \geq 2$  et  $k = 1$ .

Si  $k \geq 2$ , alors d'après la Remarque 3.12,  $\gamma_{\times 2}(T'_1) = \gamma_{\times 2}(T_1) - 1$ . Supposons maintenant que  $k = 1$ . Il est clair que si  $Y$  est un  $\gamma_{\times 2}(T'_1)$ -ensemble, alors  $w \in Y$  et donc  $Y \cup \{w'\}$  est un EDD de  $T_1$ , ce qui implique que  $\gamma_{\times 2}(T_1) \leq \gamma_{\times 2}(T'_1) + 1$ , d'où  $\gamma_{\times 2}(T'_1) \geq \gamma_{\times 2}(T_1) - 1$ . Supposons que  $\gamma_{\times 2}(T'_1) > \gamma_{\times 2}(T_1) - 1$ . Si  $v$  appartient à un  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble  $S$ , alors puisque  $w, w' \in S$ ,  $S - \{w'\}$  serait un EDD de  $T'_1$  impliquant que  $\gamma_{\times 2}(T'_1) \leq \gamma_{\times 2}(T_1) - 1$ , contradiction. Donc  $v$  n'appartient à aucun  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble. Aussi,  $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T_1) + 3$  puisque tout  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble peut être étendu en un EDD de  $T$  en ajoutant  $\{w_1, u, r\}$ . Supposons que  $\gamma_{\times 2}(T) < \gamma_{\times 2}(T_1) + 3$  et soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble quelconque. Alors par le Corollaire 3.6 et la Remarque 3.1,  $v, w, w' \in D$ , et donc  $D_1 = D \cap V(T_1)$  est un EDD de  $T_1$ , ce qui implique que  $\gamma_{\times 2}(T_1) \leq \gamma_{\times 2}(T) - 2$  et l'égalité est vérifiée, c'est à dire  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T_1) + 2$ . Ainsi,  $D_1$  serait un  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble contenant  $v$ , ce qui contredit le fait que  $v$  n'appartient à aucun  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble. Donc  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T_1) + 3$ . Soit maintenant  $X_1$  un  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble quelconque. Puisque  $v \notin X_1$ , et  $\deg_T(y) = \deg_{T_1}(y) = 2$ , alors  $y \in X_1$ . Donc  $X_2 = X_1 \cup \{w_1, u, r\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble et  $(X_2 - w_1) \cup \{v\}$  est aussi un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble dont le sous-graphe induit contient une chaîne  $P_4 = w'wvy$ , ce qui contredit le Théorème 3.5-(i). Par conséquent,  $\gamma_{\times 2}(T'_1) = \gamma_{\times 2}(T_1) - 1$ .

Rappelons que  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 1$ . Ainsi, pour toute arête  $e = vw_i$ , nous avons

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(T' - e) &= \gamma_{\times 2}(T'_1) + \gamma_{\times 2}(T_2) \\ &= \gamma_{\times 2}(T_1) - 1 + \gamma_{\times 2}(T_2) \\ &= \gamma_{\times 2}(T - e) - 1 > \gamma_{\times 2}(T) - 1 = \gamma_{\times 2}(T'), \end{aligned}$$

et donc  $\gamma_{\times 2}(T' - e) > \gamma_{\times 2}(T')$ .

**Cas 2.2.**  $e = w_i c(w_i)$  pour un certain  $i$ , où  $1 \leq i \leq k$ . Supposons que  $T_2 = T_{c(w_i)}$  est une chaîne  $P_2$  et  $T_1$  est le sous-arbre qui contient  $v$ . Puisque  $e \in E(T')$ ,

$T' - e = T'_1 \cup T_2$ . Notons que  $v$  est un sommet support pour  $w_i$  dans  $T'_1$  et  $T_1$ . Alors  $\gamma_{\times 2}(T'_1) = \gamma_{\times 2}(T_1) - 1$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(T' - e) &= \gamma_{\times 2}(T'_1) + \gamma_{\times 2}(T_2) \\ &= \gamma_{\times 2}(T_1) - 1 + \gamma_{\times 2}(T_2) \\ &= \gamma_{\times 2}(T - e) - 1 > \gamma_{\times 2}(T) - 1 = \gamma_{\times 2}(T'), \end{aligned}$$

et donc  $\gamma_{\times 2}(T' - e) > \gamma_{\times 2}(T')$ .

**Cas 2.3.**  $e \notin \{vw_i, w_ic(w_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ . Sans perte de généralité, supposons que  $T_1$  est le sous-graphe qui contient  $v$ . Puisque  $e \in E(T')$ ,  $T' - e = T'_1 \cup T_2$ . D'après la Remarque 3.12,  $\gamma_{\times 2}(T'_1) = \gamma_{\times 2}(T_1) - 1$  et donc

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(T' - e) &= \gamma_{\times 2}(T'_1) + \gamma_{\times 2}(T_2) \\ &= \gamma_{\times 2}(T_1) - 1 + \gamma_{\times 2}(T_2) \\ &= \gamma_{\times 2}(T - e) - 1 > \gamma_{\times 2}(T) - 1 = \gamma_{\times 2}(T'), \end{aligned}$$

d'où  $\gamma_{\times 2}(T' - e) > \gamma_{\times 2}(T')$ .

Par conséquent, pour tous les cas, l'effacement de n'importe quelle arête de  $X_{T'}$  augmente le nombre de domination double de  $T'$ . Donc  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique et par l'hypothèse d'induction,  $T' \in \mathcal{F}$ . Il s'ensuit que  $T \in \mathcal{F}$  puisqu'il peut être obtenu à partir de  $T'$  par l'Opération  $\mathcal{O}_4$ .

Ceci achève la preuve du Théorème 3.14. □

Sachant construire la famille de tous les arbres  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques, nous pouvons facilement voir que toutes les chaînes  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques peuvent être obtenues à partir des chaînes  $P_2$  et  $P_3$  (qui sont des étoiles) en utilisant l'opération  $\mathcal{O}_3$ .

**Corollaire 3.15 (Khelifi et al. [64]).** *Une chaîne  $P_n$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique si et seulement si  $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$ .*

### 3.3 Graphes sans $P_4$ $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques

Notre objectif dans cette section est de caractériser les graphes sans  $P_4$   $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques. Un graphe est dit sans  $P_4$  s'il ne contient pas de chaîne  $P_4$  induite. On définit la famille  $\mathcal{H}_1$  de tous les graphes obtenus d'une étoile  $K_{1,r}$  avec  $r \geq 1$  en ajoutant  $k$  ( $k \geq 0$ ) nouveaux sommets, chacun de ces derniers est joint à deux sommets adjacents de l'étoile  $K_{1,r}$ . Il est clair que si  $G \in \mathcal{H}_1$ , alors  $G$  est un graphe sans  $P_4$ .

Afin d'illustrer la famille  $\mathcal{H}_1$ , supposons que l'étoile  $K_{1,r}$  est de sommet central  $x$  et de sommets pendants  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , et que les sommets ajoutés (s'il en existe au moins un), disons  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , sont, à titre d'exemple, attachés à  $x$  et  $x_n$  avec  $1 \leq n \leq r$ . Voir la figure 3.2 pour le cas  $k = 0$ , et la figure 3.3 pour le cas  $k \geq 1$ .

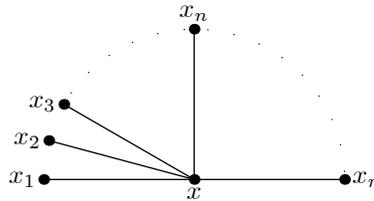


FIGURE 3.2. La famille  $\mathcal{H}_1$  avec  $k = 0$ .

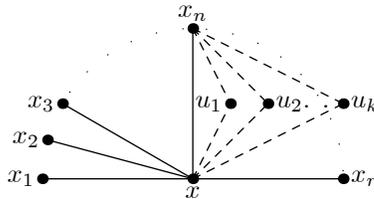


FIGURE 3.3. Exemple de la famille  $\mathcal{H}_1$  avec  $k \geq 1$ .

On commence par montrer le Lemme suivant:

**Lemme 3.16 (Khelifi et al. [64]).** *Si  $G$  est un graphe sans  $P_4$   $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique connexe, alors  $G[S]$  est connexe pour tout  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble  $S$ .*

*Preuve.* Soit  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble quelconque et supposons que  $G[S]$  n'est pas connexe. En utilisant le Théorème 3.5 et le fait que  $G$  est connexe, on déduit qu'il existe un sommet  $v$  de  $V - S$  adjacent à deux composantes de  $G[S]$ . Puisque  $\deg_G(v) = 2$ ,  $v$

et deux sommets adjacents de chaque composante connexe adjacente à  $v$  formeraient une chaîne  $P_4$  induite, contradiction.  $\square$

**Théorème 3.17 (Khelifi et al. [64]).** *Un graphe  $G$  sans  $P_4$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique si et seulement si toute composante connexe de  $G$  appartient à  $\mathcal{H}_1$ , ou elle est isomorphe à un graphe biparti complet  $K_{2,p}$  avec  $p \geq 2$ .*

Preuve. Soit  $G$  un graphe sans  $P_4$   $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique comportant  $m$  composantes connexes  $G_1, G_2, \dots, G_m$ . Soient  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble quelconque et  $S_i = S \cap V(G_i)$ . Il suffit de montrer le théorème pour une composante connexe  $G_i$ . D'après le Lemme 3.16,  $G[S_i]$  est connexe. De plus, d'après le Théorème 3.5,  $G[S_i]$  est une étoile  $K_{1,r}$  avec  $r \geq 1$ , et  $V(G_i) - S_i$  est un ensemble indépendant, tel que tout sommet de  $V(G_i) - S_i$  est adjacent à exactement deux sommets de  $S_i$ . Soient  $x$  le centre et  $x_1, x_2, \dots, x_r$  les sommets pendants de l'étoile. Il est clair que si  $|V(G_i) - S_i| = 0$ , alors  $G_i$  est une étoile et appartient à  $\mathcal{H}_1$ . On suppose donc que  $|V(G_i) - S_i| \geq 1$ .

Si  $r = 1$ , alors  $G[S_i] = P_2$  et donc  $G_i$  est obtenu en attachant  $t \geq 1$  sommets aux deux sommets  $x$  et  $x_1$ . Ainsi,  $G_i \in \mathcal{H}_1$ .

Si  $r = 2$ , alors  $G[S_i]$  est une chaîne  $P_3 = x_2 x x_1$ . Supposons qu'il existe un sommet  $u$  adjacent à  $x_1$  et  $x_2$ . Alors tous les sommets de  $V(G_i) - S_i$  sont adjacents à  $x_1$  et  $x_2$  seulement, autrement, si un sommet  $v \in V(G_i) - S_i$  est adjacent, disons à  $x$  et  $x_1$ , alors l'ensemble  $\{v, x, u, x_2\}$  induit une chaîne  $P_4$ . Alors il est clair que  $G_i = K_{2,p}$  avec  $p \geq 2$ . Maintenant s'il n'existe aucun sommet de  $V(G_i) - S_i$  qui est adjacent aux deux sommets  $x_1$  et  $x_2$ , alors tout sommet de  $V(G_i) - S_i$  est adjacent à deux sommets adjacents de l'étoile, et donc  $G_i \in \mathcal{H}_1$ .

En dernier, si  $r \geq 3$ , alors aucun sommet de  $V(G_i) - S_i$  ne possède ses deux voisins dans  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ , sinon  $G_i$  va contenir une chaîne  $P_4$  induite. Par conséquent,  $G_i \in \mathcal{H}_1$ .

La condition suffisante est facile à montrer.  $\square$

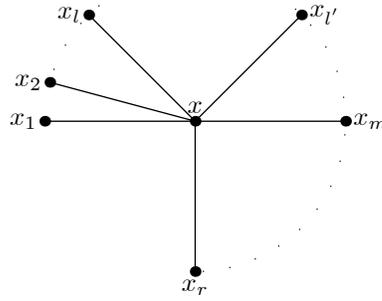
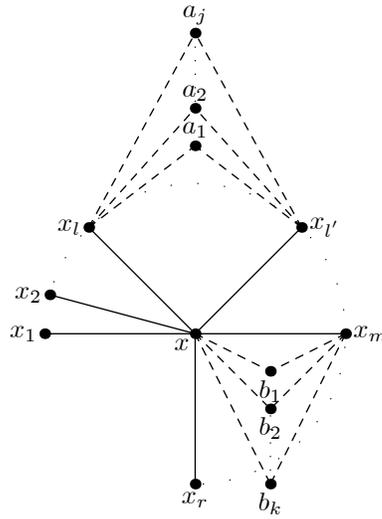
### 3.4 Graphes sans $P_5$ $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques

Nous caractérisons dans cette partie les graphes sans  $P_5$   $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques. Un graphe sans  $P_5$  est un graphe qui ne contient pas de chaînes  $P_5$  induites. Notons qu'un graphe sans  $P_4$  est aussi un graphe sans  $P_5$  et donc la classe des graphes sans  $P_4$   $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques est une sous-classe de la classe des graphes sans  $P_5$   $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques. Soit  $\mathcal{H}_2$  la famille des graphes obtenus à partir d'une étoile  $K_{1,r}$  ( $r \geq 1$ ) de sommet central  $x$  et de sommets pendants  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , en ajoutant, en premier,  $j$  ( $j \geq 0$ ) nouveaux sommets, tous joints à la même paire de sommets non adjacents de l'étoile  $K_{1,r}$ , disons  $x_l, x_{l'}$ , puis en ajoutant  $k$  ( $k \geq 0$ ) nouveaux sommets tels que chacun soit joint à deux sommets adjacents de l'étoile  $K_{1,r}$ , avec la condition que si  $j \geq 1$ , alors il n'existe aucune paire de sommets (parmi les  $k$  sommets) tels que l'un soit adjacent à  $x$  et  $x_l$  et l'autre à  $x$  et  $x_{l'}$ . Il est clair que si  $G \in \mathcal{H}_2$ , alors  $G$  est un graphe sans  $P_5$ . Aussi, si  $G = K_{2,p}$ , avec  $p \geq 2$ , ou  $G \in \mathcal{H}_1$ , alors  $G \in \mathcal{H}_2$ .

Il est clair que la structure de la famille  $\mathcal{H}_2$  dépend des nombres  $j$  et  $k$  de sommets ajoutés au graphe de base qui est l'étoile  $K_{1,r}$  ( $r \geq 1$ ) (c'est à dire  $j = 0$  et  $k = 0$ , voir la figure 3.4). Un exemple du cas  $j \geq 1$  et  $k \geq 1$  est montré dans la figure 3.5, où les  $j$  sommets attachés à  $x_l$  et  $x_{l'}$  sont appelés  $a_1, a_2, \dots, a_j$ , et les  $k$  sommets qui sont attachés à  $x$  et à l'un de ses voisins, disons  $x_m$ , sont appelés  $b_1, b_2, \dots, b_k$ . Dans le cas  $j = 0$  et  $k \geq 1$ , les  $k$  sommets  $b_1, b_2, \dots, b_k$  n'ont pas forcément le même voisinage dans l'étoile  $K_{1,r}$ , et ainsi, le graphe obtenu est formé de triangles et de chaînes  $P_2$  ayant tous le sommet central  $x$  en commun (il se peut qu'on ait des triangles ayant une arête quelconque de l'étoile en commun). Le dernier cas ( $j \geq 1$  et  $k = 0$ ) est facile à voir.

**Théorème 3.18 (Khelifi et al. [64]).** *Un graphe  $G$  sans  $P_5$  connexe est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique si et seulement si  $G \in \mathcal{H}_2$ .*

Preuve. Soient  $G$  un graphe sans  $P_5$  connexe et  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble quelconque. D'après le Théorème 3.5, tout sommet de  $V(G) - D$  est de degré deux. Par le même argument utilisé dans la preuve du Lemme 3.16, on peut voir que  $G[D]$  est connexe. Donc d'après le Théorème 3.5,  $G[D]$  est une étoile  $K_{1,r}$ , avec  $r \geq 1$ , et  $V(G) - D$  est un

FIGURE 3.4. La famille  $\mathcal{H}_2$  avec  $j = 0$  et  $k = 0$ .FIGURE 3.5. Exemple de la famille  $\mathcal{H}_2$  avec  $j \geq 1$  et  $k \geq 1$ .

ensemble indépendant. Soit  $x$  le sommet central de l'étoile dans  $G[D]$  avec les sommets pendants  $x_1, x_2, \dots, x_r$ . Si  $G$  est un graphe sans  $P_4$ , alors d'après le Théorème 3.17, ou bien  $G \in \mathcal{H}_1$ , ou bien  $G = K_{2,p}$  avec  $p \geq 2$ , et donc  $G$  appartient à la famille  $\mathcal{H}_2$ . Ainsi, nous supposons que  $G$  contient au moins une chaîne  $P_4$  induite et donc  $r \geq 2$ . Si  $|V(G) - D| = 1$ , alors  $r \geq 3$  (sinon  $G$  serait sans  $P_4$ ) d'où  $G \in \mathcal{H}_2$ . Supposons donc que  $|V(G) - D| \geq 2$ . Si  $r = 2$ , alors il est simple de voir que  $G \in \mathcal{H}_2$ . Donc supposons que  $r \geq 3$ . Soient  $u, v$  deux sommets de  $V(G) - D$ , chacun est adjacent à deux sommets pendants de  $G[D]$ . Soient  $N(u) \cap D = \{x_i, x_{i'}\}$  et  $N(v) \cap D = \{x_s, x_{s'}\}$ . Si  $N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ , alors les sommets  $x, u, v, x_i$  ainsi que  $x_s$  ou  $x_{s'}$  forment une chaîne  $P_5$  induite. Par conséquent, tous les sommets de  $V(G) - D$  qui ne sont pas voisins de  $x$  doivent être adjacents à la même paire de sommets pendants de  $G[D]$ .

Supposons maintenant qu'il existe un sommet  $z \in V(G) - D$  adjacent à deux sommets pendants  $x_l, x_{l'}$  de  $G[D]$ , et qu'il y'a deux sommets  $y_1$  et  $y_2$  dans  $V(G) - D$  tels que  $N_G(y_1) = \{x, x_l\}$  et  $N_G(y_2) = \{x, x_{l'}\}$ . Dans ce cas,  $\{y_1, x_l, z, x_{l'}, y_2\}$  induit une chaîne  $P_5$ . Donc si un sommet de  $V(G) - D$  est adjacent à deux sommets pendants  $x_l, x_{l'}$  de  $G[D]$ , alors il n'existe aucune paire de sommets tels que l'un soit adjacent à  $x$  et  $x_l$  et l'autre à  $x$  et  $x_{l'}$ . Il en résulte que  $G \in \mathcal{H}_2$ .

Il est simple de montrer que si  $G \in \mathcal{H}_2$ , alors  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique.  $\square$

**Corollaire 3.19 (Khelifi et al. [64]).** *Un graphe  $G$  sans  $P_5$  est  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique si et seulement si toute composante connexe de  $G$  appartient à la famille  $\mathcal{H}_2$ .*

### 3.5 Graphes $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques pour $\gamma_{\times 2} = 2, 3$ ou $4$

Dans cette section, nous nous intéressons aux graphes  $G$   $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques ayant un petit nombre de domination double, en particulier quand  $\gamma_{\times 2}(G) = 2, 3$  ou  $4$ . Afin de simplifier les notations, nous appellerons ces graphes  $t$ - $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques, où  $t \in \{2, 3, 4\}$ . En utilisant le Théorème, 3.5 on a:

**Théorème 3.20 (Khelifi et al. [64]).** *Un graphe connexe  $G$  est  $2$ - $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique si et seulement s'il est une chaîne  $P_2$  ou il est formé de  $k$  ( $k \geq 1$ ) triangles partageant la même arête.*

Soit  $\mathcal{H}_3$  la famille des graphes obtenus à partir d'une chaîne  $P_3$  en ajoutant  $i$  ( $i \geq 0$ ) nouveaux sommets et en joignant chacun d'eux à deux sommets de la chaîne  $P_3$ .

**Théorème 3.21 (Khelifi et al. [64]).** *Un graphe  $G$  connexe est  $3$ - $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique si et seulement si  $G \in \mathcal{H}_3$ .*

Preuve. Soient  $G$  un graphe connexe  $3$ - $\gamma_{\times 2}$ -AE-critique et  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble quelconque. D'après le Théorème 3.5,  $G[S] = P_3$ ,  $V - S$  est un ensemble indépendant et tout sommet de  $V - S$  (s'il en existe) est adjacent à exactement à deux sommets quelconques de la chaîne  $P_3$ . Par conséquent,  $G \in \mathcal{H}_3$ .

La preuve de la condition suffisante est simple.  $\square$

Soit  $\mathcal{H}_4$  la famille de tous les graphes obtenus à partir de deux chaînes  $P_2$  en ajoutant  $i$  ( $i \geq 0$ ) nouveaux sommets dont chacun est joint à deux sommets de  $P_2 \cup P_2$ . Soit  $\mathcal{H}_5$  la famille de tous les graphes obtenus à partir d'une étoile  $K_{1,3}$  en ajoutant  $j$  ( $j \geq 0$ ) nouveaux sommets chacun d'eux est joint à deux sommets de l'étoile  $K_{1,3}$ . Soit  $\mathcal{H}_6$  la famille des graphes obtenus à partir d'une étoile  $K_{1,3}$  de centre  $x$  et de sommets pendants  $x_1, x_2, x_3$ , en ajoutant un sommet  $u$  joint à  $x_1, x_2, r$  ( $r \geq 0$ ) nouveaux sommets joints à  $x_1, x_3, s$  ( $s \geq 0$ ) nouveaux sommets joints à  $x, x_3$ , et  $t$  ( $t \geq 0$ ) nouveaux sommets joints à  $x$  et  $x_1$ . Remarquons que  $\mathcal{H}_6$  est une sous-famille de  $\mathcal{H}_5$ , mais pour tout graphe  $G \in \mathcal{H}_6$ , l'ensemble  $\{x_3, x, x_1, u\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble induisant une chaîne  $P_4$ . D'après le Théorème 3.5, aucun graphe appartenant à la famille  $\mathcal{H}_6$  n'est  $4\text{-}\gamma_{\times 2}\text{-AE-critique}$ .

**Théorème 3.22 (Khelifi et al. [64]).** *Un graphe  $G$  connexe est  $4\text{-}\gamma_{\times 2}\text{-AE-critique}$  si et seulement si  $G \in \mathcal{H}_4$  ou  $G \in \mathcal{H}_5 - \mathcal{H}_6$ .*

*Preuve.* Soient  $G$  un graphe connexe  $4\text{-}\gamma_{\times 2}\text{-AE-critique}$  et  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble quelconque. D'après le Théorème 3.5, toute composante de  $G[S]$  est une étoile. Donc  $G[S] = K_{1,3}$  si  $G[S]$  est connexe et  $G[S] = P_2 \cup P_2$  sinon. Il est clair que si  $G[S] = P_2 \cup P_2$ , alors d'après les conditions (ii) et (iii) du Théorème 3.5,  $G \in \mathcal{H}_4$ . Maintenant si  $G[S] = K_{1,3}$ , alors toujours d'après les conditions (ii) et (iii) du Théorème 3.5,  $G \in \mathcal{H}_5$ . Mais les graphes appartenant à la famille  $\mathcal{H}_6$  ne sont pas  $4\text{-}\gamma_{\times 2}\text{-critiques}$ . Il s'ensuit que  $G \in \mathcal{H}_5 - \mathcal{H}_6$ .

L'inverse est simple à voir. □

## CHAPITRE 4

### GRAPHES CRITIQUES ET STABLES PAR RAPPORT AUX SOMMETS

Nous avons présenté dans les deux chapitres précédents des résultats pour les graphes critiques et stables concernant l'ajout ou la suppression de n'importe quelle arête, et ce pour la domination double. Ce chapitre est consacré à l'étude de l'effet de l'effacement d'un sommet sur le nombre de domination double d'un graphe, en particulier lorsque ce nombre change ou reste inchangé quand n'importe quel sommet qui n'est pas un support est effacé.

Il existe dans la littérature une multitude d'études qui concernent cet axe de recherche et qui s'intéressent à plusieurs paramètres de domination comme [27, 29, 32] pour la domination, [66, 67, 68] pour la domination totale, [69, 70, 71] pour la domination couplée ou [72] pour la domination restreinte totale.

Les résultats qui sont présentés dans les sections qui suivent sont obtenus en collaboration avec Chellali et concernent les graphes sommet-critiques et sommet-stables par rapport à la domination double. Plusieurs propriétés de ces graphes sont données en plus d'une caractérisation descriptive des arbres critiques et une autre constructive des arbres stables. Ces résultats ont fait l'objet d'un article [73] qui est accepté pour publication dans *Discussiones Mathematicae Graph theory*.

#### 4.1 Résultats préliminaires

Nous commençons par rappeler la remarque suivante qui sera souvent utilisée:

**Remarque 4.1.** *Tout EDD d'un graphe contient tous ses supports et tous ses sommets pendants.*

D'après la Remarque 4.1, il est simple de voir que le nombre de domination double d'un graphe constitué uniquement de sommets supports et de sommets pendants est égal à son ordre. Ceci nous conduit au résultat qui suit:

**Remarque 4.2 (Khelifi et Chellali [73]).** *Soit  $G$  un graphe sans sommets isolés. Alors  $\gamma_{\times 2}(G) = |V(G)|$  si et seulement si tout sommet de  $G$  est un support ou un sommet pendent.*

Preuve. Soit  $G$  un graphe tel que  $\gamma_{\times 2}(G) = |V(G)|$ . Supposons que  $v$  est un sommet de  $G$  qui n'est ni un support ni un sommet pendent. Alors il est clair que  $\deg_G(v) \geq 2$  et  $V(G) - \{v\}$  est un EDD de  $G$ , contradiction. Donc tout sommet de  $G$  est soit un support soit un sommet pendent.

La réciproque est facile à montrer. □

Pour un graphe  $G$  sans sommets isolés, le fait d'effacer un sommet qui n'est pas un support peut diminuer son nombre de domination double, ça peut le laisser inchangé comme ça peut l'augmenter. L'effet de l'effacement d'un tel sommet sur le nombre de domination double de  $G$  est évalué ci-après:

**Théorème 4.3 (Khelifi et Chellali [73]).** *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre au moins trois. Alors pour tout sommet  $v$  différent d'un sommet support,  $\gamma_{\times 2}(G) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(G - v) \leq \gamma_{\times 2}(G) + \deg_G(v) - 1$ .*

Preuve. Nous établissons en premier la borne inférieure. Soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(G - v)$ -ensemble quelconque. Si  $D \cap N(v) \neq \emptyset$ , alors  $D \cup \{v\}$  est un EDD de  $G$ , et si  $D \cap N(v) = \emptyset$ , alors  $D \cup \{v, u\}$  est un EDD de  $G$ , où  $u$  est un sommet quelconque de  $N(v)$ . Dans les deux cas, on a  $\gamma_{\times 2}(G) \leq |D| + 2$ . Soit maintenant  $R$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble quelconque. Il est clair que si  $v \notin R$ , alors  $R$  est un EDD de  $G - v$  et donc  $\gamma_{\times 2}(G - v) \leq \gamma_{\times 2}(G)$ . On peut donc supposer que  $v \in R$ . Soit  $B$  l'ensemble de sommets de  $V - R$  pour lesquels  $v$  est nécessaire dans le but qu'ils soient double dominés, C'est à dire, tout sommet de  $B$  possède exactement un voisin dans  $R - v$ . Soit aussi  $A$  l'ensemble de tous les sommets de  $R$  pour lesquels  $v$  est l'unique voisin dans  $R$ . Puisque  $v$  n'est pas un support, tout

sommet de  $A$  possède un voisin dans  $V - R$ . Soit  $A'$  un plus petit sous-ensemble de  $V - R$  qui domine  $A$ . Il est clair que  $|A'| \leq |A|$  et que  $|A'| + |B| \leq \deg_G(v)$ . Puisque  $A' \cup B \cup R - \{v\}$  est un EDD de  $G - v$ , nous avons  $\gamma_{\times 2}(G - v) \leq |R| - 1 + |A'| + |B| \leq \gamma_{\times 2}(G) + \deg_G(v) - 1$ .  $\square$

Nous donnons à présent des exemples pour les deux bornes qui viennent d'être données dans le théorème 4.3. Considérons en premier le graphe  $G_1$  de la figure 4.1 dont le nombre de domination double est 6. Si l'on efface le sommet  $x_6$ , alors,  $\gamma_{\times 2}(G_1 - x_6) = 4 = \gamma_{\times 2}(G_1) - 2$ . D'autre part, il est clair que le nombre de domination double du graphe  $G_2$  de la figure 4.2 est  $3k + 1$  où  $k = \deg_{G_2}(v)$ . Maintenant si le sommet  $v$  est effacé, alors le graphe  $G_2 - v$  sera formé de  $k$  chaînes  $P_4$ , et donc  $\gamma_{\times 2}(G_2 - v) = 4k = 3k + 1 + k - 1 = \gamma_{\times 2}(G_2) + k - 1$ .

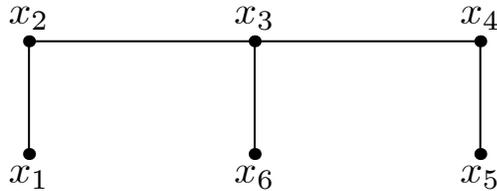


FIGURE 4.1. Le graphe  $G_1$

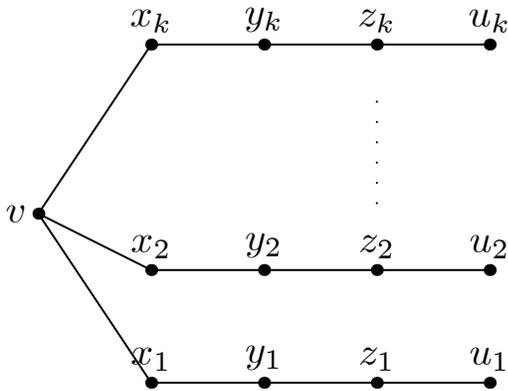


FIGURE 4.2. Le graphe  $G_2$

Comme conséquence immédiate du théorème 4.3, nous formulons le corollaire suivant:

**Corollaire 4.4 (Khelifi et Chellali [73]).** *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre au moins trois et soit  $v \in V(G) - S(G)$ . Alors*

a)  $\gamma_{\times 2}(G - v) \leq \gamma_{\times 2}(G) + \Delta(G) - 1.$

b) *Si  $v$  est un sommet pendant, alors  $\gamma_{\times 2}(G - v) \leq \gamma_{\times 2}(G).$*

Nous venons de prouver l'existence de sommets dont l'effacement augmente le nombre de domination double. Nous montrons dans la proposition suivante qu'il n'existe aucun graphe tel que l'effacement de n'importe quel sommet qui n'est pas un support accroît son nombre de domination double. En d'autres termes, nous montrons qu'il n'existe pas de graphes  $\gamma_{\times 2}^+$ -sommet-critiques.

**Proposition 4.5 (Khelifi et Chellali [73]).** *Il n'existe aucun graphe  $G$  tel que  $\gamma_{\times 2}(G - v) > \gamma_{\times 2}(G)$  pour tout sommet  $v \in V(G) - S(G)$ .*

Preuve. Supposons que  $G$  est un graphe tel que  $\gamma_{\times 2}(G - v) > \gamma_{\times 2}(G)$  pour tout sommet  $v \in V(G) - S(G)$ . Alors d'après le Corollaire 4.4-b,  $G$  ne contient aucun sommet pendant et donc d'après la Remarque 4.2,  $\gamma_{\times 2}(G) < |V(G)|$ . Soit maintenant  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble quelconque et soit  $w \in V(G) - D$ . Alors il est clair que  $D$  est un EDD de  $G - w$ , impliquant que  $\gamma_{\times 2}(G - w) \leq |D| = \gamma_{\times 2}(G)$ , contradiction.  $\square$

En se basant sur le Théorème 4.3, nous donnons les définitions des graphes  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critiques et  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stables.

**Définition 4.6.** *Un graphe  $G$  est dit  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critique si pour tout sommet  $v \in V(G) - S(G)$ ,  $\gamma_{\times 2}(G - v) < \gamma_{\times 2}(G)$ .*

**Définition 4.7.** *Un graphe  $G$  est dit  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable si pour tout sommet  $v \in V(G) - S(G)$ ,  $\gamma_{\times 2}(G - v) = \gamma_{\times 2}(G)$ .*

D'après le Théorème 4.3, dans un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critique  $G$ , pour tout sommet  $v \in V(G) - S(G)$ , on a ou bien  $\gamma_{\times 2}(G - v) = \gamma_{\times 2}(G) - 2$  ou bien  $\gamma_{\times 2}(G - v) = \gamma_{\times 2}(G) - 1$ .

## 4.2 Graphes $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critiques

Nous nous focaliserons dans cette section sur les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critiques. Nous commençons par donner quelques propriétés de ces graphes.

**Proposition 4.8 (Khelifi et Chellali [73]).** *Si  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critique et  $v \in V(G) - (S(G) \cup L(G))$ , alors tout  $\gamma_{\times 2}(G - v)$ -ensemble contient au plus un voisin de  $v$ .*

Preuve. Supposons que  $D$  est un  $\gamma_{\times 2}(G - v)$ -ensemble qui contient au moins deux voisins de  $v$ . Alors  $D$  est un EDD de  $G$  et donc  $\gamma_{\times 2}(G) \leq \gamma_{\times 2}(G - v)$ , ce qui contredit le fait que  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critique.  $\square$

La Proposition 4.8, nous permet de donner un résultat qui concerne les chaînes, les cycles et les graphes complets.

**Corollaire 4.9 (Khelifi et Chellali [73]).** *Si  $G$  est une chaîne  $P_n$  avec  $n \geq 5$ , ou bien un cycle  $C_n$ , ou bien un graphe complet  $K_m$  avec  $m \geq 3$ , alors  $G$  n'est pas  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critique.*

Un sommet d'un graphe  $G$  est dit **libre** s'il n'appartient à aucun ensemble dominant double minimum de  $G$ . Les deux propriétés suivantes relatent avec les sommets libres dans les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critiques.

**Proposition 4.10 (Khelifi et Chellali [73]).** *Soit  $G$  un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critique et soit  $v$  un sommet de  $V(G) - S(G)$ . S'il existe un sommet  $w \in N_G(v)$  appartenant à tout  $\gamma_{\times 2}(G - v)$ -ensemble, alors les conditions suivantes sont vérifiées:*

- 1)  $\gamma_{\times 2}(G - v) = \gamma_{\times 2}(G) - 1$ .
- 2) *Tout sommet de  $N_G(v) - \{w\}$  est libre dans  $G - v$ .*

Preuve. Soient  $G$  un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critique et  $v$  un sommet quelconque de  $V(G) - S(G)$ . Puisque  $w$  appartient à tout  $\gamma_{\times 2}(G - v)$ -ensemble, alors un tel ensemble plus  $v$  est un EDD de  $G$  et donc  $\gamma_{\times 2}(G - v) < \gamma_{\times 2}(G) \leq \gamma_{\times 2}(G - v) + 1$ , impliquant que

$\gamma_{\times 2}(G - v) = \gamma_{\times 2}(G) - 1$ . Maintenant puisque  $w$  est un sommet qui appartient à tout  $\gamma_{\times 2}(G - v)$ -ensemble, alors d'après la Proposition 4.8, tout sommet de  $N_G(v) - \{w\}$  est libre dans  $G - v$ .  $\square$

**Proposition 4.11 (Khelifi et Chellali [73]).** *Soient  $G$  un graphe et  $v \in V(G) - (S(G) \cup L(G))$ . Alors si  $\gamma_{\times 2}(G - v) = \gamma_{\times 2}(G) - 2$ , alors tout voisin de  $v$  est libre dans  $G - v$ .*

Preuve. Supposons qu'un voisin de  $v$ , disons  $u$ , n'est pas libre dans  $G - v$ . Dans ce cas,  $u$  appartient à un certain  $\gamma_{\times 2}(G - v)$ -ensemble  $D$ , et donc  $D \cup \{v\}$  est un EDD de  $G$ . Par conséquent,  $\gamma_{\times 2}(G - v) + 2 = \gamma_{\times 2}(G) \leq |D| + 1 = \gamma_{\times 2}(G - v) + 1$ , contradiction. Donc  $u$  est un sommet libre dans  $G - v$ .  $\square$

Nous nous intéressons à présent aux arbres  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critiques. Nous commençons par montrer que l'effacement de n'importe quel sommet libre d'un arbre  $T$  laisse son nombre de domination double inchangé. Rappelons que les sommets libres d'un arbre peuvent être déterminés en un temps polynomial (voir [53]).

**Lemme 4.12 (Khelifi et Chellali [73]).** *Si  $v$  est un sommet libre d'un arbre non-trivial  $T$ , alors  $\gamma_{\times 2}(T - v) = \gamma_{\times 2}(T)$ .*

Preuve. Soit  $v$  un sommet libre de  $T$ . Il est clair que  $v \notin S(T) \cup L(T)$  et donc  $\deg_T(v) = k \geq 2$ . Enracinons  $T$  en  $v$  et soit  $C(v) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ . Puisque  $v$  est libre, tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble est un EDD de  $T - v$ , et donc  $\gamma_{\times 2}(T - v) \leq \gamma_{\times 2}(T)$ . De plus, puisque tout  $\gamma_{\times 2}(T - v)$ -ensemble peut être étendu à un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble en ajoutant  $v$  et l'un de ses voisins, alors  $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T - v) + 2$ . On a donc  $\gamma_{\times 2}(T) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(T - v) \leq \gamma_{\times 2}(T)$ . Supposons en premier que  $\gamma_{\times 2}(T - v) = \gamma_{\times 2}(T) - 2$  et soit  $S_1$  un  $\gamma_{\times 2}(T - v)$ -ensemble quelconque. Si  $N_T(v) \cap S_1 \neq \emptyset$ , alors  $S_1 \cup \{v\}$  est un EDD de  $T$  avec  $\gamma_{\times 2}(T) - 1$  sommets, ce qui est impossible. Donc  $N_T(v) \cap S_1 = \emptyset$ , mais alors  $S_1 \cup \{u_1, v\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble contenant  $v$ , ce qui contredit le fait que  $v$  est libre. Supposons maintenant que  $\gamma_{\times 2}(T - v) = \gamma_{\times 2}(T) - 1$  et soit  $S'$  un  $\gamma_{\times 2}(T - v)$ -ensemble quelconque. Il est clair qu'aucun voisin de  $v$  n'appartient à  $S'$ , sinon  $S' \cup \{v\}$  serait un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble qui contient  $v$ , une contradiction. Soient  $S'_i = S' \cap V(T_{u_i})$  pour  $1 \leq i \leq k$ .

Alors  $|S'| = |S'_1| + |S'_2| + \dots + |S'_k|$  et bien sûr  $S'_i$  est un  $\gamma_{\times 2}(T_{u_i})$ -ensemble pour tout  $i$ . Soient maintenant  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble et  $D_i = D \cap V(T_{u_i})$  pour tout  $i$ . Rappelons que  $v \notin D$  puisque  $v$  est libre. On présume que  $D$  contient exactement deux voisins de  $v$ . Supposons le contraire que  $|N_T(v) \cap D| \geq 3$  et, sans perte de généralité, supposons que  $u_1, u_2, u_3 \in D$ . Si pour un certain indice  $i$ ,  $|D_i| < |S'_i|$ , alors  $D_i$  serait un EDD de  $T_{u_i}$  de cardinal inférieur à celui de  $S'_i$  ce qui est impossible. Par conséquent,  $|D_i| \geq |S'_i|$  pour tout  $i$ , impliquant que  $|D_i| = |S'_i|$  pour  $i \geq 4$ . En utilisant maintenant le fait que  $|D| = |S'| + 1$ , on déduit que  $|D_1| + |D_2| + |D_3| = |S'_1| + |S'_2| + |S'_3| + 1$ . Sans perte de généralité, supposons que  $|D_1| = |S'_1| + 1$ . Il s'ensuit que  $S'_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$  est un EDD de  $T$  de cardinal inférieur à  $|D|$ , contradiction. Donc  $|D \cap N_T(v)| = 2$ , disons  $u_1, u_2 \in D$ . Comme on vient de le voir  $|D_i| = |S'_i|$  pour  $i \geq 3$ , et donc  $|D_1| + |D_2| = |S'_1| + |S'_2| + 1$ . On peut supposer que  $|D_1| = |S'_1| + 1$ . Alors  $S'_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$  est un EDD de  $T - v$  avec  $|S'_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k| = \gamma_{\times 2}(T) - 1$ . Donc  $S'' = S'_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$  est aussi un  $\gamma_{\times 2}(T - v)$ -ensemble (contenant  $u_2$ ) mais alors  $S'' \cup \{v\}$  serait un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble qui contient  $v$ , une contradiction. Ainsi,  $\gamma_{\times 2}(T - v) = \gamma_{\times 2}(T)$ .  $\square$

Maintenant, nous sommes prêts pour la caractérisation des arbres  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-critiques.

**Théorème 4.13 (Khelifi et Chellali [73]).** *Un arbre  $T$  d'ordre  $n \geq 3$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-critique si et seulement si tout sommet de  $T$  est ou bien un support ou bien un sommet pendant, c'est à dire  $\gamma_{\times 2}(T) = |V(T)|$ .*

Preuve. Soit  $T$  un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-critique. Soit  $v$  un sommet support de  $T$  ayant un voisin qui n'est ni un support ni un sommet pendant. Si un tel sommet  $v$  n'existe pas, alors le résultat recherché est obtenu, c'est à dire tout sommet de  $T$  est soit un support soit un sommet pendant. Donc  $v$  existe. Soit  $w$  un voisin de  $v$  tel que  $w \notin S(T) \cup L(T)$ . Il est clair que  $v$  reste encore adjacent à un sommet pendant dans  $T - w$  et donc  $v$  est dans tout  $\gamma_{\times 2}(T - w)$ -ensemble. Alors d'après la Proposition 4.10,  $\gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T) - 1$ , et tout sommet de  $N_T(w) - \{v\}$  est libre dans  $T - w$ . Il s'ensuit que  $v$  est l'unique support adjacent à  $w$ . Soit  $N_T(w) - \{v\} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ . Il est clair que  $k \geq 1$  puisque  $w$  n'est pas un sommet pendant. Soient  $T_1, T_2, \dots, T_k$  les

composantes connexes de  $T - w$ , où  $u_i \in V(T_i)$  pour tout  $i$ , et soit  $T_0$  la composante connexe restante contenant  $v$ . Soit  $D_1$  un  $\gamma_{\times 2}(T_1)$ -ensemble quelconque et rappelons que tout sommet  $u_i$  est libre dans  $T - w$ , ce qui veut dire que  $u_1 \notin D_1$ . Donc  $D_1$  doit contenir deux sommets adjacents à  $u_1$ , disons  $x_1$  et  $x_2$ . Aussi, d'après le Lemme 4.12,  $\gamma_{\times 2}(T_1 - u_1) = \gamma_{\times 2}(T_1)$ . Soit maintenant  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T - u_1)$ -ensemble quelconque et soit  $T' = T - T_1$ . Evidemment,  $|D| = \gamma_{\times 2}(T_1 - u_1) + \gamma_{\times 2}(T')$  et donc  $D' = (D \cap T') \cup D_1$  est un EDD de  $T$ . D'où,  $\gamma_{\times 2}(T) \leq |D'| = \gamma_{\times 2}(T - u_1)$ , ce qui contredit le fait que  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critique.

L'inverse est facile à montrer. □

### 4.3 Graphes $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stables

La dernière section de ce chapitre sera consacrée à l'étude des graphes  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stables. Nous faisons en premier une remarque qui nous sera utile.

**Remarque 4.14 (Khelifi et Chellali [73]).** *Soit  $G$  un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable. Alors tout support de  $G$  possède exactement un seul voisin (son sommet pendant) dans tout  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble.*

Preuve. Soit  $G$  un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable et supposons qu'un sommet support  $v$  possède deux voisins dans un certain  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble  $D$ . Si  $v'$  est un sommet pendant voisin de  $v$ , alors  $D - \{v'\}$  est un EDD de  $G - v'$ . Donc  $\gamma_{\times 2}(G - v') < \gamma_{\times 2}(G)$ , une contradiction. □

Comme conséquence de la Remarque 4.14, nous pouvons formuler le corollaire suivant:

**Corollaire 4.15 (Khelifi et Chellali [73]).** *Soit  $G$  un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable. Alors*

- a) *Tout support de  $G$  est adjacent à exactement un seul sommet pendant.*
- b) *Les sommets supports de  $G$  forment un ensemble stable.*

Afin de juger de la stabilité des chaînes et des cycles, nous rappelons que le nombre de domination double pour les cycles  $C_n$  et pour les chaînes non triviales  $P_n$  ont été donnés dans [34] et [40] respectivement:

$$[34] \quad \gamma_{\times 2}(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil.$$

$$[40] \quad \gamma_{\times 2}(P_n) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 \text{ si } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ et } \gamma_{\times 2}(P_n) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil \text{ sinon.}$$

En utilisant les résultats ci-dessus, nous pouvons vérifier que  $P_5$  est la seule chaîne  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stable et que les cycles  $C_n$  sont des graphes  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stables. Aussi, puisque  $\gamma_{\times 2}(K_n) = 2$  pour  $n \geq 2$ , nous pouvons affirmer que tous les graphes complets  $K_n$  avec  $n \geq 3$  sont  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stables.

Un sommet  $u$  est dit adjacent à une chaîne  $P_k$  dans un arbre  $T$  s'il existe un voisin de  $u$ , disons  $v$ , tel que le sous-graphe résultant de  $T$  par la suppression de l'arête  $uv$  et qui contient le sommet  $v$  comme sommet pendant, est une chaîne  $P_k$ . La remarque suivante nous sera utile pour la preuve du prochain lemme:

**Remarque 4.16 (Khelifi et Chellali [73]).** *Soient  $T$  un arbre non trivial et  $S$  un sous-ensemble quelconque de sommets contenant un sommet libre  $v$  de  $T$  tel que tout sommet de  $T$  excepté  $v$  est double dominé par  $S$ . Alors  $|S| > \gamma_{\times 2}(T)$ .*

*Preuve.* Il est clair que  $\deg_T(v) = k \geq 2$  puisque  $v$  est un sommet libre. Enracinons  $T$  en  $v$  et soient  $v_1, v_2, \dots, v_k$  les fils de  $v$  dans  $T_v = T$ . Soient  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -quelconque et  $D_i = D \cap T_{v_i}$  pour tout  $i$ . D'après le Lemme 4.12,  $D$  est aussi un  $\gamma_{\times 2}(T - v)$ -ensemble et donc  $D_i$  est un  $\gamma_{\times 2}(T_{v_i})$ -ensemble pour tout  $i$ . Donc  $\gamma_{\times 2}(T) = |D_1| + |D_2| + \dots + |D_k|$ . Notons que  $D$  contient au moins deux voisins de  $v$  pour double dominer  $v$ . Supposons maintenant le contraire que  $|S| = \gamma_{\times 2}(T) = |D|$ . Notons que  $S$  ne peut pas être plus petit que  $D$ , sinon  $S$  plus un voisin quelconque de  $v$  qui n'appartient pas à  $S$  serait un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble qui contient  $v$ , une contradiction avec le fait que  $v$  est un sommet libre. Soient  $S_i = S \cap T_{v_i}$  pour tout  $i$ . Notons que puisque  $S$  ne double domine pas  $v$ ,  $v_i \notin S$  pour tout  $i$ . Aussi, puisque  $|S| = |D|$  et  $v \in S$ , il existe un certain index  $j$  tel que  $|S_j| < |D_j|$ . Le fait que  $S_j \cup \{v_j\}$  est un EDD de  $T_{v_j}$  entraîne que

$|D_j| \leq |S_j \cup \{v_j\}| < |D_j| + 1$ . Par conséquent,  $|S_j| = |D_j| - 1$  et donc l'ensemble  $S' = (\bigcup_{i=1, i \neq j}^k D_i) \cup S_j \cup \{v\}$  double dimine tous les sommets de  $T$  et possède le même cardinal de  $D$ . Mais  $S'$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble qui contient  $v$ , une contradiction aussi. Ainsi,  $|S| > |D|$ .  $\square$

**Lemme 4.17 (Khelifi et Chellali [73]).** *Soient  $T$  un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stable et  $v$  un sommet de  $T$  qui n'est pas un support. Alors  $v$  n'est pas adjacent à une chaîne  $P_3$ .*

Preuve. Soit  $v$  un sommet de  $T$  qui n'est pas un sommet support, et supposons que  $v$  est adjacent à une chaîne  $P_3 = u_1x_1y_1$  par l'arête  $vu_1$ . Enracinons l'arbre  $T$  en  $v$  et soit  $C(v) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  l'ensemble des fils de  $v$  dans l'arbre enraciné. Notons que puisque  $T$  is  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stable et  $v$  n'est pas un support,  $T$  est d'ordre  $n \geq 6$  et donc  $k \geq 2$ . Il est clair que  $x_1$  et  $y_1$  sont dans tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble et d'après la Remarque 4.14,  $u_1$  n'appartient à aucun  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Il s'ensuit que  $v$  est dans tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Soit maintenant  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T - v)$ -ensemble. Notons que  $|D| = \gamma_{\times 2}(T)$  puisque  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stable. Il est clair que  $\{u_1, x_1, y_1\} \subset D$ . Maintenant si pour un certain indice  $i \neq 1$ ,  $u_i \in D$ , alors  $v$  est double dominé par  $u_1$  et  $u_i$ , et donc  $D$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble contenant  $u_1$ , ce qui contredit la Remarque 4.14. Donc tout sommet  $u_i \neq u_1$  est un sommet libre dans  $T - v$ . Notons que si un sommet quelconque est libre dans  $T - v$ , alors il est libre aussi dans la composante connexe qui contient un tel sommet. Soit  $T_{u_j}$  la composante connexe de  $T - v$  telle que  $u_j \in V(T_{u_j})$ . Donc  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T - v) = \gamma_{\times 2}(T_{u_1}) + \sum_{i=2}^k \gamma_{\times 2}(T_{u_i}) = 3 + \sum_{i=2}^k \gamma_{\times 2}(T_{u_i})$ . Si  $A$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble quelconque, alors  $A$  contient  $v$  et un certain sommet  $u_i \neq u_1$ , disons  $u_2$ , pour double dominer  $v$ . On a donc  $|A| = |\{x_1, y_1\}| + |\{v\}| + \sum_{i=2}^k |A \cap T_{u_i}| = 3 + \sum_{i=2}^k |A \cap T_{u_i}|$ . Maintenant, si pour un indice  $i \geq 3$ , on a  $|A \cap T_{u_i}| < |D \cap T_{u_i}|$ , alors  $A \cup \{u_i\}$  serait un  $\gamma_{\times 2}(T_{u_i})$ -ensemble contenant  $u_i$ , une contradiction puisque  $u_i$  est libre dans sa composante connexe. Ainsi, nous devons avoir  $|A \cap T_{u_i}| = |D \cap T_{u_i}|$  pour tout  $i \geq 3$ . Ceci, en plus du fait que  $|D| = |A|$ , nous mène à conclure que  $|A \cap T_{u_2}| = \gamma_{\times 2}(T_{u_2})$ . Remarquons que  $A \cap T_{u_2}$  est un ensemble de sommets contenant  $u_2$  qui est un sommet libre dans  $T_{u_2}$ . Maintenant si  $A \cap T_{u_2}$  est un EDD de  $T_{u_2}$ , alors  $u_2$  n'est pas libre, une contradiction. Ainsi,  $A \cap T_{u_2}$  double domine tous les sommets

de  $T_{u_2}$  excepté  $u_2$  mais d'après la Remarque 4.16, on doit avoir  $|A \cap T_{u_2}| > \gamma_{\times 2}(T_{u_2})$ , une autre contradiction, et la preuve du Lemme 4.17 est achevée.  $\square$

Nous donnons à présent une autre définition. Soit  $u$  un support d'un arbre  $T$  avec un unique sommet pendant  $v$  et soit  $T'$  la forêt obtenue à partir de  $T$  en enlevant les sommets  $u$  et  $v$ . Alors on appelle  $u$  un *bon support* si  $\gamma_{\times 2}(T') = \gamma_{\times 2}(T) - 2$ , et tout voisin de  $u$  excepté  $v$  est libre dans  $T$ . Par exemple tout sommet support dans une étoile subdivisée d'ordre au moins sept est un bon support. Par contre, aucun des deux supports de la chaîne  $P_5$  n'est bon puisque  $\gamma_{\times 2}(T') > \gamma_{\times 2}(P_5) - 2$ .

Dans le but de caractériser les arbres  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stables, on définit la famille  $\mathcal{H}$  de tous les arbres  $T$  qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence d'arbres  $T_1, T_2, \dots, T_j$  ( $j \geq 1$ ) telle que  $T_1$  est une étoile subdivisée  $K_{1,r}^*$  avec  $r \geq 2$ ,  $T = T_j$ , et si  $j \geq 2$ ,  $T_{i+1}$  peut être obtenu à partir de  $T_i$  par l'une des opérations données ci-après:

Soit  $A(T_1) = S(T_1) \cup L(T_1)$

- **Opération  $\mathcal{O}_1$ :** Ajouter une étoile subdivisée  $K_{1,k}^*$ ,  $k \geq 2$ , de centre  $x$  et joindre  $x$  par une arête à un sommet  $y$  de  $T_i$ , avec la condition que si  $y$  est un sommet pendant, alors son support est un bon support dans  $T_i$ . Poser  $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup S(K_{1,k}^*) \cup L(K_{1,k}^*)$ .
- **Opération  $\mathcal{O}_2$ :** Ajouter une chaîne  $P_3 = xyz$  et l'attacher par une arête  $xv$  à un support quelconque  $v$  de  $T_i$ . Poser  $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup \{y, z\}$ .

Les deux opérations sont illustrées dans la figure 4.3.

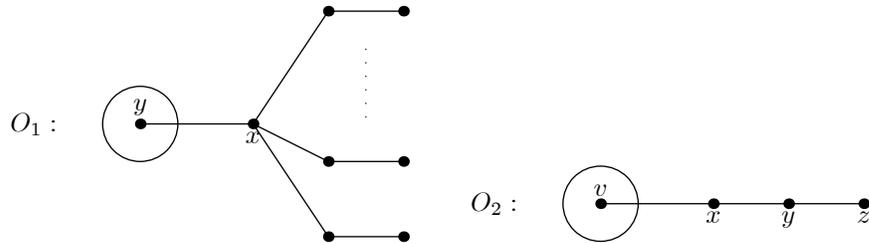


FIGURE 4.3. Les opérations de la construction de la famille  $\mathcal{H}$ .

Les deux remarques suivantes nous seront utiles pour montrer le résultat principal de cette section:

**Remarque 4.18 (Khelifi et Chellali [73]).** *Soit  $T$  un arbre obtenu d'un arbre non trivial  $T'$  en ajoutant une chaîne  $P_3 = uvz$  attachée par une arête  $ux$  à n'importe quel sommet  $x$  de  $T'$ . Alors  $\gamma_{\times 2}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T) - 2$ , avec l'égalité si  $x$  n'est pas libre dans  $T'$ .*

Preuve. Soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. D'après la Remarque 4.1,  $D$  contient  $v, z$ . Si  $u \in D$ , alors on peut le remplacer, dans  $D$ , par  $x$  ou par n'importe quel voisin de  $x$  dans  $T'$ . Donc on peut supposer que  $u \notin D$  et donc  $D \cap V(T')$  est un EDD de  $T'$ . Il s'ensuit que  $\gamma_{\times 2}(T') \leq |D \cap V(T')| = \gamma_{\times 2}(T) - 2$ . Maintenant si  $x$  n'est pas libre dans  $T'$ , c'est à dire que  $x$  appartient à un certain  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble, alors un tel ensemble peut être étendu à un EDD de  $T$  en ajoutant  $v$  et  $z$ , impliquant que  $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T') - 2$ . Ainsi, l'égalité est obtenue.  $\square$

**Remarque 4.19 (Khelifi et Chellali [73]).** *Soit  $T$  un arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial  $T'$  en ajoutant une étoile subdivisée  $K_{1,k}^*$  ( $k \geq 2$ ) de centre  $u$ , attachée par une arête  $uw$  à un sommet quelconque  $w$  de  $T'$ . Alors  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ .*

Preuve. Soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. D'après le Remarque 4.1,  $D$  contient tous les sommets de l'étoile subdivisée  $K_{1,k}^*$  excepté  $u$  (sinon on remplace  $u$  par  $w$  ou un voisin de  $w$  dans  $T'$ ). Donc  $D \cap V(T')$  est un EDD de  $T'$  et  $\gamma_{\times 2}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T) - 2k$ . Aussi, si  $D'$  est un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble quelconque, alors  $D' \cup (V(K_{1,k}^*) - \{u\})$  est un EDD de  $T'$  et donc  $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ . Il s'ensuit que  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ .  $\square$

**Lemme 4.20 (Khelifi et Chellali [73]).** *Si  $T \in \mathcal{H}$ , alors*

- a)  $A(T)$  est l'unique  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble.
- b)  $T$  est arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stable.

Preuve. Soit  $T \in \mathcal{H}$ . Alors de la façon par laquelle l'arbre  $T$  est construit,  $A(T)$  est un EDD de  $T$ . Maintenant pour montrer que  $A(T)$  est l'unique  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble et  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stable, nous procédons par induction sur le nombre total d'opérations

$\mathcal{O}_i$  appliquées pour construire  $T$ . Nous utilisons la terminologie de la construction pour l'ensemble  $A(T)$ . Il est clair que les deux propriétés sont vérifiées pour  $T_1 = K_{1,r}^*$  avec  $r \geq 2$ . Supposons que ces deux propriétés sont vraies pour tous les arbres de la famille  $\mathcal{H}$  qui sont construits en utilisant  $j - 1 \geq 0$  opérations, et soit  $T$  un arbre de  $\mathcal{H}$  construit après  $j$  opérations. Ainsi,  $T$  est obtenu en utilisant l'opération  $\mathcal{O}_1$  ou  $\mathcal{O}_2$  sur un arbre  $T'$  obtenu par  $j - 1$  opérations. Soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Nous examinons les deux cas suivants:

**Cas 1.**  $T$  est obtenu à partir de  $T'$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{O}_1$ . D'après la Remarque 4.19,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k$  et donc  $A(T) = A(T') \cup (V(K_{1,k}^*) - \{x\})$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Supposons maintenant que  $A(T)$  n'est pas unique et soit  $R$  un autre  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Il est clair que  $V(K_{1,k}^*) - \{x\} \subset D$ . Maintenant si  $x \notin R$ , alors  $R \cap V(T')$  est un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble et puisque  $R \neq A(T') \cup (V(K_{1,k}^*) - \{x\})$ , il s'ensuit que  $R \cap V(T') \neq A(T')$ , ceci mène à une contradiction sur l'unicité de  $A(T')$ . Donc  $x \in R$ . Il est clair que  $x$  appartient à  $R$  pour double dominer  $y$  et donc  $R \cap V(T')$  n'est pas un EDD de  $T'$ . Si  $y$  n'est pas un sommet pendant de  $T'$ , c'est à dire que  $\deg_{T'}(y) \geq 2$ , alors on peut remplacer  $x$  par  $y$  ou par un voisin quelconque de  $y$  dans  $T'$ , ce qui donne des  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensembles différents, une contradiction aussi. On peut supposer donc que  $y$  est un sommet pendant dans  $T'$ . Soit  $z$  le support de  $y$  dans  $T'$ . Nous avons deux situations ou bien  $y \in R$  et  $z \notin R$ , ou bien  $y \notin R$  et  $z \in R$ . Dans les deux cas,  $z$  doit avoir un voisin  $z' \neq y$  dans  $R$ . Soient les ensembles  $R \cap V(T')$  plus  $z$  pour la première situation, et  $R \cap V(T')$  plus  $y$  pour la seconde. Les deux ensembles sont des  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensembles, cependant  $z$  n'est pas un bon support de  $T'$  puisque  $z'$  n'est pas un sommet libre dans  $T'$ , ce qui contredit la construction. On conclut que  $A(T)$  est l'unique dominant double minimum de  $T$ .

On montre maintenant la propriété (b). On rappelle que par l'hypothèse d'induction sur l'arbre  $T'$ , ce dernier est  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable. Aussi puisque  $T$  possède un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble unique qui ne contient pas  $x$ ;  $x$  est un sommet libre dans  $T$ . Soient maintenant  $y_1, \dots, y_k$  les sommets supports de  $K_{1,k}^*$  et  $z_1, \dots, z_k$  les sommets pendants, avec les arêtes  $y_i z_i$  pour tout  $i$ . Soit  $w$  un sommet quelconque de  $T$  différent d'un support. On va

montrer que  $\gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T)$ .

- Si  $w = x$ , alors puisque  $x$  est un sommet libre dans  $T$ , d'après le Lemme 4.12,  $\gamma_{\times 2}(T - x) = \gamma_{\times 2}(T)$ .

- Supposons maintenant que  $w = z_i$  pour un certain index  $i$ . Alors d'après le Théorème 4.3,  $\gamma_{\times 2}(T) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(T - z_i) \leq \gamma_{\times 2}(T)$ . Soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T - z_i)$ -ensemble quelconque. Alors  $x$  est un support de  $y_i$  et donc  $V(K_{1,k}^*) - \{z_i\} \subset D$ . Supposons en premier que  $\gamma_{\times 2}(T - z_i) = \gamma_{\times 2}(T) - 2$ . Alors il est clair que  $D \cup \{z_1\}$  est un EDD de  $T$  de cardinal inférieur à  $\gamma_{\times 2}(T)$ , une contradiction. Maintenant si  $\gamma_{\times 2}(T - z_i) = \gamma_{\times 2}(T) - 1$ , alors  $D \cup \{z_1\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble qui contient  $x$ , ce qui contredit le fait  $x$  est un sommet libre. Ainsi,  $\gamma_{\times 2}(T - z_i) = \gamma_{\times 2}(T)$ .

- En dernier, supposons que  $w$  est un sommet de  $V(T')$ . Posons en premier  $w = y$  et  $t = \deg_{T'}(y) \geq 1$ . Alors  $T' - y$  produit  $t$  sous-arbres  $T'_1, T'_2, T'_3, \dots, T'_t$  et  $T - y$  produit les mêmes sous-arbres en plus de l'étoile subdivisée  $K_{1,k}^*$ . Maintenant puisque  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable,  $\gamma_{\times 2}(T' - y) = \sum_{i=1}^t \gamma_{\times 2}(T'_i) = \gamma_{\times 2}(T')$ . Aussi,  $\gamma_{\times 2}(T - y) = \gamma_{\times 2}(K_{1,k}^*) + \gamma_{\times 2}(T' - y) = 2k + \gamma_{\times 2}(T') = \gamma_{\times 2}(T)$ . Supposons à présent que  $w \neq y$  est un sommet pendant quelconque de  $T'$ . Alors  $T' - w$  est non trivial et donc d'après la Remarque 4.19,  $\gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T' - w) + 2k$ . En utilisant le fait que  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable avec l'égalité  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ , on obtient  $\gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T' - w) + 2k = \gamma_{\times 2}(T') + 2k = \gamma_{\times 2}(T)$ . Maintenant, supposons que  $w \neq y$  est un sommet quelconque de  $T$  différent de  $z$  (où  $z$  est le support de  $y$  dans  $T'$ ). Alors  $w$  a le même degré dans  $T$  comme dans  $T'$ , disons  $p \geq 2$ . Il est clair que  $T' - w$  produit  $p$  sous-arbres  $T'_1, T'_2, T'_3, \dots, T'_p$ , où  $y \in V(T_1)$ . De la même manière  $T - w$  produit  $p$  sous-arbres  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_p$ , où  $T_1$  est le sous-arbre qui contient les sommets de l'étoile subdivisée ajoutée  $K_{1,k}^*$  et ceux de  $T'_1$ . D'après la Remarque 4.19,  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 2k$ . On sait que  $\gamma_{\times 2}(T' - w) = \sum_{i=1}^p \gamma_{\times 2}(T'_i) = \gamma_{\times 2}(T')$  et  $\gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 2k + \sum_{i=2}^p \gamma_{\times 2}(T'_i)$ . Ainsi,  $\gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T)$ . La dernière situation qui reste à examiner est celle lorsque  $w = z$  et  $y$  est le sommet pendant de  $z$  dans  $T'$ . Soit  $T'' = T' - \{y, z\}$ . Alors  $T - z$  est formé par  $T''$  et  $T(y)$ , où  $T(y)$  est obtenu de  $K_{1,k}^*$  en ajoutant une arête pour attacher le sommet  $y$ . Donc  $\gamma_{\times 2}(T(y)) = 2k + 2$  et  $\gamma_{\times 2}(T - z) = \gamma_{\times 2}(T'') + \gamma_{\times 2}(T(y))$ .

Maintenant puisque  $z$  est un bon support dans  $T'$ ,  $\gamma_{\times 2}(T'') = \gamma_{\times 2}(T') - 2$ . Il s'ensuit que  $\gamma_{\times 2}(T - z) = \gamma_{\times 2}(T'') + \gamma_{\times 2}(T(y)) = \gamma_{\times 2}(T') - 2 + 2k + 2 = \gamma_{\times 2}(T)$ .

On vient de voir que l'effacement de n'importe quel sommet de  $T$  qui n'est pas un support n'a aucune influence sur le nombre de domination double qui reste inchangé. Par conséquent,  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable.

**Cas 2.**  $T$  est obtenu à partir de  $T'$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{O}_2$ . D'après la Remarque 4.18,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2$  et donc  $A(T) = A(T') \cup \{y, z\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Remarquons que pour tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble  $D$ ,  $D \cap V(T')$  est un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble, impliquant que  $A(T)$  est l'unique  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Donc nous avons la propriété (a).

Prouvons maintenant la propriété (b). Soit  $u$  le sommet pendant de  $v$  et soit  $w$  un sommet quelconque de  $T$  différent d'un sommet support. Si  $w = x$ , alors puisque  $A(T)$  est l'unique  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble avec  $x \notin A(T)$ ;  $x$  est un sommet libre dans  $T$ . Donc d'après le Lemme 4.12,  $\gamma_{\times 2}(T - x) = \gamma_{\times 2}(T)$ . Aussi, si  $w = z$ , alors il est facile de voir que  $\gamma_{\times 2}(T - z) = \gamma_{\times 2}(T') + 2 = \gamma_{\times 2}(T)$ . Supposons maintenant que  $w \neq u$  et soit  $k = \deg_{T'}(w)$ . Il est clair qu'on a aussi  $k = \deg_T(w)$ . Alors  $T' - w$  produit  $k$  sous-arbres  $T'_1, T'_2, T'_3, \dots, T'_k$ , où  $v \in V(T'_1)$ . Aussi,  $T - w$  produit  $k$  sous-arbres  $T_1, T'_2, T'_3, \dots, T'_k$ , où  $T_1$  est obtenu à partir de  $T'_1$  en attachant la chaîne  $P_3 = xyz$ . D'après la Remarque 4.18,  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 2$ . Maintenant nous savons que  $\gamma_{\times 2}(T' - w) = \sum_{i=1}^k \gamma_{\times 2}(T'_i) = \gamma_{\times 2}(T')$  et que  $\gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \sum_{i=2}^k \gamma_{\times 2}(T'_i) = 2 + \sum_{i=1}^k \gamma_{\times 2}(T'_i) = 2 + \gamma_{\times 2}(T' - w)$ . Ainsi,  $\gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T') + 2 = \gamma_{\times 2}(T)$ . Supposons en dernier que  $w = u$ . On montre d'abord que  $v$  n'est pas un sommet libre dans  $T' - u$ . On sait que  $A(T')$  est l'unique  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble et tout voisin de  $v$  dans  $T'$  hormis  $u$  est libre (d'après la Remarque 4.14). Maintenant puisque  $\gamma_{\times 2}(T' - u) = \gamma_{\times 2}(T')$ , l'ensemble  $\{a\} \cup (A(T') - \{u\})$  est un  $\gamma_{\times 2}(T' - u)$ -ensemble qui contient  $v$ , où  $a$  est n'importe quel voisin de  $v$  dans  $T' - u$ . Ce qui confirme que  $v$  n'est pas un sommet libre dans  $T' - u$  et appartient à au moins un  $\gamma_{\times 2}(T' - u)$ -ensemble. Ceci en plus du fait que  $T - u$  est obtenu à partir de  $T' - u$  en attachant la chaîne  $P_3 = xyz$ , alors d'après la Remarque 4.18,  $\gamma_{\times 2}(T - u) = \gamma_{\times 2}(T' - u) + 2$ . Il s'ensuit que  $\gamma_{\times 2}(T - u) = \gamma_{\times 2}(T' - u) + 2 = \gamma_{\times 2}(T') + 2 = \gamma_{\times 2}(T)$ .

Par conséquent, l'effacement de n'importe quel sommet  $T$  qui n'est pas un support ne change pas  $\gamma_{\times 2}(T)$ ; d'où  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable.  $\square$

Ayant montré que tout arbre appartenant à la famille  $\mathcal{H}$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable, nous sommes à même de prouver ce qui suit:

**Théorème 4.21 (Khelifi et Chellali [73]).** *Un arbre  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable si et seulement si  $T \in \mathcal{H}$ .*

*Preuve.* Si  $T \in \mathcal{H}$ , alors d'après le Lemme 4.20,  $T$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable. Soit maintenant  $T$  un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable. Afin de prouver que  $T \in \mathcal{H}$ , on procède par induction sur l'ordre de  $T$ . Puisque les étoiles et les doubles étoiles ne sont  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stables (d'après la Remarque 4.14),  $T$  possède un diamètre au moins égal à quatre. Il est clair que le plus petit arbre de diamètre quatre est la chaîne  $P_5 = K_{1,2}^*$  qui appartient à  $\mathcal{H}$ . Supposons que tout arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable d'ordre  $n' < n$  appartient à  $\mathcal{H}$ .

Soit  $T$  un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable d'ordre  $n$ . Si  $T$  est de diamètre 4, alors d'après la Remarque 4.14, tout sommet support est adjacent à exactement un seul sommet pendant et il n'existe pas de supports adjacents. Donc  $T$  est une étoile subdivisée  $K_{1,r}^*$  avec  $r \geq 2$  et de tels arbres sont dans  $\mathcal{H}$ . Ainsi, on peut supposer que  $T$  est de diamètre au moins 5.

Enracinons maintenant  $T$  en un sommet pendant  $r$  d'une plus longue chaîne. Soit  $u$  un sommet à distance  $\text{diam}(T) - 2$  de  $r$  sur une plus longue chaîne commençant depuis  $r$ . Nous supposons en plus que parmi de tels sommets,  $u$  possède le degré maximum. Soit  $x_1$  le fils de  $u$  et  $y_1$  le (l'unique) fils de  $x_1$  sur cette chaîne. Soient aussi  $v$  le parent de  $u$  et  $z$  le parent de  $v$ . Puisque  $x_1$  est un sommet support, d'après la Remarque 4.14,  $u$  ne peut être un support. Aussi, puisque  $x_1$  et  $y_1$  sont dans tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble,  $u$  n'appartient à aucun  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble, sinon, on contredit la Remarque 4.14. Donc  $u$  est un sommet libre dans  $T$ . On considère les deux cas suivants:

**Cas 1.**  $\deg_T(u) \geq 3$ . Dans ce cas tout fils de  $u$  est un support et donc  $T_u = K_{1,k}^*$ , où  $k = \deg_T(u) - 1$ . Soit  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  l'ensemble des fils de  $u$  et soit  $y_i$  le sommet

pendant de  $x_i$  pour tout  $i$ . Considérons maintenant l'arbre  $T' = T - D[u]$ . Notons que  $T'$  est d'ordre  $n' > 3$ . En effet, l'arbre  $T'$  est non trivial puisque  $\text{diam}(T) \geq 5$ ; aussi si  $n' = 3$ , alors  $T'$  serait une chaîne  $P_3$  de centre  $z$ , dont tous les sommets sont dans tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble ce qui contredit la Remarque 4.14. De plus, d'après la Remarque 4.19,  $\gamma_{\times 2}(T') = \gamma_{\times 2}(T) - |D(u)|$ . Maintenant on va montrer que  $T'$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stable. Soit  $w \neq v$  un sommet quelconque de  $T'$  qui n'est pas un support. Soit  $b = \deg_{T'}(w) \geq 1$ . Il est clair que l'effacement de  $w$  de  $T'$  produit une forêt avec  $b$  composantes connexes  $T'_1, T'_2, \dots, T'_b$ , où, sans perte de généralité,  $v \in V(T'_1)$ . Aussi l'effacement de  $w$  de  $T$  produit une forêt ayant  $b$  composantes connexes  $T_1, T_2, \dots, T_b$ , avec  $T_i = T'_i$  pour tout  $i \geq 2$  et  $T_1$  est la composante connexe qui contient  $T'_1$  et les sommets de  $D[u]$ . Puisque  $T'_1$  est non trivial, d'après le Remarque 4.19,  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + |D(u)|$ . Il est clair que  $\gamma_{\times 2}(T' - w) = \sum_{i=1}^b \gamma_{\times 2}(T'_i)$  et  $\gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \sum_{i=2}^b \gamma_{\times 2}(T'_i)$ . Puisque  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + |D(u)|$  et  $T$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stable, on a

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(T) &= \gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \sum_{i=2}^b \gamma_{\times 2}(T'_i) \\ &= \gamma_{\times 2}(T'_1) + |D(u)| + \sum_{i=2}^b \gamma_{\times 2}(T'_i) \\ &= \sum_{i=1}^b \gamma_{\times 2}(T'_i) + |D(u)| = \gamma_{\times 2}(T' - w) + |D(u)|, \end{aligned}$$

et donc  $\gamma_{\times 2}(T' - w) = \gamma_{\times 2}(T')$ . Ainsi l'effacement d'un tel sommet  $w$  de  $T'$  ne change pas le nombre de domination double de  $T'$ . Nous devons à présent examiner le cas  $w = v$  et bien sûr  $v$  n'est pas un support. Nous considérons deux possibilités en fonction du degré de  $v$ .

**Cas 1.1.**  $\deg_T(v) \geq 3$ . Soit  $j = \deg_T(v)$ . Il est clair que  $T - v$  est une forêt avec  $j$  composantes connexes  $T_1 = T_u, T_2, T_3, \dots, T_j$  et donc  $T_2, T_3, \dots, T_j$  sont les composantes connexes de  $T' - v$ . Notons que  $\gamma_{\times 2}(T_u) = |D(u)|$ ,  $\gamma_{\times 2}(T - v) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \sum_{i=2}^j \gamma_{\times 2}(T_i)$  et  $\gamma_{\times 2}(T' - v) = \sum_{i=2}^j \gamma_{\times 2}(T_i)$ . Puisque  $T$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stable et  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + |D(u)|$ , on obtient  $\gamma_{\times 2}(T') + |D(u)| = \gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \sum_{i=2}^j \gamma_{\times 2}(T_i) =$

$|D(u)| + \gamma_{\times 2}(T' - v)$ , et donc  $\gamma_{\times 2}(T' - v) = \gamma_{\times 2}(T')$ .

**Cas 1.2.**  $\deg_T(v) = 2$ , c'est à dire que  $v$  est un sommet pendant dans  $T'$ . On commence par montrer que  $z$  est un bon support dans  $T'$ . Puisque  $u$  est un sommet libre dans  $T$ , il s'ensuit que  $v$  et  $z$  appartiennent à tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. Donc tout sommet voisin de  $z$  hormis  $v$  est un sommet libre dans  $T$ ; en effet, si  $z$  possède un autre voisin dans un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble  $X$ , alors  $\{u\} \cup X - \{v\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble contenant  $y_1, x_1$  et  $u$ , une contradiction avec la Remarque 4.14. Il est clair que ceci implique que tout voisin de  $z$  dans  $T'$  autre que  $v$  est encore libre. Il reste de voir que  $\gamma_{\times 2}(T'') = \gamma_{\times 2}(T') - 2$ , où  $T''$  est l'arbre résultant de  $T'$  en effaçant  $v$  et  $z$ . Remarquons que l'effacement de  $z$  de  $T$  donne une forêt avec au moins deux composantes connexes  $T_1 = T_v, T_2, T_3, \dots, T_t$ , où  $T_2, T_3, \dots, T_t$  sont précisément les composantes connexes de  $T''$ . Notons que  $T_v$  est un arbre où tout sommet est soit un sommet pendant ou bien un sommet support; donc  $\gamma_{\times 2}(T_v) = |D(u)| + 2$ . Il s'ensuit que  $\gamma_{\times 2}(T - z) = \gamma_{\times 2}(T_v) + \sum_{i=2}^t \gamma_{\times 2}(T_i) = |D(u)| + 2 + \sum_{i=2}^t \gamma_{\times 2}(T_i)$ . D'autre part,  $\gamma_{\times 2}(T'') = \sum_{i=2}^t \gamma_{\times 2}(T_i) = \gamma_{\times 2}(T - z) - |D(u)| - 2$ . Maintenant puisque  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable et  $\gamma_{\times 2}(T') = \gamma_{\times 2}(T) - |D(u)|$ , on obtient  $\gamma_{\times 2}(T'') = \gamma_{\times 2}(T) - |D(u)| - 2 = \gamma_{\times 2}(T') - 2$ . Ainsi,  $z$  est un bon sommet support dans  $T'$ .

Montrons maintenant que le fait d'enlever le sommet  $v$  de  $T'$  laisse le nombre de domination double de  $T'$  inchangé. Il est clair que  $T - v$  est une forêt avec deux composantes connexes  $T_u$  et  $T' - v$ . Il s'ensuit que  $\gamma_{\times 2}(T - v) = \gamma_{\times 2}(T_u) + \gamma_{\times 2}(T' - v) = |D(u)| + \gamma_{\times 2}(T' - v)$ . En utilisant les égalités  $\gamma_{\times 2}(T - v) = \gamma_{\times 2}(T)$  et  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + |D(u)|$ , on obtient  $\gamma_{\times 2}(T' - v) = \gamma_{\times 2}(T')$ .

Selon toutes les situations qu'on vient d'examiner, on conclut que  $T'$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable. Par induction sur  $T'$ , on a  $T' \in \mathcal{H}$ . Il s'ensuit que  $T \in \mathcal{H}$  parce qu'il est obtenu à partir de  $T'$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{O}_1$ .

**Cas 2.**  $\deg_T(u) = 2$ . il est clair que  $v$  est adjacent à la chaîne  $P_3 = ux_1y_1$ . Puisque  $T$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable, d'après le Lemme 4.17,  $v$  est un sommet support dans  $T$ . Soit  $v'$  son unique sommet pendant. Soit  $T'$  l'arbre obtenu de  $T$

en effaçant  $u, x_1, y_1$ . Notons que  $v$  appartient à tout  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. D'après la Remarque 4.18,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2$ . Nous voulons montrer dans ce qui suit que l'arbre  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stable. Soit en premier  $w$  un sommet quelconque de  $T'$  tel que  $w \notin L(T') \cup S(T')$ . L'effacement de  $w$  de  $T'$  produit une forêt avec au moins deux composantes connexes, disons  $T'_1, T'_2, \dots, T'_m$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $T'_1$  est la composante qui contient  $v$  et donc  $v'$ . Aussi, l'effacement de  $w$  de  $T$  produit une forêt avec  $m$  composantes connexes  $T_1, T'_2, \dots, T'_m$ , où  $T_1$  est l'arbre obtenu à partir de  $T'_1$  en attachant la chaîne  $P_3 = ux_1y_1$  à l'aide de l'arête  $vu$ . Il est clair que puisque  $v, v'$  appartiennent à tout  $\gamma_{\times 2}(T'_1)$ -ensemble, d'après la Remarque 4.18,  $\gamma_{\times 2}(T_1) = \gamma_{\times 2}(T'_1) + 2$ . D'autre part, on a  $\gamma_{\times 2}(T' - w) = \sum_{i=1}^m \gamma_{\times 2}(T'_i)$  et  $\gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \sum_{i=2}^m \gamma_{\times 2}(T'_i)$ . Maintenant puisque  $T$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stable, on obtient

$$\begin{aligned} \gamma_{\times 2}(T) &= \gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T_1) + \sum_{i=2}^m \gamma_{\times 2}(T'_i) \\ &= \gamma_{\times 2}(T'_1) + 2 + \sum_{i=2}^m \gamma_{\times 2}(T'_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \gamma_{\times 2}(T'_i) + 2 = \gamma_{\times 2}(T' - w) + 2. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2$ , on a  $\gamma_{\times 2}(T') = \gamma_{\times 2}(T' - w)$ . Ainsi, l'effacement de  $w$  de  $T'$  ne change pas le nombre de domination double de  $T'$ .

Nous supposons maintenant que  $w$  est un sommet pendant de  $T'$  et soit  $T'' = T' - w$ . Supposons que  $w \neq v'$ . Nous notons ici que  $T - w$  peut être vu comme l'arbre obtenu à partir de  $T''$  en attachant la chaîne  $P_3 = ux_1y_1$  par l'arête  $uv$ . Puisque  $v, v'$  appartiennent à tout  $\gamma_{\times 2}(T'')$ -ensemble, d'après la Remarque 4.18,  $\gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T'') + 2$ . Puisque  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommets-stable,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T - w)$ . En combinant les égalités précédentes avec le fait que  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2$  on obtient  $\gamma_{\times 2}(T') + 2 = \gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T - w) = \gamma_{\times 2}(T'') + 2$  et donc  $\gamma_{\times 2}(T') = \gamma_{\times 2}(T'') = \gamma_{\times 2}(T' - w)$ . Ainsi, l'effacement de n'importe quel sommet pendant de  $T'$  différent de  $v'$  ne change pas le nombre de domination double de  $T'$ . Supposons en dernier que  $w = v'$  et rappelons que d'après le Corollaire 4.4,  $\gamma_{\times 2}(T - v') \leq \gamma_{\times 2}(T')$ . Considérons deux sous-cas.

**Cas 2.1.**  $\deg_{T'}(v) = 2$ , c'est à dire que  $v$  est un sommet pendant dans  $T' - v'$ . Rappelons que  $z$  est le parent de  $v$  dans  $T$  et notons que  $T' - v'$  possède un ordre au moins égal à trois puisque  $\text{diam}(T) \geq 5$ . Supposons maintenant que  $\gamma_{\times 2}(T' - v') < \gamma_{\times 2}(T')$  et soit  $D'$  un  $\gamma_{\times 2}(T' - v')$ -ensemble quelconque. Alors il est clair que  $v, z \in D'$  et  $D' \cup \{v', x_1, y_1\}$  est un EDD de  $T$ , impliquant que  $\gamma_{\times 2}(T) \leq |D'| + 3$ . En utilisant l'égalité  $\gamma_{\times 2}(T') = \gamma_{\times 2}(T) - 2$ , on obtient

$$\gamma_{\times 2}(T) \leq |D'| + 3 = \gamma_{\times 2}(T' - v') + 3 < \gamma_{\times 2}(T') + 3 = \gamma_{\times 2}(T) + 1,$$

et donc  $\gamma_{\times 2}(T) = |D'| + 3$ . Il s'ensuit que  $D' \cup \{v', x_1, y_1\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble, mais dans un tel ensemble  $v$  serait adjacent à  $z$  et  $v'$ , ce qui contredit la Remarque 4.14. Par conséquent,  $\gamma_{\times 2}(T - v') = \gamma_{\times 2}(T')$ .

**Cas 2.2.**  $\deg_{T'}(v) \geq 3$ . Il est clair que  $v$  devrait avoir au moins un autre fils différent de  $u$  et  $v'$  dans  $T$ . Un tel fils ne peut pas être un sommet support (d'après la Remarque 4.14). Ainsi, soient  $u'$  un fils de  $v$ ,  $x'_1$  un fils de  $u'$  et  $y'_1$  un fils de  $x'_1$ . D'après notre choix de  $u$ , le sommet  $u'$  doit être de degré deux. Nous allons montrer que  $v$  n'est pas un sommet libre dans  $T' - v'$ . Supposons le contraire que  $v$  n'appartient à aucun  $\gamma_{\times 2}(T' - v')$ -ensemble et soit  $X$  un  $\gamma_{\times 2}(T' - v')$ -ensemble quelconque. Alors  $x'_1, y'_1 \in X$  et puisque  $v \notin X$ , on a  $u' \in X$ . Afin de double dominer  $v$  par  $X$ , ce dernier contient au moins un autre voisin de  $v$ , mais alors  $\{v\} \cup X - \{u'\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T' - v')$ -ensemble qui contient  $v$ , une contradiction. Donc  $v$  appartient à un certain  $\gamma_{\times 2}(T' - v')$ -ensemble  $Y$  et un tel ensemble peut être étendu en un EDD de  $T - v'$  en ajoutant  $x_1, y_1$ . Ceci implique que  $\gamma_{\times 2}(T - v') \leq \gamma_{\times 2}(T' - v') + 2$ , et l'égalité est obtenue à partir du fait qu'il existe un  $\gamma_{\times 2}(T - v')$ -ensemble qui contient  $x_1, y_1, v$  et pas  $u$ . Supposons maintenant que  $\gamma_{\times 2}(T' - v') < \gamma_{\times 2}(T')$ . Remarquons que  $Y \cup \{x_1, y_1, v'\}$  est EDD de  $T$ . Du fait que  $\gamma_{\times 2}(T') = \gamma_{\times 2}(T) - 2$ , on obtient

$$\gamma_{\times 2}(T) \leq |Y \cup \{x_1, y_1, v'\}| = \gamma_{\times 2}(T' - v') + 3 < \gamma_{\times 2}(T') + 3 = \gamma_{\times 2}(T) - 2 + 3,$$

et donc  $\gamma_{\times 2}(T) = |Y \cup \{x_1, y_1, v'\}|$ , c'est à dire que  $Y \cup \{x_1, y_1, v'\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble dans lequel  $v$  possède deux voisins, et ceci contredit la Remarque 4.14. Par conséquent,  $\gamma_{\times 2}(T' - v') = \gamma_{\times 2}(T')$ .

En se basant sur toutes les situations précédentes, on conclut que l'effacement de n'importe quel sommet de  $T'$  différent d'un sommet support laisse inchangé le nombre de domination double de  $T'$ , ce qui veut dire que  $T'$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stable. En appliquant l'hypothèse d'induction sur  $T'$ , on a  $T' \in \mathcal{H}$ . Il s'ensuit que  $T \in \mathcal{H}$  parce qu'il est obtenu à partir de  $T'$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{O}_2$ .  $\square$

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Pour de nombreuses applications comme la conception des réseaux, la criticité et la stabilité d'un graphe par rapport à un paramètre de domination est un problème important. Aussi, du point de vue théorique, l'étude de ces concepts s'est révélé d'un grand intérêt puisqu'elle permet de mieux connaître les propriétés structurelles des graphes considérés.

Dans cette thèse, on s'est intéressé aux types de criticité et de stabilité les plus présents dans la littérature, et ce par rapport à un type de domination assez étudié ces dernières années qui est la domination double. Nous avons voulu que notre étude soit aussi complète que possible en faisant le tour de ce qui a été fait par d'autres auteurs, de ce que nous avons réussi à faire et même de ce que nous nous proposons, à nous et, éventuellement, à d'autres chercheurs, de faire. Nous avons essayé de plus de donner une bibliographie assez riche des notions de criticité et de stabilité même pour d'autres paramètres de domination, non seulement pour montrer le grand intérêt que donnent les chercheurs à cet axe de recherche, mais aussi par souci de mettre entre les mains du lecteur un manuscrit qui donne une idée assez générale sur ce qui se fait dans ce domaine.

L'étude des notions de criticité et de stabilité par rapport à la domination double a été initiée par Thacker et Haynes et concernait les graphes pour lesquels le nombre de domination double baisse quand n'importe quelle arête du graphe complémentaire est ajoutée. Ces graphes ont été ensuite étudiés par Wang et Shan, puis par Wang et Kang. Les résultats les plus importants des trois études ont été présentés dans le chapitre 2 et concernent les cycles et les arbres  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques et les propriétés des graphes  $3\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques et  $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques, en particulier celles liées aux couplages. Comme perspectives de l'étude des graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques, nous nous contenterons

de donner les problèmes ouverts proposés par les auteurs des trois articles:

- La caractérisation des graphes  $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques  $G$  tels que de  $\text{diam}(G) = 2$  et  $\delta(G) \geq 2$ .
- Existe-t-il une famille infinie de graphes  $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques d'ordre pair qui contiennent un  $K_{1,4}$  comme sous-graphe induit et qui n'admettent pas de couplages parfaits ?
- Existe-t-il une famille infinie de graphes  $4\text{-}\gamma_{\times 2}$ -arête-critiques d'ordre impair qui contiennent un  $K_{1,4}$  induit et qui ne sont pas facteur-critiques ?

Dans le même chapitre, nous avons présenté aussi les résultats obtenus par Chellali et Haynes dans leur étude des graphes dont le nombre de domination double reste stable suite à la suppression d'une arête quelconque. Leurs résultats principaux sont l'élaboration d'une condition nécessaire et suffisante pour les graphes ayant cette propriété, et la caractérisation des arbres stables ayant la même propriétés pour toute arête non-pendante. Permettant de mieux connaître les spécificités structurelles des graphes arête-enlevés-stables, la condition nécessaire et suffisante obtenue par les auteurs est un outil qui pourra être utilisé pour la caractérisation d'autres classes de graphes.

Nos contributions dans l'étude des graphes critiques et stables par rapport à la domination double a concerné les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -arête-enlevée-critiques, les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critiques et les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stables. Les résultats que nous avons obtenus ont été présentés dans les chapitres 3 et 4.

Pour les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques, nous avons réussi à montrer plusieurs propriétés et à donner des caractérisations de quelques classes de graphes. Nous avons d'abord établi une condition nécessaire et suffisante pour les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques qui nous a été très utile pour la caractérisation des graphes réguliers, des arbres, des graphes sans  $P_4$  et des graphes sans  $P_5$ . Nous avons aussi caractérisé les graphes  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques pour de petits nombres de domination double. Nous pensons que les résultats que nous avons établi pour cette famille de graphes sont satisfaisants pour un premier

travail qui peut constituer une base solide pour résoudre d'autres problèmes comme la caractérisation d'autres classes de graphes  $\gamma_{\times 2}$ -AE-critiques ou même la caractérisation de ces graphes en général.

Le chapitre 4 comporte l'étude des graphes  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critiques et  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stables que nous avons aussi initiée. Nous avons commencé par évaluer l'effet de la suppression d'un sommet sur le nombre de domination double d'un graphe, puis nous avons donné quelques propriétés de ces deux familles de graphes. Nous avons aussi établi une caractérisation descriptive des arbres  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critiques et une autre constructive des arbres  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stables. Là aussi, plusieurs problèmes peuvent se poser ouvrant le champ à des opportunités de recherche assez intéressantes comme l'étude des propriétés des couplages, l'étude, ou éventuellement la caractérisation, des graphes ayant de petits nombres de domination double, et la caractérisation d'autres classes de graphes  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-critiques et  $\gamma_{\times 2}$ -sommet-stables.

Un dernier problème que nous proposons comme perspective de recherche dans le domaine de la criticité et de la stabilité par rapport à la domination double est l'étude des graphes stables relativement à l'ajout d'une arête quelconque.

## REFERENCES

1. Berge C., "Graphes et hypergraphes", Dunod, deuxième édition, 1973.
2. Chartrand G. et Lesniak L., "Graphs & Digraphs", Third Edition, Chapman & Hall, London, 1996.
3. Haynes T.W., Hedetniemi S. T. et Slater P. J., "Fundamentals of Domination in Graphs", Marcel Dekker, New York, 1998.
4. Haynes T.W., Hedetniemi S. T. et Slater P. J., "Domination in Graphs: advanced Topics", Marcel Dekker, New York, 1998.
5. De Jaenisch C.F., "Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs", Saint Petersburg, 1862.
6. Berge C., "Theory of graphs and its applications", Methuen, London, 1962.
7. Ore O., "Theory of graphs", Amer. Math. Soc. Colloq., Pub 38, Providence, R.I., (1962).
8. Cockayne E.J. et Hedetniemi S.T., "Towards a theory of domination in graphs", Networks 7, (1977), 247-261.
9. Hedetniemi S.T. et Laskar R.C., "Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters", Discrete Mathematics 86, (1990), 257-277.
10. Liu C.L., "Introduction to combinatorial mathematics", McGraw-Hill, New York, 1968.
11. Alber, J., Betzler, N. et Niedermeier, R., "Experiments on data reduction for optimal domination in networks", Annals of Operations Research 146, (2006), 105-117.

12. Cooper, C., Klasing, R. et Zito, M., "Lower bounds and algorithms for dominating sets in web graphs", *Internet Math.* 2, (2005), 275-300.
13. Dai, F. et Wu, J., "On Constructing k-Connected k-Dominating Set in Wireless Ad Hoc and Sensor Networks", *J. Parallel and Distributed Computing* 66, (2006), 947-958.
14. Haynes T.W, Knisley D., Seier E. et Zou Y., "A quantitative analysis of secondary RNA structure using domination based parameters on trees", *BMC Bioinformatics* 7, (2006), 108.
15. Kelleher, L. et Cozzens, M., "Dominating Sets in Social Network Graphs", *Mathematical Social Sciences* 16 (3), (1988), 267-279.
16. Walikar, H.B. et Acharya, B.D., "Domination critical graphs", *Nat. Acad. Sci. Lett.* 2, (1979), 70–72.
17. Bauer, D., Harary, F., Nieminen, J. et Suffel, C.L., "Domination alteration sets in graphs", *Discrete Math.* 47, (1983), 153–161.
18. Sumner, D.P. et Blich P., "Domination critical graphs", *J. Combin. Theory Ser. B* 34, (1983), 65-76.
19. Chen, Y., Tian, F. et Wei, B., "The 3-domination-critical graphs with toughness one", *Util. Math.* 61, (2002), 239-253.
20. Favaron, O., Tian, F. et Zhang, L., "Independence and hamiltonicity in 3-domination-critical graphs", *J. Graph Theory* 25, (1997), 173-184.
21. Favaron, O., Sumner, D. et Wojcicka, E., "The diameter of domination k-critical graphs", *J. Graph Theory* 18, (1994), 723-734.
22. Flandrin, E., Tian, F., Wei, B. et Zhang, L., "Some properties of 3-domination-critical graphs", *Discrete Math.* 205, (1999), 65-76.
23. Sumner, D.P., "Critical concepts in domination", *Discrete Math.* 86 (1990), 33-46.

24. Sumner, D.P. et Wojcicka, E., "Graphs critical with respect to the domination number", Dans: T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater (Eds.), *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998, (Chapitre 16).
25. Wojcicka, E., "Hamiltonian properties of domination-critical graphs", *J. Graph Theory* 14, (1990), 205-215.
26. Brigham R.C., Chinn P.Z. et Dutton, R.D., "A study of vertex domination critical graphs", Tech. Report M-2, Department of Mathematics, University of Central Florida (1984).
27. Brigham R.C., Chinn P.Z. et Dutton, R.D., "Vertex domination-critical graphs", *Networks* 18, (1988), 173-179.
28. Fulman, J., "Domination in vertex and edge critical graphs", Manuscript, Department of Mathematics, Harvard University (1994).
29. Fulman, J., Hanson, D. et MacGillivray, G., "Vertex domination-critical graphs", *Networks* 25, (1995), 41-43.
30. Carrington, J., Harary, F. et Haynes, T.W., "Changing and unchanging the domination number of a graph", *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 9, (1991), 57-63.
31. Dutton, R.D. et Brigham, R.C., "An extremal problem for edge domination in insensitive graphs", *Discrete Appl. Math.* 20, (1988), 113-125.
32. Haynes, T.W. et Henning, M.A., "Changing and unchanging domination: a classification", *Discrete Math.* 272, (2003), 65-79.
33. Samodivkin, V., "Changing and unchanging of the domination number of a graph", *Discrete Math.* 308, (2008), 5015-5025.
34. Harary F. et Haynes T. W., "Double domination in graphs", *Ars Combin.* 55, (2000), 201-213.
35. Klasing, R. et Laforest, C., "Hardness results and approximation algorithms of k-tuple domination in graphs", *Inform. Process. Lett.* 89, (2004), 75-83.

36. Liao, C-S. et Chang, G. J., "k-tuple domination in graphs", *Inform. Process. Lett.* 87, (2003), 45-50.
37. Erfang, S., Chuangyin, D. et Liying, K., "A note on Nordhaus-Gaddum inequalities for domination", *Discrete Appl. Math.* 136, (2004), 83-85.
38. Chellali M. et Haynes T.W., "On paired and double domination in graphs", *Utilitas Mathematica*, 67, (2005), 161-171.
39. Liao C-S. et Chang G.J., "Algorithmic aspect of k-tuple domination in graphs", *Taiwanese journal of mathematics*", Vol. 6, (2002), 415-420.
40. Blidia, M., Chellali, M., Haynes, T.W. et Henning, M.A. "Independent and double domination in trees", *Utilitas Mathematica*. 70, (2006), 159-173.
41. Khodkar, A., Sheikholeslami, S.M. et Hasanzadeh, H., "Bounds on double domination numbers of graphs", *Congr. Numer.* 177, (2005), 77–87.
42. Blidia, M., Chellali, M. et Favaron, O., "Ratios of some domination parameters in graphs and claw-free graphs", *Dans: Graph Theory, Trends in Mathematics*, (2006), 61-72.
43. Harant, J. et Henning, M.A., "A realization algorithm for double domination in graphs", *Utilitas Mathematica* 76, (2008), 11-24.
44. Chen, X. et Sun, L., "Some new results on double domination in graphs", *J. Math. Res. Expo.* 25, (2005), 451-456.
45. Blidia M., Chellali M. et Haynes T.W., "Characterization of trees with equal paired and double domination numbers", *Discrete Math.*, Vol. 306, (2006), 1840-1845.
46. Chellali, M., "A note on the double domination number in trees", *AKCE Int. J. Graphs Comb.* 3, (2006), 147-150.
47. Chellali, M., Favaron, O., Haynes, T.W. et Raber, D., "Ratios of some domination parameters in trees", *Discrete Math.* 308, (2008), 3879-3887.

48. Karami, H., Khodkar, A. et Sheikholeslami, S.M., "Trees whose double domination number is twice their domination number", *Congr. Numer.* 186, (2007), 49-56.
49. Chellali, M. et Haynes, T.W., "A characterization of trees with unique minimum double dominating sets", *Utilitas Mathematica* 83, (2010), 233-242.
50. Krzywkowski, M., "On trees with double domination number equal to total domination number plus one", *Ars Combinatoria*, 102, (2011), 3-10.
51. Krzywkowski, M., "On trees with double domination number equal to 2-domination number plus one", à apparaître dans *Houston Journal of Mathematics*.
52. Mynhardt C.M., "Vertices contained in every minimum dominating set of a tree", *J. Graph Theory* 31, (1999), 163-177.
53. Blidia, M., Chellali M. et Khelifi S., "Vertices belonging to all or to no minimum double domination sets of trees". *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* 2 No. 1, (2005), 1-9.
54. Haynes, T.W. et Thacker D.W., "Double Domination Edge Critical Graphs", *Utilitas Mathematica* 78, (2009), 139-149.
55. Thacker D.W., "Double Domination Edge Critical Graphs", master thesis, East Tennessee State University, (2006).
56. Van der Merwe, L.C., Mynhardt, C.M. et Haynes, T.W., "Criticality index of total domination", *Congr. Numer.* 131, (1998), 67-73.
57. Wang, H. et Shan, E., "Some matching properties in edge critical graphs ", *computers and mathematics with applications* 59, (2010), 694-699.
58. Wang, H. et Kang, L., "Matching properties in double domination edge critical graphs", *Discrete mathematics, algorithms and applications* Vol. 2, (2010), 151-160.
59. Chellali, M. et Haynes, T.W., "Double domination stable graphs upon edge removal", *Australasian Journal of comb.* vol 47, (2010), 157-164.

60. Grobler, P.J.P. et Mynhardt, C.M., "Domination parameters and edge-removal-critical graphs", *Discrete Math.* 231, (2001), 221-239.
61. Grobler, P.J.P. et Mynhardt, C.M., "Secure domination critical graphs", *Discrete Math.* 309, (2009), 5820-5827.
62. Desormeaux, W.J., Haynes, T.W. et Henning, M.A., "Total domination critical and stable graphs upon edge removal", *Discrete Appl. Math.* 158, (2010), 1587-1592.
63. Koh, K.M., Maleki, Z. et Omoomi, B., "On the total restrained domination edge critical graphs", à paraître dans *Ars Combinatoria*.
64. Khelifi, S., Blidia, M., Chellali, M. et Maffray, F., "Double domination edge removal critical graphs", *Australasian Journal of comb.* vol 48, (2010), 285-299.
65. Khelifi, S., Blidia, M., Chellali, M. et Maffray, F., "Double domination edge removal critical graphs", communication acceptée dans COSI'2010.
66. Goddard, W., Haynes, T.W., Henning, M.A. et van der Merwe, L.C., "The diameter of total domination vertex critical graphs", *Discrete Math.* 286, (2004), 255-261.
67. Wang, C., Hu, Z. et Li, X., "A constructive characterization of total domination vertex critical graphs", *Discrete Math.* 309, (2009), 991-996.
68. Desormeaux, W.J., Haynes, T.W. et Henning, M.A., "Total domination changing and stable graphs upon vertex removal", *Discrete Appl. Math.* 159 (2011), 1548-1554.
69. Edwards, M., "Criticality concepts for paired domination in graphs", Master Thesis, University of Victoria Canada, (2006).
70. Hou, X. et Edwards, M., "Paired domination vertex critical graphs". *Graphs comb* 24, (2008), 453—459.

71. Henning, M.A. et Mynhardt, C.M., "The diameter of paired-domination vertex critical graphs". *Czechoslovak Math. J.* 58, (2008), 887–897.
72. Jafari Rad, N., "Properties of total restrained domination vertex critical graphs", à paraître dans *Ars Combinatoria*.
73. Khelifi, S. et Chellali, M., "Double domination critical and stable graphs upon vertex removal", à paraître dans *Discussiones Mathematicae Graph Theory*.