

0République Algérienne Démocratique et Populaire

Université SAAD DAHLAB Blida -1-

Institut d'aéronautique et des études spatiales

Département de construction aéronautique



Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de
MASTER

Domaine : Sciences et technologie

Filière : Aéronautique

Spécialité : Avionique

Thème

***Commandes H_∞ et μ -analyse dédiées à un
système aéroélastique***

Présenté par :

HAMDA Nour El Imene

REBHI Oussama

Encadré par :

Mr. DILMI Smain

Promotion : 2016/2017

Remerciements :

En tout premier lieu, je remercie le bon DIEU, tout puissant de m'avoir donné la patience pour survivre, la force pour me relever et l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Je tiens ensuite à remercier mes chers parents pour leurs encouragements et leur soutien aussi bien matériel que moral, sans eux rien n'aurait été possible.

Ma plus grande gratitude va à mon promoteur le docteur DILMI Smain pour avoir bien voulu nous encadrer et qui a su nous guider tout au long du projet, je le remercie pour sa bienveillance, son aide, sa disponibilité et pour le temps qu'il nous a consacré.

Je voudrais également exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Melbous pour avoir mis en notre disposition la documentation qui nous a été vraiment utile.

Je désire aussi remercier mon binôme Rebhi Oussama avec lequel j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler, nous avons formé une belle équipe.

Un grand merci à ma meilleure amie Ragoub Zahra qui n'a jamais cessé de m'aider, merci ma meilleure pour ta précieuse contribution dans ce travail.

Je remercie tout spécialement mon meilleur Ferarma Oussama qui m'a apporté son support moral et intellectuel constant.

Sans oublier mes chères amies Benbrahim Hadjer et Chaiberras Mawia pour leurs aides, conseils et encouragements.

Hamda Nour El Imene

Remerciements :

Après avoir rendu grâce à Dieu le tout puissant et le miséricordieux je tiens à remercier vivement tous ceux qui, de près ou de loin ont participé à la rédaction de ce mémoire. Il s'agit plus particulièrement de :

Mes très chers parents, Nasser Eddine et Rachida, qui ont toujours été là pour moi, « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier ».

Les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Mes frères Abdelhadi, Abdelmalek, Ahmed et Naïm pour leur encouragement.

Mon binôme Hamda Noor el Imen pour ses efforts et sa patience ainsi notre camarade Ragoub Zahra pour son aide et ses idées et toute la promo Avionique.

Mes amis Zakaria, Noureddine, et tous les habitants de cité CNEP Saïd hamdine, Rym , Amira , Kaouthar et « MARWA ».

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Rebhi Oussama

Lettres grecques :

Symbole	Unité
α : Angle d'incidence.	[rad]
β : Angle de déflexion de la surface de commande du bord de fuite.	[rad]
γ : Angle de déflexion de la surface de commande du bord d'attaque.	[rad]
ρ : Densité de l'air.	[Kg/m ³]
μ : Valeur singulière structurée	[-]

Lettres Latines :

Symbole	Unité
L : La force de portance.	[N]
M : Le moment aérodynamique.	[kg.m ²]
T : L'énergie cinétique	[J]
U : L'énergie potentielle	[J]
Q_j : La composante des forces extérieures qui travaillent selon de degré de liberté	[N]
U_j : Le champ de déplacement	[m]
I_{cg} : Le moment de l'inertie autour du centre de gravité	[kg.m ²]
m : La masse de l'aile	[kg]
V_{cg} : La vitesse du centre de gravité	[m/s]
V_{ea} : La vitesse de centre élastique	[m/s]
δ_h : Le déplacement vertical virtuel	[m]
δ_α : Le déplacement de tangage virtuel.	[rad]
δw_p : Le travail Virtual dû à la force de portance	[N.m]

Nomenclature

δw_m : Le travail virtuel dû au moment M	[N.m]
δw : Le travail virtuel total	[N.m]
C_h : Le coefficient d'amortissement pour le mouvement vertical	[Kg/s]
C_α : Le coefficient d'amortissement pour le tangage	[Kg.m ² /s]
h : Déplacement vertical.	[m]
b : Demi cord moyen de profile d'aile	[m]
x_α : Le paramètre de déséquilibre statique	[-]
m_T : La masse totale de l'aile et de sa structure de support	[kg]
m_w : La masse de l'aile seulement.	[Kg]
k_h : Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement vertical	[N/m]
k_α : Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement de tangage	[Nm/rad]
I_{ea} : Moment d'inertie autour de l'axe élastique.	[Kg .m ²]
$c_{l\alpha}$: La dérivé de coefficient de portance par rapport à α .	[-]
$c_{l\beta}$: La dérivé de coefficient de portance par rapport à β .	[-]
$c_{l\gamma}$: La dérivé de coefficient de portance par rapport à γ .	[-]
$c_{m\alpha}$: La dérivé de coefficient de moment par rapport à α	[-]
$c_{m\beta}$: La dérivé de coefficient de moment par rapport à β	[-]
$c_{m\gamma}$: La dérivé de coefficient de moment par rapport à γ	[-]
S : La surface de la section d'aile.	[m]
V : Vitesse de l'écoulement	[m/s]
t : Temps	[s]
t_s : Temps de réponse	[s]
Q_h : La force généralisée selon h	[N]

Nomenclature

Q_α : La force généralisée selon α	[N]
t_f : Le temps terminal	[s]
q_{nom} : La pression dynamique nominale.	[Pa]
e : Erreur de pondération	[-]
$e_o(t)$: Erreur d'observation	[-]
W : Pondération sur la perturbation associée à un paramètre	[-]

Les matrices et vecteurs :

$x \in R^n$: Vecteur qui représente les n variables d'état (vecteur d'état).

$y \in R^q$: Vecteur qui représente les q sorties.

$u \in R^p$: Vecteur qui représente les p commandes.

$A \in R^{n \times n}$: Matrice d'état du système linéaire.

$B \in R^{n \times p}$: Matrice de commande d'un système linéaire.

$C \in R^{q \times n}$: Matrice d'observation d'un système linéaire.

$D \in R^{q \times p}$: Matrice d'action directe d'un système linéaire.

Δ : Matrice d'incertitude.

I : la matrice d'inertie

F : la matrice d'amortissement

E : la matrice de rigidité

$P(t)$: La solution de l'équation de Riccati.

w : Entrée auxiliaire.

z : Sortie auxiliaire.

Les fonctions :

d : La fonction de dissipation de Rayleigh.

$G(s)$: Fonction de transfert.

Abréviations :

ARE : l'équation algébrique de Riccati (Algebraic Riccati Equation).

ASE : Aéro-Servo-Elasticité.

BIBO : Bounded Input- Bounded Output.

DRE : l'équation différentielle de Riccati.

FBW : Fly By Wire.

LCO : Limit Cycle Oscillations.

LFT : Linear fractional transformation.

LTI : linéaire time invariant.

MIMO : Multi-Input_ Multi-Output.

PID : Proportionnel-Intégral-Dérivatif.

SISO : Single-Input Single-Output.

VSS : Valeur singulière structurée.

Résumé

Ce mémoire est basé sur la modélisation et le contrôle d'un système aéroélastique. Le modèle à étudier est une section d'aile bidimensionnelle de deux degré de liberté avec deux surfaces de commande. La dynamique du mouvement de ce modèle concerne le tangage et le déplacement vertical. Notre projet traite en particulier la commande robuste par les approches H_∞ et μ -analyse, nous avons choisi d'appliquer ces deux lois de commande robuste sur un modèle d'aile appelé TAMU WING II. Ces deux approches consistent à élaborer un contrôleur robuste capable d'assurer la stabilité, la commande et de satisfaire la robustesse et les performances. Les deux commandes envisagées sont basées, respectivement sur la minimisation de la norme H_∞ et la valeur singulière structurée du transfert en boucle fermée. La robustesse des deux commandes vis-à-vis la suppression du phénomène de flottement et la réduction du niveau de vibration a été étudiée.

Mots clé : système aéroélastique, flottement, H_∞ , μ -analyse, aéroélasticité, commande robuste, TAMU WING II.

Abstract

This memory is based on the modeling and the control of an aeroelastic system. The model studied is a 2DOF wing section with two control surfaces. The dynamics of the movement of this model relates to pitching and vertical displacement. Our project deals in particular with the robust control by using H_∞ and μ -analyse approaches. We have chosen to apply these two robust control laws on a model of wing called TAMU WING II. These two approaches consist on elaborating a robust controller enable of ensuring stability, control and satisfying robustness and performances, under the condition of minimizing the H_∞ norm and the structured singular value, respectively. The robustness of the commands towards the suppression of flutter and the reduction of the vibration level have been studied.

Key words : Aeroelastic system, flutter, H_∞ , μ -analyse, aéroélasticity, robust control, TAMU WING II.

ملخص

مشروع تخرجنا يتلخص في دراسة نموذج هوائي مرن والتحكم فيه. هذا النموذج يتمثل في مقطع من جناح الطائرة بسطحين من أسطح التحكم، حركته الديناميكية تتعلق بالحركة الانحرافية المائلة و الحركة العمودية. يتناول مشروعنا السيطرة المتينة من قبل نهج H_{∞} و μ -analyse. لقد اخترنا لتطبيق هاتين المقاربتين للتحكم المتين نموذج الجناح TAMU WING II. المقاربتين H_{∞} و μ -analyse عبارة عن نموذج لانجاز وحدة تحكم قوية قادرة على ضمان المتانة و تلبية الاداء تحت شرط التقليل من الطويلة H_{∞} و القيمة الاستثنائية المنظمة μ للتحويل الحلقي المغلق، على الترتيب. من خلال هذه الاطروحة لقد تم دراسة متانة كلتا المقاربتين اتجاه القضاء على ظاهرة الاهتزازات والحد من مستواها.

الكلمات المفتاحية: نظام هوائي مرن، اهتزازات، μ -analyse، H_{∞} ، ايروسرفوالستستي، نظام تحكم متين، الجناح

TAMU WING II

Nomenclature

Résumé

Table des matières

Liste des figures

Liste des Tableaux

Liste des annexes

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : Généralités	3
Introduction	3
I.1. Notion d'aéroélasticité	3
I.1.1. L'aéroélasticité parmi les phénomènes d'interaction fluide-structure	3
I.2. Aspect historique	6
I.3. Les phénomènes aéroélastiques	9
I.3.1. Phénomènes d'aéroélasticité statique	9
I.3.2. Phénomènes d'aéroélasticité dynamique	10
I.4. Le flottement	10
I.4.1. Les critères de flottement	11
I.4.1.1. Amortissement	11
I.4.1.2. Fréquence	12
I.4.1.3. Marge de flottement	12
I.4.2. Types de flottements	12
I.4.2.1. Flottement à 2 ddl	12
I.4.2.2. Flottement à 1ddl	13
I.4.3. La prévention contre le flottement	14
I.5. Notion d'Aéroservoélasticité	14
CHAPITRE II : Modélisation du système aéroélastique	17
Introduction	17
II.1. Hypothèses du modèle	17
II.2. La modélisation structurelle	17
II.2.1. L'énergie potentielle	18
II.2.2. L'énergie cinétique	19

Table des matières

II.2.3. Les forces généralisées	20
II.3. Le modèle aérodynamique	23
II.4. Application sur le modèle d'aile TAMU WING II	23
II.4.1. Les paramètres de TAMU WING II	25
II.5. La représentation d'état de modèle TAMU WING II	25
II.6. Modélisation des incertitudes paramétriques	29
II.6.1. La transformation linéaire fractionnaire LFT (Linear Fractional Transformation)	29
II.6.2. Le modèle mathématique du système incertain	30
II.6.3. Application numérique sur le modèle TAMU WING II	34
Conclusion	35
CHAPITRE III : Commande par H^∞ et μ-analyse	36
Introduction	36
III.1. La commande H^∞	37
III.1.1. Le problème H^∞ standard	38
III.1.2. Formulation H^∞ par Loop Shaping	39
III.1.3. Résolution du problème H^∞	40
III.1.4. Synthèse H^∞ pondérée	42
III.1.5. Mise sous forme standard	44
III.2. Technique de μ -Analyse et μ -Synthèse	45
III.2.1. μ -Analyse	46
III.2.1.1. Obtention du schéma d'interconnexions standard :	46
III.2.1.2. Cas général des dynamiques négligées	48
III.2.1.3. Problèmes théoriques	49
III.2.1.4. Performance robuste	49
III.2.2. μ -Synthèse	50
III.2.2.1. Problème général	50
III.2.2.2. LA D-K Itération	52
Conclusion	53

CHAPITRE IV : Résultats et interprétations	54
Introduction	54
IV.1. Simulation en boucle ouverte	54
IV.1.1. Le système nominal	54
IV.1.1.1. Interprétation	56
IV.1.2. Le système incertain.....	57
IV.1.2.1. Interprétation	58
IV.1.3. Conclusion	58
IV.2. Simulation en boucle fermée	59
IV.2.1. Application de la commande H_∞	59
IV.2.1.1. Détermination des spécifications sur la robustesse	59
IV.2.1.2. Calcul du contrôleur H_∞	61
IV.2.1.3. Régime perturbé (Système incertain)	70
IV.2.1.4. Conclusion	76
IV.2.2. Application de la commande μ -analyse	77
IV.2.2.1. Etude de la robustesse	78
IV.2.2.2. Interprétation	83
IV.2.2.3. Le gain en vitesse	84
IV.2.2.4. Etude comparative	89
IV.2.2.5. Résumé des résultats numériques	90
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	92

Références bibliographiques

Annexes

CHAPITRE I

Figure I.1 : Caractérisation des problèmes d'aéroélasticité parmi l'ensemble des problèmes d'interaction entre un fluide et une structure	4
Figure I.2 : Airbus A380 et sa voilure gauche	6
Figure I.3 : L'avion de Samuel Langley, le 8 décembre 1903, dont l'aile avant a été détruite par le phénomène de divergence	6
Figure I.4 : le bombardier Handley Page 0/400	6
Figure I.5 : Fokker D-8	6
Figure I.6 : Triangle des forces de Collar	7
Figure I.7 : Route vers le flottement classique, un profil d'aile à gauche, un tablier de pont à droite	13
Figure I.8 : Triangle d'interaction des disciplines	15
Figure I.9 : Domaine de l'aéroservoélasticité	16
Figure I.10 : Schéma fonctionnel du concept du système aéroservoélastique	16

CHAPITRE II :

Figure II.1 : La géométrie de la section d'aile bidimensionnelle	18
Figure II.2 : Le modèle aéroélastique d'une section d'aile bidimensionnelle avec les deux surfaces de commande de bord d'attaque et de bord de fuite	23
Figure II.3 : A) vue de face de la section d'aile avec les deux surfaces de commande défléchir de leurs positions initiales. B) vue de dessus de l'aile TAMU WING II avec revêtement transparent	24
Figure II.4 : Mise sous forme de LFT d'un processus incertain.....	29

CHAPITRE III :

Figure III.1 : Le problème H_∞ standard	38
Figure III.2 : Allure des fonctions de pondérations.....	39
Figure III.3 : Système asservi pondéré.....	42
Figure III.4 : Forme standard de sensibilité mixte S/KS/T.....	45
Figure III.5 : Schéma d'interconnexions standard pour la μ analyse.....	46
Figure III.6 : Mise sous forme de LFT du processus incertain.....	47

Figure III.7 : Obtention du schéma d'interconnexions standard.....	47
Figure III.8 : Cas général des dynamiques négligées.....	48
Figure III.9 : Interconnexions pour μ -Synthèse.....	50
Figure III.10 : Réduction du problème.....	52
 CHAPITRE IV :	
Figure IV.1 : Valeurs singulières du système nominal.....	54
Figure IV.2 : La réponse du système en boucle ouverte pour le déplacement vertical h et l'angle de tangage α à une vitesse $V = 13\text{m/s}$	55
Figure IV.3 : La réponse du système en boucle ouverte pour le déplacement vertical h , et l'angle de tangage α à une vitesse $V = 14\text{m/s}$	56
Figure IV.4 : La réponse du système incertain en boucle ouverte pour le déplacement vertical h , et pour l'angle de tangage α pour la vitesse critique $V=13.1643\text{ m/s}$	58
Figure IV.5 : Gabarit sur les fonctions de pondération W_1 et W_3	60
Figure IV.6 : Valeurs singulières de $1/S$, T , W_1 et $1/W_3$	62
Figure IV.7 : valeurs singulières L , W_1 et $1/W_3$	62
Figure IV.8 : Valeurs singulières du système commandé	63
Figure IV.9 : Pôles et zéros du système contrôlé (H_∞).....	64
Figure IV.10 : La réponse du système commandé (H_∞) pour h et α à une vitesse $V = 13\text{m/s}$	65
Figure IV.11 : Comportement de beta et de gamma en BF à $V = 13\text{ m/s}$	65
Figure IV.12 : Pôles et zéros du système contrôlé (H_∞) pour $V=14\text{m/s}$	66
Figure IV.13 : La réponse du système en BF pour h et α à une vitesse $V = 14\text{ m/s}$	67
Figure IV.14 : Comportement de beta et de gamma à $V = 14\text{ m/s}$	67
Figure IV.15 : La réponse du système commandé (H_∞) pour la vitesse 18 m/s	69
Figure IV.16 : Comportement de beta et de gamma à $V = 18\text{ m/s}$	69
Figure IV.17 : Pôles et zéros du système incertain contrôlé (H_∞) pour $V=13\text{m/s}$	71
Figure IV.18 : La réponse du système incertain commandé (H_∞) à $V=13\text{m/s}$	72
Figure IV.19 : Comportement de beta et de gamma à $V = 13\text{ m/s}$	72
Figure IV.20 : Pôles et zéros du système incertain contrôlé (H_∞) pour $V = 14\text{m/s}$	73

Figure IV.21 : La réponse du système incertain commandé (H_∞) à $V=14\text{m/s}$	74
Figure IV.22 : Comportement de beta et gamma à $V=14\text{m/s}$	74
Figure IV.23 : La réponse du système incertain commandé (H_∞) à $V = 18\text{m/s}$	76
Figure IV.24 : Exécution du programme de la synthèse par μ -analyse	77
Figure IV.25 : La réponse du système commandé (μ -analyse) à $V = 13 \text{ m/s}$	81
Figure IV.26 : Comportement de beta et gamma à $V = 13 \text{ m/s}$	81
Figure IV.27 : La réponse du système commandé (μ -analyse) à $V = 18 \text{ m/s}$	82
Figure IV.28 : Comportement de beta et gamma à $V = 18 \text{ m/s}$	83
Figure IV.29 : La réponse du système commandé (μ -analyse) à $V=24 \text{ m/s}$	84
Figure IV.30 : Comportement de beta et gamma à $V = 24 \text{ m/s}$	85
Figure IV.31 : Pôles et zéros du système commandé (μ -analyse)	86
Figure IV.32 : La réponse du système commandé avec K_1 et K_2 activés à $V = 13 \text{ m/s}$	87
Figure IV.33 : La réponse du système commandé avec K_1 et K_2 activés à $V = 16\text{m/s}$	87

ANNEXES :

Figure (B.1) : Valeurs singulières d'une matrice de transfert.

Figure (B.2) : Norme H_∞ d'un système SISO.

Figure (B.3) : Norme H_∞ d'un système MIMO.

Figure (C.1) : Schéma général d'une boucle de régulation.

Figure (C.2) : Schéma classique d'un système de commande bouclé.

CHAPITRE II :

Tableau II.1 : Les paramètres de TAMU WING II.....	25
---	----

CHAPITRE IV :

Tableau IV.1: Les caractéristiques du système nominal en boucle ouverte, pour $V = 13$ m/s.....	55
--	----

Tableau IV.2 : Les caractéristiques du système en boucle ouverte, pour $V = 14$ m/s	56
--	----

Tableau IV.3 : Les caractéristiques du système incertain en boucle ouverte, à la vitesse critique $V = 13.1643$ m/s	57
--	----

Tableau IV.4 : Caractéristiques du système commandé (H_∞).....	64
--	----

Tableau IV.5 : Les caractéristiques du système commandé (H_∞) pour $V=14$ m/s	66
---	----

Tableau IV.6: Les caractéristiques du système incertain contrôlé (H_∞) pour $V = 13$ m/s	71
--	----

Tableau IV.7 : Les caractéristiques du système incertain contrôlé (H_∞) pour $V = 14$ m/s	73
---	----

Tableau IV.8 : Interprétations des valeurs des marges de stabilité du système en boucle fermée...78
--

Tableau IV.9 : Interprétations des valeurs des marges de performance du système en boucle fermée.....79
--

Tableau IV.10 : Caractéristiques du système commandé ($\mu_{analyse}$) pour $V = 13$ m/s	80
---	----

Tableau IV.11 : Caractéristiques du système commandé ($\mu_{analyse}$), pour $V = 18$ m/s	82
--	----

Tableau IV.12 : Caractéristiques du système en boucle fermée.....86
--

Tableau IV.13 : Caractéristiques du système commandé pour $V = 16$ m/s.....88
--

Tableau IV.14 : Comparaison des résultats de notre recherche avec les résultats des recherches précédentes	89
---	----

Tableau IV.15 : Résumé des résultats numériques de simulation.....90

Liste des annexes

Annexe A : La représentation d'état du système.

Annexe B : Notions de base et solution des équations de Riccati.

Annexe C : Critère de stabilité.

La sécurité des transports et la fiabilité des appareils sont des préoccupations majeures pour les constructeurs aéronautiques. L'enjeu est de prévenir toutes les situations accidentelles qui risquent de survenir au cours d'un vol.

L'un des principaux défis auxquels sont confrontés les concepteurs d'avions aujourd'hui est celui d'aéroélasticité. Les interactions complexes entre la dynamique, la mécanique des solides, et forces aérodynamiques peuvent conduire à la destruction de la structure. Le flottement fait partie des phénomènes aéroélastiques les plus importants et le plus dangereux dans lequel les surfaces aérodynamiques deviennent instables dans certaines conditions de vol [32]. Cette instabilité peut créer des problèmes de fatigue structurelle des aéronefs, l'inconfort des passagers, diminution de la performance, et même la défaillance catastrophique [15], d'où la nécessité de prévenir contre ce phénomène.

Au début de l'histoire de l'aviation ce problème était minimal à des faibles vitesses de vol, des facteurs de la sécurité et des performances modérées sont exigés. Cependant, Les avions d'aujourd'hui, devraient repousser les limites physiques en termes de vitesse, d'altitude, de maniabilité, d'endurance, de portée et de coût. Les concepteurs se sont tournés vers des matériaux légers pour une utilisation avec les moteurs de forte puissance pour réduire le poids afin de transporter plus de carburant et les charge utiles. Ces matériaux légers induisent plus de souplesse que les matériaux d'aéronefs conventionnels qui, lorsqu'ils sont utilisés à des vitesses et des altitudes importantes posent des préoccupations aéroélastiques importantes.

C'est pour cela la suppression de flottement constitue un des sujets les plus critiques et les plus importants, dont chaque constructeur d'avion doit prendre toutes les précautions nécessaires afin d'éviter ce phénomène.

Plusieurs techniques ont été proposées. Cependant, quelques méthodes restent inefficaces dû à leurs impacts négatifs sur les performances d'avion (augmentation de poids), mais avec le développement de concept de l'aéroservoélasticité, le contrôle actif est devenu une solution pour retarder et supprimer ce phénomène tout en conservant les performances de l'avion (le poids) [10].

L'étude que nous présentons ici vise à modéliser la dynamique d'un profil d'aile, elle se situe dans le cadre d'exploiter une commande robuste, qui permet de limiter les vibrations et de retarder le phénomène de flottement.

Afin de répondre à ces objectifs, nous avons structuré ce manuscrit en quatre chapitres, de la manière suivante :

Le premier chapitre constitue une véritable mine d'informations concernant l'aéroélasticité et le phénomène de flottement ainsi que la solution proposée pour ce phénomène (L'aéroservoélasticité).

Le deuxième chapitre commencera en premier lieu à établir les équations aéroélastiques qui régissent le comportement de système aéroélastique par l'application des équations de Lagrange. Les équations linéaires à deux degrés de liberté obtenues seront écrites sous forme d'une représentation d'état pour le système nominal, puis une modélisation pour le système incertain est effectuée. Ensuite une application numérique est faite sur le modèle d'aile appelé TAMU WING II afin de simuler son comportement dynamique.

Le troisième chapitre traite des lois de commande optimale H_∞ et μ -analyse, celui-ci se divise en deux parties :

- Première partie : nous présentons la synthèse de la loi de la commande H_∞ . On donnera une description pour le problème standard de la commande robuste, elle est liée à la notion de système augmenté qui a pour rôle d'associer le modèle de synthèse avec les modèles des incertitudes et les objectifs sur la stabilité et sur les performances.

- Deuxième partie : nous présentons la synthèse de la loi de la commande μ -analyse et nous montrons comment des analyses de robustesse peuvent être conduites grâce à la représentation par LFT et la valeur singulière structurée, et ensuite nous expliquons la notion de la μ -synthèse.

Le quatrième chapitre sera consacré à la présentation des résultats de simulation et aux différentes interprétations obtenues de l'application des deux stratégies de commandes explicitées en troisième chapitre.

CHAPITRE I :

Généralités

Introduction

L'aéroélasticité concerne les phénomènes physiques qui impliquent les interactions complexes entre la dynamique, la mécanique des solides, et forces aérodynamiques [1]. L'analyse aérostatique est devenue une partie indispensable dans de nombreux domaines de l'ingénierie, en particulier dans le domaine de l'ingénierie aérospatiale [2] où les phénomènes d'aéroélasticité peuvent avoir une influence significative sur la conception des véhicules de vol. En effet, ces effets peuvent grandement modifier les exigences de conception qui sont spécifiés pour les disciplines de performance, de charges structurelles, la stabilité de vol et de contrôle. En plus, les phénomènes aéroélastiques peuvent introduire des instabilités catastrophiques de la structure qui sont uniques aux interactions aéroélastiques [3].

En examinant l'histoire du vol motorisé depuis les frères Wright (1903), on peut constater que les phénomènes aéroélastiques ont joué un rôle majeur au cours du siècle dernier et que plusieurs recherches remarquables en aéroélasticité ont été réalisées. Le flottement, qui est le problème le plus connu et le plus dangereux a été étudié de manière approfondie, et plusieurs solutions ont été envisagées pour y remédier [2].

I.1. Notion d'aéroélasticité

1.1.1. L'aéroélasticité parmi les phénomènes d'interaction fluide-structure

On vise à situer l'aéroélasticité dans le contexte général de l'interaction fluide-solide. Les phénomènes de ce type d'interaction sont nombreux. Parmi lesquels plusieurs grandes familles peuvent être dégagées, en considérant la nature du couplage :

- Couplage thermique, le fluide et le solide échangent de la chaleur,
- Couplage chimique, le fluide cristallise et se transforme en solide,
- Couplage mécanique, ...etc.

L'aéroélasticité fait évidemment partie de la famille des phénomènes de couplage mécanique. Lorsqu'il s'agit de couplage mécanique, la littérature consacrée utilise le terme de « structure » plutôt que celui de « solide » [4].

Cette famille peut elle-même se diviser en deux sous familles [5] :

- **Les phénomènes de vibrations**, dans lesquels les éléments de la structure et du fluide ne subissent que de petits déplacements. Parmi les très nombreux exemples de ce type de phénomènes, on peut citer les vibrations de la structure d'une fusée contenant des réservoirs de liquide et de gaz [6].

- Les phénomènes d'interaction entre un écoulement de fluide et une structure; La particularité de ce type de phénomène est que, du fait de l'écoulement, le fluide peut dans certains cas apporter indéfiniment de l'énergie à la structure, conduisant à une instabilité du système.

L'aéroélasticité fait partie de la famille des phénomènes d'interaction entre un écoulement et une structure où le fluide est nettement plus « léger » que la structure.

Enfin, la construction même du terme « aéroélasticité » laisse entendre que les solides en jeu sont déformables, avec des déplacements modérés par rapport à une position initiale.

La figure (I.1) illustre parfaitement la Caractérisation des problèmes d'aéroélasticité parmi l'ensemble des problèmes d'interaction entre un fluide et une structure :

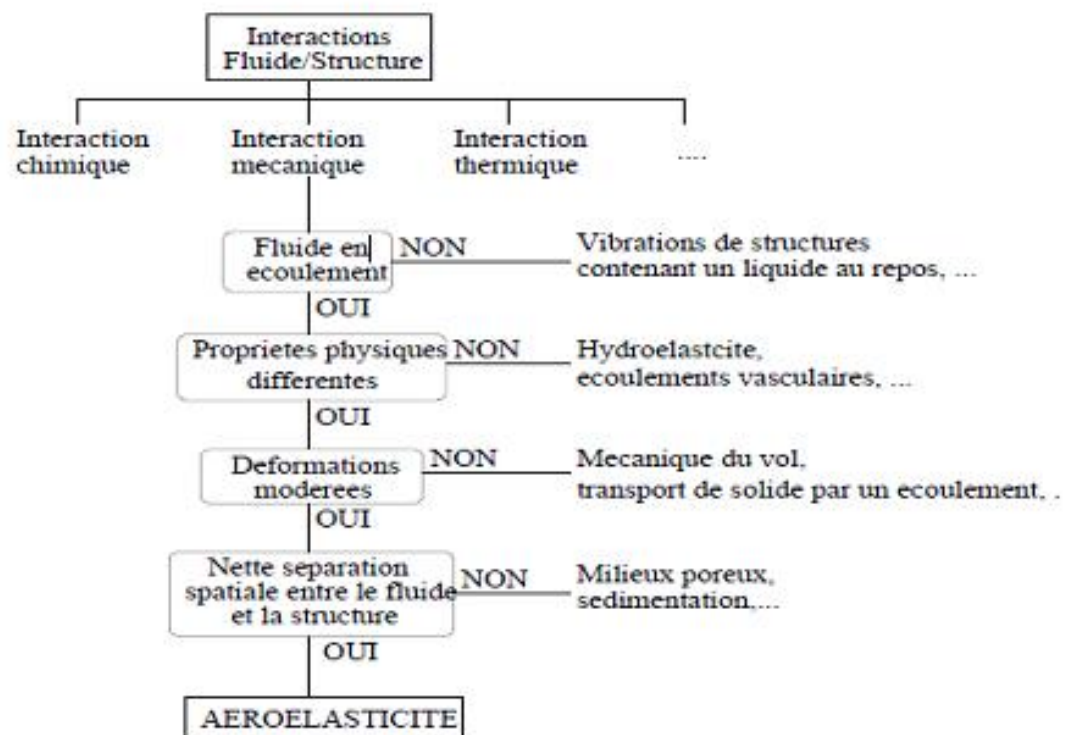


Figure I.1: Caractérisation des problèmes d'aéroélasticité parmi l'ensemble des problèmes d'interaction entre un fluide et une structure [4]

En général le terme « aéroélasticité » recouvre l'étude des vibrations de structures dues à l'écoulement, plutôt que les déformations statiques des structures sous l'action des efforts aérodynamiques moyens [7].

On distingue ainsi trois causes d'interactions écoulement-structure conduisant à des vibrations:

- La turbulence de l'écoulement amont, qui produit un forçage instationnaire déclenchant une réponse vibratoire de la structure. Habituellement traitée sans tenir compte du couplage écoulement-structure, cette réponse vibratoire ne peut être évitée a priori et doit être estimée. Ce sera le cas par exemple pour les structures de génie civil soumises à la turbulence du vent atmosphérique.

- Le détachement de tourbillons alternés, qui engendre une force aérodynamique quasi-périodique. Si la fréquence de cette force s'approche de celle d'un mode propre de la structure, cela peut aboutir au phénomène d'accrochage où le couplage écoulement-structure devient fort. Contrairement au domaine hydroélastique, ce mécanisme est rarement critique dans les applications aéroélastiques.

- Une vitesse moyenne de vent élevée, qui produit des efforts couplés avec le mouvement de la structure du fait de sa souplesse. Ces efforts induits par le mouvement peuvent rendre le système instable, au-delà d'une vitesse critique, par le biais de toute une panoplie de phénomènes de couplage désignés sous l'appellation générique de flottements. Ils conduisent généralement à une destruction de la structure, comme lors du spectaculaire accident du pont de Tacoma et il faut absolument les éviter. L'évaluation de la vitesse critique constitue alors l'objectif principal des études sur le flottement [7].

Ces trois mécanismes ne sont pas indépendants : par exemple la turbulence de l'écoulement amont peut interagir avec le détachement de tourbillons alternés, le plus souvent en l'atténuant, ou bien modifier les propriétés aérodynamiques des structures ce qui change leur comportement vis-à-vis du flottement. De même si les conditions sont favorables, le détachement de tourbillons alternés peut interagir avec certains flottements et modifier sensiblement les valeurs de vitesse critique [7].

Les domaines concernés par l'aéroélasticité sont multiples, les principaux étant l'aéronautique et le génie civil. Mais ils constituent pourtant des communautés assez éloignées car ces deux domaines s'appliquent à des structures très différentes, typiquement le profil d'aile pour l'aéronautique et le tablier de pont pour le génie civil. A noter que lorsqu'un tablier de pont reçoit le qualificatif de « profilé », cela signifie simplement que l'on a cherché à l'optimiser, néanmoins ses caractéristiques aérodynamiques et aéroélastiques montreront toujours de grandes différences avec celles d'un profil d'aile [7].

La forme d'un profil d'aile se caractérise par des formes arrondies, sans arrête vive, et une dimension longitudinale très supérieure à son épaisseur transversale. Le bord de fuite est formé de manière à produire une terminaison sans surface perpendiculaire à l'axe longitudinal. La vitesse autour des parois et dans le sillage reste peu perturbée par la présence de la structure. L'écoulement est non décollé, c'est à dire que la vitesse de l'air au voisinage des parois tend à leur rester globalement parallèle [7].



Figure I.2 : Airbus A380 et sa voilure gauche.

I.2. Aspect historique

Les problèmes d'aéroélasticité existent depuis à l'origine de l'aviation, ils ont surgi avec le début des essais en vol des avions. Le professeur Samuel Langley de l'institut de Smithsonian a survolé ses aérodromes par des modèles réduits jusqu'à 300 mètres. Mais le modèle pleine échelle a échoué deux fois, le dernier le 8 Décembre 1903 à Potomac River. Le Deuxième échec a généralement été considéré comme étant due à la divergence statique. En 1914, Curtis a survolé l'aérodrome de Langley avec une légère modification, avant que le problème de divergence de l'aile n'ait été résolu en théorie [8].

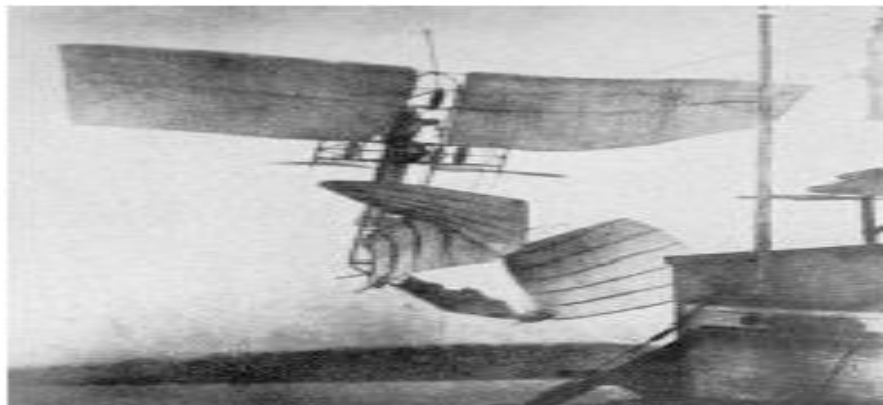


Figure I.3 : L'avion de Samuel Langley, le 8 décembre 1903, dont l'aile avant a été détruite par le phénomène de divergence.

Neuf jours après le deuxième échec de Langley, le 17 Décembre 1903, Les frères Wright ont effectué leur vol historique. La rigidité en torsion d'aile de biplan des frères Wright était supérieure à celle de mono-aile de Langley. Etant donné que la vitesse de divergence est directement liée à la rigidité de torsion, le biplan Wright n'a pas souffert de problème de divergence.

Grâce au succès des frères **Wright**, les premiers avions étaient exclusivement presque biplans. Le problème aéroélastique le plus répandu à cette époque était le problème de flottement de l'empennage. Un des premiers cas documentés du flottement a eu lieu dans l'empennage horizontal de bombardier bimoteur **Handley Page 0/400**, au début de la première guerre mondiale les symptômes étaient des oscillations violentes de fuselage et des surfaces de l'empennage. Après l'enquête, il a été découvert que le fuselage et l'empennage avaient deux principaux modes de vibration basse fréquence. Dans un mode, les gouvernes de profondeur gauches et droites oscillent autour de leurs articulations avec une différence de phase de 180 degrés. Les gouvernes de profondeur ont été reliées au manche de commande avec des câbles de commande longue séparés qui avaient de faibles raideurs. Le second mode est l'oscillation de torsion de fuselage. Il a été conclu que les vibrations étaient dues à des oscillations auto-excitées impliquant le couplage entre ces modes. Ce problème était résolu en reliant les deux gouvernes de profondeurs par un tube de torsion [8].



Figure I.4 : le bombardier Handley Page 0/400.

Durant la Première Guerre mondiale, les Allemands ont aussi rencontré des problèmes aéroélastiques. **Fokker D-8**, un monoplane, avait de grandes performances mais a souffert de défaillances sur les ailes. Les premiers monoplans avaient une insuffisance de rigidité en torsion provoquant le flottement de l'aile, la divergence, le flottement des ailerons de l'aile, et la perte de l'efficacité de l'aileron. Ces problèmes sont généralement résolus par l'augmentation de la rigidité en torsion et par l'équilibrage de la masse. Toutefois, le problème dans **Fokker D-8** était légèrement différent. Après de nombreuses pertes des avions et leurs meilleurs pilotes, la **Luftwaffe** a effectué des tests de résistance statique. Par ces tests de l'avion, il a été constaté que les ailes avaient assez de résistance avec un facteur de sécurité de 6. La Société Fokker a déclaré que le prototype de l'aile n'a aucune défaillance structurelle. La seule différence entre les ailes de prototype et l'aile de production était le renforcement du longeron arrière. Cela a été ordonné par la **Luftwaffe**, en raison des règlements sur les fils entrecroisés des ailes paradoxalement, le renforcement des longerons arrière a déplacé vers l'arrière les axes élastiques qui ont abouti à une diminution de la vitesse de divergence, qui a finalement causé la perte des avions **Fokker D-8** [8].



Figure I.5: Fokker D-8.

Après la première guerre mondiale de nombreux phénomènes de flottement ont été observés, en 1923 un flottement des ailerons a été observé sur l'Hydravion (monoplan) Von Berkel, il a été résolu par Baumhauer et Koning par la technique d'équilibrage de masse de l'aileron. En 1924-1925, un flottement des ailerons a été observé sur l'avion Gloster Grebe et Gloster Gamecock. Le problème a été résolu en augmentant la rigidité et en réduisant la surface déséquilibrée près de l'extrémité [8].

Pendant la période entre 1923- 1929, de nombreux phénomènes de flottement eurent lieu partout dans le monde sur différents types d'avions ; les avions de transport, les bombardiers et les avions d'attaque. Différents types de flottement ont été observés.

Avec l'augmentation des incidences de phénomène de flottement, les tests en vol de flottement sont devenus importants. Les premiers tests consistaient à pousser l'avion à sa vitesse maximale et nous espérons le meilleur. En 1935, en Allemagne, Von Schippe a utilisé les techniques de test de résonance pendant le vol. La technique de Schippe consiste à obtenir la réponse en fréquence lorsque la vitesse augmente. Avec cette méthode, on prévoyait que le flottement se produira lorsque l'amplitude de résonance tendrait à augmenter asymptotiquement avec l'augmentation de la vitesse. Cependant, le flottement était un phénomène soudain et à cette époque la technologie exigeait aux ingénieurs de test d'être dans l'avion pour vérifier les données. Les réussites de tests sont terminées en 1938, dans le test d'un Junker JU90. Un flottement inattendu de l'aile a été rencontré. L'avion s'est écrasé avec des ingénieurs à bord [8].

Les fabricants sont devenus hésitants pour les vols d'essais de flottement, en raison de leur dangerosité. Cependant, il serait plus dangereux d'utiliser un avion, qui n'a pas été testé. Avec l'amélioration des méthodes d'essai, les appareils de communication et les moyens d'essais, les vols d'essais de flottement ont commencé à gagner l'acceptation à la fin des années 1940.

En 1960, les concepts de contrôle ont été introduits dans des modèles analytiques, suivis par des modèles de soufflerie de contrôle actif aéroélastiques qui ont été utilisés pour vérifier les modèles analytiques. Lors de la dernière moitié de cette décennie, les essais en vol de B-52 et les avions XB-70 ont été menés avec succès, ils ont démontré le concept de l'utilisation des commandes de vol pour modifier les caractéristiques dynamiques de la structure de l'aéronef. Le 2 Août 1973, un avion d'essai CCV B-52 a volé 10 nœuds plus vite que sa vitesse de flottement [8].

I.3. Les phénomènes aéroélastiques

L'aéroélasticité est définie par Collar comme l'étude de l'interaction mutuelle des forces aérodynamiques appliquées aux structures face aux écoulements d'air et l'influence de cette étude dans la conception des aéronefs [9]. Le triangle de forces aéroélastiques introduit par Collar est donné Sur la figure (I.6) [10], il décrit la classification des problèmes d'aéroélasticité. Sur la figure A, E, et I représentent les forces aérodynamiques, élastiques, et inertielles, respectivement. Les phénomènes impliquant uniquement des forces aérodynamiques et élastiques sont nommés comme phénomènes aéroélastiques **statiques** et les autres qui impliquent les trois forces sont nommés les phénomènes aéroélastiques **dynamiques**.

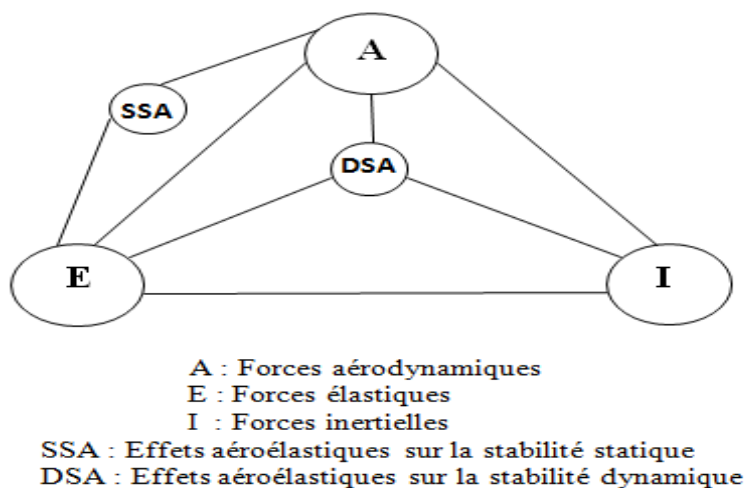


Figure I.6 : Triangle des forces de Collar [10].

I.3.1. Phénomènes d'aéroélasticité statique

Lorsqu'un avion vole en croisière, l'avion (En particulier les ailes) se déforme sous l'effet des forces aérodynamiques. Au terme d'un transitoire et sous certaines conditions, les ailes adoptent une forme finale qui n'évoluent plus pendant la croisière, d'où le nom de phénomène d'aéroélasticité statique. La forme de l'avion revêt d'une importante capitale lors de la phase de

conception (Stabilité de vol, performances, . . .) et la prise en compte de tout phénomène pouvant la modifier s'avère donc indispensable. Les phénomènes électrostatiques sont donc importants d'un point de vue industriel [11].

Les phénomènes d'aéroélasticité statiques peuvent également causer l'endommagement et la rupture du système. Tout d'abord, si les déformations imposées génèrent des contraintes structurelles supérieures à celles acceptées par la structure, le système se déformera de manière irréversible (Déformation plastique) ou se rompra. Ensuite, la modification de la forme de l'avion peut modifier la position du foyer aérodynamique de l'avion et donc perturber l'équilibre et la stabilité de l'avion (Modification de la marge statique) : il est donc important de connaître la forme de l'avion en vol. Enfin, un phénomène d'aéroélasticité statique peut diverger : il s'agit alors d'une divergence statique. Dans ce cas, la position d'équilibre entre le fluide et la structure est instable : les efforts génèrent des déformations qui modifient la forme de l'avion, cette nouvelle forme provoque des efforts plus importants qui régénèrent des déformations plus grandes.

L'exemple illustrant ce phénomène est la mésaventure de Samuel Langley en 1903 : le mouvement de torsion des ailes avait divergé et causé leur destruction [11].

1.3.2. Phénomènes d'aéroélasticité dynamique

Les phénomènes d'aéroélasticité dynamique sont des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Il convient d'en distinguer deux familles :

- Les phénomènes auto-entretenus tels que le flottement : le système se met en mouvement suite à une perturbation.
- Les phénomènes forcés : dans lesquels l'évolution temporelle du système est provoquée par une action extérieure [11].

Notons par ailleurs il est toujours possible de considérer les phénomènes d'aéroélasticité statique comme un cas particulier des phénomènes d'aéroélasticité dynamique [4].

I.4. Le flottement

Sous certaines conditions, la déformée d'une surface portante peut devenir instable, du fait de l'interaction entre les forces élastiques et inertielles de la structure et les forces aérodynamiques instationnaires engendrées par son propre mouvement oscillant. L'étude de ce phénomène, appelé flottement, est extrêmement importante compte tenu des ruptures survenues en vol attribuées à l'instabilité de la réponse structurale des surfaces portantes. Ce phénomène de vibration

aéroélastique se produit au-delà d'une vitesse critique qui dépend du comportement dynamique de la structure et de la configuration du vol. Il se manifeste par une vibration divergente qui s'amorce spontanément sous l'action de la moindre perturbation et dont l'amplitude croît jusqu'à la rupture [12].

Mathématiquement, Le flottement se produit lorsqu'au moins une des parties réelles des valeurs propres (pôles) d'une matrice (système) atteint zéro ou devient positive, ce qui signifie que le coefficient d'amortissement du système devient nul ou négatif au moment de flottement. En d'autres termes, le flutter est une instabilité oscillatoire aéroélastique caractérisé par la perte d'amortissement due à la présence de charges aérodynamiques instationnaires. Lorsque le coefficient d'amortissement d'une structure souple devient égale ou inférieure à zéro à certaines vitesses de débit, l'oscillation commencera à l'auto-exciter et diverger. Par conséquent, la vitesse d'écoulement correspondante à l'amortissement du système zéro est défini comme étant la vitesse de flottement critique [2].

Ce phénomène est très dangereux, il se déclenche sans prévenir, car aucun indice ne permet de déceler l'approche de la vitesse critique. La rapidité avec laquelle la vibration s'amplifie varie selon les cas, mais le plus souvent elle est telle que la rupture survient avant que l'on ait eu le temps de réduire la vitesse pour quitter le domaine d'instabilité. Dans ce cas, les aéroélasticiens emploient le mot "explosif " pour donner une idée de la soudaineté du phénomène.

Les domaines dans lesquels se rencontrent les phénomènes de flottement sont nombreux [4] :

- Aéronautique : Flottement des ailes des avions.
- Production d'énergie : Flottement d'éléments de turbomachines.
- Automobile : Vibrations bruyantes de canalisations d'air.
- Génie civil : Pont de Takoma, 1940.

1.4.1. Les critères de flottement

1.4.1.1. Amortissement :

L'action des charges aérodynamiques sur la structure entraîne une modification des forces structurelles puisqu'elles varient en fonction du déplacement et de la vitesse des degrés-de liberté. Les charges aérodynamiques sont ainsi considérées comme forces induites plutôt que forces extérieures. L'amortissement structural qui sert à atténuer les oscillations varie sous l'effet de la

contribution aérodynamique et peut dans certains cas accentuer ces oscillations jusqu'à la résonance. De ce fait, l'amortissement est un indicateur pertinent de la stabilité d'un système.

Pour un modèle modal, le flutter se déclenche quand l'amortissement de l'un des modes devient nul, signifiant que les oscillations liées à ce mode sont devenues auto-excitées [13].

1.4.1.2. Fréquence :

Le couplage aéroélastique s'illustre par ce qu'on appelle une coalescence modale qui admet qu'à l'approche du flutter, des modes commencent à fusionner en un seul mode. Le suivi des modes concernés par le couplage montre un rapprochement entre les fréquences modales au fur et à mesure qu'on évolue vers l'instabilité. La distance entre les fréquences modales peut être considérée comme un moyen de surveillance du flutter d'autant que les fréquences sont généralement bien identifiées. En pratique, ce critère fréquentiel ne peut pas être une alternative à l'amortissement et n'est utilisé que pour indiquer une évolution du système vers l'instabilité [13].

1.4.1.3. Marge de flottement :

La marge de flottement est un critère de prédiction du flutter qui mesure l'interaction entre les modes. Introduit par Zimmerman pour les systèmes continus, ce critère tient compte à la fois des fréquences et de l'amortissement et constitue une alternative intéressante à l'amortissement pour le flutter binaire [14].

1.4.2. Types de flottements

1.4.2.1. Flottement à 2 ddl :

Le flottement classique du profil d'aile est apparu lorsque les avions de type monoplane ont commencé à atteindre des vitesses élevées il se traduit comme étant l'instabilité par couplage de mode, entre les mouvements de flexion verticale et de torsion d'une voilure, qui se produit par un mécanisme de confusion de fréquence. De façon simple, l'instabilité est possible lorsque le chargement aérodynamique engendre une raideur ajoutée sur l'un des modes (ou les deux), via les termes et, de sorte que pour une vitesse de vent critique les fréquences des modes se rejoignent, rendant le système instable au-delà. C'est un mécanisme dangereux qui conduit généralement à la destruction rapide de la structure ou d'éléments de structure [7].

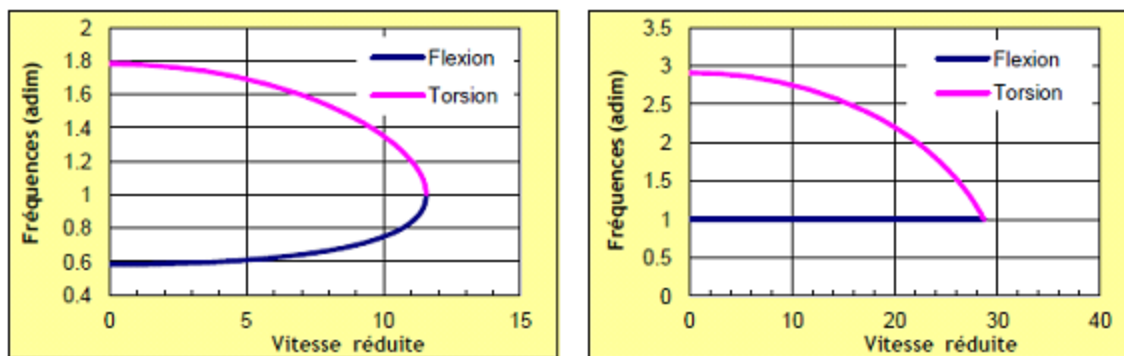


Figure 1.7 : Route vers le flottement classique, un profil d'aile à gauche, un tablier de pont à droite.

Les comportements diffèrent en fonction des paramètres structuraux et aérodynamiques mais les principales applications concernées sont aéronautiques. En génie civil ce phénomène pose rarement problème car souvent d'autres types de flottements se déclenchent avant, à vitesse plus faible.

1.4.2.2. Flottement à 1ddl :

- **Flottement de décrochage** qui reste le souci principal pour la conception des tabliers de pont. Cette instabilité sur un mouvement de torsion simple résulte d'un déséquilibre entre l'amortissement structural et un amortissement aérodynamique négatif, consécutivement à de mauvaises caractéristiques aérodynamiques. C'est ce mécanisme qui est à l'origine de la destruction du pont de Tacoma (Scanlan 1971), et non une résonance avec le détachement tourbillonnaire. La vitesse critique est déterminée lorsque l'amortissement total du système 0 s'annule. Dans le cas des tabliers de pont, seuls les essais de soufflerie sont aujourd'hui pertinents pour étudier ce phénomène, les théories quasi-statiques n'étant pas suffisamment fiables [7].

- **Le galop** ce cas est similaire au flottement de décrochage mais se produit sur un mouvement de translation (Ou de flexion) transverse à la direction du vent. Il a été décrit initialement par Den Hartog en 1934 (Den Hartog 1985) qui a proposé un critère devenu d'usage courant. Les structures concernées sont non profilées et de section à faible rapport d'aspect, certaines passerelles pour piétons par exemple. Il existe également un mécanisme très proche, **le galop de sillage** qui peut apparaître sur une structure flexible placée dans le sillage d'une autre, comme dans les faisceaux de tubes d'échangeur de chaleur ou les séries de cheminées.

- **La divergence**, également appelée flottement de fréquence nulle. Ce phénomène est d'une perte de raideur en torsion simple. Bien que théoriquement possible, il reste en pratique très rare. Il

conduit à la destruction très rapide de la structure dont la raideur totale devient négative au-dessus de la vitesse critique [9]. Il est rapporté que les essais de Samuel Langley pour faire voler son avion en 1903 ont échoué à cause de ce phénomène [4].

1.4.3. La prévention contre le flottement

Pendant de nombreuses années, les pionniers de la conception aéronautique ont été confrontés à des problèmes aéroélastiques et ils les ont résolus par des solutions passives. Ces solutions passives sont généralement toujours utilisées comme première étape. De l'autre côté, avec la technologie améliorée et la passion de l'humanité d'obtenir le meilleur, la technologie de contrôle a été introduite dans le domaine de l'aéroélasticité. Le nouveau domaine qui a émergé comme une intersection de la technologie aéroélasticité et des structures contrôlées est nommé « Aéroservoélasticité ». Son objectif principal est de modifier le Comportement aéroélastique d'un système en introduisant des forces de contrôle calculées.

- **La stratégie passive** : Il s'agit, dès la phase de conception, de déterminer la répartition structurelle évitant les risques de flottement pour un domaine de vol voulu et de dresser une cartographie des vitesses provoquant le flottement [11]. Parmi ces méthodes on peut citer l'équilibrage de la masse et le renforcement local, qui sont utilisées jusqu'aujourd'hui. Ces techniques sont habituellement inefficaces (parce qu'elles ajoutent le poids à la structure) aussi bien que non systématique, et elles ne réussissent pas toujours [15].

- **La stratégie active** : Cette méthode a été mise au point par l'U.S. Air Force et testée sur un B-52 en 1973. Il s'agit d'utiliser un système actif qui amortit le mouvement de flottement au lieu de le laisser diverger. Le bombardier a été capable de voler 10 nœuds au-dessus de la vitesse limite théorique de déclenchement du flottement.

Cependant, ces applications sont restées expérimentales et n'ont pas été appliquées à des systèmes civils, cette dernière technique dénommée 'aéroservoélasticité' [4].

L5. Notion d'Aéroservoélasticité

L'aéro-servo-élasticité (ASE) ou commande active de stabilité aéroélastique a été l'un des domaines de recherche aéronautique les plus actifs pendant les dernières années. C'est une technologie multidisciplinaire qui traite des interactions entre les forces aérodynamiques (Aéro), le système de commande (Servo) et les forces structurelles (Elasticité) d'un avion. Cette théorie a émergé récemment comme étant un outil indispensable à la compréhension et la conception des

avions modernes, équipé des systèmes de commande active de vol, devant remplir des performances de vol de plus en plus exigeantes [17].

On peut illustrer l'interaction des trois disciplines par la figure (I.8) [16].

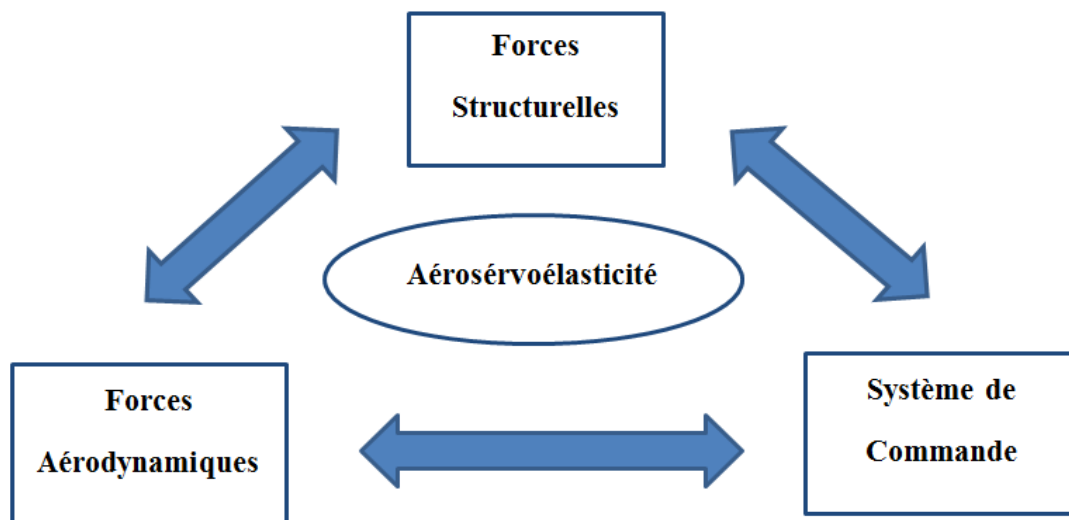


Figure I.8 : Triangle d'interaction des disciplines.

Historiquement la conception des avions a subi d'importantes modifications suite à des progrès significatifs dans l'efficacité structurale des avions, notamment le rapport de la résistance des nouveaux matériaux (composites) à leur poids et à l'utilisation de systèmes de commande de vol avec une réponse rapide et une grande autorité, les concepteurs d'avion, en essayant de réduire le poids structurel de chaque nouvel avion ont fait augmenter la flexibilité de la structure d'un autre côté, les ingénieurs de la commande de vol ont développé de nouvelles fonctionnalités pour le système de commande automatique de vol qui ont amélioré la performance de l'avion, la stabilité et les qualités du vol, malheureusement, ces efforts ont été généralement indépendants les uns des autres jusqu'à ce que les premières analyses aéroservoélastiques furent effectuées [17].

L'aéroservoélasticité est le fruit de fusion de deux grandes théories s'intéressant à des aspects bien différents de la dynamique d'un avion, l'aéroélasticité d'une part porte son attention sur la nature flexible d'un avion, La dynamique du vol d'autre part considère l'avion comme un solide rigide en configuration de rétroaction. Rétroaction exercée par les lois de commandes, et étudie l'influence du système de commande sur la dynamique de l'avion, Ce qui permet d'élargir le domaine de vol sans ajouter des masses importantes sur la structure [18].

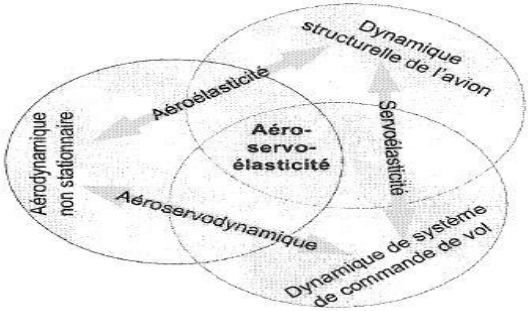


Figure I.9 : Domaine de l'aéroservoélasticité.

L'influence de l'aéroservoélasticité sur la conception et les opérations de l'aéronef exige de comprendre complètement les surfaces de commande qui contribuent à l'établissement d'un modèle mathématique précis [19]. Un modèle aéroservoélastique considérera les interactions des forces aérodynamiques, inertielles et structurelles résultant du bouclage de la dynamique du système de contrôle (Surfaces de commandes) avec le modèle aéroélastique. Ainsi, le modèle aéroservoélastique a une relation forte et bien définie avec ce modèle aéroélastique [20]. Le concept d'un système aéroservoélastique peut être illustré par le schéma fonctionnel (Figure (I.10)). Les deux blocs principaux qui sont à l'intérieur représentent la boucle du système aéroélastique, le bloc de contrôleur est ajouté pour former la boucle d'un système aéroservoélastique, le système pourrait être un système de multi input/multi output (MIMO).

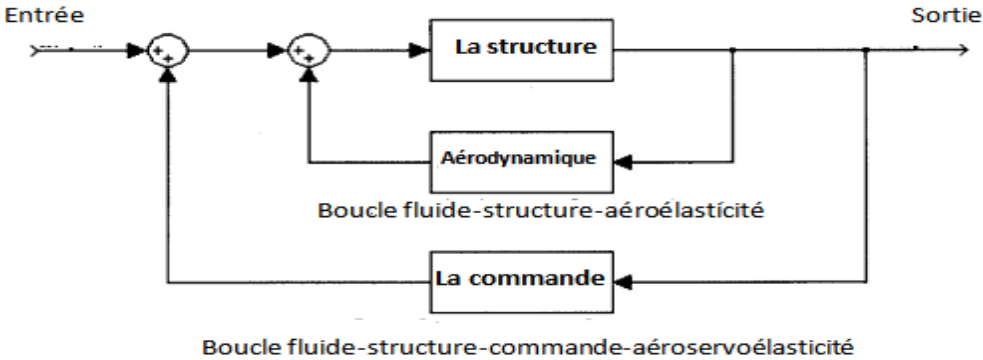


Figure I.10 : Schéma fonctionnel du concept du système aéroservoélastique.

Mener une analyse aéroservoélastique sur un avion est donc un problème complexe, dans lequel les instabilités issues des interactions adverses entre la structure, l'aérodynamique et les lois de commande peuvent survenir en tout point de l'enveloppe de vol. Une des applications de l'aéroservoélasticité est la suppression active des phénomènes de flottement, phénomène de vibrations instables issues du couplage des forces structurelles et aérodynamiques. De telles excitations instables peuvent provoquer la perte de contrôle de l'avion, l'affaiblissement de la structure et peuvent même entraîner la destruction d'une partie ou de la totalité de l'avion.

CHAPITRE II :
Modélisation du système
aéroélastique

Introduction

Lorsqu'on envisage la commande d'un système, la première étape consiste à le modéliser. Modéliser un système cela peut consister à élaborer un objet mathématique qui permet de décrire et prédire le comportement dynamique du système lorsque ce dernier est soumis à des influences externes [21].

Afin d'obtenir ce modèle mathématique on applique des formalismes tels que le formalisme de Newton ou le formalisme de Lagrange, ce dernier est un outil particulièrement adapté et très puissant pour mettre sous équations les systèmes les plus complexes. Il nous donne une procédure pour obtenir les équations du mouvement, en calculant seulement les énergies cinétiques et potentielles du système.

Dans ce chapitre on va appliquer le formalisme de Lagrange sur une section d'aile bidimensionnelle afin d'obtenir les équations de mouvement qui régissent sur le comportement de système aéroélastique.

Au début le modèle obtenu est un modèle nominal, puis en introduisant des incertitudes paramétriques sur ce dernier pour avoir un modèle incertain. Une fois les modèles mathématiques sont obtenus, une application numérique est faite sur le modèle d'aile dénommé TAMU WING II.

II.1. Hypothèses du modèle

Afin de faciliter l'étude de notre système on effectue des hypothèses afin d'éliminer les effets physiques de faible importance, les hypothèses considérées dans notre cas sont :

- l'effet de la gravité est négligé,
- l'angle de tangage α est supposé faible,
- La force de portance L et le moment M sont calculés en régime quasi-stationnaire.

II.2. La modélisation structurelle

On utilise le modèle étudié dans la référence [3], les équations de mouvement qui régissent sur le mouvement d'une aile bidimensionnelle peuvent être tirées à partir des équations de Lagrange (Voir l'Annexe A.1)._è-000

L'aile a deux degrés de liberté, mouvement de tangage α (La torsion) et mouvement vertical h (La flexion). L'aile peut faire un mouvement de tangage autour d'un axe élastique qui est défini

comme étant l'axe perpendiculaire au l'axe de cisaillement. La rigidité structurale pour les deux mouvements est modélisée par deux ressorts de rigidité K_α et K_h respectivement, Avec : K_h , K_α : sont supposés constants.

Comme montre la Figure (II.1), les points remarquables sur l'aile incluent le centre de la gravité « cg », le centre élastique « ce », et centre aérodynamique « ca ».

Les paramètres b et e tel que $-1 < b < 1$ et $-1 < e < 1$ déterminent la position du centre de gravité « cg » et l'axe élastique.

Le repère \vec{i} représente le repère inertiel, tandis que le repère \vec{b} est fixé à l'aile, son origine est fixée au centre élastique « ce » et orienté comme indiqué ci-dessous avec l'axe \vec{b}_1 est dirigé vers le bord d'attaque. La portance L et le moment M sont mesurés au centre aérodynamique.

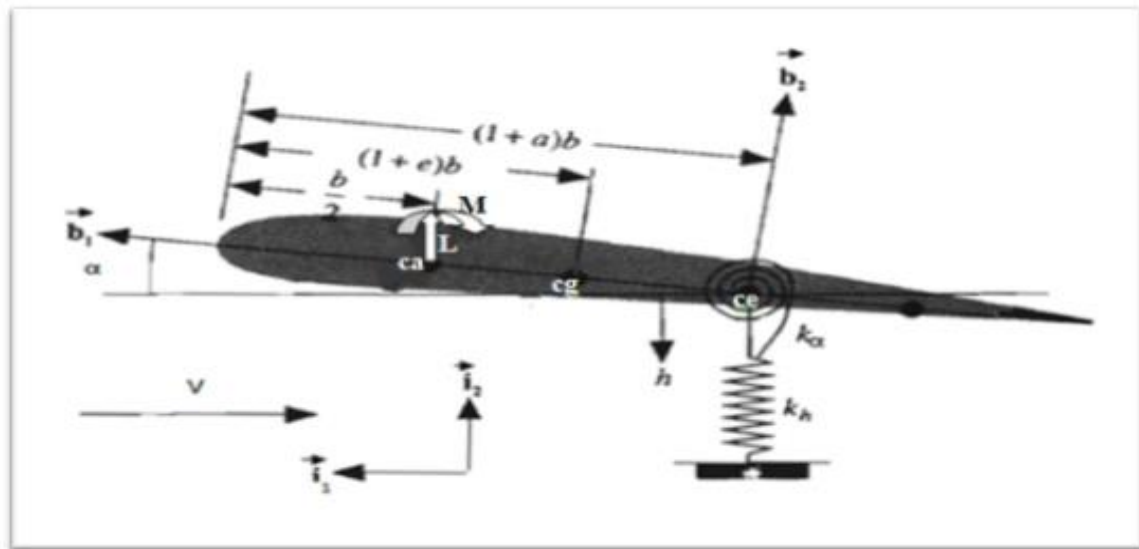


Figure II.1 : La géométrie de la section d'aile bidimensionnelle [3].

Les équations de mouvement vertical et de tangage peuvent être obtenues en utilisant les équations de Lagrange en calculant l'énergie potentielle et cinétique du système.

II.2.1. L'énergie potentielle

L'énergie potentielle consiste entièrement en énergie élastique, elle représente seulement l'énergie élastique emmagasinée sur les deux ressorts, l'effet de la gravité est négligé. L'énergie potentielle totale est donnée par cette équation [3] :

$$U = \frac{1}{2} K_h h^2 + \frac{1}{2} K_\alpha \alpha^2 \tag{II.1}$$

Où : K_h et K_α sont les coefficients de rigidité de mouvement vertical et mouvement de tangage, respectivement.

II.2.2. L'énergie cinétique

L'énergie cinétique totale du système est donnée par [3] :

$$T = \frac{1}{2} m I_{cg} \cdot \vec{V}_{cg} + \frac{1}{2} I_{cg} \dot{\alpha}^2 \tag{II.2}$$

Avec :

I_{cg} : Est le moment d'inertie autour du centre de gravité.

m : représente la masse de l'aile.

V_{cg} : C'est la vitesse du centre de gravité, qui est calculée à travers la formule suivante [1] :

$$\vec{V}_{cg} = \vec{V}_{ce} + \dot{\alpha} \vec{b}_3 \times b[(1 + \alpha) - (1 + e)] \vec{b}_1 \tag{II.3}$$

Avec :

\vec{V}_{ce} : La vitesse de centre élastique.

α : L'angle d'incidence.

Et on a :

$$\vec{V}_{ea} = -\dot{h} \vec{t}_2 \tag{II.4}$$

Avec : h c'est le déplacement vertical.

Ainsi que :

$$\vec{b}_2 = \vec{b}_3 \times \vec{b}_1$$

Donc la vitesse de centre de gravité devient :

$$\vec{V}_{cg} = -\dot{h} \vec{t}_2 + \dot{\alpha} b(a - e) \vec{b}_2 \tag{II.5}$$

La relation entre le repère \vec{b} et le repère \vec{t} est donnée par la relation matricielle suivante [3] :

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t}_1 \\ \vec{t}_2 \end{bmatrix} \tag{II.6}$$

On utilise la relation (II.6) et on suppose que l'angle de tangage est faible c.à.d. que $\cos(\alpha) \approx 1$ et $\sin(\alpha) \approx \alpha$, pour calculer $\vec{V}_{cg} \cdot \vec{V}_{cg}$ on aura :

$$\vec{V}_{cg} \cdot \vec{V}_{cg} = \dot{h}^2 + b^2 x_\alpha^2 \dot{\alpha}^2 + 2bx_\alpha \dot{h} \dot{\alpha} \tag{II.7}$$

Avec : $x_\alpha = (e - a)$ est le paramètre de déséquilibre statique.

On substitue la relation (II.7) dans (II.2) on obtient :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{h}^2 + b^2 x_\alpha^2 \dot{\alpha}^2 + 2bx_\alpha \dot{h} \dot{\alpha}) + \frac{1}{2} I_{cg} \dot{\alpha}^2 \tag{II.8}$$

La relation entre le moment d'inertie autour de l'axe élastique $I_{e\alpha}$ et le moment d'inertie autour de centre de gravité I_{ea} est donnée par [1] :

$$I_{ea} = I_{cg} + mb^2 x_\alpha^2 (\cos(\alpha))^2 \cong I_{cg} + mb^2 x_\alpha^2 \tag{II.9}$$

On remplace la valeur de I_{cg} dans (II.8) on trouve :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{h}^2 + 2bx_\alpha \dot{h} \dot{\alpha}) + \frac{1}{2} I_{ea} \dot{\alpha}^2 \tag{II.10}$$

II.2.3. Les forces généralisées

Les forces généralisées sont calculées en utilisant la méthode de travail virtuel où le travail donné par un déplacement virtuel dû aux forces externes.

Le travail virtuel total effectué par la force de portance L et le moment M est donné par :

$$\delta w = Q_h \delta h + Q_\alpha \delta \alpha \tag{II.11}$$

Avec:

δh : Le déplacement vertical virtuel.

$\delta \alpha$: Le déplacement de tangage virtuel.

Pour calculer le déplacement virtuel dû à la force de portance, la vitesse du centre aérodynamique est nécessaire [1].

$$\vec{V}_{ca} = -\dot{h} \vec{i}_2 + \dot{\alpha} b \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \vec{j}_2 \tag{II.12}$$

Puis, le déplacement virtuel dû à la portance peut être obtenu tout simplement en remplaçant le point au-dessus de chaque variable dans l'équation (II.13) par δ devant lui.

$$\overline{\delta P_{ca}} = -\delta h \vec{i}_2 + b\delta\alpha\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\vec{b}_2 \tag{II.13}$$

Donc le travail virtuel dû à la force de portance est :

$$\delta w_p = L[-\delta h + b\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \delta\alpha]$$

Avec : L est la force de portance.

La vitesse angulaire de l'aile est $\dot{\alpha}\vec{b}_3$ ce qui donne la rotation virtuelle due au moment [1] :

$$\delta R_{ca} = -\delta\alpha\vec{b}_3$$

Donc le travail virtuel dû au moment M est :

$$\delta w_m = M\delta\alpha$$

Le travail virtuel total effectué par la force de portance L et le moment M est donc :

$$\delta w = \delta w_p + \delta w_m = L[-\delta h + b\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\delta\alpha] + M\delta\alpha \tag{II.14}$$

Par correspondance de deux équations (II.11) et (II.14), les forces généralisées deviennent :

$$Q_h = -L$$

$$Q_\alpha = M + x_\beta.L$$

Avec :

$$x_\beta = b\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)$$

Maintenant les équations du mouvement peuvent être obtenues en combinant tous les morceaux, et en utilisant les équations de Lagrange comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{h}}\right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial h} &= Q_h \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial \alpha} &= Q_\alpha \end{aligned} \right\} \tag{II.15}$$

Après dérivation, les équations de mouvements deviennent :

$$\left. \begin{aligned} m\dot{h} + mx_{\alpha}b\ddot{\alpha} + k_h h &= -L \\ mbx_{\alpha}\dot{h} + I_{ea}\ddot{\alpha} + k_{\alpha}\alpha &= M \end{aligned} \right\} \quad \text{(II.16)}$$

Pour modéliser les effets de l'amortissement visqueux, la fonction de dissipation de Rayleigh utilisée est [3] :

$$d = \frac{1}{2}C_h\dot{h}^2 + \frac{1}{2}C_{\alpha}\dot{\alpha}^2 \quad \text{(II.17)}$$

Où : C_h et C_{α} sont des coefficients d'amortissement pour les deux mouvements, vertical et de tangage respectivement.

La relation (II.17) est incluse dans les équations de Lagrange comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{h}} \right) + \frac{\partial d}{\partial\dot{h}} - \frac{\partial(T-U)}{\partial h} &= Q_h \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{\alpha}} \right) + \frac{\partial d}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial(T-U)}{\partial\alpha} &= Q_{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad \text{(II.18)}$$

En substituant des équations (II.1), (II.10), (II.14) et (II.17), dans les équations (II.18) on obtient finalement les équations aéroélastiques de mouvement à deux degrés de liberté pour le mouvement vertical et mouvement de tangage.

$$m\dot{h} + mx_{\alpha}b\ddot{\alpha} + C_h\dot{h} + k_h h = -L \quad \text{(II.19)}$$

$$mbx_{\alpha}\dot{h} + I_{ea}\ddot{\alpha} + k_{\alpha}\alpha + C_{\alpha}\dot{\alpha} = M \quad \text{(II.20)}$$

Ces deux équations ci-dessus peuvent être écrites sous forme matricielle comme suit :

$$\mathbf{I} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \mathbf{F} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \mathbf{E} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ M \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} m & mx_{\alpha}b \\ mbx_{\alpha} & I_{ea} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} C_h & 0 \\ 0 & C_{\alpha} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_{\alpha} \end{bmatrix}$$

I : la matrice d'inertie

F : la matrice d'amortissement

E : la matrice de rigidité

II.3. Le modèle aéroélastique

La force aéroélastique quasi stationnaire L et le moment M pour une aile avec les deux surfaces de commande de bord de fuite et de bord d'attaque (Voir Figure (II.2)) est donnée comme suit [2] :

$$L(t) = \rho V^2 b s C_{l\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + \rho V^2 b s C_{l\beta} \beta + \rho V^2 b s C_{l\gamma} \gamma \quad (\text{II.21})$$

$$M(t) = \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + \rho V^2 b^2 s C_{m\beta} \beta + \rho V^2 b^2 s C_{m\gamma} \gamma \quad (\text{II.22})$$

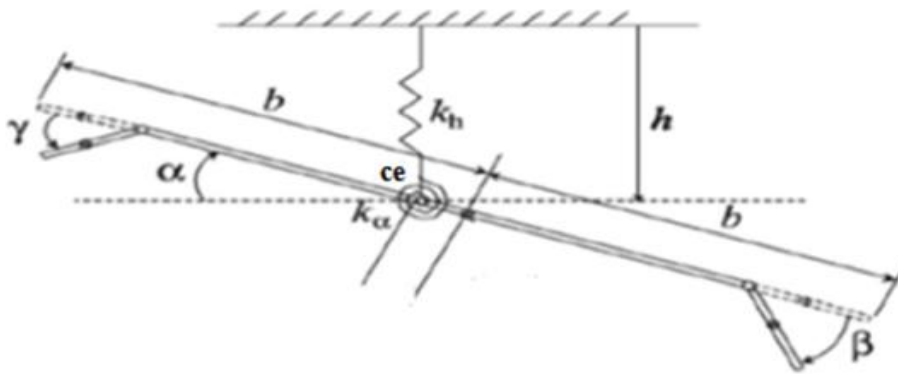


Figure II.2 : Le modèle aéroélastique d'une section d'aile bidimensionnelle avec les deux surfaces de commande de bord d'attaque et de bord de fuite [22].

II.4. Application sur le modèle d'aile TAMU WING II

Le modèle utilisé pour notre étude est appelé TAMU WING II, il a été établi dans l'université de Texas, ce modèle est testé dans une soufflerie à faible vitesse pour étudier l'efficacité de la suppression de LCO (Limit cycle oscillations) sur le système aéroélastique linéaire.

La Figure (II.3) montre le modèle utilisé, deux servomoteurs de FUTABA S9402 actionnent les gouvernes, chaque moteur étant capable de produire un couple de 0,654 N.m à 5 V, avec des déflexions des gouvernes linéairement proportionnelles à la tension appliquée.

En outre, deux encodeurs optiques d'E2-1024-375-h sont montés sur les axes de rotation des surfaces de commande de bord d'attaque et de bord de fuite pour permettre la mesure des angles de braquages de gouverne de sorte qu'ils puissent être comparés aux entrées commandées [2].

La longueur des surfaces de bord d'attaque et de bord de fuite sont 15 et 20% de la longueur de la corde moyenne respectivement.

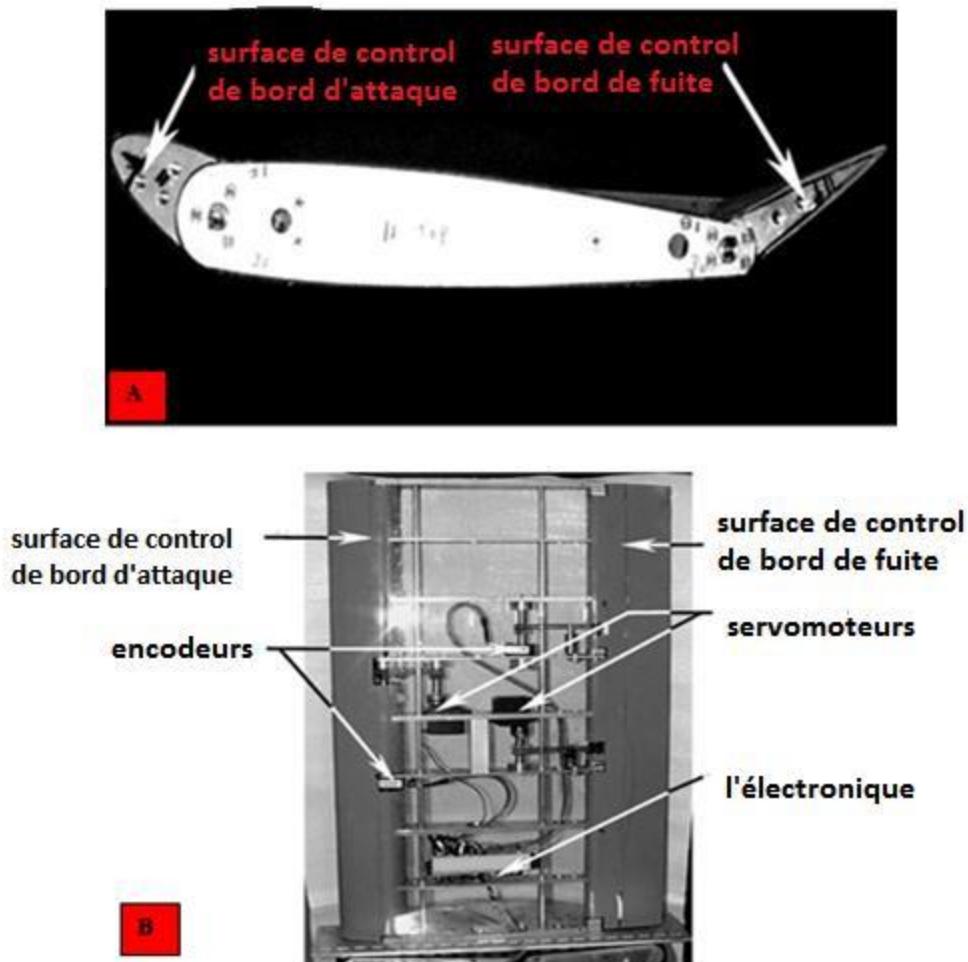


Figure II.3 : A) vue de face de la section d'aile avec les deux surfaces de commande défléchir de leurs positions initiales. B) vue de dessus de l'aile TAMU WING II avec revêtement transparent [23].

Les équations de mouvement (II.20) et (II.21) pour ce modèle sont données comme suit [2] :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_\alpha b \ddot{\alpha} + C_h \dot{h} + k_h h = -L \quad (\text{II.23})$$

$$m_w x_\alpha b \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_\alpha \alpha + C_\alpha \dot{\alpha} = M \quad (\text{II.24})$$

Avec :

m_T : La masse totale de l'aile et de sa structure de support

m_w : La masse de l'aile seulement.

II.4.1. Les paramètres de TAMU WING II

Pour réaliser une application numérique sur les équations de mouvement, les valeurs utilisées sont données dans le tableau suivant :

Le paramètre	La valeur	L'unité
P	1.225	Kg/m ³
A	-0.6719	Sans unité
B	0.1905	M
x_α	- (0.0998 + a)	Sans unité
S	0.5945	M
k_h	2844.4	N/m
k_α	3.525	Nm/rad
C_h	27.43	Kg/s
C_α	0.0360	Kg.m ² /s
m_w	5.230	Kg
m_T	15.57	Kg
I_{ea}	0.14193	Kg.m ²
$C_{l\alpha}$	6.757	Sans unité
$C_{m\alpha}$	(0.5+a) $C_{l\alpha}$	Sans unité
$C_{l\beta}$	3.774	Sans unité
$C_{m\beta}$	-0.6719	Sans unité
$C_{l\gamma}$	-0.1566	Sans unité
$C_{m\gamma}$	-0.1005	Sans unité

Tableau II.1 : Les paramètres de TAMU WING II [2].

II.5. La représentation d'état de modèle TAMU WING II

Pour obtenir la représentation d'état de notre système, On substitue l'équation (II.21) dans (II.23) on obtient :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_\alpha b \ddot{\alpha} + C_h \dot{h} + k_h = -\rho V^2 b s C_{l\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] - \rho V^2 b s C_{l\beta} - \rho V^2 b s C_{l\gamma} \gamma \quad (\text{II.25})$$

Et on substitue M par sa valeur donnée par l'équation (II.22) dans (II.24) on aura :

$$m_w x_\alpha b \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_\alpha \alpha + C_\alpha (\dot{\alpha}) \dot{\alpha} = \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + \rho V^2 b^2 s C_{m\beta} + \rho V^2 b^2 s C_{m\gamma} \gamma \quad (\text{II.26})$$

On combine l'équation (II.25) avec l'équation (II.26) pour éliminer $\ddot{\alpha}$ on aura :

$$\begin{aligned} \ddot{h} \frac{(m_w x_\alpha b)^2 - m_T I_{ea}}{m_w x_\alpha b} + \dot{h} \frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m\alpha} m_w x_\alpha b - I_{ea} [C_h + \rho V^2 b s C_{l\alpha}]}{m_w x_\alpha b} + \\ \dot{\alpha} \frac{C_\alpha m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) I_{ea}}{m_w x_\alpha b} + \\ \alpha \frac{k_\alpha m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l\alpha} I_{ea} - h \frac{k_h I_{ea}}{m_w x_\alpha b}}{m_w x_\alpha b} + \\ \beta \frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m\beta} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l\beta} I_{ea}}{m_w x_\alpha b} + \gamma \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m\gamma} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l\gamma} I_{ea}}{m_w x_\alpha b} \right] = 0 \end{aligned}$$

On divise par $\frac{(m_w x_\alpha b)^2 - m_T I_{ea}}{m_w x_\alpha b}$, l'équation ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} \ddot{h} = \dot{h} \frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m\alpha} m_w x_\alpha b - I_{ea} [C_h + \rho V^2 b s C_{l\alpha}]}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} + \\ \dot{\alpha} \frac{C_\alpha m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} - \\ h \frac{k_h I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} + \alpha \frac{k_\alpha m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l\alpha} I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} + \\ \beta \frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m\beta} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l\beta} I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} + \gamma \left[\frac{-\rho V^2 b^2 s C_{m\gamma} m_w x_\alpha b - \rho V^2 b s C_{l\gamma} I_{ea}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

On peut écrire l'équation ci-dessus comme suit :

$$\dot{h} = a_{31} h + a_{32} \alpha + a_{33} \dot{h} + a_{34} \dot{\alpha} + b_{31} \beta + b_{32} \gamma \quad (\text{II.27})$$

En combinant aussi l'équation (II.25) avec l'équation (II.26) en éliminant cette fois \ddot{h} on obtient :

$$\begin{aligned} & \ddot{\alpha} m_w x_\alpha b - \frac{m_T I_{ea}}{m_w x_\alpha b} + \dot{h} \left[C_h + \frac{\rho V^2 b s C_{l\alpha}}{V} + \frac{m_T \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha}}{V m_w x_\alpha b} \right] + \\ & \dot{\alpha} \left[\frac{\rho V^2 b s C_{l\alpha}}{V} \left(\frac{1}{2} - a \right) b - \frac{m_T C_\alpha}{m_w x_\alpha b} + \frac{m_T \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha}}{V m_w x_\alpha b} \left(\frac{1}{2} - a \right) b \right] + \\ & \alpha \left[\rho V^2 b s C_{l\alpha} - \frac{m_T k_\alpha}{m_w x_\alpha b} + \frac{m_T \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha}}{m_w x_\alpha b} \right] + k_h h + \beta \left[\rho V^2 b s C_{l\beta} + \frac{\rho V^2 b^2 s C_{m\beta} m_T}{m_w x_\alpha b} \right] + \\ & \gamma \left[\rho V^2 b s C_{l\gamma} + \frac{\rho V^2 b^2 s C_{m\gamma} m_T}{m_w x_\alpha b} \right] = 0 \end{aligned}$$

On divise l'équation ci-dessus par $m_w x_\alpha b - \frac{m_T I_{ea}}{m_w x_\alpha b}$ et on calcule $\ddot{\alpha}$ on le trouve comme suit:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \dot{h} \frac{C_h m_w x_\alpha b + \rho V^2 b s C_{l\alpha} m_w x_\alpha b + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} + \\ & \dot{\alpha} \left[\frac{\rho V^2 b s C_{l\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) b m_w x_\alpha b + m_T C_\alpha (\dot{\alpha}) m_T \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) b}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \right] + h \frac{k_h m_w x_\alpha b}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} + \\ & \alpha \frac{\rho V^2 b s C_{l\alpha} m_w x_\alpha b - m_T k_\alpha + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha}}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} + \beta \frac{\rho V^2 b s C_{l\beta} m_w x_\alpha b + \rho V^2 b^2 s C_{m\beta} m_T}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} + \\ & \gamma \frac{\rho V^2 b s C_{l\gamma} m_w x_\alpha b + \rho V^2 b^2 s C_{m\gamma} m_T}{m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2} \end{aligned}$$

L'équation ci-dessus peut être écrite comme suit :

$$\ddot{\alpha} = a_{41} h + a_{42} \alpha + a_{43} \dot{h} + a_{44} \dot{\alpha} + b_{41} \beta + b_{42} \gamma \quad (\text{II.28})$$

Les équations (II.27) et (II.28) peuvent être écrites sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Avec : x est le vecteur d'état donné par :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

u : est le vecteur de commande donné par :

$$u = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

y : est le vecteur de sortie donnée par :

$$y = \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix}$$

A, B sont les matrices d'état et d'entrée données respectivement :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$$

Où les coefficients a_{ij} et b_{ij} qui constituent les matrices A et B sont définis dans l'annexe (A.2).

C, D sont les matrices de sortie et de contrôle données respectivement :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque que notre système aéroélastique est de 4^{ème} ordre et il est décrit par un modèle mathématique à paramètres linéaires invariables.

On calcule les variables de la matrice A, B, C et D en utilisant les paramètres mentionnés dans le Tableau II.1 à une vitesse d'écoulement $V=13$ m/s.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.2 & -9.294 & -2.862 & -0.167 \\ 860 & -24.06 & 8.683 & -0.2106 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -5.7551 & 0.4122 \\ 1.9681 & -4.8177 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

II.6. Modélisation des incertitudes paramétriques

Dans cette section on considère la modélisation du système aéroélastique où le système est soumis uniquement à des perturbations de type structuré (les perturbations paramétriques), les paramètres affectés par ces incertitudes sont le coefficient d'amortissement C_h et le coefficient de rigidité k_α et la pression dynamique quasi stationnaire q .

II.6.1. La transformation linéaire fractionnaire LFT (Linear Fractional Transformation)

La représentation des incertitudes paramétriques qui interviennent sur le modèle, peut être traduite par la transformation linéaire fractionnaire (LFT).

Considérant une boucle fermée soumise à des incertitudes paramétriques, la première étape consiste à transformer cette boucle fermée de façon à se ramener au schéma d'interconnexion standard P- Δ de la Figure (II.4) [24].

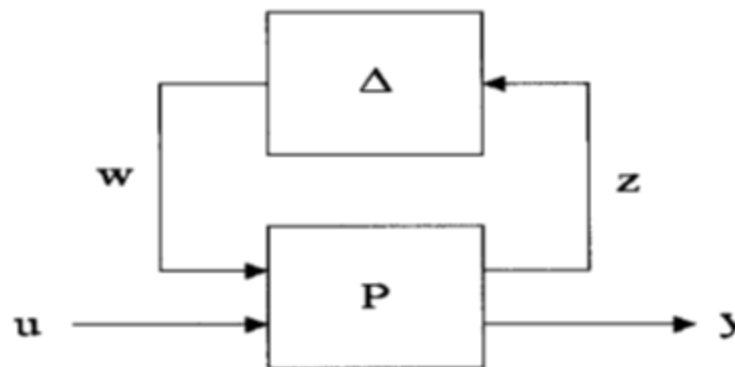


Figure II.4 : mise sous forme de LFT d'un processus incertain [24].

La matrice Δ contient les incertitudes de modèle (P), elle est de la forme :

$$\Delta = \text{diag} (\delta_i I_{q_i})$$

Avec $\delta_i \in [-1 ; 1]$ représente la variation normalisée de ième paramètre incertain et I_{q_i} est la matrice identité.

Les deux variables (Vectorielles) w et z sont introduits respectivement comme une entrée et une sortie auxiliaires, connectées par une boucle de retour sur un gain Δ selon la relation suivante :

$$w = \Delta \times z$$

Le système P s'écrit :

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \quad (\text{II.29})$$

$$z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u \quad (\text{II.30})$$

$$y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u \quad (\text{II.31})$$

Les équations ci-dessus peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

Avec :

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

II.6.2. Le modèle mathématique du système incertain

Pour s'adapter dans le cadre de la synthèse de la commande μ -analyse, une interprétation pour modéliser le système aéroélastique qui tient compte des incertitudes paramétriques du modèle sur la pression dynamique, la rigidité et l'amortissement qui sont données comme suit :

Les charges aérodynamiques et M sont donnés par [2] :

$$L(t) = q \left\{ 2bs C_{l\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2bsC_{l\beta}\beta + 2bsC_{l\gamma}\gamma \right\} \quad (\text{II.32})$$

$$M(t) = q \left\{ 2b^2s C_{m\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2b^2sC_{m\beta}\beta + 2b^2sC_{m\gamma}\gamma \right\} \quad (\text{II.33})$$

Avec : q c'est la pression dynamique donnée par :

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2$$

La pression dynamique peut être défini comme étant une combinaison de la pression dynamique quasi-stationnaire nominale, et une perturbation associée suivant la relation [2].

$$q = q_{nom} + \delta_q \quad (\text{II.34})$$

Où : q_{nom} : est la pression dynamique nominale.

δ_q : est la perturbation associée à la pression dynamique.

En substituant (II.34) dans (II.21) et (II.22) respectivement, on trouve les charges aérodynamiques perturbées données par (II.35) et (II.36) :

$$L(t) = q_{nom} 2b s C_{l\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + q_{nom} 2bsC_{l\beta}\beta + q_{nom} 2bsC_{l\gamma}\gamma + w_1 \quad (\text{II.35})$$

$$z_1 = 2bsC_{l\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2bsC_{l\beta}\beta + 2bsC_{l\gamma}\gamma \quad (\text{II.36})$$

$$M(t) = q_{nom} 2b^2 s C_{m\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + q_{nom} 2b^2 s C_{m\beta}\beta + q_{nom} 2b^2 s C_{m\gamma}\gamma + w_2 \quad (\text{II.37})$$

$$z_2 = 2b^2 s C_{m\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2b^2 s C_{m\beta}\beta + 2b^2 s C_{m\gamma}\gamma \quad (\text{II.38})$$

Avec :

$$w_1 = \delta_q z_1 = \delta_1 z_1$$

$$w_2 = \delta_q z_2 = \delta_2 z_2$$

Le coefficient d'amortissement perturbé pour le mouvement vertical peut être défini comme [2] :

$$C_h = C_{h-nom} + W_3 \delta_3 \quad (\text{II.39})$$

Où :

δ_3 est la perturbation liée au coefficient d'amortissement C_{h-nom} pour le mouvement vertical.

$$\delta_3 \in \mathbb{R} \text{ et } |\delta_3| \leq 1$$

$$W_3 = e_3 C_{h-nom}$$

w_3 est la pondération sur la perturbation associée au coefficient d'amortissement pour le mouvement vertical C_{h-nom} et e_3 et l'erreur de pondération.

Pour les buts semblables, le coefficient de rigidité pour le mouvement de tangage peut être exprimé comme [2] :

$$k_\alpha = k_{\alpha-nom} + W_4 \delta_4 \quad (\text{II.40})$$

Avec :

δ_4 est la perturbation associée au coefficient de rigidité de mouvement de tangage $k_{\alpha-nom}$.

$$\delta_4 \in \mathbb{R} \text{ et } |\delta_4| \leq 1$$

$$W_4 = e_4 k_{\alpha-nom}$$

W_4 est la pondération sur la perturbation associée au coefficient de rigidité pour le mouvement de tangage $k_{\alpha-nom}$

On pose :

$$z_3 = W_3 \dot{h} \quad (\text{II.41})$$

$$z_4 = W_4 \alpha \quad (\text{II.42})$$

On a :

$$w_3 = \delta_3 z_3 \quad (\text{II.43})$$

$$w_4 = \delta_4 z_4 \quad (\text{II.44})$$

On substitue (II.39) dans (II.23) et en combinant avec (II.41) et en substituant (II.40) dans (II.24) et en combinant avec (II.42) on obtient respectivement :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_\alpha b \ddot{\alpha} + C_{h-nom} \dot{h} + k_h h + \delta_3 z_3 = -L \quad (\text{II.45})$$

$$m_w x_\alpha b \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_{\alpha-nom} \alpha + C_\alpha \dot{\alpha} + \delta_4 z_4 = M \quad (\text{II.46})$$

Ces deux équations ci-dessus peuvent être écrites comme suit on substitue w_3 et w_4 par leurs valeurs :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_\alpha b \ddot{\alpha} + C_{h-nom} \dot{h} + k_h h + w_3 = -L \quad (\text{II.47})$$

$$m_w x_\alpha b \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_{\alpha-nom} \alpha + C_\alpha \dot{\alpha} + w_4 = M \quad (\text{II.48})$$

On combine l'équation (II.47) avec l'équation (II.35) et l'équation (II.48) avec (II.37) on aura respectivement :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_\alpha b \ddot{\alpha} + C_{h-nom} \dot{h} + k_h h + w_3 = -q_{nom} \{ 2bs C_{l\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2bs C_{l\beta} \beta + 2bs C_{l\gamma} \gamma \} - w_1 \quad (\text{II.49})$$

$$m_w x_\alpha b \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_{\alpha-nom} \alpha + C_\alpha \dot{\alpha} + w_4 = q_{nom} \left\{ 2b^2 s C_{m\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2b^2 s C_{m\beta} \beta + 2b^2 s C_{m\gamma} \gamma \right\} + w_2 \quad (\text{II.50})$$

On combine ces deux équations ci-dessus pour éliminer $\ddot{\alpha}$ et \dot{h} on obtient respectivement

$$\dot{h} = a_{31} h + a_{32} \alpha + a_{33} \dot{h} + a_{34} \dot{\alpha} + b_{31} w_1 + b_{32} w_2 + b_{33} w_3 + b_{34} w_4 + b_{35} \beta + b_{36} \gamma \quad (\text{II.51})$$

$$\ddot{\alpha} = a_{41} h + a_{42} \alpha + a_{43} \dot{h} + a_{44} \dot{\alpha} + b_{41} w_1 + b_{42} w_2 + b_{43} w_3 + b_{44} w_4 + b_{45} \beta + b_{46} \gamma \quad (\text{II.52})$$

Réarrangeant l'équation (II.36) et (II.38), nous avons :

$$z_1 = C_{12} \alpha + C_{13} \dot{h} + C_{14} \dot{\alpha} + d_{15} \beta + d_{16} \gamma \quad (\text{II.53})$$

$$z_1 = C_{22} \alpha + C_{23} \dot{h} + C_{24} \dot{\alpha} + d_{25} \beta + d_{26} \gamma \quad (\text{II.54})$$

À partir de l'équation (II.41) et (II.42) les pondérations sont définies comme suit :

$$z_3 = W_3 \dot{h} = C_{33} \dot{h} \quad (\text{II.55})$$

$$z_4 = W_4 \dot{h} = C_{42} \dot{h} \quad (\text{II.56})$$

Avec : $C_{33} = W_3$ et $C_{42} = W_4$

Les équations (II.51), (II.52), (II.53), (II.54), (II.55) et (II.56) peuvent être écrites sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{II.57})$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ 0 & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & W_3 & 0 \\ 0 & W_4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & d_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Où les coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} sont définis dans l'annexe (A.2).

II.6.3. Application numérique sur le modèle TAMU WING II

En utilisant les paramètres mentionnés dans le Tableau (II.1) et on prend $V = 13\text{m/s}$, les variables des matrices A, B, C, D de l'équation (II.57) sont données comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.2 & -9.294 & -2.862 & -0.167 \\ 860 & -24.06 & 8.683 & -0.2106 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0753 & -0.3024 & -0.0753 & 0.3024 & -5.7551 & 0.4122 \\ 0.3024 & 8.2595 & 0.3024 & -8.2595 & 1.9681 & -0.8177 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1.5305 & 0.1177 & 0.0263 \\ 0 & -0.0501 & -0.0039 & -0.0009 \\ 0 & 0 & 10.8720 & 0 \\ 0 & 1.7625 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8584 & -0.0355 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0290 & -0.0043 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Conclusion

Dans ce chapitre, deux modèles ont été élaborés en utilisant un développement mathématique pour obtenir en premier lieu le modèle nominal ensuite le modèle incertain.

La modélisation mathématique des deux modèles est basée sur des lois physiques, essentiellement le formalisme de Lagrange qui tient en compte que les forces ayant un travail.

Le modèle nominal obtenu ce n'est qu'une approximation du modèle réel; des dynamiques ont été négligées lors de la synthèse telle que l'effet de la gravité.

Le modèle incertain est obtenu approximativement en introduisant des incertitudes dans le modèle nominal sur les paramètres suivants: le coefficient d'amortissement pour le mouvement vertical C_h , Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement de tangage K_α et la pression dynamique q .

CHAPITRE III :
Commande par H^∞ et
 μ _analyse

Introduction

La théorie de la Commande “ Robuste ” des Systèmes Linéaires a connu un essor remarquable durant ces dix dernières années. Sa popularité gagne aujourd’hui le milieu industriel où elle se révèle un outil précieux pour l’analyse et la conception des systèmes asservis. Cette percée rapide tient à deux atouts majeurs :

- Son caractère appliqué et son adéquation aux problèmes pratiques de l’ingénieur automaticien ;
- Sa contribution à la systématisation du processus de synthèse d’un asservissement.

Pour apprécier l’originalité et l’intérêt des outils de Commande Robuste, rappelons qu’un asservissement a deux fonctions essentielles :

- Façonner la réponse du système asservi pour lui imprimer le comportement désiré ;
- Maintenir ce comportement face aux aléas et fluctuations qui affectent le système pendant son fonctionnement (Rafales de vent pour un avion, usure pour un système mécanique, changement de configuration pour un robot, etc.).

La seconde exigence est qualifiée de “robustesse à l’incertitude”. Elle revêt une importance critique pour la fiabilité du système asservi. En effet, l’asservissement est typiquement conçu à partir d’un modèle idéalisé et simplifié du système réel. Pour fonctionner correctement, il doit donc être robuste aux imperfections du modèle, c’est-à-dire aux écarts entre le modèle et le système réel, aux dérives des paramètres physiques, et aux perturbations externes. L’avantage essentiel des techniques de Commande Robuste est de générer des lois de commande qui satisfont à la double exigence mentionnée ci-dessus. Plus précisément, étant donné une spécification fréquentielle du comportement désiré et une estimation de l’ordre de grandeur de l’incertitude, la théorie évalue la faisabilité, produit une loi de commande adaptée, et fournit une garantie sur le domaine de validité de cette loi de commande (robustesse). Cette démarche de synthèse est systématique et très générale. En particulier, elle est directement applicable aux systèmes à plusieurs entrées/sorties [32].

Dans une certaine mesure, la théorie de la Commande Robuste réconcilie l’automatique classique à dominante fréquentielle (Bode, Nyquist, P.I.D.) et l’automatique moderne à dominante variables d’état (Commande Linéaire Quadratique, H_∞ , μ -analyse... etc). Elle combine en effet le meilleur des deux. De l’automatique classique, elle emprunte la richesse de l’analyse fréquentielle des systèmes. Ce cadre est particulièrement favorable à la spécification des objectifs de performance (Qualité du suivi ou de la régulation), de bande passante (domaine d’action de

l'asservissement) et de robustesse. De l'Automatique Moderne, elle hérite la simplicité et la puissance des méthodes de synthèse par variables d'état des asservissements. Grâce à ces outils systématiques de synthèse, l'ingénieur peut désormais imposer des spécifications fréquentielles complexes et obtenir directement un diagnostic de faisabilité et une loi de commande appropriée. Il peut ainsi se concentrer sur la recherche du meilleur compromis et analyser les limites de son système [31].

III.1. La commande H_∞

La commande H_∞ (Appelée encore commande fréquentielle avancée ou commande robuste multivariable) est une nouvelle approche de l'automatique fréquentielle, elle a été initiée par Zames au début des années 80 et développée, en particulier par Doyle, Glover, Khargonekar et Francis [25, 26, 27]. Elle est devenue ces dernières années une des méthodes phares de la « Commande robuste » [28], elle est utilisée pour mise au point rapide de lois de commande robustes des systèmes linéaires stationnaires et multivariables [28, 29]. Elle prend une place de plus en plus importante parmi les méthodes de synthèse de contrôleurs.

Dans cette approche, l'un des points intéressants est qu'elle permet de prendre en compte, à priori et explicitement, des spécifications fréquentielles et temporelles du cahier de charges, qui est ainsi traduit directement sous forme d'un critère mathématique à vérifier [25]. Celui-ci est formulé en utilisant la norme H_∞ , d'où le nom qu'on donne à cette méthode de synthèse. La synthèse du contrôleur qui satisfasse ce critère se fait algorithmiquement par résolution du problème d'optimisation en exploitant la puissance de calcul des ordinateurs actuels [31].

La commande H_∞ possède plusieurs avantages parmi lesquels :

- Que la commande prend en compte des spécifications temporelles et fréquentielle du cahier de charge ;
- Le critère est construit directement du cahier de charge (la traduction des spécifications en termes de gabarits fréquentielle correspond aux pondérations) ;
- Elle permet de synthétiser des correcteurs qui prennent en compte à la fois les spécifications robuste et les spécifications de performance ;
- Elle permet de traiter simplement la commande des systèmes MIMO.

III.1.1. Le problème H_∞ standard

Sous sa forme la plus simple, le problème H_∞ est un problème de réjection de perturbation. Il consiste à minimiser l'effet d'une perturbation w sur le comportement du système. Le signal w est supposé d'énergie finie et sa taille est mesurée en norme ℓ_2 . Son effet sur le système est mesuré par la norme ℓ_2 d'un vecteur "Coût" z .

Enfin, on peut agir sur le système par une commande u et on dispose d'une observation y . Il s'agit donc de synthétiser une loi de commande $u = K(s) y$ qui minimise l'impact de w sur z . On mesurera cet impact par le rapport $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$. La stabilité interne du système bouclé devra bien sûr être assurée.

Ce problème standard est représenté schématiquement par la Figure (III.1) suivante :

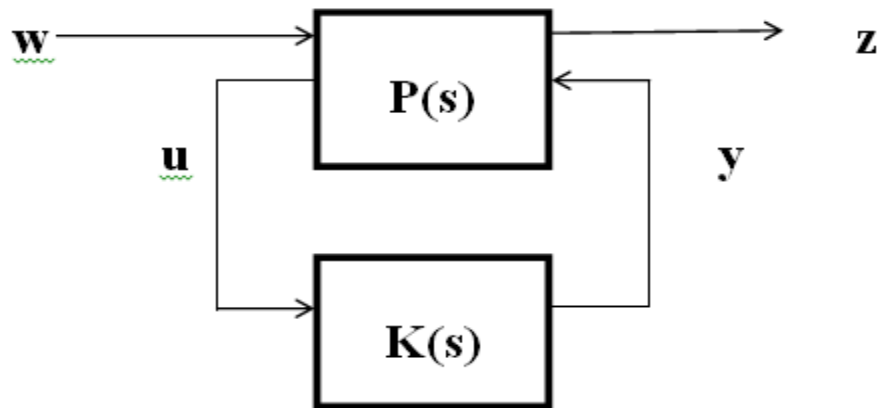


Figure III.1 : Le problème H_∞ standard

La fonction de transfert $P(s)$ décrit les interconnexions entre w, u, z, y :

$$\begin{pmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} \tag{III.1}$$

On appelle P le système (plant) et on le supposera propre. Lorsque ce système est rebouclé sur la commande $u = K(s) y$, le transfert boucle fermée de w à z est donné par la Transformation Linéaire Fractionnelle (LFT) :

$$F_l(P, K) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(sI - P_{22}(s)K(s))^{-1} \cdot P_{21}(s) \tag{III.2}$$

En observant que le ratio $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$ est dans le pire des cas:

$$\sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \|F_l(P, K)\|_\infty \tag{III.3}$$

Le problème décrit ci-dessus peut se formuler mathématiquement comme suit :

➤ Problème H_∞ Optimal : Minimiser $\|F_l(P,K)\|_\infty$ sur l'ensemble des compensateurs $K(s)$ qui stabilisent le système de manière interne ;

Le minimum est noté γ_{opt} et appelé gain (Ou atténuation) « H_∞ -optimal ». Le problème sous-optimal associé joue également un rôle important :

➤ Problème H_∞ Sous-Optimal : étant donné $\gamma > 0$, trouver un compensateur $K(s)$ qui stabilise le système de manière interne et assure $\|F_l(P,K)\|_\infty < \gamma$.

III.1.2. Formulation H_∞ par Loop Shaping

Les spécifications fréquentielles peuvent s'exprimer par des contraintes sur le profil de la plus petite et plus grande valeur singulière du transfert en boucle ouverte $GK(s)$.

On peut raisonner en termes de contraintes sur l'allure des fonctions $\sigma_{max}(S(j\omega))$ et $\sigma_{max}(T(j\omega))$. Ces contraintes sont de la forme :

$$\sigma_{max}(S(j\omega)) \leq |W_S|^{-1} \tag{III.4}$$

$$\sigma_{max}(T(j\omega)) \leq |W_T|^{-1}$$

Ou s'écrit autrement :

$$\|W_S S\|_\infty < 1 \tag{III.5}$$

$$\|W_T T\|_\infty < 1$$

Où W_S et W_T sont des fonctions de pondérations spécifient l'allure désirée suivant la figure (III.2) suivante :

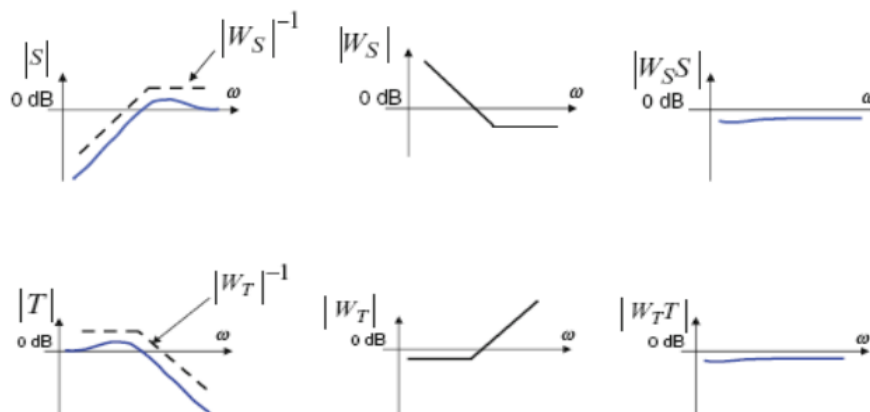


Figure III.2 : Allure des fonctions de pondérations

La figure (III.2) montre la forme des fonctions $S(s), T(s), W_S$ et W_T pour atteindre une bonne performance et une bonne robustesse vis-à-vis les bruits hautes fréquence et la dynamique négligée. Ce concept est principale pour désigner le contrôler optimal H_∞ .

III.1.3. Résolution du problème H_∞

Cette section présente les techniques de résolution par variable d'état des problèmes H_∞ sous-optimaux et optimaux. L'approche est donnée par la technique DGKF qui offre un cadre méthodologique riche et qui est la mieux adaptée au calcul numérique pour la résolution de problèmes de commande. Elle marque un pas décisif vers une synthèse systématique des asservissements robustes. Nous reprenons donc ici les notations usuelles pour la forme standard exprimée en espace d'état [31].

La représentation d'état du système augmenté, est donnée classiquement sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad \text{(III.6)}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (SI - A)^{-1} [B_1 B_2]$$

On supposera que :

$$D_{12} \in \mathcal{R}^{p_1 \times m_2}; D_{21} \in \mathcal{R}^{p_2 \times m_1}$$

Avec $m_1 \geq p_2$ et $p_1 \geq m_2$. Enfin n désignera la taille de A , i.e., l'ordre du système $P(s)$.

La solution par variable d'état n'est applicable que sous les hypothèses suivantes :

Théorème 1 : Le problème H_∞ standard a une solution si et seulement si les cinq conditions suivantes sont remplies:

(1) La matrice $H_\infty = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{pmatrix}$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.

(2) Il existe une matrice symétrique positive définie X solution de l'équation de Riccati c'est-à-dire

$$A^T X + XA + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)X + C_1^T C_1 = 0. \quad \text{(III.7)}$$

(3) La matrice $J_\infty = \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2}C_1C_1^T - C_2C_2^T \\ -B_1^TB_1 & -A \end{pmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.

(4) Il existe une matrice symétrique positive définie Y solution de l'équation de Riccati :

$$AY + YA^T + Y(\gamma^{-2}C_1C_1^T - C_2C_2^T)Y + B_1^TB_1 = 0 \quad (\text{III.8})$$

(5) $\lambda_{\max}(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$. Qui indique que les valeurs propres du produit de la solution des deux équations de Riccati sont inférieure à γ^2 .

Théorème 2 : Sous les hypothèses (1) à (5) ci-dessus, il existe un compensateur $K(s)$ qui stabilise le système de manière interne et assure $\|F_1(P(s),K(s))\|_\infty < \gamma$ si et seulement si les équations de Riccati (i) ont des solutions stabilisantes X_∞ et Y_∞ respectivement.

$$A^T X + XA + X(\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X + C_1^T C_1 = 0 \quad (\text{III.9})$$

$$AY + YA^T + Y(\gamma^{-2}C_1C_1^T - C_2C_2^T)Y + B_1^TB_1 = 0$$

Ces solutions (ii) vérifient de plus :

$$X_\infty \geq 0; Y_\infty \geq 0; \lambda_{\max}(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \quad (\text{III.10})$$

L'existence de solutions stabilisantes traduit la contrainte $\|F_1(P(s),K(s))\|_\infty < \gamma$ alors que les conditions de positivité assurent la stabilité interne.

Théorème 3 : Supposons (1)-(5) et soit $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$. Alors le compensateur :

$$K_c(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c \quad (\text{III.11})$$

Avec

$$A_c = A + (\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X_\infty - (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}Y_\infty C_2^T C_2 \quad (\text{III.12})$$

$$B_c = (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}Y_\infty C_2^T; C_c = -B_2^T X_\infty \quad (\text{III.13})$$

Stabilise le système de manière interne et satisfait

$$\|F_1(P(s),K_c(s))\|_\infty < \gamma \quad (\text{III.14})$$

Cette solution particulière du problème H_∞ sous-optimal est appelé compensateur central.

III.1.4 Synthèse H_∞ pondérée

Une mise en œuvre possible de la synthèse H_∞ consiste à introduire des fonctions de pondérations sur les entrées exogènes w et les sorties régulées z . Il s'agit donc de bien choisir ces filtres de pondération afin d'obtenir les propriétés désirées en boucle fermée. Il est important de souligner dans ce contexte que les fonctions de pondération peuvent être placées à différents endroits à l'intérieur du système augmenté, de manière à avoir une matrice de transfert pondérée entre les entrées exogènes w et les sorties à minimiser z .

Considérons à cette fin le schéma de la (Figure (III.3)), dans lequel :

- L'erreur ε est pondérée par le filtre $W_1(s)$;
- La commande u est pondérée par le filtre $W_2(s)$;
- La perturbation d est la sortie d'un filtre $W_3(s)$.

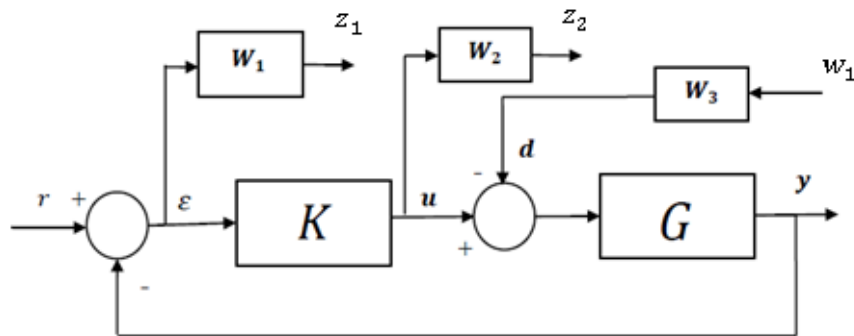


Figure III.3 : Système asservi pondéré.

En se référant au problème représenté par le schéma ci-dessus, les variables sont reliées par :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & -GW_3 & -G \\ 0 & 0 & W_2 \\ 0 & GW_3 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ w_1 \\ u \end{bmatrix} \tag{III.15}$$

Eliminant u et y , on peut calculer la matrice de transfert du système interconnecté, nous obtenons :

$$T_{zw} = \begin{pmatrix} W_1 S_s & W_1 S_s G W_3 \\ W_2 S_e K & W_2 S_e K G W_3 \end{pmatrix} \tag{III.16}$$

Où les fonctions de sensibilité en entrée et en sortie sont :

$$S_e = (I + KG)^{-1} \text{ et } S_s = (I + GK)^{-1}$$

Dans le cas d'un SISO et pour assurer que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ alors les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

$$\|W_1 S\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, |S(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)|} \quad (\text{III.17})$$

$$\|W_2 S G W_3\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, |S(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)W_3(j\omega)|} \quad (\text{III.18})$$

$$\|W_2 S K\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, |S(j\omega)K(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)|} \quad (\text{III.19})$$

$$\|W_2 S K G W_3\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, |S(j\omega)K(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)W_3(j\omega)|} \quad (\text{III.20})$$

On voit donc que les réponses fréquentielles de chacune des fonctions S, SK, SG et SKG sont contraintes par un gabarit qui dépend des fonctions de pondérations choisies, ce choix requiert en générale plusieurs essais et il est difficile de donner des règles absolues qui fonctionneront dans tous les cas. Néanmoins, il existe quelques guides pour le choix initial, qu'il faudra éventuellement affiner par la suite :

➤ Le gabarit sur la fonction de sensibilité S entre la consigne et l'erreur nous permet de fixer plusieurs aspects de l'asservissement. On prend en général un passe-bas du 1^{er} ordre de la forme :

$$W_1 = \frac{s}{M_1 s + \omega_1} \quad (\text{III.21})$$

La pulsation ω_1 pour laquelle le gabarit possède un gain unitaire peut être interprétée comme la bande passante minimale souhaitée. La précision du système est assurée par un faible choix de ε_1 aux basses fréquences. Enfin la valeur de M_1 aux hautes fréquences limite le maximum de la réponse fréquentielle de S, ce qui impose une marge de module au moins égale à $1/M_1$.

➤ Le gabarit de SK entre la consigne et la commande permet de limiter l'action du contrôleur lui-même. On prend typiquement un passe-haut du 1^{er} ordre de la forme :

$$W_2 = \frac{s + \omega_2}{\varepsilon_2 s + \omega_2} \quad (\text{III.22})$$

L'amplitude de |SK| aux basses fréquences est essentiellement limitée par les capacités de l'actionneur ; le gain M_2 est choisi en fonction. La pulsation ω_2 permet de régler la bande passante du contrôleur ; au-delà de cette pulsation, un certain roll off est censé atténuer les hautes fréquences.

Enfin, on rend le filtre propre grâce à une faible valeur de ε_2 , qui introduit un pôle aux hautes fréquences.

➤ Le gabarit sur $|SG|$ fait intervenir les deux filtre W_1 et W_3 . On choisit en général W_3 constant et faible pour régler l'atténuation aux basses fréquences mais on peut aussi choisir un filtre variable afin de modifier le comportement de $|SG|$ aux moyennes fréquences.

➤ Le gabarit sur $|SKG|$ fait intervenir les deux filtre W_2 et W_3 . Dans ce cas, on cherche essentiellement à améliorer la stabilité robuste face aux dynamiques négligées.

III.1.5. Mise sous forme standard

Une fois choisis les filtres de pondération, il reste à mettre le problème ainsi défini sous forme standard, c'est-à-dire à identifier le schéma bloc de la (Figure (III.4) et (III.5)). Il est possible donc de générer un nouveau modèle appelé modèle augmenté donné par :

$$P = \left(\begin{array}{cccc|c|c} A_G & 0 & 0 & 0 & 0 & B_G \\ -B_{W1} & A_{W1} & 0 & 0 & B_{W1} & -B_{W1}D_G \\ 0 & 0 & A_{W2} & 0 & 0 & B_{W2} \\ B_{W3}C_G & 0 & 0 & A_{W3} & 0 & B_{W3}D_G \\ \hline -D_{W1}C_G & C_{W1} & 0 & 0 & D_{W1} & -D_{W3}D_G \\ 0 & 0 & C_{W2} & 0 & 0 & D_{W2} \\ D_{W3}C_G & 0 & 0 & C_{W3} & 0 & D_{W3}D_G \\ \hline -C_G & 0 & 0 & 0 & I & -D_G \end{array} \right) \quad (III.23)$$

Avec :

$$G = \begin{bmatrix} A_G & B_G \\ C_G & D_G \end{bmatrix}; W_1 = \begin{bmatrix} A_{W1} & B_{W1} \\ C_{W1} & D_{W1} \end{bmatrix}; W_2 = \begin{bmatrix} A_{W2} & B_{W2} \\ C_{W2} & D_{W2} \end{bmatrix}; W_3 = \begin{bmatrix} A_{W3} & B_{W3} \\ C_{W3} & D_{W3} \end{bmatrix} \quad (III.24)$$

On note ici que l'ordre du système augmenté P est la somme des ordres de G et des différentes fonctions de pondération.

Sous réserve que les hypothèses (1), (3) soient vérifiées, on peut directement appliquer l'algorithme de γ -itération pour déterminer si l'atténuation $\gamma = 1$ est faisable. Si oui, le problème de sensibilité mixte de critère

$$\|\mathcal{F}(P, K)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} w_1 S \\ w_2 KS \\ w_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (III.25)$$

est solvable et les formules du compensateur central fournissent une solution particulière d'ordre égal à l'ordre du système augmenté.

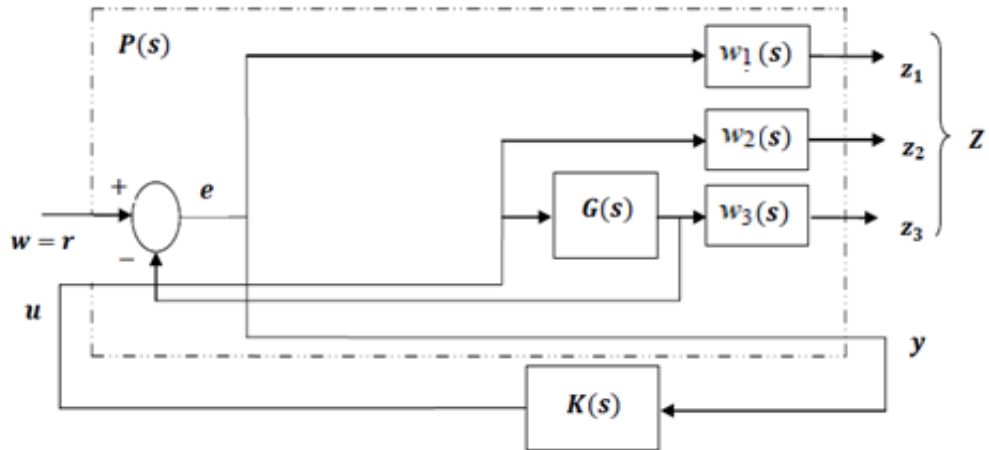


Figure III.4 : Forme standard de sensibilité mixte S/KS/T

Pour conclure, le problème de sensibilité mixte consiste à trouver un compensateur $K(s)$ qui assure la stabilité interne de la boucle (Figure (III.5)) et satisfasse :

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty = \left\| \begin{matrix} w_1 S \\ w_2 KS \\ w_3 T \end{matrix} \right\|_\infty < 1 \tag{III.26}$$

III.2. Technique de μ -Analyse et μ -Synthèse

On synthétise a priori une loi de commande sur un modèle nominal du processus. On veut vérifier a posteriori que la boucle fermée demeure stable (voire performante) en présence des inévitables erreurs de modélisation [30].

On fait l'hypothèse que le processus (modèle + incertitudes de modèle associées) est linéaire invariant dans le temps. Les erreurs de modélisation peuvent être de deux types, à savoir des incertitudes paramétriques (incertitudes sur la valeur des paramètres physiques du processus) et des dynamiques mal connues ou négligées (méconnaissance de la dynamique haute fréquence en entrée et en sortie du processus). La μ analyse fournit un cadre général pour l'étude de la robustesse d'une boucle fermée soumise à ces deux types d'incertitudes de modèle [30].

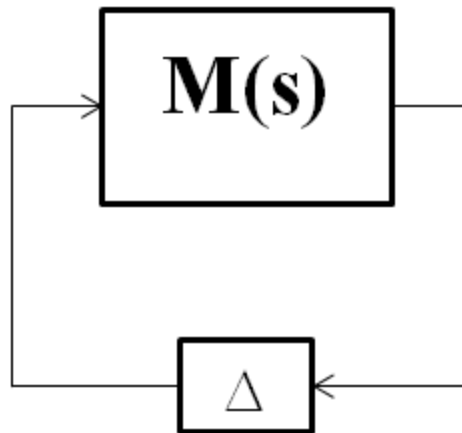
III.2.1. μ -Analyse

Figure III.6 : Schéma d'interconnexions standard pour la μ analyse.

Considérons une boucle fermée soumise à différentes perturbations de modèle (Incertitudes paramétriques + dynamiques négligées). Si l'on désire appliquer les techniques de μ analyse, la première étape consiste à transformer cette boucle fermée de façon à se ramener au schéma d'interconnexions standard $M(s) - \Delta$ de la figure (III.6).

La matrice Δ contient les incertitudes de modèle. La matrice de transfert $M(s)$ contient la boucle fermée nominale ainsi que les effets des incertitudes sur la boucle fermée. Par construction, le schéma d'interconnexions $M(s) - \Delta$ est asymptotiquement stable si et seulement si la boucle fermée originale soumise aux différentes incertitudes de modèle est-elle même asymptotiquement stable.

III.2.1.1. Obtention du schéma d'interconnexions standard :

Dans le cadre de ce paragraphe, nous nous intéressons brièvement à une méthode d'obtention du schéma d'interconnexions standard dans le cas particulier d'incertitudes purement paramétriques de modèle.

Supposons que les incertitudes paramétriques δ_i entrent de façon affine dans les équations d'état du processus à commander :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \left(A_0 + \sum_i A_i \delta_i \right) x + \left(B_0 + \sum_i B_i \delta_i \right) u \\ y &= \left(C_0 + \sum_i C_i \delta_i \right) x + \left(D_0 + \sum_i D_i \delta_i \right) u \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.29})$$

$\delta_i \in [-1,1]$ représente la variation normalisée de l' i^e paramètre incertain. La méthode de Morton permet de mettre le processus à commander sous la forme d'une LFT $y = F_L(H(s), \Delta) u$, où u et y sont les entrées et sorties du processus (voir figure (III.7)).

Δ est alors une matrice diagonale de la forme :

$$\Delta = \text{diag}(\delta_i I_{q_i}) \tag{III.30}$$

Le δ_i scalaire est donc répété q_i fois, où q_i est le rang de la matrice augmentée P_i :

$$P_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \tag{III.31}$$

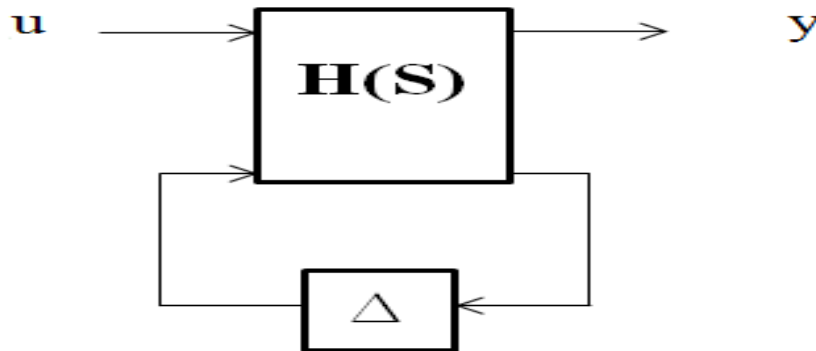


Figure III.7 : mise sous forme de LFT du processus incertain.

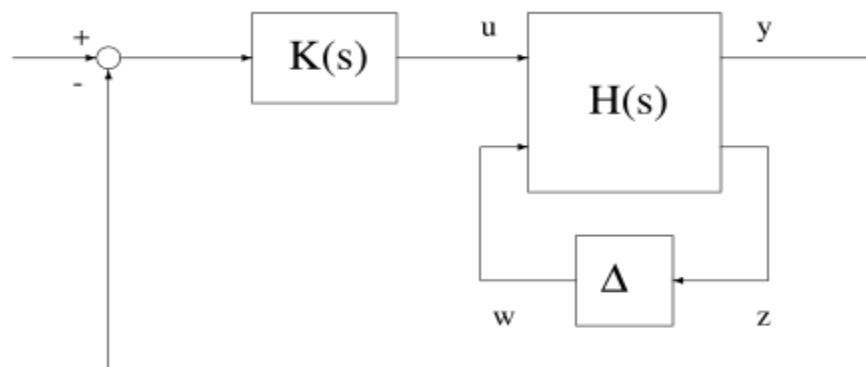


Figure III.8 : Obtention du schéma d'interconnexions standard.

L'idée est donc de rajouter des entrées / sorties fictives, de façon à faire apparaître les incertitudes sous forme d'un retour interne au processus. Du fait, il suffit maintenant de connecter les entrées / sorties u et y du processus incertain (voir figure (III.7)) avec les entrées / sorties du correcteur pour obtenir le schéma d'interconnexions standard de la figure (III.6) : $M(s)$ correspond sur la figure (III.8) à la matrice de transfert vue par la perturbation Δ de modèle, c'est à dire au transfert entre les entrées w et les sorties z .

Par construction, les pôles de la boucle fermée originale soumise aux différentes incertitudes δ_i de modèle coïncident avec les pôles de la boucle fermée correspondant au schéma d'interconnexions $M(s) - \Delta$, avec $\Delta = \text{diag}(\delta_i I_{q_i})$.

III.2.1.2. Cas général des dynamiques négligées :

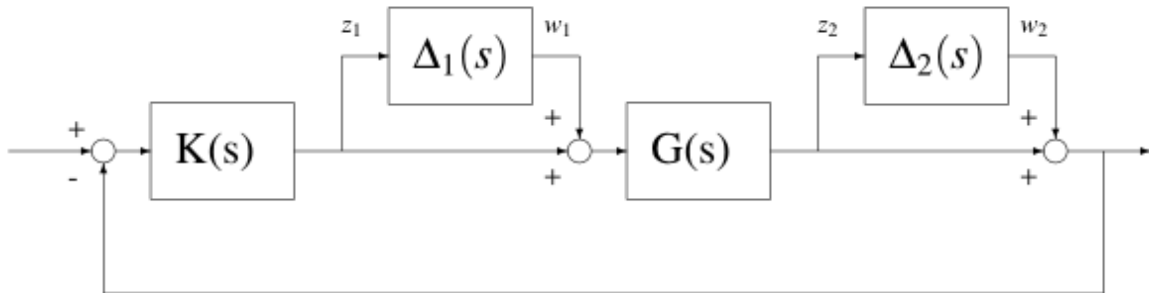


Figure III.9 : Cas général des dynamiques négligées.

Le cas général que nous examinons ci-dessous correspond au cas d'incertitudes de différentes natures qui peuvent apparaître simultanément dans le schéma de commande.

On traite dans un premier temps le problème des incertitudes paramétriques, en mettant le processus à commander sous forme de LFT. On boucle ensuite avec le correcteur et on rajoute les dynamiques négligées en différents points de la boucle fermée. On peut alors se ramener au schéma d'interconnexions standard $M(s) - \Delta(s)$ en considérant que $M(s)$ correspond au transfert vu par la perturbation structurée de modèle $\Delta(s)$.

Dans le cas de la figure (III.9), on pose :

$$\Delta_3 = \text{diag}(\delta_1 I_{q_1}, \dots, \delta_r I_{q_r}) \tag{III.32}$$

$\Delta(s)$ s'écrit alors:

$$\Delta(s) = \text{diag}(\Delta_1(s), \Delta_2(s), \delta_1 I_{q_1}, \dots, \delta_r I_{q_r}) \tag{III.33}$$

D'autre part, la matrice de transfert $M(s)$ correspond au transfert entre les entrées (w_1, w_2, w_3) et les sorties (z_1, z_2, z_3). D'un point de vue qualitatif, dans l'équation (III.33), on peut penser aux paramètres réels incertains δ_i comme à des gains statiques, tandis que les dynamiques négligées $\Delta_j(s)$ correspondent à des matrices de transfert.

III.2.1.3. Problèmes théoriques :

➤ Utilisation d'un maillage fréquentiel : En pratique, on calcule classiquement la VSS $\mu_\Delta(M(j\omega))$ sur un nombre fini de fréquences $(w_i)_{i \in [1, N]}$ et on en déduit la marge de robustesse k_{max} :

$$\frac{1}{k_{max}} = \max_{i \in [1, N]} \mu_\Delta(M(j\omega)) \quad (\text{III. 34})$$

On fait donc une hypothèse de régularité de la VSS en fonction de la fréquence. Si l'on maille de façon suffisamment fine le domaine des fréquences, on obtient de fait de bons résultats dans beaucoup de cas pratiques.

➤ Calcul d'un intervalle de la VSS : On calcule rarement en pratique la valeur exacte de la VSS : On calcule plus généralement un intervalle. On montre en effet qu'il ne peut pas exister d'algorithme calculant dans tous les cas la valeur exacte de la VSS en temps polynomial.

De fait, il existe un certain nombre d'algorithmes de calcul d'une borne inférieure ou supérieure de la VSS dans le cas de perturbations de modèle complexe, réelle ou mixte. Ces algorithmes sont à temps polynomial ou exponentiel selon le cas.

III.2.1.4. Performance robuste :

On peut définir la performance robuste de deux façons différentes. Dans le cas d'une perturbation structurée réelle de modèle, on peut s'intéresser à la robustesse du placement des pôles de la boucle fermée malgré des incertitudes sur les paramètres du processus.

Dans le cas plus général d'une perturbation structurée mixte de modèle, une autre solution consiste à vérifier que certaines matrices de transfert de la boucle fermée vérifient un gabarit en présence d'incertitudes paramétriques et de dynamiques négligées.

Pour pouvoir étudier ce deuxième problème, on introduit d'abord un résultat fondamental de la μ analyse, à savoir le théorème de la boucle principale. On utilise ensuite ce résultat pour transformer le problème d'analyse de la performance robuste en un problème augmenté d'analyse de la stabilité robuste, dans lequel on a rajouté un bloc complexe plein (Ou plus généralement une perturbation complexe de modèle) [30].

III.2.2. μ -Synthèse

La μ -synthèse consiste en la construction explicite d'un compensateur $K(s)$ minimisant la VSS du système. Il s'agit donc d'une technique de commande robuste qui s'appuie sur l'outil d'analyse que nous venons d'introduire. Comme nous l'avons indiqué, il est en général très difficile de calculer la valeur de μ . Nous allons utiliser la borne supérieure développée dans la partie précédente [30].

III.2.2.1. Problème général :

La μ -synthèse allie le concept de valeur singulière structurée et la technique H_∞ pour concevoir des compensateurs pour des systèmes à incertitudes structurées.

Dans la suite, nous désignerons par K est le compensateur recherché, P la matrice de transfert d'interconnexions qui décrit l'architecture de commande, et les relations entre les spécifications z et signaux e qui peuvent aussi être vus comme des signaux exogènes (Références, perturbations, bruits) non bouclé, et les mesures y et les commandes u . Δ désigne un bloc général d'incertitude dont certains sous-blocs peuvent être interprétés comme des performances.

Le schéma général du problème de μ -synthèse est représenté sur la figure suivante :

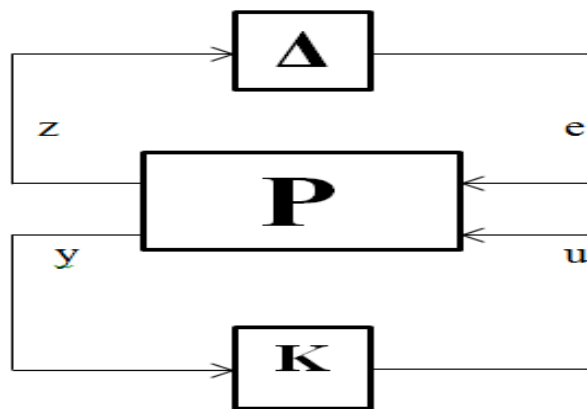


Figure III.10 : Interconnexions pour μ -Synthèse.

Cette forme standard est équivalente à celle représentée en III.1.1 où:

$$M(K) = F_l(P, K) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(sI - P_{22}(s)K(s))^{-1}.P_{21}(s)$$

On peut appliquer 2 types d'opérations sur l'interconnexions précédente.

➤ Pour un compensateur donné, on peut effectuer une μ analyse pour évaluer les performances et la stabilité du compensateur. Cette opération doit donc prendre en compte la structure de Δ qui caractérise notre problème.

➤ On peut également effectuer une synthèse H_∞ de manière à réduire l'impact des incertitudes Δ sur le système. Dans ce cas, on minimisera le transfert entre e et z à l'aide d'un compensateur $K(s)$.

Lorsque les incertitudes ne sont pas structurées et consiste en un seul bloc plein Δ , l'utilisation directe de la technique H_∞ pour construire le compensateur n'est pas restrictive et donne le meilleur résultat possible. Ceci car la valeur de μ se confond dans ce cas avec la norme H_∞ . En revanche, lorsque les incertitudes sont structurées il faut modifier la technique de manière à exploiter la structure spécifique de Δ et ainsi obtenir des compensateurs de meilleure qualité. Nous décrivons dans ce qui suit une voie possible pour affiner et améliorer des compensateurs issus de la synthèse H_∞ .

Comme la vraie valeur de μ n'est en général pas calculable, nous allons exploiter la borne suivante:

$$\mu (F_l (P, K)) \leq \bar{\sigma}(D F_l (P, K) D^{-1}) \tag{III.35}$$

Avec $D \in \mathcal{D}$

En d'autres termes, on cherche à minimiser sur l'ensemble des compensateurs stabilisants, la borne supérieure de μ indiquée dans l'expression précédente. Ceci se traduit formellement par minimiser :

$$\max_{\omega} \min_{D_\omega \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(D_\omega F_l(P, K)(j\omega)D_\omega^{-1}) \tag{III.36}$$

D_ω est choisi parmi les éléments de \mathcal{D} , indépendamment de D_ω' , donc (III.36) est équivalent à minimiser :

$$\min_{D_\omega \in \mathcal{D}} \max_{\omega} \underbrace{\bar{\sigma}(D_\omega F_l(P, K)(j\omega)D_\omega^{-1})}_{\|\cdot\|_\infty} \tag{III.37}$$

Si nous disposons d'une matrice de transfert $\hat{D}(s)$ stable et à minimum de phase, telle que $\hat{D}(s)$ coïncide avec chacun des D_ω calculés aux pulsations aux pulsation $j\omega$, alors le problème de minimisation ci-dessus s'apparente à la minimisation de la norme H_∞ de :

$$\widehat{D}(s)F_l(P(s),K(s))\widehat{D}(s)^{-1}$$

Ce dernier problème est précisément le problème de μ synthèse dans lequel on cherche à minimiser par rapport à $K(s)$ et à $\widehat{D}(s)$ la norme suivante :

$$\|\widehat{D}F_l(P,K)\widehat{D}^{-1}\|_\infty \tag{III.38}$$

III.2.2.2. LA D-K Itération :

Une méthode de résolution pour minimiser $\|\widehat{D}F_l(P,K)\widehat{D}^{-1}\|_\infty$ par rapport K et D est d'effectuer une minimisation alternative. D étant fixé, on optimise K et puis K étant fixé, on minimise vis-à-vis de D et ainsi de suite jusqu'à convergence. Notons en particulier les points suivants.

- $\widehat{D}(s)$ fixé, le problème se réduit à un simple problème H_∞ , comme sur la figure suivante.

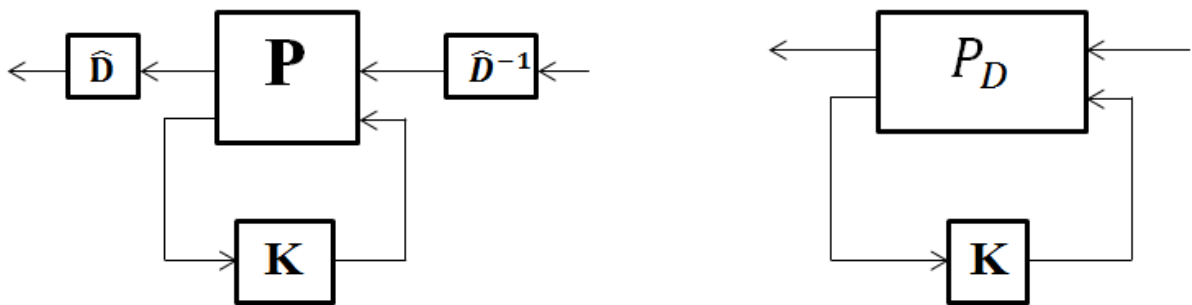


Figure III.11 : Réduction du problème.

Où P_D est défini par

$$\begin{pmatrix} \widehat{D} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \widehat{D}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Ce problème s'exprime donc sous la forme :

$$\text{Minimiser } \|\widehat{D}F_l(P,K)\widehat{D}^{-1}\|_\infty \text{ ou minimiser } \|F_l(P_D,K)\|_\infty \tag{III.39}$$

- Pour K fixé, l'expression est minimisée à chaque fréquence par rapport à D . Ce problème se traduit par un problème convexe que l'on peut aisément résoudre par des techniques de programmation semi-définie. Lorsqu'une famille de matrices $D(\omega)$ a été déterminée sur un ensemble fini de fréquence, on procède alors à une interpolation de ces données par une matrice de transfert stable inversible et à inverse stable.

Les deux étapes décrites précédemment constituent ce que l'on appelle les D–K itérations, faisant référence au fait que l'on minimise séparément en K puis en D.

Cette approche de la μ -synthèse a été appliquée à de nombreux problèmes pratiques et a souvent donné satisfaction. Il faut noter cependant, que la procédure précédente ne garantit en rien l'optimalité de K et D. En effet, chaque étape de la D–K itération est parfaitement résolue car elle se caractérise par des propriétés de convexité. Malheureusement, il n'y a pas convexité jointe en les variables (D,K) et la solution obtenue ne peut être que locale.

Il est à noter, par ailleurs, cette procédure peut conduire à la synthèse d'un correcteur d'ordre élevé en termes de nombre d'état. En effet, la synthèse H_∞ donne un correcteur dont l'ordre est égal à celui du système P_D . Or, ce système est le système formé par la mise en cascade des scalings $D(s)$ et $D(s)^{-1}$ avec la matrice de transfert $P(s)$. On voit donc que l'ordre du correcteur dépend étroitement de l'ordre des scalings que l'on utilise dans l'interpolation.

Conclusion

Dans ce chapitre, deux techniques de control ont été élaborés, la première est la commande H_∞ et la deuxième est la technique de μ -Analyse et μ -Synthèse.

La commande H_∞ qu'on a vu où on peut affirmer l'efficacité de cette dernière qui a montré des résultats assez performants qu'on va discuter par la suite dans le prochain chapitre.

La technique de μ analyse que nous avons discutée donne des résultats très satisfaisants en pratique car elle peut être utilisée pour valider un compensateur arbitraire obtenu de manière indépendante. Elle permet donc de certifier les propriétés du système commandé en termes de stabilité et de performances.

La technique de μ synthèse est, comme on l'a vu d'une utilisation plus délicate mais a déjà été utilisée dans de nombreuses applications pour lesquelles on a obtenus de bons résultats. D'une manière générale, on peut dire qu'elle s'avère très performante pour des systèmes de taille raisonnable (< 20 états) pour lesquels les procédures de D–K itération ont encore une grande stabilité numérique. Des difficultés ont cependant été observées pour les systèmes de grande taille et pour les systèmes flexibles.

CHAPITRE IV :

Simulation

Et

Interprétation

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les deux lois de commandes pour notre système aéroélastique, et nous présentons les résultats de simulation sous l'environnement MATLAB/SIMULINK®.

Dans un premier temps la commande H_∞ est appliquée sur le modèle linéaire nominal, ensuite il sera question de la mise en œuvre de la méthode μ -analyse pour le système incertain développé dans le deuxième chapitre.

Le déplacement vertical (h), l'angle d'incidence (α), l'angle de déflexion du volet de bord de fuite (β) et l'angle de déflexion du volet de bord d'attaque (γ), seront montrés et étudiés graphiquement, et la vitesse de flottement sera repérée pour chaque cas.

IV.1. Simulation en boucle ouverte

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité du modèle de la section d'aile, en simulant le système en boucle ouverte tout en observant les valeurs propres de la matrice d'état A. Sachant que le modèle est paramétré par la vitesse d'écoulement, nous allons simuler le comportement du système pour différentes valeurs de vitesse.

IV.1.1. Le système nominal

Pour une vitesse d'écoulement $V = 13 \text{ m/s}$, le modèle d'état numérique du système nominal est donné comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -9.2941 & -2.8623 & -0.1670 \\ 860.0497 & -24.0620 & 8.6826 & -0.2106 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -5.7551 & 0.4122 \\ 1.9681 & -4.8177 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

Les gains principaux en boucle ouverte sont montrés sur la figure (IV.1) :

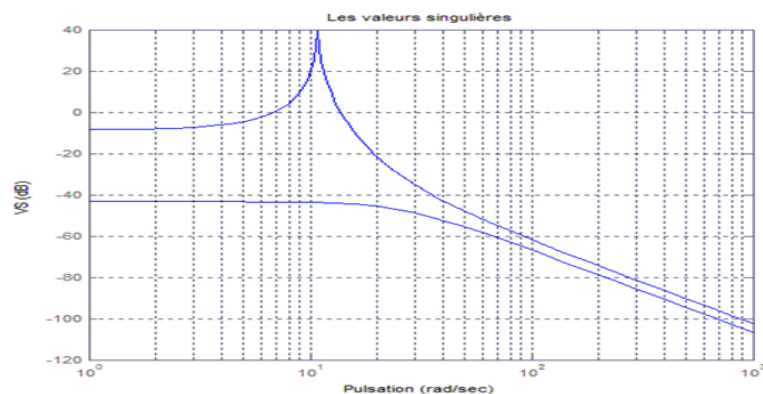


Figure IV.1 : Valeurs singulières du système nominal.

L'allure des gains principaux du système en boucle ouverte illustre l'existence du couplage des entrées/sorties, on observe un écart entre les gains principaux minimum et maximum surtout sur la plage de fréquences [1-100] rad/sec. On conclut que le système en boucle ouverte est mal conditionné sur cette plage de fréquences.

Le système possède les valeurs propres λ , les coefficients d'amortissement ε , et les fréquences ω suivants :

λ	ε	$\omega(\text{rad/s})$
$-0.9829 \pm 12.2530i$	0.079	12.29
$-0.5536 \pm 9.3112i$	0.059	9.32

Tableau IV.1 : Les caractéristiques du système nominal en boucle ouverte, pour $V = 13 \text{ m/s}$.

Les résultats de simulation obtenus en boucle ouverte avec les conditions initiales $[h \ \alpha \ \dot{h} \ \dot{\alpha}]^T = [0.01 \ 0.1 \ 0 \ 0]^T$ sont présentés sur la figure (IV.2) :

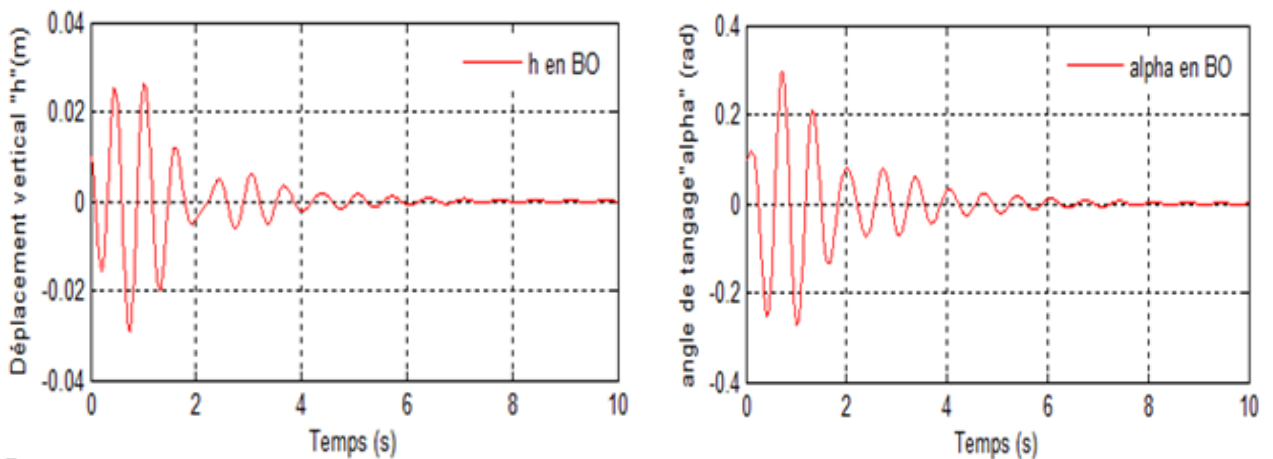


Figure IV.2 : La réponse de système en boucle ouverte pour le déplacement vertical h et l'angle de tangage α , à une vitesse $V = 13\text{m/s}$.

On remarque que les valeurs propres de la matrice d'état A sont à partie réelle négative, donc le système est stable, mais il est lent (Temps de réponse 6 secondes) et mal amorti.

Pour une autre vitesse d'écoulement $V = 14\text{m/s}$, le modèle mathématique calculé est donné comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -10.9493 & -2.9236 & -0.1807 \\ 860.0497 & -23.2548 & 8.7125 & -0.2039 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6.6746 & 0.4780 \\ 2.2825 & -5.5874 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

En boucle ouverte, ce procédé a les valeurs propres λ , les coefficients d'amortissement ε et les fréquences ω suivants :

λ	ε	$\omega(\text{rad/s})$
$-1.6403 \pm 11.0062 i$	0.1474	11.128
$0.0766 \pm 10.7826 i$	-0.0071	10.783

Tableau IV.2 : les caractéristiques du système en boucle ouverte, pour $V = 14 \text{ m/s}$.

La réponse du système est montrée dans la Figure (IV.3) :

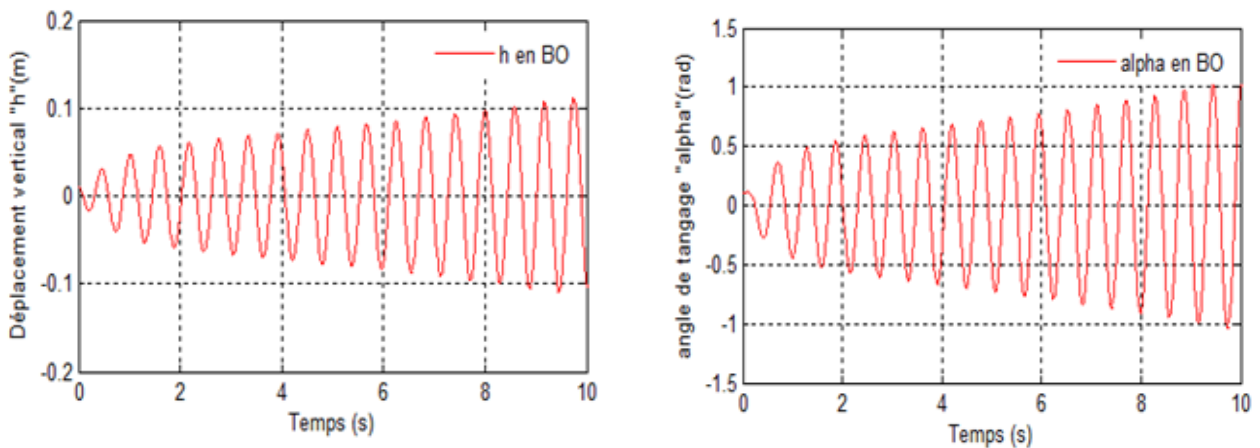


Figure IV.3 : La réponse du système en boucle ouverte pour le déplacement vertical h , et l'angle de tangage α , à une vitesse $V = 14 \text{ m/s}$.

IV.1.1.1. Interprétation :

Les résultats de simulation en boucle ouverte montrent qu'à la vitesse $V = 13 \text{ m/s}$ (Figure (IV.2)), le système possède des oscillations de faibles amplitudes qui convergent lentement vers le zéro, elles prennent environ 6 secondes pour qu'elles soient amorties. Le système possède des coefficients d'amortissement positifs faibles ($\varepsilon_1 = 0.079$, $\varepsilon_2 = 0.059$), donc il est stable mais mal amorti.

À la vitesse $V = 14 \text{ m/s}$, le modèle devient instable comme le montre la figure (IV.3), les valeurs propres de la matrice A ne sont pas toutes à partie réelle négative, elles montrent également que le système possède un coefficient d'amortissement négatif ($\varepsilon_2 = -0.0071$) ce qui illustre le phénomène de flottement.

Donc, il existe une vitesse de transition appelée Vitesse de flottement, qui conduit le système de la stabilité vers l'instabilité. Avec des simulations successives, cette vitesse est repérée à :

$$V_{\text{flottement en BO}} = 13.96 \text{ m/s}$$

A cette vitesse critique, d'autres spécifications sont repérées comme suit :

- Marge de flottement « delq »: 15.8525 N/m²
- Marge de vitesse « delV » : 0.96 m/s
- Pression dynamique critique « q_cr » : 119.365 N/m²
- La fréquence critique « f_cr » : 1.71208 Hz

IV.1.2. Le système incertain

Pour une vitesse d'écoulement $V = 13 \text{ m/s}$, le modèle mathématique du système incertain est donné comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{a} \\ \ddot{h} \\ \ddot{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -10.9493 & -2.9236 & -0.1807 \\ 860.0497 & -23.2548 & 8.7125 & -0.2039 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ a \\ \dot{h} \\ \dot{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0753 & -0.3024 & -0.0753 & 0.3024 & -5.7535 & 0.4122 \\ 0.3024 & 8.2595 & 0.3024 & -8.2595 & 1.9681 & -0.8177 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{(IV. 3)}$$

A cette vitesse (**13 m/s**) le système possède les mêmes valeurs propres λ , les mêmes coefficients d'amortissement ε , et les mêmes fréquences ω que le système nominal du moment qu'ils possèdent la même matrice d'état A.

Mais avec des simulations successives, et en injectant la valeur la plus petite de la variation de la pression dynamique « delq » qui a tendance de déstabiliser le système, la vitesse de flottement pour ce modèle incertain est repérée à :

$$V_{\text{flottement en BO}} = 13.1643 \text{ m/s}$$

A cette vitesse le système possède les valeurs propres λ , les coefficients d'amortissement ε , et les fréquences ω suivants :

λ	ε	$\omega(\text{rad/s})$
$-3.1351 \pm 12.1701 i$	0.24946	12.5670
$0.5022 \pm 11.3391 i$	-0.04245	11.3500

Tableau IV.3 : les caractéristiques du système incertain en boucle ouverte, à la vitesse critique

$$V = 13.1643 \text{ m/s.}$$

La réponse de système est montrée dans la figure (IV.4) :

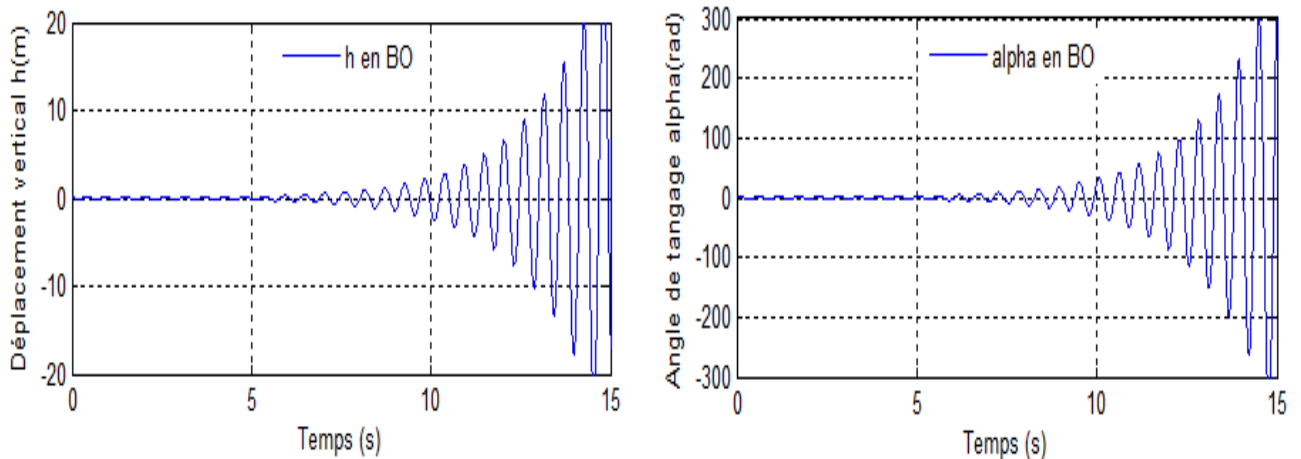


Figure IV.4 : La réponse du système incertain en boucle ouverte pour le déplacement vertical h , et l'angle de tangage α pour la vitesse critique $V=13.1643$ m/s.

Les critères correspondants à cette vitesse :

- Marge de flottement « $delq$ » : 2.6326 N/m²
- Marge de vitesse « $deIV$ » : 0.164274 m/s
- Pression dynamique critique « q_{cr} » : 106.1450 N/m²
- La fréquence critique « f_{cr} » : 1.80644 Hz

IV.1.2.1. Interprétation :

À la vitesse $V=13.1643$ m/s, le modèle est instable comme le montre la figure (IV.4), les valeurs propres de la matrice A ne sont pas toutes à partie réelle négative ce qui justifie la divergence du système, elles montrent également que le système possède un coefficient d'amortissement négatif ($\varepsilon_2 = -0.04424$) ce qui illustre le phénomène de flottement.

IV.1.3. Conclusion

L'étude du système en boucle ouverte nous a permis de constater l'existence d'un fort couplage et du coup le système est mal conditionné, on a pu constater également que le système est lent il prend 6s pour amortir les oscillations de faibles amplitudes.

Le système aéroélastique incertain a une marge de flottement, pression dynamique critique et vitesse de flottement réduites en comparant avec le modèle aéroélastique nominal et cela revient aux différentes incertitudes incorporées dans le système.

A partir des points relevés précédemment, la stabilité des deux systèmes - nominal et robuste - est assurée, mais, une amélioration des performances doit être effectuée tout en gardant en vue de garantir la stabilité en boucle fermée.

IV.2. Simulation en boucle fermée

Au vu des résultats précédents et après avoir analysé la boucle ouverte du système, on a constaté que les performances du système ne sont pas satisfaisantes et requièrent des améliorations. On envisage de déterminer des contrôleurs robustes basés sur la synthèse par H_∞ et μ -analyse, respectivement pour garantir la stabilité, améliorer les performances et augmenter la vitesse de flottement du système.

IV.2.1. Application de la commande H_∞

Pour calculer le correcteur H_∞ , il faut tout d'abord déterminer une structure ainsi que des gabarits qui permettent de définir des spécifications (temps de réponse en boucle fermée, erreur statique...). Pour cela on désire asservir la sortie sur la consigne selon les spécifications de performance suivantes :

- Assurer une erreur de poursuite faible ;
- Assurer la réjection de perturbations basses fréquences ;
- Amplitude de la commande raisonnable (Limiter l'amplitude du signal de commande vis-à-vis des entrées de référence et bruit de mesure sur la sortie).

IV.2.1.1. Détermination des spécifications sur la robustesse :

La détermination des spécifications sur la robustesse constitue une étape très importante. Elle permettra de définir le niveau de stabilité et les performances requises pour la synthèse H_∞ .

➤ **Spécification sur la performance : Choix de la pondération $W_p(W_1)$**

Le choix de la fonction de pondération permet de fixer les performances du système en boucle fermée de manière à minimiser l'effet des perturbations et l'erreur de poursuite. Ce filtre rejette la perturbation à la gamme de basse fréquence [33].

➤ **Spécification sur la stabilité : Choix de la pondération $W_t(W_3)$**

Le choix de la fonction de pondération permet d'accentuer la pente d'atténuation en haute fréquence ('roll off'), c'est-à-dire il permet de rejeter des bruits en haute fréquence et prévenir d'une éventuelle saturation de la commande, afin d'améliorer la performance en haute fréquence du système en boucle fermée [33].

En plus, des fonctions de pondération, doivent satisfaire l'inégalité suivante [34] :

$$\left\| \frac{W_1(s)S(s)}{W_3(s)T(s)} \right\|_{\infty} < 1 \tag{IV.4}$$

Les deux matrices $S(s)$ et $T(s)$ sont respectivement “la fonction de sensibilité” et “la fonction de sensibilité complémentaire” elles sont définies comme suit :

$$S(s) \stackrel{\text{def}}{=} (I + L(s))^{-1}$$

$$T(s) \stackrel{\text{def}}{=} L(s)(I + L(s))^{-1} = I - S(s)$$

Où $L(s) = G(s)*K(s)$; avec : $G(s)$ est la représentation du système et $K(s)$ est celle du contrôleur ; est la matrice des fonctions de transfert de la boucle.

Alors les fonctions de pondérations choisies sont :

$$W_1(s) = \frac{(0.1s + 10)}{(0.4s + 0.3)} \quad \text{et} \quad W_3(s) = \frac{(s + 10)}{(0.005s + 20)}$$

Qui sont un passe bas et un passe haut respectivement comme le montre la figure (IV.5) :

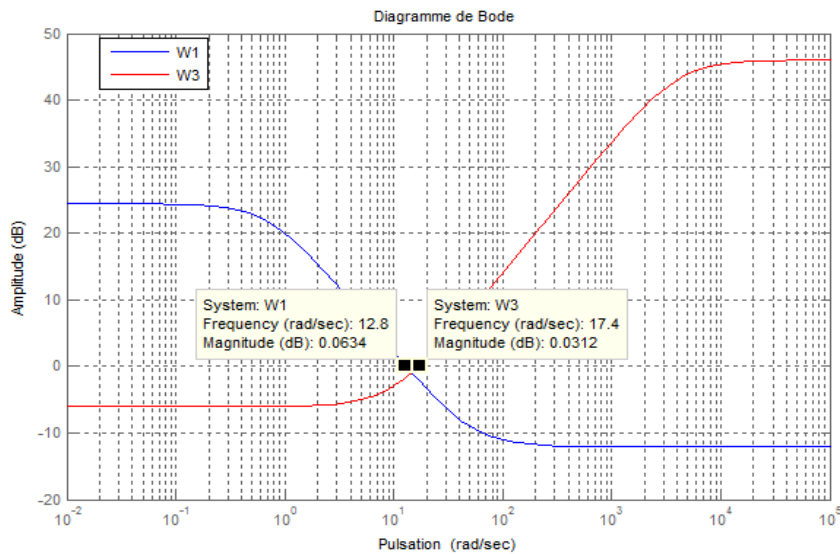


Figure IV.5 : Gabarit sur les fonctions de pondération W_1 et W_3

Dans le diagramme de Bode des fonctions de pondération illustré ci-dessus, nous pouvons voir que la fréquence de coupure (0dB) de la fonction de pondération W_1 est inférieure à celle de W_3 et cela constitue une condition essentielle afin d’obtenir un correcteur adéquat.

Une fois choisis les filtres de pondération, il reste qu’effectuer la synthèse H_{∞} afin de calculer un contrôleur stabilisant le système en boucle fermée et garantissant les spécifications citées au paravent.

IV.2.1.2. Calcul du contrôleur H_∞ :

Nous avons au préalable déterminé les spécifications de robustesse sur la stabilité et sur les performances respectivement, $W1(s)$ et $W3(s)$. On entame la phase synthèse du contrôleur. Il faut trouver le paramètre d'ajustement γ pour la minimisation de la norme H_∞ .

La simulation du système en présence du contrôleur s'effectue en utilisant la fonction MATLAB « mixsyn », la norme H_∞ obtenue égale à : $\gamma = 0.8704$, ce qui justifie la robustesse du contrôleur.

Nous commençons par illustrer les résultats fréquentiels de l'application du contrôleur $K(s)$ sur le système en boucle fermée.

Nous représentons les valeurs singulières de la sensibilité $S(s)$ et du transfert $T(s)$, du loopshaping $L(s)$, ainsi que les conditions de robustesse sur la stabilité et sur les performances $W1$ et $W3$, respectivement (Figure (IV.6) et Figure (IV.7)).

Les valeurs singulières de $S(s)$ déterminent l'atténuation des perturbations, parce que $S(s)$ est, en effet, la fonction de transfert en boucle fermée de la perturbation vers les sorties y . Ainsi, la spécification des performances d'atténuation des perturbations peut s'écrire :

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq |W_1^{-1}(j\omega)| \tag{IV.5}$$

Où : $|W_1^{-1}(j\omega)|$ est le facteur d'atténuation de perturbation désiré.

$|W_1^{-1}(j\omega)|$ dépend de la pulsation ω , permet de spécifier de différents facteurs d'atténuation pour chaque pulsation ω .

Le diagramme de Bode des valeurs singulière de $T(s)$ est utilisé pour mesurer les marges de stabilité d'une modélisation d'un contrôleur pour un système multi-variable face à des perturbations multiplicatives.

Une conséquence du théorème de robustesse permet de spécifier les marges de stabilité du système de commande à travers l'inégalité suivante :

$$\bar{\sigma}(T\{j\omega\}) \leq |W_3^{-1}(j\omega)| \tag{IV.6}$$

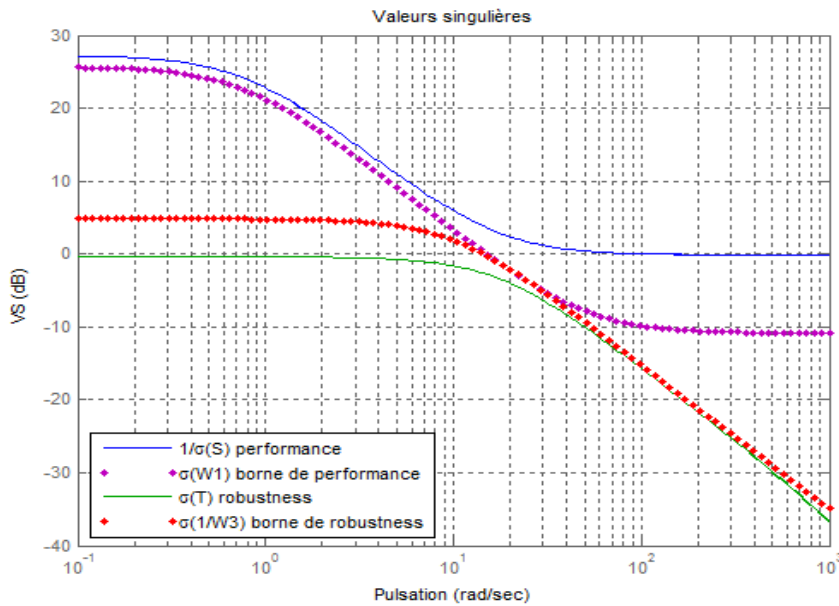


Figure IV.6 : Valeurs singulières de $1/S$, T , W_1 et $1/W_3$

Nous observons sur la figure ci-dessus que les conditions de robustesse et de performance (IV.6) et (IV.7) sont assurées.

En comparant les allures des fonctions présentée ci-dessus nous remarquons que :

- La fonction $S(s)$, reflétant les performances du système commandé, a pour toutes les pulsations, le graphe de ses valeurs singulière (qui est en bleu) en dessus de celui de la borne de performance (le graphe en violet) ;
- La fonction $T(s)$, reflétant la robustesse du système commandé, a pour toutes les pulsations, le graphe de ses valeurs singulière (qui est en vert) en dessous de celui de la borne de robustesse (le graphe en rouge).

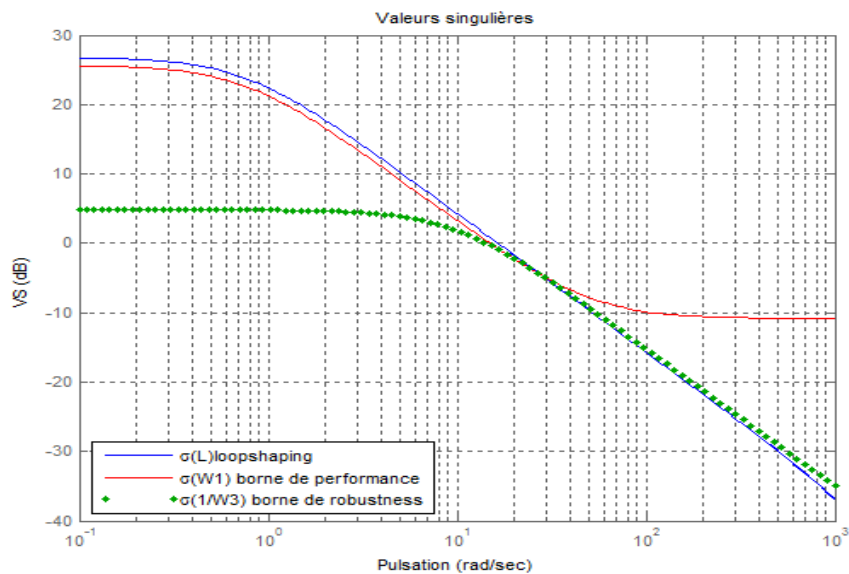


Figure IV.7 : Valeurs singulières L , W_1 et $1/W_3$

Le graphe en bleu représentant le « loopshaping » suit l’allure de celui de la borne de performance pour les basses fréquences et celui de la robustesse pour les hautes fréquences.

Le graphe de la valeur singulière minimum de la fonction $L(s)$ est confondu avec celui de la valeur singulière maximum.

- **En basses fréquences :** Le graphe de la valeur singulière minimum de la fonction $L(s)$ (Loopshaping) est au dessus du graphe de la borne de robustesse (Graphe en vert) ;
- **En hautes fréquences :** Le graphe de la valeur singulière maximum de la fonction $L(s)$ (Loopshaping) est au dessous du graphe de la borne de performance (Graphe en rouge).

Les gains principaux du système en boucle fermée sont montrés sur la figure (IV.8) :

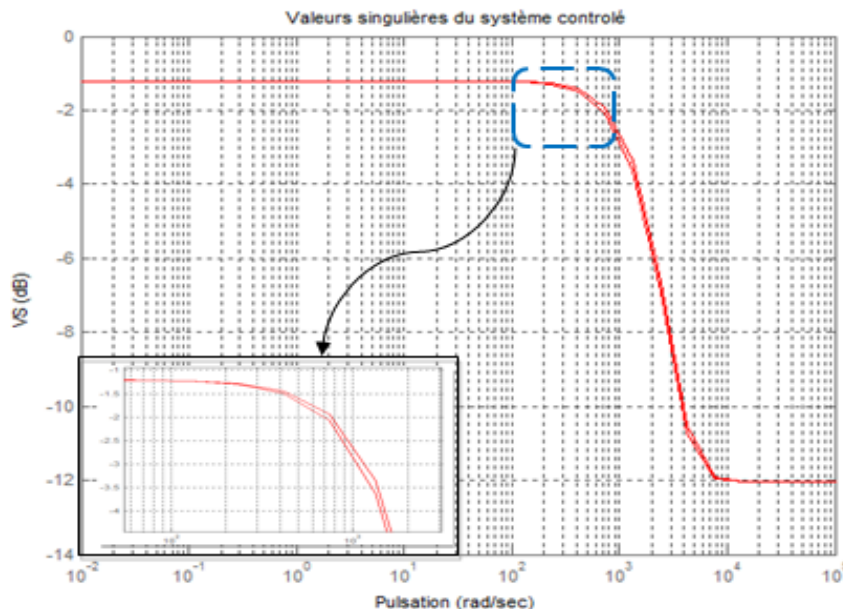


Figure IV.8 : Valeurs singulières du système commandé.

L’allure des gains principaux du système en boucle fermée démontre le découplage des entrées/sorties, on constate que les deux graphes des gains principaux maximum et minimum sont presque confondus surtout dans les plages de fréquences $[0.01-100]$ rad/sec et $[10^4-10^5]$ rad/sec.

Les résultats de simulation obtenus en boucle fermée sont montrés comme suit :

➔ **Pour une vitesse $V=13$ m/s**

Le système contrôlé possède les valeurs propres λ , les coefficients d’amortissement ε , et les fréquences ω suivants :

Λ	ε	ω (rad/s)
$-1.85e + 004 \pm 1.83e + 004i$	7.11e-001	2.60e + 004
$-1.46e + 004 \pm 1.43e + 004i$	7.14e-001	2.04e + 004
-9.02e + 003	1	9.02e + 003
-7.92e + 003	1	7.92e + 003
$-9.83e - 001 \pm 1.23e + 001i$	8.00e-002	1.23e + 001
$-5.54e - 001 \pm 9.31e+ 000i$	5.93e-002	9.33e + 000
-2.35e + 001	1	2.35e + 001
-2.35e + 001	1	2.35e + 001

Tableau IV.4 : Caractéristiques du système commandé (H_∞).

Les valeurs propres de la matrice d'état A du système avec le correcteur en boucle fermée sont tous à parties réelles négatives. Le système est donc stable.

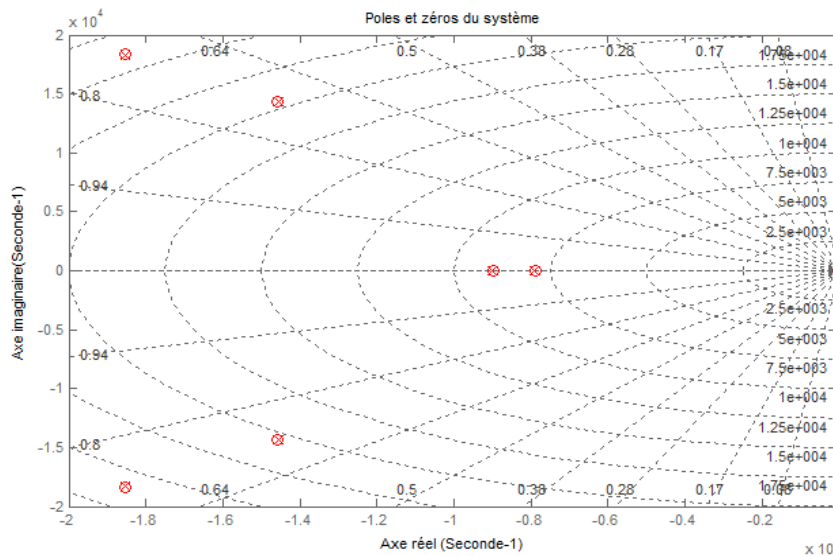


Figure IV.9 : Pôles et zéros du système contrôlé (H_∞).

Et les pôles du système sont tous stables (ils se trouvent tous sur le demi plan gauche). La stabilité interne du système en boucle fermée est ainsi garantie.

La réponse temporelle du système est montrée comme suit :

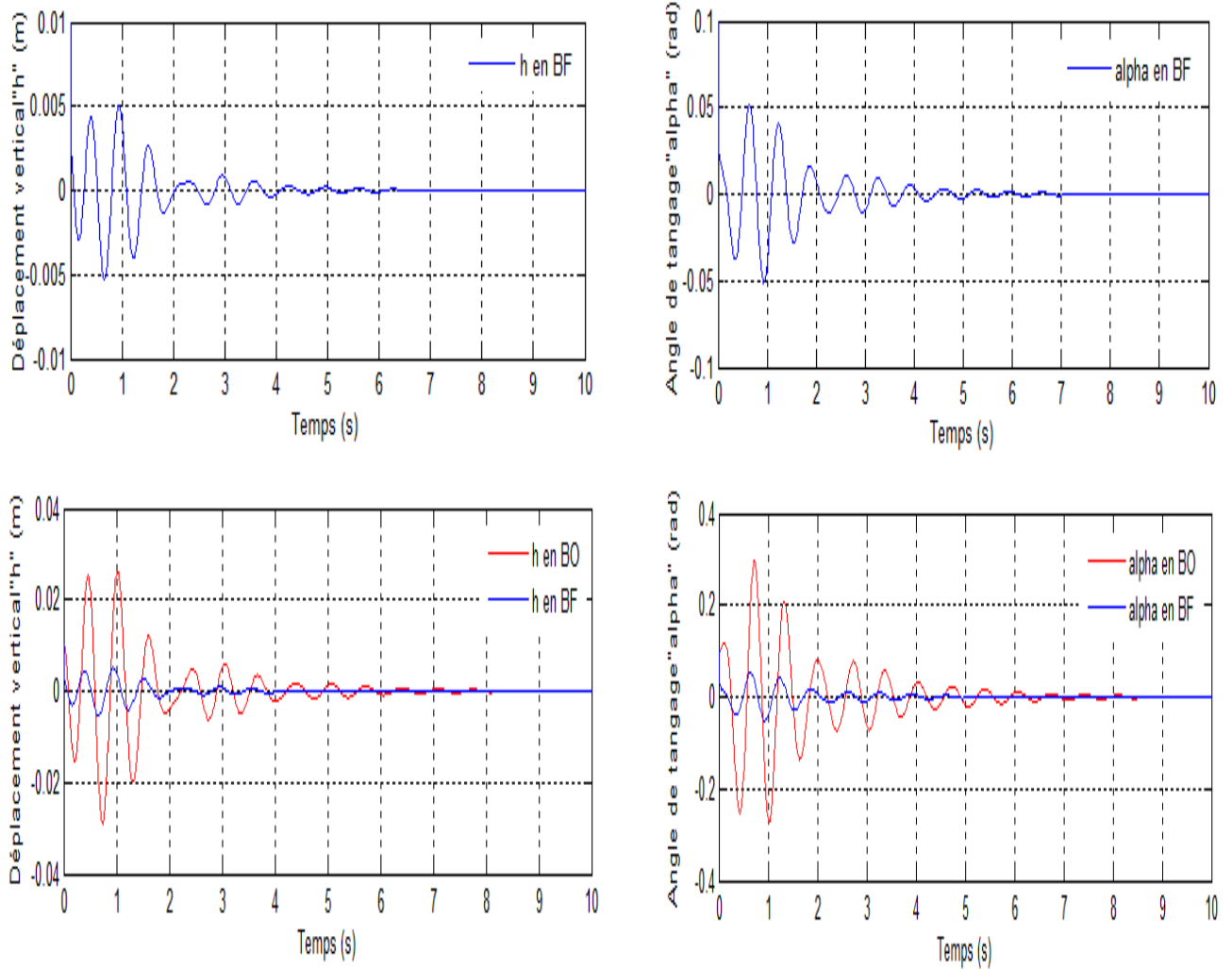


Figure IV.10 : La réponse du système commandé (H_∞) pour h et α à une vitesse $V = 13\text{m/s}$.

Le comportement des angles beta et gamma est représenté dans la figure (IV.11) suivante :

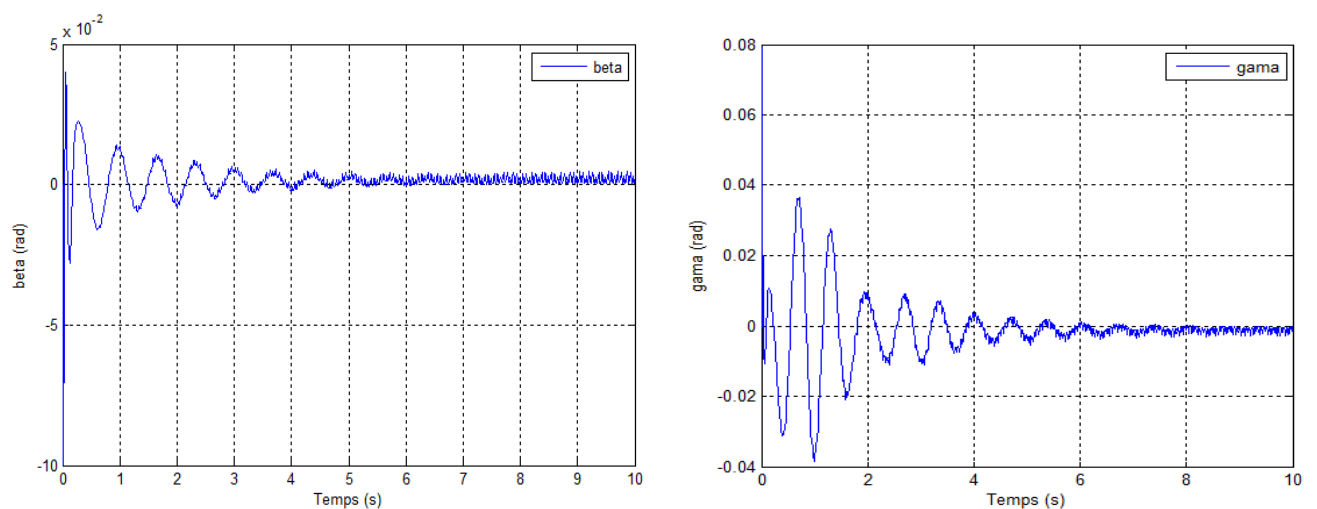


Figure IV.11 : Comportement de beta et de gamma en BF à V = 13 m/s.

→ Pour une vitesse V=14 m/s

Le système en boucle fermée possède les valeurs propres λ , les coefficients d'amortissement ε , et les fréquences ω suivants :

Λ	ε	$\omega(\text{rad/s})$
-1.85e+004 + 1.83e+004i	7.11e-001	2.60e+004
-1.46e+004 + 1.43e+004i	7.14e-001	2.04e+004
-9.02e+003	1	9.02e+003
-7.92e+003	1	7.92e+003
-9.27e-001 + 9.39e+000i	9.82e-002	9.44e+000
-6.16e-001 + 1.21e+001i	5.07e-002	1.22e+001
-2.72e+001	1	2.72e+001
-2.72e+001	1	2.72e+001

Tableau IV.5 : Les caractéristiques du système commandé (H_∞) pour V = 14m/s.

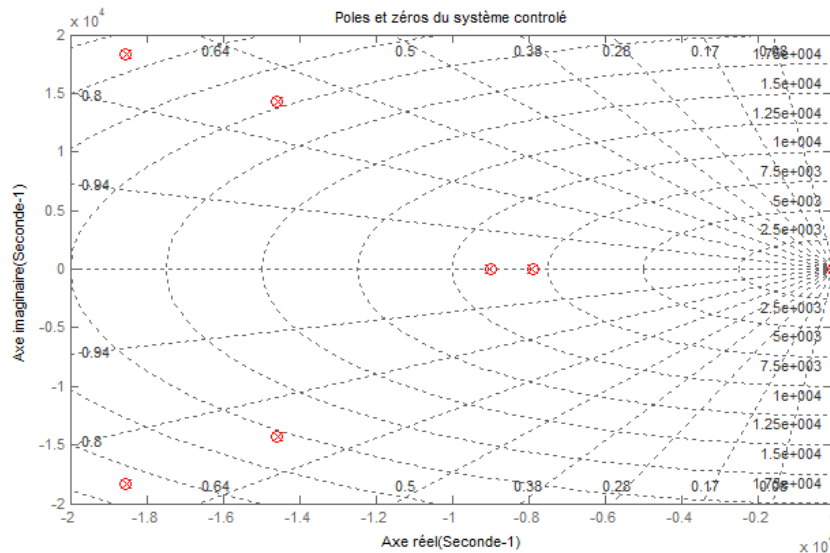


Figure IV.12 : Pôles et zéros du système contrôlé (H_∞) pour V = 14m/s.

La réponse du système en boucle fermée est montrée comme suit, et est comparée à celle en boucle ouverte pour la même vitesse (Figure (IV.13)) :

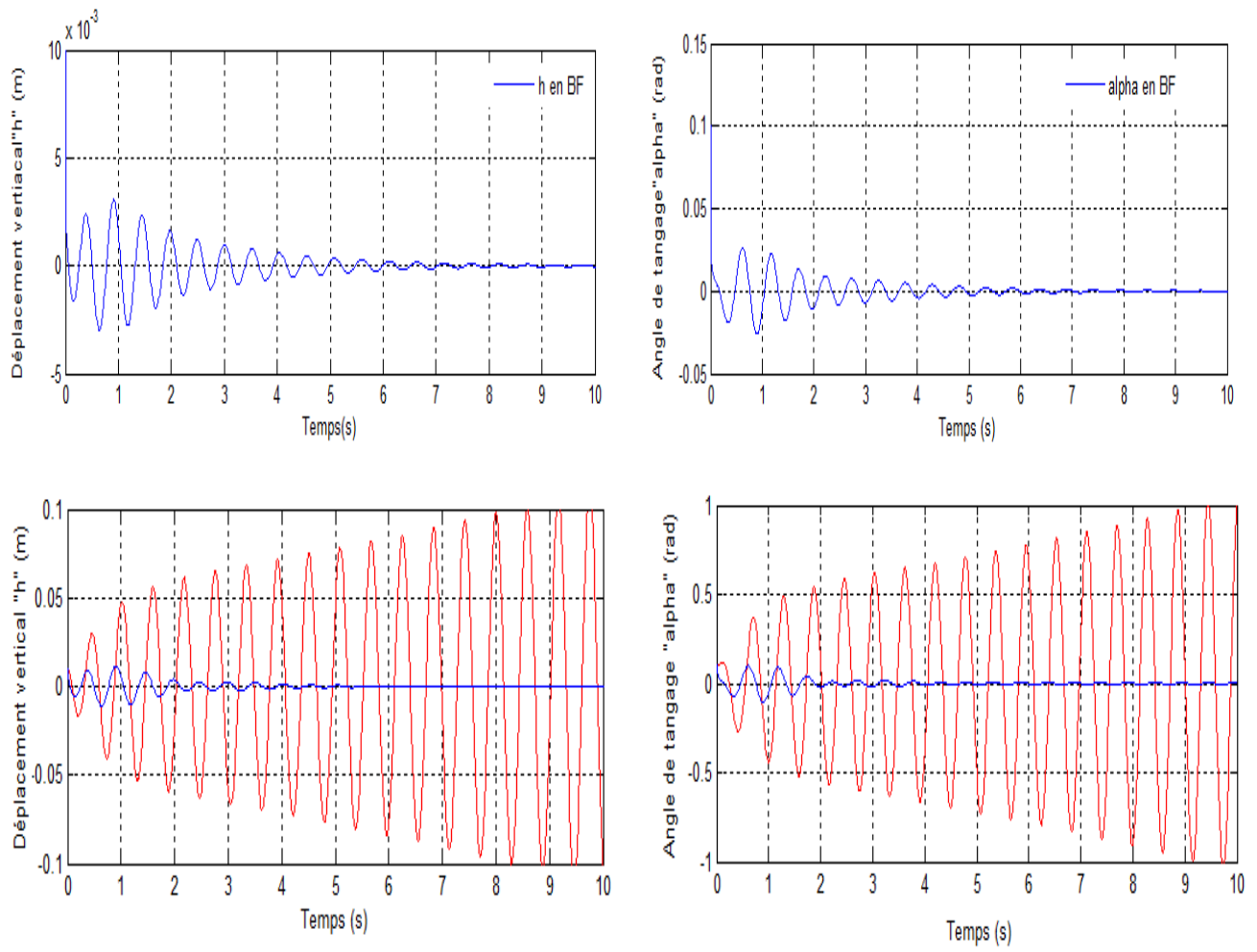


Figure IV.13 : La réponse du système en BF pour h et α à une vitesse $V = 14$ m/s.

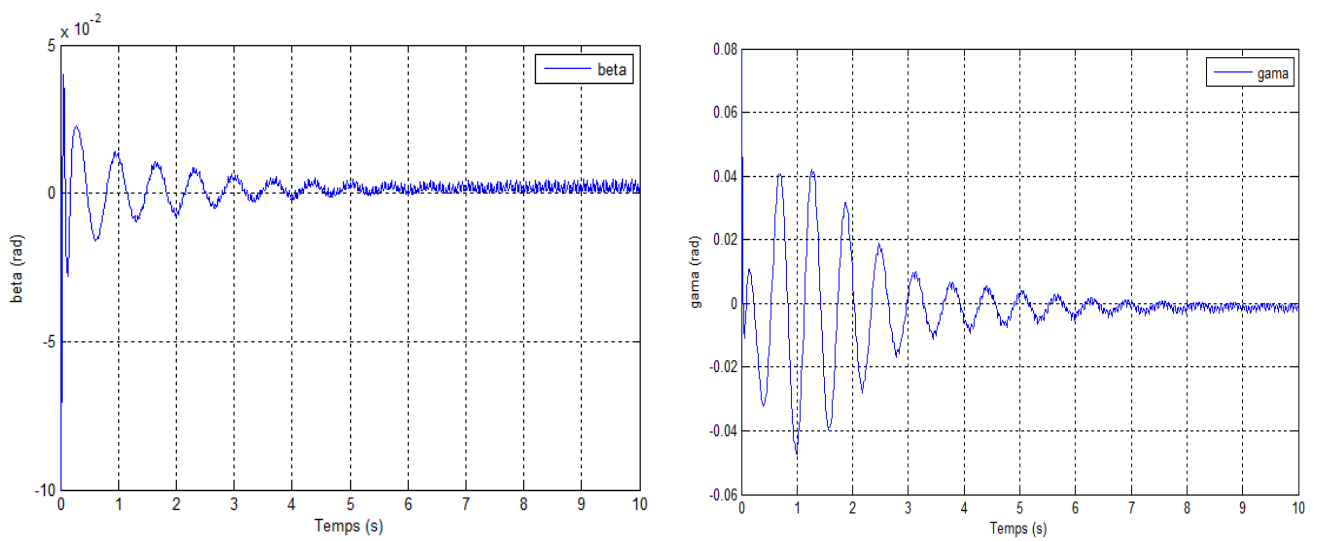


Figure IV.14 : Comportement de β et de γ à $V = 14$ m/s.

Interprétation :

Les résultats de simulation obtenues en boucle fermée présentés sur les figures (IV.10) et (IV.13) montrent que :

→ **Pour $V = 13 \text{ m/s}$:**

Le système en boucle ouverte est stable mais mal amorti, le mouvement de tangage et de déplacement verticale du profil convergent lentement avec de faibles oscillations vers la valeur 'zéro' (figure (IV.10)).

En appliquant la commande H_∞ , on obtient une convergence plus rapide de 2 secondes et le système présente des oscillations ayant des amplitudes beaucoup moins importantes, nous constatons aussi une amélioration dans le coefficient d'amortissement ε ce qui rend le système bien amorti.

Pour cette vitesse, les déflexions des surfaces mobiles sont acceptables comme montre la figure(IV.11), les angles de déflexion du volet de bord d'attaque (γ) et du volet de bord de fuite (β) convergent vers la position d'équilibre avec de très faibles oscillations, ils prennent environ 7 secondes pour l'atteindre.

→ **Pour $V = 14 \text{ m/s}$:**

Le système en boucle ouverte est instable (figure (IV.13)), la vitesse de simulation est à peine supérieure à la vitesse de flottement détectée pour le système nominal en boucle ouverte ($V_{f \text{ BO}} = 13.96 \text{ m/s}$), le mouvement de tangage et de déplacement vertical du profil présentent des oscillations importantes et divergentes d'où la nécessité de faire appel à un contrôleur pour stabiliser le système.

En appliquant la commande H_∞ , on obtient un système stable, un peu plus rapide que celui en boucle ouverte (temps de réponse 5.5 secondes) avec des oscillations moins importantes et une amélioration du coefficient d'amortissement ε .

Pour la même vitesse, la figure (IV.14) montre que β et γ présentent quelques oscillations de très faibles amplitudes presque négligeables puis convergent vers la position d'équilibre dans un temps de réponse d'environ 7 secondes pour β , et de 8 secondes pour γ . Nous pouvons constater ici que les temps de réponse de β et de γ augmentent plus nous nous approchons de la vitesse critique.

La commande H_∞ a réussi à contrôler le mouvement de tangage ‘alpha’ et le déplacement vertical ‘h’, c’est vrai elle n’a pas réduit le temps de réponse d’une manière significative mais elle a diminué le niveau des vibrations, amélioré le coefficient d’amortissement et assuré une erreur statique nulle.

Le gain en vitesse :

On sait que la stabilité du système dépend fortement de la pression dynamique et par conséquent de la vitesse d’écoulement. Pour calculer le gain en vitesse, on applique la commande calculée à une vitesse supérieure.

→ Pour $V = 18 \text{ m/s}$, la réponse du système en boucle fermée est montrée comme suit :

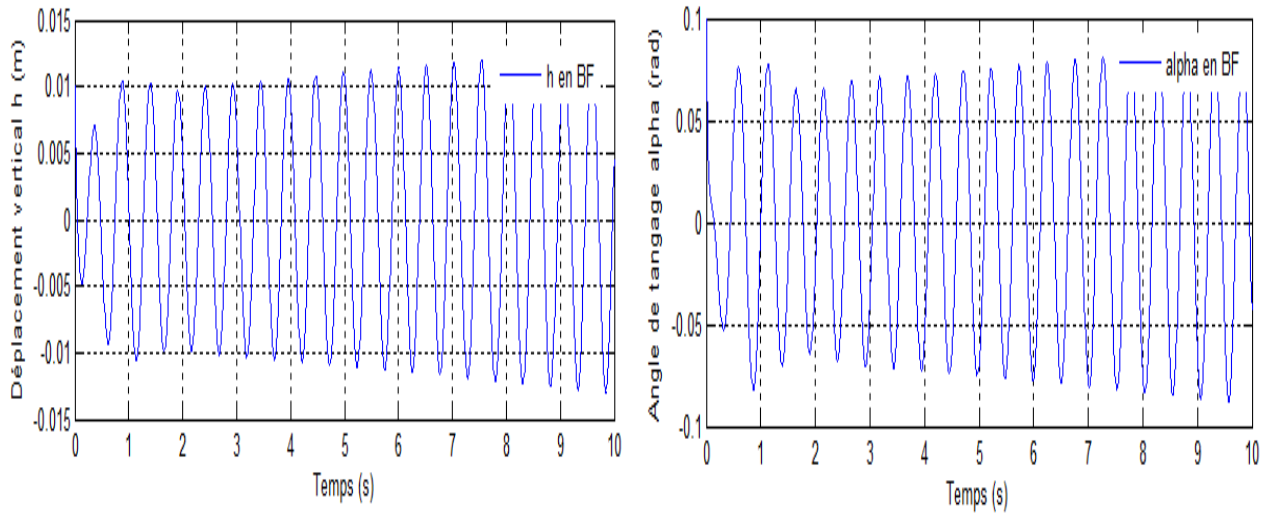


Figure IV.15 : La réponse du système commandé (H_∞) pour h et α à une vitesse $V = 18\text{m/s}$.

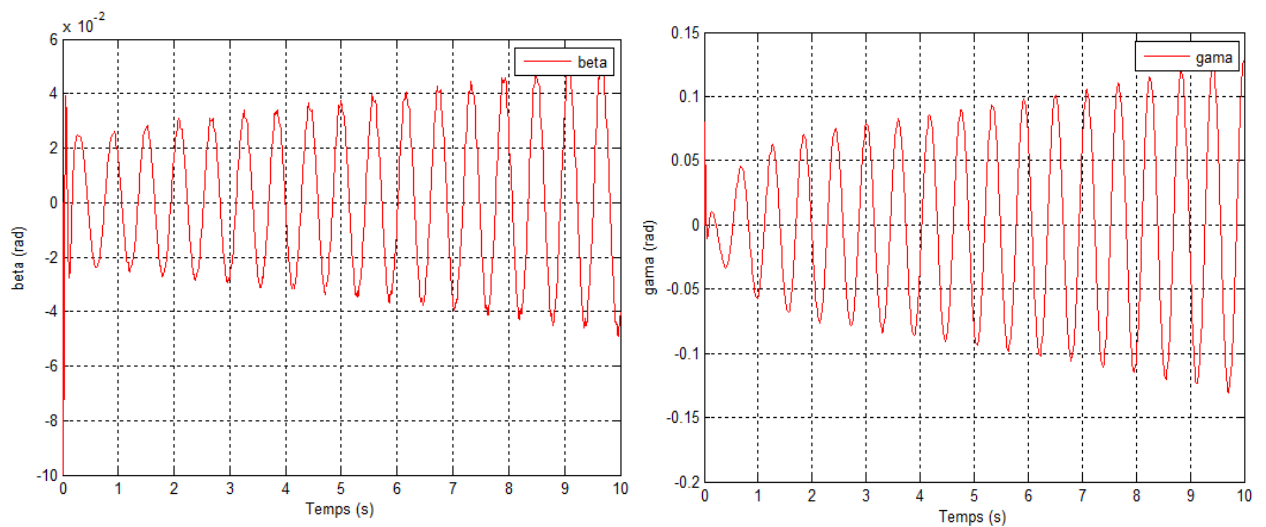


Figure IV.16 : Comportement de beta et de gamma à $V = 18 \text{ m/s}$.

Interprétation :

À la vitesse $V = 18 \text{ m/s}$, le système n'est plus convergent, il devient instable comme le montre la figure (IV.15), les angles β et γ ne sont pas acceptables car ils présentent des oscillations d'amplitudes très élevées ce qui va endommager les actionneurs et les volets (Figure (IV.16)). Donc il existe une vitesse de transition s'appelle la vitesse de flottement, qui conduit le système de la stabilité vers l'instabilité. Avec des simulations successives, cette vitesse est repérée à :

$$V_{\text{flottement BF}} = 16.4 \text{ m/s}$$

Donc le gain en vitesse égale à **2.44 m/s** (de 13.96 m/s jusqu'à 16.4 m/s).

IV.2.1.3. Régime perturbé (Système incertain) :

D'une manière générale, la robustesse d'une commande peut être définie comme une qualité qui décrit l'invariance ou la résistance du comportement d'un système asservi à un certain nombre de phénomènes internes ou externes modélisés sous formes d'incertitudes structurées ou non structurées.

Donc, notre défi majeur est de concevoir une loi de commande plus performante au niveau de la poursuite de trajectoires, le rejet de perturbations, la stabilité, et la robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques.

Nous avons déterminé un contrôleur $K(s)$ par la commande H_∞ , nous devons vérifier sa robustesse en stabilité et en performance en l'implémentant en boucle fermée avec le régime perturbé (Système incertain).

La réponse du système est donnée comme suit :

→ pour une vitesse $V=13\text{m/s}$

Les valeurs propres, les coefficients d'amortissement et les fréquences correspondants sont donnés comme suit :

Λ	ε	$\omega(\text{rad/s})$
-1.30e+004	1	1.30e+004
-6.73e+003 ± 6.18e+003i	7.37e-001	9.14e+003
-5.52e+003 ± 4.67e+003i	7.64e-001	7.23e+003
-8.01e+003	1	8.01e+003
-4.22e+001	1	4.22e+001
-2.39e+001	1	2.39e+001
-1.46e-005 ± 1.22e+001i	1.20e-006	1.22e+001
-1.14e+000 ± 9.25e+000i	1.22e-001	9.32e+000

Tableau IV.6: Les caractéristiques du système incertain contrôlé (H_∞) pour $V = 13\text{m/s}$.

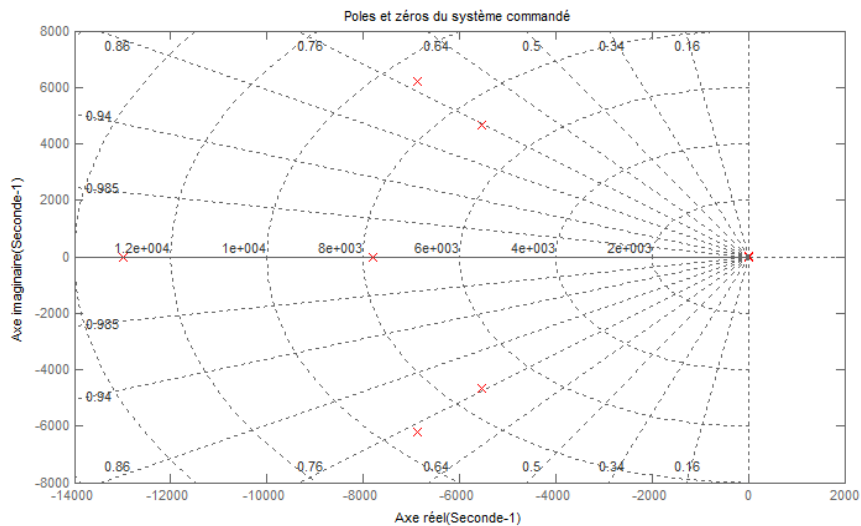


Figure IV.17 : Pôles et zéros du système incertain contrôlé (H_∞) pour $V=13\text{m/s}$.

Les valeurs propres du système sont tous à partie réelle négative, les pôles se trouvent tous dans le demi-plan –gauche, le système est donc stable à cette vitesse.

La réponse temporelle du système est montrée comme suit :

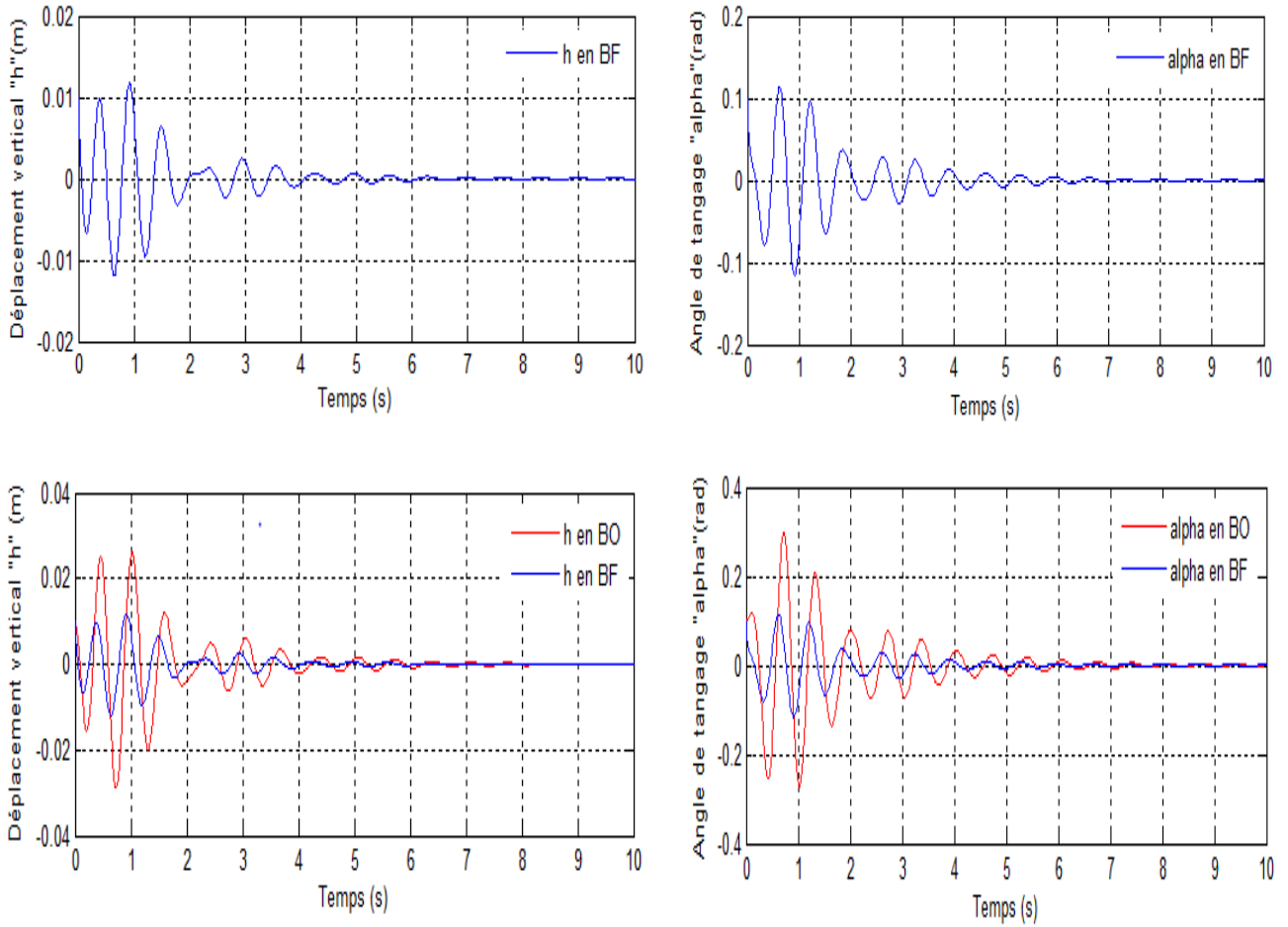


Figure IV.18 : La réponse du système incertain commandé (H_∞) à $V=13m/s$.

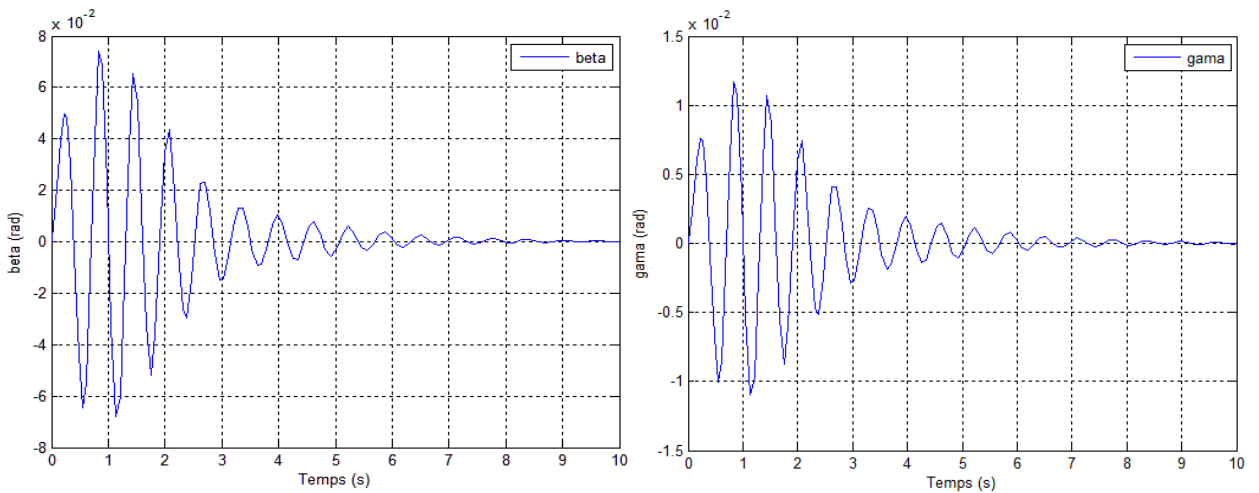


Figure IV.19 : Comportement de beta et de gamma à $V = 13 m/s$.

→ pour une vitesse $V=14 m/s$:

Les valeurs propres, les coefficients d'amortissement et les fréquences correspondants sont donnés comme suit :

Λ	ε	$\omega(\text{rad/s})$
-1.31e+004	1	1.31e+004
-6.80e+003 ± 6.19e+003i	7.40e-001	9.20e+003
-7.90e+003	1	7.90e+003
-5.47e+003 ± 4.69e+003i	7.59e-001	7.21e+003
-9.23e-001 ± 9.39e+000i	9.79e-002	9.44e+000
6.20e-001 ± 1.21e+001i	5.10e-002	1.22e+001
-2.75e+001	1	2.75e+001
-2.76e+001	1	2.76e+001

Tableau IV.7: Les caractéristiques du système incertain contrôlé (H_∞) pour $V=14\text{m/s}$

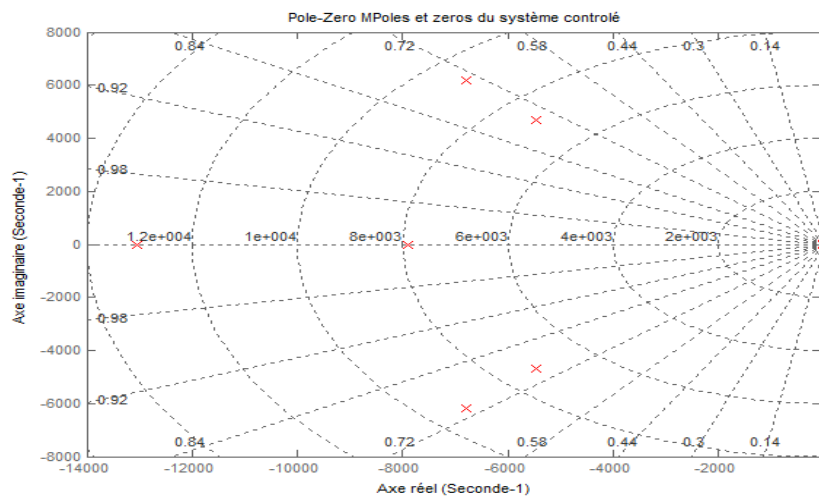


Figure IV.20 : Pôles et zéros du système incertain contrôlé (H_∞) pour $V = 14\text{m/s}$.

Les valeurs propres du système sont tous à partie réelle négative, les pôles se trouvent tous dans le demi-plan –gauche, le système est stable.

La réponse temporelle du système en boucle fermée est donnée comme suit :

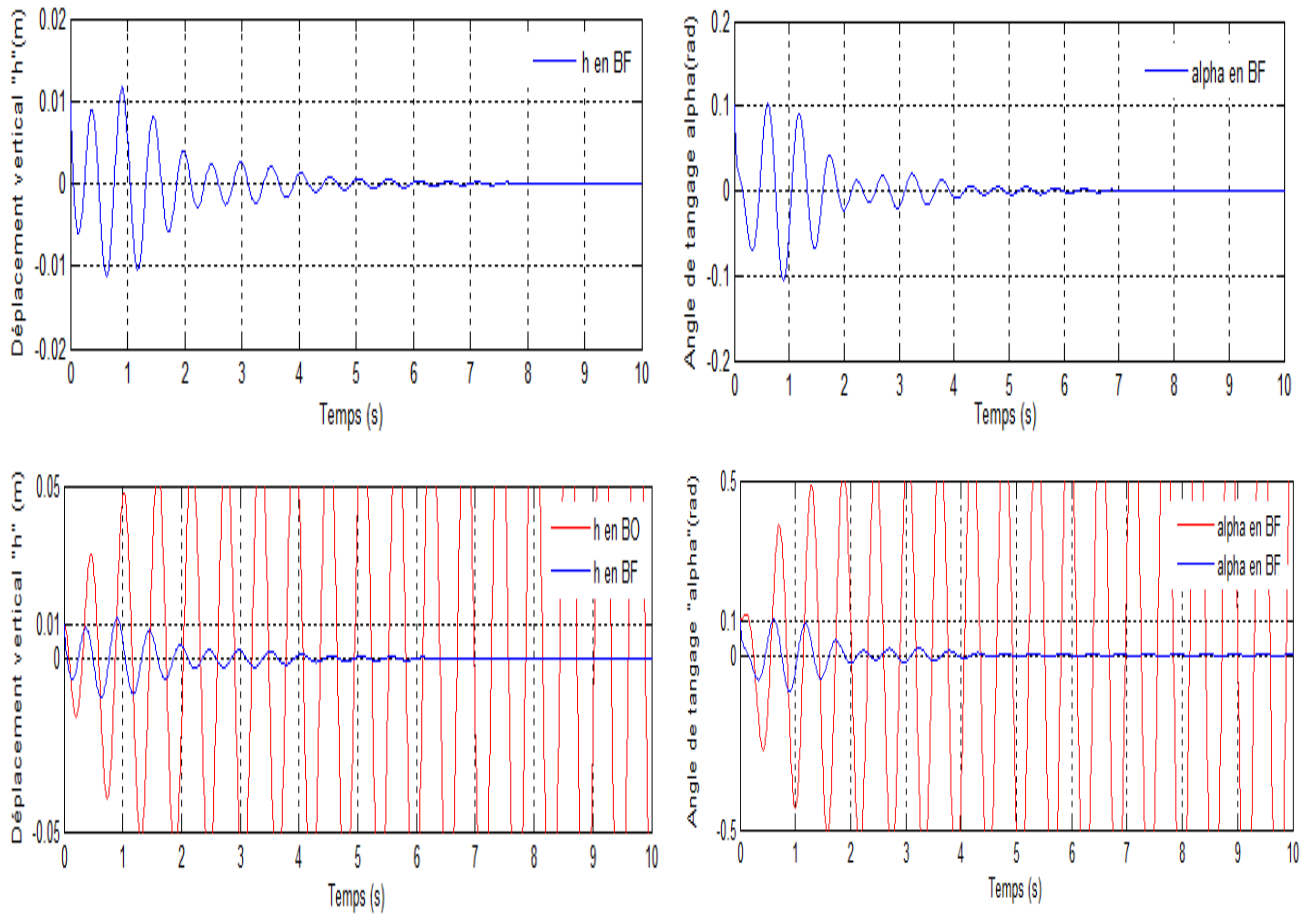


Figure IV.21 : La réponse du système incertain commandé (H_∞) à $V=14\text{m/s}$.

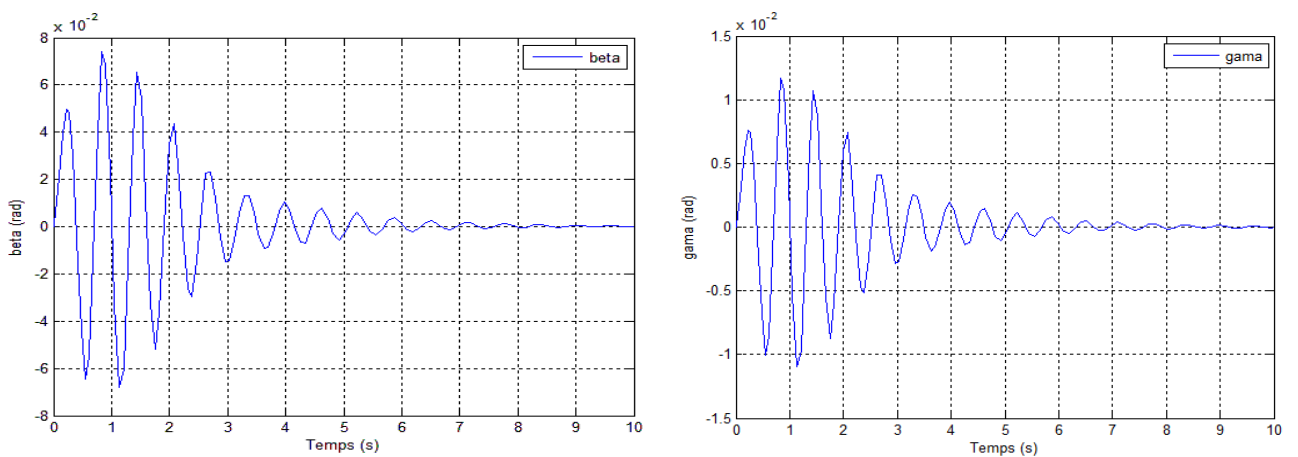


Figure IV.22 : Comportement de beta et gamma à $V=14\text{m/s}$.

Interprétation :

Les résultats de simulation obtenus en boucle fermée présentés sur les figures (IV.18) et (IV.21) montrent que :

→ Pour $V=13 \text{ m/s}$:

Le système incertain en boucle ouverte se comporte de la même manière que le système nominal, à cette vitesse il est stable, le mouvement de tangage et de déplacement verticale du profil convergent après 6 secondes avec de faibles oscillations vers la valeur 'zéro'.

En appliquant la commande H_∞ , on obtient une convergence après 5 secondes avec des amplitudes moins importantes, le système devient donc bien amorti (Figure (IV.18)).

Pour la même vitesse, les déflexions des surfaces mobiles sont acceptables comme montre la figure (IV.19), les angles de déflexion du volet de bord d'attaque (γ) et du volet de bord de fuite (β) convergent vers la position d'équilibre avec de très faibles oscillations de l'ordre de 10^{-2} , ils prennent environ 8 secondes pour l'atteindre.

→ Pour $V_2 = 14 \text{ m/s}$:

Le système en boucle ouverte est instable, parce qu'on est au-dessus de la vitesse de flottement qui a été repérée à **13.1643 m/s** pour le système incertain en boucle ouverte, le mouvement de tangage et de déplacement verticale du profil présentent des oscillations importantes et divergentes.

En appliquant la commande H_∞ , on obtient un système stable (Figure (IV.21)), un peu plus rapide que celui en boucle ouverte (temps de réponse 5 secondes) avec des oscillations moins importantes et une amélioration de coefficient d'amortissement ε .

Pour la même vitesse, la figure (IV.22) montre que β et γ présentent plus oscillations mais toujours de très faibles amplitudes presque négligeables puis convergent vers la position d'équilibre dans un temps de réponse d'environ 8 secondes que ça soit pour β , ou pour γ .

Et donc l'application de ce contrôleur sur le régime perturbé (Modèle incertain) a maintenu la stabilité et n'a pas dégradé les performances. On peut affirmer que la commande H_∞ sert à contrôler le mouvement de tangage 'alpha' et le déplacement vertical 'h', elle réduit les amplitudes des oscillations, améliore le coefficient d'amortissement, et rends le système un peu plus rapide avec un temps de réponse de 5 secondes et une erreur statique nulle.

Le gain en vitesse :

A des vitesses de **13m/s** et **14m/s**, le système incertain commandé p

ar H_∞ est stable comme le montre les figures (IV.15) et (IV.20). Pour calculer le gain en vitesse, on applique la commande à une vitesse supérieure.

→ Pour **V= 18m/s**, La réponse du système est montrée dans la figure (IV.23) :

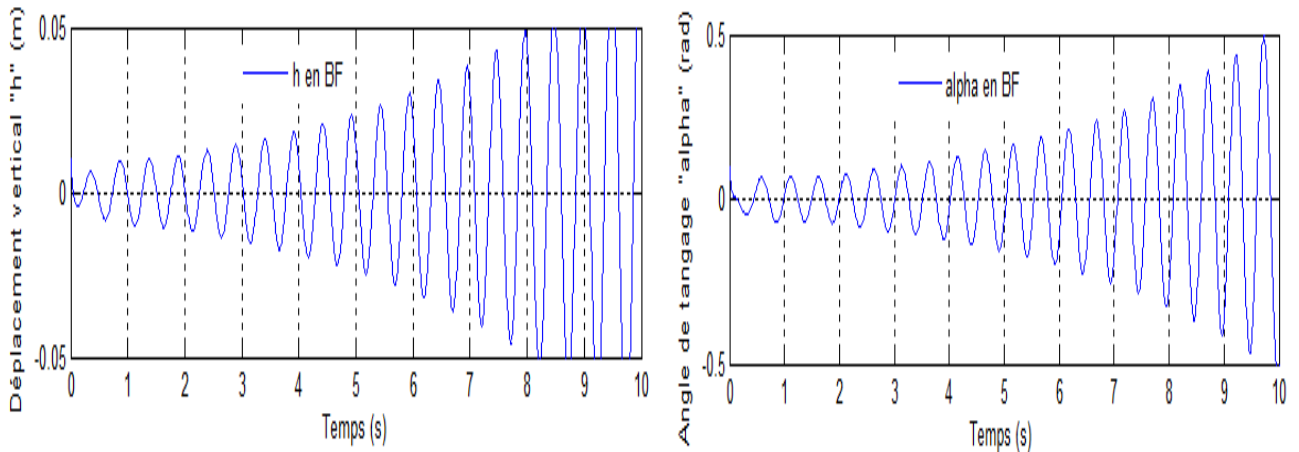


Figure IV.23 : La réponse du système incertain commandé (H_∞) à $V = 18m/s$.

À la vitesse $V = 18 \text{ m/s}$, le système diverge comme le montre la Figure (IV.23), donc il existe une vitesse de transition entre $V=13 \text{ m/s}$ et $V=18 \text{ m/s}$ qui est la vitesse de flottement, responsable de conduire le système de la stabilité vers l’instabilité. Avec des simulations successives, cette vitesse est repérée à :

$$V_{\text{flottement BF}} = 17.216 \text{ m/s}$$

Donc le gain en vitesse égale à **4. 056 m/s** (de 13.16 m/s jusqu’à 17.216 m/s).

IV.2.1.4. Conclusion :

Dans cette partie, nous avons cherché une loi de commande robuste basée sur la méthode H_∞ , et nous l’avons appliqué sur un profil d’aile. En premier lieu, nous avons étudié le système en boucle ouverte. Le système nécessite des améliorations au niveau des performances et au niveau de la vitesse de flottement.

Le contrôleur obtenu pour la commande robuste a permis d’assurer la stabilité du système en boucle fermée, et d’apporter des performances désirées. L’application de ce contrôleur sur le régime perturbé (Modèle incertain) a maintenu la stabilité et n’a pas dégradé les performances. On conclut donc que le contrôleur obtenu est robuste.

On justifie l'augmentation de la vitesse de flottement de **16.4 m/s** pour le modèle nominal à **17.21 m/s** pour le modèle incertain par le type d'incertitudes incorporées, elles ne sont pas assez fortes au point de rendre la commande H_∞ médiocre ou moins robuste.

IV.2.2. Application de la commande μ -analyse

Cette partie est consacrée aux aspects de l'implémentation d'une des techniques les plus importantes en matière de contrôle robuste. L'étude de la robustesse doit être associée à la stabilité et à la performance du système, par rapport à une perturbation du système telle que les erreurs de mesure ou les variations de ses paramètres.

Dans notre cas, nous avons décidé de tester la robustesse du correcteur vis à vis des variations paramétriques du procédé les plus susceptibles de varier, et donc les paramètres concernés sont: le coefficient d'amortissement pour le mouvement vertical C_h , Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement de tangage K_α et la pression dynamique q qui ont les valeurs nominales $C_{h_nom} = 3.525$, $K_{\alpha_nom} = 27.43$, $q_nom = 0.5\rho V^2$ et les incertitudes relatives **15 %**, **15 %**, **45 %**, respectivement.

La simulation du système en présence du contrôleur s'effectue en utilisant la fonction «dksyn» présente dans MATLAB (Robust Control Toolbox. Cette fonction détermine itérativement un contrôleur qui minimise la valeur singulière structurée du system en boucle fermée.

Les fonctions de pondérations W_P , W_u choisies sont :

$$W_P = \frac{0.05}{s + 1.5} \quad ; \quad W_u = \frac{2 * 10^{-5}s + 0.02}{0.0001s + 1}$$

Par ce choix le système bouclé assure une valeur singulière structurée μ égale à : $\mu = 0.605$ comme montré dans la figure(IV.21).

```

Iteration Summary
-----
Iteration #           1           2           3
Controller Order      8          12          24
Total D-Scale Order   0           4           16
Gamma Acheived        4.223       0.606       0.661
Peak mu-Value         2.562       0.605       0.640
    
```

Figure IV.24 : Exécution du programme de la synthèse par μ -analyse.

On obtient alors un contrôleur $K(s)$ d'ordre 12 qui a les valeurs propres suivantes :

$$VK(s) = \begin{bmatrix} -3591.8 \\ -256.30 \\ -1239.3 \\ -8.5 + 15.9i \\ -8.5 - 15.9i \\ -27.1 \\ -26.7 \\ -15.5 \\ -9.7 \\ -10.1 \\ -1.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

On remarque que toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative, ceci implique que le contrôleur $K(s)$ est stable.

IV.2.2.1. Etude de la robustesse :

L'étude de la robustesse doit être associée à la stabilité et à la performance du système, par rapport à une perturbation du système telle que les erreurs de mesure ou les variations de ses paramètres qui sont modélisées comme étant des incertitudes. Alors pour que le contrôleur conçu soit robuste, le système en boucle fermée doit retrouver les exigences de stabilité et de performance requis pour toute valeur incertaine que peut prendre les paramètres. Pour le vérifier on procède au calcul des bornes supérieures et inférieure des performances dans « le cas le plus contraignant » d'incertitude sur le système.

• **Etude de la stabilité robuste :**

	Paramètre	Valeur	Interprétation
Marges de stabilité	Borne supérieure	4.6631	> 0 donc la stabilité du système vis-à-vis les incertitudes modélisées est garantie.
	Borne inférieure	2.0890	> 1 ce qui veut dire que le système incertain est garanti d'être robustement stable pour les valeurs d'incertitude modélisées.
	Fréquence de déstabilisation	17.0735	C'est la valeur critique pour laquelle déstabilisation se produit, avec les éléments incertains proches de leurs valeurs nominales

Tableau IV.8 : interprétations des valeurs des marges de stabilité du système en boucle fermée.

Le système est robustement stable pour toutes les incertitudes modélisées (Pour toute variation des paramètres q ; c_h ; k_α dans les gammes $\pm 45 \%$, $\pm 15\%$ et $\pm 15 \%$ respectivement), il peut tolérer jusqu'à 209 % des incertitudes modélisées et la plus petite valeur déstabilisant le système se trouve quelque part entre 208 % et 466 % .Une estimée de la variation des paramètres provoquant la déstabilisation à 466 % à une fréquence de 17.1 rad/s.

La sensibilité du système en respectant les éléments incertains déjà introduits est de :

- 1 % pour c_h : En augmentant ce paramètre de 25% la marge de stabilité diminue de 0 %.
- 27 % pour k_α : En augmentant ce paramètre de 25% la marge de stabilité diminue de 7 %.
- 98 % pour q : En augmentant ce paramètre de 25% la marge de stabilité diminue de 25%.

Donc l'influence de l'élément incertain q sur la marge de stabilité est la plus forte.

Conclusion : le système possède une confortable marge de sécurité entre 209 % et 466 % avant que le système devienne instable.

• **Etude de la performance robuste :**

	paramètre	Valeur	Interprétation
Marges de performance	Borne supérieure	1.6579	> 0 donc la stabilité du système face aux incertitudes modélisées est garantie.
	Borne inférieure	1.6560	> 1 L'exigence de performance ($\ \frac{W_p S_o}{W_u K S_o} \ _\infty < 1$) est satisfaite pour les incertitudes modélisées. Le system atteint la performance robuste.
	Fréquence de déstabilisation	0.01	C'est la valeur critique pour laquelle déstabilisation se produit, avec les éléments incertains proches de leurs valeurs nominales

Tableau IV.9 : Interprétations des valeurs des marges de performance du système en boucle fermée

Le système incertain atteint une marge de performance robuste de 1.658. Il existe une incertitude de 166% des celles données qui déstabilise le système à une fréquence de 0.01rad/s. La sensibilité du système en respectant les éléments incertains déjà introduits est de :

- 0% pour c_h : En augmentant ce paramètre de 25% la marge de stabilité diminue de 0%.
- 25% pour k_{α} : En augmentant ce paramètre de 25% la marge de stabilité diminue de 6%.
- 30% pour q : En augmentant ce paramètre de 25% la marge de stabilité diminue de 8%.

On constate que l'incertitude sur la pression dynamique a aussi la plus grande influence sur la marge de performance.

Conclusion : Notre système contrôlé est donc robuste en stabilité et en performance.

Pour un système incertain ayant les paramètres incertains fixés comme suit :

- $q = q_{nom} = 0.5\rho V^2$;
- $k_{\alpha} = k_{\alpha_{nom}} + 0.15*k_{\alpha_{nom}}$;
- $c_h = c_{h_{nom}} + 0.15*c_{h_{nom}}$.

Les résultats de simulation en boucle fermée en appliquant la commande $\mu_{analyse}$ sont obtenus pour les cas suivants :

→ **Pour une vitesse $V = 13\text{m/s}$** , Les valeurs propres, les coefficients d'amortissement et les fréquences correspondants sont donnés comme suit :

Valeurs propres (λ)	Amortissements (ε)	Pulsations ($\omega(\text{rad/s})$)
-3.59e+003	1	3.59e+003
-2.56e+003	1	2.56e+003
-1.24e+003	1	1.24e+003
2.71e+001	1	2.71e+001
-2.59e+001	1	2.59e+001
-2.88e+000 ± 1.52e+001i	1.86e-001	1.54e+001
-2.84e+000 ± 1.32e+001i	2.10e-001	1.35e+001
-1.02e+001 ± 3.89e-001i	9.99e-001	1.02e+001
-9.65e+000	1	9.65e+000
-8.25e+000	1	8.25e+000
-6.54e+000	1	6.54e+000
-1.63e+000	1	1.63e+000
-1.50e+000	1	1.50e+000

Tableau IV.9 : Caractéristiques du système commandé ($\mu_{analyse}$) pour $V=13\text{ m/s}$

On présente les réponses temporelles du système en boucle fermée comme suit

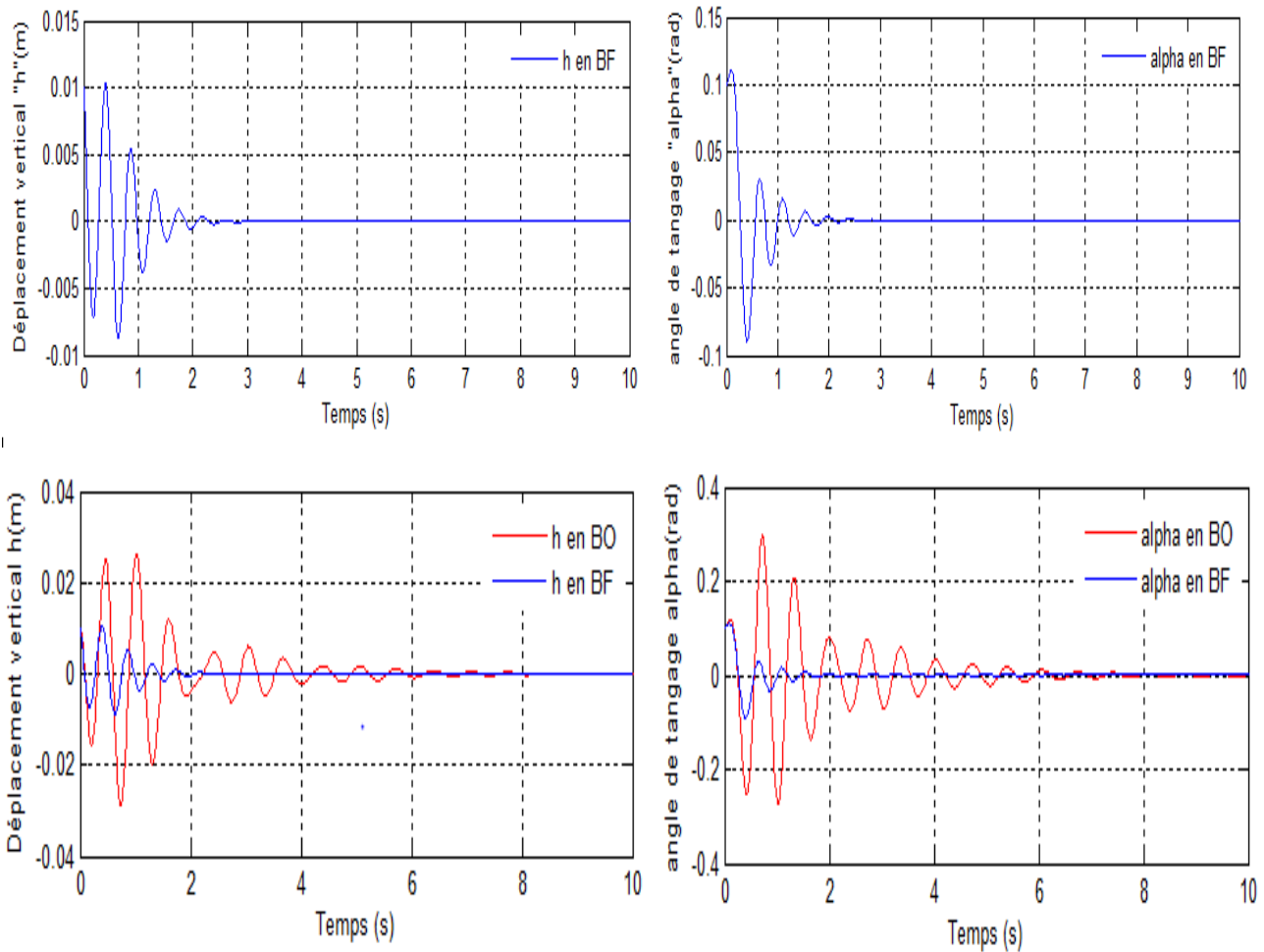


Figure IV.25 : La réponse du système commandé (μ -analyse) à $V = 13$ m/s.

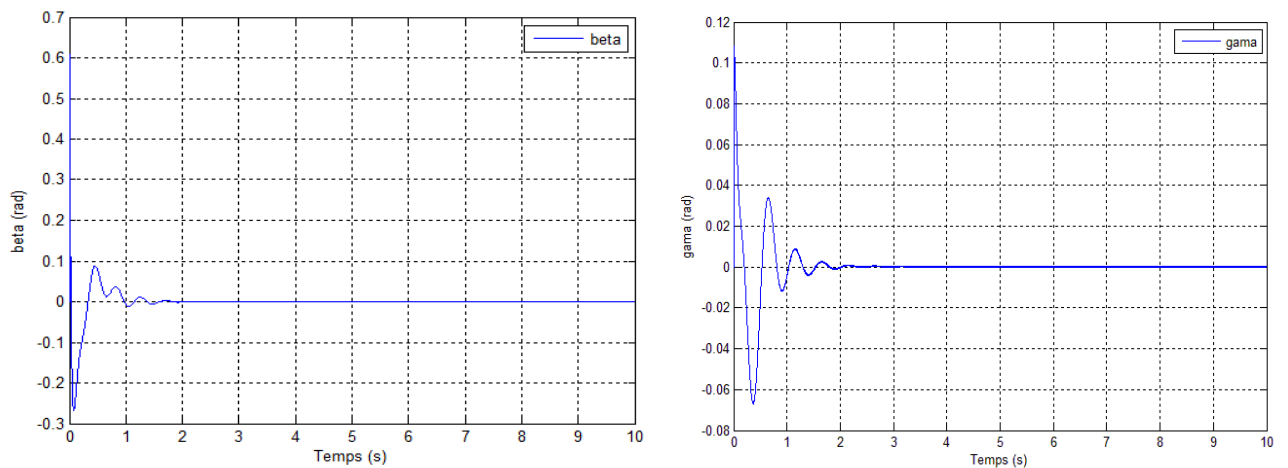


Figure IV.26 : Comportement de beta et gamma à $V = 13$ m/s

→ Pour une vitesse $V = 18 \text{ m/s}$:

Les valeurs propres, les coefficients d'amortissement et les fréquences correspondants sont donnés comme suit :

Valeurs propres (λ)	Amortissements (ε)	Pulsations (rad/s)
-3.59e+003	1	3.59e+003
-2.56e+003	1	2.56e+003
-1.24e+003	1	1.24e+003
2.71e+001	1	2.71e+001
-2.50e+001	1	2.50e+001
-2.16e+000 ± 1.72e+001i	1.25e-001	1.73e+001
-5.98e-001 ± 1.29e+001i	4.64e-001	1.29e+001
-1.54e+001 ± 5.93e-001i	9.33e-001	1.65e+001
-9.69	1	9.69e+000
-1.01e+001	1	1.01e+001
-1.47e+000 ± 5.36e-001i	9.40e-001	1.57e+000
-1.50e+000	1	1.50e+000

Tableau IV.10: Caractéristiques du système commandé (μ -analyse), pour $V = 18\text{m/s}$.

La réponse temporelle du système en boucle fermée est montrée dans la figure (IV.27) :

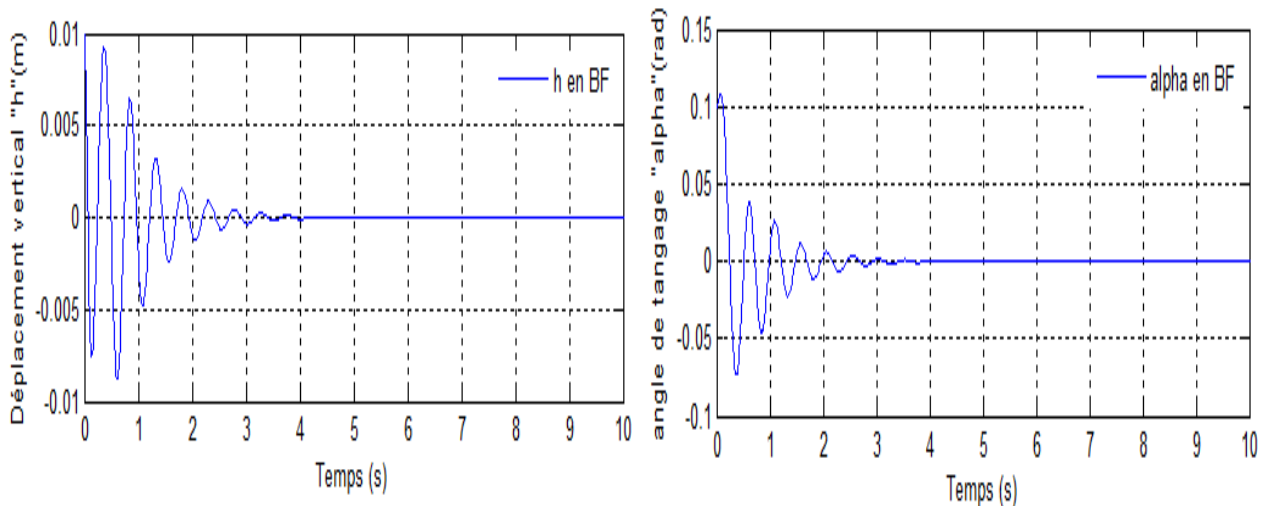


Figure IV.27 : La réponse du système commandé (μ -analyse) à $V = 18 \text{ m/s}$.

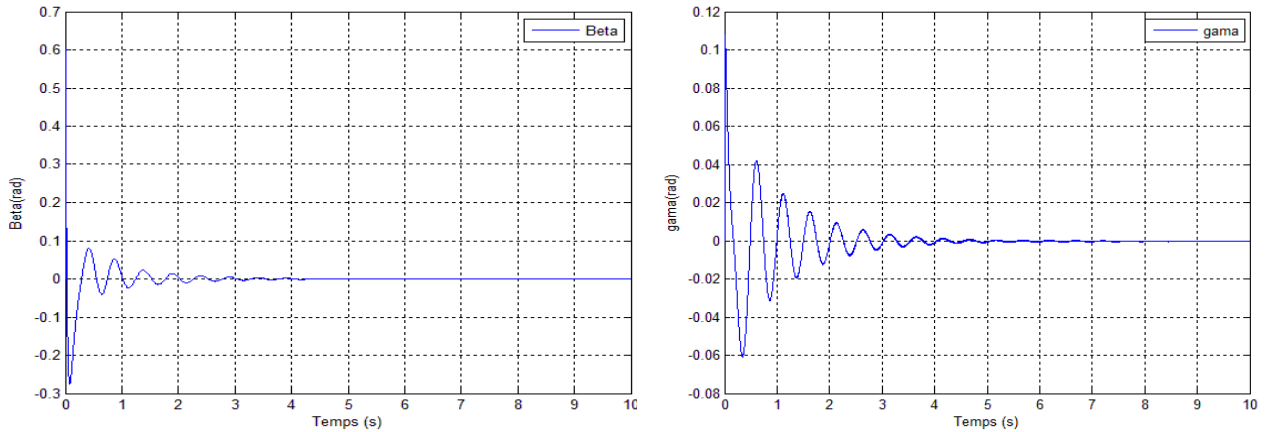


Figure IV.28 : Comportement de beta et gamma à $V = 18 \text{ m/s}$.

IV.2.2.2. Interprétation :

Les résultats de simulation obtenus en boucle fermée présentés sur les figures (IV.25) et (IV.27) montrent que :

→ Pour $V = 13 \text{ m/s}$:

Le système en boucle ouverte est stable mais il est lent, le mouvement de tangage et de déplacement verticale du profil convergent lentement après 6 secondes avec de faibles oscillations vers la valeur 'zéro'.

En appliquant la commande μ_{analyse} , on obtient une convergence plus rapide, le système prend 1.9 secondes pour amortir les oscillations qui ont des amplitudes moins importantes que celles du système en boucle ouverte, on constate aussi une amélioration dans le coefficient d'amortissement ε avec moins de dépassement ce qui rend le système bien amortie (Figure(IV.25)).

Pour la même vitesse d'écoulement, les déflexions des surfaces mobiles sont acceptables, le comportement des angles de déflexion du volet de bord d'attaque (γ) et du volet de bord de fuite (β) est très satisfaisant, β et γ convergent vers la position d'équilibre d'une manière très souple avec de très faibles oscillations, avec un temps de réponse d'environ 1.5 secondes pour β , et 1.9 secondes pour γ comme le montre si bien la figure (IV.26).

→ Pour $V = 18 \text{ m/s}$:

Le système en boucle ouverte est instable, ceci est prévu car la vitesse d'écoulement est très supérieure à la vitesse de flottement en boucle ouverte qui a été repérée à $V_{f \text{ BO}} = 13.16 \text{ m/s}$, d'où la nécessité de faire appel à un contrôleur pour stabiliser le système.

En appliquant la commande μ _analyse, on obtient un système stable avec une amélioration de coefficient d'amortissement ε (d'une valeur négative qui traduit la perte d'amortissement à une valeur positive), le système est devenu plus rapide avec un temps de réponse de 3 secondes même pas (Figure(IV.27)).

Pour la même vitesse, la figure (IV.28) montre que β et γ présentent peu d'oscillations de faibles amplitudes puis convergent avec souplesse vers la position d'équilibre dans un temps de réponse de 2 secondes pour β , et environ 4 secondes pour γ . Il est clair que le temps de réponse de β et γ augmente plus on s'approche de la vitesse critique.

La commande μ _analyse a réussi à bien contrôler le mouvement de tangage 'alpha' et le déplacement vertical 'h', elle a enlevé les oscillations de fortes amplitudes, elle a rendu le système plus rapide, avec un temps de réponse de 2 secondes en moyenne, un fort amortissement, et une erreur statique nulle.

IV.2.2.3. Le gain en vitesse :

A une vitesse de 13m/s, le système incertain commandé par μ _analyse est stable comme le montre la figure (IV.25), pareil pour la vitesse $V=18$ m/s (la figure (IV.27)), le système présente plus d'oscillations par rapport à la vitesse précédente mais le résultat reste toujours satisfaisant.

Pour calculer le gain en vitesse, on applique la commande calculée à une vitesse supérieure.

Pour $V_3 = 24\text{m/s}$, la réponse du système est montrée dans la figure (IV.29).

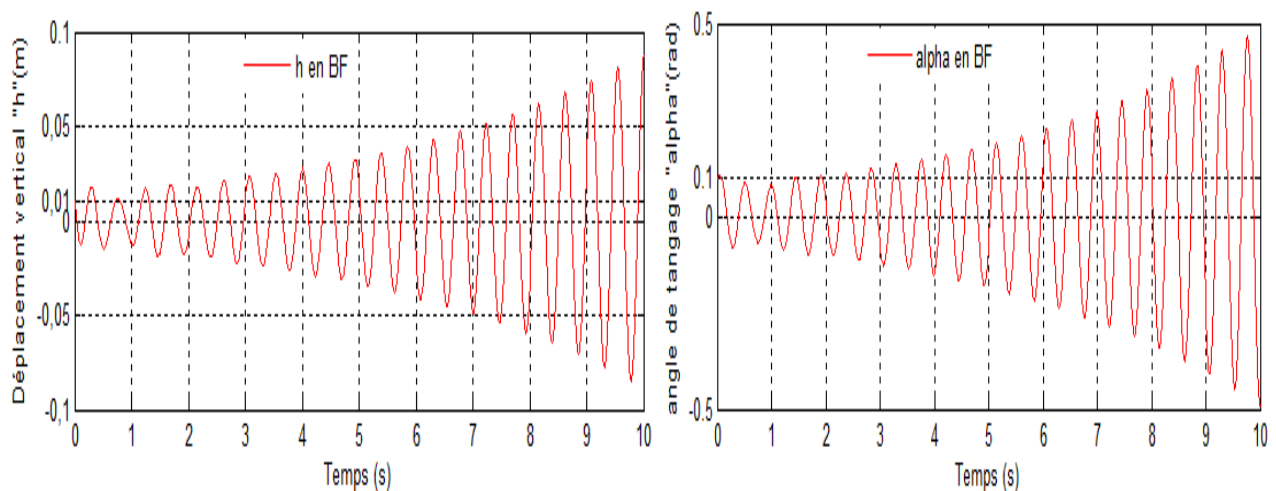


Figure IV.29 : La réponse du système commandé (μ -analyse) à $V = 24$ m/s.

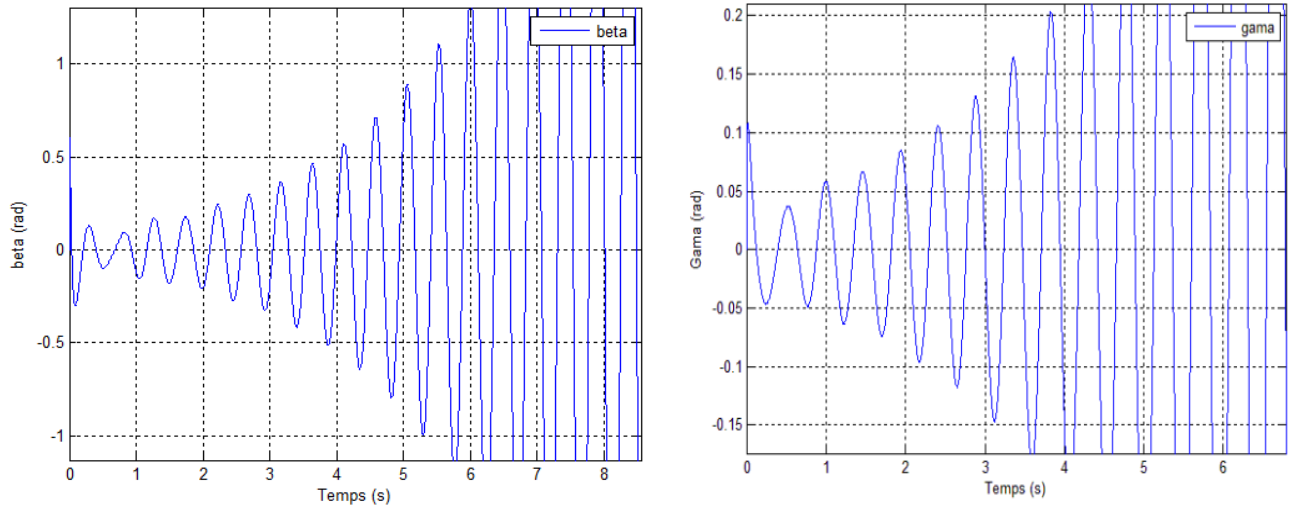


Figure IV.30 : Comportement de beta et gamma à $V = 24 \text{ m/s}$.

A une vitesse de **24 m/s** Le système diverge comme le montre la **Figure (IV.29)**, les angles β et γ ne sont pas acceptables car ils présentent des oscillations d’amplitudes très élevées ce qui va endommager les actionneurs et les volets. Avec des simulations successives, la vitesse de flottement est repérée à :

$$V_{\text{flottement BF}} = 21.7 \text{ m/s}$$

Donc le gain en vitesse égale à **8.54 m/s** (de 13.16 m/s jusqu’à 21.7 m/s).

A partir des résultats précédents, on peut dire que la commande μ_{analyse} conçue nous conduit à des résultats satisfaisants en terme de gain en vitesse, la rapidité d’amortir les oscillations, notamment avec l'utilisation des fonctions de pondération et des intervalles d’incertitudes adéquats.

Après avoir obtenu le contrôleur $K(s)$, on réduit son ordre et on en tire les deux contrôleurs de rétroaction $K1$ et $K2$ qui commandent la déflexion des parties mobiles du bord d’attaque et du bord de fuite respectivement ensuite on les implémente dans le système incertain. On opte pour l’ordre 3 du contrôleur et on obtient par ce choix :

$$K1 = \frac{-248.6s^2 - 9947s - 6.52e004}{s^3 + 682.7s^2 + 3.414e004s + 2.269e005}$$

$$K2 = \frac{-5088s^2 + 8.816e004s - 1.596e005}{s^3 + 682.7s^2 + 3.414e004s + 2.269e005}$$

A une vitesse nominale de simulation $V = 13 \text{ m/s}$, le système en boucle fermée a les caractéristiques λ , ε , ω suivantes :

λ	ε	$\omega(\text{rad/s})$
$-1.04 \pm 13.59i$	$7.6650e-002$	13.628
$-0.45 \pm 7.30i$	$6.1081e-002$	7.3176
-7.84	1	7.84
-8.01	1	7.9663
-629.01	1	629.01
-628.99	1	628.99

Tableau IV.11 : Caractéristiques du système en boucle fermée.

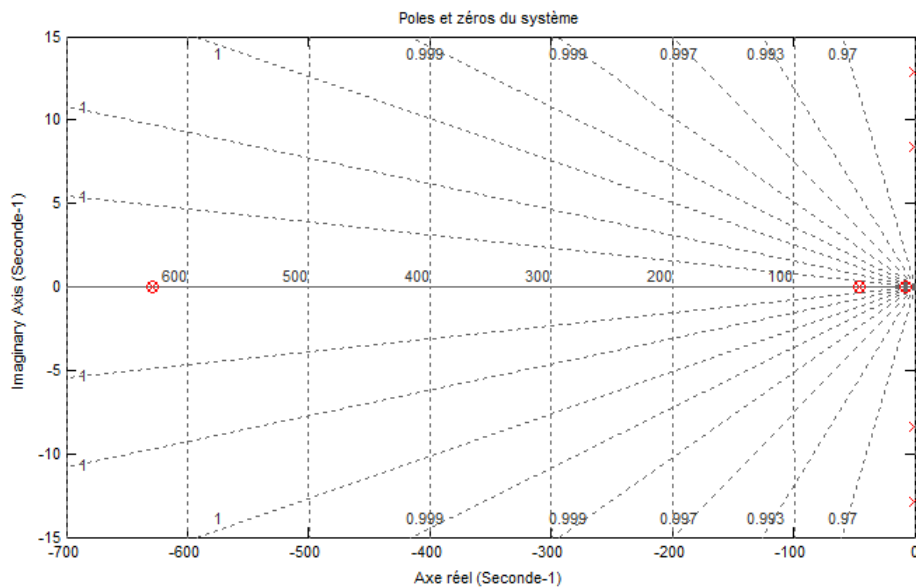


Figure IV.31 : Pôles et zéros du système commandé (μ -analyse).

Nous présentons la réponse temporelle du système sur la figure (IV.32) :

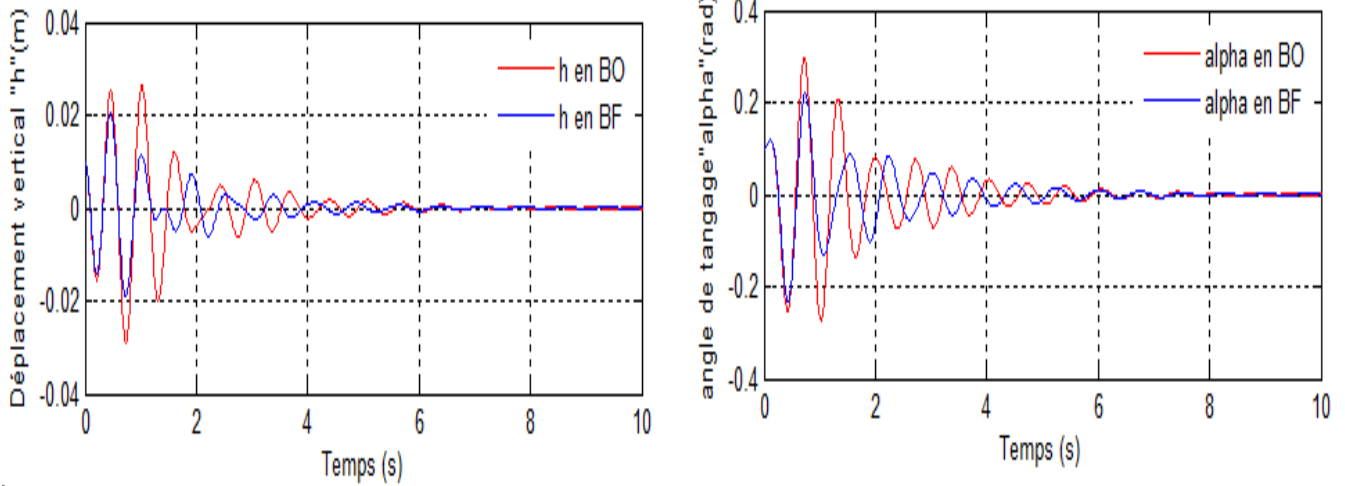


Figure IV.32 : La réponse du système commandé avec K_1 et K_2 activés à $V = 13$ m/s.

Interprétation :

A une vitesse de 13m/s, le système en boucle ouverte est stable mais mal amorti, le mouvement de tangage et de déplacement verticale du profil convergent après 6 secondes avec de faibles oscillations vers la valeur ‘zéro’.

L’application des deux contrôleurs n’a pas diminué le temps de réponse, le système converge toujours après 6 secondes, mais ça a permis quand même de réduire les amplitudes des oscillations. Cela prouve que les performances du contrôleur se sont un peu dégradées à cause de la réduction de son ordre.

Le gain en vitesse :

On sait que pour calculer le gain en vitesse, on applique la commande calculée sur des systèmes à une vitesse supérieure ($V_2 = 16$ m/s).

Les résultats de simulation sont présentés sur la Figure (IV.33) :

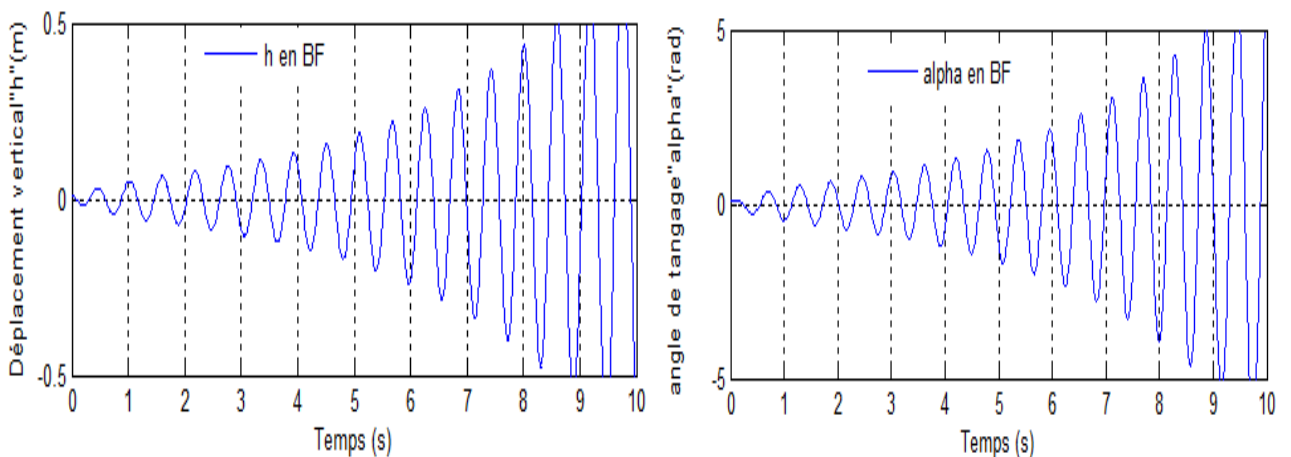


Figure IV.33 : La réponse du système commandé avec K_1 et K_2 activés à $V = 16$ m/s.

A cette vitesse le système a les caractéristiques $\lambda, \varepsilon, \omega$ suivantes :

λ	ε	$\omega(rad/s)$
-629.02	1	629.02
-628.98	1	6.2898
-45.98	1	45.98
-45.50	1	45.50
$0.29 \pm 10.78i$	-2.70e-002	10.8
$-1.89 \pm 10.96i$	1.70e-001	11.1
-7.83	1	7.83
-8.10	1	8.10

Tableau IV.12 : Caractéristiques du système commandé pour $V=16m/s$.

D'après la figure (IV.33), le système n'est plus convergent à $V= 16 m/s$, (ε devient négatif ($\varepsilon = -2.70e-002$) qui est traduit par la perte d'amortissement) donc la vitesse de flottement est comprise entre la vitesse $V= 13m/s$ et $V_2 = 16m/s$, avec les simulations successives nous avons trouvé :

$$V_{flottement BF} = 15.4 m/s$$

Nous avons pu retarder le phénomène de flottement en augmentant la vitesse à laquelle il survient $V_f = 15.4 m/s$, donc nous avons un gain en vitesse égale à : **2.24 m/s** (De 13.16 m/s jusqu'à 15.4 m/s).

Interprétation :

Commander le système par $K1$ et $K2$ calculés, nous a permis d'obtenir de bons résultats en terme de gain en vitesse nous avons obtenu un système avec des oscillations moins importantes et toujours une erreur statique nulle et le plus important ça nous a permis de retarder le phénomène de flottement, mais ces résultats restent un peu moins satisfaisants en les comparant avec ceux obtenus par le même contrôleur avant réduction d'ordre.

IV.2.2.4. Etude comparative :

Le résultat présenté sur le tableau ci-dessous présente une étude comparative entre notre recherche et des recherches similaires mais pour des différents systèmes et différents types de contrôleur.

Type de système	Contrôleur			La vitesse critique de flottement
	Type	Ordre	Le gain	
Seulement avec deux incertitudes structurelles C_h, K_α (Teng and Chen, 2005)	Sans contrôleur	/	/	13.1617
	K_1 et K_2 activés	Premier ordre	$K_1 = 1$ $K_2 = 23$	17.7635
	K_1 et K_2 activés	Second ordre	$K_1 = 1$ $K_2 = 23$	17.877
Avec quatre incertitudes structurelles $C_h, K_\alpha, C_\alpha, K_h$	Sans contrôleur	/	/	13.054
	K_1 et K_2 activés	Premier ordre	$K_1 = 1$ $K_2 = 23$	17.3128
	K_1 et K_2 activés	Second ordre	$K_1 = 1$ $K_2 = 23$	17.35
Avec trois incertitudes structurelles C_h, K_α, q (Notre travail)	H_∞	Ordre 8	/	17.21
	μ -analyse	Ordre 12		21.7
	μ -analyse (K_1 et K_2 activés)	Ordre 3		15.4
Résultats du test de soufflerie (Platanitis et Strganac, 2004)	Sans contrôleur	/	/	13

Tableau IV .13 : Comparaison des résultats de notre recherche avec les résultats des recherches précédentes.

Interprétation :

Les résultats de simulation d'un système à 4 incertitudes structurelle avec application de deux contrôleurs K_1, K_2 du premier ordre, sont en bonnes concordances avec les résultats des tests expérimentaux, cela prouve que le système est très proche du modèle réel.

Dans le cas d'un système incertain à deux incertitudes structurelles, la vitesse critique de flottement a été repérée à 13.1617 m/s, et à 17.76 avec l'application de deux contrôleurs d'ordre 1 et à 17.78 quand ils sont d'ordre 2.

D'après ces deux cas, on peut conclure que le type d'incertitudes et le nombre de paramètres incertains affectent d'une manière significative la vitesse critique de flottement, l'ordre des contrôleurs utilisés a également un impact sur cette dernière.

Dans le cas de notre système à trois incertitudes structurelles, la vitesse de flottement a été repérée à 13.1634 m/s, et à 17.21 avec l'utilisation d'un contrôleur H_∞ d'ordre 8 et à 21.7 m/s avec l'utilisation d'un contrôleur d'ordre 12 par l'approche μ -analyse, avec la réduction d'ordre de ce dernier de 12 à 3, la vitesse critique a été repérée à 15.4m/s. les résultats obtenus sont très satisfaisants en comparant avec les cas précédents et en prenant en considération l'ordre élevé des contrôleurs calculés.

IV.2.2.5. Résumé des résultats numériques :

Le tableau suivant résume les différents résultats numériques de simulation de notre système en boucle ouverte et en boucle fermée avec les deux lois de commandes H_∞ et μ -analyse, il permet de présenter la vitesse de flottement (V_f) pour chaque cas et aussi le gain en vitesse par rapport à la vitesse de flottement en boucle ouverte (pour le modèle nominal et le modèle incertain).

Modèle du système	Type	Vitesse de flottement V_f (m/s)	Gain en vitesse (m/s)
Aéroélastique	Nominal	13.96	/
	Incertain	13.1643	/
Aéroséroélastique (commande H_∞)	Nominal	16.4	2.44
	Incertain	17.21	4.05
Aéroséroélastique (μ-analyse)	Incertain	21.7	8.54

Tableau IV. 14: Résumé des résultats numériques de simulation.

Les valeurs numériques présentées dans le tableau ci-dessus résultent les remarques suivantes:

→ Un gain en vitesse moyen dans l'application de la commande H_∞ sur le modèle nominal et une augmentation de ce gain au lieu de sa diminution en appliquant la commande sur le modèle incertain ce qui prouve la robustesse de la commande vis-à-vis le changement de la vitesse d'écoulement ou la variation des paramètres internes de système. Et d'autre part, ça prouve que les incertitudes incorporées dans le système ne sont pas trop fortes au point de rendre le système incertain moins performant par rapport au nominal.

→ Pour la commande μ _analyse, un gain en vitesse important et très significatif résultant de l'application de la commande sur un modèle incertain et qui montre la robustesse de la commande vis-à-vis le changement de la vitesse de l'écoulement ainsi que les différentes gammes d'incertitudes paramétriques qui affectent le système.

Conclusion

Au vu des résultats précédents et après avoir analysé le système, nous avons pu retenir les points suivants :

→ Les résultats de simulation montrent l'efficacité des deux commandes H_∞ et μ _analyse pour retarder le phénomène de flottement et améliorer sa vitesse.

→ Les valeurs différentes de la vitesse de flottement pour les différents systèmes indiquent que la vitesse de flottement est liée aux paramètres internes du système.

Conclusion générale et perspectives

En quelques mots, les travaux entrepris dans ce mémoire s'articulent principalement autour de la modélisation mathématique d'une section d'aile bidimensionnelle de deux degré de liberté avec deux surfaces de commande, la dynamique du mouvement de ce dernier concerne le tangage et le déplacement vertical, qui pour des vitesses d'écoulements spécifiques, présente des oscillations mal amorties ou instables, alors une application des commandes réputées de « robustes » a été envisagée pour stabiliser le système, supprimer les vibrations instables et retarder le phénomène de flottement.

Dans un premier temps, nous avons donné une vision générale sur les phénomènes d'aéroélasticité, plus précisément le flottement et sur la meilleure solution pour y remédier « l'aéroservoélasticité ».

Ensuite, une partie essentielle de notre étude qui concerne le système physique est le développement mathématique du modèle dynamique basé sur l'application de la méthode de Lagrange, elle nous a permis d'obtenir le modèle nominal du système, et afin d'aboutir à un modèle proche du réel « incertain », nous avons utilisé une technique qui prend en considération les incertitudes structurées, elle est basée sur l'insertion des incertitudes linéaires dans les paramètres du système concernant la pression dynamique, le coefficient d'amortissement, et de rigidité. Une application a été faite ensuite sur le modèle d'aile appelé TAMU WING II afin d'obtenir sa représentation d'état pour les deux modèles ; nominal et incertain.

Ces deux modèles nous ont permis de simuler le comportement dynamique de la section d'aile de point de vue mouvement de tangage et déplacement vertical, cela nous a conduits à détecter le phénomène de flottement et à prévoir des vitesses correspondantes différentes.

Pour faire face au phénomène de flottement, nous avons opté pour deux types de commande, il s'agit de la commande par approche H_∞ et la commande par μ -analyse.

L'approche \mathcal{H}_∞ consiste à modéliser le transfert de la boucle de telle sorte qu'il présente un bon compromis entre la robustesse et les performances. Ce modelage est réalisé par les filtres qui sont ajoutés dans la boucle de régulation, autour de la fonction de transfert du système. Ces filtres sont choisis tels que les valeurs singulières présentent un gain élevé en basse fréquence et une atténuation en hautes fréquences. En effectuant la synthèse par cette approche sur ce système, nous avons obtenu un contrôleur $K(s)$ qui assure la stabilité en boucle fermée et garantit les performances désirées et nous avons pu retarder le phénomène de flottement d'une manière suffisante. La robustesse du contrôleur a été confirmée par l'implantation sur le régime perturbé (Système incertain). Cependant, la technique souffre d'inconvénients dont le principal est le choix des filtres

de pondérations qui s'avère un problème délicat pour une personne non expérimentée, car il n'existe pas de méthodologie permettant de les déterminer analytiquement.

Par la suite nous avons adapté le modèle incertain à la commande μ -analyse afin d'améliorer d'une manière très significative les performances de ce dernier, et avoir une marge très importante en terme de vitesse de flottement ce qui a été atteint. Des résultats intéressants ont été aperçus tant qu'en stabilité qu'en performances et rejet de perturbations ainsi qu'un temps de réponse court et une erreur statique nulle. Mais ça n'empêche que cette approche présente des inconvénients dont le majeur est l'ordre élevé des contrôleurs qu'elle fournit, pouvant poser des problèmes lors de mise en œuvre. La réduction de l'ordre conduit à la dégradation des performances ce qui a été déjà prouvé.

Perspectives :

Pour les futures études dans le domaine de l'aéroservoélasticité, nous proposons :

❖ *De point de vue structure*

- Etaler la modélisation sur une aile complète et augmenter le degré de liberté du système c'est-à-dire prendre en compte les masses internes de celui-ci.
- L'utilisation de la technique de « *Morphing* » ; c'est-à-dire utiliser des structures à morphologie continue.

❖ *De point de vue commande*

- L'association de la synthèse H_∞ avec μ -analyse pour fournir des outils puissants permettant de déterminer des lois de commande plus efficaces.
- L'application des deux méthodes d'analyse de robustesse H_∞ et μ -analyse sur les systèmes LPV (Linéaires à paramètres variants).

Références bibliographiques

- [1] SUKUT,T.W., « Nonlinear aeroelastic analysis of UAVs : Deterministic and stochastic Approaches », 2d Lt USAF, RICE University HOUSTON, TEXAS, April 2012.
- [2] TENG,Y., « Modeling and simulation of Aeroservoelastic control with multiple control surfaces using μ -method ». these Phd ,Claremont, California and Long beach, California,2005.
- [3] DEWEY, HODGES,H., ALVIN PIERCE,G., « Introduction to structural dynamics and aeroelasticity », cambridge aerospace series 2001.
- [4] BLANC,F., « Méthodes numériques pour l'aéroélasticité des surfaces de contrôle des avions », Thèse de doctorat de l'université de Toulouse, 16 décembre 2009.
- [5] Axisa,F., « Modélisation des systèmes mécaniques », Tome 3 Interactions fluide-structure, Hermes Science Publications, 2000.
- [6] Davis,B.R., « Techniques To Assess Acoustic-Structure Interaction In Liquid Rocket Engines », PhD thesis, Duke University, 2008.
- [7] HEMON, P., « Comportements aéroélastiques de structures flexibles en écoulement transverse », Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université pierre et marie curie, février 2013.
- [8] AKMEŞE, A., « Aeroservoelastic analysis and robust controller synthesis for flutter suppression of air vehicle control actuation systems », Thèse de graduation des sciences naturelles appliquées, Belgique, Juin 2006.
- [9] Fung, Y. C. « An Introduction to the Theory Aeroelasticity », Dover, 1969.
- [10] Bisplinghoff, R. L., Ashley, H., Halfman, R. L. « Aeroelasticity », Dover, 1996.
- [11] François, B., « Couplage fluide/structure par une approche modale », Centrale paris, Novembre 2009.
- [12] Davis, B. R., «Techniques To Assess Acoustic-Structure Interaction in Liquid Rocket Engines », PhD thesis, Duke University, 2008
- [13] ZOUARI, RAFIK., «Détection Précoce d'Instabilité Aéroélastique des Structures Aéronautiques ». Thèse de doctorat en Sciences. Université de Rennes 1, Novembre 2008.
- [14] Bae, J.S., Kim, J.Y., Lee, I., Matsuzaki,Y. and Inman, D.J., «Extension of flutter prediction parameter for multimode flutter systems ». Journal of Aircraft, Vol. 42, No. 1 (2005), page 285-288.

Références bibliographiques

- [15] Zhao, Y.H., « Flutter suppression of a high aspect-ratio wing with multiple control surfaces », Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2009.
- [16] BARIÉFD, A.F., FELT, L.R., « Aeroelasticity a merging of technologies », society of flight test engineers *7th Annual Symposium*, 1976.
- [17] DOIN, A., « analyse des systèmes aéroélastiques bouclés en configuration de rétroaction application au phénomène de battement », Département génie électrique école polytechnique, Montréal, 2001.
- [18] PAGWIWOKO, C.P., « vibrations aéroélastique des surfaces portantes », phd, Ecole centrale de LYON, 1990-1991.
- [19] TEWARI, A., « Aerorossoelasticity : Modeling and control », Springer-Verlag, USA, 2015.
- [20] MADI.I., LEBAZ.L., « Etude et Commande d'un Système Aéroélastique Instationnaire Via la Fonction de Wagner », Thèse de Master en Aéronautique, Université Saad Dahlab De Blida, 2016.
- [21] ROTELLA, F., « Commande des systèmes linéaires à plusieurs entrées », Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes ,2003.
- [22] WANG,Z., BEHAL,A., MARZOCCA,P., « Adaptive and Robust Aeroelastic Control of Nonlinear Lifting Surfaces with Single/Multiple Control Surfaces » , Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of Central Florida, 2010.
- [23] SHAMS, Sadr Lahidjani, M.H., Haddadpour,H., « Nonlinear aeroelastic response of slender wings based on Wagner function », Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Iran,2008.
- [24] ALAZARD, D., « régulation LQ/LQG »,Notes de cours, SUPAERO.
- [25] BENLATRECHE,A., « Contribution à la commande robuste H_∞ de systèmes à grande échelle d'enroulement de bandes flexibles ». Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, 26 Janvier 2007.
- [26] ZAMES,G., « Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximations». IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 26, issue N°4, 1981
- [27] LAVIGNE,L., « Outils d'analyse et de synthèse des lois de commande robustes des systèmes dynamiques plats », Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, 17 Juin 2003.

Références bibliographiques

- [28] SCORLETTI, G., FROMION, V., « Introduction à la commande multivariable des systèmes : méthodes de synthèse fréquentielle H_∞ », Cours AU32 du Master Recherche ESCI 2A UFR de Sciences, Université de Caen/Basse Normandie, France, 2007.
- [29] LAHMER, « Implantation expérimentale de la commande robuste par un contrôleur H_∞ », Mémoire de Magister, Université de Batna, 12 Janvier 2011.
- [30] APKARIAN, P., « Eléments de la théorie de la commande robuste »
- [31] AMARA, N., CHAIBERRAS, M., « Etude et commandes LQG, H_∞ dédiées à un UAV type voilure fixe », Mémoire de Master, Université Saad Dahleb Blida, 2016.
- [32] BERTRAND, X., « Modélisation aérodynamique des surfaces de contrôle de la voilure d'un avion de transport » Thèse de Doctorat en Dynamique des fluides, Université de Toulouse, 11 décembre 2008.
- [33] MAHGOUN, M.S., « Application de la commande H_∞ aux systèmes linéaires perturbés », Thèse de magister en Électronique Spécialité : Automatique. Université Ferhat Abbas Sétif. 24 octobre 2010.
- [34] Wen, Y., Hui, Z., Jun, T., De-kun, Y., « Design of Robust Controller for PMSM Drivers », 2010 IEEE International Conference on Electrical and Control Engineering.
- [35] SENECHAL, D., « mécanique II » phq 310, Département de physique Faculté des sciences Université de Sherbrooke, 1^{er} décembre 2013.
- [36] NAIM, R., « Commande robuste par H_∞ des systèmes multivariables », Thèse pour obtenir le magister en Électronique Spécialité : Automatique. Université Badji Mokhtar Annaba. 2008.
- [37] Granjon, Y., « Automatique systèmes linéaires non linéaire à temps continu, à temps discret », DUNOD.

A.1. Les équations de Lagrange

Introduction

Quand nous voulons utiliser les lois de Newton pour développer les équations du mouvement d'une particule ou d'un système, il faut faire attention à inclure toutes les forces du système. La Forme de Lagrange des équations du mouvement que nous tirons ici a l'avantage que nous pouvons ignorer toutes les forces qui ne font aucun travail (par exemple, les forces de frottement, les forces des connexions inextensibles) [35].

Dans le cas des systèmes conservateurs (par exemple, des systèmes pour lesquels l'énergie totale reste constante), la méthode de Lagrange nous donne une procédure automatique pour obtenir les équations du mouvement, il suffit seulement de calculer l'énergie cinétique et potentielle du système.

A.1.1. Degrés de liberté

Avant de procéder à développer les équations de Lagrange, nous devons caractériser nos Systèmes dynamiques d'une manière systématique. La propriété la plus importante pour notre but actuel est le nombre de coordonnées indépendantes que nous devons connaître pour spécifier complètement la position ou la configuration de notre système. On dit qu'un système à n degrés de liberté si exactement les n coordonnées servent à définir complètement sa configuration [35].

A.1.2. Les coordonnées généralisées [35]

Nous pensons généralement aux coordonnées longueurs ou angles. Cependant, tout ensemble de paramètres qui nous permet de spécifier uniquement la configuration du système peut servir comme coordonné. Lorsque nous généralisons le sens de l'expression de cette manière, nous appelons ces nouvelles quantités "les coordonnées généralisées."

La forme générale des équations de Lagrange pour n'importe quel système (conservateur ou non conservateur) est comme suite :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Avec T est l'énergie cinétique de système et Q_i : Représentant la composante des forces extérieures qui travaillent selon de degré de liberté q_i .

A.1.3. Les équations de Lagrange pour les systèmes conservateurs

Si un système est conservateur, le travail effectué par les forces peut être calculé à partir de l'énergie potentielle U . Nous définissons le changement de l'énergie potentielle pendant un petit déplacement comme le négatif du travail effectué par les forces du système pendant le déplacement [36].

Puisque $Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2$ est le travail effectué par les forces, nous avons

$$\delta P = -Q_1 \delta q_1 - Q_2 \delta q_2$$

Nous avons souligné que q_1 et q_2 sont indépendants et, par conséquent, peuvent être variés arbitrairement.

Si $\delta q_1 = 0$ alors on a $\delta P = -Q_2 \delta q_2$ donc :

$$Q_2 = -\frac{\partial P}{\partial q_2}$$

De même, on peut voir que :

$$Q_1 = -\frac{\partial P}{\partial q_1}$$

On remplace Q_2 et Q_1 par leur valeur dans l'équation on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0$$

A.1.4. Les équations de Lagrange pour les systèmes non conservateurs

Pour les systèmes non conservateurs on définit le Lagrangien L comme suivant :

$$L = T - U$$

Où :

- T : est l'énergie cinétique du système en mouvement
- U : est l'énergie potentielle de système

Ce Lagrangien L vérifie pour chacune des coordonnées généralisées q_j :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial d}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

d : représente la fonction de dissipation.

Q_j : Représentant la composante des forces extérieures qui travaillent selon de degré de liberté q_j .

Et pouvant s'obtenir en dérivant le travail virtuel W des forces extérieures :

$$W = \sum_j Q_j U_j \quad \text{Soit} \quad Q_j = \frac{\partial w}{\partial u_j}$$

Avec U_j désignant le champ de déplacement [35].

A.2. La représentation d'état de notre système

A.2.1. Pour le système nominal

Les équations (II.27) et (II.28) développées dans le chapitre 2 de ce mémoire ont abouti à présenter le modèle étudié sous sa forme d'espace d'état qui est la suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

A, B sont les matrices d'état et d'entrée données respectivement :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$d = m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2$$

$$a_{31} = \frac{k_h I_{ea}}{d}$$

$$a_{32} = \frac{k_{\alpha} m_w x_{\alpha} b - \rho V^2 b^3 s C_{m\alpha} m_w x_{\alpha} - \rho V^2 b s C_{l\alpha} I_{ea}}{d}$$

$$a_{33} = \frac{-\rho V^2 b^3 s C_{m\alpha} m_w x_{\alpha} - I_{ea} [C_h + \rho V^2 b s C_{l\alpha}]}{d}$$

$$a_{34} = \frac{C_{\alpha} m_w x_{\alpha} b - \rho V^2 b^4 s C_{m\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right) m_w x_{\alpha} - \rho V^2 b^2 s C_{l\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right) I_{ea}}{d}$$

$$b_{31} = \frac{-\rho V^2 b^3 s C_{m\beta} m_w x_{\alpha} - \rho V^2 b s C_{l\beta} I_{ea}}{d}$$

$$b_{32} = \frac{-\rho V^2 b^3 s C_{m\gamma} m_w x_{\alpha} - \rho V^2 b s C_{l\gamma} I_{ea}}{d}$$

$$d = m_T I_{ea} - (m_w x_{\alpha} b)^2$$

$$a_{41} = \frac{k_h m_w x_{\alpha} b}{d} = \frac{\rho V^2 b^2 s C_{l\alpha} m_w x_{\alpha} - m_T k_{\alpha} + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha}}{d}$$

$$a_{43} = \frac{C_h m_w x_{\alpha} b + \rho V^2 b^2 s C_{l\alpha} m_w x_{\alpha} + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m\alpha}}{d}$$

$$a_{44} = \frac{\rho V^2 b^3 s C_{l\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right) m_w x_{\alpha} - m_T C_{\alpha} + m_T \rho V^2 b^3 s C_{m\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right)}{d}$$

$$b_{41} = \frac{\rho V^2 b^2 s C_{l\beta} m_w x_{\alpha} + \rho V^2 b^2 s C_{m\beta} m_T}{d}$$

$$b_{42} = \frac{\rho V^2 b^2 s C_{l\gamma} m_w x_{\alpha} + \rho V^2 b^2 s C_{m\gamma} m_T}{d}$$

C, D sont les matrices de sortie et de contrôle données respectivement :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A.2.2. Pour le système incertain

En ajoutant les incertitudes et les perturbations on obtient un système augmenté de la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{h} \\ \ddot{\alpha} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ 0 & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & W_3 & 0 \\ 0 & W_4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & d_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$d = m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2$$

$$a_{31} = \frac{k_h I_{ea}}{d}$$

$$a_{32} = \frac{k_{\alpha-nom} m_w x_\alpha b - q_{nom} 2bs (C_{m\alpha} m_w x_\alpha b^2 + C_{l\alpha} I_{ea})}{d}$$

$$a_{33} = \frac{-I_{ea} C_{h-nom} - q_{nom} 2bs [C_{l\alpha} I_{ea} + C_{m\alpha} m_w x_\alpha b^2] \left(\frac{1}{V}\right)}{d}$$

$$a_{34} = \frac{C_\alpha m_w x_\alpha b - q_{nom} 2bs (C_{l\alpha} I_{ea} + C_{m\alpha} m_w x_\alpha b^2) \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{b}{V}\right)}{d}$$

$$a_{41} = \frac{k_h m_w x_\alpha b}{d}$$

$$a_{42} = \frac{q_{nom} 2bs (C_{l\alpha} m_w x_\alpha b + m_T b C_{m\alpha}) - m_T k_{\alpha-nom}}{d}$$

$$a_{43} = \frac{m_T C_{h-nom} m_w x_\alpha b + q_{nom} 2bs (m_T b C_{m\alpha} + C_{l\alpha} m_w x_\alpha b) \left(\frac{1}{V}\right)}{d}$$

$$a_{44} = \frac{-m_T C_\alpha + q_{nom} 2bs (C_{l\alpha} b m_w x_\alpha + m_T b C_{m\alpha}) \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{b}{V}\right)}{d}$$

$$b_{31} = \frac{-I_{ea}}{d}$$

$$b_{32} = -\frac{m_w x_\alpha b}{d}$$

$$b_{33} = \frac{-I_{ea}}{d}$$

$$b_{34} = \frac{m_w x_\alpha b}{d}$$

$$b_{35} = \frac{-q_{nom} 2bs (C_{l\beta} I_{ea} + C_{m\beta} m_w x_\alpha b^2)}{d}$$

$$b_{35} = \frac{-q_{nom} 2bs (C_{l\gamma} I_{ea} + C_{m\gamma} m_w x_\alpha b^2)}{d}$$

$$b_{41} = \frac{m_w x_\alpha b}{d}$$

$$b_{42} = \frac{m_T}{d}$$

$$b_{43} = \frac{m_w x_\alpha b}{d}$$

$$b_{44} = -\frac{m_T}{d}$$

$$b_{45} = \frac{q_{nom} 2bs (C_{m\beta} m_T b + b m_w x_\alpha C_{l\beta})}{d}$$

$$b_{42} = \frac{q_{nom} 2bs (C_{l\gamma} b m_w x_\alpha + C_{m\gamma} m_T b)}{d}$$

$$C_{12} = 2bs C_{l\alpha}$$

$$C_{13} = \frac{2bs C_{l\alpha}}{V}$$

$$C_{14} = 2bsC_{l\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{b}{V} \right)$$

$$C_{22} = 2b^2sC_{m\alpha}$$

$$C_{23} = \frac{2b^2sC_{m\alpha}}{V}$$

$$C_{24} = 2b^2sC_{m\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{b}{V} \right)$$

$$C_{33} = W_3$$

$$C_{42} = W_4$$

$$d_{15} = 2bsC_{l\beta}$$

$$d_{16} = 2bsC_{l\gamma}$$

$$d_{25} = 2b^2sC_{m\beta}$$

$$d_{26} = 2b^2sC_{m\gamma}$$

B.1. Valeurs singulières et norme H_∞

Les valeurs singulières d'une matrice de transfert permettent de généraliser la notion de gain aux systèmes multivariables. Elles permettent également de définir la norme H_∞ d'un système linéaire [33].

a) Valeurs singulières d'une matrice de transfert

Considérons un système linéaire invariant avec un vecteur d'entrée $e(t)$ et un vecteur de sortie $s(t)$ de dimensions respectives m et p et soit $G(s)$ sa matrice de transfert. En réponse à une excitation harmonique $e(t) = Ee^{j\omega t}$, $E \in \mathbb{C}^m$, la sortie du système s'écrit :

$$S(t) = G(j\omega)Ee^{j\omega t} \quad (\text{B.1})$$

Pour un système monovarié, on définit à partir de cette relation le gain du système à la pulsation ω par le module $|G(j\omega)|$. Dans le cas multivariable, on utilise la notion des valeurs singulières, définies comme les racines carrées des valeurs propres de $G(j\omega)$ multipliée par sa transconjuguée.

$$\sigma_i(j\omega) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega) * G(-j\omega)^T)} = \sqrt{\lambda_i(G(-j\omega)^T * G(j\omega))} \quad (\text{B.2})$$

$$i = 1, \dots, \min(m, p)$$

On notera $\bar{\sigma}(G(j\omega))$ la plus grande valeur singulière et $\underline{\sigma}(G(j\omega))$ la plus petite :

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sigma_1(G(j\omega)) \geq \sigma_2(G(j\omega)) \geq \dots \geq \underline{\sigma}(G(j\omega)) \geq 0$$

Remarque : pour un système monovarié, il n'existe qu'une seule valeur singulière, qui est donnée par :

$$\sigma(G(j\omega)) = \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \underline{\sigma}(G(j\omega)) = |G(j\omega)|$$

Quelques propriétés des valeurs singulières sont indiqués ci-dessous où A et B sont des matrices complexes de dimension compatible :

- $\bar{\sigma}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}; \bar{\sigma}_i(\lambda A) = |\lambda| \bar{\sigma}_i(A)$
- $\bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$
- $\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B)$
- $\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}, \underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})}$
- $\underline{\sigma}(\lambda A) = |\lambda| \underline{\sigma}(A)$
- $\underline{\sigma}(A+B) \geq \underline{\sigma}(A) + \underline{\sigma}(B)$
- $\bar{\sigma}(A) \underline{\sigma}(B) \leq \bar{\sigma}(AB)$
- $\bar{\sigma}(A) = \max_{x \in \mathbb{C}^m} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$ (amplification maximale)

- $\underline{\sigma}(A) = \min_{x \in \mathbb{C}^m} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

On peut écrire alors:

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)) \leq \frac{\|s(t)\|_2}{\|e(t)\|_2} \leq \frac{\|G(j\omega)E(j\omega)\|_2}{\|E(j\omega)\|_2} \leq \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

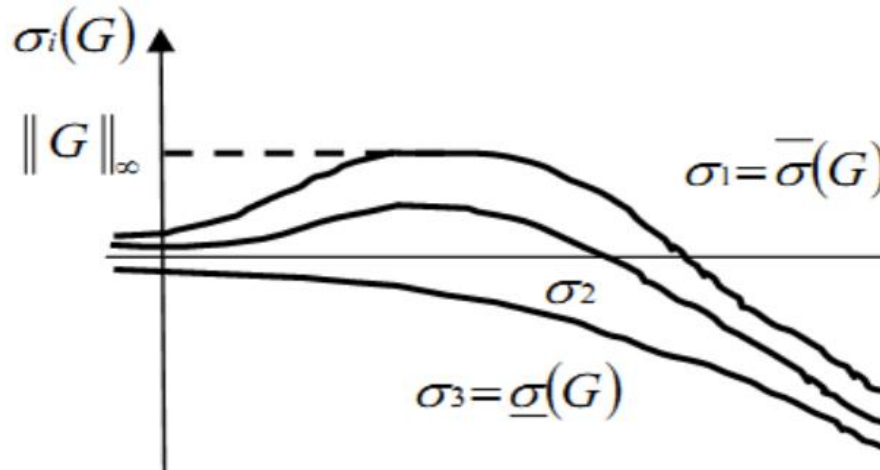


Figure B.1 : Valeurs singulières d'une matrice de transfert

Toute matrice complexe $A \in \mathbb{C}^{p \times m}$ admet une décomposition en valeurs singulières, qui s'écrit :

$$\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_m \end{bmatrix} \quad \text{si } p = m$$

$$A = V\Sigma W^* \quad \text{avec } \Sigma = \text{diag}\left[\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\} \ 0_{p \times (m-p)}\right] \quad \text{si } p < m$$

$$\Sigma = \text{diag} \left[\begin{array}{c} \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} \\ 0_{(p-m) \times m} \end{array} \right] \quad \text{si } p > m$$

Où V et W sont des matrices unitaires : $VV^* = V^*V = I_p$ et $WW^* = W^*W = I_m$

b) Norme H_∞ d'un système linéaire invariant

Soit un système linéaire invariant (stationnaire) décrit par la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (B.3)$$

Avec $x(t)$ est le vecteur d'état, $u(t)$ le vecteur d'entrée, $y(t)$ est le vecteur de sortie, A la matrice d'état, B la matrice d'entrée, C la matrice de sortie et D la matrice de transmission. Avec l'hypothèse des conditions initiales nulles sur le vecteur d'état, la matrice de transfert du système sera de la forme : $G(s) = (sI - A)^{-1}B + D$.

Pour toute matrice $G(s)$ dans RH_∞ , on définit une norme, appelée norme H_∞ , noté $\|G(s)\|_\infty$, celle-ci est calculée de la manière suivante :

➤ **La norme pour les systèmes SISO :**

Pour un système monovariante, la norme H_∞ est le maximum de $|G(j\omega)|$ qui est représenté par le diagramme de Bode, ce qui est conforme à la définition car un système monovariante n'a qu'une seule valeur singulière

$$\|G(s)\|_\infty = \max |G(j\omega)| = \sigma(G(j\omega))$$

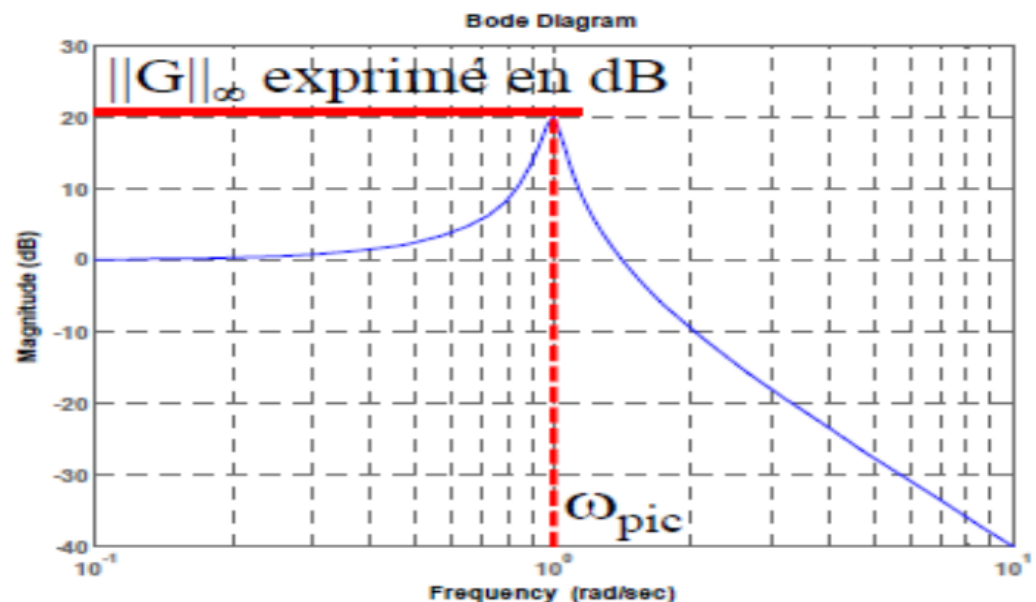


Figure B.2 : Norme H_∞ d'un système SISO

➤ **La norme pour les systèmes MIMO :**

Dans le cas multivariable, on montre que cette norme est le maximum de la plus grande valeur singulière de la matrice de transfert $G(j\omega)$, soit:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup \sigma_{\max}(G(j\omega))$$

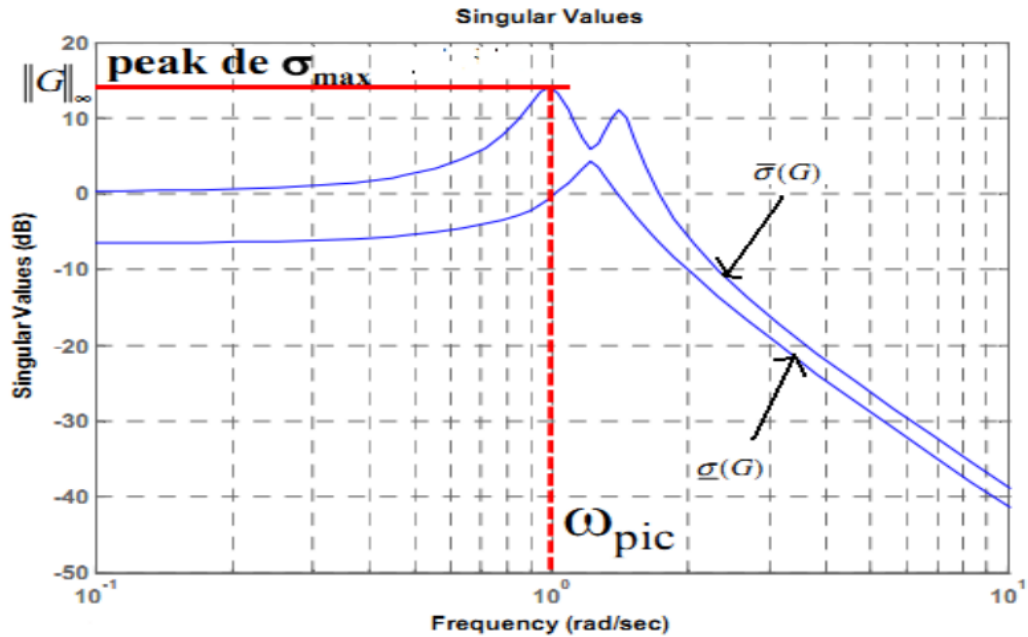


Figure B.3 : Norme H_∞ d'un système MIMO

Propriétés

- $\forall F, G \in C^{p \times m}, \|F(s)G(s)\|_\infty \leq \|F(s)\|_\infty \|G(s)\|_\infty$
- $\forall F, G \in C^{p \times m}, \left\| \begin{bmatrix} F(s) \\ G(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty \geq \sup(\|F(s)\|_\infty, \|G(s)\|_\infty)$
- $\forall F, G \in C^{p \times m}, \|F(s) \ G(s)\|_\infty \geq (\|F(s)\|_\infty, \|G(s)\|_\infty)$

Sur le plan algorithmique la norme H_∞ peut être calculée d'une manière itérative, en recherchant la plus petite valeur de γ pour laquelle la matrice Hamiltonienne $H(\gamma)$ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire. La propriété suivante fournit un majorant γ de la norme H_∞ :

- Soit un réel positif $\gamma > \bar{\sigma}(D)$. Alors $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ si et seulement si la matrice Hamiltonienne :

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}D^T C & -\gamma BR^{-1}B^T \\ \gamma C^T S^{-1}C & -A^T + C^T DR^{-1}B^T \end{bmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} R = D^T D - \gamma^2 I \\ R = DD^T - \gamma^2 I \end{cases}$$

n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.

Pour déterminer la norme du système, il suffit alors de rechercher le plus petit γ tel que $\|G(s)\|_\infty < \gamma$. Pour cela, on peut effectuer une recherche linéaire sur le paramètre γ en faisant par exemple une la méthode de Dichotomie, et voici les étapes à suivre :

- Choix d'un niveau de tolérance ε et de deux valeurs γ_{sup} et γ_{inf} .
- On teste pour $\gamma = 1/2(\gamma_{\text{sup}} + \gamma_{\text{inf}})$ Si H_γ n'a pas de pole sur l'axe imaginaire alors $\gamma_{\text{sup}} = \gamma$ sinon $\gamma_{\text{inf}} = \gamma$.
- Si $(\gamma_{\text{sup}} - \gamma_{\text{inf}}) > \varepsilon$ alors retourner à b, sinon $\|G(s)\|_\infty = 1/2(\gamma_{\text{sup}} + \gamma_{\text{inf}})$.

B.2. Résolution du problème H_∞ standard par équation de Riccati [33]

Cette méthode, aussi connue sous le nom d'algorithme de Glover-Doyle, est apparue à la fin des années 1980, et en générale mise en œuvre numériquement sur un ordinateur et elle repose sur la résolution d'une série d'équation de Riccati. Elle reste aujourd'hui la méthode de résolution la plus utilisée et la plus fiable numériquement.

L'équation de Riccati étant donnée par :

$$XA + A^T X - X P X + Q = 0 \quad (\text{B.4})$$

Avec : $P=P^T$ et $Q=Q^T$

La solution stabilisante X , si elle existe, sera une matrice symétrique et tel que $(A-PX)$ est une matrice stable (ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative). Une telle solution sera notée :

$$X = Ric \begin{pmatrix} A & -P \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Hypothèses

Dans la présente étude, l'approche choisie pour résoudre le problème H_∞ standard nécessite la vérification d'un certain nombre d'hypothèses.

- Hypothèse 1 (H1) : La paire $(A ; B_2)$ est stabilisable et la paire $(C_2 ; A)$ est détectable.

Cette hypothèse classique de toute méthode utilisant les variables d'état. Elle garantit l'existence d'une loi de commande $K(s)$ qui stabilise le système en boucle fermée.

- Hypothèse 2 (H2) : $\text{rang}(D_{12}) = m_2$; et $\text{rang}(D_{21}) = p_2$

Ce sont des conditions suffisantes pour assurer que la matrice de transfert du correcteur soit propre.

- Hypothèse 3 (H3) : $\forall w \in \mathbb{R}, \text{rang} \begin{bmatrix} A - jwI_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2.$

Cette hypothèse garantit que le transfert $P_{z \rightarrow u}(P_{12})$ n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

- Hypothèse 4 (H4) : $\forall w \in \mathbb{R}, \text{rang} \begin{bmatrix} A - jwI_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2.$

Cette hypothèse garantit que le transfert $P_{y \rightarrow w}(P_{21})$ n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire. Il faut noter que la première hypothèse est commune à toutes les méthodes de commande, les autres sont propres à la méthodologie H_∞ , et ces quatre hypothèses doivent être impérativement vérifiées. Et pour obtenir des expressions plus simple, on introduit les conditions supplémentaires suivantes:

$$\begin{aligned} D_{11} &= D_{22} = 0 \\ D_{12}^T(C_1 \ D_{12}) &= (0 \ I_{m_2}) \\ \begin{pmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{pmatrix} D_{21}^T &= \begin{pmatrix} 0 \\ I_{p_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (B.6)$$

Rappelons que pour un système d'ordre n , un système d'équation $\dot{x} = Ax + B_2 u$ est commandable donc stabilisable si la matrice de commandabilité : $[B_2 \ AB_2 \ \dots \ A^{n-1}B_2]$ est de rang plein. De plus, la paire $(C_2; A)$ est observable, donc détectable. Rappelons aussi que pour un système d'ordre n , un système d'équation : $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = C_2 x + Du \end{cases}$ est observable si la matrice

d'observabilité : $\begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A \\ \vdots \\ C_2 A^{n-1} \end{bmatrix}$ est de rang plein.

Il faut noter que, les deux hypothèses passées sont fondamentales. Les trois dernières, quant à elles, sont purement techniques et permettent d'alléger les calculs et surtout de fournir des expressions analytiques relativement simples.

Il est maintenant possible d'écrire le théorème suivant qui permet de trouver un contrôleur pour le problème sous-optimal.

Théorème

Sous les hypothèses H1 – H4 et les conditions (B.6), le problème H_∞ standard a une solution si et seulement si les cinq conditions suivantes sont remplies:

- (i) La matrice $H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.
- (ii) Il existe une matrice symétrique $X_\infty = Ric(H_\infty) \geq 0$. e. $A^T X + XA + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0$
- (iii) La matrice $J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire

(iv) Il existe une matrice symétrique $Y_\infty = Ric(J_\infty) \geq 0$. e. $AY + YA^T + Y(\gamma^{-2}C_1^T C_1 - C_2^T C_2 Y + B_1 B_1^T) = 0$.

(v) $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

Où $\rho(\cdot)$ désigne le module de la plus grande valeur propre (rayon spectral).

Ce théorème nécessite donc la solution de deux équations de Riccati et la dernière condition introduit un lien entre les deux solutions. Enfin la solution du problème standard est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3 : Sous les conditions du théorème 2, le correcteur central $K_c(s)$ stabilisant le système d'une manière interne et satisfait $\|F_l((P(s), K(s))\|_\infty < \gamma$ est décrit par la représentation suivante :

$$K_c = \begin{pmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_2^T \\ -B_2^T X_\infty & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Avec :

$$\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - B_2 B_2^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_2^T C_2$$

$$Z_\infty = (I_N - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$$

La mise en œuvre de cette solution consiste à utiliser tout d'abord les résultats du théorème 2 pour approcher la valeur optimale de γ par Dichotomie (Procédure appelée couramment « γ -itération »), puis on calcule ensuite le correcteur central en appliquant le théorème 3 [33].

C.1.Énoncé du critère de stabilité :

Un système bouclé est stable si et seulement si sa sortie, autrement dit la grandeur physique réelle à réguler reste bornée lorsque l'on injecte un signal borné à son entrée. Dans la pratique, on exige que le signal de sortie converge effectivement vers une valeur finie. D'une manière plus générale, aucun signal dans la boucle de régulation, ne doit osciller ou tendre vers l'infini [36].

La stabilité d'un système asservi est une condition obligatoire : l'instabilité est en général synonyme de destruction du système.

Analyser la stabilité d'un système revient donc à rechercher ses états d'équilibre et à déterminer leur stabilité. Pour ce faire, il faut disposer de critères de stabilité.

La condition mathématique de stabilité s'énonce ainsi :

Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

Considérons le schéma général d'un système asservi représenté sur la **Figure (C.1)**. Sa fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)} \quad (\text{C.1})$$

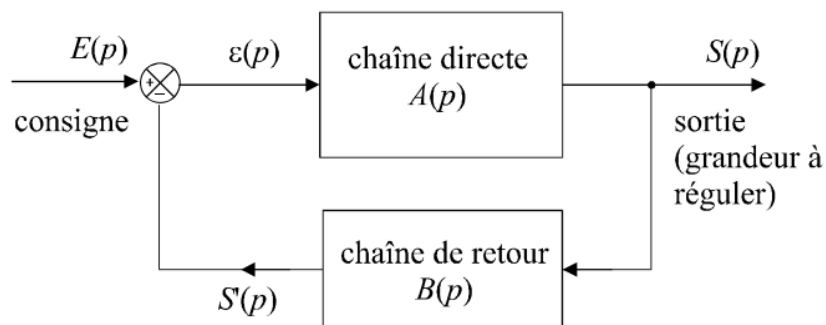


Figure C.1 Schéma général d'une boucle de régulation.

Cette fonction de transfert est une fraction rationnelle de deux polynômes en p , factorisables dans le corps des complexes :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\alpha \prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} \quad (\text{C.2})$$

Les p_i sont les n pôles de $h(p)$. Les z_i sont ses m zéros. Ces pôles et zéros peuvent être réels ou complexes.

Si un échelon de consigne unitaire est placé à l'entrée du système, on a :

$$S(p) = \frac{H(p)}{p} = \frac{\alpha \prod_{j=1}^m (p - z_j)}{p \prod_{i=1}^n (p - p_i)} \quad (\text{C.3})$$

Imaginons une décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle et séparons, dans cette décomposition, les termes correspondant à des pôles réels r et ceux correspondant à des pôles complexes: $\tau_K + j \omega_K$

$$S(p) = \frac{a}{p} + \sum_i \frac{b_i}{p - r_i} + \sum_k \frac{b_k}{p - (\tau_k + j\omega_k)} \quad (\text{C.4})$$

La transformée inverse de $S(p)$ est :

$$s(t) = au(t) + \sum_i b_i e^{r_i t} + \sum_k b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t} \quad (\text{C.5})$$

Cette expression nous montre déjà que la présence d'un pôle réel positif r_i introduit dans le signal de sortie, une exponentielle croissante tendant vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. Le système ne peut donc pas être stable s'il existe un pôle réel positif.

Par ailleurs, les termes $b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t}$ peuvent s'écrire :

$$b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t} = b_k e^{\tau_k t} b_k e^{j\omega_k t} \quad (\text{C.6})$$

Ces termes, en se recombinaient avec les termes $b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t}$ (la présence d'un pôle complexe entraîne obligatoirement la présence de son conjugué), vont donner naissance à des termes de la forme :

$$e^{\tau_k t} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t) \quad (\text{C.7})$$

Les termes de ce type ne peuvent converger vers une valeur finie que si la partie réelle τ_k des pôles correspondant est négative. La présence d'un pôle complexe à partie réelle positive entraîne donc l'instabilité du système.

En rassemblant les deux cas, on montre bien que le système ne peut être stable que si tous ses pôles sont à partie réelle négative [37].

C.2. Une approche quasi intuitive : la stabilité BIBO (bounded input-bounded output)

Un système est stable au sens BIBO (ou encore au sens entrée/sortie) si et seulement si, quelle que soit l'état : $x_0 = x(0)$, pour toute entrée 'u' bornée, la sortie 'y' est bornée.

Une autre définition de la BIBO-stabilité, peut être donnée : en notant $y^*(t)$ la réponse impulsionnelle du modèle, ce dernier est BIBO-stable si et seulement s'il existe un scalaire 'k' vérifiant :

$$0 < k < \infty \text{ Et } \int_0^{\infty} y^*(\tau) d\tau \leq k \quad (\text{C.8})$$

C.3. Notion de robustesse des systèmes [36]

Un système asservi est robuste s'il reste stable, tout en assurant des bonnes performances, en présence des différents types d'incertitude.

Théorème du petit gain

Le théorème du petit gain présente un résultat extrêmement important pour étudier la stabilité en boucle fermée, il se base sur la notion de norme des systèmes. C'est une méthode plus restrictive mais aussi plus légère à mettre en œuvre, elle donne une condition suffisante facile à tester qui permet de conclure à la stabilité interne du type de la Figure(C.2).

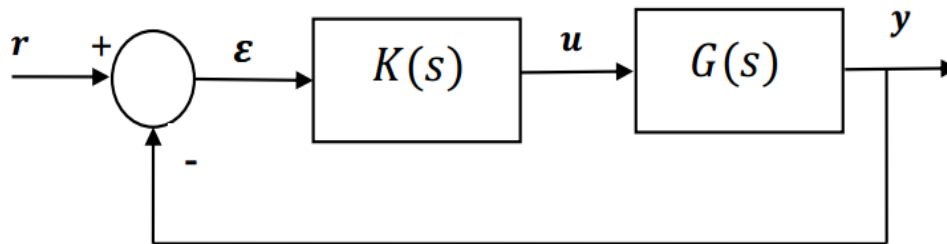


Figure C.2 : Schéma classique d'un système de commande bouclé.

Théorème

Etant donné un asservissement à retour unitaire stable en boucle ouverte alors le système en boucle fermée est stable si : $\|L\|_{\infty} = \max \bar{\sigma}(L(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega$

Où $\bar{\sigma}$ est la valeur singulière maximale de $L(j\omega) = K * G$ calculée à la pulsation ω .

Définitions

- ❖ Stabilité nominale : Nous distinguons deux définitions pour la stabilité nominale :
 - La stabilité externe qui exige que toute entrée bornée u devra produire une sortie bornée y
 - La stabilité interne est plus large et exige que tout signal injecté en n'importe quel point de la boucle génère une réponse bornée en tout autre point.
- ❖ Stabilité robuste: La stabilité est dite robuste si, en plus de la nominale, la stabilité de tous les systèmes atteignables par les perturbations est garantie.
- ❖ Performances nominales: Un asservissement est performant s'il réagit rapidement, rejette les perturbations et suit avec précision la consigne.
- ❖ Performances robustes: Un système bouclé satisfait le critère de robustesse en performances si les conditions de performances nominales sont vérifiées pour toute une classe de modèles de procédés caractérisés par des incertitudes structurées ou non.