

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département de Mécanique

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Construction

CONTRIBUTION A LA PLANIFICATION OPTIMALE DES ROBOTS COOPERANTS

Par

BOUGUERRA Abdelhamid

Devant le jury composé de :

A. AIAD	Maître de conférences, U. de Blida	Président
A. BELAIDI	Maître de conférences, U. de Boumerdes	Examineur
A. ALLALI	Maître de conférences, U. de Blida	Examineur
M. OUALI	Professeur, U. de Blida	Rapporteur

Blida, Avril 2005

RESUME

La coopération des robots est traitée dans ce mémoire. La première partie concerne l'étude dynamique d'un système de deux robots sériels tenant un objet rigide dans l'espace tridimensionnel en boucle fermée. Les efforts actionneurs sont calculés à travers un exemple concret. Quand à la deuxième partie, une optimisation cinématique basée sur les splines cubiques est traitée pour la détermination de la trajectoire optimale.

Mots clés : 2 robots - modélisation dynamique - coordination optimale - splines cubiques.

ABSTRACT

Robots work cooperation is being dealt with in this study. Its first part concerns system dynamics of a pair of robots holding a rigid body in 3D space forming a closed chain. Joints strains are computed using a real example, while its second part is the kinematics optimization based upon the cubic spline method used to find the optimal trajectory.

Keywords: Two robots – dynamic modelisation – optimal coordination – cubic spline.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

Mon défunt père qui s'est sacrifié pour notre réussite,

Ma mère,

Ma femme et mes trois enfants Fayçal, Mouncef et Riadh,

Mon frère, mes sœurs et tous mes neveux,

Ainsi qu'à tous ceux qui me sont chers.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été élaboré au département de mécanique de l'université de Blida, laboratoire de recherche STRUCTURE, en collaboration avec le laboratoire de mécanique appliquée de l'école militaire polytechnique de Bordj El-Bahri. Aussi, je saisis cette opportunité pour adresser mes vifs remerciements à l'ensemble du personnel et plus particulièrement au Colonel YOUSNADJ Ali sans oublier le Lt. Moussa HADDAD qui m'a permis de m'initier au domaine de la robotique, de m'orienter dans le thème de mon sujet et qui m'a consacré beaucoup de son temps précieux.

Que Monsieur M. OUALI trouve ici toute ma gratitude pour avoir accepté de diriger ce travail.

Je remercie également Messieurs AIAD, BELAIDI et ALLALI pour avoir accepté de juger ce mémoire.

Que tous ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin, à l'élaboration de ce travail, trouvent ici toute ma reconnaissance.

Enfin, mes remerciements s'adressent à tous mes amis et collègues de travail.

LISTE DES FIGURES, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Exemples de chaînes polyarticulées.....	8
Figure 1.2	Schéma d'une articulation prismatique.....	8
Figure 1.3	Schéma d'une articulation rotoïde.....	9
Figure 1.4	Schéma d'un manipulateur à chaîne ouverte simple.....	12
Figure 1.5	Repérage de Denavit-Hartenberg.....	12
Figure 1.6	Bilan des efforts au niveau articulaire.....	27
Figure 2.1	Polygone des solutions possibles dans la méthode d'optimisation du plan de phase.....	38
Figure 3.1	Schéma de 2 robots tenant un objet rigide dans l'espace tridimensionnel en boucle fermée.....	44
Figure 4.1	Schéma de 2 robots plans tenant un objet.....	59
Figure 4.2	Bilans des efforts généralisés au niveau des organes terminaux de 2 robots.....	79
Figure 5.1	Représentation du meilleur temps de transfert (avec respect des contraintes).....	97
Figure 5.2	Critère de performance avec temps de transfert minimum.....	98
Figure 5.3	Critère de performance mixte temps-efforts quadratiques.....	100
Figure 5.4	Formes de $q(\lambda)$, $q'(\lambda)$ et $q''(\lambda)$	103
Figure 5.5	Mouvement optimal trouvé par la méthode SC (exemple1).....	105
Figure 5.6	Coordonnées articulaires optimisées du robot1 (exemple 1).....	106

Figure 5.7	Vitesses articulaires optimisées du robot1 (exemple 1).....	106
Figure 5.8	Accélérations articulaires optimisées du robot1 (exemple 1).....	106
Figure 5.9	Coordonnées articulaires optimisées du robot 2 (exemple 1).....	107
Figure 5.10	Vitesses articulaires optimisées du robot 2 (exemple 1).....	107
Figure 5.11	Accélérations articulaires optimisées du robot 2 (exemple 1).....	107
Figure 5.12	Mouvement optimal trouvé par la méthode SC (exemple 2).....	109
Figure 5.13	Coordonnées articulaires optimisées du robot1 (exemple 2).....	109
Figure 5.14	Vitesses articulaires optimisées du robot1 (exemple 2).....	109
Figure 5.15	Accélérations articulaires optimisées du robot1 (exemple 2).....	110
Figure 5.16	Coordonnées articulaires optimisées du robot 2 (exemple 2).....	110
Figure 5.17	Vitesses articulaires optimisées du robot 2 (exemple 2).....	110
Figure 5.18	Accélérations articulaires optimisées du robot 2 (exemple 2).....	111
Figure 5.19	Mouvement optimal trouvé par la méthode SC (exemple 3).....	112
Figure 5.20	Coordonnées articulaires optimisées du robot1 (exemple 3).....	112
Figure 5.21	Vitesses articulaires optimisées du robot1 (exemple 3).....	113
Figure 5.22	Accélérations articulaires optimisées du robot1 (exemple 3).....	113
Figure 5.23	Coordonnées articulaires optimisées du robot 2 (exemple 3).....	113
Figure 5.24	Vitesses articulaires optimisées du robot 2 (exemple 3).....	114
Figure 5.25	Accélérations articulaires optimisées du robot 2 (exemple 3).....	114

TABLE DES MATIERES

RESUME.....
REMERCIEMENTS.....
TABLE DES MATIERES.....
LISTE DES FIGURES.....
INTRODUCTION.....	1
1. GENERALITES ET TERMINOLOGIE.....	6
1.1 Introduction.....	6
1.2 Description des robots.....	7
1.2.1 Articulation (ou joint).....	8
1.2.2 Espace articulaire (ou espace de configuration).....	10
1.2.3 Espace de travail (ou espace opérationnel).....	10
1.2.4 Redondance.....	10
1.2.5 Configurations singulières.....	11
1.2.6 Repérage de Denavit-Hartenberg (D-H).....	11
1.3 Modélisation des bras manipulateurs.....	15
1.3.1 Modélisation géométrique.....	15
1.3.2 Modélisation cinématique.....	17
1.3.3 Modélisation dynamique.....	18
1.4 Planification des mouvements.....	28
1.4.1 Introduction sur la planification.....	28
1.4.2 Définitions.....	28
1.4.3 Fonction objectif.....	29
1.4.4 Contraintes.....	30
2. PROBLEMATIQUE GENERALE.....	33
21 Définition du problème.....	33
2.1.1 Le principe du maximum de Pontriaguine.....	33
2.1.2 La méthode du plan de phase.....	35
2.1.3 La discrétisation du modèle dynamique.....	39
2.1.4 L'approximation polynomiale.....	41
2.1.5 La méthode des champs de potentiel.....	42

2.1.6 Conclusion	42
2.2 Approche proposée.....	42
3. MODELISATION DYNAMIQUE DES ROBOTS COOPERANTS.....	44
3.1 Description de la structure.....	44
3.2 Modèle dynamique.....	45
3.3 Contraintes cinématiques.....	47
3.4 Contraintes dynamiques.....	49
4. APPLICATION A 2 ROBOTS PLANS A 3 DEGRES DE LIBERTE.....	59
4.1 Calcul des transformations.....	61
4.2 Relations entre les coordonnées articulaires des 2 robots.....	63
4.3 Calcul du modèle dynamique.....	66
4.3.1 Calcul des vitesses, des E_{c_i} et des E_{p_i}	66
4.3.2 Calcul des énergies cinétique et potentielle totales.....	72
4.3.3 Calcul des coefficients de l'énergie cinétique totale.....	72
4.3.4 Modèle dynamique total des 2 robots.....	73
4.3.5 Calcul des contraintes cinématiques.....	83
4.3.6 Calcul des contraintes dynamiques.....	87
5. APPLICATION DE LA METHODE PROPOSEE.....	92
5.1 Principe de l'approche de la méthode proposée.....	92
5.1.1 Reformulation des équations.....	92
5.1.2 Modélisation de la forme de la trajectoire.....	102
5.2 Application à 2 robots plans en chaîne fermée	103
CONCLUSION	116
REFERENCES	

INTRODUCTION

Les robots de coopération suscitent plus d'attention dans la recherche et le développement dans le domaine de la robotique. Pour des degrés de coopération, les définitions suivantes peuvent être données :

- La coopération lâche : elle se produit quand plusieurs robots se trouvent dans la même zone de travail sans d'avantage de synchronisation de leurs mouvements (par exemple tâche d'assemblage sur le même objet).
- La coopération étroite : elle exige la coordination synchrone des terminaux des robots impliqués (opération de manutention, de soudage, ou autres...).

Beaucoup d'avantages peuvent être obtenus en appliquant deux manipulateurs (voir plusieurs) à la fabrication industrielle. Ceci se produit, par exemple, quand l'objet à manipuler dépasse la capacité de charge d'un seul robot ou quand les propriétés géométriques de l'objet rendent la manœuvre de ce dernier difficile, voir impossible.

Dans le domaine de la dynamique des robots coopérants, la littérature est très clairsemée. Ce n'est que vers les années 80 que les chercheurs ont commencé à s'y intéresser réellement. Le problème principal de la modélisation dynamique des robots coopérants est la détermination des contraintes cinématiques qui surgissent lors des déplacements. Elles proviennent de la configuration des chaînes fermées, réalisées par l'ensemble des manipulateurs et de l'objet. Jusqu'à récemment, la bibliographie était rare. Depuis, des approches ont été effectuées même si l'applicabilité de certaines d'entre elles reste plutôt limitée [05].

ETAT DE L'ART :

Les premiers travaux se sont plutôt orientés vers la détermination des modèles dynamiques. La nature de la tâche, la liaison entre les manipulateurs et l'objet, la

manipulation de plusieurs objets (travaux de soudage par exemple), mouvement entre ces derniers, l'importance d'un robot qu'on peut donner par rapport à un autre sont autant de données qui peuvent rendre le problème très complexe et la formulation mathématique difficilement généralisable. Ajouté à cela, des exigences liées à la tâche (telles que les limitations de durée d'exécution, de vitesses et d'accélération), liées aux manipulateurs (telles que les limitations des efforts actionneurs afin de ne pas dépasser leur capacité) ou bien liées à l'environnement (telles que les évitements d'obstacles) résument un problème de planification.

J. Wittenberg [57] a développé un algorithme pour la modélisation dynamique d'un système de corps rigides et d'un objet reliés entre eux pour former une chaîne cinématique fermée. Il propose que les contraintes cinématiques doivent être résolues séparément pour chaque manipulateur. Les principales difficultés du problème sont la détermination du nombre de degrés de liberté (ddl) et le choix des coordonnées généralisées afin de présenter le mouvement et la dynamique du système.

J. F. Kleinfinger et W. Khalil [20] ont présenté un autre algorithme et comme [57], ils supposent que les équations de contraintes ont été données à l'avance sous formes analytiques.

M. Vukobratovic et V. Potkonjac [58] proposent quand à eux un modèle qui lie les couples moteurs des deux robots d'une part et les forces généralisées de contact d'autre part. En d'autres termes, ils ne peuvent calculer les couples moteurs que si les forces généralisées de contact sont données et vice-versa. L'inconvénient de cette approche est que l'objet manipulé n'est pas pris en considération, ainsi, quand on change ce dernier, les paramètres du manipulateur qui l'inclut doivent être recalculés. Ce modèle reste peu convenable pour l'exécution.

J. Koivo et M. A. Unseren [04] ont considéré un système de deux bras de coopération de telle manière qu'il n'y ait aucun mouvement relatif entre les pinces de ces derniers et l'objet manipulé. Les équations de contraintes sont obtenues à partir des coordonnées internes des robots. Ils ont établi deux modèles. Le premier est un système d'équations différentielles du deuxième ordre qui lie les couples moteurs aux forces généralisées de contact, le second un autre système d'équations différentielles du

deuxième ordre qui lient les couples moteurs aux coordonnées généralisées et leurs dérivées. L'inconvénient de cette méthode est que dans un espace tridimensionnel, ils débouchent généralement sur des systèmes singuliers dans la majorité des cas.

D. E. Orin et S. Y. Oh [59] traitent l'analyse dynamique de plusieurs robots en contact matériel avec un objet rigide constituant des chaînes cinématiques fermées. Ils déterminent les couples moteurs et les forces généralisées de contact pour une trajectoire imposée en faisant intervenir moins d'équations que d'inconnues. En appliquant la programmation linéaire, ils proposent une solution en prenant des contraintes additionnelles pour résoudre le problème de distribution des forces.

S. Hayati [60] utilise la fonction d'énergie de Lagrange pour la modélisation dynamique du système formé par plusieurs manipulateurs tenant un objet rigide. Les équations du mouvement sont établies pour chaque robot. Des contraintes de position sont incorporées au système en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

G. R. Pennock et B.S. Ryu [61] proposent une formulation dynamique pour deux manipulateurs de coopération de six articulations chacun tenant et déplaçant un corps rigide. Les couples communs sont calculés quand la trajectoire désirée et l'objet sont donnés. Le système est modélisé comme une chaîne cinématique fermée simple. A tout moment, seulement six articulations sont actionnées. Les six restantes sont passives donc, ont des entrées extérieures nulles (type goupille). Cette formulation est basée sur la mécanique newtonienne.

J. Y. S. Luh et Y. F. Zheng [62] déterminent un modèle dynamique pour une chaîne fermée qui se compose d'un objet tenu par deux robots en considérant le premier menant ayant à son bout une paire de pinces et le deuxième mené ayant à son bout une articulation sphérique. Pour des positions, des vitesses et des accélérations communes, les contraintes cinématiques du robot mené sont calculées quand celles du robot menant sont données.

K. Laroussi, H. Hemami et R.E. Goddard [63] ont étudié un procédé de manutention d'un objet pris par 2 robots à chaînes ouvertes simples. Les 2 manipulateurs sont étudiés séparément avec prise en compte des forces appliquées dans le cas d'une trajectoire imposée.

Dans le domaine de la planification des trajectoires des robots coopérants, des études ont été réalisées mais pour des tâches spécifiques.

E. Tabarah [64] s'est intéressé aux procédés manufacturiers tels que la peinture, le soudage et l'ébavurage avec et sans contact entre les 2 objets. La formulation du problème étant différente dans les 2 cas. La trajectoire de l'outil (tenu par le 1^{er} robot) est décomposée en 2 trajectoires conjuguées dans un repère lié à la pièce (tenue par le 2^{ème} robot) en respectant les contraintes de vitesses et d'efforts liées au procédé (tâche avec contact). Cette paire de trajectoires est modélisée par 2 fonctions polynomiales de degré n .

L'objectif de ce mémoire consiste à étudier la dynamique des robots coopérants dans le but de planifier la trajectoire des derniers effecteurs de chaque robot. Vu que les travaux dans ce domaine sont récents, donc relativement limités, on a choisi un système de 2 robots (voir plus) tenant un objet rigide dans l'espace tridimensionnel formant une boucle fermée. La dynamique d'un tel système sera calculée à travers un exemple de 2 robots plans. La détermination du modèle dynamique final demande un volume de travail relativement important aussi, nous avons traité la planification cinématique (positions vitesses et accélérations). Toutefois, nous avons abordé le problème de la planification cinématique seulement, les courbes qui donnent la variation des couples articulaires sont perturbées du fait de la redondance du modèle géométrique inverse et que les facteurs des forces généralisées et des couples articulaires représentent des matrices singulières.

Notre mémoire a été organisé de la manière suivante :

La première partie de notre travail traite des généralités de la robotique : la terminologie utilisée, les modélisations géométrique, cinématique et dynamique des bras manipulateurs et enfin les notions générales de la planification des mouvements.

La deuxième partie porte sur les méthodes de planification existantes avec le choix retenu et les motivations qui nous ont incité à le faire.

Dans la troisième partie, nous avons choisi un modèle dynamique adapté à 2 robots coopérants tenant un objet rigide dans l'espace tridimensionnel travaillant en boucle fermée. Nous avons développé tous les calculs jusqu'à l'obtention de 2 modèles finaux

quand les robots sont découplés formant ainsi un système de 2 manipulateurs distincts à chaînes ouvertes simples et quand ils sont couplés formant ainsi une boucle fermée avec l'objet manipulé.

La quatrième partie traite le cas concret de 2 robots plans avec un programme de calcul des couples articulaires.

Nous avons consacré la cinquième partie à la planification de trajectoires pour des robots travaillant en coopération.

La conclusion générale reflète fidèlement les résultats des chapitres sus-cités avec des analyses et des commentaires. On donne aussi les perspectives envisagées.

CHAPITRE 1

GENERALITES ET TERMINOLOGIE

1.1 Introduction

L'exécution par des acteurs autres que lui-même de tâches ou d'activités qu'il considère comme aliénantes, fatigantes, dangereuses ou simplement ennuyeuses ou non gratifiantes, figure parmi les aspirations les plus profondes de l'homme. Tout d'abord, ce fut les esclaves. L'apparition progressive des machines puis la notion d'automatisation a permis de modifier la nature des travaux effectués par les hommes jusqu'à l'émergence des robots au cours des années 60.

Origines du robot : la 1^{ère} origine est que le robot doit se substituer totalement à l'homme. On parle de robot de substitution. La 2^{ème} origine est que le robot doit être le prolongement de l'homme (cette idée prend sa source dans la notion d'outil) pour exécuter des tâches impossibles ou dangereuses à mains nues. L'amélioration des outils de préhension (par exemple : pinces) a conduit au robot de coopération. Le robot capable d'exécuter seul des tâches complexes ne sera opérationnel qu'à long terme.

Originalités du robot : la machine-outil est capable d'exécuter une tâche. Pour que l'on puisse parler de robot, 2 autres propriétés doivent être satisfaites :

- La versatilité (ou flexibilité) : le même robot est capable d'accomplir des tâches diverses mais aussi d'accomplir une tâche donnée de plusieurs manières.
- L'auto-adaptativité : il doit être capable d'accomplir une tâche correctement même s'il rencontre des situations imprévues.

Dans la pratique, la forte majorité des robots ne possèdent que la 1^{ère} propriété (robots de 1^{ère} génération). Ceux qui possèdent la 2^{ème} propriété sont les robots de 2^{ème} et 3^{ème} génération, classés en fonction de la puissance de leur système perceptif et de leur faculté de raisonnement.

Structure d'un robot : il se compose de 7 parties principales : la structure mécanique articulée, la source d'énergie, les actionneurs, les transmissions, les capteurs internes, les capteurs externes et le système de commande.

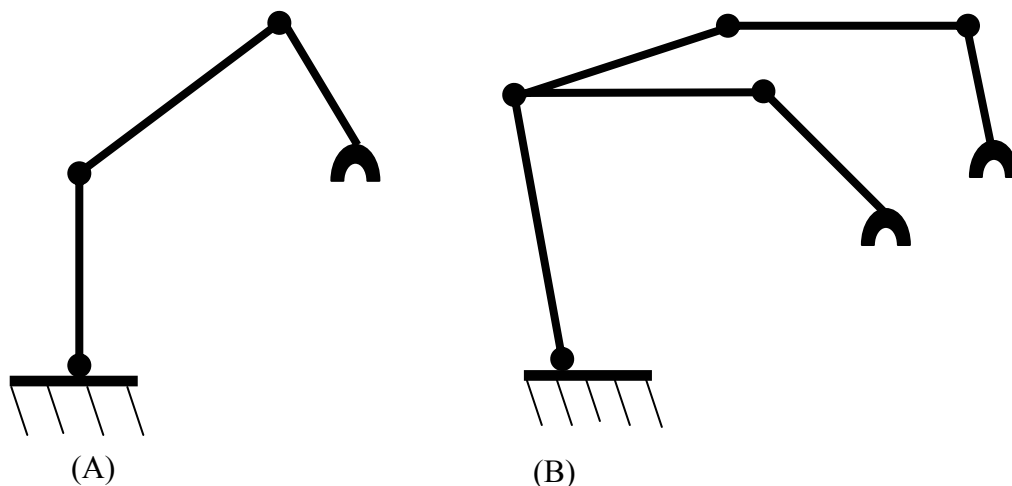
La structure mécanique articulée représente le squelette composé de segments où s'intercalent des articulations. La mobilité d'un segment par rapport à un autre s'exprime en terme de degrés de liberté. La structure se compose de 3 parties : le véhicule pour les robots mobiles (absent pour les robots à base fixe), le porteur et l'organe terminal qui est généralement une pince à 2 ou 3 doigts que l'on nomme préhenseur. La source d'énergie peut être d'origine pneumatique, hydraulique ou électrique.

Utilisation des robots : les robots industriels sont presque toujours des robots de substitution utilisés dans 3 classes principales d'applications :

- manipulation de pièces (opération de transfert,...)
- manipulation d'outils (opération de soudage,...)
- assemblage

1.2 Description des robots

On distingue 4 types de chaînes polyarticulées :



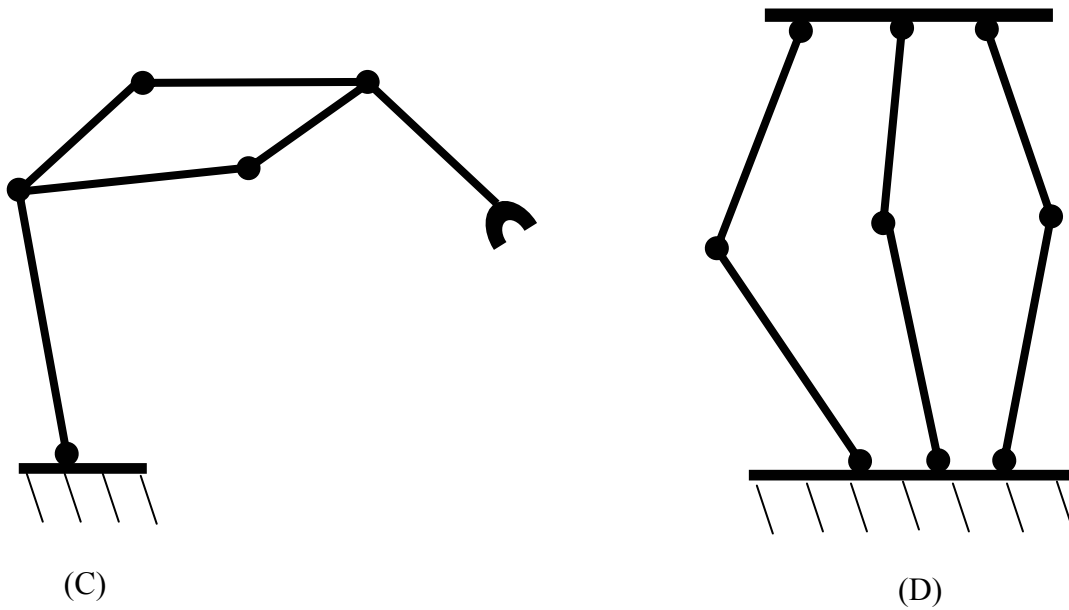


Figure 1.1 : Exemples de chaînes polyarticulées

- (A) : structure à chaîne ouverte simple.
- (B) : structure à chaîne arborescente.
- (C) : structure avec fermeture de chaîne.
- (D) : structure parallèle.

Les systèmes polyarticulés sont formés de deux parties :

- Le porteur : qui représente la chaîne cinématique simple ou complexe. Cette chaîne est constituée d'un ensemble de segments reliés entre eux par des articulations ou joints.
- L'organe terminal : dispositif servant à manipuler des outils ou des objets.

1.2.1 Articulation (ou joint)

Une articulation lie deux segments (corps) successifs en limitant le nombre de degrés de liberté de l'un par rapport à l'autre. Soit m le nombre de degrés de liberté résultant appelé aussi mobilité de l'articulation ($0 \leq m \leq 6$). En robotique, dans la majorité des cas, $m = 1$. Ce qui revient à dire que l'articulation est simple. On distingue deux types d'articulations simples :

Articulation prismatique (P ou T) : type glissière. Le mouvement entre les deux corps se réduit à une translation le long d'un axe commun modélisée de la manière suivante :

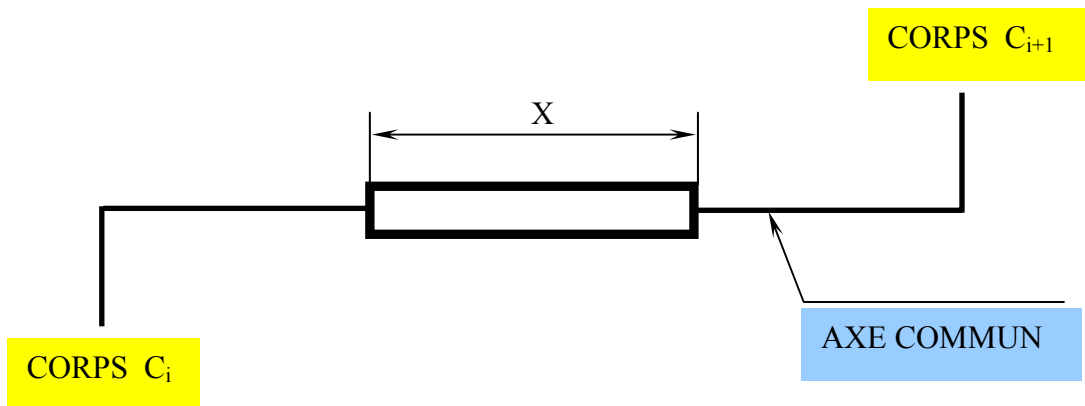


Figure 1.2 : Schéma d'une articulation prismatique

La situation relative entre les deux corps est mesurée par la distance x le long de l'axe.

Articulation rotoïde (R): type pivot. Le mouvement entre les deux corps se réduit à une rotation autour d'un axe commun modélisée de la manière suivante :

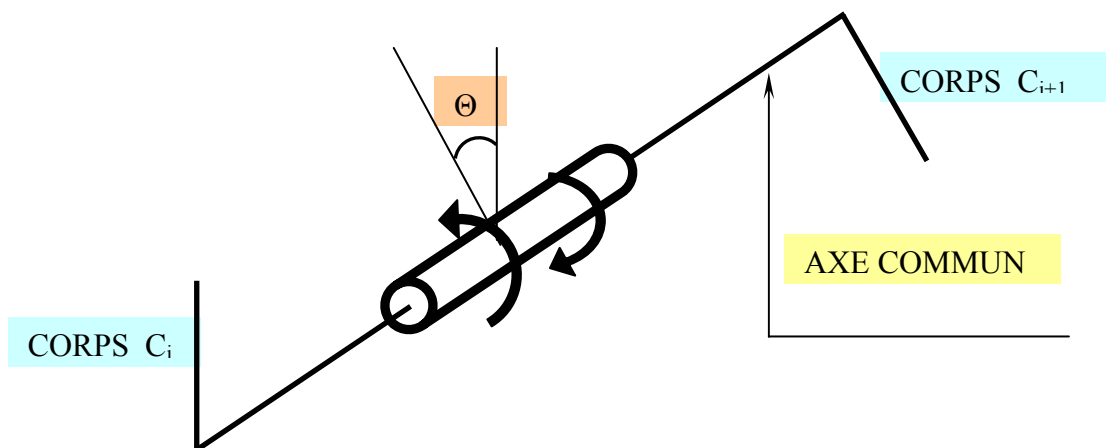


Figure 1.3 : Schéma d'une articulation rotoïde

La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle θ autour de l'axe de l'articulation.

1.2.2 Espace articulaire (ou espace de configuration)

On appelle configuration articulaire (ou simplement configuration) l'état du robot qui représente la situation de ses différents corps. La solution consiste à utiliser des variables articulaires ou coordonnées. L'espace de ces variables est appelé espace articulaire. La dimension de ce dernier est égale au nombre de variables articulaires indépendantes qui correspond au nombre de degrés de liberté de la structure.

Remarque : pour les structures à chaînes ouvertes simples ou arborescentes les variables articulaires sont généralement indépendantes ce qui n'est pas le cas pour les structures à chaînes fermées pour lesquelles il existe des relations entre les variables. On considère qu'un robot à n degrés de liberté dispose de n articulations motorisées (hormis les structures avec fermeture de chaîne)

1.2.3 Espace de travail (ou espace opérationnel)

L'espace opérationnel est celui dans lequel est représentée la situation de l'organe terminal (autant d'espaces opérationnels que d'organes terminaux). La dimension m de cet espace est au maximum égale à 6 : trois variables indépendantes de position et trois variables indépendantes d'orientation.

1.2.4 Redondance

Un robot est redondant quand le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal est inférieur au nombre d'articulations motorisées. A titre d'exemple et pour les chaînes ouvertes simples, les combinaisons qui peuvent donner des structures redondantes sont :

- nombre d'articulations motorisées > 6
- nombre d'articulations rotoïdes d'axes concourants > 3
- nombre d'articulations rotoïdes d'axes parallèles > 3
- nombre d'articulations prismatiques > 3

Remarque : pour une structure comportant plusieurs organes terminaux, on évalue la redondance pour chaque organe terminal. Pour le même organe terminal, on compare le nombre de degrés de liberté de l'espace articulaire avec celui de l'espace opérationnel.

1.2.5 Configurations singulières

Pour tous les robots (redondants ou non) une configuration est singulière si le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal est inférieur à la dimension de l'espace opérationnel.

Remarque : un robot non redondant peut l'être vis à vis de certaines tâches.

1.2.6 Repérage de Denavit-Hartenberg (D-H)

La modélisation des robots de façon systématique et automatique exige une méthode adéquate pour la description de leur morphologie. Plusieurs méthodes et notations ont été proposées : méthode de Denavit-Hartenberg [19], Khalil-Kleifinger [20], méthode de Paul [26], méthode de Megahed [52]. La plus répandue étant celle de Denavit-Hartenberg modifiée plus tard par Khalil-Kleifinger.

Ce repérage convient aussi bien pour les chaînes ouvertes simples, complexes, arborescentes et fermées [18] [22] [23] [24] [25]. Les notions qui vont suivre permettent de mettre en équation tous les modèles de robots.

1.2.6.1 Règles et conventions

- q_i est la variable de l'articulation i .
- C_i représente le corps i .
- Les corps sont supposés rigides, reliés par des articulations (rotoïdes ou prismatiques) idéales, sans jeu mécanique et non élastiques.
- Le repère R_i est lié au corps C_i .
- L'axe z_i du repère R_i est porté par l'axe de l'articulation i .

1.2.6.2 Description des robots à chaînes ouvertes simples

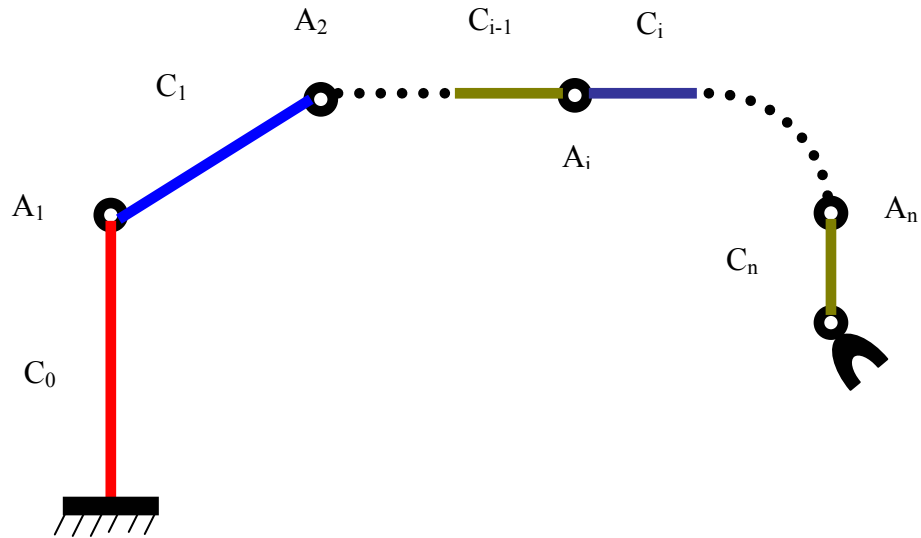


Figure 1.4 : Schéma d'un manipulateur à chaîne ouverte simple

Le robot est composé de n articulations et $n+1$ corps. L'articulation A_i relie le corps C_{i-1} au corps C_i . C_0 est la base du robot, C_n porte l'organe terminal. L'axe x_{i-1} est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_{i-1} et z_i . On introduit 4 paramètres pour exprimer le passage de R_{i-1} à R_i .

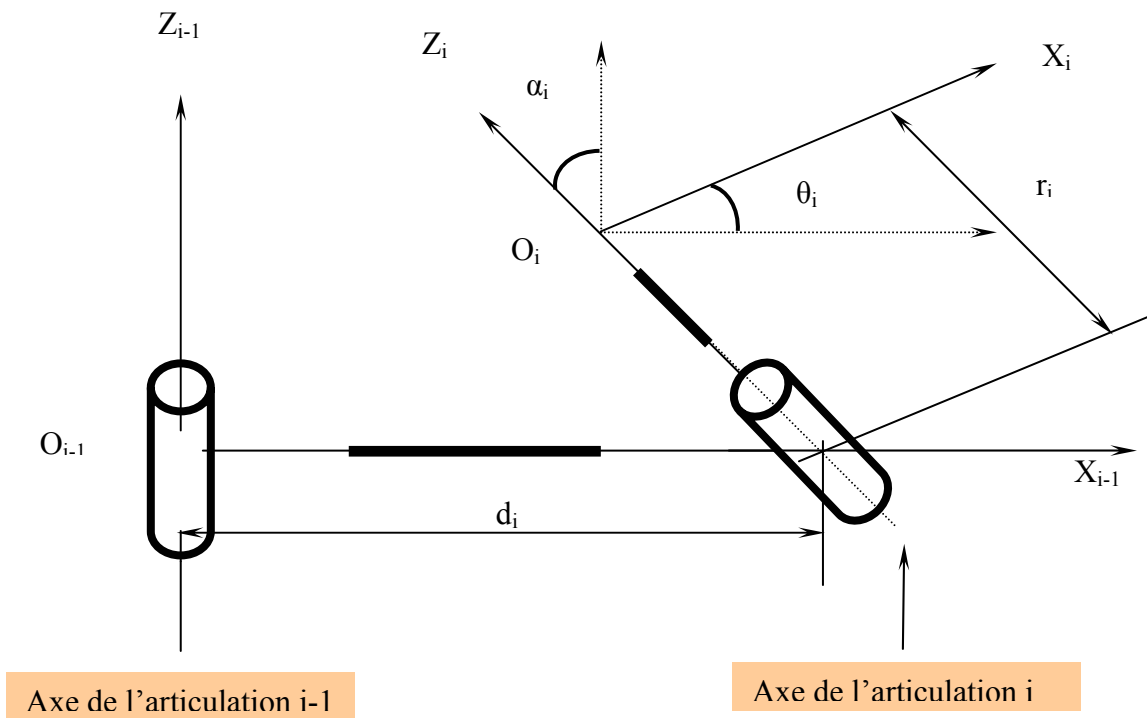


Figure 1.5 : Repérage de Denavit-Hartenberg

- d_i : distance entre z_{i-1} et z_i le long de l'axe x_{i-1} (projection orthogonale de $\overline{O_{i-1}O_i}$ sur l'axe x_{i-1}).
- α_i : angle formé par les axes z_{i-1} et z_i qui correspond à la rotation autour de x_{i-1}
- θ_i : angle formé par les axes x_{i-1} et x_i qui correspond à la rotation autour de z_i
- r_i : distance entre x_{i-1} et x_i le long de l'axe z_i (projection orthogonale de $\overline{O_{i-1}O_i}$ sur l'axe z_i).

Si on prend q_i comme coordonnée généralisée de l'articulation A_i , cela veut dire que si :

$$A_i \text{ est rotoïde} \quad : \quad q_i = \theta_i$$

$$A_i \text{ et prismatique} \quad : \quad q_i = r_i$$

Pour résumer cela, on introduit la variable binaire σ_i telle que :

$$q_i = \overline{\sigma}_i \theta_i + \sigma_i r_i \quad \text{avec} \quad \overline{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$$

$$\sigma_i = 1 \quad \text{si } A_i \text{ est prismatique.}$$

$$\sigma_i = 0 \quad \text{si } A_i \text{ est rotoïde.}$$

En définitive et en utilisant tous les résultats précédents :

$${}^{i-1}T_i = Rot(x, \alpha_i) \cdot Trans(x, d_i) \cdot Rot(z, \theta_i) \cdot Trans(z, r_i) \quad (1.01)$$

$$Rot(x, \alpha_i) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \alpha_i & -s \alpha_i & 0 \\ 0 & s \alpha_i & c \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.02)$$

$$Trans(x, d_i) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.03)$$

$$Rot(z, \theta_i) = \begin{vmatrix} c \theta_i & -s \theta_i & 0 & 0 \\ s \theta_i & c \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.04)$$

$$Trans(x, d_i) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.05)$$

Tout calcul fait, on obtient la matrice de transformation ${}^{i-1}\tilde{\mathbf{T}}_i$:

$${}^{i-1}\tilde{\mathbf{T}}_i = \begin{vmatrix} c \theta_i & -s \theta_i & 0 & d_i \\ c \alpha_i s \theta_i & c \alpha_i c \theta_i & -s \alpha_i & -r_i s \alpha_i \\ s \alpha_i s \theta_i & s \alpha_i c \theta_i & c \alpha_i & r_i c \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.06)$$

Remarque : on peut écrire la matrice ${}^{i-1}\tilde{\mathbf{T}}_i$ de la manière suivante :

$${}^{i-1}\tilde{\mathbf{T}}_i = \begin{vmatrix} & {}^{i-1}A_i & & {}^{i-1}P_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{où : } {}^{i-1}A_i = A(x, \alpha_i) \cdot A(z, \theta_i)$$

La matrice de transformation homogène qui donne le passage de R_{i-1} à R_i sera :

$${}^i\tilde{\mathbf{T}}_{i-1} = \text{Trans}(z, -r_i) \cdot \text{Rot}(z, -\theta_i) \cdot \text{Trans}(x, -d_i) \cdot \text{Rot}(x, -\alpha_i) \quad (1.07)$$

$${}^i\tilde{\mathbf{T}}_{i-1} = \begin{vmatrix} & & & -d_i c \theta_i \\ & & & -d_i s \theta_i \\ & & & -r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.08)$$

1.3 Modélisation des bras manipulateurs

Afin de procéder à la conception, la simulation ou la commande des robots, on dispose de 3 modèles utilisés d'une manière individuelle ou combinée pour réaliser ces modélisations qui sont au nombre de 3 :

- Le modèle géométrique (direct et inverse).
- Le modèle différentiel ou cinématique (direct et inverse).
- Le modèle dynamique (direct et inverse).

1.3.1 Modélisation géométrique

1.3.1.1 Modèle géométrique direct (MGD)

C'est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires. Ces variables sont définies par la matrice unicolonne $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$. La situation de l'organe terminal est définie par la matrice unicolonne formée de m coordonnées telle que :

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T \quad \text{avec} \quad m \leq 6.$$

Le modèle géométrique direct est défini par l'équation :

$$X = F(q) \quad (1.09)$$

Si la structure est ouverte simple ou arborescente, le calcul de X implique celui de l'organe terminal. Si la structure est fermée, il faut ajouter les relations liant les variables articulaires pour la fermeture de chaîne.

1.3.1.2 Modèle géométrique inverse (MGI)

Le modèle géométrique inverse consiste à utiliser les coordonnées articulaires pour calculer les coordonnées opérationnelles (positions désirées de l'organe terminal). C'est l'inverse du MGD :

$$q = F^{-1}(X) \quad (1.10)$$

En général, on n'a pas unicité de la solution au problème du MGI. En pratique, 3 cas peuvent se présenter :

Cas 1 : Lorsqu'on a limitation du nombre de degrés de liberté et de la dimension des segments, l'organe terminal ne pouvant pas accéder à une position désirée, alors, il n'y a pas de solution au problème.

Cas 2 : Lorsque le robot se trouve dans une configuration singulière (redondance locale ou vis à vis de la tâche), l'organe terminal ne pouvant pas effectuer certaines tâches (limitation des déplacements et/ou des rotations) alors, il perd un certain nombre de degrés de liberté et les solutions au problème sont infinies.

Cas 3 : les solutions à la forme explicite de l'équation $q = F^{-1}(X)$ sont en nombre fini. En général, pour résoudre le MGI, il n'existe pas de méthodes analytiques mais d'autres formes de résolution adaptées à des classes cinématiques données [24], [48]. (Méthode de PIEPER, méthode de PAUL, etc...). Ce modèle présente un grand intérêt pour les robots programmés par apprentissage ou langage de haut niveau.

1.3.2 Modélisation cinématique

1.3.2.1 Modèle différentiel direct (MDD)

Il décrit les variations élémentaires des coordonnées opérationnelles en fonction des variations élémentaires des coordonnées articulaires :

$$dX = J(q) dq \quad (1.11)$$

Le terme $J(q)$ désigne le jacobien (matrice de dimension $m \times n$) :

$$J(q) = \frac{\partial X}{\partial q} \quad (1.12)$$

Ce modèle permet de déterminer par itération les coordonnées opérationnelles en fonction des coordonnées articulaires. Si on remplace le calcul différentiel par le calcul des dérivées par rapport au temps, le MDD devient :

$$\dot{X} = J(q) \dot{q} \quad (1.13)$$

Où : \dot{X} représentent les vitesses opérationnelles et \dot{q} les vitesses articulaires. Sous forme matricielle l'équation devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Où $J_{ij} = \frac{\partial F_i(q)}{\partial q_j}$ $i = (1, \dots, m)$ et $j = (1, \dots, n)$.

1.3.2.2 Modèle différentiel inverse (MDI)

A partir d'une configuration q , on calcule la différentielle articulaire dq pour satisfaire une différentielle des coordonnées opérationnelles dX imposée. Si les différentielles sont remplacées par les dérivées par rapport au temps, on constitue le modèle cinématique inverse.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{ij} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{X} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Pour obtenir le modèle différentiel inverse, on peut soit dériver le modèle géométrique inverse (PAUL) (méthode analytique) soit inverser le modèle différentiel direct d'une manière plus générale (résolution analytique ou numérique).

1.3.3 Modélisation dynamique

Elle exprime une équation mathématique qui donne la relation entre les couples (et/ou les moments) appliqués aux actionneurs et les positions, les vitesses et les accélérations articulaires. Elle est de la forme :

$$\Gamma = g(q, \dot{q}, \ddot{q}, F) \quad (1.16)$$

Où :

- Γ : vecteur des couples (et/ou forces) des actionneurs (On considère un couple pour une articulation rotoïde et une force pour une articulation prismatique).
- q : vecteur des positions articulaires.
- \dot{q} : vecteur des vitesses articulaires.
- \ddot{q} : vecteur des accélérations articulaires.
- F : forces extérieures (et couples) exercées par l'organe terminal.
-

Conventionnellement, on dira que la relation (1.16) représente le modèle dynamique inverse ou tout simplement le modèle dynamique. Alors le modèle dynamique direct est celui qui exprime les accélérations en fonction des positions, des vitesses et des couples des actionneurs.

$$\ddot{q} = h(q, \dot{q}, \Gamma, F) \quad (1.17)$$

Pour obtenir le modèle dynamique des robots, on dispose de deux formalismes qui sont les plus souvent utilisés. Il s'agit de :

- Formalisme de LAGRANGE
- Formalisme de NEWTON – EULER

Nous allons utiliser les notations suivantes :

a_j : vecteur unitaire sur l'axe x_j .

F_j : résultante des forces extérieures sur le corps C_j .

f_j : force extérieure sur C_j par son antécédent en O_j .

f_{ij} : force exercée par le corps C_j sur l'environnement en O_j .

g : accélération de la pesanteur.

G_j : centre de gravité du corps C_j .

τ_j : tenseur d'inertie du corps C_j par rapport au repère parallèle à R_j d'origine G_j

${}^j\tau_j$: tenseur d'inertie du corps C_j par rapport au repère R_j .

Où :

$${}^j\tau_j = \begin{vmatrix} \iiint (y^2+z^2)dm & -\iiint (xy)dm & -\iiint (xz)dm \\ -\iiint (xy)dm & \iiint (x^2+z^2)dm & -\iiint (yz)dm \\ -\iiint (xz)dm & -\iiint (yz)dm & \iiint (x^2+y^2)dm \end{vmatrix}$$

On le note aussi :

$${}^j\tau_j = \begin{vmatrix} xx_j & xy_j & xz_j \\ xy_j & yy_j & yz_j \\ xz_j & yz_j & zz_j \end{vmatrix}$$

l_j : vecteur $O_{j-1}O_j$ qui lie les origines des repères R_{j-1} et R_j .

m_j : masse du corps C_j .

N_j : résultante des moments extérieurs exercés sur C_j autour de G_j .

n : couple exercé sur C_j par son antécédent.

n_{ij} : couple exercé par C_j sur l'environnement.

ρ_j : vecteur O_jG_j .

v_j : vecteur vitesse absolue du point O_j .

v_{gj} : vecteur vitesse absolue du point G_j .

ω_j : vecteur vitesse de rotation du point G_j .

\dot{v}_j : vecteur accélération absolue du point O_j .

\dot{v}_{gj} : vecteur accélération absolue du point G_j .

$\dot{\omega}_j$: vecteur accélération de rotation du point G_j .

1.3.3.1 Formalisme de LAGRANGE

Il décrit les équations en terme de travail et d'énergie du système qui donne ce qui suit quand l'effort extérieur sur l'organe terminal est supposé nul [25] [29] [30] [48].

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{avec } i = (1, \dots, n) \quad (1.18)$$

L est la fonction de LAGRANGE égale à la différence entre l'énergie cinétique totale (E) et l'énergie potentielle totale (U) du système. L'expression de l'énergie cinétique est :

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} \quad (1.19)$$

A : matrice d'inertie du robot d'éléments génériques A_{ij}

A_{ij} : sont fonction des variables articulaires q .

Avec : $i = (1, \dots, n)$ et $j = (1, \dots, n)$.

Le lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} - U \quad (1.20)$$

Comme l'énergie potentielle est aussi fonction des variables articulaires q , alors, d'après l'équation (1.18) et après dérivation :

$$\Gamma_i = [A_{i1}, \dots, A_{in}] \ddot{q} + \dot{q}^T \left[\frac{\partial A_{i1}}{\partial q}, \dots, \frac{\partial A_{in}}{\partial q} \right] \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \right] \dot{q} + \frac{\partial u}{\partial q_i} \quad (1.21)$$

Ou encore :

$$\Gamma_i = \left[A_{i1} \ddot{q}_1 + \dots + A_{in} \ddot{q}_n \right] + \left[B_i^{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + B_i^{1n} \dot{q}_1 \dot{q}_n + B_i^{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dots + B_i^{(n-1)n} \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \right] + \left[C_{i1} \dot{q}_1^2 + \dots + C_{in} \dot{q}_n^2 \right] + Q_i \quad (1.22)$$

Elle s'écrit sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\Gamma = A\ddot{q} + B\dot{q}\dot{q} + C\dot{q}^2 + Q \quad (1.23)$$

B : matrice des termes de Coriolis d'éléments génériques B_i^{jk} de dimension $[n \times n(n-1)/2]$.

C : matrice des termes centrifuges d'éléments génériques C_{ij} de dimension $(n \times n)$.

$$\dot{q}\dot{q} = \left[\begin{array}{cccc} \dot{q}_1 \dot{q}_2 & \dots & \dot{q}_1 \dot{q}_n & \dot{q}_2 \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n \end{array} \right]^T$$

$$Q = \left[\begin{array}{c} Q_1, \dots, Q_n \end{array} \right]^T : \text{vecteur des forces de gravité.}$$

On identifie les expressions des équations (1.21) et (1.22) :

$$B_i^{jk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \quad (1.24)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i} \quad (1.25)$$

$$Q_i = \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \quad (1.26)$$

Où A , B , C et Q représentent les coefficients dynamiques du robot qui sont fonction des paramètres géométriques et inertiels du mécanisme. Avec les équations d'un système mécanique articulé, on forme un système de n équations différentielles couplées, non linéaires et du second ordre.

Propriétés des coefficients dynamiques :

Termes de Coriolis :

$$B_i^{jk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \quad (1.27)$$

Avec :

$$B_i^{jl} = -B_j^{ij} \quad \text{si } j \leq i \text{ et } j \leq l$$

$$B_i^{jj} = -B_j^{ij} \quad \text{si } j \leq i$$

$$B_i^{jk} = 0 \quad \text{si } j \leq l$$

Termes centrifuges :

$$C_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{jj}}{\partial q_i} \quad (1.28)$$

Avec :

$$C_{ij} = -\frac{1}{2} B_j^{ij} \quad \text{si } j > i$$

$$C_{ii} = 0$$

Pour calculer les dérivées et dérivées partielles du lagrangien, on utilise la méthode de UICKER qui fait appel aux notions essentielles suivantes :

- La notion de matrice de passage homogène.
- La notion de matrice d'inertie homogène.

On prend un système à chaîne cinématique simple et un corps S_i qui fait partie de cette chaîne. Soient les repères successifs $R_i (O_i, x_i, y_i, z_i)$ et M_i un point de S_i tels que :

$$\overrightarrow{O_0 M_i} = [O_0 M_i]$$

$$\overrightarrow{O_i M_i} = [O_i M_i]$$

$$[O_0 M_i] = \begin{bmatrix} O \\ T_i \end{bmatrix} [O_i M_i] \quad (1.29)$$

Avec : $\|O_i M_i\| = \text{cste}$ si le corps S_i est rigide.

En dérivant l'équation (1.29), on obtient :

$$V^0(M_i) = \frac{d^o}{dt} [O_0 M_i] = \frac{d^o}{dt} \left(\begin{bmatrix} O_{T_i} \end{bmatrix} [O_i M_i] \right) \quad (1.30)$$

Quant à l'énergie cinétique, elle sera égale à :

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} \int [V^0(M_i)]^2 dm \quad (1.31)$$

Alors :

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} \text{Trace} \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i \text{Trace} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial O_{T_i}}{\partial q_k} \end{bmatrix} \left[\int_{S_k} [O_i M_i] [O_i M_i]^T dm \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial O_{T_i}}{\partial q_l} \end{bmatrix} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (1.32)$$

$[J_i] = \int_{S_i} [O_i M_i] [O_i M_i]^T dm$ représente la pseudo-matrice d'inertie d'ordre (4x4) relative à S_i

dans le repère R_i de la chaîne cinématique considérée. Elle est constituée par :

Le moment d'ordre 0 de S_i qui est en fait m_i (masse de S_i).

Le moment d'ordre 2 de S_i qui est $m_i \times \overrightarrow{O_i G_i}$ (G_i est le centre de masse de S_i).

Le moment d'ordre 2 de S_i qui est la matrice d'inertie $[I_i]$ en O_i dans le repère R_i .

$$[I_i] = \begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

$$[J_i] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) & -I_{xy} & -I_{xz} & m\bar{x} \\ -I_{xy} & \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) & -I_{yz} & m\bar{y} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}) & m\bar{z} \\ m\bar{x} & m\bar{y} & m\bar{z} & m \end{vmatrix} \quad (1.33)$$

L'expression de E_{ck} sera alors :

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} \text{Trace} \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i \text{Trace} \left(\begin{array}{c} \left[\frac{\partial O_{Ti}}{\partial q_k} \right] \\ [J_i] \\ \left[\frac{\partial O_{Ti}}{\partial q_l} \right] \end{array} \right) \ddots q_k q_l \quad (1.34)$$

Comme l'énergie cinétique totale est $E_C = \sum_{i=1}^n E_{Ci}$ donc :

$$E_C = \frac{1}{2} \text{Trace} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i \text{Trace} \left(\begin{array}{c} \left[\frac{\partial O_{Ti}}{\partial q_k} \right] \\ [J_i] \\ \left[\frac{\partial O_{Ti}}{\partial q_l} \right] \end{array} \right) \ddots q_k q_l$$

$$E_C = \frac{1}{2} \text{Trace} \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i \left[\sum_{i=\max(k,l)}^n \text{Trace} \left(\begin{array}{c} \left[\frac{\partial O_{Ti}}{\partial q_k} \right] \\ [J_i] \\ \left[\frac{\partial O_{Ti}}{\partial q_l} \right] \end{array} \right) \right] \ddots q_k q_l \quad (1.35)$$

On pose :

$$A_{kl} = \sum_{i=\max(k,l)}^n \text{Trace} \left(\begin{array}{c} \left[\frac{\partial O_{Ti}}{\partial q_k} \right] \\ [J_i] \\ \left[\frac{\partial O_{Ti}}{\partial q_l} \right] \end{array} \right)$$

Alors :

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{kl} \ddots q_k q_l$$

$$E_C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix} [A] \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

On peut donner les expressions des coefficients dynamiques :

Expression de la matrice d'inertie :

Les éléments qui constituent la matrice $[A]$ sont exprimés de la manière suivante :

$$A_{kl} = \sum_{i=\max(k,l)}^n \text{Trace} \left(\left[\begin{array}{c} \Omega_{Ok} \\ \Omega_{Ol} \end{array} \right] {}^O T_i \left[J_i \right] \left[\begin{array}{c} \Omega_{Ol} \\ \Omega_{Ok} \end{array} \right] {}^O T_i \right)^T \quad (1.37)$$

Expression de la matrice des termes de Coriolis :

$$B_{i,kl} = \sum_{i=\max(k,l)}^n \text{Trace} \left(\left[\begin{array}{c} \Omega_{Ok} \\ \Omega_{Ol} \end{array} \right] \Omega_{Ol} {}^O T_i \left[J_i \right] \left[\begin{array}{c} \Omega_{Ok} \\ \Omega_{Ol} \end{array} \right] {}^O T_i \right)^T \quad (1.38)$$

Expression de la matrice des termes centrifuges :

$$C_{kl} = \sum_{i=\max(k,l)}^n \text{Trace} \left(\left[\begin{array}{c} \Omega_{Ol} \\ \Omega_{Ok} \end{array} \right] \Omega_{Ol} {}^O T_i \left[J_i \right] \left[\begin{array}{c} \Omega_{Ol} \\ \Omega_{Ok} \end{array} \right] {}^O T_i \right)^T \quad (1.39)$$

Expression du vecteur force de gravité :

L'expression de l'énergie cinétique étant $E_p = \sum_{i=1}^n (-m_i g T_i u_i)$ avec

$$G_i = - \frac{\partial E_p}{\partial q_i}$$

$$\text{Donc on a : } G = \sum_{i=1}^n -m_i g \left[\frac{\partial {}^O T_i}{\partial q_l} \right] \quad \text{ou encore : } G_i = \sum_{i=1}^n -m_i g {}^O T_i \Omega_{oi}$$

Avec $\Omega_{oi} = {}^O T_i \Omega_{ii} {}^O T_i$ et

$$\Omega_{ii} = \begin{vmatrix} 0 & -(1-\sigma_i) & 0 & 0 \\ (1-\sigma_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\sigma_i = 0$ si la liaison est rotoïde.

$\sigma_i = 1$ si la liaison est prismatique.

1.3.3.2 Formalisme de NEWTON-EULER

Il est adapté à la construction du modèle dynamique inverse. Il permet le dimensionnement de la structure et des actionneurs. Le caractère itératif de ce formalisme réduit le temps de calcul par rapport au formalisme de LAGRANGE [25] [29] [30] [48]. Il est basé sur une double récurrence : une récurrence avant de la base du robot vers l'effecteur en utilisant la formule de composition pour calculer les vitesses et accélérations donc, le torseur dynamique et une récurrence arrière de l'effecteur vers la base pour calculer les couples des actionneurs en exprimant le bilan des efforts pour chaque corps. La composition des vitesses donne :

$$\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_{j-1} + \overline{\sigma}_j \dot{q}_j \mathbf{a}_j \quad (1.40)$$

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{j-1} + \boldsymbol{\omega}_{j-1} \wedge \mathbf{L}_j + \sigma_j \dot{q}_j \mathbf{a}_j \quad (1.41)$$

On dérive ces 2 expressions par rapport au temps pour obtenir la composition des accélérations :

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} + \overline{\sigma}_j \left(\ddot{q}_j \mathbf{a}_j + \boldsymbol{\omega}_{j-1} \wedge \dot{q}_j \mathbf{a}_j \right) \quad (1.42)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_j = \dot{\mathbf{v}}_{j-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} \wedge \mathbf{L}_j + \boldsymbol{\omega}_{j-1} \wedge \left(\boldsymbol{\omega}_{j-1} \wedge \mathbf{L}_j + \sigma_j \dot{q}_j \mathbf{a}_j \right) + \sigma_j \left(\ddot{q}_j \mathbf{a}_j + \boldsymbol{\omega}_{j-1} \wedge \dot{q}_j \mathbf{a}_j \right) \quad (1.43)$$

On arrange l'expression (1.43) comme suit :

$$\dot{\mathbf{v}}_j = \dot{\mathbf{v}}_{j-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1} \wedge \mathbf{L}_j + \boldsymbol{\omega}_{j-1} \wedge \left(\boldsymbol{\omega}_{j-1} \wedge \mathbf{L}_j \right) + \sigma_j \left(\ddot{q}_j \mathbf{a}_j + 2\boldsymbol{\omega}_{j-1} \wedge \dot{q}_j \mathbf{a}_j \right) \quad (1.44)$$

On peut utiliser cette dernière expression pour déterminer la vitesse du centre de gravité, à savoir :

$$\dot{\mathbf{v}}_{Gj} = \dot{\mathbf{v}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \wedge \left(\boldsymbol{\omega}_j \wedge \mathbf{s}_j \right) \quad (1.45)$$

Ce qui permet d'obtenir le torseur dynamique :

$$\mathbf{F}_j = m_j \dot{\mathbf{v}}_{Gj} \quad (1.46)$$

$$\mathbf{N}_j = \boldsymbol{\tau}_j \dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \wedge \left(\boldsymbol{\tau}_j \wedge \boldsymbol{\omega}_j \right) \quad (1.47)$$

F_j et N_j représentent respectivement la somme totale des forces extérieures et la somme totale des moments extérieurs. On initialise la récurrence par :

$$\dot{\omega}_0 = 0 \quad , \quad \omega_0 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{v}_0 = 0$$

Bilan des efforts :

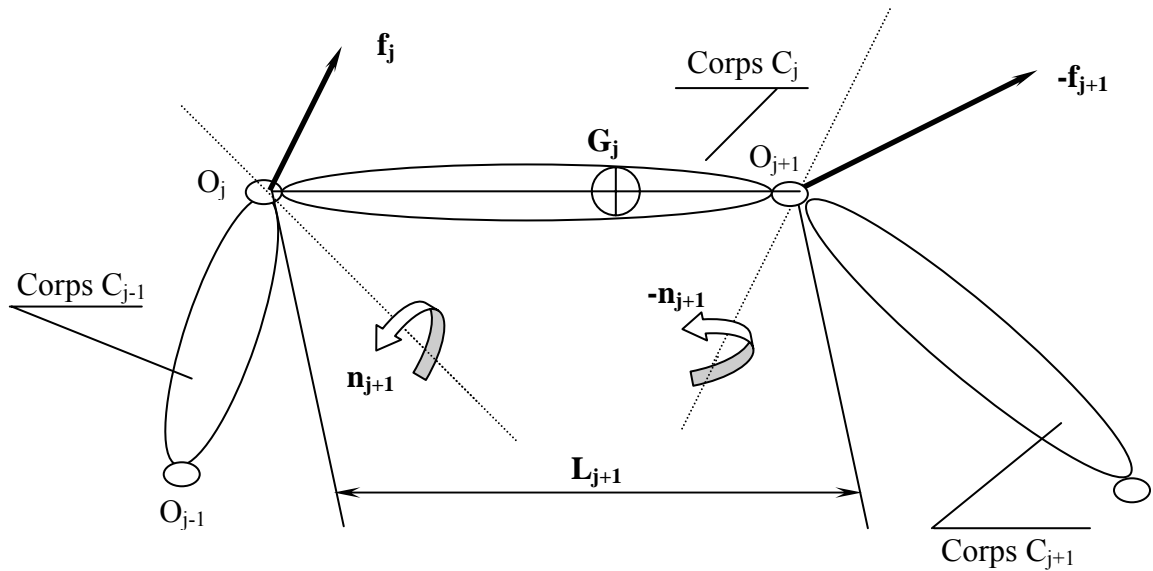


Figure 1.6 : Bilan des efforts au niveau articulaire

Les équations qui composent la récurrence arrière sont obtenues à partir du bilan des forces sur chaque corps:

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{f}_j - \mathbf{f}_{j+1} + m_j \mathbf{g} \quad (1.48)$$

$$\mathbf{N}_j = \mathbf{n}_j - \mathbf{n}_{j+1} + (\mathbf{s}_j - \mathbf{L}_{j+1}) \wedge \mathbf{f}_{j+1} - \mathbf{s}_j \wedge \mathbf{f}_j \quad (1.49)$$

Pour faire intervenir l'effort de la gravité sans le prendre en compte dans le bilan des forces, on prend $\dot{v}_0 = -\mathbf{g}$. Les équations deviennent :

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{F}_j + \mathbf{f}_{j+1} \quad (1.50)$$

$$\mathbf{n}_j = \mathbf{N}_j - \mathbf{n}_{j+1} \mathbf{L}_{j+1} \wedge \mathbf{f}_{j+1} + \mathbf{s}_j \wedge \mathbf{F}_j \quad (1.51)$$

Cette récurrence est initialisée par les efforts f_{n+1} et n_{n+1} notés respectivement f_m et n_m qu'exerce l'organe terminal sur l'environnement en projetant les vecteurs f_j et n_j sur l'axe du mouvement. On obtient les couples σ_j aux actionneurs et cela, suivant la nature de l'articulation j .

1.4 Planification des mouvements

1.4.1 Introduction sur la planification

L'utilisation courante des robots manipulateurs dans l'exécution des tâches répétitives fait que les recherches se sont naturellement orientées vers la planification de mouvements minimisant une fonction de coût relative essentiellement au rendement du robot et à son fonctionnement. Cette idée générale a conduit à la formulation de problèmes de planification dans lesquels des grandeurs physiques telles que la durée de parcours, les efforts actionneurs ou la puissance consommée soient optimisés individuellement ou globalement.

Selon la tâche que doit accomplir le robot, on peut classer les différents mouvements selon deux catégories de trajectoires : l'une libre, l'autre imposée [31] [32].

1.4.2 Définitions

1.4.2.1 Trajectoire libre

Appelée aussi mouvement point à point ou mouvement de transfert. Seules les configurations initiale et finale doivent être respectées en plus des obstacles à éviter. La trajectoire qui relie ces deux configurations est alors libre. Ceci peut être le cas de la manutention d'objets ou de soudure point à point.

1.4.2.2 Trajectoire imposée

De tels mouvements sont rencontrés lorsque l'outil en fin de chaîne agit sur son environnement sans interruption et selon un parcours déterminé. Il est nécessaire de spécifier la trajectoire de l'effecteur. On citera par exemple les travaux de découpage ou de soudure en continu. Dans ces deux cas, il existe généralement plusieurs trajectoires possibles. Il faut profiter de cette multiplicité de choix pour adopter la meilleure solution afin d'accomplir la tâche. Pour les mouvements libres, l'optimisation a pour but de rechercher la trajectoire à suivre ainsi que les modalités pour la parcourir tandis que pour les mouvements imposés, l'optimisation ne porte que sur les modalités de la parcourir.

1.4.3 Fonction objectif

Le choix du critère de performance est déterminant quant à la qualité du mouvement et conditionne l'efficacité des méthodes de résolution du problème. Le critère à minimiser peut se présenter sous 3 formes distinctes : une fonctionnelle de type intégrale, de type terminal ou de type mixte. Bien que formulés différemment, ces 3 problèmes sont équivalents. La fonctionnelle intégrale est la mieux adaptée pour les mouvements de transfert. Les critères à optimiser dans ce cas se mettent sous la forme générale suivante :

$$F(u, T) = \int_0^T L(x(t), u) dt \quad (1.52)$$

Où :

L : représente le lagrangien qui prend la forme selon l'objectif visé.

$x(t)$: vecteur des variables d'état à l'instant $t \in [0, T]$.

u : vecteur qui représente la commande à optimiser, considéré comme une inconnue du problème.

T : temps de transfert total entre les configurations initiale et finale.

Pour le cas d'une planification de mouvements libres, u représente les couples moteurs, $x(t)$ les variables articulaires de position $q(t)$, de vitesse $\dot{q}(t)$ et d'accélération $\ddot{q}(t)$.

Dans ce cas, le critère s'écrit de la manière suivante :

$$F(\Gamma, T) = \int_0^T L\left(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \Gamma\right) dt \quad (1.53)$$

Pour générer des mouvements de qualité, on peut citer parmi les critères les plus significatifs la durée de parcours, mixte temps - efforts quadratiques et mixte avec puissance quadratique.

1.4.3.1 Critère durée de parcours

Il suscite l'intérêt d'un bon nombre de chercheurs roboticiens [39] car pour les robots qui travaillent d'une manière cyclique, la rapidité d'exécution (rentabilité) est un critère très significatif. La dynamique du robot n'est pas représentée directement dans cette

formulation. Ceci conduit à des commandes optimales discontinues. Les couples articulaires ne sont pas représentés dans le lagrangien d'où une forme simple comparée aux autres.

$$L \left(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \Gamma \right) = 1 \quad (1.54)$$

Alors :

$$F(T, \Gamma) = F(T) = \int_0^T dt = T \quad (1.55)$$

1.4.3.2 Critère mixte temps-efforts quadratiques

Comparativement au critère précédant qui implique des discontinuités lors des transferts de charges, donc, nuisible au bon fonctionnement du manipulateur, ce critère est un moyen efficace pour régulariser les vitesses et les couples. En introduisant un facteur de pondération μ , on peut favoriser soit le temps, soit les efforts (couples) [46]. Le lagrangien prend la forme suivante :

$$L \left(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \Gamma \right) = \mu + \frac{1-\mu}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Gamma_i(t)}{\Gamma_{i,max}} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \mu \in] 0,1 [\quad (1.56)$$

$\Gamma_{i,max}$ représente le couple maximum délivré par la $i^{\text{ème}}$ articulation. Quand μ se rapproche de 0, l'optimisation se fait en faveur des couples moteurs tandis que quand μ est au voisinage de 1, on privilégie plutôt l'optimisation du temps. Le choix de μ détermine alors le compromis entre ces deux quantités. Ceci conduit à une certaine souplesse d'exécution en tenant compte de la durée de la tâche. Néanmoins, on rencontre des difficultés dans la formulation de ce critère vu l'existence des efforts dans le lagrangien.

1.4.4 Les contraintes

Pour que la planification du mouvement soit possible, on tient compte des capacités technologiques du robot et des spécificités de la tâche à effectuer. Ceci implique une restriction des solutions. Pour planifier un mouvement, on s'intéresse aux contraintes suivantes :

1.4.4.1 Contraintes sur les débattements

Du fait de la conception de la liaison et de la limitation des mouvements entre des butées mécaniques, ces derniers ne doivent pas dépasser les capacités de la structure. Tout ceci se traduit par la formulation suivante :

$$\forall t \in [0, T] , |q_i(t)| \leq q_{imax} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.57)$$

t représente le temps.

$q_i(t)$ représente les coordonnées généralisées de la $i^{\text{ème}}$ articulation.

q_{imax} représente la valeur maximale de la $i^{\text{ème}}$ articulation (valeur intrinsèque du robot).

1.4.4.2 Contraintes cinématiques

La conception des articulations et de la technologie des actionneurs implique une limitation des caractéristiques cinématiques notamment pour les objets manipulés sensibles aux survitesses, accélérations et freinages (par exemple des liquides qui peuvent se déverser). Les formulations se traduisent par :

vitesses :

$$\forall t \in [0, T] , \left| \dot{q}_i(t) \right| \leq \dot{q}_{imax} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.58)$$

accélérations :

$$\forall t \in [0, T] , \left| \ddot{q}_i(t) \right| \leq \ddot{q}_{imax} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.59)$$

\dot{q}_{imax} et \ddot{q}_{imax} sont imposées par les caractéristiques techniques et la nature de la tâche à effectuer.

1.4.4.3 Contraintes sur les couples moteurs

Les capacités maximales des actionneurs impliquent la formule suivante [17]:

$$\forall t \in [0, T] , |\Gamma_i(t)| \leq \Gamma_{imax} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.60)$$

1.4.4.4 Contraintes dues aux obstacles dans l'espace opérationnel

L'encombrement du à la présence d'autres robots fait que la planification tient compte de ces obstacles. Ces contraintes rendent le problème très complexe. Pour éviter les

collisions et si g traduit la distance entre le robot et l'obstacle, la formulation mathématique est traitée dans [35] [36] [37]. En plus des dysfonctionnements déjà cités, la génération des mouvements peut aussi entraîner des phénomènes de survitesses au niveau des articulations d'où, la nécessité de minimiser les puissances articulaires [47]. La puissance instantanée est telle que :

$$P(t) = \Gamma(t) \cdot \dot{q}(t) \quad (1.61)$$

Le lagrangien s'écrit dans ce cas :

$$L \left(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \Gamma \right) = \mu + \frac{1-\mu}{2} \left[\alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Gamma_i(t)}{\Gamma_{imax}} \right)^2 + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i(t)}{P_{imax}} \right)^2 \right] \quad (1.62)$$

Où : $P_{imax} = \Gamma_{imax} \cdot \dot{q}_{imax}$

\dot{q}_{imax} représente la vitesse articulaire maximale tolérée de la $i^{\text{ème}}$ articulation. Quand à α , il joue le même rôle que μ mais sur le terme des puissances quadratiques si on veut accorder plus ou moins d'importance à la minimisation de ces dernières.

$$g [q(t)] \leq 0 \quad (1.63)$$

CHAPITRE 2 PROBLEMATIQUE GENERALE

2.1 Définition du problème

En robotique, la résolution du problème de planification occupe une place très importante dans le domaine de la recherche. Les tâches de plus en plus complexes imposées aux manipulateurs ont poussé les chercheurs à simplifier le problème et à proposer des solutions sub-optimales. Dans notre cas, le problème peut être posé de la manière suivante : étant donné 2 robots qui sont régis par une équation dynamique, qui doivent transporter une charge d'une position initiale à une position finale avec les vitesses $\dot{q}_i(t)$, $\dot{q}_{i'}(t)$, il faut trouver les commandes $\Gamma_i(t)$, les trajectoires $q_i(t)$, $q_{i'}(t)$ et l'instant final t_f [47] (l'origine temporelle prise égale à 0). Pour résoudre ce problème, on dispose de plusieurs approches qui peuvent être classées en deux catégories :

- Méthodes classiques (ou déterministes)
- Techniques stochastiques (basées sur des concepts de statistiques et de probabilités). (voir appendice D).

Parmi les méthodes classiques les plus couramment utilisées, on peut citer :

2.1.1 Le principe du maximum de PONTRIAGUINE

Il permet une prise en compte directe et exacte des contraintes aux bornes sur toute variable de commande. La plupart des travaux utilisent ce principe quand cette dernière représente l'effort actionneur [20] [21]. La formulation mathématique de base de cette approche est :

a) Modèle d'état :

La forme générale des équations du mouvement du système dynamique est de la forme :

$$\dot{X}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_r), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.01)$$

- X est le vecteur des variables d'état constitué des paramètres de positions et de vitesses articulaires.
- u est le vecteur des commandes (couples articulaires).

L'équation (2.01) constitue un système de $2n$ équations différentielles non linéaires du 1^{er} ordre. Le travail du système est évalué par la fonctionnelle :

$$L = \int_0^T f_0(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u_1, u_2, u_3, \dots, u_r) dt \quad (2.02)$$

La commande u sera déterminée dans la limite des contraintes imposées pour que la fonctionnelle (2.02) soit minimisée.

$u \in \theta$ (θ est l'intervalle des commandes admissibles).

On désigne par l la valeur minimale de (2.02) et on introduit les notations suivantes :

$$\psi_0 = -1, \quad \psi_i = -\frac{\partial l}{\partial x_i} \quad i=1, 2, \dots, n, \quad H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i$$

La fonction H représente le hamiltonien. A chaque instant, sur la trajectoire optimale, la commande optimale maximise H ($H_{max} = 0$). Il est impossible d'utiliser directement ce résultat étant donné que les fonctions ψ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont inconnues.

b) Enoncé du principe :

$$\max H = \max \sum_{i=0}^n \psi_i f_i = 0 \quad \text{quand} \quad u \in \theta \quad (2.03)$$

Les composantes ψ_i vérifient les équations suivantes :

$$\psi_0 = -1 \quad (2.04)$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = - \sum_{j=0}^n \psi_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (2.05)$$

c) Conditions aux limites :

Si les équations du mouvement ont la forme (2.01), il faut faire passer le système de l'état initial :

$$x_i(0) = x_{i0} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.06)$$

à l'état final :

$$x_i(T) = x_{i1} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.07)$$

de telle manière que la fonctionnelle (2.02) ait une valeur maximale. La durée T du processus n'étant pas fixée. Parmi les inconvénients de cette méthode, on peut évoquer :

- La formulation du modèle dynamique d'un système peut être très complexe quand le nddl dépasse 3.
- Le problème se compliquera davantage si on doit ajouter à cela les dérivées que nécessitent les conditions d'optimalité.
- En présence d'obstacle, par exemple, la prise en compte des contraintes sur l'état du système pose un problème particulièrement ardu d'où, la nécessité d'introduire des artifices afin de traiter le problème dans sa totalité.

Si on opte pour une résolution numérique, le système différentiel nécessite une procédure d'initialisation d'une grande précision pour garantir une convergence vers un optimum global.

2.1.2 La méthode du plan de phase

Cette méthode a été conçue initialement pour le suivi des trajectoires (37), (38), (47). L'idée de base est de reformuler le problème de planification en fonction d'un seul paramètre qui est l'abscisse curviligne s (40), (41), (42), (43), (44), (45). Celle-ci définit d'une manière unique tout point de la trajectoire. Les seules contraintes à retenir sont celles qui peuvent être transcrites en fonction de s ou de ses dérivées. Parmi les plus importantes, on peut citer celles qui sont imposées par les couples moteurs. La trajectoire parcourue est définie par la relation :

$$P(s) = R(q) \quad (2.08)$$

Où :

$R(q)$: est le vecteur position exprimé en fonction des paramètres de configuration.

$P(s)$: est une fonction connue de l'abscisse curviligne le long de la trajectoire imposée.

Le problème consiste à rechercher les commandes Γ_i ($i=1,\dots,n$) permettant de faire évoluer l'effecteur le long de la trajectoire imposée en respectant les limites technologiques de conception et en minimisant une fonction objectif donnée.

a) Formulation du problème

L'effecteur suit une trajectoire décrite par s entre s_0 et s_F (points initial et final de la trajectoire). Les coordonnées articulaires et leurs dérivées auront les formes suivantes :

$$q=q(s) \quad (2.09)$$

$$\dot{q}=\dot{q}(s,\dot{s}) \quad (2.10)$$

$$\ddot{q}=\ddot{q}(s,\dot{s},\ddot{s}) \quad (2.11)$$

Pour les trouver, il suffit de dériver l'équation (2.08) par rapport au temps:

$$\left[\frac{\partial R}{\partial q} \right] \dot{q} = \left[\frac{\partial P}{\partial s} \right] \dot{s} \quad (2.12)$$

Où :

$$\left[\frac{\partial R}{\partial q} \right] = [R_q] \quad \text{est la matrice jacobienne associée au MGD.}$$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial s} \right] = P_s \quad \text{est le vecteur tangent à la trajectoire au point d'abscisse } s.$$

Si $[R_q]$ n'est pas singulière, donc inversible, (2.12) devient :

$$\dot{q} = [R_q]^{-1} P_s \dot{s} \quad (2.13)$$

On dérive cette nouvelle relation : $[R_q] \ddot{q} + \left[\dot{R}_q \right] \dot{q} = P_{ss} \dot{s}^2 + P_s \ddot{s}$ qui s'écrit :

$$\ddot{q} + \begin{bmatrix} \dot{R}_q \end{bmatrix} \dot{q} = \begin{bmatrix} R_q \end{bmatrix}^{-1} \left(P_{ss} \dot{s}^2 + P_s \ddot{s} - \begin{bmatrix} \dot{R}_q \end{bmatrix} \dot{q} \right) \quad (2.14)$$

On remarquera que les expressions (2.10) et (2.11) sont les mêmes que (2.13) et (2.14). Le modèle dynamique $M(q) \ddot{q} + \dot{q}^T C(q) \dot{q} + G(q) = \Gamma$ s'exprimera exclusivement en fonction de s :

$$a(s) \ddot{s} + b(s) \dot{s}^2 + G(s) = \Gamma \quad (2.15)$$

Où :

$$a(s) = \begin{bmatrix} R_q \end{bmatrix}^{-1} P_s \quad \text{et}$$

$$b(s) = M \begin{bmatrix} R_q \end{bmatrix}^{-1} \left(P_{ss} - \begin{bmatrix} R_q^{-1} P_s \end{bmatrix}^T R_{qq} \begin{bmatrix} R_q^{-1} P_s \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} R_q^{-1} P_s \end{bmatrix}^T C \begin{bmatrix} R_q^{-1} P_s \end{bmatrix}$$

b) Limites sur les vitesses et accélérations curvilignes

Comme : $\Gamma_{i,min} \leq \Gamma_i \leq \Gamma_{i,max}$; $i=1, \dots, n$ et d'après l'équation (2.15) on a :

$$a_i(s) \ddot{s} + b_i(s) \dot{s}^2 \leq \Gamma_{i,max} - G_i(s) \quad (2.16)$$

$$a_i(s) \ddot{s} + b_i(s) \dot{s}^2 \geq \Gamma_{i,min} - G_i(s) \quad (2.17)$$

Dans le plan $\left(\begin{matrix} \dot{s}^2 \\ s \end{matrix} \right)$, les relations (2.16) et (2.17) peuvent être représentées

par 2 droites (ceci est valable pour chaque articulation i). s étant fixée, géométriquement, le chevauchement entre les paires de droites forme un polygone (voir figure 2.1) où les conditions aux limites doivent figurer.

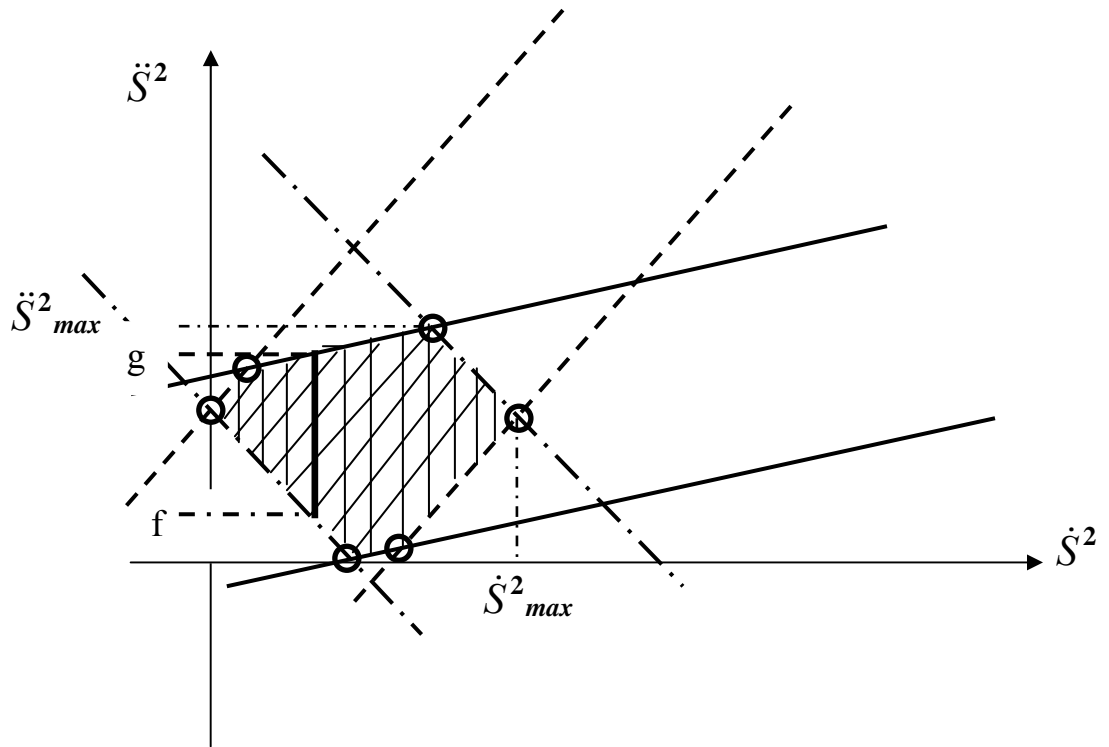


Figure 2.1 : Polygone des solutions possibles dans la méthode d'optimisation du plan de phase

Le mouvement ne peut avoir lieu qu'à l'intérieur du polygone. La vitesse maximale admissible est donnée par le point le plus à droite. L'accélération maximale admissible est donnée par le point le plus haut du polygone. La collection des vitesses maximales formes la courbe limite des vitesses (CLV). Tout point en dessous de \ddot{S}_{max} possède 2 valeurs extrêmes f et g qui définissent l'intervalle d'accélération tolérable dans le respect des limites géométriques imposées par la trajectoire et les contraintes physiques sur les couples moteurs. Pour la $i^{\text{ème}}$ articulation :

$$f_i \left(s, \dot{s} \right) \leq \ddot{s} \leq g_i \left(s, \dot{s} \right) \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.18)$$

Et si $a_i(s) \neq 0$, cela implique :

$$f_i \left(s, \dot{s} \right) = \begin{cases} \frac{\Gamma_{i,min} - b_i \dot{s}^2 - C_i(s)}{a_i} & \text{si } a_i > 0 \\ \frac{\Gamma_{i,max} - b_i \dot{s}^2 - C_i(s)}{a_i} & \text{si } a_i < 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

$$g_i \left(s, \dot{s} \right) = \begin{cases} \frac{\Gamma_{i,min} - b_i \dot{s}^2 - C_i(s)}{a_i} & \text{si } a_i < 0 \\ \frac{\Gamma_{i,max} - b_i \dot{s}^2 - C_i(s)}{a_i} & \text{si } a_i > 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Une accélération admissible se trouve dans l'intersection des intervalles $\left[f_i \left(s, \dot{s} \right), g_i \left(s, \dot{s} \right) \right]$. Il se peut que cette intersection soit nulle. Cela veut dire que l'effecteur se trouve dans l'impossibilité de suivre cette trajectoire et cela constitue un des points faibles de cette méthode. D'autres inconvénients sont à souligner comme :

- la méthode n'est valable que lorsque la fonction objectif à minimiser se limite à la durée de transfert.
- la méthode ne traite que les contraintes qui peuvent être transcrites en fonction de \dot{s} et \ddot{s} .
- le fait de passer par l'inversion du modèle géométrique risque d'introduire des problèmes de singularité.

2.1.3 La discrétisation du modèle dynamique

Elle préconise une modélisation discrète de la dynamique du robot. Les variables continues du mouvement seront aussi discrétisées et par la suite recherchées par une méthode d'optimisation non linéaire [21].

a) Modèle discret :

L'intervalle de temps $[0, T]$ est subdivisé en M parties par $M+1$ nœuds. On note $q_p(k)$; $k=1, \dots, M+1$, les coordonnées articulaires évaluées en chaque nœud où p désigne la $p^{\text{ième}}$ articulation. Toutes les $q_p(k)$; $k=2, \dots, M$ sont inconnues et constituent les variables du problème d'optimisation. Le temps nécessaire pour passer d'une configuration k à une configuration $k+1$ est :

$$\Delta t(k) = t(k+1) - t(k) \quad ; \quad k = 1, \dots, M$$

Si on pose

$$H(k+1) = \frac{1}{\Delta t(k)} \quad ; \quad k=1, \dots, M \quad (2.21)$$

et en utilisant un relation d'approximation du 3^{ième} ordre :

$$q_p(k+1) = q_p(k) + \frac{1}{2} \Delta t(k) \left(\dot{q}_p(k) + \dot{q}_p(k+1) \right) \quad (2.22)$$

On dérive l'expression (2.22) et on remplace H par sa valeur :

$$\dot{q}_p(k+1) = -\dot{q}_p(k) + 2H(k+1) \left(\Delta q_p(k) \right) \quad (2.23)$$

avec $\Delta q_p(k) = q_p(k+1) - q_p(k)$. On peut écrire (2.23) sous une forme plus générale :

$$\dot{q}_p(k) = (-1)^k q_p(0) + 2(-1)^k \sum_{i=1}^k (-1)^i \Delta q_p(i-1) H_i \quad ; \quad k=2, \dots, M+1 \quad (2.24)$$

Les équations du mouvement issues du formalisme de Lagrange peuvent être écrites comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n m_{ip} \dot{q}_i \right] - \frac{\partial}{\partial q_p} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i m_{ij} \dot{q}_j \right] + \frac{\partial E_p}{\partial q_p} = \Gamma_p \quad ; \quad p=1, \dots, n \quad (2.25)$$

Où les m_{ip} sont les éléments de la matrice d'inertie du système et E_p l'énergie potentielle.

b) Le programme non linéaire

Les variables du problème sont :

$\Delta t(k) ; k = 1, \dots, n$ qui peuvent être pris égaux pour simplifier le problème.
 $q_p(k) ; k = 2, \dots, M$ qui donnent les vitesses et les accélérations par dérivation.

Si on choisit une fonction objectif mixte durée de transfert-moyenne quadratique des efforts actionneurs par exemple, elle se présentera sous la forme suivante :

$$F = \mu \sum_{k=1}^M \Delta t(k) + \frac{(1-\mu)}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^{M+1} \left(\frac{\Gamma_p(k)}{\Gamma_{p,max}} \right)^2 \Delta t(k) \quad (2.26)$$

En respectant les contraintes :

$q_{p,min} \leq q_p(k) \leq q_{p,max}$ pour éviter les butées mécaniques et les obstacles.

$\Gamma_{p,min} \leq \Gamma_p(k) \leq \Gamma_{p,max}$ pour respecter les capacités des actionneurs.

Parmi les facteurs qui peuvent avoir des effets négatifs sur la méthode, on peut citer :

- l'augmentation du nombre de nœuds augmente la précision mais complique le problème d'où le choix d'un compromis.
- la méthode est difficilement applicable un nombre élevé de nddl.

Comme nous l'avons précisé auparavant, les méthodes de programmation non linéaires sont très souvent piégées par des minimums locaux, ce qui implique des résultats sub-optimaux.

2.1.4 L'approximation polynomiale

L'idée de cette approche et de relier les configurations initiale et finale par des fonctions $q(t, \alpha)$ paramétrées dans l'espace articulaire où α est le vecteur des paramètres qui sera déterminé par le processus d'optimisation [56]. Le choix de $q(t, \alpha)$ le plus répandu se fait dans l'espace des fonctions polynomiales. Ainsi, la $i^{\text{ème}}$ variable articulaire s'écrira :

$$q_i(t) = \sum_{j=0}^n b_j t^j \quad ; \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.27)$$

Les coefficients b_j constituent les éléments du vecteur α . Les modèles géométrique, cinématique et dynamique seront exprimés en fonction de α . Le problème de planification devient un problème de programmation non linéaire impliquant la recherche

du vecteur α minimisant une fonction de coût donnée tout en respectant les contraintes imposées. Les méthodes classiques de programmation non linéaire sont souvent piégées par des minimums locaux ce qui nous conduit à des résultats sub-optimaux.

Les inconvénients de cette méthode sont :

- les fonctions polynomiales ne permettent pas de balayer l'espace des solutions réalisables.
- le choix du degré maximum des fonctions polynomiales est subjectif.
- un degré trop élevé du polynôme induira un comportement oscillatoire de la trajectoire.

2.1.5 La méthode des champs de potentiel

Elle introduit des champs de forces artificiels dans lesquels se déplace le manipulateur. Les obstacles sont considérés comme des points de haut potentiel et le point qui correspond à la configuration finale comme un point de bas potentiel. Le manipulateur est ainsi placé dans ces champs constitués de forces répulsives (sortant des obstacles) et des forces attractives dirigées vers le point final. Il se déplacera toujours d'un point de haut potentiel vers un autre de bas potentiel. Cette méthode ne donne pas toujours une solution car l'existence d'un minimum local est susceptible de stopper son évolution [49].

2.1.6 Conclusion

Les limitations et les inconvénients des approches évoquées précédemment se traduisent par : plus le nddl augmente et plus la mise en œuvre de ces approches est complexe. Chaque nouveau cas considéré ou chaque contrainte introduite implique une reformulation du problème et une modification du programme numérique de résolution.

2.2 Approche proposée

L'idée est initiée dans [17]. Elle est conçue dans le but de remédier aux différentes difficultés soulevées précédemment. Elle est basée sur l'approximation de l'évolution temporelle des variables articulaires par des morceaux de splines cubiques reliés entre eux par des nœuds mobiles. La technique d'optimisation aléatoire recherche la position optimale de ces nœuds. Les inconnues du problème sont : $q(t)$, T et Γ .

Les difficultés rencontrées avec cette approche concernent les bornes de recherche de T . Les auteurs de [17] proposent de dissocier T de la recherche de la forme optimale de la trajectoire $q(t)$. Pour cela, Les intervalles à bornes indéfinies du problème sont remplacés par des intervalles équivalents dont les bornes sont complètement connues. La variable T sera traitée comme un paramètre dépendant qui sera déduit pour chaque forme de la trajectoire. La même tâche présentée par une trajectoire opérationnelle de l'espace cartésien peut être exécutée par plusieurs trajectoires articulaires de mêmes formes q avec des vitesses \dot{q} différentes et, par conséquent, avec des temps de transfert T différents. Toutes les trajectoires $q(t)$ de mêmes formes se superposent dans un plan normalisé. Cette technique a été utilisée pour des mouvements libres de robots à chaînes ouvertes simples à plus de 3 degrés de libertés. Les avantages qu'elle offre ne sont pas négligeables même si elle présente certains inconvénients. Parmi ses points forts, on peut citer :

- Les contraintes du problème sont traitées d'une manière séquentielle et selon n'importe quel ordre (la priorité n'est pas donnée à telle ou telle contrainte). La prise en compte de ces dernières se fait facilement sans aucun développement mathématique préalable.
- Des tests comparatifs ont été réalisés avec d'autres cas déjà traités à l'aide du PMP. Les résultats trouvés ont montré que cette technique peut approcher une solution sub-optimale avec l'avantage de permettre une recherche autour de cette solution avec toutefois un risque de blocage de cette méthode due au fait que les accélérations sont sensibles aux petites variations de la trajectoire $q(\lambda)$. Une solution a été préconisée et vérifiée. La perturbation des nœuds se faisait sur la forme des accélérations $q''(\lambda)$ pour mieux contrôler ces dernières. Le blocage disparaissait seulement, les temps de calcul ont augmenté considérablement.
- Elle présente un certain caractère de généralisation car sa mise en œuvre reste relativement facile pour d'autres cas différents.

Cette technique d'optimisation va être appliquée au chapitre 5 pour les robots coopérants en chaîne fermée.

CHAPITRE 3

MODELISATION DYNAMIQUE DE 2 ROBOTS EN CHAÎNE FERMÉE

Les systèmes robotisés en coopération n'ont attiré l'attention des chercheurs que très récemment. Très peu de littérature traite ce type de problème. On utilise généralement le formalisme de Lagrange pour étudier les mouvements des robots en coopération [04]. On incorpore dans les multiplicateurs de Lagrange les contraintes de position. Les équations dynamiques sont établies sur la base des chaînes cinématiques fermées.

3.1 Description de la structure

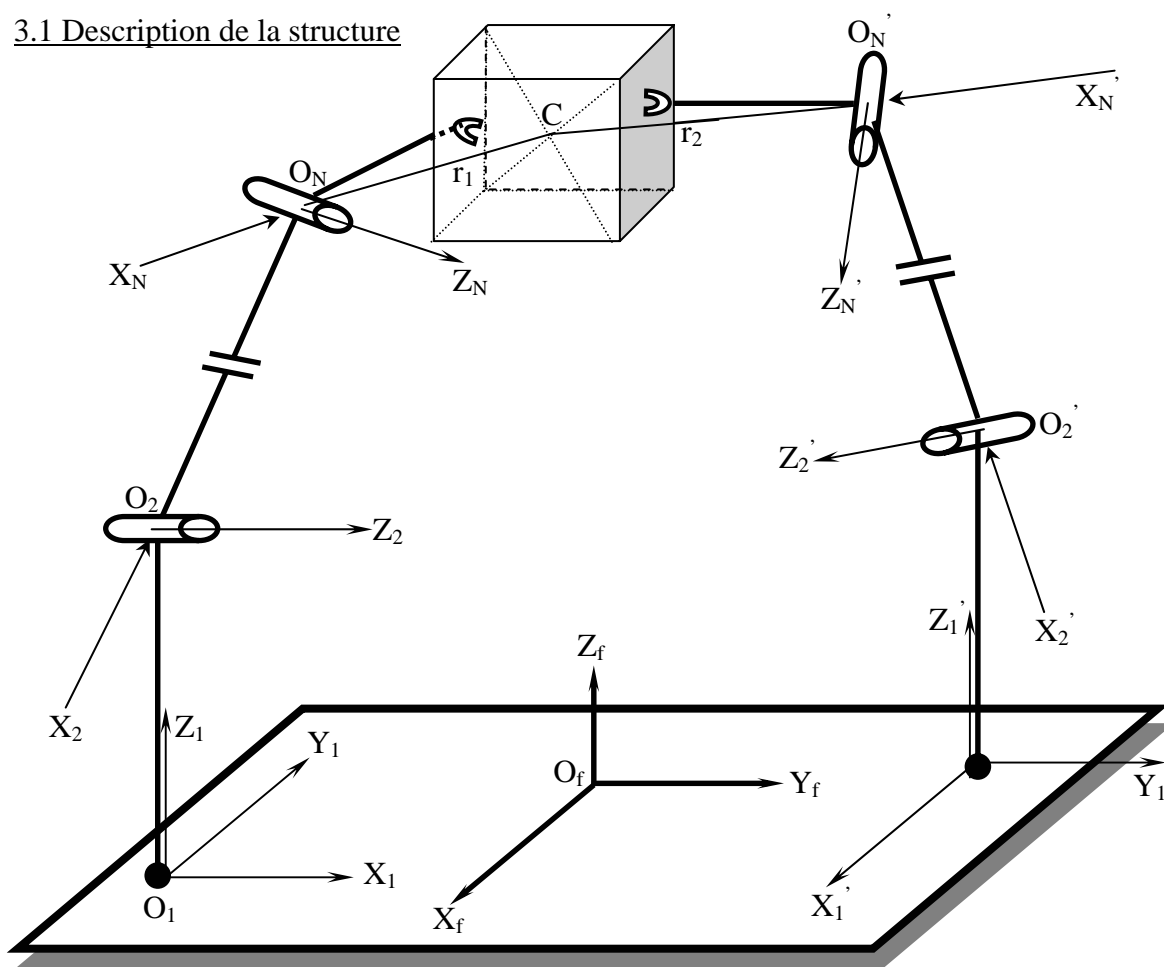


Figure 3.1 : Schéma de 2 robots tenant un objet rigide dans l'espace en boucle fermée

- C : centre de masse de l'objet.
- R_f : repère fixe (repère atelier).
- $R_{i,k}$: repère lié à l'articulation k du $i^{\text{ème}}$ robot) ($i = 1,2$), ($k = 1, \dots, N$).
- Les positions de l'articulation du robot i sont représentées par le vecteur $q_i = [q_1, q_2, \dots, q_N]^T$.
- La translation de l'origine de R_f à l'origine du repère d'axes (x_N, y_N, z_N) est ${}^i p_f^N(q_i)$ (vecteur de dimension 3×1).
- La rotation du repère R_N par rapport au repère R_f est représentée par la matrice ${}^i R_f^N(q_i)$ (vecteur de dimension 3×3).
- r_{if} : vecteur reliant l'origine du repère R_N et C dans la base R_f .
- r_i : vecteur reliant l'origine du repère R_N et C dans la base R_n .

Les vecteurs r_i et r_{if} sont reliés par la relation :

$$r_{if} = {}^i R_f^N(q_i) r_i \quad (3.01)$$

Le vecteur ${}^i p_f^N(q_i)$ et la matrice ${}^i R_f^N(q_i)$ sont déterminés dans le repère R_f .

3.2 Modèle dynamique

Si le robot i exerce une force ${}^{if}f_{N,N+1}$ et un moment ${}^{if}M_{N,N+1}$ sur l'objet, le modèle dynamique selon le formalisme de LAGRANGE sera de la forme :

$${}^i \Gamma = D_i(q_i) \ddot{q}_i + CGV_i \left(q_i, \dot{q}_i \right) + J_{if}^T(q_i) \begin{vmatrix} {}^{if} f_{N,N+1} \\ {}^{if} M_{N,N+1} \end{vmatrix} \quad (3.02)$$

Où :

${}^i \Gamma = \left[{}^i \Gamma_1, \dots, {}^i \Gamma_N \right]^T$: vecteur des couples sur chaque articulation du robot de

dimension $(N \times 1)$.

$D_i(q_i)$: matrice d'inertie symétrique de dimension $(N \times N)$.

$CGV_i \begin{pmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{pmatrix}$: vecteur de dimension $(N \times 1)$ regroupant les termes de

Coriolis, centrifuge, gravité et frottements.

$J_{if}^T(q_i)$: la matrice jacobienne exprimée dans la base R_f de dimension $(N \times 6)$.

$${}^{if}f_{N,N+1} = \begin{bmatrix} {}^{if}f_{N,N+1\ x} & {}^{if}f_{N,N+1\ y} & {}^{if}f_{N,N+1\ z} \end{bmatrix}^T \quad (3.03)$$

et

$${}^{if}M_{N,N+1} = \begin{bmatrix} M_{N,N+1\ x} & M_{N,N+1\ y} & M_{N,N+1\ z} \end{bmatrix}^T \quad (3.04)$$

Les vecteurs forces et moments exercés par le robot i sur l'objet. La translation du dernier effecteur par rapport au repère R_f satisfait à l'équation de fermeture de boucle :

$$\begin{pmatrix} {}^1p_f^N(q_1) + r_{1f} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} {}^2p_f^N(q_2) + r_{2f} \end{pmatrix} = 0_{3 \times 1} \quad (3.05)$$

Elle fait intervenir trois inconnues scalaires indépendantes. Pour ce qui est de l'orientation du dernier effecteur, on peut utiliser les angles des rotations successives roulis, tangage et lacet autour des axes x_f, y_f, z_f respectivement ${}^i\varphi_x(q_i), {}^i\varphi_y(q_i)$ et ${}^i\varphi_z(q_i)$. On obtient la matrice ${}^iR_f^N(q_i)$. Ainsi, on constitue le vecteur :

$${}^iRTL_f(q_i) = \begin{bmatrix} {}^i\varphi_x(q_i) & {}^i\varphi_y(q_i) & {}^i\varphi_z(q_i) \end{bmatrix}^T \quad (3.06)$$

La rotation du dernier effecteur par rapport au repère R_f satisfait à l'équation de fermeture de boucle :

$${}^1 RTL_f(q_1) - {}^2 RTL_f(q_2) - C_{1,2} = 0_{3 \times 1} \quad (3.07)$$

Où : $C_{1,2}$ représente le vecteur constant de dimension (3x1) qui assure le maintien de la même pièce et d'une manière rigide par les deux effecteurs terminaux exprimé dans R_f .

Pour ce qui est du couplage dynamique, on utilise les théorèmes généraux de la dynamique (somme des forces et somme des moments). Ainsi on obtient :

$$m_c \dot{v}_c - m_c g - f_{N,N+1}^{1f} - f_{N,N+1}^{2f} = 0_{3 \times 1} \quad (3.08)$$

$$k_c \dot{\omega}_c + \omega_c \wedge k_c \omega_c - M_{N,N+1}^{1f} - M_{N,N+1}^{2f} - \left(-r_{1f} \wedge f_{N,N+1}^{1f} \right) - \left(-r_{2f} \wedge f_{N,N+1}^{2f} \right) = 0_{3 \times 1} \quad (3.09)$$

Tous les vecteurs sont exprimés dans le repère R_f .

- m_c : masse de l'objet
- k_c : matrice d'inertie de l'objet ramenée au repère R_f
- g : vecteur de la force de gravité
- v_c et \dot{v}_c : respectivement la vitesse et l'accélération de translation de C .
- ω_c et $\dot{\omega}_c$: respectivement la vitesse et l'accélération de rotation de C .
- r_{if} : bras de levier de $f_{N,N+1}^{if}$ par rapport à C .

Les équations (3.09) et (3.08) forment un système de 6 équations scalaires qui représentent le couplage dynamique entre les 2 robots. Ajoutées aux équations (3.02), (3.05) et (3.07), on constitue le modèle dynamique du système entier.

3.3 Contraintes cinématiques :

D'après l'équation (3.05) la position du centre de gravité C par rapport au repère atelier est $\left({}^1 p_f^N(q_1) + r_{1f} \right)$ et après dérivation on obtient la vitesse de C exprimée par rapport à R_f .

$$v_c = \frac{\partial}{\partial q_i} \left({}^i p_f^N(q_i) + r_i \right) \dot{q}_i \quad (3.10)$$

De la même manière, la vitesse de rotation ω_c s'exprime en termes *RTL* et ses dérivées comme suit :

$$\omega_c = M_i \begin{pmatrix} {}^i \varphi_x(q_i) \\ {}^i \varphi_y(q_i) \\ {}^i \varphi_z(q_i) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} {}^i \dot{\varphi}_x(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_y(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_z(q_i) \end{bmatrix}^T \quad (3.11)$$

Où la matrice $M_i \begin{pmatrix} {}^i \varphi_x(q_i) \\ {}^i \varphi_y(q_i) \\ {}^i \varphi_z(q_i) \end{pmatrix}$ de dimension (3x3) est définie comme suit :

$$M_i = \begin{vmatrix} c^i \varphi_y c^i \varphi_z & c^i \varphi_z s^i \varphi_y s^i \varphi_x - s^i \varphi_z c^i \varphi_x & c^i \varphi_z s^i \varphi_y c^i \varphi_x + s^i \varphi_z s^i \varphi_x \\ c^i \varphi_y s^i \varphi_z & s^i \varphi_z s^i \varphi_y s^i \varphi_x + c^i \varphi_y c^i \varphi_x & s^i \varphi_z s^i \varphi_y c^i \varphi_x - c^i \varphi_z s^i \varphi_x \\ -s^i \varphi_y & c^i \varphi_y s^i \varphi_x & c^i \varphi_y c^i \varphi_x \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

Les éléments du vecteur $\begin{bmatrix} {}^i \dot{\varphi}_x(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_y(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_z(q_i) \end{bmatrix}^T$ sont les dérivées par rapport au temps des angles *RTL* du dernier effecteur du manipulateur *i* par rapport à R_f . On pose :

$$\begin{bmatrix} {}^i \dot{\varphi}_x(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_y(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_z(q_i) \end{bmatrix}^T = \frac{\partial}{\partial q_i} \begin{bmatrix} {}^i RTL_f(q_i) \end{bmatrix} \dot{q}_i \quad (3.13)$$

Les équations (3.10) et (3.11) peuvent être combinées sous une forme compacte. En écriture matricielle, elles sont représentées de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} v_c \\ \omega_c \end{bmatrix} = B_i(q_i) \dot{q}_i \quad (3.14)$$

Où :

$B_i(q_i)$ est la matrice de dimension (6xN) égale à :

$$B_i(q_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_i} \left({}^i p_f^N(q_i) + r_{if} \right) \\ M_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \left({}^i RTL_f(q_i) \right) \right) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

En dérivant l'équation (3.14), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{\omega}_c \end{bmatrix} = \dot{B}_i(q_i) \cdot \dot{q}_i + B_i(q_i) \ddot{q}_i \quad (3.16)$$

Les équations (3.14) et (3.16) forment le système des contraintes cinématiques de la vitesse et de l'accélération du manipulateur i .

3.4 Contraintes dynamiques

Sous forme matricielle, les équations (3.08) et (3.09) s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} m_c I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & k_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{\omega}_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ E_1(q_i) & I_{3 \times 3} & E_2(q_i) & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} f_c + \begin{bmatrix} -m_c g \\ \Omega_i k_c m_i \left| \begin{matrix} {}^i \dot{\varphi}_x(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_y(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_z(q_i) \end{matrix} \right|^T \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (3.17)$$

$I_{3 \times 3}$ et $\mathbf{0}_{3 \times 3}$ représentent respectivement la matrice identité et la matrice nulle. f_c représente le vecteur (de dimension 12×1) des forces généralisées de contact entre les derniers effecteurs et l'objet.

$$f_c = \left[\begin{matrix} 1^f f_{N,N+1}^T & 1^f M_{N,N+1}^T & 2^f f_{N,N+1}^T & 2^f M_{N,N+1}^T \end{matrix} \right]^T \quad (3.18)$$

Soit la matrice

$$E_i(q_i) = \begin{vmatrix} 0 & if & if \\ -r_z & 0 & if \\ if & if & 0 \\ r_y & -r_x & 0 \end{vmatrix} \quad (i = 1,2) \quad (3.19)$$

Où les éléments génériques représentent les distances entre les derniers effecteurs de tous les robots et le centre de gravité C .

Pour ce qui est du terme $\Omega_i k_c M_i \left[\begin{matrix} i \dot{\varphi}_x(q_i) \\ i \dot{\varphi}_y(q_i) \\ i \dot{\varphi}_z(q_i) \end{matrix} \right]^T$, il représente le terme $[\omega_c \wedge k_c \omega_c]$ de l'équation (3.09) (résultant des variations d'inertie de la charge). Quand au terme M_i , il faut se référer à l'équation (3.12).

La matrice Ω_i de dimension (3x3) est définie comme suit :

$$\Omega_i = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_{cz} & \omega_{cy} \\ \omega_{cz} & 0 & -\omega_{cx} \\ -\omega_{cy} & \omega_{cx} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

Où ses termes sont calculés à partir de l'équation (3.11). Les équations (3.02), (3.16) et (3.17) forment les formules de base du modèle dynamique de la chaîne fermée totale du système de 2 manipulateurs à N articulations déplaçant un objet dans l'espace tridimensionnel par rapport à un repère fixe R_f lié à l'atelier. Pour cela, il suffit de les combiner entre elles. A cet effet, on incorpore les équations (3.02) et (3.16) dans l'équation (3.17). La marche à suivre sera la suivante : On remplace \ddot{q}_i dans (3.16) par sa valeur

obtenue dans (3.02), ensuite, on remplace la matrice $\begin{bmatrix} \bullet \\ v_c \\ \bullet \\ \omega_c \end{bmatrix}$ dans (3.17) par sa valeur

obtenue dans l'équation (3.16). L'équation qui en résulte nous permet de déterminer les forces de contact généralisées. On pose $L_i(q_i)$ (matrice de dimension (6x6) qui contient les coefficients des forces de contact du manipulateur i) comme suit:

$$L_i(q_i) = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ E_i(q_i) & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

1^{ère} étape : on calcule \ddot{q}_i de l'équation (3.02) :

$${}^i \Gamma - CGV_i \left(q_i, \dot{q}_i \right) - J_{if}^T(q_i) \begin{bmatrix} {}^{if} f_{N,N+1} \\ {}^{if} M_{N,N+1} \end{bmatrix} = D_i(q_i) \ddot{q}_i$$

On multiplie les 2 membres de l'équation par $D_i^{-1}(q_i)$, on obtient :

$$\ddot{q}_i = D_i^{-1}(q_i) \left[{}^i \Gamma - CGV_i \left(q_i, \dot{q}_i \right) - J_{if}^T(q_i) \begin{bmatrix} {}^{if} f_{N,N+1} \\ {}^{if} M_{N,N+1} \end{bmatrix} \right]$$

2^{ème} étape : on remplace \ddot{q}_i dans l'équation (3.16). On obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{\omega}_c \end{bmatrix} = \dot{B}_i(q_i) \dot{q}_i + B_i(q_i) D_i^{-1}(q_i) \left[{}^i \Gamma - CGV_i \left(q_i, \dot{q}_i \right) - J_{if}^T(q_i) \begin{bmatrix} {}^{if} f_{N,N+1} \\ {}^{if} M_{N,N+1} \end{bmatrix} \right]$$

3^{ème} étape : on remplace $\begin{bmatrix} \bullet \\ v_c \\ \bullet \\ \omega_c \end{bmatrix}$ dans l'équation (3.17). On trouve :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} m_c I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & k_c \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \dot{B}_i(q_i) \dot{q}_i + B_i(q_i) D_i^{-1}(q_i) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^i \Gamma - CGV_i(q_i, \dot{q}_i) - J_{if}^T(q_i) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} {}^{if} f_{N,N+1} \\ M_{N,N+1} \end{vmatrix} - \\ & - \begin{vmatrix} I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ E_1(q_1) & I_{3 \times 3} & E_2(q_2) & I_{3 \times 3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_c + \\ - m_c \mathbf{g} \\ \Omega_i k_c m_i \left| \begin{matrix} {}^i \dot{\varphi}_x(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_y(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_z(q_i) \end{matrix} \right|^T \end{vmatrix} = \mathbf{0}_{6 \times 1} \end{aligned}$$

En effectuant les produits, on trouve :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} m_c I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & k_c \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \dot{B}_i(q_i) \dot{q}_i + B_i(q_i) D_i^{-1}(q_i) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^i \Gamma - B_i(q_i) D_i^{-1}(q_i) CGV_i(q_i, \dot{q}_i) - \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} - \\ & - B_i(q_i) D_i^{-1}(q_i) J_{if}^T(q_i) \begin{vmatrix} {}^{if} f_{N,N+1} \\ M_{N,N+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ E_1(q_1) & I_{3 \times 3} & E_2(q_2) & I_{3 \times 3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_c + \\ - m_c \mathbf{g} \\ \Omega_i k_c m_i \left| \begin{matrix} {}^i \dot{\varphi}_x(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_y(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_z(q_i) \end{matrix} \right|^T \end{vmatrix} = \mathbf{0}_{6 \times 1} \end{aligned}$$

On développe tous les produits de l'équation précédente :

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} m_c I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & k_c \end{vmatrix} \dot{B}_i(q_i) \dot{q}_i - \begin{vmatrix} m_c I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & k_c \end{vmatrix} B_i(q_i) D_i^{-1}(q_i) J_{if}^T(q_i) \begin{vmatrix} {}^{if} \mathbf{f}_{N,N+1} \\ \mathbf{M}_{N,N+1} \end{vmatrix} + \\
& + \begin{vmatrix} m_c I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & k_c \end{vmatrix} B_i(q_i) D_i^{-1}(q_i)^i \Gamma - \begin{vmatrix} m_c I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & k_c \end{vmatrix} B_i(q_i) D_i^{-1}(q_i) CGV_i \left(q_i, \dot{q}_i \right) - \\
& - \begin{vmatrix} I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ E_1(q_1) & I_{3 \times 3} & E_2(q_2) & I_{3 \times 3} \end{vmatrix} \mathbf{f}_c + \begin{vmatrix} -m_c \mathbf{g} \\ \Omega_i k_c M_i \left[{}^i \dot{\varphi}_x(q_i), {}^i \dot{\varphi}_y(q_i), {}^i \dot{\varphi}_z(q_i) \right] \end{vmatrix} = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Il apparaît dans cette nouvelle équation la matrice des forces de contact généralisées dont les termes sont donnés par la matrice $U_i(q_i)$ de dimension (6x6). On pose :

$$U_i(q_i) = \begin{vmatrix} m_c I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & k_c \end{vmatrix} B_i(q_i) D_i^{-1}(q_i) J_{if}^T(q_i) \quad (3.23)$$

En plus, le modèle final révèle des termes qui n'impliquent pas explicitement les forces généralisées. Nous pouvons commodément les exprimer sous la forme décomposée suivante :

$$\left[H_{ia}(q_i) {}^i \Gamma + H_{ib} \left(q_i, \dot{q}_i \right) \right] \quad (3.24)$$

Où :

$$H_{ia}(q_i) = \begin{vmatrix} m_c I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & k_c \end{vmatrix} B_i(q_i) D_i^{-1}(q_i) \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
H_{ib}(q_i, \dot{q}_i) = & \begin{vmatrix} m_c I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & k_c \end{vmatrix} \dot{B}_i(q_i) \dot{q}_i - H_{ia}(q_i) CGV_i(q_i, \dot{q}_i) + \\
& + \begin{vmatrix} -m_c g \\ \Omega_i k_c M_i \left[\begin{matrix} {}^i \dot{\varphi}_x(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_y(q_i) \\ {}^i \dot{\varphi}_z(q_i) \end{matrix} \right] \end{vmatrix} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

(3.25) : matrice de dimension (6xN). (4.26) : vecteur de dimension (6x1).

On écrit l'équation finale :

$$H_{ib}(q_i, \dot{q}_i) + H_{ia}(q_i)^i \Gamma - U_i(q_i) \begin{vmatrix} \text{if} \\ \mathbf{f}_{N,N+1} \\ \text{if} \\ \mathbf{M}_{N,N+1} \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} L_1(q_1), L_2(q_2) \end{bmatrix} \mathbf{f}_c = \mathbf{0}_{6 \times 1}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} L_1(q_1), L_2(q_2) \end{bmatrix} \mathbf{f}_c + U_i(q_i) \begin{vmatrix} \text{if} \\ \mathbf{f}_{N,N+1} \\ \text{if} \\ \mathbf{M}_{N,N+1} \end{vmatrix} = H_{ia}(q_i)^i \Gamma + H_{ib}(q_i, \dot{q}_i)$$

Sous forme matricielle, elle s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix} \mathbf{f}_c = \begin{vmatrix} H_{1a} & \mathbf{0}_{6 \times N} \\ \mathbf{0}_{6 \times N} & H_{2a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{f} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H_{1b} \\ H_{2b} \end{vmatrix} \quad (3.27)$$

En fait, l'équation (3.27) est un système de 12 équations qui regroupent les 2 robots. Elle exprime le maintien et le transport d'un objet rigide par 2 manipulateurs en chaîne fermée. Les coefficients de la matrice de \mathbf{f}_c sont fonction des coordonnées généralisées des 2

robots. Pour la partie droite de cette équation, elle est fonction de $({}^1\Gamma, {}^2\Gamma, q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$. Le vecteur f_c est fonction des couples articulaires, de leurs positions et de leurs vitesses. Pour calculer le vecteur des forces généralisées, il suffit de multiplier cette

équation par $\begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix}^{-1}$ à condition que l'inversion soit possible.

On peut aussi calculer les couples articulaires. Pour cela, on procède de la manière suivante : On écrit l'équation (3.02) pour les 2 robots. Soit :

$$\begin{vmatrix} {}^1\Gamma \\ {}^2\Gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_1(q_1) & 0_{N \times N} \\ 0_{N \times N} & D_2(q_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} CGV_1(q_1, \dot{q}_1) \\ CGV_2(q_2, \dot{q}_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{1f}^T(q_1) & 0_{N \times 6} \\ 0_{N \times 6} & J_{2f}^T(q_2) \end{vmatrix} f_c \quad (3.28)$$

Et on remplace f_c par sa valeur obtenue à partir de l'équation (3.27). On obtient la relation suivante :

$$\begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix} f_c = \begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} H_{1a} & 0_{6 \times N} \\ 0_{6 \times N} & H_{2a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {}^1\Gamma \\ {}^2\Gamma \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} H_{1b} \\ H_{2b} \end{vmatrix}$$

D'où :

$$f_c = \begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} H_{1a} & 0_{6 \times N} \\ 0_{6 \times N} & H_{2a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {}^1\Gamma \\ {}^2\Gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} H_{1b} \\ H_{2b} \end{vmatrix} \quad (3.29)$$

On remplace f_c (voir(3.29)) par sa valeur dans l'équation (3.28). On trouve :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} {}^1 \mathbf{F} \\ {}^2 \mathbf{F} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} D_1(q_1) & \mathbf{0}_{N \times N} \\ \mathbf{0}_{N \times N} & D_2(q_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} CGV_1 \begin{pmatrix} q_1, \dot{q}_1 \end{pmatrix} \\ CGV_2 \begin{pmatrix} q_2, \dot{q}_2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} J_{1f}^T(q_1) & \mathbf{0}_{N \times 6} \\ \mathbf{0}_{N \times 6} & J_{2f}^T(q_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{1a} & \mathbf{0}_{6 \times N} \\ \mathbf{0}_{6 \times N} & H_{2a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {}^1 \mathbf{F} \\ {}^2 \mathbf{F} \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} J_{1f}^T(q_1) & \mathbf{0}_{N \times 6} \\ \mathbf{0}_{N \times 6} & J_{2f}^T(q_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{1b} \\ H_{2b} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On regroupe les facteurs de la matrice des couples articulaires :

$$\begin{aligned} \left[I_{2N \times 2N} - \begin{vmatrix} J_{1f}^T(q_1) & \mathbf{0}_{N \times 6} \\ \mathbf{0}_{N \times 6} & J_{2f}^T(q_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{1a} & \mathbf{0}_{6 \times N} \\ \mathbf{0}_{6 \times N} & H_{2a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {}^1 \mathbf{F} \\ {}^2 \mathbf{F} \end{vmatrix} \right] &= \begin{vmatrix} D(q_1) & \mathbf{0}_{N \times N} \\ \mathbf{0}_{N \times N} & D_2(q_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} CGV_1 \begin{pmatrix} q_1, \dot{q}_1 \end{pmatrix} \\ CGV_2 \begin{pmatrix} q_2, \dot{q}_2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{1f}^T(q_1) & \mathbf{0}_{N \times 6} \\ \mathbf{0}_{N \times 6} & J_{2f}^T(q_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{1b} \\ H_{2b} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Si on pose :

$$\Delta(q_1, q_2) = I_{2N \times 2N} - \begin{vmatrix} J_{1f}^T(q_1) & \mathbf{0}_{N \times 6} \\ \mathbf{0}_{N \times 6} & J_{2f}^T(q_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{1a} & \mathbf{0}_{6 \times N} \\ \mathbf{0}_{6 \times N} & H_{2a} \end{vmatrix} \quad (3.31)$$

La dimension de la matrice $\Delta(q_1, q_2)$ est égale à $(2N \times 2N)$. L'équation (3.30) devient:

$$\begin{aligned}
\Delta \left(\begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix} \right) \begin{vmatrix} {}^1\Gamma \\ {}^2\Gamma \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} D_1(q_1) & 0_{N \times N} \\ 0_{N \times N} & D_2(q_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} CGV_1 \left(q_1, \dot{q}_1 \right) \\ CGV_2 \left(q_2, \dot{q}_2 \right) \end{vmatrix} + \\
+ \begin{vmatrix} J_{1f}^T(q_1) & 0_{N \times 6} \\ 0_{N \times 6} & J_{2f}^T(q_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (L_1+U_1) & L_2 \\ L_1 & (L_2+U_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{1b} \\ H_{2b} \end{vmatrix}^{-1} & \quad (3.32)
\end{aligned}$$

L'équation (3.32) donne le modèle dynamique final de 2 robots sériels, selon le formalisme de LAGRANGE, tenant un objet rigide (fixe ou en déplacement) en chaîne fermée impliquant les variables ${}^1\Gamma, {}^2\Gamma, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2$. On peut comparer les expressions (3.28) et (3.32). Les deux contiennent 2N équations différentielles du second ordre telles que les N premières rangées de (3.28) incluent exclusivement les variables du robot 1 (${}^1\Gamma, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, {}^1f_{N,N+1}, {}^1M_{N,N+1}$) et les N dernières, exclusivement les variables du robot 2 (${}^2\Gamma, q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2, {}^2f_{N,N+1}, {}^2M_{N,N+1}$).

Quant à l'expression (3.32), elle représente un système de 2N équations différentielles du second ordre telles que les N premières incluent les variables (${}^1\Gamma, {}^2\Gamma, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2$). et les N dernières, les mêmes variables (${}^1\Gamma, {}^2\Gamma, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2$). Ceci est dû au fait que les contraintes cinématiques ne peuvent pas être considérées séparément en raison de l'effet de couplage des 2 manipulateurs. La solution de cette dernière équation est donnée soit par la résolution du modèle dynamique direct (figure a) pour obtenir les positions et vitesses généralisées quand les couples sont donnés soit par la résolution du modèle dynamique inverse (figure b) pour obtenir les couples articulaires quand les positions et les vitesses généralisées sont connues. Quant à l'expression (3.32),

elle représente un système de $2N$ équations différentielles du second ordre qui incluent les mêmes variables (${}^1\Gamma, {}^2\Gamma, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2$ et q_2).

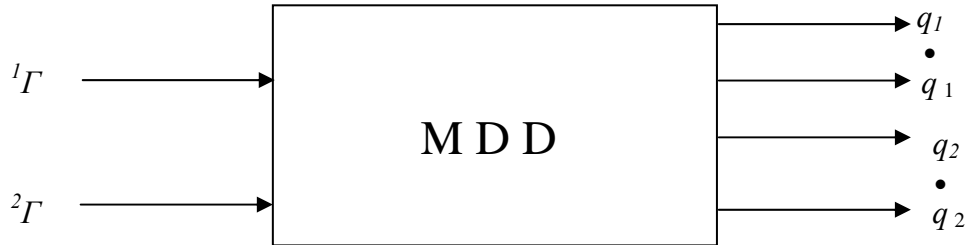


Figure (a) modèle dynamique direct pour une chaîne fermée

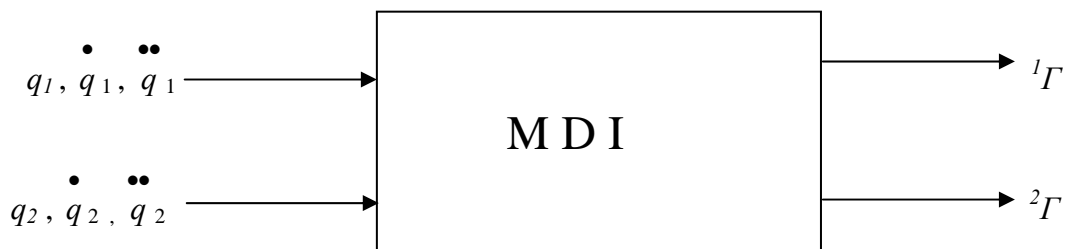


Figure (b) modèle dynamique inverse pour une chaîne fermée

Notre but étant de déterminer les couples articulaires connaissant les positions, les vitesses et les accélérations articulaires, alors, nous nous intéresserons uniquement à la résolution du modèle dynamique inverse. A partir de l'équation (3.32), on constate que les coordonnées cinématiques des deux robots apparaissent explicitement donc, on peut dire qu'ils ont le même statut. La solution de notre problème dépend de la matrice Δ , plus particulièrement de son inversion. Si elle est diagonale ou peut l'être, on utilisera un simple calcul analytique pour la détermination des couples, sinon, on peut utiliser une méthode numérique pour l'inverser ou bien encore de calculer sa pseudo-inverse (méthode de Whitney) utilisée pour la détermination de la matrice jacobienne inverse quand cette dernière n'est pas régulière (modèle cinématique inverse) [01].

CHAPITRE 4
APPLICATION A 2 ROBOTS PLANS A 3 DEGRES DE LIBERTE

On opte pour des articulations de type rotoïdes. On choisit q_i et $q_{i'}$ comme coordonnées généralisées qui représentent pour notre cas des rotations (q_i pour le robot 1, $q_{i'}$ pour le robot 2). Soit le schéma suivant :

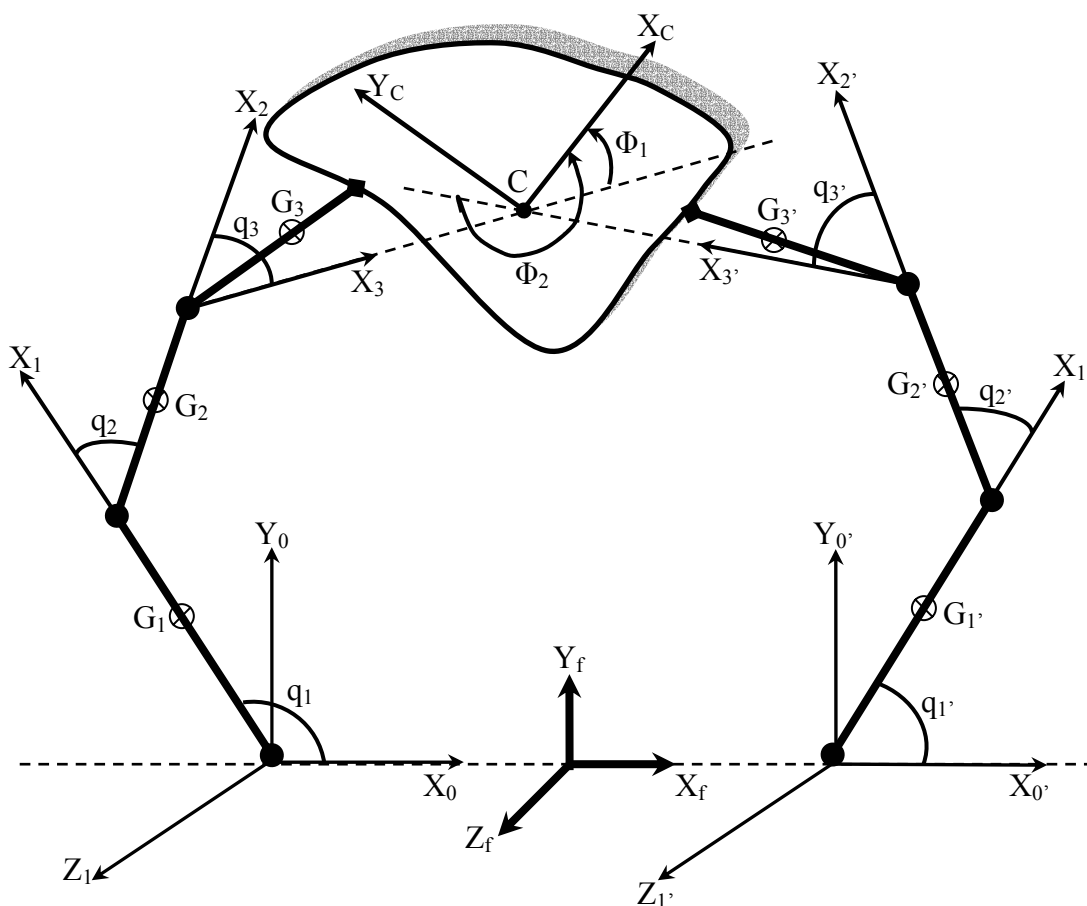


Figure 4.1: Schéma de 2 robots plans tenant un objet

<u>Robot 1</u>		<u>Robot 2</u>
$O_i O_{0,1} = l_0$		$O_i O_{0',1'} = l_0$
$O_{0,1} G_1 = d_1$		$O_{0',1'} G_{1'} = d_{1'}$
$O_{0,1} O_2 = l_1$ (masse m_1)		$O_{0',1'} O_{2'} = l_{1'}$ (masse $m_{1'}$)
$O_2 G_2 = d_2$		$O_{2'} G_{2'} = d_{2'}$
$O_2 O_3 = l_2$ (masse m_2)		$O_{2'} O_{3'} = l_{2'}$ (masse $m_{2'}$)
$O_3 O_4 = l_3$ (masse m_3)		$O_{3'} O_{4'} = l_{3'}$ (masse $m_{3'}$)
$O_3 C = r_1$		$O_{3'} C = r_{1'}$

Pour le robot i , le segment $O_i O_{i+1}$ a une longueur l_i , une masse m_i et un centre de gravité G_i (il en est de même pour le $2^{\text{ième}}$ robot). Le tenseur d'inertie correspondant :

$$\tau_{G_i} = \begin{vmatrix} I_{x_i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_i} \end{vmatrix} \quad (4.01)$$

Le tenseur d'inertie correspondant au $2^{\text{ième}}$ robot sera :

$$\tau_{G_i'} = \begin{vmatrix} I_{x_i'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_i'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_i'} \end{vmatrix} \quad (4.02)$$

Pour ce qui est de l'objet, sa masse est m_c et son centre de gravité C . Ses coordonnées sont liées au repère $R_c (x_c, y_c, z_c)$.

4.1 Calcul des transformations

Pour le robot 1

Passage $R_f - R_0$:

$${}^f T_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.03)$$

Passage $R_0 - R_1$:

$${}^0 T_1 = \begin{vmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 & 0 \\ s_{q_1} & c_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.04)$$

Passage $R_1 - R_2$:

$${}^1 T_2 = \begin{vmatrix} c_{q_2} & -s_{q_2} & 0 & l_1 \\ s_{q_2} & c_{q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.05)$$

Passage $R_2 - R_3$:

$${}^2 T_3 = \begin{vmatrix} c_{q_3} & -s_{q_3} & 0 & l_2 \\ s_{q_3} & c_{q_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.06)$$

Passage $R_3 - R_c$:

$${}^3 T_c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.07)$$

passage $R_f - R_c$:

$${}^f T_c = T_0 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_c$$

$${}^f T_c = \begin{vmatrix} c_{q_{123}} & -s_{q_{123}} & 0 & P_{x_c} \\ s_{q_{123}} & c_{q_{123}} & 0 & P_{y_c} \\ 0 & 0 & 1 & P_{z_c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.08)$$

Avec :

$$P_{x_c} = -l_0 + l_1 c_{q_1} + l_2 c_{q_{12}} + r_1 c_{q_{123}}$$

$$P_{y_c} = l_1 s_{q_1} + l_2 s_{q_{12}} + r_1 s_{q_{123}}$$

$$P_{z_c} = 0$$

$$q_1 = q_1$$

$$q_{12} = q_1 + q_2$$

$$q_{123} = q_1 + q_2 + q_3$$

Pour le robot 2 :

Le calcul des transformations sera analogue (seuls les indices changent).

Passage $R_0 - R_c$:

$${}^f T_c = T_{0'} \cdot T_{1'} \cdot T_{2'} \cdot T_{3'} \cdot T_c$$

$${}^f T_c = \begin{vmatrix} c q_{1'2'3'} & -s q_{1'2'3'} & 0 & P_{X'c} \\ s q_{1'2'3'} & c q_{1'2'3'} & 0 & P_{Y'c} \\ 0 & 0 & 1 & P_{Z'c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.09)$$

Avec :

$$P_{X'c} = l_0 + l_1 c q_{1'} + l_2 c q_{1'2'} + r_2 c q_{1'2'3'}$$

$$P_{Y'c} = l_1 s q_{1'} + l_2 s q_{1'2'} + r_2 s q_{1'2'3'}$$

$$P_{Z'c} = 0$$

$$q_{1'} = q_1$$

$$q_{1'2'} = q_1 + q_2$$

$$q_{1'2'3'} = q_1 + q_2 + q_3$$

4.2 Relations entre les coordonnées articulaires des 2 robots

La rotation totale du repère R_0 par rapport à R_c est la même des 2 côtés, (condition de fermeture de boucle). On a la relation suivante :

$$q_1 + q_2 + q_3 + \varphi_1 = q_{1'} + q_{2'} + q_{3'} + \varphi_2 \quad (4.10)$$

La translation totale du point C par rapport au point O_f est :

$$-l_0 + l_1 c q_1 + l_2 c q_{12} + r_1 c q_{123} = l_1' + l_1' c q_{1'} + l_2' c q_{1'2'} + r_2 c q_{1'2'3'} \quad (4.11)$$

$$l_1 s q_1 + l_2 s q_{12} + r_1 s q_{123} = l_1' s q_{1'} + l_2' s q_{1'2'} + r_2 s q_{1'2'3'} \quad (4.12)$$

On calcule les coordonnées articulaires $q_{i'}$ (robot 2) par rapport à q_i (robot 1). On sait que :

$$c q_{1'2'} = c(q_{1'} + q_{2'}) = c q_{1'} c q_{2'} - s q_{1'} s q_{2'}$$

$$s q_{1'2'} = s(q_{1'} + q_{2'}) = s q_{1'} c q_{2'} + s q_{2'} c q_{1'}$$

$$c q_{1'2'3'} = c[q_{123} + (\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (\text{voir relation (4.10)})$$

$$s q_{1'2'3'} = s[q_{123} + (\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (\text{voir relation (4.10)})$$

En utilisant ce qui précède, les équations (4.11) et (4.12) peuvent être réduites de la manière suivante :

$$l_1' c q_{1'} + l_2' c q_{1'2'} = A \quad (4.13)$$

$$l_1' s q_{1'} + l_2' s q_{1'2'} = B \quad (4.14)$$

Où :

$$A = -(l_0 + l_0') + l_1 c q_{1'} + l_2 c q_{12} + r_1 c q_{123} - r_2 c [q_{123} + (\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$B = l_1 s q_{1'} + l_2 s q_{12} + r_1 s q_{123} - r_2 s [q_{123} + (\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Les équations (4.13) et (4.14) deviennent :

$$l_1' c q_{1'} + l_2' (c q_{1'} c q_{2'} - s q_{1'} s q_{2'}) = A \quad (4.15)$$

$$l_1' s q_{1'} + l_2' (s q_{1'} c q_{2'} + c q_{1'} s q_{2'}) = B \quad (4.16)$$

On élève au carré (4.15) et (4.16) et on les ajoute :

$$\begin{aligned} & (l_1' c q_{1'})^2 + l_2'^2 (c q_{1'} c q_{2'} - s q_{1'} s q_{2'})^2 + (l_1' s q_{1'})^2 + l_2'^2 (s q_{1'} c q_{2'} + c q_{1'} s q_{2'})^2 + \\ & + 2 l_1' l_2' c q_{1'} (c q_{1'} c q_{2'} - s q_{1'} s q_{2'}) + 2 l_1' l_2' s q_{1'} (s q_{1'} c q_{2'} + c q_{1'} s q_{2'}) = A^2 + B^2 \end{aligned}$$

Cette dernière équation se simplifie et devient :

$$l_1'^2 + l_2'^2 + 2 l_1' l_2' c q_2' = A^2 + B^2 \quad \text{où la seule inconnue est } c q_2'$$

Alors :

$$c q_2' = \frac{A^2 + B^2 - (l_1'^2 + l_2'^2)}{2 l_1' l_2'} \quad (4.17)$$

On tire q_2' .

$$q_2' = \text{ATAN2}(\pm \sqrt{1 - c^2 q_2'^2}, c q_2') \quad (4.18)$$

On reprend les expressions (4.15) et (4.16) :

$$l_1' c q_1' + l_2' (c q_1' c q_2' - s q_1' s q_2') = A$$

$$l_1' s q_1' + l_2' (s q_1' c q_2' + c q_1' s q_2') = B$$

On les écrit sous la forme suivante :

$$l_1' c q_1' + l_2' c q_1' c q_2' - l_2' s q_1' s q_2' = A$$

$$l_1' s q_1' + l_2' s q_1' c q_2' + l_2' c q_1' s q_2' = B$$

On pose $X = l_1' + l_2' c q_2'$ et $Y = l_2' s q_2'$

Le système devient :

$$X c q_1' - Y s q_1' = A$$

$$X s q_1' + Y c q_1' = B$$

En le résolvant, on obtient :

$$s q_1' = (X B - Y A) (X^2 + Y^2)^{-1} \quad (4.19)$$

$$c q_1' = (X A + Y B) (X^2 + Y^2)^{-1}$$

Ce qui donne :

$$q_1' = \text{ATAN2}(s q_1', c q_1') \quad (4.20)$$

Et enfin :

$$q_3' = q_1 + q_2 + q_3 - (q_1' + q_2') + (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (4.21)$$

4.3 Calcul du modèle dynamique

Le calcul du modèle dynamique se fera sur un seul robot qui sera identique à celui du deuxième. On utilise le formalisme de LAGRANGE :

$$L = E_c - E_p$$

Où :

$E_c = \sum E_{ci}$ (énergie cinétique totale) et $E_p = \sum E_{pi}$ (énergie potentielle totale).

E_{ci} et E_{pi} représentent respectivement les énergies cinétique et potentielle du segment i .

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} m_i v_{Gi}^2 + \frac{1}{2} \omega_i^T \tau_{Gi} \omega_i$$

$$E_{Pi} = -m_i \vec{g} \cdot (\vec{O}_f \vec{O}_i + \vec{d}_i)$$

$$\vec{O}_f \vec{O}_i = (\vec{l}_0 + \dots + \vec{l}_i)$$

On va procéder au calcul segment par segment c'est à dire au calcul des variables cinématiques (V_{Gi} et ω_i) du segment i en utilisant la récurrence avant du formalisme de NEWTON-EULER, ensuite, on détermine le vecteur $\vec{O}_f \vec{O}_i$ et enfin, on calculera les énergies cinétique et potentielle du même segment i .

4.3.1 Calcul des vitesses, des E_{ci} et des E_{pi}

La composition des vitesses est donnée par les 2 expressions suivantes :

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i-1} + \dot{\sigma}_i q_i \vec{a}_i$$

$$\vec{v}_i = (\vec{v}_{i-1} + \vec{\omega}_{i-1} \wedge \vec{O}_{i-1} \vec{O}_i) + \dot{\sigma}_i q_i \vec{a}_i$$

- \dot{q}_i : vitesse articulaire du corps C_i .
- ω_i : vitesse de rotation du corps C_i .
- V_i : vitesse absolue de l'origine O_i .

- \bar{a}_i : vecteur unitaire de l'axe z_i (on confond a_i et z_i).
- σ_i : variable binaire (égale à 0 puisque toutes les articulations sont rotoïdes)

$$\bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i = 1$$

En définitive, les expressions précédentes se réduisent à :

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i-1} + \dot{q}_i \bar{a}_i \quad (4.22)$$

$$\vec{v}_i = \left(\vec{v}_{i-1} + \vec{\omega}_{i-1} \wedge \overrightarrow{O_{i-1}O_i} \right) \quad (4.23)$$

On initialise les vitesses pour $i = 0$. $V_0 = 0$ et $\omega_0 = 0$.

SEGMENT 1

Calcul des vitesses

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_0 + \dot{q}_1 \bar{z}_1 = \dot{q}_1 \bar{z}_1 \quad (4.24)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_0 \wedge \overrightarrow{O_0O_1} = \vec{0} \quad (4.25)$$

La formule de distribution des vitesses entre O_1 et G_1 est telle que :

$$\vec{v}_{G_1} = \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O_1G_1} = \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O_1G_1}$$

$$\vec{v}_{G_1} = \dot{q}_1 \bar{z}_1 \wedge d_1 \bar{x}_1 = d_1 \dot{q}_1 \bar{y}_1 \quad (4.26)$$

Calcul de E_{C1}

$$E_{C1} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{G1}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_1^T \boldsymbol{\tau}_{G_1} \vec{\omega}_1$$

Comme $\bar{z}_0 = \bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}_3$, alors, $\vec{\omega}_i$ garde la même expression quelque soit le repère d'écriture.

$$E_{C1} = \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 I_{ZG1}$$

$$E_{C1} = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (m_1 d_1^2 + I_{ZG1}) \quad (4.27)$$

Calcul de E_{P1} :

$$E_{P1} = -m_1 \vec{g}^T \rightarrow (O_f O_1 + d_1 \vec{x}_1) = -m_1 \vec{g}^T (d_1 \vec{x}_1)$$

L'énergie potentielle est nulle entre O_f et O_1 . $\vec{g}^T = (0, -g, 0)$ dans le repère ${}^f R_0$.

$$E_{P1} = -m_1 (0, -g, 0) {}^0 R_1 (d_1 \vec{x}_1)$$

$$\text{Comme } {}^0 R_1 = \begin{vmatrix} c q_1 & -s q_1 & 0 \\ s q_1 & c q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad d_1 \vec{x}_1 = \begin{vmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$E_{P1} = -m_1 (-g d_1 s q_1) = m_1 d_1 g s q_1 \quad (4.28)$$

SEGMENT 2

Calcul des vitesses

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \dot{q}_2 \vec{z}_2 = \dot{q}_1 \vec{z}_1 + \dot{q}_2 \vec{z}_2$$

$$\vec{\omega}_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \vec{z}_2 \quad (4.29)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{O}_1 \vec{O}_2 \quad \text{avec} \quad \vec{O}_1 \vec{O}_2 = l_1 \vec{x}_1$$

$$\vec{v}_2 = {}^2 R_1 (\vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \wedge l_1 \vec{x}_1)$$

$$\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} c q_2 & s q_2 & 0 \\ -s q_2 & c q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{q}_1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 \dot{q}_1 s q_2 \\ l_1 \dot{q}_1 c q_2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = l_1 \dot{q}_1 \left(s q_2 \vec{x}_2 + c q_2 \vec{y}_2 \right) \quad (4.30)$$

La formule de distribution des vitesses entre O_2 et G_2 est telle que :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{G_2} &= \vec{v}_2 + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O}_2 \vec{G}_2 \quad \text{avec} \quad \vec{O}_2 \vec{G}_2 = d_2 \vec{x}_2 \\ \vec{v}_{G_2} &= l_1 \dot{q}_1 s q_2 \vec{x}_2 + \left(l_1 \dot{q}_1 c q_2 + \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) d_2 \right) \vec{y}_2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Calcul de E_{C2}

$$\begin{aligned} E_{C2} &= \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{G_2}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_2^T \boldsymbol{\tau}_{G_2} \vec{\omega}_2 \\ \vec{v}_{G_2}^2 &= \left(l_1 \dot{q}_1 s q_2 \right)^2 + \left(l_1 \dot{q}_1 c q_2 + \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) d_2 \right)^2 \\ \vec{v}_{G_2}^2 &= \left(\left(l_1 \dot{q}_1 \right)^2 + d_2^2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right)^2 + 2 l_1 d_2 \dot{q}_1 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) c q_2 \right) \\ E_{C2} &= \frac{1}{2} m_2 \left(\left(l_1 \dot{q}_1 \right)^2 + d_2^2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right)^2 + 2 l_1 d_2 \dot{q}_1 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) c q_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right)^2 I_{Z_{G_2}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Calcul de E_{P2} :

$$\begin{aligned} E_{P2} &= - m_2 \vec{g}^T \left(\vec{O}_f \vec{O}_2 + l_1 \vec{x}_1 + d_2 \vec{x}_2 \right) \\ E_{P2} &= - m_2 \vec{g}^T \left(\begin{matrix} 0 \\ R_{11} l_1 \vec{x}_1 + \\ 0 \\ R_{21} d_2 \vec{x}_2 \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

$${}^0 R_1 l_1 \vec{x}_1 = \begin{vmatrix} l_1 c q_1 \\ l_1 s q_1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad {}^0 R_2 d_2 \vec{x}_2 = \begin{vmatrix} d_2 c(q_1+q_2) \\ d_2 s(q_1+q_2) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$E_{p_2} = m_2 g (l_1 s q_1 + d_2 s(q_1 + q_2)) \quad (4.33)$$

SEGMENT 3

Calcul des vitesses

$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_2 + \dot{q}_3 \vec{z}_3 = \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) \vec{z}_3 \quad (4.34)$$

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_2 + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{O}_2 O_3 \quad \text{avec} \quad \vec{O}_2 O_3 = l_2 \vec{x}_2$$

$$\vec{v}_3 = {}^3 R_2 \left(l_1 \dot{q}_1 s q_2 \vec{x}_2 + \left(l_1 \dot{q}_1 c q_2 + l_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) \right) \vec{y}_2 \right)$$

$$\vec{v}_3 = \left(l_1 \dot{q}_1 s(q_2+q_3) + l_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) s q_3 \right) \vec{x}_3 + \left(l_1 \dot{q}_1 c(q_2+q_3) + l_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) c q_3 \right) \vec{y}_3 \quad (4.35)$$

La formule de distribution des vitesses entre O_3 et G_3 est telle que :

$$\vec{v}_{G_3} = \vec{v}_3 + \vec{\omega}_3 \wedge \vec{O}_3 G_3 \quad \text{avec} \quad \vec{O}_3 G_3 = x_{G_3} \vec{x}_3 + y_{G_3} \vec{y}_3$$

$$\vec{\omega}_3 \wedge \vec{O}_3 G_3 = x_{G_3} \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) \vec{y}_3 - y_{G_3} \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) \vec{x}_3$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{G3} = & \left(l_1 \dot{q}_1 s(q_2 + q_3) + l_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) s q_3 - y_{G3} \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) \right) \vec{x}_3 + \\ & + \left(l_1 \dot{q}_1 c(q_2 + q_3) + l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) c q_3 + x_{G3} \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) \right) \vec{y}_3 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Calcul de E_{C3}

$$\begin{aligned} E_{C3} = & \frac{1}{2} m_3 \vec{V}_{G3}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_3^T \boldsymbol{\tau}_{G3} \vec{\omega}_3 \\ E_{C3} = & \frac{1}{2} m_3 \left[\left(l_1 \dot{q}_1 s(q_2 + q_3) + l_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) s q_3 - y_{G3} \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(l_1 \dot{q}_1 c(q_2 + q_3) + l_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) c q_3 + x_{G3} \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right)^2 I_{ZG3} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Calcul de E_{P3}

$$\begin{aligned} E_{P3} = & m_3 \vec{g}^T \left(\vec{O}_f \vec{O}_1 + l_1 \vec{x}_1 + l_2 \vec{x}_2 + x_{G3} \vec{x}_3 + y_{G3} \vec{y}_3 \right) \\ E_{P3} = & -m_3 (0, -g, 0) \left({}^0R_1 (l_1 \vec{x}_1) + {}^0R_2 (l_2 \vec{x}_2) + {}^0R_3 (x_{G3} \vec{x}_3 + y_{G3} \vec{y}_3) \right) \end{aligned}$$

On trouve :

$$E_{P3} = -m_3 (0, -g, 0) \begin{vmatrix} l_1 c q_1 + l_2 c (q_1 + q_2) + x_{G3} c q_{123} - y_{G3} s q_{123} \\ l_1 s q_1 + l_2 s (q_1 + q_2) + x_{G3} s q_{123} + y_{G3} c q_{123} \\ 0 \end{vmatrix}$$

En définitive :

$$E_{P3} = m_3 g (l_1 s q_1 + l_2 s (q_1 + q_2) + x_{G3} s (q_1 + q_2 + q_3) + y_{G3} c (q_1 + q_2 + q_3)) \quad (4.38)$$

4.3.2 Calcul des énergies cinétique et potentielle totales

L'énergie cinétique totale du robot 1 est égale à $\sum E_{Ci} = E_{C1} + E_{C2} + E_{C3}$.

$$\begin{aligned} \sum E_{Ci} = & \frac{1}{2} \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right)^2 \left[I_{ZG1} + \frac{1}{2} d_1^2 (m_1 d_1^2 + I_{ZG1}) + \frac{1}{2} m_2 \left(l_1 \dot{q}_1 \right)^2 + d_2^2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right)^2 + 2 l_1 d_2 \dot{q}_1 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) c q_2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} m_3 \left[\left(l_1 \dot{q}_1 s(q_2 + q_3) + l_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) s q_3 - y_{G3} \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(l_1 \dot{q}_1 c(q_2 + q_3) + l_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) c q_3 + x_{G3} \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

L'énergie potentielle totale du robot 1 est égale à $\sum E_{Pi} = E_{P1} + E_{P2} + E_{P3}$.

$$\begin{aligned} \sum E_{Pi} = & m_1 d_1 g s q_1 + m_2 g \left(q_1 s q_1 + d_2 s(q_1 + q_2) \right) + \\ & + m_3 g \left(l_1 s q_1 + l_2 s(q_1 + q_2) + x_{G3} s(q_1 + q_2 + q_3) + y_{G3} c(q_1 + q_2 + q_3) \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

4.3.3 Calcul des coefficients de l'énergie cinétique totale

On écrit l'énergie cinétique totale sous la forme :

$$\sum E_{Ci} = [a_1] \dot{q}_1^2 + [a_2] \dot{q}_2^2 + [a_3] \dot{q}_3^2 + [a_4] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [a_5] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + [a_6] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \quad (4.41)$$

En effectuant le calcul des coefficients a_i de l'équation (4.41), on obtient :

Coefficient $[a_1]$

$$\begin{aligned} [a_1] = & \frac{1}{2} \left[m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + m_2 l_1^2 + 2 m_2 l_1 d_2 c q_2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + \right. \\ & + 2 m_3 l_1 l_2 c q_3 + 2 m_3 l_2 (x_{G3} c q_3 - y_{G3} s q_3) + 2 m_3 l_1 (x_{G3} c q_{23} - y_{G3} s q_{23}) + \\ & \left. + m_3 (x_{G3}^2 + y_{G3}^2) + I_{ZG1} + I_{ZG2} + I_{ZG3} \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

Coefficient [a₂]

$$[a_2] = \frac{1}{2} \left[m_2 d_2^2 + m_3 l_2^2 + 2m_3 l_2 (x_{G3} c q_3 - y_{G3} s q_3) + m_3 (x_{G3}^2 + y_{G3}^2) + I_{ZG2} + I_{ZG3} \right] \quad (4.43)$$

Coefficient [a₃]

$$[a_3] = \frac{1}{2} \left[m_3 (y_{G3}^2 + x_{G3}^2) + I_{ZG3} \right] \quad (4.44)$$

Coefficient [a₄]

$$[a_4] = m_2 d_2^2 + m_2 l_1 d_2 c q_2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_1 l_2 c q_3 + m_3 l_1 (x_{G3} c q_{23} - y_{G3} s q_{23}) + \\ + 2m_3 l_2 (x_{G3} c q_3 - y_{G3} s q_3) + m_3 (x_{G3}^2 + y_{G3}^2) + I_{ZG2} + I_{ZG3} \quad (4.45)$$

Coefficient [a₅]

$$[a_5] = m_3 (x_{G3}^2 + y_{G3}^2) + m_3 l_1 (x_{G3} c q_{23} - y_{G3} s q_{23}) + m_3 l_2 (x_{G3} c q_3 - y_{G3} s q_3) + I_{ZG3} \quad (4.46)$$

Coefficient [a₆]

$$[a_6] = m_3 (x_{G3}^2 + y_{G3}^2) + m_3 l_2 (x_{G3} c q_3 - y_{G3} s q_3) + I_{ZG3} \quad (4.47)$$

4.3.4 Modèle dynamique total des 2 robots

D'après le formalisme de LAGRANGE, la dérivée de la fonction L est :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Comme l'énergie potentielle totale ne dépend pas des vitesses articulaires, alors :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \sum E_{Ci}}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

On considère l'équation (4.41) et on calcule tout d'abord $\frac{\partial \Sigma E_{Ci}}{\partial \dot{q}_i}$:

$$\frac{\partial \Sigma E_{Ci}}{\partial \dot{q}_1} = 2 [a_1] \dot{q}_1 + [a_4] \dot{q}_2 + [a_5] \dot{q}_3$$

$$\frac{\partial \Sigma E_{Ci}}{\partial \dot{q}_2} = 2 [a_2] \dot{q}_2 + [a_4] \dot{q}_1 + [a_6] \dot{q}_3$$

$$\frac{\partial \Sigma E_{Ci}}{\partial \dot{q}_3} = 2 [a_3] \dot{q}_3 + [a_5] \dot{q}_1 + [a_6] \dot{q}_2$$

On dérive ces 3 dernières équations par rapport au temps. On obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Sigma E_{Ci}}{\partial \dot{q}_1} \right) = 2 [a_1] \ddot{q}_1 + [a_4] \ddot{q}_2 + [a_5] \ddot{q}_3 + 2 \frac{da_1}{dt} \dot{q}_1 + \frac{da_4}{dt} \dot{q}_2 + \frac{da_5}{dt} \dot{q}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Sigma E_{Ci}}{\partial \dot{q}_2} \right) = 2 [a_2] \ddot{q}_2 + [a_4] \ddot{q}_1 + [a_6] \ddot{q}_3 + 2 \frac{da_2}{dt} \dot{q}_2 + \frac{da_4}{dt} \dot{q}_1 + \frac{da_6}{dt} \dot{q}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Sigma E_{Ci}}{\partial \dot{q}_3} \right) = 2 [a_3] \ddot{q}_3 + [a_5] \ddot{q}_1 + [a_6] \ddot{q}_2 + 2 \frac{da_3}{dt} \dot{q}_3 + \frac{da_5}{dt} \dot{q}_1 + \frac{da_6}{dt} \dot{q}_2$$

Calcul des coefficients $\frac{da_i}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} = \dot{q}_2 & \left[-m_{21} d_2 s q_2 - m_{31} \left(x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23} \right) \right] + \\ & + \dot{q}_3 \left[-m_{31} l_2 s q_3 - m_{32} \left(x_{G3} s q_3 + y_{G3} c q_3 \right) - m_{31} \left(x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\frac{da_2}{dt} = \dot{q}_3 \left[-m_{32} \left(x_{G3} s q_3 + y_{G3} c q_3 \right) \right] \quad (4.49)$$

$$\frac{da_3}{dt} = 0 \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_4}{dt} = & \dot{q}_2 \left[-m_2 l_1 d_2 s q_2 - m_3 l_1 \left(x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23} \right) \right] + \\ & + \dot{q}_3 \left[-m_3 l_1 l_2 s q_3 - m_3 l_1 \left(x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23} \right) - 2m_3 l_2 \left(x_{G3} s q_3 + y_{G3} c q_3 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_5}{dt} = & \dot{q}_2 \left[-m_3 l_1 \left(x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23} \right) \right] + \\ & + \dot{q}_3 \left[-m_3 l_1 \left(x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23} \right) - m_3 l_2 \left(x_{G3} s q_3 + y_{G3} c q_3 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\frac{da_6}{dt} = \dot{q}_3 \left[-m_3 l_2 \left(x_{G3} s q_3 + y_{G3} c q_3 \right) \right] \quad (4.53)$$

On calcule maintenant: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} (\sum E_{Ci} - \sum E_{Pi})$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -m_1 d_1 g c q_1 - m_2 g (l_1 c q_1 + d_2 c q_{12}) - m_3 g (l_1 c q_1 + l_2 c q_{12} + x_{G3} c q_{123} - y_{G3} s q_{123})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_2} = & \dot{q}_1^2 \left[-m_2 l_1^2 s q_2 - m_3 l_1 (x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23}) \right] + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left[-m_3 l_1 (x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23}) \right] + \\ & + \dot{q}_1 \dot{q}_3 \left[-m_3 l_1 (x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23}) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_3} = -m_3 \left[l_2 (x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23}) \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right) + l_1 (x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23}) \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \dot{q}_3 \right) \right] + m_3 g (x_{G3} c q_{123} - y_{G3} s q_{123})$$

Afin de constituer l'équation (4.02), on va procéder aux arrangements suivants. On

écrit les termes $\frac{da_i}{dt}$ sous la forme : $\frac{da_i}{dt} = a_{i1} \dot{q}_1 + a_{i2} \dot{q}_2 + a_{i3} \dot{q}_3$

Les équations (4.48),..., (4.53) deviennent comme suit :

$$\frac{da_1}{dt} = 0 \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2 + a_{13} \dot{q}_3$$

$$\frac{da_2}{dt} = 0 \dot{q}_1 + 0 \dot{q}_2 + a_{23} \dot{q}_3$$

$$\frac{da_3}{dt} = 0 \dot{q}_1 + 0 \dot{q}_2 + 0 \dot{q}_3$$

$$\frac{da_4}{dt} = 0 \dot{q}_1 + a_{42} \dot{q}_2 + a_{43} \dot{q}_3$$

$$\frac{da_5}{dt} = 0 \dot{q}_1 + a_{52} \dot{q}_2 + a_{53} \dot{q}_3$$

$$\frac{da_6}{dt} = 0 \dot{q}_1 + 0 \dot{q}_2 + a_{63} \dot{q}_3$$

Où :

$$a_{12} = -m_2 l_1 d_2 s q_2 - m_3 l_1 \left(x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23} \right)$$

$$a_{13} = -m_3 l_1 l_2 s q_3 - m_3 l_2 \left(x_{G3} s q_3 + y_{G3} c q_3 \right) - m_3 l_1 \left(x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23} \right)$$

$$a_{23} = -m_3 l_2 \left(x_{G3} s q_3 + y_{G3} c q_3 \right)$$

$$a_{42} = -m_2 l_1 d_2 s q_2 - m_3 l_1 \left(x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23} \right)$$

$$a_{43} = -m_3 l_1 l_2 s q_3 - m_3 l_1 \left(x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23} \right) - 2m_3 l_2 \left(x_{G3} s q_3 + y_{G3} c q_3 \right)$$

$$a_{52} = -m_3 l_1 \left(x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23} \right)$$

$$a_{53} = -m_3 l_1 \left(x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23} \right) - m_3 l_2 \left(x_{G3} s q_3 + y_{G3} c q_3 \right)$$

$$a_{63} = -m_3 l_2 \left(x_{G3} s q_3 + y_{G3} c q_3 \right)$$

et $a_{11} = a_{21} = a_{22} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{41} = a_{51} = a_{61} = a_{62} = 0$

Les termes $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Sigma E_{Ci}}{\partial \dot{q}_i} \right)$ deviennent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = 2a_1 \ddot{q}_1 + a_4 \ddot{q}_2 + a_5 \ddot{q}_3 + a_{42} \dot{q}_2^2 + a_{53} \dot{q}_3^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2a_{23} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + (a_{43} + a_{52}) \dot{q}_2 \dot{q}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = a_4 \ddot{q}_1 + 2a_2 \ddot{q}_2 + a_6 \ddot{q}_3 + a_{63} \dot{q}_3^2 + a_{42} \dot{q}_2 \dot{q}_1 + a_{43} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2a_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) = a_5 \ddot{q}_1 + a_6 \ddot{q}_2 + 2a_3 \ddot{q}_3 + a_{52} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{53} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + a_{63} \dot{q}_3 \dot{q}_2$$

Quand aux termes $\frac{\partial L}{\partial q_i}$, on les met sous la forme suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = l_{i0} + l_{i1} \dot{q}_1^2 + l_{i2} \dot{q}_2^2 + l_{i3} \dot{q}_3^2 + l_{i4} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_{i5} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + l_{i6} \dot{q}_2 \dot{q}_3$$

Pour les 3 segments :

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = l_{10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = l_{21} \dot{q}_1^2 + l_{24} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_{25} \dot{q}_1 \dot{q}_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_3} = l_{30} + l_{31} \dot{q}_1^2 + l_{32} \dot{q}_2^2 + l_{34} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_{35} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + l_{36} \dot{q}_2 \dot{q}_3$$

Où :

$$l_{10} = -m_1 d_1 g c q_1 - m_2 g (l_1 c q_1 + d_2 c q_{12}) - m_3 g (l_1 c q_1 + l_2 q_{12} + x_{G3} c q_{123} - y_{G3} s q_{123})$$

$$l_{21} = -m_2 l_1^2 s q_2 - m_3 l_1 (x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23})$$

$$l_{24} = -m_3 l_1 (x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23})$$

$$l_{25} = -m_3 l_1 (x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23})$$

$$l_{30} = m_3 g (x_{G3} c q_{123} - y_{G3} s q_{123})$$

$$l_{31} = -m_3 (l_1 + l_2) (x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23})$$

$$l_{32} = -m_3 l_2 (x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23})$$

$$l_{34} = -m_3 (l_1 + 2l_2) (x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23})$$

$$l_{35} = -m_3 (l_1 + l_2) (x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23})$$

$$l_{36} = -m_3 l_2 (x_{G3} s q_{23} + y_{G3} c q_{23})$$

L'expression $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$ sera égale à :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = & 2a_1 \ddot{q}_1 + a_4 \ddot{q}_2 + a_5 \ddot{q}_3 + a_{42} \dot{q}_2^2 + a_{53} \dot{q}_3^2 + \\ & + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2a_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + (a_{43} + a_{52}) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - l_{10} \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = a_4 \ddot{q}_1 + 2a_2 \ddot{q}_2 + a_6 \ddot{q}_3 - l_{21} \dot{q}_1^2 + a_{63} \dot{q}_3^2 +$$

$$+ (a_{42} - l_{24}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (a_{43} - l_{25}) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + 2a_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \quad (4.55)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_3} = a_5 \ddot{q}_1 + a_6 \ddot{q}_2 + 2a_3 \ddot{q}_3 - l_{31} \dot{q}_1^2 - l_{32} \dot{q}_2^2 +$$

$$+ (a_{52} - l_{34}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (a_{53} - l_{35}) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + (a_{63} - l_{36}) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - l_{30} \quad (4.56)$$

On calcule la matrice jacobienne et le torseur des forces appliquées par l'effecteur du robot 1 sur l'objet.

Calcul du torseur des forces appliquées : on considère le schéma suivant qui donne le bilan des efforts appliqués sur l'objet.

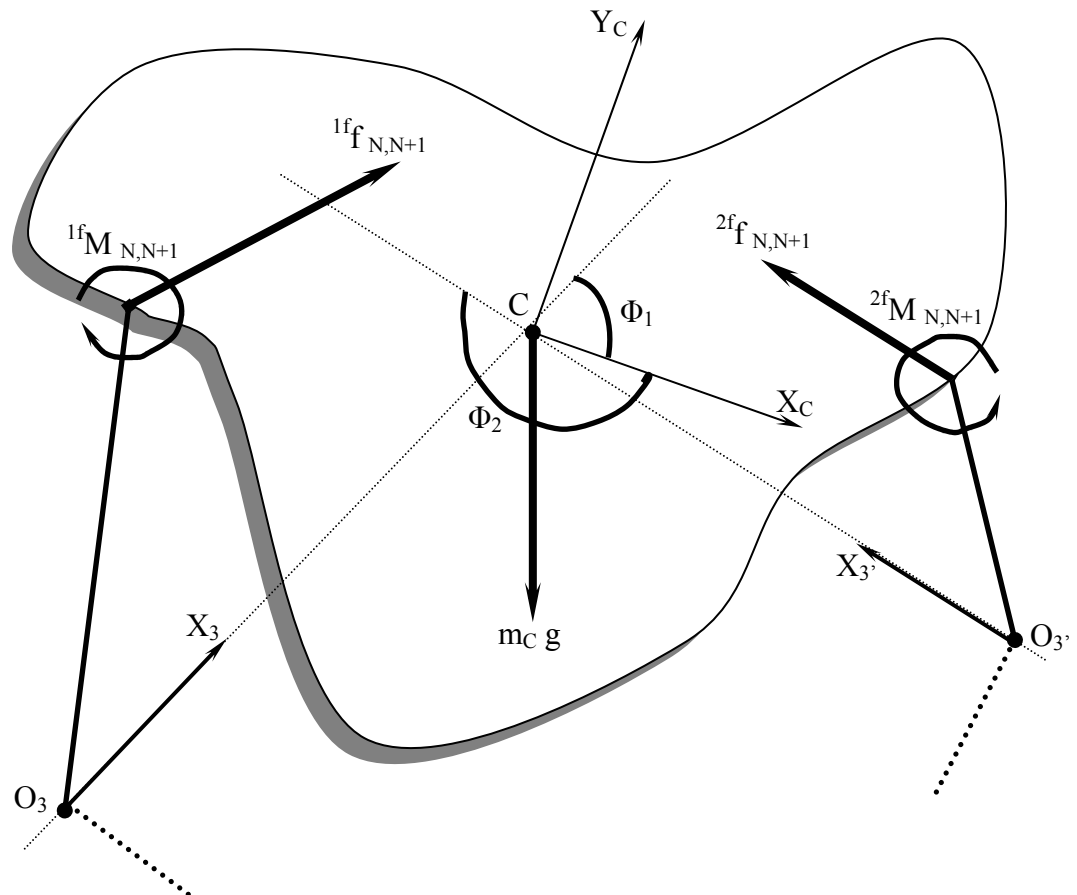


Figure 4.2 : Bilan des efforts généralisés au niveau des organes terminaux de 2 robots

Torseur du robot 1

$${}^1f_{N,N+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ f_{x_f} \\ 1 \\ f_{y_f} \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}^1f M_{N,N+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ M_{z_f} \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

Torseur du robot 2

$${}^2f_{N,N+1} = \begin{pmatrix} 2 \\ f_{x_f} \\ 2 \\ f_{y_f} \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}^2f M_{N,N+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ M_{z_f} \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

b) Calcul de la matrice jacobienne : pour calculer la matrice jacobienne, il faut déterminer la position de O_4 dans le repère R_f c'est à dire $O_f O_4$.

Les coordonnées de O_4 dans le repère 2R_3 sont x_{04} et y_{04} , alors :

$$\vec{O_f O_4} = {}^f T_3 \begin{bmatrix} x_{04} \\ y_{04} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Et comme ${}^f T_3 = {}^f T_0 \cdot {}^0 T_1 \cdot {}^1 T_2 \cdot {}^2 T_3$ donc :

$$\vec{O_f O_4} = \begin{vmatrix} -l_0 + l_1 c q_1 + l_2 c q_{12} + x_{04} c q_{123} - y_{04} s q_{123} \\ l_1 s q_1 + l_2 s q_{12} + x_{04} s q_{123} + y_{04} c q_{123} \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (4.59)$$

On prend :

$${}^1f X_{04} = -l_0 + l_1 c q_1 + l_2 c q_{12} + x_{04} c q_{123} - y_{04} s q_{123} \quad (4.60)$$

$${}^1f Y_{04} = -l_0 + l_1 s q_1 + l_2 s q_{12} + x_{04} s q_{123} + y_{04} c q_{123} \quad (4.61)$$

La matrice jacobienne du robot 1 sera égale à :

$$J_{1f}(q_i) = \begin{vmatrix} \frac{\partial {}^{1f}X_{O4}}{\partial q_1} & \frac{\partial {}^{1f}X_{O4}}{\partial q_2} & \frac{\partial {}^{1f}X_{O4}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial {}^{1f}Y_{O4}}{\partial q_1} & \frac{\partial {}^{1f}Y_{O4}}{\partial q_2} & \frac{\partial {}^{1f}Y_{O4}}{\partial q_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial q_1} & \frac{\partial \theta}{\partial q_2} & \frac{\partial \theta}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

$$J_{1f}^T(q_i) = \begin{vmatrix} \frac{\partial {}^{1f}X_{O4}}{\partial q_1} & \frac{\partial {}^{1f}Y_{O4}}{\partial q_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \\ \frac{\partial {}^{1f}X_{O4}}{\partial q_2} & \frac{\partial {}^{1f}Y_{O4}}{\partial q_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \\ \frac{\partial {}^{1f}X_{O4}}{\partial q_3} & \frac{\partial {}^{1f}Y_{O4}}{\partial q_3} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \theta}{\partial q_3} \end{vmatrix} \quad (4.62)$$

$$\theta = q_1 + q_2 + q_3 \quad (4.63)$$

Calcul des éléments de la matrice : d'après (4.60), (4.61) et (4.63), on a :

$$\frac{\partial \theta}{\partial q_1} = \frac{\partial \theta}{\partial q_2} = \frac{\partial \theta}{\partial q_3} = 1$$

$$\frac{\partial {}^{1f}X_{O4}}{\partial q_1} = -l_1 s q_1 - l_2 s q_{12} - x_{04} s q_{123} - y_{04} c q_{123}$$

$$\frac{\partial {}^1f_{X_{04}}}{\partial q_2} = -l_2 s q_{12} - x_{04} s q_{123} - y_{04} c q_{123}$$

$$\frac{\partial {}^1f_{X_{04}}}{\partial q_3} = -x_{04} s q_{123} - y_{04} c q_{123}$$

$$\frac{\partial {}^1f_{Y_{04}}}{\partial q_1} = l_1 c q_{11} + l_2 c q_{12} + x_{04} c q_{123} - y_{04} s q_{123}$$

$$\frac{\partial {}^1f_{Y_{04}}}{\partial q_2} = l_2 c q_{12} + x_{04} c q_{123} - y_{04} s q_{123}$$

$$\frac{\partial {}^1f_{Y_{04}}}{\partial q_3} = x_{04} c q_{123} - y_{04} s q_{123}$$

En définitive :

$$J_{1f}^T(q_i) \begin{vmatrix} {}^1f_{Xf} \\ {}^1f_{Yf} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ {}^1M_{Zf} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^1f_{Xf} \frac{\partial {}^1f_{X_{04}}}{\partial q_1} + {}^1f_{Yf} \frac{\partial {}^1f_{Y_{04}}}{\partial q_1} + {}^1M_{Zf} \\ {}^1f_{Xf} \frac{\partial {}^1f_{X_{04}}}{\partial q_2} + {}^1f_{Yf} \frac{\partial {}^1f_{Y_{04}}}{\partial q_2} + {}^1M_{Zf} \\ {}^1f_{Xf} \frac{\partial {}^1f_{X_{04}}}{\partial q_3} + {}^1f_{Yf} \frac{\partial {}^1f_{Y_{04}}}{\partial q_3} + {}^1M_{Zf} \end{vmatrix} \quad (4.64)$$

On identifie tous les résultats obtenus avec l'équation (4.02) :

$${}^i\Gamma = \left({}^i\Gamma_1, {}^i\Gamma_2, {}^i\Gamma_3 \right)^T$$

$$D_1(q_i) = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & 2a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & 2a_3 \end{vmatrix}$$

$$CGV_I \left(\begin{matrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} a_{42}\dot{q}_2^2 + a_{53}\dot{q}_3^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2a_{13}\dot{q}_1\dot{q}_3 + (a_{43}+a_{52})\dot{q}_2\dot{q}_3 - l_{10} \\ -l_{21}\dot{q}_1^2 + a_{63}\dot{q}_3^2 + (a_{42}-l_{24})\dot{q}_1\dot{q}_2 + (a_{43}-l_{25})\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2a_{23}\dot{q}_2\dot{q}_3 \\ -l_{31}\dot{q}_1^2 - l_{32}\dot{q}_2^2 + (a_{52}-l_{34})\dot{q}_1\dot{q}_2 + (a_{53}-l_{35})\dot{q}_1\dot{q}_3 + (a_{63}-l_{36})\dot{q}_2\dot{q}_3 - l_{30} \end{vmatrix}$$

Pour le robot 1, on obtient le système suivant :

$${}^1\Gamma_1 = 2a_1\ddot{q}_1 + a_4\ddot{q}_2 + a_5\ddot{q}_3 + a_{42}\dot{q}_2^2 + a_{53}\dot{q}_3^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2a_{13}\dot{q}_1\dot{q}_3 + (a_{43}+a_{52})\dot{q}_2\dot{q}_3 - l_{10} + \\ + f_{X_f} \frac{\partial X_{04}}{\partial q_1} + f_{Y_f} \frac{\partial Y_{04}}{\partial q_1} + M_{Z_f} \quad (4.65)$$

$${}^1\Gamma_2 = a_4\ddot{q}_1 + 2a_2\ddot{q}_2 + a_6\ddot{q}_3 - l_{21}\dot{q}_1^2 + a_{63}\dot{q}_3^2 + (a_{42}-l_{24})\dot{q}_1\dot{q}_2 + (a_{43}-l_{25})\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2a_{23}\dot{q}_2\dot{q}_3 + \\ + f_{X_f} \frac{\partial X_{04}}{\partial q_2} + f_{Y_f} \frac{\partial Y_{04}}{\partial q_2} + M_{Z_f} \quad (4.66)$$

$${}^1\Gamma_3 = a_5\ddot{q}_1 + a_6\ddot{q}_2 + 2a_3\ddot{q}_3 - l_{31}\dot{q}_1^2 - l_{32}\dot{q}_2^2 + (a_{52}-l_{34})\dot{q}_1\dot{q}_2 + (a_{53}-l_{35})\dot{q}_1\dot{q}_3 + (a_{63}-l_{36})\dot{q}_2\dot{q}_3 - l_{30} + \\ + f_{X_f} \frac{\partial X_{04}}{\partial q_3} + f_{Y_f} \frac{\partial Y_{04}}{\partial q_3} + M_{Z_f} \quad (4.67)$$

Le modèle dynamique du robot 2 sera identique à celui du robot 1 (on prend les indices du 2^{ème} manipulateur).

4.3.5 Calcul des contraintes cinématiques

Ce sont les vitesses de translation (v_c) et de rotation (ω_c) du centre de gravité C de l'objet, exprimées dans le repère R_f . Comme nous l'avons déjà dit, le calcul se fera pour le robot 1.

Calcul de \vec{v}_c :

D'après l'équation (3.10), on a :

$$\vec{v}_c = \frac{\partial}{\partial q_i} \left({}^1P_f^N(q_i) + \vec{r}_1 \right) \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\vec{O}_0O_3 + \vec{r}_1 \right) \dot{q}_i$$

Comme : $\vec{O}_0O_3 + \vec{r}_1 = \vec{O}_0C$ Alors :

$$\vec{O}_0C = \begin{vmatrix} -l_0 + l_1^c q_1 + l_2^c q_{12} + r_1^c q_{123} \\ l_1^s q_1 + l_2^s q_{12} + r_1^s q_{123} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Donc :

$$\vec{v}_c = \begin{vmatrix} \dot{q}_1 (-l_1^s q_1 - l_2^s q_{12} - r_1^s q_{123}) + \dot{q}_2 (-l_2^s q_{12} - r_1^s q_{123}) + \dot{q}_3 (-r_1^s q_{123}) \\ \dot{q}_1 (l_1^c q_1 + l_2^c q_{12} + r_1^c q_{123}) + \dot{q}_2 (l_2^c q_{12} + r_1^c q_{123}) + \dot{q}_3 (r_1^c q_{123}) \\ 0 \end{vmatrix} \quad (4.68)$$

$$\vec{\omega}_c = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{vmatrix} \quad (4.69)$$

On identifie les calculs précédents avec l'équation (3.14) :

$$\begin{vmatrix} \vec{v}_c \\ \vec{\omega}_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{c_x} \\ v_{c_y} \\ v_{c_z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-l_1 s q_1 - l_2 s q_{12} - r_1 s q_{123}) & (-l_2 s q_{12} - r_1 s q_{123}) & (-r_1 s q_{123}) \\ (l_1 c q_1 + l_2 c q_{12} + r_1 c q_{123}) & (l_2 c q_{12} + r_1 c q_{123}) & (r_1 c q_{123}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{vmatrix} \quad (4.70)$$

$$B_1(q_i) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.71)$$

Où :

$$b_{11} = -l_1 s q_1 - l_2 s q_{12} - r_1 s q_{123}$$

$$b_{12} = -l_2 s q_{12} - r_1 s q_{123}$$

$$b_{13} = -r_1 s q_{123}$$

$$b_{21} = l_1 c q_1 + l_2 c q_{12} + r_1 c q_{123}$$

$$b_{22} = l_2 c q_{12} + r_1 c q_{123}$$

$$b_{23} = r_1 c q_{123}$$

On dérive l'équation (4.70) et on l'identifie à (3.14).

$$\begin{vmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{\omega}_c \end{vmatrix} = \dot{B}_1(q_i) \dot{q}_i + B_1(q_i) \ddot{q}_i$$

Où :

$$\dot{B}_1(q_i) = \begin{pmatrix} \dot{b}_{11} & \dot{b}_{12} & \dot{b}_{13} \\ \dot{b}_{21} & \dot{b}_{22} & \dot{b}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

Où :

$$\dot{b}_{11} = \left(-l_1 \dot{q}_1 c q_1 - l_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) c q_{12} - r_1 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) c q_{123} \right)$$

$$\dot{b}_{12} = \left(-l_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) c q_{12} - r_1 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) c q_{123} \right)$$

$$\dot{b}_{13} = \left(-r_1 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) c q_{123} \right)$$

$$\dot{b}_{21} = \left(-l_1 \dot{q}_1 s q_1 - l_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) s q_{12} - r_1 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) s q_{123} \right)$$

$$\dot{b}_{22} = \left(-l_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) s q_{12} - r_1 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) s q_{123} \right)$$

$$\dot{b}_{23} = \left(-r_1 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \right) s q_{123} \right)$$

On déduit pour le robot 1 les systèmes suivants :

$$v_{Cx} = \left(-l_1 s q_1 - l_2 s q_{12} - r_1 s q_{123} \right) \dot{q}_1 + \left(-l_2 s q_{12} - r_1 s q_{123} \right) \dot{q}_2 + \left(-r_1 s q_{123} \right) \dot{q}_3$$

$$v_{Cy} = \left(l_1 c q_1 + l_2 c q_{12} + r_1 c q_{123} \right) \dot{q}_1 + \left(l_2 c q_{12} + r_1 c q_{123} \right) \dot{q}_2 + \left(r_1 c q_{123} \right) \dot{q}_3$$

$$\omega_z = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3$$

$$v_{Cz} = 0 \quad \text{et} \quad \omega_x = \omega_y = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{Cx} = & (-l_1 s q_1 - l_2 s q_{12} - r_1 s q_{123}) \ddot{q}_1 + (-l_2 s q_{12} - r_1 s q_{123}) \ddot{q}_2 + (-r_1 s q_{123}) \ddot{q}_3 + (-l_1 c q_1 - l_2 c q_{12} - r_1 c q_{123}) \dot{q}_1^2 + \\ & (-l_2 c q_{12} - r_1 c q_{123}) \dot{q}_2^2 + (-r_1 c q_{123}) \dot{q}_3^2 + (-2l_2 c q_{12} - 2r_1 c q_{123}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (-2r_1 c q_{123}) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + (-2r_1 c q_{123}) \dot{q}_2 \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{Cy} = & (l_1 c q_1 + l_2 c q_{12} + r_1 c q_{123}) \ddot{q}_1 + (l_2 c q_{12} + r_1 c q_{123}) \ddot{q}_2 + (r_1 c q_{123}) \ddot{q}_3 + (-l_1 c q_1 - l_2 s q_{12} - r_1 s q_{123}) \dot{q}_1^2 + \\ & (-l_2 s q_{12} - r_1 s q_{123}) \dot{q}_2^2 + (-r_1 s q_{123}) \dot{q}_3^2 + (-2l_2 s q_{12} - 2r_1 s q_{123}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (-2r_1 s q_{123}) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + (-2r_1 s q_{123}) \dot{q}_2 \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$v_{Cz} = 0, \quad \omega_x = \omega_y = 0 \quad \text{et} \quad \omega_z = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3$$

4.3.6 Calcul des contraintes dynamiques

$$f_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ f_{xf} & f_{yf} & 0 & 0 & 0 & M_{zf} & f_{xf} & f_{xf} & 0 & 0 & 0 & M_{zf} \end{bmatrix}^T \quad (4.73)$$

$$E_1(q_i) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -r_1 s q_{123} \\ 0 & 0 & r_1 c q_{123} \\ r_1 s q_{123} & -r_1 c q_{123} & 0 \end{vmatrix} \quad (4.74)$$

$$\Omega_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ q_1+q_2+q_3 \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ q_1+q_2+q_3 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.75)$$

$$L_1(q_i) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_1^s q_{123} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1^c q_{123} & 0 & 1 & 0 \\ r_1^s q_{123} & -r_1^c q_{123} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.76)$$

$$H_{1a}(q_i) = \begin{vmatrix} m_c I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & k_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_1(q_i) & D^{-1}(q_i) \end{vmatrix}$$

$$H_{1b} \begin{pmatrix} q_i & \bullet \\ q_i & q_i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} m_c I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & k_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_1 \begin{pmatrix} \bullet \\ q_i \end{pmatrix} q_i - H_{1a} q_i \text{ CGV}_1 \begin{pmatrix} \bullet \\ q_i & q_i \end{pmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} -m_c g \\ \Omega_1 k_c M_1 \begin{bmatrix} 1 \bullet \\ \phi_x(q_i), \phi_y(q_i), \phi_z(q_i) \end{bmatrix}^T \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0_{6 \times 1}$$

Le modèle dynamique des 2 robots tenant un objet rigide dans le plan formant une boucle fermée sera écrit sous la forme suivante :

$$\boxed{\Gamma = H + G} \quad (4.77)$$

Où : $\underline{H = \Delta^{-1} (W_1 + W_2 + W_3 \cdot W_4)}$ et $\underline{G = \Delta^{-1} \cdot W_5}$

Avec :

$$[B_1] = \begin{pmatrix} 2a_{12} & 2a_{13} & (a_{43} + a_{52}) \\ (a_{42} - 1_{24}) & (a_{43} - 1_{25}) & 2a_{23} \\ (a_{52} - 1_{34}) & (a_{53} - 1_{35}) & (a_{63} - 1_{36}) \end{pmatrix}$$

$$[C_1] = \begin{pmatrix} 0 & a_{42} & a_{53} \\ -1_{21} & 0 & a_{63} \\ -1_{31} & -1_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad [G_1] = \begin{pmatrix} -1_{10} \\ 0 \\ -1_{30} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = (\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \Gamma_{23})^T$$

$$\Delta = I_{6 \times 6} - \left| \begin{array}{cc|cc|cc} J_{1f}^T & 0_{3 \times 6} & (L_1 + U_1) & L_2 & H_{1a} & 0_{6 \times 3} \\ 0_{3 \times 6} & J_{2f}^T & L_1 & (L_2 + U_2) & 0_{6 \times 3} & H_{2a} \end{array} \right|^{-1}$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} D_1 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & D_2 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_{1'} & q_{2'} & q_{3'} \end{array} \right)^T$$

$$W_2 = \left[\begin{array}{c} [B_1] \begin{vmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_3 \\ \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{vmatrix} + [C_1] \begin{vmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \dot{q}_3^2 \end{vmatrix} \\ [B_2] \begin{vmatrix} \dot{q}_{1'} & \dot{q}_{2'} \\ \dot{q}_{1'} & \dot{q}_{3'} \\ \dot{q}_{2'} & \dot{q}_{3'} \end{vmatrix} + [C_2] \begin{vmatrix} \dot{q}_{1'}^2 \\ \dot{q}_{2'}^2 \\ \dot{q}_{3'}^2 \end{vmatrix} \end{array} \right]$$

$$W_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} J_{1f}^T & 0_{3 \times 6} & (L_1+U_1) & L_2 \\ 0_{3 \times 6} & J_{2f}^T & L_1 & (L_2+U_2) \end{array} \right]^{-1}$$

$$W_4 = \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|c} m_c I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \begin{vmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{vmatrix} \\ 0_{3 \times 3} & k_c & B_1 \end{array} \right] - H_{1a} \left(\begin{array}{c} \begin{vmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_3 \\ \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{vmatrix} \\ [B_1] \begin{vmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_3 \\ \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{vmatrix} + [C_1] \begin{vmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \dot{q}_3^2 \end{vmatrix} \end{array} \right) \\ \left[\begin{array}{cc|c} m_c I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \begin{vmatrix} \dot{q}_{1'} \\ \dot{q}_{2'} \\ \dot{q}_{3'} \end{vmatrix} \\ 0_{3 \times 3} & k_c & B_2 \end{array} \right] - H_{2a} \left(\begin{array}{c} \begin{vmatrix} \dot{q}_{1'} & \dot{q}_{2'} \\ \dot{q}_{1'} & \dot{q}_{3'} \\ \dot{q}_{2'} & \dot{q}_{3'} \end{vmatrix} \\ [B_2] \begin{vmatrix} \dot{q}_{1'} & \dot{q}_{2'} \\ \dot{q}_{1'} & \dot{q}_{3'} \\ \dot{q}_{2'} & \dot{q}_{3'} \end{vmatrix} + [C_2] \begin{vmatrix} \dot{q}_{1'}^2 \\ \dot{q}_{2'}^2 \\ \dot{q}_{3'}^2 \end{vmatrix} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$W_5 = \begin{pmatrix} [G_1] \\ [G_2] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{lf}^T & 0_{3 \times 6} \\ 0_{3 \times 6} & J_{lf}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 + U_1 & L_2 \\ L_1 & L_2 + U_2 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} H_{1a} [G_1] \\ H_{2a} [G_2] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mC\bar{g} \\ 0_{3 \times 3} \\ -mC\bar{g} \\ 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \right)$$

CHAPITRE 5

APPLICATION DE LA METHODE PROPOSEE

5.1 Principe de l'approche de la méthode proposée

La mise en œuvre de cette approche nécessite le partage du problème en 3 parties importantes :

- Reformulation des équations pour extraire explicitement T.
- Choix de la technique à utiliser pour modéliser $q(\lambda)$.
- Résolution du problème par une technique appropriée.

5.1.1 Reformulation des équations

On ne parle plus de trajectoire articulaire $q(t)$ mais $q(\lambda)$. Pour cela, on introduit le changement d'échelle suivant :

$$\forall t \in [0, T] \quad : \quad t = \lambda \cdot T \quad \text{avec} \quad \lambda \in [0, 1] \quad (5.01)$$

5.1.1.1 Critère de performance

Il sera réécrit sous la forme suivante :

$$F = T \int_0^1 L(X(\lambda), U(\lambda), T) d\lambda \quad (5.02)$$

Quant aux variables articulaires de position, de vitesse et d'accélération, elles seront fonction de T comme suit :

$$q(t) = q(\lambda T) = q(\lambda) \quad (5.03)$$

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{\partial q(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{T} q'(\lambda) \quad (5.04)$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{\partial \dot{q}(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{T^2} q''(\lambda) \quad (5.05)$$

Les commandes $u = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n)$ (voir formule (1.53)) sont données par le modèle dynamique du robot :

$$\sum_{j=1}^n M_{ij}(q(t)) \ddot{q}_j(t) + C_i(q(t), \dot{q}(t)) + G_i(q(t)) = \Gamma_i(t) \quad (5.06)$$

Pour simplifier les calculs numériques, on divise l'équation (5.06) par $\Gamma_{i \max}$. On pose :

$$\psi_i(t) = \frac{\Gamma_i(t)}{\Gamma_{i \max}} ; \quad \overline{M}_{ij} = \frac{M_{ij}}{\Gamma_{i \max}} ; \quad \overline{C}_i = \frac{C_i}{\Gamma_{i \max}} \quad \text{et} \quad \overline{G}_i = \frac{G_i}{\Gamma_{i \max}}$$

L'équation (5.06) devient :

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^n \overline{M}_{ij}(q(t)) \ddot{q}_j(t) + \overline{C}_i(q(t), \dot{q}(t)) + \overline{G}_i(q(t)) \quad (5.07)$$

Avec le changement d'échelle (5.01) et les expressions (5.03), (5.04) et (5.05), la relation (5.07) sera reformulée de la manière suivante :

$$\psi_i(\lambda) = \frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^n \overline{M}_{ij}(q(\lambda)) q''_j(\lambda) + \frac{1}{T^2} \overline{C}_i(q(\lambda), q'(\lambda)) + \overline{G}_i(q(\lambda)) \quad (5.08)$$

Si on pose $H_i = \sum_{j=1}^n \overline{M}_{ij} q''_j + \overline{C}_i$, l'expression (5.08) aura la forme réduite

suivante :

$$\psi_i(\lambda) = \frac{1}{T^2} H_i + \overline{G}_i \quad (5.09)$$

Soit $q(\lambda)$, une trajectoire articulaire reproduite dans le plan normalisé $[0,1]$. Elle peut être exécutée dans des durées T différentes. La meilleure des trajectoires (Soit $Q(\lambda)$ cette trajectoire) est celle qui est réalisée dans la durée T_Q minimisant le critère F_Q . Le critère de performance (5.02) s'écrit :

$$F(Q(\lambda), Q'(\lambda), Q''(\lambda), T) = F_Q(T) \quad (5.10)$$

Les fonctions $Q'(\lambda)$ et $Q''(\lambda)$ sont définies et connues dans l'intervalle $[0,1]$. Donc :

$$F_Q(T_Q) = \min_{T > 0} F_Q(T) \quad (5.11)$$

5.1.1.2 Contraintes du problème

3 types de contraintes : (Voir 1.4.4)

- Contraintes géométriques (positions articulaires)
- Contraintes cinématiques (vitesses et accélérations)
- Contraintes dynamiques (couples articulaires)

5.1.1.2.1 Contraintes géométriques

a) Sur les positions articulaires

$$|q_i(t)| \leq q_{i \max} \quad \forall t \in [0,1] \Rightarrow |q_i(\lambda)| \leq q_{i \max} \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad (5.12)$$

Chaque trajectoire $q(\lambda)$ doit se trouver dans l'intervalle permis par les débattements. Il faut vérifier que :

$$\forall \lambda \in [0,1] \quad , \quad \max q_i(\lambda) \in \left[q_{i \min} , q_{i \max} \right] \quad (5.13)$$

b) Sur les obstacles

Ils sont liés à l'environnement dans lequel travaille le robot. Il faut vérifier que :

$$g(q(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T] \Rightarrow \xi(q(\lambda), T) \leq 0 \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad (5.14)$$

Les fonctions g et ξ définissent la structure des obstacles. Cette dernière détermine le traitement de la contrainte.

5.1.1.2.2 Contraintes cinématiques

a) Sur les vitesses voir (5.04)

$$\left| \dot{q}_i(t) \right| \leq \dot{q}_{i \max} \Rightarrow \frac{1}{T} \left| q'_i(\lambda) \right| \leq \dot{q}_{i \max} \Rightarrow T \geq \frac{\left| q'_i(\lambda) \right|}{\dot{q}_{i \max}} \quad (5.15)$$

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

On a :

$$T \geq T_v$$

T_v est la limite inférieure du temps de transfert qui respecte (5.15). Il suffit de le choisir égal à :

$$T_v = \max_{i=1,n} \left[\max_{[0,1]} \left(\frac{\left| q'_i(\lambda) \right|}{q_{i \max}} \right) \right] \quad (5.16)$$

b) Sur les accélérations voir (5.05)

$$\left| \ddot{q}_i(t) \right| \leq \ddot{q}_{i \max} \Rightarrow \frac{1}{T^2} \left| q''_i(\lambda) \right| \leq \ddot{q}_{i \max} \Rightarrow T \geq \left(\frac{\left| q''_i(\lambda) \right|}{q_{i \max}} \right)^{1/2} \quad (5.17)$$

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

On a :

$$T \geq T_a$$

T_a est la limite inférieure du temps de transfert qui respecte (5.17). Il suffit de le choisir égal à :

$$T_a = \max_{i=1,n} \left[\max_{[0,1]} \left(\frac{\left| q''_i(\lambda) \right|}{q_{i \max}} \right)^{1/2} \right] \quad (5.18)$$

Pour une forme particulière $Q(\lambda)$ de la trajectoire, le temps optimal T_Q doit satisfaire les contraintes cinématiques tel que :

$$T_Q \geq T^* \quad (5.19)$$

$$T^* = \max (T_v, T_a) \quad (5.20)$$

T^* représente le temps optimal.

5.1.1.2.3 Contraintes dynamiques

Comme $\psi_i(t) = \frac{\Gamma_i(t)}{\Gamma_{i,max}(t)} = \frac{1}{T^2} H_i + \bar{G}_i$ et $|\Gamma_i(t)| \leq \Gamma_{i,max}(t)$, alors :

$$\frac{|\Gamma_i(t)|}{\Gamma_{i,max}} \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{T^2} H_i(\lambda) + \bar{G}_i(\lambda) \right| \leq 1 \quad (5.21)$$

Selon le signe de H et \bar{G} , cette contrainte sera formulée de la manière suivante :

$$T_l \leq T \leq T_r \quad (5.22)$$

T_l et T_r représentent respectivement la limite inférieure (left) et la limite supérieure (right). Si on note I_{ad} l'intervalle des durées T (temps optimal) qui vérifient toutes les contraintes (cinématiques et dynamiques), alors :

$$I_{ad} = \left[T^*, \infty \right] \cap \left[T_l, T_r \right] = \left[I_{ad,inf}, I_{ad,sup} \right] \quad (5.23)$$

La situation pour laquelle $I_{ad} = \{\emptyset\}$ correspond à une forme non réalisable par le robot quelque soit le temps de transfert T . On peut résumer cela sur le schéma suivant :

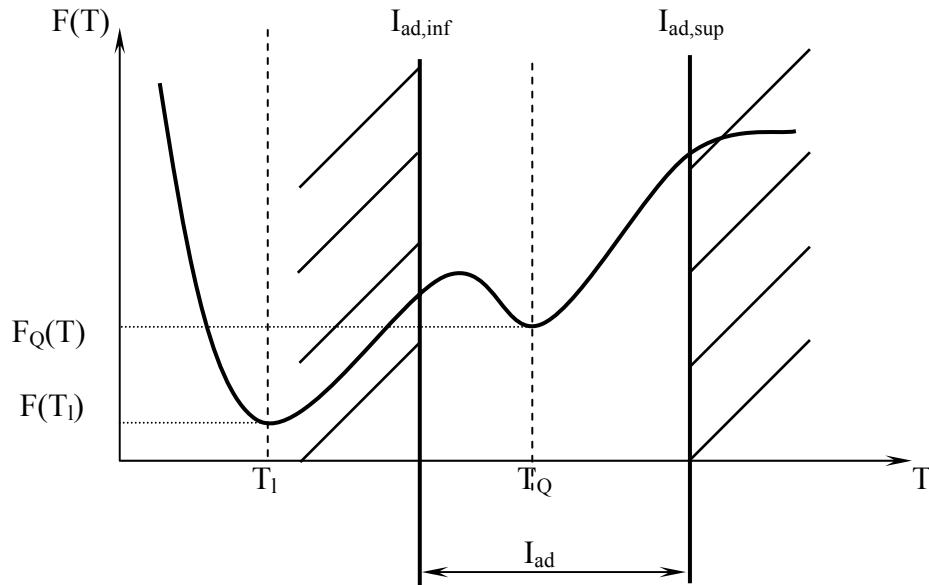


Figure 5.1 : Représentation du meilleur temps de transfert (avec respect des contraintes)

$F(T_1)$: Fonction objectif optimale sans respect des contraintes.

$F_Q(T)$: Fonction objectif optimale avec respect des contraintes.

Telles qu'elles sont formulées, les contraintes sont indépendantes. Dans un ordre quelconque, si par hasard l'une d'elles n'est pas respectée, la forme $Q(\lambda)$ est automatiquement rejetée sans tenir compte des autres. Le problème de planification devient plus simple.

5.1.1.3 Critères de performance

5.1.1.3.1 Critère temps minimum

Le critère de performance normalisé s'écrit : voir (1.54) et (1.55) :

$$F = T \int_0^1 L(X(\lambda), U(\lambda), T) d\lambda \quad (5.24)$$

et comme le lagrangien normalisé est égal à :

$$L(q(\lambda), q'(\lambda), q''(\lambda), T) = 1 \quad (5.25)$$

Alors :

$$F = T \int_0^1 d\lambda = T \quad (5.26)$$

Le meilleur temps de transfert T_Q qui correspond à la forme particulière $Q(\lambda)$ est :

$$T_Q = \min_{T > 0} F_Q = \min_{T > 0} (T) \quad (5.27)$$

Comme $F = T$ (voir (5.26)), la variation de F par rapport à T est linéaire. On peut représenter cette variation sur le graphe suivant :

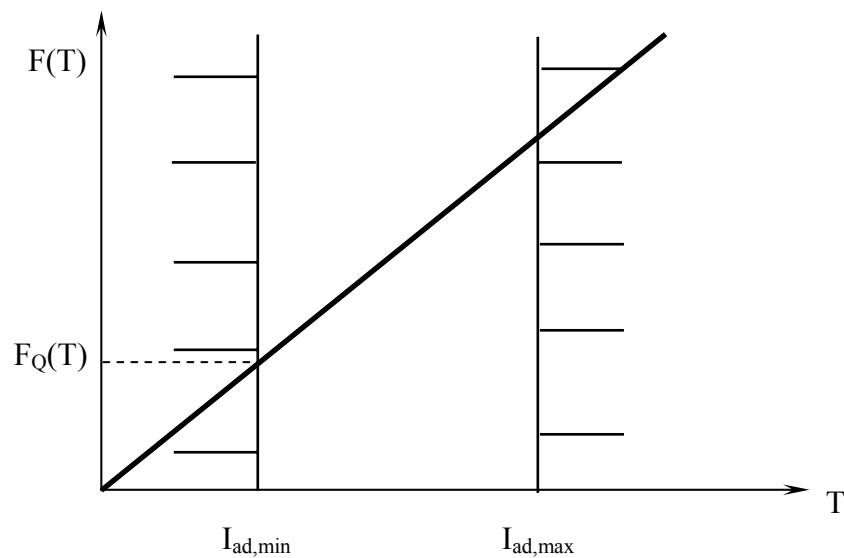


Figure 5.2 : Critère de performance avec temps de transfert minimum

Dans ce cas, T_Q correspond à $I_{ad,min}$. Ceci se traduit par :

$$T_{min} = \min \left(\left[T^*, \infty \right] \cap \left[T_l, T_r \right] \right) = I_{ad\ inf} \quad (5.28)$$

Théoriquement, si on ne limite pas les capacités d'un robot, la valeur de T_Q sera nulle.

5.1.1.3.2 Critère mixte temps-efforts quadratiques

Comme le lagrangien est égal à (voir (1.56)) :

$$L \left(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \Gamma \right) = \mu + \frac{1-\mu}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Gamma_i(t)}{\Gamma_{imax}} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \mu \in] 0,1 [$$

La fonction objectif sera formulée comme suit (voir (1.54)) :

$$F \left(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), T \right) = \mu \int_0^1 dt + \frac{(1-\mu)}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Gamma_i}{\Gamma_{imax}} \right)^2 dt \quad (5.29)$$

Dans l'espace normalisé, elle sera égale à :

$$F = \mu T + \frac{(1-\mu)}{2} T \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n \frac{H_i^2}{T^4} + \sum_{i=1}^n \frac{2}{T^2} H_i \overline{G_i} + \sum_{i=1}^n \overline{G_i}^2 \right] d\lambda \quad (5.30)$$

Après intégration et regroupement des coefficients de T, on trouve l'expression simplifiée de F suivante:

$$F = S_1 T + \frac{S_2}{T^3} + \frac{S_3}{T} \quad (5.31)$$

Où les S_i (termes réels indépendants du temps) valent respectivement :

$$S_1 = \mu + \frac{(1-\mu)}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \overline{G_i}^2 d\lambda \quad (5.32)$$

$$S_2 = \frac{(1-\mu)}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^n H_i^2 d\lambda \quad (5.33)$$

$$S_3 = (1-\mu) \int_0^1 \sum_{i=1}^n H_i \overline{G_i} d\lambda \quad (5.34)$$

La variation de la fonction objectif en fonction du temps de transfert aura l'allure suivante :

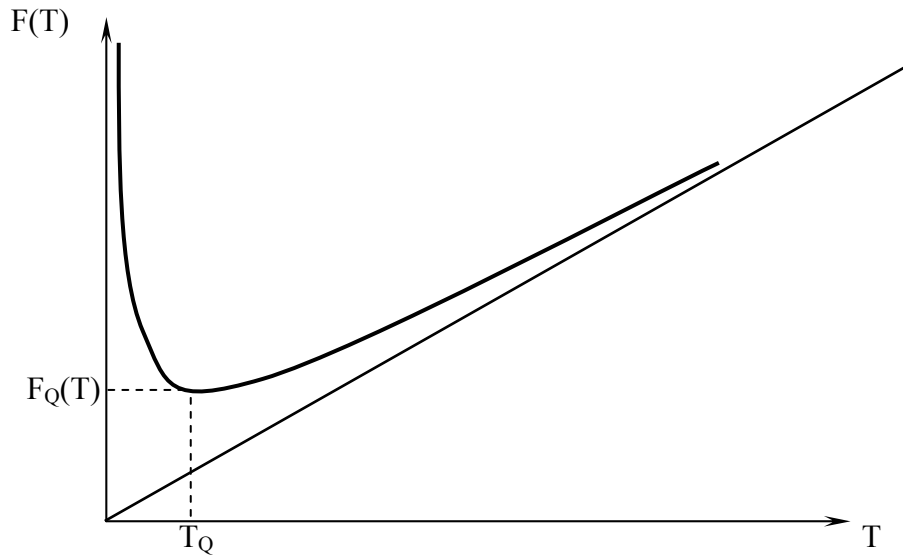


Figure 5.3 : Critère de performance mixte temps-efforts quadratiques

On reprend l'expression (5.31), on la dérive et on l'annule pour calculer analytiquement la valeur de T_Q . A la fin, on trouve :

$$\left. \begin{aligned} T_Q &= \left(\frac{S_3 + \sqrt{S_3^2 + 12 S_1 S_2}}{2 S_1} \right)^{1/2} \\ T_Q &= \left(\frac{6 S_2}{\sqrt{S_3^2 + 12 S_1 S_2} - S_3} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

Selon le signe de S_3 (S_1 et S_2 sont tous les 2 positifs), on prendra l'une ou l'autre des expressions de T_Q qui sont les 2 solutions positives. Les solutions négatives sont rejetées (puisque $T \geq 0$).

5.1.1.3.3 Critère mixte avec puissance quadratique

On reprend l'expression du lagrangien (1.62) :

$$L \left(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \Gamma \right) = \mu + \frac{1-\mu}{2} \left[\alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Gamma_i(t)}{\Gamma_{imax}} \right)^2 + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i(t)}{P_{imax}} \right)^2 \right]$$

D'après les expressions (1.58) et (5.04) on a : $P_i(t) = \Gamma_i(t) \cdot \dot{q}_i(t) = \Gamma_i(t) \cdot \frac{1}{T} \dot{q}_i(\lambda)$.

Comme $P_{i,max} = \Gamma_{i,max} \cdot \dot{q}_{i,max}$, la fonction objectif sera égale à :

$$F = \mu T + \frac{(1-\mu)}{2} \int_0^1 \left[\alpha \sum_{i=1}^n \psi_i^2 + (1-\alpha) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{T} \frac{\dot{q}_i}{q_{i,max}} \psi_i \right)^2 \right] T d\lambda \quad (5.36)$$

On effectue l'intégrale et on regroupe les coefficients de T pour arriver au résultat simplifié suivant :

$$F = S_1 T + \frac{S_2}{T^5} + \frac{S_3}{T^3} + \frac{S_4}{T} \quad (5.37)$$

Où les S_i valent respectivement :

$$S_1 = \mu + \alpha \frac{1-\mu}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \overline{G_i}^2 d\lambda \quad (5.38)$$

$$S_2 = \frac{(1-\alpha)(1-\mu)}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\dot{q}_i}{q_{i,max}} \right)^2 H_i^2 d\lambda \quad (5.39)$$

$$S_3 = (1-\mu) \left[\frac{\alpha}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^n H_i^2 d\lambda + (1-\alpha) \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\dot{q}_i}{q_{i,max}} \right)^2 H_i \overline{G_i} d\lambda \right] \quad (5.40)$$

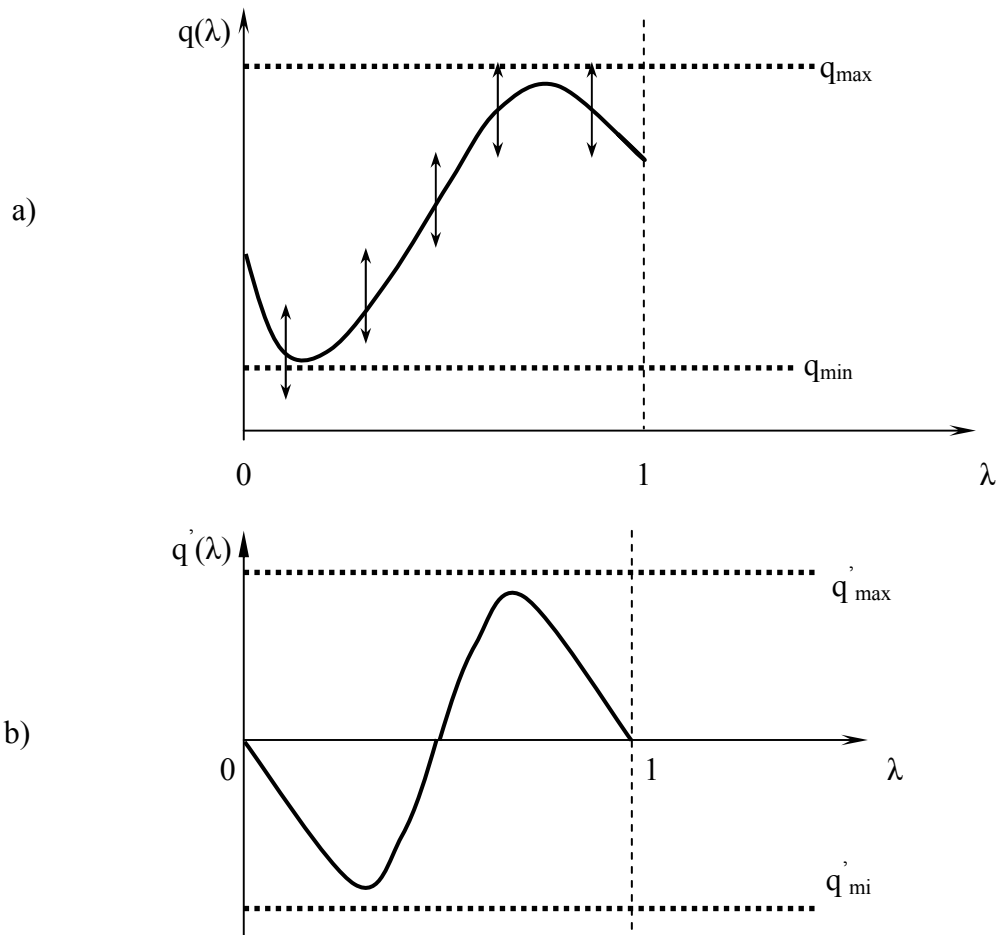
$$S_4 = (1-\mu) \left[\alpha \int_0^1 \sum_{i=1}^n H_i \overline{G_i} d\lambda + \frac{(1-\alpha)}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\dot{q}_i}{q_{i,max}} \right)^2 \overline{G_i}^2 d\lambda \right] \quad (5.41)$$

Les facteurs S_1 et S_2 sont toujours positifs quelque soit la forme de la trajectoire. La variation de la fonction objectif par rapport au temps de transfert a la même allure que pour le cas précédent. Le temps de transfert optimum sera obtenu à partir de la résolution de l'équation (voir (5.37)) :

$$0 = S_1 - \frac{S_4}{T^2} - \frac{3S_3}{T^4} - \frac{5S_2}{T^6} \quad (5.42)$$

5.1.2 Modélisation de la forme de la trajectoire

On a expliqué dans le sous-chapitre (2.2) qu'on a opté pour une modélisation par des morceaux de splines cubiques (reconnus pour leur stabilité), reliés, dans un intervalle normalisé $[0,1]$, par un nombre inconnu K (nombre arbitraire) de nœuds mobiles. L'essentiel est d'assurer la continuité des vitesses et des accélérations au niveau de ces derniers. 2 nœuds consécutifs servent de support à un polynôme de degré 3. Ils sont limités verticalement par les débattements q_{\min} et q_{\max} . On peut représenter cela à travers les graphiques suivants :



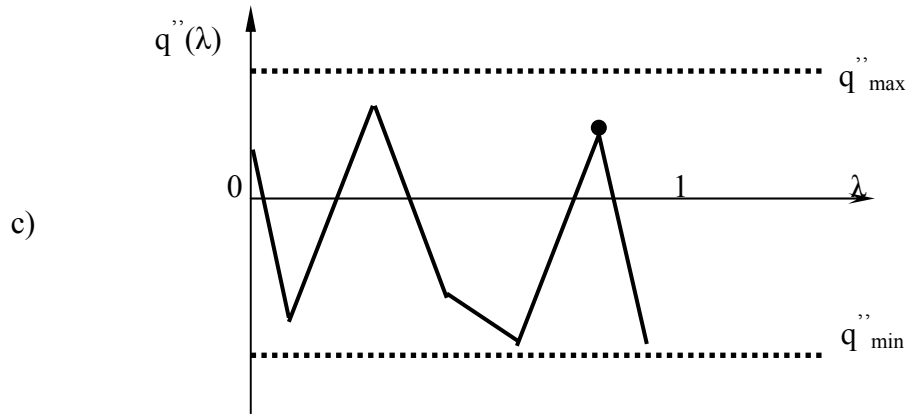


Figure 5.4 : Formes de $q(\lambda)$, $q'(\lambda)$ et $q''(\lambda)$

- a) représentation de la trajectoire articulaire.
- b) représentation des vitesses articulaires.
- c) représentation des accélérations articulaires.

Remarque : comme entre 2 nœuds, la trajectoire articulaire est un polynôme de degré 3, elle a une forme parabolique pour les vitesses et une forme linéaire pour les accélérations.

5.2 Application a 2 robots plans en chaîne fermée

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{T^2} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{G_1} \\ \overline{G_2} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Où :

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_{11}}{\Gamma_{11,max}} \\ \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{12,max}} \\ \frac{\Gamma_{13}}{\Gamma_{13,max}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{21,max}} \\ \frac{\Gamma_{22}}{\Gamma_{22,max}} \\ \frac{\Gamma_{23}}{\Gamma_{23,max}} \end{bmatrix}$$

$$[H_1] = \begin{bmatrix} \frac{H_{11}}{\Gamma_{11,\max}} \\ \frac{H_{12}}{\Gamma_{12,\max}} \\ \frac{H_{13}}{\Gamma_{13,\max}} \end{bmatrix}, [H_2] = \begin{bmatrix} \frac{H_{21}}{\Gamma_{21,\max}} \\ \frac{H_{22}}{\Gamma_{22,\max}} \\ \frac{H_{23}}{\Gamma_{23,\max}} \end{bmatrix}, [\overline{G}_1] = \begin{bmatrix} \frac{\overline{G}_{11}}{\Gamma_{11,\max}} \\ \frac{\overline{G}_{12}}{\Gamma_{12,\max}} \\ \frac{\overline{G}_{13}}{\Gamma_{13,\max}} \end{bmatrix}, [\overline{G}_2] = \begin{bmatrix} \frac{\overline{G}_{21}}{\Gamma_{21,\max}} \\ \frac{\overline{G}_{22}}{\Gamma_{22,\max}} \\ \frac{\overline{G}_{23}}{\Gamma_{23,\max}} \end{bmatrix}$$

On peut établir un algorithme pour la détermination des couples articulaires.

1. Lecture des caractéristiques géométriques et inertielles des 2 robots et de l'objet (Position, masse,...).
2. A partir de la position de l'objet et en utilisant le modèle géométrique inverse, on détermine les coordonnées articulaires du 1^{er} robot.
3. On calcule les coordonnées articulaires du 2^{ème} robot avec la condition de fermeture de boucle .
4. On calcule les vitesses et les accélérations articulaires par dérivation des coordonnées articulaires (pour les 2 robots).
5. On calcule les contraintes cinématiques v_c, ω_c et leurs dérivées.
6. On calcule les contraintes dynamiques, ce qui revient à déterminer les matrices suivantes : $E_i(q_i), \Omega_i, L_i(q_i), D_i(q_i), J_{if}^T(q_i), U_i(q_i), CGV_i(q_i), H_{ia}(q_i), H_{ib} \left(\begin{matrix} \bullet \\ q_i, q_i \end{matrix} \right)$ avec $i=1,2$.
7. On calcule les matrices $[H_i]$ et $[G_i]$.
8. Calcul des couples articulaires ($\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \Gamma_{23}$).

Optimisation cinématique d'un système de robots plans.

Exemple 1: 2 Robots IBM SCARA à 2 ddl :

Caractéristiques des robots : Les deux robots sont identiques

Corps i	L_i (m)	X_{gi} (m)	M_i (kg)	I_{zz}
1	0.50	0.25	5	0.8575
2	0.50	0.25	5	0.8575

Caractéristiques de l'objet : Sphère de diamètre = 0.1 m et de masse = 1 kg.

La tâche :

Robot 1 :

Articulation	$q_{initiale}$ (Rad)	q_{finale} (Rad)	\dot{q}_{max} (Rad/s)	Γ_{max} (N.m)
1	-0.5235	0.4484	3	45
2	2.0943	0.7853	-3	30

Robot 2 :

Articulation	$q_{initiale}$ (Rad)	q_{finale} (Rad)	\dot{q}_{max} (Rad/s)	Γ_{max} (N.m)
1	0.5236	0.4337	3	45
2	-2.0944	-1.0381	4	30

Temps de transfert optimal : **$T = 0.59$ s.**

Mouvement optimisé :

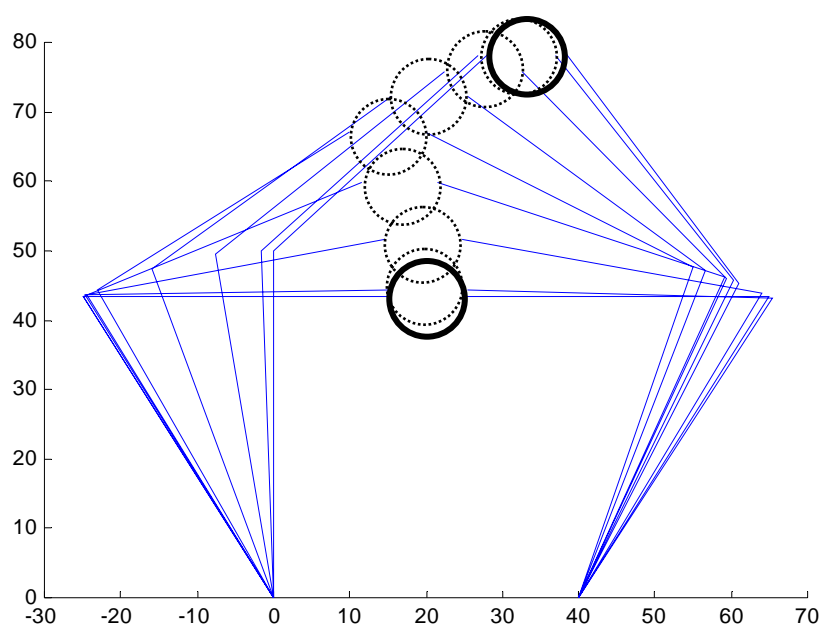


Figure 5.5 : Mouvement optimal trouvé par la méthode SC (exemple 1)

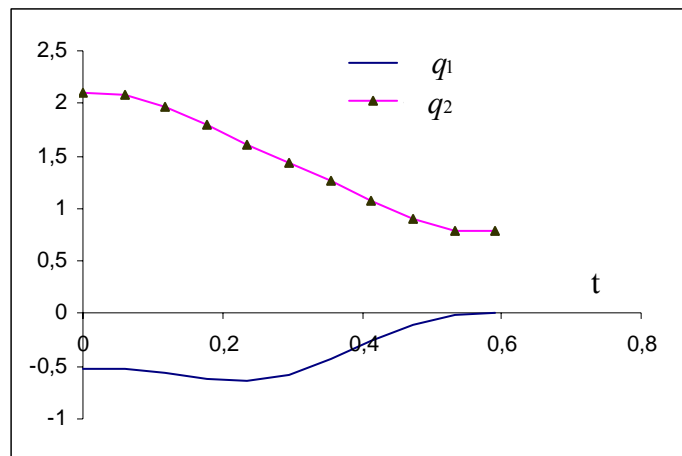
Robot 1:

Figure 5.6 : Coordonnées articulaires optimisées du Robot 1 (Exemple 1)

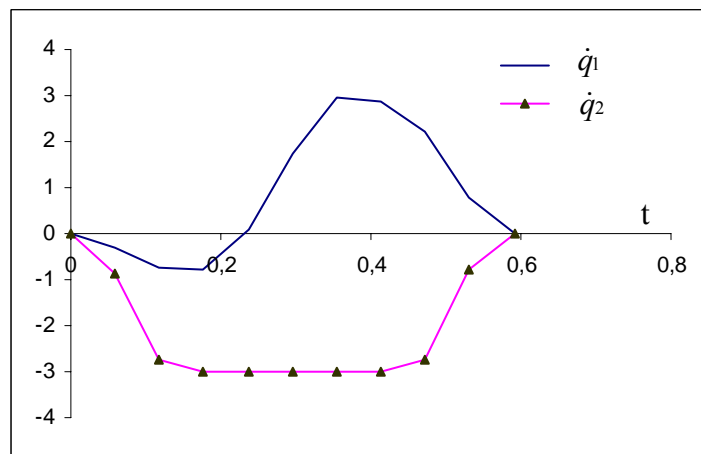


Figure 5.7 : Vitesses articulaires optimisées du Robot 1 (Exemple 1)

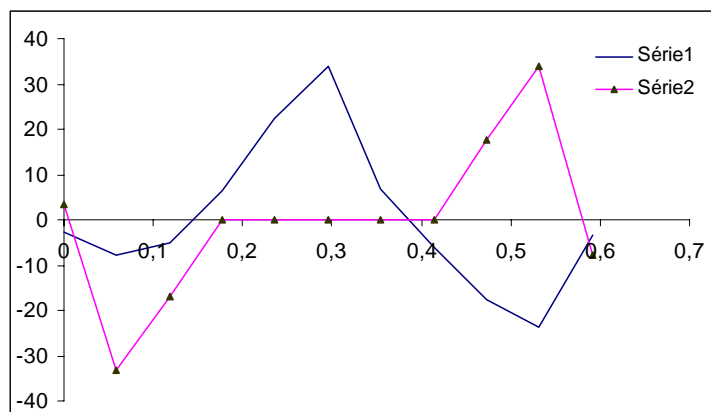


Figure 5.8 : Accélérations articulaires optimisées du Robot 1 (Exemple 1)

Robot 2 :

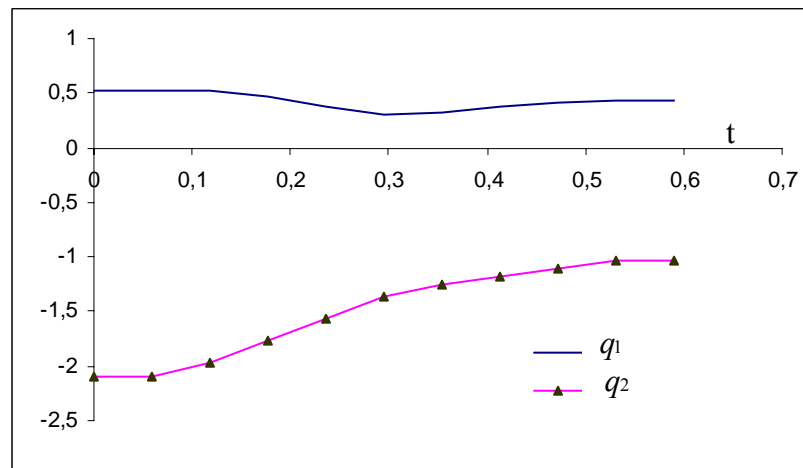


Figure 5.9 : Coordonnées articulaires optimisées du Robot 2 (Exemple 1)

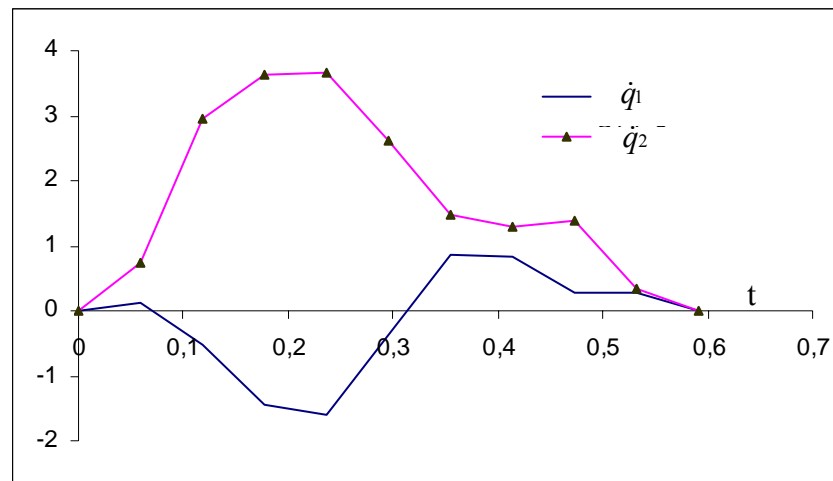


Figure 5.10 : Vitesses articulaires optimisées du Robot 2 (Exemple 1)

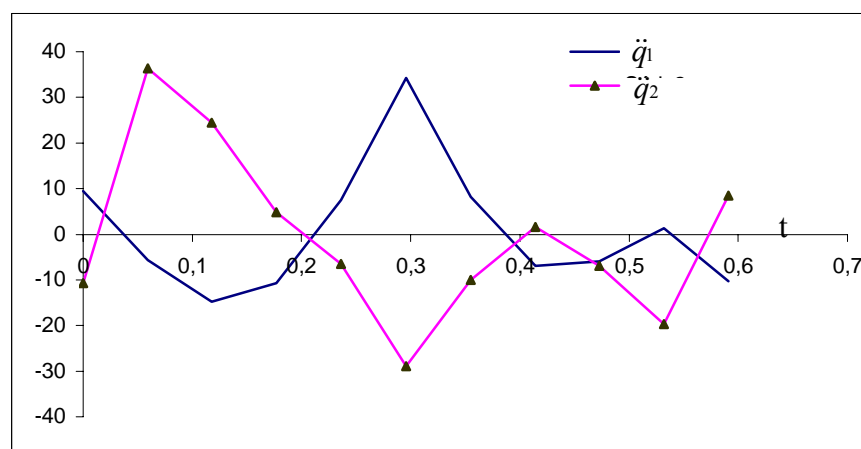


Figure 5.11: Accélérations articulaires optimisées du Robot 2 (Exemple 1)

Exemple 2 : 2 Robots IBM SCARA à 2 ddl :

Caractéristiques des robots :

Robot1 :

Corps i	Li (m)	Xgi (m)	Mi (kg)	Izz
1	0.25	0.15	10	0.05
2	0.25	0.15	5	0.1255

Robot 2 :

Corps i	Li (m)	Xgi (m)	Mi (kg)	Izz
1	0.60	0.40	12	0.5
2	0.40	0.20	12	0.8575

Caractéristiques de l'objet : Sphère de diamètre = 0.1 de masse = 1 kg.

La tâche :

Robot 1 :

Articulation	$q_{initiale}$ (Rad)	q_{finale} (Rad)	\dot{q}_{max} (Rad/s)	Γ_{max} (N.m)
1	-0,52359	-1,04719	3	40
2	-2,36789	-2,87178	3	25

Robot 2 :

Articulation	$q_{initiale}$ (Rad)	q_{finale} (Rad)	\dot{q}_{max} (Rad/s)	Γ_{max} (N.m)
1	0,3671	-0,32964	5	45
2	-2,36789	-2,8717	4	30

Temps de transfert optimal : **T = 0.50 s.**

Mouvement optimisé :

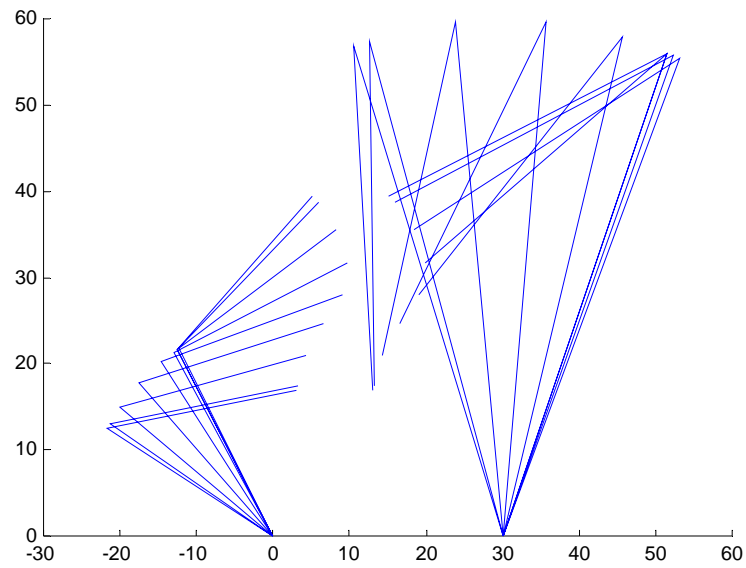


Figure 5.12 : Trajectoire correspondante au mouvement optimal (exemple 2)

Robot1 :

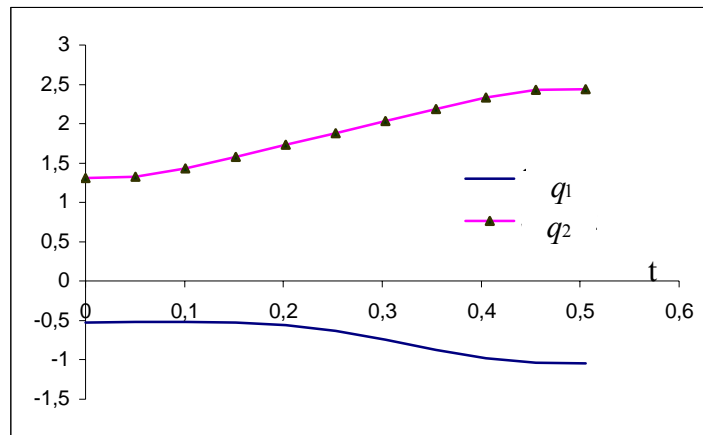


Figure 5.13 : Coordonnées articulaires optimisées du Robot 1 (Exemple 2)

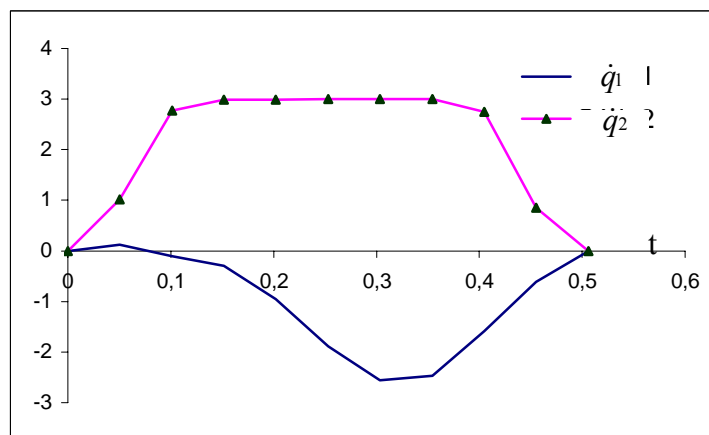


Figure 5.14: Vitesses articulaires optimisées du Robot 1 (Exemple 2)

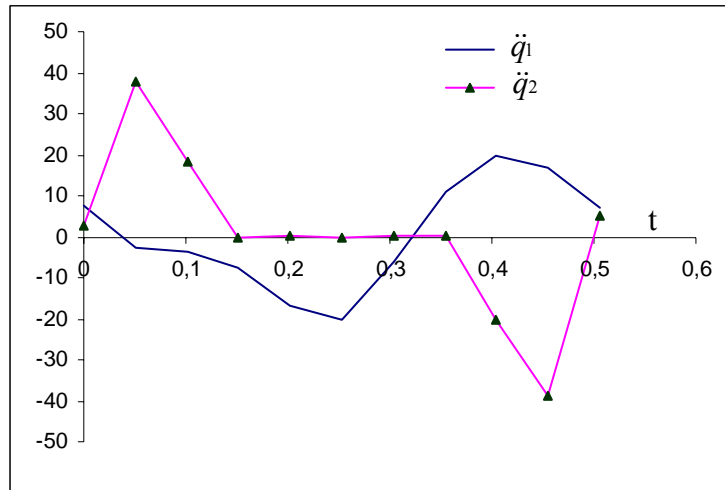


Figure 5.15 : Accélérations articulaires optimisées du Robot 1 (Exemple 2)

Robot 2 :

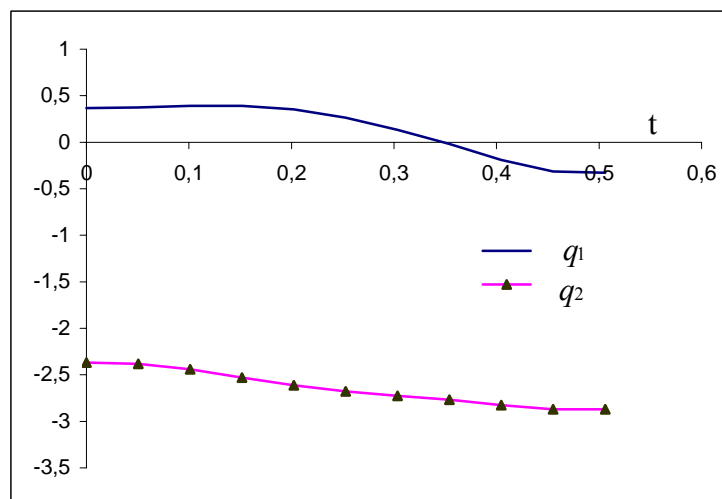


Figure 5.16: Coordonnées articulaires optimisées du Robot 2 (Exemple 2)

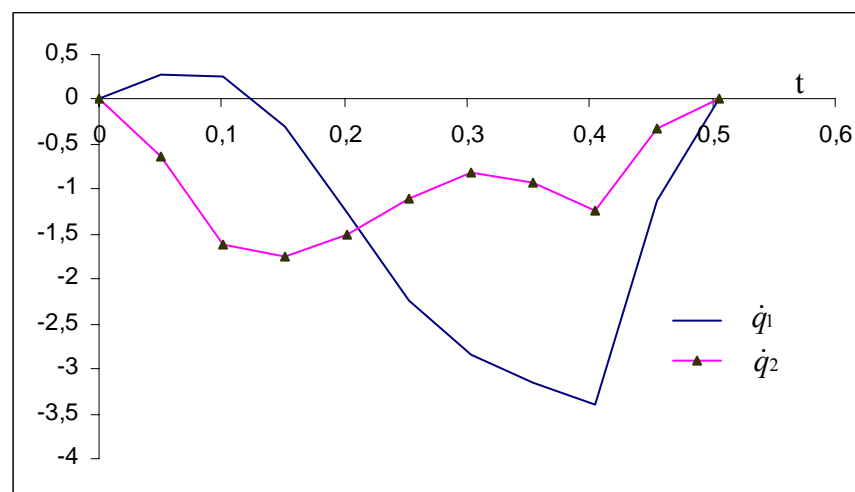


Figure 5.17: Vitesses articulaires optimisées du Robot 2 (Exemple 2)

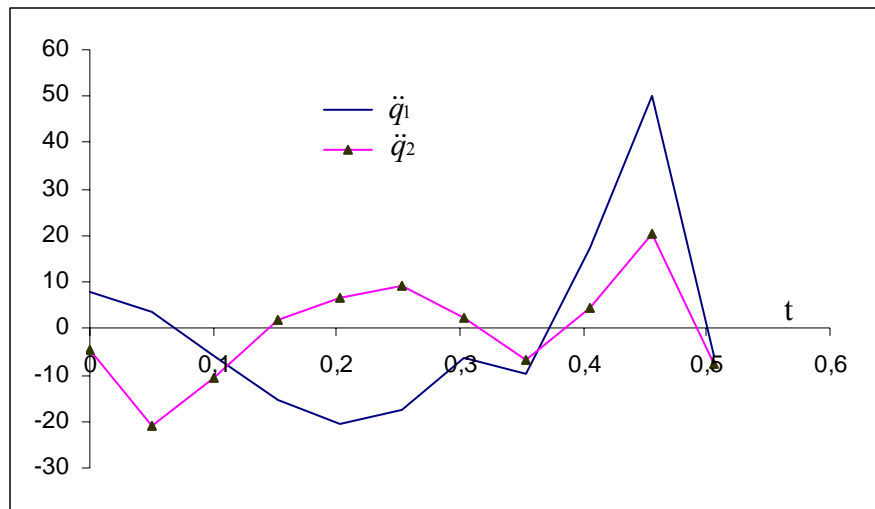


Figure 5.18 : Accélérations articulaires optimisées du Robot 2 (Exemple 2)

Exemple 3 :

Caractéristiques des robots :

Robot1 : Robot IBM SCARA à 2 ddl

Corps I	Li (m)	Xgi (m)	Mi (kg)	Izz
1	0.50	0.25	8	0.005
2	0.60	0.30	3	0.15

Robot 2 : Robot à 3ddl:

Corps I	Li (m)	Xgi (m)	Mi (kg)	Izz
1	0.30	0.15	5	0.8575
2	0.60	0.30	10	0.12
3	0.40	0.20	5	0.015

Caractéristiques de l'objet : parallélépipède de dimensions 10x20x10 et de masse de 1 kg.

La tâche :

Robot 1 :

Articulation	$q_{initiale}$ (Rad)	q_{finale} (Rad)	\dot{q}_{max} (Rad/s)	Γ_{max} (N.m)
1	0,5926	-0,94746	4	30
2	0,89074	2,51059	6	25

Robot 2 :

Articulation	$q_{initiale}$ (Rad)	q_{finale} (Rad)	\dot{q}_{max} (Rad/s)	Γ_{max} (N.m)
1	1,04719	2,9679	3	30
2	-1,0471	-1,0471	3	45
3	-2,3561	-0,7853	3	20

Temps de transfert optimal : **T = 0.90 s.**

Mouvement optimisé :

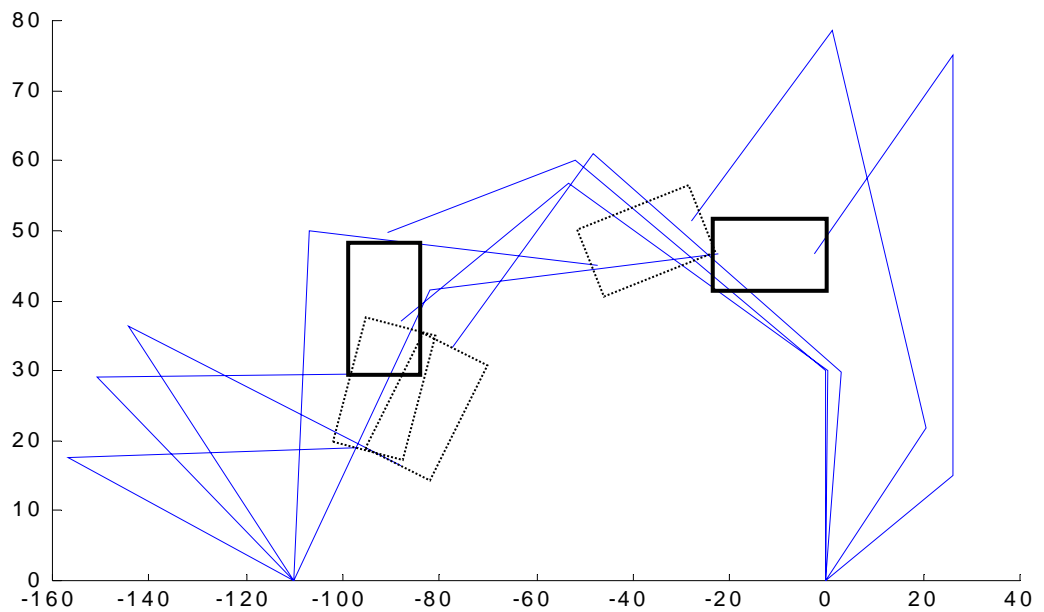


Figure 5.19 : Trajectoire correspondante au mouvement optimisé

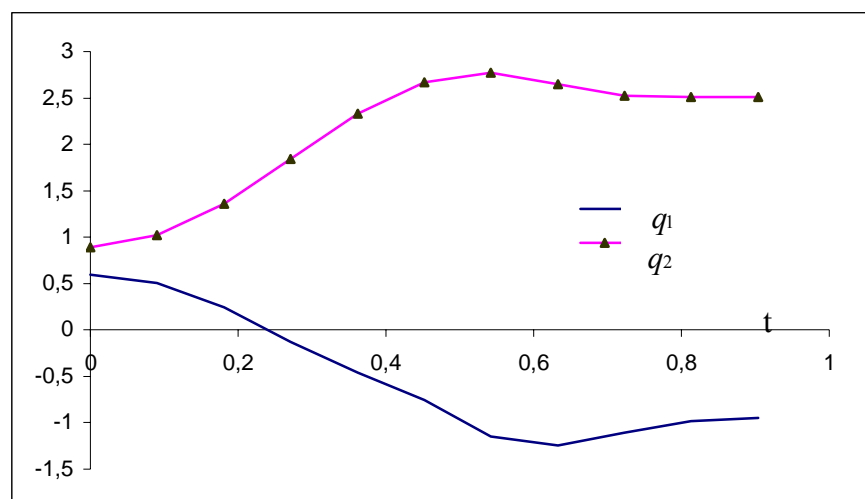
Robot 1

Figure 5.20: Coordonnées articulaires optimisées du Robot 1 (Exemple 3)

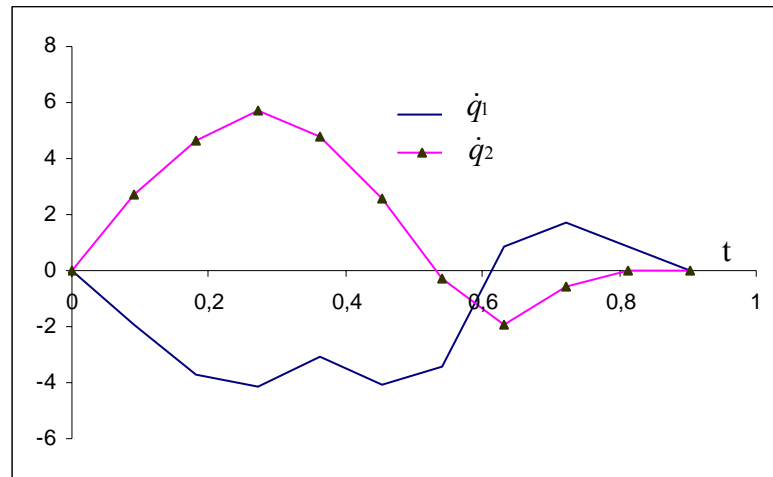


Figure 5.21: Vitesses articulaires optimisées du Robot 1 (Exemple 3)

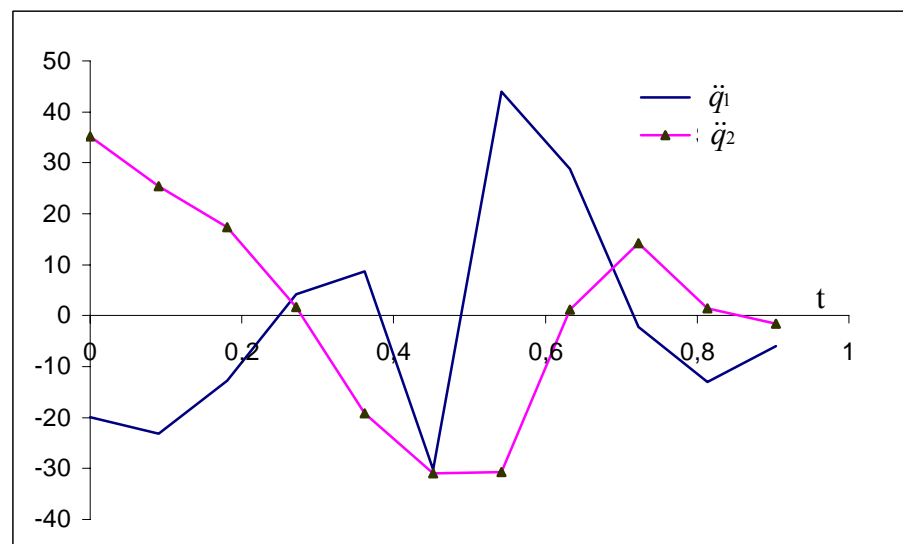


Figure 5.22 : Accélérations articulaires optimisées du Robot 1 (Exemple 3)

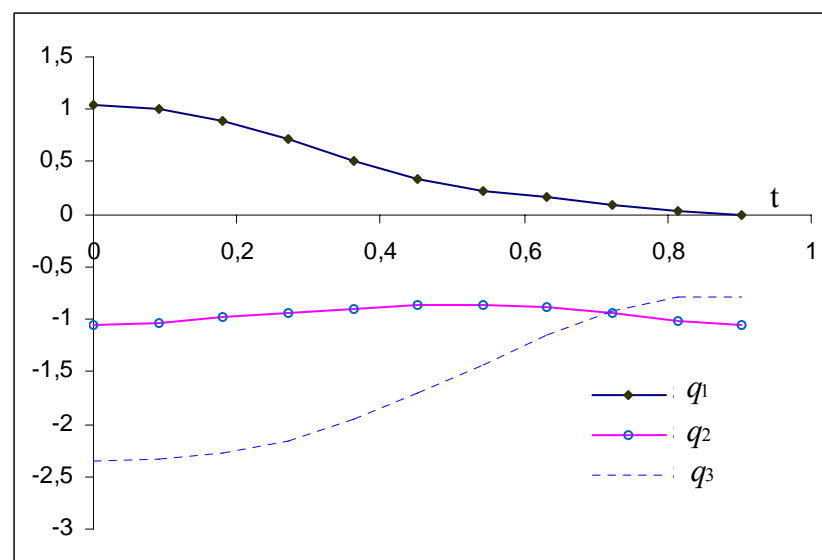
Robot 2 :

Figure 5.23: Coordonnées articulaires optimisées du Robot 2 (Exemple 3)

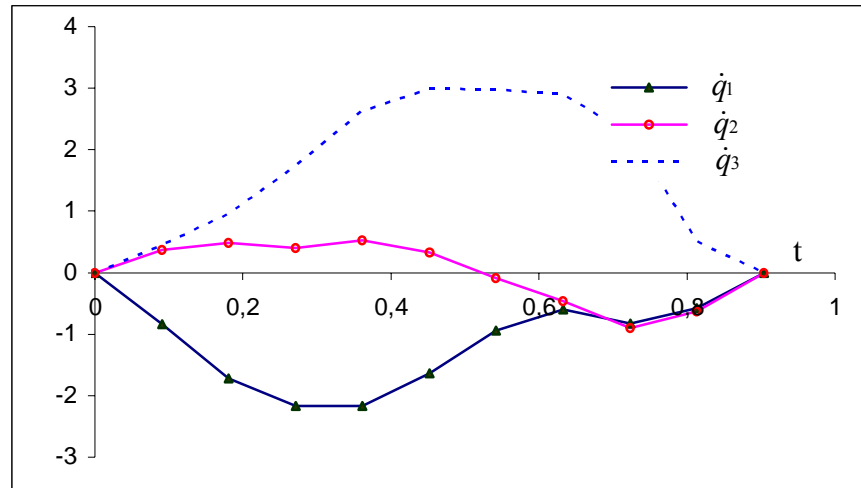


Figure 5.24: Vitesses articulaires optimisées du Robot 2 (Exemple 3)

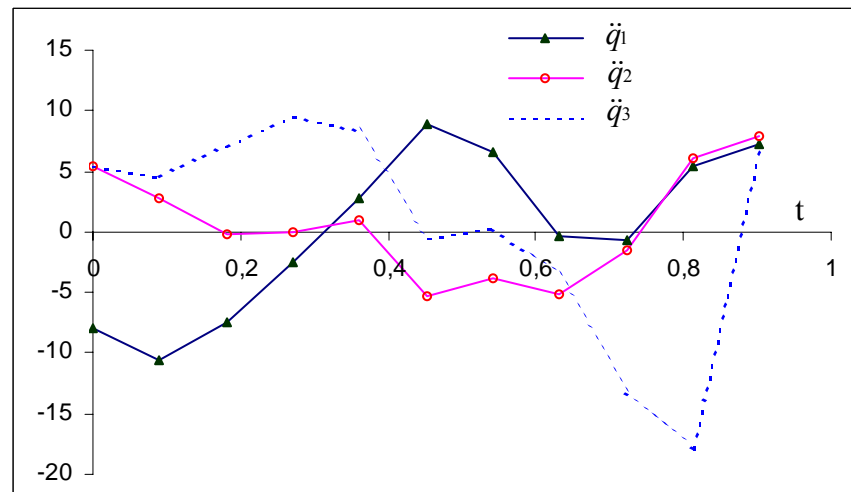


Figure 5.25: Accélérations articulaires optimisées du Robot 2 (Exemple 3)

On remarque que pour l'exemple 1 (2 robots identiques à 2 bras), la tâche a été exécutée en 0.59 s pour un déplacement de l'objet d'environ 40 mm, pour l'exemple 2 (2 robots différents à 2 bras), la tâche a été exécutée en 0.50 s pour un déplacement de l'objet d'environ 25 mm, pour l'exemple 3 (2 robots différents l'un à 2 bras l'autre à 3 bras), la tâche a été exécutée en 0.90 s pour un déplacement de l'objet d'environ 90 mm et une orientation de ce dernier de 90° . On remarque également que pour 2 robots identiques, la symétrie est à peu près respectée tant pour les positions articulaires que pour les vitesses et les accélérations.

Une première comparaison s'impose. Dans le respect des contraintes imposées, 2 robots à 2 bras identiques exécutent une tâche donnée plus rapidement que quand ils sont différents. Cela est dû au fait si on augmente les dimensions des bras d'un robot, les vitesses articulaires deviennent importantes et pour les limiter, il faut nécessairement augmenter le temps de transfert.

Si maintenant on ajoute un bras à l'un des robots on remarque que pour un déplacement donné et dans la limite des contraintes imposées, on diminue de 30% le temps de transfert par rapport à 2 robots identiques à 2 bras. Cela est dû au fait qu'on arrive à une position désirée plus rapidement avec 3 bras qu'avec 2 seulement avec des vitesses plus réduites. La vitesse articulaire du dernier bras est relativement importante par rapport aux 2 premiers est dû au fait qu'on a voulu orienter la pièce en plus du déplacement de cette dernière. En conclusion, on peut dire que l'exemple 3 donne de meilleurs résultats.

CONCLUSION

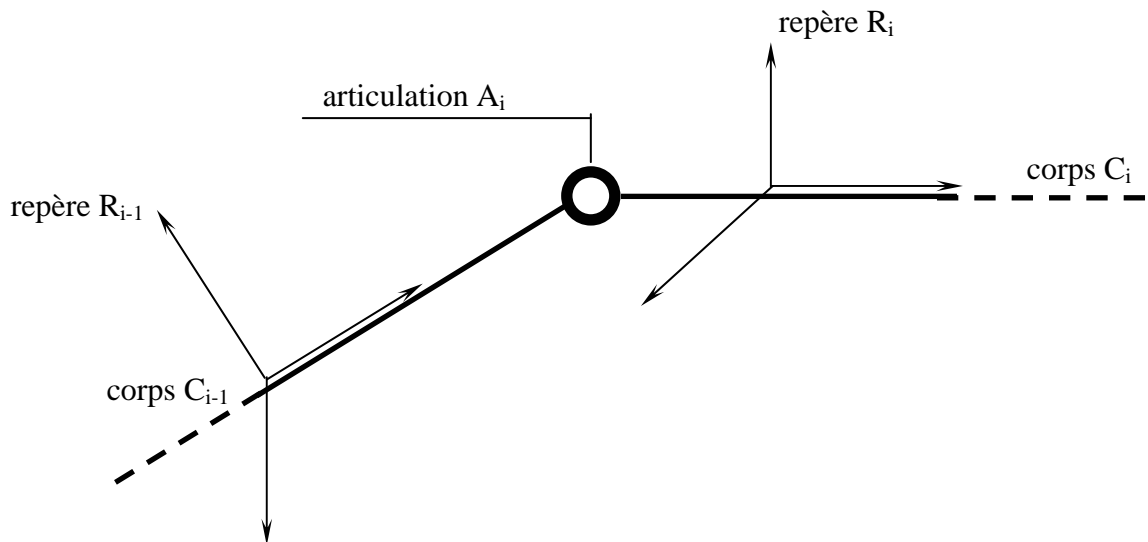
La coopération des robots est une notion relativement récente dans le domaine de la recherche en robotique. Deux sens peuvent être donnés à cela. L'objet est manipulé par plusieurs robots, chacun, exerçant une tâche distincte ou bien tous les robots exercent la même tâche ou des tâches complémentaires (par exemple : manutention d'objets lourds et volumineux pouvant dépasser les capacités d'un seul manipulateur). Pour ce deuxième cas de figure, les études sont unanimes sur le fait que le problème principal de la modélisation dynamique était la détermination des contraintes cinématiques liées à la configuration des chaînes fermées auquel on ajoute les problèmes liés à la tâche, aux robots et à l'environnement. La complexité de la formulation mathématique, tant sur le plan de la dynamique que sur celui de la coordination entre les robots, est telle que chaque étude possède une certaine originalité et difficilement généralisable. C'est dans cet esprit que nous avons inséré notre modeste contribution. Dans la première partie de notre mémoire, nous avons présenté l'essentiel de la terminologie pouvant servir de base de travail pour les étudiants du département de mécanique qui veulent s'initier à la robotique. Nous avons aussi présenté dans le chapitre 2, les méthodes d'optimisation les plus couramment utilisées. Nous avons opté pour une technique stochastique telle que la modélisation de la trajectoire par des splines cubiques reliés entre eux par des nœuds mobiles (la continuité de la trajectoire étant assurée au niveau des nœuds) pour sa simplicité de mise en œuvre. Elle ne donne aucune priorité aux contraintes du problème donc ne demande aucun développement mathématique préalable et elle présente un certain caractère de généralisation. Un modèle dynamique d'un système de 2 robots tenant un objet rigide dans l'espace en boucle fermée est donné dans la troisième partie de notre mémoire avec une application directe dans la partie 4 pour le cas de 2 robots plans. La mise en œuvre de la méthode SC (splines cubiques) est présentée au chapitre 5 et que nous avons appliqué, dans le cadre d'une optimisation cinématique, à 2 robots plans pour les trois cas suivants: 2 robots identiques à 2 bras, 2 robots différents à 2 bras et enfin 2 robots différents l'un à 2 bras l'autre à 3 bras. Une étude comparative a montré que le troisième système donnait les meilleurs temps d'exécution d'une tâche donnée avec des vitesses

d'exécution les plus faibles. Pour l'optimisation dynamique, les calculs ont montré que les facteurs des couples articulaires et des forces généralisées étaient des matrices singulières qui présentaient des problèmes d'inversion. Notre souhait est que cette dernière partie fasse l'objet d'une étude dans le cadre d'un autre mémoire afin de compléter ce travail

APPENDICE A

TRANSFORMATIONS HOMOGENES - OPERATIONS MATRICIELLES

Coordonnées généralisées



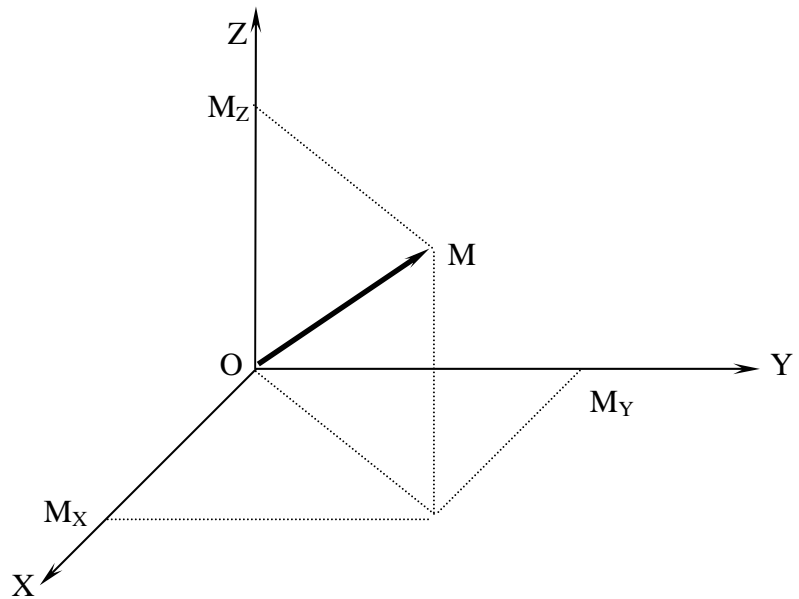
Les paramètres (réels et indépendants) qui permettent de définir la situation du corps C_i par rapport au corps C_{i-1} sont appelés coordonnées généralisées. Dans l'espace, 6 paramètres suffisent à connaître la situation d'un corps.

Matrices de transformations homogènes

On introduit la notion de coordonnées homogènes (largement utilisées en informatique graphique) pour calculer les projections et perspectives d'un objet sur un écran, maintenant, très répandues en robotique.

Coordonnées homogènes d'un point

C'est un vecteur colonne à 4 composantes :



$$\vec{OM} \begin{vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \\ 1 \end{vmatrix}$$

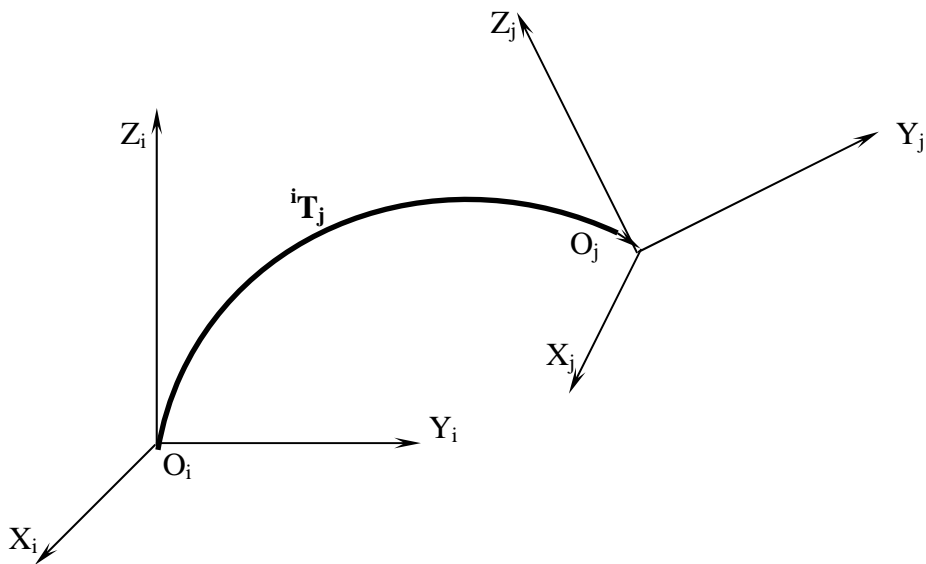
M_x , M_y et M_z sont les coordonnées de M dans le système $Oxyz$, la 4^{ème} valeur est un facteur d'échelle égal à 1 en robotique.

Coordonnées homogènes d'un vecteur libre

C'est 1 vecteur constitué de 4 facteurs. Les trois premiers étant les composantes du vecteur libre, le 4^{ème} est égal à 1.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformations homogènes :



${}^i T_j$ transforme le repère R_i en R_j . Elle peut être une (des) translation (s) et/ou une (des) rotation (s). Cette transformation se définit par une matrice (4x4). Telle que :

$${}^i T_j = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_i \vec{x}_j & \vec{x}_i \vec{y}_j & \vec{x}_i \vec{z}_j \\ \vec{y}_i \vec{x}_j & \vec{y}_i \vec{y}_j & \vec{y}_i \vec{z}_j \\ \vec{z}_i \vec{x}_j & \vec{z}_i \vec{y}_j & \vec{z}_i \vec{z}_j \end{matrix} & \begin{matrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_j & n_j & a_j & P_j \end{vmatrix}$$

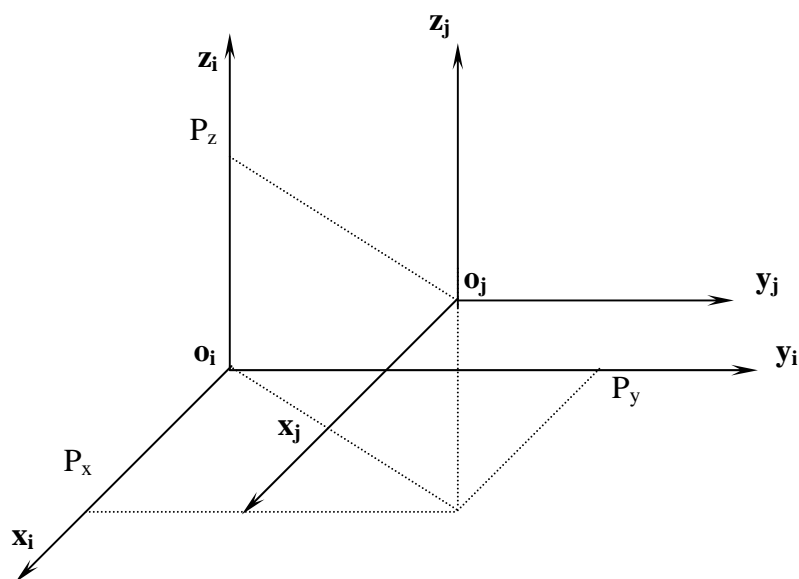
Où : s_j , n_j et a_j désignent respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes

X_j , Y_j et Z_j du repère R_j exprimés dans le repère R_i et où P_j est l'origine du repère R_j exprimée dans le repère R_i . Cette matrice peut être notée sous la forme partitionnée suivante :

$${}^i T_j = \begin{vmatrix} A_j & P_j \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Où : A_j représente la matrice de passage du repère R_i au repère R_j et P_j représente l'origine du repère R_j exprimée dans le repère R_i .

Translation pure



Trois translations sont possibles :

- $T(x, P_x)$
- $T(y, P_y)$
- $T(z, P_z)$

Où : P_x , P_y et P_z représentent les translations respectivement par rapport à x , y et z .
La transformation totale ${}^i T_j$ est le produit des trois translations (l'ordre de multiplication est quelconque)

$${}^i T_j = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$${}^i T_j = T(x, P_x) \cdot T(y, P_y) \cdot T(z, P_z)$$

Rotation pure

On peut considérer une rotation autour de x d'un angle θ de la manière suivante :

$$Rot(x, \theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & A(x, \theta) & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Par analogie, la rotation autour de y d'un angle θ sera donc :

Matrice inverse

Comme la matrice ${}^i A_j$ est orthogonale : ${}^i A_j^T = {}^i A_j^{-1}$

La matrice inverse est égale à la matrice transposée. Leurs éléments représentent les cosinus directeurs d'orientation.

Transformation inverse

$${}^i T_j^{-1} = {}^j T_i$$

Rotation inverse

$$Rot^{-1} \left(u, \theta \right) = Rot \left(-u, \theta \right) = Rot \left(u, -\theta \right)$$

Transformation inverse :

L'inverse d'une matrice de transformation peut être écrite sous la forme suivante :

$${}^i T_j^{-1} = \begin{vmatrix} & & & -s^T P \\ & A^T & & -n^T P \\ & & & -a^T P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \\ & A^T & & -A^T P \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Produit des transformations

Si un repère R_0 a subi k transformations consécutives, la transformation totale sera égale à :

$${}^0 T_k = {}^0 T_1 \cdot {}^1 T_2 \cdot \dots \cdot {}^{k-2} T_{k-1} \cdot {}^{k-1} T_k = \prod_{i=k}^{i=1} {}^{i-1} T_i$$

Transformations composées :

Composition de deux matrices:

Si $T_1 = \begin{vmatrix} & A & & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ et $T_2 = \begin{vmatrix} & A_2 & & R_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Alors $T_1 \cdot T_2 = \begin{vmatrix} & A_1 A_2 & & A_1 P_2 + P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Avec $T_1 \cdot T_2 \neq T_2 \cdot T_1$

Produit des rotations

$$Rot(u, \theta_1) \cdot Rot(u, \theta_2) = Rot(u, \theta_1 + \theta_2)$$

2 rotations autour du même axe u .

$$Rot(u, \theta) \cdot Trans(u, d) = Trans(u, d) \cdot Rot(u, \theta)$$

A condition que la rotation et la translation se fassent par rapport au même axe u .

Décomposition de la matrice de transformation :

$$T = \begin{vmatrix} & A & & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & I & & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} & A & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} & & & x \\ & & & \end{vmatrix}$$

APPENDICE B

REPERAGE D'UN SOLIDE DANS L'ESPACE

Orientation d'un solide dans l'espace

Dans l'espace, un solide libre et rigide possède 6 degrés de liberté. A un instant donné, il faut pouvoir le positionner et l'orienter par rapport à un repère fixe qu'on choisit préalablement. En robotique, ces paramètres représentent les coordonnées opérationnelles définies dans un espace opérationnel. La matrice de transformation s'écrit sous la forme :

$$T = \begin{vmatrix} & A & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice $A(3 \times 3)$ représente la matrice d'orientation, la matrice $P(3 \times 1)$ celle de position. On associe le repère R_n à un solide, R_0 étant le repère de référence fixe. Pour les paramètres de positionnement d'un solide dans l'espace, on utilise les coordonnées cartésiennes, cylindro-polaires ou sphériques. Quant aux paramètres d'orientation, on dispose des cosinus directeurs, angles d'EULER, des angles de roulis-tangage-lacet et des paramètres d'EULER (appelés aussi paramètres d'OLINDE-RODRIGUES ou quaternions).

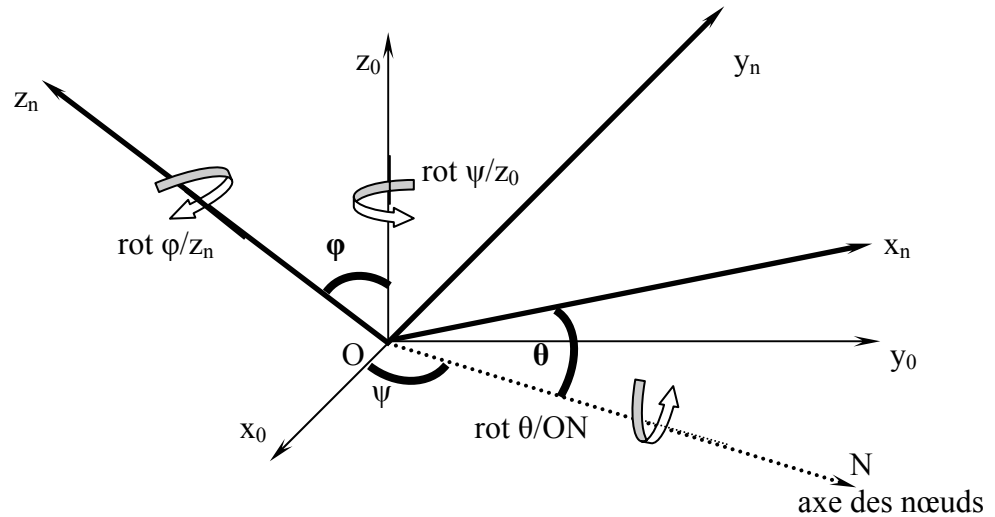
a) Cosinus directeurs

L'orientation est définie par la donnée de trois vecteurs unitaires s , n et a qui sont les cosinus directeurs. La matrice correspondante s'écrit :

$$A_{CD} = \begin{vmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{vmatrix}$$

b) Angles d'EULER

L'orientation de R_n par rapport à R_0 est donnée par 3 angles ψ , θ et φ .



Angles d'Euler

ψ : rotation autour de z_0 (angle de précession).

θ : rotation autour de l'axe des nœuds \vec{ON} (angle de nutation).

φ : rotation autour de z_n (angle de rotation propre).

La matrice d'orientation s'écrit :

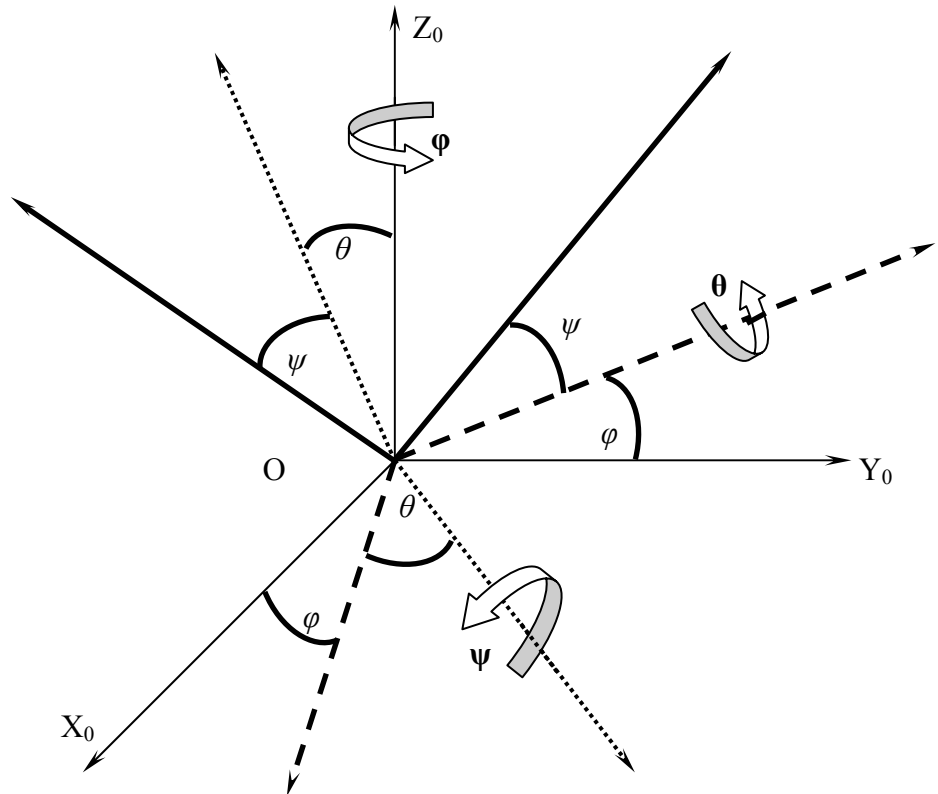
$$A_{EULER} = A(z, \psi) \cdot A(x, \theta) \cdot A(z, \varphi)$$

Où :

$$A_{EULER} = \begin{vmatrix} c\psi c\varphi & -s\psi c\varphi & -c\psi s\varphi - s\psi c\theta c\varphi & s\psi s\theta \\ s\psi c\varphi + c\psi c\theta c\varphi & -s\psi s\varphi + c\psi c\theta c\varphi & -c\psi s\theta \\ s\theta s\varphi & s\theta c\varphi & c\theta \end{vmatrix}$$

c) Angles de roulis-tangage-lacet (RTL)

L'orientation de R_n par rapport à R_0 est donnée par 3 angles φ , θ et ψ désignent respectivement le roulis, le tangage et le lacet :



Angles de roulis-tangage-lacet

- Rotation φ autour de z .
- Rotation θ autour de y .
- Rotation ψ autour de x .

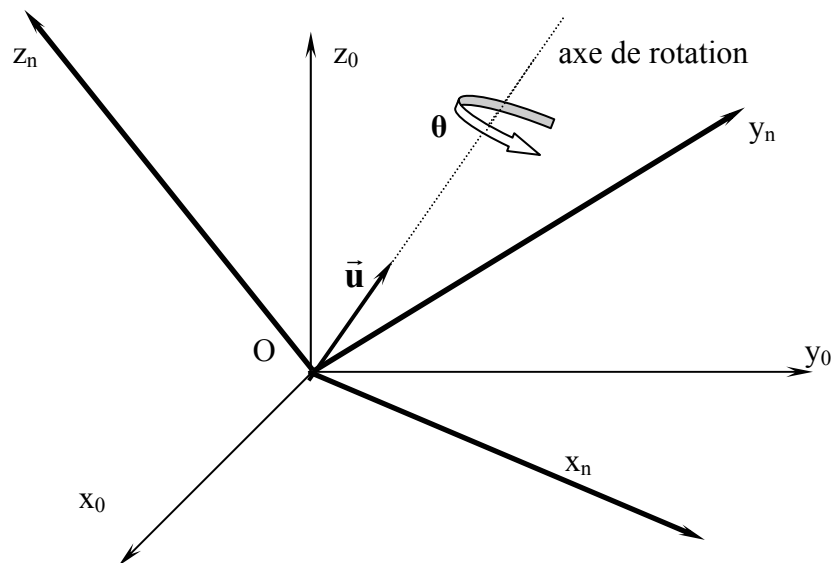
La matrice d'orientation s'écrit :

$$A_{RTL} = A(z,\varphi) \cdot A(y,\theta) \cdot A(x,\psi)$$

$$A_{RTL} = \begin{vmatrix} c\varphi c\theta & c\varphi s\theta s\psi - s\varphi c\psi & c\varphi s\theta c\psi + s\varphi s\psi \\ s\varphi c\theta & s\varphi s\theta s\psi + c\theta c\psi & s\varphi s\theta c\psi - c\theta s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{vmatrix}$$

d) Paramètres d'EULER

L'orientation est exprimée par 4 paramètres décrivant une rotation unique autour d'un axe de vecteur unitaire \vec{u} .



Paramètres d'Euler

On définit les paramètres d'EULER comme suit :

$$\lambda_1 = c(\theta/2)$$

$$\lambda_2 = u_x s(\theta/2)$$

$$\lambda_3 = u_y s(\theta/2)$$

$$\lambda_4 = u_z s(\theta/2)$$

La matrice d'orientation s'écrit :

$$A_{PE} = \begin{vmatrix} 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_4) & 2(\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3) \\ 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4) & 2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) - 1 & 2(\lambda_3\lambda_4 - \lambda_1\lambda_2) \\ 2(\lambda_2\lambda_4 - \lambda_1\lambda_3) & 2(\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_1^2 + \lambda_4^2) - 1 \end{vmatrix}$$

APPENDICE C

MODELE DYNAMIQUE DES ROBOTS A CHAINES CINEMATIQUES COMPLEXES.

Introduction

Le modèle dynamique d'un robot à chaîne fermée est obtenu à partir de sa structure arborescente équivalente. Pratiquement, peu de robots présentent une telle structure, mais, par rapport aux chaînes simples ouvertes, il présente plusieurs avantages. La rigidité est augmentée, donc, une meilleure précision. Les articulations ne sont pas indépendantes, alors, on peut choisir l'articulation qu'on veut motoriser. Enfin, on peut ramener les organes de motorisation vers la base afin de diminuer les masses (inertie) en mouvement sans ajouter des transmissions qui peuvent dégrader les performances des bras (jeux, frottements, élasticité, ...).

Nous introduisons ici, une approche basée sur l'utilisation du modèle dynamique du système arborescent équivalent et sur le calcul des multiplicateurs de LAGRANGE pour décrire les contraintes de fermeture de chaîne.

Description du système

Il est composé de n corps mobiles et de L articulations. Le nombre de boucles fermées est égal à $b = (L - n)$. Parmi les L articulations, m seulement sont pourvues d'actionneurs et on suppose que la structure est compatible avec les contraintes de fermeture de boucle. Le nombre d'articulations motorisées m représente le nombre de degrés de liberté, donc, la connaissance des m variables articulaires permet de déterminer, d'une manière unique, la configuration du robot. Ces hypothèses sont vérifiées sur tous les robots industriels ayant des boucles fermées. En coupant b articulations (non motorisées pour des raisons de simplicité), on obtient b boucles ouvertes ce qui conduit à une structure arborescente à n articulations. Pour arriver à un modèle dynamique le plus performant, on choisit de couper l'articulation, pour laquelle, la différence entre les distances, en nombre de corps de la base au bord de la coupure, est la plus petite. Soit :

$$q_{ar} = \left(q_a, q_p \right) \quad (\text{Ac.01})$$

Où :

q_{ar} : vecteur des n variables articulaires de la structure arborescente équivalente.

q_a : vecteur des m variables articulaires des articulations motorisées (ou actives).

q_p : vecteur des $(n-m)$ variables articulaires des articulations non motorisées (ou passives).

Pour le vecteur q_{ar} de dimension m , seules les variables q_a sont indépendantes ce qui donne $(n-m)$ relations indépendantes entre les variables q_a et q_p . Pour la fermeture de boucle, les relations de contraintes se traduisent par :

$$\phi \left(q_{ar} \right) = 0 \quad (\text{Ac.02})$$

La structure arborescente équivalente et les relations de contraintes représentent le système bouclé.

Calcul des variables dépendantes q_p

Pour caractériser la situation de la structure arborescente équivalente, il faut calculer q_p en fonction de q_a . La forme explicite est (le cas la plus favorable) du type :

$$q_p = f \left(q_a \right) \quad (\text{Ac.03})$$

Si on ne peut pas établir une telle forme, on doit résoudre l'équation (Ac.03) numériquement. Pour réaliser cela, une approche a été proposée. On dérive l'équation (Ac.03).

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial q_{ar}} dq_{ar} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_a}, \frac{\partial \phi}{\partial q_p} \right) \begin{pmatrix} dq_a \\ dq_p \end{pmatrix} \quad (\text{Ac.04})$$

Comme elle est nulle, on peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_p} dq_p = - \frac{\partial \phi}{\partial q_a} dq_a \quad (\text{Ac.05})$$

Ou bien :

$$\omega_p dq_p = -\omega_a dq_a \quad (\text{Ac.06})$$

Où :

$$\omega_p = \frac{\partial \phi}{\partial q_p} \quad \text{et} \quad \omega_a = \frac{\partial \phi}{\partial q_a} \quad (\text{Ac.07})$$

Mises à part d'éventuelles positions singulières, on peut inverser ω_p . Alors :

$$\omega_p^{-1} \cdot \omega_p dq_p = -\omega_a^{-1} \cdot \omega_a dq_a$$

Ce qui implique :

$$dq_p = -\omega_p^{-1} \cdot \omega_a dq_a$$

Si maintenant, on pose $\omega = -\omega_p^{-1} \cdot \omega_a$, alors :

$$\omega = \frac{\partial q_p}{\partial q_a} \quad (\text{Ac.08})$$

Calcul du modèle dynamique

Lorsque les paramètres du système ne sont pas indépendants, le modèle dynamique selon le formalisme de LAGRANGE s'écrit :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{Ac.09})$$

Dans l'équation (Ac.09), λ_k représente le $k^{\text{ième}}$ multiplicateur de LAGRANGE et L le lagrangien de la structure arborescente équivalente. Sous forme matricielle, on l'écrit :

$$\Gamma = \Gamma_{ar} + \Gamma_c \quad (\text{Ac.10})$$

Γ_{ar} représente le modèle dynamique de la structure arborescente équivalente.

$$\Gamma_{ar} = A \ddot{q} + B \dot{q} \dot{q} + C \dot{q}^2 + Q \quad (\text{Ac.11})$$

$$\Gamma_c = \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_{ar}} \right)^T \lambda \quad (\text{Ac.12})$$

Γ_{ar} peut être calculé à l'aide de l'algorithme de NEWTON-EULER pour les structures arborescentes.

$$\Gamma_{ar} = \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_p \end{bmatrix} \quad (\text{Ac.13})$$

Γ_a pour les couples des liaisons actives, Γ_p pour les couples des liaisons passives. D'après les équations (Ac.02), (Ac.05) et (Ac.07), Γ_c de l'équation (Ac.12) s'écrit :

$$\Gamma_c = \left[\frac{\partial \phi}{\partial q_a}, \frac{\partial \phi}{\partial q_p} \right]^T \lambda = \left[\omega_a, \omega_p \right]^T \lambda \quad (\text{Ac.14})$$

Pour le vecteur Γ de l'équation (Ac.10), les composantes qui correspondent aux articulations sont nulles. Ce qui nous donne :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ac.15})$$

Où : Γ_m correspond aux couples délivrés par les m moteurs. En définitive, l'équation (Ac.10) devient, en remplaçant chaque terme par sa valeur :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_a^T \lambda \\ \omega_p^T \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{Ac.16})$$

La première ligne correspond à la partie active, la deuxième à la partie passive. On peut écrire aisément le système suivant :

$$\Gamma_m = \Gamma_a + \omega_a^T \lambda \quad (1)$$

$$0 = \Gamma_p + \omega_p^T \lambda \quad (2)$$

On tire λ de l'équation (2) : $\lambda = - \left[\omega_a^T \right]^{-1} \Gamma_p$, et on le reporte dans l'équation (1)

c'est à dire :

$$\Gamma_m = \Gamma_a - \left[\omega_a^T \right] \left[\omega_p^T \right]^{-1} \Gamma_p \quad (\text{Ac.17})$$

Puisque seuls λ et Γ_m sont inconnus. Comme $\omega = - \omega_p^{-1} \bullet \omega_a$, alors :

$$\omega^T = - \omega_a^T \left[\omega_p^{-1} \right]^T$$

L'équation (Ac.17) devient :

$$\Gamma_m = \Gamma_a + \left[\omega^T \right] \Gamma_p = \left[1 \quad , \quad \omega^T \right] \begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_p \end{bmatrix} \quad (\text{Ac.18})$$

Ou encore sous la forme : $\Gamma_m = \left[1 \quad , \quad \omega^T \right] \Gamma_{ar}$

Ou bien :

$$\Gamma_m = G^T \bullet \Gamma_{ar} \quad (\text{Ac.19})$$

G^T représente le JACOBIEN des variables q_{ar} par rapport aux variables q_a égal à $\frac{\partial q_{ar}}{\partial q_a}$.

Les équations (Ac.17) ,(Ac.18) et (Ac.19) représentent le modèle géométrique inverse.

APPENDICE D

TECHNIQUES STOCHASTIQUES D'OPTIMISATION.

Résoudre un problème d'optimisation, c'est trouver parmi un ensemble Ω de solutions possibles S , la solution S^* minimisant (ou maximisant) une fonction objectif $F(S)$ donnée. Les techniques déterministes sont efficaces à condition que $F(S)$ soit continue et comporte très peu d'extremums (minimums locaux) sinon les développements mathématiques deviennent très lourds et difficiles à établir. De plus, elles se basent sur la construction d'une direction de recherche privilégiée dans Ω donc, le risque de manquer l'optimum global S^* est d'autant plus grand quand $F(S)$ comporte plusieurs optimums locaux. Dans ce cas, les techniques stochastiques qui se basent sur une recherche aléatoire de S^* uniformément distribuée dans l'espace Ω sont préférées. Seules des informations sur les valeurs de $F(S)$ sont nécessaires. Les techniques stochastiques les plus répandues sont :

- La technique de Monté-Carlo
- Méthode de Hill-Climbing
- Méthode de Monté-Carlo avec réduction d'intervalle
- Le recuit simulé
- Les algorithmes génétiques
- La recherche tabou

a) Technique de Monté-Carlo

Elle consiste à générer aléatoirement plusieurs solutions S , de les comparer en retenant à chaque fois la meilleure solution [50]. L'algorithme du cycle de base se présente comme suit :

Générer aléatoirement une solution initiale S_0 dans Ω

Prendre $S^* = S_0$

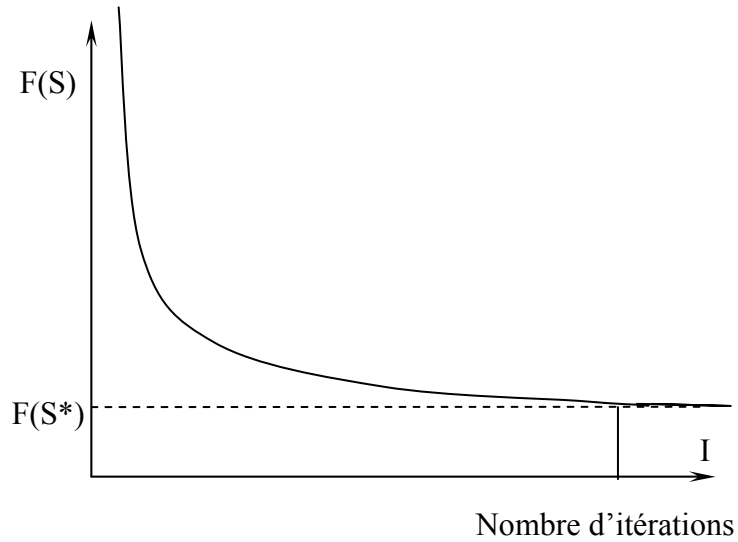
Générer aléatoirement une solution S dans Ω

Evaluer $F(S)$

Si $F(S) < F(S_0)$ alors $S^* = S$

Fin

Répéter

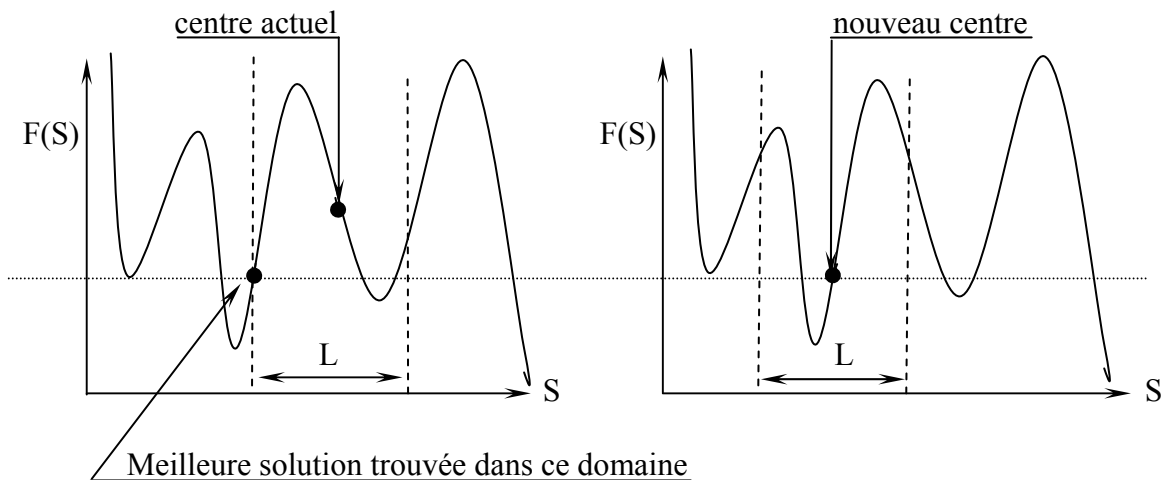


Convergence d'une technique de Monté-Carlo

L'application de cette méthode semble aisée. Il suffit d'évaluer la fonction F à chaque tirage aléatoire de S . Le temps de calcul est infini. Pour des raisons pratiques, le processus de base est arrêté après un nombre d'itérations I suffisant pour que la solution recherchée soit acceptable. Pour réduire l'effort de calcul et accélérer la convergence, on introduit la notion de voisinage $V(S_i)$ défini par son étendue L_i de la meilleure solution S_i obtenue à l'étape i . Cette idée est exploitée dans les techniques de Hill-Climbing, Monté-Carlo, recuit simulé et recherche Tabou.

b) Méthode de Hill-Climbing

Elle propose d'effectuer une recherche dans un voisinage $V(S)$ d'étendue fixe L centrée autour de la meilleure solution retenue [51].



Changement du centre dans la technique de Hill-Climbing

La seule difficulté réside dans le choix de la taille de L . Un mauvais choix induit à :

- Piégeage de la technique dans un minimum local (L trop petit).
- Augmentation du temps de calcul (L trop grand).

L'algorithme correspondant est comme suit :

Générer aléatoirement une solution initiale S_0
 $S^* = S_0$
Centre de voisinage = S^*
Générer aléatoirement S dans le voisinage $V(S^*) \in \Omega$
Evaluer $F(S)$
Si $F(S) < F(S^*)$ alors $S = S^*$
Centre du voisinage S^*
Jusqu'à convergence

c) Méthode de Monté-Carlo avec réduction d'intervalle

C'est une version améliorée de la méthode précédente. Elle introduit un facteur de réduction de l'intervalle L . Lors du tirage initial, L est choisi large. Au fur et à mesure que le nombre d'itérations i augmente, la taille de L est réduite afin d'affiner la solution. Soit E le nombre d'échecs successifs comptabilisés depuis la dernière amélioration (on considère un échec quand le choix de S fait augmenter $F(S)$). Quand E prend des valeurs significatives et pour rentabiliser le calcul, on réduit l'intervalle L . Pour cela, on se fixe un seuil E_{\max} pour une prise de décision.

L'algorithme correspondant sera alors :

Générer une solution initiale S_0 aléatoirement
 $S^* = S_0$
Générer une solution S dans $V(S^*) \in \Omega$, évaluer $F(S)$
Si $F(S) < F(S^*)$, alors $S^* = S$
Sinon compter E
Si $E = E_{\max}$
Réduire $V(S)$
Jusqu'à convergence

L'efficacité de cette méthode dépend du choix du facteur de réduction de L et de E_{\max} .

d) Recuit simulé

Le fait, à tout prix, de diminuer la fonction objectif $F(S)$ peut conduire à une situation de piégeage de la recherche autour d'un optimum local. L'idée de cette méthode est de faire échapper $F(S)$ de cette situation (permettre l'augmentation de $F(S)$ pour pouvoir se déplacer vers l'optimum global) [52] [53].

En métallurgie, le recuit est un traitement thermique qui consiste à chauffer un métal à un niveau tel qu'il permet l'équilibre physico-chimique et structurel d'un matériau et de le refroidir par palier afin que les atomes s'organisent de manière à le faire passer (le matériau) d'une configuration de haute énergie à celle d'énergie minimale. Ce passage obéit à la loi de Boltzman :

$$P = \exp [dE / KT]$$

Où :

- K : constante de Boltzman
- dE : différence d'énergie entre les niveaux initial et final
- T : température
- P : probabilité de passage d'un groupe d'atomes d'un niveau d'énergie E_1 à un niveau d'énergie supérieure E_2

Par analogie, les configurations stables correspondent aux solutions qui font diminuer la fonction objectif, les configurations instables font augmenter la fonction objectif. La loi de Boltzman adaptée s'écrit alors :

$$P = \exp [\Delta F / T]$$

Où :

- $\Delta F = F(S_{i+1}) - F(S_i)$
- T correspond à un paramètre de contrôle
- P représente la probabilité d'acceptation

e) Recherche Tabou

Cette technique consiste à se déplacer d'une solution à une autre en s'interdisant de revenir à une solution déjà rencontrée. On définit un voisinage $V(S)$ pour

chaque solution S en supposant qu'on dispose d'une liste Tab de toutes les solutions rencontrées depuis le début de l'exécution de la méthode. A partir de la solution courante S_i on passe à une solution $S_{i+1} \in V(S_i)$ minimisant la fonction objectif et en ajoutant S_i à la liste Tab . En pratique, ce processus utilise trop de place mémoire ainsi que le temps de calcul (on doit comparer chaque solution choisie avec tous les éléments de la liste Tab). Pour éviter cet inconvénient, la méthode Tabou préconise de conserver en mémoire la transformation élémentaire qui permet de passer de la solution courante à la suivante en s'interdisant d'appliquer son inverse (la solution courante n'est pas ajoutée à la liste Tab). La recherche tabou se prête bien au problème d'optimisation discret (optimisation dans les réseaux) [13] [14] [15] [54].

L'algorithme correspondant sera :

Générer aléatoirement une solution initiale S_0

$S^* = S_0$

$Tab = \emptyset$

Répéter

Générer une solution aléatoire S dans $V(S^*) \in \Omega$

Si $S \notin Tab$ alors évaluer $F(S)$

Si $F(S) < F(S^*)$ alors $S^* = S$

Sinon ajouter S à la liste Tab

Jusqu'à convergence

f) Algorithmes génétiques

Ils sont basés sur des mécanismes de sélection naturelle et sur la génétique. A partir d'une population de solutions potentielles (chromosomes) initiale arbitrairement choisie, on évalue leurs performances en utilisant des opérateurs simples : la sélection, le croisement et la mutation et on recommence le cycle [16] [55]. Ces algorithmes diffèrent des méthodes précédentes par les deux points suivants :

- On utilise un codage des paramètres (solutions).
- On travaille sur une population de points au lieu d'un point unique.

L'algorithme sera le suivant :

Générer une population initiale

Répéter

Evaluer les performances de chaque individu

Les sélectionner et les regrouper par paires selon leurs performances

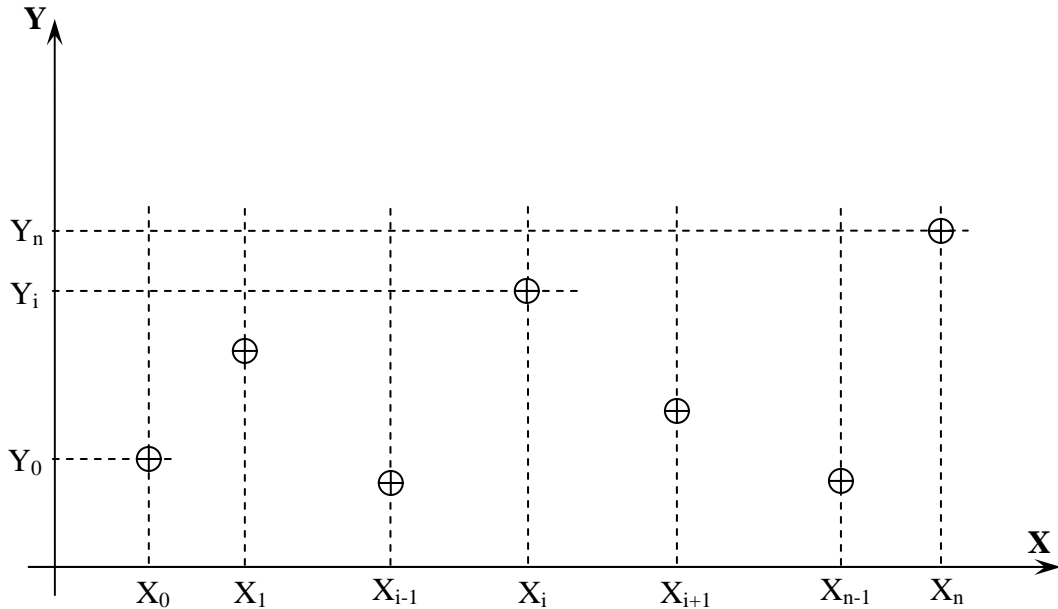
Générer une nouvelle population (appliquer les opérations de croisements et de mutations)

Jusqu'à convergence

APPENDICE E

APPENDICE E

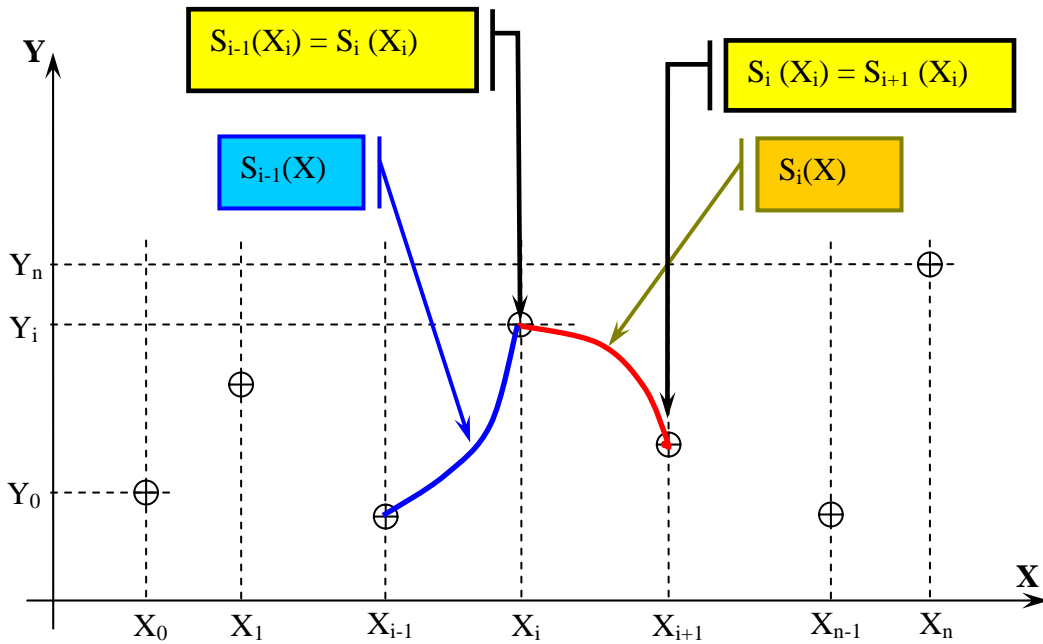
INTERPOLATION POLYNOMIALE PAR MORCEAUX (SPLINES CUBIQUES)



Une interpolation polynomiale [65] entre les points $[X_0, Y_0]$ et $[X_n, Y_n]$ peut être effectuée de la manière suivante :

- Utiliser un polynôme de degré n $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ passant par tous les points intermédiaires $[X_i, Y_i]$. Du fait qu'il possède $(n-1)$ extremums, la courbe $f(x)$ va présenter des oscillations si n est trop élevé. Cette dernière ne sera pas régulière.
- Utiliser un polynôme de degré faible pour éviter ces inconvénients en effectuant une interpolation par morceaux. On préconise des fonctions splines qui peuvent être linéaires, quadratiques ou cubiques. Pour leur caractère de stabilité, ces dernières présentent des avantages au niveau des nœuds de raccordement entre les morceaux (bon lissage de la courbe totale) à l'inverse des splines linéaires qui présentent des points anguleux. Il suffit d'assurer la continuité de la courbe totale.

INTERPOLATION POLYNOMIALE PAR MORCEAUX



$S(x)$ Représente la courbe totale reliant tous les points $[X_i, Y_i]$.

$$S(x) = \{S_i(x)\} \text{ avec } x \in [x_0, x_n]$$

$S_i(x)$ Représente le morceau qui relie les points $[X_i, Y_i]$ et $[X_{i+1}, Y_{i+1}]$

$S_i(x_i)$ Représente la valeur de $S_i(x)$ au point x_i .

Soient $(n+1)$ points tels que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

La fonction $S(x)$ est appelée spline cubique s'il existe N fonctions polynomiales $S_i(x)$ qui vérifient les propriétés suivantes :

$$1. \quad S(x) = S_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}(x - x_i) + a_{i,2}(x - x_i)^2 + a_{i,3}(x - x_i)^3 \quad [\text{Ae.1}]$$

Pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$ et pour $i = 0, 1, \dots, n-1$.

$$2. \quad S(x_i) = y_i \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n \quad [\text{Ae.2}]$$

Qui implique que la courbe totale passe par tous les points.

$$3. S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n-2 \quad [\text{Ae.3}]$$

Qui implique la continuité de la courbe totale $S(x)$.

$$4. S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n-2 \quad [\text{Ae.4}]$$

Qui implique que la fonction totale est lisse au niveau des nœuds de raccordement.

$$5. S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n-2 \quad [\text{Ae.5}]$$

Qui implique que les dérivées secondes sont continues.

INCONNUES DU PROBLEME

L'expression [Ae.1] contient 4 inconnues $(a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3})$ pour l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Comme ces derniers sont au nombre de N ($(N+1)$ points) alors, au total, on doit déterminer $4N$ inconnues.

EQUATIONS DISPONIBLES

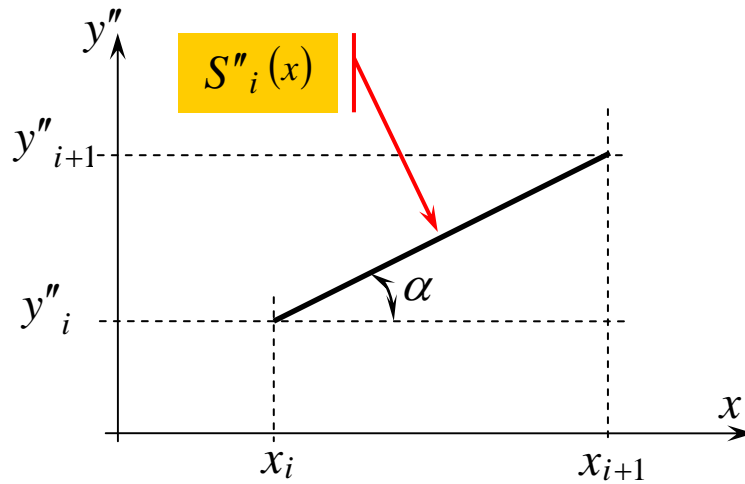
En principe, on peut établir $(N+1)$ équations avec l'expression [Ae.2], $(N-1)$ équations avec chacune des expressions [Ae.2], [Ae.2] et [Ae.2], ce qui fait au total $(N+1) + 3(N-1) = 4N-2$. Deux équations manquantes qu'on peut écrire aux extrémités de l'intervalle en faisant intervenir l'une des dérivés (première ou deuxième).

CONSTRUCTION DES COURBES

Dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on peut toujours écrire que :

$$S''(x) = S''_i(x)$$

$$y''_{i+1} = S''_i(x_{i+1}) \quad \text{et} \quad y''_i = S''_i(x_i)$$



La linéarité de la dérivée seconde est telle que :

$$S''_i(x) - S''_i(x_i) = (x - x_i) \operatorname{tg} \alpha$$

Où :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S''_i(x_{i+1}) - S''_i(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Ce qui donne après calcul :

$$S''(x) = S''_i(x) = S''(x_i) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + S''(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad [\text{Ae.6}]$$

On pose $m_i = S''(x_i)$; $m_{i+1} = S''(x_{i+1})$; $h_i = (x_{i+1} - x_i)$

L'expression [Ae.6] devient :

$$S''_i(x) = \frac{m_i}{h_i} (x_{i+1} - x) + \frac{m_{i+1}}{h_i} (x - x_i) \quad [\text{Ae.7}]$$

On intègre 2 fois [Ae.7]. Ainsi, on obtient :

$$S_i(x) = \frac{m_i}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{m_{i+1}}{6h_i} (x - x_i)^3 + p_i (x_{i+1} - x) + q_i (x - x_i) \quad [\text{Ae.8}]$$

Où p_i et q_i représentent des constantes d'intégration.

On remplace successivement dans l'expression [Ae.8] x par x_i et par x_{i+1} :

$$y_i = S_i(x_i) = \frac{m_i}{6} h_i^2 + p_i h_i$$

$$y_{i+1} = S_i(x_{i+1}) = \frac{m_{i+1}}{6} h_i^2 + q_i h_i$$

D'où :

$$p_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{m_i h_i}{6} \quad \text{et} \quad q_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1} h_i}{6}$$

Les seules inconnues de l'expression [Ae.8] sont les termes $\{m_i\}$ qu'on peut trouver en dérivant la même expression. Ainsi, on a :

$$S'_i(x) = -\frac{m_i}{2h_i} (x_{i+1} - x)^2 + \frac{m_{i+1}}{2h_i} (x - x_i)^2 + p_i + q_i \quad [\text{Ae.9}]$$

Cette dernière expression est valable quand $x = x_i$. Alors :

$$S'_i(x_i) = -\frac{m_i}{3} h_i - \frac{m_{i+1}}{6} h_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \quad [\text{Ae.10}]$$

Elle l'est aussi quand $i = i-1$. Donc :

$$S'_{i-1}(x_i) = -\frac{m_i}{3} h_{i-1} + \frac{m_{i-1}}{6} h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \quad [\text{Ae.11}]$$

En utilisant la propriété 4 et les expressions [Ae.10] et [Ae.11], on obtient une relation qui lie m_{i-1} , m_i et m_{i+1} .

$$h_{i-1} \cdot m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) m_i + h_i \cdot m_{i+1} = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) \quad [\text{Ae.12}]$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

[Ae.12] représente un système de (N-1) équations linéaires à (N+1) inconnues. Les deux équations manquantes sont obtenues aux extrémités. Une fois les valeurs de $\{m_i\}$ déterminées, les coefficients de la fonction spline $S_i(x)$ seront calculés comme suit :

$$a_{i,0} = y_i \quad , \quad a_{i,1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i(2m_i + m_{i+1})}{6}$$

$$a_{i,2} = \frac{m_i}{2} \quad , \quad a_{i,3} = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i}$$

Chaque polynôme peut se mettre sous la forme :

$$S_i(x) = \{ [a_{i,3}(x - x_i) + a_{i,2}] (x - x_i) + a_{i,1} \} (x - x_i) + a_{i,0}$$

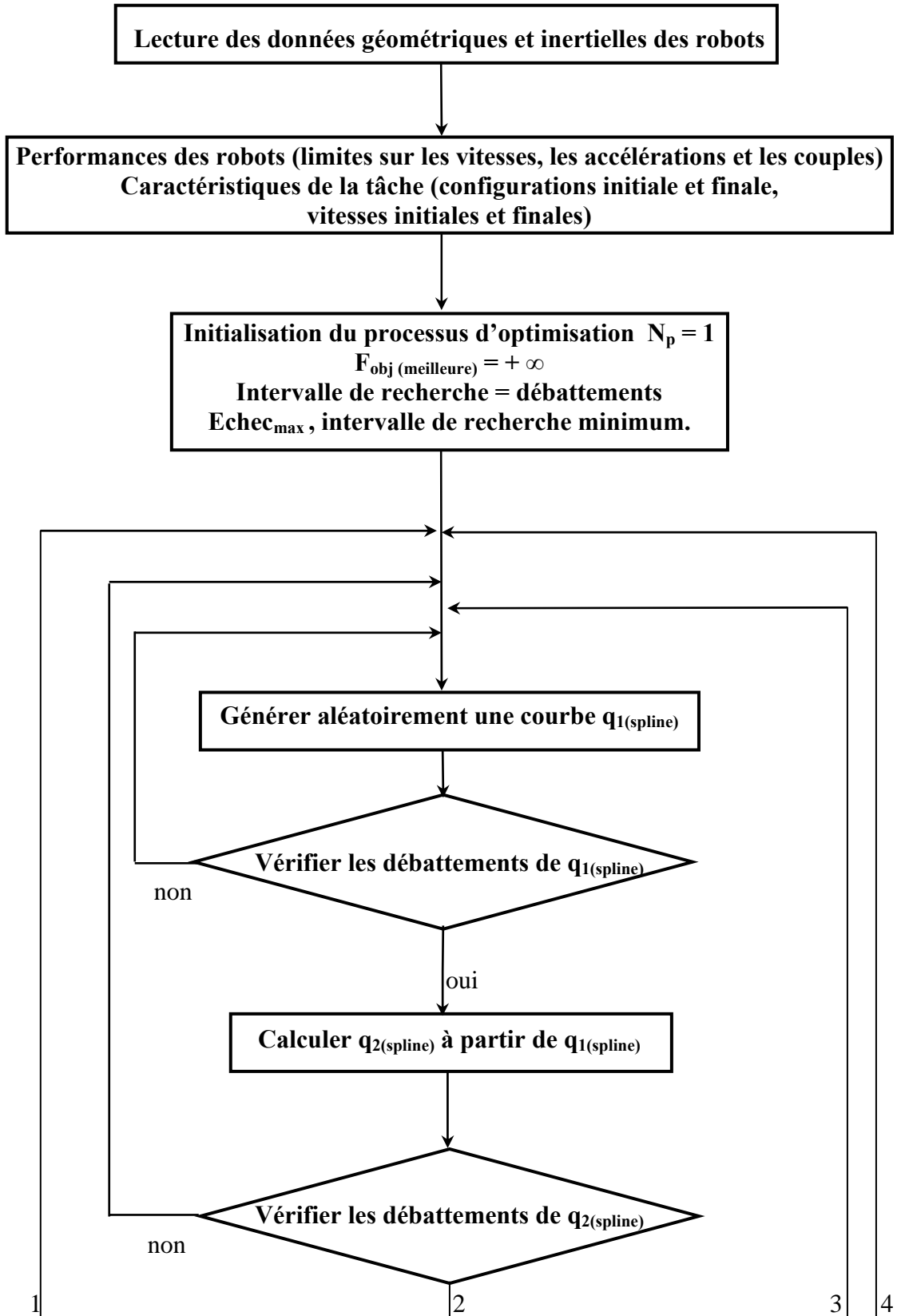
Où

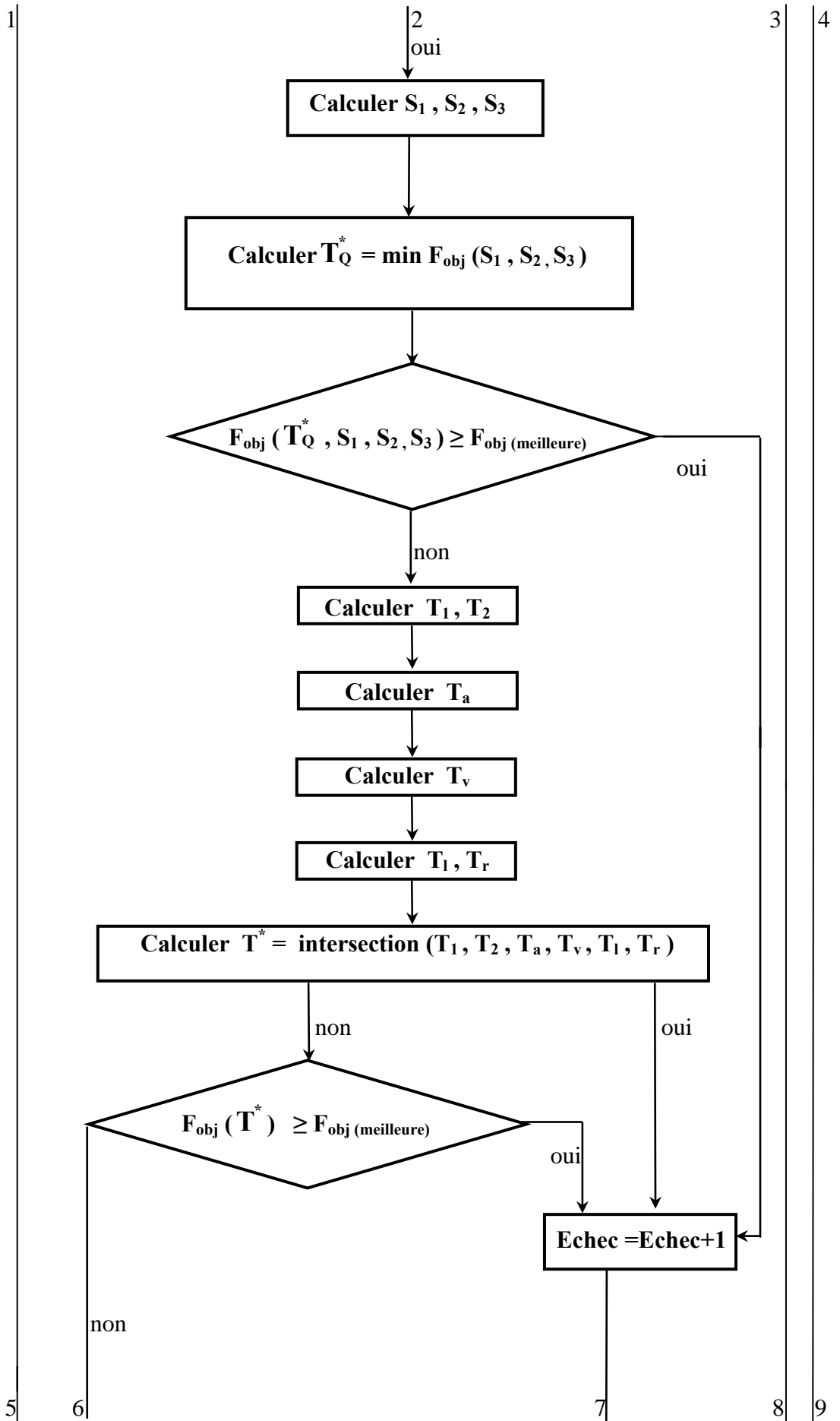
$$x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

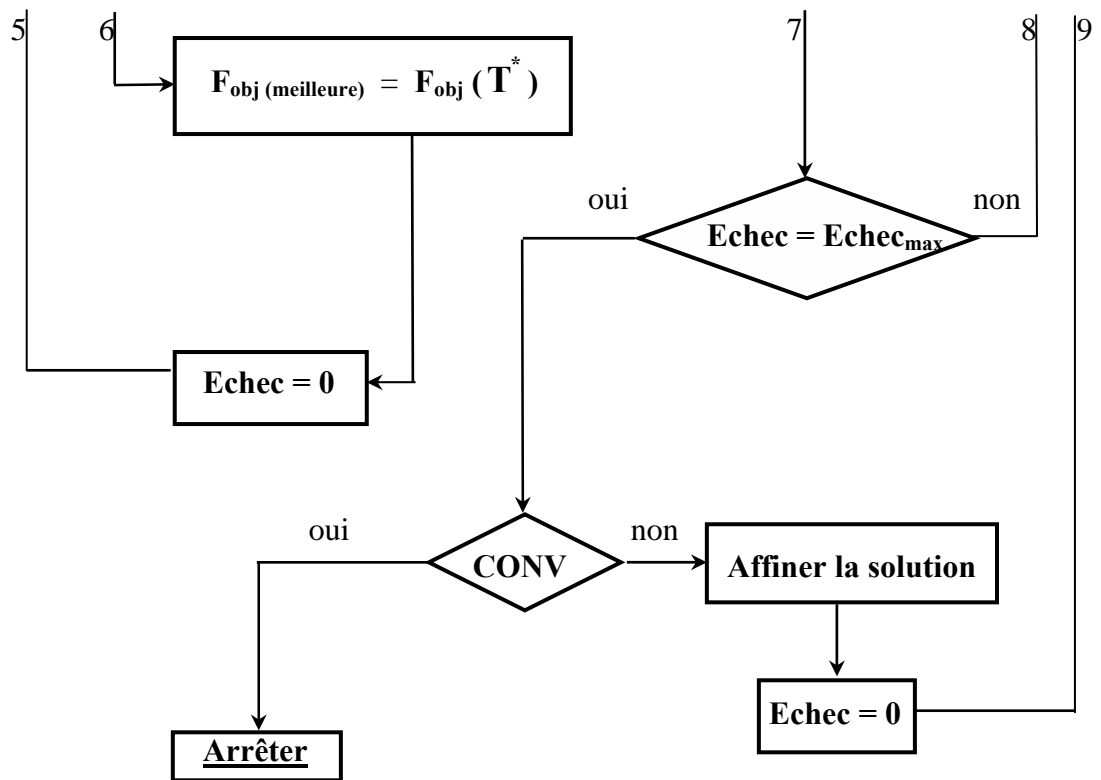
[Ae.13]

APPENDICE F

ORGANIGRAMME DU PROCESSUS D'OPTIMISATION







APPENDICE G

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

- $C \alpha$: cosinus α
- D_i : matrice d'inertie du robot i .
- F : fonction objectif.
- G_i : centre de masse du segment i .
- $J(q)$: matrice jacobienne.
- K_c : matrice d'inertie relative à l'objet ramenée au repère fixe R_f .
- $S \alpha$: sinus α
- SC : splines cubiques .
- T : temps de transfert.
- T_a : la limite inférieure du temps de transfert qui respecte la contrainte d'accélération.
- T_v : la limite inférieure du temps de transfert qui respecte la contrainte de vitesse.
- f_i, n_i : torseur des forces de contact généralisées.
- g : accélération de la pesanteur.
- l_i : longueur du segment i .
- m_c : masse de l'objet à manipuler de centre de masse c .
- m_i : masse du segment i .
- $q(t)$: vecteur des positions articulaires (coordonnées généralisées).
- $\dot{q}(t)$: vecteur des vitesses articulaires (vitesses généralisées).
- $\ddot{q}(t)$: vecteur des accélérations articulaires (accélérations généralisées).
- r_1, r_2 : distance entre c et les origines des derniers bras des 2 robots.
- v : vecteur vitesse linéaire.
- \dot{v} : vecteur accélération linéaire.

v_c, ω_c : vitesses linéaire et angulaire de c .

Γ ou u : commande (moments quadratiques).

Γ_i : vecteur des couples articulaires (forces généralisées).

μ : facteur de pondération (pour les moments quadratiques).

τ : tenseur d'inertie.

φ_1, φ_2 : orientation de l'objet par rapport aux 2 effecteurs.

ω : vecteur vitesse angulaire.

•

$\dot{\omega}$: vecteur accélération angulaire.

REFERENCES

01. E. Dombre et W. Khalil « *Modélisation et commande des robots* » Hermes-Paris 1988.
02. D. Georges et Y. Hammam « *Planification des trajectoires pour robots manipulateurs* » APII 1987 p. 129-150.
03. P. Coiffet « *Les robots, modélisation et commande* » Hermes 1981.
04. A. J. Koivo and M. A. Unseren « *Modeling closed chain motion of two manipulators holding a rigid object* » Mech. mach. theory. vol 25 N° 4 p. 427-438. 1990.
05. M. D. Djurovic and M. K. Vukobratovic « *A contribution to dynamic modelling of cooperative manipulators* » Mech. mach. theory. vol 25 N° 4 p. 407-415. 1990.
06. S. Rebiai « *Contribution à la planification optimale des mouvements libres des robots manipulateurs* » Thèse de magister. EMP 2002.
07. P. Chiacchio and S. Chiaverini (Eds) « *Complex robotic systems* » Springer 1997.
08. B. Madani « *Dynamique des systèmes multicorps: application à la conception mécanique des robots* » Thèse de magister. Boumerdes 1998.
09. M. Cazin et J. Metge « *Mécanique de la robotique* » CNAM 1989.
10. M. Kadri et B. Bouzouia « *Commande dynamique coordonnée de 2 bras manipulateurs coopérants* » CIP 2001.
11. P. Hsu « *Coordinated control of multiple manipulator systems* » IEEE trans. on robotics and automation. Vol. 9 N° 4 p. 400-410. August 1993.
12. T. Chettibi « *Contribution à l'exploitation optimale des bras manipulateurs* » Thèse de magister. EMP 2000.
13. R. Battiti, G. Tecchiolli « *The reactive Tabu search* » ORSA journal on computing p. 126-140. 1994.
14. F. Glover « *Tabu search* » Part 1 ORSA J. on computing 1(3) p. 190-206. 1989.
15. F. Glover « *Tabu search* » Part 2 ORSA J. on computing 2(1) p. 04-32. 1990.
16. R. Dorsey and W. Mayer « *Genetic algorithms for estimation problems with multiple optima, nondifferentiability and other irregular features* » Journal of business and economic statistics 13(1) p. 53-60. 1995.

17. T. Chettibi, H. E. Lehtihet « *A new approach for point to point optimal motion planning problems of robotic manipulators* » ESDA 2002. APM-10. ASME conf. 2002.
18. M. Kirkanski, O. Timcenko « *A geometric approach to manipulator path planning in 3d space in the presence of obstacles avoidance* » Robotica, vol. 10. p. 321-328. 1992.
19. J. Denavit et R. S. Hartenberg « *A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices* » TRANS ASME Jour. of applied mech. vol. 22 N° 2 p. 215-221. 1995.
20. W. Khalil, J. F. Kleinfinger « *A new geometric notation for open and closed loop robots* » Proceeding of the IEEE int. conf. on robotics and automation. San Francisco 1986. p.1174-1180
21. L. Pantriaguine, V. Boltianski, R. Gamkrelidze, E. Michtchenko « *Théorie mathématique des processus optimaux* » Edition Mir 1965.
22. P. Borne, G. D. Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis « *Commande et optimisation des processus* » Editions Technip 1990.
23. J. Angeles « *Fundamentals of robotic mechanical system ,theory, methods and algorithms* » Springer-Verlag 1997.
24. J. J. Graig « *Introduction to robotics, mechanics and control* » Addison-Wesley 1989.
25. W. Khalil, E. Dombre « *Modélisation, identification et commande des robots* » Hermes 2^{ème} ed. 1999.
26. R. P. Paul « *Robot manipulators, mathematics, programming and control* » The MIT press, Cambridge 1981.
27. T. Yoshikawa « *Foundations of robotics* » MIT press 1990.
28. F. L. Chernousko, N. N. Bolotnik, V. G. Gradetsky « *Manipulation robots, dynamics control and optimisation* » CRC press 1994.
29. A. A. Kobrinski, A. E. Kobrinski « *Bras manipulateurs des robots, architecture et théorie* » Edition MIR Moscou 1989.
30. V. Arnold « *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique* » Edition MIR Moscou 1976.
31. L. Landau, E. Lifchitz « *Mécanique* » Edition MIR Moscou 1988.
32. R. L. Fox « *Optimization methods for engineering design* » Addison-Wesley 1971.

33. P. Brousse « *Structural optimization* » Springer-Verlag 1975.
34. H. Asada , K. Y. Toumi « *Direct drive robots, theory and practice* » MIT press 1987.
35. K. Glass, R. Colbaugh, D. Lim, H. Seradji « *Real time collision avoidance for redundant manipulators* » IEEE transaction on rob. and aut. N° 11 vol. 3 p. 448-457. 1995.
36. S. Mitsi, K. D. Bouzakis, G. Mansour « *Optimization of robot links motion in inverse kinematics solution considering collision avoidance and joints limits* » Mach. and mec. theory N° 30 vol. 5 p. 653-663. 1995.
37. R. V. Ma yorga « *A framework far the path planning of robot manipulator* » Lasted third int. conf. on rob. and manufacturing, p. 61-66. June 1995.
38. N. R. Shahri, I. Troch « *A new on line methode to avoid collisions with links of redundant articulated robots* » Robotica N° 14, p. 611-619. 1996.
39. T. Laliberté, C. M .Gosselin « *Efficient algorithm for the trajectory planning of redundant manipulators with obstacles avoidance* » IEEE international conference on robotics and automation, vol. 3, p. 2044-2049. May 1994.
40. F. Pfeiffer and J. Rainer « *A concept for manipulator trajectory planning* » IEEE journal for robotics automation, vol. Ra-3 N° 2, April 1987.
41. A. Shiller and H. H. Lu « *Computation of path constrained time optimal motions with dynamic singularities* » Trans of the ESME, vol. 114, p. 34-40. March 1992.
42. J. E. Bobrow, S. Dubowshy and J. S. Gibson « *Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths* » The international journal of robotics research, vol. 4 N° 3. 1985.
43. I. Duleba « *The method of minimal neighbourhood: a new and most effective iterative for minimum cost trajectory planning in robot manipulators* » Robotica vol. 13 p. 297-304. 1992.
44. W. Jack, I. Deluba and P. Rogalinski « *A graph- searching approach to trajectory planning of robots* » Robotica vol. 10 p. 531-537. 1992.
45. Z. Shiller « *On singular time-optimal control along specified paths* » IEEE tran. on rob. and aut. 10(4) p. 561-566. August 1994.
46. Z. Shiller « *Time energy optimal control of articulated systems with geometric path constraints* » IEEE int. conf. on rob. and aut. Vol. 4 p. 2680-2685. May 1994.

47. F. Danes « *Critères et contraintes pour la synthèse optimale de robots manipulateurs. Application à l'évitement d'obstacles* » Thèse de doctorat d'état, université de Poitiers. 1998.
48. J. P. Lallemand et S. Zeghloul « *Robotique, aspects fondamentaux* » Edition Masson 1994.
49. O. Khatib « *Real time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots* » International journal of robotics research, vol. 5 N° 1 O. 90-98. 1986.
50. P. Athanasios « *Probability, random variables and stochastic processes* » WCB 1991.
51. S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt and P. M. Vecchi „*Optimization by simulated annealing* » Science 220 p. 671-680. 1983.
52. J. Lam and J.-M. Delosme « *Logic minimization using simulated annealing* » Proc. International conference on computer aided design ICCAD 86, Santa-Clara CA p. 348-351. Nov. 1986.
53. J. Lam and J.-M. Delosme « *Simulated annealing: a fast heuristic for some generic layout problems* » Proc. International conference on computer aided design ICCAD 88, Santa- Clara CA p. 510-513. Nov. 1988.
54. T. Crainic, M. Gendreau, P. Soriano and M. Toulouse « *A tabu search procedure for multicommodity location/allocation with balancing requirement* » Annals of operations research 42 (1-4) p. 359-383. 1993.
55. K. Krishnakumar and D. Goldberg « *Control system optimization using genetic algorithm* » Journal of guidance, control and dynamics 15(3) p. 735-740. 1992.
56. T. Chettibi « *Research of optimal free motions of manipulators robots by non-linear optimisation* » SIGMA. Avril 2002.
57. J. Wittenburg, Proc. NATO ASI series, vol. F9 « *Computer aided analysis and optimisation of mechanical system dynamics* » Springer, Berlin (1984).
58. M. Vukobratovic and V. Potkonjak « *Applied dynamics and CAD of manipulation robots* » Springer, Berlin (1985).
59. D. E. Orin and S. Y. Oh, ASME J. Dynam. Sys. Measur. Control 102, June (1981).
60. S. Hayati Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation. S.F. (1986).
61. G. R. Pennock and B. S. Ryuh, ASME Design Technology Conf., The Design Automation Conf., Advances in Design Automation, Boston, Mass., Vol. DE-2, page 63 (1987).
62. J. Y. S. Luh and Y. F. Zheng, Robotics Res. 8(3) (1987).

63. K. Laroussi, H. Hemami and R.E. Goddard « *Coordination of two planar robots in lifting* » Journal of robotics and automation. Vol. 4 N° 1 February 88.
64. E. Tabarah « *Coordination de 2 robots manipulateurs* » Agence spatiale canadienne. APII vol.28 n° 2 – 1994.
65. J. H. Mathews, Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering Prentice-Hall of India. Second Edition 1994.