

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA
Faculté des sciences de l'ingénieur
Département D'Aéronautique

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'état en Aéronautique
Option : Installation

THEME

Etude et simulation des signaux radar type:

COSTAS-LFM



Réalisé par :

Mr. SID Messaoud

Proposé par :

Mr. HERICHE Mohamed

Année universitaire 2006-2007

Résumé

L'objectif principal de ce travail est d'établir une étude et comparaison entre deux classes de signaux modulés en fréquence : Signaux classiques LFM et signaux de Costas. Etudier la fonction d'ambiguïté et ces propriétés de ces classes de signaux.

Les signaux (Costas) se révèlent finalement être les plus performant et ont une richesse de séquence (variantes).

Abstract

The main object is to study and established a comparison between two classes of signals modulated in frequency.

Traditional signals LFM and signals with strong resolution time frequency (signals of Costas)..on studies the properties of auto ambiguity (function of ambiguity) from these two class signals.

The signals (Costas) finally prove to be most powerful and have a richness of sequence (alternatives).

الهدف من هذا العمل هو إعداد دراسة ومقارنة بين نمطين من الإشارة المعتمدين على تقنية التعديل الخطي للدبذبات الكلاسيكي و التعديل بواسطة وثب الدبذبات كوسطاس.

لهذين النمطين من الإشارة المصنوعة
تبيين أن إشارات في النهاية هي الأقدر على حل الالتباس فضلا عن ثراءها من حيث خلق تتابع



Je remercie tout d'abord dieu tout puissant tout clément qui m'a aidé à élaborer ce modeste travail et aboutir à ce niveau d'étude.

J'exprime ma profonde et respectueuse gratitude et reconnaissance à mon promoteur

M. HERICHE Mohamed

M.LAIB Abdelaziz

M. BAALI Abdelaàli

J'exprime mes remerciements les plus sincères à l'ensemble des enseignants et des étudiants du département d'Aéronautique de l'Université de BLIDA.

Installations 2007

Sid Messaoud

Dédicace
Dédicace

Je souhaite dédier ce travail, synonyme de concrétisation

De tous mes efforts fournis ces années :

A mes très cher parents ma raison de vivre, symbole de courage et de sacrifice,

Que dieu les gardes.

A ma chère grande mère Ghzala.

A mes frères Said, Smail, Abdelaali, Karim, Adel, Hassan.

A mes soeurs Zohra, Malika.

Aux petits Oussama, Oumima, Bouthina, Hiba, Djouhina,

Hammam, Arwa, Hadil, Alaa.

A tous mes amis de Bouhmama

SID Messaoud

Introduction générale

Le mot RADAR est une abréviation de *Radio Détection And Ranging*, en général les systèmes Radars utilisent les modulations (amplitude, fréquence et phase) et des antennes directives pour la transmission d'énergie électromagnétique vers un volume d'espace pour chercher: l'existence, la localisation, et la vitesse des cibles. Ces cibles reflètent des portions de cette énergie (échos). Arrivés au radar, ces échos sont traités par le récepteur pour extraire des informations sur la cible (distance, vitesse, position angulaire et autres caractéristiques d'identification).

Pour obtenir une certaine portée nous avons le choix entre une puissance crête émise pendant un temps très court et une puissance crête beaucoup plus faible émise pendant un temps plus long. Pour augmenter la portée d'un radar capable d'émettre une puissance crête la plus grande possible, il est nécessaire d'augmenter la largeur de l'impulsion τ . Dans cette éventualité on constate une diminution du pouvoir séparateur en distance, une augmentation de la distance aveugle et une augmentation de la puissance du clutter, alors pour résoudre ces problèmes on opte à l'utilisation des techniques de compression d'impulsion et des méthodes de synthèse des signaux performant (à fort pouvoir de résolution : Costas, et BPSK) .

Dans ce contexte ce travail consiste à étudier la fonction d'ambiguïté et différentes méthodes de création des signaux pour avoir une fonction d'ambiguïté proche de l'optimal afin d'améliorer le pouvoir de résolution (distance et vitesse).

Alors ce manuscrit est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre on présente des généralités sur les radars de point de vue (classifications, équation). on fait également une comparaison entre les trois célèbres récepteurs radars (classique, Doppler et à compression d'impulsion).

En suite on propose essentiellement de parler brièvement de la théorie de l'écho et de l'ambiguïté.

Dans le deuxième chapitre on aborde la réponse du filtre adapté qui est la fonction d'ambiguïté, les propriétés de cette fonction et leurs types.

Le chapitre III est consacré aux quelques techniques de modulation de fréquence à savoir LFM (classique) et code de Costas.

On termine par la présentation de tous les résultats numériques (simulations sous Matlab) et une comparaison entre les deux classes (techniques).

Introduction

Le concept de base du radar est relativement simple quoique dans beaucoup de cas son implémentation pratique ne le soit pas. Un radar fonctionne en rayonnant de l'énergie électromagnétique et détectant l'écho retourné par la cible. La nature de l'écho peut fournir beaucoup d'informations au sujet de la cible. La distance de la cible est calculée en évaluant le temps que met l'énergie rayonnée pour atteindre la cible et retourner. La direction de la cible est déterminée avec une antenne directive pour sentir l'angle de l'arrivée de l'écho.

Si la cible est mobile, un radar peut dériver sa trajectoire, et prévoir sa destination, la variation de la fréquence de l'écho due à l'effet Doppler permet au radar de séparer les cibles mobiles désirées telles que les avions des cibles stationnaires non désirées telles que le fouillis de terre et de mer. Avec une très haute résolution, un radar peut même discerner la nature, la taille et la forme de la cible.

Le radar peut détecter des cibles relativement petites à de grandes ou faibles distances et peut mesurer leurs distances avec précision dans toutes conditions météorologiques, ce qui est l'avantage majeur à d'autres senseurs.

Le principe du radar fut appliqué à partir des fréquences qui s'étendent de quelques mégahertz au-delà de la région optique (radar laser), Les techniques particulières d'implémentation d'un radar diffèrent considérablement sur cette gamme de fréquences, mais le principe de base reste le même.

Le radar a été à l'origine développé pour satisfaire les besoins militaires En surveillance et commande d'armes, ces applications ont favorisé le développement de cette technologie. Cependant, le radar a vu des applications civiles significatives telles que le trafic aérien, maritime, spatial et la prévision météorologique.

I-1. Classifications Radars

Les radars peuvent être classés comme : radars de sol, aéroportés ou spatiaux, ainsi ils peuvent être classés à multi catégories basés sur les caractéristiques spécifiques du radar et le type de la forme d'onde utilisée. Une autre classification concerne les missions et/ou les fonctionnalités du radar (météo, acquisition et recherche, surveillance, surveillance- scanning, contrôle de tir, les radars multifonctions (multi mode)..... etc.

Ils peuvent aussi être classés selon le type de la forme d'onde utilisée ou de la fréquence opérationnelle. Ils peuvent être à ondes continues (CW) ou à impulsions (PR).

Les radars CW sont des radars qui émettent de l'énergie électromagnétique d'une façon continue et utilisent (souvent) des antennes de transmission et de réception séparées.

Les radars de formes d'ondes continues non modulés peuvent mesurer la vitesse radiale de la cible (Doppler) et la position angulaire mais l'information de la distance de la cible ne peut être extraite sans l'utilisation de quelques formes de modulation. L'utilisation principale des radars de

forme d'onde continue non modulée est dans la recherche et la surveillance de la vitesse de la cible ainsi dans la guidance des missiles.

Les radars à impulsions utilisent une impulsion ou un train d'impulsions (souvent par modulation), dans ces catégories, les systèmes radars peuvent être classés en se basant sur la fréquence de répétition de l'impulsion (PRF), radar de PRF (faible, moyen et élevé). Les radars de faible PRF sont principalement utilisés pour mesurer les distances où la vitesse (Doppler) de la cible n'a pas d'importance. Les radars de PRF élevé sont souvent utilisés pour mesurer la vitesse de la cible.

Par contre les radars à ondes continues (CW) peuvent mesurer à la fois la distance et la vitesse radiale de la cible par l'utilisation des types de modulation différents, finalement il y a Une autre classification basée sur les bandes des fréquences utilisées (HF, VHF, LBAND, CBAND, XBAND, KU, K, KA et MMW).

Désignation de lettre	Fréquence (GHZ)	Désignation de bande
HF	0.003 - 0.03	A
VHF	0.03 - 0.3	A<0.25 ; B>0.25
UHF	0.3 - 1.0	B<0.5 ; C >0.5
L-Band	1.0 - 2.0	D
S-Band	2.0 - 4.0	E<3.0 ; F>3.0
C-Band	4.0 - 8.0	G<6.0 ; H>6.0
X-Band	8.0 - 12.5	I<10.0 ; J >10.0
Ku-Band	12.5 - 18.0	J
K-Band	18.0 - 26.5	J<20.0 ; K> 20.0
K-Band	26.5 - 40.0	K
MMW	Normally > 34.0	L<60.0 ; M>60.0

Tableau I.1 : Bandes des fréquences utilisées par les systèmes radars.

I-2. Equation Radar

On considère un radar d'une antenne omnidirectionnelle qui transmet de l'énergie équitable dans toutes les directions. Depuis que ce type d'antenne à une radiation sphérique

Nous pouvons définir la densité de la puissance crête (puissance par unité de surface) à un point quelconque dans l'espace par :

$$P_0 = \frac{\text{puissance crête de transmission (Watts)}}{\text{Surface de la sphère (m}^2\text{)}} \dots\dots\dots (I.1)$$

$$P_d = \frac{P_t}{4fR^2} \dots\dots\dots (I.2)$$

P_t : puissance crête de la transmission.

4 R² : est la surface du sphère de rayon R.

Les systèmes radars utilisent les antennes directionnelles dans l'ordre d'augmenter la densité de

puissance dans une direction donnée.

Les antennes directionnelles sont toujours caractérisées par le gain d'antenne G et la surface effective d'antenne A_e . Ils sont reliés par la relation :

$$G = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2} \dots\dots\dots (I.3)$$

Où λ : La longueur d'onde

La relation type entre la surface effective de l'antenne A_e et la surface physique A est :

$$A_e = \eta A \dots\dots\dots (I.4)$$

$$0 < \eta < 1$$

η : Efficience de surface.

Les meilleures antennes ont besoin d'un $\eta \approx 1$

Pour facilité les choses (dans notre cas) on assume que A et A_e sont les mêmes, et ainsi que les antennes ont le même gain dans les deux modes (transmission, réception).

Dans la pratique $\eta = 0,7$ est souvent accepté.

Le gain G est ainsi relié à l'azimut d'antenne θ_a et l'élévation θ_e par :

$$G = k \frac{4\pi}{\sin \theta_e \sin \theta_a} \dots\dots\dots (I.5)$$

Avec $k \leq 1$ et dépend du type de la surface physique.

Les angles θ_e et θ_a sont respectivement l'élévation et l'azimut par unité de radian.

Une excellente approximation de l'équation (I.5) était introduite par **Stutzman** reporté par **Skolnik** est :

$$G \approx \frac{2600}{\sin \theta_e \sin \theta_a} \dots\dots\dots (I.6)$$

Où dans ce cas l'azimut et l'élévation sont donnés par unité de degrés.

La densité de la puissance à une distance R du Radar utilisant une antenne directive de gain G est donc donné par :

$$P_d = \frac{P_t G}{4\pi R^2} \dots\dots\dots (I.7)$$

Lorsque l'énergie radiée (transmise) par le radar intercepte la cible, la surface courante de la cible réfléchit (radié l'énergie électromagnétique dans toutes les directions).

La quantité d'énergie radiée par la cible est proportionnelle à la taille, l'orientation, et la forme (physique et matérielle) de la cible. Ceci sont regroupés sous un paramètre spécifique appelé SER (surface équivalente radar) noté par σ .

SER est par définition le rapport de la puissance retourné au radar sur la densité de puissance

incidente à la cible :

$$\sigma = \frac{P_r}{P_d} m^2 \dots\dots\dots (I.8)$$

P_r : est la puissance réfléchiée par la cible

Donc la puissance total délivrée par l'antenne au récepteur est :

$$P_{D_r} = \frac{P_t G \dagger}{4fR^2} A_e \dots\dots\dots (I.9)$$

Substituons la valeur de A_e de l'équation (I.4) dans l'équation (I.9) sa donne :

$$P_{D_r} = \frac{P_t G^2 \}^2 \dagger}{(4f)^3 R^4} \dots\dots\dots (I.10)$$

Posons S_{min} : la puissance minimale du signal détecté donc la distance maximale R_{max} est :

$$R_{max} = \left[\frac{P_t G^2 \}^2 \dagger}{(4f)^3 S_{min}} \right]^{\frac{1}{4}} \dots\dots\dots (I.11)$$

De l'équation (I.11) on peut déduire que dans l'ordre de doublé la distance maximale on doit augmenter la puissance crête de transmission P_t 16 fois ou la surface effective 4 fois.

Dans les situations pratiques les signaux échos reçus par le radar sont additionnés avec le bruit qui introduit un voltage non désiré dans toutes les fréquences radars.

Le bruit existe dans la nature et il peut être définie par leur densité de puissance spectrale PSD.

La puissance de bruit N est une fonction de largeur de bande

$$N = \text{Bruit}(PSD) \times B \dots\dots\dots (I.12)$$

L'entrée de la puissance de bruit d'une antenne est :

$$N_i = kT_e B \dots\dots\dots (I.13)$$

Avec $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ (joule/degrés. kelvin) est la constante de **Boltzman**

T_e : la température effective du bruit (degrés kelvin).

Il est toujours désirable que la puissance du signal minimal détecté (S_{min}) soit supérieure à la puissance du bruit.

La fidélité de récepteur est définie par le facteur appelé (facteur bruit de récepteur) Donné par :

$$F = \frac{(SNR)_i}{(SNR)_0} = \frac{S_i/N_i}{S_0/N_0} \dots\dots\dots (I.14)$$

$(SNR)_i$ et $(SNR)_0$ sont respectivement le rapport signal sur bruit à l'entrée et à la sortie de récepteur.

S_i : puissance du signal à (l'entrée)

N_i : puissance du bruit à (l'entrée)

S_0 et N_0 sont respectivement les (sorties) des puissances (signal et bruit).

Substituons l'équation (I.13) dans l'équation (I.14) et en réarrangeons les termes on obtient :

$$S_i = kT_e B F (SNR)_0 \dots\dots\dots (I.15)$$

Alors la puissance minimale du signal détecté peut être écrite comme :

$$S_{\min} = kT_e BF(SNR)_0 \dots\dots\dots (I.16)$$

Substituons l'équation (I.16) dans l'équation (I.11) on obtient :

$$R_{\max} = \left[\frac{P_t G^2 \}^2 \dagger}{(4f)^3 kT_e BF(SNR)_{0_{\min}}} \right]^{\frac{1}{4}} \dots\dots\dots (I.17)$$

Equivalent de

$$(SNR)_{0_{\min}} = \frac{P_t G^2 \}^2 \dagger}{(4f)^3 kT_e BFR_{\max}^4} \dots\dots\dots (I.18)$$

En général les atténuations radar noté par L réduire le (SNR), donc :

$$(SNR)_0 = \frac{P_t G^2 \}^2 \dagger}{(4f)^3 kT_e BFLR^4} \dots\dots\dots (I.19)$$

Alternativement l'équation du radar peut être modifié pour calculer la durée de l'impulsion désiré afin d'achevé une certaine (SNR) pour la détection d'une distance donnée. Dans ce cas l'équation radar peut être réécrite sous forme :

$$\dagger = \frac{(4f)^3 kT_e FLR^4 (SNR)}{P_t G^2 \}^2 \dagger} \dots\dots\dots (I.20)$$

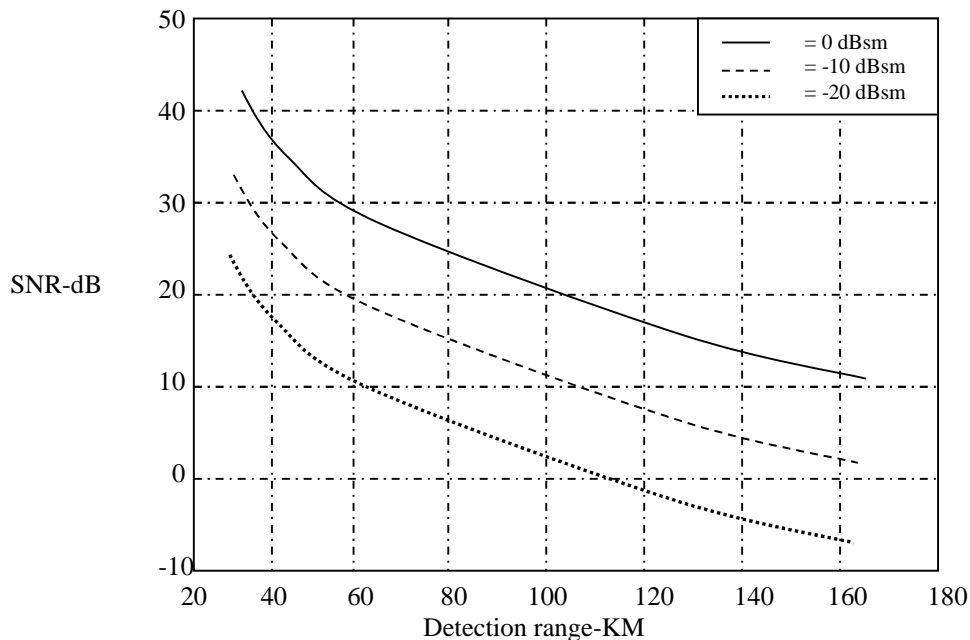


Figure I.1.a: Courbe SNR de détection en distance pour trois valeurs différentes de SER.

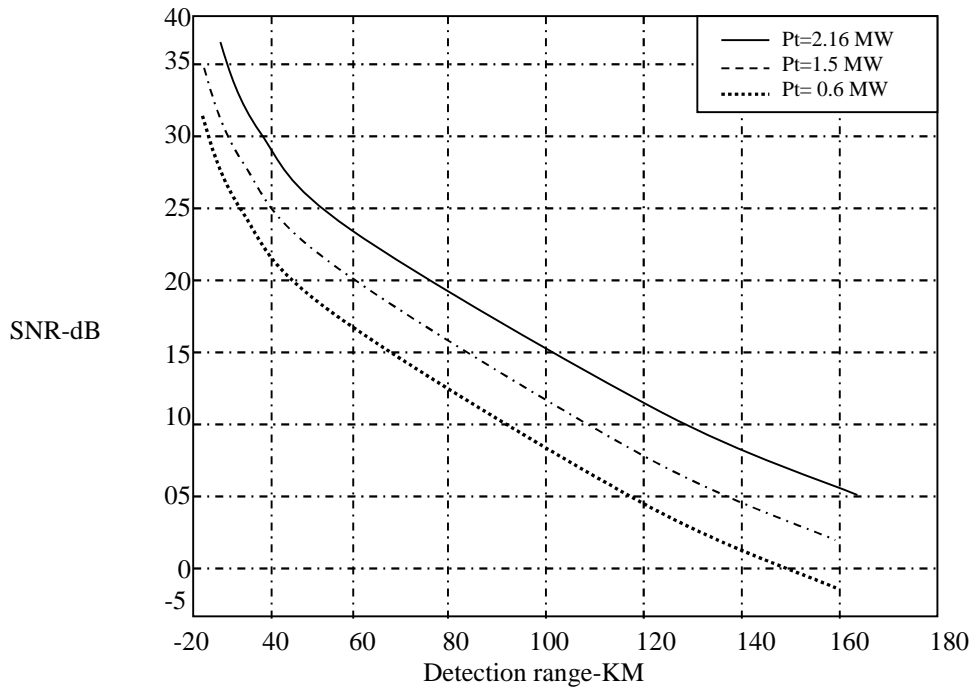


Figure I.1.b : Courbe SNR de détection en distance pour trois valeurs différentes de la puissance crête

I-3. Récepteurs radars

I-31. Récepteur classique

Les blocs fondamentaux du système radar sont illustrés dans le schéma fonctionnel simplifié de la figure I.2. Le signal radar, souvent sous forme de train d'impulsions courtes, est généré par l'émetteur et rayonné dans l'espace par une antenne directive qui concentre l'énergie dans un faisceau étroit. L'émetteur dans un système radar peut être amplificateur de puissance tel qu'un klystron amplificateur, tube à ondes progressives ou amplificateur à champs croisés. Les oscillateurs de puissance tels qu'un magnétron ou klystron reflex peuvent également être utilisés comme émetteurs.

L'équation radar montre que la distance radar est proportionnelle à la quatrième racine de la puissance de l'émetteur, ce qui revient à augmenter cette puissance seize fois pour doubler la distance. Les émetteurs non seulement doivent pouvoir développer de la puissance élevée avec des formes d'onde stables, mais ils doivent fonctionner dans une large bande de fréquences à rendement élevé et longue durée de vie. Le duplexeur agit en commutateur rapide pour protéger le récepteur des puissances élevées de l'émetteur.

En réception, il dirige le faible signal reçu vers le récepteur. Les cibles interceptent et réfléchissent une portion du signal radar, dont une faible quantité retourne dans la direction du radar. L'écho recueilli par l'antenne est envoyé au récepteur, qui est presque toujours du type superhétérodyne. Les tâches du récepteur consiste à séparer le signal désiré du bruit toujours présent et

d'autres signaux interférents et à amplifier suffisamment le signal pour enclencher un affichage, ou permettre un traitement automatique.

Le mélangeur translate le signal RF du récepteur à une fréquence intermédiaire, Le gain de l'amplificateur à fréquence intermédiaire (FI) permet une augmentation du niveau du signal et inclut également la fonction du filtre adapté qui maximise le rapport signal sur bruit de sortie afin de maximiser la détectabilité du signal. Le deuxième détecteur dans le récepteur est un détecteur d'enveloppe qui élimine la porteuse FI et laisse passer l'enveloppe de modulation.

L'amplificateur vidéo soulève la puissance du signal à un niveau commode pour visualiser l'information qu'il contient. Un seuil est établi à la sortie de ce dernier pour permettre la décision de détection. La décision peut être prise par un opérateur, ou un détecteur automatique sans intervention d'opérateur.

Avant détection du seuil, un traitement du signal est effectué. Il n'y a pas une définition précise de ce qui constitue la partie de traitement du signal radar, mais habituellement on entend par traitement du signal tout traitement qui a pour but de rejeter les signaux non désirés, il est exécuté avant la détection de seuil.

Le traitement des signaux inclut le filtrage adapté et les filtres Doppler dans le radar Doppler à impulsions. La compression d'impulsion, est parfois considérée comme traitement du signal dans les radars à compression d'impulsion.

Après détection confirmée, le traitement de données consiste en l'identification des cibles et un suivi automatique est employé. Le bloc d'affichage pour un radar de surveillance est habituellement un tube à rayon cathodique avec un format d'indicateur de position dans des coordonnées polaires.

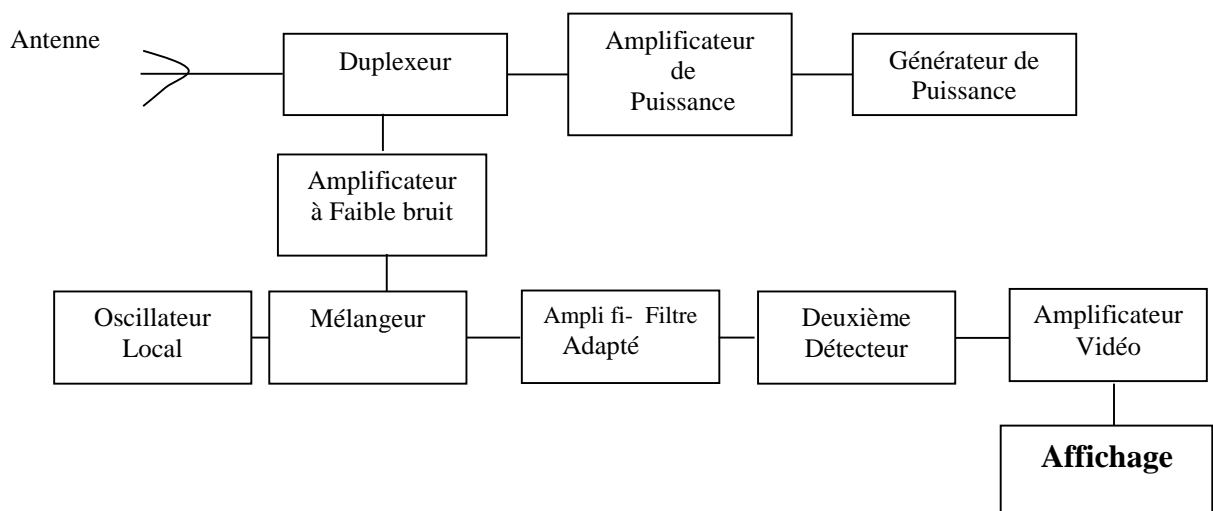


Figure.1.2 : Schéma synoptique d'un radar classique

I-32. Récepteur Doppler

Une cible qui se déplace radialement par rapport à l'émetteur provoque dans le champ réfléchi et reçu une variation de fréquence proportionnelle à la vitesse de déplacement.

L'écart entre la fréquence émise et la fréquence reçue est la fréquence Doppler (ν); elle s'exprime par la

relation :

$$\nu = \frac{2\hat{v}_r}{\lambda} \dots\dots\dots (I.21)$$

\hat{v}_r : étant la vitesse radiale de la cible et λ la longueur d'onde émise ($\hat{v}_r \ll c$).

Le mécanisme physique du phénomène se produit lorsqu'un aéronef se rapproche du radar, les ondes émises réfléchies et détectées en retour par l'antenne ont de moins en moins de distance à parcourir, il en résulte un "tassement" dans le temps de ces ondes d'où une augmentation de la fréquence du signal détecté d'autant plus sensible que la vitesse de rapprochement du mobile est importante.

Inversement lorsque l'aéronef s'éloigne du radar les ondes ont de plus en plus de distance à parcourir, il en résulte un "tassement" de ces ondes dans le temps d'où une diminution de la fréquence d'autant plus sensible que la vitesse d'éloignement est grande.

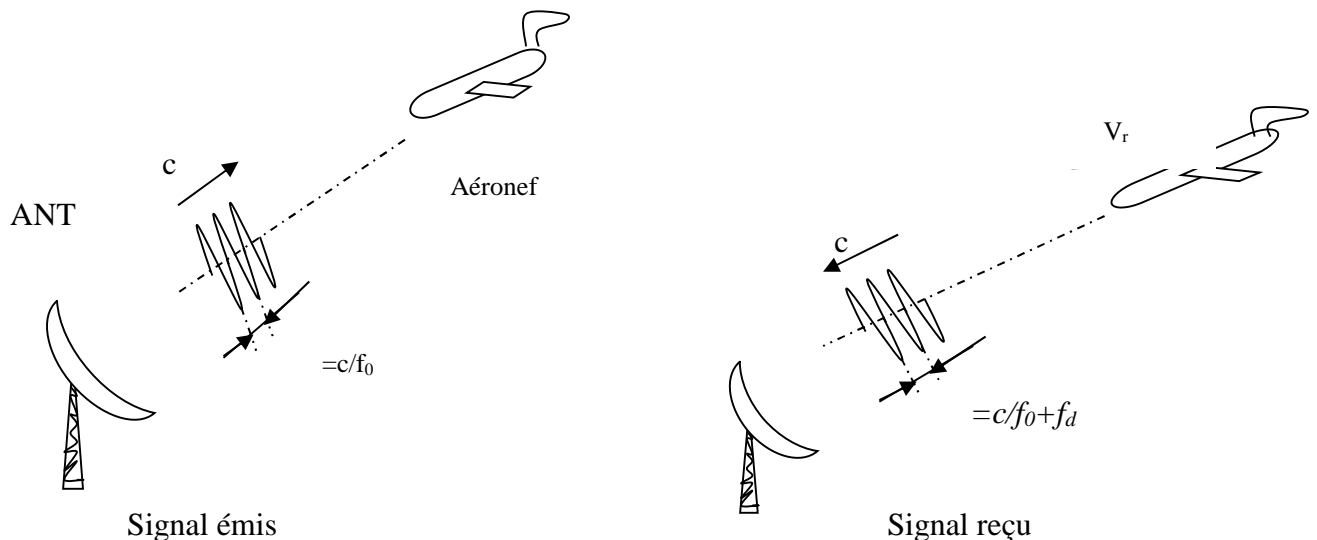


Figure I.3 : Mécanisme de l'effet Doppler

L'expression de la fréquence Doppler et par conséquent la fréquence du signal reçu est donc caractéristique de la vitesse radiale de la cible.

Le terme "pulse Doppler" est donc utilisé pour un radar apte à détecter le décalage Doppler dans un signal réfléchi par une cible mouvante. Pour assurer cette mesure des innovations fondamentales caractérisant les radars pulse Doppler des radars classiques sont apportées:

- Un nombre considérable d'échos successifs doivent être reçus.
- Un emploi d'un traitement adéquat du signal pour rejeter le lobe principal du clutter, performer la détection et aider à la discrimination et la classification d'une cible.

Le radar pulse Doppler est appliqué principalement dans des situations de détection de cibles mouvantes dans un environnement à clutter sévère, telles que:

- La surveillance embarquée dans l'espace qui exige détection à longue distance et un taux de données précis.
- La surveillance à bases terrestres qui exige moyenne distance et un taux de données précis.
- La météorologie qui nécessite la détection de grandes vitesses et Bonne résolution en distance.

Dans ce contexte, les blocs fondamentaux du radar pulse Doppler se schématise comme suit:

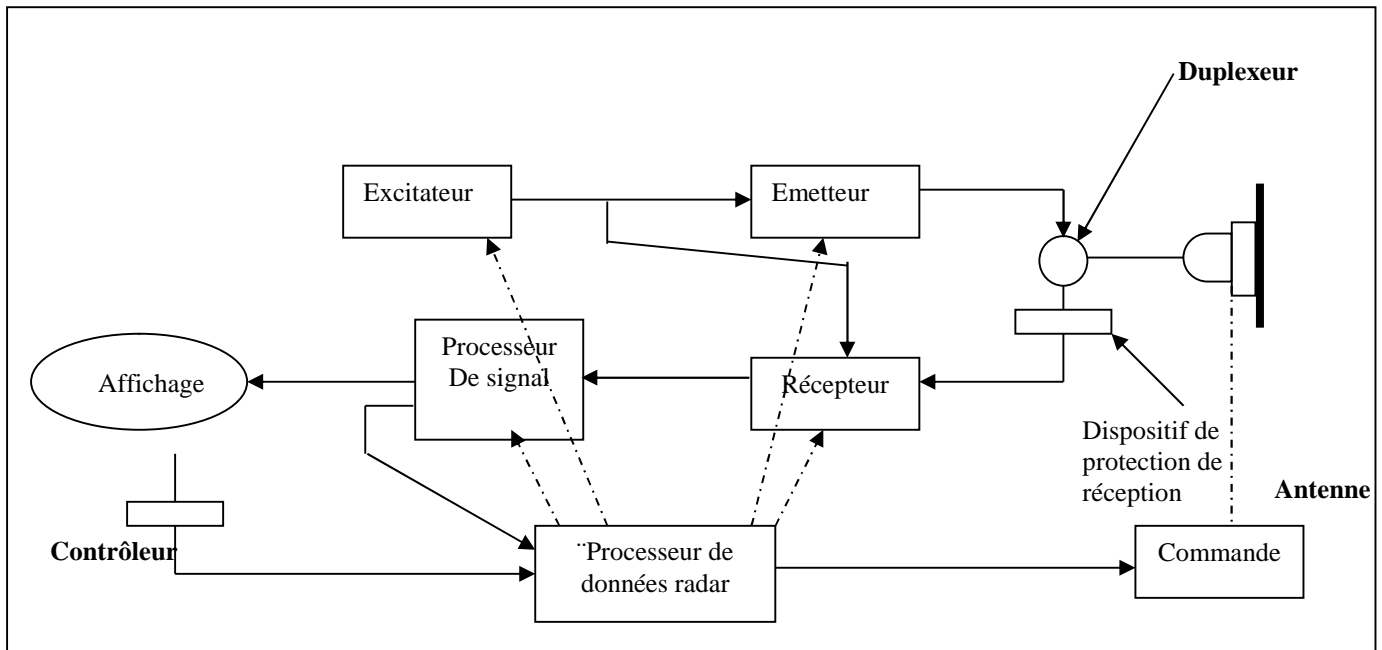


Figure I.4 : Schéma synoptique d'un radar pulse Doppler

Le radar Pulse Doppler se distingue donc du radar classique à impulsions principalement par son aspect numérique. Généralement un amplificateur sous forme de tube à ondes progressives tranche des impulsions cohérentes de largeur et fréquence de répétition (PRF) contrôlables à partir du signal sous forme d'onde continue à faible puissance délivrée par une nouvelle unité adoptée par ce type de radars dite "excitateur", ces impulsions sont ensuite codées pour réaliser la compression d'impulsions. Nous entendons par cohérence une continuité dans la phase du signal d'une impulsion à une autre, le premier front d'onde dans chaque impulsion est séparé du dernier front d'onde de même polarité de l'impulsion précédente par quelques nombres entiers de longueur d'onde.

Le récepteur comporte souvent un préamplificateur à faible bruit et un détecteur vidéo, en traitement Doppler la détection d'enveloppe effectuée par le radar classique à impulsions est remplacé par une détection de phase qui extrait le décalage Doppler à la fréquence d'émission. Dans le récepteur pulse Doppler le signal est représenté par deux composantes de même fréquence et crête d'amplitude mais différents en phase de 90° , une composante "en phase" I et une composante "quadrature" Q. Les

sorties I et Q du récepteur sont prélevées à des intervalles de l'ordre de la largeur d'impulsion, convertis et fournis à un processeur numérique du signal. Le traitement numérique de l'écho Doppler consiste en premier en l'élimination du clutter du sol, la détection des échos des cibles et la mémorisation de leurs localisations dans des mémoires qui serviront pour un affichage.

Toutes les opérations du radar sont contrôlées par un calculateur numérique qui charge le programme pour le mode de fonctionnement choisi dans le processeur du signal.

I-33. Récepteur à Compression d'impulsion

On entend par compression d'impulsion l'émission d'une impulsion codée de longue durée et le traitement nécessaire de l'écho reçu pour obtenir une impulsion relativement étroite, ainsi une amélioration de la détection d'un système radar à longues impulsions est acquise tout en maintenant une aptitude de résolution en distance d'un système à impulsions étroites.

Plusieurs avantages sont obtenus à travers cette technique : l'émission de longues impulsions permet une utilisation plus efficace de la puissance moyenne du radar (La génération des signaux à pics de puissance élevé est évitée), La puissance moyenne du radar peut être améliorée sans augmentation de la fréquence de répétition d'impulsions (PRF) donc sans diminution de la distance non ambiguë du radar. Une amélioration de la résolution Doppler du système est également obtenue en raison de l'utilisation d'une longue impulsion.

Une impulsion étroite contient un nombre considérable de composantes fréquentielles déphasées entre elles. Si les phases relatives sont changées par un filtre de distorsion de phase, la combinaison de ces composantes fréquentielles fournit une impulsion étirée ou étendue, c'est cette impulsion étendue qui est transmise par l'émetteur.

L'écho reçu est traité dans le récepteur par un filtre de compression, ce dernier réajuste les phases relatives des composantes fréquentielles de sorte qu'une impulsion comprimée ou étroite soit produite. Le rapport de la largeur de l'impulsion étendue à celui de l'impulsion comprimée est le rapport de compression d'impulsion, il est aussi égal au produit de la durée de l'impulsion et de la largeur de bande spectrale.

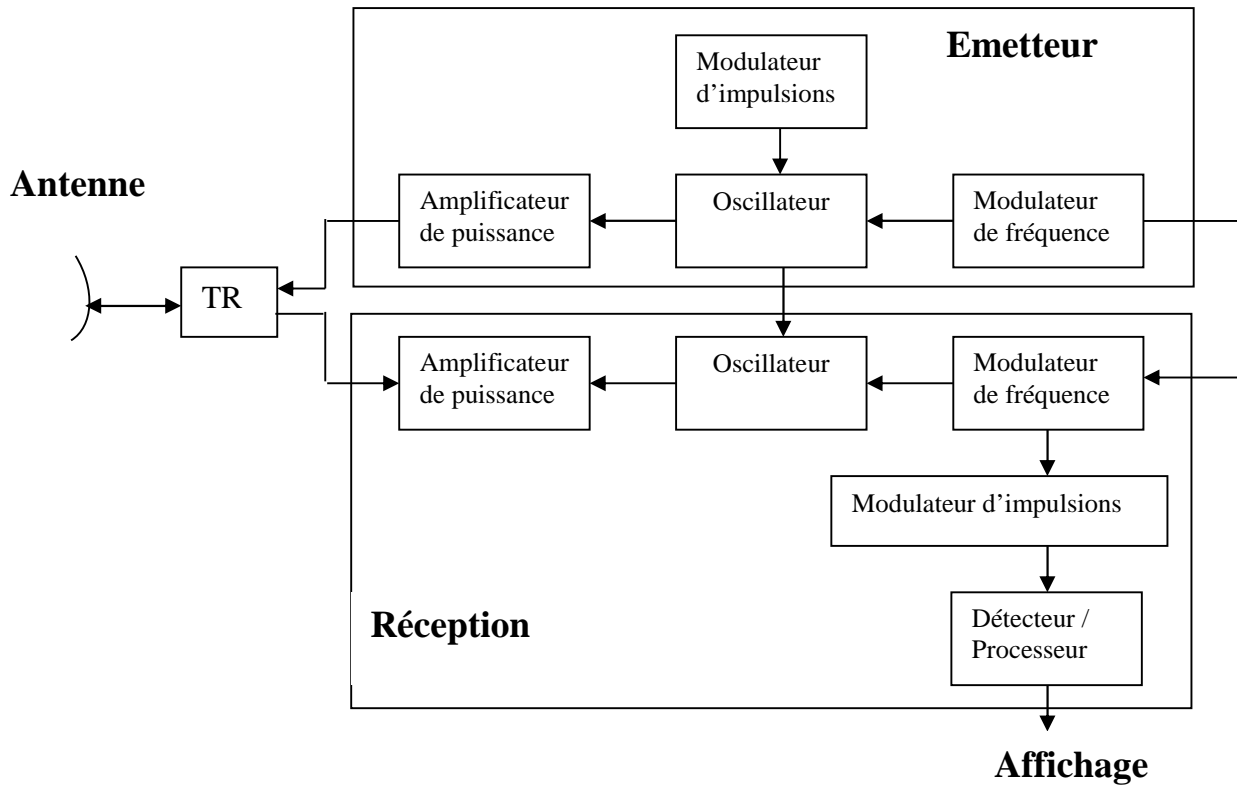


Figure I.5 : Schéma synoptique d'un radar à compression d'impulsion

Le schéma bloc d'un radar à compression d'impulsion diffère de celui du radar Classique par la présence de deux filtres :

Un modulateur de fréquence qui change les phases des raies sortie une onde continue modulée en fréquence du spectre et donne a la de durée . Par rapport au radar classique on émet donc des impulsions de longueur beaucoup plus importante grande que τ_{comp} mais contenant la même énergie et occupant le même spectre que les impulsions émises par le radar classique.

Un filtre de compression complémentaire du premier, qui permet au récepteur de passer d'une longue impulsion à une impulsion de courte durée de porteuse sinusoïdale f_0 . L'impulsion longue reçue de durée est comprimée en une impulsion de durée τ_{comp} . Dans le filtre de compression, le taux de compression étant $\frac{\tau}{\tau_{comp}}$.

Donc en faisant passer les impulsions dans un filtre qui change astucieusement les phases sans modification des amplitudes on obtient à partir d'une série de signaux de courte durée des signaux à onde continue modulée en fréquence (expansion), et réciproquement un filtre complémentaire transformera les ondes modulées en fréquence en une série d'impulsions de largeurs τ_{comp} (compression).

I-4. Théorie de l'écho radar

Dans ce qui suit, on veut écrire l'écho du radar à compression d'impulsions en fonction de son enveloppe complexe qui représente la modulation d'amplitude et de phase.

Le signal radar (émis) est un train d'impulsions sinusoïdales modulées en fréquence qui s'expriment sous la forme :

$$S_e(t) = \sum_{i=0}^{N_p} \cos(2ff_0t + f \frac{w}{\dagger}(t - it_r)^2) \dots\dots\dots (I.22)$$

Où :

- N_p : est nombre d'impulsions.
- t_r : représente la période inter impulsions (ipp).
- f_0 : Fréquence centrale du radar.
- : durée de chaque impulsion LFM.
- w : déviation maximale en fréquence.

La distance est variable dans le temps. Si la cible se rapproche du radar, la distance diminue par rapport à une distance de référence R_0 (t = 0) :

$$R(t) = R_0 - \hat{t} \dots\dots\dots (I.23)$$

Le décalage temporel dû à la cible s'écrit donc :

$$t_d = \frac{2}{c} R(t) \dots\dots\dots (I.24)$$

Le signal réfléchi par la cible s'exprime par :

$$S(t) = G \sum_{i=0}^{N_p} \cos(2ff_0(t - t_d) + f \frac{w}{\dagger}(t - t_d - it_r)^2) \dots\dots\dots (I.25)$$

G : est une constante due à la réflectivité de la cible.

Dans le récepteur, l'onde porteuse f_0 est extraite par un démodulateur et le signal est acheminé par les deux composantes I et Q. l'enveloppe complexe de l'écho radar est donnée par :

$$r(t) = \sum_{i=0}^{N_p} e^{-j2ff_0t_d} e^{jf \frac{w}{\dagger}(t - t_d - it_r)^2} \dots\dots\dots (I.26)$$

Considérons comme référence de temps le début de chaque impulsion :

$$r(t) = \sum_{i=0}^{N_p} e^{-j2ff_0t_d} e^{jf \frac{w}{\dagger}(t_i - t_d)^2} \dots\dots\dots (I.27)$$

Avec : $t_i = t - it_r \dots\dots\dots (I.28)$

t_i : est le début de la i^{eme} impulsion, et: $R_{0_i} = R_0 - \hat{(it_r)} \dots\dots\dots (I.29)$

R_{0_i} est la distance acquise par la cible au début de la i^{eme} impulsion

I-41. Pouvoir de résolution

Deux échos sont dits résolus (ou discriminés) lorsqu'ils donnent lieu à deux détections distinctes. La figure I.6 montre des exemples clairs de cibles résolues ou non résolues. La situation n'est pas toujours aussi nette; en effet la discrimination dépend de l'éloignement de la cible, de sa forme, de la fonction d'ambiguïté et aussi du niveau relatif de ces échos, comme le montre la figure I.7 qui présente différents cas possibles.

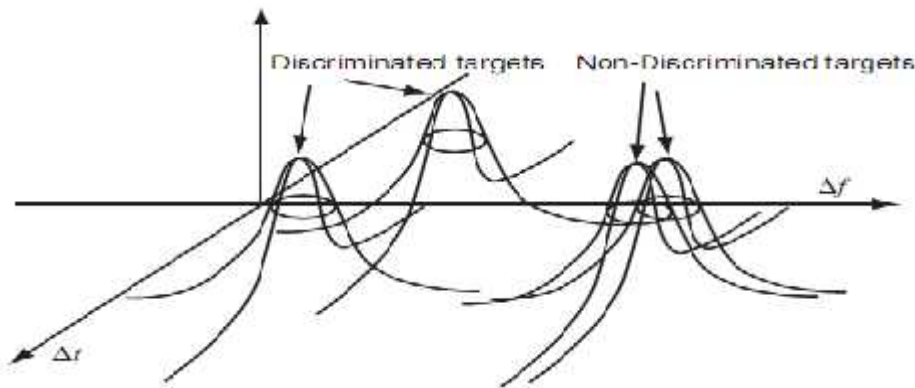


Figure I.6: Discrimination des cibles

La combinaison des signaux issus des deux cibles est représentée en pointillé et on considère que les cibles peuvent être séparées ce signal comporte deux maxima (cas b). Le cas c représente la limite de résolution, les cibles sont alors distantes de r , valeur de la résolution sur la dimension considérée. Dans le cas d les cibles ne sont pas discriminées bien que leur écart soit le même que pour b, car les lobes secondaires de la cible la plus puissante masquent la plus faible.

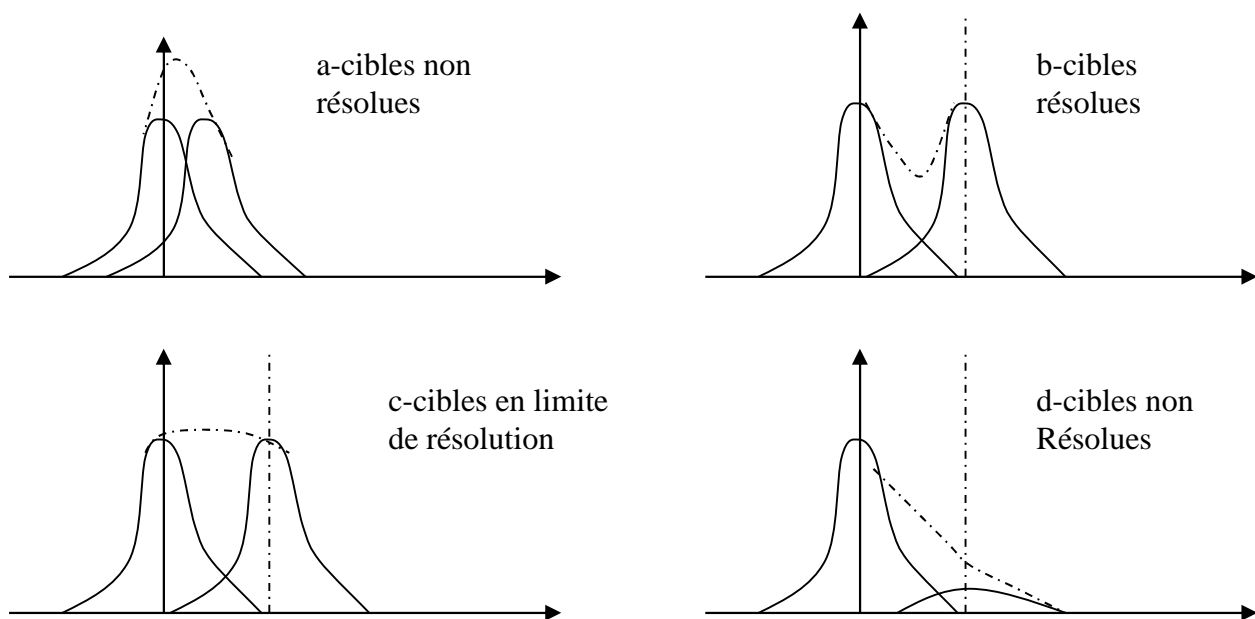


Figure I.7: Différents cas de résolution

I-42. Résolution en distance

La résolution en distance est la distance minimale séparant deux cibles de même vitesse et de même amplitude pouvant être résolues (cas c). On montre que cette résolution est liée uniquement à la bande passante émise B par la relation $r \approx \frac{c}{2B}$

(La résolution temporelle correspondante est : $r_t \approx \frac{1}{B}$)

I-43. Résolution en vitesse

On appelle résolution en vitesse la vitesse minimale séparant deux cibles de même amplitude située à la même distance pouvant être résolues. On montre que cette résolution est liée à la durée d'intégration cohérente du signal, T_c , par la relation $r \approx \frac{c}{2T_c}$ (la résolution fréquentielle est : $r_f \approx \frac{1}{T_c}$)

Dans le cas du récepteur optimal ce temps d'intégration cohérente est le temps d'éclairement, soit : $T_e = T_c$

I-44. Ambiguïté

La PRF est le taux auquel les impulsions radar sont transmises (nombre d'impulsions par seconde), elle détermine à quel étendu les distances d'observations et les fréquences Doppler sont ambiguës.

I-44 1. Ambiguïtés en distance

Pour que la distance soit non ambiguë, il faut que toutes les sources de réflexions détectables soient à des distances moins que la distance ambiguë. La distance maximale qu'un radar pulse Doppler peut mesurer sans ambiguë est donnée par :

$$r_{\max} = \frac{c}{2PRF}$$

Sous cette condition, la zone jusqu'à r_{\max} est une région à distance non ambiguë.

I-44 2. Ambiguïtés Doppler

Comme la distance, la fréquence Doppler est naturellement ambiguë. Si les ambiguïtés sont significatives alors elles dépendent non seulement de la PRF mais aussi d'autres paramètres tels que la largeur d'onde.

Vu l'immense impact du choix de la PRF sur la performance radar, trois catégories fondamentales de la PRF ont été établies faible, moyenne et haute. Voici un ensemble de définitions, le plus largement utilisés :

- une PRF faible est une PRF pour laquelle la distance maximale que le radar conçu peut manipuler est dans la zone non ambiguë".
- Une PRF élevée est une PRF pour laquelle les fréquences Doppler observées pour toutes les cibles significatives sont non ambiguës.
- Une PRF moyenne est une PRF pour laquelle la distance et la fréquence Doppler sont ambiguës.

Introduction

La fonction d'ambiguïté peut être introduite de diverses manières. On peut en effet utiliser un raisonnement basé sur le filtre adapté (c'est notre cas) .

Le lien entre la fonction d'ambiguïté et la représentation conjointe en temps et fréquence montre l'importance de cette fonction dans l'étude des signaux fortement modulés en phase et en fréquence, souvent rencontrés dans les systèmes de communication .

La fonction d'ambiguïté peut également aider à caractériser des systèmes linéaires non invariants dans le temps (extension de l'identification de la fonction de transfert de système).

Dans toutes les approches mentionnées ci-dessus, les signaux sont certains et les fonctions d'ambiguïté aussi.

Nous redonnons ci-après quelques unes des propriétés essentielles de la fonction d'ambiguïté. Nous nous limiterons ici à la fonction d'ambiguïté (un raisonnement basé sur le filtre adapté).

II.1 Filtre adapté

Le signal perçu par le récepteur radar est un signal composite formé de la superposition du signal utile et de bruit. Le problème des radaristes consiste à discerner le signal utile dans le bruit qui l'entoure, pour cela le signal composite subit un traitement par étapes successives qui se ramènent à :

- une amplification du signal reçu à un niveau convenable.
- Un filtrage qui a pour but d'atténuer au maximum le bruit tout en préservant le signal.
- Une comparaison à un seuil de détection qui ne laisse passer que les signaux d'amplitude suffisante.

La comparaison au seuil de détection peut entraîner une limitation de la détection des échos utiles lorsque ces derniers sont faibles et ne peuvent pas être sélectionnés, comme elle peut entraîner une

fausse alarme lorsque le bruit seul forme un écho parasite dépassant le seuil de détection. On définit donc la qualité de détection de radar par deux probabilités :

- probabilité de détection où le niveau du signal reçu est supérieur au seuil de détection.
- Probabilité de fausse alarme où le niveau du bruit seul est supérieur au seuil.

La qualité de la détection est donc d'autant meilleure que la probabilité de détection (en pratique 0.8 à 0.9) est grande et la probabilité de fausse alarme faible (en pratique 10^{-4} à 10^{-6}), cela entraîne un seuil suffisamment élevé pour bien filtrer le bruit et un signal suffisamment fort par rapport au bruit, pour être détecté. C'est au filtre que sera exigée cette optimisation.

Par filtre optimal ou adapté, nous entendons une description mathématique des opérations de traitement que subit le signal reçu au niveau du récepteur et qui doit satisfaire un critère d'optimalité sous des hypothèses bien précises.

Les entrées de ce filtre seront soit des processus aléatoires, soit une combinaison de signaux déterministes et aléatoires, nous disposons en général d'un nombre minimal d'informations caractérisant ces entrées, que nous supposons stationnaires et linéaires. Dans le cas où une réalisation matérielle est recherchée, il y a lieu de considérer la réalisabilité du filtre.

Le signal désiré est de forme connue, mélangé à un bruit supposé blanc suivant une loi gaussienne, le développement de ce filtre suppose que l'on dispose d'informations à priori sur les signaux et sur les bruits, il s'agit des propriétés statistiques, en particulier la fonction d'autocorrélation.

En applications radar, le rapport signal au bruit est d'une importance remarquable par conséquent on fait souvent appel au filtrage adapté. Le filtre adapté est un filtre dont la réponse impulsionnelle est déterminée par un certain signal dans le but de maximiser le rapport signal au bruit à la sortie au moment où le signal et le bruit traversent le filtre

Soit le message observé : $m(t) = s_1(t) + b_1(t)$.

Le signal $s_1(t)$ est supposé être de forme connue, il est mélangé à un bruit $b_1(t)$.

On se propose de réaliser un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ qui permet de détecter la présence du signal $s_1(t)$, le filtre délivre à sa sortie un signal $s_2(t)$ mélangé à un bruit $b_2(t)$.

Le filtre recherché doit maximiser le rapport SNR (t) à un instant t_1 , c'est-à-dire :

$$\text{SNR}(t_1) = \frac{s_2^2(t_1)}{E\{b_2^2(t_1)\}} \dots\dots\dots (\text{II.1})$$

En d'autres termes, on propose de déterminer le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ qui maximise le rapport signal sur bruit SNR(t).

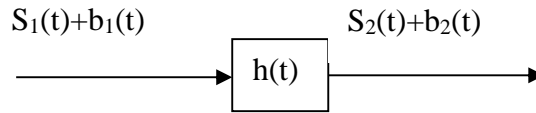


Figure II.1: Signal délivré par le filtre adapté

Le filtre recherché étant linéaire, nous avons à la sortie:

$$s_2(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} s_1(\tau)h(t_1 - \tau)d\tau \dots\dots\dots (II.2)$$

$$b_2(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} b_1(\tau)h(t_1 - \tau)d\tau \dots\dots\dots (II.3)$$

La borne supérieur de l'intégrale est prise égale à t_1 pour que le filtre $h(t)$ soit physiquement réalisable.

Les signaux $s(t)$ et $b(t)$ sont supposés stationnaires, on se contente dans la pratique de l'hypothèse des processus stationnaires du deuxième ordre pour lesquels seuls les deux premiers moments sont indépendants du temps. En outre, pour les processus stationnaires, si l'on note $R_b(\tau, \tau')$ la fonction d'autocorrélation du bruit, celle-ci ne dépend que de l'écart entre Les instants τ et τ' et s'écrit :

$$R_b(\tau, \tau') = R_b(\tau - \tau')$$

Tenons compte de la relation (II.2): $s_2^2(t_1) = \left| \int_{-\infty}^{t_1} s_1(\tau)h(t_1 - \tau)d\tau \right|^2$

Tenons compte de la relation (II.3):

$$E \{b_2^2(t_1)\} = E \left\{ \int_{-\infty}^{t_1} b_1(\tau)h(t_1 - \tau)d\tau \cdot \int_{-\infty}^{t_1} b_1(\tau')h(t_1 - \tau')d\tau' \right\}$$

$$E \{b_2^2(t_1)\} = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_1} E\{b_1(\tau)b_1(\tau')\}h(t_1 - \tau)h(t_1 - \tau')d\tau d\tau'$$

Utilisons la définition d'autocorrélation, il vient:

$$E \{b_2^2(t_1)\} = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_1} R_b(\tau - \tau') \cdot h(t_1 - \tau)h(t_1 - \tau')d\tau d\tau' \dots\dots\dots (II.4)$$

Donc, le rapport signal sur bruit à l'instant t_1 de l'expression (II.1) devient:

$$SNR(t_1) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{t_1} s_1(\tau)h(t_1 - \tau)d\tau \right|^2}{\int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_1} R_b(\tau - \tau')h(t_1 - \tau)h(t_1 - \tau')d\tau d\tau'} \dots\dots\dots (II.5)$$

Il est évident que l'équation (II.5) n'est soluble que si la fonction d'autocorrection R_b est connue.

II-11. Filtre adapté dans le cas d'un bruit blanc

Le signal d'intérêt est noyé dans un bruit blanc de densité spectrale de puissance $\frac{N_0}{2}$, son aspect aléatoire se traduit mathématiquement par une fonction d'auto corrélation qui se réduit à une impulsion de Dirac à l'origine des temps.

La fonction d'autocorrélation $R_b(\tau - \tau')$ s'écrit alors:

$$R_b(\tau - \tau') = \frac{N_0}{2} \delta(\tau - \tau')$$

De ce fait, il vient :

$$\int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_1} R_b(\tau - \tau') \cdot h(t_1 - \tau) h(t_1 - \tau') d\tau d\tau' = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_1} \delta(\tau - \tau') \cdot h(t_1 - \tau) h(t_1 - \tau') d\tau d\tau'$$

$$\int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_1} R_b(\tau - \tau') \cdot h(t_1 - \tau) h(t_1 - \tau') d\tau d\tau' = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{t_1} h^2(t_1 - \tau) d\tau \dots\dots\dots (II.6)$$

Si le filtre $h(t)$ remplit effectivement la condition de réalisabilité, SNR (t_1) devient:

$$SNR(t_1) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) h(t_1 - \tau) d\tau \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t_1 - \tau) d\tau} \dots\dots\dots (II.7)$$

II-12. Filtre adapté dans le domaine fréquentiel

Le passage du signal de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle permet d'obtenir des renseignements sur la distribution fréquentielle (puissance, énergie) du signal. Ce moyen d'analyse doté de la remarquable réciprocité de la transformée directe et inverse de Fourier est l'instrument le plus important de la théorie du signal.

Ainsi, si $H(S)$ et $S_1(\check{S})$ sont les transformées de Fourier de $h(t)$ et $s_1(t)$ respectivement,

La relation (II.7) devient :

$$SNR(t_1) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\check{S}) S_1(\check{S}) e^{j\check{S}t_1} d\check{S} \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\check{S})|^2 d\check{S}} \dots\dots\dots (II.8)$$

Avec : $|H(\check{S})|^2 = H(\check{S}) H(-\check{S}) = H(\check{S}) H^*(\check{S})$

Dans ce qui suit, nous appliquons l'inégalité de Schwartz au numérateur de la relation (II.8), il vient :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\check{S}) S_1(\check{S}) e^{j\check{S}t_1} d\check{S} \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(\check{S})|^2 d\check{S} \int_{-\infty}^{\infty} |S_1(\check{S})|^2 d\check{S}$$

D'où :

$$\text{SNR}(t_1) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\check{S})|^2 d\check{S} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |S_1(\check{S})|^2 d\check{S}}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\check{S})|^2 d\check{S}}$$

En conséquence, le rapport signal sur bruit est majoré comme suit :

$$\text{SNR}(t_1) \leq \frac{2}{N_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |S_1(\check{S})|^2 d\check{S} \dots\dots\dots (\text{II.9})$$

Cette valeur maximale du SNR dépend de l'énergie du signal et du bruit.

Le terme SNR (t₁) est maximal lorsque l'égalité de Schwartz a lieu, le filtre optimale H_{0p}(S̄) que nous cherchons :

$$H_{0p}(\check{S}) S_1(\check{S}) e^{j\check{S}t_1} = H_{0p}(\check{S}) H_{0p}(-\check{S}) = S_1(\check{S}) S_1(-\check{S})$$

D'où: $H_{0p}(\check{S}) = S_1(-\check{S}) e^{-j\check{S}t_1}$

La réciprocity de la transformée de Fourier joue un rôle important nous permettant de rétablir le filtre optimale recherché dans le domaine temporelle :

$$h_{0p}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(-\check{S}) e^{-j\check{S}t_1} e^{j\check{S}t} dt$$

$$h_{0p}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1^*(-\check{S}) e^{-j\check{S}(t_1-t)} dt$$

D'où;

$$h_{0p}(t) = s_1^*(t_1 - t) \dots\dots\dots (\text{II.10})$$

La réponse pulsionnelle du filtre optimal recherché exprimé par (11.10) montre que le filtre s'adapte à la forme du signal observé (écho reçu dans notre cas), d'où l'appellation de filtre adapté.

II-13. Application du Filtre adapté

Le signal radar émis diffère de l'estimation de la distance à l'estimation de la vitesse de la cible. Pour un traitement en distance on cherche à maximiser le rapport signal au bruit

SNR (t) à la sortie du filtre adapté pour acquérir une meilleure résolution en distance, on utilise alors une seule impulsion LFM avec son filtre adapté à de larges produits f.w, en résultat des pics de compression très étroits et très intenses se produisent, ce qui rend la résolution des échos facile.

Pour un traitement en vitesse, le radar détecte le décalage doppler causé par une cible mouvante, pour extraire cette information, le processeur du signal doit élaborer une estimation spectrale qui nécessite l'émission d'un train d'impulsions LFM cohérentes se répétant à une période ipp. Le traitement doppler nécessite le traitement de l'écho du train d'impulsions dans le filtre adapté, la sortie de ce dernier est échantillonnée à la PRF pour extraire un échantillon de chaque impulsion, ces échantillons son utilisés pour déterminer la vitesse de la cible.

II-2. Fonction d'ambiguïté

La fonction d'ambiguïté d'un radar représente la sortie du filtre adapté et elle décrit l'interférence causée par la distance et/ou la vitesse (Doppler) de la cible quand elle est comparée avec une cible de référence d'une SER égale. La fonction d'ambiguïté évalué à

$(\tau, \nu) = (0,0)$ est égale à la sortie du filtre adapté qui été adapté au signal réfléchi par la cible intéressante. Autrement dit les échos du cible nominal sont situé à l'origine de la fonction d'ambiguïté. Donc la fonction d'ambiguïté à non zéro $(\tau; \nu)$ représente les échos de certain distance et Doppler différentes de celui de la cible nominal.

La fonction d'ambiguïté est utilisée par les desseins des radars comme un moyen (outil) d'étude de différentes formes d'ondes pour les utiliser dans plusieurs applications radars, ainsi la fonction d'ambiguïté est utilisée pour déterminer la résolution en distance et en vitesse (Doppler) pour une forme d'onde spécifique.

La courbe tridimensionnelle (3D) de la fonction d'ambiguïté (plan retard et plan doppler) est appelé diagramme d'ambiguïté du radar.

La fonction d'ambiguïté du signal $S(t)$ est définie comme le module de la fonction de corrélation $(\tau; \nu)$ (2D)

$$|t(\tau, \hat{\nu})| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)S^*(t-\tau)e^{-j2f\tau t} dt \right| \dots\dots\dots (II.11)$$

Dans cette notation la cible intéressante (nominal) est située $(\tau; \nu) = (0; 0)$ et le diagramme d'ambiguïté est centré sur le même point.

Notons E l'énergie du signal $S(t)$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(t)|^2 dt \dots\dots\dots (II.12)$$

II-21. Propriétés d'une fonction d'ambiguïté

1) La valeur maximum d'une fonction d'ambiguïté située à $(\tau; \nu) = (0; 0)$ est égale à $4E^2$

$$Max\{|t(\tau;\epsilon)|^2\} = |t(0;0)|^2 = (2E)^2 = 4E^2 \dots\dots\dots (II.13)$$

$$|t(\tau;\epsilon)|^2 \leq |t(0;0)|^2 \dots\dots\dots (II.14)$$

2) La fonction d'ambiguïté est symétrique

$$|t(\tau, \hat{\nu})| = |t(-\tau, -\hat{\nu})| \dots\dots\dots (II.15)$$

3) Le volume total sous la fonction d'ambiguïté est constant

$$\iint |t(\tau;\epsilon)|^2 d\tau d\epsilon = (2E)^2 = 4E^2 \dots\dots\dots (II.16)$$

4) Si la fonction $S(f)$ est la transformée de Fourier du signal $S(t)$ donc par l'utilisation de théorème de Parseval on obtient : $|t(\tau, \hat{\nu})| = \left| \int S^*(f)S(f-\nu)e^{-j2f\tau} df \right| \dots\dots\dots (II.17)$

II-23. Exemples de la fonction d'ambiguïté

La fonction d'ambiguïté idéale est représentée par un pic infinitésimal de petite largeur quand le pic est à l'origine et zéro autrement (Montrer dans la figure. II.2).

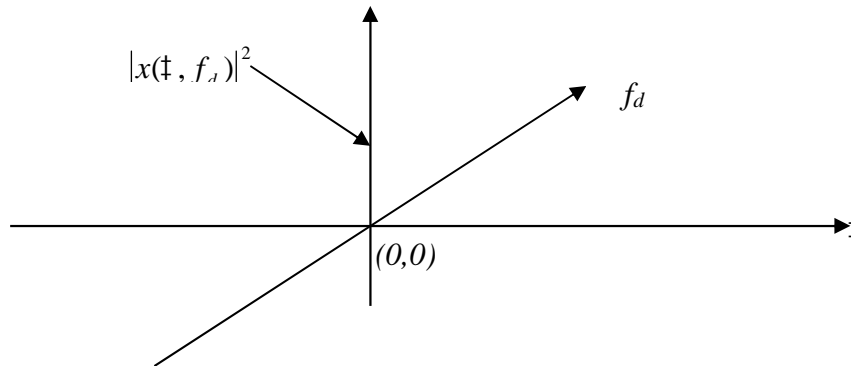


Figure. II.2 : fonction d'ambiguïté idéale

Une fonction d'ambiguïté idéale n'existe plus physiquement parce qu'elle n'a pas un pic fini égal à $(2E)^2$ ni un volume fini aussi égal aussi à $(2E)^2$.

II-23 1.Fonction d'ambiguïté d'une impulsion (impulsion singulière)

*On considère l'impulsion rectangulaire normalisée $S(t)$

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{t'}} \text{Re ct}\left(\frac{t}{t'}\right) \dots\dots\dots (II.18)$$

De l'équation (II.11) on a :

$$t(t; \hat{c}) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S^*(t - t')e^{j2f\hat{c}t} dt \dots\dots\dots (II.19)$$

Substituons l'équation (II.18) dans l'équation (II.19) et performons l'intégration on obtient :

$$|t(t, \hat{c})| = \left| \left(1 - \frac{|t|}{t'}\right) \frac{\sin(f \hat{c} (t' - |t|))}{f \hat{c} (t' - |t|)} \right| ; \quad |t| \leq t' \dots\dots\dots(II.20)$$

Figure II.3.a et figure II.3.b montrent la courbe (3D) et le contour (2D) de la fonction d'ambiguïté d'une impulsion (individuelle)

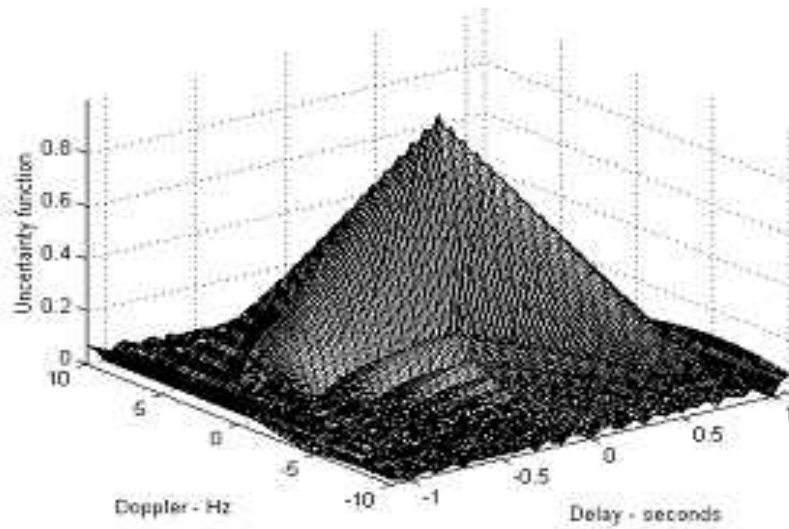


Figure II.3.a : courbe (3D) de la fonction d'ambiguïté d'une impulsion (individuelle)

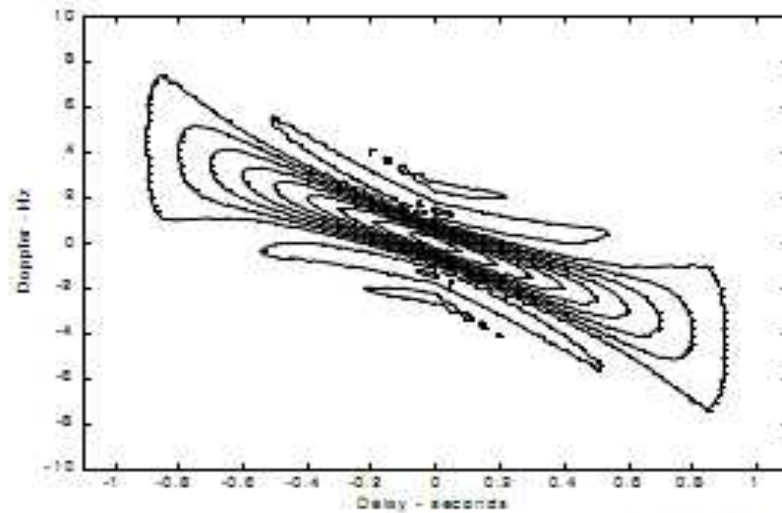


Figure II.3.b : contour (2D) correspond à la figure II.3.a

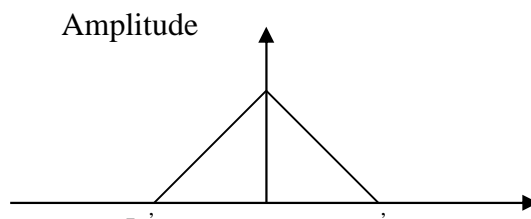


Figure II.3.c : coupe retard correspond à la figure II.3.a

Figure II.3.d : coupe Doppler correspond à la figure II.3.a

La coupe retard est obtenue si on met $v = 0$

$$|t(\tau; 0)|^2 = \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau'}\right)^2 \quad |\tau| \leq \tau' \quad (\text{II.21})$$

D'une façon similaire la coupe doppler est :

$$|t(0; \epsilon)|^2 = \left| \frac{\sin f \tau \epsilon}{f \tau \epsilon} \right|^2 \quad (\text{II.22})$$

Les figure II.2.c, et figure II.2.d respectivement montrent les coupes (retard; Doppler) de la fonction d'ambiguïté définie par les équations (II.21) et (II.22).

Depuis que la coupe retard varie entre - et donc :

Les cibles qui se rapproche (direction du radar) sont non ambiguës si sont à la dernière seconds.

La coupe Doppler a une forme de $(\sin x/x)^2$.

Elle varie de - à + . Le premier nul est à $v = 1/$ donc il est possible de détecter deux cibles séparés par $1/$ sans ambiguïté.

On conclut que la résolution en distance et en Doppler d'une impulsion (singulière) est limitée par la durée de l'impulsion .

Une meilleure résolution en distance a besoin d'une utilisation d'une impulsion de durée plus petite, mais l'utilisation de cette impulsion a besoin aussi d'une très grande largeur de bande, ceci limite la puissance moyenne de transmission du radar à des valeurs impraticables.

II-23 2. Fonction d'ambiguïté d'un train d'impulsions cohérentes

La figure II.4 montre un train d'impulsions cohérentes.

La durée d'impulsion est τ et le PRI est T

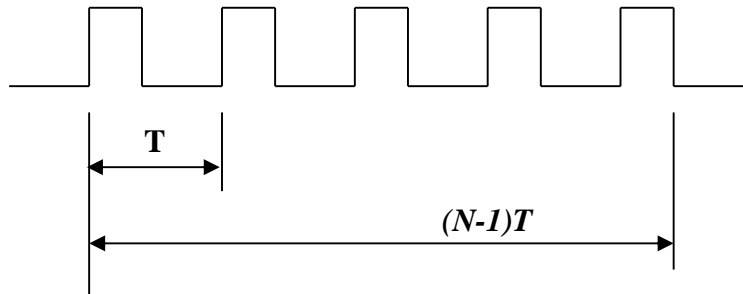


Figure. II.4 : train d'impulsions cohérentes

Le nombre des impulsions de train est N donc la longueur de train est (N-1) T seconds

L'impulsion individuelle normalisé S (t) est définie par :

$$S_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \text{Re } ct\left(\frac{t}{\tau}\right) \dots\dots\dots (II.23)$$

Lorsque la cohérence est maintenue entre deux impulsions consécutives donc une expression pour le train normalisé est :

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} S_1(t - iT) \dots\dots\dots (II.24)$$

La sortie du filtre adapté est :

$$t(\tau; \epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) S^*(t + \tau) e^{j2f\epsilon t} dt \dots\dots\dots (II.25)$$

Substituons l'équation (II.24) dans l'équation (II.25) et interchangeons les sommations et les intégrations on obtient :

$$t(\tau; \epsilon) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t - iT) S^*(t - jT - \tau) e^{j2f\epsilon t} dt \dots\dots\dots (II.26)$$

Posons le changement de variable $t_1 = t - iT$

On obtient :

$$t(\tau; \epsilon) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{j2f\epsilon iT} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t_1) S^*(t_1 - [\tau - (i - j)T]) e^{j2f\epsilon t_1} dt_1 \dots\dots\dots (II.27)$$

L'intégral dans l'équation (II.27) représente la sortie du filtre adapté pour une impulsion (individuelle) et noté par t_1 .

Donc :

$$t(\ddagger; \epsilon) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{j2f\epsilon i T} \sum_{j=0}^{n-1} t_1[\ddagger - (i-j)T; \epsilon] \dots \dots \dots (II.28)$$

Lorsque la relation $q = i - j$ est utilisé alors la relation suivante est juste :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{m=0}^n = \sum_{q=-(n-1)}^0 \sum_{i=0}^{n-1-|q|} |_{j=i-q} + \sum_{q=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-|q|} |_{i=j+q} \dots \dots \dots (II.29)$$

Utilisons l'équation (II.29) dans l'équation (II.28) on obtient :

$$t(\ddagger; \epsilon) = \frac{1}{n} \sum_{q=-(n-1)}^0 \left\{ t_1(\ddagger - qT; \epsilon) \sum_{i=0}^{n-1-|q|} e^{j2f\epsilon i T} \right\} + \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n-1} \left\{ e^{j2f\epsilon q T} t_1(\ddagger - qT; \epsilon) \sum_{j=0}^{n-1-|q|} e^{j2f\epsilon i T} \right\} \dots \dots \dots (II.30)$$

Posons $Z = \exp. (2f \nu T)$ et utilisons la relation

$$\sum_{j=0}^{n-1-|q|} Z^j = \frac{1 - Z^{n-|q|}}{1 - Z} \dots \dots \dots (II.31)$$

On obtient :

$$\sum_{i=0}^{n-1-|q|} e^{j2f\epsilon i T} = e^{[j2f\epsilon(n-1-|q|)]} \frac{\sin[f\epsilon(n-1-|q|)T]}{\sin(f\epsilon T)} \dots \dots \dots (II.32)$$

Utilisons l'équation (II.32) dans l'équation (II.30) on obtient deux sommes complémentaires pour un q positif et négatif.

Les deux sommes peuvent être combiné comme :

$$t(\ddagger; \epsilon) = \frac{1}{n} \sum_{q=-(n-1)}^{n-1} t_1(\ddagger - qT; \epsilon) e^{[j2f\epsilon(n-1+q)T]} \frac{\sin[f\epsilon(n-|q|)T]}{\sin(f\epsilon T)} \dots \dots \dots (II.33)$$

Finalement la fonction d'ambiguïté associée avec le train d'impulsions cohérentes est définie comme le module de l'équation (II.33) pour $\nu < T/2$.

La fonction d'ambiguïté réduite à :

$$t(\ddagger; \epsilon) = \frac{1}{n} \sum_{q=-(n-1)}^{n-1} |t_1(\ddagger - qT; \epsilon)| \left| \frac{\sin[f\epsilon(n-|q|)T]}{\sin(f\epsilon T)} \right| \dots \dots \dots (II.34)$$

Donc la fonction d'ambiguïté pour un train d'impulsions cohérentes est la superposition des fonctions d'ambiguïté de chaque impulsion (individuelle).

Les coupes de la fonction d'ambiguïté (retard et doppler) sont respectivement données par :

$$|t(\ddagger; 0)|^2 = \left| \sum_{q=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|q|}{n}\right) \left(1 - \frac{|\ddagger - qT|}{\ddagger'}\right) \right|^2 ; \quad |\ddagger - qT| < \ddagger' \dots \dots \dots II.35$$

$$|t(0, \nu)|^2 = \left| \frac{1}{n} \frac{\sin(f\nu\ddagger')}{f\nu\ddagger'} \frac{\sin(f\nu nT)}{\sin(f\nu T)} \right|^2 \dots \dots \dots II.36$$

Figure. II.5.a : contour (2D) de la fonction d'ambiguïté pour un train de 5 impulsions cohérentes d'amplitudes égales. $\tau = 0.2$ seconds, PRI = 1 seconds, et N = 5.

Figure. II.5.b : courbe (3D) correspond à la figure II.5.a

Figure. II.5.c : coupe retard correspond à la figure II.5.a

Figure. II.5.d : coupe Doppler correspond aux Figure. II.5.a

II.3 La résolution et ambiguïté d'une forme d'onde

La sensibilité d'un radar (dans le cas de bruit blanc additionne) dépend uniquement de l'énergie total du signal reçu et indépendant de la forme d'onde spécifique.

Celui conduire à poser la question suivante :

- Si la sensibilité (sensibilité) du radar est indépendant de la forme d'onde donc quelle est le meilleur choix pour la forme d'onde a transmit.
- La résolution en distance implique la séparation entre les cibles distinguées en distance.
- Alternativement la résolution en Doppler implique la séparation entre deux cibles distinguées en Doppler.

II-31. Résolution en distance

Considérons des échos de deux cibles stationnaires (zéro Doppler) séparées en distance par r . Quelle est la valeur minimale de (r) pour que ses signaux échos soient interprétés par le radar comme deux cibles distingués. Pour répondre à cette question on assume que l'impulsion transmise du radar est notée par $S(t)$.

$$S(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + W(t)) \dots\dots\dots (II.37)$$

f_0 : est la fréquence porteuse

$A(t)$: l'amplitude de modulation

$W(t)$: la phase de modulation

Le signal $S(t)$ peut être exprimé comme la partie réelle du signal complexe $\mathbb{E}(t)$ donc :

$$\mathbb{E}(t) = A(t)e^{j(\mathbb{S}_0 t - W(t))} = \tilde{S}(t)e^{jW_0 t} \dots\dots\dots (II.38)$$

et $\tilde{S}(t) = A(t)e^{-j\mathbb{L}(t)} \dots\dots\dots (II.39)$

Donc : $S(t) = \text{Re}\{\mathbb{E}(t)\} \dots\dots\dots (II.40)$

Les échos des deux cibles sont donnés respectivement par :

$$S_{r_1}(t) = \mathbb{E}(t - \dagger) \dots\dots\dots (II.41)$$

$$S_{r_2}(t) = \mathbb{E}(t - \dagger_0 - \dagger) \dots\dots\dots (II.42)$$

\dagger : est la différence de temps entre deux échos.

Premièrement on peut assumé que le temps de référence est \dagger et sans aucune réduction de généralité lorsque $\dagger = 0$

Il est évident que les deux cibles sont distinguées suivant les valeurs (petite et grande) de \dagger

Pour mesurer la différence en distance entre deux cibles on considère l'intégral de l'erreur carrée entre $S(t)$ et $S(t - \dagger)$ notons cette erreur par V_R

$$V_R^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbb{E}(t) - \mathbb{E}(t - \dagger)|^2 dt \dots\dots\dots (II.43)$$

L'équation (II.43) peut-être écrite comme :

$$V_R^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbb{E}(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbb{E}(t - \dagger)|^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathbb{E}(t)\mathbb{E}^*(t - \dagger) + \mathbb{E}^*(t)\mathbb{E}(t - \dagger) \} dt \dots\dots\dots (II.44)$$

Utilisons l'équation (II.38) dans l'équation (II.44) on obtient:

$$V_R^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{~}(t)|^2 dt - 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}^*(t)\mathbb{E}(t - \dagger) dt \right\} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{~}(t)|^2 dt - 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{-j\mathbb{S}_0 \dagger} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{~}^*(t)\tilde{~}(t - \dagger) dt \right\} \dots\dots\dots (II.45)$$

Le premier terme dans l'équation (II.45) représente l'énergie du signal considéré comme constante. Le second terme est varié en fonction de \dagger avec une fluctuation au tours de la fréquence porteuse.

L'intégral $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{~}^*(t)\tilde{~}(t - \dagger) dt$ dans l'équation (II.45) représente "la fonction d'ambiguïté en distance"

$$t_R(\dagger) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{~}^*(t)\tilde{~}(t - \dagger) dt \dots\dots\dots (II.46)$$

donc :

La valeur maximale de $t_R(\)$ est à $\dagger = 0$

La résolvabilité en distance de cible est mesuré par le carré de $|t_R(\dagger)|^2$.

Il est évident que si $|t_R(\dagger)| = t_R(0)$ pour certaines valeurs différentes de zéro de \dagger

Donc les deux cibles ne peuvent être distingués.

Alternativement, si $|t_R(\dagger)| < t_R(0)$ pour certaines valeurs différentes de zéro de \dagger donc les deux cibles peuvent être distingués (résolvables), comme conséquence le plus désirable

Forme pour $t_R(\)$ est un pic étroit (forme d'une punaise).

La résolution (en retard) est :

$$\Delta \dagger = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |t_R(\dagger)|^2 d\dagger}{t_R^2(0)} \dots\dots\dots (II.47)$$

Utilisons le théorème de **Parseval** l'équation (II.47) s'écrit comme :

$$\Delta \dagger = 2f \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |U(\mathbb{S})|^4 d\mathbb{S}}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |U(\mathbb{S})|^2 d\mathbb{S} \right]^2} \dots\dots\dots (II.48)$$

La résolution en distance minimale correspondant à est :

$$\Delta R = c \frac{\Delta \dagger}{2} \dots\dots\dots (II.49)$$

Et depuis que la largeur de bande effective du signal est :

$$B = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |U(\tilde{S})|^2 d\tilde{S} \right]^2}{2f \int_{-\infty}^{\infty} |U(\tilde{S})|^4 d\tilde{S}} \dots\dots\dots (II.50)$$

La résolution en distance est exprimée en fonction de largeur de bande

$$R=c/2B \dots\dots\dots (II.51)$$

La comparaison entre l'équation (II.11) et l'équation (II.46) indique que la sortie du filtre adapté et la fonction d'ambiguïté en distance ont la même enveloppe (dans ce cas Doppler est posé égal à zéro)

Ceci indique que dans la sortie du filtre adapté (SNR est maximisé) les propriétés de résolution en distance pour un signal donné sont toujours préservées.

II-32. Résolution Doppler

Doppler correspond à la vitesse radial de la cible.

$$\hat{v} = \frac{2\hat{v}}{c} = \frac{2\hat{v}}{c} f_0 \dots\dots\dots (II.52)$$

\hat{v} : la vitesse radiale (en radian) λ : la longueur d'onde (m) f_0 : Fréquence porteuse (hertz)
 c : vitesse de la lumière (m/s)

$$\mathbb{E}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(t) e^{-j2ft} dt \dots\dots\dots (II.53)$$

Mettons

D'où à la vitesse (doppler) associé à la cible le spectre du signal reçu est exprimé en fonction De v autrement dit le spectre reçu peut être représenter par (f-v) .dans l'ordre de distinguer entre deux cibles situé à la même distance mais ils ont des différentes vitesses on utilise l'intégral de l'erreur

$$v_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbb{E}(f) - \mathbb{E}(f - \epsilon)|^2 df \dots\dots\dots (II.54)$$

carré.

Utilisons une analyse similaire à celui de l'équation (II.45) on obtient :

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}^*(f) \mathbb{E}(f - \epsilon) df \right\} \dots\dots\dots (II.55)$$

Par l'utilisation du signal analytique dans l'équation (II.45) on a :

$$\mathbb{E}(t) = U(2ff - 2ff_0) \dots\dots\dots (II.56)$$

Alors l'équation (II.55) devient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^*(2ff) U(2ff - 2f\epsilon) df = \int_{-\infty}^{\infty} U^*(2ff - 2ff_0) U(2ff - 2ff_0 - 2f\epsilon) df \dots\dots\dots (II.57)$$

La corrélation de la fréquence complexe est définit comme :

$$t_f(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} U^*(2ff) U(2ff - 2f\epsilon) df = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 e^{j2f\epsilon t} dt \dots\dots\dots (II.58)$$

Et la constante de résolution v est :

$$\Delta\epsilon = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |t_f(\epsilon)|^2 d\epsilon}{t_f^2(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{~}(t)|^4 dt}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{~}(t)|^2 dt \right]^2} = \frac{1}{\ddagger'} \dots\dots\dots (II.59)$$

} : est la durée de l'impulsion.

Finalement on peut définir la résolution de Doppler correspond comme :

$$\Delta^{\wedge} = \frac{c\Delta^{\wedge}}{2f_0} = \frac{c}{2f_0\ddagger'} \dots\dots\dots (II.60)$$

La première observation de l'équation (II.58) et l'équation (II.11) indique que la sortie du filtre adapté et la fonction d'ambiguïté (où † =0) sont similaire, par conséquent on conclut que le filtre adapté préserve aussi les propriétés de la résolution Doppler pour une forme d'onde donnée.

II-33. La résolution en distance et en Doppler

Dans le cas général on a besoin d'utiliser une fonction de (deux dimensions) de variable pair (; v).on assume que l'enveloppe complexe d'une forme d'onde transmise est :

$$\mathbb{E}(t) = \tilde{~}(t)e^{j2ff_0t} \dots\dots\dots (II.61)$$

Donc le signal (retard ; Doppler) est :

$$\mathbb{E}'(t-\ddagger) = \tilde{~}(t-\ddagger)e^{j2f(f_0-\epsilon)(t-\ddagger)} \dots\dots\dots (II.62)$$

Calculons l'intégral de l'erreur carré entre l'équation (II.62) et l'équation (II.61) on obtient :

$$v^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbb{E}(t) - \mathbb{E}'(t-\ddagger)|^2 dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbb{E}(t)|^2 dt - 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}^*(t) - \mathbb{E}'(t-\ddagger) dt \right\} \dots\dots\dots (II.63)$$

Réécrite comme :

$$v^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{~}(t)|^2 dt - 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{j2\ddagger f(f_0-\epsilon)\ddagger} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{~}(t) \tilde{~}^*(t-\ddagger) e^{j2f\epsilon t} dt \right\} \dots\dots\dots (II.64)$$

Premièrement dans l'ordre de maximiser cette erreur carrée pour différent de zéro on doit minimiser le dernier terme de l'équation (II.64).

On définit la fonction de corrélation de (retard, Doppler) combiné comme :

$$t(\ddagger; \epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{~}(t) \tilde{~}^*(t-\ddagger) e^{j2f\epsilon t} dt \dots\dots\dots (II.65)$$

Dans l'ordre d'achever le meilleur résolution (retard, Doppler) le module carré de cette fonction doit être minimisé pour † différent de zéro et v différent de zéro. Noté que la sortie du filtre adapté dans l'équation (II.11) est identique de celui donnée dans l'équation (II.65)

Donc la sortie du filtre adapté (exhibe) le SNR instantané maximal comme le meilleur résolution (retard ; Doppler).

Introduction

Le choix d'une forme d'onde particulière est une technique de traitement du signal dans un system radar dépend de leur spécifique mission et rôle, les systèmes radar peuvent utiliser une forme d'onde continue CW ou forme d'onde pulsionnelle avec ou sans modulation, les techniques de modulation peuvent être analogique ou numérique.

La résolution en distance et en Doppler (vitesse) est en relation directe avec les caractéristiques de fréquence d'une forme d'onde spécifique donc la connaissance de la densité du spectre de puissance d'une forme d'onde est très intéressant, en générale les signaux ou la forme d'ondes sont analysées par l'utilisation de technique du domaine de temps ou de domaine de fréquence.

III-1. Techniques de compression d'impulsion

Toutes les méthodes de compression d'impulsion se schématisent par un filtrage adapté dans lequel les impulsions émises sont codées et leurs échos traversent un filtre dont la caractéristique

(Temps; fréquence) est l'opposé du codage. Ces techniques de compression d'impulsion généralement utilisées sont la modulation linéaire de fréquence et le codage de phase.

III-11. Compression par modulation linéaire de fréquence

Avec une modulation linéaire de fréquence, la fréquence radio instantanée de chaque impulsion est variée de f_0 à $f_0 + \Delta f$ à un taux constant pendant sa durée t , il en est de même pour son écho. Cette variation peut être obtenue en utilisant une ligne dispersive qui retarde différemment les ondes en fonction de leur fréquence (un signal de largeur de bande Δf est dispersé par la ligne dans une impulsion longue de durée t . Sa largeur de bande est alors:

$$B = \Delta f$$

Les échos reçus passent dans un dispositif (ligne à retard dispersive ou filtre) qui introduit un décalage temporel qui diminue linéairement avec la fréquence à exactement le même taux d'augmentation de la fréquence à l'émission. Les faibles composantes fréquentielles mettent plus de temps pour traverser le filtre que les composantes à fréquences élevées, c'est ce qui produit la compression, en conséquence à la sortie du filtre, l'amplitude du signal subit une amplification considérable et sa largeur est restreinte à T_{comp} .

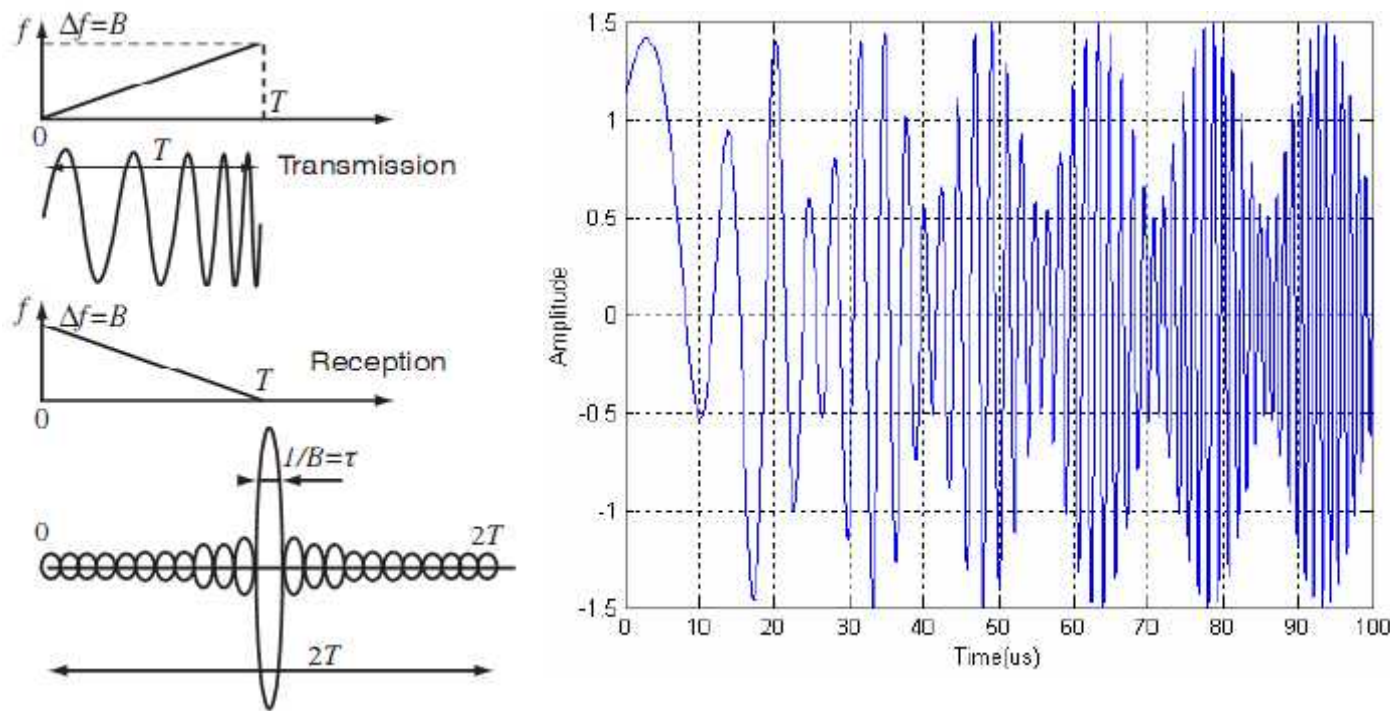


Figure III.1: Compression par modulation linéaire de fréquence.

La résolution en distance se trouve améliorée grâce au procédé de compression lorsque deux échos sont reçus à partir de deux cibles très proches.

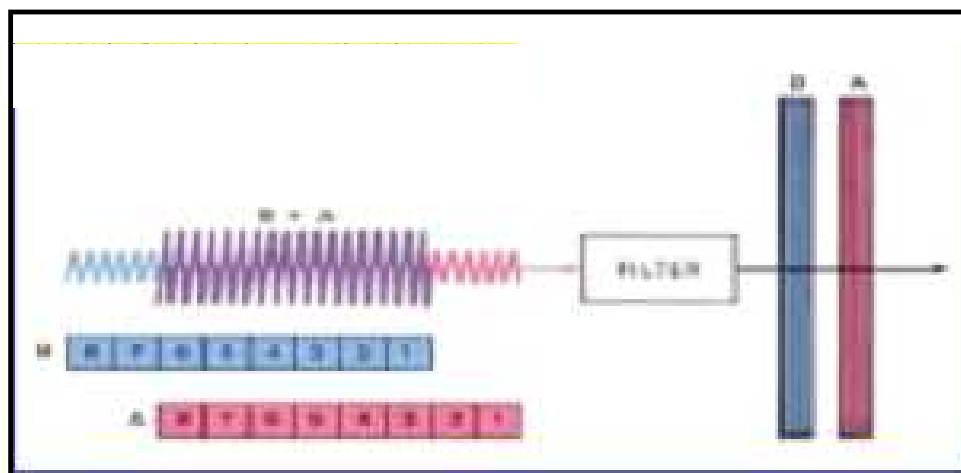


Figure III.2 : Effet de la compression d'impulsion sur la résolution

III-12. Taux de compression

On définit le taux de compression par le rapport de la largeur de l'impulsion émise (avant la compression) t à la largeur de l'impulsion comprimée :

$$r_{comp} = \frac{t}{t_{comp}} \dots\dots\dots \text{III.2}$$

On définit encore le rapport de compression par : $t_{comp} = \frac{\Delta F}{\Delta f}$

Δf : étant la différence en fréquence minimale résolvable : $\Delta f = \frac{1}{t}$

Sur cela, le taux de compression d'impulsion s'écrit : $r_{comp} = t \cdot \Delta F \dots\dots\dots \text{(III.3)}$

La quantité $t \cdot \Delta F$ est nommé produit durée-bande.

On peut déduire que : $t_{comp} = \frac{1}{\Delta F}$

La largeur de l'impulsion après compression est entièrement déterminée par le changement de la fréquence pendant la durée de l'impulsion émise.

La modulation linéaire de fréquence a l'avantage de réaliser de très grands taux de compression, et présente une simplicité de traitement à la réception quelque soit la fréquence.

L'inconvénient principal de cette technique est une légère ambiguïté entre la distance et la fréquence Doppler, si la fréquence d'une impulsion fut augmentée par un décalage Doppler, l'impulsion émerge du filtre de compression comme s'il n'y avait aucun décalage. Cependant, puisque les effets Doppler typiquement produits sont très faibles comparés à l'incrémentation de fréquence F , alors l'ambiguïté ne pose pas généralement un problème.

III-13. Compression par codage de phase

Dans cette technique, la durée t de l'impulsion est divisée en N intervalles de temps égaux de durée $t_i = \frac{t}{N}$, pour chaque intervalle on modifie la phase suivant un code préétabli, Ce code peut être biphasé (0 ou k) ou polyphasé, A la réception, le signal est corrélé en phase avec une réplique du signal émis, qui effectue la somme des moments redressés en phase. L'avantage du codage de phase est la souplesse de modification de la forme d'onde qui n'est pas liée à un dispositif physique.

III-13 1. Codage biphase

Cette technique est caractérisée par la simplicité de codage et de décodage obtenu par changement ou maintien du signe du signal, l'impulsion émise est subdivisée en segments étroits de même longueur, la phase de certains segments est décalée de 180° selon un code binaire prédéterminé. Une méthode usuelle consiste à représenter un segment non décalé par un signe (+) et un segment décalé par un signe (-).

Les échos reçus passent dans une ligne à retard qui fournit un délai exactement égal à la durée t des impulsions avant compression. Ainsi du fait que le bord arrière d'un écho rentre dans la ligne, le bord d'attaque émerge de l'autre extrémité. La ligne à retard peut être mise en application par des dispositifs analogiques ou numériques.

Beaucoup d'efforts sont fournis pour s'approcher du cas idéal où les lobes secondaires autour du lobe principal de compression sont parfaitement éliminés, dans ce contexte un ensemble de codes dits codes de Barker sont élaborés pour effectuer un codage biphase, ces codes existent pour $N = 2, 3, 4, 5, 7, 11$ et 13 intervalles.

N	BARKER CODES											
2	+	-	OR	(+	+)					
3	+	+	-									
4	+	-	+	-	OR	(+	-	-	-)	
5	+	+	+	-	+							
7	+	+	+	-	-	+	-					
11	+	+	+	-	-	-	+	-	-	+	-	
13	+	+	+	+	+	-	-	+	-	+	-	+

Note: Plus and minus signs may be interchanged
 (+ + - changed to - - +); order of digits may be reversed
 (+ + - changed to - + +). Codes in parentheses are complementary codes.

Figure III.3 : Codes de Barker

Un exemple pratique est montré dans la figure III.4, c'est un code à sept chiffres. Sans aucune perte, l'amplitude maximale de l'impulsion comprimée est sept fois celle de l'impulsion non comprimée, et sa durée est seulement le septième de la largeur avant compression.

Pour voir comment le code réalise la compression on trace instantanément la sortie de la ligne à retard sur la figure III.5 notant la somme des sorties de chaque position.

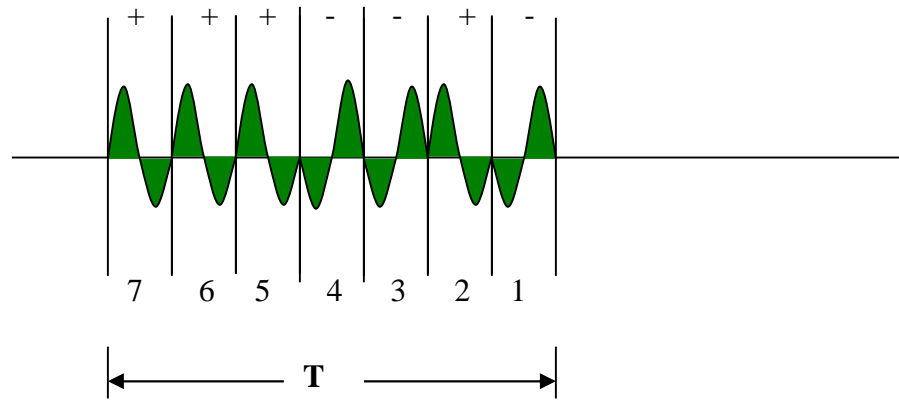


Figure III.4 : Code binaire de phase de sept chiffres

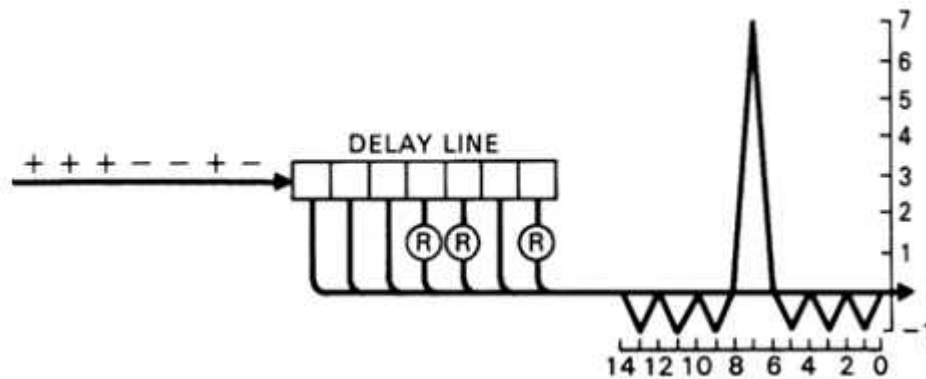


Figure III.5 : Elaboration de la compression par codage binaire de phase

Ces codes se limitent à des taux de compression faibles, des taux de compression élevés peuvent induire quelques lobes parasites importants (supérieurs à $1/N$), et peuvent être sensibles à la fréquence Doppler.

III-13 2. Codage polyphasé

Le codage de phase n'est pas naturellement limité à juste deux incréments (0 et 180°).un code utilisant n'importe quel nombre de phases différentes harmoniquement reliées, nous citons une famille de codes appelée code Frank. La phase fondamentale d'incrémentation Φ pour un code Frank est établie en divisant 360° par le nombre P des différentes phases à employer dans le code, le codage est alors établi en enchaînant ensemble P groupes de P segments chacun, le nombre total de segments dans une impulsion est donc P^2 .

Dans un code triphasé par exemple, l'incrémentation fondamentale de phase étant 120° (360°/3), faisant les phases 0°, 120° et 240°, l'impulsion codée se compose de trois groupes de trois segments chacun pour un total de 9 segments.

Les phases sont assignées aux différents segments selon deux règles simples : la phase du premier segment de chaque groupe est 0°, et les phases des segments restants dans chaque groupe augmentent suivant l'incrémentation : $\Delta w = (G - 1) \times (P - 1) \times w$ Avec,

G : nombre de groupes.

w : Incrémentation fondamentale.

P : nombre de phases.

Δw : Incrémentation de phase.

Ainsi l'incrémentation de phase suivante dans le groupe 1 est 0^0 , dans le groupe 2 est 2^w et dans le groupe 3 est $4w$. Ainsi on établit les trois groupes comme suite :

Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
$0^0, 0^0, 0^0$	$0^0, 240^0, 120^0$	$0^0, 120^0, 240^0$

Les échos sont décodés dans une ligne à retard.

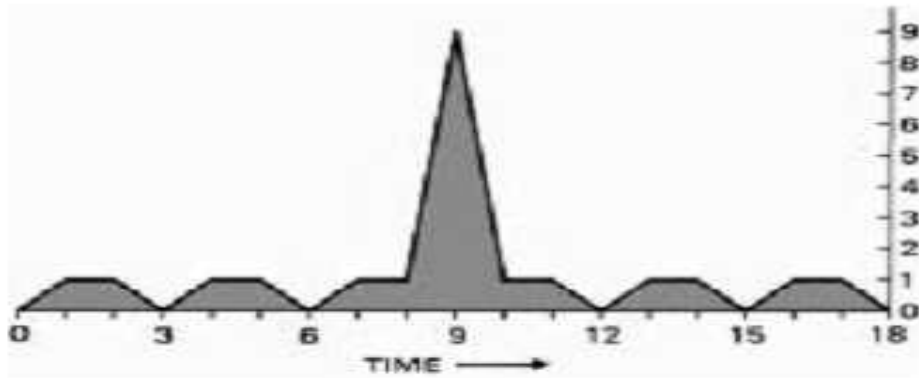


Figure III.6 : Elaboration de la compression par codage de Frank

A un nombre donné de segments, un Code de Frank fournit le même rapport de compression d'impulsion qu'un codage binaire de phase et le même rapport d'amplitude du pic principal à l'amplitude des lobes secondaires qu'un code de Barker. Cependant, en augmentant le nombre de phases l'incrémentation fondamentale de phase diminue rendant l'opération plus sensible aux décalages extérieurs de phase et plus complexe à maîtriser en œuvre.

III-2. Modulation linéaire de fréquence (LFM)

La modulation de fréquence ou la modulation de phase est utilisée pour atteindre des valeurs différentes de la largeur de bande.

La modulation linéaire de fréquence est une modulation de fréquence, dont la fréquence varie linéairement selon la durée de l'impulsion, on distingue deux types de LFM (up-chirp) et (down-chirp). La largeur de bande du filtre adapté est indépendante de la durée d'impulsion.

Figure III.7 montre un exemple type de LFM d'une forme d'onde.

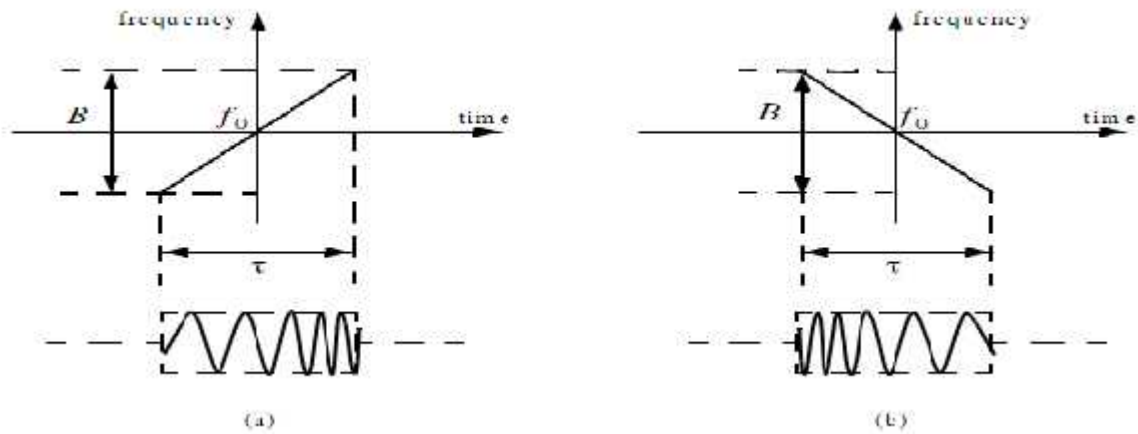


Figure III.7: LFM typique. a) up-chirp, b) down-chirp.

La durée d'impulsion est τ , et B la largeur de bande la phase instantané LFM « up- chirp » peut exprimer par:

$$\Phi(t) = 2\pi \left(f_0 t + \frac{\tilde{B}}{2} t^2 \right) ; \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \quad \text{..... (III.4)}$$

f_0 : Fréquence centrale du radar « porteuse »

$\tilde{B} = 2\pi B/\tau$: est le coefficient de LFM

Donc la fréquence instantanée est :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \Phi(t) = f_0 + \tilde{B} t ; \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \quad \text{.....(III.5)}$$

Similairement, la phase et la fréquence instantanée LFM « down- chirp » sont données respectivement par :

$$\Phi(t) = 2\pi \left(f_0 t - \frac{\tilde{B}}{2} t^2 \right) ; \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \quad \text{..... (III.6)}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \Phi(t) = f_0 - \tilde{B} t ; \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \quad \text{..... (III.7)}$$

LFM type peut exprimer par :

$$s_1(t) = \text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{j2\pi \left(f_0 t + \frac{\tilde{B}}{2} t^2 \right)} \quad \text{..... (III.8)}$$

$\text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$: Impulsion rectangulaire de durée τ

L'équation (III.8) est écrite comme :

$$s_1(t) = e^{j2\pi f_0 t} s(t) \quad \text{..... (III.9)}$$

Où :

$$s(t) = \text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{j\pi \tilde{B} t^2} \quad \text{..... (III.10)}$$

est l'enveloppe complexe de $s_1(t)$. Le spectre de ce signal est déterminé à partir de l'enveloppe complexe $s(t)$.

L'exponentielle complexe dans l'équation (III.9) introduit une fréquence Doppler autour de la fréquence centrale f_0 .

Calculons la transformée de fourrier (TF) de s (t) :

$$s(\check{S}) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re ct} \left(\frac{t}{\check{T}} \right) e^{j2f \cdot t^2} e^{-j\check{S}t} dt = \int_{-\frac{\check{T}}{2}}^{\frac{\check{T}}{2}} \exp \left(\frac{j2f \cdot t^2}{2} \right) e^{-j\check{S}t} dt \dots\dots\dots \text{(III.11)}$$

Posons $\check{t}' = 2f \cdot t = 2f \cdot \frac{\check{T}}{2} \cdot \frac{\check{t}'}{\check{T}}$ et avec le changement de variable suivant :

$$x = \sqrt{\frac{\check{t}'}{f}} \left(t - \frac{\check{S}}{2\check{t}'} \right) \quad ; \quad dx = \sqrt{\frac{\check{t}'}{f}} \cdot dt \dots\dots\dots \text{(III.12)}$$

$$s(\check{S}) = \sqrt{\frac{f}{\check{t}'}} e^{-j\frac{\check{S}^2}{2\check{t}'}} \int_{-x_1}^{x_2} e^{j\frac{x^2}{2}} dx \dots\dots\dots \text{(III.13)}$$

L'équation (III.11) devient :

Alors

$$s(\check{S}) = \sqrt{\frac{f}{\check{t}'}} e^{-j\frac{\check{S}^2}{2\check{t}'}} \left\{ \int_0^{x_2} e^{j\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^{-x_1} e^{j\frac{x^2}{2}} dx \right\} \dots\dots\dots \text{(III.14)}$$

Où :

$$x_1 = \sqrt{\frac{\check{t}'}{f}} \left(\frac{\check{t}'}{2} + \frac{\check{S}}{\check{t}'} \right) = \sqrt{\frac{B\check{t}'}{2}} \left(1 + \frac{f}{B/2} \right) \dots\dots\dots \text{(III.15)}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{\check{t}'}{f}} \left(\frac{\check{t}'}{2} - \frac{\check{S}}{\check{t}'} \right) = \sqrt{\frac{B\check{t}'}{2}} \left(1 - \frac{f}{B/2} \right) \dots\dots\dots \text{(III.16)}$$

Les intégrales de Fresnel définies par C(x) et S(x)

Où :

$$c(x) = \int_0^x \cos \left(\frac{fv^2}{2} \right) dv \dots\dots\dots \text{(III.17)}$$

$$s(x) = \int_0^x \sin \left(\frac{fv^2}{2} \right) dv \dots\dots\dots \text{(III.18)}$$

Approximatives des :

$$c(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{fx} \sin \left(\frac{f}{2} x^2 \right) \quad ; \quad x > 1 \dots\dots\dots \text{(III.19)}$$

$$s(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{fx} \cos \left(\frac{f}{2} x^2 \right) \quad ; \quad x < 1 \dots\dots\dots \text{(III.20)}$$

Notant que c(-x) = - c(x) et s(-x) = - s(x).

La figure III.8 montre la courbe de C(x) et de S (x) pour $0 \leq x \leq 0.4$

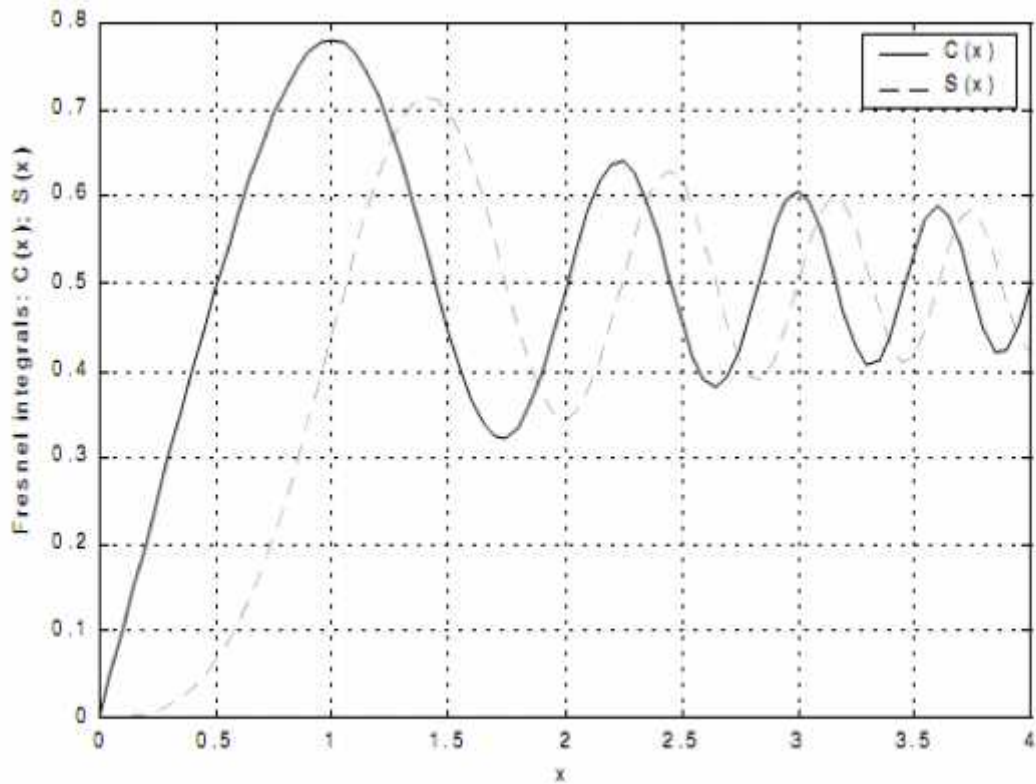


Figure III.8 : Les intégrales de Fresnel.

Utilisant les équations (III.19) et (III.20) dans l'équation (III.14) et après les simplifications en obtient :

$$s(x) = \frac{1}{\sqrt{B}} e^{-j \frac{\pi}{4} \frac{x^2}{B}} \left\{ \frac{[c(x_2) + c(x_1)] + j[s(x_2) + s(x_1)]}{\sqrt{2}} \right\} \dots\dots\dots (III.21)$$

Les figures (III.9.a), (III.9.b), et (III.9.c) montrent les courbes du LFM typique (partie réelle, partie imaginaire, et le spectre d'amplitude)

Le spectre montré dans la figure III.9.c est connu sous le nom de spectre de Fresnel

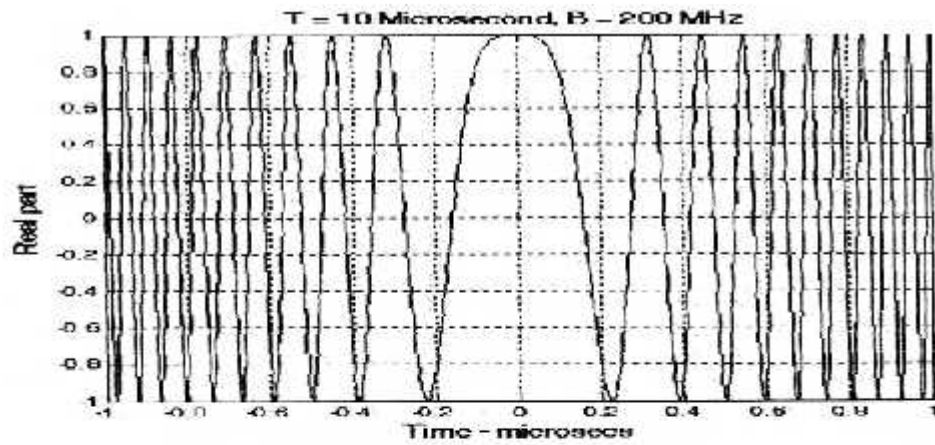


Figure III.9.a : partie réelle d'une LFM

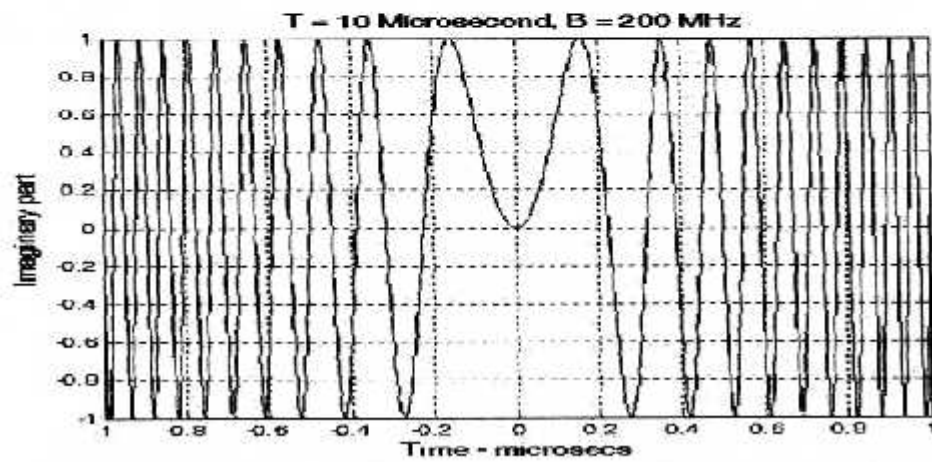


Figure III.9.b : partie imaginaire d'une LFM

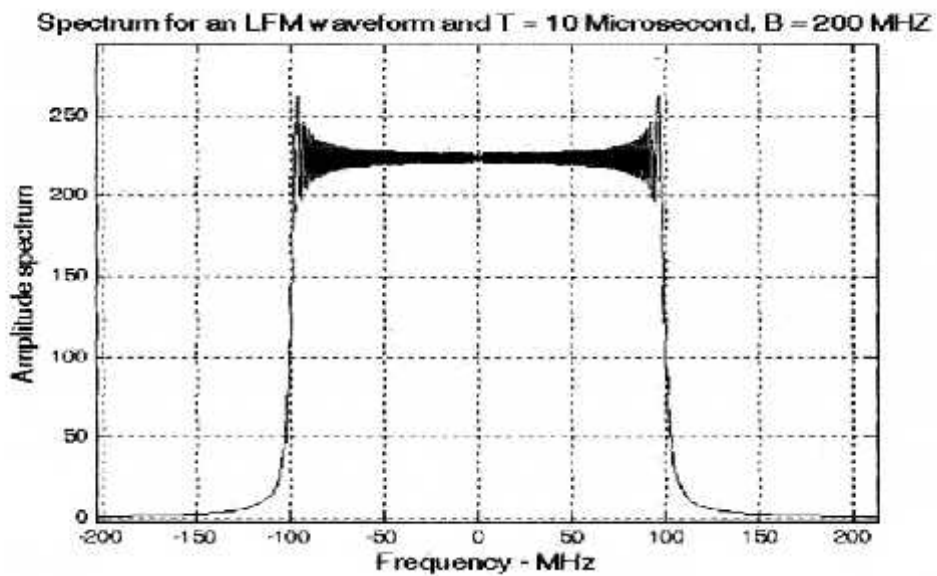


Figure III.9.c : Spectre d'amplitude d'une LFM

III-21. La réponse du filtre adapté pour LFM

Dans l'ordre de développer une expression générale pour la sortie du filtre adapté lorsque LFM est utilisé, nous considérons le cas où la cible s'approche avec une vitesse v . le signal transmise est :

$$s_1(t) = \text{Rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{j2f_0 t + \frac{1}{2}kt^2} \dots\dots\dots (III.22)$$

Le signal reçu est donc donné par :

$$s_{r_1}(t) = s_1(t - \Delta(t)) \dots\dots\dots (III.23)$$

$$\Delta(t) = t_0 - \frac{2v}{c}(t - t_0) \dots\dots\dots (III.24)$$

t_0 : temps correspond au détection en distance initiale.

c : vitesse de la lumière

Utilisant l'équation (III.24), on peut réécrire l'équation (III.23) comme :

$$s_{b_1}(t) = s_1\left(t - t_0 + \frac{2v}{c}(t - t_0)\right) = s_1(x(t - t_0)) \dots\dots\dots (III.25)$$

Et

$$x = 1 + \frac{2v}{c} \dots\dots\dots (III.26)$$

Où :

x : Le coefficient scalaire

Substituant l'équation (III.22) dans l'équation (III.25) on obtient :

$$s_{b_1}(t) = \text{Rect}\left(\frac{x(t-t_0)}{T}\right) e^{j2ff_0 x(t-t_0)} e^{j\frac{1}{2}kx^2(t-t_0)^2} \dots\dots\dots (III.27)$$

Qui est la représentation du signal analytique de $s_{r_1}(t)$.

L'enveloppe complexe du signal $s_{r_1}(t)$ est obtenu par la multiplication de l'équation (III.27) par $\exp(-j2 f_0 t)$.

L'enveloppe complexe est $s_r(t)$, donc après des manipulations on obtient :

$$s_r(t) = e^{-j2ff_0 t_0} \text{Rect}\left(\frac{x(t-t_0)}{T}\right) e^{j2ff_0 (x-1)(t-t_0)} e^{j\frac{1}{2}kx^2(t-t_0)^2} \dots\dots\dots (III.28)$$

Doppler de mouvement de la cible est :
$$v = \frac{2\mathcal{E}}{c} f_0 \dots\dots\dots (III.29)$$

Et depuis $x - 1 = \frac{2v}{c}$ on obtient : $v = (x - 1)f_0$ (III.30)

Utilisons l'approximation $x \cong 1$

Les équations (III.30) et (III.28) sont réécrites comme :

$$s_r(t) = e^{j2fv(t-t_0)} s(t-t_0) \dots\dots\dots (III.31)$$

$$s(t-t_0) = e^{-j2ff_0 t} s_1(t-t_0) \dots\dots\dots (III.32)$$

Où :

$S_1(t)$ est donné par l'équation (III.22). La réponse du filtre adapté est donnée par la fonction de

convolution
$$s_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sim) s_r(t - \sim) d\sim \dots\dots\dots (III.33)$$

Pour un filtre adapté non causal, la réponse $h(\mu)$ est égal à $S^*(-t)$, donc :

$$s_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(-\sim) s_r(t - \sim) d\sim \dots\dots\dots (III.34)$$

Substituons l'équation (III.32) dans l'équation (III.33) et après des simplifications algébriques on obtient :

$$s_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(\sim) e^{j2fv(t+\sim-t_0)} s(t + \sim - t_0) d\sim \dots\dots\dots (III.35)$$

Finalement mettre le changement de variable $t' = t + \sim$

On a :
$$s_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t' - t) s(t' - t) e^{j2fv(t'-t_0)} dt' \dots\dots\dots (III.36)$$

Posons $t_0=0$

$$s_0(t; v) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t') s^*(t' - t) e^{j2fv t'} dt' \dots\dots\dots (III.37)$$

Où on utilise la notation $S_0(t; v)$ pour indiquer que la sortie est une fonction de temps et de fréquence Doppler.

III-22. La fonction d'ambiguïté LFM

Considérons l'enveloppe complexe LFM définie par :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \operatorname{Re} ct\left(\frac{t}{\tau'}\right) e^{jf-t^2} \dots\dots\dots (III.38)$$

Dans l'ordre de calculer la fonction d'ambiguïté pour l'enveloppe complexe LFM, on considère d'abord. Le cas $0 \leq \tau \leq \tau'$

Dans ce cas les limites d'intégration sont de $-\frac{\tau'}{2}$ à $\frac{\tau'}{2}$, substituant l'équation (III.38) dans l'équation (III.19) on obtient :

$$t(\tau; \nu) = \frac{1}{\tau'} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} ct\left(\frac{t}{\tau'}\right) \operatorname{Re} ct\left(\frac{t-\tau}{\tau'}\right) e^{jf-t^2} e^{-jf-(t-\tau)^2} e^{j2f\nu t} dt \dots\dots\dots (III.39)$$

Ainsi :

$$t(\tau; \nu) = \frac{e^{-jf-\tau^2}}{\tau'} \int_{-\frac{\tau'}{2}}^{\frac{\tau'}{2}} e^{j2f(-\tau+\nu)t} dt \dots\dots\dots (III.40)$$

Après les procédures d'intégration on obtient :

$$t(\tau; \nu) = e^{2f\nu\tau} \left(1 - \frac{\tau}{\tau'}\right) \frac{\sin(f\tau'(\sim\tau + \nu)(1 - \frac{\tau}{\tau'}))}{f\tau'(\sim\tau + \nu)(1 - \frac{\tau}{\tau'})} ; \quad 0 \leq \tau \leq \tau' \dots\dots\dots (III.41)$$

Une analyse similaire pour le cas $0 \leq \tau \leq \tau'$

Où dans ce cas les limites d'intégration sont de $(\frac{-\tau'}{2} - \tau)$ à $(\frac{\tau'}{2})$

Les mêmes résultats peuvent être obtenir par l'utilisation de la propriété de symétrie de la fonction d'ambiguïté $|t(-\tau; -\nu)| = |t(\tau; \nu)|$ une expression de $t(\tau; \nu)$ (valable quelque soit τ) est donné par :

$$t(\tau; \nu) = e^{2f\nu\tau} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau'}\right) \frac{\sin(f\tau'(\sim\tau + \nu)(1 - \frac{|\tau|}{\tau'}))}{f\tau'(\sim\tau + \nu)(1 - \frac{|\tau|}{\tau'})} ; \quad |\tau| \leq \tau' \dots\dots\dots (III.42)$$

Et la fonction d'ambiguïté LFM est :

$$|t(\tau; \nu)| = \left| \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau'}\right) \frac{\sin(f\tau'(\sim\tau + \nu)(1 - \frac{|\tau|}{\tau'}))}{f\tau'(\sim\tau + \nu)(1 - \frac{|\tau|}{\tau'})} \right| ; \quad |\tau| \leq \tau' \dots\dots\dots (III.43)$$

La fonction d'auto corrélation de temps et égal à $t(\tau; 0)$

On vérifié que la fonction d'ambiguïté pour une LFM (down-chirp) pour une forme d'onde est donné par :

$$|t(\tau; \nu)| = \left| \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau'}\right) \frac{\sin(f\tau'(\tau - \nu)(1 - \frac{|\tau|}{\tau'}))}{f\tau'(\tau - \nu)(1 - \frac{|\tau|}{\tau'})} \right| ; \quad |\tau| \leq \tau' \dots\dots\dots (III.44)$$

La coupe retard de la fonction d'ambiguïté (up-chirp) est :

$$|t(\tau; 0)| = \left| \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau'}\right) \frac{\sin(f\tau\tau'(1 - \frac{|\tau|}{\tau'}))}{f\tau\tau'(1 - \frac{|\tau|}{\tau'})} \right| ; \quad |\tau| \leq \tau' \dots\dots\dots (III.45)$$

Figure III.10.c montre une courbe d'une coupe correspond à l'équation (III.45)

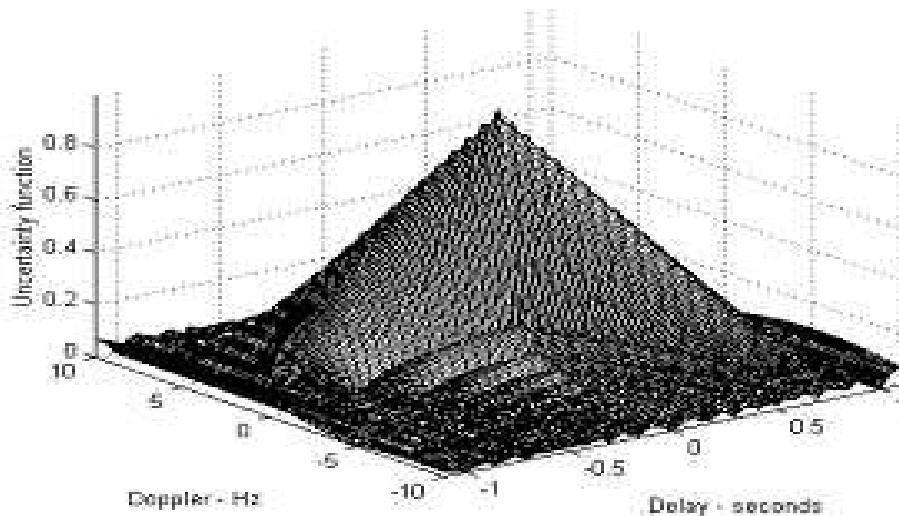


Figure III.10.a : Courbe (3D) d'une fonction d'ambiguïté LFM (up-chirp)

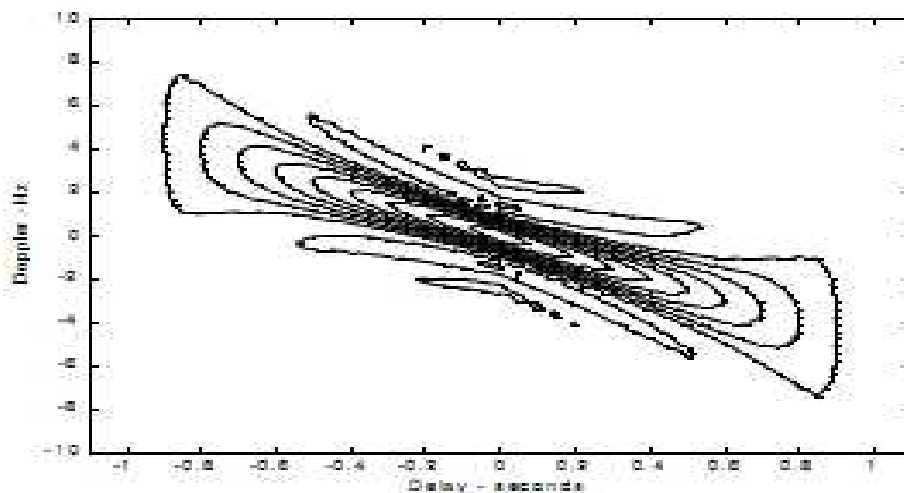
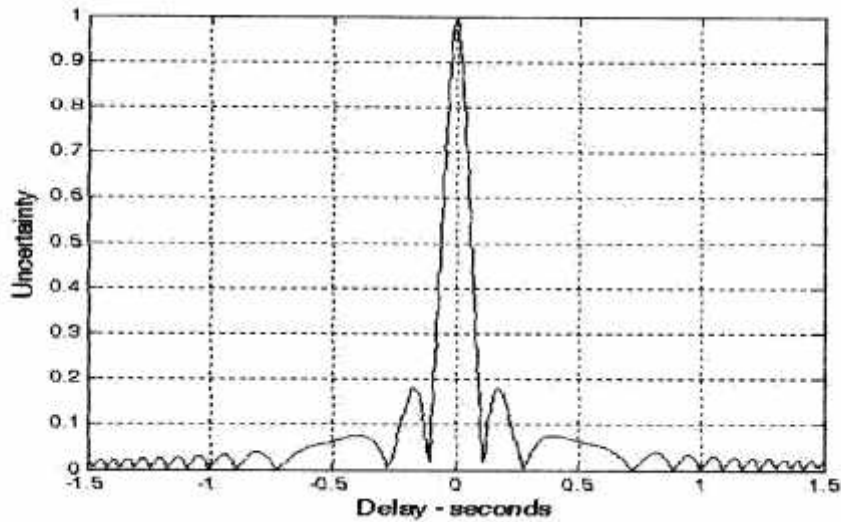


Figure III.10.b: Contour (2D) correspond à la figure III.10.a



Coupe retard d'une impulsion LFM ($\alpha=1, b=20$)

III-3. SFW (stepped frequency waveforms)

Une série de impulsions successives sont transmises, la fréquence d'une impulsion à l'impulsion suivante varie d'une fréquence fixe Δf

La figure III.11 montre une (SFW) typique l'intervalle de répétitions d'impulsions (PRI) est T et la durée d'impulsion est τ .

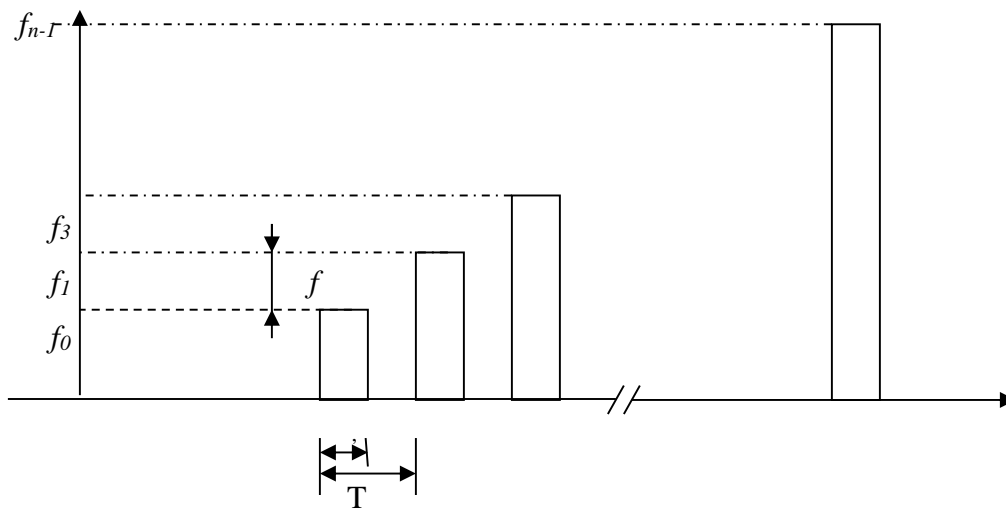


Figure III.11 : SFW typique

Chaque impulsion peut avoir son propre LFM ou d'autres types de modulation (dans notre cas c'est LFM qui est assumé).

La fréquence centrale du i^{ieme} pas (étape) est :

$$f_i = f_0 + i\Delta f \quad ; \quad i = 0, n-1 \dots\dots\dots (III.47)$$

La forme d'onde transmise du i^{ieme} pas, est :

$$s_i(t) = \begin{pmatrix} c_i \cos 2ff_i t + n_i & iT \leq t \leq iT + \dagger' \\ 0 & \text{ailleurs} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (III.48)$$

Où :

n_i : Phase relative.

c_i : Constantes

Le signal reçu d'une cible située à une distance R_0 , temps $t = 0$ est donné par :

$$s_{r_i}(t) = c_i \cos(2ff_i(t - \dagger(t)) + n_i) \quad ; \quad iT + \dagger(t) \leq t \leq iT + \dagger' + \dagger(t) \dots\dots\dots (III.49)$$

c_i : Constantes

$\dagger(t)$: Fonction de temps donné par : $\dagger(t) = \frac{R_0 - \hat{t}}{c/2} \dots\dots\dots (III.50)$

c : vitesse de la lumière.

\hat{t} : Vitesse radiale de la cible.

Dans l'ordre d'extraire les composantes quadrature $s_{r_i}(t)$ est mixé avec le signal

$$y_i(t) = s_{r_i} = c_i \cos(2ff_i - t + n_i) \quad ; \quad iT \leq t \leq iT + \dagger' \dots\dots\dots (III.51)$$

Après un filtrage passe-bas, les composantes quadrature sont donné par :

$$\begin{Bmatrix} x_i(t) \\ x_q(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_i \cos \mathbb{E}_i(t) \\ A_i \sin \mathbb{E}_i(t) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (III.52)$$

Où :

A_i : sont des constantes

Et $\mathbb{E}_i(t) = -2ff_i \left(\frac{2R}{c} - \frac{2\hat{t}}{c} \right) \dots\dots\dots (III.53)$

$$f_i = \Delta f$$

Alors :

$$t_i = iT + \frac{\dagger_r}{2} + \frac{2R_0}{c} \dots\dots\dots (III.54)$$

t_r : est le domaine du temps (retard) associé avec la distance correspondante de départ de profile en distance.

La composante quadrature peut être exprimée en forme complexe :

$$X_i = A_i e^{jE_i} \dots\dots\dots (III.55)$$

L'équation, (III.55) représente la simplification de réflectivité du cible du a' un train singulier dans le domaine fréquentiel (Doppler)

III-4. Signaux de Costas

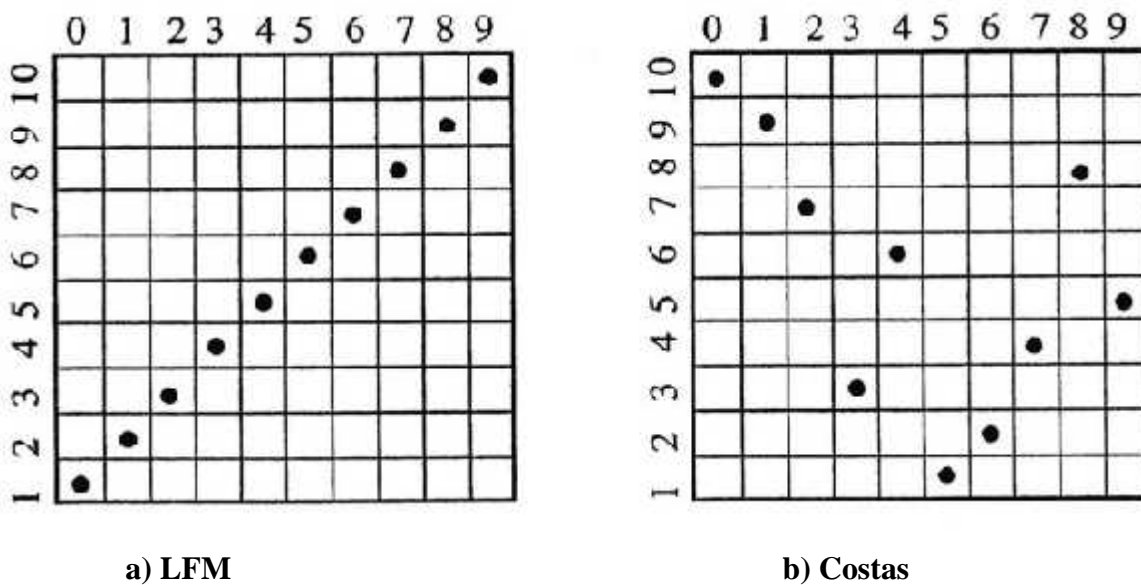
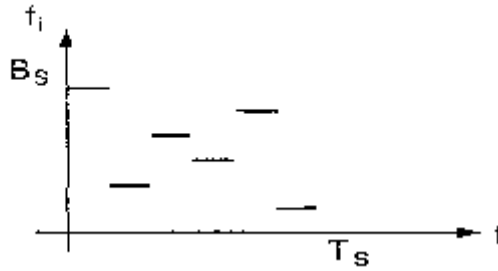


Figure III.12 : Séquences : a) SFW (stepped LFM); b) code de Costas

Dans le but d'obtenir des fonctions d'ambiguïté « optimales », c'est-à-dire, présentant en pratique un pic très étroit au-dessus d'un piédestal, Costas a formalisé le problème de la synthèse des signaux par le biais de l'étude de matrices particulières liées à l'évolution de la fréquence instantanée en fonction du temps . Il propose de construire le signal global à partir de N signaux élémentaires : un signal élémentaire étant défini par sa durée T et sa fréquence instantanée f_i choisie parmi les fréquences de la forme $\frac{n}{T}$, n=1 à

N ; le signal global obtenu est à sauts de fréquence.

La loi d'évolution de la fréquence instantanée du signal a l'allure suivante :



Lorsque les N signaux élémentaires arrivent avec un Doppler nul (cible immobile) ils sont détectés, retardés, et associés pour fournir la réponse du filtre correspondant au Doppler nul.

Si on considère maintenant la présence d'une autre cible, mobile cette fois-ci, le signal reçu est affecté de Doppler. Alors, si pour un certain retard on a k coïncidences entre le schéma $f_i(t)$ du signal non dopplérisé et le schéma $f_i(t)$ du signal dopplérisé, on aura une réponse à ces k signaux élémentaires en sortie du filtre à Doppler nul.

La valeur de k ne peut pas être nulle pour tous les décalages temporels et fréquentiels possibles mais elle peut être réduite à 1.

III-41. Formalisation de Costas

Le problème peut être modélisé de la façon suivante, plaçons N valeurs « 1 » et $N^2 - N$ valeurs « 0 » dans une matrice de taille $N \times N$ de telle sorte qu'il n'y ait qu'un seul « 1 » par ligne et par colonne .

Une telle matrice est alors une matrice de Costas si et seulement si La fonction de coïncidence $c(r, s)$ satisfait à la condition suivante :

$$c(r, s) \leq 1, \quad \forall (r, s) \neq (0, 0), \\ |r| \leq N - 1, \quad |s| \leq N - 1 \quad \dots\dots\dots (III.56)$$

$c(r, s)$ étant définie comme le nombre de coïncidences entre la matrice de départ et la matrice obtenue par translation a périodique de r colonnes vers la droite et de s lignes vers le haut .

Une matrice de Costas fournira alors un schéma $f_i(t)$ permettant de construire un signal à fonction d'ambiguïté « optimale ». Le problème ainsi posé est celui de la détermination des matrices qui satisfont la condition énoncée ci-dessus. En dépit de la simplicité de cet énoncé, les recherches dans ce domaine n'ont donné que peu de résultats généraux et la détermination algébrique des matrices de Costas reste un problème ouvert.

Une formalisation différente mais équivalente à la précédente est basée sur la méthode du « tableau

des différences ».

Celui-ci est formé à partir d'une permutation d'entiers de 1 à N de la façon suivante :

1. former la 1^{ère} ligne en prenant les différences entre 2 termes adjacents.
2. former la $i^{ième}$ ligne en prenant les différences entre 2 termes « éloignés » de i places dans la séquence.
3. etc.

Si le tableau des différences n'admet aucun terme répétitif dans chaque ligne, on pourra en déduire un réseau, ou matrice, de Costas.

Exemple :

Pour $N = 10$;

$$\{ \theta_n \} = \{ 2 ; 4 ; 8 ; 5 ; 10 ; 9 ; 7 ; 3 ; 6 ; 1 \}$$

$\{ \theta_n \}$	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
1.										
1	2	4	-3	5	-1	-2	-4	3	-5	
2	6	1	2	4	-3	-6	-1	-2		
3	3	6	1	2	-7	-3	-6			
4	8	5	1	2	4	-8				
5	7	3	-5	1	-9					
6	5	-1	-2	-4						
7	1	2	-7							
8	4	-3								
9	-1									

Pour chaque ligne de ce tableau, toutes les différences sont uniques, la séquence $\{0,,\}$ est donc une séquence de Costas. La matrice de Costas associée est la suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III-42. Création du code de Costas

L'utilisation du signal de Costas dans la création de la forme d'onde est très importante, car il permet d'avoir une fonction d'ambiguïté proche de la fonction «optimale» (forme de punaise).

Pour obtenir un signal de Costas à partir d'une séquence d'une longueur N, on utilise la procédure suivante :

Tenant p un nombre premier impair donc : $N = p-1$

Tenant g la racine primitive de p

Une racine primitive de p est défini comme la valeur de g qui a la séquence de puissance $g^1, g^2, g^3, \dots, g^{p-1} \bmod p$ génère toutes les intégrales de 1 à p-1.

Notant que $g \neq N$, et $g \neq p$.

Pour un code de Costas de longueur N, on peut créé une matrice de $N \times N$ dont les colonnes et les lignes sont défini respectivement comme:

$$j = 0, 1, 2, 3, \dots, (p-2)$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \dots, (p-1)$$

On place un «1» dans la position (i; j) si et seulement, $i \equiv (g)^j \bmod p$.

Le «1» dans la localisation (i; j) est correspond au fréquence f_i

$$f_i = f_0 + i\Delta f \quad ; \quad i = 1, N$$

Où f_0 : est une fréquence constante et $f_0 \gg \Delta f$

Δf : est la division de la fréquence du signal global par N,

(Il existe des programmes informatiques qui génèrent les séquences de Costas).

Lorsque on a la séquence de Costas on peut donc construire la matrice de différence et encore la matrice des lobes secondaires correspond à la fonction d'ambiguïté (voir l'exemple ci-dessous).

Tenant l'exemple précédant pour la séquence $f_i = \{2,4,8,5,10,9,7,3,6,1\}$

On peut constater que cette séquence est une séquence de Costas à partir du tableau de différence.

D'après ce tableau on peut obtenir la matrice de différence et construire la matrice des lobes secondaires de Costas (montré ci-dessous).

$$D_{i,j} = a_{i+j} - a_j, i + j < N$$

	f_i	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
i	1	2	4	-3	5	-1	-2	-4	3	-5	
	2	6	1	2	4	-3	-6	-1	-2		
	3	3	6	1	2	-7	-3	-6			
	4	8	5	-1	-2	-4	-8				
	5	7	3	-5	1	-9					
	6	5	-1	-2	-4						
	7	1	2	-7							
	8	4	-3								
	9	-1									

a) Temps (retard)

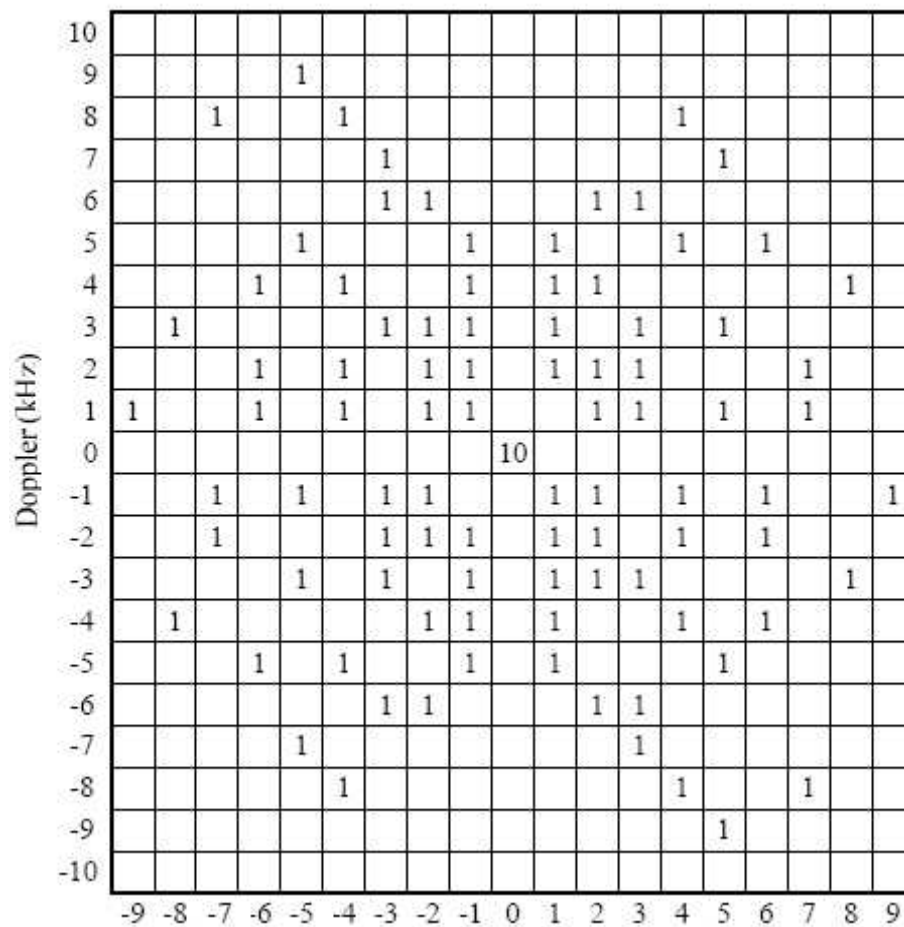


Figure III.13 : a) matrice de différence, b) construction de la matrice des lobes secondaire (Costas)

Le tableau de déférence n'admet aucun terme répétitif dans chaque ligne, on pourra on déduire un réseau, ou matrice de Costas.

Cette matrice est correspond au FA (fonction d'ambiguïté) où on représente les lobes secondaires par des «1»

Certaines séquences de Costas ont été découvertes grâce au théorème de Welch . Un certain nombre de conjectures ont également été établies par Golomb : il existe au moins une séquence de Costas pour tout N (on sait qu'elles existent jusqu'à N = 31), le nombre de séquences de Costas augmente avec N mais la densité de ces séquences diminue. Pour des valeurs de N relativement faibles, il est Possible de déterminer de manière exhaustive toutes les séquences de Costas en testant à l'aide du tableau des différences les N! Séquences possibles pour chaque N.

Des programmes sont développés permettant la détermination des séquences de Costas jusqu'à N = 10. Remarquons que le temps de calcul croît approximativement comme N!

On obtient :

N	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de séquences de Costas	4	12	40	116	200	444	760	2160
Densité = $\frac{Nb}{N!}$	0,67	0,50	0,33	0,16	0,04	0,01	0,002	0,0006

III-43. Auto ambiguïté des signaux de Costas

Considérons une séquence de Costas { n } telle qu'elle a été définie précédemment, soit

$$\forall l, s \in \{1; \dots; N-2\} \quad \Delta_{l,s} \neq \Delta_{l,s} \quad \text{pour } l \neq s$$

où :

$$\Delta_{l,k} = u_{k+l} - u_k \quad \text{pour } k \in \{0; \dots; N-1-l\} \dots \dots \dots (III.57)$$

Les signaux de Costas sont obtenus par « accolement des morceaux de cosinus » de fréquences

instantanées $f_n = \frac{n}{T}$ pour N = 0 à N-1

L'enveloppe complexe $\mu(t)$ d'un signal de Costas est donc :

$$\mu(t) = \sum_{n=0}^{N-1} p_n(t - nT) \dots \dots \dots (III.58)$$

où : $p_n(t) = e^{j2\pi f_n t}$ pour $0 \leq t \leq T$ et $p_n(t) = 0$

La durée totale du signal est $T_s = NT$, sa largeur de bande est $B_s = \frac{N}{T}$ de sorte que le produit Bande x Durée est de l'ordre de N^2 .

Le calcul de la fonction d'ambiguïté du signal de Costas se fait en remplaçant $\mu(t)$ par son expression (III.58) dans (III.11). Une première expression globale a été obtenue par Costas et est rappelée en Annexe. En fait la forme de la fonction d'ambiguïté s'interprète beaucoup mieux si on développe le calcul de $\chi(\tau, \nu)$ à l'aide de la fonction d'interambiguïté entre signaux élémentaires :

$$\phi_{nm}(\tau, \nu) = -\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t) p_m^*(t - \tau) e^{-j2\pi\nu t} dt \tag{III.59}$$

En remplaçant P_n , et P_m par leurs valeurs on obtient finalement

$$\chi(\tau, \nu) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\phi_{nn}(\tau, \nu) + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{N-1} \phi_{nm}(\tau - (n - m)T, \nu)] e^{-j2\pi n \nu T} \tag{III.60}$$

Ainsi :

$$\chi(0, \nu) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \phi_{nn}(0, \nu) e^{-j2\pi n \nu T} = \frac{\sin(\pi N y)}{\pi N y} e^{-j\pi N y} \tag{III.61}$$

En définissant la fréquence normalisée y relativement à un motif T par : $y = \nu T$.

Le premier zéro de $\chi(0, y)$ correspond à $y = \pm \frac{1}{N}$ et mesure la « résolution » fréquentielle du signal.

En posant :

$$\chi'(\tau, 0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \phi_{nn}(\tau, 0) \tag{III.62}$$

On montre que :

$$\chi'(x, 0) = (1 - |x|) \frac{\sin(\pi N x)}{N \sin(\pi x)} e^{j\pi(N-1)x} \tag{III.63}$$

Pour $|x| \ll 1$

Où le retard normalisé relativement à un motif T est défini par : $x = \frac{t}{T}$

Le comportement au voisinage de l'origine de $|X(x,0)|$ est donc de la forme $\frac{\sin Nz}{N \sin z}$ pour

$|x| \geq 1, t(x,0) = 0$ et la valeur de $(x,0)$ est liée aux termes d'inter corrélation $n-m$

D'autre part, les $n-m$ contribuent essentiellement à la formation des « lobes secondaires » et plus généralement du piédestal de la fonction d'ambiguïté.

Alors que la somme faisant intervenir les $n-m$ engendre le pic central.

On montre par ailleurs que $n-m = 1$ pour :

$$\begin{aligned} \tau = \tau_n = (n - m) T = LT \quad \text{et} \\ v = v_p = f_x \cdot f_m = \frac{\Delta f \cdot m}{T} ; L = 1 \text{ à } N - 1 . \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (III.64)$$

Le tableau des différences permet donc de « prédire » la localisation des pics secondaires, aux valeurs entières de x et y.

Il y aura N - L pics secondaires à $x = LT$ pour L = 1 à N- 1 et également N - L pics secondaires pour $v = \pm \frac{L}{T}$ pour L = 1 à N - 1.

Ces pics secondaires sont de largeur 2T en retard et ont un comportement du type $\frac{\sin z}{z}$ en fréquence.

Ils ont une valeur maximale de $\frac{1}{\sqrt{B_s T_s}}$; mais lorsqu'ils sont proches, des effets complexes de

renforcement ou d'annulation font que cette valeur peut être supérieure à $\frac{1}{N}$, surtout près de l'origine ; ce qui rend le piédestal très peu uniforme près de l'origine.

Ainsi la zone proche de l'origine sera « très active » (voir les résultats numériques ci-dessous).

III-44. Les Résultats numériques

D'après Costas la relation type entre le pas (fréquence séparatrice) Δf et le bit (durée de la subpulse) : t_b est : $\Delta f = \frac{1}{t_b}$,

Si on fait augmenter Δf pour avoir : $\Delta f > \frac{1}{t_b}$ on remarque que les lobes secondaires sont plus fin mais il y a une croissance sensible des lobes secondaires(amplitude) , ce qui dégrade la qualité de Résolution (retard ; Doppler)

Nous allons illustrer ce phénomène par deux variantes $\Delta f = \frac{1}{t_b}$, et $\Delta f < \frac{1}{t_b}$.

Dans toutes les simulations ci-dessous les paramètres (radar) sont :

La méthode FFT conventionnelle

La distance Max : 15000 m

La vitesse Max : 300 m/s

La fréquence porteuse (porteuse) du radar : $f_0 = 20$ GHz

La largeur de bande de modulation : $\Delta F = 20$ MHz

La période de modulation : $T = 1$ ms

Résultat 1

Pour $N=10$, $t_b=0.1$ ms, $\Delta f = 10$ KHz. t_b : Est le bit (la durée de subpulse)

Et Δf : le pas (espacement de fréquence)

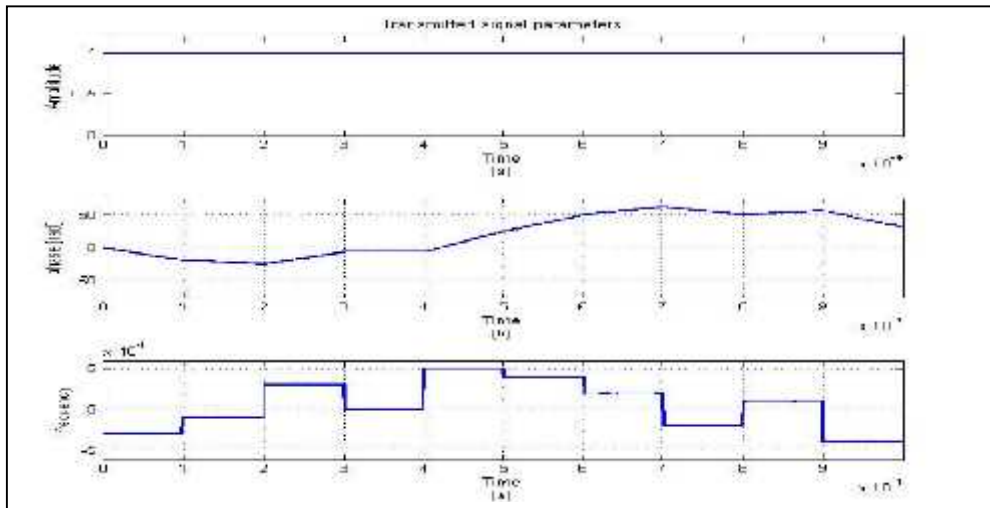


Figure III.14.a : (a)amplitude, (b)phase, (c)les paramètres de fréquences de Costas (pour $N=10$, $t_b=0.1$ ms seconds, $\Delta f = 10$ KHz).

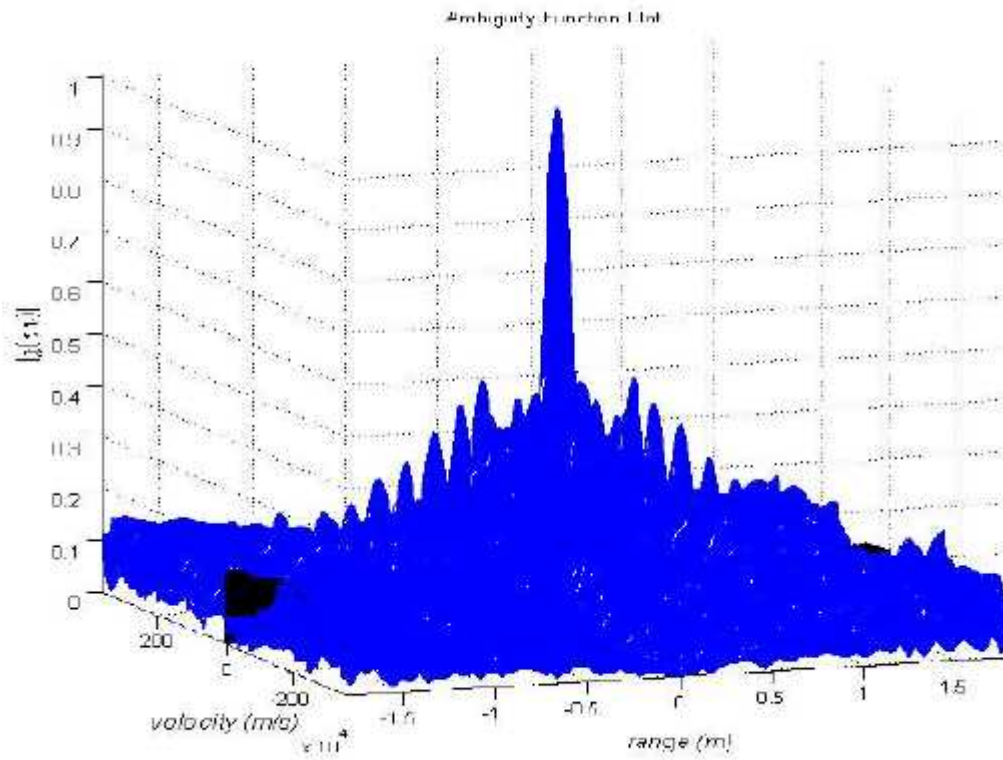


Figure III.14.b : courbe (3D) de la fonction d’ambiguïté de Costas ($N=10, t_b=0.1$ m seconds, $\Delta f =10$ KHz).

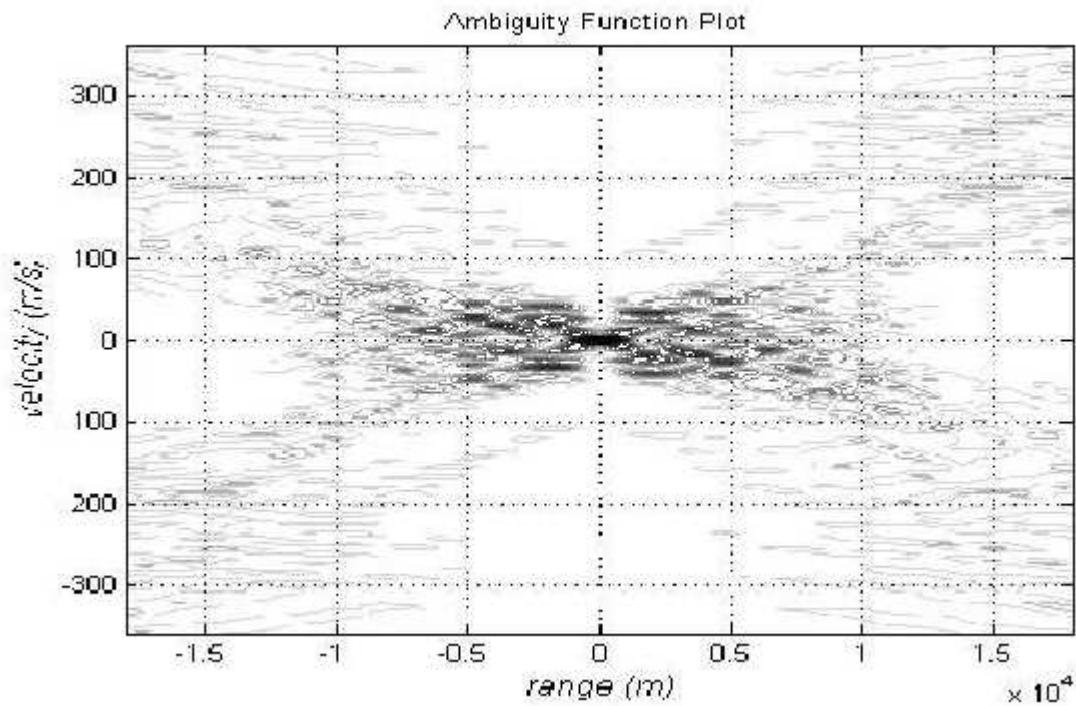


Figure III.14.c : Contour (2D) de la fonction d’ambiguïté de Costas ($N=10, t_b=0.1$ m seconds, $\Delta f =10$ KHz).

Résultat 2

Pour $N=10$, $t_b=0.1$ m seconds, $\Delta f =50$ KHz

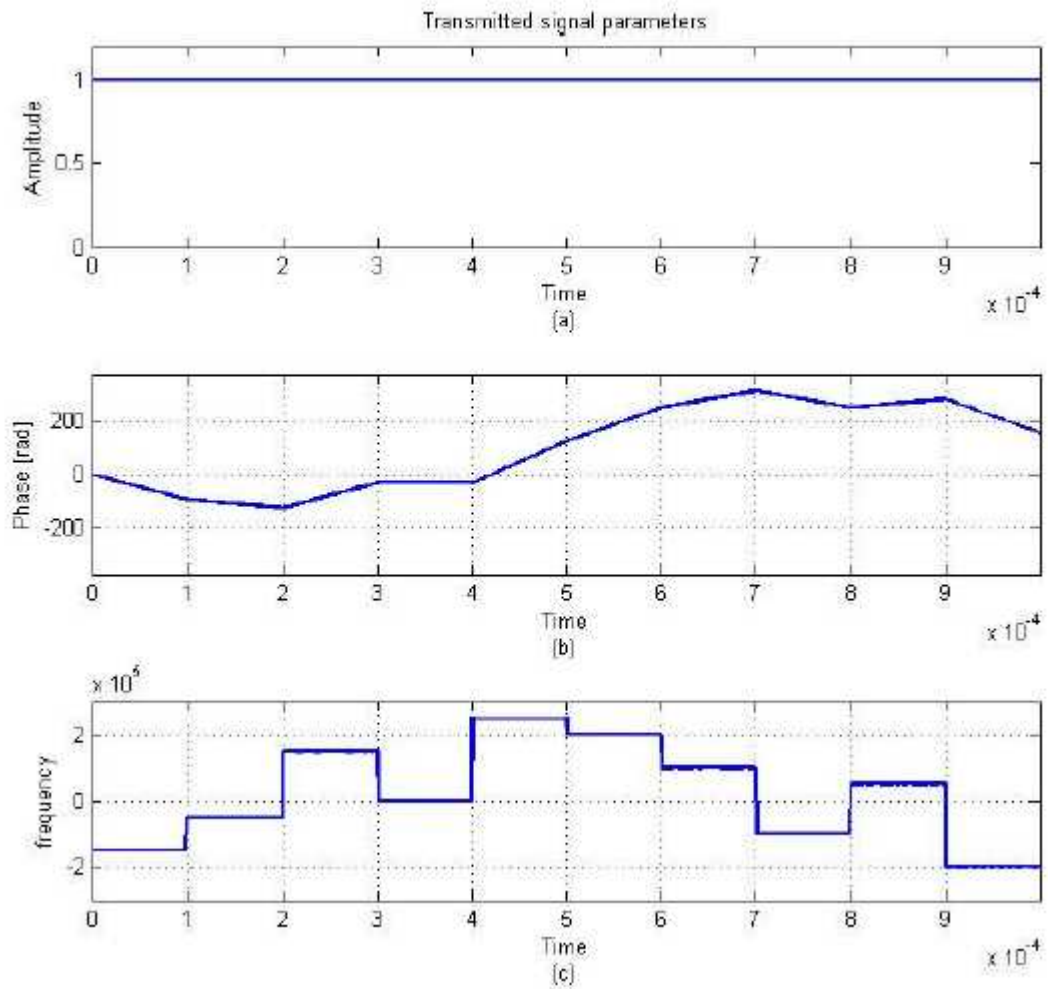


Figure III.15.a : (a) amplitude, (b) phase, (c) les paramètres de fréquences de Costas pour $N=10$, $t_b=0.1$ m seconds, $\Delta f =50$ KHz.

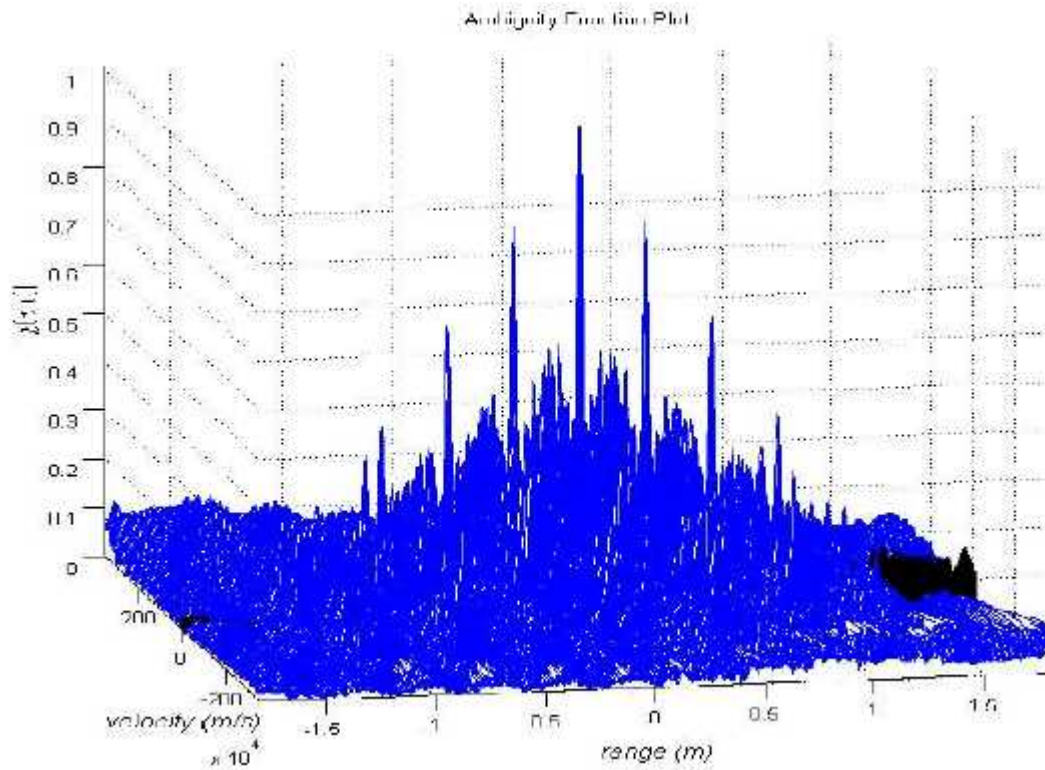


Figure III.15.b : courbe (3D) de la fonction d'ambiguïté de Costas ($N=10$, $t_b=0.1$ m seconds, $\Delta f=50$ KHz).

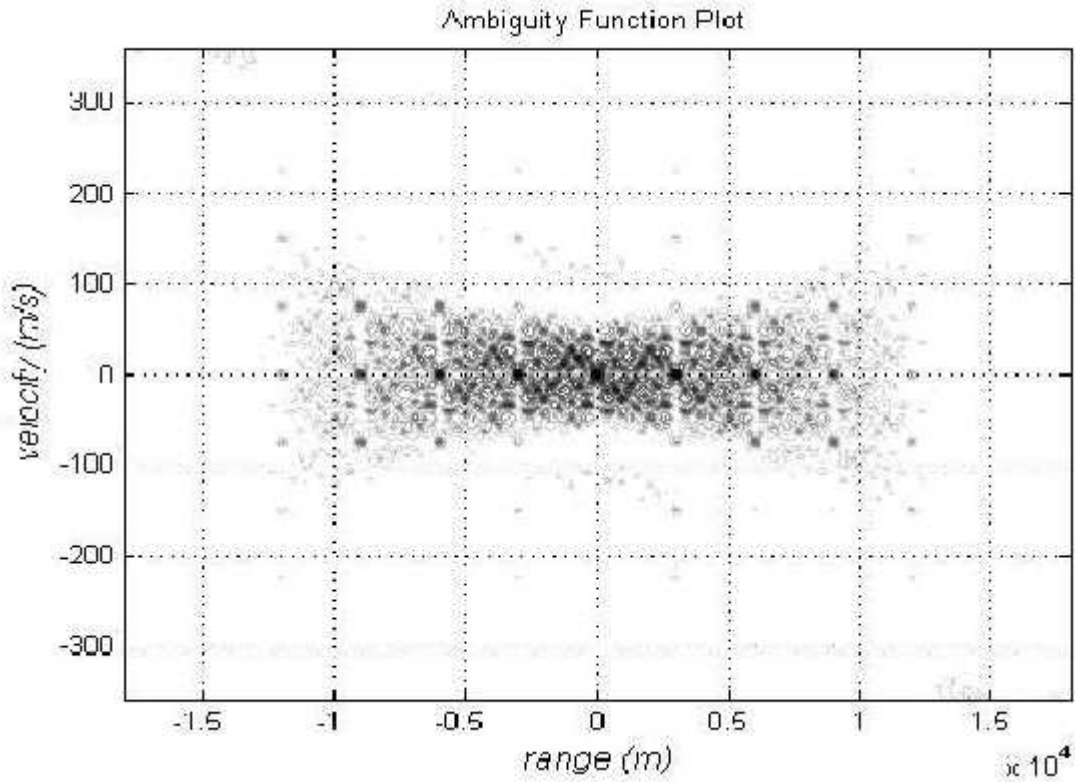


Figure III.15.c : Contour (2D) de la fonction d'ambiguïté de Costas ($N=10$, $t_b=0.1$ m seconds, $\Delta f=50$ KHz).

III.5 Comparaison entre différentes séquences

Pour mettre en évidence les performances des signaux de Costas. Donnons tout d'abord les fonctions d'ambiguïté de quelques signaux classiques :

- Sinusoïde limitée ;
- Séquence LFM ;
- Séquence aléatoire ;

Après nous allons procéder à une comparaison des différents résultats de la fonction d'ambiguïté par simulation et tirer les différences ainsi les performances des deux méthodes LFM et COSTAS.

Tous les tracés donnés représentent les modules des fonctions d'ambiguïté.

Les fréquences ainsi que les retards sont normalisés par rapport à la durée de signal : $n = T_s$ et $n = \frac{t}{T_s}$.

Dans les simulations ci-après les paramètres (radar) sont :

La méthode FFT conventionnelle

La distance Max : 20000 m

La vitesse Max : 1000 m /s

La fréquence carrière (porteuse) du radar : $f_0 = 20$ GHz

La largeur de bande de modulation : $\Delta F = 20$ MHz

La période de modulation : $T = 1$ m s

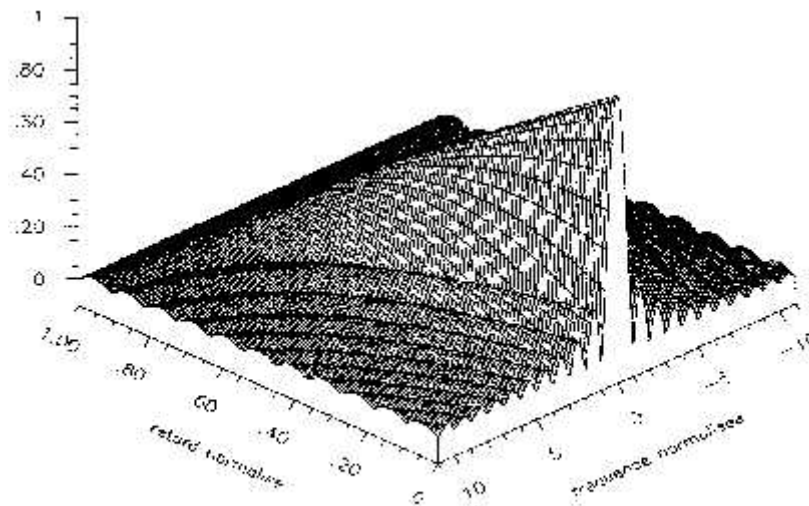


Figure III.16.a : Module de la fonction d'ambiguïté. Sinusoïde limitée

On reconnaît sur l'axe Doppler un sinus cardinal, transformée de Fourier du carré du module de l'enveloppe complexe (ici une « porte ») et un triangle sur l'axe retard, autocorrélation de l'enveloppe complexe.

On montre ensuite (fig.III.4.2) la fonction d'ambiguïté correspondant à la séquence harmonique $S_H = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$. On reconnaît une modulation linéaire de fréquence, ici quantifiée par paliers.

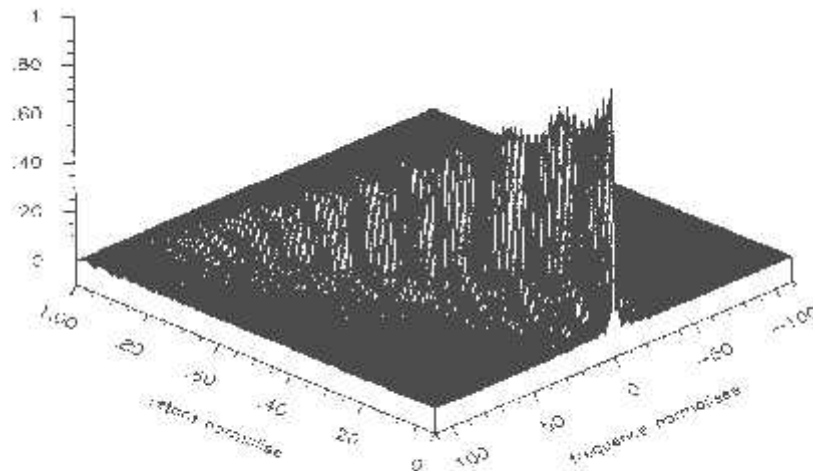


Figure III.16.b : Module de la fonction d'ambiguïté. Séquence 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10

On présente ensuite (fig. III.16.c) la séquence { 2 ; 5 ; 7 ; 3 ; 10 ; 1 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 }, choisie au hasard.

Ainsi on a :

	2	5	7	3	10	1	4	6	8	9
L.										
1	3	2	-4	7	-9	3	2	2	1	
2	5	2	3	2	6	5	4	3		
3	1	5	-6	1	4	7	5			
4	8	-4	-3	3	-2	8				
5	-1	-1	-1	5	-1					
6	2	1	1	6						
7	4	3	2							
8	6	4								
9	7									

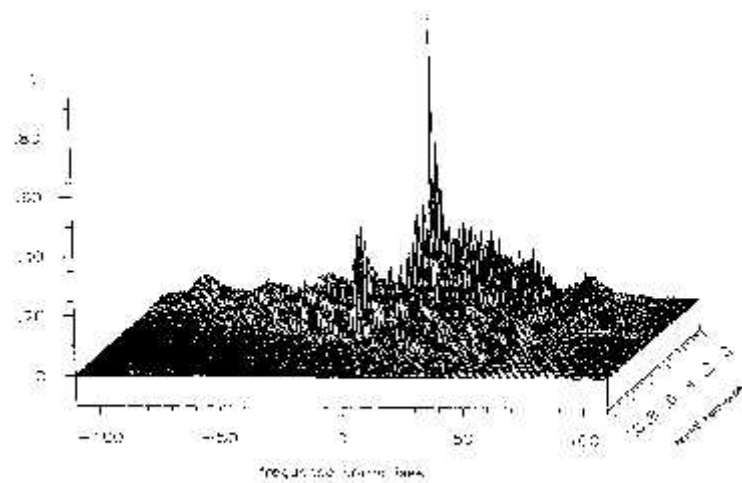


Figure III.16.c : Module de la fonction d'ambiguïté. Séquence 2, 5, 7, 3, 10, 1, 4, 6, 8, 9

Cette séquence n'est donc pas une séquence de Costas.

On constate évidemment un fort pic secondaire pour : $(x, y) = (5, -1)$, i.e. $n = 0,5$ et $n = -10$

La séquence de Costas $S_c = \{ 2 ; 4 ; 8 ; 5 ; 10 ; 9 ; 7 ; 3 ; 6 ; 1 \}$ est ensuite étudiée (fig.III.4.4) .

On constate que les pics secondaires prévisibles sont bien là ; on voit notamment le pic secondaire à $n = 0,9$ et $n = -10$ $[(x, y) = (9, -1)]$ au premier plan en vue « depuis l'axe retard »

On remarque particulièrement la zone de « forte activité » près de l'origine.

On note l'importance des pics secondaires (de l'ordre de 40 %)

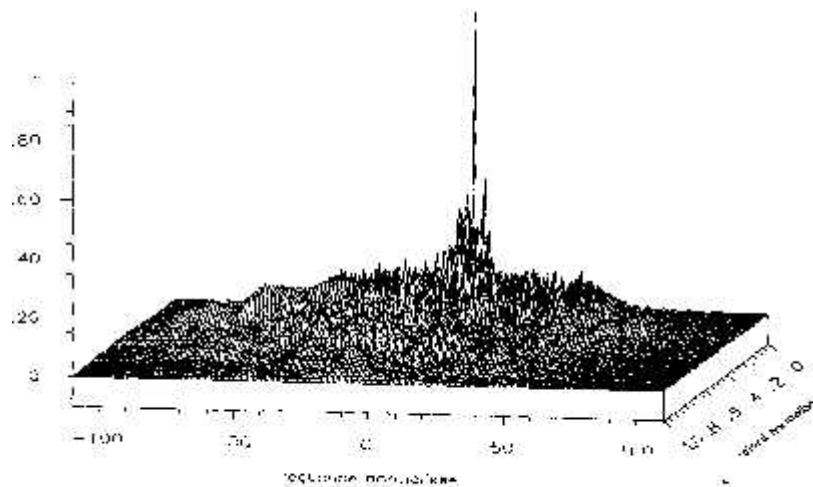


Figure III.16.d : Module de la fonction d'ambiguïté. Séquence 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1

Des coupes sont également effectuées (fig.III.16.e). On retrouve les comportements attendus

- sinus cardinal sur l'axe Doppler
- $\frac{\sin Nz}{N \sin z}$ près de l'origine sur l'axe retard.

Globalement, ces signaux se révèlent relativement satisfaisants. Comme par ailleurs ils sont de mise en oeuvre facile

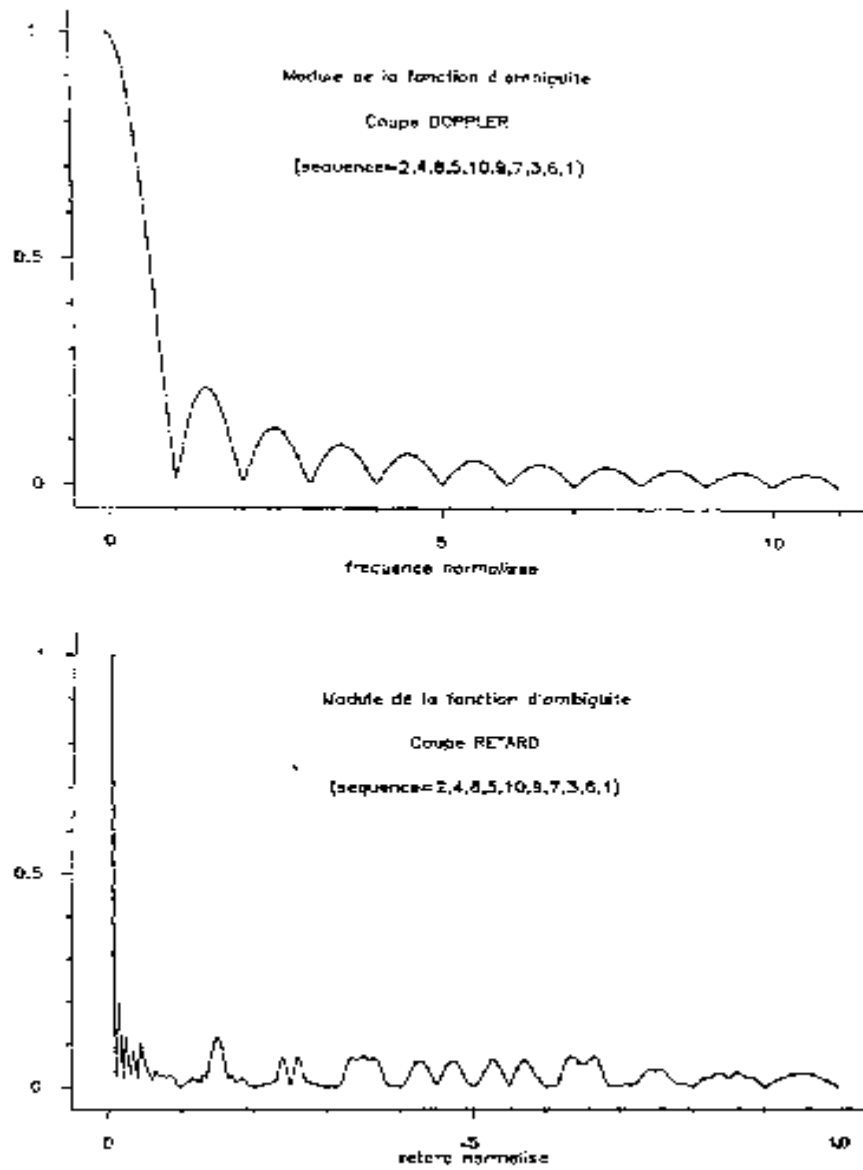


Figure III.16.e: Coupe retard et Doppler. Séquence 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1

Tableau III.1 : Comparaison entre les signaux LFM et les signaux Costas

Signaux LFM	Signaux Costas
<p>Ambiguïté moins proche de «l'optimale» \Rightarrow résultats de résolutions moins meilleurs (la FA représente un mur). (Figure III.16.b)</p>	<p>Ambiguïté proche de «l'optimale» \Rightarrow résultats de résolution meilleurs (les lobes secondaires sont de l'ordre $\frac{2}{N}$ à $\frac{4}{N}$ près de l'origine et de $\frac{1}{N}$ sur le reste de piédestal (N est la longueur de la séquence). (figure III.16.d)</p>
<p>Fournir une seule séquence.</p>	<p>Une richesse de séquences générés (séquences de Costas (il existe des programmes de génération de ces séquences)).</p>
<p>Les lobes secondaires sont répartis sur toute la surface de piédestal. (Figure III.16.b)</p>	<p>On peut prédire où se trouvent les lobes dans le plan ($\\$; \text{€}$) à l'aide du tableau de déférence (ou matrice de Costas). (Figure III.13.b)</p>
<p>Facilité de modulation et de création des signaux LFM.</p>	<p>Facilité de modulation et de création des signaux Costas.</p>
<p>Le produit temps×fréquence (proportionnel au pouvoir de résolution) augmente légèrement avec l'augmentation de la longueur de la séquence LFM. (Figure III.16.b)</p>	<p>Le produit temps×fréquence (durée×bande) augmente largement avec l'augmentation de la longueur de chaque séquence de Costas. Les lobes secondaire de Costas sont concentré à l'origine (activité forte près de l'origine)(ce phénomène est propre au signaux de Costas). (Figure III.16.d)</p>
<p>Implémentation hardware simple</p>	<p>Implémentation hardware simple.</p>

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons présenté le principe fondamental des systèmes radar et leur classifications, ainsi les différents types des récepteurs radar.

Nous avons aussi parlé de la fonction d'ambiguïté, ces propriétés et nous avons cités des exemples de cette fonction.

Nous avons proposé essentiellement deux classes de signaux; une classe dite LFM et une autre appelée signaux de COSTAS, on s'est intéressé à leurs performances en terme de pouvoir de résolution (temps, fréquences, ambiguïté).

Nous avons procédé à des simulations où nous essayons de faire diminuer et répartir les lobes secondaires de la fonction d'ambiguïté pour améliorer le pouvoir de résolution en utilisant les signaux de Costas.

Nous avons également effectué une simulation pour la comparaison entre ses deux classes de signaux. Globalement il ressort que les signaux LFM donnent une fonction d'ambiguïté moins proche de la fonction optimale, donc moins de bon résultats en terme de pouvoir de résolution, malgré qu'ils aient des avantages (modulation et création simple) ainsi qu'ils n'ont besoin qu'une simple implémentation hardware. Les signaux de COSTAS se révèlent finalement être plus performants et plus riches en terme de séquences. Ces signaux ont besoin d'une implémentation hardware plus simple.

Références Bibliographiques

- [1] M. LABARRARE, J.P.KRIEF et B.GIMONET, « Le filtrage et ses applications », troisième édition, Cépaduès-éditions, novembre 1993.
- [2] Gérard BLANCHET et Maurice CHARBIT, « Traitement numérique du signal simulation sous matlab », éditions HERMES Paris, 1998.
- [3] J.P.HARDANGE, PH.LACOMME et J.C.MARCHAIS, « Radars Aéroportés et Spatiaux », éditions MASSON, 1995
- [4] Mohamed NAJIM, « filtrage optimal » Techniques de l'ingénieur.2004
- [5] Gérard BLANCHET et Maurice CHARBIT, « Signaux et images sous Matlab », HERMES Science Europe Ltd, Paris, 2001
- [6] L.CADORET, « Technique radar appliqué, Tome II », édition E.N.A.C ,1981.
- [7] G.WW.STIMSON “Introduction to airborne radar”, SCHITCH publishing, INC. Nez Jersey, 1998
- [8] Merrill SKOLNICK, “Radar hand book”, edition: Chief.
- [9] C.S.BURRUS, J.H.McClellan, A.V.OPPENHEIM, T.W.PARKS,BW.SCHAFER and H.W.SCHUSSLER, “computer based exercises for signal processing using MATLAB”. Matlab-curriculum, series 1994.
- [10] Mehmet AKANGOL, Thesis Submitted to the Graduate school of Natural and Applied sciences of Middle East Technical University, December, 2005
- [11] Etude et Simulation de la chaîne de réception d'un radar à compression d'impulsion. Yazid BOUABDELLAH et Mohamed LARBI Mémoire de fin d'étude ,2007

Transformée de Fourier

$$e^{j2ft} = \cos(2ft) + j \sin(2ft)$$

$$R_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[x(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2ft) dt + jX(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2ft) dt \right]$$

$$R_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [x(f) [\operatorname{Re}(f) + j \operatorname{Im}(f)]]$$

Avec :

$$\operatorname{Re}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2ft) dt$$

$$\operatorname{Im}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2ft) dt$$

Et en adoptant ce qui suit :

$$x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2ft) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2ft) dt$$

$$x(f) = \operatorname{Re}(f) - j \operatorname{Im}(f)$$

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2ft) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2ft) dt$$

$$x(-f) = \operatorname{Re}(f) + j \operatorname{Im}(f)$$

Par conséquent :

$$x(-f) = x^*(f)$$

Alors :

$$R_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (x(f)x(-f)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |x(f)|^2$$

Donc :

$$R_{XX}(\dagger) \xleftarrow{\text{TRANSFORMÉE DE FOURIER}} R_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |x(f)|^2$$

En effet, la transformée de Fourier de la fonction d'auto corrélation représente la densité spectrale du processus, dans notre cas il s'agit d'une densité spectrale de puissance.

$$R_{XX}(\dagger) \xleftarrow{\text{TRANSFORMÉE DE FOURIER}} P_{xx}(f)$$