

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département de Génie Mécanique

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Science Des Matériaux

ETUDE DE L'INFLUENCE DES DEFAUTS DE PETITE TAILLE SUR LE COMPORTEMENT A RUPTURE AVEC MODELE DES FORCES COHESIVES

Par

KHELIFI Mohamed Zaim

Devant le jury composé de

M. HADJI	Professeur,	U. de Blida	Président
A. BRAHIMI	Chargé de cours,	U. de Blida	Examineur
M. GACEB	Chargé de cours,	U. de Boumerdès	Examineur
H. FERDJANI	Chargé de cours,	U. de Blida	Rapporteur

Blida, Avril 2007

RÉSUMÉ

Le but du travail est de montrer, dans le cadre de la mécanique de la rupture avec le modèle de forces cohésives qui combine le modèle de DUGDALE et celui des Zones Cohésives Continuum, que les défauts de petite taille devant la longueur caractéristique du matériau ont pratiquement peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure. On traite pour cela deux exemples en utilisant la méthode des éléments finis : le cas d'une plaque pré fissurée, puis, le cas d'une plaque contenant une cavité circulaire.

ABSTRACT

The goal of this work is to prove that, within the framework of Fracture Mechanics with the cohesive forces model, which combines the DUGDALE model with Continuum Cohesive Zone Model, the defects the size of which are small compared to the material characteristic length are practically without influence on the limit loads of structures.

For that, we treat two cases : we compute by using the finite element method the response of a precracked plate then a plate with a circular hole.

ملخص

الهدف من هذه الدراسة هو إثبات أن العيوب الصغيرة الموجودة داخل المواد ليس لها أثر كبير على مقاومة هذه المواد، و ذلك باستعمال نظرية تجمع بين نظرية DUGDALE و نظرية المناطق المتحدة. و لذلك سيتم استعمال التحليل الرقمي لدراسة حالتين هما صفيحة تحتو على ثقب و صفيحة تحتو على شق.

LISTE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1 : Densités d'énergie de surface d'une fissure en fonction du saut de déplacement dans les modèles de DUGDALE et de GRIFFITH.....	12
Figure 1.1 : Un milieu infini soumis à un chargement de traction et comportant une fissure rectiligne.....	17
Figure 1.2 : Fissure avec zone cohésive.....	18
Figure 1.3 : Loi de comportement de DUGDALE dans la direction normale.	18
Figure 1.4 : Loi de comportement de la zone cohésive de NEEDLEMAN dans la direction normale.....	19
Figure 1.5 : Évolution de la force tangentielle en fonction du saut tangent.....	19
Figure 1.6 : La zone cohésive continuum.	21
Figure 1.7 : Loi de comportement du saut de déplacement dans la zone cohésive continuum.	21
Figure 1.8 : Loi de comportement du saut de déplacement dans le modèle général des zones cohésives.	22
Figure 1.9 : Les zones de la fissure dans le modèle général.	22

Figure 1.10 : Géométrie de la plaque trouée et la plaque fissurée avec les zones cohésive et non cohésive.....	24, 37
Figure 1.11. Relation entre la charge appliquée et la position de la zone cohésive lors de la phase d'amorçage.....	27
Figure 1.12 : Relation entre la charge appliquée et la position de la zone cohésive	29
Figure 1.13 : Dépendance de la charge de rupture avec la taille relative de la fissure initiale	30
Figure 1.14 : Dépendance de la charge de rupture avec la taille relative de la fissure initiale	33
Figure 1.15 : Relation entre la charge et la longueur de la fissure.....	34
Figure 2.1 : Géométrie du quart de la plaque : à gauche pour le trou, à droite pour la fissure.	43
Figure 3.1 : Évolution de la fonction $V(x_0)$	48, 72
Figure 3.2 : Définition de la transformation Θ	49
Figure 3.3 : Élément triangulaire à 3 nœuds	51, 78
Figure 3.4 : Élément d'interface à 4 nœuds	51
Figure 3.4 : Élément d'interface à 4 noeuds.....	53
Figure 3.5 : Charge répartie sur le bord supérieur.....	55
Figure 3.6 : Charge répartie sur la fissure	55, 83
Figure 4.1 : σ_∞ en fonction du saut au point t en phase élastique pour la plaque préfissurée	58
Figure 4.2 : Maillage de la plaque fissurée sans la rupture.....	59

Figure 4.3 : Variation de $\frac{\sigma_\infty}{\sigma_c}$ en fonction de la position du point a pour le cas de la fissure. 60

Figure 4.4 : Variation de la contrainte de rupture en fonction du rapport $\frac{\delta_c}{t}$ pour la plaque
pré-fissurée 61

Figure 4.5 : La contrainte appliquée en fonction de la taille de la fissure pour la plaque pré
fissurée. 62

Figure 4.6 : σ_∞ en fonction du saut au point t en phase élastique pour la plaque trouée..... 63

Figure 4.7 : Maillage de la plaque trouée sans la rupture. 64

Figure 4.8 : Variation de $\frac{\sigma_\infty}{\sigma_c}$ en fonction de la position du point a pour le cas de la plaque
trouée..... 65

Figure 4.9 : La contrainte de rupture en fonction de $\frac{\delta_c}{t}$ pour le cas du trou. 66

Figure 4.10 : La contrainte appliquée en fonction de la taille de la fissure pour la plaque
trouée..... 67

Figure A.1 : Les domaines Ω et Ω_0 subdivisés en quatre sous domaines..... 71

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ.....
LISTE DES ILLUSTRATIONS
TABLE DES MATIÈRES
INTRODUCTION.....	11
1. RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE.....	16
1.1 Introduction.....	16
1.2 État de l’art.....	16
1.2.1 Théorie de GRIFFITH.....	16
1.2.2 Modèle de BARENBLATT	17
1.2.3 Modèle de DUGDALE	18
1.2.4 Modèle de NEEDLEMAN	19
1.2.5 Modèle de TVERGAARD	19
REMARQUE.....	20
1.2.6 Modèle de la Zone Cohésive Continuum (ZCC)	20
1.2.7 Modèle des forces cohésives utilisé dans notre étude	21
1.3 Travaux de FERDJANI, ABDELMOULA et MARIGO	23
1.3.1 Position du problème.....	23
1.3.2 Cas d’une fissure préexistante.....	25
1.3.2.1 Position du problème	25

1.3.2.2 Phase d'amorçage	26
1.3.2.3 Phase de propagation	28
1.3.2.4 Charge de rupture.....	29
1.3.3 Cas d'une cavité circulaire	30
1.3.3.1 Données du problème.....	30
1.3.3.2 Charge d'amorçage	31
1.3.3.3 Phase d'amorçage	31
1.3.3.4 Charge de rupture.....	32
1.3.3.5 Phase de propagation	33
1.3.4 Conclusion.....	34
2. POSITION DU PROBLEME TRAITÉ	36
2.1 Introduction	36
2.2 Rappel de quelques définitions	36
2.2.1 Saut du déplacement normal à travers la fissure	36
2.2.2 Saut critique de décohésion	36
2.2.3 Saut critique de rupture	36
2.2.4 Contrainte critique	36
2.2.5 Contrainte de décohésion	36
2.2.6 Contrainte maximale ou contrainte de rupture	37
2.3 Position du problème.....	37
2.4 Les différentes étapes de l'étude	41
2.5 Données du problème.....	42
3. ÉLABORATION DES CALCULS.....	44
3.1 Introduction	44

3.2 Les étapes de l'étude	44
3.2.1 Phase élastique et détermination de σ_a	45
3.2.2 Phase d'amorçage de la zone des forces cohésives : $\sigma_a \leq \sigma_\infty \leq \sigma_r$	46
3.2.3 L'évolution de σ_r en fonction de δ_c	46
3.2.4 Phase de propagation	47
3.3 Résolution du problème par la méthode des éléments finis	47
3.3.1 Les conditions aux limites	49
3.3.2 Lois de comportement	50
3.3.3 Choix des éléments finis	50
3.3.4 Matrices de rigidité élémentaires	51
3.3.4.1 Matrice de rigidité d'un élément triangulaire à 3 nœuds	51
3.3.4.2 Matrice de rigidité d'un élément d'interface	53
3.3.5 Vecteurs élémentaire des forces nodales	54
3.3.6 Génération du maillage	55
3.3.7 Assemblage de la matrice de rigidité globale	55
3.3.8 Assemblage du vecteur des forces nodales	56
3.3.9 Affectation des déplacements imposés	56
3.3.10 Résolution du système $\{F_G\} = [K_G]\{U_G\}$	57
4. RÉSULTATS DES CALCULS	58
4.1 Cas de la plaque fissurée	58
4.1.1 Phase élastique et détermination de la contrainte de décohésion σ_a	58
4.1.2 Phase d'amorçage de la zone de forces cohésives	59
4.1.3 L'évolution de σ_r en fonction de δ_c	61
4.1.4 Phase de propagation	62

4.2 Cas de la plaque trouée.....	63
4.2.1 Phase élastique et détermination de la contrainte de décohésion σ_a	63
4.2.2 Phase d'amorçage de la zone de forces cohésives :	63
4.2.3 L'évolution de σ_r en fonction de δ_c	65
4.2.4 Phase de propagation.....	66
CONCLUSION	68
RÉFÉRENCES.....	69
ANNEXE A.....	71

INTRODUCTION

La mécanique de la rupture, se basant sur la mécanique des milieux continus, est la science de l'étude des phénomènes de rupture des matériaux. Elle est utilisée pour étudier l'influence des différents facteurs extérieurs et intrinsèques d'un matériau sur les différentes phases de sa rupture c'est-à-dire : l'apparition possible de fissures, leurs évolutions et enfin la rupture finale du matériau. Les résultats obtenus grâce à la mécanique de la rupture sont souvent utilisés pour trouver des remèdes aux problèmes de fissuration et de rupture des constructions en services, ou bien pour prédire l'influence des défauts sur le comportement de ces constructions [1].

D'après la théorie de l'élasticité linéaire [2], pour un matériau homogène, isotrope et linéairement élastique, et soumis à un chargement de traction, la présence d'une fissure provoque une singularité dans le champ des contraintes en sa pointe. Cette singularité se manifeste dans l'expression de la contrainte au voisinage de la pointe par un terme dominant tendant vers l'infini quelque soit l'intensité du chargement non nul appliqué, ce qui est physiquement inadmissible. Ceci révèle la nécessité de revoir les hypothèses faites sur les corps fissurés, et de développer de nouveaux outils pour traiter les problèmes de la mécanique de la rupture. Dans les années 1920, GRIFFITH dans sa théorie de la rupture fragile [3], fut le premier à proposer un critère de propagation d'une fissure en se basant sur un bilan énergétique total dans le cadre de la théorie de l'élasticité. Ce critère reste encore d'actualité même s'il ne traite pas l'initiation de la fissuration, sa trajectoire et enfin son évolution dans le temps. Afin de corriger les insuffisances du modèle de GRIFFITH, BARRENBLOTT dans les années 1960 [2], introduisit le modèle des forces cohésives dans lequel il inclut l'existence d'une zone de transition en front de la fissure et la séparant de la partie saine du matériau.

Les modèles de rupture des forces cohésives présentent l'avantage, sur le modèle de GRIFFITH, de rendre compte de l'amorçage de fissure dans une structure saine en termes d'un critère en contraintes [4]. De façon générale, les modèles des forces cohésives sont de plus en plus employés et il est donc nécessaire de connaître de mieux en mieux leurs propriétés pour pouvoir bien les exploiter. En particulier les effets d'échelle qui les accompagnent du fait de la présence d'une longueur caractéristique sont mal connus [5].

Les modèles des forces cohésives, formulés en termes énergétiques, consistent à supposer que la densité d'énergie de surface ϕ dépend de façon non triviale du saut de déplacement $[[u]]$ qui est l'ouverture de la fissure, contrairement au modèle de GRIFFITH où elle est constante, exemple cf. figure 1. Ainsi dans le modèle de DUGDALE [5], en supposant que l'ouverture se fait en mode I pur, la densité d'énergie de surface ϕ s'écrit :

$$\phi([[u_n]]) = \begin{cases} G_c \frac{[[u_n]]}{\delta_c} & \text{si } [[u_n]] \leq \delta_c \\ G_c & \text{si } [[u_n]] \geq \delta_c \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

Dans (1), $[[u_n]]$ désigne le saut du déplacement normal, G_c représente le taux de restitution d'énergie critique de la théorie de GRIFFITH, alors que δ_c est une longueur interne caractéristique des modèles de forces cohésives. Le rapport $\frac{G_c}{\delta_c}$ a la dimension d'une contrainte et représente la contrainte critique du matériau :

$$\sigma_c = \frac{G_c}{\delta_c} \dots\dots\dots (2)$$

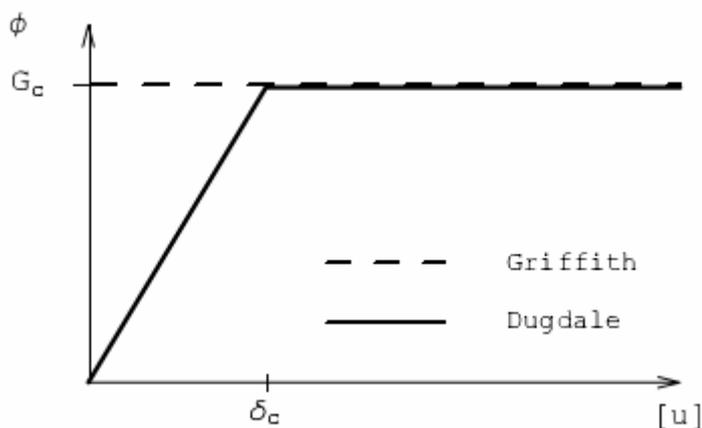


Figure 1 : Densités d'énergie de surface d'une fissure en fonction du saut de déplacement dans les modèles de DUGDALE et de GRIFFITH

En termes de forces cohésives, la contrainte normale σ_{nn} d'interaction entre les lèvres de fissure vaut donc σ_c tant que $[[u_n]] < \delta_c$ et s'annule dès que $[[u_n]] > \delta_c$. En pratique, les lèvres des fissures sont donc divisées en deux zones : une zone dite cohésive dans laquelle les forces cohésives ne sont pas nulles et une zone dite non cohésive dans laquelle il n'y a plus de force cohésive. La zone cohésive se situe près de la pointe, là où l'ouverture ne dépasse pas le seuil critique δ_c .

Le fait que σ_c joue le rôle de contrainte critique se vérifie dans l'étude d'une barre en traction simple. En raisonnant comme DEL PIERO [5] ou CHARLOTTE *et al.* [6] à partir d'un principe de minimisation d'énergie, on montre que la réponse élastique, où le champ de déplacement est de la forme $u(x) = \frac{\sigma}{E}x$, E étant le module d'YOUNG, cesse d'être un minimum relatif de l'énergie totale de la barre lorsque la contrainte appliquées dépasse la contrainte critique σ_c . La conséquence directe de cette présence d'une contrainte critique dans le modèle est qu'une structure donnée ne pourra pas supporter n'importe quel niveau de chargement conformément aux résultats classiques des théories de calcul à la rupture ou d'analyse limite. Cependant il y a lieu de distinguer les charges limites élastiques, i.e. les charges à partir des quelles la réponse élastique cesse d'être un minimum relatif de l'énergie et où donc la structure doit développer une fissuration, des charges limites proprement dites, i.e. des charges maximales que peut supporter la structure même en se fissurant. Les premières désignent les charges d'amorçage et les secondes désignent les charges de rupture.

Rappelons ce qu'il en est de la charge d'amorçage dans le cas du modèle de GRIFFITH. Notons que seuls les défauts du type fissure, i.e. les défauts présentant une singularité forte en \sqrt{r} pour le champ des déplacements, sont susceptibles de se propager. Les cavités, les entailles et autres défauts non assez pointus induisent une singularité trop faible pour donner un taux de restitution d'énergie non nul. Pour une fissure de petite taille l et de normale \vec{n} , placée en un point x où les contraintes normales en l'absence du défaut seraient d'amplitude σ , le taux de restitution d'énergie est de l'ordre de $\sigma^2 l$. Il tend donc vers 0 lorsque l tend vers 0. Donc, dans la théorie de GRIFFITH où les fissures ne se propagent que si le taux de restitution d'énergie atteint la valeur critique G_c , les défauts de petite taille sont inoffensifs. Ceci est un atout pour ce modèle. Mais en contrepartie, le modèle de GRIFFITH est trop conservatif puisqu'il ne sait pas rendre compte de l'amorçage de fissures en dehors de points de fortes singularités, cf. FRANCFORT *et al.* [7].

Si l'on abandonne le modèle de GRIFFITH au profit du modèle de DUGDALE, le critère de propagation d'un défaut ou d'amorçage de fissure ne se formule plus en termes du taux de restitution d'énergie critique G_c , mais en termes de la contrainte critique σ_c , cf. CHARLOTTE *et al.* [6] et LAVERNE *et al.* [8]. Ce faisant, on pourrait a priori s'attendre à ce que la forme des défauts joue un rôle essentiel et que ceux favorisant les concentrations de contraintes s'avèrent plus nocifs. En particulier les fissures, défauts qui induisent des singularités, devraient être sensiblement plus défavorables que les cavités circulaires, défauts qui par leur forme parfaite sont ceux qui engendrent le moins de concentration. Ceci se révèle vrai pour la charge d'amorçage, mais faux pour la charge limite [5]. En effet, il est clair que la charge d'amorçage est très sensible à la forme du défaut puisqu'elle est directement liée aux concentrations de contraintes induites par le défaut sur la réponse élastique. Ainsi, dans le cas d'une fissure préexistante, du fait de la présence d'une singularité de contraintes en pointe de fissure, la charge d'amorçage est nulle, de nouvelles discontinuités i.e. sauts de déplacement apparaissent dès la mise en charge. Par contre, dans le cas d'un trou circulaire dans une plaque, la concentration de contraintes est finie et donc la charge d'amorçage n'est pas nulle.

Par contre pour la charge de rupture, elle, est beaucoup moins sensible à la forme du défaut qu'à sa taille. En particulier, du fait de la présence de la longueur caractéristique δ_c dans le modèle de DUGDALE-BARENBLATT, les effets d'échelle sont importants. La charge de rupture dépend de façon essentielle du rapport entre la taille du défaut et la longueur caractéristique δ_c . Un résultat majeur serait de montrer que, quelle que soit la forme du défaut, la charge de rupture tend vers la contrainte critique σ_c lorsque la longueur caractéristique δ_c tend vers l'infini, à taille du défaut fixée. Ceci signifierait qu'avec le modèle de DUGDALE-BARENBLATT, les structures sont insensibles aux petits défauts et se comportent comme des structures saines, et ce bien qu'elles développent des zones d'amorçage avant rupture.

Dans leur publication [5], FERDJANI *et al* ont étudièrent, avec le modèle de forces cohésives de DUGDALE, l'influence des défauts de petite taille devant la longueur caractéristique du matériau sur les capacités de résistance d'une structure. Ils ont traité pour cela deux exemples : tout d'abord, de façon purement analytique, le cas d'une plaque pré fissurée, puis, en utilisant la méthode des éléments finis, le cas d'une plaque contenant une cavité circulaire. En comparant les réponses obtenues pour la plaque fissurée et la plaque trouée, ils constatèrent que la charge d'amorçage est très sensible à la forme du défaut, mais pas à sa taille. Elle est nulle dans le cas d'une fissure et pratiquement égale au tiers de la

contrainte critique du matériau pour un trou circulaire. Par contre, la charge limite de la structure est très sensible à la taille du défaut, mais peu à sa forme. De plus, plus le défaut est petit, la longueur de référence étant la longueur caractéristique du matériau introduite dans le modèle de DUGDALE, plus la charge limite se rapproche de la contrainte critique du matériau. Autrement dit, ceci semble indiquer que les défauts de petite taille ont peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure si l'on adopte le modèle de DUGDALE. Il serait évidemment intéressant de généraliser ce résultat à n'importe quel type de défaut, n'importe quel type de structure et n'importe quel modèle de forces cohésives.

Notre travail se situe dans la continuité des travaux de FERDJANI *et al*, et a pour objectif de généraliser les résultats obtenus dans [5] au modèle général de force cohésive. Pour cela un modèle particulier de forces cohésives fait l'objet d'étude dans ce mémoire. Nous étudions par la méthode des éléments finis de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement à rupture en mode **I**, d'une plaque en Poly méthacrylate de méthyle **PMMA** [9]. Nous ne traitons pas la dépendance de la contrainte d'amorçage vis-à-vis des défauts étant donné quelle est nulle dans le modèle utilisé, cf. chapitre 1.

Ce mémoire sera partagé en cinq chapitres. Le chapitre 1 concerne la recherche bibliographique qui comprend l'état de l'art pour les modèles de forces cohésives et la présentation de l'étude de FERDJANI *et al*. Le chapitre 2 concerne une présentation du problème traité. Le chapitre 3 traite la mise en œuvres des calculs et les algorithmes utilisés pour les calculs par la Méthode des Eléments Finis. Dans le chapitre 4 sera exposé les résultats des calculs pour les deux cas de défauts étudiés avec les différentes phases de rupture. Enfin, une conclusion.

CHAPITRE 1

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons un bref aperçu sur les principaux modèles de rupture, ensuite nous présenterons le modèle de forces cohésives traité. Nous présenterons aussi l'étude [5] qui est le point de départ notre travail.

Nous ferons abstraction des détails de calcul pour les différents modèles pour n'exposer que les résultats ou les caractères principaux de chacun ainsi que les critiques faites par certains auteurs.

1.2 État de l'art

1.2.1 Théorie de GRIFFITH

Cette théorie de la rupture fragile s'attache à décrire l'évolution de fissures dans une structure, où le matériau constitutif est supposé être linéairement élastique, en s'appuyant sur un critère de propagation basé sur la notion de taux de restitution d'énergie critique. Dans ce critère, pour qu'il y ait propagation d'une fissure existante, il faut que $G \geq G_c$, G étant le taux d'énergie élastique restitué par la structure lors d'un accroissement *unitaire* de la fissure à chargement fixé, alors que G_c désigne la ténacité du matériau [7]. Ce critère garde jusqu'à nos jours un grand succès et est très utilisé comme outil de prévention.

Ce critère de GRIFFITH présente des insuffisances tel que son impuissance à prédire l'amorçage de la fissure dans un matériau sain ou son trajet spatial et temporel [2,3,5,7]. Pour y remédier, FRANCFORT et MARIGO reprirent le raisonnement originel de GRIFFITH et l'améliorèrent dans leur théorie appelée « La théorie de GRIFFITH de la rupture fragile

revisitée » [3]. La théorie d'IRWIN se base sur un critère de propagation, qui se base sur le facteur d'intensité de contrainte. Cette théorie est équivalente à la théorie de GRIFFITH.

Dans les théories de GRIFFITH et d'IRWIN, le matériau est supposé rester linéairement élastique en chacun de ses points après propagation et les lèvres de la fissure sont libres de contraintes.

1.2.2 Modèle de BARENBLATT [2] (1960)

Prenant acte du fait que les contraintes infinies prédites par le modèle de GRIFFITH sont dépourvues de signification, le matériau ne pouvant résister à de telles contraintes, BARENBLATT émet l'hypothèse qu'il existe, en amont de la pointe de la fissure, une *zone de transition* en cours de rupture, Figures 1.1 et 1.2; des forces inter atomiques de cohésion s'exercent entre les futures lèvres de la fissure dans cette zone. Sur les figures 1.1 et 1.2, le front de fissure correspond aux points $\pm a$ et la limite entre la zone de transition et la partie saine du matériau correspond aux points $\pm c$. Ces forces de cohésion s'annulent lorsque l'écartement en front de fissure atteint une valeur critique δ_c . La contrainte de cohésion σ_c est une caractéristique du matériau. La longueur de la zone de transition est supposée s'adapter de façon que le facteur d'intensité de contrainte de la théorie d'IRWIN [2] en $\pm c$ soit nul.

La recherche de l'expression de l'écartement critique δ_c révèle qu'il est fonction de σ_c et de facteurs intrinsèque au matériau, et donc qu'il est aussi caractéristique du matériau.

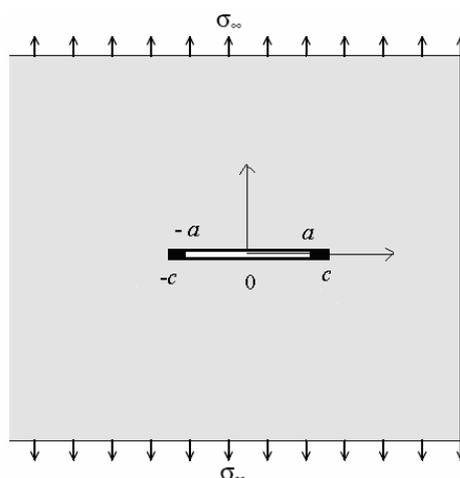


Figure 1.1 : Un milieu infini soumis à un chargement de traction et comportant une fissure rectiligne.

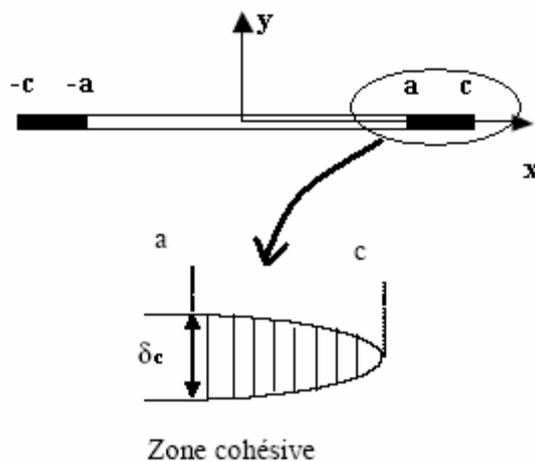


Figure 1.2 : Fissure avec zone cohésive.

1.2.3 Modèle de DUGDALE [4]

Ce modèle décrit l'évolution des contraintes de traction σ_∞ en fonction du saut de déplacement normal δ_n . Le saut reste nul tant que la contrainte n'atteint pas une valeur critique σ_c puis le comportement utilisé est celui d'un solide rigide parfait jusqu'à un seuil d'ouverture δ_c au-delà duquel l'interaction des lèvres devient nulle (cf. Figure 1.3). Le critère de propagation s'écrit comme suit : $\delta_c \leq \delta_n$.

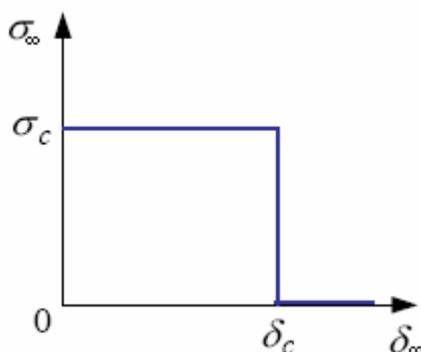


Figure 1.3 : Loi de comportement de DUGDALE dans la direction normale.

DOLL, WEIDMANN et KERKHOFF [1], ont montré une excellente correspondance entre le modèle de DUGDALE et leurs résultats de mesure de la zone craquelée sur le PMMA.

1.2.4 Modèle de NEEDLEMAN [4]

Ce modèle décrit l'évolution des contraintes cohésives normale σ_n et tangentielle σ_t en fonction des composantes normale et tangentielle du saut de déplacement δ_n et δ_t . On représente sur la Figure 1.4 l'évolution de la contrainte normale en fonction du saut normal quand le saut tangent est nul.

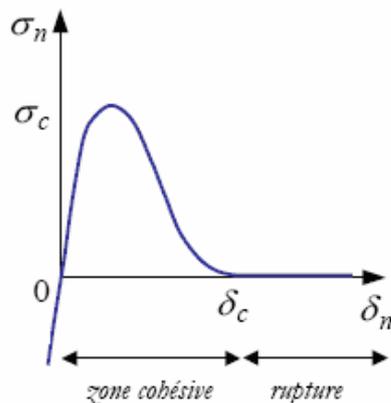


Figure 1.4 : Loi de comportement de la zone cohésive de NEEDLEMAN dans la direction normale.

1.2.5 Modèle de TVERGAARD [4]

Ce modèle reprend le modèle de NEEDLEMAN de 1987 et introduit une notion d'irréversibilité du comportement : la décharge s'effectue linéairement, ainsi qu'un frottement de Coulomb post décohésion. On représente sur la Figure 1.5 l'allure de la contrainte tangentielle en fonction du saut tangentiel lorsque le saut normal est nul.

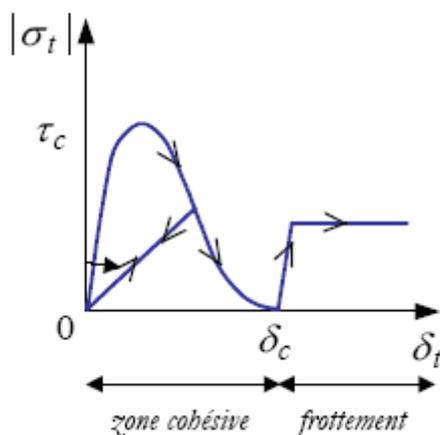


Figure 1.5 : Evolution de la force tangentielle en fonction du saut tangent

REMARQUE

Tous les modèles cités précédemment se basent sur l'idée qu'il y a une interaction entre les futures lèvres de la fissure, mais différent sur la loi de comportement de ces forces d'interaction dans la zone cohésive. Ces forces sont pour beaucoup d'auteurs dues à l'attraction atomique entre les atomes des deux lèvres.

1.2.6 Modèle de la Zone Cohésive Continuum (ZCC) [10]

Ce modèle (en anglais : Continuum Cohesive Zone Model (**CCZM**)) suppose l'existence en amont de la fissure d'une zone de transition dans le matériau entre la fissure et la partie saine, voir Figure 1.6. Il propose que sur le trajet éventuel de la fissure, il y aura apparition d'une zone entre les futures lèvres dont laquelle les sauts de déplacement sont proportionnels aux efforts agissant dans cette zone. La relation entre le saut et l'effort est de la forme $\sigma = K\delta$, voir Figure 1.7, où σ est la contrainte appliquée, δ le saut de déplacement et K une caractéristique du matériau. Il est clair que cette zone s'amorce et existe pour n'importe quelle valeur positive de la contrainte et donc la contrainte d'amorçage est nulle. Pour empêcher l'ouverture de la fissure dès la mise en charge, le facteur K est choisit très grand et d'après observations expérimentales il est de l'ordre de mille fois le module d'Young, c'est-à-dire : $10^3 \leq \frac{K}{E} < 10^4$.

Le critère de rupture dans cette zone cohésive est que le saut de déplacement δ dépasse une valeur critique δ_c caractéristique du matériau. Cette zone se comporte comme si elle est formée d'une série de ressorts avec comme critère de rupture de chaque ressort :son allongement δ vérifie $\delta \geq \delta_c$.

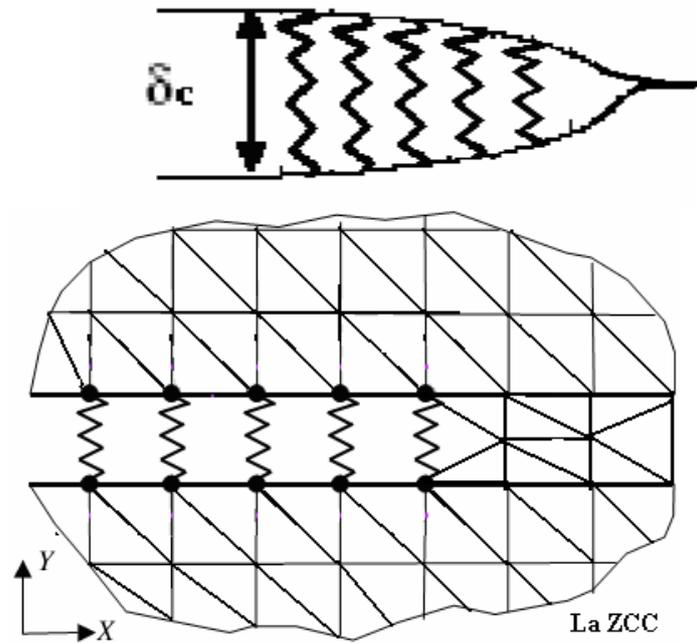


Figure 1.6 : La Zone Cohésive Continuum.

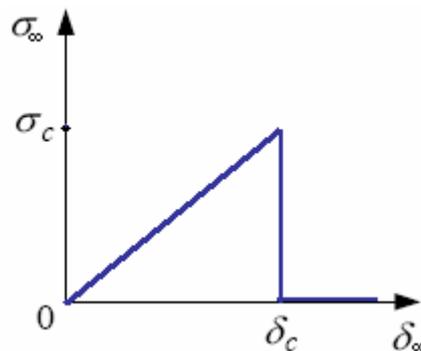


Figure 1.7 : Loi de comportement du saut de déplacement dans la zone cohésive continuum.

1.2.7 Modèle des forces cohésives utilisé dans notre étude

Le modèle étudié dans ce mémoire est une combinaison entre le modèle la zone cohésive continuum et le modèle de DUGDALE. Ce modèle ajoute au modèle de DUGDALE une zone cohésive continuum dans la partie saine du matériau et qui se situe sur le trajet de la fissure. La loi de comportement au voisinage de la pointe de la fissure est représentée sur la figure 1.8. La position de chaque zone est représentée dans la figure 1.9.

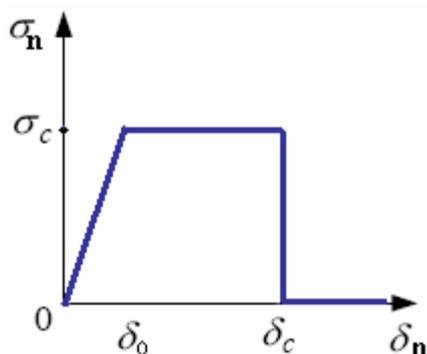


Figure 1.8 : Loi de comportement du saut de déplacement dans le modèle général des zones cohésives.

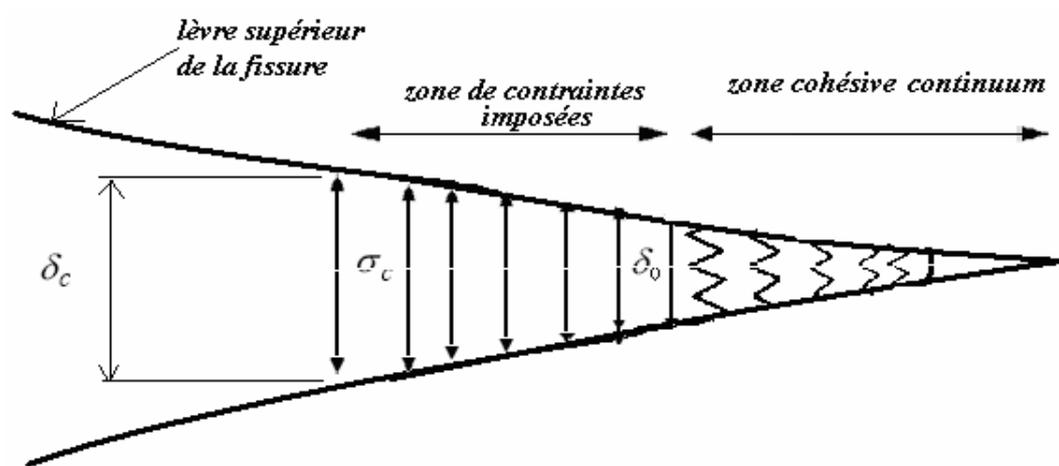


Figure 1.9 : Les zones de la fissure dans le modèle général.

D'après ce modèle, le critère de propagation de la fissure est le même que celui du modèle de DUGDALE, c'est-à-dire que $\delta_c \leq \delta_n$, cependant deux autres critères s'ajoutent : pas de contrainte d'amorçage puisque elle est nulle, et la propagation de la zone des forces cohésives qui nécessite que $\delta_0 \leq \delta_n$, où δ_0 est le saut maximal défini dans le modèle la ZCC.

Nous appellerons δ_0 *saut critique de décohesion* et δ_c *saut critique de rupture*, qui sont tous les deux caractéristiques du matériau et qui vérifient l'inégalité $\delta_0 < \delta_c$. La charge de traction σ_a qui provoque un saut critique de décohesion est appelée *charge de décohesion*, et la charge σ_r qui provoque un saut critique de rupture en front de fissure est appelée *charge de rupture*.

D'après la loi de comportement du saut de déplacement nous remarquons que la valeur δ_0 correspond à la contrainte critique σ_c donnée par l'équation 1.1

$$\sigma_c = K \delta_0 \dots\dots\dots (1.1)$$

K étant une caractéristique du matériau défini précédemment dans 1.2.6.

1.3 Travaux de FERDJANI, ABDELMOULA et MARIGO [5] :

Etude de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement à rupture avec le modèle de DUGDALE

Le but du travail [5] est de montrer, dans le cadre de la mécanique de la rupture avec le modèle de forces cohésives de DUGDALE, que les défauts de petite taille devant la longueur caractéristique du matériau ont pratiquement peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure. Pour cela, deux exemples sont traités : tout d'abord, de façon purement analytique, le cas d'une plaque pré fissurée, puis, en utilisant la méthode des éléments finis, le cas d'une plaque contenant une cavité circulaire.

1.3.1 Position du problème

On considère un milieu bidimensionnel carré $\Omega = (-L, +L)^2$ de frontière $\partial\Omega$, contenant un défaut centré D de frontière ∂D . Le milieu Ω soumis sur les faces supérieure $y = +L$ et inférieure $y = -L$ à une traction uniforme d'intensité σ_∞ croissante depuis 0. Le défaut considéré D est un trou circulaire de rayon t ou une fissure de longueur $2t$. L'étude est effectuée dans le cadre des déformations planes. Le matériau est homogène, isotrope et linéairement élastique, de tenseur de rigidité $\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{A}}$, de module de Young E et de coefficient de Poisson ν . Pour des raisons de symétrie, on supposera que la fissuration se développe sur l'axe $y = 0$ et de façon symétrique depuis les points $(\pm t, 0)$ du défaut initial. Les pointes de fissure créées sont situées aux points $x = \pm a$. L'évolution de la fissuration suit la loi de DUGDALE-BARENBLATT, autrement dit les lèvres $(-a, -t)$ et $(+t, +a)$ (de l'axe $y = 0$)

peuvent comporter deux parties : une zone, proche de la pointe et dite zone cohésive, où les lèvres sont soumises à des forces cohésives de traction d'intensité constante σ_c , et une autre zone, proche du défaut initial et dite zone non cohésive, où les lèvres n'interagissent plus. La limite entre ces deux zones sont les points $x = \pm c$. Les valeurs de a et c dépendent évidemment de la valeur de la charge σ_∞ . Compte tenu de la symétrie du problème, toutes les évolutions se feront en mode I pur.

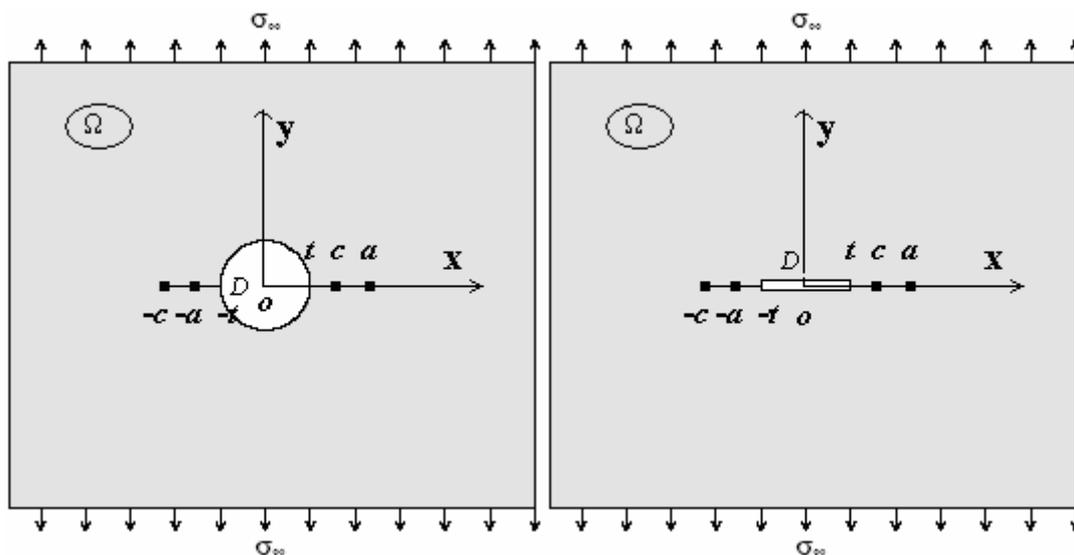


Figure 1.10 : Géométrie de la plaque trouée et la plaque fissurée avec les zones cohésive et non cohésive

Notons que pour certaines valeurs de σ_∞ certaines zones peuvent ne pas exister. On a donc en général $a \geq c \geq t$, les égalités étant possibles. Lors de la mise en charge ($\sigma_\infty = 0$), les conditions initiales sont $a = c = t$.

On peut a priori distinguer trois phases d'évolution de la fissuration lors du processus de chargement :

1) Phase élastique : $0 \leq \sigma_\infty \leq \sigma_a$. Durant cette phase, la réponse de la structure est purement élastique. La structure ne contient que le défaut initial, il n'y a pas de fissure supplémentaire. On doit en outre vérifier que partout dans la structure la contrainte principale maximale est inférieure ou égale à la contrainte critique σ_c . Cette phase cesse lorsque la contrainte de traction maximale dans la structure atteint la valeur critique σ_c . La valeur de la charge correspondante est la charge d'amorçage σ_a .

2) Phase d'amorçage : $\sigma_a < \sigma_\infty \leq \sigma_r$. Durant cette phase, une fissure se crée mais ne comporte qu'une zone cohésive. Au fur et à mesure que l'on augmente le chargement, cette

zone grandit et le saut de déplacement normal croît. Cette phase cesse lorsque l'ouverture maximale dans la zone cohésive atteint la valeur critique δ_c . La valeur de la charge correspondante est la charge de rupture σ_r .

La valeur de a est telle que le facteur d'intensité des contraintes soit nul en $(\pm a, 0)$:

$$K_I(a) = 0.$$

On doit en outre vérifier que partout dans la structure la contrainte principale maximale est inférieure ou égale à la contrainte critique et que dans la zone cohésive l'ouverture est inférieure à l'ouverture critique δ_c . Cette phase cesse lorsque l'ouverture maximale dans la zone cohésive atteint la valeur critique δ_c . La valeur de la charge correspondante est la charge de rupture σ_r .

3) Phase de propagation. Une fois la charge de rupture atteinte, l'équilibre de la structure ne peut plus être assuré sans que se développe une zone de fissuration non cohésive. La valeur de a est toujours déterminée de façon à ce que le facteur d'intensité des contraintes soit nul en $(\pm a, 0)$, alors que c l'est de façon à ce que l'ouverture vaille δ_c en $(\pm c, 0)$:

$$K_I(a) = 0 \text{ et } \llbracket u_2 \rrbracket(c) = \delta_c \quad \dots\dots\dots(1.2)$$

On doit toujours vérifier que partout dans la structure la contrainte principale maximale est inférieure ou égale à la contrainte critique et que dans la zone cohésive l'ouverture est inférieure à l'ouverture critique δ_c .

1.3.2 Cas d'une fissure préexistante

1.3.2.1 Position du problème

Le défaut initial est ici une fissure non cohésive de longueur $2t$, placée sur l'axe $y = 0$, centrée et orientée donc perpendiculairement à l'axe de traction. Pour l'étude, on se servira de la solution donnée par BUI [15] pour une fissure non cohésive de longueur $2c$ placée dans un milieu infini, soumise à l'infini à une traction simple d'intensité σ_∞ dans la direction y et ayant à ses extrémités $x = \pm c$ une zone cohésive dont les pointes sont en $x = \pm a$. Les lèvres des zones cohésives sont soumises à une contrainte normale de traction d'intensité

constante σ_c . Le milieu a un comportement linéairement élastique isotrope. La solution de ce problème ne vérifie pas exactement les conditions aux limites sur le bord de en raison des dimensions finies de celui-ci. Toutefois, on peut considérer que l'approximation ainsi construite est d'autant meilleure que la taille du défaut est petite devant la taille du domaine. Comme c'est le comportement asymptotique de la solution, lorsque la taille du défaut tend vers zéro, qui nous intéresse, on se satisfera de cette solution approchée.

Le problème se réduit donc à un problème d'élasticité plane posé sur un domaine infini fissuré avec des lèvres de fissure soumises à une distribution donnée de forces. Il se résout classiquement à l'aide de potentiels complexes suivant les techniques développées par MUSKHELISHVILI. En notant $q(x)$ la répartition des contraintes normales exercées sur les lèvres de la fissure, $x \in (-a, +a)$:

$$q(x) = \begin{cases} \sigma_\infty, & \text{si } |x| < t \\ \sigma_\infty - \sigma_c, & \text{si } t < |x| < a \end{cases} \dots\dots\dots (1.3)$$

le FIC à la pointe a s'écrit :

$$K_I(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} q(x) \sqrt{\frac{x+a}{a-x}} dx \dots\dots\dots (1.4)$$

1.3.2.2 Phase d'amorçage

Si l'on prend $a = t$, alors, comme $q(x) = \sigma_\infty$, on trouve $K_I(t) > 0$ dès lors que $\sigma_\infty > 0$, ce qui signifie que les contraintes sont singulières dans la réponse élastique de la structure initiale dès la mise en charge. Autrement dit, ici la charge d'amorçage est nulle :

$$\sigma_a = 0.$$

Pour que partout dans la structure la contrainte principale maximale soit inférieure ou égale à la contrainte critique σ_c , il faut donc qu'une zone d'amorçage se développe dès la mise en charge. Sa longueur s'obtient en écrivant que $K_I(a) = 0$. On obtient :

$$a = \frac{t}{\cos\left(\frac{\pi \sigma_\infty}{2 \sigma_c}\right)} \dots\dots\dots (1.5)$$

Le graphe représentant la charge appliquée σ_∞ en fonction de la position de la pointe d'amorçage a est tracé figure 1.11. On voit que la charge croît de 0 à σ_c quand la zone cohésive croît de t à l'infini.

Ces expressions ne sont valables que dans la phase d'amorçage, i.e. tant que l'ouverture en $x=t$ n'atteint pas la valeur critique δ_c . Or la valeur de cette ouverture est donnée par :

$$[[u_2]](t) = \frac{8(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\sigma_c}{E} \ln\left(\frac{a}{t}\right)t \dots\dots\dots(1.6)$$

ou encore en utilisant (1.5) :

$$[[u_2]](t) = -\frac{8(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\sigma_c}{E} \ln \cos\left(\frac{\pi \sigma_\infty}{2 \sigma_c}\right)t \dots\dots\dots(1.7)$$

La charge de rupture s'obtient donc en écrivant que $[[u_2]](t) = \delta_c$, d'où :

$$\sigma_r = \frac{2}{\pi} \arccos\left(\exp\left(-\frac{\lambda_c}{t}\right)\right) \sigma_c \dots\dots\dots(1.8)$$

où λ_c est la longueur caractéristique du matériau qui se déduit de l'ouverture critique δ_c et des constantes matérielles par :

$$\lambda_c \equiv \frac{\pi}{8(1-\nu^2)} \frac{E}{\sigma_c} \delta_c \dots\dots\dots(1.9)$$

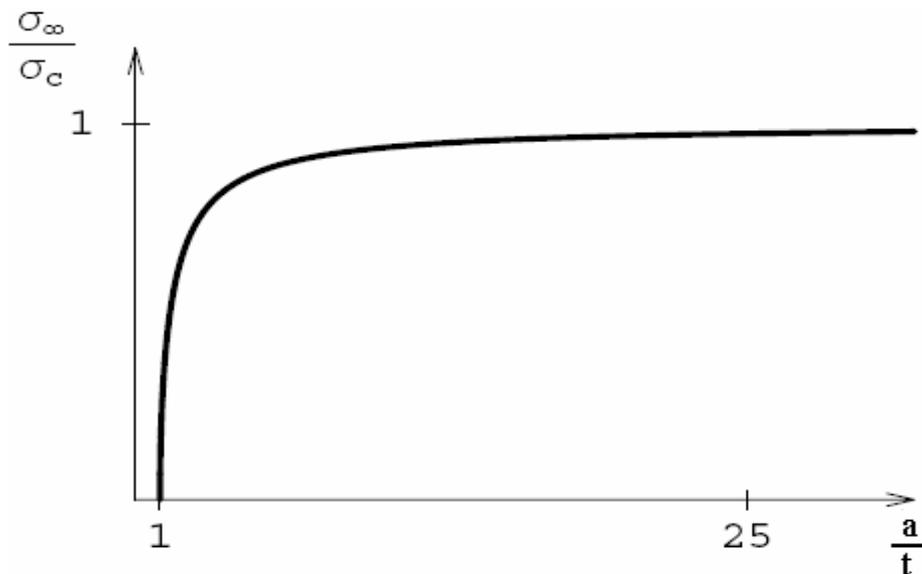


Figure 1.11. Relation entre la charge appliquée et la position de la zone cohésive lors de la phase d'amorçage.

1.3.2.3 Phase de propagation

Lors de la phase de propagation, la position des pointes c et a doivent vérifier (1.2). La répartition de la contrainte normale sur les lèvres de la fissure s'écrit maintenant :

$$q(x) = \begin{cases} \sigma_{\infty}, & \text{si } |x| < c \\ \sigma_{\infty} - \sigma_c, & \text{si } c < |x| < a \end{cases} \dots\dots\dots (1.10)$$

La relation entre a et c s'obtient en écrivant que $K_I(a) = 0$, d'où :

$$a = \frac{c}{\cos\left(\frac{\pi \sigma_{\infty}}{2 \sigma_c}\right)} \dots\dots\dots (1.11)$$

La relation entre la charge appliquée σ_{∞} et la position de la pointe c s'obtient en écrivant que $[[u_2]](c) = \delta_c$, d'où :

$$\sigma_{\infty} = \frac{2}{\pi} \arccos\left(\exp\left(-\frac{\lambda_c}{t}\right)\right) \sigma_c \dots\dots\dots (1.12)$$

et en tenant compte de (1.11) la relation entre σ_{∞} et a devient :

$$a = \frac{\lambda_c}{\cos\left(\frac{\pi \sigma_{\infty}}{2 \sigma_c}\right) \left| \ln \cos\left(\frac{\pi \sigma_{\infty}}{2 \sigma_c}\right) \right|} \dots\dots\dots (1.13)$$

On voit donc que l'on doit diminuer la charge si l'on veut que la propagation de la pointe soit stable et vérifie l'ensemble des relations de la loi de comportement, d'équilibre et des conditions aux limites. Ceci signifie que la charge de rupture σ_r est en fait la charge limite que peut supporter la structure. La figure 1.12 représente dans un diagramme $\sigma_{\infty} - a$ l'évolution de la fissuration avec la charge à partir des relations (1.1) et (1.13) obtenues pour chaque phase. On notera que la longueur interne δ_c n'intervient que dans la phase de propagation (et donc évidemment dans la charge de rupture). La phase de propagation est représentée pour $t = \lambda_c$, la charge de rupture valant alors $\sigma_r = 0.76 \sigma_c$.

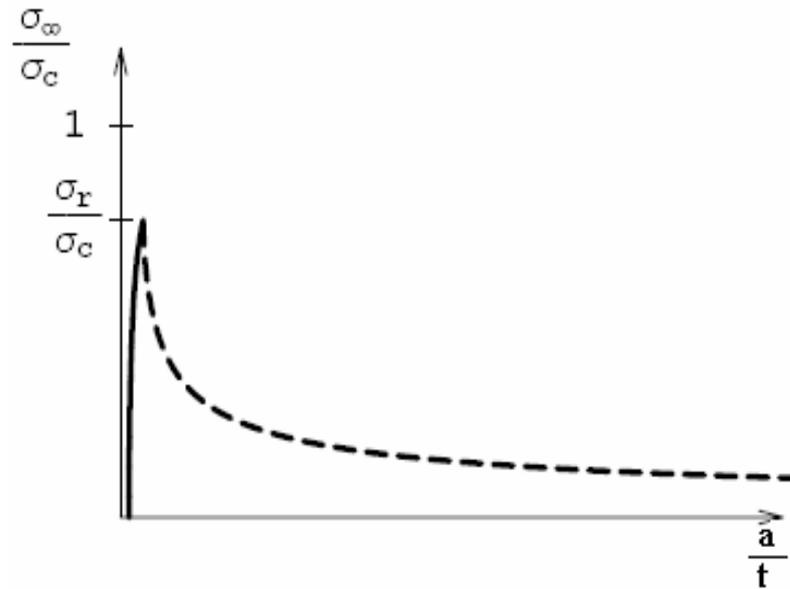


Figure 1.12 : Relation entre la charge appliquée et la position de la zone cohésive : En trait plein, lors de la phase d'amorçage, en pointillés lors de la phase de propagation.

1.3.2.4 Charge de rupture

La dépendance de la charge de rupture selon la taille de la fissure initiale est donnée par (1.8) et est représentée graphiquement dans la figure 1.13. On voit que la charge de rupture dépend en fait de façon essentielle du rapport entre la longueur t du défaut initial et la longueur caractéristique λ_c du matériau : plus la taille relative du défaut est petite et plus la charge de rupture se rapproche de la contrainte critique σ_c du matériau. Et ce, bien qu'il y ait amorçage d'une nouvelle fissure dès la mise en charge.

On peut donc en conclure qu'avec la loi de fissuration de DUGDALE, la plaque (qui peut aussi être vue comme un volume élémentaire représentatif du matériau) est pratiquement insensible aux défauts initiaux de petite taille de type fissure.

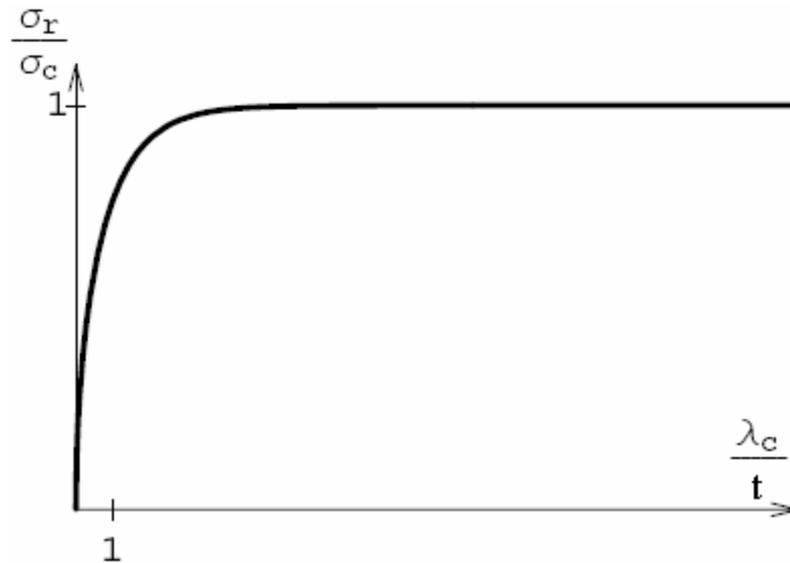


Figure 1.13 : Dépendance de la charge de rupture avec la taille relative de la fissure initiale

1.3.3 Cas d'une cavité circulaire

1.3.3.1 Données du problème

Le défaut initial est ici une cavité circulaire de rayon t centrée en $(0, 0)$, cf. figure 1.10. Le domaine troué est maillé par des éléments finis triangulaires à 3 nœuds (pour des raisons de symétrie, seul un quart du domaine est maillé). Pour des facilités de mise en oeuvre numérique, un choix est fait d'étudier l'influence de l'effet d'échelle, i.e. du rapport $\frac{\lambda_c}{t}$, en gardant un rayon constant du trou et en faisant varier l'ouverture critique δ_c . Les dimensions de la plaque sont 20×20 mm, i.e. $L = 10$ mm, le rayon du trou est de 1 mm, i.e. $t = 1$ mm.

Dans les applications numériques, le choix pour les données matériau est celui d'un polymère PMMA :

$$\sigma_c = 72 \text{ MPa}, E = 3000 \text{ MPa}, \nu = 0.36.$$

1.3.3.2 Charge d'amorçage

On commence par faire un calcul purement élastique pour déterminer la charge d'amorçage σ_a , i.e. la charge σ_∞ à partir de laquelle la plus grande contrainte principale atteint la valeur critique σ_c en un point de la structure. Pour des raisons évidentes de symétrie et de conditions aux limites, la concentration de contraintes a lieu au bord du trou, aux points $(x = \pm t, y = 0)$. Si la plaque était de dimension infinie, la contrainte σ_{22} en ces points serait exactement égale à $3\sigma_\infty$ et la charge d'amorçage serait de ce fait exactement égale à $\frac{\sigma_c}{3} = 24MPa$. En raison des dimensions finies de la plaque et des approximations numériques, la charge d'amorçage calculée σ_a est égale à 22.2 MPa.

1.3.3.3 Phase d'amorçage

Une zone cohésive apparaît et s'étend si l'on augmente la charge au-delà de σ_a . La longueur de cette zone est telle que la singularité des contraintes au point a soit nulle et donc que le facteur d'intensité des contraintes $K_I(a) = 0$. D'un point de vue numérique, cela nécessiterait d'itérer sur la valeur de a et de calculer, à chaque itération, la valeur de $K_I(a)$, les itérations finissant lorsque l'on a approximativement trouvé la valeur de a annulant le K_I . Le calcul du K_I pouvant se révéler imprécis, on a opté pour une autre stratégie numérique basée sur l'interprétation cinématique du K_I . Comme K_I est proportionnel à la discontinuité du déplacement normal au voisinage de la pointe de la fissure, chercher la position a telle que K_I soit nul revient pratiquement à chercher la position a telle que l'ouverture $[[u_2]]$ au nœud le plus proche soit approximativement nulle. De plus tant que la zone cohésive est trop courte, i.e. tant que a est trop faible, le F.I.C. est strictement positif, alors que quand la zone cohésive est trop longue, i.e. dès que a est trop grande, le F.I.C. devient strictement négatif. Il suffit donc de déterminer, en itérant sur a , la valeur de a à partir de laquelle l'ouverture du nœud voisin change de signe. En résumé, pour déterminer la position de la zone cohésive (pour une valeur du chargement σ_∞ donnée) on procède comme suit :

- 1) on itère sur la valeur de a en partant de la valeur obtenue au pas précédent ;
- 2) on calcule l'ouverture $[[u_2]]$ au noeud du maillage le plus proche de la pointe a .
- 3) si cette ouverture est positive, alors on incrémente a et on arrête les itérations quand elle est devenue négative.

1.3.3.4 Charge de rupture

Pour déterminer la charge de rupture, pour une longueur caractéristique λ_c donnée, on procède de la façon suivante :

- 1) on itère sur la valeur de σ_∞ en partant de σ_a ;
- 2) on détermine la valeur de a correspondante en suivant le procédé itératif décrit dans le paragraphe précédent de façon à ce que $K_I(a) = 0$. Si jamais il n'existe pas de telle valeur de a , i.e. si la zone cohésive fait toute la largeur de la plaque, alors la charge actuelle σ_∞ est prise comme la charge de rupture.
- 3) si $a < L$, alors on calcule l'ouverture $[[u_2]]$ au point t ;
- 4) si cette ouverture est inférieure à δ_c , alors on incrémente la charge σ_∞ et on arrête les itérations dès que $[[u_2]](t)$ dépasse δ_c . La valeur actuelle de σ_∞ est la charge de rupture σ_r .

Ce procédé itératif est suivi pour chaque valeur de λ_c . Les valeurs numériques calculées sont représentées dans la figure 1.14 dans un diagramme $\sigma_r - \lambda_c$.

Comme attendu, la charge de rupture est une fonction croissante de λ_c , mais on notera que la charge de rupture n'atteint jamais la valeur σ_c quelle que soit la valeur de λ_c . C'est dû au caractère fini des dimensions de la plaque. En effet, en utilisant un raisonnement élémentaire de calcul à la rupture, il est facile de voir que la plaque trouée ne peut pas supporter une charge plus grande que $\left(1 - \frac{t}{L}\right)\sigma_c$ qui correspond à la charge d'équilibre de la plaque lorsque la zone cohésive occupe toute la largeur $\Gamma_a = (-L, -t) \times (t, L)$. Compte tenu des valeurs numériques choisies, la charge de rupture ne peut donc dépasser $0.9\sigma_c$. On voit que cette valeur est pratiquement atteinte lorsque $\lambda_c = 3t$. Notons enfin que si l'on faisait

tendre la longueur du défaut vers 0 ou la largeur de la plaque vers l'infini, alors la charge de rupture tendrait vers σ_c .

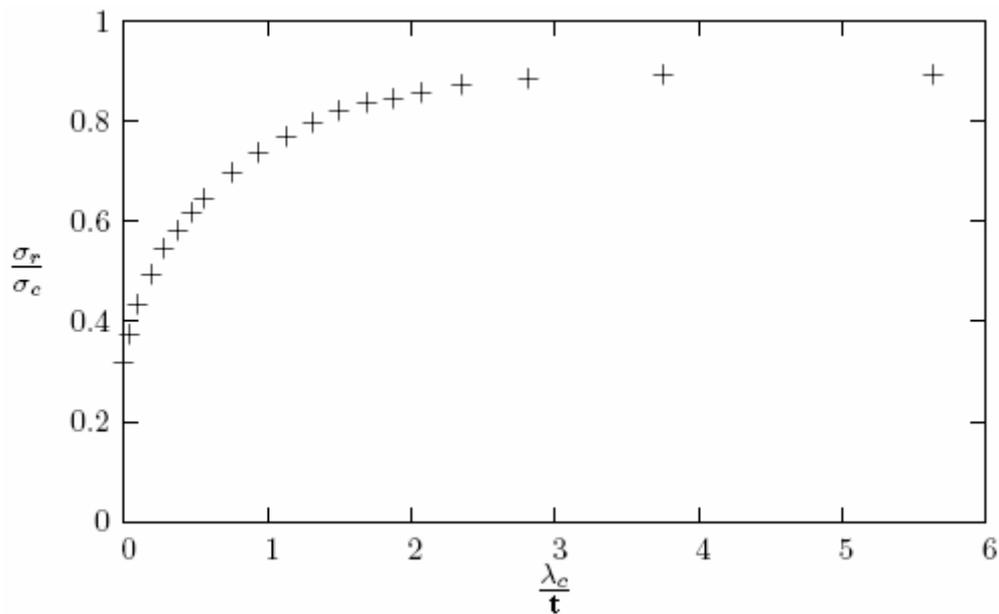


Figure 1.14 : Dépendance de la charge de rupture avec la taille relative de la fissure initiale

1.3.3.5 Phase de propagation

Pour vérifier que le σ_r obtenu précédemment est bien la charge limite de la structure trouée pour une longueur caractéristique donnée, on fait des calculs de la phase de propagation en se donnant la position de la zone cohésive. Plus précisément, le procédé itératif de détermination de la charge σ_∞ équilibrant la structure fissurée avec la pointe de la zone cohésive en a est le suivant :

- 1) λ_c est fixé ;
- 2) on incrémente a (en partant de t) ;
- 3) on incrémente σ_∞ (en partant de 0) ;
- 4) on détermine la pointe de la zone non cohésive c de façon à ce que $K_I(a) = 0$, en procédant comme dans la phase d'amorçage (la valeur de c obtenue dépend de a et de σ_∞) ;
- 5) on calcule l'ouverture $[[u_2]](c)$;

6) si cette ouverture est inférieure à δ_c , on va en 3 (pour augmenter σ_∞). Si cette ouverture est supérieure à δ_c , on garde cette valeur de σ_∞ et on continue ;

7) on revient en 2 jusqu'à ce que a atteigne le bord de la plaque, i.e. $a = 20$ mm.

On obtient finalement ainsi σ_∞ en fonction de a pour un λ_c donné. Lorsque $c = t$ on a évidemment $\sigma_\infty = \sigma_r$. Il s'avère que dans tous les tests effectués σ_∞ est une fonction décroissante de a , ce qui prouve bien que σ_r est une charge limite et donc la charge de rupture de la structure trouée. À titre d'exemple, on a représenté sur la figure 1.15 la relation entre σ_∞ et a pour une valeur de δ_c de 0.01 mm, la charge de rupture valant $0.45\sigma_c$.

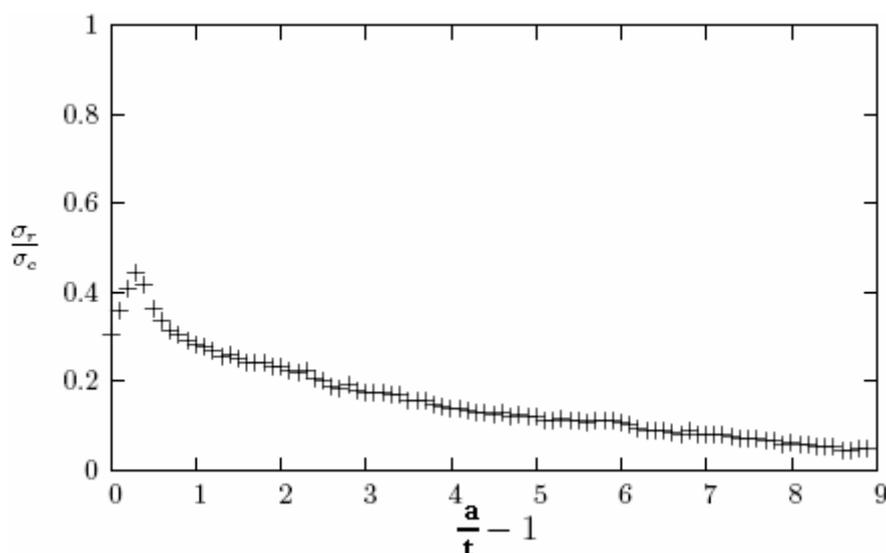


Figure 1.15 : Relation entre la charge et la longueur de la fissure.

1.3.4 Conclusion

En comparant les réponses obtenues pour la plaque fissurée et la plaque trouée, on voit que la charge d'amorçage est très sensible à la forme du défaut, mais pas à sa taille. Elle est nulle dans le cas d'une fissure et pratiquement égale au tiers de la contrainte critique du matériau pour un trou circulaire. Par contre, la charge limite de la structure est très sensible à la taille du défaut, mais peu à sa forme. De plus, on voit que plus le défaut est petit, la longueur de référence étant la longueur caractéristique du matériau introduite dans le modèle de DUGDALE, plus la charge limite se rapproche de la contrainte critique du matériau.

Autrement dit, ceci semble indiquer que les défauts de petite taille ont peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure si l'on adopte le modèle de DUGDALE. Il serait évidemment intéressant de généraliser ce résultat à n'importe quel type de défaut, n'importe quel type de structure et n'importe quel modèle de force cohésive. Cela nécessitera le développement d'outils théoriques et numériques adaptés. Mais on peut considérer que les deux cas traités, extrêmes de par la forme du défaut choisie, sont un gage du caractère générique du résultat.

CHAPITRE 2

POSITION DU PROBLEME TRAITÉ

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons les détails du problème traité : sa géométrie et les données numériques. Le but de ce document est d'étudier l'influence des défauts de petites tailles sur le comportement à rupture avec le modèle des forces cohésives utilisé, pour cela, nous considérons deux types de défauts : un trou circulaire et une fissure. Dans ce chapitre nous présenterons aussi les différentes étapes de cette étude.

2.2 Rappel de quelques définitions

2.2.1 Saut du déplacement normal à travers la fissure $[[v]]$

2.2.2 Saut critique de décohesion δ_0 : c'est l'écart de déplacement maximal admissible pour la zone cohésive continuum, au delà de cet écart la zone se rompe et il y a apparition de la zone fissurée avec interaction des lèvres de la fissure selon le modèle de DUGDALE.

2.2.3 Saut critique de rupture δ_c : c'est l'écart de déplacement maximal admissible entre les lèvres de la fissure à partir duquel il n'y a plus d'interaction.

2.2.4 Contrainte critique σ_c : c'est une contrainte caractéristique du matériau.

2.2.5 Contrainte de décohesion σ_a : c'est la contrainte de traction appliquée à la structure qui provoque un saut critique de décohesion δ_0 .

2.2.6 Contrainte maximale ou contrainte de rupture σ_r : c'est la contrainte maximale que la structure peut supporter selon le critère de rupture adopté.

2.3 Position du problème

On considère un milieu bidimensionnel carré $\Omega = (-L, +L)^2$ de frontière $\partial\Omega$, contenant un défaut centré D de frontière ∂D . Le milieu Ω soumis sur les faces supérieure $y = +L$ et inférieure $y = -L$ à une traction uniforme d'intensité σ_∞ croissante depuis 0. Le défaut considéré D est un trou circulaire de rayon t ou une fissure de longueur $2t$, figure 1.10.

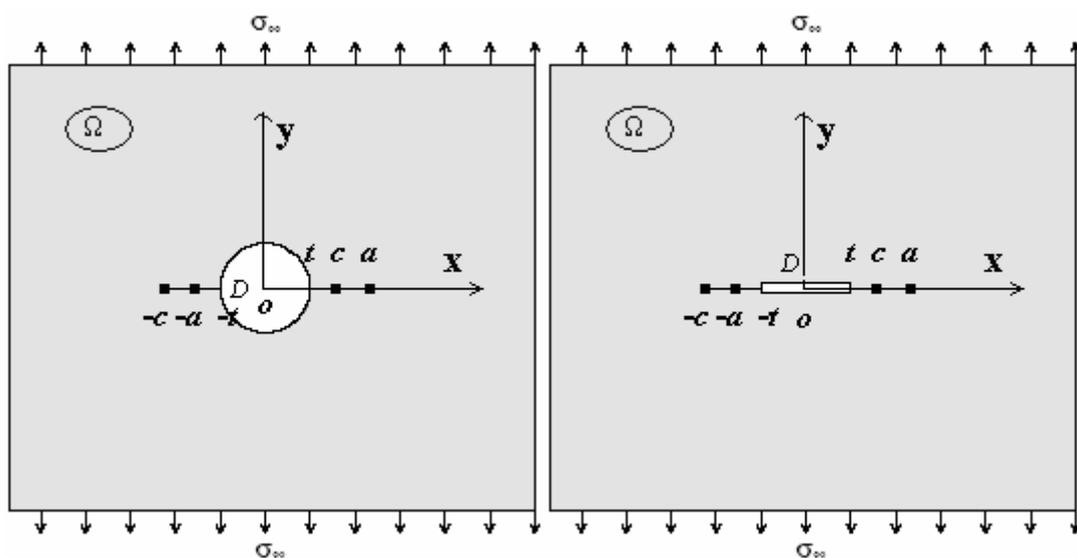


Figure 1.10 : Géométrie de la plaque trouée et la plaque fissurée avec les zones cohésives et non cohésives

L'étude est effectuée dans le cadre des contraintes planes. Le matériau est homogène, isotrope et linéairement élastique, de tenseur de rigidité $\underline{\underline{A}}$, de module de Young E et de coefficient de Poisson ν . Pour des raisons de symétrie, on supposera que la fissuration se développe sur l'axe $y = 0$ et de façon symétrique depuis les points $(\pm t, 0)$ du défaut initial. Les pointes de fissure créées sont situées aux points $x = \pm a$ et la ZCC est comprise dans les intervalles $[-L, -a]$ et $[+a, +L]$. L'évolution de la fissuration suit la loi du modèle général des zones cohésives précédemment défini dans le chapitre 1, autrement dit les lèvres $(-a, -t)$ et $(+t, +a)$ de l'axe $y = 0$ peuvent comporter trois parties :

1. une zone, proche du défaut initial dite zone non cohésive, où les lèvres n'interagissent plus,

2. une zone proche de la pointe dite zone cohésive de contrainte imposée, où les lèvres sont soumises à des contraintes cohésives de traction d'intensité constante σ_c ,
3. et une autre zone, proche aussi de la pointe dite la zone cohésive continuum et qui s'étend jusqu'au limites du domaine Ω .

Les limites entre ces trois zones sont les points $x = \pm a$ et $x = \pm c$. Les valeurs de a et de c dépendent évidemment de la valeur de la charge σ_∞ . Compte tenu de la symétrie du problème, toutes les évolutions se feront en mode I pur. Notons que pour certaines valeurs de σ_∞ certaines zones peuvent ne pas exister. On a donc en général $t \leq c \leq a \leq L$, les égalités étant possibles. Lors de la mise en charge ($\sigma_\infty = 0$), les conditions initiales sont $a = c = t$.

Les différents critères d'apparition et de propagation de ces zones sont les suivants :

1. La ZCC apparaît dès la mise en charge, lorsque la contrainte σ_{22} n'est plus nulle aux points $x = \pm t$ de l'axe $y = 0$.
2. Les pointes $x = \pm a$ de la ZCC n'avancent pas tant que l'ouverture des lèvres de la fissure ne dépasse pas la valeur critique δ_0 en ces points.
3. Une zone cohésive des forces cohésives apparaît et dès lors $a > c = t$, lorsque l'ouverture $[[v]]$ atteint la valeur δ_0 aux points $x = \pm t$.
4. Les pointes $x = \pm a$ de la ZCC avancent de façon à ce que l'ouverture ne dépasse jamais la valeur critique δ_0 en ces points.
5. La zone non cohésive apparaît et dès lors $a > c > t$, lorsque l'ouverture $[[v]]$ atteint la valeur δ_c aux points $x = \pm c$.
6. Les points $x = \pm c$ avancent de telle sorte que l'ouverture $[[v]]$ ne dépasse jamais la valeur δ_c en ces points.

Soient :

$\Gamma_F = \{(x, y) / x \in [-L, +L], y = \pm L\}$ désignant les faces chargées en traction,

$\Gamma_Z = \{(x, y) / x \in [-L, -a] \cup [+a, +L], y = 0\}$ désignant la ZCC,

$\Gamma_a = \{(x, y) / x \in [-a, -c] \cup [+c, +a], y = 0\}$ désignant la zone de forces cohésives de DUGDALE,

$\Gamma_r = \{(x, y) / x \in [-c, -t] \cup [+t, +c], y = 0\}$ désignant la zone de fissuration non cohésive.

On peut a priori distinguer trois phases d'évolution de la fissuration lors du processus de chargement :

1) Phase élastique: $0 \leq \sigma_\infty \leq \sigma_a$.

Durant cette phase, la ZCC s'amorce et la réponse de la structure est purement élastique. La structure ne contient que le défaut initial, il n'y a pas de fissure supplémentaire. Le champ des déplacements \vec{u} et le champ des contraintes $\vec{\sigma}$ sont donc solution du problème élastique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\text{div}} \vec{\sigma} = \vec{0} & \text{dans } \Omega \setminus (D \cup \Gamma_Z) \\ \vec{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\vec{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\vec{\varepsilon}) \vec{I} \right) & \text{dans } \Omega \setminus (D \cup \Gamma_Z) \\ \vec{\sigma} \vec{n} = \vec{0} & \text{sur } \partial D \quad \dots\dots\dots (2.1) \\ \vec{\sigma} \vec{n} = \sigma_\infty n_2 \vec{e}_2 & \text{sur } \partial \Omega \\ \vec{\sigma} \vec{n} = K \llbracket v \rrbracket n_2 \vec{e}_2 & \text{sur } \Gamma_Z \end{array} \right.$$

\vec{n} désignant la normale unitaire sortante au domaine avec défaut initial $\Omega \setminus D$, \vec{e}_2 est le vecteur unitaire dans la direction y.

Cette phase cesse lorsque l'ouverture en $\pm a$ atteint la valeur critique δ_0 qui provoque la décohéation de la ZCC. La valeur de la charge correspondante est la charge de décohéation σ_a .

2) Phase d'amorçage de la zone de forces cohésives: $\sigma_a \leq \sigma_\infty \leq \sigma_r$.

Durant cette phase, une fissure se crée mais ne comporte qu'une zone cohésive. Au fur et à mesure que l'on augmente le chargement, cette zone grandit et le saut de

déplacement normal croît. Cette phase cesse lorsque l'ouverture maximale dans la zone cohésive atteint la valeur critique δ_c .

La valeur de la charge correspondante est la charge de rupture σ_r . Durant cette phase le champ des déplacements \vec{u} et le champ des contraintes $\vec{\sigma}$ sont donc solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overrightarrow{\text{div}} \vec{\sigma} = \vec{0} & \text{dans } \Omega \setminus (D \cup \Gamma_a \cup \Gamma_z) \\ \vec{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\vec{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\vec{\varepsilon}) \vec{I} \right) & \text{dans } \Omega \setminus (D \cup \Gamma_a \cup \Gamma_z) \\ \vec{\sigma} n = \vec{0} & \text{sur } \partial D \dots\dots\dots (2.2) \\ \vec{\sigma} n = \sigma_\infty n_2 \vec{e}_2 & \text{sur } \partial \Omega \\ \vec{\sigma} n = K \llbracket v \rrbracket n_2 \vec{e}_2 & \text{sur } \Gamma_z \\ \vec{\sigma} n = \sigma_c n_2 \vec{e}_2 & \text{sur } \Gamma_a \end{array} \right.$$

La valeur de a est telle que l'ouverture soit égale δ_0 , c'est-à-dire :

$$\llbracket v \rrbracket(\pm a) = \delta_0 \dots\dots\dots (2.3)$$

On doit en outre vérifier que partout dans la zone cohésive l'ouverture est inférieure à l'ouverture critique δ_c et que dans la ZCC le saut est inférieure à δ_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{x \in \Gamma_z} \llbracket v \rrbracket(x) \leq \delta_0 \\ \sup_{x \in \Gamma_a} \llbracket v \rrbracket(x) \leq \delta_c \end{array} \dots\dots\dots (2.4) \right.$$

Cette phase cesse lorsque l'ouverture maximale dans la zone cohésive atteint la valeur critique δ_c . La valeur de la charge correspondante est la charge de rupture σ_r .

3) Phase de propagation.

Une fois la charge de rupture atteinte, l'équilibre de la structure ne peut plus être assuré sans que se développe une zone de fissuration non cohésive. En tenant compte de la présence de cette zone, le champ des déplacements \vec{u} et le champ des contraintes $\vec{\sigma}$ devront donc être solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overline{\text{div}} \overline{\sigma} = \vec{0} & \text{dans } \Omega \setminus (D \cup \Gamma_a \cup \Gamma_r \cup \Gamma_z) \\ \overline{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\overline{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\overline{\varepsilon}) \overline{I} \right) & \text{dans } \Omega \setminus (D \cup \Gamma_a \cup \Gamma_r \cup \Gamma_z) \\ \overline{\sigma} n = \vec{0} & \text{sur } \partial D \cup \Gamma_r \dots\dots\dots (2.5) \\ \overline{\sigma} n = \sigma_\infty n_2 \vec{e}_2 & \text{sur } \partial \Omega \\ \overline{\sigma} n = K \llbracket v \rrbracket n_2 \vec{e}_2 & \text{sur } \Gamma_z \\ \overline{\sigma} n = \sigma_c n_2 \vec{n} & \text{sur } \Gamma_a \end{array} \right.$$

La valeur de a est toujours déterminée de façon à ce que l'ouverture vaille δ_0 en $(\pm a, 0)$, alors que c l'est de façon à ce que l'ouverture vaille δ_c en $(\pm c, 0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket v \rrbracket(\pm a) = \delta_0 \\ \llbracket v \rrbracket(\pm c) = \delta_c \end{array} \right. \dots\dots\dots (2.6)$$

On doit toujours vérifier que dans la zone cohésive l'ouverture est inférieure à l'ouverture critique δ_c , cf. (2.4), et que dans la ZCC l'ouverture est inférieure à δ_0 .

2.4 Les différentes étapes de l'étude

L'effet d'échelle est étudié à travers le rapport entre le saut critique de rupture δ_c , qui est une caractéristique du matériau, et la taille initiale du défaut qui est dans notre étude invariable.

Pour étudier son influence sur la charge de rupture pendant la propagation de la fissure, nous choisissons d'étudier tout d'abord l'évolution de la charge appliquée pendant la phase élastique.

Ensuite, pour la propagation nous considérons en premier lieu le cas où le saut critique de rupture est très supérieur à la taille du défaut initial, pour cela nous considérons que les lèvres de la fissure interagissent quelque soit l'ouverture de la fissure, et nous étudierons l'évolution de la charge appliquée en fonction de la propagation de la zone des forces cohésives. Pour le cas où le saut critique de rupture est comparable à la taille du défaut initial, nous étudierons la phase de propagation en fonction de l'évolution de la taille de la zone des forces cohésives.

Enfin, nous étudierons l'évolution de la charge de rupture qui provoque la propagation de la fissure initiale en fonction du saut critique de rupture.

En résumé, les étapes de l'étude sont :

1. l'évolution de la charge appliquée pendant la phase élastique en fonction de l'ouverture au points $\pm t$;
2. l'évolution de la charge appliquée en fonction de l'évolution de la zone des forces cohésives avec δ_0 fixé et $\delta_c = \infty$, c'est la phase d'amorçage de la zone de forces cohésives ;
3. l'évolution de la charge appliquée pendant la phase de propagation en fonction de la longueur de la fissure avec δ_0 et δ_c fixés,
4. l'évolution de σ_r en fonction du rapport $\frac{\delta_c}{t}$ avec δ_0 fixé.

2.5 Données du problème

Le défaut initial est centrée en $(0,0)$. Le domaine Ω est maillé par des éléments finis triangulaires à 3 nœuds, et des éléments d'interfaces correspondant à des quadrangles à 4 nœuds et d'épaisseur nulle sont utilisés pour mailler la zone cohésive continuum. Pour des raisons de symétrie, seul un quart du domaine est maillé (Figure2.1). Pour des facilités de mise en oeuvre numérique, nous avons choisi d'étudier l'influence de l'effet d'échelle gardant une dimension constante du défaut et en faisant varier l'ouverture critique δ_c . Les dimensions de la plaque sont $200 \times 200 \text{ mm}$, i.e. $L = 100 \text{ mm}$, la dimension du défaut est $t = 3 \text{ mm}$.

Le rapport $\frac{t}{L}$ est de 03% et donc la dimension du défaut est négligeable devant les dimensions de la plaque. Nous choisissons $\delta_0 = 0.00403 \text{ mm}$ et pour les données matériau celles du polymère PMMA :

$$\sigma_c = 72 \text{ MPa}, E = 3000 \text{ MPa}, \nu = 0.36.$$

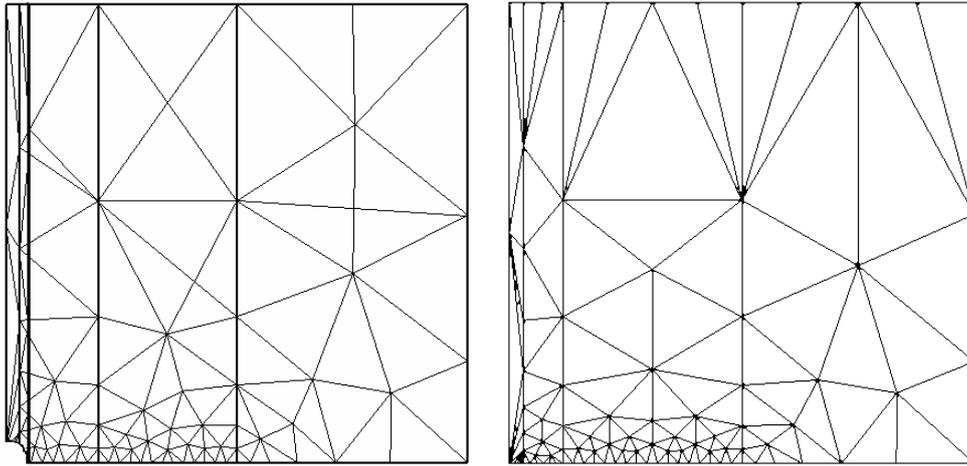


Figure 2.1 : Géométrie du quart de la plaque : à gauche pour le trou, à droite pour la fissure.

CHAPITRE 3

ÉLABORATION DES CALCULS

3.1 Introduction

Ce chapitre présente la modélisation du problème par la méthode des éléments finis et son implémentation ainsi que les différents algorithmes de calcul.

Les calculs s'effectuent sous le système d'exploitation SuSE Linux [12] version 9.0 et 10.1, et sont programmés en langage de programmation C++ et compilés avec le compilateur gratuit GCC [13].

3.2 Les étapes de l'étude

Puisque le comportement de la plaque est élastique linéaire alors il est possible d'utiliser le principe de superposition du chargement, c'est-à-dire le déplacement de chaque point est la somme des déplacements dus aux chargements appliqués séparément. En effet la plaque est soumise à deux chargements indépendants : une contrainte cohésive σ_c et une contrainte de traction σ_∞ comme présenté précédemment au chapitre 2.

Posons σ_δ la contrainte appliquée qui provoque une ouverture de la fissure égale δ en un point donné. Nous présentons ci-dessous la procédure utilisée pour déterminer σ_δ .

Soient :

$[[v]](x)$: Le saut en x dû aux forces cohésives et une charge σ_∞ arbitraire.

$[[v_c]](x)$: Le saut en x dû à la seule contrainte cohésive σ_c .

$[[v_\infty]](x)$: Le saut en x dû à la seule contrainte σ_∞ .

$[[v_\delta]](x)$: Le saut en x dû à la seule charge σ_δ .

δ : Le saut en x dû à σ_δ et aux forces cohésives.

D'après le principe de superposition :

$$\begin{cases} [[v]](x) = [[v_\infty]](x) + [[v_c]](x) \\ \delta = [[v_\delta]](x) + [[v_c]](x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [[v_\infty]](x) = [[v]](x) - [[v_c]](x) \\ [[v_\delta]](x) = \delta - [[v_c]](x) \end{cases} \dots\dots\dots (3.1)$$

A cause de la linéarité du problème nous pouvons appliquer la règle de trois et on aura :

$$\begin{cases} \sigma_\infty \rightarrow [[v_\infty]](x) = [[v]](x) - [[v_c]](x) \\ \sigma_\delta \rightarrow [[v_\delta]](x) = \delta - [[v_c]](x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_\delta = \sigma_\infty \left(\frac{\delta - [[v_c]](x)}{[[v_\infty]](x)} \right) \dots\dots\dots (3.2)$$

Donc pour calculer σ_δ à chaque valeur de x il faut trouver d'abord $[[v_c]](x)$ et $[[v_\infty]](x)$.

3.2.1 Phase élastique et détermination de σ_a

Nous déterminons dans cette phase la contrainte de décohesion σ_a , c'est-à-dire la contrainte appliquée σ_∞ qui correspond à une ouverture en $\pm t$ égale δ_0 en utilisant le principe de superposition. Puisque la zone des forces cohésives n'apparaît pas lors de cette phase alors le saut de déplacement dû à la charge σ_c est nul, c'est-à-dire $[[v_c]](\pm t) = 0$.

D'après la relation (3.2), la contrainte appliquée est une fonction linéaire de l'ouverture en $\pm t$, et $\sigma_a = \sigma_\infty \frac{\delta_0}{[[v_\infty]](\pm t)}$.

3.2.2 Phase d'amorçage de la zone des forces cohésives : $\sigma_a \leq \sigma_\infty \leq \sigma_r$,

Pour cette étape, nous nous fixons un saut critique de décohesion et nous faisons évoluer la zone des forces cohésives. Pour cela, pour chaque position du point a on calcul la contrainte σ_∞ qui correspond à une ouverture en a égale δ_0 .

Les calculs de cette étape se font pratiquement sur un seul maillage, il suffit de repérer les nœuds du bord inférieur ensuite la position du point a balaie toutes les positions de ces nœuds.

3.2.3 L'évolution de σ_r en fonction de δ_c

Pour cette étape, δ_0 est fixé et δ_c varie tout en vérifiant la condition $\delta_c > \delta_0$. Pour chaque valeur de δ_c on calcul la charge de rupture σ_r qui provoque un saut de déplacement δ_c en t par l'équation (3.2). Ensuite, il faut chercher la valeur de a pour laquelle $[[v_m]](a) = \delta_0$ en utilisant la méthode de Dichotomie, avec $c = t$ et a variant dans l'intervalle $]t, L]$. On choisit de varier le rapport $\frac{\delta_c}{t}$ dans l'intervalle $\left[\frac{0.14}{100}, \frac{99}{100}\right]$, c'est-à-dire que δ_c varie dans $\left[\frac{0.42}{100} mm, \frac{297}{100} mm\right]$. La recherche de la valeur de a pour chaque valeur de δ_c se fait comme suit :

1. on se fixe une tolérance tol sur le saut de déplacement en a égale 0.1% de la valeur de $\delta_0 = 0.004 mm$, et on pose $a_{\min} = t, a_{\max} = L$,
2. $a = \frac{a_{\min} + a_{\max}}{2}$,
3. calculer σ_r avec l'équation (3.2) pour avoir un saut égale δ_c en c ,
4. appliquer σ_r et calculer le saut $a : [[v]](a)$,
5. si $[[v]](a) > \delta_0$ et $|[[v]](a) - \delta_0| > tol$ alors ($a_{\min} = a$) et retour à l'étape 2,
6. si $[[v]](a) < \delta_0$ et $|[[v]](a) - \delta_0| > tol$ alors ($a_{\max} = a$) et retour à l'étape 2.

On utilise de la transformation Θ pour éviter le remaillage pour chaque valeur de \mathbf{a} , avec un domaine Ω_0 partagé en trois régions qui sont :

$$\begin{cases} 0 \leq x_0 \leq t \\ t \leq x_0 \leq a_0 \\ a_0 \leq x_0 \leq L \end{cases}$$

3.2.4 Phase de propagation

Pour vérifier que la contrainte σ_r obtenue précédemment est bien la charge limite de la structure, nous faisons des calculs de la phase de propagation en se donnant la position du point \mathbf{c} . Pour cette étape, δ_0 et δ_c sont fixés. Pour chaque valeur de \mathbf{c} dans l'intervalle $[t, L[$ on calcul σ_∞ par l'équation (3.2) afin d'avoir un saut en \mathbf{c} égale δ_c , ensuite on cherche la valeur de \mathbf{a} pour que le saut en \mathbf{a} soit égale à δ_0 , pour cela on procède par Dichotomie avec comme intervalle $]c, L]$ pour les valeurs de \mathbf{a} . La recherche de \mathbf{a} pour chaque valeur de \mathbf{c} se fait comme suit :

1. on se fixe une tolérance tol sur le saut de déplacement en \mathbf{a} égale 0.1% de la valeur de $\delta_0 = 0.004 \text{ mm}$, et on pose $a_{\min} = c, a_{\max} = L, \delta_c = 0.008 \text{ mm}$,
2. $a = \frac{a_{\min} + a_{\max}}{2}$,
3. calculer σ_∞ avec l'équation (3.2) pour avoir un saut égale δ_c en \mathbf{c} ,
4. appliquer σ_∞ et calculer le saut $\mathbf{a} : \llbracket v \rrbracket(a)$,
5. si $\llbracket v \rrbracket(a) > \delta_0$ et $|\llbracket v \rrbracket(a) - \delta_0| > tol$ alors ($a_{\min} = a$) et retour à l'étape 2,
6. si $\llbracket v \rrbracket(a) < \delta_0$ et $|\llbracket v \rrbracket(a) - \delta_0| > tol$ alors ($a_{\max} = a$) et retour à l'étape 2.

Cette recherche nécessite à chaque pas de \mathbf{c} des modifications dans la configuration du maillage utilisé c'est-à-dire un remaillage pour chaque couple de valeurs (c, a) , ce qui est lourd à mettre en oeuvre. Pour y remédier et éviter le remaillage, tous les calculs se font sur un même maillage en utilisant une transformation utilisée par FERDJANI *et al* [5] notée Θ [Annexe A]. Cette transformation transforme le domaine de référence noté Ω_0 en domaine

Ω qui correspond au couple (c, a) , cf. figure 3.2. Le domaine Ω_0 est partagé en quatre

$$\text{régions : } \begin{cases} 0 \leq x_0 \leq t \\ t \leq x_0 \leq c_0 \\ c_0 \leq x_0 \leq a_0 \\ a_0 \leq x_0 \leq L \end{cases}$$

La transformation Θ fait correspondre à chaque point $X_0(x_0, y_0) \in \Omega_0$ un point $X(x, y) \in \Omega$ selon la relation $X = \Theta(X_0)$ tel que

$$\begin{cases} x = x_0 + V(x_0) \\ y = y_0 \end{cases} \dots\dots\dots(3.3)$$

La fonction $V(x_0)$ est continue et linéaire par parties.

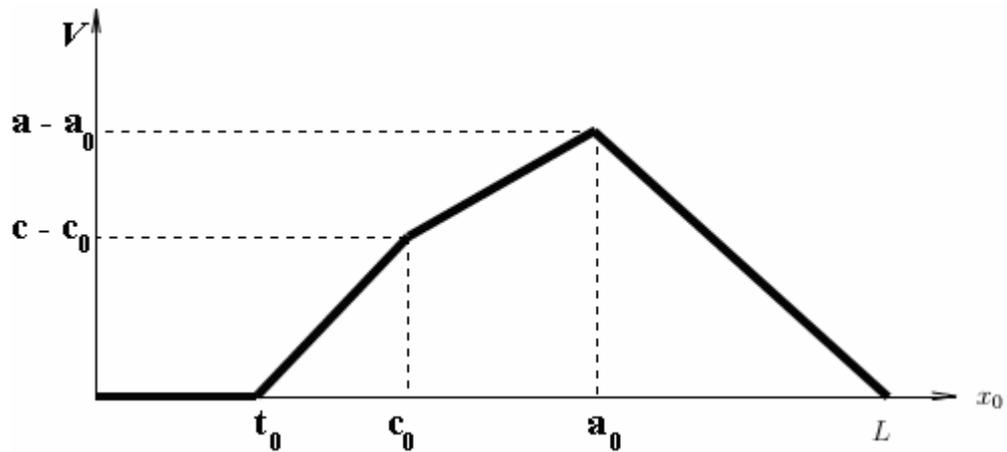
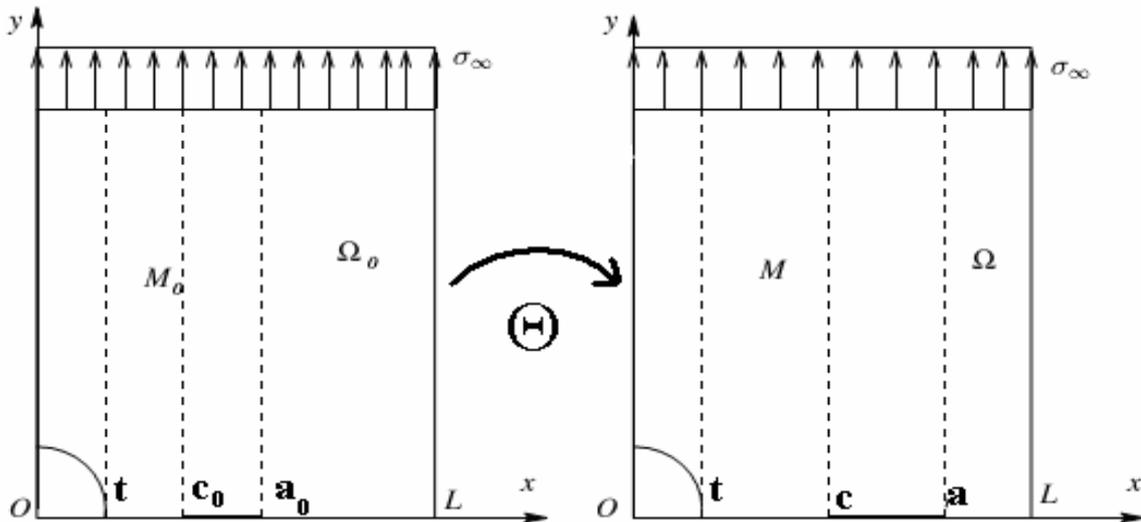


Figure 3.1 : Evolution de la fonction $V(x_0)$

La transformation Θ induit une simple modification dans l'expression des matrices élémentaires de rigidité et les vecteurs élémentaires des forces nodales pour chaque valeur du couple (c, a) .

Figure 3.2 : Définition de la transformation Θ

3.3 Résolution du problème par la méthode des éléments finis

La résolution du problème par la méthode des éléments finis consiste à solutionner l'équation $\{F_G\} = [K_G]\{U_G\}$, où dans notre cas $\{U_G\}$ représente l'inconnu.

3.3.1 Les conditions aux limites

Soient :

u le déplacement suivant la direction ox et $[[v]]$ le saut de déplacement suivant la direction oy . Alors les conditions aux limites sont :

$$x \in [a, L], y = 0 : \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = K [[v]] n_2 \vec{e}_2 \quad \text{pour la ZCC}$$

$$x \in [c, a], y = 0 : \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = -\sigma_c \vec{e}_2$$

$$x \in [0, c], y = 0 : \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

$$x = L : \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

$$y = L : \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_\infty \vec{e}_2$$

$$x = 0 : u = 0$$

En plus de la condition de symétrie par rapport à l'axe ox .

\vec{n} désignant la normale unitaire sortante au domaine et \vec{e}_2 est le vecteur unitaire dans la direction oy .

3.3.2 Lois de comportement

La plaque est supposée homogène, isotrope et linéairement élastique, avec une ZCC homogène possédant sa propre lois de comportement. Nous négligeons l'effet des forces volumiques.

Soient :

\vec{u} : le vecteur déplacement en tout point de la plaque.

$\vec{\varepsilon}$: le tenseur des déformations.

$\vec{\sigma}$: le tenseur contrainte de CAUCHY.

\vec{I} : le tenseur identité.

La loi de comportement élastique dans la plaque est

$$\vec{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\vec{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\vec{\varepsilon}) \vec{I} \right) \dots\dots\dots (3.4)$$

La loi de comportement de la ZCC est :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot \vec{n} = \sigma_{22} = K \llbracket v \rrbracket \dots\dots\dots (3.5)$$

Les champs de déplacements et de contraintes sont les solution du problème élastique

$$\text{suivant : } \begin{cases} \vec{\text{div}} \vec{\sigma} = \vec{0} & \text{dans } \Omega \setminus (D \cup \Gamma_a \cup \Gamma_r \cup \Gamma_z) \\ \vec{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\vec{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\vec{\varepsilon}) \vec{I} \right) & \text{dans } \Omega \setminus (D \cup \Gamma_a \cup \Gamma_r \cup \Gamma_z) \\ \vec{\sigma} \vec{n} = \vec{0} & \text{sur } \partial D \cup \Gamma_r \dots\dots\dots (3.6) \\ \vec{\sigma} \vec{n} = \sigma_{\infty} n_2 \vec{e}_2 & \text{sur } \partial \Omega \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot \vec{n} = \sigma_{22} = K \vec{u} \cdot \vec{e}_2 = K \llbracket v \rrbracket & \text{pour } x \in [a, L], y = 0 \end{cases}$$

3.3.3 Choix des éléments finis

On choisit pour la modélisation de la plaque des éléments triangulaires linéaires à 3 nœuds, et chaque nœud possède 2 degrés de liberté, cf. figure 3.3.

La zone cohésive continuum sera modélisée par des éléments d'interface de type quadrangle à 4 nœuds et d'épaisseur nulle, c'est-à-dire $y_1 = y_2 = y_3 = y_4$, cf. figure 3.4. Pour les nœud **1** et **2** le déplacement v est imposé nul.

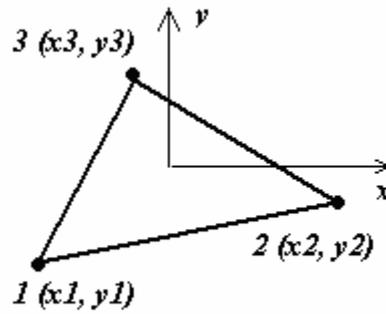


Figure 3.3 : Elément triangulaire à 3 nœuds

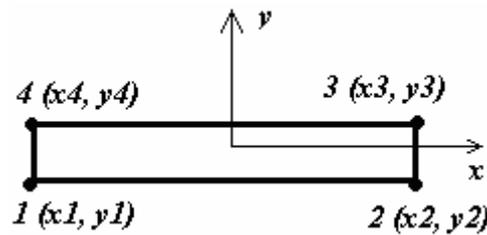


Figure 3.4 : Elément d'interface à 4 nœuds

3.3.4 Matrices de rigidité élémentaires

3.3.4.1 Matrice de rigidité d'un élément triangulaire à 3 nœuds [14]

Soit un élément triangulaire à 3 nœuds d'aire S . Chaque nœud est repéré par ces coordonnées (x_i, y_i) où i est l'indice du nœud. Soient :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad H_1 = \frac{2G}{1-\nu}, \quad H_2 = \nu H_1$$

$$\begin{cases} x_{ij} = x_i - x_j \\ y_{ij} = y_i - y_j \end{cases} \text{ où } i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, 2, 3.$$

$$S = \frac{1}{2}(y_{31}x_{21} - x_{31}y_{21}), \text{ et } x_g \text{ l'abscisse du centre de gravité de l'élément.}$$

La matrice de rigidité $[Ke]$ de l'élément triangulaire se présente sous deux formes selon le cas où on utilise la transformation Θ ou non.

Sans utilisation de la transformation Θ , la matrice de rigidité $[Ke]$ est donnée par la relation suivante :

$$[Ke] = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} u1 & v1 & u2 & v2 & u3 & v3 \\ H_1 y_{23}^2 & H_2 x_{32} y_{23} & H_1 y_{31} y_{23} & H_2 x_{13} y_{23} & H_1 y_{12} y_{23} & H_2 x_{21} y_{23} \\ +Gx_{32}^2 & +Gx_{32} y_{23} & +Gx_{32} x_{13} & +Gx_{32} y_{31} & +Gx_{21} x_{32} & +Gx_{32} y_{12} \\ H_1 x_{32}^2 & H_2 x_{32} y_{31} & H_1 x_{32} x_{13} & H_2 x_{32} y_{12} & H_2 x_{32} y_{23} & H_1 x_{32} x_{21} \\ +Gy_{23}^2 & +Gx_{13} y_{23} & +Gy_{31} y_{23} & +Gx_{21} y_{23} & +Gx_{21} y_{23} & +Gy_{12} y_{23} \\ H_1 y_{31}^2 & H_2 x_{13} y_{31} & H_1 y_{12} y_{31} & H_2 x_{21} y_{31} & H_1 y_{12} y_{31} & H_2 x_{21} y_{31} \\ +Gx_{13}^2 & +Gx_{13} y_{31} & +Gx_{13} x_{21} & +Gx_{13} y_{12} & +Gx_{13} x_{21} & +Gx_{13} y_{12} \\ H_1 x_{13}^2 & H_2 x_{13} y_{12} & H_1 x_{13} x_{21} & H_1 x_{13} x_{21} & H_1 x_{13} x_{21} & H_1 x_{13} x_{21} \\ +Gy_{31}^2 & +Gx_{21} y_{31} & +Gy_{12} y_{31} & +Gy_{12} y_{31} & +Gy_{12} y_{31} & +Gy_{12} y_{31} \\ SYM & & & & H_1 y_{12}^2 & H_2 x_{21} y_{12} \\ & & & & +Gx_{21}^2 & +Gx_{21} y_{12} \\ & & & & & H_1 x_{21}^2 \\ & & & & & +Gy_{12}^2 \end{bmatrix} \dots\dots (3.7)$$

Avec utilisation de la transformation Θ [Annexe A], la matrice de rigidité $[Ke]$ est donnée par la relation suivante :

$$[Ke] = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} u1 & v1 & u2 & v2 & u3 & v3 \\ H_1 y_{23}^2 D' & H_2 x_{32} y_{23} & H_1 y_{31} y_{23} D' & H_2 x_{13} y_{23} & H_1 y_{12} y_{23} D' & H_2 x_{21} y_{23} \\ +Gx_{32}^2 D & +Gx_{32} y_{23} & +Gx_{32} x_{13} D & +Gx_{32} y_{31} & +Gx_{21} x_{32} D & +Gx_{32} y_{12} \\ H_1 x_{32}^2 D & H_2 x_{32} y_{31} & H_1 x_{32} x_{13} D & H_2 x_{32} y_{12} & H_2 x_{32} y_{23} & H_1 x_{32} x_{21} D \\ +Gy_{23}^2 D' & +Gx_{13} y_{23} & +Gy_{31} y_{23} D' & +Gx_{21} y_{23} & +Gx_{21} y_{23} & +Gy_{12} y_{23} D' \\ H_1 y_{31}^2 D' & H_2 x_{13} y_{31} & H_1 y_{12} y_{31} D' & H_2 x_{21} y_{31} & H_1 y_{12} y_{31} D' & H_2 x_{21} y_{31} \\ +Gx_{13}^2 D & +Gx_{13} y_{31} & +Gx_{13} x_{21} D & +Gx_{13} y_{12} & +Gx_{13} x_{21} D & +Gx_{13} y_{12} \\ H_1 x_{13}^2 D & H_2 x_{13} y_{12} & H_1 x_{13} x_{21} D \\ +Gy_{31}^2 D' & +Gx_{21} y_{31} & +Gy_{12} y_{31} D' & +Gy_{12} y_{31} D' & +Gy_{12} y_{31} D' & +Gy_{12} y_{31} D' \\ SYM & & & & H_1 y_{12}^2 D' & H_2 x_{21} y_{12} \\ & & & & +Gx_{21}^2 D & +Gx_{21} y_{12} \\ & & & & & H_1 x_{21}^2 D \\ & & & & & +Gy_{12}^2 D' \end{bmatrix} (3.8)$$

Où D est donné en [Annexe A] et $D' = \frac{1}{D}$. Le choix de la valeur du paramètre D se fait selon la position du centre de gravité de l'élément.

3.3.4.2 Matrice de rigidité d'un élément d'interface

Soit un élément d'interface quadrangulaire à 4 nœuds, cf. figure 3.5. On ne considère

que les déplacements dans la direction oy , c'est-à-dire le vecteur $\{v_e\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$.

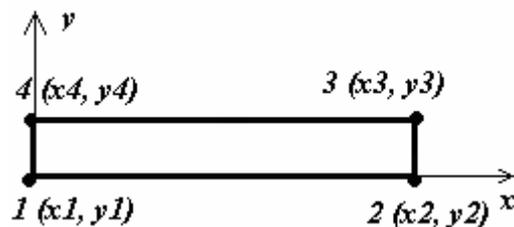


Figure 3.4 : Elément d'interface à 4 noeuds.

Comme pour l'élément triangulaire, la matrice $[Ke_4]$ de rigidité de cet élément se présente sous deux formes selon le cas où on utilise la transformation Θ ou non.

Sans utilisation de la transformation Θ [Annexe A], la matrice de rigidité $[Ke_4]$ est donnée par la relation suivante :

$$[Ke_4] = \frac{Kh}{6} \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & & & & \end{matrix} \dots\dots (3.9)$$

Avec utilisation de la transformation Θ [Annexe A], la matrice de rigidité $[Ke_4]$ est donnée par la relation suivante :

$$[Ke_4] = \frac{KDh}{6} \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & & & & \end{matrix} \dots\dots (3.10)$$

$$\text{Où } D = \frac{a-L}{a_0-L}.$$

3.3.5 Vecteurs élémentaire des forces nodales

Du fait que les contraintes appliquées sont constantes, et uniformément réparties sur le bord supérieur de la plaque et sur la lèvres de la fissure, alors le vecteur élémentaire des forces nodales est donné pour le cas où l'on n'utilise pas la transformation Θ , par les relations suivantes :

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \end{Bmatrix} = \frac{x_j - x_k}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_\infty \\ 0 \\ \sigma_\infty \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3.11)$$

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \end{Bmatrix} = \frac{x_k - x_j}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_c \\ 0 \\ -\sigma_c \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3.12)$$

Avec utilisation de la transformation Θ [Annexe A] :

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \end{Bmatrix} = D \frac{x_j - x_k}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_\infty \\ 0 \\ \sigma_\infty \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3.13)$$

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \end{Bmatrix} = D \frac{x_k - x_j}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_c \\ 0 \\ -\sigma_c \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3.14)$$

Les relations (3.11) et (3.13) sont pour les éléments du bord supérieur, cf. figure 3.5.

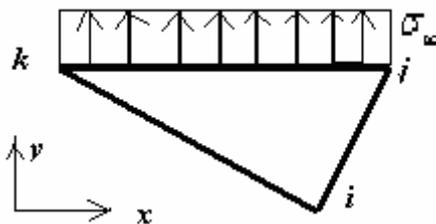


Figure 3.5 : Charge répartie sur le bord supérieur.

Les relations (3.12) et (3.14) sont pour les éléments de la fissure, cf. figure 3.6.

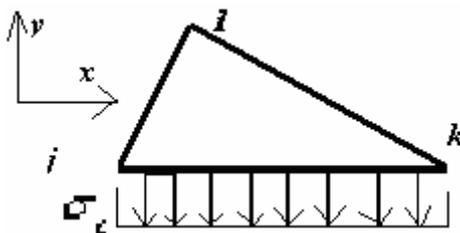


Figure 3.6 : Charge répartie sur la fissure

3.3.6 Génération du maillage

Le maillage du quart de la plaque est généré à l'aide du logiciel libre GMSH [15] qui est distribué gratuitement sous la licence GPL [15].

La lecture du maillage s'effectue à l'aide d'une procédure qui permet de récupérer les nœuds et leurs coordonnées ainsi que les éléments triangulaires et leurs sommets.

3.3.7 Assemblage de la matrice de rigidité globale

Chaque matrice de rigidité d'un élément e , comporte des composantes $(k_{ij})_e$. Pour l'assemblage de la matrice de rigidité globale $[K_G]$, nous utilisons la méthode d'assemblage par expansion [14]. Cette méthode consiste à sommer toutes les composantes $(k_{ij})_e$ de toutes les matrices élémentaires dans la composante $(k_{ij})_G$ de la matrice globale.

Voici l'algorithme d'assemblage :

$$\text{pour } e = 1 \text{ à } (N_T + N_{Interface}) \text{ faire}$$

$$\left| \begin{array}{l} (k_{ij})_G = (k_{ij})_G + (k_{ij})_e \end{array} \right.$$

Où N_T est le nombre d'éléments triangulaires, et $N_{Interface}$ est le nombre d'éléments d'interface.

3.3.8 Assemblage du vecteur des forces nodales [14]

En tenant compte des autres nœuds libres de chargement de la plaque et donc les composantes nodales des vecteurs sont nulles pour ces nœuds, l'algorithme d'assemblage du vecteur global des forces nodales $\{F_G\}$ est le suivant :

$$\text{pour } e = 1 \text{ à } N_T \text{ faire}$$

$$\left| \begin{array}{l} (F_i)_G = (F_i)_G + (F_i)_e \end{array} \right.$$

3.3.9 Affectation des déplacements imposés [14]

Soit $\{U_G\}$ le vecteur global des déplacements nodaux. Ce vecteur comporte des composantes inconnues et d'autres imposées. Pour affecter les déplacements imposés nous adoptons la méthode la plus simple sur le plan de la conception et la plus directe, dite : « Méthode Brutale ». Si U_{id} est la valeur imposée à la composante U_i alors le principe de cette méthode d'affectation est le suivant :

- remplacer la composante F_i par la valeur $\left((k_{ii})_G \cdot U_{id} \right)$,
- annuler les composantes $(k_{ij})_G$ et $(k_{ji})_G \forall j \neq i$,

Nous obtenons à la fin :

$$\{F_G\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ \vdots \\ F_{i-1} \\ (k_{ii})_G \cdot U_{id} \\ F_{i+1} \\ \vdots \\ F_N \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3.15)$$

Et la matrice de rigidité globale par la relation suivante :

$$[K_G] = \begin{bmatrix} (k_{11})_G & \dots & 0 & \dots & \dots & (k_{1N})_G \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & (k_{ii})_G & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \ddots & \vdots \\ (k_{N1})_G & \dots & 0 & \dots & \dots & (k_{NN})_G \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.26)$$

3.3.10 Résolution du système $\{F_G\} = [K_G]\{U_G\}$

La résolution du système $\{F_G\} = [K_G]\{U_G\}$ est une étape critique à cause du choix de la méthode de résolution. Il faut choisir une méthode directe ou itérative qui fournisse des résultats précis et qui nécessite un temps de calcul acceptable.

Le maillage utilisé comporte moins de 150 nœuds et chaque nœuds possède entre 1 et 2 degrés de liberté, ce qui conduit à un système d'équation d'une taille de 300×300 .

D'après [16] publié en 1973, les méthodes directes sont valables pour des systèmes de l'ordre de 10^3 , pour cette raison nous adoptons la méthode de résolution de GAUSS avec pivot partiel.

Les paramètres de calcul sont : Processeur : Pentium III, Fréquence : 500 MHz, Mémoire RAM : 192 MO.

CHAPITRE 4

RÉSULTATS DES CALCULS

4.1 Cas de la plaque fissurée

4.1.1 Phase élastique et détermination de la contrainte de décohésion σ_a

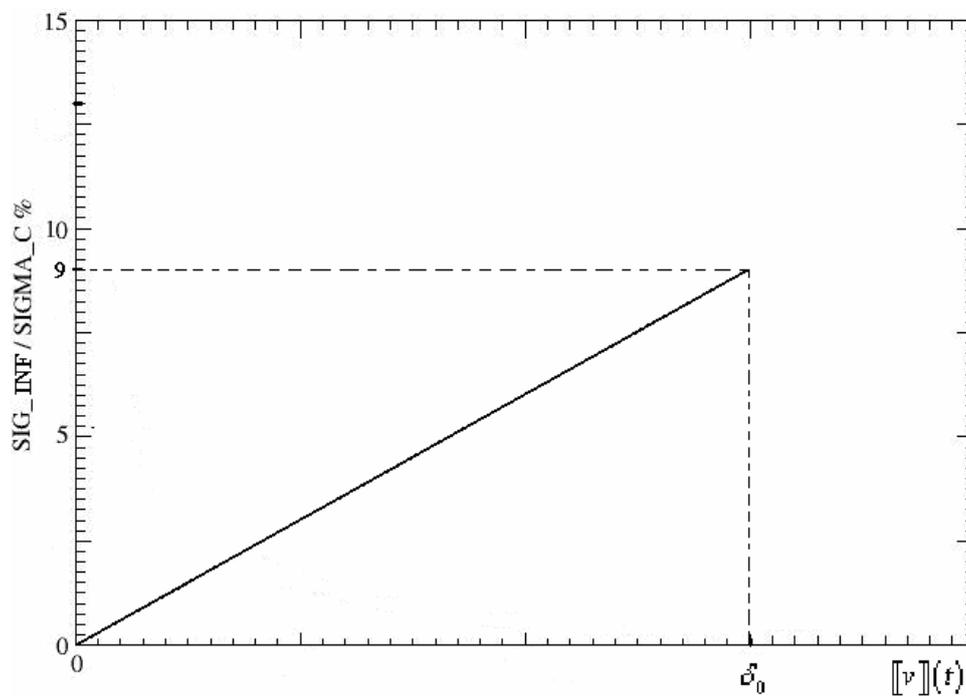


Figure 4.1 : σ_∞ en fonction du saut au point t en phase élastique pour la plaque préfissurée

Pour cette phase élastique la contrainte maximale supportée par la plaque et qui correspond à la contrainte de décohésion σ_a est très inférieure à la contrainte critique, elle égale $0.09 \sigma_c$.

4.1.2 Phase d'amorçage de la zone de forces cohésives :

L'évolution de σ_∞ en fonction de la taille de la zone des forces cohésives

Quand le chargement est suffisamment proche de la charge de décohésion σ_a , la longueur de zone des forces cohésives est suffisamment petite de telle sorte que l'ouverture $[[v]]$ est partout plus petite que la valeur critique δ_c . Par conséquent, les lèvres de la fissure sont divisées en deux zones : une zone cohésive et une ZCC.

La taille du maillage utilisé pour ce calcul est de 150 nœuds, concentrés sur le bord inférieur de la plaque, voir figure 4.2. La durée du calcul est de 30 minutes.

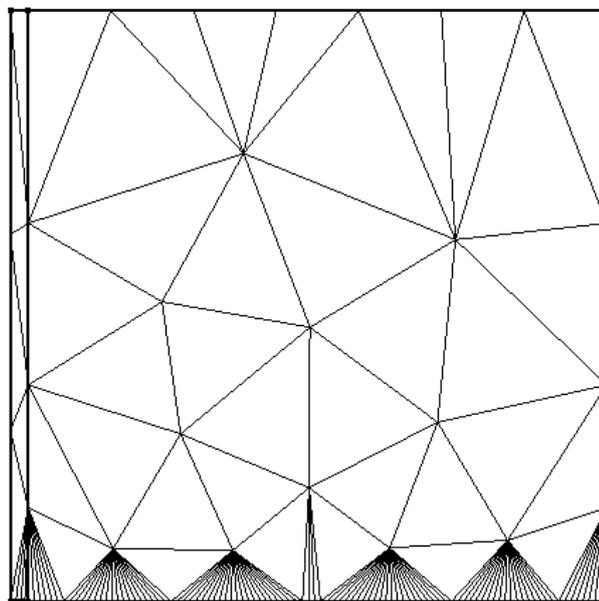


Figure 4.2 : Maillage de la plaque fissurée sans la rupture.

Le résultat du calcul est représenté par la figure 4.3 :

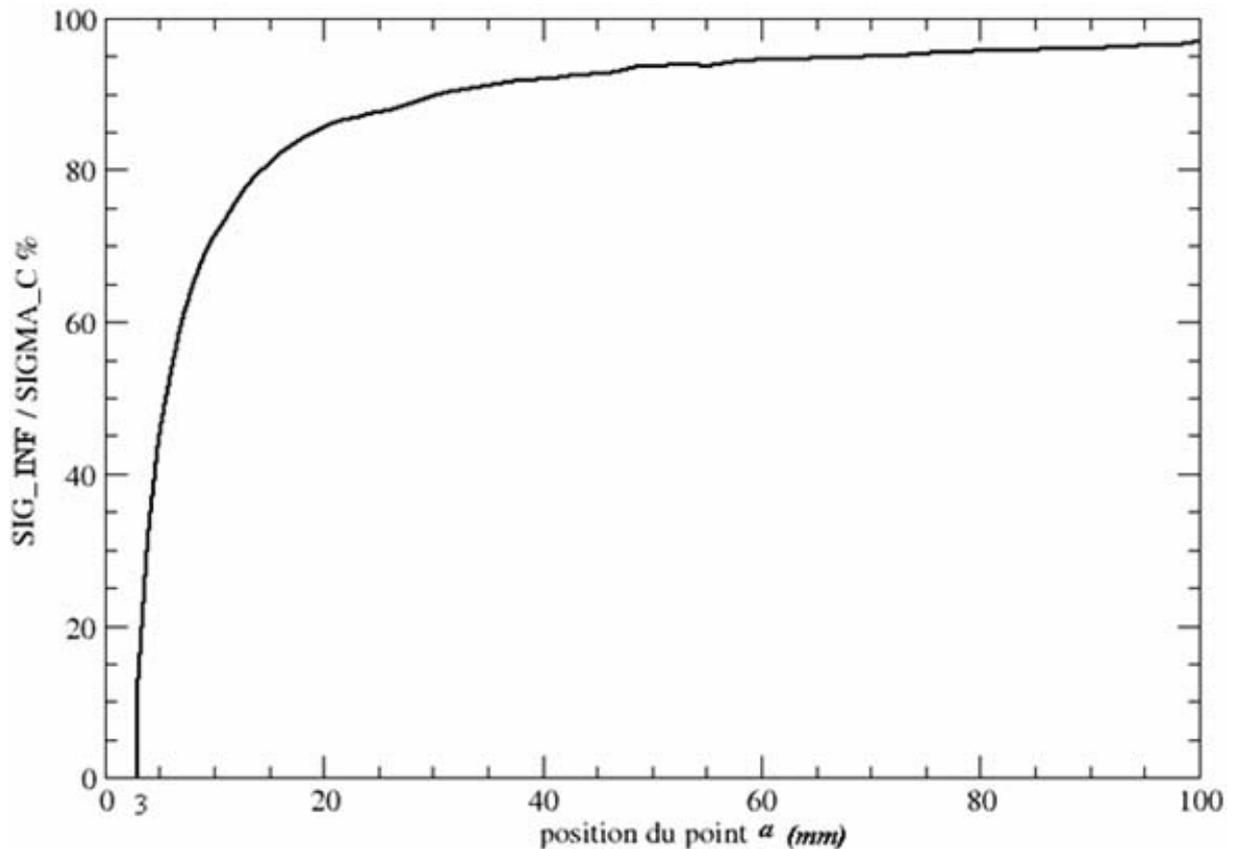


Figure 4.3 : Variation de $\frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_c}$ en fonction de la position du point a pour le cas de la fissure.

La contrainte appliquée est une fonction croissante de la taille de la zone de forces cohésives, mais elle n'atteint jamais la charge critique σ_c . En effet, en utilisant un calcul élémentaire de rupture, il est clair que la plaque fissurée ne peut supporter une charge dépassant $\left(1 - \frac{t}{L}\right)\sigma_c$, qui correspond à la charge d'équilibre de la plaque quand la zone cohésive traverse toute la plaque. De ce fait, et d'après la figure 4.4, la charge maximale que la plaque peut supporter est $0.97\sigma_c$ lorsque la zone des forces cohésives traverse toute la plaque. On voit que lorsque $\frac{t}{L}$ tend vers zéro σ_r tend vers σ_c .

4.1.3 L'évolution de σ_r en fonction de δ_c

La variation de la contrainte d'amorçage en fonction du rapport $\frac{\delta_c}{t}$ est représentée par la figure 4.4.

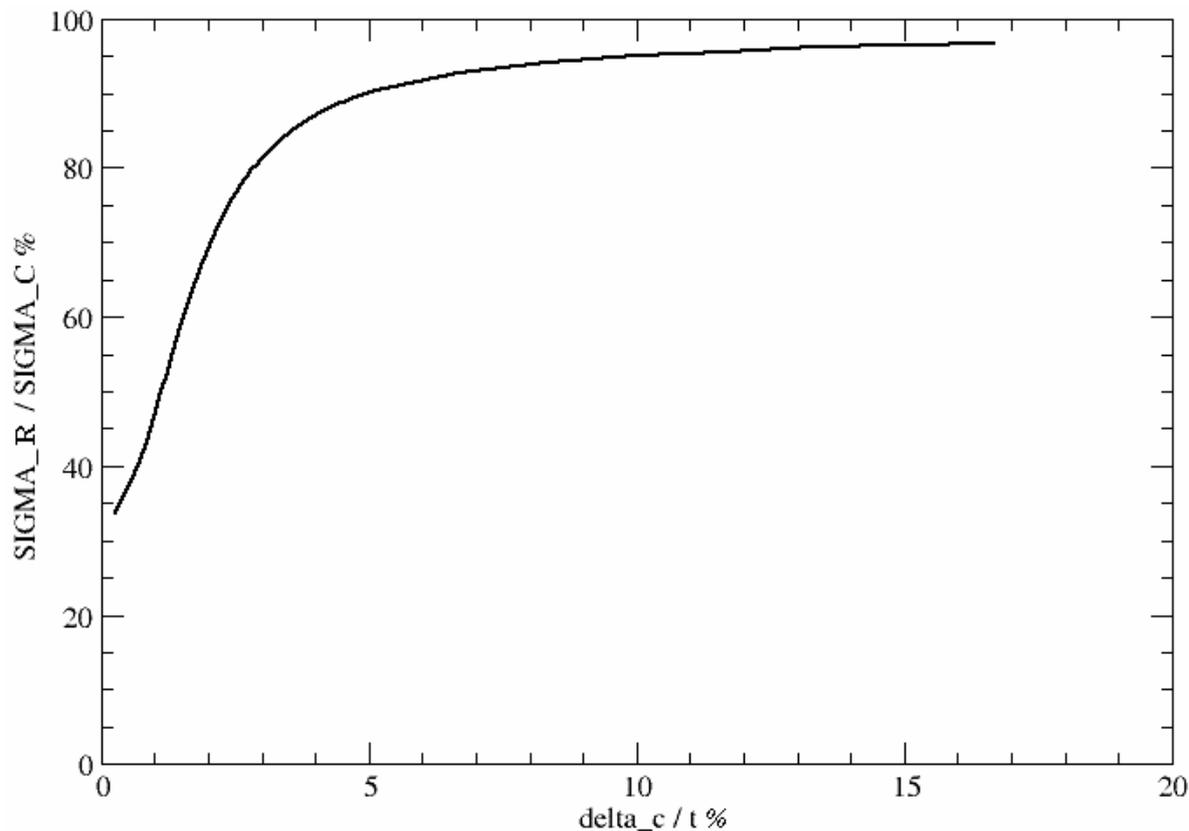


Figure 4.4 : Variation de la contrainte de rupture en fonction du rapport $\frac{\delta_c}{t}$ pour la plaque préfissurée

La charge de rupture est une fonction croissante de δ_c , mais on notera que la charge de rupture n'atteint jamais la valeur σ_c quelle que soit la valeur de δ_c . La contrainte de rupture initiale égale $0.390 \sigma_c$ pour $\delta_c = 0.0026 t$. On remarque aussi que σ_r dépasse rapidement $0.9\sigma_c$, elle est pratiquement atteinte pour $\delta_c = 0.05t$. Ensuite elle augmente rapidement pour converger vers σ_c à partir de $\delta_c = 0.1t$ qui correspond à $\frac{\sigma_r}{\sigma_c} = 95\%$. La durée calcul est de 53 minutes.

4.1.4 Phase de propagation

L'évolution de la contrainte appliquée en fonction de l'évolution de la fissure est représentée par la figure 4.5 pour $\delta_0 = 0.004mm$ et $\delta_c = 0.008mm$. La durée du calcul est de 3 Heures et 12 minutes avec un maillage de 150 nœuds.

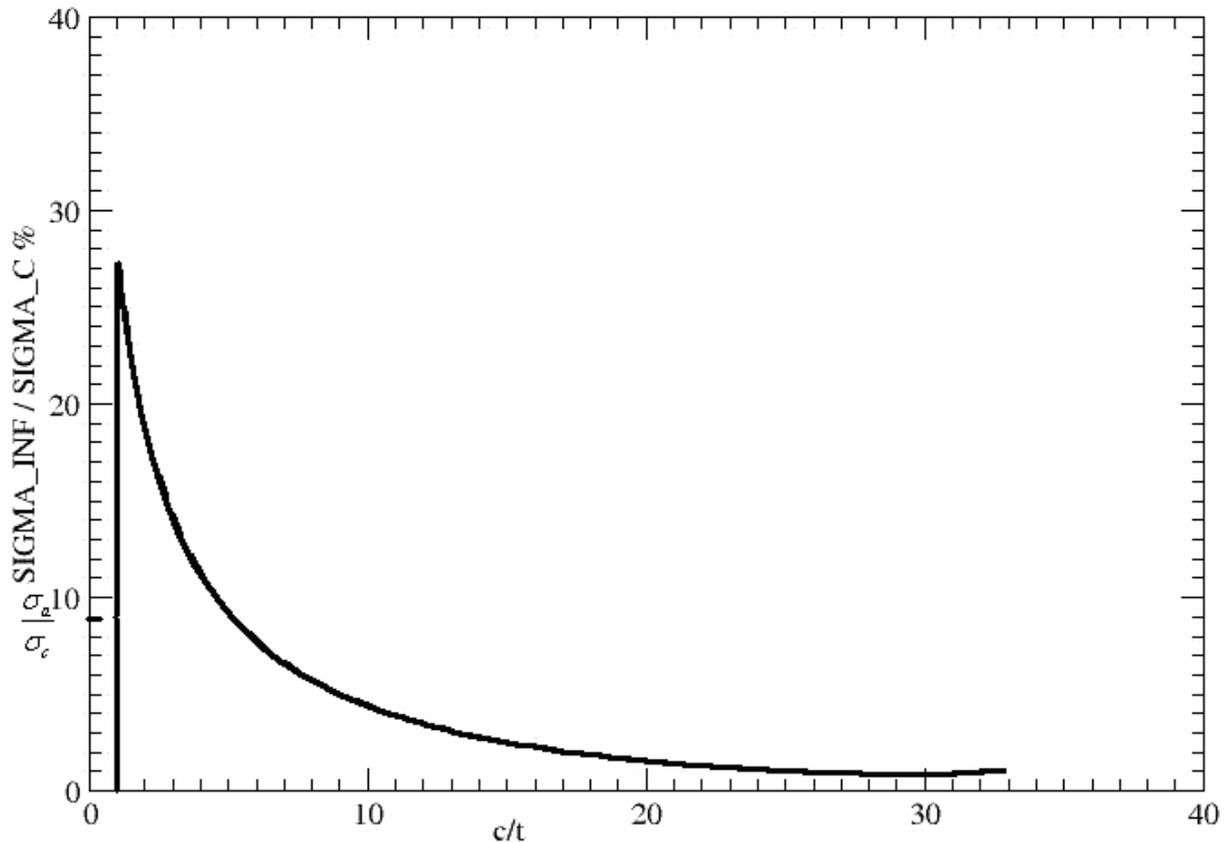


Figure 4.5 : La contrainte appliquée en fonction de la taille de la fissure pour la plaque pré fissurée.

La contrainte de rupture pour la fissure initiale est de $\sigma_r = 0.2722\sigma_c$ soit. Ensuite, le rapport $\frac{\sigma_\infty}{\sigma_c}$ diminue rapidement, ce qui correspond à une propagation de la fissure jusqu'à la rupture totale de la plaque, même si la contrainte appliquée est inférieure à la contrainte maximale, ceci est dû au phénomène de relaxation de la plaque. Ceci montre que pour que la propagation reste stable il faut une diminution de la charge appliquée et que σ_r est bien la charge maximale que la structure peut supporter, et donc la charge de rupture.

4.2 Cas de la plaque trouée

4.2.1 Phase élastique et détermination de la contrainte de décohésion σ_a

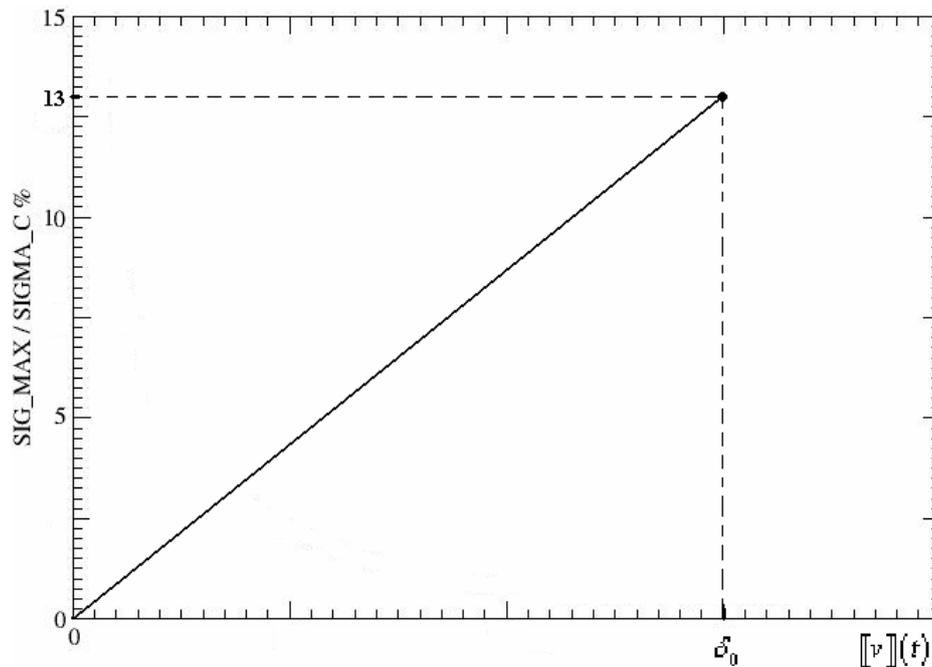


Figure 4.6 : σ_∞ en fonction du saut au point t en phase élastique pour la plaque trouée

Pour cette phase élastique, la contrainte maximale supportée par la plaque et qui correspond à la contrainte de décohésion σ_a est très inférieure à la contrainte critique, elle égale $0.13 \sigma_c$, qui supérieure à celle du cas de la fissure préexistante.

4.2.2 Phase d'amorçage de la zone de forces cohésives :

L'évolution de σ_∞ en fonction de l'évolution de la zone des forces cohésives

Quand le chargement est suffisamment proche de la charge de décohésion σ_a , la longueur de zone des forces cohésives est suffisamment petite de telle sorte que l'ouverture

$[[v]]$ est partout plus petite que la valeur critique δ_c . Par conséquent, les lèvres de la fissure sont divisées en deux zones : une zone cohésive et une ZCC.

La taille du maillage utilisé pour ce calcul est de 150 nœuds, concentrés sur le bord inférieur de la plaque, voir figure 4.7. Temps de calcul : 20 minutes.

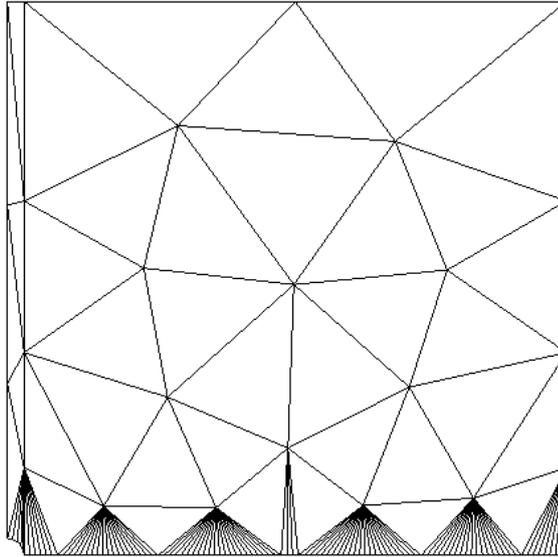


Figure 4.7 : Maillage de la plaque trouée sans la rupture.

Le résultat du calcul est représenté par la figure 4.8.

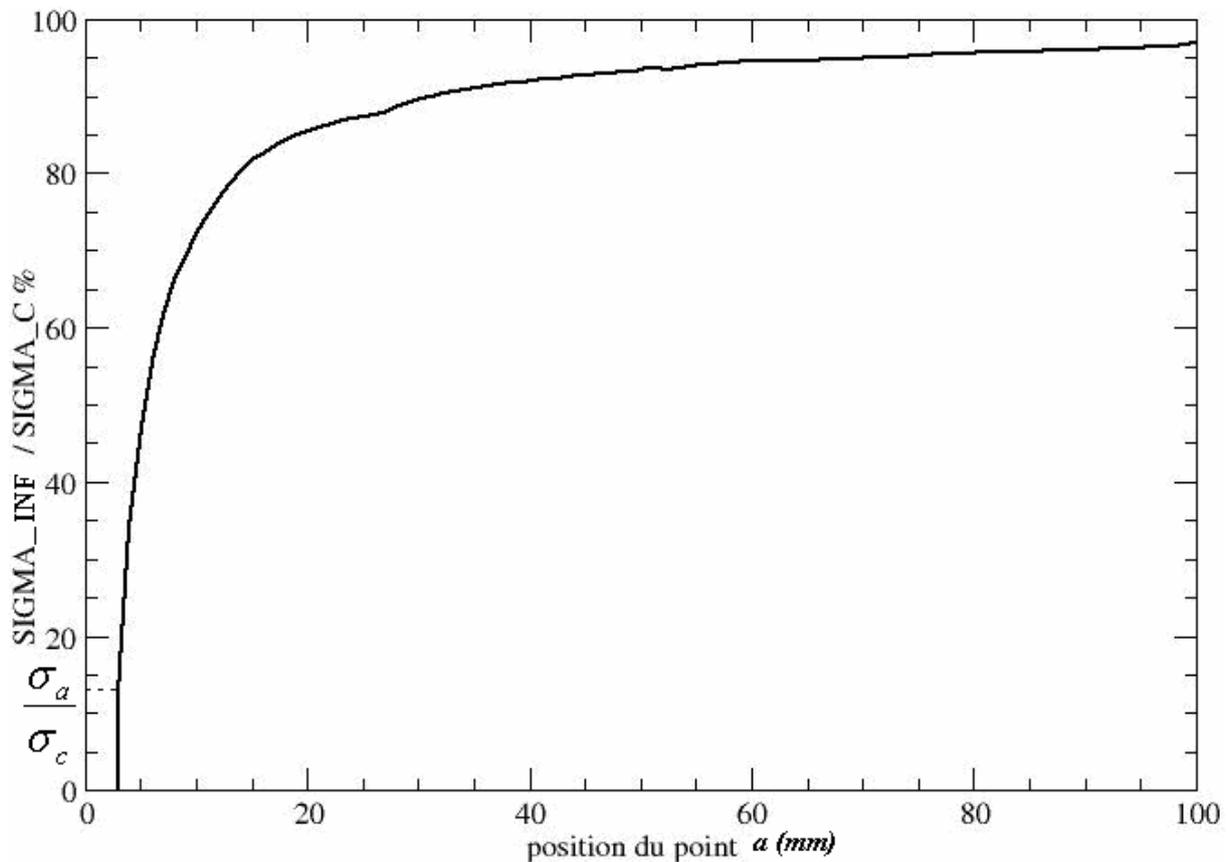


Figure 4.8 : Variation de $\frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_c}$ en fonction de la position du point a pour le cas de la plaque trouée.

Comme pour le cas de la fissure, la charge appliquée est une fonction croissante de la taille de la zone de forces cohésives, mais elle n'atteint jamais la charge critique σ_c . La charge maximale que la plaque peut supporter est $0.97\sigma_c$ lorsque la zone des forces cohésives traverse toute la plaque. De même que pour le cas de la plaque fissurée, lorsque $\frac{t}{L}$ tend vers zéro σ_r tend vers σ_c .

4.2.3 L'évolution de σ_r en fonction de δ_c

La variation de la contrainte de rupture initiale en fonction du rapport $\frac{\delta_c}{t}$ est représentée par la figure 4.9. Temps de calcul : 30 minutes.

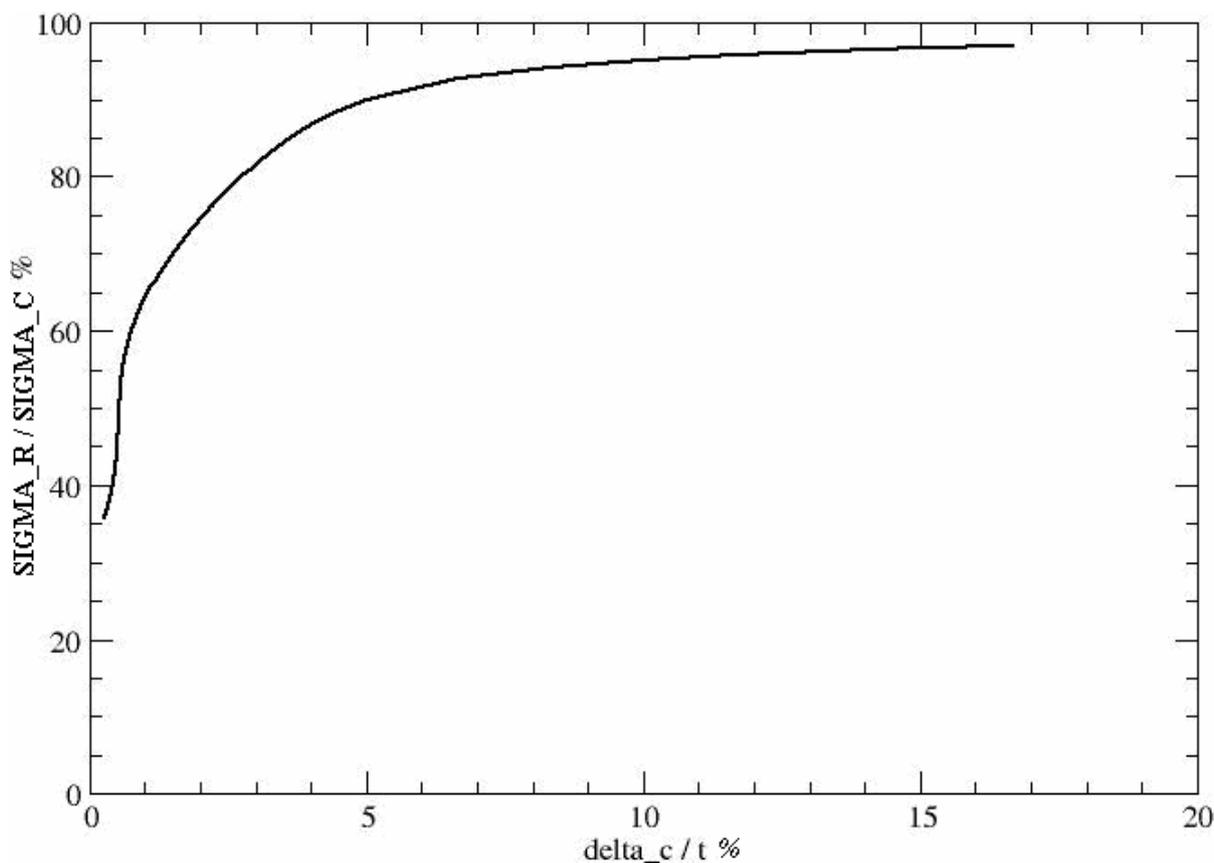


Figure 4.9 : La contrainte de rupture en fonction de $\frac{\delta_c}{t}$ pour le cas du trou.

Comme pour le cas de la fissure, la charge de rupture est une fonction croissante de δ_c , et elle n'atteint jamais la valeur σ_c quelle que soit la valeur de δ_c . La contrainte de rupture initiale égale $0.390 \sigma_c$ pour $\delta_c = 0.0026 t$. On remarque aussi que σ_r dépasse rapidement $0.9\sigma_c$, elle est pratiquement atteinte pour $\delta_c = 0.05t$. Ensuite elle augmente rapidement pour tendre vers σ_c à partir de $\delta_c = 0.1t$ qui correspond à $\frac{\sigma_r}{\sigma_c} = 95\%$. La durée du calcul est de 45 minutes.

4.2.4 Phase de propagation

L'évolution de la contrainte appliquée en fonction de l'évolution de la fissure est représentée par la figure 4.10 pour $\delta_0 = 0.004mm$ et $\delta_c = 0.008mm$.

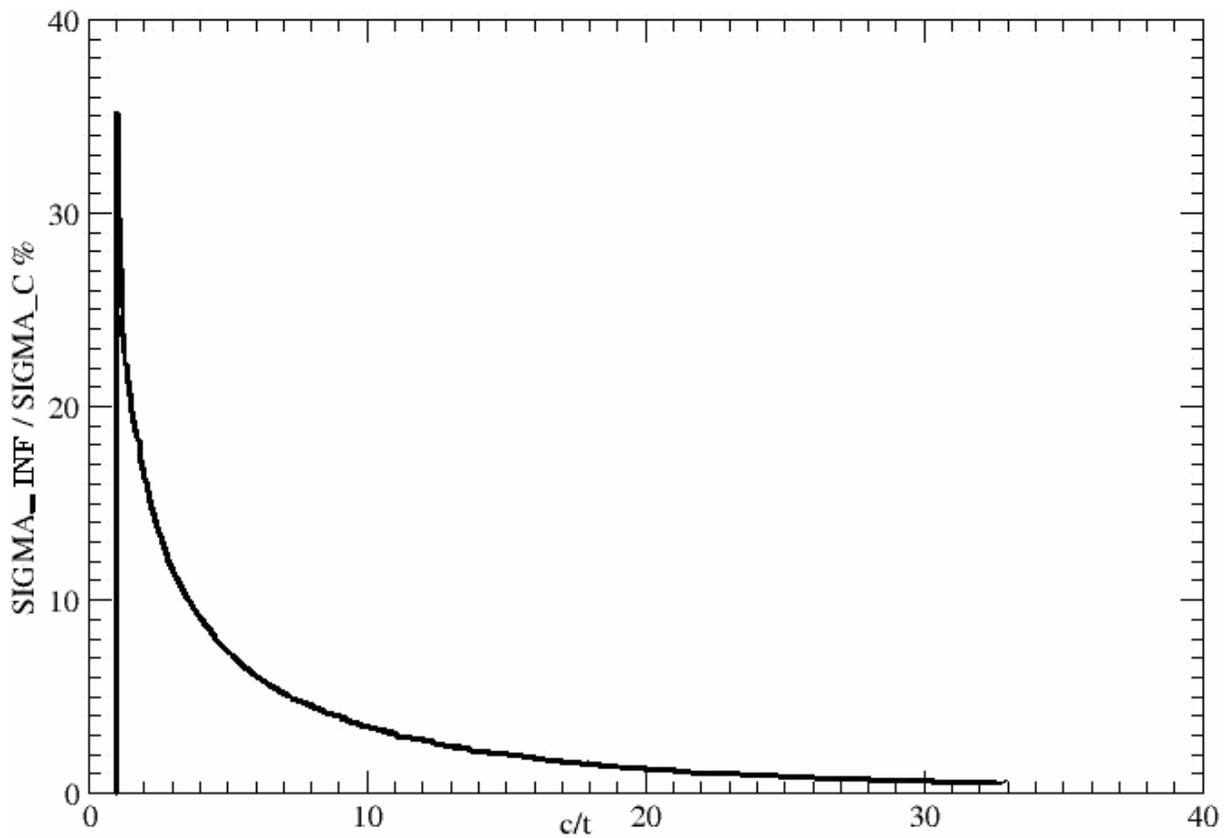


Figure 4.10 : La contrainte appliquée en fonction de la taille de la fissure pour la plaque trouée.

La contrainte de rupture pour est de $\sigma_r = 0.3511\sigma_c$. Ensuite, le rapport $\frac{\sigma_\infty}{\sigma_c}$ diminue rapidement, ce qui correspond à une propagation de la fissure jusqu'à la rupture totale de la plaque, même si la contrainte appliquée est inférieure à contrainte maximale, ceci est dû au phénomène de relaxation de la plaque. Ceci montre que pour que la propagation reste stable il faut une diminution de la charge appliquée et que σ_r est bien la charge maximale que la structure peut supporter, et donc la charge de rupture.

CONCLUSION

En comparant les réponses obtenues pour la plaque fissurée et la plaque trouée, on voit que la charge de décohésion est très sensible à la forme du défaut, mais peu à sa taille. Par contre, la charge limite de la structure est très sensible à la taille du défaut, mais peu à sa forme.

De plus, on voit que plus le défaut est petit, la longueur de référence étant la longueur caractéristique du matériau δ_c introduite dans le modèle adopté, plus la charge limite se rapproche de la contrainte critique du matériau. Autrement dit, ceci semble indiquer que les défauts de petite taille ont peu d'influence sur les capacités de résistance d'une structure si l'on adopte le modèle choisi pour notre étude.

Ce résultat est conforme aux résultats obtenus par FERDJANI *et al* pour le cas du modèle de DUGDALE.

Il serait évidemment intéressant de généraliser ce résultat à n'importe quel type de défaut et n'importe quel type de structure et n'importe quel modèle de forces cohésives. Mais on peut considérer que les deux cas traités et deux modèles de forces cohésives utilisés, sont un gage du caractère générique du résultat.

RÉFÉRENCES

1. GHOUL. A « MECANIQUE DE LARUPTURE », CASBAH Editions, Algérie 2005.
2. LEBLOND. J « MECANIQUE DE LARUPTURE FRAGILE », ECOLE POLYTECHNIQUE, 1994.
3. FRANCFORT. G, MARIGO. J « La théorie de GRIFFITH de la rupture fragile revisité », Journées MECAMAT, 1997.
4. LAVERNE. J « Formulation Energétique de la Rupture par des Modèles de Forces Cohésives : Considérations Théoriques et Implantations Numériques », Thèse de Doctorat, Université Paris XIII, France, 2004.
5. FERDJANI. H, ABDELMAOULA. R, MARIGO. J-J « Insensitivity to small defects of the rupture behavior of materials governed by the DUGDALE model ». The third international engineering and mechanics, December 17-19, 2006, HAMMAMET – Tunisia.
6. CHARLOTTE. M, FRANCFORT. G, MARIGO. J-J, TRUSKINOVSKY. L « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem : comparison of Griffith and Barenblatt surface energy models », A. Benallal EDITION, Proceedings of the Symposium on “Continuous Damage and Fracture”, Elsevier, Paris, 2000, p.7-12.
7. FRANCFORT. G, MARIGO. J « Vers une théorie énergétique de la rupture fragile », C. R. Mécanique 330 (2002) 225–233.
8. LAVERNE J., MARIGO J.-J., « Approche globale, minima relatifs et Critère d’Amorçage en Mécanique de la Rupture», Comptes Rendus Mécanique, vol. 332,2004, p. 313-318.
9. GOODFELLOW, site Internet www.goodfellow.com
10. De XIE, WAAS. A « Discrete cohesive zone model for mixed-mode fracture using finite element analysis », Engineering Fracture Mechanics 73 (2006) 1783–1796.

11. BUI H. D., « Mécanique de la Rupture Fragile », Masson, Paris, 1978.
12. site Internet www.suse.de
13. site Internet www.gnu.org
14. GOURI. D, « Modélisation des structure par Elément Finis »
15. GEUZANE. L, site Internet www.geuz.org
16. BAKHVALOV. N, « TRADUIT DU RUSSE, MATHEMATIQUES : METHODES NUMERIQUES », EDITIONS MIR MOSCOU, 1976.
17. HUNTER P., PULLAN A., « FEM/BEM NOTES », Department of Engineering Science, The University of Auckland, New Zealand, February 21, 2001.
18. MURPHY. N, ALI. M, IVANKOVIC. A, « Dynamic crack bifurcation in PMMA », Engineering Fracture Mechanics 73 2569–2587, 2006.

ANNEXE A

Définition de la fonction Θ et Calcul des matrices de rigiditésA.1 Définition de la transformation Θ

Soient Ω_0 et Ω deux domaines partagés en quatre régions (cf. figure A.1) tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_1^0 \leq t \\ t \leq x_1^0 \leq c_0 \\ c_0 \leq x_1^0 \leq a_0 \\ a_0 \leq x_1^0 \leq L \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq t \\ t \leq x \leq c \\ c \leq x \leq a \\ a \leq x \leq L \end{array} \right.$$

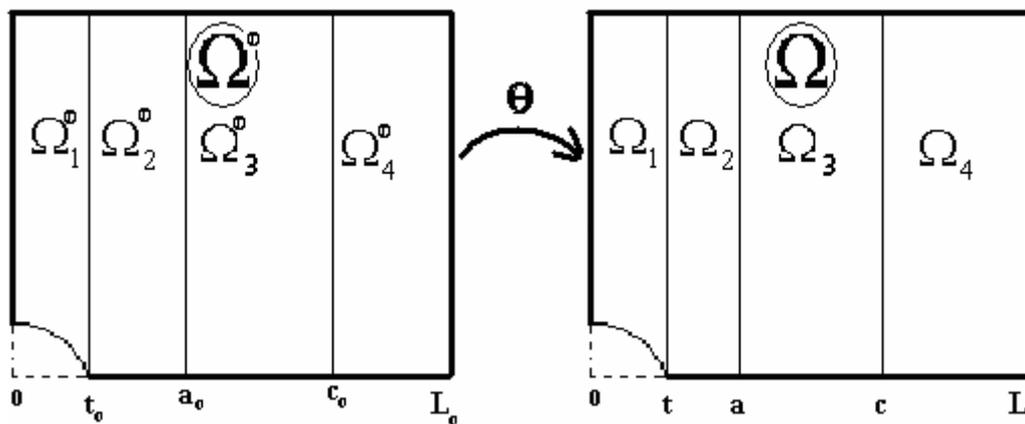


Figure A.1 : Les domaines Ω et Ω_0 subdivisés en quatre sous domaines

La transformation Θ transforme le domaine Ω_0 en Ω (cf. figure 3.2) en correspondant à chaque point $X_0(x_1^0, x_2^0) \in \Omega_0$ un point $X(x_1, x_2) \in \Omega$ selon la relation $X = \Theta(X_0)$ tel que :

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + V(x_1^0) \\ x_2 = x_2^0 \\ L = L_0 \\ t = t_0 \end{cases} \dots\dots\dots(A.1)$$

La fonction $V(x_0)$ est continue et linéaire par parties. Elle est définie par :

$$V(x_1^0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x_1^0 \leq t \\ \frac{c-c_0}{c_0-t}(x_1^0-t) & \text{si } t \leq x_1^0 \leq c_0 \\ \frac{(a-c)-(a_0-c_0)}{a_0-c_0}(x_1^0-c_0)+c-c_0 & \text{si } c_0 \leq x_1^0 \leq a_0 \\ \frac{a-a_0}{a_0-L}(x_1^0-L) & \text{si } a_0 \leq x_1^0 \leq L \end{cases} \dots\dots(A.2)$$

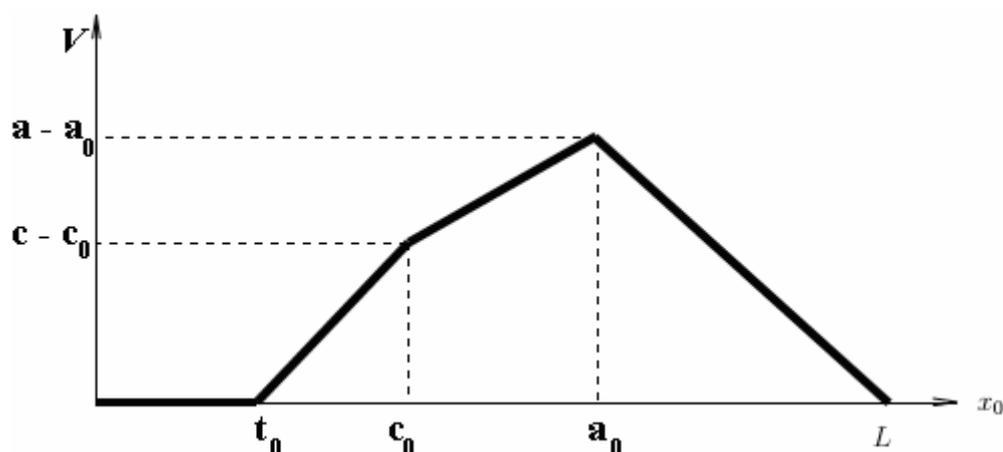


Figure 3.1 : Evolution de la fonction $V(x_0)$

Par contre si les domaines Ω_0 et Ω sont partagés en trois régions tel que :

$$\begin{cases} 0 \leq x_1^0 \leq t \\ t \leq x_1^0 \leq a_0 \\ a_0 \leq x_1^0 \leq L \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 0 \leq x \leq t \\ t \leq x \leq a \\ a \leq x \leq L \end{cases}, \text{ alors la fonction } V(x_0) \text{ est définie dans ce cas par :}$$

$$V(x_1^0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x_1^0 \leq t \\ \frac{a-a_0}{a_0-t}(x_1^0-t) & \text{si } t \leq x_1^0 \leq a_0 \\ \frac{a-a_0}{a_0-L}(x_1^0-L) & \text{si } a_0 \leq x_1^0 \leq L \end{cases} \dots\dots(A.3)$$

L'énergie potentielle du domaine Ω selon sa configuration est donnée par la relation suivante :

$$\Pi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\vec{A} : \vec{\varepsilon}(\vec{u}) \right) : \vec{\varepsilon}(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_F} \sigma_{\infty} u_2 dx_1 + \int_{\Gamma_c} \sigma_c [[u_2]] dx_1 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_z} K [[u_2]]^2 dx_1 \dots$$

(A.4)

A.2 L'énergie potentielle $\Pi(\vec{u})$ transportée sur le domaine Ω_0 :

D'après (A.1) nous avons :

$$\vec{u}(X) = \vec{u}(\Theta(X_0))$$

$$\text{Posons } \vec{u}(\Theta(X_0)) = \vec{\hat{u}}(X_0) \text{ et } [F] = [\nabla\Theta].$$

On a alors :

$$[F] = \left[\begin{array}{c|c} 1+V' & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right], \text{ et } [F^{-1}] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$$

On introduit D définie par $D = \det[F] = (1+V')$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i(X)}{\partial x_j} &= \frac{\partial u_i(\Theta(X_0))}{\partial x_p^0} \frac{\partial x_p^0}{\partial x_j} = \frac{\partial \hat{u}_i(X_0)}{\partial x_p^0} \frac{\partial x_p^0}{\partial x_j} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_p^0} F_{pj}^{-1} \\ &= \nabla \hat{u}_{ip} F_{pj}^{-1} \end{aligned}$$

Et à cause de la symétrie du tenseur $\varepsilon(\vec{u})$ on a :

$$\frac{\partial u_i(X)}{\partial x_j} = F_{jp}^{-T} \nabla \hat{u}_{pi}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\overset{\equiv}{\underset{\equiv}{A}} : \overset{\equiv}{\underset{\equiv}{\varepsilon}}(\vec{u}) \right) : \overset{\equiv}{\underset{\equiv}{\varepsilon}}(\vec{u}) d\Omega &= \int_{\Omega_0} \overset{\equiv}{\underset{\equiv}{A}} : (F^{-T} \nabla \vec{u}) : (F^{-T} \nabla \vec{u}) \det F d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \overset{\equiv}{\underset{\equiv}{A}} : (\nabla \vec{u} F^{-1}) : (\nabla \vec{u} F^{-1}) \det F d\Omega_0 \end{aligned}$$

$$\int_c^a \sigma_c u_2 dx_1 = \int_{c_0}^{a_0} \sigma_c \hat{u}_2 \det F dx_1^0$$

$$\int_0^L \sigma_\infty u_2 dx_1 = \int_0^L \sigma_\infty \hat{u}_2 \det F dx_1^0$$

$$\int_a^L K [[u_2]]^2 dx_1 = \int_{a_0}^L K [[\hat{u}_2]]^2 \det F dx_1^0$$

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{u}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \overset{\equiv}{\underset{\equiv}{A}} : (F^{-T} \nabla \vec{u}) : (F^{-T} \nabla \vec{u}) \det F d\Omega_0 + \int_{c_0}^{a_0} \sigma_c [[\hat{u}_2]] \det F dx_1^0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{a_0}^L K [[\hat{u}_2]]^2 \det F dx_1^0 - \int_0^L \sigma_\infty \hat{u}_2 \det F dx_1^0 \end{aligned}$$

Puisque $[F^{-T}] = \begin{bmatrix} D & | & 0 \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix}$ et $[\nabla \vec{u}] = \begin{bmatrix} u_{1,1} & | & u_{1,2} \\ u_{2,1} & | & u_{2,2} \end{bmatrix}$ alors

$$[\hat{\nabla} \vec{u}] = [F^{-T}] [\nabla \vec{u}] = \begin{bmatrix} \frac{u_{1,1}}{D} & | & u_{1,2} \\ \frac{u_{2,1}}{D} & | & u_{2,2} \end{bmatrix}$$

et donc

$$\Pi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \overset{\equiv}{\underset{\equiv}{A}} : \hat{\nabla} \vec{u} : \hat{\nabla} \vec{u} D d\Omega_0 + \int_{c_0}^{a_0} \sigma_c [[\hat{u}_2]] D dx_1^0 + \frac{1}{2} \int_{a_0}^L K [[\hat{u}_2]]^2 D dx_1^0 - \int_0^L \sigma_\infty \hat{u}_2 D dx_1^0$$

A.3 Tenseur de rigidité transporté :

$$\text{On a : } \int_{\Omega_0} \overset{\equiv}{\underset{\equiv}{A}} : \hat{\nabla} \vec{u} : \hat{\nabla} \vec{u} D d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \hat{A}_{ipkq} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_p^0} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_q^0} d\Omega_0$$

Avec $\hat{A}_{ipkq} = A_{ijkh} F_{pj}^{-1} F_{qh}^{-1} D$, $i, j, k, h, p, q = 1, 2$

et $A_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk})$

où λ et μ sont les coefficients de LAMÉ et δ_{ij} symbole de KRONECKER.

On a donc, en état de contraintes planes :

$A_{1111} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$	$A_{1122} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$	$A_{1112} = 0$	$A_{1121} = 0$
$A_{2211} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$	$A_{2222} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$	$A_{2212} = 0$	$A_{2221} = 0$
$A_{1211} = 0$	$A_{1222} = 0$	$A_{1212} = \mu$	$A_{1221} = 0$
$A_{2111} = 0$	$A_{2122} = 0$	$A_{2112} = 0$	$A_{2121} = \mu$

Et

$\hat{A}_{1111} = \frac{A_{1111}}{D}$	$\hat{A}_{1122} = A_{1122}$	$\hat{A}_{1112} = A_{1112}$	$\hat{A}_{1121} = \frac{A_{1121}}{D}$
$\hat{A}_{2211} = A_{2211}$	$\hat{A}_{2222} = A_{2222} D$	$\hat{A}_{2212} = A_{2212} D$	$\hat{A}_{2221} = A_{2221}$
$\hat{A}_{1211} = A_{1211}$	$\hat{A}_{1222} = A_{1222} D$	$\hat{A}_{1212} = A_{1212} D$	$\hat{A}_{1221} = A_{1221}$
$\hat{A}_{2111} = \frac{A_{2111}}{D}$	$\hat{A}_{2122} = A_{2122}$	$\hat{A}_{2112} = A_{2112}$	$\hat{A}_{2121} = \frac{A_{2121}}{D}$

Ainsi

$\hat{A}_{1111} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{D(\lambda + 2\mu)}$	$\hat{A}_{1122} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$	$\hat{A}_{1112} = 0$	$\hat{A}_{1121} = 0$
$\hat{A}_{2211} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$	$\hat{A}_{2222} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} D$	$\hat{A}_{2212} = 0$	$\hat{A}_{2221} = 0$
$\hat{A}_{1211} = 0$	$\hat{A}_{1222} = 0$	$\hat{A}_{1212} = \mu D$	$\hat{A}_{1221} = 0$
$\hat{A}_{2111} = 0$	$\hat{A}_{2122} = 0$	$\hat{A}_{2112} = 0$	$\hat{A}_{2121} = \frac{\mu}{D}$

Ou bien en fonction du module d'YOUNG E et du coefficient de POISSON ν :

$\hat{A}_{1111} = \frac{E}{(1-\nu^2)D}$	$\hat{A}_{1122} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$	$\hat{A}_{1112} = 0$	$\hat{A}_{1121} = 0$
$\hat{A}_{2211} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$	$\hat{A}_{2222} = \frac{E}{1-\nu^2}D$	$\hat{A}_{2212} = 0$	$\hat{A}_{2221} = 0$
$\hat{A}_{1211} = 0$	$\hat{A}_{1222} = 0$	$\hat{A}_{1212} = \frac{E}{2(1+\nu)}D$	$\hat{A}_{1221} = 0$
$\hat{A}_{2111} = 0$	$\hat{A}_{2122} = 0$	$\hat{A}_{2112} = 0$	$\hat{A}_{2121} = \frac{E}{2(1+\nu)}D$

On peut écrire la loi de comportement élastique pour le domaine Ω sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} \\ \hat{\sigma}_{22} \\ \hat{\sigma}_{12} \\ \hat{\sigma}_{21} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{D} & \nu & 0 & 0 \\ \nu & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{11} \\ \hat{\epsilon}_{22} \\ \hat{\epsilon}_{12} \\ \hat{\epsilon}_{21} \end{pmatrix}$$

A.4 Contraintes appliquées et raideur de la ZCC transportées :

On définit les variables suivantes :

$$\hat{\sigma}_c = D\sigma_c$$

$$\hat{\sigma}_\infty = D\sigma_\infty$$

$$\hat{K} = DK$$

Ainsi l'énergie potentielle transportée s'écrit :

$$\Pi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \hat{\hat{A}} : \nabla \vec{u} : \nabla \vec{u} d\Omega_0 + \int_{c_0}^{a_0} \hat{\sigma}_c \hat{u}_2 dx_1^0 + \frac{1}{2} \int_{a_0}^L \hat{K} \hat{u}_2^2 dx_1^0 - \int_0^L \hat{\sigma}_\infty \hat{u}_2 dx_1^0$$

A.5 Matrices de rigidité transportées :

a. Élément triangulaire :

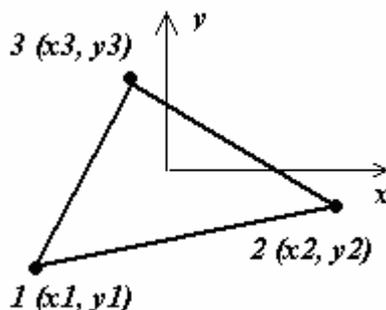


Figure 3.3 : Élément triangulaire à 3 nœuds

Soit un élément triangulaire à 3 nœuds d'aire S . Chaque nœud est repéré par ces coordonnées (x_i, y_i) où i est l'indice du nœud. Soient :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad H_1 = \frac{2G}{1-\nu}, \quad H_2 = \nu H_1, \quad D' = \frac{1}{D}$$

$$\begin{cases} x_{ij} = x_i - x_j \\ y_{ij} = y_i - y_j \end{cases} \text{ où } i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, 2, 3.$$

$$S = \frac{1}{2}(y_{31}x_{21} - x_{31}y_{21}), \text{ et } x_g \text{ l'abscisse du centre de gravité de l'élément.}$$

Dans le cas où Ω est subdivisé en quatre sous domaines on a :

$$D = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x_g \leq t \\ \frac{c-t}{c_0-t} & \text{si } t \leq x_g \leq c_0 \\ \frac{a-c}{a_0-c_0} & \text{si } c_0 \leq x_g \leq a_0 \\ \frac{a-L}{a_0-L} & \text{si } a_0 \leq x_g \leq L \end{cases}$$

On choisit une interpolation linéaire pour les déplacements u_1 et u_2 de la forme suivante :

$$\begin{cases} u_1(x, y) = \varphi_1(x, y)u_1^1 + \varphi_2(x, y)u_1^2 + \varphi_3(x, y)u_1^3 \\ u_2(x, y) = \varphi_1(x, y)u_2^1 + \varphi_2(x, y)u_2^2 + \varphi_3(x, y)u_2^3 \end{cases}$$

Tel que $\varphi_n(x, y) = a_n x + b_n y + c_n$ est une fonction de forme avec a_n, b_n, c_n des constantes à déterminer et u_n^i le déplacement du nœud i dans la direction n .

Les fonctions de forme $\varphi_n(x, y)$ doivent vérifier la condition suivante :

$$\varphi_n(x_i, y_i) = \delta_{ni} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}$$

On obtient ainsi les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{n1} \\ \delta_{n2} \\ \delta_{n3} \end{Bmatrix}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \\ x_2 y_3 - x_3 y_1 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = y_{23}x + x_{32}y + x_2 y_3 - x_3 y_1 \\ \varphi_2(x, y) = y_{31}x + x_{13}y + x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ \varphi_3(x, y) = y_{12}x + x_{21}y + x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 \\ \hline 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{array} \right\}$$

On pose

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 \\ \hline 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 \end{array} \right] \text{ et } \{U\} = \left\{ \begin{array}{l} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{array} \right\}$$

donc $\{\varepsilon\} = [B]\{U\}$

$$\Rightarrow [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\text{Et donc } [B] = \frac{1}{2S} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} y_{23} & 0 & y_{13} & 0 & y_{12} & 0 \\ \hline 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ \hline x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} & 0 \\ \hline 0 & y_{23} & 0 & y_{13} & 0 & y_{12} \end{array} \right]$$

La matrice de rigidité de l'élément triangulaire est donné par :

$$[K_e] = \int_S [B]^T [\hat{A}] [B] dS$$

Puisque le produit matriciel $[B]^T [\hat{A}] [B]$ ne comporte que des composantes constantes alors :

$$[K_e] = [B]^T [\hat{A}] [B] S$$

On obtient ainsi la matrice de rigidité transportée $[K_e]$ de l'élément triangulaire :

$$[K_e] = \frac{1}{4S} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u1 & v1 & u2 & v2 & u3 & v3 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline H_1 y_{23}^2 D' & H_2 x_{32} y_{23} & H_1 y_{31} y_{23} D' & H_2 x_{13} y_{23} & H_1 y_{12} y_{23} D' & H_2 x_{21} y_{23} \\ \hline +Gx_{32}^2 D & +Gx_{32} y_{23} & +Gx_{32} x_{13} D & +Gx_{32} y_{31} & +Gx_{21} x_{32} D & +Gx_{32} y_{12} \\ \hline & H_1 x_{32}^2 D & H_2 x_{32} y_{31} & H_1 x_{32} x_{13} D & H_2 x_{32} y_{12} & H_1 x_{32} x_{21} D \\ \hline & +Gy_{23}^2 D' & +Gx_{13} y_{23} & +Gy_{31} y_{23} D' & +Gx_{21} y_{23} & +Gy_{12} y_{23} D' \\ \hline & & H_1 y_{31}^2 D' & H_2 x_{13} y_{31} & H_1 y_{12} y_{31} D' & H_2 x_{21} y_{31} \\ \hline & & +Gx_{13}^2 D & +Gx_{13} y_{31} & +Gx_{13} x_{21} D & +Gx_{13} y_{12} \\ \hline & & & H_1 x_{13}^2 D & H_2 x_{13} y_{12} & H_1 x_{13} x_{21} D \\ \hline & & & +Gy_{31}^2 D' & +Gx_{21} y_{31} & +Gy_{12} y_{31} D' \\ \hline & & & & H_1 y_{12}^2 D' & H_2 x_{21} y_{12} \\ \hline & & & & +Gx_{21}^2 D & +Gx_{21} y_{12} \\ \hline & & & & & H_1 x_{21}^2 D \\ \hline & & & & & +Gy_{12}^2 D' \\ \hline \end{array} \\ \end{array}$$

b. Élément d'interface :

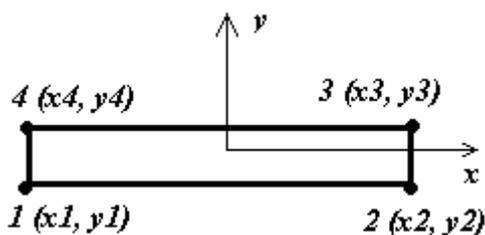


Figure 3.4 : Élément d'interface à 4 nœuds

La loi de comportement du saut de déplacement dans la ZCC dans le domaine Ω est $\sigma_{22} = K \llbracket u_2 \rrbracket$ et le saut de déplacement suivant la direction oy est défini dans cette zone par la relation $\llbracket \hat{u}_2 \rrbracket = \Delta u_2 = \Delta v$.

On utilise une interpolation linéaire du saut δ . Posons $h = x_2 - x_1$.

$\llbracket \hat{u}_2 \rrbracket = \Delta v(x) \approx Bx + C$, tel que :

$$\begin{cases} \Delta v(x=0) = B \cdot 0 + C = v_4 - v_1 \\ \Delta v(x=h) = B \cdot h + C = v_3 - v_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = v_4 - v_1 \\ B = \frac{(v_3 - v_2) - (v_4 - v_1)}{h} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \Delta v(x) \approx \left(\frac{(v_3 - v_2) - (v_4 - v_1)}{h} \right) x + (v_4 - v_1)$$

$$\Rightarrow \Delta v(x) \approx \left(\frac{x-h}{h} \right) v_1 + \frac{-x}{h} v_2 + \frac{x}{h} v_3 + \left(\frac{-x+h}{h} \right) v_4$$

Donc $\Delta v(x) \approx \langle B \rangle \{v_e\}$, où :

$$\langle B \rangle = \left\langle \frac{x-h}{h} \quad \frac{-x}{h} \quad \frac{x}{h} \quad \frac{-x+h}{h} \right\rangle \text{ et } \{v_e\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}.$$

La matrice de rigidité peut s'obtenir à partir de la fonctionnelle énergie potentielle [17] :

$$\begin{aligned} \Pi(\llbracket \hat{u}_2 \rrbracket) &= \frac{1}{2} \int_0^h \hat{K} \llbracket \hat{u}_2 \rrbracket^2 dx - \{v_e\}^T \{F_e\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \hat{K} (\langle B \rangle \{v_e\})^T (\langle B \rangle \{v_e\}) dx - \{v_e\}^T \{F_e\} \end{aligned}$$

où $\{F_e\}$ est le vecteur des forces nodales.

On a donc :

$$\begin{aligned} \Pi(\llbracket \hat{u}_2 \rrbracket) &= \frac{1}{2} \int_0^h \hat{K} \{v_e\}^T \langle B \rangle^T \langle B \rangle \{v_e\} dx - \{v_e\}^T \{F_e\} \\ &= \frac{1}{2} \{v_e\}^T \left(\int_0^h \hat{K} \langle B \rangle^T \langle B \rangle dx \right) \{v_e\} - \{v_e\}^T \{F_e\} \end{aligned}$$

A l'équilibre, le vecteur des déplacements $\{v_e\}$ minimise l'énergie potentielle et la matrice de rigidité est donc $[Ke_4] = \int_0^h \hat{K} \langle B \rangle^T \langle B \rangle dx$.

On obtient ainsi

$$[Ke_4] = \frac{KhD}{6} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v1 & v2 & v3 & v4 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -2 \\ \hline 1 & 2 & -2 & -1 \\ \hline -1 & -2 & 2 & 1 \\ \hline -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \text{ avec } D = \frac{a-L}{a_0-L}$$

A.6 Vecteurs élémentaires des forces nodales transportés :

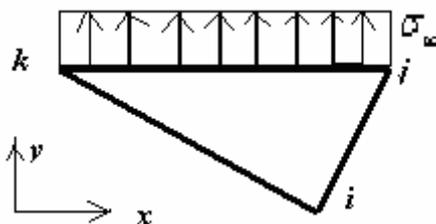


Figure 3.5 : Charge répartie sur le bord supérieur

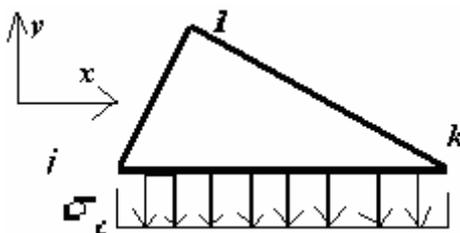


Figure 3.6 : Charge répartie sur la fissure

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \end{Bmatrix} = \frac{x_j - x_k}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{\sigma}_\infty \\ 0 \\ \hat{\sigma}_\infty \end{Bmatrix} = D \frac{x_j - x_k}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_\infty \\ 0 \\ \sigma_\infty \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3.13)$$

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \end{Bmatrix} = \frac{x_k - x_j}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{\sigma}_c \\ 0 \\ -\hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = D \frac{x_k - x_j}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_c \\ 0 \\ -\sigma_c \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3.14)$$

Les relations (3.11) et (3.13) sont pour les éléments du bord supérieur, cf. figure 3.5.

Les relations (3.12) et (3.14) sont pour les éléments de la fissure, cf. figure 3.6.