

**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences de l'ingénieur**

Département d'Aéronautique

## **MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité : Aéronautique

### **RESOLUTION D'UN PROBLEME BIDIMENSIONNEL DE CHANGEMENT DE PHASE PAR LA METHODE ENTHALPIQUE**

Par

**Rafik ANKRI**

**devant le Jury composé de :**

S. BOUKRAA	Professeur / U. de Blida	Président
T. ZEBBICHE	Maître de Conférences / U. de Blida	Rapporteur
M. BOUNEDER	Chargé de cours / U. de Blida	Co- rapporteur
T. REZOUG	Maître de Conférences / U. de Blida	Examineur
M .A. BELOUHRANI	Maître de Conférences / E.M.P	Examineur

Blida, Décembre 2008

## **RESUME**

Le présent travail porte sur la fusion en présence de la convection naturelle d'un matériau à changement de phase rectangulaire, chauffé à l'aide de sources de chaleur continues réparties le long des parois latérales conductrices. Pour ce faire, un modèle numérique reposant sur les équations de conservation est exposé.

Une méthode de volumes finis couplée à une formulation enthalpique pour le changement de phase est adoptée. Le résultat est un système non-linéaire couplé, manipulé par les différents algorithmes SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC et PISO. Les approximations pour les divers termes de l'équation de transport sont d'une précision de deuxième ordre. Cependant, le terme convectif est manipulé par les quatre schémas de discrétisation (quick, centré, amont et hybride). Ce modèle est validé à l'aide des résultats numériques disponibles dans la littérature.

Finalement, ce travail fournit à la communauté de chercheurs une solution de référence pour le cas du gallium qui peut être employée comme un point de départ pour vérifier d'autres codes de calcul et modèles mathématiques.

## **ABSTRACT**

This work concerns the fusion in the presence of the natural convection of a rectangular phase change material heated using continuous sources, distributed along the conducting side walls. With this intention, a numerical model based on the conservation equations is exposed.

A finite volume method coupled to an enthalpy formulation for the phase change is adopted. The result is a coupled non-linear system, handled by the various algorithms SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC and PISO. The approximations for the various terms of the transport equations are of a precision of second order. However, the convective term is

handled by the four schemes (quick, centred, upwind and hybrid). This model is validated by numerical results available in the literature

Finally, this work provides to the community researchers a reference solution for the case of the gallium which can be employed like a starting point to check other computer codes and mathematical models.

## ملخص

هذا العمل يتمحور حول دراسة انصهار معدن مستطيل الشكل، بوجود حمل حراري طبيعي وبتوزيع مستمر لمنابع الحرارة على طول الحواف الجانبية الناقلة للحرارة. من اجل هذا، تم طرح نموذج عددي يعتمد على معادلات الحفظ.

استعملت طريقة الأحجام التامة، مقترنة بصياغة تعتمد على المحتوى الحراري للتعبير على تغير الهيئة. الناتج عبارة عن جملة من المعادلات لا خطية مترابطة، عولجت بمختلف الخوارزميات SIMPLE، SIMPLER، SIMPLEC و PISO. جميع حدود معادلات الحفظ تمت بقيمة تقريبية من الدرجة الثانية. في حين أن الحد الممثل للحمل الحراري عولج بأربع أشكال للتقسيم (quick، مركزي، قبلي و مختلط). تم التحقق من فعالية هذا النموذج من خلال النتائج العددية المتوفرة في المراجع.

أخيرا، هذا العمل يقدم لمجتمع الباحثين حل مرجعي في حالة انصهار معدن القاليوم وبالتالي يمكن استعماله كنقطة انطلاق للتأكد من برامج و نماذج حسابية أخرى.

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens à remercier vivement mon encadreur M<sup>r</sup> Mohamed BOUNEDER pour son suivi, ses orientations pratiques, conseils précieux et son encouragement durant la réalisation de ce travail et la présentation de ce mémoire dans sa forme finale.

Derrière ce travail se cache la présence, le support et l'ouverture de mon Co-promoteur, Mr T. ZEBBICHE, à qui je dois énormément. J'ai particulièrement apprécié ses encouragements, ses conseils et la liberté qu'il m'a accordée dans la poursuite de mon travail.

Je tiens également à remercier Mr A. E. Badereddine pour son suivi, et pour tout l'intérêt qu'il a porté à notre étude.

Je tiens à remercier tous les membres du Jury qui m'ont fait l'honneur d'accepter de juger mon travail.

Le travail présenté n'aurait pas été mené à terme dans les meilleures conditions sans la collaboration de l'ensemble des personnels de l'EMP et surtout du Laboratoire Systèmes Energétiques. Je les remercie tous pour leurs encouragements et support moral.

Que toute personne ayant contribué, de près où de loin, à l'aboutissement de ce travail trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance. Enfin, je ne pourrais terminer sans une pensée à l'ensemble de mes enseignants. Qu'ils trouvent ici, l'expression de ma profonde gratitude.

## TABLES DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

INTRODUCTION .....	12
1. Introduction.....	12
2. Recherche bibliographique .....	14
3. Objectif et démarche de cette étude .....	18
CHAPITRE 1 : FORMULATION DU PROBLEME ET MODELISATION.....	20
1.1. Aspect cinétique du transfert de chaleur.....	20
1.2. Méthodes pour traiter les problèmes de changement de phases.....	21
1.2.1. Première formulation .....	21
1.2.2. Deuxième formulation .....	23
1.2.3. Discussion.....	24
1.3. Changement d'état avec couplage conduction-convection naturelle.....	24
1.4. Hypothèses.....	25
1.5.1. Hypothèses générales.....	25
1.5.2. Hypothèses reliées au changement de phase.....	26
1.5. Formulation des équations.....	26
1.6. La méthode enthalpique.....	27
CHAPITRE 2 : MAILLAGE ET DISCRETISATION.....	31
2.1. Généralités.....	31
2.2. Discrétisation de l'équation stationnaire.....	31
2.2.1. Schéma aux différences centrées.....	33
2.2.2. Schéma de différentiation amont " upwind ".....	33
2.2.3. Schéma de différentiation hybride.....	35
2.2.4. Equation discrète finale.....	36
2.2.5. Schéma de différentiation quadratique amont "quick".....	37

2.2.6. Problèmes de stabilité du schéma quick.....	39
2.2.7. Extension aux grilles non uniformes.....	40
2.3. Discrétisation de l'équation de transport avec le terme transitoire.....	41
2.3.1. Schéma d'Euler explicite.....	41
2.3.2. Schéma d'Euler implicite.....	42
2.3.3. Schéma de Crank-Nicholson .....	42
2.4. Discrétisation de l'équation de continuité.....	43
2.5. Formulation dimensionnelle.....	44
2.6. Formulation adimensionnelle.....	45
CHAPITRE 3 : ALGORITHMES ET STRATEGIE DE RESOLUTION.....	48
3.1. Algorithmes de couplage vitesse-pression.....	48
3.1.1. Maillage décalé.....	49
3.1.2. Algorithme SIMPLE.....	52
3.1.3. Algorithme SIMPLER .....	55
3.1.4. Algorithme SIMPLEC.....	57
3.1.5. Algorithme PISO.....	57
3.2. Mise à jour de la fraction liquide.....	60
3.3. Critères de convergence.....	61
3.4. Calcul du terme source.....	62
3.5. Nombre du Nusselt .....	63
CHAPITRE 4 : VALIDATION DE LA METHODE.....	64
4.1. Introduction .....	64
4.2. Description du problème physique.....	64
4.3. Méthodes numériques et paramètres utilisés.....	66
4.4. Description du programme de calcul utilisé.....	68
4.5. Interface liquide-solide.....	69
4.6. Lignes de courant et models de roulements.....	73
4.7. Nombre moyen de Nusselt.....	81
4.8. Volume de la fonte.....	83
4.9. Conclusion.....	85
CHAPITRE 5 : RESULTATS ET DISCUSSION.....	86

5.1. Présentation du problème physique.....	86
5.2. Présentation des résultats.....	89
5.3. Choix des algorithmes de résolution.....	90
5.4. Etude de la convergence de la grille.....	93
5.4.1. Paramètres physiques calculés dans des profils transversaux un centre roulement.....	96
5.4.2. Effet du maillage aux centres des roulements.....	99
5.4.3. Effet du maillage sur l'évolution du nombre de roulements.....	101
5.5. Choix du pas de temps.....	104
5.6. Analyse du mécanisme de fusionnement des roulements.....	105
5.7. Présentation d'une solution de référence.....	107
5.8. Effet du facteur de forme.....	114
5.8.1. Physique et géométrie du problème étudié.....	114
5.8.2. Effet du facteur de forme sur les paramètres physiques.....	114
5.9. Effet des nombres de Rayleigh et de Stefan.....	122
5.9.1. Physique et géométrie du problème étudié.....	122
5.9.2. Effet des nombres de Rayleigh et de Stefan sur les paramètres physiques.....	123
5.10. Conclusion.....	130
CONCLUSION GENERALE.....	132
APPENDICE	
A. Liste des symboles et des abréviations.....	135
B. Organigrammes de programmation.....	137
C. Méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires.....	140
D. Tableaux des résultats.....	143
REFERENCES.....	146

## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Schématisation des processus de fusion et de solidification	21
Figure 1.2	Transformation de coordonnées	23
Figure 1.3	Variation de l'énergie totale en fonction de la température	28
Figure 2.1	Représentation du volume de contrôle	32
Figure 2.2	Représentation du schéma amont dans le sens positive de l'écoulement	34
Figure 2.3	Représentation du schéma amont dans le sens inverse de l'écoulement	34
Figure 2.4	Représentation du schéma quick dans le sens directe de l'écoulement	37
Figure 2.5	Schématisation d'une grille non uniforme	40
Figure 2.6	Géométrie du problème physique	46
Figure 3.1	Représentation de la grille décalée	50
Figure 3.2	Représentation d'un volume fini centré en "P"	53
Figure 4.1	Représentation schématique du problème de référence proposé par Lequere	65
Figure 4.2	Algorithme de résolution numérique	68
Figure 4.3	Interface liquide-solide par l'application du schéma amont	71
Figure 4.4	Interface liquide-solide par l'application du schéma hybride	71
Figure 4.5	Interface liquide-solide par l'application du schéma centré	71
Figure 4.6	Interface liquide-solide par l'application du schéma quick.	72
Figure 4.7	Interface liquide-solide pour une grille de 400x400	72
Figure 4.8	Représentation de l'harmonie observée entre la forme de l'interface solide-liquide et le nombre de roulements à $t=1000s$	72
Figure 4.9	Les lignes de courant par l'application du schéma amont au temps $t = 200 s$	75
Figure 4.10	Les lignes de courant par l'application du schéma hybride au temps $t = 200 s$	75
Figure 4.11	Les lignes de courant par l'application du schéma centré au temps $t = 200 s$	75
Figure 4.12	Les lignes de courant par l'application du schéma quick au temps $t = 200 s$	75
Figure 4.13	Les lignes de courant par l'application du schéma amont au temps $t = 450 s$	76

Figure 4.14	Les lignes de courant par l'application du schéma hybride au temps $t = 450$	76
Figure 4.15	Les lignes de courant par l'application du schéma centré au temps $t = 450$ s	76
Figure 4.16	Les lignes de courant par l'application du schéma quick au temps $t = 450$ s	76
Figure 4.17	Les lignes de courant par l'application du schéma amont au temps $t = 550$ s	77
Figure 4.18	Les lignes de courant par l'application du schéma hybride au temps $t = 550$ s	77
Figure 4.19	Les lignes de courant par l'application du schéma centré au temps $t = 550$ s	77
Figure 4.20	Les lignes de courant par l'application du schéma quick au temps $t = 550$ s	77
Figure 4.21	Les lignes de courant par l'application du schéma amont au temps $t = 1000$ s	78
Figure 4.22	Les lignes de courant par l'application du schéma hybride au temps $t = 1000$ s	78
Figure 4.23	Les lignes de courant par l'application du schéma centré au temps $t = 1000$ s	78
Figure 4.24	Les lignes de courant par l'application du schéma quick au temps $t = 1000$ s	78
Figure 4.25	Evolution du nombre de roulements par l'application du schéma amont	80
Figure 4.26	Evolution du nombre de roulements par l'application du schéma hybride	80
Figure 4.27	Evolution du nombre de roulements par l'application du schéma centré	81
Figure 4.28	Evolution du nombre de roulements pour une grille de taille 400x400	81
Figure 4.29	Evolution du Nombre de Nusselt pour une grille de 200x200 et un schéma amont	82
Figure 4.30	Effet du maillage sur l'évolution du Nombre de Nusselt pour le schéma amont	82
Figure 4.31	Evolution du Nombre de Nusselt pour une grille de 200x200 et un schéma hybride	82
Figure 4.32	Effet du maillage sur l'évolution du Nombre de Nusselt pour le schéma hybride	82
Figure 4.33	Evolution du nombre de Nusselt pour une grille de 400x400	83
Figure 4.34	Evolution de la fraction liquide pour une grille 200x200 et un schéma amont	84
Figure 4.35	Evolution de la fraction liquide pour une grille 200x200 et un schéma hybride	84
Figure 4.36	Effet du maillage sur la fraction liquide pour un schéma amont	84
Figure 4.37	Effet du maillage sur la fraction liquide pour un schéma hybride	84
Figure 4.38	Evolution de la fraction liquide pour une grille de 400x400	85
Figure 5.1	Représentation schématique du problème étudié	87
Figure 5.2	Différents modèles des roulements au cours de la fusion	87

Figure 5.3	Effet des schémas de discrétisations sur les lignes de courant	90
Figure 5.4	Effet des algorithmes de résolutions sur les lignes de courant par l'utilisation d'un terme transitoire Euler Implicite et une grille de 560x400	91
Figure 5.5	Effet des algorithmes de résolutions sur l'interface liquide-solide pour une grille 560x400	92
Figure 5.6	Effet des algorithmes de résolutions sur le nombre de Nusselt pour une grille 560x400	92
Figure 5.7	Effet des algorithmes de résolutions sur la fraction liquide pour une grille 560x400	92
Figure 5.8	Effet du maillage sur les lignes de courant au temps $t = 50s$	94
Figure 5.9	Evolution de la fraction liquide au cours de la fusion	95
Figure 5.10	Evolution de l'interface liquide-solide au cours de la fusion	95
Figure 5.11	Evolution du nombre de Nusselt au cours de la fusion	95
Figure 5.12	Influence du maillage sur la valeur transversale de la température	97
Figure 5.13	Influence du maillage sur la valeur transversale de la fonction de courant	98
Figure 5.14	Effet du maillage sur l'emplacement ( $y_c$ ) des centres des roulements à $t = 200s$	100
Figure 5.15	Effet du maillage sur la température des centres des roulements à $t = 200 s$	100
Figure 5.16	Effet du maillage sur la fonction de courant ( $\psi_c$ ) aux centres des roulements à $t = 200 s$	100
Figure 5.17	Evolution du nombre des roulements pour un schéma quick	102
Figure 5.18	Evolution du nombre des roulements pour un schéma centré.	102
Figure 5.19	Evolution du nombre des roulements pour les deux schémas, centré et quick.	102
Figure 5.20	Effet du maillage sur le temps de transition pour un schéma quick	103
Figure 5.21	Effet du pas de temps sur les lignes de courant	104
Figure 5.22	Schématisation du mécanisme de fusionnement des roulements	106
Figure 5.23	Représentation des coordonnées des centres des roulements	106
Figure 5.24	Variation de la différence entre les ordonnées de deux roulements successifs	107
Figure 5.25	Evolution de la convergence des équations de la quantité du mouvement	108
Figure 5.26	Evolution de la convergence des équations de la pression et de la température	108
Figure 5.27	Représentation des lignes de courant pour une grille de (630x450)	109

Figure 5.28	Représentation du champ de température pour une grille de (630x450)	110
Figure 5.29	Représentation de la composante (u) de la vitesse pour une grille de (630x450)	110
Figure 5.30	Représentation de la composante (v) de la vitesse pour une grille de (630x450)	111
Figure 5.31	Variation de la composante ( $u_{\max}$ ) de la vitesse au cours de la fusion	111
Figure 5.32	Variation de la fonction minimale de courant au cours de la fusion	111
Figure 5.33	Variation de la composante ( $v_{\max}$ ) de la vitesse au cours de la fusion	112
Figure 5.34	Variation du nombre de Nusselt au cours de la fusion	112
Figure 5.35	Variation de la fraction liquide au cours de la fusion	112
Figure 5.36	Schématisation de trois points de référence	112
Figure 5.37	Variation de la composante (u) de la vitesse au cours de fusion	113
Figure 5.38	Variation de la composante (v) de la vitesse au cours de la fusion	113
Figure 5.39	Variation de la fonction de courant au cours de la fusion	113
Figure 5.40	Variation de la température au cours de la fusion	113
Figure 5.41	Représentation des différentes configurations du facteur de forme.	114
Figure 5.42	Représentation des lignes de courant pour un facteur de forme $Ar = 0.5$	117
Figure 5.43	Représentation des lignes de courant pour un facteur de forme $Ar = 0.71$	118
Figure 5.44	Représentation des lignes de courant pour un facteur de forme $Ar = 1$	119
Figure 5.45	Effet du facteur de forme sur le nombre de Nusselt	120
Figure 5.46	Effet du facteur de forme sur la fraction liquide	120
Figure 5.47	Effet du facteur de forme sur l'interface liquide-solide	120
Figure 5.48	Evolution de la composante ( $U_{\max}$ ) au cours du temps	121
Figure 5.49	Evolution de la composante ( $V_{\max}$ ) au cours du temps	121
Figure 5.50	Evolution de la fonction ( $\Psi_{\max}$ ) au cours du temps	121
Figure 5.51	Evolution de la température pour $X = 0.05m$ , au temps $t = 150s$	121
Figure 5.52	Représentation des différentes configurations des nombres de Rayleigh et de Stefan	122
Figure 5.53	Représentation des lignes de courant pour $Ra = 1E6$ et $Ste = 0.038$	125
Figure 5.54	Représentation des lignes de courant pour $Ra = 2E6$ et $Ste = 0.070$	126
Figure 5.55	Représentation des lignes de courant pour $Ra = 3E6$ et $Ste = 0.102$	127

Figure 5.56	Effet des nombres de Rayleigh et de Stefan sur l'interface liquide-solide	128
Figure 5.57	Effet des nombres de Rayleigh et de Stefan sur la fraction liquide	128
Figure 5.58	Effet des nombres de Rayleigh et de Stefan sur le nombre de Nusselt	128
Figure 5.59	Evolution de la composante ( $U_{\max}$ ) au cours de la fusion	129
Figure 5.60	Evolution de la composante ( $V_{\max}$ ) au cours de la fusion	129
Figure 5.61	Evolution de la fonction ( $\Psi_{\max}$ ) au cours de la fusion	129
Figure 5.62	Evolution de la température pour $X= 0.05m$ , au temps 150 s	129
Tableau 2.1	Valeurs de la fonction $A( p )$	36
Tableau 2.2	Les différents termes de l'équation de transport dimensionnelle	45
Tableau 2.3	Les différents termes de l'équation de transport adimensionnelle	47
Tableau 4.1	Paramètres physiques utilisés	65
Tableau 4.2	Paramètres numériques utilisés	67
Tableau 4.3	Présentation des temps de fusionnement et de bifurcation	80
Tableau 5.1	Présentation des paramètres physiques du problème traité	88
Tableau 5.2	Présentation des paramètres numériques utilisés	88
Tableau 5.3	Effet des algorithmes de résolution sur le temps de calcul	91
Tableau 5.4	Effet du maillage sur la fonction de courant aux centres des roulements à $t = 200s$	101
Tableau 5.5	Effet du maillage sur les emplacements des centres des roulements à $t = 200s$	101
Tableau 5.6	Effet du maillage sur le temps de transition pour un schéma quick	103
Tableau 5.7	Effet du pas de temps sur le temps de calcul	104
Tableau 5.8	Effet du pas de temps sur les temps des transitions	105

## INTRODUCTION

### 1. Introduction

Le changement d'état liquide-solide d'un matériau est caractérisé par la transformation à température constante d'une phase liquide à une phase solide ou inversement. Cette réaction réversible s'accompagne d'une consommation d'énergie (**fusion**) ou d'une libération d'énergie (**solidification**).

Suivant le sens du changement d'état (fusion ou solidification), l'énergie provient d'une source externe soumise à une température supérieure à la température de fusion (qui peut être un fluide caloporteur, une source électrique ou rayonnante). Inversement, la chaleur est extraite à une température inférieure à celle de la fusion.

Comme le transfert de chaleur résulte d'un déséquilibre thermique, son étude quantitative ne peut être fondée sur la seule thermodynamique. Les températures et les quantités d'énergies fournies ou extraites dépendent des modes de transmission de la chaleur dans le milieu : conduction, convection, ou même rayonnement, si le milieu est semi transparent.

Depuis le travail précurseur de Stefan (1851) sur l'épaisseur de la calotte polaire [1], les problèmes de transfert thermique avec changement d'état solide- liquide portent le nom de ce physicien. Ces problèmes ont une importance considérable dans de nombreux domaines techniques. Parmi les applications courantes, on peut citer :

- La mise en forme et le traitement des matériaux (fonderie, moulage, soudure, extrusion, etc).
- Etude des durées de fusion et de solidification.
- Etude de la morphologie, le comportement du front de fusion et la distribution des impuretés dans le matériau fondu.

- Etude de la sécurité des réacteurs nucléaires en cas d'accident.
- Etude de plusieurs phénomènes géophysiques tels que le gel des sols et des lacs, la fonte ou la formation des glaciers et les éruptions volcaniques.
- Etude des systèmes de stockage de la chaleur ou du froid ainsi que la dissipation de la chaleur par chaleur latente.
- La congélation d'aliments et la préservation de matières organiques.

Cette grande variété des champs d'applications explique l'élan des recherches poursuivies ces dernières années dans ce domaine, dans le but de mieux connaître la cinétique de ces processus.

Le problème, à l'origine appelé problème de Stefan, pose plusieurs défis principalement dus à sa non-linéarité intrinsèque. Le front de fusion, qui constitue une condition limite nécessaire au calcul, fait effectivement partie de la solution. Une revue de ce problème important en transfert de chaleur est disponible dans la littérature [2-4].

Certaines solutions exactes ont été obtenues analytiquement [1, 5-9]. Bien qu'inestimables, ces solutions représentent toutefois une situation très idéalisée du phénomène.

En effet, ces solutions exactes n'existent que pour des problèmes de conduction pure dans des milieux semi-infinis. Dans le présent contexte, elles offrent une base solide afin de valider (partiellement) un modèle complexe.

L'analyse subséquente a donc été poursuivie sur les trois volets: expérimental, analytique (approximatif) et numérique. Les premiers résultats expérimentaux obtenus à la fin des années 70 sur la fusion dans des enceintes rectangulaires chauffées par une paroi verticale isotherme [10-13] ont vite montré que les effets de la convection naturelle dans le matériau à changement de phase liquide, dominaient le processus de fusion.

Les problèmes de changement de phase impliquent souvent des non-linéarités, des couplements forts et une frontière mobile [5]. En conséquence, seule les configurations les plus simples sont favorables à l'outil analytique, tandis que la solution de la plupart des problèmes d'intérêt, exige l'utilisation de méthodes numériques.

Généralement, l'évaluation de l'exactitude de la solution numérique est assurée en examinant le code de calcul sur des problèmes de référence avec des solutions connues, appelés problèmes de benchmark.

Actuellement, peu de solutions analytiques pour des problèmes de benchmark sont disponibles pour les changements de phases en présence de la convection naturelle dans la fonte.

## 2. Recherche bibliographique

Généralement, le problème du gallium ou de l'étain fondu dans un matériau rectangulaire chauffé verticalement est employé intensivement par les chercheurs pour l'évaluation des méthodes numériques appliquées aux changements de phases.

Pour le cas de l'étain, les deux résultats : expérimentaux [14] et numériques [14-16] sont disponibles dans la littérature. La plupart des études ont été concentrées sur la configuration suivante : un facteur de forme  $Ar = 0.75$ , nombre de Rayleigh  $Ra = 1.2 \times 10^5$ , nombre de Stefan  $Ste = 0.0085$  et un nombre de Prandtl  $Pr = 0.016$ . Tandis que le facteur de forme a été étudié numériquement [16, 17].

Pour le cas du gallium, étudié numériquement [15,18-32] et expérimentalement [33, 34]; plusieurs configurations distinctes ont été considérées. Un facteur de forme  $Ar = 1$  [18, 22, 23],  $Ar = 0.714$  (le plus utilisé) [18, 19, 26, 28, 30, 31],  $Ar = 0.5$  [29, 35] et  $Ar = 0.286$  [33, 34]. D'ailleurs, quelques auteurs ont considéré plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh et de Stefan pour un choix donné du facteur de forme.

L'ensemble des paramètres les plus fréquents sont  $Ra = 6 \times 10^5$  et  $Ste = 0.04$  pour  $Ar = 0.714$ ,  $Ra = 2.2 \times 10^5$  et  $Ste = 0.04$  pour  $Ar = 0.5$ ,  $Ra = 4 \times 10^4$  et  $Ste = 0.04$  pour  $Ar = 0.286$ .

Pour concentrer les efforts des chercheurs sur un problème unique, Lequere et Gobin [36] ont proposé un problème de référence pour le cas de l'étain avec la configuration suivante :  $Ra = 2.5 \times 10^5$ ,  $Ste = 0.01$  et  $Pr = 0.04$  pour  $Ar = 1$ ; ils ont proposé une solution de référence [37, 38], mais leurs résultats n'ont pas fait l'unanimité.

Bien que les cas de fusion du gallium et de l'étain aient été utilisés intensivement pour la comparaison, l'exactitude des résultats trouvés par les chercheurs n'a jamais été clairement démontrée. Ce problème a été réellement compensé par une controverse concernant la structure du fluide et surtout sur le nombre de roulements observés au cours de la fusion.

L'origine de cette controverse est le travail de Dantzig [39], qui a trouvé dans le cas du gallium fondu une structure d'écoulement de plusieurs roulements. Avant, un seul roulement avait été rapporté par Brent et al. [40]. D'ailleurs, les conclusions de Dantzig étaient en contradiction avec les résultats expérimentaux de Gau et al. [34], contrairement à ceux de Brent et al. [40] ont semblé s'assortir bien avec l'expérience.

Les résultats de Dantzig l'ont mené à poser un point très intéressant à étudier, concernant l'origine de la différence en nature de l'écoulement trouvé dans le cas du gallium et ouvrir la controverse avec une question importante : `` la solution de plusieurs roulements ou la solution d'un seul roulement est-elle correcte ? " .

Après le travail de Dantzig [39], nombreuses publications [19, 26, 28] ont rapporté des résultats conformes aux résultats de Brent et al. [40], c'est à dire, structure d'un seul roulement. En 1994, des expériences ont été exécutées par Campbell et Koster sur le gallium [33] afin de vérifier les premiers résultats de Gau et al. [34] (un seul roulement). Leurs résultats ont favorisé l'hypothèse d'unicité de la cellule tourbillonnaire. Les résultats de Dantzig ont été récemment confirmés par le travail de Stella et de Giangi [31], qui ont utilisé des grilles très fines (plusieurs fois plus fines) avec la discrétisation centrée.

Afin d'essayer d'expliquer le désaccord des premiers résultats numériques avec les résultats expérimentaux de Gau et al., Cerimele et al. [32] ont suggéré que les simulations numériques effectuées dans le cas du gallium n'ont pas été compatibles avec le procédé expérimental, qui a eu comme conséquence un remplacement du fluide réel dans la fonte par une température uniforme et une vitesse de liquide nulle. Ce fait n'a pas été pris en considération dans les études précédentes.

Plus tard, des simulations numériques effectuées par Cruchaga et Calentano [41] ont montré deux roulements observés tôt dans le processus de la fusion et trois plus tard.

Ceci a confirmé les premiers résultats de Dantzig [39], mais le nombre de roulements obtenus était différent. Après, des résultats présentés par Wintru et Gunther [42] ont concordé avec ceux de Stella et al. Indiquant ainsi une première structure avec quatre roulements, mais sans fournir de détails sur les paramètres numériques utilisés.

Après le problème de référence suggéré par Lequere et al. [36], le même désaccord a été enregistré pour l'étain sur le nombre exact de roulements observés au temps 1000s ; une solution à un seul roulement et une autre solution à deux roulements.

Bertrand [37] a justifié la différence constatée entre le numérique et l'expérimental par les difficultés rencontrées en tentant de satisfaire expérimentalement les hypothèses admises par les simulations numériques. Gobin et Lequere [38] ont conclu que le problème de changement de phase nécessite davantage de recherche et ont souligné le besoin de la description complète des phénomènes physiques, d'étudier l'effet du raffinement des grilles et de réaliser les expériences dans de meilleures conditions.

Dans des études précédentes concernant la fusion de l'étain ou du gallium, plusieurs auteurs ont considéré leur solution comme une solution convergée, mais peu de résultats réellement rapportés sur l'effet de la taille des grilles utilisées. Ainsi, Viswanath et al. [19] ont exécuté une amélioration de la grille de 30x30 à 50x50 et ils ont indiqué un changement de 3% enregistré dans les valeurs numériques de l'écoulement en concluant que leur solution était satisfaisante. La même observation est établie pour les travaux présentés par Rady et Mohanty [24] pour un raffinement de grille passant de 20x20 à 35x35.

La première tentative pour évaluer l'effet de la grille est celle de Stella et al. [31], par une analyse de la sensibilité de la maille sans pouvoir établir une solution grille-convergée, mais ont plutôt limité leur analyse à la définition d'une grille qui capturerait le nombre correct de roulements.

Un travail très important est réalisé récemment par Hannoun et al. [43, 44] et montrant la sensibilité de la solution trouvée en utilisant une grille uniforme, avec des tailles s'étendant de 25x25 à 800x800 noeuds.

Pour ce qui concerne l'effet des schémas de discrétisation, dans le cas de l'étain fondu, Dantzing [39] a surpris l'ensemble des chercheurs par ses résultats de six roulements observés tôt dans le processus de fusion, avec une grille grosse, discrétisée par un schéma centré. Il a constaté que le nombre de roulements observés diminue avec l'utilisation d'un schéma amont du premier ordre pour la même configuration de grille. Par contre, Stella et al. [31] ont trouvé seulement quatre roulements avec le même schéma centré de Dantzing [39], mais cette fois avec une grille cinq fois plus fine. Hannoun et al. [43, 44] ont montré l'effet de trois schémas de discrétisations (amont, hybride et centré) appliqués au problème proposé par Lequere [36].

Dans le cas du gallium, Kim et al. [17] ont présenté une comparaison de quatre schémas de discrétisation (amont, hybride, centré et en puissance). En raison de leur utilisation des grilles trop grosses, il n'y avait aucune différence significative parmi les résultats des divers schémas; toutes montraient un seul roulement.

Finalement, les principaux points de la controverse, constatés dans l'étude des matériaux à changement de phases (étain et gallium) peuvent être récapitulés comme suit :

1. Les chercheurs qui ont trouvé un modèle d'écoulement multicellulaire ont généralement employé des grilles plus fines ou un schéma de discrétisation d'ordre supérieur, tandis que ceux qui ont trouvé un modèle unicellulaire employaient généralement des grilles grosses ou des schémas de discrétisation d'ordre inférieur.
2. Les solutions trouvées avec l'utilisation de grosses grilles et des schémas d'ordre inférieur, sont plus en conformité avec les résultats expérimentaux.
3. Aucune explication admise pour le désaccord entre les solutions évoluées et l'observation expérimentale.
4. Aucune étude sur l'effet des grilles et des schémas de discrétisation n'est disponible sur la convergence du gallium.

### 3. Objectif et démarche de cette étude

L'état actuel des connaissances du processus de fusion nous fournit donc pratiquement peu d'informations concernant la fusion dans des enceintes rectangulaires, en présence de la convection naturelle.

Suite à la controverse constatée au paragraphe précédent, le présent travail vise au premier lieu à trancher en faveur du modèle d'écoulement multicellulaire et de confirmer les derniers résultats trouvés par Hannoun et al. [43, 44], tout en visant les objectifs suivants :

- 1- Approfondir les connaissances actuelles du phénomène de changement de phases.
- 2- Modéliser, simuler et analyser le phénomène du changement de phases.
- 3- Analyser et quantifier les effets de divers paramètres influençant le phénomène du changement de phases pour une enceinte rectangulaire chauffée uniformément.

En fonction de ces objectifs et pour mener à bien cette étude, le travail présenté s'articule sur une présentation générale du problème, suivi de cinq chapitres et une conclusion générale:

- Dans le premier chapitre, nous décrivons le modèle mathématique ainsi que sa mise en oeuvre sur ordinateur. Tout d'abord, une description géométrique du système physique considéré est présentée. Ensuite, un bref survol des méthodes disponibles dans la littérature pour la résolution des problèmes à changement de phases solide-liquide est effectué. Certaines hypothèses qui permettent d'obtenir les équations de conservation qui décrivent l'évolution du problème sont formulées.
- Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude du maillage et à la discrétisation du modèle mathématique par la méthode des volumes finis.

- Une discussion sur la méthode numérique et les algorithmes de résolution utilisés dans le code de calcul sera exposée dans le troisième chapitre.
- Le quatrième chapitre traitera de la validation du modèle mathématique utilisé et de la comparaison de nos résultats avec ceux trouvés dans la littérature.
- Le cinquième chapitre présente les résultats du gallium sous différents paramètres (effet du facteur de forme, de nombre de Rayleigh et de Stefan) afin de balayer les différentes conditions expérimentales.

On terminera notre étude par une conclusion générale et des perspectives.

## **CHAPITRE 1**

### **FORMULATION DU PROBLEME ET MODELISATION**

#### 1.1. Aspect cinétique du transfert de chaleur

Lorsqu'un matériau subit une transformation solide-liquide, l'énergie est transformée sous forme d'enthalpie massique de fusion à la surface séparant les deux phases constituant l'interface dont on cherche en général à connaître la position en fonction du temps. Bien que le cycle fusion-solidification apparaisse comme réversible, il en va tout autrement du point de vue de la cinétique, le rôle de la convection naturelle dans la phase liquide n'étant pas le même dans les deux processus (figure 1.1).

Dans le cas de la fusion (figure 1.1-a), une gaine fondue se forme entre la surface active et le matériau encore solide ; les transferts s'y produisent par conduction, puis dans de nombreux cas par convection naturelle et éventuellement, par rayonnement entre la surface et le front solide. La convection naturelle augmente le transfert de chaleur, mais la formulation mathématique en est complexe, car elle nécessite le traitement du couplage entre les équations de Navier - Stokes, dans le liquide et de Fourier, dans le solide.

Dans le cas de la solidification (figure 1.1-b), l'énergie est extraite à travers une croûte solide qui s'épaissit progressivement à partir de la surface d'échange. Le liquide se refroidit progressivement jusqu'à la température de solidification. Ces problèmes sont généralement traités en conduction pure, car le rôle de la convection naturelle y est généralement peu important.

Cette présentation permet de comprendre que ce processus couplé est non linéaire. De ce fait, les solutions analytiques sont rares et souvent peu utilisables dans les configurations réelles : l'analyse des cas multidimensionnels, où les conditions limites sont celles rencontrées dans des applications pratiques, n'a été possible que par le développement de méthodes numériques. Le paramètre important dans ces problèmes étant le nombre de Stefan.

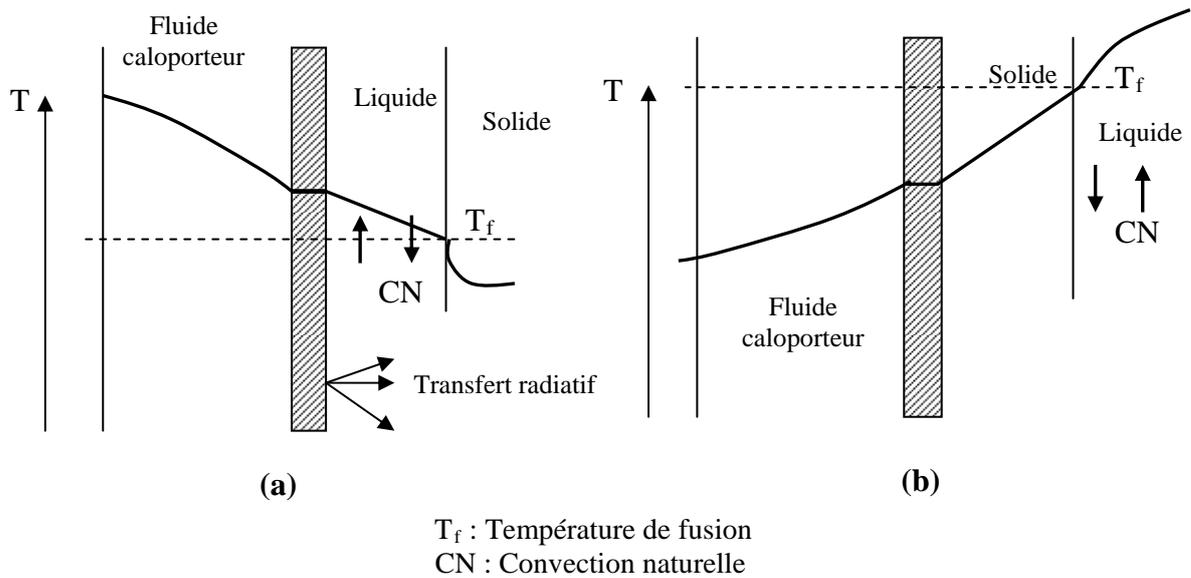


Figure 1.1 : Schématisation des processus de fusion et de solidification [45]

## 1.2. Méthodes pour traiter les problèmes de changement de phases

Au cours des vingt dernières années, de nombreux travaux de recherche ont été menés afin de développer des méthodes de calcul numérique permettant de traiter les problèmes de changement de phase en présence de la convection naturelle. Le principal défi posé par ces problèmes réside dans la non-linéarité engendrée par la présence d'une interface dont la forme et la position évoluent dans le temps selon des apports thermiques. L'ensemble des méthodes peut se ramener à deux formulations:

### 1.2.1. Première formulation

Dans cette première série de méthodes, nous regroupons les méthodes qui traitent du problème à deux phases : les équations du transfert sont résolues séparément dans le liquide et dans le solide et la position de l'interface est obtenue par la résolution de l'équation de bilan à l'interface. Cette approche est adaptée aux cas où l'on considère la fusion ou la solidification d'un matériau pur, pour lequel le changement d'état se produit à une température bien déterminée ( $T_f$ ). Le problème central est alors le calcul de la position d'interface, qui donne lieu à deux approches différentes suivant les auteurs.

Les méthodes les plus anciennes considèrent un maillage fixe sur l'ensemble du domaine liquide-solide. L'interface ne passe à priori par aucun nœud du maillage et il est alors nécessaire d'interpoler les champs de températures aux nœuds encadrant le maillage par différentes approximations [46]. L'extension au cas multidimensionnel est peu aisée et pose le problème du calcul des gradients à l'interface. La difficulté subsiste pour les méthodes où l'on adapte la valeur du pas de temps, de façon à ce que l'interface se situe toujours sur un nœud du maillage. Il faut alors calculer le pas d'espace à chaque pas du temps [47].

Une méthode très fréquemment rencontrée et qui trouve un champ d'application important dans le cas des configurations plus complexes, consiste à immobiliser l'interface par une transformation de coordonnées. Cette transformation est initialement proposée par Landau [48].

Les équations sont donc résolues dans un système de coordonnées transformées  $(\xi, \eta)$ , dans lequel l'interface solide-liquide est immobile. Le maillage transformé est donc rectangulaire et fixe.

Ce genre de transformation est illustré sur la figure (1.3). A chaque pas du temps, un bilan d'énergie est effectué à l'interface à partir duquel la nouvelle position de l'interface est calculée. Plusieurs auteurs ont confronté avec succès les prédictions de ces méthodes avec des résultats expérimentaux [19, 49-54].

Lorsque l'interface devient très incurvée, les termes croisés de la transformation de coordonnées deviennent très grands. Si ces termes ne sont pas complètement pris en compte, la précision de ces méthodes devient localement moins bonne.

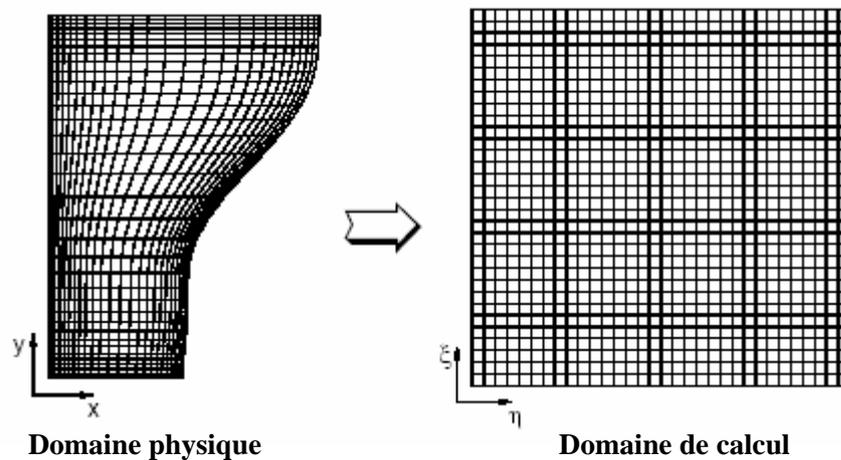


Figure 1.2 : Transformation de coordonnées

Outre leur élégance par le suivi explicite du front de fusion, ces méthodes offrent l'avantage de pouvoir imposer rigoureusement les conditions dynamique et thermique à cette interface. Aussi, elles évitent de résoudre inutilement les équations du mouvement dans la phase solide. Cependant, ces méthodes à maillage déformable ne peuvent pas aisément s'implanter dans les codes d'écoulements existants. Aussi, bien qu'elles offrent certains avantages dans la résolution des problèmes où l'on retrouve un seul front de fusion, elles sont tout à fait inaptes lorsque plusieurs fronts de fusion se développent et se jumellent ensuite. Elles sont également incapables de par leur nature de simuler une fusion complète.

### 1.2.2. Deuxième formulation

Ces méthodes, habituellement nommées "Méthodes enthalpiques" isolent le transfert thermique relié au changement de phase par le biais d'un terme source dans l'équation d'énergie ou d'une chaleur spécifique équivalente. Il n'est donc pas nécessaire de calculer explicitement la position du front de fusion. Les mêmes équations sont résolues dans tout le domaine de calcul, y compris la région solide, sans se préoccuper des conditions à satisfaire à l'interface. Il est donc nécessaire de recourir à une technique d'immobilisation de la phase solide. Ceci peut être fait entre autres, au moyen d'une viscosité effective ou d'un terme source dans les équations du mouvement. Il devient ainsi possible d'utiliser un maillage rectangulaire et fixe dans l'espace physique.

Ces méthodes peuvent être implantées dans un code de calcul existant, commercial ou autre. Aussi, il n'est pas nécessaire de générer un nouveau maillage à chaque pas de temps. Cependant, il faut parfois utiliser un maillage assez fin pour obtenir une précision comparable à la première formulation. De plus, les équations du mouvement doivent être résolues inutilement dans la phase solide. Il n'y a donc pas toujours un avantage net en coût de calcul en recourant aux méthodes enthalpiques [19, 52]. Aussi, étant donné que l'on ne se soucie pas des conditions à appliquer à l'interface solide-liquide, ces méthodes ne peuvent prétendre résoudre avec précision les couches limites thermique et dynamique au voisinage de l'interface. Ceci leur permet tout de même d'offrir une souplesse inégalée; il devient ainsi possible de traiter des problèmes avec des fronts de fusion plus complexes.

### 1.2.3. Discussion

La complexité du problème visé par cette étude nécessite donc l'emploi d'une méthode enthalpique. Il faut toutefois noter que les méthodes enthalpiques n'ont pas toutes acquis le même niveau de perfectionnement et de robustesse. La méthode développée par Voller et ses collaborateurs a donc été choisie [40, 55, 56]. Cette technique utilise un terme source approprié dans l'équation d'énergie afin de refléter l'évolution du changement de phase. Plusieurs auteurs l'ont confrontée avec succès à des résultats expérimentaux en présence de la convection naturelle et pour divers matériaux à changement de phase (acide caprylique, cyclohexane, étain et octadécane).

### 1.3. Changement d'état avec couplage conduction-convection naturelle

L'approche qui prend en compte la conduction comme seul mode de transfert de chaleur dans les deux phases du matériau, est insuffisante pour l'analyse d'un ensemble très important du problème étudié. L'influence de la convection naturelle dans la phase liquide sur la cinétique des transferts a suscité de nombreux travaux. La littérature fournit un grand nombre d'études expérimentales consacrées à l'étude de la fusion dans les géométries les plus courantes : autour d'un cylindre vertical [57, 58], d'un cylindre horizontal [59, 60] ou le long d'une plaque vertical [10, 61]. Ces études ont le mérite de définir plus précisément l'influence de la convection naturelle sur la cinétique de la fusion. On considère en général un milieu initialement solide à la température de fusion et on

impose à l'une des frontières du système une condition de flux ou de température. La comparaison entre l'évolution de la quantité fondue observée expérimentalement et celle calculée pour un modèle conductif révèle que, excepté dans la phase initiale du processus où la conduction est dominante.

En effet, au début de la fusion, le front se déplace parallèlement à la surface chauffante, au fur et à mesure que l'épaisseur fondue augmente, la variation de la masse volumique du matériau liquide avec la température induit des forces de volumes qui créent des mouvements de convection naturelle dans le liquide, ces derniers augmentant de façon non uniforme le transfert de chaleur à l'interface. Cela se traduit par la déformation de l'interface et par l'augmentation de la vitesse de fusion. Les conclusions de ces expériences sont les suivantes :

- la convection naturelle peut avoir un rôle dominant sur le processus de la fusion, moindre dans le cas de la solidification.
- le processus est multidimensionnel.
- le nombre de Stefan n'est pas le seul paramètre à prendre en compte pour décrire le phénomène, mais il faut considérer les paramètres liés à la convection naturelle : nombre de Prandtl de la phase liquide, nombre de Rayleigh et rapport de forme de la cavité ( $Ar = H/W$ ).

#### 1.4. Hypothèses

Il est nécessaire d'effectuer un certain nombre d'hypothèses afin d'établir les équations qui décrivent la physique du changement de phase. Ces hypothèses sont divisées en deux catégories.

La première catégorie comprend les hypothèses couramment utilisées concernant: de la géométrie, de l'écoulement et des transferts thermiques. La seconde catégorie traite des hypothèses particulières à la modélisation du changement de phase.

##### 1.4.1. Hypothèses générales

1- Le problème étudié est bidimensionnel et transitoire.

- 2- La conduction dans les phases solide et liquide du matériau à changement de phase est prise en compte.
- 3- La convection naturelle dans la phase liquide est prise en compte.
- 4- Tout autre forme de transfert de chaleur (rayonnement) est négligée.
- 5- L'écoulement est considéré incompressible et la convection naturelle est prise en compte par le biais de l'hypothèse de Boussinesq.
- 6- L'écoulement demeure laminaire.
- 7- Le fluide est considéré newtonien.
- 8- La dissipation visqueuse est négligée.
- 9- Les propriétés physiques du matériau à changement de phase sont constantes, mais peuvent être différentes d'une phase à l'autre pour le matériau à changement de phase (conductivité et chaleur spécifique).

#### 1.4.2. Hypothèses liées au changement de phase

- 1- Une méthode enthalpique est retenue.
- 2- Le matériau à changement de phase est parfaitement pur.
- 3- Le changement de phase est isotherme.
- 4- Le matériau à changement de phase est homogène et isotrope.

#### 1.5. Formulation des équations

Sous les hypothèses mentionnées précédemment, les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et d'énergie, s'écrivent respectivement (dans la notation vectorielle cartésienne) comme suit:

**Equation de continuité :**

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.1)$$

**Equation de la quantité de mouvement :**

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} u) = \nabla \cdot (\mu \nabla u) - \frac{\partial p}{\partial t} + S_x \quad (1.2.a)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} v) = \nabla \cdot (\mu \nabla v) - \frac{\partial p}{\partial t} + S_y \quad (1.2.b)$$

**Equation d'énergie :**

$$\frac{\partial(\rho cT)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} cT) = \nabla \cdot (\lambda \nabla cT) - \frac{\partial p}{\partial t} - S_h \quad (1.3.a)$$

Avec

$$\lambda = k / c$$

Et

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} h) = \nabla \cdot (\lambda \nabla cT) - \frac{\partial p}{\partial t} - S_h \quad (1.3.b)$$

- Les forces d'Archimède sont prises en compte dans  $S_y$ .
- Le terme source  $S_h$  permet de traiter correctement le transfert d'énergie lié au changement de phase.
- L'enthalpie  $h$  ainsi définie est strictement nulle dans les régions où se produit le changement de phase.

$$h = \int_{T_f}^T c dT \quad (1.4)$$

## 1.6. La méthode enthalpique

L'équation d'énergie (1.3) est écrite suivant la formulation proposée par Voller et coll. [40, 55, 56] pour laquelle l'énergie totale est séparée en deux composantes, la chaleur sensible et la chaleur latente (figure 1.4):

$$H(T) = h(T) + Lf_l \quad (1.5)$$

$H(T)$  : L'énergie totale

$h(T)$  : La chaleur sensible

$L$  : La chaleur latente

$f_l$  : La fraction liquide locale

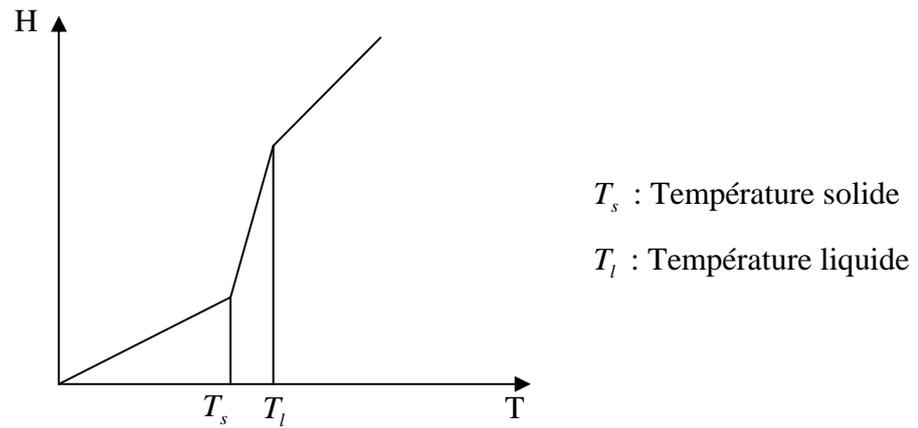


Figure 1.3 : Variation de l'énergie totale en fonction de la température

Pour l'équation de l'énergie, le phénomène du changement de phase est concentré dans un terme source  $S_h$  [55, 56].

$$S_h = \frac{\partial \rho f_l}{\partial t} + L \frac{\partial \rho (u f_l)}{\partial x} + L \frac{\partial \rho (v f_l)}{\partial y} \quad (1.6)$$

La relation entre la fraction liquide et l'enthalpie est alors décrite par la fonction de "Heaviside" :

$$f_l = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ 0 & \text{si } h < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Dans le cas d'un changement de phase isotherme, il s'avère que la partie convective  $L \partial_i (\rho u_i f_l)$  du terme source, s'annule.

$$\rho L \partial_i (u_i f_l) = \rho L f_l \partial_i u_i + \rho L u_i \partial_i f_l \quad (1.8)$$

Pour un écoulement incompressible, le terme  $\rho L f_l \partial_i u_i$  s'annule.

Le terme  $\rho L u_i \partial_i f_l$  est nécessairement nul dans les régions liquides et solides, où la fraction liquide est uniforme.

Dans un matériau à changement de phase on utilise la fraction liquide pour annuler les vitesses par le biais des termes sources  $S_x$  et  $S_y$  dans les équations de la quantité de mouvement (1.2)

$$S_x = -B(f_l)u \quad (1.9)$$

$$S_y = -B(f_l)v + \rho_{réf} g \beta (T - T_{réf}) \quad (1.10)$$

La fonction  $B$  est choisie de sorte à tendre vers l'infini, lorsque  $f_l$  est nul et à tendre vers 0, lorsque  $f_l$  tend vers 1. Diverses possibilités ont été établies pour cette fonction. Le plus évident consiste à utiliser terme source de grande valeur dans la région solide et un terme source nul ailleurs. Il est toutefois préférable numériquement d'adopter une fonction qui soit continue. La fraction liquide ne passe effectivement pas instantanément d'une valeur nulle à une valeur entière. Par exemple,  $B$  peut être choisi de manière à varier linéairement avec la fraction liquide. Cela produirait l'effet désiré tout en demeurant toutefois assez arbitraire.

Il est possible de rendre un peu plus physique cet artefact numérique en y modélisant le comportement de la zone de transition. Cette zone est supposée analogue à un milieu poreux dont la porosité en un point est donnée par la fraction liquide [40, 55, 56].

A partir de la loi de Darcy pour l'écoulement dans un milieu poreux, la relation de Carman-Koseny peut être obtenue pour la fonction  $B$  :

$$B(f_l) = \frac{C(1-f_l)^2}{(f_l^3 + q)} \quad (1.11)$$

La valeur de  $C$  dépend en principe de la morphologie du milieu poreux. La quantité  $q$  est introduite ici simplement pour éviter une division par zéro dans le cas d'une fraction liquide nulle.

Numériquement, le rapport  $C/q$  doit être suffisamment élevé afin d'annuler les vitesses dans la région solide. Dans notre étude  $C = 1E15$  et  $q = 1E-6$ .

La comparaison de différentes techniques d'immobilisation de la phase solide (y compris la variation de la viscosité et le modèle de milieu poreux) est l'objet de l'article de Voller et al. [55]. En résumé, cette méthode offre l'avantage d'être souvent plus stable et possède une intéressante signification physique, bien que l'effet numérique recherché soit le même.

## CHAPITRE 2

### MAILLAGE ET DISCRETISATION

#### 2.1. Généralités

Dans le cas où l'écoulement d'un fluide joue un rôle significatif, les équations stationnaires de convection-diffusion pour une propriété générale  $\Phi$  (l'équation de continuité sera traitée par l'algorithme de correction de pression dans le chapitre 3), peuvent toutes s'écrire sous la forme générale (2.1) [62-64].

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V} \Phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad} \Phi) + S \quad (2.1.a)$$

Ou

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) + S \quad (2.1.b)$$

D'autre part, si l'équation de la continuité est satisfaite, nous aurons :

$$\underbrace{\frac{\rho \partial \Phi}{\partial t}}_1 + \underbrace{\rho u_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}}_2 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right)}_3 + \underbrace{S}_4 \quad (2.2)$$

Avec

$\Gamma$  : coefficient de diffusion

Terme 1 : terme instationnaire.

Terme 2 : terme convectif.

Terme 3 : terme diffusif.

Terme 4 : terme source.

#### 2.2. Discrétisation de l'équation stationnaire

Soit l'équation différentielle stationnaire [62-65] :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}) + S \quad (2.3)$$

Pour un espace de dimension deux, l'équation (2.3) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \Phi) = \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + S \quad (2.4)$$

En intégrant sur le volume de contrôle (figure 2.1), on aura :

$$\int_{w_s}^{e_n} \int_{w_s}^{e_n} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \Phi) dx dy + \int_{w_s}^{e_n} \int_{w_s}^{e_n} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \Phi) dx dy = \int_{w_s}^{e_n} \int_{w_s}^{e_n} \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x}) dx dy + \int_{w_s}^{e_n} \int_{w_s}^{e_n} \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y}) dx dy + \int_{w_s}^{e_n} \int_{w_s}^{e_n} S dx dy \quad (2.5)$$

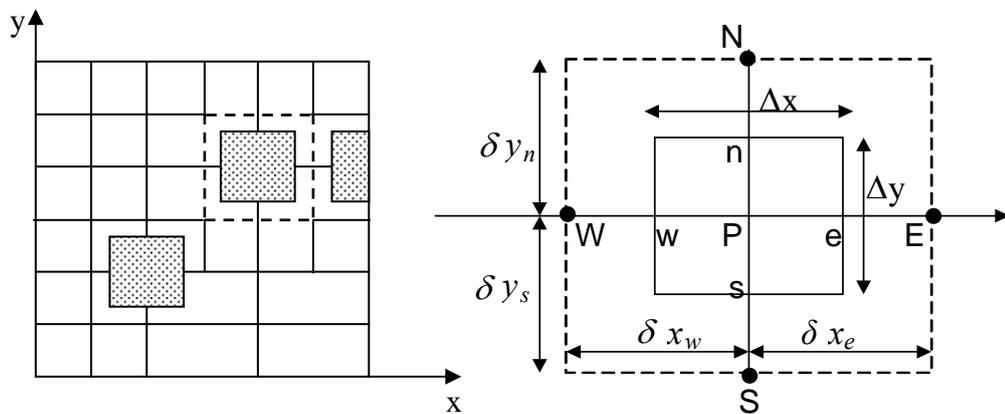


Figure 2.1 : Représentation du volume de contrôle

### a) Terme diffusif

Le terme diffusif de l'équation (2.5) s'écrit :

$$\int_{w_s}^{e_n} \int_{w_s}^{e_n} \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x}) dx dy + \int_{w_s}^{e_n} \int_{w_s}^{e_n} \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y}) dx dy \quad (2.6)$$

$$= \left[ \frac{\Gamma_e (\Phi_E - \Phi_P)}{\delta x_e} - \frac{\Gamma_w (\Phi_P - \Phi_W)}{\delta x_w} \right] \Delta y + \left[ \frac{\Gamma_n (\Phi_N - \Phi_P)}{\delta y_n} - \frac{\Gamma_s (\Phi_P - \Phi_S)}{\delta y_s} \right] \Delta x$$

### b) Terme convectif

Le terme convectif de l'équation (2.5) s'écrit:

$$\int_{w_s}^e \int_{s_s}^n \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \Phi) dx dy + \int_{w_s}^e \int_{s_s}^n \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \Phi) dx dy = [(\rho u \Phi)_e - (\rho u \Phi)_w] \Delta y + [(\rho v \Phi)_n - (\rho v \Phi)_s] \Delta x \quad (2.7)$$

### 2.2.1. Schéma aux différences centrées

Dans le cas d'un maillage uniforme, nous pouvons écrire les valeurs de la propriété  $\Phi$  sur la face des cellules comme suit [62-64] :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_e &= \frac{\Phi_E + \Phi_P}{2} \\ \Phi_w &= \frac{\Phi_W + \Phi_P}{2} \\ \Phi_s &= \frac{\Phi_S + \Phi_P}{2} \\ \Phi_n &= \frac{\Phi_N + \Phi_P}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

En reportant ces expressions dans les termes de convection qui apparaissent dans le terme de droite de l'équation (2.7), nous aurons :

$$\begin{aligned} & [(\rho u \Phi)_e - (\rho u \Phi)_w] \Delta y + [(\rho v \Phi)_n - (\rho v \Phi)_s] \Delta x = \\ & \left[ (\rho u)_e \frac{\Phi_P + \Phi_E}{2} - (\rho u)_w \frac{\Phi_W + \Phi_P}{2} \right] \Delta y + \left[ (\rho v)_n \frac{\Phi_P + \Phi_N}{2} - (\rho v)_s \frac{\Phi_P + \Phi_S}{2} \right] \Delta x \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 2.2.2. Schéma de différentiation amont " upwind "

L'un des inconvénients du schéma centré est son inaptitude à identifier le sens de l'écoulement [62-64]. La valeur de la propriété  $\Phi$  sur la face ouest "w" est influencée de manière égale par les valeurs  $\Phi_P$  et  $\Phi_W$  dans le schéma centré. Dans un écoulement fortement convectif dans le sens « ouest - est », ce traitement n'est pas recommandé car la face ouest de la cellule doit recevoir une plus grande influence du nœud W que du nœud P.

Le schéma amont prend en compte la direction du flux pour évaluer la valeur sur la face de la cellule. La valeur de  $\Phi$  due à la convection sur la face de la cellule est prise égale à la valeur du nœud amont.

Sur la figure (2.2), nous montrons les valeurs nodales utilisées pour estimer les valeurs sur les faces des cellules quand la direction de l'écoulement est positive «ouest - est».

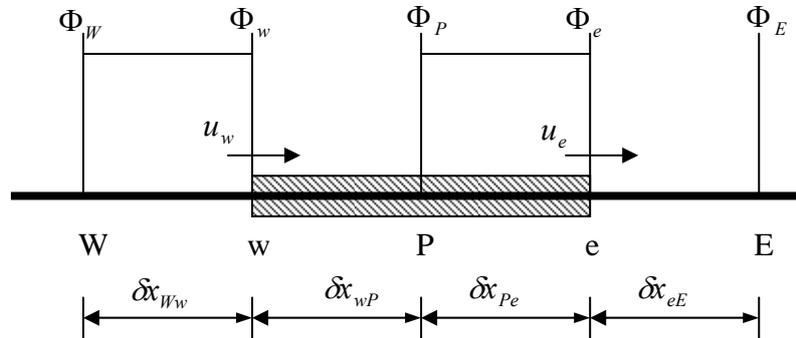


Figure 2.2 : Représentation du schéma amont dans le sens positif de l'écoulement

La figure (2.3) montre les nœuds considérés pour le cas inverse.

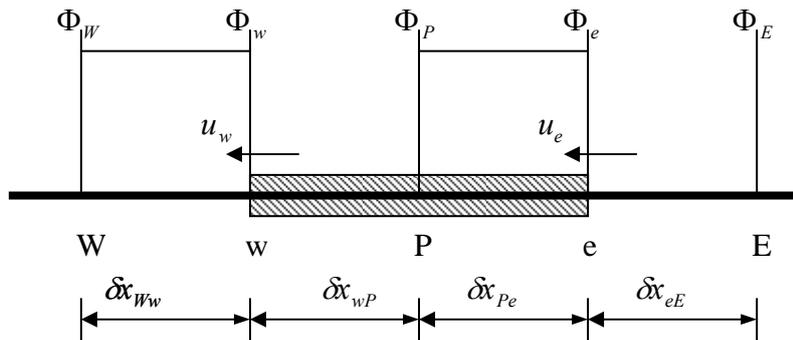


Figure 2.3 : Représentation du schéma amont dans le sens inverse de l'écoulement

Quand l'écoulement est dans le sens positif,  $u_w > 0$  et  $u_e > 0$ , le schéma amont devient :

$$\Phi_w = \Phi_W \text{ et } \Phi_e = \Phi_P \quad (2.10)$$

La valeur de la propriété  $\Phi$  à l'interface sera égale à la valeur de  $\Phi$  au point du maillage sur la face amont.

Nous notons  $\|A, B\|$  le terme le plus grand entre A et B et les termes de l'équation discrétisée (2.7) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} (\rho u)_e \Phi_e &= \Phi_P \|(\rho u)_e, 0\| - \Phi_E \|-(\rho u)_e, 0\| \\ (\rho u)_w \Phi_w &= \Phi_W \|(\rho u)_w, 0\| - \Phi_P \|-(\rho u)_w, 0\| \\ (\rho v)_n \Phi_n &= \Phi_P \|(\rho v)_n, 0\| - \Phi_N \|-(\rho v)_n, 0\| \\ (\rho v)_s \Phi_s &= \Phi_S \|(\rho v)_s, 0\| - \Phi_P \|-(\rho v)_s, 0\| \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

### 2.2.3. Schéma de différentiation hybride

Le schéma hybride a été introduit par Spalding en 1972. C'est une combinaison entre le schéma centré et le schéma amont [62-64]. Il utilise le prototype de la formule basée sur le nombre de Peclet local pour estimer le flux net à travers chaque face du volume de contrôle. Le schéma centré est utilisé pour les petits Peclet ( $Pe < 2$ ) et le schéma amont est utilisé (tiens compte du sens de l'écoulement) pour des Peclet plus grands ( $Pe \geq 2$ ).

Le nombre de Peclet calculé sur la face ouest est donné par :

$$Pe_w = \frac{(\rho u)_w}{\Gamma_w / \delta x_{WP}} = \frac{F_w}{D_w} \quad (2.12)$$

Avec

$$F_w = (\rho u)_w \quad \text{et} \quad D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}$$

La formule du schéma hybride pour le flux net, par unité de surface, à travers la face ouest sera :

$$q_w = F_w \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{Pe_w} \right) \Phi_W + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{Pe_w} \right) \Phi_P \right] \quad \text{si} \quad -2 < Pe_w < 2 \quad (2.13)$$

$$q_w = F_w A_w \Phi_W \quad \text{si} \quad Pe_w \geq 2 \quad (2.14)$$

$$q_w = F_w A_w \Phi_P \quad \text{si} \quad Pe_w \leq -2 \quad (2.15)$$

Il est facile de montrer que pour des nombres de Peclet faibles, cette écriture est équivalente au schéma centré pour l'équation de diffusion-convection. Mais quand  $|Pe| > 2$ , il est équivalent au schéma amont pour la convection en mettant la diffusion à zéro.

### 2.2.4. Equation discrète finale

Il faut intégrer d'abord l'équation régissant le mouvement sur un volume de contrôle pour obtenir une équation discrétisée au point nodal P. Pour le volume de contrôle défini précédemment sur la figure (2.1), nous aurons :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + S \quad (2.16)$$

Avec

$$\left. \begin{aligned} a_W &= D_w A(|P_w|) + \|F_w, 0\| \\ a_E &= D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \\ a_N &= D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \\ a_S &= D_s A(|P_s|) + \|F_s, 0\| \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Et

$$\begin{aligned} F_e &= (\rho u)_e \Delta y & F_w &= (\rho u)_w \Delta y & F_n &= (\rho v)_n \Delta x & F_s &= (\rho v)_s \Delta x \\ D_e &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{\delta x_e} & D_w &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{\delta x_w} & D_n &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{\delta y_n} & D_s &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{\delta y_s} \\ P_e &= \frac{F_e}{D_e} & P_w &= \frac{F_w}{D_w} & P_n &= \frac{F_n}{D_n} & P_s &= \frac{F_s}{D_s} \end{aligned}$$

$$S = Sc \Delta x \Delta y$$

Sc : représente la partie constante du terme source S.

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + F_e - F_w + F_n - F_s - S_P \Delta x \Delta y$$

Les fonctions  $A(|p|)$  peuvent être choisies de différentes façons et selon Patankar [66] (tableau (2.1)), nous aurons :

Tableau 2.1 : Valeurs de la fonction  $A(|p|)$

Schéma	$A( P )$
Différence centrée	$1 - 0.5 P $
Amont	1
Hybride	$\ 0, 1 - 0.5 p  \ $

### 2.2.5. Schéma de différentiation quadratique amont "quick"

Ce schéma a été introduit par Leonard en 1979 [62-64]. Il utilise une interpolation quadratique aval à trois points. La valeur de  $\Phi$  sur la face est obtenue à partir d'une fonction quadratique passant par les deux nœuds entourant le nœud considéré et un nœud en amont.

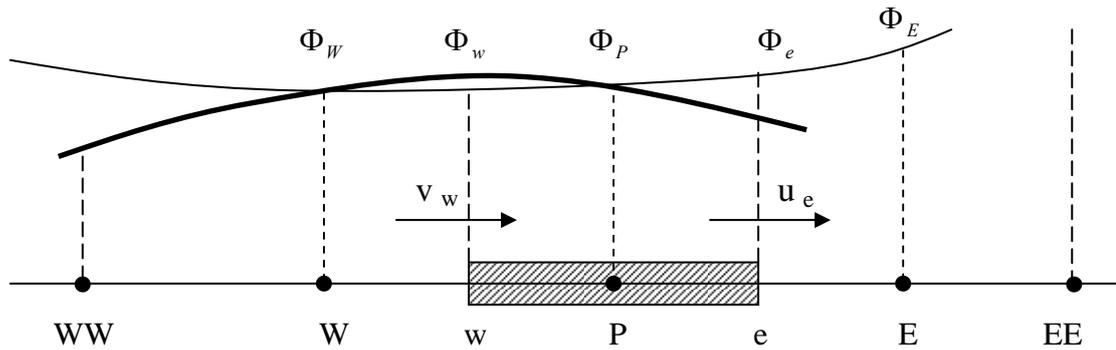


Figure 2.4 : Représentation du schéma quick dans le sens direct de l'écoulement

Quand  $u_w > 0$  et  $u_e > 0$ , un lissage quadratique à travers WW, W et P est utilisé pour évaluer  $\Phi_w$  et un autre lissage quadratique faisant intervenir W, P et E est utilisé pour calculer  $\Phi_e$ .

Pour  $u_w < 0$  et  $u_e < 0$ , un lissage quadratique à travers W, P et E est utilisé pour évaluer  $\Phi_w$  et un autre lissage quadratique faisant intervenir P, E et EE est utilisé pour calculer  $\Phi_e$ .

La valeur de  $\Phi$  sur une face est donnée suivant le sens de l'écoulement par l'expression :

$$\Phi_{face} = \frac{6}{8}\Phi_{i-1} + \frac{3}{8}\Phi_i - \frac{1}{8}\Phi_{i-2} \quad (2.18)$$

Quand  $u_w > 0$ , les points entourant la face ouest "w" sont W, P et le point amont WW et on aura :

$$\Phi_w = \frac{6}{8}\Phi_W + \frac{3}{8}\Phi_P - \frac{1}{8}\Phi_{WW} \quad (2.19)$$

Quand  $u_e > 0$ , les nœuds entourant la face est "e" sont P, E et le nœud amont W, on aura donc :

$$\Phi_e = \frac{6}{8}\Phi_P + \frac{3}{8}\Phi_E - \frac{1}{8}\Phi_W \quad (2.20)$$

Les termes de diffusion sont évalués en utilisant le gradient de la parabole appropriée. Il faut noter que sur une grille uniforme cette procédure donne les mêmes expressions que le schéma centré pour la diffusion.

Si  $F_w > 0$  et  $F_e > 0$ , on utilise les équations (2.19) et (2.20) pour évaluer les termes convectifs et un schéma centré pour la diffusion. Le deuxième terme de l'équation (2.7) nous donne :

$$[(\rho u \Phi)_e - (\rho u \Phi)_w] \Delta y = F_e \left( \frac{6}{8}\Phi_P + \frac{3}{8}\Phi_E - \frac{1}{8}\Phi_W \right) - F_w \left( \frac{6}{8}\Phi_W + \frac{3}{8}\Phi_P - \frac{1}{8}\Phi_{WW} \right) \quad (2.21)$$

Qui s'écrit dans la forme bidimensionnelle de discrétisation par :

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_{WW} \Phi_{WW} + a_{EE} \Phi_{EE} + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + a_{SS} \Phi_{SS} + a_{NN} \Phi_{NN} + S \quad (2.22)$$

Avec

$$a_P = a_W + a_E + a_{WW} + a_N + a_S + a_{SS} + F_e - F_w + F_n - F_s - S_P \Delta x \Delta y$$

$$a_W = D_w + \frac{6}{8}\alpha_w F_w + \frac{1}{8}\alpha_e F_e + \frac{3}{8}(1 - \alpha_w)F_w$$

$$a_E = D_e - \frac{3}{8}\alpha_e F_e - \frac{6}{8}(1 - \alpha_e)F_e - \frac{1}{8}(1 - \alpha_w)F_w$$

$$a_S = D_s + \frac{6}{8}\alpha_s F_s + \frac{1}{8}\alpha_n F_n + \frac{3}{8}(1 - \alpha_s)F_s$$

$$a_N = D_n - \frac{3}{8}\alpha_n F_n - \frac{6}{8}(1 - \alpha_n)F_n - \frac{1}{8}(1 - \alpha_s)F_s$$

$$a_{WW} = -\frac{1}{8}\alpha_w F_w$$

$$a_{EE} = \frac{1}{8}(1 - \alpha_e)F_e$$

$$a_{SS} = -\frac{1}{8}\alpha_s F_s$$

$$a_{NN} = \frac{1}{8}(1 - \alpha_n)F_n$$

Où

$$\alpha_{i=w,e,s,n} = 1 \quad \text{pour} \quad F_{i=w,e,s,n} > 0$$

$$\alpha_{i=w,e,s,n} = 0 \quad \text{pour} \quad F_{i=w,e,s,n} < 0$$

### 2.2.6. Problèmes de stabilité du schéma quick

Le schéma quick écrit sous forme standard est instable [62-64]. Ceci est dû à l'apparition de coefficients centraux négatifs. Ce schéma a été modifié pour placer les coefficients négatifs dans les termes sources et n'avoir que des coefficients positifs.

Le schéma le plus stable et le plus rapide à converger est le schéma de Hayase et al. (1990). Il peut être schématisé par :

$$\Phi_w = \Phi_w + \frac{1}{8}[3\Phi_P + 2\Phi_W - \Phi_{WW}] \quad \text{pour} \quad F_w > 0 \quad (2.23)$$

$$\Phi_e = \Phi_P + \frac{1}{8}[3\Phi_E + 2\Phi_P - \Phi_W] \quad \text{pour} \quad F_e > 0 \quad (2.24)$$

$$\Phi_w = \Phi_P + \frac{1}{8}[3\Phi_W + 2\Phi_P - \Phi_E] \quad \text{pour} \quad F_w < 0 \quad (2.25)$$

$$\Phi_e = \Phi_E + \frac{1}{8}[3\Phi_P + 2\Phi_E - \Phi_{EE}] \quad \text{pour} \quad F_e < 0 \quad (2.26)$$

L'équation bidimensionnelle discrétisée prend alors la forme :

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + \bar{S} \quad (2.27)$$

Avec

$$a_P = a_W + a_E + a_N + a_S + F_e - F_w + F_n - F_s - S_P \Delta x \Delta y$$

Tels que

$$a_W = D_w - \alpha_w F_w$$

$$a_E = D_e - (1 - \alpha_e) F_e$$

$$a_S = D_s - \alpha_s F_s$$

$$\begin{aligned}
a_N &= D_n - (1 - \alpha_n)F_n \\
\bar{S} &= \frac{1}{8}[3\Phi_P - 2\Phi_W - \Phi_{WW}]\alpha_w F_w + \frac{1}{8}[\Phi_W + 2\Phi_P - 3\Phi_E]\alpha_e F_e \\
&+ \frac{1}{8}[3\Phi_W - 2\Phi_P - \Phi_E](1 - \alpha_w)F_w + \frac{1}{8}[2\Phi_E + 2\Phi_{EE} - 3\Phi_P](1 - \alpha_e)F_e \\
&+ \frac{1}{8}[3\Phi_P - 2\Phi_S - \Phi_{SS}]\alpha_s F_s + \frac{1}{8}[\Phi_S + 2\Phi_P - 3\Phi_N]\alpha_n F_n \\
&+ \frac{1}{8}[3\Phi_S - 2\Phi_P - \Phi_N](1 - \alpha_s)F_s + \frac{1}{8}[2\Phi_N + 2\Phi_{NN} - 3\Phi_P](1 - \alpha_n)F_n
\end{aligned}$$

Où

$$\alpha_{i=w,e,s,n} = 1 \quad \text{pour } F_{i=w,e,s,n} > 0$$

$$\alpha_{i=w,e,s,n} = 0 \quad \text{pour } F_{i=w,e,s,n} < 0$$

### 2.2.7. Extension aux grilles non uniformes

Dans une grille non uniforme, les faces 'e' et 'w' peuvent ne pas être situées au milieu des points E et P et des points W et P respectivement [62-64] .

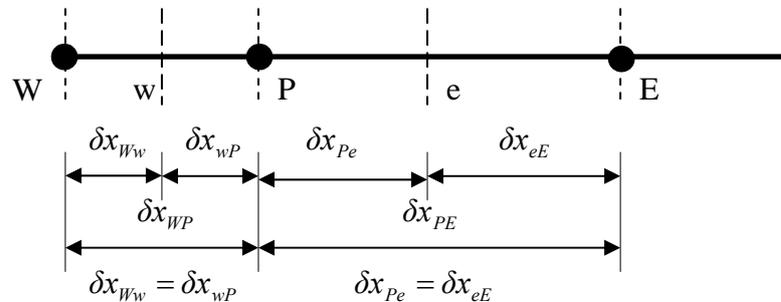


Figure 2.5 : Schématisation d'une grille non uniforme

Dans cette méthode, on définit d'abord les points nodaux. Les faces des cellules sont alors positionnées à mi distance entre les points nodaux.

Dans ce cas, les valeurs des coefficients de diffusion aux interfaces sont calculées comme suit :

$$\left. \begin{aligned}
\Gamma_w &= (1 - f_w)\Gamma_w + f_w\Gamma_P \\
\Gamma_e &= (1 - f_P)\Gamma_P + f_P\Gamma_E
\end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Les facteurs d'interpolation  $f_w$  et  $f_p$  sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} f_w &= \frac{\delta x_{ww}}{\delta x_{ww} + \delta x_{wp}} \\ f_p &= \frac{\delta x_{pe}}{\delta x_{pe} + \delta x_{eE}} \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Pour une grille uniforme, on prendra  $f_w = 0.5$  et  $f_p = 0.5$ , ce qui donnera les expressions bien connues :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_w &= \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2} \\ \Gamma_e &= \frac{\Gamma_E + \Gamma_P}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

### 2.3. Discrétisation de l'équation de transport avec le terme transitoire

En intégrant l'équation de transport (2.1) sur un espace de dimension deux et sur le temps, nous aurons:

$$\int_{w_s}^e \int_{s_t}^n \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} dx dy dt + \int_{w_s}^e \int_{s_t}^n \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial \rho U_j \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) - S \right) dx dy dt = 0 \quad (2.31)$$

Avec

$$a_p \Phi_p = \sum a_{nb} \Phi_{nb} + S$$

$$a_{nb} = a_w, a_e, a_s, a_n$$

Le terme transitoire, défini par le premier terme de l'équation (2.31), se traduit dans cette équation par les trois schémas :

#### 2.3.1. Schéma d'Euler explicite [62,65]

$$\frac{(\rho \Phi_p)^{t+\Delta t} - (\rho \Phi_p)^t}{\Delta t} \Delta x \Delta y + a_p \Phi_p^t - \sum a_{nb} \Phi_{nb}^t - S = 0 \quad (2.32)$$

Notons par :

$(\Phi_p)$  : Valeur de l'itération actuelle

$(\Phi_p)^0$  : Valeur de l'itération précédente.

L'équation (2.32) s'écrit donc :

$$\frac{(\rho\Phi_p) - (\rho\Phi_p)^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y + a_p \Phi_p^0 - \sum a_{nb} \Phi_{nb}^0 - S = 0 \quad (2.33)$$

Avec

$$a_p \Phi_p = a_w \Phi_w^0 + a_e \Phi_e^0 + a_s \Phi_s^0 + a_n \Phi_n^0 + [a_p^0 - (a_w + a_e + a_s + a_n - S_p)] \Phi_p^0 + S_C$$

$$a_p = a_p^0$$

$$a_p^0 = \frac{\rho_p^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

### 2.3.2. Schéma d'Euler implicite [62,65]

$$\frac{(\rho\Phi_p) - (\rho\Phi_p)^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y + a_p \Phi_p - \sum a_{nb} \Phi_{nb} - S = 0 \quad (2.34)$$

Avec

$$a_p \Phi_p = a_w \Phi_w + a_e \Phi_e + a_s \Phi_s + a_n \Phi_n + S$$

$$S = S_C \Delta x \Delta y + a_p^0 \Phi_p^0$$

$$a_p^0 = \frac{\rho_p^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y$$

$a_p^0, \Phi_p^0$  : sont des valeurs connues au temps  $t$ , toutes les autres valeurs sont des inconnues au temps  $t + \Delta t$ .

### 2.3.3. Schéma de Crank-Nicholson [62]

$$\frac{(\rho\Phi_p) - (\rho\Phi_p)^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y + a_p \Phi_p - \sum a_{nb} \Phi_{nb} - S = 0 \quad (2.35)$$

Avec

$$\begin{aligned}
a_P \Phi_P &= \frac{a_W}{2} (\Phi_W + \Phi_W^0) + \frac{a_E}{2} (\Phi_E + \Phi_E^0) + \frac{a_S}{2} (\Phi_S + \Phi_S^0) + \frac{a_N}{2} (\Phi_N + \Phi_N^0) + \\
&\quad + \left[ a_P^0 - \frac{a_E}{2} - \frac{a_W}{2} - \frac{a_N}{2} - \frac{a_S}{2} \right] \Phi_P^0 + S \\
a_P &= \frac{1}{2} (a_W + a_E + a_S + a_N) + a_P^0 - \frac{1}{2} S_p \\
a_P^0 &= \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t}
\end{aligned}$$

#### 2.4. Discrétisation de l'équation de continuité

Soit l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (2.36)$$

En intégrant sur un espace de dimension deux et sur le temps nous aurons:

$$\int \int \int_{w_s}^{e_n} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int \int \int_{w_s}^{e_n} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (2.37)$$

Qui nous donne l'expression suivante :

$$\frac{(\rho - \rho^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + F_e - F_w + F_n - F_s \quad (2.38)$$

Avec

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y \quad F_w = (\rho u)_w \Delta y \quad F_n = (\rho v)_n \Delta x \quad F_s = (\rho v)_s \Delta x$$

En multipliant l'équation (2.38) par  $(\Phi_P)$  et si nous retranchant le résultat de cette multiplication de l'équation (2.16), nous obtenons :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b \quad (2.39)$$

Avec

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\|$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \|F_w, 0\|$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\|$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \|F_s, 0\|$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y$$

$$a_p^0 = \frac{\rho_p^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y + a_p^0 \Phi_p^0$$

## 2.5. Formulation dimensionnelle

En plus des hypothèses énoncées précédemment, d'autres hypothèses suivantes sont à considérer :

- \* La température de référence est prise au point de fusion.

$$T_{réf} = T_f$$

- \* La densité de référence est celle du matériau à changement de phase est prise au point de fusion.

$$\rho_{réf} = \rho_f$$

Les équations de transport s'écrivent dans le cas dimensionnel comme suit :

### **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.40)$$

### **Equation de quantité de mouvement :**

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v u) = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} - S_x \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v v) = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} - S_y$$

### **Equation d'énergie :**

$$\frac{\partial (\rho c T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u c T) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v c T) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \rho L \frac{\partial f_l}{\partial t} \quad (2.42)$$

Les équations formulées permettent d'écrire :

**Equation de quantité de mouvement :**

$$\left. \begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} - S_x \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} - S_y \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

**Equation d'énergie :**

$$\rho \left( \frac{\partial (cT)}{\partial t} + u \frac{\partial (cT)}{\partial x} + v \frac{\partial (cT)}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \rho L \frac{\partial f_l}{\partial t} \quad (2.44)$$

Avec

$$S_x = -B(f_l)u$$

$$S_y = -B(f_l)v + \rho_{réf} g \beta_v (T - T_{réf})$$

Les différents termes des équations de conservation dimensionnelles sont résumés dans le tableau (2.2).

Tableau 2.2 : Les différents termes de l'équation de transport dimensionnelle

EQUATION	$\Phi$	$\Gamma$	$S$
Quantité de mouvement suivant (x)	$u$	$\mu$	$-\frac{\partial p}{\partial x} + S_x$
Quantité de mouvement suivant (y)	$v$	$\mu$	$-\frac{\partial p}{\partial y} + S_y$
Energie	$cT = h$	$\frac{k}{c}$	$-S_h$

2.6. Formulation adimensionnelle

La géométrie à étudier (figure 2.6) est une plaque carrée de dimension (W x H). La paroi gauche du matériau est maintenue à une température chaude supérieure à sa température de fusion ( $T_h$ ). Tandis, que la paroi droite est exposée à une température froide ( $T_c$ ).

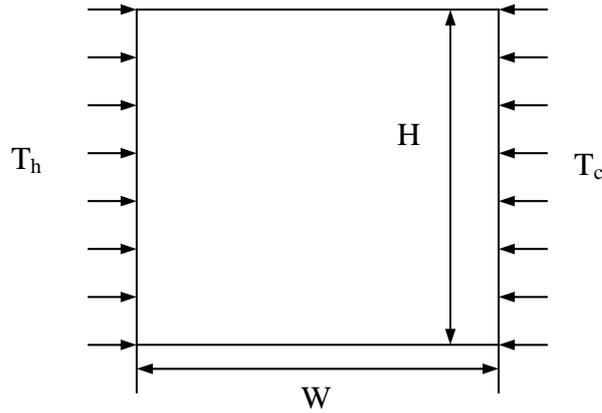


Figure 2.6 : Géométrie du problème physique

La quantité  $d = \sqrt{W.H}$  est choisie comme une largeur caractéristique.

On pose :

$$x^* = \frac{x}{d}$$

$$y^* = \frac{y}{d}$$

$$u^* = \frac{ud}{\alpha_l}$$

$$v^* = \frac{vd}{\alpha_l}$$

$$p^* = \frac{d^2}{\rho_l \alpha_l^2} p$$

Le nombre de Prandtl :  $Pr = \frac{\mu c}{k} = \frac{\nu}{\alpha_l}$

Le nombre de Fourier :  $F_0 = \frac{\alpha_l t}{d^2}$

Le nombre de Rayleigh :  $Ra = Gr.Pr = \frac{g\beta d^3}{\nu\alpha_l}(T_h - T_c)$

Le nombre de Stefan :  $Ste = \frac{c_l(T_h - T_c)}{L}$

$$\theta = \frac{k_l(T - T_f)}{(T_h - T_c)}$$

$$B^* = \frac{d^2}{\rho_l \alpha_l} B$$

Ce qui donne :

**Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.47)$$

**Equation de quantité de mouvement :**

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial F_0} + \frac{\partial}{\partial x^*}(u^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(v^* u^*) &= \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} - B^* u^* \\ \frac{\partial v^*}{\partial F_0} + \frac{\partial}{\partial x^*}(u^* v^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(v^* v^*) &= \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + Ra \text{Pr} \theta - B^* v^* \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

**Equation de l'énergie :**

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} + \frac{\partial (u^* \theta)}{\partial x^*} + \frac{\partial (v^* \theta)}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} (\alpha^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*}) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\alpha^* \frac{\partial \theta}{\partial y^*}) - \frac{1}{Ste} \frac{\partial f_l}{\partial F_0} \quad (2.49)$$

Avec  $\alpha^* = f_l + (1 - f_l) \frac{\alpha_s}{\alpha_l}$  dans le matériau à changement de phase.

Finalement, les différents termes des équations de conservation sont présentés dans le tableau (2.3).

Tableau 2.3 : Les différents termes de l'équation de transport adimensionnelle

EQUATION	$\Phi$	$\Gamma$	S
Quantité de mouvement suivant (x)	$u^* / \rho_l$	$\rho_l \text{Pr}$	$-\frac{\partial p^*}{\partial x} - B^* u^*$
Quantité de mouvement suivant (y)	$v^* / \rho_l$	$\rho_l \text{Pr}$	$-\frac{\partial p^*}{\partial y} + Ra \text{Pr} \theta - B^* v^*$
Energie	$\theta / \rho_l$	$\alpha^* \rho_l$	$-\frac{1}{Ste} \frac{\partial f_l}{\partial F_0}$

## CHAPITRE 3

### ALGORITHMES ET STRATEGIE DE RESOLUTION

Dans le deuxième chapitre, nous avons exposé comment les systèmes d'équations discrétisées sont formés à partir des équations de conservation et dans ce présent chapitre, nous allons établir les différents algorithmes et méthodes ayant mené à la résolution de ces équations.

#### 3.1. Algorithmes de couplage vitesse-pression

La variable scalaire  $\Phi$  dépend de l'intensité et de la direction du champ local de vitesses. Nous avons supposé que le champ de vitesses est connu et nous allons considérer les méthodes les plus utilisées pour déterminer ce champ de vitesses [62, 65].

La solution des équations de quantité de mouvement et de continuité introduit deux nouveaux paramètres :

- Les termes convectifs des équations de quantité de mouvement contiennent des quantités non linéaires.
- Les équations sont couplées.

Mais le problème le plus complexe à résoudre est le rôle que joue la pression; elle apparaît dans les équations de quantité de mouvement, mais pas d'équation de transport pour la pression.

Si le gradient de pression est connu, le processus d'obtention des équations discrétisées pour la vitesse à partir des équations de quantité de mouvement est identique à celui que nous avons explicité dans le chapitre deux pour n'importe quel scalaire.

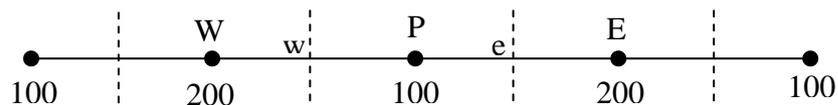
Généralement, les gradients de cette pression ne sont pas connus à l'avance et pour résoudre les deux problèmes mentionnés ci-dessus (non linéarité des équations et couplage

vitesse - pression), après avoir calculé le champ de vitesses ( $u$  et  $v$ ) à l'aide des équations de conservation de la quantité de mouvement, il est nécessaire d'imposer la conservation de la masse. Pour ce faire, les composantes de la vitesse et le champ de pression sont corrigées de manière à forcer la conservation de la masse tout au long du processus itératif. Plusieurs algorithmes ont été développés afin de réaliser cette étape. L'algorithme SIMPLE et ses variantes (SIMPLEC, SIMPLER, PISO, etc.) sont sans doute les plus utilisés.

### 3.1.1. Maillage décalé

Nous n'avons pas besoin de calculer toutes les inconnues au même point du maillage, bien que cela paraisse plus compliqué, nous avons ici un avantage significatif à le faire, car si les vitesses et la pression sont définies aux mêmes nœuds, un champ de pressions hautement non uniforme peut avoir les mêmes conséquences qu'un champ uniforme dans les équations discrétisées de quantité de mouvement et l'influence de la pression est mal prise en compte dans les équations discrétisées de quantité de mouvement [62-64].

Ainsi, si l'on obtient la distribution hautement irrégulière du champ de pression montré sur le schéma ci-dessous pour un fluide stationnaire incompressible en monodimensionnel.



Le gradient de pression ( $\frac{\partial p}{\partial x}$ ) au nœud "P" dans l'équation de quantité de mouvement selon

(x) devient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_e - p_w}{\delta x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\frac{p_E + p_P}{2} - \frac{p_P + p_W}{2}}{\delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_E - p_W}{2\delta x}$$

La pression au nœud "P" n'apparaît pas dans cette expression et en remplaçant les valeurs données sur le schéma ci-dessus, tous les gradients de pression sont nuls dans tous les points nodaux, contrairement aux valeurs indiquées ci-dessus où le champ de la pression oscille. Comme résultat, ce champ de pressions donne le même terme source pour l'équation de quantité de mouvement qu'un champ de pressions uniforme et si les vitesses sont définies aux mêmes nœuds que les scalaires, l'influence de la pression est mal prise en compte dans les équations discrétisées de mouvement. Cela engendre l'idée d'un maillage décalé "Staggered grid" où les composantes de la vitesse sont calculées aux points appartenant à des faces des cellules décalées et d'évaluer les variables scalaires comme la pression, la densité et la température en des points nodaux ordinaires. Deux grilles décalées vers la droite et vers le haut respectivement, sont utilisées pour le calcul des vitesses horizontale et verticale (figure3.1)

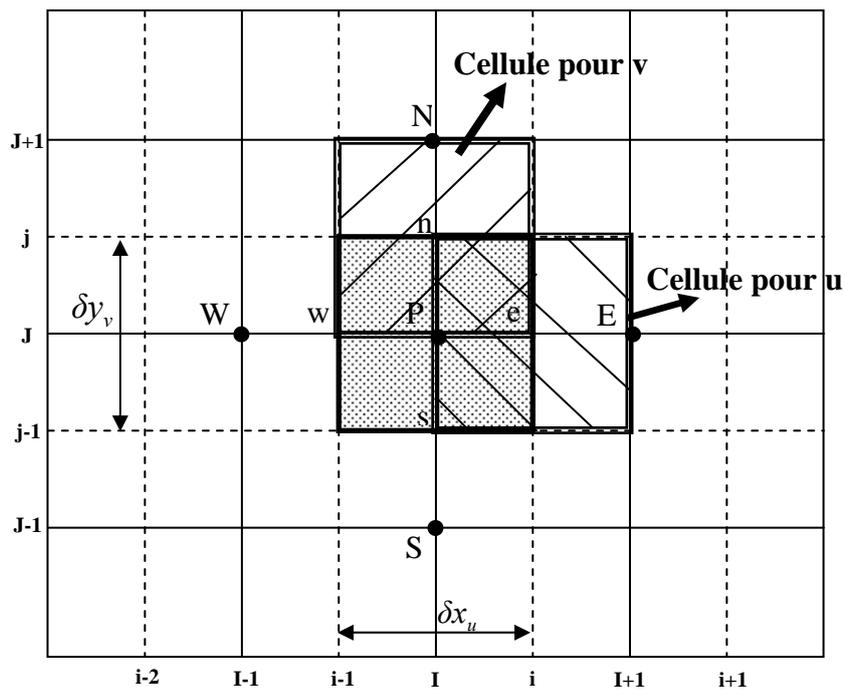


Figure 3.1 : Représentation de la grille décalée

Comme la grille est décalée, une nouvelle notation sera utilisée. Les lignes continues sont numérotées en utilisant les lettres majuscules  $I-1, I, I+1$ , etc., dans la direction (x) et  $J-1, J, J+1$ , etc., dans la direction (y). Les lignes discontinues qui constituent les faces des cellules pour les vitesses sont notées par des minuscules  $i-1, i, i+1$ , etc., pour la direction (x) et  $j-1, j, j+1$ , etc., pour la direction (y).

La grille uniforme de la figure (3.1) est une grille décalée avant, du fait que la position  $i$  pour la vitesse  $u(u_{i,j})$  est située à une distance  $(1/2)\delta x_u$  du point nodale  $(I, J)$ . De même, la position  $j$  de la vitesse  $v(v_{i,j})$  est située à une distance  $(1/2)\delta y_v$  du point nodale  $(I, J)$ .

Pour les équations de quantité de mouvement, nous avons vu que leurs formes sont adaptées à notre méthode, mais maintenant que nous utilisons un maillage décalé, il conviendrait de revoir la formulation. Si nous prenons l'équation de quantité de mouvement suivant l'axe des abscisses ( $x$ ) et si nous regardons pour la composante de vitesse  $(i, J)$ , le volume de contrôle est décalé par rapport au volume de contrôle normal autour de  $P$ .

Le décalage a lieu uniquement suivant ( $x$ ), de manière à ce que les surfaces normales à cette direction soient entre les points  $P$  et  $E$  du maillage principal.

L'équation discrète de quantité de mouvement peut s'écrire suivant ( $x$ ) :

$$a_{i,j} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + A_{i,j} (p_{I+1,J} - p_{I,J}) + b_{i,j} \quad (3.1)$$

Le terme  $(P_p - P_e)A_e$  est la force de pression agissant grâce à  $u(i, J)$  sur le volume de contrôle,  $b_{i,j}$  est le terme source et  $A_{i,j}$  est l'aire sur la quelle la pression agit.

Le nouveau système de coordonnées  $E, W, N$  et  $S$  évoqués dans la sommation  $\sum a_{nb} u_{nb}$  représente les points :  $(i-1, J)$ ,  $(i+1, J)$ ,  $(i, J-1)$  et  $(i, J+1)$

Et suivant ( $y$ ) :

$$a_{i,j} v_{i,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + A_{i,j} (p_{I,J+1} - p_{I,J}) + b_{i,j} \quad (3.2)$$

Avec

$\sum a_{nb} v_{nb}$  représente les points :  $(I-1, J)$ ,  $(I+1, j)$ ,  $(I, j+1)$  et  $(I, j-1)$

Les coefficients  $a_{i,j}$  et  $a_{nb}$  seront calculés en utilisant un des schémas vus précédemment (centré, amont, hybride et quick).

### 3.1.2. Algorithme SIMPLE

C'est l'abréviation de Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations (Patankar and Spalding, 1972) [62-64].

Le principe de SIMPLE consiste à partir d'un champ de pressions estimé  $p^*$  au départ ou à l'itération précédente et d'en déduire un champ de vitesses à l'aide des relations (3.1) et (3.2). On a donc:

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + A_e (p_P^* - p_E^*) + b_u \quad (3.3)$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + A_n (p_P^* - p_N^*) + b_v \quad (3.4)$$

La pression est ensuite corrigée d'une quantité  $p'$  qui induit une correction sur les vitesses  $u'$  et  $v'$ , de sorte que les nouveaux champs s'écrivent:

$$p = p^* + p' \quad (3.5)$$

$$u = u^* + u' \quad (3.6)$$

$$v = v^* + v' \quad (3.7)$$

Les corrections sur les vitesses se déduisent facilement en soustrayant membre à membre, les équations (3.3) et (3.4) des équations (3.1) et (3.2) et en introduisant le résultant de cette soustraction dans les expressions (3.5-7). On obtient alors:

$$\left. \begin{aligned} a_e u_e' &= \sum a_{nb} u_{nb}' + A_e (p_P' - p_E') \\ a_n v_n' &= \sum a_{nb} v_{nb}' + A_n (p_P' - p_N') \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

L'hypothèse de l'algorithme SIMPLE consiste en outre à négliger les sommes  $(\sum a_{nb} u_{nb}')$  et  $(\sum a_{nb} v_{nb}')$  dans les équations (3.8) (ces termes sont nuls si la solution correcte est obtenue). On aura, alors :

$$\left. \begin{aligned} a_e u_e' &= A_e (p_P' - p_E') \\ a_n v_n' &= A_n (p_P' - p_N') \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Avec

$$d_e = A_e / a_e$$

L'équation sera appelée formule de correction de vitesses qui s'écrit aussi :

$$\left. \begin{aligned} u_e &= u_e^* + d_e (p'_P - p'_E) \\ v_n &= v_n^* + d_n (p'_P - p'_N) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Des expressions similaires sont bien sûr obtenues pour  $u_w$  et  $v_s$ . Ainsi, les corrections sur les vitesses sont déduites directement de manière explicite à partir de la correction de pression.

Jusqu'à maintenant nous n'avons considéré que les équations de quantité de mouvement. Le champ de vitesses doit tenir compte d'une autre contrainte : satisfaire l'équation de continuité.

L'équation de continuité intégrée sur le volume fini centré en "P" (figure (3.2)) conduit à:

$$\frac{(\rho p - \rho p^0) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w] \Delta y + [(\rho v)_n - (\rho v)_s] \Delta x = 0 \quad (3.11)$$

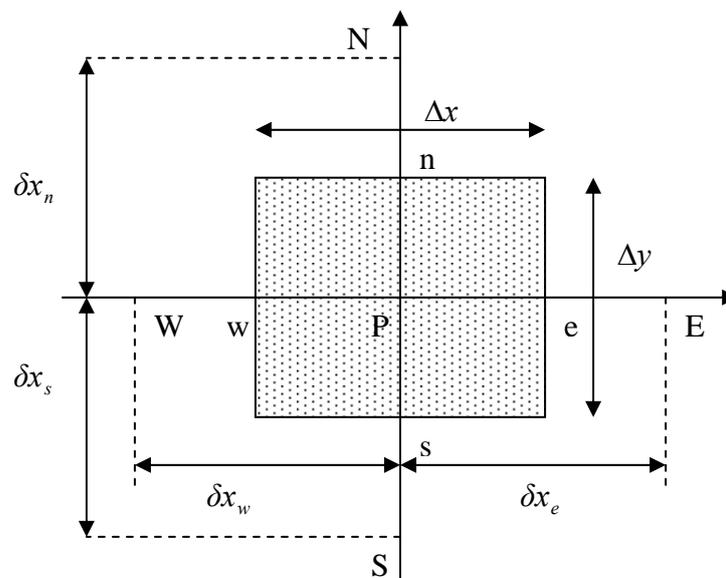


Figure 3.2 : Représentation d'un volume fini centré en "P"

En regroupant les différents termes ; cette équation peut être finalement mise sous la forme standard:

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (3.12)$$

Où

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

Et les différents coefficients sont donnés par :

$a_E$	$a_W$	$a_N$	$a_S$	<b>b</b>
$\rho_e d_e \Delta y$	$\rho_w d_w \Delta y$	$\rho_n d_n \Delta x$	$\rho_s d_s \Delta x$	$\frac{(\rho p^0 - \rho p) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} +$ $[(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e] \Delta y + [(\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n] \Delta x$

Avec

$$d_e = A_e / a_e \quad d_w = A_w / a_w$$

$$d_n = A_n / a_n \quad d_s = A_s / a_s$$

Le terme " b" peut servir comme un indicateur de convergence.

Pour éviter que le calcul diverge, on utilise la sous relaxation. On obtient, alors :

$$p^{\text{nouveau}} = p^* + \alpha_p p' \quad (3.13)$$

$\alpha_p$  est le coefficient de sous relaxation

De même que pour les pressions, nous aurons pour la vitesse :

$$\left. \begin{aligned} u^{\text{nouveau}} &= \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)} \\ v^{\text{nouveau}} &= \alpha_u v + (1 - \alpha_u) v^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Des transformations algébriques montrent que les discrétisées de quantité de mouvement avec la sous relaxation s'écrivent :

$$\frac{a_e}{\alpha_u} u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (P_P - P_E) A_e + b + \left[ (1 - \alpha_u) \frac{a_e}{\alpha_u} \right] u_e^{n-1} \quad (3.15)$$

$$\frac{a_n}{\alpha_u} u_n = \sum a_{nb} u_{nb} + (P_P - P_N) A_n + b + \left[ (1 - \alpha_u) \frac{a_n}{\alpha_u} \right] u_n^{n-1} \quad (3.16)$$

L'équation de correction de la pression est aussi affectée par la sous relaxation et les coefficients "d " deviennent :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \alpha_u \quad d_w = \frac{A_w}{a_w} \alpha_u \quad d_n = \frac{A_n}{a_n} \alpha_u \quad d_s = \frac{A_s}{a_s} \alpha_u$$

**L'algorithme SIMPLE se résume finalement aux étapes suivantes :**

Début des itérations

- 1- Proposer un champ de pression  $p^*$ .
  - 2- Résoudre les équations de quantité de mouvement pour obtenir  $u^*$  et  $v^*$ .
  - 3- Résoudre l'équation  $p'$ .
  - 4- Calculer  $p$  ( $p = p' + p^*$ ).
  - 5- Calculer  $u$  et  $v$  à partir de  $u^*$  et  $v^*$  en utilisant les formules de correction de vitesses.
  - 6- Résoudre l'équation d'énergie.
  - 7- Tester la convergence de la solution numérique.
- Si le test est non satisfait : retour au point 2.

### 3.1.3. Algorithme SIMPLER : (SIMPLE Revised - Patankar, 1980)

L'approximation précédente (l'omission du terme  $\sum a_{nb} u'_{nb}$ ) conduit à exagérer la correction de pression et la sous relaxation devient nécessaire. Cette approximation joue un rôle dans la formule de correction de vitesses et la correction de la pression doit corriger cette erreur [62-64].

Pour améliorer la correction, l'idée est d'utiliser l'équation de correction de pression pour corriger seulement les vitesses et de trouver un autre moyen pour obtenir la pression.

L'équation de quantité de mouvement est:

$$u_e = \sum (a_{nb} u_{nb} + b) / a_e + d_e (p_P - p_E) \quad (3.17)$$

Avec

$$d_e = A_e / a_e$$

Notons une pseudo-vitesse  $\hat{u}_e$  par :

$$\hat{u}_e = \sum (a_{nb} u_{nb} + b) / a_e \quad (3.18)$$

L'équation (3-17) se transforme ainsi :

$$u_e = \hat{u}_e + d_e (p_P - p_E) \quad (3.19)$$

De même

$$v_n = \hat{v}_e + d_n (p_P - p_N) \quad (3.20)$$

Nous aurons également :

$$a_P p_P = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + b \quad (3.21)$$

Avec

$$b = \frac{(\rho p^0 - \rho p) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho \hat{u}^*)_w - (\rho \hat{u}^*)_e] \Delta y + [(\rho \hat{v}^*)_s - (\rho \hat{v}^*)_n] \Delta x$$

Il y a une différence majeure avec l'algorithme SIMPLER : aucune approximation n'a été établie. Donc, si nous utilisons un champ de vitesses correct pour calculer les pseudo- vitesses, l'équation discrétisée de la pression donnera la pression correcte.

### **L'algorithme SIMPLER se résume finalement aux étapes suivantes:**

A partir d'un champ de vitesses :

- 1- Calculer les coefficients pour les équations de quantités de mouvement et calculer  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$ .
- 2- Calculer les coefficients pour l'équation de pression et la résoudre pour obtenir le champ de pressions.
- 3- considérer ce champ de pressions comme  $p^*$  et résoudre les équations de mouvement pour obtenir  $u^*, v^*$ .
- 4- Calculer le terme source "b" et résoudre l'équation en  $p'$ .
- 5- Corriger le champ de vitesses, mais sans corriger la pression.
- 6- Résoudre l'équation en  $\Phi$ , si nécessaire.
- 7- Retourner au point 2 jusqu'à la convergence.

### 3.1.4. Algorithme SIMPLEC (Van Doormaal and Raithby, 1984)

Il suit les mêmes étapes que SIMPLE, à la différence que les équations de quantité de mouvement sont modifiées, de sorte que les équations de correction de vitesse négligent des termes moins significatifs que ceux négligés par SIMPLE [62-64].

Les équations de quantité de mouvement, de vitesse et de pression sont reliées par :

$$u'_e = \frac{1}{a_e} \sum a_{nb} u'_{nb} + d_e (p'_P - p'_E) \quad (3.22)$$

Par contre l'approximation SIMPLE néglige le terme  $(\frac{1}{a_e} \sum a_{nb} u'_{nb})$

Dans le schéma SIMPLEC, l'équation (3-22) est réécrite sous la forme :

$$(1 - \frac{1}{a_e} \sum a_{nb}) u'_e = \frac{1}{a_e} \sum a_{nb} (u'_{nb} - u'_e) + d_e (p'_P - p'_E) \quad (3.23)$$

Assumer que  $|u'_{nb} - u'_e| \ll |u'_e|$  et négliger le terme  $(\frac{1}{a_e} \sum a_{nb} (u'_{nb} - u'_e))$  donnera :

$$u'_e \approx \frac{d_e (p'_P - p'_E)}{(1 - \frac{1}{a_e} \sum a_{nb})} \quad (\text{SIMPLEC}) \quad (3.24)$$

$$u'_e \approx d_e (p'_P - p'_E) \quad (\text{SIMPLE}) \quad (3.25)$$

### 3.1.5. Algorithme PISO

Signifie "Pressure Implicit with Splitting of Operators". Il a été proposé par Issa en 1986 [62-65]. Il consiste en une étape de prédiction et deux étapes de corrections. Il peut être considéré comme étant une extension de SIMPLE avec des étapes de corrections supplémentaires.

#### Etape de prédiction :

Les équations de quantité de mouvement discrétisées (3.3) et (3.4) sont résolues en utilisant un champ de pression intermédiaire estimé  $p^*$ , pour donner les composantes de la vitesse  $u^*$  et  $v^*$  et en suivant la même démarche que pour SIMPLE.

### Étape de correction 1 :

Les champs  $u^*$  et  $v^*$  ne vont pas satisfaire l'équation de continuité tant que le champ de pression n'est pas correcte. Le premier pas de correction de SIMPLE est introduit pour donner un champ de vitesses ( $u^{**}$  et  $v^{**}$ ) qui satisfait l'équation de continuité.

Les équations résultantes sont les mêmes que les équations de correction (3.5-7) de SIMPLE, mais comme il y a une autre étape de correction dans l'algorithme PISO, nous utilisons une autre notation.

$$\left. \begin{aligned} p^{**} &= p^* + p' \\ u^{**} &= u^* + u' \\ v^{**} &= v^* + v' \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Ces expressions sont utilisées pour définir les vitesses corrigées  $u^{**}$  et  $v^{**}$  :

$$u_e^{**} = u_e^* + d_{i,j} (p'_P - p'_E) \quad (3.27)$$

$$v_n^{**} = v_n^* + d_{i,j} (p'_P - p'_N) \quad (3.28)$$

Comme pour l'algorithme SIMPLE, les expressions (3.27) et (3.28) sont introduites dans l'équation de continuité (3.11) pour donner l'équation de correction de vitesses (3.12) avec ses coefficients et ses termes sources.

Dans PISO, cette équation de correction est appelée la première équation de correction de la pression. Une fois que la correction de pression est obtenue, on peut obtenir les vitesses en utilisant les équations (3.27) et (3.28).

### Étape de correction 2 :

L'algorithme PISO utilise une deuxième étape de correction. Les équations de quantité de mouvement discrétisées pour  $u^{**}$  et  $v^{**}$  sont :

$$a_e u_e^{**} = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_P^{**} - p_E^{**}) A_e + b_u \quad (3.29)$$

$$a_n v_n^{**} = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_P^{**} - p_N^{**}) A_n + b_v \quad (3.30)$$

Une deuxième correction de vitesse doit être obtenue en résolvant une deuxième fois les équations de quantité de mouvement :

$$a_e u_e^{***} = \sum a_{nb} u_{nb}^{**} + (p_P^{***} - p_E^{***})A_e + b_u \quad (3.31)$$

$$a_n v_n^{***} = \sum a_{nb} v_{nb}^{**} + (p_P^{***} - p_N^{***})A_n + b_v \quad (3.32)$$

En soustrayant l'équation (3.29) de (3.31) et l'équation (3.30) de (3.32), nous aurons :

$$u_e^{***} = u_e^{**} + \frac{\sum a_{nb} (u_{nb}^{**} - u_{nb}^*)}{a_e} + (p_P'' - p_E'')A_e + d_e \quad (3.33)$$

$$v_n^{***} = v_n^{**} + \frac{\sum a_{nb} (v_{nb}^{**} - v_{nb}^*)}{a_n} + (p_P'' - p_N'')A_n + d_n \quad (3.34)$$

Où  $p''$  est la deuxième correction de pression de sorte que  $p^{***}$  soit obtenue à partir de :

$$p^{***} = p^{**} + p'' \quad (3.35)$$

On remplace  $u^{***}$  et  $v^{***}$  par leurs expressions dans l'équation discrétisée de quantité de mouvement pour donner l'expression (3.36) :

$$a_P p'' = a_E p''_E + a_W p''_W + a_N p''_N + a_S p''_S + b'' \quad (3.36)$$

Avec

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

Et les différents coefficients sont présentés dans le tableau suivant :

$a_E$	$a_W$	$a_N$	$a_S$	<b>b</b>
$\rho_e d_e \Delta y$	$\rho_w d_w \Delta y$	$\rho_n d_n \Delta x$	$\rho_s d_s \Delta x$	$\left(\frac{\rho}{a}\right)_w \Delta y \sum a_{nb} (u_{nb}^{**} - u_{nb}^*)$ $- \left(\frac{\rho}{a}\right)_e \Delta y \sum a_{nb} (u_{nb}^{**} - u_{nb}^*)$ $+ \left(\frac{\rho}{a}\right)_s \Delta x \sum a_{nb} (v_{nb}^{**} - v_{nb}^*)$ $- \left(\frac{\rho}{a}\right)_n \Delta x \sum a_{nb} (v_{nb}^{**} - v_{nb}^*)$

Dans la dérivation de l'équation (3.36) le terme source :

$\left[ (\rho u^{**})_w \Delta y - (\rho u^{**})_e \Delta y + (\rho v^{**})_s \Delta x - (\rho v^{**})_n \Delta x \right]$  est nul du fait que les composantes de vitesses  $u^{**}$  et  $v^{**}$  satisfont l'équation de continuité.

L'équation (3.36) est résolue pour obtenir le deuxième champ de correction de la pression  $p''$  et un deuxième champ de pression corrigé est obtenu :

$$p^{***} = p^{**} + p'' = p^* + p' + p'' \quad (3.37)$$

Le deuxième champ de vitesses corrigé est obtenu à partir des équations (3.33) et (3.34).

### 3.2. Mise à jour de la fraction liquide

Le grand problème de la présente méthode enthalpique pour traiter le problème de changement de phase avec un maillage fixe, est le terme source de l'équation d'énergie [43, 44] :

$$\int_{\Delta v} S_h dv = \rho L \frac{(f_l^n - f_l^{n-1})}{\Delta t} \Delta V \quad (3.38)$$

Lorsqu'un volume de contrôle change de phase, l'énergie échangée ne doit plus se traduire par une variation de l'enthalpie (chaleur sensible), mais par une variation de la fraction liquide (chaleur latente). La fraction  $f_l$  est égale à 1 dans les volumes de contrôle remplis entièrement du matériau à changement de phase liquide et égale à zéro dans les volumes de contrôle remplis entièrement du matériau à changement de phase solide, comprise dans l'intervalle [0, 1] dans les volumes de contrôle se trouvant au voisinage du front de fusion.

L'équation d'énergie exige un traitement spécial dû à la présence de la fraction liquide  $f_l$  dans le terme source résultant du changement de phase. Pour obtenir la nouvelle valeur de la température ( $T^{k+1}$ ) à partir de l'équation d'énergie pour l'actuelle externe itération (k+1), on a besoin de connaître la valeur de la fraction liquide ( $f_{l,p}^{k+1}$ ) dépendante de la solution inconnue ( $T^{k+1}$ ) et le procédé pour résoudre ce type du problème est décrit dans la littérature [40]. A chaque itération externe (k+1), la fraction liquide ( $f_{l,p}^{k+1}$ ) est corrigée au nœud P par l'une des deux expressions suivantes :

$$f_{l,p}^{k+1} = f_{l,p}^k + \omega_{\Delta H} \frac{\Delta t a_p^k h_p^k}{\rho L \Delta V} \quad (3.39)$$

$$f_{l,p}^{k+1} = f_{l,p}^k + \omega_{\Delta H} \frac{\Delta t a_p^h}{\rho L \Delta V} [h_p^h - c ((T_L - T_S) f_{l,p}^k + T_S)] \quad (3.40)$$

Où

$\omega_{\Delta H}$  : Facteur de sous relaxation.

$T_L$  : Température de liquide.

$T_S$  : Température de solide.

$a_p$  : Coefficient de discrétisation d'équation d'énergie.

$c$  : Chaleur spécifique.

Pour les volumes de contrôle qui ne changent pas ou dont le changement de phase est réalisé, la fraction liquide est préservée à l'aide de la correction additionnelle:

$$f_{l,P}^{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } f_{l,P}^{k+1} > 1 \\ 0 & \text{si } f_{l,P}^{k+1} < 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

La valeur de la fraction liquide est donc déterminée itérativement à partir de la solution courante du champ d'enthalpie.

### 3.3. Critères de convergence

Une exploration intense des différents critères de convergence possibles a conduit à un ensemble de critères qui cernent bien le problème considéré. Cela concerne la stabilité du champ de fraction liquide, le résidu total d'enthalpie et le résidu total de masse.

Les trois critères suivants doivent donc être satisfaits simultanément pour réaliser la convergence:

$$1- \text{ si } f_{l,P}^{k+1} \in ]0, 1[ \quad \text{alors} \quad f_{l,p}^k \in ]0, 1[ \quad (3.42)$$

Ce critère assure que les volumes de contrôle à l'état intermédiaire l'étaient lors de la dernière itération. Autrement dit, cette condition vérifie qu'il n'y a pas de nouveaux volumes de contrôle qui commencent à changer de phase.

$$2- \text{ si } f_{l,p}^k \in ]0, 1[ \quad \text{alors} \quad f_{l,p}^{k+1} \in ]0, 1[ \quad (3.43)$$

La seconde condition vérifie que les volumes de contrôle qui étaient à l'état intermédiaire le sont encore, c'est-à-dire qu'aucun volume de contrôle ne vient de compléter son changement de phase.

Cette vérification assure une certaine stabilité dans la résolution numérique. Il s'est avéré que la non-stabilisation du champ de fraction liquide pouvait parfois engendrer une divergence du calcul au démarrage d'un nouveau pas de temps.

3- Calculer les résidus  $R$  des équations discrètes tels que la plus grande valeur absolue de  $R$  est inférieure à une certaine valeur  $\varepsilon_1$  ( $R < \varepsilon_1$ )

$$R = \sum a_{nb} \Phi_{nb} + b - a_p \Phi_p \quad (3.44)$$

Lorsque le régime de convection est établi, la conservation de la masse peut jouer un rôle déterminant dans la convergence, bien que l'équation d'énergie qui contient le terme source responsable du changement de phase, doit toujours être satisfaite car la masse peut être bien conservée sans que le changement de phase ne soit bien calculé.

#### 3.4. Calcul du terme source

Les termes sources des équations discrétisées sont estimés en utilisant les valeurs des variables connues [62, 64]. Comme la grille utilisée est décalée, une interpolation est nécessaire pour calculer les gradients de vitesse qui apparaissent dans les termes sources.

Pour le cas bidimensionnel, nous avons par exemple :

$$\frac{\partial}{\partial}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial}(\rho v u) = -\frac{\partial p}{\partial y} + S_u \quad (3.45)$$

et

$$S_u = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Une petite partie du maillage est représentée par la figure (3.1). En utilisant la notation standard pour la grille décalée arrière, nous aurons pour forme discrétisée de l'équation (3.45) :

$$a_{i,j} u_{i,j} = \sum u_{nb} u_{nb} + \frac{p_{I-1,J} - p_{I,J}}{\delta x_u} \Delta V_u + S_u \Delta V \quad (3.46)$$

$\delta x_u$  est l'épaisseur du volume de contrôle et  $\Delta V$  est le volume du volume de contrôle.

Le terme source pour l'équation de quantité de mouvement selon ( $u$ ) de la cellule présentée sur la figure (3.1) est :

$$\begin{aligned}
S_u \Delta V &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_{cellule} \Delta V \\
&= \left[ \frac{(\mu \frac{\partial u}{\partial x})_e - (\mu \frac{\partial u}{\partial x})_w}{\delta x_u} + \frac{(\mu \frac{\partial v}{\partial x})_n - (\mu \frac{\partial v}{\partial x})_s}{\delta y_u} \right] \\
&= \left[ \frac{(\mu \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\partial x_{PE}}) - (\mu \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\partial x_{WP}})}{\delta x_u} + \frac{(\mu \frac{v_{I,j+1} - v_{I-1,j}}{\partial x_{PN}}) - (\mu \frac{v_{I,j} - v_{I-1,j}}{\partial x_{SP}})}{\delta y_u} \right] \delta x_u \delta y_u
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Les autres termes sources sont calculés de manière similaire.

### 3.5. Nombre du Nusselt

Le nombre du Nusselt moyen est défini à la paroi chaude par :

$$Nu = \frac{k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{paroi} dy}{k \frac{(T_f - T_h)}{W} H} \tag{3.48}$$

## CHAPITRE 4

### VALIDATION DE LA METHODE

#### 4.1. Introduction

Il est toujours utile de s'assurer qu'un programme de calcul donne une solution analytique connue d'une situation simple d'un problème physique donné. Ensuite, la complexité du phénomène est ajoutée pour atteindre le cas réel souhaité. Mais dans le cas du changement de phase en présence de la convection naturelle, la solution analytique est absente et les résultats expérimentaux se font de plus en plus rares.

Le présent chapitre traitera des différentes étapes ayant mené à la validation du modèle numérique exposé aux chapitres précédents et dont la première étape consistera à vérifier si les résultats obtenus par ce modèle sont en accord avec ceux publiés récemment et notamment ceux de Hannoun et al. [43, 44]. Pour cela, l'analyse d'un cas typique de la fusion dans une enceinte munie de sources de chaleur uniformes est présentée et les résultats obtenus serviront également à tester la performance de notre programme de calcul.

La deuxième étape de ce chapitre consistera à améliorer nos résultats par l'utilisation d'un autre schéma de discrétisation d'ordre supérieur comme le schéma quick.

#### 4.2. Description du problème physique

Afin de valider notre programme de calcul, nous avons choisi d'étudier le cas de référence proposé par Lequere et al. [36]. Le cas traité par Hannoun [43, 44] pour la fusion de l'étain a été également considéré. La configuration générale est montrée sur la figure (4.1) et les paramètres physiques de calcul sont consignés dans le tableau (4.1).

Initialement, le solide est soumis à une température froide ( $T_c$ ) et soudainement, la paroi gauche du matériau est exposée à une température chaude ( $T_h$ ) au dessus de sa

température de fusion, tandis que la paroi droite présente la frontière froide égale à sa température de fusion ( $T_f$ ).

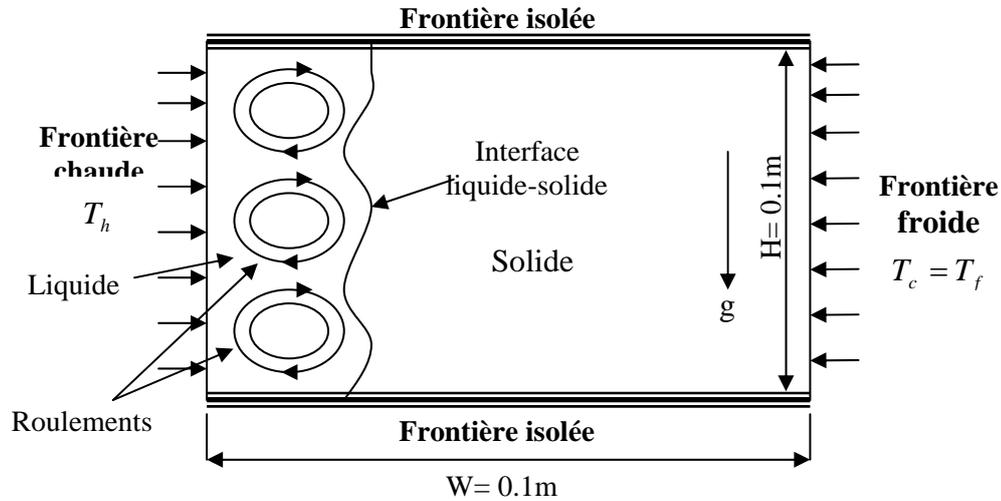


Figure 4.1 : Représentation schématique du problème de référence proposé par Lequere et al. [36]

Tableau 4.1 : Paramètres physiques utilisés

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Accélération de la pesanteur	G	10.	$m / s^2$
Chaleur latente de fusion	L	$6. \times 10^5$	J / Kg
Chaleur spécifique à pression constante	c	200	J / Kg .K
Coefficient de dilatation volumique	$\beta$	$2.67 \times 10^{-4}$	$K^{-1}$
Conductivité thermique	K	60	W / m.K
Densité de référence	$\rho_{réf}$	$7.5 \times 10^3$	$Kg / m^3$
Facteur de forme (H / W)	Ar	1.	/
Hauteur du solide	H	0.1	m
Largeur du solide	W	0.1	m
Nombre de Prandtl	Pr	0.04	/
Nombre de Rayleigh	Ra	$2.25 \times 10^5$	/
Nombre de Stefan	Ste	0.01	/
Température de fusion	$T_f$	505	K
Température de la paroi chaude	$T_h$	508	K
Température de la paroi froide	$T_c$	505	K
Viscosité dynamique	$\mu$	$6 \times 10^{-3}$	$N.s / m^2$

### 4.3. Méthodes numériques et paramètres utilisés

Les équations de conservation (quantité de mouvement et d'énergie) sont discrétisées par la méthode de volumes finis, sur une grille cartésienne uniforme décalée.

Les approximations des divers termes de l'équation de transport sont d'une précision du deuxième ordre. Cependant, le terme convectif est manipulé par les quatre schémas de discrétisations (quick, centré, amont et hybride). Par contre, les méthodes d'Euler Implicite, Euler Explicite et de Crank-Nicholson, sont utilisées pour la discrétisation du terme transitoire.

Le résultat est un système non-linéaire couplé et manipulé par les différents algorithmes : SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC et PISO. Pour la résolution des systèmes d'équations linéaires obtenus par ces algorithmes, les méthodes TDMA ou le Gradient Biconjugué sont employées.

Les équations de conservation sont résolues dans un domaine réduit contenant le liquide seulement (afin de réduire le temps de calcul) et les simulations sont effectuées avec les valeurs numériques consignées dans le tableau (4.2).

L'intervalle de l'interface liquide-solide est choisi pour le cas de l'étain (tableau (4.2)) avec une température liquide ( $T_L = T_f + \varepsilon$ ) et une température solide ( $T_S = T_f$ ).

Les itérations externes sont arrêtées quand le résiduel des équations de conservations est moins qu'un certain  $\varepsilon_0$  (tableau (4.2)).

Tableau 4.2 : Paramètres numériques utilisés

<b>Paramètre</b>	<b>Symbole</b>	<b>Valeur</b>	<b>Unité</b>
Constante	C	$10^{15}$	/
Constante	q	$10^{-6}$	/
Critère de convergence de l'équation d'énergie	$\varepsilon_0$	$10^{-7}$	/
Critère de convergence de l'équation de la quantité du mouvement	$\varepsilon_0$	$10^{-7}$	/
Intervalle de transition liquide-solide	$\varepsilon$	0.025	K
Pas du temps	$\Delta t$	$0.05 \leq \Delta t \leq 1$	s
Paramètre de sous relaxation de l'équation d'énergie	$w_h$	0.1	/
Paramètre de sous relaxation de l'équation de pression	$w_p$	0.9	/
Paramètre de sous relaxation de l'équation de la quantité du mouvement suivant (u)	$w_u$	0.7	/
Paramètre de sous relaxation de l'équation de la quantité du mouvement suivant (v)	$w_v$	0.7	/
Paramètre de sous relaxation de la mise à jour de la fraction liquide	$w_{\Delta H}$	0.2	/

#### 4.4. Description du programme de calcul utilisé

La stratégie utilisée au cours du processus itératif de résolution est présentée sur l'organigramme de la figure (4.2) :

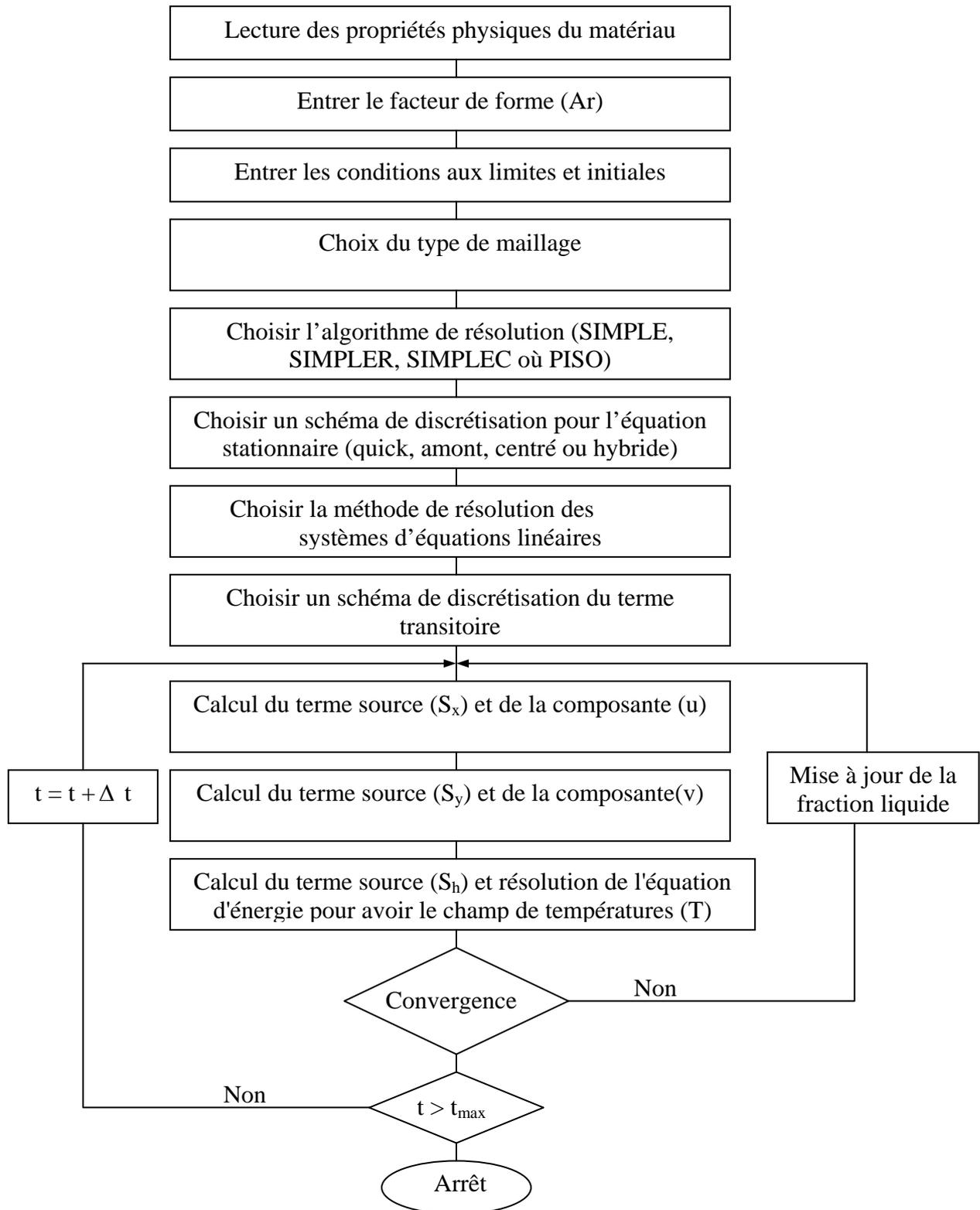


Figure 4.2 : Algorithme de résolution numérique

#### 4.5. Interface liquide-solide

La complexité du problème de changement de phase provient du couplage fort dû à la présence de la fraction liquide dans les différents termes sources des équations de conservation et qui est liée en même temps, au champ de températures. Pour cela la résolution de ce type de problème est focalisée généralement sur l'évolution de la position et de la forme de l'interface liquide-solide au cours de la fusion.

Dans ce contexte un travail important a été présenté par Hannoun et al. [43, 44] pour trois schémas de discrétisations (amont, centré et hybride) et cinq temps de référence (100, 200, 450, 1000 et 2000s).

Les résultats présentés sur les figures (4.3-5) sont obtenus par l'algorithme SIMPLER pour trois grilles de maillages (100x100, 200x200 et 400x400) et l'interface liquide-solide est déterminée par la fraction liquide autour de  $f_L = 0.5$ .

La comparaison entre les résultats obtenus au temps 100s montre une interface de forme plane identique pour tous les schémas de discrétisation et pour toutes les grilles utilisées. Ceci est expliqué par la domination du phénomène de conduction par rapport à la convection naturelle qui est encore faible.

Par contre, au temps 450s, l'effet de la convection naturelle commence à apparaître d'une manière remarquable et l'interface devient onduleuse du fait que la fusion est plus rapide près des emplacements des roulements. Le nombre des ondes trouvées reflète exactement le nombre et les positions des roulements observés (figure (4.8)).

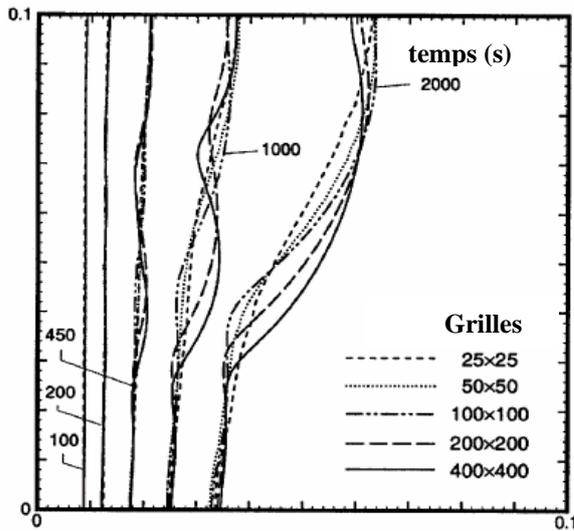
Tandis que la fusion progresse, l'interface solide-liquide se déplace vers la droite et la profondeur des ondes observées croît en produisant un écart important entre les positions des fronts de fusion des différents schémas et différentes grilles. Au temps 450s, Hannoun a rapporté une erreur de 15% entre l'interface de la grille fine (400x400) et la grosse grille (25x25) pour les deux schémas amont et hybride (figures (4.3-4)). Par contre, dans notre travail une erreur de 12% est notée pour la même configuration des schémas.

La controverse qui a été soulevée dans l'introduction générale par Gobin [38] sur le nombre exact des roulements trouvés au temps 1000s, a engendré différents avis des

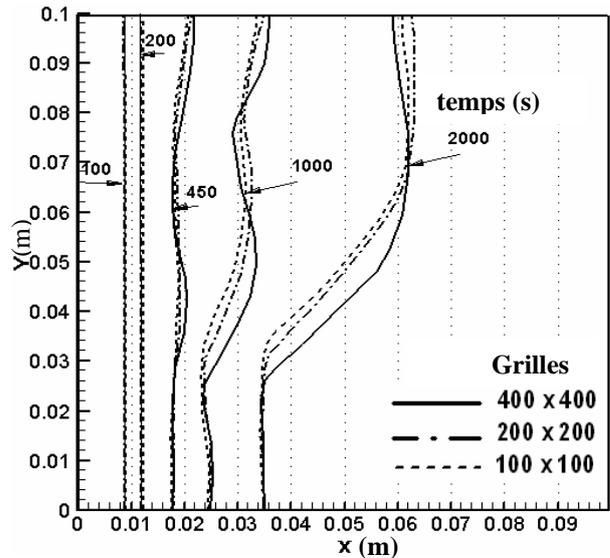
chercheurs: ceux ayant rapporté une interface d'une seule onde par l'emploi des schémas d'ordre inférieur et des grilles larges (moins de 100x100) et ceux ayant rapporté une interface de deux ondes par l'utilisation des grilles plus fines et des schémas de discrétisations d'ordre supérieur. Dans ce contexte, la solution trouvée par l'utilisation de la grille (400x400) exhibe une interface de deux ondes, tandis qu'une solution moins exacte (amont 100x100) montre seulement une seule onde. Par conséquent, la qualité des résultats actuels pour une interface solide-liquide constituée d'une seule onde, est due à l'insuffisance de la solution numérique par l'emploi des grilles de grande taille et des schémas de discrétisations d'ordre inférieur.

L'indisponibilité de la plupart des solutions numériques, aussi bien que l'utilisation d'un grand pas du temps par quelques chercheurs, pourrait expliquer les résultats trouvés dans la littérature [53]. Une simple comparaison de nos résultats avec ceux de Hannoun [43, 44], montre que les deux résultats sont identiques (figures (4.3-5)). Signe d'un bon indicateur de la convergence de la solution numérique.

Afin de permettre une meilleure comparaison entre les quatre schémas étudiés (amont, centré, hybride et quick), l'interface obtenue à une grille de 400x400 à divers temps de calcul est montrée sur la figure (4.7), avec un volume de liquide juste supérieur en faveur du schéma quick.

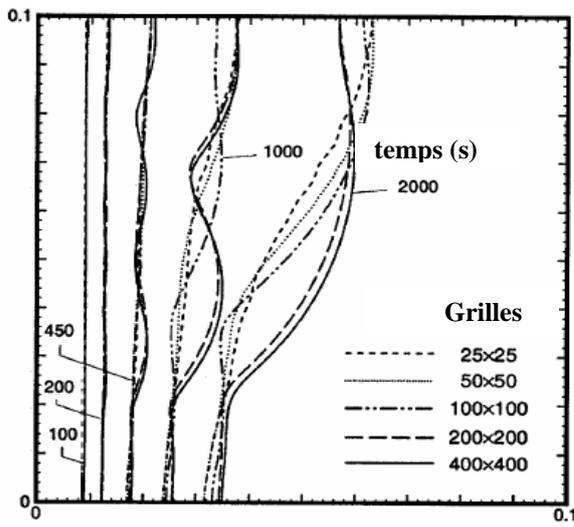


Travaux de Hannoun [43,44]

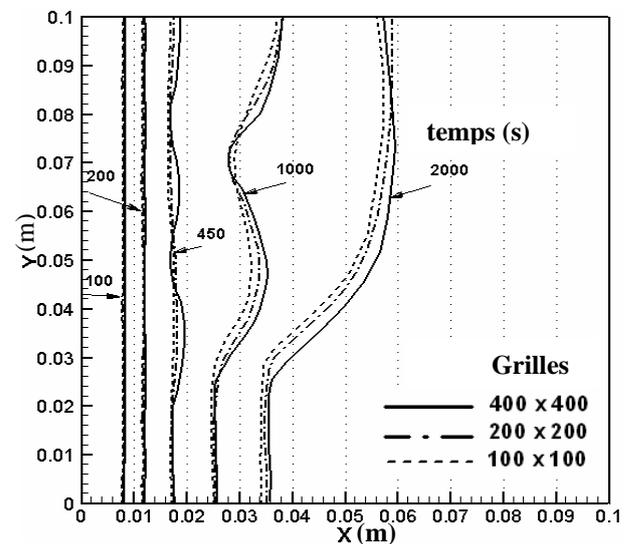


Nos résultats

Figure 4.3 : Interface liquide-solide par l'application du schéma amont

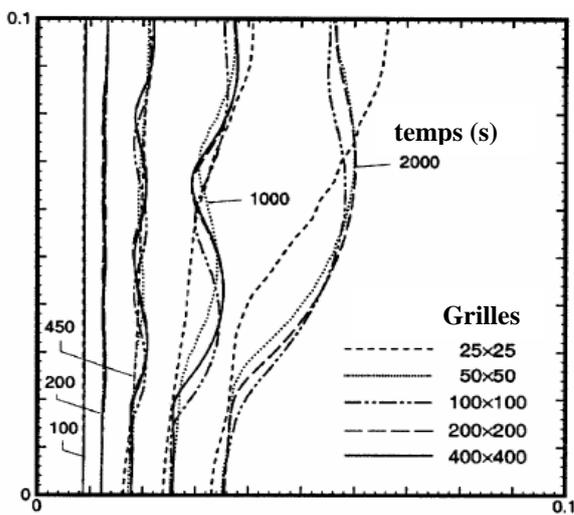


Travaux de Hannoun [43,44]

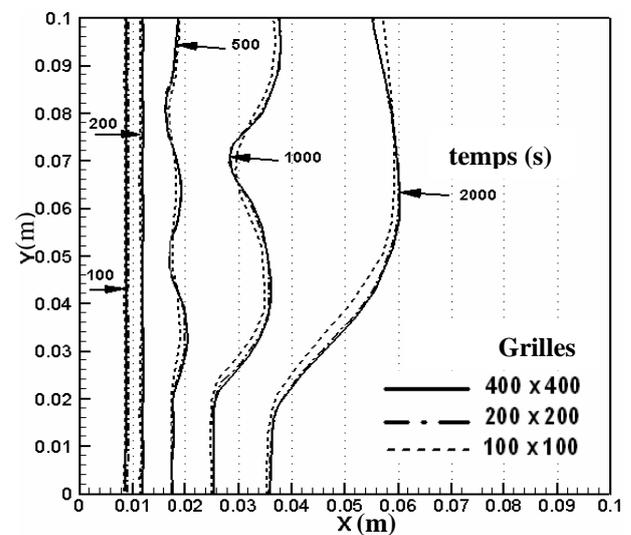


Nos résultats

Figure 4.4 : Interface liquide-solide par l'application du schéma hybride

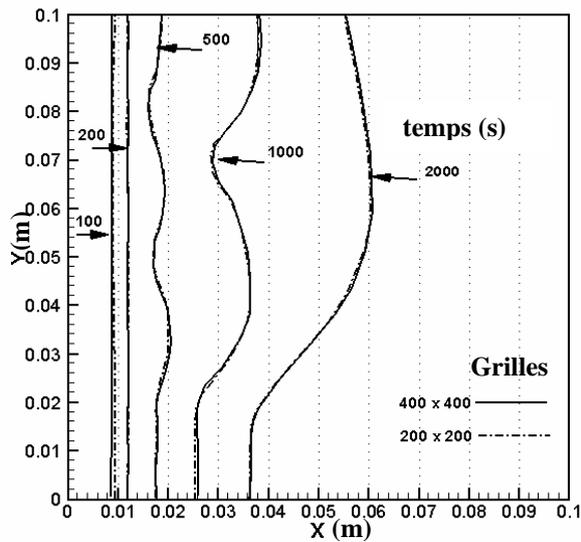


Travaux de Hannoun [43,44]



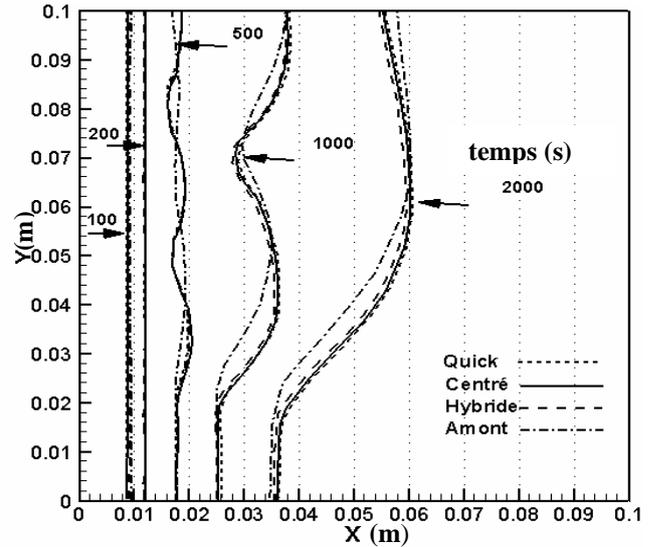
Nos résultats

Figure 4.5 : Interface liquide-solide par l'application du schéma centré



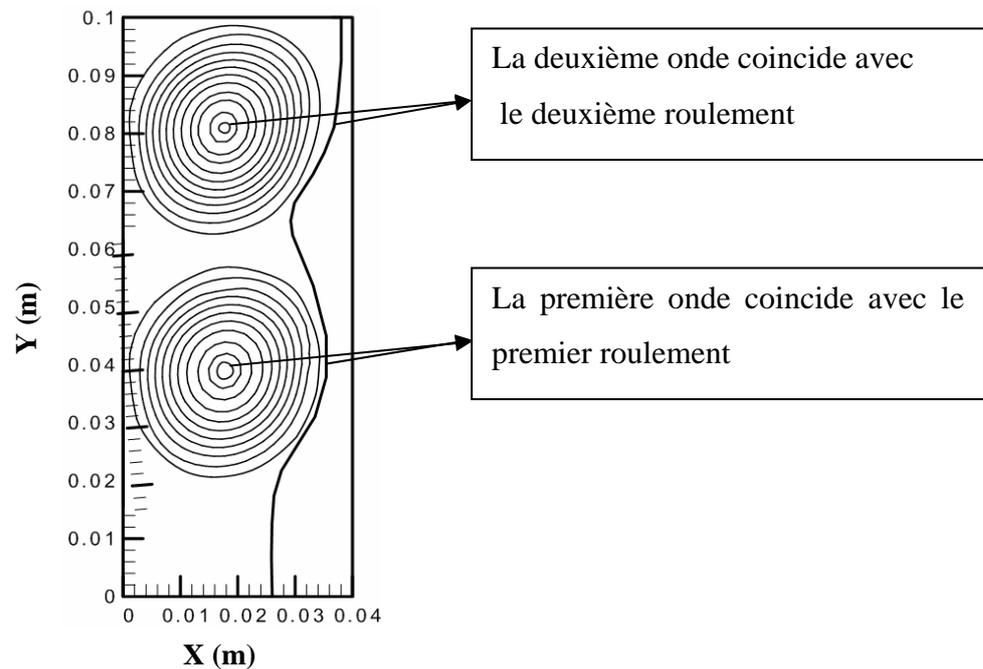
Nos résultats

Figure 4.6 : Interface liquide-solide par l'application du schéma quick.



Nos résultats

Figure 4.7 : Interface liquide-solide pour une grille de 400x400

Figure 4.8 : Représentation de l'harmonie observée entre la forme de l'interface solide-liquide et le nombre de roulements à  $t= 1000s$

#### 4.6. Lignes de courant et modèles de roulements

Les lignes de courant sont prises avec les temps (200, 450, 550 et 1000s); elles sont représentées sur les figures (4.9-24) pour quatre schémas de discrétisations (amont, hybride, centré et quick) et trois grilles de tailles (100x100, 200x200 et 400x400).

Chaque temps de calcul est présenté par vingt-et-une images. La droite de l'interface solide-liquide de chaque image représente la partie solide tronquée pour permettre aux images d'apparaître dans une seule page.

Les schémas de discrétisation sont positionnés suivant les résultats numériques obtenus de tel sorte que le moins précis des vingt-et-une images à un temps donné, est la gauche supérieure, tandis que le plus précis est la droite du fond.

Les résultats relevés sur les figures (4.9-24) sont récapitulés ainsi :

**a-** La plus grande différence entre le nombre de roulements à un temps donné et observée entre la gauche supérieure du schéma amont (100x100) et la droite inférieure du schéma quick (400x400) :

**Au temps 200s :** la solution la plus précise montre quatre roulements (schéma quick, figure (4.12)) et la moins précise donne un seul roulement (schéma amont, figure (4.9)) avec une différence de trois roulements.

**Au temps 450s :** une différence de deux roulements est constatée entre la figure (4.13) et la figure (4.16).

**Au temps 550s :** une différence de deux roulements est constatée entre la figure (4.17) et la figure (4.20).

**Au temps 1000s :** La différence est un seul roulement entre la figure (4.21) et la figure (4.24).

De cette comparaison, on constate que la différence en nombre des roulements entre les quatre schémas de discrétisations diminue avec l'évolution du phénomène de la fusion.

**b-** Pour les différents temps de calcul et pour une grille bien précise, le nombre de roulements augmente au fur et à mesure que l'ordre de discrétisation des schémas utilisés est supérieur. Si en prend comme un exemple d'illustration la grille de taille (100x100):

**Au temps 200s :** le nombre de roulements est égal à un, pour le schéma amont (figure (4.9)), deux pour l'hybride (figure (4.10)) et trois pour les deux schémas, centré et quick (figures (4.11-12)).

**Au temps 450s :** un seul roulement pour les deux schémas amont et hybride (figures (4.13-14)) et trois roulements pour les schémas centré et quick (figures (4.15-16)).

**c-** L'écart entre le nombre de roulements pour plusieurs schémas de discrétisation diminue avec l'augmentation de la taille des grilles :

**Au temps 450s :** entre la figure (4.13) et la figure (4.16)

- Ecart de deux roulements pour la grille (100x100)
- Ecart d'un roulement pour les grilles (200x200) et (400x400).

**d-** Le nombre de roulements augmente pour un schéma de discrétisation donné, tant que la grille est plus raffinée, ce qui est illustré par les trois grilles (100x100, 200x200 et 400x400), dans les exemples suivants :

**Au temps 200s :**

- Passage de un à trois roulements pour le schéma amont (figure (4.9)).
- Passage de deux à quatre roulements pour le schéma hybride (figure (4.10)).
- Passage de trois à quatre roulements pour les deux schémas centré et quick (figures (4.11-12)).

**e-** Les roulements sont bien arrondis pour des schémas d'ordres supérieurs et plats pour des schémas d'ordre inférieurs:

**Au temps 550s :** les schémas amont et hybride (figures (4.17-18)) sont moins arrondis que les schémas centré et quick (figures (4.19-20)).

**f- Au temps 1000s :** le nombre de roulement régnant est deux pour la plus part des schémas de discrétisation.

**g-** Le nombre de roulements obtenus avec le schéma quick n'a pas un changement significatif quand la grille est plus raffinée:

**Au temps 450s :** le nombre de roulements est trois pour les trois grilles (figure (4.16)).

**Au temps 550s :** deux roulements constatés sur la figure (4.20).

**Au temps 1000s :** deux roulements constatés sur la figure (4.24).





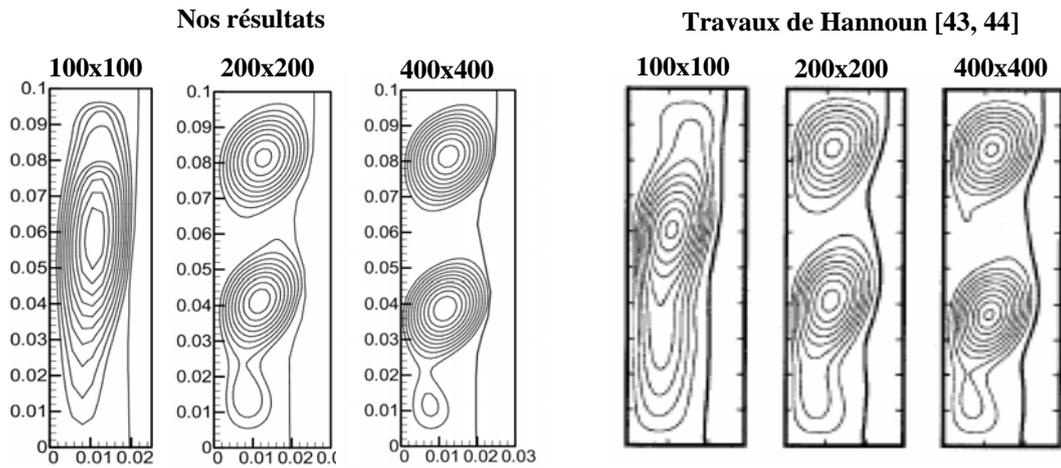


Figure 4.17 : Les lignes de courant par l'application du schéma amont au temps  $t = 550$  s

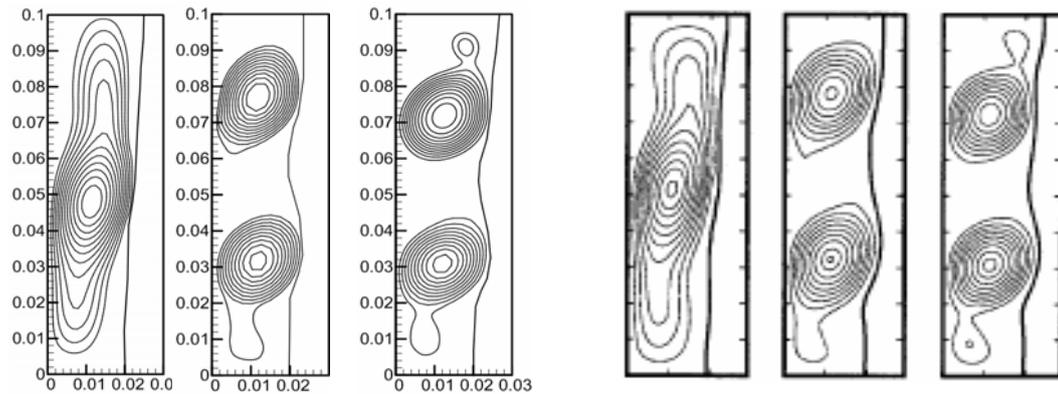


Figure 4.18 : Les lignes de courant par l'application du schéma hybride au temps  $t = 550$  s

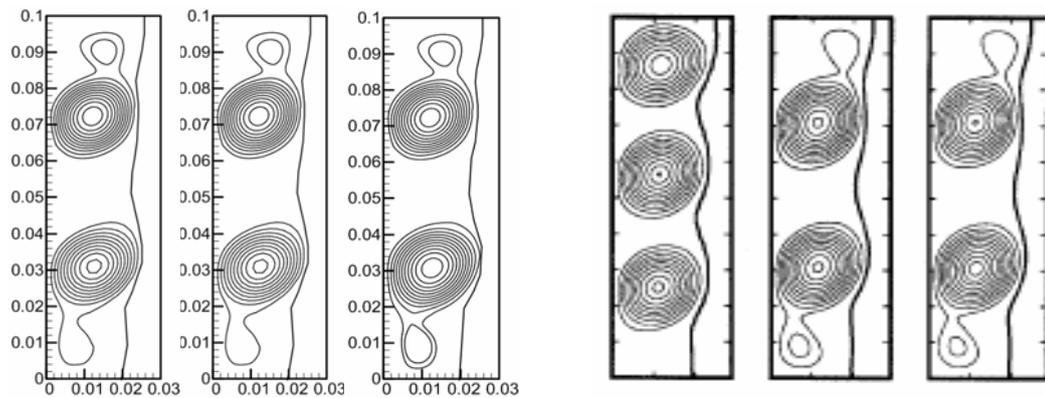


Figure 4.19 : Les lignes de courant par l'application du schéma centré au temps  $t = 550$  s

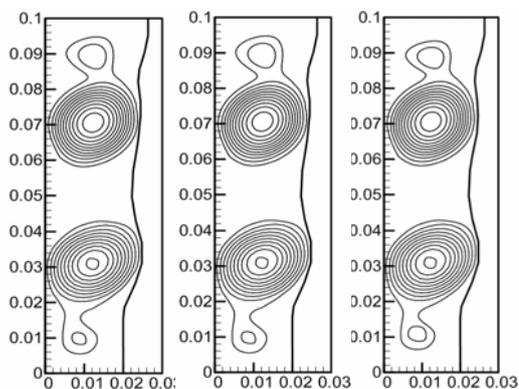
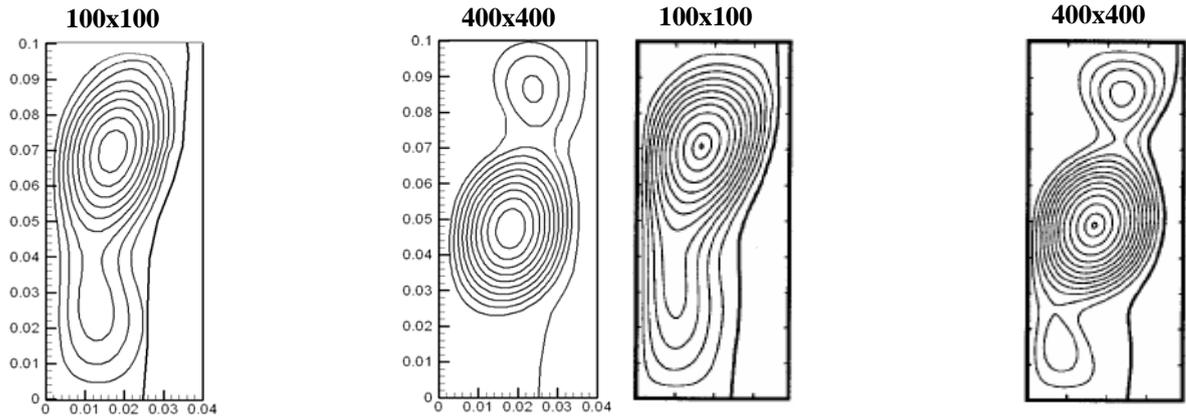
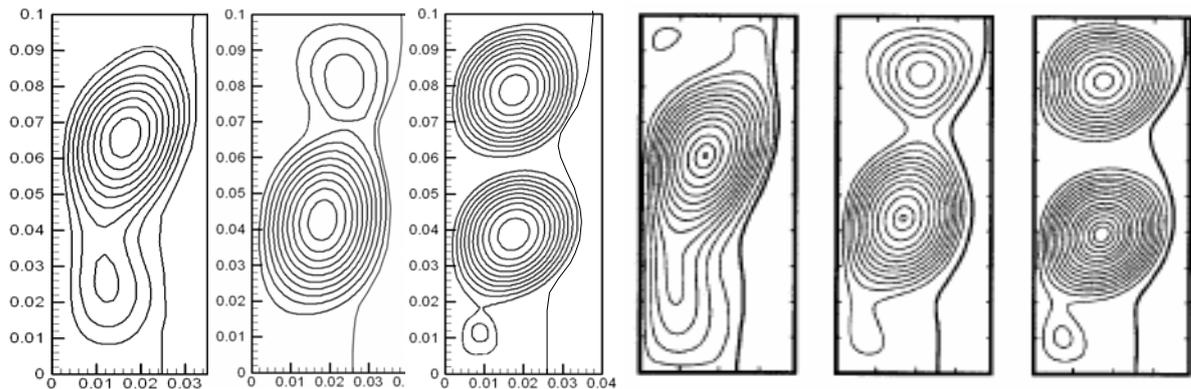
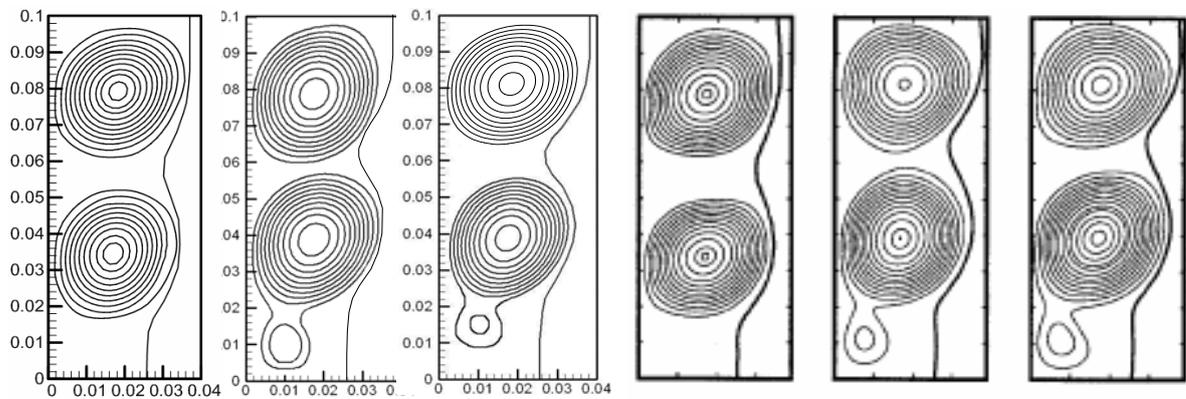
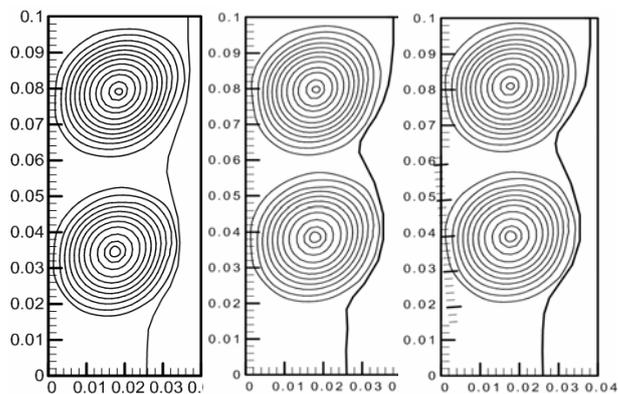


Figure 4.20 : Les lignes de courant par l'application du schéma quick au temps  $t = 550$  s

Nos résultats

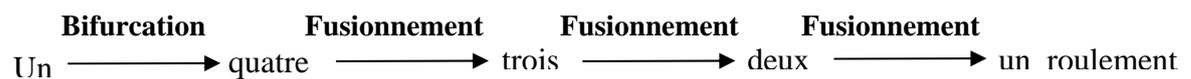
Travaux de Hannoun [43, 44]

Figure 4.21 : Les lignes de courant par l'application du schéma amont au temps  $t = 1000$  sFigure 4.22 : Les lignes de courant par l'application du schéma hybride au temps  $t = 1000$  sFigure 4.23 : Les lignes de courant par l'application du schéma centré au temps  $t = 1000$  sFigure 4.24 : Les lignes de courant par l'application du schéma quick au temps  $t = 1000$  s

Des graphes récapitulatifs de la structure des roulements obtenus pour les quatre schémas de discrétisation et les trois types de grilles, sont montrés sur les figures (4.25-28). Pour chaque figure, le changement d'étape correspond à une bifurcation ou à un fusionnement. Le nombre de roulements régnant pour un temps donné est représenté sur l'axe des ordonnées.

Les résultats issus des figures ((4.25-28)) sont résumés ainsi :

1- Des schémas moins précis donnent un faible nombre de roulements : la grille 100x100 avec le schéma amont (figure (4.25)) donne un seul roulement au cours d'un intervalle du temps passant de 0 à 1200s. Par contre, dans le schéma hybride (figure (4.26)), une bifurcation se produit pour passer à deux roulements. Et pour les deux autres schémas centré et quick (figures (4.27-28)), nous avons marqué le passage suivant :



2- Le nombre de roulements est plus grand pour des grilles plus fines : dans le cas du schéma amont (figure (4.25)), la grille 100x100 donne un seul roulement pour tout le temps de calcul. Par contre, la grille 400x400 donne : un, quatre, trois, deux et un roulement, successivement.

3- Le nombre de roulements est approximativement le même pour les quatre schémas employés lorsque une grille fine de taille 400x400 est utilisée.

La comparaison entre les temps de fusionnement et de bifurcation établis par l'utilisation d'un schéma centré [43, 44] et nos résultats par un schéma quick est présentée sur le tableau (4.3) :

Tableau 4.3 : Présentation des temps de fusionnement et de bifurcation

Nombre de roulements	Temps (s)	
	Travaux de Hannoun et al. (schéma centré)	Nos résultats (schéma quick)
4	120	117
3	220	215
2	460	455
1	1050	1045

La première constatation selon le tableau (4.3), est que les deux résultats sont très proches l'un de l'autre. Cependant, nos résultats sont caractérisés par un temps relativement inférieur à celui réalisé par Hannoun [43, 44]. Cela confirme que notre programme de calcul arrive à restituer mieux l'effet de la convection naturelle par l'utilisation d'un schéma de discrétisation plus précis et par conséquent, on peut conclure que la solution numérique est convergée.

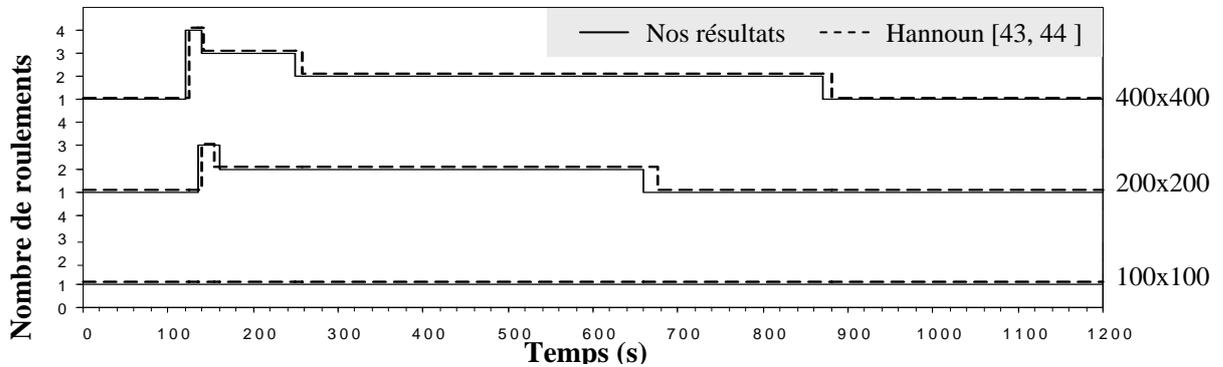


Figure 4.25 : Evolution du nombre de roulements par l'application du schéma amont.

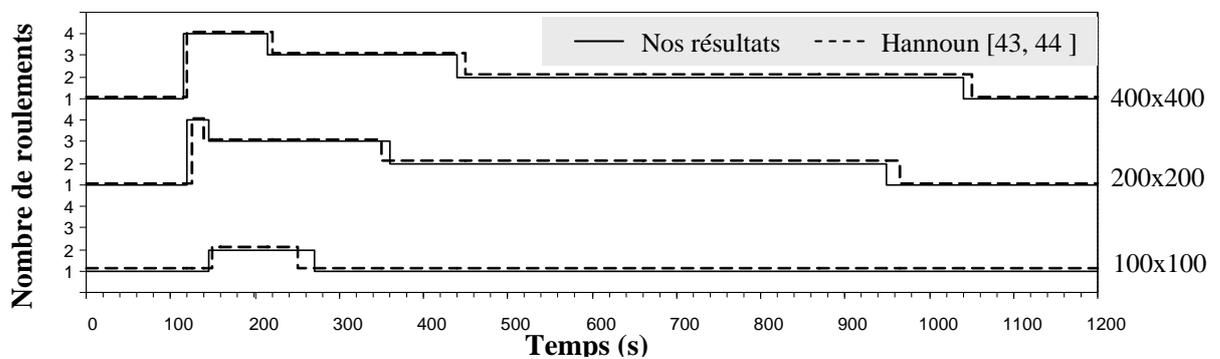


Figure 4.26 : Evolution du nombre de roulements par l'application du schéma hybride.

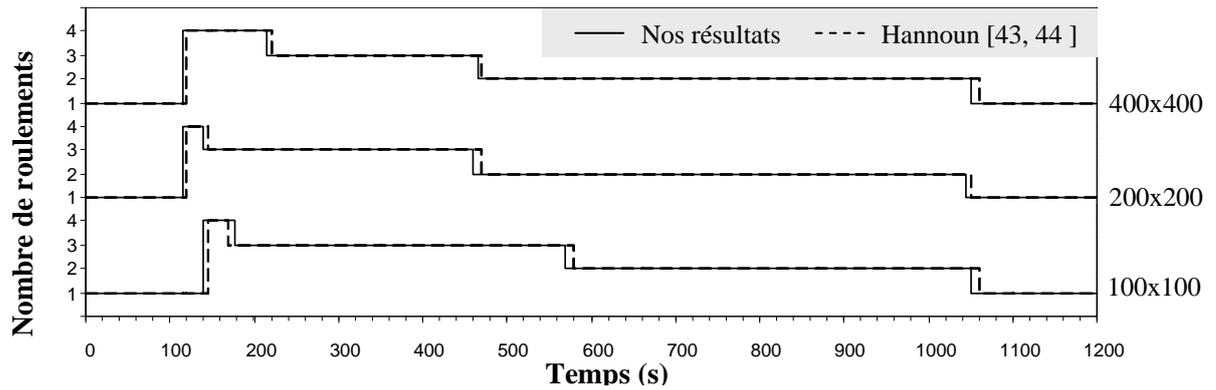


Figure 4.27 : Evolution du nombre de roulements par l'application du schéma centré

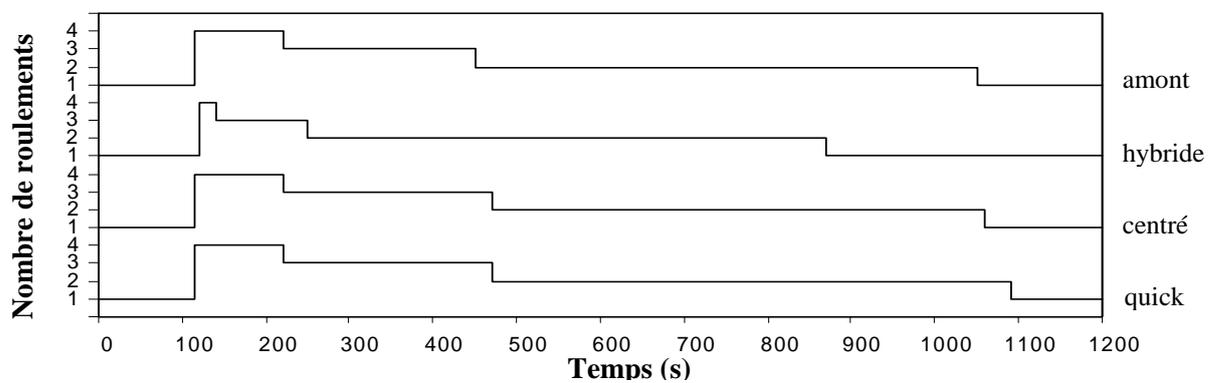


Figure 4.28 : Evolution du nombre de roulements pour une grille de taille 400x400

#### 4.7. Nombre moyen de Nusselt

Le nombre moyen du Nusselt ( $Nu$ ) calculé à la paroi chaude, est généralement utilisé pour illustrer la façon dont la convection naturelle affecte la conduction à travers un matériau à changement de phase. Les figures (4.29) et (4.31) représentent successivement l'évolution de ce nombre appliqué à deux schémas de discrétisation amont et hybride, comparés avec les résultats de la littérature [43, 44] pour une grille uniforme décalée de 200x200.

Cette comparaison montre un accord fort entre nos résultats et ceux de Hannoun avec une erreur de 3.5% pour le schéma amont (figure (4.29)) et une erreur de 3% pour le schéma hybride (figure (4.31)), erreurs calculées pour un intervalle de temps compris entre 0 et 1000s. L'effet du maillage sur ce nombre est illustré sur les figures (4.30) et (4.32) pour trois types de grilles (400x400, 200x200 et 100x100) où on constate un écart croissant du nombre de Nusselt entre les deux grilles (400x400 et 100x100) à partir du premier

fusionnement autour de 215s, avec des valeurs supérieures en faveur de la grille la plus fine.

D'autres phénomènes sont observés et concernent l'apparition des oscillations sur la présentation du nombre de Nusselt (figure (4.33)). Ces oscillations sont fortes avant et après le fusionnement des roulements et elles sont probablement d'origine numérique. Elles augmentent pour un ordre de discrétisation supérieur, ce qui est bien illustré pour les schémas centré et quick.

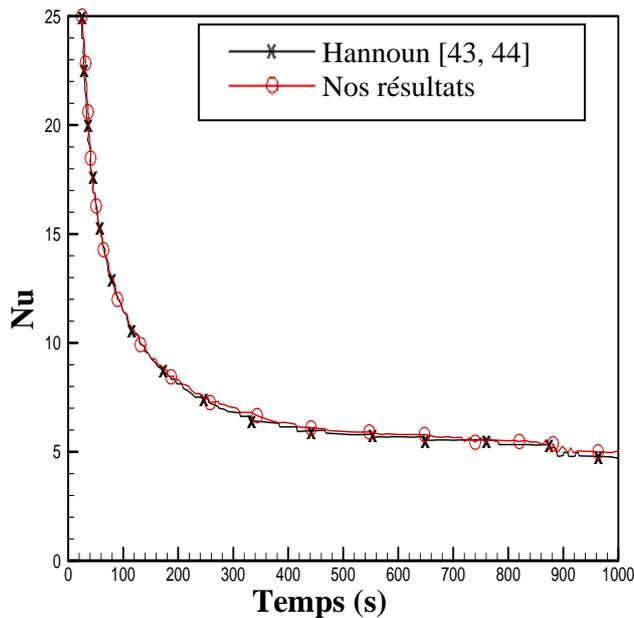


Figure 4.29 : Evolution du nombre de Nusselt pour une grille de 200x200 et un schéma amont

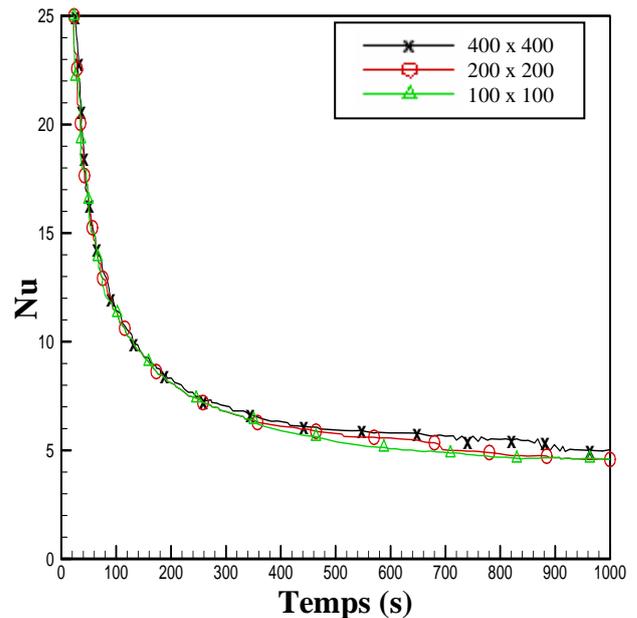


Figure 4.30 : Effet du maillage sur l'évolution du nombre de Nusselt pour le schéma amont

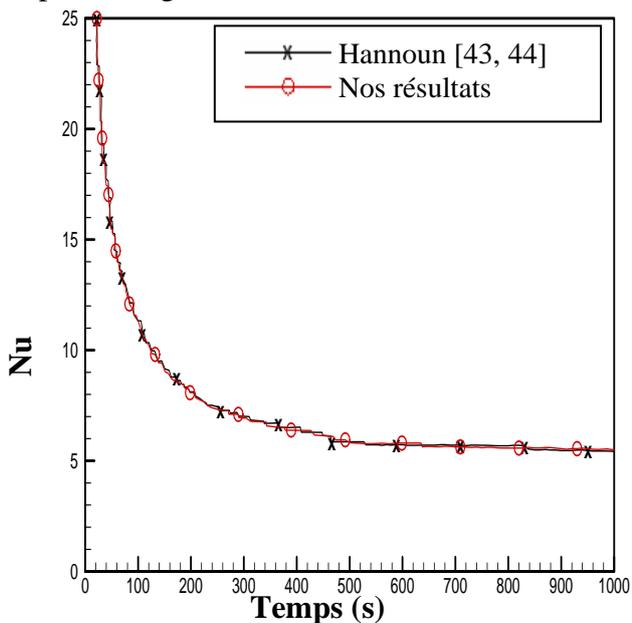


Figure 4.31 : Evolution du nombre de Nusselt pour une grille de 200x200 et un schéma hybride

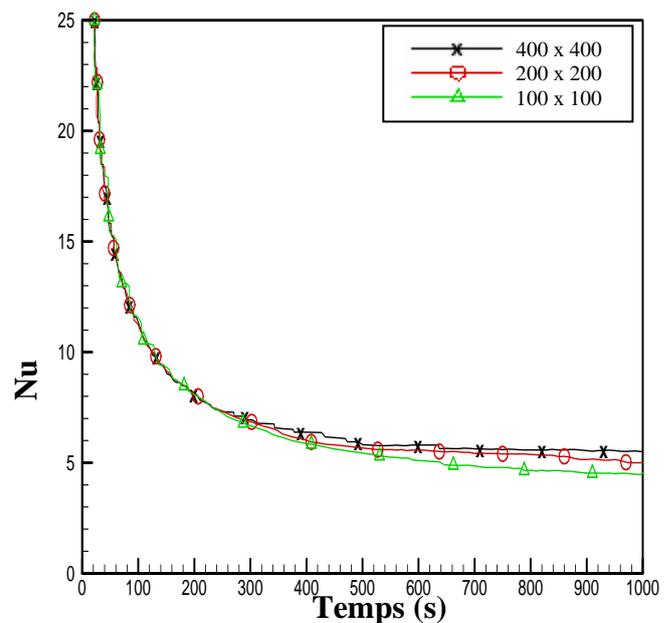


Figure 4.32 : Effet du maillage sur l'évolution du nombre de Nusselt pour le schéma hybride

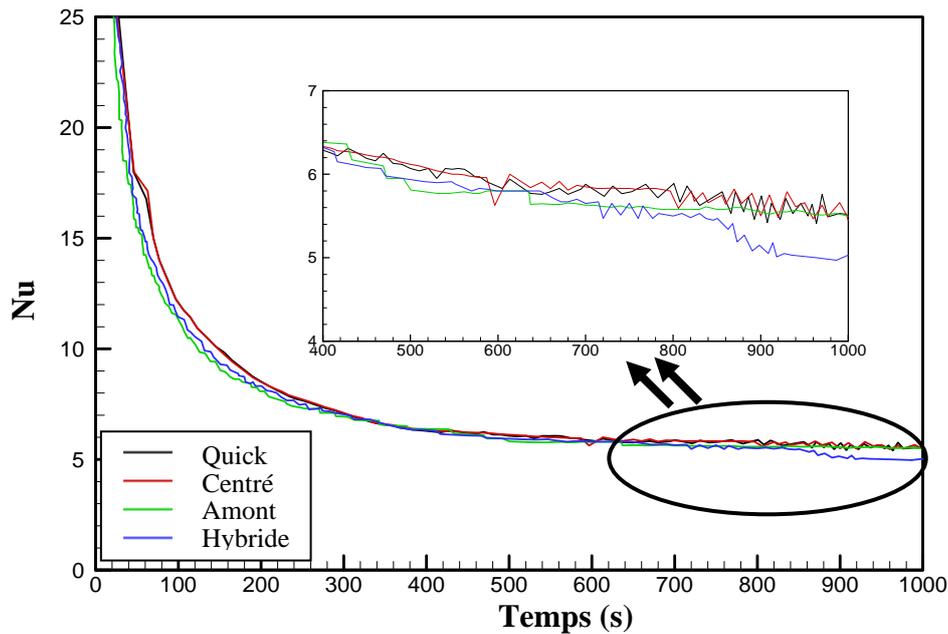


Figure 4.33 : Evolution du nombre de Nusselt pour une grille de 400x400

#### 4.8. Volume de la fonte

L'un des paramètres de surveillance du phénomène de fusion est la fraction liquide de la fonte (rapport du volume liquide au volume global du matériau). L'évolution de ce paramètre est montrée sur les figures (4.34-35) par l'utilisation de deux schémas de discrétisation amont et hybride, respectivement. Nos résultats et ceux cités dans la littérature [43, 44] pour une grille de taille 200x200, sont relativement identiques. En plus, la fraction liquide croît avec l'amélioration de la taille des grilles utilisées (figures (4.36-37)).

Malgré l'emploi des pas de temps identiques avec ceux utilisés dans le calcul du nombre de Nusselt, les courbes représentatives de la fraction liquide sont plus lisses que celle du nombre de Nusselt, cela nous mène à conclure que l'échelle du temps de la fusion est plus grande que celle de la convection naturelle.

La figure (4.38) représente une comparaison parmi les quatre schémas de discrétisation pour un maillage de 400x400. Nous constatons que le schéma quick donne le plus grand volume du liquide fondu. Si nous considérons le volume calculé à partir de ce schéma comme un volume de référence, nous trouverons une erreur de 3% pour un schéma

centré, une erreur de 4.2% pour le schéma hybride et une erreur de 4.8% pour le schéma amont. Ceci nous conduit à conclure que le volume du liquide fondu pour un temps donné, augmente avec l'accroissement de l'ordre de discrétisation des schémas utilisés et l'effet de la convection naturelle est plus fort pour des solutions numériques plus précises.

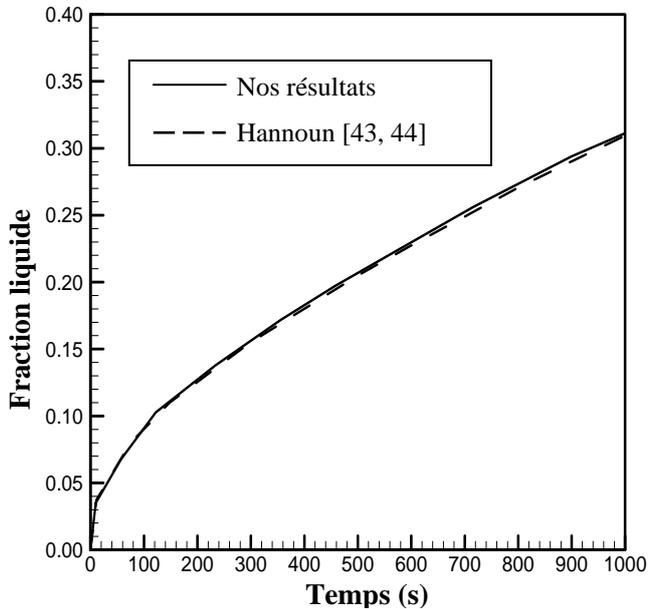


Figure 4.34 : Evolution de la fraction liquide pour une grille 200x200 et un schéma amont

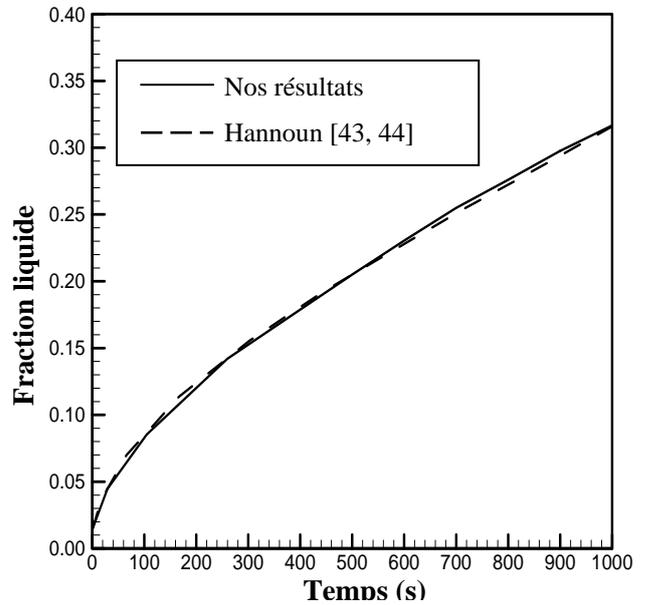


Figure 4.35 : Evolution de la fraction liquide pour une grille 200x200 et un schéma hybride

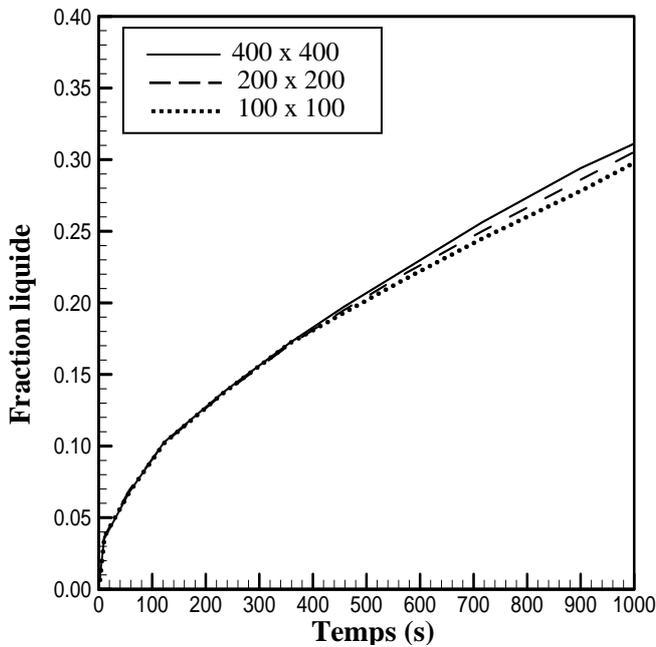


Figure 4.36 : Effet du maillage sur la fraction liquide pour un schéma amont

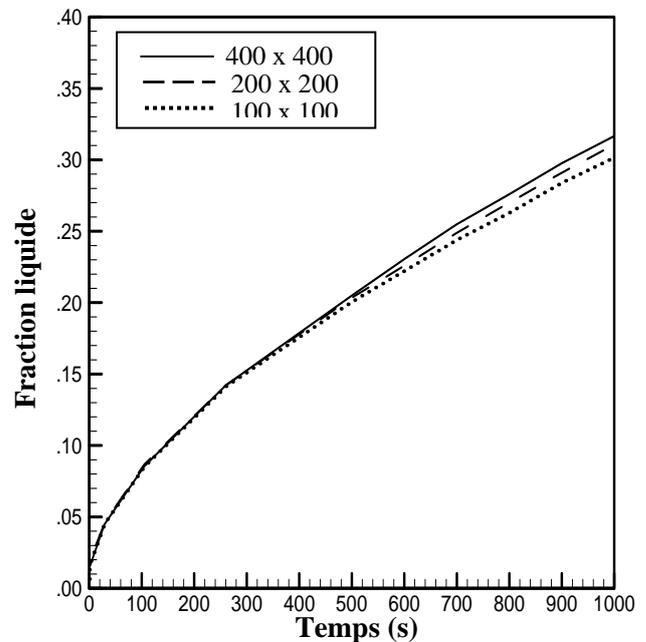


Figure 4.37 : Effet du maillage sur la fraction liquide pour un schéma hybride

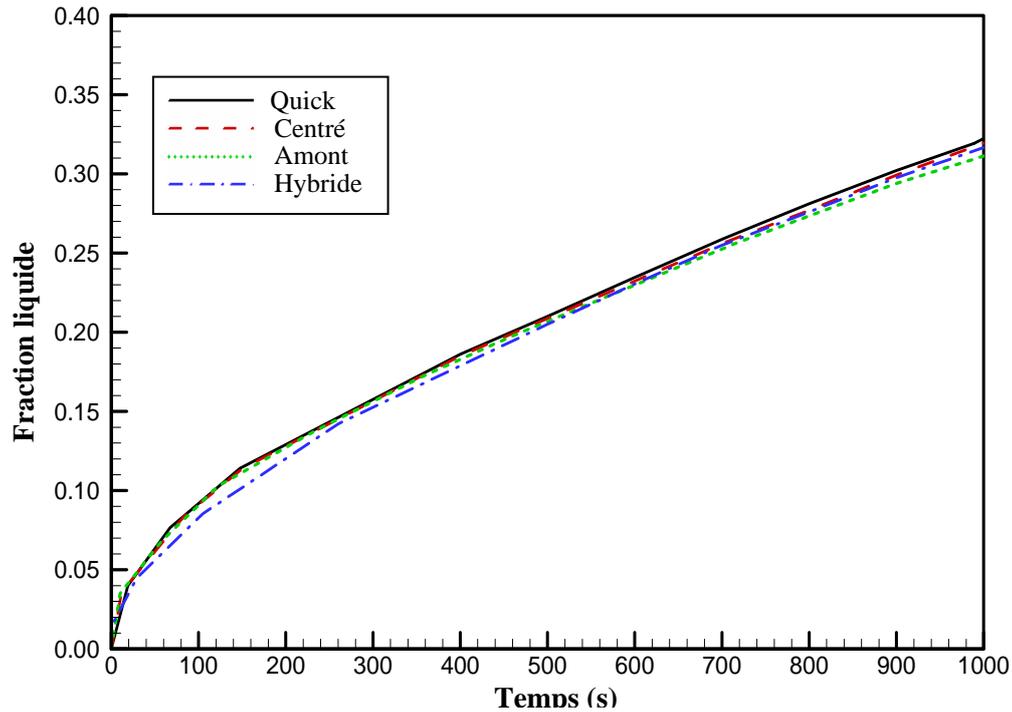


Figure 4.38 : Evolution de la fraction liquide pour une grille de 400x400

#### 4.9. Conclusion

Parmi les chercheurs ayant traité le problème de référence proposé par Lequere et al. [38], neuf ont trouvé un seul roulement au temps 1000s (là où des grosses grilles de 15x15 à 80x80 et des schémas d'ordre inférieur ont été employés). Par contre, une grille moyenne de taille 100x100 utilisée dans nos travaux avec un schéma quick, donne des résultats meilleurs que ceux obtenus par les grilles employées par Lequere [38]. Ceci élimine tout doute sur la validité de la solution numérique et de la nature multicellulaire de l'écoulement.

En règle générale, nous pouvons conclure que des solutions avec des schémas plus précis donnent un plus grand nombre de roulements.

Cette observation a une incidence très importante : toute erreur initiale dans la détermination des positions des roulements, due à une perturbation ou à l'insuffisance de la résolution numérique, influera plus tard le comportement du fluide entier et par conséquent, il est très important de restituer la structure initiale des roulements avec assez de précision. En outre, le raffinement du maillage est nécessaire afin d'obtenir une solution grille convergée.

## CHAPITRE 5

### RESULTATS ET DISCUSSION

#### 5.1. Présentation du problème physique

Cette partie traite de la fusion du gallium, initialement exposé à une température inférieure à sa température de fusion ( $T_f = 302.78^\circ\text{C}$ ) où la frontière gauche du matériau est maintenue au cours de tout le processus de la fusion à une température supérieure à sa température de fusion (figure (5.1)); ce qui provoque l'apparition d'une couche mince du liquide près de la paroi gauche. A mesure que la fusion progresse, l'effet de la convection naturelle croit et la largeur de la seule cellule créée continue à accroître (figure (5.2-a)). Au temps  $t = 30\text{s}$  (figure (5.2-b)), une bifurcation se produit brusquement et la structure d'écoulement change en un modèle quasi cinq roulements. Par la suite, le passage au modèle quatre roulements (figure (5.2-c)).

L'interface liquide-solide est représentée par une forme onduleuse où les sommets reflètent exactement le nombre de roulements observés. A un certain point au cours de la fusion, les roulements deviennent trop grands pour partager l'enceinte et les deux plus hauts se fusionnent habituellement en diminuant de ce fait, le nombre de roulements de un. Ce qui provoquerait l'apparition de trois principaux fusionnements au cours de tout le processus de la fusion et dont le premier se passe au temps  $t = 135\text{ s}$  pour donner une configuration de trois roulements (figure (5.2-d)). Le deuxième près du temps  $t = 275\text{ s}$  (figure (5.2-e)) et le dernier est observé au temps  $t = 710\text{ s}$  (figure (5.2-f)) pour donner un seul roulement.

Les simulations sont effectuées avec les paramètres physiques et les valeurs numériques présentées dans les tableaux (5.1) et (5.2).

L'intervalle de la zone de transition liquide-solide (tableau (5.2)) est choisi comme suit :  $T_l = T_f + \varepsilon/2$  et  $T_s = T_f - \varepsilon/2$ .

Les itérations externes sont arrêtées quand les résiduels des équations de conservation sont moins qu'un  $\varepsilon_0$  (tableau (5.2)).

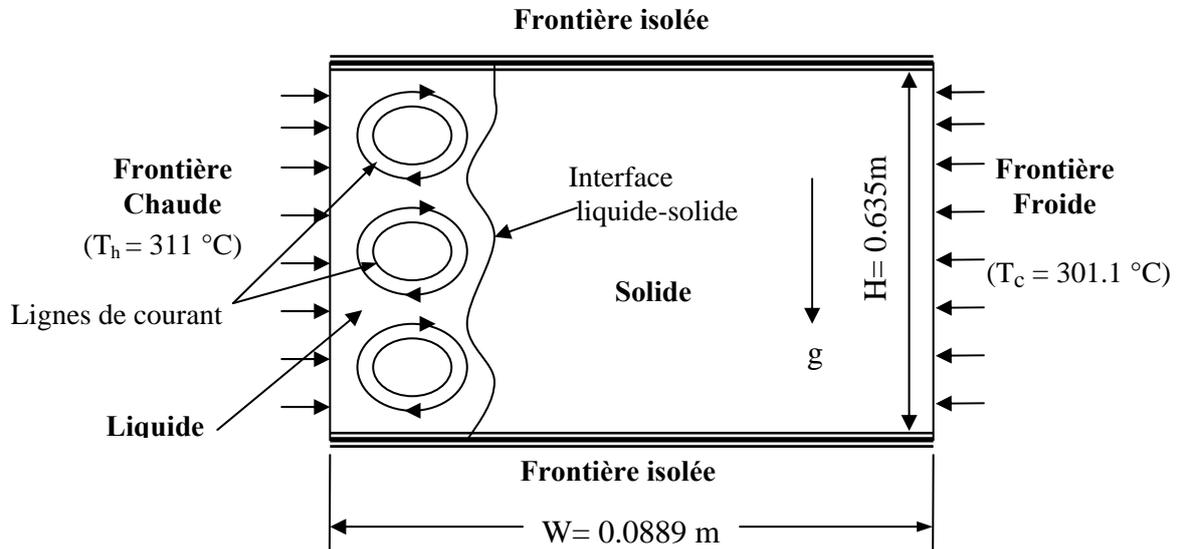


Figure 5.1 : Représentation schématique du problème étudié

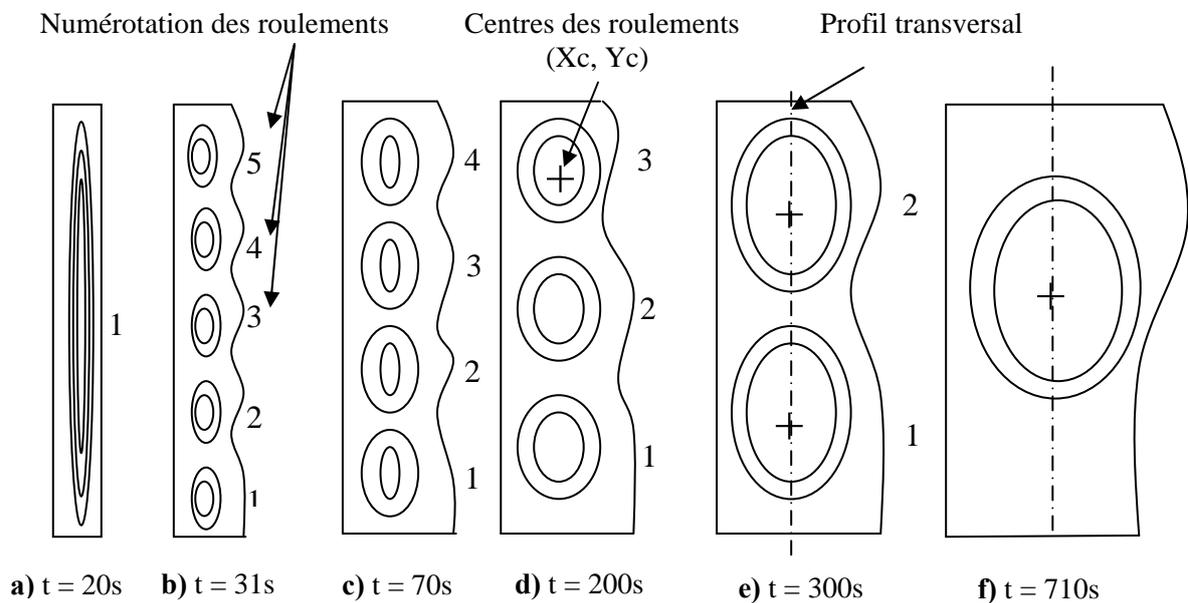


Figure 5.2 : Différents modèles de roulements au cours de la fusion

Tableau 5.1 : Présentation des paramètres physiques du problème traité

Paramètre physique	Symbole	Valeur	Unité
Accélération de la pesanteur	G	10	m / s <sup>2</sup>
Chaleur latente de fusion	L	8.016 x 10 <sup>4</sup>	J / Kg
Chaleur spécifique	c	381.5	J / Kg K
Coefficient de dilatation volumique	$\beta$	1.20 x 10 <sup>-4</sup>	K <sup>-1</sup>
Conductivité thermique	K	32	W / mK
Densité de référence	$\rho_{\text{réf}}$	6.093 x 10 <sup>3</sup>	Kg / m <sup>3</sup>
Facteur de forme (H / W)	Ar	0.714	/
Hauteur de la cavité	H	0.0635	m
Largeur de la cavité	W	0.0889	m
Nombre de Prandtl	Pr	0.0216	/
Nombre de Rayleigh	Ra	7 x 10 <sup>5</sup>	/
Nombre de Stefan	Ste	0.046	/
Température de fusion	$T_f$	302.78	K
Température du mur chaud	$T_h$	311	K
Température du mur froid	$T_c$	301.3	K
Viscosité dynamique	$\mu$	1.81 x 10 <sup>-3</sup>	N.s / m <sup>2</sup>

Tableau 5.2 : Présentation des paramètres numériques utilisés

Paramètre numérique	Symbole	Valeur	Unité
Constante	C	10 <sup>15</sup>	/
Constante	q	10 <sup>-6</sup>	/
Critère de convergence de l'équation d'énergie	$\varepsilon_0$	10 <sup>-7</sup>	/
Critère de convergence de l'équation de la quantité de mouvement	$\varepsilon_0$	10 <sup>-7</sup>	/
Intervalle de la zone de transition liquide-solide	$\varepsilon$	0.025	K
Pas du temps	$\Delta t$	0.01 < $\Delta t$ < 1	s
Coefficient de sous relaxation de l'équation d'énergie	$w_h$	0.1	/
Coefficient de sous relaxation de l'équation de pression	$w_p$	0.9	/
Coefficient de sous relaxation de l'équation du mouvement suivant (u)	$w_u$	0.8	/
Coefficient de sous relaxation de l'équation du mouvement suivant (v)	$w_v$	0.8	/
Coefficient de sous relaxation de la fonction mise à jour de la fraction liquide	$w_{\Delta H}$	0.30	/

## 5.2. Présentation des résultats

Le choix des temps d'affichages des résultats est basé essentiellement sur la physique du problème traité. Dans notre étude, cinq temps de base ont été considérés :  $t=10s$  quand la couche du liquide montre un seul roulement,  $t=70s$  et  $t=100s$  pour le modèle de quatre roulements,  $t=200s$  pour le modèle de trois roulements et finalement,  $t=300s$  pour le modèle de deux roulements.

Pour chaque temps d'affichage, la structure régnante (la forme des roulements) est bien établie et la présentation des résultats est ainsi établie : une analyse de convergence montrant l'exactitude de notre solution numérique est présentée dans la première partie. La deuxième partie suggère des résultats et des courbes comme une solution de référence. La troisième partie traite de l'effet du facteur de forme sur les différents paramètres physiques influant sur le phénomène étudié. Finalement, une étude est proposée sur l'influence des nombres de Rayleigh et de Stefan sur le problème physique étudié.

L'étude réalisée au quatrième chapitre montre bien que l'utilisation d'un schéma de discrétisation plus précis comme le schéma quick et une grille très fine va améliorer la capture de l'effet de la convection naturelle sur le phénomène du changement de phase et qui ira à son tour, minimiser toute erreur sur les positions initiales des roulements. Dans ce contexte, la figure (5.3) nous indique l'effet visuel de ce schéma en présence d'un schéma centré sur les lignes de courant.

Les résultats illustrés par la figure (5.3) sont en harmonie avec ceux trouvés au chapitre précédent et qu'un schéma d'ordre supérieur comme le schéma quick, arrive toujours à nous donner des résultats très satisfaisants pour ainsi pouvoir l'utiliser postérieurement.

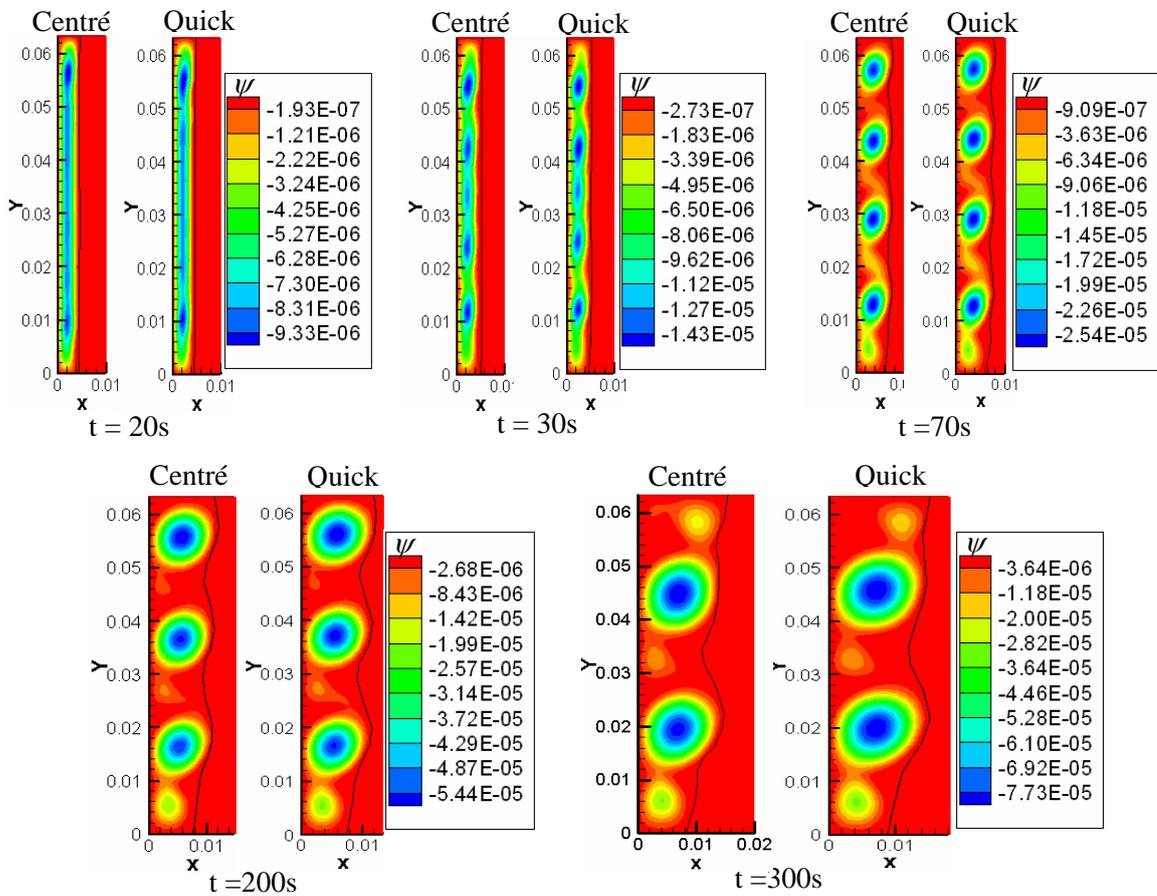


Figure 5.3 : Effet des schémas de discrétisation sur les lignes de courant

### 5.3. Choix des algorithmes de résolution

Le programme de calcul a été testé sur trois algorithmes de résolutions (SIMPLE, SIMPLER et PISO) pour un maillage uniforme décalé de taille  $560 \times 400$  au temps  $t = 150s$  (figure (5.4) et tableau (5.3)).

Le nombre total d'heures enregistré pour avoir une grille convergée diffère en fonction de l'algorithme utilisé et de la façon dont on discrétise le terme transitoire; on note un minimum du temps de calcul pour l'algorithme PISO avec le schéma d'Euler Implicite.

Tableau 5.3 : Effet des algorithmes de résolution sur le temps de calcul

Algorithmes	Pas du temps (secondes)	Schéma du terme transitoire	Temps de calcul pour t = 150s (Heures)
SIMPLE	$\Delta t = 0.2$ jusqu'à 0.05	Euler Implicite	104
		Euler Explicite	108
		Crank-Nicholson	111
PISO	$\Delta t = 0.2$ jusqu'à 0.05	Euler Implicite	84
		Euler Explicite	87
		Crank-Nicholson	89
SIMPLER	$\Delta t = 0.2$ jusqu'à 0.05	Euler Implicite	91
		Euler Explicite	94
		Crank-Nicholson	98

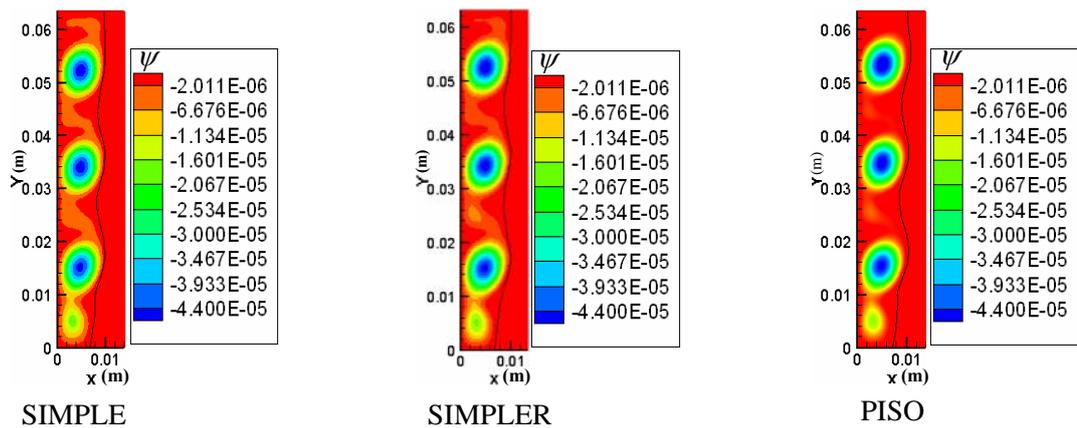


Figure 5.4 : Effet des algorithmes de résolutions sur les lignes de courant par l'utilisation d'un terme transitoire Euler Implicite et une grille de 560x400

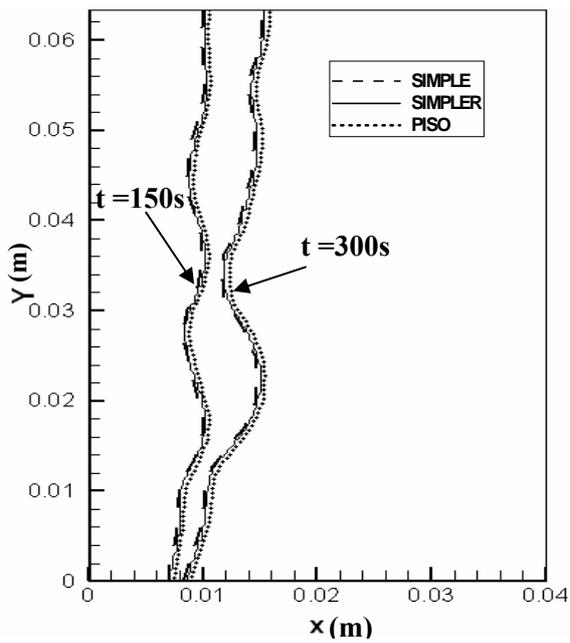


Figure 5.5 : Effet des algorithmes de résolutions sur l'interface liquide-solide pour une grille 560x400

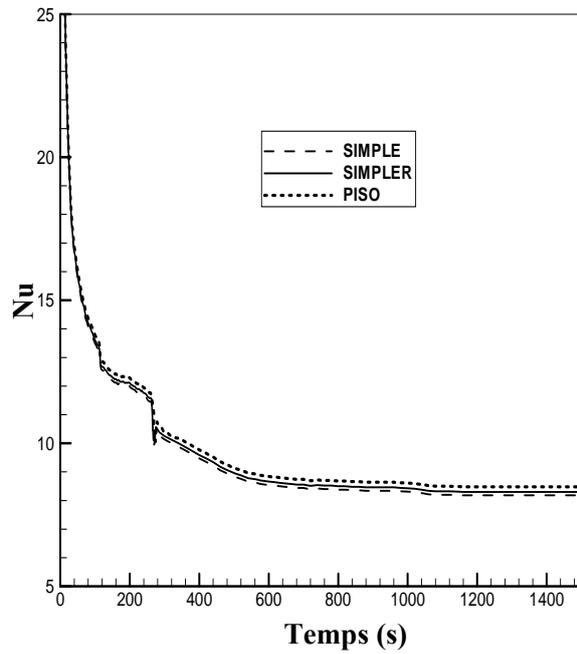


Figure 5.6 : Effet des algorithmes de résolutions sur le nombre de Nusselt pour une grille 560x400

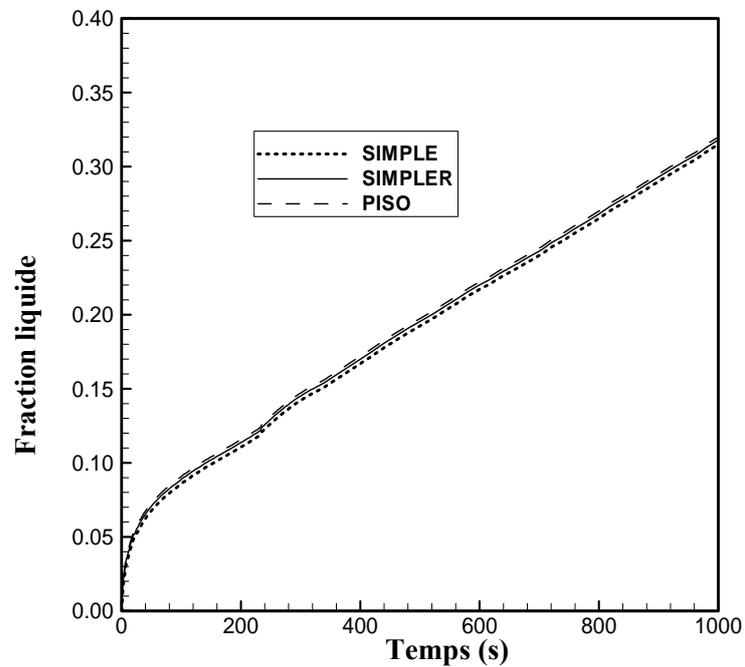


Figure 5.7 : Effet des algorithmes de résolutions sur la fraction liquide pour une grille 560x400

#### 5.4. Etude de la convergence de la grille

Le maillage traité dans cette partie est effectué sur une grille uniforme, avec des tailles s'étendant de 84x60 à 700x500 nœuds où notre solution considère la totalité du matériau, contrairement à d'autres études traitant seulement la région liquide.

L'effet visuel de ces grilles sur les lignes de courant est décrit sur la figure (5.8), par l'existence d'une couche mince du liquide près de la paroi chaude et l'absence de roulements pour les deux grilles (84x60 et 140x100), dus à la présence d'un faible nombre de nœuds dans le liquide et par conséquent, il est impossible de capturer tous les phénomènes physiques existants à cause de la dominance de la conduction dans cette zone.

Tous les résultats déduits de la figure (5.8) sont caractérisés pour le temps de calcul  $t = 50$  s, jugé suffisamment bon pour visualiser l'effet de la convection naturelle et montrer l'appariation des roulements.

A partir de la grille 210x150, nous distinguons quatre roulements, mais la différence entre eux se résume dans leurs formes et dans leurs positions (où les roulements sont bien arrondis pour les deux dernières grilles 630x450 et 700x500). Si on prend le centre du premier roulement de coordonnées ( $X_c$ ,  $Y_c$ ) en guise de comparaison et la grille de taille 700x500 comme une grille de référence pour le calcul de l'erreur, on aura les résultats suivants :

<b>Grille</b>	<b><math>X_c</math> (m)</b>	<b><math>\Delta X_c</math> (%)</b>	<b><math>Y_c</math> (m)</b>	<b><math>\Delta Y_c</math> (%)</b>
210x150	0.0025	16.66	0.112	8.19
280x200	0.0029	3.33	0.121	0.81
630x450	0.0030	0.00	0.122	0.00
700x500	0.0030	/	0.122	/

En fait, la position initiale de ces roulements est un facteur déterministe pour leurs positionnements aux temps postérieurs, puisqu' ils continuent à accroître dans leurs emplacements initiaux pendant quelques secondes.

En plus, l'évolution de la fraction liquide, les emplacements des ondes d'interfaces solide-liquide et le nombre de Nusselt sont employés pour surveiller le processus de la fusion (figures (5.9-11)) avec une convergence constatée de ces paramètres en faveur de la grille fine (630x450).

En outre, afin d'évaluer la convergence de la solution numérique trouvée, d'autres paramètres sont éclaircis dans les paragraphes suivants comme la variation de la température et de la fonction de courant aux centres des roulements et dans des profils transversaux leurs centres.

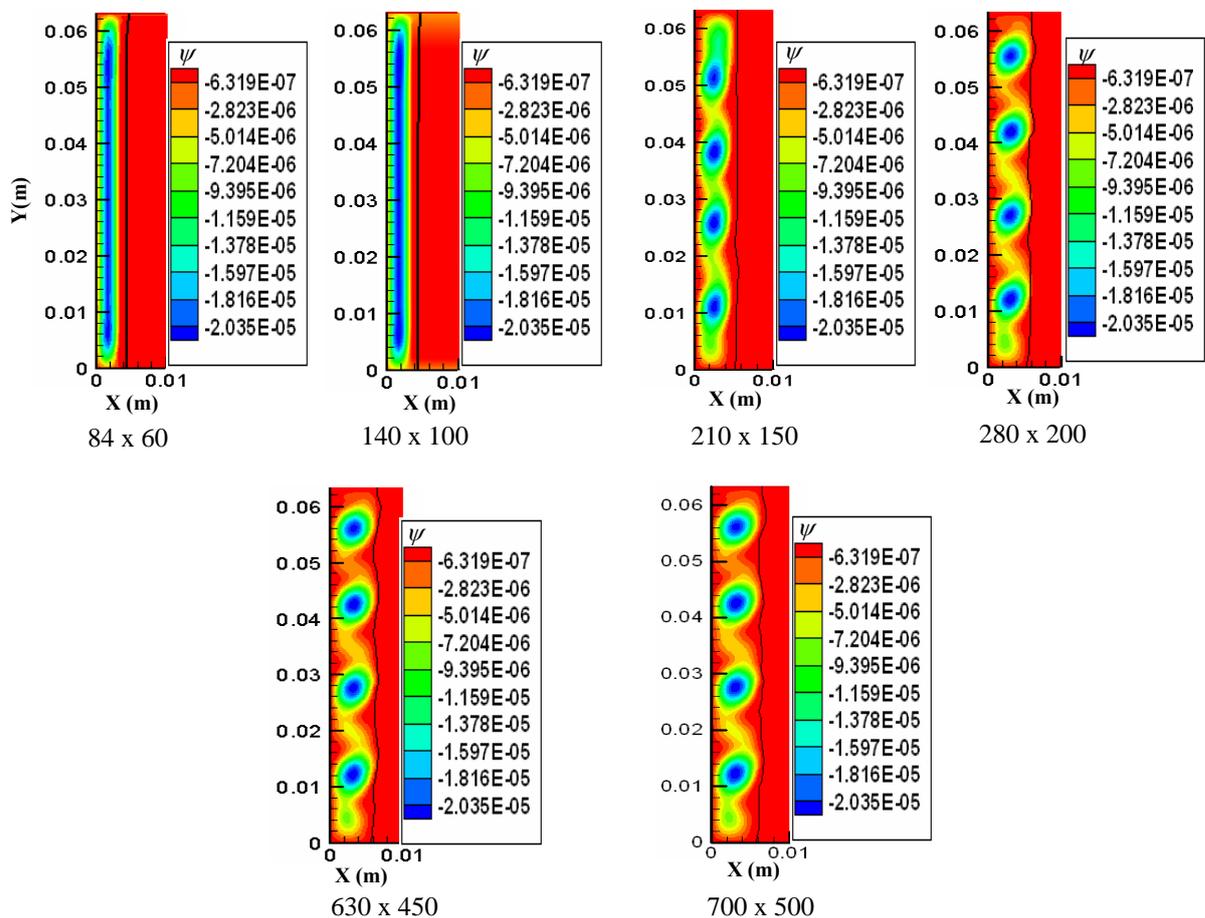


Figure 5.8 : Effet du maillage sur les lignes de courant au temps  $t = 50s$

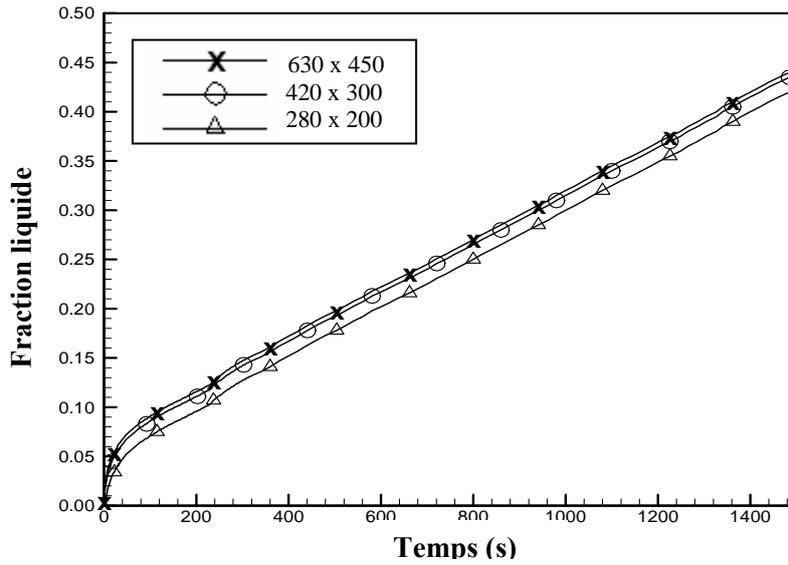


Figure 5.9 : Evolution de la fraction liquide au cours de la fusion

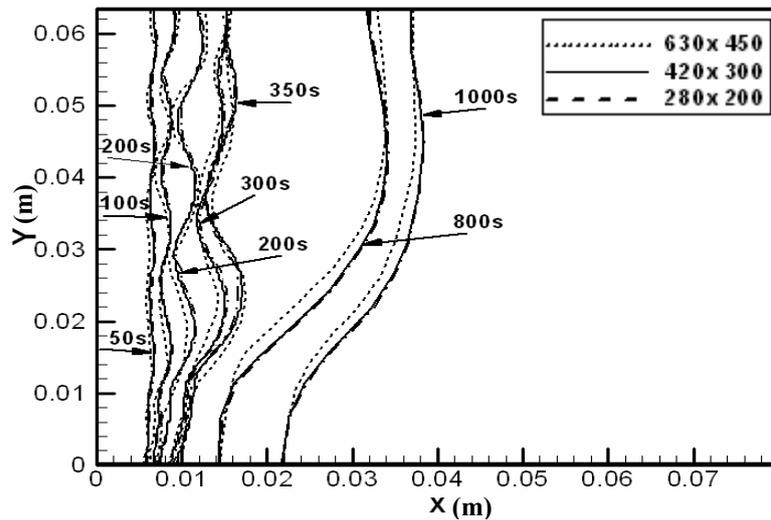


Figure 5.10 : Evolution de l'interface liquide-solide au cours de la fusion

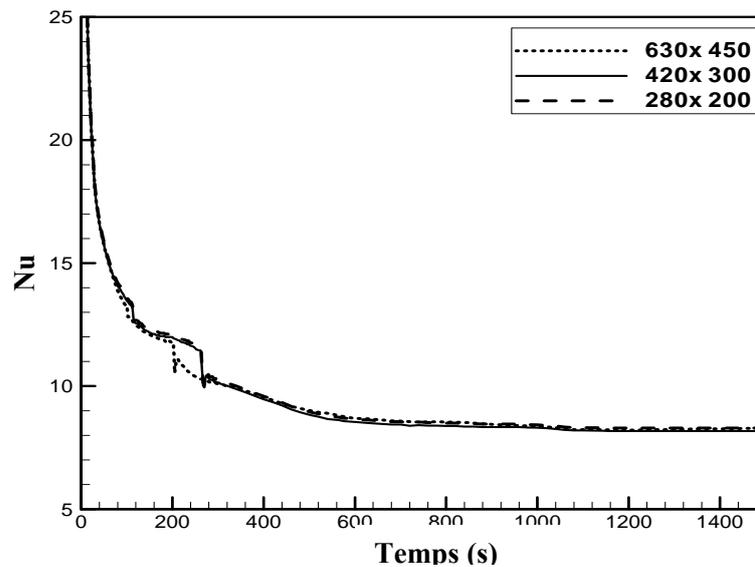


Figure 5.11 : Evolution du nombre de Nusselt au cours de la fusion

#### 5.4.1. Paramètres physiques calculés dans des profils transversaux un centre de roulement

Les fonctions de courant et le champ de températures calculées à des profils transversaux le centre de roulement le plus bas de la figure (5.2) sont de bons indicateurs du transfert thermique dans la fonte et elles sont montrées sur les figures (5.12-13) à cinq valeurs de temps (10, 70, 100, 200 et 300s). Il apparaît que la convergence visuelle est vérifiée pour la grille 630x450, avec un léger écart observé (décalage vertical) entre les deux grilles les plus fines (700x500 et 630x450).

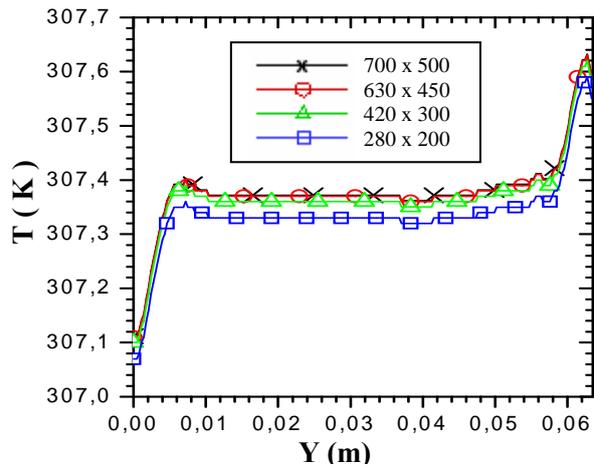
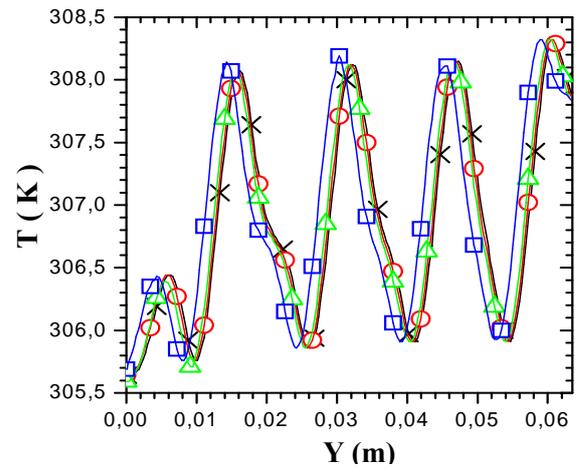
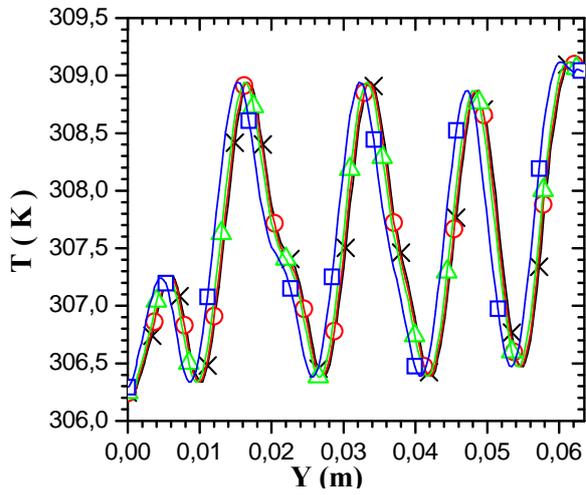
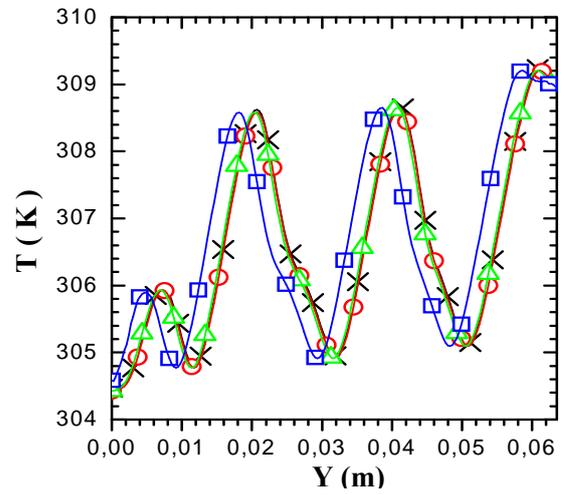
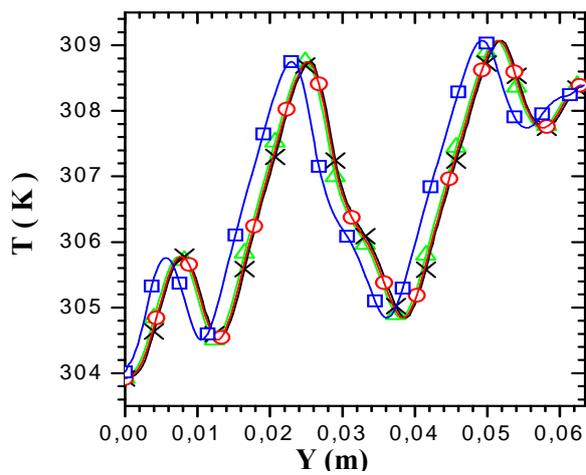
a)  $t=10$  sb)  $t=70$  sc)  $t=100$  sd)  $t=200$  se)  $t=300$  s

Figure 5.12 : Influence du maillage sur la valeur transversale de la température

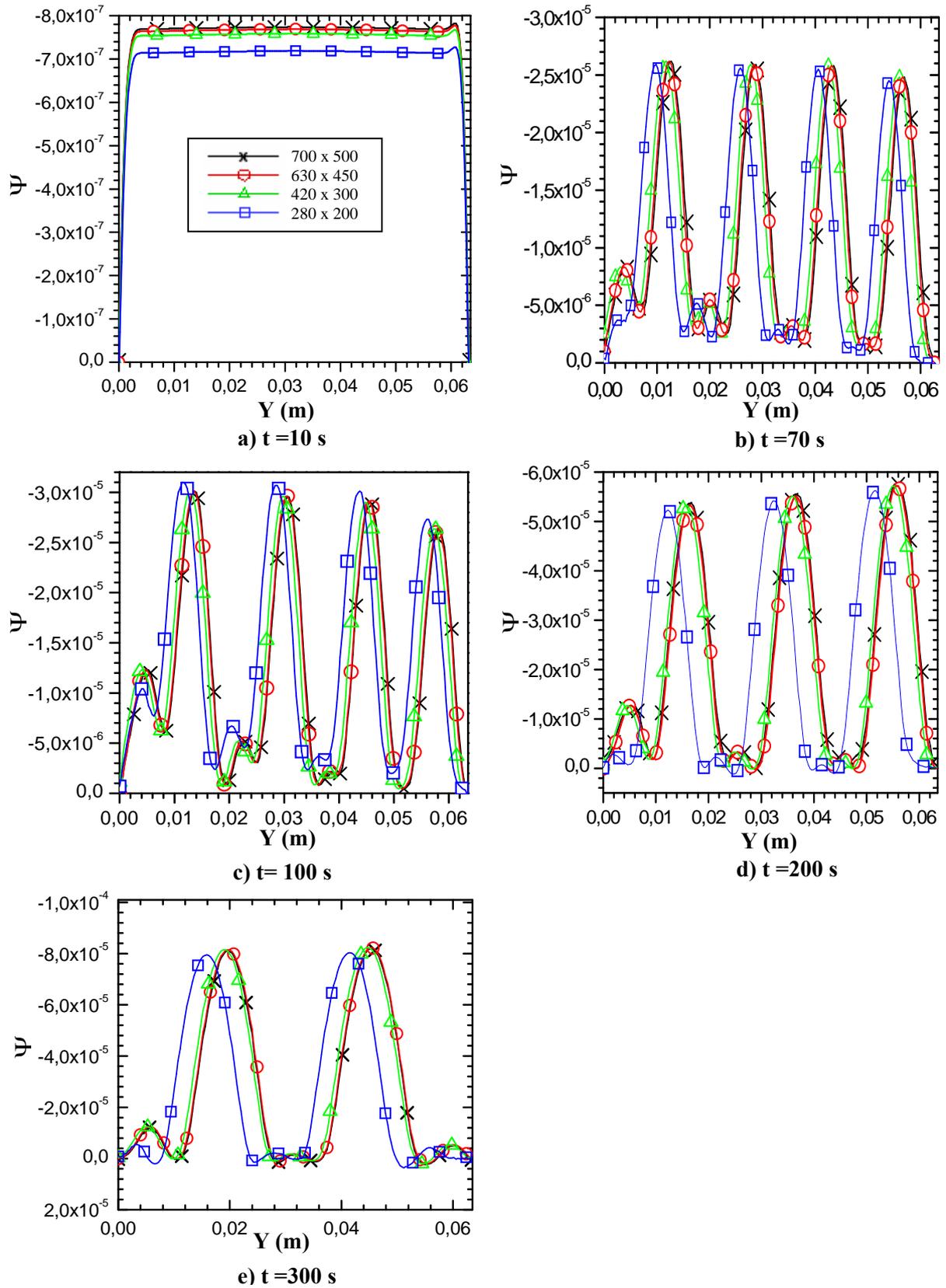


Figure 5.13 : Influence du maillage sur la valeur transversale de la fonction de courant

#### 5.4.2. Effet du maillage aux centres des roulements

En premier lieu, il est préférable de prendre en considération l'influence du maillage sur les emplacements des centres des roulements avant d'étudier leur effet sur les paramètres physiques. Dans ce contexte, le graphe (5.14) présente la variation de la position ( $y_c$ ) de trois roulements régnants dans un temps de calcul choisi ( $t=200s$ ). Ainsi, on note une stabilité de ( $y_c$ ) à partir de la grille (420x300).

L'effet du maillage aux centres des roulements sur la température et la fonction de courant est présenté sur les figures (5.15-16) respectivement, pour  $t=200s$ . On tire de ces graphes une très grande variation de grandeurs physiques calculées pour des grosses grilles et une stabilité de leurs valeurs après la grille de taille (490x350).

D'autre part, le nombre de nœuds indiqué sur les graphes (5.15-16), représente seulement le nombre suivant l'axe des abscisses ( $x$ ).

En seconde lieu, les tableaux (5.4) et (5.5) fournissent une évaluation quantitative du niveau de la convergence de la fonction de courant ( $\psi_c$ ) aux centres des roulements et de leurs positions ( $y_c$ ). Ces résultats sont obtenus pour huit types de grilles (140x100, 210x150, 280x200, 350x250, 420x300, 490x350, 560x400 et 630x450) avec le temps de calcul ( $t=200s$ ). L'erreur présentée dans les tableaux (5.4) et (5.5) est calculée en assumant la valeur de la grille (700x500) comme une valeur exacte.

La grille (630x450) représente un bon modèle de la convergence, car on relève une erreur relative variant de 0 à 0.03% de la fonction de courant pour les trois roulements observés (tableau (5.4)) et une erreur de 0.17 à 0.55% de la position de leurs centres (tableau (5.5)).

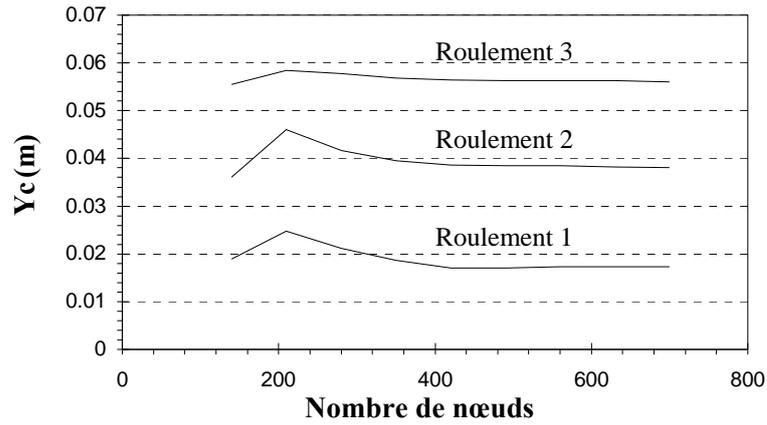


Figure 5.14 : Effet du maillage sur l'emplacement ( $y_c$ ) des centres des roulements à  $t = 200s$

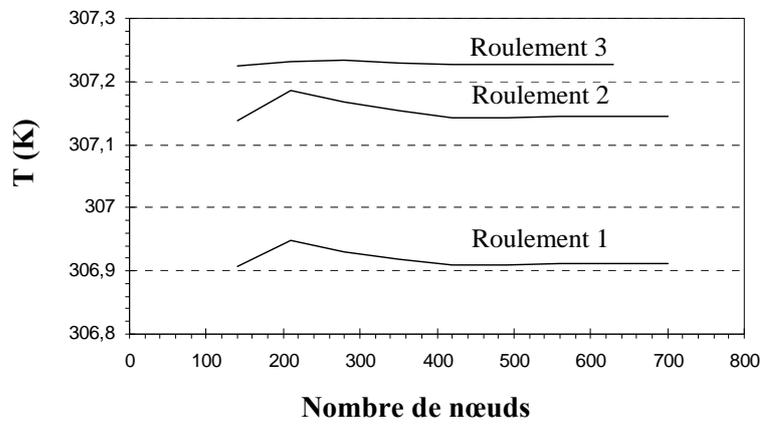


Figure 5.15 : Effet du maillage sur la température des centres des roulements à  $t = 200 s$

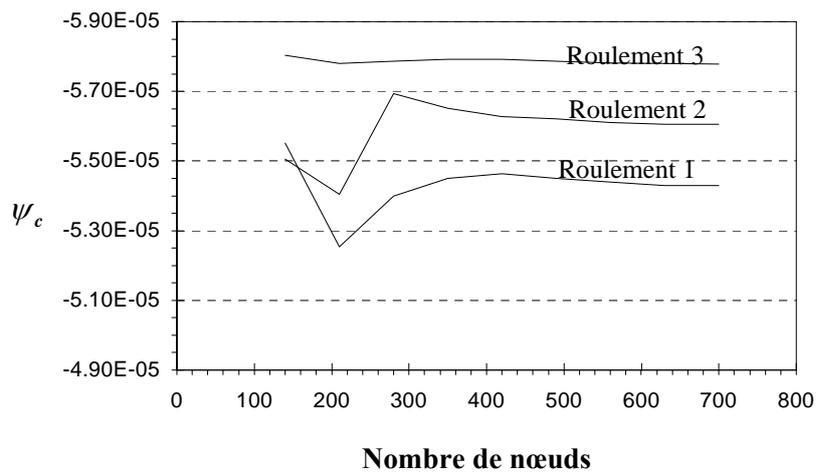


Figure 5.16 : Effet du maillage sur la fonction de courant ( $\psi_c$ ) aux centres des roulements à  $t = 200 s$

Tableau 5.4 : Effet du maillage sur la fonction de courant aux centres des roulements à  $t = 200s$

Numéro des roulements	$\Psi_C$	Erreur(%)	$\Psi_C$	Erreur(%)	$\Psi_C$	Erreur(%)	$\Psi_C$	Erreur(%)	
	Maillage (140 x100)		Maillage (210x150)		Maillage (280x200)		Maillage (350x250)		
1	-5.55E-05	2.25	-5.25E-05	3.24	-5.40E-05	0.53	-5.45E-05	0.39	
2	-5.51E-05	1.80	-5.40E-05	3.60	-5.69E-05	1.57	-5.65E-05	0.82	
3	-5.80E-05	0.43	-5.78E-05	0.03	-5.79E-05	0.16	-5.79E-05	0.22	
Numéro des roulements	$\Psi_C$	Erreur(%)	$\Psi_C$	Erreur(%)	$\Psi_C$	Erreur(%)	$\Psi_C$	Erreur(%)	$\Psi_C$
	Maillage (420x300)		Maillage (490x350)		Maillage (560x400)		Maillage (630x450)		Maillage (700x500)
1	-5.46E-05	0.63	-5.45E-05	0.39	-5.44E-05	0.20	-5.43E-05	0.00	-5.43E-05
2	-5.63E-05	0.37	-5.62E-05	0.25	-5.61E-05	0.07	-5.61E-05	0.00	-5.61E-05
3	-5.79E-05	0.22	-5.79E-05	0.16	-5.78E-05	0.07	-5.78E-05	0.03	-5.78E-05

Tableau 5.5 : Effet du maillage sur les emplacements des centres des roulements à  $t = 200s$

Numéro des roulements	$Y_c$ (m)	Erreur(%)	$Y_c$ (m)	Erreur(%)	$Y_c$ (m)	Erreur(%)	$Y_c$ (m)	Erreur(%)	
	Maillage (140 x 100))		Maillage (210 x 150)		Maillage (280 x 200)		Maillage (350 x 250)		
1	0.01890	9.24855	0.02470	42.77457	0.02120	22.54335	0.01860	7.51445	
2	0.03600	5.26316	0.04600	21.05263	0.04170	9.73684	0.03950	3.94737	
3	0.05550	0.89286	0.05840	4.28571	0.05780	3.21429	0.05680	1.42857	
Numéro des roulements	$Y_c$ (m)	Erreur(%)	$Y_c$ (m)	Erreur(%)	$Y_c$ (m)	Erreur(%)	$Y_c$ (m)	Erreur(%)	$Y_c$ (m)
	Maillage (420 x 300)		Maillage (490 x 350)		Maillage (560 x 400)		Maillage (630 x 450)		Maillage (700 x 500)
1	0.01700	1.73410	0.01710	1.15607	0.01735	0.28902	0.01733	0.17341	0.01732
2	0.03860	1.57895	0.03845	1.18421	0.03840	1.05263	0.03820	0.52632	0.03800
3	0.05640	0.71429	0.05635	0.62500	0.05633	0.58929	0.05631	0.55357	0.05600

#### 5.4.3. Effet du maillage sur l'évolution du nombre de roulements

Avec l'utilisation de trois types de maillages (280x200, 560x400 et 630x450) nous constatons que le temps de transition (fusionnement ou bifurcation) dépend fortement des grilles utilisées (figures (5.17-19)). Malgré l'utilisation des schémas d'ordre supérieur comme les schémas centré et quick (figures (5.17-19)), nous n'arrivons pas à obtenir un temps de transition fixe pour les trois grilles utilisées. Par exemple, avec la grille (280x200), le fusionnement s'effectue un peu tôt par rapport à une grille fine de taille (630x450).

Si on prend l'exemple du schéma quick, le graphe (5.20) et le tableau (5.6) nous indiquent l'évolution du temps de transition sous l'influence maillage utilisé. D'où :

- l'apparition du modèle quasi cinq roulements à partir de la grille (280x200).
- une valeur fixe du temps de transition à partir de la grille (350x250).

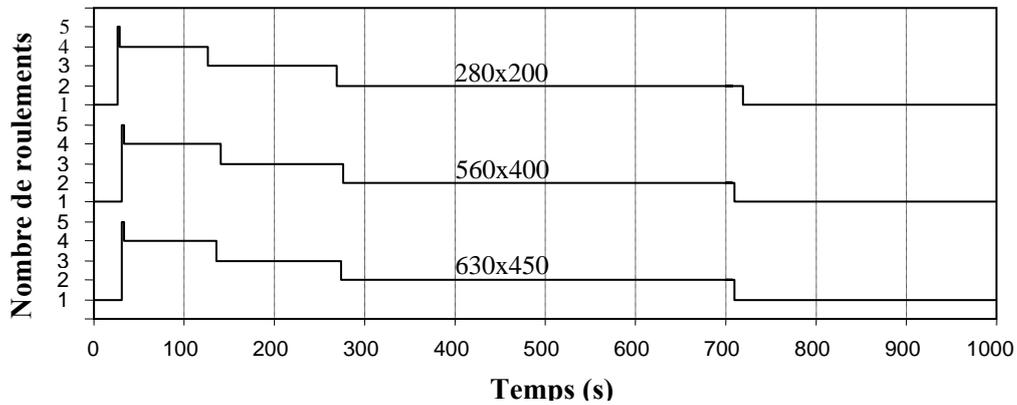


Figure 5.17 : Evolution du nombre de roulements pour un schéma quick.

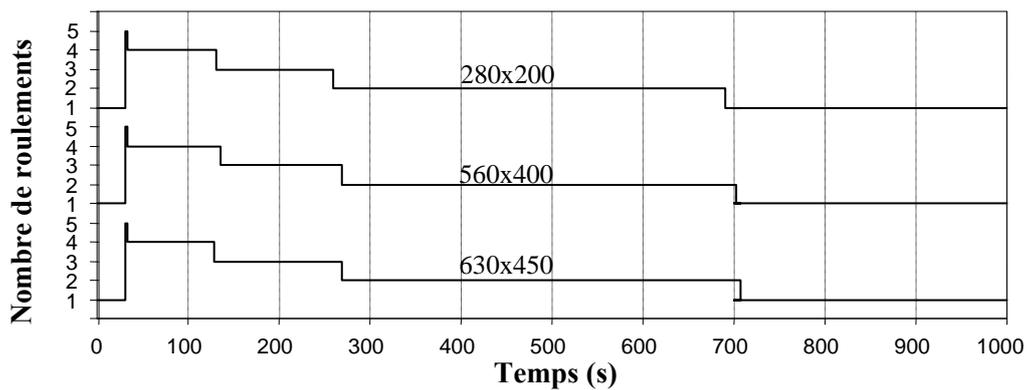


Figure 5.18 : Evolution du nombre de roulements pour un schéma centré.

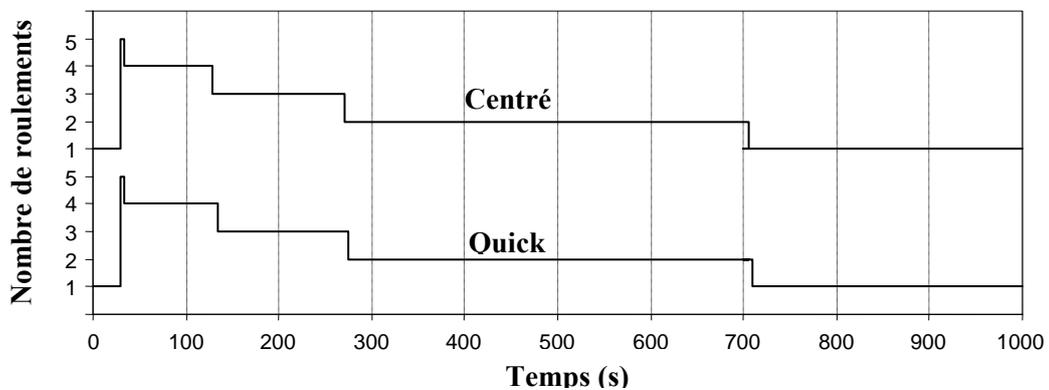


Figure 5.19 : Evolution du nombre de roulements pour les deux schémas, centré et quick.

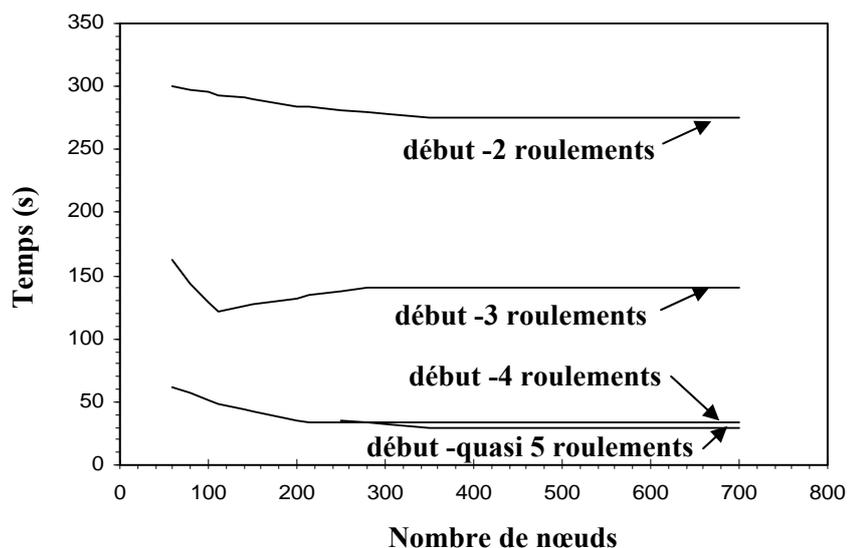


Figure 5.20: Effet du maillage sur le temps de transition pour un schéma quick

Tableau 5.6 : Effet du maillage sur le temps de transition pour un schéma quick

Maillage	Temps (s) (début -quasi 5 roulements)	Erreur (%)	Temps (s) (début -4 roulements)	Erreur (%)
70 x 50	/		61,1	85
84 x 60	/		56,4	71
98 x 70	/		51,7	57
112 x 80	/		49	48
140 x 100	/		44,3	34
168 x 120	/		43	30
210 x 150	/		35,6	8
280 x 200	33,6	12	33	0
350 x 250	30	0	33	0
420 x 300	30	0	33	0
490 x 350	30	0	33	0
560 x 400	30	0	33	0
630 x 450	30	0	33	0

Maillage	Temps (s) (début -3 roulements)	Erreur (%)	Temps (s) (début -2 roulements)	Erreur (%)
70 x 50	163,2	16,57	299,6	8,95
84 x 60	143,1	2,21	296,9	7,96
98 x 70	129	7,86	295,6	7,49
112 x 80	121,6	13,14	293,6	6,76
140 x 100	125,6	10,29	291,6	6,04
168 x 120	127	9,29	289,5	5,27
210 x 150	132,3	5,50	284,8	3,56
280 x 200	140	0,00	279,5	1,64
350 x 250	140	0,00	275	0,00
420 x 300	140	0,00	275	0,00
490 x 350	140	0,00	275	0,00
560 x 400	140	0,00	275	0,00
630 x 450	140	0,00	275	0,00

### 5.5. Choix du pas de temps

Les résultats présentés sont basés principalement sur la convergence de la solution numérique sous l'influence du maillage. Et puisque le phénomène étudié étant instationnaire, il est nécessaire d'évaluer l'adéquation du pas de temps utilisé sur la solution numérique. Pour cela, nous considérons un pas de temps variable au cours de la fusion.

Soit un temps à atteindre égal à 100s avec l'utilisation d'une grille fine de taille (560x400), un algorithme PISO et un schéma de discrétisation du type quick. Le tableau (5.7) indique les différentes valeurs du pas de temps utilisés dans cet exemple.

Tableau 5.7 : Effet du pas de temps sur le temps de calcul

Pas du temps $\Delta t$ (s)	1	0.5	0.25	0.2	0.1	0.05	0.025
Figure (5.21)	Diverge après 14s	Diverge après 38s	a	b	c	d	e
Temps de calcul (heures)	/	/	72	81	142	223	305

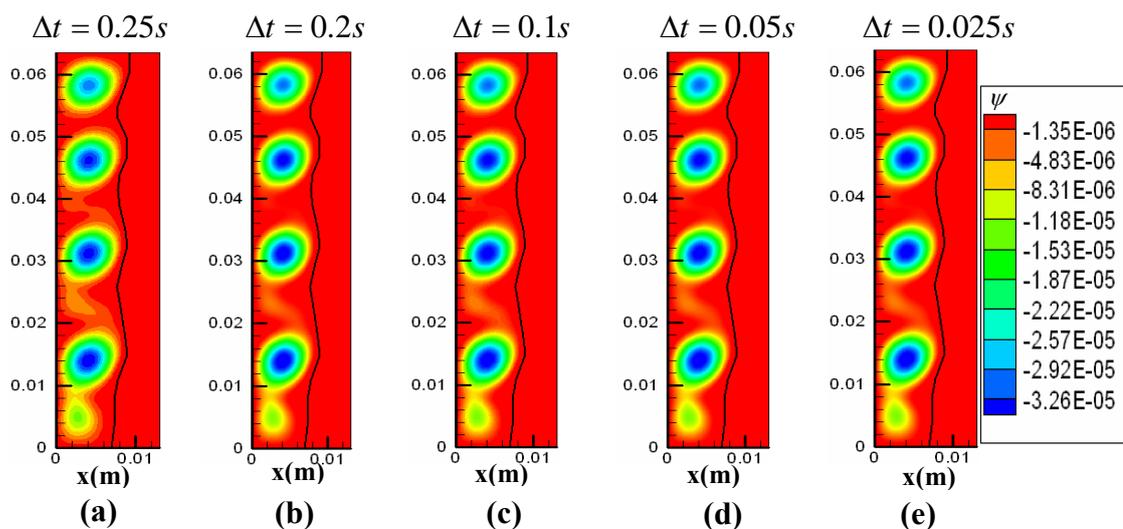


Figure 5.21 : Effet du pas de temps sur les lignes de courant

Tableau 5.8 : Effet du pas de temps sur les temps des transitions

<b>Pas du temps</b> $\Delta t$ (s)	0.25	0.2	0.1	0.05	0.025
<b>Début du modèle quasi</b> <b>5 roulements (s)</b>	30	30	30	30	30
<b>Début de la formation</b> <b>de 4 roulements (s)</b>	34	34	34	34	34
<b>Passage de 4 à 3</b> <b>roulements (s)</b>	135	135	135	135	135
<b>Passage de 3 à 2</b> <b>roulements (s)</b>	275	275	275	275	275
<b>Passage de 2 à 1</b> <b>roulements (s)</b>	710	710	710	710	710

La figure (5.21) montre une solution qui diverge pour un pas du temps supérieur à 0.5s. Par contre, pour un pas varié de 0.25 à 0.025s (jusqu'à dix fois moins), nous aurons une solution numérique identique concernant les lignes de courant et les temps des transitions (tableau (5.8)); ceci donne l'intérêt de bien choisir ce paramètre afin d'optimiser le temps de calcul global.

### 5.6. Analyse du mécanisme de fusionnement des roulements

Pour bien illustrer le mécanisme de fusionnement des roulements, nous avons pris l'exemple de la figure (5.22) traitant le passage de quatre à deux roulements.

L'apparition du modèle quatre roulements s'effectue au temps  $t=34s$  et l'évolution des ordonnées de leurs centres est présentée pour deux étapes successives :

- 1- passage de quatre à trois roulements pour donner le premier fusionnement autour de  $t=135s$  (figures (5.22))
- 2- passage de trois à deux roulements pour donner le deuxième fusionnement autour de  $t=275s$  (figures (5.22)).

Les résultats issus des figures (5.23-24) sont résumés comme suit:

- Les coordonnées des roulements et leurs tailles augmentent en valeur au cours de la fusion (figures (5.23)).
- Les roulements deviennent plus ronds au voisinage du temps de fusionnement.
- La différence entre les ordonnées de deux roulements successifs augmente, sauf pour celle qui est entre les deux derniers roulements (figure (5.24))

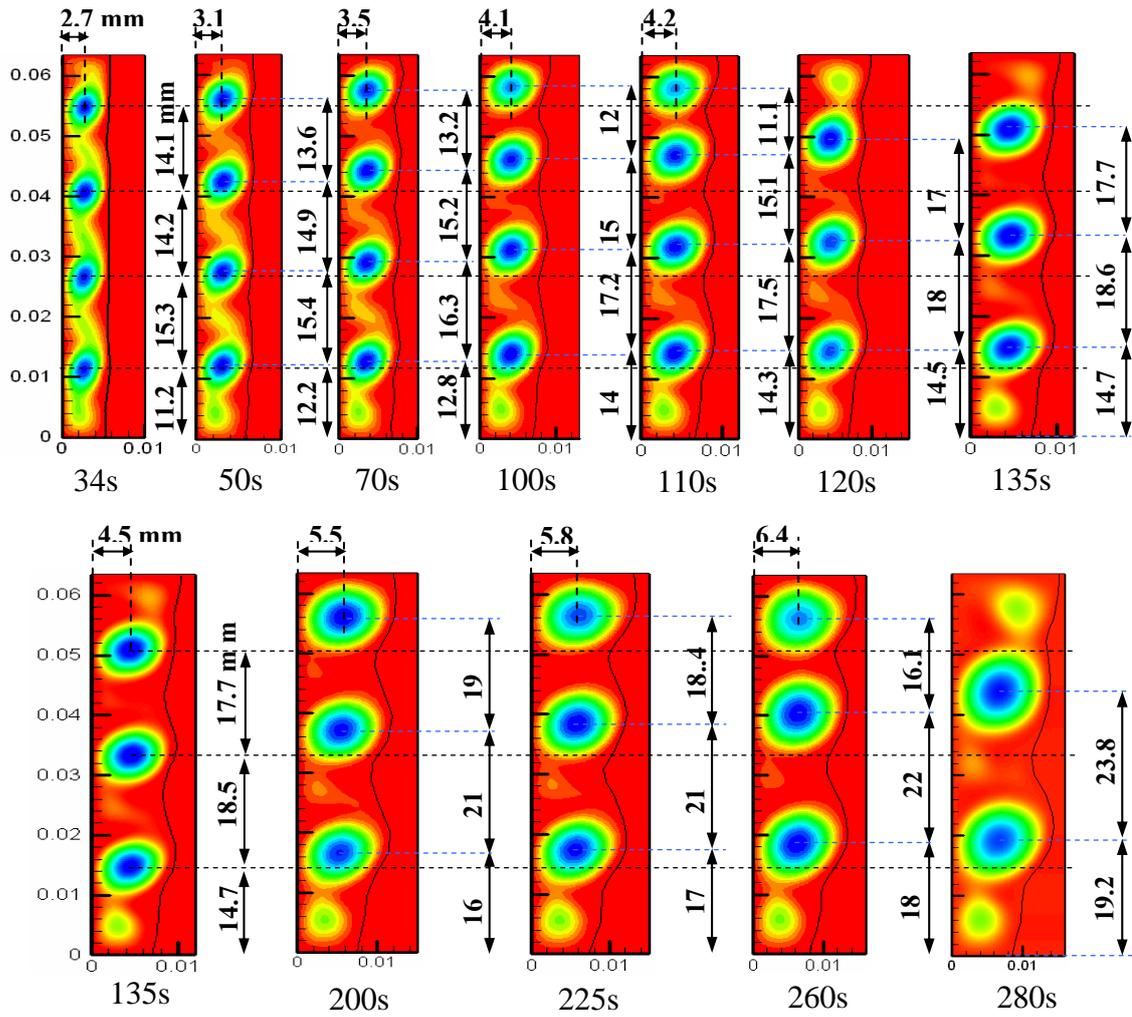


Figure 5.22 : Schématisation du mécanisme de fusionnement des roulements

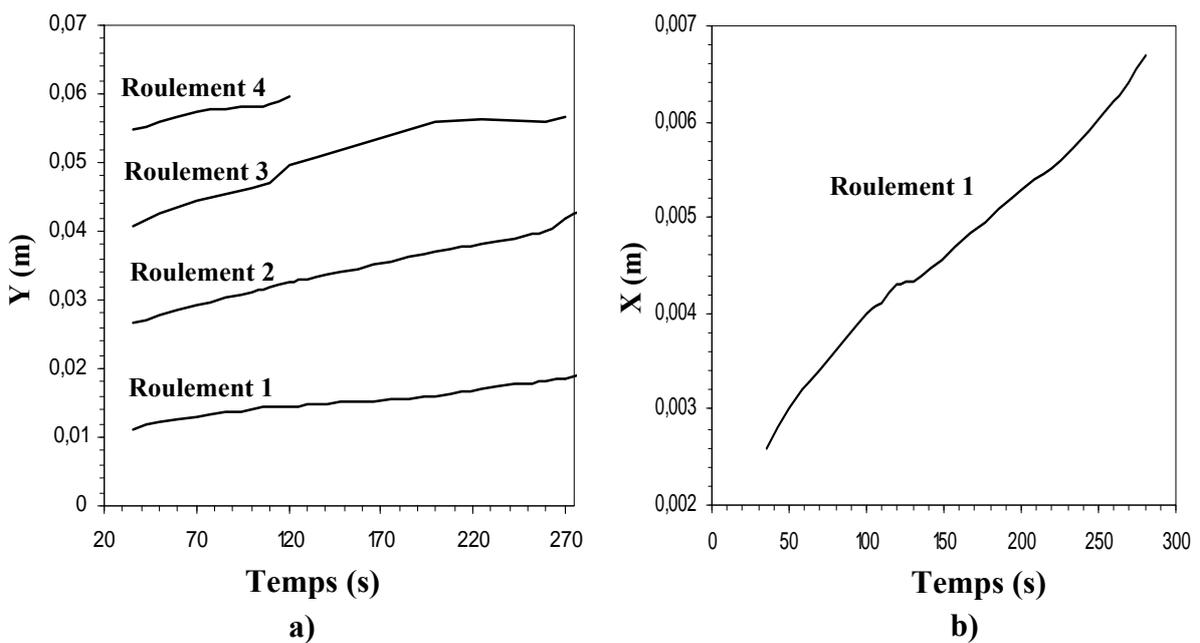


Figure 5.23 : Représentation des coordonnées des centres de roulements

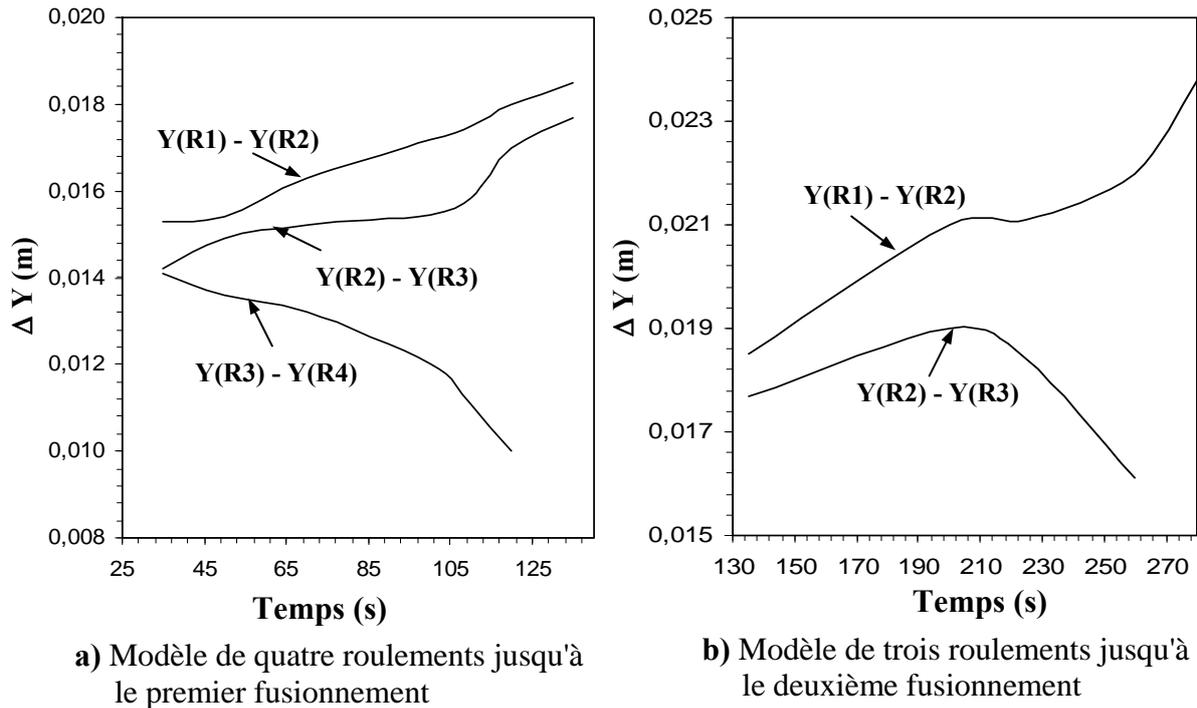


Figure 5.24 : Variation de la différence entre les ordonnées de deux roulements successifs

### 5.7. Présentation d'une solution de référence

Dans cette partie, nous proposons quelques résultats numériques et quelques graphes comme une solution de référence et ils sont pris de la grille la plus précise (630x450).

Premièrement, une évaluation du niveau de convergence est montrée sur les figures (5.25-26) par la présentation du résiduel des équations de continuité, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Par la suite, des présentations de la fonction de courant, du champ de températures et des composantes du vecteur vitesse sont illustrées sur les figures (5.27-30) pour quelques valeurs de temps.

Après, des variations au cours du temps de  $u_{\max}$ ,  $\psi_{\min}$ ,  $v_{\max}$ , du nombre de Nusselt et de la fraction liquide sont présentées sur les figures (5.31-35)). Finalement, un suivi de l'évolution des paramètres physiques les plus utilisés ( $u$ ,  $v$ ,  $\psi$ ,  $T$ ) est effectué sur les figures (5.37-39) à trois points de surveillance illustrés sur la figure(5.36).

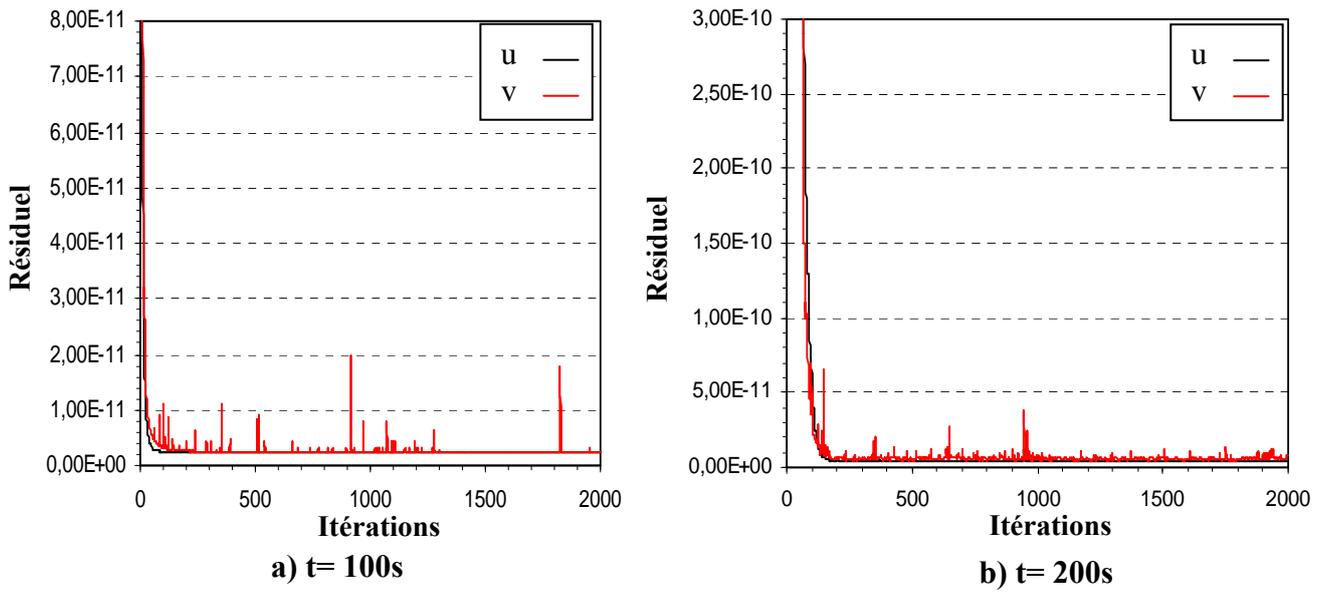


Figure 5.25 : Evolution de la convergence des équations de la quantité du mouvement

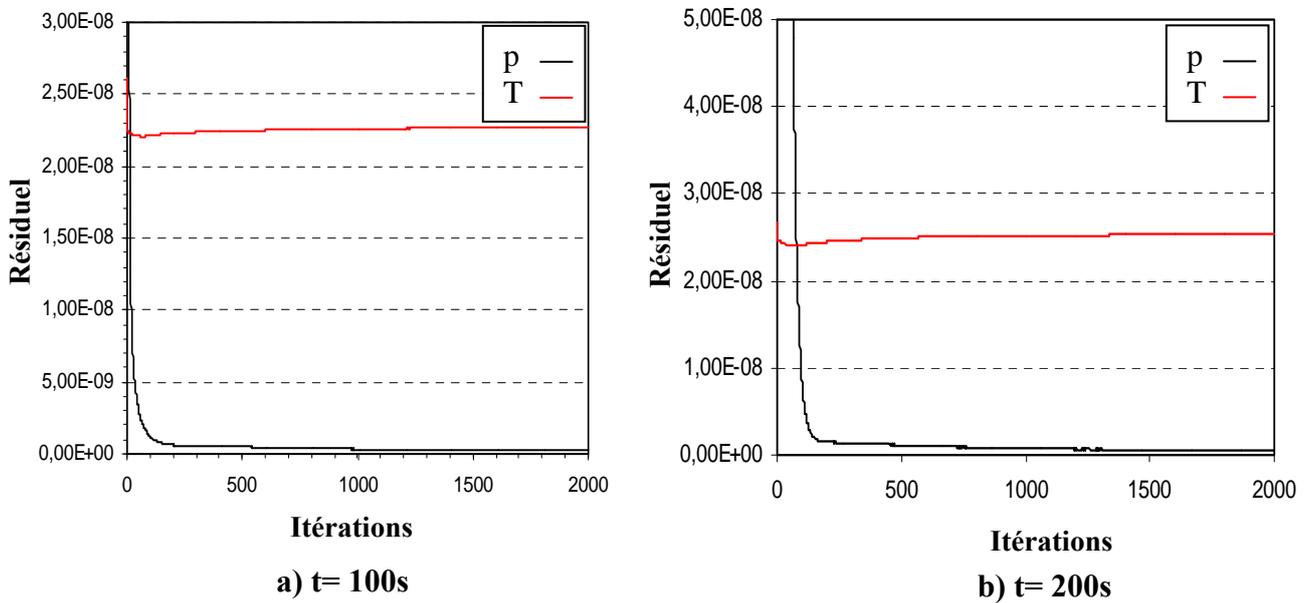


Figure 5.26 : Evolution de la convergence des équations de la pression et de la température

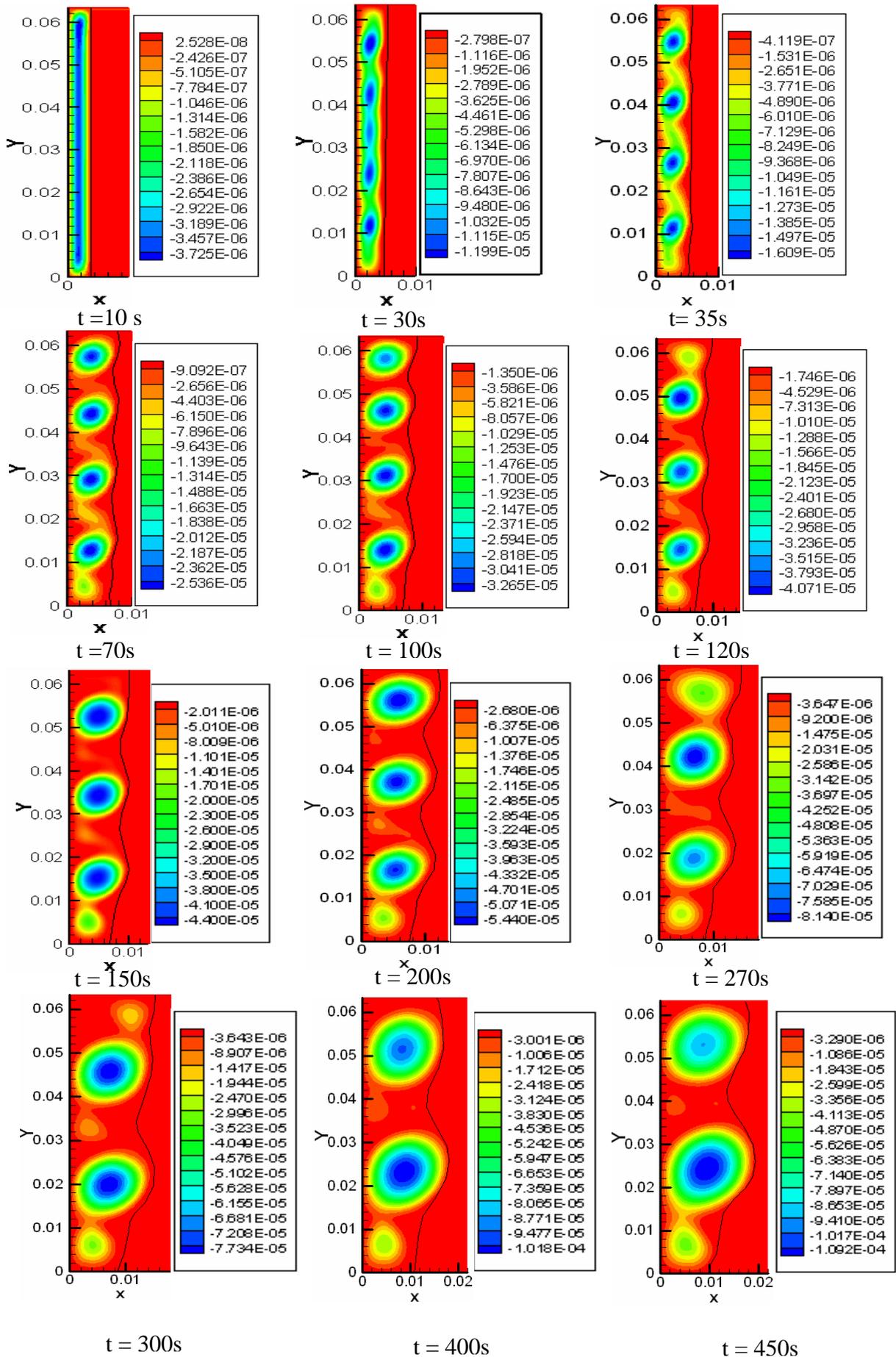


Figure 5.27 : Représentation des lignes de courant pour une grille de (630x450)

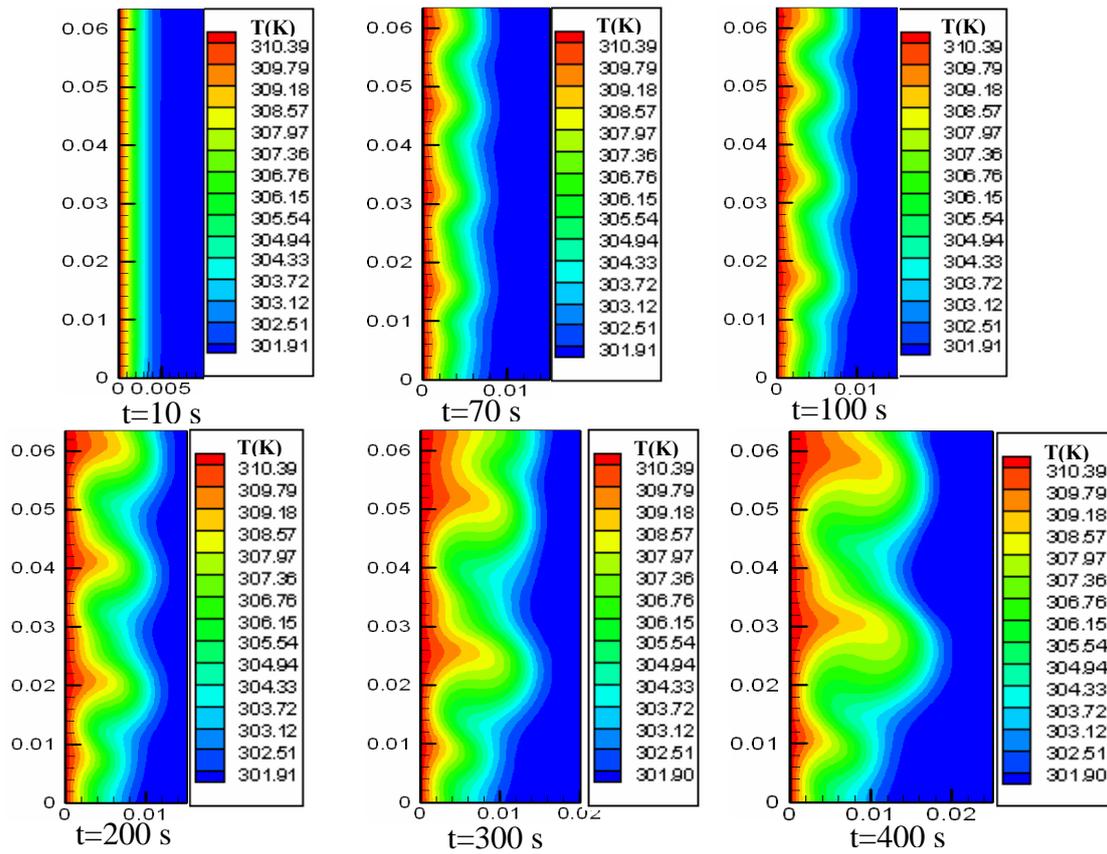


Figure 5.28 : Représentation du champ de température pour une grille de (630x450)

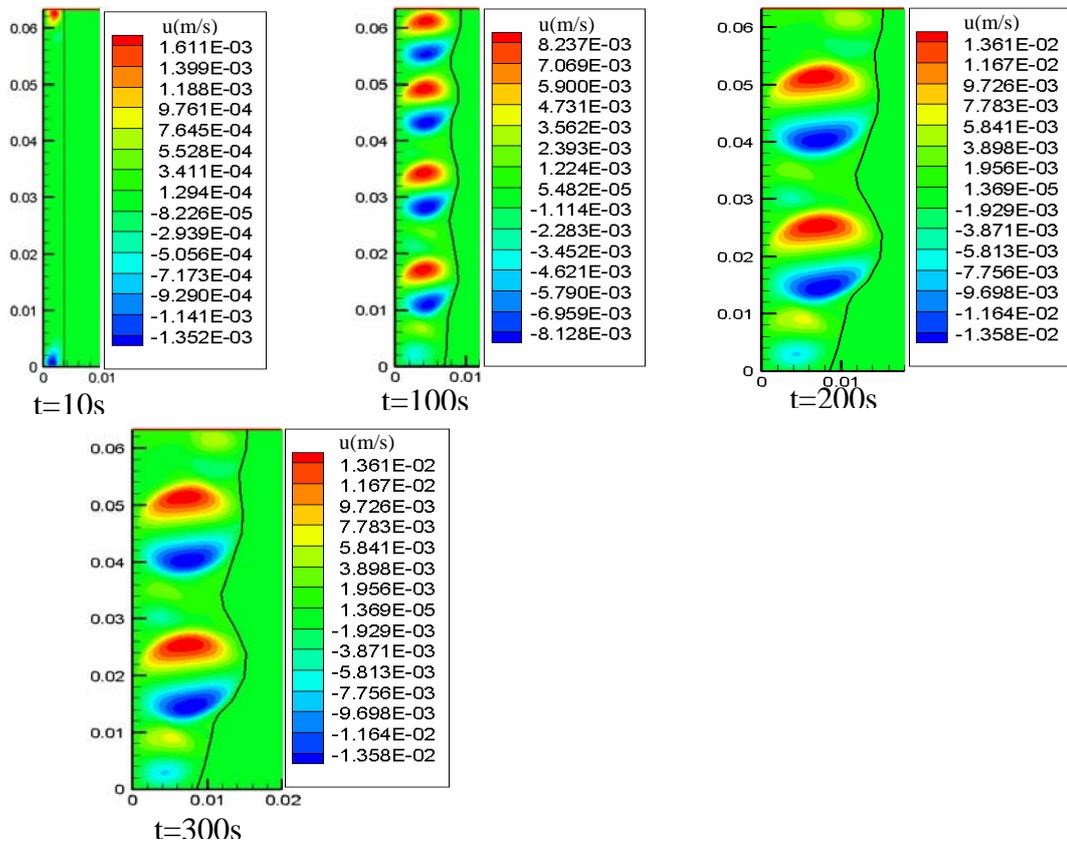


Figure 5.29 : Représentation de la composante (u) de la vitesse pour une grille de (630x450)

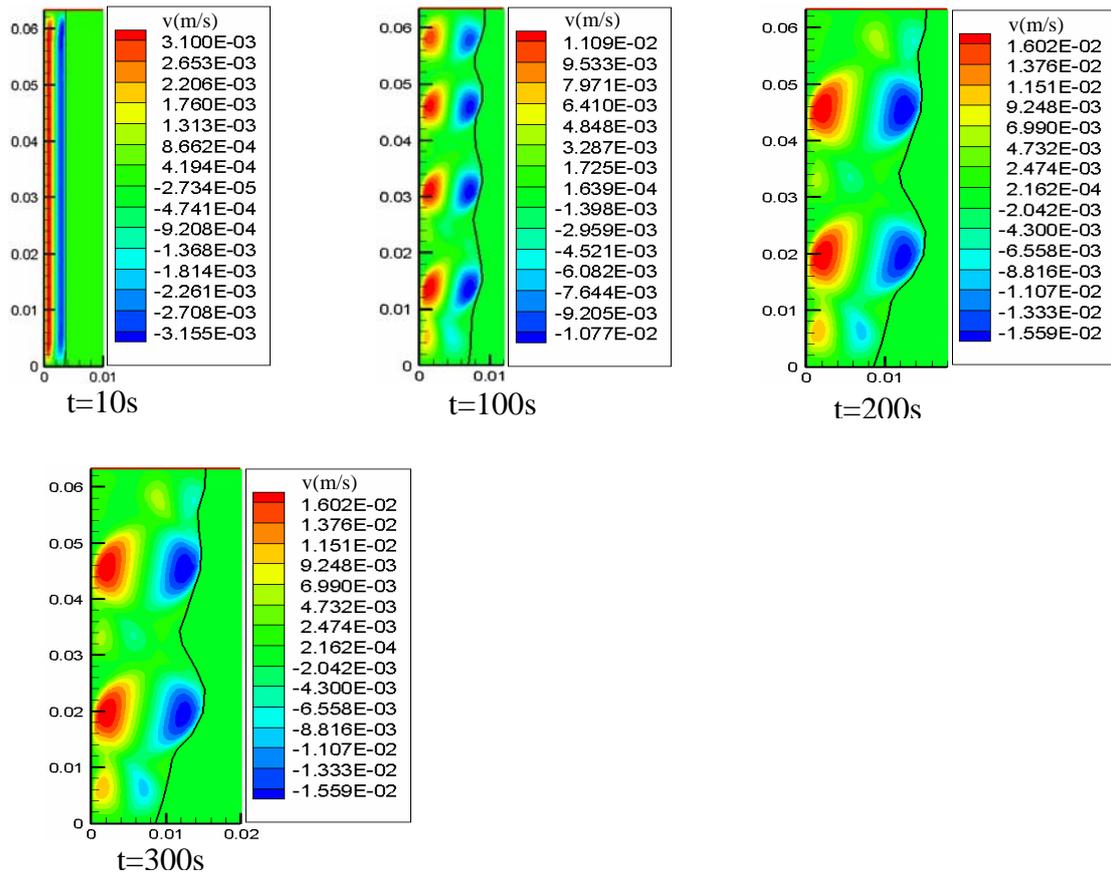


Figure 5.30 : Représentation de la composante ( $v$ ) de la vitesse pour une grille de (630x450)

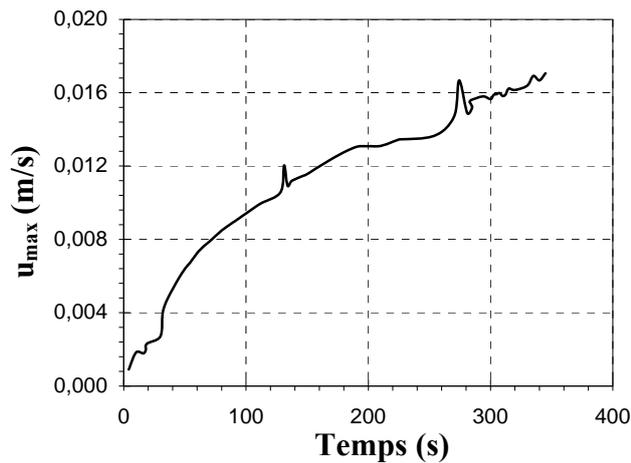


Figure 5.31 : Variation de la composante ( $u_{\max}$ ) de la vitesse au cours de la fusion

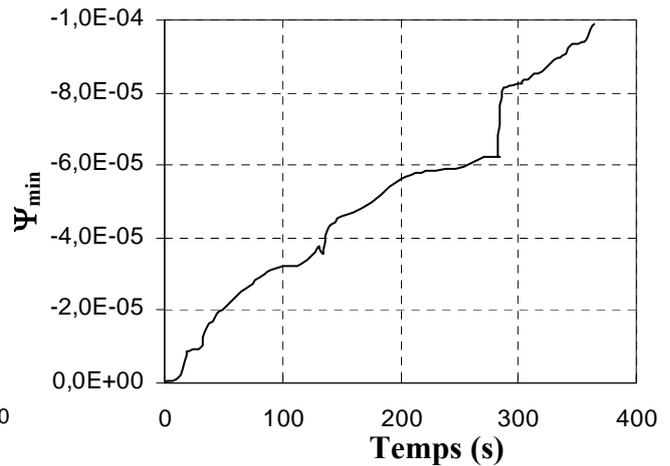


Figure 5.32 : Variation de la fonction minimale de courant au cours de la fusion

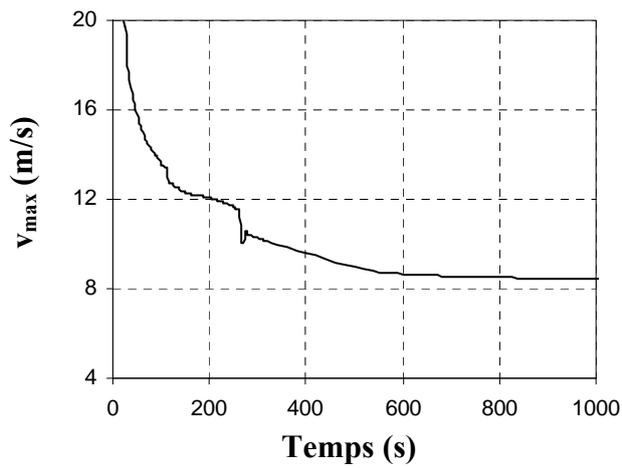


Figure 5.33 : Variation de la composante ( $v_{\max}$ ) de la vitesse au cours de la fusion

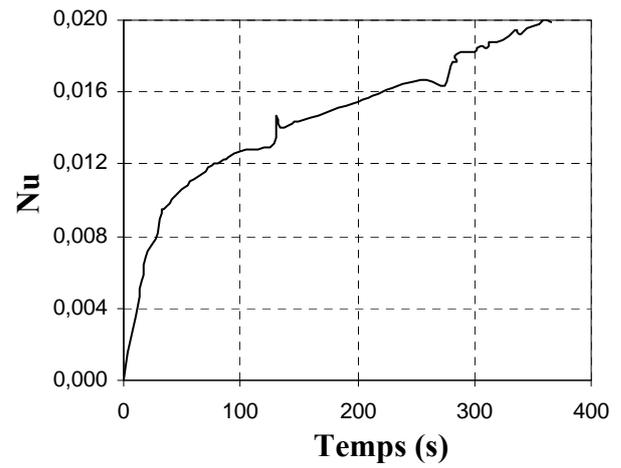


Figure 5.34 : Variation du nombre de Nusselt au cours de la fusion

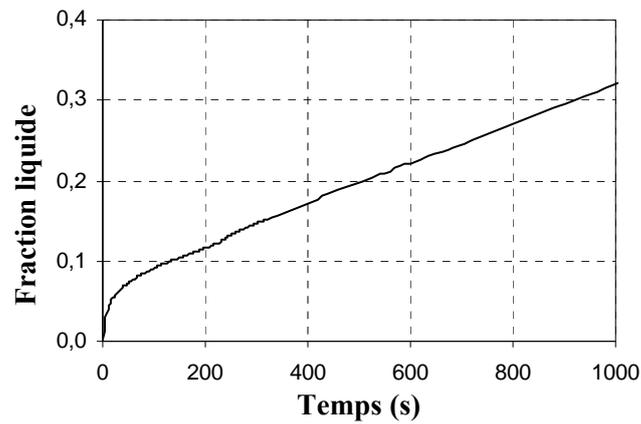


Figure 5.35 : Variation de la fraction liquide au cours de la fusion

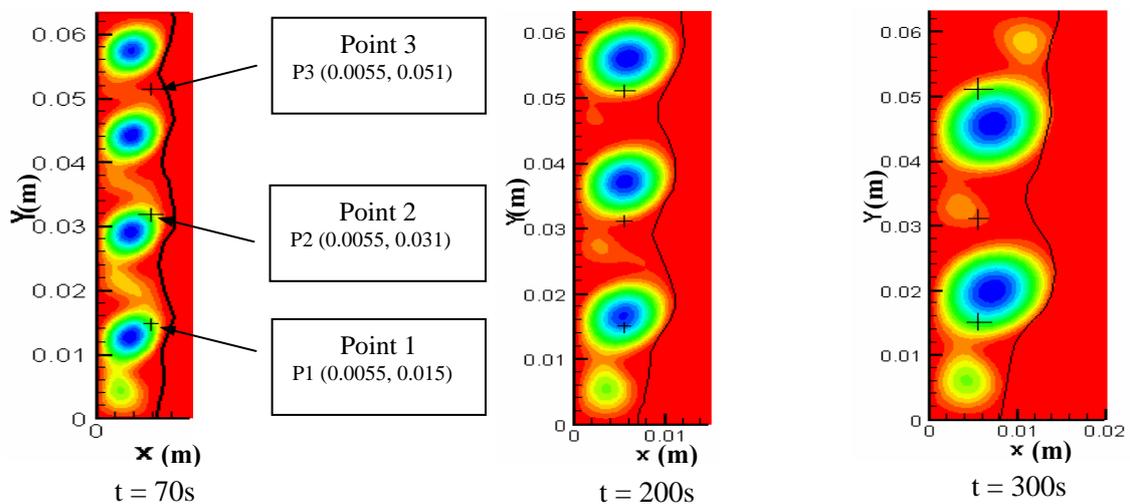


Figure 5.36 : Schématisation de trois points de référence

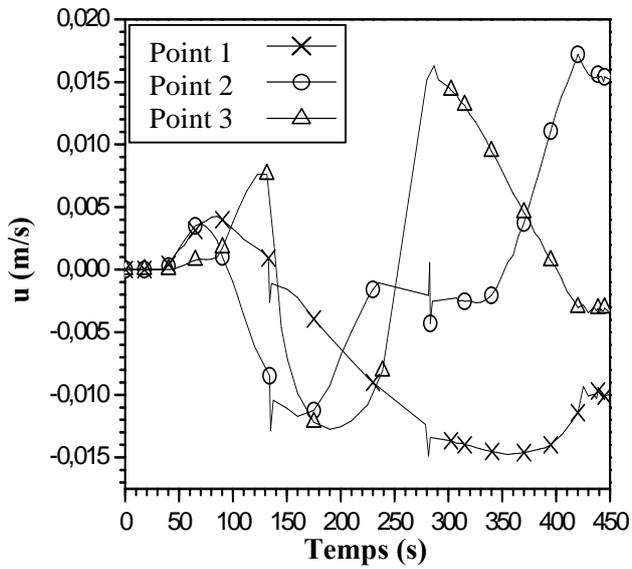


Figure 5.37 : Variation de la composante (u) de la vitesse au cours de la fusion

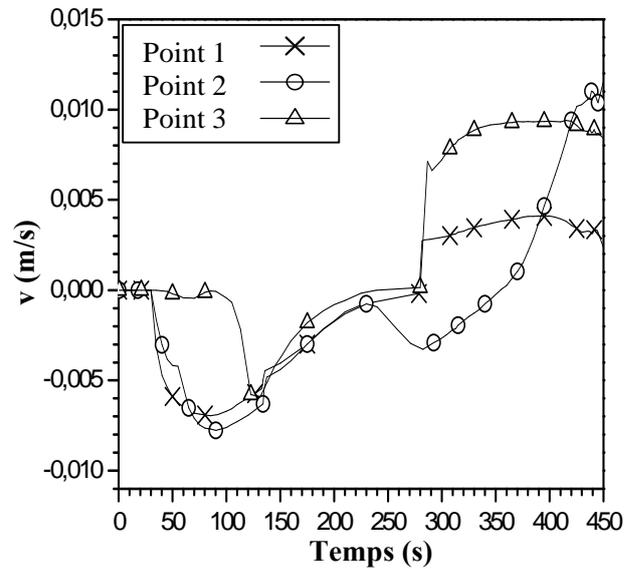


Figure 5.38 : Variation de la composante (v) de la vitesse au cours de la fusion

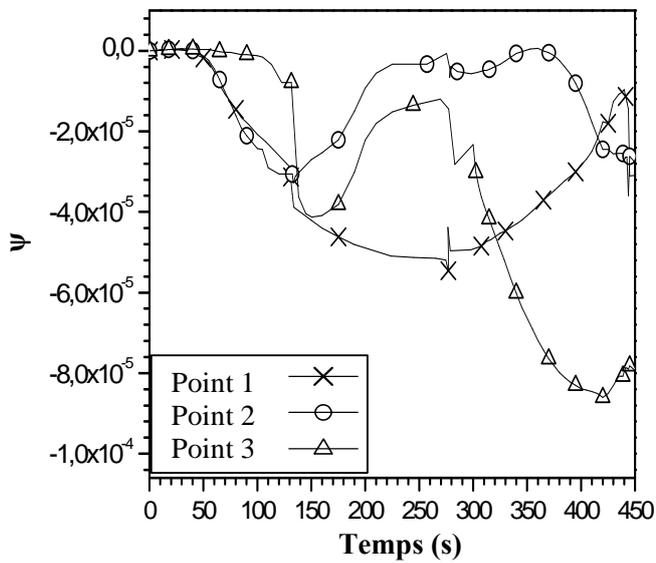


Figure 5.39 : Variation de la fonction de courant au cours de la fusion

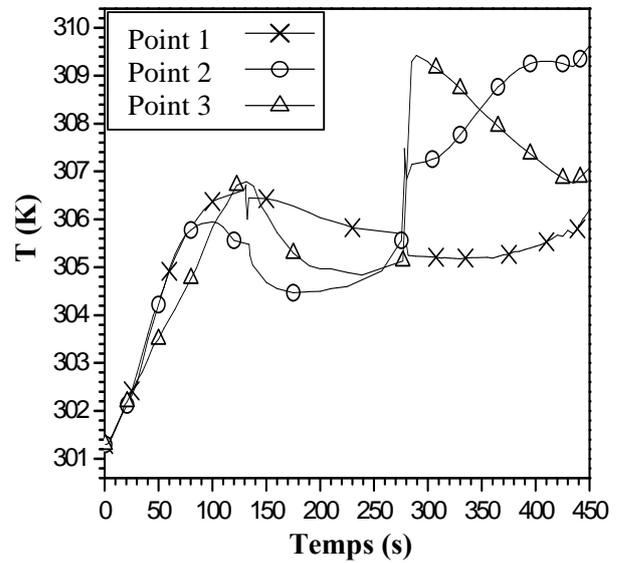


Figure 5.40 : Variation de la température au cours de la fusion

## 5.8. Effet du facteur de forme

### 5.8.1. Physique et géométrie du problème étudié

Dans cette partie, nous allons étudier l'effet du facteur de forme ( $Ar$ ) sur les lignes de courant, en conservant les mêmes conditions aux limites, le même nombre de Stefan ( $Ste=0.046$ ), la même hauteur ( $H=0.0635\text{m}$ ) et en variant seulement la largeur du matériau ( $W$ ). Les trois configurations prises dans cette partie sont illustrées sur la figure (5.41).

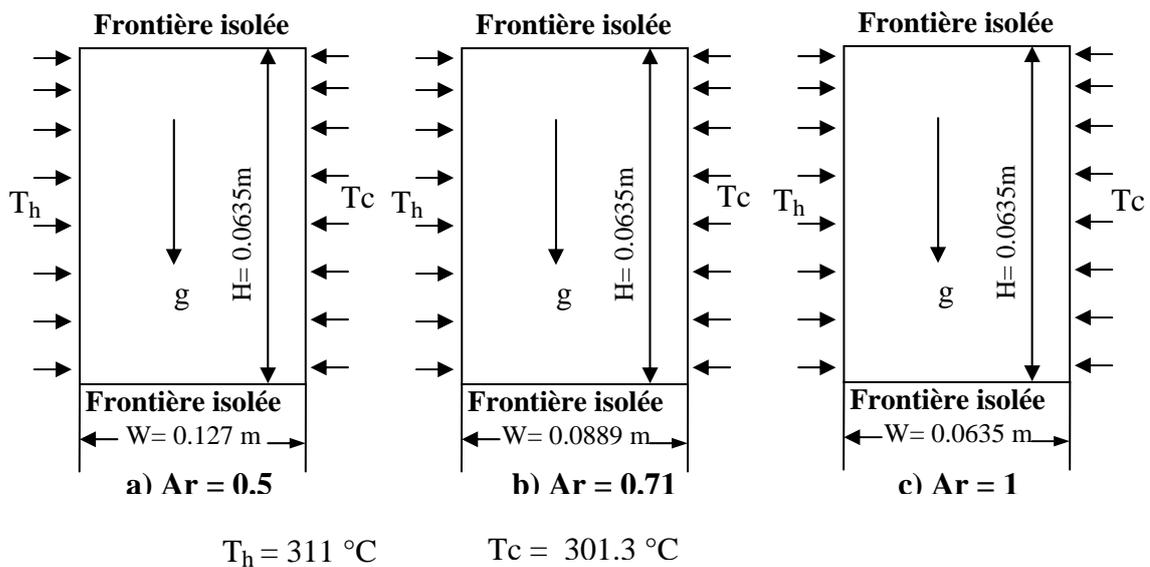


Figure 5.41 : Représentation des différentes configurations du facteur de forme.

La paroi gauche du matériau est maintenue à une température au dessus de sa température de fusion égale à  $311\text{°C}$ , tandis que la paroi droite est maintenue à une température juste inférieure à sa température de fusion, égale à  $301.3\text{°C}$ .

### 5.8.2 Effet du facteur de forme sur les paramètres physiques

Malgré l'utilisation de la même hauteur ( $H = 0.0635\text{m}$ ) pour les trois valeurs du facteur de forme ( $Ar=0.5, 0.71$  et  $1$ ) nous constatons que :

- 1- Le nombre maximal de roulements observés augmente avec l'accroissement du facteur de forme:
  - Quatre roulements observés pour  $Ar = 0.5$  et  $0.71$  (figures 5.42-43)
  - Cinq roulements observés pour  $Ar = 1$  (figure 5.44)

- 2- Le temps de fusionnement est variable suivant la configuration du facteur de forme utilisée, par exemple la transition de trois à deux roulements s'effectue à :
- $t = 290$  s pour  $Ar = 0.5$  (figure 5.42)
  - $t = 275$  s pour  $Ar = 0.71$  (figure 5.43)
  - $t = 265$  s pour  $Ar = 1$  (figure 5.44).
- 3- Le nombre de Nusselt calculé dans un temps donné, diminue en augmentant la valeur du facteur de forme (figure (5.45)), par exemple :

<b>Ar</b>	<b>Nu (t=100 s)</b>	<b>Nu (t=200 s)</b>
0.5	14	12.50
0.71	13.6	12.09
1	13.07	11.42

- 4- La fraction liquide du volume fondu pour un temps donné augmente avec l'accroissement du facteur de forme (figures (5.46-47)) :

<b>Ar</b>	<b>Volume (%) à t=100 s</b>	<b>Volume (%) à t=300 s</b>
0.5	8.4	13.1
0.71	9	14.6
1	9.6	15.7

- 5- Au cours de la fusion, les valeurs des paramètres ( $U_{\max}$ ,  $V_{\max}$ ,  $\psi_{\max}$ ) évoluent dans le sens de l'augmentation, inversement avec le facteur de forme (figures (5.48-50)) :

<b>Ar</b>	<b>t=100 s</b>		
	$U_{\max}$ (m/s)	$V_{\max}$ (m/s)	$\psi_{\max}$
0.5	10.49 E-3	13.50 E-3	1.71 E-6
0.71	9.41 E-3	12.69 E-3	8.85 E-7
1	7.62 E-3	11.40 E-3	4.25 E-7

6- La figure (5.51) montre une variation de la température calculée à une abscisse du matériau  $X = 0.05\text{m}$  et un temps de calcul  $t = 150\text{s}$ . Si on prend les valeurs maximales de la température calculées pour cette configuration, nous trouverons:

- $T_{\text{max}} = 309.18 \text{ K}$  pour  $Ar = 0.5$ .
- $T_{\text{max}} = 308.39 \text{ K}$  pour  $Ar = 0.71$ .
- $T_{\text{max}} = 308.03 \text{ K}$  pour  $Ar = 1$ .

Cela nous ramène à conclure que la température varie inversement avec l'augmentation du facteur de forme.

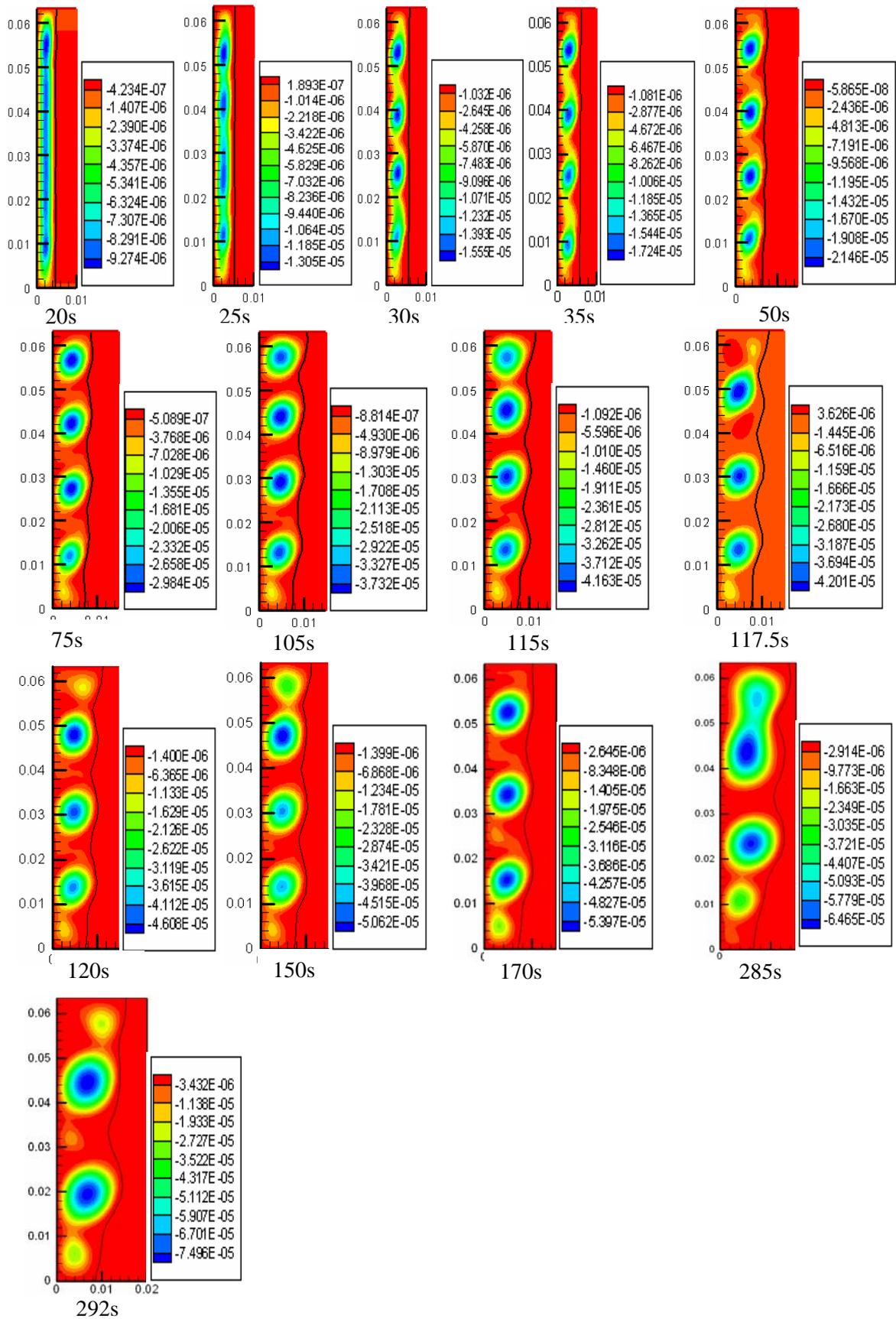


Figure 5.42 : Représentation des lignes de courant pour un facteur de forme  $Ar = 0.5$ .

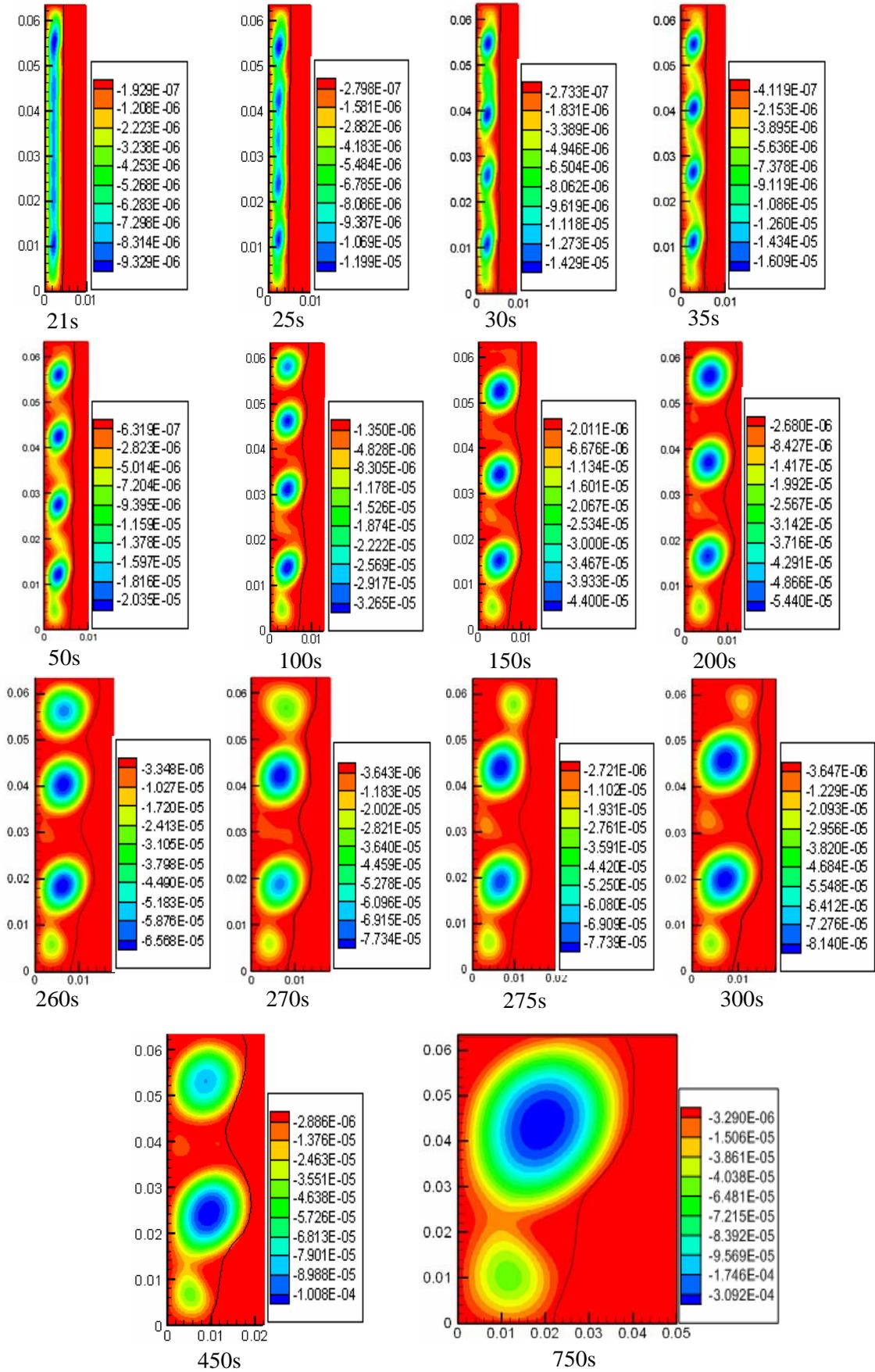


Figure 5. 43 : Représentation des lignes de courant pour un facteur de forme  $Ar = 0.71$ .

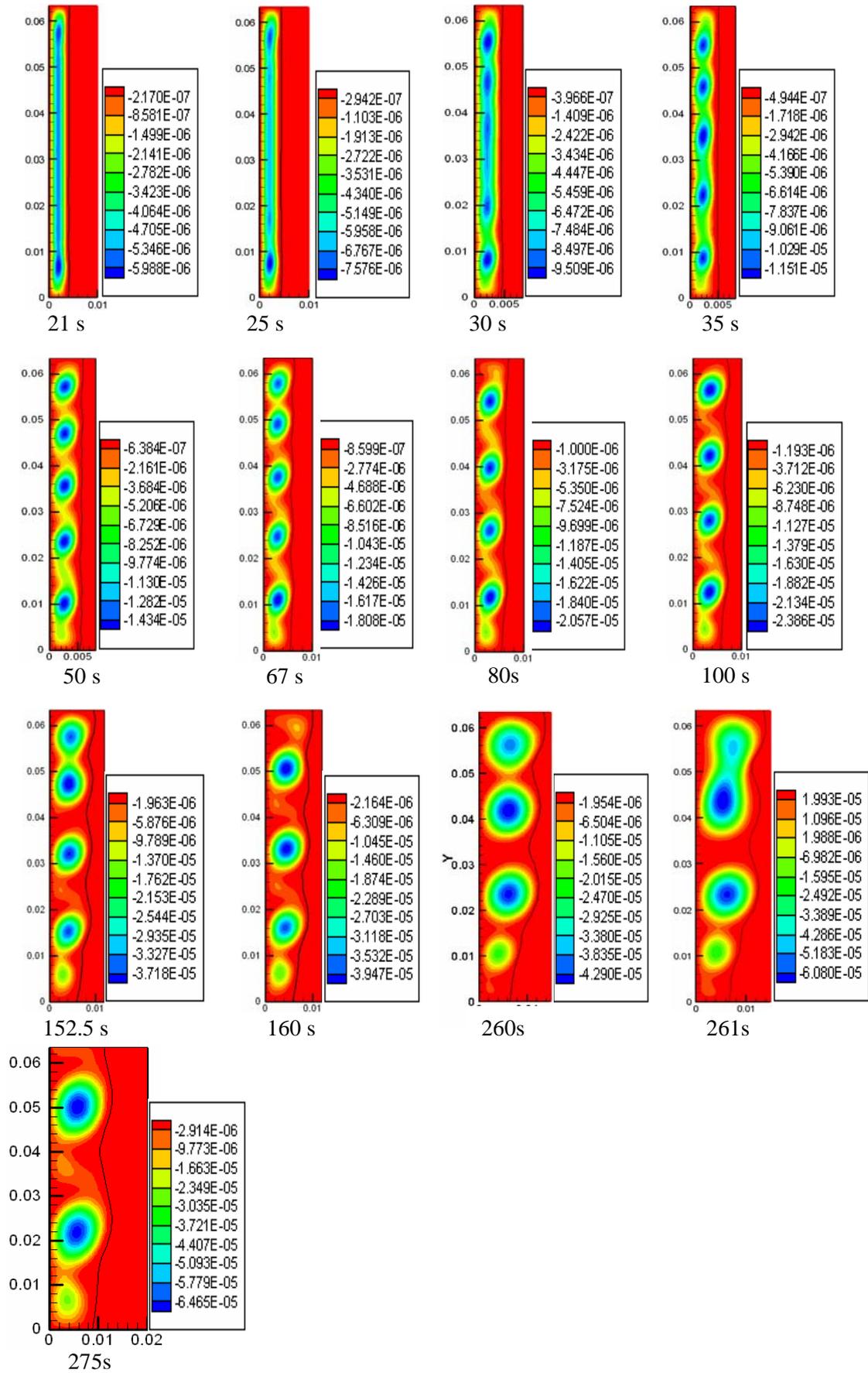


Figure 5.44 : Représentation des lignes de courant pour un facteur de forme  $Ar = 1$ .

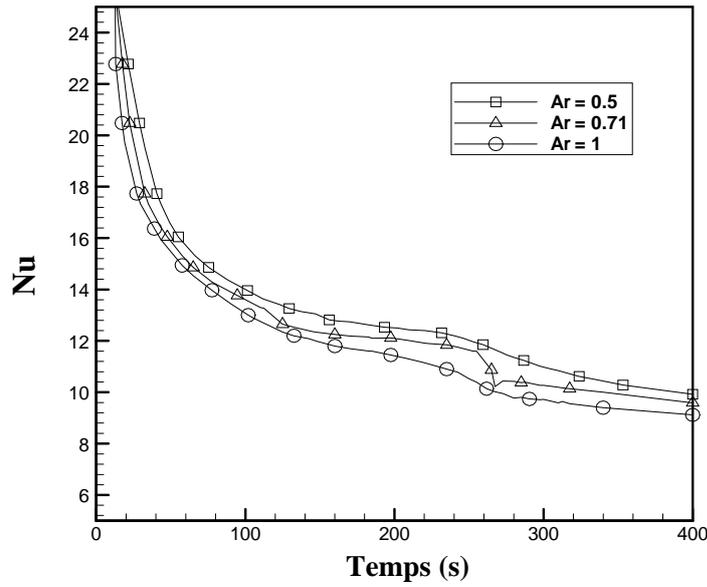


Figure 5.45 : Effet du facteur de forme sur le nombre de Nusselt

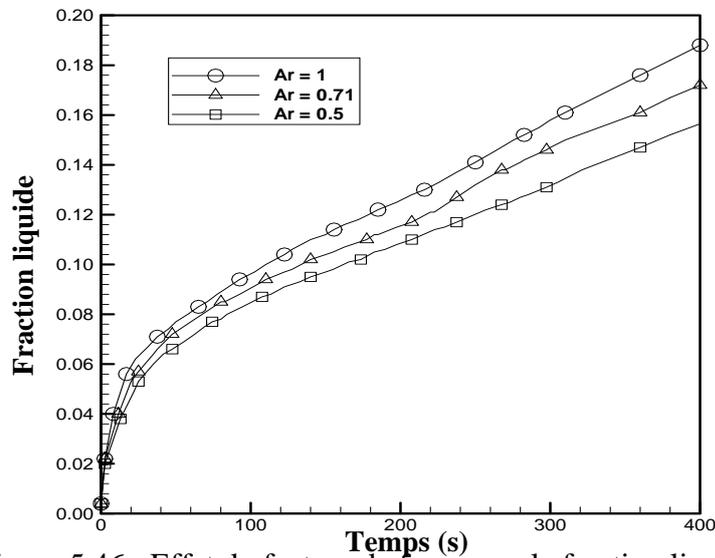


Figure 5.46 : Effet du facteur de forme sur la fraction liquide

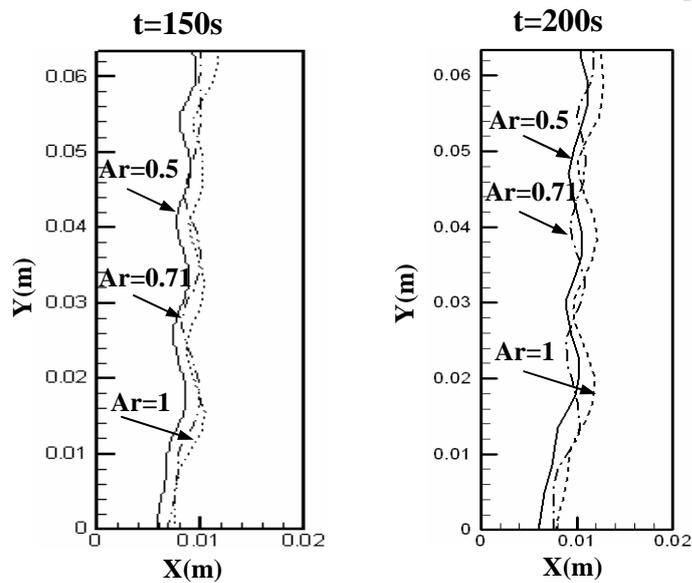


Figure 5.47 : Effet du facteur de forme sur l'interface liquide-solide

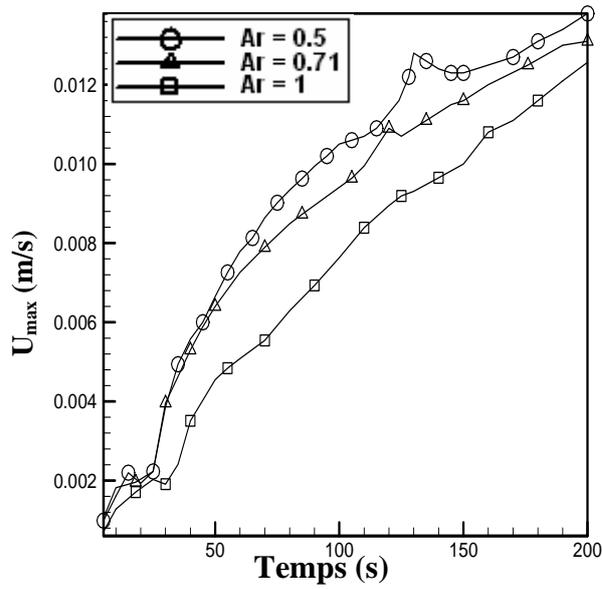


Figure 5.48 : Evolution de la composante ( $U_{\max}$ ) au cours du temps

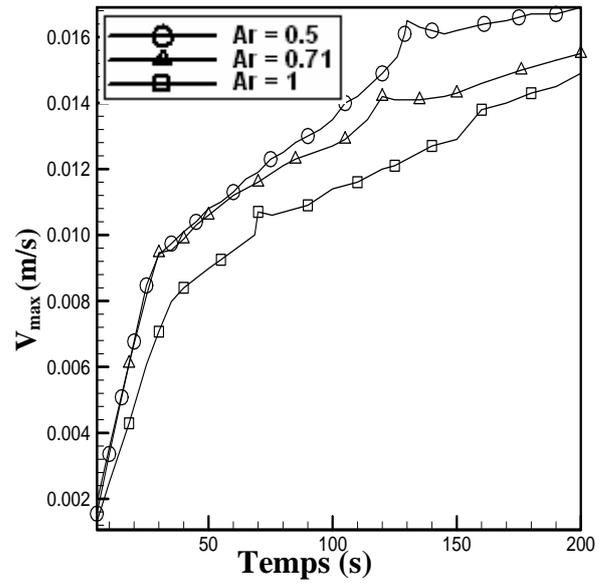


Figure 5.49 : Evolution de la composante ( $V_{\max}$ ) au cours du temps

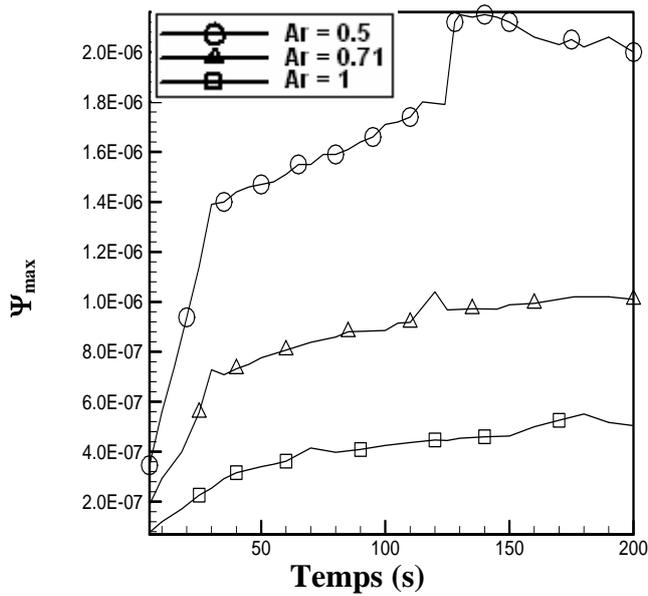


Figure 5.50 : Evolution de la fonction ( $\Psi_{\max}$ ) au cours du temps

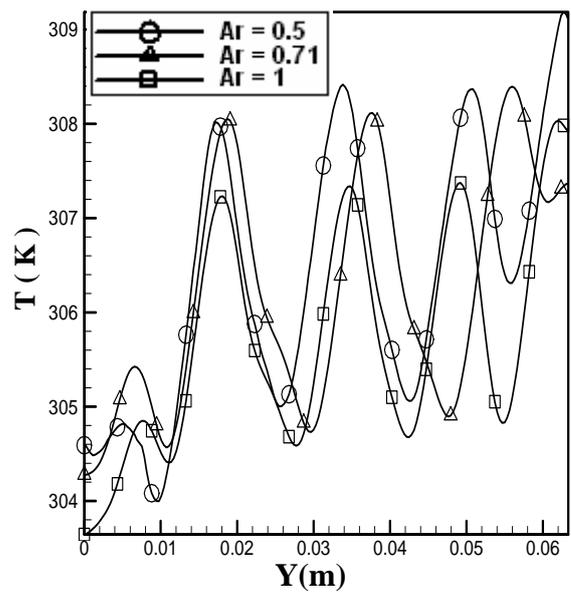


Figure 5.51 : Evolution de la température pour  $X=0.05\text{m}$ , au temps  $t=150\text{ s}$

## 5.9. Effet des nombres de Rayleigh et de Stefan

### 5.9.1. Physique et géométrie du problème étudié

Certains paramètres, cités dans la littérature [18, 19, 22, 23, 26, 28, 30, 31] sont très influents sur le phénomène du changement de phase : le nombre de Rayleigh (Ra) ou le nombre de Stefan (Ste). Pour cela une étude de trois valeurs de ces nombres est prise en compte et elle est présentée par les figures ((5.53-55)).

La configuration géométrique choisie est pour un facteur de forme  $Ar = 1$ , avec une hauteur du matériau  $H=0.08\text{m}$  et une largeur  $W= 0.08\text{m}$ .

Les conditions aux limites sont illustrées sur la figure (5.52), dont la valeur de la température au mur froid est constante et égale à  $301.1^\circ\text{C}$ , tandis que sa valeur au mur chaud est variable pour donner les trois valeurs du nombre de Rayleigh ( $Ra=1E6$ ,  $Ra=2E6$  et  $Ra=3E6$ ) et les trois valeurs du nombre de Stefan ( $Ste=0.038$ ,  $Ste=0.070$  et  $Ste=0.102$ ) représentés sur les figures (5.52-a, b, c), respectivement.

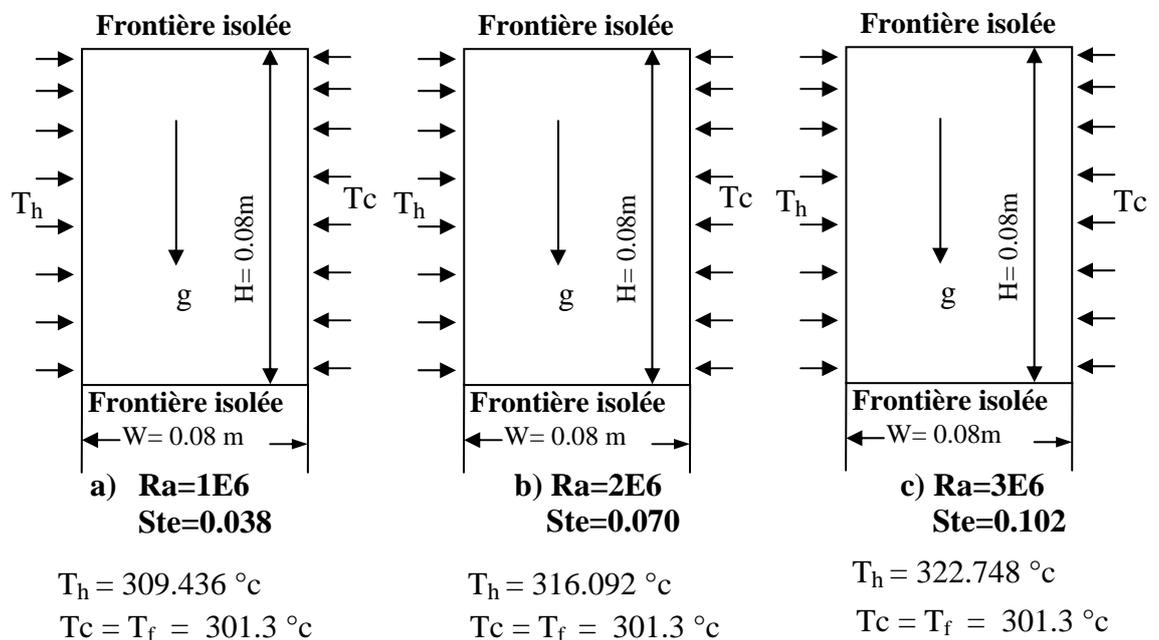


Figure 5.52 : Représentation des différentes configurations des nombres de Rayleigh et de Stefan

### 5.9.2. Effet des nombres de Rayleigh et de Stefan sur les paramètres physiques

En conservant la même géométrie du matériau et en jouant seulement sur la variation des nombres de Rayleigh et de Stefan, nous constatons que :

- 1- Le nombre de roulements maximum dépend essentiellement des nombres de Rayleigh et de Stefan, et on aura :

<b>Ra</b>	<b>Ste</b>	<b>N<sup>bre</sup> de roulements</b>
1E6	0.038	05
2E6	0.070	05
3E6	0.102	06

- 2- Les temps de transitions (fusionnement) sont différents pour chaque configuration des nombres de Rayleigh et de Stefan.
- 3- La forme et la taille de chaque roulement dépendent fortement des nombre de Rayleigh et de Stefan utilisés.
- 4- Le nombre de Nusselt calculé à la paroi chaude pour un temps donné, diminue en augmentant les nombres de Rayleigh et de Stefan (figure (5.58)), à titre d'exemple:

<b>Ra</b>	<b>Ste</b>	<b>Nu (t=100 s)</b>	<b>Nu (t=200 s)</b>
1E6	0.038	15.77	14.33
2E6	0.070	11.84	11.64
3E6	0.102	8.5	7.15

- 5- La fraction liquide du volume fondu augmente avec l'accroissement des nombres de Rayleigh et de Stefan (figures (5.56-57)).

<b>Ra</b>	<b>Ste</b>	<b>Volume (%) à t=100 s</b>	<b>Volume (%) à t=200 s</b>
1E6	0.038	6.8	8.3
2E6	0.070	12.4	19
3E6	0.102	16.4	21.3

- 6- Les valeurs des paramètres ( $U_{\max}$ ,  $V_{\max}$ ,  $\psi_{\max}$ ) au cours de la fusion, augmentent avec l'accroissement des nombres de Rayleigh et de Stefan (figures (5.59-61) respectivement) :

<b>Ra</b>	<b>Ste</b>	<b>t=100 s</b>		
		$U_{\max}$ (m/s)	$V_{\max}$ (m/s)	$\psi_{\max}$
1E6	0.038	3.01 E-3	7.87 E-3	4.24 E-7
2E6	0.070	16.6 E-3	19.6 E-3	1.32 E-6
3E6	0.102	26.1 E-3	29.7 E-3	2.05 E-6

- 7- Contrairement au facteur de forme, la variation de la température dans le matériau pour une abscisse de coordonnée donnée ( $x$ ), suit proportionnellement l'augmentation des nombres de Rayleigh et de stefan. Par exemple, les résultats obtenus pour  $x = 0.05\text{m}$  et un temps de calcul  $t = 150\text{s}$  (figure (5.62)) sont :

- $T = 304.80$  (K) pour  $Ra = 1E6$  et  $Ste = 0.038$
- $T = 314.02$  (K) pour  $Ra = 2E6$  et  $Ste = 0.070$
- $T = 320.73$  (K) pour  $Ra = 3E6$  et  $Ste = 0.102$

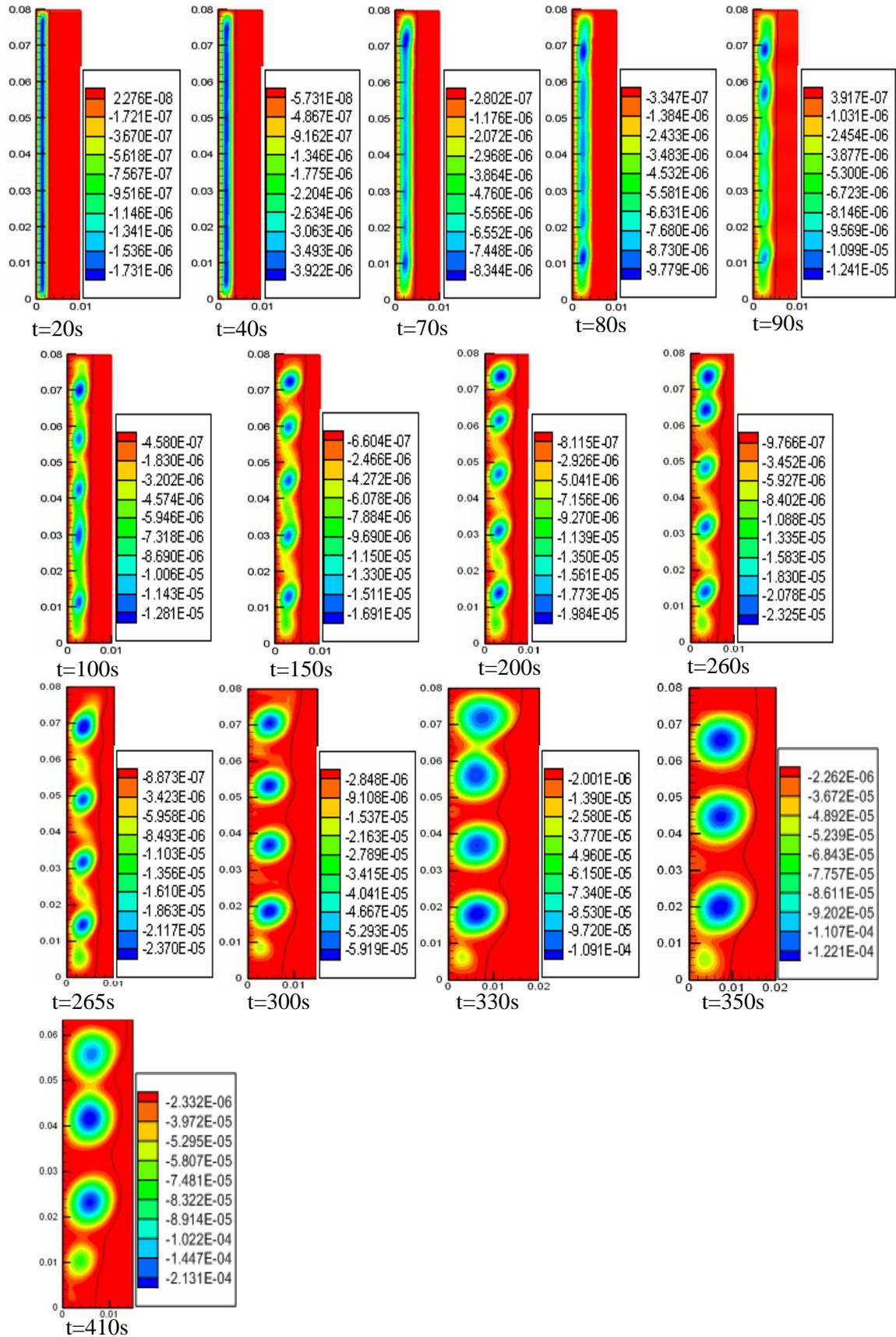


Figure 5.53 : Représentation des lignes de courant pour  $Ra=1E6$  et  $Ste=0.038$

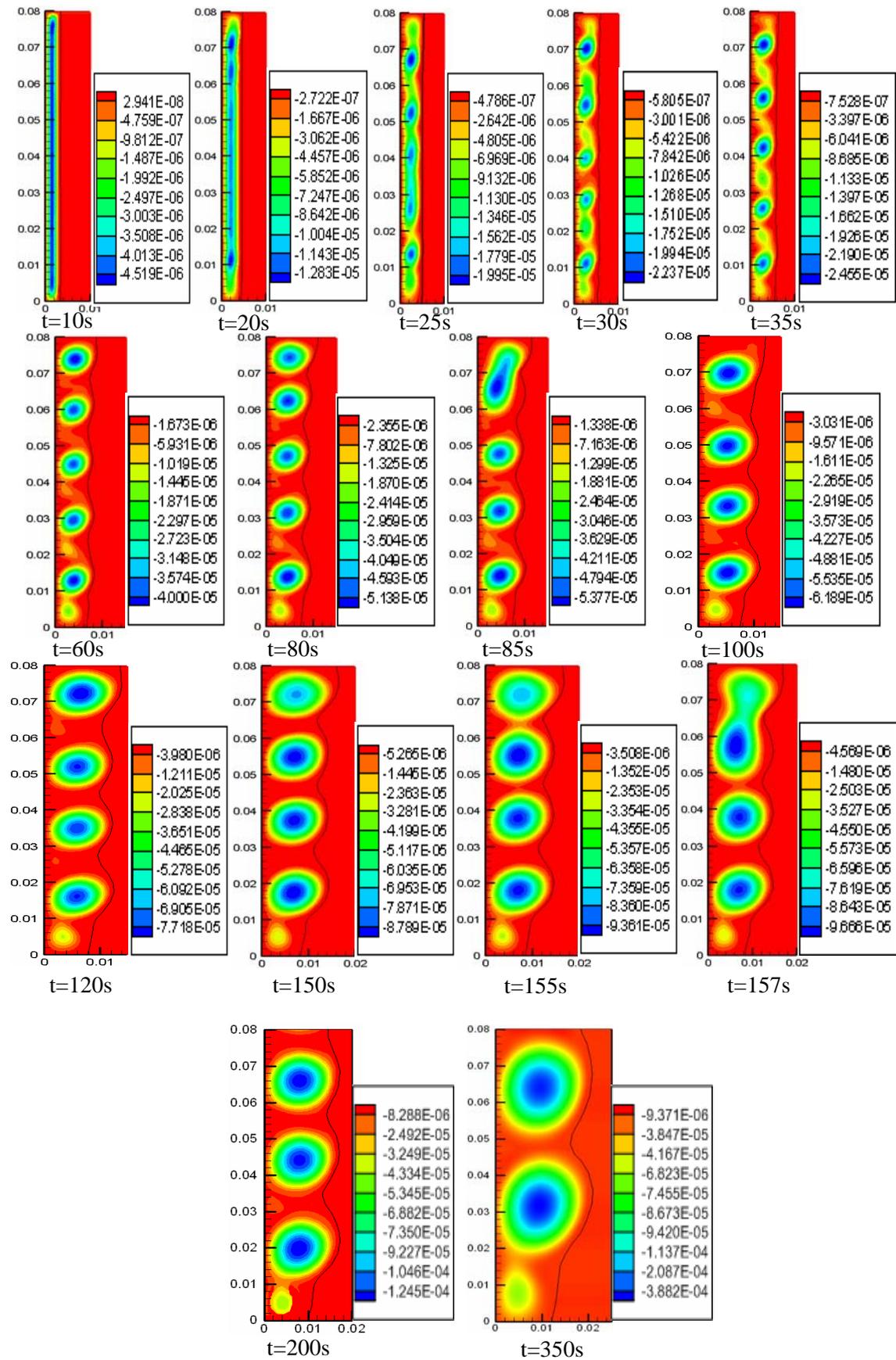


Figure 5.54 : Représentation des lignes de courant pour  $Ra=2E6$  et  $Ste=0.070$

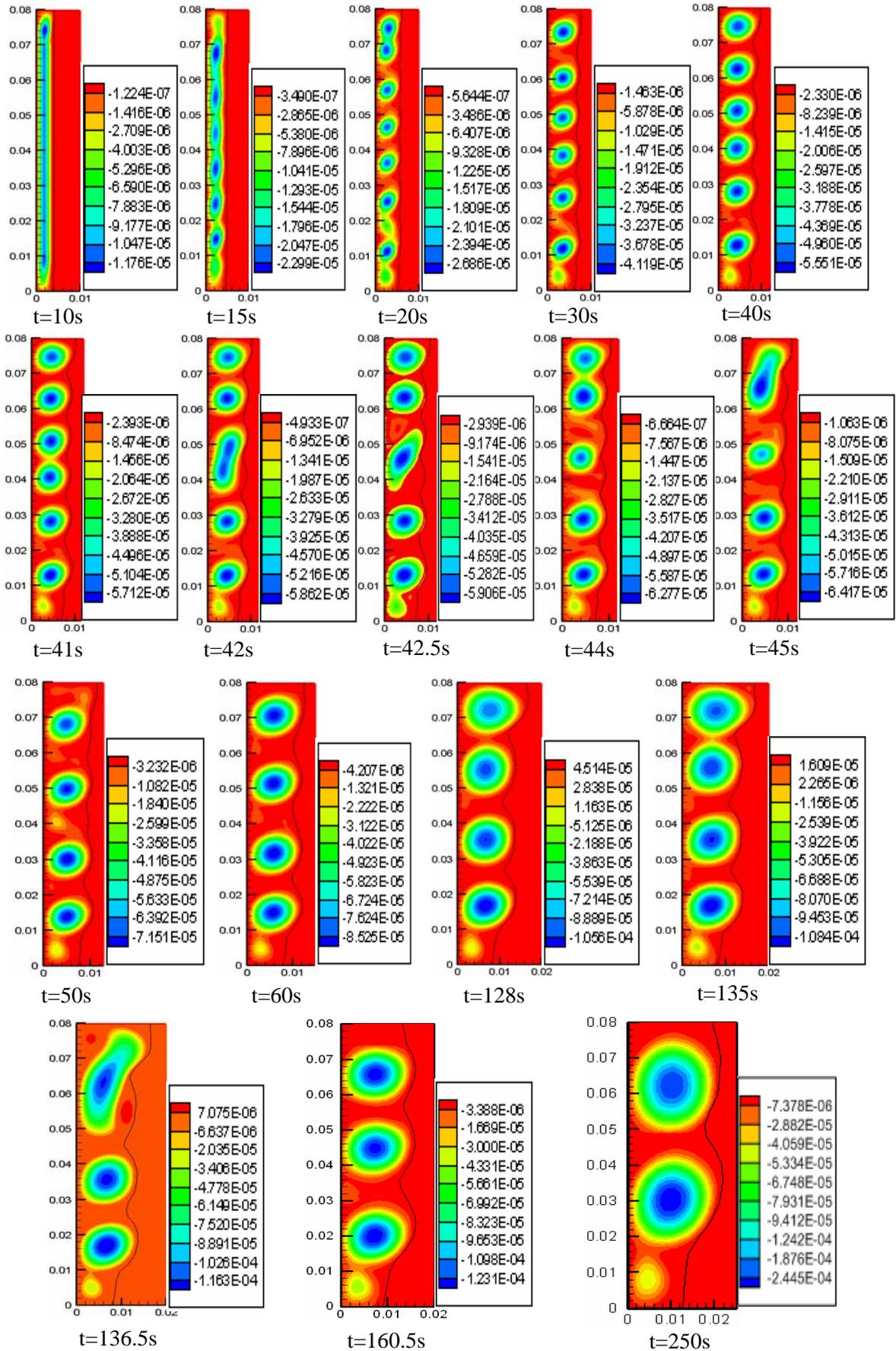


Figure 5.55 : Représentation des lignes de courant pour  $Ra=3E6$  et  $Ste=0.102$

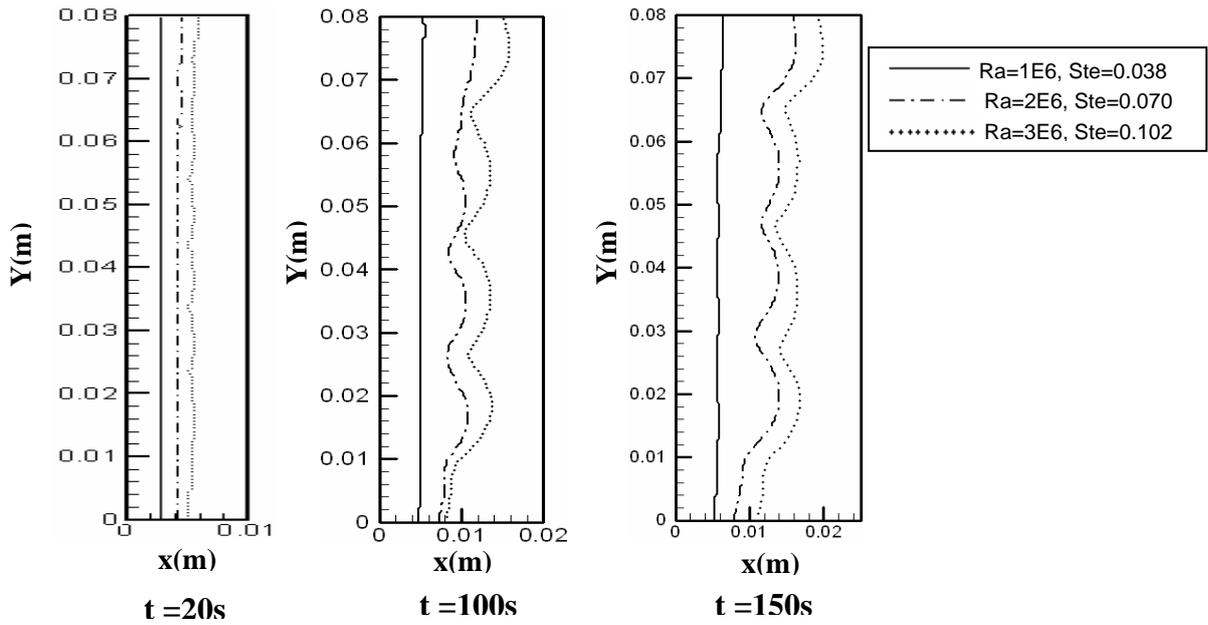


Figure 5.56 : Effet des nombres de Rayleigh et de Stefan sur l'interface liquide-solide

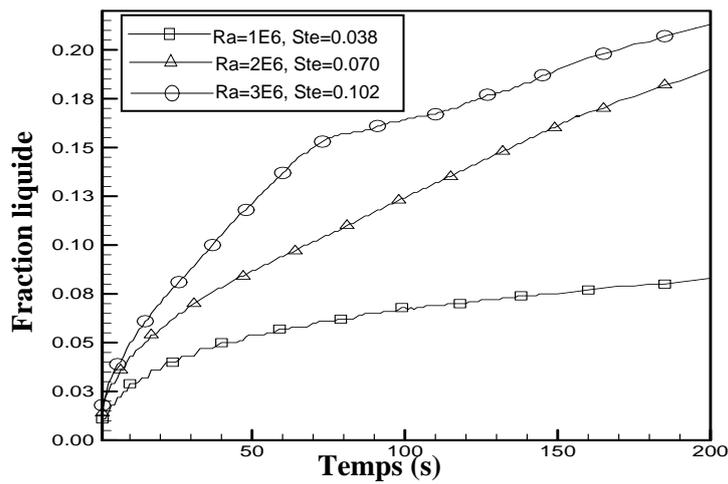


Figure 5.57 : Effet des nombres de Rayleigh et de Stefan sur la fraction liquide

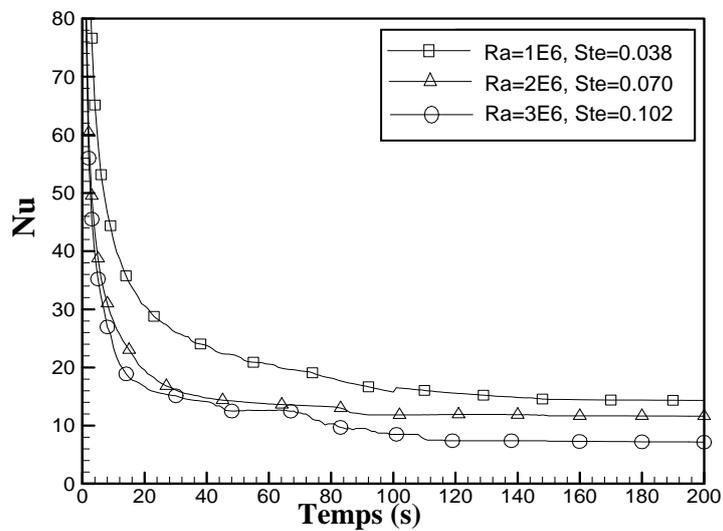


Figure 5.58 : Effet des nombres de Rayleigh et de Stefan sur le nombre de Nusselt

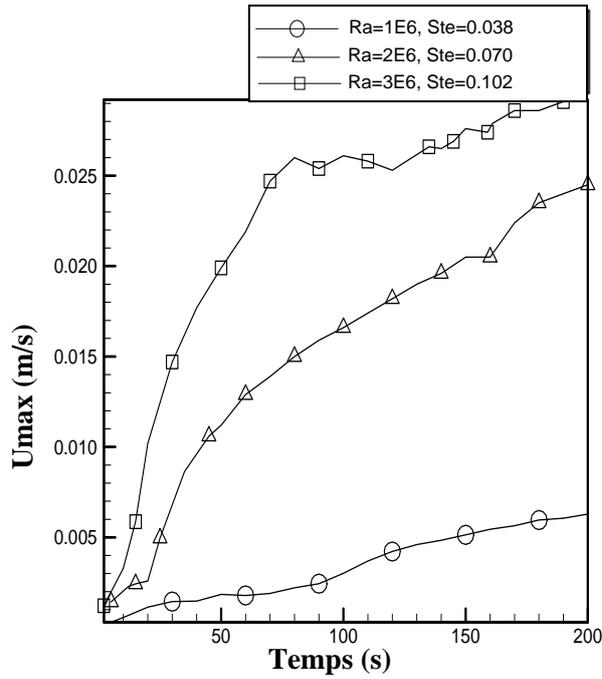


Figure 5.59 : Evolution de la composante ( $U_{max}$ ) au cours de la fusion

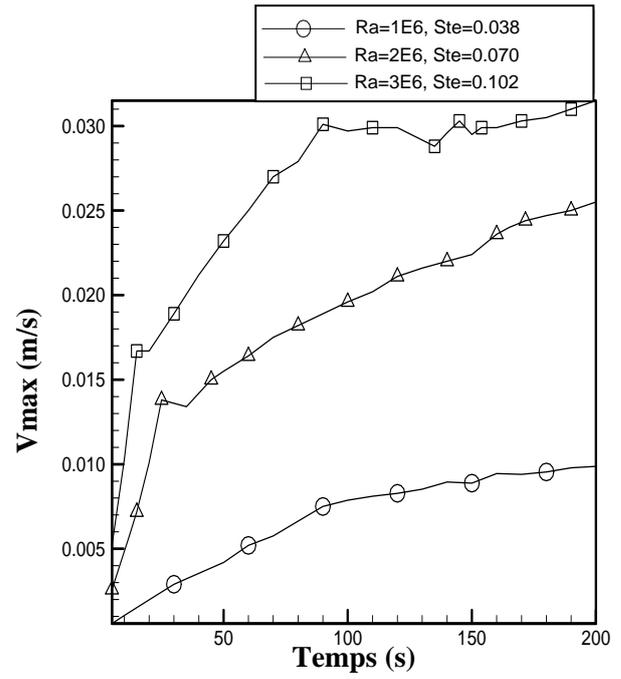


Figure 5.60 : Evolution de la composante ( $V_{max}$ ) au cours de la fusion

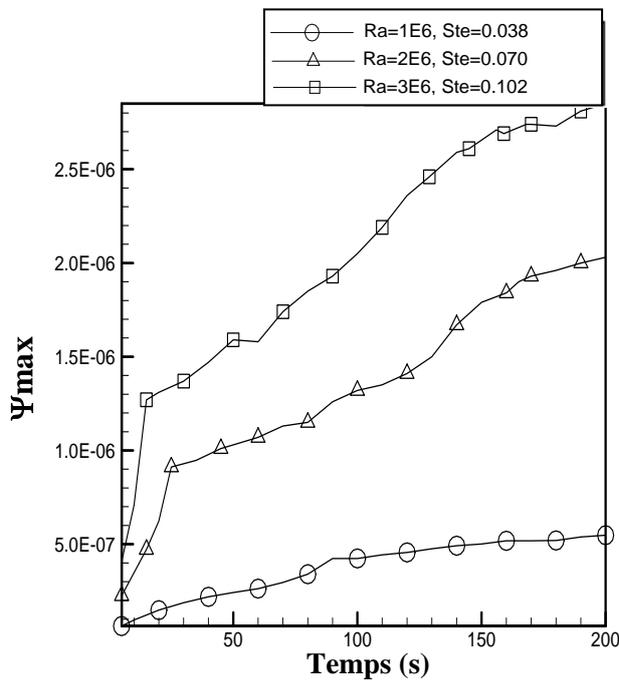


Figure 5.61 : Evolution de la fonction ( $\Psi_{max}$ ) au cours de la fusion

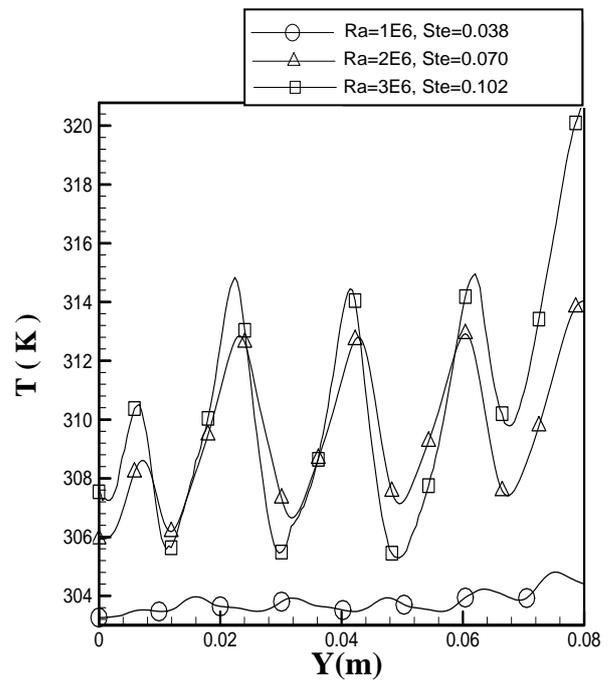


Figure 5.62 : Evolution de la température pour  $X=0.05m$ , au temps 150 s

### 5.10. Conclusion

Notre volume de contrôle avec les discrétisations quick et centré, étant de l'ordre deux dans l'espace et dans le temps, n'est probablement pas la technique numérique la plus efficace aujourd'hui, mais dans la présente étude elle a été poussée à ses limites et nous sommes parvenus à atteindre un temps de calcul  $t = 1000s$ . Au-delà, un maillage adaptatif raffiné, des schémas d'ordre supérieur et un code de calcul parallèle sont nécessaires pour atteindre un niveau acceptable de la convergence.

Les résultats obtenus pour la plupart des quantités physiques étudiées dans ce chapitre, pour un maillage fin, traduisent un bon niveau de convergence de la solution numérique. Mais il restera toujours à prouver l'exactitude des coordonnées des roulements observées tôt au cours de la fusion. Par exemple, dans le cas du gallium, le premier fusionnement est observé autour de 135s. Est-il prévu exactement ? Car la faible erreur dans la détermination de cette position change nettement les temps des autres fusionnements. Ceci est observé dans nos résultats et dans la littérature [37, 43, 44] où une large grille peut capturer le comportement physique du problème étudié tel que le nombre exact des roulements, mais elle reste toujours très loin pour donner les vrais valeurs des temps de fusionnement. En plus, la forme de l'interface liquide-solide et le nombre de Nusselt (Nu) sont fortement affectés par les emplacements initiaux des roulements.

Pour les oscillations observées sur les courbes présentant la variation du nombre de Nusselt et particulièrement autour du temps 275s, notamment par l'application des schémas de discrétisation d'ordre supérieur sont probablement d'origine numérique, d'où la nécessité d'utiliser un pas du temps très faible ( $\Delta t < 1E-3$  s).

Par contre, dans nos travaux nous nous sommes allés jusqu'à un pas du temps cinq fois inférieur à celui utilisé dans nos résultats, mais avec aucun changement considérable de la nature oscillante de la solution numérique, malgré l'utilisation d'une grille fine de taille (630x450). De plus, ces oscillations ne sont pas importantes que celles observées dans le cas de l'étain [37, 43, 44]. Le nombre de Peclet explique vraisemblablement cette observation car dans notre étude, avec la grille la plus fine, le nombre de Peclet est

inférieur à celui constaté dans les travaux de Hannoun et al [43, 44]. Ce qui justifie l'oscillation au delà du temps  $t = 275s$ , d'où le nombre de Peclet est supérieur à 2.

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce travail, une simulation de la fusion des matériaux à changement de phase en présence de la convection naturelle a été présentée, en vue d'une application à une enceinte rectangulaire chauffée à l'aide de sources de chaleur continues, réparties le long des parois latérales conductrices. D'un point de vue plus appliqué, ce travail apporte des résultats d'un grand intérêt afin d'améliorer les performances d'éléments de stockage ou de dissipation d'énergie par chaleur latente.

Le manque des solutions de référence pour des problèmes à changement de phase en présence de la convection naturelle, est une question d'actualité qui nous a amené à inclure un modèle numérique fondé sur la résolution des équations de Navier-Stokes, en introduisant une modélisation mathématique basée sur la formulation enthalpique. Ce modèle prend en compte la convection naturelle qui se manifeste dans le matériau à changement de phase fondu et la conduction dans la partie solide du matériau et dans les parois latérales. Le problème a été présenté et discuté à l'aide d'une méthode de volumes finis.

Notre objectif est basé sur la validation de notre programme de calcul par une simple comparaison de nos résultats avec ceux établis par Hannoun et al. [43, 44]. Dans ce contexte, les approximations pour les divers termes sont d'une précision de deuxième ordre. Du point de vue physique, nos résultats présentent un certain nombre de similitudes avec les études considérées dans la littérature, en validant ainsi les capacités prédictives de l'outil numérique.

L'étude du problème benchmark proposé par Lequere et al. [38] sur l'étain, nous a mené à confirmer l'existence de deux roulements au temps 1000s, éliminant ainsi le doute sur la validité de la solution numérique et sur la nature multicellulaire de l'écoulement.

L'origine de l'incompatibilité enregistrée entre les résultats expérimentaux de Gau et al. [34], avec un seul roulement au temps 1000s et nos résultats, est probablement due à la difficulté de maintenir expérimentalement un champ de températures uniforme sur les

conditions aux limites au cours de tout le processus de la fusion ayant comme conséquence un remplacement du fluide réel dans la fonte par une température uniforme et une vitesse de liquide nulle.

L'introduction du schéma quick pour le traitement du terme convectif et l'utilisation des algorithmes de résolution comme SIMPLER et PISO, nous a permis d'obtenir des résultats très satisfaisants en suivant l'évolution de la fusion d'étain jusqu'au temps 1200s. En conclusion :

- Le raffinement du maillage est nécessaire pour obtenir des résultats significatifs.
- L'utilisation d'un schéma de discrétisation d'ordre supérieur est indispensable.
- L'utilisation d'un pas du temps assez petit ( $\Delta t < 10^{-3} s$ ) est nécessaire pour l'élimination d'une grande partie des oscillations observées sur les courbes représentatives du nombre de Nusselt.
- Toute erreur sur la détermination des positions initiales des roulements influera sur les autres temps de fusionnement.

La fusion du gallium a été abordée par l'étude d'une enceinte chauffée verticalement, en démontrant un bon niveau de convergence de la solution numérique trouvée sous l'effet de la taille des grilles pour la plupart des quantités d'intérêt physiques (température, lignes de courant, temps de fusionnement, emplacements des roulements, etc.). Ce travail nous a permis d'établir une solution de référence en incluant des tables et des courbes pour les dispositifs les plus importants, qui peuvent être employées comme un point de départ pour vérifier d'autres codes de calcul et modèles mathématiques.

La modification des propriétés thermiques des parois du gallium (conditions aux limites) et la géométrie du matériau nous a permis d'étudier et d'analyser le comportement des nombres adimensionnels (nombres de Rayleigh et de Stefan) et du facteur de forme ( $Ar$ ) sur le phénomène du changement de phase.

Notre code de calcul a été conçu pour fonctionner sur un seul ordinateur avec un maillage monobloc. Ce mode de fonctionnement adapté aux moyens informatiques utilisés pourra être amélioré. L'émergence d'une nouvelle technologie basée sur l'architecture parallèle entraîne sans doute la disparition des ordinateurs vectoriels dans le domaine du

calcul intensif dans un avenir proche, car un serveur de calcul à architecture parallèle permet d'étudier des phénomènes complexes, encore plus proches de la réalité.

Dans la foulée des travaux de simulation de problèmes à frontières mobiles, la présente étude inspire des améliorations au niveau des méthodes numériques. En effet, le principal inconvénient de cette méthode à maillage fixe est le nombre relativement faible de points de grille près de l'interface liquide-solide. Cet inconvénient n'est pas intrinsèque à la formulation enthalpique, mais est plutôt relié au maillage fixe employé. Ces dernières années, des efforts ont été déployés afin de développer des méthodes de maillages auto-adaptatifs en CFD, habituellement en éléments finis. Les nœuds se positionnent et/ou s'ajoutent automatiquement de manière à réduire l'erreur (estimée). Ainsi, émerge l'idée d'une méthode hybride pour traiter les problèmes de changement de phase, basée sur la formulation enthalpique et à cheval au niveau des concepts entre les deux formulations exposées. Cette méthode serait aussi souple qu'une méthode enthalpique classique, mais corrigerait son principal défaut en plaçant automatiquement plus de nœuds au voisinage du front de fusion, sans nécessairement générer un nouveau maillage à chaque pas de temps. D'autres méthodes adaptatives plus ou moins hybrides peuvent également être envisagées.

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire uniquement à l'étude du phénomène de changement de phase, en présence de la convection naturelle seulement. Il sera certainement utile dans des travaux futurs, de prendre en considération l'effet du rayonnement. Le modèle présenté dans ce mémoire étant pour l'instant limité au cas laminaire, mais il est vraisemblable que son extension au cas turbulent pourrait permettre d'avoir des résultats plus précis.

Il serait aussi possible de considérer des enceintes horizontales, c'est-à-dire des enceintes pour lesquelles les sources de chaleur sont placées sur la paroi inférieure, ou encore d'inclure des sources de chaleurs discrètes ou pulsées.

**APPENDICE A**  
**LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS**

$A_{e,w,n,s}$	:	Aires des surfaces d'un volume de contrôle
$a_{E,W,N,S}$	:	Coefficients de matrice des points voisins au point P
Ar	:	Facteur de forme (H/W)
B	:	Fonction de porosité
B*	:	Fonction de porosité adimensionnée
C	:	Constante morphologique dans la relation de Carman-Koseny
c	:	Chaleur spécifique
CN	:	Convection naturelle
d	:	Largeur caractéristique de l'enceinte
$F_0$	:	Nombre de Fourier
$f_l$	:	Fraction liquide
g	:	Accélération gravitationnelle
H	:	Hauteur de l'enceinte
h	:	Enthalpie sensible
H (T)	:	Energie totale
k	:	Conductivité thermique
L	:	Chaleur latente de fusion
Nu	:	Nombre de Nusselt
p	:	Pression
$p'$	:	Correction de la pression
$P^*$	:	Pression adimensionnée
Pe	:	Nombre de Peclet
Pr	:	Nombre de Prandtl
q	:	Flux de chaleur
Ra	:	Nombre de Rayleigh
S	:	Termes sources dans les équations de conservation
$S_C$	:	Partie fixe du terme source
$S_P$	:	Partie variable du terme source
Ste	:	Nombre de Stefan
T	:	Température
t	:	Temps
$T_c$	:	Température froide
$T_f$	:	Température de fusion
$T_h$	:	Température chaude
$T_m$	:	Température moyenne
$T_{réf}$	:	Température de référence

$u$	:	Composante horizontale de la vitesse
$u'$	:	Correction de la vitesse horizontale
$u^*$	:	Vitesse verticale adimensionnée
$u_j$	:	Composantes du vecteur vitesse
$v$	:	Composante verticale de la vitesse
$v'$	:	Correction de la vitesse verticale
$v^*$	:	Vitesse verticale adimensionnée
$W$	:	Largeur des parois latérales
$x$	:	Coordonnée horizontale de l'espace
$x^*$	:	Coordonnée horizontale adimensionnée
$y$	:	Coordonnée verticale de l'espace
$y^*$	:	Coordonnée verticale adimensionnée

### Symboles Grec

$\Delta t$	:	Pas de temps
$\Delta v$	:	Volume d'une maille de calcul (volume de contrôle)
$\Phi$	:	Variable générale dans l'écriture des équations de conservation
$\Gamma$	:	Coefficient de diffusion
$\alpha$	:	Diffusivité thermique
$\alpha^*$	:	Diffusivité thermique adimensionnée
$\beta_v$	:	Coefficient d'expansion volumique
$\partial_i$	:	Dérivée par rapport à la composante $i$
$\delta$	:	Fonction delta de Dirac
$\mu$	:	Viscosité dynamique
$\theta$	:	Température adimensionnée
$\rho$	:	Densité
$\rho_{réf}$	:	Densité de référence

### Indices inférieurs

$l$	:	Phase liquide
$f$	:	Au point de fusion
$i$	:	$i^{\text{ème}}$ composante
$e, w, n, s$	:	Évalué sur la face correspondante du volume de contrôle entourant le point $P$
$E, W, N, S$	:	Évalué sur le point correspondant entourant le point $P$
$réf$	:	De référence
$s$	:	Phase solide

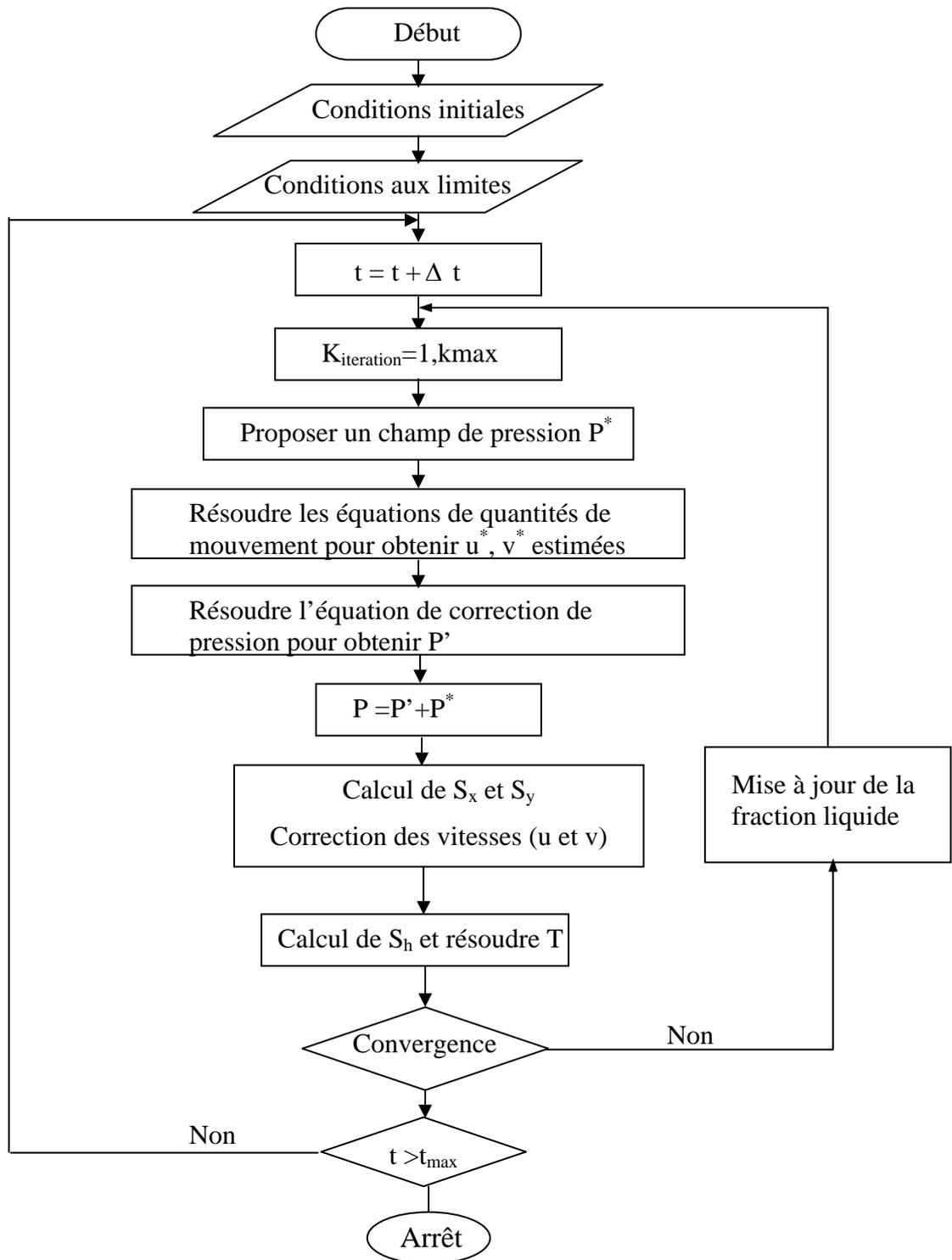
### Indices supérieurs

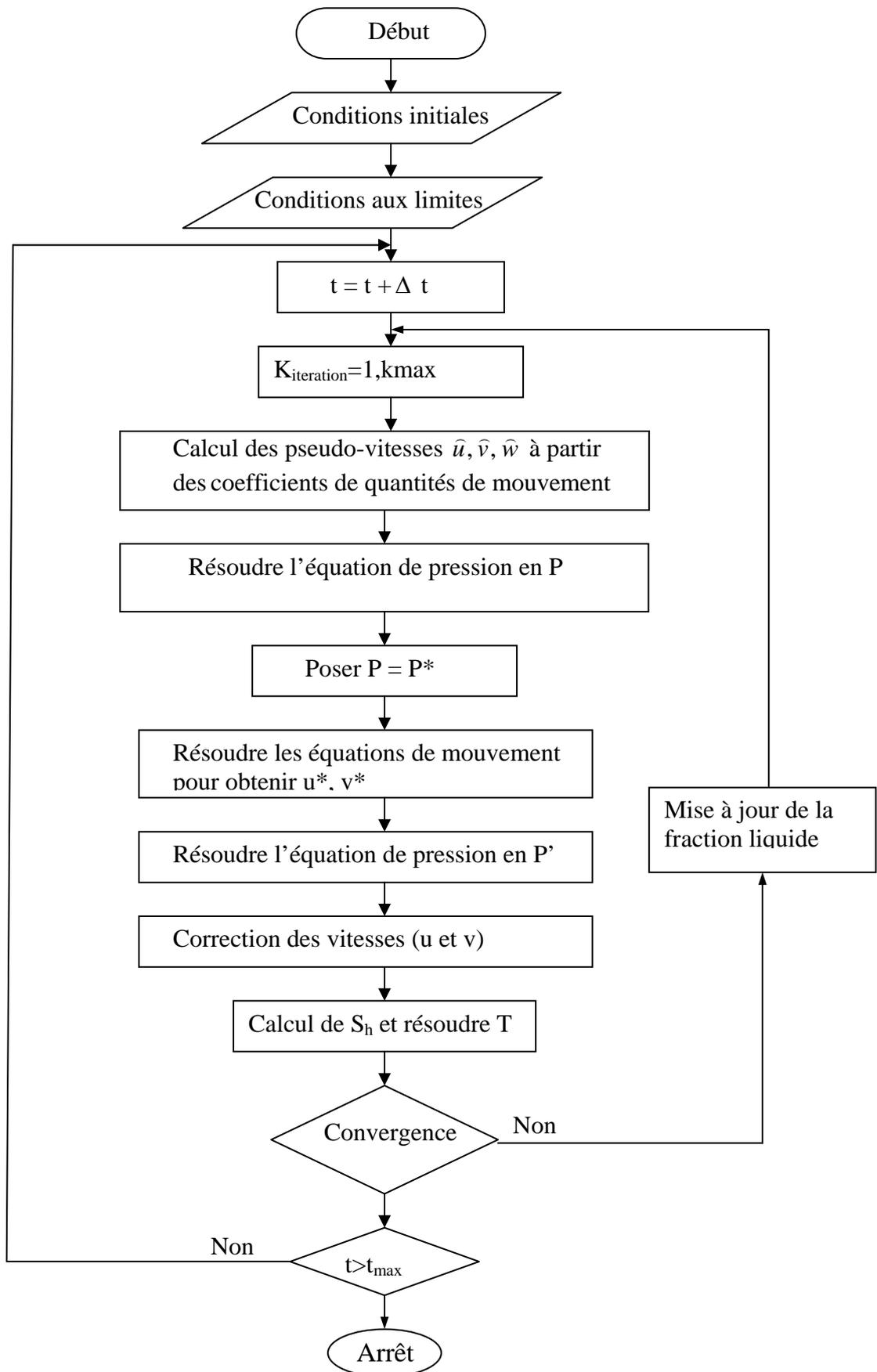
$0$	:	Temps précédent
-----	---	-----------------

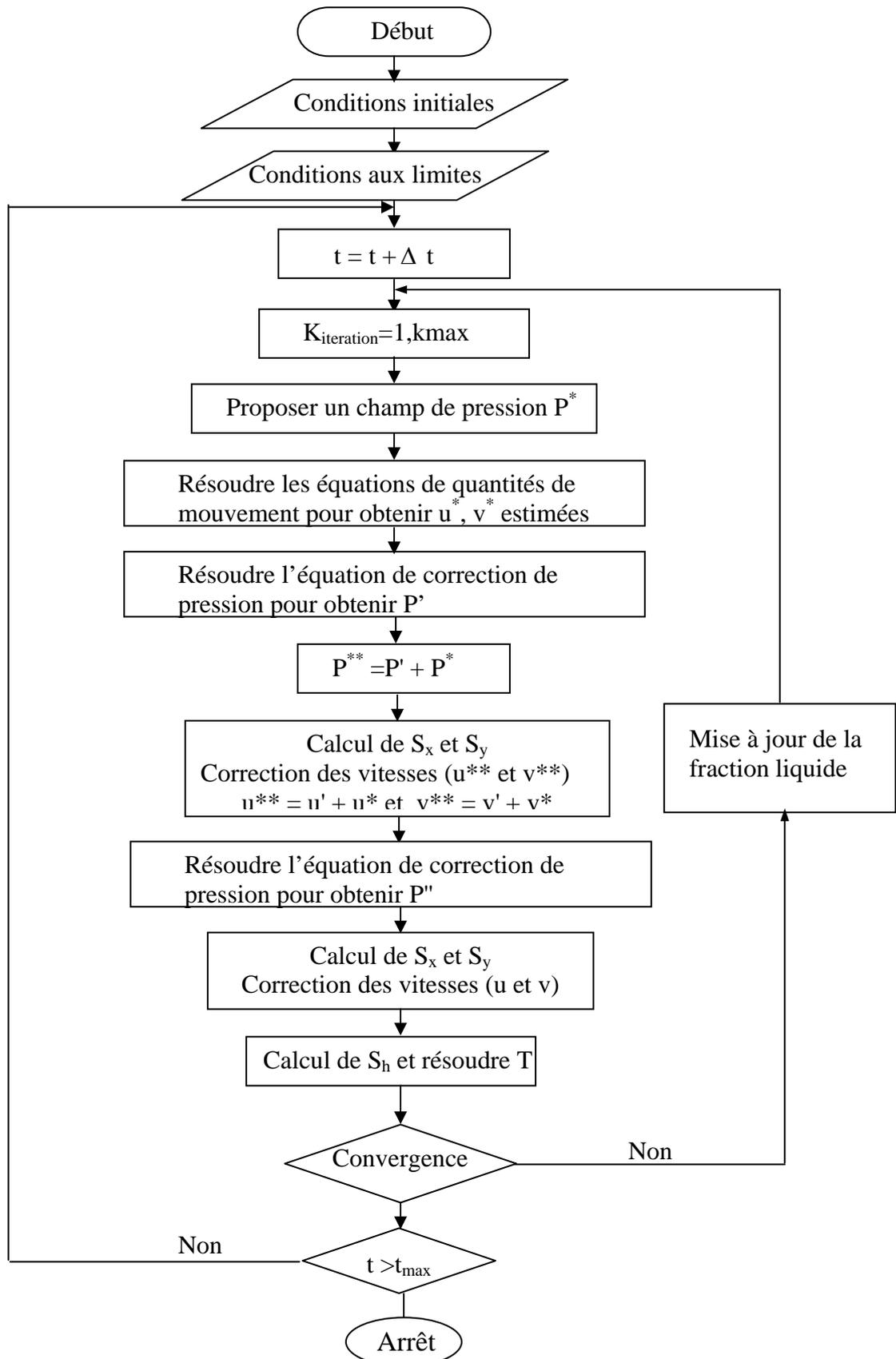
## APPENDICE B ORGANIGRAMMES DE PROGRAMMATION

Ce paragraphe présente la stratégie utilisée au cours du processus itératif de la résolution numérique

### 1. Algorithme SIMPLE et SIMPLEC



2. Algorithme SIMPLER

3. Algorithme PISO

## APPENDICE C

### METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Pour chaque variable  $\Phi$ , nous résoudrons un système d'équations linéaires, pour cela nous avons le choix entre plusieurs méthodes.

#### 1. Méthodes directes : TDMA

Les systèmes obtenus sont ici tridiagonaux. Leur résolution se fait donc en utilisant l'algorithme TDMA qui transforme le système tridiagonal en un système triangulaire supérieur dont la résolution est immédiate par remontée.

Pour présenter l'algorithme, nous supposons que les points du maillage sont notés par 1, 2, 3, ... N, avec les points 1 et N aux limites et nous aurons :

$$a_i \Phi_i = b_i \Phi_{i+1} + c_i \Phi_{i-1} + d_i$$

$$a_1 \Phi_1 = b_1 \Phi_2 + c_1 \Phi_0 + d_1$$

$$a_2 \Phi_2 = b_2 \Phi_3 + c_2 \Phi_1 + d_2$$

$$a_n \Phi_n = b_n \Phi_{n+1} + c_n \Phi_{n-1} + d_n$$

Avec

$$c_1 = 0 \quad \text{et} \quad b_N = 0$$

Les valeurs  $\Phi_0$  et  $\Phi_{N+1}$  n'ont aucun rôle.

Nous pouvons calculer chaque terme en fonction du suivant :

$$\Phi_{n-1} = P_{n-1} \Phi_n + Q_{n-1}$$

En substituant, nous aurons

$$a_i \Phi_i = b_i \Phi_{i+1} + c_i (P_{i-1} \Phi_i + Q_{i-1}) + d_i$$

Et donc

$$\Phi_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \Phi_{i+1} + \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}}$$

Alors

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}}$$

Le procédé consiste à balayer une première fois pour calculer  $P_1, P_1$  puis  $P_2, P_2$  jusqu'à  $P_N, Q_N$  car :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

Et

$$P_N = 0 \quad Q_N = \Phi_N$$

Puis finalement partant de  $i=N$ , nous avons  $Q_N = \Phi_N$  et nous calculons  $\Phi_{N-1}$  puis  $\Phi_{N-2}$ , nous balayons une seconde fois dans le sens inverse.

## 2. Méthodes itératives

Il est difficile d'étendre la méthode TDMA vue pour la dimension 1 au cas de la dimension 2 et 3.

Pour résoudre le système, nous pourrions employer des méthodes directes, mais elles sont souvent longues et si notre problème n'est pas linéaire, il faudra de toutes façons le faire itérativement en utilisant plusieurs méthodes.

### a) Méthode de Gauss Seidel

Algorithme de Gauss Seidel pour la résolution d'un système linéaire  $A\Phi = d$  est donné par:

- 1- étant données  $A, d, \Phi^{(0)}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, k_{\max}$
- 2- 
$$\Phi_i^{(k+1)} = \left[ d_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \Phi_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \Phi_j^{(k)} \right] / a_{ii}$$

$$i = 1, n \quad k = 1, \dots, k_{\max}$$
- 3- Arrêter si  $\left| \Phi_i^{(k+1)} - \Phi_i^{(k)} \right| < \varepsilon_1$ .  
Ou  $\left| \Phi_i^{(k+1)} - \Phi_i^{(k)} \right| < \varepsilon_2$

b) Méthode de Relaxation

1- étant données  $A, d, \Phi^{(0)}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, k_{\max}$

$$2- \Phi_i^{(k+1)} = \Phi_i^{(k)} + \omega \left[ d_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \Phi_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \Phi_j^{(k)} \right] / a_{ii}$$

$i = 1, n \quad k = 0, \dots, k_{\max}$

3- Arrêter si  $|\Phi_i^{(k+1)} - \Phi_i^{(k)}| < \varepsilon_1$

Où  $|\Phi_i^{(k+1)} - \Phi_i^{(k)}| / |\Phi_i^{(k+1)}| < \varepsilon_2 \quad \forall i = 1, n$

Tel que  $\omega \neq 0$

Si  $\omega > 1$ , on retrouve la méthode de sur-relaxation

Si  $\omega < 1$ , on retrouve la méthode de sous-relaxation

c) Méthode ligne par ligne

Cette méthode s'inspire de la méthode TDMA et de celle de Gauss Seidel. Choisissons un maillage, tel que par exemple, nous connaissons sur une ligne dans la direction des  $y$ , les valeurs de  $\Phi$  sur les lignes voisines et résolvons sur cette ligne le problème devenu unidirectionnel, par la méthode TDMA et nous répétons cette méthode si besoin.

Et pour notre problème nous avons :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b$$

En posant :

$$d = a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b$$

On obtient :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + d \quad \text{C'est le cas présenté dans le paragraphe précédent.}$$

**APPENDICE D**  
**TABLEAUX DES RESULTATS**

Tableau 1 : Valeurs de la fonction de courant et de température pour des profils transversaux

<b>t = 10s</b>			<b>t = 70s</b>			<b>t = 100s</b>		
<b>y(x=0.0017)</b> <b>(m)</b>	<b><math>\psi</math></b>	<b>T</b> <b>(°C)</b>	<b>y(x=0.0033)</b> <b>(m)</b>	<b><math>\psi</math></b>	<b>T</b> <b>(°C)</b>	<b>y(x=0,0040)</b> <b>(m)</b>	<b><math>\psi</math></b>	<b>T</b> <b>(°C)</b>
0,0000	0,00E+00	3,07E+02	0,00E+00	0,00E+00	3,06E+02	0,00E+00	0,00E+00	3,06E+02
0,0025	-7,38E-07	3,07E+02	2,41E-03	-5,59E-06	3,06E+02	2,28E-03	-7,33E-06	3,06E+02
0,0050	-7,64E-07	3,07E+02	4,97E-03	-8,03E-06	3,06E+02	4,97E-03	-1,23E-05	3,07E+02
0,0075	-7,64E-07	3,07E+02	7,54E-03	-4,44E-06	3,06E+02	7,54E-03	-6,80E-06	3,07E+02
0,0100	-7,65E-07	3,07E+02	1,01E-02	-1,50E-05	3,06E+02	1,01E-02	-1,39E-05	3,06E+02
0,0125	-7,66E-07	3,07E+02	1,27E-02	-2,61E-05	3,07E+02	1,27E-02	-2,88E-05	3,07E+02
0,0150	-7,66E-07	3,07E+02	1,49E-02	-1,92E-05	3,08E+02	1,49E-02	-2,64E-05	3,08E+02
0,0175	-7,66E-07	3,07E+02	1,75E-02	-3,91E-06	3,08E+02	1,75E-02	-6,73E-06	3,09E+02
0,0200	-7,67E-07	3,07E+02	2,00E-02	-5,15E-06	3,07E+02	2,00E-02	-1,65E-06	3,08E+02
0,0225	-7,67E-07	3,07E+02	2,26E-02	-3,30E-06	3,07E+02	2,26E-02	-5,15E-06	3,07E+02
0,0250	-7,68E-07	3,07E+02	2,49E-02	-5,54E-06	3,06E+02	2,49E-02	-3,08E-06	3,07E+02
0,0275	-7,68E-07	3,07E+02	2,74E-02	-2,15E-05	3,06E+02	2,74E-02	-1,52E-05	3,06E+02
0,0300	-7,68E-07	3,07E+02	3,00E-02	-2,41E-05	3,08E+02	3,00E-02	-2,92E-05	3,07E+02
0,0325	-7,69E-07	3,07E+02	3,26E-02	-7,80E-06	3,08E+02	3,26E-02	-2,13E-05	3,09E+02
0,0350	-7,68E-07	3,07E+02	3,51E-02	-2,64E-06	3,07E+02	3,51E-02	-2,64E-06	3,09E+02
0,0375	-7,68E-07	3,07E+02	3,74E-02	-2,41E-06	3,07E+02	3,74E-02	-1,75E-06	3,08E+02
0,0400	-7,68E-07	3,07E+02	3,99E-02	-6,48E-06	3,06E+02	3,99E-02	-1,98E-06	3,07E+02
0,0425	-7,67E-07	3,07E+02	4,25E-02	-2,27E-05	3,06E+02	4,25E-02	-1,45E-05	3,06E+02
0,0450	-7,67E-07	3,07E+02	4,51E-02	-2,27E-05	3,08E+02	4,51E-02	-2,86E-05	3,07E+02
0,0475	-7,66E-07	3,07E+02	4,76E-02	-5,73E-06	3,08E+02	4,76E-02	-2,04E-05	3,09E+02
0,0500	-7,66E-07	3,07E+02	4,99E-02	-1,64E-06	3,07E+02	4,99E-02	-3,49E-06	3,09E+02
0,0525	-7,65E-07	3,07E+02	5,24E-02	-2,17E-06	3,06E+02	5,24E-02	-9,05E-07	3,07E+02
0,0550	-7,64E-07	3,07E+02	5,50E-02	-1,62E-05	3,06E+02	5,50E-02	-1,22E-05	3,06E+02
0,0575	-7,63E-07	3,07E+02	5,76E-02	-2,46E-05	3,07E+02	5,76E-02	-2,60E-05	3,07E+02
0,0600	-7,73E-07	3,08E+02	6,01E-02	-1,09E-05	3,08E+02	6,01E-02	-1,80E-05	3,09E+02
0,0625	-4,99E-07	3,08E+02	6,24E-02	-7,24E-07	3,08E+02	6,24E-02	-2,19E-06	3,09E+02
0,0633	0,00E+00	3,08E+02	6,33E-02	0,00E+00	3,08E+02	6,33E-02	0,00E+00	3,09E+02

<b>t = 200s</b>			<b>t=300s</b>		
<b>y(x=0,000527)</b> <b>(m)</b>	<b><math>\psi</math></b>	<b>T</b> <b>(°C)</b>	<b>y(x=0,0070)</b> <b>(m)</b>	<b><math>\psi</math></b>	<b>T</b> <b>(°C)</b>
0,00E+00	0,00E+00	3,04E+02	0,00E+00	0,00E+00	3,04E+02
2,41E-03	-5,27E-06	3,05E+02	2,41E-03	-3,82E-06	3,04E+02
4,97E-03	-1,26E-05	3,05E+02	4,97E-03	-1,17E-05	3,05E+02
7,54E-03	-6,55E-06	3,06E+02	7,54E-03	-8,72E-06	3,06E+02
1,01E-02	-3,12E-06	3,05E+02	1,01E-02	-1,15E-07	3,05E+02
1,27E-02	-2,71E-05	3,05E+02	1,27E-02	-1,14E-05	3,05E+02
1,49E-02	-4,84E-05	3,06E+02	1,49E-02	-4,47E-05	3,05E+02
1,75E-02	-5,11E-05	3,07E+02	1,75E-02	-7,34E-05	3,06E+02
2,00E-02	-2,76E-05	3,09E+02	2,00E-02	-8,13E-05	3,07E+02
2,26E-02	-2,51E-06	3,08E+02	2,26E-02	-6,64E-05	3,08E+02
2,49E-02	-2,84E-06	3,07E+02	2,49E-02	-3,57E-05	3,09E+02
2,74E-02	-1,27E-06	3,06E+02	2,74E-02	-2,39E-06	3,08E+02

3,00E-02	-1,35E-06	3,05E+02	3,00E-02	-5,71E-07	3,07E+02
3,26E-02	-2,51E-05	3,05E+02	3,26E-02	-1,20E-06	3,06E+02
3,51E-02	-5,06E-05	3,06E+02	3,51E-02	8,32E-07	3,06E+02
3,74E-02	-5,39E-05	3,07E+02	3,74E-02	-4,32E-06	3,05E+02
3,99E-02	-3,28E-05	3,08E+02	3,99E-02	-3,77E-05	3,05E+02
4,25E-02	-4,43E-06	3,08E+02	4,25E-02	-6,96E-05	3,06E+02
4,51E-02	-1,50E-06	3,07E+02	4,51E-02	-8,22E-05	3,07E+02
4,76E-02	-5,03E-08	3,06E+02	4,76E-02	-7,38E-05	3,08E+02
4,99E-02	-6,76E-06	3,05E+02	4,99E-02	-4,88E-05	3,09E+02
5,24E-02	-3,68E-05	3,05E+02	5,24E-02	-1,10E-05	3,09E+02
5,50E-02	-5,62E-05	3,07E+02	5,50E-02	1,97E-06	3,08E+02
5,76E-02	-5,03E-05	3,08E+02	5,76E-02	-1,53E-06	3,08E+02
6,01E-02	-2,17E-05	3,09E+02	6,01E-02	-5,35E-06	3,08E+02
6,24E-02	-1,43E-06	3,09E+02	6,24E-02	-1,87E-06	3,08E+02
6,33E-02	0,00E+00	3,09E+02	6,33E-02	0,00E+00	3,08E+02

Tableau 2 : Positions d'interface liquide-solide

<b>Y(m)</b>	<b>X(t=50s)</b>	<b>X (t=70s)</b>	<b>X(t=100s)</b>	<b>X(t=200s)</b>	<b>X(t=300s)</b>
0,0000	5,60E-03	0,0059	6,56E-03	0,0072	0,0085
0,0025	5,60E-03	0,0062	6,56E-03	0,0075	0,0088
0,0050	5,92E-03	0,0066	6,88E-03	0,0082	0,0098
0,0075	5,92E-03	0,0066	6,88E-03	0,0085	0,0101
0,0100	5,92E-03	0,0066	7,20E-03	0,0085	0,0101
0,0125	6,24E-03	0,0072	7,83E-03	0,0094	0,0107
0,0150	6,56E-03	0,0075	8,47E-03	0,0104	0,0123
0,0175	6,24E-03	0,0072	8,47E-03	0,0110	0,0139
0,0200	6,24E-03	0,0069	8,15E-03	0,0110	0,0146
0,0225	5,92E-03	0,0069	7,51E-03	0,0107	0,0149
0,0250	5,92E-03	0,0066	7,20E-03	0,0098	0,0146
0,0275	6,24E-03	0,0069	7,51E-03	0,0091	0,0136
0,0300	6,56E-03	0,0075	8,15E-03	0,0088	0,0126
0,0325	6,24E-03	0,0075	8,47E-03	0,0098	0,0117
0,0350	6,24E-03	0,0072	8,47E-03	0,0107	0,0117
0,0375	5,92E-03	0,0069	7,83E-03	0,0114	0,0126
0,0400	6,24E-03	0,0066	7,51E-03	0,0114	0,0133
0,0425	6,56E-03	0,0072	7,51E-03	0,0107	0,0136
0,0450	6,56E-03	0,0075	8,15E-03	0,0098	0,0142
0,0475	6,24E-03	0,0075	8,47E-03	0,0094	0,0146
0,0500	6,24E-03	0,0069	8,47E-03	0,0098	0,0146
0,0525	5,92E-03	0,0069	7,83E-03	0,0107	0,0142
0,0550	6,24E-03	0,0069	7,51E-03	0,0117	0,0139
0,0575	6,56E-03	0,0075	8,47E-03	0,0120	0,0146
0,0600	6,56E-03	0,0075	8,79E-03	0,0120	0,0152
0,0625	6,56E-03	0,0075	8,79E-03	0,0117	0,0152
0,0633	6,56E-03	0,0075	8,79E-03	0,0117	0,0152

Tableau 3 : Présentation de différentes variables au cours du temps

Temps (s)	$U_{\max}$ (m/s)	$V_{\max}$ (m/s)	$\Psi_{\max}$	$U_{\min}$ (m/s)	$V_{\min}$ (m/s)	$\Psi_{\min}$	Nu	Fraction liquide
50	6,40E-03	1,06E-02	7,50E-07	-6,21E-03	-1,05E-02	-2,03E-05	15,8434	7,28E-02
70	7,89E-03	1,16E-02	8,24E-07	-7,74E-03	-1,11E-02	-2,62E-05	14,60954	8,12E-02
100	9,41E-03	1,27E-02	8,77E-07	-9,30E-03	-1,23E-02	-3,23E-05	13,58679	9,07E-02
150	1,16E-02	1,43E-02	9,71E-07	-1,15E-02	-1,38E-02	-4,58E-05	12,289	1,04E-01
200	1,31E-02	1,55E-02	1,02E-06	-1,30E-02	-1,49E-02	-5,76E-05	12,11498	1,16E-01
230	1,37E-02	1,62E-02	1,04E-06	-1,36E-02	-1,54E-02	-5,84E-05	11,65856	1,23E-01
300	1,57E-02	1,83E-02	2,29E-06	-1,55E-02	-1,78E-02	-8,24E-05	10,26865	1,47E-01
350	1,70E-02	1,98E-02	2,33E-06	-1,70E-02	-1,83E-02	-9,39E-05	9,87	1,61E-01

Tableau 4 : Valeurs des paramètres aux centres des roulements à t=70s

Maillage 630x450	t =70s			
Roulement	R1	R2	R3	R4
Xc (m)	0,003507	0,003594	0,003674	0,003676
Yc (m)	0,012832	0,029184	0,044385	0,05756
$\psi_c$	-2,71E-05	-2,69E-05	-2,71E-05	-2,60E-05
Tc (°C)	306,779	306,901	307,033	306,921

Tableau 5 : Valeurs des paramètres aux centres des roulements à t=200s

Maillage 630x450	t=200s		
Roulement	R1	R2	R3
Xc (m)	0,005277	0,005596	0,005905
Yc (m)	0,01652	0,03704	0,05598
$\psi_c$	-5,51E-05	-5,68E-05	-5,81E-05
Tc (°C)	306,883	307,039	307,168

Tableau 6 : Valeurs des paramètres aux centres des roulements à t=300s

Maillage 630x450	t = 300 s	
Roulement	R1	R2
Xc (m)	0,007189	0,007192
Yc (m)	0,02004	0,0457
$\psi_c$	-8,24E-05	-8,26E-05
Tc (°C)	307,028	307,226

Tableau 7 : Temps de transitions pour un maillage 630x450

Opération	Temps (s)
Début du modèle quasi 5 roulements	30
Début de formation de 4 roulements	34
Passage de 4 roulements à 3	135
Passage de 3 roulements à 2	275
Passage de 2 roulements à 1	710

## REFERENCES

1. Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., "Conduction of heat in solids", Oxford University Press (ch. 11), 1959.
2. Fukusako, S. and Yamada, M., "Recent advances in research on melting heat transfer problems", Proceedings of the Tenth International Heat Transfer Conference, Brighton, UK, vol. 1, pp. 313-331, 1994.
3. Viskanta, R., "Natural convection melting and solidification", in "Natural convection: Fundamentals and applications", edited by Kaçac, S., Aung, W. and Viskanta, R., Hemisphere, Washington DC, 1985.
4. Viskanta, R., "Phase change heat transfer", in "Solar heat storage: Latent heat materials", edited by Lane, G.A., CRC Press, Boca Raton, Florida, 1983.
5. Alexiades, V. and Solomon, A.D., "Mathematical modelling of melting and freezing processes", Hemisphere, Washington, DC, 1993.
6. Budhia, H. and Kreith, F., "Heat transfer with melting or freezing in a wedge", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 16, pp. 195-211, 1973.
7. Crank, J., "Free and moving boundary problems", Clarendon Press, Oxford, 1984.
8. Özisik, M.N., "Heat conduction", 2nd Edition, Wiley, 1993.
9. Rathjen, K.A. and Latif, M.J., "Heat conduction with melting or freezing in a corner", Journal of Heat Transfer, vol. 93, pp. 101-109, 1971.
10. Hale, N.W. and Viskanta, R., "Photographic observation of the solid-liquid interface motion during melting of a solid heated from an isothermal vertical wall", Letters Heat Mass Transfer, vol. 5, pp. 239-37, 1978.
11. Jany, P. and Bejan, A., "Scaling theory of melting with natural convection in an enclosure", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 31, pp. 1221-1235, 1988.

12. Marshall, R.H., "Natural convection effects in rectangular enclosures containing a phase change material", in "Thermal storage and heat transfer in solar energy systems", ASME, 1978.
13. Van Buren, P.D. and Viskanta, R., "Interferometric measurement of heat transfer during melting from a vertical surface", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 23, no 4, pp. 568-571, 1980.
14. Wolff, F. and Viskanta, R., "Melting of a pure metal from a vertical wall", *Experimental Heat Transfer*, vol. 1, pp. 17-30, 1987.
15. Gobin, D. and Benard, C., "Influence of the Prandtl number on the melting of metals", in "Fundamentals of phase change: Freezing, melting and sublimation", edited by Bayazitoglu, Y., ASME HTD, vol. 143, pp. 75-81, 1990.
16. Benard, C. and Gobin, D., "Numerical simulation of melting processes for metals, in "Multiphase flow heat and mass transfer", ASME HTD, vol. 109, pp. 55-60, 1989.
17. Kim, S., Anghaie, S., and Chen, G., "A Fixed grid two phase numerical model for convection dominated melting and solidification", First Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, Cambridge, 12-14, June 2001.
18. Desai, C. P. and K. Vafai, "A united examination of the melting process within a two dimensional rectangular cavity", *Journal of Heat Transfer*, vol. 115, pp. 1072-1075, 1993.
19. Viswanath, R. and Jaluria, Y., "A comparison of different solution methodologies for melting and solidification problems in enclosures", *Numerical Heat Transfer*, vol. 24, pp. 77-105, 1993.
20. Kuo, C. H. and Schreiber, W. C., "An interface tracking method for solving substance phase change problems using nonsteady curvilinear coordinates", in "Numerical simulation of flow and heat transfer", edited by Vafai, K. and Chen, J. L., ASME HTD, vol. 275, pp. 57-64, 1994.
21. McDaniel, D. J. and Zabarar, N., "A least squares front tracking finite element method analysis of phase change with natural convection", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 2755-2777, 1994.
22. Shyy, W., "Computational modeling for fluid flow and interfacial transport", Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, pp. 430-432, 1994.

23. Shyy, W. and Rao, M. M., "Enthalpy based formulation for phase change problems with application to g-Jitter", *Microgravity Science and Technology VII*, vol. 1, pp. 41-49, 1994.
24. Rady, A. and Mohanty, A. K., "Natural convection during melting and solidification of pure metals in a cavity", *Numerical Heat Transfer, Part A*, vol. 29, pp. 49-63, 1996.
25. Shyy, W., Udaykumar, H.S., Rao, M.M. and Smith, R.W., "Computational fluid dynamics with moving boundaries", Taylor & Francis, pp. 250-259, Washington D. C., 1996.
26. Voller, V. R., "An overview of numerical methods for solving phase change problem, in "Advances in numerical heat transfer" edited by Minkowycz, W. J. and Sparrow, E., vol. 1, pp. 340-380, Taylor & Francis, Washington D. C., 1997.
27. Shyy, W., Pal, S., Udaykumar, H.S. and Choi, D., "Structured moving grid and geometric conservation laws for fluid flow computation", *Numerical Heat Transfer, Part A*, vol. 34, pp. 369-397, 1998.
28. Khashan, S.A., "An advanced numerical model for phase change problems in complicated geometries", Ph.D., University of Pittsburgh, Pittsburgh, 1998.
29. Sampath, R. and Zabarar, N., "An object oriented implementation of a front tracking finite element method for directional solidification processes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, pp. 1227-1265, 1999.
30. Jaluria, Y., "Numerical modeling of thermal materials processing systems", *AMEFED*, vol. 250, pp. 137-148, 1999.
31. Stella, F. and Giangi, M., "Melting of a pure metal on a vertical wall: Numerical simulation", *Numerical Heat Transfer, Part A*, vol. 138, pp. 193-208, 2000.
32. Cerimele, M.M., Mansutti, D. and Pistella, F., "A front fixing method for fluids in liquid-solid phase change with a benchmark test", *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000*, Barcelona, 11-14 September 2000.
33. Campbell, T.A. and Koster, J.N., "Visualization of liquid-solid interface morphologies", *J. Crystal Growth*, vol. 140, pp. 414-425, 1994.

34. Gau, C. and Viskanta, R., "Melting and solidification of a pure metal from a vertical wall", *Journal of Heat Transfer*, vol. 108, pp. 171-174, 1986.
35. Cruchaga, M.A. and Celentano, D.J., "A finite element thermally coupled flow formulation for phase change problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 34, pp. 279-305, 2000.
36. Lequere, P. and Gobin, D., "Call for contribution", <http://m17.limsi.fr/Individu/plq/>, 1998.
37. Bertrand, O., Binet, B., Combeau, H., Couturier, S., Delannoy, Y., Gobin, D., Lacroix, M., Lequere, P., Medale, M., Mencinger, J., Sadat, H. and Vieira, G., "Melting driven by natural convection. A comparison exercise: First results", *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 38, pp. 5-26, 1999.
38. Gobin, D. and Lequere, P., "Melting from an isothermal vertical wall : Synthesis of a numerical comparison exercise", *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, vol. 7, pp. 289-306, 2000.
39. Dantzig, J.A., "Modelling liquid-solid phase changes with melt convection", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, pp. 1769-1785, 1989.
40. Brent, .A.D., Voller, V.R., and Reid, K.J., "Enthalpy-porosity technique for modeling convection-diffusion phase change: Application to the melting of a pure metal", *Numerical Heat Transfer*, vol. 13, pp. 297-318, 1988.
41. Cruchaga, M.A. and Celentano, D.J., "A fixed mesh finite element thermally coupled flow formulation for the numerical analysis of melting processes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, pp. 1231-1258, 2001.
42. Wintruff, I. and Gunther, C., "An adaptive moving grid model for convective melting and solidification problems", in "Interactive dynamics of convection and solidification", edited by Ehrhard, P., Riley, D. S. and Steen P. H., pp. 235-242, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 2001.
43. Alexiades, V., Hanoun, N. and Zee Mai, T. "Tin melting : Effect of grid size and scheme on the numerical solution", *Fifth Mississippi State Conference on Equation and Computational Simulations, Electronic Journal of Differential Equation*, conference 10, pp. 55-69. 2003.

44. Hanoun, N., Alexiades, V. and Zee Mai, T. "Resolving the controversy over tin and gallium melting in a rectangular cavity heated from the side ", Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 44, pp. 253-276, 2003.
45. Tadrist, L., Seguin, P., Santini, R., Pantaloni, J. et Bricard, A., "Experimental and numerical study of direct contact heat exchangers". International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 28, pp. 1215-27, 1985.
46. Crank, J., "How to deal with moving bound aries in thermal problems", Numerical Methods in Heat Transfer", Wiley and sons, 1981.
47. Murray, W. D. and Landis, F., "Numerical and machine solutions of transient heat conduction problems involving melting or freezing", Journal of Heat and Mass Transfer vol. 31, pp. 106-12, 1959.
48. Lnadau, H.G., "Heat conduction in a melting solid". Quart. Applied math. 8, pp. 81-94, 1950.
49. Bénard, C., Gobin, D. and Martinez, F., "Melting in rectangular enclosures: experiments and numerical simulations", Journal of Heat Transfer, vol. 107, pp. 795-803, 1985.
50. Gadgil, A. and Gobin, D., "Analysis of two-dimensional melting in rectangular enclosures in presence of convection", Journal of Heat Transfer, vol. 106, pp. 21-27, 1984.
51. Gobin, D., "Changement d'état solide-liquide: Evolution temporelle du couplage entre la convection naturelle dans la phase liquide et la conduction dans la phase solide. Etude numérique et expérimentale", Thèse de doctorat d'état, Université Paris VI, 1984.
52. Lacroix, M. et Voller, V.R., "Finite difference solutions of solidification phase change problems: transformed versus fixed grids", Numerical Heat Transfer Part B, vol. 17, pp. 25-41, 1990.
53. Lacroix, M., "Predictions of natural convection dominated phase change problems by the vorticity velocity formulation of the Navier-Stokes equations", Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 22, pp. 79-93, 1992.
54. Okada, M., "Analysis of heat transfer during melting from a vertical wall", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 27, pp. 2057-2066, 1984.

55. Voller, V.R, Cross, M. and Markatos, N.C., "An enthalpy method for convection diffusion phase change", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24 pp. 271-284, 1987.
56. Voller, V.R. and Prakash, C., "A fixed grid numerical modelling methodology for convection diffusion mushy region phase change problems", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 30, pp. 1709-1719, 1987.
57. Ramsey, J.W. and Sparrow, E.M., "Melting and natural convection due to a vertical embedded heater". *Journal of Heat Transfer*, vol. 100, pp. 368-70, 1978.
58. Bareiss, M. and Beer, H., "Influence of natural convection on the melting process in a vertical cylindrical enclosure". *Letters Heat Mass Transfer*, vol. 7, pp. 329-38, 1980.
59. Sparrow, E.M., Schmidt, R.R. and Ramsey, J.W., "Experiments on the role of natural convection in the melting of solids". *Journal of Heat Transfer*, vol. 100, pp. 11-6, 1978.
60. Bathelt, A.G., Viskanta, R. and Leidenfrost, W., "An experimental investigation of natural convection in the melted region around a heated horizontal cylinder". *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 90, pp. 227-39, 1979.
61. Delaunay, D., " Etude du couplage convection naturelle-conduction avec changement de phase. Application au stockage périodique de l'énergie ". Thèse d'état, Université de Nantes, 1985.
62. Versteeg, H.K. and Malalasekera, W., "An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method", Longman Group Ltd, 1995.
63. Grosjean, F., "Méthode numérique des volumes finis", Polycopie de cours d'après le livre de Suhas V. Patankar.
64. Hanchi, S., "Méthodes numériques appliquées a la mécanique des fluides et à l'énergétique", Polycopie de cours, EMP, 2004.
65. Ferziger, J.H. and Peric, M., "Computational methods for fluid dynamics", Springer, third Edition, New York, 2002.
66. Patankar, S.V., "Numerical heat transfer and fluid flow", Taylor and francis, 1980.