

**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA**

**Faculté de technologie**

Département de mécanique

## **MEMOIRE DE MAGISTER**

En Génie mécanique

Spécialité : construction mécanique

DYNAMIQUE DES SYSTEMES

MULTICORPS APPLIQUEE AUX BRAS MANIPULATEURS

Par

El Hadi OSMANI

Devant le jury composé de :

Abdelkrim AIAD	Professeur	USD de Blida	Président
Abderrahmane BELAIDI	M.C.A.	UMB Boumerdès	Examineur
Abderrazak ALLALI	M.C.A.	USD de Blida	Examineur
Mohammed OUALI	Professeur	USD de Blida	Rapporteur

Blida mai 2012

## REMERCIEMENT

Ce travail entre dans les thèmes proposés au sein du laboratoire de recherche " structures Mécaniques" de l'institut de mécanique, université Saad DAHLAB de Blida.

Les travaux exposés dans ce mémoire ont été réalisés sous la direction du professeur Mohammed OUALI. Je tiens à le remercier. Grâce à son aide, à ses conseils éclairés et ses judicieuses orientations, j'ai pu mener à terme ce modeste travail d'initiation à la recherche.

J'exprime ma profonde reconnaissance et mes sincères remerciements à Messieurs Abdelkrim AIAD, Professeur à l'Université Saad Dahlab de Blida, Abderrahmane BELAIDI, Maître de conférences à l'université de Boumerdès et Abederrezak ALLALI Maître de conférences à l'Université Saad Dahleb de Blida qui ont accepté d'examiner mon travail et de participer à ma soutenance.

Je suis également très reconnaissant à l'intérêt que Monsieur H. OSMANI a porté à ce travail et je le remercie pour son aide et ses conseils.

Enfin je remercie mes camarades d'étude et particulièrement Mohamed LATAF.

Au terme de ce mémoire, je tiens à exprimer toute ma gratitude aux personnes qui m'ont soutenu durant la réalisation de ce travail. Enfin je ne pourrai terminer ces remerciements sans avoir une pensée à l'ensemble de mes enseignants, qu'ils trouvent ici, l'expression de ma profonde gratitude.

## ملخص

حالياً، العديد من التطبيقات الصناعية تتطلب دراسة الأنظمة المعقدة ذات الأجسام المتعدد وذلك من أجل تصميم وإنجاز آلات ذات كفاءة عالية.

نقترح في هذا العمل دراسة أنظمة دقيقة، ولهذا الغرض، قمنا بإنشاء النماذج الهندسية، الحركية و الديناميكية. كما قمنا أيضاً بإنشاء نماذج لوسط الذراع الآلية عندما يكون ضرورياً استعمال محاور التوجيه، ولأجل ذلك طبقنا طريقتين: زوايا أولر للمسارات المستقيمة والإحداثيات الذاتية للمسارات التي تكون معادلاتها الوسيطة معروفة (المسارات المنحنية). و بالمثل، قمنا بإنشاء نماذج لعملية اللحام بواسطة ذراع آلية ذات ستة محاور. ففياً يخص محاور توجيه شعلة اللحام، استعملنا زوايا أولور و إحداثيات فرينل سر. استعملنا الإحداثيات النسبية لإنشاء النموذج الهندسي المباشر و طريقة بول لإنشاء النموذج الهندسي المعكوس، أمّا فيما يخص تعيين النماذج الحركية من الدرجة الأولى و الثانية، فقد استعملنا طريقة ترددية. أنشأنا النموذج الديناميكي المعكوس بصيغتين: طريقة لاغرنج و طريقة نيوتن أولر. طبقنا خوارزمية لاغرنج و خوارزمية نيوتن أولر على ذراع آلية ذات ستة محاور.

## RESUME

Actuellement, de nombreuses applications industrielles exigent l'étude des systèmes multicorps complexes et cela pour la conception et la réalisation de machines performantes.

On se propose pour des systèmes précis d'établir les modèles : géométrique, cinématique et dynamique. On procède à la modélisation de l'espace opérationnel pour des tâches où l'orientation est exigée. Deux méthodes sont appliquées: les angles d'Euler pour les trajectoires rectilignes ; les coordonnées intrinsèques pour les trajectoires dont les équations paramétriques sont connues. De même, on modélise une tâche de soudage à l'arc par un manipulateur à six axes. L'orientation de la torche est modélisée par deux méthodes : les angles d'Euler et les coordonnées de Frenet- Serret. On utilise les coordonnées relatives pour établir le modèle géométrique direct et la méthode de Paul pour établir le modèle géométrique inverse. Les modèles cinématiques de premier et deuxième ordre sont obtenus par une méthode récursive. On établit le modèle dynamique inverse par deux formalismes : ceux de Lagrange et de Newton Euler. On applique le formalisme de Lagrange à un robot plan (RR) pour valider l'application de l'algorithme de Newton Euler sur un robot à six axes.

## SUMMARY

Currently, many industrial applications require the study of complex multibody systems and that the design and implementation of powerful machines.

It is proposed to establish accurate systems models: geometric, kinematic and dynamic. We procedure for modeling the operational space for tasks where the orientation is required. The two methods applied: the Euler angles for straight trajectories, intrinsic coordinates for trajectories whose parametric equations are known. Similarly, we model a task arc welding with a six-axis manipulator. The orientation of the torch is modeled by two methods: the Euler angles and coordinates of Frenet-Serret. We use the relative coordinates to determine the direct geometric model and the method of Paul to establish the inverse geometric model. The kinematic models of first and second order are obtained by a recursive method. It establishes the inverse dynamic model by two formalisms: those of Lagrange and Newton Euler. We apply the formalism of Lagrange to a robot plan (RR) to validate the application of Newton Euler algorithm on a six-axis robot.

# TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENT	2
RESUME	3
<b>TABLE DES MATIERES</b>	4
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	7
INTRODUCTION ETAT DE L'ART	9
1. INTRODUCTION GENERALE	13
I. Introduction sur les systèmes multicorps	13
1.1 Introduction	13
1.2 Modélisation des systèmes multicorps	14
1.3 Modèle géométrique (coordonnées)	16
1.3.1 Coordonnées relatives	16
1.3.2. Coordonnées absolues	16
1.3.3 Coordonnées naturelles	17
1.3 Formalismes	18
1.4.1 Formalisme de Lagrange	19
1.4.2 L'algorithme récursif de Newton-Euler	20
1.4.3 Traitement des contraintes	20
1.3 Génération des modèles	20
1.5.1 Les logiciels d'analyse de systèmes multicorps	22
2. Généralités sur les robots	24
2.1. Structure générale d'un robot manipulateur	24
2.2° Structure mécanique articulée	24
2.2.1 Liaisons cinématiques et articulations	24
2.2.1.1 Couples cinématiques inférieurs	25
2.2.1.2 Couples cinématiques supérieures	26
1.2.2 Le porteur d'un robot	27
2.2 3 le poignet	29
2.2.4 L'effecteur	31
2.3 Les actionneurs	32

1.3.1	Fonctionnement et performance	32
2.3.2	Motorisation hydraulique	33
2.3.3	Motorisation électrique	35
2.4	Réducteurs	36
1.4.1	Critères de performances	36
2.4.2	Réducteurs utilisés en robotique	37
2.5	Capteurs	38
2.	ANALYSE CINEMATIQUE	39
2.1	Introduction	39
2.2	Modèle géométrique direct	40
2.2.1	Coordonnées homogènes	40
3.2.2	Transformation homogène	40
2.2.3	Modèle géométrique direct d'une chaîne ouverte simple	41
2.2.4	Description de la géométrie des chaînes à structure simple	41
2.2.5	Descriptions des paramètres de Denavit-Hartenberg	41
2.2.6	Angles d'Euler	43
2.2.7	Description de la géométrie des chaînes cinématiques à structure arborescente	44
2.2.7.1	Descriptions des paramètres articulaires d'une structure arborescente	44
2.2.8	Descriptions des chaînes cinématiques à structures fermées	46
2.3	Modèle géométrique inverse des chaînes ouvertes simples	47
2.3.1	Calcul du modèle géométrique inverse	49
2.4	Application : MGI du robot Staubli RX170B (annexe A1)	52
2.4.1	Modèle géométrique direct	52
2.4.2	Modèle géométrique inverse par la méthode de Paul	54
2.4.3	Position de singularité	57
2.5	Génération de trajectoire rectiligne par un robot à chaîne ouverte	57
2.5.1	Position du problème	57
2.5.2	Génération de mouvement entre deux points dans l'espace articulaire	59
2.5.2.1	Interpolations polynomiales linéaire	60
2.5.2.1	Interpolation polynomiale de degré trois	60
2.5.2.2	Interpolation polynomiale de degré cinq	60
2.5.3	Génération de mouvement dans l'espace opérationnel	60
2.5.3.1	Génération de mouvement découplable	

entre deux points dans l'espace opérationnel	60
2.5.4. Algorithme de calcul des coordonnées articulaires pour une trajectoire rectiligne	63
2.6 Calculs des vitesses et accélérations articulaires	64
2.6.1 Modèle cinématique direct	64
2.6.2 Calcul de la matrice Jacobienne	64
2.6.3 Calcul des vitesses articulaires	66
2.6.4. Calculs des accélérations articulaires	67
2.6.5 Applications	69
2.6.5.1 Soudage à plat	69
2.7 Génération de trajectoire curviligne	76
2.7.1 Courbes dans l'espace	76
2.7.2 Vitesse angulaire du trièdre	78
2.7.3 Accélération angulaire du trièdre	80
2.7.4 Application : trajectoire hélicoïdal	81
2.8 Conclusions	89
3. ANALYSE DYNAMIQUE	90
3.1 Introduction	90
3.2 Formalisme de Lagrange	91
3.2.1 Energie cinétique du système multicorps	92
3.2.2 Energie potentielle du système multicorps	97
3.2.3 Équation du mouvement d'un système multicorps	98
3.3 Formalisme de Newton Euler	100
3.3.1 Algorithme de calcul	102
3.4 Application formalisme de Lagrange	102
3.5 Applications sur l'algorithme de Newton Euler	105
3.5.1 Validation du programme	105
3.5.2 Calculs des couples articulaires du manipulateur à 6 axes	108
3.6 Conclusion	102
4 CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES	115
LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS	117
BIBLIOGRAPHIE	120
ANNEXES	123

## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX.

### LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Exemple de système multicorps	13
Figure 1.2 Comparaison des trois approches symboliques, numériques, symboliques-numériques	21
Figure 1.3 Les différents composants d'un bras manipulateur	24
Figure 1.4 Exemple de couples cinématiques inférieurs	25
Figure 1.5 Exemple de couples cinématiques supérieurs	26
Figure 1.6 Structure d'un manipulateur à poignet rotule	27
Figure 1.7 Différentes structures du porteur d'un robot industriel	28
Figure 1.8 Représentation d'un poignet à deux axes	29
Figure 1.9 Représentation schématique de quelques poignets à trois axes concourants	30
Figure 1.10 Représentation schématique de quelques poignets à trois axes non concourants	30
Figure 1.11 Exemple d'un outil de robot pour le soudage par point	32
Figure 1.12 Servo actionneur	34
Figure 2.1 Représentation d'un point	40
Figure 2.2 Paramétrage géométrique dans le cas d'une structure ouverte simple	42
Figure 2.3 Système multicorps à chaîne simple ouverte	43
Figure 2.4 Angles d'Euler	43
Figure 2.5 Notation d'une structure arborescente	44
Figure 2.6 Paramètre géométrique pour un corps à plus de deux articulations	45
Figure 2.7 Repères placés sur une articulation coupée	47
Figure 2.8 Modèles géométriques directs et inverses	48
Figure 2.9 Robot à six ddl muni d'un poignet rotule	51
Figure 2.10 Robot manipulateur à six axes	52
Figure 2.11 Génération de mouvement dans l'espace articulaire	58
Figure 2.12 Génération de mouvement dans l'espace opérationnel	59
Figure 2.13 Trajectoire rectiligne de l'outil	61
Figure 2.14 Composition des vecteurs de position	65

Figure 2.15 Vecteurs $\vec{z}_i^0$ et $\vec{P}_{E,i}^0$	66
Figure 2.16a. Soudage de deux tôles (bout à bout) par un robot à 6 axes	69
Figure 2.16b. Soudage de deux tôles (bout à bout) par un robot de 6 axes	70
Figure 2.17 Accélération de la torche	71
Figure 2.18 Vitesse de la torche trajectoire rectiligne	71
Figure 2.19 Coordonnées articulaires pour un mouvement rectiligne interpolation linéaire et de degré 5, robot à six axes	73
Figure 2.20 vitesses articulaires pour un mouvement rectiligne interpolation linéaire et de degré 5 de robot à six axes	74
Figure 2.21 Accélération articulaires pour une trajectoire rectiligne, interpolation linéaire et de degré 5, robot à six axes	75
Figure 2.22 Repérage d'une courbe dans l'espace	76
Figure 2.23 Exécution d'un joint de soudure de forme hélicoïdal par un robot manipulateur 6 axes	81
Figure 2.24 Trièdre de Frenet pour une trajectoire hélicoïdal	85
Figure 2.25 Rotations des articulations pour le soudage d'un cordant de soudure de forme hélicoïdal par un robot manipulateur 6 axes	86
Figure 2.26 Vitesses des articulations pour le soudage d'un cordant de soudure de forme hélicoïdal par un robot manipulateur 6 axes	87
Figure 2.27 Accélération des articulations pour le soudage d'un cordant de soudure de forme hélicoïdal par un robot manipulateur 6 axes	88
Figure 3.1 Modèle de la dynamique direct	90
Figure 3.2 Modèle de la dynamique inverse	91
Figure 3.3 Représentation d un corps rigide d'une chaîne multicorps	92
Figure 3.4 Influence des actionneurs sur le MDI	95
Figure 3.5 Bilan des efforts et des vitesses et accélérations. (formulation de Newton Euler)	101
Figure 3.6 Schéma des étapes de calcul du MDI méthode Newton Euler	102
Figure 3.7 Manipulateur plan à deux corps	103
Figure 3.8 Etats initiales et finales d'un bras plan rotation de 90° t=0,5 seconde	106
Figure 3.9 Positions, vitesses et accélérations des articulations 1 et 2 du bras à 2 ddl	107
Figure 3.10. Figure 3.10. Couples des articulations d'un mécanisme à 2ddl	108

Figure 3.11 Repérage du système multicorps	109
Figure 3.12 Repérer suivant la notation de DH	109
Figure 3.13 Couples articulaires due à une trajectoire rectiligne de polynôme d'interpolation de degré	110
Figure 3.14 Couples articulaires due à une trajectoire rectiligne de polynôme d'interpolation de degré 5	111
Figure 3.15 Couples articulaires due à une trajectoire Hélicoïdale	113

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 Remplacement des couples cinématiques de classe 4 et 3 par une combinaison de couples cinématiques de classe cinq	26
Tableau 2.1 Type d'équations rencontrées avec la méthode de Paul	51
Tableau 2.2 Paramètres géométriques de D-H robot à six axes	52
Tableau 3.1 les paramètres de D.H pour un bras à 2ddl	106
Tableau 3.2 moments d'inertie des corps qui constituent le système multicorps	109

## INTRODUCTION – ETAT DE L'ART

D'après la norme française AFNOR [1], un robot manipulateur est un manipulateur multi applications, commandé automatiquement et reprogrammable, utilisé dans les applications automatisées industrielles. La commande d'un robot manipulateur présente souvent la capacité d'interaction avec le processus extérieur.

La maîtrise de la conception et de la commande des systèmes mécanique multicorps est un facteur important dans la progression technologique de l'industrie et parfois elle a un caractère social et économique. Actuellement, de nombreuses applications impliquent l'étude de tels systèmes pour mieux les comprendre et pour améliorer le fonctionnement ou même pour mieux les concevoir. Cette discipline recouvre un large champ d'application, par exemple dans: le domaine de l'automobile et des transports, on recherche continuellement à améliorer les performances, le confort et la sécurité des véhicules ; dans le domaine de l'industrie on cherche à remplacer l'homme par une machine surtout dans les milieux hostiles et des tâches pénibles. Dans le domaine aéronautique, on utilise des mécanismes complexes pour le contrôle des avions dont l'étude rigoureuse du comportement dynamique qui mène fonctionnement correct des

avions. Dans l'espace, les astronautes utilisent des bras robotiques pour extraire les satellites de la navette spatiale. Donc les systèmes multicorps, sont destinés à augmenter les possibilités de l'homme pour la rapidité : de ses déplacements, de ces actions et pour l'amplification de sa force notamment dans l'accomplissement des tâches pénibles, dangereuses et répétitives.

La commande et la simulation d'un système multicorps nécessite sa modélisation en un nombre fini de corps rigides ou flexibles articulés entre eux par des liaisons [2], [3]. Plusieurs niveaux de modélisation sont possibles selon les objectifs, les contraintes de la tâche et les performances recherchées : modèles géométriques, cinématiques et dynamiques. La détermination de ces différents modèles n'est pas facile, la difficulté réside dans la complexité de la cinématique de la chaîne articulée c'est-à-dire, nature de la chaîne, degrés de liberté et le type des articulations. Plusieurs méthodologies ont été développées dans ce but, elles diffèrent principalement par la nature des coordonnées choisies, (relatives, naturelles,...) pour décrire la configuration du système multicorps ainsi que par le type de formalisme dynamique utilisé (Newton-Euler, Lagrange, ...).

La modélisation d'un système permet d'obtenir des équations qui représentent le comportement du système étudié. Pour l'obtention de ces équations, il est nécessaire d'opter pour un paramétrage adéquat [4]. Les coordonnées relatives sont applicables aux systèmes arborescents et aux systèmes à boucles [4].

La méthode de Lagrange ne donne forcément pas le modèle le plus performant du point de vue du nombre d'opérations. Cette méthode est parmi les plus simples pour l'obtention du modèle dynamique d'un système multicorps [5]. C'est un formalisme qui décrit le modèle en termes de travail et d'énergie du système.

En général, les équations du mouvement sont accompagnées d'un ensemble d'équations supplémentaires. Ce sont les équations de contraintes. Ces équations de contraintes sont algébriques et généralement non linéaires [5]. Leur nombre et leur nature dépendent essentiellement du choix des coordonnées, de la structure du système et des conditions auxquelles le système est soumis.

Le travail [6] cible l'évaluation de la variation des fréquences propres des structures articulées à chaîne continue ouverte simple afin d'éviter la résonance lors du choix des paramètres de fonctionnement du manipulateur. La modélisation de la structure est basée sur la méthode des éléments finis.

Plusieurs travaux de recherches sont dédiés au calcul des oscillations propres des manipulateurs [7] [8]

Une approche de calcul basée sur le formalisme de Newton-Euler est donnée par [8]. Cette approche est indépendante du type configuration-manipulateur.

La conception, la simulation, l'exploitation et la commande des bras manipulateurs requièrent l'établissement d'un ensemble de modèles qui permettent de cerner le comportement du système.

On rencontre les modèles géométriques direct et inverse [10] [4].

Plusieurs auteurs et constructeurs donnent les caractéristiques et les performances des bras manipulateurs qui souvent sont classés en catégories d'exploitation [11].

A la conception optimale des manipulateurs, plusieurs travaux y sont dédiés. Le problème est de savoir quelle sont les variables articulaires qui maximisent ou minimisent la fonction scalaire définie par la fréquence du mode vibratoire à maximiser ou minimiser [12]. Il est souvent question de méthode d'optimisation.

Les Critères de performances des robots manipulateurs et leur utilisation dans la conception optimale des robots sont abordés dans la référence [13].

La référence aborde les Critères de performances des robots manipulateurs et leur utilisation dans la conception optimale des robots. L'auteur commence par noter la multitude des critères de performances: précision, vitesse, Dextérité, volume de travail, poids total, poids de la charge manipulée, autonomie d'énergie, ...

L'évaluation des critères de performance basée sur une notion de puissance est proposée [14] car on constate que les indices de performance cinétostatiques ont été largement utilisés dans plusieurs applications de la robotique, telle la conception optimale, la planification des trajectoires, la programmation des tâches, l'analyse de la redondance. Ces critères cinétostatiques font appel aux torseurs cinématiques et statiques sans prendre en considération les masses du robot et les actions dynamiques résultantes.

Le thème de notre travail concerne la dynamique des systèmes multicorps avec des applications aux bras manipulateurs.

On se propose d'établir :

- les modèles : géométriques, cinématiques et dynamiques en utilisant les coordonnées relatives,
- la modélisation de l'espace opérationnel pour des tâches où l'orientation est exigée :  
Pour la modélisation de l'environnement, on a choisi deux méthodes :
  - l'une basée sur les angles d'Euler utilisés pour les trajectoires rectilignes et
  - l'autre basée sur les coordonnées intrinsèques utilisées pour les trajectoires dont les équations paramétriques sont connues

On établira le modèle dynamique inverse également par deux méthodes :

- La méthode de Lagrange appliquée à un système de 2 deux degrés de liberté (2ddl). Les résultats obtenus sont utilisés pour valider le programme basé sur la méthode de Newton Euler et
- la méthode récursive de Newton Euler est utilisée pour développer un programme qui traite un bras manipulateur de six degrés de liberté.

Parmi les applications possibles, on opte pour soudage continu. On calcule les couples des actionneurs nécessaires pour réaliser les tâches de soudage

On a établi des programmes (logiciel Matlab 2008a):

- Programme pour établir le MGD (modèle géométrique direct).
- Programme pour établir le MGI (modèle géométrique inverse) et la modélisation de l'espace opérationnel pour une trajectoire rectiligne en utilisant des polynômes d'interpolations degré 1 et 5 .
- Programme pour établir le MCI et la modélisation de l'espace opérationnel pour une trajectoire dont les équations paramétriques sont connues (trajectoire hélicoïdale).
- Programme pour établir le MDI de Newton Euler basé sur le principe de Luh pour un bras de 2 ddl et 6ddl.

Le bras choisi est modélisé par le logiciel solidWorks pour le calcul des paramètres inertiels nécessaires pour le MDI.

## CHAPITRE 1

## INTRODUCTION GENERALE

## I-INTRODUCTION SUR LES SYSTEMES MULTICORPS

1.1 Introduction.

Un vélo, une voiture, un camion, un hélicoptère, une grue, un moteur, un robot, un satellite, le corps humain : tous sont des systèmes multicorps, on les appelle aussi des systèmes mécaniques articulés.

Un système multicorps est un ensemble de solides rigides ou déformables, reliés entre eux par des couples cinématiques appelés articulations. Ces systèmes se distinguent suivant leurs structures qui sont de type:

- ouvert simple
- arborescent
- à boucles

La figure 1.1 illustre des exemples de systèmes multicorps de types, ouvert ou fermé.

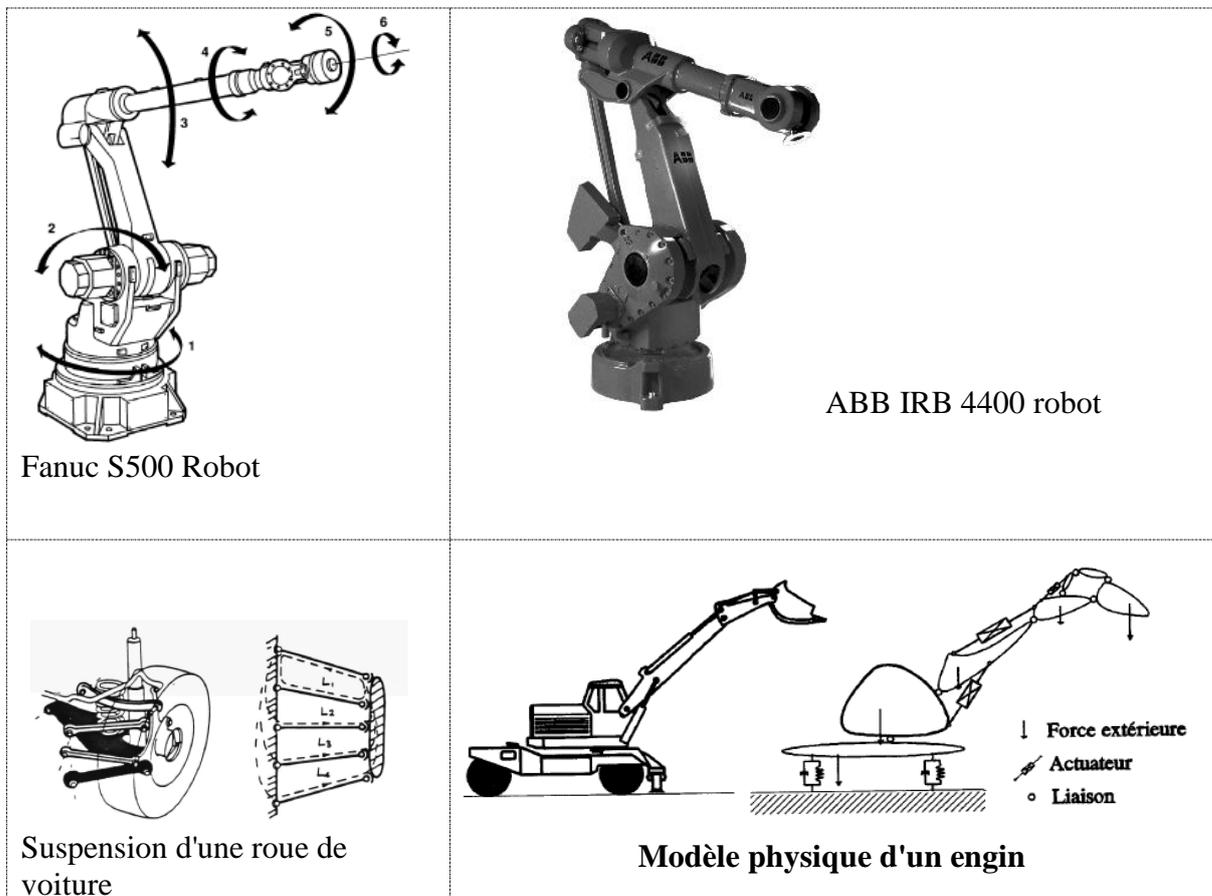


Figure 1 1. Exemples de systèmes multicorps

Actuellement, de nombreuses applications nécessitent l'étude de tels systèmes. Ceux-ci sont modélisés et analysés à l'aide d'algorithmes qui nécessitent des outils informatiques très performants et cela afin de comprendre et d'améliorer le fonctionnement ou même pour mieux les concevoir.

Dans le domaine de l'automobile et des transports, on recherche continuellement à améliorer les performances, le confort et la sécurité. Dans le domaine aéronautique, les dispositifs de contrôle des avions et des hélicoptères sont constitués de mécanismes complexes dont le comportement dynamique est étudié pour en garantir le fonctionnement correct. Dans l'espace, des bras robotiques sont utilisés par les astronautes pour extraire les satellites de la navette ou pour l'assemblage et la construction des stations spatiales. A quelques centaines de millions de kilomètres de la terre, les robots mobiles d'exploration Sojourner, Spirit et Opportunity, sont à la découverte du sol martien.

Quel que soit le domaine d'application, l'étude de ces systèmes repose sur: la **M**odélisation, l'**A**nalyse, l'**E**xpérimentale et l'**I**nvestigation

## 1.2 Modélisation des systèmes multicorps

L'objectif de la modélisation d'un système est d'obtenir des équations qui représentent le comportement du système étudié. Afin d'écrire ces équations, il est tout d'abord nécessaire de se donner un jeu de variables (paramétrage) qui permet de décrire la configuration, ou l'état du système : ce sont les coordonnées généralisées. Différents choix de coordonnées sont possibles. Selon les coordonnées choisies, il est possible alors d'utiliser différentes méthodes ou formalismes pour écrire les équations permettant d'étudier le comportement du système. Dans le cas des systèmes multicorps, ces équations concernent les mouvements des corps qui sont soumis aux lois de la mécanique rationnelle.

On distingue deux problèmes classiques dans l'analyse dynamique des systèmes multicorps :

- *Le problème de la dynamique inverse* consiste à déterminer les efforts articulaires que doivent fournir les actionneurs pour que le mécanisme évolue suivant une configuration donnée à l'avance, relation (1.1).

$$\vec{\tau} = f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}, \vec{f}_e) \quad (1.1)$$

- Le problème de la dynamique directe consiste à déterminer les accélérations généralisées  $\ddot{\vec{q}}$  lorsque le système est soumis aux forces articulaires dans une configuration inconnue, relation (1.2)

$$\ddot{\vec{q}} = g(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \vec{\tau}, \vec{f}_e) \quad (1.2)$$

La dynamique inverse concerne la commande et conception du robot et la dynamique directe concerne la simulation des systèmes multicorps. La relation qui lie le vecteur des accélérations articulaires  $\ddot{\vec{q}}$  aux efforts articulaires  $\vec{\tau}$  est de la forme :

$$B(q_i)\ddot{\vec{q}} + C(q_i, \dot{q}_i)\dot{\vec{q}} + Q(q_i) = \vec{\tau} \quad (1.3)$$

$$i = 1, \dots, n$$

où  $n$  et  $q_i$  représentent respectivement le nombre de degrés de liberté et les variables articulaires.

L'obtention de l'équation (1.3) est donnée dans le chapitre 3.

Dans la plupart des cas, les équations du mouvement sont accompagnées d'un ensemble d'équations supplémentaires qui expriment des relations entre les coordonnées généralisées, ce sont les équations de contraintes. Le nombre et la nature des équations de contraintes dépendent essentiellement du choix des coordonnées, de la structure du système et des conditions auxquelles le système est soumis. Ces équations de contraintes sont algébriques et généralement non linéaires [5]. On les écrit souvent sous la forme explicite suivante :

$$h(q_i) = 0 \quad (1.4)$$

$$i = 1, \dots, n$$

Les équations (1.4) régissent les mécanismes dont le graphe topologique contient des boucles ou bien sont en contact avec l'environnement. En présence des équations de contrainte le modèle dynamique prend la forme :

$$\left. \begin{aligned} B(q_i)\ddot{\vec{q}} + C(q_i, \dot{q}_i)\dot{\vec{q}} + Q(q_1, \dots, q_n) &= \vec{\tau} + J(q_i)^T \vec{\lambda} \\ h(q_1, \dots, q_n) &= 0 \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \right] \quad (1.5)$$

avec  $\vec{\lambda}$  et  $J(q_i)$  respectivement vecteur multiplicateur de Lagrange et matrice Jacobienne

Le degré de complexité du modèle (1.5) dépend du choix des paramètres suivants :

1. le choix des coordonnées pour représenter la configuration d'un système multicorps,
2. les formalismes utilisés pour obtenir les équations du mouvement du système,
3. les méthodes de traitements des équations de contraintes.

### 1.3 Modelé géométrique (coordonnées)

Le choix des coordonnées a une influence directe sur le nombre des équations constituant le modèle mathématique d'un système multicorps. Il existe plusieurs types de coordonnées dont les plus utilisés sont les suivantes:

#### 1.3.1 Coordonnées relatives

Également appelées coordonnées articulaires, elles représentent les débattements angulaires ou linéaires des articulations qui relient les corps du système. L'utilisation des coordonnées relatives permet d'exploiter explicitement et avantageusement la topologie du système pour un calcul récursif des grandeurs cinématiques et dynamiques.

Les coordonnées relatives sont applicables aux systèmes arborescents et aux systèmes à boucles [4]

##### *Avantages*

1. Réduction du nombre de coordonnées, d'où il y a une bonne efficacité numérique.
2. Les coordonnées relatives sont spécialement adaptées pour des configurations en chaîne ouverte.

##### *Inconvénients*

1. La formulation mathématique peut être plus complexe, car la position absolue d'un élément dépend de la position des éléments qui les précèdent de la chaîne cinématique.
2. Elles conduisent à des équations de mouvement donnant des matrices qui sont pleines et donc leurs exploitations sont coûteuses [15].
3. les équations obtenues requièrent un travail de prétraitement pour déterminer les équations de contraintes et le mouvement absolu de chaque point

#### 1.3.2. Coordonnées absolues

Les coordonnées absolues expriment les positions et orientations des corps par rapport à un repère de référence unique. Six coordonnées sont nécessaires : trois pour les translations et trois pour les rotations et sont utilisées pour décrire la configuration individuelle de chaque corps du système.

Le nombre de coordonnées est alors bien souvent très supérieur au nombre de degrés de liberté du système. Elles ont l'avantage de rendre facile l'écriture des équations du mouvement des corps. De plus, la matrice de masse globale du système est constante et diagonale, et les équations du mouvement des corps sont très simples et peuvent être calculées indépendamment pour chaque corps. Par conséquent, les restrictions imposées par les articulations au niveau des mouvements relatifs des corps les uns par rapport aux autres, nécessitent l'écriture d'équations de contraintes relativement complexes. De une à cinq équations de contraintes sont nécessaires selon le type d'articulation, ce qui entame largement la simplicité des équations du mouvement. Le nombre d'équations est alors plus grand que dans le cas de l'utilisation des coordonnées relatives.

### 1.3.3 Coordonnées naturelles

Le système est représenté par un ensemble de masses ponctuelles reproduisant les caractéristiques dynamiques du corps. Ceci implique une disposition particulière de ces points et une distribution adéquate de la masse du corps original sur chaque point. Un avantage essentiel de cette méthode est qu'elle ne fait intervenir que des coordonnées cartésiennes absolues. Ceci implique une matrice de masse diagonale et constante, et donc des équations du mouvement simples.

Les positions relatives des points qui représentent un corps rigide sont imposées à l'aide d'équations de contraintes. Ces équations expriment essentiellement la conservation des distances entre les différentes masses ponctuelles qui correspondent à un même corps rigide.

Les mouvements relatifs des corps, imposés par les articulations, sont également exprimés à l'aide d'équations de contraintes. Toutefois, il n'est pas toujours nécessaire d'écrire autant d'équations de contraintes que dans le cas de l'utilisation des coordonnées absolues. Et ceci en plaçant judicieusement certains points sur les axes des articulations. Par exemple, dans le cas de deux corps reliés par une articulation sphérique, en utilisant pour les deux corps, un seul et même point situé au centre de l'articulation, il ne sera pas nécessaire d'écrire les équations de contrainte pour cette articulation.

Un second avantage de cette méthode est que les équations de contraintes sont quadratiques en coordonnées et donc la Jacobienne des contraintes est linéaire, ce qui favorise le traitement numérique.

L'utilisation des coordonnées naturelles permet d'obtenir des modèles qui offrent d'excellentes performances en simulation. Parfois ces performances sont supérieures à

celles des modèles qui utilisent des coordonnées relatives, dans le cas de systèmes de petite taille [5]. Elles offrent également une plus grande robustesse pour faire face à certaines configurations singulières que peuvent adopter des mécanismes particuliers. Toutefois, comme pour le choix des coordonnées absolues, on doit gérer un grand nombre de variables et d'équations différentielles et algébriques, un nombre largement supérieur au nombre de degrés de liberté du système [16].

#### 1.4 Formalismes

L'utilisation de coordonnées absolues, pour l'écriture des équations du mouvement d'un système multicorps n'impose pas un formalisme particulier [5] par exemple le formalisme de Newton –Euler peut être écrit directement pour chaque corps :

$$m_{ci} \ddot{\vec{a}}_G = \vec{f}_e \quad (1.6)$$

$$I_G \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (I_G \cdot \vec{\omega}) = \vec{c} \quad (1.7)$$

Avec :

$m_{ci}$ : Masse du corps.

$I_G$ : Tenseur d'inertie par rapport à un repère fixe.

$\vec{\omega}$ : vitesse angulaire du solide.

$\ddot{\vec{a}}_G$ : Accélération du solide.

$\dot{\vec{\omega}}$ : Accélération angulaire du centre de masse du solide.

$\vec{f}_e$ : Résultante des forces extérieures appliquées au solide.

$\vec{c}$  : Résultante des moments extérieurs appliqués au solide.

Aux formalismes (1.6) et (1.7) on ajoute les équations de contraintes qui traduisent la nature des liaisons entre les corps du système.

Lorsque les coordonnées relatives sont utilisées, diverses approches sont envisageables pour obtenir les équations du mouvement. Les plus connues sont.

- le formalisme de Lagrange,
- le formalisme de Hamilton
- le formalisme de Kane
- le Principe des Travaux Virtuels ou le Principe des Puissances Potentielles
- les méthodes récursives : Newton Euler

### 1.4.1 Formalisme de Lagrange

La méthode de Lagrange n'est pas celle qui donne le modèle le plus performant du point de vue du nombre d'opérations, mais c'est la méthode la plus simple pour obtenir le modèle dynamique d'un système multicorps [5]. Le formalisme de Lagrange décrit le modèle en termes de travail et d'énergie du système. Lorsque l'effort extérieur sur le système est nul les équations de Lagrange prennent la forme suivante :

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (1.8)$$

$$i = 1, \dots, n$$

avec :

$L$  : Lagrangien du système,  $L = T - \Pi$

$T$  : Énergie cinétique totale du système

$\Pi$ : Énergie potentielle totale du système.

L'énergie cinétique du système a une forme quadratique des vitesses articulaires :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T [B(q_i)] \dot{\vec{q}} \quad (1.9)$$

$$i = 1, \dots, n$$

où,  $[B(q_i)]$  est la matrice masse du système de taille  $(n \times n)$ . Les relations (1.8) et (1.9) donnent:

$$\vec{\tau} = [B(q_i)] \ddot{\vec{q}} + [C(q_i, \dot{q}_i)] \dot{\vec{q}} + \vec{Q}(q_i) \quad (1.10)$$

$i = 1, \dots, n$

L'équation (1.10) sera détaillée dans le chapitre 3. La méthode de Lagrange donne des équations sous formes explicites, elle n'est pas la meilleure en termes de nombre d'opérations. La méthode de Lagrange peut être utilisée sous forme récursive et dans ce cas les équations de mouvement prennent une forme implicite.

Les méthodes variationnelles telles que les Travaux Virtuels ou les Puissances potentielles ne sont efficaces que si elles se basent sur une approche récursive, dans le cas contraire,

elles conduisent à un nombre d'opérations bien supérieur à ce que l'on peut obtenir par les méthodes récursives [17].

#### 1.4.2 L'algorithme récursif de Newton-Euler

Cette méthode a été développée à l'origine pour obtenir la dynamique inverse de robots manipulateurs sériels. L'algorithme récursif de Newton Euler est basé sur un double parcours récursif de la topologie du système. Cette méthode est toujours plus efficace que celle de Lagrange [17].

#### 1.4.3 Traitement des contraintes

Les équations de contraintes constituent généralement un système d'équations algébriques non-linéaires qui restreint l'espace des valeurs possibles pour les coordonnées généralisées. Diverses solutions peuvent être utilisées pour prendre en compte les conditions imposées par ces équations de contraintes.

1. La plus directe consiste à les résoudre explicitement, ainsi que leurs dérivées premières et secondes. Ainsi on détermine, les valeurs correctes des coordonnées généralisées à utiliser pour l'évaluation des équations du mouvement du système. Cette procédure est la plus rigoureuse mais n'est toutefois pas la plus utilisée en raison du nombre d'opérations supplémentaires qu'elle implique.
2. La résolution explicite des seules dérivées secondes des équations de contraintes, conjointement aux équations du mouvement, permet de calculer les valeurs des dérivées secondes des coordonnées généralisées. Une double intégration des accélérations généralisées fournit alors des valeurs des coordonnées généralisées.

### 1.5 Génération des modèles

Parmi les logiciels d'analyse de système multicorps, on peut distinguer deux groupes selon l'approche symbolique ou numérique utilisée pour la génération et le calcul des équations du mouvement. La figure 1.2 illustre le déroulement des opérations d'analyse selon chaque approche. Les programmes symboliques n'effectuent, à priori, aucun calcul numérique. Ils ne manipulent pas des nombres, mais des symboles qui correspondent aux coordonnées et aux paramètres des systèmes, pour produire les expressions analytiques des équations. Ces équations sont généralement exportées sous forme de fichiers qui contiennent des routines de calcul écrites en un langage de programmation standard tel que FORTRAN, C, etc. Ces routines peuvent alors être importées dans un environnement de calcul numérique pour être évaluées dans le cadre de l'analyse numérique du système.

Les logiciels symboliques n'offrent pas nécessairement des possibilités de calcul numérique. Les avantages principaux de l'approche symbolique sont :

- optimisation des expressions analytiques des équations grâce aux manipulations symboliques,
- grande vitesse d'évaluation des équations générées sous formes analytiques.
- facilité d'utilisation des équations dans la plupart des environnements de calcul numérique,

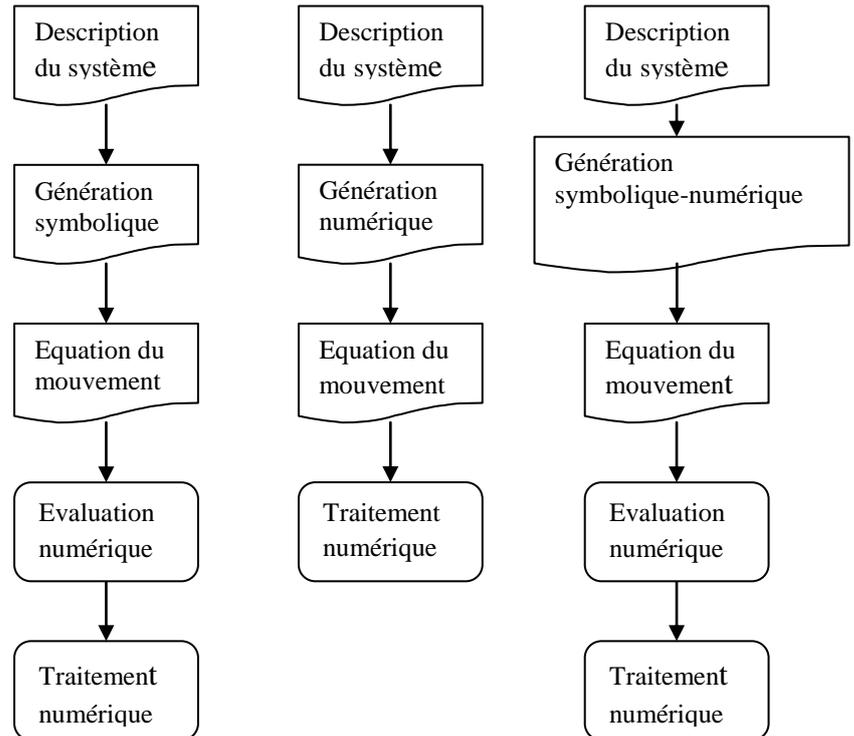


Figure 1.2 Comparaison des trois approches : symbolique, numérique et symbolique-numérique.

Les programmes numériques ne génèrent pas les expressions analytiques des équations par contre, les algorithmes des formalismes sont directement appliqués aux valeurs des coordonnées et des paramètres du système pour calculer numériquement les résultats des équations du mouvement. Les expressions analytiques des équations n'existent pas au sein du programme numérique, figure 1.2. En revanche, les programmes numériques offrent toujours la possibilité d'exécuter directement les diverses analyses numériques, cinématiques et dynamiques applicables aux systèmes multicorps. Toutefois, on notera que les équations sont régénérées à chaque évaluation, ce qui prend plus de temps que l'exécution d'une sous-routine qui implémente la forme analytique des équations.

Les avantages principaux de l'approche numérique sont :

- Adaptation aux changements de configuration qui peuvent survenir dans le système et utilisation d'un seul logiciel pour la modélisation et l'analyse numérique du système.

Par contre l'approche symbolique-numérique est une approche symbolique dont les variables géométriques sont évaluées numériquement et cette approche possède les avantages de l'approche symbolique avec un nombre d'opérations moindre (figure 1.2).

### 1.5.1 Les logiciels d'analyse des systèmes multicorps

Il existe à l'heure actuelle une multitude d'outils qui permettent d'étudier les systèmes multicorps. Les plus connus sont [4]:

- Les logiciels commerciaux. Ils ont tous en commun un environnement graphique intégré permettant à la fois la modélisation graphique et l'analyse numérique et l'exploitation des résultats sous forme de graphes et d'animations 3D

En général, ces logiciels se basent sur une approche numérique. Divers modules optionnels sont disponibles afin d'offrir des fonctionnalités complémentaires telles que :

- la modélisation de corps flexibles,
- l'importation de géométries provenant de logiciels de CAO,
- l'interconnexions avec Matlab/Simulink,
- l'utilisation de routines écrites par utilisateur, etc.

Ces logiciels permettent en principe de modéliser tous les types de systèmes multicorps et proposent généralement des bibliothèques de composants et de sous-systèmes utilisés plus particulièrement dans certains domaines tels que l'automobile, le ferroviaire ou encore l'aérospatiale. On rencontre généralement ces outils dans l'industrie, et dans certaines écoles d'ingénieurs.

Voici les principaux logiciels de ce type :

1. SIMPACK: développé initialement par le centre de recherche en aérospatiale Allemand (DLR), il est commercialisé depuis près de dix ans par la société Intec. Ce logiciel utilise des coordonnées relatives et implémente un formalisme récursif d'une complexité d'ordre N.
2. ADAMS : commercialisé par MSC Software, c'est un des logiciels les plus répandus dans l'industrie automobile. Il utilise des coordonnées absolues et est particulièrement orienté sur l'utilisation de composants et de sous-systèmes pour la

création de nouveaux modèles non disponibles en librairie. Selon ses utilisateurs, son principal inconvénient semble être une certaine lenteur d'exécution.

3. Virtual.lab MOTION : évolution du logiciel DADS initialement développé par le Pr. E. J. Haug, il est actuellement commercialisé par la société LMS. Celui-ci utilise également des coordonnées absolues. Il n'est pas non plus particulièrement rapide en simulation, mais il a l'avantage d'être intégré dans une suite logicielle offrant des possibilités d'analyses très diverses telles que l'analyse de structures, des analyses acoustiques, etc., ce qui en fait un outil très intéressant et très productif pour l'étude complète d'un système, et ce plus particulièrement dans le domaine de l'automobile.
4. CARSIM : Ce logiciel est utilisé pour l'étude des voitures et camions. Il s'agit en fait d'un environnement de simulation et d'analyse, plus que d'un outil de modélisation à part entière. En effet, il utilise des modèles paramétrables générés préalablement par un programme de génération symbolique appelé AutoSim. Cette caractéristique lui permet d'obtenir des performances de simulation largement suffisantes pour viser les applications en temps réel. Toutefois, le générateur ne semble pas être disponible pour l'utilisateur, qui ne peut apparemment pas simuler d'autres systèmes que ceux qui lui sont proposés.
5. Matlab contient depuis quelques années un outil de modélisation de systèmes mécaniques appelé SimMechanics. Cet outil utilise une approche numérique. Le système est décrit à l'aide de coordonnées articulaires.

Dans notre étude, nous avons utilisé les coordonnées relatives qui nous semblent être les mieux adaptées et le logiciel Matlab r2008a pour les calculs.

## 2. GENERALITES SUR LES ROBOTS

Un robot industriel est constitué d'une structure mécanique poly articulée, animée par des actionneurs (moteurs électriques, pneumatiques ou hydrauliques, vérins linéaires ou rotatifs, etc.) à partir d'ordres élaborés par un ordinateur. Ce dernier reçoit des informations sur l'environnement du robot pour se corriger ou pour éviter des obstacles et donc, il sera possible de piloter des outils (de soudage, d'encollage, d'usinage, etc.) ou gérer l'environnement du système.

### 2.1. Structure générale d'un robot manipulateur

Un robot manipulateur est constitué de cinq composants principaux, lui permettant d'interagir avec son environnement (figure 1.3) à savoir :

- *Structure mécanique articulée..*
- *Actionneurs.*
- *Systèmes de transmissions mécaniques.*
- *Systèmes de perceptions.*
- *Unité de commande*

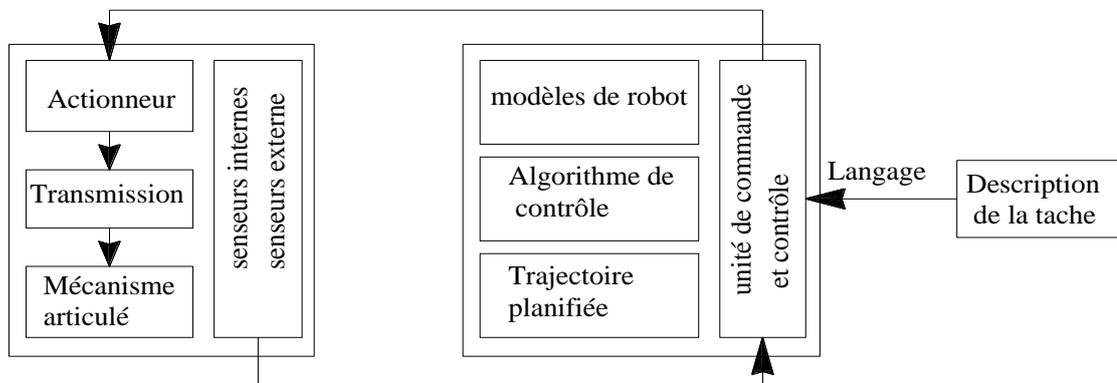


Figure 1.3 les différents composants d'un bras manipulateur

### 2.2° Structure mécanique articulée

C'est un ensemble de corps rigides, liés entre eux par des liaisons appelées articulations mécaniques et il porte à son extrémité l'outil.

#### 2.2.1 Liaisons cinématiques et articulations

Les corps rigides d'un système multicorps sont reliés entre eux par des articulations qui introduisent des contraintes de mouvement.

Ces relations sont de types algébrique ou différentiel, on les appelle équations de contraintes. Si on a  $n$  corps rigides et  $m$  contraintes de liaison, alors le système multicorps ne possède que  $6n-m$  degrés de liberté.

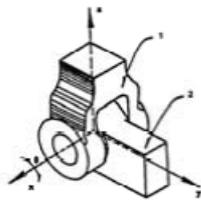
Les liaisons cinématiques sont classées selon le type de mouvement relatif autorisé [18]: suivant une ligne, une surface ou arbitraire dans l'espace. Les couples cinématiques sont divisés en deux catégories :

- Couples cinématiques inférieurs.
- Couples cinématiques supérieurs

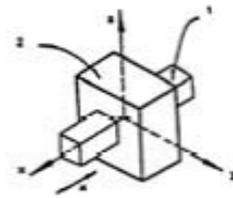
### 2.2.1.1 Couples cinématiques inférieurs

Le contact entre les corps s'effectue sur une partie substantielle d'une surface. Le point essentiel de ce type de couple est que le mouvement relatif des corps l'un par rapport à l'autre est identique. Il y a Seulement 6 couples figure 1.4:

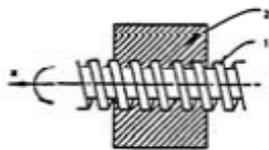
- liaisons rotoïde (R), prismatique (P) et hélicoïdale (H), toutes de classe 5
- liaison cylindrique (C) classe 4
- liaison point sur plan (E) et sphérique (S) classe 3



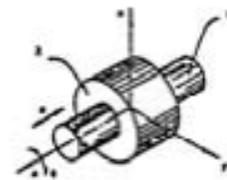
Liaison rotoïde



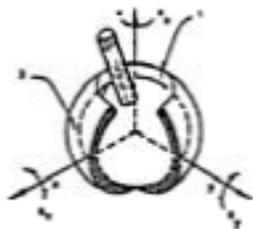
Liaison prismatique



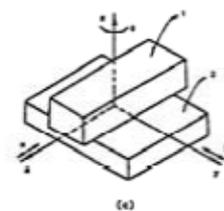
Liaison hélicoïdale



Liaison cylindrique



Liaison sphérique

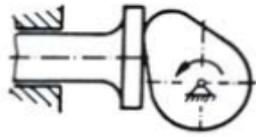


Liaison plan sur plan

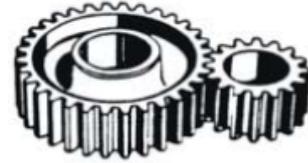
Figure 1.4 exemple de couples cinématiques inférieurs

2.2.1.2 Couples cinématiques supérieurs.

La liaison entre les corps est caractérisée par un contact ponctuel ou linéaire, figure 1.5



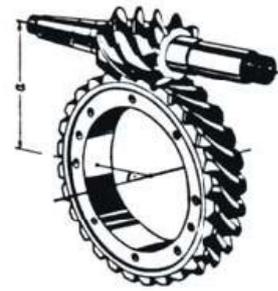
Liaison à contact plane



Liaison à contact plane



Liaison à contact conique



Liaison à contact sphérique

Figure 1.5 exemple de couples cinématiques supérieurs

Il est possible de remplacer la plupart des couples cinématiques par des combinaisons d'articulations de classe 5: rotoïde, prismatique ou hélicoïdal tableau 1.1

Articulation universelle	Articulation cylindrique	Articulation sphérique	Articulation plane

Tableau 1.1 remplacement des couples cinématiques de classe 4 et 3 par une combinaison de couples cinématiques de classe 5

La structure d'un robot industriel est divisé en deux sous groupes figure 1.6 :

- le porteur pour le positionnement.

- l'effecteur pour l'orientation

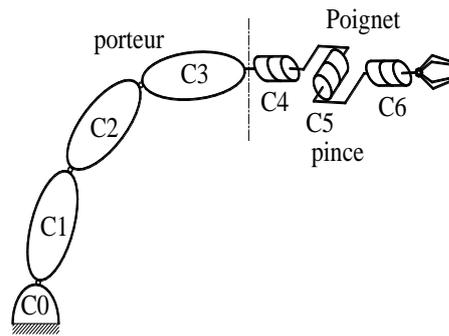


Figure 1.6 structure d'un manipulateur à poignet rotule

### 222. Le porteur d'un robot

Les 3 axes, de rotation ou de translation, peuvent être classés en 8 arrangements de base, dont les principaux sont schématisés sur les figures **1.7** d'après la représentation normalisée AFNOR [1], [11] . Ce sont les structures suivantes:

- 3 rotations : la configuration la plus fréquente est la structure sphérique (figure **1.7 a**) avec ses deux variantes classiques :
  - *structure sphérique à parallélogramme* (figure **1.7 b** ), dans laquelle les motorisations des axes 2 et 3 sont solidaires de l'axe 1 et la transmission du moteur 3 à l'axe 3 est constituée par une bielle formant avec le bras d'axe 2 et leurs liaisons un parallélogramme.

L'intérêt de cette structure réside dans la diminution du couple subi par l'axe 2.

- *structure sphérique à parallélogramme et course limitée de la chaîne cinématique* (en général, par une vis à roulement) (figure **1.7 f**).

Une autre configuration, orientée vers l'assemblage est majoritaire pour cette application, sa structure possède 3 rotations d'axes verticaux (figure **1.7 g**); d'origine japonaise et dénommée *SCARA* (*Selective Compliance Assembly Robot Arm*), elle vise un travail d'assemblage selon une direction verticale :

*La structure horizontale* (1 rotation, 1 translation, 1 rotation d'axes verticaux) dans laquelle le bras et l'avant-bras du robot se meuvent dans un plan horizontal (d'où l'appellation) défini par la position de l'axe de translation (figure **1.7 c** ) ;

*La structure polaire* (1 rotation d'axe vertical, 1 rotation d'axe horizontal et 1 translation selon la direction définie par la seconde rotation) ; la seconde rotation est en général de faible amplitude, de l'ordre de 45° (figure **1.4 7 b** ) ;

Une *structure dérivée de la structure sphérique* par remplacement du premier axe de rotation par une translation est donnée (figure 1.7 e).

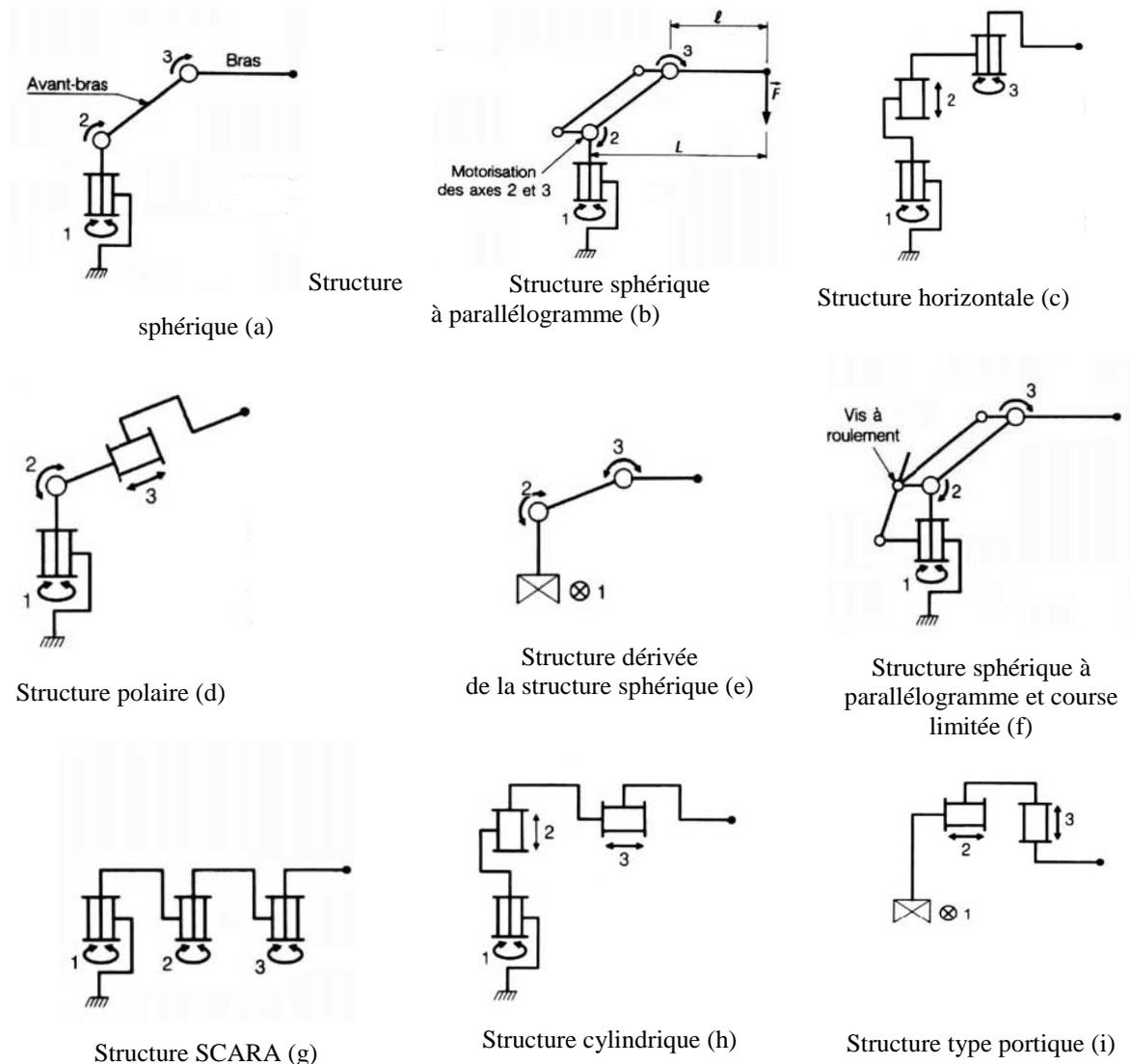


Figure 1.7 différentes structures du porteur d'un robot industriel.

- une rotation - deux translations : la structure la plus courante est la *structure cylindrique* (figure 1.7 h) particulièrement utilisée pour des opérations de manutention, palettisation, etc.

- trois translations : la structure la plus répandue est du type *portique XYZ* (figure 1.7 i).

#### *Structures en chaînes ouvertes arborescentes*

Certains corps sont connectés à plus de deux autres corps d'où la possibilité d'avoir plusieurs organes terminaux (comme le corps humain).

*Structure complexe*, elle comprend des boucles fermées, sa modélisation est basée sur les structures simplement connectées avec des contraintes liées à la fermeture des boucles. Ce type de structure a une rigidité importante, d'où il permet une précision considérable et, par contre, une faible mobilité.

### 2 2 3 Le poignet

Les poignets de robots sont à 1, 2 ou 3 axes, qui sont dans la quasi-totalité des cas d'axes de rotation. Ils ne se distinguent pas par leur structure mais par la disposition relative des axes et par les positions des moteurs et des réducteurs dans les chaînes cinématiques

#### - *Poignet à deux axes,*

Il est à la base de la conception des poignets à 3 axes. La figure 1.8 schématise une telle structure où la commande du premier axe de poignet (ici axe 4) est directe, alors que celle du second axe (axe 5) passe par l'intermédiaire d'un couple de pignons coniques au travers duquel le changement de direction axe 4 - axe 5 s'opère.

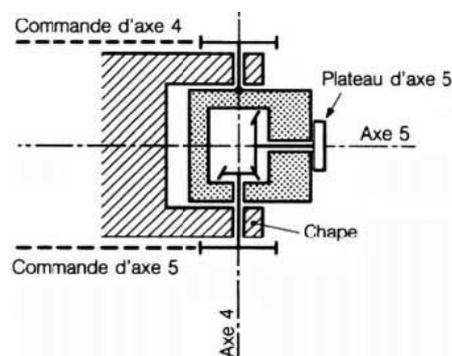
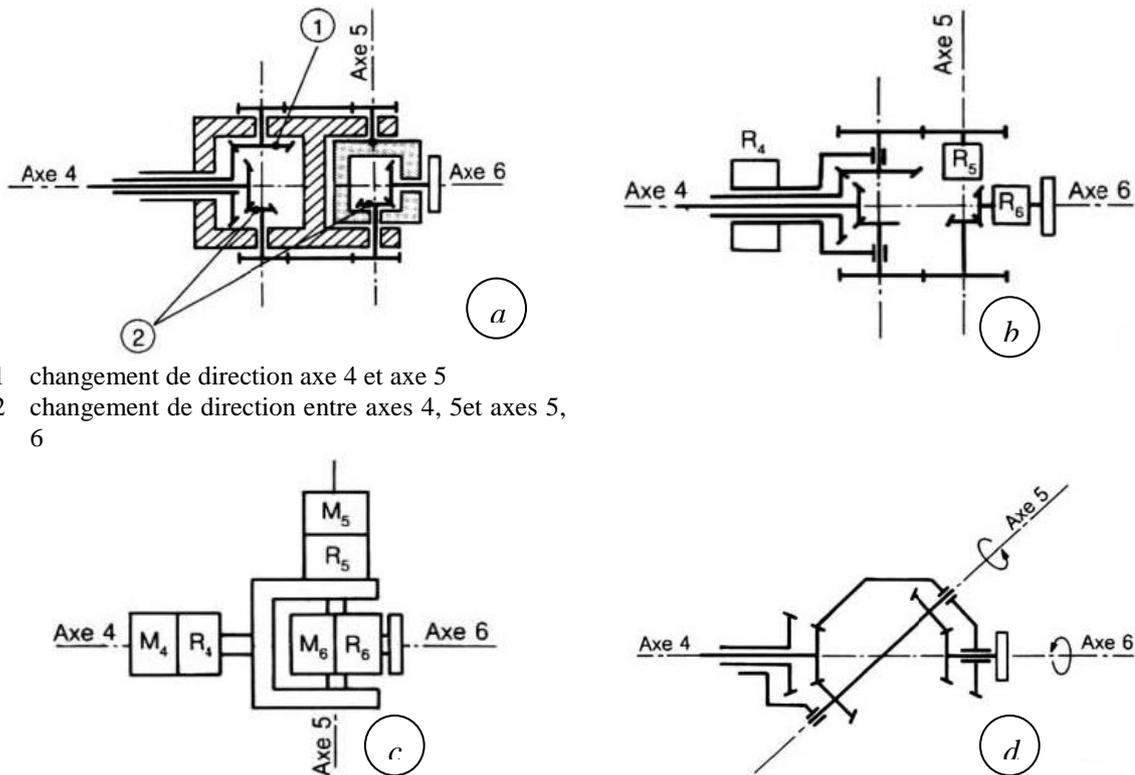


Figure 1.8 Représentation d'un poignet à deux axes

#### - *Poignets à 3 axes concourants*

La conception des poignets à 3 axes concourants (figure 1.9) est une extension de la précédente : 3 couples de pignons coniques sont utilisés pour transmettre les couples et les mouvements lors des changements de direction entre axes 4 et 5 d'une part, puis 5 et 6 d'autre part. Les poignets de ce type diffèrent :

- par l'emplacement des moteurs et réducteurs dans la chaîne cinématique : les moteurs et réducteurs sont situés en amont du poignet, figure **1.9 a**



- 1 changement de direction axe 4 et axe 5  
 2 changement de direction entre axes 4, 5 et axes 5, 6

Figure 1.9 représentation schématique de quelques Poignets à trois axes concourants

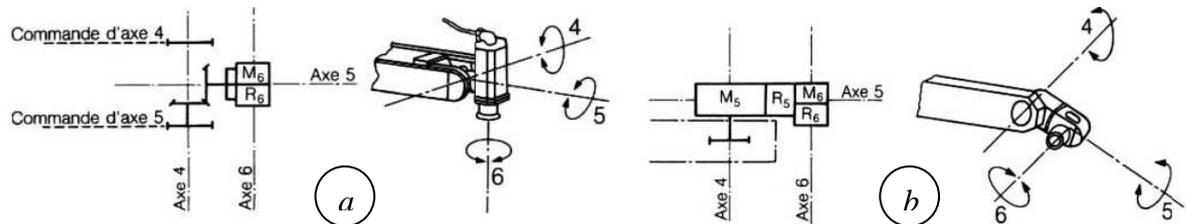


Figure 1.10 représentation schématique de quelques Poignets à trois axes non concourants

- figure **1.9 b** : les moteurs sont toujours en amont mais les réducteurs sont implantés en aval des couples de pignons coniques,
- figure **1.9 c** : construction en cascade où chaque couple moteur-réducteur est porté par l'axe le précédant ; de ce fait, il n'a plus besoin de pignons coniques de transmission, au prix d'une construction plus lourde à capacité de charge égale ;

Par la perpendicularité (figure **1.9 d**) des 3 axes de rotation ; on obtient une construction compacte et sans limitation de course sur les 3 axes du poignet, alors que les constructions précédentes entraînaient une limitation de la rotation du second axe du poignet dans sa chape.

Les **poignets à axes non concourants** sont principalement de deux types :

- le premier (figure **1.10 a**) comprend le poignet à 2 axes de la figure **1.8**. Sur le plateau terminal est fixé, perpendiculairement au second axe du poignet, un ensemble *moteur et réducteur* constituant le troisième axe.
- la structure précédente conserve l'inconvénient inhérent aux constructions à *chape* des figures **1.8, 1.9a, b et c** d'une course réduite de l'axe 5, de l'ordre de 210 à 240°. La construction en porte à faux de la figure **1.10b** permet d'atteindre des débattements plus élevés, supérieurs à 30<sup>00</sup>.

#### 2.2.4 L'effecteur.

L'effecteur est l'organe terminal du robot, il se termine généralement par une plaque de base, percées de trous taraudés; cela permet la fixation de différents outils au robot universel et donc l'adaptation de celui-ci à des tâches spécifiques (figure 1.11). En effet, la plupart des machines de production exigent des outils et des fixations spécialement conçus pour une application particulière ; à cet égard, le robot n'est donc pas une exception. Il faut d'ailleurs noter que beaucoup d'outils conventionnels, utilisés à la main ou sur certaines machines (pistolets de peinture ou de collage, visseuses, perceuses, pinces,...) peuvent devenir des effecteurs de robotique. En outre, il ne faut pas oublier que l'effecteur est l'organe terminal du robot, c'est donc lui qui sera en contact avec des objets extérieurs. De ce fait, il est exposé à des accidents divers et doit être muni de protections (butées, "fusibles" mécaniques, etc.)

Dans beaucoup d'applications, l'effecteur est un outil, généralement dérivé des outils traditionnels:

- outil pour soudure à l'arc
- pince pour soudure par points
- pistolet de peinture ou de collage
- broches rotatives pour perçage, vissage, meulage, nettoyage,
- torche de chauffage, découpage...
- jet d'eau pour découpage

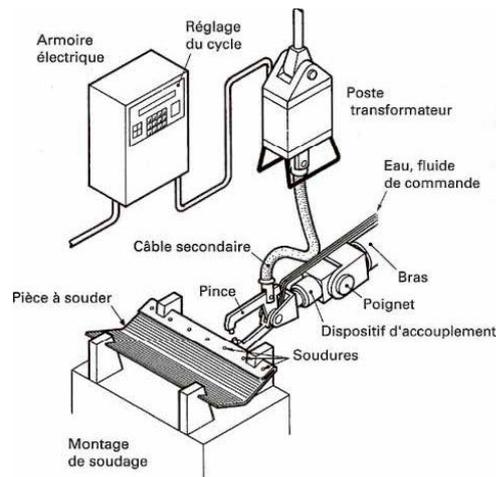


Figure 1.11 exemple d'effecteur de robot de soudage par point

### 2.3 Les actionneurs

Un actionneur permet de modifier la configuration de la structure et de lutter contre la gravité, l'inertie et les forces extérieures. Un actionneur est un dispositif capable de générer une force ou un couple à une vitesse variable et par conséquent, capable de modifier à chaque instant la configuration de la structure mécanique. Ces actionneurs traitent l'énergie primaire (électrique, hydraulique ou pneumatique), pour la convertir en énergie mécanique, en la transmettant aux articulations et organes de transmission. Ils peuvent contrôler certaines grandeurs caractérisant le mouvement : couples ou efforts, positions, vitesses.

#### 1.3.1 Fonctionnement et performance

Pour un bras articulé, une solution simple est d'avoir un actionneur par axe du robot (il peut être associé à un réducteur). Dans ce cas, en plus de l'encombrement supplémentaire, la masse des actionneurs et des organes associés, leur inertie s'ajoute à celles des structures. Une autre possibilité consiste à reporter l'actionneur sur la base du robot, la transmission se faisant à l'aide d'une chaîne cinématique convenable. Mais celle-ci est d'autant plus complexe que l'articulation est éloignée. Les performances des robots dépendent fortement de celles des actionneurs et des chaînes cinématiques associées qui ont, de ce fait, une importance primordiale. Pour contrôler la dynamique du système, il faut d'abord avoir une bonne maîtrise, à chaque instant, du couple ou des efforts transmis par les actionneurs. La tendance naturelle est à l'augmentation des cadences de fonctionnement, ce qui demande une diminution du temps d'accélération et de freinage des actionneurs. Ceux-ci doivent donc avoir pendant ces périodes (qui peuvent représenter une part importante du temps de travail) un couple transitoire en moteur et en frein de bonne qualité et de valeur la plus élevée possible dans des conditions d'échauffement acceptables.

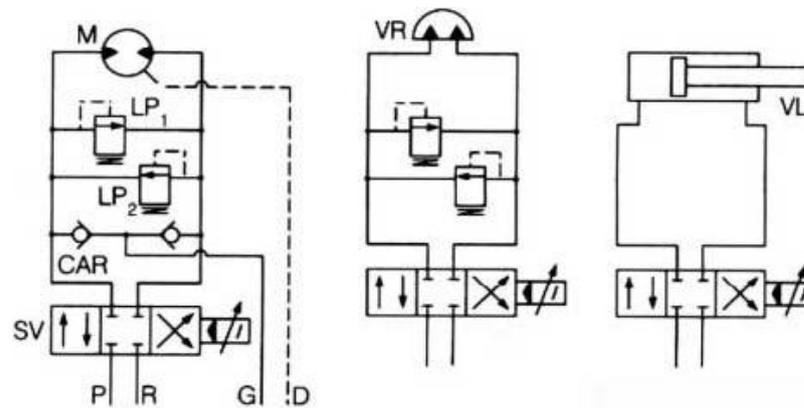
Il est également impératif de diminuer l'inertie des masses en mouvement. Il y a donc nécessité de pouvoir disposer d'actionneurs ayant un fort couple massique en dynamique. Les performances des actionneurs de robots sont jugées d'après des critères suivant :

- le **couple massique** : rapport du couple que le moteur peut exercer à sa masse (exprimé en Nm/kg). Plus il est élevé, plus les moteurs pourront aisément être implantés en aval des chaînes cinématiques et, notamment, pourront motoriser les outils manutentionnés par le robot.
- la **capacité d'accélération** : rapport du couple maximal que peut délivrer l'actionneur à son inertie, qui atteint couramment 5 000 à 20 000 rad/s<sup>2</sup> pour les moteurs électriques et plusieurs dizaines de milliers de rad/s<sup>2</sup> pour les moteurs hydrauliques ; ce rapport répond généralement aux exigences de la robotique ;
- le **facteur de service** : rapport du temps pendant lequel le moteur peut fonctionner en accélération/décélération au temps de cycle ; un rapport égal à 1 est souhaitable mais, suivant les axes de robots et les applications, des rapports de 1/5 à 1 peuvent être acceptables ;
- la **régularité du couple moteur**, qui est surtout importante dans le cas, aujourd'hui restreint, de la motorisation directe, lorsque les axes de robots sont animés par l'intermédiaire de réducteurs, les causes d'irrégularités de ces derniers masquent celles dues aux moteurs ;
- la **commandabilité des axes de robots**, qui sera d'autant plus aisée que la relation liant la commande (en général, le courant issu de l'armoire de commande du robot) au couple exercé sur les axes du robot sera simple et constante dans le temps ;
- la **consommation énergétique** ;
- la **sensibilité à l'environnement**, vis-à-vis de laquelle les actionneurs se démarquent surtout par les risques qu'ils génèrent potentiellement en atmosphère à risque d'explosion ; [19].

### 2.3.2 Motorisation hydraulique

La technologie hydraulique se caractérise par une puissance massique élevée. Ce qui fait qu'elle est la source de puissance la plus utilisée aux débuts de la robotique industrielle. Parmi les principaux actionneurs qui sont utilisés dans l'industrie on peut citer :

- les moteurs hydrauliques rapides M (figure 1.12 dont la vitesse maximale est généralement comprise entre 1 000 et 3 000 tr/min selon la taille) actionnant les axes des robots à travers les réducteurs mécaniques ;
- les vérins linéaires VL ou rotatifs VR entraînant directement les articulations du robot et animés de vitesses maximales de l'ordre de 1 m/s (ou de quelques rad/s). Les mouvements de ces actionneurs sont contrôlés par des organes d'interface électro hydrauliques, les servovalves SV. Pour limiter les effets néfastes de la compressibilité du fluide hydraulique, ces organes d'interface sont situés à proximité immédiate des actionneurs. L'ensemble servovalves-actionneur, souvent complété par des composants de sécurité contre les risques de surpression et de cavitation, constitue un servo-actionneur électrohydraulique (figure 1.12).



CAR : sécurité contre les risques de cavitation  
 LP : sécurité contre les risques de surpression  
 M : moteur hydraulique  
 SV : servovalve  
 VL : vérin linéaire

VR : vérin rotatif  
 G : anti cavitation  
 D : retour de fuite  
 P : pression  
 R : retour

Figure 1.12 Servo actionneur

L'énergie nécessaire aux actionneurs est fournie par une centrale hydraulique Elle délivre le débit nécessaire aux mouvements des articulations du robot en minimisant la consommation énergétique.

Un robot à actionneurs hydrauliques peut être rendu aisément à *sécurité intrinsèque*, car les liaisons entre l'armoire de commande du robot et ses actionneurs ne mettent en jeu que de faibles courants (quelques dizaines de milliampères).

Les avantages de cette technologie sont contrecarrés par les inconvénients qui sont une consommation énergétique nettement plus élevée qu'avec une motorisation électrique et, surtout, des conditions d'exploitation plus délicates, en raison :

- d'une moindre fiabilité (usure des composants de régulation, telles les servovalves) ;
- d'une plus grande exigence de maintenance (propreté du fluide hydraulique) ; d'un manque de maîtrise de l'étanchéité des circuits ;

De ce fait, l'utilisation de la motorisation hydraulique a été progressivement restreinte aux robots :

- travaillant en atmosphère explosive ;
- à très forte capacité de charge (plusieurs centaines de kilogrammes).

### 2.3.3 Motorisation électrique

La motorisation électrique des robots repose sur l'emploi des moteurs électriques rapides qui entraînent les articulations au travers des réducteurs mécaniques. Ces moteurs sont :

*Moteurs à courant continu constitués*

*Moteurs synchrones triphasés:*

Par rapport à la motorisation hydraulique, les actionneurs électriques présentent des avantages et inconvénients :

#### **Avantages**

Le rendement énergétique global est très supérieur à celui rencontré en hydraulique, l'énergie consommée pour une tâche donnée étant souvent plus de deux fois moindre. De plus, la fiabilité des servomoteurs électriques est excellente et ils bénéficient d'une formation généralement adaptée au personnel de maintenance.

#### **Inconvénients**

Le premier inconvénient des moteurs électriques est leur faible couple massique, inférieur en moyenne de deux à cinq fois à celui des servomoteurs hydrauliques. Cette différence, en partie masquée par les réducteurs dont la masse est indépendante de la technologie de motorisation, a conduit les constructeurs à adapter la conception de leur robot en recourant à:

- des renvois de la motorisation vers l'axe central du robot pour réduire les couples dus à la gravitation et l'inertie du système.
- équilibrer au moins partiellement les efforts gravitaires par répartition des masses ou, plus souvent, par des ressorts ou des vérins.

Par ailleurs, les calories générées au niveau des moteurs ne s'évacuent que localement, les moteurs doivent être dimensionnés en fonction non seulement des couples maximaux mais aussi en fonction des cycles de travail auxquels ils sont soumis .

Le seul inconvénient de la motorisation électrique qui ne puisse être résolu par un dimensionnement adéquat tient à la présence de courants élevés dans les câbles de liaison. Cet inconvénient a longtemps exclu la motorisation électrique des tâches robotisées en atmosphère explosive, avant que n'apparaissent récemment des robots électriques à motorisation synchrone triphasée qui respectent les règles de sécurité en atmosphère explosive.

L'évolution d'aujourd'hui en robotique tend à une utilisation de plus en plus fréquente de moteurs synchrones triphasés. Ces derniers possèdent un ensemble de caractéristiques :

- fiabilité très élevée, du fait de l'absence de collecteur ;
- suppression des contraintes de commutation propres aux moteurs à collecteur.
- faible moment d'inertie ce qui rend ces moteurs synchrones plus utilisés que les moteurs à courant continu,

## 2.4 Réducteurs

Les actionneurs électriques possèdent un faible couple massique d'où ils n'entraînent les axes d'un robot qu'à travers des réducteurs.

### 2.4.1. Critères de performances

#### 2.4.1.1. Jeux

Le jeu du réducteur est un critère essentiel, pour déterminer la qualité d'un réducteur. La présence de jeux mécaniques se fait sentir pour d'autres formes de restitutions des trajectoires. En effet lorsque la trajectoire est restituée géométriquement, certains axes peuvent changer de sens de déplacement à l'intérieur de cette trajectoire. Le jeu de ces axes se traduit alors par une discontinuité sur le trajet restitué ; donc le jeu du réducteur devra être d'autant plus faible que possible, pour un robot à structure sphérique, ce sont les axes 1 et 2, puis 3 et, enfin, ceux du poignet qui sont dans cet ordre les plus marquants . Ainsi, un jeu d'une minute d'angle en sortie de réducteur se traduit par une incertitude de positionnement d'environ 0,6 mm au bout d'un bras de 2 m de longueur.

#### 2.4 1.2 Inertie

Le couple que doit exercer un moteur pendant les phases d'accélération est fonction de sa propre inertie et de celles, de l'arbre primaire, du réducteur et de la charge. Cette

inertie est, ramenée au niveau du moteur. Par conséquent, la plus forte inertie vue par le moteur n'est pas toujours celle de la charge mais celle du réducteur.

#### 2.4.1.3 Raideur

Une caractéristique importante pour le comportement dynamique d'un robot est la *fréquence propre* de ses différents axes. Ces fréquences  $f$  s'expriment sous la forme :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{I}} \quad (2.11)$$

Avec  $k$  raideur (dans notre cas celle du réducteur, ramenée à l'arbre primaire),

$I$  moment d'inertie total ramenée à l'arbre primaire du réducteur.

Plus la raideur du réducteur sera forte, plus sera élevée la fréquence propre de l'axe considéré et, par conséquent, la fréquence de coupure de son asservissement sera plus élevée.

#### 2.4.2 Réducteurs utilisés en robotique

De nombreux types de réducteurs sont utilisés en robotique ; ils se distinguent principalement par :

- la position relative des axes des pignons et roues : réducteurs à axes parallèles, à axes perpendiculaires (réducteurs à roue et vis sans fin), etc. ;
- la fixité ou non des axes : réducteurs à axes fixes, réducteurs planétaires ou épicycloïdaux ;

Les réducteurs à trains parallèles, axes fixes sont les plus simples et les plus classiques. Ceux utilisés en robotique sont réalisés dans des classes de précisions élevées et présentent des jeux réduits, de l'ordre de 1 à 5 min d'angle. Ils comprennent parfois un système de rattrapage de jeu permanent, sur le ou les derniers étages. Le jeu d'engrènement étant d'autant plus pénalisant que l'étage de réduction se situe en aval de la chaîne cinématique. En l'absence de rattrapage de jeu permanent, un rattrapage de jeu est parfois rendu possible lors d'une opération de maintenance, par exemple par rapprochement des axes des pignons et roues.

Les réducteurs épicycloïdaux sont également utilisés comme réducteurs sur des robots industriels ; ils présentent des caractéristiques voisines des réducteurs à trains fixes, et, plus encore que ces derniers, exigent une très grande qualité de réalisation pour obtenir des jeux réduits sans frottements anormaux.

Les réducteurs à roue et vis sans fin sont parfois utilisés en robotique, pour des rapports de réduction relativement faibles, de l'ordre de  $i=10$ , garantissant leur réversibilité.

## 2.5 Capteurs

Différents types de capteurs sont utilisés sur les robots :

- capteurs de position
- capteurs de vitesse
- capteurs d'effort ou de pression

Le premier critère est évidemment la résolution du capteur, c'est la sensibilité à la plus petite variation de la position. Elle est exprimée par un nombre  $N$  de points par tour de l'arbre du capteur ou en minutes d'angle. La vitesse de rotation maximale (contrainte mécanique) et la fréquence de comptage maximale (contrainte électronique) définissent les limitations en vitesse et en produit *vitesse  $\times$  nombre de points par tour* ; elles sont rarement pénalisantes en robotique. L'entretien des capteurs est de grande importance du fait des sollicitations thermiques, mécaniques (vibrations), atmosphériques (protection vis-à-vis des poussières et liquides) et électriques qu'ils subissent. Enfin, une caractéristique essentielle est la nature de l'information que les capteurs délivrent ; elle est incrémentale ou absolue:

- *incrémentale* : l'information est perdue lors des coupures de l'alimentation, à moins que l'information de position ne soit conservée par le biais d'une alimentation secourue, intégrée ou non à l'armoire de commande. Avec un capteur incrémental, il est nécessaire, lors des remises sous tension, de réinitialiser le comptage des impulsions qu'ils émettent à l'aide d'un détecteur d'initialisation implanté sur l'axe ou dans les étages intermédiaires des chaînes cinématiques ;
- *absolue* : il y a lieu de distinguer entre capteur situé sur l'axe du robot proprement dit (situation très peu fréquente du fait du coût d'un capteur à haute résolution) et capteur situé sur l'axe du moteur. Une procédure d'initialisation est donc également nécessaire après une perte d'alimentation pour relocaliser le *tour moteur* dans la *course axe*.

## CHAPITRE 2

### ANALYSE CINEMATIQUE

#### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier le problème de la cinématique direct et inverse. L'application sera basée sur un modèle de robot manipulateur à 6 axes de type poignet rotule, les tâches qui seront réalisées par ce robot concerne le soudage continu en ligne droite et de forme hélicoïdal. Ces résultats seront nécessaires pour le calcul de la dynamique du système

#### ***Définition***

La cinématique étudie le mouvement des corps indépendamment des forces qui les produisent. Elle présente deux voies d'applications:

La première est l'analyse des grandeurs cinématiques liées aux systèmes multicorps. Son but est de définir la géométrie et les dimensions des pièces ou composants du système en tenant compte de l'influence de son environnement. Exemple : transmissions de mouvements, cames, etc. La deuxième voie est celle de la dynamique qui fait appelle aux grandeurs cinématiques.

D'une manière générale, un système multicorps est constitué d'un ensemble de corps rigides ou déformables articulés entre eux à l'aide d'articulations de façon à permettre des déplacements relatifs des éléments qui composent le système, donc un système multicorps résulte :

- d'un ensemble de solides caractérisés par leurs propriétés d'inertie et leurs déformabilité
- de liaisons cinématiques permettant certains mouvements relatifs entre les éléments du système
- de sollicitations externes sous forme : d'efforts appliqués, de suspensions, de contacts ou de trajectoire imposées.

Il faut encore préciser que les articulations doivent permettre le mouvement, car dans le cas contraire, on n'aurait plus à faire à un mécanisme mais à une structure statique qu'est aussi un système multicorps.

L'analyse topologique est à la base de la modélisation des systèmes multicorps. Elle prend en charge le nombre de degrés de liberté, de paramètres de configuration, de coordonnées généralisées et l'état de la chaîne (chaîne simple, arborescente ou à boucles).

## 2.2 Modelé géométrique direct

### 2.2.1 Coordonnées homogènes

Soit P un point dans un repère cartésien de coordonnées  $P_x, P_y, P_z$  (figure 2.1) on appelle coordonnées homogènes du point P les termes  $wP_x, wP_y, wP_z$  où  $w$  est un facteur d'échelle

[ 4 ]. En robotique  $w=1$ , on note P :

$$P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

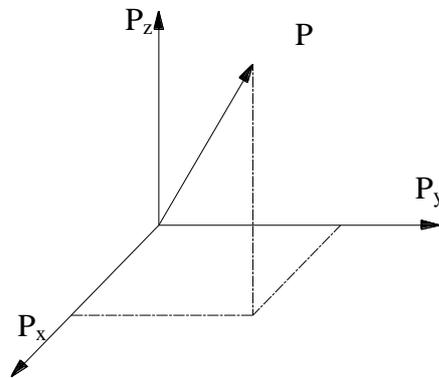


Figure 2.1 représentation d'un point

### 2.2.2 Transformation homogène

Soit  $T_j^i$  une matrice 4x4 qui transforme le repère  $R_i$  au repère  $R_j$  et on note :

$$R_i \xrightarrow{T_j^i} R_j$$

$$T_j^i = [s_j^i \quad n_j^i \quad a_j^i \quad p_j^i] \quad (2.2)$$

Avec

$$T_j^i = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans l'expression (2.2),  $\{s_j^i\}$ ,  $\{n_j^i\}$ , et  $\{a_j^i\}$ , désignent respectivement les vecteurs unitaires suivant l'axes  $x_j, y_j$ , et  $z_j$  du repère  $R_j$  exprimé dans le repère  $R_i$ . Ils sont aussi appelés les cosinus directeurs.  $\{P_j^i\}$  est le vecteur exprimant l'origine du repère  $R_j$  dans le repère  $R_i$ .

La conception et la commande des systèmes multicorps à chaîne simple nécessitent le calcul des modèles géométriques direct et inverse qui expriment la situation désirée de l'organe terminal dans le repère fixe.

### 2.2.3 Modèle géométrique direct d'une chaîne ouverte simple

La modélisation des systèmes mécaniques articulés exige une méthode adéquate pour la description de leurs morphologies. Il existe plusieurs méthodes pour décrire une telle structure dont les plus utilisées en robotique sont :

- Description de Denavit-Hartenberg [20] [10]
- Description de Sheth [21]

Ces méthodes sont basées sur le système de coordonnées relatives. Plusieurs auteurs ont utilisé ces descriptions telles que [3], [21], [22] et [4]. Ces méthodes donnent de bons résultats lorsqu'elles sont appliquées à des systèmes mécaniques simples, par contre elles présentent des ambiguïtés lorsqu'elles sont appliquées à des systèmes de structure complexe : structure fermée. La notation de Khalil Kleinfinger permet la description des différents types de chaînes articulées telles que les structures à boucles.

### 2.2.4 Description de la géométrie des chaînes cinématiques à structure ouverte simple

Soit une structure ouverte simple composée de  $n+1$  corps noté  $C_0, \dots, C_n$  et de  $n$  articulations. Le corps  $C_0$  désigne la base de la chaîne et le corps  $C_n$  désigne le corps qui porte l'organe terminal, l'articulation  $i$  connecte le corps  $C_i$  au corps  $C_{i-1}$  figure 2.3.

### 2.2.5. Descriptions des paramètres Denavit-Hartenberg

La méthode de description des systèmes multicorps est fondée sur les règles et les conventions suivantes :

- Les corps sont supposés parfaitement rigides, ils sont connectés par des liaisons idéales, (pas de jeu, pas d'élasticité)
- Le repère  $R_i$  est lié au corps  $C_i$ .
- La variable articulaire  $i$  est notée  $q_i$
- Le repère  $R_i$  est fixe sur le corps  $C_i$  de tel sorte que :
  - L'axe  $z_i$  est porté par l'axe de l'articulation  $i$
  - L'axe  $x_i$  est porté par la perpendiculaire commune aux axes  $z_i$  et  $z_{i-1}$ . Si les axes  $z_i$  et  $z_{i-1}$  sont parallèles ou colinéaires le choix de  $x_i$  n'est pas unique, des considérations de symétries ou de simplicités permettent un choix rationnel.

Le passage du repère  $R_{i-1}$  au repère  $R_i$  (figure 2.2) s'exprime en fonction des paramètres suivants :

- $\alpha_i$  : angle entre les axe  $z_{i-1}$  et  $z_i$  correspondant à une rotation autour de l'axe  $x_{i-1}$ .
- $d_i$  : distance entre  $z_{i-1}$  et  $z_i$  le long de  $x_{i-1}$ .
- $\theta_i$  : angle entre les axes  $x_{i-1}$  et  $x_i$  et qui correspond à une rotation autour de l'axe  $z_i$ .
- $r_i$  : distance entre  $x_{i-1}$  et  $x_i$  le long de  $z_j$ .
- La variable articulaire  $q_i$  associée à la  $i^{\text{ème}}$  articulation est donnée par :

$$q_i = (1 - \sigma_i)\theta_i + \sigma_i r_i \quad (2.2)$$

qui exprime une articulation rotoïde ou prismatique.  $\sigma_i$  est une variable booléenne :

$\sigma_i = 0$  si l'articulation  $i$  est rotoïde

$\sigma_i = 1$  si l'articulation est prismatique

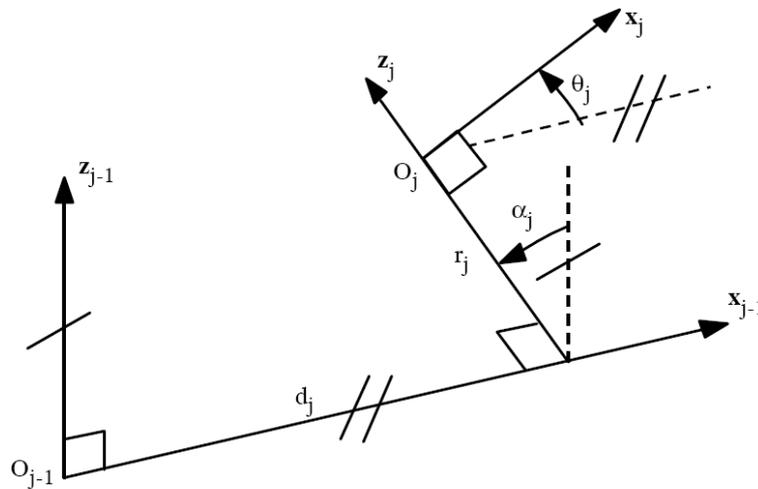


Figure 2.2 Paramétrage géométrique dans le cas d'une structure ouverte simple.

La matrice de transformation définissant le repère  $R_i$  dans le repère  $R_{i-1}$  est donnée par [4] :

$$T_i^{i-1} = Rot(x_{i-1}, \alpha_i) Trans(x_{i-1}, d_i) Rot(z_i, \theta_i) Trans(z_i, r_i) \quad (2.3a)$$

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & d_i \\ C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i & -r_i S\alpha_i \\ S\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & r_i C\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3b)$$

Le modèle géométrique direct d'une chaîne cinématique simple ouverte de  $n+1$  corps et de  $n$  articulations (figure 2.3) est donné par

$$T_n^0(q_1, q_2, \dots, q_n) = \prod_{i=1}^{n+1} T_i^{i-1}(q_i) \quad (2.4)$$

La matrice  $T_n^0$  est appelée modèle géométrique direct (MGD)

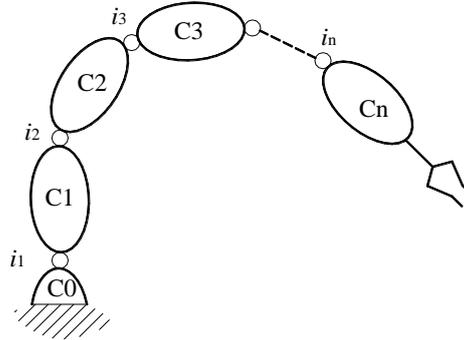


Figure 2.3 Système multicorps à chaîne simple ouverte

Chaque joint est de classe 5 et peut s'exprimer comme une fonction à un seul degré de liberté

### 2.2.6 Angles d'Euler

Les angles d'Euler sont 3 paramètres indépendants [23]. Ils permettent de décrire la rotation d'un solide autour d'un axe arbitraire de façon unique. La description d'Euler convient pour les articulations rotules, les gyroscopes, etc.

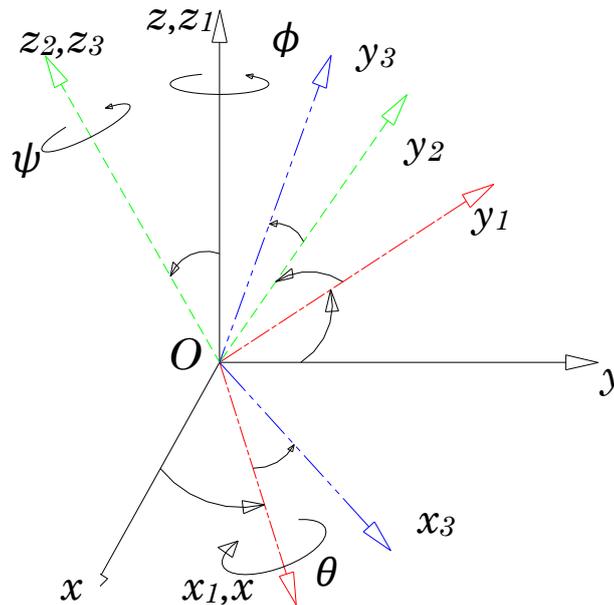


Figure 2.4 Angles d'Euler

Le formalisme des angles d'Euler consiste à décomposer la rotation du repère  $oxyz$  en 3 rotations élémentaires (figure 3.4) :

- Rotation  $\phi$  autour  $Oz$  :  $R(z, \phi)$ .
- Rotation  $\theta$  autour  $Ox_1$  :  $R(x_1, \theta)$
- Rotation  $\psi$  autour  $Oz_2$  :  $R(z_2, \psi)$

En combinant les 3 rotations on a :

$$Rot(\phi, \theta, \psi) = Rot(z, \phi)Rot(x_1, \theta)Rot(x_2, \psi)$$

$$Rot(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} C\phi C\psi - S\phi C\theta S\psi & -C\phi S\psi - S\phi C\theta C\psi & S\phi S\theta \\ S\phi C\psi + C\phi C\theta S\psi & -S\phi S\psi + C\phi C\theta C\psi & -C\phi S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

### 2.2.7 Description de la géométrie des chaînes cinématiques à structures arborescentes

La structure arborescente est constituée de  $n$  articulations et de  $n+1$  corps rigides et éventuellement de plusieurs corps terminaux (figure 2.5), par convention, les corps et les articulations sont numérotés de la manière suivante :

- la base est fixe et constitue le corps  $C_0$
- les numéros des corps et articulations sont croissants sur chaque branche, de la base vers un organe terminal.
- le corps  $C_j$  est articulé en  $j$  c'est-à-dire l'articulation  $j$  connecte le corps  $C_j$  au corps  $C_{a(j)}$ . Le corps  $C_{a(j)}$  est l'antécédent du corps  $C_j$ .

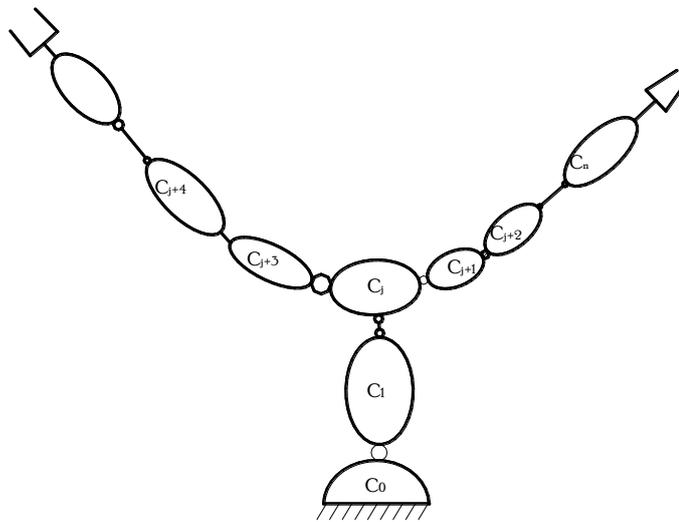


Figure 2.5 Notation d'une structure arborescente

#### 2.2.7.1 Descriptions des paramètres articulaires d'une structure arborescente

Deux cas sont à envisager pour définir la matrice de transformation homogène  $T_j^i$  [4] avec  $i = a(j)$ :

- 1- si  $x_i$  est la perpendiculaire commune à  $z_i$  et à  $z_j$  alors le passage du repère  $R_i$  au repère  $R_j$  s'écrit comme dans le cas des chaînes simples ; relation (2.3)

2- si  $x_i$  est la perpendiculaire commune à  $z_i$  et à un autre axe  $z_k$  on construit la perpendiculaire commune  $x_{i'}$  aux axes  $z_i$  et  $z_j$ . Le passage de  $R_{i'}$  (défini par  $x_{i'}$  et  $z_i$ ) à  $R_j$  s'effectue à l'aide des quatre paramètres usuels ( $\alpha_j, d_j, \theta_j, r_j$ ) (figura 3.6). Pour définir le passage de  $R_i$  à  $R_{i'}$  il faut ajouter deux paramètres :

- $\gamma_j$  : angle entre  $x_i$  et  $x_{i'}$  autour de  $z_i$
- $b_j$  : distance entre  $x_i$  et  $x_{i'}$  le long de  $z_i$ .

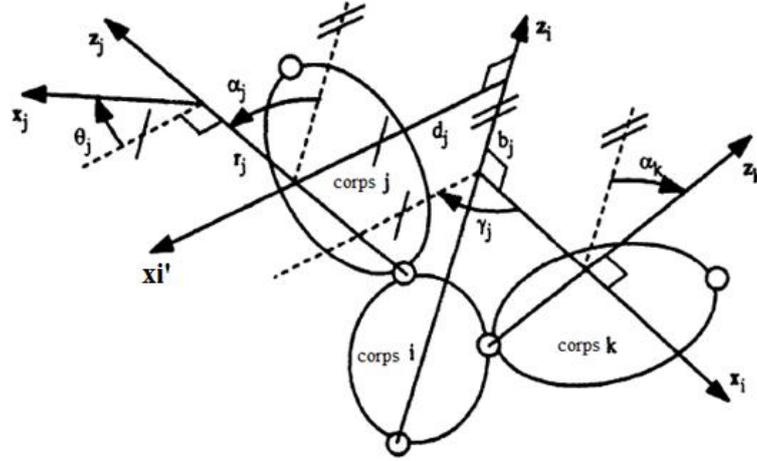


Figure 2.6 Paramètre géométrique pour un corps à plus de deux articulations.

Ces six paramètres permettent de construire la matrice de transformation homogène suivante :

$$T_j^i = Rot(z_i, \gamma_j) trans(z_i, b_j) Rot(x_{i'}, \alpha_j) Trans(x_{i'}, d_i) Rot(z_j, \theta_j) Trans(z_j, r_i) \quad (2.6a)$$

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C\gamma_j C\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -C\gamma_j S\theta_j - S\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & S\gamma_j S\alpha_j & d_j C\gamma_j + r_j S\gamma_j S\alpha_j \\ S\gamma_j C\theta_j + C\gamma_j C\alpha_j S\theta_j & -S\gamma_j S\theta_j - C\gamma_j C\alpha_j C\theta_j & -C\gamma_j S\alpha_j & d_j S\gamma_j - r_j C\gamma_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j + b_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6b)$$

### Remarque

- La relation (2.6) représente la forme générale de la matrice de transformation homogène.
- Quand  $b_j$  et  $\gamma_j$  sont nuls, cela correspond au cas fréquent relation (2.3b)

### 2.2.8 Descriptions des chaines cinématiques à structures fermées.

Le système est composé de  $n+1$  corps, la base étant le corps  $C_0$ , et éventuellement de plusieurs organes terminaux et il dispose de  $L$  articulations. Le nombre de boucles fermées est donné par la relation :

$$B = L - n \quad (2.7)$$

Parmi les  $L$  articulations,  $N$  seulement sont motorisées et on suppose que la structure soit compatible avec les contraintes de fermeture des boucles, et que le nombre de degrés de liberté  $N$  du robot est égal au nombre d'articulations motorisées. La connaissance des  $N$  variables articulaires permet de déterminer la configuration du robot. Pour déterminer les paramètres géométriques d'une telle structure, on procède comme suit :

- on construit d'abord une structure arborescente équivalente comportant  $n$  articulations et  $n$  corps mobiles. En coupant virtuellement chacune des boucles sur l'une de ces articulations non motorisée telle que le nombre de corps qui la sépare de la racine ait le même nombre d'articulations que l'on parcourt la boucle d'un côté ou de l'autre. On place ensuite les repères sur les corps et on détermine les paramètres géométriques de la structure arborescente équivalente.
- on numérote les articulations coupées à partir de  $n+1$  jusqu'à  $L$  pour chaque articulation coupée  $k$ . On définit un repère  $R_k$  fixe par rapport à l'un des corps supportant cette articulation. On suppose que l'axe  $z_k$  soit porté par l'axe de l'articulation  $k$  et que l'axe  $x_k$  soit porté par la perpendiculaire commune à  $z_k$  et  $z_j$ .
- le repère  $R_k$  étant fixe par rapport au corps  $C_j$  on peut définir des paramètres géométriques constants exprimant la transformation entre  $R_j$  et  $R_k$ . Cette transformation sera notée  $T_{k+B}^j$ ,  $j=a(k+B)$  et les paramètres de la transformation seront indicés  $k+B$  pour  $(k=n+1, \dots, L)$ . Ceci revient à dire que le repère  $R_{k+B}$  est confondu avec  $R_k$  (figure 3.7) et les relations de fermeture de la boucle seront déterminées par l'équation :

$$T_j^{k+B} \dots T_k^i = I_4 \quad (2.8)$$

Ainsi la description d'un système comportant des boucles fermées se ramène à celle d'un système arborescent obtenu en coupant chaque boucle sur une de ses articulations et en ajoutant deux repères par articulation coupée ce qui donne un total de  $(n+2B)$  repères .

On note par  $\vec{q}$  le vecteur contenant les  $L$  variables articulaires de la structure fermée:

$$\vec{q} = [\vec{q}_a \quad \vec{q}_p \quad \vec{q}_c]^T \quad (2.9)$$

$\vec{q}_a$  : Vecteur contenant les  $N$  variables articulaires correspondant aux articulations motorisées.

$\vec{q}_p$  : Vecteur contenant les  $p=n-N$  variables articulaires correspondant aux articulations non motorisées de la structure arborescente équivalente

$\vec{q}_c$  : Vecteur contenant les  $B$  variables articulaires correspondant aux articulations coupées

Seules les  $N$  variables  $q_a$  sont indépendants. Il existe  $C=L-N$  relations indépendantes entre les variables. Ces relations sont les équations de contraintes qui traduisent la fermeture des boucles [Khalil 1999]. Ces équations de contraintes sont obtenues pour chaque boucle à partir de la relation (2.8):

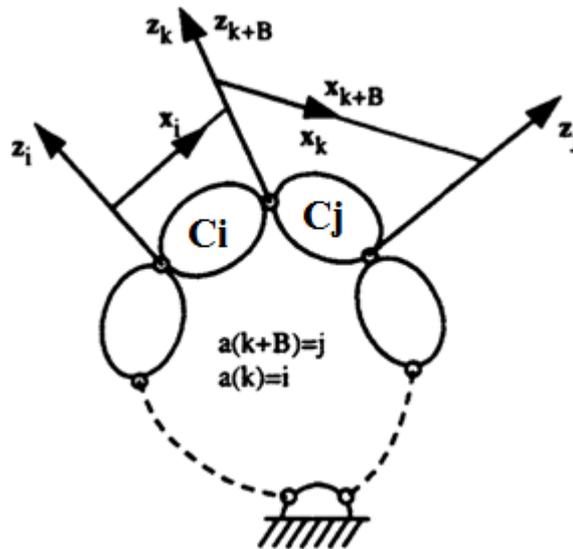


Figure 2.7 Repères placés sur une articulation coupée

### 2.3 Modelé géométrique inverse des chaines ouvertes simples

Le problème inverse consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée de l'organe terminal. La forme explicite qui donne toutes les solutions possibles constitue ce que l'on appelle le modèle géométrique inverse (figure 2.8), lorsqu'il n'est pas possible de trouver une forme explicite du modèle géométrique inverse, on peut calculer une solution particulière par des méthodes numériques [4].

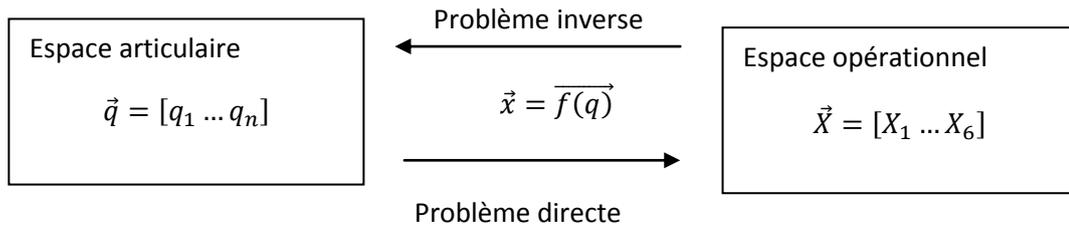


Figure 2.8 Modèles géométriques direct et inverse

Soit  $T_E^d$  une transformation homogène qui représente une situation désirée du repère outil  $R_E$  par rapport au repère atelier, d'une manière général, on peut exprimer  $T_E^d$  par:

$$T_E^d = ZT_n^0 E \quad (2.10)$$

Où

- $Z$  est la matrice de transformation homogène définissant la situation du robot (repère  $R_0$  dans le repère atelier). Dans notre étude la matrice  $Z$  est égale à l'identité.
- $T_n^0$  est la matrice de transformation homogène du repère terminal  $R_n$  dans le repère  $R_0$ .
- $E$  est la matrice de transformation homogène définissant le repère outil  $R_E$  dans le repère  $R_n$

Lorsque le nombre de degrés de libertés  $n \geq 6$  on peut écrire la relation suivante :

$$T_n^0 = Z^{-1} T_E^d E^{-1} \quad (2.11)$$

Lorsque le nombre de degrés de libertés  $< 6$ , l'espace opérationnel du robot est inférieur à six et il n'est pas possible de faire coïncider le repère outil  $R_E$  avec un repère  $R_E^d$  décrivant la tâche sauf lorsque les repères  $R_E$  et  $R_E^d$  sont conditionnés de façon bien particulière pour s'adapter au nombre insuffisant de degrés de liberté.

Dans le calcul du modèle géométrique inverse trois cas se présentent :

- Absence de solution lorsque la situation désirée est en dehors de la zone accessible du robot. Celle-ci est limitée par le nombre de degrés de liberté, les débattements articulaires et la dimension des segments.
- Infinité de solutions lorsque :
  - Le robot est redondant vis-à-vis de la tâche.
  - Le robot se trouve dans certaines configurations singulières

- Solutions en nombre fini, on dit qu'un robot manipulateur est résoluble lorsqu'il est possible de calculer toutes les configurations permettant d'atteindre une situation donnée [2].

### 2.3.1 Calcul du modèle géométrique inverse

Plusieurs méthodes sont disponibles pour le calcul du modèle géométrique inverse [10] et [23]:

- La méthode de Paul qui traite séparément chaque cas particulier et convient pour la plus part des robots industriels ;
- la méthode de Pieper qui permet de résoudre le problème pour les robots à six degrés de liberté possédant trois articulations rotoïdes d'axes concourants ou trois articulations prismatiques ;
- la méthode générale de Raghavan et Roth donne la solution générale des robots à six articulations à partir d'un polynôme.

On adopte la méthode de Paul qui convient le mieux pour notre cas. Le nombre de solutions dépend de l'architecture du robot; pour les classes de robot à six degrés de liberté de type 6R ou 5R1P, le nombre maximum de solutions est de 16, lorsque le robot possède trois articulations d'axes rotoïdes concourants, le nombre maximum de solutions est de 8. Dans tous les cas, il décroît lorsque les paramètres géométriques prennent certaines valeurs particulières

#### 2.3.1.1 Principe de la méthode de Paul.

Soit  $T_n^0$  la matrice de transformation homogène d'un robot manipulateur qui permet le transfert du repère  $R_n$  au repère  $R_0$  :

$$T_n^0 = T_1^0(q_1)T_2^1(q_2) \dots T_n^{n-1}(q_n) \quad (2.12)$$

Soit  $U_0$  la situation désirée telle que :

$$U_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Donc, on cherche à résoudre le système d'équations suivant :

$$U_0 = Z T_1^0(q_1) T_2^1(q_2) \dots T_n^{n-1}(q_n) E \quad (2.14a)$$

Ou bien :

$$U_0 E^{-1} = Z T_1^0(q_1) T_2^1(q_2) \dots T_n^{n-1}(q_n) \quad (2.14b)$$

Avec  $E$  : matrice de transfert du repère outil dans le repère  $R_n$ .

$Z$  : la matrice du repère d'atelier.

On suppose que  $Z = I_4$  matrice d'identité (4X4), et on pose  $U = U_0 E^{-1}$  donc la relation (2.14b) devient :

$$U = T_1^0(q_1) T_2^1(q_2) \dots T_n^{n-1}(q_n) \quad (2.15)$$

Paul [4] a proposé une méthode pour la résolution analytique de l'équation (2.15) qui consiste à pré multiplier successivement les deux membres de l'équation (2.15) par la matrice  $T_{i-1}^i$  pour  $i$  variant de 1 à  $n-1$ , opération qui permet d'isoler et d'identifier une par une les variables articulaires que l'on recherche, c'est-à-dire, pour une chaîne ouverte à 6 degrés de liberté on a :

$$\left. \begin{aligned} U &= T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 \\ T_0^1 U &= T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 \\ T_1^2 T_0^1 U &= T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 \\ T_2^3 T_1^2 T_0^1 U &= T_4^3 T_5^4 T_6^5 \\ T_3^4 T_2^3 T_1^2 T_0^1 U &= T_5^4 T_6^5 \\ T_4^5 T_3^4 T_2^3 T_1^2 T_0^1 U &= T_6^5 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Avec  $T_{i-1}^i$  =inverse de  $T_i^{i-1}$

La solution des équations (2.16) demande de l'intuition mais l'utilisation de la méthode sur un grand nombre de robots industriels a permis de constater que les principaux types d'équations sont résumés dans le tableau (2.1)

Type 1	$Xr_i=Y$
Type 2	$XSq_i+YCq_i=Z$
Type 3	$X_1Sq_i+YCq_i=Z_1$ $X_2Sq_i+Y_2Cq_i=Z_2$
Type 4	$X_1r_jSq_i=Y_1$ $X_2r_jCq_i=Y_2$
Type 5	$X_1Sq_i=Y_1+Z_1r_j$ $X_2Cq_i=Y_2+Z_2r_j$
Type 6	$WSq_j=XCq_i+YSq_i+Z_1$ $WCq_j=XSq_i-YCq_i+Z_2$
Type 7	$W_1Cq_j+W_2Sq_j=XCq_i+YSq_i+Z_1$ $W_1Sq_j-W_2Cq_j=XSq_i-YCq_i+Z_2$
Type 8	$XCq_i+YC(q_i+q_j)=Z_1$ $XSq_i+YS(q_i+q_j)=Z_2$

$r_i$  : variable de l'articulation prismatique  $i$

$Sq_i, Cq_i$  : sinus et cosinus de la variable articulaire rotoïde  $i$

Tableau 2.1 type d'équations rencontrées avec la méthode de Paul

#### Remarque

- la résolution des équations du Tableau 2.1 est donnée en détail dans [4] annexe 1
- Pour la plupart des robots industriels à six degrés de liberté comportant trois rotations d'axe concourant au niveau du poignet, appelé poignet rotule ; on a :

$$d_5 = r_5 = d_6 = 0 \quad (2.17)$$

La position du centre de la rotule est uniquement fonction des variables articulaires :  $q_1, q_2$  et  $q_3$ , ce type de structure assure le découplage entre la position et l'orientation et conduit à deux ensembles d'équations à trois inconnues (figure 2.9).

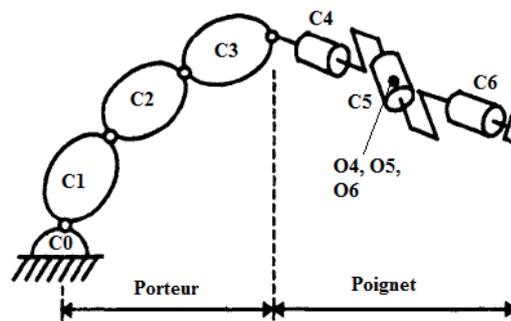


Figure 2.9 robot à six ddl muni d'un poignet rotule

## 2.4 Application : MGI du robot Staubli rx170b (annexe a1)

### 2.4.1 Modèle géométrique direct.

Les paramètres de Denavit-Hartenberg sont résumés dans le tableau 2.2

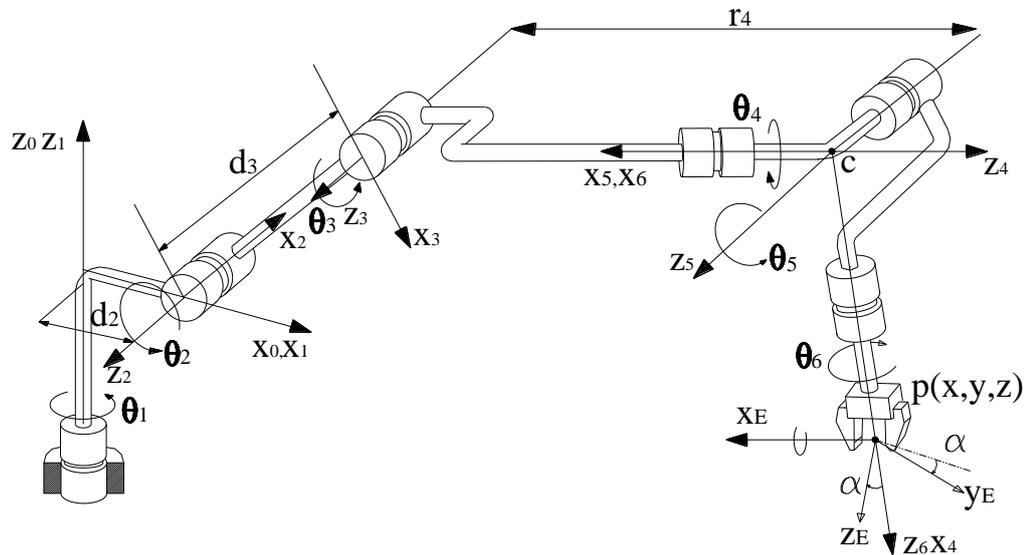


Figure 2.10 robot manipulateur à six axes

$i$	$\sigma_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$	$r_i$
1	0	0	0	$\theta_1$	0
2	0	90°	$d_2$	$\theta_2$	0
3	0	0	$d_3$	$\theta_3$	0
4	0	-90°	0	$\theta_4$	$r_4$
5	0	90°	0	$\theta_5$	0
6	0	-90°	0	$\theta_6$	0

Tableau 2.2 Paramètres géométriques de D-H robot à six axes (Staubli RX170B)

#### Notations

On note :

$$c1 = \cos(\theta_1)$$

$$s1 = \sin(\theta_1)$$

$$c12 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$s12 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

En utilisant la relation (2.3) on a

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & 0 \\ s1 & c1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 & d2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s2 & c2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_3^2 = \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & d3 \\ s3 & c3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^3 = \begin{bmatrix} c4 & -s4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r4 \\ -s4 & -c4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_5^4 = \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s5 & c5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_6^5 = \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s6 & -c6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} c\alpha & 0 & s\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\alpha & 0 & c\alpha & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E$  est la matrice de transformation homogène définissant le repère outil.

Le modèle géométrique directe est donné par la relation (2.10).

$$T = T_6^0 E = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 E$$

où

$$T_6^0(1.1) = c1((c4c5c6-s4s6)c23-s23s5c6)-s1(s4c5c6+c4s6)$$

$$T_6^0(2.1) = s1(c23(c4c5c6-s4s6)-s23s5c6)+c1(s4c5c6+c4s6)$$

$$T_6^0(3.1) = s23(c4c5c6-s4s6)+c23s5c6$$

$$T_6^0(1.2) = c1(-c23(c4c5s6+s4c6)+s23s5s6)+s1(s4c5s6-c4c6).$$

$$T_6^0(2.2) = s1(-c23(c4c5s6+s4c6)+s23s5s6)-c1(s4c5s6-c4c6).$$

$$T_6^0(3.2) = -s23(c4c5s6+s4c6)-c23s5s6.$$

$$T_6^0(1.3) = -c1(c23c4s5+s23c5)+s1s4s5.$$

$$T_6^0(2.3) = -s1(c23c4s5+s23c5)-c1s4s5.$$

$$T_6^0(3.3) = -s23c4s5+c23c5$$

$$T_6^0(1,4) = -c1(s23r4 - c2d3 - d2)$$

$$T_6^0(2,4) = -s1(s23r4 - c2d3 - d2)$$

$$T_6^0(3,4) = c23r4 + s2d3$$

#### 2.4.2 Modèle géométrique inverse par la méthode de Paul.

Soit  $U_0$  la situation désirée telle que :

$$U_0 = \begin{bmatrix} s_{0x} & n_{0x} & a_{0x} & P_{0x} \\ s_{0y} & n_{0y} & a_{0y} & P_{0y} \\ s_{0z} & n_{0z} & a_{0z} & P_{0z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc, d'après la relation (2.10) on a

$$T_6^0 = U_0 E^{-1} = U \quad (2.18)$$

Où  $U$  est donné par :

$$U = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{0x} & n_{0x}c\alpha - a_{0x}s\alpha & n_{0x}s\alpha + a_{0x}c\alpha & -n_{0x}es\alpha - a_{0x}ec\alpha + p_{0x} \\ s_{0y} & n_{0y}c\alpha - a_{0y}s\alpha & n_{0y}s\alpha + a_{0y}c\alpha & -n_{0y}es\alpha - a_{0y}ec\alpha + p_{0y} \\ s_{0z} & n_{0z}c\alpha - a_{0z}s\alpha & n_{0z}s\alpha + a_{0z}c\alpha & -n_{0z}es\alpha - a_{0z}ec\alpha + p_{0z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le poignet est composé de trois axes concourants, structure qui permet le découplage entre les variables articulaires de position et les variables articulaires d'orientation.

1- Calcul de  $\theta_1$   $\theta_2$   $\theta_3$  par la méthode de Paul [4]

Nous avons :

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{Bmatrix} = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Le développement de l'expression précédente donne :

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C1(-r4 \cdot S23 + C2 \cdot d_3 + d_2) \\ S1(-r4 \cdot S23 + C2 \cdot d_3 + d_2) \\ r4 \cdot C23 + S2 \cdot d_3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

On multiplie l'équation (3.18) par  $T_0^1 = (T_1^0)^{-1}$  c'est-à-dire :

$$T_0^1 T_6^0 = T_0^1 U \quad (2.19)$$

Et par identification de la quatrième colonne, on a

$$C1p_x - S1p_y = -r4S23 + C2d3 + C2d3 + d2$$

$$-S1p_x + C1p_y = 0$$

$$P_z = r4C23 + S2d3$$

D'où

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) \quad (2.20)$$

$$\theta'_1 = \theta_1 + \pi$$

On multiplie la relation (2.19) par  $T_1^2$  ; on obtient par identification de la quatrième colonne

$$C2(C1p_x + S1p_y - d2) + S2p_z = -r4S3 + d3 \quad (2.21)$$

$$-S2(C1p_x + S1p_y - d2) + C2p_z = r4C3 \quad (2.22)$$

$$S1p_x - C1p_y = 0 \quad (2.23)$$

a partir des relations (2.21), (2.22) et (2.23) on a :

$$AC2 + BS2 = F \quad (2.24)$$

avec:

$$A = -2d3(C1P_x + S1P_y - d2)$$

$$B = -2P_z d3$$

$$F = -C1^2 P_x^2 - 2C1S1P_x P_y + P_y^2 S1^2 + 2S1P_y d2 + 2C1P_x d2 - P_z^2 - d2^2 - d3^2 + r4^2$$

La résolution de (2.24) est détaillée dans l'annexe A.

$$\theta_2 = \text{ATAN2}(F, \mp \sqrt{A^2 + B^2 - F^2}) - \text{ATAN2}(A, B) \quad (2.25)$$

On a deux cas de solutions pour  $A^2 + B^2 > F^2$

1 solution si  $A^2 + B^2 = F^2$

0 solution si  $A^2 + B^2 < F^2$

On peut calculer  $\theta_3$  à partir de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  :

$$S3 = \frac{d3 - C2(C1P_x + S1P_y - d2) - S2P_z}{r4}$$

$$-S2(C1p_x + S1p_y - d2) + C2p_z = r4C3$$

$$C3 = \frac{-S2(C1P_x + S1P_y - d2) + C2P_z}{r4}$$

$$\theta_3 = ATAN2(S3, C3) \quad (2.26)$$

1- Calcul de  $\theta_4$  ;  $\theta_5$  et  $\theta_6$  par la méthode de Paul [4]

On s'intéresse maintenant au problème de l'orientation,  $R$  est la matrice de transformation homogène telle que

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & P_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Donc, il est possible d'écrire la relation (2.18) comme suit :

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} R_6^0 & P_6^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où

$$R_6^3 = R_0^3 R \quad (2.28)$$

$$R_0^3 R = \begin{bmatrix} C23(C1s_x + S1s_y) + S23s_z & C23(C1n_x + S1n_y) + S23n_z & C23(C1a_x + S1a_y) + S23a_z \\ -S23(C1s_x + S1s_y) + C23s_z & -S23(C1n_x + S1n_y) + C23n_z & -S23(C1a_x + S1a_y) + C23a_z \\ S1s_x - C1s_y & S1n_x - C1n_y & S1a_x - C1a_y \end{bmatrix}$$

Et

$$R_6^3 = \begin{bmatrix} C6C5C4 - S6S4 & -S6C5C4 - C6S4 & -S5C4 \\ C6S5 & -S6S5 & C5 \\ -C6C5S4 - S6C4 & S6C5S4 - C6C4 & S5S4 \end{bmatrix}$$

Par identification on a

$$C5 = -S23(C1a_x + S1a_y) + C23a_z$$

On multiplie l'équation (2.29) par  $R_3^4$  :

Pour des considérations d'écriture seulement, on note :

$$R_0^3 R = \begin{bmatrix} F_x & G_x & H_x \\ F_y & G_y & H_y \\ F_z & G_z & H_z \end{bmatrix}$$

$$R_3^4 R_0^3 R = R_6^4$$

D'où

$$\begin{bmatrix} C4F_x - S4F_z & C4G_x - S4G_z & C4H_x - S4H_z \\ -S4F_x - C4F_z & -S4G_x - C4G_z & -S4H_x - C4H_z \\ F_y & G_y & H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C5C6 & -C5S6 & -S5 \\ S6 & C6 & 0 \\ S5C6 & -S5S6 & C5 \end{bmatrix}$$

Donc, par identification, on a :

$$-S4H_x - C4H_z = 0$$

$$\theta_4 = ATAN2(H_z, -H_x) \quad (2.30)$$

$$\theta'_4 = \theta_4 + \pi$$

$$\begin{cases} S5 = -C4H_x + S4H_z \\ C5 = H_z \end{cases}$$

$$\theta_5 = ATAN2(S5, C5) \quad (2.31)$$

De même,

$$S6 = -S4F_x - C4F_z$$

$$C6 = -S4G_x - C4G_z$$

D'où :

$$\theta_6 = ATAN2(S6, C6) \quad (2.32)$$

### 2.4.3 Position de singularité

- Si  $P_x = P_y = 0$  c'est-à-dire  $S23r - C2d3 = 0$  l'axe 4 se trouve sur l'axe  $z_0$  et  $\theta_1$  est indéterminé. On peut donner à  $\theta_1$  une valeur quelconque généralement fixée par des critères d'optimisation mais il se peut alors qu'un petit changement de la situation désirée demande une variation importante de  $\theta_1$  ce qui n'est pas possible à réaliser compte tenu des limites imposées aux vitesses et aux accélérations des actionneurs.
- Si  $H_x = 0$  et si  $H_z = 0$  la fonction  $ATAN2$ , utilisée pour le calcul de  $\theta_4$  ne permet pas de calculer  $\theta_4$ , (deux argument nuls). A partir de l'élément (2,3) de  $R_6^3$  on constate que dans ce cas  $C5 = \mp 1$ . Cette dernière configuration est présente lorsque les axes 4 et 6 sont confondus et c'est la somme qui intervient ( $\theta_4 \pm \theta_6$ )

Lorsque  $\theta_5 = 0$ , on a

$$\theta_4 + \theta_6 = ATAN2(G_x, G_y)$$

On peut donner à  $\theta_4$  une valeur courante et on calcule  $\theta_6$

## 2.5 Génération de trajectoire rectiligne par un robot a chaine ouverte.

### 2.5.1 Position du problème.

La génération d'une trajectoire continue par un robot recouvre plusieurs domaines d'applications tels que : le soudage à l'arc électrique, le découpage laser ou au plasma ou même à l'oxycoupage la peinture etc. Dans ces opérations un outil est rigidement fixé à

l'organe terminal du robot manipulateur, généralement, pour que la trajectoire générée soit lisse, il faut 6 degrés de liberté : trois degrés de liberté pour la position du chemin et les trois autres pour l'orientation de l'outil. L'organe terminal doit traverser le parcours avec une vitesse et une accélération données par le processus de l'opération. Dans ce type de problème la détermination du vecteur translation pour une trajectoire est accessible, par contre la détermination de la matrice d'orientation pour chaque point de la trajectoire est très délicat [3], par exemple : dans le soudage à l'arc, le point d'amorçage de l'électrode avec le métal de base doit suivre le profil du joint avec une orientation précise déterminée par le procédé de soudage. Donc le problème de la génération de mouvement est le calcul des consignes de position, vitesse et accélération qui sont fonction de temps et qui assurent le passage du robot par une trajectoire désirée, dans cette trajectoire, chaque point est représenté par une matrice (4x4) qui définit la position et l'orientation de l'organe terminal. On peut distinguer les classes de mouvements suivant [4] [24] :

- mouvement entre deux points avec trajectoire libre entre les points,
- mouvement entre deux points en passant par des points intermédiaires pour éviter les obstacles,
- mouvement entre deux points avec trajectoire contrainte entre les points et
- le mouvement entre deux points avec des points intermédiaires et trajectoire contrainte.

Dans les deux premiers cas la génération de mouvements peut se faire directement dans l'espace articulaire, dans les deux derniers cas la trajectoire est décrite dans l'espace opérationnel. Les deux approches : génération de mouvements dans l'espace articulaire et génération de mouvement dans l'espace opérationnel sont schématisés dans les figures 2.11 et 2.12

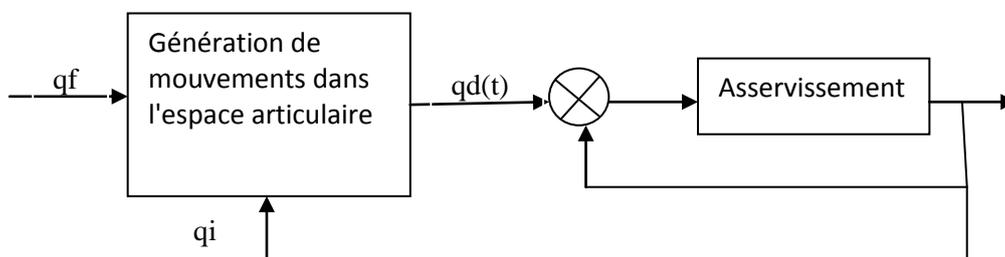


Figure 2.11 Génération de mouvements dans l'espace articulaire

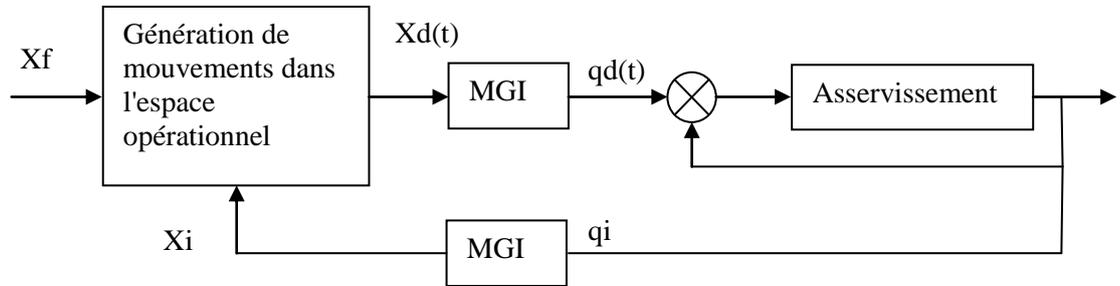


Figure 2.12 Génération de mouvements dans l'espace opérationnel

La génération de mouvement dans l'espace articulaire présente plusieurs avantages :

- elle n'a pas besoin des modèles géométriques et cinématiques inverses donc moins de calcul en ligne ;
- le mouvement ne présente pas des configurations singulières et
- les contraintes de vitesse et de couple sont directement liées à la fiabilité des actionneurs

Malheureusement, la trajectoire de l'organe terminal dans l'espace opérationnel est imprévisible il y a donc risque de collision lorsque le robot travaille dans un espace qui présente des obstacles. Ce type de mouvement est approprié pour réaliser des déplacements rapides dans un espace dégagé.

La génération de mouvement dans l'espace opérationnel permet de contrôler la géométrie de la trajectoire par contre :

- elle implique la transformation en coordonnées articulaires en chaque point de la trajectoire,
- elle est mise en échec si les points de la trajectoire ne sont pas dans l'espace accessible et
- les limites en vitesse et en couple dans l'espace opérationnel varient selon la configuration du robot, on l'exprime par des valeurs traduisant des performances moyennes. On impose donc au robot de travailler en deçà de ses capacités réelles.

### 2.5.2 Génération de mouvement entre deux points dans l'espace articulaire.

On considère un bras à  $n$  degrés de liberté avec  $q^i$  et  $q^f$  les vecteurs des coordonnées articulaires des configurations initiale et finale. Le mouvement entre  $q^i$  et  $q^f$  en fonction du temps  $t$  est décrit par l'équation suivante :

$$q(t) = q^i + r(t)D \quad (2.33)$$

Avec  $0 \leq t \leq t_f$  et  $D = q^i - q^f$

$r(t)$  : polynôme d'interpolation

Les modes d'interpolation polynomiale les plus rencontrés sont l'interpolation linéaire, l'interpolation de degrés 3 et 5 [24] et [4].

#### 2.5.2.1 Interpolations polynomiales linéaires.

L'interpolation linéaire est l'interpolation la plus simple. Dans ce cas le mouvement de chaque articulation est décrit par un polynôme linéaire en temps, avec l'utilisation des deux conditions aux limites :  $q^i$  et  $q^f$ , l'équation du mouvement s'écrit :

$$q(t) = q^i + \frac{t}{t_f} D \quad (2.34)$$

#### 2.5.2.2 Interpolation polynomiale de degré trois.

Deux conditions aux limites peuvent être ajoutées : vitesses nulles de départ et d'arrivée, le polynôme qui répond à ces conditions est alors de degré trois:

$$q(t) = q^i + \left( 3 \left( \frac{t}{t_f} \right)^2 - 2 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 \right) D \quad (2.35)$$

#### 2.5.2.3 Interpolation polynomiale de degré cinq.

Pour les robots à grande vitesse ou transportant des charges importantes, il est nécessaire d'assurer la continuité des accélérations afin d'éviter la présence de forces dynamiques importantes. Pour cela il faut satisfaire 6 contraintes : les contraintes précédentes plus la condition accélérations nulles au départ et à l'arrivée. Le polynôme qui satisfait ces contraintes est de degré cinq :

$$q(t) = q^i + \left( 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right) D \quad (2.36)$$

### 2.5.3 Génération de mouvement dans l'espace opérationnel

#### 2.5.3.1 Génération de mouvement découplable entre deux points dans l'espace opérationnel.

La tâche est décrite au moyen de la matrice de transformation homogène qui décrit la position et l'orientation de l'outil (figure 2.13). Dans cette expression,  $\vec{p}$  représente le vecteur position (absolue) du centre d'outil,  $\vec{a}$  (*approch*), représente le vecteur unitaire

suisant l'axe d'approche de l'outil considéré ici comme une pince,  $\vec{s}$  (*sliding*) représente le vecteur unitaire suivant son axe de fermeture et  $\vec{n}$  (normal) représente le vecteur unitaire normal au plan formé par  $\vec{a}$  et  $\vec{s}$ . Soient  $T_{Ei}^0$  et  $T_{Ef}^0$  les matrices homogènes désignant respectivement les situations initiale et finale désirées :

$$T_{Ei}^0 = \begin{bmatrix} R^i & p^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } T_{Ef}^0 = \begin{bmatrix} R^f & p^f \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On recherche les matrices de transformation qui ramène le point de l'outil de l'état initial  $T_{Ei}^0$  à l'état final  $T_{Ef}^0$  suivant une trajectoire rectiligne (figure 2.13). On décompose le mouvement en : un mouvement de translation rectiligne entre les repères  $T_{Ei}^0$  et  $T_{Ef}^0$  et en mouvement de rotation d'angle  $\gamma$  autour d'un vecteur  $\vec{u}$  de l'organe terminal permettant d'aligner  $R^i$  avec  $R^f$ . Les deux mouvements se terminent en même temps. Dans le cas des robots à poignet rotule, le mouvement est découplable c'est-à-dire l'orientation est indépendante de la position.

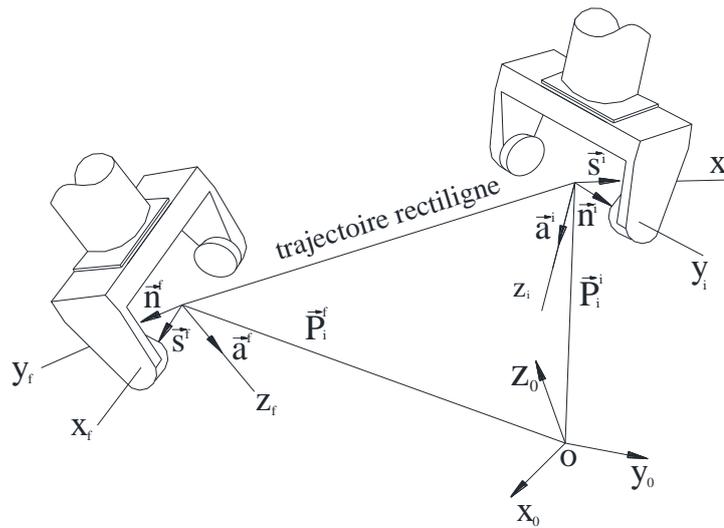


Figure 2.13 Trajectoire rectiligne de l'outil

La distance à parcourir par le mouvement de translation est :

$$Dist(\vec{p}^i, \vec{p}^f) = \|\vec{p}^f - \vec{p}^i\| = \sqrt{(p_x^f - p_x^i)^2 + (p_y^f - p_y^i)^2 + (p_z^f - p_z^i)^2} \quad (2.37)$$

La matrice de rotation qui permet d'aligner  $R^i$  avec  $R^f$  est donnée par :

$$R^i rot(u, \gamma) = R^f \quad (2.38)$$

$$rot(u, \gamma) = R^i{}^T R^f$$

Et on a

$$R_{Ei}^o = \begin{bmatrix} s_x^i & n_x^i & a_x^i \\ s_y^i & n_y^i & a_y^i \\ s_z^i & n_z^i & a_z^i \end{bmatrix} \text{ et } R_{Ef}^o = \begin{bmatrix} s_x^f & n_x^f & a_x^f \\ s_y^f & n_y^f & a_y^f \\ s_z^f & n_z^f & a_z^f \end{bmatrix}$$

La matrice  $rot(u, \gamma)$  est donnée par :

$$rot(u, \gamma) = \begin{bmatrix} \vec{s}^{iT} \\ \vec{n}^{iT} \\ \vec{a}^{iT} \end{bmatrix} [\vec{s}^f \quad \vec{n}^f \quad \vec{a}^f] = \begin{bmatrix} \vec{s}^{iT} \vec{s}^f & \vec{s}^{iT} \vec{n}^f & \vec{s}^{iT} \vec{a}^f \\ \vec{n}^{iT} \vec{s}^f & \vec{n}^{iT} \vec{n}^f & \vec{n}^{iT} \vec{a}^f \\ \vec{a}^{iT} \vec{s}^f & \vec{a}^{iT} \vec{n}^f & \vec{a}^{iT} \vec{a}^f \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

On utilise la relation (A3.7), (A3.8) et (A3.10) annexe A3

$$\cos(\gamma) = \frac{1}{2} (\vec{s}^{iT} \vec{s}^f + \vec{n}^{iT} \vec{n}^f + \vec{a}^{iT} \vec{a}^f - 1) \quad (2.40)$$

$$\sin(\gamma) = \frac{1}{2} \sqrt{(\vec{a}^{iT} \vec{n}^f - \vec{n}^{iT} \vec{a}^f)^2 + (\vec{s}^{iT} \vec{a}^f - \vec{a}^{iT} \vec{s}^f)^2 + (\vec{n}^{iT} \vec{s}^f - \vec{s}^{iT} \vec{n}^f)^2} \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} u_x = \text{sign}(\vec{a}^{iT} \vec{n}^f - \vec{n}^{iT} \vec{a}^f) \sqrt{\frac{\vec{s}^{iT} \vec{s}^f - c\gamma}{1 - c\gamma}} \\ u_y = \text{sign}(\vec{s}^{iT} \vec{a}^f - \vec{a}^{iT} \vec{s}^f) \sqrt{\frac{\vec{n}^{iT} \vec{n}^f - c\gamma}{1 - c\gamma}} \\ u_z = \text{sign}(\vec{n}^{iT} \vec{s}^f - \vec{s}^{iT} \vec{n}^f) \sqrt{\frac{\vec{a}^{iT} \vec{a}^f - c\gamma}{1 - c\gamma}} \end{cases} \quad (2.42)$$

D'où la situation désirée a pour expression :

$$T_E^0(t) = \begin{bmatrix} R(t) & P(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\vec{P}(t) = \vec{P}^i + r(t)(\vec{P}^f - \vec{P}^i) \quad (2.44)$$

$$R(t) = R^i rot(\vec{u}, r(t)\gamma) \quad (2.45)$$

Pour notre cas, on choisit une fonction d'interpolation linéaire et de degré cinq, équations : (2.34) et (2.36)

$$\left. \begin{aligned} r(t) &= \frac{t}{t_f} \\ r(t) &= 10 \left(\frac{t}{t_f}\right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_f}\right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_f}\right)^5 \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

et d'après les relations (A3.5) annexe A3, on a :

$$rot(\vec{u}, r(t)\gamma) = \vec{u}\vec{u}^T(1 - \cos(r(t)\gamma)) + I_3 \cos(r(t)\gamma) + \hat{u} \sin(r(t)\gamma) \quad (2.47)$$

$I_3$  : désigne la matrice unité 3X3,

$\hat{u}$  : la matrice pré produit vectoriel.

#### 2.5.4. Algorithme de calcul des coordonnées articulaires pour une trajectoire rectiligne

##### Introduction des données

- Position orientation de l'outil par rapport à  $T_6^5$   $\alpha \leftarrow 0, e \leftarrow 0.2$
- $E_{outil}$ ,
- TEi et TEf. Situations initiale et finale de l'outil
- $v \leftarrow v_0$  vitesse de déplacement de l'outil

##### Calcul : situation désirée le long du parcours rectiligne

- $E \leftarrow E_{outil}^{-1}$
- Dist: longueur du parcours
- $rot(\vec{u}, \gamma) = TE_i \cdot TE_f^T$
- $\cos(\gamma)$
- $\sin(\gamma)$
- $u$
- $\gamma = atan2(\cos(\gamma), \sin(\gamma))$
- $T_f = \frac{Dist}{v_0}$
- $rot(\vec{u}, \gamma) = \vec{u}\vec{u}^T(1 - \cos(\gamma)) + I_3 \cos(\gamma) + \hat{u} \sin(\gamma)$
- $P(t) = P^i + \frac{t}{t_f} (P^f - P^i)$
- $rot(\vec{u}, \gamma) = \vec{u}\vec{u}^T \left( 1 - \cos\left(\gamma \frac{t}{t_f}\right) \right) + I_3 \cos\left(\gamma \frac{t}{t_f}\right) + \hat{u} \sin\left(\gamma \frac{t}{t_f}\right)$
- $T_E^0(t) = \begin{bmatrix} R(t) & P(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

##### Modèle géométrique inverse.

$N = \text{dimension de } q_i$

pour  $i=1$  à  $N$

- $q_1(i) = atan2(p_y, p_x)$
- $q_2(i) = atan2(F, \mp \sqrt{A^2 + B^2 - F^2}) - atan2(A, B)$
- $q_3(i) = atan2\left(\frac{d3 - C2(C1P_x + S1P_y - d2) - S2P_z}{r^4}, \frac{-S2(C1P_x + S1P_y - d2) + C2P_z}{r^4}\right)$
- $q_4(i) = atan2(S1n_x - C1n_y, C23(C1a_x + S1a_y) + S23a_z)$
- $q_5(i) = atan2(-C4(C23(C1a_x + S1a_y) + S23a_z) + S4(S1n_x - C1n_y), S1n_x - C1n_y)$
- $q_6(i) = atan2\left(-S4(C23(C1s_x + S1s_y) + S23s_z) - C4(S1s_x - C1s_y), -S4(C23(C1n_x + S1n_y) + S23n_z) - C4(S1n_x - C1n_y)\right)$

Fin

- Impression des  $q_i$  sous formes de courbes

## 2.6. Calculs des vitesses et accélérations articulaires.

### 2.6.1 Modèle cinématique direct.

Pour notre application, nous avons besoin du modèle cinématique inverse pour le calcul des vitesses articulaires. Ces dernières sont nécessaires pour que l'organe terminal se déplace à une vitesse donnée par le procédé de soudage. Le modèle cinématique direct décrit la relation entre les vitesses articulaires, les coordonnées articulaires et les vitesses opérationnelles et est écrit sous la forme suivante :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (2.48)$$

Où  $J(q)$  désigne la matrice Jacobienne de dimension  $(m \times n)$  du mécanisme

$$J(q) = \frac{\partial X}{\partial q} \quad (2.49)$$

$m = 6$  et  $n$  désigne le degré de liberté du robot.

$\dot{X}$  désigne les vitesses opérationnelles et  $\dot{q}$  les vitesses articulaires.

L'intérêt de la matrice Jacobienne est multiple [4] [23]:

- elle est nécessaire pour le calcul du modèle cinématique inverse.
- en statique, on utilise la matrice Jacobienne pour modéliser l'interaction de l'environnement sur l'organe terminal.
- elle facilite le calcul des singularités et la dimension de l'espace opérationnel.

### 2.6.2 Calcul de la matrice Jacobienne.

La matrice Jacobienne peut être obtenue par dérivation du modèle géométrique direct  $X = f(q)$  c'est-à-dire :

$$J(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q} \quad (2.50)$$

Mais cette méthode n'est praticable que pour les robots à 2 ou 3 degrés de liberté [4], il est possible de calculer la matrice Jacobienne par une méthode de calcul direct basée sur la relation entre les vitesses de translation  $\vec{v}_n$  et de rotation  $\vec{\omega}_n$  des différents solides (éléments) qui composent le système (figure 2.14). Après dérivation de l'équation donnant les positions, on obtient les relations suivantes :

$$\vec{v}_{n,i}^0 = \vec{v}_{i-1}^0 + \vec{\omega}_{i-1}^0 \times R_{i-1}^0 \vec{p}_i^{i-1} + \sigma_i q_i R_i^0 \vec{a}_i^i \quad (2.51a)$$

$$\vec{\omega}_i^0 = \vec{\omega}_{i-1}^0 + \bar{\sigma}_i R_i^0 \vec{a}_i^i \dot{q}_i \quad (2.51b)$$

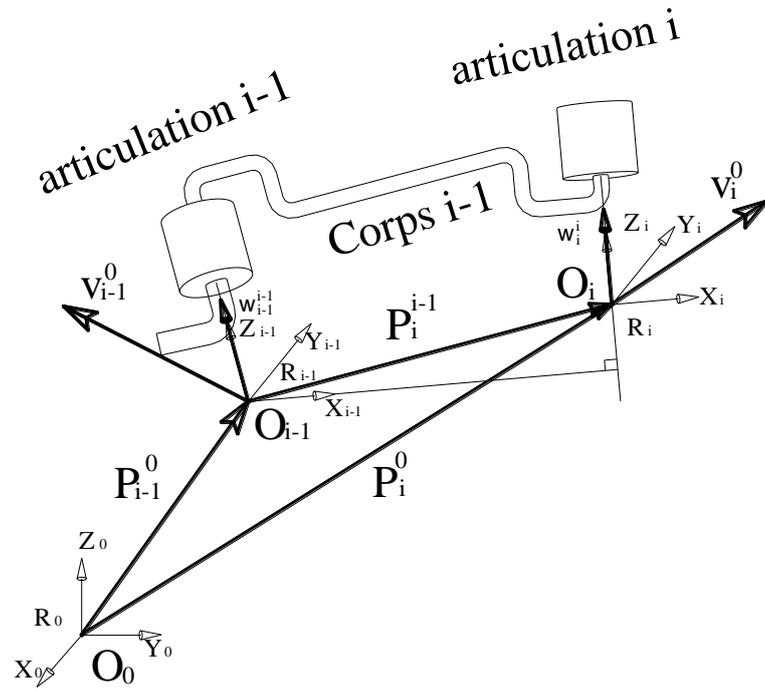


Figure 2.14 Composition des vecteurs de position

En utilisant les relations 2.51a et 2.51b, on obtient [25] :

$$\vec{\omega}_E^0 = \sum_{i=1}^n R_i^0 \vec{a}_i^i \dot{q}_i \quad (2.52)$$

$$\vec{v}_E^0 = \sum_{j=1}^n \left[ (R_j^0 \vec{a}_j^j \dot{q}_j) \wedge \left( \sum_{i=j}^n R_i^0 \vec{P}_{i+1}^i \right) \right] \quad (2.53)$$

Avec  $\vec{a}_i^i = [0,0,1]^T$

Il est possible de voir sur la figure 2.15 que la  $k^{\text{ième}}$  colonne de la matrice Jacobienne  $J_{n,k}^i$  s'écrit de la manière suivante :

$$J_{n,k}^i = \begin{bmatrix} \sigma_k \vec{a}_k^i + \bar{\sigma}_k R_k^i (\vec{a}_k^k \wedge \vec{P}_n^k) \\ \bar{\sigma}_k \vec{a}_k^i \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$k = 1, \dots, n$$

D'où :

$$J_n^0 = \begin{bmatrix} \sigma_1 \vec{a}_1^0 + \bar{\sigma}_1 R_1^0 (\vec{a}_1^1 \wedge \vec{P}_n^0) & \dots & \sigma_n \vec{a}_n^0 + \bar{\sigma}_n R_n^0 (\vec{a}_n^n \wedge \vec{P}_n^0) \\ \bar{\sigma}_1 \vec{a}_1^0 & & \dots & \bar{\sigma}_n \vec{a}_n^0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

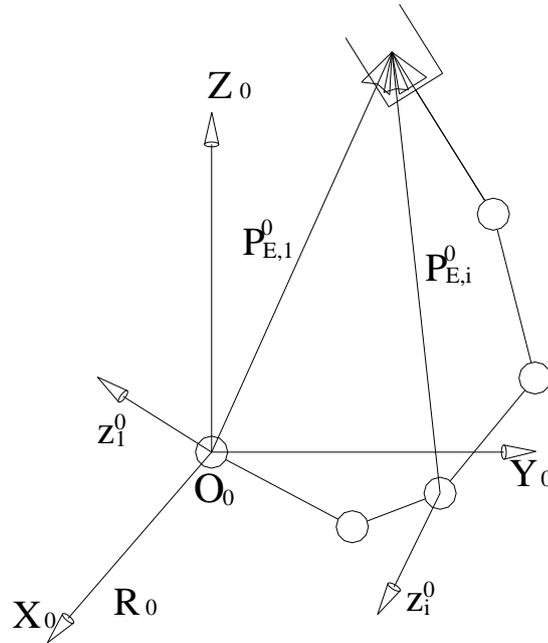


Figure 2.15 Vecteurs  $\vec{z}_i^0$  et  $\vec{P}_{E,i}^0$

Ou bien la matrice peut être calculée par rapport au référentiel de base [26]:

$$J_E^0 = \begin{bmatrix} \sigma_1 \vec{a}_1^0 + \bar{\sigma}_1 R_1^0 \vec{a}_1^1 \wedge \vec{P}_{E,1}^0 & \dots & \sigma_n \vec{a}_n^0 + \bar{\sigma}_n R_n^0 \vec{a}_n^n \wedge \vec{P}_{E,n}^0 \\ \bar{\sigma}_1 \vec{a}_1^0 & \dots & \bar{\sigma}_n \vec{a}_n^0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

### 2.6.3 Calcul des vitesses articulaires.

Le problème de la cinématique inverse consiste à déterminer les vitesses articulaires  $\dot{\vec{q}}$  qui correspondent aux vitesses d'exécution  $\dot{\vec{X}}$  de la tâche, le vecteur des vitesses opérationnelles  $\dot{\vec{X}}$  est linéairement relié au vecteur des vitesses articulaires par la matrice Jacobienne  $J$  :

$$\dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} v_n^0 \\ \omega_n^0 \end{bmatrix} = J \dot{\vec{q}} \quad (2.57)$$

Si le Jacobienne n'est pas singulière c'est-à-dire que le déterminant de  $J$  est différent de 0, la matrice  $J^{-1}$  existe et les vitesses articulaires sont calculées par :

$$\dot{\vec{q}} = J^{-1} \dot{\vec{X}} \quad (2.58)$$

### 2.6.3.1 Algorithme de calcul

-calcul du Jacobien

$$a_1^1 = a_2^2 = \dots = a_6^6 = [0,0,1]^T$$

For  $i=1$  to 6

$$R_i^0 = R_1^0 * \dots * R_i^{i-1}$$

$$T_6^i = T_i^{i-1} * \dots * T_5^4 * T_6^5$$

$$P_6^i = T_6^i(1:3,4)$$

$$J_{6,i}^0 = \begin{bmatrix} R_i^0(\hat{a}_i^i * P_6^i) \\ R_i^0 a_i^i \end{bmatrix}$$

$$J_6^0 = [J_{6,1}^0, \dots, J_{6,6}^0]$$

End

Calcul des vitesses articulaires

$$VD = [v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$$

N : nombre de points de discrétisation de VD

$$JJ = J_6^0$$

For  $i=1$  to N

$$JJ = JJ(q_1(i), q_2(i), \dots, q_6(i))$$

$$D = \det(JJ)$$

$$\text{si } D \neq 0$$

$$JJ^{-1} = \text{inv}(JJ)$$

$$\dot{q}(:, i) = JJ^{-1} * VD$$

End

### 2.6.4. Calculs des accélérations articulaires

En dérivant l'équation (2.48) on a

$$\ddot{X} = J\ddot{q} + j\dot{q} \quad (2.59)$$

D'où

$$\ddot{q} = J^{-1}(\ddot{X} - j\dot{q}) \quad (2.60)$$

L'expression (2.60), permet de calculer les accélérations articulaires, mais le calcul de  $j$  n'est pas évident, par contre, une approche récursive réduit le cout de calcul des accélérations articulaires. La méthode consiste à exprimer les vitesses de tous les corps qui composent le bras en fonction des accélérations articulaires. Ces vitesses sont calculées jusqu'à l'obtention de  $\omega_6^6$  et  $v_6^6$  qui sont égales aux accélérations désirées. Nous aurons donc 6 équations à 6 inconnues à résoudre. L'algorithme de calcul est le suivant :

*Algorithme de calcul des accélérations articulaires*

$$\omega_0^0 = [0,0,0]^T, \dot{\omega}_0^0 = [0,0,0]^T, \dot{v}_0^0 = [0,0,0]^T$$

$$a_1^1 = a_2^2 = a_3^3 = a_4^4 = a_5^5 = a_6^6 = [0,0,1]^T$$

$N$  : nombre de points disponibles

For  $j=1$  to  $N$

For  $i=1$  to 6

$$\omega_{i-1}^i = R_{i-1}^i \omega_{i-1}^{i-1}$$

$$\vec{\omega}_i^i = \vec{\omega}_{i-1}^i + \bar{\sigma}_i \dot{q}_i \vec{a}_i^i$$

$$\vec{\dot{\omega}}_i^i = R_{i-1}^i \vec{\dot{\omega}}_{i-1}^{i-1} + \bar{\sigma}_i (\ddot{q}_i \vec{a}_i^i + \vec{\omega}_{i-1}^i \wedge \dot{q}_i \vec{a}_i^i)$$

$$\vec{V}_i^i = R_{i-1}^i \left( \vec{V}_{i-1}^{i-1} + \vec{\dot{\omega}}_{i-1}^{i-1} \wedge \vec{P}_i^{i-1} + \vec{\omega}_{i-1}^{i-1} \wedge (\vec{\omega}_{i-1}^{i-1} \wedge \vec{P}_i^{i-1}) \right)$$

End

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_6^6(j) \\ \vec{\dot{\omega}}_6^6(j) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}D(j) \\ \dot{\omega}D(j) \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (*)$$

$$\ddot{q}(:,j) = \text{Solve}(*)$$

End

Avec  $\begin{bmatrix} \dot{V}D(j) \\ \dot{\omega}D(j) \end{bmatrix}$  vitesses linéaires et angulaires désirées.

### 2.6.5 Applications :

#### 2.6.5.1 Soudage à plat.

Suivant la figure 2.16, il est possible de déterminer  $T_{Ei}^0$  et  $T_{Ef}^0$ .

$$T_{Ei}^0 = \begin{bmatrix} \cos(14^\circ) & 0 & -\sin(14^\circ) & 1.405 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(14^\circ) & 0 & -\cos(14^\circ) & -0.278 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.970 & 0 & -0.242 & 1.405 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.242 & 0 & -0.970 & -0.278 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{Ef}^0 = \begin{bmatrix} \cos(0^\circ) & 0 & -\sin(0^\circ) & 1.405 \\ 0 & 1 & 0 & 0.400 \\ -\sin(0^\circ) & 0 & -\cos(0^\circ) & -0.278 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.405 \\ 0 & 1 & 0 & 0.400 \\ 0 & 0 & -1 & -0.278 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$i$	$\sigma_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$	$r_i$
1	0	0	0	$\theta_1$	0
2	0	90°	0.1	$\theta_2$	0
3	0	0	0.85	$\theta_3$	0
4	0	-90°	0	$\theta_4$	1.05
5	0	90°	0	$\theta_5$	0
6	0	-90°	0	$\theta_6$	0

**Tableau 2.16 Paramètres géométriques de D-H. Robot à six axes (Staubli RX170B)**

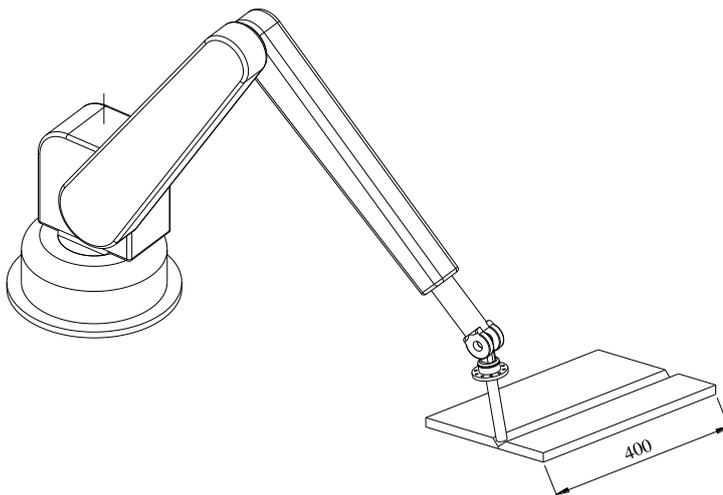


Figure 2.16a. Soudage de deux tôles (bout à bout) par un robot à 6 axes

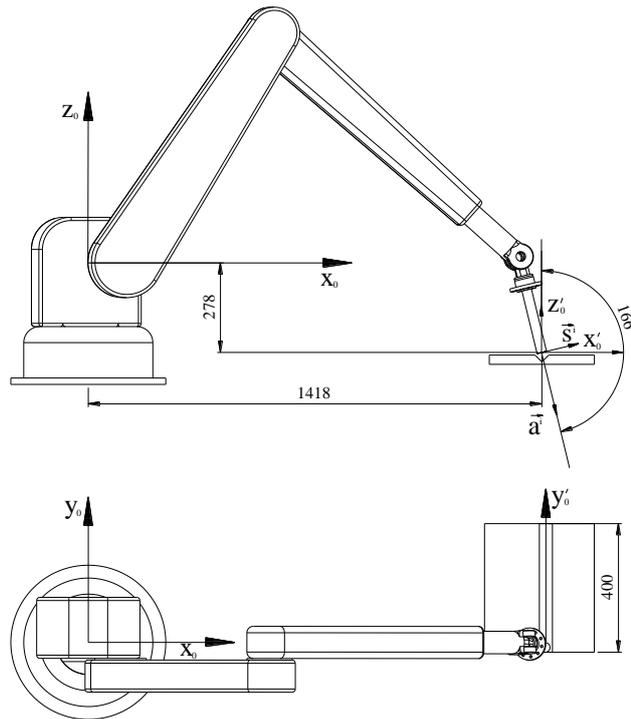


Figure 2.16b. Soudage de deux tôles (bout à bout) par un robot de 6 axes

### Trajectoire rectiligne

Nous allons examiner deux cas :

cas1 : La fonction d'interpolation est linéaire (2.41) :

$$r(t) = \frac{t}{t_f}$$

cas2 : la fonction d'interpolation est de degré cinq (2.41) :

$$r(t) = 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5$$

Pour une vitesse de soudage de :

$$v_0 = 0.012 \text{ m/s}$$

$$\|\dot{P}(t)\| = \frac{\text{Dist}}{t_f} = v_0$$

$$t_f = \frac{\text{Dist}}{v_0} = \frac{0.4}{0.012} = 33,33 \text{ s}$$

Naturellement, l'organe terminal doit démarrer avec une vitesse nulle pour s'arrêter à une vitesse nulle, donc le profil de vitesses le plus simple c'est d'avoir une accélération constante lors du démarrage et de l'arrêt (figure 2.17). Ce qui explique notre choix du profil des vitesses (trapézoïdal) (figure 2.18)

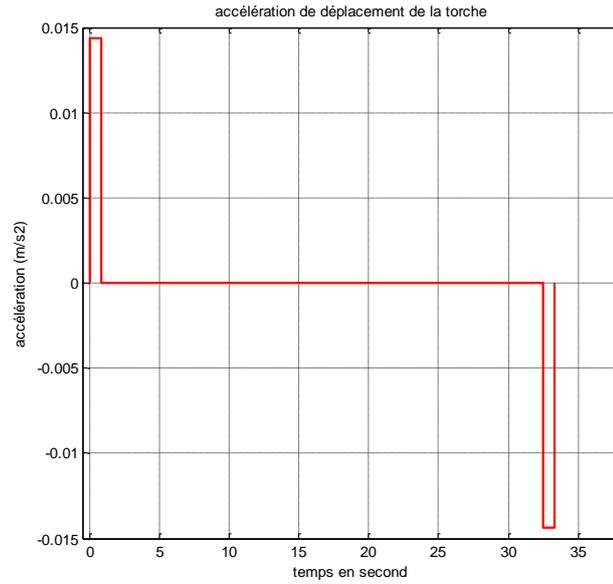


Figure 2.17 Accélération de la torche

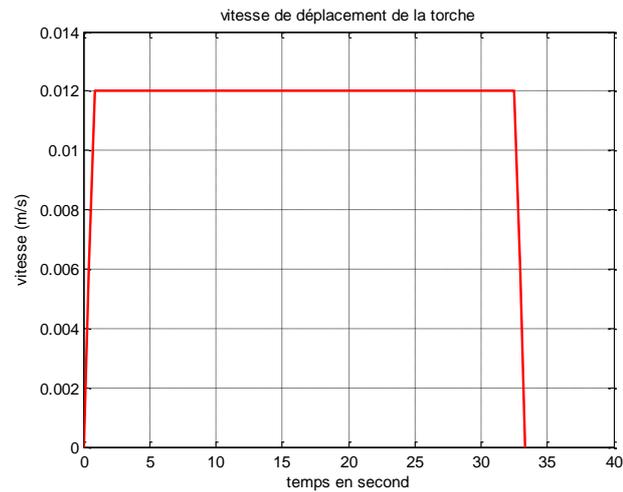


Figure 2.18 Vitesse de la torche .Trajectoire rectiligne

Dans notre cas

$$E = \begin{bmatrix} c\alpha & 0 & s\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\alpha & 0 & c\alpha & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 0$$

$$e = 0.2m$$

On obtient :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E$  est la matrice de transformation homogène définissant le repère outil dans le repère  $R_6$

Le bras manipulateur est décrit au paragraphe (2.6.1)

Les résultats sont obtenus par un programme sous Matlab R2008A. Ils se résument:

- figure 2.19 : coordonnées articulaires des 6 articulations, polynômes d'interpolation de degré 1 et 5
- figure 2.20 : vitesses articulaires des 6 articulations, polynômes d'interpolation de degré 1 et 5
- figure 2.21 accélérations articulaires des 6 articulations, polynômes d'interpolation de degré 1 et 5

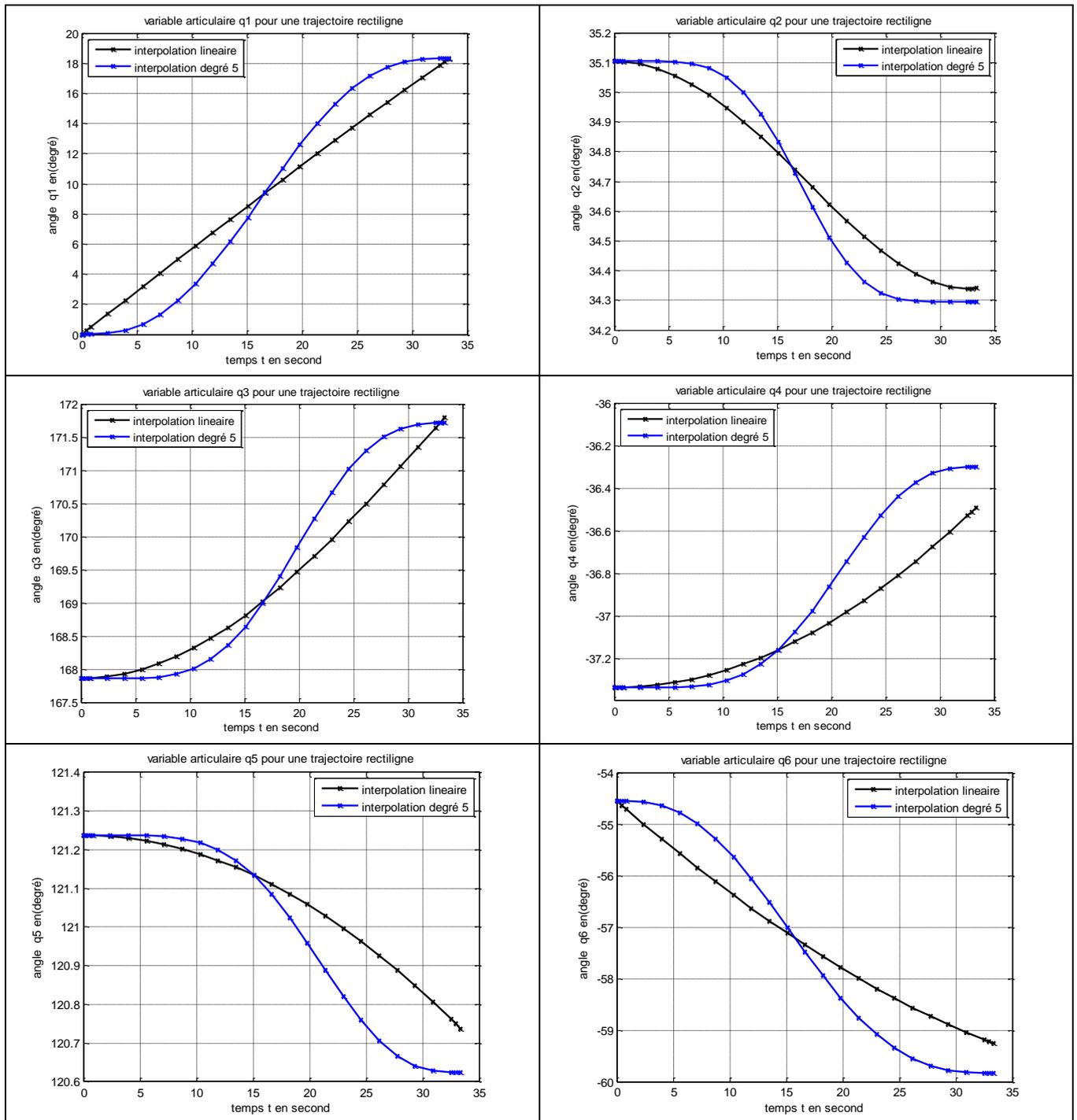


Figure 2.19 Coordonnées articulaires pour un mouvement rectiligne interpolation linéaire et de degré 5, robot à six axes

#### Coordonnées articulaires

La figure 2.19 montre la variation des coordonnées articulaires avec le temps suivant deux fonctions d'interpolations de degré 1 et 5. Pour l'interpolation de degré 1 on peut observer que les pentes de départ et d'arrivée sont importantes tandis que celles pour l'interpolation de degré 5 est trop aplatie. On conclut qu'une interpolation de degrés 4 ou 3 suffira pour cette application.

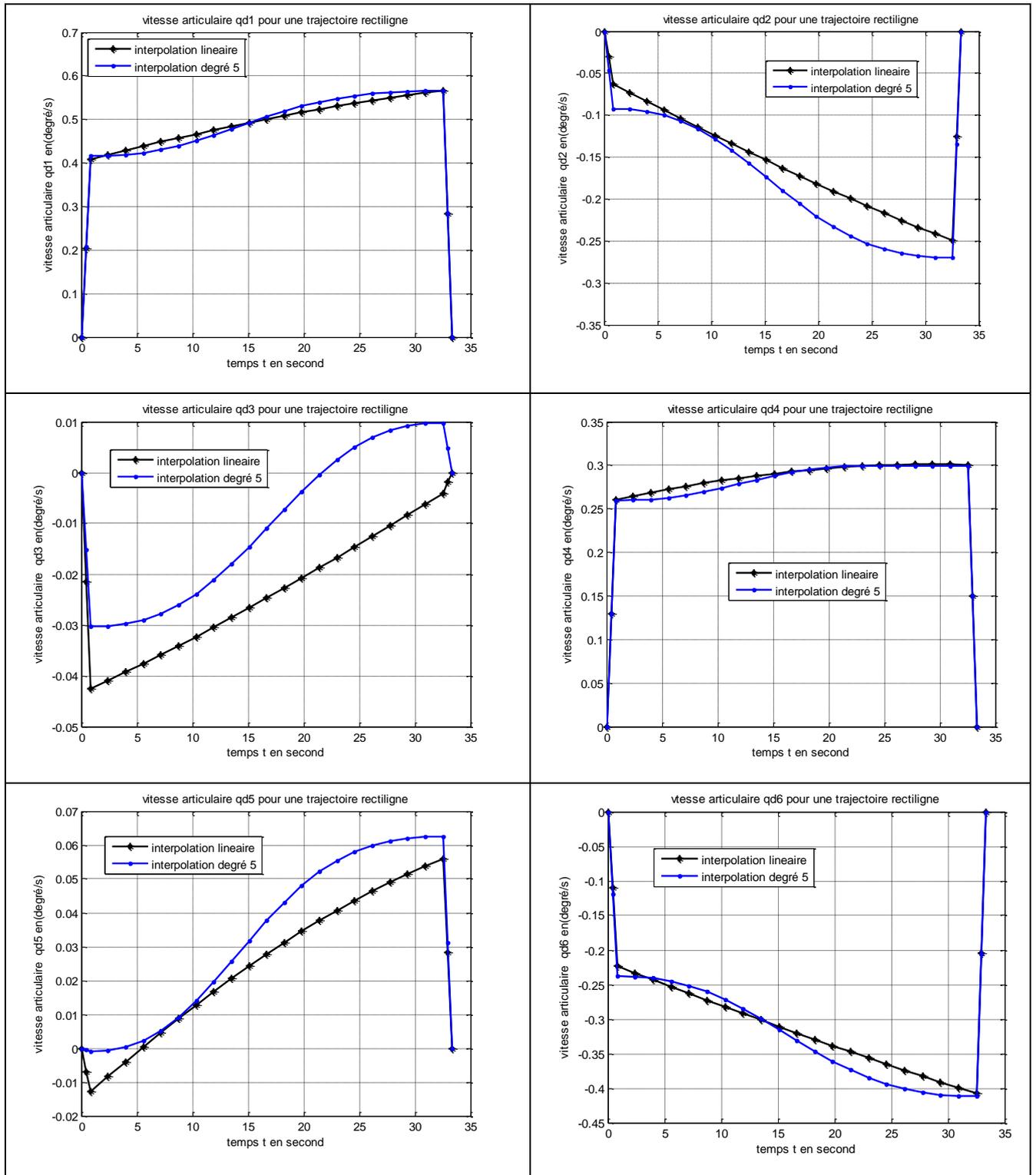


Figure 2.20 Vitesses articulaires pour un mouvement rectiligne interpolation linéaire et de degré 5 de robot à six axes

### *Vitesses articulaires*

Pour les procédés de soudage nous avons choisi un profil de vitesse de forme trapézoïdale : une montée et une décente à accélération constante et un palier à accélération nul.

On remarque (figure 2.20) que la fonction d'interpolation de degré 5, présente une discontinuité au départ et une amélioration à l'arrivée. Par contre la fonction d'interpolation de degré 1 a la même continuité au départ et à l'arrivée ce qui justifie notre précédente conclusion.

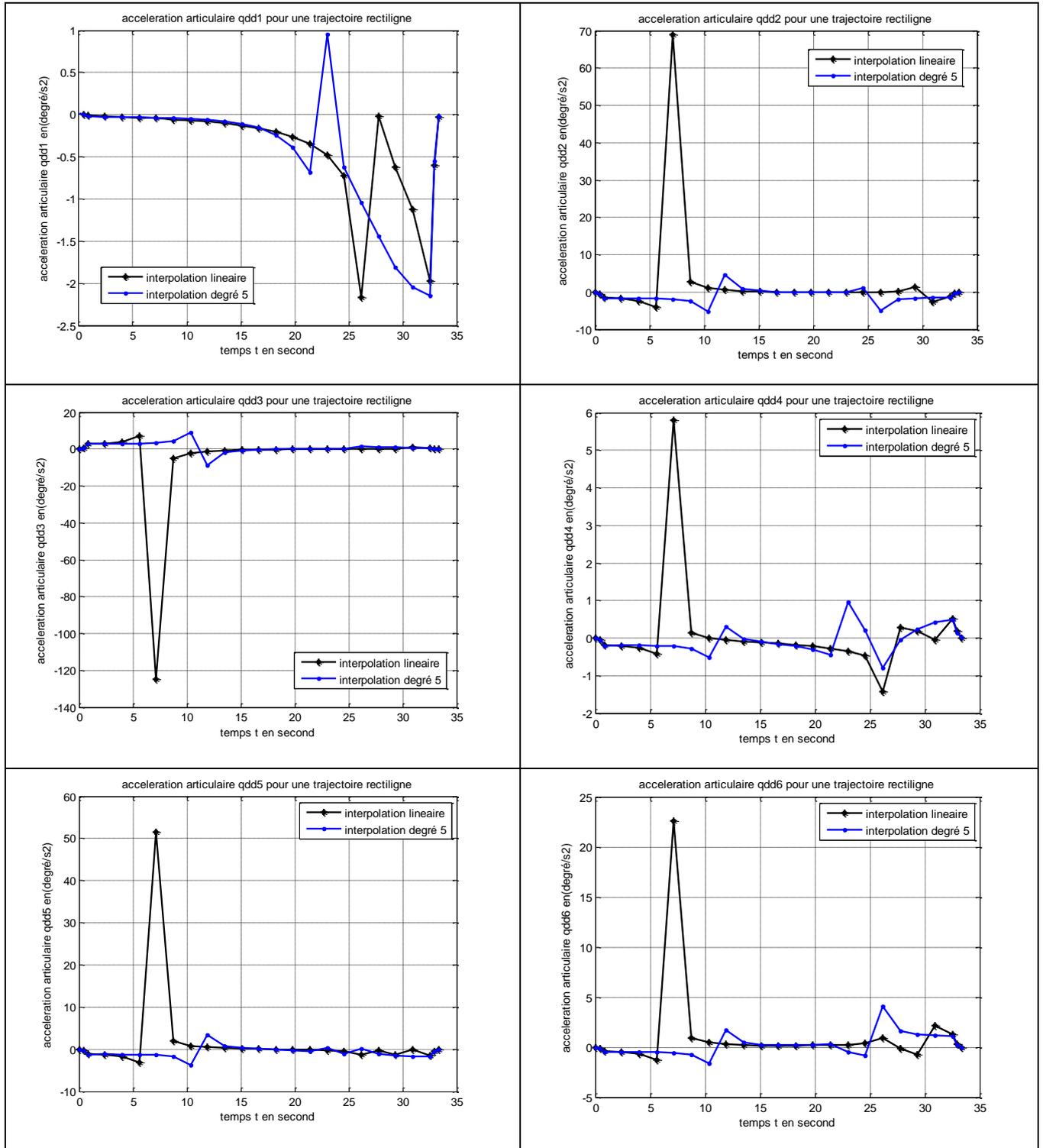


Figure 2.21 Accélérations articulaires pour une trajectoire rectiligne, interpolation linéaire et de degré 5, robot à six axes

Les accélérations sont très faibles car les variations de la vitesse sont très faibles (0.012m/s pour un parcours de 0.4m et un temps de 33,33s). Les piques observés dans le graphe sont dûs à la divergence locale de la méthode de calcul.

## 2.7 Génération de trajectoire curviligne

### 2.7.1 Courbes dans l'espace

Dans plusieurs applications de la robotique, on veut que la trajectoire de l'outil soit une courbe gauche dans l'espace de travail du robot, dans ce cas, il est possible de repérer la trajectoire par **un repère intrinsèque** (lié à la courbe). On note  $\vec{e}_T, \vec{e}_N$  et  $\vec{e}_B$ , trièdre de *Frenet-Serret*: tangentiel, normal et bi-normal à la courbe lisse  $\Gamma$ .  $\vec{p}(t)$  est le rayon vecteur joignant l'origine au point  $M$  qui se déplace sur la courbe (figure 2.22). Soit  $s$  l'abscisse curviligne, et si on différencie  $\vec{p}$  par rapport à  $s$  on obtient le vecteur unitaire de la tangente [27] [8] :

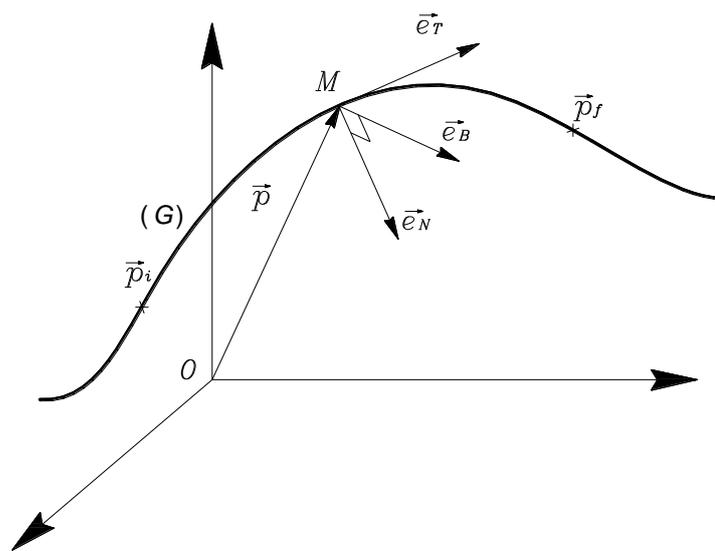


Figure 2.22 Repérage d'une courbe dans l'espace

$$\vec{e}_T = \frac{d\vec{p}}{ds} = \vec{p}' \quad (2.61a)$$

$$\vec{e}_N = \frac{1}{\kappa} \frac{d\vec{e}_T}{ds} = \rho \vec{p}'' \quad (2.61b)$$

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N \quad (2.61c)$$

Avec  $\vec{p}' = \frac{d\vec{p}}{ds}$  et  $\vec{p}'' = \frac{d^2\vec{p}}{ds^2}$ ,  $s$  l'abscisse curviligne,  $\rho = \frac{1}{\kappa}$  le rayon de courbure et  $\kappa$  la courbure.

A partir des formules de Frenet-Serret, on peut introduire le paramètre temps en dérivant les expressions des vecteurs unitaires par rapport au temps [3] :

Vecteur  $\vec{e}_T$

$$\vec{e}_T = \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\vec{p}}}{\dot{s}}$$

Sachant que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Et en divisant cette expression par  $dt^2$  et en prenant la racine des deux cotés

On a :

$$\dot{s} = \|\dot{\vec{p}}\| \quad (2.62)$$

D'où

$$\vec{e}_T = \frac{\dot{\vec{p}}}{\|\dot{\vec{p}}\|} \quad (2.63)$$

Vecteur  $\vec{e}_N$

On a

$$\vec{p}'' = \frac{d\vec{p}'}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{p}'}{dt} = \frac{1}{\dot{s}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\vec{p}}}{\dot{s}} \right) = \frac{\ddot{\vec{p}}\dot{s} - \dot{\vec{p}}\ddot{s}}{\dot{s}^3} \quad (2.64)$$

A partir de l'expression (2.61b) on a :

$$\vec{e}_N = \rho \frac{\ddot{\vec{p}}\dot{s} - \dot{\vec{p}}\ddot{s}}{\dot{s}^3}$$

De la relation (2.61b) on a :

$$\|\vec{e}_N\| = \rho \|\vec{p}''\| = 1$$

D'où

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \|\vec{p}''\| = \left\| \frac{\ddot{\vec{p}}\dot{s} - \dot{\vec{p}}\ddot{s}}{\dot{s}^3} \right\|$$

et

$$\vec{e}_N = \frac{\ddot{\vec{p}}\dot{s} - \dot{\vec{p}}\ddot{s}}{\kappa\dot{s}^3} \quad (2.65)$$

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N \quad (2.66)$$

### 2.7.2 Vitesse angulaire du trièdre

#### **Théorème de Frenet-Serret [28]**

Les dérivées des vecteurs  $\vec{e}_T$ ,  $\vec{e}_N$  et  $\vec{e}_B$  sont données par :

$$\vec{e}_T' = \frac{d\vec{e}_T}{ds} = \kappa\vec{e}_N \quad (2.67)$$

$$\vec{e}_N' = \frac{d\vec{e}_N}{ds} = -\kappa\vec{e}_T + \tau\vec{e}_B \quad (2.68)$$

$$\vec{e}_B' = \frac{d\vec{e}_B}{ds} = -\tau\vec{e}_N \quad (2.69)$$

Avec :

$$\kappa = \|\vec{e}_T'\|$$

et

$$\tau = -\vec{e}_B' \cdot \vec{e}_N$$

Pour la démonstration voir ou [29]

En tenant compte du paramètre temps, les formules (2.67), (2.68) et (2.69) prennent les formes suivantes :

$$\dot{\vec{e}}_T = \frac{d\vec{e}_T}{dt} = \dot{s}\kappa\vec{e}_N \quad (2.68)$$

$$\dot{\vec{e}}_N = \frac{d\vec{e}_N}{dt} = -\dot{s}\kappa\vec{e}_T + \dot{s}\tau\vec{e}_B \quad (2.69)$$

$$\dot{\vec{e}}_B = \frac{d\vec{e}_B}{dt} = -\dot{s}\tau\vec{e}_N \quad (2.70)$$

Soit  $\vec{\omega}$  le vecteur vitesse angulaire du trièdre de Frenet-Serret, donc on a :

$$\dot{\vec{e}}_T = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_T \quad (2.71)$$

$$\dot{\vec{e}}_N = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_N \quad (2.72)$$

$$\dot{\vec{e}}_B = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_B \quad (2.73)$$

Les relations (2.71), (2.72) et (2.73) peuvent être écrites sous les formes suivantes :

$$-E_T\vec{\omega} = \dot{s}\kappa\vec{e}_N \quad (2.74)$$

$$-E_N\vec{\omega} = -\dot{s}\kappa\vec{e}_T + \dot{s}\tau\vec{e}_B \quad (2.75)$$

$$-E_B\vec{\omega} = -\dot{s}\tau\vec{e}_N \quad (2.76)$$

avec  $E_T$ ,  $E_N$  et  $E_B$  matrices de pré produit vectoriel

Ou bien :

$$-E\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{s}\kappa\vec{e}_N \\ -\dot{s}\kappa\vec{e}_T + \dot{s}\tau\vec{e}_B \\ -\dot{s}\tau\vec{e}_N \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Avec

$$E = - \begin{bmatrix} E_T \\ E_N \\ E_B \end{bmatrix}$$

On a aussi :

$$E^T E = E_T^T E_T + E_N^T E_N + E_B^T E_B$$

$$E_T^T E_T = I - \vec{e}_T \vec{e}_T^T$$

$$E_N^T E_N = I - \vec{e}_N \vec{e}_N^T$$

$$E_B^T E_B = I - \vec{e}_B \vec{e}_B^T$$

Avec :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sachant que :

$$\vec{e}_T \vec{e}_T^T + \vec{e}_N \vec{e}_N^T + \vec{e}_B \vec{e}_B^T = I$$

On a

$$E^T E = 2I$$

Donc

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} [E_T \quad E_N \quad E_B] \begin{bmatrix} \dot{s} \kappa \vec{e}_N \\ -\dot{s} \kappa \vec{e}_T + \dot{s} \tau \vec{e}_B \\ -\dot{s} \tau \vec{e}_N \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = -\frac{\dot{s}}{2} [\kappa \vec{e}_T \wedge \vec{e}_N - \kappa \vec{e}_N \wedge \vec{e}_T + \tau \vec{e}_N \wedge \vec{e}_B - \tau \vec{e}_B \wedge \vec{e}_N] \quad (2.78)$$

Puisque le trièdre de Frenet-Serret est orthonormé, on a :

$$\vec{e}_T \wedge \vec{e}_N = \vec{e}_B, \quad \vec{e}_N \wedge \vec{e}_B = \vec{e}_T \quad \text{et} \quad \vec{e}_B \wedge \vec{e}_T = \vec{e}_N \quad (2.79)$$

En utilisant les relations (2.78) et (2.79) on a :

$$\vec{\omega} = -\dot{s} [\tau \vec{e}_T + \kappa \vec{e}_B] \quad (2.80)$$

$$\kappa = \|\vec{p}''\| = \left\| \frac{\vec{p}\ddot{s} - \dot{p}\dot{s}}{\dot{s}^3} \right\|$$

### 2.7.3 Accélération angulaire du trièdre

En dérivant l'expression (2.80) on a :

$$\vec{\omega} = -\dot{s}[\tau\vec{e}_T + \kappa\vec{e}_B] - \dot{s}[\dot{\tau}\vec{e}_T + \dot{\kappa}\vec{e}_B] \quad (2.81)$$

L'expression (2.81) exprime l'accélération angulaire du trièdre de Frenet-Serret lorsqu'on parcourt la courbe à une vitesse linéaire  $\vec{v}$

Dans l'expression (2.80) on a :

$$\kappa = \|\vec{p}''\|$$

$$\tau = -\frac{(\vec{p}' \wedge \vec{p}''')\vec{p}''\kappa - \kappa'(\vec{p}' \wedge \vec{p}'')\vec{p}''}{\kappa^3} = \frac{(\vec{p}' \wedge \vec{p}^{(3)})\vec{p}''\kappa - \kappa'(\vec{p}'' \wedge \vec{p}')\vec{p}'}{\kappa^3}$$

$$\tau = \frac{(\vec{p}' \wedge \vec{p}'') \cdot \vec{p}^{(3)}}{\kappa^2} \quad (2.82)$$

$$\vec{p}' = \frac{\dot{\vec{p}}}{\dot{s}} \quad (2.83)$$

$$\vec{p}'' = \frac{\ddot{\vec{p}}\dot{s} - \dot{\vec{p}}\ddot{s}}{\dot{s}^3} \quad (2.84)$$

$$\vec{p}^{(3)} = \frac{(\vec{p}^{(3)}\dot{s} - s^{(3)}\dot{\vec{p}})\dot{s} - 3\dot{s}(\ddot{\vec{p}}\dot{s} - \dot{\vec{p}}\ddot{s})}{\dot{s}^5} \quad (2.85)$$

$$\vec{p}^{(4)} = \frac{1}{\dot{s}} \frac{d\vec{p}^{(3)}}{dt} \quad (2.86)$$

$$\vec{p}^{(4)} = \frac{(\vec{p}^{(4)}\dot{s}^2 - \dot{s}\ddot{\vec{p}}^{(3)} - 4\dot{s}s^{(3)}\ddot{\vec{p}} + 5\dot{s}s^{(3)}\dot{\vec{p}} - s^{(4)}\dot{\vec{p}})\dot{s}^5 - 5\dot{s}^4\ddot{s}((\vec{p}^{(3)}\dot{s} - s^{(3)}\dot{\vec{p}})\dot{s} - 3\dot{s}(\ddot{\vec{p}}\dot{s} - \dot{\vec{p}}\ddot{s}))}{\dot{s}^{11}} \quad (2.87)$$

$$\ddot{s} = \frac{\dot{\vec{p}}\ddot{\vec{p}}}{\dot{s}} \quad (2.88)$$

$$s^{(3)} = \frac{(\ddot{\vec{p}}^2 + \dot{\vec{p}}\ddot{\vec{p}}^{(3)})\dot{s} - \dot{s}\ddot{\vec{p}}\ddot{\vec{p}}}{\dot{s}^2} \quad (2.89)$$

$$s^{(4)} = \frac{(\vec{p}^{(4)}\dot{s}\dot{\vec{p}} + 3\dot{s}\ddot{\vec{p}}\ddot{\vec{p}}^{(3)} - s^{(3)}\dot{\vec{p}}\ddot{\vec{p}})\dot{s}^2 - 2\dot{s}\ddot{s}((\ddot{\vec{p}}^2 + \dot{\vec{p}}\ddot{\vec{p}}^{(3)})\dot{s} - \dot{s}\ddot{\vec{p}}\ddot{\vec{p}})}{\dot{s}^4} \quad (2.90)$$

$$\kappa' = \frac{\vec{p}''\ddot{\vec{p}}^{(3)}}{\kappa} \quad (2.91)$$

$$\dot{\kappa} = \dot{s}\kappa' \quad (2.92)$$

$$\tau' = \frac{(\vec{p}' \wedge \vec{p}'') \cdot \vec{p}^{(4)} - 2\tau\vec{p}' \cdot \vec{p}''}{\kappa^2} \quad (2.93)$$

$$\dot{\tau} = \dot{s}\tau' \quad (2.94)$$

Notation :

Pour tout  $n$  entier naturel

$$\vec{p}^{(n)} = \frac{d^n \vec{p}}{dt^n}$$

$$\vec{p}^{(n)} = \frac{d^n \vec{p}}{ds^n}$$

#### 2.7.4 Application : trajectoire hélicoïdale.

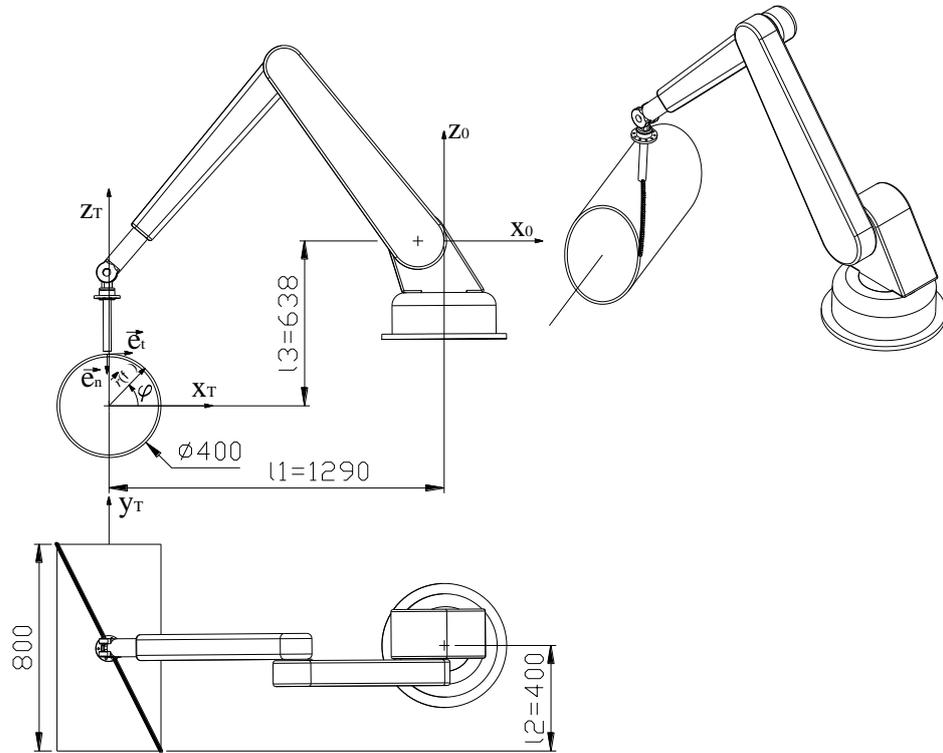


Figure 2.23 Exécution d'un joint de soudure de forme hélicoïdale par un robot manipulateur à 6 axes

La trajectoire à suivre par le robot est une hélice de rayon  $R=0.2$  m, (figure 2.23) de pas  $b=1.6$  m. La trajectoire est parcourue à une vitesse  $v = 0.012$  m/s

Les équations paramétriques de l'hélice dans le repère  $(X_T, Y_T, Z_T)$  sont :

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{cases} X_T = R \cos \varphi \\ Y_T = \frac{b\varphi}{2\pi} \\ Z_T = R \sin \varphi \end{cases}$$

Pour les paramètres de DH du robot voir tableau 2.2.

Dans le repère fixe  $(O, X_0, Y_0, Z_0)$  les coordonnées de l'hélice peuvent être écrites sous la forme:

$$\vec{p}(\varphi) = \begin{cases} X_0 = x = -l_1 + R \cos \varphi \\ Y_0 = y = -l_2 + \frac{b\varphi}{2\pi} \\ Z_0 = z = -l_3 + R \sin \varphi \end{cases}$$

$$\dot{\vec{p}}(\varphi) = \begin{cases} \dot{x} = -R\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = \frac{b\dot{\varphi}}{2\pi} \\ \dot{z} = R\dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases}$$

Calcul de  $\varphi$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\varphi}^2 R^2 + \frac{b^2 \dot{\varphi}^2}{4\pi^2} = v^2$$

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi v}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + b^2}}$$

d'où

$$\varphi = \frac{2\pi v}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + b^2}} t + \varphi_0 = ct + \varphi_0$$

$$\text{avec } c = \frac{2\pi v}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + b^2}}$$

$$c = 0.0371 \text{ rd/s}$$

et à  $t=0$   $\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$

$t$  paramètre du temps

donc, on a les coordonnées de l'hélicoïde (hélice) dans le repère fixe :

$$\vec{p}(t) = \begin{cases} x = -l_1 + R \cos ct \\ y = -l_2 + \frac{bct}{2\pi} \\ z = -l_3 + R \sin ct \end{cases}$$

la vitesse est:

$$\dot{\vec{p}}(t) = \begin{cases} \dot{x} = -Rc \sin ct \\ \dot{y} = +\frac{bc}{2\pi} \\ \dot{z} = Rc \cos ct \end{cases}$$

et l'accélération :

$$\ddot{\vec{p}}(t) = \begin{cases} \ddot{x} = -Rc^2 \cos ct \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -Rc^2 \sin ct \end{cases}$$

En utilisant les relations : (2.63), (2.65) et (2.66), on peut déterminer le trièdre de Frenet :

$$\vec{e}_T = \frac{\dot{\vec{p}}}{\|\dot{\vec{p}}\|} = \frac{4\pi^2}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -R \sin ct \\ \frac{b}{2\pi} \\ R \cos ct \end{pmatrix} = \frac{c}{v} \begin{pmatrix} -R \sin ct \\ \frac{b}{2\pi} \\ R \cos ct \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_T = \begin{pmatrix} -0.6177 \sin 0.0371t \\ 0.7863 \\ 0.6177 \cos 0.0371t \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{e}_N = \frac{\ddot{\vec{p}}\dot{s} - \dot{\vec{p}}\ddot{s}}{\kappa\dot{s}^3}$$

$$\ddot{s} = \frac{\dot{\vec{p}}\ddot{\vec{p}}}{\dot{s}} = 0$$

$$\dot{s} = v = 0.012m/s^2$$

$$\vec{e}_N = \frac{\ddot{\vec{p}}}{\kappa\dot{s}^2}$$

$$\frac{\ddot{\vec{p}}}{\dot{s}^2} = \begin{cases} -\frac{Rc^2}{\dot{s}^2} \cos ct \\ 0 \\ -\frac{Rc^2}{\dot{s}^2} \sin ct \end{cases} = \begin{cases} -1.9117 \cos ct \\ 0 \\ -1.9117 \sin ct \end{cases}$$

$$\kappa = \left\| \frac{\ddot{\vec{p}}}{\dot{s}^2} \right\| = 1.9117m^{-1}$$

$$\vec{e}_n = \begin{bmatrix} -\cos ct \\ 0 \\ -\sin ct \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_b = \vec{e}_t \wedge \vec{e}_n$$

Les vecteurs du trièdre de Frenet pour une trajectoire hélicoïdale sont représentés dans la figure 2.24

### Vitesse angulaire du trièdre

De l'expression (2.80) on tire:

$$\vec{\omega} = -\dot{s}[\tau\vec{e}_T + \kappa\vec{e}_B]$$

$$\tau = \frac{(\vec{p}' \wedge \vec{p}'') \cdot \vec{p}^{(3)}}{\kappa^2}$$

$$\vec{p}' = \frac{\dot{\vec{p}}}{\dot{s}}$$

$$\vec{p}'' = \frac{\ddot{\vec{p}}\dot{s} - \dot{\vec{p}}\ddot{s}}{\dot{s}^3}$$

$$\dot{s} = \|\dot{\vec{p}}\| = v = 0.012m/s$$

$$\kappa = \|\vec{p}''\|$$

$$\ddot{s} = \frac{\dot{\vec{p}}\ddot{\vec{p}}}{\dot{s}}$$

$$\vec{p}^{(3)} = \frac{(\vec{p}^{(3)}\dot{s} - s^{(3)}\dot{\vec{p}})\dot{s} - 3\ddot{s}(\vec{p}\dot{s} - \dot{s}\vec{p})}{\dot{s}^5}$$

$$\vec{p}^{(3)} = \begin{bmatrix} Rc^3 \sin(ct) \\ 0 \\ -Rc^3 \cos(ct) \end{bmatrix}$$

### Accélération angulaire du trièdre

De l'expression (2.81) on obtient :

$$\vec{\omega} = -\ddot{s}[\tau\vec{e}_T + \kappa\vec{e}_B] - \dot{s}[\dot{\tau}\vec{e}_T + \dot{\kappa}\vec{e}_B]$$

$$\vec{p}^{(4)} = \begin{bmatrix} Rc^4 \cos(ct) \\ 0 \\ Rc^4 \sin(ct) \end{bmatrix}$$

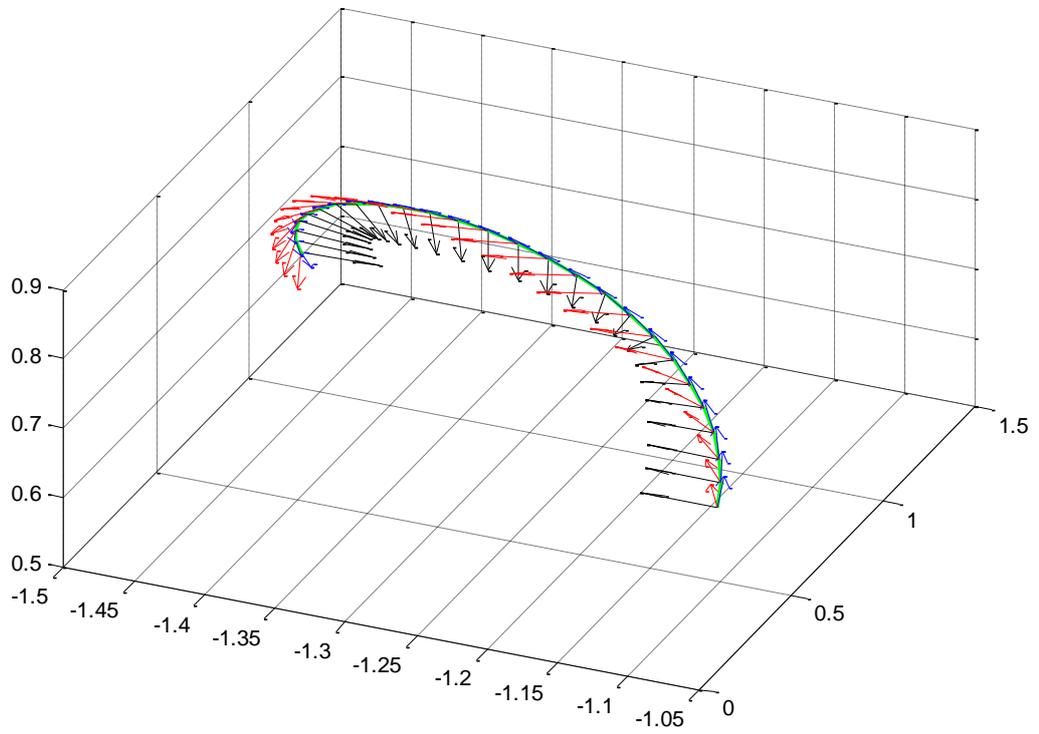
Donc la matrice qui décrit la position et l'orientation désirée par rapport au repère  $R_0$  est :

$$[\vec{s}_t \quad \vec{n}_n \quad \vec{a}_b \quad \vec{p}] = [\vec{e}_t \quad \vec{e}_n \quad \vec{e}_b \quad \vec{p}]E^{-1}$$

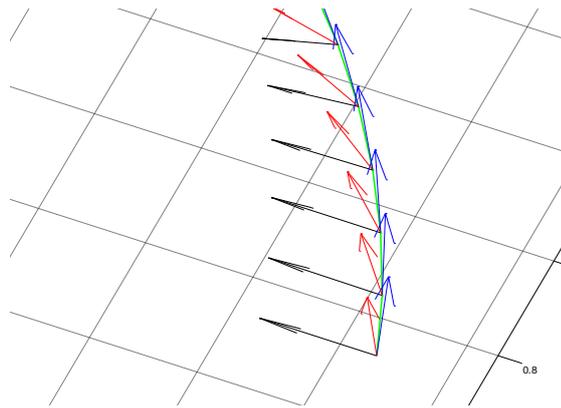
$$E = \begin{bmatrix} c\alpha & 0 & s\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\alpha & 0 & c\alpha & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant l'algorithme du calcul du MGI .on obtient les débatements articulaires. Les paramètres articulaires permettent à l'organe terminal de suivre une trajectoire hélécoidale.

Les valeurs des coordonnées, vitesses et accélérations articulaires sont données par les courbes (2.25), (2.26) et (2.27)



a



b

Figure 2.24. Trièdre de Frenet pour une trajectoire hélicoïdale

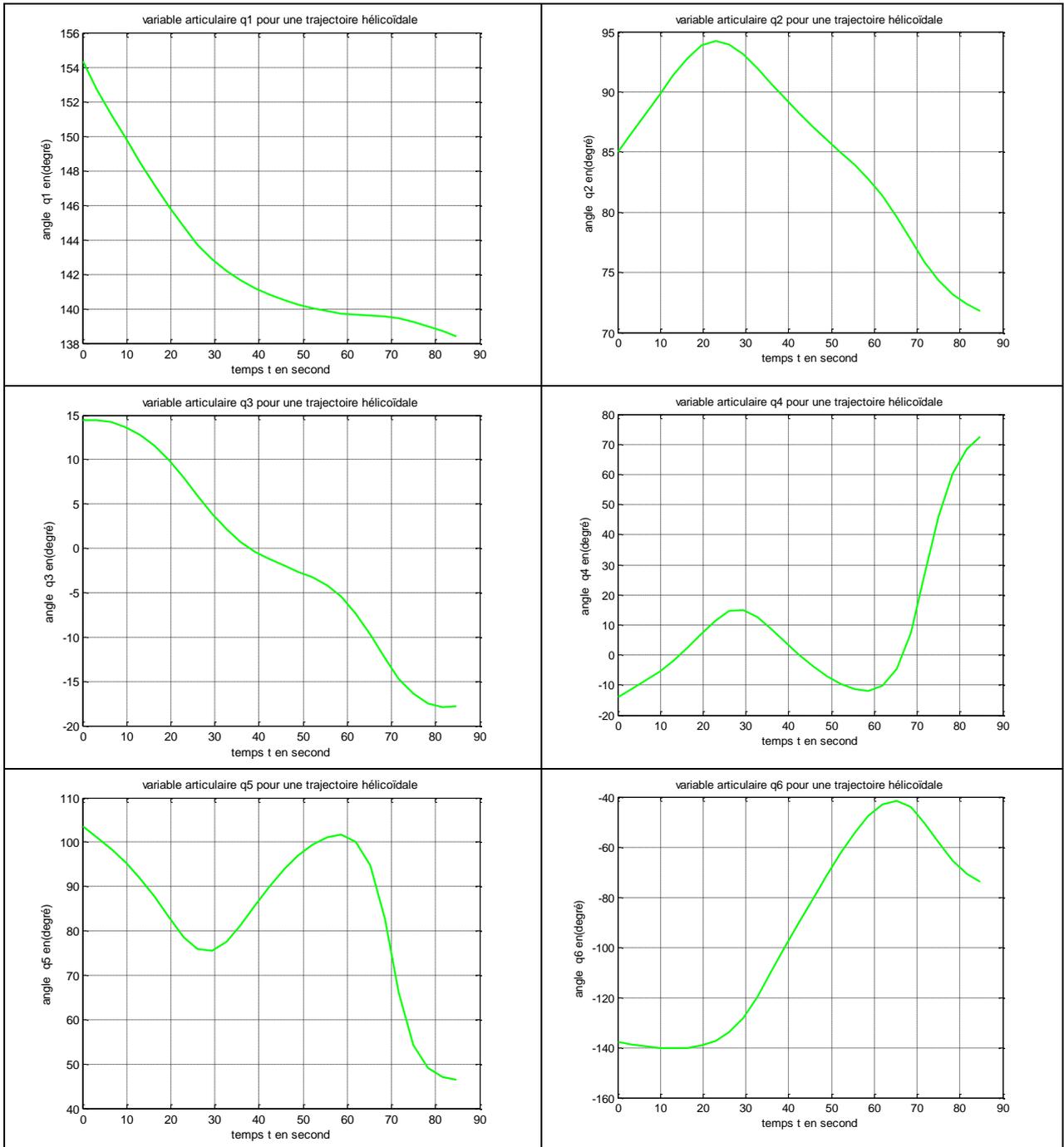


Figure 2.25 Rotations des articulations pour le soudage d'un cordant de soudure de forme hélicoïdale par un robot manipulateur 6 axes

Pour cette trajectoire (figure 2.25) on a considéré que la vitesse de soudage est constante. On observe aussi une variation continue des coordonnées articulaires

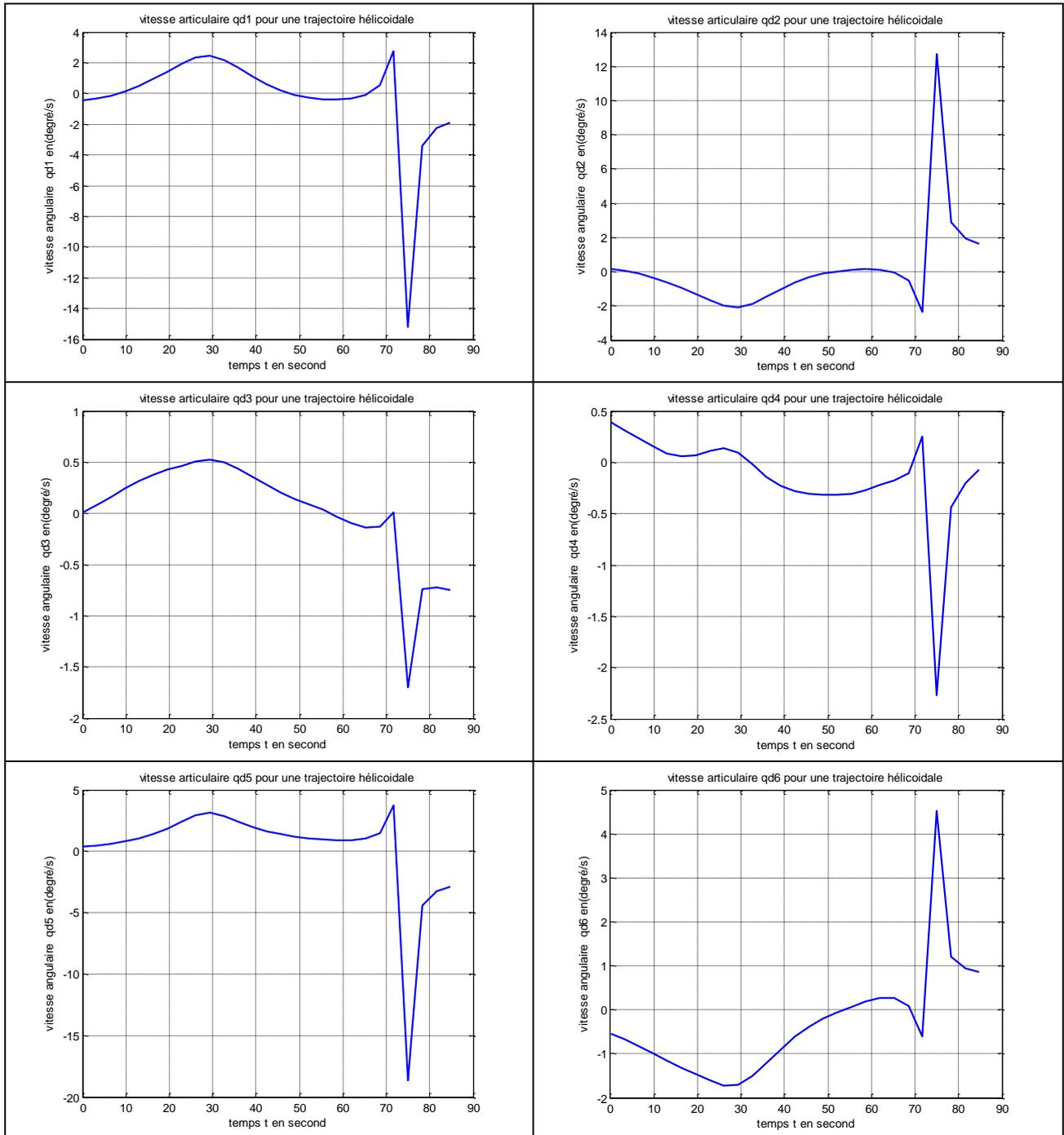


Figure 2.26 Vitesses des articulations pour le soudage d'un cordant de soudure de forme hélicoïdale par un robot manipulateur 6 axes

En ce qui concerne les vitesses articulaires (figure 2.26) on observe un profil relativement continu avec un passage par une position singulière (déterminant du Jacobien nul) en fin de parcours.

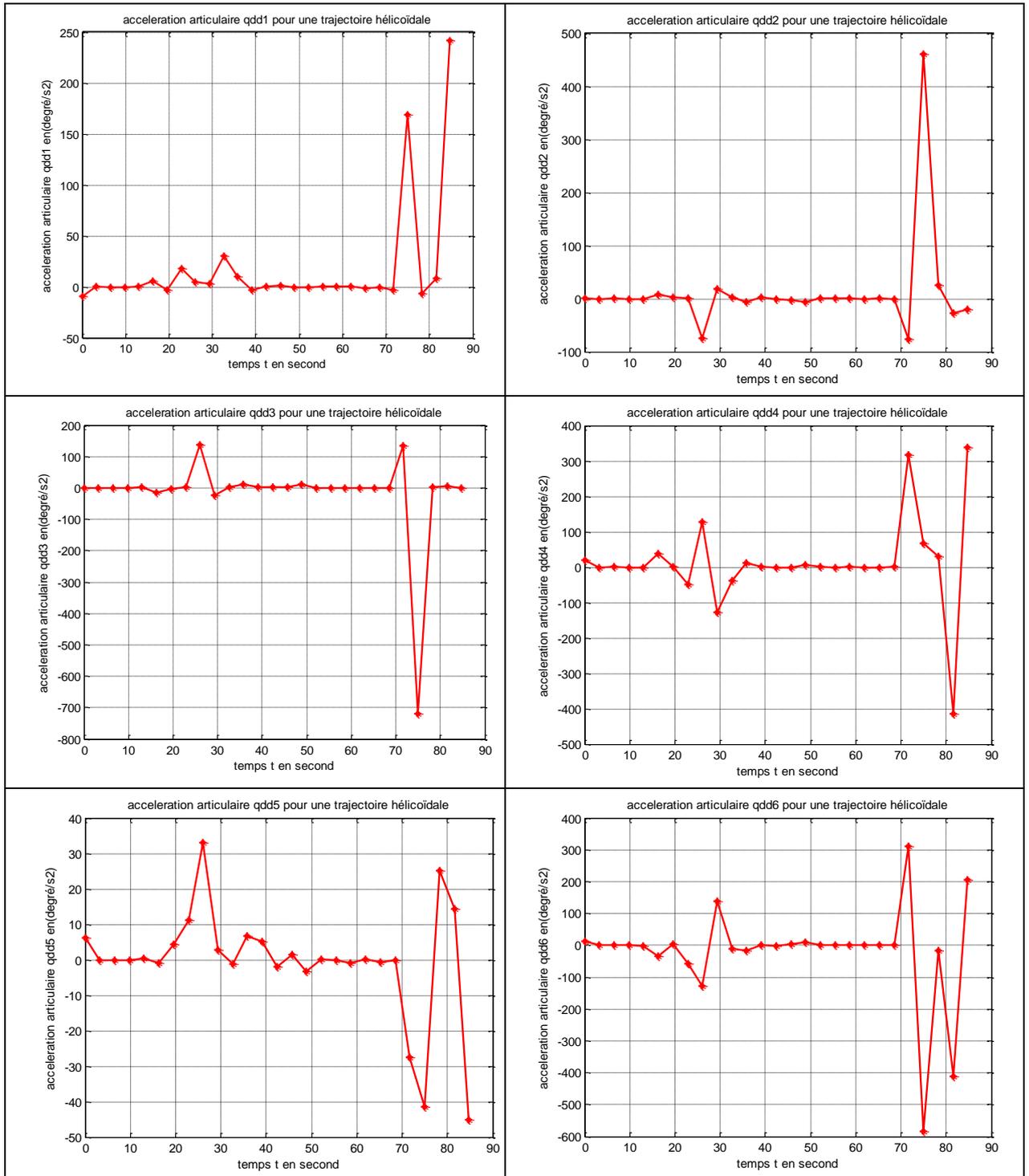


Figure 2.27 Accélérations des articulations pour le soudage d'un cordant de soudure de forme hélicoïdale par un robot manipulateur 6 axes

Le profil des accélérations est presque constant, perturbé à la fin du graphe par le passage par une position singulière

## 2.8 Conclusions

Nous avons exposé dans ce chapitre les outils nécessaires pour le calcul du modèle dynamique inverse. Nous avons également réalisé les programmes nécessaires pour le calcul du MGD (paramétrage de DH), le MGI (méthode analytique de Paul), le modèle cinématique du premier ordre et le modèle cinématique du deuxième ordre pour le calcul des accélérations articulaires. Pour le calcul des accélérations articulaires, nous avons choisi une méthode récursive. Ce choix est motivé par la simplicité dans la programmation.

Nous avons visé dans notre exposé des tâches particulières c'est-à-dire des tâches qui demandent une orientation précise. Ces tâches sont modélisées par deux méthodes :

- la méthode des angles d'Euler
- la méthode des coordonnées intrinsèques de Frenet-Serret

Pour l'application de ces méthodes nous avons opté pour le soudage continu de trajectoires rectiligne et hélicoïdale. Ces tâches ont été confiées à un robot manipulateur à 6 axes et à poignet rotule car la tâche choisie demande 6 ddl (3 pour la position et 3 pour l'orientation)

## CHAPITRE 3

### ANALYSE DYNAMIQUE

#### 3.1 Introduction.

Le modèle dynamique d'un système multicorps (manipulateur série), joue un rôle important dans la commande, la simulation et le dimensionnement des actionneurs. On distingue deux types de modèles dynamiques :

- Le modèle dynamique direct exprime la relation entre les accélérations articulaires et les positions, les vitesses et les couples des articulations (figure 3.1). Le modèle dynamique direct peut prendre la forme suivante :

$$\ddot{\vec{q}} = g(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \vec{\tau}, \vec{f}_e) \quad (3.1)$$

- Le modèle dynamique inverse est la relation entre les couples (et ou forces) appliqués aux actionneurs et les positions, vitesses et accélérations articulaires. (figure 3.2) On représente le modèle dynamique par une relation de la forme :

$$\vec{\tau} = f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}, \vec{f}_e) \quad (3.2)$$

Avec :

$\vec{\tau}$ : Vecteur des couples et forces des actionneurs

$\vec{q}$ : Vecteur des positions articulaires.

$\dot{\vec{q}}$ : Vecteur des vitesses articulaires.

$\ddot{\vec{q}}$ : Vecteur des accélérations articulaire.

$\vec{f}_e$ : Vecteur des forces et moments exercés sur le manipulateur.

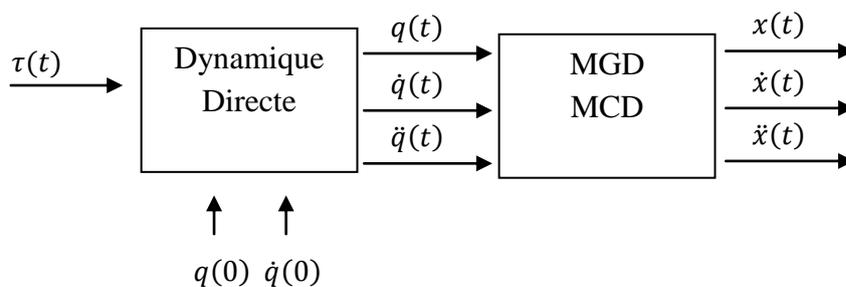


Figure 3.1 Modèle de la dynamique directe

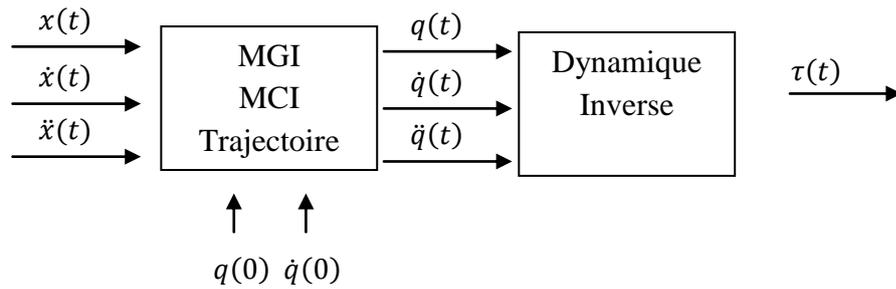


Figure 3.2 Modèle de la dynamique inverse

Dans ce chapitre on va traiter deux méthodes pour l'élaboration du modèle dynamique inverse :

- Le formalisme de Lagrange.
- Le formalisme de Newton-Euler.
- L'application du formalisme de Lagrange sur un mécanisme à 2 degrés de liberté.
- L'application du formalisme de Newton-Euler sur une chaîne articulée simple à 6 degrés de liberté en utilisant le code Matlab et le logiciel solidworks

### 3.2 Formalisme de Lagrange.

Ce formalisme ne donne pas le modèle le plus performant du point de vue nombre d'opérations [4] mais c'est la méthode la plus simple qui construit le modèle dynamique sous la forme canonique.

Considérons un système multicorps à chaîne ouverte simple de  $n$  corps rigides et  $n$  articulations idéales : c'est-à-dire les articulations ne présente ni jeux ni frottement (figure 3.3). Le lagrangien d'un système mécanique articulé est défini par la fonction :

$$L = L(q_i) \quad i=1, \dots, n \text{ tel que :}$$

$$L = T - \Pi \quad (3.3)$$

Avec :  $T$  est l'énergie cinétique totale et  $\Pi$  est l'énergie potentielle totale du système

Les équations de Lagrange sont données par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4a)$$

Ou bien

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4b)$$

Où  $\tau_i$   $i = 1, \dots, n$  représente les forces et couples généralisés non conservatifs.

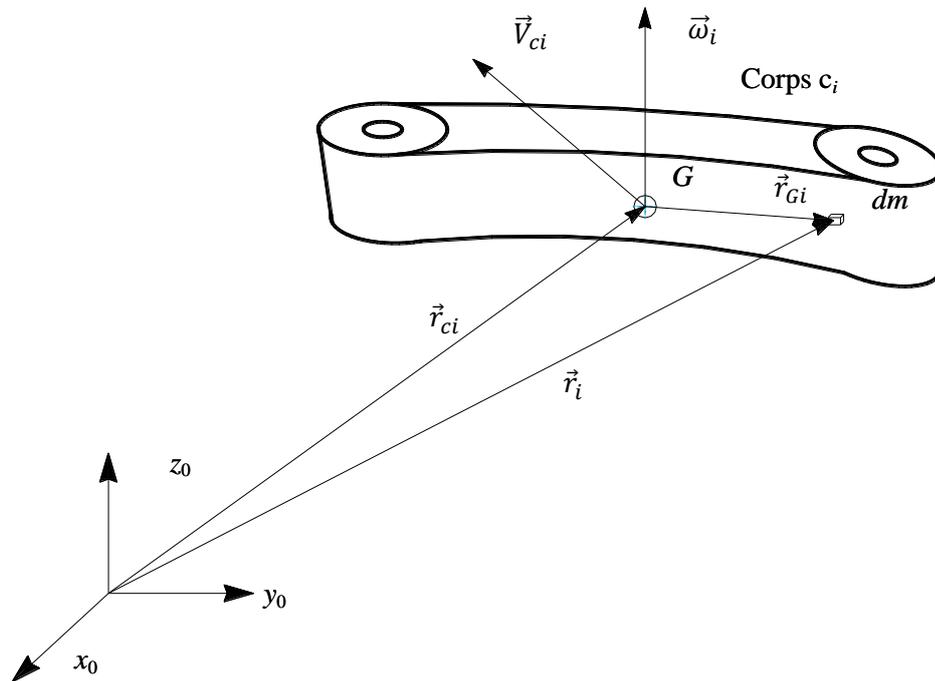


Figure 3.3 Représentation d'un corps rigide d'une chaîne multicorps

### 3.2.1 Énergie cinétique du système multicorps.

On considère un manipulateur de  $n$  corps rigides reliés entre eux par  $n$  articulations et soit  $c_i$  un corps de cette chaîne (figure 3.3). L'énergie cinétique totale est donnée par la relation suivante :

$$T = \sum_{i=1}^n (T_{ci} + T_{mi}) \quad (3.5)$$

$T_{ci}$  est l'énergie cinétique du corps  $i$  et  $T_{mi}$  est l'énergie cinétique du moteur qui actionne l'articulation  $i$ .

L'énergie cinétique du corps  $i$  est donnée par :

$$T_{ci} = \frac{1}{2} \int_{m_{ci}} \dot{\vec{r}}_i^T \cdot \dot{\vec{r}}_i dm \quad (3.6)$$

Avec  $\dot{\vec{r}}_i$  est la vitesse absolue de l'élément de masse  $dm = \rho dV$  et  $m_{ci}$  est la masse du corps  $i$ . On a aussi, suivant la loi de composition des vitesses :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i &= \dot{\vec{r}}_{ci} + \vec{\omega}_i \wedge \vec{r}_{Gi} \\ \dot{\vec{r}}_i &= \dot{\vec{r}}_{ci} + \widehat{\vec{\omega}}_i \cdot \vec{r}_{Gi} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Où  $\vec{r}_{ci}$  est la vitesse linéaire du centre de masse et  $\vec{\omega}_i$  est la vitesse angulaire du corps  $i$  exprimée dans un repère inertiel (figure 3.3).

On introduit la relation (3.7) dans (3.6) on a :

$$T_{ci} = T_{tran_{ci}} + T_{mut_{ci}} + T_{rot_{ci}} \quad (3.8)$$

*Energie cinétique de translation :*

$$T_{tran_{ci}} = \frac{1}{2} \int_{m_{ci}} \vec{r}_{ci}^T \vec{r}_{ci} dm = \frac{1}{2} m_{ci} \vec{r}_{ci}^T \vec{r}_{ci} = \frac{1}{2} m_{ci} \vec{V}_{ci}^T \vec{V}_{ci} \quad (3.9)$$

$\vec{V}_{ci}$  : vitesse linéaire du centre de masse du corps  $i$ .

*Energie cinétique mutuelle*

$$T_{mut_{ci}} = \int_{m_{ci}} \vec{r}_{ci}^T \widehat{\omega}_i \vec{r}_{ci} dm = \vec{r}_{ci}^T \widehat{\omega}_i \int_{m_{ci}} (\vec{r}_i - \vec{r}_{ci}) dm = 0 \quad (3.10)$$

$$\text{Car } \int_{m_{ci}} (\vec{r}_i - \vec{r}_{ci}) dm = \int_{m_{ci}} \vec{r}_i dm - \int_{m_{ci}} \vec{r}_{ci} dm = \int_{m_{ci}} \vec{r}_i dm - \vec{r}_{ci} m_{ci} = 0$$

et  $\vec{r}_{ci}$  représente le vecteur qui joint l'origine  $O$  du repère fixe au centre de masse.

*Energie cinétique de rotation*

$$T_{rot_i} = \frac{1}{2} \int_{m_{ci}} \vec{r}_i^T \widehat{\omega}_i^T \widehat{\omega}_i \vec{r}_i dm = \frac{1}{2} \vec{\omega}_i^T \left( \int_{m_{ci}} \widehat{r}_i^T \widehat{r}_i dm \right) \vec{\omega}_i \quad (3.11a)$$

On sait que  $\widehat{\omega}_i \vec{r}_i = -\widehat{r}_i \vec{\omega}_i$

Et  $\widehat{r}_i$  est la matrice antisymétrique de préproduit vectorielle donnée par :

$$\widehat{r}_i = \begin{bmatrix} 0 & -r_{iz} & r_{iy} \\ r_{iz} & 0 & -r_{ix} \\ -r_{iy} & r_{ix} & 0 \end{bmatrix}$$

D'où l'équation (3.11a) devient :

$$T_{rot_i} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_i^T I_{ci} \vec{\omega}_i \quad (3.11b)$$

Avec  $I_{ci}$  tenseur d'inertie défini par :

$$I_{ci} = \int_{m_{ci}} \hat{\vec{r}}_i^T \hat{\vec{r}}_i dm = \begin{bmatrix} \int_{m_{ci}} (r_{iy}^2 + r_{iz}^2) dm & - \int_{m_{ci}} r_{ix} r_{iy} dm & - \int_{m_{ci}} r_{ix} r_{iz} dm \\ - \int_{m_{ci}} r_{ix} r_{iy} dm & \int_{m_{ci}} (r_{ix}^2 + r_{iz}^2) dm & - \int_{m_{ci}} r_{iy} r_{iz} dm \\ - \int_{m_{ci}} r_{ix} r_{iz} dm & - \int_{m_{ci}} r_{iy} r_{iz} dm & \int_{m_{ci}} (r_{ix}^2 + r_{iy}^2) dm \end{bmatrix} \quad (3.12a)$$

Ou bien

$$I_{ci} = \begin{bmatrix} I_{cixx} & -I_{cixy} & -I_{cixz} \\ -I_{cixy} & I_{ciyy} & -I_{ciyz} \\ -I_{cixz} & -I_{ciyz} & I_{cizz} \end{bmatrix} \quad (3.12b)$$

$I_{ci}$  est le tenseur d'inertie du corps  $i$  par rapport au centre de masse du corps  $i$  exprimé dans un repère fixe.

Suivant les paramètres de Denavit - Hartenberg, on a :

$$I_{ci} = R_i I_{ci}^i R_i^T \quad (3.13)$$

$I_{ci}^i$  est le tenseur d'inertie exprimé dans un repère lié au corps  $i$  et d'origine le centre de masse, et  $I_{ci}$  est l'expression du tenseur  $I_{ci}^i$  dans le repère fixe.

L'expression (3.8) devient.

$$T_{ci} = \frac{1}{2} m_{ci} \vec{V}_{ci}^T \vec{V}_{ci} + \frac{1}{2} \vec{\omega}_i^T R_i I_{ci}^i R_i^T \vec{\omega}_i \quad (3.14)$$

L'expression (3.14) peut être écrite en utilisant le modèle cinématique direct, c'est-à-dire :

$$\vec{V}_{ci} = \sum_{k=1}^i [\sigma_k \vec{a}_{k-1} + \bar{\sigma}_k (\vec{a}_{k-1} \wedge (\vec{r}_{ci} - \vec{r}_{k-1}))] \dot{q}_k \quad (3.15)$$

$$\vec{\omega}_i = \sum_{k=1}^i \bar{\sigma}_k \vec{a}_{k-1} \dot{q}_k \quad (3.16)$$

Où  $\vec{r}_{k-1}$  est le vecteur position de l'origine du repère  $R_{i-1}$ .  $\sigma_k = 1$  si l'articulation est prismatique, et  $\sigma_k = 0$  si l'articulation est rotoïde.  $\bar{\sigma}_k = 1 - \sigma_k$

En utilisant la matrice Jacobienne, les expressions (3.15) et (3.16) peuvent être écrites de la façon suivante :

$$\vec{V}_{ci} = J_{v1}^{(ci)} \dot{q}_1 + \dots + J_{vi}^{(ci)} \dot{q}_i = [J_v^{(ci)}] \dot{\vec{q}} \quad (3.17)$$

$$\vec{\omega}_i = J_{\omega 1}^{(ci)} \dot{q}_1 + \dots + J_{\omega i}^{(ci)} \dot{q}_i = [J_{\omega}^{(ci)}] \dot{\vec{q}} \quad (3.18)$$

On peut écrire la matrice Jacobienne de la manière suivante :

$$[J_v^{(ci)}] = [J_{v1}^{(ci)} \dots J_{vi}^{(ci)} \ 0 \dots 0] \quad (3.19)$$

$$[J_\omega^{(ci)}] = [J_{\omega1}^{(ci)} \dots J_{\omega i}^{(ci)} \ 0 \dots 0] \quad (3.20)$$

L'énergie cinétique pour le corps  $i$  est :

$$T_{ci} = \frac{1}{2} m_{ci} \dot{\vec{q}}^T [J_v^{(ci)}]^T [J_v^{(ci)}] \dot{\vec{q}} + \frac{1}{2} \dot{\vec{q}} [J_\omega^{(ci)}]^T [R_{ci}^i] [I_{ci}^i] [R_{ci}^i]^T [J_\omega^{(ci)}] \dot{\vec{q}} \quad (3.21)$$

De la même manière, on peut obtenir  $T_{mi}$  l'énergie cinétique due aux actionneurs des articulations.

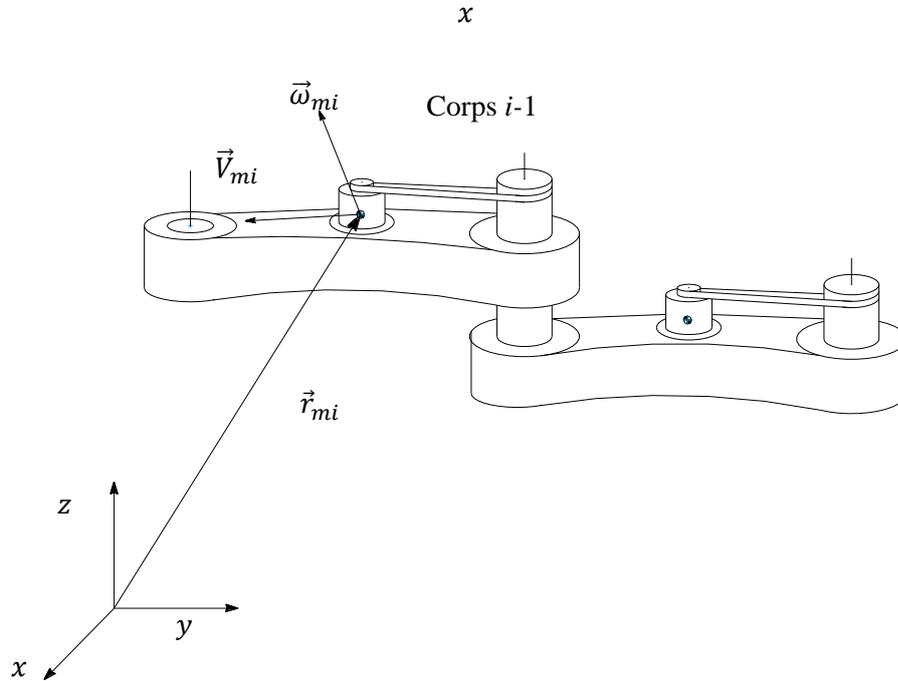


Figure 3.4 Influence des actionneurs sur le MDI

Comme le montre la figure 3.4, le corps  $i$  est entraîné par un moteur avec un lien flexible et inextensible (chaîne, courroie denté ...). Ce moteur est fixé sur le corps  $i-1$ . Dans la conception des bras manipulateur deux points sont à considérer: les moteurs doivent être les plus légers possibles et les plus proches de la base du bras. L'énergie cinétique est ainsi donnée par :

$$T_{mi} = m_{mi} \vec{V}_{mi}^T \vec{V}_{mi} + \vec{\omega}_{mi}^T I_{mi} \vec{\omega}_{mi} \quad (3.22)$$

$m_{mi}$  est la masse du rotor,  $\vec{V}_{mi}$  est la vitesse linéaire du centre de masse du rotor,  $I_{mi}$  est le tenseur d'inertie du rotor relatif à son centre de masse et  $\vec{\omega}_{mi}$  est la vitesse angulaire du rotor

Si  $\psi_{mi}$  est la position angulaire du rotor, si on admet que la transmission est rigide et si  $k_i$  est le rapport de réduction de la transmission, on a :

$$\dot{\psi}_{mi} = k_i \dot{q}_i \quad (3.23)$$

Donc la vitesse angulaire du rotor par rapport à un repère fixe est donnée d'après [23] par :

$$\vec{\omega}_{mi} = \vec{\omega}_{i-1} + k_i \dot{q}_i \vec{a}_{mi} \quad (3.24)$$

Où  $\vec{\omega}_{i-1}$  est la vitesse angulaire du corps  $i-1$  où le moteur est attaché,  $\vec{a}_{mi}$  est le vecteur unitaire le long de l'axe du rotor.

Pour exprimer l'énergie cinétique du rotor  $i$ , il est commode de l'exprimer en fonction des variables articulaires  $q_i$ .

$$\vec{V}_{mi} = J_V^{mi} \dot{\vec{q}} \quad (3.25)$$

Avec

$$J_V^{mi} = [j_{V_1}^{mi} \dots j_{V_{i-1}}^{mi} \quad 0 \dots 0] \quad (3.26a)$$

Où

$$j_{V_k}^{mi} = \sigma_j \vec{a}_{j-1} + \bar{\sigma}_j \hat{\vec{a}}_{j-1} (\vec{r}_{mi} - \vec{r}_{j-1}) \quad (3.26b)$$

$\vec{r}_{j-1}$  est la position de l'origine du repère  $R_{j-1}$  dans  $R_0$  et  $\vec{r}_{mi}$  est la position du centre de masse du rotor dans le repère  $R_0$

De même

$$\vec{\omega}_{mi} = J_\omega^{mi} \dot{\vec{q}} \quad (3.27a)$$

Avec

$$J_\omega^{mi} = [j_{\omega_1}^{mi} \dots j_{\omega_i}^{mi} \quad 0 \dots 0] \quad (3.27b)$$

Où

$$j_{\omega_j}^{mi} = \begin{cases} j_{\omega_j}^{ci} & j = 1, \dots, i-1 \\ k_i \vec{a}_{mi} & j = i. \end{cases} \quad (3.26c)$$

L'énergie cinétique du moteur  $m_i$  peut être écrite comme suit :

$$T_{m_i} = \frac{1}{2} m_{m_i} \dot{\vec{q}}^T [J_V^{m_i}]^T [J_V^{m_i}] \dot{\vec{q}} + \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T [J_\omega^{m_i}]^T [R_{m_i}] [I_{m_i}] [R_{m_i}]^T [J_\omega^{m_i}] \dot{\vec{q}} \quad (3.27)$$

L'énergie cinétique totale du corps  $ci$  est :

$$T_i = T_{ci} + T_{m_i} \quad (3.28)$$

L'énergie cinétique d'un système de  $n$  corps est :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T [B(\vec{q})] \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.29)$$

Où

$$\begin{aligned} [B(\vec{q})] = & \sum_{i=1}^n \left[ m_{ci} [J_V^{(ci)}]^T [J_V^{(ci)}] + m_{m_i} [J_V^{m_i}]^T [J_V^{m_i}] \right. \\ & + [J_\omega^{(ci)}]^T [R_{ci}^i] [I_{ci}^i] [R_{ci}^i]^T [J_\omega^{(ci)}] \\ & \left. + [J_\omega^{m_i}]^T [R_{m_i}] [I_{m_i}] [R_{m_i}]^T [J_\omega^{m_i}] \right] \quad (3.30) \end{aligned}$$

La matrice  $[B(\vec{q})]$  est symétrique, définie positive [4] de taille  $n \times n$ .

### 3.2.2 Energie potentielle du système multicorps.

L'énergie potentielle est donnée par la relation suivante :

$$\Pi = \sum_{i=1}^n (\Pi_{ci} + \Pi_{m_i}) \quad (3.31)$$

L'énergie potentielle du corps  $i$  est :

$$\Pi_{ci} = -m_{ci} \vec{g}^T \vec{r}_{ci} \quad (3.32)$$

Avec  $\vec{g} = [0, 0, -g]^T$ ,  $g$  est l'accélération du champ de la pesanteur.

L'énergie potentielle du moteur  $i$  est:

$$\Pi_{m_i} = -m_{m_i} \vec{g}^T \vec{r}_{m_i} \quad (3.33)$$

Donc, l'énergie potentielle du système multicorps est donnée par :

$$\Pi = \sum_{i=1}^n (m_{ci} \vec{g}^T \vec{r}_{ci} + m_{m_i} \vec{g}^T \vec{r}_{m_i}) \quad (3.34)$$

L'énergie potentielle totale est une fonction des variables articulaires  $q_i$

### 3.2.3 Équation du mouvement d'un système multicorps.

L'équation (3.4b) permet d'écrire l'équation du mouvement :

$$B(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + C(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} + Q(\vec{q}) = \vec{\tau} \quad (3.35a)$$

Avec :

$$C(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = [B(\vec{q})]\dot{\vec{q}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q_i} (\dot{\vec{q}}^T [B(\vec{q})] \dot{\vec{q}}) \right)^T \quad (3.35b)$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$Q(\vec{q}) = \frac{\partial \Pi(\vec{q})}{\partial q_i} \quad (3.35c)$$

Si les éléments de la matrice  $B(\vec{q})$  sont  $b_{ij}(q)$  alors, on a :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^n b_{ij}(\vec{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{db_{ij}(\vec{q})}{dt} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n b_{ij}(\vec{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{ij}(\vec{q})}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{jk}(\vec{q})}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = - \sum_{j=1}^n \left( m_{cj} \vec{g}^T \frac{\partial \vec{r}_{cj}}{\partial q_i} + m_{mj} \vec{g}^T \frac{\partial \vec{r}_{mj}}{\partial q_i} \right)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = - \sum_{j=1}^n \left( m_{cj} \vec{g}^T J_{ri}^{cj}(\vec{q}) + m_{mj} \vec{g}^T J_{ri}^{mj}(\vec{q}) \right) = u_i(\vec{q}) \quad (3.36)$$

$$i = 1, \dots, n$$

D'où, on peut écrire l'équation du mouvement de la façon suivante :

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(\vec{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (h_{ijk}) \dot{q}_k \dot{q}_j + u_i(\vec{q}) = \tau_i \quad (3.37)$$

$$h_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}(\vec{q})}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}(\vec{q})}{\partial q_i} \quad (3.38)$$

$$i = 1, \dots, n$$

*Interprétation physique de l'équation (3.37)*

- Terme d'accélération  
Les coefficients  $b_{ii}$  représentent le moment d'inertie de la chaîne multicorps par rapport à l'axe de l'articulation  $i$  quand les autres articulations sont bloquées.  
Les coefficients  $b_{ij}$  représentent l'effet de l'accélération de l'articulation  $j$  sur l'articulation  $i$
- Terme de la vitesse quadratique.  
Le terme  $\left(\frac{\partial b_{ij}(\vec{q})}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}(\vec{q})}{\partial q_i}\right) \dot{q}_j^2$  représente l'effet de la force centrifuge induit à l'articulation  $i$  par la vitesse de l'articulation  $j$ .
- Le terme  $\left(\frac{\partial b_{ij}(\vec{q})}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}(\vec{q})}{\partial q_i}\right) \dot{q}_k \dot{q}_j$  représente l'effet de la force de Coriolis appliquée à l'articulation  $i$  engendrée par les vitesses des articulations  $j$  et  $k$
- Le terme  $u_i(\vec{q})$  représente le moment de la force de gravité généré à l'axe d'articulation  $i$  du manipulateur, dans la configuration actuelle.

Le deuxième terme de gauche de l'expression (3.37) peut être écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{ij}(\vec{q})}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}(\vec{q})}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{ij}(\vec{q})}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{ik}(\vec{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}(\vec{q})}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{ij}(\vec{q})}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}(\vec{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}(\vec{q})}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j \end{aligned}$$

Donc l'équation (3.37) peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_{ij}(\vec{q}) \ddot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial b_{ij}(\vec{q})}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}(\vec{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}(\vec{q})}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j + u_i(\vec{q}) \\ = \tau_i \end{aligned} \quad (3.39)$$

*Remarque*

Le choix de la matrice  $C$  n'est pas unique car il existe plusieurs possibilités de choisir la matrice  $C$ . La matrice  $C$  peut être choisie de telle sorte que la matrice

$$N(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \dot{B} - 2C \text{ soit anti symétrique.}$$

### 3.3 Formalisme de Newton Euler

La mécanique newtonienne se base sur les principes suivants :

- 1- Chaque action a une réaction égale et opposée. Ainsi, si un corps 1 applique une force  $\vec{f}$  et un couple  $\vec{\tau}$  sur le corps 2, alors, le corps 2 applique une force  $-\vec{f}$  et un couple  $-\vec{\tau}$  sur le corps 1.
- 2- La variation de la quantité de mouvement est égale à la force totale appliquée au corps
- 3- La variation du couple cinétique est égale à l'ensemble des couples appliqués au corps.

Pour notre Application, on a utilisé l'algorithme de double récurrence de Newton Euler basé sur la méthode de Luh [9] [4]. Cet algorithme exprime le torseur dynamique des efforts extérieurs appliqué au centre de gravité du corps  $i$ . En utilisant les paramètres inertiels  $m_i$ ,  $S_i$  et  $I_i$  il est possible d'écrire l'algorithme:

de récurrence en avant pour  $i=1, \dots, n$  (sur la figure 3.5)

On calcule les vitesses et les accélérations en démarrant de la base vers l'organe terminal comme le montre la figure 3.5b.

$$\omega_{i-1}^i = R_{i-1}^i \omega_{i-1}^{i-1} \quad (3.40)$$

$$\vec{\omega}_i^i = \vec{\omega}_{i-1}^i + \bar{\sigma}_i \dot{q}_i \vec{a}_i^i \quad (3.41)$$

$$\dot{\vec{\omega}}_i^i = R_{i-1}^i \dot{\vec{\omega}}_{i-1}^{i-1} + \bar{\sigma}_i (\ddot{q}_i \vec{a}_i^i + \vec{\omega}_{i-1}^i \wedge \dot{q}_i \vec{a}_i^i) \quad (3.42)$$

$$\dot{\vec{V}}_i^i = R_{i-1}^i \left( \dot{\vec{V}}_{i-1}^{i-1} + \dot{\vec{\omega}}_{i-1}^{i-1} \wedge \vec{P}_i^{i-1} + \vec{\omega}_{i-1}^{i-1} \wedge (\vec{\omega}_{i-1}^{i-1} \wedge \vec{P}_i^{i-1}) \right) + \sigma_i (\ddot{q}_i \vec{a}_i^i + 2\vec{\omega}_{i-1}^i \wedge \dot{q}_i \vec{a}_i^i) \quad (3.43)$$

$$F_i^i = m_i \dot{\vec{V}}_i^i + m_i \vec{\omega}_i^i \wedge \vec{S}_i + \vec{\omega}_i^i \wedge (\vec{\omega}_i^i \wedge \vec{S}_i) \quad (3.44)$$

$$C_i^i = I_i^i \dot{\vec{\omega}}_i^i + \vec{\omega}_i^i \wedge (I_i^i \vec{\omega}_i^i) \quad (3.45)$$

avec :

$$\vec{\omega}_0^0 = [0,0,0]^T, \dot{\vec{\omega}}_0^0 = [0,0,0]^T \text{ et } \dot{\vec{V}}_0^0 = [0,0,0]^T$$

Récurrence en arrière  $i=n, \dots, 1$

On isole chaque solide figure 3.5c et on calcule les forces et les moments appliqués au corps et on applique les lois de newton et d'Euler en démarrant de l'organe terminal vers la base de la chaîne.

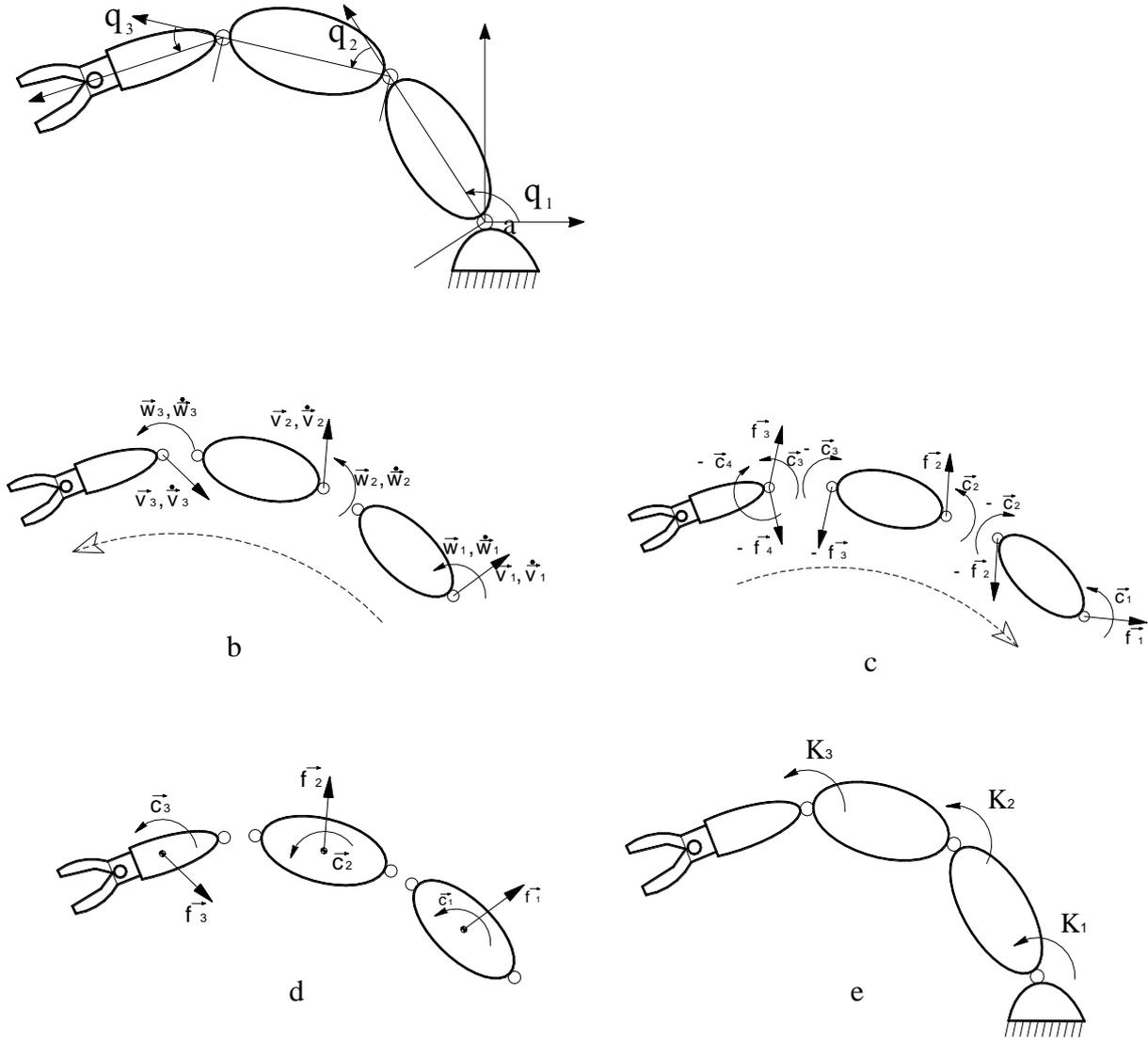


Figure 3.5 Bilan des efforts, des vitesses et accélérations. (formulation de Newton Euler)

$$\vec{f}_i^i = \vec{F}_i^i + R_{i+1}^i \vec{f}_{i+1}^{i+1} + R_0^i \vec{g} \quad (3.46)$$

$$\vec{f}_i^{i-1} = R_i^{i-1} \vec{f}_i^i \quad (3.47)$$

$$\vec{c}_i^i = \vec{C}_i^i + R_{i+1}^i \vec{c}_{i+1}^{i+1} + \vec{S}_i^i \wedge \vec{f}_i^i + (\vec{P}_{i+1}^i - \vec{S}_i^i) \wedge (\vec{f}_{i+1}^{i+1}) + \vec{c}_{ei}^i \quad (3.48)$$

$$K_i = (\sigma_i \vec{f}_i^i + \bar{\sigma}_i \vec{c}_i^i)^T \vec{a}_i^i + \vec{F}_{si} \text{Sign}(\dot{q}_i) + \vec{F}_{vi} \dot{q}_i + I_{ai} \ddot{q}_i \quad (3.49)$$

Avec  $\vec{F}_{si} \text{Sign}(\dot{q}_i)$  et  $\vec{F}_{vi} \dot{q}_i$  force ou moment de frottement sec et visqueux, et  $K_i$  est le moment que doit fournir l'actionneur  $i$  pour que le mécanisme se déplace suivant la trajectoire décrite par  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  et  $\ddot{q}_i$ .

### 3.3.1 Algorithme de calcul.

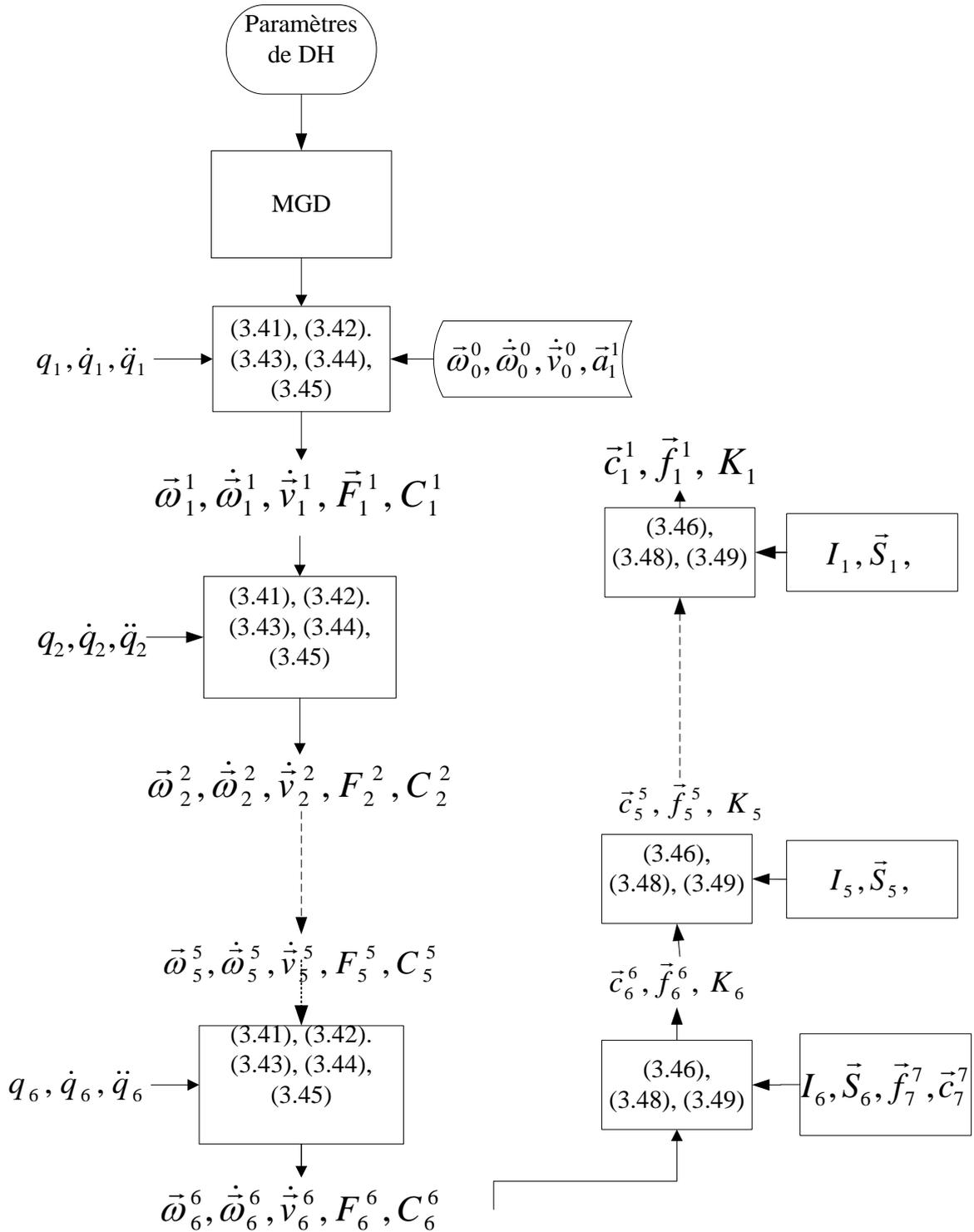


Figure 3.6 Schéma des étapes de calcul du MDI. Méthode Newton Euler

### 3.4 Application formalisme de Lagrange.

Considérons le manipulateur plan à deux corps, figure 3.7.

**Remarque :**

Cette Application va nous servir par la suite pour valider le programme de la génération du modèle dynamique inverse basé sur la méthode de Newton Euler.

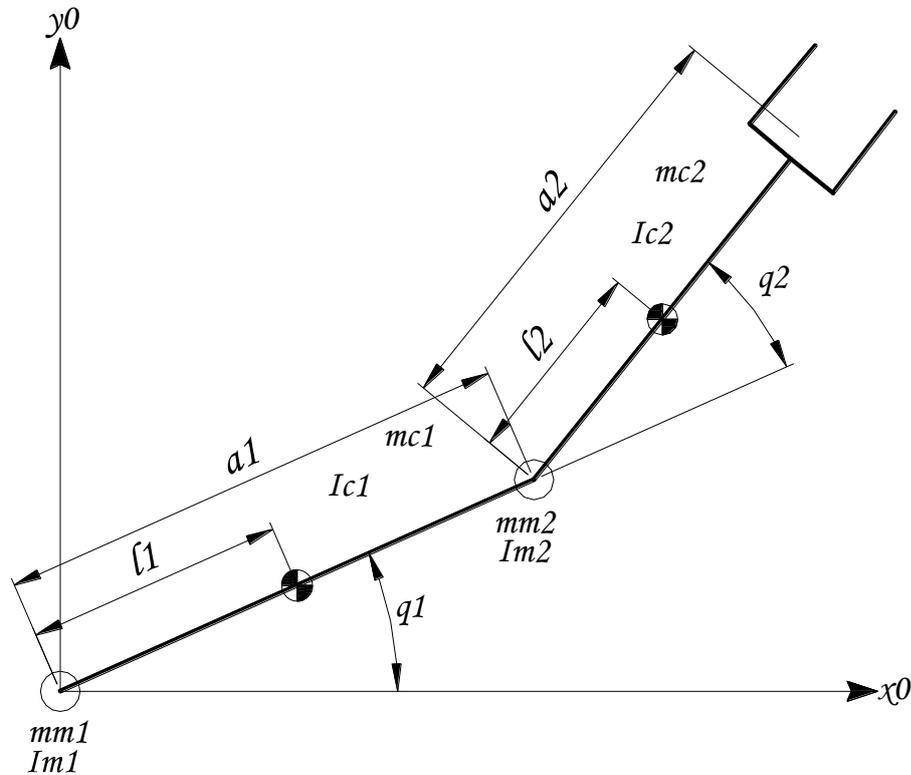


Figure 3.7 Manipulateur plan à deux corps

En appliquant les résultats du paragraphe 3.2 on a :

Les Jacobiens du système sont :

$$J_V^{c1} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 & 0 \\ l_1 C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J_V^{c2} = \begin{bmatrix} -a_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ a_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_\omega^{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, J_\omega^{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Puisque le mécanisme est plan, les vitesses angulaires sont alignées avec \$Z\_0\$,

Jacobien des rotors (actionneurs)

$$J_V^{m1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J_V^{m2} = \begin{bmatrix} -a_1 S_1 & 0 \\ a_1 C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\omega}^{m1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{\omega}^{m2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

$k_i$  est le rapport de transmission du réducteur 1 et 2

En utilisant la relation (3.30)

$$\begin{aligned} [B(q_1, q_2)] &= m_{c1} [J_V^{(c1)}]^T [J_V^{(c1)}] + m_{c2} [J_V^{(c2)}]^T [J_V^{(c2)}] + m_{m1} [J_V^{m1}]^T [J_V^{m1}] + m_{m2} [J_V^{m2}]^T [J_V^{m2}] \\ &+ [J_{\omega}^{(c1)}]^T [R_{c1}^0] [I_{c1}^1] [R_{c1}^0]^T [J_{\omega}^{(c1)}] + [J_{\omega}^{m1}]^T [R_{m1}]^T [I_{m1}] [R_{m1}] [J_{\omega}^{m1}] \\ &+ [J_{\omega}^{(c2)}]^T [R_{c2}^2] [I_{c2}^2] [R_{c2}^2]^T [J_{\omega}^{(c2)}] + [J_{\omega}^{m2}]^T [R_{m2}]^T [I_{m2}] [R_{m2}] [J_{\omega}^{m2}] \end{aligned}$$

$$[B(q_1, q_2)] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

avec

$$b_{11} = I_{c1} + m_{c1} l_1^2 + k_1^2 I_{m1} + I_{c2} + m_{c2} (a_1^2 + l_2^2 + 2a_1 l_2 \cos q_2) + I_{m2} + m_{m2} a_1^2$$

$$b_{12} = b_{21} = I_{c2} + m_{c2} (l_2^2 + a_1 l_2 \cos q_2) + k_2 I_{m2}$$

$$b_{22} = I_{c2} + m_{c2} l_2^2 + k_2^2 I_{m2}$$

L'utilisation de l'expression (3.39) on a :

$$c_{111} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} = 0$$

$$c_{112} = c_{121} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = -m_2 a_1 l_2 \sin(q_2)$$

$$c_{122} = \frac{\partial b_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = -m_2 a_1 l_2 \sin(q_2)$$

$$c_{211} = \frac{\partial b_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = m_2 a_1 l_2 \sin(q_2)$$

$$c_{212} = c_{221} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = 0$$

$$c_{222} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_2} =$$

$$c_{111} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} = 0$$

$$c_{112} = c_{121} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = -m_2 a_1 l_2 \sin(q_2)$$

$$c_{122} = \frac{\partial b_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = -m_2 a_1 l_2 \sin(q_2)$$

$$c_{211} = \frac{\partial b_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = m_2 a_1 l_2 \sin(q_2)$$

$$c_{212} = c_{221} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = 0$$

$$c_{222} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_2} = 0$$

On calcule  $N(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \dot{B} - 2C$

$$N(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & m_2 a_1 l_2 \dot{\sin}(q_2) \dot{q}_1 + m_2 a_1 l_2 \dot{\sin}(q_2) \dot{q}_2 \\ -m_2 a_1 l_2 \dot{\sin}(q_2) \dot{q}_1 - m_2 a_1 l_2 \dot{\sin}(q_2) \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

*Effet de l'énergie potentielle*

$$g_0 = [0, -g, 0]^T$$

En utilisant l'expression (3.36).

$$G_1 = (m_1 l_1 + m_{m2} a_1 + m_2 a_1) g \cos q_1 + m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2)$$

$$G_2 = m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2)$$

Si on ne tient pas compte des forces de frottement et pour que le système se mette en mouvement, les actionneurs doivent fournir les couples :

$$\begin{aligned} \tau_1 = & (I_1 + m_1 l_1^2 + k_1^2 I_{m1} + I_2 + m_2 (a_1^2 + l_2^2 + 2a_1 l_2 \cos q_2) + I_{m2} + m_{m2} a_1^2) \ddot{q}_1 \\ & + (I_2 + m_2 (l_2^2 + a_1 l_2 \cos q_2) + k_2 I_2) \ddot{q}_2 - 2m_2 a_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & - m_2 a_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ & + (m_1 l_1 + m_{m2} a_1 + m_2 a_1) g \cos q_1 + m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

$$\tau_2 = (I_2 + m_2 (l_2^2 + a_1 l_2 \cos q_2) + k_2 I_2) \ddot{q}_1 + (I_2 + m_2 l_2^2 + k_2^2 I_2) \ddot{q}_2 + m_2 a_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

Le programme qui permet de calculer les couples des actionneurs pour un bras articulé plan à deux ddl ou plus est donné en annexe.

### 3.5 Applications sur l'algorithme de Newton Euler.

#### 3.5.1 Validation du programme

Pour tester la fiabilité du programme, nous avons choisi un modèle à 2 degrés de liberté qui a été traité par la référence [23]. Donc, considérons un bras plan à 2 degrés de liberté Figure 3.7.

Les données de l'application sont :  $a_1 = a_2 = 1\text{m}$ ,  $l_1 = l_2 = 0,5\text{m}$ ,  $m_{c1} = m_{c2} = 50\text{kg}$ ,  $I_{c1} = I_{c2} = 10\text{kgm}^2$

La position M de l'extrémité libre du corps 2 à l'état initial est  $(x=0.2, y=0)$ . Dans le sens positif, le corps 1 et le corps 2 tourne d'un angle de  $90^\circ$  pour que la position M à l'état final soit

( $x=0.89$ ,  $y=-0.89$ ), mouvement effectué pendant un temps égal à 0.5 seconde. (Figure 3.8). On admet une posture coude vers le bas.

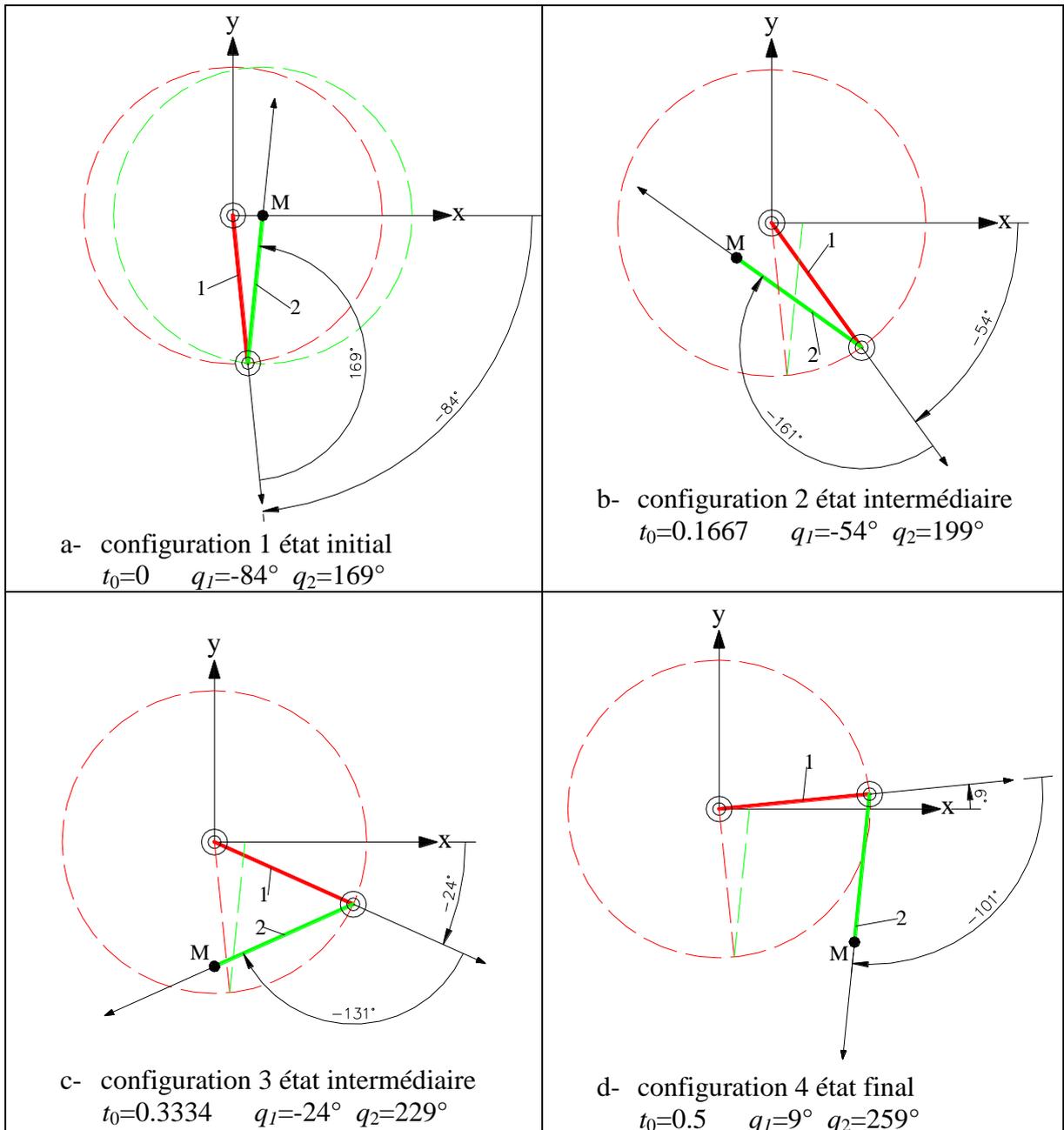


Figure 3.8 Etats initiaux et finaux d'un bras plan rotation de  $90^\circ$   $t=0,5$  seconde

Les positions, les vitesses et les accélérations sont sur la figure 3.9

Les paramètres de Denavit-Hartenberg pour un bras plan à 2ddl sont dans le tableau 3.1

$i$	$\sigma$	$\alpha$	$d_i$	$r_i$	$q_i$
1	0	0	0	0	$q_1$
2	0	0	1	0	$q_2$
3	0	0	1	0	$q_3$

Tableau 3.1 les paramètres de D.H pour un bras à 2ddl

L'introduction des paramètres géométriques, d'inertie et les variables articulaires, dans le programme de calcul donne les résultats qui sont résumés dans la figure 3.10 ainsi que les résultats obtenus par la référence [23]

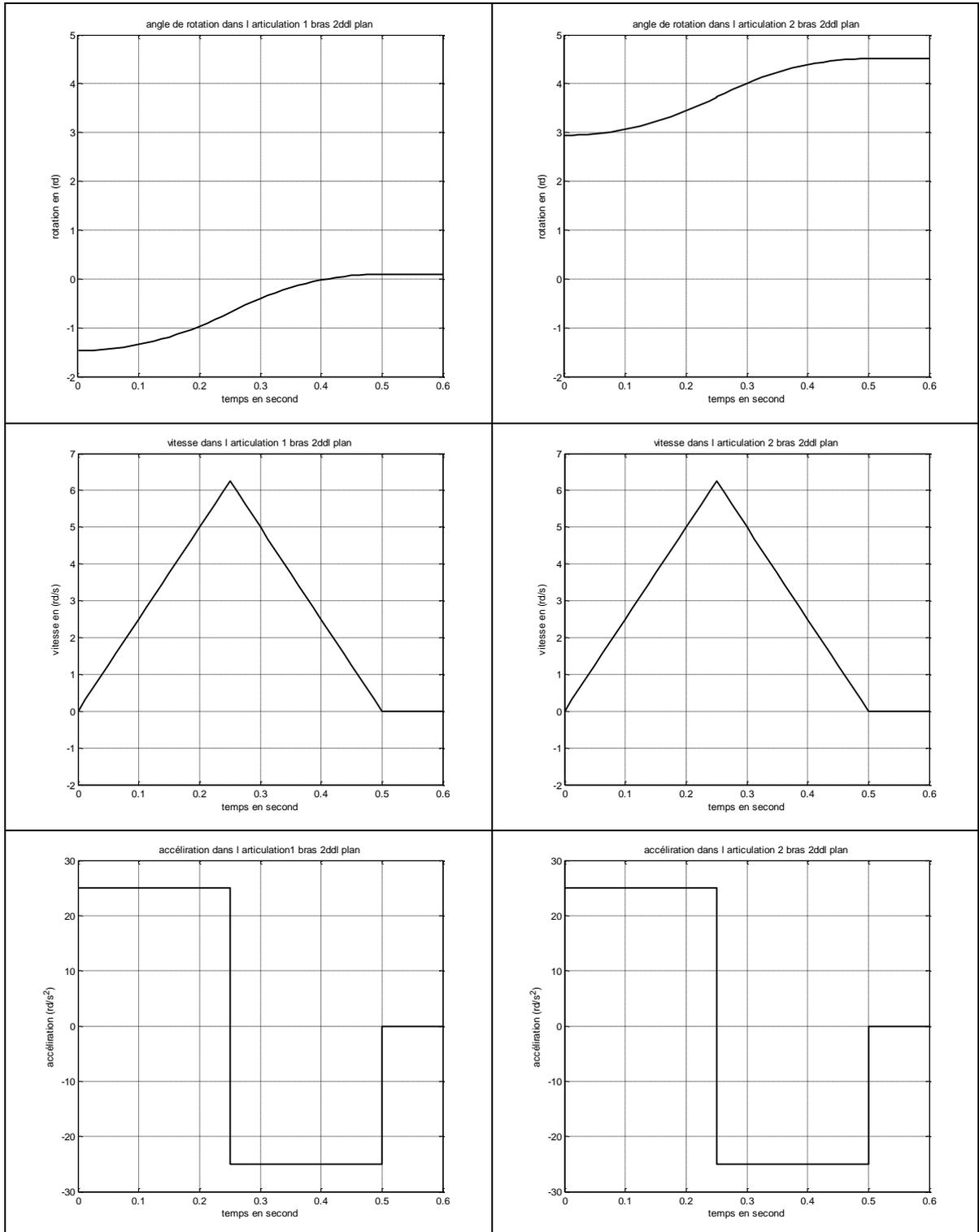


Figure 3.9 Positions, vitesses et accélérations des articulations 1 et 2 du bras à 2 ddl

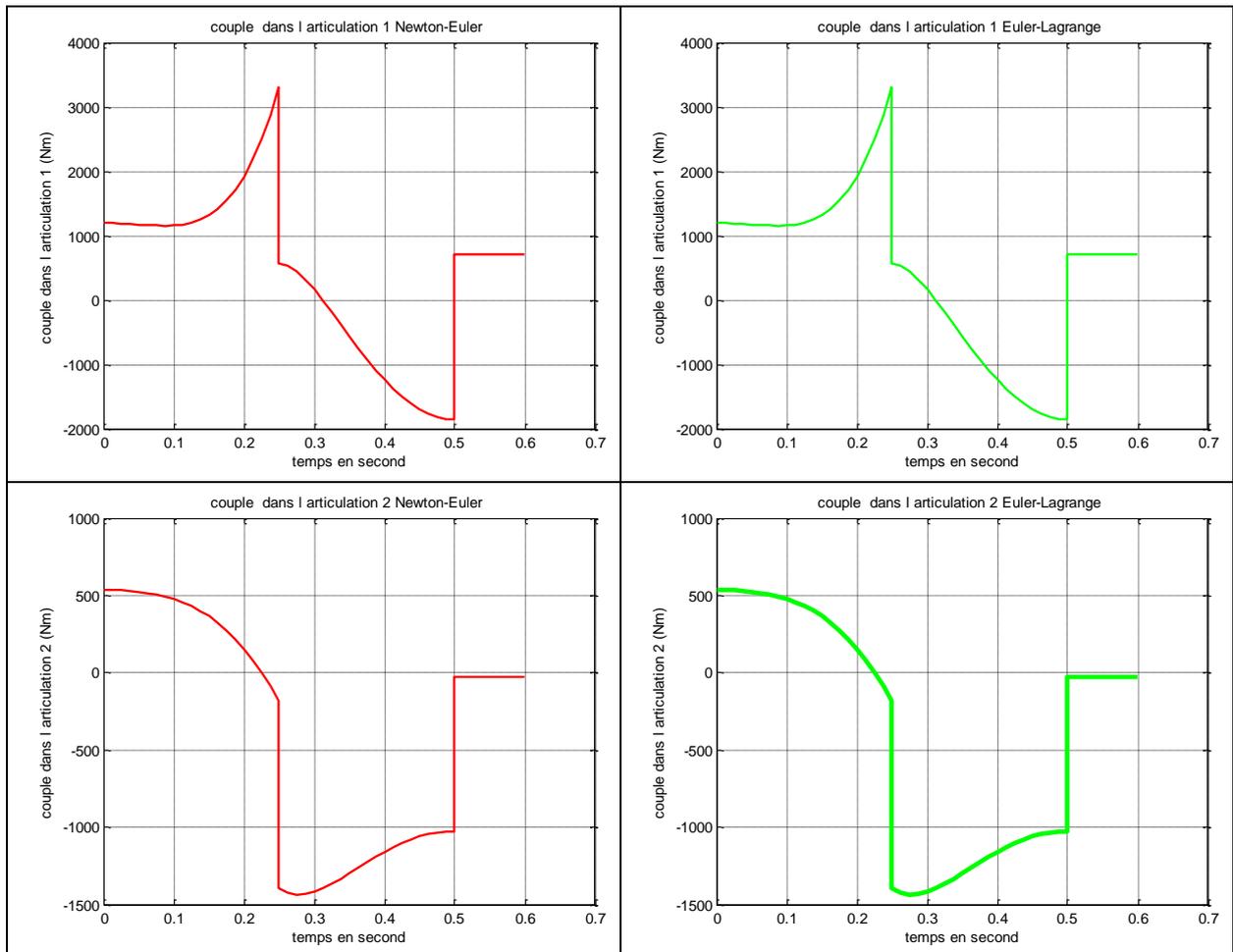


Figure 3.10. Couples des articulations d'un mécanisme à 2ddl

Les courbes de gauche en rouge : obtenues par notre programme méthode de N-E

Les courbes de droite en vert : résultat obtenus par la référence [23] méthode E-L

Le résultat obtenu (figure 3.10) nous montre que notre programme est fiable et nous pouvons passer à l'étape suivante c'est-à-dire appliquer le programme pour le manipulateur à 6 DDL.

### 3.5.2 Calcul des couples articulaires du manipulateur à 6 axes

Le but de cette application est de déterminer les couples que doivent fournir les actionneurs pour exécuter les trajectoires étudiées dans le chapitre 2 : trajectoires linéaire et hélicoïdale.

Pour cela le programme réalisé sous Matlab calcul la dynamique inverse d'un système multicorps à *chaîne* ouvert à six degrés de liberté. Le programme traduit l'algorithme de Newton Euler basé sur la méthode de double récurrence de Luh et *al* annexe 2 .

Le programme nécessite la connaissance des données articulaires ( $\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}$ ) déjà calculées dans le chapitre 2 et les paramètres inertiels. Pour ces derniers, on utilise le logiciel SolidWorks. Le manipulateur est modélisé dans le logiciel SolidWorks (figures 3.11 et 3.12) pour calculer les paramètres d'inertie et la position de centre de gravité de chaque corps. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 3.2.

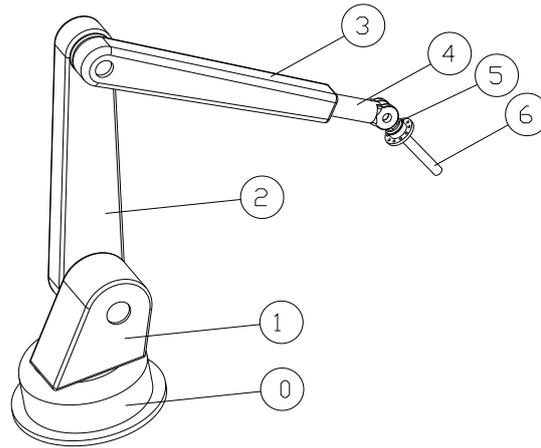


Figure 3.11 Repérage du système multicorps

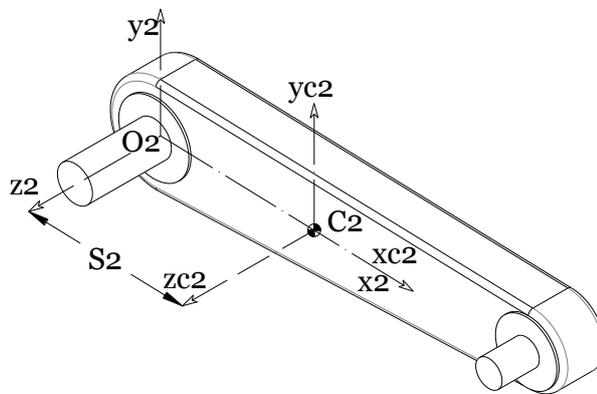


Figure 3.12 Repérage suivant la notation de DH,

Corps ( <i>i</i> )	1	2	3	4	5	6
$m_i$ (kg)	539.5118	53.7659	65.7281	9.7246	0.8673	0.9003
$I_{xxi}$ (kgm <sup>2</sup> )	16.8819	0.4195	0.1553	0.1082	0.0002	0.0005
$I_{xyi}$ (kgm <sup>2</sup> )	-0.3190	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$I_{xzi}$ (kgm <sup>2</sup> )	-0.0960	-0.2715	-0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
$I_{yyi}$ (kgm <sup>2</sup> )	17.1906	5.7560	4.4571	0.1081	0.0007	0.0005
$I_{yzi}$ (kgm <sup>2</sup> )	-1.0876	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$I_{zzi}$ (kgm <sup>2</sup> )	12.6635	5.7209	4.4904	0.0061	0.0007	0.0009
$S_x$ (m)	0.0038	0.3534	0.3527	0.0000	0.0433	0.0000
$S_y$ (m)	-0.0877	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$S_z$ (m)	-0.1766	0.0000	0.0500	0.1523	0.0000	0.0799

Tableau 3.2 moments d'inertie des corps qui constituent le système multicorps.

En injectant les données du tableau 3.2 dans le programme basé sur la méthode récursive de Newton Euler figure 3.6 et en utilisant les résultats du chapitre 2, on obtient les résultats suivants:

1. *Couples articulaires dus à une trajectoire rectiligne de polynôme d'interpolation de degré 1*

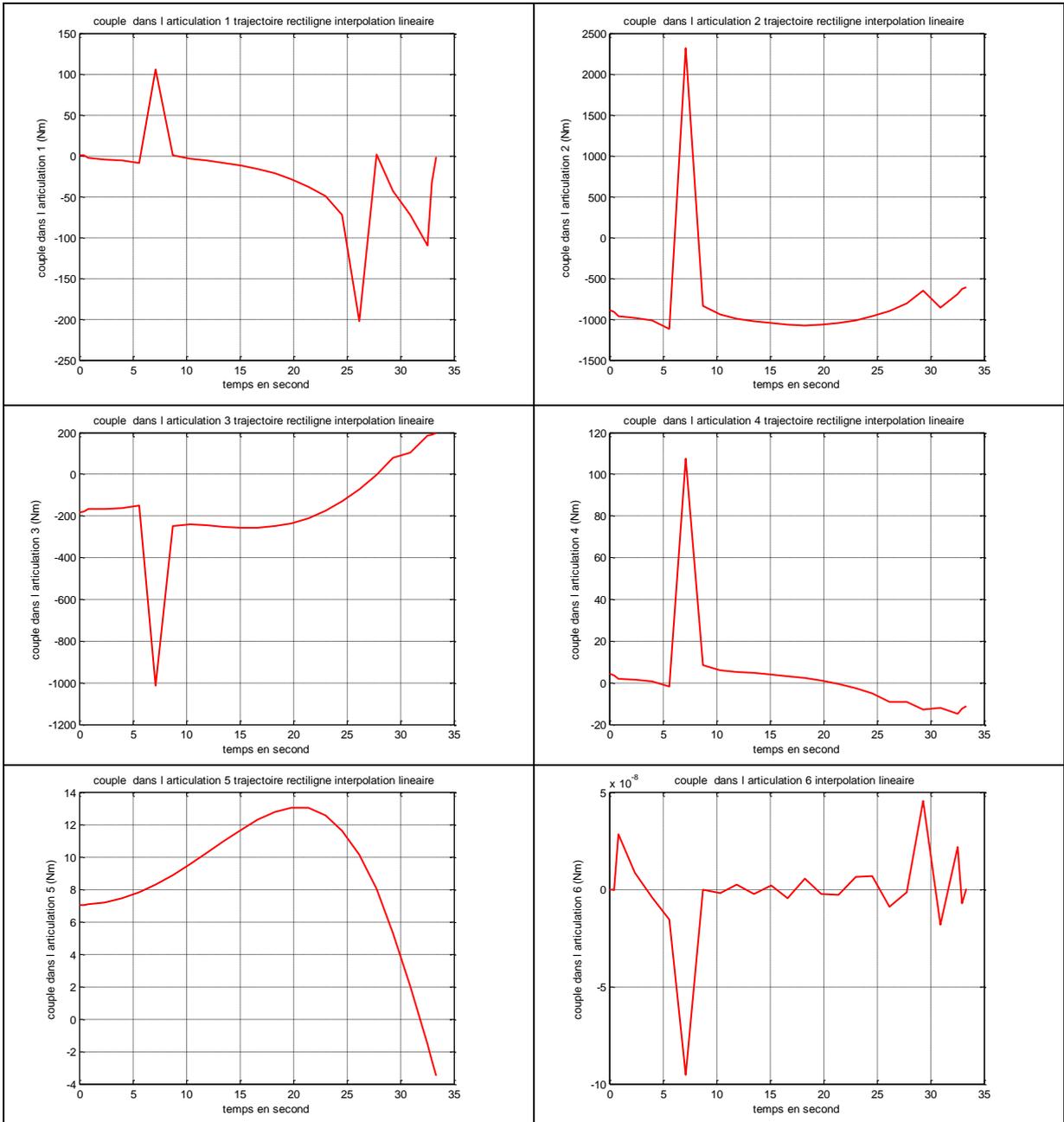


Figure 3.13 Couples articulaires dus à une trajectoire rectiligne de polynôme d'interpolation de degré 1

1. Couples articulaires dus à une trajectoire rectiligne de polynôme d'interpolation de degré 5

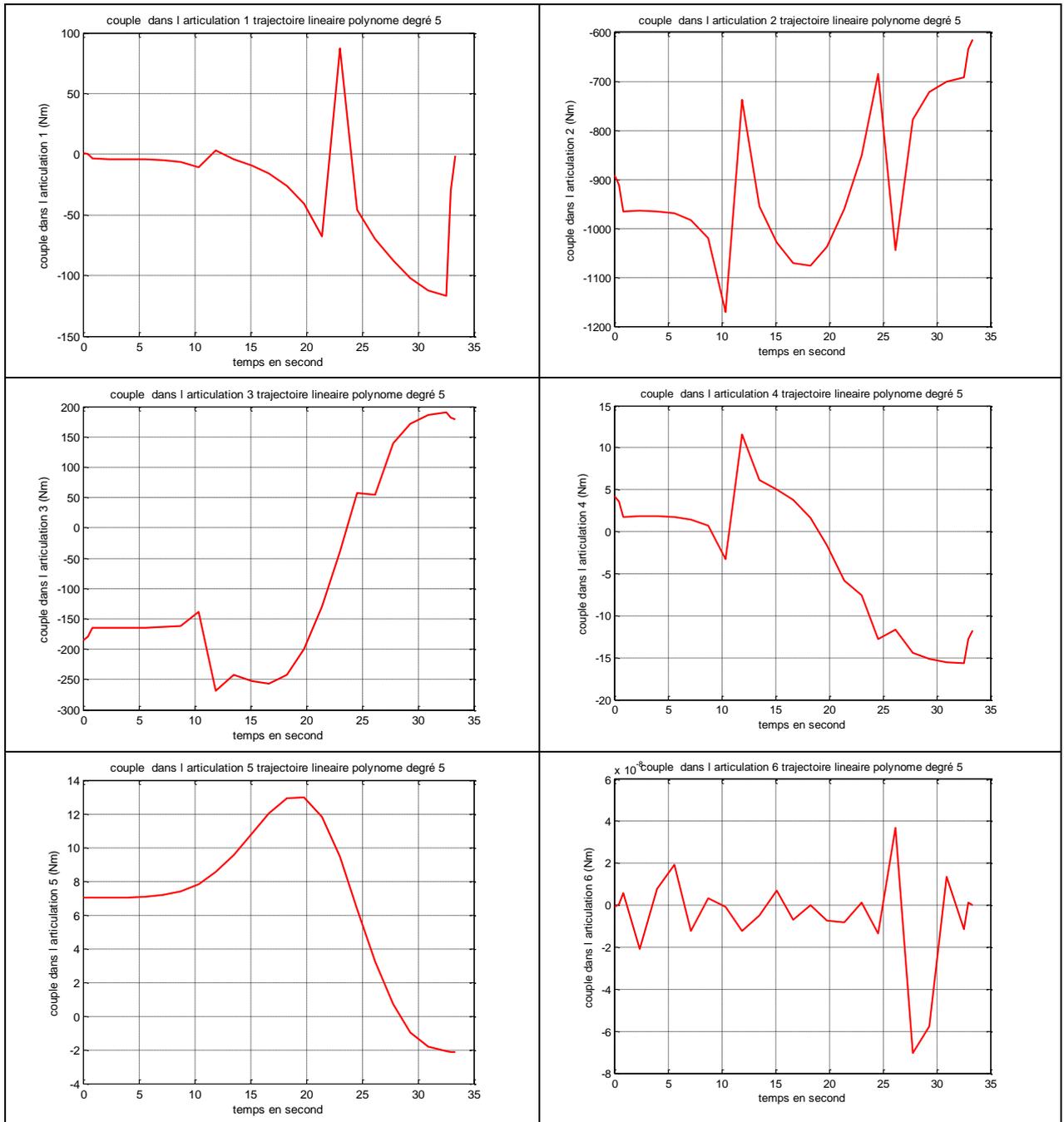


Figure 3.14 Couples articulaires dus à une trajectoire rectiligne de polynôme d'interpolation de degré 5

**Commentaires**

Les figures 3.13 et 3.14 montrent les couples articulaires nécessaires pour que l'outil (torche) de l'organe terminal du manipulateur suive une trajectoire rectiligne.

Dans la figure 3.13 on a utilisé des coordonnées articulaires calculées par un polynôme d'interpolation de degré 1. Dans ce cas, on observe des discontinuités des accélérations dans l'intervalle de temps [5, 10]. Les couples articulaires sont influencés par la discontinuité des accélérations dans le même intervalle, on peut voir des pics qui peuvent atteindre 2400 Nm. L'articulation 5 n'a pas été influencée par les pics des accélérations

Les coordonnées articulaires (figure 3. 14) sont calculées par un polynôme d'interpolation de degré 5. Pour ce polynôme, on signale une amélioration dans les accélérations (figure 2.12) par rapport au polynôme d'interpolation de degré 1, il y a disparition des pics. On retrouve cette amélioration dans les couples articulaires (figure 3. 14): disparition des pics dans l'intervalle de temps [5,10], les pics aperçus ont de valeurs moins importantes que celles de la figure 3.13.

On conclut que les couples de la figure 3.14 peuvent être générés avec moins de consommation d'énergie que ceux de la figure 3.13.

## 2. Couples articulaires dus à une trajectoire Hélicoïdale

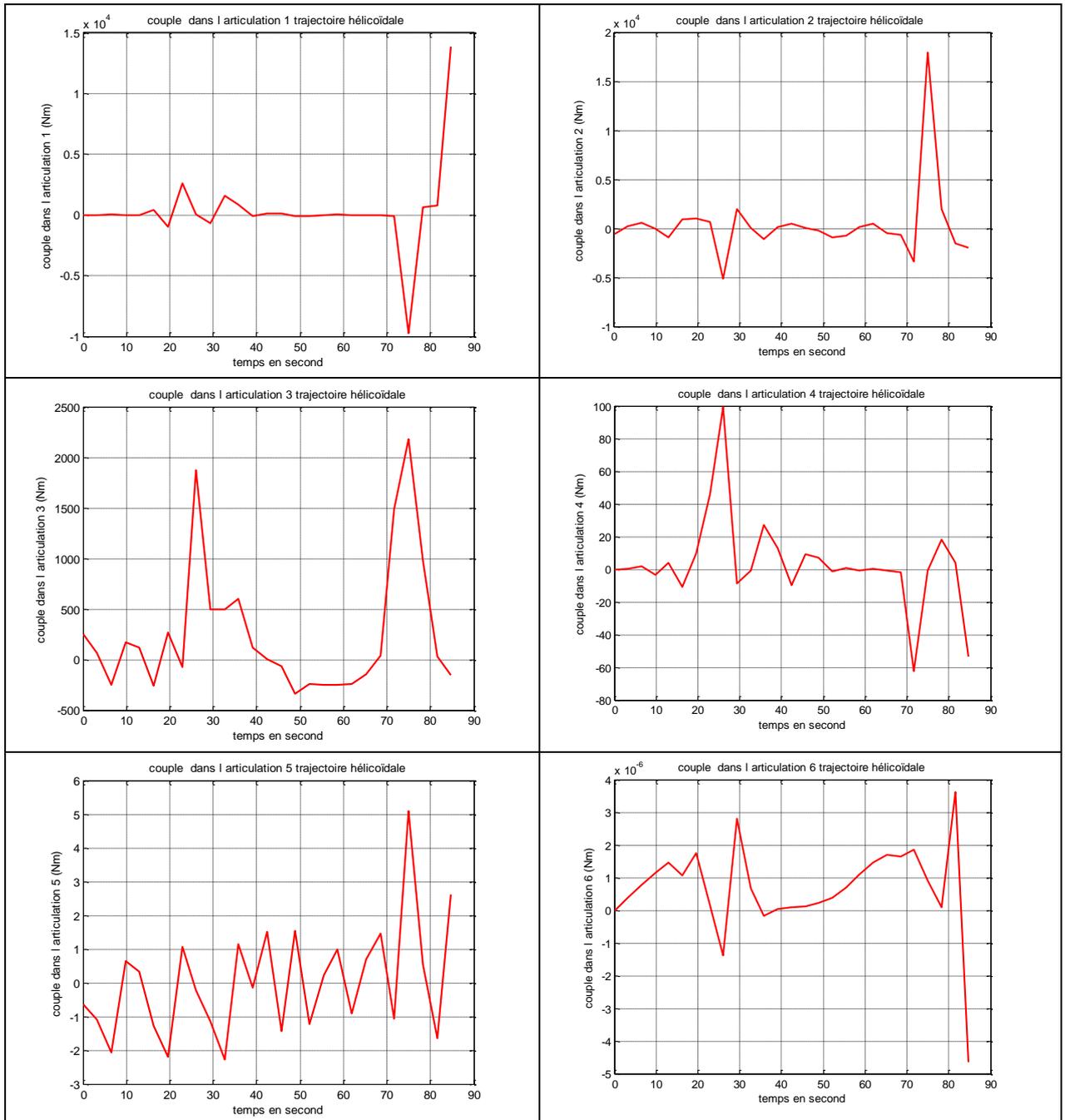


Figure 3.15 Couples articulaires dus à une trajectoire Hélicoïdale

### Commentaires

Les figures (3.15) montrent les couples articulaires nécessaires pour que l'outil (torche) de l'organe terminal du manipulateur suive une trajectoire hélicoïdale.

On observe sur la figure 3.15 des variations importantes des couples à la fin de la tâche. Ces variations sont dues au prolongement du bras manipulateur à la fin de la trajectoire qui engendre des efforts importants surtout pour l'articulation 2 soit : 17500Nm. Il y a aussi

l'influence des accélérations (figure 2.27) qui atteignent des valeurs importantes à la fin de la trajectoire (problème de singularité).

Par contre, si on fait tourner la pièce à souder à une vitesse adéquate, on aura moins d'énergie à fournir pour réaliser le cordon de soudure.

#### 4 CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

La robotique s'avère un domaine multidisciplinaire délicat à traiter. Les systèmes robotisés trouvent un large champ d'application dans l'industrie actuelle.

Ce modeste travail permet de s'introduire à la robotique, d'appliquer les notions de théorie acquises et de voir quelques applications simples.

La dynamique des systèmes multicorps n'est pas une tâche aisée. Elle nécessite des études analytiques rigoureuses ponctuées par diverses modélisations et études numériques.

En dynamique, on distingue :

- La dynamique directe : on en parle pour les mécanismes où la simulation est importante. Elle permet d'étudier le comportement dynamique des systèmes : fréquences propres, modes propres, etc.
- La dynamique inverse : elle est indispensable pour la commande des systèmes mécaniques tels que les robots. Elle permet de calculer les efforts nécessaires pour réaliser une tâche précise.

Dans ce mémoire nous avons exposé les outils nécessaires pour le calcul du modèle dynamique inverse. Nous avons également réalisé les programmes nécessaires pour le calcul du MGD (paramétrage de DH), MGI (méthode analytique de Paul), le modèle cinématique du premier ordre et le modèle cinématique du deuxième ordre pour le calcul des accélérations articulaires. Pour ces dernières, nous avons opté pour une méthode récursive. Ce choix est motivé par la simplicité dans la programmation.

On s'est intéressé à deux méthodes pour le calcul du modèle dynamique inverse :

- a) L'algorithme de Lagrange qui permet le calcul du MDI sous forme explicite en utilisant le calcul symbolique. A partir des degrés de liberté élevés le calcul symbolique occupe un espace mémoire important ce qui nécessite un temps d'exécution important. De plus, au-delà du degré de liberté 4, l'écriture du MDI sous la forme habituelle devient délicate, mais il est possible d'utiliser la méthode sous forme récursive [21] et dans ce cas la méthode donne le MDI sous forme implicite.

b) l'algorithme de Newton Euler récursif basé sur la méthode de Luh et al qui permet le calcul du MDI sous forme implicite. Il a l'avantage de calculer le modèle dans un temps très réduit et il est efficace s'il est utilisé sous forme numérique.

La dynamique inverse nécessite, entre autres, des calculs vectoriels et matriciels d'où notre choix du logiciel Matlab R2008a (*matrix laboratory*) pour les différents calculs. Les vecteurs sont stockés dans des matrices  $3 \times N$ .

Les programmes réalisés sont basés sur l'approche symbolique. Dans cette approche les paramètres géométriques sont remplacés par leurs valeurs ce qui nous a permis de réduire le temps d'exécutions de nos programmes.

L'application concerne le soudage continu de trajectoires rectiligne et hélicoïdale. Ces tâches ont été confiées à un robot manipulateur à 6 axes et à poignet rotule car la tâche choisie demande 6 ddl.

Comme application, on a opté pour un manipulateur dont les caractéristiques géométriques sont similaires au robot Staubli RX170 B CR de capacité de charge : 726 kg. On note que pour notre application un robot de capacité de quelques dizaines de kilos suffirait ainsi les actionneurs du manipulateur fourniraient moins d'efforts.

Ce travail reste perfectible et nous souhaitons qu'il soit suivi par d'autres travaux dans le domaine de l'interaction du robot avec l'environnement tels que : l'usinage, le polissage, la combinaison de plusieurs trajectoires etc.

Comme perspective, Nous pensons réécrire ces programmes dans un autre langage comme le langage C++ et compléter ce travail par :

- L'utilisation d'autres systèmes de référentiels tels que :
  - Coordonnées du point fixe
  - Coordonnées naturelles etc.
- Le calcul de l'espace de travail
- La détermination des positions singulières.
- Le Calcul du modèle dynamique sous contrainte de contact
- La planification de trajectoire aléatoire
- L'établissement des programmes pour le calcul des paramètres inertiels du système.
- La simulation d'un robot industriel tel un robot de soudage.

## LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

$\vec{\tau}$ :	vecteur couple/effort des actionnaires
$\tau$ :	torsion de la courbe
$\vec{q}$ :	vecteur des coordonnées articulaires.
$\dot{\vec{q}}$ :	vecteur des vitesses articulaires
$\ddot{\vec{q}}$ :	vecteur des accélérations articulaires
$\theta_i$	coordonnées articulaires de rotation
$B(q_i)$ :	matrice d'inertie
$C(q_i, \dot{q}_i) \cdot \dot{\vec{q}}$ :	vecteur des forces de Coriolis et des forces centrifuges
$\vec{f}_e$ :	vecteur des couples et efforts extérieurs
$Q(q_i)$	vecteur des couples et des forces de gravitation
$h(q_i)$	fonction de contraintes
$I_3$	matrice identité de dimension 3X3
$m_{ci}$	masse du corps $i$
$T_j^i$	matrice de transformation homogène du repère $i$ au repère $j$ de dimension 4X4 dont les composantes vecteurs sont :
$s_j^i$	vecteur unitaire parallèle à l'axe $x$
$n_j^i$	vecteur unitaire parallèle à l'axe $y$
$a_j^i$	vecteur unitaire parallèle à l'axe $z$
$p_j^i$	vecteur position de l'origine du repère $j$ exprimé dans le repère $i$ .
$\sigma_i$	variable booléenne
$\gamma_j$	angle entre $x_i$ et $x_{i'}$ autour de $z_i$
$b_j$	distance entre $x_i$ et $x_{i'}$ autour de $z_i$
$k_i$	rapport de transmission d'un réducteur
$Z$	matrice de transformation homogène définissant la situation du robot repère $R_0$ dans le repère atelier
$T_n^0$	matrice de transformation homogène du repère terminal $R_n$ dans le repère $R_0$ de dimension 4X4
$R_i^{i-1}$	matrice de rotation du repère $i$ dans le repère $i-1$ de dimension 3X3

$E$	matrice de transformation homogène définissant le repère outil $R_E$ dans le repère $R_n$
$\alpha_i$	angle entre les axe $z_{i-1}$ et $z_i$ correspondant à une rotation autour de l'axe $x_{i-1}$ .
$d_i$	distance entre $z_{i-1}$ et $z_i$ le long de $x_{i-1}$ .
$\theta_i = q_i$	angle entre les axes $x_{i-1}$ et $x_i$ et qui correspond à une rotation autour de l'axe $z_i$ .
$r_i$	distance entre $x_{i-1}$ et $x_i$ le long de $z_j$ .
$c1 = \cos(\theta_1)$	
$s1 = \sin(\theta_1)$	
$c12 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$	
$s12 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$	
$U_0$	matrice 4X4, exprimant la situation désirée dans le repère fixe
$\alpha$	angle d'orientation de l'outil par rapport au repère terminal $R_n$
$T$	énergie cinétique totale du système
$\Pi$	énergie potentiel totale du système
$T_{ci}$	énergie cinétique du corps $i$
$T_{mi}$	énergie cinétique du rotor $i$
$\vec{\omega}_i^0 = \vec{\omega}_i$	vitesse angulaire du corps $i$ par rapport au repère fixe
$\vec{\omega}_i^{i-1}$	vitesse angulaire du corps $i$ par rapport au repère lie au corps $i-1$
$\hat{\omega}_i$	matrice préproduit vectorielle $\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$
$\vec{r}_{Gi}$	position du centre de masse du corps $i$ dans le repère $R_{Gi}$
$J_v$	Jacobienne des vitesses de translation
$J_\omega$	Jacobienne des vitesses de rotation
$\lambda$	vecteur multiplicateur de Lagrange
D-H	Denavit -Hartenberg
MGD	modèle géométrique direct
MGI	modèle géométrique inverse

MCD	modèle cinématique direct
MCI	modèle cinématique inverse
MDD	modèle dynamique direct
MDI	modèle dynamique inverse

$$\vec{p}^{(n)} = \frac{d^n \vec{p}}{dt^n}$$

$$\vec{p}^{(n)} = \frac{d^n \vec{p}}{ds^n}$$

## REFERENCES

- [1], *Robots manipulateurs industriels, présentation des caractéristiques ISO 9946*, (1992)
- [2] Etienne Dombre Wisama Khalil *Modeling, Performance Analysis and Control of Robot Manipulators* édition ISTE -LAVOISIER, 2001,
- [3] Jorge Angeles *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*, Second Edition Springer 2002
- [4] Khalil Wisama, Dombre Etienne : *modélisation identification et commande des robots* édition Hermes science
- [5] Tony Postiau : *Génération et Parallélisation des Équations du Mouvement de Systèmes Multicorps par l'Approche Symbolique*. Thèse 2004
- [6] Boumediene Faiza *Calcul des modes propres des bras manipulateurs. Exploitation pour le choix des paramètres de leur fonctionnement*. Mémoire de magister. EMP, Bordj El Bahri, Algérie, 2002
- [7] Slede P.B ,Itkin Y.M, Auzinch Y.P, *Algorithm for calculation of oscillatory characteristics of manipulation robot using computer*, *Machinovedenie*, URSSM 1984
- [8] Mikhailov S.A, *Natural oscillations of a two element link with a point mass*, *Mech.Solids*, URSS, 1983
- [9] Luh J.Y.S, Walker M.W, Paul R.P.C, *On line computational schema for mechanicals manipulators*, *Journal of dynamics systems, measurement and control*, V.102. 1980.
- [10] J-P. LALLEMAND & S. ZEGHLOUL *Robotique modélisation mécanique CAO robotique commande* édition MASSON Paris Milan 1994
- [11] Priel Marc *Les robots industriels. Caractéristiques, performances et choix*. AFNOR, Technique Paris, 1990
- [12] MANSOURI Imed *Contribution à la conception optimale des manipulateurs*. . Mémoire de magister. EMP, Bordj El Bahri, Algérie, 2000
- [13] MANSOURI Imed *Critères de performances des robots manipulateurs et leur utilisation dans la conception optimale des robots*. Thèse de doctorat, USTO Oran, Algérie, 2011.
- [14] Mansouri Imed, Ouali Mohammed, *The power manipulability, A new homogeneous performance index of robot manipulators*, *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, (2011), Vol. 27, No. 2, pp. 434–449. doi:10.1016/j.rcim.2010.09.004

- [15] Olivier Verlinden *simulation du comportement dynamique de systèmes multicorps flexibles comportant des membrures de forme complexe thèse phd1994*
- [16] Javier Garcia de Jalon and Eduardo Bayo: *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems* edition Springer 1996
- [17] P. Fisette.: *génération symbolique des équations de mouvement des systèmes multicorps et application dans le domaine ferroviaire* PhD thesis, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, 1994
- [18] I. Artobolevski *théorie des mécanismes et des machines* éditions MIR Moscou 1977
- [19] Michel FAYOLLE : *Aspects mécaniques en robotique technique de l'ingénieur B7* 1990
- [20] Denavit J, Hartenberg RS. *A Kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices.* Journal of Applied Mechanics 1955;77:215–21.
- [21] Pierre Duysinx et Michel Geradin University of Liège  
*An introduction to robotics* 2004 disponible sur internet
- [22] Mark W. Spong, Seth Hutchinson, and M. Vidyasagar *Robot Dynamics and Control* Second Edition 2004
- [23] Bruno Siciliano • Lorenzo Sciavicco Luigi Villani • Giuseppe Oriolo, Robotics Modelling, Planning and Control Springer 2009
- [24] Luigi Biagiotti · Claudio Melchiorri *Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008
- [25] Tsuneo Yoshikawa *Foundation of robotics Analysis and control*1990
- [26] Reza N. Jazar *Theory of Applied Robotics Kinematics, Dynamics, and Control* Second Edition Springer 2011
- [27] V. Smirnov *Cours de mathématiques supérieurs tome 2* edition mir 1970
- [28] Walter Greiner *Classical Mechanics Point Particles and Relativity* Springer 2004
- [29] Adrian Down *The Frenet-Serret theorem* disponible sur internet
- [30] Miomir Vukobratovic-Dragoljub Surdilovic-Yury Ekalo-Dusko Katic *Dynamics and robust control of robot- environment interaction* Edition World Scientific 2009

- [31] Richard C. Dorf *the mechanical systems design handbook* edition CRC 2001
- [32] Mark D. Ardema *Newton-Euler Dynamics* Edition Springer 2005
- [33] *Actionneurs en robotique* technique de l'ingénieur R7 760
- [34] Leo Dorst \_ Joan Lasenby *Guide to Geometric Algebra in Practice* Edition Springer 2011
- [35] Brian R. Hunt Ronald L. Lipsman Jonathan M. Rosenberg *A Guide to MATLAB for Beginners and Experienced Users* Cambridge 2001
- [36] Keith w Buffinton : *Kane's method in robotics* of book *Robotics and automation*
- [37] Arczewski \_ Wojciech Blajer Janusz Fraćzek \_ Marek Wojtyra  
*Multibody Dynamics Computational Methods and Applications* Springer 2011
- [38] , Mansouri I Ouali M, *A new homogeneous manipulability measure of robot manipulators, based on power concept*, *Mechatronics*, (2009), Vol. 19, No. 6, pp. 927–944.doi:10.1016/j.mechatronics.2009.06.008
- [39] Richard M. Murray - Zexiang Li- S. Shankar Sastry *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation* 1994, CRC Press
- [40 ] Friedrich Pfeiffer- Peter Wriggers *Mechanical System Dynamics* Springer 2005
- [41] Thomas R. Kurfess Ph.D., P.E. *Robotics and automation handbook*  
CRC PRESS Boca Raton London New York Washington, D.C.
- [42] Won Young Yang -Wenwu Cao- Tae-Sang Chung- John Morris  
*Applied Numerical Methods using Matlab* press Wiley interscience 2005

## Annexe A.1

**Solution générale de l'équation trigonométrique  $a \cos \theta + b \sin \theta = c$** 

Soit l'équation du type :

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c \quad (\text{A.1})$$

Posons :

$$a = \rho \sin \phi$$

et

$$b = \rho \cos \phi$$

avec  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,

et

$$\phi = \text{ATAN2}(a, b)$$

Remplaçons les valeurs de  $a$  et  $b$  dans (A.1), on a :

$$\rho \sin \phi \cos \theta + \rho \cos \phi \sin \theta = c$$

$$\Rightarrow \sin(\phi + \theta) = \frac{c}{\rho}$$

et

$$\cos(\phi + \theta) = \mp \sqrt{1 - \left(\frac{c}{\rho}\right)^2}$$

La solution est :

$$\theta = \text{ATAN2}\left(\frac{c}{\rho}, \mp \sqrt{1 - \left(\frac{c}{\rho}\right)^2}\right) - \text{ATAN2}(a, b)$$

Ou bien

$$\theta = \text{ATAN2}\left(c, \mp \sqrt{\rho^2 - c^2}\right) - \text{ATAN2}(a, b)$$

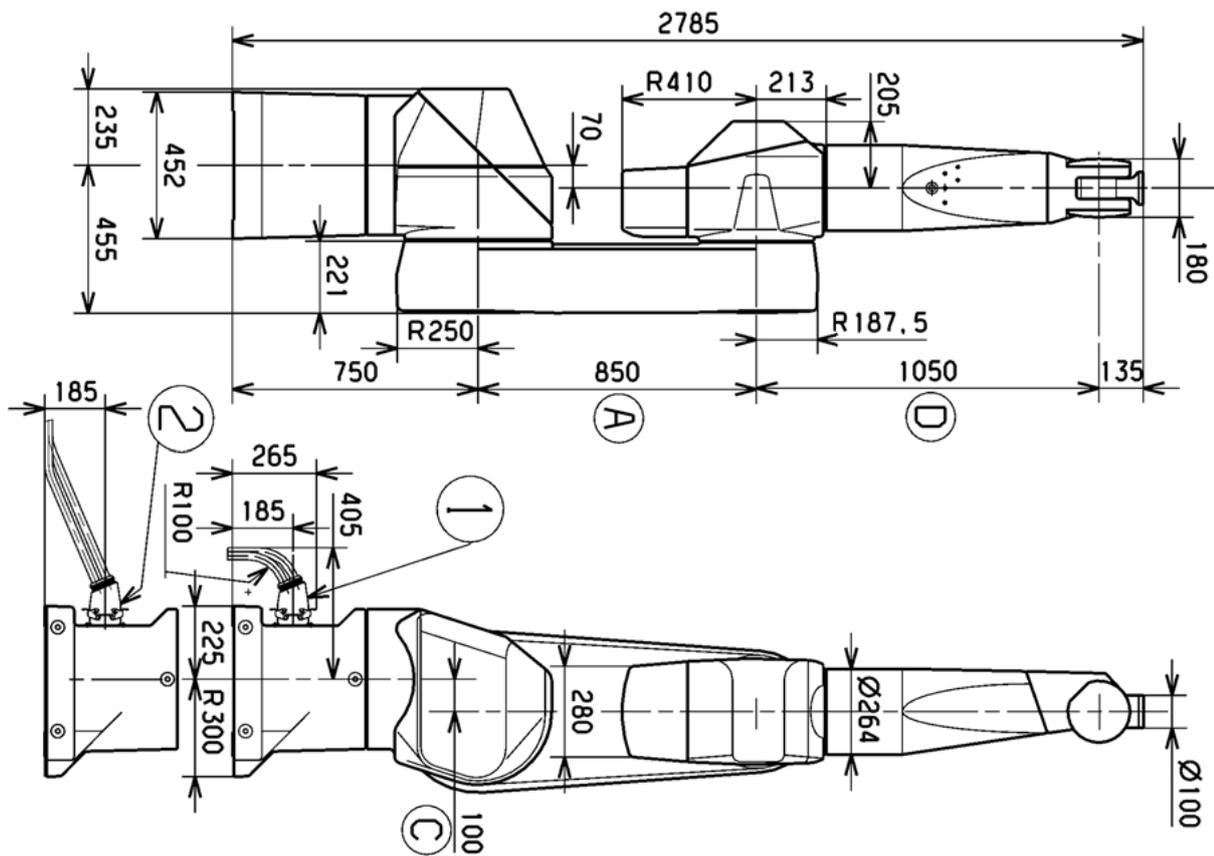
D'où

- 2 solutions si  $\rho^2 = a^2 + b^2 > c^2$
- 1 solution si  $\rho^2 = c^2$
- 0 solution si  $\rho^2 < c^2$

## Annexe A.2

## Plan d'encombrement pour le manipulateur

Staubli séries RX, famille 170B



$i$	$\sigma_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$	$r_i$
1	0	0	0	$\theta_1$	0
2	0	90°	0.1	$\theta_2$	0
3	0	0	0.85	$\theta_3$	0
4	0	-90°	0	$\theta_4$	1.05
5	0	90°	0	$\theta_5$	0
6	0	-90°	0	$\theta_6$	0

Tableau A 2 Paramètres géométriques de D-H  
Robot à six axes (Staubli RX170B)

## Annexe A3

**Rotation unique autour d'un axe arbitraire** [Duysinx 04].

Théorème d'Euler : toute rotation finie peut être exprimée comme une rotation unique d'angle  $\theta$  autour d'un axe de direction appropriée  $\vec{u}$  (figure A3.1)

Considérons deux rotations d'angles  $\alpha$  et  $\beta$  autour des axes  $ox$  et  $oy$  respectivement (figure A3.1)

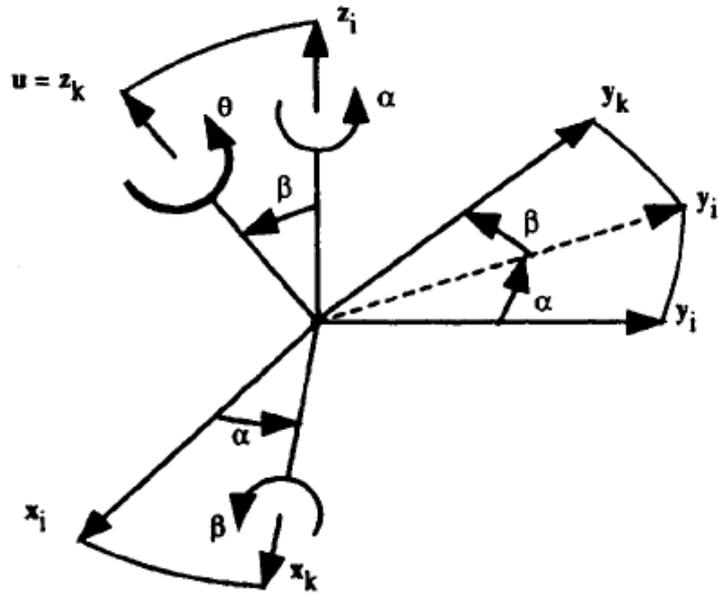


Figure A3.1 Rotation autour d'un axe quelconque

$$T_k^i = Rot(z_i, \alpha)Rot(x_k, \beta) = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha C\beta & S\alpha S\beta \\ S\alpha & C\alpha C\beta & -C\alpha S\beta \\ 0 & S\beta & C\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.1})$$

Tourner autour de  $\vec{u}$  est équivalent à tourner autour de l'axe  $z_k$  du repère  $R_k$  c'est-à-dire :

$$Rot(\vec{u}, \theta)T_k^i = T_k^i Rot(z, \theta) \quad (\text{A.3.2})$$

D'où

$$Rot(\vec{u}, \theta) = T_k^i Rot(z, \theta)T_i^k \quad (\text{A.3.3})$$

et

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S\alpha S\beta \\ -C\alpha S\beta \\ C\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.4})$$

L'utilisation de l'expression (A3.3) et l'expression (A3.4) permet d'écrire de l'expression suivante :

$$Rot(\mathbf{u}, \theta) = \begin{bmatrix} u_x^2(1 - C\theta) + C\theta & u_x u_y(1 - C\theta) - u_z S\theta & u_x u_z(1 - C\theta) + u_y S\theta \\ u_x u_y(1 - C\theta) + u_z S\theta & u_y^2(1 - C\theta) + C\theta & u_y u_z(1 - C\theta) - u_x S\theta \\ u_x u_z(1 - C\theta) - u_y S\theta & u_y u_z(1 - C\theta) + u_x S\theta & u_z^2(1 - C\theta) + C\theta \end{bmatrix} \quad (A3.6)$$

Soit T une matrice de transformation homogène de rotation :

$$R = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix}$$

On cherche à identifier les termes de  $\vec{u}$  et  $\theta$  de l'expression :

$$Rot(\vec{u}, \theta) = R \quad (A3.7)$$

En faisant la somme des termes diagonaux on a :

$$C\theta = \frac{1}{2}(s_x + n_y + a_z - 1) \quad (A3.7)$$

$$S\theta = \frac{1}{2}\sqrt{(n_z - a_y)^2 + (a_x - s_z)^2 + (s_y - n_x)^2} \quad (A3.8)$$

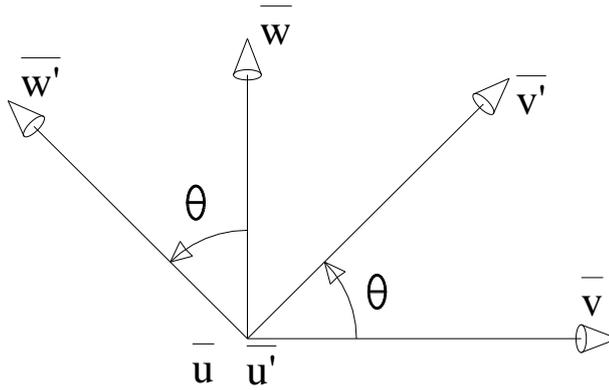
À partir de termes extra diagonaux on a:

$$\begin{cases} 2u_x S\theta = n_z - a_y \\ 2u_y S\theta = a_x - s_z \\ 2u_z S\theta = s_y - n_x \end{cases} \quad (A3.9)$$

$$\begin{cases} u_x = \text{sign}(n_z - a_y) \sqrt{\frac{s_x - C\theta}{1 - C\theta}} \\ u_y = \text{sign}(a_x - s_z) \sqrt{\frac{n_y - C\theta}{1 - C\theta}} \\ u_z = \text{sign}(s_y - n_x) \sqrt{\frac{a_z - C\theta}{1 - C\theta}} \end{cases} \quad (A3.10)$$

L'expression (A3.6) peut être écrite sous la forme suivante :

$$rot(\vec{u}, \theta) = \vec{u}\vec{u}^T(1 - \cos\theta) + I_3 \cos\theta + \hat{\vec{u}} \sin\theta \quad (A3.5)$$

Figure A3.2 Rotation autour du vecteur  $\vec{u}$ 

La matrice de transfert  $R(u, \phi)$  a la forme suivante d'après la figure A3.2

$$R(u, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R(u, \theta)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} \vec{u}' = \vec{u} \\ \vec{v}' = \cos(\theta) \vec{v} + \sin(\theta) \vec{w} \\ \vec{w}' = -\sin(\theta) \vec{v} + \cos(\theta) \vec{w} \end{cases}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} R &= [\vec{u}\vec{u}'^T + \vec{v}\vec{v}'^T + \vec{w}\vec{w}'^T] \\ &= [\vec{u}\vec{u}^T + \vec{v}(\cos(\theta) \vec{v} + \sin(\theta) \vec{w})^T + \vec{w}(-\sin(\theta) \vec{v} + \cos(\theta) \vec{w})^T] \end{aligned}$$

Après arrangement, on :

$$R(\vec{u}, \theta) = [\vec{u}\vec{u}^T + \cos(\theta) (\vec{v}\vec{v}^T + \vec{w}\vec{w}^T) + \sin(\theta) (\vec{v}\vec{w}^T - \vec{w}\vec{v}^T)]$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \vec{u}\vec{u}^T + \vec{v}\vec{v}^T + \vec{w}\vec{w}^T &= I \\ \Rightarrow I - \vec{u}\vec{u}^T &= \vec{v}\vec{v}^T + \vec{w}\vec{w}^T \end{aligned}$$

Et

$$\vec{v}\vec{w}^T - \vec{w}\vec{v}^T = \hat{u}$$

D'où :

$$R(\vec{u}, \theta) = \vec{u}\vec{u}^T + \cos(\theta) (I - \vec{u}\vec{u}^T) + \sin(\theta)\hat{u}$$

D'où

$$R(\vec{u}, \theta) = \vec{u}\vec{u}^T (1 - \cos\theta) + I_3 \cos\theta + \hat{u} \sin\theta$$

## Annexe A4

### ANALYSE DYNAMIQUE D'INTERACTION AVEC CONTACT PHYSIQUE

#### **Introduction.**

Au cours des deux dernières décennies, la commande des robots manipulateurs en mouvement avec contraintes de contact a été considérée comme l'un des domaines de recherche le plus attrayant en robotique. Les investigations dans ce domaine ont été motivées par les besoins d'automatisation des tâches complexes telles que l'assemblage l'usinage, l'ébavurage le suivi de surfaces (polissage), etc.,. Actuellement, la majorité des applications industrielles utilisent des dispositifs de compliance RCC (*Remote compliance Centre*) pour éviter les risques dus à un contact non commandé, (par exemple des désalignements des pièces à géométrie spécifique lors du montage) [30].

#### **Position du problème**

Lorsque l'organe terminal se met en contact avec une surface rigide ou déformable en parcourant une trajectoire sur cette surface, de faible variation de position normale du point de contact va engendrer des efforts considérables au niveau des actionneurs et la chaîne cinématique devient instable et peut conduire à la détérioration du robot ou de l'environnement. Au cours de l'exécution d'une tâche de contact, la structure cinématique du robot passe d'une chaîne cinématique ouverte à une chaîne fermée. Le contact avec l'environnement impose des contraintes cinématiques et dynamiques sur le mouvement de l'organe terminal du robot. La force de réaction est influencée non seulement par le mouvement du robot, mais aussi par la nature même de l'environnement, le processus d'interaction mécanique est généralement très complexe et difficile à décrire mathématiquement de façon exacte. Nous sommes obligés d'introduire certaines simplifications,. Il y a plusieurs situations d'interaction [31] dont les plus courantes sont :

- Contrainte cinématique sans réaction
- Contact avec surface indéformable
- Contact avec organe terminal déformable
- Contact avec une surface rugueuse
- Contact avec bras déformable
- Contact avec choc

La réaction de l'environnement est donnée par la relation [Richard 94] :

$$\vec{F} = J_c^T(q)\vec{\lambda} \quad (4.1)$$

Avec  $\vec{F}$  est la force ou moment de réaction,  $J_c^T(q)$  est la matrice Jacobienne au point de contact et  $\vec{\lambda}$  est un vecteur multiplicateur de Lagrange

Chaque tâche de contact se compose de trois phases: l'approche, l'impact et les contraintes de mouvement. Dans la phase de l'approche, l'effecteur se déplace vers la contrainte. Le mouvement est généralement prévu pour assurer un contact à une vitesse nulle et pour éviter aussi le choc. Toutefois, dans une situation réelle, les perturbations sont toujours présentes et provoquent la collision. L'impact se produit, quand il y a un changement de vitesse brusque. Après la phase d'impact, commence le mouvement sous contrainte. Du point de vue de la modélisation, la première phase représente un mouvement libre. Dans les deux autres phases, les coordonnées internes ( $q$ ) sont fonction des coordonnées de la contrainte  $h$ . La relation entre les coordonnées  $q$  et  $h$  peuvent être exprimées par une fonction non linéaire qui peut être stationnaire ou non stationnaire.

$$h_j(q_1, \dots, q_n) = 0 \quad J = 1, \dots, n \quad (4.2a)$$

$$h_j(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad J = 1, \dots, n \quad (4.2b)$$

La commande de la tâche consiste à obliger l'organe terminal à suivre une trajectoire désirée  $\phi_d(t)$  tel que  $\vec{q} = \vec{q}(\phi_d)$  et en même temps appliquer une force sur cette surface, le vecteur normal à la surface  $h_i(q) = 0$  est donné par le gradient de  $h_i(\vec{\nabla}h_i)$ , le vecteur force est donné par la relation [23]

$$\vec{\tau}_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{\nabla}h_i \quad i = 1, \dots, k \quad (4.2)$$

$\vec{\tau}_i$  est normal à la surface  $h_i$ , nous supposons que la force normale désirée est donnée par  $\lambda_j(t)$

L'équation de contrainte peut être utilisée sous forme différentielle :

La différentiation de l'équation 4.1 par rapport au temps donne

$$\frac{\partial h_j}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, k \quad (4.3)$$

Et la différentiation du deuxième ordre :

$$\ddot{h} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 h_j}{\partial^2 q_i} \dot{q}_i^2 \right) = 0 \quad j = 1 \dots k \quad (4.4)$$

Nous supposons que les contraintes sont lisses et linéairement indépendants et que les forces de contrainte ne travaillent pas sur le système c'est-à-dire elles sont normales à la surface de contrainte. En tenant compte de la contrainte, les équations du mouvement doivent prendre en charge les forces de réaction qui traduisent l'effet des contraintes de contact. Par conséquent, de la formule (3.35a) la dynamique peut être écrite sous forme vectorielle suivante :

$$B(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + C(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} + Q(\vec{q}) + J^T(\vec{q})\vec{\lambda} = \vec{\tau} \quad (4.5a)$$

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 h_j}{\partial^2 q_i} \dot{q}_i^2 \right) = 0 \quad j = 1 \dots k \quad (4.5b)$$

$$J\ddot{\vec{q}} + \dot{J}\dot{\vec{q}} = 0 \quad (4.5c)$$

Avec  $J(\vec{q}) = \frac{\partial h}{\partial q}$

L'équation 4.5 désigne le modèle dynamique d'un système multicorps en contact avec l'environnement.

Le modèle dynamique 4.5 peut être interpréter comme étant :

1. Déplacement de l'organe terminal d'un manipulateur sur une surface polie dont la force de contact est prévu et les couples articulaires sont inconnus.
2. Ou bien pour des couples articulaires donnés, trouver les forces de contact engendrées par ces couples

Pour le deuxième point le modèle (4.5) peut être écrit sous la forme suivante :

De la relation (4.5)

$$\ddot{\vec{q}} = B^{-1}[\vec{\tau} - C\dot{\vec{q}} - \vec{Q} - J^T\vec{\lambda}]$$

En remplaçant  $\ddot{\vec{q}}$  dans (4.5c) on a :

$$\vec{\lambda} = (JB^{-1}J^T)^{-1}JB^{-1}(\tau - C\dot{\vec{q}} - \vec{Q}) + (JB^{-1}J^T)^{-1}\dot{J}\dot{\vec{q}} \quad (4.6)$$

La formule (4.6) permet le calcul de la réaction de contact entre l'effecteur et l'environnement.

Nous espérons que ce type de problème fera l'objet d'un futur travail de recherche.