

UNIVERSITE DE BLIDA 1
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

THESE DE DOCTORAT

En Génie Mécanique

Option : Energétique

**STABILITE D'UN ECOULEMENT DE COUETTE ENTRE DEUX
CYLINDRES COAXIAUX :
CAS D'UN FLUIDE NON NEWTONIEN.**

Présentée par :

ALIBENYAHIA Brahim

Devant le jury composé de :

Y. BENKHEDDA	Professeur USD-Blida1	Président
A. ABDELLAH Elhadj	Professeur UYF-Médéa	Examineur
A. KHELLAF	DR CDER-Bouzerea	Examineur
Dj. SEMMAR	MCA USD-Blida1	Examineur
N.AIT MESSAOUDENE	Professeur USD-Blida1	Directeur de thèse
C.NOUAR	DR LEMTA-Nancy	Co-directeur de thèse

Blida, Juin 2014

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je remercie Dieu, qui m'a offert le courage et la santé pour réaliser ce travail et soutenir cette thèse.

Cette thèse n'aurait pu aboutir sans le soutien de plusieurs personnes, que je tiens à les remercier ici.

J'exprime ma très sincère reconnaissance à mes directeurs de thèse, Professeur Ait Messaoudene Nourddine (Université de Blida - Algérie), et Dr. Cherif Nouar (Laboratoire LEMTA - Nancy) pour avoir assuré l'encadrement de ce travail et pour m'avoir guidé et encouragé pendant des années. Leurs compétences ne se limitent uniquement pas à des aspects strictement scientifiques, mais aussi, à des qualités humaines indéniables. Encore, un grand merci au Dr. Cherif Nouar de m'avoir accueilli au sein du Laboratoire LEMTA pour accomplir cette thèse, ainsi que de m'avoir soutenu pour obtenir le financement des stages (Projet CMEP-Tassili).

Je remercie très sincèrement Pr.Y. Benkhedda de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail et d'être président du jury.

J'adresse tous mes remerciements aux Pr. Abdellah Elhadj, Dr. Khellaf Abdellah et Dr. Semmar Djaafar qui ont acceptés sans hésiter de prendre le temps d'examiner ce travail et de participer à mon Jury de soutenance de Doctorat.

Dans tous ces remerciements, je ne voudrais en aucun cas oublier mes collègues chercheurs pour leurs gentillesse et les moments agréables que nous avons pu savourer ensemble. Je pense particulièrement à Bentradi, Chekila (Université de Saida), Ezzraïmi, Tiberkak, Abdi, Abderahmane, Guerguag, Belaid akil abdelkader, et toute l'équipe du département de Mécanique de Blida.

Un remerciement particulier est adressé à mon épouse Siham qui a pris l'aventure en marche et m'a accompagnée durant ce travail jusqu'à son terme ainsi que mes enfants Anes et Inas.

En fin, Je remercie chaleureusement ma grande famille et tous mes amis.

RESUME:

Cette étude porte sur l'analyse linéaire de stabilité de l'écoulement de Couette circulaire entre deux cylindres coaxiaux en rotation, pour des fluides rhéofluidifiants avec ou sans seuil de contrainte. Les modèles de Carreau et de loi puissance sont adoptés pour les fluides rhéofluidifiants et le modèle de Bingham pour les fluides à seuil. Des approches modale et non modale sont utilisées pour décrire le comportement d'une perturbation aux temps courts et aux temps longs.

Le comportement asymptotique aux temps longs se ramène à la résolution d'un problème aux valeurs propres. Les courbes de stabilité marginale sont déterminées et analysées pour des cylindres co et contrarotatifs. L'effet des paramètres rhéologiques sur la stabilité est mis en évidence. On montre que la stratification de la viscosité retarde l'apparition des tourbillons de Taylor. Contrairement à Caton(2006), la structure la moins stable reste axisymétrique même pour de très fortes rheofluidifications.

Aux temps courts, un problème aux valeurs initiales est résolu en cherchant une solution sous forme d'une combinaison linéaire des fonctions propres. La non normalité de l'opérateur linéaire conduit à une croissance transitoire de l'énergie cinétique de la perturbation. Les résultats numériques montrent que le caractère rhéofluidifiant favorise l'amplification de l'énergie cinétique de la perturbation. Au contraire la présence d'un seuil de contrainte réduit fortement le degré de non normalité de l'opérateur linéaire.

ABSTRACT:

This study deals with the linear stability of Couette flow between two rotating coaxial cylinders for shear-thinning fluids with and without yield stress. Carreau and power law models are considered for shear-thinning fluids and the Bingham model for yield stress fluids. Modal and non-modal approaches are used to describe the behavior of a perturbation for short and long times.

The long times asymptotic behavior leads to an eigenvalue problem. The marginal stability curves are determined and analyzed for co- and counter-rotating cylinders. The rheological behavior is shown to affect the stability. It is shown that the viscosity stratification delays the appearance of Taylor vortices. Unlike Caton (2006), the least stable structure remains axisymmetric, even for very strong shear-thinning conditions.

At short times, an initial values problem is solved by seeking a solution as a linear combination of eigenfunctions. The operators non-normality leads to transient growth of the perturbations kinetic energy. The numerical results show that shear-thinning favors an amplification of the perturbation energy. On the contrary, the presence of a yield stress reduces drastically the degree of non-normality of the linear operator.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE 1 : ECOULEMENT TAYLOR COUETTE	
1-1-Introduction.	5
1-2-Les écoulements de Taylor-Couette.	6
1.2.1 Cas de fluides non visqueux : le critère de Rayleigh.....	6
1.2.2 Extension aux fluides visqueux.	8
1.3 Stabilité et transition dans un système de long rapport d'aspect.	9
1-4 Modèles rhéologiques.	14
1-4-1 Fluide rhéofluidifiant.	15
1-4-2 Fluide à seuil.	15
1-5 Synthèse de l'étude bibliographique.....	16
CHAPITRE 2 : FORMULATION MATHEMATIQUE	
2-1- Introduction.....	20
2-2- Formulation du problème	20
2-3- Loi de comportement	21
2-3-1 Choix d'un modèle de fluide rhéofluidifiant	21
2-4 Equations adimensionnelles	27
2-5-Ecoulement de base	29
2-6 Stabilité linéaire	46
2-7-Comportement aux temps longs de la perturbation	51
2-8 -Conditions aux limites	53
2-9 -Résolution numérique	57
2-10 -Convergence	59
2-11-Fausse valeurs propres	60
2-12- Validation	62
2-12- Conclusion	62
CHAPITRE 3 : ANALYSE MODALE	
3-1 Introduction.....	63
3-2- Etude des spectres.	65
3-2-1 Perturbation axisymétrique $k \neq 0$ et $m = 0$	65

3-2-2 Perturbation tridimensionnelle	71
3-2-3 Perturbation homogène dans la direction axiale	75
3-3- Conditions critiques.	78
3-3-1-Perturbation axisymétrique : $m = 0$	78
3-3-1-1-Fluide en loi de puissance.	78
3-3-1-2-Fluide de Bingham.	83
3-3-1-3 Fluide de Carreau.	86
3-4 Perturbation tridimensionnelle.	89
3-5 Energie.	90
3-6-viscosité de référence.....	95
3-7 Critère de Rayleigh	100
3-8 Stabilité marginale.....	104
3-9 Conclusion.....	105

CHAPITRE 4 : ANALYSE NON MODALE

4-1 Introduction.	108
4-2-Pseudospectre.	109
4-3 Croissance transitoire.	113
4-4-Amplification optimale de l'énergie	116
4-5- Validation.	117
4-6- analyse d'échelle.	122
4-7 Forme et évolution de la perturbation optimale.....	124
4-8-Mécanisme d'orr en 3D.	131
4-9 Conclusion.....	134

CONCLUSION GENERALE.	135
-----------------------------------	-----

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 - Diagramme de stabilité de l'écoulement de Couette dans le plan ($\Omega_o / v, \Omega_i / v$), $\eta = r_i^* / r_o^* = 0.9418$ (d'après Taylor [1]); Ω_i est la vitesse de rotation du cylindre intérieur, Ω_o celle du cylindre extérieur. En pointillés, la droite de stabilité donnée par le critère de Rayleigh.....	10
Figure 1.2 - Visualisation par technique Kalliroscope de la transition dans un système rotor-stator ($\eta = 0.877$, $\Gamma = 20$, $Re_{i, \text{crit}} = 119.1$) : a) $Re_i = 1.1 Re_{i, \text{crit}}$; b) $Re_i = 9.5 Re_{i, \text{crit}}$ c) $Re_i = 15 Re_{i, \text{crit}}$ ([34]).....	11
Figure 1.3 – Diagramme de transition dans le plan (Re_o, Re_i), pour $\Gamma = 30$, $\eta = 0.883$ (d'après Andereck & al [6]). Le protocole expérimental est le même que celui suivi par Coles [34].	12
Figure 1.4 – Visualisation par technique Kalliroscope de quelques-uns des motifs observés par Andereck et al, dans le cas où les deux parois cylindriques sont mobiles: a) Laminar Spiral flow (SPI), pour $Re_o = -300$, $Re_i = 240$; b) Interpenetrating Spirals (IPS) pour $Re_o = -1000$, $Re_i = 435$; c) Wavy Interpenetrating Spirals (WIS), pour $Re_o = -300$, $Re_i = 350$ ([34]).	13
Figure 1.5 : Modèles rhéologique	16
Figure 1-6 – Nombre de Reynolds critique en fonction de l'indice de structure n pour un fluide en loi puissance. Le rapport de rayon est $\eta = 0.9$, (o) Sinevic <i>et al.</i> (1986) [2], (3) Caton (2006) [1] et (∇) Jastrebski <i>et al.</i> (1992)[3].....	18
Figure 2.1. a) Dispositif de Taylor Couette. b) Structure en rouleaux toroïdaux de l'écoulement.....	21
Figure 2.2 – Diagramme log-log de la viscosité μ en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ pour le fluide en loi de puissance.....	23
Figure 2.3 – Diagramme log-log de la viscosité $\hat{\mu}$ en fonction du taux de cisaillement $\hat{\dot{\gamma}}$ pour le fluide 0.125% PAA étudié par Escudier et al.(2009). La courbe continue résulte du modèle de Carreau, avec $n = 0.66$, $\lambda = 45.8 \text{ s}$, $\hat{\mu}_0 = 4.22 \text{ Pa.s}$, $\hat{\mu}_\infty = 0.00372 \text{ Pa.s}$. La courbe en tirets résulte du modèle de Carreau avec les mêmes paramètres sauf $\hat{\mu}_\infty = 0$. La droite verticale en pointille indique le taux de	

cisaillement caractéristique $1/\hat{\lambda}$ du début de la rhéofluidification.....24

Figure 2.4 : Evolutions de de contrainte $\tau(\dot{\gamma})$ en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ pour : Sirop de glucose (cas Newtonien); Solution de Carbopol (fluide à seuil); Solution de CMC (modèle de Cross).26

Figure 2.5 : Profils de vitesse azimutale pour un fluide de Bingham ($Re_2=0$) pour un rapport de rayon $\eta=0.883$; (+) Cas ou tout l'espace annulaire est cisailé $B=5$; (*) Cas ou une zone étroite est cisailée $B=50$; (•) Cas Newtonien $B=0$32

Figure 2.6 : Profils de vitesse azimutale pour un fluide de Bingham ($Re_2=0$) pour un rapport de rayon $\eta=0.883$; (1) Cas Newtonien $B=0$; (2) Cas ou tout l'espace annulaire est cisailé $B=5$; (3) Cas ou une zone étroite est cisailée $B=50$32

Figure 2.7 : Profils de vitesse azimutale pour un fluide de Bingham ($Re_1=300$, $Re_2=-3000$) pour un rapport de rayon $\eta=0.4$ (1) $B=0$ fluide Newtonien; (2) $B=1$; (3) $B=30$; (4) $B=50$, (5) $B=100$33

Figure 2.8 : Profils de viscosités pour un fluide de Bingham (Zone 1) $Re_2=0$ pour un rapport de rayon $\eta=0.5$: (1) $B=0$ fluide Newtonien; (2) $B=0.5$; (3) $B=0.85$; (4) $B=1$ et (5) $B=1.23$34

Figure 2.9: Profils de viscosités pour un fluide de Bingham $Re_1=300$, $Re_2=-3000$ pour un rapport de rayon $\eta=0.4$: (1) $B=0$ fluide Newtonien; (2) $B=10$; (3) $B=30$; (4) $B=50$ et (5) $B=50$34

Figure 2-10 : Profils de vitesse pour un fluide de Bingham ($Re_1=300$, $Re_2=-3000$) pour un rapport de rayon $\eta=0.881$ (1) $B=0$ fluide Newtonien; (2) $B=1$; (3) $B=30$; (4) $B=50$, (5) $B=100$35

Figure 2.11 : Profils de viscosités pour un fluide de Bingham $Re_1=300$, $Re_2=-3000$ pour un rapport de rayon $\eta=0.881$: (1) $B=0$ fluide Newtonien; (2) $B=0.5$; (3) $B=0.85$; (4) $B=1$ et (5) $B=1.23$35

Figure 2-12: Profils de vitesse azimutale pour un fluide en loi de puissance ($Re_2=0$) pour un rapport de rayon $\eta=0.4$, (1) $n=1$ fluide Newtonien; (2) $n=0.7$; (3) $n=0.5$; (4) $n=0.3$37

Figure 2.13 : profils de vitesse azimutale pour un fluide en loi de puissance ($Re_2=0$) pour un rapport de rayon $\eta=0.881$, (1) $n=1$ fluide Newtonien; (2) $n=0.7$; (3) $n=0.5$; (4) $n=0.3$37

Figure 2.14 : profils de vitesse azimutale pour un fluide en loi de puissance $Re_1=300$, $Re_2=-3000$ pour un rapport de rayon $\eta=0.4$, (1) $n =1$ fluide Newtonien; (2) $n =0.7$; (3) $n =0.5$; (4) $n =0.3$	38
Figure 2.15 : Profils de vitesse (co-rotation) pour un fluide en loi de puissance $Re_1=300$ $Re_2=3000$ pour un rapport de rayon $\eta=0.4$ (1) $n =1$ fluide Newtonien; (2) $n =0.7$; (3) $n =0.5$; (4) $n =0.3$	38
Figure 2.16 : Profils de viscosité pour un fluide en loi de puissance $Re_2=0$ pour un rapport de rayon $\eta=0.4$ (1) $n =1$ fluide Newtonien; (2) $n =0.7$; (3) $n =0.5$; (4) $n =0.3$	39
Figure 2.17 : Profils de viscosité pour un fluide en loi de puissance $Re_1=300$, $Re_2=-3000$ pour un rapport de rayon $\eta=0.881$ (1) $n =1$ fluide Newtonien; (2) $n =0.7$; (3) $n =0.5$; (4) $n =0.3$	40
Figure 2.18 . Profils de viscosité (tangentielle) pour un fluide en loi de puissance pour un rapport de rayon $\eta =0.4$ (1) $n =1$ fluide Newtonien; (2) $n =0.5$; (3) $n =0.3$	40
Figure 2.19 . Profils de viscosité (tangentielle) pour un fluide en loi de puissance pour un rapport de rayon $\eta =0.4$ (1) $n =1$ fluide Newtonien; (2) $n =0.5$; (3) $n =0.3$	41
Figure 2.20 : Profils des vitesses pour un fluide de carreau ($Re_2=0$) pour un rapport de rayon $\eta=0.4$ et un indice de fluide $n=0.5$ (1) $\lambda =0$ fluide Newtonien; (2) $\lambda =10$; (3) $\lambda=100$;(- -) loi de puissance.....	42
Figure 2.21 : Profils de vitesse pour un fluide de Carreau pour $\eta =0.5$, $\lambda =1$ et différentes valeurs de n . (1) $n =1$ fluide Newtonien; (2) $n=0.7$; (3) $n =0.5$; (4) $n =0.3$	42
Figure 2.22 Profils de vitesse pour un fluide de Carreau $Re_1=300$, $Re_2=-3000$ pour $\eta =0.5$, $\lambda =1$ et différentes valeurs de n . (1) $n =1$ fluide Newtonien(2) $n=0.7$; (3) $n =0.5$;(--) loi en puissance.....	43
Figure 2.23 . Profils de vitesse pour un fluide de Carreau $Re_1=300$, $Re_2=-3000$ pour $\eta =0.5$, $\lambda =1$ et différentes valeurs de n . (1) $n =1$ fluide Newtonien(2) $n=0.7$; (3) $n =0.5$;(--) loi en puissance.....	44
Figure 2.24 : Profils de viscosité pour un fluide de Carreau ($Re_2=0$) pour $\eta =0.5$, $n =0.3$ et différentes valeurs de λ . (1) $\lambda =0$ (fluide Newtonien) ; (2) $\lambda =1$; (3) $\lambda=10$; (4) $\lambda =100$ et (- -) fluide en loi de puissance.....	45

Figure 2.25 : Profils de viscosité pour un fluide de Carreau ($Re_2=-3000$) pour $\eta =0.5$, $n =0.3$ et différentes valeurs de λ . (1) $\lambda =0$ fluide Newtonien; (2) $\lambda =1$; (3) $\lambda=10$; (4) $\lambda =100$ et (--) fluide en loi de puissance.	45
Figure 2.26 : S pour un fluide Newtonien pour deux ensembles de points de collocations $Re=70$, $\eta=0.5$, $k=2$, $m=1$. (o) $N=50$, (\square) $N=100$	61
Figure 2.27 : Spectres pour un fluide Newtonien pour deux ensembles de points de collocations : $Re=70$, $\eta=0.5$, $k=2$, $m=1$. (o) $N=50$, (\square) $N=100$	61
Figure 2.28 : Nombre de Reynolds critique en fonction de Rapport de Rayon pour un fluide Newtonien. (-) Nos résultats ; (*) Chandrasekhar [25].....	62
Figure 3.1 : écoulement de Taylor couette.....	64
Figure 3.2 : Exemple de spectre obtenu dans les conditions critiques pour un fluide Newtonien. $\eta=0.5$. $Re_c=68.75$ et $k_c=3.12$	66
Figure 3.3 : Exemple de spectre obtenu dans les conditions critiques pour un fluide en loi de puissance. $\eta=0.5$ et $n=0.3$, les conditions critique sont $Re_c=72.4$ et $k_c=3.9$	66
Figure 3.4 : Exemple de spectre obtenu dans les conditions critiques pour un fluide en loi de puissance. $\eta=0.5$ et $B=10$, les conditions critique sont $Re_c=950$ et $k_c=9.4$	67
Figure 3.5 : les spectres fluide Newtonien pour un rapport $\eta=0.881$: $Re_1=120$ $Re_2=0$, et $k=3.12$ $m=0$	68
Figure 3.6 : les spectres pour un fluide Newtonien pour un rapport $\eta=0.881$ Pour $Re_1=120$ $Re_2=-4000$, et $k=3.12$ $m=0$	69
Figure 3.7 : les spectres pour un fluide Newtonien pour un rapport $\eta=0.881$ Pour $Re_1=120$, $Re_2=-25000$ et $k=3.12$ $m=0$	69
Figure 3.8 : Exemple de spectres pour un fluide en loi de pour un rapport $\eta=0.881$. Pour $Re_1=400$ $Re_2=-4000$, et $k=3.12$ $n=0.5$ $m=0$	70
Figure 3-9 : Exemple de spectres pour un fluide de Carreau avec $n=0.3$, $\lambda=1$. Pour un rapport $\eta=0.881$. Pour $Re_1=400$ $Re_2=-4000$, et $k=3.12$ $m=0$	70
Figure 3.10 : Exemple de spectres pour un fluide de Bingham $B=5$. Pour un rapport $\eta=0.881$. Pour $Re_1=400$ $Re_2=-4000$, et $k=3.12$ $m=0$	71
Figure 3.11 : les spectres dans les conditions critiques pour un rapport $\eta=0.5$. Pour un fluide de Bingham : $Re_1=1$, $Re_2=-5000$, $BIN=100$ et $m=1$	72
Figure 3.12 : Exemple de spectres pour un fluide de Bingham : un rapport $\eta=0.5$; $Re_1=1$, $Re_2=-10000$, $B=100$ et $m=1$	72

Figure 3.13 : Exemple de spectres pour un fluide de Bingham : un rapport $\eta=0.5$; $Re_1=1$, $Re_2=-20000$, $B=100$ et $m=1$	73
Figure 3.14 : les spectres dans les conditions critiques pour un rapport $\eta=0.5$. Pour un fluide en loi de puissance $n=0.5$: $Re_2=-400$, $Re_1=100$ $m=1$	73
Figure 3.15 : Exemple de spectres pour. Pour un fluide en loi de puissance $n=0.5$: un rapport $\eta=0.5$, $Re_2=-400$, $Re_2=-800$	74
Figure 3.16 : Exemple de spectres pour un fluide en loi de puissance $n=0.5$. Pour un rapport $\eta=0.881$. Pour $Re_1=400$ $Re_2=-4000$, et $k=3.12$ $m=1$	74
Figure 3.17 : Exemple de spectres pour un fluide en loi de puissance pour : $\eta=0.881$ $Re_1=400$, $Re_2=-4000$ $n=0.3$, $k=3.14$, $m=0$	75
Figure 3.18 : Exemple de spectre obtenu dans les conditions critiques pour un fluide Newtonien pour $\eta=0.5$, $k=0$, $m=1$ et pour deux Nombre de Reynolds : (o) $Re_w=100$, (\square) $Re_w=500$	77
Figure 3.19 : Exemple de spectres pour un fluide en loi de puissance pour $\eta=0.5$, $k=0$, $m=1$ et pour deux Nombre de Reynolds : (o) $Re_w=100$, (\square) $Re_w=500$	77
Figure 3.20 : Variation du nombre de Reynolds critique en fonction de l'indice de structure pour un fluide en loi de puissance à différents rapports de rayon. (o) Nos résultats; (*) Jastrzebski et al [11]. (A) Le Nombre de Reynolds basé sur la viscosité à la paroi intérieure.	79
Figure 3.21 : Variation du nombre de Reynolds critique en fonction de l'indice de structure pour un fluide en loi de puissance à différents rapports de rayon. (O) Nos résultats; (*) Jastrzebski et al [11]. Le Nombre de Reynolds basé sur la viscosité à la paroi intérieure.....	79
Figure 3.22 – Variation de nombre d'onde critique en fonction de l'indice de structure pour un fluide en loi de puissance avec différents rapports de rayons.....	80
Figure 3.23 : La taille des vortex de Taylor en fonction de l'indice de structure pour un fluide en loi de puissance avec différents rapports de rayons.....	80
Figure 3.24 – Contour des iso-valeurs de la composante radiale de la perturbation de vitesse u pour $\eta = 0.4$. (\cdots) Valeurs négative de u et ($-$) valeurs positives de u . Les contours sont représentés comme fraction de la valeur maximale de u par pas de 0.1. Pour fluide Newtonien, $Re_c = 68.3$, $k_c = 3.18$	81
Figure 3.25 – Contour des iso-valeurs de la composante radiale de la perturbation de vitesse u pour $\eta = 0.4$. (\cdots) Valeurs négative de u et ($-$) valeurs	

positives de u . Les contours sont représentés comme fraction de la valeur maximale de u par pas de 0.1 pour un fluide en loi puissance avec $n = 0.3$, $Re_c = 80.7$, $k_c = 5.25$82

Figure 3.26 – Contour des iso-valeurs de la composante azimutale de la perturbation de vitesse w pour $\eta = 0.4$. (···) Valeurs négative de w et (-) valeurs positives de w . Les contours sont représentés comme fraction de la valeur maximale de w par pas de 0.1. Pour un fluide Newtonien $Re_c = 68.3$, $K_c = 3.18$82

Figure 3.27 – Contour des iso-valeurs de la composante azimutale de la perturbation de vitesse w pour $\eta = 0.4$. (···) Valeurs négative de w et (-) valeurs positives de w . Les contours sont représentés comme fraction de la valeur maximale de w par pas de 0.1. Pour un fluide de loi de puissance avec $n=0.3$, $Re_c = 80.7$, $K_c = 5.25$83

Figure 3.28 – Nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Bingham pour deux rapports de rayons : $\eta = 0.5$ (--) et $\eta = 0.883$ (···). (o) Landry *et al.* [5] pour $\eta = 0.5$, (□) Landry *et al.* [5] pour $\eta = 0.883$, (◇) Caton [1] pour $\eta = 0.5$, (Δ) Lockett *et al.* [7] pour $\eta = 0.5$84

Figure 3.29 – Nombre d'onde critique en fonction du nombre de Bingham pour deux rapports de rayons : $\eta = 0.5$ et $\eta = 0.883$84

Figure 3.30 – Contour des iso-valeurs de la composante radiale de la perturbation de vitesse w pour $\eta = 0.5$. (···) Valeurs négative de w et (-) valeurs positives de w . Les contours sont représentés comme fraction de la valeur maximale de w par pas de 0.1 pour un fluide de Bingham avec $B = 100$, $k_{cp} = k_c \times (R_0 - R_1) = 2.52$85

Figure 3.31 – Contour des iso-valeurs de la composante azimutale de la perturbation de vitesse w pour $\eta = 0.5$. (···) Valeurs négative de w et (-) valeurs positives de w . Les contours sont représentés comme fraction de la valeur maximale de w par pas de 0.1 pour un fluide de Bingham avec $B = 100$, $k_{cp} = k_c \times (R_0 - R_1) = 2.52$85

Figure 3.32. Variation du nombre de Reynolds critique en fonction de l'indice de structure pour un fluide en loi de puissance à différents rapports de rayon. Pour $\lambda = 0.1$ et différentes valeurs de n . (-) Fluide Newtonien, (●) Coronado *et al.* [16] pour $n = 0.9$; (■) Coronado *et al.* [16] pour $n = 0.8$; (▲) Coronado *et al.* [16] pour $n = 0.6$; (□) Nos résultats.86

Figure 3.33. Nombre de Reynolds critique de paroi pour un fluide Carreau avec $\eta = 0,5$ en fonction de la constante de temps λ sans dimension pour différentes valeurs de l'indice de rhéofluidifiant : (O) $n = 0,7$, (\square) $n = 0,5$, et (Δ) $n = 0,3$. (-) Fluide en loi de puissance.	87
Figure 3.34. Nombre d'onde critique pour un fluide Carreau avec $\eta = 0,5$ en fonction de la constante de temps λ pour différentes valeurs de l'indice de rhéofluidifiant : (O) $n = 0,7$, (\square) $n = 0,5$, et (Δ) $n = 0,3$. (-) Fluide en loi de puissance.....	88
Figure 3.35 : courbe de stabilité marginale pour $\eta = 0.5$ et pour différents nombres d'ondes azimutaux m pour un fluide de Bingham avec $B=50$	89
Figure 3-36 : courbe de stabilité marginale pour $\eta = 0.5$ et pour différents nombres d'ondes azimutaux m pour un fluide en loi de puissance avec $n=0.1$	90
Figure 3.37 Distribution d'énergie cinétique pour un fluide newtonien dans les conditions critiques, $Re_w = 68.316$ et $k = 3.12$. Le terme ReI_2 de production est représenté par un trait plein et le terme I_3 de dissipation est représenté par une ligne pointillée. La production spatiale moyenne et les termes de dissipation sont égaux, puisque les conditions sont critiques, $\Gamma^+ = \Gamma^- = 28.073$	92
Figure 3-38. Effet de la stratification de la viscosité sur l'énergie d'un fluide en loi de puissance, $Re_w = 68.316$ et $\eta = 0.4$. (Ligne continue) production d'énergie et ReI_2 (ligne pointillée) I_3 dissipation d'énergie. $n = 0.7$, $k = 3.20$, $\Gamma^+ = 15.436$ et $\Gamma^- = 23.450$	93
Figure 3.39. Effet de la stratification de la viscosité sur l'énergie d'un fluide en loi de puissance, $Re_w = 68.316$ et $\eta = 0.4$. (Ligne continue) production d'énergie et ReI_2 (ligne pointillée) I_3 dissipation d'énergie. $n = 0,3$, $k = 5.25$, $\Gamma^+ = 1.456$, et $\Gamma^- = 27.232$	94
Figure 3.40 : Termes moyenne (\blacktriangle) production Γ^+ et (\bullet) dissipation Γ^- d'un fluide en loi de puissance avec $\eta = 0,4$ en fonction de indice de rhéofluidifiant n	94
Figure 3.41: ReI_2 (vert) et I_3 (rouge) pour un fluide Newtonien dans les conditions critiques $Re_w=68.316$ et $k_c=3.12$ avec $\Gamma^+=\Gamma^-=28.037$	95
Figure 3.42 : profils de Mixer layer pour un rapport de rayon de 0.4 et $e=0.1$ et $\mu_1/\mu_2 = 1.1$	97

Figure 3.43: profils de viscosité pour un rapport de rayon de 0.4 et $e=0.1$ et $\mu_1/\mu_2=1.1$.	97
Figure 3.44 : Nombre de Reynolds critique en fonction d'épaisseur une couche de mélange $h+e/2$ pour un rapport de rayon 0.4 et $\mu_1/\mu_2=1$.	98
Figure 3.45 : Nombre de Reynolds critique du paroi pour un fluide en loi de puissance à $\eta = 0,5$ en fonction de l'indice de rhéofluidifiant n . (1) de la perturbation de la viscosité est prise en compte, $\mu_t-\mu_b \neq 0$, (2) la perturbation de la viscosité est exclue artificiellement, $\mu_t-\mu_b = 0$.	99
Figure 3.46. Nombre d'onde critique pour un fluide en loi de puissance à $\eta = 0,5$ en fonction de l'indice de rhéofluidifiant n . (1) de la perturbation de la viscosité est prise en compte, $\mu_t-\mu_b \neq 0$, (2) la perturbation de la viscosité est exclue artificiellement, $\mu_t-\mu_b = 0$.	99
Figure 3.47: Critère de Rayleigh pour un fluide de loi de puissance avec un rapport de rayon $\eta=0.881$.	102
Figure 3.48: Critère de Rayleigh pour un fluide de Bingham avec un rapport de rayon $\eta=0.881$.	102
Figure 3.49: critère de Rayleigh pour un fluide de Carreau avec un rapport de rayon $\eta=0.881$.	103
Figure 3.50: Courbe de stabilité marginale pour fluide Newtonien avec un rapport de rayon $\eta=0.881$; (\square) Meseguer ; (-) Nos résultats.	105
Figure 3.51: Courbe de stabilité marginale pour un fluide de loi de puissance pour un indice de fluide $n=0.5$ avec un rapport de rayon $\eta=0.881$.	105
Figure 3.52: Courbe de stabilité marginale pour fluide en loi de puissance avec un rapport de rayon $\eta=0.881$, (\square) $n=0.3$; (\square) $n=0.7$; (\square) Cas Newtonien.	106
Figure 3.53: Courbe de stabilité marginale pour fluide de Bingham avec un rapport de rayon $\eta=0.881$.	106
Figure 3.54: courbe de stabilité marginale pour fluide de Carreau avec un rapport de rayon $\eta=0.881$ et $\lambda=1$.	107
Figure 4.1: Pseudo-spectres pour un fluide Newtonien $\eta=0.881$ pour $Re_1=101$ $Re_2=-1061.2$ $m=13$ $k=2.176$.	111
Figure 4.2: Pseudo-spectres pour un fluide de Bingham $B=10$, $\eta=0.881$ avec $Re_1=101$ $Re_2=-1061.2$ $m=13$ $k=2.176$.	111
Figure 4.3 : Pseudospectres pour un fluide en loi de puissance $n=0.5$ $\eta=0.881$ pour $Re_1=400$ $Re_2=-1061.2$ $m=11$ $k=1.6472$.	112

Figure 4.4 : les pseudo-spectres pour un fluide de Carreau avec $n=0.5$ $\eta=0.881$ pour $Re_1=400$ $Re_2=-1061.2$ $m=11$ $k=1.6472$	112
Figure 4.5 : Energie optimale pour $Re_1 =101$ $Re_2 = -1061.2$ (2), Bingham $B =7$; (1) fluide Newtonien; (3) loi en puissance $n =0.5$; (4) fluide de Carreau $n =0.5$ $\lambda =10$...	118
Figure 4.6 Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps pour la perturbation optimale, pour un fluide newtonien. $Re_1=240$, $Re_2=-271.42$, $m=0$, $k=\pi$	119
Figure 4.7 Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps pour la perturbation optimale, pour un fluide newtonien. $Re_1=240$, $Re_2=-271.42$, $m=1$, $k=\pi$	119
Figure 4.8 : Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps pour la perturbation optimale pour un fluide en loi de puissance pour $Re_1=100$, $Re_2=-113.5074$ $m=0$, $k=3.14$, $\eta=0.881$	120
Figure 4.9 - Contours d'amplification optimale de l'énergie de la perturbation, pour un fluide Newtonien $\eta =0.881$	121
Figure 4.10 - Contours d'amplification optimale de l'énergie de la perturbation, pour un fluide en loi de puissance : $\eta=0.881$ $n=0.5$. Figure 4-11. L'énergie de la perturbation optimale en fonction de Nombre de Reynolds de cisaillement pour un fluide Newtonien, $\eta =0.881$	121
Figure 4.11 . L'énergie de la perturbation optimale en fonction de Nombre de Reynolds de cisaillement pour un fluide Newtonien, $\eta =0.881$	123
Figure 4.12 – contour de la composante azimutale de vitesse. un fluide Newtonien, avec $Re_1 =101$, $Re_2 =-1061.2$, $k^{opt}=2.176$ et $m^{opt}=13$ à l'instant initiale $t=0$	124
Figure 4.13 : contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide Newtonien, avec $Re_1 =101$, $Re_2 =-1061.2$, $k^{opt}=2.176$ et $m^{opt}=13$. à l'instant initiale $t=4.80999e-003$	124
Figure 4.14 : contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide Newtonien, avec $Re_1 =101$, $Re_2 =-1061.2$, $k^{opt}=2.176$ et $m^{opt}=13$. À l'instant $t=9.619989e-003$	125
Figure 4.15 : Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du, pour pour un fluide Newtonien, avec $Re_1 =101$, $Re_2 =-1061.2$, $k^{opt}=2.176$ et $m^{opt}=13$	125
Figure 4.16 - Forme de la perturbation optimale pour un fluide de Bingham, $B=10$, avec $Re_1 =101$, $Re_2 =-1061.2$, $k^{opt}=1.965$ et $m^{opt}=13$. Contours d'énergie cinétique de la perturbation à l'instant initiale $t=0$	126

Figure 4.17- contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide de Bingham, $B=10$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt}=1.965$ et $m^{opt}=13$ à l'instant optimale $t=4.150123e-003$	126
Figure 4.18- contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide de Bingham, $B=10$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt}=1.965$ et $m^{opt}=13$ à l'instant optimale $t=8.300123e-003$	127
Figure 4.19 : Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps, pour de Bingham. $B=10$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt}=1.965$ et $m^{opt}=13$	127
Figure 4.20 - contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide en loi de puissance, $n=0.5$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt}=1.6472$ et $m^{opt}=11$ à l'instant initiale $t=0$	128
Figure 4.21 : contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide en loi de puissance, $n=0.5$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt}=1.6472$ et $m^{opt}=11$ à l'instant initiale $t=t_{opt}/2$	128
Figure 4.22 : contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide en loi de puissance, $n=0.5$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt}=1.6472$ et $m^{opt}=11$ à l'instant initiale $t=t_{opt}$	129
Figure 4.23 : Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps. pour un fluide en loi de puissance, $n=0.5$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt}=1.6472$ et $m^{opt}=11$ à l'instant initiale $t=t_{opt}$	129
Figure 4.24 : Energie optimale au cours du temps pour un fluide Newtonien $\eta = 0.881$. $Re_1=101$ $Re_2=-1061.2$; $\eta=0.881$; $m=13$ $k=2.176$	133
Figure 4.25 : Energie optimale au cours du temps temps pour un fluide en loi de puissance $n=0.5$ $Re_1=101$ $Re_2=-1061.2$; $\eta=0.881$; $m=11$ $k=1.6472$	133

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2-1- : Fluide de Bingham pour $\eta = 0.5$ et $B = 1$	60
Tableau 2-2- : Fluide en loi de puissance $\eta = 0.5$ et $n = 0.3$	60
Tableau 4-1 : G_{\max} pour un fluide newtonien pour un rapport de rayon $\eta=0.881$	117
Tableau 4-2 : Energie optimale pour des fluides rhéofluidifiants avec ou sans seuil.....	118

LISTE DES SYMBOLES

Lettres latines

B	Nombre de Bingham
d	Épaisseur de l'espace annulaire entre les deux cylindres ; $d = R_2 - R_1$
E	énergie cinétique
K	Consistance du fluide
L	Longueur de l'espace annulaire
m	Nombre d'onde axial
n	Indice de structure de l'écoulement pour le modèle de
r	Position azimuthale
I_2	production de l'énergie
I_3	dissipation de l'énergie
k_{\max}	fréquence epicyclique
e_r	vecteur unitaire de l'axe radial
e_θ	vecteur unitaire de l'axe azimuthal
e_z	vecteur unitaire de l'axe axial
V	vecteur de vitesse
V_b	vecteur vitesse de l'écoulement de base
u	composante radiale de la vitesse
v	composante azimuthale de la vitesse
w	composante axiale de la vitesse
u'	composante radiale de la vitesse de la perturbation
v'	composante azimuthale de la vitesse de la perturbation
w'	composante axiale de la vitesse de la perturbation
V'	Vecteur vitesse de la perturbation
Re_1	Nombre de Reynolds du cylindre intérieur
Re_2	Nombre de Reynolds du cylindre extérieur
Re_c	Nombre de Reynolds critique
P	pression de base
P'	pression perturbée
R_1	Rayon du cylindre intérieur
R_2	Rayon du cylindre extérieur

m	Nombre d'onde azimutale
L_{os}	opérateur d'onde azimutale
G^{max}	amplification de l'énergie de la perturbation
G^{opt}	perturbation optimale
$I(u)$	Terme d'inertie
$\gamma(u)$	Terme de dissipation visqueuse
$A(u)$	Termes d'anisotropie
t	Variable temporelle

LETTRES GRECQUES

σ	Tenseur des taux de déformations
μ_{eff}	Viscosité effective du fluide
μ_p	Viscosité effective du fluide à la paroi du cylindre
μ_t	Viscosité tangente du fluide
ρ	masse volumique $kg \ m^{-3}$ viscosité dynamique $kg \ m^{-1} \ s^{-1}$
ν	viscosité cinématique $m^2 \ s^{-1}$
m	nombre d'onde azimutal
Ω_1	vitesse angulaire
Ω_2	vitesse angulaire
η	Rapport des rayons
Ω	Rapport des vitesses angulaires $\Omega = \Omega_2 / \Omega_1$
t	Taux de croissance
λ	Vitesse de phase
γ	Taux de cisaillement
γ_{ij}	Tenseur des taux de cisaillement
« γ »	Tenseur des taux de cisaillement adimensionnel
τ_{ij}	Tenseur des contraintes
« τ »	Tenseur des contraintes adimensionnel
Γ	Rapport de forme (Rapport d'aspect) ; $\Gamma = L / d$
θ	Coordonnée azimutale
Γ^+	production de l'énergie moyenne
Γ^-	dissipation de l'énergie moyenne

INTRODUCTION GENERALE

La transition vers la turbulence dans des écoulements de fluides non newtoniens reste l'un des défis de la physique contemporaine et de la technologie. Les fluides non newtoniens sont généralement des solutions de polymères ou des suspensions de particules solides ou déformables. Le caractère non newtonien résulte de l'interaction non linéaire entre l'écoulement et la structure interne du fluide à l'échelle microscopique. À cette échelle, une modification des forces hydrodynamiques induit une réorganisation de la structure interne du fluide. Cette réorganisation se traduit au niveau macroscopique par une variation de la viscosité et donc de l'écoulement. La plupart des fluides non newtoniens sont rheofluidifiants. Lorsque l'échelle de temps caractéristique de la réorganisation de la structure interne du fluide devient du même ordre de grandeur ou plus grande que l'échelle de temps de l'écoulement, le fluide est dit thixotrope; la caractérisation rhéologique de tels fluides nécessite l'introduction d'une équation supplémentaire qui décrit l'évolution de la structure interne du fluide au cours du temps. Certaines solutions de polymères flexibles ont la capacité de stocker de l'énergie et de la restituer lorsque la contrainte appliquée est annulée. Ces fluides sont dits viscoélastiques. Lorsque le temps de relaxation du fluide est du même ordre de grandeur ou plus grand que le temps caractéristique de l'écoulement, le caractère élastique de ces fluides doit être pris en considération. Les fluides non newtoniens sont rencontrés dans de nombreux procédés industriels agroalimentaires, chimiques et pétroliers. Un des effets les plus remarquables du comportement non newtonien est la réduction de traînée découverte par Toms(1949): l'ajout de quantité infime de polymères (quelques parties par millions) peut induire en régime turbulent une forte réduction des pertes de charges. Cet effet est particulièrement utilisé dans le transport à longue distance dans les pipelines ou dans les jets à incendie. A des concentrations plus importantes, les effets non linéaires élastiques peuvent provoquer une turbulence faible à très bas nombre de Reynolds.

Comparativement au cas newtonien, très peu de résultats existent dans la littérature sur la transition vers la turbulence pour des fluides non newtoniens. Ceci n'est pas étonnant au regard de la complexité à étudier ces fluides. Les premières

études relatives à la transition vers la turbulence en conduite cylindrique pour des fluides non newtoniens datent des années 50.

Il s'agit d'approches phénoménologiques pour déterminer un nombre de Reynolds critique. L'approche générale consiste à caractériser la transition par un paramètre adimensionnel qui se présente sous la forme d'un rapport de deux quantités physiques, l'une favorisant le développement des instabilités et l'autre les freinant. La valeur critique de ce paramètre adimensionnel peut être calculée pour un fluide newtonien. Il est supposé que cette valeur critique soit la même pour les fluides non newtoniens. Le caractère rhéofluidifiant qui se traduit par une décroissance de la viscosité à mesure que l'on augmente le taux de cisaillement est probablement le caractère non newtonien le plus répandu. La prise en compte de cet aspect dans le cas des fluides à mémoire instantanée n'introduit pas de difficultés fondamentales par rapport au cas newtonien. Cependant la non linéarité de la viscosité effective est l'anisotropie de la perturbation du déviateur du tenseur des contraintes qui s'ensuit peuvent modifier de façon significative les scénarii de transition vers la turbulence.

En raison de la complexité du problème de la transition, il a est nécessaire de considérer séparément les cas des écoulements ouverts ou fermés. L'écoulement dans l'espace entre deux cylindres concentriques, appelé écoulement de Taylor-Couette, a été utilisé comme paradigme de l'instabilité centrifuge et transition vers la turbulence suite à une progression des instabilités dans l'écoulement. En outre, lorsque les cylindres sont contre rotatifs, le système dispose d'itinéraires sous-critiques à la turbulence similaire à d'autres configurations canoniques comme les conduites.

L'analyse théorique et numérique de l'écoulement de Taylor-Couette est considérablement simplifiée lorsque le rapport d'aspect défini par le rapport entre la longueur et l'épaisseur de l'espace annulaire est supposé infini. Pour des vitesses angulaires constantes du cylindre intérieur, considérées comme référence pour le nombre de Reynolds (Re), l'écoulement est en régime établi et purement azimutal. Cet état de base laminaire est connu comme l'écoulement de Couette circulaire, après Maurice Couette qui a utilisé ce dispositif expérimental comme un moyen de mesurer la viscosité. Un paramètre géométrique important de ce système est le rapport des rayons, mesuré par $\eta = R_1/R_2$, où R_1 et R_2 sont les rayons du cylindre intérieur et extérieur respectivement.

L'objectif du présent travail est d'examiner la stabilité de l'écoulement d'un fluide purement visqueux rhéofluidifiant, entre deux cylindres coaxiaux. Un fluide rhéofluidifiant est un fluide dont la viscosité diminue lorsque le taux de cisaillement imposé augmente. Comparativement au cas Newtonien, lorsqu'on écrit les équations aux perturbations linearisées autour de l'écoulement de base, l'écoulement de ce type de fluides se caractérise par une stratification radiale de la viscosité d'une part et par une anisotropie du déviateur du tenseur des contraintes d'autre part. Le caractère non newtonien des fluides est décrit par des modèles rhéologiques rhéofluidifiant avec ou sans seuil de contrainte. Une étude linéaire de stabilité est effectuée. Des approches modale et non modale sont utilisées pour décrire le comportement d'une perturbation aux temps courts et aux temps longs.

Le comportement asymptotique aux temps longs se ramène à la résolution d'un problème aux valeurs propres. Les courbes de stabilité marginale sont déterminées et analysées pour des cylindres corotatifs et contrarotatifs. L'effet des paramètres rhéologiques sur la stabilité est mis en évidence. Aux temps courts, un problème aux valeurs initiales est résolu en cherchant une solution sous forme d'une combinaison linéaire des fonctions propres. Le non normalité de l'opérateur linéaire conduit à une croissance transitoire de l'énergie cinétique de la perturbation. Les résultats numériques montrent que le caractère rhéofluidifiant favorise l'amplification de l'énergie cinétique de la perturbation. Au contraire la présence d'un seuil de contrainte réduit fortement le degré de non normalité de l'opérateur linéaire.

Récemment, de nouvelles idées ont été proposées pour la compréhension des mécanismes de transition vers la turbulence. Elles sont basées particulièrement sur le principe d'un processus de cycle auto-entretenu (Self Sustaining Process, SSP) proposé par Waleffe (1997). Dans ce modèle, les rouleaux longitudinaux conduisent à la formation de stries qui développent des instabilités inflexionnelles, qui elles mêmes, lors de leur évolution non linéaire, formeront à nouveau des rouleaux longitudinaux, refermant ainsi le cycle. D'un point de vue pratique, une force volumique fictive est rajoutée pour générer des rouleaux longitudinaux et engendrer une instabilité se saturant pour former une onde non linéaire d'amplitude finie. L'idée est alors de voir si en suivant une procédure de continuation (Waleffe (2003)), l'onde non linéaire peut être obtenue en l'absence de cette force volumique fictive. En adoptant ce protocole, des

solutions sous forme d'ondes non linéaire sont mises en évidence par Faisstet Eckhardt (2003) et Wedinet Kerswell(2004). Celles-ci sont des structures cohérentes périodiques en azimutal et en temps dans la direction axiale.

Ce travail se présente comme suit :

Dans le premier chapitre et après une introduction sur les écoulements de Taylor -Couette, nous nous attacherons à décrire les travaux antérieurs concernant l'instabilité de Taylor-Couette pour un fluide rhéofluidifiant avec ou sans seuil.

Le deuxième chapitre est réservé à la formulation mathématique du problème ainsi que les équations de l'écoulement de base pour un fluide rhéofluidifiant avec ou sans seuil.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude la stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor-Couette pour un fluide rhéofluidifiant. Une étude de perturbation est développée. Celle-ci mène à la résoudre numériquement d'un problème aux valeurs propres ; Les spectres obtenus sont ensuite analysés.

Le quatrième chapitre porte sur la croissance transitoire de l'écoulement de Taylor-Couette ainsi que sa discussion.

Enfin, une conclusion générale résumant les principaux résultats, en particulier l'effet du caractère rhéofluidifiant sur la stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette clos le travail.

CHAPITRE 1

ÉCOULEMENT DE TAYLOR-COUPETTE

1-1-INTRODUCTION

Les développements techniques au fil des siècles ont vu l'apparition d'une classe de systèmes mécaniques appelés « turbomachines », c'est-à-dire de dispositifs impliquant un fluide interagissant avec un ou plusieurs éléments en rotation. On peut citer parmi les exemples plus récents les turbines, dynamos ou alternateurs de centrales électriques, les turbines présentes dans les turboréacteurs d'avions, ou encore les pompes à centrifugation.

La nécessité industrielle d'améliorer le rendement des turbomachines a tout naturellement amené le besoin de mieux comprendre la physique en jeu dans les écoulements qui se développent entre des parois en rotation. Pour saisir les mécanismes fondamentaux qui pilotent ces classes d'écoulements, la communauté scientifique s'est tout d'abord intéressée à l'étude de configurations simplifiées, plus facilement modélisables par la théorie, et plus facilement approchables par des dispositifs expérimentaux.

Dans la liste des configurations qui permettent de faire mieux avancer la compréhension des mécanismes complexes par celle des mécanismes de base, le système de Taylor-Couette se positionne comme une figure incontournable de la mécanique des fluides. Ce dispositif met en jeu un écoulement de cisaillement entre deux cylindres coaxiaux, chacun pouvant tourner indépendamment l'un de l'autre, en co-rotation ou en contra-rotation. Dans le cas le plus répandu, le cylindre de rayon le plus petit est mobile, tandis que le cylindre de plus grand rayon est fixe.

La simplicité de la géométrie rend l'étude du système beaucoup plus commode : le système étant cylindrique, les conditions aux limites dans la direction azimutale sont périodiques, ce qui est plus facilement reproductible expérimentalement, et simplifie la mise en équation du problème. Un autre attrait des écoulements de Taylor-Couette réside dans leur vaste phénotype : des études expérimentales ont pu mettre en évidence au sein du système une très large gamme de structures très caractéristiques, présentant des motifs complexes : spirales, ondulations azimutales, turbulence spirale. La compréhension de ces structures est un thème d'actualité.

Le dispositif de Taylor-Couette n'est pas qu'un cas d'étude académique. Son principe est actuellement utilisé dans le cadre du génie des procédés pour mélanger plusieurs produits ou réactifs. On l'emploie également dans des systèmes de filtration de faible encombrement, pour purifier des eaux usées ou des liquides corporels comme le sang. Dans ce cadre, la NASA travaille actuellement sur la mise au point de systèmes de filtration embarqués, dans la perspective de vols habités de longue durée [34].

Le présent chapitre est consacré à une étude bibliographique sur la transition vers la turbulence pour un écoulement de Taylor couette. Il est structuré en deux parties. La première est relative au cas Newtonien d'un écoulement de Taylor couette. La deuxième partie concerne le cas non-Newtonien et plus spécifiquement les fluides rhéofluidifiant purement visqueux.

1-2-LES ECOULEMENTS DE TAYLOR-COUETTE

L'étude de l'écoulement de Taylor-Couette occupe une place importante dans l'histoire de la dynamique des fluides ; il est devenu le modèle prototype pour l'étude des instabilités hydrodynamique en vue de réaliser la prévision de leur apparition, la description de leurs propriétés ainsi que la transition vers le chaos et la turbulence développée.

On peut faire remonter la première étude d'un fluide entraîné par la rotation d'un cylindre à Isaac Newton qui, dans ses Principia en 1687, s'intéressa aux fluides en rotation. Plus tard, dans un article de 1848, George Gabriel Stokes évoqua le problème d'un fluide en mouvement entre deux cylindres mobiles et coaxiaux; il suggéra que la mise en rotation de la paroi cylindrique interne devait produire la situation la moins stable, puisque, raisonna-t-il, elle engendrait une force centrifuge qui projette le fluide vers la paroi externe, contribuant ainsi à déstabiliser l'écoulement. C'est à Lord Rayleigh que l'on doit, en 1880, une première formalisation théorique de ce problème, pour le cas particulier de fluides non visqueux.

1.2.1 Cas de fluides non visqueux : le critère de Rayleigh.

Sur la base d'un raisonnement euristique, Rayleigh établit son célèbre critère de stabilité (Chandrasekhar [25]). Considérons un fluide non visqueux en rotation dans une cavité cylindrique infiniment longue, et supposons que la distribution vitesse-pression est purement radiale : $\Psi = (0, V_{\theta}^*(r^*) = r^*\Omega(r^*), 0,$

$p^*(r^*)$). Une particule fluide, située à la distance r_1^* de l'axe de rotation, subit la force centrifuge $\rho r_0^* \Omega^2 (r_0^*)$. L'ensemble des particules fluides, éjectées vers l'extérieur, exercent alors une pression plus grande près de la paroi extérieure que près de l'axe de rotation, induisant, à travers la cavité, un gradient de pression centripète. Lorsque l'écoulement est stable, les forces centrifuge et centripète qui s'exercent sur la particule fluide se compensent :

$$\left. \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \right|_{r/r_0^*} = \rho \frac{V_{\theta}^{*2}}{r_0^*} = \rho r_0^* \Omega^2 (r_0^*) \quad 1-1$$

Supposons à présent que la même particule fluide subit un léger déplacement vers une nouvelle position $r_2^* > r_1^*$. En l'absence de dissipation visqueuse, son moment cinétique est conservé, ce qui s'écrit :

$$r_1^{2*} \Omega_1 = r_0^{2*} \Omega (r_0^*). \quad 1-2$$

Où Ω_1 est la nouvelle vitesse de la particule à la position r_1^* . La particule subit à présent une force centrifuge $\rho r_1^* \Omega_1^2$. Cependant, le gradient de pression environnant est égal à $\rho r_1^* \Omega^2(r_1^*)$. Si ce gradient est supérieur à la nouvelle force centrifuge de la particule, cette dernière est repoussée vers sa position initiale r_0^* : l'écoulement est stable. Au contraire, s'il est plus petit, la particule continuera son mouvement vers l'extérieur : l'écoulement est instable. La condition de stabilité peut donc s'écrire :

$$\rho r_1^{2*} \Omega (r_1^*) \geq \rho r_1^{2*} \Omega_1 = \rho r_0^{2*} \Omega (r_0^*) \quad 1-3$$

$$\text{Soit encore :} \quad r_1^{2*} \Omega^2(r_1^*) \geq r_0^{2*} \Omega (r_0^*) \quad 1-4$$

Ou, finalement :

$$\frac{d}{dr^*} (r^{*2} \Omega(r^*)) \geq 0 \quad 1-5$$

Cette condition est connue sous le nom de critère de Rayleigh.

Donc, pour étudier la stabilité de l'écoulement circulaire non visqueux entre des cylindres coaxiaux Rayleigh a énoncé une loi qui caractérise l'apparition de l'instabilité :

« L'origine de l'instabilité de l'écoulement rotatif est une instabilité centrifuge. Dans un écoulement en rotation, la trajectoire des particules fluides résulte de l'équilibre entre la force centrifuge et le gradient de pression radial centripète, égal et opposé. Pour savoir si un tel écoulement est stable ou non, il faut regarder si un

déplacement infinitésimal d'une particule fluide dans la direction radiale va être amplifié (cas instable) ou au contraire atténué (cas stable) ». [2]

Des résultats postérieurs à la modélisation de Rayleigh vont cependant en montrer les limites : négligée dans le bilan des forces, la viscosité contribue en fait à dissiper une part de l'énergie de la particule fluide, ce qui ne retarde l'apparition de l'instabilité centrifuge. Ce n'est donc qu'à partir d'une certaine vitesse de rotation du cylindre que cette instabilité peut se développer.

1.2.2 Extension aux fluides visqueux.

Les équations régissant la dynamique d'un fluide visqueux furent établies par Claude Navier (1823) et George Stokes (1845). L'introduction de la notion de viscosité (notée μ) rendit nécessaire la mise au point d'appareils capables de la mesurer le plus précisément possible.

En 1881 à Vienne, l'Autro-Hongrois Max Margules proposa un modèle de viscosimètre constitué de deux cylindres concentriques. En 1890, le Français Maurice Couette reprit cette technique et mesura la viscosité de l'eau au moyen d'un appareil de type Si -Ro (Stator-Rotor). Il remarqua que la mesure de la viscosité demeurait constante pour de faibles vitesses de rotation, puis changeait brusquement au-delà d'un certain seuil critique. Couette attribua ce comportement à l'apparition d'un régime turbulent ([34]).

Indépendamment, un Anglais, Mallock mena des expérimentations similaires à celle de Couette (1888, 1896), en étendant son étude à la configuration Ri - So. Dans ce dernier cas, ses résultats mirent en évidence un régime instable quelles que furent les vitesses de rotation qu'il utilisa, ce qui était en totale adéquation avec le critère de Rayleigh. Mais dans le cas Si - Ro, il trouva des seuils de stabilité, ce qui contredisait le critère ([34]).

En 1923, dans un article fondateur [2], Taylor reprit les résultats de Mallock en combinant les approches théorique et expérimentale. Par une étude de stabilité linéaire du fluide visqueux (linéarisation des équations de Navier-Stokes par méthode des petites perturbations autour d'un écoulement de base, en supposant les cylindres de longueur infinie), Taylor montra que le profil de Couette, valable pour de faibles vitesses de rotation, se révélait instable face à de petites perturbations axisymétriques au delà de certains seuils de rotation : il prouva l'existence d'un seuil de transition dans le cas Ri-So (à l'inverse des

résultats de Mallock qui n'en trouva pas); quant à la configuration Si-Ro, elle devait rester stable dans tous les cas (contrairement aux observations de Couette et Mallock).

Taylor suggéra une liste de sources d'erreur dans le dispositif de Mallock. D'une part, une rigidité insuffisante du système était susceptible d'engendrer des vibrations parasites. D'autre part, le rapport $\Gamma = H/d$ (rapport d'aspect) entre la hauteur des cylindres H et l'épaisseur de la couche de fluide entre les cylindres $d = r_o^* - r_i^*$ ne devait pas être trop petit, sinon les effets des parois terminales (qui limitent la cavité en haut et en bas) pouvaient perturber les zones de mesure. Mallock était déjà conscient de ces effets de bord, au point qu'il inclut des couches de mercure en guise de paroi inférieure, pour tenter de supprimer le frottement du fluide sur la paroi et les vortex engendrés par ces frottements; cette précaution était cependant insuffisante pour les limiter. Taylor conçut un dispositif de grand rapport d'aspect pour réduire au maximum l'influence des effets des bords au centre du système (et se rapprocher ainsi de l'hypothèse de cylindres infiniment longs qu'il avait supposée dans son analyse théorique). En outre, l'appareillage fut solidement arrimé aux murs du laboratoire afin de supprimer les vibrations.

Au final, Taylor obtint une très bonne concordance entre les courbes de transition théoriques et les courbes de transition expérimentales (Figure 1-1). Taylor reporta sur ses graphes le critère de Rayleigh (en pointillés sur la Figure 1-1). On peut noter que dans le cas de cylindres co-rotatifs, le critère de Rayleigh correspond à une asymptote de la courbe de stabilité, ce qui n'est pas du tout le cas pour des cylindres contrarotatifs.

Si les effets de bords et les vibrations parasites étaient, comme le suggérait Taylor, susceptibles d'expliquer les conclusions erronées de Mallock dans la configuration Si-Ro, il apparut rétrospectivement que la plus petite des vitesses de rotation utilisée par Mallock lors de ses mesures en Ri-So (2 tours / min) se situait, compte tenu du rapport de rayons du dispositif et de la viscosité du fluide utilisé, au-dessus du seuil de transition de l'instabilité centrifuge. Mallock ne s'est ainsi jamais trouvé en situation de pouvoir observer le régime stable [34].

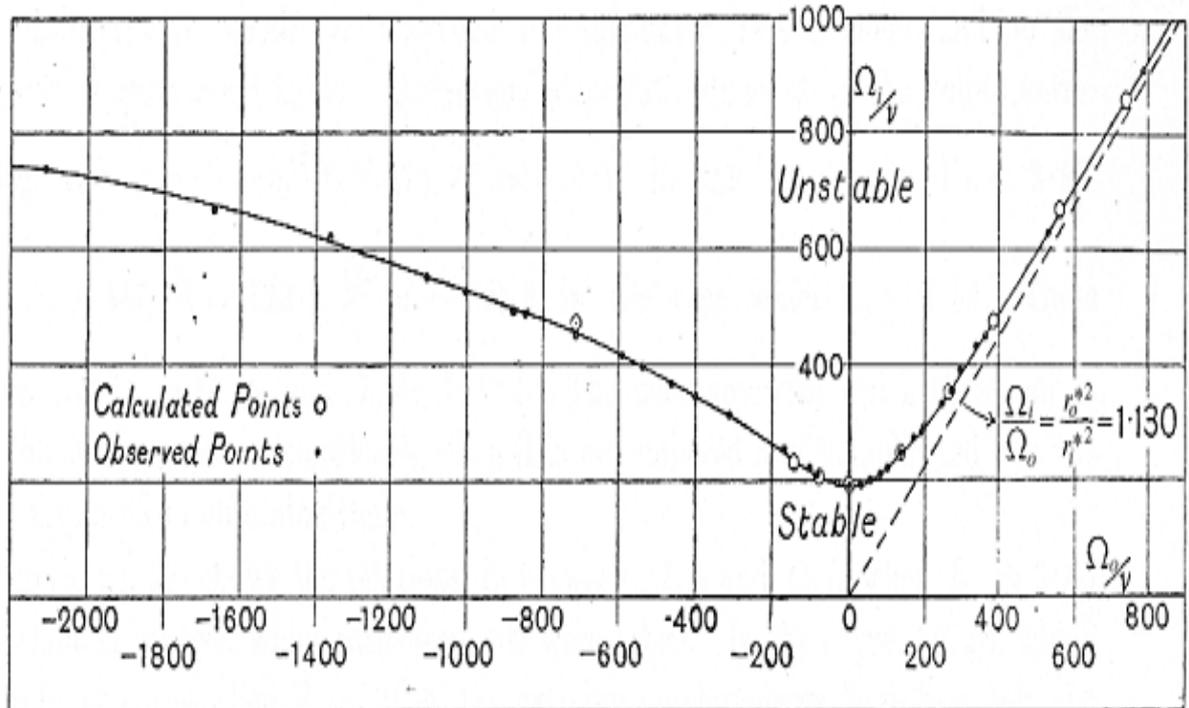


Figure 1-1 - Diagramme de stabilité de l'écoulement de Couette dans le plan $(\Omega_o / \gamma, \Omega_i / \gamma)$, $\eta = r_i^* / r_o^* = 0.9418$ (d'après Taylor [1]); Ω_i est la vitesse de rotation du cylindre intérieur, Ω_o celle du cylindre extérieur. En pointillés, la droite de stabilité donnée par le critère de Rayleigh.

1.3 STABILITE ET TRANSITION DANS UN SYSTEME DE LONG RAPPORT D'ASPECT

Le système rotor-stator Ri-So a inspiré une abondante littérature, notamment par sa plus grande facilité de mise en œuvre : la mise en rotation de la paroi extérieure est en effet plus délicate à réaliser techniquement. Pour des paramètres géométriques fixés et de longs rapports d'aspect, l'augmentation de la vitesse angulaire du cylindre interne (ou, de façon équivalente, du nombre de Reynolds du cylindre interne défini par $Re_i = \Omega_i r_i^* d / \nu$) se traduit par un enchaînement d'écoulements présentant des caractéristiques clairement identifiables comme les motifs des tourbillons ou le spectre en fréquence de la vitesse du fluide dans la cavité (Andereck et al. [20]). En reprenant les dénominations définies par Andereck, le scénario se décompose de la façon suivante :

- **Azimuthal Laminar Flow (AZI)** : dans un premier temps, de l'écoulement au repos jusqu'au premier seuil de transition. Cet écoulement stable sert souvent d'état de base pour les études de stabilité linéaire.
- **Taylor Vortex Flow (TVF)** : à partir du Reynolds critique $Re_{i,crit}$, l'écoulement bifurque vers les structures toroïdales de Taylor, deux rouleaux adjacents tournant en sens opposé dans un plan méridien.
- **Wavy Vortex Flow (WVF)** : le seuil suivant correspond à l'apparition d'ondulations azimuthales qui brisent l'axisymétrie des rouleaux (Fig. 1-2-a)
- **Modulated Wavy Vortices (MWV)**: quand on augmente encore le taux de rotation, une nouvelle fréquence fondamentale s'ajoute à la précédente (Fig. 1-2-b).
- **Turbulent Taylor Vortices (TTV)** : à vitesse angulaire très élevée, l'écoulement devient faiblement turbulent ; cependant la structure en rouleaux est globalement conservée (Fig. 1-2-c).

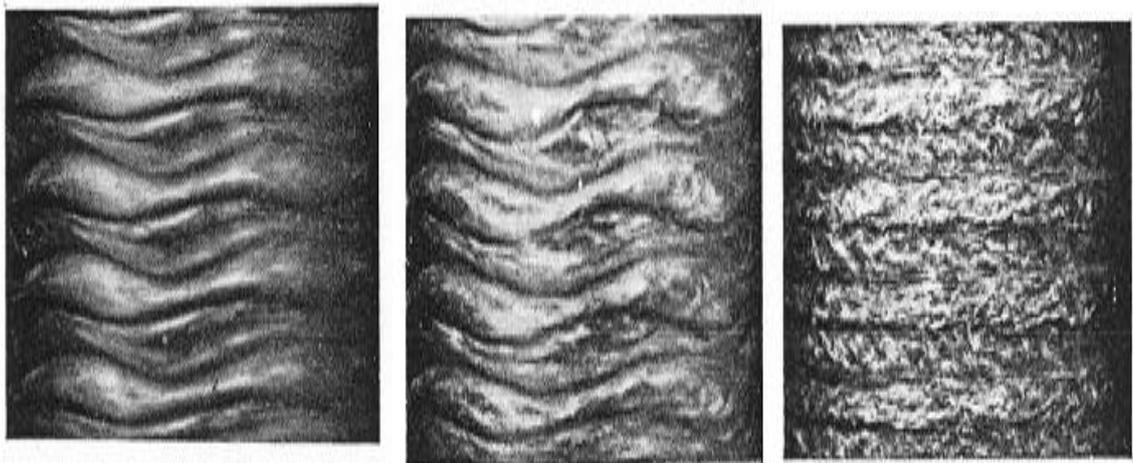


Figure 1-2 - Visualisation par technique Kalliroscope de la transition dans un système rotor-stator ($\eta = 0.877$, $\Gamma = 20$, $Re_{i, crit} = 119.1$) : a) $Re_i = 1.1 Re_{i,crit}$; b) $Re_i = 9.5 Re_{i, crit}$ c) $Re_i = 15 Re_{i,crit}$ ([34]).

La mise en rotation de la paroi externe complexifie la structure de l'écoulement, modifiant notablement le profil radial de la vitesse azimuthale, ce qui accentue de ce fait le cisaillement. D'un point de vue plus général, la stabilité du système en rotation différentielle a été étudiée par Snyder, Hegseth et al. Des simulations numériques se sont intéressées à la co-rotation (Weisshaar et al;

Antonijoan & Sanchez) et à la contra-rotation (Jones; Sanchez et al; Antonijoan et al), pour des cylindres infiniment longs [34].

En plus du nombre de Reynolds basé sur la vitesse du cylindre interne (Re_i), on introduit le nombre de Reynolds basé sur la vitesse du cylindre externe $Re_o = \Omega_o r_o^* d / \nu$. Taylor, nous l'avons vu, avait déterminé la frontière de stabilité du simple écoulement de Couette en fonction des vitesses de rotation des deux parois, mais avait noté que dans la zone instable du plan $(\Omega_o/\mu, \Omega_i/\mu)$, des structures spirales pouvaient se manifester dans certains cas où les parois étaient en contra-rotation. Coles quant à lui recensa, au delà de la frontière de Taylor, des zones secondaires qui avaient été identifiées dans son laboratoire entre 1958 et 1961 [22]. Trois régions principales partagent le plan paramétrique montré sur la figure 1-3 : une première, correspondant à l'écoulement laminaire de Couette ; une autre, dans laquelle l'écoulement est pleinement turbulent ; et une zone de transition assurant l'interface entre les deux précédentes.

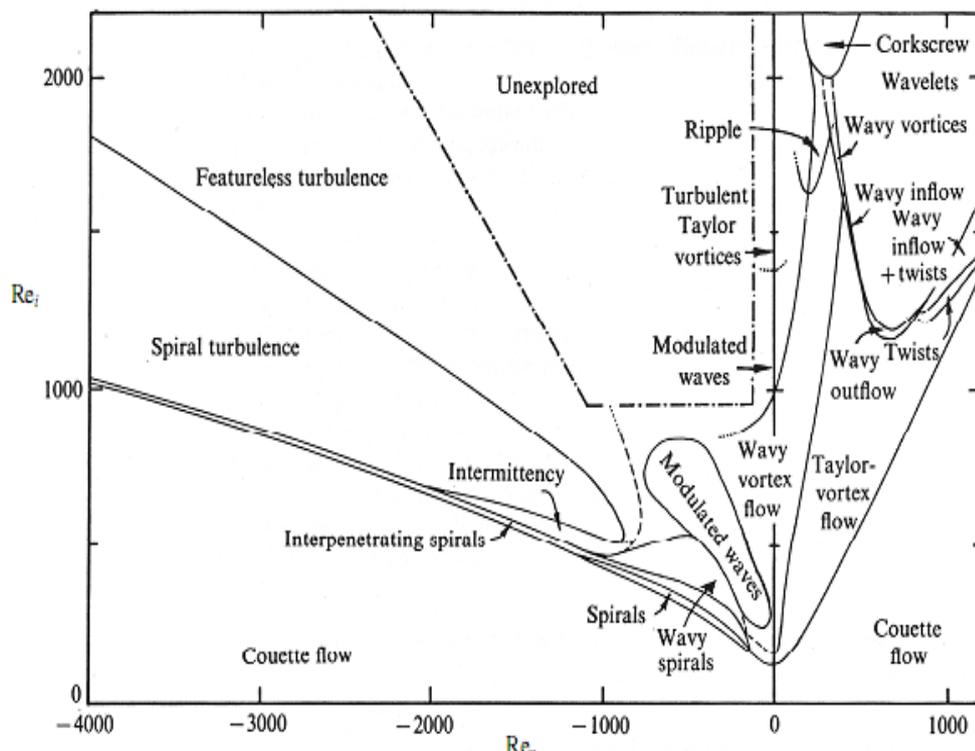


Figure 1-3 – Diagramme de transition dans le plan (Re_o, Re_i) , pour $\Gamma = 30$, $\eta = 0.883$ (d'après Andereck & al [6]). Le protocole expérimental est le même que celui suivi par Coles [34].



Fig. 1-4 – Visualisation par technique Kalliroscope de quelques-uns des motifs observés par Andereck et al, dans le cas où les deux parois cylindriques sont mobiles: a) Laminar Spiral flow (SPI), pour $Re_o = -300$, $Re_i = 240$; b) Interpenetrating Spirals (IPS) pour $Re_o = -1000$, $Re_i = 435$; c) Wavy Interpenetrating Spirals (WIS), pour $Re_o = -300$, $Re_i = 350$ ([34]).

Respectant le même protocole expérimental que Coles, Andereck et al ([20]) allaient affiner la cartographie de l'écoulement dans la zone couverte par la Fig. 1-3, et montrer une très large diversité de motifs : « Twists », « Wavy Outflow », « Corkscrew ». La plupart de ces structures sont caractéristiques soit de la corotation, soit de la contrarotation. Quelques-uns d'entre eux, pour la contrarotation, sont illustrés sur la Fig. 1-4 :

- le « Laminar Spiral Flow » (désigné par « Spirals » sur la Fig. 1-3), caractérisé par un ou deux vortex en spirale s'enroulant autour du cylindre interne. La Fig. 1-4 (a) montre le cas où deux spirales, dont les inclinaisons ont des signes opposés, coexistent dans la cavité, mais sont clairement séparées par une interface horizontale, elles ne se mélangent pas.
- « InterPenetrating Spirals » : deux spirales dont les inclinaisons sont de signes opposés coexistent, comme pour le cas précédent, mais cette fois-ci elles interfèrent entre elles dans une bonne part de la cavité (Fig. 1-4 (b)).
- « Wavy Interpenetrating Spirals » : l'écoulement précédent est modulé par une ondulation azimuthale semblable à celle du Wavy Vortex Flow (Fig1-4 (c)).

Un certain nombre d'études numériques ont été réalisées pour des cylindres de longueur infinie, en co-rotation et en contra-rotation [34].

La théorie des bifurcations s'est également intéressée à la nature chaotique de l'écoulement en contra-rotation à grand rapport. Les rapports d'aspect petits ou moyens n'ont donc pas été abordés ([34]).

Le régime contrarotatif est nettement plus complexe à étudier que le cas rotor-stator, notamment parce qu'on y rencontre des écoulements instationnaires mais pas nécessairement périodiques, compliquant l'interprétation des résultats.

Dans les scénarii menant à la turbulence dans le cas contrarotatif, on peut rencontrer deux types de processus: lorsque la rotation du cylindre interne est dominante, le scénario suit globalement celui du cas rotor-stator, avec apparition progressive de fréquences harmoniques et modulantes jusqu'à l'état turbulent. Par contre, si c'est la rotation du cylindre externe qui domine, la transition vers la turbulence se fait de façon plus directe, via un phénomène particulier appelé « intermittence » : des zones laminaires et turbulentes, séparées par des frontières très distinctes, peuvent coexister au sein du fluide. Les zones turbulentes peuvent se manifester sous la forme de « spots » turbulents, ou, plus frappant, sous une forme que Coles nomma « turbulence spirale ». Ce dernier motif se caractérise par deux bandes, l'une laminaire, l'autre turbulente, s'enroulant autour de l'axe de rotation. Van Atta, Hegseth et al, Colovas & Andereck, Goharzadeh & Mutabazi, Prigent ont par la suite fourni des études expérimentales approfondies sur ces phénomènes. Golubitsky et al, Stern & Hussain ont précisé, au moyen de la théorie des bifurcations, la nature chaotique de l'écoulement pour de longs cylindres en contrarotation [34].

1.4 MODELES RHEOLOGIQUES

Par définition la rhéologie est l'étude de la déformation des matériaux soumis à des contraintes. Nous rappelons que l'équation constitutive d'un fluide permet de relier la contrainte imposée à la cinématique de l'écoulement (vitesse, taux de cisaillement), le but de la rhéologie est donc de déterminer cette relation afin de caractériser les propriétés des fluides.

Si le modèle de fluide newtonien décrit convenablement la très grande majorité des fluides composés de molécules simples, il existe un bon nombre de fluide dont certains sont d'usage très courant qui ont un comportement sous écoulement plus complexe. Un fluide est dit non-newtonien lorsque sa viscosité dépend du taux de cisaillement, sinon le fluide est dit newtonien lorsque sa

viscosité est considérée constante. Par exemple, le plastique, le caoutchouc, le dentifrice sont des fluides non-newtoniens. Plusieurs modèles sont utilisés pour simuler la viscosité des fluides non-newtonien, dans la littérature on ne trouve pas un modèle universel. Ces fluides n'ont pas tous les mêmes comportements. Certains ont aussi une mémoire de forme ou d'autres caractéristiques spéciales qui leur confèrent un comportement difficile à simuler. Il est du domaine de la rhéologie de déterminer quel modèle convient à tel ou tel fluide.

Les fluides non newtoniens se subdivisent en plusieurs catégories. Certains ont une loi de comportement ou le coefficient de viscosité n'est plus constant mais dépend lui même des contraintes appliquées. D'autre se comportent comme un solide jusqu'à un certains niveau de contraintes puis commencent à se comporter comme un fluide newtonien. Ce sont les fluides à seuil qui incluent les boues et les gels. Le comportement de ces fluides quand le nombre de Reynolds augmente et atteint le seuil de transition est inconnu à ce jour.

1-4-1 Fluide rhéofluidifiants

Les fluides rhéofluidifiants sont des fluides pour lesquels la viscosité diminue lorsque le cisaillement augmente. D'une manière générale, le comportement rhéofluidifiants traduit une modification de la structure interne du fluide lorsque le cisaillement augmente, de manière à réduire la dissipation visqueuse et faciliter l'écoulement. Dans le cas des solutions de polymères, le comportement rhéofluidifiants est associé à la rupture des liaisons d'hydrogène dans les agrégats de macromolécules. Globalement, la diminution de viscosité est liée à la déstructuration d'agrégats de particules par les forces hydrodynamiques. Plusieurs modèles rhéologiques ont été proposés dans la littérature pour décrire le comportement rhéofluidifiant d'un fluide non-newtonien. Par exemple les huiles et les graisses utilisées en rhéofluidification, le sang, les solutions de polymères, le shampoing, les concentrés de jus de fruits, les encres d'imprimerie...etc.

1-4-2 Fluide à seuil

Un fluide à seuil est un fluide complexe qui se comporte d'un point de vu cinématique comme un solide indéformable si les contraintes qui lui sont appliquées ne sont pas très importantes, c'est-à-dire jusqu'à une valeur critique appelée seuil.

La figure 1-5 représente les relations entre la contrainte et le taux de cisaillement pour différents fluides

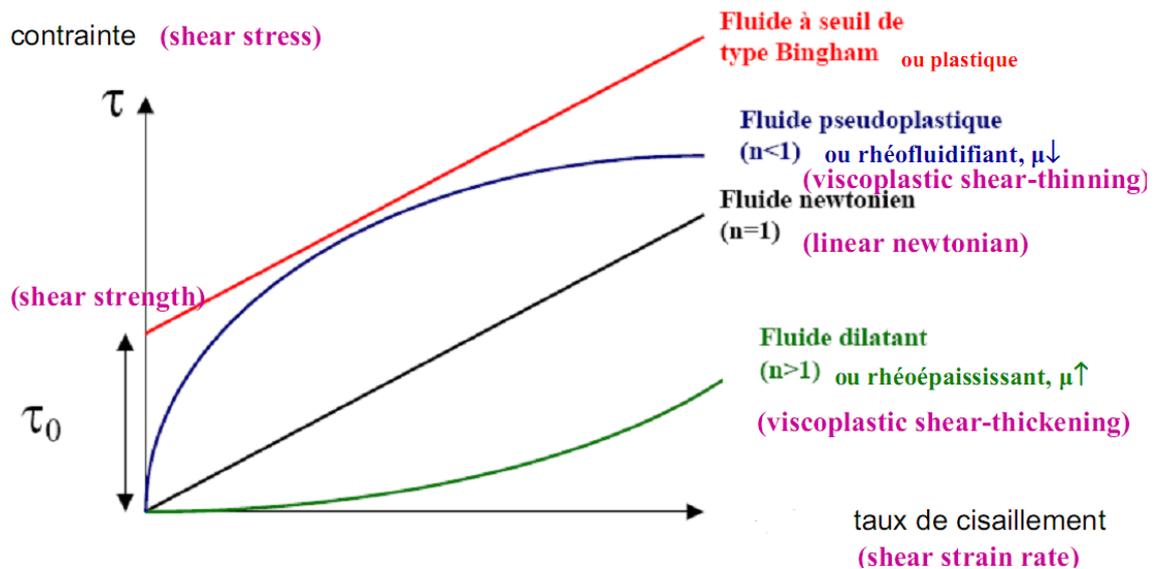


Figure 1-5 : Modèles rhéologique

1-5 SYNTHÈSE DE L'ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

L'écoulement de Taylor-Couette entre deux cylindres coaxiaux en rotation qui sont infiniment long, est un modèle pour les études de stabilité et de transition vers la turbulence des fluides newtoniens cisailés. Pour des faibles vitesses des cylindres, l'écoulement est stable et purement azimutal avec $U = V(r) e_\theta$, où e_θ est le vecteur unitaire dans la direction azimutale. Lorsque la vitesse angulaire du cylindre interne est augmentée au-delà d'un certain seuil, l'écoulement purement azimutal est instable, et un écoulement stationnaire axisymétrique caractérisé par l'apparition de tourbillons contra-rotatifs toroïdaux est observée. L'origine de cette instabilité est l'existence d'un gradient négatif du carré du moment cinétique, $d(rV)^2/dr < 0$, qui permet aux forces centrifuges de vaincre les forces visqueuses. L'écoulement de Taylor-Couette a fait l'objet de nombreuses études expérimentales et théoriques, depuis l'article de Taylor en 1923 [2]. Des transitions plus importantes que la vitesse angulaire du cylindre interne est augmentée au-delà de la valeur critique sont abordées dans les travaux de Di Prima et Swinney [3].

Pour les fluides non-newtoniens, peu de résultats existent dans la littérature sur la stabilité des écoulements de Taylor-Couette pour des fluides purement visqueux. Les instabilités d'un écoulement de Taylor Couette pour un fluide

purement élastiques, ont initialement été observées initialement par Giesekus [4] et ont été analysées par Muller et al [5], Larson et al [6] et Shaqfeh et al [7]. Groisman et Steinberg [8] ont montré expérimentalement que l'instabilité élastique conduit à une transition de l'écoulement fortement non linéaire. Thomas et al [9] ont étudié la formation de structures non linéaires en utilisant trois dimensions de simulation dynamique. Dans certains procédés industriels, tels que la production d'huiles et la cimentation des puits, les fluides utilisés sont fortement rhéofluidifiants et légèrement viscoélastiques. Afin d'isoler les effets de rhéofluidifiant, il est nécessaire de considérer des fluides non-newtoniens purement visqueux, avec une viscosité effective μ non linéairement décroissante avec le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Étonnamment, très peu d'études ont été consacrées à ce cas. Dans ce qui suit, nous donnons une brève revue de littérature comportant sur les principaux résultats. Nous avons choisi les modèles rhéologiques le plus couramment utilisés ; à savoir les modèles loi de puissance, Carreau et Bingham.

Pour des fluides en loi de puissance, Sinevic et al [10] ont déterminé l'apparition des tourbillons de Taylor en mesurant le couple exercé par le fluide sur le cylindre intérieur tournant. Les résultats obtenus par ces auteurs pour la solution de CMC et des solutions de Carbopol sont présentés dans la Figure 1-6. Jastrzebski et al [11] ont déterminé le nombre de Reynolds critique à partir d'une analyse de stabilité linéaire. Ils concluent que le caractère rhéofluidifiant a un effet déstabilisateur. Lockett et al [12] ont utilisé un code 2D basé sur les éléments finis pour simuler l'écoulement transitoire et un critère numérique a été utilisé pour déterminer la première bifurcation. Ils ont constaté que l'effet de stabilisation ou de déstabilisation induit par le comportement rhéofluidifiant dépend du rapport des rayons $\eta = R_1/R_2$, où R_1 et R_2 sont les rayons des cylindres interne et externe respectivement. Escudier et al [13] ont étudié la structure de l'écoulement de Taylor-Couette avec un rapport de rayon de 0,5. Les mesures de vitesse axiale et tangentielle ont été effectuées à l'aide d'un anémomètre laser-Doppler pour une solution aqueuse de gomme Xanthan rhéofluidifiante et légèrement viscoélastique ainsi que pour un mélange Lapointe/CMC rhéofluidifiante et thixotropique. Les résultats montrent que le comportement rhéofluidifiant induit un décalage radial important dans la position du tourbillon vers le corps central.

La Figure 1-6, montre le nombre de Reynolds critique, Re_c , en fonction de l'indice de structure n obtenus dans différentes études pour un fluide en loi de puissance. Le rapport de rayon est $\eta = 0.9$. Les résultats présentent des écarts assez importants. La différence relative peut atteindre une valeur allant jusqu'à 30%.

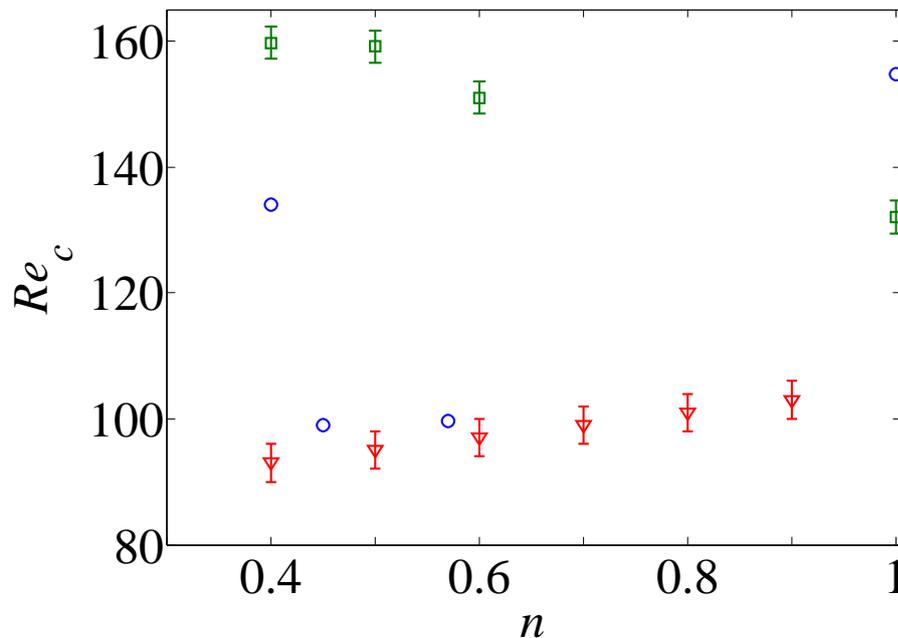


Figure 1 -6 – Nombre de Reynolds critique en fonction de l'indice de structure n pour un fluide en loi puissance. Le rapport de rayon est $\eta = 0.9$, (o) Sinevic et al [2], (\square) Caton [1] et (∇) Jastrebski et al [3].

Pour le fluide de Carreau, Ashrafi et Khayat [14] et Li et Khayat [15], ont examiné l'influence des caractères rhéofluidifiant sur la stabilité de l'écoulement de Couette circulaire dans la limite de l'espace annulaire. Les auteurs indiquent que le caractère rhéofluidifiant précipite l'apparition d'un tourbillon dans l'écoulement de Taylor-Couette et modifier la forme de branche de bifurcation dans la courbe de transition. Coronado et al [16] ont utilisé un code 2D CFD pour déterminer le début de l'instabilité. Ils concluent que si le nombre de Reynolds est défini par la viscosité calculée à la paroi intérieure tournante, le nombre de Reynolds critique calculé pour le fluide newtonien constitue une bonne estimation de l'apparition de l'instabilité pour des fluides rhéofluidifiants. Néanmoins, dans leur étude, les paramètres rhéologiques utilisés sont tels que le profil de viscosité s'écarte un peu de celui d'un fluide newtonien.

Pour le cas d'un fluide Bingham, Graebel [17] a été le premier à avoir effectué une analyse de stabilité linéaire d'un écoulement de fluide viscoplastique. Pour un écoulement dans un espace annulaire, les auteurs ont constaté que la contrainte à seuil a un effet de stabilisation. Peng et Zhu [18] et Landry et al [19] ont montré que la contrainte à seuil peut avoir un effet déstabilisateur sur une large espace annulaire des cylindres co-rotatif pour un nombre Bingham limité. Une interprétation basée sur l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation est proposée.

Récemment, Caton [1], a indiqué que, pour les fluides de la loi de puissance avec un indice de fluide inférieur à 0,2, le mode le moins stable est le mode non axisymétrique et est constitué d'un grand nombre de tourbillons cylindriques. Ce résultat surprenant n'a pas été suffisamment discuté. En fait, l'instabilité non axisymétrique dans l'écoulement de Taylor-Couette a été observée expérimentalement par Andereck et al [20] pour les fluides newtoniens lorsque les deux cylindres sont contrarotatifs. Ce régime, appelé écoulement laminaire en spirale, occupe une région étroite dans le diagramme de stabilité. Il a été également obtenu par Wan Hong-Zhan et al [21] pour une suspension de fibres par l'utilisation d'une analyse de stabilité linéaire. Le comportement rhéologique de la suspension est décrit par le modèle Ericksen et le rapport de la vitesse angulaire du cylindre extérieur à celui du cylindre intérieur est inférieur à 0,6 pour un rapport de rayon $\eta = 0,88$. Il convient de noter que dans le cas de contrarotation des cylindres, le signe de $d(rV)^2/dr$ change dans l'espace annulaire.

L'écoulement de Couette circulaire pour un fluide rhéofluidifiant est principalement caractérisé par une stratification de la viscosité dans l'espace annulaire. Le degré de stratification de la viscosité est d'autant plus important que le fluide est plus rhéofluidifiant pour de faibles valeurs du rapport de rayon η . Ainsi, quand une perturbation infinitésimale est introduite dans l'écoulement de base, la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement sont perturbés par $\delta\tau$ et $\delta\dot{\gamma}_{r\theta}$, la perturbation se fait ressentir dans la viscosité tangentielle $\mu_t = \delta\tau_{r\theta} / \delta\dot{\gamma}_{r\theta}$ plutôt que dans la viscosité effective. Cela conduit à une anisotropie de la perturbation du tenseur du cisaillement τ' .

CHAPITRE 2

FORMULATION MATHÉMATIQUE

2-1 INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à la présentation des équations gouvernant le problème et la méthode numérique pour sa résolution. Dans la première partie, on donne les équations gouvernant le problème et on fait ressortir les différents paramètres adimensionnels qui interviennent dans le problème. Dans la deuxième partie, on décrit l'écoulement de base. Il s'agit de l'écoulement unidirectionnel stationnaire d'un fluide rhéofluidifiant pour un écoulement de Taylor couette. On analyse l'influence des paramètres rhéologiques sur la structure de l'écoulement de base. En suite, on donne les équations aux perturbations en faisant ressortir en particulier les termes qui font intervenir la perturbation de la viscosité. La dernière partie est consacrée à la description de la méthode numérique utilisée.

2-2 FORMULATION DU PROBLEME

L'écoulement d'un fluide incompressible entre deux cylindres coaxiaux infiniment longs est considéré. Le cylindre intérieur de rayon \widehat{R}_1 tourne à la vitesse angulaire $\widehat{\Omega}_1$, le cylindre extérieur de rayon \widehat{R}_2 tourne à la vitesse angulaire $\widehat{\Omega}_2$. L'écoulement dans l'espace annulaire est régi par les équations de continuité et de mouvement. Sous forme dimensionnelle, celles-ci sont données par :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\widehat{V}} &= 0 \\ \widehat{\rho} \left[\frac{\partial \vec{\widehat{V}}}{\partial \widehat{t}} + (\vec{\widehat{V}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\widehat{V}} \right] &= -\vec{\nabla} \widehat{P} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\widehat{\tau}} \quad , \end{aligned} \quad 2-1$$

où \widehat{p} est la pression, $\vec{\widehat{V}}$ est la vitesse et $\vec{\widehat{\tau}}$ est le déviateur du tenseur des contraintes. Le vecteur vitesse est de la forme : $\vec{\widehat{V}} = \widehat{u} \vec{e}_r + \widehat{v} \vec{e}_\theta + \widehat{w} \vec{e}_z$, où \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_z sont les vecteurs unitaires dans les directions radiale \widehat{r} , azimutale $\widehat{\theta}$ et axiale \widehat{z} .

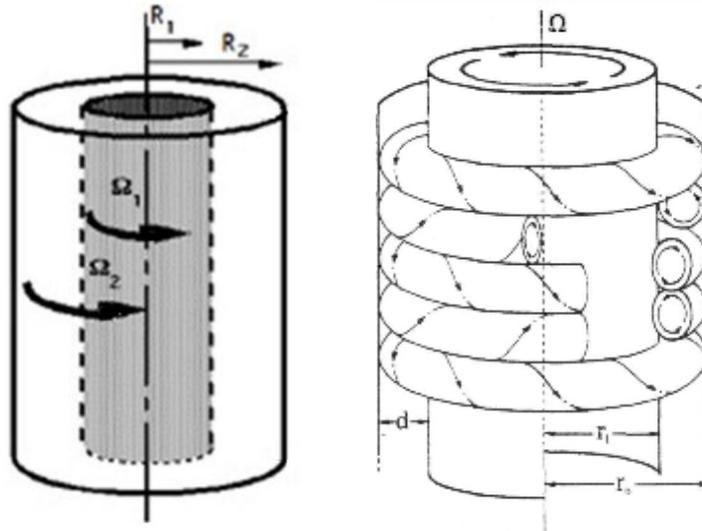


Figure 2-1. (Gauche) Dispositif de Taylor Couette. (Droite) Structure en rouleaux toroïdaux de l'écoulement.

La condition de non glissement à la paroi impose les conditions suivantes :

$$\widehat{U}(\widehat{r} = \widehat{R}_1) = \widehat{R}_1 \widehat{\Omega}_1 \quad 2-2$$

$$\widehat{U}(\widehat{r} = \widehat{R}_2) = \widehat{R}_2 \widehat{\Omega}_2 \quad 2-3$$

2-3 Loi de comportement

Nous considérons ici le cas de fluides purement visqueux sans élasticité :

$$\overline{\overline{\tau}} = \overline{\overline{\mu}} \overline{\overline{\dot{\gamma}}} \quad 2-4$$

ou $\overline{\overline{\dot{\gamma}}}$ est le tenseur des taux de déformation défini par :

$$\hat{\dot{\gamma}} = \left[\hat{\nabla} \hat{U} + \left(\hat{\nabla} \hat{U} \right)^T \right] \quad 2-5$$

La viscosité est une fonction du deuxième invariant de $\overline{\overline{\dot{\gamma}}}$:

$$\mu = \mu(\gamma_{II}) \quad 2-6$$

Avec :

$$\hat{\dot{\gamma}}_{II} = \left(\frac{1}{2} \hat{\dot{\gamma}}_{ij} \hat{\dot{\gamma}}_{ij} \right)^{1/2} \quad 2-7$$

2-3-1 Choix d'un modèle de fluide rhéofluidifiant

Les fluides rhéofluidifiant sont des fluides pour lesquels la viscosité diminue lorsque le cisaillement augmente. D'une manière générale, le comportement rhéofluidifiant traduit une modification de la structure interne du fluide lorsque le cisaillement augmente de manière à réduire la dissipation visqueuse et faciliter l'écoulement. Dans le cas des solutions de polymères, le comportement rhéofluidifiant est associé à la rupture des liaisons d'hydrogène dans les agrégats de macromolécules. Dans le cas d'une suspension de particules, le mécanisme physique décrivant le comportement rhéofluidifiant a été décrit par Quemada [32]. Globalement, la diminution de viscosité est liée à la déstructuration d'agrégats de particules par les forces hydrodynamiques. Plusieurs modèles rhéologiques ont été proposés pour décrire le comportement rhéofluidifiant d'un fluide non newtonien.

- **loi de puissance**

Une des lois empiriques utilisée en rhéologie pour des fluides visqueux est la loi de puissance appelée aussi loi d'Ostwald, ce modèle est probablement le plus populaire. Pour ce modèle, la viscosité varie avec selon $\dot{\gamma}_{II}$ le modèle suivant :

$$\hat{\tau} = \hat{\mu} \dot{\gamma} \quad 2-8$$

$$\hat{\mu} = \hat{k} \dot{\gamma}_{II}^{n-1} \quad 2-9$$

Dans ce modèle, \hat{k} représente l'indice de consistance et n ($n < 1$) est un nombre sans dimension nommé indice de l'écoulement.

Cependant, ce modèle présente deux inconvénients : d'une part, la viscosité tend vers l'infini quand le cisaillement tend vers zéro ; et d'autre part, la viscosité tend vers zéro quand le cisaillement tend vers l'infinie.

Pour cela un autre modèle a été adopté : le modèle de Carreau.

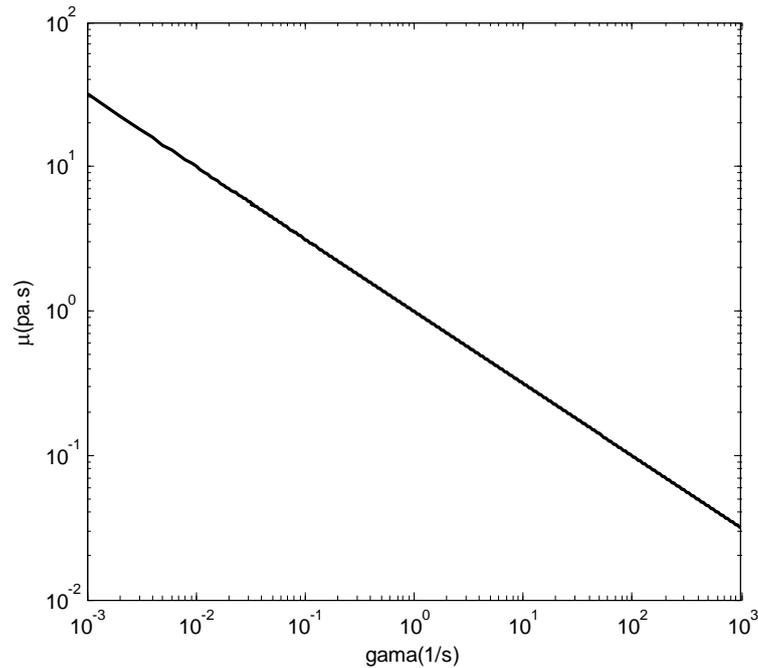


Figure 2.2 – Diagramme log-log de la viscosité μ en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ pour une viscosité en loi de puissance.

- **Fluide de Carreau**

Dans le cas d'une loi de Carreau, la variation de la viscosité $\hat{\mu}$ avec $\hat{\gamma}$ est donné par :

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{\infty} + (\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_{\infty}) \left[1 + \left(\hat{\lambda} \dot{\gamma} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad 2-10$$

Dans ce modèle μ_0 et μ_{∞} sont les viscosités limites du fluide, aux faibles et aux forts taux de cisaillement respectivement. Le paramètre $\hat{\lambda}$ est une constante de temps, plus précisément $1/\hat{\lambda}$ est la valeur critique à partir de laquelle la rhéofluidification se manifeste.

La figure (2-3) montre que ce modèle peut décrire une large gamme de taux de cisaillement de comportement rhéologique de solution de polymères.

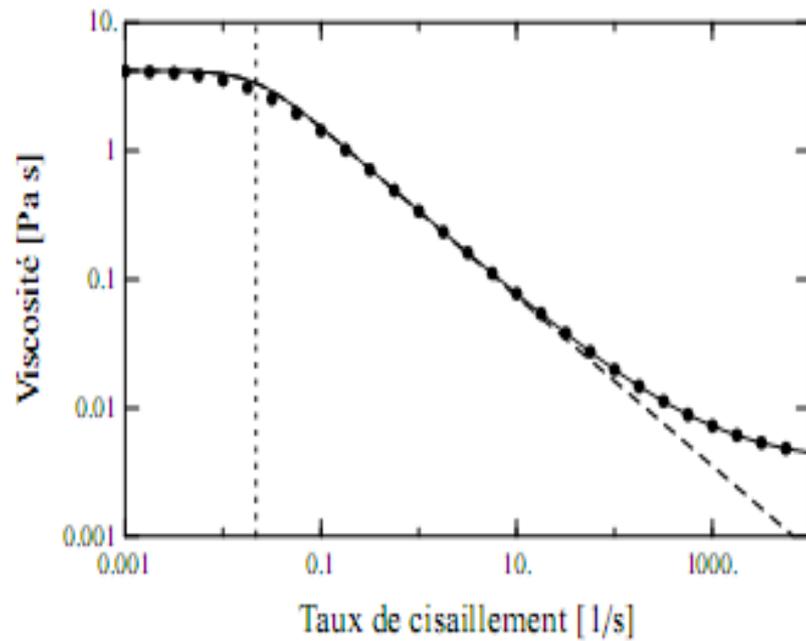


Figure 2.3 – Diagramme log-log de la viscosité $\hat{\mu}$ en fonction du taux de cisaillement $\hat{\gamma}$ pour le fluide 0.125% PAA étudié par Escudier et al [13]. La courbe continue résulte du modèle de Carreau, avec $n = 0.66$, $\lambda = 45.8 \text{ s}^{-1}$, $\hat{\mu}_0 = 4.22 \text{ Pa.s}$, $\hat{\mu}_\infty = 0.00372 \text{ Pa.s}$. La courbe en tirets résulte du modèle de Carreau avec les mêmes paramètres sauf $\hat{\mu}_\infty = 0$. La droite verticale en pointille indique le taux de cisaillement caractéristique $1/\hat{\lambda}$.

- **Fluide de Bingham**

Le modèle de Bingham décrit le comportement de fluides qui ne s'écoulent que lorsque la contrainte est supérieure à un seuil. Ce comportement peut être mis en évidence dans certaines boues argileuses, pâtes, suspensions concentrées etc.... En utilisant, le critère de Von-Mises, le modèle de Bingham s'écrit [[Bird et al]:

$$\hat{\tau} = \begin{cases} \left[\hat{\mu}_p + \frac{\hat{\tau}_0}{\hat{\gamma}_H} \right] \hat{\gamma} & \text{si } \hat{\tau}_H > \hat{\tau}_0 \\ \hat{\gamma} = 0 & \text{si } \hat{\tau}_H \leq \hat{\tau}_0 \end{cases} \quad 2-11$$

où $\hat{\mu}_p$ est la viscosité plastique, $\hat{\tau}_0$ est le seuil de contrainte, $\overline{\dot{\gamma}}$ et $\hat{\tau}_{II}$ sont les deuxièmes invariants du tenseur des taux de déformation, γ , et du déviateur du tenseur des contraintes.

Un fluide de Bingham se comporte d'un point de vue cinématique comme un solide indéformable si les contraintes qui lui sont appliquées sont inférieures à la contrainte seuil ($\tau_{II} < \tau_c$). Dès que cette contrainte est atteinte ($\tau_{II} > \tau_c$), le fluide a alors un comportement rhéofluidifiant.

- **Modèle de Herschel-Bulkley.**

Le modèle d'Herschel-Bulkley est une généralisation de modèle de Bingham [19].

$$\begin{aligned} \overline{\tau} &= \left(\frac{\hat{\tau}_0}{\hat{\gamma}_{II}} + \hat{k} \hat{\gamma}_{II}^{n-1} \right) \overline{\dot{\gamma}} & \text{si } \hat{\tau}_{II} > \hat{\tau}_0 \\ \overline{\dot{\gamma}} &= 0 & \text{si } \hat{\tau}_{II} \leq \hat{\tau}_0 \end{aligned} \quad 2-12$$

où \hat{k} est la consistance du fluide en Pa. s²⁻ⁿ, n est l'indice de structure du fluide,

Les paramètres rhéologiques n , \hat{k} et $\hat{\tau}_0$ sont déterminés à partir des courbes d'écoulement de cisaillement et d'essais de fluage effectués à l'aide d'un rhéomètre fonctionnant à couple imposé. Lorsque $n=1$ et $\tau_0=0$, on retrouve le cas newtonien, $n=1$ et $\tau_0 \neq 0$ correspond au cas d'un fluide de Bingham ; $n \neq 0$ et $\tau_0=0$ correspond au fluide d'Ostwald. Le fluide est dit rhéofluidifiant lorsque $n < 1$ et rhéoépaississant dans le cas contraire.

La figure (2-4) montre un exemple de variation de contraintes avec le cisaillement pour des écoulements de fluides à seuil et newtonien. Les solutions de Carbopol 940 après neutralisation constituent un exemple classique d'un fluide à seuil. Le sirop de glucose est classé comme un exemple de fluide newtonien [28].

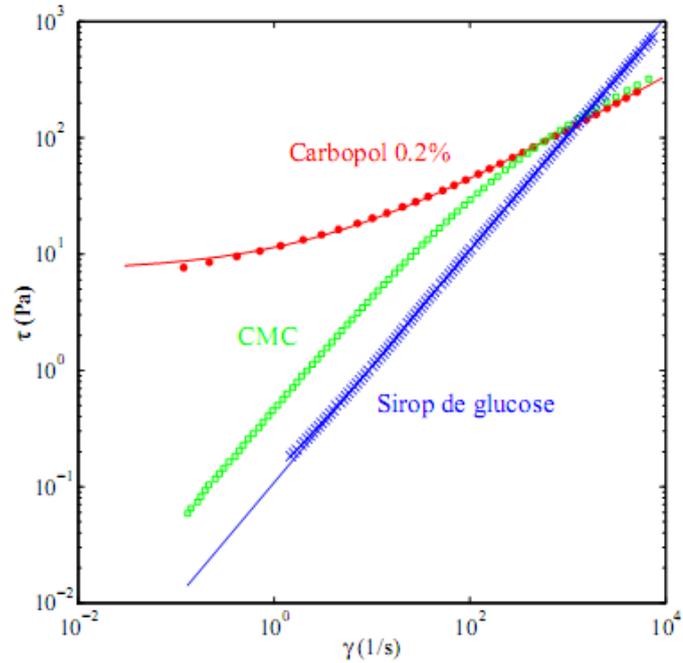


Figure 2-4- Evolutions de de contrainte τ (γ) en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ pour : Sirop de glucose (cas Newtonien) ; Solution de Carbopol (fluide à seuil) ; Solution de CMC (modèle de Cross) [28].

- **Modèle Cross**

Dans ce cas, on utilise le modèle général de Cross sous la forme suivante :

$$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = \frac{1}{1 + (k\dot{\gamma})^m} \quad 2-13$$

où

- k et m sont définissant la forme de la courbe $\mu = f(\dot{\gamma})$;
- μ_0 est la viscosité pour un taux de cisaillement nul ;
- μ_{∞} est l'asymptote viscosité pour un taux de cisaillement très élevée.

Ces paramètres sont propres au matériau et sont obtenus par des essais.

Ce modèle est également présenté sous une forme à trois paramètres [Bird et al]:

$$\mu = \frac{\mu_{\infty}}{1 + (k\dot{\gamma})^{m-1}} \quad 2-14$$

où λ est une constante de temps.

- **Modèle d'Ellis**

Ce modèle est représenté par :

$$\tau = \frac{\mu_0 \dot{\gamma}}{1 + (\tau + \tau_{1/2})^{\alpha-1}} \quad 2-15$$

où μ_0 : viscosité de la 1^{ère} région newtonienne.

$\alpha > 1$: traduit l'écart avec le comportement newtonien.

$\tau_{1/2}$: contrainte pour laquelle $\mu = \mu_0/2$

Remarque : quand $\mu \ll \mu_0$, on retrouve la loi de puissance.

2-4 EQUATIONS ADIMENSIONNELLES

Les équations de mouvement et de continuité sont mises sous forme adimensionnelle en utilisant la vitesse de rotation du cylindre intérieur comme échelle caractéristique de vitesse, l'espace annulaire $\hat{d} = \hat{R}_2 - \hat{R}_1$ comme échelle de longueur, la vitesse du cylindre intérieur $\hat{\Omega}_1 \hat{R}_1$ comme échelle de vitesse, le temps de diffusion visqueuse $\hat{\rho} \hat{d}^2 / \hat{\mu}_{ref}$ comme échelle de temps et la quantité

$\hat{\mu}_{ref} \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 / \hat{d}$ et comme échelle de contrainte de pression, où $\hat{\mu}_{ref}$ est une viscosité de référence. Aux équations précédentes, on rajoute la condition d'adhérence du fluide aux parois comme condition aux limites. Pour toute cette étude, les quantités munies du symbole (^) désignent des quantités dimensionnelles.

$$U = \frac{1}{\hat{\Omega}_1 \hat{R}_1} \hat{U} \quad t = \frac{\hat{\rho} \hat{d}^2}{\hat{\mu}_{ref}} \quad P = \frac{1}{\hat{P}_0} \hat{P} \quad P_0 = \frac{\hat{\mu}_p \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1}{\hat{d}} \quad r = \frac{1}{\hat{d}} \hat{r}, \quad 2-16$$

$$\text{où } d = \hat{R}_2 - \hat{R}_1 \quad \eta = \frac{\hat{R}_1}{\hat{R}_2} \quad R_1 = \frac{\eta}{1-\eta} \quad R_1 = \frac{\eta}{1-\eta} \quad R_2 = \frac{1}{1-\eta} \quad 2-17$$

Les équations de continuité et de Navier-Stokes adimensionnelles deviennent alors :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{Re}_1 (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad 2-18$$

Le nombre de Reynolds apparaissant dans l'équation précédente est défini par :

$$\text{Re}_1 = \frac{\hat{\rho} \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 \hat{d}}{\hat{\mu}_{ref}} \quad 2-19$$

Il s'agit du nombre de Reynolds interne, associé à la rotation du cylindre intérieur.

De la même façon, on définit le nombre de Reynolds externe par :

$$\text{Re}_2 = \frac{\hat{\rho} \hat{R}_2 \hat{\Omega}_2 \hat{d}}{\hat{\mu}_{ref}} \quad 2-20$$

Aux équations précédentes, il faut rajouter les équations constitutives.

Dans cette étude, seul le cas de fluides rhéofluidifiants est considéré, c'est-à-dire des fluides dont la viscosité effective μ décroît lorsque le taux de cisaillement augmente. Dans les calculs, trois modèles rhéologiques différents sont considérés : le modèle de Bingham (rhéofluidifiant avec seuil de contrainte), le modèle en loi de puissance et le modèle de Carreau. Après adimensionnement, les lois de comportement s'écrivent :

- **Fluide de Bingham**

A l'aide des grandeurs adimensionnelles, L'équation constitutive 2-7 prend la forme suivante :

$$\hat{\tau} = \begin{cases} \left[1 + \frac{B}{\dot{\gamma}_{II}} \right] \dot{\gamma} & si \quad \tau > B \\ \dot{\gamma} = 0 & si \quad \tau \leq B \end{cases} \quad 2-21$$

Le nombre de Bingham est défini par $B = \frac{\hat{\tau}_0}{\hat{\mu}_{ref} \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 / \hat{d}}$. 2-22

- **Loi de puissance**

La loi de comportement adimensionnelle pour un fluide en loi de puissance s'écrit :

$$\tau = \mu \dot{\gamma}^{n-1} \quad 2-23$$

Dans ce modèle, la viscosité de référence est donnée par :

$$\mu_{ref} = \hat{k} \left(\hat{R}_1 \hat{\Omega} / \hat{d} \right)^{n-1} \quad 2-24$$

- **Fluide de Carreau**

La loi de comportement adimensionnelle pour un fluide de Carreau s'écrit :

$$\mu = \frac{\mu_{\infty}}{\mu_0} + \left(1 - \frac{\mu_{\infty}}{\mu_0} \right) \left[1 + \left(\lambda \dot{\gamma}_{II} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad 2-25$$

En ce qui concerne la viscosité de référence $\hat{\mu}_{ref}$, nous avons adopté dans un premier temps les expressions largement utilisées dans la littérature qui dépendent du modèle rhéologique considéré [33]. Pour le modèle de Bingham, la viscosité de référence $\hat{\mu}_{ref}$ utilisée est la viscosité plastique $\hat{\mu}_p$ et pour le fluide de Carreau, la viscosité de référence est choisie comme étant la viscosité à cisaillement nul μ_0 et la viscosité dite nominale $\hat{k} \left(\hat{R}_1 \hat{\Omega} / \hat{d} \right)^{n-1}$, où k est la consistance du fluide pour la loi de puissance. La discussion sur le choix de la viscosité de référence est reportée ultérieurement.

2-5-ÉCOULEMENT DE BASE

L'écoulement de base est supposé stationnaire avec un champ de vitesse purement azimutale $V = (0, V^b(r), 0)$. L'équation de mouvement, écrite en coordonnées cylindrique, donne :

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \tau_{r\theta}^b \right) \quad 2-26$$

Avec : $\tau_{r\theta}(R_1) = \tau_1 \quad 2-27$

Avec les conditions aux limites sur le cylindre intérieur et extérieur

$$V^b(R_1) = \Omega_1 R_1 \quad V^b(R_2) = \Omega_2 R_2 \quad 2-28$$

- **Fluide de Bingham**

Le fluide de Bingham, se caractérise d'une part par une modification de la zone où l'écoulement est cisailé et d'autre part, par le caractère rhéofluidifiant.

A l'aide des grandeurs adimensionnelles, L'équation constitutive 2-26 prend la forme suivante :

$$\tau_{r\theta} = \left(1 + \frac{B}{\dot{\gamma}} \right) \dot{\gamma}_{r\theta} \quad \tau > B \quad 2-29$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \tau < B$$

Le taux de cisaillement est calculé par :

$$\dot{\gamma}_{r\theta} = d_r V - \frac{V}{r} \quad \dot{\gamma}_{II} = \left| \dot{\gamma}_{r\theta} \right| = \left| d_r V - \frac{V}{r} \right| \quad 2-30$$

L'écoulement de base dépend la contrainte appliqué au cylindre intérieur

τ_i et du nombre de Bingham. Il est caractérisé par l'existence de deux régions : la première est la zone où l'écoulement est cisailé et la deuxième une zone, adjacente au cylindre extérieur où le cisaillement est nul.

1. **Région 1** : tout l'espace annulaire est cisailé $\frac{|\tau_i|}{B} > \left(\frac{1}{\eta} \right)^2$

$$\text{où} \quad B = \frac{|\tau_i|}{R_y^2} R_1^2 \quad 2-31$$

A partir de l'équation 2-25 et l'équation 2-28 on trouve :

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{V^b}{r} \right) = \frac{|\tau_i|}{r^2} R_1^2 + B \quad 2-32$$

Après l'intégration on obtient :

$$V^b = \frac{|\tau_i|}{r} R_1^2 + Br \ln(r) + cr \quad 2-33$$

$$\text{Avec :} \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

Les constantes τ_i et c sont déterminés par les conditions aux limites :

$$V(R_1) = \Omega_1 R_1 \quad V(R_2) = \frac{R_2 \Omega_2}{R_1 \Omega_1} = \frac{\Omega_2}{\eta} \quad 2-34$$

Avec :

$$R_y = \sqrt{\frac{|\tau_i|}{B}} R_1^2 \quad 2-35$$

On obtient alors :

$$V^b = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \frac{1}{R_1} r + \frac{1}{2} \tau_i R_1^2 r \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r^2} \right) - Br \ln \left(\frac{R_2}{r} \right) \quad 2-36$$

$$R_1 \leq r \leq R_2$$

Après calculs on trouve :

$$\tau_i = \frac{2}{\eta^2 - 1} \left(\left(1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right) \frac{1 - \eta}{\eta} - B \ln(\eta) \right) \quad 2-37$$

2. **Région 2 :** C'est la zone où l'écoulement est cisailé, dans ce cas, on a :

$$1 < \frac{|\tau_i|}{B} < \left(\frac{1}{\eta} \right)^2 \quad 2-38$$

Après calculs on trouve :

$$V^b = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \frac{1}{R_1} r + \frac{1}{2} \tau_i R_1^2 r \left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{r^2} \right) - Br \ln \left(\frac{R_y}{r} \right), \quad R_1 \leq r \leq R_y \quad 2-39$$

$$V^b = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \frac{1}{\eta} \quad \text{Pour } R_y \leq r \leq R_2$$

Pour déterminer la valeur de τ_i dans la deuxième région, on utilise les conditions aux limites : $V(R_1) = \Omega_1 R_1$.

$$\text{On trouve : } \frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1 + \frac{BR_1}{2} \left(\ln \left(\frac{|\tau_i|}{B} \right) - \frac{|\tau_i| + 1}{B} \right) = 0 \quad \text{pour } B < |\tau_i| < B \left(\frac{1}{\eta} \right)^2 \quad 2-40$$

L'équation (2-29) est résolue de façon numérique en utilisant un processus itératif basé sur la méthode de dichotomie classique.

Les figures 2-5 et 2-6 représentent les profils de vitesses pour deux rapport de rayon $\eta=0.4$ et $\eta=0.881$ pour le cas ou $Re_2=0$, et la figure 2-7 représente le cas on a une contre-rotation des cylindres ($Re_1=300$, $Re_2=-3000$). On peut remarquer que lorsque le caractère rhéofluidifiant augmente, la valeur absolue du gradient de vitesse croit sur la paroi intérieure et décroît sur la paroi extérieure.

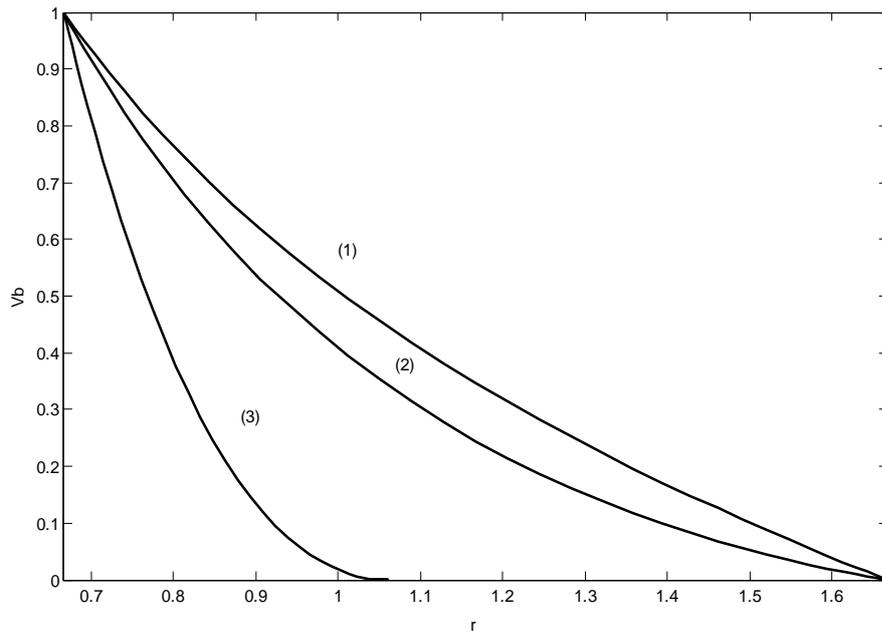


Figure 2-5 : Profils de vitesse azimutale pour un fluide de Bingham ($Re_2=0$) pour un rapport de rayon $\eta=0.4$: (1) Cas Newtonien $B=0$; (2) Cas où tout l'espace annulaire est cisailé $B=0.5$; (3) Cas où une zone étroite est cisailée $B=5$.

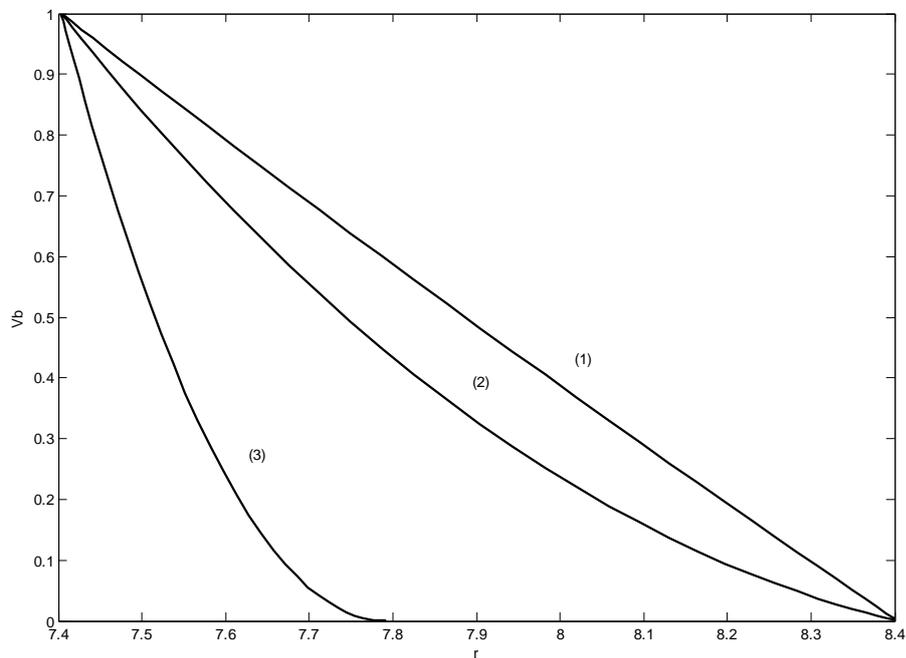


Figure 2-6 : Profils de vitesse azimutale pour un fluide de Bingham ($Re_2=0$) pour un rapport de rayon $\eta=0.883$; (1) Cas Newtonien $B=0$; (2) Cas où tout l'espace annulaire est cisailé $B=5$; (3) Cas où une zone étroite est cisailée $B=50$.

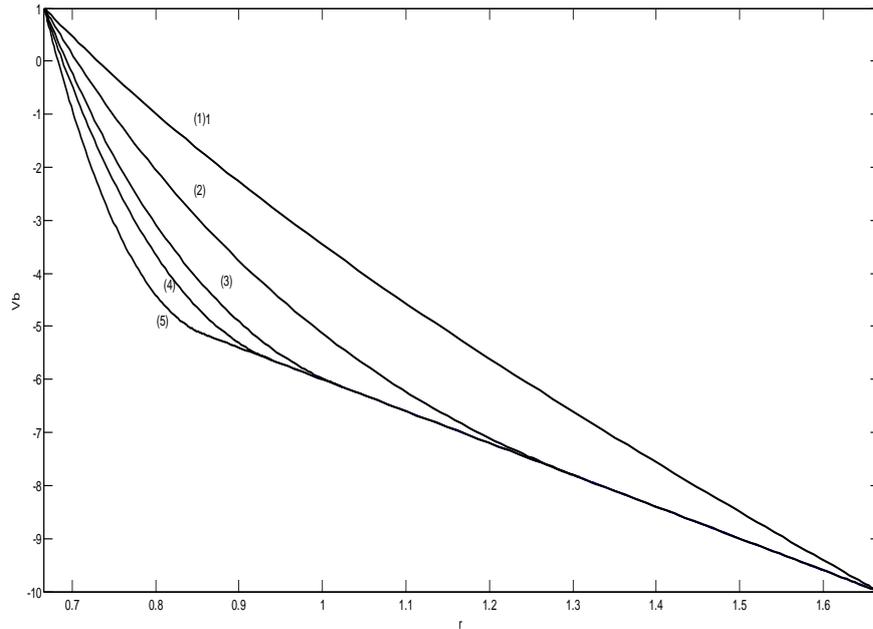


Figure 2-7 : Profils de vitesse azimutale pour un fluide de Bingham ($Re_1=300$, $Re_2=-3000$) pour un rapport de rayon $\eta=0.4$ (1) $B = 0$ fluide Newtonien; (2) $B = 1$; (3) $B = 30$; (4) $B = 50$, (5) $B = 100$.

Les profils de viscosité, pour un fluide de Bingham, sont donnés dans les figures 2-8 et 2-9. On remarque une augmentation des valeurs de μ_b de l'intérieur vers la paroi extérieure où le taux de cisaillement est plus faible. Si la viscosité de cisaillement de la paroi interne est utilisée comme référence, on peut observer que la viscosité globale augmente avec l'effet de la rhéofluidification.

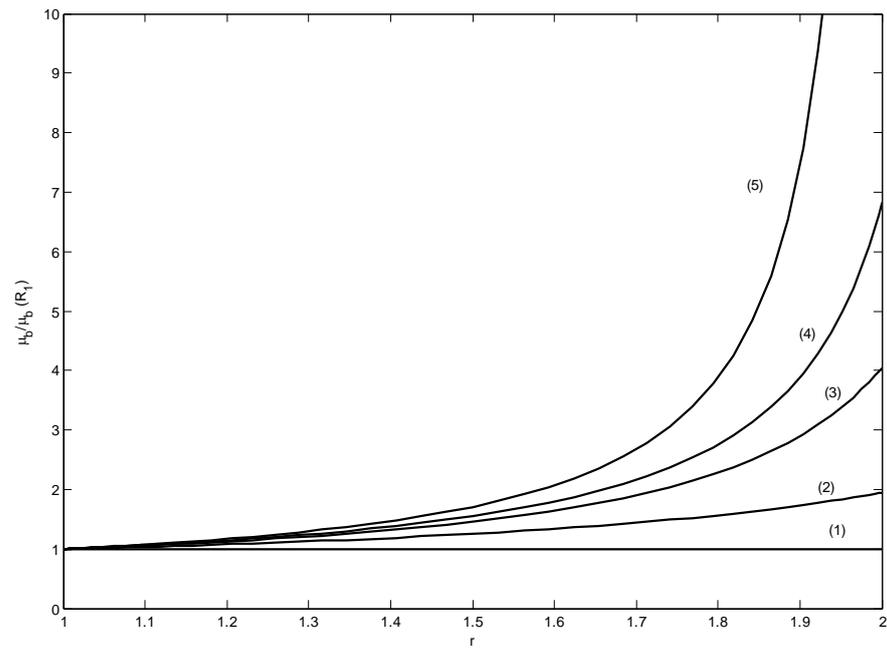


Figure 2-8 Profils de viscosités pour un fluide de Bingham (Zone 1) $Re_2=0$ pour un rapport de rayon $\eta=0.5$: (1) $B = 0$ fluide Newtonien ;(2) $B = 0.5$;(3) $B = 0.85$; (4) $B = 1$ et (5) $B = 1.23$.

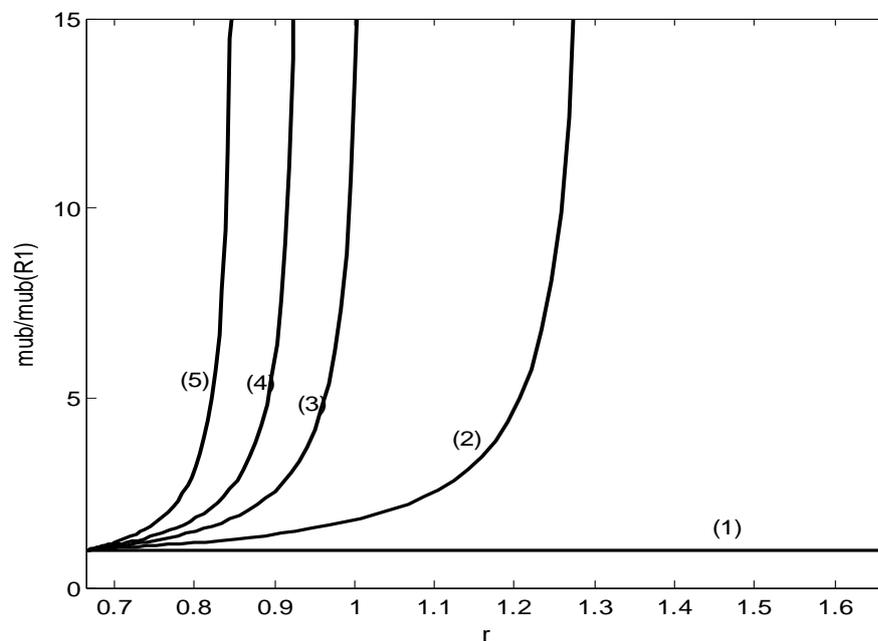


Figure 2-9 Profils de viscosités pour un fluide de Bingham $Re_1=300$, $Re_2=-3000$ pour un rapport de rayon $\eta=0.4$: (1) $B = 0$ fluide Newtonien ;(2) $B = 10$;(3) $B = 30$;(4) $B = 50$ et (5) $B = 50$.

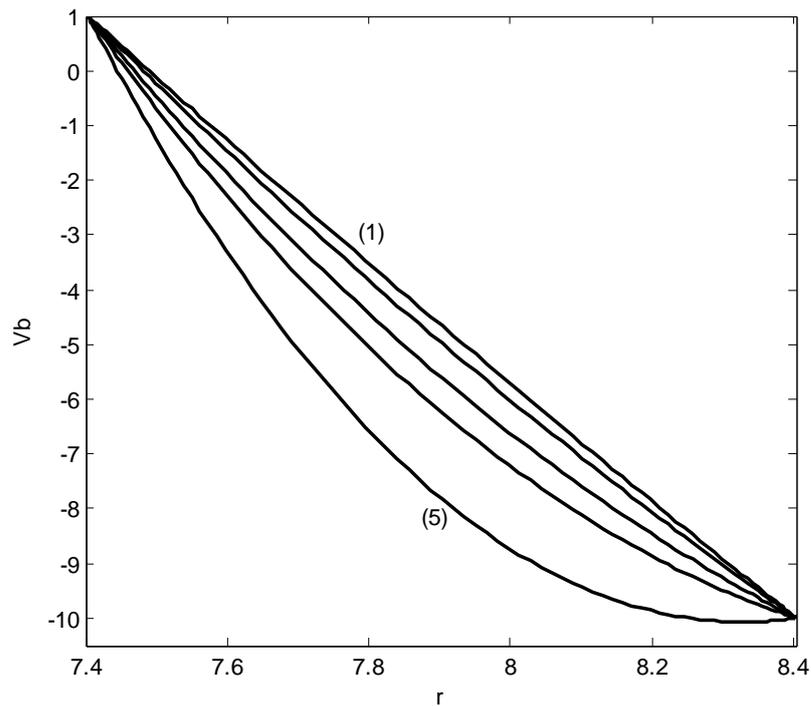


Figure 2-10 : Profils de vitesse pour un fluide de Bingham ($Re_1=300$, $Re_2=-3000$) pour un rapport de rayon $\eta=0.881$ (1) $B=0$ fluide Newtonien; (2) $B=1$; (3) $B=30$; (4) $B=50$, (5) $B=100$.

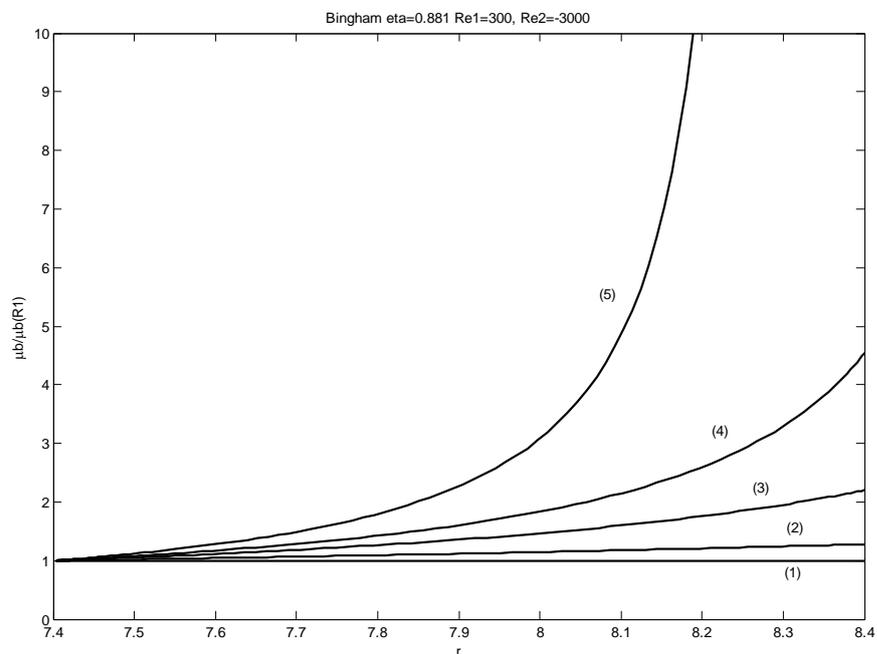


Figure 2-11 Profils de viscosités pour un fluide de Bingham $Re_1=300$, $Re_2=-3000$ pour un rapport de rayon $\eta=0.881$: (1) $B=0$ fluide Newtonien ;(2) $B=0.5$; (3) $B=0.85$;(4) $B=1$ et (5) $B=1.23$.

- **Fluide en loi de puissance**

Pour un fluide en loi de puissance l'équation 2-26 conduit à :

$$\tau_{r\theta} = \frac{C}{r^2} \quad 2-41$$

où C est une constante

Pour un fluide en loi de puissance, la contrainte s'exprime en fonction du taux de cisaillement $\hat{\tau} = \hat{\mu} \hat{\gamma}$ et on obtient :

$$k \dot{\gamma}^{n-1} = \frac{C}{r^2} \quad 2-42$$

Le taux de cisaillement est calculé par :

$$\dot{\gamma}_{r\theta} = d_r V^b - \frac{V^b}{r} \quad \dot{\gamma}_{II} = \left| \dot{\gamma}_{r\theta} \right| = \left| d_r V^b - \frac{V^b}{r} \right| \quad 2-43$$

La distribution de vitesse de l'écoulement de base s'écrit :

$$V^b = \frac{r}{R_1} \left[1 - \left(\frac{1}{R_2^{\frac{2}{n}}} - \frac{1}{R_2^{\frac{2}{n}}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}} - \frac{1}{R_1^{\frac{2}{n}}} \right) \right] \quad 2-44$$

Les vitesses de l'écoulement de base pour deux rapports de rayons différents ($\eta=0.881$ et $\eta=0.4$) sont donnés dans les figures 2-12 et 2-13 pour différentes valeurs de l'indice de fluide pour le cas où $Re_2 \neq 0$. On peut remarquer que lorsque le caractère rhéofluidifiant augmente, la valeur absolue du gradient de vitesse croît sur la paroi intérieure et décroît sur la paroi extérieure.

Les figures 2-12 et 2-13 représentent les profils de vitesses pour deux rapports de rayons différents ($\eta=0.881$ et $\eta=0.4$) pour le cas où $Re_2 \neq 0$. La figure 2-14 représente le cas de cylindres contre-rotatifs avec $Re_1=300$ et $Re_2=-3000$. La vitesse croît sur la paroi intérieure et décroît sur la paroi extérieure. La figure 2-15 représente le cas de cylindres co-rotatifs avec $Re_1=300$ et $Re_2=3000$. On remarque que la vitesse décroît sur la paroi intérieure et croît sur la paroi extérieure.

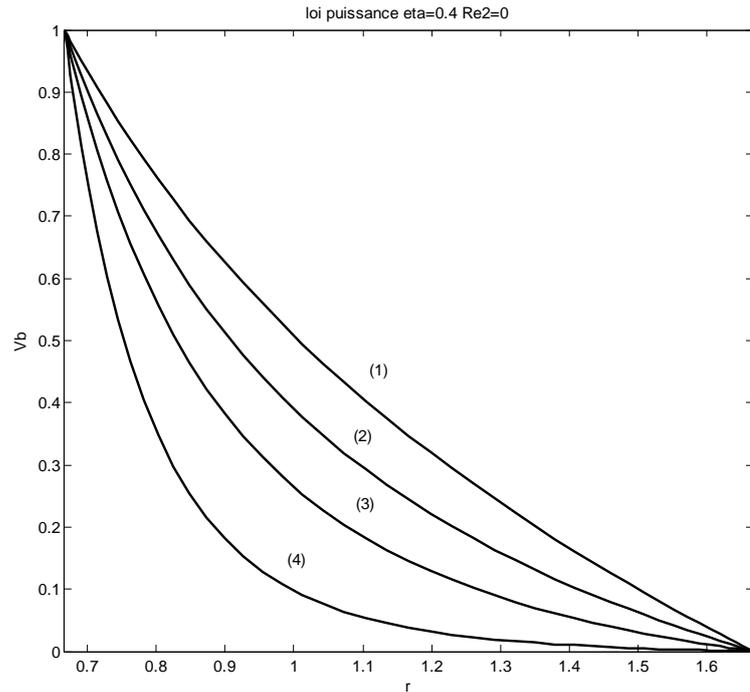


Figure 2-12: Profils de vitesse azimutale pour un fluide en loi de puissance ($Re_2=0$) pour un rapport de rayon $\eta=0.4$, (1) $n=1$ fluide Newtonien; (2) $n=0.7$; (3) $n=0.5$; (4) $n=0.3$.

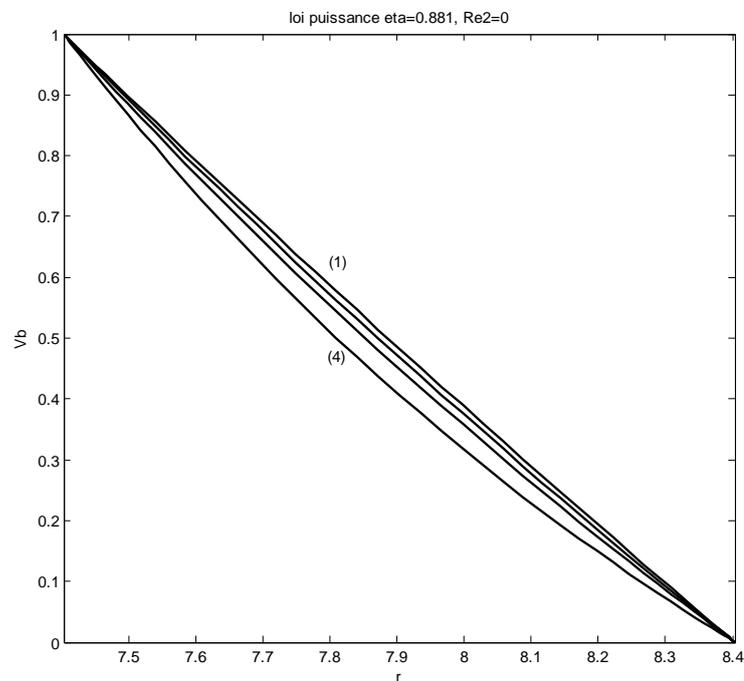


Figure 2-13 : Profils de vitesse azimutale pour un fluide en loi de puissance ($Re_2=0$) pour un rapport de rayon $\eta=0.881$, (1) $n=1$ fluide Newtonien; (2) $n=0.7$; (3) $n=0.5$; (4) $n=0.3$.

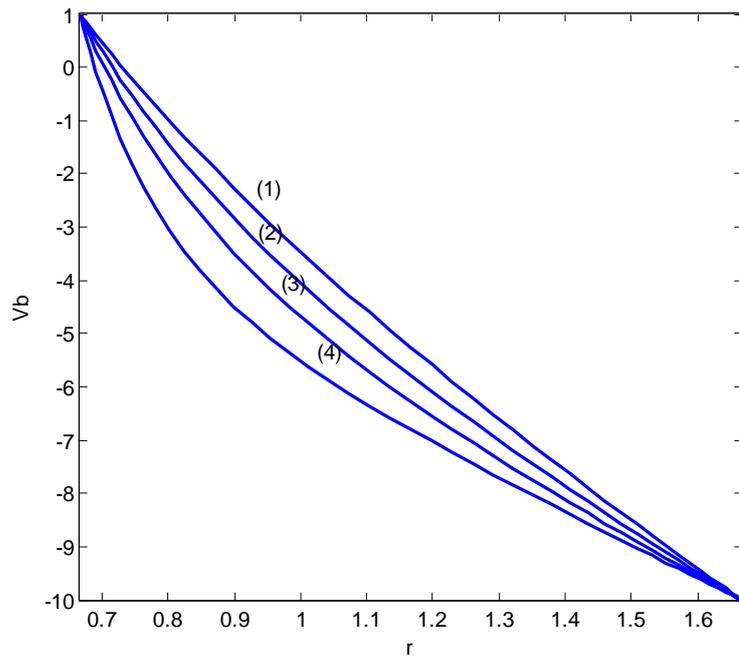


Figure 2-14 : Profils de vitesse azimutale pour un fluide en loi de puissance $Re_1=300$, $Re_2=-3000$ pour un rapport de rayon $\eta=0.4$, (1) $n=1$ fluide Newtonien; (2) $n=0.7$; (3) $n=0.5$; (4) $n=0.3$.

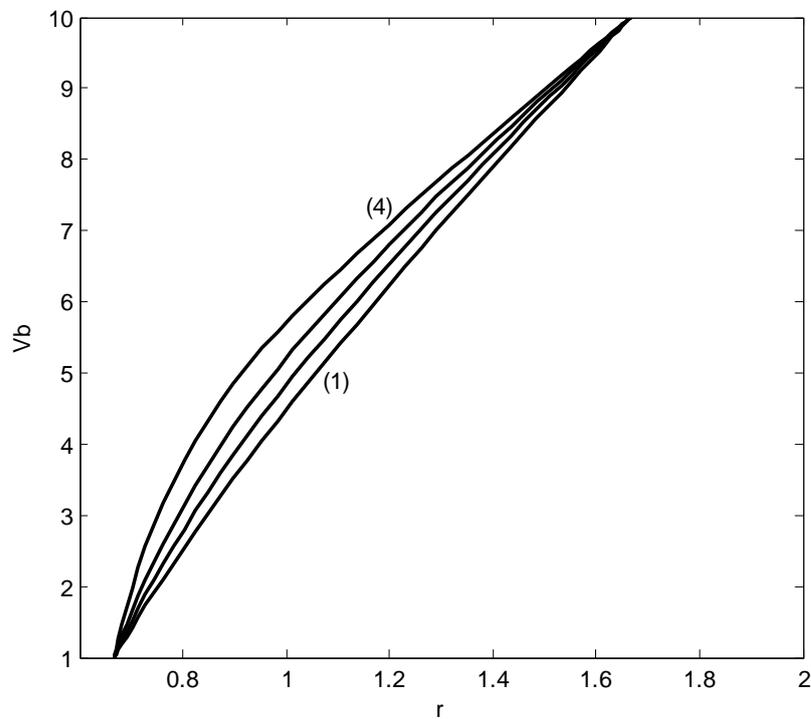


Figure 2-15 : Profils de vitesse (co-rotation) pour un fluide en loi de puissance $Re_1=300$, $Re_2=3000$ pour un rapport de rayon $\eta=0.4$ (1) $n=1$ fluide Newtonien; (2) $n=0.7$; (3) $n=0.5$; (4) $n=0.3$.

D'après les résultats obtenus, on remarque aussi que la viscosité varie peu entre les deux cylindres. Pour un rapport de rayons de 0.4, les effets rhéofluidifiant se manifestent plus, avec une plus forte stratification de la viscosité. La viscosité de base (comme indiquée dans les figures 2-16 et 2-17) augmente avec la position radiale. Cette augmentation est d'autant plus forte que le fluide est rhéofluidifiant. D'autre part, on remarque une augmentation des valeurs de μ_b de l'intérieur vers la paroi extérieure où le taux de cisaillement est faible. Si la viscosité de cisaillement de la paroi interne est utilisée comme référence, on peut observer que la viscosité globale augmente avec l'effet de fluidification par cisaillement. Pour le fluide en loi de puissance, le gradient de viscosité $d\mu^b / dr$ sur la paroi intérieure augmente quand en diminuant l'indice de fluide n comme le montrent les figures 2-18 et 2-19.

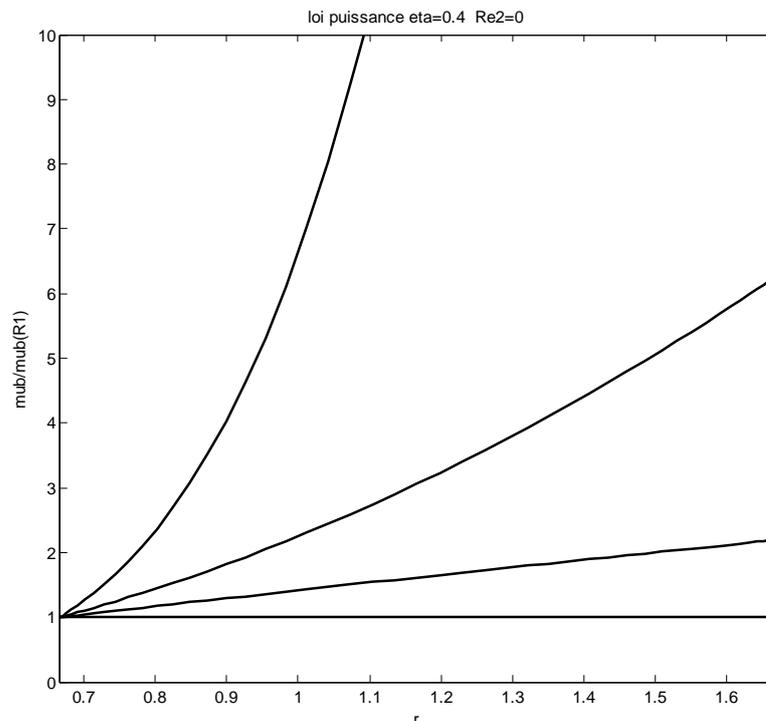


Figure 2-16 : Profils de viscosité pour un fluide en loi de puissance $Re_2=0$ pour un rapport de rayon $\eta=0.4$ (1) $n=1$ fluide Newtonien; (2) $n=0.7$; (3) $n=0.5$; (4) $n=0.3$.

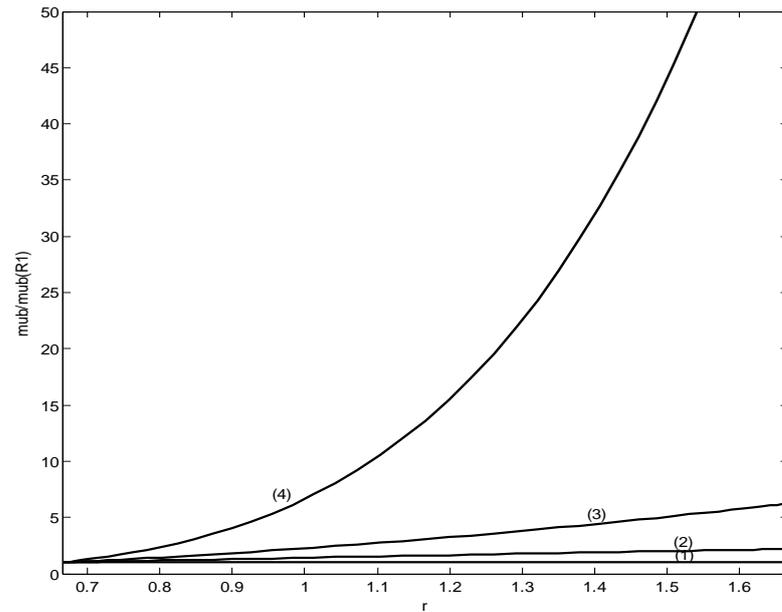


Figure 2-17 : Profils de viscosité pour un fluide en loi de puissance $Re_1=300$, $Re_2=-3000$ pour un rapport de rayon $\eta=0.881$ (1) $n=1$ fluide Newtonien; (2) $n=0.7$; (3) $n=0.5$; (4) $n=0.3$.

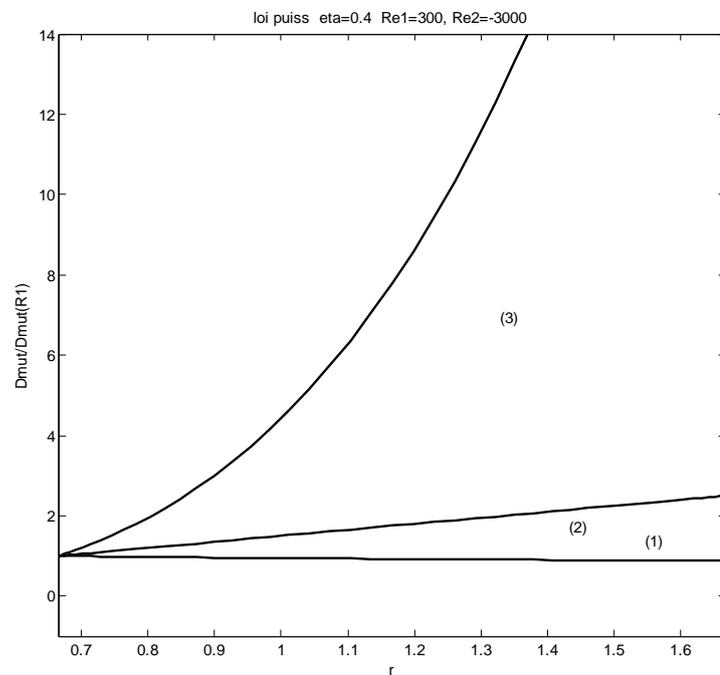


Figure 2-18. Profils de viscosité (tangentielle) pour un fluide en loi de puissance pour un rapport de rayon $\eta=0.4$ (1) $n=1$ fluide Newtonien; (2) $n=0.5$; (3) $n=0.3$.

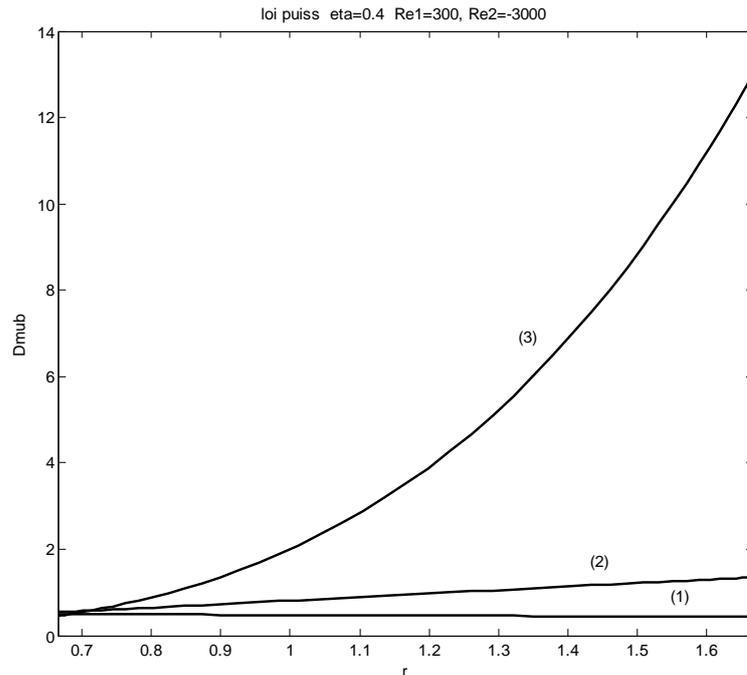


Figure 2-19. Profils de viscosité (tangentielle) pour un fluide en loi de puissance pour un rapport de rayon $\eta = 0.4$ (1) $n = 1$ fluide Newtonien; (2) $n = 0.5$; (3) $n = 0.3$.

- **Fluide de Carreau**

Dans ce cas, la contrainte s'exprime en fonction du taux de cisaillement $\hat{\tau} = \hat{\mu} \hat{\gamma}$ et si l'on néglige μ_{∞} devant μ dans la loi de Carreau, on obtient à partir de l'équation 2-26 :

$$\left[1 + \left(\lambda \left| \dot{\gamma}_{r\theta}^b \right| \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \dot{\gamma}_{r\theta} = \frac{C}{r^2} \quad 2-45$$

Le taux de cisaillement est calculé

$$\dot{\gamma}_{r\theta}^b = d_r V^b - \frac{V^b}{r} \quad \dot{\gamma}_{II} = \left| \dot{\gamma}_{r\theta}^b \right| = \left| d_r V^b - \frac{V^b}{r} \right| \quad 2-46$$

Pour ce modèle, nous n'avons pas d'expression analytique du profil de vitesse. Equation (2-45), en combinaison avec (2-46) est résolue de façon numérique en utilisant un processus itératif basé sur la méthode de Newton-Raphson classique. Des échantillons de profils de vitesse et de viscosité sont donnés pour λ fixé et n variable; ainsi que pour n fixé et λ variable dans les figures 2-20 à 2-25.

La figure 2-20 montre des profils de vitesse, pour un écoulement de base pour n fixé et λ variable, obtenus pour $n = 0.4$ et différentes valeurs de λ . Lorsque λ augmente, le profil de vitesse azimuthale tend vers celui que l'on obtient dans le cas de la loi de puissance.

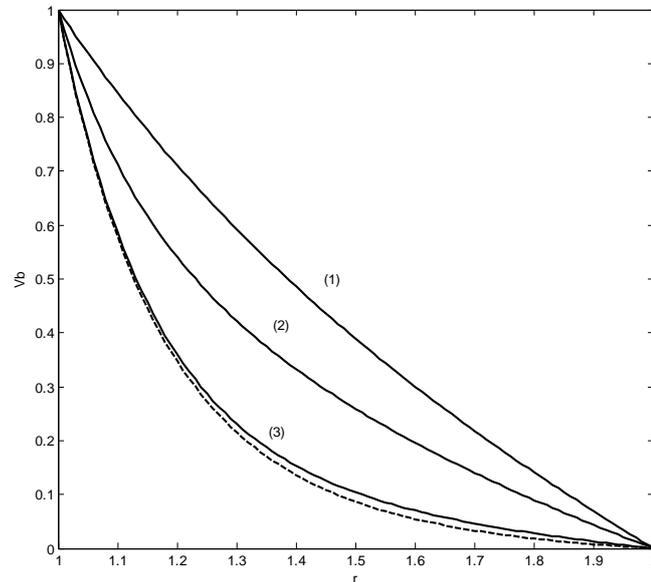


Figure 2-20 : Profils des vitesses pour un fluide de carreau ($Re_2=0$) pour un rapport de rayon $\eta=0.4$ et un indice de fluide $n=0.5$ (1) $\lambda = 0$ fluide Newtonien; (2) $\lambda = 10$; (3) $\lambda = 100$; (- -) loi de puissance.

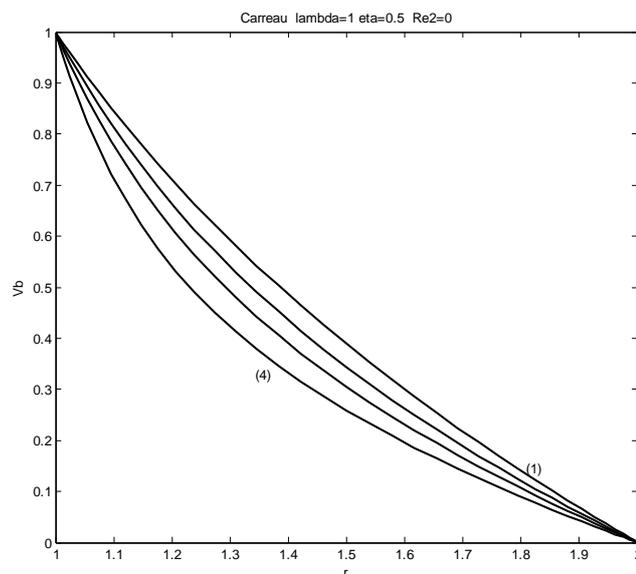


Figure 2-21 : Profils de vitesse pour un fluide de Carreau pour $\eta = 0.5$, $\lambda = 1$ et différentes valeurs de n . (1) $n = 1$ fluide Newtonien; (2) $n = 0.7$; (3) $n = 0.5$; (4) $n = 0.3$.

La figure 2-22 montre des profils de vitesse obtenus pour $\lambda = 1$ et différentes valeurs de l'indice de rhéofluidifiant pour un rapport de rayon $\eta = 0.5$. On remarque qu'en augmentant le caractère rhéofluidifiant, les valeurs de vitesse azimuthale augmentent.

Les profils de viscosité, lorsque la constante de temps λ fixé et n variable, sont donnés dans la figure 2-23. On y remarque que la diminution de l'indice de fluide n s'accompagne d'une plus grande stratification de la viscosité et d'une décroissance de la viscosité pariétale.

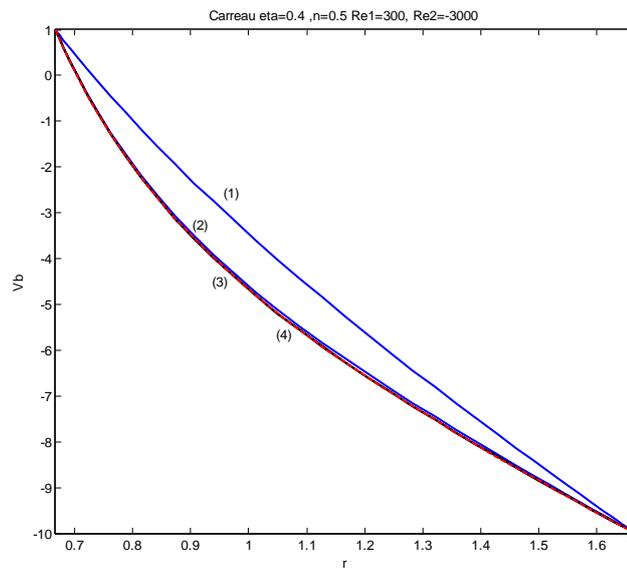


Figure 2-22 : Profils de vitesse pour un fluide de Carreau $Re_1=300$, $Re_2=-3000$ pour $\eta = 0.4$, $\lambda = 1$ et différentes valeurs de n . (1) $n = 1$ fluide Newtonien (2) $n = 0.7$; (3) $n = 0.5$; (---) loi en puissance.

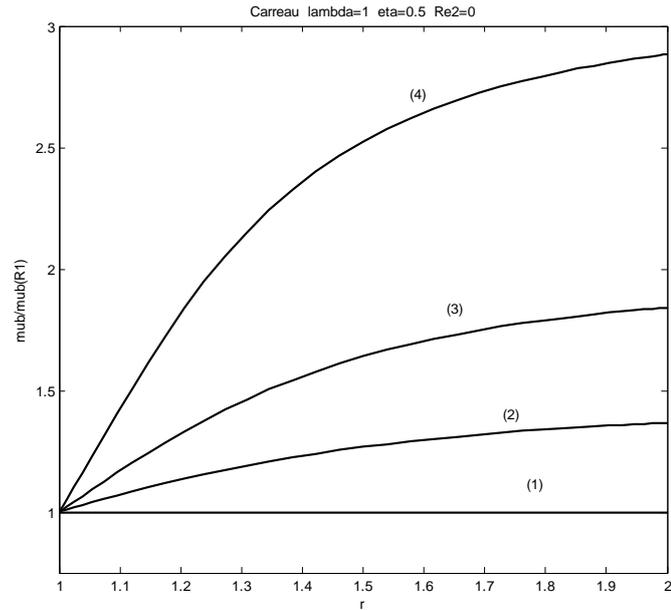


Figure 2-23 Profils de viscosité pour un fluide de Carreau ($Re_2=0$) pour $\eta = 0.5$, $\lambda = 1$ et différentes valeurs de n . (1) $n = 1$ fluide Newtonien; (2) $n = 0.7$; (3) $n = 0.5$; (4) $n = 0.3$.

Les profils de viscosité, pour un fluide de Carreau, sont donnés par les figures.2-24 et 2-25, en fonction de la valeur de λ (n fixe). On peut voir qu'en augmentant λ , la stratification de la viscosité devient plus marquée, le gradient de viscosité atteint un maximum vers la paroi extérieure. Ceci est cohérent avec le fait que le comportement en loi de puissance est approché pour les grandes valeurs de λ .

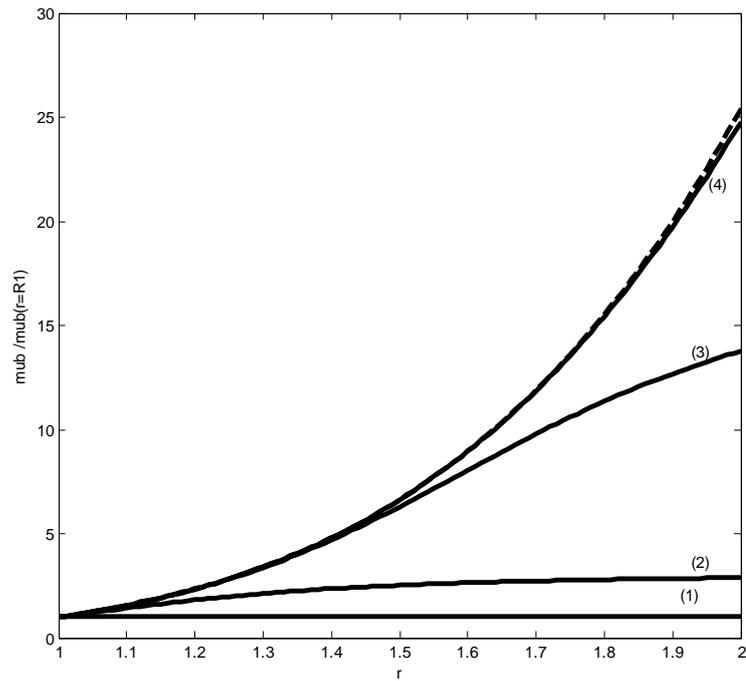


Figure 2-24. Profils de viscosité pour un fluide de Carreau ($Re_2=0$) pour $\eta = 0.5$, $n = 0.3$ et différentes valeurs de λ . (1) $\lambda = 0$ (fluide Newtonien) ; (2) $\lambda = 1$; (3) $\lambda = 10$; (4) $\lambda = 100$ et (--) fluide en loi de puissance.

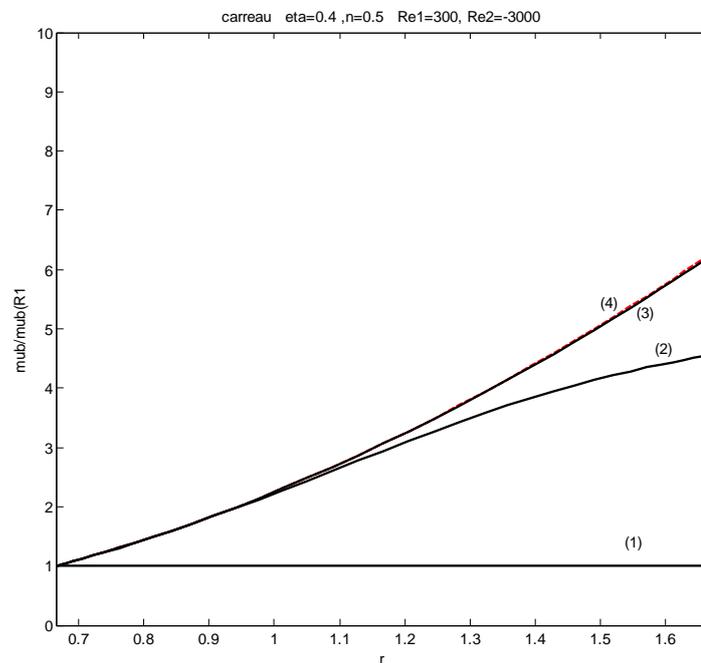


Figure 2-25 : Profils de viscosité pour un fluide de Carreau ($Re_2=-3000$) pour $\eta = 0.5$, $n = 0.3$ et différentes valeurs de λ . (1) $\lambda = 0$ fluide Newtonien; (2) $\lambda = 1$; (3) $\lambda = 10$; (4) $\lambda = 100$ et (--) fluide en loi de puissance.

2-6 STABILITE LINEAIRE

La première étape dans l'étude de stabilité d'un écoulement interne ou externe consiste à examiner le comportement de cet écoulement vis-à-vis d'une perturbation infinitésimale en adoptant une approche modale classique. Dans cette partie, nous allons donc étudier la stabilité de l'écoulement de base vis-à-vis d'une perturbation infinitésimale. Dans une analyse temporelle, pour un nombre de Reynolds donné, l'écoulement est dit instable si la perturbation est amplifiée au cours du temps. Dans le cas contraire, l'écoulement est dit stable si la perturbation est atténuée.

Pour accomplir l'étude de stabilité, on superpose à l'écoulement de base une perturbation infinitésimale. L'écoulement perturbé est alors représenté par les vitesses et pression suivantes:

$$(\vec{V}, p) = (\vec{V}_b + \varepsilon \vec{V}', p_b + \varepsilon p') \quad 2-47$$

De la même façon, nous avons :

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_b + \varepsilon \bar{\tau}' \quad \text{et} \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}_b + \varepsilon \bar{\mu}' \quad 2-48$$

Remarque :

- Les grandeurs de base vérifient les équations trouvées dans la première partie.

Lorsque nous injectons cette décomposition dans les différentes équations nous pouvons supprimer les termes de second ordre (en ε^2) qui sont négligeables devant les termes en ε .

D'autre part, $\bar{\tau} = \bar{\tau}_b + \varepsilon \bar{\tau}' = \dot{\gamma}_b \bar{\mu}_b + \varepsilon (\bar{\mu}_b \dot{\gamma}' + \bar{\mu}' \dot{\gamma}_b)$

$$\begin{aligned} \tau'_{rr} &= \mu_b \dot{\gamma}'_{rr} + \mu' \dot{\gamma}_{rrb} & \tau'_{\theta\theta} &= \mu_b \dot{\gamma}'_{\theta\theta} + \mu' \dot{\gamma}_{\theta\theta b} \\ \tau'_{zz} &= \mu_b \dot{\gamma}'_{zz} + \mu' \dot{\gamma}_{zzb} & \tau'_{r\theta} &= \mu_b \dot{\gamma}'_{r\theta} + \mu' \dot{\gamma}_{r\theta b} \\ \tau'_{z\theta} &= \mu_b \dot{\gamma}'_{z\theta} + \mu' \dot{\gamma}_{z\theta b} & \tau'_{rz} &= \mu_b \dot{\gamma}'_{rz} + \mu' \dot{\gamma}_{rz b} \\ \gamma'_{ij} &= 0 \quad \text{si } ij \neq r\theta, \theta r \end{aligned} \quad 2-49$$

Les contraintes peuvent être exprimées en fonction du taux de déformation $\dot{\gamma}$ et de la viscosité μ de l'écoulement de base et de la perturbation :

$$\bar{\tau} = \bar{\mu} \bar{\dot{\gamma}} = \mu(V^b + \varepsilon v) \bar{\dot{\gamma}}(V^b + v\varepsilon) = (\mu_B + \mu')(\gamma_B + \gamma') \quad 2-50$$

$$\tau = \mu^b \gamma^b + \mu' \gamma^b + \mu^b \gamma' + \mu' \gamma' \quad 2-51$$

où $\mu' \gamma'$: représente un terme quadratique.

Après simplification des termes du deuxième ordre(éliminant ainsi les termes non linéaires) la contrainte s'exprime par :

$$\tau' = \mu^b \gamma' + (\gamma^b - \mu_t) A \quad 2-52$$

où l'indice b signifie linéarisation autour de l'écoulement de base ; le tenseur A s'écrit dans la base (e_r, e_θ, e_z) .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma'_{r\theta} & 0 \\ \gamma'_{r\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2-53$$

La perturbation de viscosité, μ_b , est obtenue à partir d'un développement au premier ordre :

$$\mu_t = \mu^b + \gamma_{rz}^b \frac{\partial \mu_r^{*b}}{\partial \gamma_{rz}^b} \quad 2-54$$

L'écoulement perturbé est alors décrit par $(V + \varepsilon v', P + \varepsilon p')$, avec $V = V(r)$ $\varepsilon \ll 1$ est un petit paramètre adimensionnel.

Les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement aux perturbations s'écrivent:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot (V + \varepsilon v') &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \text{Re}_1 \left((V + \varepsilon v') \cdot \bar{\nabla} \right) (V + \varepsilon v') &= -\bar{\nabla} (P + \varepsilon p') + \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau} (V + \varepsilon v') \end{aligned} \quad 2-55$$

Les équations pour l'écoulement de base sont données par :

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta b}) \quad 2-56$$

En soustrayant les équations 2-55 et 2-56, et en ne retenant que les termes d'ordre 1 en ε , on obtient :

$$\nabla \cdot u' = \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad 2-57$$

$$\varepsilon \left(u'_t + \text{Re}(v' \cdot \nabla) V + (V \cdot \nabla) v' \right) = -\varepsilon \nabla p + \nabla \cdot (\tau(V + \varepsilon u') - \tau(V)) \quad 2-58$$

Avec :

$$\tau_{ij}(U + \varepsilon u') - \tau_{ij}(U) = \mu_c(U + \varepsilon u') \gamma_{ij}(U + \varepsilon u') - \mu_c(U) \gamma_{ij}(U) \quad 2-59$$

$$\gamma_{ij}(U + \varepsilon u') = \gamma_{ij}(U) + \varepsilon \gamma_{ij}(u') \quad 2-60$$

$$|\tau_{ij}(V + \varepsilon u') - \tau_{ij}(V)| = O(\varepsilon)$$

▪ Fluide de Carreau

On rappelle que pour un fluide de Carreau, on a (en grandeurs adimensionnelles) :

$$\mu = \left(1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^{*2} \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{Avec} \quad \dot{\gamma}^{*2} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \gamma_{ij} \quad 2-61$$

Le taux de déformation est une fonction de la vitesse ; ce qui permet d'écrire la viscosité comme suite :

$$\mu(V^b + v) = \left(1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^2(V^b + v) \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad 2-62$$

En simplifiant les termes quadratiques on trouve :

$$\dot{\gamma}^2(V^b + v) = \frac{1}{2} \left[2 \dot{\gamma}_{rz}^2 \right] \quad 2-63$$

En introduisant un développement limité de la forme :

$$(1+x)^{\frac{n-1}{2}} = 1 + \frac{n-1}{2} x + o(\varepsilon^2) \quad 2-64$$

La viscosité s'écrit sous forme généralisée suivante :

$$\mu = \mu^b + \mu' \quad 2-65$$

avec :

$$\mu^b = \left(1 + \lambda^2 \left(\frac{dV^b}{dr} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad 2-66$$

$$\mu' = \mu^b \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{2\lambda^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \frac{dV^b}{dr}}{1 + \lambda^2 \left(\frac{dV^b}{dr} \right)^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad 2-67$$

Pour la contrainte τ'_{rz} , on peut écrire $\tau'_{rz} = \mu_B \gamma'_{rz} + \mu' \gamma_{Brz}$

$$\rightarrow \tau'_{rz} = \mu_B \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right] + \mu' \frac{\partial V_B}{\partial r} \quad 2-68$$

En remplaçant μ_t dans cette équation on obtient :

$$\tau'_{rz} = \left(\mu^b + \mu^b (n-1) \left(\frac{\lambda^2 \frac{dV^b}{dr}}{1 + \lambda^2 \left(\frac{dV^b}{dr} \right)^2} \right) \right) \gamma'_{rz} \quad 2-69$$

$$\mu_t = \left(\mu_B + \mu_B (n-1) \left(\frac{\lambda^2 \frac{dV^b}{dr}}{1 + \lambda^2 \left(\frac{dV^b}{dr} \right)^2} \right) \right)_{rz} \quad 2-70$$

$$\mu_t = \frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial \gamma_{rz}^b} \quad 2-71$$

$$\text{On obtient donc : } \mu_t = \mu^b + \gamma_{rz}^b \frac{\partial \mu'_{rB}}{\partial \gamma_{rz}^B} \quad 2-72$$

En se basant sur l'expression précédente, la contrainte de perturbation τ'_{rz} peut être écrite comme :

:

$$\tau'_{rz} = \mu_B \gamma'_{rz} + (\mu_t - \mu_B) \gamma'_{rz} \quad 2-73$$

$$\tau'_{rz} = \mu_B \left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] + (\mu_t - \mu_B) \left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad 2-74$$

▪ **Fluide de Bingham**

Après calculs, on trouve :

$$\text{La viscosité tangentielle} \quad \mu_t = 1 \quad 2-75$$

$$\text{et} \quad \mu_B = \left(1 + \frac{B}{DV^b} \right) \quad 2-76$$

En remplaçant les développements 2-72 et 2-74 dans 2-58, on peut déduire les équations aux perturbations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} = & -\text{Re}_1 \frac{V^b}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2v' \right) - Dp' + \mu^b \left[\Delta u' - 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{u'}{r^2} \right] \\ & + 2D\mu^b Du' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\mu_t - \mu^b)}{\partial \theta} \left(\widehat{D}v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad 2-77$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} = & -\text{Re}_1 \left(u' D_* V^b + \frac{V^b}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \mu^b \left[\Delta u' + 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{v'}{r^2} \right] \\ & + D\mu^b \left[Du' - \frac{v'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right] + D_* \left[(\mu_t - \mu^b) \left(\widehat{D}v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \right] \\ & + (\mu_t - \mu^b) \left[\frac{1}{r} \left(\widehat{D}v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad 2-78$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\text{Re}_1 \left(\frac{V^b}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu^b \Delta w' + D\mu^b \left[Dw' + \frac{\partial u'}{\partial z} \right] \quad 2-79$$

Avec : $D = \frac{\partial}{\partial r}, D_* = D + \frac{1}{r}, \hat{D} = D - \frac{1}{r}$ et

$$\Delta = D^2 + \frac{1}{r}D + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

2-7-COMPORTEMENT AUX TEMPS LONGS DE LA PERTURBATION

Le comportement aux temps longs de la perturbation est obtenu en cherchant des solutions de forme :

$$(u, v, w, p) = (u(r), v(r), w(r), p(r)) e^{\lambda t + i(m\theta + kz)} \quad 2-80$$

k : est la longueur d'onde longitudinale m : est la longueur d'onde azimutale

où $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$; la partie réelle $\lambda_r = \Re(\sigma)$ représentant le taux d'amplification ou d'amortissement de la perturbation ; la partie imaginaire $\lambda_i = \text{Im}(\lambda)$ étant liée à la vitesse de phase λ par la relation $\lambda = \lambda_i/k$.

Dans ce qui suit, on considère le problème de stabilité temporelle. . Les nombres d'onde axiale (k) et azimutal (m) sont des nombres entiers positifs. En remplaçant l'équation 2-80 dans les équations 2-77, 2-78 et 2-79, les équations de l'évolution linéaire de la perturbation peuvent alors s'écrire sous la forme d'un problème aux valeurs initiales.

On injecte les grandeurs de l'écoulement perturbé dans les équations de Navier-Stokes et on retient les termes du premier ordre en ε .

Équation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru') + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad 2-81$$

D'où $D_* u + \frac{imv}{r} + ikw = 0 \quad 2-82$

Equation suivant r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} = & -\text{Re}_1 \frac{V}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2v' \right) - Dp' + \mu^b \left[\Delta u' - 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{u'}{r^2} \right] \\ & + 2D\mu^b Du' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\mu_t - \mu^b)}{\partial \theta} \left(\widehat{D}v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad 2-83$$

Après manipulations, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \lambda u + \text{Re} \frac{V}{r} (imu - 2v) = & -Dp \\ & + \mu_b \left[D^2 u + \frac{Du}{r} - \frac{m^2 u}{r^2} - k^2 u - \frac{2imv}{r^2} - \frac{u}{r^2} \right] \\ & + 2D\mu_b Du + (\mu_t - \mu_b) [ikDw - k^2 u] \end{aligned} \quad 2-84$$

Equation suivant θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} = & -\text{Re}_1 \left(u' D_* V^b + \frac{V}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \mu^b \left[\Delta u' + 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{v'}{r^2} \right] \\ & + D\mu^b \left[Du' - \frac{v'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right] + D_* \left[(\mu_t - \mu^b) \left(\widehat{D}v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \right] \\ & + (\mu_t - \mu^b) \left[\frac{1}{r} \left(\widehat{D}v' + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad 2-85$$

Après manipulations, on obtient:

$$\begin{aligned} \lambda v + \text{Re} \left(u D_* V + \frac{V}{r} imv \right) = & -\frac{im}{r} p + \mu_b \left[D^2 v + \frac{Dv}{r} - \frac{m^2 v}{r^2} - k^2 v + \frac{2imu}{r^2} - \frac{v}{r^2} \right] \\ & + D\mu_b \left[Dv - \frac{v}{r} + \frac{imu}{r} \right] \end{aligned} \quad 2-86$$

Equation suivant z :

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\text{Re}_1 \left(\frac{V^b}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu^b \Delta w' + D\mu^b \left[Dw' + \frac{\partial u'}{\partial z} \right] \quad 2-87$$

Avec

Après manipulations, on obtient l'équation suivante:

$$\begin{aligned} \lambda w + \text{Re} \frac{V}{r} (imw) = & -ikp + \mu_b \left[D^2 w + \frac{Dw}{r} - \frac{m^2 w}{r^2} - k^2 w \right] \\ & + D\mu_b [Dw + iku] + D(\mu_t - \mu_b) [Dw + iku] \\ & + (\mu_t - \mu_b) \left[\frac{1}{r} (Dw + iku) + D^2 w + ikDu \right] \end{aligned} \quad 2-88$$

Dans les équations précédentes, on s'est efforcé à présenter le terme de dissipation sous la forme d'une somme de trois termes : un terme similaire au cas newtonien, écrit en fonction de μ_t ; un terme qui traduit la stratification de μ_t , écrit en fonction de $d\mu_t/dr$ et enfin un terme qui traduit l'anisotropie de τ' , écrit en fonction de $(\mu_t - \mu_b)$.

Cette formulation présente aussi l'avantage d'être valable pour tout fluide non Newtonien purement visqueux. Les équations précédentes sont complétées par les conditions aux limites.

2-8 Conditions aux limites

A la paroi, la condition de non glissement donne

$$u=v=w \quad \text{pour } r=R_1 \text{ et } r=R_2 \quad 2-89$$

À partir de l'équation de continuité on peut réécrire les conditions aux limites

$$u=Du=v \quad \text{pour } r=R_1 \text{ et } r=R_2 \quad 2-90$$

Formulation du problème en terme de vitesse (u,v)

Le problème peut être écrit en (u, v) ; la composante w est éliminée de l'équation (2-82), et la pression résultant de (2-88) est remplacée dans (2-84) et (2-86). Ces manipulations conduisent aux équations suivantes formulées seulement en u et v :

$$\begin{aligned} \lambda \left(u - \frac{1}{k^2} DD_* u - \frac{imDv}{k^2 r} + \frac{imv}{k^2 r^2} \right) &= -\operatorname{Re} \frac{V}{r} (imu - 2v) - \phi_r \\ &+ \mu_b \left[D^2 u + \frac{Du}{r} - \frac{m^2 u}{r^2} - k^2 u - \frac{2imv}{r^2} - \frac{u}{r^2} \right] \\ &+ 2D\mu_b Du + (\mu_t - \mu_b) [ik\phi_1 - k^2 u] \end{aligned} \quad 2-91$$

$$\begin{aligned} \lambda \left(v - \frac{m}{kr} \left(\frac{i}{k} D_* u - \frac{mv}{kr} \right) \right) &= -\operatorname{Re} \left(uD_* V + \frac{V}{r} imv \right) - \frac{im}{r} \phi_\theta \\ &+ \mu_b \left[D^2 v + \frac{Dv}{r} - \frac{m^2 v}{r^2} - k^2 v + \frac{2imu}{r^2} - \frac{v}{r^2} \right] \\ &+ D\mu_b \left[Dv - \frac{v}{r} + \frac{imu}{r} \right] \end{aligned} \quad 2-92$$

Les termes ϕ_r et ϕ_θ sont donné par :

$$\begin{aligned} \phi_r &= -\frac{1}{k} \operatorname{Re} \frac{V}{r} (m\phi_1) + \frac{1}{k} \operatorname{Re} \frac{V}{r^2} (m\phi_0) - \frac{i}{k} D\mu_b \left[\phi_2 + \frac{\phi_1}{r} - \frac{m^2 \phi_0}{r^2} - k^2 \phi_0 \right] \\ &- \frac{i}{k} \mu_b \left[\phi_3 + \frac{\phi_2}{r} - \frac{\phi_1}{r^2} - \frac{m^2 \phi_1}{r^2} + 2 \frac{m^2 \phi_0}{r^3} - k^2 \phi_1 \right] - \frac{i}{k} (\mu_t - \mu_b) \left[\frac{1}{r} (\phi_2 + ikDu) - \frac{1}{r^2} (\phi_1 + iku) + \phi_3 + ikD^2 u \right] \\ &- \frac{i}{k} D^2 \mu_b [\phi_1 + iku] - \frac{i}{k} D\mu_b [\phi_2 + ikDu] - \frac{i}{k} D^2 (\mu_t - \mu_b) [\phi_1 + iku] - \frac{i}{k} D^2 (\mu_t - \mu_b) [\phi_2 + ikDu] \\ &- \frac{i}{k} D(\mu_t - \mu_b) \left[\frac{1}{r} (\phi_1 + iku) + \phi_2 + ikDu \right] - \frac{i}{k} (\mu_t - \mu_b) \left[\frac{1}{r} (\phi_2 + ikDu) - \frac{1}{r^2} (Dw + iku) + \phi_3 + ikD^2 u \right] \end{aligned} \quad 2-93$$

$$\begin{aligned} \phi_\theta &= -\frac{1}{k} \operatorname{Re} \frac{V}{r} (m\phi_0) - \frac{i}{k} \mu_b \left[\phi_2 + \frac{\phi_1}{r} - \frac{m^2 \phi_0}{r^2} - k^2 \phi_0 \right] - \frac{i}{k} D\mu_b [\phi_0 + iku] - \frac{i}{k} D(\mu_t - \mu_b) [\phi_1 + iku] \\ &- \frac{i}{k} (\mu_t - \mu_b) \left[\frac{1}{r} (\phi_1 + iku) + \phi_2 + ikDu \right] \end{aligned} \quad 2-94$$

Avec :

$$\phi_0 = \frac{i}{k} D_* u - \frac{mv}{kr} \quad 2-95$$

$$\phi_1 = \frac{i}{k} DD_* u - \frac{mDv}{kr} + \frac{mv}{kr^2} \quad 2-96$$

$$\phi_2 = \frac{i}{k} DDD_* u - \frac{mD^2v}{kr} - \frac{mDv}{kr^2} + \frac{mDv}{kr^2} - 2 \frac{mv}{kr^3} \quad 2-97$$

$$\begin{aligned} \phi_3 = \frac{i}{k} DDDD_* u - \frac{mD^3v}{kr} + \frac{mD^2v}{kr^2} - \frac{mD^2v}{kr^2} + 2 \frac{mDv}{kr^3} + \frac{mD^2v}{kr^2} \\ - 2 \frac{mDv}{kr^3} - 2 \frac{mDv}{kr^3} + 6 \frac{mv}{kr^4} \end{aligned} \quad 2-98$$

Le but est à présent de mettre ces équations sous forme matricielle afin d'avoir une équation du type :

$$Lq = \lambda Mq \quad 2-99$$

avec $q = (u, v)$

Avec les termes :

$$M = \begin{pmatrix} S & \frac{im}{kr} \tilde{D} \\ -\frac{im}{k^2 r} D_* & 1 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \end{pmatrix} \quad 2-100$$

$$L = L_1 + L_{V1} + L_{V2} + L_{V3} \quad 2-101$$

où

$$L_1 = \text{Re} \begin{pmatrix} \frac{im}{r} \left[-(V^b \tilde{D} + DV^b) D_* + k^2 V^b \right] & -2 \frac{k^2}{r} V^b + \frac{m^2}{r^2} \left(-\frac{2V^b}{r} + DV^b + V^b D \right) \\ D_* V^b - \frac{m^2}{k^2 r^2} V^b D_* & -\frac{im}{r} \left(1 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \right) V^b \end{pmatrix} \quad 2-102$$

$$L_{V1} = \mu^b \begin{pmatrix} S^2 & im \left[\frac{2k^2}{r^2} + D \Delta \frac{1}{r} \left(\Delta - \frac{2D}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right] \\ \frac{im}{r} \left(-\frac{\Delta D_*}{K^2} + \frac{2}{r} \right) & S + \frac{m^2}{k^2 r^2} \left(\Delta - \frac{2D}{r} + \frac{1}{r^2} - k^2 \right) \end{pmatrix} \quad 2-103$$

$$L_{V2} = D\mu^b \begin{pmatrix} D^2 D_* + \Delta D_* - k^2 D & \frac{im}{r} \left(\Delta - D^2 - \frac{4D}{r} + \frac{3}{r^2} \right) \\ \frac{im}{k^2 r} DD_* & \left(1 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \right) \tilde{D} \end{pmatrix} + D^2 \mu^b \begin{pmatrix} DD_* + k^2 & \frac{im}{r} D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2-104$$

$$L_{V3} = (\mu_t - \mu^b) \begin{pmatrix} \frac{k^2 m^2}{r^2} & -\frac{ik^2 m}{r} \tilde{D} \\ \frac{im}{r} D_* & \left(D + \frac{2}{r}\right) \tilde{D} \end{pmatrix} + D(\mu_t - \mu^b) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{im}{r} & \tilde{D} \end{pmatrix} \quad 2-105$$

On écrit $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ avec $\lambda_r = \text{Re}(\lambda)$ et $\lambda_i = \text{Im}(\lambda)$. Le système est dit linéairement stable si; $\lambda_i < 0$; linéairement instable Si $\lambda_i > 0$ et neutre si $\lambda_i = 0$.

Formulation du problème en terme de vitesse (u,w)

De la même manière, le problème peut être écrit en (u,w) pour $m \neq 0$. On élimine v en utilisant l'équation (2-82), et la pression résultant de (2-84) pour les remplacer dans (2-84) et (2-88). Ces manipulations conduisent aux équations formulées seulement en (u,w). Le système peut alors être écrit sous la forme :

$$Lq = \lambda Mq \quad 2-106$$

$$\text{où } q = (u, w) \quad 2-107$$

Avec les termes :

$$M = \begin{pmatrix} D_*^2 + \frac{1}{r} D_* - \frac{m^2}{r^2} & ikD + \frac{2ik}{r^2} \\ kD_* & ik^2 + \frac{im^2}{r^2} \end{pmatrix} \quad 2-108$$

$$L = L_1 + L_{V1} + L_{V2} + L_{V3} \quad 2-109$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} \frac{im}{r^2} \left[2DV^b + V^b D - 3V^b D_* + \frac{m^2 V^b}{r} \right] & 3 \frac{km}{r^2} V^b \\ \frac{im}{kr} (DV^b - V^b D) & \frac{m}{r} \left(\frac{m^2 V^b}{r^2} + k^2 V^b \right) \\ + \text{Re} \begin{pmatrix} \frac{im}{r} \left[-\frac{DV^b}{r} + D^2 V^b - V^b D D_* \right] & \frac{km}{r} (DV^b + V^b D) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad 2-110$$

$$L_{V1} = \begin{pmatrix} -2 \frac{m}{r^4} & ik \left[\left(\frac{2}{r} + D \right) (D_* D - k^2) + \frac{2D_* D}{r} - \left(\frac{4}{r} + D \right) \frac{m^2}{r} \right] \\ k \left(\Delta + \frac{2D}{r} \right) D_* & ik^2 \left(\Delta + \frac{2D}{r} \right) \\ + \text{Re} \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{r} + D \right) \Delta D_* + \frac{2}{r} \left(D^2 + \frac{D}{r} \right) D_* - \frac{m^2}{r^2} \Delta - \frac{m^2}{r^4} & 0 \\ \frac{2km^2}{r^3} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad 2-111$$

$$L_{V_2} = D\mu^b \begin{pmatrix} \frac{2}{r}DD_* - \frac{m^2}{r^2}\left(D - \frac{2}{r}\right) & ik\left(\Delta + \left(\frac{4}{r} + D\right)D\right) \\ kDD_* & i\left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)D \end{pmatrix} \quad 2-112$$

$$+ D\mu^b \begin{pmatrix} \left[\left(D_* + \frac{2}{r}\right)D + \Delta\right]D_* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + D^2\mu^b \begin{pmatrix} DD_* + \frac{m^2}{r^2} & ikD \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{V_3} = (\mu_i - \mu^b) \begin{pmatrix} \left[\frac{2m^2}{r^2} + \frac{3}{r^2} + \left(\frac{5}{r} + D\right)D\right]DD_* + \frac{m^4}{r^4} & ik\left[\frac{m^2}{r^2} + \frac{3}{r^2} + \left(\frac{5}{r} + D\right)D\right]D \\ k\left[\left(\frac{3}{r} + D\right)D + \frac{m^2}{r^2}\right]D_* & ik^2\left(D + \frac{3}{r}\right)D \end{pmatrix}$$

$$+ D(\mu_i - \mu^b) \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{r} + 2D\right)DD_* + \frac{m^2}{r^3}(D + D_*) & ik\left(\frac{5}{r} + 2D\right)D \\ \frac{km^2}{r^3} + kDD_* & ik^2D \end{pmatrix} + D^2(\mu_i - \mu^b) \begin{pmatrix} DD_* + \frac{m^2}{r^2} & ikD \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2-113$$

2-9 RESOLUTION NUMERIQUE

L'application des méthodes spectrales aux simulations numériques est apparue au début des années 1970. L'usage des méthodes spectrales se révèle particulièrement efficace pour les problèmes non linéaires. Le principe consiste à utiliser des fonctions d'essai approchant assez bien la fonction inconnue et qui se décomposent en fonctions de base. L'équation différentielle initiale est traitée par la méthode des résidus pondérés (MRP) pour obtenir une équation contenant des dérivées des fonctions d'essai. Celle-ci peut alors être résolue par des méthodes classiques (méthode de Runge- Kutta par exemple). Les fonctions de base peuvent être des polynômes de Chebycheff, polynômes de Legendre, ou des fonctions trigonométriques (séries de Fourier) si le phénomène étudié est périodique. Dans certains cas, on peut leur appliquer la transformation de Fourier rapide (FFT).

Pour la résolution numérique du problème aux valeurs propres, deux approches générales sont utilisées. La première est basé sur une méthode dite méthode locale. Celle-ci consiste à injecter une valeur propre approximative dans le problème aux valeurs propres et à résoudre ce dernier comme un problème aux valeurs initiales. La solution exacte de la valeur propre est ajustée par une méthode itérative de manière à satisfaire les conditions aux limites. La procédure d'itération utilisée peut être accélérée par des méthodes d'approximation successives usuelles. Cette méthode présente l'avantage d'être dotée d'une

grande précision, mais elle ne permet de calculer qu'une seule valeur propre à la fois.

La deuxième consiste en une méthode dite méthode globale. Celle-ci consiste à utiliser un opérateur discrétisé qui est injecté dans un solveur de valeurs propres. Il en résulte un spectre constitué de l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur d'évolution.

Les méthodes de différences finies sont parmi les premières à avoir été mises en œuvre pour la discrétisation du problème aux valeurs propres. Thomas (1953) fut le premier à résoudre numériquement l'équation d'Orr-Sommerfeld en utilisant la méthode des différences finies du quatrième ordre. La solution des équations matricielles obtenues a été effectuée par la méthode d'élimination de Gauss. Bien que les résultats soient satisfaisants comparés aux résultats analytiques de Lin [30], elles se sont révélées limitées dans leur utilisation. Des méthodes plus avancées, telles que les éléments finis et les méthodes spectrales, ont depuis été proposées. Il s'agit de développer une solution approchée ϕ_k de la solution exacte Φ en séries tronquées dans une base appropriée de fonctions connues N_i [30]. Cette fonction approchée est alors écrite sous la forme :

$$\phi_k = \sum_{i=1}^k a_i N_i \quad 2-114$$

La substitution de l'expression donnée par 2-112 dans le problème aux valeurs propres conduit à un problème aux valeurs propres qui peut être écrit sous forme matricielle généralisée :

$$Lq = \lambda Mq \quad 2-115$$

Selon le choix de la base de fonctions N_i , différents schémas de résolution sont adaptés : le choix d'une base globale de fonctions N_i infiniment différentiables conduit aux méthodes spectrales, tandis que la définition d'une base de fonctions N_i locales conduit à la méthode des éléments finis. Gottlieb et Orszag ont passé en revue les différents aspects de la théorie et applications des méthodes spectrales [47]. Parmi les méthodes spectrales, trois formulations sont couramment utilisées selon le choix des fonctions test (les fonctions test sont choisies en fonction de la nature de l'opérateur) : la méthode de Galerkin, la méthode de collocation et la

méthode Tau [47]. Orszag (1971) utilise le développement en polynômes de Tchebychev et la méthode Tau, pour transformer l'équation d'Orr-Sommerfeld sous forme matricielle, le problème est ensuite résolu par l'algorithme Q-R. Ses résultats sont d'une grande précision et cette procédure a été souvent appliquée [47]. En outre, depuis le développement de la mise en œuvre de méthodes de transformations rapides, des méthodes spectrales basées sur les polynômes de Tchebychev sont devenues l'outil favori pour la résolution des problèmes d'instabilité en mécanique des fluides.

Dans la présente étude, la méthode aux différences finies aussi bien que la méthode spectrale basée sur les polynômes de Tchebychev sont utilisées.

2-10 CONVERGENCE

Pour tester la convergence de la méthode numérique, les calculs des conditions critiques ont été effectués pour différentes valeurs de N. Les résultats sont illustrés dans les tables 2-1 et 2-2 respectivement pour deux modèles rhéologiques : fluides de Bingham (avec $\eta = 0.5$ et $B = 1$) et loi de puissance (avec $\eta = 0.5$ et $n = 0.3$). On observe que trente points de collocation offrent une précision suffisante pour le cas des paramètres rhéologiques considérés. Les résultats présentés dans le présent travail ont été obtenues avec $N = 50$. Périodiquement, des tests numériques ont été réalisés pour s'assurer la convergence et de la précision.

Tableau 2-1- : Les conditions critiques pour différentes valeurs de N. Pour un fluide de Bingham avec $\eta = 0.5$ et $B = 1$.

N	10	20	30	40	50
Re_c	127.73265	127.749443	127.74943	127.74943	127.74943
k_c	3.183604	3.183699	3.183708	3.183707	3.183706

Tableau 2-2- : Les conditions critiques pour différentes valeurs de N. Pour un fluide en loi de puissance avec $\eta = 0.5$ et $n = 0.3$.

N	10	20	30	40	50
Re_c	71.99404	72.35036	72.35046	72.35046	72.35046
kc	3.885593	3.867630	3.867602	3.867669	3.867670

2-11-FAUSSES VALEURS PROPRES

Dans le but de tester le code de calcul, deux spectres ont été déterminés pour un fluide newtonien et un fluide en loi de puissance (avec les paramètres suivant : $n=0.3$; rapport de rayon $\eta=0.5$; $Re_1=70$) pour un nombre de point de collocations $N=50$ et $N=100$ respectivement. On constate que de fausses valeurs propres sont observées pour $Re(\lambda) < -7500$ pour un fluide newtonien et $Re(\lambda) < -2000$ pour un fluide en loi de puissance (figures 2-26 et 2-27). En augmentant le nombre de Reynolds, les valeurs propres limites augmentent (Schmid et Henningson [24]). Néanmoins, ces valeurs restent de l'ordre de -1000 ; donc très éloignées des valeurs qui nous intéressent. En outre, ce qui est important de noter est qu'en utilisant $N=50$, on décrit correctement les valeurs propres proches de zéro. En conséquence et dans tous les calculs qui suivent, les résultats présentés sont obtenus en utilisant $N=50$ sauf quand c'est autrement indiqué.

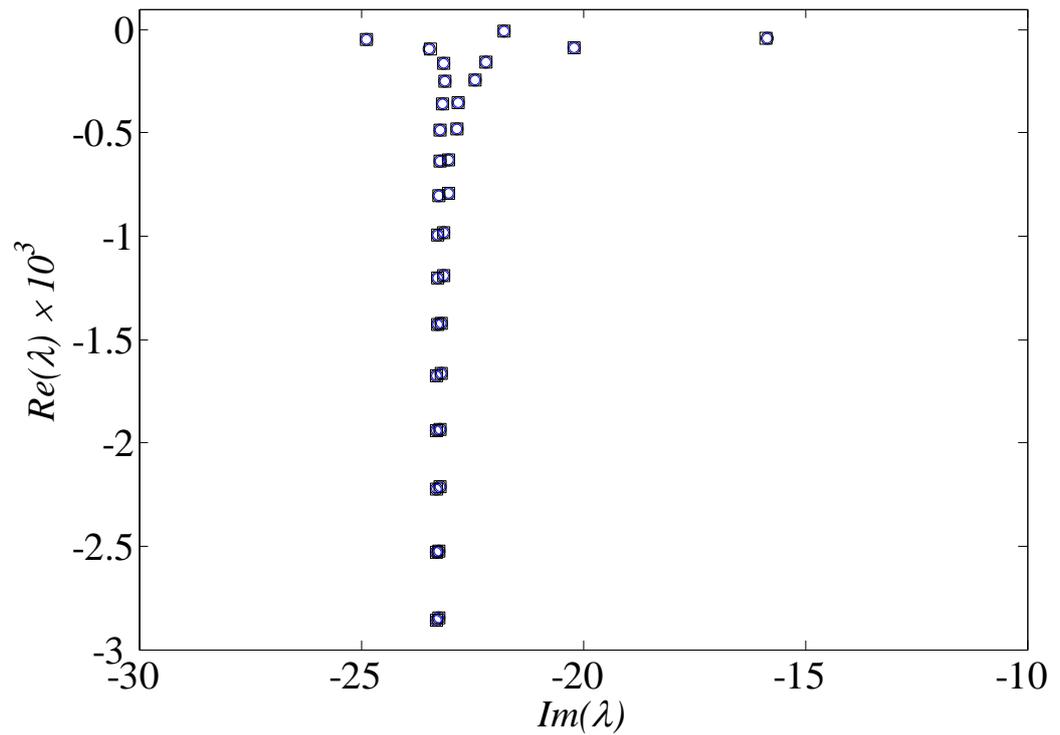


Figure 2-26: Spectres pour un fluide Newtonien pour deux ensembles de points de collocations : $Re_1=70$, $\eta=0.5$, $k=2$, $m=1$. (o) $N=50$, (\square) $N=100$.

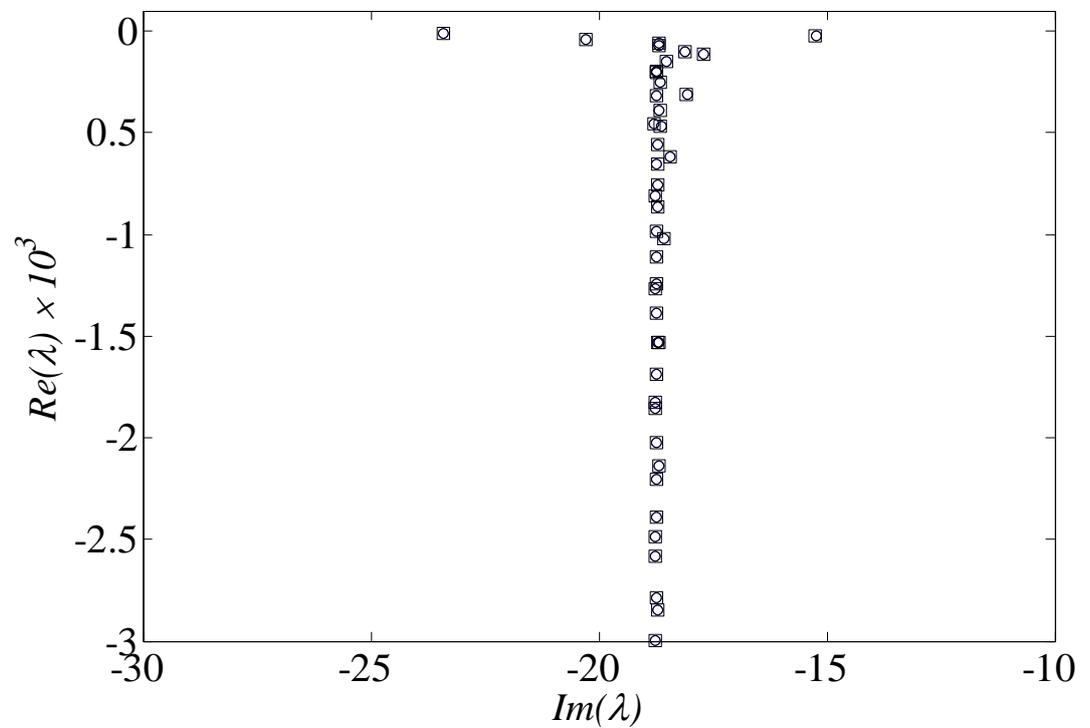


Figure 2-27 : Spectres de valeurs propres pour un fluide en loi de puissance pour deux ensembles de points de collocations : $Re_1=70$, $n=0.3$, $\eta=0.5$, $k=2$, $m=1$. (o) $N=50$, (\square) $N=100$.

2-12 VALIDATION

Comme premier test de validation, les valeurs du nombre de Reynolds critique pour un fluide newtonien et pour différents rapports de rayons η obtenus par nos calculs sont comparées à celles obtenues par Chandrasekhar [25]. Comme le montre la figure 2-28, une excellente concordance entre les deux résultats est observée.

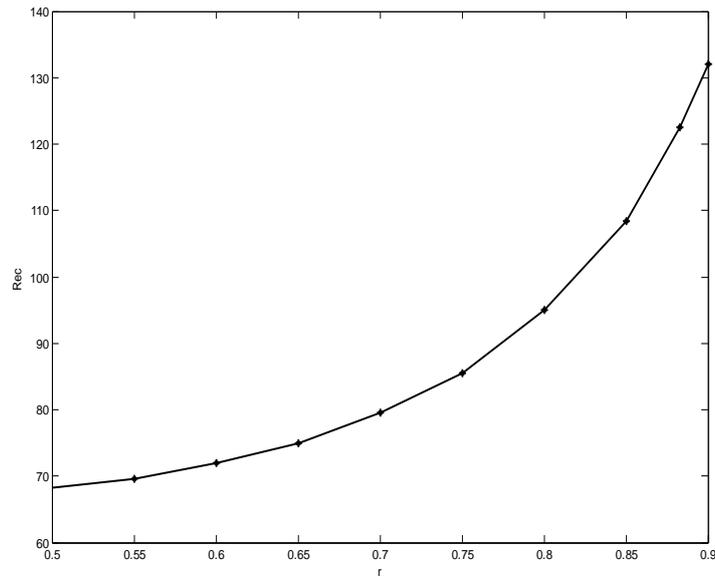


Figure 2-28 : Nombre de Reynolds critique en fonction de Rapport de Rayon pour un fluide Newtonien. (-)Nos résultats ; (*) Chandrasekhar [25].

2-13 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué une simulation numérique de l'écoulement de Taylor - Couette d'un fluide rhéofluidifiant avec ou sans seuil où trois modèles rhéologiques ont été proposés pour décrire le comportement rhéofluidifiant d'un fluide non newtonien. Pour les profils de vitesse on a constaté que lorsque le caractère rhéofluidifiant augmente, la valeur absolue du gradient de vitesse croît sur la paroi intérieure et décroît sur la paroi extérieure. Et pour le profil de viscosité on remarque une augmentation des valeurs de μ_b de l'intérieur vers la paroi extérieure où le taux de cisaillement est plus faible. Si la viscosité de cisaillement de la paroi interne est utilisée comme référence, on peut observer que la viscosité globale augmente avec l'effet de la rhéofluidification. Comme premier test de validation, une excellente concordance entre nos calculs résultats pour un fluide newtonien et celles obtenues par Chandrasekhar [25].

CHAPITRE 3

ANALYSE MODALE

3-1 INTRODUCTION

L'écoulement azimutal entre deux cylindres coaxiaux est instable lorsque la vitesse du cylindre intérieur excède une valeur critique. Cette instabilité centrifuge, dite de Taylor- Couette, est fondamentale pour au moins deux raisons : la première réside dans le fait que cette instabilité est générique ; c'est-à-dire qu'elle est susceptible de se manifester dans tout écoulement dévié par une paroi créant un gradient de pression normal aux lignes de courant. Citons en particulier l'écoulement de couche limite sur une paroi concave, qui conduit à l'apparition de tourbillons de Gortler alignés dans la direction de l'écoulement, et l'écoulement de poiseuille dans une conduite qui conduit à des tourbillons de Dean très semblables (Floryan 1991). La deuxième raison de l'importance de l'instabilité de Taylor -Couette est qu'au-delà de la première bifurcation qui conduit aux célèbres rouleaux de Taylor, une succession de bifurcations très riches engendre des écoulements de plus en plus complexes, pour finalement conduire à la turbulence. Cette route qui présente de nombreux points communs avec celle de la convection thermique de Rayleigh – Bénard, a fait l'objet à partir des années 1970 d'une multitude de travaux, expérimentaux, numériques et théoriques. Ces travaux ont permis des avancées importantes dans la compréhension de la dynamique non linéaire des écoulements.

Pour de faibles valeurs de Re , la force de frottement stabilise le déplacement des particules de fluide induit par le déséquilibre centrifuge, et l'écoulement reste stable. En revanche, au-delà d'une certaine valeur critique Re_c , en revanche, la force centrifuge devient prépondérante et l'écoulement est instable. On voit donc que la prise en compte de la viscosité implique l'existence d'un seuil non nul, alors que le seul critère de Rayleigh prédit une instabilité sans seuil.

Pour des valeurs de Re supérieures à Re_c , une seconde instabilité dite instabilité secondaire apparaît. Il s'agit d'une instabilité oscillatoire cette fois et qui rompt l'axisymétrie.

Taylor a observé dans les années 30 que la première instabilité de l'écoulement Taylor-Couette se présentait sous forme de tores contrarotatifs de fluides axisymétrique (figure 3-1). C'est ce qui l'a amené à poser l'hypothèse de perturbations axisymétriques dans son étude. Il se trouve qu'effectivement ce sont les premières à être déstabilisées. Il en a déduit la désormais célèbre courbe de stabilité marginale qui délimite les zones linéairement stables et instables en fonction du nombre de Reynolds ([Chandrasekhar, 1961, Drazin and Reid 1981] [25], [29]).

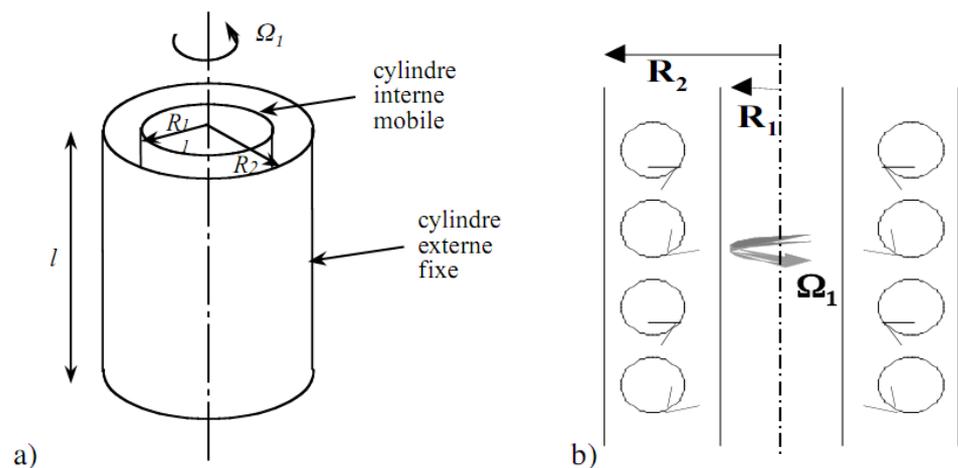


Figure 3.1 : (a) Dispositif de Taylor Couette. (b) Structure en rouleaux toroïdaux de l'écoulement.

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité de l'écoulement d'un fluide rhéofluidifiant purement visqueux pour un écoulement de Taylor Couette, vis-à-vis d'une perturbation infinitésimale. L'approche modale présentée dans cette partie a permis de déterminer les conditions critiques d'instabilité ainsi que la structure du mode le moins stables. Nous commençons par l'étude des spectres pour le cas où le cylindre intérieur en rotation et le cylindre extérieur fixe et le cas où les deux cylindres tournants pour une perturbation axisymétrique et le cas Non axisymétrique. Les résultats sont en suite analysés pour les trois types de fluide rhéofluidifiant, Bingham, loi de puissance et fluide de carreau. Pour étudier le développement d'une perturbation, nous pouvons aussi introduire une mesure de son taux de croissance. Pour cela, nous utilisons l'énergie cinétique de la perturbation. Le dernier paragraphe est consacré à étudié de la stabilité marginale.

3-2- ETUDE DES SPECTRES

Selon les valeurs des nombres d'ondes k et m , plusieurs situations peuvent être considérées : (1) perturbation axisymétrique $k \neq 0$, $m=0$; (2) perturbation tridimensionnelle $k \neq 0$, $m \neq 0$ et (3) perturbation homogène dans la direction axiale $k=0$, $m \neq 0$.

3-2-1 Perturbation axisymétrique $k \neq 0$ et $m = 0$

a- Cas ou le cylindre intérieur en rotation et le cylindre extérieur fixe.

Dans un premier temps, nous commençons par considérer le cas où le cylindre intérieur est en rotation et le cylindre extérieur fixe. Dans le cas d'une perturbation axisymétrique, la formulation (u, v) est utilisée. On représentera les spectres des valeurs propres obtenus pour les trois types de fluides : Bingham, loi en puissance et Carreau ainsi que le cas Newtonien (figures 3-2,3-3 et 3-4). En premier lieu, si l'on regarde le spectre, on s'aperçoit que toutes les valeurs propres sont disposées sur l'axe des réels et ont donc une pulsation nulle : ceci correspond à des modes qui ne se propagent pas et décroissent sur place. D'autre part, on peut remarquer que les valeurs propres ne sont pas réparties de manière homogène dans le plan complexe. Non seulement, elle se rapproche à mesure que l'on tend vers la valeur propre nulle, mais elles sont de plus en plus appariées, tout comme si l'on avait affaire à des doublets propres. On retrouve d'ailleurs ce phénomène de doublet dans les fonctions propres, car deux fonctions propres d'un même doublet auront le même nombre de nœuds. Dans le cas d'un fluide à seuil, on note que le nombre de Bingham (contrainte seuil adimensionnelle) réduit de manière significatives les doublets retrouvés dans les cas newtonien et par la loi de puissance.

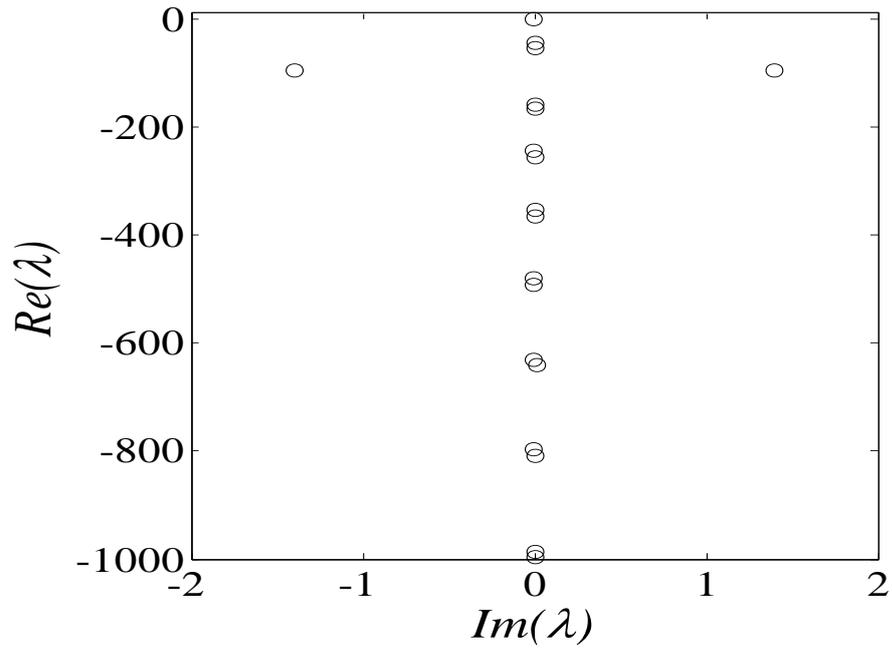


Figure 3.2 : Exemple de spectre obtenu dans les conditions critiques pour un fluide Newtonien. Rapport de rayon $\eta=0.5$. $Re_c=68.75$ et $k_c=3.12$.

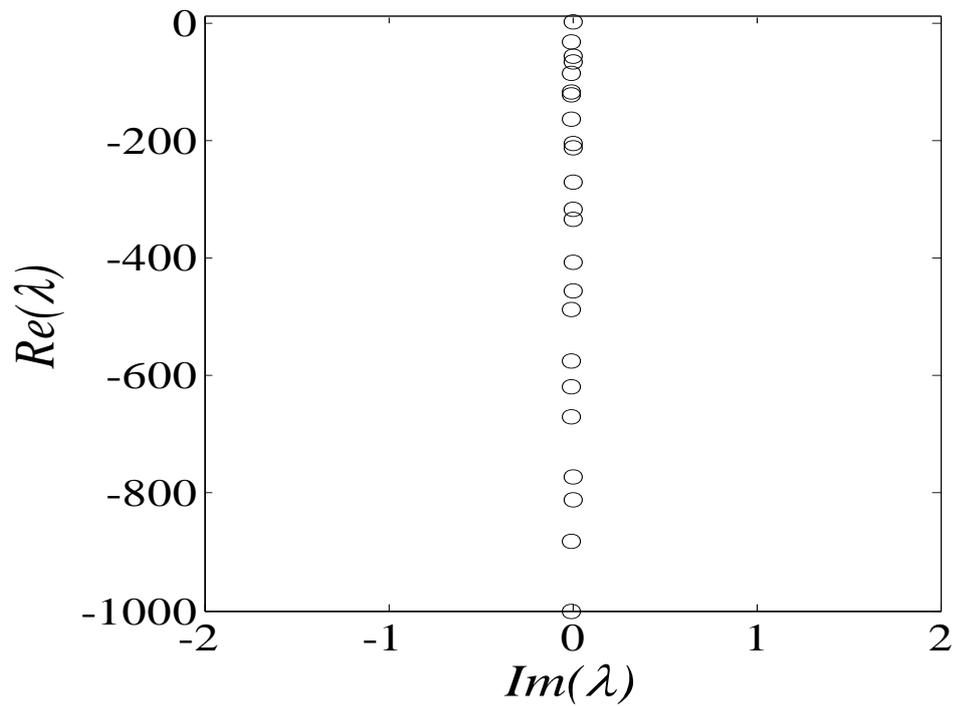


Figure 3.3 : Exemple de spectre obtenu dans les conditions critiques pour un fluide en loi de puissance. Le rapport de rayon $\eta=0.5$ et $n=0.3$, les conditions critique sont $Re_c=72.4$ et $k_c=3.9$.

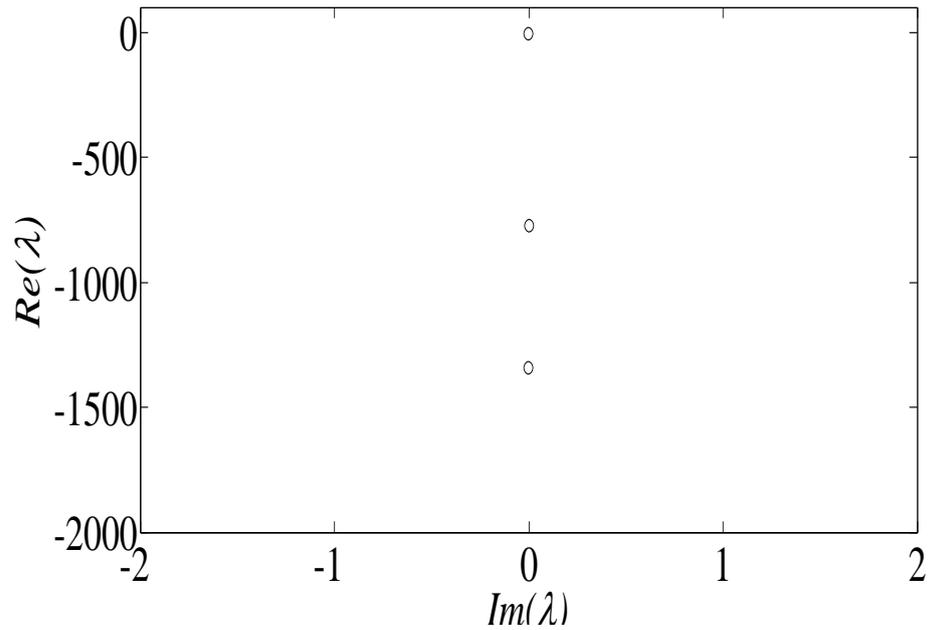


Figure 3.4 : Exemple de spectre obtenu dans les conditions critiques pour un fluide en loi de puissance. Rapport de rayon $\eta=0.5$ et $B=10$, les conditions critique sont : $Re_c=950$ et $k_c=9.4$.

b - Cas deux cylindres tournants

Pour les cylindres contra - rotatifs, les figures 3-5 à 3-7 montrent des spectres de valeurs propres obtenus pour un fluide Newtonien. Le nombre de Reynolds intérieur est fixé et le nombre de Reynolds extérieur augmente en valeur absolue. Lorsque $Re_2=0$, le spectre est constitué de valeurs propres à partie imaginaire nulle. Lorsque le Reynolds extérieur augmente en valeur absolue, deux branches littérales symétriques apparaissent. L'étendue de ces branches augmente avec l'augmentation de la valeur absolue Reynolds extérieur. La partie imaginaire est délimitée par la fréquence épicyclique maximale donnée par l'expression [42] :

$$k_{\max}^2 = \left[\frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (rV)^2 \right]_{r=R_2} \quad 3-1$$

En se référant aux travaux de Charru (2007) [42] et Bachelor (1967) [44], on peut montrer que pour un fluide newtonien cette expression devient :

$$k_{\max}^2 = 4 Re_2 (Re_2 - \eta Re_1) \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \right) \quad 3-2$$

À grande valeurs de Re_2 positives, les mêmes spectres que pour les valeurs négatives sont obtenus. Pour un grand écart ($\eta = 0,4$), les valeurs propres sont purement réelles si le cylindre extérieur est fixe. Lorsque $Re_2 \neq 0$, le lieu de la séparation de la branche est de nouveau déplacé vers les faibles valeurs de Re_2 , augmentant ainsi $|Re_2|$ comme les montrent les figures 3-6 et 3-7.

Les figures 3-8 à 3-10 montrent des spectres de valeurs propres obtenus pour un fluide rhéofluidifiant, on remarque les deux branches latérales. En outre, une branche supplémentaire qui apparaît dans la continuité de la branche centrale.

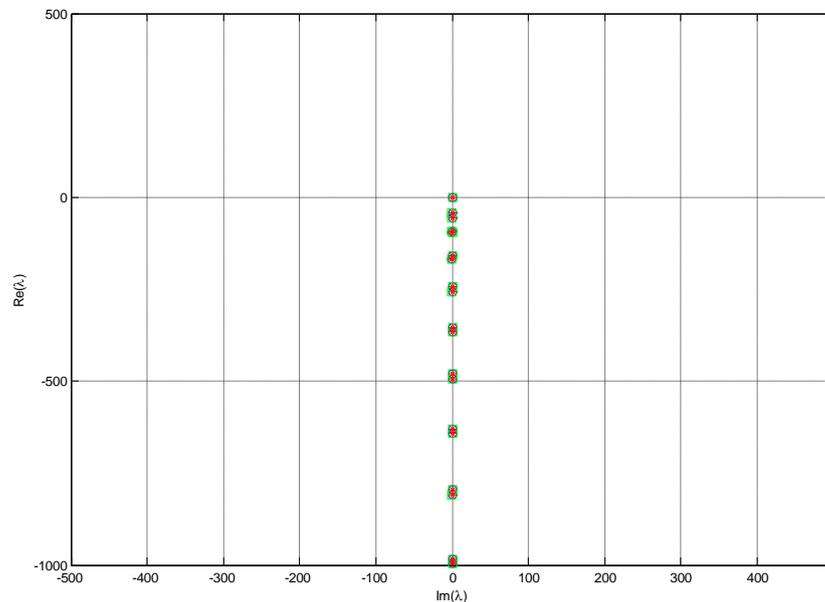


Figure 3.5 : Exemple de spectre obtenu pour un fluide Newtonien. Pour un rapport $\eta=0.881$ Pour $Re_1=120$ $Re_2=0$, et $k=3.12$ $m=0$.

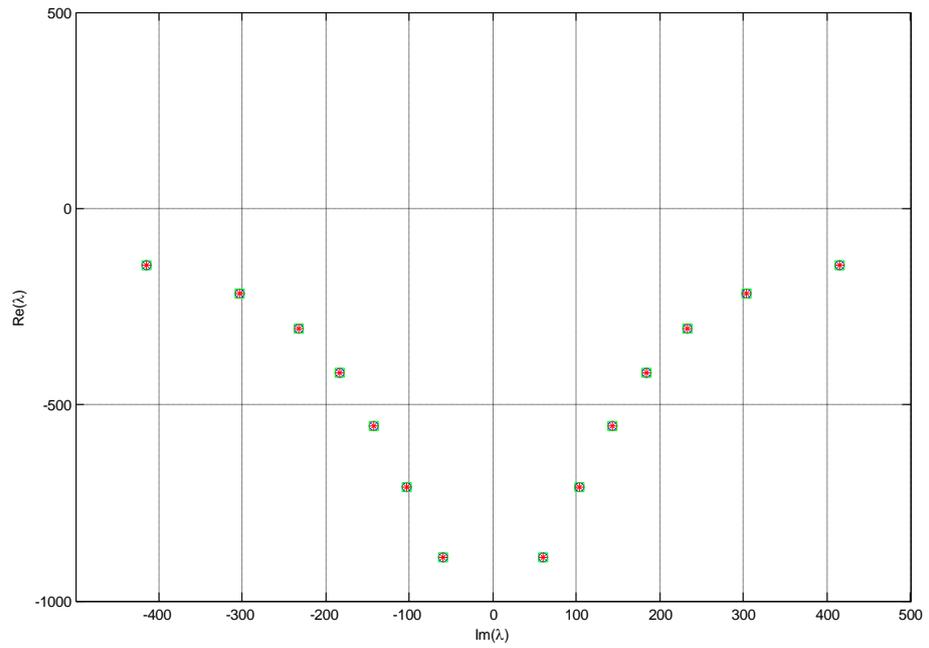


Figure 3.6 : Exemple de spectre obtenu pour un fluide Newtonien. Pour un rapport $\eta=0.881$ Pour $Re_1=120$ $Re_2=-4000$, et $k=3.12$ $m=0$.

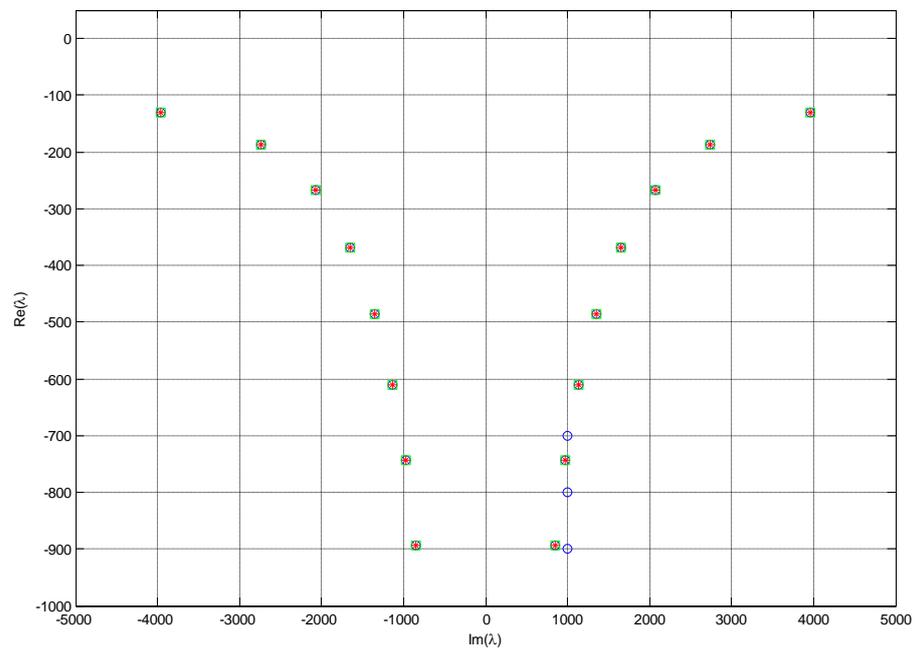


Figure 3.7 : Exemple de spectre obtenu dans les conditions critiques pour un fluide Newtonien. Pour un rapport $\eta=0.881$ Pour $Re_1=120$, $Re_2=-25000$ et $k=3.12$ $m=0$.

- Loi de puissance

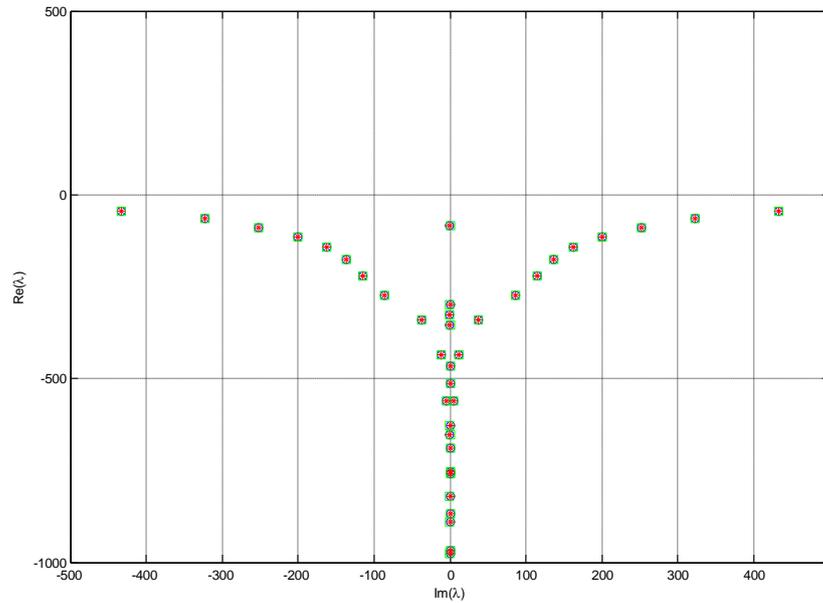


Figure 3.8 : Exemple de spectre obtenu dans pour un fluide en loi de puissance. Pour un rapport $\eta=0.881$. Pour $Re_1=400$, $Re_2=-4000$, et $k=3.12$ $n=0.5$ $m=0$.

- Fluide de Carreau

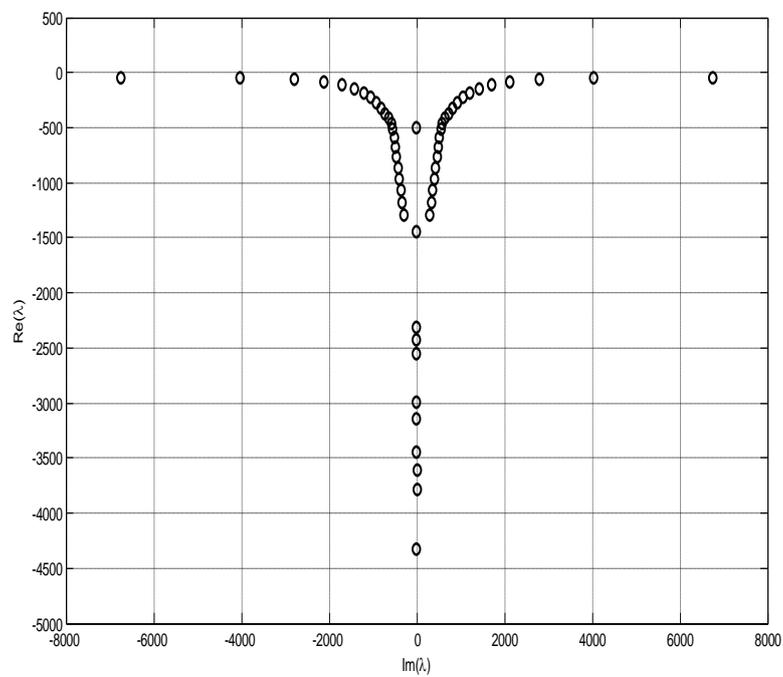


Figure 3.9: Exemple de spectre obtenu pour un fluide de Carreau avec $n=0.7$, $\lambda=1$. Pour un rapport $\eta=0.881$. Pour $Re_1=400$ $Re_2=-25000$, et $k=3.12$ $m=0$.

- Fluide de Bingham

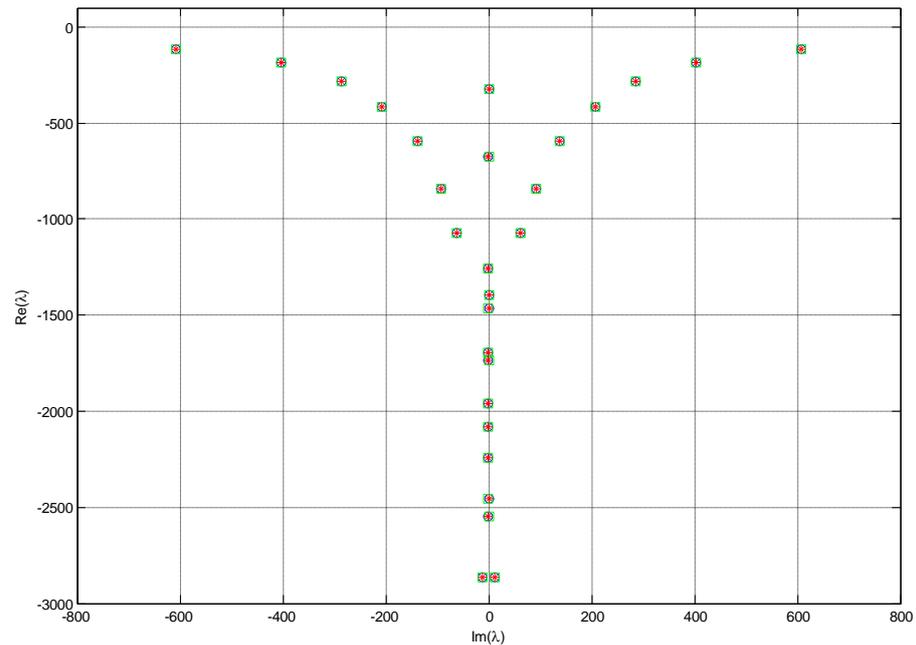


Figure 3.10 : Exemple de spectre obtenu pour un fluide de Bingham $B=5$.
Pour un rapport $\eta=0.881$; $Re_1=400$ $Re_2=-4000$, et $k=3.12$ $m=0$.

3-2-2 Perturbation Tridimensionnelle

Lorsque $m \neq 0$ et $k \neq 0$, la perturbation est tridimensionnelle. Dans cette situation, les deux formulations sont valables ; soit (u,v) ou bien (u,w) .

Les figures 3-11, 3-13 et 3-14 montrent des spectres de valeurs propres obtenus dans les conditions critiques pour un fluide de Bingham avec un rapport $\eta=0.5$. On observe deux branches clairement définies, ces branches ont des vitesses des phases différentes. Les modes de paroi avec une vitesse de phase faible se développent près de la paroi alors que les modes centraux ont une vitesse de phase élevée. On trouve des solutions non axisymétriques pour des rapports Ω_2/Ω_1 suffisamment négatifs. Les nombres d'ondes axiaux sont alors non nuls et les nombres d'ondes azimutales croissent quand $|\Omega_2/\Omega_1|$ augmente, ce qui correspond des rouleaux en spirale.

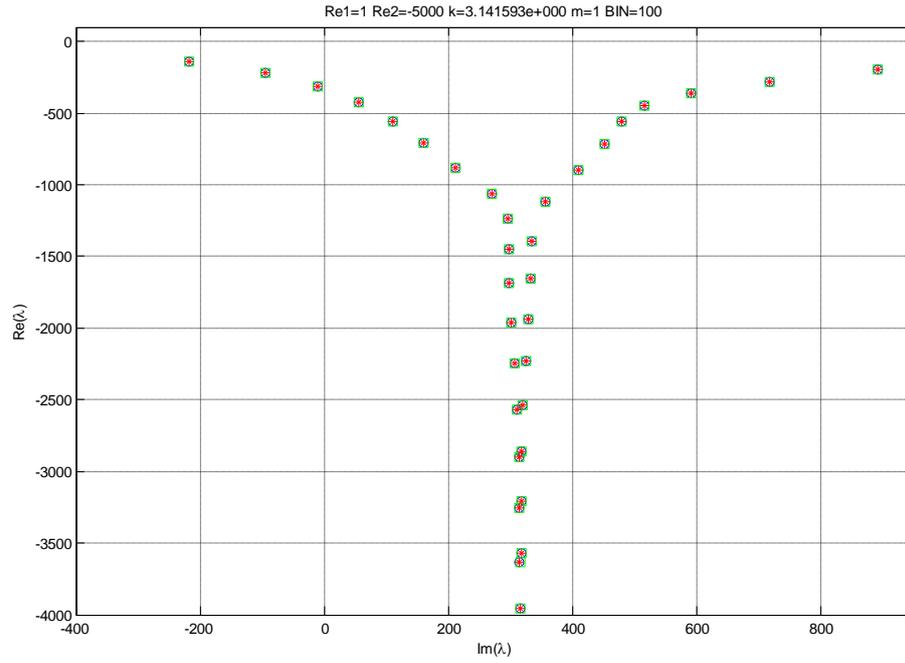


Figure 3.11 : Exemple de spectre obtenu dans pour un rapport $\eta=0.5$. Pour un fluide de Bingham : $Re_1=1$, $Re_2=-5000$, $B=100$ et $m=1$, $k=3.14$.

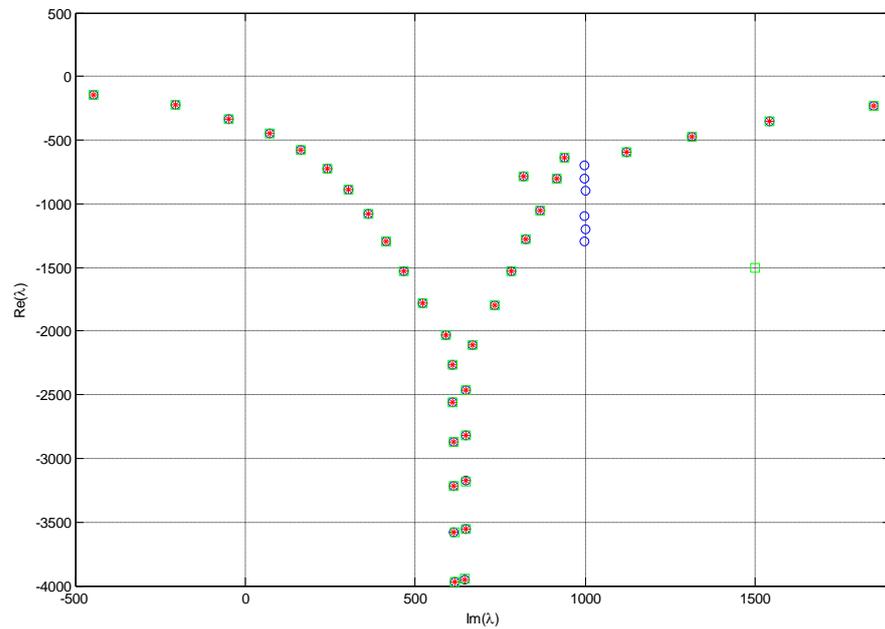


Figure 3.12 : Exemple de spectre pour un fluide de Bingham. Pour un rapport $\eta=0.5$, $Re_1=1$, $Re_2=-10000$, $B=100$ et $m=1$ $k=3.14$.

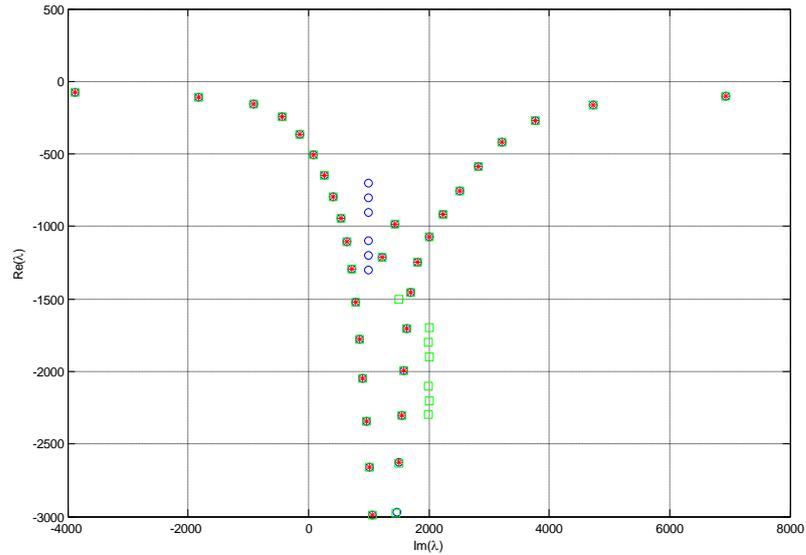


Figure 3.13 : Exemple de spectre obtenu dans pour un fluide de Bingham. Pour un rapport $\eta=0.5$; $Re_1=1$, $Re_2=-20000$, $B=100$ et $m=1$.

Les figures 3-14, 3-15 et 3-16 montrent les spectres de valeurs propres obtenu respectivement pour $m=0$ et $m=1$ dans le cas d'un comportement rhéologique en loi de puissance (pour un indice de fluide $n=0.5$; $Re_1=4000$, $k=3.12$) pour des rapports Ω_2/Ω_1 négatifs. Les nombres d'ondes axiaux sont alors non nuls et les nombres d'ondes azimutales croissent quand $|\Omega_2/\Omega_1|$ augmente, ce qui correspond aussi à des rouleaux en spirale.

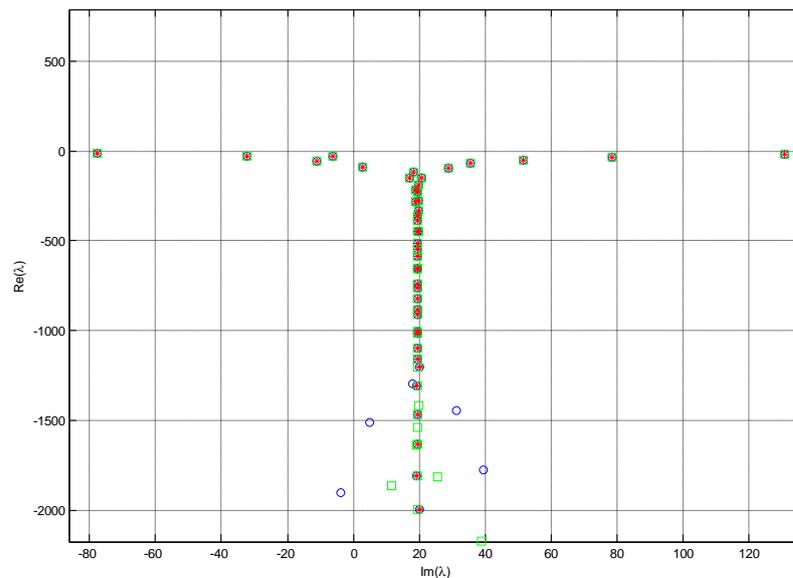


Figure 3.14 : Exemple de spectre obtenu pour un fluide en loi de puissance. Pour un rapport $\eta=0.5$, $n=0.5$; $Re_1=100$, $Re_2=-400$, $k=3.12$, $m=1$.

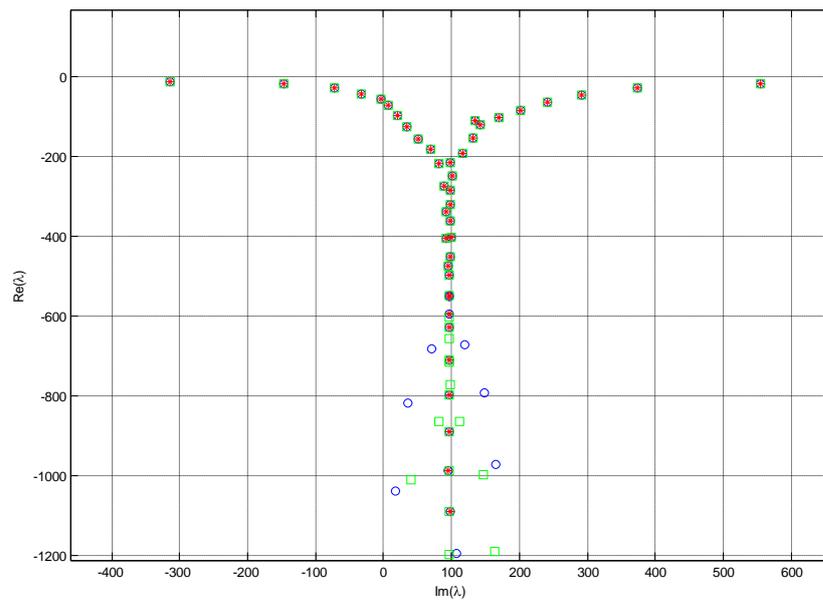


Figure 3.15 : Exemple de spectre obtenu dans les conditions critiques pour fluide en loi de puissance. Pour un rapport $\eta=0.5$: $n=0.5$: $Re_1=-100$, $Re_2=-1600$, $m=1$.

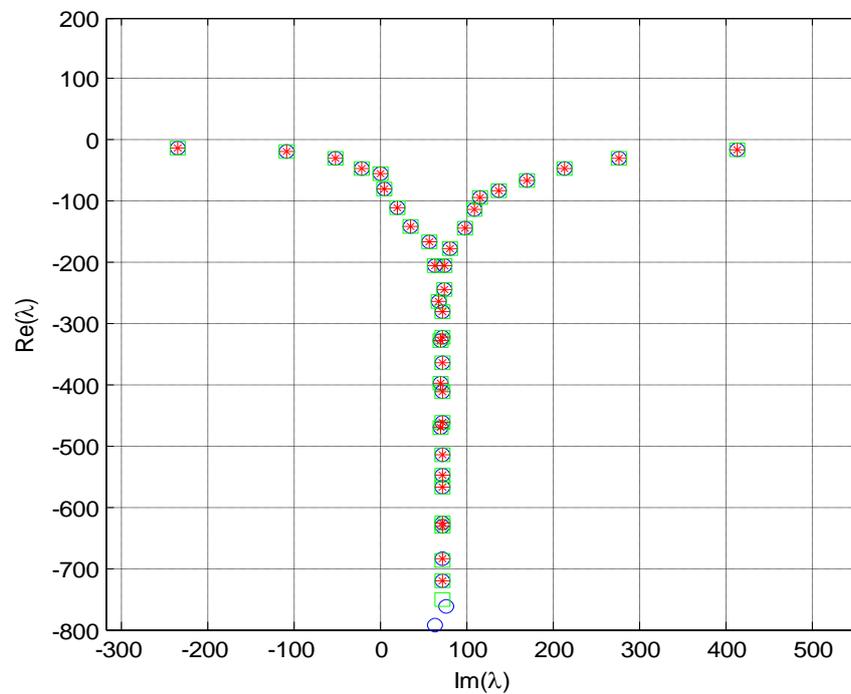


Figure 3.16: Exemple de spectre obtenu dans les conditions critiques pour un fluide en loi de puissance $n=0.5$. Pour un rapport $\eta=0.881$. Pour $Re_1=100$, $Re_2=-1200$, et $k=3.12$ $m=1$.

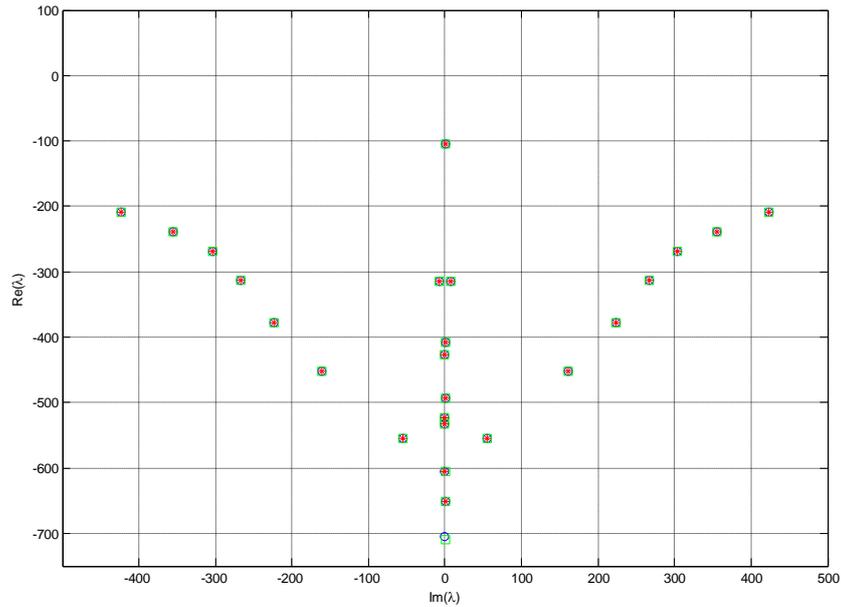


Figure 3.17 : Exemple de spectre obtenu dans pour un fluide en loi de puissance pour : $\eta=0.881$ $Re_1=400$, $Re_2=-4000$ $n=0.3$, $k=3.14$, $m=0$.

3-2-3 Perturbation homogène dans la direction axiale

Dans le cas d'une perturbation homogène dans la direction axiale, les modes propres ont une fréquence angulaire nulle et sont amortis au cours du temps. En fixant $k = 0$ et $m \neq 0$, les équations de stabilité linéaire formulées en (u, w) sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda \left[D_*^2 u - \frac{1}{r} D_* u - \frac{m^2}{r^2} u \right] = \text{Re} \frac{im}{r} \left[u D D_* V^b - V^b \left(D_*^2 u + \frac{2}{r} D_* u - \frac{m^2}{r^2} u \right) \right] \\ + \mu_b \left[D_*^2 + \frac{1}{r} D_* - \frac{m^2}{r^2} \right]^2 u - 4 \frac{m^2}{r^2} D \mu^b D_* u \quad 3-3 \\ \left[D_*^2 - \frac{3}{r} D_* + \frac{m^2}{r^2} \right] \left[(\mu_t - \mu_b) \left(D_*^2 u - \frac{1}{r} D_* u - \frac{m^2}{r^2} u \right) \right] \end{aligned}$$

$$\lambda w = -\text{Re} \frac{im}{r} V^b w + \mu_b \left[\frac{1}{r} D(r D w) - \frac{m^2 w}{r^2} \right] + 2 D \mu^b D w \quad 3-4$$

Nous considérons d'abord l'ensemble des modes propres de (3-4). En utilisant une formulation variationnelle ; c'est à dire, en multipliant par le complexe conjugué w^* et en intégrant entre les cylindres intérieur et extérieur, on peut montrer que :

$$\operatorname{Im}(\lambda) \int_{R_1}^{R_2} |w|^2 dr = -\operatorname{Re} m \int_{R_1}^{R_2} \frac{V^b}{r} |w|^2 dr \quad 3-5$$

$$\operatorname{Re}(\lambda) \int_{R_1}^{R_2} |w|^2 dr = \int_{R_1}^{R_2} \mu^b \left(|Dw|^2 + \frac{m^2}{r^2} |w|^2 \right) dr \quad 3-6$$

Il est clair que les modes propres de (3-3) sont toujours amortis puisque $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. Concernant les modes propres de l'équation (3-4), le spectre des valeurs propres correspondantes est présenté dans la figure 3-18 pour un fluide newtonien et la figure 3-19 pour un fluide en loi de puissance pour deux valeurs du nombre Reynolds de paroi ($\operatorname{Re}_w = 100$ et $\operatorname{Re}_w = 500$). Les modes propres associés à la branche verticale ont une vitesse de phase angulaire qui diminue avec l'augmentation de l'effet du caractère rhéofluidifiant. Contrairement à Caton [1], pour toute la gamme des paramètres rhéologiques pris en compte, $0.1 \leq n \leq 1$ et $0 \leq B \leq 500$, nous n'avons trouvé aucune instabilité. Cela a été confirmé par des calculs effectués par une partie tierce (lors de l'examen de [33]). En fait, Caton [1] a montré que pour de fortes rhéofluidifications, l'instabilité primaire serait caractérisée par des structures longitudinales. Cela signifierait un changement dans le mécanisme de l'instabilité. Alors qu'en fait, d'autres études montrent, bien que pour d'autres configurations géométriques, que le seul effet du caractère de rhéofluidifiant est de changer les conditions critiques ([26], [27] et [28]). Comme l'écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux pour un fluide newtonien, où le cylindre extérieur est fixe et l'intérieur est en rotation, est linéairement stable par rapport à une perturbation homogène [29] dans la direction axiale, il n'est donc pas surprenant de constater un résultat similaire pour un fluide rhéofluidifiant.

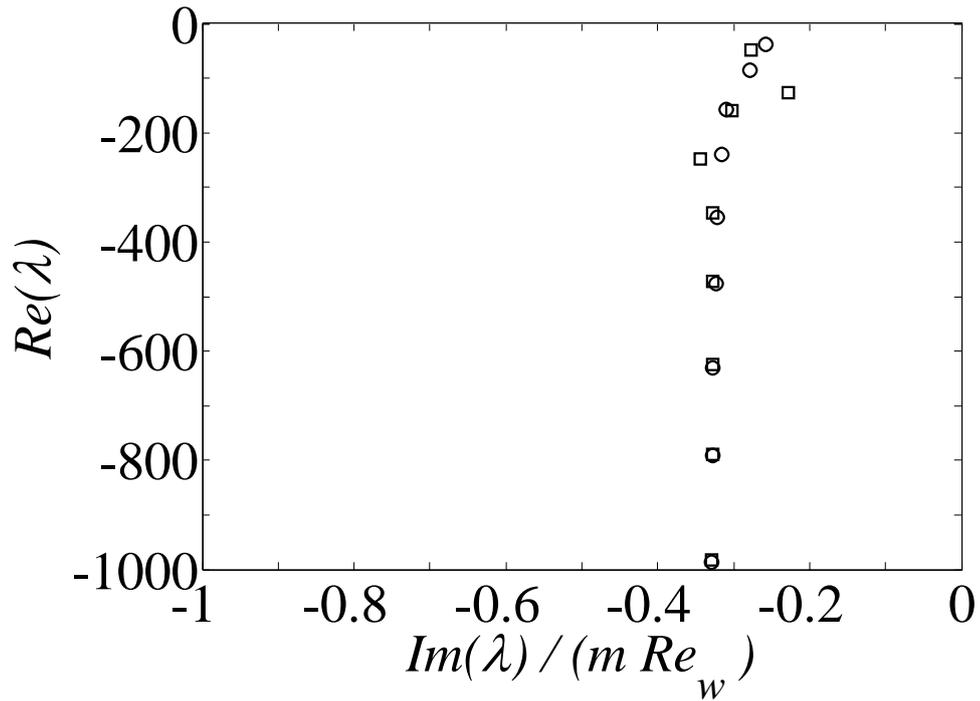


Figure 3.18 : Exemple de spectre obtenu dans les conditions critiques pour un fluide Newtonien pour $\eta=0.5$, $k=0$, $m=1$ et pour deux Nombre de Reynolds : (o) $Re_w=100$, (\square) $Re_w=500$..

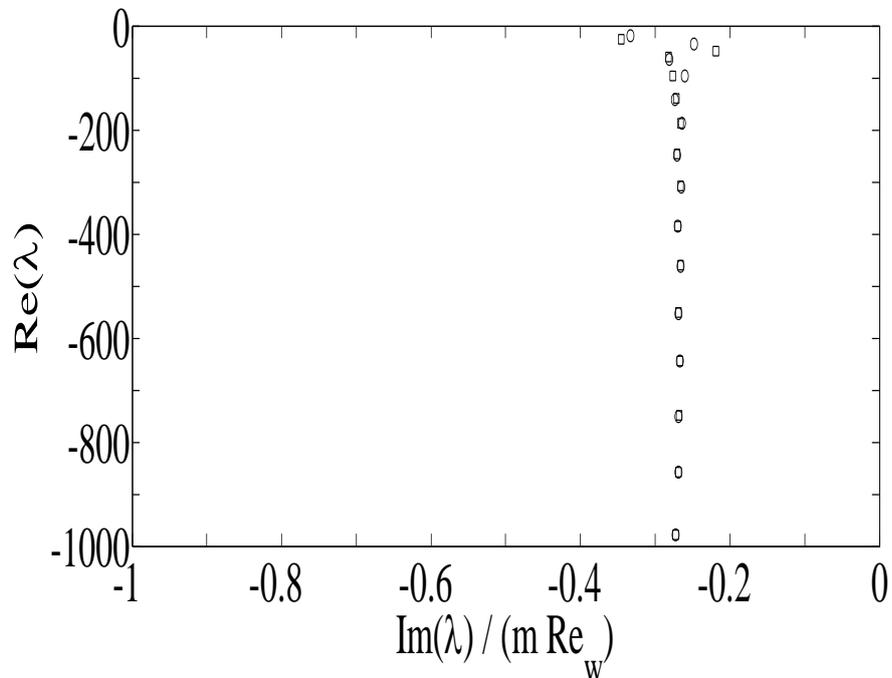


Figure 3.19 : Exemple de spectre obtenu dans les conditions critiques pour un fluide en loi de puissance $n=0.3$: pour $\eta=0.5$, $k=0$, $m=1$ et pour deux Nombre de Reynolds : (o) $Re_w=100$, (\square) $Re_w=500$.

3-3- CONDITIONS CRITIQUES

L'approche modale présentée dans cette partie a permis de déterminer les conditions critiques d'instabilité ainsi que la structure du mode le moins stable. Nous allons donc rechercher pour le cas où le cylindre intérieur est en rotation et le cylindre extérieur fixe, la valeur du nombre de Reynolds critique (Re_c) minimale à partir de laquelle une valeur propre devient positive. Nous calculons également la valeur de nombre d'onde critique kc qui lui est associé.

3-3-1-Perturbation axisymétrique : $m = 0$

3-3-1-1-Fluide en loi de puissance

Les variations du nombre de Reynolds critique en fonction de l'indice de structure n pour différents rapports de rayon η ont été déterminées. Nos résultats confirment ceux obtenus par Jastrzebski et al [3]. Pour décrire l'influence du caractère rhéofluidifiant sur le seuil de stabilité, il est plus pertinent d'utiliser un nombre de Reynolds Re_{cw} construit avec la viscosité au niveau de la paroi intérieure et non plus μ_{ref} comme le montre la figure (3-20). Avec cette définition, on observe que le comportement rhéofluidifiant retarde l'apparition des rouleaux de Taylor. Comme on pouvait s'y attendre, cet effet est plus important grand quand η diminue. Pour η proche de 1, le profil de vitesse est presque linéaire et ainsi le taux de cisaillement et la viscosité est pratiquement constants dans l'espace annulaire.

L'influence de l'indice rhéofluidifiant sur le nombre d'onde critique, donc sur la taille des vortex de Taylor, est représentée sur les figures 3-21 et 3-22. On peut noter que pour un indice rhéofluidifiant donné, la longueur d'onde axiale diminue avec η . Par exemple, à $\eta = 0,4$ et $n = 0,3$, la longueur d'onde axial est inférieur de moitié par rapport à celle obtenue dans le cas $\eta = 0,9$ et $n = 0,3$ (le nombre d'onde est presque deux fois plus grand que dans le cas newtonien). Cela pourrait être lié à la stratification de la viscosité entre les cylindres intérieur et extérieur.

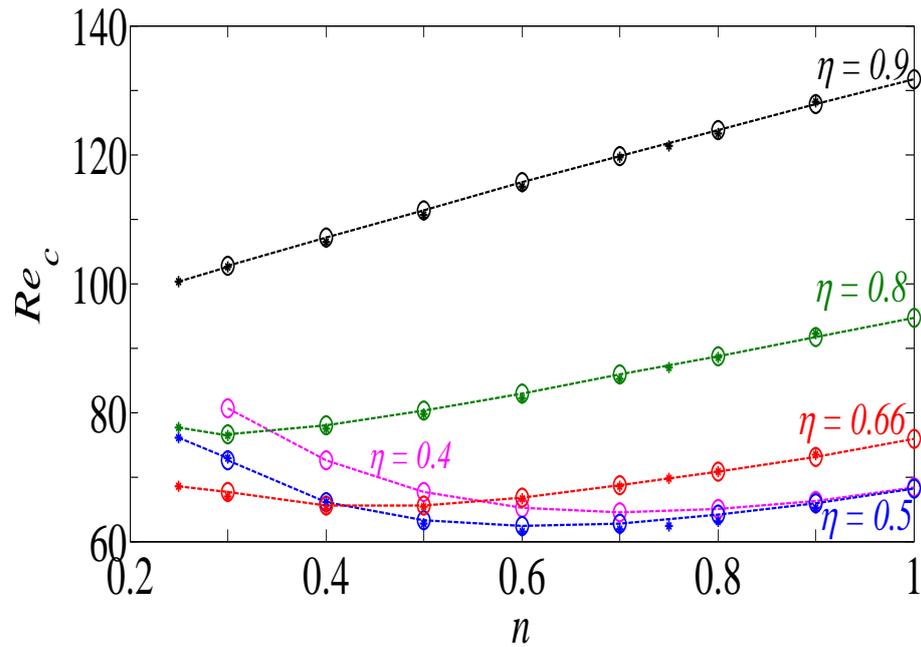


Figure 3.20. Variation du nombre de Reynolds critique en fonction de l'indice de structure pour un fluide en loi de puissance à différents rapports de rayon. (o) Nos résultats; (*) Jastrzebski et al [11]. (A) Le Nombre de Reynolds basé sur la viscosité à la paroi intérieure.

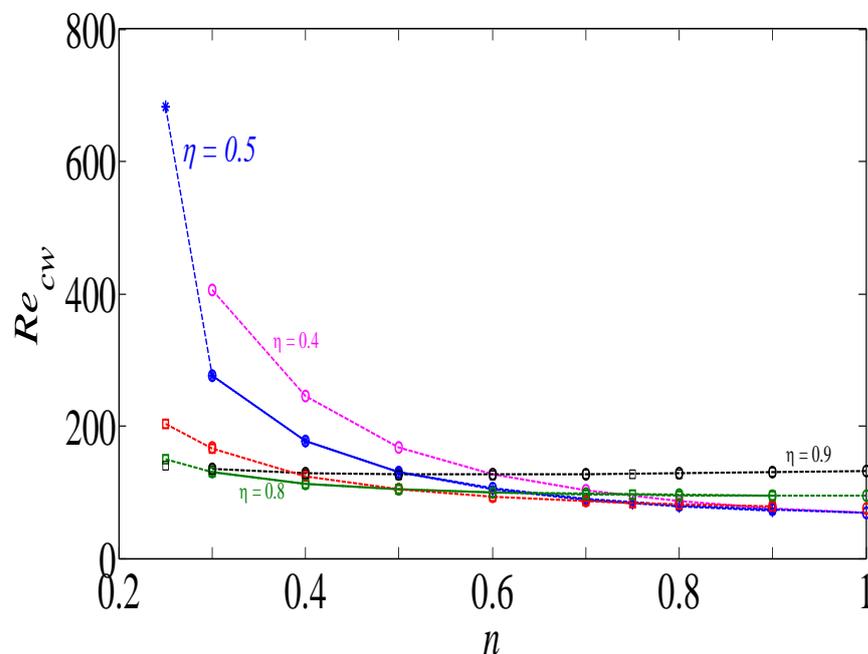


Figure 3.21. Variation du nombre de Reynolds critique de paroi en fonction de l'indice de structure pour un fluide en loi de puissance à différents rapports de rayon. (O) Nos résultats; (*) Jastrzebski et al [11]. Le Nombre de Reynolds basé sur la viscosité à la paroi intérieure.

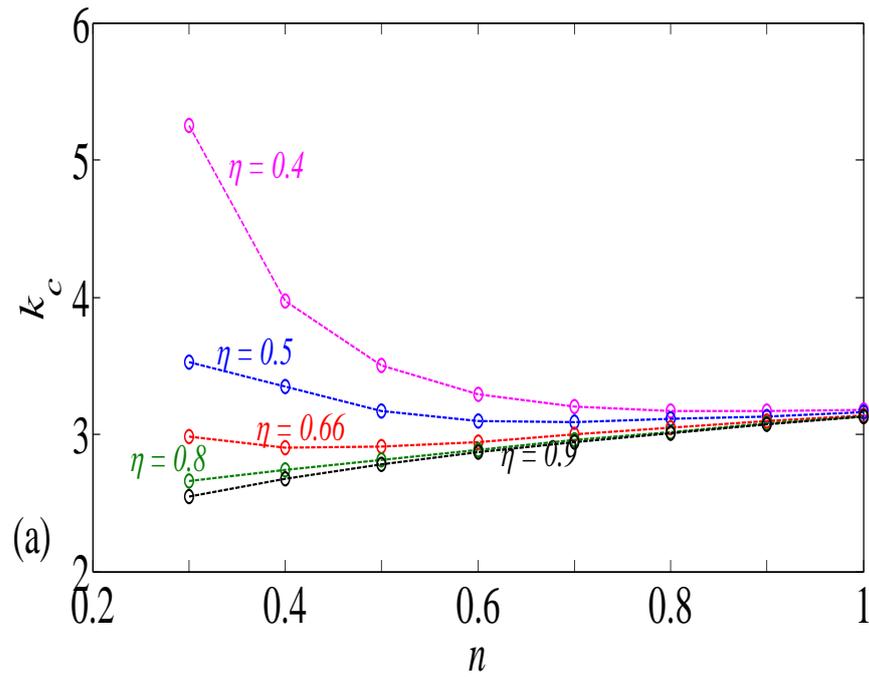


Figure 3.22 – Variation de nombre d'onde critique en fonction de l'indice de structure pour un fluide en loi de puissance avec différents rapports de rayons.

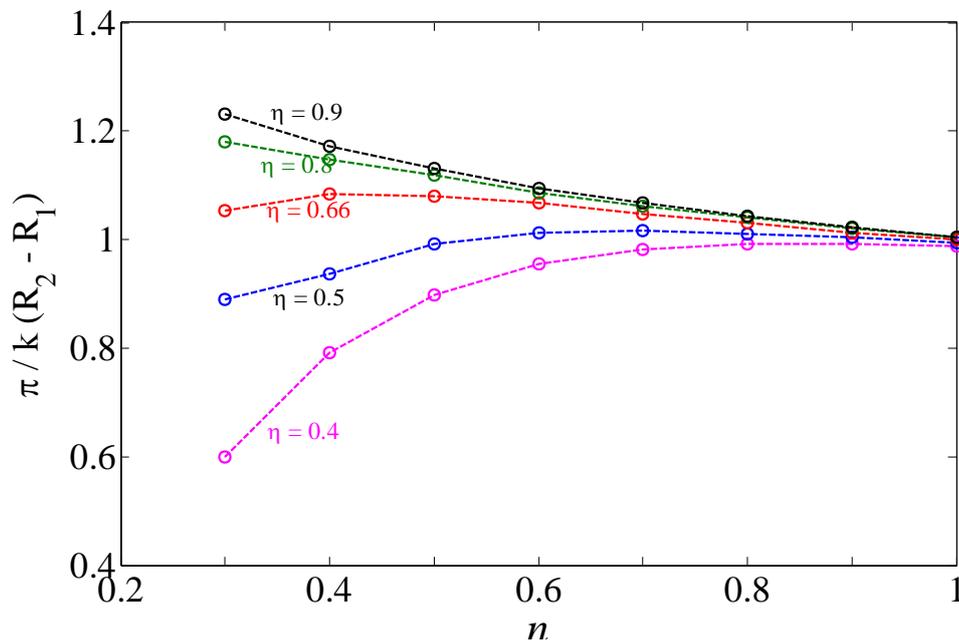


Figure 3.23 : La taille des vortex de Taylor en fonction de l'indice de structure pour un fluide en loi de puissance avec différents rapports de rayons.

Les contours des iso-valeurs de la vitesse radiale u pour un fluide Newtonien et un fluide en loi de puissance, tracés sur les figures 3-24 et 3-25, montrent l'effet du caractère rhéofluidifiant. Pour $n = 0,3$, les contours sont fortement écrasés contre la paroi intérieure où la viscosité est plus faible. Ce comportement est également illustré par les contours de vorticité azimutale,

$$\omega_{\theta} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} , \quad 3-7$$

qui sont présentés dans les figure 3-26 et 3-27. Chaque vortex est délimité par l'écoulement entrant et l'écoulement sortant. Ces régions sont clairement identifiées dans tout l'espace annulaire pour un fluide newtonien. Pour un fluide en loi de puissance, la région de vortex opposés est très mince et localisée près de la paroi interne ; ceci en raison de valeurs $\partial w/\partial r$ trop faible.

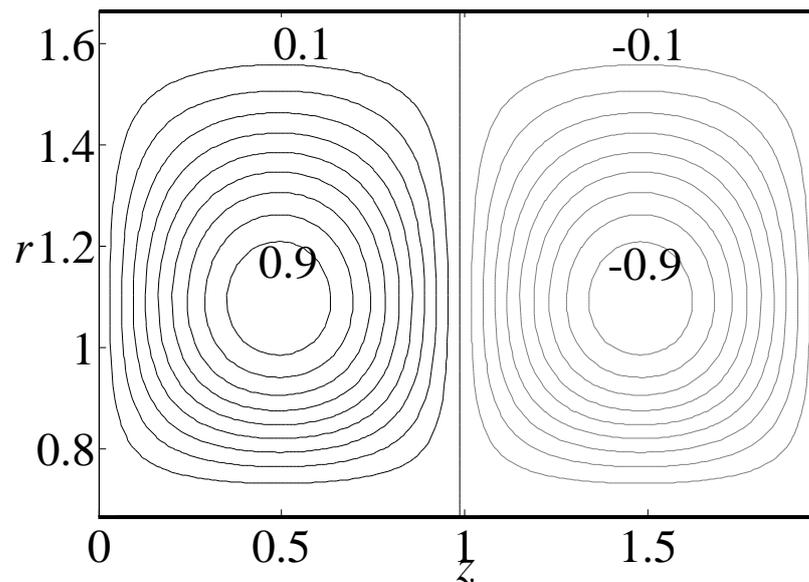


Figure 3.24 – Contour des iso-valeurs de la composante radiale de la perturbation de vitesse u pour $\eta = 0.4$. (···) Valeurs négative de u et (-) valeurs positives de u . Les contours sont représentés comme fraction de la valeur maximale de u par pas de 0.1. Pour fluide Newtonien, $Re_c = 68.3$, $k_c = 3.18$.

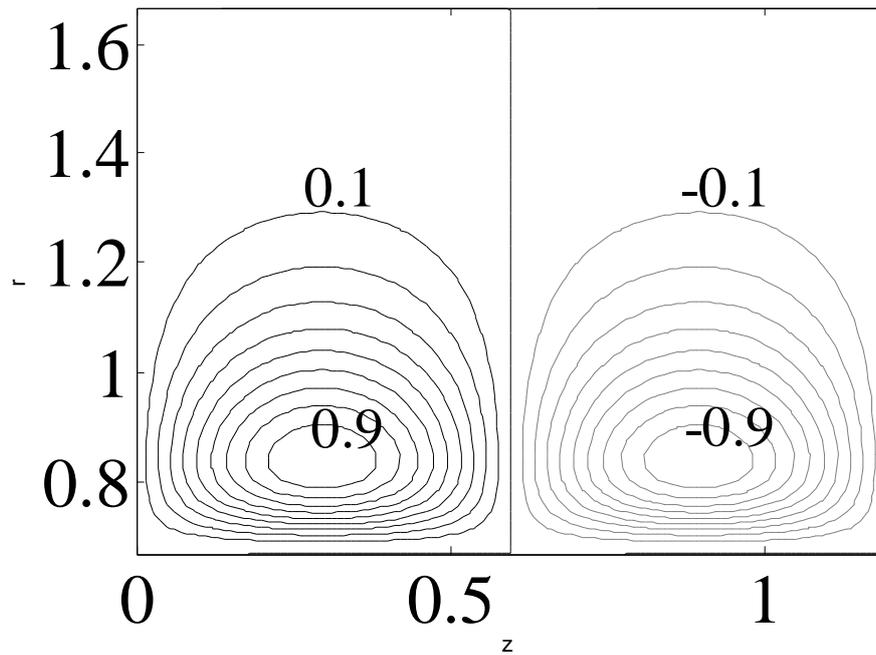


Figure 3.25– Contour des iso-valeurs de la composante radiale de la perturbation de vitesse u pour $\eta = 0.4$. (···) Valeurs négative de u et (–) valeurs positives de u . Les contours sont représentés comme fraction de la valeur maximale de u par pas de 0.1 pour un fluide en loi puissance avec $n = 0.3$, $Re_c = 80.7$, $k_c = 5.25$.

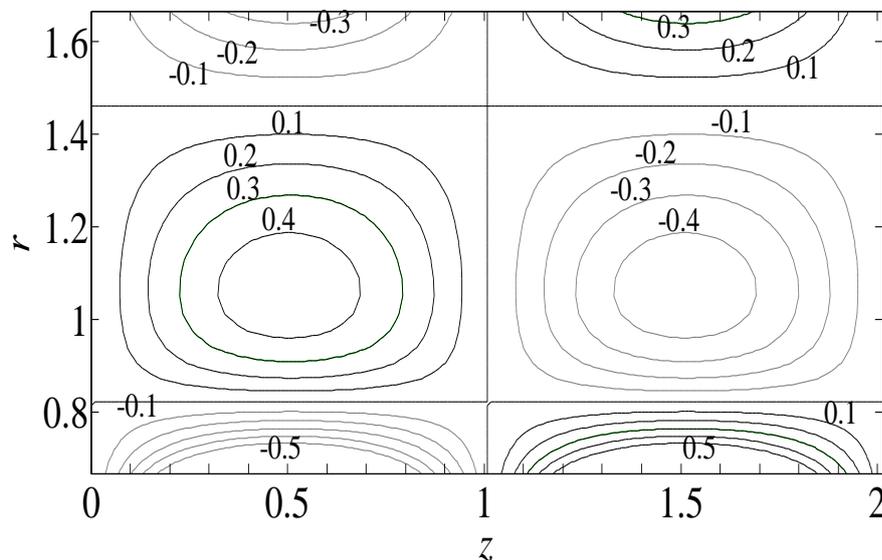


Figure 3.26 – Contour des iso-valeurs de la composante azimutale de la perturbation de vitesse w pour $\eta = 0.4$. (···) Valeurs négative de w et (–) valeurs positives de w . Les contours sont représentés comme fraction de la valeur maximale de w par pas de 0.1. Pour un fluide Newtonien $Re_c = 68.3$, $K_c = 3.18$.

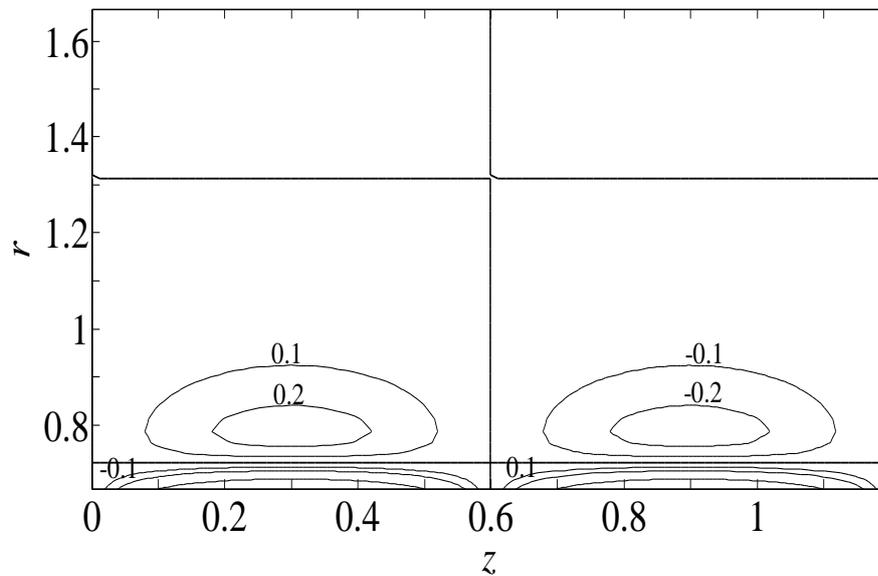


Figure 3.27 – Contour des iso-valeurs de la composante azimutale de la perturbation de vitesse w pour $\eta = 0.4$. (---) Valeurs négative de w et (—) valeurs positives de w . Les contours sont représentés comme fraction de la valeur maximale de w par pas de 0.1. Pour un fluide de loi de puissance avec $n=0.3$, $Re_c=80.7$, $K_c=5.25$.

3-3-1-2-Fluide de Bingham

En effectuant des iteration sur le nombre d'onde k et le nombre de Reynolds Re_1 on obtient le nombre de Reynolds critique pour lequel la valeur propre la moins stable a sa parti réelle nulle. La variation du nombre de Reynolds critique avec le nombre de Bingham est montrée dans la figure 3-28. A nouveau, on observe que Re_c croît lorsqu'augmente la stratification de viscosité induite par le nombre de Bingham $\mu=1+B/\gamma'$. Nos résultats, obtenus pour un rapport de Rayon $\eta=0.5$ et $\eta=0.883$ respectivement, confirment ceux donnés par Landry *et al.* La taille axiale des rouleaux de Taylor est estimée à partir du nombre d'onde critique redimensionné par la largeur de la zone cisailée $k_{cp}=k_c \times (R_0-R_1)$. Celle-ci est représentée en fonction du nombre de Bingham dans la figure 3-29. Un décrochement dans l'évolution de k_c a lieu lorsque qu'apparaît une zone non-cisailée dans l'écoulement attachée au cylindre extérieur dans l'écoulement. En dessous du décrochement, la variation est en accord avec celle observée pour les fluides en loi de puissance. Pour de grands nombres de Bingham, le nombre

d'onde diminue quand le caractère rheofluidifiant augmente ; ceci est cohérent avec la loi de puissance pour une faible épaisseur cisillée (η proche de 1).

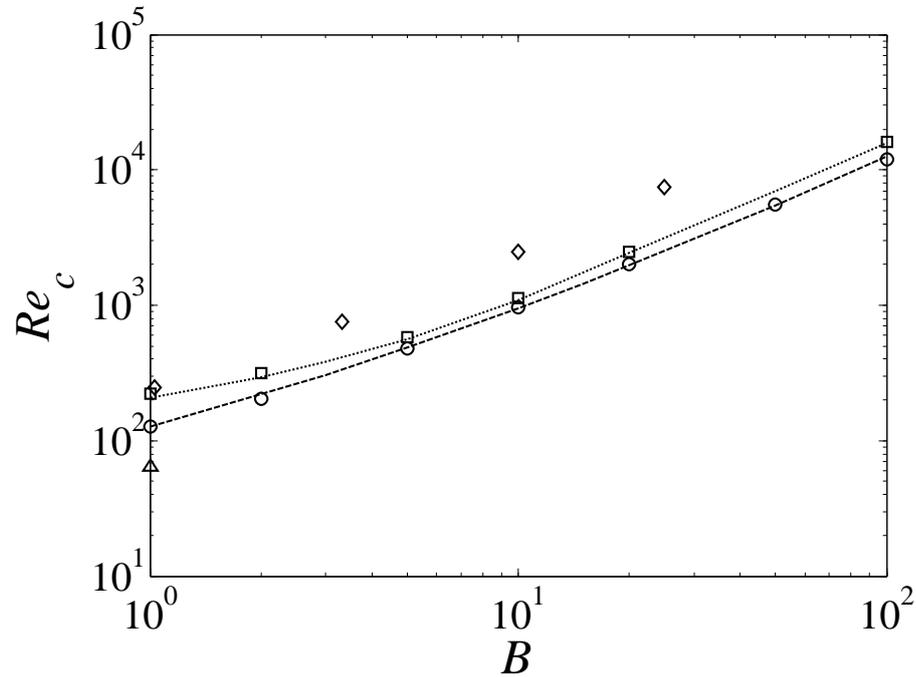


Figure 3.28 –Nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Bingham pour deux rapports de rayons : $\eta = 0.5$ (---) et $\eta = 0.883$ (···). (o) Landry *et al.* [5] pour $\eta = 0.5$, (\square) Landry *et al.* [5] pour $\eta = 0.883$, (\diamond) Caton [1] pour $\eta = 0.5$, (Δ) Lockett *et al.* [7] pour $\eta = 0.5$.

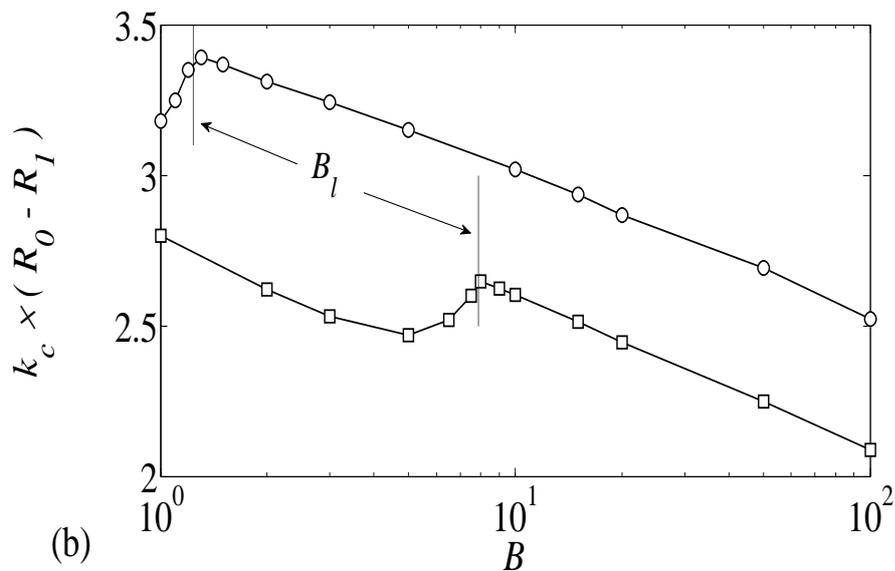


Figure 3.29–Nombre d'onde critique en fonction du nombre de Bingham pour deux rapports de rayons : $\eta=0.5$ et $\eta=0.883$.

Les figures 3-30 et 3.31 représentent les contours de la vitesse radiale et azimuthale des tourbillons pour une grande valeur de B . La viscosité est pratiquement constante dans le cas où la zone étroite est cisillée. Près de la contrainte seuil, μ augmente fortement et tend vers l'infini.

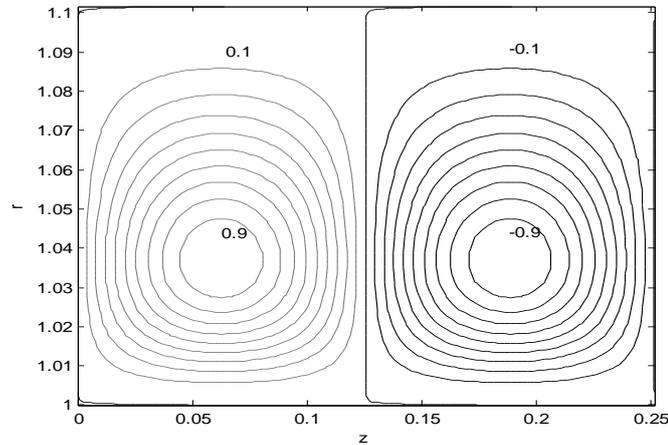


Figure 3.30 – Contour des iso-valeurs de la composante radiale de la perturbation de vitesse w pour $\eta = 0.5$. (...) Valeurs négative de w et (-) valeurs positives de w . Les contours sont représentés comme fraction de la valeur maximale de w par pas de 0.1 pour un fluide de Bingham avec $B=100$, $k_{cp}=k_c \times (R_0 - R_1) = 2.52$.

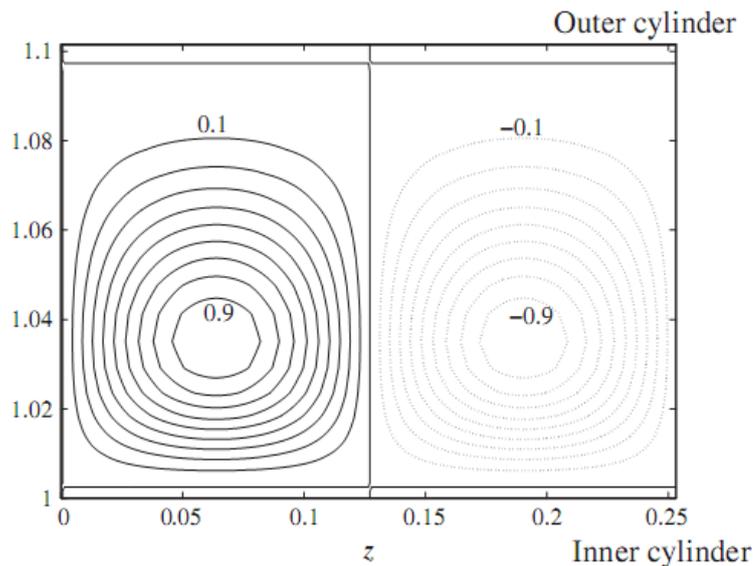


Figure 3.31 – Contour des iso-valeurs de la composante azimuthale de la perturbation de vitesse w pour $\eta = 0.5$. (...) Valeurs négative de w et (-) valeurs positives de w . Les contours sont représentés comme fraction de la valeur maximale de w par pas de 0.1 pour un fluide de Bingham avec $B=100$, $k_{cp}=k_c \times (R_0 - R_1) = 2.52$.

3-3-1-3 Fluide de Carreau

Comme mentionné dans l'introduction, les résultats portant sur les conditions critiques pour les fluides de Carreau sont très limitées. Les résultats donnés par Coronado et al [16] sont présentés dans la figure 3-32. Ils ont été calculés pour un rapport d'aspect $L/d = 10$ (L étant la longueur des cylindres et d l'épaisseur de l'espace annulaire) et $\lambda = 0,1$; c'est-à-dire un faible effet rhéofluidifiant. Pour η proche de 1, des différences significatives sont observées avec nos résultats qui sont pratiquement indépendants de n à cause de faible valeur de λ . Les écarts entre nos résultats et ceux donnés par Coronado et al sont prévisibles. En effet, le domaine de calcul considéré par Coronado et al est délimité par des parois d'extrémité qui limitent le fluide dans la direction axiale. Ce confinement induit un écoulement de base qui n'est pas purement azimutal comme dans notre cas, mais qui a aussi des composantes axiales et radiales.

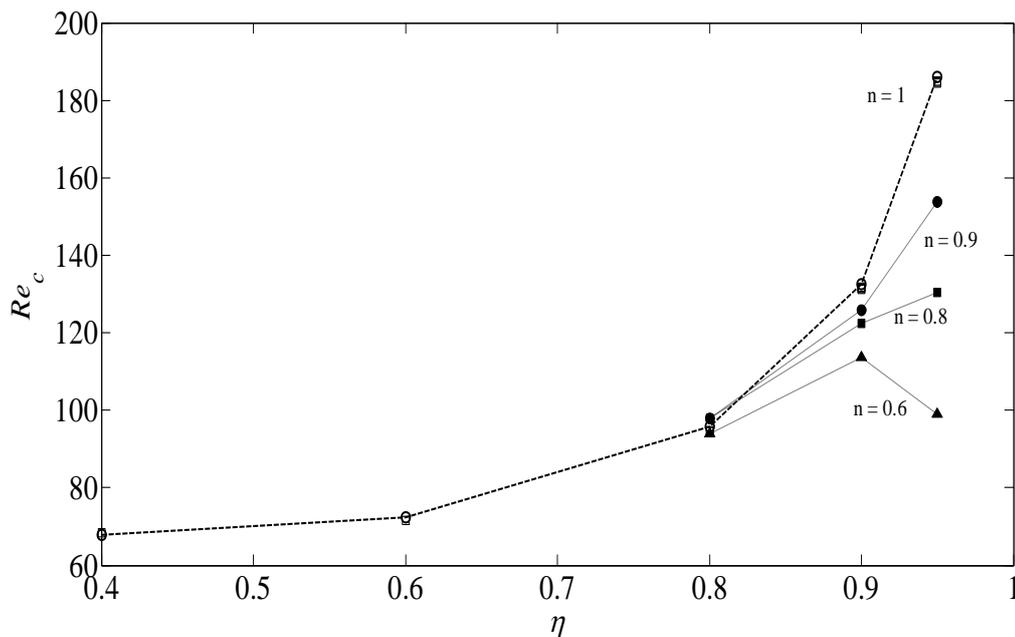


Figure 3.32. Variation du nombre de Reynolds critique en fonction de l'indice de structure pour un fluide de Carreau à différents rapports de rayon. Pour $\lambda = 0.1$ et différentes valeurs de n . (-) Fluide Newtonien, (●) Coronado et al [16] pour $n = 0.9$; (■) Coronado et al [16] pour $n = 0.8$; (▲) Coronado et al [16] pour $n = 0.6$; (□) Nos résultats.

La discontinuité de la vitesse au niveau de la paroi d'extérieur génère des petits tourbillons à son voisinage. Ceux-ci peuvent se propager vers le centre du

domaine, en modifiant par conséquent les conditions critiques comparativement à l'écoulement de base purement azimuthal.

Li et Khayat [15] a également calculé le nombre de Reynolds critique pour un fluide à faible caractère rhéofluidifiant. En utilisant un développement de Taylor autour $\lambda^2 \dot{\gamma}^2$ considéré comme un petit paramètre, la viscosité peut être écrite comme $\mu = 1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^2$, avec $\lambda = (1 - \mu_\infty / \mu_0)(n-1)/2 \dot{\gamma}^2$. Nous n'avons pas rapporté leurs résultats dans les figures 3-32 ou 33, parce que les valeurs de λ considérées par les auteurs conduisent à des valeurs négatives de n , si $\mu_\infty / \mu_0 = 0$ et λ est faible. Les résultats de Ashrafi et Khayat [14] ne sont pas rapportés non plus car, contrairement à nos calculs, ils ont considéré une condition la irréaliste de glissement au niveau des parois.

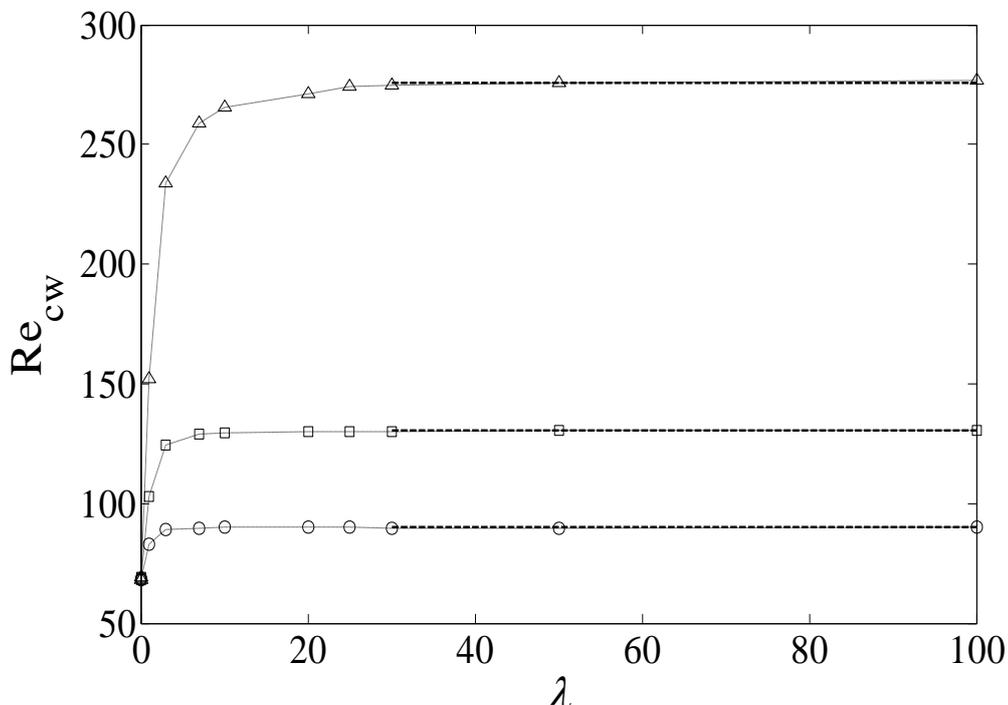


Figure 3.33. Nombre de Reynolds critique de paroi pour un fluide Carreau avec $\eta = 0,5$ en fonction de la constante de temps λ sans dimension pour différentes valeurs de l'indice de rhéofluidifiant : (O) $n = 0,7$, (\square) $n = 0,5$, et (Δ) $n = 0,3$. (-) Fluide en loi de puissance.

Nos résultats sont présentés dans la figure 3-33 pour de grandes valeurs de λ et différentes valeurs de l'indice de rhéofluidification n . L'accroissement de la stabilité de l'écoulement de Couette avec l'augmentation du comportement rhéofluidifiant est clairement démontré. De $\lambda = 0$, le nombre de Reynolds critique

augmente, puis tend asymptotiquement vers la valeur obtenue pour des fluides en loi de puissance. La variation du nombre d'onde critique en fonction de la constante de temps adimensionnelle λ pour différentes valeurs de l'indice de rhéofluidifiant n est illustrée dans la figure 3-34. Nous notons que les valeurs asymptotiques de k_c pour des grandes valeurs de λ sont différentes de celles obtenues pour un fluide en loi de puissance.

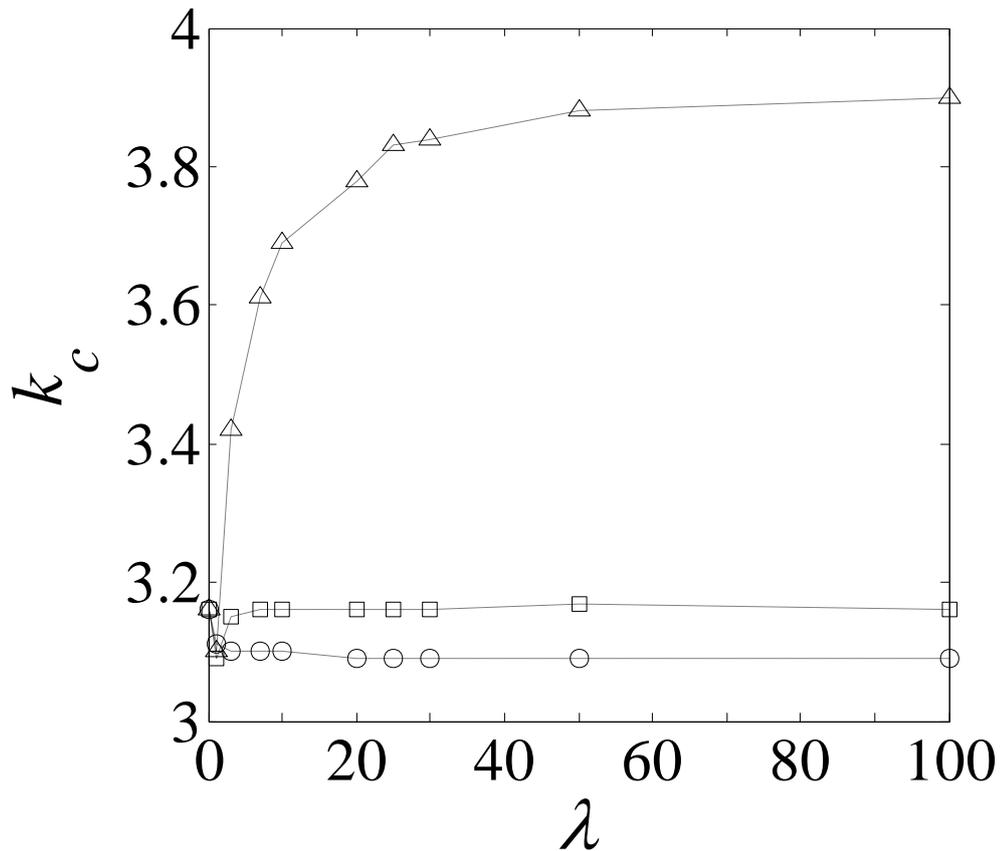


Figure 3.34. Nombre d'onde critique pour un fluide Carreau avec $\eta = 0,5$ en fonction de la constante de temps λ pour différentes valeurs de l'indice de rhéofluidifiant : (O) $n = 0,7$, (\square) $n = 0,5$, et (Δ) $n = 0,3$. (-) Fluide en loi de puissance.

3-4-PERTURBATION NON AXISYMETRIQUE

Dans le cas d'une perturbation tridimensionnelle, la formulation (u, v) est utilisée pour calculer les conditions critiques. Les figures 3-35 et 3-36 montrent les courbes de stabilité marginale pour les différents nombres d'onde azimutaux m . On observe clairement que Re_c augmente lorsque le nombre d'onde azimutal augmente. Le minimum est toujours atteint dans le cas axisymétrique, même pour des fluides très rhéofluidifiants ($n = 0,1$) ou ($B = 50$). Ceci est en contradiction avec les résultats de Caton [1]. La forme des courbes de stabilité marginales à bas nombres d'ondes axiaux suggère que l'écoulement de Couette est linéairement stable pour $k = 0$

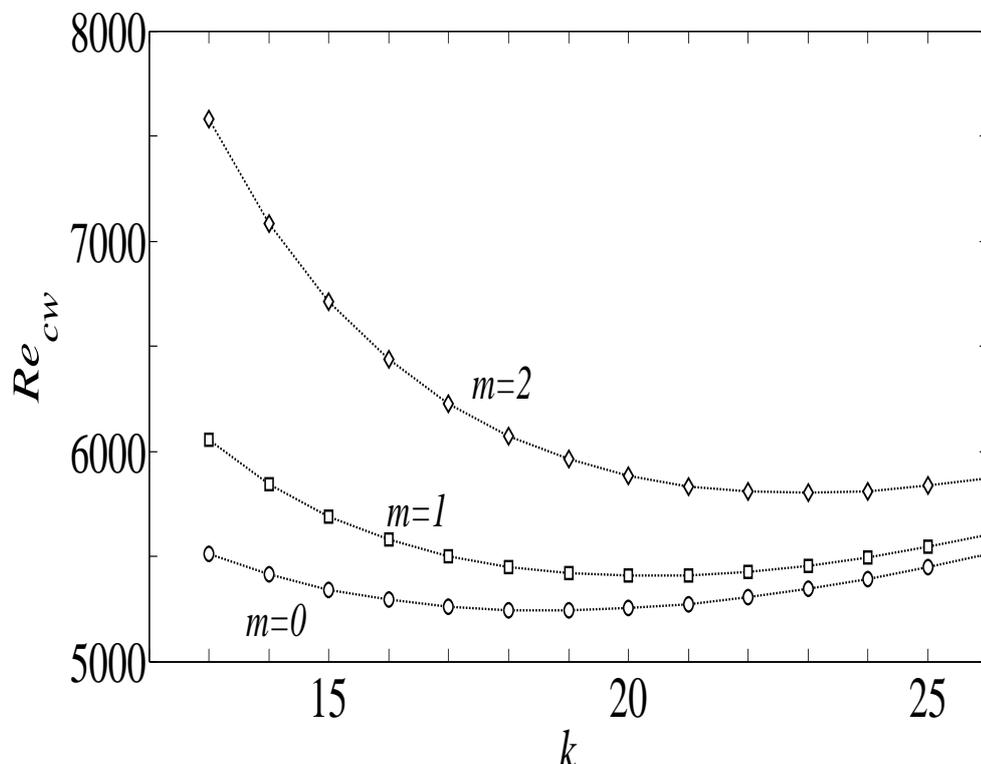


Figure 3.35 : Courbe de stabilité marginale pour $\eta = 0.5$ et pour différents nombres d'ondes azimutaux m pour un fluide de Bingham avec $B=50$.

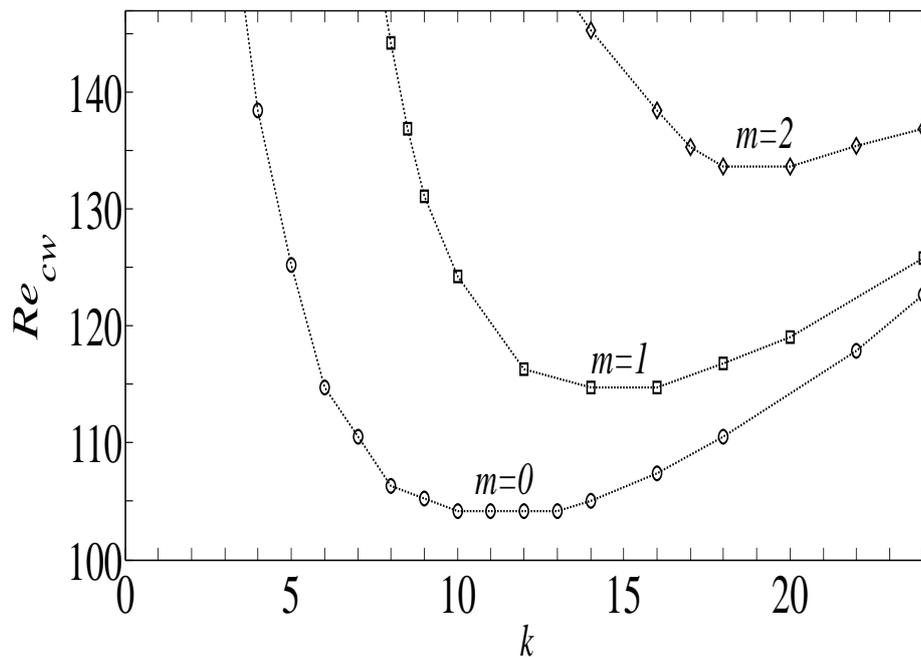


Figure 3.36 : Courbe de stabilité marginale pour $\eta = 0.5$ et pour différents nombres d'ondes azimutaux m pour un fluide en loi de puissance avec $n=0.1$.

3-5 ENERGIE

Dans cette partie, on se propose de déterminer le nombre de Reynolds maximal en dessous duquel l'énergie cinétique de toute perturbation admissible décroît de façon monotone au cours du temps. On rappelle que pour des nombres d'onde k et m donnés, une perturbation admissible peut être écrite sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions propres. L'énergie cinétique moyenne (E) de la perturbation est calculée dans la zone cisailée de volume Ω défini ici par $\Omega = [R_1, R_2] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi k]$. $E(t)$ l'énergie cinétique moyenne adimensionnelle est donnée par l'expression:

$$E_{\text{in}}(t) = \frac{1}{2V} \int_0^{\Lambda} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_i}^{r_o} u^* \cdot u \, r \, dr \quad 3-8$$

Avec $d\Omega = r \, dr \cdot d\theta \cdot dz$

Pour calculer cette énergie cinétique, nous reprenons expressions des vitesses dans les équations de Navier-Stokes \hat{u} , \hat{v} et \hat{w} :

$$\left[\frac{\partial u'}{\partial t} + \text{Re} \left(\frac{V}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - 2v' \right) \right] = -\frac{\partial p'}{\partial r} + \left[\frac{\partial}{\partial r} (\tau'_{rr}) + \frac{1}{r} (\tau'_{rr} - \tau'_{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{r\theta}) + \frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial z} \right] \quad 3-9$$

$$\left[\frac{\partial v'}{\partial t} + \text{Re} \left(u' \frac{dV}{dr} - u' \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \left[\frac{\partial}{\partial r} \tau'_{r\theta} + \frac{2}{r} \tau'_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{\theta\theta}) + \frac{\partial \tau'_{\theta z}}{\partial z} \right] \quad 3-10$$

$$\left[\frac{\partial w'}{\partial t} + \text{Re} \left(\frac{V}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) \right] = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\tau'_{rz}) + \frac{1}{r} \tau'_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{z\theta}) + \frac{\partial \tau'_{zz}}{\partial z} \right] \quad 3-11$$

Nous les multiplions respectivement par les vitesses \hat{u} , \hat{v} et \hat{w} . En additionnant ces équations et en les intégrant sur le volume, nous pouvons mettre cette équation sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} [u'^2 + v'^2 + w'^2] d\Omega \right) &= \text{termes de pression} \\ &+ \text{termes d'inertie} \\ &+ \text{termes provenant de } \text{div}(\overline{\tau}) \end{aligned} \quad 3-12$$

Si la perturbation de la viscosité n'est pas prise en compte, le nombre de Reynolds critique sont avérés plus élevés. Ceci peut être expliqué en considérant l'équation d'énergie, obtenue en utilisant le produit scalaire de l'équation dynamique linéarisée avec le complexe conjugué u^* et en intégrant entre les deux cylindres.

$$\begin{aligned} \text{Re}(\sigma) \|u\|^2 &= -\text{Re} \int_{R_1}^{R_2} \gamma_{r\phi}^b \frac{u^* v + u v^*}{2} dr \\ &- \int_{R_1}^{R_2} \mu^b \left[\frac{1}{2} \left(|\gamma'_{rr}|^2 + |\gamma'_{\phi\phi}|^2 + |\gamma'_{zz}|^2 \right) + |\gamma'_{r\phi}|^2 + |\gamma'_{rz}|^2 + |\gamma'_{\phi z}|^2 \right] dr \\ &+ \int_{R_1}^{R_2} (\mu^b - \mu_t) |\gamma'_{r\phi}|^2 dr \end{aligned} \quad 3-13$$

$$\text{où } \|u\|^2 = \int_{R_1}^{R_2} \left(|w|^2 + |v|^2 + |u|^2 \right) r dr \quad \text{et } |u|^2 = uu^*. \quad 3-14$$

Le troisième terme de l'équation ci-dessus provient de la perturbation de la viscosité. Il est défini positif et participe à la dissipation visqueuse et donc à la

diminution du nombre de Reynolds critique. Une interprétation phénoménologique peut être donnée. Lorsqu'on impose une perturbation infinitésimale à l'écoulement, la contrainte $\tau_{r\theta}$ est modifiée de $\delta\tau_{r\theta}$ et le cisaillement de $\delta\gamma_{r\theta}$; de sorte que la perturbation ne perçoit que la viscosité tangente $\mu_t = \delta\tau_{r\theta} / \delta\gamma_{r\theta}$ et non la viscosité effective.

$$\text{Re}(\lambda)I_1 = \text{Re } I_2 - I_3 \quad 3-15$$

Où $\text{Re } I_2$ est un terme de production qui correspond à un transfert d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation, et I_3 est un terme associé à la dissipation des effets visqueux. D'après Govindarajan et al [26], il est nécessaire de calculer et de comparer la production spatiale moyenne et les conditions de dissipation Γ^\pm définies par :

$$\Gamma_+ = \text{Re} \frac{\int_{R_1}^{R_2} I_2 dr}{\int_{R_1}^{R_2} I_1 dr} \quad \Gamma_- = \text{Re} \frac{\int_{R_1}^{R_2} I_3 dr}{\int_{R_1}^{R_2} I_1 dr} \quad 3-16$$

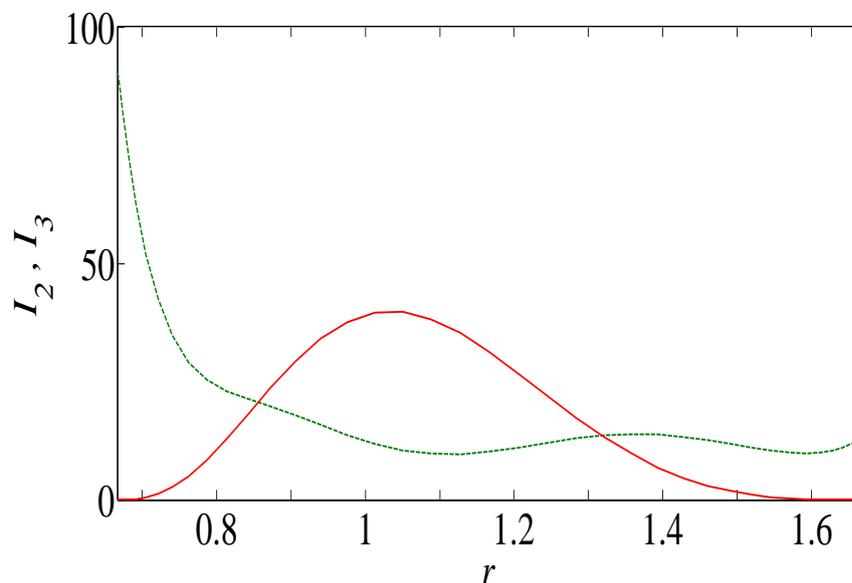


Figure 3.37 Distribution d'énergie cinétique pour un fluide newtonien dans les conditions critiques, $\text{Re}_w = 68.316$ et $k = 3.12$. Le terme $\text{Re} I_2$ de production est représenté par un trait plein et le terme I_3 de dissipation est représenté par une ligne pointillée.

La production spatiale moyenne et les termes de dissipation sont égaux, puisque les conditions sont critiques, $\Gamma^+ = \Gamma^- = 28.073$.

Dans les conditions critiques, le transfert d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation est exactement compensée par la dissipation visqueuse et $\Gamma^+ = \Gamma^-$, comme représenté dans la figure 3-37 pour le cas d'un fluide newtonien. L'effet de la stratification de la viscosité sur le bilan énergétique peut être apprécié en comparant les résultats obtenus pour un fluide newtonien (Figure 3-37) avec ceux obtenus pour un fluide en loi de puissance (figures 3-38 et 3-39). Dans ce dernier cas, nous avons $Re_w = 68.316$, k correspond à la valeur de nombre d'onde critique pour $n = 0.5$ ou $n=0.3$. Avec l'augmentation du comportement rhéofluidifiant, nous observons que la dissipation moyenne visqueuse reste proche de celle de fluide newtonien tandis que le terme de production est fortement réduit ; Ce qui rend l'écoulement plus stable par rapport au cas newtonien. Ceci est clairement illustré dans la figure 3-40. Ainsi, le principal facteur de détermination de la stabilité ou d'instabilité de l'écoulement est l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation qui est entraînée par le changement de phase entre les deux composantes de vitesse du à la fluctuation provoquée par la stratification de la viscosité.

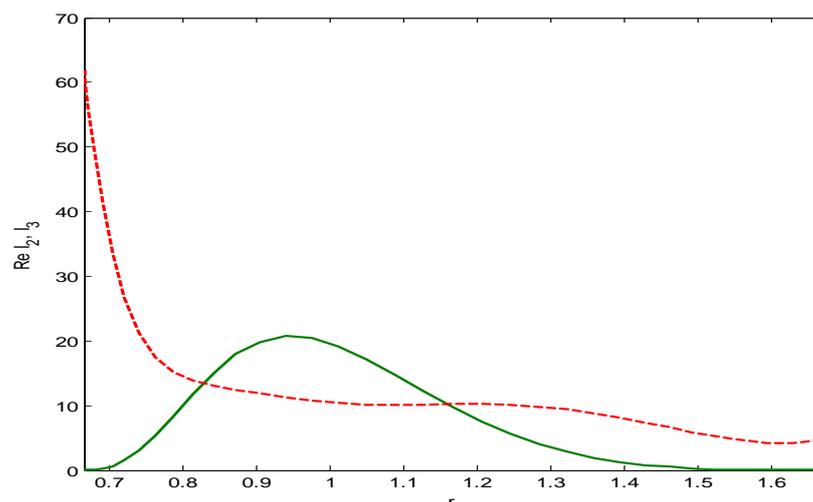


Figure 3.38. Effet de la stratification de la viscosité sur l'énergie d'un fluide en loi de puissance, $Re_w = 68.316$ et $\eta = 0.4$. (Ligne continue) production d'énergie et Re_{l_2} (ligne pointillée) l_3 dissipation d'énergie. $n = 0.7$, $k = 3.20$, $\Gamma^+ = 15.436$ et $\Gamma^- = 23.450$.

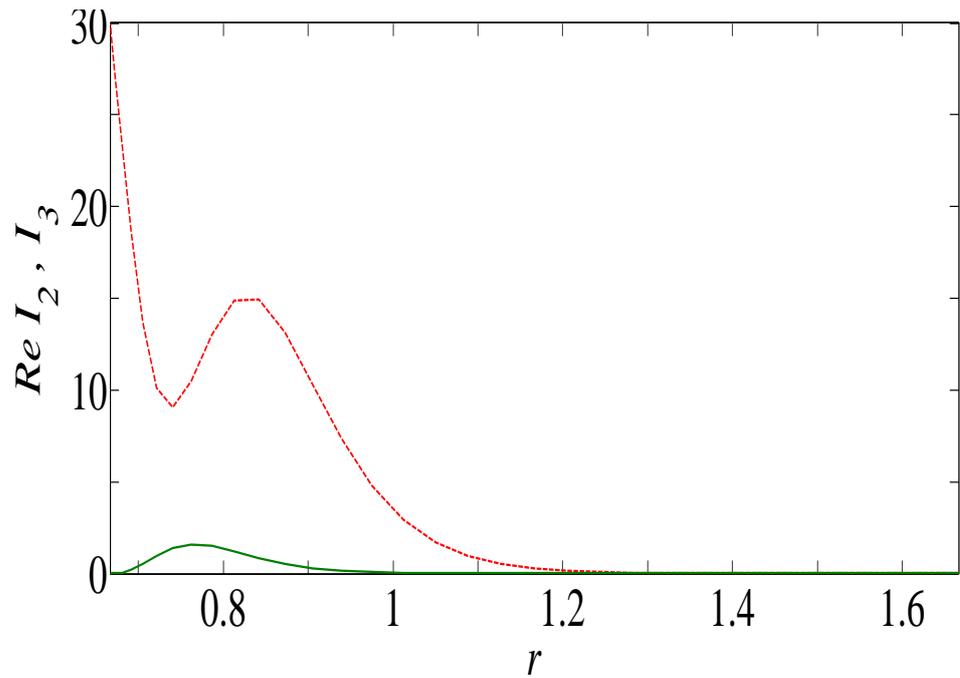


Figure 3.39. Effet de la stratification de la viscosité sur l'énergie d'un fluide en loi de puissance, $Re_w = 68.316$ et $\eta = 0.4$. (Ligne continue) production d'énergie $Re I_2$ et (ligne pointillée) I_3 dissipation d'énergie. $n = 0.3$, $k = 5.25$, $\Gamma^+ = 1.456$, et $\Gamma^- = 27.232$.

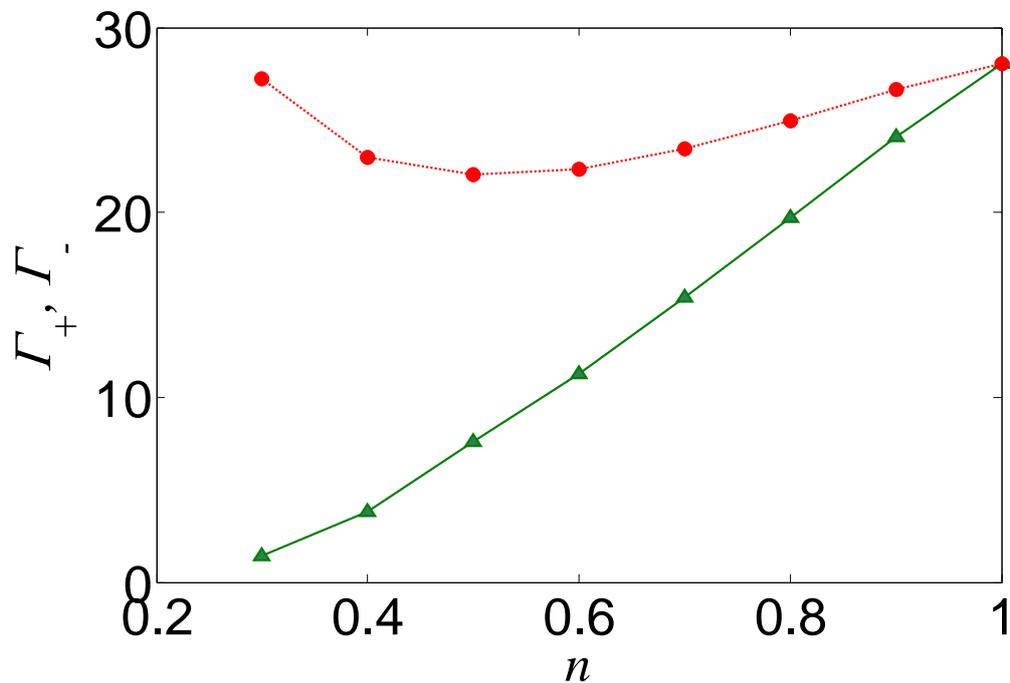


Figure 3.40 : termes moyenne (\blacktriangle) production Γ^+ et (\bullet) dissipation Γ^- d'un fluide en loi de puissance avec $\eta = 0,4$ en fonction de indice de rhéofluidifiant n .

3-6-VISCOSITE DE REFERENCE

La validité de la viscosité de référence proposés dans la présente étude peut être évaluées en traçant la position radiale où la viscosité atteint cette valeur dans l'écoulement ; c.a.d la position r_b avec :

$$\mu_b(r_b) = \mu_{ref} \quad 3-17$$

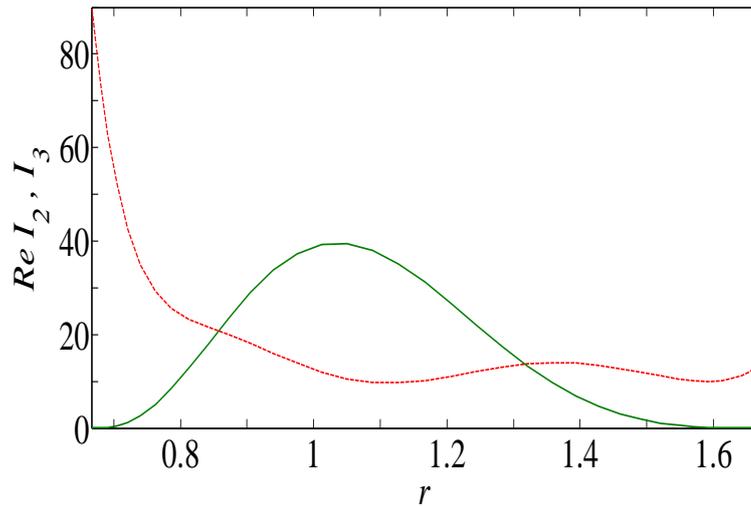


Figure 3-41: Production d'énergie $Re I_2$ (vert) et dissipation d'énergie I_3 (rouge) pour un fluide en loi de puissance pour $\eta=0.4$, $n=0.4$ dans les conditions critiques $Re_w=72.6$ et $k_c=3.97$.

- Pour un fluide de loi de puissance et pour un indice de fluide $n = 0.4$ avec un rapport de rayon $\eta = 0.4$, la position radiale r_b où $\mu(r_b) = k \left(\frac{R_1 \Omega_1}{d} \right)^{(n-1)}$ est représentée dans la figure 3-41 par une ligne pointillée. Nous avons également représenté $Re I_2$ et I_3 dans les conditions critiques. La dissipation visqueuse a lieu principalement à la paroi interne et l'échange d'énergie est également localisée près de cette paroi. La viscosité de référence $k \left(\frac{R_1 \Omega_1}{d} \right)^{(n-1)}$ est atteinte plus loin dans l'espace, c'est à dire en dehors de la région d'intérêt.
- Pour un fluide Carreau, $\gamma_{r\theta}^{*b}$ n'est jamais nulle dans l'espace annulaire, par conséquent, il est paradoxal d'utiliser la viscosité à taux cisaillement zéro μ_0 comme une viscosité de référence.

- Pour un fluide de Bingham, l'utilisation de la viscosité plastique comme viscosité de référence n'est pas appropriée car seule $\mu_b = \mu_p$ sauf si $\gamma_{r\theta}^* \rightarrow \infty$.

Pour les trois types des fluides considérés, la viscosité de référence est soit à l'extérieur de la région d'intérêt ou bien ne correspond pas à la viscosité de base en un point quelconque de l'espace annulaire. Cependant, puisque la dissipation visqueuse et l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation à lieu principalement près de la paroi interne, il semble plus approprié d'utiliser la viscosité au niveau de celle-ci comme viscosité de référence. Ce choix est pris en charge dans la deuxième partie de ce travail où il est montré que, de fait, la région d'intérêt est localisée à proximité de la paroi interne.

Il est intéressant de noter que les profils de viscosité obtenus pour des fluides de Carreau avec $n = 0,3$ et $\lambda \geq 10$ mènent à des valeurs très proches de la valeur de nombre de Reynolds critique. L'analyse des courbes de viscosité ($\lambda=10$, $\lambda=100$) indique que le gradient de viscosité près du cylindre intérieur a un effet significatif sur la stabilité de l'écoulement alors qu'un gradient de viscosité loin de la paroi interne n'a pratiquement aucun effet sur la stabilité de l'écoulement.

Afin de clarifier cette idée, nous avons utilisé l'approche proposée par Govindarajan et al [27] et [26] pour un écoulement de Poiseuille plan que nous avons adapté au cas de l'écoulement de Couette circulaire. Nous ne considérons que l'écoulement de Couette-Taylor de deux fluides de viscosités μ_1 et $\mu_2 > \mu_1$, figure 3-42. Le fluide visqueux est situé au près de la paroi intérieure tournante, $R_1 < r < h$, et le plus visqueux proche de la paroi extérieure, $h + e < r < R_2$. La viscosité évolue de façon continue dans une couche de mélange à l'interface entre les deux fluides, $h < r < h + e$, ce qui conduit au profil de viscosité $\mu(r) = \mu(r)/\mu_1$,

$$\begin{aligned} \mu &= 1 && \text{si } R_1 < r < h \\ \mu(r) &= 1 + (\delta - 1)\zeta^3 [10 - 15\zeta + 6\zeta^2] && \text{si } 0 < \zeta < 1 \quad \zeta = (r - h)/e \\ \mu &= \delta && \text{si } h + e < r < R_2 \end{aligned} \quad 3-18$$

qui est représenté sur la figure 3-43. L'expression de la viscosité dans la couche de mélange a été choisie comme dans Govindarajan et al

[27], de telle sorte que la viscosité et ses deux dérivées premières sont continues dans l'intervalle entier.

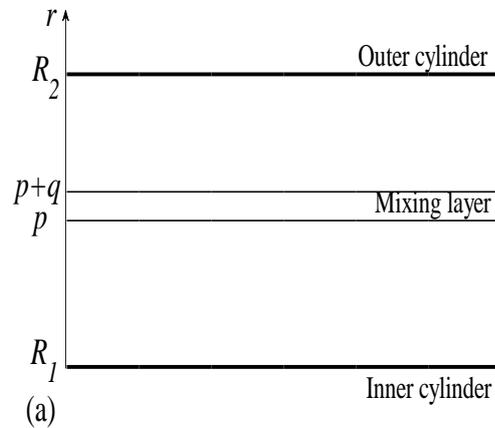


Figure 3.42 : profils de Mixer layer pour un rapport de rayon de 0.4 et $e=0.1$ et $\mu_1/\mu_2 = 1.1$

L'état de base est ensuite calculé avec un procédé classique associé à une méthode de Newton-Raphson. Une étude de stabilité, dans laquelle la diffusion entre les deux fluides est négligée et ensuite réalisée et les valeurs du nombre de Reynolds critique pour les équations de perturbation sont obtenues, montrant la stratification de la viscosité. Même si cette approche laisse le profil de viscosité inchangée lorsqu'on perturbe l'écoulement, contrairement aux modèles rhéofluidifiant, il demeure de souligner clairement l'effet stratification de la viscosité.

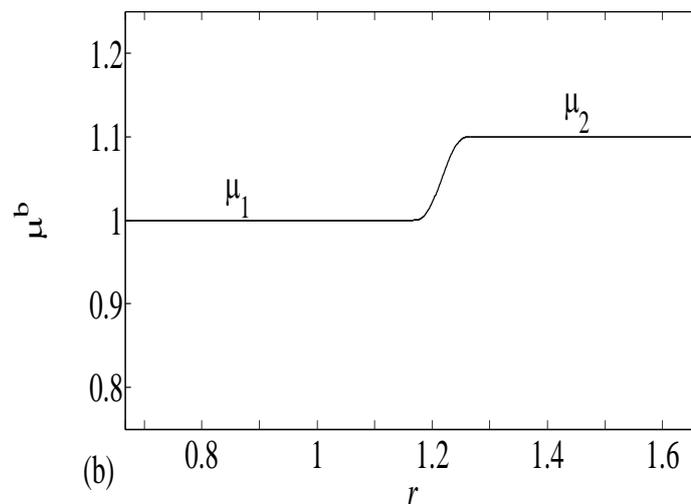


Figure 3.43: profils de viscosité pour un rapport de rayon de 0.4 et $e=0.1$ et $\mu_1/\mu_2 = 1.1$.

La valeur critique du nombre de Reynolds défini comme $Re = \frac{\rho R_1 \Omega_1 d}{\mu_1}$ est calculée dans plusieurs endroits de la couche de mélange $h + e / 2$, pour des grandes valeurs de e et de la viscosité μ . Les résultats de la Figure 3-44 pour une épaisseur de couche de mélange $e = 0,1$ centré à $r=h+e/2 = 0,55$ et un rapport de viscosité de $\mu=1,1$ montrent que l'existence d'un gradient de viscosité est une source de stabilisation. D'autre part, plus la couche de mélange est proche de la paroi interne, plus cet effet de stabilisation est élevé ; avec un maximum à une distance proche de la paroi. Des simulations ont montré que plus m augmente, plus l'effet de stabilisation maximal s'approche de la paroi interne. A partir de cette étude simple, nous pouvons déduire par extrapolation que dans le cas d'une diffusion négligeable à l'interface des fluides, c'est la région proche de la paroi intérieure qui domine la stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette d'un fluide rhéofluidifiant.

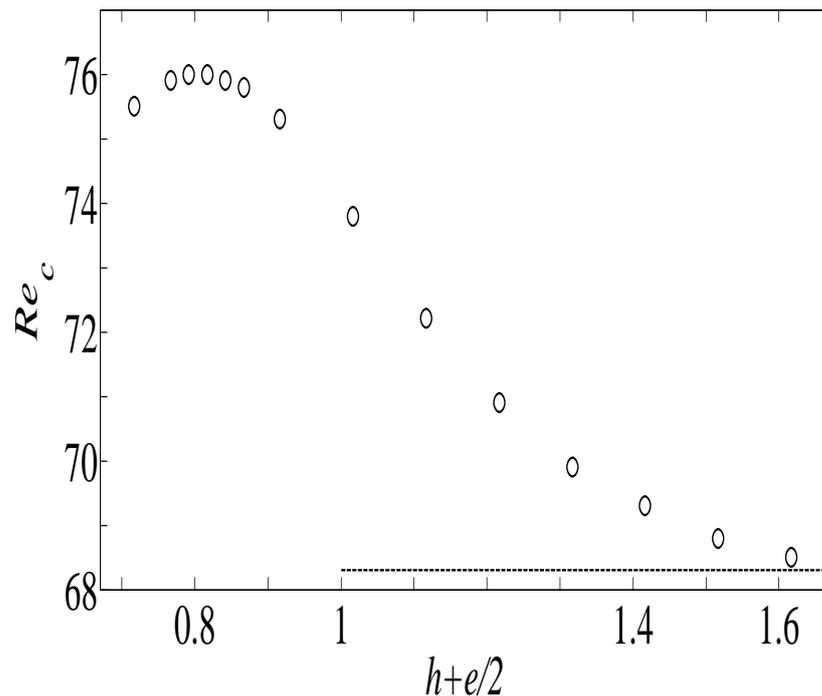


Figure 3.44 Nombre de Reynolds critique en fonction d'épaisseur une couche de mélange $h+e/2$ pour un rapport de rayon 0.4 et $\mu_1/\mu_2=1$.

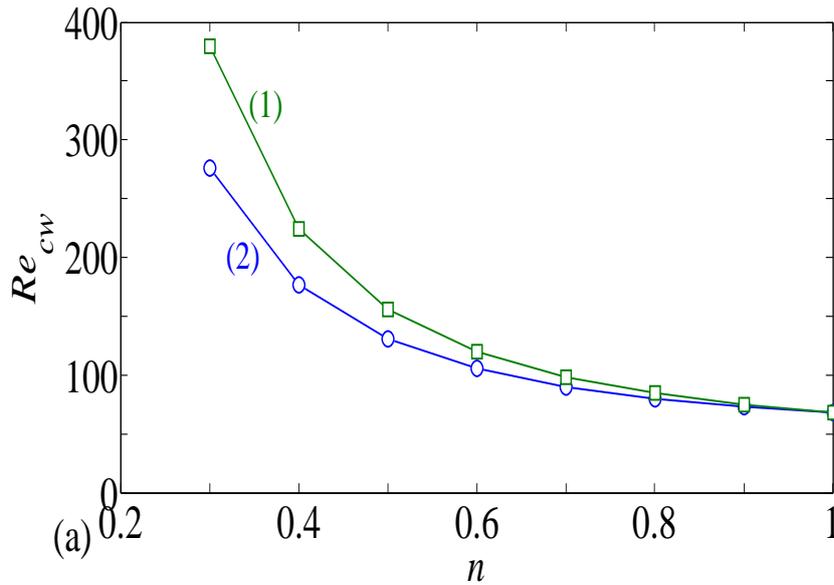


Figure 3.45 Nombre de Reynolds critique du paroi pour un fluide en loi de puissance à $\eta = 0,5$ en fonction de l'indice de rhéofluidifiant n . (1) de la perturbation de la viscosité est prise en compte, $\mu_t - \mu_b \neq 0$, (2) la perturbation de la viscosité est exclue artificiellement, $\mu_t - \mu_b = 0$.

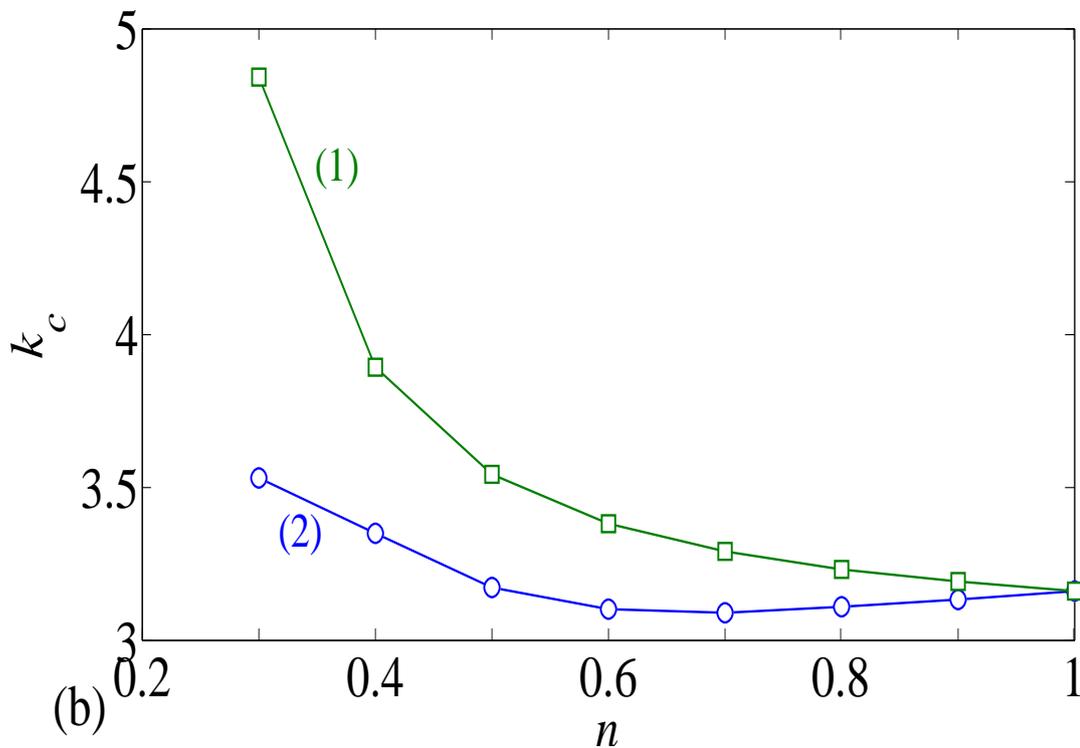


Figure 3.46. Nombre d'onde critique pour un fluide en loi de puissance à $\eta = 0,5$ en fonction de l'indice de rhéofluidifiant n . (1) de la perturbation de la viscosité est prise en compte, $\mu_t - \mu_b \neq 0$, (2) la perturbation de la viscosité est exclue artificiellement, $\mu_t - \mu_b = 0$.

3-7 CRITERE DE RAYLEIGH

L'origine de l'instabilité de l'écoulement de Taylor-Couette est une instabilité centrifuge. Dans un écoulement en rotation, la trajectoire des particules fluides résulte de l'équilibre entre la force centrifuge et le gradient de pression radial centripète, égal et opposé. Pour savoir si un tel écoulement est stable ou non, il faut regarder si un déplacement infinitésimal d'une particule fluide dans la direction radiale va être amplifié (cas instable) ou au contraire atténué (cas stable).

Si le moment cinétique Ωr^2 décroît quelque part, alors l'écoulement est instable. On peut formaliser ce raisonnement par le critère de Rayleigh :

L'écoulement est stable si $\frac{d}{dr}|\Omega r^2| > 0$ pour tout r .

Selon le critère de Rayleigh, la moindre rotation Ω_1 du cylindre intérieur avec le cylindre extérieur fixe $\Omega_2=0$ devrait entraîner l'apparition d'une instabilité. En réalité, l'apparition de cette instabilité est retardée par la diffusion visqueuse, et ne se manifeste qu'au delà d'une vitesse critique non nulle.

- **Loi de puissance**

L'écoulement est stable si $\frac{d}{dr}|\Omega r^2| > 0$ pour tout r .

Pour un fluide de loi de puissance le profil de vitesse est donné par la relation suivante :

$$V = \frac{r}{R_1} \left[1 - \left(1 - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \left(\frac{1}{R_2^{(2/n)}} - \frac{1}{R_1^{(2/n)}} \right) \right)^{-1} \left(\frac{1}{r^{2/n}} - \frac{1}{R_1^{2/n}} \right) \right] \quad 3-19$$

Après calcul on trouve :

$$\frac{d}{dr}(Vr) = \frac{2r}{R_1} \left[1 + \left(1 - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \left(\frac{1}{R_2^{(2/n)}} - \frac{1}{R_1^{(2/n)}} \right) \right)^{-1} \left(\frac{1}{R_1^{2/n}} - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{r^{2/n}} \right) \right] \quad 3-20$$

L'écoulement est stable si cette quantité est positive. On obtient donc :

$$\frac{2r}{R_1} \left[1 + \left(1 - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \left(\frac{1}{R_2^{(2/n)}} - \frac{1}{R_1^{(2/n)}} \right) \right)^{-1} \left(\frac{1}{R_1^{2/n}} - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{r^{2/n}} \right) \right] > 0 \quad 3-21$$

Après manipulations, on obtient :

$$\Omega_2 < 1 + \left(\frac{1}{R_2^{(2/n)}} - \frac{1}{R_1^{(2/n)}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{R_1^{2/n}} - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{R_1^{2/n}} \right)^{-1} \quad 3-22$$

La figure 3-47 présente la courbe de Rayleigh ainsi que la rotation rigide pour un fluide en loi de puissance. Cette figure montre que si $\frac{d}{dr}|\Omega r^2| > 0$, L'écoulement devrait toujours être stable, sinon l'écoulement devrait instable.

- **Fluide de Bingham**

Pour un fluide de Bingham, le profil de vitesse est donné par la relation suivante :

$$V = \frac{1}{2} \tau_i R_1^2 r \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r^2} \right) - Br \ln \left(\frac{R_2}{r} \right) \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad 3-23$$

Après manipulation on trouve

$$\frac{d(Vr)}{dr} = 2A_1 r + Br(1 + 2\ln(r)) \quad 3-24$$

$$\text{avec } A_1 = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \frac{1}{R_1} + \frac{\tau_i R_1^2}{2R_2^2} - Br \ln(R_0) \quad 3-25$$

$$\longrightarrow 2A_1 r + Br(1 + 2\ln(r)) > 2A_1 r + Br(1 + 2\ln(R_1)) \quad 3-26$$

On cherche Ω_2 pour que :

$$2A_1 r + Br(1 + 2\ln(R_1)) > 0 \quad 3-22$$

La figure 3-48 représente la courbe de Rayleigh et la courbe de rotation rigide pour un fluide de Bingham avec un rapport de rayon $\eta=0.881$. Cette figure montre que si $\frac{d}{dr}|\Omega r^2| > 0$, L'écoulement devrait toujours être stable, sinon l'écoulement devrait instable.

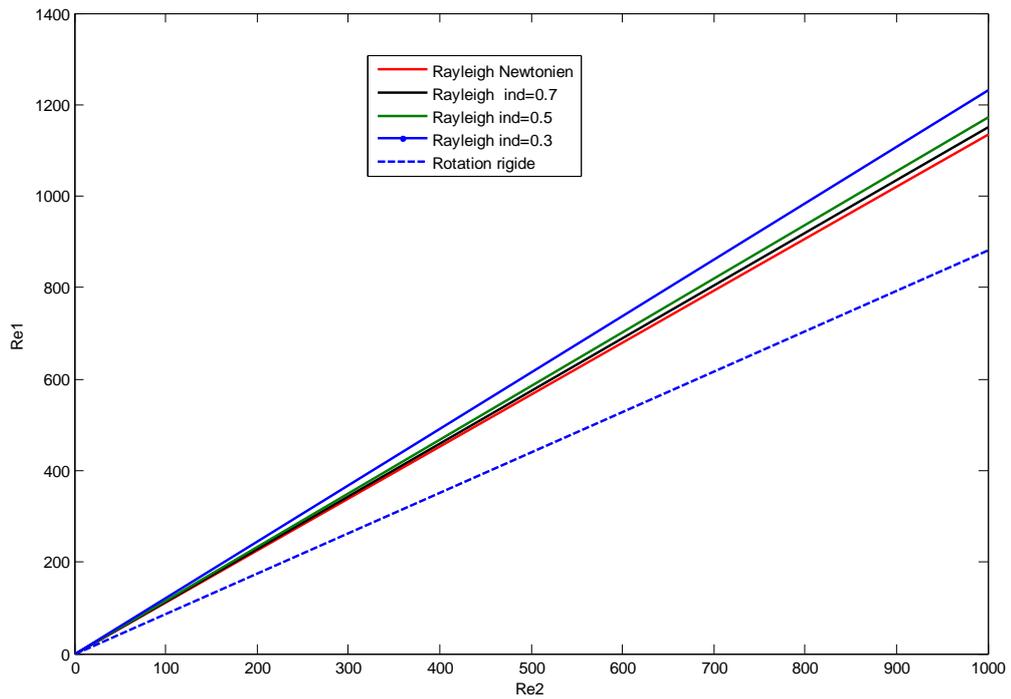


Figure 3.47: Critère de Rayleigh pour un fluide de loi de puissance avec un rapport de rayon $\eta=0.881$.

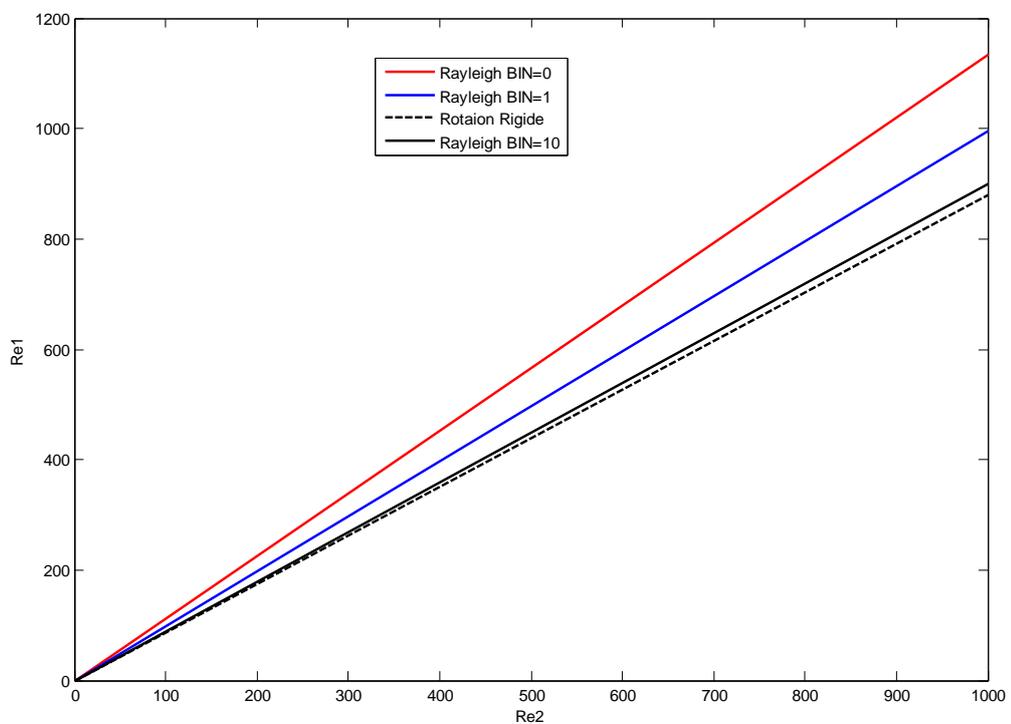


Figure 3.48: Critère de Rayleigh pour un fluide de Bingham avec un rapport de rayon $\eta=0.881$.

- **Fluide de Carreau**

Pour un fluide de loi de Carreau le profil de vitesse est donné par la relation suivante :

$$\left[1 + \left(\lambda \left| \dot{\gamma}_{r\theta b} \right| \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \dot{\gamma}_{r\theta b} = \frac{C}{r^2} \quad 3.27$$

Le taux de cisaillement est calculé

$$\dot{\gamma}_{r\theta b} = d_r V - \frac{V}{r} \quad \dot{\gamma}_{II} = \left| \dot{\gamma}_{r\theta b} \right| = \left| d_r V - \frac{V}{r} \right| \quad 3-28$$

Dans ce cas, la ligne de Rayleigh est obtenue numériquement par le calcul de : $\frac{d}{dr} \left| \Omega r^2 \right| > 0$.

La figure 3-49 présente la courbe de Rayleigh ainsi que la rotation rigide pour un fluide de Carreau. Cette figure montre que si $\frac{d}{dr} \left| \Omega r^2 \right| > 0$, l'écoulement devrait toujours être stable, sinon l'écoulement devrait être instable.

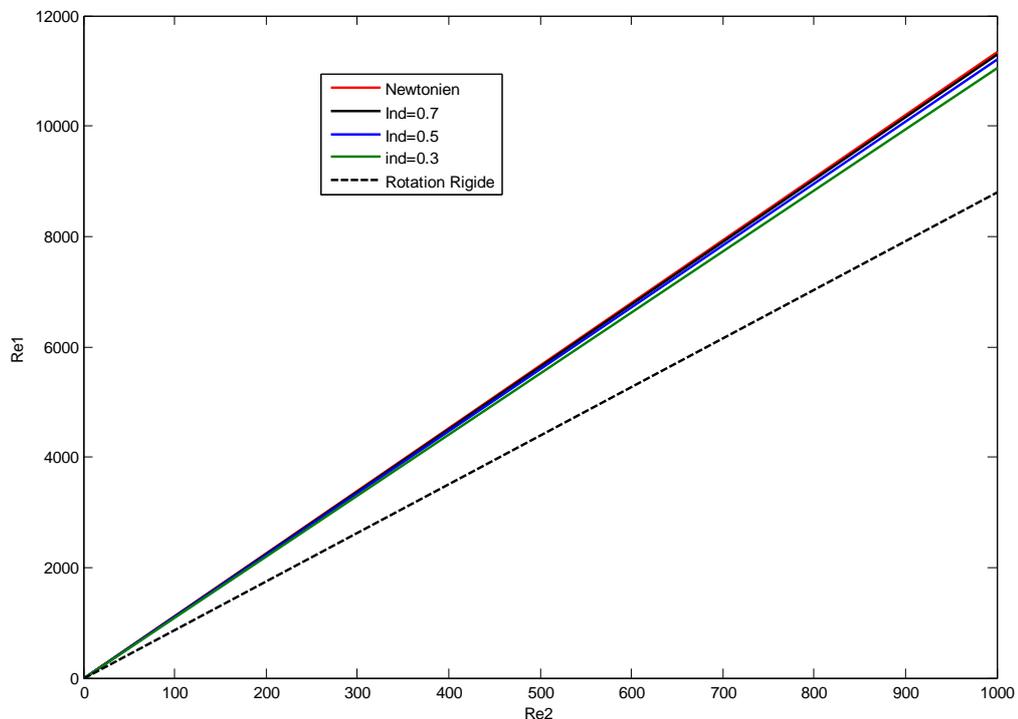


Figure 3.49: Critère de Rayleigh pour un fluide de Carreau avec un rapport de rayon $\eta=0.881$.

3-8 STABILITE MARGINALE

Lorsqu'on considère une perturbation tridimensionnelle. On trouve des solutions non axisymétriques pour des rapports Ω_2/Ω_1 suffisamment négatifs. Le nombre de Reynolds critique Re_{c1} peut être exprimé en fonction du nombre de Reynolds basé sur le cylindre extérieur Re_2 . Nos résultats sont comparés aux résultats expérimentaux d'Andereck [20](1986).

Présentons pour finir la courbe de stabilité que nous recherchions. Nous l'avons obtenue en suivant l'évolution de la valeur propre fondamentale. Les points reportés sur la figure 3-16 correspondent aux couples (Re_1, Re_2) . On voit à partir de la figure que toute perturbation de l'écoulement décroît donc exponentiellement ; au dessus c'est l'instabilité centrifuge, avec ses structures toroïdales caractéristiques qui redistribuent la quantité de mouvement. On retrouve ici parfaitement la courbe de stabilité marginale qu'avait obtenue Taylor à l'époque, mais cette étude nous a en outre permis d'analyser plus en détail les autres modes que ne sont en principe pas considérés dans les études de stabilité classique.

Le nombre de Reynolds critique Re_c peut être exprimé en fonction du nombre de Reynolds basé sur le cylindre extérieur Re_2 . Dans la figure 3-50 nos résultats sont comparés à ceux des Mesegeur [35]. La figure montre que nos résultats reproduisent parfaitement ce de Mesegeur ; ce qui contribue à valider notre approche et nos calculs.

Les figures 3-50 au 3-51, montrent à titre d'exemple des courbes de stabilité marginale dans le plan (Re_1, Re_2) pour un fluide newtonien, un fluide de Bingham et un fluide en loi de puissance. Il n'est pas opportun de tirer des conclusions à ce stade sur les effets stabilisants ou déstabilisants de la rhéologie du fluide utilisé dans la mesure où la viscosité de référence considérée n'est pas pertinente d'un point de vue physique. En effet, elle n'est atteinte nulle part dans l'espace annulaire.

Cette figure montre les courbes de stabilité marginale pour un plus grand nombre de paramètres. Pour des cylindres contre-rotation, les résultats sont qualitativement similaires à ceux pour le cas $\eta = 0,833$. Cependant, l'écart se creuse avec η , et nous voyons un effet intéressant dans le cas de co-rotation des cylindres. Sur une gamme de η , à Re_2 fixe, il semblerait que l'augmentation de B

diminue le nombre de Reynolds critique. Pour un nombre de Bingham B assez grand, le nombre de Reynolds critique augmente. Cet effet est plus prononcé à petit η (rapport des rayons).

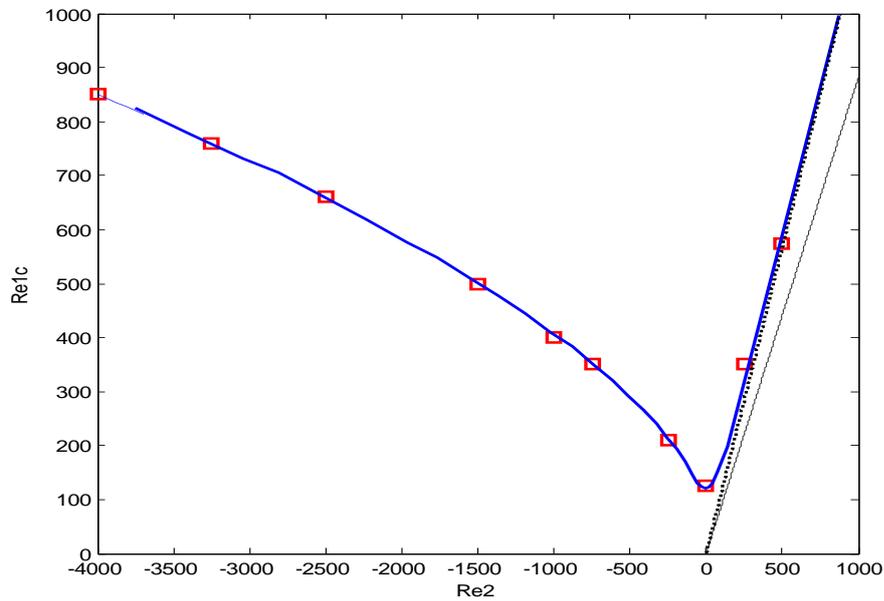


Figure 3.50: Courbe de stabilité marginale pour fluide Newtonien avec un rapport de rayon $\eta=0.881$; (\square) Meseguer ; (-) Nos résultats.

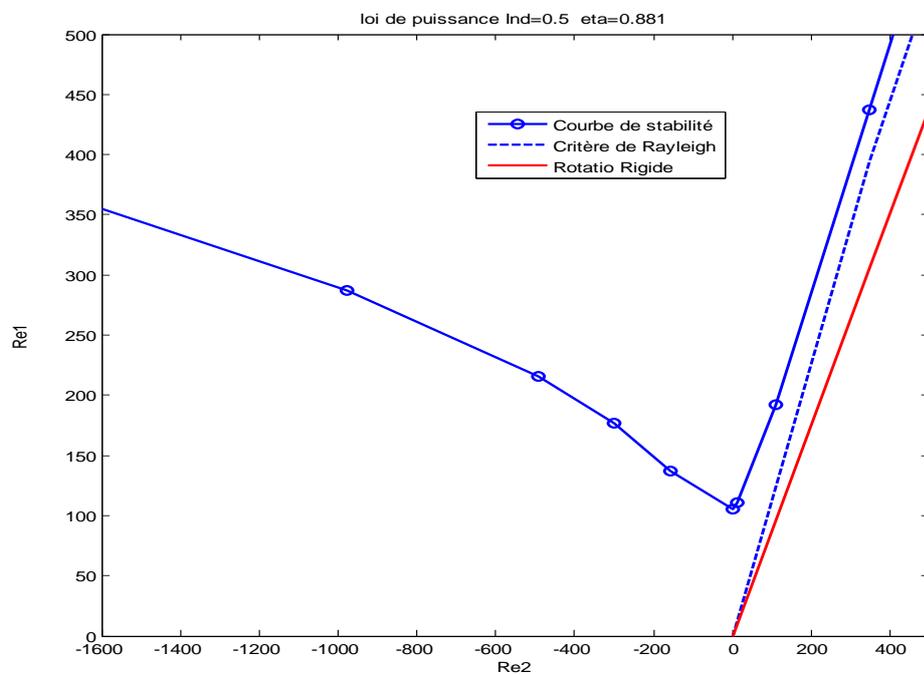


Figure 3.51: Courbe de stabilité marginale pour un fluide de loi de puissance pour un indice de fluide $n=0.5$ avec un rapport de rayon $\eta=0.881$.

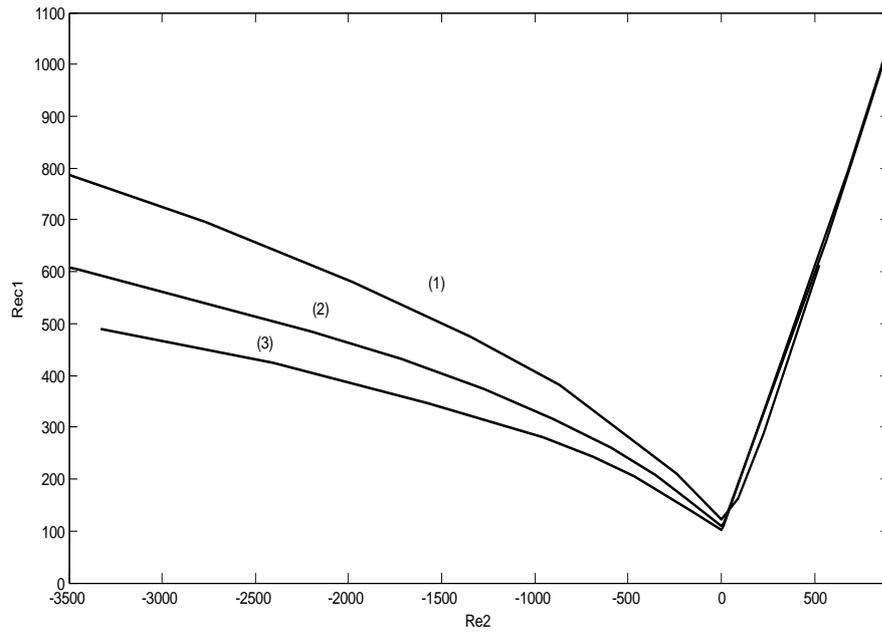


Figure 3.52: Courbe de stabilité marginale pour fluide en loi de puissance avec un rapport de rayon $\eta=0.881$, (1) Cas Newtonien; (2) $n=0.7$; (3) $n=0.3$.

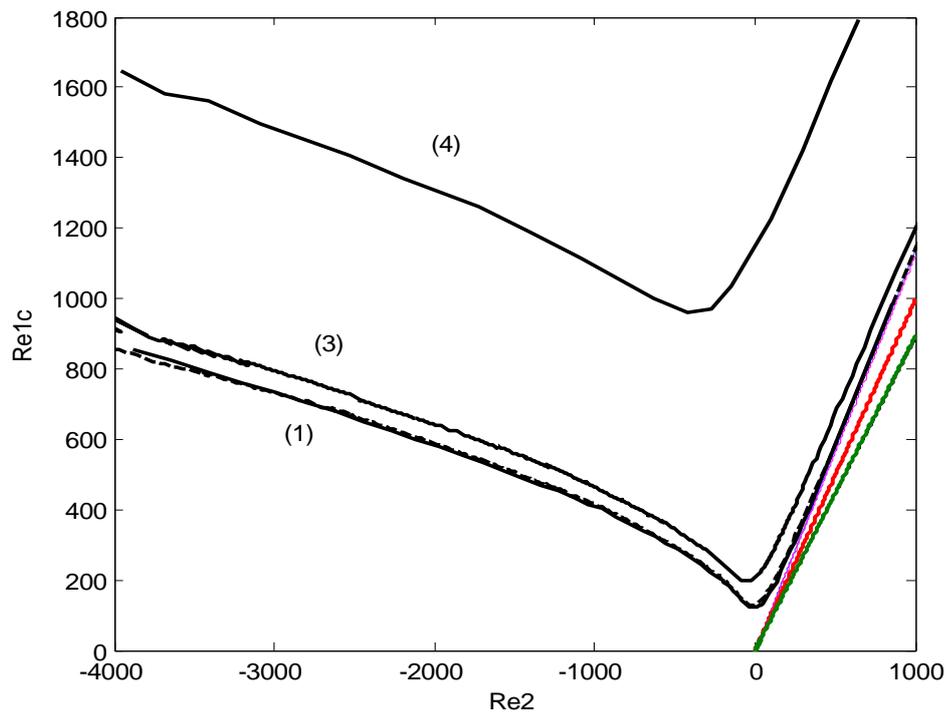


Figure 3.53: Courbe de stabilité marginale pour fluide de Bingham avec un rapport de rayon $\eta=0.881$: (1) $B=0$ (Newtonien) ; (2) $B=0.1$; (3) $B=1$; (4) $B=10$.

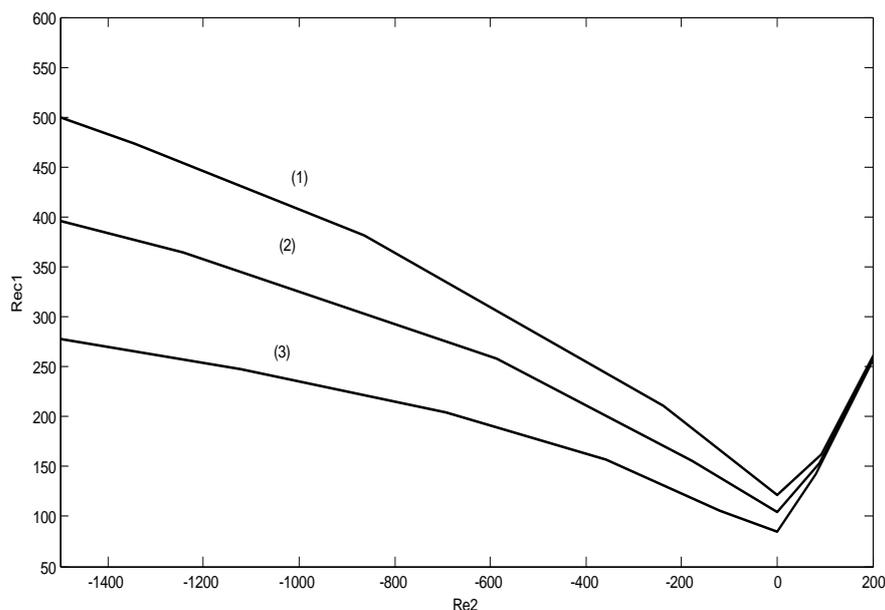


Figure 3.54: Courbe de stabilité marginale pour fluide de Carreau avec un rapport de rayon $\eta=0.881$ et $\lambda=1$: (1) Cas Newtonien; (2) $n=0.7$; (3) $n=0.3$.

2.9 Conclusion

Une analyse de la stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor Couette pour un fluide rhéofluidifiant avec ou sans seuil a été effectuée, en utilisant l'approche modale pour déterminer les conditions critiques d'instabilité ainsi que la structure du mode le moins stables. Nous avons tracé les courbes de stabilité marginale pour les différents nombres d'onde azimutaux m . On observe clairement que Re_c augmente lorsque le nombre d'onde azimutal augmente. Le minimum est toujours atteint dans le cas axisymétrique, même pour des fluides très rhéofluidifiants ($n = 0,1$) ou ($B = 50$). Ceci est en contradiction avec les résultats de Caton [1].

CHAPITRE 4

ANALYSE NON MODALE

4-1 INTRODUCTION

L'approche modale présentée dans le paragraphe précédent a permis de déterminer les conditions critiques d'instabilité ainsi que la structure du mode le plus amplifié. Cependant, du fait de la non-normalité de l'opérateur linéaire qui intervient dans le problème aux valeurs propres, l'énergie cinétique de la perturbation peut croître de manière transitoire même si l'écoulement est linéairement stable. Cette amplification de l'énergie peut être suffisamment importante pour que les termes non linéaires prennent de l'importance et déclenchent la transition vers la turbulence. Nous nous proposons dans ce qui suit d'étudier l'amplification de l'énergie de la perturbation et de déterminer la structure de la perturbation qui permet d'avoir le maximum d'amplification. D'un point de vue mathématique, la croissance transitoire est liée à la non normalité de l'opérateur linéaire. Par définition, un opérateur L est non-normal s'il est constitué d'une base complète de vecteurs propres non orthogonaux, et s'il satisfait la condition

$$LL^{*T} \neq L^{*T}L$$

En d'autre terme, L ne commute pas avec l'opérateur adjoint associé

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'effet du caractère rhéofluidifiant sur l'amplification de l'énergie, caractérisée par le facteur $E(t)/E(0)$. Celle-ci est calculée en suivant la démarche décrite dans Schmid & Henningson [24]. On détermine les perturbations optimales susceptibles de fournir une croissance transitoire optimale. L'évolution de la perturbation optimale au cours du temps sera examinée. Les mécanismes de croissance transitoire sont discutés.

4-2-PSEUDOSPECTRE

Un pseudo spectre est défini comme l'ensemble des valeurs complexe z (paramètre par ε), satisfait à l'une ou l'autre des définitions équivalentes suivantes

Définition 1 : z est une pseudo-valeur propre d'un opérateur L si elle est valeur propre de $\bar{L} = L + E$, ou E est une matrice de perturbation, avec $\|L\| \leq \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$.

Définition 2 : z est une pseudo-valeur propre d'un opérateur L si elle est satisfaite $\|zI - L\|^{-1} \geq \varepsilon^{-1}$

L'équivalence des deux définitions précédentes a été démontrée par Reddy (1955).

En fait, la première définition relie le ε -pseudospectre au spectre d'une matrice perturbée de manière aléatoire. z est une ε -pseudospectre propre de L si elle est une valeur propre exacte de $L + E$, ou E est une matrice complexe aléatoire de norme inférieure ou égale à ε ($\|E\|_2 \leq \varepsilon$). La seconde définition utilise la norme du résolvant $R(z) = (zI - L)^{-1}$, qui est défini de manière continue dans le plan complexe à l'exception du spectre L , car en ces points le résolvant tend vers l'infini. Pour des valeurs finies mais grandes de la norme du résolvant, z est définie comme une ε -leur propre de L , telle que $\varepsilon = 1/\|R(z)\|$.

Si L est normal, les pseudo-spectres sont constitués d'un ensemble de régions circulaires de rayon ε et centrées sur les valeurs propres de L . Si L est non-normal, alors des déviations peuvent avoir lieu, et en générale elles sont plus grandes pour un ε donné. Finalement, le pseudo-spectre est un moyen pour analyser la nature de l'opérateur mis en œuvre.

Les figures (4-1) à (4-4) montrent des contours d'iso-valeurs de ε , frontières du ε -pseudospectre de l'opérateur linéaire pour un fluide Newtonien et pour un fluide rhéofluidifiant. Les nombres de Reynolds interne et externe sont fixés. On voit que les contours n'entourent pas seulement de près les valeurs propres mais débordent largement, apportant ainsi la signature du non normalité. Plus intéressant encore est l'empiètement du pseudo-spectre dans le quadrant instable de l'écoulement : si on perturbe trop l'opérateur d'évolution, l'écoulement est instable.

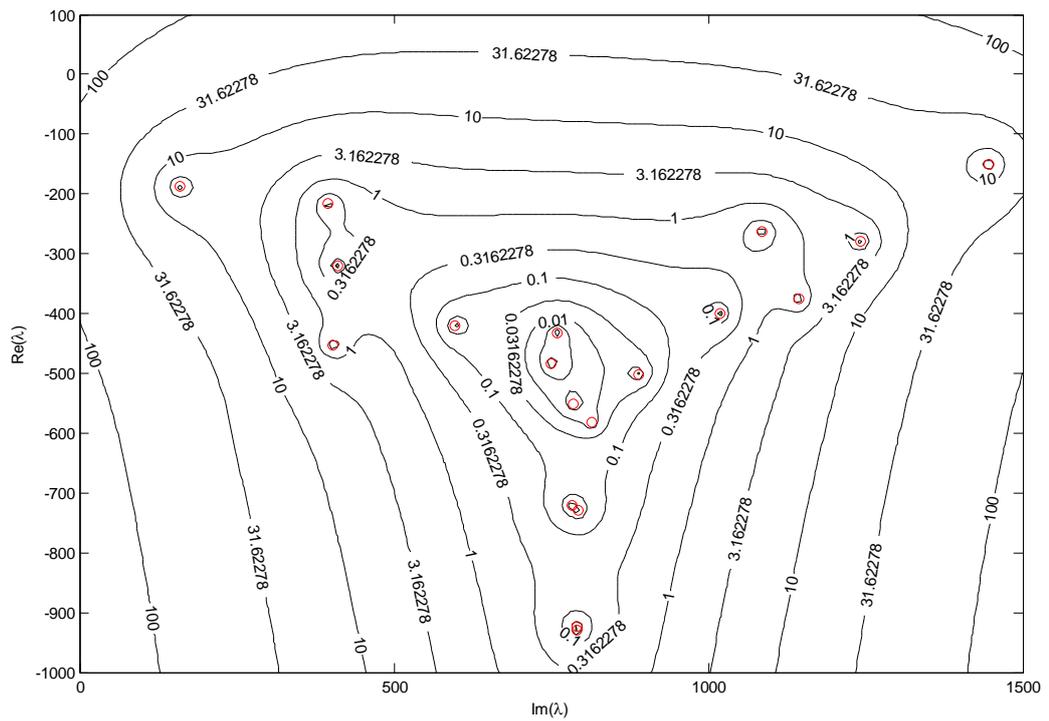


Figure 4-1: les pseudo-spectres pour un fluide Newtonien pour un rapport de rayon $\eta=0.881$. $Re_1=101$ $Re_2=-1061.2$ $m=13$ $k=2.176$, $N=40$.

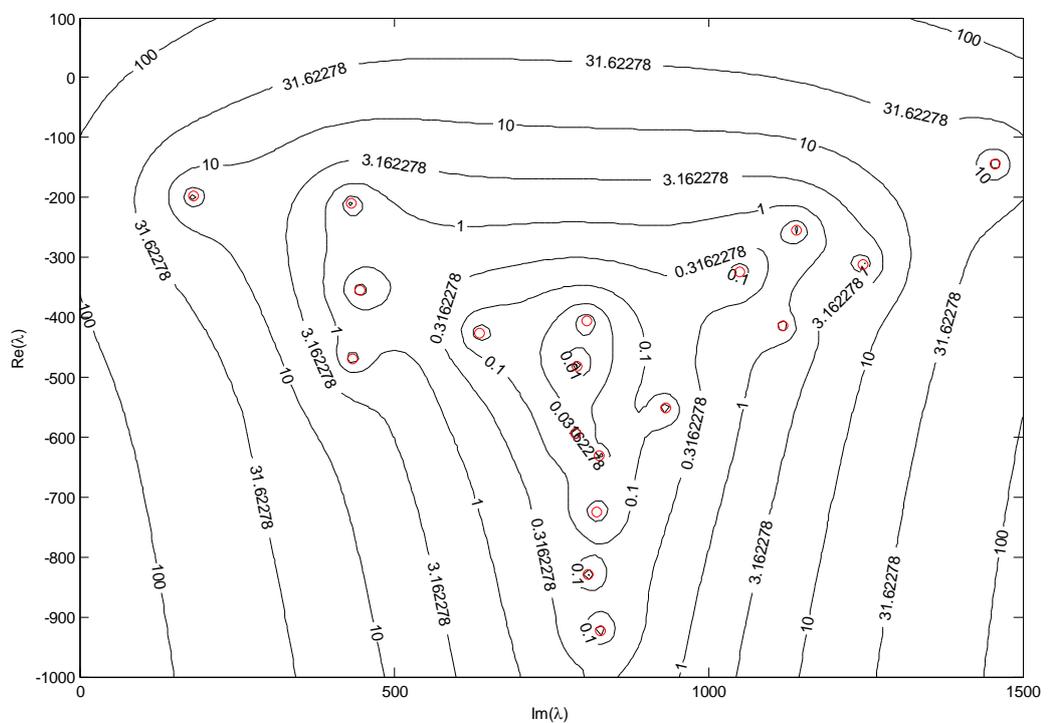


Figure 4-1: les pseudo-spectres pour un fluide de Bingham avec un rapport de rayon $\eta=0.881$. $Re_1=101$ $Re_2=-1061.2$ $m=13$ $k=2.176$, $N=40$.

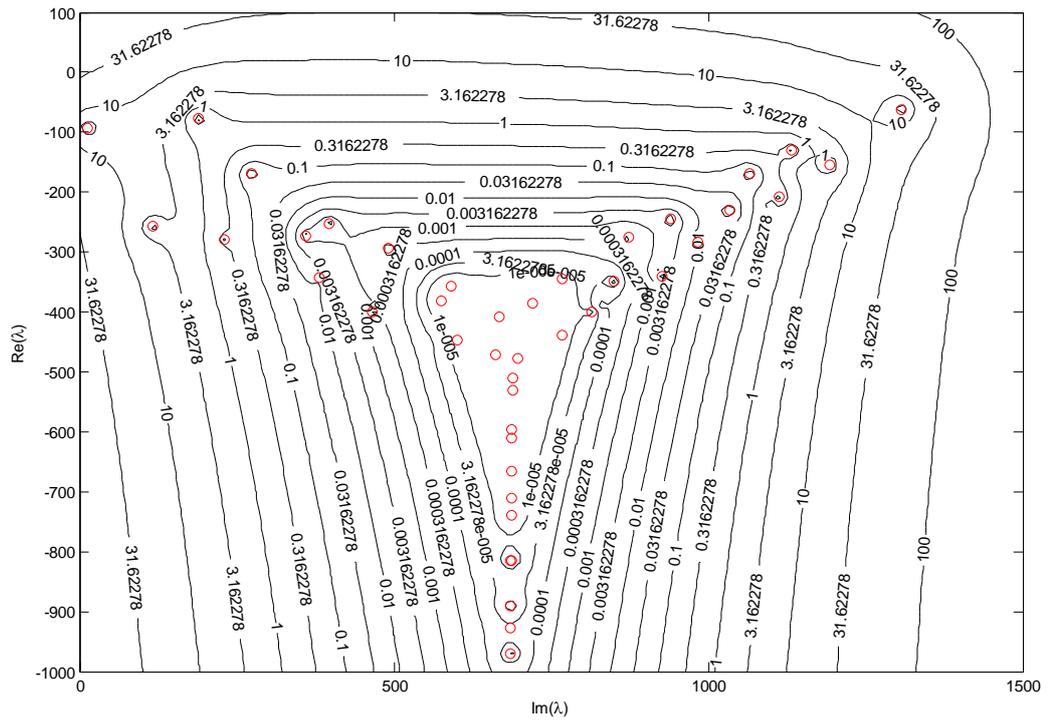


Figure 4-3 : les pseudo-spectres pour un fluide en loi de puissance pour $\eta=0.881$.

$n=0.5$ $Re_1=400$ $Re_2=-1061.2$ $m=11$ $k=1.6472$, $N=100$.

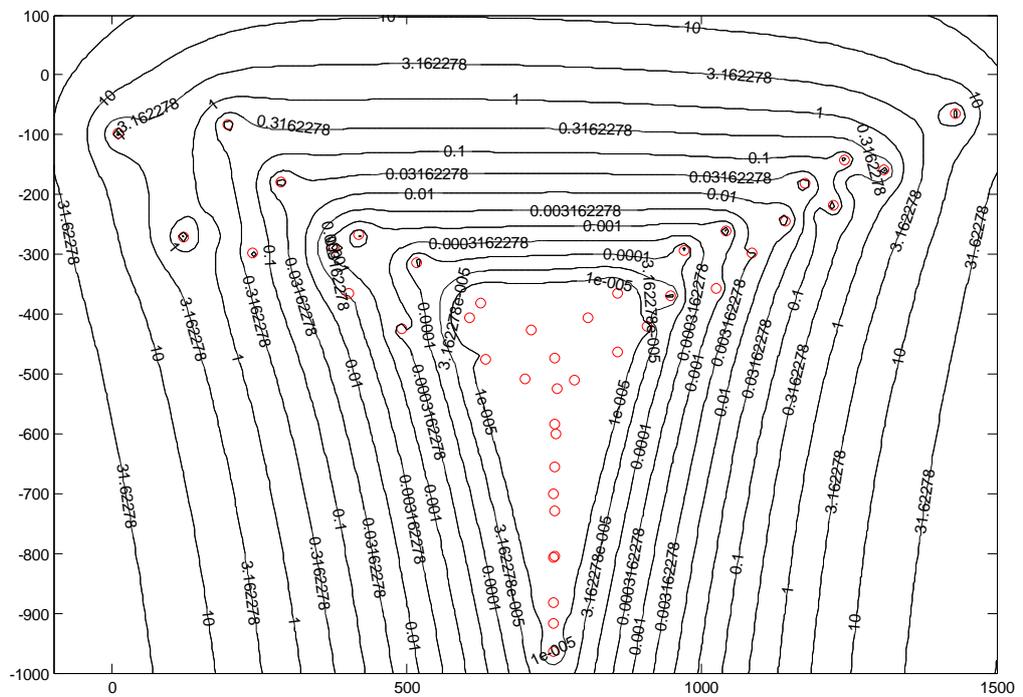


Figure 4-4 : les pseudo-spectres pour un fluide de Carreau pour $\eta=0.881$. $n=0.5$
pour $Re_1=400$ $Re_2=-1061.2$ $m=11$ $k=1.6472$, $N=200$.

Les portraits spectraux de l'écoulement pour des fluides rhéofluidifiant avec ou sans seuil sont présentés dans les figures 4-1 à 4-4 pour des nombres d'ondes azimuthaux différents. Les paramètres de contrôle ($Re_1=400$, $Re_2=-1061.2$, m^{opt} et k^{opt}) sont identiques à ceux utilisée pour le calcul des spectres. On a d'ailleurs superposé ces spectres sur chaque portrait. On retrouve donc ici les valeurs propres des spectres sous forme de contours autour de chaque point. On voit que les contours n'entourent pas seulement de près les valeurs propres mais débordent largement, apportant ainsi la signature du non normalité. Plus intéressant encore est l'empiètement du pseudo-spectre dans le quadrant instable de l'écoulement : si on perturbe trop l'opérateur d'évolution, l'écoulement est instable.

4-3 CROISSANCE TRANSITOIRE

On utilise le produit scalaire défini dans L_2 pour analyser les effets de non-orthogonalité des fonctions propres. La taille de la perturbation est déterminée par la norme associée au produit scalaire ; celle-ci n'est autre que l'énergie cinétique de la perturbation à un facteur près. En effet, soient q_1 et q_2 deux vecteurs vitesse de la perturbation, solutions du problème aux valeurs initiales (2-57) à (2-60) selon la formulation adoptée ; le produit scalaire basé sur la norme énergie est défini par :

$$(q_1, q_2)_\varepsilon = \int (uu^* + vv^* + vv^*) r dr \quad 4-1$$

Pour la formulation (u,v), on obtient

$$(q_1, q_2)_E = \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} \left[u_1 u_2^* + \left(1 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \right) v_1 v_2^* + \frac{1}{k^2} D_+ u_1 D_+ u_2^* + \frac{im}{k^2 r} (v_1 D_+ u_2^* - v_1^* D_+ u_2) \right] r dr \quad 4-2$$

avec :

$$v_1 D_+ u_2^* - v_1^* D_+ u_2 = \frac{v_1 u_2^*}{r} + v_1 D u_2^* - \frac{v_1^* u_2}{r} - v_1^* D u_2 \quad 4-3$$

Dans le cas de la formulation (u, w) , après avoir éliminé w de l'équation de continuité, on obtient:

$$(q_1, q_2)_E = \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} \left[u_1 u_2^* + \left(1 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \right) v_2 v_2^* + \frac{1}{k^2} D_+ u_1 D_+ u_2^* + \frac{im}{k^2 r} (v_1 D_+ u_2^* - v_1^* D_+ u_2) \right] r dr \quad 4-4$$

où $(*)$ signifie le complexe conjugué. La norme associée au produit scalaire défini par l'équation (4-2) est :

$$\|q\|_\varepsilon^2 = \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} \left[u_1 u_2^* + \left(1 + \frac{m^2}{k^2 r^2} \right) v_2 v_2^* + \frac{1}{k^2} D_+ u_1 D_+ u_2^* + \frac{im}{k^2 r} (v_1 D_+ u_2^* - v_1^* D_+ u_2) \right] r dr \quad 4-5$$

(l_m désigne la partie imaginaire de l'argument). Une expression similaire est établie pour la formulation (u, v) .

L'analyse du problème peut être simplifiée en utilisant une approximation discrète.

Une solution q du problème aux valeurs initiales linéarisé est projetée sur la base Des fonctions propres q solutions du problème aux valeurs propres. On considère alors l'espace S_M généré par les M premières fonctions propres $\hat{q}_j = (\hat{u}_j, \hat{v}_j)^T$ correspondant aux M premières valeurs propres $\{C_1, C_2, \dots, C_M\}$ classées dans l'ordre décroissant des parties imaginaire C_i de l'opérateur $A_{uw} = M^{-1} L_{uw}$.

$$S_m = \text{span}(q_1, q_2, \dots, q_M) \quad 4-6$$

Une perturbation admissible peut être écrite sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions propres q_j :

$$q = \sum_{j=1}^M k_j \hat{q}_j \quad 4-7$$

Pour déterminer l'évolution temporelle des coefficients (k_j) , le problème aux valeurs initiales (2-79) est réécrit sous la forme :

$$\frac{dq}{dt} = -iA_{uv}q \quad 4-8$$

et le problème aux valeurs propres :

$$A_{uv}Q = Q\Lambda \quad 4-9$$

où Q est une matrice dont les vectrices colonnes sont les vecteurs propres et $\Lambda = \text{diag} \{C_1, C_2, \dots, C_M\}$ est une matrice diagonale des valeurs propres classées par ordre décroissant des parties imaginaires des C_j .

En substituant (4-9) et (4-7) dans (4-8), on trouve :

$$k(t) = e^{(-i\Lambda t)}k_0 \quad 4-10$$

où k_0 est le vecteur des coefficients k_j à l'instant initial. L'amplification de l'énergie de la perturbation est mesurée par le rapport $g(t)$ entre la norme énergie de la perturbation $\|q(t)\|_E^2$ à l'instant t et celle à l'instant initial $\|q(0)\|_E^2$. En utilisant la relation (4-7) on obtient :

$$\|q(t)\|_E^2 = (q_1, q_2)_E = \sum_{j=1}^{j=M} k_j^M \sum_{l=1}^{l=1} k_l (q_j, q_l)_E \quad 4-11$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\|q(t)\|_E^2 = k^H M k \quad 4-12$$

M est une matrice Hermitienne définie positive. Elle admet une décomposition de la forme $M = F^H F$. Ainsi, la norme énergie de q peut être écrite sous la forme :

$$\|q(t)\|_E^2 = k^H M k = k^H F^H F k = \|Fk\|_2^2 \quad 4-13$$

Le facteur d'amplification $g(t)$ est donc :

$$g(t) = \frac{\|q(t)\|_E^2}{\|q_0\|_E^2} \quad 4-14$$

Pour $(\alpha, m, \text{Re}, \text{Im})$ fixé, parmi toutes les combinaisons linéaires possibles des fonctions propres, il en existe une qui fournit le maximum d'amplification $G(t)$ à un instant t fixé:

$$G(t) = \sup_{\|q_0\|_2 \neq 0} g(t) = \sup_{\|Fk_0\|_2 \neq 0} \frac{\|Fe^{(-i\Lambda t)}F^{-1}Fk_0\|_2^2}{\|Fk_0\|_2^2} = \|Fe^{(-i\Lambda t)}F^{-1}\|_2^2 = \lambda_1^2 \quad 4-15$$

où λ_1 est la valeur singulière principale de la matrice $Fe^{(-i\Lambda t)}F^{-1}$.

On notera G^{\max} le maximum de $G(t)$ sur tout l'intervalle de temps considéré :

$$G^{\max}(\alpha, m, n, Re, B, \dots) = \sup_{t>0} G(t) \quad 4-16$$

La quantité G^{\max} correspond à la perturbation initiale qui, pour α et m donnés, fournit le maximum d'amplification pour tous les temps t . Le temps t pour lequel ce maximum est atteint est noté t^{\max} . La norme 2 (euclidienne) d'une matrice peut être évaluée en utilisant la décomposition en valeur singulière (SVD) de la matrice $(Fe^{(-i\Lambda t)}F^{-1})$.

Toute matrice A peut être décomposée selon :

$$AV=UW$$

où V et U sont des matrices unitaires et W est une matrice diagonale dont les éléments sont des valeurs singulières $W=(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$, ordonnées dans le sens croissant. Le scalaire λ_1 représente la norme 2 de la matrice A , à laquelle on associe respectivement les deux premières colonnes u_1 et v_1 des matrices U et V , telles que :

$$A v_1 = \lambda_1 u_1 \quad 4-17$$

où v_1 décrit la condition initiale, qui est amplifiée par un facteur σ_1 . Suivant cette méthodologie, les coefficients de la projection de la perturbation initiale qui permettent de déterminer les perturbations optimales associées à une amplification particulière $G(t)$ à un instant t donné par :

$$k(0) = (k_1(0), \dots, k_M(0))^t \quad 4-18$$

Peuvent être exprimés par :

$$k(0) = Fv_1 \quad 4-19$$

4-4-AMPLIFICATION OPTIMALE DE L'ENERGIE

La perturbation qui engendre le gain d'énergie le plus important est une perturbation optimale en quelque sorte. En effet, c'est elle qui a la plus grande probabilité de faire basculer l'écoulement en régime turbulent.

La quantité G^{\max} est associée à la perturbation initiale qui, pour α , m , Re , B et n donnés, fournit le maximum d'amplification pour tous les temps t . Le temps t pour lequel ce maximum est atteint est noté $t^{\max}(\alpha, m, n, Re, B)$, i.e., $G^{\max} = G(t^{\max})$.

Le maximum de G^{\max} pour toutes les valeurs du couple $(\alpha, m) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}$ est noté

$$G^{opt}(\alpha, \beta, n, Re, B) = \sup_{t>0} G^{\max}(k, m, n, Re, B) \quad 4-20$$

La perturbation initiale dont l'amplification d'énergie est G^{opt} est dite perturbation optimale. Cette amplification optimale est atteinte à $t = t^{opt}(n, Re, B)$.

Afin d'effectuer les calculs, les polynômes de Tchebychev évalués à N points de collocation de Gauss-Lobatto sont utilisés. La méthode de résolution dépend du fluide étudié et du couple de Reynolds (Re_1, Re_2) . La convergence des calculs impose une valeur minimale de N . Il a été constaté que cette convergence dépend du modèle rhéologique pour un couple (Re_1, Re_2) donné. Par exemple, pour nombre de Reynolds élevé (Re_1, Re_2) , nous devons prendre une valeur $N > = 100$ pour le cas d'un fluide faiblement rhéofluidifiant afin d'assurer la convergence.

Dans ce qui suit, on va examiner l'influence des paramètres rhéologiques sur l'amplification de l'énergie et les caractéristiques de la perturbation optimale.

4-5- VALIDATION

Comme premier test de validation, nous avons comparé les valeurs de G^{opt} pour un fluide Newtonien obtenues par nos calculs à celles de Meseguer [35]. Un très bon accord est trouvé comme on peut le voir sur dans la table 4-1

Un autre test de validation a été effectué. Il est illustré par les figures 4-5 et 4-6, où nous avons représenté pour un fluide Newtonien, l'amplification transitoire de l'énergie de la perturbation pour des nombres de Reynolds interne et externe fixés. Les nombres d'onde axial et azimutal sont $k = 3.14$ et $m = 0$. L'amplification maximale est $G^{\max} = 16.62$. Ce résultat est en très bon accord avec Meseguer

[35]. Dans la figure 4-7, le nombre d'onde azimutal $m = 1$. Nous retrouvons encore une fois les résultats de Meseguer. Il convient de noter que dans ce dernier cas, une croissance exponentielle aux temps longs, du fait de l'instabilité de l'écoulement.

Tableau 4-1 : Energie optimale pour un fluide newtonien pour un rapport de rayon $\eta=0.881$

Re1	Re2	m	k	G^{opt} (Nos résultats)	G^{opt} (Meseguer)
591	-2588	10	1.994	71.58587	71.36
523	-2975	11	1.996	71.80799	71.58
473	-3213	11	1.920	71.86812	71.64
405	-3510	11	1.839	71.93701	71.75

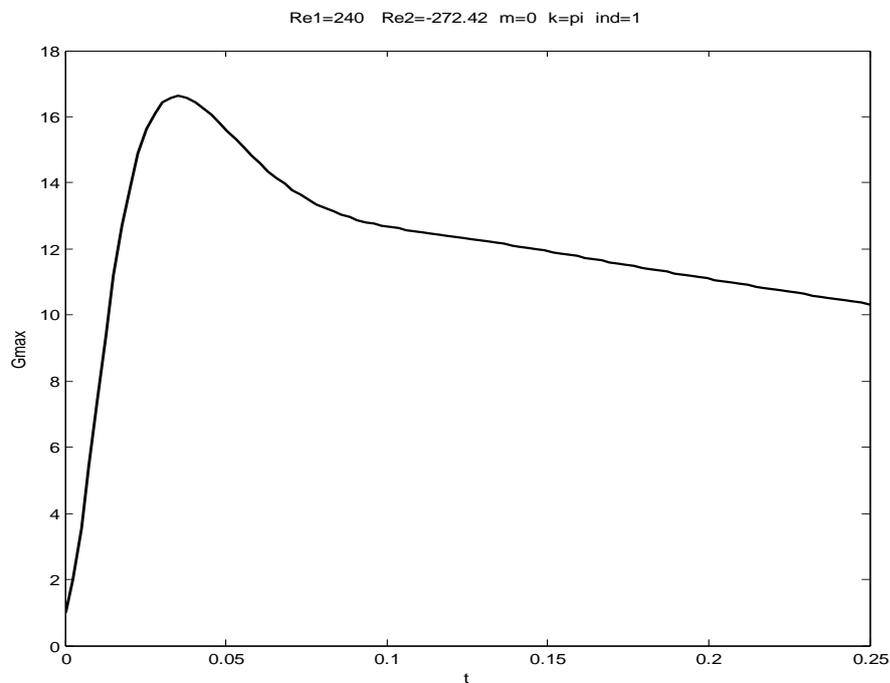


Figure 4-5 Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps pour la perturbation optimale, pour un fluide newtonien. $Re_1=240$, $Re_2=-271.42$, $m=0$, $k=\pi$.

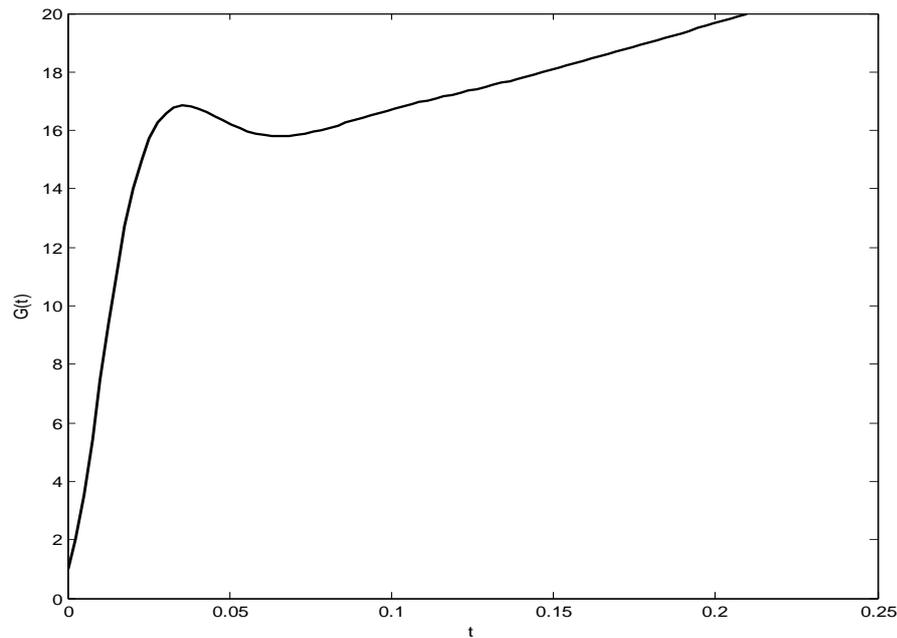


Figure 4-6 Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps pour la perturbation optimale, pour un fluide newtonien. $Re_1=240$, $Re_2=-271.42$, $m=1$, $k=\pi$.

4.5.2 Influence du caractère rhéofluidifiant sur la perturbation optimale

Pour les fluides newtoniens, nos résultats sont en bon accord avec des études précédentes numériques de Meseguer [35]. La même approche est adoptée pour les fluides non newtoniens. La figures 4-7, nous avons représenté la forme de G^{opt} pour les fluides rhéofluidifiant avec ou sans seuil.

Il est montré que, par rapport au cas newtonien, l'amplification optimale de l'énergie est réduite pour le fluide de Bingham et a augmenté pour la loi de puissance et plus encore pour les fluides Carreau.

Tableau 4-2 : Energie optimale pour des fluides rhéofluidifiants avec ou sans seuil.

	Re_1	Re_2	k^{opt}	m^{opt}	G^{opt}	N
Newtonien	100	-1061.2	2.176	13	20.6252	40
Loi puissance ($n=0.5$)	100	-1061.2	1.6472	11	88.1603	100
Carreau ($n=0.5$; $\lambda=10$)	100	-1061.2	1.8427	12	229.5628	100
Bingham ($B=10$)	100	-1061.2	1.9643	13	11.9333	40

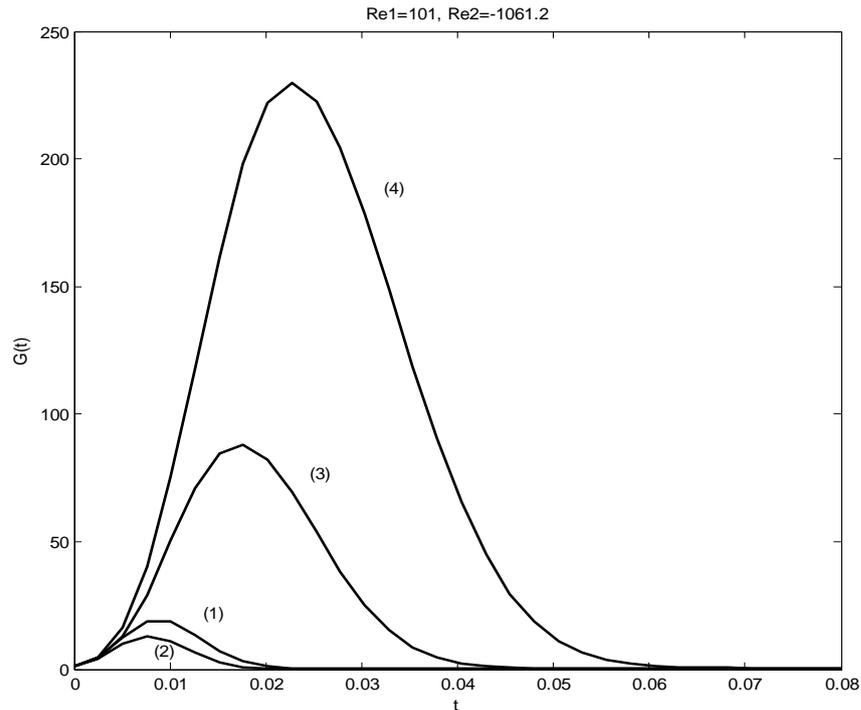


Figure 4-7 : Amplification optimale de l'énergie pour $Re_1 = 101$ $Re_2 = -1061.2$. (1) fluide Newtonien (2) Bingham $B = 7$; (3) loi en puissance $n = 0.5$; (4) fluide de Carreau $n = 0.5$ $\lambda = 10$.

Dans la figure 4-8, nous avons représenté le facteur de croissance transitoire en fonction de temps. Pour $Re_1 = 100$, $Re_2 = -113.5074$ $m = 0$, $k = 3.14$, $\eta = 0.881$ pour un fluide en loi de puissance avec un indice de fluide de 0.3, 0.5, 0.7 et 1. On remarque qu'en augmentant l'indice de fluide n , on augmente la dissipation visqueuse ; ce qui se traduit par une réduction de G^{opt} . Ceci est illustré dans la figure (4-8) où G^{opt} est représenté.

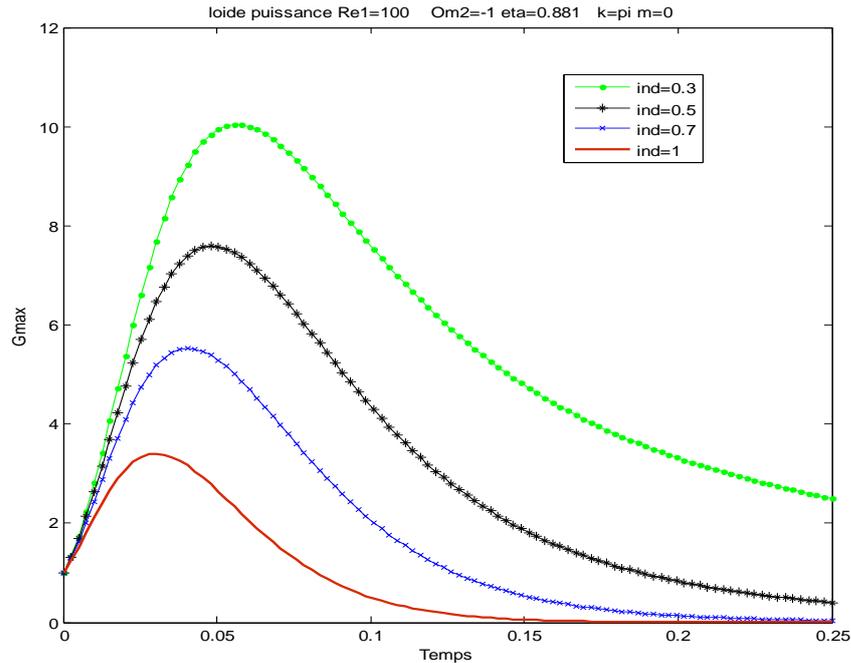


Figure 4-8 : Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps pour la perturbation optimale pour un fluide en loi de puissance pour $Re_1=100$, $Re_2=-113.5074$ $m=0$, $k=3.14$, $\eta=0.881$.

La perturbation donnant lieu à l'amplification d'énergie G^{opt} est appelée perturbation optimale. Les calculs ont été au préalable validés par comparaison avec les résultats obtenus par Meseguer dans le cas Newtonien [35]. Sur la Figure 4-9, nous avons représenté les contours de G^{opt} pour un fluide Newtonien

La même approche est adoptée pour les fluides non newtoniens. La forme de G^{opt} est illustrée dans la figure 4-10 pour un fluide en loi de puissance. On voit que, par rapport au cas newtonien, l'amplification de l'énergie est considérablement plus importante pour un fluide en loi de puissance que pour un fluide newtonien. Ce comportement pourrait être lié au spectre de valeurs propres. De plus l'inclinaison de la perturbation optimale augmente avec le nombre de Reynolds intérieur Re_1 mais varie peu avec le nombre de Reynolds extérieur Re_2 .

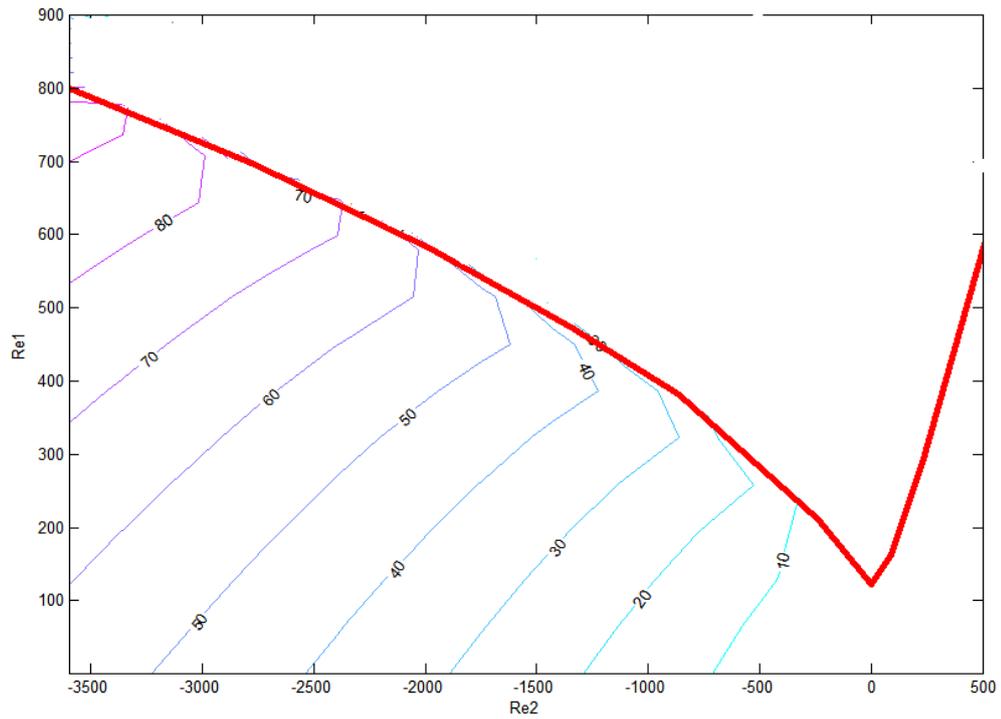


Figure 4-9- Contours d'amplification optimale de l'énergie de la perturbation, pour un fluide Newtonien $\eta = 0.881$.

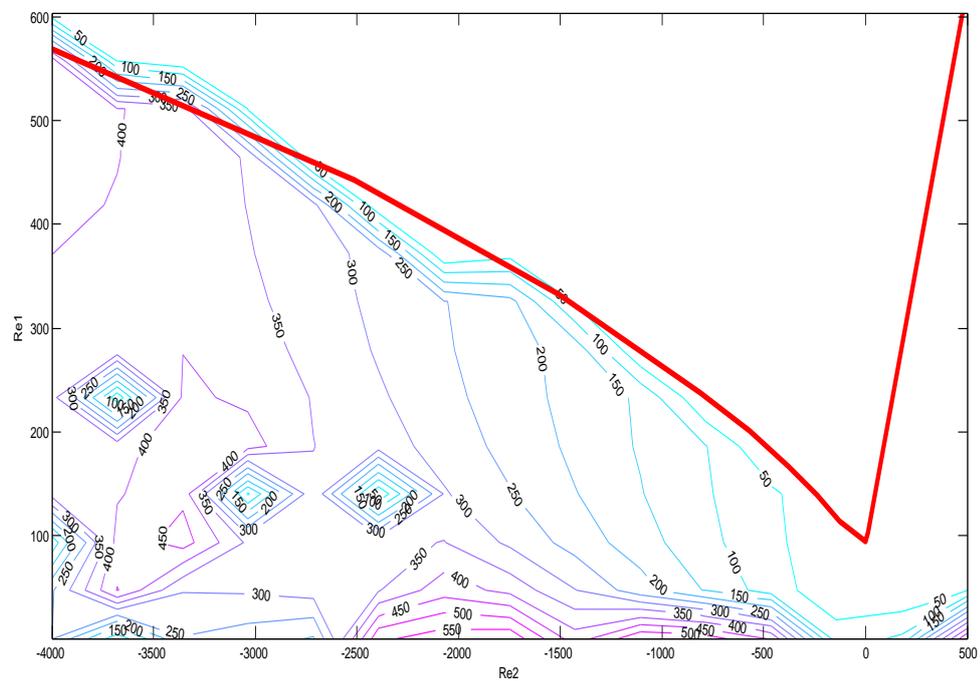


Figure 4-10- Contours d'amplification optimale de l'énergie de la perturbation, pour un fluide en loi de puissance : $\eta = 0.881$ $n = 0.5$.

4-6- ANALYSE D'ECHELLE

Le système de Couette circulaire peut être considérée comme un écoulement de Couette plan et en tant que tels, les effets centrifuges et de cisaillement peut être distingué. Il est pratique de définir de nouveaux paramètres. Ainsi, nous allons utiliser les paramètres de contrôle (Re , R_Ω) ; respectivement le nombre de Reynolds de cisaillement et le nombre de rotation introduites dans [18], [19]. Le nombre de Reynolds Re mesure l'effet de cisaillement et le nombre de rotation R_Ω l'effet de la rotation, ils sont définis par :

$$Re = \frac{\bar{\rho} \gamma^b (r^*) \hat{d}^2}{\hat{\mu}_{ref}} \quad R_\Omega = \frac{2\hat{\Omega}_{ref} (r^*)}{\gamma^b (r^*)} \quad 4-21$$

γ^b est défini à l'aide de la vitesse de cisaillement de base évaluée au rayon r^* auquel une particule de fluide de vitesse $V^b (r^*)$ voit les parois intérieure et extérieure tourner à la même vitesse, mais dans des directions opposées,

$$\left[V^b (R_1) - \Omega_{ref} R_1 \right] = - \left[V^b (R_2) - \Omega_{ref} R_2 \right] \quad 4-22$$

Dans le cas d'un fluide Newtonien, on utilisant [18],[19], $r^* = \sqrt{R_1 R_2}$ et les deux nombres adimensionnels, et les nombres de Reynolds de cisaillement et de rotation prennent la forme suivante :

$$Re = \frac{2|\eta Re_2 - Re_1|}{1 + \eta}, \quad R_\Omega = \frac{(1 - \eta)(Re_1 + Re_2)}{\eta Re_2 - Re_1} \quad 4-23$$

Et sur la ligne de Rayleigh, la vitesse de rotation est égale à $R_\Omega = -1$.

Pour un fluide en loi de puissance, en suivant la même procédure, on obtient après un calcul :

$$r^* = \frac{\eta}{1 - \eta} \left[\frac{1}{\eta} \frac{(\eta - 1)}{(\eta^{2/n-1})} \right]^{n/2} \quad 4-24$$

$$R_e = \text{Re}_1 \frac{1}{\gamma^{b(2-n)} (r^*)} \quad 4-25$$

Pour ce comportement rhéologique, le nombre de rotation lit sur la ligne de Rayleigh

$$R_\Omega = \frac{1 + \eta + \eta(\eta^{2/n} - 1)}{\eta(\eta^{2/n-1} + 1)} \quad 4-26$$

Nous avons étudié la graduation de la croissance transitoire avec ce nombre de Reynolds de cisaillement pour un fluide Newtonien.

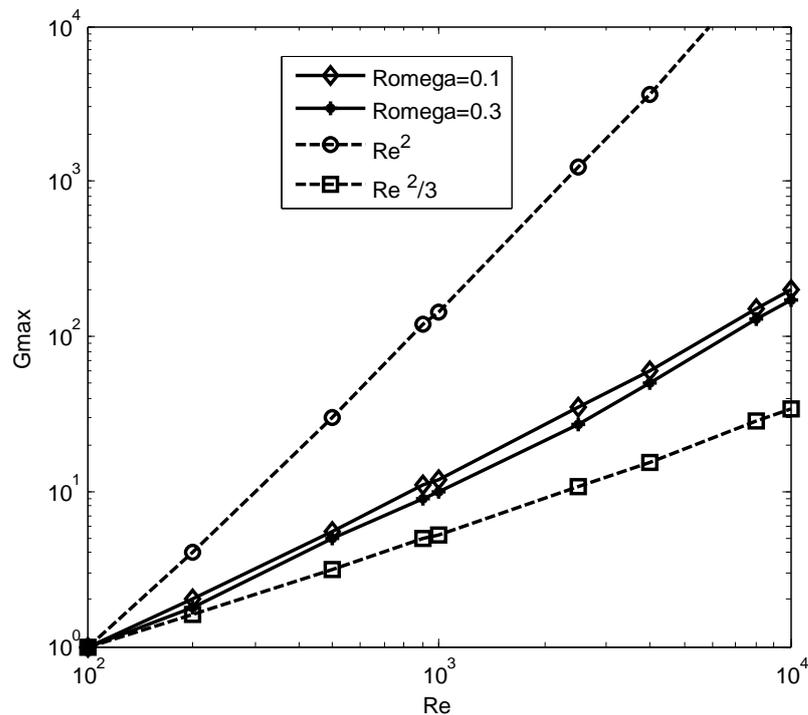


Figure 4-11. L'énergie de la perturbation optimale en fonction de Nombre de Reynolds de cisaillement pour un fluide Newtonien, $\eta = 0.881$.

L'évolution de la croissance transitoire avec le nombre de Reynolds de cisaillement est alors étudiée. Sur la ligne de Rayleigh, l'amplification de l'énergie s'accroît avec le carré de (Re ($G_{\max} \propto (\text{Re}^2)$)) dans le cas newtonien comme le montre la figure 4.11.

Cette absence de stratification du moment cinétique conduit à un système similaire à la configuration de Couette plan. Il est bien connu que $G^{\text{opt}} = O(\text{Re}^2)$ pour l'écoulement newtonien plan de Couette (Schmid & Henningson 2001).

4-7 FORME ET EVOLUTION DE LA PERTURBATION OPTIMALE

Les figures 4-12 à 4-14, montrent l'évolution de la perturbation optimale au cours du temps pour un fluide Newtonien lorsque les deux cylindres sont contre rotatifs : $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt} = 2.176$ et $m^{opt} = 13$ dans les plans (r,z) et (r,θ) .

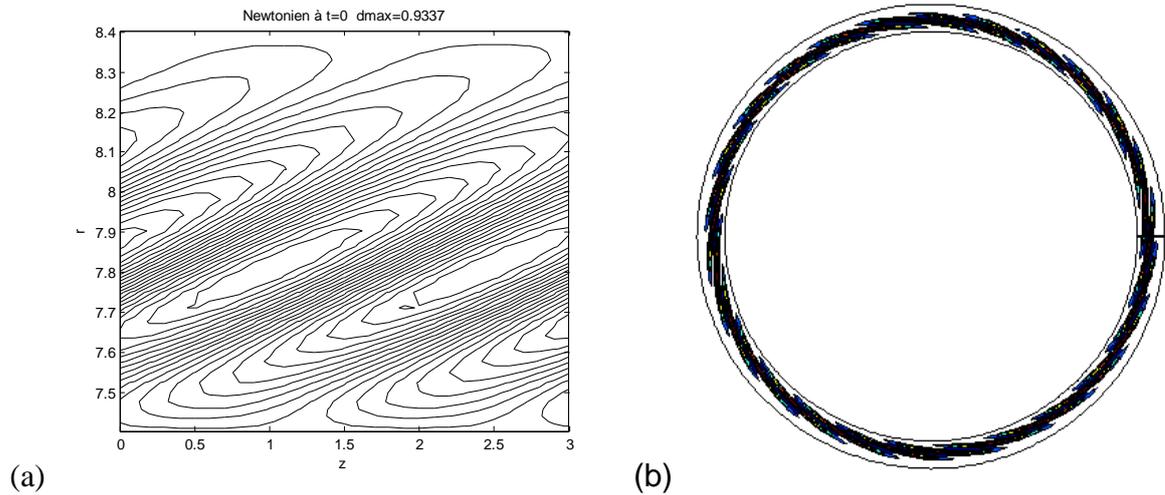


Figure 4-12 – Contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide Newtonien, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt} = 2.176$ et $m^{opt} = 13$ à l'instant initiale $t=0$. (a) plan (r,z) ; (b) plan (r,θ) .

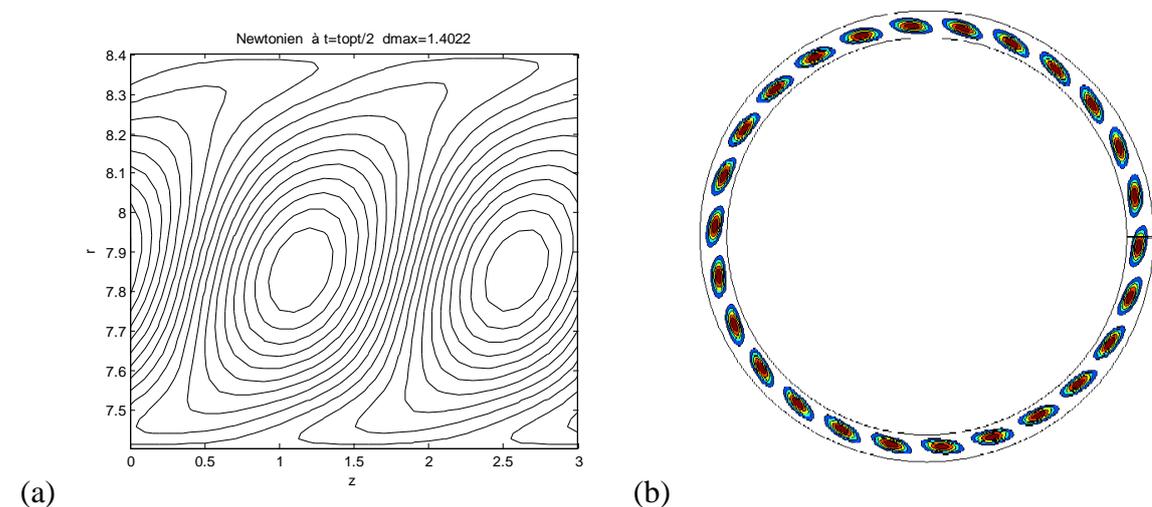


Figure 4-13 Contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide Newtonien, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt} = 2.176$ et $m^{opt} = 13$. à l'instant initiale $t=4.503580e-003$. (a) plan (r,z) ; (b) plan (r,θ) .

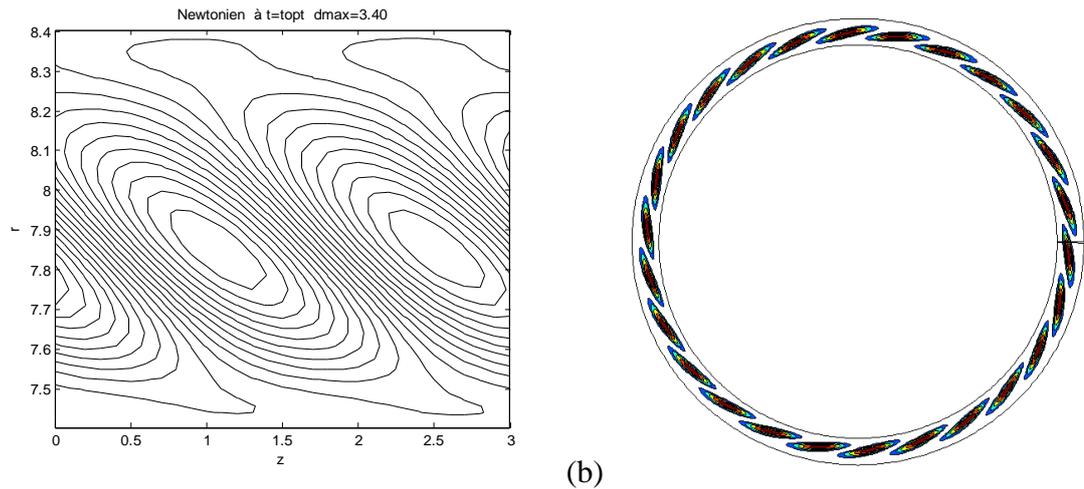


Figure 4-14- Contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide Newtonien, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt} = 2.176$ et $m^{opt} = 13$. À l'instant $t = 9.619989e-003$. (a) plan (r, z) ; (b) plan (r, Θ) .

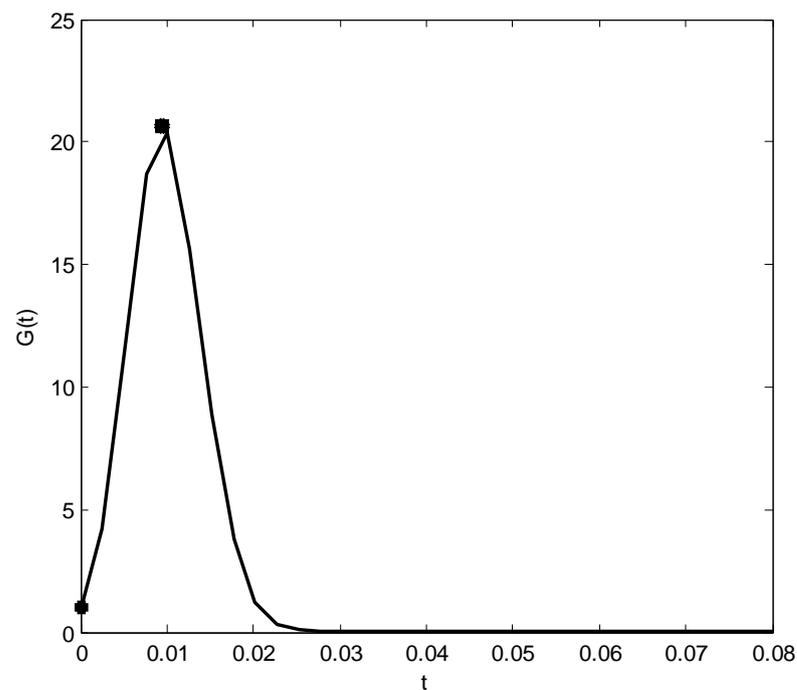


Figure 4-15 Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du, pour pour un fluide Newtonien, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt} = 2.176$ et $m^{opt} = 13$.

À l'instant initiale $t = 0$, la structure est orientée dans la direction opposée au gradient de la vitesse de l'écoulement de base (figure 4.12) (l'écoulement de base gagne de l'énergie). À l'instant $t = t^{opt}$, i.e. l'amplification de la perturbation est maximale, la perturbation est orientée dans le sens de l'écoulement de base figure 4-14 (l'écoulement de base perd l'énergie). La figure 4-13 montre la forme de la

perturbation à $t = t^{\text{opt}} / 2$, elle est normale à l'écoulement de base. Ainsi qu'on a représenté l'évolution de l'énergie optimale au cours du temps figure 4-15.

Pour les fluides non-newtonien, figures 4-16 à 4-23, les mécanismes physique sont identiques que le cas newtonien. On note qu'on n'a pas les mêmes valeurs quantitativement mais on a les mêmes évolutions qualitativement.

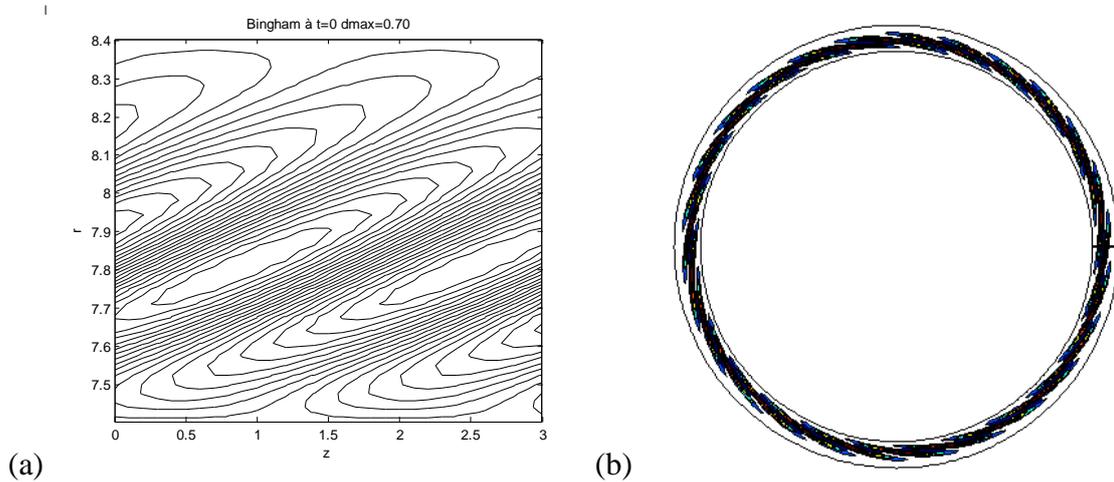


Figure 4-16 - Contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide de Bingham, $B=10$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{\text{opt}}=1.965$ et $m^{\text{opt}}=13$. à l'instant initiale $t^{\text{opt}}=0$. (a) plan (r,z) ; (b) plan (r,Θ) .

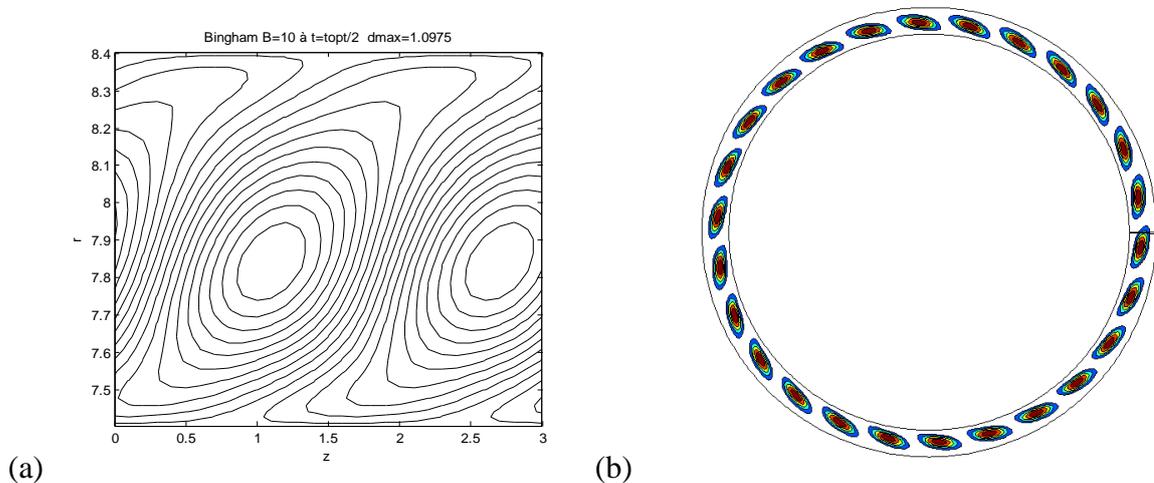


Figure 4 -17- contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide de Bingham, $B=10$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{\text{opt}}=1.965$ et $m^{\text{opt}}=13$ à l'instant optimale $t^{\text{opt}}=4.150123e-003$. (a) plan (r,z) ; (b) plan (r,Θ) .

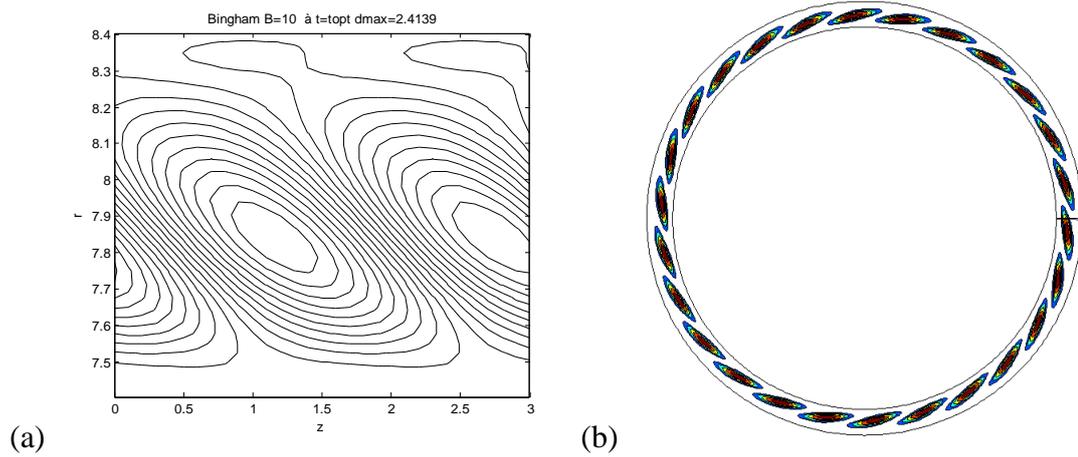


Figure 4 -18- Contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide de Bingham, $B=10$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt}=1.965$ et $m^{opt}=13$ à l'instant optimale $t^{opt}=8.300123e-003$. (a) plan (r,z) ; (b) plan (r,θ) .

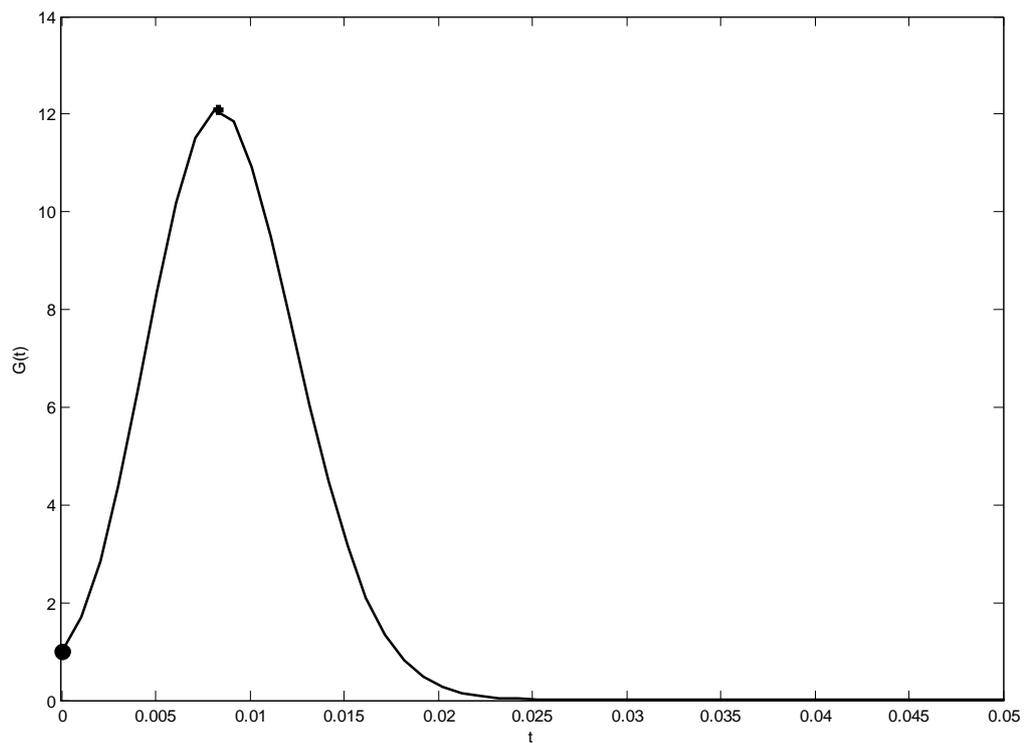


Figure 4-19 Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps, pour de Bingham. $B=10$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt}=1.965$ et $m^{opt}=13$.

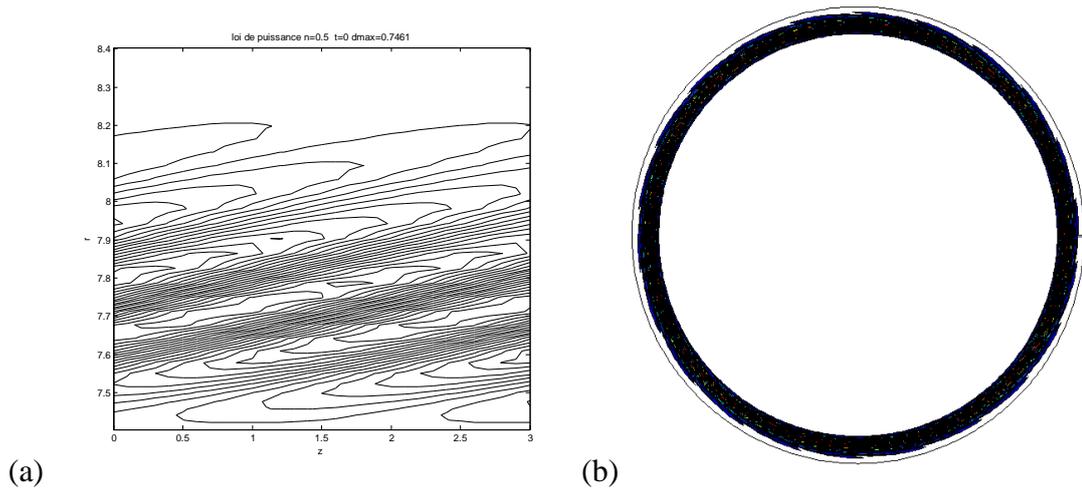


Figure 4-20 - Contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide en loi de puissance, $n=0.5$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt}=1.6472$ et $m^{opt}=11$ à l'instant initiale $t^{opt}=0$. (a) plan (r,z) ; (b) plan (r,Θ) .

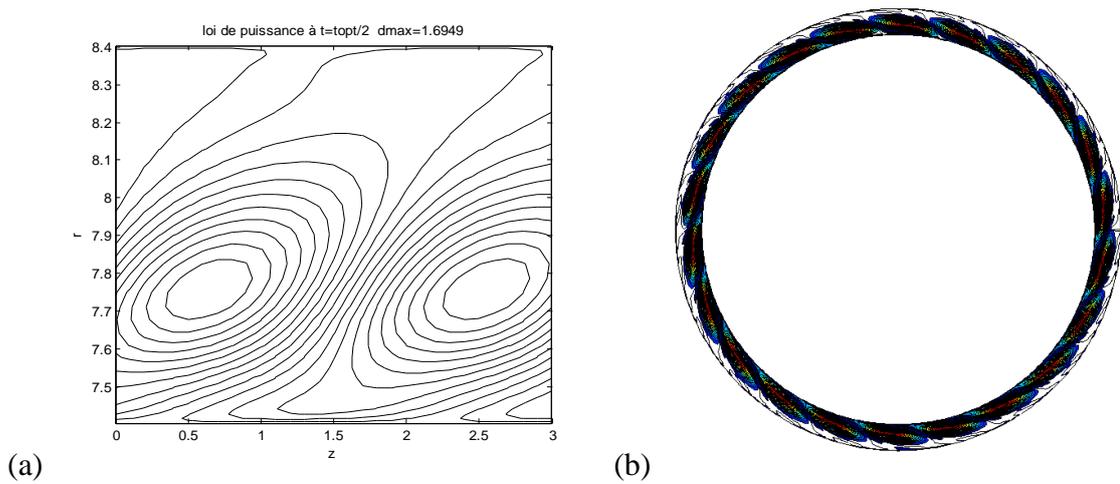


Figure 4-21- Contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide en loi de puissance, $n=0.5$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt}=1.6472$ et $m^{opt}=11$ à l'instant initiale $t=t^{opt}/2$. (a) plan (r,z) ; (b) plan (r,Θ) .

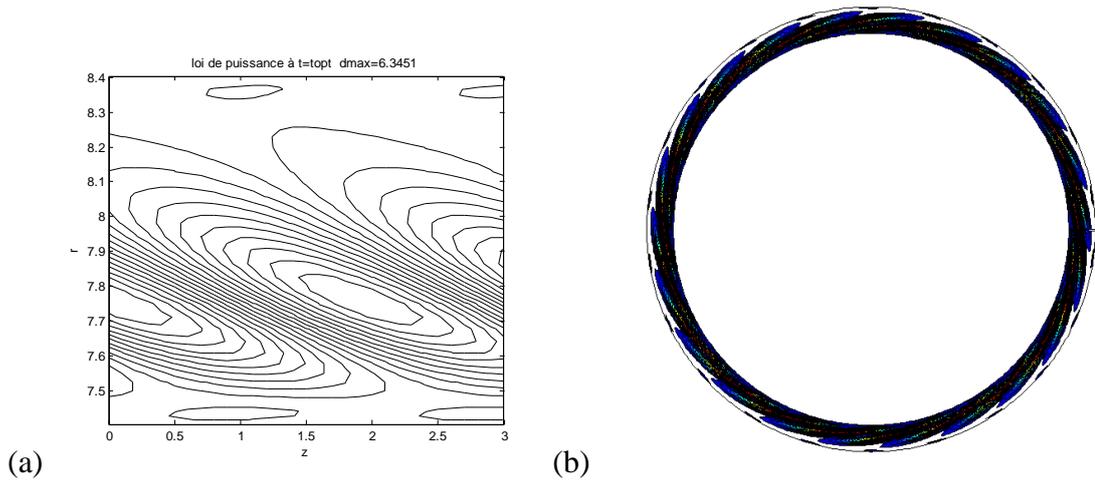


Figure 4-22- Contour de la composante azimutale de vitesse pour un fluide en loi de puissance, $n=0.5$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt}=1.6472$ et $m^{opt}=11$ à l'instant initiale $t=t^{opt}$. (a) plan (r,z) ; (b) plan (r,Θ) .

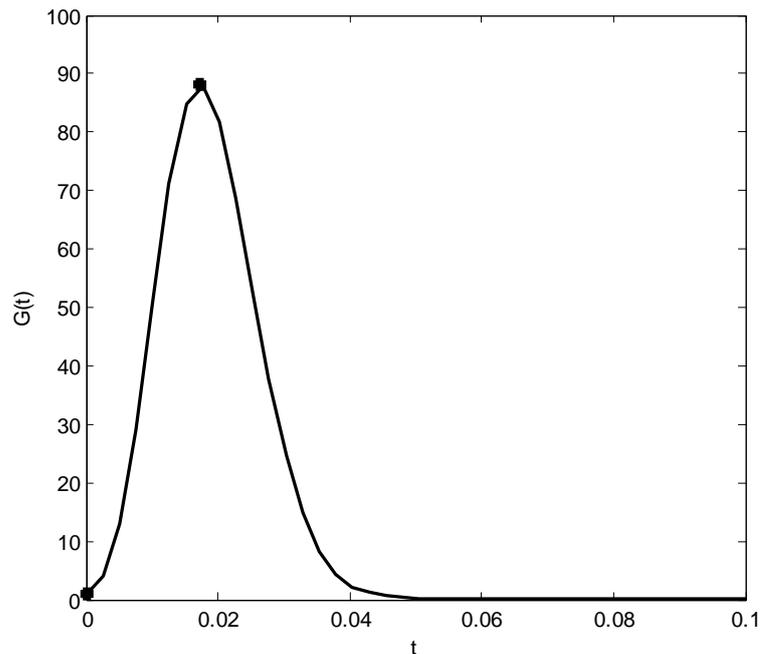


Figure 4-23 Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps. pour un fluide en loi de puissance, $n=0.5$, avec $Re_1 = 101$, $Re_2 = -1061.2$, $k^{opt}=1.6472$ et $m^{opt}=11$ à l'instant initiale $t=t^{opt}$.

L'orientation de la perturbation optimale à l'instant initiale dans le sens opposé de l'écoulement de base, nous a mène à considérer dans un premier temps le mécanisme d'orr en situation bidimensionnelle (2D). L'amplification

maximale est atteinte lorsque les structures sont transverses à l'écoulement de base.

En se basant sur les travaux Butler et Farell [44], l'échange de l'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation peut être expliqué en utilisant l'équation de Reynolds - Orr écrite en fluide parfait sous la forme:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{2} \int U_y \overline{u'v'} dy \quad 4-27$$

Où E est l'énergie cinétique moyenne de la perturbation et $\overline{u'v'}$ est la moyenne de $u'v'$ sur une période $2\pi/\alpha$. L'échange d'énergie entre la perturbation et l'écoulement de base est contrôlé par le produit entre le gradient de vitesse de l'écoulement de base et les contraintes de Reynolds $-\overline{u'v'}$. Si on introduit la fonction Ψ définissant la fonction de courant, donnée par $u=d\Psi/dy$ et $v=-d\Psi/dx$, l'énergie E augmente si l'intégrale de la quantité :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\Psi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 U_y \quad 4-28$$

est positive.

Par la suite, lorsque $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\Psi} U_y < 0$, on dira que la perturbation est orienté dans la direction opposée au gradient de vitesse de l'écoulement de base ; dans le cas contraire on dira qu'elle est orientée dans la direction du gradient de vitesse.

Le mécanisme 2D n'est pas compatible avec nos résultats dans la mesure de la perturbation, la perturbation continué à gagné de l'énergie est sont orientés dans le sens de l'écoulement de base.

Remarque

Une autre interprétation du mécanisme 2D peut être donnée en utilisant le théorème de la conservation de circulation.

$$\oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = 0 \quad 4-29$$

4-8-MECANISME D'ORR EN 3D

Une interprétation 3D a été récemment proposée par Vitoshki [54], elle met en évidence l'interaction de la divergence plane en (r, Θ) et la composante axiale de la vorticité. En suivant ces auteurs, la vitesse dans le plan (r, Θ) est  rite en utilisant la décomposition de Helmholtz et Hodg en 2D :

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi - \text{rot} \left(\psi_{e_z} \right) \quad 4-30$$

Le terme $\text{grad } \varphi$ est responsable de la déformation, et le terme $\text{rot} \left(\psi_{e_z} \right)$ est responsable de la rotation :

$$\text{rot} \left(\text{grad } \varphi \right) = 0 \quad 4-31$$

$$\text{div} \left(\text{rot} \left(\psi_{e_z} \right) \right) = 0 \quad 4-32$$

Et on a :

$$\vec{u}_d = \text{grad } \varphi ; \quad \vec{u}_q = -\text{rot} \left(\psi_{e_z} \right) \quad 4-33$$

L'idée fondamentale dans la procédure proposée par Vitoshkin *et al.* [54] consiste à décomposer la déformation subie par un tourbillon en une partie purement rotationnelle et une partie qui correspondrait à une déformation sans rotation.

Il reste maintenant à exprimer \vec{u} en termes de \vec{u}_d et \vec{u}_q en appliquant la décomposition Helmholtz 2D

$$\vec{u} = \vec{u}_d + \vec{u}_q \quad 4-34$$

d : divergence plane q : vorticité

$$\vec{u}_d = u_d \vec{e}_r + v_d \vec{e}_\theta \quad 4-35$$

$$\vec{u}_q = u_q \vec{e}_r + v_q \vec{e}_\theta \quad 4-36$$

$$\text{ou : } u_d = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad u_q = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad v_d = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad u_d = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad 4-37$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= d \\ \nabla^2 \psi &= q \end{aligned} \quad 4-38$$

L'équation de l'énergie donne :

$$\frac{dE}{dt} = \int \gamma_{r\theta}^b u v r dr \quad 4-39$$

On remplace l'équation 4-33 dans l'équation 4-36 :

$$\frac{dE}{dt} = \int \gamma_{r\theta}^b (u_d + u_q)(v_d + v_q) r dr \quad 4-40$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{2} \langle \gamma_{r\theta}^b u_d v_d r dr \rangle - \frac{1}{2} \langle \gamma_{r\theta}^b u_q v_q r dr \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle \gamma_{r\theta}^b u_d v_q r dr \rangle - \frac{1}{2} \langle \gamma_{r\theta}^b u_q v_d r dr \rangle \end{aligned} \quad 4-41$$

Les figures 4-24 et 4-25, montrent l'évolution des quatre termes de l'énergie au cours temps pour un fluide newtonien : $Re_1=101$ $Re_2=-1061.2$; $\eta=0.881$; $m^{\text{opt}}=13$, $k^{\text{opt}}=2.176$, et un fluide en loi de puissance : $n=0.5$ $Re_1=101$ $Re_2=-1061.2$; $\eta=0.881$; $m^{\text{opt}}=11$ $k^{\text{opt}}=1.6472$.

Un comportement qualitatif similaire est identifié pour les deux fluides Newtonien et loi en puissance. au début de l'évolution, où la perturbation est orientée dans le sens opposé de l'écoulement de base, la croissance est dominée par le terme Orr, $-\langle u_q v_q \rangle$, quand les vorticités sont orientée vers le sens de l'écoulement de base, le mécanisme Orr devient le dissipateur d'énergie importante. La contribution divergente pur, $-\langle u_d v_d \rangle$, doit être négatif au positif, mais cette contribution est relativement faible. Le terme mixte, $-\langle u_q v_d \rangle$, devrait être positive et importante lorsque les tourbillons sont inclinés fortement avec le

sens de l'écoulement de base. Ce terme mixte est responsable de la plupart à la croissance optimale de l'énergie. Le dernier terme combiné, $-\langle u_d v_q \rangle$, est négatif, mais relativement faible. A titre de comparaison, pour la 2D délimité écoulement de Couette.

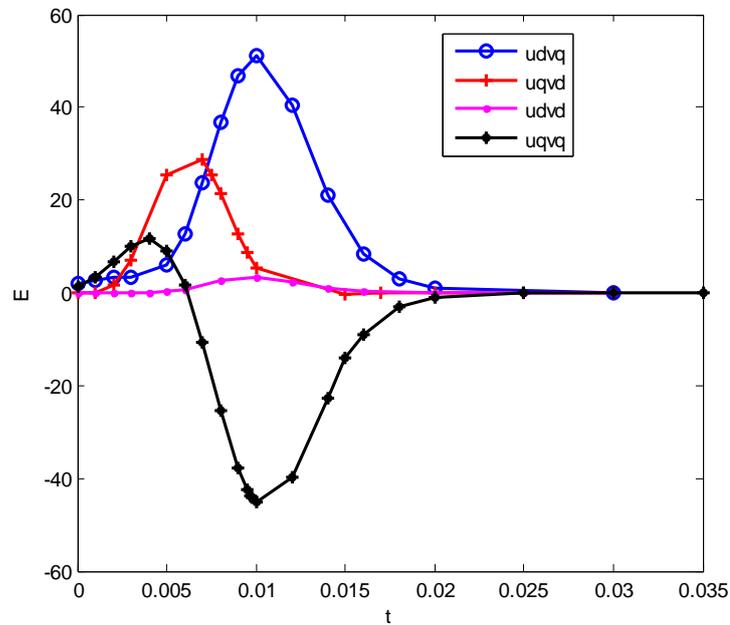


Figure 4-24. Energie optimale en fonction de temps pour un fluide Newtonien, $Re_1=101$ $Re_2=-1061.2$; $\eta=0.881$; $m^{opt}=13$, $k^{opt}=2.176$.

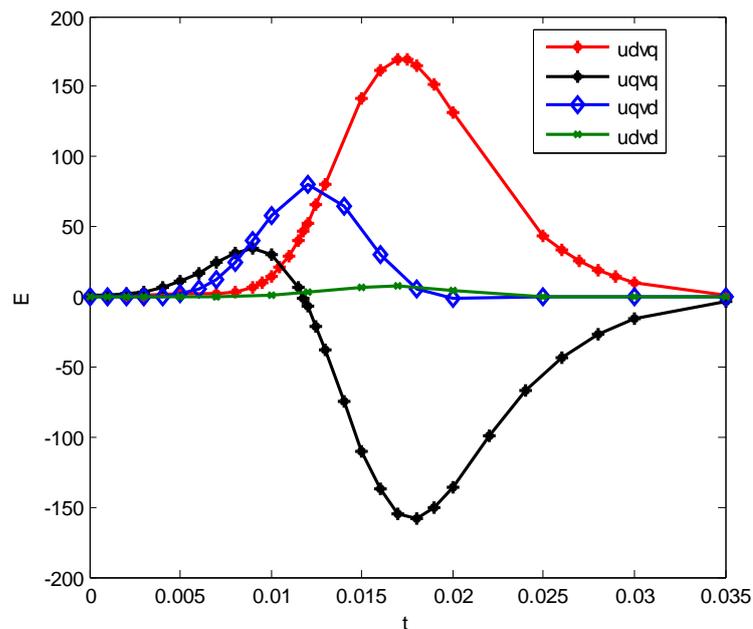


Figure 4-25. Energie optimale en fonction de temps pour un fluide en loi de puissance $n=0.5$ $Re_1=101$ $Re_2=-1061.2$; $\eta=0.881$; $m^{opt}=11$ $k^{opt}=1.6472$.

4-9-Conclusion

Les effets linéaires transitoires dans différents écoulement ont fait l'objet de nombreuses études au cours des dernières années, mais peu d'attention a été consacrée aux écoulements de type Taylor-Couette. Dans ce chapitre, nous avons effectué une exploration exhaustive de la croissance transitoire optimale dans le cas d'une configuration d'écoulement de Taylor-Couette en contre-rotation. Les calculs numériques du facteur d'amplification maximale sont conformes aux valeurs obtenues par Meseguer (Phys. Fluids 1999) et Histrova et al (Histrova et al. 1999). Il faut noter qu'un article récent vient de paraître dans Journal of Fluid Mechanics (Avril 2014) sur la même thématique mais pour des fluides Newtoniens.

Les modes non axisymétriques semblent être plus efficaces dans le mécanisme de transition mais des stries azimutales axisymétriques peuvent aussi bien être observées encore, même si elles présentent une plus faible amplification. Afin de comprendre comment ces effets linéaires se combinent avec ceux non linéaires pour assurer la transition vers la turbulence, la simulation numérique directe du problème s'avère nécessaire.

CONCLUSION GENERALE

Une analyse tridimensionnelle de la stabilité linéaire de l'écoulement de Couette-Taylor circulaire d'un fluide rhéofluidifiant avec et sans seuil est réalisée. Cette étude est motivée par le désaccord entre les résultats rapportés dans la littérature et le caractère étonnants de certain de ces résultats. Les écarts entres les résultats peuvent être attribués en partie à l'échelle de la viscosité utilisée comme référence. Ce problème est longuement abordé dans le présent travail. Trois types de modèles rhéologiques ont été envisagés: loi de puissance, Carreau et Bingham. Afin d'obtenir des solutions en mode normal, les équations aux perturbations linéarisées sont transformées pour obtenir problème aux valeurs propres ; celui-ci étant à son tour résolu en utilisant la méthode de collocation.

Une perturbation axisymétrique est introduite dans l'écoulement et le nombre de Reynolds critique est calculé pour différentes valeurs des paramètres caractérisant le comportement rhéologique du fluide. Ainsi, les paramètres considérés sont l'indice de fluide (n , caractérisant la rhéofluidification) pour un fluide en loi de puissance ; le nombre de Bingham (B) pour un fluide Bingham ; ainsi que l'indice de fluide et la constante de temps (n et λ) pour un fluide de Carreau. D'autre part, l'influence de l'aspect géométrique est aussi prise en compte à travers la variation du rapport des rayons externe et interne (η).

Les résultats obtenus pour le nombre de Reynolds critique sont comparés avec plusieurs résultats antérieurs cités dans la littérature. Dans tous les cas étudiés, on observe que lorsque la viscosité diminue quand on s'approche de la paroi interne, le caractère rhéofluidifiant a un effet stabilisateur. C'est à dire que l'apparition de tourbillons de Taylor est retardée. La taille de ceux-ci, i.e. la longueur d'onde axiale, varie de manière significative avec le caractère rhéofluidifiant et le rapport des rayons. L'analyse de l'équation d'énergie de la perturbation permet de montrer que cet effet de stabilisation est dû à la réduction de l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation. Une étude complémentaire a été réalisée pour mettre en évidence que c'est le gradient de viscosité localisé près du cylindre intérieur qui a le plus grand effet stabilisateur alors qu'un gradient de viscosité loin de cette paroi n'a pratiquement aucun effet.

En outre, la longueur d'onde k_c du mode le plus instable a été calculée et il s'avère que celle-ci dépend de l'indice de fluide (n) pour un fluide en loi de puissance, du nombre de Bingham (B) pour un fluide de Bingham ainsi que de l'indice de fluide (n) et la constante du temps (λ) pour un fluide de Carreau. Les résultats montrent qu'elle dépend aussi du rapport de rayon (η), en particulier pour de grands écarts (faible η) où les tourbillons de Taylor sont écrasés contre la paroi interne où la viscosité est plus faible. Pour un fluide de Bingham, un décrochement dans l'évolution de k_c a lieu lorsque qu'apparaît une zone non-cisaillée dans l'écoulement rattachée au cylindre extérieur. En dessous du décrochement, la variation est en accord avec celle observée pour des fluides en loi de puissance. Pour de grands nombres de Bingham, le nombre d'onde diminue quand le caractère rhéofluidifiant augmente, ce qui est cohérent avec la loi de puissance pour une faible épaisseur cisaillée (η proche de 1).

Le cas de perturbations en trois dimensions est ensuite étudié. On constate que les modes les plus instables sont axisymétrique, même pour les fluides fortement rhéofluidifiants. Ce résultat est en contradiction avec le travail de Caton [1] qui avait prédit l'apparition de cellules verticales à faible ou grande valeur de l'indice de fluide (n) et du nombre de Bingham (B).

Les résultats numériques montrent qu'en utilisant des nombres de Reynolds définis avec la viscosité calculée à la paroi du cylindre intérieur, la rhéofluidification a un effet déstabilisant lorsque les deux cylindres sont en contre-rotation ; contrairement à ce qui est connu pour les écoulements dans un canal plan. Dans le cas des fluides de Bingham, un effet déstabilisant est observé pour des valeurs faibles ou modérées de B . Cette différence de comportement entre l'écoulement en canal plan et l'écoulement de Couette circulaire peut être attribuée à une différence dans les mécanismes d'instabilité.

La croissance transitoire des perturbations ont certes été abondamment étudiés au cours des dernières années pour nombre de configurations, mais le cas des écoulements de type Taylor-Couette n'a pas bénéficié de beaucoup d'attention. Dans le présent travail, une étude exhaustive de la croissance transitoire dans un écoulement de Taylor-Couette contre-rotatif est réalisée. Les résultats montrent que la croissance transitoire de la perturbation est fortement

affectée par le caractère rhéologique du fluide. Elle est fortement amplifiée pour un fluide de Carreau et réduite pour un fluide de Bingham. L'analyse des pseudo-spectres réalisée dans le cadre de la présente étude permet de clarifier ces évolutions.

Pour terminer, les perspectives qui pourraient être suggérées afin de compléter l'étude entamée dans le présent travail peuvent être résumées comme suit :

- compléter l'ensemble des données analytiques et expérimentales dont on dispose ;
- accomplir une analyse faiblement non linéaire des instabilités ;
- explorer les fluides fortement rhéofluidifiants ;
- étudier le cas de large espace annulaire ;
- réaliser un dispositif de Taylor-Couette expérimental.

REFERENCES

- [1] F. Caton Linear stability of circular Couette flow of inelastic viscoplastic fluids J. Non-Newton. Fluid Mech,134 (2006), pp.148–154.
- [2] G.I. Taylor Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders Phil. Trans. R. Soc. London, A223 (1923),pp 289–34.
- [3] R.C. Di Prima, H.L. Swinney Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence, Springer-Verlag (1981), pp. 139–180.
- [4] H. Giesekus Zur stabilität von strömungen viskoelastischer flüssigkeiten 1. ebene und kreisförmige couette-strömung Rheol. Acta, 5 (1966), pp. 239–252
- [5] S.J. Muller, R.G. Larson, E.S.G. Shaqfeh A purely elastic transition in Taylor–Couette flow Rheol. Acta., 28 (1989), pp. 499–503.
- [6] S.J. Muller, R.G. Larson, E.S. Shaqfeh A purely elastic instability in Taylor–Couette flow J. Fluid. Mech., 218 (1990), pp. 573–600.
- [7] E.S.G. Shaqfeh, S.J. Muller, R.G. Larson The effects of gap width and dilute solution properties on the viscoelastic Taylor–Couette instability J. Fluid. Mech., 235 (1992), pp. 285–317 .
- [8] A. Groisman, V. Steinberg Mechanism of elastic instability in Couette flow of polymer solutions: Experiments Phys. Fluids, 10 (1998), pp. 2451–2463..
- [9] D.G. Thomas, B. Khomami, R. Sureshkumar Nonlinear dynamics of viscoelastic Taylor–Couette flow: effect of elasticity on pattern selection, molecular and conformation drag J. Fluid. Mech., 620 (2009), pp. 353–382.
- [10] V. Sinevic, R. Kuboi, A.W. Nienow, Power numbers Taylor numbers and Taylor vortices in viscous Newtonian and non-Newtonian fluids Chem. Eng. Sci., 41 (1986), pp. 2915–2923.
- [11] M. Jastrzebski, H.A. Zaidani, S. Wronski Stability of Couette flow of liquids with power law viscosity Rheol. Acta,31(1992), pp.264–273.

- [12] T.J. Lockett, S.M. Richardson, W.J. Worraker The stability of inelastic non-newtonian fluids in Couette flow between concentric cylinders: a finite-element study *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 43 (1992), pp. 165–177.
- [13] M.P. Escudier, I.W. Gouldson, D.M. Jones Taylor vortices in Newtonian and shear-thinning liquids *Proc. R. Soc. Lond. A*, 449 (1935) (1995), pp. 155–176.
- [14] N. Ashrafi, R.E. Khayat Shear-induced chaos in Taylor-Vortex flow *Phys. Rev. E*, 61 (2000), p. 1455.
- [15] Z. Li, R.E. Khayat A non-linear dynamical system approach to finite amplitude Taylor-vortex flow of shear-thinning fluids *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 45 (3) (2004), p. 321.
- [16] O. Coronado-Malutti, P.R. Souza Mendes, M.S. Carvalho Instability of inelastic shear-thinning liquids in a Couette flow between concentric cylinders *J. Fluids Eng.*, 126 (2004), pp. 385–390.
- [17] W.P. Graebel. The hydrodynamic stability of a Bingham fluid in Couette flow, in: M. Reiner, D. Abir (Eds.), *Proceedings of International Symposium on 2nd Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics*, Haifa, Israel, April 2327, Jerusalem Academic Press, 1964, pp. 636–649.
- [18] J. Peng, K.Q. Zhu Linear stability of Bingham fluids in spiral Couette flow *J. Fluid Mech.*, 512 (2004), pp. 21–45
- [19] M.P. Landry, I.A. Frigaard, D.M. Martinez Stability and instability of Taylor–Couette flows of a bingham fluid *J. Fluid Mech.*, 560 (2006), pp. 321–353
- [20] C.D. Andereck, S.S. Liu, H.L. Swinney Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders *J. Fluid Mech.*, 164 (1986), pp. 155–183
- [21] Z.H. Wan, J.Z. Lin, Z.J. You Non-axisymmetric instability in the Taylor–Couette flow of fiber suspension *J. Zhejiang Univ. Sci*, 6A (2005), pp. 1–7
- [22] R. Bird, R. Armstrong, O. Hassager *Dynamics of Polymeric Liquids* Wiley-Interscience, New York (1987)

[23] R. Tanner Engineering Rheology Oxford University Press, New York (2000)

[24] P.J. Schmid, D.S. Henningson Stability and Transition in Shear Flows Springer-Verlag (2001)

[25] S. Chandrasekhar Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability Dover Publications (1981)

[26] R. Govindarajan, V.S. L'Vov, I. Procaccia, A. Sameen Stabilization of hydrodynamic flows by small viscosity variations Phys. Rev. E, 2003 (2003), pp. 026310.1–026310.11

[27] R. Govindarajan, V.S. L'vov, I. Proccaccia Retardation of the onset of turbulence by minor viscosity contrasts Phys. Rev. Lett., 87 (2001), p. 174501

[28] C. Nouar, I. Frigaard Stability of plane coquette poiseuille flow of shear-thinning fluid Phys. Fluids, 21 (2009), p. 064104 Phys. Fluids, 21:064104.1–064104.13, 2009

[29] P.G. Drazin, W.H. Reid Hydrodynamic Stability Cambridge University Press (1995)

[30] Nadjiba Kabouya influence de la contrainte seuil sur la stabilité de l'écoulement de poiseuille d'un fluide viscoplastique thèse doctorat LEMTA 2005

[31] Ahmed Ismael transition vers la turbulence pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite cylindrique thèse doctorat LEMTA 2008

[32] Nicolats lopez Transition laminaire-turbulent en conduite cylindrique pour un fluide non newtonien thèse doctorat LEMTA2012

[33] B. Alibenyahia, C. Lemaitre, C. Nouar, et N. Ait-Messaoudene, « Revisiting the stability of circular Couette flow of shear-thinning fluids », Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, vol. 183-184, p. 37-51sept. 2012.

- [34] Olivier CZARNY Contribution à l'étude numérique des écoulements en rotation avec parois. Application au système de Taylor-Couette. Thèse doctorat Universités d'Aix-Marseille I, II et III 2003.
- [35] Á. Meseguer, « Energy transient growth in the Taylor–Couette problem », *Physics of Fluids*, vol. 14, no5, p. 1655–1660, mars 2002.
- [36] H. Hristova, S. Roch, P. J. Schmid, et L. S. Tuckerman, « Transient Growth in Exactly Counter-Rotating Couette–Taylor Flow », *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 16, no1, p. 43–48, 2002.
- [37] Orr, W.M.F 1907 The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. *Proc. R. Irish Acad.* 27,9–138.
- [38] Waleffe, F. 1995 Transition in shear flows. Nonlinear normality versus non-normal linearity. *Phys. Fluids* 7 (12), 3060–3066.
- [39] K. M. Butler and B.M. Farrell. Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Phys. Fluids*,4:1637–1650,1992.
- [40] B. Dubrulle, O. Dauchot, F. Daviaud, P.- Y. Longaretti, D. Richard, and J.-P. Zahn. Stability and turbulent transport in Taylor-Couette flow from analysis of experimental data. *Physics of Fluids* (1994-present), 17(9),2005.
- [41] S. Marezke, B. Hof, and M. Avila. Transient growth in linearly stable Taylor-Couette flows. *Ar Xive-prints*, April 2013.
- [42] F. Charru. *Instabilités hydrodynamiques*. EDP Sciences, 2007.
- [43] F.H. Shu. *The Physical Universe: An Introduction to Astronomy*. University Science Books, 1982.
- [44] G.K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [45] J.P. Pascal and H. Rasmussen. Stability of power law fluid between rotating cylinders. *Dynamics and Stability of Systems*, 10:65–93, 1995.
- [46] Satish C. Reddy, Pete r.J. Schmid, and Dan S. Henningson. Pseudo spectra of the Orr-Sommerfeld operator. *SIAM J. Appl. Math.*, 53:15–47, 1993.

- [47] L.Trefethen. Pseudo spectra of linear operators. SIAM Review,39:383-406,1997.
- [48] K.M. Butler and B.M. Farrell. Three dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. Phys. Fluids, 4:1637–1650,1992.
- [49] B. Dubrulle, O. Dauchot, F. Daviaud, P.-Y. Longaretti, D.Richard, and J.-P. Zahn. Stability and turbulent transport in Taylor-Couette flow from analysis of experimental data. Physics of Fluids (1994--present), 17(9), 2005.
- [50] S.Maretzke, B.Hof, and M.Avila. Transient growth in linearly stable Taylor-Couette flows. Ar Xive-prints, April 2013.
- [51] Vitoshkin H., Heifetz E., Gelfgat A.Yu., Harnik N. On the role of vorticity stretching in optimal growth of three dimensional perturbations on plane parallel shear flows. J. Fluid Mech., 707, 369-380, 2012.