

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté de Technologie

Département de Mécanique

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : construction Mécanique

PRISE EN COMPTE DE L'ASPECT NON LINEAIRE DANS L'ANALYSE MODALE
DES STRUCTURES MECANIQUES

Par

Mohamed LATEF

Devant le jury composé de :

M. OUALI	Professeur	Université de Blida	Président
H. ZAHLOUL	Maître de conférences (A)	Université de Chlef	Examineur
M. TEMMAR	Maître de conférences (A)	Université de Blida	Examineur
A. AÏAD	Professeur	Université de Blida	Rapporteur

Blida 2014

RESUME

La connaissance des caractéristiques modales est primordiale dans l'étude du comportement dynamique des structures. L'application de l'analyse modale a été souvent réservée au domaine linéaire. Cependant, la plupart des structures mécaniques, rencontrées dans la pratique, présentent un comportement plus ou moins non linéaire. L'aspect non linéaire est d'origines diverses, dépend de plusieurs facteurs et peut se manifester globalement (géométrie, propriétés mécaniques,...) ou localement (conditions aux limites, joints, ...).

Dans ce travail, nous avons appliqué l'analyse modale à des systèmes vibratoires discrets (masse-ressort) et continus (poutre) non linéaires d'aspect géométrique. Plusieurs méthodes ont été utilisées pour déterminer les paramètres modaux, à savoir :

- Balance harmonique (analytique).
- Variété de l'invariant de Shaw-Pierre (numérique).
- Runge Kutta d'ordre 4.

Des programmes ont été établis sous matlab pour exploiter ces méthodes.

Les résultats obtenus nous ont permis de préciser :

- la limite entre les systèmes linéaires et non linéaires.
- l'effet des conditions initiales et le paramètre non linéaire.
- domaine d'application des méthodes permettant l'étude des systèmes non linéaires.

ABSTRACT

The determination of modal characteristics is necessary to describe the dynamic behavior of structures. The application of modal analysis was often reserved for the linear domain. However, most mechanical structures encountered in practice, have a more or less non-linear behavior. The nonlinear aspect is different origins, depends on several factors and can occur globally (geometry, mechanical properties, ...) or locally (boundary conditions, seals, ...).

In this work, we applied the modal analysis to nonlinear vibration systems geometrical aspect. Several methods were used to determine the modal parameters, namely:

- Harmonic Balance (analytical).

- invariant manifolds of Shaw Pierre (numerical).
- Runge Kutta 4.

Programs have been established in matlab to exploit these methods.

The results obtained allow us to specify:

- The boundary between the linear and nonlinear systems.
- The effect of the initial conditions and the nonlinear parameter.
- Scope of methods for the study of nonlinear systems.

ملخص

إن تحديد الصفات المشروطة يسمح لنا بكتابة الخصائص الديناميكية للهياكل الميكانيكية. كثيرا ما كان تطبيق التحليل المشروط مقتصر للمجال الخطي. ومع ذلك، فإن معظم الهياكل الميكانيكية التي نصادفها في التطبيقات، لها سلوك لا خطي قل أو كثر. الجانب اللاخطي له أصول مختلفة، ويتأثر بعدة عوامل منها من لها تأثير عام (هندسية، الخواص الميكانيكية....) أو موضعي (الشروط النهائية، الأختام....).

في هذا العمل، طبقنا التحليل المشروط على الأنظمة الاهتزازية اللاخطية ذات الأصل الهندسي. وقد استخدمنا عدة طرق لتحديد الخصائص المشروطة، وهي:

- طريقة الموازنة التوافقية (تحليلية).
- طريقة المتغير الثابت لبيتر شو (رقمية).
- طريقة رانج كوتا 4 (رقمية).

وقد قمنا ببرمجة هذه الطرق بواسطة MATLAB .

النتائج المتحصل عليها سمحت لنا بتحديد:

- الحدود بين النظم الخطية واللاخطية.
- تأثير الشروط الابتدائية والعوامل اللاخطية.
- نطاق تطبيق الطرق التحليلية من أجل دراسة الأنظمة اللاخطية.

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord ALLAH le bon dieu, le tout puissant qui nous éclaire le bon chemin.

Les travaux exposés dans ce mémoire ont été réalisés sous la direction du professeur Abdelkrim AÏAD. Je tiens à le remercier. Grâce à son aide, à ses conseils éclairés et ses judicieuses orientations, j'ai pu mener à terme ce modeste travail d'initiation à la recherche.

Je tiens à remercier tous les membres du jury d'avoir accepté d'examiner mon travail, ainsi que pour leurs questions, remarques, critiques et de participer à ma soutenance.

Enfin je remercie mes camarades d'étude et particulièrement OSMANI EI hadi.

Au terme de ce mémoire, je tiens à exprimer toute ma gratitude aux personnes qui m'ont soutenu durant la réalisation de ce travail. Enfin je ne pourrai terminer ces remerciements sans avoir une pensée à l'ensemble de mes enseignants, qu'ils trouvent ici, l'expression de ma profonde gratitude.

TABLE DES MATIERES

	Page
RESUME	01
REMERCIEMENT	03
TABLE DES MATIERES	04
LISTE DES FIGURES	07
LISTE DES TABLEAUX	10
INTRODUCTION GENERALE	12
1. GENERALITES SUR LES SYSTEMES VIBRATOIRES	14
1.1. Introduction	14
1.2. Systèmes linéaires	14
1.3. Systèmes non linéaires	16
1.3.1. Approche de Rosenberg	17
1.3.2. Approche de Shaw et Pierre	19
1.3.3. Approche de formes normales	20
1.4. Limites entre les systèmes linéaires et non linéaires	21
1.5. Types de non linéarités	21
1.5.1. Non linéarité géométrique	22
1.5.2. Non linéarité matérielle	22
1.5.3. Non linéarité de contact	22
1.6. Travaux effectués dans l'analyse des systèmes non linéaires	23
2. ANALYSE MODALE	25
2.1. Introduction	25

2.2. Analyse modale théorique	26
2.2.1. Présentation	26
2.2.2. Analyse des systèmes libres non amortis	27
2.2.3. Analyse des systèmes libres amortis	28
2.2.4. Analyse des systèmes forcés amortis	29
2.3. Analyse modale expérimentale	31
2.3.1. Présentation	31
2.3.2. Application de l'analyse modale expérimentale	34
2.4. Validation des modèles analytiques	33
2.5. Introduction à l'analyse modale non linéaire	34
2.6. Conclusion	35
3. ANALYSE DES SYSTEMES NON LINEAIRES	36
3.1. Introduction	36
3.2. Non linéarité géométrique	36
3.2.1. Mécanismes en grands déplacements	36
3.2.2. Structures minces en grands déplacements	39
3.3. Analyse des systèmes non linéaires	39
3.3.1. Méthodes de perturbations	40
3.3.1.1. Méthodes pour les systèmes faiblement non linéaires	41
3.3.1.2. Méthodes pour les systèmes fortement non linéaires	43
3.3.2. Méthodes de type Galerkin	45
3.3.3. Méthodes géométriques	45
3.4. Continuation des orbites périodiques	47
3.5. Synthèse des méthodes	47

4. APPLICATIONS ET RESULTATS	48
4.1. Introduction	48
4.2. Système à 1 ddl	48
4.3. Système à 2 ddl	54
4.3.1 Système linéaire à 2 degrés de liberté	55
4.3.2 Système non linéaire à 2 degrés de liberté	61
4.3.2.1 Méthode analytique (balance harmonique)	61
4.3.2.2 Méthode numérique	63
4.3.2.2.1 Calcul des modes	63
4.3.2.2.2 Calcul des fréquences propres	65
Résultats	67
1- cas linéaire	67
2- cas non linéaire	69
2.1 Réponses et fréquences propres	69
2.2 Modes propres	75
4.4 Système non linéaire à 2 DDL de modes semblables	81
4.4.1. Application numérique	84
4.5 Système continue	94
4.5.1 Introduction	94
4.5.2 Cas d'une poutre encastrée-encastrée	94
4.5.2.1 Equation de mouvement	94
4.5.2.2 Simulation numérique	95
COCLUSION GENERALE	98
APPENDICE	100

A. NOMENCLATURES	100
B. ABBREVIATIONS	101
BIBLIOGRAPHIE	102
ANNEXES	105

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1 Pendule simple	15
Figure 1.2 Vibration à l'unisson pour un système à 2 ddl	18
Figure 1.3 Représentation des MNNs dans l'espace de configuration d'un système à 2 degrés de liberté	19
Figure 1.4 Présentation des modes dans l'espace des phases	20
Figure 1.5 Nombre de publications utilisant le modèle de Duffing	24
Figure 1.6 Pourcentage de publications qui utilisent le modèle de Duffing	24
Figure 2.1 Structure excitée	31
Figure 2.2 Organisation schématique d'une confrontation des analyses modales théorique et expérimentale	34
Figure 3.1 Pendule	37
Figure 3.2 Système à 1 degré de liberté de type Duffing	37
Figure 3.3 Force de raideur de l'oscillateur de Duffing	38
Figure 3.4 Ressort à lame d'un camion	39
Figure 4.1 Système non linéaire à 1 degré de liberté	48
Figure 4.2 Variation de la fréquence propre ω pour différentes valeurs l'amplitude A et de k_n	51
Figure 4.3 Réponse de système autonome (4.2) pour $A=0.3m$ et différentes valeurs de k_n	52
Figure 4.4 Réponse de système autonome (4.2) pour $k_n= 3N/m^2$ et différentes valeurs de A	53
Figure 4.4 Présentation des modes linéaire pour différentes valeurs de paramètre k_n .	54

Figure 4.5	Système à 2 ddl	54
Figure 4.6	Réponse de la masse m_1 du système (4.18) dans le cas linéaire	60
Figure 4.7	Réponse de la masse m_2 du système (4.18) dans le cas linéaire	60
Figure 4.9	Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas linéaire	67
Figure 4.10	FFT de système à 2 ddl dans le cas linéaire	67
Figure 4.11	Représentation des modes pour le cas linéaire	68
Figure 4.12	Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire	69
Figure 4.13	FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire	69
Figure 4.14	Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire	70
Figure 4.15	FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire	70
Figure 4.16	Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire	71
Figure 4.17	FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire	71
Figure 4.18	Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire	72
Figure 4.19	FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire	72
Figure 4.20	Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire	73
Figure 4.21	FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire	73
Figure 4.22	Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire	74
Figure 4.23	FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire	74
Figure 4.24	Représentation des modes non linéaires pour $p_0(0.1, 0, 0, 0)$	76
Figure 4.25	Représentation des modes non linéaires pour $p_0(0.3, 0, 0, 0)$	77
Figure 4.26	Représentation des modes non linéaires pour $p_0(0.5, 0, 0, 0)$	77
Figure 4.27	Représentation des modes non linéaires pour $p_0(0.8, 0, 0, 0)$	78

Figure 4.28	Représentation des modes non linéaires pour $p_0(0.85, 0, 0, 0)$	78
Figure 4.29	Représentation des modes non linéaires pour $p_0(3, 0, 0, 0)$	79
Figure 4.30	Système non linéaire à 2 ddl	81
Figure 4.31	Système linéaire correspondant	81
Figure 4.32	Modes linéaires du système correspondant	83
Figure 4.33	Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas linéaire correspondant	85
Figure 4.34	FFT de système à 2 ddl dans le cas linéaire correspondant	85
Figure 4.35	Modes linéaires : en phase A, en opposition de phase B	86
Figure 4.36	Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire pour $k_{n2} > \frac{1}{4}k_n$	86
Figure 4.37	FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire pour $k_{n2} > \frac{1}{4}k_n$	87
Figure 4.38	Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas linéaire correspondant	88
Figure 4.39	FFT de système à 2 ddl dans le cas linéaire correspondant	88
Figure 4.40	Modes linéaires : en phase A, en opposition de phase B	88
Figure 4.41	Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire pour $k_{n2} > \frac{1}{4}k_n$	89
Figure 4.42	FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire pour $k_{n2} = \frac{1}{4}k_n$	90
Figure 4.43	Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas linéaire correspondant	91
Figure 4.44	FFT de système à 2 ddl dans le cas linéaire correspondant	91
Figure 4.45	Modes linéaires : en phase A, en opposition de phase B	92

Figure 4.46	FFT d'un système à 2 ddl non linéaire	92
Figure 4.47	Modes similaires d'un système à 2 ddl non linéaire	93
Figure 4.48	Déformées modales non linéaires pour la poutre encastrée-encastrée, pour les trois premiers modes. Trait plein : MNL, pointillé : mode linéaire	96

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Les coefficients a_i et b_i pour le cas linéaire	68
Tableau 4.2	Les coefficients a_i et b_i pour le cas non linéaire	76

INTRODUCTION GENERALE

Les méthodes d'identification modale les plus répandues s'appliquent à des structures pouvant être considérées comme linéaires. Cependant, le comportement réel de la majorité des structures est non linéaire dans son fonctionnement [1]. Il est donc évident que la modélisation des systèmes réels par des modèles linéaires va s'éloigner de la réalité et ces modèles ne seront plus fiables. L'étude de ces systèmes non linéaires, quelque soit la non linéarité considérée, géométrique, matérielle ou liée aux conditions aux limites, demande des efforts de recherche, car l'étude d'un système non linéaire à 2 degrés de libertés (ddl) seulement (système masses-ressorts) sollicite un volume de calcul considérable.

De nombreux travaux de recherche s'intéressant à l'analyse modale non linéaire ont été entrepris, tels que les travaux de Rosenberg, dans les années 1960, qui ont permis de montrer l'existence de solutions périodiques particulières pour des systèmes discrets conservatifs faiblement ou même fortement non-linéaires. Ces solutions représentent les modes non linéaires. Ces notions ont été ensuite étendues aux systèmes continus, puis aux systèmes dissipatifs en faisant appel à différentes méthodes analytiques (perturbations, formes normales,...). Bien que l'on ait pu dégager la notion de mode propre pour les systèmes non linéaires, les principes de superposition et d'orthogonalité, qui font la puissance de l'analyse modale linéaire, ne sont en général pas valables dans le cas non linéaire. Par conséquent, dans le cadre de l'étude des réponses de systèmes soumis à des excitations forcées, il a été montré que les résonances principales s'effectuaient au voisinage des modes non linéaires [2].

Il existe des techniques analytiques qui permettent d'analyser des systèmes non linéaires peuvent être remplacées par des méthodes exploitables numériquement ([3], [4]).

Le mode non linéaire est vu comme un mode linéaire dont la pulsation est une fonction de l'amplitude des oscillations. Ces notions, particulièrement efficaces dans le domaine du calcul, peuvent servir de base au développement de modèles de réponses fréquentielles non-linéaires, afin d'interpréter les

observations expérimentales. Ainsi, il nous semble intéressant d'étudier l'applicabilité de modes propres, fréquences propres et amortissements à des structures complexes, afin de dégager les potentialités d'une approche modale non linéaire, susceptible d'offrir une alternative dans le cadre des applications pratiques. [2]

Le but de ce travail est d'étudier le comportement modal de systèmes non linéaires moyennant des méthodes analytiques et numériques pour comprendre le comportement vibratoire de quelques systèmes non linéaires en ne considérant qu'un seul type de non linéarité. On s'intéressera essentiellement à l'aspect de non linéarité géométrique. On comparera ensuite les paramètres modaux (fréquences et modes propres) d'un système non linéaire à ceux d'un système linéaire homologue. Un programme qui permet de calculer les fréquences propres ainsi que les réponses d'un système non linéaire sera développé.

Le mémoire comporte quatre chapitres, une introduction générale, une conclusion générale et deux annexes.

Le premier chapitre traite des généralités sur les systèmes vibratoires, tout en proposant dans un premier temps une recherche bibliographique et historique sur ce sujet. Nous avons complété par des généralités sur les systèmes non linéaires en précisant la limite entre systèmes linéaires et systèmes non linéaires. On traite ensuite les types de non linéarité et on termine par les travaux effectués dans ce domaine.

Dans le deuxième chapitre on présente les fondements de l'analyse modale linéaire théorique et expérimentale avec une introduction à l'analyse modale non linéaire.

Le troisième chapitre, quand à lui, est consacré à l'aspect non linéaire et traite essentiellement la non linéarité géométrique. L'analyse modale non linéaire est abordée ensuite en précisant les différentes approches et méthodes nécessaires pour mener cette étude.

Dans le quatrième chapitre, des applications numériques sur des systèmes simples sont effectuées. Dans ce cadre, le logiciel Matlab est été utilisé.

Le mémoire se termine par une conclusion générale.

CHAPITRE 01

GENERALITÉS SUR LES SYSTEMES VIBRATOIRES

1.1. Introduction

Les systèmes physiques réels sont dans leurs ensembles non linéaires. Des hypothèses et des approximations sont souvent faites de telle sorte que le problème mathématique qui régit le comportement du système soit linéaire. Ces simplifications sont faites parce que la solution d'un problème linéaire est beaucoup plus facile que celle d'un problème non linéaire. En plus, les résultats obtenus en utilisant l'approximation linéaire sont suffisamment acceptables pour des vibrations à faible amplitude. Par contre, les systèmes non linéaires sont difficiles à analyser car le principe de superposition adapté en analyse modale linéaire n'est pas valable.

1.2. Systèmes linéaires

En 1877, Rayleigh fut le premier à formuler la théorie des vibrations. Au cours des années 1920, les besoins en aéronautique permirent de développer des études sur les problèmes de vibration et de dynamique. Ensuite, c'est à partir de l'année 1945 que la théorie des vibrations est formulée telle qu'on la connaît aujourd'hui. Cette théorie introduit le concept fondamental des oscillations d'un système linéaire autour d'une position d'équilibre, la notion de fréquences et de modes propres en montrant leur existence pour des systèmes discrets ou continus. Après une vingtaine d'années, des méthodes analytiques ont été développées pour le calcul sur des structures définies par un petit nombre de degrés de liberté (Rayleigh-Ritz) en linéaire. [5]

Plusieurs travaux ont été faits dans le domaine de la dynamique et de la vibration linéaire, tel que les travaux de : Geradin [6], Fertis [7], Timoshenko, Den Hartog, Meirovitch et autre [5]

La naissance et le développement de l'informatique, au cours des années soixante, ont permis l'apparition des méthodes matricielles (discrétisation des expressions variationnelles) puis le développement de codes éléments finis,

s'adaptant à l'augmentation de la taille des systèmes traités. Ainsi, on est aujourd'hui capable d'élaborer des modèles numériques performants pour prédire le comportement de structures en dynamique (simulation) [1] tout en restant dans le domaine linéaire. Cependant, la limitation de l'étude au cas linéaire occulte de nombreux phénomènes physiques, tel que celui de la bifurcation qui traduit que le nombre de modes soit supérieur à celui des degrés de liberté du système. La prise en compte de l'aspect non linéaire de certains systèmes s'avère nécessaire, surtout si l'on souhaite modéliser correctement le comportement réel de ces systèmes. Dans certains cas, il est possible d'introduire des hypothèses simplificatrices pour linéariser les modèles correspondants. On cite à ce titre d'exemple le cas du pendule (figure 1.1).

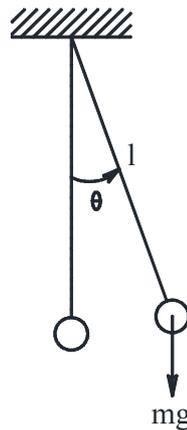


Figure 1.1 : Pendule.

L'équation du mouvement d'un tel système est donnée par:

$$m\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \quad (1.1)$$

Cette équation présente un terme non linéaire $\sin \theta$.

Le développement de ce terme en séries de Taylor au voisinage de 0 permet d'écrire :

$$m\ddot{\theta} + mgl \underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right)}_{D.S.T. \text{ de } \sin \theta} = 0 \quad (1.2)$$

Pour des petites oscillations, les termes de puissance supérieure à 1 sont négligeables devant θ . On obtient ainsi le modèle linéaire

$$m\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad (1.3)$$

1.3. Systèmes non linéaires

En vibration linéaire, une réponse libre d'un système mécanique linéaire est déterminée en superposant les réponses de chaque mode de vibration (ou réponses modales). Les réponses modales sont invariantes ; c'est-à-dire que pour des conditions initiales qui concernent un seul mode, les réponses du système restent sur ce mode à tout instant. De plus, les paramètres modaux du système, comme la fréquence et la forme modale, ne varient pas au cours du temps. Cependant, toutes ces propriétés des systèmes linéaires ne sont plus applicables aux systèmes non linéaires car, d'une part, les fréquences varient au cours du temps et d'autre part, les formes modales dépendent de l'amplitude des vibrations.

Historiquement, la prise en compte des aspects non linéaires a débuté au 19^{ème} siècle en mécanique céleste. Ces travaux ont servi de base d'inspiration à Poincaré, Lindstedt, Hill et Liapunov pour l'introduction à l'analyse des systèmes non linéaires, et ont été ensuite prolongés en URSS et au Japon avec Krylov, Bogoliubov et Hayashi (*Nonlinear oscillations in physical systems*) [5].

Des recherches, dans l'analyse modale non linéaire, ont été menées afin d'étendre les notions de modes aux cas non linéaires à partir des idées inspirées du cas linéaire, pour définir les concepts des modes normaux non linéaires (MNNs).

Le concept des MNNs a commencé avec les travaux de Lyapunov (1907) dont le théorème montre l'existence d'une famille de solutions périodiques (MNNs), synchronisées, au voisinage de points d'équilibre stables des systèmes conservatifs à plusieurs degrés de liberté. Ensuite, Rosenberg a été le premier à avoir formulé et développé une théorie des modes normaux non linéaires [5].

Il existe plusieurs approches de définitions des MNNs dans les littératures dont les plus utilisées sont : [5]

- Approche de Rosenberg.
- Approche de Shaw et Pierre.
- Approche des formes normales.

1.3.1 Approche de Rosenberg

Rosenberg utilise une approche géométrique et étudie les trajectoires dans l'espace de configuration au lieu d'employer des méthodes d'approximation analytique. On considère un système conservatif composé de n masses reliées par des ressorts non linéaires modélisé par l'équation (1.4).

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.4)$$

Où $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ est le vecteur de déplacement et $U(x)$ est l'énergie potentielle. Cette expression peut être obtenue après un éventuel changement de variable linéaire diagonalisant les termes d'inertie pour un système mécanique discret ramenant ainsi les masses à l'unité [2]. Les MNNs sont définis comme une vibration à l'unisson, c'est-à-dire les vibrations dans lesquelles toutes les masses atteignent leurs valeurs maximales au même instant et passent par leurs positions d'équilibre (zéros) au même instant (figure 1.2).

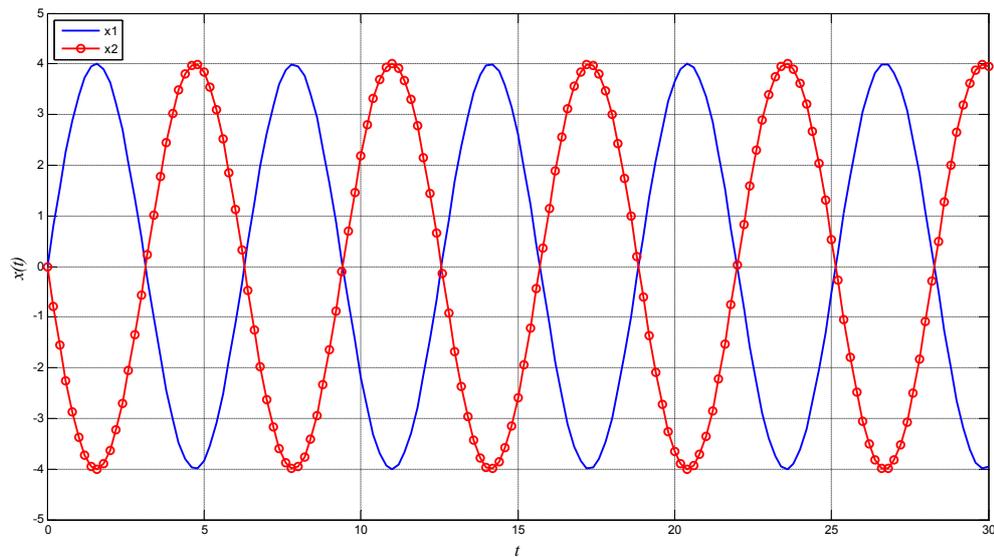


Figure 1.2 : Vibration à l'unisson pour un système à 2 ddl

Suivant cette définition, les mouvements des masses peuvent s'exprimer en fonction du mouvement de l'une d'entre elles. Rosenberg a également donné une définition des lignes modales qui sont, dans l'espace de configuration, des trajectoires des modes normaux. Dans le cas où le rapport entre les déplacements des masses est constant (équation (1.5)), les MNNs sont appelés modes semblables et les lignes modales sont des droites (figure 1.3). Ce type de modes ne dépend pas de l'amplitude de vibration.

$$\frac{x_i(t)}{x_j(t)} \equiv c_{ij} = \text{const} \quad (1.5)$$

c_{ij} : constantes modales

Dans le cas général, le rapport (1.5) n'est pas constant et les MNNs dans ce cas sont appelés modes non semblables. Les lignes modales sont des courbes tangentes, au point d'équilibre stable (point zéro), au mode linéaire associé représenté par une droite passant par l'origine (figure 1.3). A noter que l'approche de Rosenberg ne s'applique que sur les systèmes discrets, conservatifs, avec des forces internes non linéaires qui sont des fonctions polynômiales impaires des composantes des déplacements. [2].

La fonction de l'énergie potentielle $U(x)$ se traduit par des lignes modales symétriques par rapport à l'origine.

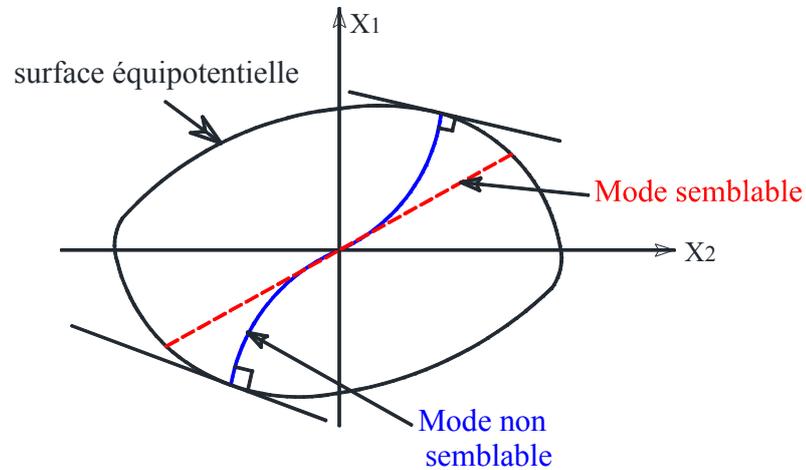


Figure 1.3 : Représentation des MNNs dans l'espace de configuration d'un système à 2 degrés de liberté

La surface équipotentielle du système autonome est définie par :

$$U(x_1, \dots, x_n) + h' = 0 \quad (1.6)$$

où $U(x_1, \dots, x_n)$ est l'énergie potentielle et h' est l'énergie totale du système autonome. Cette surface est régulière et délimite un volume dans l'espace qui contient l'origine et toutes les trajectoires des modes normaux du système. L'énergie cinétique s'annule sur cette surface parce que l'énergie potentielle est maximale et est égale à h' . [2]

1.3.2 Approche de Shaw et Pierre [34]

Shaw et Pierre ont étudié l'invariance de l'espace bi-dimensionnel constitué par l'espace des déplacements et celui des vitesses. Pour des conditions initiales se trouvant sur une surface invariante d'un mode, les réponses du système restent sur cette surface à tout instant. Pour un système linéaire, cette surface est un plan (figure 1.4). A partir des résultats obtenus pour les systèmes linéaires, les auteurs ont proposé une nouvelle définition de MNNs pour des systèmes non linéaires discrets et continus. Dans leur approche, un mode est choisi comme mode maître.

Les mouvements et les vitesses de tous les autres degrés de libertés (ddl), appelés esclaves s'expriment en fonction du couple déplacement-vitesse du mode maître. Les surfaces invariantes dans le cas non linéaire sont tangentes, au point zéro, au plan invariant du mode linéaire associé. Pour calculer les modes non linéaires, des variables esclaves sont approchées par des séries polynômiales en termes de variables du mode maître. [8].

Il est important de noter que les systèmes étudiés sont des systèmes conservatifs ou amortis en considérant un amortissement proportionnel. Les modes normaux de ces systèmes sont réels. Dans le cas de la présence d'amortissement non-proportionnel, les valeurs propres ainsi que les modes propres sont complexes.

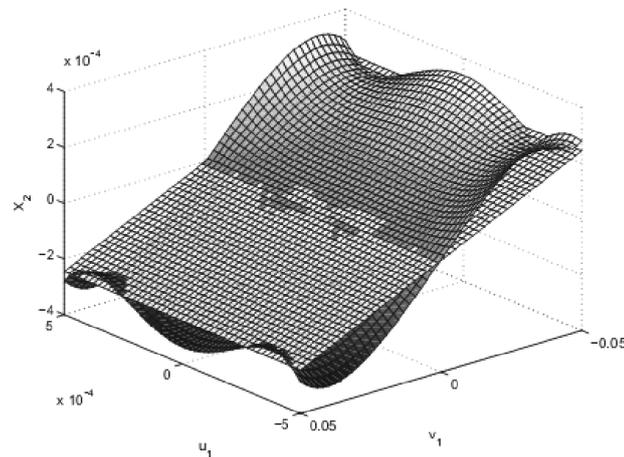


Figure 1.4 : Présentation des modes dans l'espace des phases
surface plane: linéaire; surface curviligne: non linéaire

1.3.3 Approche des formes normales

Cette approche consiste à faire de changements de variables de façon à éliminer le maximum de termes non linéaires. Par exemple, afin d'éliminer tous les termes quadratiques, les équations de la dynamique sont tronquées jusqu'à l'ordre 2 et les solutions asymptotiques sont donc recherchées sous forme de séries polynômiales d'ordre 2. La forme simplifiée de l'équation de la dynamique est appelée forme normale. L'analyse de cette forme normale devient simple car cette dernière ne comprend que des termes non linéaires importants pour la

dynamique. Cette méthode est fondée sur la théorie de la forme normale de Poincaré et Poincaré-Dulac. Les coordonnées obtenues après le changement de variables sont appelées coordonnées normales. [5]

1.4. Limites entre système linéaire et non linéaire

Les systèmes linéaires peuvent être modélisés par un ensemble d'équations différentielles linéaires de second ordre. La solution générale de ces équations est donnée par la superposition de la solution des équations découplées. Cette modélisation (modèle linéaire) peut être traitée par l'analyse modale. Cependant, les systèmes réels sont généralement non linéaires, et l'utilisation de modèles linéaires est toujours une source de rapprochement. Cette dernière est souvent justifiée par certaines considérations. [9]

Le comportement des structures peut être modélisé par un modèle linéaire si :

1. Les contraintes et les déformations sont suffisamment faibles pour ne pas dépasser la limite de l'élasticité du matériau, et les déplacements sont suffisamment petits pour ne pas introduire des non-linéarités géométriques.
2. le matériau employé possède les mêmes caractéristiques mécaniques dans toutes les directions, c'est-à-dire un matériau isotrope.
3. Le système ne doit pas comprendre un élément non linéaire qui influe sur le comportement du système, tel qu'une liaison qui présente un jeu, un frottement de Coulomb, ou un contact non permanent.

La linéarisation des équations du mouvement permet d'obtenir des informations intéressantes sur le comportement des systèmes non linéaires.

Par contre, lorsque les conditions précédentes ne sont pas vérifiées, le modèle issu sera non linéaire et doit être analysé en tant que tel.

1.5. Types de non linéarités

Les systèmes vibratoires non linéaires peuvent être classés en trois types de non linéarité. On distingue [9]:

1.5.1- Non linéarité géométrique (grand déplacement)

- Les mécanismes en grands déplacements sont composés de solides rigides ou déformables reliés entre eux par des articulations. La non linéarité provient des grands déplacements des composantes les uns par rapport aux autres du système. Dans ce cas, la relation entre les efforts de liaison et les déplacements est non linéaire. L'oscillateur de Duffing en est un exemple.
- Les structures minces en grands déplacements constituent également des systèmes non linéaires.

1.5.2 Non linéarité matérielle (loi de comportement non linéaire) ce type de non linéarité se traduit essentiellement par :

- Les matériaux élasto-plastiques : où le matériau travaille au-delà de sa limite élastique, présente un comportement non linéaire.
- Les matériaux élastiques non linéaires : la relation contrainte-déformation n'est pas linéaire, elle se traduit par un module de Young E variable comme par exemple dans les élastomères (caoutchouc).
- Les alliages à mémoire de forme ayant la capacité de garder en mémoire une forme initiale et d'y retourner même après une déformation. Dans ce type de matériaux, la relation contraintes-déformations est non linéaire.

1.5.3 Non linéarité de contact (interface) parmi les exemples, on cite :

- Contact de Hertz : il est gouverné par la théorie de Hertz. Dans ce cas, le contact est réduit et la relation entre le déplacement et la force est non linéaire (à titre d'exemple, pour une bille sur une surface plane, on a $P = K\delta^{3/2}$, où P est la force, δ le déplacement et K une constante). Les exemples les plus répandus sont : roulements et engrenages.
- Frottement sec ou amortissement de Coulomb.
- Non linéarité de choc tel qu'un choc modélisé par la distribution de Dirac.

1.6. Travaux effectués dans l'analyse des systèmes non linéaires

La naissance de la physique non linéaire date au 17^{ème} siècle. En 1687, et à partir des lois de Kepler, Newton découvre la loi d'attraction universelle en mécanique céleste. Par la suite, plusieurs travaux suivirent dans le domaine de la vibration non linéaire. Parmi les auteurs qui ont travaillé sur ce sujet, on citera H. Poincaré qui fut le fondateur de la théorie du chaos et de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles en 1881. A partir des années 1892-1893, A. Liapunov résout les problèmes de la stabilité du mouvement, et en 1903, G. Duffing utilise un modèle différentiel non linéaire (appelé, plus tard, le modèle de Duffing), dans le but de modéliser des vibrations forcées d'une machine industrielle, ce modèle comprend un terme non linéaire en $k_n x^3$ (équation 1.7) : [55]

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_n x^3 = f \cos \omega t \quad (1.7)$$

Le modèle de Duffing est largement utilisé. Plusieurs travaux ont été réalisés depuis 1951 à ce jour (figure 1.5) où des recherches ont été réalisées par les mécaniciens (figure 1.6). Par la suite, en 1910, A. Lindstedt a notamment apporté une contribution essentielle à la théorie des perturbations en mécanique céleste. [10]

En 1966, Rosenberg propose une approche originale pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté non dissipatifs, en introduisant la notion de mode propre non linéaire. La maîtrise dans le traitement des équations différentielles conduisit à une amélioration dans l'analyse des systèmes à plusieurs degrés de liberté. En 1970, Bennett et Easley ont montré les limites de l'approche de Rosenberg. Par la suite, Nayfeh et Mook en 1979 traitèrent de manière générale des oscillations non linéaires et tous les phénomènes engendrés : résonance interne, bifurcation.

Ces travaux ont été élargis par S.W. Shaw et C. Pierre (1990) (invariants de l'espace des phases) pour l'application de l'analyse modale aux systèmes dissipatifs. Plusieurs auteurs ont publié dans le domaine de la vibration non

linéaire. On pourra citer les travaux de C. Gibert (2001) [2], C. Touzé (2003) [10], F. Pérignon 2004 [5], O. THOMAS (1998- 2012). [9]

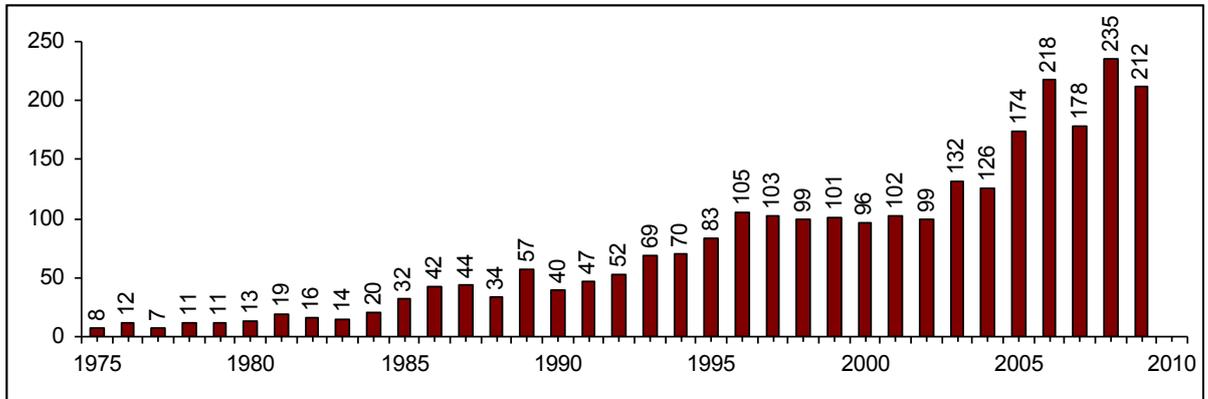


Figure 1.5 : Nombre de publications utilisant le modèle de Duffing.

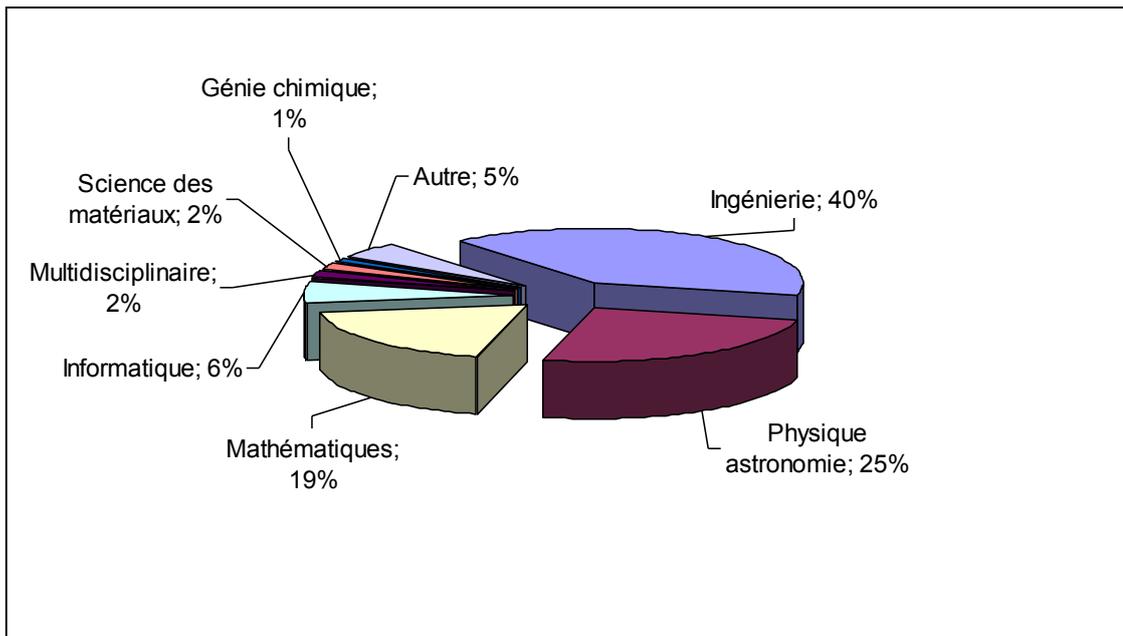


Figure 1.6 : Pourcentage de publications qui utilisent le modèle de Duffing.

La figure 1.5 permet de constater que dans les années 1970, seules quelques publications apparaissent par an. Ces travaux concernent principalement la recherche de la solution approchée de l'oscillateur. Ensuite, ce nombre a considérablement augmenté, car les chercheurs ont commencé à reconnaître l'équation Duffing comme un modèle pour les différents systèmes.

CHAPITRE 2

ANALYSE MODALE

2.1. Introduction

L'analyse modale est un outil permettant d'étudier le comportement dynamique d'une structure, basée sur les caractéristiques propres de cette dernière à savoir : [11]

- les fréquences propres,
- les déformées modales (modes),
- les facteurs d'amortissement.

Deux approches principales sont envisagées pour mener une analyse modale basée sur l'étude des modes de vibration :

- une approche analytique : Analyse Modale Théorique (A.M.T)
- une approche expérimentale : Analyse Modale Expérimentale (A.M.E).

L'approche analytique est basée sur la construction de modèles mathématiques pour simuler et prédire le comportement des structures. Ces modèles sont souvent établis par la méthode des Eléments Finis (E.F).

L'approche expérimentale est basée sur des techniques de mesure, conduisant à des modèles physiques qui représentent le comportement réel des systèmes mécaniques (modèle modal).

Dans la plupart des cas, la corrélation entre les deux ensembles d'approches n'est pas satisfaisante et une confrontation des résultats issus des modèles physiques et mathématiques devient nécessaire. On parle alors de recalage de modèle qui consiste à corriger le modèle numérique (éléments finis) sur la base des données expérimentales.

2.2. Analyse modale théorique

2.2.1. Présentation.

L'analyse modale théorique nécessite une modélisation de la structure. Cette dernière est discrétisée et permet de construire le modèle mathématique. Ce modèle est composé d'un système d'équations différentielles dont la solution représente le comportement de la structure.

Les techniques de résolution de ces modèles aboutissent en général à un système d'équations algébriques de taille plus ou moins grande suivant l'importance et la complexité de la structure.

Actuellement, la méthode des éléments finis est très utilisée dans l'analyse dynamique des structures. Le principe est de subdiviser la structure en un ensemble d'éléments de formes simples et de dimensions finies (éléments poutres, plaques, etc...).[8]

Le nombre d'éléments dépend de la complexité du système modélisé et peut atteindre des milliers d'unités comme c'est le cas des structures d'avion, de satellites, d'automobiles etc...

Les équations du mouvement sont exploitées pour former un système d'équations matricielles où les répartitions des masses, des rigidités et éventuellement de l'amortissement sont représentées respectivement par des matrices notées $[M]$, $[K]$ et $[C]$.

Les matrices $[M]$ et $[K]$ sont construites sur la base de considérations géométriques et physiques de la structure. La matrice $[C]$, dans le cas où elle est prise en compte, est généralement établie à partir d'hypothèses formulées sur l'amortissement (équivalence). L'équation générale régissant le mouvement d'un système amorti soumis à des sollicitations extérieures s'écrit sous la forme suivante [1]:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F(t)\} \quad (2.1)$$

2.2.2 Analyse des systèmes libres non amortis.

Les modes sont définis comme des solutions périodiques du problème libre conservatif données par l'équation:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (2.2)$$

Les solutions de l'équation (2.2) peuvent être écrites sous forme :

$$X_k(t) = \Psi_k(a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) = \Psi_k q_k(t) \quad (2.3)$$

où ω_k (fréquences propres) et Ψ_k (modes ou vecteurs propres) sont des constantes indépendantes du temps, obtenues par la résolution du problème aux valeurs propres. En substituant l'expression (2.3) dans l'équation (2.2), on obtient :

$$([K] - \omega_k^2 [M])\{\Psi_k\} = \{0\} \quad (2.4)$$

où k est un entier variant de 1 à n , n étant le nombre de degrés de liberté du système.

L'équation caractéristique est donnée par :

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (2.5)$$

La résolution de l'équation caractéristique (2.5) permet de déterminer les valeurs propres ω_k^2 , les vecteurs propres $\{\Psi_k\}$ sont déterminés pour chaque valeur de ω_k^2 en utilisant l'équation (2.4). Les modes définis ci-dessus, $\{\Psi_k\}$, constituent une base propre. La relation permettant le passage à l'espace propre est donnée par :

$$\{X(t)\} = [\Psi]\{q(t)\} \quad (2.5)$$

En projetant l'équation (2.2) dans une base propre où on substitue l'expression (2.5) dans (2.2), on aboutit à un système d'équations différentielles découplées de n oscillateurs à un degré de liberté de la forme :

$$\begin{cases} \{\ddot{q}\} + [\lambda]\{q\} = 0 & \text{où } [\lambda] = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2) \quad \{q\} = \{q_1 \dots q_n\} \\ + \text{Conditions initiales} \end{cases} \quad (2.6)$$

les solutions de (2.6) sont de la forme :

$$q_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t \quad (2.7)$$

Les constantes a_k et b_k étant déterminées par les conditions initiales, on peut ainsi reconstruire $X(t)$ en utilisant l'équation (2.5). Souvent, en pratique, pour les systèmes continus, quelques modes suffisent pour décrire correctement la réponse du système, on ne retient donc qu'un nombre limité de termes dans la somme (2.5) (réduction de modèle), ce qui permet de réduire fortement sa dimension et donc de faciliter sa résolution. Cette technique est largement utilisée pour discrétiser les systèmes continus linéaires ou non linéaire [13].

2.2.3 Analyse des systèmes libres amortis.

Considérons un amortissement visqueux et un régime autonome, ($\{F(t)\} = 0$), l'équation (2.1) devient :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (2.8)$$

Pour établir le problème aux valeurs propres, on suppose des solutions de type $\{X\} = \{\Psi\}e^{\lambda t}$, d'où l'équation (2.8) devient :

$$\left(\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K] \right) \{\Psi\} = \{0\} \quad (2.9)$$

Les caractéristiques modales (Ψ et λ) de la structure modélisée sont reliées aux solutions propres de l'équation (2.8). En général ces solutions sont complexes en présence de termes d'amortissement $[C]$.

L'équation caractéristique est donné par :

$$\det(\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]) = 0 \quad (2.10)$$

La résolution de l'équation caractéristique (2.10), permet de déterminer les fréquences propres et l'amortissement modal.

Les déformées modales, $\{\Psi\}$, sont représentées par les vecteurs propres associés aux valeurs propres calculées à partir de l'équation (2.10). Les modèles éléments finis se réduisent souvent aux seules matrices de masse $[M]$ et de raideur $[K]$ en raison de la complexité mathématique qui caractérise l'amortissement ; dans ce cas les modèles sont conservatifs et les solutions propres sont réelles (fréquences et modes propres réels en l'absence d'amortissement).

2.2.4 Analyse des systèmes forcés amortis

Soit le système forcé non conservatif suivant :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F(t)\} \quad (2.11)$$

La réponse d'un tel système est la somme d'une réponse transitoire et d'une solution particulière. La solution transitoire, fonction des conditions initiales, est obtenue en régime libre ($F(t) = 0$). La solution particulière correspondant au régime établi, est indépendante des conditions initiales. Dans ce qui suit, on va étudier le régime permanent harmonique, c'est à dire celui obtenu pour une force $F(t) = F \cos \Omega t$. On utilise l'expression (2.5) qui conduit au système découplé [6]:

$$\{\ddot{q}\} + [\xi]\{\dot{q}\} + [\lambda]\{q\} = [\Psi]^T \{F(t)\} \quad (2.12)$$

où $[\Psi]$ est matrice des modes propres $[\xi]$ c'est une matrice diagonale.

La solution de l'équation (2.12) est donnée par [14] :

$$q_k(t) = a_k \cos(\Omega t + \varphi_k) \quad (2.13)$$

A noter que, dans le domaine linéaire, une excitation harmonique conduit à une réponse harmonique de même pulsation, ce qui n'est pas nécessairement le cas en vibration non linéaire.

Pour calculer a_k et φ_k on substitue l'expression (2.13) dans (2.12), on obtient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k = \frac{\sum_j \{\Psi_{kj}\}^T F_j}{\sqrt{(\omega_k^2 - \Omega^2) + (\xi_k \Omega)^2}} \\ \tan \varphi_k = \frac{\xi_k \Omega}{\Omega^2 - \omega_k^2} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Où $\{\bar{F}\} = [\Psi]^T \{F\}$ et $\gamma = \frac{c}{c_c}$ $\omega_k = \sqrt{\frac{k_k}{m_k}}$ avec m_k et k_k sont respectivement la masse modale et la rigidité modale.

La réponse $X(t)$ est donnée par la superposition des réponses modales (2.13) en utilisant l'expression (2.3). Si $\Omega = \omega_k$ et en l'absence d'amortissement, a_k tend vers l'infini, et on retrouve le phénomène de résonance autour du mode linéaire correspondant.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le problème aux valeurs propres dont les plus utilisées sont :

- Méthode d'itération inverse, celle ci est utilisée pour sa simplicité en terme algorithmique.
- Méthode du sous-espace de type Ritz, qu'est une forme spéciale de la méthode de Rayleigh-Ritz. Elle est très efficace dans le cas où le nombre de valeurs propres et de vecteurs propres recherchés est fini.
- Méthode de Lanczos et méthode de Householder, utilisées dans le cas d'un nombre important de valeurs propres et vecteurs propres [1].

2.3. Analyse modale expérimentale

2.3.1. Présentation

L'analyse modale expérimentale est un ensemble de techniques d'investigation destinées à établir et (ou) à améliorer la connaissance du modèle dynamique des structures réelles. D'une manière générale, cette investigation consiste à effectuer des essais sur la structure ou sur son prototype et permet l'identification directe des caractéristiques vibratoires des systèmes.

D'un point de vue technique, les méthodes de l'A.M.E peuvent être vues comme étant des "Approches Systèmes" ou " Boites Noires" formulées à partir de la mesure des "Entrées-Sorties" desquelles sont déduites les informations concernant les propriétés intrinsèques caractérisant le comportement dynamique de la structure. Les essais consistent à exciter la structure au moyen de signaux appropriés et à mesurer les réponses du système. Celles-ci peuvent être représentées par des déplacements, des vitesses ou des accélérations (figure 2.1).

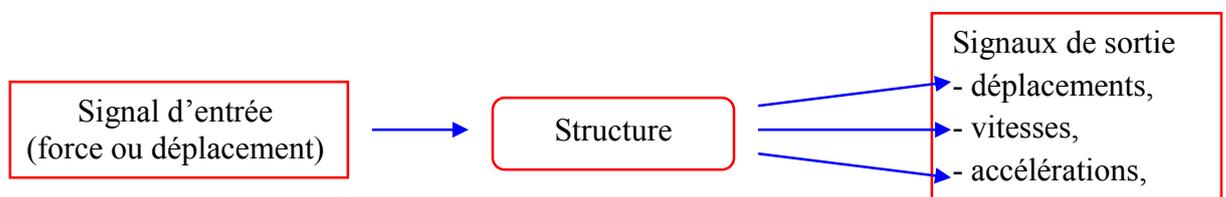


Figure 2.1 : Structure excitée. [8]

Les deux signaux (force-réponse) conduisent à la détermination par couple de points d'excitation et de réponse d'une fonction particulière appelée fonction de transfert (ou fonction de réponse fréquentielle Frf). Dans la plupart des techniques, la structure est excitée en un seul point et les réponses sont mesurées en plusieurs points. La structure est excitée par une force de direction et d'intensité connue ; on mesure ainsi les rapports Sortie/Entrée (réponse/force). La qualité de l'analyse dépend du nombre de points de mesure (finesse du maillage).

Les fonctions de transfert sont en général de type complexe et forment une matrice, appelée matrice de transfert, contenant les informations nécessaires sur

les caractéristiques modales expérimentales identifiées par des algorithmes adéquats (fréquences propres, facteurs d'amortissement modaux et déformées modales). Les procédures d'identification sont classées en deux familles suivant que les réponses sont observées dans le domaine *fréquentiel* ou dans le domaine *temporel*. Dans chaque domaine, les techniques se distinguent par l'approche et les hypothèses utilisées pour déterminer les paramètres modaux. [8]

2.3.2. Application de l'analyse modale expérimentale

L'analyse modale expérimentale est une discipline permettant d'offrir des solutions rapides et efficaces aux problèmes réels d'ingénierie de la vie. Les applications ne sont pas restreintes aux seules structures mécaniques mais touchent d'autres secteurs comme la biomécanique [15] Avec le développement de la technologie informatique moderne, l'analyse modale expérimentale est devenue le principal outil pour résoudre des problèmes complexes de vibration des structures. Pour une structure d'ingénierie existant, elle fournit des informations essentielles sur le comportement dynamique, permettant ainsi des solutions intelligentes aux problèmes de vibration de la structure.

Pour la conception du produit, l'introduction de l'analyse modale apporte un changement fondamental de la conception statique à une conception statique et dynamique combinée. L'analyse du modèle informatique d'un produit nous permet d'identifier les problèmes potentiels de la dynamique de structure et de déterminer des solutions de conception possibles. Ainsi, la fiabilité et la sécurité du produit manufacturé peuvent être mieux assurées.

L'application de l'analyse modale ne se limite pas à une discipline d'ingénierie spécifique, mais elle touche d'autres domaines tels que : l'aérospatial, l'acoustique, la mécanique, le génie civil, la construction navale, l'exploitation minière, la fabrication, les centrales nucléaires, le transport et les systèmes d'armes [16]. Les laboratoires et les centres de recherche s'appuient, également beaucoup sur l'analyse modale pour développer de nouvelles techniques dans le domaine.

2.4. Validation des modèles analytiques

L'une des plus importantes applications de l'analyse modale est la vérification, la correction et la validation des modèles, essentiellement numériques.

Ces opérations s'inscrivent dans le cadre de la confrontation AME-AMT dont il a été question plus haut. En effet, les modèles numériques (modèles éléments finis) sont utilisés pour simuler et prédire le comportement des structures réelles.

Dans tels modèles, et pour diverses raisons, les erreurs sur la modélisation (en particulier sur les hypothèses), ne reflètent pas toujours correctement le comportement réel voulu. L'ajustement de ces modèles à partir des résultats de mesures est donc menacée vu le coût élevé de l'exploitation (figure 2.2). Une fois validés, les modèles numériques sont exploités dans de nombreuses opérations notamment:

- la prédiction des réponses de la structure en présence d'un champ d'excitations extérieures donné (problème de dimensionnement, rupture, fatigue, etc.),
- la prédiction des performances et des limites de sécurité,
- la prédiction des instabilités en fonction des variables de conception et des paramètres de fonctionnement,
- l'optimisation de la conception en procédant à des modifications structurales et la ré-analyse des structures modifiées.

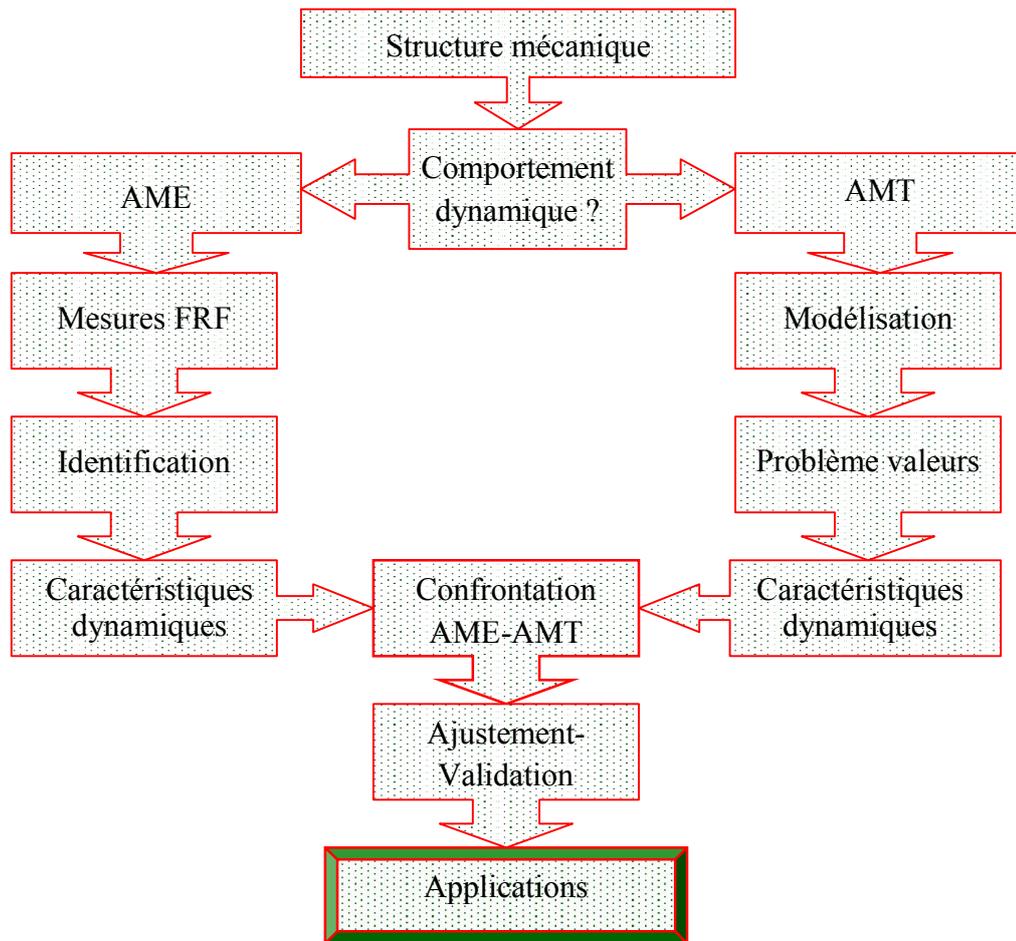


Figure 2.2 : Organisation schématique d'une confrontation des analyses modales théorique et expérimentale [8]

2.5. Introduction à l'analyse modale non linéaire

En pratique, la plupart des structures se caractérisent par un comportement plus ou moins non linéaire. La non-linéarité dépend de divers facteurs: conditions aux limites, propriétés matérielles, types et niveaux d'excitation, conditions de chargement etc. Ces non linéarités peuvent apparaître sous forme globale, comme celles concernant les caractéristiques matérielles et géométriques, ou sous forme locale comme celles reliées aux joints et interfaces entre structures (rigidité,_amortissement..).

La grande diversité des origines des effets de non linéarité limite considérablement le nombre de méthodes applicables dans tous les cas. Comme pour les structures linéaires, les méthodes d'identification sont classées en

méthodes fréquentielles (Transformées d'Hilbert, Séries de Volterra, Fonction de cohérence, Fonction de réponse en fréquence (FRF), méthode de rigidité complexe etc.) et en méthodes temporelles (méthode NARMAX, séries de Volterra, séries de Wiener, etc.). [8]

2.6. Conclusion

La connaissance des modes et fréquences propres d'un système linéaire :

- donne une ossature pour la réponse forcée (pic de résonance autour des modes),
- permet de découpler le système de départ, facilitant la résolution du problème (analyse modale), en régime libre ou forcé,
- permet la construction de modèles réduits.

De plus, ce calcul se résume à la résolution d'un simple problème aux valeurs propres, conduisant à des modes et fréquences propres constants, indépendants de l'amplitude des vibrations.

CHAPITRE 3

ANALYSE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

3.1. Introduction

Les systèmes vibratoires sont caractérisés par des paramètres modaux : fréquences propres et modes propres. Pour les systèmes linéaires, ces paramètres sont constants, les modes sont orthogonaux et le calcul de la réponse est basé sur le principe de la superposition. Par contre, dans le cas des systèmes non linéaires, les paramètres modaux ne sont pas constants et dépendent des amplitudes de vibration. Le principe de la superposition des solutions et de l'orthogonalité des modes ne sont pas applicable pour tout type de non linéarité évoqués dans le chapitre 1.

Dans ce qui suit et pour nos applications, seule la non linéarité de type géométrique sera examinée. Le calcul des paramètres modaux pour les systèmes non linéaires se fait par plusieurs méthodes approchées analytiques ou numériques. [17]

3.2. Non linéarités géométriques

La non linéarité géométrique est liée au grands déplacements du système, elle est rencontrée en pratique dans deux familles de systèmes :

3.2.1. Les mécanismes en grands déplacements

On regroupe dans cette famille tous les systèmes composés de solides rigides liés entre eux par des liaisons. Les non linéarités proviennent de grandes rotations des composants du système les uns par rapport aux autres, qui créent des relations non linéaires entre les efforts de liaison et les déplacements des solides [18]. L'exemple le plus simple est le pendule pesant. Dans ce cas, c'est la force de rappel (le poids) qui est non linéaire en fonction de l'angle d'inclinaison du pendule ($F = mg \sin \theta$), terme responsable des non linéarités de l'équation du mouvement (équation (1.1)):

$$m\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

où on a noté F la force de rappel, m la masse du pendule, g l'accélération de la pesanteur et θ l'inclinaison du pendule par rapport à la verticale.

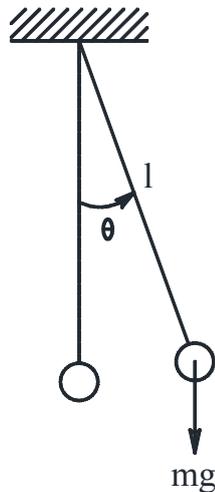


Figure 3.1 : Pendule

Il existe dans la littérature plusieurs formes de forces non linéaires dont les plus utilisés sont :

- Force de raideur polynomiale (essentiellement quadratique ou cubique) :

$$F(x, \dot{x}, t) = kx + k_p x^p + \dots \quad (3.1)$$

La non linéarité peut provenir du fait que les forces de rappel du système sont des fonctions polynomiales du déplacement, de degré 2 au moins. L'exemple le plus couramment étudié est l'oscillateur de Duffing, représenté par l'équation :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_n x^3 = F(t) \quad (3.2)$$

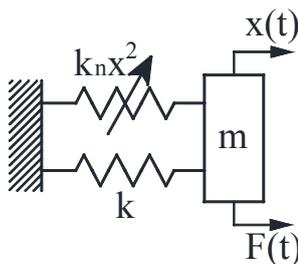


Figure 3.2 : Système à 1 degré de liberté de type Duffing

Où k_n peut être positif ou négatif [14] :

- Si $k_n > 0$, le système est dit rigidifiant, car pour des hauts niveaux d'excitation, la force de rappel est plus grande que pour un système de raideur linéaire.
- Si $k_n < 0$, le système est dit adoucissant, mais il faut noter que ce système n'a pas de sens physique, car l'adoucissement fait que le signe de la force de rappel change à partir d'un certain point. En pratique, le terme cubique est toujours accompagné de termes d'ordre supérieur avec des coefficients positifs.

On peut voir une représentation de la force de rappel en fonction du déplacement pour chacun de ces cas dans la figure 3.3 : [33]

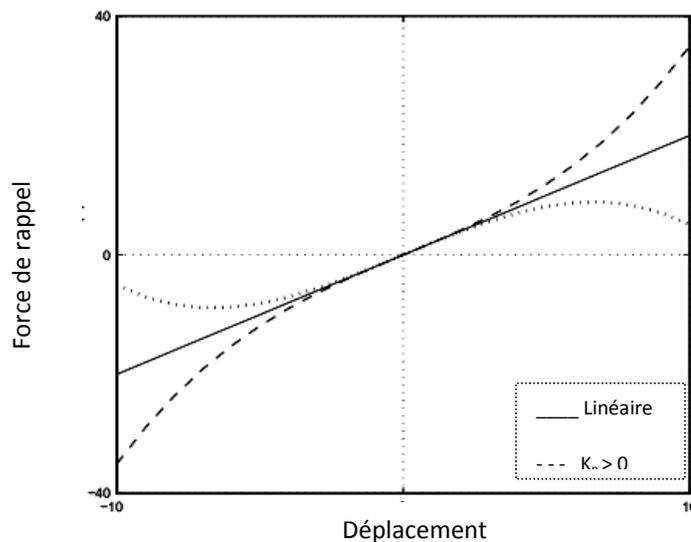


Figure 3.3 : Force de raideur de l'oscillateur de Duffing.

Cette équation à un degré de liberté est relativement simple ; elle permet d'étudier quelques phénomènes non linéaires ([19] et [20]).

- Force de raideur bilinéaire:

$$F(x) = \begin{cases} (k_1 + k_2)x, & \text{pour } x > x_0 \\ k_1x, & \text{pour } x < x_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

On rencontre ce genre de non linéarité lors de chocs, par exemple ressort à lames d'un camion.

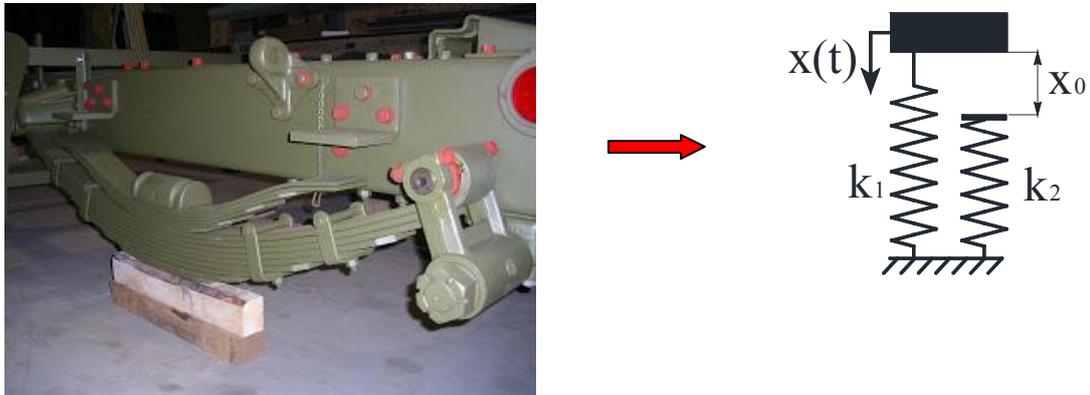


Figure 3.4 : ressort à lames d'un camion

- Force de raideur linéaire par morceaux : en cas de secousses, perte de contact, système à jeux...
- Amortissement non linéaire : C'est le cas par exemple de l'amortissement introduit par l'écoulement d'un fluide autour des crayons combustibles d'un réacteur à eau pressurisée ([21], [22]).

3.2.2. Les structures minces en grands déplacements

Dans ce cas, il s'agit de la même cause de non linéarité que pour les mécanismes : ce sont des rotations d'amplitude non négligeable des fibres déformables composant la structure qui créent des relations non linéaires entre les déplacements et les déformations des points de la structure. On associe en générale les non linéarités géométriques aux structures minces à cause de leur faible rigidité transversale, qui autorise des grands déplacements pour des efforts usuels modérés. [18]

3.3. Analyse modale des systèmes non linéaires

Un système vibratoire non linéaire est gouverné par une équation différentielle du second ordre équation (3.4)

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{F(X, \dot{X})\} \quad (3.4)$$

Le terme $\{F(X, \dot{X})\}$ regroupe les termes non linéaires. La solution exacte de cette équation est difficile à obtenir. Néanmoins il existe des méthodes approchées basées sur l'analyse modale classique pour calculer la réponse et les caractéristiques modales.

Ces méthodes peuvent être classées en quatre familles [17] à savoir :

1. méthodes de perturbations
2. méthodes type Galerkin équilibrage harmonique
3. méthodes géométriques
4. continuation des orbites périodiques

3.3.1 Méthodes de perturbations

Les méthodes de perturbations sont des méthodes analytiques approchées permettant le calcul de solutions périodiques pour des systèmes limités à une taille raisonnable [12]. Elles appliquent surtout aux systèmes ayant des non linéarités faibles. On distingue au sein de ces méthodes deux catégories [5] :

– Des méthodes valables pour des systèmes faiblement non linéaires. Les termes non linéaires sont proportionnels à un petit paramètre $\varepsilon \ll 1$ et l'équation de mouvement s'écrit sous la forme :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{\varepsilon F(X, \dot{X})\} \quad (3.5)$$

La solution du problème non linéaire $X(t)$ est cherchée sous la forme d'un développement en puissance croissante suivant le paramètre ε (équation 3.6). La réponse est alors considérée comme une perturbation de la solution du système linéaire associé (obtenue pour $\varepsilon=0$) :

$$X(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (3.6)$$

Parmi les méthodes appartenant à cette catégorie, on cite :

- Développement asymptotique simple,
- Méthode de Lindstedt-Poincaré,
- Les méthodes des échelles multiples,

Ces méthodes permettent de transformer les équations de mouvement à un système d'équations algébriques qui donne les variations de la phase et de l'amplitude, dont les points singuliers correspondent aux solutions en régime établi.

– Des méthodes valables pour des systèmes fortement non linéaires, ces méthodes nécessitent une hypothèse sur la forme de départ de la solution. Dans ce cas on cherche directement les solutions périodiques.

Les méthodes les plus connues pour traiter ce type de problème, sont :

- Méthode de la moyenne,
- Méthode de Rayleigh-Ritz,
- Méthode de l'équilibrage harmonique

3.3.1.1 Méthodes pour les systèmes faiblement non linéaires.

Ces méthodes consistent à rechercher la solution sous forme d'une série entière d'un petit paramètre ε (équation (3.6)), de substituer ces développements dans le problème initial (équation (3.5)), puis d'identifier à zéro les coefficients des ε^i et de résoudre consécutivement les systèmes obtenus.

• Développement asymptotique simple :

On recherche la solution $X(t)$ du système sous la forme d'une série d'un petit paramètre ε de l'équation (3.6), $x_0(t)$ étant la solution périodique du système non perturbé (pour $\varepsilon = 0$). Les développements sont effectués jusqu'à l'ordre auquel on souhaite obtenir la solution.

- Méthode de Lindstedt-Poincaré

Il s'agit ici d'une amélioration de la méthode précédente, où la dépendance de la fréquence vis à vis de l'amplitude n'est pas prise en compte. Pour y remédier, on recherche également la pulsation ω sous la forme suivante :

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots \quad (3.8)$$

Puis on procède de la manière suivante :

$$X(t, \varepsilon) = \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots, \quad \tau = \omega t \quad (3.9)$$

A.H. Nayfeh et S.A. Nayfeh proposent également une variante, nommée méthode de renormalisation, qui conduit aux mêmes résultats mais qui est généralement plus simple à mettre en œuvre [23].

- Méthode des échelles multiples

Cette méthode est largement utilisée par A.H. Nayfeh et D.T. Mook pour traiter de nombreux exemples [24].

Il s'agit toujours de développements asymptotiques mais cette fois de plusieurs variables (les échelles) : on introduit en effet T_0, T_1, T_2, \dots , tels que $T_i = \varepsilon^i t$, puis on cherche une solution :

$$X(t, \varepsilon) = \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (3.12)$$

Le nombre d'échelles varie en fonction de la précision souhaitée (une précision en $\mathcal{O}(\varepsilon^{i+1})$ est obtenue en allant jusqu'à l'échelle T_i).

A noter que, bien que plus lourdes en calculs que les précédentes, les échelles multiples permettent de traiter les systèmes non conservatifs.

3.3.1.2 Méthodes pour les systèmes fortement non linéaires

• Méthodes de la moyenne

Il existe plusieurs variantes de ces méthodes dont le principe général est ([13], [25]) :

Soit un système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{dx_i}{dt} = \varepsilon X_i(x_1, \dots, x_m, t), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13)$$

L'idée est de remplacer ce dernier par un système approché, toujours non linéaire mais plus facilement analysable, en effectuant une moyenne sur le temps :

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{T} \int_0^T X_i(x_1, \dots, x_m) = X_{0i}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.14)$$

En général on pose :

$$\begin{cases} x = a(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) \\ \dot{x} = -\omega a(t) \sin(\omega t + \varphi(t)) \end{cases} \quad (3.15)$$

ω est la pulsation propre, ce qui correspond aux solutions du système linéaire associé mais avec a et φ variables. Le report de cette écriture dans (3.4) conduit à un système du type (3.13) avec a et φ inconnues.

Des exemples d'application de cette méthode sont traités dans les références [13] et [26].

• Méthodes de Rayleigh-Ritz, Galerkin en temps

Pour ces méthodes, on suppose que les déplacements s'écrivent comme la somme de produits d'un coefficient et d'une fonction du temps donnée : [5]

$$x(t) = \sum_{k=1}^N X_k \psi_k(t) \quad (3.16)$$

On recherche ensuite les X_k qui minimisent le résidu obtenu par application du principe d'Hamilton ou des équations de Lagrange pour le système considéré. Le choix des ψ_k est l'étape déterminante de ces méthodes. On présente ci-après la méthode de l'équilibrage ou balance harmonique qui peut être vue comme un cas particulier de ces méthodes, pour des fonctions Ψ_k harmoniques.

• Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'équilibre harmonique est une des plus anciennes méthodes utilisées pour le traitement des systèmes non linéaires. Elle consiste à rechercher des solutions périodiques sous forme de séries de Fourier : [5]

$$x(t) = \sum_{k=0}^N (X_k \cos(k\omega t) + V_k \sin(k\omega t)) \quad (3.17)$$

Le report de ces développements dans (3.4) conduit, après identification à zéro des coefficients des sinus et cosinus, à l'écriture d'un système algébrique de taille $N+1$, avec pour inconnues les X_k et V_k . La difficulté réside dans le choix à priori du nombre de termes retenus dans le développement de départ.

• Méthode de linéarisation correspondant ([19],[24],[25])

Il s'agit ici de rechercher le meilleur système linéaire s'approchant de l'équation (3.4).

Par exemple, pour un système à un degré de liberté type :

$$m\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (3.18)$$

On écrit l'équation linéaire correspondant :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3.19)$$

puis on minimise l'erreur sur une période, $e = \int_0^T (kx - f(x))^2 dt$. Le calcul de la solution du système linéaire complété par la valeur de k donnée par la minimisation de l'erreur conduit à une solution approchée du système initial. [5]

Les méthodes de perturbation présentent l'avantage de conduire à des solutions analytiques et procurent également une meilleure compréhension des phénomènes. En effet, le déroulement des calculs, bien qu'assez lourd dès que l'ordre augmente, permet de bien évaluer l'importance des différents termes, ce qui facilite par exemple l'étude de phénomènes tels que les résonances internes.

En revanche, bien qu'elle nécessite une hypothèse à priori sur la forme des solutions et surtout le choix d'un ordre de troncature, la méthode de l'équilibre harmonique possède un domaine de validité bien plus important que les méthodes de perturbation pour lesquelles il est rapidement difficile d'aller à des ordres élevés et où les résultats sont limités à des cas faiblement non linéaires.

3.3.2 Méthodes de type Galerkin

Ce type de méthodes, qui bien que nécessitant une hypothèse sur la forme des solutions de départ, conduisent à des solutions valides sur un domaine plus important que les méthodes ci-dessus. Elle introduit une dépendance du mode naturel vis à vis de l'amplitude des vibrations, avec une généralisation de la méthode de Ritz, pour calculer la réponse libre de systèmes non linéaires à plusieurs degrés de liberté. [26]

3.3.3 Méthodes géométriques

Ces méthodes permettent de rechercher directement les sous-espaces invariants. Dans ce cadre, Shaw et Pierre [15] ont développé une méthode constructive pour le calcul des modes qui se rapproche de celle de Rosenberg mais utilise deux variables de référence, le déplacement et la vitesse. Le système d'équations différentielles du deuxième ordre représentant le mouvement doit donc être mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \ddot{v} + f_i(x, v), i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.20)$$

On suppose ensuite que chaque déplacement et vitesse est paramétrable en fonction d'une paire déplacement-vitesse de référence :

$$\dot{x}_i = X_i(x_{ref}, v_{ref}) \quad \dot{v}_i = Y_i(x_{ref}, v_{ref}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.21)$$

Le report de ce paramétrage dans les équations du mouvement (3.14) conduit à un système d'équations aux dérivées partielles de dimension $2n-2$, (ne dépendant plus explicitement du temps mais paramétré par x_{ref} et v_{ref}) de la forme :

$$R[X_i(x_{ref}, v_{ref}), Y_i(x_{ref}, v_{ref})] = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.22)$$

La résolution de ce système c'est à dire le calcul des (X_i, Y_i) , donne les équations des surfaces invariantes et donc des modes normaux non linéaires. La dynamique du mode i sur le sous-espace est obtenue en reportant les expressions de X_i et Y_i dans les équations du mouvement pour les degrés de liberté de référence, ce qui permet de calculer x_{ref} et v_{ref} puis de déduire les autres x_i et v_i en utilisant (3.21). La principale difficulté réside donc dans le calcul des (X_i, Y_i) . Shaw et Pierre (1993) proposent entre autres trois exemples d'application pour des systèmes à deux degrés de liberté : un cas linéaire non conservatif, puis non linéaire conservatif et enfin non linéaire non conservatif. Les surfaces invariantes sont calculées en utilisant des développements asymptotiques :

$$\begin{cases} X_i(u_{ref}, v_{ref}) = a_{1i}u_{ref} + a_{2i}v_{ref} + a_{3i}u_{ref}^2 + a_{4i}u_{ref}v_{ref} + \dots \\ X_i(u_{ref}, v_{ref}) = b_{1i}u_{ref} + b_{2i}v_{ref} + b_{3i}u_{ref}^2 + b_{4i}u_{ref}v_{ref} + \dots \end{cases} \quad (3.23)$$

Dans [27], la même méthode est utilisée pour des systèmes continus.

Le système de départ est discrétisé en utilisant une décomposition sur la base des modes propres linéaires, ce qui conduit à un système discret auquel on applique la démarche décrite plus haut.

Dans [30] C. Touzé utilise une approche forme normale pour le calcul des modes, qui s'apparente au formalisme complexe présenté par L. Jezequel et C.H. Lamarque [3]. Les modes non linéaires sont ici aussi considérés comme des invariants de l'espace des phases.

3.4 Continuation des orbites périodiques

La méthode Continuation des orbites périodiques permet de calcul de modes non linéaires basée sur le principe de continuation de solutions périodiques de l'équation du mouvement. Les solutions périodiques sont discrétisées en temps à l'aide d'un schéma conservatif, puis résolues de manière globale. La formulation du système d'équations de ces orbites ainsi que sa résolution par une méthode asymptotique numérique permettent la détermination des modes non linéaires bien au-delà des premières bifurcations. [31]

3.5 Synthèse des méthodes

Parmi les méthodes de calcul de la réponse présentées, nous avons choisi d'utiliser l'équilibrage harmonique, écrite et appliquée de façon à faciliter sa programmation.

Les méthodes de perturbation ont l'avantage de fournir des solutions analytiques, d'où une meilleure compréhension des phénomènes, mais au prix de calculs rapidement lourds et pour un domaine de validité assez limité à des cas faiblement non linéaires.

Les méthodes types Galerkin, équilibrage harmonique, nécessitent une hypothèse sur la forme des solutions de départ et conduisent à des solutions valides sur un domaine plus important que les méthodes de perturbation.

Concernant les méthodes de continuation des orbites périodiques, elles fournissent des résultats précis sur une gamme de fréquence proche de résonance.

L'équation de mouvement du système s'écrit :

$$m\ddot{x} + K_g x = 0 \quad (4.2a)$$

En utilisant l'expression (4.1), l'équation (4.2a) devient :

$$m\ddot{x} + kx + \underbrace{k_n x^3}_{\text{non linéaire}} = 0 \quad (4.2b)$$

L'équation (4.2b) est composée de trois types de forces à savoir :

- $m\ddot{x}$: force d'inertie
- kx : force de rappel linéaire
- $k_n x^3$: force de rappel non linéaire (d'ordre 3)

En utilisant la méthode de la balance harmonique (voir § 3.3.1.2), la solution de l'équation (4.2b) est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t) \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2 A \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

En substituant (4.3) dans (4.2b) on a :

$$-m\omega^2 A \cos(\omega t) + kA \cos(\omega t) + k_n A^3 \cos(\omega t)^3 = 0 \quad (4.4)$$

Le développement trigonométrique de $\cos^3(\omega t)$ donne :

$$\begin{aligned} \cos(\omega t)^3 &= \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right)^3 = \frac{\overbrace{e^{i3\omega t} + e^{-i3\omega t}}^{\cos(3\omega t)} + 3\overbrace{e^{i2\omega t} e^{-i\omega t}}^{e^{i\omega t}} + 3\overbrace{e^{i\omega t} e^{-i2\omega t}}^{e^{-i\omega t}}}{4 \times 2} \\ &= \frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t) \end{aligned}$$

L'expression (4.4) s'écrit :

$$-m\omega^2 A \cos(\omega t) + kA \cos(\omega t) + k_n A^3 \left(\frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t) \right) = 0 \quad (4.5)$$

On néglige le terme en $\cos(3\omega t)$, principale approximation réalisée, valide tant que x n'est pas trop grand, et on utilise l'équilibrage des termes en $\cos(\omega t)$, on a [39] :

$$-m\omega^2 A + kA + \frac{3}{4}k_n A^3 = 0 \quad (4.6)$$

d'où :

$$A \left(-m\omega^2 + k + \frac{3}{4}k_n A^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 0; \forall \omega & \text{solution triviale.} \\ A = \sqrt{\frac{4}{3k_n}(\omega^2 m - k)} \rightarrow A = A(\omega) \end{cases} \quad (4.7)$$

Donc
$$x(t) = A \cos(\omega t) = \sqrt{\frac{4}{3k_n}(\omega^2 m - k)} \cos(\omega t)$$

(4.8)

On obtient donc la fréquence d'oscillation (libre) en fonction de l'amplitude d'oscillations :

$$\omega = \sqrt{\frac{k + \frac{3}{4}k_n A^2}{m}} \quad (4.9)$$

Pour les petites déplacements, c'est-à-dire, A est suffisamment petit pour négliger le terme $\frac{3}{4}k_n A^2$ devant k , on a $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ qui représente la fréquence propre du système linéaire.

L'expression (4.9) représente la relation qui lie la pulsation propre ω à l'amplitude A des oscillations dans le cas non linéaire. Le système linéaire possède une seule fréquence propre pour différentes valeurs de A par contre le système non linéaire à plusieurs fréquences propres pour différentes valeurs de A (figure 4.2).

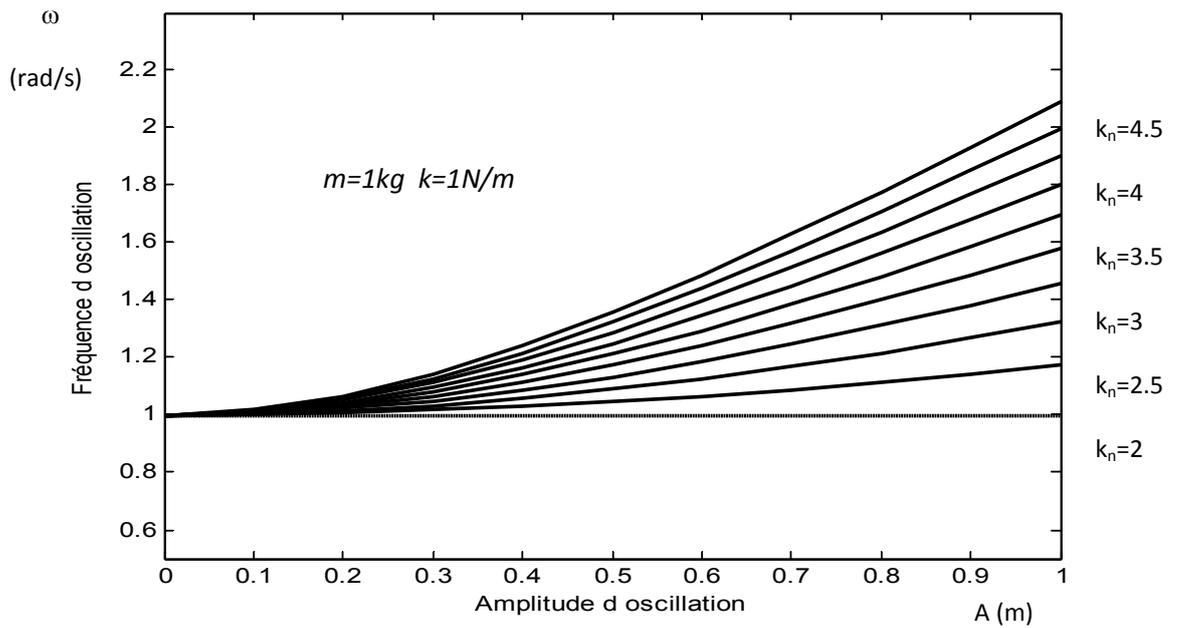


Figure 4.2 : Variation de la fréquence propre ω pour différentes valeurs l'amplitude A et de k_n .

La figure 4.2 montre :

- Pour $k_n = 0 \text{ N/m}^3$ la fréquence propre ne dépend pas de l'amplitude A (ω constante).
- Pour $k_n \neq 0 \text{ N/m}^3$ et A petit (petit déplacement $< 0.1\text{m}$) on peut considérer que la fréquence propre varie linéairement.
- Pour $k_n \neq 0 \text{ N/m}^3$ et A grand la fréquence propre dépend de l'amplitude A .

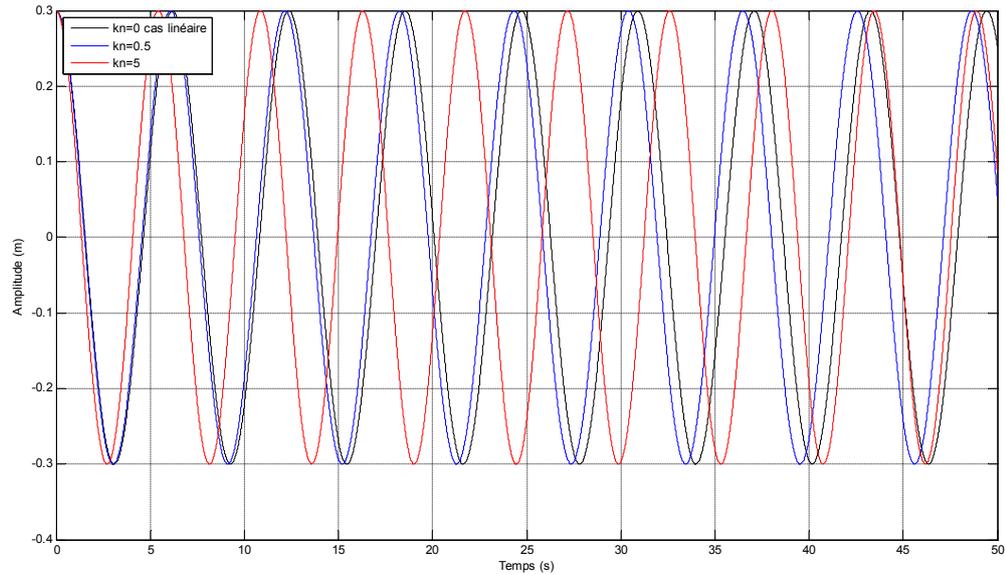


Figure 4.3 : La réponse de système autonome (4.2) pour $A=0.3m$ et différentes valeurs de k_n .

La figure (4.3) montre que la pulsation ω dépend de la raideur k_n , tel que :

- $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{6,125} = 1,03rd/s$
- $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{6,2} = 1,01rd/s$
- $\omega_3 = \frac{2\pi}{T_3} = \frac{2\pi}{5,44} = 1,15rd/s$

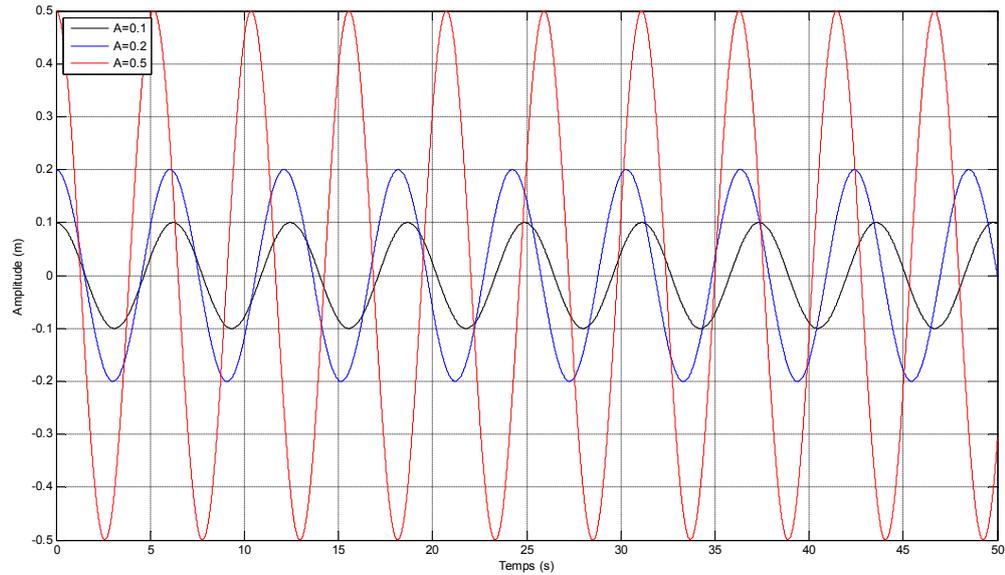


Figure 4.4 : La réponse de système autonome (4.2) pour $k_n=3\text{N/m}^3$ et différentes valeurs de A .

On remarque que la pulsation ω est proportionnelle à l'amplitude A , tel que

- $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{6,25} = 1,00\text{rd/s}$
- $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{6} = 1,05\text{rd/s}$
- $\omega_3 = \frac{2\pi}{T_3} = \frac{2\pi}{5,25} = 1,20\text{rd/s}$

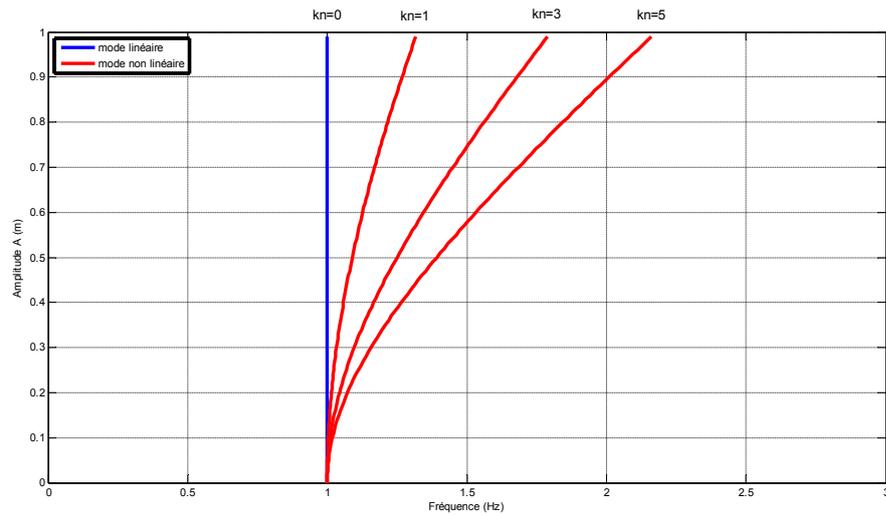
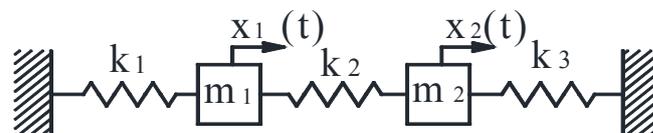


Figure 4.4 : Présentation des modes linéaire pour différentes valeurs de k_n .

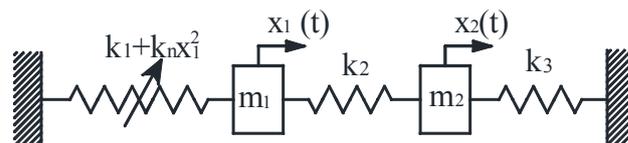
Le mode linéaire est une droite par contre les modes non linéaire sont des courbes qui démarrent de la même fréquence de mode linéaire et s'éloignent avec l'augmentation de l'amplitude A et le paramètre k_n .

4.3. Système à 2 degrés de liberté

On traite l'exemple de deux systèmes (masses-ressorts) à 2 degrés de liberté l'un étant linéaire (figure 4.5) et l'autre est non linéaire (figure 4.8), et on se propose de faire une comparaison entre ces deux systèmes.



a : cas linéaire



b : cas non linéaire
modèle de Duffing

Figure 4.5 : Système à 2 ddl

4.3.1 Système linéaire à 2 degrés de liberté

L'équation de mouvement du système de la figure 4.5a s'écrit :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_3 + k_2)x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Le système d'équation (4.11) s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Où bien sous forme compacte :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (4.13)$$

Pour le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres, on considère des solutions de type :

$$\{x\} = \{\phi\} e^{ojt} \quad (4.14)$$

On substitue l'expression (4.14) dans (4.13), on obtient :

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \{\phi\} = 0 \quad (4.15)$$

Pour résoudre le système (4.15), on calcule le déterminant $\det(-\omega^2 [M] + [K])$.

$$\det(-\omega^2 [M] + [K]) = 0 \quad (4.16)$$

$\det \neq 0$ solution triviale.

Par contre on s'intéresse aux solutions quand $\det = 0$ (problème aux valeurs propres).

Le développement de l'équation (4.16) nous donne l'équation caractéristique du système.

La résolution de l'équation (4.16) donne les pulsations propres ω_i et les vecteurs propres $\{\phi\}_i$ de système (mode de vibration).

Les solutions sont de la forme :

$$x_i(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i \cos(\sqrt{\omega_i} t) \quad (4.17)$$

Où ϕ_i : vecteurs propres représentant les modes propres et ω_i : pulsations propres.

Application : cas linéaire :

Pour la figure (4.2), on prend $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$; $k_1 = k_2 = k_3 = 1 \text{ N/m}$

l'équation de mouvement de ce système s'écrit :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2x_1 - x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + 2x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Le système d'équations différentielles (4.19) est couplé. Pour le découpler on projette dans la base modale du système formée par les vecteurs propres de celui-ci (ϕ_1, ϕ_2) .

L'équation $\det([K] - \omega^2[M]) = 0$ permet de trouver ω_1 et ω_2 , ce qui donne pour notre exemple :

$$\det(-\omega^2[M] + [K]) = 0 \Rightarrow \det\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad (4.20)$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\omega^2 + 2 & -1 \\ -1 & -\omega^2 + 2 \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow (-\omega^2 + 2)^2 - (-1)^2 = 0 \Rightarrow (-\omega^2 + 3)(-\omega^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^2 - 1 = 0 \\ \omega^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = 1 \\ \omega_2^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{1} = 1 \\ \omega_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Donc les fréquences propres sont données par :

$$\begin{cases} \omega_1 = 1 \text{ rd/s} \\ \omega_2 = \sqrt{3} \text{ rd/s} \end{cases} \quad (4.21)$$

Les vecteurs propres correspondant sont calculés à partir de l'équation :

$$([K] - \omega_i^2 [M])\{\phi_i\} = 0, i = 1, 2 \quad (4.22.a)$$

On trouve :

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \end{Bmatrix} \text{ et } \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{Bmatrix} \quad (4.22.b)$$

et

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Projection dans la base modale utilisant l'équation :

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{q(t)\} \quad (4.24.a)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} \quad (4.24.b)$$

En utilisant l'équation (4.23), l'expression (4.19) devient :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

L'expression précédente peut écrire sous la forme suivante :

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{q\} = \{0\} \quad (4.25)$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

L'expression (4.26) devient :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + 3q_2 = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

D'où nous avons deux équations différentielles découplées d'un système à un degré de liberté, dont la solution est :

$$\begin{cases} q_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) & \omega_1 = 1 \text{ rd/s} \\ q_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) & \omega_2 = \sqrt{3} \text{ rd/s} \end{cases} \quad (4.28)$$

Avec :

$$\begin{cases} \omega_1 = 1 \text{ rd/s} \\ \omega_2 = \sqrt{3} \text{ rd/s} \end{cases}$$

en utilisant l'expression (4.24) les solutions (4.28) peuvent être écrire dans la base physique comme suit :

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = -A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = -A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (4.29)$$

Les constantes A_1, A_2, φ_1 et φ_2 peuvent être déterminées à partir des les conditions initiales.

En utilisant :

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \text{ m} \\ x_2(0) = 0.1 \text{ m} \\ \dot{x}_1(0) = 0 \text{ m/s} \\ \dot{x}_2(0) = 0 \text{ m/s} \end{cases} \quad (4.30)$$

On trouve :

$$\begin{cases} x_1(0) = -A_1 \sin(\varphi_1) - A_2 \sin(\varphi_2) = 0 \\ x_2(0) = -A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2) = 0.1 \\ \dot{x}_1(0) = -A_1 \omega_1 \cos(\varphi_1) - A_2 \omega_2 \cos(\varphi_2) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = -A_1 \omega_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \omega_2 \cos(\varphi_2) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) \text{ donne } -2A_1 \omega_1 \cos(\varphi_1) = 0 \Rightarrow \cos(\varphi_1) \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) \text{ donne } -2A_2 \omega_2 \cos(\varphi_2) = 0 \Rightarrow \cos(\varphi_2) \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$x_1(0) + x_2(0) \text{ donne } -2A_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.1 \Rightarrow A_1 = -\frac{0.1}{2} = -0.05$$

$$x_1(0) - x_2(0) \text{ donne } -2A_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.1 \Rightarrow A_2 = \frac{0.1}{2} = 0.05$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \\ A_1 = -A_2 = 0.05 \end{cases} \quad (4.31)$$

Les solutions des équations (4.18) sont données analytiquement par les expressions (4.32) ou sous forme graphique (figures (4.6) et (4.7)) :

$$\begin{cases} x_1(t) = 0.05 \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + 0.05 \sin\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{2}\right) \\ x_2(t) = 0.05 \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - 0.05 \sin\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (4.32)$$

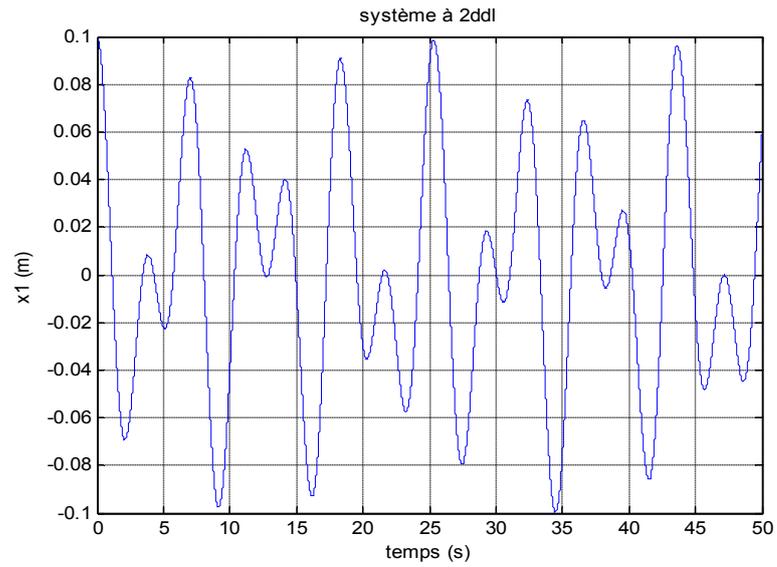


Figure 4.6 : Réponse de la masse m_1 du système (4.18) dans le cas linéaire.

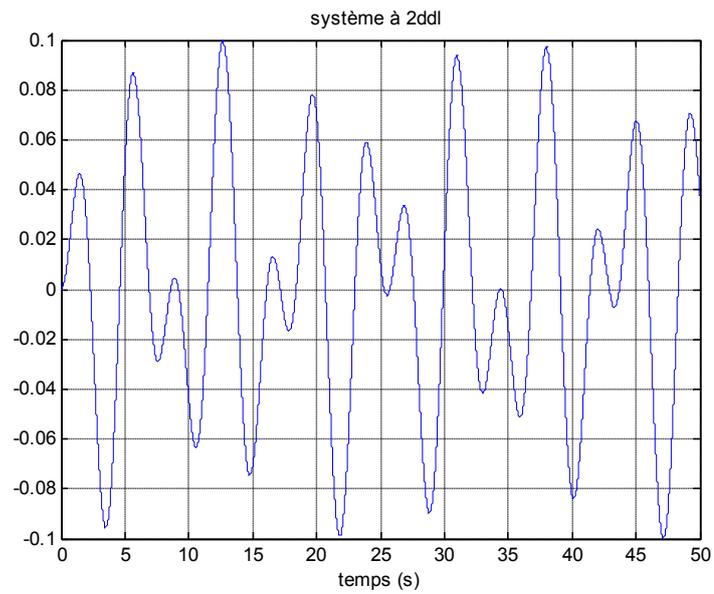


Figure 4.7 : Réponse de la masse m_2 du système (4.18) dans le cas linéaire.

4.3.2 Système non linéaire à 2 degrés de liberté

Pour le cas d'un système non linéaire figure 4.8, l'équation de mouvement s'écrit :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) + k_n x_1^3 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 x_2 = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

Sous forme matricielle, les équations (4.32) peuvent être écrites sous la forme :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} + [f_{nl}]\{X\} = 0 \quad (4.33)$$

$$\text{Avec : } M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}, f_{nl} = \begin{bmatrix} k_n x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour la résolution, on a utilisé deux types de méthodes analytique et numérique.

4.3.2.1 Méthode analytique (balance harmonique) :

Le mouvement du système (4.32) est oscillatoire, d'où les solutions peuvent être données par :

$$\begin{cases} x_1(t) = A \sin(\omega t) \\ x_2(t) = B \sin(\omega t) \end{cases} \quad (4.34)$$

On substitue l'expression (4.34) dans (4.32) on a :

$$\begin{cases} -m_1 \omega^2 A \sin(\omega t) + k_1 A \sin(\omega t) + k_2 (A - B) \sin(\omega t) + k_n A^3 \sin^3(\omega t) = 0 \\ -m_2 \omega^2 B \sin(\omega t) + (k_2 + k_3)(B - A) \sin(\omega t) = 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

On développe le terme $\sin^3(\omega t)$:

$$\begin{aligned} \sin^3(\omega t) &= \left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} \right)^3 = \frac{e^{i3\omega t} - e^{-i3\omega t} + 3\overbrace{e^{i2\omega t} e^{-i\omega t}}^{e^{i\omega t}} - 3\overbrace{e^{i\omega t} e^{-i2\omega t}}^{e^{-i\omega t}}}{8} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{i3\omega t} - e^{-i3\omega t}}{2} \right) - \frac{3}{4} \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) = \frac{1}{4} \sin(3\omega t) - \frac{3}{4} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\sin^3(\omega t) = \frac{1}{4} \sin(3\omega t) - \frac{3}{4} \sin(\omega t) \quad (4.36)$$

En remplaçant (4.36) dans (4.35) on a :

$$\begin{cases} -m_1\omega^2 A \sin(\omega t) + k_1 A \sin(\omega t) + k_2(A - B) \sin(\omega t) + \frac{k_n A^3}{4} \sin(3\omega t) - \frac{3k_3 A^3}{4} \sin(\omega t) = 0 \\ -m_2\omega^2 B \sin(\omega t) + (k_2 + k_3)(B - A) \sin(\omega t) = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

On néglige le terme en $\sin(3\omega t)$, principale approximation réalisée, valide tant que x n'est pas trop grands, et on équilibre des termes en $\sin(\omega t)$ on obtient [39] :

$$\begin{cases} -m_1\omega^2 A + k_1 A + k_2(A - B) - \frac{3k_n A^3}{4} = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

$$\begin{cases} -m_2\omega^2 B + (k_2 + k_3)(B - A) = 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

On a deux équations à 3 inconnus, on va écrire A et B en fonction de ω :

$$\text{De (4.39) on obtient : } A(k_2 + k_3) = (-m_2\omega^2 + k_2 + k_3)B \Rightarrow B = \frac{k_2 + k_3}{-m_2\omega^2 + k_2 + k_3} A$$

On remplace l'expression de A dans l'équation (4.38) on obtient :

$$-m_1\omega^2 A + (k_1 + k_2)A - k_2 \frac{k_2 + k_3}{-m_2\omega^2 + k_2 + k_3} A - \frac{3k_n A^3}{4} = 0$$

D'où :

$$A(\omega) = \pm \frac{2}{\sqrt{3k_n}} \sqrt{k_1 + k_2 - m_1\omega^2 - \frac{k_2(k_2 + k_3)}{-m_2\omega^2 + k_2 + k_3}} \quad (4.40)$$

on remplace l'expression de B dans l'expression de A :

$$B(\omega) = \pm \frac{2(k_2 + k_3)}{\sqrt{3k_n}(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3)} \sqrt{k_1 + k_2 - m_1\omega^2 - \frac{k_2(k_2 + k_3)}{-m_2\omega^2 + k_2 + k_3}} \quad (4.41)$$

Ainsi, on obtient les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{2}{\sqrt{3k_n}} \sqrt{k_1 + k_2 - m_1\omega^2 - \frac{k_2(k_2 + k_3)}{-m_2\omega^2 + k_2 + k_3}} \sin(\omega t) \\ x_2(t) = \frac{2(k_2 + k_3)}{\sqrt{3k_n}(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3)} \sqrt{k_1 + k_2 - m_1\omega^2 - \frac{k_2(k_2 + k_3)}{-m_2\omega^2 + k_2 + k_3}} \sin(\omega t) \end{cases} \quad (4.42)$$

4.3.2.2 Méthode numérique

4.3.2.1- Calcul des modes

L'étude des systèmes vibratoires non linéaires par l'analyse modale classique n'est pas possible, mais des études expérimentales ont montré l'existence des modes et des fréquences propres pour un système vibratoire (Rosenberg 1966).

Notre système non linéaire, figure 4.5.b, est non similaire, c'est-à-dire la relation entre x_1 et x_2 indépendamment du temps n'est pas linéaire tel qu'il a été présenté dans le chapitre 1 (§1.3.1). L'équation de mouvement de ce système est :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) + k_n x_1^3 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

La détermination des modes propres consiste à trouver une relation entre x_1 et x_2 , indépendamment du temps, dans l'espace de configuration (trajectoires du Rosenberg) ou bien trouver une relation entre x_1, x_2 et \dot{x}_1 dans l'espace des phases, dans notre travail, on a utilisé l'approche de Shaw-Pierre [15].

on fait le Changement de variable suivant pour diminuer le degré de différentiation de l'équation (4.43) :

$$\dot{x}_i = y_i \Rightarrow \dot{y}_i = \ddot{x}_i \quad i = 1, 2 \quad (4.44)$$

D'où l'équation (4.43) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -x_1 \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_1} x_2 - \frac{k_n}{m_1} x_1^3 \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -x_2 \frac{k_2 + k_3}{m_2} + \frac{k_2}{m_2} x_1 \end{cases} \quad (4.45)$$

On suppose que la solution est suffisamment continue et dérivable. De plus, on considère les variables x_1 et y_1 comme des variables "principales" et les autres

variables sont considérées comme des variables "secondaires", ces dernières sont utilisées pour développer x_2 et y_2 en série de Taylor d'où x_2 et y_2 peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_2 = a_1x_1 + a_2y_1 + a_3x_1^2 + a_4x_1y_1 + a_5y_1^2 + a_6x_1^3 + a_7x_1^2y_1 + a_8x_1y_1^2 + a_9y_1^3 \\ y_2 = b_1x_1 + b_2y_1 + b_3x_1^2 + b_4x_1y_1 + b_5y_1^2 + b_6x_1^3 + b_7x_1^2y_1 + b_8x_1y_1^2 + b_9y_1^3 \end{cases} \quad (4.46)$$

Remarque : on peut considérer x_2 et y_2 comme variables et x_1 et y_1 comme variables secondaires.

Les expressions (4.46) représentent les équations modales d'un système à 2 ddl.

Pour alléger l'écriture, on remplace x_1 par u et y_1 par v .

Les expressions (4.45) et (4.46) deviennent :

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -u \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_1} v - \frac{k_n}{m_1} u^3 \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -v \frac{k_2 + k_3}{m_2} + \frac{k_2}{m_2} u \end{cases} \quad (4.48)$$

$$\begin{cases} x_2 = a_1u + a_2v + a_3u^2 + a_4uv + a_5v^2 + a_6u^3 + a_7u^2v + a_8uv^2 + a_9v^3 \\ y_2 = b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2 + b_6u^3 + b_7u^2v + b_8uv^2 + b_9v^3 \end{cases} \quad (4.49)$$

La dérivation de l'expression (4.49) par rapport au temps, donne :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a_1\dot{u} + a_2\dot{v} + 2a_3u\dot{u} + a_4(\dot{u}v + u\dot{v}) + a_5v\dot{v} + 3a_6u^2\dot{u} + a_7(u^2\dot{v} + 2u\dot{u}v) + a_8(\dot{u}v^2 + uv\dot{v}) + 3a_9v^2\dot{v} \\ \dot{y}_2 = b_1\dot{u} + b_2\dot{v} + 2b_3u\dot{u} + b_4(\dot{u}v + u\dot{v}) + b_5v\dot{v} + 3b_6u^2\dot{u} + b_7(u^2\dot{v} + 2u\dot{u}v) + b_8(\dot{u}v^2 + uv\dot{v}) + 3b_9v^2\dot{v} \end{cases} \quad (4.50)$$

La détermination de x_2 et y_2 consiste à injecter les équations (4.49) et (4.50) dans (4.48) et on s'arrange à faire disparaître la variable temps. On obtient deux équations qui ne dépendent que de u et v , en négligeant les termes d'ordre supérieur à 3 qui représentent la puissance du terme non linéaire x^3 de l'équation (4.43).

Donc le problème consiste à déterminer les coefficients a_i et b_i . Pour les déterminer (et cela quelque soient u et v), on considère que les termes multipliés par u , v , u^2 , v^2 , uv , u^2v , vu^2 , u^3 et v^3 sont nuls et les équations ainsi obtenues sont doubles.

La résolution des équations obtenues permet de déterminer les coefficients a_i et b_i , et ainsi les expressions modales (4.46) et (4.49) sont déterminées.

Remarque : les solutions complexes sont exclues parce que n'ont aucuns sens.

Le programme permet de (annexe A) :

- déterminer les coefficients a_i et b_i ,
- déterminer les équations modales de chaque mode,
- tracer les modes dans l'espace des phases.

Ces résultats peuvent être obtenus pour différentes valeurs de k_i , m_j et k_n $i=1,3$ $j=1,2$.

4.3.2.2- Calcul des fréquences propres

On a utilisé la méthode numérique Runge-Kutta d'ordre 4 (ode45 dans Matlab) pour le calcul de la solution dans le domaine temporel. En utilisant la commande de transformée de Fourier disponible dans matlab (fft), on a transformé la solution obtenue dans le domaine fréquentiel.

Les pics obtenus correspondent aux fréquences propres du système.

Le programme permet de résoudre numériquement les équations différentielles non linéaires (4.43).

L'utilisation de la commande ode45 nécessite le changement de variables suivantes :

$$\begin{cases} p_1 = x_1 \\ p_2 = \dot{x}_1 \\ p_3 = x_2 \\ p_4 = \dot{x}_2 \end{cases} \quad (4.51)$$

D'où l'équation (4.43) devient :

$$\begin{cases} dp_1 = p_2 \\ dp_2 = -\frac{k_1 + k_2}{m_1} p_1 + \frac{k_2}{m_1} p_3 - \frac{k_n}{m_1} p_1^3 \\ dp_3 = p_4 \\ dp_4 = -\frac{k_2 + k_3}{m_2} p_3 + \frac{k_3}{m_2} p_1 \end{cases} \quad (4.52)$$

Les expressions (4.52) sont programmées sous la commande *function*.

Le programme principal (annexe B) permet de:

- calculer la réponse dans le domaine temporel.
- présenter les résultats obtenus sous forme graphique.
- transformer la réponse du domaine temporel au domaine fréquentiel.
- présenter des transformations obtenues sous forme graphique.

Le programme nécessite des conditions initiales (un point de départ) :

$p_0(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04})$, tel que : p_{01} et p_{02} représentent les conditions initiales sur le déplacement des masses m_1 et m_2 respectivement et p_{03} et p_{04} les conditions initiales sur les vitesses

Résultats:

1- cas linéaire :

$$m_1=5\text{kg}, m_2=3\text{kg}, k_1=10\text{N/m}, k_2=5\text{N/m}, k_3=15\text{N/m}, k_r=0\text{N/m}^3$$

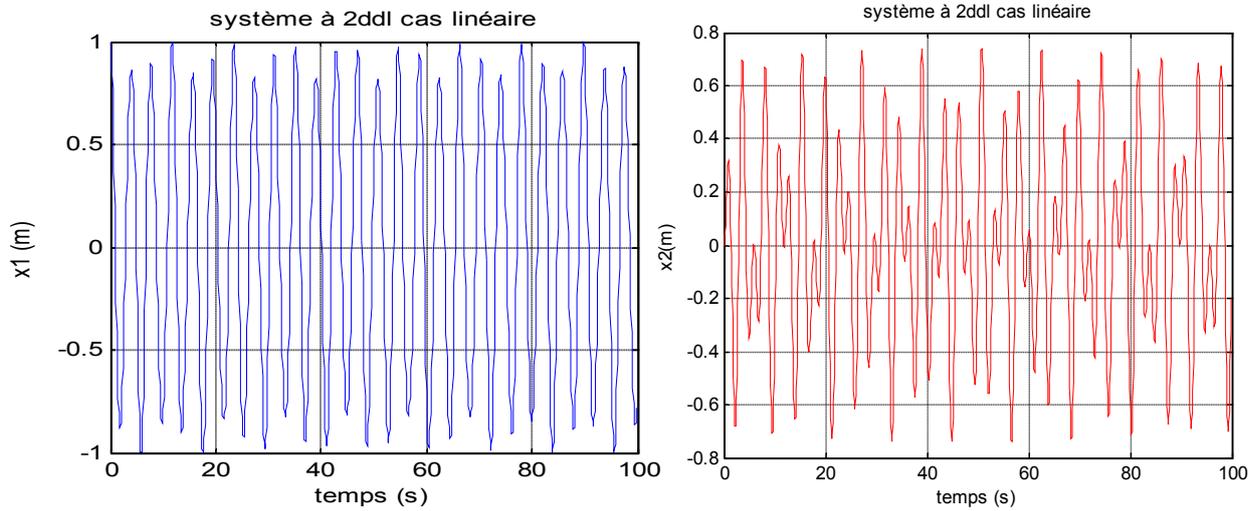


Figure 4.9 : Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas linéaire

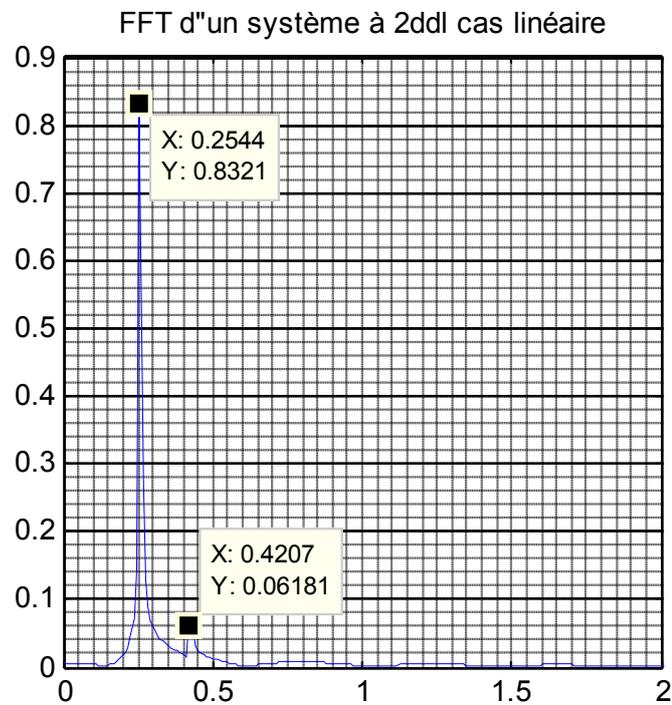


Figure 4.10 : FFT de système à 2 ddl dans le cas linéaire

coeff	Mode 1	Mode 2
a_1	1	-1
a_2	0	0
b_1	0	0
b_2	1	-1

Tableau 4.1 : les coefficients a_i et b_i pour le cas linéaire

On écrit les équations de mode 1 et modes 2 à partir de l'expression (4.49), on obtient :

$$\text{Equation mode 1 : } x_2 = x_1 \quad (4.53)$$

$$\text{Equation mode 2 : } x_2 = -x_1 \quad (4.54)$$

Les surfaces obtenues pour les modes représentent la relation entre x_1 , x_2 et \dot{x}_1 dans l'espace des phases (représentation des modes par Shaw et Pierre).

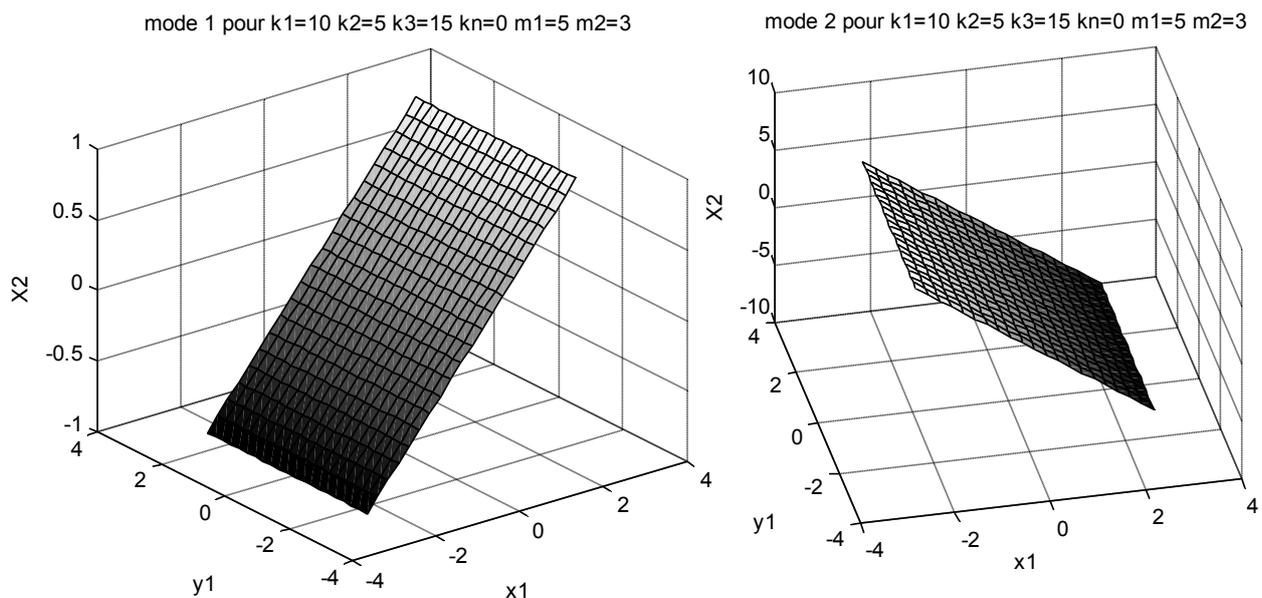


Figure 4.11 : Représentation des modes pour le cas linéaire

2- cas non linéaire :

2.1 Réponses et fréquences propres

A- $m_1=5\text{kg}$, $m_2=3\text{kg}$, $k_1=10\text{N/m}$, $k_2=5\text{N/m}$, $k_3=15\text{N/m}$, $k_n=10\text{N/m}^3$ $p_0=(0.1, 0, 0, 0)$

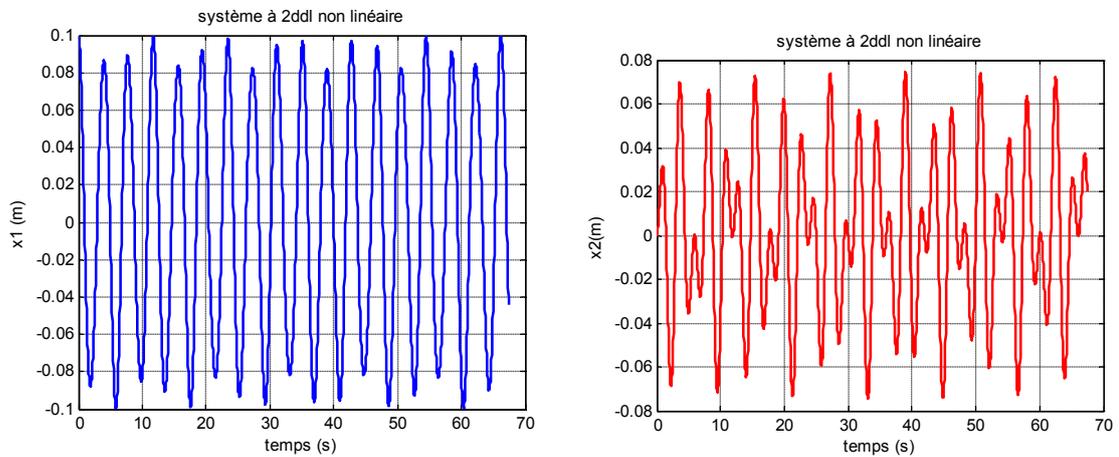


Figure 4.12 : Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire

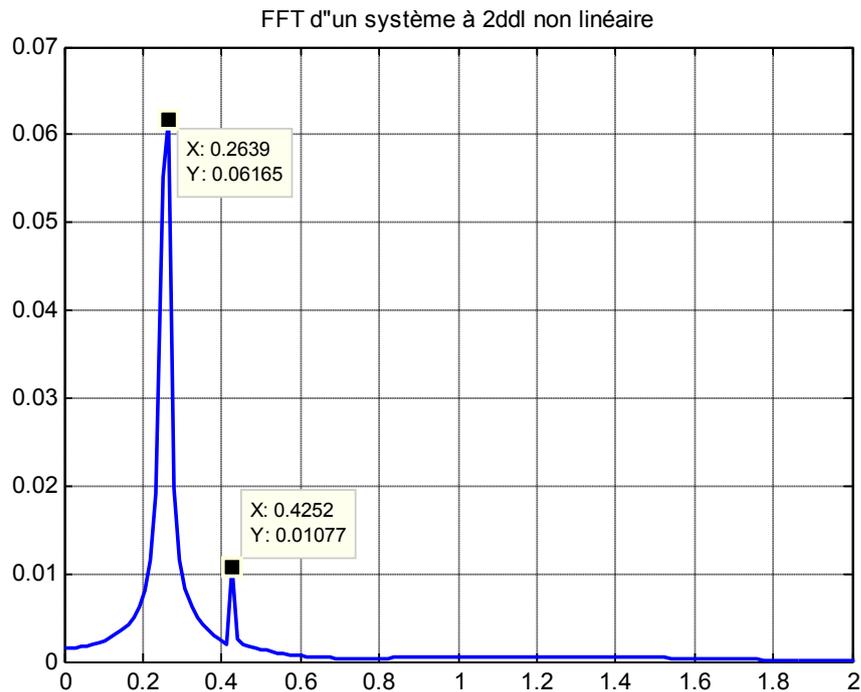


Figure 4.13 : FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire

B- $m_1=5\text{kg}$, $m_2=3\text{kg}$, $k_1=10\text{N/m}$, $k_2=5\text{N/m}$, $k_3=15\text{N/m}$, $k_n=10\text{N/m}^3$ $p_0=(0.3, 0, 0, 0)$

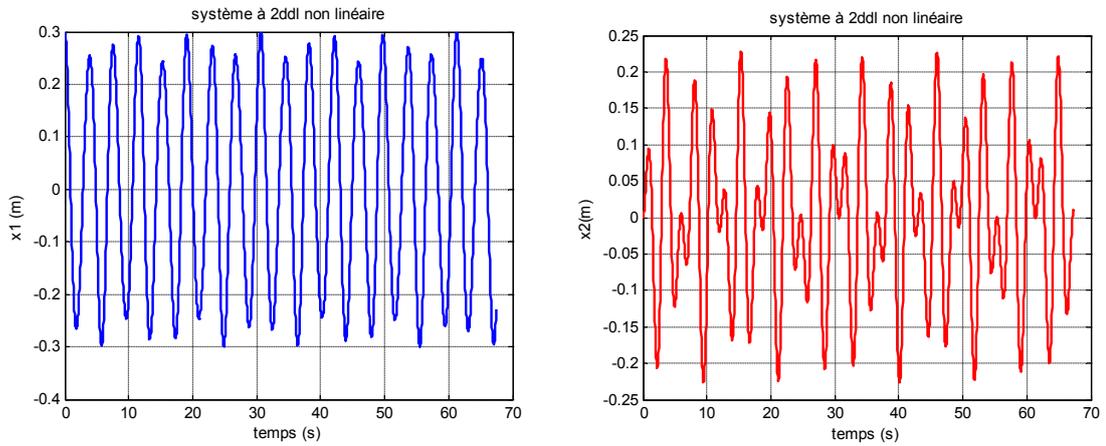


Figure 4.14 : Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire

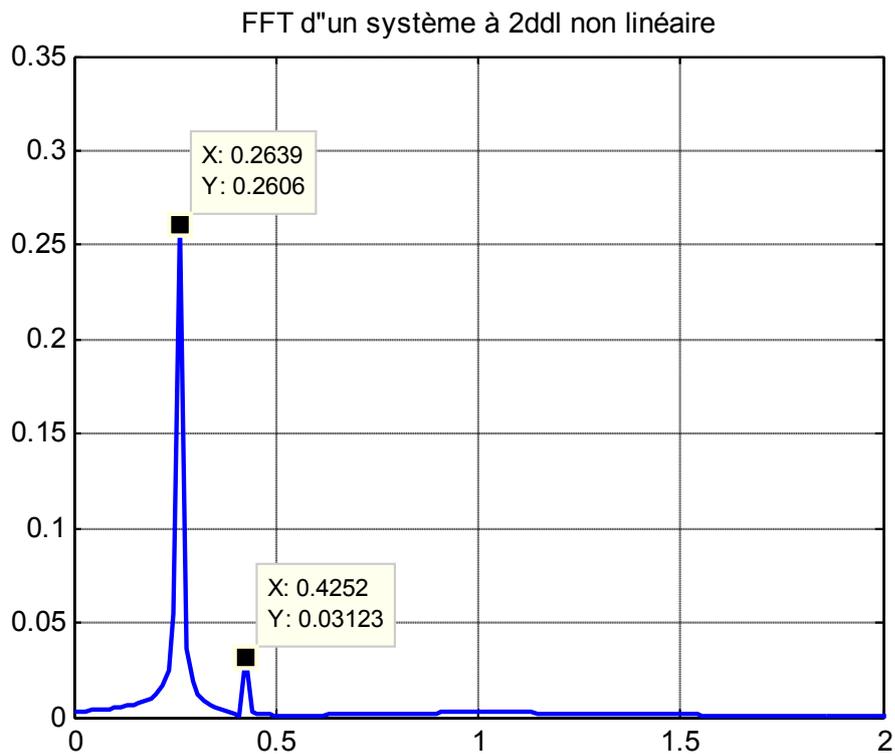


Figure 4.15 : FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire

c- $m_1=5\text{kg}$, $m_2=3\text{kg}$, $k_1=10\text{N/m}$, $k_2=5\text{N/m}$, $k_3=15\text{N/m}$, $k_n=10\text{N/m}^3$ $p_0=(0.5, 0, 0, 0)$

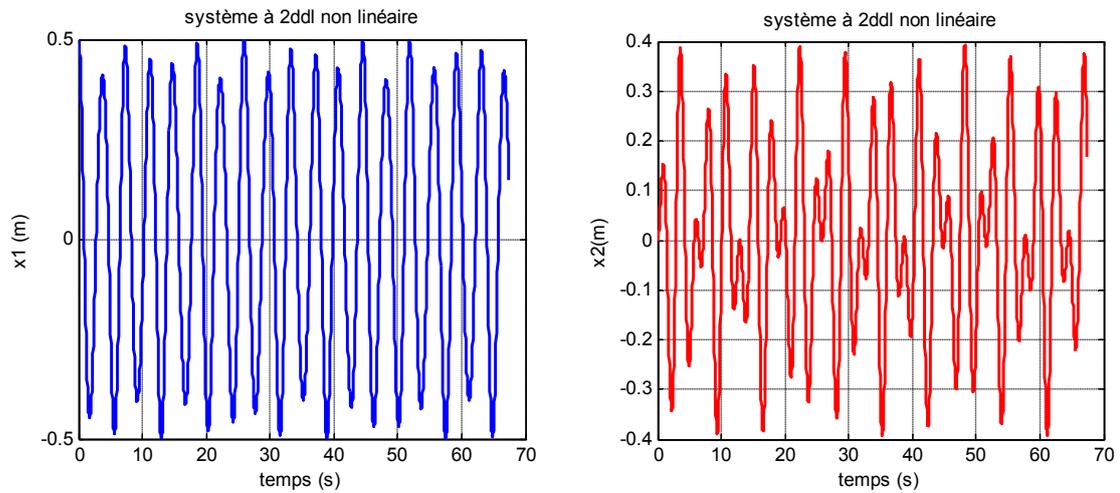


Figure 4.16 : Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire

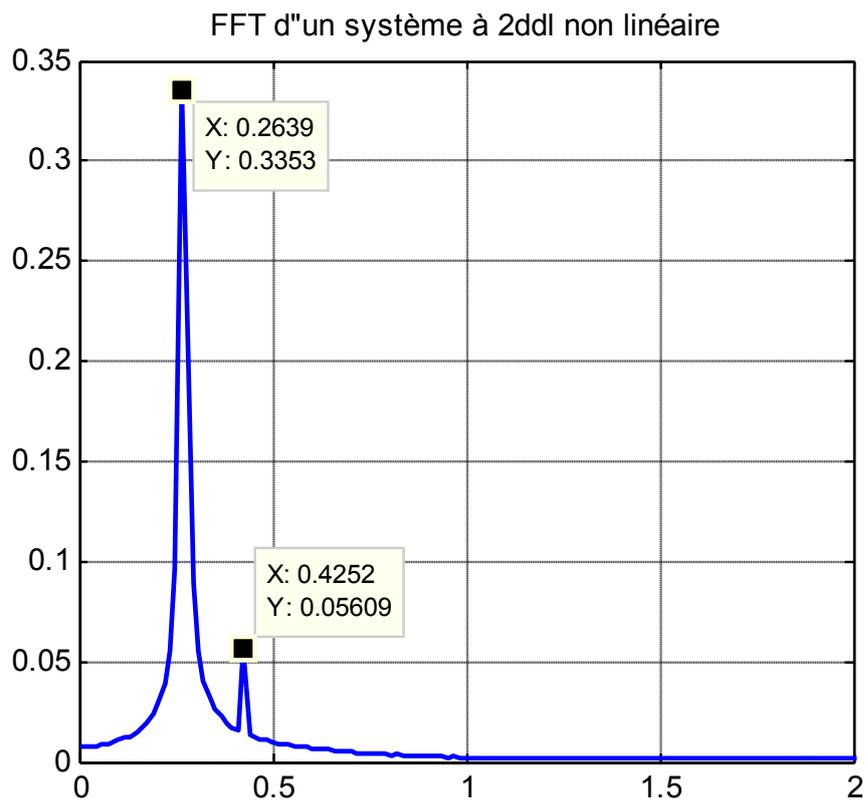


Figure 4.17 : FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire

d- $m_1=5\text{kg}$, $m_2=3\text{kg}$, $k_1=10\text{N/m}$, $k_2=5\text{N/m}$, $k_3=15\text{N/m}$, $k_n=10\text{N/m}^3$ $p_0=(0.8, 0, 0, 0)$

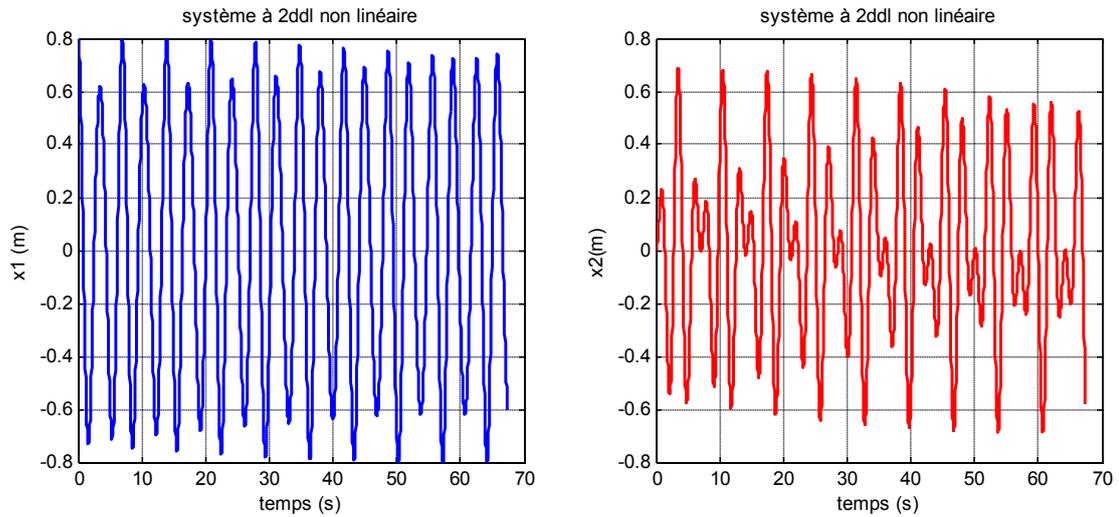


Figure 4.18 : Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire

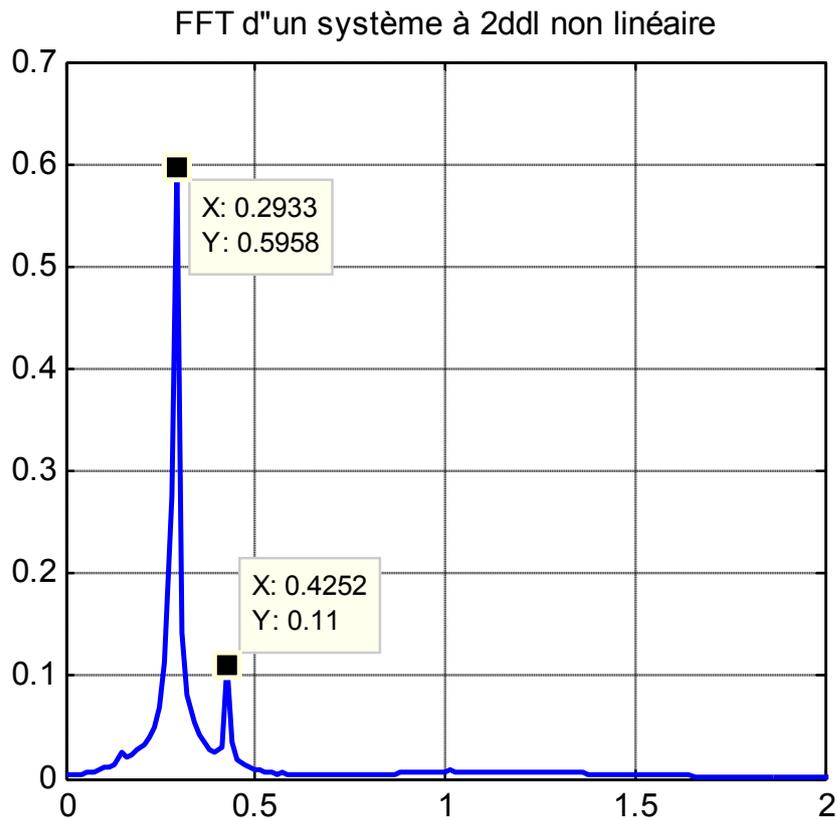


Figure 4.19 : FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire

e- $m_1=5\text{kg}$, $m_2=3\text{kg}$, $k_1=10\text{N/m}$, $k_2=5\text{N/m}$, $k_3=15\text{N/m}$, $k_n=10\text{N/m}^3$ $p_0=(0.85, 0, 0, 0)$

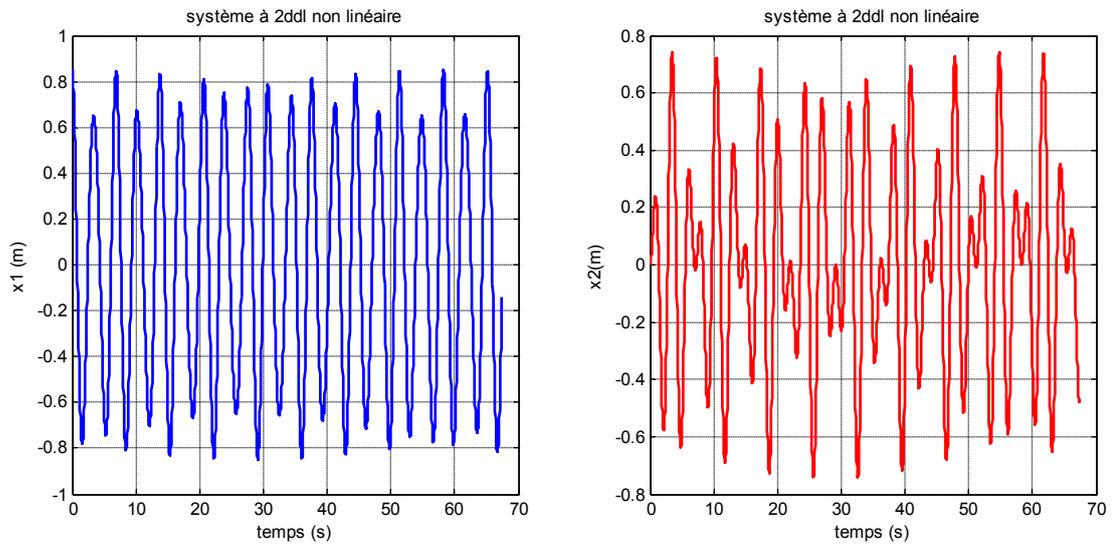


Figure 4.20 : Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire

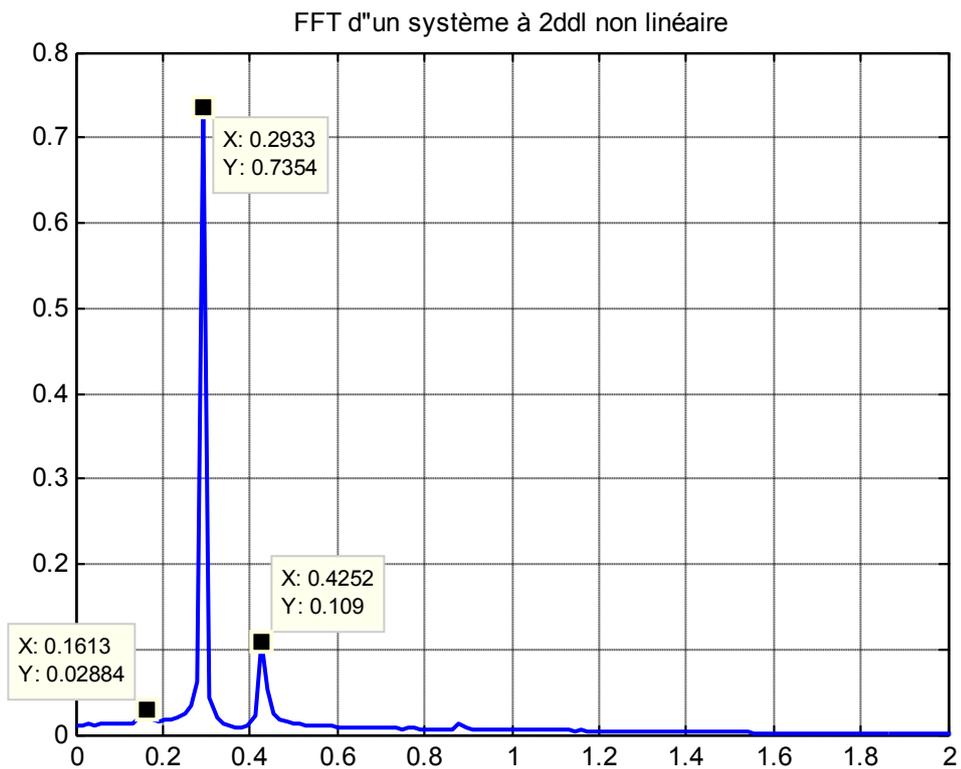


Figure 4.21 : FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire

f- $m_1=5\text{kg}$, $m_2=3\text{kg}$, $k_1=10\text{N/m}$, $k_2=5\text{N/m}$, $k_3=15\text{N/m}$, $k_n=10\text{N/m}^3$ $p_0=(3, 0, 0, 0)$

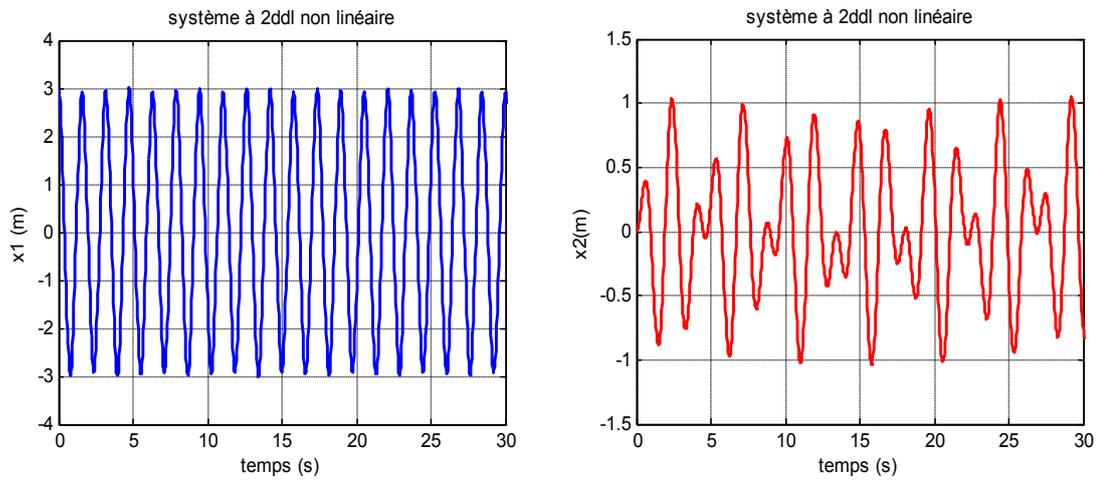


Figure 4.22 : Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire

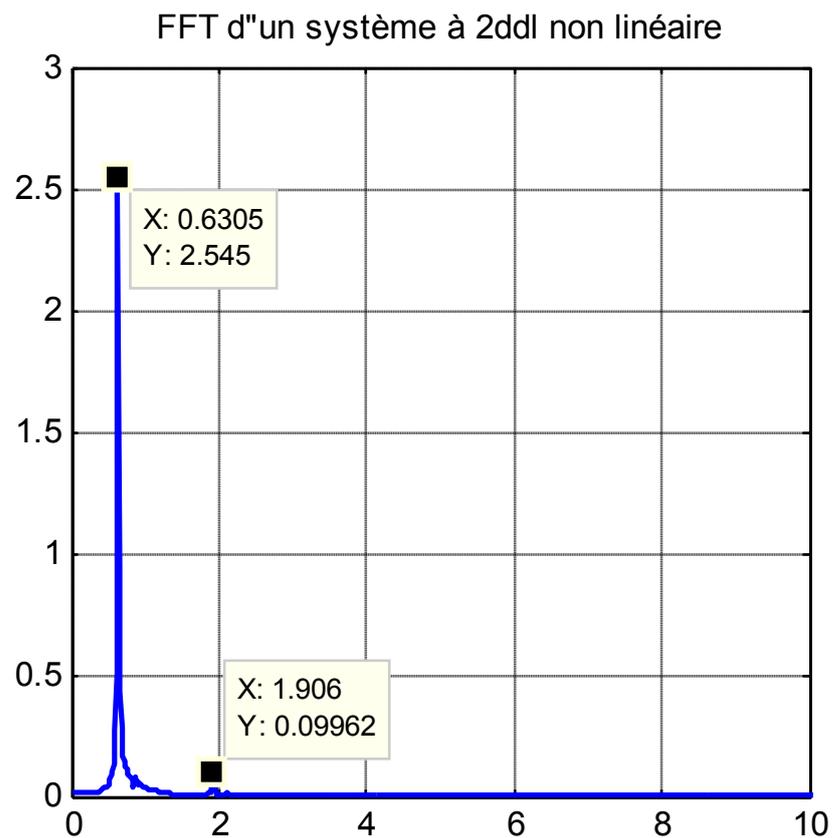


Figure 4.23 : FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire

Commentaires:

Le comportement des systèmes dépend fortement des conditions initiales imposées. C'est à dire pour chaque condition initiale nous avons un nouveau système.

La plage des fréquences peut être classée en trois zones selon les conditions initiales :

- 1- Première zone : pour les petites déplacements, les fréquences propres sont proches à celles d'un système linéaire correspondant c'est-à-dire pour $k_n=0 \text{ N/m}^3$ (figures 4.13, 4.15, 4.17,4.19).
- 2- Deuxième zone : naissance des fréquences propres supplémentaires, on constate un léger changement dans les fréquences fondamentales, cette zone correspond au phénomène de bifurcation (figure 4.21).
- 3- Troisième zone : on constate que le phénomène de bifurcation a disparu, les fréquences propres ont des valeurs différentes à celles d'un système linéaire correspondant (figure 4.23).

2.2 Modes propres

D'après les résultats obtenus et suivant le principe de variété invariante, l'expression modale pour les deux modes est invariante, mais les limites de la représentation des modes dépendent des conditions initiales.

coeff	mode 1	mode 2
a_1	0,39	-2,59
a_2	0	0
a_3	0	0
a_4	0	0
a_5	0	0
a_6	0,101	0,805
a_7	0	0
a_8	0,067	0,099
a_9	0	0
b_1	0	0

b_2	0,39	-2,59
b_3	0	0
b_4	0	0
b_5	0	0
b_6	0	0
b_7	-0,01	0,968
b_8	0	0
b_9	0,067	0,099

Tableau 4.2 : les coefficients a_i et b_i pour le cas non linéaire

On écrit les équations des modes 1 et 2 à partir de l'expression (4.49), on obtient :

$$\text{Equation mode 1 : } x_2 = 0.39x_1 + 0.067x_1y_1^2 + 0.101x_1^3 \quad (4.55)$$

$$\text{Equation mode 2 : } x_2 = -2.59x_1 + 0.099x_1y_1^2 + 0.805x_1^3 \quad (4.56)$$

Les surfaces obtenues pour les modes représentent la relation entre x_1 , x_2 et \dot{x}_1 dans l'espace des phases pour chaque condition initiale.

1- $p_0(0.1, 0, 0, 0)$

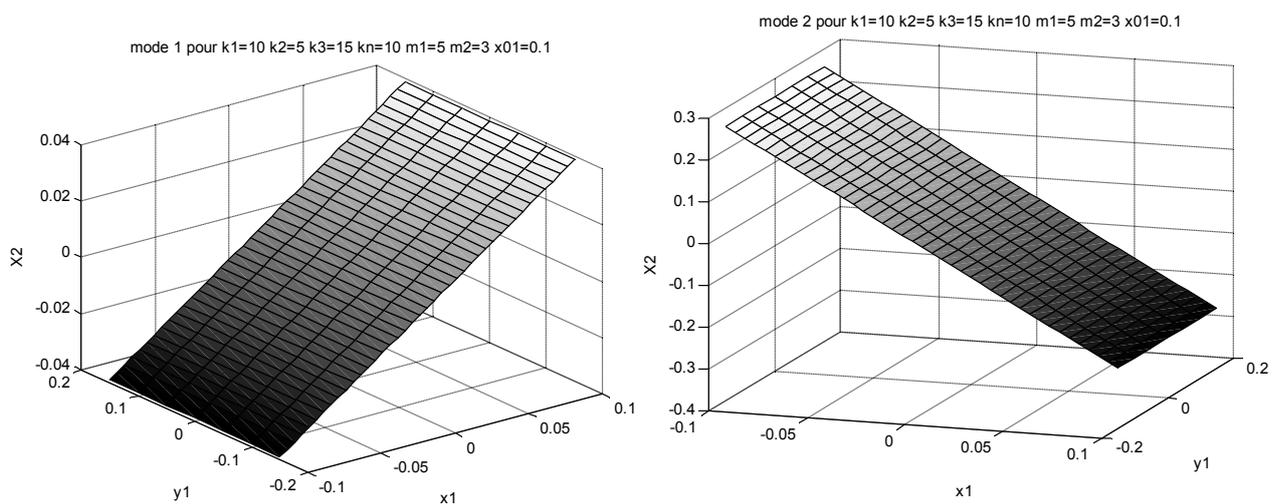


Figure 4.24 : Représentation des modes non linéaires pour $p_0(0.1, 0, 0, 0)$

2- $p_0(0.3, 0, 0, 0)$

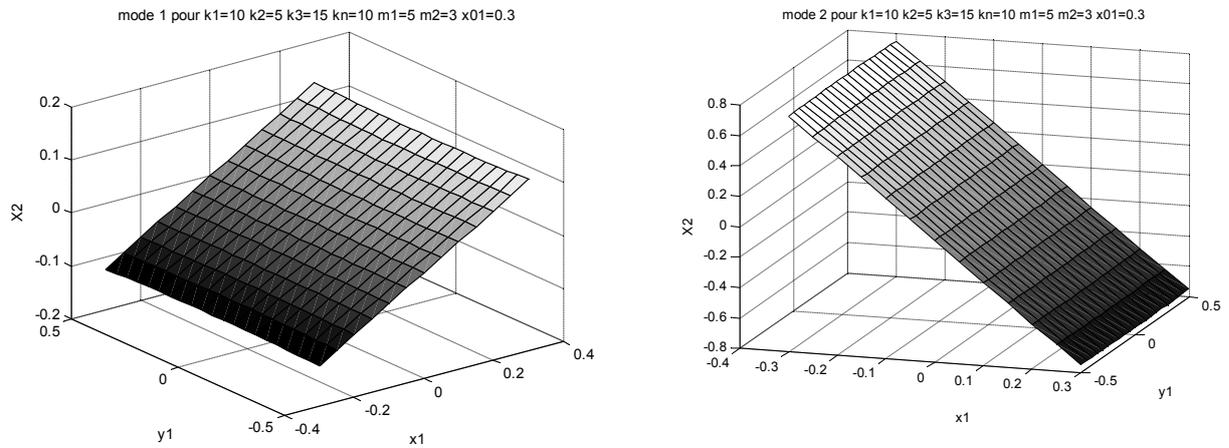


Figure 4.25 : Représentation des modes non linéaires
pour $p_0(0.3, 0, 0, 0)$

3- $p_0(0.5, 0, 0, 0)$

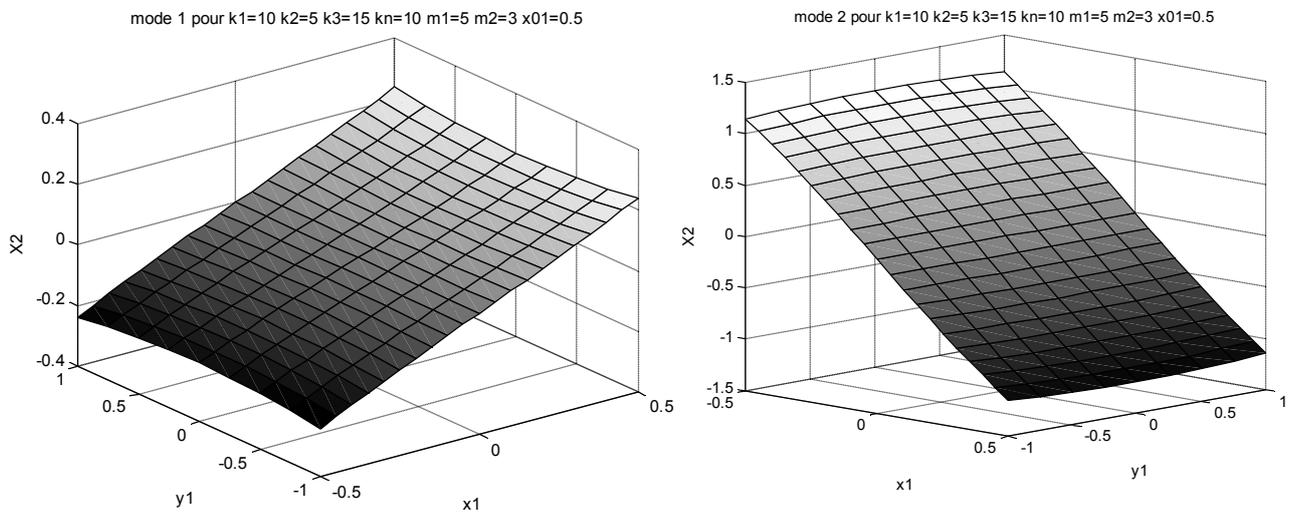


Figure 4.26 : Représentation des modes non linéaires
pour $p_0(0.5, 0, 0, 0)$

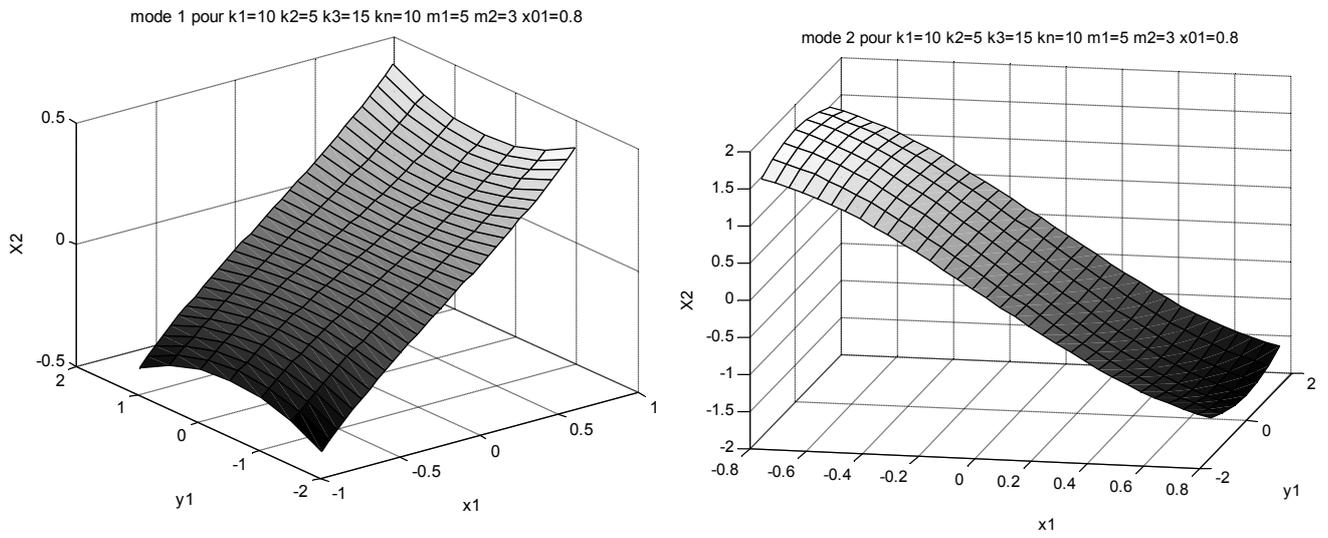
4- $p_0(0.8, 0, 0, 0)$ 

Figure 4.27 : Représentation des modes non linéaires
pour $p_0(0.8, 0, 0, 0)$

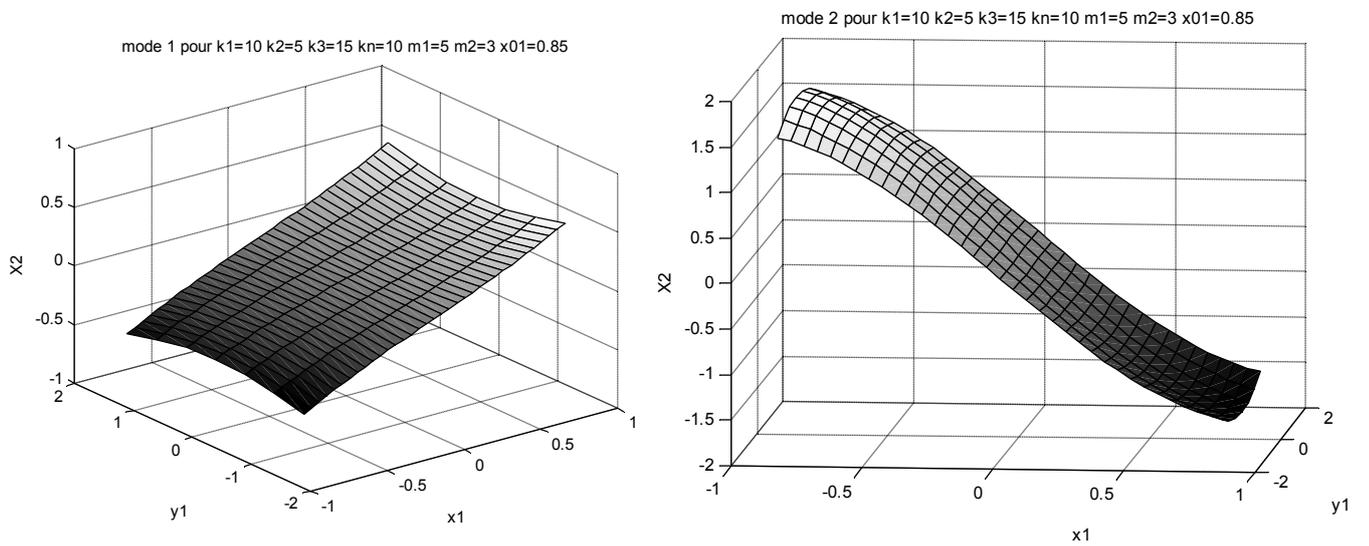
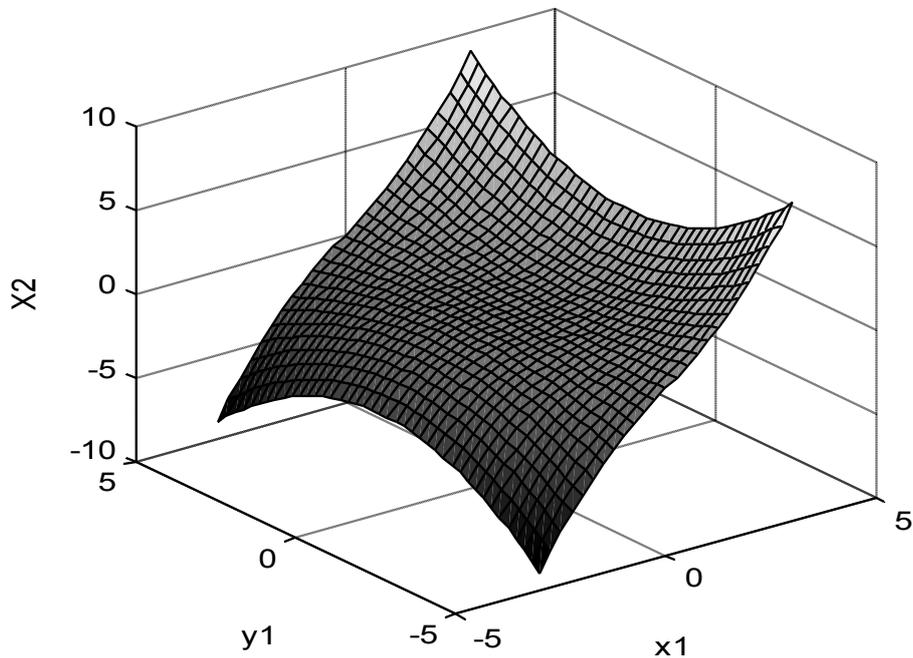
5- $p_0(0.85, 0, 0, 0)$ 

Figure 4.28 : Représentation des modes non linéaires
pour $p_0(0.85, 0, 0, 0)$

6- $p_0(3, 0, 0, 0)$

mode 1 pour $k_1=10$ $k_2=5$ $k_3=15$ $k_n=10$ $m_1=5$ $m_2=3$ $x_{01}=3$



mode 2 pour $k_1=10$ $k_2=5$ $k_3=15$ $k_n=10$ $m_1=5$ $m_2=3$ $x_{01}=3$

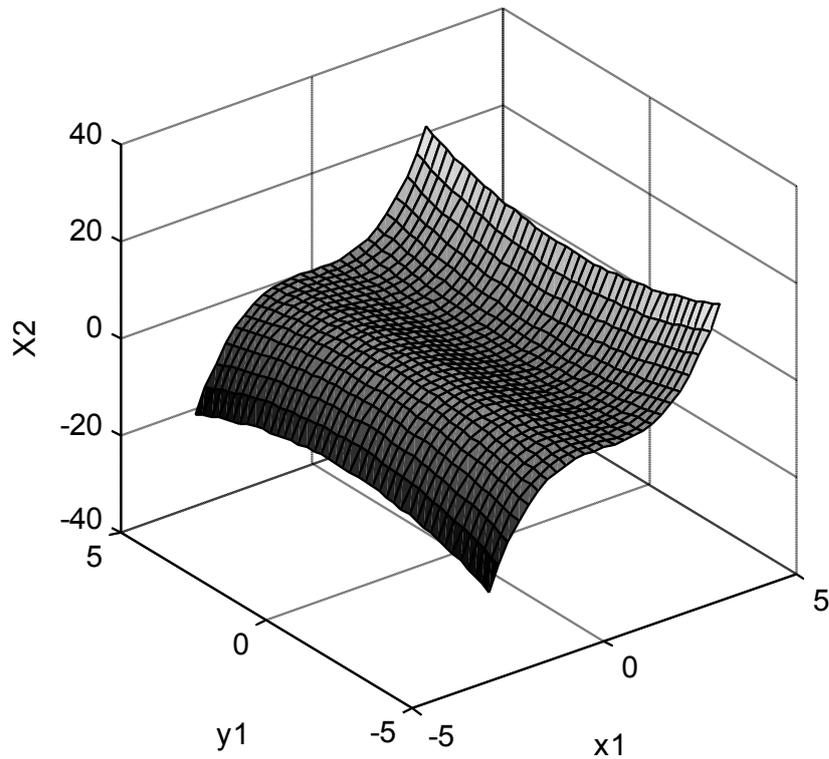


Figure 4.29 : Représentation des modes non linéaires pour $p_0(3, 0, 0, 0)$

Conclusion :

L'application de la méthode de Shaw-Pierre à un système à 2 ddl non linéaire possédant des modes non semblables nous a permis de déterminer les modes dans l'espace des phases (x_1, y_1, x_2) .

Les résultats obtenus nous a permis de tirer les conclusions suivantes :

- Les modes du système linéaire correspondant, (figure 4.11), sont représentés par des surfaces planes perpendiculaires l'une par rapport à l'autre, ces modes ne dépendant pas des conditions initiales.
- Les modes du système non linéaire sont représentés par des surfaces curvilignes dépendant fortement des conditions initiales.
- Les modes obtenus pour les conditions initiales allant de $p_0(0.1, 0, 0, 0)$ à $p_0(0.5, 0, 0, 0)$ correspondent à des surfaces presque planes, (figures 4.24, 4.45 et 4.26) et cela peut être justifié par le faible influence des conditions initiales sur les termes d'ordre supérieurs à 1 (équations 4.55 et 4.56).
- A partir des conditions initiales supérieures ou égales à $p_0(0.8, 0, 0, 0)$, les surfaces modales sont curvilignes, (figures 4.27, 4.28 et 4.29), et cela peut être expliqué par influence des conditions initiales sur les termes d'ordre supérieurs à 1 (équations 4.55 et 4.56).

Remarque : la représentation de Shaw-Pierre ne permet pas voir le phénomène de bifurcation.

4.4 Système non linéaire à 2ddl de modes semblables.

Dans cette étude, on va examiner deux systèmes, l'un non linéaire et l'autre son correspondant.

Pour le calcul des fréquences propres, on fait les mêmes démarches qu'on a utilisé pour le cas du système non linéaire à 2 DDL de type Duffing non semblable.

Considérant un système non linéaire à 2 ddl (figure 4.30).

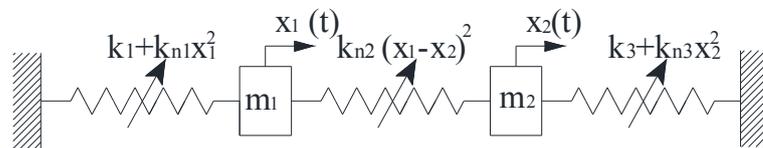


Figure 4.30. : système non linéaire à 2 ddl

L'équation de mouvement s'écrit :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{n2} (x_1 - x_2)^3 + k_{n1} x_1^3 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 - k_{n2} (x_1 - x_2)^3 + k_{n3} x_2^3 = 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

Le système linéaire correspondant du modèle physique figure 4.30 est obtenu en mettant toutes les puissances des termes non linéaires égales à 1 [42] (figure 4.31).

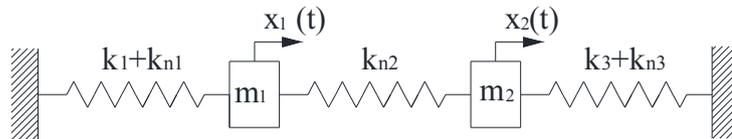


Figure 4.31 : Système linéaire correspondant

L'équation de mouvement du système correspondant :

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + (k_1 + k_{n1})x_1 + k_{n2}(x_1 - x_2) = 0 \\ m \ddot{x}_2 + (k_3 + k_{n3})x_2 - k_{n2}(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

Pour que le système (4.57) possède des modes semblables, c'est-à-dire la relation entre x_1 et x_2 est linéaire (voir § 1.3.1), il faut que le système vérifie les conditions suivants :

- $m_1 = m_2 = m$;
- $k_1 = k_3 = k$;
- $k_{n1} = k_{n3} = k_n$.

On introduit les conditions précédentes, donc l'expression (4.57) on a :

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + k x_1 + k_{n2}(x_1 - x_2) + k_n x_1^3 = 0 \\ m \ddot{x}_2 + k x_2 - k_{n2}(x_1 - x_2) + k_n x_2^3 = 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

la relation entre x_1 et x_2 peut être écrite sous la forme suivante :

$$x_2 = cx_1 \quad (4.59)$$

Où c est une constante modale, la relation (4.59) représente les lignes modales qui sont des droites dans l'espace de configuration (x_1, x_2) .

Le problème consiste à déterminer la constante c .

Pour le cas linéaire expression (4.58)

en injectant (4.59) dans (4.58), on obtient :

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + k x_1 + k_{n2}x_1(1-c) + k_n x_1 = 0 \\ m c \ddot{x}_1 + k c x_1 - k_{n2}x_1(1-c) + k_n c x_1 = 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

On multiplie la première équation du système (4.60) par c et on fait la soustraction de ces deux équations, on obtient :

$$(1+c)(1-c)=0 \quad c \neq 0 \quad (4.61)$$

D'où

$$c = 1 \text{ et } c = -1 \quad (4.62)$$

Les modes du système linéaire correspondant sont :

$$x_2 = x_1 \text{ et } x_2 = -x_1 \quad (4.63)$$

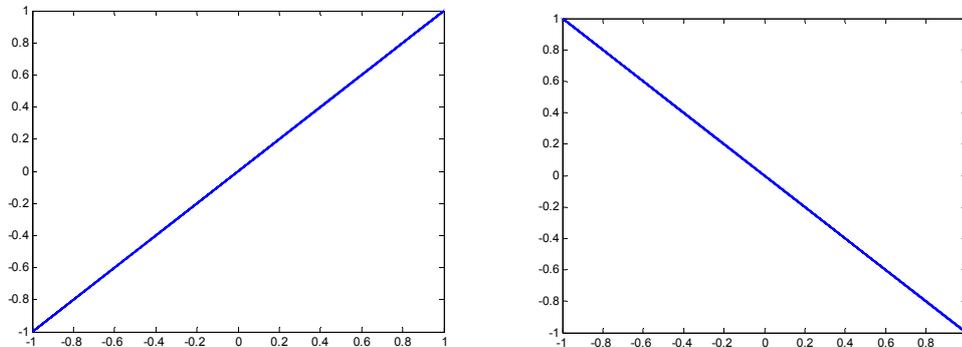


Figure 4.32 : Modes linéaires du système correspondant

Pour le système non linéaire ;

en injectant (4.59) dans (4.58), on obtient :

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + k x_1 + k_{n2}x_1^3(1-c)^3 + k_n x_1^3 = 0 \\ m c \ddot{x}_1 + k c x_1 - k_{n2}x_1^3(1-c)^3 + k_n c^3 x_1^3 = 0 \end{cases} \quad (4.64)$$

On multiplie la première équation du système (4.64) par c et on fait la soustraction de ces deux équations, on obtient :

$$(1+c)(1-c)(k_{n2}(1-c)^2 + ck_n) = 0 \quad c \neq 0 \quad (4.65)$$

Les solutions de l'équation (4.65) sont calculées selon la valeur de k_{n2} , on obtient ainsi :

1. $c = 1$ et $c = -1$: pour $k_{n2} > \frac{1}{4}k_n$
2. $c = 1, c = -1$ et $c = \frac{2k_{n2} - k_n}{2k_{n2}}$: pour $k_{n2} = \frac{1}{4}k_n$
3. $c = 1, c = -1$ et $c = \frac{2k_{n2} - k_n \pm \sqrt{k_n^2 - 4k_n k_{n2}}}{2k_{n2}}$: pour $k_{n2} < \frac{1}{4}k_n$

Pour le premier cas : $k_{n2} > \frac{1}{4}k_n$, on a deux modes semblables qui sont identiques à celle du système linéaire correspondant.

Pour les cas 2 et 3, on a : deux modes linéaires et des modes supplémentaires qui représentent le phénomène de bifurcation.

4.4.1. Application numérique :

On prend les valeurs suivantes : $k_n = 20 \text{ N/m}^3$, $k = 10 \text{ N/m}$ et $m = 0.5 \text{ kg}$

On va varier k_{n2} selon la valeur de k_n on a donc 3 cas, pour chaque cas et on fait le calcul et la comparaison de modes et fréquences propre pour le système non linéaire et le système linéaire correspondant.

1^{ere} cas : $k_{n2} > \frac{1}{4}k_n$ c'est-à-dire $k_{n2} > 5 \text{ N/m}^3$:

On suppose que $k_{n2} = 10 \text{ N/m}^3$

Pour le système linéaire correspondant, l'équation de mouvement s'écrit :

$$\begin{cases} 0.5\ddot{x}_1 + 40x_1 - 10x_2 = 0 \\ 0.5\ddot{x}_2 + 40x_2 - 10x_1 = 0 \end{cases} \quad (4.66)$$

Calcul de fréquences et modes propres :

On fait les mêmes démarches qu'on a fait dans le cas d'un système à 2 ddl. Pour le cas linéaire, on a :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{60} = 7.75 \text{rd/s} = 1.23 \text{Hz} \\ \omega_2 = \sqrt{100} = 10 \text{rd/s} = 1.59 \text{Hz} \end{cases} \quad (4.67)$$

et les vecteurs propre correspondant sont :

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ et } \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

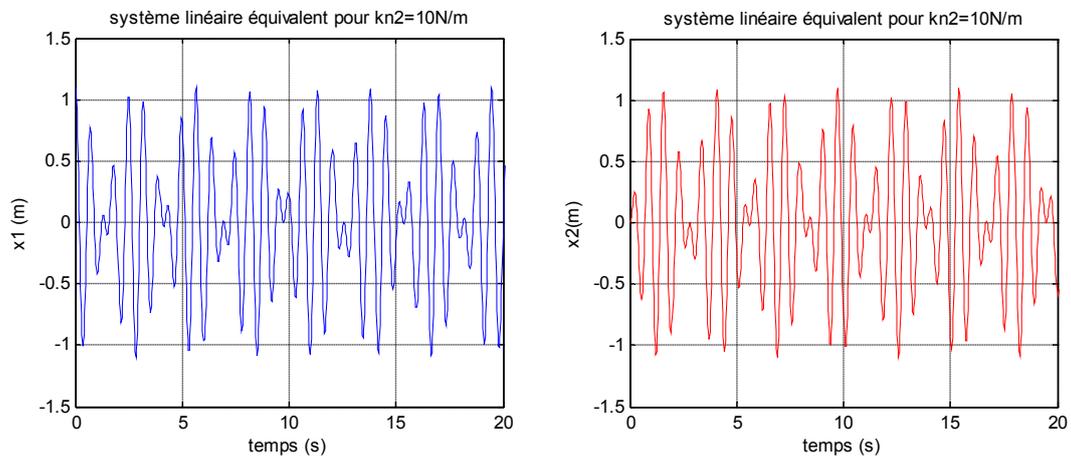


Figure 4.33 : Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas linéaire correspondant

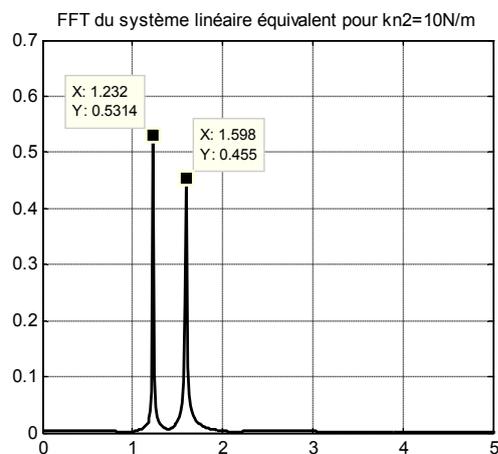


Figure 4.34 : FFT de système à 2 ddl dans le cas linéaire correspondant.

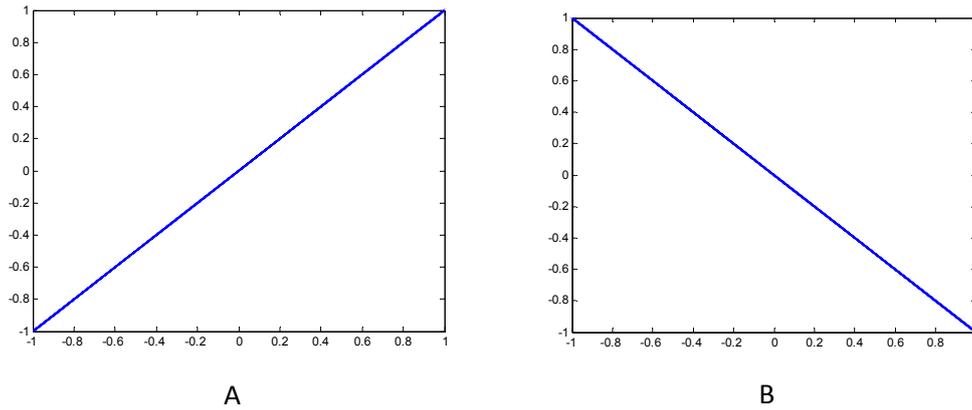


Figure 4.35 : Modes linéaires : en phase A, en opposition de phase B

Pour le système non linéaire, l'équation de mouvement est :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{10}{0.5}x_1 - \frac{10}{0.5}(x_1 - x_2)^3 - \frac{20}{0.5}x_1^3 \\ \ddot{x}_2 = -\frac{10}{0.5}x_2 + \frac{10}{0.5}(x_1 - x_2)^3 - \frac{20}{0.5}x_2^3 \end{cases} \quad (4.69)$$

Calcul de fréquences et modes propres :

Pour les fréquences propres, on injecte notre équation (4.69) dans le programme de FFT, on obtient :

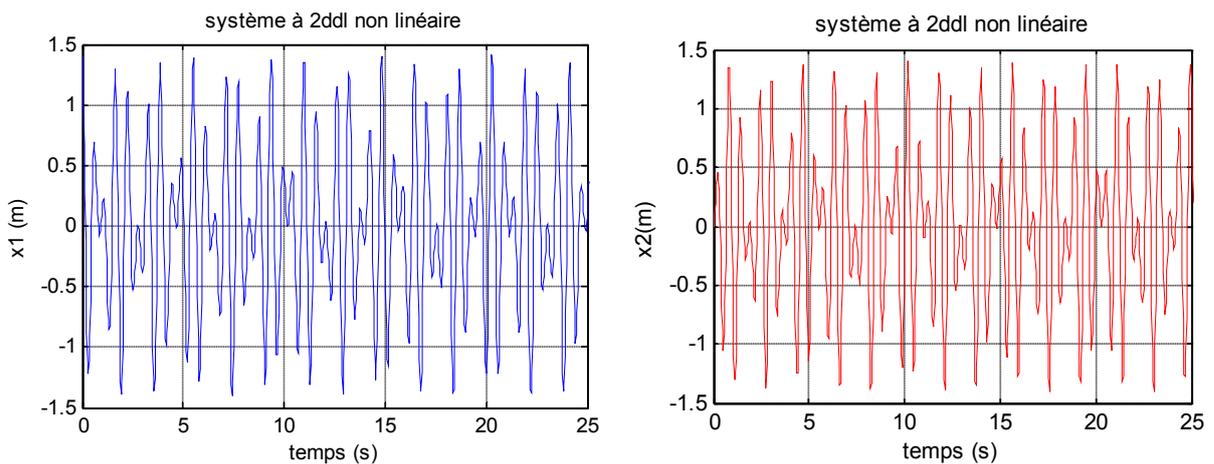


Figure 4.36 : Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non

linéaire pour $k_{n2} > \frac{1}{4}k_n$

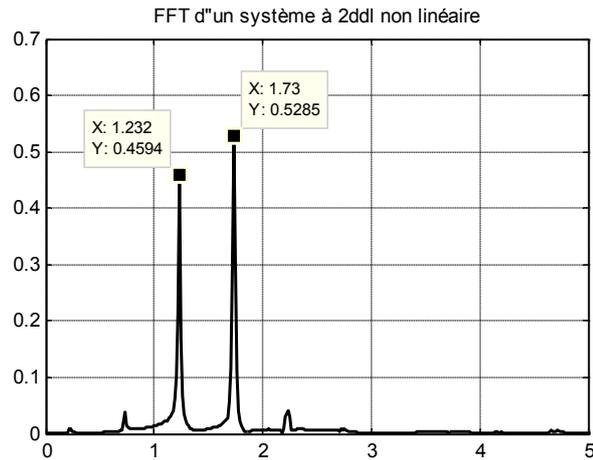


Figure 4.37 : FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire pour $k_{n2} > \frac{1}{4}k_n$.

Pour les modes on a $c = 1$ et $c = -1$ qui sont représentés dans figure 4.35.

2^{ème} cas : $k_{n2} = \frac{1}{4}k_n$ c'est-à-dire $k_{n2} = 5 \text{ N/m}^3$:

Pour le système linéaire correspondant, l'équation de mouvement s'écrit :

$$\begin{cases} 0.5\ddot{x}_1 + 35x_1 - 5x_2 = 0 \\ 0.5\ddot{x}_2 + 35x_2 - 5x_1 = 0 \end{cases} \quad (4.70)$$

Calcul de fréquences et modes propres :

On fait les mêmes démarches qu'on a fait dans le cas d'un système à 2 ddl pour le cas linéaire, on a :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{60} = 7.75 \text{ rd/s} = 1.23 \text{ Hz} \\ \omega_2 = \sqrt{80} = 8.94 \text{ rd/s} = 1.42 \text{ Hz} \end{cases} \quad (4.71)$$

et les vecteurs propres correspondants sont :

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.72)$$

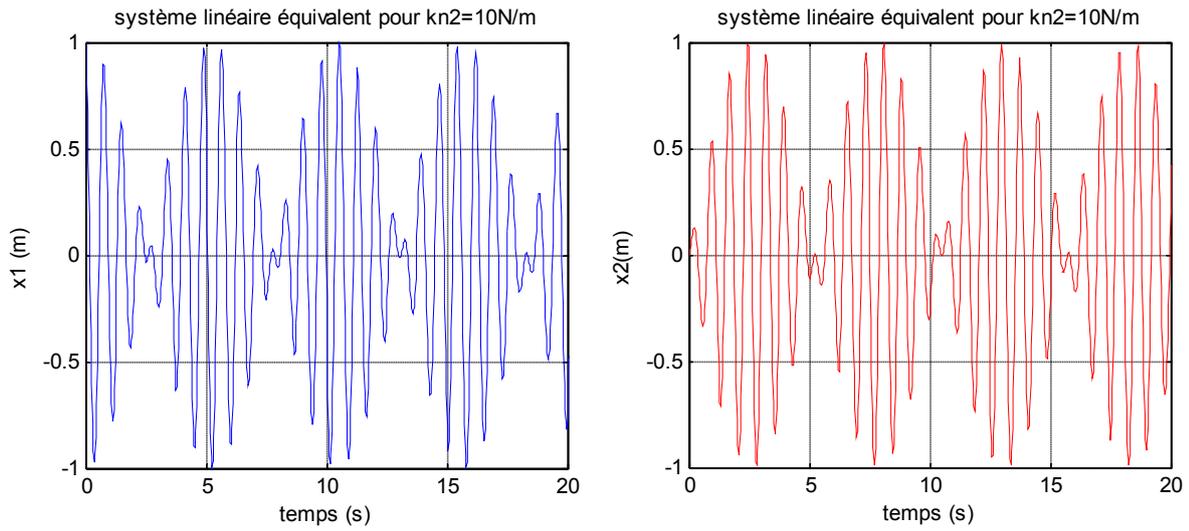


Figure 4.38 : Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas linéaire correspondant

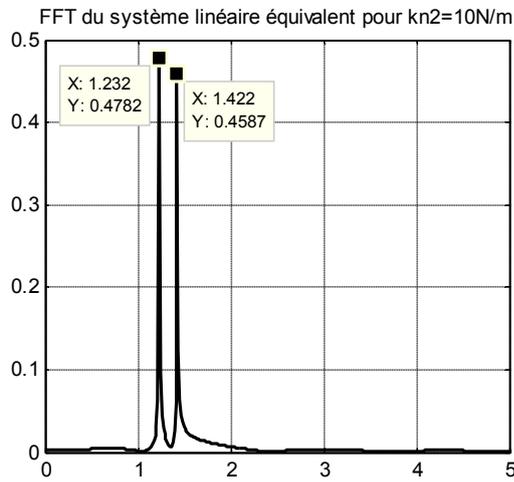


Figure 4.39 : FFT de système à 2 ddl dans le cas linéaire correspondant.

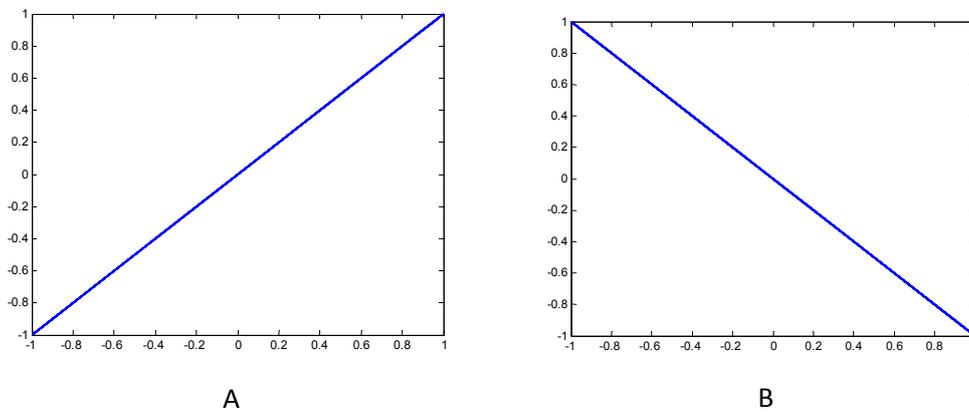


Figure 4.40 : Modes linéaires : en phase A, en opposition de phase B

Pour le système non linéaire, l'équation de mouvement est :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{10}{0.5}x_1 - \frac{5}{0.5}(x_1 - x_2)^3 - \frac{20}{0.5}x_1^3 \\ \ddot{x}_2 = -\frac{10}{0.5}x_2 + \frac{5}{0.5}(x_1 - x_2)^3 - \frac{20}{0.5}x_2^3 \end{cases} \quad (4.73)$$

Calcul de fréquences et modes propres :

Pour les fréquences propres, on injecte notre équation (4.73) dans le programme de FFT, on obtient :

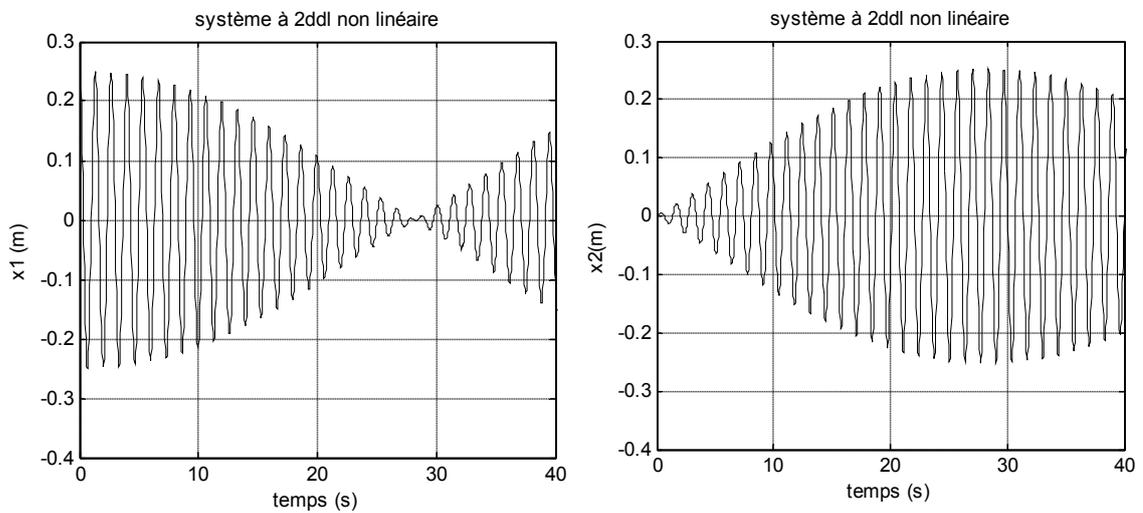


Figure 4.41 : Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas non linéaire

$$\text{pour } k_{n_2} > \frac{1}{4}k_n$$

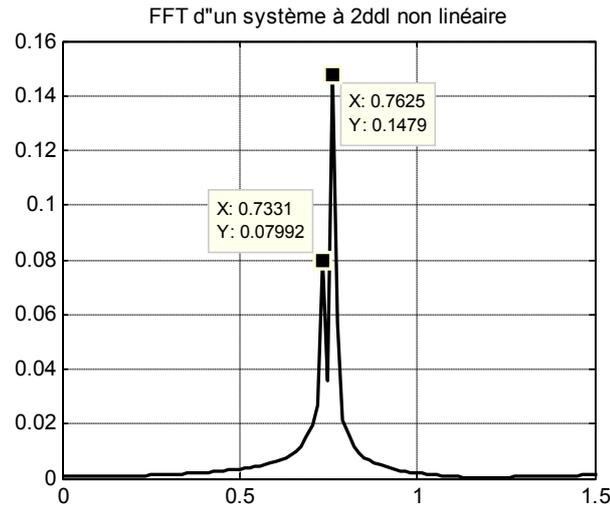


Figure 4.42 : FFT de système à 2 ddl dans le cas non linéaire pour $k_{n2} = \frac{1}{4} k_n$.

Pour le mode on a $c=1, c=-1$ et $c = \frac{2k_{n2} - k_n}{2k_{n2}} = -1$ on remarque que les deuxième et troisième modes sont identiques d'où l'explication de deux pics pour la réponse fréquentielle de figure la 4.42 (cas particulier).

3^{ème} cas : $k_{n2} < \frac{1}{4} k_n$ c'est-à-dire $k_{n2} < 5 \text{ N/m}^3$:

On suppose que $k_{n2} = 2.5 \text{ N/m}$

Pour le système linéaire correspondant, l'équation de mouvement s'écrit :

$$\begin{cases} 0.5\ddot{x}_1 + 32,5x_1 - 2,5x_2 = 0 \\ 0.5\ddot{x}_2 + 32,5x_2 - 2,5x_1 = 0 \end{cases} \quad (4.74)$$

Calcul de fréquences et modes propres :

On fait les mêmes démarches qu'on a fait dans le cas d'un système à 2 ddl pour le cas linéaire, on a :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{60} = 7.75 \text{ rd/s} = 1.23 \text{ Hz} \\ \omega_2 = \sqrt{70} = 8.36 \text{ rd/s} = 1.33 \text{ Hz} \end{cases} \quad (4.75)$$

et les vecteurs propre correspondant sont :

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ et } \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.76)$$

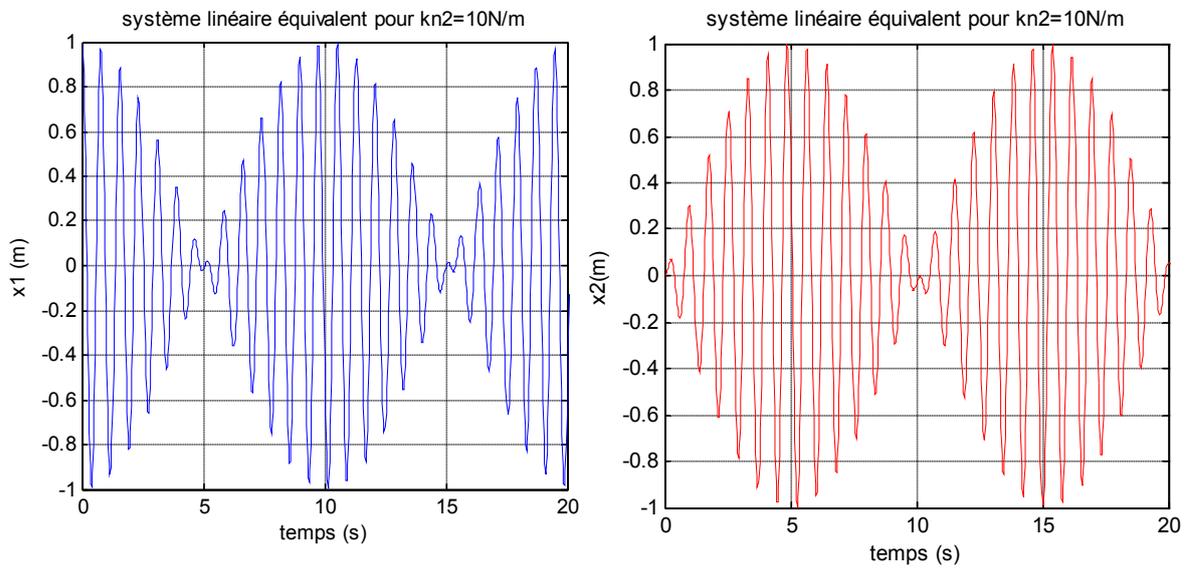


Figure 4.43 : Réponse de la masse m_1 et m_2 dans le cas linéaire correspondant

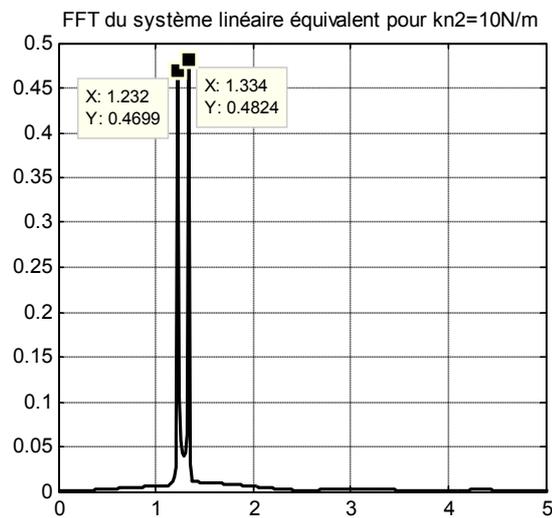


Figure 4.44 : FFT de système à 2 ddl dans le cas linéaire correspondant.

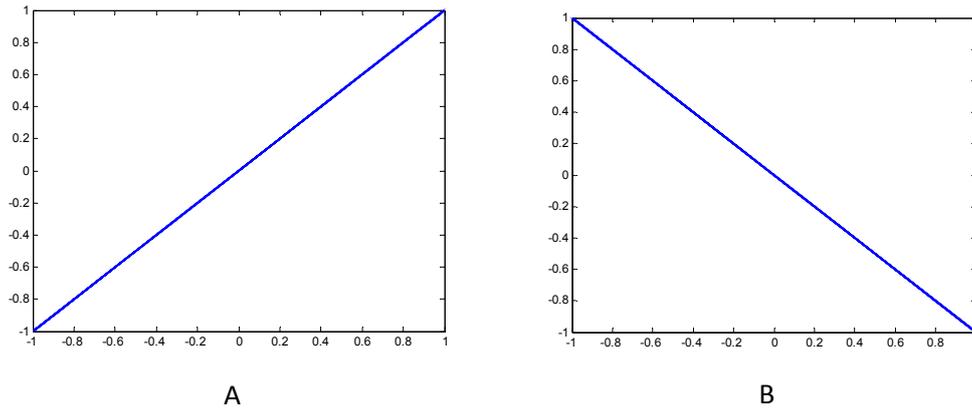


Figure 4.45 : Modes linéaires : en phase A, en opposition de phase B

Pour le système non linéaire, l'équation de mouvement est :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{10}{0.5}x_1 - \frac{2.5}{0.5}(x_1 - x_2)^3 - \frac{20}{0.5}x_1^3 \\ \ddot{x}_2 = -\frac{10}{0.5}x_2 + \frac{2.5}{0.5}(x_1 - x_2)^3 - \frac{20}{0.5}x_2^3 \end{cases} \quad (4.77)$$

Calcul de fréquences et modes propres :

Pour les fréquences propres, on injecte notre équation (4.77) dans le programme de FFT, on obtient :

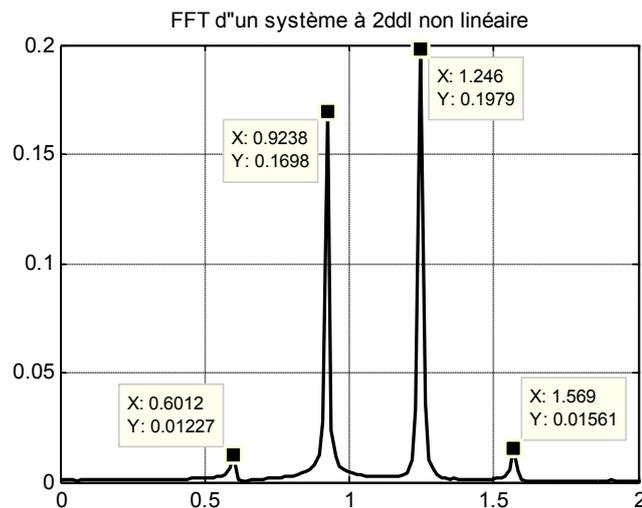


Figure 4.46 : FFT d'un système à 2 ddl non linéaire

Calcul de modes :

$$c = 1, c = -1 \text{ et } c = \frac{2k_{n2} - k_n \pm \sqrt{k_n^2 - 4k_n k_{n2}}}{2k_{n2}} = \frac{2 \times 2.5 - 20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times 20 \times 2.5}}{2 \times 2.5} = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

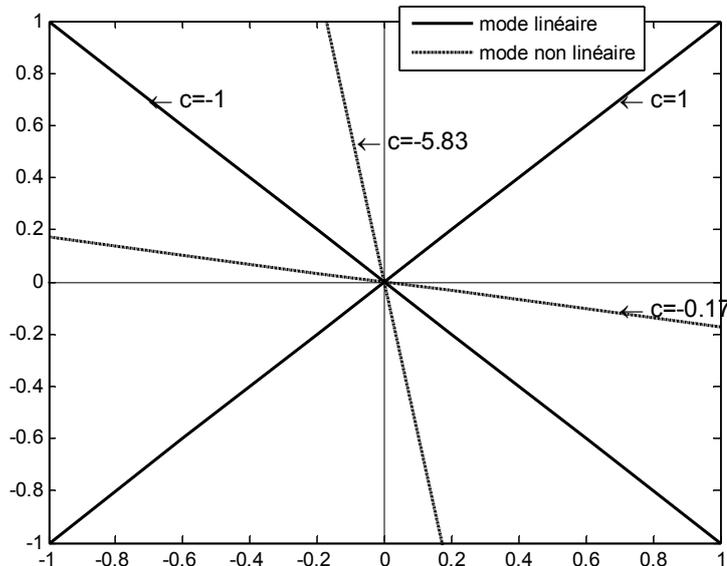


Figure 4.47 : modes similaires d'un système à 2 ddl non linéaire

Conclusion :

Les modes semblables sont caractérisés par la relation linéaire entre x_1 et x_2 , et qui est de type : $x_2 = cx_1$ où c est la constante modale.

Les modes dans ce cas sont des lignes droites : dont deux modes sont perpendiculaires : $x_2 = \pm x_1$ qui sont identiques aux modes de système linéaire correspondant et sont toujours présents, par contre l'existence des autres modes (maximum deux) dépend des paramètres du système et ils sont des lignes droites non perpendiculaires qui représentent le phénomène de bifurcation.

Le calcul fréquentiel confirme que le nombre de fréquence propre est égal au nombre des modes propres.

4.5 Système continu

4.5.1 Introduction

Les vibrations de grande amplitude des structures minces, incluant les effets de non linéarités géométriques, sont ici considérées. Une des caractéristiques fondamentales des oscillations non linéaires est la dépendance de la fréquence avec l'amplitude, phénomène apparaissant pour des amplitudes de vibration petites.

4.5.2 Cas d'une poutre encastrée-encastrée

4.5.2.1 Equation de mouvement

L'équation des vibrations libres non amorties pour une poutre encastrée en régime de grande amplitude est donnée, sous forme adimensionnée, par (cf. par ex Bennett et al. (1970)) [32] :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\varepsilon}{2} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4.78)$$

Le déplacement adimensionné w a été choisi tel que $w = \frac{w^m}{h}$, où h est l'épaisseur de la poutre et w^m le déplacement mesuré, de telle sorte que $w = 1$ dans le modèle implique un déplacement réel de h . Le paramètre ε vaut alors : $\varepsilon = \frac{Ah^2}{I}$, où A et I sont respectivement l'aire et le moment quadratique de la section de la poutre. Les conditions aux limites encastré-encastré s'écrivent :

$$w(0,t) = w(1,t) = w_{,x}(0,t) = w_{,x}(1,t) = 0 \quad (4.79)$$

Les modes propres linéaires ont pour expression [32] :

$$\Phi_k(x) = K \left[\cos \beta_k x - \cosh \beta_k x + \frac{\sin \beta_k + \sinh \beta_k}{\cos \beta_k - \cosh \beta_k} (\sin \beta_k x - \sinh \beta_k x) \right] \quad (4.80)$$

Où K est choisi de telle sorte que $\int_0^1 \Phi_k(x)^2 dx = 1$. Les pulsations propres sont déterminées en résolvant $\cos \beta_k = \frac{1}{\cosh \beta_k}$ où $\omega_k = \beta_k^2$. La projection s'écrit en insérant le développement $w(x,t) = \sum X_p(t) \Phi_p(x)$ dans (4.78), ce qui donne, $\forall p \geq 1$:

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + \varepsilon \sum_{i,j,k=1}^N h_{ijk}^p X_i X_j X_k = 0 \quad \forall p \geq 1 \quad (4.81)$$

La solution de l'équation (4.81) est par [32] :

$$w(x,t) = R_p(t) \Phi_p(x) + \sum_{k \neq p} \left(r_{ppk}^k R_p(t)^3 + u_{ppk}^k R_p(t) S_p(t)^2 \right) \Phi_k(x) \quad (4.82)$$

4.5.2.2 Simulations numériques :

Des simulations numériques ont été effectuées pour déterminer l'évolution des déformées modales en fonction de l'amplitude, en utilisant le Code Aster.

Les caractéristiques du matériau constituant la poutre sont :

- module de Young $E=70 \text{ GPa}$
- de coefficient de Poisson $\nu=0.33$
- masse volumique $\rho=2760 \text{ Kg} / \text{m}^3$
- longueur : 1 m
- largeur : 3 cm
- épaisseur : 2 mm .

La figure 4.48 montre les déformées modales lorsqu'on augmente l'amplitude de vibration, pour les trois premiers modes.

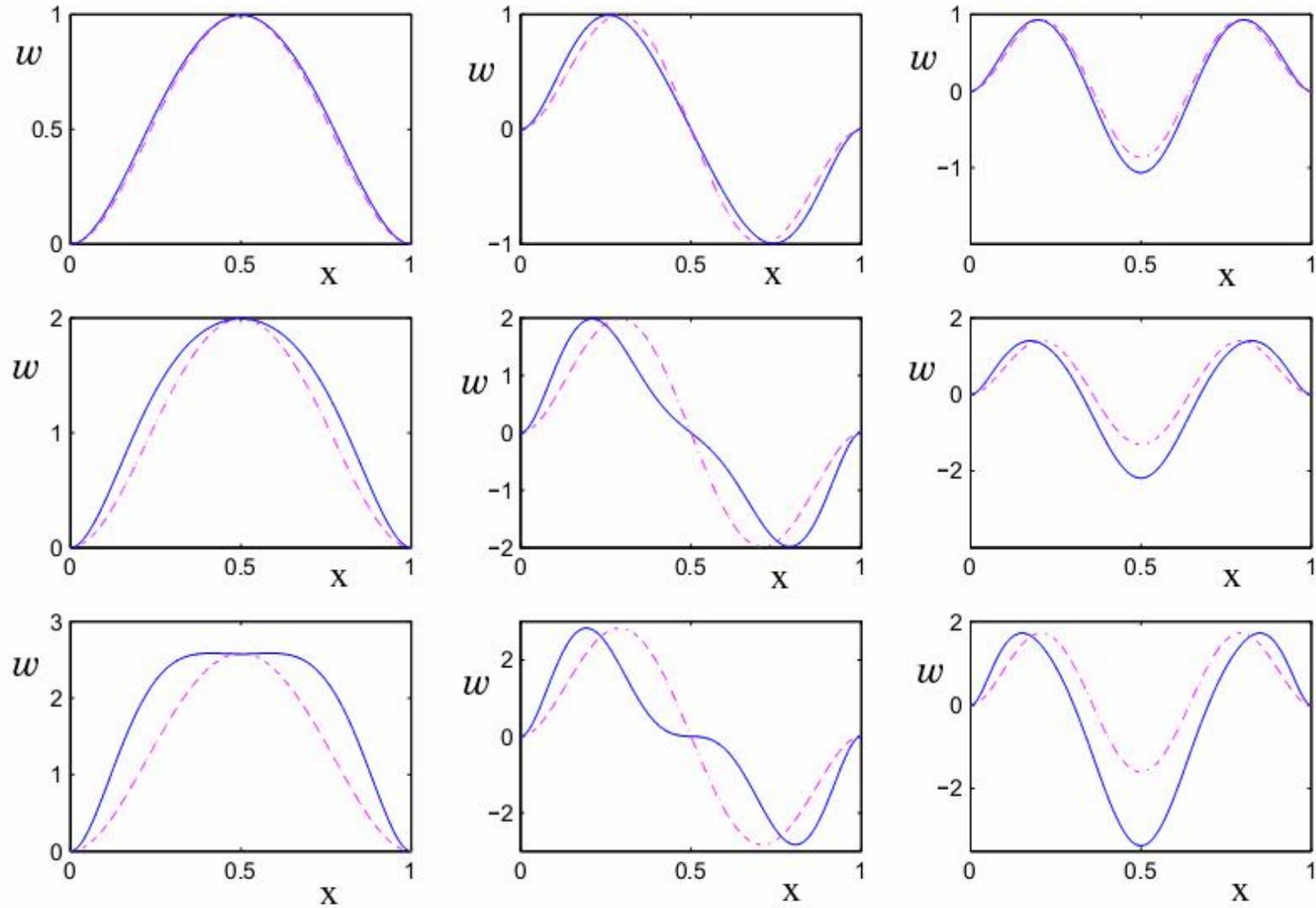


Figure 4.48 : Déformées modales non linéaires pour la poutre encastée-encastée, pour les trois premiers modes.

Trait plein : MNL, pointillé : mode linéaire.

Conclusion :

On compare les modes linéaires et non linéaires d'une poutre encastree-encastree pour différentes valeurs d'amplitude de vibration (conditions initiales), on a :

a- Pour les petites déplacements ($w \leq 1$) :

- Le mode non linéaire coïncide avec le mode linéaire,
- La flèche maximale pour le mode linéaire et non linéaire est identique en valeur et en position.

b- pour les grandes déplacements ($w > 1$) :

- Le mode non linéaire ne coïncide pas avec le mode linéaire,
- La flèche maximale :
 - Pour le premier mode : la flèche est identique en valeur et en position,
 - Pour le deuxième mode : la flèche est identique en valeur mais elle est différente en position,
 - Pour le troisième mode : la flèche est identique en valeur mais elle est différente en position pour les extrêmes 1 et 3, pour l'extrême 2 la flèche est différente en valeur mais identique en position.

Dans la solution (4.82), le phénomène de décalage des modes peut être expliqué

par le terme auxiliaire : $\sum_{k \neq p} (r_{ppp}^k R_p(t)^3 + u_{ppp}^k R_p(t) S_p(t)^2) \Phi_k(x)$, qui présente des

puissances supérieures d'où son influence des grandes amplitudes sur les modes.

CONCLUSION GENERALE

L'objet de ce travail a été la prise en compte de l'aspect non linéaire dans l'étude des systèmes vibratoires. Cet aspect est parfois occulté pour des raisons de simplification mais ne peut être ignoré dans la mesure où les systèmes réels ont des comportements non linéaires, le degré et le type de non linéarité variant d'un système à un autre géométrique. Dans notre travail nous nous sommes intéressés à la non linéarité géométrique.

Les systèmes non linéaires peuvent être classés en deux types selon les paramètres physiques :

- Systèmes non linéaires de modes semblables,
- Systèmes non linéaires de modes non semblables.

Pour mener cette étude, nous avons utilisé des méthodes analytiques et numériques à savoir :

- La méthode de la balance harmonique a été utilisée pour le calcul de fréquences et modes propres linéaires et non linéaires pour des systèmes à 1 et 2 degrés de liberté et leur représentation dans le diagramme fréquence-amplitude.
- La méthode de Shaw-Pierre a été utilisée pour le calcul de modes linéaires et non linéaires pour des systèmes à 2 degrés de liberté dans l'espace des phases.
- La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) a été utilisée pour calculer la réponse dans le domaine temporel pour des systèmes à 1 et 2 degrés de liberté linéaires et non linéaires. Nous avons utilisé le modèle construit pour étudier l'effet des conditions initiales et la raideur non linéaire.
- La méthode de la transformée de Fourier a été utilisée pour transformer la réponse, calculée par RK4, dans le domaine fréquentiel. Cette transformation nous a permis de déterminer les fréquences propres.
- La méthode analytique de Rosenberg a été utilisée pour la détermination des modes semblables.

Les résultats obtenus de cette étude nous ont permis de tirer les conclusions suivantes :

- Le comportement des systèmes non linéaires (fréquences et modes propres) dépend fortement des conditions initiales imposées et la non linéarité de raideur.
- Pour des faibles conditions initiales, le système a un comportement linéaire.
- A partir de certaines conditions initiales, le nombre de fréquences propres calculées est supérieur au nombre de degrés de liberté du système, c'est le phénomène de bifurcation.
- La méthode de la balance harmonique appliquée à un système à 2 degrés de liberté l , permet de déterminer les amplitudes des oscillations en fonction des pulsations propres, l'exploitation de cet résultat n'est pas évident mais néanmoins elle confirme que les amplitudes dépendent de la pulsation.
- La méthode de Shaw-Pierre permet de déterminer les modes d'un système dans l'espace des phases, mais ne permet pas de visualiser le phénomène de bifurcation.
- Les modes non linéaires des poutres en grand déplacement transversal présentent les mêmes allures par rapport aux modes linéaires, mais des déformations locales à constater.

Cette étude pourrait être enrichie et s'approcher de la réalité par la considération :

- d'autres types de non linéarité d'une part,
- de systèmes réels présentant plusieurs types de non linéarité d'autre part.

APPENDICE**A. NOMENCLATURES**

A	: L'aire de la section de la poutre
E	: Module de Young
I	: Moment quadratique de la poutre
F	: Force de rappel
$U(x)$: Energie potentielle
$[M]$: Matrice de masse
$[K]$: Matrice de rigidité
$[C]$: Matrice de l'amortissement
$\{F(t)\}$: Vecteur de forces extérieures
c	: Amortissement
det	: Déterminant
f	: Force extérieure
g	: Accélération de la pesanteur
h	: L'épaisseur de la poutre
h'	: Energie totale du système autonome
k	: Rigidité
k_n	: Rigidité non linéaire
m	: Masse
q	: Déplacement modale
\dot{q}	: Vitesse modale

\ddot{q}	: Accélération modale
x	: Déplacement
\dot{x}	: Vitesse
\ddot{x}	: Accélération
t	: Temps
Ψ_k	: Mode ou vecteur propre
$[\lambda]$: Matrice des fréquences propres
w	: Déplacement transverse d'une poutre
w^m	: Déplacement mesuré
ν	: Coefficient de Poisson
ω_k	: Fréquence ou valeur ou pulsation propre
ρ	: Masse volumique

B. LISTE DES ABREVIATIONS

A.M.T	: Analyse Modale Théorique
A.M.E	: Analyse Modale Expérimentale
ddl	: Degrés de libertés
E.F	: Eléments Finis
FFT	: Transformé de Fourier Rapide
MNNs	: Modes normaux non linéaires

BIBLIOGRAPHIE

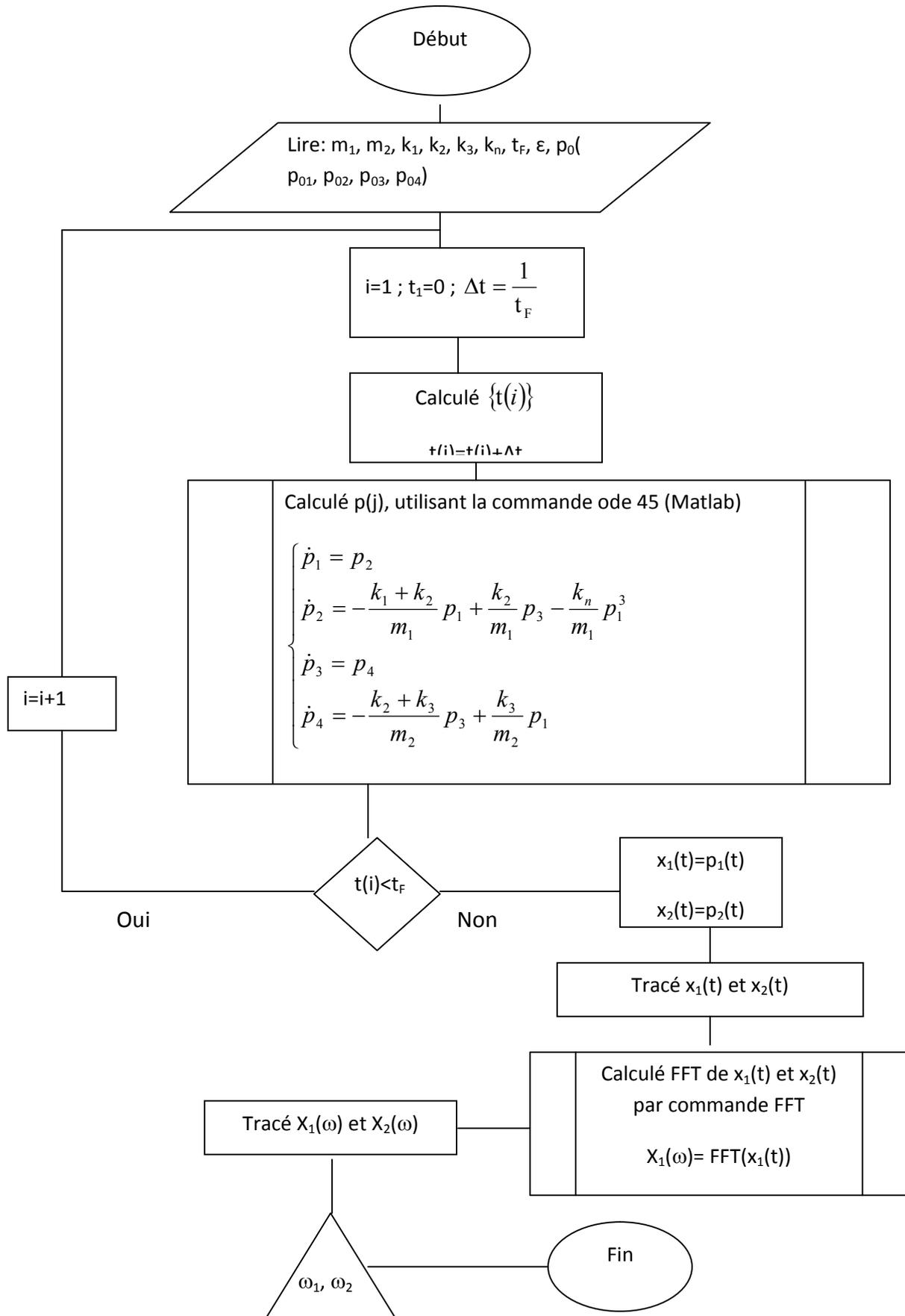
1. P. Muzard. « Etude du comportement dynamique linéaire et non-linéaire d'un rotor d'hélicoptère. Application au couplage rotor-fuselage ». PhD thèse, Ecole Centrale de Lyon, 1994.
2. C. GIBERT « Analyse modale non linéaire expérimentale » thèse Ecole Centrale de Lyon, 2001.
3. L. Jezequel et C.H. Lamarque. « Analysis of nonlinear structural vibrations by the normal form theory ». *Journal of Sound and Vibration*, 149 :429–459, 1991.
4. S. Setio. « Comportement des structures mécaniques non-linéaires soumises à des excitations stationnaires ». PhD thèse, Ecole Centrale de Lyon, 1991.
5. F. PÉRIGNON, « vibrations forces de structures minces, élastiques, non linéaires », thèse de doctorat, université de la méditerranée (aix-marseille 2) 2004
6. D. Geradin, M. Rixen. « Théorie des vibrations - Application à la dynamique des structures ». Masson, 1993.
7. D.G. Fertis. « Mechanical and structural vibrations ». Wiley interscience, 1995.
8. A. Aiad « Analyse modale des structures mécaniques théorie et applications » Congrès Arabe de Mécanique: Damas; Syrie, juin 1997.
9. D J Ewins, S S Rao « Encyclopedia of Vibration : Modal Analysis » livre ACADEMIC PRESS 2001,
10. I. Kovacic and M. J. Brennan « The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour ». First Edition Wiley 2011.
11. A.Aiad, « Analyse Modale », cours de la post-graduation 2005-2006, université Saad Dahlab de Blida.
13. W. Szemplinska-Stupnicka. «The behavior of nonlinear vibrating systems - Volume 1 – Fundamental concepts and methods : application to single-degree-of-freedom systems ». Kluwer academic publishers, 1990a

14. C. VILLA. «Dynamique non linéaire des rotors : applications numériques et expérimentales à un rotor flexible ». thèse doctorat, école centrale de Lyon. 2005.
15. S.W. Shaw et C. Pierre. « Normal modes of vibration for non-linear continuous systems ». *Journal of Sound and Vibration*, 169 :319–347, 1993b.
16. Jimin He and Zhi-Fang Fu, « Modal Analysis » Butterworth-Heinemann First published 2001.
17. B. Cochelin. « Modes non linéaires des structures élastiques : quelques définitions et méthodes de calcul ». *Publications du LMA*, 156 :1–14, 2003.
18. O. THOMAS « Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques ». Habilitation à diriger des recherches, ENS de CACHAN, Novembre 2011.
19. K. Worden et G.R. Tomlinson. « Non linearity in structural dynamics ». IOP, 2001.
20. J. Guckenheimer et P. Holmes. « Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields ». Springer-Verlag - Applied Mathematical sciences, 1983.
21. F Perignon. « Vibrations non-linéaires d'un assemblage combustible r.e.p. sous écoulement: identification et comportement sous séisme ». Mémoire de DEA, 2000.
22. S. Pisapia. « Identification du comportement vibratoire non-linéaire d'un assemblage combustible de réacteur à eau pressurisée ». Thèse de PhD, université de la Méditerranée, Marseille, 2004.
23. A.H.Nayfeh et S.A. Nayfeh. « On nonlinear modes of continuous systems ». *Journal of Vibration and Acoustics*, 116 :129–136, 1994.
24. A.H. Nayfeh et D.T. Mook. « Nonlinear Oscillations ». Wiley interscience, New York, 1979.
25. A.Blaquière. « Analyse des systèmes non linéaires ». I.N.S.T.N.-P.U.F., 1966.
26. W. Szemplinska-Stupnicka. « The behavior of nonlinear vibrating systems - Volume 2– Advanced concepts and application to multi-degree-of-freedom-systems ». Kluwer academic publishers, 1990b.

27. N. Boivin, C. Pierre, et S.W. Shaw. « Non linear normal modes, invariance and modal dynamics approximations of a linear beam connected to a non linear spring» .Nonlinear dynamics, to appear.
28. E. Peshek, C. Pierre, et S.W. Shaw. « A new galerkin-based approach for accurate non linear normal modes through invariant manifolds». Journal of Sound and Vibration, 249(5): 971–993, 2002.
29. S.W. Shaw et C. Pierre. « Normal modes for non-linear vibratory systems ». Journal of Sound and Vibration, 164(1) :85–124, 1993a.
30. C. Touzé. « A normal form approach for non-linear normal modes ». Publications du LMA, 156: 15–38, 2003.
31. R. Arquier, S. Bellizzi, R. Bouc et B. Cochelin « Two methods for the computation of nonlinear modes of vibrating systems at large amplitudes ». Computers & Structures, 84(24-25):1565–1576, 2006.
32. C. Touzé & O. Thomas. « Modes normaux non-linéaires de systèmes continus ». 16^{ème} Congrès Français de Mécanique. Nice 2003.
33. G. Schmidt & A. Tondl. « Non-Linear Vibration ». Cambridge University Press New York. 2009.
34. R. Arquier. « Une méthode de calcul des modes de vibrations non linéaires de structures ». Thèse doctorat. Université Aix-Marseille II. 2007.
35. P. MOTTARD « Méthodes semi-analytiques en vibration non linéaire ». Mémoire présenté pour l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.) Faculté des Sciences et de Génie UNIVERSITÉ LAVAL QUÉBEC 2011.

ANNEX A

Organigramme de calcul des fréquences propres



ANNEX B

Organigramme de calcul des modes propres

