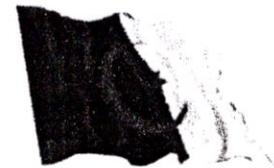


03610x  
Ex A

REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
المكتبة  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE SAAD DEHLEB BLIDA  
USDB  
Faculté des Sciences de l'Ingénieur  
Département : Aéronautique



Mémoire pour l'obtention  
du diplôme d'ingénieur d'état en Aéronautique  
Option : structure

**THEME**  
**Calcul aérodynamique et structural d'une aile  
d'avion**

PRESENTE PAR :

M: BELFADEL WALID

M: MESSAOUD MOHAMMED

ENCADRE PAR :

M : ZEBBICHE TOUFIK

ANNEE UNIVERSITAIRE 2005 /2006

## *Dédicace*

*Je souhaite dédier ce modeste travail, synonyme de concrétisation de tous mes efforts fournis ces cinq dernières années :*

*A mes très chers parents.*

*A mon grandpère*

*A mon frère.*

*A ma sœur.*

*A mon binôme oualid*

*A toutes les familles **messaoud** , fares*

*A tout mes Amis :*

*Mouf, sedik, hamza , Amine, , Benmessaoud, Brahim, Farid, Kadandou, Khaled , halim, rida , moussa, Nabil , Nounou , Omar meziane, Ramzi, Salim.C, Lebbad*

*Messaoud . mohammed*

## *Dédicace*

*Je souhaite dédier ce modeste travail, synonyme de concrétisation de tous mes efforts fournis ces cinq dernières années :*

*A mes très chers parents.*

*A mes frères.*

*A ma sœur.*

*A mon binôme Mohamed*

*A toutes la famille Belfadel*

*A tout mes Amis :*

*Messaoud ,Saad Edine ,Hayoun, Ali, Abd Elkader ,Abd Albaki  
Yacine Bachreddine, Alhadi ,Hamza ,Amer ,Sedik, Hamza  
Amine, Benmessaoud, Brahim ,Farid , Nabil, Ramzi, Salim  
Hachani*

*Belfadel / Valid*

# REMERCIEMENTS

*Nous remercions tout d'abord dieu tout puissant tout clément qui  
nous a aidé à élaborer ce modeste travail  
et aboutir à ce niveau d'étude*

*Nous exprimons notre profonde et respectueuse gratitude  
et reconnaissance a nos messieurs :*

*Mr.zebbiche qui n'a pas hésité a relire ce mémoire et corriger ce qui a été omis ce qui  
Prouve l'attention qu'il porte aux étudiants*

*Reste a remercier respectueusement en reconnaissance tous mes enseignants du maitre  
D'école a l'enseignant universitaire pour leur efforts qui ne sont pas partis vint car  
Ce mémoire n'est autre qu'un de leurs fruits*

*Enfinement je remercie un a un toute personne m'ayant été d'une aide de loin ou de  
Prés et quelle qu'elle soit ou de m'avoir encouragé du moins avec un tout petit sourire.*

## Sommaire :

➤ Introduction

### CHAPITRE I :

#### *Généralité*

<b>I-0 Introduction</b> .....	01
<b>I-1 Définition d'une aile</b> .....	01
<b>I-2 Caractéristiques aérodynamiques d'une aile</b> .....	02
I-2-1 Profil 2D .....	02
I-2-2 Aile 3D .....	02
I-2-3 Définition des forces et moments .....	03
I-2-3-1 Portance, traînée .....	03
I-2-3-2 Moment quart de corde .....	04
I-2-3-3 Forces et moments appliqués à un profil 2D .....	05
I-2-3-4 Efforts aérodynamiques et moments 3D .....	06
I-2-4 Coefficients aérodynamiques .....	07
I-2-4-1 Coefficients d'une aile .....	07
I-2-4-2 Coefficients d'un profil .....	07
I-2-4-3 Coefficients de pression et de frottement .....	08
I-2-4-4 Finesse d'un profil ou d'une aile .....	08
I-2-4-5 Les coefficients de portance et de traînée .....	08
I-2-4-6 Centre de pression .....	09
I-2-4-7 Centre aérodynamique .....	09
<b>I-3 Caractéristiques géométriques d'une aile</b> .....	09
I-3-1 Les types de voilures (selon leurs formes dans le plan) .....	09
I-3-2 Architecture de l'aile .....	12
I-3-2-1 Longerons .....	13
I-3-2-2 Nervures .....	14
I-3-2-3 Ensemble voilure .....	15

## Chapitre II

### *Calcul de la structure de l'aile*

<b>II-1</b>	<b>Modélisation de l'aile</b>	16
<b>II-2</b>	<b>Élément de poutre droite tridimensionnelle</b>	18
II-2-1	Généralités	18
II-2-2	Axes $r, y, z$ locaux	20
II-2-3	Cinématique virtuelle	20
II-2-3-1	Cinématique H1	21
II-2-3-2	Cinématique H2	21
II-2-3-3	Cinématique H1 et H2	22
II-2-4	Principe des travaux virtuels	23
II-2-5	Loi de comportement	25
<b>II-3</b>	<b>Adaptation de la méthode des éléments finis</b>	26
II-3-0	Introduction	26
II-3-1	Démarche éléments finis	27
II-3-2	Conditions de convergence de la solution	29
II-3-3	Matrices et vecteurs élémentaires	30
II-3-4	Transformation des variables au point $O$	33
II-3-5	Transformation dans le repère global	34
II-3-6	Assemblage	37
II-3-6-0	Définition	37
II-3-6-1	Assemblage par expansion des matrices élémentaire	37
II-3-6-2	Expansion de $[k]$	38
II-3-6-3	Expansion de $\{F\}$	39
II-3-7	Conditions aux limites	40
II-3-7	Efforts résultants et contraintes	41

## Chapitre III

### *Calcul des efforts aérodynamiques*

<b>III - 0</b>	<b>Introduction</b>	42
<b>III - 1</b>	<b>La méthode de la ligne portante</b>	43
III -1-1	Principe	43
III -1-2	Distribution elliptique de portance	47
III -1-3	Distribution de portance quelconque	49

III -1-4 Effet du facteur de forme .....	52
<b>III – 2 Méthode des panneaux .....</b>	<b>53</b>
III -2-1 Introduction .....	53
III -2-2 Equations de base .....	53
III -2-3 La méthode avec tourbillons par formulation de ligne de courant .....	56
III -2-3-1 Discrétisation .....	56
III -2-3-2 Equations de base .....	57
III -2-3-3 Conditions aux frontières .....	58
III -2-3-4 Calcul de la distribution du gradient de pression .....	58
III -2-3-5 Calcul du coefficient de la portance .....	58
III -2-3-6 Algorithme du calcul .....	59
<b>III-3 Couplage ligne portante - méthode des panneaux .....</b>	<b>60</b>
 <b><u>Chapitre IV</u></b>	
<b><i>Programmation Eléments Finis</i></b>	
<b>IV.0 Introduction .....</b>	<b>62</b>
<b>IV-1 Génération du Maillage .....</b>	<b>62</b>
IV-1-1 Génération des profils NACA .....	63
IV-1-2 la génération des raidisseurs de la première nervure .....	64
IV-1-3 la génération de toutes les nervures .....	64
IV-1-4 la génération des longerons .....	65
<b>IV-2 Intégration numérique .....</b>	<b>66</b>
IV-2-1 Introduction .....	66
IV-2-2 Méthode de Gauss Legendre .....	66
IV-2-3 Polynôme de Legendre .....	67
IV-2-4 Procédures de la méthode .....	68
<b>IV-3 Résolution des systèmes linéaire .....</b>	<b>69</b>
IV -3-1 METHODES DIRECTES .....	69
IV -3-1-1 Introduction .....	69
IV -3-1-2 Triangulation ou décomposition de [K] .....	69
IV -3-1-3 Obtention de (U) .....	69
III-3-1-4 Méthode de KHALETSKI .....	70
IV-3-2 Méthodes itératives .....	72
IV-3-2-1 Introduction .....	72
IV-3-2-2 Principe .....	72
IV -3-2-3 Méthode de relaxation .....	74

<b>IV- 4 PROGRAMMATION AVEC DIGITAL VISUAL FORTRAN 6</b> .....	75
IV- 4-0 Introduction .....	75
IV- 4 -1 Console application .....	75
IV- 4-2 Quick Win application .....	75
IV- 4 -3 Windows application .....	76
IV- 4 -4 Static library (.LIB) .....	76
IV- 4 -5 Dynamic linking libraries (DLL) .....	76

## **Chapitre V**

### ***Applications***

<b>V – 1 Application 01:</b> .....	77
IV-1-1 V -1-1 Le cahier de charge : .....	77
V-1-2 Calcul du Maillage : .....	78
V-1-2-1 Maillage du profil NACA .....	78
V-1-2-2 Maillage de la 1 <sup>ère</sup> nervure .....	78
V-1-2-3 Maillage de l'aile .....	79
V-1-3 Calcul aérodynamique : .....	79
V-1-3-1 Résultats de la méthode de la ligne portante .....	79
V-1-3-2 Résultats de la méthode des panneaux .....	81
V 1-4 Calcul structural .....	83
<b>V –2 Application 02 (effet de l'allongement) :</b> .....	85
V -1-1 Le cahier de charge : .....	85
V-2-2 Calcul du Maillage : .....	86
V-2-2-1 Maillage du profil NACA .....	86
V-2-2-2 Maillage de la 1 <sup>ère</sup> nervure .....	86
V-2-2-3 Maillage de l'aile .....	87
V-2-3 Calcul aérodynamique : .....	87
V-2-3-1 Résultats de la méthode de la ligne portante .....	87
V-2-3-2 Résultats de la méthode des panneaux .....	89
V 2-4 Calcul structural .....	91
➤ <b>Conclusion</b>	
➤ <b>Bibliographe</b>	
➤ <b>Annexes</b>	

## INTRODUCTION

Pour construire un nouvel aéronef, on doit passer par plusieurs étapes dont la plus importante est la conception.

Cette étape comporte plusieurs études tel que : l'étude aérodynamique et structurale. Ces études sont basées sur les simulations et les calculs numériques pour l'obtention des paramètres de l'aéronef dont le grand avantage est de proposer plusieurs configurations pour un seul aéronef et choisir la meilleure configuration à utiliser, pour accéder aux calculs numériques ; l'esprit humain ne peut comprendre en une seule opération la complexité de son environnement et celle de ses propres créations.

C'est pourquoi le double processus de subdivision de tous les systèmes en composants élémentaires ou « éléments », dont le comportement peut être facilement appréhendé, et de reconstruction du système initial à partir de ses composants, est un moyen naturel d'étude utilisé par l'ingénieur, le scientifique, ou même l'économiste.

Dans de nombreuses situations, un modèle adéquat peut être obtenu en utilisant un nombre fini de composants bien définis. Nous désignerons de tels problèmes comme des problèmes discrets. Dans d'autres situations, la subdivision en composants élémentaires doit être poursuivie indéfiniment et le problème ne pourra être bien défini que par l'usage de la fiction mathématique de l'infinitésimal.

Ces situations conduisent à des systèmes d'équations différentielles ou des systèmes équivalents qui mettent en jeu un nombre infini d'éléments. Nous désignerons de tels problèmes comme des problèmes continus. Depuis l'apparition des calculateurs électroniques, les problèmes discrets peuvent être en général résolus directement même si le nombre d'éléments est très grand. Dans la mesure où la capacité mémoire de tous les ordinateurs est finie, les problèmes continus ne pourront être résolus exactement que par des opérations mathématiques.

A ce stade, les techniques mathématiques existantes limitent habituellement les possibilités de résolution exacte à des situations extrêmement simplifiées.

Pour surmonter l'impossibilité de résoudre des problèmes continus réalistes, différentes méthodes de discrétisation ont été proposées à la fois par des ingénieurs et par des mathématiciens.

Toutes ces méthodes impliquent une approximation dont on espère qu'elle approche aussi précisément que possible la solution du problème continu lorsque le nombre des variables discrètes augmente.

Les mathématiciens et les ingénieurs ont proposé des approches différentes de la discrétisation des problèmes continus. Les premiers ont développé des techniques générales applicables directement aux équations différentielles du problème.

Les ingénieurs, quant à eux, ont souvent adopté une approche plus intuitive des problèmes. Ils ont introduit une analogie entre éléments réels discrets d'une part, et parties finies d'un milieu continu, d'autre part.

C'est à partir de l'approche analogique des ingénieurs que le terme « éléments finis » est né. Ce terme d'éléments finis implique l'utilisation directe d'une méthodologie générale applicable aux structures discrètes, ce qui est de la plus haute importance, à la fois du point de vue théorique et en ce qui concerne la pratique du calcul. Cela permet conceptuellement une compréhension plus approfondie des problèmes et pratiquement, une approche unifiée d'un grand nombre de questions et des procédures de calcul générales.

A vertical dashed line consisting of 20 short, thick black rectangular segments arranged in a column on the left side of the page.

# Chapitre I

## Chapitre I

### Généralité

#### I-0 Introduction

L'aile portante d'envergure finie est un élément très important, on l'utilise dans le domaine aérospatial (aile d'avion, pales d'hélicoptère, ailes d'une navette spatiale),

En construction navale (pales d'hélices de bateaux, gouvernails, bateau à ailes portantes),

En construction mécanique (aérogénérateur : pale des turbines à vent), pour produire la force portante, les ailes ont une forme spéciale et elles sont profilées.

Ce qui contribue en même temps à la diminution du frottement avec le fluide, c'est-à-dire à la réduction de la traînée.

Dans ce chapitre, on donne les différentes définitions concernant l'aérodynamique de l'aile (Efforts, moments, pressions, ...) et l'architecture de l'aile (longerons, nervures, revêtement, ...).

On présente les différents types des voilures et leurs domaines d'utilisations

#### I-1 Définition d'une aile

L'aile portante d'envergure finie est l'élément qui crée la force de sustentation, c'est à dire une force verticale permettant d'équilibrer le poids de l'avion.

Cette force est due à la différence de pression qui s'établit entre les deux côtés de l'aile. (Une surpression sous l'aile, à l'**intrados**, et surtout une forte dépression au dessus à l'**extrados**.) (Figure 1-1)

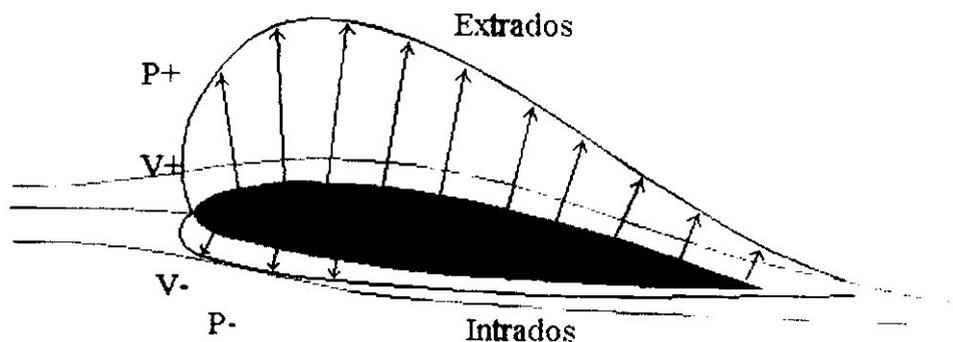


Figure 1-1 : Principe de la création de portance par une aile

Pour remplir cette fonction, il y a deux possibilités :

- Soit déplacer un grand volume d'air à petite vitesse : c'est le principe de l'aile battante qui est le mode de vol des oiseaux et des insectes, qui a été la première approche suivie en aéronautique et qui redevient d'actualité ces dernières années pour des applications au vol de drones miniatures en espace clos .
- Soit déplacer un petit volume d'air à grande vitesse : c'est le principe de l'aile fixe, qui est le principe de vol de tous les avions.

**I-2 Caractéristiques aérodynamiques d'une aile**

Pour l'étude des caractéristiques de l'écoulement de l'air autour des ailes on peut servir de l'écoulement plan autour du profil de l'aile, donc en deux dimensions.

Nous allons tout d'abord donner les principales définitions utiles par la suite, pour les profils Deux dimensions et pour les ailes trois dimensions.

**I-2-1 Profil 2D**

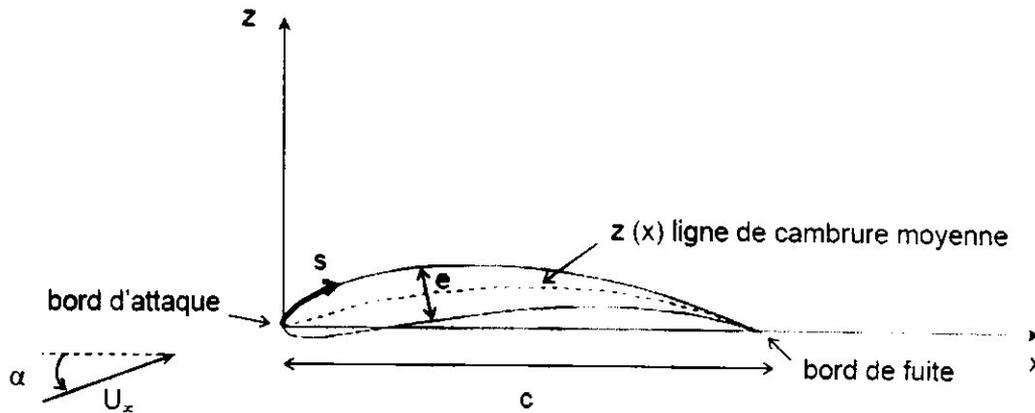


Figure 1-2 : Profil d'aile

On définit pour un profil :

- $C$  : La corde
- $e$  : L'épaisseur
- $z(x)$  : La ligne de cambrure moyenne ou squelette
- $U_\infty$  : La vitesse à l'infini amont
- $\alpha$  : L'angle d'incidence
- $S$  : L'abscisse curviligne.

**I-2-2 Aile 3D**

On définit pour une aile :

- $b$  : L'envergure
- $C_r$  : La corde en pied
- $C_t$  : La corde en bout d'aile
- $S$  : La surface de l'aile.

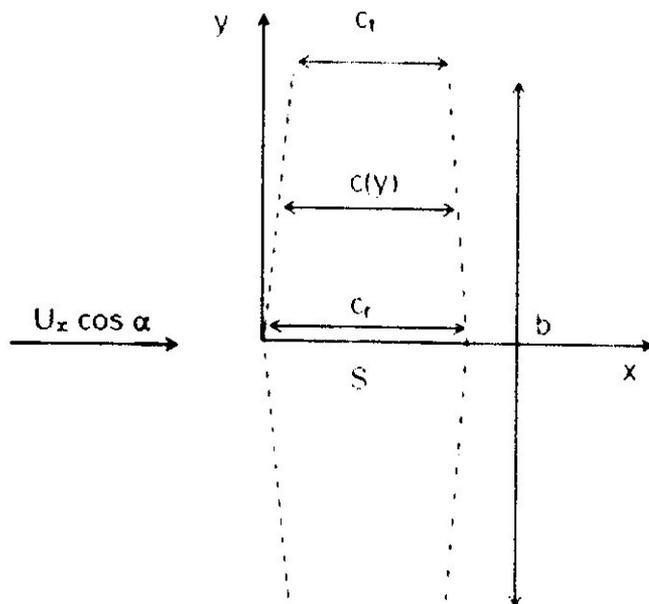


Figure 1-3 : Aile complète

### I-2-3 Définition des forces et moments

#### I-2-3-1 Portance, traînée

Ces notions sont des grandeurs très importantes. Elles modélisent sous forme de vecteur les différentes forces exercées sur le profil.

##### La portance

C'est la force, due à la surpression - dépression, exercée sur le profil lors de son vol, qui est orientée perpendiculairement à l'axe du vent relatif. C'est cette composante de la résultante aérodynamique qui maintient l'avion en l'air.

$$\text{De formule : } L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L$$

L : Force de portance

$\rho$  : Masse volumique du fluide (air à température et pression normales : 1.293 kg/m<sup>3</sup>)

S : Surface de la vue en plan de l'aile en m<sup>2</sup>

V : Vitesse relative en m/s

$C_L$  : Coefficient de portance.

##### La traînée :

C'est la force exercée par le vent relatif sur le profil. Elle a le même axe que le vent relatif. la traînée est donc un obstacle à la vitesse de l'aile car elle le ralentit. La traînée est une source de pertes de performances aérodynamiques.

$$\text{De formule : } D = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D$$

$C_D$  : Coefficient de traînée.

De plus la pression à l'intrados est beaucoup plus importante qu'à l'extrados. En conséquence l'air n'a qu'une envie : passer de l'intrados à l'extrados, pour combler le vide (la nature a horreur du vide). Le passage de l'air du dessous vers le dessus de l'aile crée une déviation des filets d'air, vers l'extérieur d'aile pour l'intrados, et vers l'intérieur pour l'extrados se crée des tourbillons : encore du freinage et de l'énergie perdue (la traînée induite).

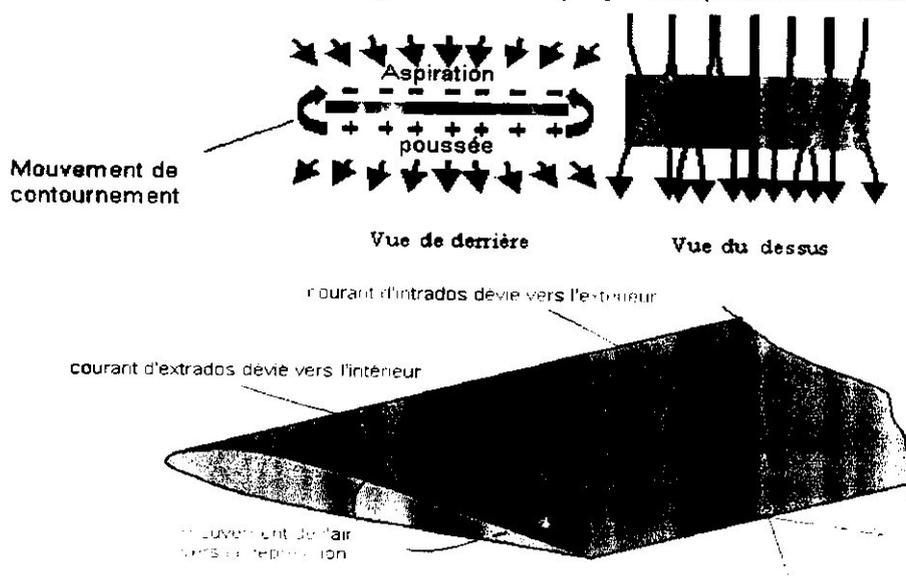


Figure 1-4 : déviation des filets d'air

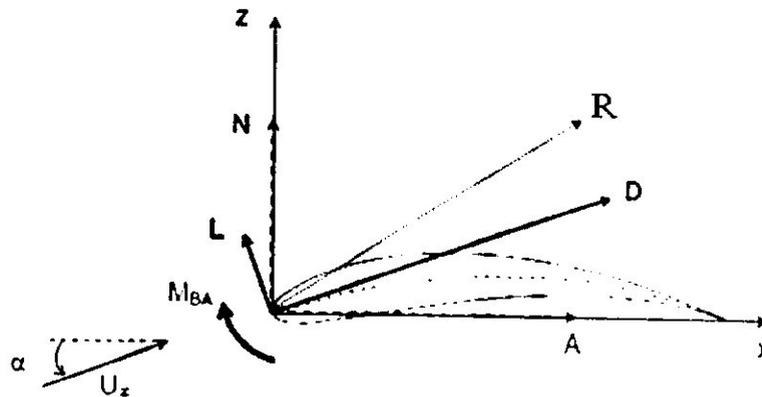


Figure 1-5 : Efforts et moment aérodynamiques

On définit les efforts aérodynamiques suivants :

- A : la force axiale
- N : la force normale
- R : la force résultante
- D : la traînée
- L : la portance
- M<sub>BA</sub> : le moment de tangage de bord d'attaque.

La portance et la traînée peuvent être déterminées à partir des forces axiale et normale connaissant l'angle d'incidence du profil.

$$L = N \cos(\alpha) - A \sin(\alpha)$$

$$D = N \sin(\alpha) + A \cos(\alpha)$$

### I-2-3-2 Moment quart de corde

On définit le moment quart de corde d'un profil comme le moment résultant des efforts aérodynamiques appliqués à  $x = c / 4$ .

$$M'_{BA} = -\frac{c}{4} L' + M'_{c/4} = -x_{cp} L'$$

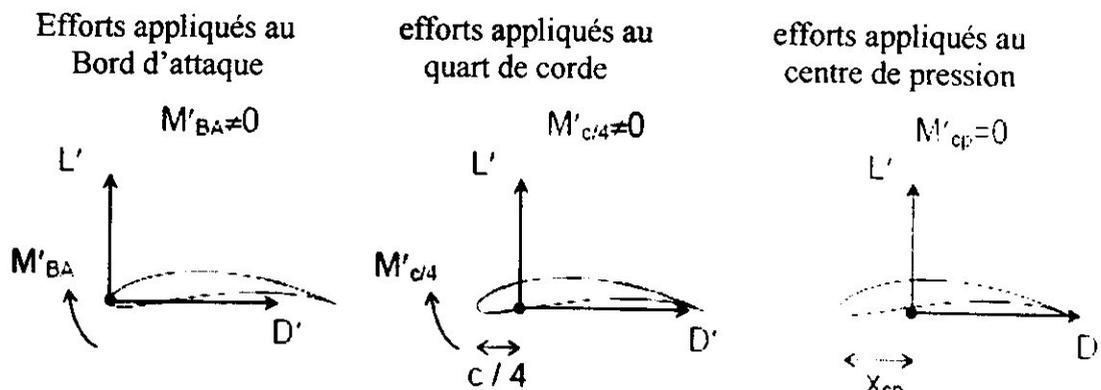


Figure 1-6 : Différents points d'application des efforts aérodynamiques

**Remarque** : pour un profil mince symétrique, le centre de pression est situé au quart de corde.

**I-2-3-3 Forces et moments appliqués à un profil 2D**

Dans le cas d'un profil 2D, ou d'une aile d'envergure infinie, on définit les forces et moments par unité d'envergure ( $b = 1$  m), et on note les forces et moments correspondants. On définit  $p(s)$  la distribution surfacique de pression et  $\tau(s)$  la distribution surfacique de frottement par contrainte de cisaillement visqueux, sur l'intrados (indice i) et l'extrados (Indice e) du profil.

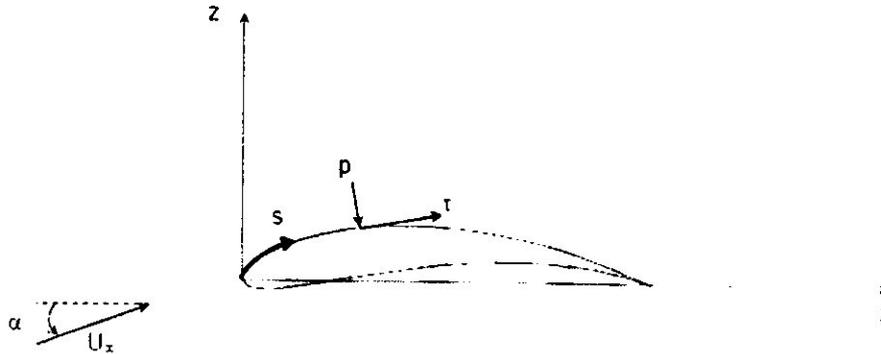


Figure 1-7 : Distribution d'efforts surfaciques

Examinons les efforts appliqués sur un élément de profil, situé côté extrados puis côté intrados

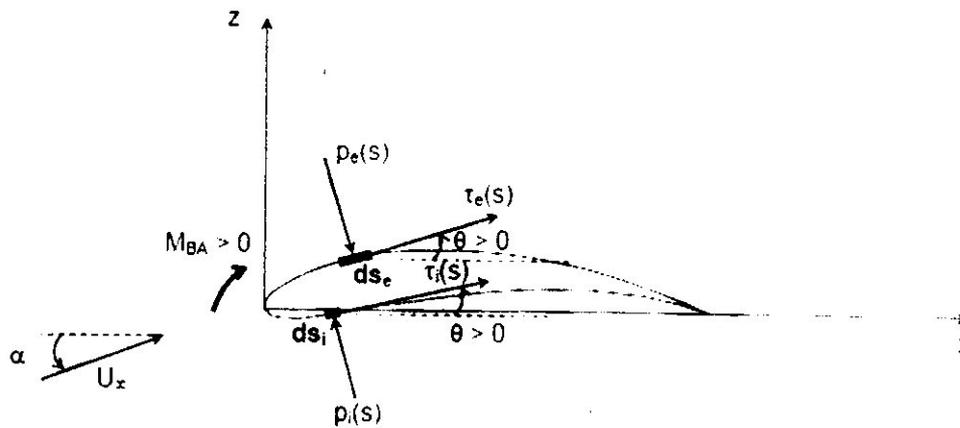


Figure 1-8 Efforts surfaciques côté intrados et côté extrados

Il vient :

- sur l'extrados, pour un élément  $ds_e$  :

$$dN'_e = -p_e \cos \theta ds_e + \tau_e \sin \theta ds_e$$

$$dA'_e = p_e \sin \theta ds_e + \tau_e \cos \theta ds_e$$

- sur l'intrados, pour un élément  $ds_i$  :

$$dN'_i = p_i \cos \theta ds_i + \tau_i \sin \theta ds_i$$

$$dA'_i = -p_i \sin \theta ds_i + \tau_i \cos \theta ds_i$$

Les forces normale et axiale totales par unité d'envergure s'obtiennent en intégrant les forces élémentaires côté extrados et intrados entre le bord d'attaque et le bord de fuite :

$$N' = \int_{BA}^{BF} (-p_e \cos \theta + \tau_e \sin \theta) ds_e + \int_{BA}^{BF} (p_i \cos \theta + \tau_i \sin \theta) ds_i$$

$$A' = \int_{BA}^{BF} (p_e \sin \theta + \tau_e \cos \theta) ds_e + \int_{BA}^{BF} (-p_i \sin \theta + \tau_i \cos \theta) ds_i$$

On déduit la portance et la traînée

$$L' = N' \cos \alpha - A' \sin \alpha$$

$$D' = N' \sin \alpha + A' \cos \alpha$$

Si l'on décompose les forces normale et axiale en une partie provenant de la distribution de pression et une partie provenant de la distribution de frottement :

$$N' = N'_p + N'_\tau$$

$$A' = A'_p + A'_\tau$$

On déduit une décomposition similaire de la traînée :

$$D' = D'_p + D'_\tau$$

Où  $D'_p$  est la traînée de pression et  $D'_\tau$  la traînée de frottement.

De même que pour les efforts, on peut calculer le moment de tangage au bord d'attaque :

- sur l'extrados, pour un élément  $ds_e$  :

$$dM'_{BA,e} = (p_e \cos \theta - \tau_e \sin \theta) x ds_e + (p_e \sin \theta - \tau_e \cos \theta) z ds_e$$

- sur l'intrados, pour un élément  $ds_i$  :

$$dM'_{BA,i} = -(p_i \cos \theta + \tau_i \sin \theta) x ds_i + (-p_i \sin \theta + \tau_i \cos \theta) z ds_i$$

Le moment résultant des efforts appliqués au profil, calculé au bord d'attaque est alors :

$$dM'_{BA} = \int_{BA}^{BF} [(p_e \cos \theta - \tau_e \sin \theta) x + (p_e \sin \theta - \tau_e \cos \theta) z] ds_e \\ + \int_{BA}^{BF} [-(p_i \cos \theta + \tau_i \sin \theta) x + (-p_i \sin \theta + \tau_i \cos \theta) z] ds_i$$

#### I-2-3-4 Efforts aérodynamiques et moments 3D

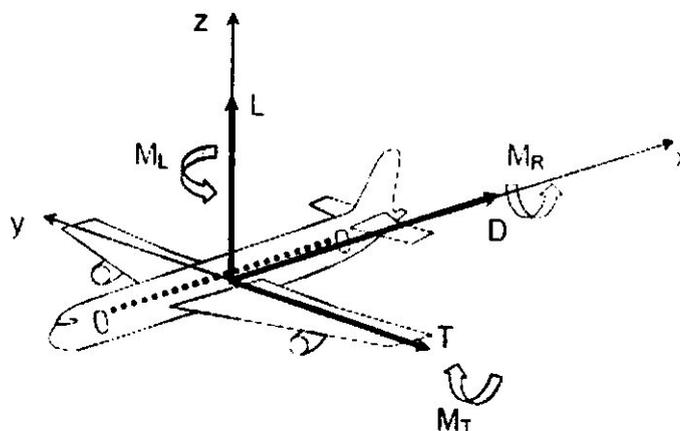


Figure 1-9 : Efforts et moments aérodynamiques 3D

Dans l'espace, on définit les efforts aérodynamiques et les moments suivants :

<b>D</b>	:	la traînée
<b>L</b>	:	la portance
<b>T</b>	:	la dérive
<b>M<sub>R</sub></b>	:	le moment de roulis
<b>M<sub>T</sub></b>	:	le moment de tangage
<b>M<sub>L</sub></b>	:	le moment de lacet.

Dans le cas 2D, il ne reste, comme nous l'avons vu précédemment, que deux forces (traînée et portance) et un moment (moment de tangage). Ce moment pourra être appliqué, par exemple, au bord d'attaque du profil

#### I-2-4 Coefficients aérodynamiques

Les différents coefficients aérodynamiques sont définis à partir de la pression dynamique

$$q_{\infty} = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2$$

##### I-2-4-1 Coefficients d'une aile

Pour une aile 3D, on définit les coefficients par rapport à la surface de l'aile

- le coefficient d'effort axial :  $C_A = \frac{A}{q_{\infty} S}$
- le coefficient d'effort normal :  $C_N = \frac{N}{q_{\infty} S}$
- le coefficient de portance :  $C_L = \frac{L}{q_{\infty} S}$
- le coefficient de traînée :  $C_D = \frac{D}{q_{\infty} S}$
- le coefficient de moment :  $C_{M.BA} = \frac{M_{BA}}{q_{\infty} S_c}$

##### I-2-4-2 Coefficients d'un profil

Pour un profil 2D, on définit les coefficients par rapport à la corde du profil (pour une longueur d'aile unité) :

- le coefficient d'effort axial :  $C_{A'} = \frac{A'}{q_{\infty} S}$
- le coefficient d'effort normal :  $C_{N'} = \frac{N'}{q_{\infty} S}$
- le coefficient de portance :  $C_{L'} = \frac{L'}{q_{\infty} S}$
- le coefficient de traînée :  $C_{D'} = \frac{D'}{q_{\infty} S}$
- le coefficient de moment :  $C_{M'.BA'} = \frac{M_{BA'}}{q_{\infty} S_c}$

**I-2-4-3 Coefficients de pression et de frottement**

- le coefficient de pression :  $C_p(s) = \frac{P(s) - P_\infty}{q_\infty}$
- le coefficient de frottement :  $C_f(s) = \frac{\tau(s)}{q_\infty}$

Contrairement aux coefficients d'effort et de moment, qui sont globaux, ces deux coefficients sont locaux et sont fonction de la position sur le profil.

**I-2-4-4 Finesse d'un profil ou d'une aile**

La finesse  $f$  d'un profil ou d'une aile est le rapport entre le coefficient de portance et le coefficient de traînée :

$$f = \frac{c_L}{c_D} = \frac{L}{D}$$

La finesse est fonction de la forme du profil ou de l'aile, mais également de l'angle d'incidence. Pour une aile d'avion, elle est de l'ordre de 25 et atteint 50 pour une aile de planeur. La finesse  $f$  correspond aussi au rapport entre la distance parcourue horizontalement et la distance parcourue verticalement pour un vol plané sans vent extérieur.

**I-2-4-5 Les coefficients de portance et de traînée**

D'après les notations précédentes,  $C_{p,e}$  est le coefficient de pression sur l'extrados et  $C_{p,i}$  le coefficient de pression sur l'intrados. De même l'on désigne par  $C_{p,1}$  le coefficient de pression sur la partie amont aux maxima d'épaisseur de l'aile ( $z_e$  côté extrados et  $z_i$  côté intrados) et  $C_{p,2}$  le coefficient de pression sur la partie aval aux maxima d'épaisseur de l'aile.

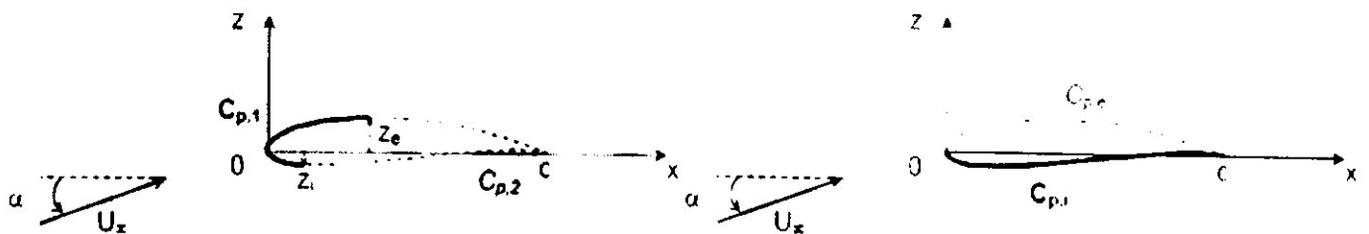


Figure 1-10 : Distribution du coefficient de pression

En négligeant l'effet du frottement, on peut, connaissant la distribution du coefficient de pression  $C_p$  sur le profil, obtenir les coefficients d'effort axial et d'effort normal :

$$C_{N'} = \int_0^1 C_{p,i} \left( \frac{x}{c} \right) d \left( \frac{x}{c} \right) - \int_0^1 C_{p,e} \left( \frac{x}{c} \right) d \left( \frac{x}{c} \right)$$

$$C_{A'} = \int_{\frac{z_i}{c}}^{\frac{z_e}{c}} C_{p,1} \left( \frac{z}{c} \right) d \left( \frac{z}{c} \right) - \int_{\frac{z_i}{c}}^{\frac{z_e}{c}} C_{p,2} \left( \frac{z}{c} \right) d \left( \frac{z}{c} \right)$$

D'où l'on déduit l'expression des coefficients de portance et de traînée :

$$C_L' = C_{N'} \cos \alpha - C_{A'} \sin \alpha$$

$$C_D' = C_{N'} \sin \alpha + C_{A'} \cos \alpha$$

**I-2-4-6 Centre de pression**

Le centre de pression d'un profil est le point autour duquel le moment résultant des efforts aérodynamiques appliqués au profil est nul :

$$M'_{cp} = 0$$

Par rapport au moment des efforts calculé au bord d'attaque du profil, la position du centre de pression est donnée par la relation :

$$X_{cp} = -\frac{M'_{BA}}{N'}$$

Pour de faibles angles d'incidence,  $\sin \alpha \approx 0$  et  $\cos \alpha \approx 1$  donc  $N' \approx L'$

**Remarque** : la position du centre de pression dépend de l'angle d'incidence du profil.

**I-2-4-7 Centre aérodynamique**

Le centre aérodynamique d'un profil est le point du profil pour lequel le moment est indépendant de l'angle d'incidence :

$$M'_{ca}(\alpha) = cst$$

**I-3 Caractéristiques géométriques d'une aile**

Les caractéristiques géométriques importantes d'une aile d'avion sont sa forme en plan et son profil aérodynamique, d'après leur formes en plan, on peut répartir les ailes d'avion en plusieurs catégories : rectangulaire, elliptique, trapézoïdale (employées en régime subsonique) Triangulaire (ou Delta), gothique ou double gothique (employées en régime supersonique et hypersonique).

De plus, on tien compte de la surface  $S$ , de sa projection dans le plan et de son envergure  $b$  qui représente la distance entre les extrémités de l'aile.

Le paramètre géométrique le plus important pour caractériser une aile est son allongement, il s'agit du carrée de l'envergure  $b$  et de la projection de la surface de l'aile  $S$

**I-3-1 Les types de voilures (selon leurs formes dans le plan):**

- **Voilure rectangulaire**

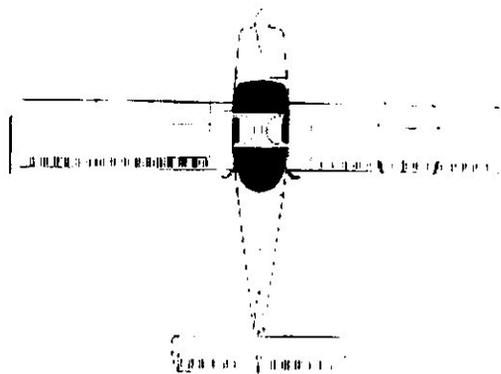


Figure 1-11 : aile rectangulaire

Ce type de voilure est, de toute évidence, le modèle le plus simple de voilure.

Il est très facile à produire. Malheureusement, il induit beaucoup de traînée. Mais ce type de voilure a l'avantage de décrocher progressivement à partir de l'emplanture. Ce type de voilure est rencontré sur les avions de voltige et des avions de la Seconde guerre mondiale, mais aussi sur les avions monoplans, biplans et triplans de la Première guerre mondiale.

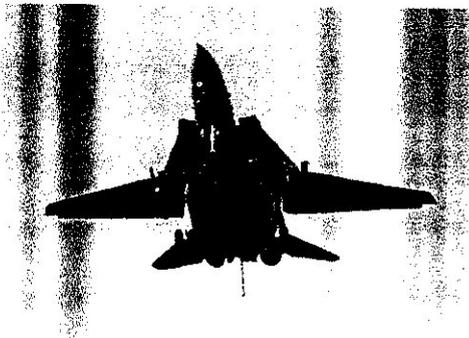
- Voilure en flèche



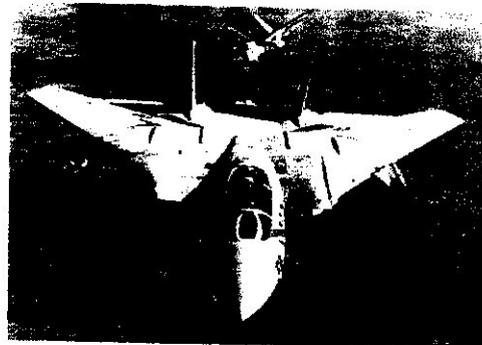
Figure 1-12 : voilure en flèche (MIG 29 SMT)

Quand on parle de flèche, on parle implicitement d'angle. L'angle de flèche est l'angle entre l'aile de l'avion et une ligne imaginaire perpendiculaire au fuselage de l'avion.

- Voilure à géométrie variable



F-14 flèche maximale

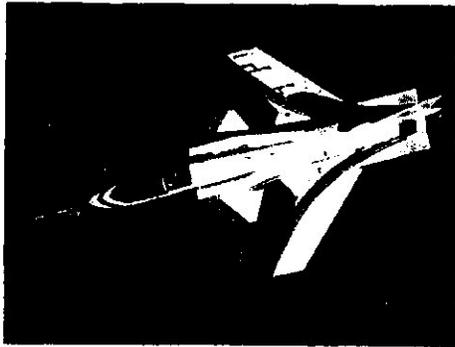


F-14 flèche minimale

Figure 1-13 : voilure à géométrie variable

L'avantage de ce type de voilure est d'avoir deux "types" de vol. Lorsque la flèche est minimale (ailes déployées), l'appareil vole à des vitesses subsoniques (inférieur a Mach 0.8) et transsoniques (de Mach 0.8 à Mach 1.3). De son côté, la flèche maximale (ailes repliées) est optimisée pour les vitesses importantes : les vitesses supersoniques (Mach 1.3) L'avion tire ainsi parti des deux types de voilure.

- Voilure à flèche inversée



X-29



SU 47

Figure 1-15 : voilure à flèche inversée

Aussi appelé FSW (Forward Sweep Wing en anglais), cette configuration est relativement rare, peu d'appareils utilisent la flèche inversée.

Nous pouvons citer comme exemple, le prototype américain X-29 et plus récemment, la firme Sukhoï a utilisé cette configuration pour son démonstrateur de chasseur de cinquième génération : le Su-47

Ce type de voilure augmente la maniabilité par rapport à une aile en flèche classique de surface alaire analogue. Cette aile est optimisée pour les vitesses transsoniques.

Elle permet d'augmenter le rayon d'action de l'appareil et de diminuer la distance de décollage et d'atterrissage.

De même, elle diminue un peu la signature radar de l'appareil.

Mais le gros inconvénient d'une telle voilure est sa grande instabilité. Pour avoir une telle voilure, il faut disposer de commandes de vol dernier cri, beaucoup plus performantes que les CDVE actuelles, engendrant un problème de coût financier.

- Voilure Delta



Figure 1-16 : voilure Delta (Mirage 2000)

Ayant une surface alaire plus importante, la charge alaire (charge par  $m^2$  de voilure) est donc moins importante. En configuration lisse (sans armement) l'avion peut faire des évolutions plus serrées car meilleure répartition des efforts sur les ailes. De même, l'aile delta décale le centre de gravité de l'avion vers l'arrière, augmentant la distance avec le foyer de l'avion. Or, c'est cette distance qui détermine la stabilité de l'appareil. Plus elle est grande, plus l'avion est instable. Ainsi, une aile delta est plus instable qu'une aile en flèche permettant donc d'avoir une excellente maniabilité (il est à noter que le Mirage 2000 est l'un des avions de combat les plus difficiles à "accrocher" au monde)

La surface portante est elle aussi plus importante, permettant de repousser les limites des domaines de vol. En particulier, la vitesse de décrochage est plus faible sur les avions delta que sur les avions à flèche de la même génération.

- Aile volante

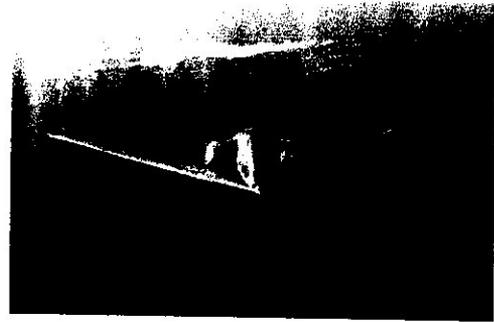


Figure 1-17 : Aile volante (B-2 Spirit)

L'aile volante a l'avantage de diminuer la consommation de carburant, car la résistance à l'air est beaucoup plus faible que sur un avion classique (ceci est dû à l'absence d'empennage vertical) de même, la surface portante de l'appareil est très élevée, répartissant l'effort alaire d'une bien meilleure façon que sur les avions classiques. Ceci permet de diminuer le poids total de l'appareil.

Un autre gros avantage est la faible signature radar de l'appareil.

Le gros problème de ce genre de voilure est son instabilité aérodynamique qui implique que l'appareil soit contrôlé par voie électronique pour maintenir l'équilibre de l'appareil. Cette configuration implique l'utilisation de tuyères orientables, de plus en plus courantes sur les avions de combat modernes (SU-27, F-22, ...), mais d'un coût assez élevé.

Cette configuration a beaucoup d'avenir car les constructeurs civils pensent à créer un avion de ligne en forme d'aile volante. Les économies de carburant et le nombre important de passagers transportables (jusqu'à 900) sont en faveur d'un développement de cette technologie. Mais le problème de l'électronique embarquée fait dire aux spécialistes que l'aile volante civile ne sera pas fiable avant 15 à 20 ans

### I-3-2 Architecture de l'aile

Généralement l'aile est constituée par :

- Les longerons
- Les nervures
- Le revêtement

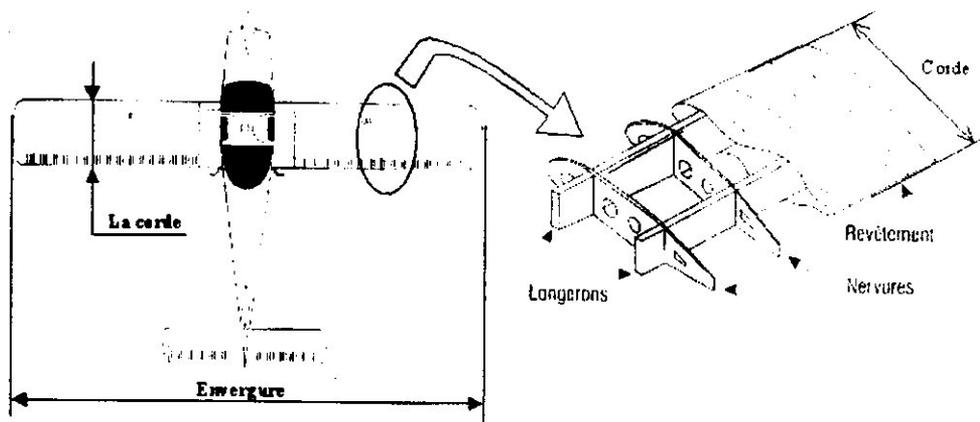


Figure 1-18 : Architecture de l'aile

**1-3-2-1 Longerons**

Le longeron est Moyens de tenir les efforts verticaux ou horizontaux provoquant un cisaillement. Il peut être réaliser par :

- **une âme ou revêtement travaillant** (cas des longerons et fuselages coques) :

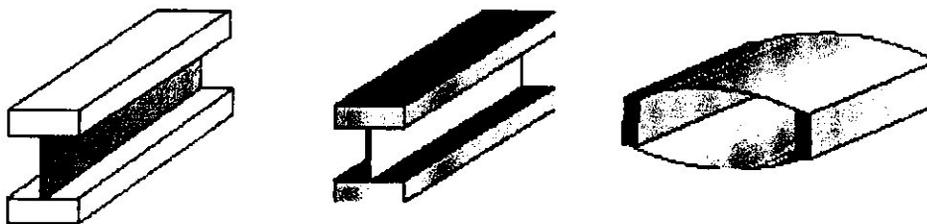


Figure 1-19-a : longerons coque

L'âme, pour travailler correctement sans plissement, est maillée par des raidisseurs placés souvent en face des nervures pour un longeron d'aile.

- **une structure triangulée** (cas des fuselages dits *treillis*) :

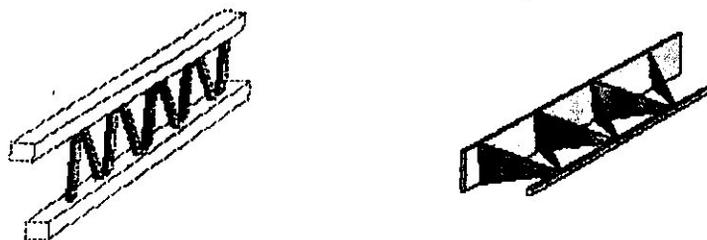


Figure 1-19-b : longerons triangulée

Le principe est identique à celui des fuselages tubulaires métalliques  
Deux principes sont couramment utilisés :

- longeron encaissant uniquement la flexion
- longeron encaissant la flexion et la torsion

- **Uniquement la flexion :**

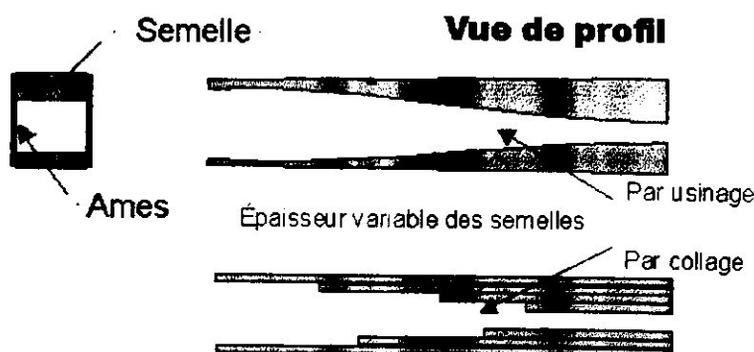


Figure 1-20 : longerons en flexion

La largeur est souvent conservée constante pour faciliter la fabrication et montage des nervures. La semelle supérieure a une section plus importante que la semelle inférieure car le bois n'aime pas la compression.

➤ Flexion et Torsion :

**Vue en plan**



Epaisseur constante des semelles

Figure 1-20 : longérons en torsion

L'épaisseur des semelles est constante. Les âmes et revêtement forment le caisson de torsion.

**I-3-2-2 Nervures**

Les nervures sont les éléments qui donnent la forme de l'aile et renforcent le revêtement. Elles prennent la forme du profil utilisée pour construire l'aile. Pour leur réalisation plusieurs principes sont en concurrence :

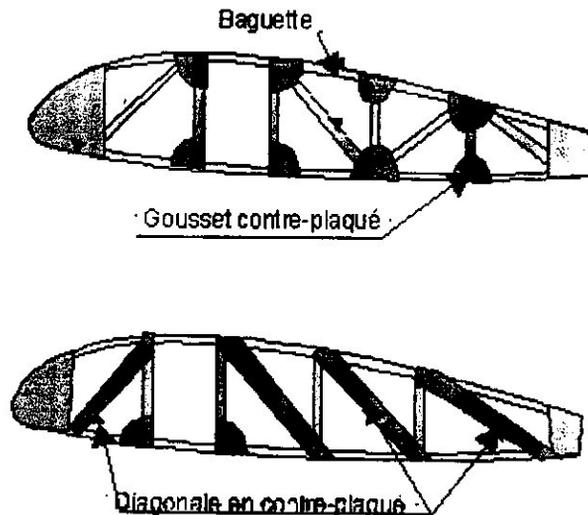


Figure 1-21-a : nervure triangulée

Ce procédé donne sensiblement une égale résistance en vol normal et inversé. Fabrication plus rapide, mais le sens des diagonales est privilégié pour travailler en traction.

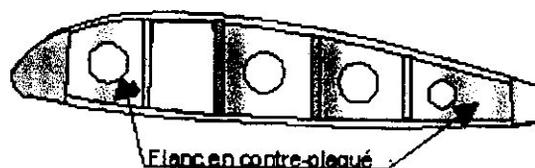


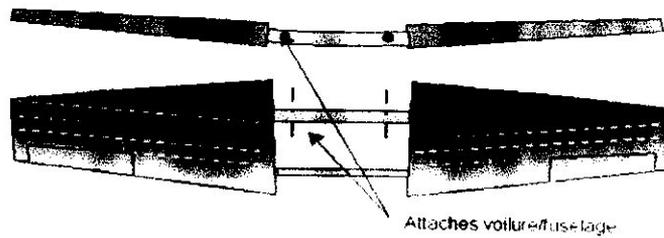
Figure 1-21-b : nervure coque

Solution simple sans diagonale, mais plus lourde. Valable pour les petites nervures.

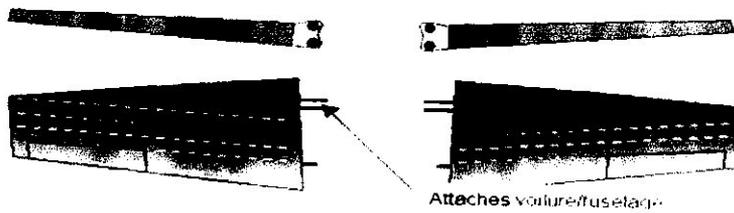
### I-3-2-3 Ensemble voilure

Deux principes :

- **Ailes d'une seule pièce :**



- **Demi -voilure :**



Cette solution impose une mise en forme du longeron en accord avec le profil.  
Le revêtement de voilure assure le rôle de gousset et transmet les charges sur les faces inférieure et supérieure du longeron.



# Chapitre II

## Chapitre II

### Calcul de la structure de l'aile

#### II-1 Modélisation de l'aile :

On prend l'aile rectangulaire représentée par la figure 2-1

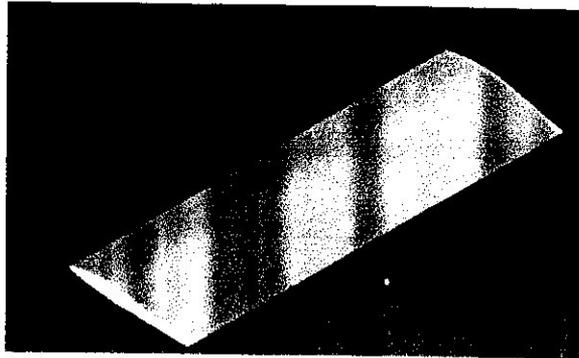


Figure 2-1 : Aile rectangulaire

Le calcul de la structure de l'aile ne prend pas en charge le revêtement de l'aile, puisque sa masse est négligeable devant la masse des longerons et nervures, dont le seul rôle du revêtement de point de vue structure ; est de transférer les efforts aérodynamiques à la structure.

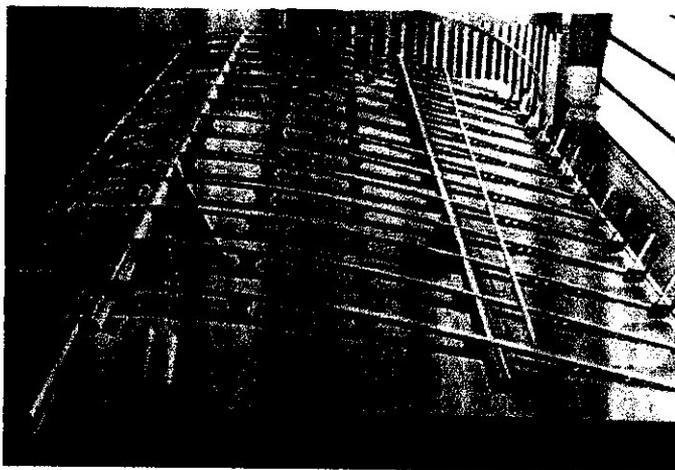


Figure 2-2 : Structure d'une aile rectangulaire

Donc notre model ne prend pas le revêtement en charge, on modélise la structure présentée dans la figure 2-2, on a utiliser des élément de poutres tridimensionnels pour construire la structure de l'aile quelque soit la position de l'élément, et cela comporte les longerons et les nervures

Notre model de l'aile d'avion est présenté par la figure 2-3

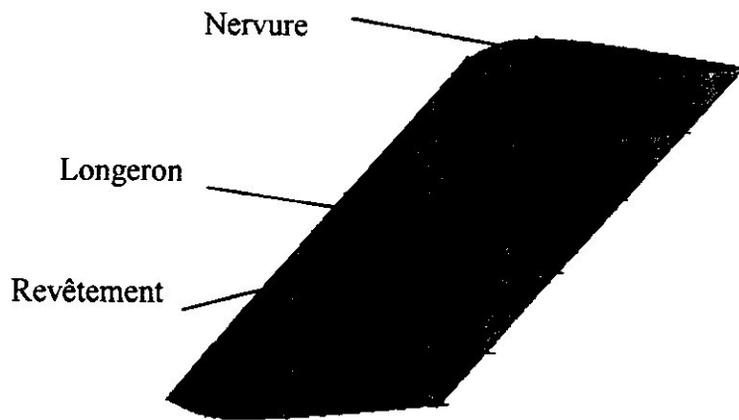


Figure 2-3 : Modélisation de l'aile

L'emplacement des éléments finis dans l'aile est présenté par la figure 2-4

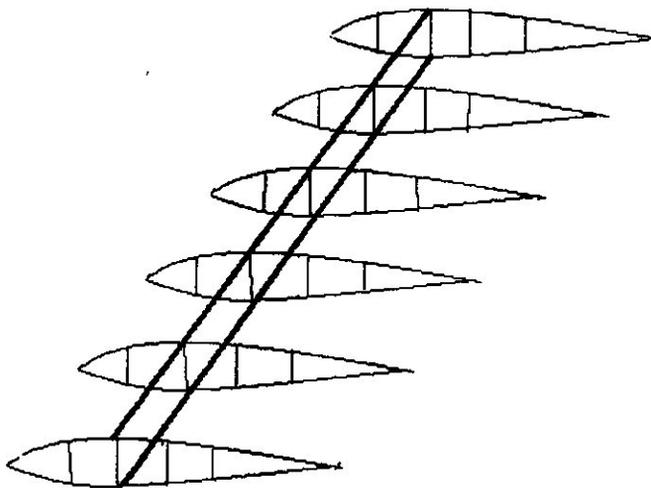


Figure 2-4 modèle élément fini de l'aile

La suite de ce chapitre est divisée en deux sections :

- La première section : est consacrée pour la présentation théorique de l'élément fini de Poutre droite tridimensionnelle, et les différentes formules qui concernent cet élément.
- La deuxième section : est consacrée pour l'adaptation de la méthode des éléments finis Et le calcul des matrices et vecteurs élémentaires, Ainsi leur assemblage et leur transformation dans l'espace de l'aile

## II-2 Élément de poutre droite tridimensionnelle

Cette section est consacrée à la présentation :

- Des hypothèses cinématiques qui permettent d'établir l'expression du principe des travaux virtuels et de retrouver toutes les relations qui caractérisent la théorie des poutres en membrane, Flexion/Cisaillement transversal et Torsion.
- D'éléments finis de poutres droites tridimensionnelles où l'on superpose les effets de membrane, de flexion dans deux plans mutuellement orthogonaux et de torsion autour d'un axe droit définissant la poutre.

La section II-3 est consacrée aux poutres à sections pleines ou fermées où les déformations et contraintes axiales dues au gauchissement des sections sont négligées.

On établit d'abord la cinématique virtuelle selon les hypothèses des sections droites et selon l'hypothèse de torsion libre de Saint-Venant.

On établit directement les matrices de rigidité et de masse ainsi que le vecteur des charges équivalentes d'un élément à 6 degrés de libertés par noeud en utilisant les résultats des sections : II-1 et II-2. Nous abordons également les questions relatives aux transformations des variables et à l'assemblage dans le repère global.

### II-2-1 Généralités

Une poutre à 6 degrés de liberté par noeud (tridimensionnelle) est un solide orienté dans la direction  $x$  (locale), d'origine  $O$ , dont les dimensions dans le plan  $yoz$  normal à  $x$  sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinale  $x$ .

Il est fréquent et commode de considérer  $x$  comme l'axe neutre,  $y$  et  $z$  comme axes principaux d'inertie. Nous considérons dans la suite un axe  $x$  droit et des caractéristiques géométrique et matérielles constantes en  $x$  : (fig. 2-5).

Le découplage des effets de flexion et de torsion est réalisé lorsque les forces résultantes (efforts tranchants) suivant  $y$  et  $z$  passent par le point  $C$  ; appelé centre de cisaillement. Le centre de cisaillement est également appelé centre de torsion ou centre de flexion, et la droite, lieu des points  $C$ , est appelée axe de flexion ou axe élastique (fig. 2-5).

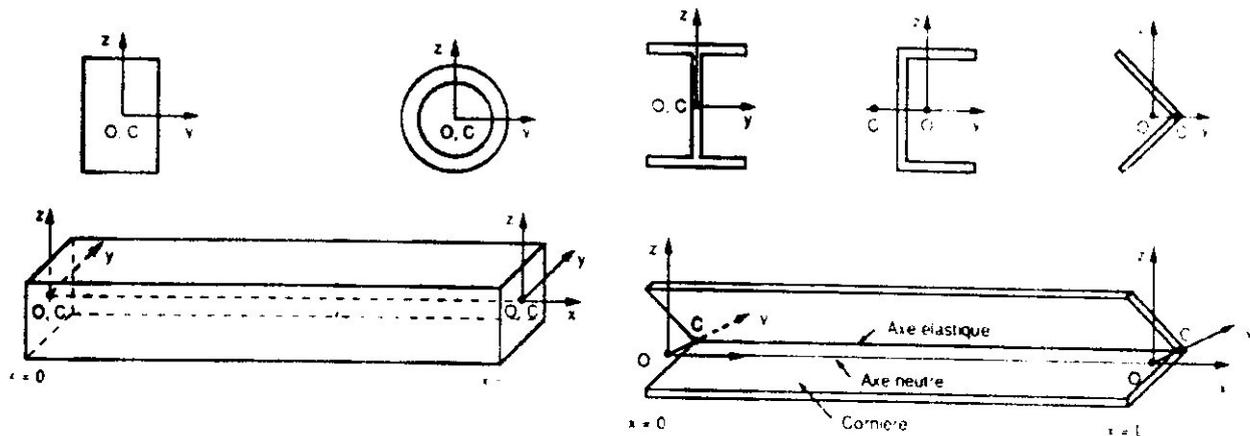
Nous considérons que le comportement d'une poutre tridimensionnelle résulte de la Superposition des effets suivants:

- Membrane suivant  $X$  : déplacement  $u(x)$  et effort normal  $N(x)$  en  $O$
- Flexion autour de  $Y$  (dans le plan  $xz$ ) : déplacement  $w(x)$  et rotation  $\theta_y(x)$ , Effort tranchant  $T_z(x)$  en  $C$  et moment de flexion  $M_y(x)$
- Flexion autour de  $Z$  (dans le plan  $xy$ ) : déplacement  $V(x)$  et rotation  $\theta_z(x)$ , Effort tranchant  $T_y(x)$  en  $C$  et moment de flexion  $M_z(x)$
- torsion autour de  $X$ : rotation  $\theta_x(x)$  et taux de rotation  $\theta_{x,x}$  moment de torsion  $M_x(x)$  et bimoment  $M_\omega(x)$ .

Les variables cinématiques (réelles et virtuelles) dépendent des hypothèses retenues  
(En plus de l'hypothèse d'indéformabilité de la section)

- dans le modèle de flexion avec prise en compte des effets de CT (hypothèses des sections droites), les variables  $\theta_x$  et  $\theta_y$  (rotations autour des axes y et z) sont des Variables indépendantes (fig. 2-5);
- dans le modèle de flexion où les effets de CT sont négligés:  

$$\theta_y = -w_{,x} \quad \text{Et} \quad \theta_z = v_{,x} \quad (2-2-1)$$
- dans le modèle de torsion libre suivant les hypothèses de Saint-Venant, le gauchissement est indépendant de x,  $\theta_{x,x} = \bar{\theta}$  est constant et il n'y a pas de contraintes axiales  $\sigma_x$  (donc pas de bimoment  $M_\omega$ ) dues à la torsion



a) Sections pleines ou fermées  
(Avec O et C confondus).

b) Sections ouvertes à parois minces.

O: centre de graviter  
C: centre de cisaillement  
Y et Z: axes principaux d'inertie

Fig.2-5 - Poutre droite tridimensionnelle.

Dans le cas des poutres isotropes ou composites en flexion, l'axe de référence x, d'origine O, est défini comme étant l'axe neutre si :

$$H_{mfy} = \int_A E(y, z) z dA = 0 \quad (dA = dydz) \quad (2-2-2)$$

$$H_{mfz} = \int_A E(y, z) y dA \quad (2-2-3)$$

O est aussi le centre de gravité si:

$$\int_A \rho(y, z) z dA = \int_A \rho(y, z) y dA \quad (2-2-4)$$

Les axes  $y$  et  $z$  seront appelés axes principaux d'inertie si le produit d'inertie généralisé est nul:

$$\int_A E(y, z) yz dA = 0 \quad (2-2-5)$$

Les rigidités principales de flexion autour de  $y$  et de  $z$  sont alors définies par:

$$H_{fy} = \int_A E(y, z) z^2 dA \quad ; \quad H_{fz} = \int_A E(y, z) y^2 dA \quad (2-2-6)$$

### Remarques :

- Si  $Ox$  est l'axe neutre, alors un moment  $M_y$  (ou  $M_z$ ) ne produit pas de déformations axiales au point  $O$ . Inversement, un effort normal appliqué en  $O$  ne produit que des déformations axiales constantes sur la section.
- Dans le cas d'un matériau homogène, l'axe neutre passe par le centre de gravité
- $y$  et  $z$  sont des axes principaux d'inertie si l'un des deux est un axe de symétrie ou plus généralement si

$$I_{yz} = \int_A yz dA = 0$$

Les inerties principales étant alors:

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad ; \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad (2-2-7)$$

### II-2-2 Axes $r, y, z$ locaux

Pour simplifier la présentation, nous admettrons que l'axe neutre noté  $x$  (d'origine  $O$ ) et les axes principaux d'inertie notés  $y$  et  $z$  ont été déterminés

Les effets de membrane et de flexion/CT sont découplés.

Nous admettrons également que les coordonnées  $y$  et  $z$  du centre de flexion/torsion  $C$  sont connues, les effets de flexion et de torsion sont découplés.

Ainsi, lorsque les points  $O$  et  $C$  sont distincts il y aura couplage entre les effets de membrane, de flexion/CT et de torsion si les variables cinématiques de description sont choisies en  $O$  ou en  $C$ .

On peut cependant retrouver un découplage des effets si l'on introduit les déplacements axiaux (notés  $u_0^*$  et  $u_0$ ) au point  $O$  et les autres variables cinématiques au point  $C$ .

On peut ensuite retrouver toutes les composantes de déplacements au même point en utilisant les relations cinématiques avant de transformer dans un repère global pour l'assemblage.

### II-2-3 Cinématique virtuelle

Le champ de déplacement virtuel d'un point  $q(x, y, z)$  est défini à partir des hypothèses suivantes:

**H1 :** Pour les poutres à sections pleines ou fermées, on admet que les sections peuvent gauchir librement sous l'action d'un moment de torsion (hypothèse de torsion libre de Saint-Venant). Les effets de gauchissement des sections (déformations et contraintes axiales dues à la torsion) sont peu importants.

**H2:** Pour les comportements en flexion/CT on retient, comme pour les poutres planes, les hypothèses de Timoshenkof- Mindlin (sections planes restent planes) avec corrections de CT.

**II-2-3-1 Cinématique H1**

L'hypothèse H1 (torsion libre de Saint-Venant) se traduit par :

$$\begin{aligned} u_q^*(x, y, z) &= \omega(y, z) \theta_{x,x}^* \quad (\text{Avec } \theta_{x,x}^* \text{ constant}) \\ v_q^*(x, y, z) &= -(z - z_c) \theta_x^* \quad ; \quad w_q^*(x, y, z) = -(y - y_c) \theta_x^* \end{aligned} \quad (2-2-8)$$

$u_q^*$ ,  $v_q^*$ ,  $w_q^*$  Sont les déplacements virtuels du point q suivant x, y et z.  $\theta_x^*$  est la rotation virtuelle de la section (autour de x).

$\omega(y, z)$  Est la fonction de gauchissement supposée connue et définie à une constante près (u correspond à un mouvement rigide suivant x.)

Les déformations virtuelles non nulles, associées à 2-2-8, sont ainsi

$$2\varepsilon_{xy}^* = (\omega_{,y} - z + z_c) \theta_{x,x}^* \quad ; \quad 2\varepsilon_{xz}^* = (\omega_{,z} - y + y_c) \theta_{x,x}^* \quad (2-2-9)$$

**II-2-3-2 Cinématique H2**

L'hypothèse H2 conduit à un champ de déplacements virtuels qui généralise celui des poutres bidimensionnelles.

$$\begin{aligned} u_q^*(x, y, z) &= u^*(x) + (z - z_c) \theta_y^*(x) - (y - y_c) \theta_z^*(x) \\ v_q^*(x, y, z) &= v^*(x) \quad ; \quad w_q^*(x, y, z) = w^*(x) \end{aligned} \quad (2-2-10)$$

$u^*(x)$  Déplacement virtuel axial (suivant x) du point C

$\theta_y^*(x)$  Rotation virtuelle associée à la flexion dans le plan xz (autour de y).

$\theta_z^*(x)$  Rotation virtuelle associée à la flexion dans le plan xy (autour de z)

$v^*(x)$  et  $w^*(x)$  déplacements virtuels de flexion suivant les directions y et z

Les relations 2-2-3 s'écrivent aussi

$$\begin{aligned} u_q^*(x, y, z) &= u_0^*(x) + z \theta_y^*(x) - y \theta_z^*(x) \\ v_q^*(x, y, z) &= v^*(x) \quad ; \quad w_q^*(x, y, z) = w^*(x) \end{aligned} \quad (2-2-11)$$

$$\text{Avec } u_0^*(x) = u^*(x) - z_c \theta_y^*(x) + y_c \theta_z^*(x) \quad (2-2-12)$$

Où  $u(x)$  est le déplacement virtuel axial du point O.

Les déformations virtuelles associées à 2-2-11 sont ainsi

$$\varepsilon_x^* = u_{0,x}^* + z \theta_{y,x}^* - y \theta_{z,x}^* \quad (2-2-13)$$

$$2\varepsilon_{xy}^* = v_{,x}^* - \theta_z^* \quad ; \quad 2\varepsilon_{xz}^* = w_{,x}^* - \theta_y^*$$

Les hypothèses H1 et H2 traduisent bien l'indéformabilité de la section, i.e.

$$\varepsilon_{yy}^* = \varepsilon_{zz}^* = 2\varepsilon_{yz}^* = 0 \quad (2-2-14)$$

**II-2-3-3 Cinématique H1 et H2**

Le champ de déplacement virtuel s'écrit en superposant les effets de torsion (éq. 2-2-11) à ceux de membrane -flexion/ Cisaillement transversal (éq. 2-2-13):

$$\begin{Bmatrix} u_q^* \\ v_q^* \\ w_q^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0^* \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z\theta_y^* \\ 0 \\ w^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -y\theta_z^* \\ v^* \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega\theta_{x,x}^* \\ -(z-z_c)\theta_x^* \\ (y-y_c)\theta_x^* \end{Bmatrix} \quad (2-2-15)$$

**Total = membrane + flexion/CT + flexion/CT + torsion libre**  
 Plan xz                      Plan xy

Les déplacements  $v^*$  et  $w^*$  sont les déplacements de flexion/Cisaillement transversal au centre de torsion C

$u_0^*$  le déplacement axial au point O (fig. 2.6).

$\theta_x^*, \theta_y^*, \theta_z^*$  Sont les rotations du plan yoz autour des axes x, y, z.

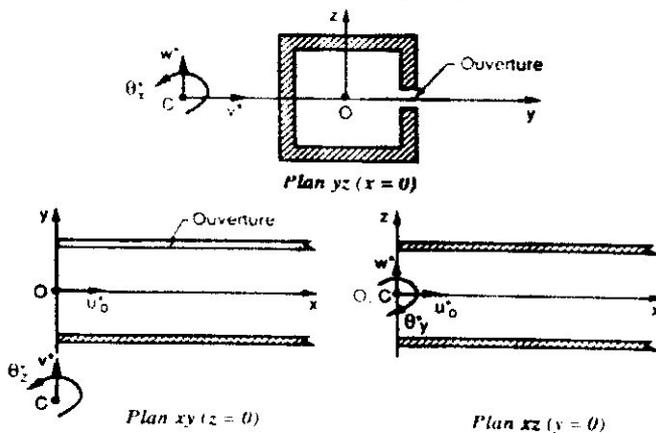


Fig. 2-6 - Variables cinématiques avec  $O \neq C$

Les déformations virtuelles d'un point q(x, y, z) sont ainsi :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_q^* \\ 2\varepsilon_{xy}^* \\ 2\varepsilon_{xz}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x}^* \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z\theta_{y,x}^* \\ 0 \\ \gamma_{xz}^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -y\theta_{z,x}^* \\ \gamma_{xy}^* \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ (\omega_{,y} - (z-z_c))\theta_{x,x}^* \\ (\omega_{,z} - (y-y_c))\theta_{x,x}^* \end{Bmatrix} \quad (2-2-16)$$

**Total = membrane + flexion/CT + flexion/CT + torsion libre**  
 Plan xz                      Plan xy

Avec  $\gamma_{xy}^* = v_{,x}^* - \theta_z^*$  et  $\gamma_{xz}^* = w_{,x}^* - \theta_y^*$

$u_{0,x}^*$  : Déformation virtuelle de membrane

$z\theta_{y,x}^*$  Et  $y\theta_{z,x}^*$  : déformations virtuelles de flexion autour de y et autour de z

$\gamma_{xy}^*$  Et  $\gamma_{xz}^*$  : déformations virtuelles de Cisaillement transversal dues à la flexion

$(\omega_{,y} - (z-z_c))\theta_{x,x}^*$

$(\omega_{,z} - (y-y_c))\theta_{x,x}^*$  Déformations virtuelles dues à la torsion

**Remarque:** Si on conserve  $u^*$  (au point C) plutôt que  $u$ , on obtiendra:

$$\varepsilon_x^* = u_{,x}^* + (z - z_c) \theta_{y,x}^* - (y - y_c) \theta_{z,x}^* \quad (2-2-17)$$

**II-2-4 Principe des travaux virtuels**

Il s'écrit en tenant compte de 2-2-14, 15 et 16:

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad \forall (u_0^*, v^*, w^*, \theta_x^*, \theta_y^*, \theta_z^* \text{ nuls sur } S_u) \quad (2-2-18)$$

$$W_{int} = \int_V (\varepsilon_x^* \sigma_x + 2\varepsilon_{xy}^* \sigma_{xy} + 2\varepsilon_{xz}^* \sigma_{xz}) dV \quad (2-2-19)$$

$$W_{ext} = \int_0^L (u_0^* f_{x0} + v^* f_y + w^* f_z + \theta_x^* m_x + \theta_y^* m_y + \theta_z^* m_z) dx + (u_0^* F_{x0} + v^* F_y + w^* F_z + \theta_x^* M_x + \theta_y^* M_y + \theta_z^* M_z)_{S_f} \quad (2-2-20)$$

$L$  : Longueur totale

$f_{x0}, f_y, f_z$  : Forces linéiques agissant suivant x (passant par O), y et z (passant par C) (Figure. 2-7)

$m_x, m_y, m_z$  : Moments linéiques agissant autour des axes x, y et z (fig. 2.7)

$F_{x0}, F_y, F_z$  : Forces concentrées agissant suivant x (en O), y et z (en C)

$M_x, M_y, M_z$  : Moments concentrés autour des axes x, y, z

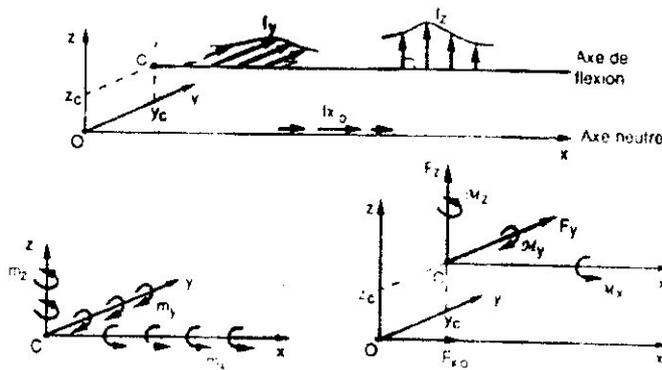


Fig. 2.7 - Sollicitations réparties et concentrées.

En introduisant les relations 2-2-16 dans 2-2-19 on obtient:

$$W_{int} = \int_V (\varepsilon_x^* \sigma_x + \gamma_{xy}^* \sigma_{xy} + \gamma_{xz}^* \sigma_{xz} + \theta_{x,x}^* ((y - y_c) \sigma_{xz} - (z - z_c) \sigma_{xy}) + \theta_{x,x}^* (\omega_{,y} \sigma_{xy} + \omega_{,z} \sigma_{xz})) dV \quad (2-2-21)$$

Puisque  $O$  est constant, le dernier terme s'écrit

$$I = \int_V (\omega_{,y} \sigma_{xy} + \omega_{,z} \sigma_{xz}) dV = - \int_V \omega (\sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z}) dV + \int_{\partial V} \omega \sigma_{xn} dS$$

Avec  $\sigma_{xn} = \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = 0$  sur  $\partial V$

Pour les contraintes de Cisaillement transversal dues à la torsion,

$I = 0$  car  $\sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = 0$  sur  $\partial V$

Si les contraintes  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{xz}$  proviennent des efforts tranchants,

Alors :  $I = \int_V \omega \sigma_{x,x} dV$  avec  $\sigma_x$  varie linéairement en y et z (pour E constant),

I sera encore nul si  $w$  est telle que:

$$\int_A \omega dA = \int_A \omega y dA = \int_A \omega z dA \quad (2-2-22)$$

L'expression 2-2-21 s'écrit ainsi

$$W_{int} = \int_0^L \left( u_{0,x}^* N + \gamma_{xy}^* T_y + \gamma_{xz}^* T_z + \theta_{y,x}^* M_z + \theta_{z,x}^* M_z + \theta_{x,x}^* M_z \right) dx \quad (2-2-23)$$

Où les efforts résultants sont (fig. 2-8)

$$N = \int_A \sigma_x dA : \text{Effort normal (en } O)$$

$$T_y = \int_A \sigma_{xy} dA ; T_z = \int_A \sigma_{xz} dA : \text{Effort tranchant suivant } y \text{ et } z$$

$$M_x = \int_A \left( (y - y_c) \sigma_{xz} - (z - z_c) \sigma_{xy} \right) dA : \text{Moment de torsion autour de } x$$

$$M_y = \int_A z \sigma_x dA ; M_z = - \int_A y \sigma_x dA : \text{Moment de flexion autour de } y \text{ et de } z \quad (2-2-24)$$

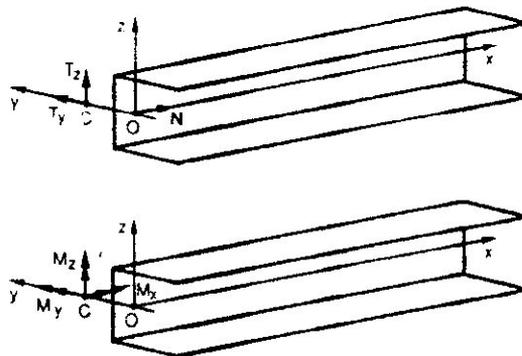


Fig. 2-8 - Efforts résultants.

La relation 2-2-23 traduit bien la superposition des effets de membrane, flexion/ Cisaillement transversal et de torsion.

Les équations d'équilibre associées à  $W = 0$  (éq. 2-2-18 à 24) sont (en intégrant par parties):

$$\begin{aligned} N_{,x} + f_{x0} &= 0 ; T_{y,x} + f_y = 0 ; T_{z,x} + f_z = 0 \\ M_{x,x} + m_x &= 0 ; M_{y,x} - T_z + m_y = 0 ; M_{z,x} - T_y + m_z = 0 \end{aligned} \quad (2-2-25)$$

Les conditions aux limites sont pour  $x = 0$  (où  $n_x = -1$ ) et  $x = L$  (où  $n_x = 1$ ):

$$\begin{aligned} N n_x &= F_{x0} \text{ ou } u_0 = \bar{u}_0 ; M n_x = M_x \text{ ou } \theta_0 = \bar{\theta}_0 \\ T_y n_x &= F_y \text{ ou } v = \bar{v} ; T_z n_x = F_z \text{ ou } w = \bar{w} \\ M_y n_x &= M_y \text{ ou } \theta_y = \bar{\theta}_y ; M_z n_x = M_z \text{ ou } \theta_z = \bar{\theta}_z \end{aligned} \quad (2-2-26)$$

### Remarques

- $F_{x0}$  appliqué au point O ne produit aucune rotation  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ . Les moments  $M_y$  et  $M_z$  appliqués autour de y et z ne produisent aucun déplacement en O (découplage membrane et flexion).
- $F_y$  et  $F_z$  appliqués au point C ne produisent aucune rotation  $\theta_x$ . Le moment  $M_x$  ne produit aucun déplacement en C (découplage flexion/CT et torsion).

**II-2-5 Loi de comportement**

L'hypothèse des contraintes planes est admise dans les directions y et z. Nous considérons une section constituée de différents matériaux (avec  $G_{xy} = G_{xz} = G$ ), et sans contraintes ou déformations initiales pour simplifier:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) &= E(y, z) \varepsilon_x(x, y, z) \\ \sigma_{xy}(x, y, z) &= G(y, z) 2\varepsilon_{xy}(x, y, z) \\ \sigma_{xz}(x, y, z) &= G(y, z) 2\varepsilon_{xz}(x, y, z) \end{aligned} \quad (2-2-27)$$

Avec (éq. 3.6.25)  $\varepsilon_x = u_{0,x} + z\theta_{y,x} - y\theta_{z,x}$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{xy} &= \gamma_{xy} + (\omega_{,y} - z + z_c)\theta_{x,x} ; \gamma_{xy} = v_{,x} - \theta_z \\ 2\varepsilon_{xz} &= \gamma_{xz} + (\omega_{,z} - y + y_c)\theta_{x,x} ; \gamma_{xz} = v_{,x} - \theta_y \end{aligned} \quad (2-2-28)$$

Où  $u_o(x), v(x), w(x), \theta_x(x), \theta_y(x), \theta_z(x)$  sont les déplacements et rotations entre les configurations non déformée et déformée.

Les efforts résultants s'écrivent, en tenant compte des relations 2-2-21,24, 27 et 28 (et du fait que y et z sont des axes principaux):

$$\begin{Bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_m & & & & & \\ & H_{cy} & & & & \\ & & H_{cz} & & & \\ & & & H_t & & \\ & & & & H_{fy} & \\ & & & & & H_{fz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{o,x} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \theta_{x,x} \\ \theta_{y,x} \\ \theta_{z,x} \end{Bmatrix} \quad (2-2-29)$$

Avec  $H_m = \int_A E dA$  ;  $\bar{H}_c = \int_A G dA$  ;  $H_{cy} = k_y \bar{H}_c$  ;  $H_{cz} = k_z \bar{H}_c$

$$\begin{aligned} H_t &= \int_A G \left( (\omega_{,z} + y - y_c)(y - y_c) - (\omega_{,y} + z - z_c)(z - z_c) \right) dA \\ H_{fy} &= \int_A E z^2 dA ; H_{fz} = \int_A E y^2 dA \end{aligned} \quad (2-2-30)$$

- $H_m$  : est la rigidité de membrane.
- $H_{fy}$  et  $H_{fz}$  : sont les rigidités principales de flexion dans les plans xy et x z.
- $k_y$  et  $k_z$  : sont les coefficients de correction de Cisaillement introduits
- $H_t$  : représente la rigidité de torsion tenant compte de l'influence du gauchissement De la section. Elle peut être déterminée analytiquement ou numériquement par Éléments Si la section est homogène, les modules E et G sont constants et on a Tous Simplement:

$$\begin{aligned} H_m &= EA ; H_t = GJ ; H_{fy} = EI_y \\ H_{fz} &= EI_z ; H_{cy} = k_y GA ; H_{cz} = k_z GA \end{aligned} \quad (2-2-31)$$

- Avec  $A$  : aire de la section;
- $J$  : Inertie de torsion
- $I_y$  et  $I_z$  : Inerties principales
- $k_y$  et  $k_z$  : dépendent de la géométrie de la section

### II-3 Adaptation de la méthode des éléments finis

#### II-3-0 Introduction

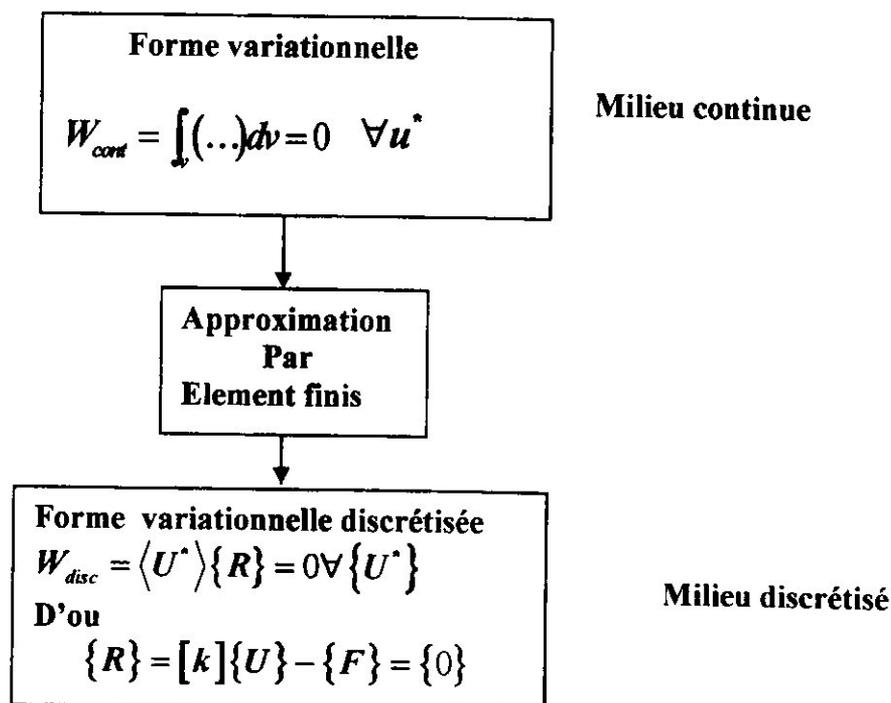
Cette section décrit la méthode des éléments finis ainsi que les différentes étapes nécessaires pour la mettre en oeuvre. Nous insistons en particulier sur l'organisation matricielle qui facilite le passage de la formulation à la programmation

Tout d'abord nous définissons la méthode des éléments finis comme une méthode de discrétisation des formes intégrales de type Galerkin ; elle remplace la forme intégrale globale  $W$  par une somme de formes intégrales élémentaires  $W^e$  puis discrétise celles-ci en utilisant une approximation par éléments finis. Ceci conduit à la définition des matrices globales et élémentaires.

Nous discutons ensuite les conditions de convergence, puis nous décrivons l'organisation matricielle des formes intégrales élémentaires discrétisées.

La technique d'assemblage, caractéristique de la méthode des éléments finis, permet de passer des matrices et vecteurs élémentaires à la matrice et au vecteur global, Nous étudions ensuite les propriétés de la matrice globale.

Enfin nous décrivons les différentes manières d'introduire les conditions aux limites dans le système d'équations final, ainsi que les opérations de transformation des variables.



**II-3-1 Démarche éléments finis**

Les différentes étapes de la méthode des éléments finis sont les suivantes:

➤ **Représentation du domaine de volume V :**

- Par un ensemble de sous - domaines de volume  $V^e$ :

$$\begin{aligned} V &= \sum V^e \\ W &= \sum W^e \end{aligned} \quad (2-3-1)$$

- Représentation de la géométrie de chaque élément  $V^e$

$$\{x(\xi)\} = [N(\xi)]\{x_n\} \quad (2-3-2)$$

$\{x\}$  : Position d'un point;

$\{x_n\}$  : Coordonnées des noeuds définissant  $V^e$

$\xi$  : Coordonnées paramétriques  $\xi, \eta, \zeta$

$[N]$  : Fonctions d'interpolation en variables paramétriques

- Représentation (iso paramétrique) de la fonction solution  $\{u\}$  sur chaque élément:

$$\begin{aligned} \{u(\xi)\} &= [N(\xi)]\{u_n\} \\ \{u^*(\xi)\} &= [N(\xi)]\{u_n^*\} \end{aligned} \quad (2-3-3)$$

$\{u\}$  : Fonctions solutions :  $\{u^*\}$  fonctions tests (ou virtuelles)

$\{u_n\}$  : Variables nodales caractérisant la fonction solution

$\{u_n^*\}$  : Variables nodales virtuelles

➤ **Représentation de la forme variationnelle (discrétisation)**

Calcul élémentaire : sur chaque élément la quantité  $W$ , notée  $W^e$ , s'exprime en fonction de  $\{u_n^*\}$  et  $\{u_n\}$  (en utilisant 3.1.2 et 3.1.3)

$$W^e = \langle u_n^* \rangle ([k]\{u_n\} - \{f_n\}) \quad (2-3-4)$$

$[k]$  : Matrice élémentaire (dite de rigidité)

$\{f_n\}$  : Vecteur élémentaire des sollicitations.

- **Assemblage** : construction de  $[k]$  et  $\{F\}$

$$W = \langle U^* \rangle ([k]\{U\} - \{F\}) = 0 \quad \forall \{U^*\} \quad (2-3-5)$$

$$W = \sum_e W^e = \sum_e \langle u_n^* \rangle ([k]\{u_n\} - \{f_n\}) \quad (2-3-6)$$

Soit :

$$[k]\{U\} = \{F\}$$

$[k]$  : Matrice globale obtenue par assemblage des matrices élémentaires

$\{F\}$  : Vecteur global des sollicitations obtenu par assemblage des Vecteurs Sollicitations Élémentaires.

- **Résolution**

En tenant compte des conditions aux limites, trouver  $\{U\}$  telle que:

$$\{R\} = [K]\{U\} - \{F\} = \{0\} \quad (2-3-7)$$

Pour un problème linéaire:  $\{U\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (2-3-8)$

- **Evaluation des quantités relatives à chaque élément**

- Extraire  $\{U_n\}$  de  $\{U\}$
- Calculer les gradients de  $\{U\}$  en un point de l'élément (déformations)
- Calculer les quantités représentatives du problème (contraintes, ...).

### II-3-2 Conditions de convergence de la solution

La méthode des éléments finis fournit une solution approchée qui converge vers la solution exacte lorsque l'on diminue la taille des éléments. si l'approximation de  $U$  satisfait aux deux conditions suivantes :

- **Base polynomiale complète**

Pour que la solution approchée tende vers la solution exacte lorsque la taille  $h$  des éléments tend vers zéro. il faut que l'erreur d'approximation de tous les termes de  $W^e$  soit d'ordre  $h$  avec  $e = 1, n$ .

L'approximation de  $u$  doit utiliser au moins une base polynomiale complète jusqu'à l'ordre  $m$  pour assurer la convergence des dérivées de  $u$  d'ordre  $m$ .

- **Continuité**

A la condition locale précédente, il faut ajouter une condition globale concernant la continuité des approximations de  $u$  et de ses dérivées entre les éléments, de manière à pouvoir écrire

$$W = \sum w^e$$

La fonction approchée  $u$  sur l'ensemble du domaine  $V$  doit satisfaire les conditions de dérivabilité de la forme intégrale  $W$ :  $u$  et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m$  qui apparaissent dans  $W$  doivent être bornées.

Si  $u$  et ces dérivées jusqu'à ordre  $m-1$  sont continues sur les éléments et sur les frontières entre éléments, la condition précédente est satisfaite; dans ce cas un élément est dit conforme.

Un élément conforme assure la continuité de  $u$  et de ces dérivées en tout point de  $V$ . alors qu'il est facile de satisfaire les conditions de continuité sur chaque élément, il est parfois difficile de les satisfaire sur les frontières entre les éléments, en particulier lorsque apparaissent dans  $W$  des dérivées d'ordre supérieur à 1. Un élément est dit non conforme lorsqu'ils ne satisfont pas les conditions de continuité requises. Dans ce cas

$$W = \sum_e w^e + w^d$$

$w^d$  est un terme dû aux discontinuités entre éléments, qui n'apparaît pas dans les termes  $w^e$ .

Pour que la convergence de la solution approchée soit correcte, il faut que  $w^d$  soit nul, ou borné et tende vers zéro avec la taille des éléments.

**II-3-3 Matrices et vecteurs élémentaires**

Les résultats établis précédemment, permettent de définir un élément fini à deux noeuds et six degrés de liberté par noeud qui généralise à trois dimensions (en incluant la torsion) l'élément de poutre plane avec effet de Cisaillement transversal :

$$\langle u_n \rangle = \langle (u_{0i} \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi}) \ i=1,2 \rangle \quad (2-3-9)$$

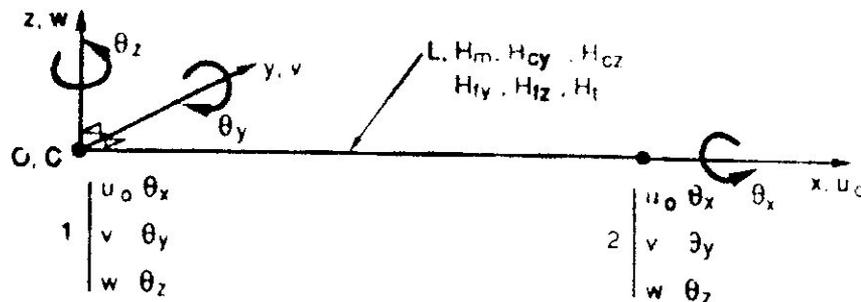


Figure 2-9 Elément de poutre 3D

Rappelons que  $u_0$  est le déplacement axial en O, y et w les déplacements suivant y et zen C. W résulte de la superposition des effets de membrane (axe neutre en x), de flexion autour de y (axe principal), de flexion autour de z (axe principal) et de torsion libre autour de X:

$$W_{int}^e = \langle u_{nm}^* \rangle [k_m] \{u_{nm}\} + \langle u_{nfy}^* \rangle [k_{fy}] \{u_{nfy}\} + \langle u_{n fz}^* \rangle [k_{fz}] \{u_{n fz}\} + \langle u_{nt}^* \rangle [k_t] \{u_{nt}\} \quad (2-3-10)$$

**a) membrane**

Les fonctions d'interpolations et leurs dérivées

$$\langle N \rangle = \langle N_1 \ N_2 \rangle = \langle \frac{1-\xi}{2} \ \frac{1+\xi}{2} \rangle ; \ dx = \frac{L}{2} d\xi$$

Variables nodales:  $\langle u_{nm} \rangle = \langle u_{01} \ u_{02} \rangle \quad (2-3-11)$

Efforts aux noeuds:  $\langle r_n \rangle = \langle -N_1 \ N_2 \rangle$

$$[k_m] = \frac{H_m}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$H_m$  : Rigidité de membrane

b) flexion autour de y  $\beta = \theta_y$ 

Les fonctions d'interpolations et leurs dérivées

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi); & N_{1,\xi\xi} &= \frac{3}{2}\xi \\
 N_2 &= \frac{-L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi); & N_{2,\xi\xi} &= \frac{-L}{4}(-1+3\xi) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi); & N_{3,\xi\xi} &= -\frac{3}{2}\xi \\
 N_4 &= \frac{-L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi); & N_{4,\xi\xi} &= \frac{-L}{4}(1+3\xi)
 \end{aligned}$$

$$\text{Variables nodales: } \langle u_{nfy} \rangle = \langle w_1 \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{y2} \rangle$$

$$\text{Efforts aux noeuds: } \langle r_n \rangle = \langle -T_{z1} \quad -M_{y1} \quad T_{z2} \quad -M_{y2} \rangle$$

$$[k_{fy}] = \frac{H_{fy}}{L^3(1+\Phi_z)} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ & (4+\Phi_z)L^2 & 6L & (2-\Phi_z)L^2 \\ & & 12 & 6L \\ \text{sym} & & & (4+\Phi_z)L^2 \end{bmatrix} \quad (2-3-12)$$

 $H_{fy}$  : Rigidité de flexion autour de y

 $H_{cz} = k_z \bar{H}_{cz}$  : Rigidité de CT associée à la flexion autour de y

$$\text{Avec } \Phi_z = \frac{12H_{fy}}{L^2 H_{cy}}$$

c) flexion autour de z  $\beta = -\theta_z$ 

Les fonctions d'interpolations et leurs dérivées sont identiques avec le cas précédent

$$\text{Variables nodales: } \langle u_{nfz} \rangle = \langle v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2} \rangle$$

$$\text{Efforts aux noeuds: } \langle r_n \rangle = \langle -T_{y1} \quad -M_{z1} \quad T_{y2} \quad -M_{z2} \rangle$$

$$[k_{fz}] = \frac{H_{fz}}{L^3(1+\Phi_y)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & (4+\Phi_y)L^2 & -6L & (2-\Phi_y)L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{sym} & & & (4+\Phi_y)L^2 \end{bmatrix} \quad (2-3-13)$$

 $H_{fz}$  : Rigidité de flexion autour de z

 $H_{cy} = k_y \bar{H}_{cy}$  : Rigidité de CT associée à la flexion autour de z

$$\text{Avec } \Phi_y = \frac{12H_{fz}}{L^2 H_{cy}}$$

d) torsion libre

On observe la similitude entre l'effet de membrane (quantités  $u_0, H_m, f_{x0}$ ) et l'effet de torsion (quantités :  $\theta_x, H_t, m_x$ ) :

Les fonctions d'interpolations et leurs dérivées

$$\langle N \rangle = \langle N_1 \quad N_2 \rangle = \left\langle \frac{1-\xi}{2} \quad \frac{1+\xi}{2} \right\rangle ; \quad dx = \frac{L}{2} d\xi$$

Variables nodales:  $\langle u_n \rangle = \langle \theta_{x1} \quad \theta_{x2} \rangle$

Efforts aux noeuds:  $\langle r_n \rangle = \langle -M_{x1} \quad M_{x2} \rangle$

$$[k_m] = \frac{H_t}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-3-14)$$

$H_t$ : Rigidité de torsion

En réorganisant les variables nodales, on définit la matrice de rigidité [k] d'un élément  
Telle que:

$$W_{int}^e = \langle u_n^* \rangle [k] \{ u_n \} \quad (2-3-15)$$

Avec  $\langle u_n \rangle$  défini par 3.6.48. La matrice [k] (12 x 12) est définie explicitement dans  
Le tableau 3.1 en considérant  $\Phi_y = \Phi_z = 0$  pour simplifier.

Le vecteur des charges équivalentes  $\{ f_n \}$  dû aux quantités  $f_{x0}, f_y, f_z, m_x, m_y, m_z$   
est tel que :  $W_{ext}^e = \langle u_n^* \rangle \{ f_n \} \quad (2-3-16)$

Pour  $f_x, f_y, f_z$  et  $m_x$  constant, le vecteur  $\{ f_n \}$  est donné dans le tableau 3.1

Pour un problème statique les matrices [k] et  $\{ f_n \}$  ainsi définies permettent d'obtenir  
Des résultats exacts aux noeuds. Les efforts résultants aux noeuds  $N, T_y, T_z, M_x, M_y$   
et  $M_z$  vérifient les relations suivantes:

$$\{ r_n \} = [k] \{ u_n \} - \{ f_n \} \quad (2-3-17)$$

Avec  $\langle r_n \rangle = -\langle N_1 \quad \dots \quad M_{z1} \quad -N_2 \quad \dots \quad -M_{z2} \rangle$

( $\{ r_n \}$  Représente les réactions aux noeuds 1 et 2)

$$\{ r_n \} = \langle -\langle FR \rangle_1 \quad ; \quad \langle FR \rangle_2 \rangle ; \quad \langle FR \rangle = \langle N \quad T_y \quad T_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z \rangle$$

$$\langle u_n \rangle = \langle u_{01} \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad ; \quad u_{02} \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2} \rangle$$

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{H_m}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{H_m}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12H_2}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6H_2}{L^2} & 0 & -\frac{12H_2}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6H_2}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12H_1}{L^3} & 0 & -\frac{6H_1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12H_1}{L^3} & 0 & -\frac{6H_1}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{H_t}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{H_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6H_1}{L^2} & 0 & \frac{4H_1}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6H_1}{L^2} & 0 & \frac{2H_1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6H_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4H_2}{L} & 0 & -\frac{6H_1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2H_2}{L} \\ -\frac{H_m}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H_m}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12H_2}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6H_2}{L^2} & 0 & \frac{12H_2}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6H_2}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12H_1}{L^3} & 0 & \frac{6H_1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12H_1}{L^3} & 0 & \frac{6H_1}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{H_t}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6H_1}{L^2} & 0 & \frac{2H_1}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6H_1}{L^2} & 0 & \frac{4H_1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6H_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2H_2}{L} & 0 & -\frac{6H_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4H_2}{L} \end{bmatrix}$$

$L$  : Longueur

$H_m = EA$  : Rigidité de membrane

$H_t = GJ$  : Rigidité de torsion

$H_{fy} = EI_y$  : Rigidités de flexion autour de  $y$

$H_{fz} = EI_z$  : Rigidités de flexion autour de  $z$

Pour  $f_{x0}, f_y, f_z, m_x$  constant :

$$\langle f_n \rangle = \left\langle f_{x0} \quad f_y \quad f_z \quad m_x \quad -f_z \frac{L}{6} \quad f_y \frac{L}{6} \quad ; \quad f_{x0} \quad f_y \quad f_z \quad m_x \quad f_z \frac{L}{6} \quad -f_y \frac{L}{6} \right\rangle$$

Tableau 3.1 Matrice  $[k]$  de l'élément de poutre 3D avec torsion libre et ( $\Phi_y = \Phi_z = 0$ )

### II-3-4 Transformation des variables au point $O$

(Lorsque le point  $c$  n'est confondu sur le point  $O$ )

Pour définir toutes les variables nodales au point  $O$  (c.d.g.) on utilise les relations 3.6.24:

$$\begin{aligned} v^* &= v_o^* - z_c \theta_x^* & v &= v_0 - z_c \theta_x \\ w^* &= w_o^* + y_c \theta_x^* & w &= w_0 + y_c \theta_x \end{aligned} \quad (2-3-18)$$

$$\text{D'où : } \{u_n\} = [T_c] \{u_n\}_{loc} \quad \{u_n^*\} = [T_c] \{u_n\}_{loc} \quad (2-3-19)$$

Avec  $\langle u_n \rangle_{loc} = \langle u_{01} \ v_{01} \ w_{01} \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ : \ u_{02} \ v_{02} \ w_{02} \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2} \rangle$

Et  $\langle u_n \rangle = \langle u_{01} \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ : \ u_{02} \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2} \rangle$

$$[T_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -z_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité de l'élément s'écrit alors:  $[k]_{loc} = [T_c]^T [k] [T_c]$  (2-3-20a)

Le vecteur des charges équivalentes devient :  $\{f_n\} = [T_c]^{-1} \{f_n\}_{loc}$  (2-3-20b)

$[T_c]^{-1}$  Est obtenue en remplaçant  $-z_c$  par  $z_c$  et  $y_c$  par  $-y_c$  dans  $[T_c]$

**II-3-5 Transformation dans le repère global**

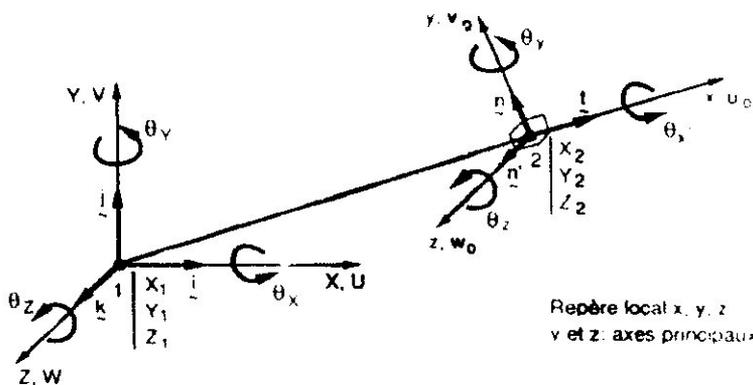


Figure 2-10 repères local et global

**Matrice de transformation [Q]**

Soit :  $\phi$  L'angle de rotation au tour de l'axe Z (dans le plan X $\mathcal{O}$ Y)

$\psi$  L'angle de rotation au tour de l'axe X (dans le plan Y $\mathcal{O}$ Z)

On considère que la transformation dans l'espace passe par deux étapes :

a) une première transformation dans le plan : X $\mathcal{O}$ Y

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (2-3-21)$$

La matrice de passage associe est  $[Q_1]$  :

$$[Q_1] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-3-22)$$

b) une deuxième transformation dans le plan :  $YOZ$

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Psi & \sin \Psi \\ 0 & -\sin \Psi & \cos \Psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \quad (2-3-23)$$

La matrice de passage associe est  $[Q_2]$  :

$$[Q_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Psi & \sin \Psi \\ 0 & -\sin \Psi & \cos \Psi \end{bmatrix} \quad (2-3-24)$$

Donc la matrice de passage dans le repère globale sera :

$$[Q] = [Q_1] * [Q_2] \quad (2-3-25)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Psi & \sin \Psi \\ 0 & -\sin \Psi & \cos \Psi \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \cos \Psi & \sin \phi \sin \Psi \\ -\sin \phi & \cos \phi \cos \Psi & \cos \phi \sin \Psi \\ 0 & -\sin \Psi & \cos \Psi \end{bmatrix} \quad (2-3-26)$$

Avant d'effectuer l'assemblage des matrices et vecteurs, il est nécessaire de définir les variables nodales dans le repère global  $XYZ$ . Ces variables nodales sont notées:

$$\langle u_n \rangle_{glob} = \langle (U_i \ V_i \ W_i \ \theta_{Xi} \ \theta_{Yi} \ \theta_{Zi}) \ i = 1, 2 \rangle \quad (2-3-28)$$

(Où  $U, V, W$  sont les déplacements suivant les axes  $X, Y$ , et  $Z$  et  $\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$  sont les rotations autour des axes globaux  $X, Y$  et  $Z$  (fig. 2.10).

Les déplacements  $u_0, v_0$  et  $w_0$  suivant  $x, y$  et  $z$  sont reliés aux composantes  $U, V, W$  suivant  $X, Y$  et  $Z$  par la relation:

$$\{dX\} = [Q]\{dx\} ; \{U\} = [Q]\{u\} \quad (2-3-29)$$

$$\text{Avec } \langle dX \rangle = \langle dX \quad dY \quad dZ \rangle ; \langle dx \rangle = \langle dx \quad dy \quad dz \rangle \\ \langle U \rangle = \langle U \quad V \quad W \rangle ; \langle u \rangle = \langle u_0 \quad v_0 \quad w_0 \rangle$$

Les petites rotations  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  sont traitées comme des composantes d'un vecteur de rotation, comme pour les déplacements:  $\{\theta_X\} = [Q]\{\theta_x\} \Rightarrow \{\theta_x\} = [Q]^T \{\theta_X\}$  (2-3-30)

Les relations 3.6.59, 61 et 62 permettent d'écrire:

$$\{u_n\}_{loc} = [T]\{u_n\}_{glob} \Rightarrow \{u_n\}_{glob} = [T]^T \{u_n\}_{loc} \quad (2-3-31)$$

$$\text{Avec } [T]^T = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} [Q] & & & \\ & [Q] & & \\ & & [Q] & \\ & & & [Q] \end{bmatrix} \quad (2-3-32)$$

Les matrices et vecteurs d'un élément sont ainsi dans le repère global:

$$[k]_{glob} = [T]^T [k]_{loc} [T] \\ [m]_{glob} = [T]^T [m]_{loc} [T] \quad (2-3-33a) \\ [f_n]_{glob} = [T]^T [f_n]_{loc}$$

Les efforts résultants (ou réactions) exercés sur les noeuds 1 et 2 dans le repère global sont

$$\{r_n\}_{glob} \\ W^e = \langle u_n^* \rangle_{glob} \{r_n\}_{glob} \quad (2-3-33b)$$

$$\text{Avec } \{r_n\}_{glob} = [k]_{glob} \{u_n\}_{glob} + [m]_{glob} \{\ddot{u}_n\}_{glob} - \{f_f\}_{glob}$$

**II-3-6 Assemblage****II-3-6-0 Définition**

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire la matrice globale  $[K]$  et le vecteur global des sollicitations  $\{F\}$  à partir des matrices élémentaires  $[k]$  et des vecteurs élémentaires des sollicitations  $\{f\}$ .

**II-3-6-1 Assemblage par expansion des matrices élémentaire**

Chaque forme intégrale élémentaire  $W^e$  s'écrit sous sa forme discrétisée :

$$W^e = \langle \delta u_e \rangle ([k] \{U_n\} - \{f\}) \quad (2.3.34)$$

Où :

$[k]$  : est la matrice élémentaire de élément  $e$

$\{f\}$  : est le vecteur des sollicitations de élément : il est la somme des sollicitations de volume et des sollicitations de surface.

Les vecteurs  $\langle \delta u_e \rangle$  et  $\{u\}$  sont différents pour chaque élément car ils contiennent les variables nodales de l'élément  $e$ .

Soient  $\langle U_n \rangle$  et  $U$  les vecteurs formés par l'ensemble des variables nodales du domaine complet  $V$  et qui apparaissent dans (4.5b).

$\langle \delta u_e \rangle$  et  $u$  contiennent les termes de  $\langle \delta u \rangle$  et  $\{U\}$  qui correspondent à l'élément  $e$

Remarquons qu'une variable nodale apparaît souvent dans plusieurs vecteurs élémentaires, puisqu'un noeud peut appartenir à plusieurs éléments

Il est nécessaire qu'une telle variable nodale soit exprimée dans le même repère pour tous les éléments.

La forme intégrale globale discrétisée  $W$  est la somme des formes élémentaires discrétisées. Cette opération constitue l'assemblage.

$$W = \sum_{\text{élément}} W^e$$

$$W = \sum_{\text{élément}} \langle \delta U_n \rangle ([k] \{U_n\} - \{f\}) \quad (2.3.35)$$

Nous cherchons à mettre cette expression sous la forme

$$W = \langle \delta U_n \rangle ([k] \{U_n\} - \{f\}) \quad (2.3.36)$$

Pour cela, il suffit de réécrire les formes élémentaires  $W$  en fonction de

$\{U_n\}$  Et  $\langle \delta U_n \rangle$  :

$$W^e = \langle \delta U_n \rangle ([k^e] \{U_n\} - \{f^e\}) \quad (2.3.37)$$

La matrice  $[K^e]$  est construite par expansion de la matrice  $[k]$  grâce à des insertions de lignes et de colonnes de zéros.

$[k^e]$  a pour dimension le nombre de degrés de liberté de l'élément

$[K]$  a pour dimension le nombre de degrés de liberté total.

De même  $\{f^e\}$  est construit par insertion de zéros dans  $\{F\}$ .

On donne un exemple d'assemblage pour les matrices de rigidité de dimension (2\*2) (Membrane seulement)

**II-3-6-2 Expansion de [k]**

Expansion de  $[k]$  se fait en deux étapes ; l'une consiste à remplacer  $\{u_n\}$  par  $\{U_n\}$  et l'autre à remplacer  $\langle \delta u_n \rangle$  par  $\langle \delta U_n \rangle$ . Considérons, à titre d'exemple, l'expression

$$W^e = \langle \delta U_i \quad \delta U_j \rangle \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = \langle \delta U_n \rangle [k] \{U_n\} \quad (2.3.38)$$

Le vecteur global des variables nodales est

$$\langle U_n \rangle = \langle u_1 \quad u_2 \dots u_i \quad u_{i+1} \dots u_j \quad u_{j+1} \dots u_n \rangle$$

- Remplacement de  $\{u_n\}$  par  $\{U_n\}$

Pour que  $w^e$  reste inchangée si l'on remplace  $\{u_n\}$  par  $\{U_n\}$ , il faut remplacer  $[k]$  de

Dimensions (2 x 2) par une matrice  $[k']$  de dimensions (2 x n) dont :

La colonne I est  $\begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{Bmatrix}$  la colonne J est  $\begin{Bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{Bmatrix}$

Toutes les autres colonnes sont nulles

$$W^e = \langle \delta u_i \quad \delta u_j \rangle \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & k_{11} & 0 & \dots & k_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_{21} & 0 & \dots & k_{22} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_j \\ u_{j+1} \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (2.3.39)$$

- Remplacement de  $\langle \delta u_n \rangle$  par  $\langle \delta U_n \rangle$

Pour que  $W^e$  reste inchangée si l'on remplace  $\langle \delta u_n \rangle$  par  $\langle \delta U_n \rangle$ , il faut encore remplacer cette matrice  $[k']$  par la matrice  $[K^e]$  de dimensions (n x n) dont la ligne I est la première ligne de  $[k']$ , dont la ligne J est la seconde ligne de  $[k']$ , et dont les autres lignes sont nulles

$$\langle \delta U_n \rangle = \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \quad \dots \quad \delta u_i \quad \delta u_{i+1} \quad \dots \quad \delta u_j \quad \delta u_{j+1} \quad \dots \quad \delta u_n \rangle$$

$$W^e = \langle \delta U_n \rangle \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & k_{11} & \dots & k_{12} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & k_{21} & \dots & k_{22} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \left\{ U_n \right\} = \langle \delta U_n \rangle [k^e] \left\{ U_n \right\}$$

↑ **Colonne I**    ↑ **Colonne J**

← **Ligne I**  
 ← **Ligne J**

**II-3-6-3 Expansion de {F}**

Considérons l'expression

$$W^e = \langle \delta u_i \quad \delta u_j \rangle \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \langle \delta u_n \rangle \{f\} \quad (2.3.40)$$

(2 x 1)

Pour que W' reste inchangée si l'on remplace < du > par < 5U > j  
 Faut remplacer f } de dimension 2 par le vecteur [ FC de dimension n  
 Dont le terme I est f<sub>1</sub>, le terme J est f<sub>2</sub>, et dont les autres termes sont nuls

$$W^e = \langle \delta U_n \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \langle \delta u_n \rangle \{F^e\}$$

← **Ligne I**  
 ← **Ligne J**

**II-3-7 Conditions aux limites**

La matrice  $[k]$  et le vecteur  $\{f\}$  définis dans l'opération d'assemblage ne tiennent pas compte des conditions aux limites associées aux variables  $\{U\}$ .

En général on cherche le vecteur  $\{U\}$  tel que

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.3.41)$$

$$\text{Avec } u_i = \bar{u}_i \quad (2.3.42)$$

Où  $u_i$  est la composante  $i$  du vecteur  $\{U\}$  dont la valeur est connue ( $=\bar{u}_i$ )

La condition 2.3.42 peut être introduite directement dans 2.3.41 en modifiant  $[K]$  et  $\{F\}$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} & \dots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i + R_i \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (2.3.43)$$

Où  $F+R_i$  représente les forces externe garantissant l'équilibre au nœud lorsque  $u_i = \bar{u}_i$   
 $R_i$  est la réaction (inconnue) et  $F_i$  est la composante des forces équivalentes (connue)

Lorsque 2.3.43 fait intervenir  $n$  inconnues :  $n-1$  variables  $\{u\}$  et la réaction  $R_i$   
 Ces inconnues peuvent être obtenues de la façon suivante

- Evaluation des  $n-1$  composantes de  $\{u\}$  par solution de :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & 0 & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & 0 & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + K_{1i}\bar{u}_i \\ \vdots \\ \bar{u}_i \\ \vdots \\ F_n + K_{ni}\bar{u}_i \end{Bmatrix} \quad (2.3.44)$$

$$\text{Evaluation de } R_i : R_i = \sum_{j=1}^n K_{ij}u_j - F_i \quad (2.3.45)$$

**II-3-7 Efforts résultants et contraintes**

Connaissant le vecteur  $\{u_n\}_{glob}$  de chaque élément, on peut évaluer les réactions aux noeuds dans le repère global en utilisant 3.6.64b ou dans le repère local par:

$$\{r_n\}_{loc} = [T]\{r_n\}_{glob}$$

On peut ensuite trouver les efforts résultants  $\{r_n\}$  en distinguant  $O$  et  $C$  :

$$\{r_n\} = [T_c]\{r_n\}_{loc} \quad (2-3-46)$$

$$\{r_n\} = \langle N_1 \quad \dots \quad M_{z1} \quad -N_2 \quad \dots \quad -M_{z2} \rangle$$

Les efforts résultants  $N, \dots, M_z$  en un point  $0 \leq x \leq L$  s'obtiennent en intégrant les équations d'équilibre 2-2-25.

La contrainte  $\sigma_x(x, y, z)$  s'obtient en utilisant 2-2-27 à 29 :

$$\sigma_x = E \left( \frac{N}{H_m} + z \frac{M_y}{H_{fy}} - y \frac{M_z}{H_{fz}} \right) \quad (2-3-47)$$

Ou bien a partir des déformation (les équations : (2-2-28)

$$\varepsilon_x = u_{0,x} + z\theta_{y,x} - y\theta_{z,x}$$

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} + (\omega_{,y} - z + z_c)\theta_{x,x} ; \gamma_{xy} = v_{,x} - \theta_z$$

$$2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} + (\omega_{,z} - y + y_c)\theta_{x,x} ; \gamma_{xz} = v_{,x} - \theta_y$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

$$\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = 2G\varepsilon_{xz}$$

Les contraintes  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{xz}$  en un point résultent de la superposition des effets de  $T_y, T_z$  et de  $M_x$

La contrainte équivalente au sens de Von Mises est ainsi :

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{1}{2} (2\sigma_x^2 + 6\sigma_{xy}^2 + 6\sigma_{xz}^2) \quad (2-3-48)$$

## Chapitre III

## Calcul des efforts aérodynamiques

III - 0 Introduction

Pour l'étude aérodynamique des aile d'envergure infinie ( $AR = \infty$ ), on peut servir de l'écoulement plan autour des profils de l'aile, donc en deux dimensions. par contre l'écoulement de l'aile autour d'une aile d'envergure finie est tridimensionnel.

Il se distingue de l'écoulement autour d'un profil (ou d'une section de l'aile) par l'apparition d'une nouvelle composante de l'écoulement, orienté dans la direction de l'envergure et qui dépend des extrémités de l'aile et du profil dans chaque section.

Les caractéristiques aérodynamiques les plus employées d'une aile d'envergure finie sont la portance, la traînée et le moment de tangage, que nous utiliserons sous leur forme adimensionnelle et nous appellerons coefficients aérodynamiques

Pour l'étude numérique de l'aérodynamique d'une aile d'envergure finie, plusieurs méthodes Sont développées depuis 1918, on peut citer quelques méthodes :

- la méthode de la ligne portante
- la méthode des surfaces portantes
- la méthode des panneaux tridimensionnels (la plus célèbre),...

L'étude aérodynamique de l'aile d'avion (aile d'envergure finie) n'est pas prévue à l'avance dans notre projet, les résultats obtenus par des logiciels disponibles ne sont pas adaptées a notre model choisie de l'aile (coté structure)

Pour ne pas pondre les forces et les moments d'une manière manuel et arbitraire, on a procédé au calcul numérique de toutes les efforts et les moments nécessaires pour notre modèle de l'aile, on a essayes d'utiliser la méthode des panneaux tridimensionnels, mais cette méthode est d'une difficulté majeur, et nécessite une longue durée de temps pour la réaliser donc on a adoptés une autre solution de difficulté inférieur par rapport a la précédente

Le principe de cette méthode est d'appliquer en premier lieu la méthode de la ligne portante Sur notre aile, une fois le calcul de ligne portante est réalisé, on applique la méthode des panneaux en deus dimensions pour chacun des profils (nervures) en prenant en compte les conditions locales adaptées (angle induit, Reynolds) et les résultats de la distribution des coefficients aérodynamiques obtenue par la méthode de la ligne portante. On obtient enfin une représentation 3D de l'écoulement tridimensionnel autour de l'aile

Pour cela ce chapitre est divisé en trois parties

- La première parité est consacrée à la présentation de la méthode de la ligne portante
- La deuxième parité est consacrée à la présentation de la méthode de panneaux 2D
- La troisième parité est consacrée au couplage des deux méthodes et le calcul final des forces et moments aérodynamiques



# Chapitre III

### III - 1 La méthode de la ligne portante

#### III -1-1 Principe

La première théorie pratique pour prédire l'aérodynamique d'une aile d'envergure finie a été développée par Ludwig Prandtl dans les années 1911 - 1918. Cette théorie est toujours utilisée de nos jours pour des calculs préliminaires au dessin d'une aile d'envergure finie.

La théorie de la ligne portante considère les hypothèses d'un écoulement potentiel. Elle est basée sur la distribution de portance le long de l'envergure de l'aile.

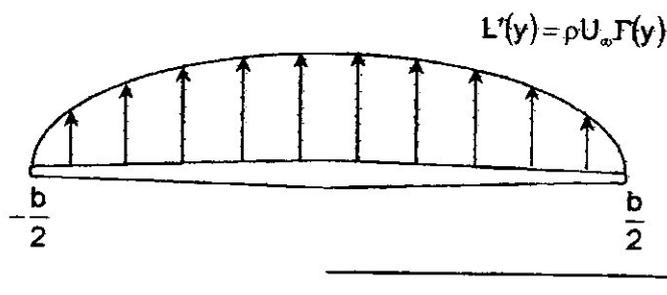


Figure 3-1 : Distribution de portance le long de l'envergure de l'aile

La première idée de Prandtl consista à remplacer l'aile d'envergure finie par un fil tourbillonnaire d'intensité  $\Gamma$ . Comme ce fil tourbillonnaire ne peut pas s'achever dans le fluide, il se prolonge en deux tourbillons qui s'enroulent à partir des extrémités de l'aile jusqu'à l'infini, (figure 3-2)

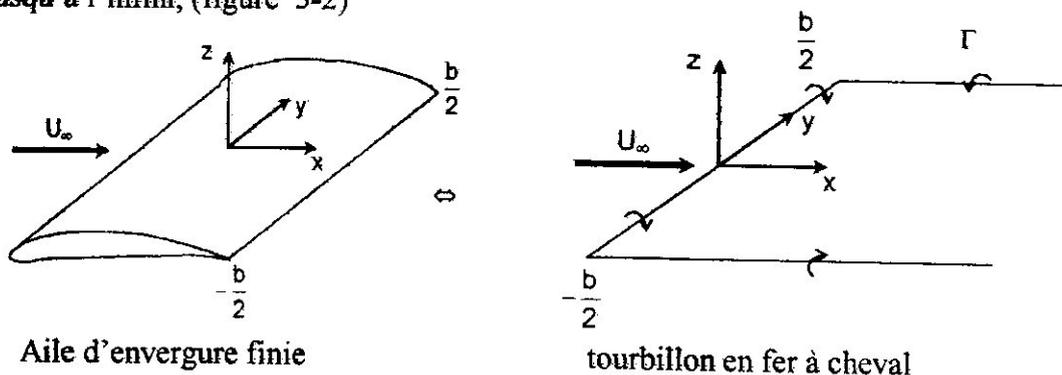


Figure 3-2 : Modélisation d'une aile d'envergure finie par un tourbillon en fer à cheval

On appelle « tourbillon en fer à cheval » cet enroulement du fil tourbillonnaire, constitué de la partie centrale limitée par l'envergure  $(-b/2; b/2)$  et des deux tourbillons de bout d'aile.

Calculons maintenant la vitesse induite  $w(y)$  par ce fil tourbillonnaire le long de l'axe  $y$ . On remarque que la partie centrale  $(-b/2; b/2)$  n'a aucune contribution. Par contre, les deux tourbillons d'extrémité génèrent une vitesse induite le long de l'axe  $y$

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi\left(\frac{b}{2} + y\right)} - \frac{\Gamma}{4\pi\left(\frac{b}{2} - y\right)} \quad (3.1.1)$$

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{b}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2} \quad (3.1.2)$$

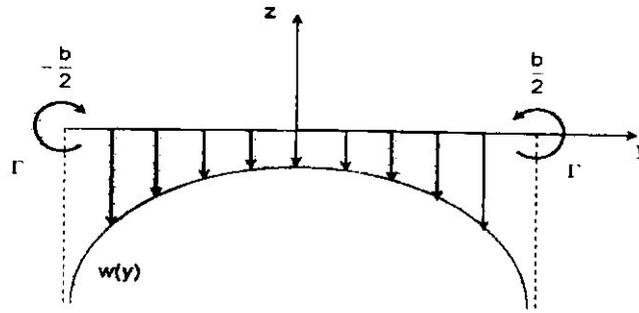


Figure 3-3: Distribution de vitesse induite obtenue pour une modélisation de l'aile par un tourbillon en fer à cheval

On remarque que cette distribution de vitesse induite n'est pas réaliste physiquement, car  $w(y) \rightarrow \infty$  aux extrémités de l'aile.

Pour résoudre cette difficulté, et après plusieurs années d'efforts, Prandtl eut l'idée de modéliser l'aile non pas par un seul fil tourbillonnaire, mais par une superposition de fils tourbillonnaires le long de l'envergure.

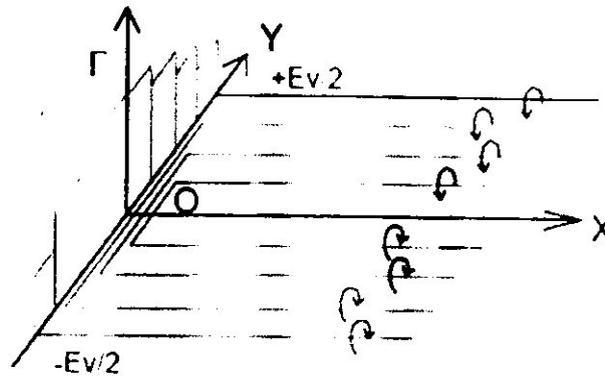


Figure 3-4 : Modélisation d'une aile d'envergure finie par une superposition de tourbillons en fer à cheval

Avec une infinité de fils tourbillonnaires, on retrouve la distribution de portance que l'on cherche, c'est à dire que l'on a une distribution continue de fils tourbillonnaires le long de l'envergure, on remarque que l'intensité totale de la nappe tourbillonnaire ainsi formée est nulle, car en intégrant la distribution tourbillonnaire le long de l'envergure on a, pour chaque tourbillon élémentaire en fer à cheval, deux tourbillons élémentaires d'extrémité d'intensité égale mais de signe opposés.

On appelle ligne portante la ligne tourbillonnaire selon laquelle il y a la superposition des fils tourbillonnaires, c'est à dire la ligne comprise entre  $-b/2$  et  $b/2$

Si l'on considère un élément  $dy$  de la ligne portante situé en  $y$ , la circulation en ce point vaut  $d\Gamma(y)$  et la variation de circulation le long de l'élément  $dy$  est alors :

$$d\Gamma = \frac{d\Gamma}{dy}(y)dy \quad (3.1.3)$$

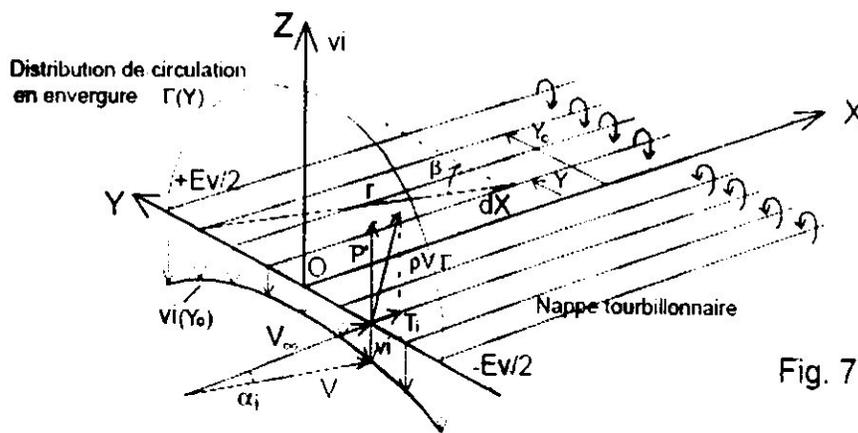


Figure 3-5 : Ligne portante

Considérons maintenant le tourbillon d'extrémité d'intensité  $d\Gamma$  qui coupe la ligne portante en  $y$ , et un point  $y_0$  quelconque de la ligne portante. Pour tout élément  $dx$  de ce tourbillon, la vitesse induite par le fil tourbillonnaire semi-infini d'intensité  $d\Gamma$  situé en  $y$  est donnée par la loi de Biot et Savart:

$$dw = -\frac{d\Gamma}{4\pi(y_0 - y)} dy \quad (3.1.4)$$

Le signe « - » est justifié par rapport au schéma précédent, car  $\Gamma$  est décroissant selon  $y$ , donc  $\frac{d\Gamma}{dy} < 0$ . Ce qui donne bien  $dw > 0$ , c'est-à-dire dans le sens positif selon  $z$ .

La vitesse induite  $w$  en  $y$  par la nappe de tourbillons d'extrémité est alors

$$w(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma(y^*) dy^*}{y - y^*} \quad (3.1.5)$$

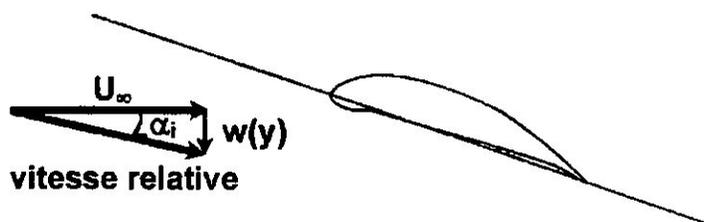


Figure 3-6 : Angle d'incidence induite

L'incidence induite pour une section du profil située en  $y$  selon l'envergure de l'aile est alors

$$\alpha_i(y) = \arctan\left[-\frac{w(y)}{U_\infty}\right] \quad (3.1.6)$$

Comme la vitesse induite  $w$  est orientée vers les  $z < 0$  donc  $w(y) < 0$ . Par ailleurs, puisque  $c > 0$  par définition, il faut un signe négatif dans l'expression de  $\alpha_j$ . Par ailleurs, la perturbation  $w$  est très petite devant la vitesse  $U_\infty$ , il vient:

$$\alpha_i(y) = -\frac{w(y)}{U_\infty} \quad (3.1.7)$$

On obtient donc l'expression de l'angle d'incidence induit à partir de la distribution de circulation le long de l'aile

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{4\pi U_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dy}(y^*) dy^*}{y - y^*} \quad (3.1.8)$$

Comme l'angle d'incidence vu par une section du profil située en  $y$  est  $\alpha_{eff}(y)$ , le coefficient de portance de ce profil, dans le cadre de la théorie des profils minces, est donc:

$$C_{L'} = a_0 [\alpha_{eff}(y) - \alpha_{L=0}] = 2\pi [\alpha_{eff}(y) - \alpha_{L=0}] \quad (3.1.9)$$

Avec la pente du coefficient de portance  $a_0$  qui est indépendante de la forme du profil.  
Remarque : pour une aile vrillée.

Par ailleurs le coefficient de portance s'exprime en fonction de la circulation  $\Gamma(y)$  autour du profil:

$$C_{L'} = \frac{2\Gamma(y)}{U_\infty c(y)} \quad (3.1.10)$$

En identifiant les deux expressions du coefficient de portance, On obtient:

$$\alpha_{eff} = \frac{\Gamma(y)}{\pi U_\infty c(y)} + \alpha_{L=0} \quad (3.1.11)$$

D'après la définition de l'angle effectif  $\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$ , on a

$$\alpha(y) = \frac{\Gamma(y)}{\pi U_\infty c(y)} + \alpha_{L=0}(y) + \frac{1}{4\pi U_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dy}(y^*) dy^*}{y - y^*} \quad (3.1.12)$$

Cette relation est l'équation fondamentale de la théorie de la ligne portante, qui est une équation intégral-différentielle par rapport à  $\Gamma$ .

Connaissant  $\Gamma$ , on déduit la portance et le coefficient de portance de l'aile complète

$$L = \rho U_\infty \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy \quad (3.1.13)$$

$$C_L = \frac{2}{U_\infty S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy \quad (3.1.14)$$

De même, la traînée induite par la portance par unité d'envergure

$$D'_i = L' \sin \alpha_i \quad (3.1.15)$$

Or, comme  $\alpha$  est petit  $\sin \alpha_i = \alpha_i$  et on a:  $D'_i = L' \alpha_i$

La traînée induite et le coefficient de traînée induite pour l'aile complète sont:

$$D_i = \rho U_\infty \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad (3.1.16)$$

$$C_{D,i} = \frac{2}{U_\infty S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \quad (3.1.17)$$

**III -1-2 Distribution elliptique de portance :**

Soit la distribution de circulation elliptique  $\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$  (3.1.18)

Qui fournit une distribution elliptique de portance le long de la ligne portante de l'aile

$L'(y) = \rho U_\infty \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$  (3.1.19)

Calculons la vitesse induite associée

$\frac{d\Gamma}{dy}(y) = -\frac{4\Gamma_0}{b^2} \frac{y}{\left(1 - 4\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$  D'où: (3.1.20)

$w(y) = \frac{\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{y^*}{\left(1 - 4\frac{y'^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} (y - y^*)} dy^*$  (3.1.21)

Afin de calculer l'intégrale, effectuons le changement de variable  $y = -\frac{b}{2} \cos\theta$

D'où:  $dy = \frac{b}{2} \sin\theta d\theta$

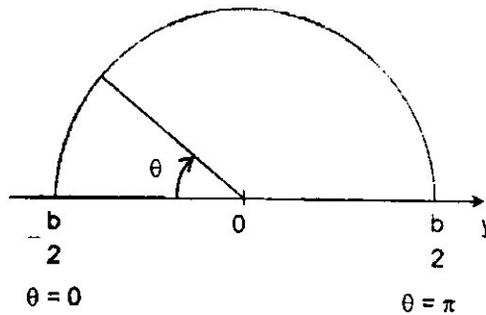


Figure 3-7: Schéma du changement de variable selon l'envergure de l'aile

Ce qui donne:

$w(\theta) = \frac{\Gamma_0}{\pi b^2} \int_0^\pi \frac{\left(-\frac{b}{2}\right) \cos\theta^*}{\left(1 - \frac{4}{b^2} \frac{b^2}{4} \cos^2\theta^*\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{b}{2} \cos\theta + \frac{b}{2} \cos\theta^*\right)} \frac{b}{2} \sin\theta^* d\theta^*$  (3.1.22)

D'où:  $w(\theta) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_0^\pi \frac{\cos\theta^*}{\cos\theta^* - \cos\theta} d\theta^*$  (3.1.23)

On reconnaît ici l'intégrale de Glauert en cosinus pour n = 1. D'où la valeur de la vitesse induite

$w(\theta) = -\frac{\Gamma_0}{2b}$  (3.1.24)

Par conséquent, la vitesse induite par une distribution elliptique de portance est constante le long de l'envergure de l'aile.

L'incidence induite est alors

$\alpha_i = -\frac{w}{U_\infty} = \frac{\Gamma_0}{2bU_\infty}$  (3.1.25)

Calculons maintenant la portance de l'aile:

$$L = \rho U_\infty \Gamma_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy \quad (3.1.26)$$

En utilisant le changement de variable précédent, il reste

$$L = \rho U_\infty \Gamma_0 \frac{b}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \quad (3.1.27)$$

$$L = \rho U_\infty \Gamma_0 \frac{b}{4} \pi$$

D'où:

$$\Gamma_0 = \frac{4L}{\rho U_\infty b \pi} = \frac{2U_\infty S C_L}{\pi b} \quad (3.1.28)$$

En remplaçant  $\Gamma_0$  dans l'expression de  $\alpha_i$ :

$$\alpha_i = \frac{2U_\infty S C_L}{\pi b} \frac{1}{2bU_\infty}$$

$$\alpha_i = \frac{S C_L}{\pi b^2} \quad (3.1.29)$$

On définit le facteur de forme d'une aile par le rapport du carré de son envergure sur sa surface réelle

$$A_R = \frac{b^2}{S} \quad \text{D'où:} \quad \alpha_i = \frac{C_L}{\pi A_R} \quad (3.1.30)$$

Comme  $\alpha_i$  est constant selon  $y$ , on en déduit le coefficient de traînée induite

$$C_{D_i} = \frac{2\alpha_i}{U_\infty S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy = \frac{2\alpha_i \Gamma_0 b}{U_\infty S} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \quad (3.1.31)$$

$$C_{D_i} = \frac{\pi \alpha_i \Gamma_0 b}{2U_\infty S} = \frac{\pi b}{2U_\infty S} \frac{C_L}{\pi A_R} \frac{2U_\infty S C_L}{b\pi} \quad (3.1.32)$$

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi A_R} \quad (3.1.33)$$

Le coefficient de traînée induite est donc proportionnel au carré du coefficient de portance, pour une aile à distribution de portance elliptique.

**Remarque :**  $C_{D_i}$  est inversement proportionnel au facteur de forme; néanmoins des ailes à très grand facteur de forme sont difficiles à réaliser pour des raisons de tenue mécanique des structures.

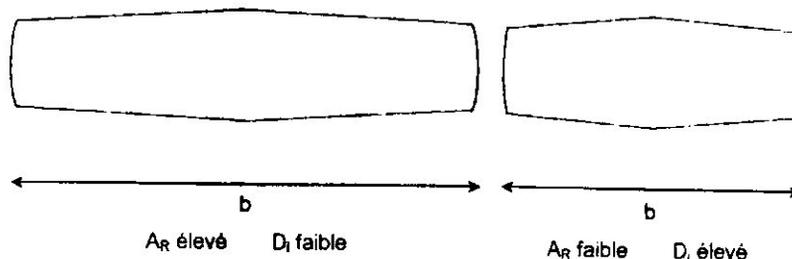


Figure 3-8 : Traînée induite selon l'envergure de l'aile

En pratique, pour les avions subsoniques actuels, les facteurs de forme sont compris entre 6 et 8, à l'exception des planeurs pour lesquels ils sont compris entre 10 et 22.

Si l'on revient au cas particulier de l'aile à distribution de portance elliptique, comme  $\alpha_i$  est constant selon l'envergure de l'aile et que

$$\alpha_i = \frac{C_{L'}}{\pi A_R} \tag{3.1.34}$$

Donc  $C_{L'}$  est constant selon l'envergure.

Comme  $L'(y) = qcC_{L'}$ , on en déduit la répartition de corde selon l'envergure:

$$c(y) = \frac{L'(y)}{q_\infty C_{L'}} \tag{3.1.35}$$

Donc pour une aile à distribution de portance elliptique, la corde varie elliptiquement selon l'envergure. Comme la distribution de tourbillons est fixée le long de la ligne portante, c'est à dire le quart de corde, le bord de fuite et le bord d'attaque de l'aile évoluent selon deux distributions elliptiques.

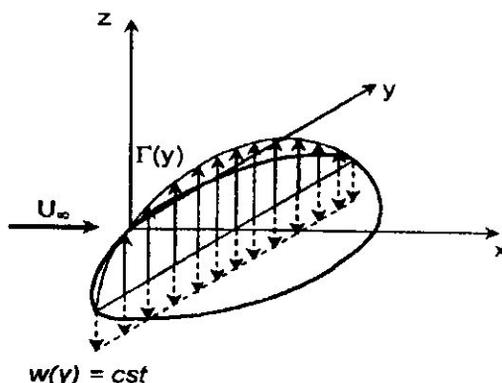


Figure 3-9 : Aile à distribution de portance elliptique

**III -1-3 Distribution de portance quelconque :**

Avec le changement de variable

$$y = -\frac{b}{2} \cos \theta \tag{3.1.36}$$

Nous avons pour une distribution elliptique de portance la circulation:

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \sin \theta \tag{3.1.37}$$

Supposons maintenant que pour une distribution de portance quelconque, on fasse le développement en série de Fourier:

$$\Gamma(\theta) = 2bU_\infty \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \tag{3.1.38}$$

Les coefficients  $A_n$  sont inconnus, mais doivent vérifier l'équation fondamentale de la théorie de la ligne portante, donc:

$$\frac{d\Gamma}{dy} = \frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{d\theta}{dy} = 2bU_\infty \sum_{n=1}^N nA_n \cos n\theta \frac{d\theta}{dy} \tag{3.1.39}$$

D'où :

$$\alpha(\theta) = \frac{2b}{\pi c(\theta)} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta + \alpha_{L=0}(\theta) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum_{n=1}^N nA_n \cos n\theta^*}{\cos \theta^* - \cos \theta} d\theta^* \tag{3.1.40}$$

On reconnaît dans le troisième terme du membre de droite l'intégrale de Glauert en cosinus, d'où:

$$\alpha(\theta) = \frac{2b}{\pi c(\theta)} \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta + \alpha_{L=0}(\theta) + \sum_{n=1}^N nA_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (3.1.41)$$

Cette équation est valable pour une position e le long de l'envergure de l'aile. Si l'on écrit N fois cette équation pour N positions le long de l'envergure, on a un système de N équations à N inconnues  $A_n$  que l'on peut résoudre numériquement et qui assure que la circulation  $\Gamma(\theta)$  vérifie l'équation fondamentale de la théorie de la ligne portante.

$$C_L = \frac{2}{U_\infty S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy = \frac{2b^2}{S} \sum_{n=1}^N A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta \quad (3.1.42)$$

Or 
$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin \theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases} \quad C_L = A_1 \pi \frac{b^2}{S} = A_1 \pi A_R \quad (3.1.43)$$

On en déduit alors le coefficient de portance ne dépend que du premier coefficient du développement en série de Fourier. Néanmoins, il faut résoudre simultanément les N équations pour obtenir tous les  $A_n$  et en particulier  $A_1$ .

En reportant l'expression de  $\Gamma(\theta)$  dans la définition du coefficient de traînée induite:

$$C_{D,i} = \frac{2}{U_\infty S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy = \frac{2b^2}{S} \int_0^\pi \left( \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \right) \alpha_i(\theta) \sin \theta d\theta \quad (3.1.44)$$

L'incidence induite est donnée par:

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{4\pi U_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma(y^*)}{y - y^*} dy^* \quad (3.1.45)$$

$$\alpha_i(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N nA_n \underbrace{\int_0^\pi \frac{\cos n\theta^*}{\cos \theta^* - \cos \theta} d\theta^*}_{\text{intégrale de Glauert}} \quad (3.1.46)$$

$$\alpha_i(\theta) = \sum_{n=1}^N nA_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (3.1.47)$$

En reportant cette expression dans le coefficient de traînée induite:

$$C_{D,i} = \frac{2b^2}{S} \int_0^\pi \left( \sum_{n=1}^N A_n \sin n\theta \right) \left( \sum_{m=1}^N m A_m \sin m\theta \right) d\theta \quad (3.1.48)$$

Or:

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \quad (3.1.49)$$

Donc le produit des termes  $n \neq m$  est nul et il vient :

$$C_{D,i} = \frac{2b^2}{S} \left( \sum_{n=1}^N n A_n^2 \right) \frac{\pi}{2} = \pi A_R \sum_{n=1}^N n A_n^2 \quad (3.1.50)$$

$$C_{D,i} = \pi A_R \left( A_1^2 + \sum_{n=2}^N n A_n^2 \right) = \pi A_R A_1^2 \left[ 1 + \sum_{n=2}^N n \left( \frac{A_n}{A_1} \right)^2 \right] \quad (3.1.51)$$

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi A_R} (1 + \delta) \quad (3.1.52)$$

On a fait apparaître  $C_L$  dans cette expression, et on peut écrire

Avec le facteur  $\delta = \sum_{n=2}^N n \left( \frac{A_n}{A_1} \right)^2$  appelé facteur de traînée induite, tel que  $1 + \delta \geq 1$

On définit le facteur d'efficacité de l'aile par  $e = \frac{1}{1 + \delta}$

D'où finalement: 
$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi e A_R} \quad (3.1.53)$$

**Remarque** : pour une aile elliptique, on a:

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi A_R} \quad (3.1.54)$$

Donc  $\delta = 0$  et  $e = 1$

La distribution de portance qui donne le minimum de traînée induite est la distribution elliptique. Cette forme d'aile fut choisie pour certains avions (par exemple le Super marine Spitfire, chasseur britannique de la Seconde Guerre Mondiale). Cependant, cette forme d'aile est beaucoup plus difficile à fabriquer qu'une aile rectangulaire, dont la distribution de portance est loin d'être optimum. Un bon compromis en termes de facilité de réalisation mécanique et de performances aérodynamiques est l'aile à variation linéaire de corde.

**III-1-4 Effet du facteur de forme**

On définit pour une aile d'envergure finie la pente du coefficient de portance:

$$a = \frac{dC_L}{d\alpha} \tag{3.1.55}$$

Pour un profil mince, on avait :

$$a_0 = \frac{dC_L}{d\alpha_{eff}} = \frac{dC_L}{d(\alpha - \alpha_i)} \tag{3.1.56}$$

D'où pour une aile à répartition de portance elliptique :

$$C_L = a_0 (\alpha - \alpha_i) + cst \tag{3.1.57}$$

$$C_L = a_0 \left( \alpha - \frac{C_{L_0}}{\pi A_R} \right) + cst \tag{3.1.58}$$

En dérivant par rapport à  $\alpha$  on obtient

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a_0 - \frac{a_0}{\pi A_R} \frac{dC_L}{d\alpha} \tag{3.1.59}$$

D'où la relation entre la pente du coefficient de portance pour une aile d'envergure finie  $a$  et la pente du coefficient de portance du profil associé  $a_0$

$$a = \frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{a_0}{1 + \frac{a_0}{\pi A_R}} \tag{3.1.60}$$

Pour une aile à répartition de portance elliptique.

Pour une aile d'envergure finie à répartition de portance quelconque, on obtient:

$$a = \frac{a_0}{1 + \frac{a_0}{\pi A_R} (1 + \tau)} \tag{3.1.61}$$

Où le facteur correctif  $\tau$  est appelé facteur de portance. Il est fonction des coefficients de Fourier  $A_n$ . En pratique, les valeurs de  $\tau$  varient entre 0,05 et 0,25.

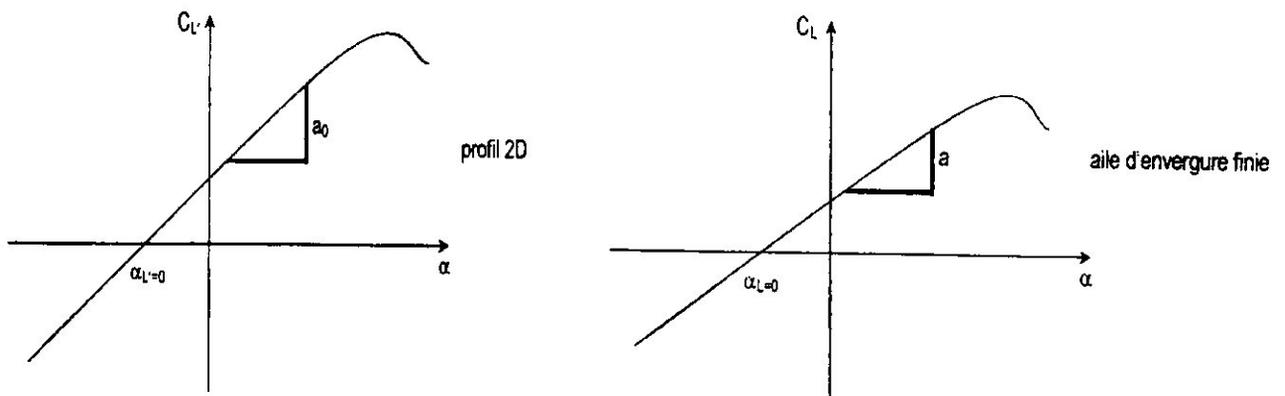


Figure 3-10 : Évolution de la portance selon l'incidence pour un profil et une aile

## III – 2 Méthode des panneaux

### III -2-1 Introduction

Une des méthodes utilisées pour l'étude de l'écoulement autour des profils d'aile Est « la méthode des panneaux ». Elle a servi au développement des avions commerciaux actuels, dont le prestigieux concorde, unique avion commercial supersonique.

Or, cette méthode qui est encore à la base de codes commerciaux utilisés en construction aéronautique existe sous plusieurs formes ayant chacune des avantages et des inconvénients. L'étude qui va suivre permettra de faire le point sur toutes ces variantes utilisées dans l'étude de profil d'ailes, et développera une de ces méthodes : la méthode de panneaux avec tourbillons par formulation de ligne de courant.

Les résultats mettront notamment en évidence l'importance du nombre de panneaux dans la précision du calcul, les répartitions des coefficients de pression sur le profil.

### III -2-2 Equations de base

La pression et la vitesse sur un profil d'aile, sont obtenues par la résolution des équations de Navier Stokes. Or, étant donné que la résolution de ces équations est très compliquée pour un fluide réel, on est obligé de poser des hypothèses pour simplifier le problème. On va donc considérer que le fluide qui s'écoule autour du profil, est un fluide parfait, donc non visqueux et irrotationnel. Ces hypothèses sont bien sûr justifiables ! En effet, comme la vitesse d'écoulement est rapide (bien que subsonique), l'effet des forces de viscosité est négligeable par rapport aux forces d'inertie. De plus, l'écoulement est irrotationnel si la vorticité est nulle

Enfin, puisque le fluide est incompressible, la densité est constante tout au long de sa trajectoire. Cela nous permet d'obtenir des simplifications des équations de continuité et du mouvement. De telle sorte que :

$$\tilde{N} \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\nabla \left( \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) = \frac{\nabla p}{\rho} \quad (3.2.2)$$

D'autre part, étant donné que l'écoulement est irrotationnel, on sait que  $\vec{V} = \nabla \Phi$  et on en déduit que l'équation de Laplace est de la forme :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.2.3)$$

Les solutions de cette équation fournissent le potentiel de vitesse d'un écoulement irrotationnel et incompressible. Puis l'équation du mouvement nous permet de trouver la pression. L'équation de Bernoulli s'obtient de l'intégrale de l'équation du mouvement, en tenant compte que la densité est constante. Ainsi :

$$\frac{\rho}{2} |\vec{V}|^2 + p = \text{constante} \quad (3.2.4)$$

En utilisant l'équation de Bernoulli, on obtient le coefficient de pression suivant :

$$c_p = \left[ 1 - \left( \frac{|\vec{V}|}{V_\infty} \right)^2 \right] \quad (3.2.5)$$

Le niveau de pression de référence n'influe pas directement sur la traînée car la force de pression sur le corps étudié est nulle seulement si la pression est constante sur la totalité de la surface étudiée.

L'équation de Laplace nous permet donc de résoudre l'écoulement irrotationnel et incompressible autour de l'aile de l'avion. Ainsi, la détermination d'une fonction harmonique  $\Phi$  doit satisfaire les conditions aux limites sur les frontières du domaine pour répondre au problème d'écoulement.

Nous admettons que les conditions aux limites correspondent à l'infini, où la perturbation occasionnée par le profil, tend vers zéro, et sur la surface du corps  $S_c$ , où l'on néglige la condition d'adhérence puisque le fluide est considéré comme parfait, donc non visqueux. De plus on suppose que la surface  $S_c$  est imperméable, donc que l'écoulement n'y pénètre jamais. Toutes ces hypothèses étant posées, on va maintenant tenter de résoudre le problème mathématique suivant :

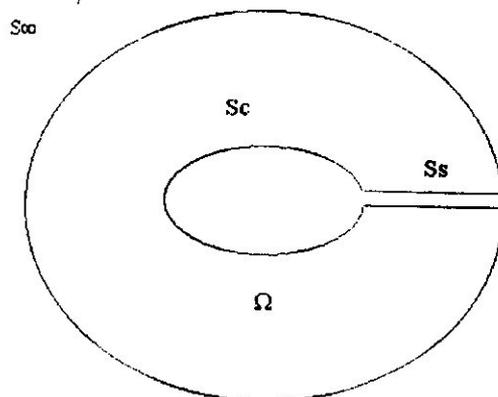


Figure 3-10 Domaine de calcul du potentiel

Avec :

- $S_c$  : Configuration à analyser
- $S_s$  : Sillage ou surface libre, reliant  $S_c$  à  $S_\infty$
- $\Omega$  : Le domaine de l'analyse
- $S_\infty$  : L'infini

$$\begin{aligned} \vec{V} &\rightarrow \vec{V}_\infty \quad \text{sur } S_\infty \\ \vec{n} \cdot \nabla \Phi &= 0 \quad \text{sur } S_c \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

L'identité de Green s'exprime comme suit :

$$\Phi_P = \int_S [(\vec{n} \cdot \nabla \Phi) \cdot \Phi_S - \Phi(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_S)] dS \quad (3.2.7)$$

Où  $\Phi_s$  est le potentiel créé par une source unitaire, en deux dimensions :

$$\Phi_s = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \ln r \quad (3.2.8)$$

La première intégrale de l'équation (3.2.7) représente l'influence au point P d'une distribution de sources sur la surface S et le terme  $(\vec{n} \cdot \nabla \Phi)$  est la vitesse normale à la paroi.

Dans notre cas elle est nulle pour satisfaire la condition de tangence des vitesses. Donc le premier terme est nul. Dans la seconde partie de l'équation, le terme  $(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s)$  représente le taux de changement du potentiel  $\Phi_s$  en direction  $\vec{n}$ . On peut montrer que ce terme correspond à l'influence d'un doublet.

Si on pose  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  les valeurs du potentiel aux points  $Q_1$  et  $Q_2$ , on a alors :

$$\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\delta} \quad (3.2.9)$$

Si on interprète  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  comme étant respectivement une source et un puits d'intensité unitaire, alors on obtient bien la définition du doublet. Selon Moran, la contribution de la surface  $S_\infty$  au point P ( $x_p, y_p$ ) est donnée par :

$$\Phi_s \approx V_\infty (x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha) \quad (3.2.10)$$

Où  $\alpha$  est l'angle d'incidence du profil

En tenant compte de ce dernier terme, on peut réécrire l'identité de Green de la façon suivante :

$$\Phi_P = V_\infty (x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha) - \int_{S_B + S_C} \Phi (\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s) dS \quad (3.2.11)$$

Il existe une deuxième façon de considérer le problème. On pose que  $V = V_\infty + \vec{n} \cdot \nabla \Phi$ .

Où  $\Phi$  est le potentiel de perturbation. La surface  $S_\infty$  ne contribue pas au potentiel,

On a alors :

$$\vec{n} \cdot \nabla \Phi = -\vec{n} \cdot V_\infty \quad (3.2.12)$$

$\vec{n}$  Est dirigé vers le fluide

Considérons la surface  $S_c$  comme une surface simple, avec :

$$\nabla \Phi = (\Phi^+) - (\Phi^-) \quad (3.2.13)$$

Où

$\Phi^+$  Est la valeur de  $\Phi$  sur la face supérieure

$\Phi^-$  Est la valeur de l'autre côté

L'équation devient donc :

$$\Phi_P = V_\infty(x_P \cos \alpha + y_P \sin \alpha) - \int_{S_B} \Phi(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s) \cdot dS - \int_{S_C} \Delta \Phi(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s) \cdot dS \quad (3.2.14)$$

Avec  $\Phi$  le potentiel total. Si on introduit la circulation  $\Gamma$ , on obtient :

$$\Phi_P = V_\infty(x_P \cos \alpha + y_P \sin \alpha) - \int_{S_B} \Phi(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s) \cdot dS - \Gamma \int_{S_C} \Phi(\vec{n} \cdot \nabla \Phi_s) \cdot dS \quad (3.2.15)$$

### ❖ LES METHODE DES PANNEAUX EN BREF

- 1) Méthode de Hess et Smith
- 2) Méthode avec tourbillons par formulation de vitesse
- 3) Méthode avec tourbillons par formulation de ligne de courant
- 4) Méthode avec doublets constants par formulation du potentiel
- 5) Méthode avec doublets linéaires par formulation du potentiel

### III -2- 3 La méthode avec tourbillons par formulation de ligne de courant

#### III -2-3-1 Discrétisation

Elle consiste une division du profil en petits segments, les panneaux. La densité de panneaux doit être plus importante aux bords de fuite et d'attaque pour avoir une plus grande précision. Chaque panneau contient un tourbillon distribué uniformément mais dont l'intensité varie d'un panneau à l'autre.

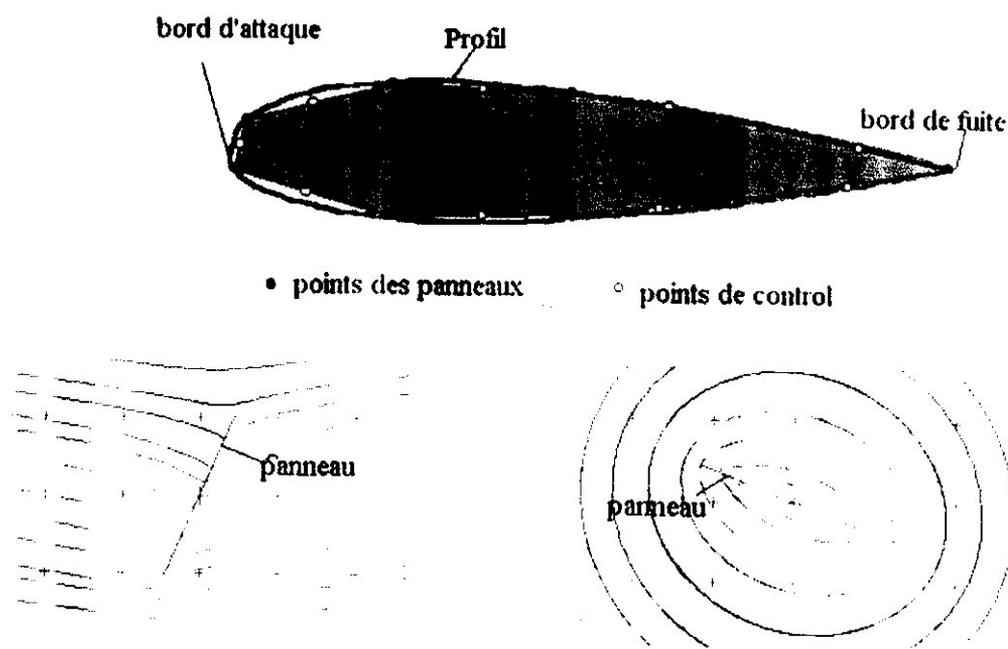


Figure 3-11 : discrétisation d'un profil par des panneaux

**III -2-3-2 Equations de base**

La fonction de courant résultante en un point  $P(x_p, y_p)$  est :

$$\Psi_B = V_\infty (y_p \cos \alpha - x_p \sin \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \gamma_j \int_0^{l_j} \ln r \, dS \quad (3.2.16)$$

Où  $l_j$  est la longueur du panneau  $j$ .

Après évaluation de l'intégrale, la fonction de courant devient :

$$\Psi_B = V_\infty (y_p \cos \alpha - x_p \sin \alpha) + \sum_{j=1}^N A_{p,j} \cdot \gamma_j \quad (3.2.17)$$

Où :

$$A_{p,j} = \frac{l_j}{2\pi} [\ln r_{p,j+1} - 1] + \frac{x^*}{2\pi} \cdot \ln \frac{r_{p,j}}{r_{p,j+1}} + \frac{y^*}{2\pi} \beta_{p,j} \quad (3.2.18)$$

$$x^* = (x_p - x_j) \cos \theta_j + (y_i - y_j) \sin \theta_j$$

$$y^* = -(x_p - x_j) \sin \theta_j + (y_i - y_j) \cos \theta_j \quad (3.2.19)$$

$$r_{p,j} = \sqrt{(x_p - x_j)^2 + (y_p - y_j)^2} \quad (3.2.20)$$

$$\beta_{p,j} = \text{arctg} \left[ \frac{(y_p - y_i)(x_{p+1} - x_p) - (y_p - y_{j+1})(x_j - x_p)}{(y_p - y_j)(y_p - y_{j+1}) + (x_j - x_p)(x_{j+1} - x_p)} \right] \quad (3.2.21)$$

Avec :

$r_{p,j}$  : La distance du nœud  $j$  au milieu du panneau  $i$  (point P)

$\beta_{p,j}$  : L'angle sous lequel on voit le panneau  $j$  du milieu du panneau  $i$

$\alpha$  : L'angle d'attaque

$l_j$  : La longueur du panneau  $j$

Lorsque le point P est situé au centre du panneau  $j$ , il faut utiliser l'expression suivante :

$$A_{p,j} = \frac{l_j}{2\pi} \left[ \ln \frac{l_j}{2} - 1 \right] \quad (3.2.22)$$

On obtient donc un système d'équations linéaires lorsque l'on applique l'équation (3.2.17) au centre de chaque panneau, c'est à dire lorsque le point P devient le point de contrôle  $i$  avec  $i = 1, \dots, N$ . La  $(N+1)^{\text{ème}}$  équation nécessaire provient de la condition de Kutta au bord de fuite. Le système d'équations ainsi obtenu peut prendre la forme matricielle suivante :

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (3.2.23)$$

Où  $[A]$  est la matrice des coefficients d'influence. Elle est obtenue à l'aide des équations précédentes et des conditions suivantes :

$$A_{i,N+1} = -1$$

$$A_{N+1,1} = A_{N+1,N} = 1$$

$$A_{N+1,j} = 0 \quad \text{pour } j=2, \dots, N-1$$

Le vecteur constant  $\{b\}$  est égal à :

$$b_i = -V_\infty (y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha) \quad \text{pour } i=1, \dots, N$$

$$b_{N+1} = 0$$

On résout le système de l'équation (3.2.23), pour obtenir directement les vitesses tangentielles. Puis on peut en déduire les coefficients de portance et de pression.

### III -2-3-3 Conditions aux frontières :

On définit que la vitesse tangentielle en un point du profil est égale à l'intensité du tourbillon. On va donc calculer la vitesse tangentielle au centre de chaque panneau, c'est-à-dire aux points de contrôles. Cependant, il est nécessaire de compléter ceci par la condition de *Kutta*. Aux bords de fuite:

$$|V_t(N)| = |V_t(1)| \quad (3.2.24)$$

Où :

$V_t(1)$  Est la vitesse tangentielle au panneau 1

$V_t(N)$  Est la vitesse tangentielle au panneau  $N$ .

La formulation des conditions aux frontières est :

$$\psi_B = V_\infty (y_p \cos \alpha - x_p \sin \alpha) + \sum_{j=1}^n A_{p,j} \gamma_j \quad (3.2.25)$$

Tout simplement parce qu'on utilise la formulation par lignes de courant, sachant que  $\Phi = 0$  sur le profil, on obtient :

$$-V_\infty (y_p \cos \alpha - x_p \sin \alpha) = \sum_{j=1}^n A_{p,j} \gamma_j \quad (3.2.26)$$

La condition de *Kutta* entraîne que au bord de fuite, on a :

$$-V_\infty (y_f \cos \alpha - x_f \sin \alpha) = 0 \quad (3.2.27)$$

### III -2-3-4 Calcul de la distribution du gradient de pression.

Le coefficient de pression est fourni par l'expression suivante :

$$C_p(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = 1 - \left( \frac{V_n}{V_\infty} \right)^2 \quad (3.2.28)$$

### III -2-3-5 Calcul du coefficient de la portance

Le coefficient de portance est donné par l'expression :

$$C_L = \frac{L}{q_\infty c} \quad (3.2.29)$$

Avec  $L = r V_\infty \Gamma$  selon le théorème de Kutta Joukowski, et  $q_\infty = \left( \frac{1}{2} \right) \rho V_\infty^2$

Ainsi,

$$C_l = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{V_\infty^2 \rho V_\infty^2 c}$$

La circulation  $\Gamma$  peut s'écrire en fonction de l'intensité tourbillonnaire  $\delta$  de la manière suivante :

$$\Gamma = \oint \gamma ds \quad (3.2.30)$$

On peut maintenant approximer l'intégrale de contour  $\oint ds$  par la sommation des longueurs des panneaux, ce qui amène à :

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N \gamma_i h_i \quad (3.2.31)$$

On obtient donc le coefficient de portance du profil à l'aide de la formule suivante :

$$C_l = \frac{2}{V_\infty c} \sum_{i=1}^N \gamma_i h_i \quad (3.2.32)$$

### III -2-3-6 Algorithme du calcul :

- 1) Saisie des paramètres d'entrée
- 2) Calcul des caractéristiques du profil en fonction du NACA.
- 3) Calcul des bords de panneaux et des points de contrôle :
- 4) Initialisation de la matrice A du système linéaire.
- 5) Initialisation du second membre du système linéaire.
- 6) Résolution du système linéaire.
- 7) Calcul des coefficients aérodynamique (pression, portance, traîné,...) sur chaque Panneau du profil.
- 8) Affichage des résultats

### III-3 Couplage ligne portante - méthode des panneaux

La théorie simplifiée de l'aile finie présentée aux sections précédentes néglige la déformation de la nappe tourbillonnaire sous l'effet des vitesses qu'elle induit sur elle-même. Dans la réalité, la nappe tourbillonnaire présente les caractères résumés en figure 3-12.

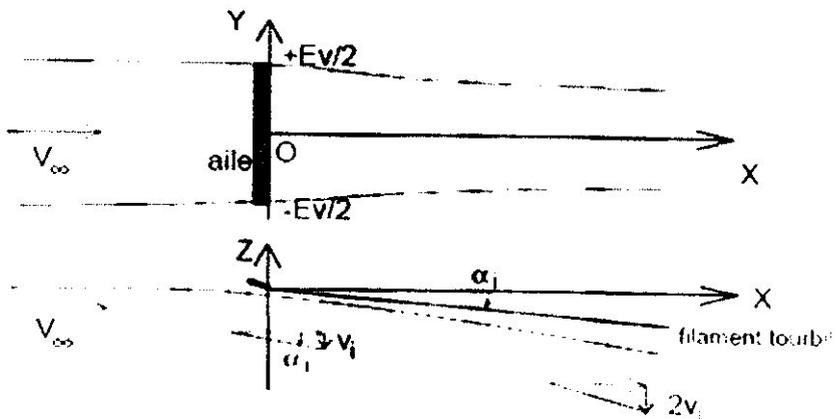


Figure 3-12 : la nappe tourbillonnaire

La figure montre que la nappe tourbillonnaire, de largeur initiale  $Ev$  (en vue de dessus), voit sa largeur diminuer dans le sillage. Parallèlement, en vue de côté, la vitesse induite croît depuis  $O$  (à l'infini amont) jusqu'à  $v$  au niveau de l'aile et poursuit sa croissance jusqu'à pratiquement  $2v$  dans le sillage.

On constate de plus que la déflexion des particules d'air au voisinage de l'aile s'effectue non seulement vers le bas et vers l'emplanture, mais également légèrement vers l'amont (entraînement de l'air dans la direction de déplacement de l'aile).

Toutefois, en raison de la faiblesse usuelle des angles induits, les calculs de vents induits seront effectués conformément à la théorie simplifiée en supposant que les filaments tourbillonnaires de sillage restent des droites situées dans le plan  $xoy$  (on néglige la contraction du sillage ainsi que sa courbure et son inclinaison).

Le calcul d'une aile droite de forme quelconque sera abordé ici sous forme de calcul numérique :

La demi aile de longueur  $L = Ev/2$  est divisée en  $(N)$  segments, comme indiqué en figure 9 ( $N = 7$  ici) repérés par des indices  $(j)$  allant de  $0$  compris à  $N-1$  compris.

Les principales caractéristiques aérodynamiques à calculer par la méthode de la ligne portante sont : la circulation  $(\Gamma)$ , la vitesse du vent induit  $(V_i)$ , l'angle d'attaque  $(\alpha)$ . Ces caractéristiques seront calculées en  $N$  points de l'envergure ( $n$  nervures) allant de l'indice  $k = 0$  (point sur l'axe longitudinal de l'avion où  $Y_0 = 0$ ) jusqu'à l'indice  $k = N-1$ .

Le point d'indice  $(k)$  est situé au début du segment  $(j)$  de même valeur d'indice.

Le point d'indice  $k = N$  (point d'extrémité d'aile où  $Y_N = L$ ) n'est pas un point de calcul car la vitesse induite  $V_i$  est indéfinie. Ce point est caractérisé par une circulation nulle  $(\Gamma = 0)$  puisque la portance est supposée s'y annuler.

On introduira pour toute la suite la coordonnée réduite d'envergure  $(y)$  :

$$y = Y/L \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (\text{Sans dimension})$$

La longueur des segments sera en général modulée en fonction de l'écart à l'axe de l'avion. Pour obtenir plus de précision vers l'extrémité de l'aile où les variations des caractéristiques sont souvent rapides, on peut utiliser une découpe du type:  $y_k = \sin(k\pi / 2N)$

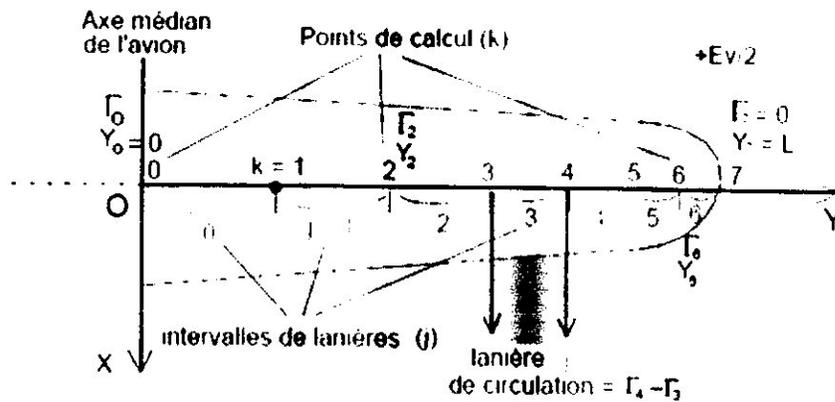


Figure 9

En utilisant la loi de Biot et Savart, on exprimera, en chaque point de calcul, le vent induit par la lanière associée à chacun des segments (et au segment symétrique sur l'autre moitié de l'aile).

L'application de Biot et Savart sera faite en introduisant et en calculant une fois pour toutes les coefficients d'influence  $C(j, k)$  donnant chacun l'influence de la lanière tourbillonnaire d'intensité  $(\Gamma_{j+1} - \Gamma_j)$  issue de l'intervalle  $j$ , sur le point de calcul  $k$ .

Le vent induit total en un point de calcul sera obtenu par sommation.

Lorsque Les paramètres aérodynamiques sont calculées (la circulation  $\Gamma$ , la vitesse du vent induit  $V_i$ , l'angle d'attaque  $\alpha$ ) en chaque point de calcul (nervure), il ne reste qu'appliquer la méthode des panneaux bidimensionnelle sur chaque nervure prenons on charge les paramètres aérodynamiques locaux de chaque nervure, pour calculer les paramètres aérodynamiques Sur tous les nœuds de la nervure

Enfin on calcule les efforts et les moments aérodynamiques sur tous les nœuds de l'aile (la demi aile), et la phase aérodynamique du projet est terminée.

## Chapitre IV

### Programmation éléments finis

#### IV-0 Introduction

La programmation éléments finis nécessite un bagage numérique important, pour réaliser les différentes étapes du calcul. tel que :

- l'intégration numérique : qui consiste un facteur essentiel pour passer des fonctions D'interpolations et leurs dérivées vers les vecteurs et matrices élémentaires.
- la résolution des systèmes : lorsque le système linéaire global  $[K]\{U\} = \{F\}$  Est construis, il faut utiliser une méthode numérique pour le résoudre a cause de la grande dimension du Système (quelque centaines, milliers,...)

De plus, la génération du maillage est la première étape a réaliser avant tous calculs éléments finis, le maillage éléments finis doit non seulement deviser le domaine de calcul en petits éléments ,mais doit donner aussi les coordonnées de toutes les nœuds et les connectivites de tous le éléments

Apré la présentation de ces éléments, on donne une petite documentation sur le langage de programmation utiliser (digital visual fortran 6),

#### IV-1 Génération du Maillage

Le maillage pour des éléments finis de poutre ou de barre tridimensionnel défaire par rapport à un maillage pour des éléments de surfaces ou de volume, et pour une aile rectangulaire simple ou une aile de forme complexe  
Pour notre projet la génération de maillage est pour une aile de forme quelconque (dans le plans) et non vriller.

Les déférents paramètres nécessaires pour générer un tel maillage sont :

- l'envergure de l'aile.
- la longueur de la corde de chaque nervure.
- le type du profil utilisé.
- le nombre des points voulus pour représenter le profil.

Les étapes de la génération du maillage sont

- 1- la génération du profil naca (première nervure).
- 2- la génération des raidisseurs de la première nervure.
- 3- la génération de toutes les nervures.
- 4- la génération des longerons.

**IV-1-1 Génération des profils NACA**

Le NACA (National Advisory Committee for Aeronautics), prédécesseur de la NASA, a étudié différentes familles de profils répondant à diverses applications. Parmi celles ci, on distingue la famille de profils à quatre chiffres, Dans notre projet, nous allons prendre en considération ceux à quatre chiffres seulement.

Dans cette famille, un profil est représenté par quatre chiffres. Le premier indique la cambrure maximale relative en pourcentage de la corde ; le deuxième représente la position de cette cambrure en pourcentage de la corde et les deux derniers spécifient l'épaisseur relative maximale en pourcentage de la corde. Par exemple, dans le cas du profil 4412 :

- Le 4 indique la cambrure maximale (4%)
- Le deuxième 4 indique la position de la cambrure maximale (40%)
- Le 12 indique l'épaisseur relative maximale (12%)

Nous allons maintenant voir les formules permettant de calculer les coordonnées des points d'un profil. Dans le cas des profils symétriques de cette famille, on se sert de l'expression suivante :

$$x_j/c = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta_j)$$

$$\pm y = \frac{t}{0.2} (0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3537x^2 + 0.243x^3 - 0.1015x^4) \quad (22)$$

$$\text{Et le rayon de courbure au bord d'attaque est égal à : } r = 1,1019 t^2 \quad (23)$$

Avec : t : l'épaisseur relative maximale du profil

Pour le cas des profils cambrés, la forme géométrique de la cambrure moyenne est représentée par deux paraboles :

$$\begin{cases} y_c = \frac{y_A}{x_A^2} x(2x_A - x) & 0 \leq x \leq x_A \\ y_c = \frac{y_A}{(c-x_A)^2} (c-x)(c+x-2x_A) & x_A \leq x \leq c \end{cases} \quad (24)$$

Où le point  $A(x_A, y_A)$ , situé à la distance où la flèche est maximale, représente le point commun des deux paraboles. Remarquons que  $y_A$  représente la cambrure maximale et que  $x_A$  en donne la position.

L'équation de la forme géométrique d'un profil cambré est donc :

Pour l'extrados :

$$\begin{aligned} x_e &= x - y_i \sin \theta \\ y_e &= y + y_i \cos \theta \end{aligned} \quad (25)$$

Pour l'intrados :

$$\begin{aligned} x_i &= x + y_i \sin \theta \\ y_i &= y - y_i \cos \theta \end{aligned} \quad (26)$$

Avec,  $y_i$  identique à celui des profils symétriques et  $\theta = \frac{dy_c}{dx}$

**IV-1-4 la génération des longerons.**

Pour chaque longeron :

On prend toutes les nœuds de toutes les nervures situées à la position ( $L_i$  % de la corde) et on joints entre elles, l'ensemble des éléments résultants est le longeron

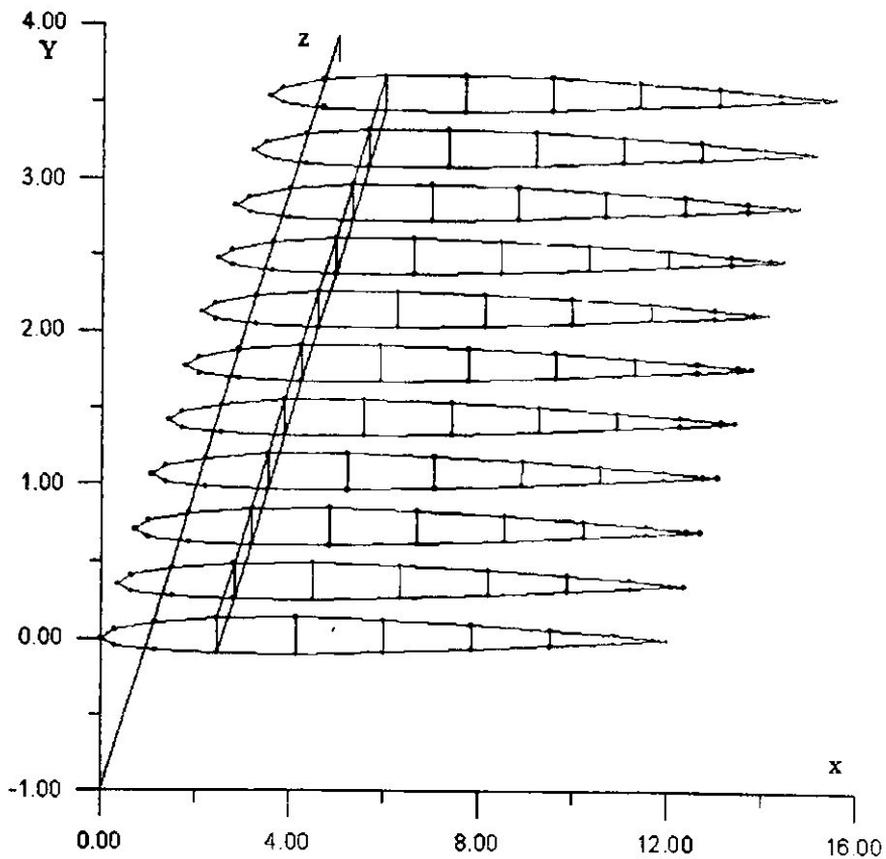


Figure 4-3 Le Maillage complet de l'aile

## IV-2 Intégration numérique

### IV-2-1 Introduction

L'intégration numérique joue un rôle très important dans le contexte des éléments finis pour l'évaluation des matrices de rigidité et de masse de l'éléments à partir de l'intégration d'une certaine fonction qui sera définie dans le domaine de l'élément (en générale triangulaire, rectangulaire, tétraèdre, prismatique...) et a la nature du système de coordonnées (cartésiennes, intrinsèque, polaire,...)

Il y a de nombreuses techniques pour intégrer une fonction numériquement ; Citons à titre d'exemple :

- trapèze
- Simpson
- Newton
- Quadrature de Gauss (Legendre, Lagrange, Chebyshev,...)
- Runge - Kutta

Dans notre travail on propose la 4<sup>ème</sup> méthode, c'est-à-dire, la méthode quadrature de Gauss Legendre.

### IV-2-2 Méthode de Gauss Legendre

La méthode de quadrature de Gauss est reconnue actuellement comme étant une méthode très puissante d'intégration numérique, cette méthode consiste à transformer la fonction  $F(x,y,z)$  à intégrer en une fonction sans dimension  $\phi = (\xi, \eta, \zeta)$  et à l'évaluer en quelques points bien précis

$$I = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F(x, y, z) dx dy dz \quad (4.2.1)$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.2.2)$$

$$I = c \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{k=1}^{k=p} \alpha_i \beta_j \gamma_k \phi(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (4.2.3)$$

Les coordonnées  $\xi_i, \eta_j, \zeta_k$  sont celles des points particulières appelées points de Gauss et sont sélectionnées afin que cette formule soit exacte pour tout polynôme  $F(x,y,z)$  de degré  $(m,n,p)$  le plus grand possible, et les coefficients  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$  sont appelés coefficients de pondération.

On montre que le polynôme d'ordre  $(2n-1)$  est exactement intégré en utilisant  $n$  points de Gauss.

**IV-2-3 Polynôme de Legendre**

Le polynôme de Legendre de degré m est définis par :

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m \quad (4.2.4)$$

Qui sera développés comme suit :

**a) si m est paire**

$$\frac{P_m(x)}{b_0} = 1 - a_0 \left( 1 - a_1 \left( 1 - a_2 \left( 1 - m - a \frac{m}{2} \cdot 1 \left( 1 - a \frac{m}{2} \cdot 2 \right) \right) \right) \dots \right) \quad (4.2.5)$$

Paramètres  
 $\left(\frac{m}{2}-1\right)$

Telle que :  $a_k = \frac{(m - 2k)(m + 2k + 1)}{(2k + 1)(2k + 2)} x^2 \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, m, \frac{m}{2} - 1$

Et  $b_0 = (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{m!}{2^m \left[\frac{m}{2}\right]^2}$

**b) si m est impaire**

$$\frac{P_m(x)}{b_1} = x \left( 1 - a_0 \left( 1 - a_1 \left( 1 - a_2 \left( 1 - \dots a \frac{m-3}{2} \left( 1 - a \frac{m-3}{2} \right) \right) \right) \dots \right) \right) \quad (4.2.6)$$

$\frac{m-1}{2}$  Paramètres

Telle que :  $a_k = \frac{(m + 2k + 2)(m - 2k - 1)}{2(k + 1)(2k + 3)} x^2 \quad k = 0, 1, 2, \dots, m, \dots, \frac{m-3}{2}$

Et  $b_1 = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m+1)!}{2^m \left[\left(\frac{m-1}{2}\right)!\right] \left[\left(\frac{m-1}{2}\right)!\right]}$

**Quelques propriétés du polynôme de Legendre**

- a) un polynôme de Legendre  $P_m(x)$  a m racines réelles et distinct comprises dans l'intervalles [-1,1]
- b) si m est paire le polynôme de Legendre  $P_m(x)$  est une fonction paire dans [-1,1]
- c) si m est impaire, le polynôme  $P_m(x)/x$  est une fonction paire dans l'intervalle [-1,1]
- d)  $P_m(x)=1$  ;  $P_m(-1)=(-1)^m$  ;  $m=0,1,2,3,m$

**IV-2-4 Procédures de la méthode**

Soit à calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F(x, y, z) dx dy dz \quad (4.2.7)$$

La procédure de calcul s'énonce comme suit :

1) transformer chacun des intervalles suivants :

$[x_{\min}, x_{\max}]$ ,  $[y_{\min}, y_{\max}]$ ,  $[z_{\min}, z_{\max}]$  aux intervalles  $[-1, 1]$ ,  $[-1, 1]$ ,  $[-1, 1]$

$$x = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} + \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} \xi \quad (4.2.8)$$

$$y = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} + \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \eta \quad (4.2.9)$$

$$z = \frac{z_{\max} + z_{\min}}{2} + \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2} \zeta \quad (4.2.10)$$

Et l'intégrale devient :

$$I = c \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.2.11)$$

Avec  $c = \left[ \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2} \right] \left[ \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \right] \left[ \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} \right]$  (4.2.12)

2) choisir m, n, p nombre de points suivants x, y et z respectivement les quels la fonction est évaluée :

L'intégrale s'approxime a :

$$I = c \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{k=1}^{k=p} \alpha_i \beta_j \gamma_k \phi(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (4.2.13)$$

Les  $(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$  ( $i=1,2,3,\dots,m$ ), ( $j=1,2,3,\dots,n$ ), ( $k=1,2,3,\dots,p$ ) sont les racines des polynômes de Legendre de degré m,n,p respectivement ;

Les  $\alpha_i$ ;  $i=1,2,3,\dots,m$  (par exemple) sont les coefficients associer aux racines  $\xi_i$  et qui sont déterminées a partir d'un système a m équations par :

$$\sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i \xi_i^{2p-2} = \frac{2}{2p-1} \quad p = 1, 2, 3, 4, \dots, m, \text{int}\left(\frac{m+1}{2}\right) \quad (4.2.14)$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i \xi_i^{2p-1} = 0 \quad p = 1, 2, 3, 4, \dots, m - \text{int}\left(\frac{m+1}{2}\right) \quad (4.2.15)$$

Les racines des 10 premiers polynômes de Legendre avec leurs coefficients associes obtenus grâce d'un programme sont présentées dans l'annexe

**IV-3 Résolution des systèmes linéaire****IV -3-1 METHODES DIRECTES****IV -3-1-1 Introduction**

L'assemblage et l'introduction des conditions aux limites donne le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} [K]\{U\} &= \{F\} \\ \{U\} &= [K]^{-1}\{F\} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

La résolution du système par une méthode directe est effectuée en deux étapes sans construire l'inverse de [K]

**IV -3-1-2 Triangulation ou décomposition de [K] :**

$$[K] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \ddots & \\ L & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & D & \\ L & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & V \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

Où [L] matrice triangulaire inférieure avec L = 1  
 [D] matrice diagonale  
 [V] matrice triangulaire supérieure avec V = 1.

$$\det [k] = D_{11} \cdot D_{22} \dots D_{nn}$$

Pour une matrice [K] symétrique :  $[L] = [V]^T$

**IV -3-1-3 Obtention de (U)**

Le vecteur (U) s'obtient par substitution en exploitant les caractéristiques des matrices triangulaires [L] et [V]

Substitution avant :

$$\begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \ddots & \\ L & & \ddots \end{bmatrix} \{Y\} = \{F\} \quad (4.3.3)$$

Substitution arrière :

$$\begin{bmatrix} \ddots & & V \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_1 / D_{11} \\ \vdots \\ Y_n / D_{nn} \end{Bmatrix} \quad (4.3.4)$$

$$[D][V]\{U\} = \{Y\} \quad (4.3.5)$$

Parmi les plusieurs méthodes de résolution directe on présente la méthode de KHALETSKI

**III-3-1-4 Méthode de KHALETSKI**

Supposons dans la première étape que la matrice [K] est carrée mais pleine et quelconque. Après avoir présenté l'algorithme de résolution, en essaye de faire l'extension vers une matrice pleine mais symétrique, et dans la dernière étape en déduit l'algorithme de résolution pour une matrice symétrique et bande.

**a) [K] matrice carré pleine quelconque**

Mettons la matrice [K] sous la forme d'un produit de deux matrices triangulaires inférieure [L] [L] et de la matrice triangulaire supérieure [H]-[H<sub>j</sub>] à diagonale unité, c'est-à-dire:

Où :  $[K] = [L][H]$  (4.3.6)

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & & & & \\ L_{21} & L_{22} & & & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ L_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & L_{NN} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [H] = \begin{bmatrix} 1 & H_{12} & H_{13} & \cdot & \cdot & H_{1N} \\ & 1 & H_{23} & \cdot & \cdot & H_{2N} \\ & & 1 & \cdot & \cdot & H_{3N} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

Les éléments L1 et H1 se calculent d'après les formules suivantes [10]:

$$L_{11} = K_{11}, \quad H_{ij} = \frac{K_{ij}}{L_{11}} \quad j = 2, 3, \dots, N \quad (4.3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{ij} &= K_{ij} - \sum_{m=1}^{m=j-1} L_{im} H_{mj} & j &= 1, 2, 3, \dots, i \\ H_{ij} &= \frac{1}{L_{ii}} \left( K_{ij} - \sum_{m=1}^{m=j-1} L_{im} H_{mj} \right) & j &= i+1, i+2, i+3, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (4.3.9)$$

On aura par suite deux systèmes d'équations à matrice triangulaire

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad \rightarrow \quad [L] \cdot [H] \cdot \{u\} = \{F\}$$

On pose

$$[H] \cdot \{u\} = \{y\} \quad (4.3.10)$$

$$[L] \cdot \{y\} = \{F\} \quad (4.3.11)$$

Alors

La résolution de système (4.5.19) en suite (4.5.20) se fait par les procédures suivantes:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \\ y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left( F_i - \sum_{m=1}^{m=i-1} L_{im} y_m \right) \quad i = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (4.3.12)$$

$$\begin{cases} u_N = y_N \\ u_i = y_i - \sum_{m=i+1}^{m=N} H_{im} u_m \quad i = N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1 \end{cases} \quad (4.3.13)$$

### **b) [K] matrice carrée pleine et symétrique:**

Si la matrice [K] est symétrique, c'est-à-dire, si  $K_{..} = K_{..}$  ce qui est le cas. Alors, on peut démontrer que [10]:

$$H_{ij} = \frac{L_{ji}}{L_{ii}} \quad (4.3.14)$$

La propriété (V-1 9) nous a permis de ne pas déclarer la matrice [H] dans la mémoire de l'ordinateur et de calculer uniquement les éléments de la matrice [L], ce qui engendre un gain d'espace mémoire en plus.

L'algorithme présenté par les formules (V. 1 4), (V. 1 7) et (V. 1 8) se simplifie à:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{11} = K_{11} \\ L_j = K_j - \sum_{m=1}^{m=j-1} L_m \frac{L_{jm}}{L_{mm}} \quad j = 1, 2, 3, \dots, i \end{array} \right\} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (4.3.15)$$

Et substituons l'équation (V-19) dans l'équation (V-18), cette dernière devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \\ y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left\{ F_i - \sum_{m=1}^{m=i-1} L_{im} y_m \right\} \end{array} \right\} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (4.3.16)$$

**IV-3-2 Méthodes itératives****IV-3-2-1 Introduction**

La résolution de système linéaire par des méthodes directes dépendant en particulier de la capacité du calculateur. Au delà d'un certain nombre d'équation à un certain nombre d'inconnues défini par exemple par un critère d'un système temps réel, les méthodes directes deviennent inappropriées au processus en cours (dépassement de capacité mémoire, temps de résolution élevé). Nous avons alors recours aux méthodes itératives.

Pour ce faire, nous résolvons le système  $A \cdot X = B$ , où  $A$  est une matrice inversible, en construisant une suite de vecteur

$$\vec{X} \in \mathbb{R}^n, \text{ où } X = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T$$

Le vecteur optimal est généralement obtenu après un certain nombre d'itération lorsqu'on atteint une précision souhaitée appelé également critère d'arrêt.

**IV-3-2-2 Principe**

Les méthodes itératives consistent à utiliser un vecteur initial afin de produire une suite de vecteurs du type :

$$X^0 = [x_1^0 \quad \dots \quad x_n^0]^T$$

$$X^{k+1} = F^k(x_1^{k-1} \quad \dots \quad x_n^{k-1}) \quad (4.3.17)$$

Résoudre le système  $A \cdot X = B$  ou  $A$

$A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  peut s'écrire sous une autre forme identique

$$(M - N) \cdot X = B$$

$$\text{Ou encore } M \cdot X = N \cdot X + B \quad (4.3.18)$$

$$\text{Donc à partir d'un vecteur initiale } X^0 = [x_1^0 \quad \dots \quad x_n^0]^T$$

On génère une suite de la façon suivante :

$$\begin{cases} X^1 = M^{-1} \cdot N \cdot X^0 + M^{-1} \cdot B \\ X^2 = M^{-1} \cdot N \cdot X^1 + M^{-1} \cdot B \\ \vdots \\ X^{k+1} = M^{-1} \cdot N \cdot X^k + M^{-1} \cdot B \end{cases} \quad (4.3.19)$$

Cette suite est représentée par la relation itérative suivante :

$$X^{k+1} = T \cdot X^k + V \quad (4.3.20)$$

$$\text{Où } T = M^{-1} \cdot N \quad \text{et} \quad V = M^{-1} \cdot B \quad (4.3.21)$$

Nous ne pouvons savoir si le vecteur estimé se dirige vers la solution optimale si un critère de convergence n'est pas défini. Pour cela vecteur d'erreur est établie par la relation :

$$e^k = X^k - X^* \quad \text{Donc :} \quad e^k = T \cdot e^{k-1}$$

Autrement dit la converge existe si l'erreur tend vers 0 lorsqu'on se rapproche de la solution optimale :

$$X^* \approx X^k \quad \lim_{k \rightarrow \infty} e^k = 0 \quad (4.3.22)$$

De là en découlent trois grandes méthodes itératives de résolution de systèmes linéaire, la méthode de Jacobi, la méthode de Gauss - Seidel et la méthode de relaxation.

#### a. Méthode de Jacobi

$$A = M - N \quad \text{Où } M = D \quad \text{et} \quad N = L + U$$

$$\text{Donc :} \quad T_{\text{jacobi}} = D^{-1}(L + U)$$

$$X^{k+1} = D^{-1} \cdot (L + U)X^k + D^{-1}B$$

#### b. Méthode de Gauss -Seidel

$$A = M - N \quad \text{où } M = D - L \quad \text{et} \quad N = U$$

$$\text{donc :} \quad T_{\text{Gauss-Seidel}} = (D - L)^{-1}U \quad X^{k+1} = (D - L)^{-1}U \cdot X^k + (D - L)^{-1}B$$

#### c. Méthode de relaxation

$$A = M - N \quad \text{où } M = \frac{D}{\omega} - L \quad \text{et} \quad N = \frac{1-\omega}{\omega}D - L$$

Donc :

$$T_{\omega} = \left( \frac{D}{\omega} - L \right)^{-1} \left( \frac{1-\omega}{\omega}D + U \right)$$

**IV -3-2-3 Méthode de relaxation****Principe**

La méthode de relaxation basée sur la méthode de Gauss Seidel. On écrit le système

$A \cdot X = B$  sous la forme itérative suivante après avoir posé :

$$\bar{X}^{k+1} = X^k + \omega \cdot (X^{k+1} - X^k)$$

Où  $X^{k+1}$  est le vecteur estimé par la méthode de Gauss Seidel.

Si  $\omega = 1$  équivalent à la méthode de Gauss Seidel

Si  $\omega > 1$  méthode de sur relaxation

Si  $\omega < 1$  méthode de sous relaxation

Même remarque : les pivots  $a_{ij}$  doivent être non nuls, dans le cas contraire il suffit d'inverser les lignes pour remplir la condition nécessaire.

**Condition d'arrêt**

Nous les rappelons, les critères d'arrêt sont identiques à ceux utilisés dans la méthode de Jacobi. On note  $r$  un vecteur résidu tel que :  $r^k = B - A \cdot X^k$  de sorte que le critère d'arrêt soit :

$$\frac{\|r^k\|}{\|B\|} < \varepsilon \quad , \text{ Avec } \varepsilon \text{ choisi petit.}$$

Une autre technique consiste à utiliser une autre test d'arrêt basé sur :

$$\frac{\|X^k - X^{k-1}\|}{\|X^k\|} < \varepsilon$$

Lorsque l'optimum est voisin de 0, on se contente alors du critère d'arrêt suivant :

$$\|X^k - X^{k-1}\| < \varepsilon$$

**Convergence**

La convergence est vraie lorsque le résidu ou la précision  $\varepsilon^k$  est toujours inférieur à  $\varepsilon^{k-1}$

**Algorithme de relaxation**

Choisir un vecteur initial  $X^0$ , le critère d'arrêt  $\varepsilon$  et le coefficient de relaxation  $\omega$ .

$$\text{Tant que } \frac{\|X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)}\|}{\|X_i^{(k)}\|} < \varepsilon$$

$$\text{Calculer } X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} X_j^{(k)} \right]$$

Fin de Tant que

**Remarque :**

Des sous-programmes de résolution des systèmes linéaire par les méthodes précédentes sont présentés dans l'annexe

## **IV- 4 PROGRAMMATION AVEC DIGITAL VISUAL FORTRAN 6**

### **IV- 4-0 Introduction**

Notre projet est réalisé à l'aide du « DIGITAL VISUAL FORTRAN » (sortie en 1998), un outil de programmation très performant .

La programmation orientée OBJECT, la programmation avancée WIN32 et l'intégration du fortran 95 offre des capacités très puissantes a un point qu'il n y a aucune comparaison avec L'ancien Fortran 77, de plus ; la réalisation des logiciels est permise maintenant avec le fortran qui rattrape sa place dans le domaine de la programmation scientifique.

Le « DIGITAL VISUAL FORTRAN » offre une large gamme d'applications :

- 1 - Console application
- 2 - Quick Win application
- 3 - Windows application
- 4- Static library (.LIB)
- 5 - Dynamic linking library (DLL)

Pour notre projet on a utilisé les 1<sup>er</sup>, 2<sup>eme</sup>, 3<sup>eme</sup> types d'applications

### **IV- 4-1 Console application**

Une application console Fortran (EXE) est un programme qui n'exige pas de produire des graphiques sur l'écran. Elle est semblable à un programme fonctionnant sur un poste de travail d'UNIX ou une borne reliée à un ordinateur central.

Les projets console Fortran fonctionnent dans une fenêtre simple, et nous laissent agir l'un sur l'autre avec notre programme par la normale lu et écrivent des commandes.

Les applications console mieux sont convenues aux problèmes qui exigent le traitement numérique pur plutôt que le rendement graphique ou une interface utilisateur graphique. Ce type d'application est également plus transportable à d'autres plateformes que les autres types d'application.

Les applications console peuvent être plus rapides des applications graphiques de QuickWin, en raison du temps requis pour montrer le rendement graphique. Avec un projet console, on peut employer les bibliothèques statiques, les DLL, et les zones de dialogue, mais on ne peut pas employer les fonctions de QuickWin.

### **IV- 4-2 Quick Win application**

Les aides d'exécution visuelles de la bibliothèque QuickWin transforment les programmes de graphiques en applications simples de Windows. Bien que les pleines possibilités de Windows ne soient pas disponible, QuickWin est plus simple pour apprendre et employer les applications de soutien graphiques basés Pixel coordonnent : des graphiques, des fenêtres des textes, des polices de caractères, des menus définis pour l'utilisateur, des événements de souris, et l'édition (sélectionner /copier /coller) du texte, des graphiques, ou de tous les deux.

On peut accéder à la bibliothèque de routines de QuickWin du visuel Fortran aussi bien que d'autres langages qui soutiennent le Fortran. Le logiciel graphique soutient tous les modes visuels soutenus par Windows NT, Windows 98, et Windows 95.

#### **IV- 4 -3 Windows application**

Les applications de Fortran Windows (EXE) sont des programmes principaux. Ce type de projet nous laisse appeler Windows Applications directement du visuel Fortran. Ceci fournit le plein accès au Win32 Applications, Bien que tu puisses appeler une partie du Win32® APIs des autres types de projet, les applications de Fortran Windows te permettent d'employer l'ensemble complet des fonctions Win32 et d'employer certaines caractéristiques du système non disponibles pour les autres types de projet.

Le module DFWIN.F90 contient des interfaces au Win32., presque toutes les routines sont à notre disposition. Le module DFWIN.F90 nous donne l'accès à une gamme complète des routines comprenant la gestion de fenêtre, l'interface de dispositif graphique, les services de système, les multimédia, et les appels à distance de procédé.

En utilisant les fonctions multimédia, l'application pouvoir créer document et présentation qui incorporer musique, saine effet, aussi bien que texte et graphique. Les fonctions de multimédia fournissent des services pour audio, les commandes de médias, le manche, et les temporisateurs.

#### **IV- 4 -4 Static library (.LIB)**

Les bibliothèques statiques de Fortran (LIB) sont des blocs de code compilés et gardés séparé de la partie principale du programme.

Les bibliothèques statiques offrent des avantages importants en organisant de grands programmes et en partageant des routines entre plusieurs programmes. Ces bibliothèques contiennent seulement des sous-programmes, programmes non principaux. Un dossier statique de bibliothèque a une prolongation de LIB et contient le code d'objet.

Quand tu associes une bibliothèque statique à un programme, toutes les routines nécessaires sont liées de la bibliothèque dans votre programme exécutable quand elle est construite. Des bibliothèques statiques sont habituellement maintenues dans leurs propres annuaires.

#### **IV- 4 -5 Dynamic linking libraries (DLL)**

La bibliothèque de lien dynamique (DLL) contient une ou plusieurs procédures de sous-programme (des fonctions ou des sous-programmes) qui sont compilés, lié, et stocké séparément des applications qui les utilisent. Puisque les fonctions ou les sous-programmes sont séparé des applications, elles peuvent être partagées ou remplacées facilement. Comme une bibliothèque statique, une DLL est un dossier exécutable. À la différence d'une bibliothèque statique où des routines sont incluses dans l'image exécutable basse pendant l'enchaînement, les routines dans une DLL sont chargées quand une application qui référence cette DLL est chargée (temps d'exécution). Un DLL peut également être employé comme endroit pour partager des données à travers des processus.



# Chapitre V



# Chapitre IV

## Chapitre V

### Applications

#### V – 1 Application 01:

##### V -1-1 Le cahier de charge :

Type de l'aile (forme dans le plan) : rectangulaire

Géométrie :

Envergure : 20 m  
Corde d'emplanture : 2 m  
Corde d'extrémité : 2 m  
Nombre des longerons : 1  
Nombre des nervures : 11  
Type du profil : naca 1212  
Nombre des points sur le profil : 20

Matériaux : Alliage Aluminium 2015

Module de Young :  $E = 7.40 \text{ E}10 \text{ N/m}^2$   
Coefficient de poisson :  $\mu = 0.33$   
Masse volumique :  $\rho = 2790 \text{ kg/m}^3$   
Limite élastique :  $R_{P0} = 260 \text{ MPA}$   
Limite de rupture :  $R_M = 390 \text{ MPA}$

Caractéristiques des éléments :

Type de section : circulaire  
Rayon : 0.02 m (2 cm)  
Section creuse : non  
Epaisseur : /

Aérodynamique :

La vitesse de l'avion : 7.5 m/s  
L'angle d'incidence :  $4^\circ$

**V-1-2 Calcul du Maillage :****V-1-2-1 Maillage du profil NACA :**

NACA : 1212

Nombre des points : 20

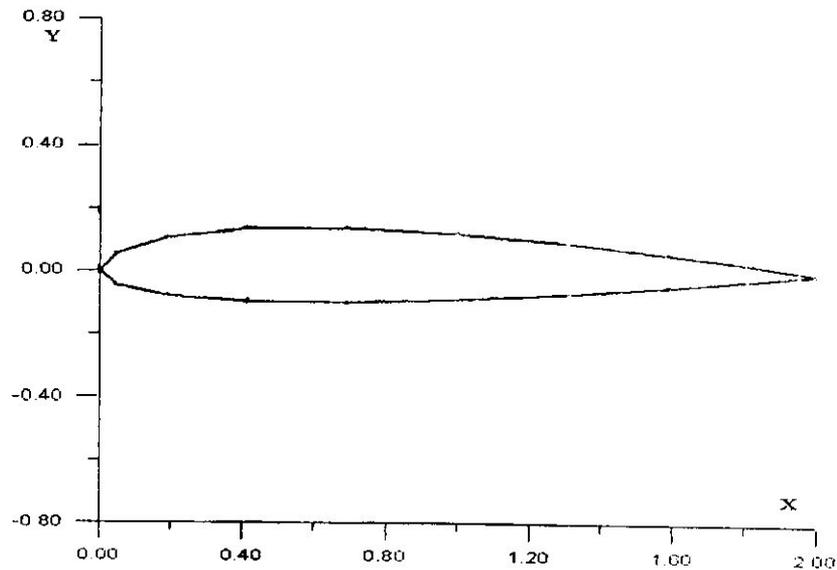
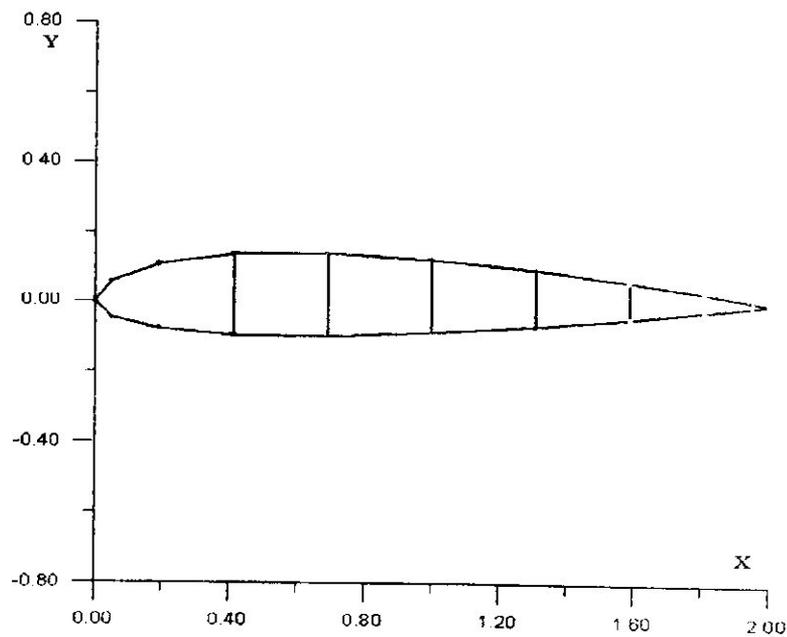


Figure (1-1) Maillage du profil NACA 1212

**V-1-2-2 Maillage de la 1<sup>ère</sup> nervure :**

Nombre des raidisseurs : 5

Figure (1-2) Maillage de la 1<sup>ère</sup> nervure (profil plus les raidisseurs)

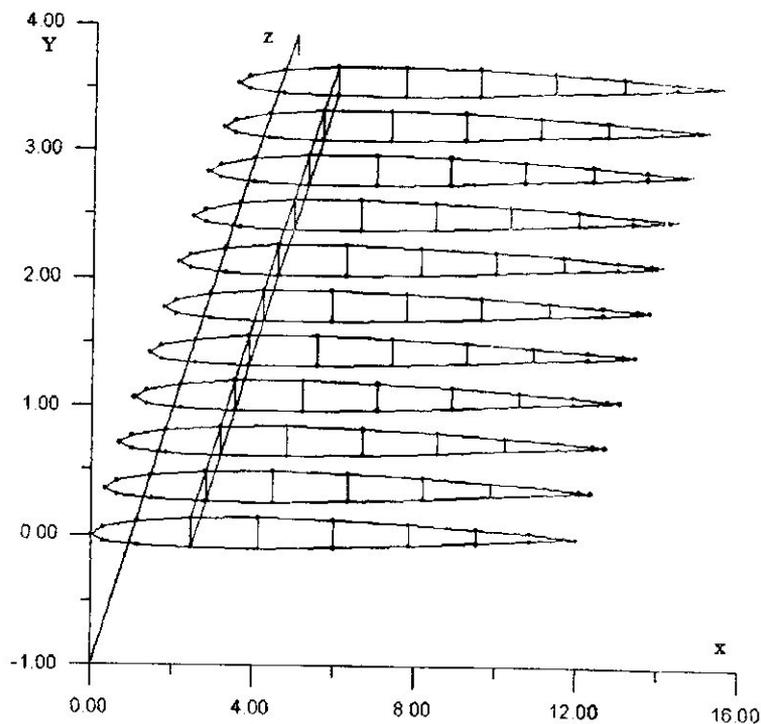
**V-1-2-3 Maillage de l'aile :**

Figure (1-3) Maillage de l'aile

**Remarque :** pour le mieux de l'affichage graphique ; les longueurs suivant l'axe X sont multipliées par 6 pour tous les graphes 3D

**V-1-3 Calcul aérodynamique :****V-1-3-1 Résultats de la méthode de la ligne portante**

I	Y(%)	corde	Re	Vi	Alpha	Gamma	Cz	Cxi	VL	TL
1	0.1	2.0	1071429	-0.147	0.155	7.457	0.994	0.019	7.353	4.877
2	0.2	2.0	1071429	-0.154	0.154	7.413	0.988	0.020	7.346	4.825
3	0.3	2.0	1071429	-0.163	0.153	7.355	0.981	0.021	7.337	4.755
4	0.4	2.0	1071429	-0.177	0.151	7.266	0.969	0.023	7.323	4.650
5	0.5	2.0	1071429	-0.198	0.148	7.132	0.951	0.025	7.302	4.491
6	0.6	2.0	1071429	-0.229	0.144	6.928	0.924	0.028	7.271	4.248
7	0.7	2.0	1071429	-0.281	0.137	6.600	0.880	0.033	7.219	3.857
8	0.8	2.0	1071429	-0.371	0.125	6.022	0.803	0.040	7.129	3.169
9	0.9	2.0	1071429	-0.558	0.100	4.820	0.643	0.048	6.942	1.739

Tableau 1-1 Les résultats de la ligne portante

Surface totale = 40.0000000000000 m<sup>2</sup>  
 Allongement = 10.0000000000000  
 Masse soulevé = 147.709636626186 kg  
 Traînée = 63.7618053600796 N  
 Puissance = 478.213540200597 W  
 Cz global = 1.05145145418803  
 Cxi global = 4.626706964903735E-002

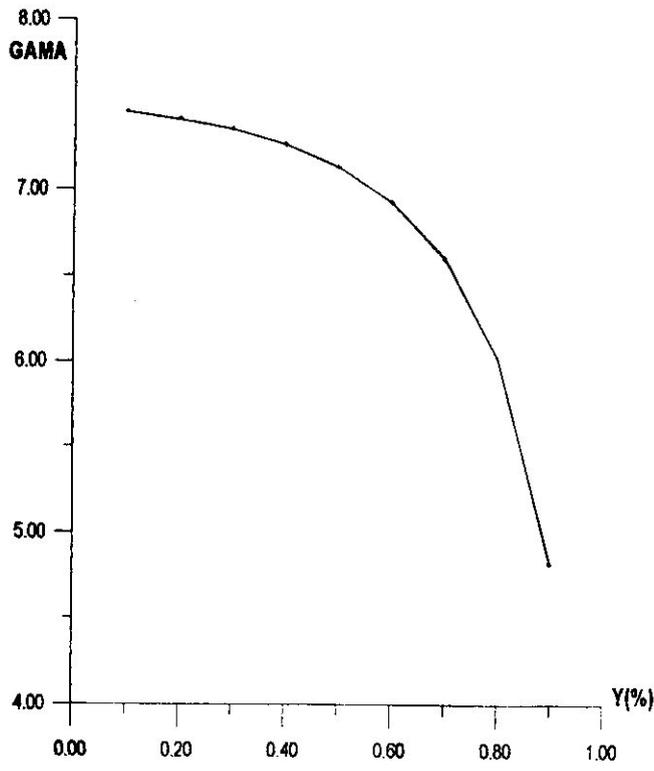


Figure (1-4) distribution de la circulation

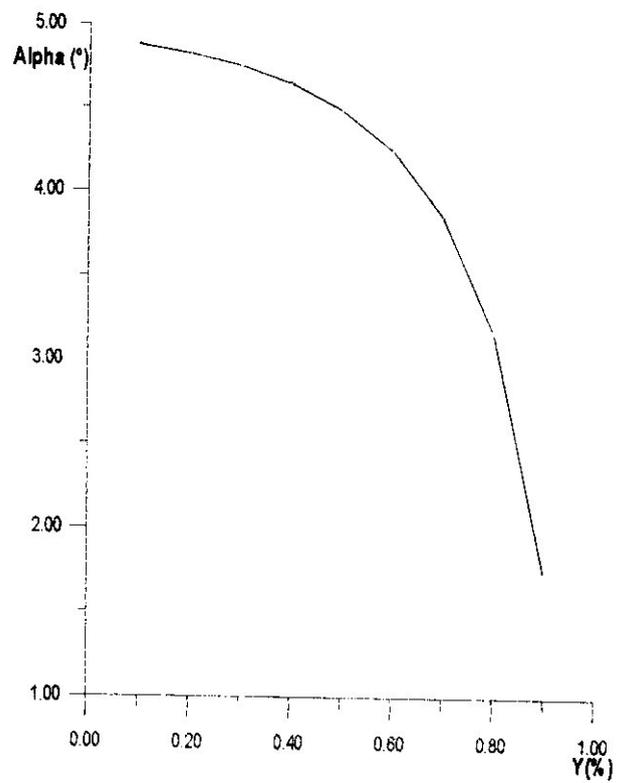


Figure (1-5) distribution des angles D'incidence absolue

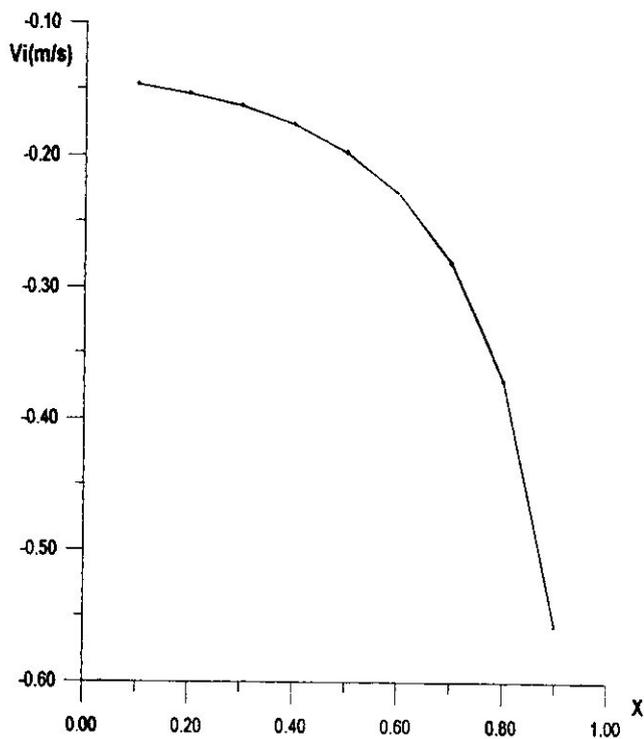


Figure (1-6) distribution des vitesses induites

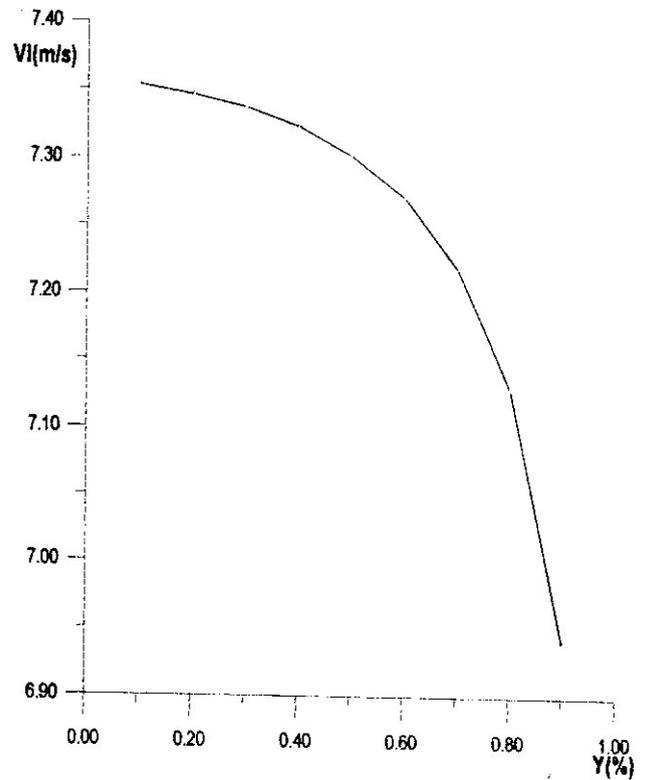


Figure (1-7) distribution des Vitesses locales

D'après la courbe de la circulation (figure 1-4) ; on remarque que la circulation a diminué progressivement, ce qui valide l'hypothèse de la distribution de la circulation dans la partie théorique

De plus, la courbe des vitesses induites (figure 1-6) montre que la vitesse induite augmente dans la direction de l'envergure (avec des valeurs négatives).

A l'inverse, la vitesse locale diminue (figure 1-7), ainsi que l'angle induit (figure 1-5) et elles prennent une distribution proche à celle de la circulation.

La cause de ce phénomène est que chaque fois qu'on s'éloigne du fuselage vers l'extrémité de l'aile : les effets des traînée induites s'accumulent et l'énergie perdue par l'effet de traînée augmente, ce qui influe inversement sur l'énergie de l'écoulement.

La variation des paramètres aérodynamiques est généralement faible lorsque on est loin de l'extrémité de l'aile car l'air parcourt les mêmes distances sur toute l'envergure.

Mais au voisinage de l'extrémité ; la présence du tourbillon induit sur l'extrémité de l'aile absorbe une grande énergie des sections voisines.

### V-1-3-2 Résultats de la méthode des panneaux

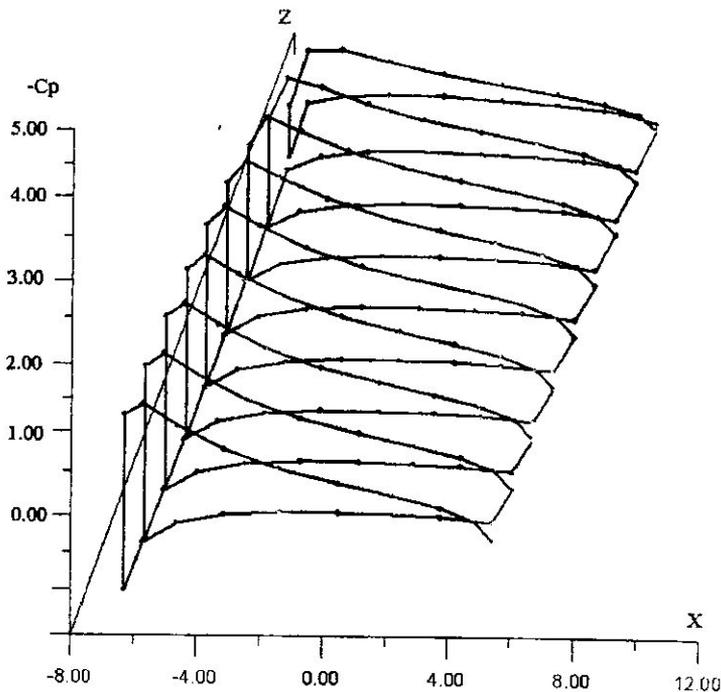


Figure (1-8) les coefficients de pression sur l'aile

Cette figure représente la variation du coefficient de pression sur l'intrados et l'extrados des sections des nervures sur toute l'envergure de l'aile (demi aile),

Lorsque on représente toutes les courbes dans le même plan on trouve la figure 1 - 9

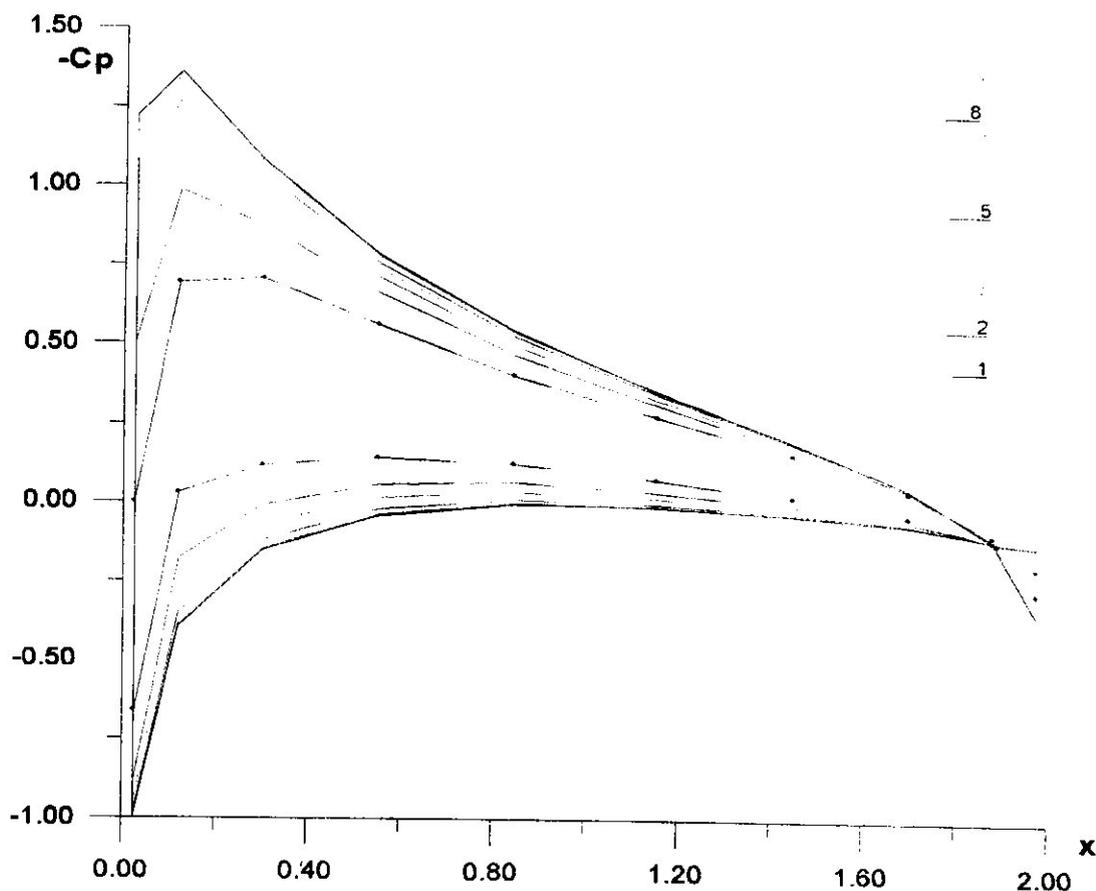


Figure (1-9) les coefficients de pression sur un même plan

Sur cette figure la variation de l'incidence locale entre les profils de chaque nervure permet de différencier les pressions d'un profil à l'autre, en plus, au voisinage du fuselage, la vitesse locale est plus grande que celle de l'extrémité, donc, la pression diminue en direction de l'extrémité de l'aile.

De plus, pour un seul profil les vitesses tangentielles sur les parois des profils sont supérieures à la vitesse infini (sur les profils hors extrémités), car les lignes de courant du fluide, considéré comme parfait se rapprochent les unes des autres, ce qui, par application du théorème de conservation du débit, nous permet de dire que la vitesse le long du profil est supérieure.

D'ou, par application du théorème de Bernoulli, on en déduit que la pression le long de ce même profil est inférieure à celle à l'infini. Ce phénomène est particulièrement visible juste après le bord d'attaque. Mais ce n'est pas vérifié au niveau du bord d'attaque lui-même, qui est un point d'arrêt, donc où la vitesse s'« annule », et où le  $C_p$  tend vers 1. On a de même une décélération au bord de fuite qui fait augmenter le  $C_p$ .

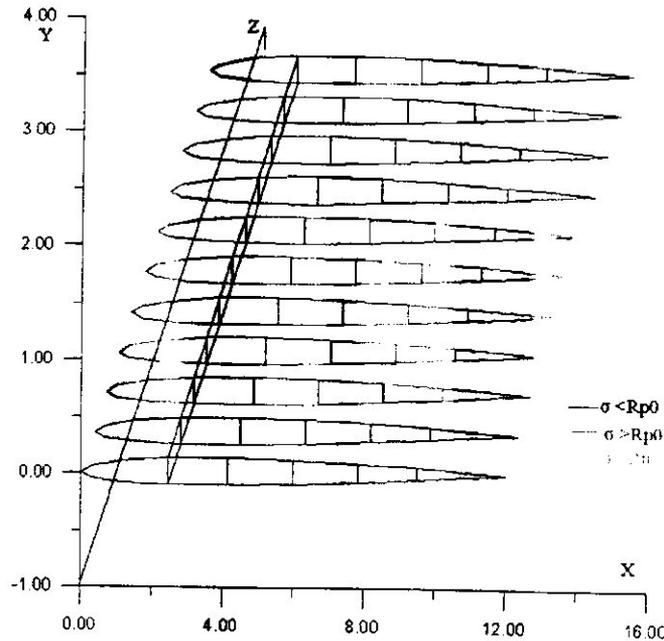
**V 1-4 Calcul structural**

Figure (1-10) la distribution des contraintes sur l'aile.

La figure 1-10 montre la distribution des contraintes sur l'aile.

Les contraintes sur les éléments bleus dépassent la contrainte de la limite élastique ( $R_{p0} = 2.6E8 \text{ N/m}^2$ ), et celles sur les éléments rouges dépassent la contrainte de la rupture ( $R_m = 3.9E8 \text{ N/m}^2$ ), les contraintes sur les éléments restant sont inférieure a ces deux contraintes

Dans se cas, il est impossible que l'aile fonctionne correctement, l'aile se déforme comme l'indique la figure 1-11, on vois bien la destruction des nervures et du longeron, et pour cette étape on prévois se qui va passer si on a construis l'aile avec les donnes présentées dans le cailler de charge

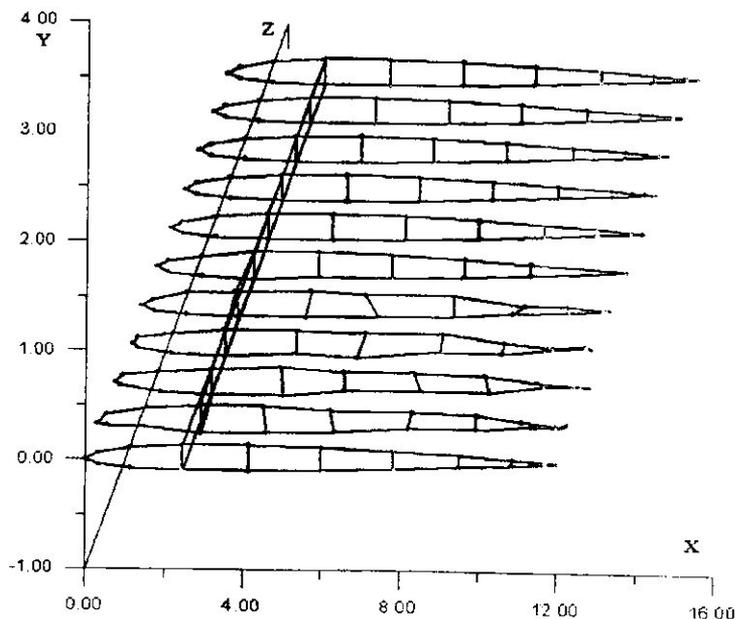


Figure (1-11) déformation de la structure de l'aile

On a proposé une solution pour éviter ce problème ; ajouter un longeron auxiliaire positionné A 75 % à partir bord d'attaque, cette nouvelle configuration à assurer que toutes les contraintes présentées sur l'aile sont inférieurs aux contraintes dangereuses de la limite élastique et de la rupture comme l'indique la figure 1-12, l'aile dans cette étape peut supporter les conditions de fonctionnement indiquées dans le cailler de charge.

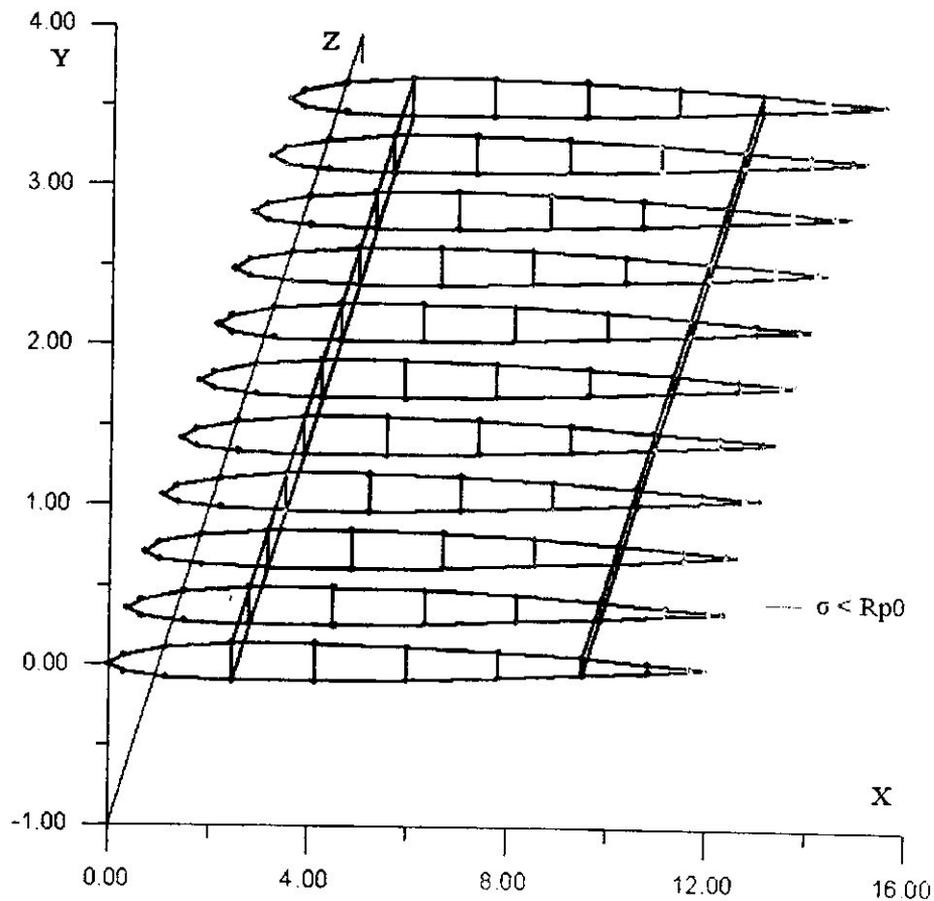


Figure (1-12) la distribution des contraintes sur l'aile (nouvelle configuration).

**V -2 Application 02 (effet de l'allongement) :****V -2-1 Le cahier de charge :**

Type de l'aile (forme dans le plan) : rectangulaire

Géométrie :

Envergure : 40 m

Corde d'emplanture : 1m

Corde d'extrémité : 1 m

Nombre des longerons : 1

Nombre des nervures : 11

Type du profil : NACA 1212

Nombre des points sur le profil : 20

Matériaux : Alliage Aluminium 2015

Module de Young :  $E = 7.40 \text{ E}10 \text{ N/m}^2$

Coefficient de poisson :  $\mu = 0.33$

Masse volumique :  $\rho = 2790 \text{ kg/m}^3$

Limite élastique :  $R_{P0} = 260 \text{ MPA}$

Limite de rupture :  $R_M = 390 \text{ MPA}$

Caractéristiques des éléments :

Type de section : circulaire

Rayon : 0.02 m

Section creuse : non

Epaisseur : /

Aérodynamique :

La vitesse de l'avion : 7.5 m/s

L'angle d'incidence :  $4^\circ$

**V-2-2 Calcul du Maillage :****V-2-2-1 Maillage du profil NACA :**

NACA : 1212

Nombre des points : 20

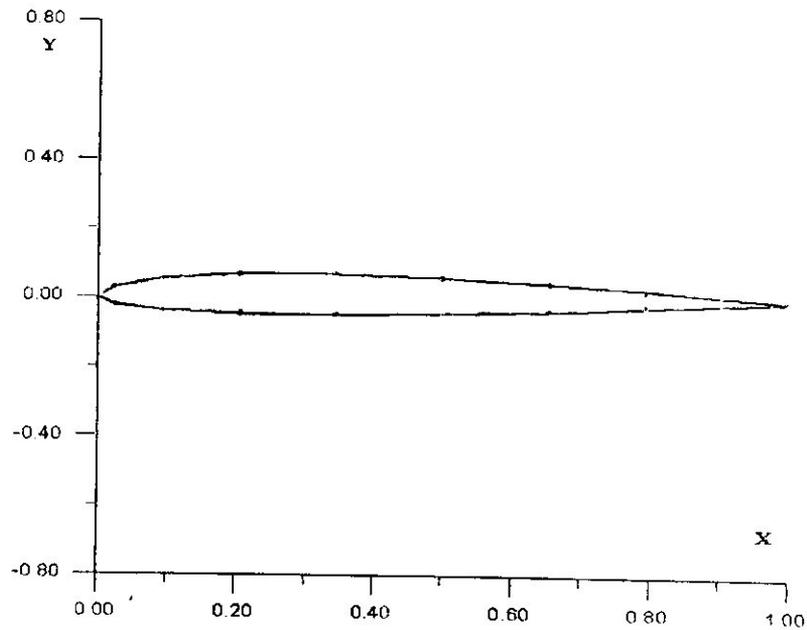
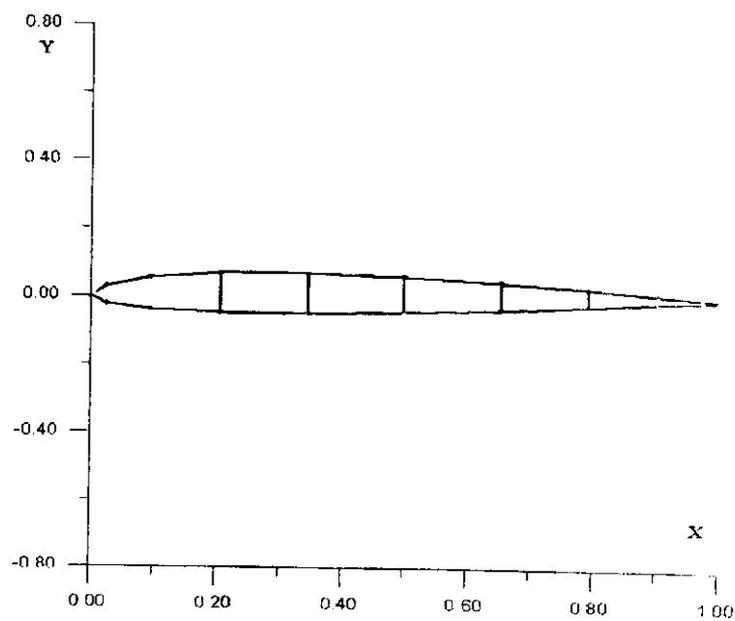


Figure (2-1) Maillage du profil NACA 1212

**V-2-2-2 Maillage de la 1<sup>ère</sup> nervure :**

Nombre des raidisseurs : 5

Figure 1-2 Maillage de la 1<sup>ère</sup> nervure (profil plus les raidisseurs)

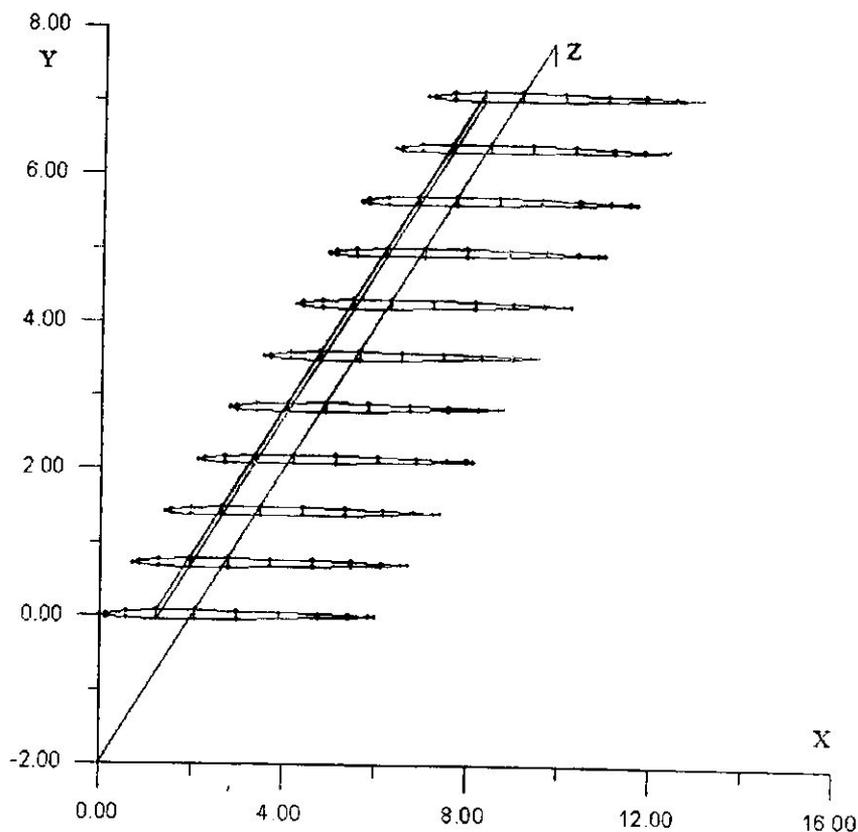
**V-2-2-3 Maillage de l'aile complète :**

Figure (2-3) Maillage de l'aile

**V-2-3 Calcul aérodynamique :****V-2-3-1 Résultats de la méthode de la ligne portante**

I	Y(%)	corde	Re	Vi	Alpha	Gamma	Cz	Cxi	VL	TL
1	0.1	1.0	535714	-0.036	9.723	4.084	1.089	0.005	7.464	5.723
2	0.2	1.0	535714	-0.038	9.710	4.078	1.087	0.006	7.462	5.710
3	0.3	1.0	535714	-0.040	9.691	4.070	1.085	0.006	7.460	5.691
4	0.4	1.0	535714	-0.044	9.661	4.058	1.082	0.006	7.456	5.661
5	0.5	1.0	535714	-0.051	9.613	4.037	1.077	0.007	7.449	5.613
6	0.6	1.0	535714	-0.061	9.533	4.004	1.068	0.009	7.439	5.533
7	0.7	1.0	535714	-0.080	9.387	3.943	1.051	0.011	7.420	5.387
8	0.8	1.0	535714	-0.122	9.070	3.809	1.016	0.016	7.378	5.070
9	0.9	1.0	535714	-0.244	8.135	3.417	0.911	0.030	7.256	4.135

Tableau 2-1 les résultats de la ligne portante

Surface totale	=	40.0000000000000	m <sup>2</sup>
Allongement	=	40.0000000000000	
Masse souleve	=	182.890191644270	kg
Trainee	=	31.3158812233843	N
Puissance	=	234.869109175382	W
Cz global	=	1.30187956827595	

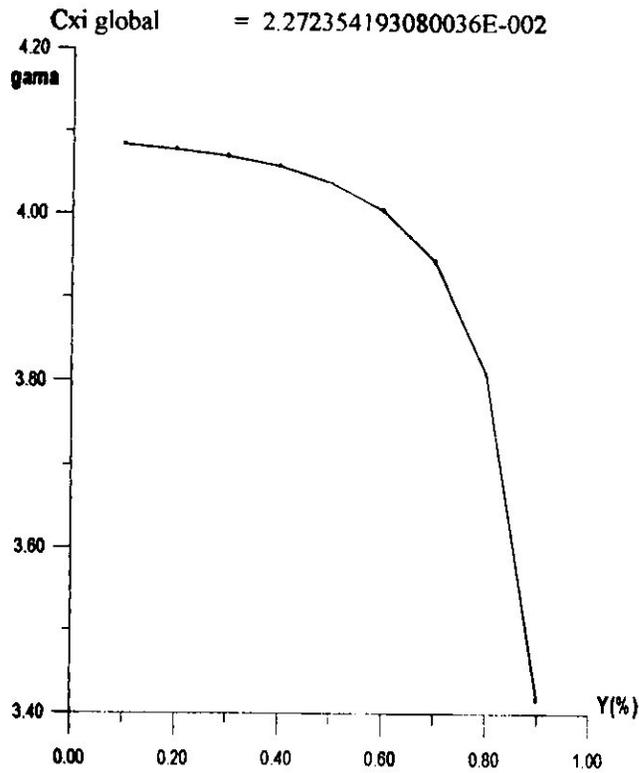


Figure (2-4) distribution de la circulation

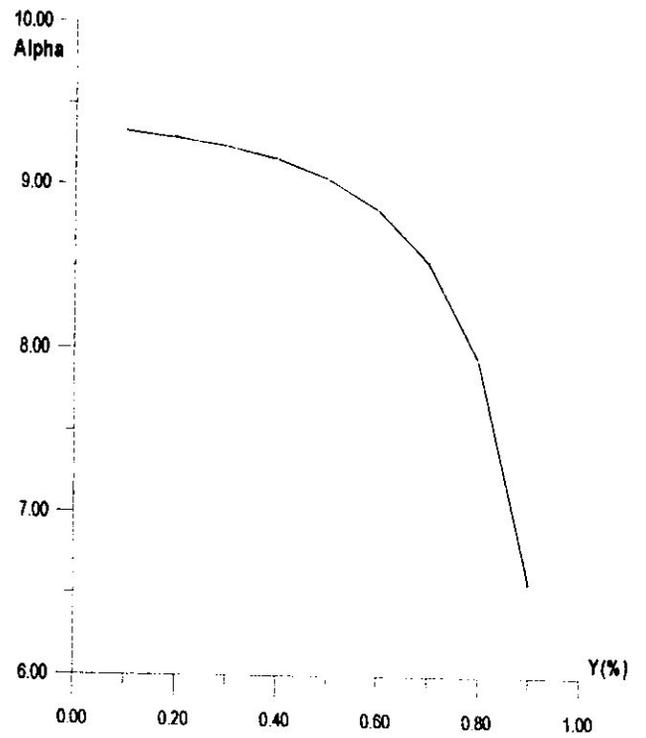


Figure (2-5) distribution des angles D' incidence absolus

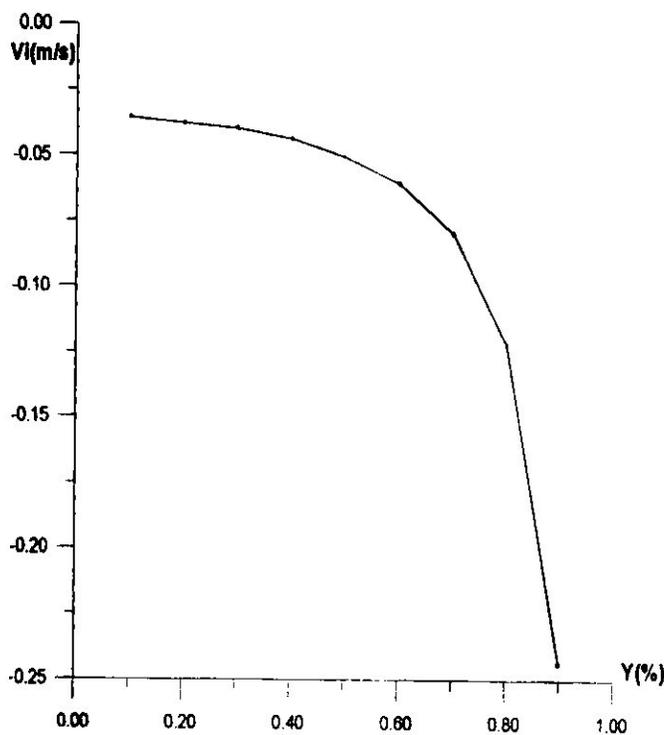


Figure (2-6) distribution des vitesses induites

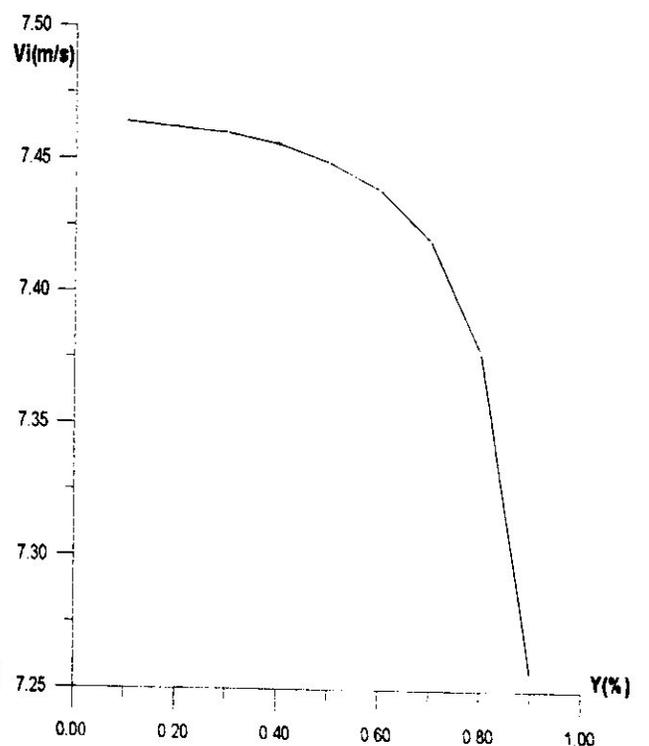


Figure (2-7) distribution des Vitesses locales

On fait une comparaison entre les résultats des deux applications : 1 et 2

Paramètre	Application 2	Application 1	Le rapport : Ap2/Ap1
Surface totale	40 m <sup>2</sup>	40 m <sup>2</sup>	1
Envergure	40 m	20 m	2
Allongement	40	10	4
Masse soulevée	182.89 kg	147.71 kg	1.23
Traînée	31.31 N	63.76 N	0.50
Puissance	234.86 W	478.21 W	0.50
Cz global	1.30	1.05	1.23
Cxi global	0.0227	0.0462	0.050

Tableau 2-2 Comparaison entre les deux applications

Avec la même vitesse et le même angle d'incidence, et la même surface, mais une envergure égale au double, l'amélioration des caractéristiques aérodynamiques est remarquable

La masse soulevée avec la 2<sup>ème</sup> aile est supérieure par 23 % par rapport à la 1<sup>ère</sup>, donc on peut augmenter le poids de la charge utile

La traînée de la 2<sup>ème</sup> aile est inférieure par 50 % par rapport à la 1<sup>ère</sup>

La puissance nécessaire par la 2<sup>ème</sup> aile est inférieure par 50 % par rapport à la 1<sup>ère</sup>, donc une consommation du carburant inférieure par 50 %, et la distance franchissable est multipliée par deux

La cause de cette amélioration est l'augmentation de l'envergure (l'allongement) pour une surface constante de l'aile.

Généralement Les grandes pertes de portance sont causées par le tourbillon de l'extrémité (traînée induite)

Lorsque on éloigne la position de se tourbillon (augmenter l'envergure), une très grande partie de l'écoulement de l'aire ne sera pas perturber et la taille du tourbillon induit de l'extrémité diminue, donc la traînée diminue est le rendement de l'aile augmente.

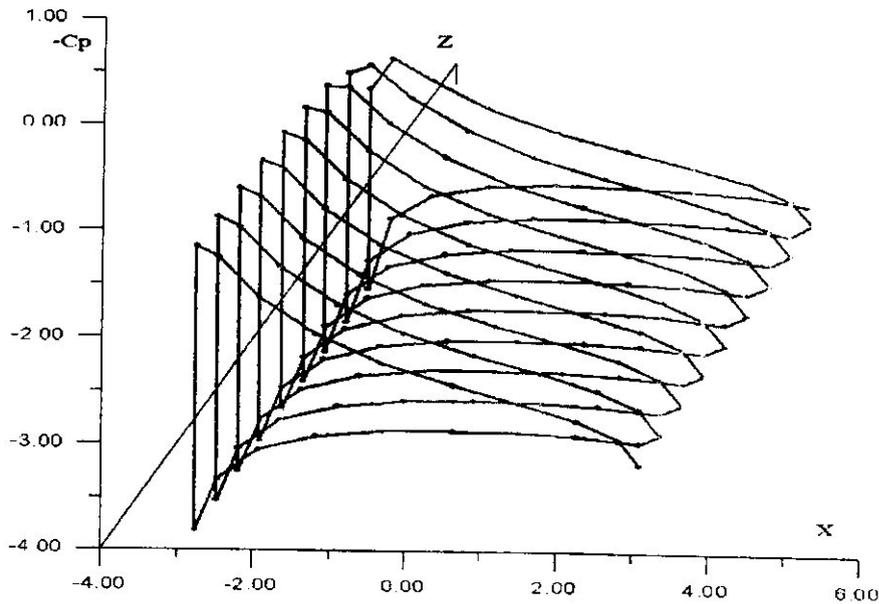
**V-2-3-2 Résultats de la méthode des panneaux**

Figure (2-8) les coefficients de pression sur l'aile

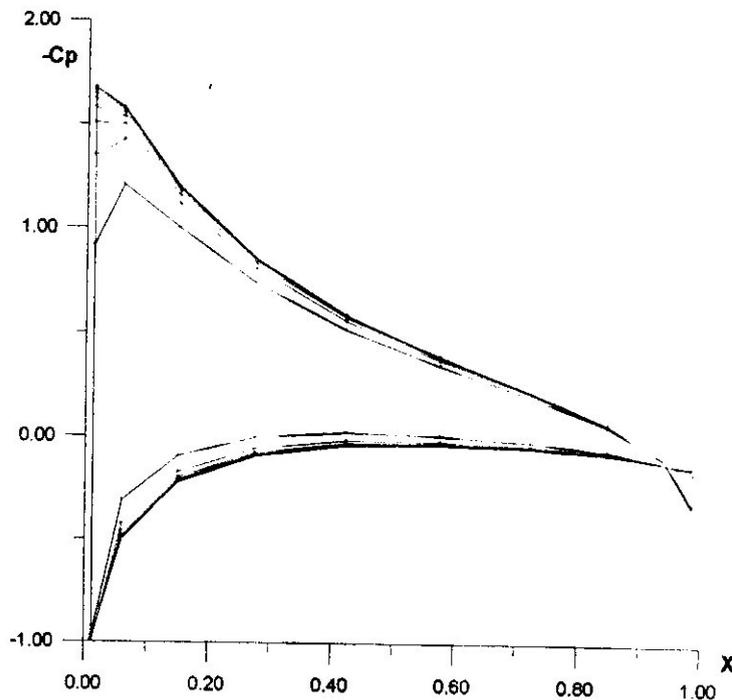


Figure (1-8) les coefficients de pression sur le même plan

D'après ces deux figures et avec une petite comparaison avec la figure 1-9, il est très clair que les variations dans la distribution des pressions sont très petites, les courbes qui représentent les coefficients de pression de chaque profil sont presque confondues, sauf la courbe du profil le plus proche de l'extrémité (indiqué en rouge), une telle forme indique que l'écoulement autour de cette aile ne subit pas des pertes importantes le long de l'envergure donc les traînées induites sont minimales

Donc, l'augmentation de l'allongement améliore les caractéristiques aérodynamiques des voilures.

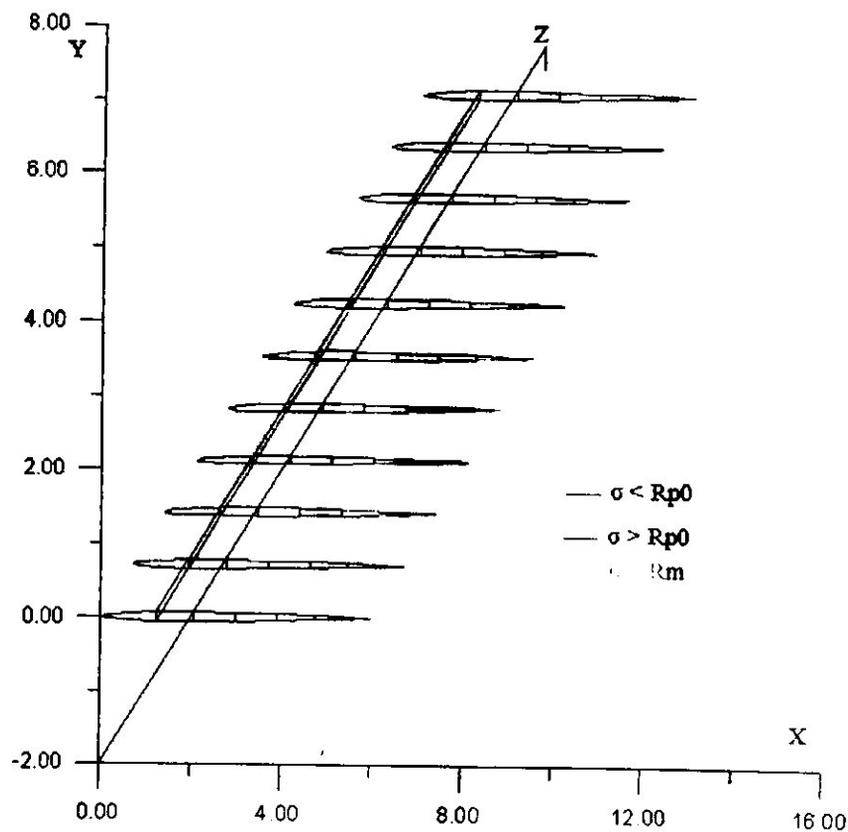
**V-2-4 Calcul structural**

Figure (2-10) la distribution des contraintes sur l'aile.

La figure 2-10 montre la distribution des contraintes sur l'aile.

Les contraintes sur les éléments bleus dépassent la contrainte de la limite élastique ( $Rp0 = 2.6E8 \text{ N/m}^2$ ) Et celles sur les éléments rouges dépassent la contrainte de la rupture ( $Rm = 3.9E8 \text{ N/m}^2$ ), les contraintes sur les éléments restant sont inférieure a ces deux contraintes

Dans se cas, l'aile ne fonctionne pas correctement, la rupture des éléments de la structure est inévitable

Pour ce cas on a proposé une autre solution, car le poids supplémentaire apporté par un autre longeron est très grand (a cause de la grande envergure de l'aile).

Donc pour cette situation on augmente le rayon de la section de chaque élément

De 2 cm a 3 cm, et les résultats indiquent que les contraintes supportées par tous les éléments ne dépassent pas les limite élastique et les limite de rupture (figure 2-11)

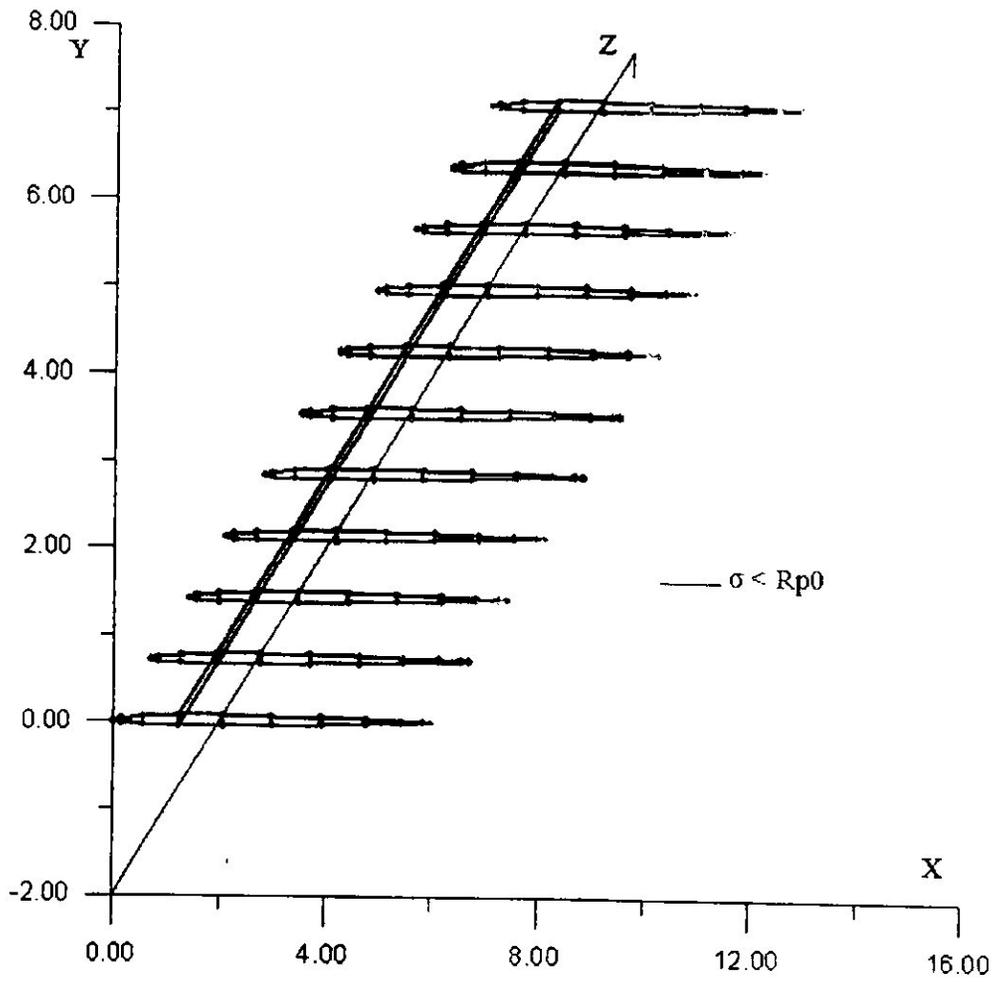


Figure (2-10) la distribution des contraintes sur l'aile (de la nouvelle configuration).

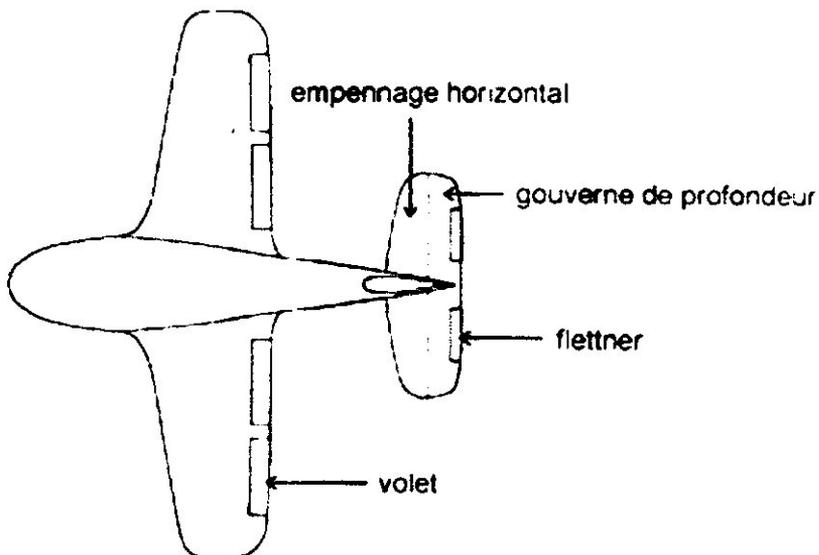
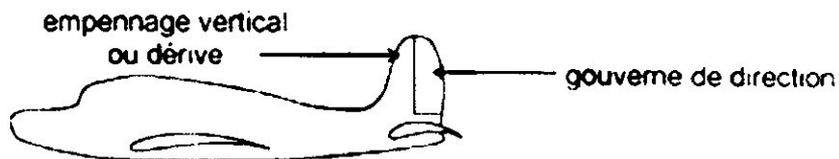
**Remarque :** le choix de la solution des problèmes trouvés reste aux mains du concepteur et tout dépend du coût et du temps et de la simplicité de la réalisation .

## ANNEXE 1

### A1-1 Définition d'un avion

Un avion est constitué:

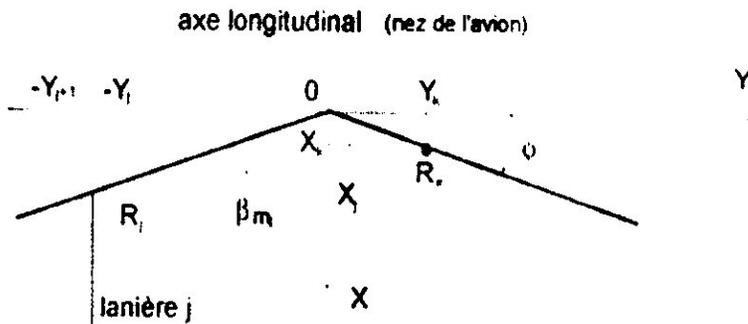
- du planeur,
- de groupes moto-propulseurs (moteurs et hélices) ou de réacteurs,
- des équipements annexes. Le planeur se compose:
- des ailes (organes portants),
- du fuselage,
- des empennages et des gouvernes (organes de stabilité et de manoeuvre).



Le moment des efforts aérodynamiques sur la gouverne de profondeur, par rapport à l'axe de rotation de cette gouverne est le « moment de charnière» .

$$dv_i = (d\Gamma/dY)_j \cdot dY \cdot (1 - \varepsilon \cdot \sin\phi) / [4\pi \cdot (Y - Y_k)] \quad \text{où } \varepsilon = \text{signe de } (Y - Y_k)$$

Une formule semblable doit être employée pour calculer l'influence de la  $\frac{1}{2}$  aile symétrique, mais en remplaçant (p par un angle moyen  $\beta_{mj}$  tel que (fig. 14):



D'où la formule:

$$dv_i = (d\Gamma/dY)_j \cdot dY \cdot (1 - \sin\beta_{mj}) / [4\pi \cdot (Y + Y_k)]$$

En effet, pour l'intégration des effets de la lanière symétrique, l'angle  $\beta$  sera considéré comme constant sur l'intervalle (j) et affecté au milieu de l'intervalle ( $\beta_{mj}$ ).

Nota: Pour faciliter les calculs, on utilisera les distances mesurées le long de la ligne portante, c'est à dire R. On aura donc

$$X = R \cdot \sin\phi \quad \text{et} \quad Y = R \cdot \cos\phi$$

D'où les formules :

- pour la  $\frac{1}{2}$  aile de référence:

$$dv_i = (d\Gamma/dR)_j \cdot dR \cdot (1 - \varepsilon \cdot \sin\phi) / [4\pi \cdot (R - R_k) \cdot \cos\phi] \quad \text{où } \varepsilon = \text{signe de } (R - R_k)$$

- pour la  $\frac{1}{2}$  aile symétrique :

$$dv_i = (d\Gamma/dR)_j \cdot dR \cdot (1 - \sin\beta_{mj}) / [4\pi \cdot (R + R_k) \cdot \cos\phi]$$

$$\beta_j = \arctg[\operatorname{tg}\phi \cdot (R_j - R_k) / (R_j + R_k)] \quad \text{et} \quad \beta_{mj} = (\beta_j + \beta_{j-1}) / 2$$

On voit ici que les formules seront dérivées de celles de l'aile droite après multiplication par, respectivement :  $(1 - \varepsilon \cdot \sin(p) / \cos(p)$  et  $(1 - \sin\beta_{mj}) / \cos(p)$

Effets induits par le tourbillon « lié » de la  $\frac{1}{2}$  aile symétrique, sur la  $\frac{1}{2}$  aile de référence:

Ce tourbillon ajoute des vents induits descendants à ceux créés par les lanières (fig. 15).

Pour calculer l'influence du tourbillon « lié » au segment j de la  $\frac{1}{2}$  aile symétrique, on peut utiliser la formule des lanières en l'appliquant entre deux bornes angulaires et en prenant comme circulation, la moyenne des circulations extrêmes.

**ANNEXE 3 (Intégration numérique) :**

Ordre	$\xi_k, -\xi_{p-k}$	$w_k, w_{p-k}$
1	0.000000000000000	2.000000000000000
2	0.577350269189626	1.000000000000000
3	0.774596669241483 0.000000000000000	0.555555555555556 0.888888888888889
4	0.861136311594053 0.339981043584856	0.347854845137454 0.652145151862546
5	0.906179845938664 0.538469310105683 0.000000000000000	0.236926885056189 0.478628670199366 0.568888888888889
6	0.932469514203152 0.661209386466265 0.238619186083197	0.171324492379170 0.360761573048139 0.467913934572691