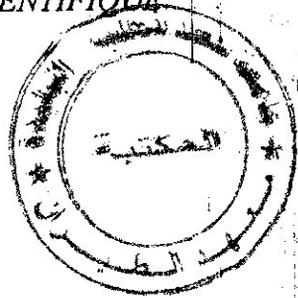


(2006/042)  
Ex 2

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA  
Faculté des sciences de l'ingénieur  
Département D'Aéronautique



PROJET DE FIN D'ETUDE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT EN AERONAUTIQUE

OPTION : CONSTRUCTION  
SPECIALITE : PROPULSION

INCLINÉ  
STABILITY &  
CONTROL

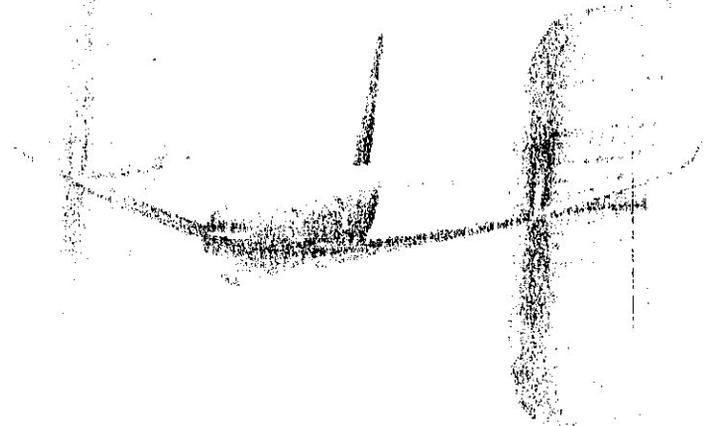
THEME

PLUTTER  
BUZZ & BUFFET  
RESPONSE

**calcul des modèles aéroélastiques d'un avion**

INERTIAL  
FORCES

MECHANICAL  
VIBRATIONS



ENCADRE PAR :  
- Dr. ALLALLA  
- M. ROMOTEUR  
- M. AZAZEN.A

ELABORE PAR :  
- GHALIA HACENE  
- DRAA ZAKARIA

## **REMERCIEMENTS**

Nous exprimons notre profonde gratitude à Mr.ALLALI qui nous a dirigé pour élaborer ce mémoire.

Nous remercions également les membres de jury d'avoir accepté de présider et examiner ce travail.

Il est évident que sans l'appui affectif de nos amis et parents, et tous les enseignants qui ont collaboré à notre formation au sein du département d'aéronautique de BLIDA, il est très difficile de mener à bien ce travail. Nous tenons donc à leur exprimer notre profonde reconnaissance.

Nous remercions vivement tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Merci à tous.

## Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

La mémoire de mon père.

Ma très chère mère.

Ma très chère grande mère.

Mes frères : Yacinne et Fadlo.

Mon oncle, sa femme et leurs enfants.

Ma tante et son mari.

Mes cousins: Younesse, Hadi, Inesse.

Mes amis : Nadir, Bachir, Anoir, Jawed, Amine, Nouri, Ali, Mohamed,.....

Mes collègues : Hacene, Nadjib, Ali, Chouaib, Tarek, Hamza,  
Bachir, Farid, Salim.....

Zakaria

## Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

La mémoire de mon père.

Ma très chère mère.

Hamid et Fouzia et sa petite famille.

Mes chères sœurs : Hayate, Farida, Noura, Dounia, Rokia, Myrieme, Khadija.

Mes frères : Mustapha, Nadjib.Amar, Azadine, Halime.

Ma future femme.

Mes amis : Maissem, Badro, Rida, Amine, Samir, Salim, Fayçal, Toufik, Abedrezak.....

Mes collègues : Zaki, Nadjib, Ali, Chouaib, Hicham, Tarek, Hamza, Bachir, Farid, Salim, Ramzi, Achraf.....

Hacene

## ملخص

علم المرونة الهوائية يتمثل أساسا في التفاعلات والتجاوب الحاصل والحادث بين تشوهات الهياكل المرنة والمواع (الهواء) و ردود أفعال القوى الديناميكية الهوائية. تحدث ظاهرة التذبذب بتحول الطاقة الميكانيكية للمواع باتجاه هيكل الطائرة التي تولد اضطرابات سعوية استثنائية. بصفة عامة هذه الاضطرابات هي ذات طبيعة محطمة و يمكن أن تؤدي إلى سقوط الطائرة. معرفة حدود التذبذب (مجال استقرار نظام المرونة الهوائية) هو ضروري للحصول على طيران امن. دراسة وتحديد و تطبيق خصائص التذبذب للطائرة ضروري في فترة التصميم و التصنيع و التطوير.

## Résumé:

La science de l'aéroélasticité est concernée par les interactions entre les déformations des structures élastiques dans un courant d'air et les réactions aérodynamiques donnant droit.

Le phénomène du flottement est induit par un transfert d'énergie mécanique du fluide vers la structure de l'avion engendrant des oscillations d'amplitude exponentielle. En général, ces oscillations sont de nature destructive et peuvent provoquer la perte de l'avion.

La prédiction de la frontière de flottement (frontière de stabilité du système aéroelastique) est nécessaire à l'obtention de l'enveloppe de vol sécurisée de l'avion. La caractérisation du flottement d'un avion est indispensable et doit être déterminée durant le processus de conception et de développement.

## Summary :

The science of the aeroelasticity is concerned with the interactions between the elastic structural deformations in a draught and the aerodynamic reactions giving right.

The phenomenon of the undulation is induced by a mechanical transfer of energy of the fluid towards the structure of the generating plane of the oscillations of exponential amplitude. In general, these oscillations is of destructive nature and can cause the loss of the plane.

The prediction of the border of undulation (border of aeroelastic stability of the system) is necessary to the obtention protected envelope of flight of the plane.

The characterization of the undulation of a plane is essential and must be given during the process of design and development.

**SOMMAIRE :**

Introduction

<b><u>Chapitre 1 : Aéroélasticité théorique</u></b> .....	3
I. Phénomènes aéroélastiques.....	4
I.1. Introduction.....	4
I.2. La fréquence réduite.....	4
I.3. Le flottement classique.....	5
I.3.1. Mise en équation.....	5
I.3.2. Stabilité et vitesse critique.....	7
I.3.3. Cas de l'aile d'avion.....	8
I.4 Le galop.....	9
I.5. Excitation par détachement tourbillonnaire.....	10
I.5.1. Approche linéaire .....	11
I.5.2. Limite de l'approche linéaire .....	12
I.6 Aéroélasticité.....	13
I.6.1 Limite de l'hypothèse quasi-statique.....	13
I.6.2 Cas du profil d'aile mince.....	14
I.6.2.1 Couplage flexion-torsion .....	14
I.6.2.2 Comparaison avec la théorie quasi-statique.....	16
I.6.2.3 Le décrochage dynamique.....	17
I.6.2.4. Effet de la turbulence.....	18
I.7. Aéroélasticité des éoliennes.....	19
I.7.1. Sollicitations .....	19
I.7.2. Modélisation.....	19
I.7.3. Modes de pale.....	20
I.7.4. Equations du mouvement d'une pale.....	20
I.7.5. Effets de l'aérodynamique.....	22
I.7.6. Efforts sur le moyeu et la tour .....	23
I.7.7. Instabilités.....	23
<b><u>Chapitre 2 : Assemblage d'un avion</u></b> .....	26
II.1. Introduction.....	27
II.2. L'aile à un grand allongement .....	27
II.3. L'avion à l'air libre .....	45
<b><u>Chapitre 3 : Résolution numérique des problèmes aéroélastiques</u></b> .....	59
III.1. Le système aéroélastique.....	61
III.1.1. Equations de Navier-Stokes.....	61

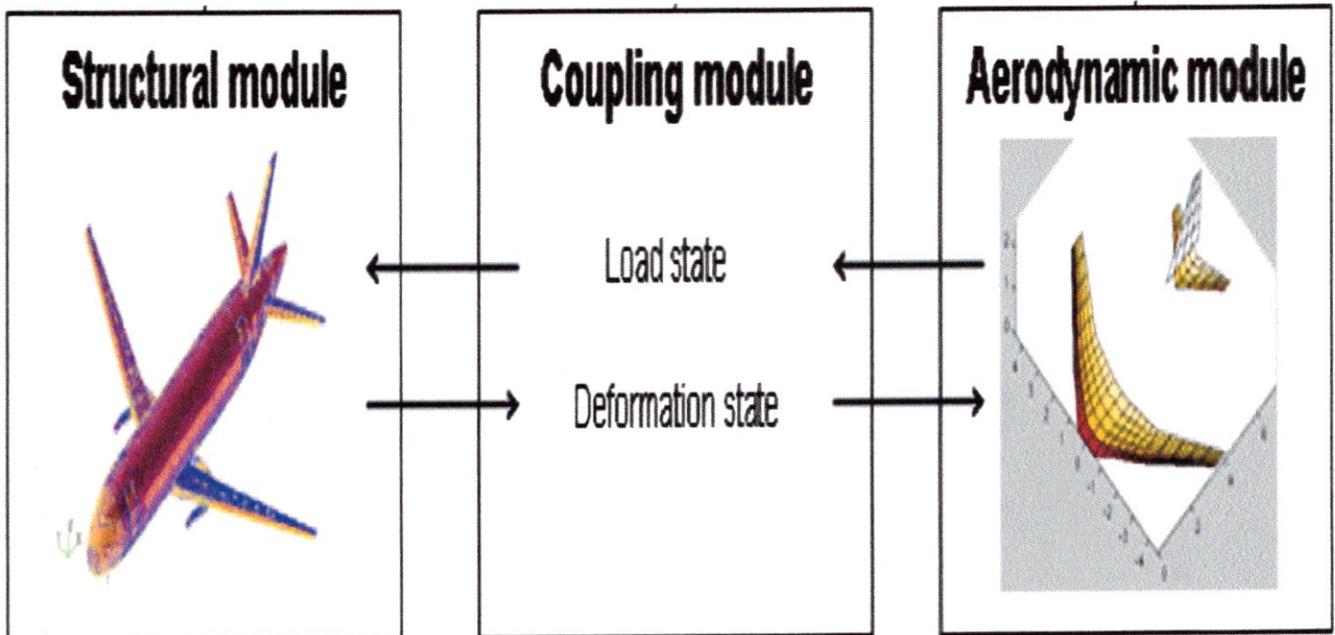
## Sommaire

III.1.2. Equation de la dynamique des structures.....	61
III.2.Méthodes modales.....	63
III.3. La Simulation directe.....	66
III.3.1. Couplage en temps.....	67
III.3.1.1. Algorithme décalé $\Delta t_s$ .....	69
III.3.1.2. Algorithme décalé sous-itéré.....	70
III.3.1.3. Algorithme parallèle.....	70
III.3.2. Couplage en espace.....	71
III.3.3. Schéma de Newmark.....	72
III.3.4. Maillage déformable.....	73
III.3.4.1. La méthode des ressorts.....	74
III.3.4.2. Les interpolations transfinies.....	74
<b>Chapitre04 : phénomène de flottement.....</b>	<b>77</b>
IV.1Aérodynamique instationnaire du flottement en régime.....	78
IV.1.1. Aérodynamique instationnaire autour de géométrie mobile.....	78
IV.1.1.1. L'aérodynamique transsonique instationnaire.....	78
IV.1.1.1.1. Écoulement transsonique stationnaire autour d'un profil d'aile.....	78
IV.1.1.1.2. Interaction choc/couche limite turbulente en régime transsonique.....	80
IV.1.1.1.3 Battement naturel du choc.....	81
IV.1.1.1.4. Aérodynamique instationnaire autour d'une aile en Flèche.....	83
IV.1.1.2. mouvement forcé de profil et d'aile.....	85
IV.1.1.2.1. Type de mouvement d'oscillation de choc sur un profil.....	85
IV.1.1.2.2. Phénomène de décrochage dynamique.....	86
IV.1.2. Phénomènes du flottement d'une aile souple.....	87
IV.1.2.1. Le creux transsonique "Transonic Dip".....	88
IV.1.2.2. Le phénomène des cycles limites (LCO).....	89
IV.2. Calcul de la frontière de flottement du système aéroélastique bidimensionnels... 94	94
IV.2.1.1.Introduction.....	94
IV.2.2.1.1. Présentation de la configuration.....	95
IV.2.2.1.2. Équations du système aéroélastique.....	96
IV.2.1.3. Validation de l'outil numérique.....	98
IV.2.1.3.1. Validation du schéma de Newmark.....	98
IV.2.1.3.2. Algorithme de couplage en temps.....	99
IV.2.1.3.3. Modèle de turbulence.....	100
IV.2.1.3.4. Choix du schéma spatial.....	100
IV.2.1.3.5. Maillages aérodynamiques.....	100
IV.2.1.3.6. Solution initiale et perturbation initiale.....	101
IV.2.1.3.7. Détermination du pas de temps.....	103
IV.2.1.3.8. Analyse de la réponse du système aéroélastique.....	103
IV.2.1.4. Frontière de flottement.....	104
IV.2.1.4.1. Analyse de la frontière de flottement.....	104

## Sommaire

IV.2.1.4.1.1. Zone faiblement transsonique et fortement subsonique.....	104
IV.2.1.4.1.2. Zone fortement transsonique avec fort décollement de la couche limite.....	107
IV.2.1.4.1.3. Zone fortement transsonique (chocs extrados et intrados proche du bord de fuite).....	111
IV.2.1.4.2. Etude du creux transsonique.....	114
IV.2.1.4.3. Effets des modèles de turbulence.....	116
IV.2.1.4.4. Effets de la viscosité sur la frontière de flottement.....	122
<b>Chapitre 5 : Aéroélasticité expérimentale.....</b>	<b>126</b>
V.1. Introduction .....	127
V.2. Calcul de l'équilibre aéroélastique statique des structures élastiques.....	127
V.3. Aérodynamique Instable.....	129
V.3.1. Développement des codes aérodynamiques instables de calculs.....	129
V.3.2 Intégration et validation des codes aérodynamiques instables de calcul.....	131
V.4. Dynamique d'Avion au sol.....	132
V.4.1. Simulation des manoeuvres au sol pour l'avion de transport.....	134
V.4.1.1. le projet flexible d'avion AP6/MODYAS wp 6.3.....	134
V.4.1.2. Analyse de shimmy des trains d'atterrissage d'avion.....	134
V.4.1.2.1. phénomène et de vue d'ensemble.....	134
V.4.1.2.2. Modélisation.....	135
V.5. Shimmy-analyse méthodes classiques .....	
V.6. Interaction de Pneu sol à la grande vitesse par Andreas Gibbesch .....	143
V.6.1. Principes fondamentaux d'interaction de Pneu-Sol.....	143
V.6.2. Grande vitesse sur les sols mous.....	144
V.6.3. Exécution I.....	145
V. 7. Dynamique Structurale.....	145
V.8. Expériences aéroélastique.....	146
V. 8.1. Les Expériences Transsonique de flottement.....	147
V. 8.2. Mesures des distributions de pression sur les rotors et les ailes modèles.....	148
V.8.3. Mesure optique de déformation.....	150
V. 8.4. Aspects aéroélastique des écoulements hypersustentateurs.....	150
<b>Conclusion.....</b>	<b>151</b>

# Introduction



## Introduction :

La science de l'aéroélasticité est concernée par des interactions entre les déformations des structures élastiques dans un courant d'air et les réactions aérodynamiques donnant droit. Les phénomènes aéroélastiques se produisent quotidiennement dans la nature, par exemple le balancement des arbres, de l'herbe, etc. dans le vent.

Ils peuvent avoir comme conséquence des déformations dangereuses et des instabilités statiques et dynamiques et, ainsi, avoir des conséquences pratiques très importantes dans beaucoup de secteurs technologiques.

Le domaine d'activité est orienté vers le couplage aéroélastique, c'est à dire vers l'étude du comportement des structures dont les mouvements au sein de l'écoulement génèrent des efforts induits. Les domaines concernés sont notamment le génie civil (ponts souples, cheminées), les transports (aéronautique, terrestre) et le secteur de l'énergie (tubes d'échangeurs, éoliennes).

La méthode employée en aéroélasticité repose sur l'hypothèse de faible fréquence réduite, permettant d'utiliser des coefficients aérodynamiques moyens résultant de mesures stationnaires en soufflerie.

Le couplage aéroélastique se produisant principalement dans le domaine basse fréquence, les coefficients mesurés sont ensuite introduits dans un code de calcul de structures qui résout le problème dynamique par synthèse modale.

Différentes modélisations des efforts aéroélastiques ont été développées afin de rendre compte des différents mouvements possibles de la structure, ainsi que des composantes instationnaires des efforts qui pilotent les échanges d'énergie entre l'écoulement et la structure.

Le calcul de certaines quantités linéaires comme l'amortissement aérodynamique permet de détecter facilement les risques d'instabilités aéroélastiques et les vitesses critiques de l'écoulement. Par contre, la prédiction des amplitudes vibratoires effectives nécessite des investigations non linéaires, pour lesquelles les méthodes numériques classiques de résolution sont généralement inadaptées.

Les travaux actuels sont orientés vers une modélisation améliorée des efforts aéroélastiques à l'aide de coefficients d'efforts aérodynamiques mesurés ou calculés en stationnaire pour les structures allongées. L'objectif consiste à produire un modèle physique du déphasage entre les efforts aéroélastiques et les mouvements de la structure, comme le galop et le tangage.

Le couplage d'un mode de flexion de la voilure d'un avion avec un mode de torsion peut faire naître un phénomène aéroélastique divergent : c'est le flottement. Lorsqu'un avion évolue dans son domaine de vol, il ne doit évidemment pas rencontrer un tel phénomène : les risques d'apparition de flottement sont donc étudiés au moyen d'essais de vibration au sol et de calculs. Ces essais permettent de procéder aux modifications aérodynamiques ou de structures qui rendront sûr le comportement de l'avion.

Le couplage entre l'écoulement d'air instationnaires et les caractéristiques vibratoires propres d'un avion peut engendrer deux phénomènes : le tremblement ou le flottement.

Le premier est inconfortable pour les passagers et fatigue la structure. Le second est dangereux, car il peut conduire à l'endommagement de l'appareil, voire sa perte de contrôle ou sa destruction.

Des codes de calculs permettent de prévoir les risques d'apparition de ce couplage, très en amont.

La simulation numérique des phénomènes d'interaction fluide-structure connaît un succès croissant dans un grand nombre d'application, comme l'étude de la stabilité au vent d'un ouvrage d'art, ou d'écoulement sanguins en biomécanique. Les techniques de simulation classique reposent sur le couplage, par des algorithmes appropriés, d'un « code solide » qui simule le comportement de la structure soumise aux effets induits par l'écoulement d'une parts, et d'autre part d'un code fluide capable de prendre en compte les déplacement de la structure baignée par le fluide :en générale par le moyen d'une modélisation de type « arbitrairement Lagrangienne-Eulerienne ».Ces technique sont très coûteuses en temps de calcul,en grande partie du fait du domaine fluide,car,aux difficultés inhérentes à la simulation du fluide (modèle non-linéaires,effet de la convection,etc.) s'ajoutent ,à chaque pas de temps ,des modifications d'ordre géométrique liées au déplacement de la structure (qui doivent être prises en compte dans l'ensemble du domaine fluide.

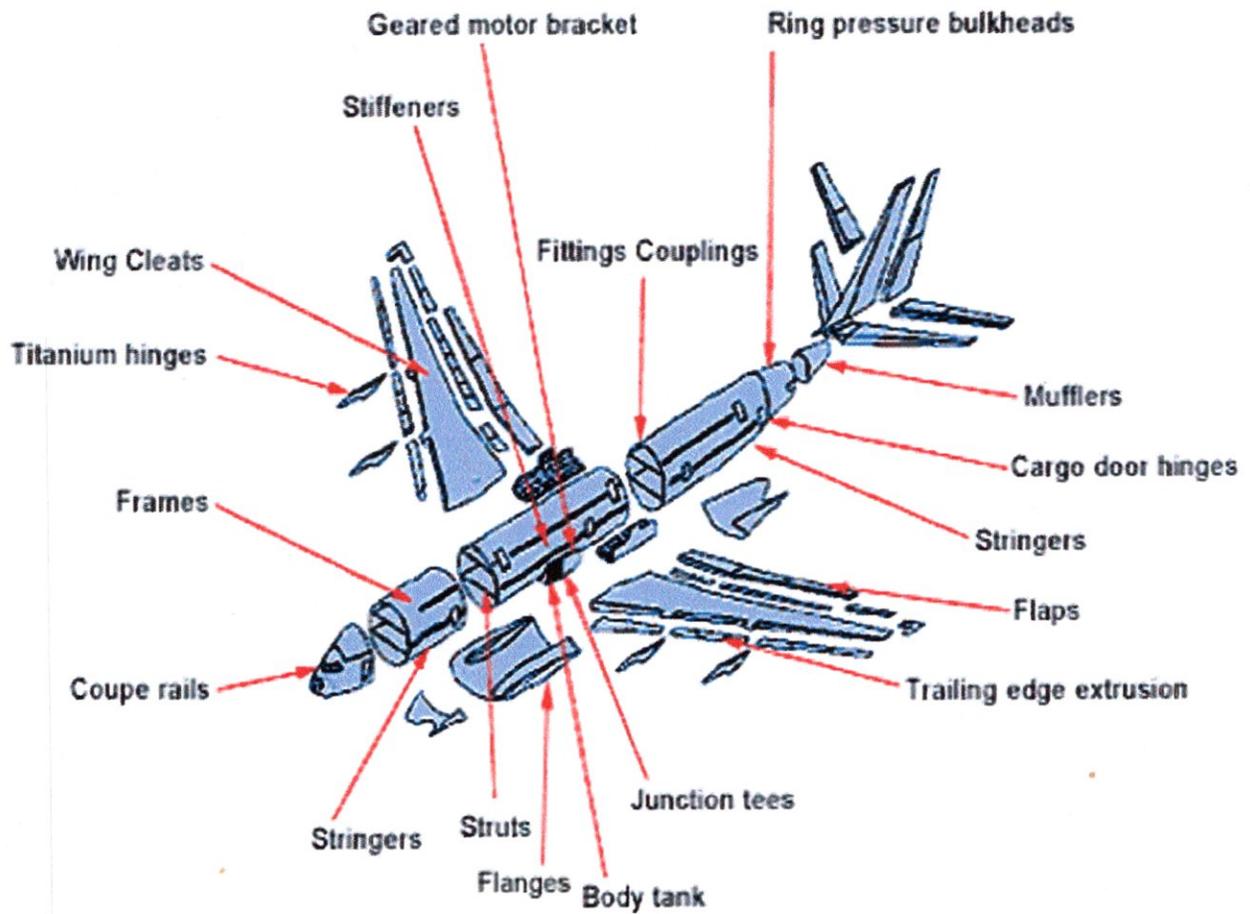
Notre projet est basé d'avantage sur le problème d'aéroélasticité .il est divisé en cinq chapitres :

- Le premier chapitre donne les notions théoriques de l'aéroélasticité et le problème de ces derniers dans les éoliennes.
- Le second est une étude approfondie sur L'aile à un grand allongement et l'étude de l'avion à l'aire libre ainsi que l'assemblage d'avions.
- Dans le troisième chapitre nous avons essayés de décrire quelques méthodes de résolution numérique des problèmes aéroélastiques.
- Le quatrième s'intéresse d'avantage à la définition du phénomène de flottement et le calcule de sa frontière dans un système aéroélastique bidimensionnelle.
- Le dernier chapitre est consacré à la partie expérimentale.

En dernier lieu ce travail est achevé par une conclusion.

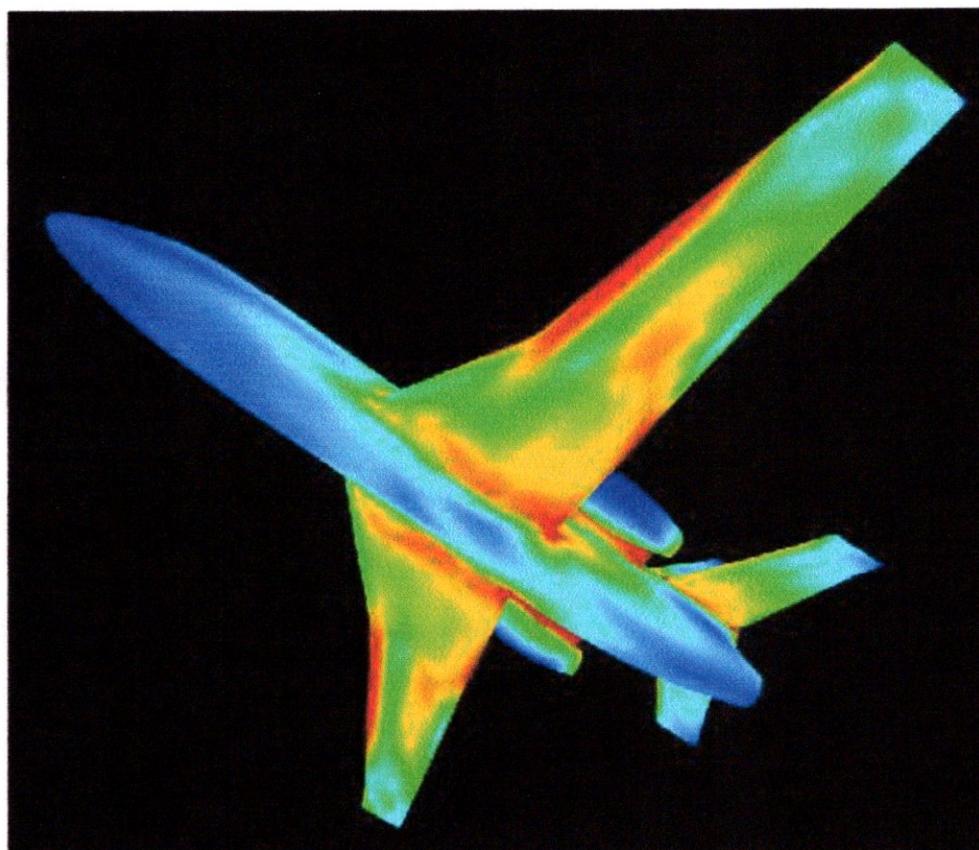
# CHAPITRE 2

# Assemblage d'un avion



## CHAPITRE 1

# Aéroélasticité théorique



## I. Phénomènes aéroélastiques :

### I.1. Introduction :

On admet généralement que les forces fluctuantes exercées par un écoulement fluide sur une structure qui vibre sont de trois types fondamentaux :

- Les efforts quasi-périodiques produits par le détachement tourbillonnaire alterné sont quasiment indépendants du mouvement de la structure lorsque les fréquences sont différentes.

En cas de résonance, il existe un couplage entre le détachement des tourbillons et les oscillations, c'est l'accrochage.

- Lorsque l'écoulement est turbulent, les fluctuations de vitesse peuvent provoquer des vibrations de faible amplitude. Le couplage de ces forces induites par la turbulence avec le mouvement de la structure est faible, voire nul.

- Comme la structure bouge, y compris par rapport à ses voisines, elle modifie l'écoulement autour d'elle, qui en retour modifie les efforts sur la structure. Il existe donc des forces de couplage aéroélastique induites par le mouvement qui peuvent devenir très importantes.

Ce chapitre présente les différents phénomènes énoncés ci-dessus. En ce qui concerne les efforts couplés avec le mouvement, l'usage consiste à étudier des efforts aérodynamiques exprimés comme des combinaisons linéaires des composantes du mouvement et de leur vitesse : pour la force de portance et le moment de tangage couplés avec le mouvement de translation  $z$  et de l'angle de torsion  $\alpha$  on a donc :

$$\begin{cases} F_z = \frac{1}{2} \rho c U^2 (H_1 \dot{z} + H_2 \dot{\alpha} + H_3 \alpha + H_4 z) \\ M_0 = \frac{1}{2} \rho c^2 U^2 (A_1 \dot{z} + A_2 \dot{\alpha} + A_3 \alpha + H_4 z) \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Cette modélisation introduit les séries de coefficients aéroélastique  $H_i$  et  $A_i$  qui sont des coefficients de linéarisation. Ces séries de coefficients sont appelées les dérivées de flottement, à juste titre puisqu'elles sont issues d'une approximation des efforts aérodynamiques par un développement de Taylor à l'ordre 1. Elles sont souvent exprimées sous forme adimensionnelle en écrivant :

$$\begin{cases} F_z = \frac{1}{2} \rho c U^2 (H_1 \frac{\dot{z}}{U} + H_2 \frac{c \dot{\alpha}}{U} + H_3 \alpha + H_4 \frac{z}{c}) \\ M_0 = \frac{1}{2} \rho c^2 U^2 (A_1 \frac{\dot{z}}{U} + A_2 \frac{c \dot{\alpha}}{U} + A_3 \alpha + A_4 \frac{z}{c}) \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Dans cette partie de ce chapitre on va principalement utiliser la modélisation (I.2) pour étudier les différents cas de flottement rencontrés en pratique. Il ne s'agit en premier lieu que d'exposer les aspects physiques et l'on se restreindra à des corps rigides en mouvement de petite amplitude.

### I.2. La fréquence réduite :

La fréquence réduite  $f_r$  constitue un paramètre très important puisqu'il va conditionner le mode opératoire pour l'étude des phénomènes d'interaction fluide-structure en présence d'écoulement.

Ce nombre est défini comme le rapport de deux durées liées au système étudié : la première est le temps de balayage de la structure par une particule fluide ( $T_f$ ), tandis que la seconde est la période

de vibration propre de la structure ( $T_s = \frac{1}{f_s}$ ). Nous avons donc :

$$f_r = \frac{T_f}{T_s} = \frac{B}{U} = \frac{Bf_s}{U} \quad (\text{L3})$$

L'inverse de la fréquence réduite est appelé la vitesse réduite. Il arrive également que l'on rencontre une définition de  $f_r$  basée sur la pulsation propre au lieu de la fréquence propre.

Elle est généralement notée  $K = 2\pi f_r$  dans la littérature. Au plan aéroélastique, il existe 3 régimes qui sont différenciés par la fréquence réduite :

- Si  $f_r$  est très supérieure à 1, la structure vibre à une fréquence élevée et une particule fluide qui la balaye aura le temps de "voir" plusieurs périodes du mouvement. Aussi, les paramètres aérodynamiques doivent être calculés ou mesurés en tenant compte des fluctuations engendrées par le mouvement du corps. Dans la pratique, ce régime est souvent développé pour des fréquences propres élevées, dans le domaine de l'acoustique : cette gamme d'interactions fluide-structure relève de la vibroacoustique.

- Si  $f_r$  est proche de 1, un véritable couplage fluide-structure se produit, puisque le temps de balayage par le fluide correspond à la période de vibration propre de l'obstacle. Ce régime traditionnellement dénommé interaction fluide-structure constitue un problème extrêmement complexe sur le plan de la mécanique des fluides. En particulier les amplitudes des mouvements peuvent devenir très grandes et les effets non linéaires prépondérants.

- Lorsque  $f_r$  est très inférieure à 1, le fluide n'a pas le temps d'être influencé par le mouvement de l'obstacle. Tout se passe donc comme si la structure était quasiment immobile, et les caractéristiques aérodynamiques n'évoluent pas au cours du temps (on ne considère pas ici les effets dus à la turbulence). Ce mode d'interaction fluide-structure relève de l'aéroélasticité. En pratique, il faut associer une vitesse importante et des vibrations basse fréquence pour se situer dans cette plage : c'est le cas de l'effet du vent sur les constructions et de la mécanique du vol.

Dans cette partie on s'intéresse au régime de faible fréquence réduite. Lorsque celle-ci est particulièrement faible, il est légitime de considérer que les oscillations n'influencent pas du tout l'écoulement autour de la structure, et qu'un changement lié au mouvement du solide s'applique instantanément à l'écoulement et l'effort produit. Cette théorie quasi-statique (QST, quasi-steady theory), mais en attendant elle permet d'utiliser des coefficients aérodynamiques statiques, c'est-à-dire évalués sur une structure immobile, pour calculer les dérivées de flottement.

### I.3. Le flottement classique :

Le flottement classique du profil d'aile est apparu lorsque les avions de type monoplan ont commencé à atteindre des vitesses élevées. Par tradition le flottement classique est un phénomène de couplage entre les mouvements de flexion verticale et de torsion d'une voilure. Il s'agit donc d'un couplage à deux degrés de liberté.

#### I.3.1. Mise en équation :

Le profil d'aile bidimensionnel présenté figure (I.1) peut osciller en translation verticale sur l'axe  $z$  et en rotation d'angle  $\alpha$  autour du point  $O$ . Le centre de gravité  $G$  est éloigné du centre de torsion  $O$  de la distance  $d = GO$ . Le foyer aérodynamique est  $F$  et supposé fixé au quart de la corde  $c$ .

Les équations du mouvement, en négligeant les termes d'amortissement, s'écrivent pour de petits mouvements :

$$\begin{cases} m\ddot{z} + k_z z + m d\ddot{\alpha} = F_z \\ J_0\ddot{\alpha} + k_\alpha \alpha + m d\ddot{z} = M_0 \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Où le couplage entre les deux mouvements est présent à cause du décalage entre le centre de torsion et le centre de gravité. Les forces aérodynamiques sont la portance  $F_z$  et le moment de tangage  $M_0$ . La masse du profil est  $m$  et son moment d'inertie par rapport à  $O$  est  $J_0$ . Les deux raideurs de chaque degré de liberté sont les termes  $k_z$  et  $k_\alpha$ . Les valeurs propres découplées de chaque mouvement sont données par :

$$\begin{cases} \lambda_\alpha = \omega_\alpha^2 = (2\pi f_\alpha)^2 = \frac{k_\alpha}{J_0} \\ \lambda_z = \omega_z^2 = (2\pi f_z)^2 = \frac{k_z}{m} \end{cases} \quad (L5)$$

Le système étant couplé, il est intéressant de le qualifier dans un premier temps sans excitation extérieure, c'est-à-dire de rechercher les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de :

$$\begin{cases} \ddot{z} + \lambda_z z + d\ddot{\alpha} = 0 \\ \ddot{\alpha} + \lambda_\alpha \alpha + \frac{md}{J_0} \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad (L7)$$

Cela revient à résoudre :

$$\det \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_z & \lambda d \\ \lambda m d & \lambda - \lambda_\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Qui conduit notamment à la relation :  $1 - \frac{md^2}{J_0} = \frac{\lambda_z + \lambda_\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2}$

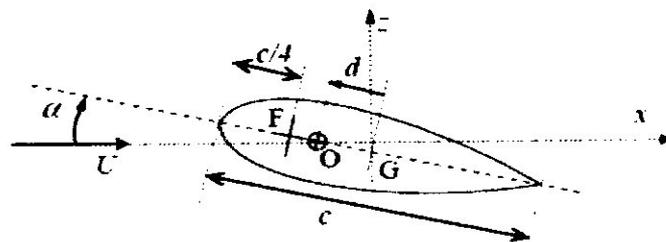


Figure L1. Configuration d'un profil d'aile en couplage flexion-torsion.

Les deux efforts aérodynamiques sont a priori des fonctions du mouvement. En négligeant les termes d'amortissement, on écrit ainsi :

$$\begin{cases} F_z = \frac{1}{2} \rho c U^2 (H_3 \alpha + H_4 z) \\ M_0 = \frac{1}{2} \rho c^2 U^2 (A_3 \alpha + A_4 z) \end{cases} \quad (L8)$$

Dans le cas présent, il n'existe aucune raison pour que les efforts sur le profil d'aile varient en fonction du mouvement de translation verticale. En revanche leur variation en fonction de l'angle  $\alpha$  correspond de manière évidente à une variation de l'angle d'incidence, ce qui amène :

$$\begin{cases} H_3 = \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} = C'_z; \quad H_4 = 0 \\ A_3 = \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} = C'_M; \quad A_4 = 0 \end{cases} \quad (L9)$$

Finalement le système couplé initial (L6) s'écrit sous la forme linéarisée :

$$\begin{cases} \ddot{z} + \lambda_z z + d\ddot{\alpha} = \frac{\rho c U^2}{2m} C'_z \alpha \\ \ddot{\alpha} + \lambda_\alpha \alpha + \frac{md}{J_0} \ddot{z} = \frac{\rho c^2 U^2}{2J_0} C'_M \alpha \end{cases} \quad (\text{L10})$$

Dont on étudie maintenant la stabilité en fonction de la vitesse du vent  $U$ .

### I.3.2. Stabilité et vitesse critique :

Etudier la stabilité du mouvement consiste en fait à trouver la vitesse critique  $U_c$  au-delà de laquelle le mouvement est amplifié. On est donc conduit à chercher les valeurs propres du système (L10) et résoudre :

$$\begin{vmatrix} \lambda - \lambda_z & \lambda d + \frac{\rho c U^2}{2m} C'_z \\ \frac{\lambda m d}{J_0} & \lambda - \lambda_\alpha + \frac{\rho c^2 U^2}{2J_0} C'_M \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{L11})$$

On suppose ici que la divergence en torsion pure n'a lieu que pour des vitesses de vent plus élevée que l'instabilité de flottement par couplage de mode, c'est-à-dire que :

$$\lambda_\alpha > \rho c^2 U^2 \frac{C'_M}{2J_0}.$$

Le système (L11) correspond donc à une équation du second degré en  $\lambda$ , soit :

$$U_c^2 = \frac{2J_0}{\rho c C'_z} \frac{-G' \pm \sqrt{G'^2 - F'H'}}{F'} F \lambda^2 + G \lambda + H = 0, \quad \text{avec} \begin{cases} F = 1 - \frac{md^2}{J_0} \\ G = \lambda_z + \lambda_\alpha + \frac{\rho c U^2 (dC'_z - cC'_M)}{2J_0} \\ H = \lambda_z \left( \lambda_\alpha - \frac{\rho c^2 U^2 C'_M}{2J_0} \right) \end{cases} \quad (\text{L12})$$

En rappelant que le gradient de portance d'un profil mince est positif (égal à  $2\pi$  en écoulement potentiel) alors on constate que les trois termes  $F, G$  et  $H$  sont tous positifs. Si les solutions de (L12) sont réelles, elles seront donc de même signe et négatives.

Or le mouvement cherché doit être :

- Soit du type sinusoïdal amorti avec deux solutions réelles négatives,
- Soit amplifié avec des solutions complexes conjuguées, où l'une des parties imaginaires est négative et caractérise donc un mode instable.

L'instabilité de flottement se produira à la limite de ces deux régimes lorsque les valeurs propres deviennent identiques. Le flottement classique est donc une instabilité par confusion de fréquence, c'est-à-dire que les deux fréquences initiales du système, comme illustrer figure (I.2), évolue avec la vitesse pour se confondre à la vitesse critique. Au delà du point critique, l'un des deux mouvements est instable, c'est-à-dire qu'il prélève de l'énergie à l'écoulement.

Rechercher la vitesse de flottement consiste à calculer la vitesse pour laquelle le discriminant de l'équation (L12) devient nul. On note  $p$  la distance du centre de torsion  $O$  au foyer  $F$ .

Par définition on a (I.1) :

$$p = -c \frac{C'_M}{C'_z} \quad (\text{I.13})$$

En écrivant que le discriminant de (I.12) est nul il vient après arrangement :

$$F'Y^2 + 2G'Y + H' = 0, \text{ avec } \begin{cases} F' = (d+p)^2 \\ G' = (d+p)(\lambda_z + \lambda_\alpha) - 2p\lambda_z(1 - \frac{md^2}{J_0}) \\ H' = (\lambda_z + \lambda_\alpha)^2 - 4\lambda_z\lambda_\alpha(1 - \frac{md^2}{J_0}) \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Ou :  $Y = \frac{\rho c U^2 C'_z}{2J_0}$  La vitesse critique s'écrit alors :

$$U_c^2 = \frac{2J_0}{\rho c C'_z} \frac{-G' \pm \sqrt{G'^2 - F'H'}}{F'} \quad (\text{I.15})$$

Evidemment on suppose qu'une solution positive existe et que le terme sous la racine est positif. Cette condition n'est respectée que dans certaines configurations à cause des signes respectifs des distances algébriques  $d$  et  $p$ , c'est-à-dire pour des positions relatives spécifiques des différents points remarquables  $F$ ,  $G$  et  $O$  du profil d'aile.

L'expression (I.15) est relativement compliquée à analyser du point de vue mécanique. Afin de poursuivre le raisonnement on s'intéresse maintenant à des configurations particulières rencontrées dans la pratique.

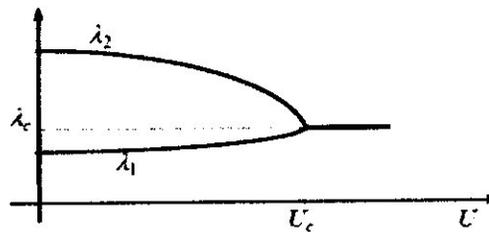


Figure I.2. Evolution des valeurs propres avec la vitesse du vent.

### I.3.3. Cas de l'aile d'avion :

Pour des raisons de manoeuvrabilité de l'appareil, on s'arrange en général pour que le centre de torsion de la voilure soit positionné au foyer, c'est-à-dire au quart de corde. Cela nous conduit à  $p = 0$ , et permet de simplifier l'expression de la vitesse critique :

$$U_c^2 = \frac{-2J_0}{\rho c d C'_z} \left[ -(\lambda_z + \lambda_\alpha) + \sqrt{4\lambda_z\lambda_\alpha(1 - \frac{md^2}{J_0})} \right] \quad (\text{I.16})$$

En supposant que le centre de gravité est placé derrière le foyer, i.e.  $d < 0$  comme sur la figure (I.1)

Dans ce cas la fréquence de flottement est donnée par la solution double de l'équation aux valeurs propres (I.12), soit :

$$f_c^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\lambda_\alpha \lambda_z}{1 - \frac{m d^2}{J_0}}} \quad (\text{I.17})$$

Si le foyer est en arrière du centre de gravité, il n'est pas possible de déclencher un flottement classique sur un profil d'aile. Mais cela implique de concevoir la voilure en plaçant le centre de gravité très en amont, avant le quart de corde.

#### I.4 Le galop :

Le galop est une instabilité sur un mouvement de translation des cylindres élancés. Le mouvement introduit des efforts de couplage de type amortissement ajouté.

On suppose donc que le cylindre présenté figure (I.3). Oscille en translation dans le plan  $(x, z)$ .

Sa vitesse vibratoire est  $u$ . On suppose ici que la fréquence réduite est faible, et que l'hypothèse quasi-statique s'applique.

Dans le principe il n'est pas nécessaire de supposer des mouvements découplés sur les deux axes du plan  $(x, z)$ , mais cela permet de conserver un caractère général à la démarche.

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m \ddot{x} + 2m\omega_x \eta \dot{x} + m\omega_x^2 x = \frac{1}{2} \rho U_a^2 DC_x(\alpha_a) \\ m \ddot{z} + 2m\omega_z \eta \dot{z} + m\omega_z^2 z = \frac{1}{2} \rho U_a^2 DC_z(\alpha_a) \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

L'amortissement structural réduit est  $\eta$ . Les coefficients aérodynamiques statiques sont  $C_x$  et  $C_z$  sont fonction de la direction apparente du vent  $\alpha_a$  qui est réellement perçue par le cylindre lors des oscillations. Les coefficients aérodynamiques sont présumés définis dans le repère de la structure  $(x, z)$ .  $U_a$  est la vitesse apparente du vent perçue par le cylindre qui résulte de la combinaison de la vitesse du vent  $U$  et de la vitesse de la structure  $u = (\dot{x}, \dot{z})$  telle que  $U_a = U - u$ .

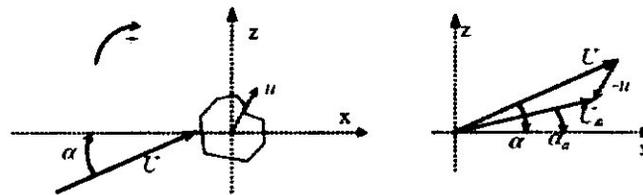


Figure I.3. Cylindre oscillant en translation et triangle des vitesses correspondant.

On linéarise les efforts aérodynamiques sous la forme :

$$\begin{cases} F_x = \frac{1}{2} \rho U^2 DP \dot{x} \\ F_z = \frac{1}{2} \rho U^2 DH_1 \dot{z} \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Où  $p$  et  $H_1$  sont les dérivées de flottement d'amortissement pur en traînée et en portance respectivement. Ils sont obtenus par dérivation des efforts par rapport à la vitesse du mouvement de la structure et évalués pour une vitesse  $u$  nulle conformément à l'hypothèse quasi-statique.

D'après la figure (L.3) nous avons :

$$U_a = \begin{Bmatrix} U \cos \alpha \\ U \sin \alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} ; \alpha_a = \arctg \left[ \frac{U \sin \alpha - \dot{z}}{U \cos \alpha - \dot{x}} \right] \quad (\text{L.20})$$

Après calcul on obtient :

$$\begin{cases} P = \frac{1}{U} \left[ -2 \cos \alpha C_x(\alpha) + \sin \alpha C_x'(\alpha) \right] \\ H_1 = \frac{1}{U} \left[ -2 \sin \alpha C_z(\alpha) - \cos \alpha C_z'(\alpha) \right] \end{cases} \quad (\text{L.21})$$

Or les amortissements aérodynamiques sont des amortissements ajoutés qui se retranchent à l'amortissement structural, d'où un risque d'instabilité. Lorsque l'angle d'incidence moyen  $\alpha$  est nul, on obtient la formulation habituelle du phénomène de galop, avec :

$$P = \frac{-2C_{x_0}}{U} ; H_1 = \frac{-C_{z_0}'}{U} \quad (\text{L.22})$$

En remplaçant ces coefficients dans les équations du mouvement, soit :

$$\begin{cases} m \ddot{x} + \left[ 2m\omega_x \eta + \rho U D C_{x_0} \right] \dot{x} + m \omega_x^2 x = 0 \\ m \ddot{z} + \left[ 2m\omega_z \eta + \frac{1}{2} \rho U D C_{z_0}' \right] \dot{z} + m \omega_z^2 z = 0 \end{cases} \quad (\text{L.23})$$

On fait apparaître les amortissements résultants. Considérons maintenant chaque mouvement de manière indépendante. Sur l'axe  $x$ , relatif à la traînée, le mouvement de balançoire (longitudinal, parallèle au vent) sera toujours amorti, car l'amortissement ajouté qui est proportionnel au coefficient de traînée est toujours positif. En fait le vent contribue même à mieux amortir ce mouvement. Par contre, sur l'axe  $z$  de la portance, le mouvement de pilonnement (vertical, transverse au vent) peut devenir négatif au-delà d'une vitesse critique :

$$U_c = \frac{-4m\omega_z \eta}{\rho D C_{z_0}'} \quad (\text{L.24})$$

à condition que le gradient de portance soit négatif. Cette vitesse critique s'exprime aussi sous forme adimensionnelle :

$$U_{rc} = \frac{U_c}{fD} = -\frac{2m\eta}{\rho D^2} \frac{4\pi}{C_{z_0}'} = -S_c \frac{4\pi}{C_{z_0}'} \quad (\text{L.25})$$

Où  $S_c$  est le nombre de Scruton, appelé parfois le paramètre de masse-amortissement.

Ce nombre sans dimension est très largement utilisé dans les problèmes de couplage fluide-structure. La condition de gradient de portance négatif s'écrit également à l'aide des coefficients aérodynamiques exprimés en axes vent :

$$C_{z_0}' = C_D + C_L' < 0$$

Ce critère, traduisant la condition nécessaire pour qu'une instabilité de galop existe, est très connu sous le nom de critère de Den Hartog. Cela nécessite que la courbe de portance soit décroissante en fonction de l'angle d'incidence. Le critère de Den Hartog s'applique donc aux structures non profilées qui possèdent une portance décroissante ou bien aux profils d'aile à grande incidence comme présentée figure (L.4). De fait, le phénomène de galop constitue physiquement une instabilité de flottement de décrochage sur un mouvement de translation. Il existe une instabilité similaire sur le mouvement de torsion.

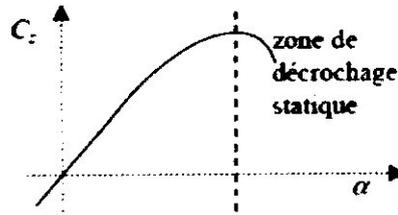


Figure 1.4. Evolution du coefficient de portance d'un profil d'aile.

**1.5. Excitation par détachement tourbillonnaire :**

L'excitation par détachement tourbillonnaire se distingue de celle de la turbulence par son caractère harmonique à la fréquence de détachement des tourbillons. Cette excitation peut poser des problèmes de dimensionnement lorsque cette fréquence coïncide avec une fréquence propre de la structure. Dans ce cas la résonance induit un phénomène de couplage qui est encore assez mal maîtrisé du point de vue modélisation prédictive.

**1.5.1. Approche linéaire :**

On considère le cylindre oscillant en translation transverse au vent moyen  $U$  de la figure (1.5). L'équation du mouvement s'écrit :

$$m \ddot{z} + 2m\eta\omega \dot{z} + \omega^2 z = \frac{1}{2} \rho D U^2 C_z(t) \tag{1.26}$$

Où la fluctuation du coefficient de portance est due au détachement des tourbillons. En première approximation on la considère sinusoïdale à la fréquence du détachement :

$$C_z(t) = C_{z_{max}} \cos(\omega t) \tag{1.27}$$

Lorsqu'il y a résonance, c'est-à-dire lorsque  $\omega = \omega_n$ , l'amplitude de vibration est maximale et :

$$z(t) = \frac{\rho D U^2 C_{z_{max}}}{2m\eta\omega^2} \sin(\omega t) \tag{1.28}$$

En admettant un amortissement structural faible ( $\eta \ll 1$ ). Cette relation sous forme adimensionnelle devient :

$$\frac{z(t)}{D} = \frac{C_{z_{max}}}{4\pi^2 S_c S_l^2} \sin(\omega t) \tag{1.29}$$

En faisant apparaître le nombre de Scruton et le nombre de Strouhal (égal à la fréquence réduite pour la résonance). En fait, on trouve souvent dans la littérature spécialisée un nombre sans dimension que l'on peut interpréter comme le paramètre caractérisant la réponse (linéaire) du cylindre, le nombre de Skop-Griffin qui représente le dénominateur du second membre de (1.29), soit :  $S_G = 4\pi^2 S_c S_l^2$ . Ce nombre étant fixé, la réponse du cylindre à la résonance ne semble donc dépendre que de l'amplitude de la portance fluctuante  $C_{z_{max}}$ . Estimé sur un cylindre circulaire immobile, cette portance est de l'ordre de 0.35 à 0.50.



Figure 1.5. Cylindre excité par détachement tourbillonnaire.

### 1.5.2. Limite de l'approche linéaire :

Malheureusement, l'expérience montre que cette portance fluctuante est modifiée avec le mouvement du cylindre et dépend de l'amplitude. En fait lorsque le cylindre oscille à la résonance, la portance est amplifiée par rapport à celle que l'on mesure pour un cylindre fixe. Cette amplification peut atteindre (1.5) pour des amplitudes de l'ordre du diamètre. Ce mécanisme s'explique partiellement par une extension de la longueur de corrélation du détachement tourbillonnaire sur l'axe du cylindre lorsque ce dernier oscille à une amplitude suffisante. De plus, à très grande amplitude de vibration, on constate ensuite une réduction de la portance, ce qui conduit à un cycle limite d'oscillation dont l'amplitude est effectivement fixée par cette amplification non linéaire de portance.

D'autre part il existe un phénomène d'hystérésis autour de la résonance que l'on appelle l'accrochage.

Ce phénomène se caractérise par une extension de la résonance sur une certaine gamme de vitesse de l'écoulement. Lorsque la résonance a lieu, le fait de modifier la vitesse du vent, en l'augmentant ou en la diminuant, n'annule pas immédiatement la résonance entre le lâcher de tourbillons et le mouvement. Plus précisément, sur un diagramme vitesse-fréquence, figure (1.6), la fréquence du détachement de tourbillons devrait constituer une droite croissante puisque le nombre de Strouhal est constant. De même la fréquence de la structure est une droite horizontale car elle ne dépend pas de la vitesse du vent. La vitesse de résonance est obtenue au croisement de ces deux droites. Or en pratique lorsque la vitesse du vent se rapproche de la vitesse de résonance, la fréquence du détachement effectue un saut pour se fixer à la fréquence de la structure oscillante. C'est l'accrochage ou « lock-in ». Ce dernier n'est pas symétrique selon que l'on approche la résonance à vitesse croissante ou décroissante.

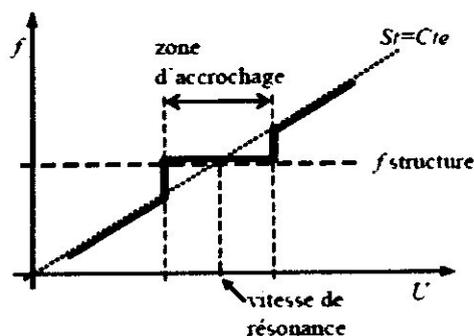


Figure 1.6. Accrochage entre la fréquence du détachement tourbillonnaire et celle de la structure.

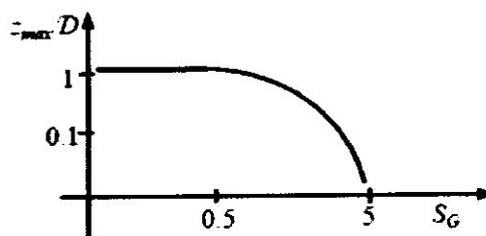


Figure 1.7. Amplitude de la réponse d'un cylindre circulaire en fonction de  $S_G$ .

Enfin, troisième et dernier mécanisme limitant l'approche linéaire, l'expérience montre que la réponse du cylindre dépend également du nombre de Skop-Griffin comme présenté figure (1.7) pour le cylindre circulaire. Si le paramètre de réponse est trop important, l'excitation par détachement tourbillonnaire est pratiquement nulle. Or dans le cas des effets du vent, cette limite implique que seules les structures très légères peuvent être concernées par ce type d'excitation.

## 1.6 Aéroélasticité :

On s'intéresse dans ce chapitre à des structures élancées bidimensionnelles dont les fréquences d'oscillation sont trop élevées pour que l'hypothèse quasi-statique puisse s'appliquer sans erreur importante. On reste néanmoins dans le domaine des fréquences réduites faibles, où c'est toujours l'écoulement qui pilote les vibrations de la structure.

### 1.6.1 Limite de l'hypothèse quasi-statique :

L'hypothèse quasi-statique employée au chapitre précédent suppose que le mouvement de la structure est très lent devant le déplacement des particules fluides. Elle constitue une limite asymptotique pour laquelle on assimile une fréquence réduite faible à une fréquence réduite égale à zéro. Cela permet effectivement de considérer comme valables les coefficients aérodynamiques évalués sur une structure immobile.

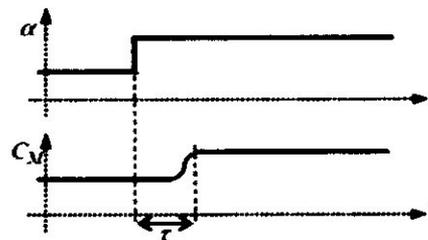


Figure 1.8. Mise en évidence du déphasage entre effort et mouvement.

Une conséquence très importante de cette hypothèse est que l'écoulement est censé s'adapter instantanément au mouvement de la structure. Autrement dit on néglige le retard de phase qui existe entre le mouvement et l'effort aérodynamique. Schématiquement on peut imaginer par exemple un profil d'aile auquel on applique subitement un échelon d'angle d'incidence, figure (3.1). Cela induit en parallèle une variation du moment de tangage mais l'expérience montre que celui-ci ne sera établi qu'après un certain délai  $\tau$  alors que sous l'hypothèse quasi-statique ce délai est nul.

En extrapolant ce mécanisme à un mouvement sinusoïdal d'oscillation, le délai  $\tau$  correspondrait à un déphasage  $\phi$  entre l'effort et le mouvement soit :

$$\alpha = \bar{\alpha} \cos \omega t ; C_M = \bar{C}_M \cos(\omega t - \phi) \text{ avec } \phi = \omega \tau > 0 \quad (\text{I.30})$$

Or le travail du moment de tangage sur un cycle d'oscillation est :

$$W = \int_{\text{cycle}} C_M d\alpha = \int_0^T C_M \dot{\alpha} dt = -\pi \bar{\alpha} \bar{C}_M \sin \phi \quad (\text{I.31})$$

Où  $\tau > 2\pi \omega$  est la période du mouvement. Pour des valeurs de  $\tau$  inférieures à une demi-période, le travail  $W$  est négatif, indiquant un échange d'énergie du fluide vers la structure, c'est-à-dire un mouvement instable. Si  $\tau > T_2$  le travail est positif, le mouvement est stable.

On constate donc que la connaissance du temps d'établissement de l'écoulement, donc de l'effort aérodynamique instationnaire est très importante pour la stabilité aéroélastique. L'hypothèse quasi statique ne permet pas a priori d'évaluer correctement les échanges d'énergie car on assimile le fait que  $\frac{\tau}{T} \rightarrow 0$  à  $\frac{\tau}{T} = 0$ , induisant ainsi une erreur sur le travail  $W$ .

Dans cette partie, on va s'affranchir de cette simplification, d'abord pour un profil d'aile puis pour une structure non profilée.

**I.6.2 Cas du profil d'aile mince :****I.6.2.1 Couplage flexion-torsion :**

$$\begin{cases} F_z = \frac{1}{2} \rho c U^2 (H_1 \frac{\dot{z}}{U} + H_2 \frac{c\dot{\alpha}}{U} + H_3 \alpha + H_4 \frac{z}{c}) \\ M_0 = \frac{1}{2} \rho c^2 U^2 (A_1 \frac{\dot{z}}{U} + A_2 \frac{c\dot{\alpha}}{U} + A_3 \alpha + A_4 \frac{z}{c}) \end{cases} \quad (\text{L32})$$

En supposant toujours des amplitudes de mouvement petites et des incidences faibles. Dans ce cas, on peut admettre que la vitesse de l'air autour du profil se linéarise sous la forme :

$$u = \bar{U} + u' ; v = v' \quad (\text{L33})$$

Où les termes  $u'$  et  $v'$  sont des perturbations dépendant du temps. Cette vitesse doit naturellement respecter la condition de Kutta au bord de fuite. En considérant un fluide non visqueux, incompressible et irrotationnel, on peut utiliser la notion de potentiel complexe et la transformation conforme de Joukowski lors de la résolution du problème. Cette théorie est souvent appelée la théorie du profil d'aile instationnaire (UAT, Unsteady Airfoil Theory). Après calculs, il est possible de trouver des expressions analytiques des dérivées de flottement lorsque le mouvement du profil d'aile est harmonique de la forme

$$z = z_0 e^{i\omega t} ; \alpha = \alpha_0 e^{i\omega t} \quad (\text{L34})$$

Pour cela on introduit la fonction de Theodorsen  $C(K)$  dépendant de la pulsation réduite

$K = 2\pi f \frac{c}{U}$ . Cette fonction appelée également la fonction de circulation de Theodorsen s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel modifiées  $K_0$  et  $K_1$  d'ordre 0 et 1 respectivement, soit :

$$C(K) = F(K) + iG(K) = \frac{K_1(iK)}{K_0(iK) + K_1(iK)} \quad (\text{L35})$$

En pratique il est plus commode d'exprimer les parties réelle et imaginaire à l'aide de fonctions de Bessel de première et seconde espèce  $J$  et  $Y$ , c'est-à-dire :

$$F = \frac{J_1(Y_0 + J_1) - Y_1(J_0 - Y_1)}{(Y_0 + J_1)^2 + (J_0 - Y_1)^2} ; G = \frac{-J_1(J_0 - Y_1) - Y_1(Y_0 + J_1)}{(Y_0 + J_1)^2 + (J_0 - Y_1)^2} \quad (\text{L36})$$

Ces fonctions sont présentées figure (1.9) en fonction de  $K$ . Lorsque  $K$  tend vers 0 (quasi-statique),  $F$  tend vers 1 et  $G$  tend vers 0. A l'inverse, pour  $K$  grand,  $F$  tend vers  $\frac{1}{2}$  et  $G$  lentement vers 0.

Il existe des approximations de la fonction de Théodorsen.

$$C(K) = F(K) + iG(K) = 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.0455i}{K}} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.3i}{K}} \quad (\text{L37})$$

Qui engendre cependant une erreur non négligeable sur la partie imaginaire  $G$ .

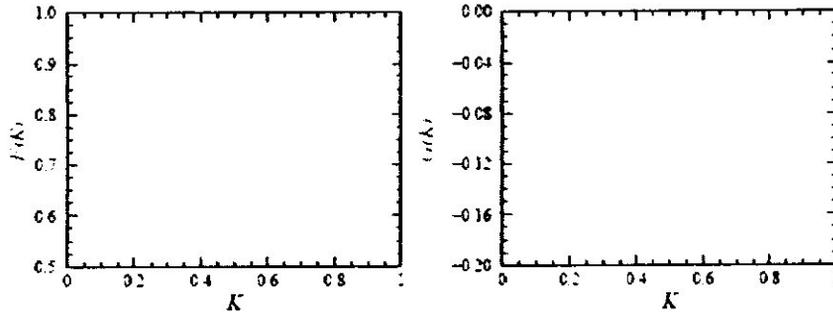


Figure I.9. Partie réelle et imaginaire de la fonction de Theodorsen.

Après calculs, les dérivées de flottements pour le mouvement de translation verticale sont données par :

$$\begin{cases} H_1 = -2\pi F; H_2 = 2\pi \left[ \frac{1}{4} + \frac{G}{K} + \left(\frac{1}{4} - a\right)F \right] \\ H_3 = 2\pi \left[ F - \left(\frac{1}{4} - a\right)KG + K^2 \frac{a}{4} \right]; H_4 = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \frac{4G}{K} \right] K^2 \end{cases} \quad (I.38)$$

et pour le mouvement de torsion :

$$\begin{cases} A_1 = -2\pi F \left(\frac{1}{4} + a\right); A_2 = -\frac{\pi}{2} \left[ \left(\frac{1}{4} - a\right) - \frac{4G}{K} + \left(\frac{1}{4} + a\right) + 4F \left(a^2 - \frac{1}{16}\right) \right] \\ A_3 = \frac{\pi}{2} \left[ 4F \left(\frac{1}{4} + a\right) + 4KG \left(a^2 - \frac{1}{16}\right) + \left(a^2 + \frac{1}{32}\right)K^2 \right]; A_4 = -\frac{\pi}{2} \left[ a + \frac{4G}{K} \left(\frac{1}{4} + a\right) \right] K^2 \end{cases} \quad (I.39)$$

Dans ces expressions,  $a$  est la distance adimensionnée par rapport à la corde entre le milieu du profil et le centre de torsion  $O$ , figure (I.10). Lorsque le centre de torsion est positionné au foyer  $F$ , c'est dire au quart de corde, alors  $a = -\frac{1}{4}$ , s'il est au milieu du profil,  $a = 0$ .

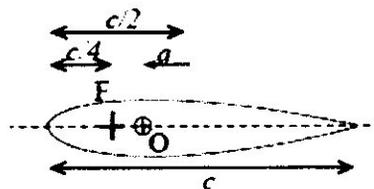


Figure I.10. Position du foyer par rapport au centre de torsion sur la corde du profil.

En rappelant que par définition :

$C_M' = C_z' \left(\frac{1}{4} + a\right)$  avec  $C_z' = 2\pi$ , on peut arranger les relations précédentes pour donner :

$$\begin{cases} A_1 = -C_M' F; A_2 = C_M' \left[ \left(\frac{1}{4} - a\right)F + \frac{G}{K} \right] + \frac{C_z'}{4} \left(a - \frac{1}{4}\right) \\ A_3 = C_M' \left[ F - KG \left(\frac{1}{4} - a\right) \right] + C_z' K^2 \frac{a^2}{4} + C_z' \frac{K^2}{128}; A_4 = -C_M' KG - C_z' a \frac{K^2}{4} \end{cases} \quad (I.40)$$

Les termes les plus importants sont dus à la circulation autour du profil satisfaisant la condition de Kutta. Ils sont adossés à la fonction de Theodorsen. La force de portance associée s'applique au  $\frac{1}{4}$  de corde (au foyer) où  $C_M'$  s'annule.

Les autres termes sont des effets de masse ajoutée induisant :

- Une portance s'appliquant à la  $\frac{1}{2}$  corde, ayant donc un bras de levier égal à  $a$  ;
- Un effet centrifuge dû à la torsion, produisant une portance au  $\frac{3}{4}$  de corde, soit d'un bras de levier  $a - \frac{1}{4}$  ;
- Un couple pur.

Rappelons que cette théorie potentielle instationnaire résulte d'une linéarisation sur des mouvements de faible amplitude dans un écoulement non visqueux. L'estimation de la vitesse critique de flottement nécessite l'emploi d'une méthode numérique itérative dans laquelle on augmente pas à pas la vitesse du vent, afin de calculer les dérivées de flottement correspondantes, en regardant pour chaque vitesse la stabilité ou non du système. [1]

### I.6.2.2 Comparaison avec la théorie quasi-statique :

Dans le chapitre précédent, nous avons supposé une très faible fréquence réduite, ce qui nous avait permis d'obtenir des expressions pour les dérivées de flottement que nous pouvons comparer maintenant avec celles tenant compte des effets instationnaires.

Pour cela, on doit remarquer que les dérivées de flottement peuvent s'exprimer généralement comme des polynômes du second degré au maximum en  $K$ . En quasi-statique, seule la constante de ce polynôme peut être estimée car il s'agit de sa limite asymptotique pour  $K \rightarrow 0$ . Sachant que  $F \rightarrow 1$  cela donne :

$$\lim_{K \rightarrow 0} H_1 = -C_z' ; \lim_{K \rightarrow 0} H_2 = C_z' \left[ -a + \frac{G}{K} \right] ; \lim_{K \rightarrow 0} H_3 = C_z' ; \lim_{K \rightarrow 0} H_4 = 0$$

$$\lim_{K \rightarrow 0} A_1 = -C_M' ; \lim_{K \rightarrow 0} A_2 = -C_M' \left[ \frac{1}{4} - a + \frac{G}{K} \right] + \frac{C_z'}{4} \left( a - \frac{1}{4} \right); \quad (L41)$$

$$\lim_{K \rightarrow 0} A_3 = C_M' ; \lim_{K \rightarrow 0} A_4 = 0$$

Dans un premier temps on se concentre sur les termes de raideurs. Pour la translation, on constate que les expressions de  $H_4$  et  $A_4$  n'ont pas de constante, ce qui indique que ces termes sont uniquement dus aux effets instationnaires, non modélisés en quasi-statique. Pour le tangage les termes  $H_3$  et  $A_3$  sont très importants dans le problème du flottement couplé et comportent chacun des termes constants.

En fait on constate que l'équivalence avec la théorie statique est globalement obtenue lorsque  $K \rightarrow 1$ , sauf pour les termes d'amortissement en tangage  $H_2$  et  $A_2$ .

Pour mieux appréhender ces différences, on compare les dérivées de flottement lorsque  $a = 0$ , c'est-à-dire lorsque le centre de torsion est placé au milieu du profil. Cette configuration n'est pas réaliste pour un profil d'aile mais représente la majorité des tabliers de ponts. Les dérivées de flottement se simplifient en :

$$\begin{cases} H_1 = -C_z' F ; H_2 = C_z' \left[ \frac{F}{4} + \frac{G}{K} \right] - \frac{C_z'}{4} \\ H_3 = C_z' \left[ F - \frac{KG}{4} \right] ; H_4 = -C_z' KG + C_z' \frac{K^2}{4} \end{cases} \quad (L42)$$

$$\begin{cases} A_1 = -C_M' F ; A_2 = C_M' \left[ \frac{F}{4} + \frac{G}{K} \right] - \frac{C_z'}{16} \\ A_3 = C_M' \left[ F - \frac{KG}{4} \right] + C_z' \frac{K^2}{128} ; A_4 = -C_M' KG \end{cases} \quad (\text{L.43})$$

La comparaison avec la théorie quasi-statique (QST) est présentée figure (I.11) en fonction de  $K$ .

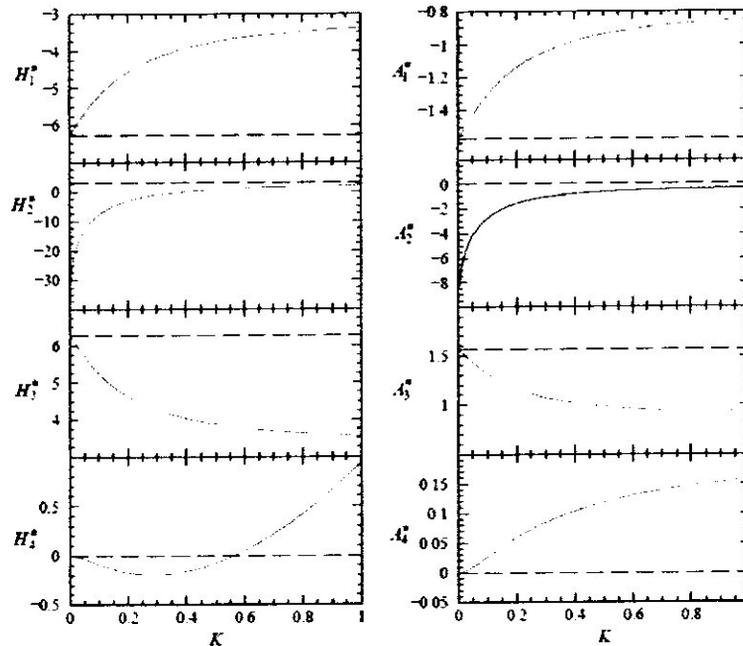


Figure I.11. Dérivées de flottement pour  $a=0$  en UAT (—) et QST (---).

L'analyse des composantes d'amortissement en tangage montre que les fortes différences aux faibles fréquences réduites sont reliées directement au terme en  $\frac{G}{K}$  intervenant dans leur définition.

En effet, cette fonction tend très lentement vers  $-\infty$  pour  $K \rightarrow 0$  ce qui constitue une singularité lorsque  $K$  est pris rigoureusement nul. En fait l'estimation de ces deux coefficients d'amortissement en torsion pure et couplée constitue un problème récurrent dans les problèmes aéroélastique.

En pratique la théorie quasi-statique néglige ces effets ce qui la rend inefficace lorsque la configuration du problème rend ces coefficients primordiaux.

### I.6.2.3 Le décrochage dynamique :

La notion de décrochage dynamique d'un profil d'aile est une bonne introduction à l'étude des flottements des corps non profilés. En effet, lorsque l'angle d'incidence moyen du profil est situé dans la zone de décrochage statique, il se produit un décrochage dynamique. Celui-ci diffère de la simple oscillation en torsion à faible incidence du paragraphe précédent par le fait que la vitesse du vent autour du profil ne reste pas parallèle à la vitesse amont. En d'autres termes, l'hypothèse de base servant au développement de la théorie potentielle instationnaire n'est pas respectée (linéarisation de la vitesse, équation (L.33)). Globalement le décrochage dynamique est un mécanisme physique comportant une hystérésis dans l'établissement d'un cycle du mouvement. On peut l'illustrer sur un diagramme portance-angle d'incidence comme la figure (I.12). Lorsque le cycle d'oscillation en incidence d'amplitude  $\Delta\alpha$  empiète sur la zone de décrochage statique,

le comportement non linéaire intervient et se traduit par :

- une augmentation de la portance maximale par rapport à la courbe statique, comme si le décrochage se produisait pour une incidence plus grande,
- suivi en retour d'un recollement plus tardif, avec une situation de décrochage qui perdure aussi plus longtemps.

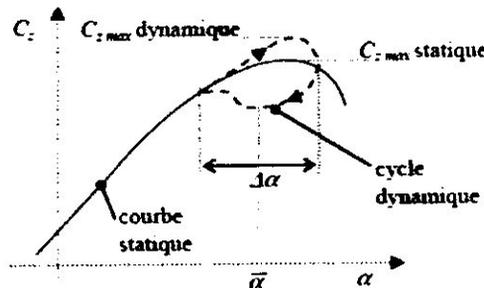


Figure L12. Cycle de décrochage dynamique d'un profil d'aile.

Ces deux phénomènes combinés conduisent au cycle d'hystérésis du décrochage dynamique : celui-ci est parcouru dans le sens horaire et son aire, qui représente le travail de la force de portance, est négative : elle indique donc un transfert d'énergie du fluide vers la structure. Cette énergie doit être dissipée par la structure, généralement par amortissement structural afin d'éviter une instabilité. Evidemment en pratique la forme du cycle dépend de la fréquence réduite, de l'amplitude  $\Delta\alpha$ , et de la valeur de  $\bar{\alpha}$ . Le même type de comportement est observé pour le moment de tangage, avec éventuellement des cycles comportant plusieurs boucles.

**1.6.2.4. Effet de la turbulence :**

L'effet de la turbulence sur un profil d'aile a été étudié initialement par Sears (1941). L'idée repose sur le fait que la turbulence peut se modéliser comme un train d'onde qui se propage le long du profil à la vitesse moyenne de l'écoulement. On suppose donc une vitesse turbulente verticale de la forme :

$$w(x,t) = \bar{w} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{U}\right)\right] \tag{I.44}$$

Où la pulsation  $\omega = 2\pi \frac{\bar{U}}{\ell}$  est basée sur la longueur d'onde des perturbations turbulentes. Dans ce cas, Sears a montré que la portance résultante sur un profil à incidence petite était donnée par :

$$C_z(K) = 2\pi \frac{\bar{w}}{U} S(K) \exp[i\omega t] \tag{I.45}$$

Où la fonction de Sears  $S(K)$  est donnée à l'aide de la fonction de Theodorsen par :

$$S(K) = [J_0(K) - iJ_1(K)]C(K) + iJ_1(K). \tag{I.46}$$

Cette portance résultant de la circulation agit au  $\frac{1}{4}$  de corde (au foyer). Elle n'induit donc pas de moment de tangage au foyer de l'aile. En pratique on utilise plutôt le module de la fonction de Sears pour évaluer l'amplitude de la force induite par la turbulence, soit :

$$|S(K)|^2 = (J_0^2 + J_1^2)(F^2 + G^2) + 2J_0J_1G - 2J_1^2F \tag{I.47}$$

Qui est présenté figure (II.6).

Il en existe une approximation relativement précise due à Fung :

$$|S(K)|^2 = \frac{0.1811 + K}{0.1811 + 1.5689K + 2\pi K^2} \quad (I.48)$$

Revenons sur l'expression de la portance induite par la turbulence. Dans cette expression la fonction de Sears traduit le fait que la turbulence est convectée longitudinalement et que le profil n'est pas soumis aux maxima de la vitesse  $w$  simultanément. La fonction de Sears agit donc comme une fonction de pondération, son maximum étant égal à 1 pour une fréquence réduite nulle, c'est-à-dire pour la limite quasi-statique. Pour des fréquences élevées, les échelles de turbulence correspondantes sont plus faibles que la corde du profil, d'où une décroissance rapide en fonction de  $K$ . Ce type de fonction de pondération s'appelle une admittance aérodynamique. Elle est intrinsèquement liée à la composante de la force et à la structure considérée et il convient d'obtenir des admittances pour les autres composantes des efforts, notamment la traînée, ce qu'évidemment la théorie potentielle instationnaire ne permet pas d'obtenir.

## I.7. Aéroélasticité des éoliennes :

### I.7.1. Sollicitations :

Une éolienne est une machine permettant la transformation de l'énergie cinétique du vent en énergie mécanique par conversion d'efforts d'origine aérodynamique en couple moteur. Cependant, les efforts aérodynamiques ne sont pas les seuls efforts à s'exercer sur une éolienne lors de son fonctionnement. Il faut également considérer les efforts d'origine inertielle (gravité, force centrifuge, efforts gyroscopiques) et les efforts d'origine élastique (déformations des pales). La prise en compte des interactions mutuelles de ces efforts -aérodynamiques, inertiels et élastiques- constitue l'étude aéroélastique d'une éolienne.

Il est également intéressant de souligner les fortes similitudes entre l'étude d'un rotor d'éolienne et celle d'un rotor d'hélicoptère, seul l'effet de la gravité étant communément négligé dans le cas de ce dernier. La littérature portant sur les hélicoptères peut donc être une aide significative pour mieux appréhender les équations gouvernant le comportement d'une éolienne.

### I.7.2. Modélisation :

L'ensemble d'une éolienne, pales, moyeu, arbres, multiplicateurs, génératrice, tour, peut être représenté comme illustré sur la figure (I.14). L'étude de certains sous-ensembles de ce modèle (ligne d'arbres, tour) n'est pas spécifique au cas des éoliennes et ne sera donc pas abordée ici. On se consacrera plus particulièrement au comportement des pales et aux sollicitations qu'elles transmettent au moyeu puis à l'ensemble de la machine.

Représentation pour une partie de la nappe de sillage par une des deux pales

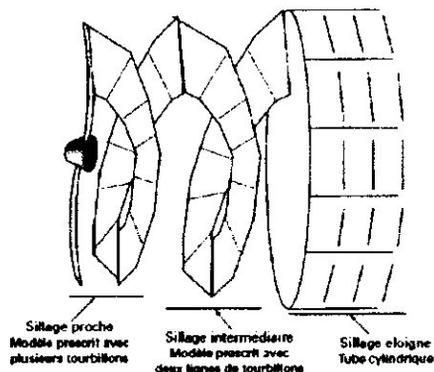


Figure I.13. *Modèle de sillage en trois domaines.*

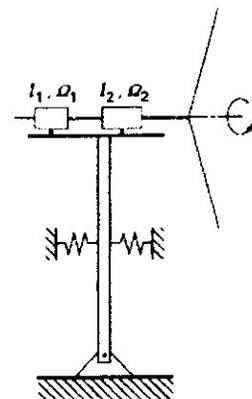


Figure I.14. *Modélisation d'une éolienne.*

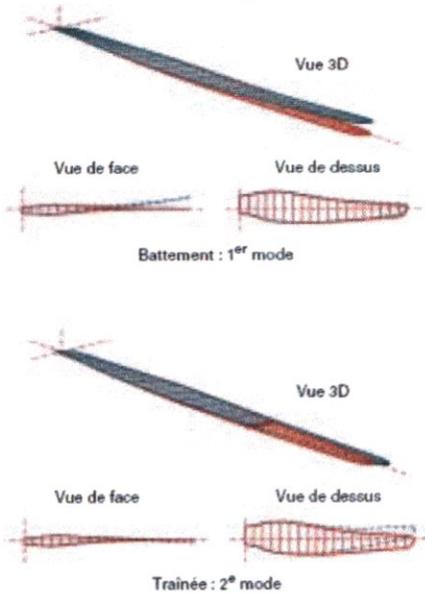
Avec  $I_1$  et  $\Omega_1$  moment d'inertie et vitesse de rotation de l'élément 1 (ex : multiplicateur)

Avec  $I_2$  et  $\Omega_2$  moment d'inertie et vitesse de rotation de l'élément 2 (ex : générateur)

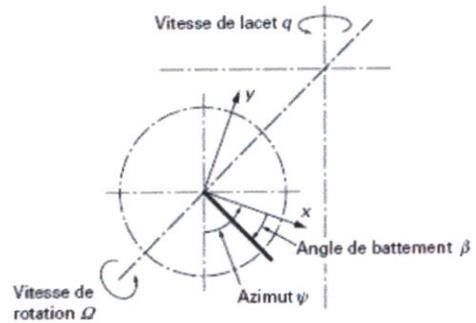
La figure (I.8) présente les angles et repères caractéristiques d'une éolienne.

**I.7.3. Modes de pale :**

L'étude dynamique de structures élancées et souples telles que les pales fait généralement appel à des résolutions basées sur l'utilisation de modèles de type éléments finis. Ces derniers permettent une description détaillée du mouvement des pales en prenant en considération un nombre élevé de modes, éventuellement couplés, de la structure.



**Figure I.15.** Angles caractéristiques modes encastrés.



**Figure I.16.** Exemple de deux premiers.

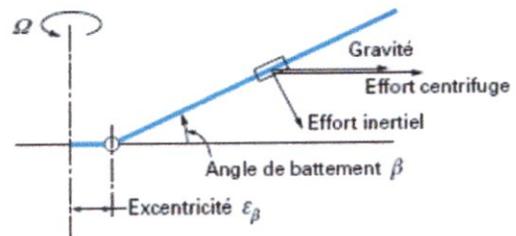
Une modélisation simplifiée est ici utilisé, faisant l'hypothèse que seuls les premiers modes de flexion (battement, traînée) encastrés d'une pale sont retenue figure (I.16). De plus, un tel mode d'une pale réelle est approximé par le mode de corps rigide d'une pale articulée par l'intermédiaire d'un ressort figure (I.17). On considère également que la masse de la pale équivalente est uniformément répartie en envergure.

**I.7.4. Equations du mouvement d'une pale :**

Trois mouvements distincts sont à considérer dans le cas d'une pale d'éolienne : battement, traînée et torsion.



**Figure I.17.** Premier mode de flexion.



**Figure I.18.** Mouvement de battement.

En dehors de l'influence des efforts aérodynamiques, la Figure (I.18) présente les sollicitations aux quelles est soumis un élément d'une pale articulée en battement. Si l'on considère la réduction des moments au niveau de l'articulation et en faisant l'hypothèse que l'angle de battement reste petit, on obtient l'expression suivante qui décrit le mouvement de battement de la pale :

$$\ddot{\beta} + \Omega^2 \left[ 1 + \varepsilon_1 + \frac{G}{\Omega^2} \cos \psi \right] \beta + \frac{K_\beta}{I_b} \beta = 0 \tag{I.49}$$

Avec 
$$G = \frac{g M_p r_g}{I_b}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{3\varepsilon_\beta}{2(1-\varepsilon_\beta)}$$

$\beta, \Omega$  et  $\psi$  définis sur la figure 18,

$K_\beta$  raideur de l'articulation de battement,

$I_b$  moment d'inertie en battement,

$g$  accélération due à la pesanteur,

$M_p$  masse d'une pale,

$r_g$  rayon du centre de gravité de la pale,

$\varepsilon_\beta$  excentricité de l'articulation de battement (ramenée au rayon  $R$  de la pale).

De la même manière figure (I.2), on obtient l'équation du mouvement de traînée:

$$\ddot{\delta} + \left[ \varepsilon_2 \Omega^2 + G \cos \psi + \frac{K_\delta}{I_b} \right] \delta - 2\Omega \beta \dot{\delta} + G \sin \psi = 0 \tag{I.50}$$

Avec 
$$\varepsilon_2 = \frac{3\varepsilon_\delta}{2(1-\varepsilon_\delta)}$$

$K_\delta$  raideur de l'articulation de traînée,

$\varepsilon_\delta$  excentricité de l'articulation de traînée (ramenée au rayon  $R$  de la pale).

Enfin, l'équation du mouvement en torsion figure (1.20) s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \left[ \Omega^2 + \frac{K_\theta}{I_t} \right] \theta = 0 \tag{I.51}$$

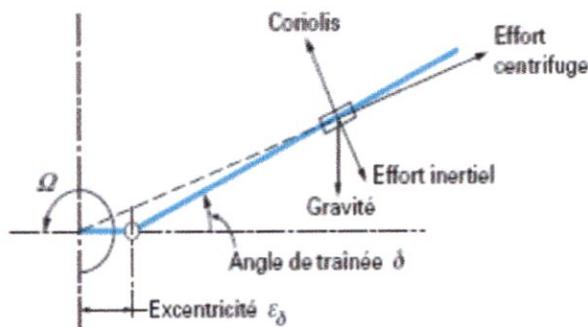


Figure I.19. Mouvement de traînée.

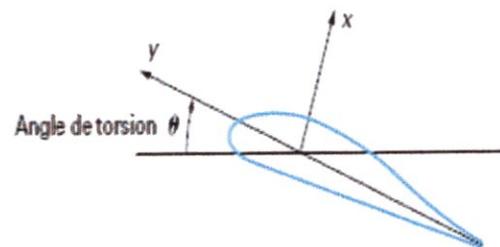


Figure I.20. Mouvement de torsion.

En observant les termes de ces différentes équations, on peut faire les remarques suivantes :

- En l'absence d'excentricité, de gravité et de ressort d'articulation, la pale est animée d'un mouvement de battement dont la vitesse est égale à la vitesse de rotation de l'éolienne ;
- L'effet de l'excentricité conduit à une fréquence de battement supérieure à la fréquence de rotation. Par contre, en présence d'une excentricité, la fréquence de traînée est inférieure à la fréquence de rotation ;
- La présence du ressort augmente la fréquence du mouvement (battement, traînée, torsion). On constate ainsi qu'en jouant sur quelques paramètres simples (excentricités, raideurs), il est possible de positionner les fréquences des premiers modes de la pale par rapport à la vitesse de rotation. Cela est particulièrement intéressant pour éviter des phénomènes de résonance avec certains modes du reste de la machine (tour, multiplicateur...).

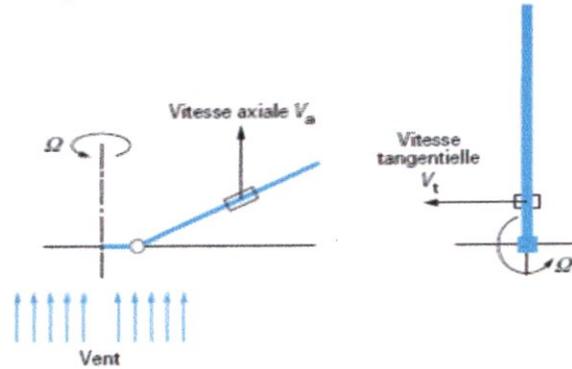


Figure I.21 Composantes de la vitesse.

Un mouvement de lacet (par exemple de vitesse constante  $q$  du rotor autour de l'axe de la tour de l'éolienne crée des efforts gyroscopiques instationnaires dont l'influence, en négligeant les termes du second ordre, est exprimée ainsi sur les mouvements de battement et de torsion :

$$\ddot{\beta} + \Omega^2 \left[ 1 + \varepsilon_1 + \frac{K_\beta}{I_b \Omega^2} + \frac{G}{\Omega^2} \cos \psi \right] \beta = -2q\Omega \cos \psi \quad (\text{I.52})$$

Et :

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \left[ 1 + \frac{K_\theta}{I_r \Omega^2} \right] \theta = -2q\Omega \sin \psi$$

L'effet du lacet apparaît donc comme un mouvement de période proportionnelle à la vitesse de lacet.

### I.7.5. Effets de l'aérodynamique :

Aux effets inertiels et élastiques, il convient désormais d'ajouter les efforts aérodynamiques s'exerçant sur les pales. On a vu précédemment que pour une section élémentaire de la pale, ces efforts dépendent de la vitesse incidente et de l'angle que fait la section avec cette vitesse, la vitesse incidente étant une combinaison de la vitesse relative du vent et de la vitesse de rotation de la machine. Il convient toutefois de prendre en compte des effets supplémentaires qui peuvent être le gradient de vent, une composante de vent de côté et l'influence d'un mouvement de lacet.

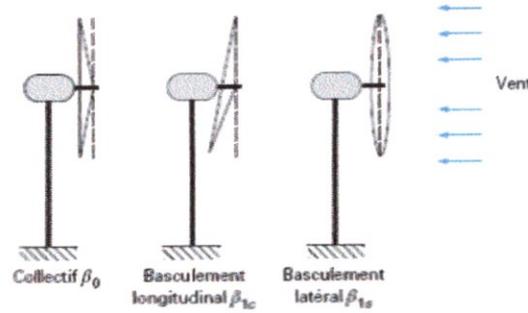


Figure 1.22. Mouvements de battement.

L'intégration des forces et moments correspondants le long de la pale permet alors de compléter les équations du mouvement d'une pale. Leur développement mathématique est ici hors de propos. Néanmoins, la nature de ces équations permet de constater que les mouvements de la pale peuvent s'écrire sous la forme de séries de Fourier. Ainsi, le battement peut s'exprimer sous la forme :

$$\beta = \beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi + \beta_{2c} \cos 2\psi + \beta_{2s} \sin 2\psi \dots$$

En première approximation, on peut se limiter aux termes statiques et cycliques du premier ordre, qui permettent un premier dimensionnement de la machine et les interactions de base entre les différents mouvements. La figure (1.22) présente les déformées correspondantes du rotor en ce qui concerne le battement.

Toutefois, si l'on veut approfondir la connaissance du comportement de l'éolienne, la prise en compte de termes supplémentaires s'impose. Il faut cependant signaler que les termes de rang plus élevés ne représentent qu'environ 10 % des charges s'exerçant sur la machine.

#### 1.7.6. Efforts sur le moyeu et la tour :

Lorsque l'on veut procéder au dimensionnement d'une machine particulière, il est important de connaître son architecture. En effet, les efforts divers s'exerçant sur les pales de l'éolienne se transmettent au moyeu ; puis à la tour, de manière différente selon la technologie de rotor employée. Dans le cas où seules les charges statiques et du premier ordre sont considérées, le passage du rotor au moyeu puis à la tour se fait par simple sommation des sollicitations sur chaque pale puis transfert du repère tournant dans le repère fixe. Si des harmoniques plus élevés sont concernés, et selon le nombre de pales utilisé, il convient alors d'utiliser les formules habituelles de combinaisons des efforts et moments.

#### 1.7.7. Instabilités :

Les mouvements de pale ont été établis avec l'hypothèse que les modes des pales étaient parfaitement découplés, à savoir que le mode de battement par exemple ne comporte aucune composante de traînée ni de torsion.

Dans la réalité, la géométrie d'une pale d'éolienne (vrillage) et sa structure (axe massique et élastique non confondus, voir encadré), font que les modes ne sont plus totalement découplés. Parmi les conséquences qu'entraîne cet état de fait, on trouve la possibilité de rencontrer des instabilités de fonctionnement, pouvant conduire dans certains cas à la destruction de la machine. Par ailleurs, la nature non linéaire et instationnaire des efforts aérodynamiques en fonction de l'angle d'incidence au moment du décrochage (mode de régulation de certaines machines) peut également entraîner des instabilités.

**-Couplage battement/trainée :**

Son origine se situe dans le couplage entre le moment dû à la force de Coriolis dans le plan des pales provenant de la vitesse de battement de la pale et la modification du moment centrifuge de battement, causée par la vitesse de déplacement en trainée de la pale. Les paramètres favorisant ce couplage sont de grands déplacements en trainée (synonymes de fortes charges sur les pales), une conicité de rotor prononcée, de grands déplacements en battement (provoqués par de fortes charges ou une grande flexibilité des pales) et une proximité des fréquences propres des premiers modes de trainée et de battement. De telles conditions peuvent notamment se rencontrer lors d'un passage en survitesse du rotor. L'amortissement dans le plan des pales (en trainée) étant naturellement peu élevé, ce type de couplage peut devenir destructif.

Un remède consisterait à introduire artificiellement un amortissement (mécanique) supplémentaire.

**-Couplage torsion/trainée :**

Ce type de couplage peut se rencontrer de manière isolée ou en aggravation du couplage précédent. Lorsqu'une pale est soumise à des efforts aérodynamiques, elle se déforme en battement et en trainée. S'il n'y a pas de concordance entre l'axe élastique de la pale et l'axe aérodynamique, il y a apparition de moments de torsion. Dans certains cas, la combinaison de ces moments peut entraîner une augmentation de l'incidence et donc une divergence du phénomène. Une solution pour éviter ce couplage est de donner à la pale des caractéristiques de rigidité en battement et en trainée telles que les moments de torsion parasites décrits s'annulent mutuellement.

**-Flottement et divergence statique :**

Lorsqu'une pale (articulée ou encastree) est animée d'un mouvement de battement, elle est soumise à des efforts inertiels qui s'appliquent le long de l'axe massique (lieu des centres de gravité). Parallèlement, la pale est soumise à des efforts aérodynamiques qui s'appliquent le long de l'axe aérodynamique (lieu des foyers).

Dans le cas où ces axes ne coïncident pas, des moments de torsion sont alors introduits. Ces moments peuvent présenter des différences de phases, selon qu'ils sont proportionnels au déplacement, à la vitesse ou à l'accélération. Il peut en découler une augmentation substantielle de l'incidence de la pale. Celle-ci risque alors d'entrer dans le domaine du décrochage, ce qui peut éventuellement avoir une action stabilisante en raison de la brusque diminution des efforts aérodynamiques, la pale « flotte » alors autour de cette position.

La divergence statique se rencontre dans les conditions suivantes : la rigidité en torsion de la pale est très faible et la pale est centrée arrière (axe massique situé nettement en arrière de l'axe élastique). Lorsque la pale est déformée en battement, l'effort centrifuge génère un moment de torsion qui est suffisant, en raison de la faible rigidité en torsion, pour provoquer une augmentation significative de l'angle d'incidence, pouvant amener le décrochage de la pale. Ce type d'oscillation peut se rencontrer par exemple dans le cas de rupture de la commande de pas d'une machine à pas variable dont les pales sont centrées arrière. Au cours d'un tour du rotor, la pale qui est alors « folle » autour de l'axe de pas (raideur nulle en torsion) décroche et sort du décrochage à la fréquence de rotation de l'éolienne.

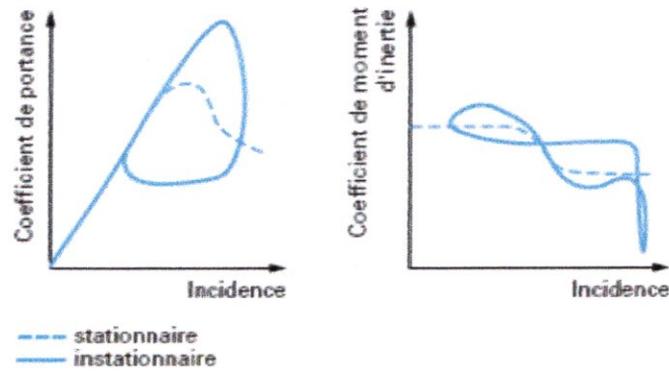


Figure I.23. *Décrochage dynamique.*

### **-Décrochage dynamique :**

On a vu précédemment que la portance statique développée par une section de pale présente en fonction de l'angle d'incidence un maximum, puis une décroissance plus ou moins rapide : c'est le phénomène du décrochage. Lorsque la pale est animée d'un mouvement de torsion, il y a une variation instationnaire de l'angle d'incidence, qui peut modifier le comportement aérodynamique de la pale au voisinage du décrochage. On constate que le nouvel angle de décrochage est supérieur à l'angle statique, la portance maximale est donc majorée. Lorsque l'angle d'incidence diminue, on note alors une réduction supplémentaire de la portance, qui ne retrouve la valeur obtenue pour des conditions statiques qu'à une incidence inférieure (phénomène de retard). Le moment aérodynamique subit lui aussi une altération de son comportement figure (I.23).

Dans le cas d'une machine régulée au décrochage et dans des conditions de fonctionnement proches du décrochage, une modification rapide de la vitesse du vent (rafale) peut initier un mouvement d'oscillation en torsion, combinant les effets du décrochage dynamique (dû à la variation instationnaire de l'angle d'incidence), de la force centrifuge et de l'élasticité intrinsèque de la pale. La machine peut ainsi se trouver soumise à un phénomène entretenu, rarement divergent mais pouvant affecter la tenue en fatigue de la pale [2].

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(\xi) &= 1 - u_1(\xi) & \alpha_2(\xi) &= u_2(\xi) \\
 \beta_1(\eta) &= 1 - g_1(\eta) & \beta_2(\eta) &= g_2(\eta) \\
 \delta_1(\zeta) &= 1 - w_1(\zeta) & \delta_2(\zeta) &= w_2(\zeta)
 \end{aligned}
 \tag{III.54}$$

$$\begin{aligned}
 u_1(\xi) &= \frac{e^{c_1 \xi} - 1}{e^{c_1} - 1} & u_2(\xi) &= \frac{e^{c_2 \xi} - 1}{e^{c_2} - 1} \\
 g_1(\eta) &= \frac{e^{c_3 \eta} - 1}{e^{c_3} - 1} & g_2(\eta) &= \frac{e^{c_4 \eta} - 1}{e^{c_4} - 1} \\
 w_1(\zeta) &= \frac{e^{c_5 \zeta} - 1}{e^{c_5} - 1} & w_2(\zeta) &= \frac{e^{c_6 \zeta} - 1}{e^{c_6} - 1}
 \end{aligned}
 \tag{III.55}$$

Les constantes  $C_1, C_2, \dots, C_6$  sont fixées et spécifient l'intensité de la modification de la grille originale par les six nouvelles faces du bloc.

## **II. Assemblage d'un avion :**

### **II.1. Introduction :**

L'outil Aéroélasticité est un outil simplifié et performant d'aide à la conception, le dimensionnement, l'évaluation et l'optimisation des performances aéroélastiques de la voilure. Celles-ci doivent reproduire les comportements clés spécifiques aux voilures de grand allongement, principalement :

- flexibilité accrue de la voilure qui engendre une redistribution des charges et une efficacité réduite des gouvernes
- les couplages matériels dus à l'emploi intensif des matériaux composites ainsi que les couplages géométriques
- tout type d'instabilité en flottement (flexion-torsion voilure et gouvernes)

Pour ce qui concerne la modélisation de la structure de l'aile, l'hypothèse principale consiste à approcher la cinématique d'une voilure de grand allongement par une cinématique de type poutre. Le modèle mécanique est constitué d'un assemblage de tronçons de propriétés mécaniques et de sections constantes. Chaque tronçon est modélisé par une poutre composite multicellulaire à parois minces ayant un nombre infini de degrés de liberté. Cette technique très précise permet de s'affranchir de la discrétisation éléments finis et des problèmes de convergence associés. En contre partie, des techniques de résolution numérique adaptées sont à mettre en oeuvre.

Le module d'aéroélasticité statique évalue les déplacements de la voilure sous chargement aérodynamique stationnaire symétrique ou antisymétrique (occasionné par un braquage de gouvernes). Le calcul des charges utilise une théorie de surface portante simplifiée donnant accès aux sensibilités de la répartition des efforts vis-à-vis des paramètres de forme en plan. Il est intéressant d'observer par exemple l'influence de la flèche ou encore de l'allongement sur la répartition de portance. La prise en compte de la flexibilité de la voilure est assurée par un calcul itératif qui permet de tenir compte de la redistribution des efforts aérodynamiques. On accède ainsi également à l'évaluation des efficacités des gouvernes.

Pour vérifier s'il y a une possibilité d'instabilité en flottement dans le domaine de vol, on recherche les vitesses critiques où le taux d'amortissement du système couplé fluide-structure s'annule. En plus de cette information, il est utile de s'intéresser au mode de couplage entre les différents mouvements de la structure.

### **II.1. L'aile à un grand allongement :**

L'aile de l'actuel « tipolev » 1A répond à une rigidité d'aile significative. Pour les ailes à grands allongements, la plupart des sections d'ailes peuvent être étudiés.

Pour les déplacements des points élastiques des ailes, cela est toléré dans pas mal des cas idéals de construction des ailes à élasticité droite des poutres, et qui possède une répartition le long de son axe une rigidité à la flexion ( $E J(s)$ ) et une rigidité à la flexion ( $G J_p(s)$ ) comme fonctions des coordonnées ( $s$ ) le long de l'élasticité des axes. Les constantes ( $E$ ) et ( $G$ ) de matériel de construction représentent les modules d'élasticité et de déplacement. Si la construction est effectuée à partir d'un choix des différents matériaux, d'où ces grandeurs peuvent être calculées en liaison avec les coordonnées ( $s$ ).

Sur la figure (II-1a), on a présenté le système des coordonnées de l'aile avec un grand allongement ( $\lambda > 5$ ).

Pour la description du caractère de cette aile, on étudie sa section, la normale avec l'élasticité de l'axe ( $os$ ), par exemple, la section (AA). figure (II.1.b).

Le moment d'inertie de la section  $J(s)$  en liaison avec l'axe principal ( $n'$ ) de la section est perpendiculaire au plan de flexion (Oys), et se détermine par l'intégrale de la surface du matériel :

$$J(s) = \int_F (y')^2 dF$$

Le moment de torsion ( $M_{tor}$ ) lié à l'angle de la fermeture de la poutre ( $\theta$ ) est :

$$M_{tor} = GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial s}$$

Ou :  $J_p(s)$  la constante géométrique de torsion, se détermine pour les sections minces des poutres à l'aide de la formule :

$$J_p = 4F^2 (\oint d\tau/\delta)^{-1}$$



Figure II.1 a- Système des coordonnées

b- Modèle de l'aile avec section de poutre

Ou :

- F : la surface de la section
- $\delta$  : épaisseur
- $\tau$  : coordonnée le long du contour de la section

On considère que la section fermée est liée au centre de déplacement ( $\theta'$ ), c'est-à-dire les poutres disposés à la force verticale dans lesquels on inclut pas le pourtour de cette section. D'ici on suppose que l'axe « aile-poutre » prend l'élasticité linéaire c'est les faces géométrique de déplacements.

Et l'élasticité linéaire sera considérée droite. La rigidité de la poutre sera soulevée selon l'axe (BB) et au point (0).

La direction de l'élasticité axiale se détermine selon l'angle optimal  $\chi$ .

-  $\chi$  : angle entre les axes (s) et (z), voir la figure (2.2.a).

Ce genre de système des coordonnées (Osn) est lié au système (Oxz) par l'équation suivante :

$$s = z \cos \chi + x \sin \chi; n = -z \sin \chi + x \cos \chi \tag{II.1}$$

Avec le centre de déplacement ( $O'$ ) en liaison avec la place des coordonnées ( $O'y' n'$ ).

La flèche  $\omega(s,t)$  d'élasticité d'axe se calcule selon la position d'inclinaison de la section le long de l'axe ( $y'$ ). l'angle  $\theta(s,t)$  du pourtour de la section se calcule selon le sens de rotation des aiguilles d'une montre, si on observe la section fermé de l'aile.

L'oscillation de l'aile se détermine à l'aide de la formule suivante :

$$l_{osci} = l \cos \chi$$

Ou' :

$l$  : Longueur élastique d'axe de poutre.

La corde ( $b_x(s)$ ) de l'aile, on l'appelle la mesure maximale de la section (CC),

Voir. Figure (II.2), l'axe parallèle (Ox) ou bien la direction de la vitesse ( $V_\infty$ ) en effectuant un flux.

La mesure maximale de la section est perpendiculaire à l'élasticité de l'axe (Os), ou sera désigné la grandeur ( $b(s)$ ).

Considérons, que le point ( $\eta_{c.m}$ ) la position du centre de masse (C.M) de la section, qui est située sur la ligne (C.M), elle n'est pas obligatoirement droite, elle se trouve à ( $i(s) b(s)$ ) de l'élasticité d'axe. Disposé le long de l'axe ( $s$ ) de la masse ( $\mu(s)$ ) de l'aile est sous la forme :

$$\mu(s) = \rho(s)S(s) \tag{II.2}$$

Ici :  $\rho(s)$  densité du matériel

$S(s)$  surface de la section du matériel.

Imaginons que le plan de l'aile à une épaisseur ( $ds \cos \chi$ ) est parallèle à la direction de la vitesse du flux effectué. la condition est illustrée sur la figure (II.2) dans le système de coordonnées ( $O'x' y'$ ) parallèle au système des coordonnées ( $Oxy$ ). supposons, que sur le plan actionne une densité aérodynamique de la force ( $dY_a$ ), et une force de résistance ( $dX_a$ ), qui sera plus tard négligée, et le moment de tangage ( $dM_z$ ) en liaison avec le point aérodynamique du foyer ( $x'_F$ ). La force de levage aérodynamique ( $dY_a$ ) est supposée dans la position du point aérodynamique du foyer.

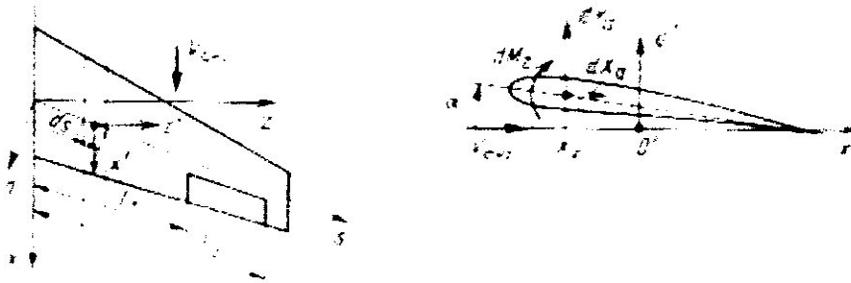


Figure II.2. Méthode de zone.

L'aile prise au superficie change en correspondance avec le plan, pour cela l'angle d'attaque ( $\alpha$ ) du profil se détermine comme un angle entre direction de la vitesse du flux effectué et la ligne du profil, et qui est disposé dans la base du plan. Et pour le calcul de degré d'exactitude [4, 9,17].

On peut considérer que les points aérodynamiques des foyers ( $X_F$ ) de toutes les sections de l'aile se trouvent sur la même ligne. Cette ligne coïncide avec la ligne de la quatrième corde du premier excepté l'aile à la vitesse de flux de l'air, et les vitesses superficielles du son s'approche de la ligne de la moitié de la corde de l'aile.

La distance entre les lignes aérodynamiques des foyers et l'élasticité linéaire désigne par la grandeur ( $f(s) b_x(s)$ ), qui est étudié selon la direction (Ox) des lignes aérodynamiques des foyers. pour le calcul aérodynamique la force de levage ( $dY_a$ ) et le moment de tangage ( $dM_z$ ), qui actionnent sur le plan d'action eu dépendance avec le temps, en utilisant l'équation suivante :

$$dY_a = c_{y_e}(s,t)b_x(s)q \cos \chi ds; dM_z = m_z(s,t)b_x^2(s)q \cos \chi ds \tag{II.3}$$

Ou :

$c_{y_e}(s,t)$  Et  $m_z(s,t)$  : sans mesures sont les coefficients aérodynamique de la force de levage et le moment aérodynamique de tangage correspondant.

$(b_x(s))$  : Corde de l'aile dans une section tel que (s) parallèle au flux.

$q$  : pression aérodynamique (accélération du montage).

$q = \rho V_\infty^2 / 2$  : ( $\rho$  : Densité du flux d'air).

Comme c'est indiqué dans la figure (II.2), dans la construction de l'aile on introduit le gouvernail : c'est un aileron, l'angle d'inclinaison et qui est désigné comme  $(\delta_{ail.o})$ .

$\delta_{ail}(s) = \delta_{ail.o} h(s)$  Ou :  $h(s)$  se détermine comme fonction voir figure (II.2).

$$h(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < l_1 \text{ ou bien } s > l_2 \\ 1 & \text{si } l_1 \leq s \leq l_2 \end{cases}$$

Plus tard et pour faciliter le problème, nous allons considéré que l'aileron est lié avec l'aile sous forme d'une rigidité absolue, et cela est lié à la liaison cinématique la rotation de l'aileron sur l'angle  $(\delta_{ail.o})$  sans contact avec le temps Les coefficients de l'équation (II.3) prennent la forme :

$$c_{y_a} = c_{y_a}(\alpha) + c_{y_a}^\alpha(s,t)\alpha(s,t) + c_{y_a}^{\delta_o}(s)\delta_{ail.o}(s) \tag{II.4}$$

$$m_z(s,t) = m_z(\alpha) + m_z^\alpha(s,t)\alpha(s,t) + m_z^{\delta_o}(s)\delta_{ail.o}(s)$$

$(C_{y_a})$  et  $(m_z)$  : les coefficients aérodynamique de la force de levage et le tangage pour  $(\alpha = 0)$  et  $(\delta_{ail} = 0)$ .

$(C_{y_a}^\alpha)$  et  $(C_{y_a}^{\delta_o})$  : coefficients des produits aérodynamique de la force de levage selon l'angle d'attaque et l'angle d'inclinaison  $(\delta_{ail.o})$  correspondante ;

$(m_z^\alpha)$  et  $(m_z^{\delta_o})$  : coefficients des produits des moments aérodynamique de tangage selon  $(\alpha)$  et  $(\delta_{ail.o})$ .

De l'équation (2.4) on remarque, la liaison linéaire entre les coefficients aérodynamique et l'angle d'attaque  $(\alpha)$  et l'angle d'inclinaison  $(\delta_{ail.o})$ .

Nous supposons que les coefficients aérodynamique  $(C_{y_a})$  et  $(m_z)$  sont nuls, et aussi les produits aérodynamique des coefficients sont les coordonnées de fonctions connues (s) et les temps (t) pour les déterminer ; on peut utiliser les données. Dans les travaux aérodynamique [3.15].

Utilisons l'équation (II.3), nous aurons les charges aérodynamique réparties, qui agissent sur la poutre c'est la force réparties  $(p_\alpha)$ , le moment de flexion répartie  $(m_{\alpha,flexion})$  et le moment de torsion

$(m_{\alpha,torsion})$  :

$$p_\alpha = c_{y_a}(s,t)b_x(s)q \cos \chi$$

$$m_{\alpha,flexion} = [m_z(s,t) + c_{y_a}(s,t)f(s)]b_x^2(s)q \sin \chi \cos \chi \tag{II.5}$$

$$m_{\alpha,torsion} = [m_z(s,t) + c_{y_a}(s,t)f(s)]b_x^2(s)q \cos^2 \chi$$

Dans l'équation (II.4), et par conséquent dans l'équation (II.5), nous utilisons la grandeur de l'angle d'attaque  $\alpha(s,t)$ , q'on peut l'écrire comme une somme :

$$\alpha(s,t) = \alpha_0(s) + \alpha_1(s,t)$$



Figure II.3. Section de l'angle d'attaque  $\Delta\alpha$  de l'aile.

Ou :

$\alpha_0$  : Piques données connues de la section de l'angle d'attaque qui détermine la forme de l'aile illimitée.

$\alpha_y$  : L'angle d'attaque de la section en liaison avec l'élasticité

Regardons la mobilité de l'aile, supposons que la section de l'aile est parallèle à la direction de l'air, pour des élasticités linéaires des points de déplacement de l'aile.

Et pour la plupart des ailes ne se déforment pas à l'élasticité de l'axe non perpendiculaire. Pour cela, pour ses ailes on suppose que nous avons quelques limites.

Et l'angle ( $\chi$ ) est inférieur à ( $45^\circ$ )

Soit  $w(x, y, z)$  : partie supérieur du plan.

D'ici l'angle d'attaque de la section de l'aile « selon l'air » égale à  $\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ . et les déplacements verticaux des points de l'aile, nous permet d'avoir la composante de la vitesse de l'air.

$$\Delta v = -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} x' \quad (\text{II.6})$$

Le premier membre de l'équation (II.6) se détermine d'après le résultat de l'élasticité de l'axe de l'aile selon le sens de déplacement verticale. Le deuxième membre c'est le résultat des vitesses de déplacement des points de l'aile selon la rotation de la section selon la rotation de la section avec la

vitesse angulaire  $\left(\frac{\partial w^2}{\partial x \partial t}\right)$ . cette forme nous aide à avoir l'angle d'attaque de la section figure (II.3) :

$$\Delta \alpha = \frac{\Delta v}{V_\infty}$$

D'ici nous avons .L'élasticité de déplacement de l'angle d'attaque « selon l'air » se détermine comme suit :

$$\alpha_y(s, t) = -\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{V_\infty} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} x' \right).$$

Le volume de la force aérodynamique et les moments aérodynamiques sont déterminés dans le travail [17].

D'où les coefficients aérodynamiques volume de la force et le moment de tangage se détermine à l'aide de l'équation :

$$C_{y_s} = -C_{y_s}^\alpha(s) \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{V_\infty} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) b_x(s) \right]; m_z(s, t) = \frac{\pi}{8} \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} b_x(s).$$

Ici le coefficients ( $C_{y_s}^\alpha(s)$ ) est déterminé pour l'aile fixe dans l'air.

Utilisons le lien (II.1) du système des coordonnées (Osn) et (Ozx) nous aurons :

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial s} \sin \chi + \frac{\partial w}{\partial n} \cos \chi \quad (\text{II.7})$$

Désignons par  $(\frac{\partial w}{\partial n} = -\theta)$  l'angle de fermeture de l'élasticité de l'axe, nous aurons l'équation suivante pour les coefficients aérodynamique, selon les conditions d'élasticité de construction :

$$c_{y_z}(s,t) = c_{y_z}^a(s) \left[ \theta \cos \chi - \frac{\partial w}{\partial s} \sin \chi - \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{3}{4} \frac{1}{V_\infty} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \cos \chi - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} \sin \chi \right) b_x(s) \right]; \quad (\text{II.8})$$

$$m_z(s,t) = -\frac{\pi}{8} \frac{1}{V_\infty} b_x(s) \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \cos \chi - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} \sin \chi \right).$$

Remplaçons l'équation (II.8) à la place de  $c_{y_z}^a(s,t)\alpha(s,t)$  et  $m_z^a(s,t)\alpha(s,t)$  dans la formule (2.4), la vibration des grandes ailes dans l'air et dans sa formule fine :

$$c_{y_z}(s,t) = c_{y_z}^0(s) + c_{y_z}^{\delta_\rho}(s) + c_{y_z}^a(s)\alpha_0(s) + c_{y_z}^a(s) \left[ -\frac{\partial w}{\partial s} \sin \chi + \theta \cos \chi - \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{3}{4} \frac{1}{V_\infty} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \cos \chi - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} \sin \chi \right) b_x(s) \right];$$

$$m_z(s,t) = m_z^0(s) + m_z^{\delta_\rho}(s) - \frac{\pi}{8} \frac{1}{V_\infty} b_x(s) \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \cos \chi - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} \sin \chi \right). \quad (\text{II.9})$$

Utilisons la charge aérodynamique sur l'aile, on détermine l'équation (II.5). Pour trouver les charges réparties sur l'axe élastique de la masse de l'aile 'prenons le cas d'une force élémentaire, qui actionne sur l'aile dont la longueur  $ds$ , l'élasticité perpendiculaire de l'axe.

La masse réparties de l'aile  $\mu(s)$  sous la forme  $\mu(s) = \rho(s)S(s)$  pour déterminer la charge verticale à laide des moments de flexion et torsion dans l'équation suivante :

$$P_\mu = -\rho(s)S(s)g;$$

$$m_{\mu \text{ flex}}(s) = 0; \quad (\text{II.10})$$

$$m_{\text{tor}}(s) = \rho(s)S(s)i(s)b(s)g,$$

$g$  : c'est l'accélération de la force de pesanteur

Le modèle mathématique du problème de base d'aéroélasticité pour l'aile à grand allongement s'illustre à l'aide des équations de flexion et de torsion de la poutre, la géométrie de l'aile :

$$\frac{d^2}{ds^2} (EJ \frac{d^2 w}{ds^2}) - p + \frac{dm_{\text{flex}}}{ds} = 0; \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{d}{ds} (GJ_p \frac{d\theta}{ds}) + m_{\text{tor}} = 0;$$

La fonction de la flèche  $w(s)$  et  $\theta(s)$  l'angle de torsion  $\theta(s)$  d'élasticité de l'axe de la poutre doivent répondre aux conditions de limite (condition aux appuis) :

$$w(0) = 0; \left. \frac{dw}{ds} \right|_{s=0} = 0; \theta(0) = 0 \quad (\text{II.12})$$

Et les conditions aux limites (condition au bout libre) :

$$EJ \left. \frac{d^2 w}{ds^2} \right|_{s=l} = 0; \left[ \frac{d}{ds} (EJ \frac{d^2 w}{ds^2}) + m_{\text{flex}} \right]_{s=l} = 0; GJ_p \left. \frac{d\theta}{ds} \right|_{s=l} = 0 \quad (\text{II.13})$$

La charge superficielle (extérieur)  $p, m_{\text{flex}}, m_{\text{tor}}$  qui agissent sur la poutre, coïncident avec les procédés stationnaires (ne dépendent pas du temps) aérodynamique (II.5) et les forces de gravitation (II.10) :

$$p = p_a(s) + p_\mu(s); m_{\text{flex}} = m_{\text{aflex}}(s); m_{\text{tor}} = m_{\text{ator}}(s) + m_{\mu\text{tor}}(s). \quad (\text{II.14})$$

$$\begin{aligned} \text{Ici : } p_a(s) &= c_{y_a}(s)b_x(s)q \cos \chi ; p_a(s) = c_{y_a}(s)b_x(s)q \cos \chi \\ m_{a \text{ flex}} &= -[m_z(s) + c_{y_a}(s)f(s)]b_x^2 q \sin x \cos x; \\ m_{a \text{ tor}} &= -[m_z(s) + c_{y_a}(s)f(s)]b_x^2 q \cos^2 x; \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Pour cela :

$$\begin{aligned} C_{y_a}(s) &= c_{y_0} + c_{y_a}^{\delta_a}(s)\delta_a(s) + c_{y_a}^{\alpha}(s)[\alpha_0(s) + \theta(s) \cos \chi - \frac{dw}{ds} \sin \chi]; \\ m_z(s) &= m_{z_0}(s) + m_z^{\delta_a}(s)\delta_a(s) \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

La charge des forces de gravitation ( $\theta(s)$ ,  $p_{\mu}$ ,  $p_{\text{tor}}$ ) est présentés dans l'équation (II.10).

Des équation (II.15) et (II.16), il est clair que la charge aérodynamique superficielle dans le problème de base de l'aile dépend de  $\theta(s)$  et  $(\frac{dw}{ds})$  d'ici et par conséquent l'équation (II.11) est et sont résolus ensemble Dans le cas de l'aile, pour lequel ( $\chi = 0$ ) le système d'équation se divise, la charge déterminé de l'équation de torsion de l'axe ne dépend pas de ( $w$ ) mettons la fonction trouvée  $\theta(s)$  dans l'équation de flexion, et trouvons Le moment de flexion ( $M_{\text{flex}}$ ) dans la section liée avec la fonction de la flèche  $w(s)$  sera :

$$M_{\text{flex}}(s) = \frac{EJd^2w}{ds^2} w(s) \quad M_{\text{flex}} \quad (\text{II.17})$$

Le moment de torsion ( $M_{\text{tor}}$ ) est déterminé en fonction de l'angle de torsion.

$$M_{\text{tor}}(s) = GJ_p \frac{d\theta}{ds} \quad M_{\text{tor}}(s) = GJ_p \frac{d\theta}{ds} \quad (\text{II.18})$$

Etudions (II.17), l'équation de flexion sera :

$$\frac{d^2}{ds^2} M_{\text{flex}} = p - \frac{dm_{\text{flex}}}{ds} \frac{d^2}{ds^2} M_{\text{flex}} = p - \frac{dm_{\text{flex}}}{ds} \quad (\text{II.19})$$

$$\begin{aligned} M_{\text{flex}}|_{s=l} &= 0; & M_{\text{flex}}|_{s=l} &= 0; \\ \left[ \frac{dM_{\text{flex}}}{ds} + m_{\text{flex}} \right] |_{s=l} &= 0 & \left[ \frac{dM_{\text{flex}}}{ds} + m_{\text{flex}} \right] |_{s=l} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Par analogie on détermine l'équation de torsion :

$$\frac{-dM_{\text{tor}}}{ds} = m_{\text{tor}} \quad (\text{II.21})$$

Avec les conditions limites :

$$v_B = \frac{\partial w_B}{\partial t} - \frac{\partial \theta_B}{\partial t} n ; M_{\text{tor}}|_{s=l} = 0 \quad (\text{II.22})$$

Pour approcher la solution du problème de base, parfois on utilise les méthodes énergétiques (méthode de Ritz). Et la solution (II.11) approche  $w(s)$  et  $\theta(s)$  sera :

$$w(s) = \sum a_{i\omega} \omega_i ; \theta(s) = \sum a_{i\theta} \theta_i \quad (\text{II.23})$$

Les équations différentielles  $w_i(s)$  et  $\theta_i(s)$ , chacune d'elle aux conditions géométriques limites de l'équation (II.12); avec des coefficients inconnus. Les coefficients ( $a_{i\omega}$ ) et ( $a_{i\theta}$ ) sont appelés les paramètres cinématiques. Et dans les approches des solutions de  $w(s)$  et  $\theta(s)$ .

En utilisant le principe de possibilité de déplacement et sera de la sorte :

$$\begin{aligned} p(s,t) &= p_{\sigma}(s) + p_B(s,t); \\ m_{flex}(s,t) &= m_{\sigma,flex}(s) + m_{B,flex}(s,t); \\ m_{tor}(s,t) &= m_{\sigma,tor}(s) + m_{B,tor}(s,t). \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Où les variations  $(\delta w(s))$  et  $(\delta \theta(s))$  sont :

$$\begin{aligned} \delta w &= \sum \delta a_{iw} w_i; \\ \delta \theta &= \sum \delta a_{i\theta} \theta_i(s); \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

Remplaçons la variation (II.25) dans l'équation (II.24), nous aurons les systèmes algébriques des équations pour déterminer  $(a_{iw})$  et  $(a_{i\theta})$ .

Supposons, que la charge est sur l'aile dans le problème de base, donc la force dans les sections de la poutre peut être trouvée par l'intégration des équations (II.19) et (II.21).

Et la force se détermine à l'aide de :

$$Q = -\frac{dM_{flex}}{ds} = \int_0^l p(s) ds + m_{flex}(s).$$

Il est clair que la force se limite par la condition (II.20). Le moment de flexion ( $M_{flex}$ ) se détermine par :

$$M_{flex} = \int_s^l \int_s^l p(s) ds ds + \int_s^l m_{flex}(s) ds. \quad (\text{II.26})$$

Pour cela  $M_{flex}|_{s=l} = 0$ . Pour le moment de torsion ( $M_{tor}$ ) nous aurons :

$$\begin{aligned} M_{tor} &= \int_s^l m_{tor}(s) ds; \\ M_{tor}|_{s=l} &= 0; \end{aligned}$$

Par analogie des équations (II.17) et (II.18) nous aurons pour les fonctions  $w(s)$  et  $\theta(s)$  les forces suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{ds} &= \int_0^s \frac{1}{EJ} \left[ \int_s^l \int_s^l p ds ds + \int_s^l m_{flex} ds \right] ds; \\ w &= \int_0^s \int_0^s \frac{1}{EJ} \left[ \int_s^l \int_s^l p ds ds + \int_s^l m_{flex} ds \right] ds ds; \\ \theta &= \int_0^s \frac{1}{GJ_p} \int_s^l m_{tor} ds ds \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Il est clair que les conditions limites (II.12) est uniforme.

Pour les charges extérieur (II.15); (II.16) agissant sur la poutre dépendant des fonctions  $(\theta)$  et  $(\frac{dw}{ds})$ .

Introduisons  $\left(\frac{dw}{ds}\right) = \psi(s)$  dans l'équation des charges extérieures et dans l'équation (II.27), nous obtenons les équations :

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{1}{Ej} \left[ \int_s^l \int_s^l p(\psi, \theta) ds ds + \int_s^l m_{flex}(\psi, \theta) ds \right] ds; \quad (II.28)$$

$$\theta(s) = \int_0^s \frac{ds}{Gj_p} \int_s^l m_{tor}(\psi, \theta) ds$$

L'équation (II.28) et les restes (II.10), (II.14)..... (II.16) sont utilisées pour résoudre le problème de base pour l'approche.

Pour ce modèle, on peut prendre l'exemple nous rapprochons les équation simple  $\psi$  et  $\theta$  nous trouvons les conditions limites :

$$\theta(s) = A \sin \frac{\pi s}{2 l}; \quad (II.29)$$

$$\psi = B \sin \frac{\pi s}{2 l};$$

Ou :

A et B : sont les constantes inconnues.

Mettons la fonction (II.29) à droite et à gauche de l'équation (II.28) pour  $(s=L)$  et intégrons la à droite, nous aurons un système à deux équations algébrique pour déterminer les constantes (A) et (B).

Déterminons la charge extérieure, qui correspond à l'approche de zéro (II.29) comme résultat d'intégrale dans (II.28) à droite, nous aurons la première approche pour  $\psi(s)$  et  $\theta(s)$  .de nouveau, éliminons la charge, et qui correspond à la première approche, et ainsi de suite, maintenant dans les deux désignation d'approche  $\psi(s)$  et  $\theta(s)$  dans tous les points (s) ne se diffèrent pas de la grandeur nécessaire d'exactitude.

D'habitude pendant l'utilisation de la formule (II.28) sera au début sous forme sans mesure .pour cela la coordonnée sans mesure  $(\xi = \frac{s}{l})$  et la fonction de rigidité.

$$\frac{1}{Ej(s)} = \psi(s) \frac{1}{Ej(0)},$$

$$\frac{1}{Gj_p(s)} = \Phi(s) \frac{1}{Gj_p(0)}$$

Le processus expliqué s'approche de la correspondance de la divergence de l'aile.

Maintenant, étudions la possibilité du mouvement de la flèche sur l'aile à la base de la position d'égalité.

La grandeur, liée à la base de la situation de l'aile, se désigne par l'index «  $\sigma$  » et qui correspond à la grandeur d'une possibilité de se munir de l'index « B »

Et aussi,

$$w(s, t) = w_\sigma(s) + w_B(s, t);$$

$$\theta(s, t) = \theta_\sigma(s) + \theta_B(s, t);$$

$$\delta_\theta(s) = \delta_{\theta, \sigma}(s) + \delta_{\theta, B}(s).$$

Pour déterminer les paramètres de régime de base, on se contente des équations (II.11) et la condition (II.12), (II.13).

Et pour la vitesse des points de l'aile, l'équation trouvée, des formules déterminées (II.6) et (II.7) :

$$v_{B,a} = \frac{\partial w_B}{\partial t} + \left( \frac{\partial^2 w_B}{\partial t} + \left( \frac{\partial^2 w_B}{\partial s \partial t} \sin \chi - \frac{\partial \theta_B}{\partial t} \cos \chi \right) x \right)$$

L'index « a » s'utilise pour calculer pour calculer les forces aérodynamique dans la position on ne se déforme pas la corde de l'aile « plan l'air ».

Pour le calcul des charge d'inertie, nous devons considérer la corde de l'aile se situe (⊥) à l'allongement de l'axe.

Dans ce cas la vitesse se détermine comme suit :

$$v_B = \frac{\partial w_B}{\partial t} - \frac{\partial \theta_B}{\partial t} n \tag{II.30}$$

La charge sur l'aile sera :(somme des charges dans le régime des charge dans le régime de base) :

$$p(s,t) = p_\sigma(s) + p_B(s,t);$$

$$m_{flex}(s,t) = m_{\sigma,flex}(s) + m_{B,flex}(s,t);$$

$$m_{tor}(s,t) = m_{\sigma,tor}(s) + m_{B,tor}(s,t).$$

D'où les désignations des charges dans le régime de base se déterminent par les formules (II.10) et (II.14)..... (II.16).

Et en correspondance avec les équations (II.5) et (II.9) les charges aérodynamiques sont :

$$p_B(s,t) = c_{y,B}(s,t) b_x(s) q \cos \chi;$$

$$m_{B,flex} = -[m_{zB}(s,t) + c_{y,B}(s,t) f(s)] b_x^2(s) q \sin \chi \cos \chi; \tag{II.31}$$

$$m_{B,tor} = [m_{zB}(s,t) + c_{y,B}(s,t) f(s)] b_x^2(s) q \cos^2 \chi$$

Ou :

$$c_{y,aB}(s,t) = c_{y_a}^{\delta_s}(s) \delta_{\delta,B}(s) + c_{y_a}^{\alpha}(s) \left[ \theta_B \cos \chi - \frac{\partial w_B}{\partial s} \sin \chi - \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial w_B}{\partial t} + \frac{3}{4} \frac{1}{V_\infty} \left( \frac{\partial w_B}{\partial t} \cos \chi - \frac{\partial^2 w_B}{\partial t \partial s} \sin \chi \right) b_x(s) \right] \tag{II.32}$$

$$m_{zB}(s,t) = m_z^{\delta_s}(s) \delta_{\delta,B}(s) - \frac{\pi}{8} \frac{1}{V_\infty} \left( \frac{\partial w_B}{\partial t} \cos \chi - \frac{\partial^2 w_B}{\partial t \partial s} \sin \chi \right) b_x(s)$$

L'équation de vibration de la flèche (poutre - aile) correspond au principe de déplacement virtuel l'équation mathématique est :

$$\delta_A = [P(s,t) \delta w_B + m_{flex}(s,t) \frac{\partial \delta w_B}{\partial s} + m_{tor}(s,t) \delta \theta_B] ds. \tag{II.33}$$

Ou :

T et  $\prod$  : c'est les cinétique et potentiel des systèmes mécaniques

$\sum_{i=1}^n Q_i \delta y_i = \delta A$  : C'est élémentaire des forces ( $Q_i$ ) selon la variation de déplacement, en liaison

avec le temps (dt).

Pour que le principe soit utilisé, regardons le plan de l'aile (⊥) à l'aile d'élasticité, la largeur (ds) sur la distance (s) de la fermeture.

Et les coordonnées sont  $w_B(s,t)$  et  $\theta_B(s,t)$  sont en fonction du temps (t). Le paramètre ( $\delta_{\epsilon,B}(s)$ ) est considéré comme connue.

Et la vitesse des points de l'aile est déterminée par la formule (II.30), l'énergie cinétique peut être calculée par :

$$T ds = \frac{1}{2} \rho(s) S(s) \left[ \frac{\partial w_B}{\partial t} - \frac{\partial \theta_B}{\partial t} i(s) b(s) \right]^2 ds. \quad (\text{II.34})$$

L'énergie potentielle du plan est sous la forme :

$$\prod ds = \frac{1}{2} \left[ EJ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 + GJ_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 \right] ds$$

Le travail élémentaire des forces aérodynamique non conservé est (variation perturbée).

$$\delta_A = \left[ P(s,t) \delta w_B + m_{flex}(s,t) \frac{\partial \delta w_B}{\partial s} + m_{tor}(s,t) \delta \theta_B \right] ds.$$

L'énergie cinétique (II.34) dépend soit des perturbation continues, et cela comme le déplacement dans le problème de base ne dépend pas du temps.

Et à l'aide des équations indiquées (II.33) nous avons :

$$\begin{aligned} & \rho(s) S(s) \left[ \frac{\partial^2 w_B}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta_B}{\partial t^2} i(s) b(s) \right] (\partial w_B - i(s) b(s) \delta \theta_B) ds + \\ & \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial^2 \delta w_B}{\partial s^2} + GJ_p(s) \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial \delta \theta_B}{\partial s} \right) ds - \\ & \left( p \delta w_B + m_{flex} \frac{\partial \delta w_B}{\partial s} + m_{tor} \delta \theta_B \right) ds = 0 \end{aligned}$$

Supposons, que les déplacements virtuels justement pour chaque plan ( $ds$ ) de l'aile, faisons la somme des plans élémentaire de ( $s = 0$  jusqu'au  $s = \ell$ ) ;

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \rho S \left[ \frac{\partial^2 w_B}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta_B}{\partial t^2} i(s) b(s) \right] [\delta w_B - i(s) b(s) \delta \theta_B] ds + \int_0^\ell \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial^2 \delta w_B}{\partial s^2} + GJ_p(s) \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial \delta \theta_B}{\partial s} \right) ds - \\ & \int_0^\ell \left( (p_\sigma + p_B) \delta w_B + (m_{flex} + m_{tor}) \frac{\partial \delta w_B}{\partial s} + (m_{flex} + m_{tor}) \delta \theta_B \right) ds = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Il n'est pas difficile de remplacer, tous les membres (II.35) près de la variation de ( $\delta w_B$ ) et ( $\delta \theta_B$ ) dans les équations, et les paramètres de base du régime coïncident avec les partie gauches des équation (II.11).....(II.13).

Phénomènes de vibration et propagations d'ondes au sein des structures en relation avec leur environnement en effet de s'intéresse non seulement a des pièces mécaniques isolées, arbitrairement extraites de leur environnement, mais plus intégrons maintenant, ces conditions, dans l'équation par partie et utilisons les limites de la condition (2.12), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial s^2} EJ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \rho S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - i(s) b(s) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) = p(s,t) - \frac{\partial m_{tor}(s,t)}{\partial s}; \\ & \frac{\partial}{\partial s} GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial s} + \rho S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - i(s) b(s) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) i(s) b(s) = -m_{tor}(s,t) \end{aligned}$$

Et avec les conditions des limites :

$$\begin{aligned}
 EJ \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} \Big|_{s=l} &= 0; \\
 \left[ \frac{\partial}{\partial s} EJ \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} + m_{tor}(s) \right] \Big|_{s=l} &= 0; \\
 GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial s} \Big|_{s=l} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{II.36}$$

Introduisons les désignations :

$\mu$  \_ charge réparties  $\mu = \rho(s) \cdot S(s)$  ;

$m_p$  \_ moment statique répartie et qui dépend de l'élasticité axiale  $m_p = i(s)b(s)S(s)$ ;

$I$  \_ moment d'inertie et qui est lié à l'élasticité axiale  $I = i^2(s)b^2(s)\rho(s)S(s)$  nous avons :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial s^2} EJ \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} + (\mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - m_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}) &= p - \frac{\partial m_{flex}}{\partial s}; \\
 \frac{\partial}{\partial s} GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial s} + (m_p \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}) &= -m_{tor}
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

Et selon les conditions limites :

$$w|_{s=0} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_{s=0}; \quad \theta|_{s=0}
 \tag{2.38}$$

Le système des équations (II.36), (II.37) permet d'avoir la possibilité du mouvement de la console de l'aide à grande longueur.

Les charges extérieures sont déterminées à l'aide des équations (II.31), (2.34).

Et l'étude du problème des vibrations libres est soulevée à l'aide du système d'équation (II.37), ce système des équations différentielles lié au temps est résolu à l'aide de la méthode de Galerkin.

Egalisons la partie droite de l'équation (II.37) à zéro, la solution trouvée sous la forme :

$$\omega(s,t) = \omega(s)e^{i\omega t}; \quad \theta(s,t) = \theta(s)e^{i\omega t}
 \tag{II.39}$$

Introduisons (II.39) dans (II.37), écrivons ce système dans la forme matricielle :

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{d^2}{ds^2} EJ \frac{d^2}{ds^2} & 0 \\ 0 & -\frac{d}{ds} GJ_p \frac{d}{ds} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mu \cdot 1 & -m_p \cdot 1 \\ -m_p \cdot 1 & I \cdot 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \tag{II.40}$$

Où :  $\lambda$  - joue le rôle d'opérateur ;

$\lambda = \omega^2$  - l'amplitude des vibrations.

Il est connu [78], que le problème des positions dépend des fonctions actives.

Le système d'équation (2.40) peut être comme des fonctionnels minimums :

$$\lambda = \min_{\omega, \theta} \frac{\int_0^l \left[ EJ \left( \frac{d^2 \omega}{ds^2} \right) + GJ_p \left( \frac{d\omega}{ds} \right)^2 \right] ds}{\int_0^l \mu [\omega - i(s)b(s)\theta]^2 ds}
 \tag{II.41}$$

(II.38) nous donne les limites géométriques. il est clair que les fonctions ( $\omega$ ) et ( $\theta$ ) se trouve a travers l'action de l'inertie. Les conditions ( $\omega_i, \theta_i$  et  $\omega_j, \theta_j$ ) s'écrivant sous les formes suivantes :

$$\int_0^l \left[ E J \frac{d^2 \omega_i}{ds^2} - \frac{d^2 \omega_j}{ds^2} + G J_p \frac{d\theta_i}{ds} - \frac{d\theta_j}{ds} \right] ds = \lambda_i \delta_{ij} \quad (II.42)$$

$$\int_0^l \mu [\omega_i - i(s)b(s)\theta_i] [\omega_j - i(s)b(s)\theta_j] ds = \delta_{ij} \quad (II.43)$$

Ou :  $\delta_{ij}$  -symbole de koue kuta ,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j ; \\ 0, & \text{si } i \neq j ; \end{cases}$$

Pour résoudre le problème (II, 41), on utilise la méthode de Ritz [11,13].cette méthode nous permet de résoudre le problème des vibrations par l'approche.

Intégrons l'équation (II, 37) avec sa partie droite, égale zéro et utilisons les limites des conditions (II, 36), (II, 38) nous récrivons :

$$\omega + \int_0^s \int_0^s \frac{1}{E J} \int_0^l \int_0^l (\mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - m_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}) ds ds ds ds = 0; \quad (II.44)$$

$$\theta - \int_0^s \frac{1}{G J_p} \int_0^l (m_p \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}) ds ds = 0.$$

Les fonctions ( $\omega$ ) et ( $\theta$ ) répondent a ces conditions, automatiquement des limites des conditions.

Le problème des vibrations libres des poutres est déterminé à l'aide de l'équation (II, 44), utilisons le temps et multiplions par ( $-\lambda$ ):

$$\frac{1}{\lambda} \omega = \int_0^s \int_0^s \frac{1}{E J} \int_0^l \int_0^l (\mu \omega - m_p \theta) ds ds ds ds; \quad (II.45)$$

$$\frac{1}{\lambda} \theta = - \int_0^s \frac{1}{G J_p} \int_0^l (m_p \omega - I \theta) ds ds.$$

Le travaille [52] soulève le problème de l'approche a zéro de la fonction d'amplitude a la flexion, et la torsion des poutre des rigidité de continues.

Remplaçons  $\omega_0^{(1)}(s)$  et  $\theta_0^{(1)}(s)$  a la partie droite de l'équation (II, 45), nous aurons les première désignations de  $\omega_1^{(1)}(s)$  et  $\theta_1^{(1)}(s)$  des fonctions d'approches  $\omega^1(s)$  et  $\theta^1(s)$ .

Pour cela la première approche sera :

$$\omega_H^{(1)} = c \omega_1^{(1)}, \theta_H^{(1)} = c \theta_1^{(1)}, \text{Où l'index (H) désigne « la normalisation ».}$$

La constante pour la fonction de la première approche se détermine de l'équation (II, 43) pour ( $i=j=1$ ).

Et remplaçons de la même manière  $\omega_1^{(1)}(s)$  et  $\theta_1^{(1)}(s)$  pour la deuxième approche et c.

Cette correspondance de la désignation de ( $\lambda$ ) se détermine a l'aide de l'équation (II, 42) pour ( $i=j=1$ ):

$$\lambda(1) = \int_0^l \left[ E J \left( \frac{d^2 \omega^{(1)}}{ds^2} \right)^2 + G J_p \left( \frac{d\theta^{(1)}}{ds} \right)^2 \right] ds.$$

En qualité de la deuxième fonction d'approche, on choisit la condition suivante :

$$\omega_0^{(2)} = \omega_0^{(1)} + c_1 \omega^{(1)}, \theta_0^{(2)} = \theta_0^{(1)} + c_1 \theta^{(1)}$$

La constante ( $c_1$ ) se détermine d'après la condition (2.43) pour  $i=1, j=2$  :

$$\int_0^l \mu [\omega^{(1)} - i(s)b(s)\theta^{(1)}] [\omega_0^{(2)} - i(s)b(s)\theta_0^{(2)}] ds = 0.$$

Utilisons les conditions de normalisation  $\omega^{(1)}, \theta^{(1)}$  nous recevons :

$$c_1 = - \int_0^l \mu [\omega^{(1)} - i(s)b(s)\theta^{(1)}] [\omega_0^{(1)} - i(s)b(s)\theta_0^{(1)}] ds.$$

En plus, exigeons, pour que [4.5.10.14].s'approche plus à la normalisation. Le système différentiel de l'équation (II.37) dans sa forme matriciel sera :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial s^2} EJ \frac{\partial^2}{\partial s^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial s} GJ_p \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu & -m_p \\ -m_p & I \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix} = \tag{II.46}$$

$$q \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \frac{q}{V_\infty} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

Où, dans la partie droite des matrices  $[B]$  et  $[D]$  sont différentielles selon l'opérateur ( $S$ ), en déterminant la charge aérodynamique dans l'équation (II.37), la solution approchée de l'équation (II.46), nous allons chercher sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m u_k(t) \begin{bmatrix} \omega^{(k)} \\ \theta^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{II.47}$$

Le déplacement virtuel est :

$$\begin{bmatrix} \delta\omega \\ \delta\theta \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m \delta u_k(t) \begin{bmatrix} \omega^{(k)} \\ \theta^{(k)} \end{bmatrix},$$

Et comme  $\omega^{(k)}$  et  $\theta^{(k)}$  fixant la fonction de ( $S$ ), remplaçant l'équation (II.33), multiplions l'équation (II.46), par le vecteur ligne  $[\delta\omega \delta\theta]$  à gauche et intégrons l'équation trouvée selon ( $S$ ) de ( $O$ ) jusqu'à ( $l$ ), on intègre par parties et étudions les limites des conditions, nous aurons :

$$\sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{n=1}^m u_n(t) \int_0^l \left[ EJ \frac{\partial^2 \omega^{(k)}}{\partial s^2} \frac{\partial^2 \omega^{(n)}}{\partial s^2} + GJ_p \frac{\partial \theta^{(k)}}{\partial s} \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial s} \right] ds + \right.$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{d^2}{dt^2} u_n(t) \int_0^l \mu [\omega^{(k)} - i(s)b(s)\theta^k] [\omega^{(n)} - i(s)b(s)\theta^n] ds -$$

$$q \delta_{\delta\sigma} \int_0^l [\omega^{(k)} B_{1\delta_\epsilon} - \theta^k] [\omega^{(n)} - i(s)b(s)\theta^n B_{2\delta_\epsilon}] ds - q \sum_{n=1}^m u_n(t) * \tag{II.48}$$

$$\int_0^l [\omega^{(k)} \theta^{(k)}] * \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{(n)} \\ \theta^{(n)} \end{bmatrix} - \frac{q}{V_\infty} \sum_{n=1}^m \frac{d}{dt} u_n(t) \int_0^l [\omega^{(k)} \theta^{(k)}] *$$

$$\left. \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^{(n)} \\ \theta^{(n)} \end{bmatrix} ds \right\} \delta u_k(t) = 0$$

Etudions les conditions d'orthogonalités correspondantes aux fonctions (II.42) et (II.48) sous la forme :

$$\sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{n=1}^m u_n(t) \delta_{kn} \lambda_n + \sum_{n=1}^m \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} \delta_{kn} - q b_{k\delta} \delta_{\delta_0} + q \sum_{n=1}^m u_n(t) b_{kn} + \frac{q}{V_\infty} \sum_{n=1}^m \frac{du_n}{dt} d_{kn} \right\} \delta u_k = 0$$

Introduisons la matrice quadnatique d'ordre (m) :

$$B = [b_{kn}], D = [d_{kn}], \Omega^2 = [\lambda_n] \ (\Omega^2 - \text{diagonale}) \text{ et le vecteur-ligne } B_{\delta_s} = \{b_k \delta_s\}, u(t) = \{u_n\}$$

Et étudions le processus du symbole ( $\delta_{kn}$ ), nous aurons l'équation du mouvement sous forme matricielle :

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \Omega^2 u(t) + qBu(t) + \frac{q}{V_\infty} D \frac{du(t)}{dt} = qB_{\delta_s} \delta_{\delta_0} \tag{II.49}$$

Où : B- Matrice aérodynamique de récidive ;

D- Cette matrice doit étudier le cas généralement connue fonction du nombre de Mac (M) ;

$qB_{\delta_s} \delta_s$  -Vecteur de force admissible liées aux écartements d'Euler.

L'approche de la fonction quadnatique déterminée selon les vitesses généralisées selon la fonction de Reler [4.5.10.14].

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m r_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

D'ici méthodes du calcul théorique ( $r_{ij}$ ) dépend de l'énergie d'échauffement au déterminant du matériau. Pour cela ces coefficients se déterminent selon le milieu expérimental. Et l'équation (2.49)

peut être écrite sous la forme :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\Omega \varepsilon \frac{du}{dt} + \Omega^2 u + qBu + \frac{q}{V_\infty} D \frac{du}{dt} = qB_{\delta_s} \delta_{\delta_0} \tag{II.50}$$

Où :  $2\varepsilon$  -matrice diagonal.

Et pour une étude dynamique de l'aile le système d'équation (II.50) peut avoir la forme suivante :

$$u = Ae^{\lambda t} \tag{II.51}$$

Où :

A-vecteur du coefficient, et ne dépend pas du temps.

$\lambda$  -le nombre complexe des tours.

$\lambda = \alpha + i\beta$  (i unité minimal) .

Prenons  $\delta_{\delta_0} = 0$  et remplaçons l'équation (II.51) dans l'équation (II.50), nous aurons :

$$\left[ E\lambda^2 + 2\Omega \varepsilon \lambda + \Omega^2 + qB + \frac{q}{V_\infty} D\lambda \right] A = 0$$

Ici ; E-matrice unitaire.

La solution est réelle si le déterminant de la matrice pour les vecteurs inconnus (A) est égal a zéro :

$$\det \left[ E\lambda^2 + 2\Omega \varepsilon \lambda + \Omega^2 + qB + \frac{q}{V_\infty} D\lambda \right] = 0 \tag{II.52}$$

Cette équation (II.52) sert à déterminer les parties d'actions et le minimum, et encore pour déterminer les inconnus  $(\alpha)$  et  $(\beta)$ .

En variant, les désignations des vitesses  $(q)$ , on peut avoir  $(\alpha)$  et  $(\beta)$ .

La vitesse critique de la gouverne se détermine aussi à l'aide de l'équation (II.52), dans laquelle  $\lambda = 0$  :

$$\det[\Omega^2 + qB] = 0 \tag{II.53}$$

L'équation (II.53) détermine la désignation de la vitesse, pour laquelle l'aile perd les propriétés statiques.

Le problème de l'influence d'élasticité sur le moment  $(M_x)$  s'écrit sous forme stationnaire du système (II.50) :

$$\Omega^2 u + qBu = qB_{\delta} \delta_{\delta 0} \tag{II.54}$$

En connaissant l'angle d'inclinaison des ailerons  $(\delta_{\delta 0})$  et la vitesse  $(q)$  de l'équation (2.54) on détermine la flèche et l'angle de rotation de la section de poutre [voir la formule (2.47)] et à partir d'ici, on peut trouver le moment aérodynamique sommaire  $(M_x)$ . La désignation de la vitesse répond à  $M_x = 0$ ,

L'équation (II.11) trouvée détermine la torsion de poutre, qui est la contrainte normale  $(\sigma_x)$  selon le sens de l'axe de poutre (influence de la déformation  $\rightarrow$  force transversale selon la flèche de la poutre).

L'influence de l'approche de torsion de l'aile en prenant en considération la flexion de pas mal des éléments de construction de l'aile [8,11,12] pour des ailes avec des profils des épaisseurs  $(c = c/b \leq 5\%)$  avec une flexion des éléments des longerons voir figure (II.4) la section de rotation selon l'angle  $(\theta)$  correspondent à la flexion du longeron. Le longeron avant avec la rigidité à la flexion  $(EJ_1)$  se déplace dans la section  $(s)$  selon la grandeur de la flèche  $\omega_1 = b_1\theta$ , et le dernier longeron sera  $\omega_2 = -b_2\theta$ . avec la flexion des longerons en liaison avec une paire de forces de destruction moment de torsion dans la section :

$$\begin{aligned} M_{tor}(\theta) &= -b_1 \frac{\partial}{\partial s} EJ_1 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (b_1\theta) - b_2 \frac{\partial}{\partial s} EJ_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (b_2\theta) \\ &\approx -\frac{\partial}{\partial s} EJ_{\omega} \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} \end{aligned}$$

Où :  $EJ_{\omega}$  - la rigidité.

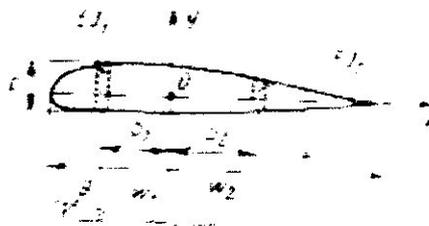


Figure II.4. Modélisation du longeron de l'aile.

De cette manière, l'équation de torsion de cette poutre (II.11) sera :

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} (EJ_{\omega} \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2}) - \frac{\partial}{\partial s} (GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial s}) = M_{tor}(s) \tag{II.55}$$

Les conditions limites de la fonction de l'angle ( $\theta$ ) de la section est :

$$\theta|_{s=0} = 0 ; \left. \frac{\partial \theta}{\partial s} \right|_{s=0} = 0 ; EJ_{\omega} \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} \right|_{s=l} ;$$

$$\left[ -GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left( EJ_{\omega} \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} \right) \right]_{s=l} = 0$$
(II.56)

La 2eme condition dans (II.56) nous propose, que l'élément de construction, subit une déformation de flexion près de la torsion, rigidement appliqué à la section de l'aile.

La 3eme et la 4eme condition, nous indiquent que les moments de flexion et de torsion sont nuls au bout de l'aile.

La rigidité sectorielle peut-être déterminer (approche) à l'aide de la formule suivante :

$$J_{\omega}(s) = \iint_F x^2 y^2 dF$$

Ou : l'intégrale dépend de la surface de la section du matériau.

Et ici, pour deux longerons de l'aile, on étudie (considère) que les flèches ( $\omega_1$ ) et ( $\omega_2$ ) sont proportionnelles à la rigidité de flexion ( $EJ_1$ ) et ( $EJ_2$ ), nous avons :

$$EJ_{\omega}(s) = EJ_1 b_1^2 + EJ_2 b_2^2 = EJ_1 \frac{(EJ_2)^2 d^2}{(EJ_1 + EJ_2)^2} + EJ_2 \frac{(EJ_1)^2 d^2}{(EJ_1 + EJ_2)^2} = \frac{EJ_1 EJ_2 d^2}{EJ_1 + EJ_2}$$

Ou : d- distance entre les longerons  $d = b_1 + b_2$ . pour une section ou double (Té) voir figure (II.5) :

$$J_{\omega} = 2 \left( \frac{h}{2} \right)^2 \frac{tb^3}{12} = \frac{h^2 tb^3}{24}$$

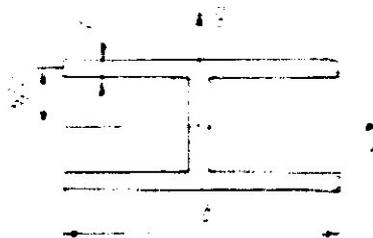


Figure II.5. Modélisation d'une poutre (longeron) en double (Té).

Comme conclusion de l'équation des torsions vibratoires d'une poutre, en prenant en considération la torsion, on peut tirer les moments d'inerties des masses de torsion, lie aux éléments de flexion et la déformation de déplacement (poussée) appelle a compléter la flèche de la poutre, qui est liée a la force de destruction a l'aide de la formule suivantes [16] :

$$\frac{\partial \omega_{\text{def}}}{\partial s} = \frac{\alpha_{\text{def}} Q}{GF} = \frac{Q}{GK}$$
(II.57)

Ou : F- surface du matériel de la section de la poutre ;

:  $\alpha$  -coefficient numérique de déplacement, la grandeur  $GK = \frac{GF}{\alpha_{\text{def}}}$  -s'appel la rigidité de la

poutre point le déplacement.

La flèche de la poudre se détermine à partir d'une flèche due à la flexion  $\omega_{\text{flex}}$  et une autre  $\omega_{\text{dep}}$  conise par le déplacement absolu :

$$\omega = \omega_{\text{flex}} + \omega_{\text{dep}}$$

L'équation d'équilibre de la poutre peut-être sous la forme :

$$\mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = p(s) - \frac{\partial^2 M_{flex}}{\partial s^2} ; Q = -\frac{\partial M_{flex}}{\partial s} \quad (\text{II.58})$$

Pour la fonction de la flèche, selon la flexion vibrations la relation suivante :

$$EJ \frac{\partial^2 \omega_{flex}}{\partial s^2} = M_{flex} \quad (\text{II.59})$$

Des équations (II.57)..... (II.59), on détermine l'équation :

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} EJ \frac{\partial^2 \omega_{flex}}{\partial s^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = p(s) \quad (\text{II.60})$$

$$GK \frac{\partial \omega_{dep}}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left( EJ \frac{\partial^2 \omega_{flex}}{\partial s^2} \right) = 0 \quad (\text{II.61})$$

Incluons dans (2.60), (2.61),  $\omega_{dep}$  tous auront l'équation suivante :

$$GK \frac{\partial \omega_{dep}}{\partial s} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} EJ \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{1}{GK} \int_s^l \left[ \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - p(s) \right] ds \right] = p(s) \quad (\text{II.62})$$

En déterminant cette relation (II.62), est obtenons les moments d'inertie des sections des masses de torsion. Et à l'aide des équations (II.55) et (II.62) en liaison avec la fonction de la flèche et les coordonnées actuelles de la longueur de la poutre, travaux [16,17], on peut avoir la relation entre torsion et le déplacement a l'aide de la relation suivante :

$$\frac{\overline{EJ}_\omega}{GJ_p I^2} \ll 1 ; \frac{\overline{EJ}}{GK I^2} , \quad (\text{II.63})$$

Où le travail de dessus indique que la rigidité est choisie dans des endroits différents de la section de la poutre.

### II.3. L'avion à l'air libre :

Les travaux de calcul a été soulevée dans les travaux [7.18]. dans le cas générale a part l'élasticités des déplacements des points, il est nécessaire de résoudre le déplacement comme un corps solide :

-trois déplacement selon les sens des axes des coordonnées et trois rotations.

La possibilité d'un déplacement selon le sens de la vitesse horizontale constante (voir fig.II.6).

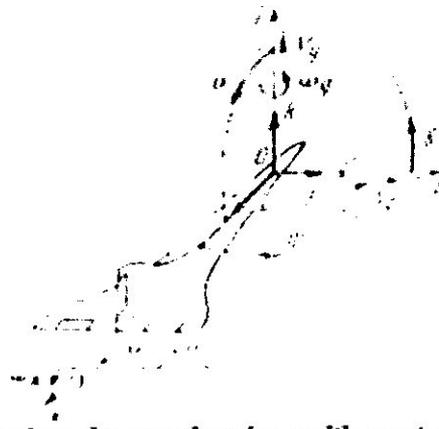


Figure.II.6. *Système des coordonnées au libre avion.*

Comme résultat du mouvement, le vecteur vitesse est :

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_z \vec{j} + V_y \vec{k}$$

L'influence de la vitesse de réacteur n'importe que résistance. Ne sera pas soulevée et la possibilité de ( $V_x$ ) la vitesse d'avance de l'air ( $V_w$ ). De cette façon, la solution de vecteur vitesse sera :

$$\vec{V} = V_z \vec{j} + V_y \vec{k}$$

De la même analyse, déterminons l'analyse de rotation de l'appareil :

$$\vec{\theta} = \gamma \vec{i} + \delta \vec{j} + \psi \vec{k} \quad (\text{II.64})$$

Et la vitesse angulaire de rotation :

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_z \vec{j} + \omega_y \vec{k}$$

De l'équation (2.91) :

-  $\gamma$  angle d'inclinaison ;

-  $\delta$  angle de tangage ;

-  $\psi$  angle de parcours ;

La théorie linéaire est utilisée pour écrire l'équation des charges aérodynamiques et l'élasticité des points constructifs .l'équation approche du vecteur-fonction des déplacements des points de construction est :

$$\vec{\Phi}(x, z, y, t) = \sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i(x, z, y) q_i(t)$$

Ou :

-  $q_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) les coordonnées du système d'élasticité ;

-  $\vec{\Phi}_i(x, z, y)$  les coordonnées du vecteur-fonction (forme de déplacement du point).

Le vecteur-fonction peut être sous la forme suivante :

$$\bar{\Phi}_i(x, z, y) = \bar{\Phi}_{xi}(x, z, y)\bar{i} + \bar{\Phi}_{zi}(x, z, y)\bar{j} + \bar{\Phi}_{yi}(x, z, y)\bar{k} \quad (\text{II.65})$$

Les cinq premières coordonnées généralisées correspondant aux déplacements des points comme un corps solide :

-  $q_1(t)$  déplacement selon le sens de l'axe  $(oz)$  .et qui correspondent aux coordonnées du vecteur-fonction qui sera la forme :

$$\bar{\Phi}_1 = \bar{j} \quad (\text{II.66})$$

-  $q_2(t)$  déplacement selon le sens de l'axe  $(oy)$  .et qui correspondent aux coordonnées du vecteur-fonction qui sera la forme :

$$\bar{\Phi}_2 = \bar{k} \quad (\text{II.67})$$

-  $q_3(t) = \gamma(t)$  rotation selon l'axe  $(x)$  :

$$\bar{\Phi}_3 = z\bar{k} - y\bar{j} \quad (\text{II.68})$$

-  $q_4(t) = \vartheta(x)$  rotation selon l'axe  $(z)$  :

$$\bar{\Phi}_4 = y\bar{j} - x\bar{k} \quad (\text{II.69})$$

-  $q_5(t) = \varphi(t)$  rotation selon l'axe  $(y)$  :

$$\bar{\Phi}_5 = x\bar{j} - z\bar{i} \quad (\text{II.70})$$

Les coordonnées généralisées d'élasticité suivantes sont :

$$q_i(t) (i = 6, \dots, n - n_s) \quad (\text{II.71})$$

Où  $-n_s$  le nombre générale des directions de dessus, (Euler) ; utilisons (II.71) et (II.65) nous aurons :

$$q_i(t) = n_i(t) (i = n - n_s + 1, \dots, n)$$

L'angle de rotation est lie a la superficie de l'appareil (type  $\wedge A$ ).la rotation entre les élasticité de déformation a la base des plans est indiquée dans la figure (II.7).

Les vecteurs-fonctions ont été bien soulevées dans le travail [6] de V.G.Bynkovin.

Et comme qualité d'exemple de détermination de l'énergie potentielle liée aux deux plans est expliquée dans la figure (II.8).



Figure.II.7. Les plans de base de l'avion.



Figure.II.8. Lieu entre les plans de base.

1-plan de base qui étudie le déplacement ( $\wedge A$ ) comme but ;  
2- plan de base, d'élasticité liée au plan (1).

Dans ce cas, les premiers cinq coordonnées généralisées :  $q_i^{(1)}(t) (i = 1, \dots, 5)$  coïncident avec le déplacement du plan de base (1) comme un corps solide :

-  $q_1^{(1)}$  et  $q_2^{(1)}$  déplacement selon des axes  $(oz)$  et  $(oy)$  ;

$-q_3^{(1)}, q_4^{(1)}, q_5^{(1)}$  rotation selon les axes  $(x, z \text{ et } y)$ .

En correspondance avec les coordonnées de vecteur-fonction et les remplacements dans [(II.66), (II.70)],

Si  $y = 0$  et écrivons les vecteurs  $\bar{\Phi}_i^{(1)}$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) l'index (1) au dessus.

Les coordonnées  $\bar{\Phi}_i^{(1)}$  ( $i = 6, \dots, N^{(1)} - n_s^{(1)}$ ) coïncident avec la fonction :

$$\bar{\Phi}_i^{(1)}(x, z, y) = \Phi_i^{(1)}(x, z) \bar{k} \quad (\text{II.72})$$

Dans ce cas, désignons  $(o_2 \xi \eta \zeta)$  le système des coordonnées de base du plan (2) avec un point initial.

$o_2(x_2, z_2)$  du plan  $(oxz)$ . (L'axe  $o_2 \xi$  est orienté parallèlement à l'axe  $(ox)$ ;  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$  vecteurs unitaires selon les sens des axes  $\xi, \eta, \zeta$ ).

Pour cela, dans le plan de base (2), nous avons :

- $q_1^{(2)}$  déplacement dans le sens  $o_2 \xi$  ;
- $q_2^{(2)}$  et  $q_3^{(2)}$  déplacement dans les sens des axes  $o_2 \eta$  et  $o_2 \zeta$  ;
- $q_4^{(2)}, q_5^{(2)}, q_6^{(2)}$  rotations liées aux axes  $\xi, \eta, \zeta$ .

Et correspondent au vecteur-fonction  $\bar{\Phi}_i^{(2)}$  ( $\xi, \eta, \zeta$ ) sont sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1^{(2)} &= \bar{\xi} ; \bar{\Phi}_2^{(2)} = \bar{\eta} ; \bar{\Phi}_3^{(2)} = \bar{\zeta} \\ \bar{\Phi}_4^{(2)} &= \eta \bar{\zeta} ; \bar{\Phi}_5^{(2)} = -\xi \bar{\zeta} ; \bar{\Phi}_6^{(2)} = \xi \bar{\eta} - \eta \bar{\xi} \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

Les coordonnées généralisées  $q_i^{(2)}(t)$  ( $i = 7, \dots, N^{(2)} - n_s^{(2)}$ ) indiquent l'élasticité de déplacement du plan de base (2).

Pour les coordonnées de vecteur-fonction, on peut écrire la formule :

$$\bar{\Phi}_i^{(2)}(\xi, \eta, \zeta) = \bar{\Phi}_i^{(2)}(\xi, \eta) \bar{\zeta} \quad (i = 7, \dots, N^{(2)} - n_s^{(2)}) \quad (\text{II.74})$$

Par analogie, on peut prendre les coordonnées de la fonction dans les directions superficielles. Pour cela le dessous de la formule peut-être  $n_s^{(1)} = n_s^{(2)} = 0$ .

Les vecteurs unitaires de directions  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$  sont liés aux vecteurs  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  par les formules suivantes (voir figures 2.17) :

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \bar{i} ; \bar{\eta} = \cos \beta \bar{j} + \sin \beta \bar{k} ; \\ \bar{\zeta} &= -\sin \beta \bar{j} + \cos \beta \bar{k} \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

Le vecteur lié aux déplacements des points des plans (1) et (2) sur l'axe  $(o_2 \xi)$ , on peut maintenant déterminer à l'aide de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^{(2)} - \bar{\Phi}^{(1)} &= \left( \sum_{i=1}^{N(2)} \Phi_{\xi i}^{(2)} \Big|_{\eta=0} q_i^{(2)} - \sum_{i=1}^{N(1)} \Phi_{\xi i}^{(1)} \Big|_{\substack{z=z_2 \\ x=x_2+\xi}} q_i^{(1)} \right) \bar{i} + \left( \sum_{i=1}^{N(2)} (\Phi_{\eta i}^{(2)} \cos \beta - \Phi_{\zeta i}^{(2)} \sin \beta) \Big|_{\eta=0} q_i^{(2)} - \sum_{i=1}^{N(1)} \Phi_{\eta i}^{(1)} \Big|_{\substack{z=z_2 \\ x=x_2+\xi}} q_i^{(1)} \right) \bar{j} \\ &+ \left( \sum_{i=1}^{N(2)} (\Phi_{\eta i}^{(2)} \sin \beta - \Phi_{\zeta i}^{(2)} \cos \beta) \Big|_{\eta=0} q_i^{(2)} - \sum_{i=1}^{N(1)} \Phi_{\zeta i}^{(1)} \Big|_{\substack{z=z_2 \\ x=x_2+\xi}} q_i^{(1)} \right) \bar{k} \end{aligned} \quad (\text{II.76})$$

Arrogeons cette dernière avec les fonctions (II.77) et (II.74), et regardons la suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1^{(2)} &= \bar{\xi} ; \quad \bar{\Phi}_2^{(2)} = \bar{\eta} ; \quad \bar{\Phi}_3^{(2)} = \bar{\zeta} ; \\ \bar{\Phi}_4^{(2)} &= \eta \bar{\zeta} - \zeta \bar{\eta} ; \quad \bar{\Phi}_5^{(2)} = \zeta \bar{\xi} - \xi \bar{\zeta} ; \quad \bar{\Phi}_6^{(2)} = \xi \bar{\eta} - \eta \bar{\xi} , \end{aligned} \quad (\text{II.77})$$

Et aussi :

$$\bar{\Phi}_i^{(2)} = \bar{\Phi}_i^{(2)} \bar{\zeta} - \frac{\partial \Phi_i^{(2)}}{\partial \eta} \bar{\zeta} \bar{\eta} - \frac{\partial \Phi_i^{(2)}}{\partial \xi} \bar{\zeta} \bar{\xi}, \quad (i=7, \dots, N^{(2)}) \quad (\text{II.78})$$

Il est évident, que les vecteur-fonction (II.73) et (II.74) sont détermines par (II.77) et (II.78) pour  $\zeta = 0$  c'est-à-dire est étudié selon le plan  $(o_2 \xi \eta)$ . il est exact aussi que pour le plan (1) arrangé avec les vecteurs-fonctions.

$$\bar{\Phi}_1^{(1)} = \bar{j}; \quad \bar{\Phi}_2^{(1)} = \bar{k}; \quad \bar{\Phi}_3^{(1)} = z\bar{k}; \quad \bar{\Phi}_4^{(1)} = -x\bar{k}; \quad \bar{\Phi}_5^{(1)} = x\bar{j} - z\bar{i} \quad (\text{II.79})$$

$$\text{Et : } \bar{\Phi}_i^{(1)}(x, z, y) = \bar{\Phi}_i^{(1)}(x, z) \bar{k} \quad (i=6, \dots, N^{(1)}) \quad (\text{II.80})$$

Regardons les suivantes :

$$\bar{\Phi}_1^{(1)} = \bar{j}; \quad \bar{\Phi}_2^{(1)} = \bar{k}; \quad \bar{\Phi}_3^{(1)} = z\bar{k} - y\bar{j}; \quad \bar{\Phi}_4^{(1)} = y\bar{i} - x\bar{k}; \quad \bar{\Phi}_5^{(1)} = x\bar{j} - z\bar{i} \quad (\text{II.81})$$

$$\text{Et : } \bar{\Phi}_i^{(1)} = \bar{\Phi}_i^{(1)} \bar{k} - \frac{\partial \Phi_i^{(1)}}{\partial z} y\bar{j} - \frac{\partial \Phi_i^{(1)}}{\partial x} y\bar{i}, \quad (i=6, \dots, N^{(1)}) \quad (\text{II.82})$$

Déterminons la relation de rotation entre les plans (1) et (2) et le vecteur d'angle de rotation est :

$$\text{rot } \bar{\Phi}_i = \left( \frac{\partial \Phi_{yi}}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_{zi}}{\partial y} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial \Phi_{xi}}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_{yi}}{\partial x} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial \Phi_{zi}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_{xi}}{\partial z} \right) \bar{k}$$

$$\text{ou : } \bar{\Phi}_i = \Phi_{xi} \bar{i} + \Phi_{yi} \bar{j} + \Phi_{zi} \bar{k}$$

De (2.102), nous aurons l'égalité :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \cos \beta \frac{\partial}{\partial \eta} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \zeta}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \beta \frac{\partial}{\partial \eta} - \cos \beta \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

De la forme des équations (II.73)..... (II.82), nous recevons le vecteur, qui dépend de l'angle de rotation de dessus (1) et (2) sur l'axe  $(o_2 \xi)$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{rot} \left( \bar{\Phi}^{(2)} - \bar{\Phi}^{(1)} \right) \Big|_{\substack{y=0 \\ \zeta=0}} = & \left( \left( q_4^{(2)} + \sum_{i=7}^{N^{(2)}} \frac{\partial \Phi_i^{(2)}}{\partial \eta} q_i^{(2)} \right) \Big|_{\eta=0} - \left( q_3^{(1)} + \sum_{i=6}^{N^{(1)}} \frac{\partial \Phi_i^{(1)}}{\partial z} q_i^{(1)} \right) \Big|_{\substack{z=z_2 \\ x=x_2+\xi}} \right) \bar{i} + \\ & \left( -q_6^{(2)} \sin \beta + \left( q_5^{(2)} - \sum_{i=7}^{N^{(2)}} \frac{\partial \Phi_i^{(2)}}{\partial \xi} q_i^{(2)} \right) \Big|_{\eta=0} \cos \beta - \left( q_4^{(1)} - \sum_{i=6}^{N^{(1)}} \frac{\partial \Phi_i^{(1)}}{\partial x} q_i^{(1)} \right) \Big|_{\substack{z=z_2 \\ x=x_2+\xi}} \right) \bar{j} + \\ & \left( q_6^{(2)} \cos \beta + \left( q_5^{(2)} - \sum_{i=7}^{N^{(2)}} \frac{\partial \Phi_i^{(2)}}{\partial \xi} q_i^{(2)} \right) \Big|_{\eta=0} \sin \beta - q_5^{(1)} \right) \bar{k} \end{aligned} \quad (\text{II.83})$$

Etudions le ressort, la modélisation des éléments de fixation de dessus. La traction du ressort se détermine par l'équation :

$$\bar{p} = C \bar{u} \quad (\text{II.84})$$

Ou :

$$\bar{p} \text{ Vecteur force agissant sur le ressort } \bar{p} = p_1 \bar{i} + p_2 \bar{j} + p_3 \bar{k}$$

$$\bar{u} \text{ Vecteur déplacement du ressort en extension } \bar{u} = u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j} + u_3 \bar{k}$$

C Tenseur de rigidité d'extension du ressort :

$$C = \bar{i} c_{11} \bar{i} + \bar{i} c_{12} \bar{j} + \bar{i} u_{13} \bar{k} + \bar{j} c_{21} \bar{i} + \bar{j} c_{22} \bar{j} + \bar{j} u_{23} \bar{k} + \bar{k} c_{31} \bar{i} + \bar{k} c_{32} \bar{j} + \bar{k} u_{33} \bar{k} \quad (\text{II.85})$$

« • » Point qui signifie le produit scalaire du tenseur par un vecteur. L'équation (II.84) sous forme matricielle se présente sous forme :

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.86})$$

-Ou le sens physique des éléments de la matrice de rigidité  $c_{ij}$  se définit de l'équation (II.86).

-moment qui concerne la rotation du ressort se définit par l'équation :

$$\bar{M} = K \bar{\varphi} \quad (\text{II.87})$$

Ou :

$\bar{M}$  Vecteur moment qui agit sur le ressort  $\bar{M} = M_1 \bar{i} + M_2 \bar{j} + M_3 \bar{k}$  ;

$\bar{\varphi}$  Vecteur angle de rotation d'essai du ressort d'après la torsion. ;  $\bar{\varphi} = \varphi_1 \bar{i} + \varphi_2 \bar{j} + \varphi_3 \bar{k}$  ;

$K$  Tenseur de rigidité de la rotation du ressort

$$K = \bar{i} k_{11} \bar{i} + \bar{i} k_{12} \bar{j} + \bar{i} k_{13} \bar{k} + \bar{j} k_{21} \bar{i} + \bar{j} k_{22} \bar{j} + \bar{j} k_{23} \bar{k} + \bar{k} k_{31} \bar{i} + \bar{k} k_{32} \bar{j} + \bar{k} k_{33} \bar{k} \quad (\text{II.88})$$

Mettons l'équation (II.114) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

Où  $k_{ij}$  coefficient de rigidité du ressort qui se présente comme un moment par rapport à l'axe ( $\bar{i}$ ) Qui apparaît dans le ressort selon sa rotation par un angle égal à l'unité autour de l'axe ( $\bar{j}$ ) d'après des angles nuls de la rotation par rapport aux autres angles du ressort.

-les matrices de rigidité ( $C$ ) et ( $K$ ) sont symétriques.

Dans le cas, des ressorts linéaires élémentaire les membres ( $C_{ij}$ ) et ( $K_{ij}$ ) sont égaux à zéro.

Proposons, que les points avec les coordonnées  $(\xi_{C_i}, 0)$  dans le système des coordonnées  $o_2 \xi \eta$  ou bien les coordonnées  $(x_{C_i}, z_2)$  dans le système des coordonnées  $o x z$ , mettent les ressort avec les matrices de rigidité à la traction  $C_i (i=1, \dots, N_C)$ , mais dans les points  $(\xi_{K_i}, 0)$  ou bien  $(x_{K_i}, z_2)$  les ressorts effectuent la rotation avec les matrices de passage  $K_i (i=1, \dots, N_K)$ .

L'énergie potentielle d'élasticité liée aux plans de base (1) et (2) peut-être déterminée à l'aide de la formule suivante :

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_C} \left( \bar{\Phi}^{(2)} - \bar{\Phi}^{(1)} \right) \Big|_{x_{C_k}, z_2} C_k \bar{\Phi}^{(2)} - \bar{\Phi}^{(1)} \Big|_{x_{C_k}, z_2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_K} \frac{1}{4} \text{rot} \left( \bar{\Phi}^{*(2)} - \bar{\Phi}^{*(1)} \right) \Big|_{x_{K_k}, z_2} K_k \text{rot} \left( \bar{\Phi}^{*(2)} - \bar{\Phi}^{*(1)} \right) \Big|_{x_{K_k}, z_2}$$

Ou les vecteur  $(\bar{\Phi}^{(2)} - \bar{\Phi}^{(1)})$  et  $\text{rot}(\bar{\Phi}^{*(2)} - \bar{\Phi}^{*(1)})$  ses déterminent par les équations (II.76) et (II.83) ;

$(C_k)$  et  $(K_k)$  les tenseurs de rigidité de ressort à la traction et à rotation, qui se déterminent par les points :  $(x_{C_k}, z_2)$  et  $(x_{K_k}, z_2)$ .

Déterminant maintenant les charges aérodynamique

$$\frac{\omega_a}{V_\infty} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}$$

Ou :

$\bar{\omega}_a$ -vecteur aérodynamique (vitesse de l'air sur le plan de base, dans les points limites des conditions ;

$\bar{\Phi}$ -vecteur -fonction de déplacements des points déconstruction. Pour les même points.

Et les charges aérodynamiques voir figure (II.7) sont :

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{\omega}_a \\ V_\infty \end{array} \right\} = \frac{1}{q} A^{-1} \Delta \bar{P}_a \text{ ou bien } \Delta \bar{P}_a = q A \left\{ \begin{array}{c} \bar{\omega}_a \\ V_\infty \end{array} \right\}$$

Ou :

$\Delta \bar{P}_a$  : Vecteur-colonne de pression, qui actionne selon la normale du plan de base.

$q$  : Vitesse d'appui ;

$A$  : Matrice des coefficients aérodynamiques de la rigidité

$A^{-1}$  : Matrice inverse de ( $A$ ) (se détermine par les vitesses potentielles [7]).

Pour l'avion étudié la matrice peut-être écrite sous la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{II.89})$$

Où les indices  $i, j = 1, 2$  correspondent aux parties aérodynamiques de l'avion .et l'équation d'équilibre d'un avion libre (principe des déplacements virtuels) sera :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{II.90})$$

Ou :

$T$  et  $\Pi$ -énergie cinétique et potentiel du construction de l'avion (type  $\wedge A$ ) ;

$Q_{ai}$  Force généralisée ; et qui correspond a la force du travail aérodynamique sur le déplacement virtuel.

Distinguons appareil volant établi a partir de  $n$  plan basics .les éléments de la structure.

Si la structure. Si le fuselage est représenté par 2 plans basics, prenons alors pour ces deux plans basics quelque rudices. Une Distribution quelconque des regidets de torsion du fuselage ces même plans basées.

Chaque plan de base est percé dans son system local coordonnées  $0^{(k)} \xi^{(k)} \eta^{(k)} \zeta^{(k)}$

L'appareil volant en corps solide a cinq degres de liberté avec des coordonnées généralisées combinées et de rotation par rapport au système de coordonnées lie a l'appareil volant

Les fonctions des coordonnées correspondantes sont représentées par (II.66) ..... (II.60).Excepté ces coordonnées, chaque plan de base a ses propres coordonnées généralisées combinées comme un corps solide qui supportent des ressorts élastique lies aux plans de base à l'exception du premier plan de base ou aux premiers plan par rapport aux autre plans qui peuvent se combines comme un ensemble sur les ressorts. et de cette façon le plan de base a les coordonnées généralisées et coordonnées de fonction correspondants aux points élastiques combinés :

$$q_1^{(k)}(t); q_2^{(k)}(t); q_3^{(k)}(t);$$

Combinaison le long des axes de coordonnées.

$$0^{(k)} \xi^{(k)} ; 0^{(k)} \eta^{(k)} ; 0^{(k)} \zeta^{(k)} ; q_4^{(k)}(t) ; q_5^{(k)}(t) ; q_6^{(k)}(t)$$

-Rotation par rapport à ces axes.

$$q_i^{(k)}(t) \quad (i = 1, \dots, N^k)$$

- Combinaison élastique des points attachés (lie) au plan de base.
- Ces coordonnées généralisées correspondent aux coordonnées vecteurs fonctions.

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1^{(k)} &= \bar{\xi}^{(k)}; \bar{\Phi}_2^{(k)} = \bar{\eta}_2^{(k)}; \bar{\Phi}_3^{(k)} = \bar{\zeta}^{(k)}; \bar{\Phi}_4^{(k)} = \eta^{(k)} \bar{\zeta}^{(k)}; \bar{\Phi}_5^{(k)} = -\bar{\xi}^{(k)} \bar{\zeta}^{(k)} \\ \bar{\Phi}_6^{(k)} &= \bar{\xi}^{(k)} \bar{\eta}^{(k)} - \eta^{(k)} \bar{\xi}^{(k)}; \\ \bar{\Phi}_i^{(k)} &= \Phi_i^{(k)}(\bar{\xi}^{(k)}; \eta^{(k)}) \bar{\zeta}^{(k)} \quad (i = 7, \dots, N^{(k)}). \end{aligned}$$

Dans le  $N^{(k)}$ ; des coordonnées généralisées ne sont pas les coordonnées correspondants aux angles d'inclinaison du gouvernail.

Les organes de la direction qui apparemment au  $k$  une plan de base; aussi munissons le avec l'index  $k$  et numérotons de cette façon tous les autres coordonnées généralisés suivante; du butons avec 5 coordonnées.

Ensemble combiné sera un corps solide a savoir l'appareil volant; ensuite dans l'ordre des coordonnées généralisées du premier plan de base; 2eme plan de base; ..... par la suite les coordonnées généralisées; les angle d'inclinaison du gouvernail du premier plan de base; Deuxième plan de base ext.....

Nous devons complet jusqu'au  $k$  au plan de base qui possède  $N_\delta^{(k)}$ ;

$$\sum_{k=1}^m N_\delta^{(k)} = n_\delta$$

De cette manière design nous les coordonnées généralisées correspondants aux angles d'inclinaison du gouvernail.

$$\begin{aligned} q_{i\delta}^{(k)}(t) &= \delta_i^{(k)}(t) \quad (i = 1, \dots, N_\delta^{(k)}) \\ \bar{\Phi}_{i\delta}^{(k)} &= \left[ -(\eta^{(k)} - \eta_{i\delta}^{(k)}) \sin \chi_i^{(k)} + (\xi^{(k)} - \xi_{i\delta}^{(k)}) \cos \chi_i^{(k)} \right] \bar{\zeta}^{(k)} \end{aligned} \quad (II.91)$$

Ou  $(\xi_{i\delta}^{(k)}; \eta_{i\delta}^{(k)})$  coordonnées du point  $A_i^{(k)}$  de l'axe arbitraire de l'organe de direction;

$\chi_i^{(k)}$  Angle de la flèche de cet axe. qui est defeni de la manière analogue.

Par définition la force aérodynamique généralisée  $Q_{ai}$  est le travail des forces aérodynamique par les forces de déplacements sous la forme  $\bar{Q}_i$  selon la valeur des coordonnées généralisées  $q_i$  et qui égale a l'unité.

Le travail des forces aérodynamique des perturbations indexées des combinaisons élastiques dans le même plan de base qui correspondent  $q_i^{(k)} = 1$

$$Q_{ai}^{(k)} = \sum_{j=1}^N q_j \left\{ \bar{\zeta}^{(k)} \bar{\Phi}_{jB}^{(k)} \right\}^T S^{(k)} A_{kl} \left[ \left\{ \bar{\zeta}^{(j)} \frac{\partial Q_j^{(j)}}{\partial \xi^{(j)}} \right\}_\Gamma \right] q_i^{(j)}(t) + \frac{1}{V_\infty} \left\{ \bar{\zeta}^{(j)} \bar{\Phi}_{j\Gamma}^{(k)} \right\} q_j^{(j)}(t) \quad (II.92)$$

Ou  $(i)$  se définit comme un produit scalaire  $\left\{ \bar{\zeta}^{(k)} \bar{\Phi}_{jB}^{(k)} \right\}^T$  vecteur ligne lieue est la valeur i-eme coordonnées du vecteur fonction de la normale avec le plan  $k$  dans les points milieux reliées extérieurement.

La dimension de la ligne est égale au nombre des éléments aérodynamique des panels (pannes)

$\left\{ \bar{\zeta}^{(j)} \frac{\partial Q_j^{(j)}}{\partial \xi^{(j)}} \right\}_\Gamma$  et  $\left\{ \bar{\zeta}^{(j)} \bar{\Phi}_{j\Gamma}^{(k)} \right\}$  valeur du vecteur colonne quelconque et la seul valeur j-eme du vecteur

fonction du vecteur fonction l-ieme du plan de base dans la projection sur la normal dans les points satisfaisants les conditions aux limites de la non infiltration.

Dimension des colonnes est égale au nombre des éléments panneaux l-eme du plan de base.

$A_{kl}$  Matrice de l'inter influence des plans de base (k) et (l).

$S^{(k)}$  Matrice diagonal de surface des éléments aérodynamique aux k-eme plan de base ; q vitesse de la pression

$V_\infty$  Vitesse de la pression non exacte.

L'index (B) signifie que le vecteur est choisie selon la valeur des coordonnées du point du milieu liant les tourbillons .correspond au panneau aérodynamique.

L'index  $\Gamma$  signifie la valeur est choisée selon les valeurs des coordonnées du point satisfaisant les conditions aux limites de la non infiltration sur le panneau correspondant.

Dans l'expression (II.92) il n'as pas été tenu compte a partir du l-eme plan de base d'après la combinaison de l'appareil volent comme corps solide et selon les inclinaisons des organes du gouvernail appartenant au l-eme plan de base .

Introduisons dans la matrice considérée :

$$X_B^{(k)} = \left\{ \overline{\Phi}_i \left( \xi_{Bj}^{(k)} ; \eta_{Bj}^{(k)} \right) \overline{\zeta}^{(k)} \right\}^T ;$$

$$X_p^{(l)} = \left\{ \overline{\Phi}_i \left( \xi_{\Gamma j}^{(l)} ; \eta_{\Gamma j}^{(l)} \right) \overline{\zeta}^{(l)} \right\}^T ;$$

$$Y_p^{(l)} = \left\{ \left. \frac{\partial Q_j^{(l)}}{\partial \xi^{(l)}} \right|_{\Gamma j} \overline{\zeta}^{(l)} \right\}^T .$$

Où l'index ( $\Gamma j$ ) ségnifie que une valeur quelque se choisit dans les points avec les coordonnées  $(\xi_{\Gamma j}^{(l)} ; \eta_{\Gamma j}^{(l)})$ .

La matrice  $X_B^{(k)}$  a dimension  $(N_a^{(k)} \times N^{(k)})$  ou  $N_a^{(k)}$  nombre aérodynamique des éléments panneaux sur le plan de base k. par conséquent les dimensions des matrices  $X_\Gamma^{(k)}$  et  $Y_\Gamma^{(k)}$  sont égaux  $N_a^{(k)} \times N^{(k)}$  de la valeur de la grandeur  $Q_{al}^{(k)}$  et  $q_i^{(k)}$  formons le valeur colonne.

$$Q_{al}^{(k)} = \left\{ Q_{al}^{(k1)} \dots Q_{aN}^{(k1)} \right\}^T$$

$$q_i^{(k)}(t) = \left\{ q_i^{(k1)}(t) \dots q_{aN}^{(k1)}(t) \right\}^T$$

Aussi l'expression (II.92) peut être écrite sous la forme :

$$\Phi_a^{(kl)} = q x_B^{(k)T} S^{(k)} A_{kl} \left[ Y_p^{(l)}(t) + \frac{1}{V_\infty} x_{r0}^{(l)} q^{(l)}(t) \right]$$

De la même manière le travail des forces aérodynamiques apparaissant du l-eme plan de base confondu (ensemble avec tout l'appareil volant ) comme une corps solide pour le déplacements élastiques du k-eme plan

$$\Phi_{a0}^{(kl)} = q x_B^{(k)T} S^{(k)} A_{kl} \left[ Y_p^{(l)} q_0(t) + \frac{1}{V_\infty} x_{r0}^{(l)} q_0(t) \right]$$

Où

$$x_{r0}^{(l)} = \left\{ \overline{\Phi}_i \left( x(\xi_{ri}^{(l)} ; \eta_{ri}^{(l)}), z(\xi_{ri}^{(l)} ; \eta_{ri}^{(l)}), y(\xi_{ri}^{(l)} ; \eta_{ri}^{(l)}) \right) \right\}$$

$$Y_{r_0}^{(i)} = \frac{\partial \bar{\Phi}_i(x(\xi_{ri}^{(i)}, \eta_{ri}^{(i)}), z(\xi_{ri}^{(i)}, \eta_{ri}^{(i)}), y(\xi_{ri}^{(i)}, \eta_{ri}^{(i)}))}{\partial \xi^{(i)}} \quad (II.93)$$

La dimension de la matrice  $X_{r_0}^{(i)}$  est  $Y_{r_0}^{(i)}$  est égal à  $(N_a^{(i)} * 5) \cdot \bar{\Phi}_i (i = 1, \dots, 5)$  forme du décalage de l'appareil volant comme un corps solide ;  $q_0(t) = \{q_1(t), \dots, q_5(t)\}^T$  est le vecteur colonne des coordonnées généralisées décalage de l'appareil comme un corps solide ; et enfin l'expression pour le travail des forces aérodynamiques indexées avec l'inclinaison des organes du direction du plan de base ; par les déplacements élastiques k-eme plan a présente sous la forme :

$$\Phi_{\alpha\delta}^{(k)} = q x_B^{(k)T} S^{(k)} A_{kl} \left[ Y_{r_0}^{(i)} q_0^{(i)}(t) + \frac{1}{V_\infty} x_{r_0}^{(i)} q_\delta^{(i)}(t) \right]$$

Où

$$X_{r_0}^{(i)} = \left\{ \bar{\Phi}_{i\delta}(\xi_{ri}^{(i)}, \eta_{ri}^{(i)}, \bar{\xi}^{(i)}) \right\}^T$$

$$Y_{r_0}^{(i)} = \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}_i(\xi_{ri}^{(i)}, \eta_{ri}^{(i)}, \bar{\xi}^{(i)})}{\partial \xi^{(i)}} \right\}^T$$

Les dimensions des matrices  $X_{r_0}^{(i)}$  et  $Y_{r_0}^{(i)}$  sont égaux à  $(N_a^{(i)} * N_\delta^{(i)}) \cdot \bar{\Phi}_{i\delta}(\xi^{(i)}, \eta^{(i)})$

La coordonné fonction vecteur correspondant à l'inclinaison i-ème organe de direction l-eme plan de base voir (II.118) ;  $q_\delta^{(i)}(t) = \{q_{1\delta}^{(i)} \dots q_{N^{(i)}\delta}^{(i)}(t)\}^T$

Généralisés ecoirt du tourbillon du l-eme plan de base

Les éléments de la matrice  $X_{r_0}^{(i)}$  et  $Y_{r_0}^{(i)}$  ne sont pas égaux à zéro seulement pour les numéro B (II.93) correspondent aux point  $(\xi_{ri}, \eta_{ri})$  appartenant à l'ensemble occupant i-eme tourbillon

Sommant les influences aérodynamiques avec tous les plans de base .....et nous obtenons le vecteur des forces Généralisés qui correspondent aux déplacement élastique du k-eme du plan de base sous la forme suivante :

$$Q_a^{(k)} = q X_B^{(k)T} S^{(k)} \sum_{l=1}^m A_{kl} \left[ \left( Y_{r_0}^{(i)} q_0^{(i)}(t) + \frac{1}{V_\infty} x_{r_0}^{(i)} q_\delta^{(i)}(t) \right) + \left( Y_P^{(i)} q_0^{(i)}(t) + \frac{1}{V_\infty} x_P^{(i)} q_\delta^{(i)}(t) \right) + \left( Y_{r_\delta}^{(i)} q_0^{(i)}(t) + \frac{1}{V_\infty} x_{r_\delta}^{(i)} q_\delta^{(i)}(t) \right) \right] \quad (II.94)$$

Définissant les matrices suivantes :

$$X_{BO}^{(k)} = \left\{ \bar{\Phi}_i \left( x(\xi_{Bj}^{(k)}, \eta_{Bj}^{(k)}), z(\xi_{Bj}^{(k)}, \eta_{Bj}^{(k)}), y(\xi_{Bj}^{(k)}, \eta_{Bj}^{(k)}) \bar{\xi}^{(k)} \right) \right\}^T,$$

$$(N_a^{(k)} \cdot 5),$$

$$X_{B\delta}^{(k)} = \left\{ \bar{\Phi}_{i\delta} \left( (\xi_{Bj}^{(k)}, \eta_{Bj}^{(k)}) \bar{\xi}^{(k)} \right) \right\}^T, (N_a^{(k)} \cdot N_\delta^{(k)})$$

Il est simple de constater que le vecteur des forces Généralisés correspondent de l'appareil volant comme un corps solide se présente sous la forme :

$$Q_{ao} = q \sum_{k=1}^m X_{B0}^{(k)} S^{(k)} \sum_{l=1}^m A_{kl} \left[ \left( Y_{r0}^{(l)} q_o^{(l)}(t) + \frac{1}{V_\infty} x_{r0}^{(l)} q_o^{(l)}(t) \right) + \left( Y_P^{(l)} q_o^{(l)}(t) + \frac{1}{V_\infty} x_P^{(l)} q^{(l)}(t) \right) + \left( Y_{r\delta}^{(l)} q_\delta^{(l)}(t) + \frac{1}{V_\infty} x_{r\delta}^{(l)} q_\delta^{(l)}(t) \right) \right] \quad (II.95)$$

Et le vecteur des forces Généralisés correspondant au décalage des organes de direction du k-eme du plan de base peut se présenter sous la forme :

$$Q_{a\delta}^{(k)} = q X_{B\delta}^{(k)T} S^{(k)} \sum_{l=1}^m A_{kl} \left[ \left( Y_{r0}^{(l)} q_o^{(l)}(t) + \frac{1}{V_\infty} x_{r0}^{(l)} q_o^{(l)}(t) \right) + \left( Y_P^{(l)} q^{(l)}(t) + \frac{1}{V_\infty} x_P^{(l)} q^{(l)}(t) \right) + \left( Y_{r\delta}^{(l)} q_\delta^{(l)}(t) + \frac{1}{V_\infty} x_{r\delta}^{(l)} q_\delta^{(l)}(t) \right) \right] \quad (II.96)$$

Tenant compte de l'expression (II.94) et (II.96).

Le vecteur des des forces aérodynamiques généralisés peut se présenter sous la forme d'une aile en couple.

$$Q_a = q X_{B\delta}^T S A \left[ Y_r q(t) + \frac{1}{V_\infty} X_r q(t) \right] \quad (II.97)$$

Où  $Q_a = \{ Q_{a0}^{(1)\psi} Q_a^{(1)\psi} \dots Q_{a0}^{(m)\psi} Q_{a\delta}^{(1)\psi} \}^\psi \quad (n.1)$

$$X_B^T = \begin{bmatrix} X_{B0}^{(1)T} & X_{B0}^{(2)T} & \dots & X_{B0}^{(m)T} \\ X_B^{(1)T} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_B^{(2)T} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X_B^{(m)T} \\ X_{B0}^{(1)T} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X_{B0}^{(m)T} \end{bmatrix}$$

$$X_r = \begin{bmatrix} X_{r0}^{(1)} & X_{r0}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & X_{r0}^{(1)} & 0 & \dots \\ X_{r0}^{(2)} & 0 & X_{r0}^{(2)} & \dots & 0 & 0 & X_{r0}^{(2)} & \dots \\ \dots & \dots \\ X_{r0}^{(m)} & 0 & 0 & \dots & X_r^{(m)} & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

Les dimensions des matrices  $X_B^T$  et  $X_r$  sont égaux

$(n.N_a)$  et  $(N_a.n)$  ou  $N_a$ : nombre des éléments panneaux aérodynamiques de tout l'appareil

La matrice la structure d'une matrice  $X_r A^{-1}$  qui est la matrice des coefficients d'influence aérodynamique que de l'appareil de dimension  $(n.N_a)$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}^{-1}$$

S matrice diagonale des surfaces des panneaux aérodynamiques de l'appareil :

$$S = \begin{bmatrix} S^{(I)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & S^{(I)} \end{bmatrix}$$

$$q(t) = \{q_0^{(I)}(t) q_\delta^{(I)\varphi}(t) \dots q^{(m)\varphi}(t) q^{(I)\varphi}(t) \dots q_\delta^{(m)\varphi}(t)\}^\varphi$$

Le vecteur colonne des coordonne généralises du décollage des points de l'appareil volant

En mettant l'expression de l'énergie potentielle des liaisons élastique des places de base aussi que les expression obtenus dans le paragraphe (II.3) expression de l'énergie cinétique et potentielle des agrégats de l'appareil et colletant les opération différentielle nous obtenant un système d'équation différentielles d'équilibre d'un appareil volant libre dans les perturbations sous forme matricule

$$(G + qB)U + \left(\frac{q}{V_\infty} D + D^*\right)\dot{U} + C\ddot{U} = 0 \tag{II.98}$$

Ou  $U = q(t)$  vecteur des coordonne généralises G et C matrice de rigidité et matrice d'inertie B et D

matrice de rigidité aérodynamique et d'amortissement

$D^*$  matrice d'amortissement constructif

La matrice de rigidité a une structure de type bloc :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G^{(I,I)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & G^{(m,I)} & \dots & G^{(m,m)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & G_\delta^{(I)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & G_\delta^{(m)} \end{bmatrix}$$

Et donc G est symétrique ..... est diagonale

La matrice d'inertie se présente sous la forme :

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & C_0^{(I)} & \dots & C_0^{(m)} & C_{0\delta}^{(I)} & \dots & C_0^{(I)} \\ C_0^{(I)T} & C^{(I)} & \dots & 0 & C_\delta^{(I)} & \dots & C_0^{(I)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_0^{(m)T} & 0 & \dots & C_0^{(m)} & 0 & \dots & C_{m\delta}^{(m)} \\ C_0 & C_{I\delta}^{(I)T} & \dots & C_0^{(I)} & C_0^{(I)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{0\delta}^{(m)T} & 0 & \dots & C_{m\delta}^{(m)T} & C_0^{(I)} & \dots & C_\delta^{(I)} \end{bmatrix}$$

Les matrices aérodynamiques se définissant par l'égalité (II.97) :

$$B = -X_B^T S A Y_\Gamma; D = -X_B^T S A X_\Gamma.$$

La matrice constructive de l'amortissement n'est pas définie sous forme de formule définies

Ce pendant il est possible de dire que cette matrice à la structure de la matière G.

$$GU + C\ddot{U} = 0 \tag{II.99}$$

Pour la détermination des vecteur et des valeurs propres. Du problème (II.99) il est souhaitable d'exclure de l'équation (II.99) tonalités nulles » coordonnées de décalage comme un corps solide.

Présentons  $C$ ,  $G$ . et le vecteur  $\bar{U}$  sous la forme :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} C_0 & \tilde{C}_0 \\ \tilde{C}_0^T & \tilde{C} \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} U_0 \\ \tilde{U} \end{bmatrix},$$

Ou  $U_0$  Vecteur des coordonnées généralisées de décalage de l'appareil comme un corps solide.

$\tilde{U}$  : Vecteur des coordonnées généralisées du décalage (déplacement) élastique

L'équation II.99 prise sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ \tilde{U} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_0 & \tilde{C}_0 \\ \tilde{C}_0^T & \tilde{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_0 \\ \ddot{\tilde{U}} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.100})$$

Cherchons la solution sous forme :

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ \tilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \tilde{\Phi} \end{bmatrix} e^{i\Omega t} \quad (\text{II.101})$$

Mettons (II.128) dans (II.127) nous obtenons le problème. Concernant les valeurs propres

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} C_0 & \tilde{C}_0 \\ \tilde{C}_0^T & \tilde{C} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \tilde{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\lambda = \Omega^2) \quad (\text{II.102})$$

En premier solution nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \tilde{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ 0 \end{bmatrix} (\lambda = 0).$$

Aussi pour la valeur  $\lambda = 0$  correspond une matrice nulle de rang 5 et alors. Il existe 5 vecteurs propres.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{0i} \\ \tilde{\Phi} \end{bmatrix} (i = 1, \dots, 5),$$

Pour la valeur propre  $\lambda = 0$

$$(0 - \lambda C_0) \Phi_0 = 0.$$

Ces vecteurs peuvent être orthogonaux avec la matrice poids  $C_0$  :

$$\Phi_{0i}^T C_0 \Phi_{0j} = \delta_{ij} (i = 1, \dots, 5).$$

Nous obtenons une autre solution en écrivant l'équation (II.102) la forme d'un système de 2 équations :

$$\begin{aligned} C_0 \Phi_0 + \tilde{C}_0 \tilde{\Phi} &= 0; \\ (G - \lambda \tilde{C}) \tilde{\Phi} - \lambda \tilde{C}_0^T \Phi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.103})$$

En trouvant  $\Phi_0$  a partir de la première équation (II.103) n la mettant dans la deuxième équation :

$$[\tilde{C} - \lambda(\tilde{C} - \tilde{C}_0^T \tilde{C}_0^{-1} \tilde{C}_0)] \tilde{\Phi} = 0 \quad (\text{II.104})$$

C'est le problème correspondant les valeurs propre

Soit  $\tilde{\Phi}_i$  vecteur propre du problème (II.104) valeur propre correspondante  $\lambda = \lambda_i$ . De (II.130) il s'en vent que :

$$\Phi_0 = -C_0^{-1} \tilde{C}_0 \tilde{\Phi}.$$

Alors le vecteur :

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Phi_{0i} \\ \tilde{\Phi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_0^{-1}\tilde{C}_0 \\ E \end{bmatrix} \tilde{\Phi}_i \quad (i=6, \dots, n) \quad (\text{II.105})$$

Est le vecteur propre du problème (II.102) valeur propre correspondante  $\lambda = \lambda_i$

Il est possible de vérifier immédiatement la mise de (II.105) et (I.102). Il est simple de vérifier les conditions d'orthogonalité.

$$\Phi_i^T G \Phi_j = \lambda \delta_{ij} \quad (\lambda = \lambda_i);$$

$$\Phi_i^T C \Phi_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

D'après les conditions  $\tilde{\Phi}_i^T$  Satisfassent les conditions d'orthogonalité du problème (II.104)

$$\tilde{\Phi}_i^T \tilde{G} \tilde{\Phi}_j = \lambda \delta_{ij} \quad (\lambda = \lambda_i);$$

$$\Phi_i^T (\tilde{C} - \tilde{C}_0^T C_0^{-1} \tilde{C}_0) \Phi_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 6, \dots, n)$$

L'équation (II.125) n'est pas seulement utilisée pour la recherche des phénomènes concernant le flottement et la divergence. et le mécanisme de chargement de réversibilité.

Un état d'avion peut être étudié.

L'étendue des problèmes basée se resant à l'aide des équation (II.98) statique aérodynamique et dynamique du vol. à ce genre de problèmes posés se rapportaient les points suivants.

\*étude de la stabilité et la manoeuvrabilité

- Étude du phénomène du mécanisme de chargement et l'efficience des organes de direction.
- Divergence des parties constituant l'appareil volant.
- Détermination de l'influence de l'élasticité sur les coefficients aérodynamiques et leurs dérivées.
- Détermination de la forme du bâti de l'appareil volant en correspondance avec la forme donnée sur un régime croisé
- Réaction de l'appareil volant sur les écarts des organes de direction
- Influencer d'élasticité sur les charges aérodynamiques
- Détermination des états des contraintes .déformation de l'état de l'appareil volant en manoeuvre

Dans la plupart de ces problèmes posés il y aura lieu de tenir compte des charges d'inertie et des forces d'amortissement aérodynamiques .de décalage au déplacement de l'appareil volant comme corps entier

-la charge aérodynamique sur les plan de base se définis ce forme de vecteur forces concentrées, applique dans les points milieu reliant les poutres supérieur

$$P_a = qSA \left[ Y, q(t) + \frac{1}{V_\infty} X, \dot{q}(t) \right]$$

$$\text{Où } q(t) = U(t) = U$$

Il est évident qu'on peut déterminer la charge aérodynamique seulement si le vecteur des coordonnées généralisées  $U$  est déterminé correspondant à l'état de l'appareil volant considéré.

-D'un autre cote si le vecteur  $U$  est connue alors sont consterne les écart élastique des points de chaque plan de base :

$$\bar{\Phi}^{(k)} = \sum_i \bar{\Phi}_{(i)}^{(k)} q_i^{(k)}(t)$$

Est par conséquent des condition dans les éléments de la structure correspondantes au plan de base concédée, tels que les plaques les poutres et le recoures. Ici il en recoure les remarques suivantes :  
Autant les coordonnées des fonctions vecteurs obligatoirement satisfaisant ne reste que les conditions aux limites géométriques Correspondant a des partie de l'appareil volant présenter sous la forme de plaques dans le voisinage d'une extrémité libre de la structure au dans le rayon des liaisons des organes.

Les efforts dans les éléments peuvent être obtenues soit approximativement si à l'avance il n'est pas exigé des fonctions coordonnées satisfaction de toutes les condition a part cela pour l'obtention de donnée réelle de l'état de contrainte de la structure ou sa résistance est souvent représenté une idéalisation admissible de la structure sous une forme comme des plaques avec quelque surfaces neutres. D'après cela il est demandé de considérer les parties de l'appareil volant comme une structure d'éléments finis à trois dimensions.

## CHAPITRE 3

# résolution numérique des problèmes aéroélastiques

➤ **Modèle éléments finis d'un A380**



### **III. Résolution numérique des problèmes aéroélastiques :**

#### **III.1. Introduction :**

Les méthodes aérodynamiques linéaires sont largement utilisées pour la prédiction de la stabilité aéroélastique de l'avion. Lorsque les effets visqueux sont négligeables, les méthodes basées sur la résolution des équations du potentiel linéarisées [19.20] sont bien adaptées pour la simulation aéroélastique dans les régimes subsonique et supersonique. Ces méthodes ne nécessitent que la discrétisation surfacique des formes aérodynamiques et permettent l'évaluation des forces aérodynamiques instationnaires.

Toutefois dans le domaine transsonique, la physique de l'écoulement est dominée par les non-linéarités et par les effets dissipatifs. Les non linéarités et les effets dissipatifs induisent une forte interaction entre l'écoulement moyen et les fluctuations instationnaires. Le découplage temporel de l'aérodynamique en une partie stationnaire et instationnaire devient alors impossible. Pour ces raisons, les méthodes aérodynamiques simplifiées sont peu adaptées à la prédiction du flottement transsonique.

La simulation numérique du système aéroélastique peut être effectuée dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. L'approche fréquentielle est la plus répandue dans la communauté des aéroélasticiens. Cette technique consiste à imposer à partir d'une position d'équilibre stationnaire, un mouvement harmonique de faible amplitude à la structure suivant un de ses modes propres naturels. Une analyse harmonique des forces aérodynamiques instationnaires permet alors la résolution du système aéroélastique dans le domaine fréquentiel. Cependant cette approche nécessite un grand nombre de simulations instationnaires afin de déterminer la frontière de flottement [21.22]. La résolution du système couplé dans le domaine fréquentiel ne fait intervenir que les premiers harmoniques de l'aérodynamique instationnaire, ce qui est insuffisant si l'aérodynamique a un caractère fortement non-linéaire. Toutefois,

Les méthodes fréquentielles sont souvent employées afin de déterminer les frontières de flottement en régime transsonique malgré ces limitations théoriques. Pour le régime de vol transsonique, les prédictions numériques sont éloignées des mesures expérimentales malgré une nette amélioration des résultats apportés par la prise en compte de la viscosité du fluide. La qualité de la méthode fréquentielle sur la prédiction du flottement est en partie attribuable au phénomène physique du flottement qui ne fait intervenir que les premiers modes de torsion et de flexion de l'aile.

Lorsque l'aérodynamique est fortement non linéaire, la résolution du système couplé dans le domaine temporel est nécessaire. Les premiers calculs couplés dans le domaine temporel sont apparus à la fin des années 70. La plupart des calculs directs présent dans la littérature simulent des systèmes aéroélastiques à très peu de degrés de liberté. La principale difficulté dans l'approche temporelle est la simulation instationnaire de l'aérodynamique qui nécessite en général des algorithmes de déformation de maillage. Toutefois, la plupart des calculs directs utilisent des méthodes aérodynamiques simplifiées qui permettent de s'affranchir des problèmes de déformation du maillage aérodynamique. Peu de calculs instationnaires sont nécessaires avec l'approche temporelle pour la détermination de la frontière de flottement. Cet avantage est important, dès lors que des méthodes aérodynamiques de type Navier-Stokes 3D doivent être utilisées.

Les résultats sont très encourageants malgré une surestimation de la frontière de flottement par rapport aux données expérimentales. Le développement de méthodes numériques résolvant le système couplé dans le domaine temporel est nécessaire, d'une part pour l'amélioration de la prédiction de la frontière de flottement dans le régime transsonique, mais aussi pour la prédiction du phénomène non linéaire des cycles limites.

Le premier paragraphe décrit la modélisation du système aéroélastique. Les techniques numériques nécessaires afin de simuler le système fluide-structure dans le domaine temporel sont exposées dans le paragraphe suivant. Bien que l'approche modale ne soit pas utilisée dans cette étude, elle est présentée et en particulier la méthode V-g puisque qu'elle est la plus couramment utilisée pour la détermination

de la frontière du flottement. Les techniques de calcul pour la simulation directe sont ensuite présentées comme le couplage temporel, spatial des équations et les méthodes de déformation de maillage.

### III.1. Le système aéroélastique :

On considère une structure dans une configuration de référence. La structure est un solide déformable occupant un domaine  $\Omega$  fermé borné de  $\mathbb{R}^3$ . La frontière du domaine est soumise à des forces aérodynamiques. Le couplage entre le fluide et la structure naît de l'interaction mutuelle entre les efforts appliqués par le fluide sur la structure et par la modification des formes aérodynamiques causée par la déformation de la structure. La vitesse de déplacement de la structure intervient également dans le couplage au travers une condition limite de vitesse imposée pour le système résolvant les équations de la dynamique des fluides.

#### III.1.1. Equations de Navier-Stokes :

La résolution des équations de Navier-Stokes permet d'obtenir les forces aérodynamiques qui agissent sur les surfaces aérodynamiques de la structure.

On rappelle brièvement les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles écrites sous forme adimensionnée en compressible avec un maillage mobile et déformable :

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \hat{F} - \frac{1}{Re} \hat{F}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \hat{G} - \frac{1}{Re} \hat{G}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \hat{H} - \frac{1}{Re} \hat{H}_v \right) = S_{GCL} \quad (III.1)$$

avec le vecteur d'état  $\hat{U}$  donné par :

$$\hat{U} = \left( \frac{1}{J} \right) U = \left( \frac{1}{J} \right) [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E]^T \quad (III.2)$$

Toutes les variables sont normalisées par une combinaison entre la densité à l'infini, la vitesse et la longueur caractéristique. Le terme source  $S_{GCL}$  apparaît lorsque le maillage est mobile et déformable. Ce terme source s'exprime sous la forme :

$$S_{GCL} = U \left[ \frac{\partial J^{-1}}{\partial t} + \left( \frac{\xi_t}{J} \right)_\xi + \left( \frac{\eta_t}{J} \right)_\eta + \left( \frac{\zeta_t}{J} \right)_\zeta \right] S_{GCL} = U \left[ \frac{\partial J^{-1}}{\partial t} + \left( \frac{\xi_t}{J} \right)_\xi + \left( \frac{\eta_t}{J} \right)_\eta + \left( \frac{\zeta_t}{J} \right)_\zeta \right] \quad (III.3)$$

Le champ de forces aérodynamiques  $f$  défini sur les surfaces aérodynamiques à valeurs dans est donné par la relation :

$$\vec{f} = - \int_{S_A} \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 C_p \vec{n} dS \quad (III.4)$$

#### III.1.2. Equation de la dynamique des structures :

Si on considère une structure continue décrite dans un espace de dimension infinie, elle peut être discrétisée en éléments finis ramenant les déplacements (ou degrés de liberté) à un espace de dimension finie. Le principe de Halmilton exprime que le mouvement de la structure élastique non conservatif entre deux instants  $(t_1 \text{ et } t_2)$  s'effectue de telle sorte que la fonctionnelle  $\int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt$  soit stationnaire.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W^* dt = 0, \quad (III.5)$$

Avec  $W^*$  le travail des forces non conservatives,  $T$  l'énergie cinétique et  $V$  l'énergie potentielle totale qui s'écrit :

$$T = -\frac{1}{2} \int_V \rho dV \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (III.6)$$

$$V = U - W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_{\partial\Omega} \bar{\phi}_i u_i dS - \int_V f_i u_i dV$$

Avec  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$  respectivement le tenseur des contraintes et le tenseur des déplacements,  $W$  le travail des forces extérieures.

Le problème continu est discrétisé en un nombre fini de degrés de liberté. Une approximation des déplacements est réalisée en séparant les variables d'espace et de temps. Chaque composante du déplacement s'écrit alors sous la forme :

$$\tilde{u}_j = (x, y, z) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y, z) a_i(t) \quad (III.7)$$

Avec  $a_i(t)$  les coordonnées généralisées fonction du temps  $t$  et  $\phi_i(x, y, z)$  les fonctions bases. De même les composantes de la vitesse s'écrivent :

$$\dot{\tilde{u}}_j = (x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y, z) \dot{a}_i(t) \quad (III.8)$$

On peut exprimer le Lagrangien  $L = T - V$  à l'aide des coordonnées généralisées et de leurs dérivées après intégration des fonctions connues par rapport aux coordonnées d'espace :

$$\tilde{L} = T[\dot{\tilde{u}}_j] - V[\tilde{u}_j] = T[\dot{a}_i] - V[a_i] \quad (III.9)$$

Pour les systèmes non conservatifs, le principe de Halmilton devient :

$$\partial \int_{t-1}^{t_2} L[a_i, \dot{a}_i, t] dt + \int_{t-1}^{t_2} \partial W^* dt \quad (III.10)$$

Il s'agit d'un problème variationnel classique à  $n$  fonctions arguments  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$  de la variable temps. Si la linéarisation du travail virtuel des forces non conservatives causée par les accroissements virtuels des coordonnées généralisées peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des  $S_{\alpha i}$  soit :

$$\partial W^* = \sum_i Q_i^* \partial a_i \quad (III.11)$$

alors les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial L}{\partial a_i} - Q_i^* = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial T}{\partial a_i} + \frac{\partial U}{\partial a_i} = Q_i + Q_i^* \quad (III.12)$$

Avec  $Q_i$  la force généralisée correspondant à la coordonnée  $a_i$  et  $Q_i^*$  la force généralisée de dissipation correspondant à la coordonnée  $a_i$ .

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations du mouvement du système à partir des expressions des énergies cinétique, potentielle et de dissipation. Si la méthode de discrétisation choisie est une méthode d'éléments finis basée sur le déplacement, les déplacements aux noeuds  $q_i$  joue le rôle de coordonnées généralisées.

Les équations de Lagrange s'écrivent alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i + F_i^* \quad (III.13)$$

Dans le cas des petits mouvements de systèmes élastiques, les énergies cinétique et de déformation s'expriment sous forme quadratique symétrique des vitesses de déplacement aux noeuds soient :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i M_{ij} \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \tag{III.14}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i K_{ij} q_j = \frac{1}{2} q^T k q$$

Les forces de dissipation visqueuse s'écrivent  $F_i^* = -C\dot{q}$  les équations de Lagrange s'écrivent alors :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F(t) \tag{III.15}$$

Avec K la matrice des raideurs, M la matrice des masses et C la matrice d'amortissement. Dans le cas de l'aéroélasticité, les forces extérieures  $F(t)$  se réduisent aux forces aérodynamiques projetées dans les équations de la structure.

### III.2. Méthodes modales :

Les équations du mouvement de la structure à  $n$  degrés de liberté s'écrivent :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F(t) \tag{III.16}$$

La solution de ce système peut s'obtenir en étudiant les modes de vibrations libres, c'est à dire la superposition de solution sans second membre, soit :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = 0 \tag{III.17}$$

Les solutions propres du système sans second membre sont les modes de vibrations de la structure. Dans le cas général, ces modes propres sont complexes et leur interprétation physique n'est pas évidente. Pour éviter cela, l'amortissement de la structure est supposé nul et les modes de vibrations libres sont obtenus en cherchant les solutions du système :

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \tag{III.18}$$

Les solutions harmoniques sont du type  $q = xe^{j\omega t}$  d'où les équations modales :

$$Kx = \omega^2 Mx \tag{III.19}$$

Le système homogène de dimension  $n$  ci-dessus a  $n$  valeurs propres réelles (carré des pulsations propres) :

$$\lambda_1 = \omega_1^2; \lambda_2 = \omega_2^2; \dots; \lambda_n = \omega_n^2 \tag{III.20}$$

aux quelles correspondent  $n$  solutions propres réelles non triviales qui sont les modes propres de vibration du système sans amortissement, souvent appelés modes réels, soient :

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)} \tag{III.21}$$

On appelle la matrice modale, la matrice  $(n, n)$  dont les colonnes sont constituées par les  $n$  vecteurs propres solution de :

$$\begin{aligned} Kx &= \omega^2 Mx \\ \Phi &= [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}] \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

En utilisant une base modale tronquée ( $m < n$ ), on a l'expression fondamentale suivante :

$$q = \sum_{i=1}^m x^{(i)} \eta_i(t) = \Psi \eta \quad (\text{III.23})$$

Avec  $\eta = [\eta_1(t), \dots, \eta_m(t)]^T$  le vecteur des coordonnées modales,  $\Psi = [x^{(1)}, \dots, x^{(m)}]^T$  la matrice modale tronquée. En outre, le passage à la base modale tronquée diagonalise les matrices de masse et de rigidité par la propriété d'orthogonalité des modes.

$$\begin{aligned} \Psi^T M \Psi &= \tilde{M} \\ \Psi^T K \Psi &= \tilde{K} \\ \Psi^T C \Psi &= \tilde{C} \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Avec  $\tilde{M}$  la matrice diagonale  $(m, m)$  des masses généralisées et  $\tilde{K}$  la matrice diagonale  $(m, m)$  des rigidités généralisées. Le changement de base ne diagonalise pas la matrice d'amortissement  $C$ , ainsi la matrice d'amortissement modal  $\tilde{C}$  est pleine. Le système des équations modales du mouvement est obtenu en utilisant la relation (III.23) :

$$\tilde{M} \ddot{\eta} + \tilde{C} \dot{\eta} + \tilde{K} \eta = \Psi^T F(t) = f(t) \quad (\text{III.25})$$

Avec  $f(t)$  le vecteur des forces modales.

La méthode de superposition modale est largement utilisée dans les milieux industriels, cependant cette méthode est basée sur l'utilisation de bases modales tronquées. Cette troncature modale peut induire des erreurs inacceptables sur les réponses dynamiques.

### III.2.1. La méthode g :

Plusieurs méthodes modales résolvant l'équation du flottement ont été introduites. La méthode P-K [23] a été développée afin d'analyser la réponse mode par mode de l'équation du flottement. Son utilisation est devenue courante dès 1965 dans la communauté des aéroélasticiens. Chen a [24] introduit dans les équations du flottement un terme d'amortissement afin d'assurer une meilleure fiabilité des prédictions tout en généralisant les méthodes K et P-K, c'est la méthode g. La méthode g est actuellement la plus fiable pour la résolution des équations du flottement en domaine fréquentiel.

Si on reprend l'équation de la dynamique des structures sans amortissement, et que l'on effectue une transformée de Laplace, l'équation du flottement devient :

$$\left( s^2 + K - q_\infty Q \left( \frac{\delta L}{V} \right) \right) q = 0 \quad (\text{III.26})$$

$$\begin{aligned} M &= \Phi^T \tilde{M} \Phi \\ K &= \Phi^T \tilde{K} \Phi \\ Q \left( \frac{\delta L}{V} \right) &= \Phi^T \tilde{H} \left( \frac{\delta L}{V} \right) \Phi \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

$M$  et  $K$  les matrices de masses et de raideurs généralisées et  $Q$  la matrice des forces aéroélastiques généralisées.

$\bar{H}$  est la transformée de  $H$  dans le domaine de Laplace.

$H$  représente la fonction de transfert aérodynamique et est donnée par la force aérodynamique :

$$F_a(x(t)) = \int_0^t q_\infty H\left(\frac{\delta L}{V}\right)(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (III.28)$$

Avec  $x(t)$  la déformation de la structure.

En introduisant dans l'équation 7.26 le paramètre de Laplace adimensionné  $p = \frac{\delta L}{V} = (g + ik)$

où  $k$  est la fréquence réduite  $k = \frac{wL}{V}$  est la fréquence harmonique d'oscillation et  $g = \gamma k$

avec  $\gamma$  le taux transitoire de dégénérescence, on obtient alors l'équation de la méthode P-K

$$\left[ \frac{v^2}{L^2} Mp^2 + K - \frac{1}{2} \rho V^2 Q(ik) \right] q = 0 \quad (III.29)$$

La matrice complexe  $Q(ik)$  peut s'écrire sous la forme  $Q(ik) = Q^R + iQ^I$ , avec  $Q^R$ ,  $Q^I$ , respectivement les parties réelles et imaginaires et en substituant le paramètre  $p$  par  $p = g + ik$ , on obtient la relation :

$$\left[ \frac{v^2}{L^2} Mp^2 + K - \frac{1}{2} \rho V^2 \left( \frac{Q^I}{k} \right) g - \frac{1}{2} \rho V^2 Q(ik) \right] q = 0 \quad (III.30)$$

Ainsi, par rapport à l'équation (III.29), le terme additionnel  $-\frac{1}{2} \rho V^2 \left( \frac{Q^I}{k} \right) g$  est la matrice

d'amortissement aérodynamique. Chen [24] démontre que ce terme d'amortissement aérodynamique n'est seulement valide que pour des faibles valeurs de  $k$  et pour des variations linéaires. On propose alors la méthode  $g$  afin d'assurer un terme d'amortissement additionnel valide pour toutes les valeurs de  $k$ . Le principe de base de la méthode est l'hypothèse d'existence d'une fonction analytique  $Q(p) = Q(g + ik)$  dans le domaine  $g \geq 0$  et  $g \leq 0$ . Cette fonction peut être décomposée le long de l'axe imaginaire autour de  $g = 0$  pour des  $g \ll 0$  :

$$Q(p) \approx Q(ik) + g \frac{\partial Q(p)}{\partial g} \Big|_{g=0} \Leftrightarrow Q(p) \approx Q(ik) + gQ'(ik) \quad (III.31)$$

En remplaçant  $Q(ik)$  par  $Q(p)$  dans l'équation de la méthode P-K (III.29), on obtient l'équation de la méthode  $g$  :

$$\left[ \frac{v^2}{L^2} Mp^2 + K - \frac{1}{2} \rho V^2 Q'(ik) g - \frac{1}{2} \rho V^2 Q(ik) \right] q = 0 \quad (III.32)$$

Pour  $g = 0$ , les méthodes  $g$  et  $P - K$  sont équivalentes et fournissent les même frontières de flottement pour un amortissement nul.

Afin de résoudre cette équation de la méthode  $g$ , on a introduit un algorithme de résolution. En substituant,  $p = g + ik$  dans l'équation (III.32). On obtient un système différentiel du second ordre :

$$\left[ g^2 A + gB + C \right] q = 0 \quad (III.33)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{V_z}{L}\right)^2 M \\
 B &= 2k \left(\frac{V}{L}\right)^2 M - \frac{1}{2} \rho V^2 Q'(ik) + Z \left(\frac{V}{L}\right) \\
 C &= -k^2 \left(\frac{V}{L}\right)^2 M + K - \frac{1}{2} \rho V^2 Q(ik) + ikZ \left(\frac{V}{L}\right)
 \end{aligned}
 \tag{III.34}$$

La matrice  $Z$  a été incluse dans le système pour prendre en compte l'amortissement modal de la structure. La solution du système (III.33) existe lorsque  $im(g) = 0$ . L'équation (III.34) peut s'écrire sous la forme :

$$[D - gI]X = 0
 \tag{III.35}$$

Avec :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -A^{-1}C & -A^{-1}C \end{bmatrix}
 \tag{III.36}$$

Lorsque la solution  $im(g) = 0$  est trouvée pour une valeur de  $k$ , la fréquence de flottement  $w_f$  et l'amortissement  $2\gamma$  sont calculés par les relations :

$$\begin{aligned}
 w_f &= k \left(\frac{V}{L}\right) \\
 2\gamma &= 2 \left[ \frac{\text{Re}(g)}{k} \right]
 \end{aligned}
 \tag{III.37}$$

La méthode  $g$  revient tout d'abord à la recherche des valeurs propres du système (III.36). Cette recherche peut être effectuée en utilisant un schéma du type prédicteur-correcteur. Les méthodes d'analyse modale nécessitent au cours de leur résolution une matrice  $Q(ik)$  des efforts aérodynamiques pour chaque fréquence  $k$  résolue. Le nombre de données aérodynamiques pour la recherche du flottement peut vite devenir très important et l'utilisation de méthodes aérodynamiques complexes devient alors trop coûteuse numériquement.

Pour éviter cela, la simulation directe est préférable puisqu'elle ne nécessite que très peu de calculs aérodynamiques.

### III.3. La Simulation directe :

La simulation directe consiste à coupler numériquement les équations de la dynamique de la structure avec les équations de la dynamique des fluides. La figure (III.1) représente le cycle temporel d'une simulation aéroélastique directe avec les différentes étapes de couplage et de calcul. Le couplage permet de simuler numériquement dans le domaine temporel l'interaction entre le fluide et la structure. Le fluide et la structure sont intégrés séparément dans le temps par leurs solveurs individuels, le couplage des solveurs est alors effectué par un traitement numérique spécifique.

Ainsi, l'une des principales difficultés dans l'approche directe est dans le traitement numérique du couplage. Les calculs directs ainsi que les techniques de couplage ont été largement étudiées.

Le couplage en temps peut être effectué en utilisant une approche dite "décalée". L'approche décalée a été introduit par park [25] et est la plus couramment utilisée (pranante [26], alonso [27], farhat [28] piperno [29,30] a étudié les algorithmes de couplage en temps et a mis en évidence les grossières erreurs pouvant intervenir lors de l'utilisation d'un algorithme de faible précision. Ainsi, le bilan énergétique du système aéroélastique peut être faussé par un apport ou par une dissipation d'énergie d'origine numérique. Il est ainsi possible d'observer une instabilité ou un amortissement du système aéroélastique causé par la faible précision du couplage numérique.

L'utilisation de discrétisations spatiales différentes pour le fluide et la structure nécessite des techniques de couplage en espace. En effet, la discrétisation spatiale pour la résolution des équations de la dynamique de la structure est générée afin de permettre une représentation précise des principaux modes de structure. La discrétisation spatiale utilisée pour la résolution des équations de la dynamique des fluides est effectuée en considérant les paramètres géométriques des surfaces aérodynamiques afin de prédire correctement l'apparition de structures aérodynamiques (choc, couche limite, tourbillon...). L'incompatibilité entre les deux discrétisations est généralement totale et le transfert des données aérodynamiques vers le solveur structure nécessite une procédure d'interpolation spatiale. Maman et farhat [28] proposent des algorithmes d'interpolation spatiale afin de résoudre ce problème, lesquels ont été appliqués avec succès sur des configurations complexes.

Parmi les importantes difficultés liées au couplage direct entre un code fluide et un code structure, la modification du maillage fluide imposée par le mouvement de la structure est techniquement le plus délicat. Deux méthodes sont en général employées : La méthode des ressorts qui consiste à considérer le segment des mailles comme un système de ressort à raideur constante, (batina [21,31,32], farhat [33].) et la méthode algébrique des interpolations transmis (seulement utilisable pour des maillages structurés) qui consiste en la reconstruction le maillage d'après la modification des frontières (wong [34], thompson [35]).

Nous allons présenter dans cette partie le traitement numérique en temps et en espace du couplage des solveurs fluide et structure. Le couplage en temps basé sur l'approche décalée a été utilisé avec succès pour le calcul du flottement d'un profil à peu de degrés de liberté présenté dans une partie suivante. Les techniques de couplage en espace ne sont pas nécessaires pour les cas tests que nous avons sélectionnés, elles ne sont donc pas utilisées dans cette étude.

### **III.3.1. Couplage en temps :**

Deux types de couplage existent : La première approche dite "décalée" consiste en un code structure et un code fluide séparé, avec un transfert d'information entre les deux codes à chaque intervalle de temps. L'avancée en temps est parallèle pour les deux codes et l'intervalle de temps est déterminé en fonction du problème étudié.

Le deuxième approche, dite "monolithique" consiste en un unique système décrivant le fluide et la structure. Le couplage en temps est alors implicite à chaque pas de temps physique blom [36].

Toutefois, la nature des équations de la dynamique des fluides et de la dynamique des structures est très différente, ce qui rend l'approche complexe à mettre en oeuvre. Enfin, si l'approche monolithique assure qu'à chaque itération le système est effectivement convergé pour le fluide et la structure, le gain en précision est faible compte tenu de la complexité des algorithmes de couplage. Blom [36]

L'approche décalée est en général la plus utilisée car elle présente l'avantage d'être plus facile à mettre en oeuvre que l'approche monolithique. De plus, elle offre la possibilité d'utiliser des codes pour la structure et pour le fluide de nature très différente (éléments finis, volumes finis...). Les échelles de temps de la physique de l'écoulement et de la dynamique de la structure peuvent être très différentes.

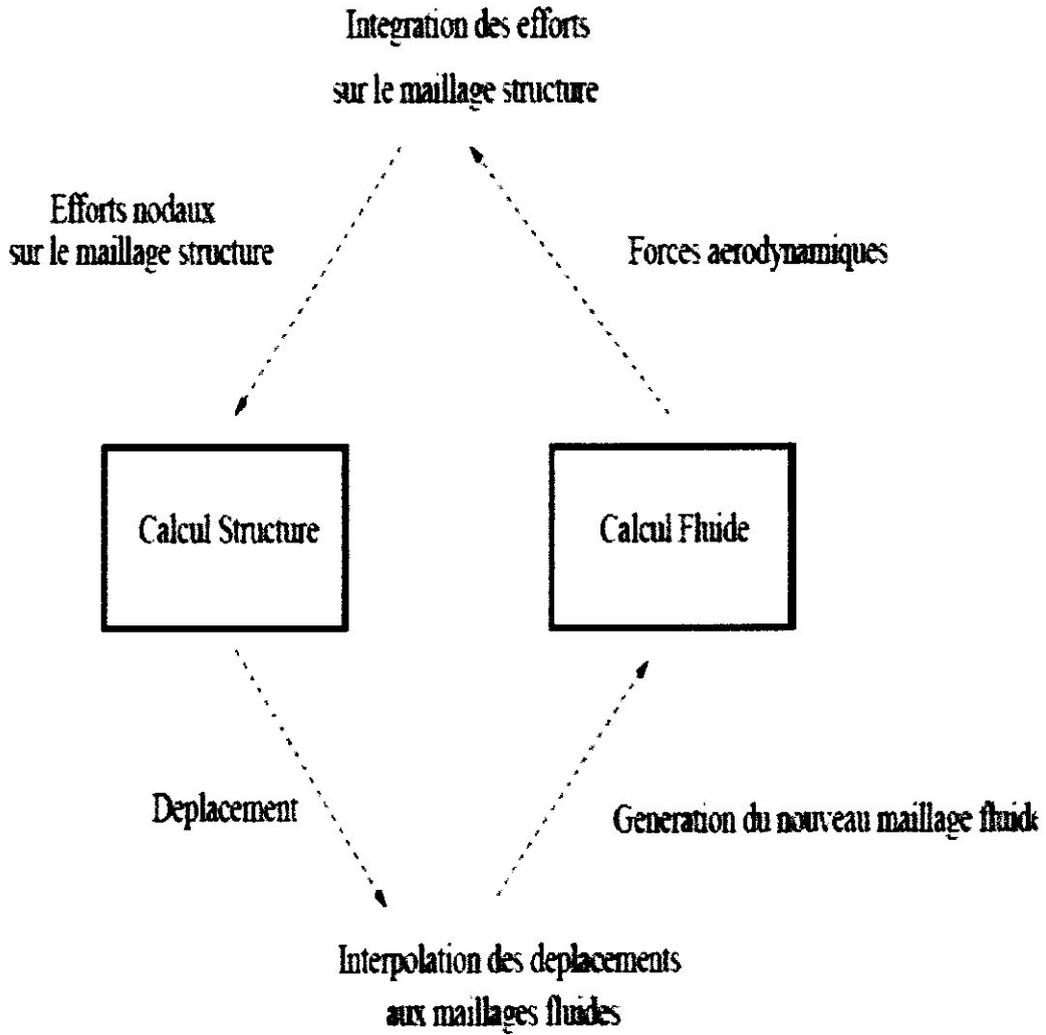


Figure III.1. Cycle de simulation aéroélastique directe.

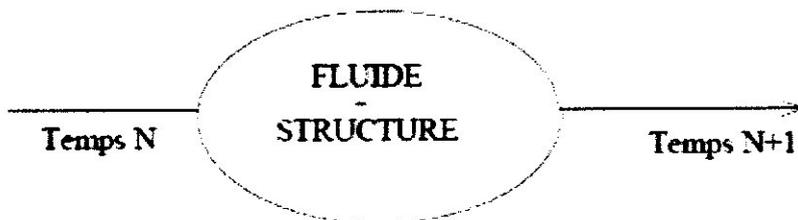


Figure III.2. Approche monolithique.

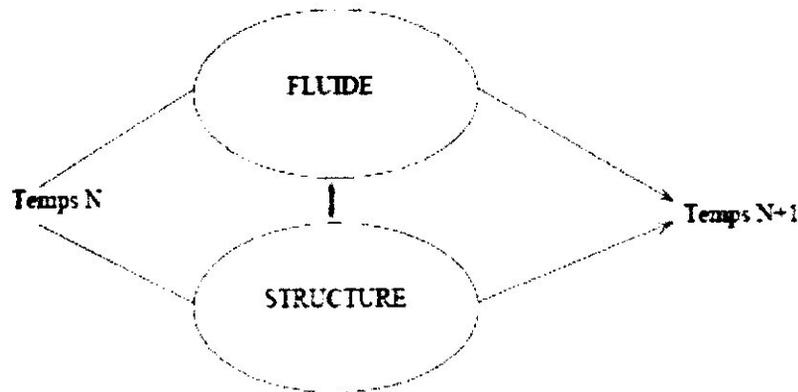


Figure III.3. Approche décalée.

### III.3.1.1. Algorithme décalé $\Delta t_s$ :

L'algorithme de base de l'approche décalée consiste à définir un même pas de temps d'intégration pour le fluide et pour la structure. La taille du pas de temps est sélectionnée comme étant le minimum entre le pas de temps de structure  $\Delta t_s$  et le pas de temps fluide  $\Delta t_f$  :

$$\Delta t = \min(\Delta t_s, \Delta t_f) \quad (\text{III.38})$$

Durant cette étude, les méthodes d'intégration temporelle sont implicites pour la structure (schéma de Newmark) et pour le fluide (méthode du pas de temps dual). Ainsi, le pas de temps n'est sélectionné que sur des considérations physiques. Les phénomènes physiques de l'écoulement et la structure peuvent avoir des échelles de temps très différentes. Généralement, les échelles de temps de l'écoulement sont les plus petites et sont déterminantes pour l'algorithme. Au pas de temps  $t^n$ , le vecteur d'état du fluide et les déplacements de la structure sont connus. Pour atteindre le pas de temps  $t^{n+1}$ , la procédure suivante est utilisée :

- 1- à partir efforts aérodynamiques, calculer le déplacement de la structure au temps  $t^{n+1}$
- 2- Déterminer le mouvement du maillage induit par le déplacement de la structure.
- 3- Intégrer les équations de la dynamique des fluides au temps  $t^{n+1}$ .
- 4- Mettre à jour les efforts aérodynamiques.

Cet algorithme est précis au premier ordre en temps. Le couplage est schématiquement représenté sur la figure III.4. Le décalage en temps implique que les domaines fluide et structure ne sont pas identiques à un instant donné. Toutefois, Piperno [29] a montré que l'utilisation d'une prédiction de la vitesse (approche décalée) est plus précise que le calcul utilisant la vitesse exacte.

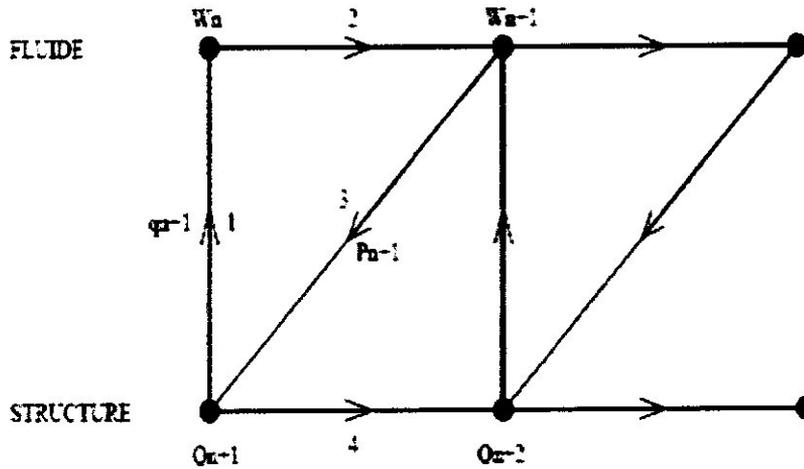


Figure III.4. Algorithme décalé

**III.3.1.2. Algorithme décalé sous-itéré :**

Les critères de stabilité et de précision des différentes méthodes numériques (fluide et structure) entraînent des pas de temps de structure  $\Delta_t$  et de fluide  $\Delta_f$  différents. Cette différence peut atteindre plusieurs ordres de grandeur et il être inutile de résoudre les problèmes fluide ou structure à chaque pas de temps. Dans ce cas, une légère modification de l'algorithme précédent peut être effectuée. Ainsi, dans la plupart des cas le système fluide nécessite le plus petit pas de temps et on procède alors à  $n_f$  itérations de pas de temps  $\Delta_f$ . Le système structure est alors avancé en temps d'un pas de temps égal à  $n_f \Delta_f$ . piperno [29] démontre l'avantage en terme de temps CPU sur l'algorithme précédent. Cet algorithme est précis au premier ordre. L'algorithme est décrit dans la figure (III.5).

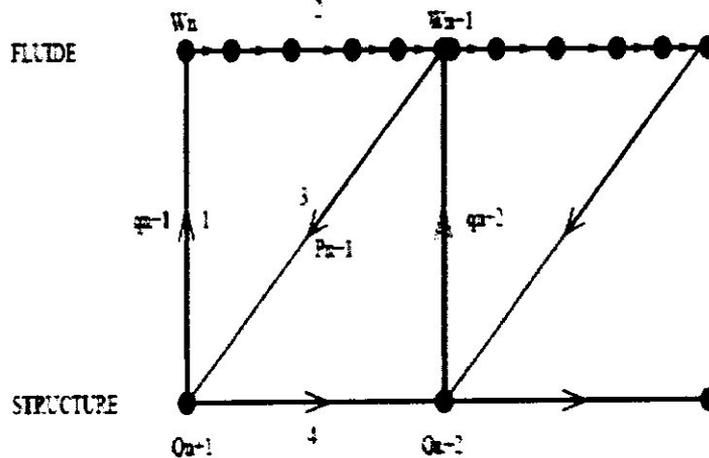


Figure III.5. Algorithme décalé sous-itéré.

**III.3.1.3. Algorithme parallèle :**

Les algorithmes décalés sont de nature séquentielle. Chaque système (structure ou fluide) doit être résolu afin de mettre à jour les informations nécessaires à l'avancée en temps de l'autre système. Ainsi, l'avancée en temps du système fluide nécessite le calcul des déplacements de la structure en

fonction des efforts aérodynamiques calculés au pas de temps précédent. Dans le cas de structure contenant un nombre important de degrés de liberté, le coût CPU des déplacements de la structure peut devenir important. Dans ce cas, l'utilisation d'algorithme parallèle peut devenir intéressante. L'algorithme parallèle est schématiquement décrit dans la figure (III.6). Le fluide et la structure sont résolus parallèlement durant l'intervalle  $[t^n, t^{n+1}]$ . Cet algorithme est précis au premier ordre et son utilisation sur machine parallèle permet de réduire le temps CPU dans l'avancée en temps du système couplé.

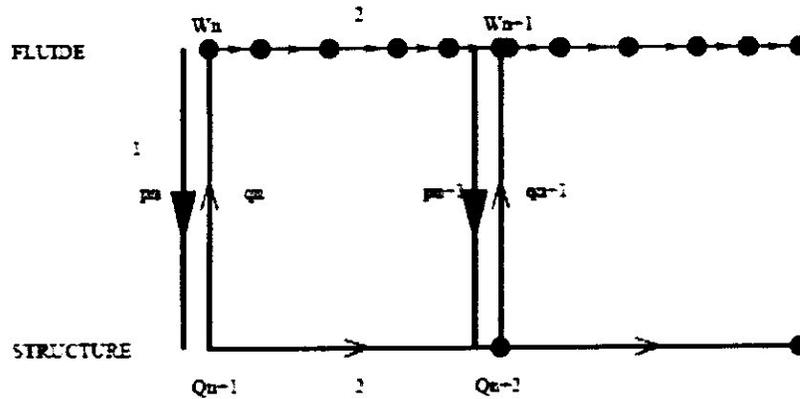


Figure III.6. algorithme décalé sous-itéré

**III.3.2. Couplage en espace :**

En général le fluide et la structure ont des discrétisations spatiales différentes. En particulier, les maillages pour la structure ne représentent pas les zones bords d'attaque et bords de fuite qui sont pourtant primordiaux pour le calcul aérodynamique. Cette différence de discrétisation résulte en une interface entre le fluide et la structure incompatible voir figure (III.7). Il est nécessaire de définir une procédure d'interpolation pour assurer le transfert des déplacements de la structure aux noeuds du maillage fluide et afin de définir les pressions sur les noeuds du maillage structure. (Maman [28]) propose une procédure afin d'interpoler les données d'une discrétisation à l'autre. Chen [24] expose un algorithme de transfert de données à une interface discrète fluide-structure incompatible. La première procédure consiste à repérer les cellules fluides et structures en contact et aux calculs des coordonnées locaux des noeuds de structure dans les cellules fluides et vice et versa. Les forces aérodynamiques s'appliquant sur la surface mouillée de l'élément de structure peuvent s'écrire sous la forme :

$$F_i = - \int_{\Omega} N_i p \bar{n} d\sigma \tag{III.39}$$

avec  $\Omega$ , le support géométrique de la surface mouillée de l'élément de structure e,  $p$  le champ de pression défini aux noeuds du maillage fluide,  $\bar{n}$  le vecteur normal et  $N_i$  les fonctions de base associées aux noeuds  $i$ . Cette intégrale peut être évaluée à partir d'une règle de quadrature :

$$F_i = - \sum_{g=1}^{g=n_g} w_g N_i(X_g) p(X_g) \tag{III.40}$$

Avec  $w_g$  le poids du point de Gauss  $X_g$ .

De la même manière, lorsque la structure se déforme, le déplacement des cellules fluides à l'interface fluide-structure est donné par une interpolation régulière de type élément finis :

$$\psi(vx_j) = - \sum_{k=1}^{k=w_e} N_k(v_j) q_k \tag{III.41}$$

Avec  $vx_j, w_e, v_j, q_k$  respectivement les noeuds du maillage fluide, le nombre de noeuds structures mouillés et l'élément structure e le plus proche, les coordonnées naturelles de  $vx_j$  et le déplacement du  $k$  ième noeud de l'élément e.

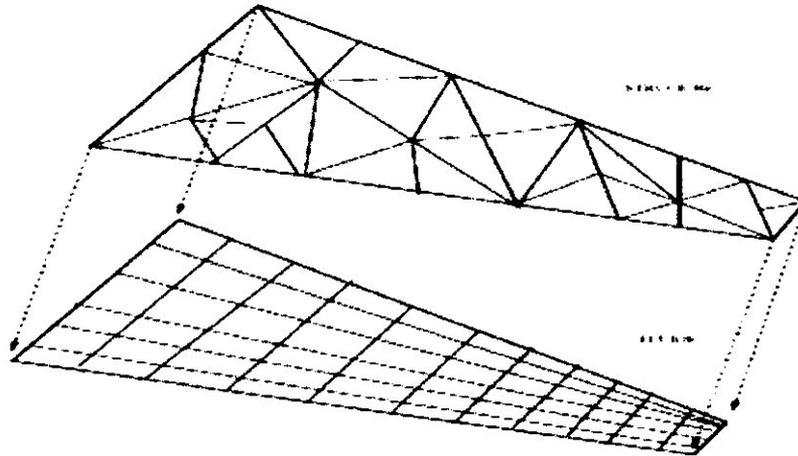


Figure III.7. incompatibilité des maillages fluide et structure

### III.3.3. Schéma de Newmark :

Lorsque les forces aérodynamiques ont été calculées au temps  $t^{n+1}$  à partir de la nouvelle forme aérodynamique donnée par les déplacements de la structure au temps  $t^n$ , il est nécessaire d'intégrer temporellement l'équation de la structure (III.15) afin d'obtenir les déplacements de la structure au temps  $t^{n+1}$ . Ainsi, les pressions  $p^{n+1}$ , vitesse et l'accélération de la structure  $s^n, \dot{s}^n, \ddot{s}^{n+1}$  sont connues et transformées respectivement en force généralisée  $Q^{n+1}$  et en coordonnées généralisées  $\bar{q}^n, \dot{\bar{q}}^n, \ddot{\bar{q}}^n$ . Pour actualiser au temps  $t^{n+1}$  les coordonnées généralisées,  $\bar{q}^{n+1}, \dot{\bar{q}}^{n+1}, \ddot{\bar{q}}^{n+1}$ . le schéma de Newmark est le plus couramment utilisé. Le schéma de Newmark s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{q}}^{n+1} &= \dot{\bar{q}}^n + [(1-\alpha)\ddot{\bar{q}}^n + \alpha\ddot{\bar{q}}^{n+1}] \\ \bar{q}^{n+1} &= \bar{q}^n + \Delta_t \dot{\bar{q}}^n + \Delta_t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\bar{q}}^n + \beta \ddot{\bar{q}}^{n+1} \right] \\ M\ddot{\bar{q}}^{n+1} + C\dot{\bar{q}}^{n+1} + K\bar{q}^{n+1} &= Q^{n+1} \end{aligned} \tag{III.42}$$

Dans le cas où les constantes sont  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1/4$ , la méthode d'intégration en temps est égale à la règle du trapèze et à la particularité d'être inconditionnellement stable. Cette propriété de stabilité permet de ne pas avoir de limitation sur le pas de temps d'intégration. Lorsque les valeurs des constantes sont  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1/6$ , la méthode de Newmark est équivalente à une méthode d'accélération linéaire.

L'algorithme de résolution (bathe [5]) consiste, après une procédure d'initialisation afin de fixer les valeurs  $q^0, \dot{q}^0, \ddot{q}^0$ , à sélectionner le pas de temps  $\Delta t$  et les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de la méthode de Newmark. Les constantes d'intégration sont alors données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} & \alpha_1 &= \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\beta \Delta t} & \alpha_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1 \\ \alpha_4 &= \frac{1}{\beta \Delta t} - 1 & \alpha_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\alpha}{\beta} - 2 \right) \\ \alpha_6 &= \Delta t (1 - \alpha) & \alpha_7 &= \alpha \Delta t \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

Raideur effective est alors donnée par la relation :

$$\hat{K} = K + \alpha_0 M + \alpha_1 C \quad (\text{III.44})$$

Ensuite pour chaque pas de temps  $t^{n+1}$ , la charge effective  $Q^{n+1}$  est calculée par la relation

$$\hat{Q}^{n+1} = Q^{n+1} + M (\alpha_0 q^n + \alpha_2 \dot{q}^n + \alpha_3 \ddot{q}^n) + C (\alpha_1 q^n + \alpha_4 \dot{q}^n + \alpha_5 \ddot{q}^n) \quad (\text{III.45})$$

Le déplacement, la vitesse et l'accélération au temps  $t^{n+1}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} q^{n+1} &= \hat{K}^{-1} \hat{Q}^{n+1} \\ \ddot{q}^{n+1} &= \alpha_0 (q^{n+1} - q^n) - \alpha_2 \dot{q}^n - \alpha_3 \ddot{q}^n \\ \dot{q}^{n+1} &= \dot{q}^n + \alpha_6 \ddot{q}^n + \alpha_7 \ddot{q}^{n+1} \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

La charge effective est déterminée à partir des efforts aérodynamiques à l'instant  $t^{n+1}$ , lesquels sont inconnus. Il est ainsi nécessaire de déterminer  $\hat{Q}^{n+1}$  pour avancer le système. L'approximation à l'ordre zéro est la plus couramment utilisée  $\hat{Q}^{n+1} = \hat{Q}^n$  (blom [36] [37], wilcox [38]) Toutefois l'utilisation de cette approximation zéro impose l'utilisation d'un pas de temps petit afin de s'assurer que le schéma d'intégration temporelle ne perturbe pas le système aéroélastique par l'injection ou la dissipation d'énergie. Une approximation du premier ordre (par exemple,  $\hat{Q}^{n+1} = 2\hat{Q}^n - \hat{Q}^{n-1}$  peut être utilisée afin de réduire l'erreur du schéma d'intégration.

### III.3.4. Maillage déformable :

La modification des formes aérodynamiques produit par le déplacement de la structure nécessite une procédure de modification du maillage fluide à chaque pas de temps. Dans le cas de modèle aérodynamique nécessitant simplement le maillage surfacique des formes aérodynamiques (méthodes des singularités...), la modification du maillage se réduit à une interpolation des déplacements de la structure sur les noeuds du maillage fluide. Toutefois, les méthodes aérodynamiques de type Euler/Navier-Stokes utilisent une discrétisation du domaine fluide et donc de maillage volumique. La modification des formes aérodynamiques induit une modification du maillage dans tout le domaine et il est nécessaire d'utiliser des techniques de remaillage à chaque cycle de résolution du système aéroélastique voir figure (III.1).

Il existe deux types de techniques de remaillage, la méthode des ressorts introduite par (batina [21]) est couramment utilisée pour le remaillage des maillages non structurés (farhate [28], blom [36]). Blom [36] propose une amélioration de la méthode des ressorts par une détermination des raideurs

effectuée afin d'éviter toute collision entre cellules lors du mouvement. elle introduit des amortisseurs afin d'améliorer la méthode et afin d'obtenir après mouvement des maillages de meilleure qualité. La deuxième technique, les interpolations transfinies sont uniquement dédiées aux maillages structurés et a été utilisées avec succès pour des calculs aéroélastiques wrong [39]. Les calculs aérodynamiques de type Navier-Stokes nécessitent des maillages raffinés près des parois. La petite taille des premières mailles (près des parois) est une des principales difficultés dans la modification des maillages Navier-Stokes. La méthode des ressorts se montre peu efficace pour ce type de maillage alors que la méthode des interpolations transfinies est par nature mieux adapté. En effet, les interpolations transfinies (TFI) est la méthode couramment utilisée par les logiciels commerciaux de génération de maillage (ICEM Hexa, CFD-Geom ...) et permet de contrôler la répartition des noeuds.

**III.3.4.1. La méthode des ressorts :**

La méthode des ressorts ("segment spring") a été introduite par batina [21.31.32] pour la simulation du mouvement en tangage d'un profil. Le principe de la méthode des ressorts est de considérer chaque segment constituant une cellule comme un ressort de raideur  $k_y$  fixé. Lorsque les segments des cellules sont considérés comme des ressorts à raideur fixée, il possède une longueur d'équilibre (pour laquelle les efforts sont nuls). Les ressorts sont supposés linéaires et la force  $\vec{F}_i$  au noeud  $i$  est donnée par la relation de Hook :

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{n_i} k_y (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i) \tag{III.47}$$

avec  $k_y$  la raideur du segment reliant le noeud  $i$  au noeud  $j$ ,  $\vec{\delta}_i$  le déplacement du noeud  $i$ ,  $n_i$  est le nombre de segments reliant le noeud  $i$  à ses voisins. La longueur d'équilibre est égale à la longueur des segments initiaux. A l'équilibre statique du système de ressorts, les efforts sont nuls. Ceci revient à résoudre un système linéaire du type  $A.x = b$  par une méthode itérative de Jacobi. L'équation à résoudre est :

$$\vec{\delta}_i^{k+1} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} k_y (\vec{\delta}_j^k)}{\sum_{j=1}^{n_i} k_y} \tag{III.48}$$

Les conditions limites de type Dirichlet sont données par la connaissance des déplacements à la frontière. Les valeurs des raideurs des ressorts sont prises comme étant inversement proportionnelles à la longueur des segments

$$k_y = \phi \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right]^\Psi \tag{III.49}$$

Avec  $\phi$  et  $\Psi$  des paramètres permettant de modifier la raideur des ressorts. Batina [40] propose des valeurs constantes égales à  $\phi = 1, \Psi = \frac{1}{2}$  Les noeuds sont alors déplacés en ajoutant le déplacement obtenu, après convergence de la méthode de Jacobi, aux coordonnées des noeuds

**III.3.4.2. Les interpolations transfinies:**

Ce paragraphe décrit une méthode algébrique de génération de maillage appelée interpolation transfinie. Cette méthode est la plus couramment utilisée pour la génération de maillages structurés. L'un des grands avantages de cette méthode est qu'elle permet le contrôle de la répartition des noeuds du maillage. Cette particularité permet dans le cas de maillage Navier-Stokes de fixer la taille des premières

mailles. De plus, les ressources CPU et mémoires nécessaires à cette méthode sont faibles comparés à la méthode des ressorts.

Les TFI utilisées pour la génération de maillage permettent de projeter les noeuds des frontières d'un maillage sur des formes géométriques. Ainsi, la génération de maillage utilisant les TFI consiste à construire des blocs de maillage structurés géométriquement simples (hexaèdre, pyramide ...) et de projeter les noeuds frontières sur les formes géométriques. La projection aux frontières est propagée par les TFI dans tout le maillage.

Les TFI ont été utilisées dans les années 80 pour la génération de maillage en CFD. L'utilisation des TFI pour la modification des maillages dans un cycle de résolution aéroélastique a été validée avec succès par plusieurs auteurs (Hardwich [41], Morton [42,43], Lui [44]). Hardwich [45] montre l'efficacité de la méthode pour la simulation aéroélastique d'un avion supersonique. Wrong [34] propose une méthode hybride utilisant la méthode des ressorts conjointement avec les TFI pour les maillages multi blocs structurés déformables. En fait, la méthode des ressorts n'est utilisée que pour déterminer le mouvement des vertex (entité topologique associée aux "edges") des blocs, les noeuds des blocs de maillages sont modifiés par une TFI.

Les techniques de génération de maillage algébrique sont des transformations de domaine rectangulaire structuré en un domaine physique ayant des frontières arbitraires figure (III.8). L'équation générale de ces transformations s'écrit :

$$X(\xi, \zeta, \eta) = [x(\xi, \zeta, \eta), y(\xi, \zeta, \eta), z(\xi, \zeta, \eta)] \tag{III.51}$$

Avec  $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \zeta \leq 1$  La représentation discrète de la transformation X s'écrit pour une grille structurée  $X(\xi_i, \zeta_j, \eta_k)$  avec:

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi_i &= \frac{j-1}{n_j-1} \leq 1 \\ 0 \leq \eta_j &= \frac{i-1}{n_i-1} \leq 1 \\ 0 \leq \zeta_k &= \frac{l-1}{n_l-1} \leq 1 \\ i &= 1, 2, \dots, n_i, j = 1, 2, \dots, n_j, k = 1, 2, \dots, n_k. \end{aligned} \tag{III.52}$$

Les TFI sont normalement utilisées pour générer une grille à partir de six faces de bloc. Cependant, il est possible d'utiliser une variante afin d'ajuster une grille existante à de nouvelles faces. Cette variante peut être utilisée afin de générer le maillage après une modification des formes aérodynamiques.

Si on considère une grille initiale  $\hat{X}(i, j, k)$  avec  $i = 1, 2, \dots, n_i, j = 1, 2, \dots, n_j, k = 1, 2, \dots, n_k$ . et les nouvelles frontières du maillage notées

$X(i, j, k), X(1, j, k), X(n_i, j, k), X(i, 1, k), X(i, n_j, k), X(i, j, 1), X(i, j, n_k)$  Le maillage projeté  $X(i, j, k)$  sur les nouvelles frontières est obtenu par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} X_1(i, j, k) &= \hat{X}(i, j, k) + \alpha_1(\xi) [X(1, j, k) - \hat{X}(1, j, k)] + \alpha_2(\xi) [X(n_i, j, k) - \hat{X}(n_i, j, k)] \\ X_2(i, j, k) &= X_1(i, j, k) + \beta_1(\eta) [X(i, 1, k) - X(i, 1, k)] + \beta_2(\eta) [X(i, n_j, k) - X(i, n_j, k)] \\ X(i, j, k) &= X_2(i, j, k) + \delta_1(\zeta) [X(i, j, 1) - X_2(i, j, 1)] + \delta_2(\zeta) [X(i, j, n_k) - X_2(i, j, n_k)] \end{aligned} \tag{III.53}$$

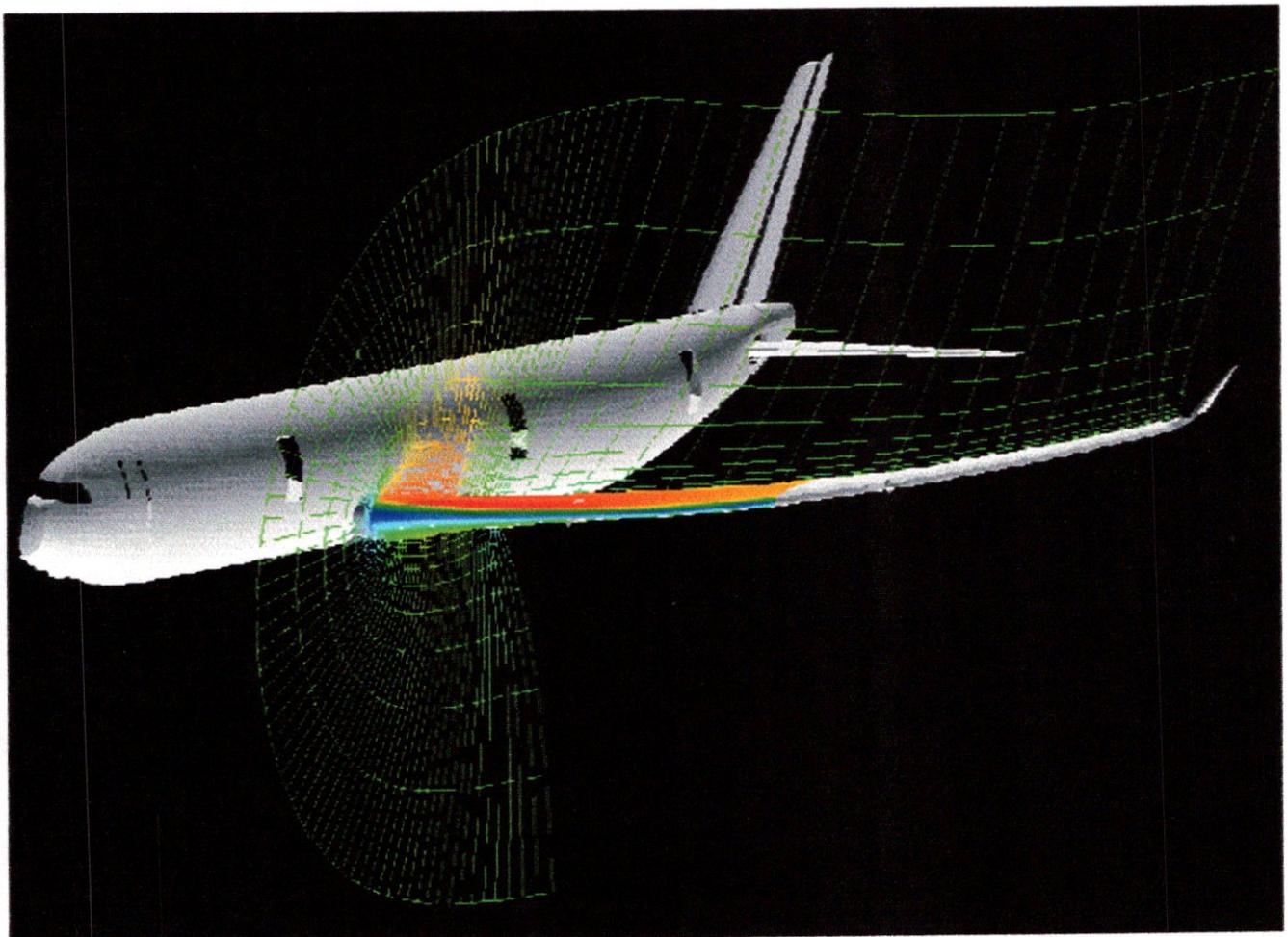
$$\begin{aligned}
 \alpha_1(\xi) &= 1 - u_1(\xi) & \alpha_2(\xi) &= u_2(\xi) \\
 \beta_1(\eta) &= 1 - \vartheta_1(\eta) & \beta_2(\eta) &= \vartheta_2(\eta) \\
 \delta_1(\zeta) &= 1 - w_1(\zeta) & \delta_2(\zeta) &= w_2(\zeta)
 \end{aligned}
 \tag{III.54}$$

$$\begin{aligned}
 u_1(\xi) &= \frac{e^{C_1 \xi} - 1}{e^{C_1} - 1} & u_2(\xi) &= \frac{e^{C_2 \xi} - 1}{e^{C_2} - 1} \\
 \vartheta_1(\eta) &= \frac{e^{C_3 \eta} - 1}{e^{C_3} - 1} & \vartheta_2(\eta) &= \frac{e^{C_4 \eta} - 1}{e^{C_4} - 1} \\
 w_1(\zeta) &= \frac{e^{C_5 \zeta} - 1}{e^{C_5} - 1} & w_2(\zeta) &= \frac{e^{C_6 \zeta} - 1}{e^{C_6} - 1}
 \end{aligned}
 \tag{III.55}$$

Les constantes  $C_1, C_2, \dots, C_6$  sont fixées et spécifient l'intensité de la modification de la grille originale par les six nouvelles faces du bloc.

## CHAPITRE 4

# Phénomène de flottement



## **IV.1 Aérodynamic instationnaire du flottement en régime transsonique :**

### **IV.1.1. Aérodynamic instationnaire autour de géométrie mobile :**

Ce chapitre présente l'ensemble des phénomènes physiques rencontrés pour un écoulement autour d'un profil et d'une aile en mouvement. Le sujet étant très vaste, les phénomènes physiques de l'aérodynamic instationnaire des profils et ailes soumis à un mouvement forcé en régime transsonique sera en particulier détaillé.

Ce chapitre va être décomposé en deux parties, la première exposera les principales caractéristiques de l'aérodynamic instationnaire en régime transsonique de profils et de voilures fixes. Dans la deuxième partie, la particularité du mouvement de profils et d'ailes en mouvement forcé sera présentée. Le phénomène du décrochage dynamique et de battement des ondes de choc seront présentés.

#### **IV.1.1.1. L'aérodynamic transsonique instationnaire :**

L'aérodynamic instationnaire est un des domaines les moins résolu et les moins étudié. Ceci est particulièrement vrai pour le régime transsonique où les non-linéarités et les effets dissipatifs ont tendance à dominer la physique de l'écoulement. Heureusement, les moyens numériques et la puissance des calculateurs aidant, la simulation numérique d'écoulement transsonique instationnaire devient envisageable pour des configurations complexes. Ces simulations ainsi que l'observation des résultats expérimentaux permettent de faire naître des scénarios expliquant le mécanisme des instationnarités.

Dans un premier temps, l'effet du nombre de Mach local sur l'écoulement autour d'un profil sera présenté. Les phénomènes physiques présents en régime transsonique tel que la couche limite turbulente et l'interaction d'un choc avec une couche limite seront présentés. On exposera brièvement le phénomène instationnaire de tremblement.

##### **IV.1.1.1.1. Écoulement transsonique stationnaire autour d'un profil d'aile:**

La caractéristique principale de l'aérodynamic instationnaire autour de géométrie mobile est la variation du Mach local à l'extrados et intrados d'une voilure induit par le mouvement. Cette variation du Mach local provoque en régime transsonique d'importante variation des coefficients aérodynamiques à travers le phénomène du déplacement des ondes de choc sur les surfaces portantes.

Dans le cas d'écoulement stationnaire, l'effet de l'augmentation du Mach local (augmentation de l'angle d'attaque ou du Mach infini) peut être schématisé par la figure (IV. 1) (mabey [46] ) Pour simplifier la description du phénomène, le profil est symétrique avec une incidence nulle.

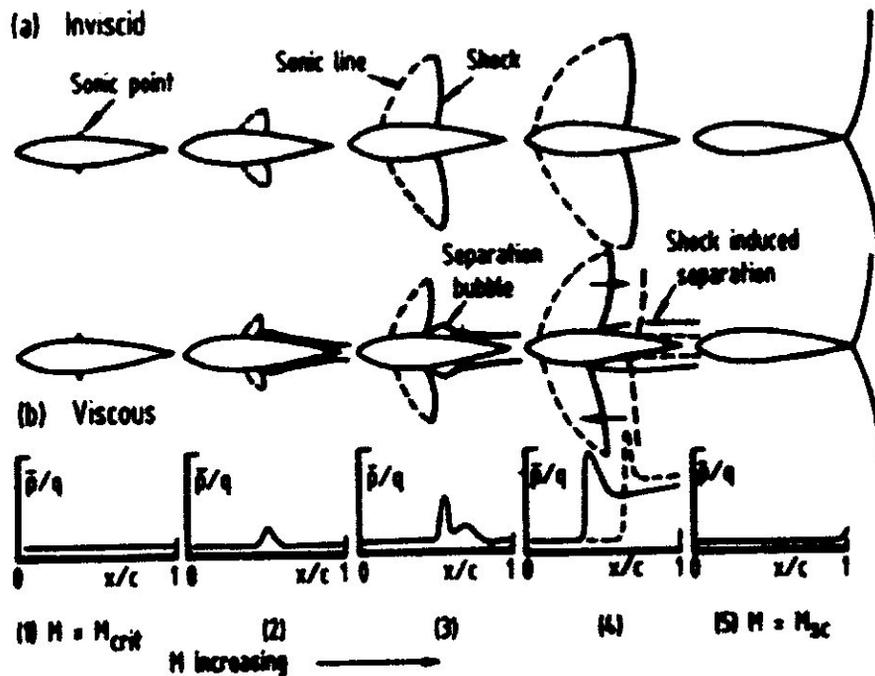


Figure. IV.1. Écoulement transsonique autour d'un profil à incidence nulle.

En fluide parfait, le régime transsonique est atteint lorsque le Mach atteint sa valeur critique  $M = M_{crit}$ . Dans ce cas, un point sonique apparaît sur la surface portante à l'épaisseur maximum du profil (stade 1). Lorsque le nombre de Mach local augmente (stade 2-3-4), la poche supersonique s'étend sur le profil. Les ondes de choc situées à l'extrémité de la poche supersonique se déplacent alors en direction du bord de fuite. Le nombre de Mach infini est égal à sa valeur supercritique  $M = M_{sc}$ . Lorsque l'onde de choc atteint le bord de fuite. Si le nombre de Mach infini dépasse cette valeur supercritique, un choc détaché se forme devant le bord d'attaque du profil.

Pour des écoulements visqueux, le nombre de Mach critique est atteint près de l'épaisseur maximum du profil, comme en non visqueux. Lorsque le nombre de Mach augmente, l'engrèvement de la forme du profil par la couche limite ainsi que l'apparition de décollements de la couche limite induit par l'interaction choc/couche limite tend à s'opposer au déplacement des chocs vers le bord de fuite (stade 3-4).

Le décollement de la couche limite apparaît lorsque l'intensité du choc est suffisante. Le nombre de Mach nécessaire pour faire décoller la couche limite est fonction de la forme du profil, du nombre de Reynolds de l'écoulement. Les ondes de choc atteignent le bord de fuite pour un Mach infini supérieur à la valeur supercritique  $M = M_{sc}$  d'un écoulement non visqueux.

Le décollement de la couche limite (stade 2-4) introduit des fluctuations locales de pression qui provoquent une petite oscillation des ondes de choc. C'est ce que l'on appelle le phénomène de tremblement. L'oscillation du choc modifie l'épaisseur de la couche limite et augmente l'amplitude des fluctuations de pression. La pression au bord de fuite relie l'écoulement à l'extrados et à l'intrados du profil.

Ainsi, si le choc à l'extrados oscille, l'égalité de la pression au bord de fuite induit que le choc oscillera en opposition de phase à l'intrados. Lorsque l'écoulement est faiblement détaché (stade 3), les fluctuations de pression locale sont maximales au pied du choc et au point de réattachement de la couche limite. Si le décollement est étendu jusqu'au bord de fuite, les maxima de fluctuations de pression sont mesurés au pied du choc et au bord de fuite. Quand les ondes de choc atteignent le bord de fuite, les fluctuations de

pression redeviennent de faibles amplitudes (équivalentes aux fluctuations de pression d'une couche limite attachée) et de hautes fréquences.

Cette description simplificatrice de l'écoulement transsonique visqueux autour d'un profil montre que le couplage entre les phénomènes stationnaires et instationnaires est important dans l'intervalle de Mach :  $M_{crit} < M < M_x$  et que la pression au bord de fuite joue un rôle majeur sur la physique de l'écoulement.

#### **IV.1.1.1.2. Interaction choc/couche limite turbulente en régime transsonique :**

L'interaction entre le choc et la couche limite a un effet prépondérant sur la position des chocs et donc sur les efforts aérodynamiques (stade 2-3-4).

Cette interaction a été étudiée soigneusement par Pearcy qui a ainsi pu définir deux modèles schématisant les mécanismes de développement de la zone de recirculation. La forme cambrée des profils impose un gradient de pression favorable en amont du choc et un gradient de pression défavorable sur la partie avale. Ce gradient de pression défavorable provoque l'épaississement de la couche limite, voir son décollement. Pearcy considère que les caractéristiques globales de l'écoulement sont plus importantes que le détail de l'interaction locale entre le choc et la couche limite, c'est-à-dire :

- La présence d'un écoulement mixte subsonique / supersonique juste au dessus de la zone de recirculation (langue supersonique).
- Le gradient de pression adverse en aval du choc s'étendant jusqu'au bord de fuite.
- Les variations de pression au bord de fuite qui déterminent la distribution de la pression sur le profil et la position des chocs.
- Pearcy propose deux modèles d'écoulement, noté A et B :

##### **-Modèle A :**

Lorsque l'intensité du choc augmente, le développement de la zone de recirculation est tel que le point de séparation est situé au pied du choc et le point de ré attachement se déplace vers le bord de fuite. Pour un intervalle de force de choc donné, pour lequel un décollement apparaît, la couche limite reste attachée sur la surface portante de la zone de recirculation jusqu'au bord de fuite. La couche limite n'est pas dans ce cas suffisamment perturbée au bord de fuite pour modifier les charges aérodynamiques du profil. Le processus de recollement de la couche limite est provoqué par la présence d'une langue supersonique étendue sur les frontières de la zone de recirculation et qui a comme effet de comprimer les lignes de courant. Cette compression provoque le ré attachement de la couche limite. Ce modèle est adapté au profil de type conventionnel NACA0012, NACA64010....

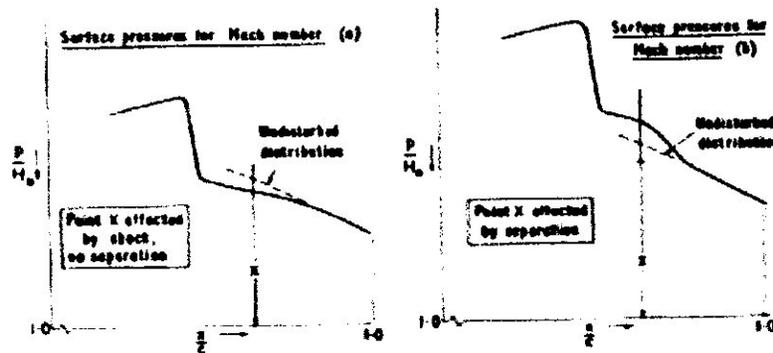
##### **-Modèle B :**

La principale différence entre ce modèle et le modèle précédent est la présence d'un second décollement situé dans la zone subsonique près du bord de fuite. Ce second décollement est un décollement subsonique classique qui a comme caractéristique d'être turbulent et d'être généré par le gradient de pression adverse près du bord de fuite. Le développement de ce type décollement dépend de l'amplitude du gradient de pression, de l'épaisseur de la couche limite ainsi que de l'épaisseur du profil. Lorsque le Mach amont augmente, plusieurs variantes de ce modèle existent. Ces variantes décrivent la présence ou non du décollement à l'arrière du profil lorsque la force du choc est suffisante pour décoller la couche limite au pied de choc. Les trois variantes sont :

- Le décollement du bord de fuite provoqué par la zone de recirculation de pied de choc (B1).
- Le décollement du bord de fuite provoqué par l'épaississement de la couche limite sous l'effet du choc (B2).
- Le décollement du bord de fuite déjà présent en régime subsonique (B3).

Lorsque la force du choc augmente, le décollement de la couche limite se propage du pied du choc jusque dans le sillage. Ceci est provoqué soit par le développement du décollement de bord de fuite en amont, ou par l'interaction du décollement de pied de choc avec le décollement du bord de fuite. Lorsque la couche limite est décollée en aval du choc jusqu'au bord de fuite, l'écoulement devient très instable et des phénomènes instationnaires comme le tremblement peuvent apparaître. Ce type d'écoulement est caractérisé par une importante variation des efforts aérodynamiques induits par la perturbation de la couche limite au bord de fuite.

Sur la figure (VI.2) l'effet du décollement de bord de fuite sur la répartition de pression sur le profil est représenté. Ces modèles (B1, B2, B3) sont adaptés aux profils de type supercritique (NLR7301, RAE28022) présentant une forte courbure au bord de fuite (NLR7301, RAE28022).



**Figure IV.2.** Effet du décollement de bord de fuite sur la répartition de pression. (D'après persey [48]).

#### IV.1.1.1.3 Battement naturel du choc (phénomène de tremblement) :

Le tremblement se définit comme étant la réponse d'une structure à une excitation aérodynamique naturelle produite par un décollement. L'interaction choc/couche limite en régime transsonique peut provoquer le décollement de la couche limite et l'apparition de fortes fluctuations de pression. (Lee [47]) propose un scénario expliquant le mécanisme d'oscillations auto-entretenues du au système

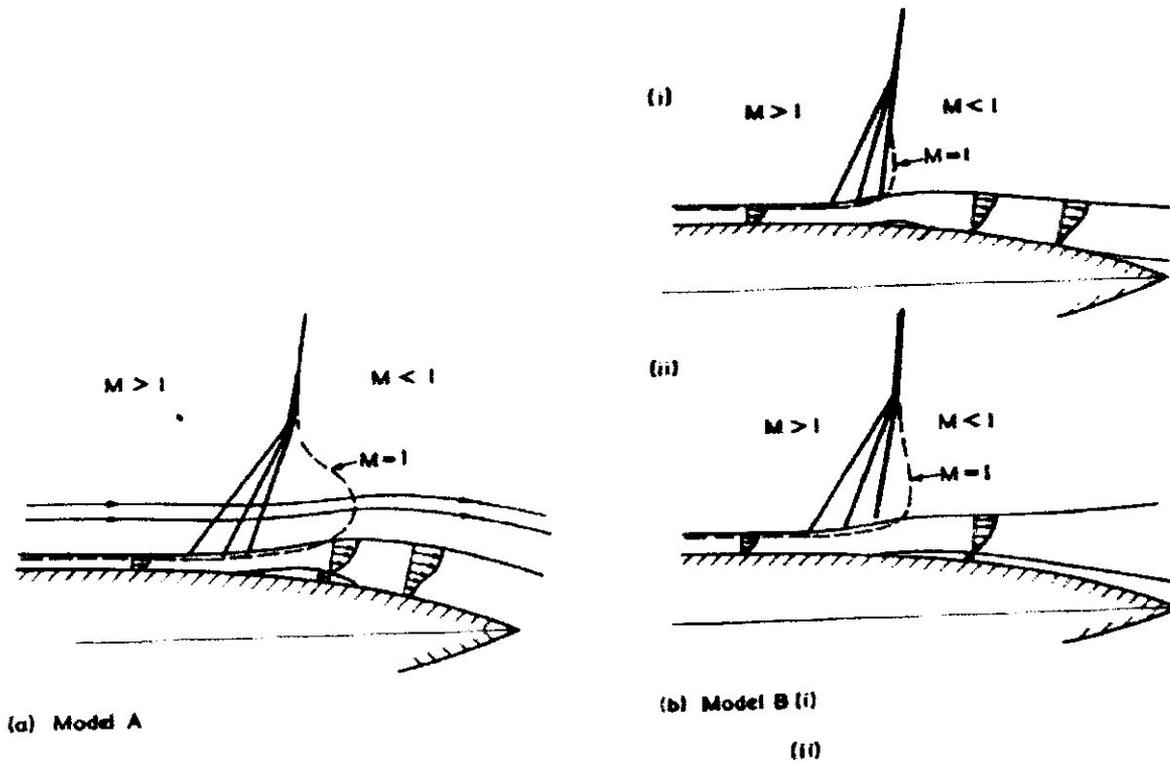


Figure IV.3 Modèle A (droite) et modèle B (gauche). . (D'après persey [48])

Choc/couche limite décollée schématisé dans la figure VI.4 onde de choc oscille autour de sa position moyenne  $x_m$  et engendre des ondes de pression qui se propagent vers l'aval à travers la zone décollée à une vitesse  $a_p$ . Ces ondes de pression perturbent l'écoulement au niveau du bord de fuite et du sillage, ce qui génère des ondes de pression se déplaçant dans la direction amont et qui viennent à leur tour perturber l'onde de choc, lui fournissant ainsi l'énergie nécessaire pour maintenir ses oscillations. La période théorique d'oscillation du choc est alors :

$$T = \int_{x_m}^c \frac{1}{a_p} dx + \int_c^{x_m} \frac{1}{a_u} dx \quad (\text{IV.1})$$

La détermination des vitesses de déplacement des ondes de pression  $a_p$  et  $a_u$  est difficile à évaluer, mais (lee [47]) a proposé les relations suivantes :

$$a_u = (1 - M_c) a M_c = r(1 - M) + M \quad (\text{IV.2})$$

$M_c$  est le nombre de Mach local juste derrière le choc déterminé à partir d'un coefficient de relaxation égal à 0.7 (expérimentalement prouvé pour les écoulements attachés). La vitesse  $a_p$  est déterminée à partir du déphasage dans le mouvement de choc. (Tijdeman [49]) avait suggéré une relation équivalente pour déterminer la vitesse d'une perturbation issue du bord de fuite se déplaçant en direction de l'onde de choc. La valeur  $r = 0.75$  a été retenue à fin de retrouver les résultats expérimentaux pour une écoulements attaché autour du profil NLR 7301 à trois degrés d'incidence et à  $M = 0.70$ .

Ces écoulements périodiques sont provoqués par le décollement de la couche limites. Ils peuvent être amplifiés si le profil est soumis à un mouvement oscillant de la même fréquence que cette fréquence « aérodynamique naturelle ». Dans le cadre de l'aéroélasticité, ces phénomènes complexes

mettant en jeu l'instabilité de l'interaction choc/couche limite décollée peuvent provoquer la mise en résonance de la structure. Cependant, la relation entre le nombre de Mach, l'incidence et cette fréquence aérodynamique naturelle ne sont pas encore bien comprises. La modélisation numérique de ces phénomènes est nécessaire est très complexe (Caruelle [50], Robinet [51], Furlano [52]).

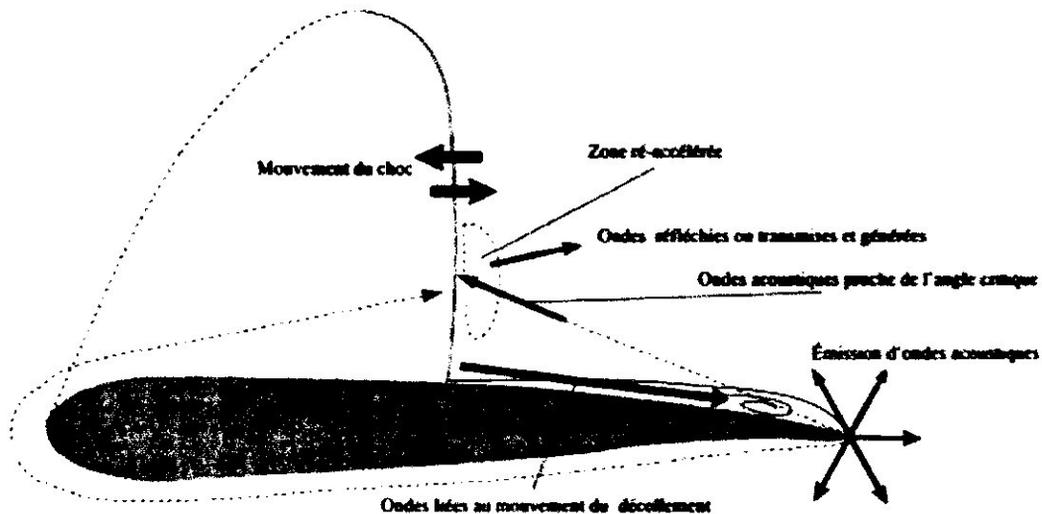


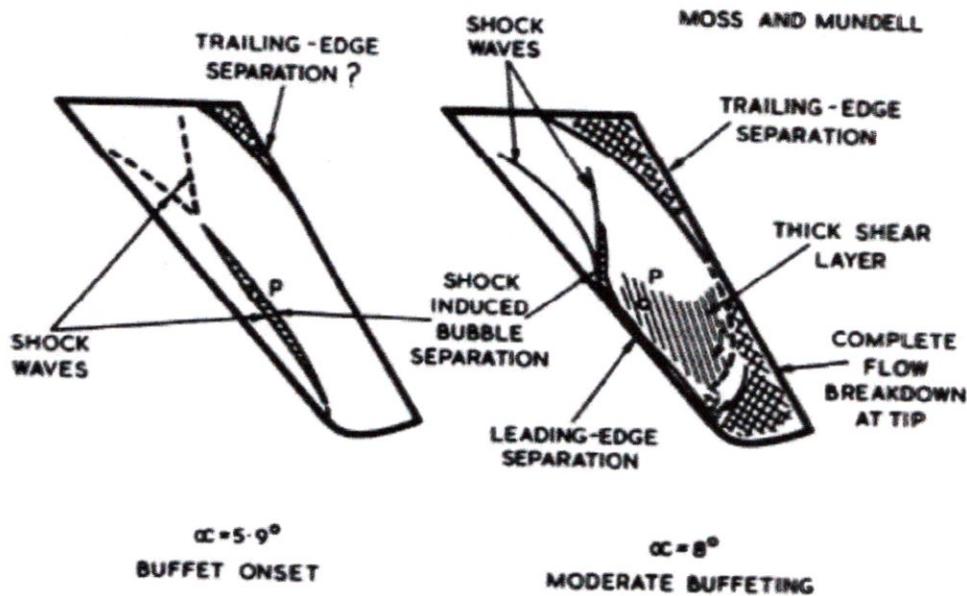
Figure.IV.4. Schéma proposé par Robinet [51] sur le scénario engendrant les oscillations auto-entretenues.

#### IV.1.1.1.4. Aérodynamique instationnaire autour d'une aile en flèche :

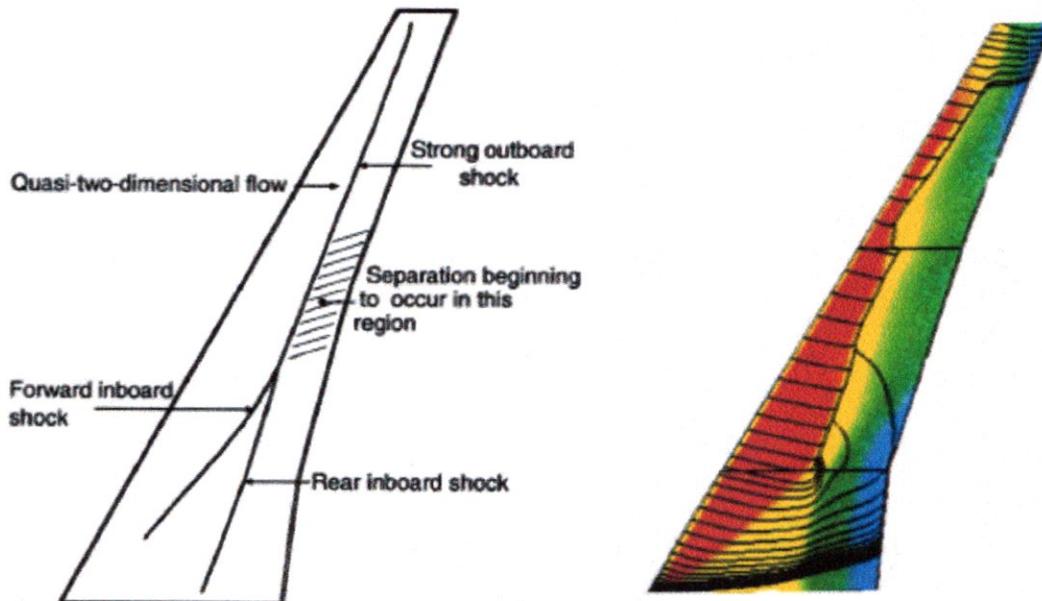
L'étude de l'aérodynamique instationnaire autour de profils d'aile est intéressante en terme de compréhension des mécanismes fondamentaux. De plus, beaucoup de résultats expérimentaux en aérodynamique instationnaire sont disponibles pour des écoulements autour de profils d'aile. Même si les simulations numériques bidimensionnelles de ces profils sont discutables, elles permettent par leurs faibles coûts numériques, le développement de nouvelles méthodes. Toutefois, les cas réels de tremblement et d'aéroélasticité mettent en jeu des phénomènes tridimensionnels qui modifient considérablement les résultats.

Contrairement aux profils d'aile, il est difficile de déterminer et de classier les comportements aérodynamiques instationnaires des ailes en flèche. (Mabey [53]) a montré que de nombreux paramètres géométriques ont une influence tels que, la position en corde de l'épaisseur géométrique maximale, la forme des profils constituant l'aile, la cambrure, la flèche et le rapport d'aspect de l'aile. La figure (VL5) est présente l'écoulement décollé sur une aile en flèche au nombre de Mach égal à 0.80 et à faible nombre de Reynolds. (Caruelle [50]) présente le phénomène du tremblement pour une aile d'avion civil (DYVAS). Le décollement observé numériquement et expérimentalement se situe la partie de la voilure extradors.

Les effets tridimensionnels sont importants et le mouvement du choc à l'extrados est complexe.



**Figure IV.5.** écoulement transsonique,  $M=0.8$ , incidence  $5.9^\circ$  et incidence  $8^\circ$ . Entrée en tremblement et tremblement établie (meybey [46]).



**Figure IV.6.** A gauche : Système d'onde de choc sur une voilure typique d'avion de transport pour une condition de vol proche de l'entrée en tremblement  
A droite : Estimation de la zone décollée moyenne de la voilure DYVAS en tremblement établi ( $4.85^\circ$ ) répartition de  $C_p$  sur la peau et ligne de frottement. (Caruelle [50]).

#### IV.1.1.2. mouvement forcé de profil et d'aile :

Cette partie expose les différents phénomènes physiques liés à l'aérodynamique instationnaire en régime transsonique dans le cas de mouvement forcé en tangage de profils d'ailes. Le mouvement forcé en tangage d'un profil d'aile ou d'une aile en régime transsonique est caractérisé par le phénomène du déplacement des chocs. Suivant certaines conditions de vols et types de mouvement, l'interaction entre le choc et la couche limite peut engendrer le phénomène du décrochage dynamique de la voilure.

##### IV.1.1.2.1. Type de mouvement d'oscillation de choc sur un profil :

(Tijdeman [49]) a étudié le mouvement des ondes de choc sur un profil à l'aide d'une expérience utilisant un profil NACA64A006 à incidence nulle comportant un volet oscillant au bord de fuite. En régime transsonique et en couche limite attachée, il a observé trois types distincts de mouvement de choc. (Tijdeman [49]) a montré qu'en dérivant l'expression décrivant le mouvement oscillant d'un choc normal, il était possible de décrire ces trois types de mouvement de choc illustrés sur la figure (V.I.7).

- **Mouvement sinusoïdal des ondes de choc (Type A) :**

Le choc se déplace de manière sinusoïdale et reste présent durant tout le cycle d'oscillation. La force du choc varie en cours du mouvement et un déphasage entre l'angle d'incidence et la position du choc induit par les effets dynamiques apparaît. La force du choc maximum n'est pas atteinte lors de la position angulaire maximale mais durant la partie croissante du mouvement. Pour ce type de mouvement de choc, les phénomènes non-linéaires sont faibles.

- **Mouvement des ondes de choc avec interruption (Type B) :**

Pour ce type de mouvement de choc, l'amplitude du mouvement des chocs est importante. Comme pour le type de mouvement précédent, le déplacement des chocs est accompagné par la variation de la force des chocs. Cependant, le choc disparaît durant le mouvement (entrée en régime subsonique). Pour ce type de mouvement de choc, les effets non-linéaires sont très importants.

- **Mouvement des ondes de choc propagées en amont (Type C) :**

Ce type particulier de mouvement de choc apparaît lorsque l'onde de choc moyenne est localisée dans sa position amont extrême. Plus précisément, en reprenant la figure VI.1 cette position correspond à l'entrée en régime transsonique par l'apparition du point sonique (stade f).

Pour ce type de mouvement, l'onde de choc disparaît durant une grande partie du cycle d'oscillation. Cependant, alors que le choc a disparu si on considère un mouvement lent (fréquence  $\ll 1$ ), dans le cas de mouvement rapide, le déphasage induit par les effets dynamiques propage l'onde de choc dans la zone subsonique en direction du bord d'attaque. Pour ce type de battement de choc, les phénomènes non-linéaires sont forts et sources de bruit aérodynamique.

Ces trois types de mouvement de choc sont susceptibles d'intervenir pour un nombre de Mach donné. Les conditions d'oscillation (fréquence, amplitude) peuvent faire passer un mouvement de

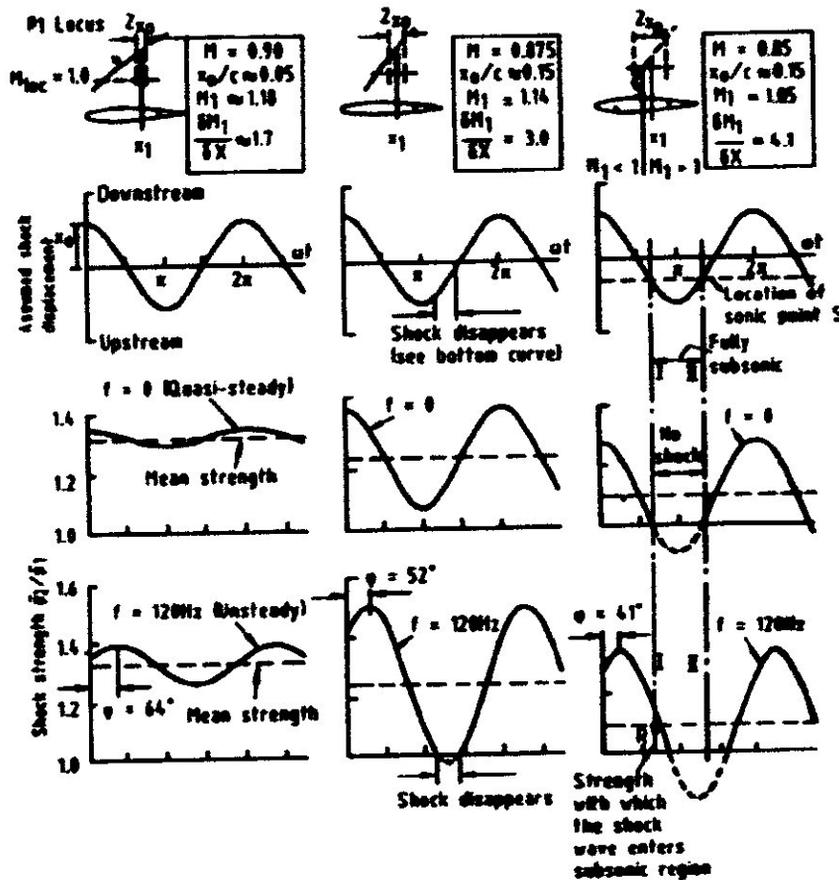


Figure.1.7. Type A, B, et C de mouvement de choc. (Meybey [46]).

Choc de type C au type A. On peut ainsi obtenir un mouvement de choc de type A en réduisant la fréquence ou l'amplitude du mouvement et inversement on peut obtenir un mouvement de choc de type C en augmentant l'amplitude du mouvement ou la fréquence. Il est donc important dans le cadre de l'aéroélasticité de pouvoir simuler numériquement ces 3 types de mouvement de choc.

#### IV.1.1.2.2. Phénomène de décrochage dynamique :

Au dessus d'un angle d'attaque critique, une surface portante peut être soumise au phénomène de décrochage. Le décrochage statique est une perte de portance provoquée par un décollement massif de la couche limite et la création de grosses structures tourbillonnaires. Pour un profil oscillant, le décrochage peut être observé pour des angles très supérieurs à l'angle critique de décrochage statique. De plus, le "décrochage dynamique" est un phénomène plus violent et persistant que le décrochage statique, on parle de "décrochage dynamique". De nombreuses expériences ont montré que ce phénomène est caractérisé par une perte de portance générée par la création et le passage de tourbillon sur la surface portante.

Ces perturbations visqueuses de l'écoulement induisent une fluctuation de pression non-linéaire. Lorsque la fréquence, l'amplitude et l'incidence maximum sont suffisamment importants, la création des tourbillons est un phénomène organisé et bien expliqué. La figure (VI.8) présente les hystérésis du coefficient de portance et du moment pour un profil en décrochage dynamique et statique. Le décrochage dynamique est obtenu pour un mouvement d'oscillation défini par  $\alpha = 15^\circ + 10^\circ \sin(\omega t)$ ,  $k = 0.1$  et un nombre de Mach infini égal à  $M = 0.25$ .

Il peut être décomposé en six étapes d'événement :

- La couche limite est attachée et l'évolution des coefficients aérodynamiques est linéaire.

- Apparition d'une recirculation dans la couche limite. Les efforts aérodynamiques sont plus importants que l'effort maximum statique mais ils gardent un comportement linéaire.
- Le tourbillon se détache et se déplace sur la surface du profil. Le coefficient du moment diverge.
- Le tourbillon se situe au bord de fuite et les coefficients de la portance et du moment atteignent leurs valeurs maximales. Une chute brutale des coefficients aérodynamiques est observée lorsque l'incidence continue à augmenter.
- Création d'un deuxième tourbillon et apparition du second pic des coefficients aérodynamiques.
- La couche limite redevient attachée au bord d'attaque et les coefficients aérodynamiques tendent vers le comportement linéaire.

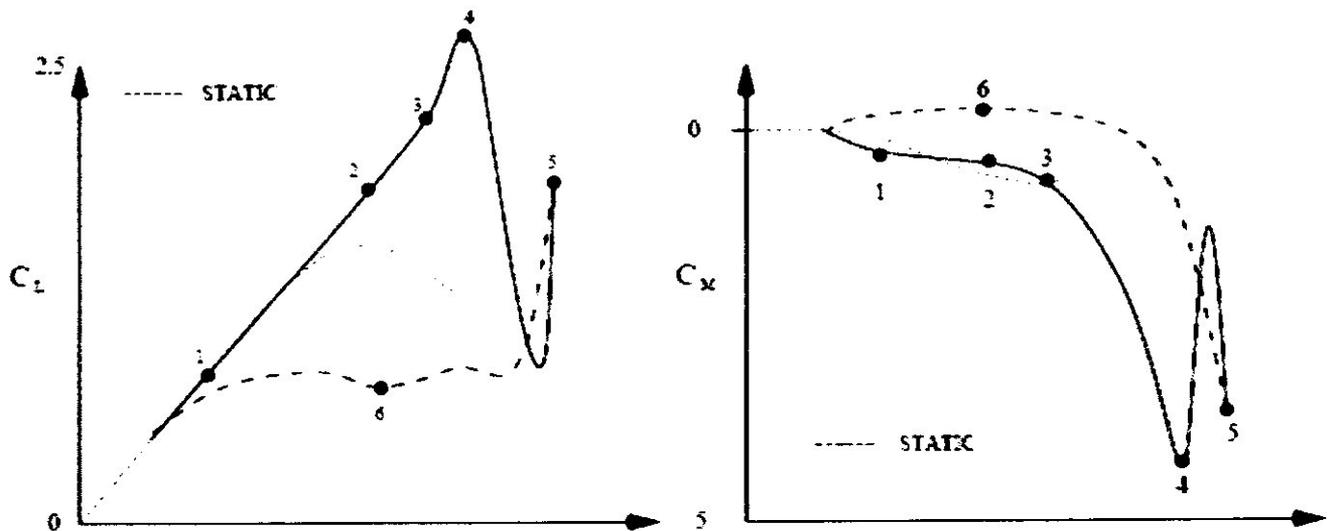


Figure IV.8. Décrochage dynamique et statique.

$$\alpha = 15^\circ + 10^\circ \sin(\omega t), k = 0.1 \text{ et } M = 0.25.$$

Hystérie des coefficients aérodynamique. (D'après [54])

Le décrochage dynamique d'un profil et d'une aile produit des efforts aérodynamiques non-linéaires. Il introduit un terme d'amortissement aérodynamique supplémentaire qui peut modifier la réponse d'un système aéroélastique.

Toutefois, la relation entre le flottement et le décrochage dynamique n'est pas connue. (Isogaï [55]) a observé expérimentalement que le phénomène du flottement pouvait être couplé au phénomène du décrochage dynamique. Cette particularité du flottement est dénommée "Shock Stall Flutter". La mise en résonance de la structure produit un mouvement d'oscillation des surfaces portantes. L'interaction du choc et de la couche limite provoque en cours d'oscillation le décrochage dynamique du profil. Isogaï observe que le comportement des coefficients aérodynamiques est fortement non linéaire et proche du comportement observé dans le cas du décrochage dynamique.

#### IV.1.2. Phénomènes du flottement d'une aile souple :

Nous allons dans Cette partie présenter comment l'aérodynamique transsonique instationnaire peut venir affecter la sécurité des avions civils à travers la modification des caractéristiques du phénomène du flottement et par les pertes de manoeuvrabilité que peuvent engendrer les oscillations de cycles limites. Le phénomène du flottement est induit par un transfert d'énergie mécanique du fluide vers la structure de l'avion engendrant des oscillations d'amplitude exponentielle. En général, ces oscillations sont de nature destructive et peuvent provoquer la perte de l'avion. La prédiction de la frontière de flottement (frontière

de stabilité du système aéroélastique) est nécessaire à l'obtention de l'enveloppe de vol sécurisée de l'avion. La caractérisation du flottement d'un avion est indispensable et doit être déterminée durant le processus de conception et de développement. Pour les régimes de vol en dehors de l'intervalle transsonique du nombre de Mach [0.8, 1.1], la prédiction du phénomène du flottement peut être obtenue en utilisant pour l'aérodynamique instationnaire, des méthodes numériques résolvant les équations linéarisées de la mécanique des fluides. L'utilisation de ces méthodes permet de simuler des systèmes aéroélastiques complexes pour un coût numérique faible.

En régime transsonique, la présence de forte non-linéarité et la forte dépendance entre les forces aérodynamiques instationnaires et l'écoulement moyen ne permet pas l'utilisation de ces méthodes. Comme exposé dans la partie précédente, une des particularités du régime transsonique est l'apparition de zones de décollement de la couche limite provoquée par les systèmes d'onde de choc qui peuvent avoir une forte influence sur les forces aérodynamiques. Ces particularités du régime transsonique rendent la prédiction de la frontière de flottement difficile par le manque de précision des prédictions des méthodes analytiques et des méthodes linéaires. La forte sensibilité des efforts aérodynamiques au nombre de Reynolds rend les résultats des essais en soufflerie délicats à exploiter. Dans certains cas, seuls les essais en vol permettent d'obtenir la frontière exacte.

Pour toutes ces raisons, la prédiction du flottement transsonique est un domaine complexe qui nécessite pour des raisons de coût industriel une solution numérique. La prédiction numérique de la frontière de flottement en régime transsonique nécessite une simulation de l'aérodynamique instationnaire présentant des zones de recirculation, des ondes de choc en mouvement et des couches limites turbulentes. Seuls les codes résolvant les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles sont capables de prédire une grande partie de ces phénomènes aérodynamiques. Caruelle a utilisé le solveur NSMB afin de prédire le phénomène de tremblement tridimensionnel autour de la configuration aile/fuselage DYVAS. Les résultats numériques présentés utilisent l'approche URANS (Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes) et DES (Detached Eddy Simulation) pour la modélisation de la turbulence instationnaire. Bien que ces résultats soient encourageants, la complexité de l'écoulement n'a pu être représenté correctement. L'approche numérique ne peut être contesté, toutefois la discrétisation spatiale de la configuration semble être en partie responsable du manque de précision dans la prédiction des zones de décollement et du mauvais comportement instationnaire de l'écoulement.

Cependant, plusieurs auteurs ont montré que l'utilisation de code Navier-Stokes tridimensionnel permettait de simuler avec précision l'aérodynamique instationnaire en mouvement forcé et le phénomène du flottement. (Liu [44.56], lee.roche [21] gurusmamy [57]).

#### **IV.1.2.1. Le creux transsonique "Transonic Dip" :**

L'une des particularités du phénomène de flottement en régime transsonique et qui en fait sa dangerosité est l'apparition du creux transsonique (transonic dip) sur les frontières de flottement. Mise en évidence par (Isogai [58.59]), cette caractéristique du flottement en régime transsonique correspond à une diminution du domaine de stabilité du système aéroélastique. Le creux transsonique de la frontière de flottement coïncide avec l'augmentation de la pente de la courbe du coefficient de portance CL dans le plan (CL, Mach). En reprenant la figure (VI, 9) la région du creux transsonique correspond à la zone B2.

(Zwaan [60]) a calculé le flottement d'une plaque plane comportant deux degrés de liberté en tangage et en déplacement vertical. Ces calculs représentés sur la figure (VI.10) illustrent l'apparition du creux transsonique près de  $Mach = 1$ . (Zwaan [60]) observe au voisinage du creux transsonique un changement dans les caractéristiques du mode de flottement. Le mode de flottement est purement un mode de déplacement vertical lorsque le Mach est proche de 1, et lorsque la fréquence est plus élevée un mouvement de torsion pur. Ces observations sont en parfaite concordance avec de nombreuses expériences. Toutefois, les mêmes caractéristiques du mode de flottement au voisinage du creux transsonique ont été observées sur des systèmes aéroélastiques équivalents. Les calculs de (Prananta ([26]),

(Alonso *et* Edwards [27]) présentent le même comportement du caractère du mode de flottement au passage du creux transsonique. Cependant, cette particularité du mode de flottement à deux degrés de liberté semble apparaître que pour des calculs non-visqueux [26][61]. Ainsi les calculs présentés par (Prananta ([26]), et dans cette étude ([61]), montrent une réduction du creux transsonique mais surtout une fréquence de flottement qui reste faible pour des nombres de Mach supersonique.

Quoiqu'il en soit, si on suppose que les effets visqueux sont faibles, la nature du creux transsonique pour ces systèmes aéroélastiques semble directement liée au déphasage entre les efforts dus au mouvement vertical et au mouvement en tangage. En effet, les efforts produits par le mouvement vertical ont un effet d'amortissement sur le système aéroélastique alors que les efforts induits par le mouvement en tangage sont capables d'alimenter en énergie le système aéroélastique. Suivant cette explication, le flottement apparaît lorsque les efforts en tangage deviennent plus importants que les efforts verticaux de nature dissipative. D'après Zwann, le creux transsonique est ainsi principalement déterminé par la croissance du déphasage avec le nombre de Mach, plutôt que par la croissance du module des efforts en tangage.

Les expériences effectuées par (Yates [62] sur l'aile en flèche (445.6) mettent en évidence l'apparition du creux transsonique au voisinage du  $Mach = 0.96$  (figure VI.11). La configuration aéroélastique de l'aile 445.6 a été soufflée au Transonic Dynamic Tunnel (TDT) situé au centre de la NASA Langley. L'aile a une flèche de 45deg. et est composée de sections NACA65A004. Pour cette configuration, seuls les quatre premiers modes naturels de l'aile sont excités lors du phénomène du flottement. Ces quatre premiers modes sont décrits dans le tableau (IV.1). (Batina et Lee-Raush [21]) ont prédit la frontière de flottement par l'utilisation du solveur aérodynamique CFL3D.

L'analyse modale de la réponse du flottement montre que la viscosité n'a pas d'effet sur le creux transsonique. Cependant, pour des nombres de Mach supérieurs, la prise en compte de la viscosité pour le calcul aérodynamique améliore nettement les résultats [21]. Il est à noter que des calculs plus récents basés sur une approche temporelle (couplage direct entre code CFD et un code de structure) n'améliorent pas les résultats sur cette configuration.

Numéro du Mode	Nature	Fréquence
1	flexion	9.6Hz
1	torsion	38.17Hz
2	flexion	48.35Hz
2	torsion	91.54Hz

TABLEAU IV.1. Description des quatre premiers modes de l'aile 445-6.

#### IV.1.2.2. Le phénomène des cycles limites (LCO) :

Une oscillation de cycle limite (LCO) est une oscillation entretenue ayant une amplitude finie. Les cycles limites sont une réponse caractéristique des systèmes dynamiques non-linéaires et résultent pour l'aéroélasticité en un couplage non-linéaire entre le fluide et la structure. Ainsi les LCOs rencontrés en aéroélasticité sont une mise en flottement de la structure ayant des amplitudes finies. La figure (VI.11). Présente une oscillation de cycle limite d'une nacelle de réacteur d'un avion de transport civil observée en régime transsonique. On observe une amplitude finie des déplacements verticaux et horizontaux de la nacelle.

Il est important de considérer les LCOs comme un phénomène de flottement non linéaire. En effet, les méthodes de prédiction classiques du flottement (linéaire) ne pouvant prévoir l'apparition des LCOs, et les difficultés rencontrées durant les essais en vol pour faire la distinction entre des LCOs à forte

amplitude et le flottement classique (dunn [63]), ont amené une partie des aéroélasticiens à séparer le phénomène des LCOs du phénomène du flottement classique.

Cependant, la prédiction des LCOs est possible en utilisant des méthodes de prédiction du flottement non-linéaire [64] [65]. Les cycles limites doivent être ainsi considérés comme une particularité du phénomène de flottement. Les non-linéarités présentes dans le phénomène du flottement peuvent avoir deux natures distinctes :

- La non linéarité peut être induite par la structure à travers une matrice de raideur non linéaire,
- et/ou par le caractère non-linéaire de l'écoulement du fluide (décrochage dynamique, régime transsonique).

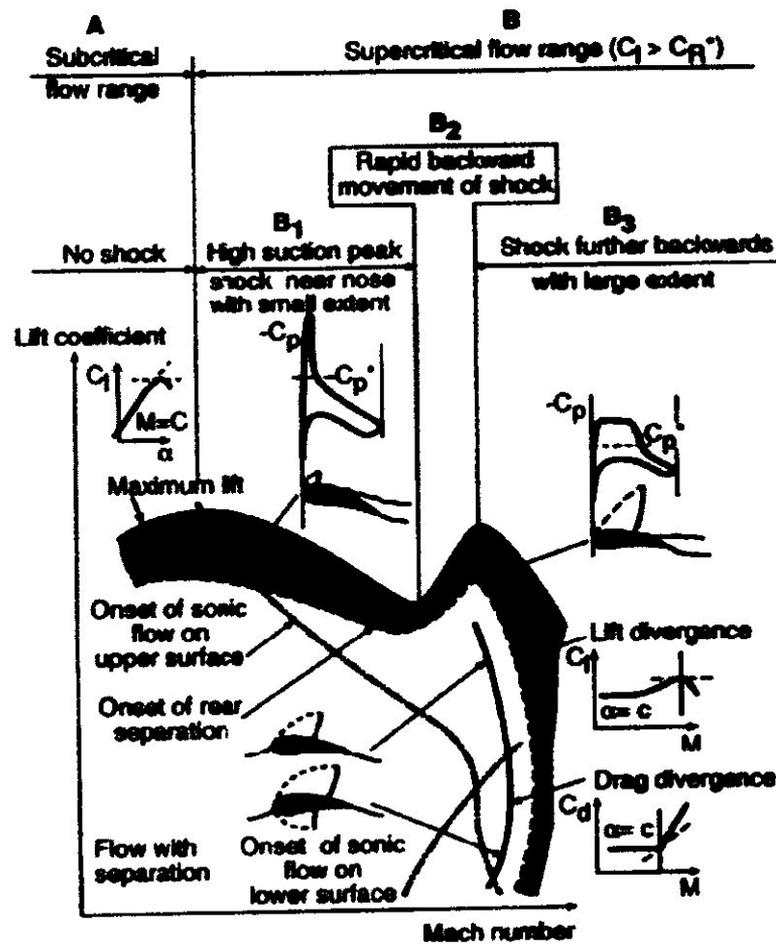


Figure IV.9. Caractéristiques des profils dans le plan  $C_l$ -Mach $^2$  (après alsnère [66]).

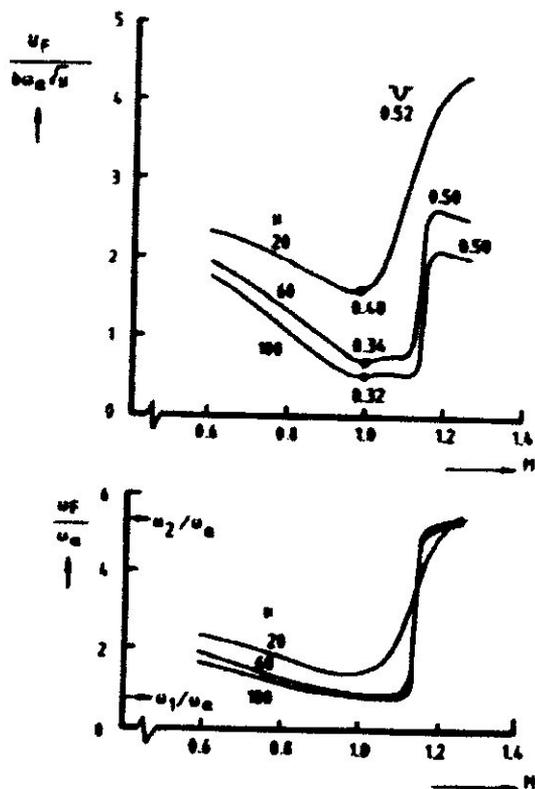


Figure IV.10. Frontières de flottement d'une plaque plane Cl-Mach Creuse transsonique. (Zwane [60])

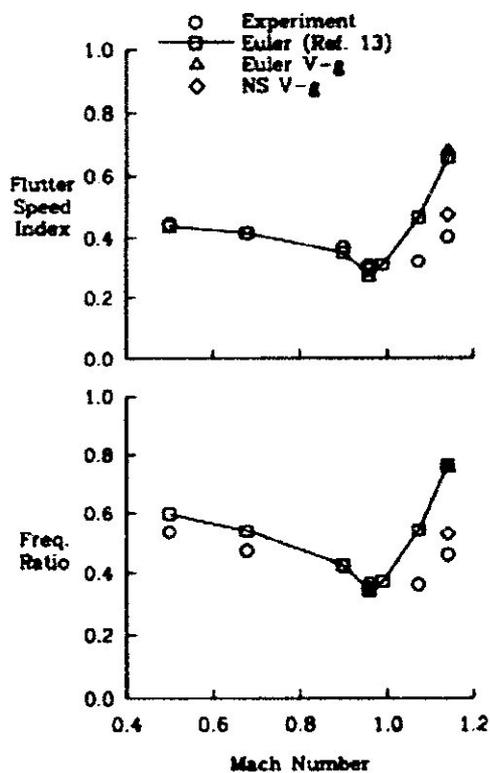


Figure IV.11. Frontières de flottement de l'aile 445.6, comparaison calculées expériences.

Le phénomène des cycles limites est un problème persistant sur les avions militaires et civils. Les LCOs ne sont pas de nature destructive et ne mettent pas l'engin en danger.

Cependant dans le cas des avions militaires, les LCOs affectent en général toutes configurations externes telles que : les réservoirs extérieurs, les systèmes d'armes extérieurs (missiles, radars...). Les LCOs accroissent la fatigue de la structure et réduisent la précision des systèmes d'armes.

La sensibilité de ces systèmes extérieurs au flottement est théoriquement avérée et des essais en vol permettent de le confirmer. De plus, selon l'amplitude et la fréquence des LCOs, l'équipage peut être soumis à une vibration importante qui peut rendre impossible la lecture des affichages du cockpit, rendre difficile les tâches courantes d'une mission telles que manipuler des commandes. (Denegri [67]) a étudié expérimentalement les LCOs pour les chasseurs de type F16A et F/A-18 avec différents types d'armes en régime transsonique. D'après ces observations, les LCOs apparaissent pour des régimes transsoniques et le plus souvent lorsque le chasseur est équipé de missiles situés en bout d'aile (F-5, F-16 et FA-18). Les essais en vol montrent que les instabilités aéroélastiques observées sont de trois natures :

- Du flottement classique, des LCOs "typiques" et "non-typiques". Les LCOs "typiques" sont caractérisées par une amplitude croissante lorsque le nombre de Mach et la pression dynamique croient.
- Les LCOs non-typiques est caractérisées par une amplitude qui ne s'accroît pas progressivement lorsque le nombre de Mach s'accroît. Les essais en vol ont de plus montré que le phénomène des LCOs est principalement antisymétrique (déphasage des ailes droite et gauche sur les modes de torsion et de flexion égal à  $\frac{\pi}{2}$ ). Les LCOs symétriques (déphasage  $\ll \frac{\pi}{2}$ ) ont été cependant observés durant les essais.

Denegri impute cette particularité sur la nature des LCOs à la capacité des modes souples antisymétriques de l'aile, à fournir de l'énergie mécanique à travers le fuselage à l'aile opposée, pour entretenir le mouvement vibratoire.

L'étude et la prédiction des paramètres des LCOs générés par un système aéroélastique non-linéaire est une tâche difficile même pour des cas simples à peu de degrés de liberté (morton [42]. [68]) On peut cependant distinguer différentes méthodes de prédiction :

- La plus répandue est la simulation de la réponse des systèmes aéroélastiques dans le domaine temporelle. Cette méthode est la plus naturelle mais aussi la plus coûteuse en terme de calcul. De plus, elle nécessite une modélisation de la structure qui pour des LCOs de grandes amplitudes est nécessairement non linéaire, ainsi qu'une modélisation aérodynamique complexe (mouvement de choc, couche limite décollée...).

Cependant, l'utilisation de modélisation simplifiée de l'aérodynamique et de la structure permet d'étudier le phénomène des LCOs. (Hartwich *et al.* [45]) Ont simulé le phénomène des LCOs en utilisant un solveur aérodynamique turbulent 3D et une représentation modale de la structure. Leurs simulations donnent un aperçu de la complexité de l'aérodynamique et des moyens à mettre en oeuvre afin de simuler les LCOs d'une configuration complexe (chasseur BI).

Toutefois, la simulation du système non linéaire dans le domaine temporel est la méthode qui s'avère la plus adéquate pour les prédictions des LCOs.

- Les LCOs peuvent être aussi étudiées en utilisant l'analyse harmonique (Denegri [67]). La solution est écrite comme une combinaison linéaire d'un nombre fini d'harmoniques.

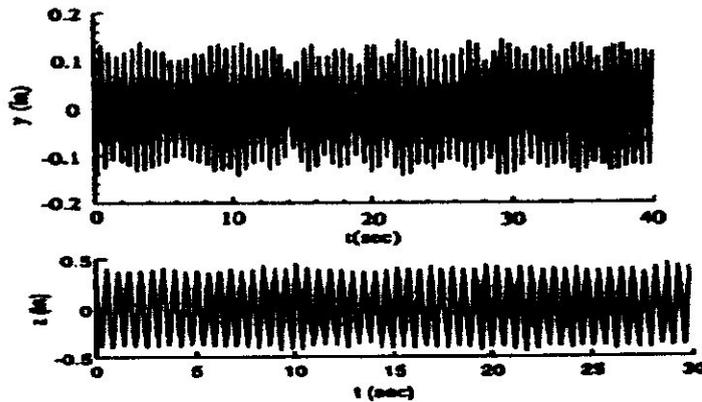


Figure IV.12.  $\mu$  : Oscillation de cycle limite-Oscillation latérale d'une nacelle avion de transport.  $Mach=0.894$  et Altitude=6705.

La précision dépend dans ce cas du nombre d'harmoniques utilisées. Cependant, la décomposition des termes non-linéaires demande un nombre important d'harmoniques et rend la méthode très vite inutilisable.

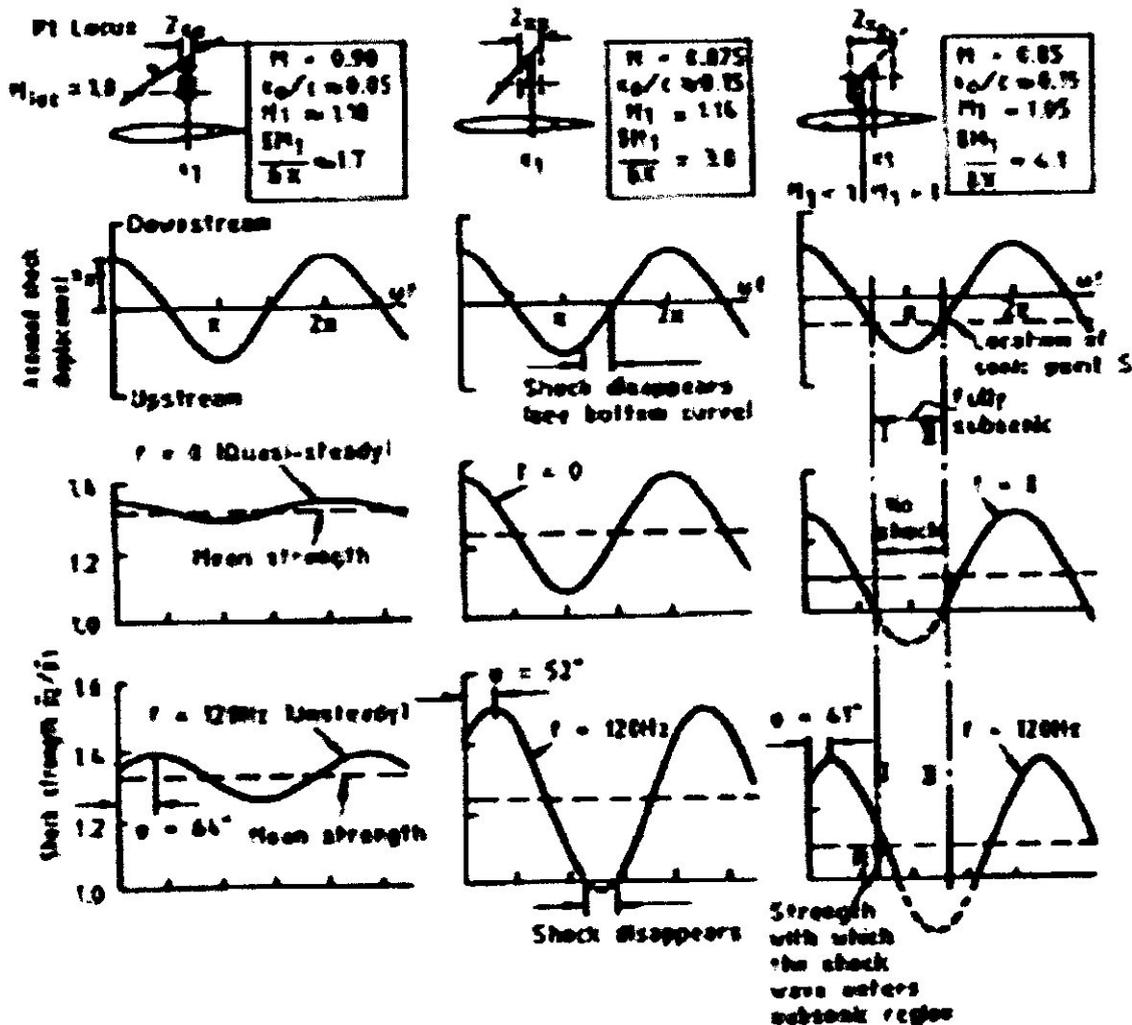


Figure IV.13. Type A, B, et C de mouvement de choc.

## **IV.2. Calcul de la frontière de flottement du système aéroélastique bidimensionnels :**

### **IV.2.1.1.Introduction :**

Les problèmes d'interactions fluide-structure et en particulier l'aéroélasticité est un domaine où la simulation numérique améliore la compréhension et la prédiction des phénomènes physiques. La stabilité du système aéroélastique d'une voilure à plusieurs degrés de liberté peut être perturbée pour certaines conditions de vol et provoquer le phénomène du flottement. Le flottement est une oscillation d'amplitude croissante à l'infini du système aéroélastique induit par l'excitation des charges aérodynamiques instationnaires. Le flottement peut provoquer la destruction de la structure et il est nécessaire d'établir la frontière de flottement du système aéroélastique pour définir le domaine de vol sécurisé de l'avion.

Concrètement, la frontière de flottement donne la valeur critique de Mach et d'altitude (Mach, pression dynamique) pour laquelle le flottement apparaît. Cette frontière divise le plan (Mach, pression dynamique) en une zone stable et instable. Plusieurs études antérieures sur des systèmes aéroélastiques de profil avec peu de degrés de liberté ont mis en évidence les caractéristiques du flottement dans le régime transsonique qui sont :

- le creux transsonique (transsonique dip).
- les oscillations de cycle limite (LCO).
- les effets visqueux.

L'existence de ce creux transsonique a été mis en évidence par isogai [58.59] Ce creux dans la frontière de flottement se manifeste par une diminution du domaine de stabilité lors de l'entrée en régime transsonique suivie d'une brusque augmentation de la vitesse critique et donc du domaine de stabilité. Plusieurs simulations directes non visqueuses ont montré que la frontière de flottement avait une forme en S pranta [26], bendiksen [64], toumit [69] Cette forme particulière de la frontière de flottement illustre l'existence de plusieurs points de flottement pour un nombre de Mach donné. Bendiksen [64.70] montre que l'existence du creux transsonique est un phénomène piloté par les fortes non-linéarités de l'écoulement transsonique et ne peut donc être prédit que par l'utilisation de simulation directe qui utilise des méthodes aérodynamiques non-linéaires. Bendiksen [70] met en évidence l'effet de la forme géométrique des profils (épaisseur, cambrure) sur la forme et la profondeur du creux transsonique. Cette dépendance du creux transsonique vis à vis des formes aérodynamiques est causée par la forte dépendance de l'aérodynamique stationnaire et instationnaire aux paramètres géométriques des ailes et profils maybey [64.53].

De plus, le fort couplage entre l'aérodynamique stationnaire et instationnaire rend impossible le découplage temporel des équations de la dynamique des fluides et nécessite pour la prédiction de l'aérodynamique instationnaire une résolution temporelle des équations.

Une des particularités de l'aéroélasticité non-linéaire est l'apparition du phénomène des cycles limites. Un cycle limite est une instabilité du système aéroélastique caractérisée par une amplitude croissante jusqu'à une valeur finie. L'amplitude des oscillations est indépendante des conditions initiales. Lorsque la structure est linéaire, ce sont les fortes non linéarités de l'écoulement aérodynamique qui sont à l'origine de ce phénomène.

Les cycles limites peuvent être observés sur des systèmes aéroélastiques en régime transsonique ou lorsque les effets visqueux introduisent de fortes non-linéarités (décrochage dynamique) Les cycles limites sont couramment observés sur les avions de combat dunn [63] denigri [71] et ont en général comme origine les systèmes d'arme ou de ravitaillements externes. Même si la dangerosité des LCOs (Limit Cycle Oscillation) est moindre, la gêne occasionnée sur le pilotage ou le vieillissement prématuré des structures nécessite leur prédiction. Seule une simulation directe temporelle peut être utilisé pour la prédiction des LCOs.

De plus, l'aérodynamique transsonique est fortement pilotée par les effets visqueux et il est préférable d'utiliser des méthodes aérodynamiques résolvant les équations de Navier-Stokes *hardwired* [45].

Prenta [26] montre que les effets visqueux ont un effet significatif sur la frontière de flottement en particulier dans la région du creux transsonique. Les calculs visqueux effectués par Prenta [26] montrent que le creux transsonique est réduit par rapport aux simulations non visqueuses. De plus, dans cette étude, on montre que la forme en "S" de la frontière de flottement disparaît et que la réponse du système aéroélastique est fortement modifiée par la viscosité. Ainsi, la prédiction de la frontière de flottement dans la zone proche du creux transsonique nécessite la prise en compte de la viscosité pour une bonne prédiction de l'aérodynamique instationnaire.

Toutes ces caractéristiques du flottement transsonique montrent qu'il est nécessaire de se doter d'un outil de simulation aéroélastique directe utilisant une méthode aérodynamique résolvant les équations de Navier-Stokes. Les simulations numériques directes des interactions fluide-structure restent relativement coûteuses en CPU machine et en mémoire surtout si la méthode aérodynamique utilisée est complexe. Il est ainsi nécessaire de valider et de qualifier les méthodes sur des systèmes aéroélastiques bidimensionnels à peu de degrés de liberté. Cette partie présente le calcul de la frontière de flottement du profil NACA64A010 à deux degrés de liberté.

Dans une première partie, la modélisation du système aéroélastique est présentée. Ensuite, une vaste validation de l'outil numérique est présentée. La prédiction de la frontière de flottement en Euler et en Navier-Stokes est ensuite présentée. Une comparaison des deux méthodes montre l'importance des effets visqueux sur le phénomène du flottement transsonique.

#### IV.2.1.2. Modélisation du système aéroélastiques :

##### IV.2.2.1.1. Présentation de la configuration :

La configuration étudiée est un profil d'aile symétrique NACA64A010 représentant une section d'aile tridimensionnelle en flèche au voisinage du saumon de la voilure. Le système aéroélastique comporte deux degrés de liberté, le premier en tangage et le deuxième modélisant le déplacement vertical (ou pilonnement). Ce système aéroélastique permet de modéliser une voilure poutre tout en conservant une ligne moyenne perpendiculaire à l'écoulement infini. Pour modéliser l'effet de la flèche de la voilure, l'axe de rotation est placé en avant du bord d'attaque du profil. Isogai [58,59] a proposé cette configuration pour l'étude du flottement d'une aile en flèche. La figure (IV.14) schématise le système aéroélastique. Un ressort en torsion est situé à une demi-corde en amont du bord d'attaque. Le déplacement vertical est contraint par un ressort situé une demi corde devant le bord d'attaque.

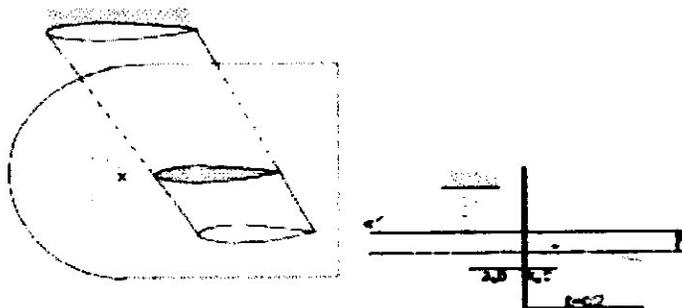


Figure IV.14. Système à deux degrés de liberté

### IV.2.2.1.2. Équations du système aéroélastique :

Les équations du système aéroélastique sont obtenues à partir des équations de Lagrange. Le profil est supposé rigide et la structure a deux degrés de liberté : le déplacement vertical  $h$  et la rotation en tangage  $\alpha$ . Les équations générales régissant le mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + c_h \dot{h} + k_h h = -L \\ S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + c_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha \alpha = M \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Avec :

$m, S_\alpha, I_\alpha$  respectivement la masse du profil, le moment statique et le moment d'inertie autour de l'axe élastique,  $c_h, c_\alpha$  sont les coefficients d'amortissement pour le déplacement vertical et la rotation en tangage  $k_h, k_\alpha$  sont les raideurs des ressorts pour les deux degrés de liberté. Au second membre de l'équation,  $L$  et  $M$  respectivement la portance et le moment aéroélastique (exercé sur l'axe élastique). Les coefficients de l'amortissement de la structure  $c_h, c_\alpha$  sont supposés nuls. Le comportement de la structure est supposé linéaire et élastique. Les équations du mouvement IV.3 sont adimensionnées par la demi-corde  $b$  pour le déplacement vertical  $h$  et par la pulsation propre du ressort  $\omega_\alpha$  pour le temps. On introduit le déplacement vertical adimensionné  $\bar{h} = h/b$  et le temps adimensionné  $\tau = t\omega_\alpha$  dans le système d'équation (IV.3) :

$$\begin{cases} \bar{h} + x_\alpha \ddot{\alpha} + \frac{k_h}{m\omega_\alpha^2} \bar{h} = -\frac{L}{mb\omega_\alpha^2} \\ x_\alpha \bar{h} + r_\alpha^2 \ddot{\alpha} + \frac{k_\alpha}{mb^2\omega_\alpha^2} \alpha = \frac{M}{mb^2\omega_\alpha^2} \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

En introduisant dans les équations  $\omega_h^2 = \frac{k_h}{m}, \omega_\alpha^2 = \frac{k_\alpha}{I_\alpha}, r_\alpha^2 = \frac{I_\alpha}{mb^2}$  et la vitesse réduite

$V^* = \frac{U_\infty}{\omega_\alpha b \sqrt{\mu}}$  on obtient :

$$\begin{cases} \bar{h} + x_\alpha \ddot{\alpha} + \frac{k_h}{m\omega_\alpha^2} \bar{h} = -\frac{\rho_\infty U_\infty^2 C_L}{2mb\omega_\alpha^2} \\ x_\alpha \bar{h} + r_\alpha^2 \ddot{\alpha} + \frac{k_\alpha}{mb^2\omega_\alpha^2} \alpha = \frac{\rho_\infty U_\infty^2 C_M c}{2mb^2\omega_\alpha^2} \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Avec  $C_L$  et  $C_M$  respectivement les coefficients aéroélastiques de la portance et du moment. Le système peut alors s'écrire sous une forme matricielle classique :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (\text{IV.6})$$

Avec  $M$  la matrice des masses,  $K$  la matrice des raideurs,  $q$  le vecteur des déplacements et au second membre le vecteur des forces aéroélastiques.

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & x_\alpha \\ x_\alpha & r_\alpha^2 \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}\right)^2 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \alpha \end{Bmatrix}, \{F\} = \frac{V^{*2}}{\pi} \begin{Bmatrix} -C_L \\ 2C_M \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

### IV.2.2.1.3. Paramètres du système aéroélastique :

Le système aéroélastique considéré a été étudié par plusieurs auteurs. Initialement le cas test a été défini isogai [58.59] et utilisé par prannanta [26] et willox [38], alonso [27], bendiksen [72]. La structure est constituée d'un profil symétrique NACA64A010. Les paramètres définissant les matrices de raideur et de masse sont récapitulés dans le tableau (IV.2).

$x_a = w_h / w_a$	1.8
$r_a^2$	3.48
$\mu$	60
$b$	$0.5c$

Tableau IV.2. Paramètres de la structure.

### IV.2.2.1.4. Modes de flottement :

Le système aéroélastique étant défini, il est possible de calculer les modes naturels (sans force extérieure) de la structure. Pour cela, en reprenant l'équation (IV.6) avec  $F(t) = 0$ , la solution est recherchée sous la forme  $q(t) = \tilde{q} e^{i\omega t}$ . Le calcul des modes de flottement et des fréquences propres se fait en résolvant le problème aux valeurs propres (IV.9).

$$\omega^2 M \tilde{q} = K \tilde{q} \quad (\text{IV.9})$$

Pour ce système aéroélastique à deux degrés de libertés, deux modes naturels de flottement sont calculés. Les pulsations associées sont  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Le premier mode correspond à un mouvement en phase du ressort vertical et du ressort en torsion. Le deuxième mode, de plus haute fréquence, correspond à un mouvement des ressorts vertical et de torsion déphasés de  $\frac{\pi}{\omega_2}$ . Les valeurs des modes et des pulsations propres sont récapitulées dans le tableau (IV.3). La figure (IV.15) illustre le mouvement du profil suivant les deux modes. Le flottement résulte en une excitation d'un de ces deux modes naturels de la structure. Le flottement le plus couramment observé est une excitation du premier mode, cependant pour des simulations non visqueuses, une excitation du second mode a été observé par Prannanta [26], Alonso [27] et plus précisément par Toumit [69].

$f_1$ (adimensionnée)	0.1135
$\omega_1$	0.71337
$\tilde{q}_1$	$(0.811, 0.472)^t$
$f_2$ (adimensionnée)	0.8494
$\omega_2$	5.337
$\tilde{q}_2$	$(0.811, -0.472)^t$

Tableau IV.3. Modes propres de la structure.

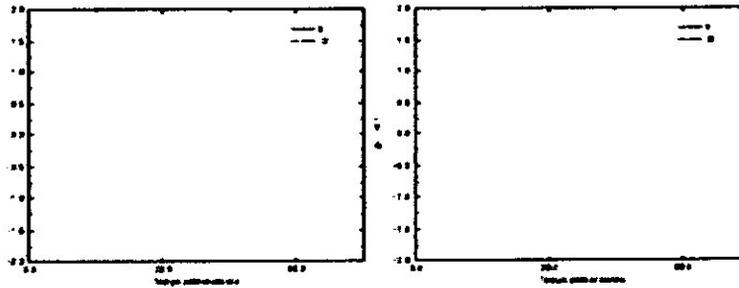


Figure IV.15. Modes propres de la structure.

#### IV.2.1.3. Validation de l'outil numérique :

Ce paragraphe présente la validation des méthodes utilisées pour la résolution du système aéroélastique (IV.6) L'intégration temporelle du système aéroélastique est effectuée à l'aide du schéma de Newmark. L'algorithme décalé de couplage en temps est utilisé pour le couplage temporel de la résolution des équations de la dynamique des structures avec la résolution des équations de la dynamique des fluides. Deux modèles de turbulence ont été testés, le premier le modèle de Baldwin-Lomax s'est montré efficace pour déterminer les frontières de flottement en régime subsonique et faiblement transsonique.

L'utilisation de ce modèle a aussi permis de comparer ces résultats avec les résultats obtenus sur ce même cas test par Prananta [26]. Le deuxième modèle de turbulence utilisé est le modèle à une équation de transport de Spalart Allmaras. Ce modèle de turbulence a démontré son efficacité pour la simulation aérodynamique instationnaire des profils soumis à un mouvement d'oscillation en tangage.

L'interaction choc/couche limite pilote une grande partie de l'aérodynamique instationnaire en régime transsonique. L'amélioration de la prédiction de cette interaction par le modèle de Spalart-Allmaras modifie une partie de la frontière de flottement dans la région du creux transsonique. L'influence du schéma spatial a été aussi analysée. Enfin, plusieurs tests numériques ont permis de déterminer le pas de temps et des différents paramètres numériques.

##### IV.2.1.3.1. Validation du schéma de Newmark :

Pour valider le schéma de Newmark développé dans le code NSMB, un calcul sans effort aérodynamique a été réalisé (mouvement libre). La condition initiale imposée à la structure est un angle de tangage  $\alpha = 1^\circ$ , une vitesse  $\dot{\alpha} = 0$ , une accélération  $\ddot{\alpha} = 0$ , et un déplacement vertical :  $\bar{h} = 0, \dot{\bar{h}} = 0, \ddot{\bar{h}} = 0$ .

Il permet de déterminer la qualité de la résolution numérique des équations de la structure. La solution numérique est une combinaison linéaire des deux modes propres. La présence des deux modes de structure permet d'étudier l'influence du pas de temps sur l'intégration temporelle de la structure. La figure (IV.15) présente la réponse de la structure pour un pas de temps  $\Delta t = 0.05$ .

La décomposition en série de Fourier du mouvement instationnaire permet d'isoler les deux modes propres du système aéroélastique et de comparer leurs caractéristiques avec les valeurs analytiques. La précision du schéma de Newmark est pilotée par le nombre de pas temps discrétisant le mode de plus haute fréquence, c'est à dire le deuxième mode. Le tableau (IV.4) récapitule les fréquences associées à chaque mode pour toutes les discrétisations temporelles testées.

Ainsi, on voit que malgré une faible discrétisation temporelle, le schéma de Newmark permet de simuler correctement le mouvement de la structure. Cette qualité de résolution du schéma de Newmark, nous permet d'être confiant sur l'intégration temporelle des équations du mouvement de la structure ; en effet, pour la plupart des calculs, le pas de temps imposé par le solveur aérodynamique est faible et est suffisamment petit pour le schéma de Newmark.

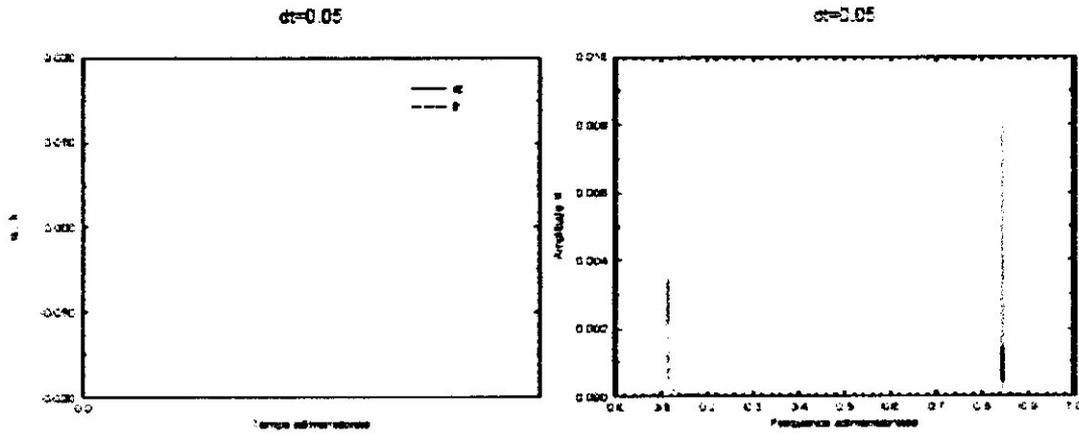


Figure IV.16. Réponse de la structure (  $\Delta_t = 0,05$  )

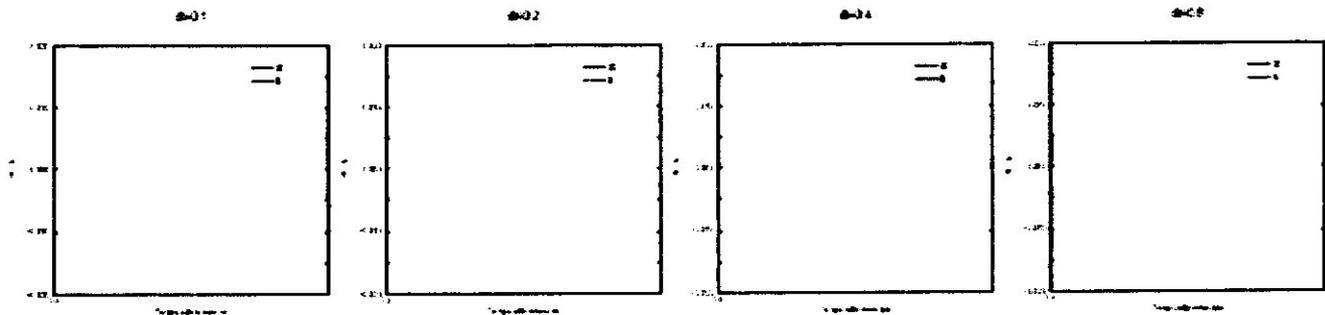


Figure. IV.17. réponse de la structure (  $\Delta_t = 0,1, \Delta_t = 0,2, \Delta_t = 0,4, \Delta_t = 0,8$  )

$\Delta t$	$T_1/\Delta t$	$T_2/\Delta t$	$f_1$	$f_2$
Valeurs théoriques	-	-	0.1135	0.8494
0.05	176	24	0.1136	0.8445
0.1	88	12	0.1136	0.8300
0.2	44	6	0.1133	0.7803
0.4	22	3	0.1128	0.6509
0.8	11	1.5	0.1106	0.4507

Tableau IV.4. Effet du pas de temps sur la précision du schéma de Newmark

**IV.2.1.3.2. Algorithme de couplage en temps :**

Le couplage en temps du solveur aérodynamique et du solveur structure est effectué à l'aide de l'algorithme décalé. On s'assure que cet algorithme décalé ne perturbe pas le système aéroélastique de manière significative en imposant un pas de temps  $\Delta t$  petit, imposé en général par le solveur aérodynamique. Les efforts aérodynamiques au pas de temps  $n + 1$  sont déterminés en utilisant une approximation du premier ordre  $F^{n+1} = 2F^n - F^{n-1}$ .

Cette approximation permet de réduire les perturbations induites par le couplage en temps sur le système aéroélastique. Les équations de la structure sont adimensionnées en temps par la pulsation propre du ressort de torsion et il est nécessaire de modifier l' dimensionnement du code NSMB afin de le rendre compatible avec les équations de la structure.

#### IV.2.1.3.3. Modèle de turbulence :

Les modèles de turbulence algébrique de Baldwin-Lomax et le modèle de turbulence à une équation de transport de Spalart Allmaras ont été testés. Conformément aux résultats numériques présentés sur le mouvement rigide du profil NACA64A010, le modèle de Baldwin-Lomax se montre insuffisamment précis lorsque l'interaction choc/couche limite provoque le décollement de la couche limite. Les constantes des modèles de turbulence utilisées pour le calcul du flottement n'ont pas été modifiées.

En effet, l'écoulement est très différent et il est très difficile de chercher un jeu de paramètres dans la plage du nombre de Mach étudiée.

#### IV.2.1.3.4. Choix du schéma spatial :

Les calculs des frontières de flottement ont été réalisés à l'aide du schéma décentré de ROEMUSCL deuxième ordre. Les limiteurs utilisés sont ceux définis par VanLeer. La correction entropique de Harten a été fixée à  $\delta = 0.1$ .

Toutefois, pour la région proche du creux transsonique, où on observe un fort décollement de la couche limite, le schéma de Jameson du deuxième ordre a été utilisé afin de valider ou de préciser la frontière de flottement.

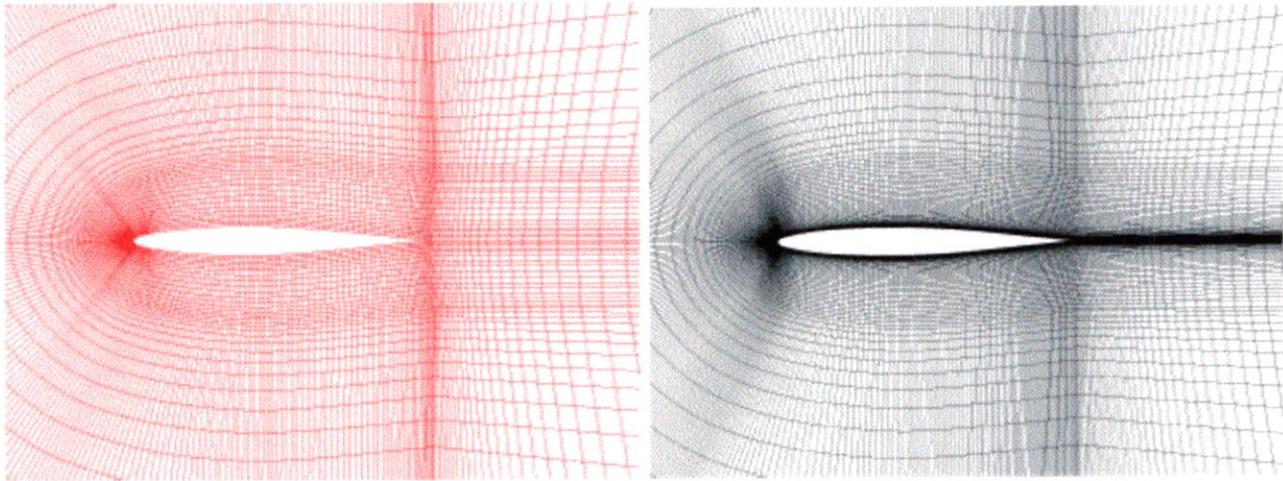
#### IV.2.1.3.5. Maillages aérodynamiques :

La discrétisation spatiale du domaine fluide est prépondérante sur la précision des résultats numériques. Le calcul instationnaire doit en général trouver un compromis entre le temps de calcul nécessaire aux calculs d'un nombre de cycles fini et la finesse du maillage. Le calcul de la frontière de flottement en fluide visqueux a été réalisé à l'aide d'un maillage en C de (453 x 113) noeuds. Les figures et (VI.18) et (IV.19) présentent les différents maillages aérodynamiques utilisés.

Les resserrements des noeuds du maillage à la paroi ont été réalisés afin d'avoir une valeur  $y^+ = 1$  dans la première maille pour une grande partie de la plage de Mach. Un premier maillage non coïncident partiellement a été réalisé afin de valider l'utilisation de cette technique pour le calcul aéroélastique. Un deuxième maillage non coïncident partiellement a été réalisé pour une meilleure prédiction de quelques points de la frontière de flottement dans la zone du creux transsonique. Le tableau IV.5 récapitule le nombre de noeuds que contient chaque maillage.

Numero du maillage	Maillage	Nombre de noeuds
a	Euler	15533
b	NS coïncident	51189
c	NS non coïncident grossier	35259
d	NS non coïncident fin	70098

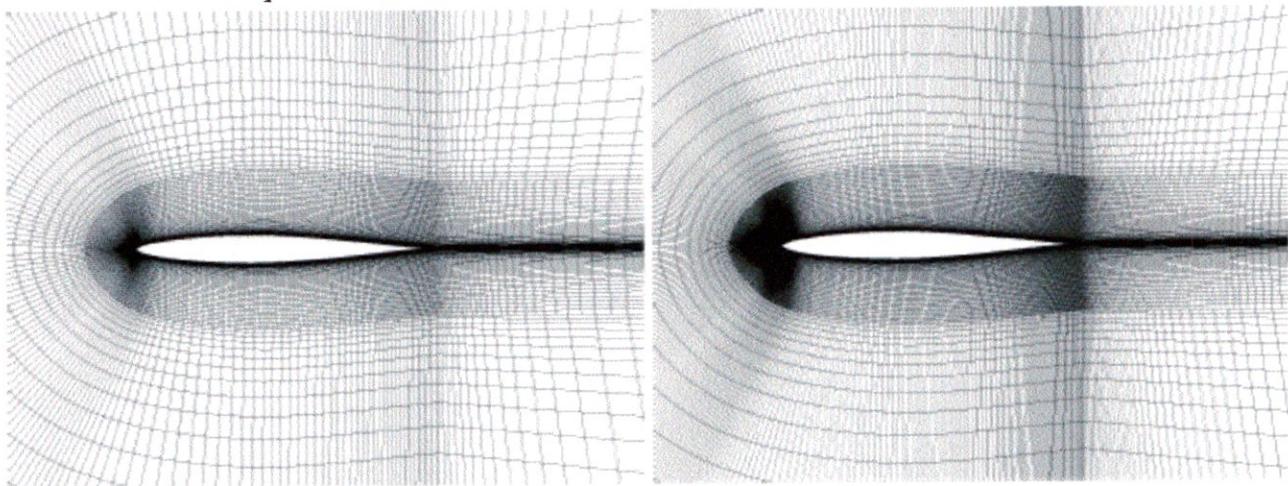
Tableau IV.5. Caractéristique des maillages.



**Figure IV.18.** Maillages aérodynamique a /Euler, b /Navier Stokes.

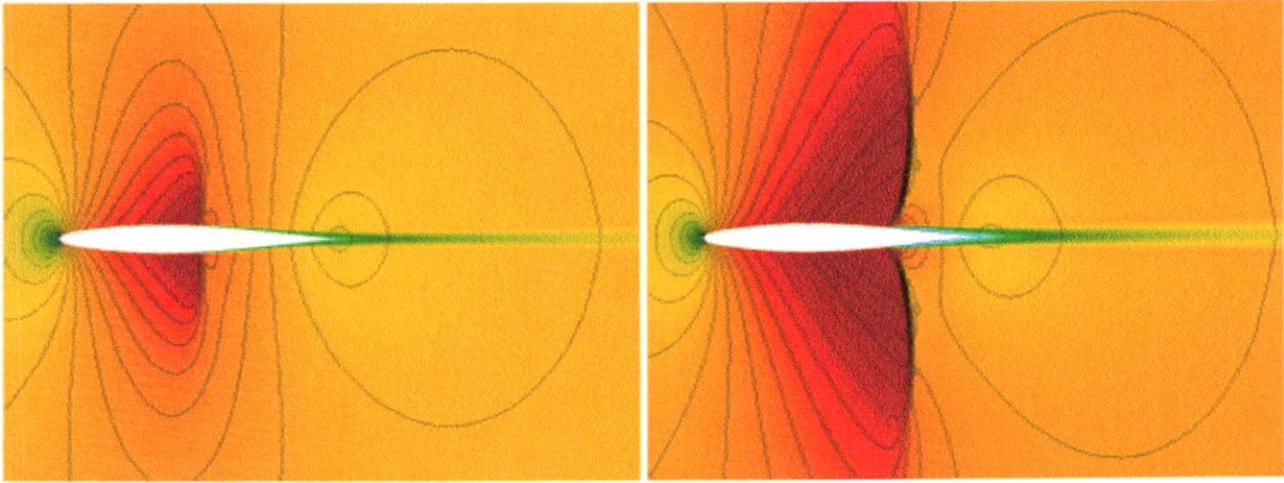
#### IV.2.1.3.6. Solution initiale et perturbation initiale :

Il est nécessaire de disposer pour des raisons de stabilité et d'efficacité du code, d'une solution stationnaire suffisamment convergée (5 ordres de grandeur) comme condition initiale de chaque simulation aéroélastique.



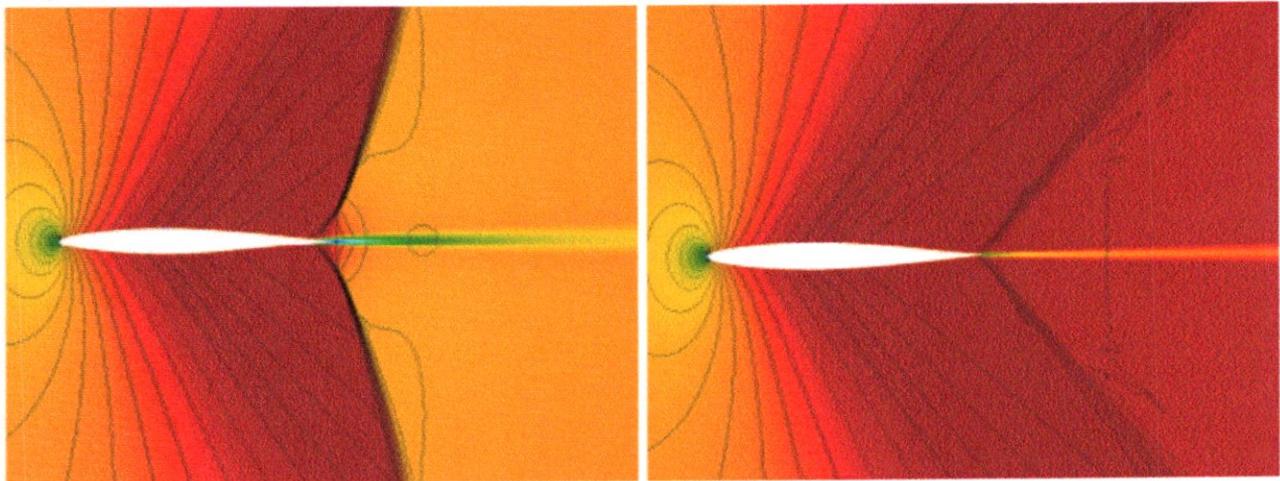
**Figure IV.19.** Maillages aérodynamiques Navier Stokes coïncident partiellement. C /grossier d/ fin

Cette solution stationnaire permet si nécessaire d'adapter le resserrement du maillage à la paroi pour assurer un  $y^+ = 1$  dans la première cellule. Les calculs stationnaires sont effectués avec le même schéma spatial que celui utilisé pour les calculs instationnaires afin de limiter les instabilités numériques pour les premiers cycles d'oscillations. Les solutions stationnaires sont calculées pour un angle d'attaque  $\alpha = 0^\circ$ . Tous les calculs utilisent l'implicite matriciel LU-SGS. Les figures (IV.20) et (IV.21) montrent la solution numérique obtenue pour des nombres de Mach égaux à  $M_\infty = 0.8, M_\infty = 0.85, M_\infty = 0.9$  et  $M_\infty = 0.95$ .



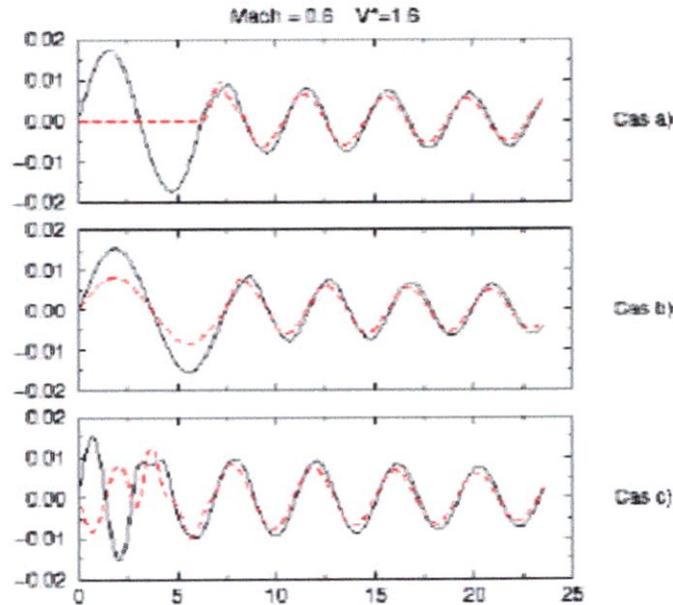
**Figure IV.20.** Calcul stationnaire – iso contours du nombre de Mach –Simulation Spalart Allmaras  
 $R_e = 6,610^6 - M_\infty = 0,8 - M_\infty = 0,85$

Une fois la solution stationnaire obtenue, le système aéroélastique est perturbée par rapport à sa position d'équilibre. Cette perturbation est induite par un mouvement forcé. Nous avons sélectionné comme perturbation une oscillation en tangage d'amplitude égale à 1 degré et de pulsation égale à la pulsation propre du ressort de torsion  $\omega_\alpha$ . Le système aéroélastique est ensuite libre d'évoluer sous l'influence des forces aérodynamiques. En général, 5 à 6 cycles d'oscillation suffisent à déterminer le caractère stable ou instable du mouvement. La nature de la perturbation peut varier. On peut par exemple exciter le système suivant le deuxième mode propre ou exciter le système



**Figure IV.21.** Calcul stationnaire – iso contours du nombre de Mach –Simulation Spalart Allmaras  
 $R_e = 6,610^6 - M_\infty = 0,9 - M_\infty = 0,95$

Suivant le déplacement vertical. Les figures (IV.22) montrent la réponse du système aéroélastique (calcul non visqueux) pour différents types d'excitation. On observe que la perturbation initiale n'a aucun effet sur la réponse du système aéroélastique.



**Figure.IV.22.** réponse du profil pour différentes perturbations initiales. En trait plein l'angle d'attaque  $\alpha$ , un pointillé le déplacement vertical  $h/b$ . cas a/ oscillation en tangage  $w = w_\alpha$ , b/ oscillation suivant le premier mode propre  $w = w_1$ , c/ oscillation suivant le deuxième mode propre  $w = w_2$

#### IV.2.1.3.7. Détermination du pas de temps :

Les méthodes d'intégration temporelle pour le fluide (pas de temps dual) et pour la structure (schéma de Newmark) sont inconditionnellement stables. Le pas de temps peut être choisi en théorie essentiellement suivant des contraintes physiques. En pratique, l'utilisation du pas de temps dual nécessite un équilibre entre le nombre de sous-itérations par pas de temps externe et le nombre de pas de temps nécessaire pour décrire un cycle d'oscillation. Cet équilibre permet si on se fixe une convergence à 3 ordres de grandeur pour 50 sous itérations, à un nombre de pas de temps physiques suffisant afin de décrire le mouvement. En général, les cycles d'oscillations décrits avec 80 pas de temps par cycle permettent de répondre à ces critères. Les calculs aéroélastiques visqueux ne présentant pas de réponse de la structure complexe, cette détermination du pas de temps s'est révélée suffisamment précise.

#### IV.2.1.3.8. Analyse de la réponse du système aéroélastique :

Après le mouvement forcé, le système aéroélastique est libre d'évoluer sous la contrainte des charges aérodynamiques. Nous pouvons observer trois types de réponse. Une réponse amortie est observée pour des index de vitesse réduite  $V^*$  inférieurs à l'index de vitesse réduite critique  $V_f^*$ . Dans ce cas, le système aéroélastique dissipe l'énergie cinétique apportée à la structure lors de la phase du mouvement forcé.

Pour des index de vitesse réduite  $V^* = V_f^*$ , la réponse du système aéroélastique est neutre. Ce comportement du système aéroélastique correspond à un échange d'énergie entre le fluide et la structure tel que le bilan d'énergie est nul sur un cycle d'oscillation. Le mouvement d'oscillation est alors entretenu sans amplification ou amortissement des amplitudes de mouvement. Enfin, pour des index de vitesse réduite

$V^* > V_f^*$ , la structure reçoit de l'énergie du fluide tel que le bilan d'énergie est en faveur du fluide. La structure reçoit plus d'énergie mécanique qu'elle ne peut en transformer en énergie cinétique durant une

période d'oscillation, l'amplitude des oscillations croît exponentiellement, c'est le phénomène du flottement.

En régime transsonique ou subsonique fort, l'étude du phénomène du flottement permet d'observer un quatrième type de réponse appelé "un cycle limite".

Pour ce cas, on se situe au dessus de l'index de vitesse réduite  $V_f^*$ , le système aéroélastique perturbé est instable et l'amplitude des oscillations croît de manière exponentielle.

Toutefois, contrairement au phénomène du flottement classique subsonique et supersonique, les amplitudes atteignent une valeur finie indépendante de la nature de la perturbation initiale. Le phénomène des cycles limites est associé aux non-linéarités de l'écoulement. Nous avons choisi pour tracer la frontière de flottement de considérer toutes les instabilités comme étant du flottement. Ainsi, les LCOs sont considérées comme étant une réponse caractéristique du flottement en régime transsonique et la frontière de flottement a été caractérisée de cette manière.

Il est possible d'analyser la variation de l'énergie mécanique de la structure qui peut s'écrire :

$$E_t = E_c + E_p = \frac{1}{2} \dot{q}' [M] \dot{q} + \frac{1}{2} q' [K] q \quad (\text{IV.10})$$

Dans ce cas, l'analyse de la variation de l'énergie mécanique peut s'avérer plus facilement exploitable que l'analyse des amplitudes des déplacements  $a, h$ .

#### **IV.2.1.4. Frontière de flottement :**

La frontière de flottement permet de séparer dans le plan  $(Mach, V^*)$  la zone stable et instable du système aéroélastique.

Si on note,  $V^* = F(Mach)$  la courbe de la frontière de flottement. La région stable est la région dans le plan  $(Mach, V^*)$  définie par  $V_f^* - V^* < 0$ , La région instable est définie par  $V_f^* - V^* > 0$ .

La détermination de la frontière de flottement demande un grand nombre de simulations aéroélastiques. Les deux modèles de turbulence (Baldwin Lomax et Spalart-Allmaras) ont été utilisés afin de déterminer la frontière de flottement. La frontière calculée avec le modèle de Baldwin Lomax peut être comparée à la frontière calculée par Prananta [26] avec le même modèle de turbulence. L'effet du modèle de turbulence peut être étudié en comparant les frontières de flottement évaluées avec le modèle de Baldwin Lomax et avec le modèle de Spalart Allmaras. La zone du creux transsonique a été plus particulièrement étudiée en utilisant des maillages non coïncidents.

##### **IV.2.1.4.1. Analyse de la frontière de flottement :**

Les calculs de la frontière de flottement ont été réalisés sur une plage de Mach variant de [0.75, 0.95].

La zone du creux transsonique entre  $M_\infty = 0.85$  et  $M_\infty = 0.9$  a été précisément détaillée. Les frontières de flottement obtenues avec le modèle de Baldwin Lomax et le modèle de Spalart Allmaras sont illustrées sur les figures (IV.32) et (IV.33).

Les résultats obtenus par Prananta sont aussi tracés. On remarque une bonne concordance des résultats numériques obtenus avec le modèle de Baldwin-Lomax avec ceux de Prananta.

Il est possible de diviser le plan  $(M_\infty, V^*)$  des courbes de flottement en trois zones de Mach distinctes.

##### **IV.2.1.4.1.1. Zone faiblement transsonique et fortement subsonique, $0.7 \leq M_\infty \leq 0.825$ .**

Pour ces conditions de vol, l'interaction choc/couche limite est suffisamment faible (inexistante en régime subsonique) pour garder la couche limite attachée. Dans ce cas tous les modèles de turbulence

prédissent une frontière de flottement similaire. Les résultats numériques obtenus sont proches des prédictions numériques de Prananta, mais aussi des simulations non visqueuses de Bendiksen, Alonso et Toumit.

Le calcul stationnaire d'initialisation à  $M_\infty = 0.8$  montre le type d'écoulement présent dans cet intervalle de nombre de Mach. La figure IV.24 illustre la variation de l'angle d'attaque et du déplacement vertical dans le cas de la mise en flottement ( $V^* = 1.2$ ).

Pour cet intervalle de nombre de Mach, les effets non-linéaires sont faibles. Toutefois les méthodes linéaires de prédiction du flottement basées sur les relations de Théodorsen [73.74] commencent à devenir imprécise. Ainsi, Garrick [75.76.77] a démontré que ces relations sont imprécises à partir de  $M_\infty = 0.7$ .

Nous avons tracé sur les frontières de flottement la frontière de flottement obtenue par la formule semi-empirique de Théodorsen corrigée. Cette formule est obtenue en introduisant une correction de compressibilité dans la formule de Théodorsen, basée sur la règle de Glauert-Prandtl définissant la pente des coefficients aérodynamiques en compressible. Au premier ordre, les forces aérodynamiques stationnaires sont proportionnelles à  $\frac{1}{\sqrt{(1-M^2)}}$ .

En conséquence, on attend une décroissance en  $(1-M^2)^{\frac{1}{4}}$  de la vitesse réduite de flottement. Pour un système aéroélastique à 2 degré de liberté en (torsion/flexion), la formule empirique est donnée par la relation :

$$V_f^* = (1-M^2)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\mu \frac{r_a^2}{k} \frac{1/2}{1/2 + \alpha + x_\alpha}} \quad (\text{IV.11})$$

Ainsi, on observe une différence notable entre la simulation directe non-linéaire et la formulation empirique basée sur une théorie linéaire du flottement dès la rentrée du profil en régime transsonique. Pour le régime transsonique faible, la viscosité a un faible effet, toutefois lorsque l'oscillation devient importante, on observe un décollement de la couche limite lors de l'oscillation du profil.

La viscosité n'a ainsi pas joué de rôle prépondérant dans la mise en flottement du système aéroélastique mais joue a un effet important si on étudie les oscillations du profil.

Les figures (IV.24) illustrent l'oscillation du profil entre les temps  $t = 68.4$  et  $t = 74.4$ .

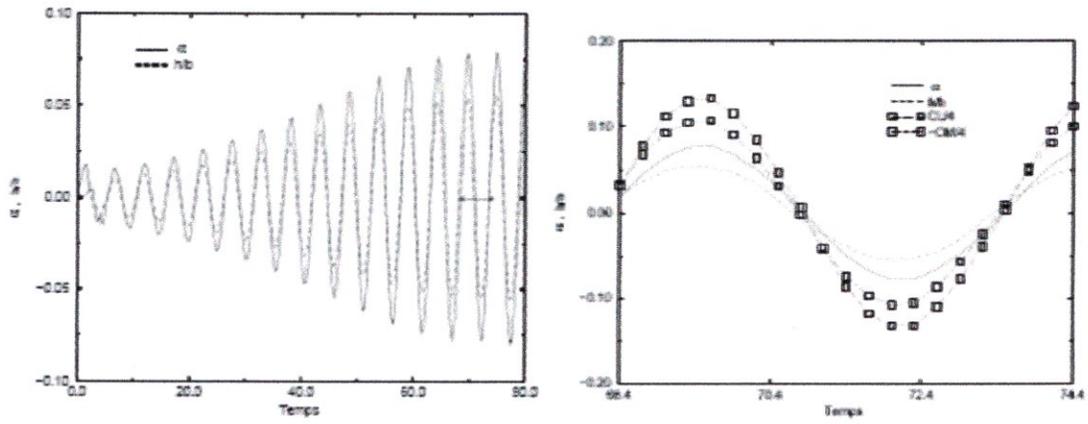
Le champ du nombre de Mach est illustré pour un pas de temps égal à  $\Delta t = 0.4$ . La période est marquée par une flèche sur l'historique de l'angle d'attaque et du déplacement vertical voir figure (IV.23).

Les historiques des angles d'attaque, du déplacement vertical et des coefficients aérodynamiques sont représentées sur la figure (IV.23) pour l'intervalle de temps [68.4-74.4]. L'amplitude de l'angle d'attaque est égale à 4. On peut observer lors du mouvement le décollement de la couche limite lors des positions extrêmes du profil. On peut noter que le caractère fortement non-linéaire de l'écoulement.

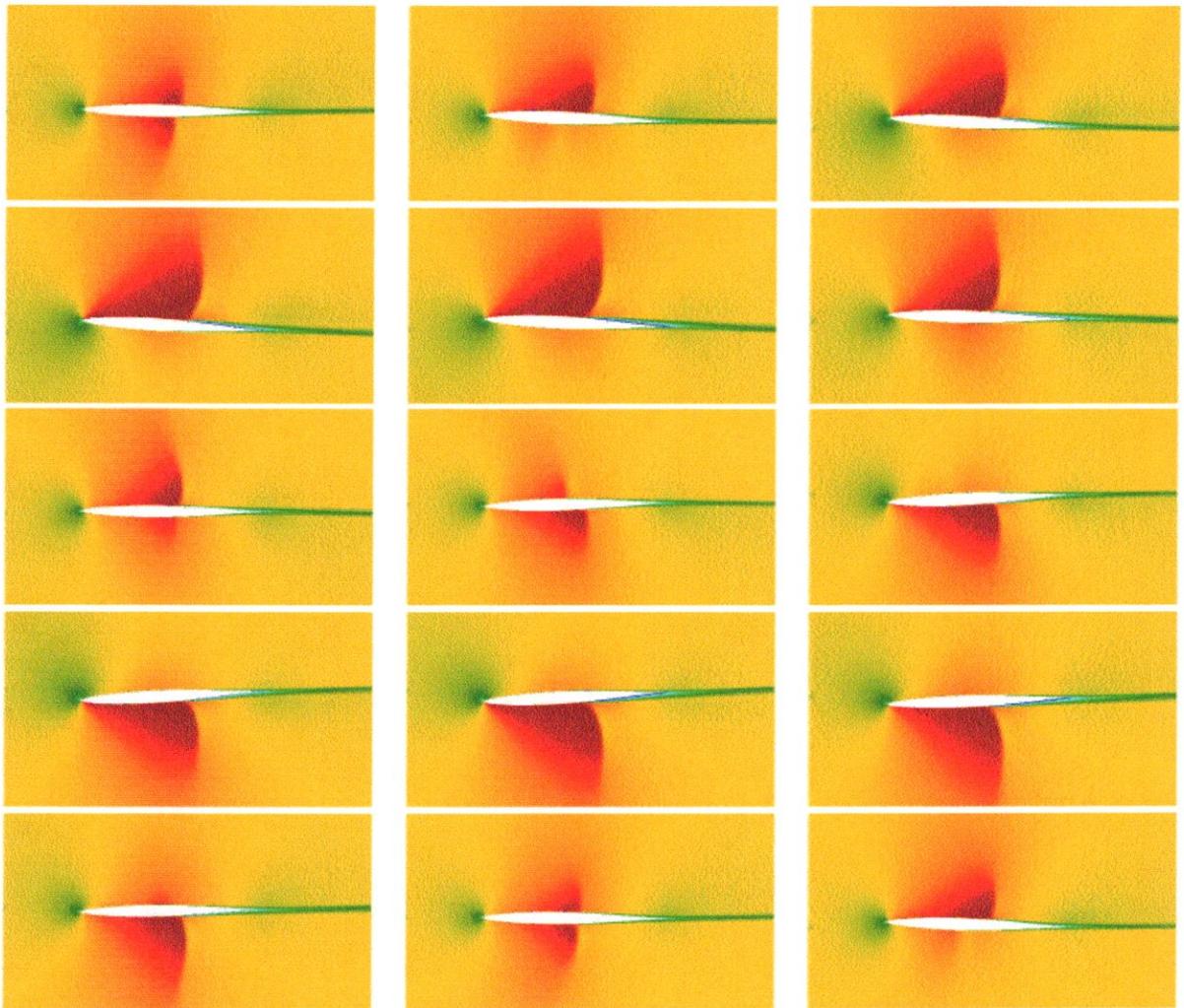
En effet, au cours de l'oscillation du profil les chocs extrados et intrados disparaissent par intermittence. Le mouvement de choc est de type C d'après la classification de Tijdean, lequel a un caractère fortement non-linéaire par les remontées du choc dans les zones subsoniques. Les figures (IV.24) permettent aussi d'observer une caractéristique intéressante du flottement qui est la faible amplitude de déplacement des chocs.

En effet, la dynamique de la couche limite en cours d'oscillation s'oppose au mouvement naturel du choc vers le bord de fuite lorsque le Mach local augmente (ou l'angle d'attaque).

En conclusion, même si la prédiction du flottement dans ce régime de Mach ne nécessite pas la prise en compte de la viscosité, le caractère fortement non-linéaire de l'écoulement induit en partie par un décollement de la couche limite et par une onde de choc qui apparaît en cours d'oscillation pour certaines valeurs de l'angle d'attaque, modifie la réponse du système aéroélastique.



**Figure IV.23.** Mise en flottement,  $Mach = 0,8$  et  $V^* = 1,2$ .



**Figure. IV.24.** Flottement, iso contours du nombre de Mach -  $Mach = 0,8$  et  $V^* = 1,2$ - Se lit de gauche à droite puis de haut en bas.

**IV.2.1.4.1.2. Zone fortement transsonique avec fort décollement de la couche limite :**

$$0.85 \leq M \leq 0.9$$

Le creux transsonique est calculé avec la modélisation de la turbulence de Spalart Allmaras à  $M_\infty = 0.825$  et pour une vitesse réduite  $V^* = 0.8$ . Une étude plus précise des mécanismes physiques provoquant l'apparition du creux transsonique est effectuée dans le paragraphe (IV.1.4.2).

A partir de  $M_\infty = 0.85$ , l'interaction choc/couche limite provoque le décollement de la couche limite. Le calcul stationnaire à  $M_\infty = 0.85$  illustré sur la figure IV.20 montre que la couche limite est épaissie par la présence du gradient de pression adverse.

L'augmentation du Mach local provoquée par la variation de l'angle d'incidence produit alors le décollement de la couche limite de pied du choc. Pour les profils symétriques comme le NACA 64A010, le décollement apparaît au pied de choc pour s'étendre jusqu'au bord de fuite lorsque le Mach local augmente. La prédiction de l'interaction choc/couche limite est prépondérante pour la simulation de l'aérodynamique instationnaire.

Les modèles de turbulence donnent dans ce régime de Mach des résultats très différents. Le modèle de Spalart Allmaras prédit une zone de recirculation plus développée que celui prédit par le modèle de Baldwin Lomax. Le système aéroélastique devient alors plus stable. La prédiction du creux transsonique est fortement influencée par le choix du modèle de turbulence, ce qui modifie une grande partie de la frontière de flottement transsonique. La différence entre les frontières prédites avec le modèle de Spalart Allmaras et la frontière prédite avec le modèle de Baldwin Lomax est la plus importante dans le domaine de la remontée du creux transsonique.

En général, il a été observé que l'effet du décollement de la couche limite est de rendre plus stable le système aéroélastique par un déphasage favorable à l'amortissement entre la variation temporelle de l'angle d'attaque et le déplacement des chocs à l'extrados et intrados.

Le flottement à trois nombres de Mach différents ( $M_\infty = 0.85, 0.875, 0.9$ ) est décrit dans la suite. Il est possible d'observer une caractéristique relativement différente du flottement pour ces différents nombres de Mach. Ainsi, l'extremum de stabilité est observé pour le  $M_\infty = 0.87$  avec  $V_f^* = 2.3$  et une diminution du domaine de stabilité est observée jusqu'à  $Mach = 0.9$  avec  $V_f^* = 1.85$  pour la simulation visqueuse Spalart Allmaras.

**-Mach=0.85 :**

Les figures (IV.26) illustrent le flottement du système aéroélastique pour un nombre de Mach égal à  $Mach = 0.85$  et une vitesse réduite  $V^* = 2.2$  (Spalart Allmaras). Pour cette vitesse réduite, le système aéroélastique se trouve dans la zone instable, la frontière de flottement est située à  $V_f^* = 2.05$ . Les historiques de l'angle d'attaque et du déplacement vertical tracés sur la figure (IV.25) permettent d'observer que la réponse du système aéroélastique est du type du premier mode de structure. Le mouvement d'oscillation dans l'intervalle de temps [70.8-74.4] est représenté sur les figures (IV.26) avec un pas de temps égal à 0.4. Il est possible d'observer que pour ce nombre de Mach, la force des chocs sur l'intrados et extrados épaississent fortement la couche limite pour un faible angle d'attaque. Ainsi, la stabilisation à  $M_\infty = 0.85$  du système aéroélastique semble être en partie induite par l'interaction choc/couche limite qui modifie de manière importante la répartition instationnaire des charges sur le profil.

**-Mach=0.875 :**

Le flottement du système aéroélastique pour un nombre de Mach égal à  $Mach = 0.875$  et une vitesse réduite  $V^* = 2.4$  est représenté sur les figures 8.15. Pour cette vitesse réduite,

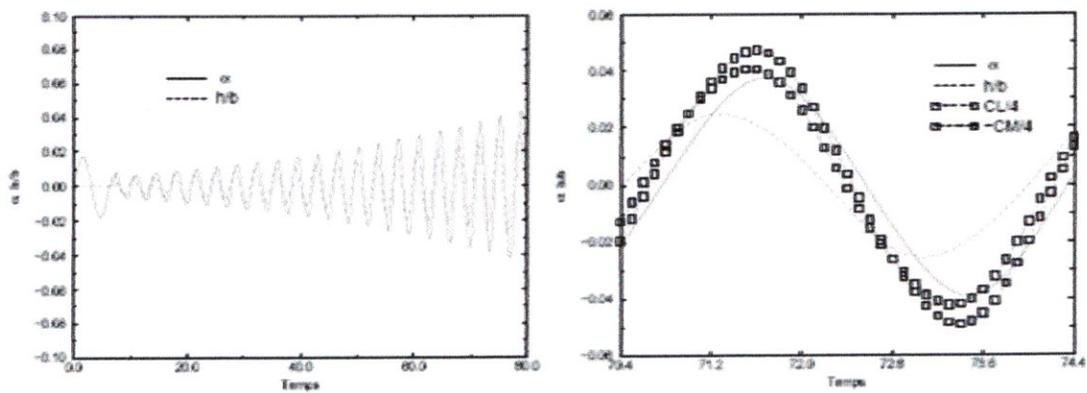


Figure IV.25. Mise en flottement,  $Mach = 0,85$  et  $V^* = 2.2$

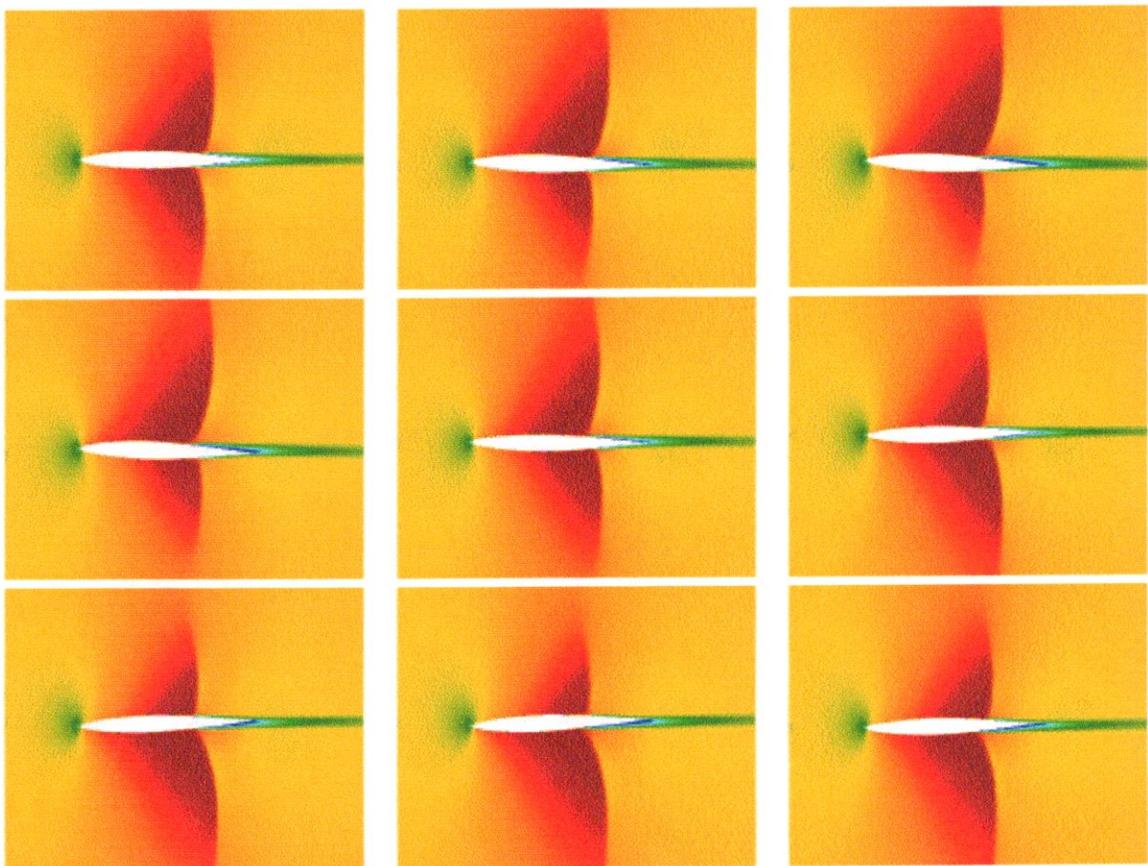


Figure IV.26. Flottement, -  $Mach = 0,85$  et  $V^* = 2,2$ - Se lit de gauche à droite puis de haut en bas.

Le système aéroélastique se trouve dans la zone instable au dessus de la frontière de flottement calculée à  $V_f^* = 2.2$ . L'historique de l'angle d'attaque et du déplacement vertical permettent d'observer que le flottement est un mouvement couplé du premier et second mode.

Ainsi, l'analyse de Fourier de l'historique permet de distinguer deux fréquences distinctes de battement. Plusieurs simulations avec des pas de temps plus faibles permettent d'observer le même phénomène. Il est intéressant de noter que pour les simulations non visqueuses, les battements du second mode sont observés pour ces nombres de Mach. Ainsi, on peut penser que la forte valeur de la vitesse réduite pour ce nombre de Mach favorise l'apparition du second mode.

Toutefois, le mouvement est principalement gouverné par une oscillation du type du premier mode. On peut remarquer que pour ce nombre de Mach, la réponse du système aéroélastique converge vers un cycle limite. Ainsi, l'amplitude des oscillations atteint une valeur maximale finie indépendante de la perturbation initiale. Les figures (IV.27) illustrent le mouvement de flottement entre les intervalles de temps [35.2-38.6] avec un pas de temps égal à 0.2.

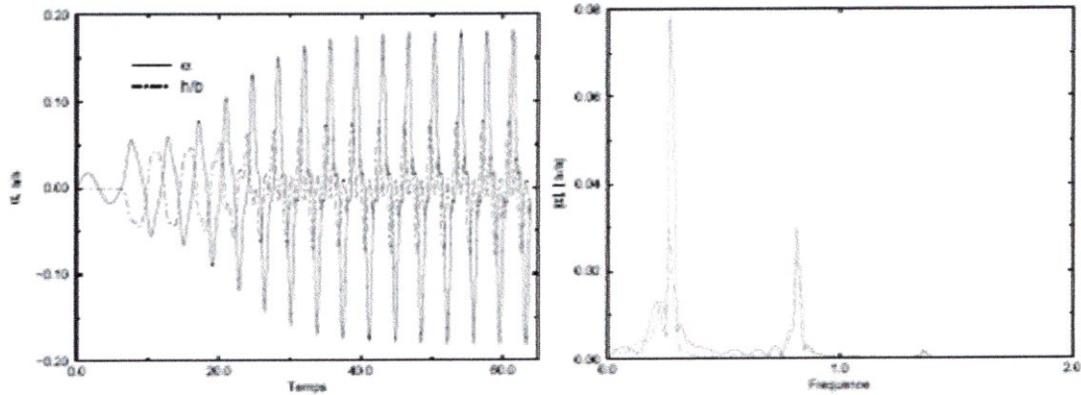


Figure IV.27. Mise en flottement, Mach = 0,875 et  $V^* = 2.4$

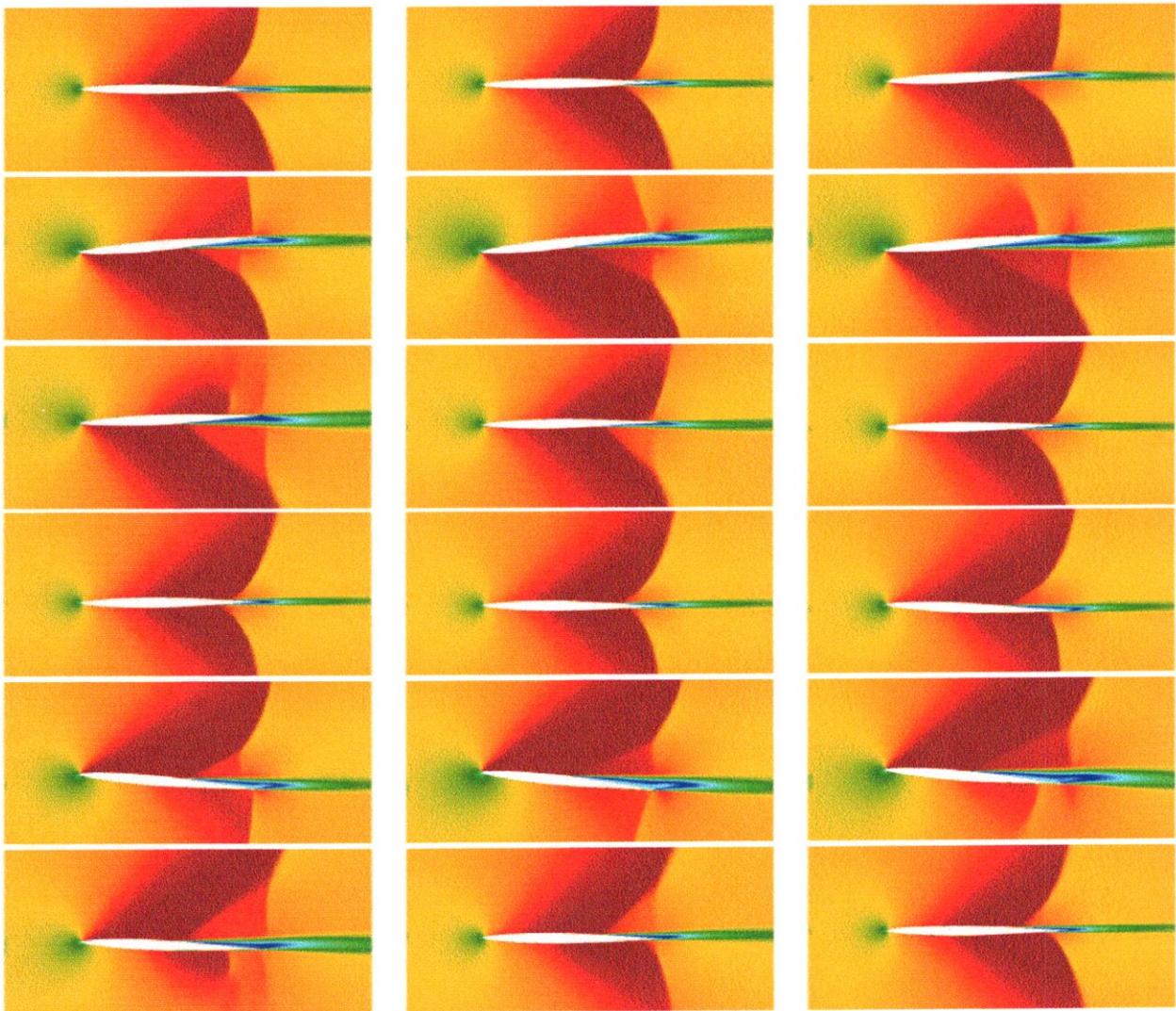


Figure IV.28. Flottement, Mach = 0,875 et  $V^* = 2,4$  Se lit de gauche a droite puis de haut en bas Mach=0.9

**M=0.9 :**

La frontière de flottement visqueuse décroît jusqu'au  $M_\infty = 0.9$ . Les chocs extrados et intrados du calcul stationnaire à incidence nulle sont proches du bord de fuite. Pour ce nombre de Mach, la proximité des chocs avec le bord de fuite réduit les effets de déphasage favorable induits par le décollement de la couche limite. Ainsi, le système aéroélastique devient moins stable. La frontière de flottement est calculée à  $V_f^* = 1.85$ .

Les figures (IV.28) illustrent l'historique de l'angle d'attaque et du déplacement vertical. Encore une fois, le mouvement est principalement du type du premier mode avec cependant un fort déphasage entre le déplacement vertical et la variation de l'angle d'attaque. De plus, il est intéressant de noter la différence importante entre l'amplitude des oscillations en amplitude et en déplacement vertical. Ainsi, le flottement est principalement une oscillation en tangage. Les chocs extrados et intrados s'appuient sur le décollement de la couche limite situé au bord de fuite. Le flottement du profil entre les instants [45.2-49.6] est représenté sur la suite de figures (IV.29) ainsi, il est possible d'observer que les chocs se déplacent près du bord de fuite.

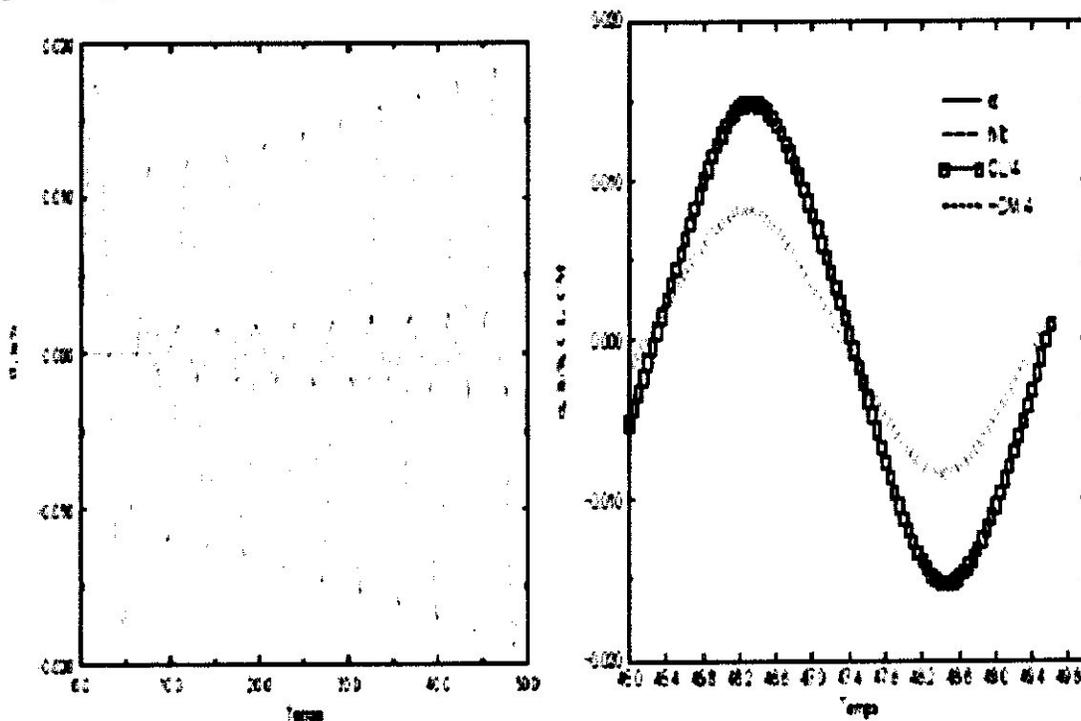
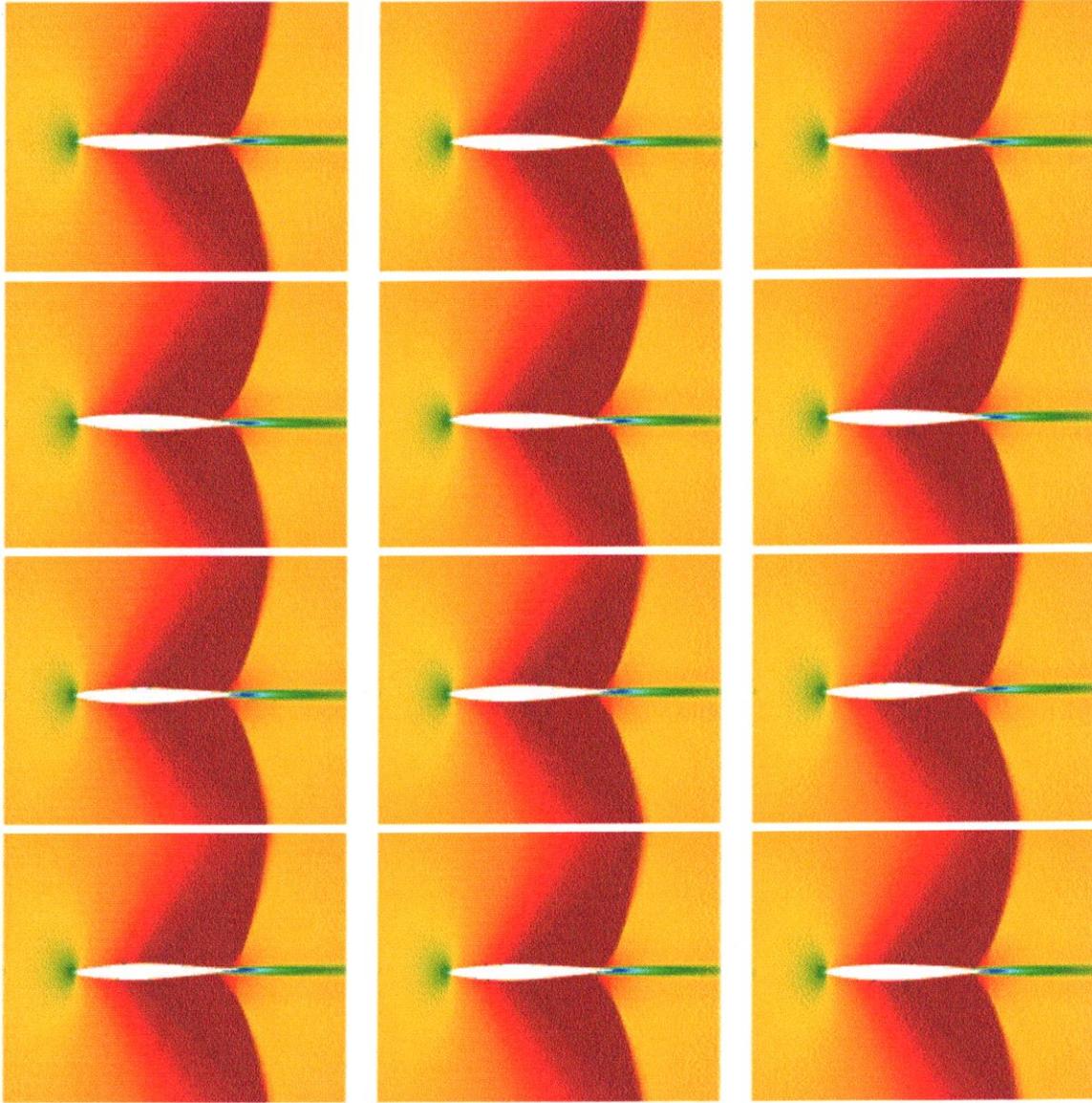


Figure. IV.28. Mise en flottement,  $M_\infty = 0.9$  et  $V^* = 2$ .



**Figure IV.29.** Flottement, - Mach = 0,9 et  $V^* = 2$  - Se lit de gauche à droite puis de haut en bas.

**IV.2.1.4.1.3. Zone fortement transsonique (chocs extrados et intrados proche du bord de fuite) :  $0.9 \leq M_\infty \leq 0.95$ .**

Les calculs d'initialisation stationnaires illustrés sur la figure (IV.21) montrent que l'écoulement pour les  $M_\infty = 0.9$  et  $0.95$  présente des chocs extrados et intrados très proche du bord de fuite avec un très faible décollement de la couche limite. Dans ce cas, les modèles de turbulence n'ont que très peu d'influence sur la frontière de flottement car la couche limite est attachée sur presque la totalité du profil.

**-Mach=0.925 :**

Lorsque l'on observe la courbe de la frontière de flottement (8.21), on note une brusque remontée du domaine de stabilité du système aéroélastique pour ce nombre de Mach. Cette stabilisation du système aéroélastique est classique et observée sur toutes les configurations aéroélastiques d'ailes et de profils. La remontée de stabilité est induite par une position des chocs extrados et intrados au bord de fuite. La poche supersonique s'étend sur presque la totalité du profil et l'aérodynamique redevient fortement linéaire.

La figure (IV.30) illustre le champ du nombre de Mach pour une incidence nulle et un  $M_\infty = 0.925$ . La courbe de distribution du coefficient de pression est illustrée sur la figure (IV.30). Pour ce nombre de Mach, on observe une bonne concordance entre les résultats visqueux et non visqueux. En fait, la position des chocs près des bords de fuite réduit les effets des interactions choc/couche limite sur le système aéroélastique. La fréquence d'oscillation est haute, la figure (8.19) illustre le flottement du système aéroélastique pour  $M_\infty = 0.925$  et une vitesse réduite  $V^* = 4$ . L'historique du déplacement vertical et de l'oscillation en tangage est tracé. Ainsi, le flottement est un mouvement en torsion pure. Les figures (IV.31) permettent d'observer le flottement du profil dans l'intervalle de temps [46.4-48.4]. On observe ainsi que les chocs sont situés sur le bord de fuite et ne se déplacent plus sur le profil en fonction de l'oscillation en tangage du profil.

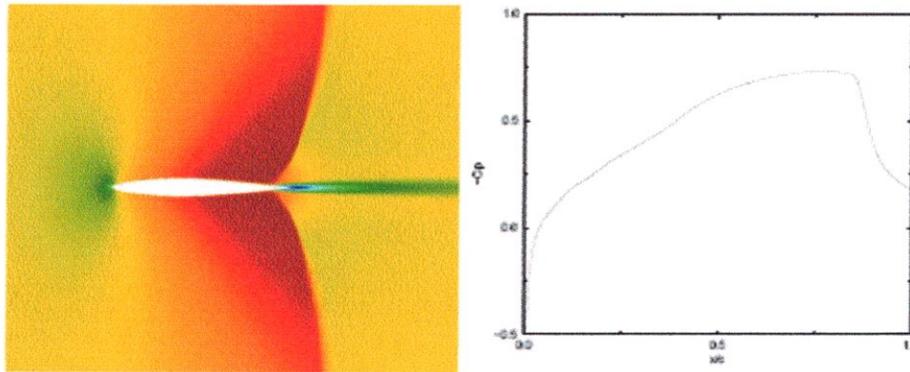


Figure IV.30. Calcul stationnaire Mach = 0,925,  $\alpha = 0^\circ$

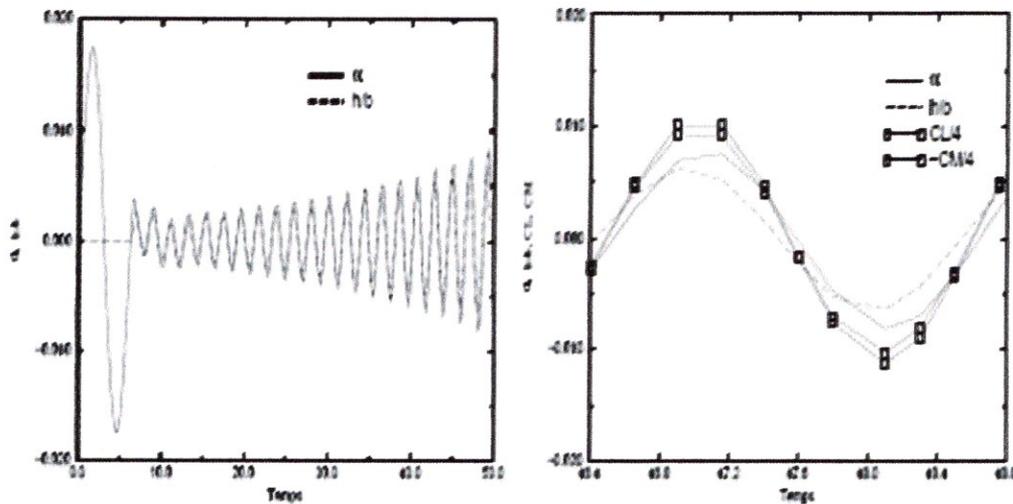
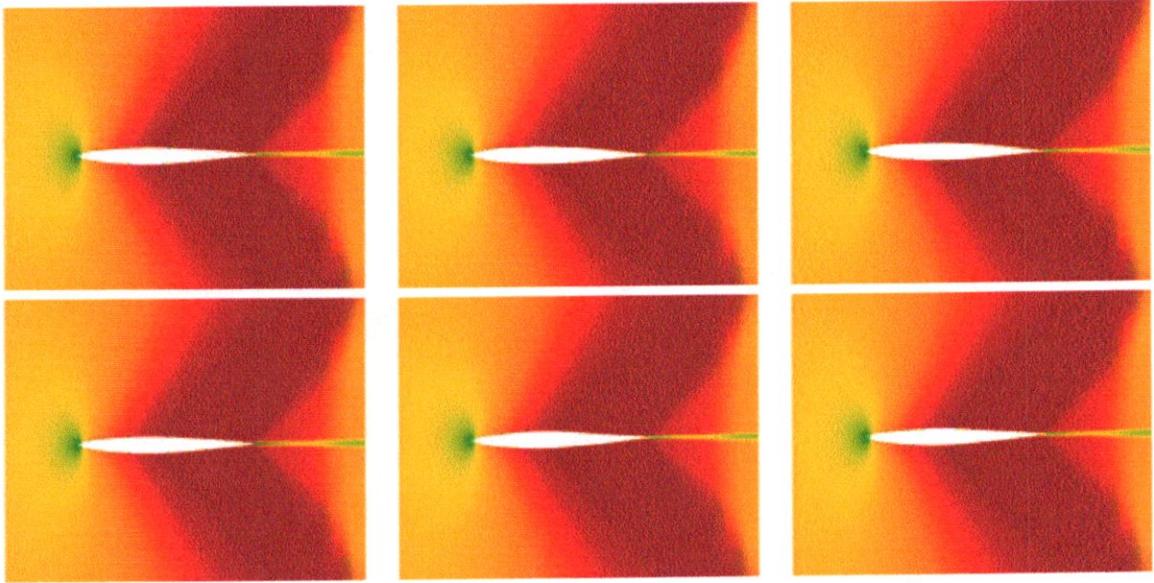
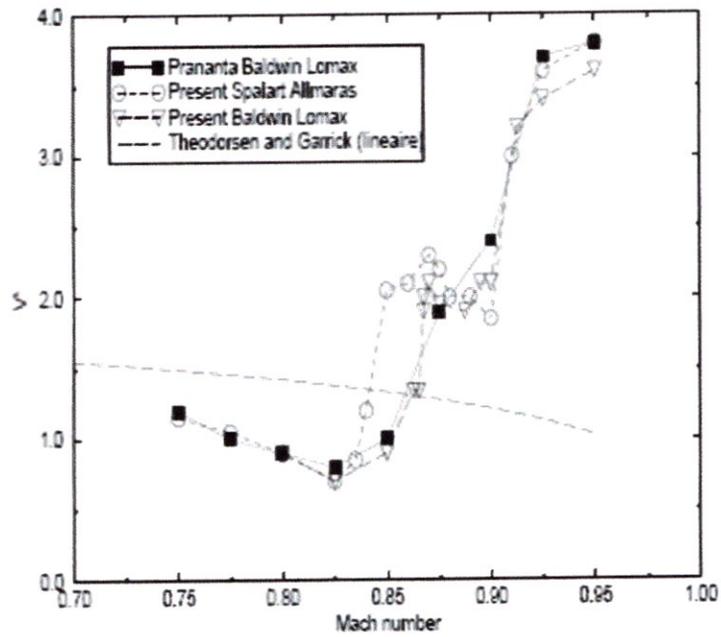


Figure IV.30. Mise en flottement,  $M_\infty = 0,925$  et  $V^* = 4$



**Figure IV.31.** Illustration du flottement du profil,  $-M_{\infty} = 0,925$  et  $V^* = 4$   
Se lit de gauche à droite puis de haut en bas.



**Figure IV.32.** Frontières de flottement Navier Stokes – plan  $(M_{\infty}, V^*)$  – comparaison des courbes obtenues avec les différents modèles de turbulence et les précédents calcul de Prananta.

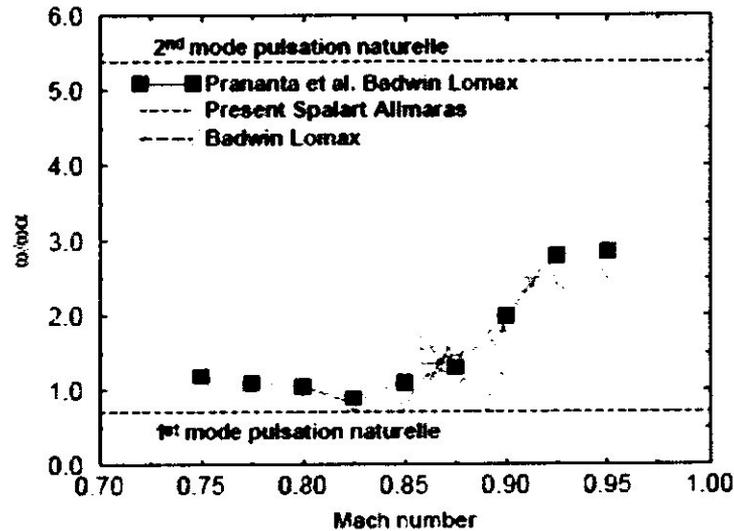


Figure IV.33. Frontière de flottement Navier-Stokes-plan ( $M_\infty, \frac{\omega}{\omega_\alpha}$ )

#### IV.2.1.4.2. Etude du creux transsonique :

Le creux transsonique observé sur les frontières de flottement illustre la perte de stabilité du système aéroélastique. Les études de Bendiksen montre que le caractère non-linéaire de la portance et du moment est responsable de ce phénomène puisque les méthodes linéaires ne permettent pas de prédire ce phénomène.

Zwaan a montré que les solveur aérodynamiques couramment utilisés pour la détermination de la frontière de flottement tels que les codes du type "vortex-lattice" ne permettent pas de prédire l'apparition du creux transsonique. Les méthodes potentielles transsoniques permettent de prédire avec une erreur acceptable le creux transsonique sans toutefois permettre de prédire la remontée de stabilité du système aéroélastique pour des nombres de Mach légèrement supérieurs.

En effet, Zwaan a démontré expérimentalement que la remontée de stabilité juste après le creux transsonique fait intervenir des écoulements décollés et il semble que l'interaction choc/ couche limite joue un rôle prépondérant. Les simulations non visqueuses de ces cas tests expérimentaux prédisent une remontée de stabilité lorsque le choc atteint le bord de fuite, c'est à dire pour des nombres de Mach supérieurs aux valeurs expérimentales. De plus, la remontée de stabilité en non visqueux est associée à un changement du mode de flottement. Ainsi l'utilisation de simulation visqueuse semble nécessaire à la bonne prédiction de cette zone de la courbe de flottement.

La zone proche du creux transsonique a été plus soigneusement étudiée afin de comprendre les mécanismes physiques qui régissent l'apparition du creux transsonique et de la remontée de stabilité associée pour des nombres de Mach supérieurs.

Deux nombres de Mach proches du creux transsonique vont être étudiés :  $M_\infty = 0.825$  et  $M_\infty = 0.85$ . Pour ces deux nombres de Mach on observe une frontière de flottement de valeurs très différentes. En effet, la frontière de flottement pour  $M_\infty = 0.825$  est calculée à une vitesse réduite  $V_f^* = 0.7$  (creux transsonique). Pour un nombre de Mach égal à 0.85, la frontière de flottement est prédite à une vitesse réduite égale à  $V_f^* = 2.5$ , soit plus de 100% de différence sur la frontière de flottement pour un pas de nombre de Mach égal à 0.025, soit un écart de 3%.

Zwaan a observé expérimentalement des pentes de remontée de stabilité aussi importante. Nous allons à partir des simulations aéroélastiques à  $M_\infty = 0.825$  et  $M_\infty = 0.85$  proposer une tentative d'explication sur l'apparition du creux transsonique et sur la brusque remontée de stabilité.

### -Etude des calculs stationnaires :

Les figures (IV.2.1.4.2) illustrent la distribution du coefficient de pression et de frottement sur le profil pour  $M_\infty = 0.825$  et  $0.850$  à incidence nulle. La pression dynamique amont correspond à une vitesse réduite  $V^* = 1.2$ . Pour cette vitesse réduite, on observe la mise en flottement du système aéroélastique à  $M_\infty = 0.825$  et on observe l'amortissement de la structure pour  $M_\infty = 0.850$ .

Les figures (IV.2.1.4.2) représentent la distribution pariétale du coefficient de pression sur l'extrados de la voilure et montrent que le choc pour le nombre de  $M_\infty = 0.850$  est localisé en aval de la position du choc pour le nombre de  $M_\infty = 0.825$ . La couche limite est décollée au pied de choc pour  $M_\infty = 0.850$  alors que la couche limite reste attachée pour  $M_\infty = 0.825$ .

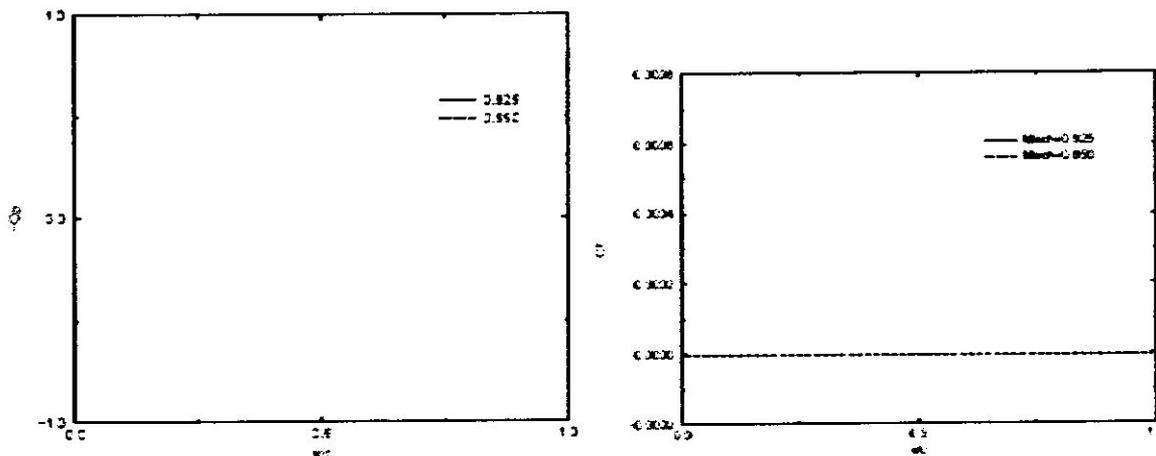


Figure IV.34. Distribution  $C_p, C_f, M_\infty = 0.825, M_\infty = 0.85$ .

### -Etude des calculs instationnaires :

Un cycle d'oscillation en tangage d'amplitude un degré et de pulsation égale à la pulsation du ressort de torsion est analysé pour la pression dynamique correspondant à la vitesse réduite  $V^* = 1.2$ . Les figures (IV.2.1.4.2) illustrent la variation de la distribution du coefficient de pression durant le cycle d'oscillation en tangage.

Le mouvement du choc et l'amplitude du mouvement sont très différents pour les deux nombres de Mach. Ainsi, l'amplitude du mouvement du choc est importante pour  $M_\infty = 0.825$ , de l'ordre de 5.4% de la corde, alors que pour  $M_\infty = 0.85$  l'amplitude du mouvement de choc est de l'ordre de 2.8% de la corde.

Les mouvements des chocs sont très différents pour les deux nombres de Mach, ainsi le déphasage entre l'angle d'incidence et le mouvement des chocs (directement visible sur les courbes de  $C_m$  dans les figures (IV.2.1.4.2)) est égal à  $+19.8^\circ$  pour  $M_\infty = 0.825$  et  $-8.64^\circ$  pour  $M_\infty = 0.85$ .

Cette différence de signe sur le déphasage du  $C_m$  par rapport à l'incidence explique la mise en flottement du système pour  $M_\infty = 0.825$ . Le déphasage négatif pour  $M_\infty = 0.825$  est induit par le décollement de la couche limite qui modifie le mouvement d'oscillation des chocs. Les figures IV.2.1.4.2 illustrent la variation de la distribution du coefficient de frottement durant le cycle d'oscillation en tangage. Pour le nombre de  $M_\infty = 0.85$ , la couche limite présente un décollement durant tout le cycle

d'oscillation. Ce décollement de la couche limite provoque un déphasage favorable et amorti aérodynamiquement le système aéroélastique.

Ainsi, la remontée de stabilité après le creux transsonique est induite par un effet d'amortissement aérodynamique induit par le décollement de la couche limite. La remontée de stabilité du système aéroélastique n'est ainsi pas induit par un changement de mode de flottement comme il a été observé par plusieurs auteurs (Alonso , Bendiksen ) pour des simulations non visqueuses.

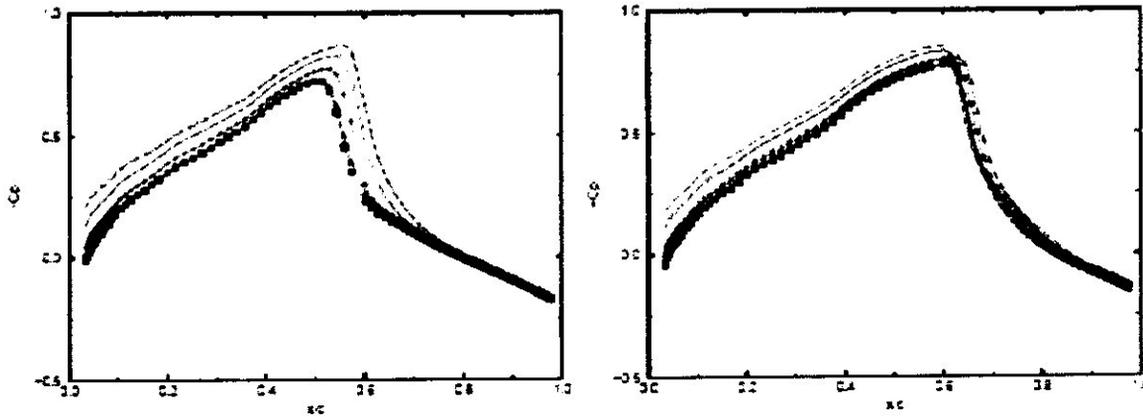


Figure IV.35. Distribution instationnaire  $-C_p, M_\infty = 0.825, M_\infty = 0.85$ .

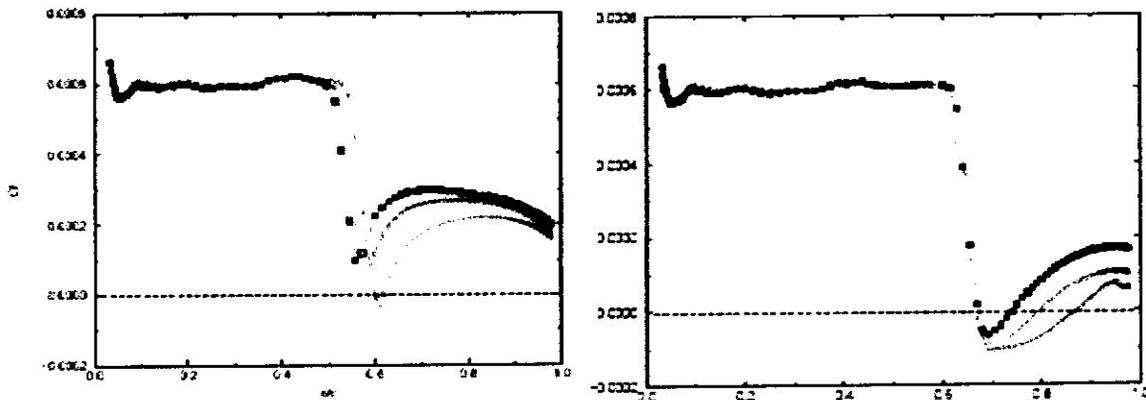


Figure IV.36. Distribution instationnaire  $-C_f, M_\infty = 0.825, M_\infty = 0.85$ .

#### IV.2.1.4.2. Effets des modèles de turbulence :

Les modèles de turbulence ont un effet important sur la forme de la frontière de flottement plus particulièrement dans la région du creux transsonique. L'interaction choc/couche limite en régime transsonique pilote l'aérodynamique instationnaire. Le système aéroélastique est directement piloté par l'évolution des coefficients aérodynamiques de la portance et du moment  $C_L$  et  $C_M$ . Or ces coefficients sont déterminés par la distribution de pression sur le profil qui est considérablement modifiée par la position des chocs extrados et intrados. La prédiction de l'interaction choc/couche limite et de la recirculation de pied de choc influe sur la position des chocs.

La capacité des modèles de turbulence à prédire ces zones décollées est inégale. Seuls deux modèles de turbulence ont été testés : Le modèle algébrique de Baldwin Lomax et le modèle à une équation de transport de Spalart Allmaras.

Les courbes des frontières de flottement exhibent une large différence entre les frontières de flottement prédites avec les différents modèles de turbulence pour les nombres de Mach pour lequel la couche limite est fortement décollée. Srinivasan a observé les mêmes effets des modèles de turbulence lors de la

simulation du mouvement en tangage d'un profil symétrique NACA0015. Ce profil produit un écoulement de type A dans la classification de Pearcey équivalent à celui que produit le profil NACA64A010.

Les calculs instationnaires réalisés ici sur le mouvement en tangage du profil NACA64A010 ont montré que le modèle de Spalart Allmaras donne des résultats plus satisfaisants que le modèle algébrique de Baldwin Lomax, malgré la tendance de sous-estimation du décollement de la couche limite et la surestimation du recollement.

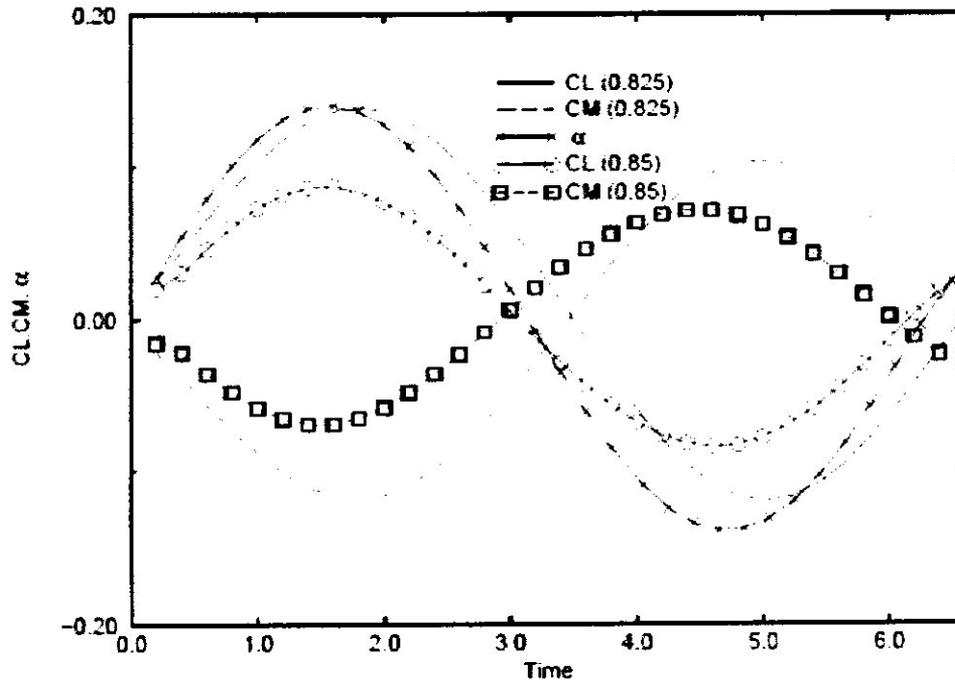


Figure IV.36. Historique des coefficients aérodynamique  $M_\infty = 0.825, M_\infty = 0.85$ .

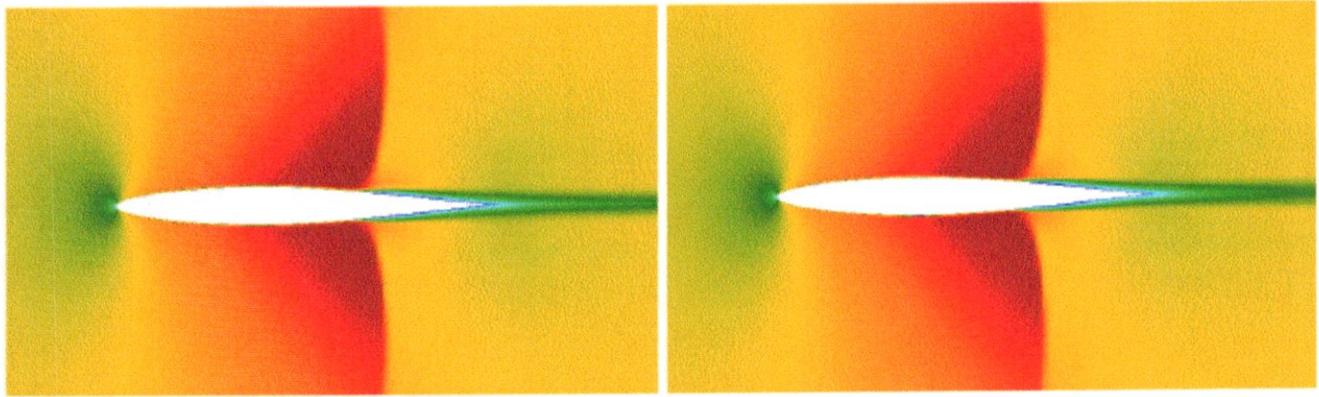
Il est donc intéressant de noter que l'instabilité du système aéroélastique est en régime transsonique fortement influencée par le choix du modèle de turbulence. Nous allons étudier l'influence du modèle de turbulence pour deux nombres de Mach sur la frontière de flottement. Le premier nombre de Mach est égal à 0.9 et le deuxième à 0.85.

$$-M_\infty = 0.85, V^* = 2$$

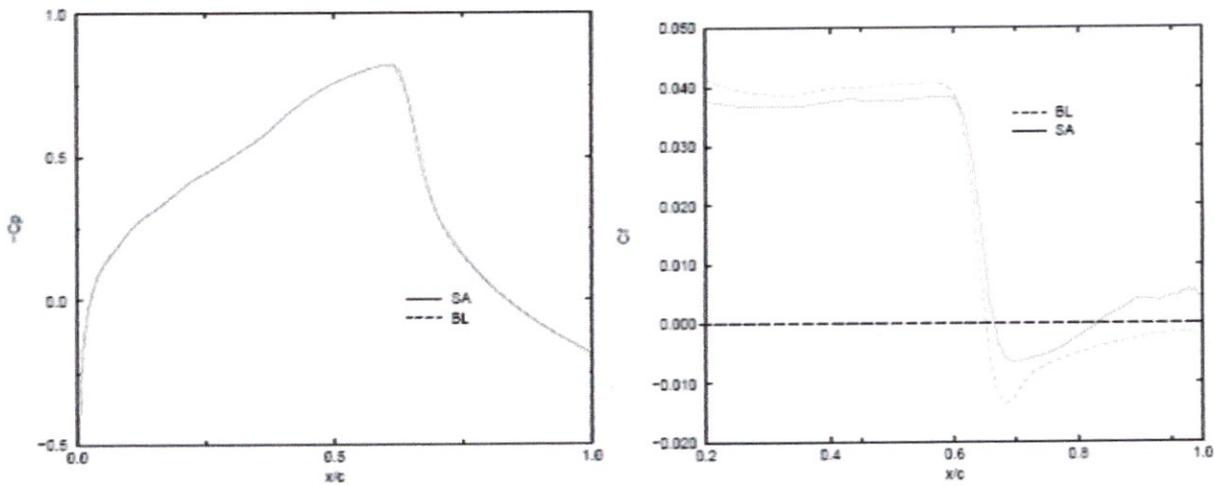
L'influence des modèles de turbulence sur la frontière de flottement est plus visible lors de la remonter de stabilité après le creux transsonique. Ainsi, pour un nombre de Mach égal à  $M = 0.85$ , la simulation Baldwin Lomax prédit une frontière de flottement située à  $V_f^* = 0.9$ , alors que la simulation Spalart Allmaras prédit une frontière de flottement  $V_f^* = 2.1$ . Le choc est placé à 64.4% de la corde pour la simulation BL et à 65.3% de la corde pour la simulation SA. Pour ce nombre de Mach, la couche limite est fortement décollée sous l'effet de l'interaction choc/couche limite. Les figures (IV.37) représentent les iso-contours des champs du nombre de Mach calculés avec les deux modèles de turbulence. Les figures (IV.38) illustrent la distribution du coefficient de pression et de frottement sur le profil. Les positions des chocs sont égales pour les deux modèles de turbulence. Toutefois, on note une différence sur la prédiction du décollement de la couche limite. Ainsi, la couche limite est décollée du pied de choc au bord de fuite pour la simulation BL. Le modèle de SA prédit le rattachement de la couche limite. Une simulation aéroélastique est effectuée à l'aide des deux modèles de turbulence pour une vitesse réduite  $V^* = 2$ . La mise en flottement de la structure est calculée par la simulation BL alors qu'un amortissement du système aéroélastique est observé pour la simulation SA. Les historiques de l'angle d'attaque et du déplacement vertical sont tracés sur les figures (IV.41). Les figures (IV.39)

représentent la variation du coefficient de pression sur le profil durant le cycle forcé d'initialisation du calcul aéroélastique. Encore une fois, on note une large différence sur les amplitudes du déplacement des chocs entre les simulations BL ( $\approx 1.3\%$ ) et SA ( $\approx 3.5\%$ ).

L'observation de la variation de la distribution du coefficient de frottement sur les profils durant le premier cycle forcé permet de remarquer que le modèle de Baldwin Lomax prédit un décollement de la couche limite plus étendu que celui prédit par le modèle de Spalart Allmaras. La différence d'amplitude du mouvement des chocs est directement visible sur ces figures. Le modèle de SA prédit le rattachement de la couche limite durant le cycle d'oscillation forcé alors que le modèle de BL prédit une couche limite décollée jusqu'au bord de fuite durant tout le cycle d'oscillation forcé. La mesure pour plusieurs cycles d'oscillations forcées du déphasage du coefficient aérodynamique du moment et de l'angle d'incidence permet de prévoir ces différents comportements des modèles de turbulence sur la réponse du système aéroélastique ( $\approx -4.67^\circ$  (SA),  $\approx -6.78^\circ$  (BL)).



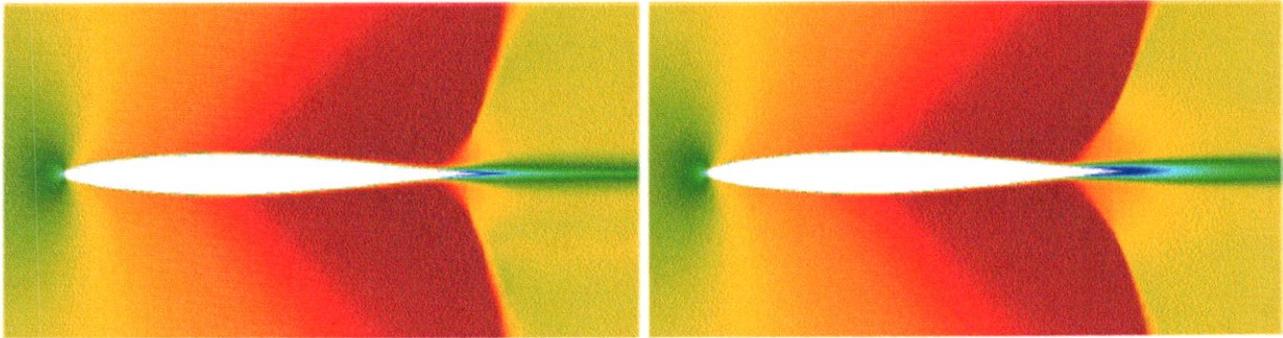
**Figure IV.37.** Effet du modèle de turbulence-calcul stationnaire Baldwin Lomax-Spalart  $\alpha = 0^\circ, M_\infty = 0.85, V^* = 2$ . champs du nombre de mach.



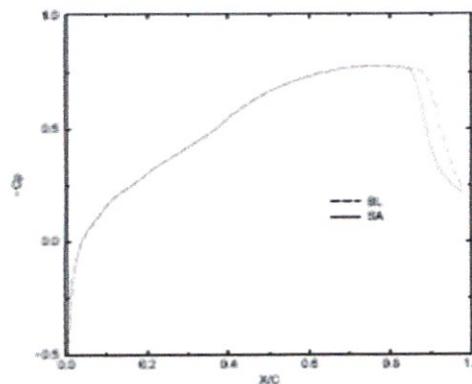
**Figure IV.38.** Effet du modèle de turbulence-calcul stationnaire Baldwin Lomax-Spalart  $\alpha = 0^\circ, M_\infty = 0.85, V^* = 2$ . Distribution  $-C_p$  et de  $-C_f$ .

$$-M_\infty = 0.9, V^* = 2$$

La figure (IV.46) illustre pour un nombre de Mach et un index de vitesse réduite donnés l'influence du modèle de turbulence sur la réponse aéroélastique. Ainsi, on observe pour la simulation aéroélastique BL un amortissement de la structure alors que l'utilisation du modèle de SA provoque le flottement de la structure. En observant le calcul stationnaire, on remarque la forte disparité dans la position du choc entre la simulation SA et BL. La couche limite est plus épaisse pour le calcul SA que pour le calcul BL et repousse le choc vers le bord d'attaque.



**Figure IV.42.** Effet du modèle de turbulence-calculation stationnaire Baldwin Lomax-SPALART ALL6-maras  $\alpha = 0^\circ$ ,  $M_\infty = 0.9$ ,  $V^* = 2$ . lignes iso-contours du nombre de Mach.



**Figure IV.43.** Calcul stationnaire  $\alpha = 0^\circ$ ,  $M_\infty = 0.9$ ,  $V^* = 2$ . Distribution de  $-C_p$

L'observation du calcul instationnaire permet de comprendre et de visualiser l'effet du modèle de turbulence sur le comportement de la structure. La figure (IV.44) illustre la fréquence d'oscillation du système aéroélastique pour  $M_\infty = 0.9$ ,  $V^* = 2$  pour quelques cycles d'oscillation. La fréquence d'oscillation du système aéroélastique obtenue à l'aide du modèle SA est plus faible que celle obtenue par le modèle de BL. Si on analyse la variation de la distribution de pression et de frottement sur le premier cycle forcé, on remarque que l'amplitude du mouvement des chocs est plus importante dans le cas des calculs SA ( $\approx 8.3\%$ ).

Pour les calculs BL, le choc reste localisé près du bord de fuite avec une très faible amplitude de déplacement sur la voilure extrados et intrados ( $\approx 2.3\%$ ). Les figures (IV.45) illustrent les variations des coefficients aérodynamiques pour les deux modèles de turbulence. Ainsi, il semble que les modèles de turbulence modifient la prédiction de la localisation des chocs extrados et intrados et l'amplitude de déplacement des chocs. Cette modification de l'amplitude et de la phase du mouvement des chocs induit un déphasage des coefficients aérodynamiques par rapport à l'angle d'incidence qui est favorable à l'amor-

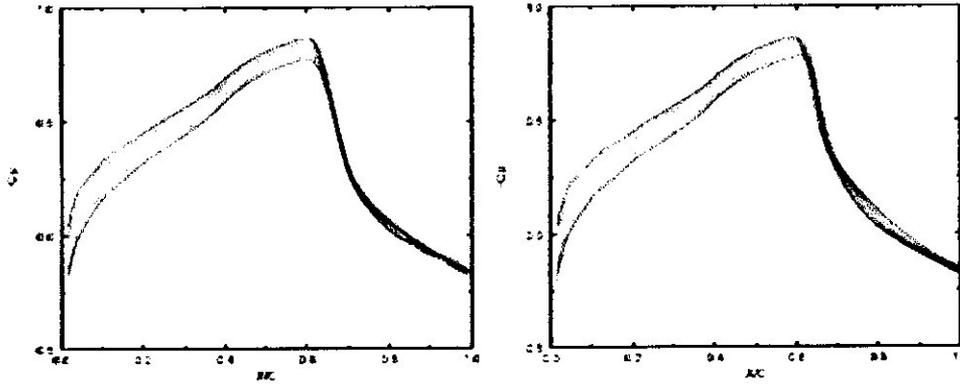


Figure IV.39. Distribution de  $-C_p$  instationnaire BL/SA durant le premier cycle forcé  $M_\infty = 0.85, V^* = 2$ .

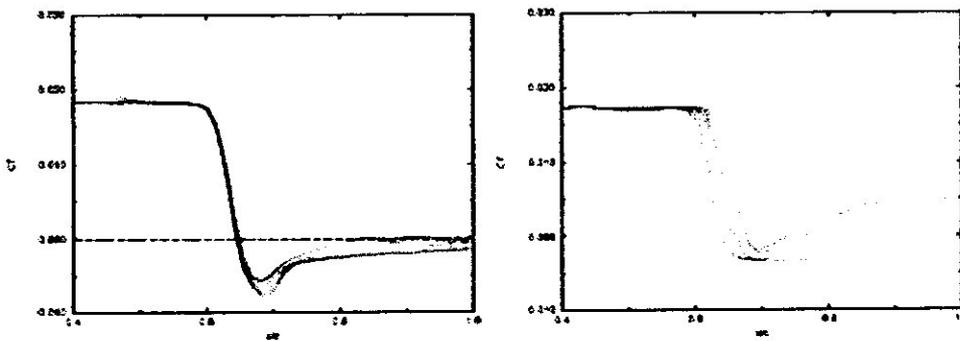


Figure IV.40. Distribution de  $C_f$  instationnaire BL/SA durant le premier cycle forcé  $M_\infty = 0.85, V^* = 2$ .

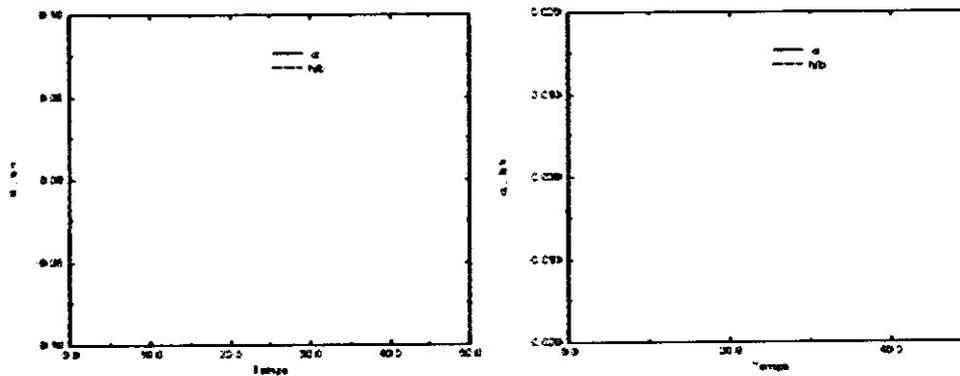
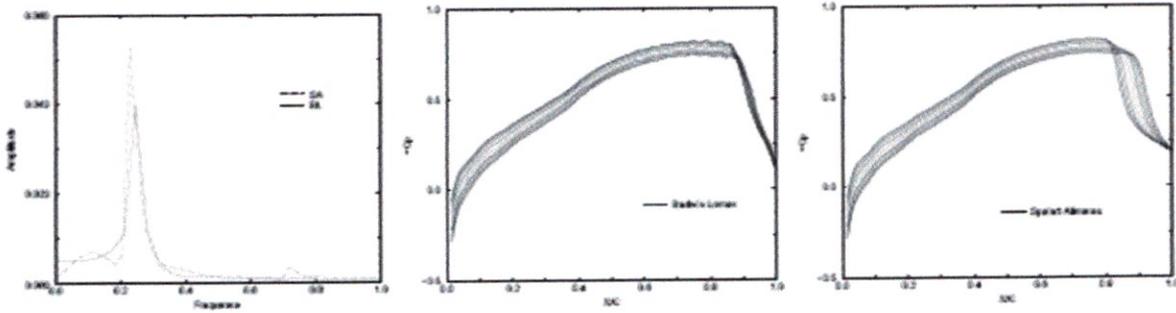
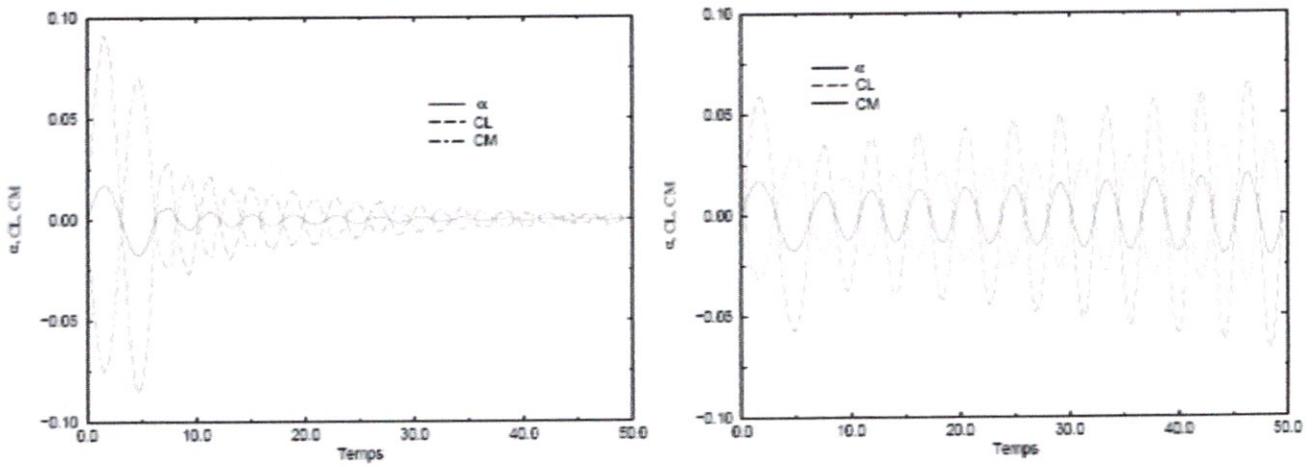


Figure IV.41. Effet du modèle de turbulence Baldwin Lomax (gauche)/Sport Allumars (droite)  $M_\infty = 0.85, V^* = 2$ .

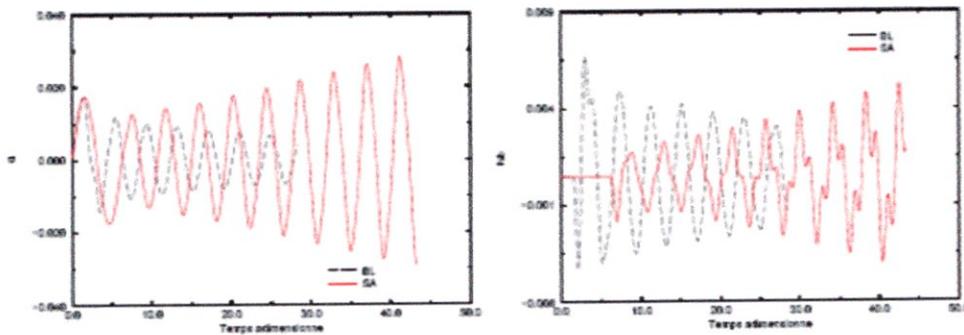
tissement pour le modèle de  $BL (\approx -4.67^\circ)$  et favorable à la divergence du système pour le modèle de  $SA (\approx +1.45^\circ)$ .



**Figure IV.44.** Calcul instationnaire  $M_\infty = 0.9, V^* = 2$ . Fréquence d'oscillation. Distribution de  $-C_p$  Instationnaire BL/SL durant le premier cycle forcé.



**Figure IV.45.** Historique des coefficients aérodynamique  $M_\infty = 0.9, V^* = 2$ . BL/SA



**Figure IV.46.** Effet du modèle de turbulence  $M_\infty = 0.9, V^* = 2$ .

#### IV.2.1.4.3. Effets de la viscosité sur la frontière de flottement :

Nous allons comparer dans cette partie, l'influence et l'effet de la viscosité sur la frontière de flottement. L'influence de la viscosité sur le modèle à deux degrés de liberté a été mis en évidence par Prananta .Ces simulations montrent que la viscosité a pour effet de réduire le creux transsonique et d'accentuer la remontée de stabilité du système aéroélastique. Les figures (IV.47) représentent les frontières des courbes de flottement visqueux et non visqueux.

Le S caractéristique de la courbe de frontière de flottement non visqueuse illustre que pour un nombre de Mach donné, plusieurs points de flottement peuvent être observés. Cette caractéristique de la frontière de flottement a été observée par d'autres auteurs avec des simulations non visqueuses .Toutefois, les simulations visqueuses ne permettent pas d'observer la même caractéristique de la frontière de flottement. De plus, pour toutes les simulations visqueuses, seules des instabilités de la structure proche du premier mode libre ont été observées. Une oscillation du système aéroélastique proche du second mode n'a pas été observée pour les deux modèles de turbulence utilisés. Ces résultats confirment les observations de Prananta sur ce même cas test. Ainsi, l'effet de la viscosité ne semble pas avoir comme seul effet d'ajouter de la dissipation au système aéroélastique, mais modifie aussi le mécanisme du flottement et le type de réponse observée.

Nous allons, dans la suite de ce paragraphe, détailler l'effet de la viscosité sur le creux transsonique ainsi que le changement de la réponse du système aéroélastique induit par la viscosité.

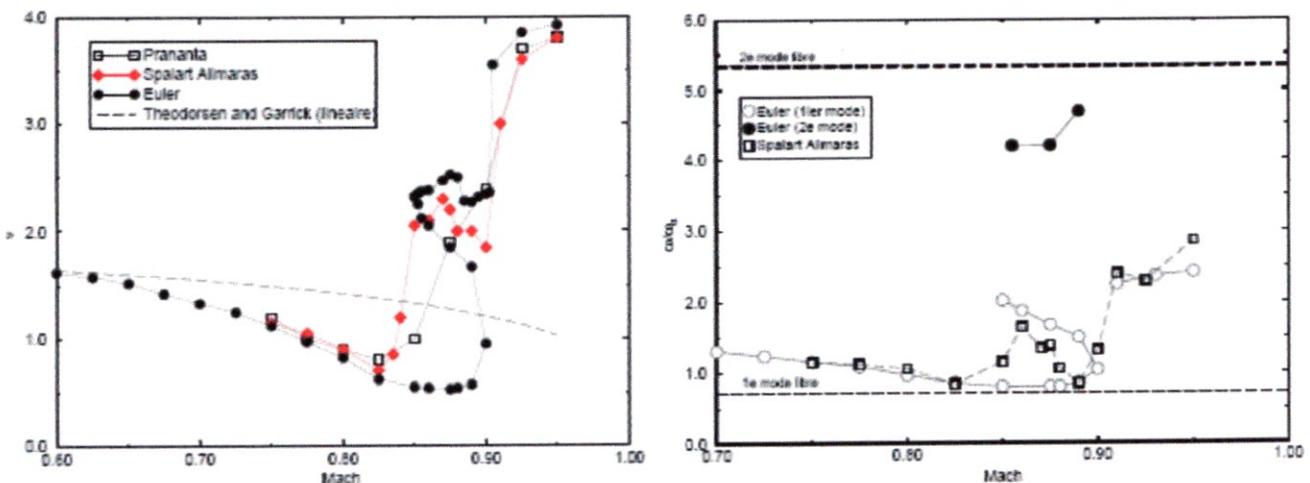


Figure IV.47. Comparaison des frontières de flottement Euler/NS Spalart

#### -Modification du creux transsonique :

La réduction du creux transsonique par la viscosité est l'effet le plus remarquable par rapport aux simulations non visqueuses. La divergence entre les courbes de la frontière de flottement non visqueuse et visqueuse est visible dès  $M_\infty = 0.825$ .

Cette remontée de stabilité de la frontière visqueuse est induite par le décollement de la couche limite qui induit un déphasage favorable à l'amortissement du système aéroélastique. Pour le voir, nous allons comparer les calculs instationnaires en cycle forcé pour une vitesse réduite égal à

$V^* = 0.7$  et  $M_\infty = 0.835$ . Pour ce nombre de Mach, la frontière de flottement visqueuse (SA) est prédite pour une vitesse réduite  $V_f^* = 0.85$ . Le flottement non visqueux est prédit pour une vitesse réduite  $V_f^* = 0.6$ .

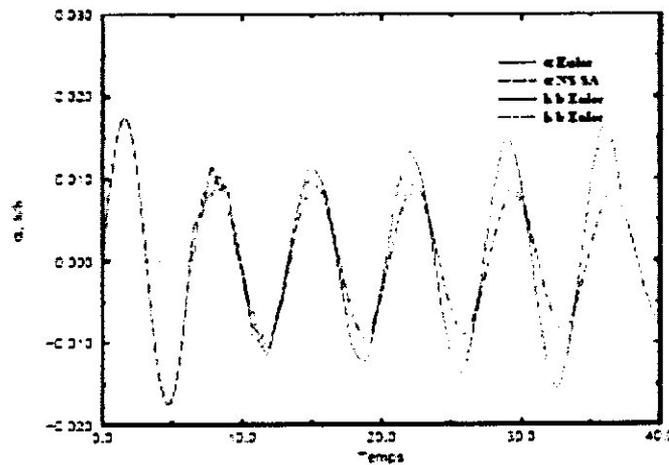


Figure IV.48.  $M_\infty = 0.825, V^* = 0.7$ .

#### -Modification de la réponse du flottement :

La figure (IV.49) présente les historiques de l'angle d'attaque et du déplacement vertical pour une simulation aéroélastique  $M = 0.86$  et  $V^* = 2.5$ . Pour les simulations visqueuses et non visqueuses, l'instabilité du système aéroélastique est observée.

Toutefois, le type de réponse et la fréquence de battement du profil sont très différents. Ainsi, la simulation non visqueuse présente un battement du profil du second mode, tandis que la simulation visqueuse donne un flottement du profil du premier mode. Toutefois, l'analyse de Fourier de la réponse aéroélastique montre que pour la simulation visqueuse, on détecte une réponse complexe composée du premier et deuxième mode. Cette réponse complexe est induite par une forte perte de charge en aval du choc provoquée par le décollement de la couche limite et est appelée "shock stall flutter". Ce phénomène du flottement proche du décrochage dynamique a été mis en évidence par Isogai.

Donc on conclure de ce chapitre que L'outil numérique développé et utilisé dans cette étude a démontré sa capacité à calculer la frontière de flottement en fluide parfait ou visqueux pour le régime transsonique. Malgré une aérodynamique instationnaire très différente suivant le nombre de Mach considéré (mouvement de choc type A, B, C) et suivant la prise en compte de la viscosité (interaction choc/couche limite, décollement de la couche limite...), la frontière de flottement du système aéroélastique été estimée et validée par des comparaisons avec des résultats numériques d'autres auteurs.

Il a été observé que la viscosité a un effet prépondérant sur la frontière de flottement dans le régime transsonique et en particulier dans la zone du creux transsonique.

La forme en S caractéristique de la courbe de flottement exhibée en fluide parfait n'a pas été observée avec les simulations Navier-Stokes. Deux types de modèles de turbulence ont été utilisés et leur influence respective sur la frontière a été analysée.

Le modèle à une équation de Spalart All-maras s'est encore une fois montré être un bon compromis entre précision et coût numérique.

Le modèle algébrique de Baldwin Lomax a montré ces limites lorsque l'écoulement présente de forts décollements de la couche limite mais demeure suffisant pour le régime transsonique faible lorsque la couche limite reste attachée.

Il a été démontré que l'un des principaux effets de la viscosité sur le système aéroélastique est un déphasage des coefficients aérodynamiques par rapport à l'angle d'attaque induit par un déplacement des chocs à l'extrados et intrados du profil fortement piloté par l'interaction choc/couche limite. Pour un grand nombre de valeur du Mach amont, ce déphasage est favorable à l'amortissement de la structure. Toutefois, il faut noter que ce déphasage favorable induit par le décollement de la viscosité ne peut être généralisé à tous les profils et a fortiori à tous les systèmes aéroélastiques.

L'utilisation de maillages non-coïncidents a permis de réduire le temps de calcul par une diminution du nombre de points du maillage. Toutefois, pour ces calculs bidimensionnels, le gain reste relativement faible.

Il sera intéressant dans le futur, d'effectuer le même type d'analyse pour la prédiction du flottement d'une voilure tridimensionnelle afin de confirmer une partie des résultats obtenus sur ce cas test bidimensionnel. Le temps de calcul pourra se montrer rédhibitoire et l'utilisation de maillage non-coïncident ou d'autres techniques de maillage sera indispensable pour réduire le temps de restitution des calculs.

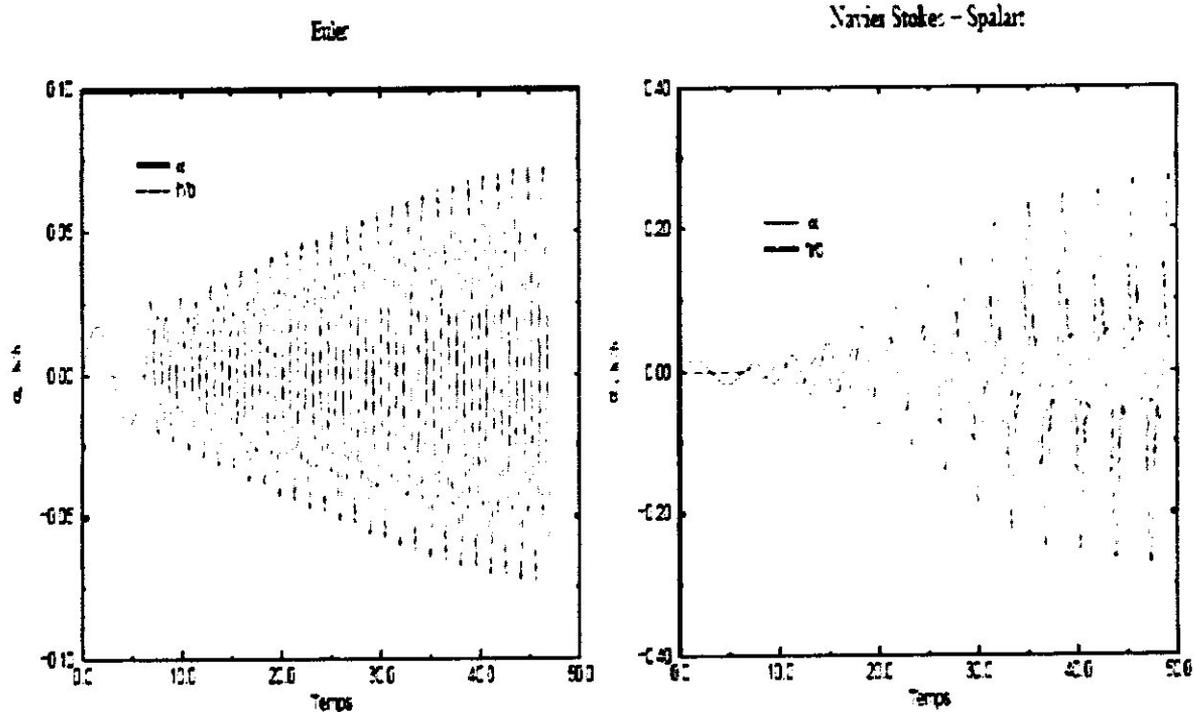


Figure: IV.49. Flottement  $M_\infty = 0.86, V^* = 2.5$ , historique  $\alpha, \frac{h}{b}$

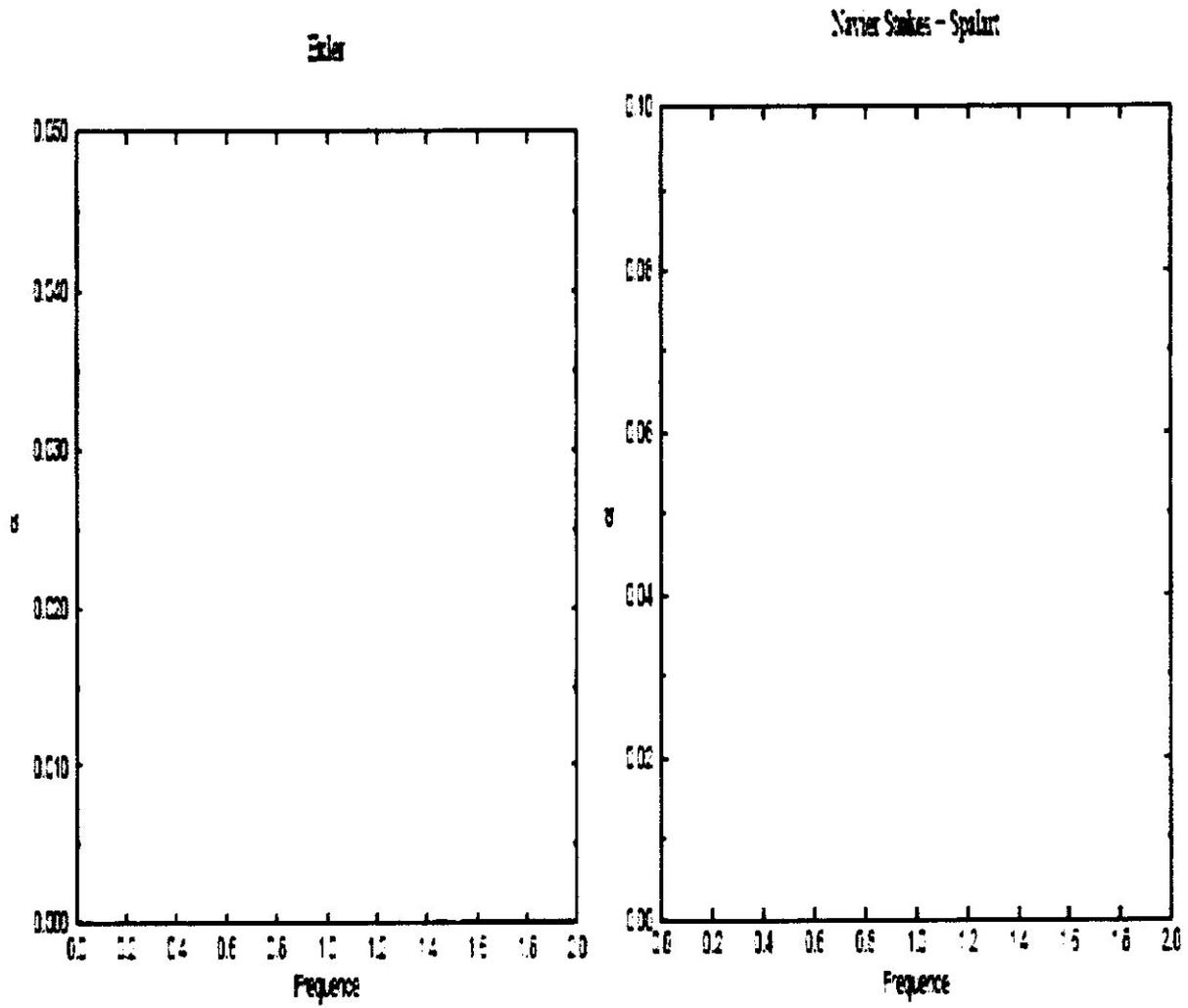
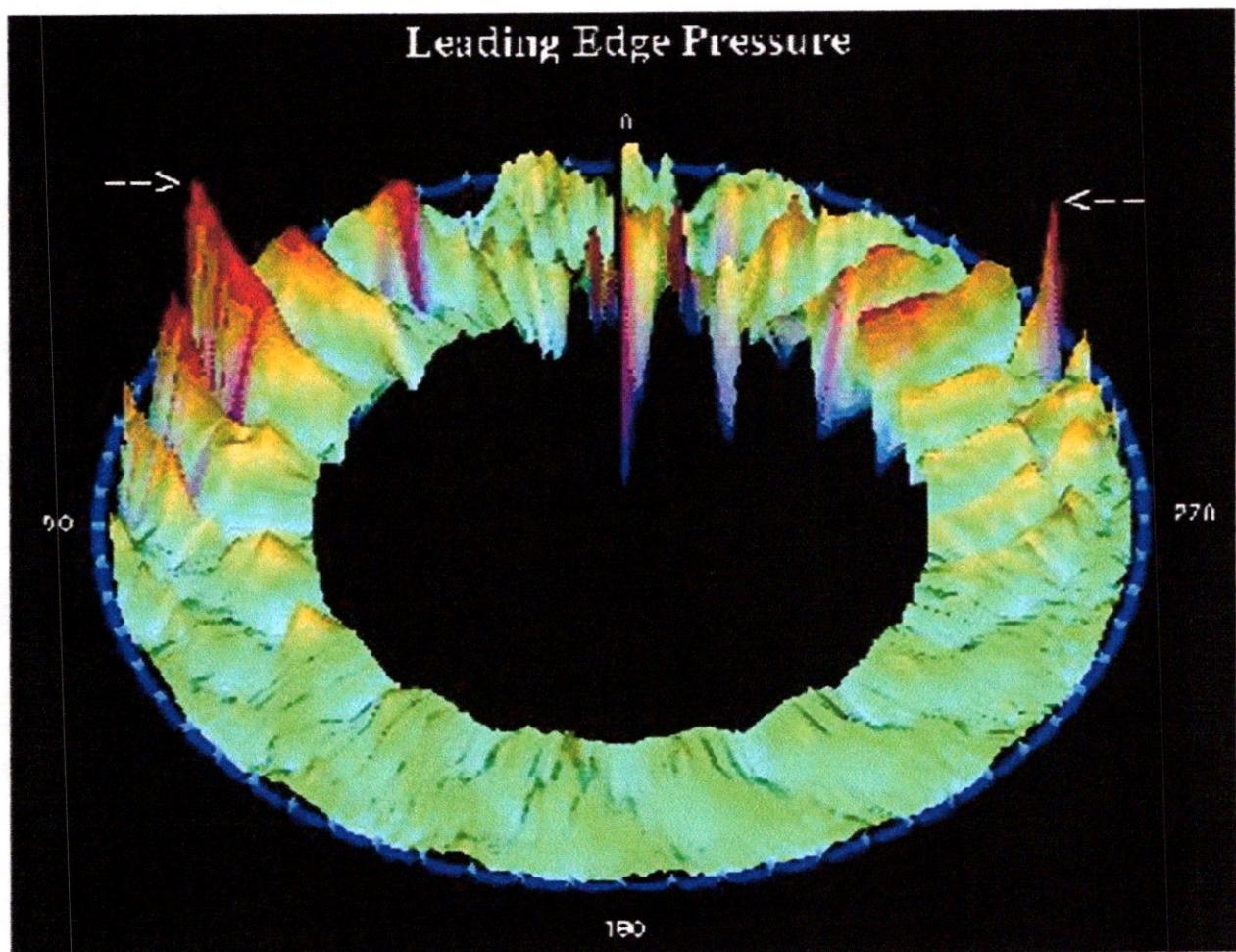


Figure IV.50. Flottement  $M_\infty = 0.86, V^* = 2.5$ , Fréquence de battement



## CHAPITRE 5

# Aéroélasticité expérimentale



## **V.1. Introduction :**

La science de l'aéroélasticité est concernée par des interactions entre les déformations des structures élastiques dans un courant d'air et les réactions aérodynamiques donnant droit. Les phénomènes aéroélastiques se produisent quotidiennement dans la nature, par exemple le balancement des arbres, de l'herbe, etc. dans le vent.

Ils peuvent avoir comme conséquence des déformations dangereuses et des instabilités statiques et dynamiques et, ainsi, avoir des conséquences pratiques très importantes dans beaucoup de secteurs technologiques.

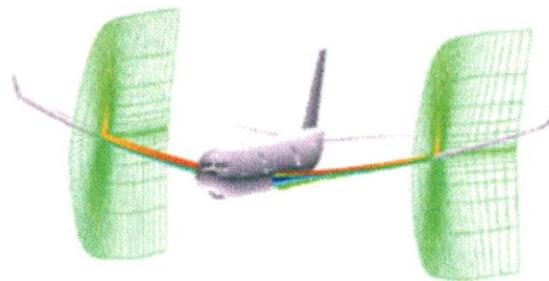
Particulièrement dans la conception de l'avion moderne caractérisés par la demande des structures extrêmement légères. La solution de beaucoup de problèmes aéroélastiques surgissant est une condition de base, pour le point de vue fonctionnement les constructions fiables et structurellement optimales.

D'autre part, les phénomènes aéroélastiques jouent également un rôle important dans les turbomachines et les moteurs aéronautiques, dans le génie civil, dans les convertisseurs d'énergie éolienne, et même dans la génération saine des instruments musicaux.

Dans ce chapitre on étudie l'élaboration des méthodes et des procédures pour la détermination du comportement aéroélastique des systèmes élasto-mécanique, particulièrement dans la zone de la technologie aéronautique.

## **V.2. Calcul de l'équilibre aéroélastique statique des structures élastiques :**

Les déformations aéroélastiques peuvent avoir des conséquences graves sur la stabilité, la performance, la manoeuvrabilité,. Pour cette raison, des questions concernant le comportement aéroélastique doivent être répondues, du début tôt du processus de conception d'un avion. Dans le domaine de l'aéroélasticité, des interactions entre les structures élastiques et le jet environnant d'air sont étudiées. Ainsi, le but principal dans l'aéroélasticité de calcul est de décrire l'influence des déformations structurales sur la répartition des charges aérodynamique et vice versa.

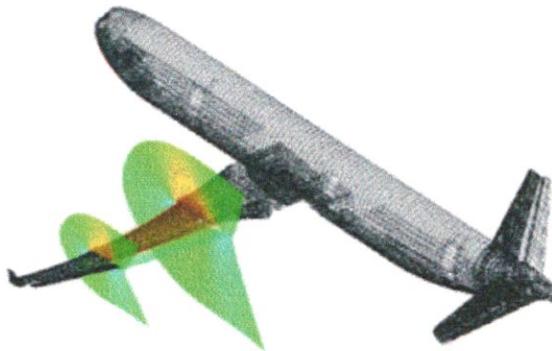


**Figure V.1 :** *Le modèle d'avion de transport et le CFD civils élastiques maillent.*

Récemment, des modèles aéroélastiques numériques sont établis composant ceux de la dynamique liquide de calcul (CFD) et les domaines structuraux de calcul de la dynamique (CSD). Depuis les modèles liquides et structuraux diffèrent dans leurs formulations et on doit introduire la discrétisation d'un modèle d'interface qui représente la connectivité et l'interaction physique entre les deux modèles simples de domaine.

Une tâche principale au sujet du traitement des systèmes aéroélastiques couplés est la simulation de l'interaction du fluide-structure (FSI). La recherche sur FSI dans le domaine de l'aéroélasticité de calcul a fortement augmenté.

Une méthode de FSI obtient une répartition numérique adéquate des chargements aérodynamiques aux noeuds structuraux du modèle de l'élément fini en utilisant les pressions aérodynamiques données dans les volumes, les éléments de volume, ou les panneaux finis du champ d'écoulement ou de la surface aussi bien qu'une déformation adéquate de la forme aéroélastique en utilisant les déplacements et les rotations donnés aux noeuds.

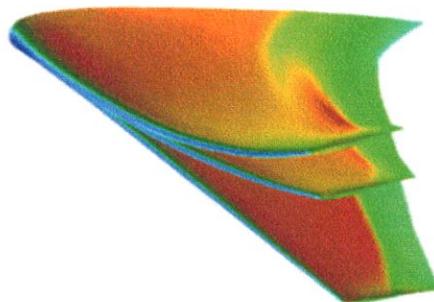


**Figure V.2 :** *Modèle structural dans le flux de fluide transsonique.*

Pour la solution du problème couplé, des solveurs numériques bien établis existants peuvent être utilisés dans chaque domaine. L'interaction entre le fluide et les modèles structuraux est limitée à l'échange des chargements extérieurs et de l'information extérieure de déformation, en utilisant des procédures divisées ou décalées et mettant à jour les conditions de borne relatives.

Cet élan permet une extension plus facile aux problèmes multidisciplinaires. Habituellement la solution des problèmes aéroélastiques dynamiques a besoin d'un couplage dans l'espace et le temps. Tandis que dans des problèmes de statique le temps n'apparaît pas comme paramètre de solution. Pour coupler des procédures divisées ou décalées de temps les solutions sont largement répandues.

Pour coupler dans l'espace, des élan purement mathématiquement et physiquement motivés ont été présentés. Néanmoins, parce que la solution des équations aéroélastiques statiques (non linéaires) sont couplées. Un arrangement itératif ou divisé de solution doit être appliqué.



**Figure V.3 :** *Etats de déformation pendant la solution des équations aéroélastiques statiques non linéaires.*

### V.3. Aérodynamique Instable :

#### V.3.1. Développement des codes aérodynamiques instables de calculs :

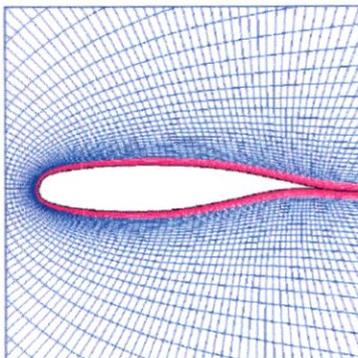
Le développement du code aérodynamique instable de calcul change les méthodes linéaires rapides de panneau aux codes non linéaires de CFD avec le couplage de couche de borne et Navier stokes figure (V.4) montre l'état des différents codes disponibles, de leur calcul relatif, et de leurs zones d'application actuelles principales.

METHODES	APPLICATION
DLM	Calcul/conception de flottement de classe (subsonique)
TDLM	Calcul/conception de flottement de classe (transsonique)
FP + Couche limite (le point de gel+bondissent la couche)	simulation aéroélastique (prévision de conception) fluide- couplage de structure, immersion transsonique.
Euler + Couche limite (Euler+bondissent la couche)	Aéroélasticité+simulation de mécanique de vol fluide-couplage de structure, séparation douce, immersion transsonique
Navier Stokes	Séparation d'écoulement ballottant, immersion transsonique, oscillation de cycle limite

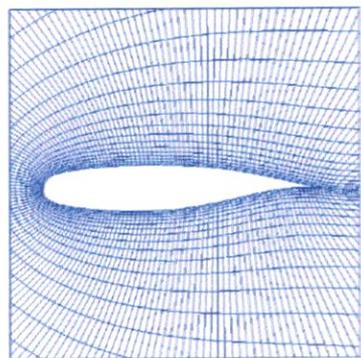
**Figure V.4 :** Comparaison entre plusieurs codes aéroélastique.

L'emphase principale se situe actuellement dans l'accouplement de la couche de frontière des codes de CFD (Euler et pleine capacité).

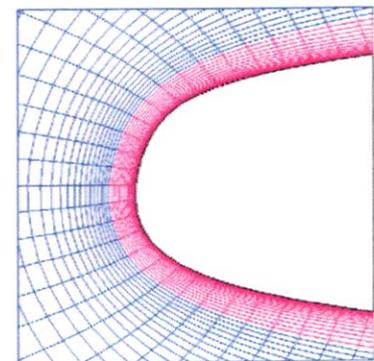
Les figures (a et b) montrent une comparaison entre Navier stokes et pleine capacité plus la couche de frontière pour une aile supercritique d'oscillation a 2D.



**Figure. a.** Navier stokes grille 180\*70 cellules.



**Figure. b.** Pleine Capacité/Euler 224\*30 cellules.



**Figure. c :** intérieures de 30 cellules.

Un deuxième domaine de recherche dans l'extension des codes d'Euler instable et de pleine capacité à des configurations d'avion, y compris la génération de grille. Un développement interne important est le logiciel AENGUS de génération de grille pour des grilles structurées bloquées. Ce logiciel peut produire des grilles elliptiques de haute qualité avec million de points dans le temps CPU de quelques minutes à cause postes de travail de rendement élevé. Figure (V. 5) montre un exemple pour une configuration de nacelle d'aile. En outre, l'approche alternative des grilles superposant (de chimère-type) est également étudiée et développée. La génération de grille doit tenir en compte que les structures d'avions subissent des déformations élastiques instables. Ainsi, des grilles déformantes instables doivent être produites.

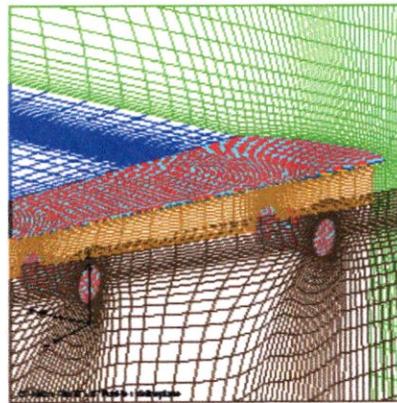
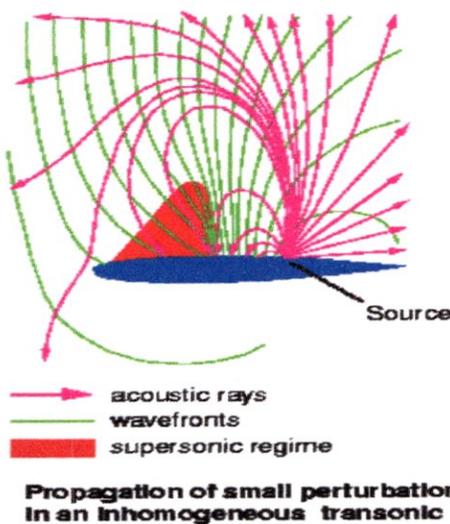


Figure V. 5. Grille CX avec 70 \* 87 \* 67 points.

Une troisième avec des méthodes linéaires (méthodes instables de panneau, méthodes transsoniques linéaires). Figure (V.6) montre la modélisation des effets transsoniques pour l'extension de la méthode standard du réseau de doublet (méthode transsonique TDLM du réseau de doublet).

**Transonic Doublet Lattice Method (TDLM)**



$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \lambda^2 \Phi = S(\Phi, \omega^*, Ma(x, y, z))$$

$$\omega^* = \omega L / u_\infty, \quad \lambda = (\omega^* Ma_\infty) / (1 - Ma_\infty^2)$$

Inhomogeneous Helmholtz Equation

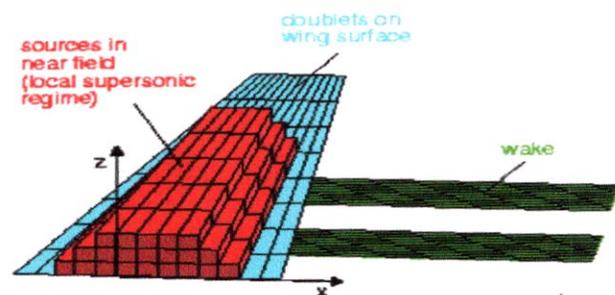
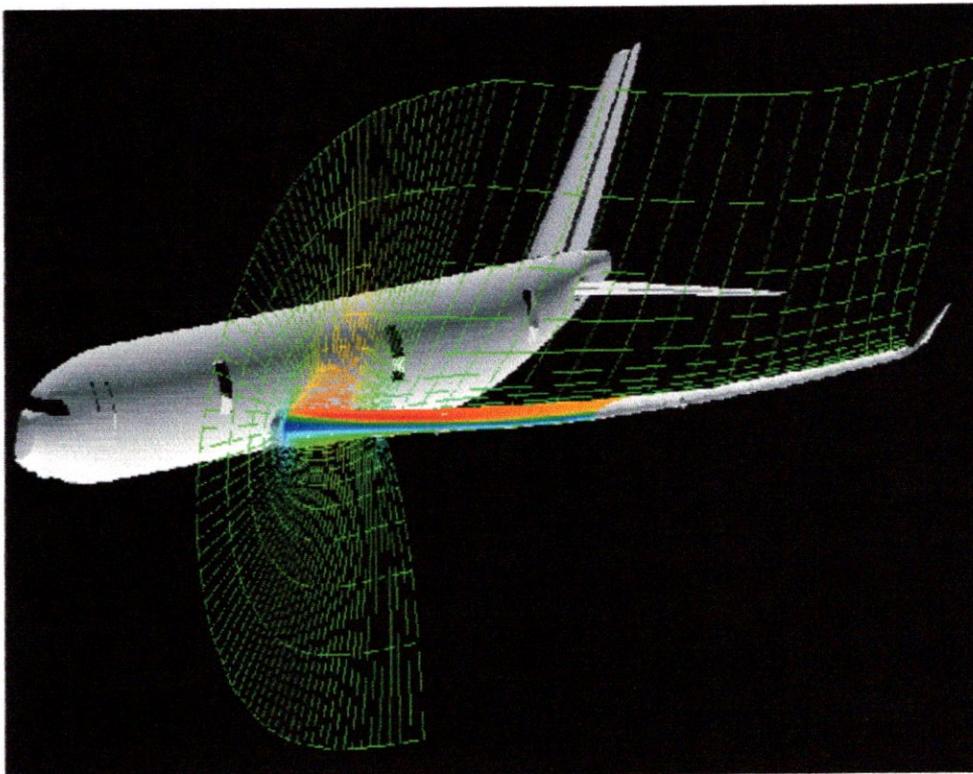


Figure V.6. Méthode transsonique TDLM du réseau de doublet.

### **V.3.2 Intégration et validation des codes aérodynamiques instables de calcul :**

La validation et l'intégration de ces codes de calcul dans l'aéroélasticité sont effectuées pour étudier le comportement aéroélastique statique et dynamique principalement de l'avion de transport. Les codes sont préparés et appliqués à différentes stratégies et interfaces liquides de couplage de structure, en utilisant la modélisation de la structure .modélisation (des déformations prescrites de forme de mode) et avec modélisation d'élément fini de structure. Figure (V. 7) montre la déformation statique calculée d'un type aile d'AIRBUS obtenue par la couche de CFD plus de borne couplée d'élément fini de structure.



**Figure.V.7 .Déformation statique calculée d'un type d'aile d'AIRBUS.**

Figure (V.8) montre la borne typique de flottement d'une aile de transport, calculée en utilisant différents codes aérodynamiques instables :

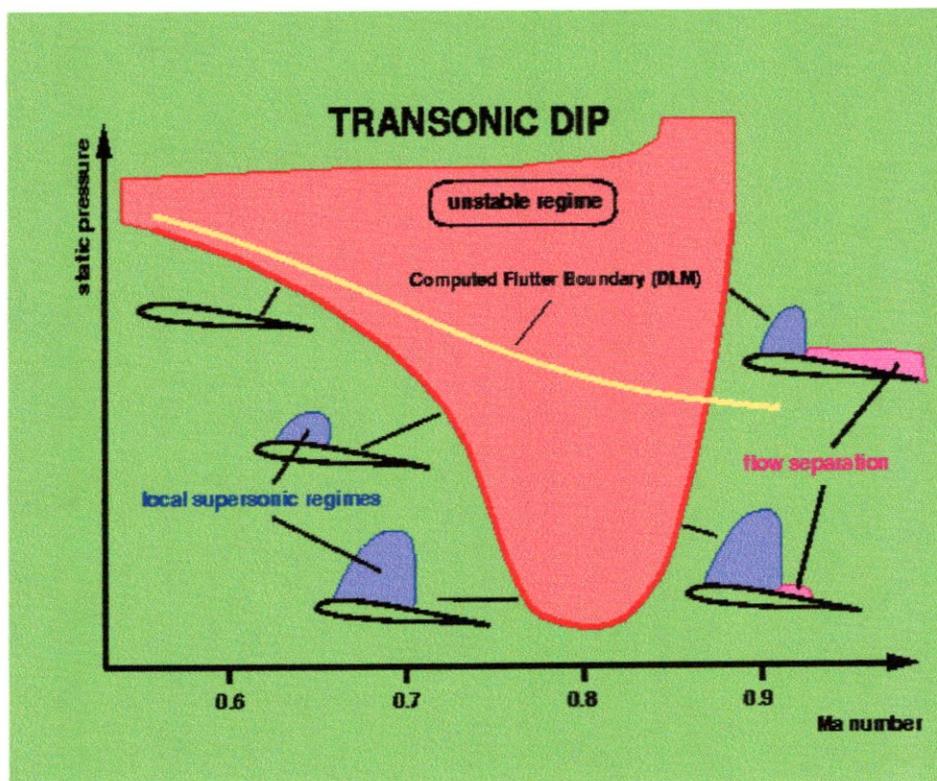


Figure.V.8. Borne du creux transsonique.

Les anomalies saisissantes dans le régime transsonique d'écoulement, qui est près des états de croisière de l'avion, montrent que la nécessité d'utiliser des codes, y compris la capacité de prévoir la séparation d'écoulement.

#### V.4. Dynamique d'Avion au sol :

Les activités principales de la dynamique au sol sont l'élaboration et la mise en place des méthodes pour la simulation multidisciplinaire de la dynamique d'avion et l'analyse des chargements dynamiques pendant l'exécution d'avion. Le centre du travail est principalement sur les chargements au sol pour les avions civils et les militaires.

Une technique importante pour ce domaine est l'élan multi corps de simulation avec ses interfaces à d'autres disciplines relatives comme la mécanique de vol, l'aérodynamique et le contrôle. L'élan exige un niveau moyen de la complexité modèle, il est donc convenu bon de l'utilisé pour l'optimisation multidisciplinaire et dans l'étape de plan d'étude d'avion.

Les domaines particuliers sont la conception intégrée de l'avion et des trains d'atterrissage, y compris la dynamique de train d'atterrissage et la dynamique au sol de l'avion, la conception de train d'atterrissage et l'optimisation dans l'étape de plan d'étude d'avion et les élans aéroélastiques dans la simulation multi corps. Le travail supporte des activités dans la coopération et des projets.

Les chercheurs étudient la dynamique de l'avion sur la terre et le calcul des phénomènes aéroélastiques sur la base de la dynamique multi corps. Comporte des manoeuvres typiques telles que le décollage, l'atterrissage et le roulement dans le but d'enregistrer exactement les forces qui affectent l'avion. Ceci sert à la conception de la structure d'avion (fuselage, ailes, trains d'atterrissage) et l'amélioration du confort de passager. Toutes les investigations sont effectuées dans le cadre de la prétendue "conception intégrée de l'avion et des trains d'atterrissage" qui encourage la coopération interdisciplinaire dans le développement d'avion, à partir de l'avant-projet au produit final d'avion. Davantage des recherches sont consacrées au pronostic des oscillations des trains d'atterrissages, également connu sous le nom d'un aspect critique en ce qui concerne la sécurité en concevant les trains d'atterrissage pour l'avion ou Pour la simulation des manoeuvres d'avion un pavé en fonction des pistes, par exemple l'herbe, le sable ou l'argile, les modèles ont été développés. Une autre emphase principale des tâches est (par exemple CFD), dynamique de structure et mécanique de vol. Cet élan rend lui possibles plus normalement à la prise dans la considération les effets aéroélastiques pendant la simulation de l'avion en atterrissant et en décollant. Il augmente également l'exactitude des modèles dynamiques aérodynamiques et liquides en incluant des équations mécaniques de vol.



### **V.4.1. Simulation des manoeuvres au sol pour l'avion de transport :**

#### **V.4.1.1. 1<sup>e</sup> projet flexible d'avion AP6/MODYAS wp 6.3 :**

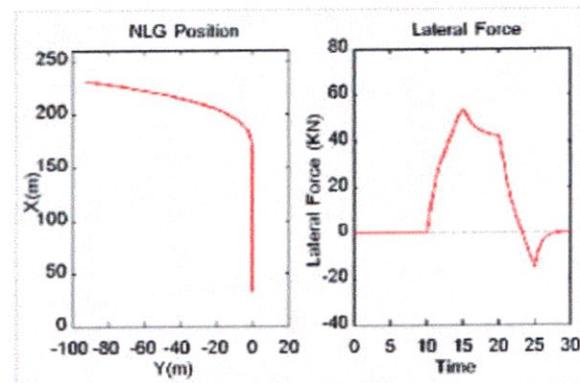
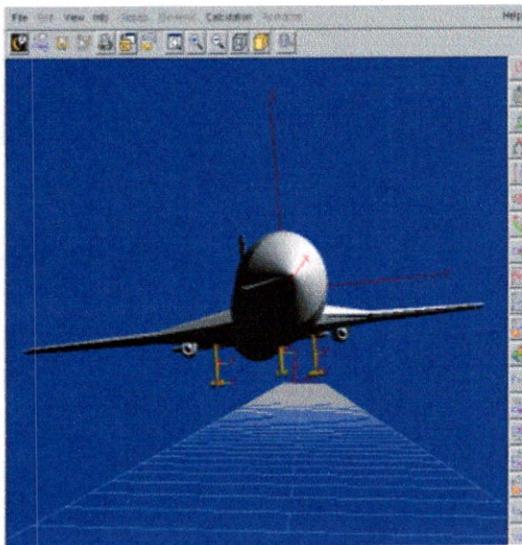
En coopération avec Airbus Allemagne, instituts et universités de DLR.

#### **Buts :**

Développement des méthodes et du logiciel pour la simulation des manoeuvres au sol pour A340-600 et A380.

#### **Logiciel utilisé :**

1. SIMPACK comme outil de simulation pour des mis-bande.
2. NASTRAN pour des modèles de technicien.
3. TORNADE un code linéaire de vortex-réseau pour l'aérodynamique des fuselages rigides.



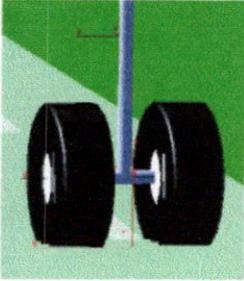
aircraft cornering manoeuvre

#### **V.4.1.2. Analyse de shimmy des trains d'atterrissage d'avion :**

##### **V.4.1.2.1. phénomène et de vue d'ensemble :**

Peuvent être considérés comme un système élasto-mécanique de multi-fuselage où avec des oscillations induites dans toutes les conditions roulantes au sol (décollant et atterrissant) peut se produire. Ce phénomène est connu en tant que "shimmy" une limite de récapitulation pour (la torsion aussi bien que le côté-dépliection) le phénomène transversal de flottement des véhicules, spécialement pour les trains d'atterrissage d'avion. Les raisons de telles oscillations instables sont trouvées dans l'élasticité de la trame et des pneus (en combinaison avec des effets non linéaires tels que le frottement et le jeu libre dans

les roulements de la broche) qui mènent à limiter des oscillations de cycle et des vibrations inconfortables causant l'usure mécanique et le danger des pannes de train d'atterrissage.



Le but de cette recherche est de développer une méthode basée sur la quasi-linéarisation pour l'analyse pertinente approximative de temps du shimmy.

De cette façon, différents modèles mathématiques pour les trains d'atterrissage d'avion et pour l'élasticité de pneu en ce qui concerne le shimmy sont étudiés. Par des méthodes d'amélioration plus rapides et d'approvisionnement d'analyse, des régions dangereuses dans les paramètres modèles et les états d'exécution ont pu être identifiés et être évités, particulièrement dans la recherche, conception et préconçoivent des phases de nouveaux trains d'atterrissage.

#### **V.4.1.2.2. Modélisation :**

Afin de développer une méthode de calcul mise en valeur des oscillations non linéaires de shimmy (cycles de limite) le modèle en service représente une description mathématique de base d'un train avant, avec un degré de torsion de liberté et de la dynamique de pneu selon la théorie de la chaîne de caractères de Pacejka. En traitant un modèle si simplifié, des résultats essentiels peuvent être vérifiés et examinés en rivalisant avec ceux des formules analytiques, par exemple les fonctions décrivant, la matrice quasi-linéaire de système et pour assurer les amplitudes inconnues qui peuvent être calculées à partir des relations analytiques de réponse en fréquence d'une amplitude de base. Les contributions principales au shimmy viennent de la dynamique du système et de l'élasticité des pneus, (fig.1), d'un grand nombre de paramètres modèles, par exemple vitesse roulante au sol, la masse, la géométrie modèle et des couples imposés là-dessus.

Le modèle a deux couples non linéaires et quatre linéaires différents :

1. Couple auto-dressant non linéaire du pneu, modelé comme onde de moitié-sinus en ce qui concerne la cornière de glissade.
2. Force non linéaire de côté de pneu, modelée comme saturation linéaire (borne linéaire), ayant pour résultat un moment selon la cornière de glissade.
3. Ressort non linéaire de compas, modelé comme gain linéaire avec zone morte, selon la cornière de torsion.
4. Atténuant le moment dans les roulements, modelés comme non-linéarités rectangulaire d'hystérésis, selon le dérivé de la cornière de torsion.
5. Moment gyroscopique linéaire de couplage, selon le dérivé de la cornière latérale de glissade
6. Largeur linéaire de bande de roulement atténuant le moment, selon le dérivé de la cornière de torsion.

Les non-linéarités sont modélées par une approximation quasi-linéaire appliquant les fonctions décrivant sinusoïdales, qui dépendent des amplitudes des oscillations.

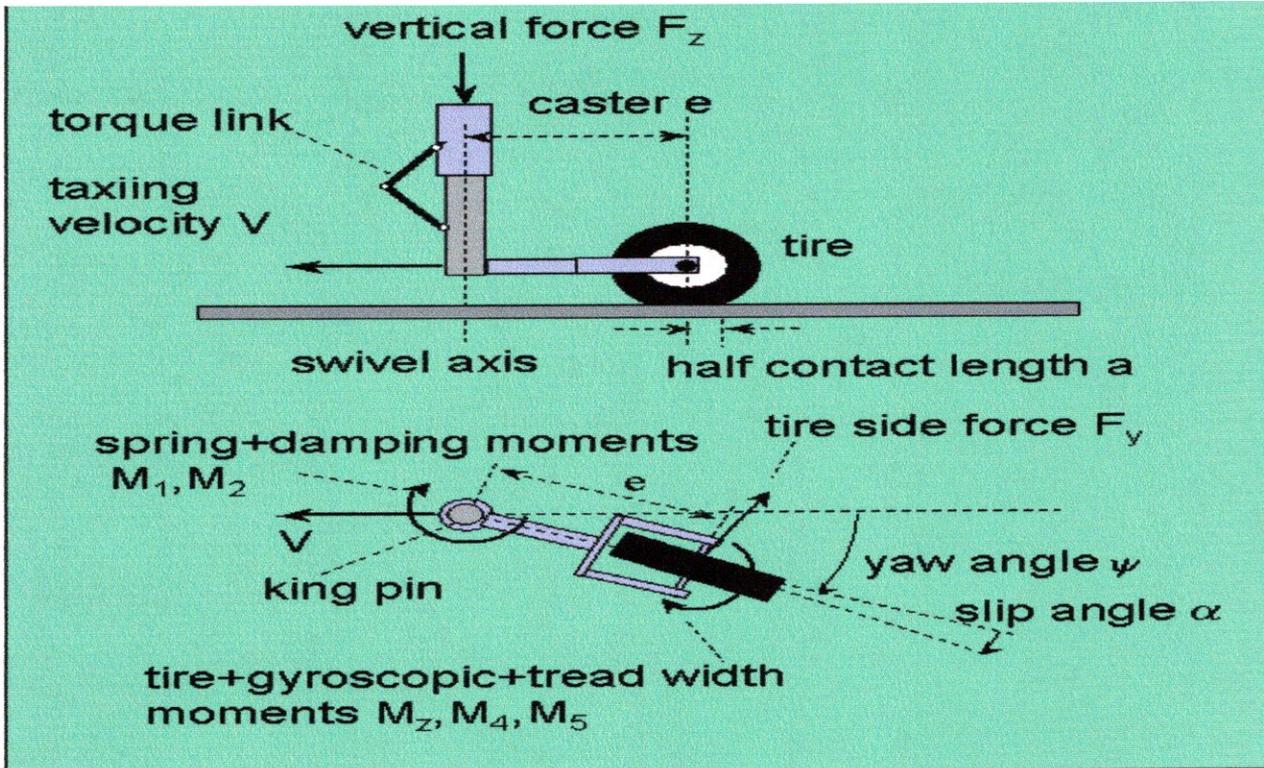


Figure.V. 9 : Modèle de base de train d'atterrissage pour l'analyse de shimmy.

#### V.4.1.2.3. Analyse Quasi-linéaire :

##### -Contour Général :

Le but c'est d'établir une procédure numérique pour trouver les cycles de limite, qui est généralement applicable à tous les systèmes dynamiques (d'ordinaire, d'équations homogènes) ayant plusieurs non-linéarités distinctes d'une variable. Pour de grandes amplitudes  $q$  un système quasi-linéaire est produit en déterminant les amplitudes inconnues par l'intermédiaire des vecteurs propres (synchronisation d'amplitude), alors des valeurs propres sont calculés et un contrôle de stabilité est exécuté. Tous ces éléments doivent être manipulés dans une boucle itérative parce qu'ils sont couplés, due à la dépendance d'amplitude de décrire fonctionne.

##### -Linéarisation :

Pour linéarisé le système, des non-linéarités faibles sont linéarisés selon la série de taylor, et pour toutes les autres non-linéarités discrètes (voir les exemples) l'approximation quasi-linéaire utilisant (décrivant des fonctions) est appliquée.

-Synchronisation D'Amplitude :

Étant donné que dans le cas de plusieurs non-linéarités avec différents signaux d'entrée les fonctions décrivant de ces non-linéarités dépendent de différentes inconnues d'amplitudes des oscillations d'entrée, un système non linéaire des équations pour les amplitudes inconnues donne droit. En utilisant le fait que dans un système linéaire les taux de toutes les amplitudes A et des vecteurs propres EV sont constants pour chaque valeur propre, ces équations peuvent être installées. à condition que des évaluations initiale et les tailles d'étape appropriées pour les amplitudes inconnues A soient choisies, le système d'EV/A- équations non linéaire peut être résolu itérativement avec un logiciel non linéaire de solutionneur, voir figure (V.10).

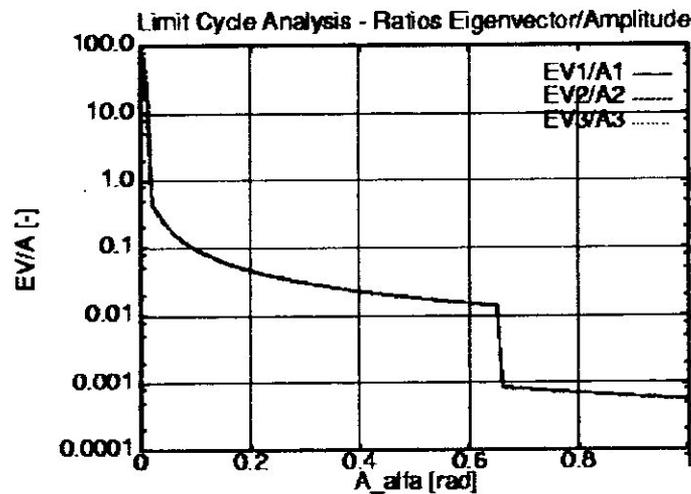


Figure. V.10 : Représentation graphique d'EV/A- équations.

-Valeurs propres :

Par la variation de paramètre de l'amplitude de base choisie (par exemple l'oscillation de cornière de glissade) et d'un paramètre modèle intéressant (par exemple la vitesse V), les valeurs propres peut être calculée et affichée dans un graphique à trois dimensions, figure (V.11).

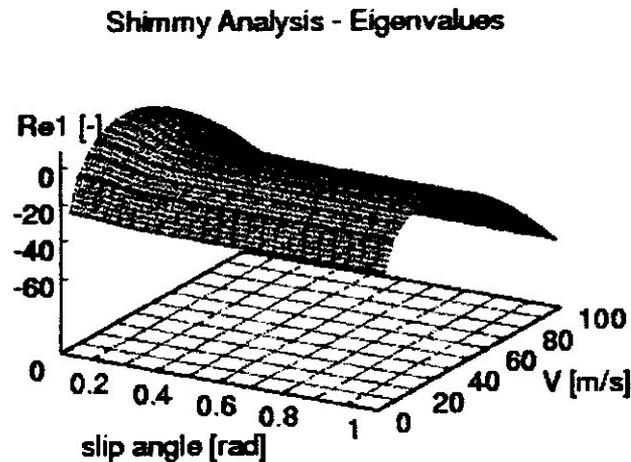


Figure.V.11. Valeurs propres quasi-linéaires

-Contrôle de stabilité - diagrammes de bifurcation :

En examinant les valeurs propres pour assurer la stabilité critique et par la variation des paramètres en ce qui concerne un paramètre modèle, des conditions pour des amplitudes (d'oscillation de cornière de glissade) sont trouvées, où les cycles de limite peuvent se produire. Les résultats sont mieux montrés dans un diagramme de bifurcation Il affiche les régions dans l'amplitude contre un paramètre modèle, où le comportement stable et instable se produit, séparé par stable ou la limite instable fait un cycle, Figure (V.12). En outre, les fréquences de la valeur propre de cycle de limite sont enregistrées, figure (V.13).

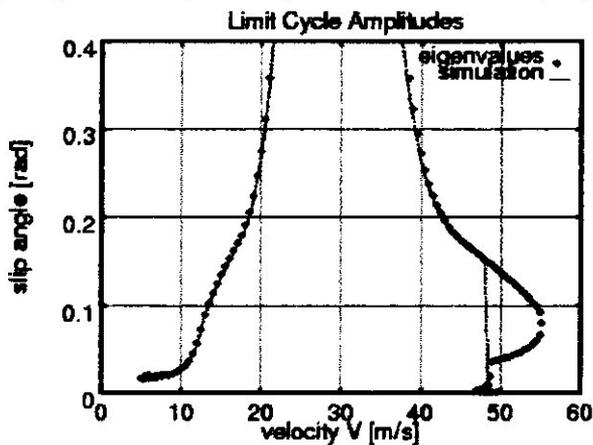


Figure V.12. Diagramme de bifurcation

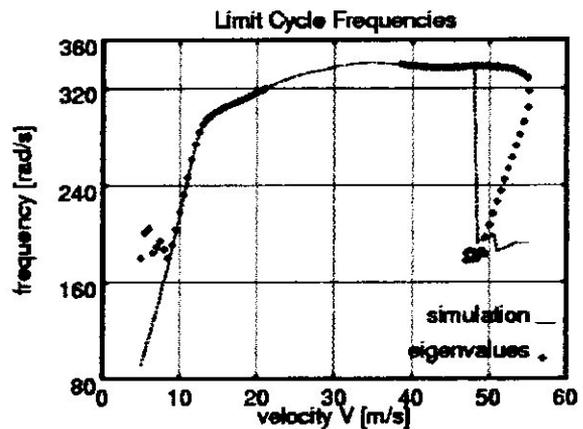
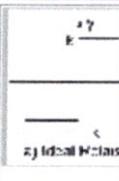
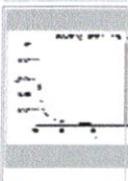
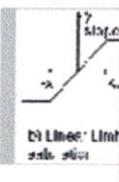
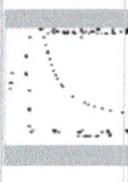
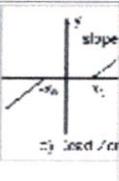
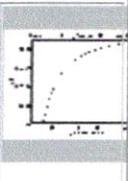
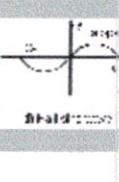
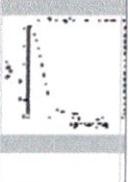
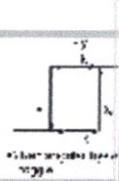
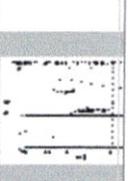


Figure.V.13. Fréquences aux cycles de limite

-Généralité de Non-linéarités :

Dans le tableau suivant quelques exemples des fonctions non linéaires importantes sont affichés. On montre comment ils sont définis à temps par formule et graphique, et les fonctions décrivant dans le domaine de fréquence sont données et graphiquement affichées. Pour beaucoup de non-linéarités (comme la borne, le basculeur, etc.. linéaires.) les intégrales de Fourier pour les fonctions décrivant peuvent être résolues analytiquement, ayant pour résultat des formules analytiques, mais pour des fonctions arbitraires (comme la demi onde de sinus), les intégrales doivent être évaluées numériquement, (voir le programme de Fortran).

N	nom	Formule dans le domaine de temps	Graphes	formule de décrire la fonction	Graphes
a	Idéal Relais	$y = k \text{ for } x > 0$ $y = -k \text{ for } x \leq 0$		$N_p = 4k l (\pi A)$ $N_q = 0$	
b	limiteur linéaire	$y = kx \text{ for } x \leq x_0$ $y = kx_0 \text{ sign}(x) \text{ for } x \geq x_0$		$N_p = k \frac{2}{\pi} (\arcsin \frac{x_0}{A} + \frac{x_0}{A} \sqrt{1 - (\frac{x_0}{A})^2})$ $N_p = k \text{ for }  \frac{x_0}{A}  > 1$	
c	Zone morte	$y = kx \text{ }  x  > x_0$ $y = 0 \text{ }  x  \leq x_0$		$N_p = c - (2c / \pi) (\arcsin z + z \sqrt{1 - z^2})$ $N_p = 0 \text{ } z > 1$ $z = x_0 / x$	
d	Demi De Vague De Sinus	$y = k \frac{x_0}{180} \sin(\frac{180}{x_0} x) \text{ for }  x  < x_0$ $y = 0 \text{ for }  x  \geq x_0$		Utiliser les intégrale numérique de fourier.	
e	Rect-angulaire Hysteresis	$y = -k \text{ for } \dot{x} > -\dot{x}_0 \text{ and } \dot{x} > \dot{x}_0$ $y = k \text{ for } \dot{x} < -\dot{x}_0 \text{ and } \dot{x} < \dot{x}_0$		$N_p = \frac{4k}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_0^2}{A^2}} \text{ for } A > \dot{x}_0$ $N_p = 0 \text{ for } A \leq \dot{x}_0$ $N_q = -\frac{4k \dot{x}_0}{\pi A^2} \text{ for } A > \dot{x}_0$ $N_q = 0 \text{ for } A \leq \dot{x}_0$	

-Le sous-programme de Fortran pour le calcul numérique de décrire fonctionne :

SUBROUTINE HARLIN (ny,y\_arr,z\_arr,Ao,yo,zkq,zoq,ier )

---

C  
 C PURPOSE : Linéarisation harmonique de la fonction asymétrique  $z = f(y)$ ,  
 C            donné aux valeurs discrètes  $y\_arr(i)$ ,  $z\_arr(i)$ ,  
 C            dans l'approximation linéaire  $z = zkq * y + zoq$  (DIDF = dual input describing function  
 « entrée duelle décrivant la fonction »)  
 C REMARKS : aucun  
 C ARGUMENTS D'ENTRÉE:  
 C ny            nombre de valeurs  
 C y\_arr        (ny)- vecteur des coordonnées d'abscisses  
 C z\_arr        (ny)-vecteur de la fonction non linéaire  
 C Ao            Amplitude pour la quasi-linéarisation  
 C yo            point central pour la quasi-linéarisation  
 C ARGUMENTS D'ENTRÉE PAR L'INTERMÉDIAIRE DE TERRAIN COMMUNAL : aucun  
 C ARGUMENTS DE SORTIE :  
 C zkq        pente de l'approximation linéarisée  
 C zoq        valeur constante de l'approximation linéarisée

C SOUS-PROGRAMMES REQUIS : LININ1

C AUTHOR : D L R

---

C  
 C DOUBLE PRÉCISION IMPLICITE (A-H,O-Z)  
 C NOMBRE ENTIER ny, ier, np, i  
 C DOUBLE PRÉCISION y\_arr(ny), z\_arr(ny), yo, Ao, zkq, zoq, eps, A00  
 C DOUBLE PRÉCISION LININ1  
 C PARAMÈTRE (EPS = 1.0E-6)

---

C  
 ier = 0  
 A00 = Ao  
 IF (Ao.lt.EPS) A00 = EPS  
  
 IF ((yo-Ao) .LT. y\_arr(1) .OR. (yo+Ao) .GT. y\_arr(ny)) THEN  
 WRITE(\*,\*)'quasi-linéarisation hors d'intervalle '  
  
 ier = 1  
 RETURN  
 ENDIF

C..... valeur par défaut réglée pour l'intégration en utilisant la règle de trapèze

np = 181

C..... placer les constantes et les paramètres initiaux

```

pi = 4.0D0 * ATAN(1.0D0)
phi = -pi/2.0D0
dphi = pi / DBLE(np - 1)
s1 = 0.0D0
s2 = 0.0D0
fact = 1.0D0

```

C..... employer la règle de trapèze pour l'intégration à la gamme  $-\pi/2$  to  $\pi/2$

```

DO i=1, np
IF (i .EQ. np) fact = 1.0D0
y = yo + Ao * SIN(phi)
z = LININI (ny, y_arr, z_arr, y)
s1 = s1 + fact*z
s2 = s2 + fact*y*z
phi = phi+ dphi
fact = 2.0D0
ENDDO

```

C..... calculer les résultats

```

s1 = s1 / (DBLE(np-1)*A00*A00)
s2 = s2 / (DBLE(np-1)*A00*A00)
zkq = s2 - yo * s1
zoq = (yo*yo+Ao*Ao*0.5D0) * s1 - yo * s2

```

```

RETURN
END

```

FONCTION LININI DE DOUBLE PRÉCISION (nx, x\_arr, z\_arr, x)

C =====  
C BUT : Interpolation linéaire dans un tableau dimensionnelle  
C REMARQUES :En dehors de l'intervalle sous forme de tableaux, les valeurs de fin d'intervalle sont prises (extrapolation constante)

C ARGUMENTS D'ENTRÉE :

C nx            nombre de points dans la direction de x

C x\_arr        (nx) vecteur de valeur d'abscisses  $x_i = x\_arr(i)$

C z\_arr        (nx) Alignement de datas correspondants  $z_i = z\_arr(i)$

C x            entrer la valeur x , pour la quelle l'interpolation doit faire

C ARGUMENTS DE SORTIE :

C z            valeur interpolée linéaire de la fonction  $z = z(x)$

C AUTEUR : DLR

```

C
=====
INTEGER nx, i
REAL*8 x_arr(nx), z_arr(nx), x, z
REAL*8 dx
C
=====
IF (x .GE. x_arr(1)) GO TO 10
z = z_arr(1)
GO TO 30
10 IF (x .LE. x_arr(nx))GO TO 20
z = z_arr(nx)
GO TO 30

20 DO i=2,nx
  IF (x .LT. x_arr(i)) THEN          ! Intervalle trouvé
  dx = (x - x_arr(i-1)) / (x_arr(i) - x_arr(i-1))
  z = z_arr(i-1) + (z_arr(i) - z_arr(i-1)) * dx
  GO TO 30
  ENDIF
ENDDO

30 CONTINUE
LININI = z
RETURN
END

```

### V.5. Shimmy-analyse méthodes classiques :

La plupart des trains d'atterrissage modernes d'avion sont équipés des amortisseurs de shimmy, des moyens supplémentaires pour supprimer et éliminer les oscillations non désirées et dangereuses. Mais il y a de bonnes raisons pour faire un meilleur travail en concevant le train d'atterrissage :

1. C'est le but primaire de conception pour développer les machines qui fonctionnent la gamme de produits sans mouvements peu désirés.
2. L'utilisation d'un amortisseur de shimmy signifie le poids supplémentaire, l'énergie perdue, plus grands coûts et une complication de l'assemblage et de l'entretien.
3. Un amortisseur de shimmy est un élément de sécurité, empêchant des accidents.

Les méthodes classiques pour l'analyse de shimmy sont des linéarisation et simulation linéaire d'analyse et de temps du système. Les méthodes sont illustrées ici sur le véhicule de PHOENIX. Figure (V.14)

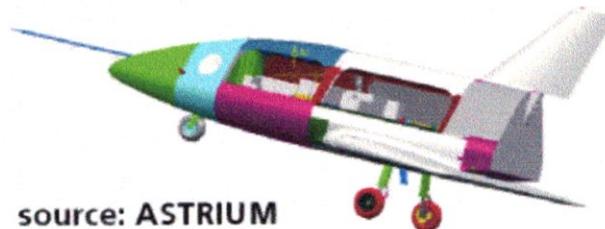


Figure.V.14 .véhicule de PHOENIX.

Le modèle d'analyse du véhicule et des trains d'atterrissage a été installé dans SIMPACK. (Figure (V.15) : le train d'atterrissage avant, figure (V.16) : train d'atterrissage principal). Dans ce cas-ci, les trains d'atterrissage ont été modélisés en tant que corps rigides avec l'élasticité assumée pour être concentrée dans l'attachement au fuselage. Les modèles incluent des amortisseurs et des pneus. L'élasticité résultante (flexibilité de train d'atterrissage plus la rigidité d'attachement).

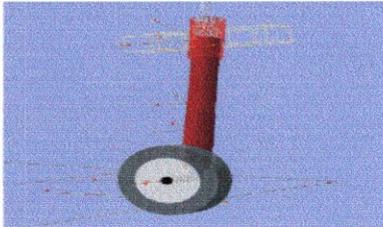


Figure V.15. Train d'atterrissage avant.

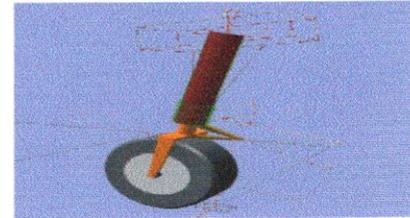


Figure V.16. Train d'atterrissage principal.

## V.6. Interaction de Pneu sol à la grande vitesse par Andreas Gibbesch :

Une condition importante pour l'avion de transport des militaires est la capacité de manoeuvrer sur les terrains d'aviation non préparés. D'une part il est important de savoir les configurations possibles d'avion qui peuvent passer dans une piste au sol et d'autre part les conséquences sur la piste sont de grand intérêt (par exemple combien de passages de piste sont possibles avec une configuration connue d'avion).

La simulation de l'interaction complexe de Pneu-sol est provocante, particulièrement en raison du comportement non déterministe du sol normal.

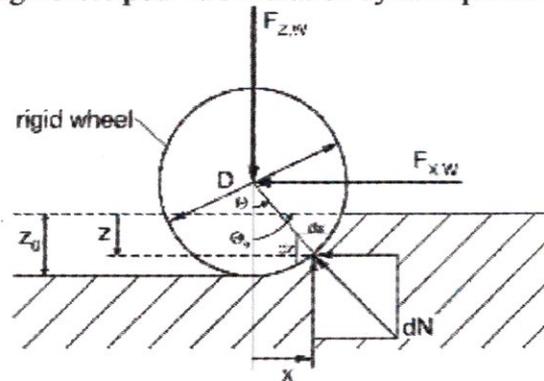


### V.6.1. Principes fondamentaux d'interaction de Pneu-Sol :

Puisque la première recherche revient aux années '50 sur l'interaction du Pneu-sol. Ce problème a été un sujet de beaucoup de projets de recherche. Les premières investigations ont été conduites par Bekker dans les années '50 du dernier siècle. Il était le premier pour faire des investigations systématiques de l'interaction de Pneu-sol qui a eu comme conséquence un modèle semi-empirique de Pneu-sol. Ces théories sont toujours en service aujourd'hui. Une équation fondamentale est le rapport de pression-sinkage :

$$p = \left( \frac{k_c}{B + k_\phi} \right) z^n.$$

Les paramètres pour cette équation sont dérivés des expériences quasi-statiques de plat-sinkage. cette approche doit être augmentée pour la simulation dynamique de Pneu-sol à la grande vitesse.



### V.6.2. Grande vitesse sur les sols mous :

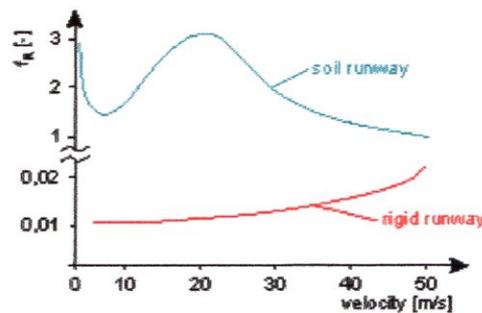
En raison de l'interaction à grande vitesse de l'avion avec le terrain déformable on doit considérer la dépendance de vitesse de la drague et du sinkage de roulement. Des mesures ont montrés que la courbe typique ressemble à la couleur bleue de la courbe montrée dans la Figure (V.17).

La comparaison de la drague de roulement en fonction de la vitesse sur une piste rigide et conforme montre d'abord cette drague de roulement est explicitement plus haute sur une piste de sol que sur une piste rigide. Sur une piste rigide c'est principalement la déformation effectuée sur le pneu qui est responsable de la résistance de roulement qui mène à la courbe progressive présentée (graphique rouge).

Le graphique bleu montre la courbe typique de la résistance de roulement contre la vitesse pour une piste de sol aux vitesses élevées. La résistance de roulement d'un pneu sur le sol mou consiste principalement en composants suivants :

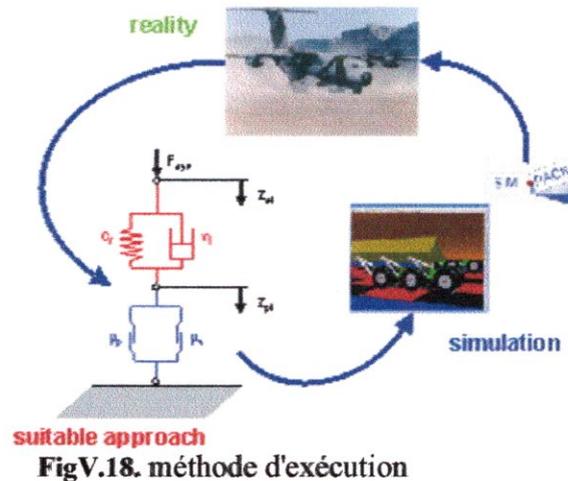
1. tassement de sol,
2. déplacement des particules de sol,
3. frottement de mur latéral.

Pour de basses vitesses le roulement de la drague diminue avec la vitesse à un minimum. Ceci peut être expliqué par la situation courante d'un véhicule qui peut traverser une surface de sol sans interruption mais qui est immobilisé par le sinkage excessif une fois permis de s'arrêter. La caractéristique pour des vitesses plus élevées est la valeur maximale de drague à approximativement 20 m/s.



« FigV.17 »

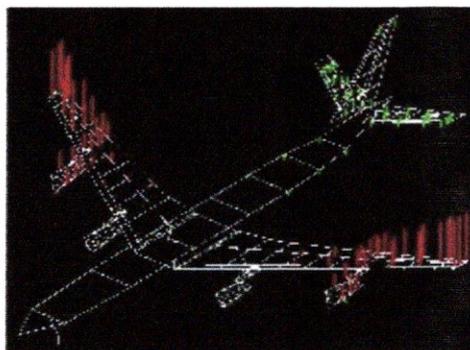
### V.6.3. Exécution :



La méthode d'exécution est montrée dans la figure (V.11) Les mesures de l'interaction de Pneu-sol dans des expériences sur le terrain fournissent des paramètres pour décrire le comportement dynamique du sol normal. En raison du comportement non déterministe du sol normal les résultats obtenus de simulation sont tout à fait imprécis (les déviations environ de 20% ne sont pas peu communes).

Un sol-modèle rhéologique est la première approche appropriée pour examiner le comportement élastique et en plastique du sol. Le comportement en plastique est modelé par une constante de compression  $\mu_v$  et une constante de rendement  $\mu_p$ .

## V. 7. Dynamique Structurale :



La dynamique structurale est en activité dans le domaine de la dynamique structurale théorique et expérimentale avec un foyer traditionnel sur la partie expérimentale. Les objets étudiés sont principalement les structures portantes de charge des constructions aérospatiales comme l'avion, les hélicoptères et les satellites.

Les activités théoriques sont concentrées sur l'analyse numérique des caractéristiques dynamiques des structures à grande échelle en employant la méthode d'élément fini. Des modèles numériques complexes sont utilisés pour la prévision du comportement de vibration et de la préparation des essais modaux

d'identification. En outre, les modèles d'élément finis sont mis à jour et validés avec des paramètres modaux expérimentalement identifiés.

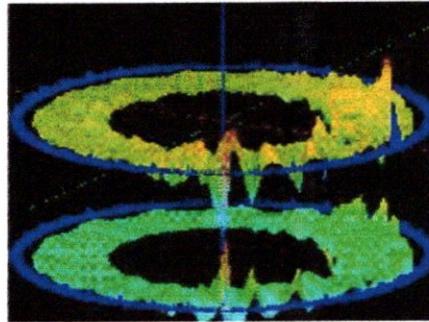
Du côté expérimental le foyer est l'exécution de l'identification modale et des essais de qualification dynamiques. Des essais modaux d'identification est réalisés avec un service conçu spécial d'essai, le prétendu service d'essai de vibration de terre. Avec ce service des structures à grande échelle peuvent être excitées avec des forces jusqu'à 2200 N et les réponses structurales peuvent être mesurées à 700 positions.

#### **Recherche Aereas de la dynamique structurale :**

La dynamique structurale est engagée dans la recherche et le développement orientés pratiques pour l'analyse dynamique théorique et expérimentale des structures complexes. Lorsque les matières suivantes sont étudiées :

- L'optimisation de l'excitation et de la mesure se dirige pour les essais modaux d'identification.
- La mise à jour de l'élément fini modèle par des paramètres modaux expérimentalement identifiés.
- Développement des stratégies d'essai pour le grand avion flexible.
- Méthodes modales d'identification dans le domaine de temps et de fréquence.
- Méthodes d'identification pour l'excitation basse multi-axiale.
- Qualification dynamique des structures.
- Méthodes optiques de mesure.

#### **V.8. Expériences aéroélastique :**



La réalisation et l'analyse des expériences de tunnel de vent dérive des problèmes avec le grand avion moderne de transport nous nous concentrons sur les matières suivantes :

1. Une meilleure compréhension des effets transsonique de flottement, les oscillations de cycle de limite (LCO).
2. Création d'une base de données pour la validation de la mesure des CFD-Codes de la distribution de pression aux rotors d'hélicoptère dans le but de la réduction de bruit.
3. Le développement des techniques innovatrices de mesure et des techniques et le développement optiques.

En outre les expériences aéroélastique travaillent sur des problèmes aéroélastique produits dans la construction des grands ponts. Pour (pression et force) les signaux instables.

### V. 8.1. Les Expériences de Transsonique-flottement:

En projetant les expériences, nous avons supposé que les non-linéarités dans l'écoulement sont la cause dominante du flottement transsonique. Nous avons plus loin supposé que la cause des non-linéarités sont les interactions de choc frontière couche et les séparations chocs-induites.

Dans le cadre des prétentions ci-dessus, nous avons conçu les investigations expérimentales afin de reproduire les phénomènes transsoniques typiques aussi pur que possible. à cette fin, nous avons effectué des mesures sur la simple géométrie d'un corps, à savoir, une aile 2D. Cette approche est généralement prise en étudiant des effets produits en aérodynamique de vol.

La technique la plus habituelle doit étudier les phénomènes en utilisant un des modèles réalistes et approprié mesurés, élastique montés d'un côté simple.

Le problème avec cette méthode standard est qu'il est difficile d'isoler et observer les processus physiques fondamentaux causant les phénomènes. D'autre part, d'un point de vue expérimental, il est difficile de réaliser des mesures sur une aile 2D parce qu'elles doivent être montées des deux côtés avec un système accordé de ressort. Cette difficulté de base est l'une des raisons pour lesquelles aucune expérience comparable de flottement n'a été encore faite dans un grand tunnel de vent.

Notre intention d'effectuer une étude fondamentale du flottement transsonique a été renforcée par l'aspect du flottement amplitude limité pendant les vols d'essai du nouveau gros porteur aux vitesses approchant leur limite de conception ; seul les phénomènes classique ont des effets non-linéaires

En outre, l'industrie aéronautique a montré un intérêt en développant une meilleure compréhension des principes physiques sous entendant l'occurrence du flottement non-linéaires.

Vers cette extrémité, nous avons développé un banc d'essai de flottement pour monter une aile 2D élastique des deux côtés et pour fournir toujours deux degrés de liberté. Le stand est construit de façon à nous permettre de faire facilement des mesures de flottement voir Figure (V.19).

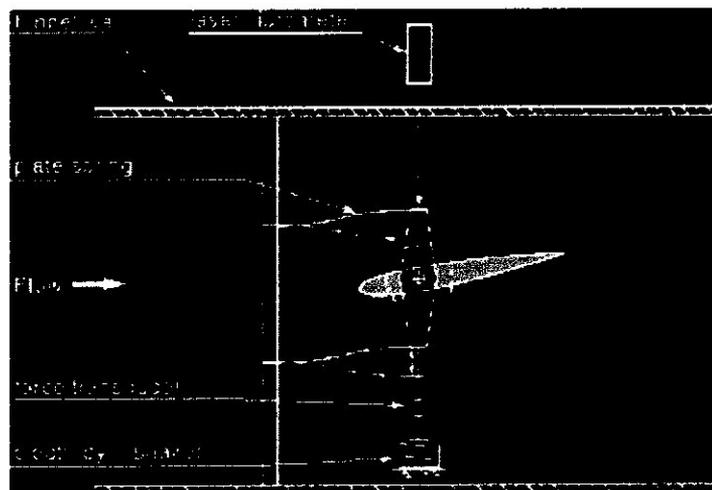


Figure.V.19. Banc d'essai de flottement pour le tunnel de vent transsonique.

Les résultats de nos mesures peuvent être récapitulés comme suit :

Dans la gamme transsonique, la transition au flottement montre les caractéristiques typiques d'une bifurcation de Hopf (oscillations de limite-cycle). Puisque nous ne pourrions trouver aucune évidence des effets d'hystérésis, nous avons conclu que le processus doit être associé à la bifurcation supercritique. Comme il est théoriquement possible dans n'importe quel système non-linéaire, une force très petite, ainsi que des moyens simples de l'ajuster, est suffisante pour commander l'état du système. Quand l'aile a un angle d'attaque, la forme de la courbe obtenue en traçant la limite de stabilité contre le nombre de mach montre un minimum pointu appelé l'immersion transsonique. Si l'angle d'attaque est diminué, le minimum est décalé à des valeurs plus élevées du nombre de mach, par lequel l'immersion devienne plus large et plus profonde.

On a observé trois types amplitude limités de flottement différents dans la région du minimum.

La Figure (V.20) expositions d'un cas typique du début de flottement de poussée /torsion dans la région du minimum ( $Ma = 0.765$ ,  $\alpha = 1,36$ ). Les amplitudes sont probablement limitées par les effets transsoniques non-linéaires dont les origines ne sont pas encore connues.

La différence de phase entre les deux degrés de liberté a eu une valeur environ de 177 pendant les oscillations de limite-cycle (LCO).

Puisque les résultats des premières mesures ont semblé prouver que le flottement transsonique est une amplitude limitée et pourrait être commandé par une méthode relativement simple ajustement de flottement-, nous avons apposé des sondes à une aile de sorte que les mesures de distribution de pression-ont été faites quand le flottement se produit.

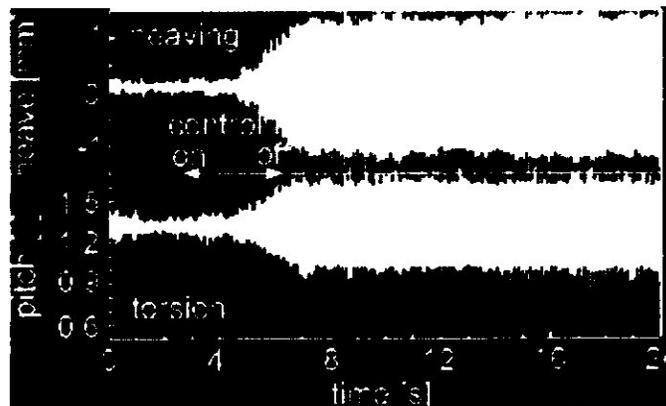


Figure .V.20. Après l'ouverture du système de commande, le flottement commence et change tout à-coup en oscillations de cycle de limite (LCO).

Les mesures sur les ailes avec harmonie d'oscillation sont importantes, en particulier de sorte que des comparaisons entre les résultats puissent être faites avec ceux qui ont été calculé à partir des techniques numériques. Avec ces résultats, on a pu alors étudier les phénomènes de l'aérodynamique instable. À cette fin, le banc d'essai de flottement a été modifié. Pour les mesures pendant les oscillations de torsion aussi bien que pendant le flottement pur de torsion, un deuxième banc d'essai a été développé pour fournir des excitations des deux côtés du modèle. Ce stand est montré dans la Figure (V.21).

Quand les résultats mesurés des coefficients instables sont tracés en fonction du nombre de mach, nous voyons que la courbe reflète les caractéristiques de l'immersion transsonique, qui est connue des résultats des mesures directes du flottement.

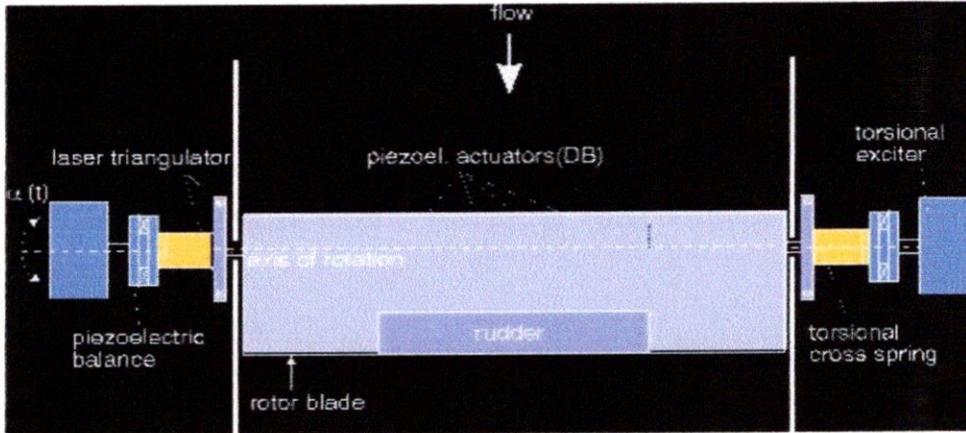


Figure V.21. Banc d'essai pour des oscillations de torsion d'une aile.

### V. 8.2. Mesures des distributions de pression sur les rotors et les ailes modèles :

Une tâche centrale d'aéroélasticité expérimental est de mesurer les distributions de pression sur des structures immergées dans un champ d'écoulement. Le résultat de telles mesures donne une description détaillée des effets de l'écoulement sur le corps. a fin d'acquérir et analyser jusqu'à 360 signaux stationnaires et instables de pression

La Figure (V.22) qui montre l'histoire du temps de pression mesurée pendant une rotation simple d'une lame de rotor sur laquelle des sondes ont été montées le long de son principal bord. La figure dépeint une coupe par le plan des lames tournantes et représente la distribution instantanée de pression le long du principal bord d'une lame simple pendant qu'elle tourne par un angle de 360deg. Le résultat montre clairement les régions des amplitudes très à haute pression (c.-à-d., sources de bruit).

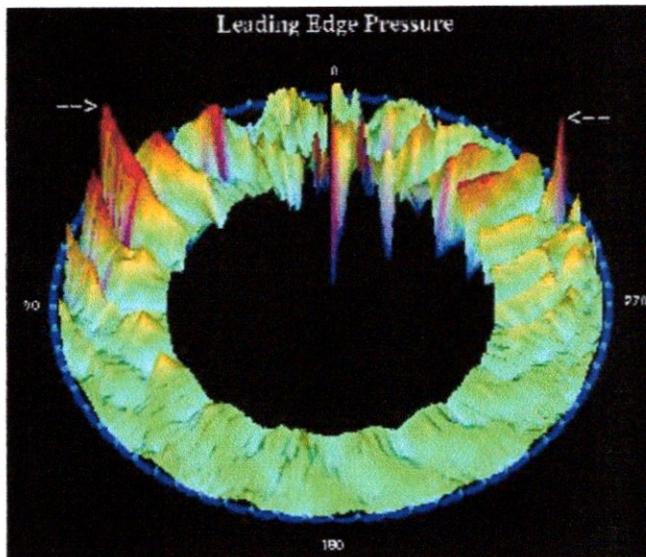


Figure V.22. Chronométré l'histoire des fluctuations de pression sur le principal bord d'une lame de rotor, mesuré pendant une révolution complète.

### V.8.3. Mesure optique de déformation :

Savoir la déformation exacte d'une structure élastique sous l'influence de la pression atmosphérique est d'importance centrale pour l'aéroélasticité statique pour la construction des avions. En raison du manque de systèmes exacts et de bon marché de mesure, une méthode optique a été développée. Avec cette méthode il est possible de calculer la déformation d'une surface observée avec deux appareils- photo visuels. Cette méthode emploie les dernières techniques de traitement d'image numérique.

Après l'essai principal de l'installation un essai optique de mesure de déformation a été réalisé sur un vrai avion. Les appareils photo ont été attachés à une installation de support au-dessus de l'aile, et l'aile a été excitée mécaniquement. Les résultats prouvent qu'avec cette méthode dans la balance typique de longueur des déformations mesurées par avion est principalement très l'acurate. Pour l'essai en vol le support libre de choc des appareils photo dans l'avion doit être réalisé

### V. 8.4. Aspects aéroélastique des écoulements hypersustentateurs :

Des écoulements hypersustentateurs peuvent être caractérisés par leurs intrinsèques états précritiques parce qu'à mesure que l'angle d'attaque augmente, l'ascenseur de même jusqu'à ce que l'état hypersustentateur soit atteint juste avant que l'écoulement sépare et déclenche le début des effets instables. On le suppose généralement qu'avec l'augmentation du nombre de Reynolds, la tendance de séparer des diminutions et, par conséquent,  $C_{L,max}$  augmente (c'est un effet positif de Reynolds-nombre). Le comportement à l'effet contraire, qui produit des effets négatifs de Reynolds-nombre, a été rarement observé et est par conséquent regardé comme pathologique.

Après avoir dit cela, nous discuterons maintenant un tel effet négatif observé pendant les mesures sur une aile 2D épaisse dans le tunnel de vent à haute pression. Dans ce cas-ci, l'état hypersustentateur est devenu instable avec l'augmentation du nombre de Reynolds, de sorte que l'ascenseur, à un angle d'attaque élevé constant, se soit effondré environ à la moitié de sa valeur précédente. La diminution par étapes en valeur d'ascenseur est couplée aux changements topologiques tridimensionnels de la structure de l'écoulement isolé, comme est clairement indiqué dans les deux huile-coulent des visualisations dans la Figure (V.23).

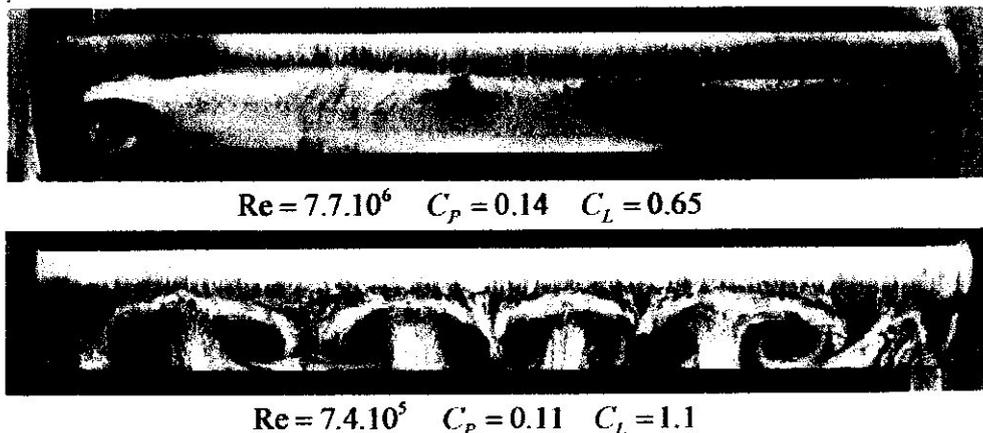


Figure.V.23. Huile-coulent la visualisation du côté d'aspiration d'une aile à un grand angle d'attaque et à un nombre de Reynolds élevés.

# Conclusion



## **Conclusion :**

L'étude du problème aéroélastique. Montre la complexité de ce dernier et qu'une étude approfondie doit être effectuée durant le processus de conception et de développement.

Le phénomène du flottement en régime transsonique a été étudié sur un système aéroélastique à deux degrés de liberté. Le système aéroélastique est résolu dans le domaine temporel, en utilisant le schéma de Newmark comme méthode d'intégration temporelle implicite pour les équations de la structure et la méthode implicite du pas de temps dual pour les équations de Navier-Stokes. L'avancée temporelle du système aéroélastique est effectuée à l'aide d'un algorithme décalé. La frontière de flottement est calculée en utilisant les modèles de turbulence de Baldwin Lomax et de Spalart Allmaras. Elles sont comparées à une frontière calculée en fluide parfait. Les résultats numériques montrent, conformément aux résultats de Prananta et al. Que la frontière de flottement est largement modifiée par la prise en compte de la viscosité. Contrairement à une idée établie dans la communauté des aéroélasticiens, la viscosité du fluide n'introduit pas seulement une dissipation supplémentaire dans le système aéroélastique, mais peut aussi modifier la réponse du système aéroélastique pour une condition de vol donnée. Ainsi, on observe une réduction conséquente du creux transsonique et la forme en S précédemment défini disparaît sur les frontières visqueuses. Le décollement de la couche limite sur ce cas test accentue la remontée de stabilité du système aéroélastique en introduisant un déphasage favorable à l'amortissement. Le travail effectué sur ce cas permet de démontrer que la prise en compte de la viscosité et l'utilisation de méthodes numériques résolvant les équations de Navier Stokes est nécessaire à la précision de la prédiction du phénomène de flottement. L'étude approfondie des écoulements aérodynamiques montre que la frontière de flottement peut pour ce cas, être décomposée en trois intervalles du nombre de Mach, définis par le type d'écoulement aérodynamique, lesquels sont fortement pilotés par l'interaction choc/couche limite. Les résultats numériques montrent également que l'amplitude et la fréquence des oscillations des cycles limites peuvent être fortement affectées par la présence d'une couche limite décollée.

En effet, les calculs numériques ont montré qu'il est possible d'observer ces oscillations sur une grande plage du nombre de Mach, ce qui permet de modifier la frontière de flottement si l'on considère les cycles limites comme une réponse acceptable du système aéroélastique.

Les nouvelles stratégies envisagent des mécanismes plus élégants et plus légers que les ailes à géométrie variable. Une de ces approches passe par ce que l'on appelle des structures "compliantes". Généralement moulés par injection ou usinés à partir d'un seul morceau de matériau, ces cadres de métal ou de plastique peuvent par exemple servir de structures internes aux bords des ailes ou d'autres composants malléables. Ces cadres répartissent les forces d'une telle façon qu'ils peuvent en même temps se plier en certains endroits comme de la vannerie, tout en résistant ailleurs à la déformation.

## **Bibliographie :**

[1] Pascal Hémon

*Laboratoire d'Hydrodynamique, LadHyX Ecole Polytechnique, Palaiseau octobre 2004.*

[2] Philippe LECONTE

*Ingénieur de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers et de l'École Supérieure des Techniques Aérospatiales.*

*Ingénieur recherche et essais en aéroélasticité Office national d'études et de recherches aérospatiales (ONERA).*

Marc RAPIN

*Ingénieur de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.*

*Ingénieur d'études en aéroélasticité.*

*Office national d'études et de recherches aérospatiales (ONERA).*

Edmond SZECHENYI

*Directeur de l'Institut Aérotechnique.*

*Conservatoire national des arts et métiers (CNAM).*

[3] Bissiligare, R.L ; echeli x.chalfman .R.L.

*« aéroélasticité » M 1958.800 p.*

[4] Richop.R.

*« vibration » Moscou :sciences 1968 144 p.*

[5] Balothé. V. V

*« probleme de la therie d'elasticite de qualite » Moscou : phys,math,gaz 1961.340p*

[6] Boumkouv.V.G.

*« CALCUL DE DEFORMATION EN DEPLACEMENT POUR LES PETITE AILES EN VIBRATION METHODES DE PLUSIEUR PARTIE »*

*Rencontre scientifique tome 3. n :4 1972 page (111.120)*

[7] Bechdiroushi.S.M,kotchikore.Y.A ,crasovshi A.A,novitski.V.V

*« introduction sur l'aéroélasticité » Moscou science 1980.384 p.*

[8] Groshan.E.P

*« vibration sur les ailes à un et deux longerons » rencontre scientifique Moscou 1946.42p.*

[9] Gromoa E.P

*« cours de vibrations des different parties d'avion » Moscou equipement gaz 1940 .p372.*

[10] iliochin A.A.

*« mecanique dans des diffenents milieux » Moscou. Universite M.CUIYOU.1978.288P.*

[11] Colatçs.L

*« problemes des differents signification de procedes » Moscou science 1986.504p*

[12] Conakov

*« théorie des commander optimale pres de la vibration et les systemes simple d'elasticite »*

*Moscou.Mir 1975.158p.*

[13] Michalil M.G.

*« Methode des vibrations physiques et mathématique » Moscou science 1970.512p*

[14] Anovka M.G

*« Goleanova.I.I. » vibration et elasticite dans le systeme . Moscou science 1964.366p*

[15] Sidov .L.I.

*« Methodes et mesure dans la mecanique » Moscou.science.1985.368p*

[16] Timochinko S.P.

*« mecanique des materiaux » Moscou.MIR.1976.67p.*

[17] Fin.Y.C.

*« Introduction dans la theorie aéroélasique » Moscou.physique .math.gaz.1959.524p*

[18] Bisplighaff.R.L.A.shley.H.

## Bibliographie

*prencejrales of aeroelasticity.new york.dover.1975.527p.*

[19] Faulkner, V

1953, 'The solution of lifting-plane problems by vortex-lattice theory'. R.M. British A.R.C. (2591).

[20] Kalman, T., W. Rodden, and J. Giesing

1971, 'Application of the doublet-lattice method to nonplanar configurations in subsonic flow'. *J. Aircraft*, 8(6), 406-415.

[21] Lee-Raush, E. M. and J. T. Batina

1996, 'Wing Flutter Computations Using an Aerodynamic Model Based on the Navier-Stokes Equations.'. *J. Aircraft*, 33(6).

[22] Yates, E. C.

1987, 'AGARD Report No. 765, AGARD Standard Aeroelastic Configurations for Dynamic Response, I-Wing 445.6.'.

[23] Irwin, C. and P. Guyett

1965, 'The Subcritical Response and Flutter of a Swept Wing Model.'. Royal Aircraft Establishment, Rept 65186, Farnborough England U.K.

[24] Chen, P.

2000, 'Damping Perturbation Method for Flutter Solution : The g-Method'. *AIAA Journal*, 38(9).

[25] Park, K., C. Felippa, and J. D. Runtz

1977, 'Stabilization of Staggered Solution Procedures for Fluid-Structure Interaction Analysis.'. *Computational Methods for fluid-structure interaction problems pp. 26.94-26.124. ASME Applied Mechanics Symposia Séries.*

[26] Prananta, B., M. Hounjet, and R. Zwaan

1998, 'Two-Dimensional Transonic Aeroelastic Analysis Using Thin-Layer Navier-Stokes Method'. *Journal of Fluids and Structure* 12(6), 655-676.

[27] Alonso, J. and A. Jameson 1994,

'Fully-Implicit Time Marching Aeroelastic Solutions'. *AIAA paper 94-0056.*

[28] Farhat, C, M. Lesoinne, and N. Maman :

1995, 'Mixed Explicit/Implicit Time Intégration of Coupled Aeroelastic Problems : Three-Field Formulation, Géométrie Conservation and Distributed Solution.'. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 21, 807-835.

[29] Piperno, S.

1995, *Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure. Thèse Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.*

[30] Piperno, S. and C. Farhat

2000, 'Energy Based Design and Analysis of Staggered Solvers for Nonlinear Transient Aeroelastic Problems.'. *AIAA paper 2000-1447-*

[31] Batina, J.

1989a, 'Unsteady Euler Airfoil Solutions Using Unstructured Dynamic Meshes.'. *AIAA Paper 89-0115.*

[32] Batina, J.

1989b, 'Unsteady Euler Algorithm with Unstructured Dynamic Mesh for Complex Aircraft Aeroelastic Analysis.'. *AIAA Paper 89-1189.*

[33] Piperno, S. and C. Farhat

2000, 'Energy Based Design and Analysis of Staggered Solvers for Nonlinear Transient Aeroelastic Problems.'. *AIAA paper 2000-1447-*

[34] Wong, A., H. Tsai, J. Cai, Y. Zhu, and F. Liu

'Unsteady Flow Calculations with a Multi-Block Moving Mesh Algorithm.'. *AIAA Paper 2000-1002.*

## Bibliographic

- [35] Thompson, J. F., B. K. Soni, and N. P. Weatherill  
1999, *Handbook of Grid Génération*. CRC Press LLC.
- [36] Blom, F.  
1998, *Investigations on Computational Fluid-Structure Interaction*. Thèse EPFL Lausanne.
- [37] Blom, F. and P. Leyland  
1997, 'Analysis of Fluid Structure Interaction on Moving Airfoils by Means of an Improved ALE-Method.'. AIAA Paper 97-1770.
- [38] Willcox, K. and J. Peraire  
1997, 'Aeroelastic computations in the Time Domain Using Unstructured Meshes'. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 2413-2431.
- [39] Thomas, J., F. Ghafari, R. Weston, and J. Luckring  
1989, 'A patched-grid algorithm for complex configurations directed towards the F/A-18 aircraft'. AIAA paper 89-0121.
- [40] Batina, J.  
1990, 'Unsteady Euler Airfoil Solutions Using Unstructured Dynamic Meshes.'. AIAA Journal, 28(8), 1381-1388.
- [41] Hartwich, P., S. Dobbs, and S. Kim  
2000, 'Navier-Stokes Computations of Limit Cycle Oscillations for a BI-Like Configurations'. AIAA paper 2000-2338.
- [42] Morton, S. and P. Beran  
1997, 'Hopf-Bifurcation Analysis Applied to Deforming Airfoils at Transonic Speeds'. AIAA paper 97-1772.
- [43] Morton, S. and R. Melville  
1997, 'Accuracy and Coupling Issues of Aeroelastic Navier-Stokes Solutions on Deforming Meshes'. AIAA paper 97-1085.
- [44] Liu, F., J. Cai, and Y. Zhu,  
'Calculation of Wing flutter by a Coupled CFD-CSD method.'. AIAA 2000-0907.
- [45] Hartwich, P. M. and S. Agrawal  
1997, 'Method for Perturbing Multiblock Patched Grids in Aeroelastic and Design Optimization Applications'. AIAA paper 97-2038.
- [46] Mabey, D  
1988, *Unsteady Transonic Aerodynamics.*, Vol. 120, Chapt. 1, pp. pp.1-51. *Progress in Astronautics and Aeronautics*.
- [47] Lee, B  
1990, 'Transonic Buffet on a Supercritical Aerofoil'. *Aeronautical Journal* pp. 143-152.
- [48] Pearcey, H. H., J. Osborne, and J. Haines  
'The Interaction Between Local Effects at the Shock and Rear Séparation - A Source of Significant Scale Effects in Wind-Tunnel Tests on Airfoils and Wings'. AGARD, CP 35 (11), 1968.
- [49] Tijdeman, H. and R. Seebass  
1980, 'Transonic Flow Past Oscillating Airfoils'. *Annual Review of Fluid Mechanics* (12), 181-222.
- [50] Caruelle, B  
2000, *Simulations d'Écoulements Instationnaires Turbulents en Aérodynamique : Application à la prédiction du phénomène du tremblement*. Thèse de doctorat en mécanique - Institut National Polytechnique de Toulouse. No d'ordre : 1701.
- [51] Robinet, J  
1999, 'Stabilité linéaire d'un écoulement présentant une onde de choc.'. Ph.D. thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'espace.
- [52] Foley, J. D. and A. V. Dam  
1984, *Fundamentals of Interactive Computer Graphics*. Addison-Wesley Publishing Company

## Bibliographie

[53] Mabey, D

1989, 'Some Aspects of Aircraft Dynamic Loads Due To Flow Séparation.'. *Progress in Aerospace Science* 26, pp. 115-151.

[54] Croskey, W. M.

1981, 'The Phenomenon of Dynamic Stall'. *NASA Technical Mémorandum* (81264).

[55] K. Isogai

1993, 'Numerical Simulations of Shock-Stall Flutter of An Airfoil Using the Navier-Stokes Equations.'. *Journal of Fluids Structures.* 7, pp. 595-609.

[56] Liu, F. and S. Ji

1996, 'Unsteady Flow Calculations with a Multigrid Navier-Stokes Method.'. *AIAA Journal*, 34(10), pp 2047-2053.

[57] Guruswamy, P. and P. Goorjian

1984, 'Effects of Viscosity on Transonic-Aerodynamic and Aeroelastic Characteristics of Oscillating Airfoils.'. *Journal of Aircraft* 21(9), pp 700-707.

[58] K. Isogai

1979, 'On the Transonic-Dip Mechanism of Flutter of a Sweptback Wing.'. *AIAA Journal*, 17, 793-795.

[59] K. Isogai

1981, 'On the Transonic-Dip Mechanism of Flutter of a Sweptback Wing : Part II.'. *AIAA Journal*, 19.

[60] Zwaan, R.

1985b, 'Vérification of Calculation Methods for Unsteady Airloads in the Prédiction of Transonic Flutter'. *J. Aircraft*, 22(10), 833-839.

[61] Bohbot, J., J. Garnier, S. Toumit, and D. Darracq

2001a, 'Computation of Flutter Boun-dary of an Airfoil with a Parallel Navier-Stokes Solver.'. *AIAA paper* 2001-0572.

[62] Yates, E. C 1987, 'AGARD Report No. 765,

*AGARD Standard Aeroelastic Configurations for Dynamic Response, I-Wing 445.6.*'.

[63] Dunn, S., P. Farrell, and P. B. et. al

2001, 'F/A-18 Flight Flutter Testing - Limit Cycle Oscillation or Flutter?'. *International Forum of Aeroelasticity and Structural Dynamics -Madrid.*

[64] Bendiksen, O.

1997, 'Nonunique Solutions in Transonic Aeroelasticity'. *Proc. International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics.*

[65] Morton, S. and P. Beran

1997, 'Hopf-Bifurcation Analysis Applied to Deforming Airfoils at Transonic Speeds'. *AIAA paper* 97-1772

[66] Elsenaar, A.

1997, 'Séparation in transonic flow : a shocking expérience'. *Technical report, NLR TP* 97151.

[67] Denigri, C. M.,

'Limit Cycle Oscillation Flight Test Results of a Fighter with External Stores.'. *AIAA Journal*, 37(5), 761-769.

[68] Matsuhita, H. and K. Saitoh

1999, 'Two Degree-of-Freedom Nonlinear Math Model with Fourth Order Nonlinear Aerodynamics for Transonic Limit Cycle Flutter.'. *International Forum of Aeroelasticity and Structural Dynamics, Williamsburg USA.*

## Bibliographie

[69] Toumit, S., J. Bohbot, and D. Darracq

2000, '*Simulation of Flutter Boundary and Hopf Bifurcation of a 2DOF Airfoil*'. Proc. ECCOMASS Barcelona.

[70] Bendiksen, O.

2001, '*Transonic Flutter and the Nature of the Transonic Dip*'. International Forum of Aeroelasticity and Structural Dynamics.

[71] Caruelle, B.

2000, '*Simulations d'Écoulements Instationnaires Turbulents en Aérodynamique : Application à la prédiction du phénomène du tremblement*'. Thèse de doctorat en mécanique - Institut National Polytechnique de Toulouse. No d'ordre : 1701.

[72] Bendiksen, O. and K. Kousen

1987, '*Transonic Flutter Analysis Using the Euler Equations*'. AIAA Paper 87-0911.

[73] Theodorsen, T.,

'*Général Theory of Aerodynamic Instability and Mechanism of Flutter*'. Technical Report 496, National Advisory Committee for Aeronautics.

[74] Theodorsen, T. and I. Garrick,

'*Mechanism of Flutter a Theoretical and Expérimental Investigation of the Flutter Problem*'. Technical Report 685, National Advisory Committee for Aeronautics.

[75] Garrick, I. E.

1946a, '*Bending-Torsion Flutter Calculations Modified by Subsonic Com-pressibility Corrections*'. Technical Note 1034, National Advisory Committee for Aeronautics.

[76] Garrick, I. E.

1946b, '*Bending-Torsion Flutter Calculations Modified by Subsonic Com-pressibility Corrections*'. Technical Report 836, National Advisory Committee for Aeronautics.

[77] Garrick, I. E. and S. Rubinow

1946, '*Flutter and Oscillating Air-Force Calculations for an Airfoil in a Two Dimensional Supersonic Flow*'. Technical Note 1158, National Advisory Committee for Aeronautics.

Annexe 2 :

Notations et symboles principaux		
Symbole	Unité	Désignation
$C$	$N \cdot m$	Couple
$C_p$		Coefficient de puissance
$F$	$N$	Force dans le plan rotor
$H_0$	$m$	Hauteur de la nacelle
$I_b$	$kg \cdot m^2$	Moment d'inertie en battement
$I_t$	$kg \cdot m^2$	Moment d'inertie en torsion
$K_\beta$	$N \cdot m$	Raideur de l'articulation de battement
$K_\delta$	$N \cdot m$	Raideur de l'articulation de trainée
$K_\theta$	$N \cdot m$	Raideur de l'articulation de torsion
$M$	$N \cdot m$	Moment d'une force
$P$	$N$	Force résultante
$q$	$rad \cdot s^{-1}$	Vitesse angulaire de déplacement autour de l'axe de lacet de l'éolienne
$R$	$m$	Rayon d'une pale (du centre du rotor à l'extrémité de la pale)
$S$	$m^2$	Surface normale au vent

Notations et symboles principaux		
Symbole	Unité	Désignation
$T$	$N$	Traction
$V$	$m \cdot s^{-1}$	Vitesse axiale du vent dans l'éolienne
$V_0$	$m \cdot s^{-1}$	Vitesse axiale du vent en amont de l'éolienne et à la hauteur $H_0$
$W$	$m \cdot s^{-1}$	Vitesse relative du flux local
$\beta$	$^\circ$	Angle de battement
$\delta$	$^\circ$	Angle de trainée
$\varepsilon_\beta$		Excentricité de l'articulation de battement (ramenée au rayon $R$ de la pale)
$\varepsilon_\delta$		Excentricité de l'articulation de trainée (ramenée au rayon $R$ de la pale)
$\rho$	$kg \cdot m^{-3}$	Masse volumique de l'air
$\theta$	$^\circ$	Angle de torsion
$\psi$	$^\circ$	Azimut de la pale
$\Omega$	$rad \cdot s^{-1}$	Vitesse angulaire de rotation de la pale du rotor

## Annexe 1 : Rappel sur l'oscillateur à un degré de liberté

L'équation d'un système à 1 degré de liberté s'écrit

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x - x_0) = F(x, \dot{x}) \quad (\text{A.1})$$

où  $m$  est la masse,  $c$  l'amortissement,  $k$  la raideur et  $F$  la force extérieure d'excitation supposée couplée en position et en vitesse.

Dans un premier temps on considère le système sans excitation extérieure. L'amortissement critique est celui pour lequel la solution  $x(t)$  passe d'une sinusoïde décroissante à une exponentielle décroissante. Cet amortissement critique vaut  $c_c = 2\sqrt{km}$ .

L'amortissement d'une structure est généralement donné sous la forme d'un amortissement réduit qui est le rapport de l'amortissement réel avec l'amortissement critique, soit

$$\eta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (\text{A.2})$$

Cet amortissement réduit souvent exprimé en pourcentage est généralement de l'ordre de quelques pourcents, voire quelques dixièmes de pourcents pour des haubans.

L'amortissement étant petit, la fréquence propre  $f$  du système est donnée par

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ avec } \omega^2 = \lambda = \frac{k}{m} \quad (\text{A.3})$$

où  $\omega$  est la pulsation propre et  $\lambda$  la valeur propre. L'équation du mouvement peut se récrire alors sous la forme

$$m\ddot{x} + 2\eta\omega m\dot{x} + m\omega^2(x - x_0) = F(x, \dot{x}) \quad (\text{A.4})$$

Lorsqu'on linéarise la force extérieure d'excitation autour d'une position d'équilibre fixe  $x_0$ , c'est à dire

$$F(x, \dot{x}) = F_0 + \frac{\partial F_0}{\partial x}x + \frac{\partial F_0}{\partial \dot{x}}\dot{x} \quad (\text{A.5})$$

et que l'on remplace dans l'équation du mouvement, alors on obtient

$$m\ddot{x} + \left(2\eta\omega m - \frac{\partial F_0}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x} + \left(m\omega^2 - \frac{\partial F_0}{\partial x}\right)x = 0 \quad (\text{A.6})$$

Le terme  $-\frac{\partial F_0}{\partial \dot{x}}$  s'appelle l'amortissement ajouté, le terme  $-\frac{\partial F_0}{\partial x}$  la raideur ajoutée. Des instabilités peuvent naître lorsque l'un ou l'autre de ces termes est négatif.