

UNIVERSITE BLIDA 1
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département d'Electronique

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Electronique

ETUDE DE L'ANNULATION D'ECHO ACOUSTIQUE STEREOPHONIQUE
PAR LES ALGORITHMES DE FILTRAGE ADAPTATIF TRANSVERSE

Par

Aouda BOUNIF

Devant le jury composé de :

A. Benallal	Professeur, Université Saad DAHLAB., Blida	Président
D. Berkani	Professeur, Ecole Nationale Polytechnique	Examineur
H. Sayoud	Professeur, U.S.T.H.B., Alger	Examineur
M. Guerti	Professeur, Ecole Nationale Polytechnique	Examinatrice
M. Djendi	MCA, Université Saad DAHLAB., Blida	Directeur
A. Guessoum	Professeur, Université Saad DAHLAB., Blida	Co-directeur

Blida, 14 Octobre 2014

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier le Dr.M. Djendi, mon directeur de thèse au sein du laboratoire LATSI (Laboratoire de Traitement du Signal et de l'Image), qui m'a offert cette chance pour travailler sur ce sujet. Merci pour ses conseils et son suivi durant ces trois années de thèse.

Je remercie mon co-directeur le professeur A.Guessoum, directeur du laboratoire LATSI, qui m'a permis de préparer ma thèse dans des conditions favorables et aussi pour ses encouragements et ses conseils.

Je remercie M^{er} Benallal Ahmed et M^{er} Berkani Daoud pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

J'exprime mes profonds remerciements à monsieur Benallal Ahmed, de bien vouloir accepter de présider le jury de ma thèse. Je tiens à remercier également M^{me} M.Guerti et M^{er} M.Sayoud pour leur participation à la commission d'examen et aussi pour leur acceptation de faire une lecture critique de cette thèse.

Je remercie, toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

DEDICACES

A ma mère

A la mémoire de mon père

A mes sœurs et mes belles sœurs.

A mon mari et mes frères.

الملخص

في هذه الأطروحة درسنا إلغاء الصدى الصوتي المزدوج بواسطة الخوارزمية LMS للمرشحات المتكيفة ثنائية المسار و المقلصة النموذج. تم تحليل أشعة معاملات الخطأ أولاً بمفهوم التقارب المتوسطي ثم بواسطة الخطأ التربيعي المتوسط (EQM) لتقييم المرشحات المتكيفة ثنائية المسار المقلصة الطول .

كانت النتائج التجريبية المتحصل عليها في الحالتين و بالنسبة لعدة أنواع من إشارات الدخول متوافقة مع النتائج النظرية المقدمة. لا حظنا أن تصرف المرشحات المتكيفة ثنائية المسار المقلصة الطول يختلف عن مثيلاتها ذات الطول الكامل.

RESUME

Dans cette thèse, nous avons étudié l'annulation d'écho acoustique stéréophonique par l'algorithme LMS sous-modélisé. Nous avons analysé en premier temps le comportement de l'algorithme LMS sous modélisé stéréophonique en sens de convergence moyenne des vecteurs des coefficients d'erreur. Deuxièmement, le critère de l'erreur quadratique moyenne(EQM) a été utilisé pour évaluer les filtres adaptatifs sous-modélisés.

Les résultats expérimentaux concernant la convergence moyenne et quadratique moyenne des vecteurs des coefficients d'erreur, pour différents signaux d'entrée, sont en concordance avec les développements théoriques fournis. Nous avons remarqué que le comportement des filtres adaptatifs sous-modélisés est sensiblement différent de celui des filtres adaptatifs à longueur exacte.

Mots-clés : Annulation d'Echo Acoustique Stéréophonique(AEAS) - Algorithme LMS(Least Mean Square) sous-modélisé - Filtres adaptatifs sous-modélisés - Vecteurs des coefficients d'erreur - Convergence moyenne - Convergence quadratique moyenne.

ABSTRACT

In this thesis, we are interested in first time to analysis the mean coefficient error vector convergence behaviors of the stereophonic deficient length LMS algorithm. Secondly, the criteria mean-square error (MSE) has been used to evaluate the adaptive deficient length LMS filters.

The experiment results given by our analysis, for different input signals, confirm given theoretical expressions. We have noted that the deficient length adaptive filters have a different behavior from that of sufficient length adaptive filter.

TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

INTRODUCTION GENERALE	1
1. PRINCIPES D'ANNULATION D'ECHO ACOUSTIQUE	7
1.1. Introduction	7
1.2. Source de l'écho acoustique	7
1.3. Acoustique des salles	8
1.4. Annulation d'Echo Acoustique(AEA)	9
1.5. Problèmes associés aux applications d'AEA	10
1.6. Algorithmes de Filtrage Adaptatif appliqués à l'AEA	11
1.6.1. Principe du filtrage adaptatif	11
1.6.2. Algorithme LMS mono-voie	13
1.6.3. Algorithme NLMS	15
1.6.4. Algorithme RLS	16
1.6.5. Algorithmes des moindres carrés transversaux rapides (FTF)	20
1.7. Conclusion	22
2. ETUDE DE L'ANNULATION STEREOPHONIQUE DE L'ECHO ACOUSTIQUE	23
2.1. Introduction	23
2.2. Stéréophonie	23
2.3. Problèmes et solutions de l'annulation d'écho acoustique stéréophonique	25
2.3.1. Formulation du Problème	25
2.3.2. Méthodes de decorrélation	28
2.3.3. Structures utilisées pour l'annulation d'écho acoustique stéréophonique	30
2.4. Annulation stéréophonique d'écho acoustique	30
2.4.1 L'algorithme LMS à deux canaux	31
2.4.2 L'algorithme NLMS à deux canaux	33
2.4.3 Algorithme des moindres carrés récursif RLS à deux canaux	35
2.4.4 Algorithme adaptatif des moindres carrés récursif rapide FRLS	37
2.5. Conclusion	38

3. ANALYSE DE LA PERFORMANCE DE L'ALGORITHME DE FILTRAGE ADAPTATIF LMS SOUS-MODELISE POUR L'ANNULATION D'ECHO ACOUSTIQUE STEREOPHONIQUE	39
3.1 Introduction	39
3.2. Problème de l'annulation d'écho acoustique stéréophonique AEAS	42
3.3. Nouvelle analyse de la performance des algorithmes LMS stéréophoniques sous- modélisés	47
3.4. Nouvelles formules de mise à jour des filtres adaptatifs LMS stéréophoniques	49
3.5. Mise à jour des vecteurs d'erreur des coefficients des filtres adaptatifs LMS Stéréophoniques sous-modélisés	49
3.6. Convergence moyenne des coefficients des filtres adaptatifs LMS stéréophoniques sous-modélisés	50
3.7. Formules de l'état d'équilibre des coefficients de l'algorithme LMS adaptatif stéréophonique sous-modélisé.	52
3.8. Résultats expérimentaux	54
3.8.1 Entrée gaussienne fortement corrélée	54
3.8.2 Signal d'entrée gaussien blanc	59
3.8.3. Entrée gaussienne faiblement corrélée	60
3.9. Conclusion	63
4. CONVERGENCE QUADRATIQUE MOYENNE DES COEFFICIENTS DES FILTRES ADAPTATIFS LMS STEREOPHONIQUES SOUS-MODELISES.	64
4.1 Introduction	64
4.2. Analyse de la performance des algorithmes LMS stéréophoniques sous modélisés en terme de l'erreur quadratique moyenne(EQM)	64
4.3. Convergence quadratique moyenne des coefficients des filtres adaptatifs LMS stéréophoniques sous-modélisés	66
4.4. Convergence quadratique moyenne des coefficients des filtres adaptatifs LMS stéréophoniques sous-modélisés pour des signaux d'entrée blancs	70
4.5. Stabilité de l'erreur quadratique moyenne de l'algorithme LMS adaptatif stéréophonique sous-modélisé	71
4.6. Erreur quadratique moyenne à l'état d'équilibre des coefficients de l'algorithme	77
4.7. Résultats expérimentaux	78
4.7.1. Entrée fortement corrélée	78
4.7.2. Signal d'entrée gaussien blanc	82
4.7.3. Entrée gaussienne faiblement corrélée	84
4.8. Conclusion	86
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	87
APPENDICE	89
REFERENCES	98

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1. Chemins de l'écho acoustique	8
Figure 1.2. Influence de l'écho sur la perception de la parole	9
Figure 1.3 Illustration de l'effet acoustique de la salle sur la parole transmise et l'exploitation de l'AEA	10
Figure 1.4 Système classique d'annulation d'écho acoustique	12
Figure 2.1 Schéma de principe d'annulation d'écho stéréophonique	24
Figure 3.1 Schéma d'un annuleur d'écho stéréophonique.	40
Figure 3.2 La réponse impulsionnelle \mathbf{h}_N^{v1} dans la salle de réception	55
Figure 3.3 La réponse impulsionnelle \mathbf{h}_N^{v2} dans la salle de réception	55
Figure 3.4 La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous- modélisé $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(\mathbf{n})$ pour une donnée d'entrée gaussienne corrélée, et $N = 20, L = 15$ SNR d'entrée = 40 dB	57
Figure 3.5 La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous- modélisé $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(\mathbf{n})$. Signal d'entrée : bruit gaussien corrélé, et $N = 20, L = 15$; le SNR entrée = 40 dB	57
Figure 3.6 La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous- modélisé $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(\mathbf{n})$ pour une donnée d'entrée gaussienne corrélée, et $N = 20, L = 10$; SNR entrée =40 dB.	58
Figure 3.7 La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous- modélisé $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(\mathbf{n})$ pour une donnée d'entrée gaussienne corrélée, et $N = 20, L = 10$; SNR entrée = 40 dB	58
Figure 3.8 La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l' algorithme LMS adaptatif sous-modélisé $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(\mathbf{n})$ pour une donnée d'entrée gaussienne blanche, et $N = 20, L = 15$; SNR entrée = 40 dB.	59

- Figure 3.9 La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous-modélisé $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ pour une donnée d'entrée gaussienne blanche, et $N = 20, L = 15; \text{SNR}_{\text{entrée}} = 40 \text{ dB}$. 60
- Figure 3.10 Réponse impulsionnelle d'une salle réelle de 5000 points 62
- Figure 3.11 La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous-modélisé $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ pour une donnée d'entrée gaussienne blanche, et $N = 512, L = 320; \text{SNR}_{\text{entrée}} = 60\text{dB}$ 62
- Figure 3.12 La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous-modélisé $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ pour une donnée d'entrée gaussienne blanche, et $N = 512, L = 320; \text{SNR}_{\text{entrée}} = 60\text{dB}$. 63
- Figure 4.1 Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement du MSE de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour une entrée Gaussienne corrélée, et $N=16; L=12; \text{SNR}_{\text{entrée}}=40\text{dB}$. Avec $\mu_1=\mu_2=0.0004$ 79
- Figure 4.2 Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement du MSE de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour une entrée Gaussienne corrélée, et $N=16; L=12; \text{SNR}_{\text{entrée}}=50\text{dB}$. Avec $\mu_1=\mu_2=0.001$. 80
- Figure 4.3 Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement du MSE de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour une entrée Gaussienne corrélée, et $N=16; L=8; \text{SNR}_{\text{entrée}}=40\text{dB}$. Avec $\mu_1=\mu_2=0.0004$. 81
- Figure 4.4 Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement du MSE de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour une entrée Gaussienne corrélée, et $N=16; L=13; \text{SNR}_{\text{entrée}}=40\text{dB}$. Avec $\mu_1=\mu_2=0.001$ 82
- Figure 4.5 Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement du MSE de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour une entrée Gaussienne blanche, et $N=16; L=13; \text{SNR}_{\text{entrée}}=40\text{dB}$. Avec $\mu_1=\mu_2=0.0004$ 83
- Figure 4.6 Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement du MSE de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour une entrée Gaussienne blanche, et $N=16; L=13; \text{SNR}_{\text{entrée}}=40\text{dB}$. Avec $\mu_1=\mu_2=0.001$ 83

Figure 4.7	Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement du MSE de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous- modélisé pour un signal d'entrée Gaussien faiblement corrélé, et $N=128$; $L=64$; $SNR_{entrée}=40dB$. Avec $\mu_1=\mu_2=0.001$	85
Figure 4.8	Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement du MSE de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous- modélisé pour un signal d'entrée Gaussien faiblement corrélé, et $N=128$; $L=64$; $SNR_{entrée}=40dB$. Avec $\mu_1=\mu_2=0.0004$	85
Tableau 1.1	Algorithme LMS (mono-voie)	15
Tableau 1.2	Algorithme NLMS mono-voie	16
Tableau 1.3	Algorithme RLS (mono-voie)	19
Tableau 1.4	L'algorithme rapide basé sur les erreurs <i>a priori</i>	21
Tableau 2.1	L'algorithme LMS à deux canaux	34
Tableau 2.2	L'algorithme NLMS à deux canaux	35
Tableau 2.3	L'algorithme RLS à deux canaux signaux	37

INTRODUCTION GENERALE

1. Introduction

Depuis notre existence sur terre, les moyens de communication n'ont pas cessé de s'évoluer. Le développement de la téléphonie mobile (la possibilité de téléphoner sans connexion filaire par une onde hertzienne (antennes-relais ou par satellite)), est un évènement remarquable de la fin du XX^e siècle. Après le téléphone et la radio, la télévision est présente dans tous les foyers. La télévision numérique terrestre (TNT) a augmenté encore le choix des utilisateurs. La visioconférence a permis la transmission d'images simultanées par une liaison téléphonique ou par le webcam sur internet ou par téléphone mobile de dernière génération.

L'écho acoustique et le bruit ambiant, souvent présents lors de l'utilisation de systèmes de communication mains libres, nuisent à la qualité de la communication et doivent être éliminés. Donc, il est nécessaire de généraliser les traitements d'annulation d'échos dans les dispositifs téléphoniques.

L'écho acoustique apparait lorsqu'un microphone capte le son émis par un haut parleur situé dans la même salle. L'Annulation d'Echo Acoustique Stéréophonique (AEAS) n'est pas aussi simple que dans le cas mono-voie. Dans l'AEAS, les coefficients des deux filtres conçus pour annuler l'écho doivent être adaptés selon une méthode tenant compte de l'intercorrélation entre les signaux d'entrée relatifs aux deux voies.

Dans cette thèse, nous concentrons notre intérêt sur le cas où la longueur des filtres adaptatifs LMS (Least Mean Square), employés avec l'application d'AEAS dans la salle de réception, est inférieure à la longueur des filtres réels. Pour ce cas, nous proposons une nouvelle étude, en termes de comportement de convergence moyenne des vecteurs des coefficients d'erreur, et nous montrons des résultats théoriques qui sont très proches du cas réel. L'algorithme développé dans ce travail est le filtre adaptatif LMS conventionnel sous-modélisé dans le domaine temporel, qui présente l'avantage de réduire le volume de calculs en annulation d'écho acoustique stéréophonique [2].

Cette thèse comporte quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons les principes d'annulation d'écho acoustique. Premièrement, des notions générales sur l'écho acoustique seront décrites ainsi que son annulation. Deuxièmement, nous abordons les problèmes liés à l'annulation d'écho acoustique et nous exposons les solutions nécessaires. La quatrième partie décrira les algorithmes à base de filtrage adaptatif, les plus connus, en particulier, les algorithmes LMS, NLMS et RLS mono-voie.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons l'annulation d'écho acoustique par les algorithmes d'identification adaptative en contexte bi-voie. Dans un premier temps, une analyse de la structure stéréophonie est exposée. Ensuite, on donne une formulation du problème stéréophonique ainsi qu'un résumé des techniques utilisées pour décorréler les signaux d'entrée des deux voies. Enfin, quelques algorithmes portant sur le cas stéréophonique sont exposés et examinés.

Le troisième et quatrième chapitres sont consacrés à l'étude de l'annulation d'écho acoustique stéréophonique par l'algorithme LMS sous-modélisé.

Dans le troisième chapitre présente une étude, nous concentrons notre intérêt sur le cas où les longueurs des filtres adaptatifs LMS, employés avec l'application d'AEAS dans la salle de réception, sont inférieures à la longueur des filtres réels. Pour ce cas, nous proposons une nouvelle étude, en termes de comportement de convergence moyenne des vecteurs des coefficients d'erreur à l'état d'équilibre. On termine ce chapitre par l'analyse des résultats de simulation concernant trois types de signaux d'entrée : 1) signaux gaussiens fortement corrélés, 2) signaux gaussiens blancs, 3) signaux gaussiens faiblement corrélés.

Dans le quatrième chapitre, nous exploitons l'étude proposée dans le chapitre trois pour décrire le comportement de convergence quadratique moyenne des vecteurs des coefficients d'erreur. Enfin, nous présentons les analyses et résultats concernant l'étude de la convergence et de l'existence d'un point d'équilibre stable pour la structure récursive, pour les mêmes signaux d'entrée.

Enfin, notre thèse sera terminée par une conclusion générale.

2. Etat de l'art

Au début du XX^e siècle, la communication par réseau hertzien a révolutionné les télécommunications par l'apparition de nombreux services tels que : la radiodiffusion de programmes d'un émetteur vers des auditeurs équipés d'un récepteur , la radiotéléphonie (communication à distance sans fil), la téléphonie mobile, le Wi-Fi, etc. La téléphonie, fut la première avancée des télécommunications, juste après les premiers télégraphes. La téléphonie permet également des services plus avancés tels que la messagerie vocale, la conférence téléphonique, etc. Une ligne téléphonique permet aussi l'accès à Internet (à faible débit avec un modem et à haut débit grâce à l'ADSL (Asynchronous Digital Subscriber Line)).

Depuis quelques années, les Technologies de l'Information et des Communications (TIC) offrent de nouvelles techniques et appareillages tels que les unités de traitement, la numérisation de l'information, les satellites, les fibres optiques et les bases de données, qui, contribuent à la diffusion rapide et efficace de l'information. Grâce à la numérisation de l'information, les systèmes de communication peuvent transmettre les données télévisuelles, téléphoniques et informatiques.

Les télécommunications modernes ont permis la transmission de l'image, du son et du texte dans le monde entier. Ces moyens techniques ont permis de s'affranchir les frontières et les traditions. De toutes les inventions technologiques des deux dernières décennies, la téléphonie cellulaire est celle qui a profité de la plus importante publicité. De même, le problème de l'Annulation de l'Echo Acoustique (AEA) a été largement abordé. Le développement des systèmes de réduction de l'écho a commencé à la fin des années cinquante, et se poursuit aujourd'hui.

De nombreuses techniques de filtrage adaptatif, ont été proposées dans des contextes radiotéléphonie mains-libres. L'écho a été considérablement atténué par les solutions suggérées bien qu'elles introduisent des distorsions sur le signal utile.

Pour beaucoup de systèmes sans fil, le canal considéré peut être modélisé comme un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (FIR) variable dans le temps. Compte tenu de la variation dans le temps du canal, il est utile d'avoir un algorithme qui peut identifier les paramètres du canal de manière adaptative. Les algorithmes adaptatifs tels que:

l'Algorithme du Gradient Stochastique (LMS : Least Mean Square) et ses variantes (ex: LMS normalisé) et l'algorithme des moindres carrés récursifs (RLS : Recursive Least Square), sont largement utilisés et peuvent résoudre le problème d'identification d'un système. Cependant, les algorithmes cités ont les inconvénients suivants: le LMS et le NLMS possèdent un taux de convergence lent. Tandis que, le RLS qui possède une convergence rapide, est plus coûteux en espace mémoire et de complexité de calcul élevée, cela à cause de sa matrice de covariance qui exige un grand nombre d'opérations arithmétiques. Les autres inconvénients de ces méthodes résident dans leur incapacité à identifier des systèmes non linéaires ainsi que leur incapacité à fonctionner avec faible débit lors d'une implémentation en VLSI (Very Large Scale Integration).

On distingue deux types d'écho dans les systèmes de communication: l'écho acoustique et l'écho hybride de la ligne téléphonique. L'écho acoustique résulte du fait que les sons émis par un haut-parleur sont captés par le microphone qui les a émis. Les échos des lignes téléphoniques et acoustiques dans les téléconférences et dans les systèmes d'aide auditive (procédé de correction auditive utilisant des opérations de compression et d'amplification dans un nombre réduit de sous-bandes), sont indésirables et ennuyeux et peuvent être perturbateurs. La solution la plus simple, pour annuler l'écho acoustique, consiste à imposer au système de laisser ouvert soit le microphone, soit le haut-parleur afin d'éviter leur fonctionnement simultané. On parle alors d'une transmission semi-duplex (présence d'un seul signal à la fois : l'écho ou la parole locale) dont le principal inconvénient est que les locuteurs ne peuvent pas parler en même temps.

Une autre méthode, plus efficace consiste à identifier le chemin acoustique entre les haut-parleurs et le microphone. L'écho acoustique est modélisé par un système linéaire qui varie lentement dans le temps, il est estimé par un filtre adaptatif pour être soustrait du signal de sortie du microphone. Dans ce cas l'annulation d'écho acoustique puisse être effectuée en mode double parole (présence simultanée de la parole locale et de l'écho acoustique). Cette solution est aussi inefficace si les composants utilisés (microphones et haut-parleurs) ne sont pas d'excellente qualité, ce qui est souvent le cas avec les dispositifs qui équipent les téléphones portables ou les ordinateurs: nous sommes alors confrontés par les phénomènes de non-linéarité qui rendent difficile une définition fiable du signal à soustraire. Dans ce cas, les non linéarités de saturation des hauts parleurs peuvent être

compensées par des filtres adaptatifs non linéaires (par exemple : le filtre adaptatif NLMS de Volterra)

Les méthodes adaptatives en traitement du signal visent l'adaptation automatique des opérateurs de traitement aux propriétés statistiques des signaux et des systèmes, ainsi que l'adaptation à leurs variations dans le temps. Pour les systèmes de communications sans fil numériques modernes, l'identification de canaux (systèmes) est une application essentielle, largement utilisée. La connaissance des paramètres du canal de communication permet de faire une très bonne estimation des données transmises.

L'adaptation devra limiter les problèmes rencontrés dans l'annulation d'écho stéréophonique lorsque les signaux d'entrée sont fortement corrélés. Pour un système à deux canaux, on parle d'écho acoustique stéréophonique. Dans ce cas le microphone capte simultanément les échos provenant des deux haut-parleurs.

Donc, le choix d'un système ou d'un algorithme dépend des facteurs suivants :

1. disponibilité d'une information sur l'écho à éliminer.
2. la puissance de calcul requise par l'algorithme.
3. la stabilité de la convergence de l'algorithme.
4. la vitesse de convergence de l'algorithme.
5. l'existence d'une solution optimale unique pour l'algorithme.
6. nécessité d'un système monocanal ou multi-canal.

Dans les systèmes de téléconférences, l'AEAS présente un problème fondamental en ce qui concerne la possibilité d'identifier la vraie réponse impulsionnelle des chemins de l'écho acoustique. Ce problème est dû à la corrélation entre les deux signaux captés dans la salle à distance. L'annulation de l'écho acoustique stéréophonique (AEAS) est fondamentalement différente de l'annulation de l'écho monophonique traditionnelle. Une application d'AEAS, mise en œuvre, non seulement aurait pour suivre l'évolution des chemins de l'écho dans la salle de réception mais aussi dans la salle de transmission. Ainsi, une généralisation de l'AEA monovoie au cas stéréophonique n'entraîne pas une performance satisfaisante. Le problème fondamental est que les deux canaux transportant des signaux linéairement corrélés donnent un système qui dégénère en deux équations normales équivalentes. Par conséquent, ce système admet une infinité de solution (l'algorithme adaptatif est singulier). Les réponses impulsionnelles réelles dépendent de la salle de transmission. Par exemple, le déplacement du locuteur distant provoque une

variation temporelle de la corrélation ce qui rend la poursuite de l'algorithme adaptatif difficile.

La généralisation de la solution des équations normales dans un sens plus pratique a été abordée dans les références [27], [29]. Pratiquement, il a été expliqué que le problème n'est pas réellement singulier, mais très mal conditionné en raison du fait que la longueur du filtre adaptatif est plus courte que les chemins de l'écho de la salle de transmission. En outre, dans la pratique, la salle de transmission n'est pas complètement immobile, c.-à-d., des lisses changements continus existent, qui améliorent légèrement la situation en rendant le problème un peu moins mal conditionné [30] et [31]. Une théorie complète de la non-unicité et la caractérisation de la solution AEAS a été présentée en [8] et [9]. Il est montré que la seule solution au problème de non-unicité est de réduire la corrélation entre les signaux stéréo. Une méthode efficace et peu complexe à cet effet a été donnée dans [12], [32] et [33].

Dans [34], les auteurs présentent une combinaison d'annulation d'écho mono et stéréo qui a l'avantage de baisser la complexité d'une solution stéréo pure. Actuellement, l'attention s'est concentrée sur l'étude des autres méthodes qui permettent de diminuer l'intercorrélation entre les deux canaux afin d'obtenir les meilleures estimations des chemins de l'écho [21]. Le problème principal est de savoir comment réduire suffisamment la corrélation sans affecter la perception stéréo et la qualité sonore. Les premiers exemples d'implémentations AEAS peuvent être trouvés dans [35], [36] et [37].

Ces solutions ont été présentées avant que la théorie et les limites de l'AEAS ont été bien traitées, et sont essentiellement basées sur l'utilisation d'un filtre adaptatif unique pour chaque canal de retour. La performance de l'AEAS est strictement affectée par le choix de l'algorithme plus que dans le cas monophonique. Ceci est facilement reconnu à l'aide des performances de la plupart des algorithmes adaptatifs dépendant du conditionnement de la matrice de covariance du signal d'entrée. Dans les applications de l'AEAS, la matrice de covariance est mal conditionnée, et des algorithmes tels que le LMS ou le NLMS qui ne prennent pas en compte la corrélation entre les signaux d'entrée, convergent très lentement vers la solution théorique. Par conséquent, il est très intéressant d'étudier des algorithmes de filtrage adaptatif multi-canal. Des recherches de filtrage adaptatif multi-canal peuvent être trouvées dans les références [1], [2], [3], [4], [27] et [38].

CHAPITRE 1

PRINCIPES D'ANNULATION D'ECHO ACOUSTIQUE

1.1. Introduction

Dans les systèmes de communication mains-libres et de conférence (téléconférence, conférence de bureau,...), on a toujours besoin des annuleurs d'écho pour réduire l'écho qui résulte du couplage acoustique entre le haut parleur et le microphone. L'annulation d'écho acoustique (AEA) améliore grandement la qualité audio. Elle permet de progresser des conférences de façon plus douce et plus naturelle, de garder les participants plus à l'aise, et prévenir la fatigue auditeur. Une solution d'AEA qui est mal conçue ou inappropriée pour l'emplacement ne pourra pas offrir ces avantages et peut même dégrader significativement la qualité audio. L'écho acoustique est plus visible et ennuyeux lorsqu'un retard important (dans l'ordre des centaines de millisecondes) est présent dans le chemin de transmission [2].

Ce premier chapitre a pour but de donner des notions générales sur l'écho acoustique et sur les techniques pour l'éliminer. Ainsi, une description de l'écho acoustique et de l'acoustique des salles est d'abord présentée de manière brève. Ensuite le principe d'une application d'AEA dans le cas monocanal est entamé. Le paragraphe 1.5 présente les problèmes rencontrés dans une application d'AEA. Enfin, la section 1.6 résume les algorithmes adaptatifs fondamentaux, tels que le LMS, NLMS et RLS.

1.2. La source de l'écho acoustique

L'écho acoustique est formé lorsque le son émis par un haut-parleur se réfléchit à partir des murs, plafonds, etc., vers le microphone. Le niveau de pression sonore diminue à chaque réflexion. Le facteur majeur dans la perceptibilité de l'écho décalé est le temps de retard entre le signal direct et l'écho et leurs forces respectives [1].

Les échos avec un court délai, de l'ordre d'une dizaine de millisecondes, sont perçus comme une distorsion spectrale ou une réverbération. Lorsque le délai aller et retour de la réflexion non atténuée s'approche d'un quart de seconde, l'écho est grand et toute conversation claire est rendue impossible [1]. Un problème plus gênant est apparu avec les téléphones mains libres et les équipements de communication multimédia pour lesquels l'écho est dû aux réverbérations dans la salle où se trouve le dispositif comme le montre la figure 1.1, on parle alors de l'écho acoustique [1].

1.3. Acoustique des salles

Les réflexions du son dans une salle se répètent plusieurs fois pour créer les réverbérations. En règle générale, le niveau de réverbération diminue exponentiellement avec le temps, donc les salles sont souvent caractérisées par le paramètre T60 (temps de réverbération), qui spécifie le moment où le niveau de réverbération diminue de 60 dB ($T30 = T60 / 2$). Pour un bureau typique, T60 est compris entre 300 et 600 ms.

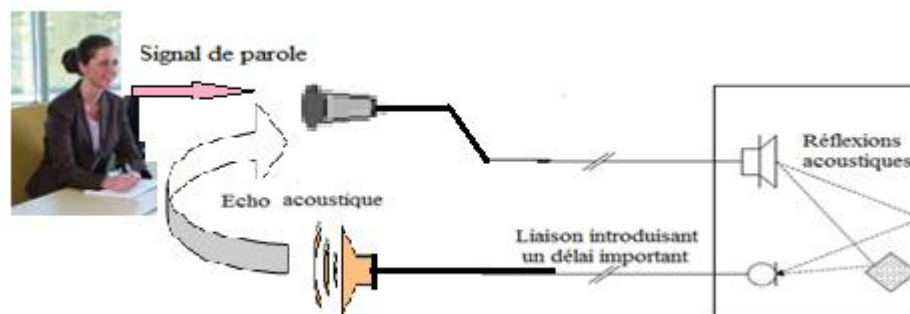


Figure 1.1 : Chemin de l'écho acoustique

La figure 1.2 [48] montre que la perceptibilité d'un signal de parole diminue de 0,5 dB par ms (de retard d'écho). Le système binaural d'audition humaine gère remarquablement bien l'effet de réverbération lorsque les personnes en conversations sont dans la même salle même très réfléchissante. Ce n'est pas le cas si les mêmes personnes sont en salles différentes et ils utilisent un haut-parleur pour la conversation. L'écho acoustique devient très gênant et inquiétant et donc doit être enlevé.

L'acoustique de la salle affectera toujours le son et peut entraver la communication. En outre, un sifflement peut se produire si le microphone est placé trop près du haut-parleur (ce phénomène est connu par l'effet Larsen) et il doit être éliminé par annulation d'écho acoustique. La salle acoustique est une question complexe, mais elle a été largement étudiée en profondeur à partir de deux perspectives théoriques et pratiques.

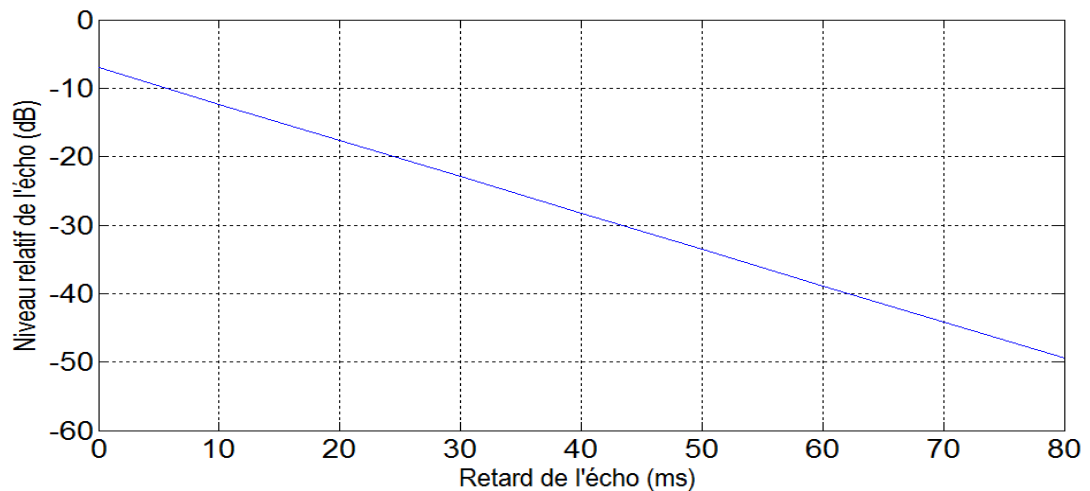


Figure 1.2 : Influence de l'écho sur la perception de la parole [48].

1.4. L'annulation d'écho acoustique (AEA)

L'élimination d'écho acoustique peut être utilisée à la fois en bande étroite (3,5 kHz) et en large bande (7 kHz) des systèmes de conférences. Les applications à bande étroite incluent les téléconférences et les vidéoconférences à faible débit binaire. Les applications de large bande comprennent la téléconférence et la visioconférence de haute qualité. Les utilisateurs de systèmes de conférence à large bande devraient être particulièrement intéressés par l'utilisation de l'annulation d'écho acoustique, car elle leur permettra de faire le meilleur parti des capacités audio supplémentaires de leurs systèmes.

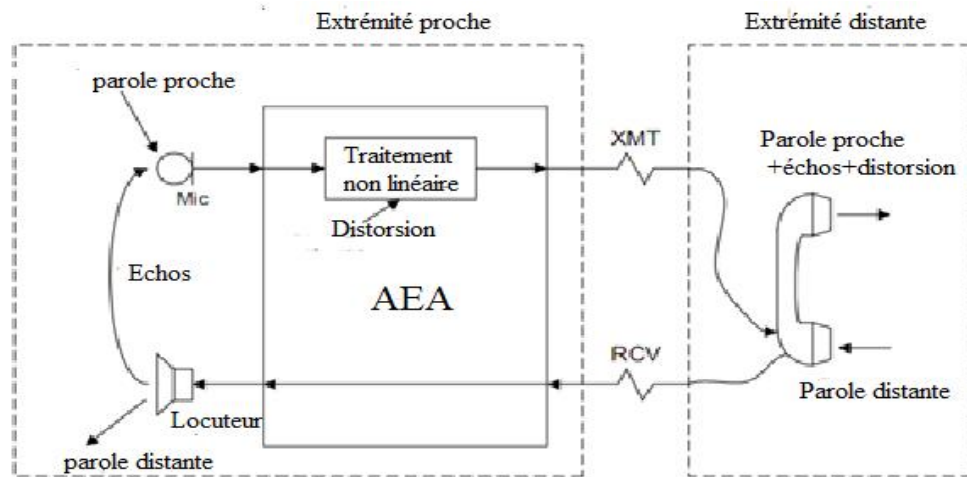


Figure 1.3 : Illustration de l'effet acoustique de la salle sur la parole transmise et l'exploitation de l'AEA [2].

Le haut parleur émettant le signal du locuteur lointain crée un écho sur le microphone. L'annulation de l'écho acoustique (AEA) fournit des meilleures solutions au contrôle des échos acoustiques générés par les terminaux audio mains libre [2]. Dans ce type d'application, un filtre adaptatif identifie le chemin acoustique de l'écho entre le haut parleur et le microphone du terminal, c.-à-d. la réponse impulsionnelle de la salle. La sortie du filtre, qui fournit une réplique électronique de l'écho acoustique, est soustraite au signal du microphone pour annuler l'écho [3]. Pour les applications réelles d'AEA, il est extrêmement souhaitable d'utiliser les algorithmes non-paramétriques dans le sens qu'aucune information sur l'environnement acoustique n'est demandée [3].

1.5. Problèmes associés aux applications d'AEA

Il existe plusieurs problèmes particuliers et stimulants associés aux applications d'AEA. Premièrement, le chemin de l'écho est extrêmement long (dans l'ordre des centaines de millisecondes) et il peut changer rapidement à tout moment pendant la connexion. La longueur excessive du chemin de l'écho acoustique dans le temps est due principalement à la vitesse lente du bruit dans l'air, en outre, les réflexions multiples des murs et objets dans la salle augmentent cette longueur. De plus la réponse impulsionnelle de la salle n'est pas constante dans le temps, depuis qu'elle varie avec la température ambiante, la pression et l'humidité; aussi, le mouvement des objets et corps humains peuvent la modifier rapidement. Comme une conséquence de ces aspects rapportés aux

caractéristiques du chemin de l'écho acoustique, le filtre adaptatif travaille plus probablement dans une situation de sous modélisation, c.-à-d. sa longueur est plus petite que la longueur de la réponse impulsionnelle acoustique. D'où l'écho résiduel causé par la partie du système qui ne peut pas être modélisée, agit comme un bruit supplémentaire et dérange la performance globale du filtre adaptatif [3]. Deuxièmement, le bruit de l'arrière-plan qui bruite le signal du microphone peut être fort et extrêmement non-stationnaire. À côté de ces problèmes particuliers associés à l'environnement acoustique, il y a quelques issues classiques qui doivent être abordées dans le cadre général de l'annulation de l'écho. La première concerne le caractère non-stationnaire du signal de parole, depuis qu'il est bien connu que la performance d'un filtre adaptatif dépende des propriétés du signal de l'entrée. De plus, un signal de parole est extrêmement corrélé. Par conséquent, ce type de signal représente un défi pour un filtre adaptatif. Un autre aspect principal qu'on doit le considérer dans l'annulation de l'écho concerne le comportement pendant la double parole, c.-à-d. des locuteurs sur les deux côtés parlent simultanément. Dans ce cas, à côté de l'écho plus le bruit de l'arrière-plan, le microphone du terminal mains-libres disponible capte un signal de discours qui agit comme une perturbation importante sur le filtre adaptatif, et il peut causer sa divergence. Pour cette raison, l'annuleur de l'écho est habituellement équipé d'un détecteur du double discours (de DTD), afin de contrôler le comportement du filtre adaptatif pendant ces périodes [3]. Dans l'annulation de l'écho, les situations de double parole peuvent aussi être visualisées comme des sources de bruit impulsif. Beaucoup d'approches différentes ont été proposées dans la littérature pour traiter ce problème [4]. Chacun des problèmes abordés auparavant implique que quelques exigences spécifiques des algorithmes adaptatifs ont été utilisées pour L'AEA.

1.6. Algorithmes de Filtrage Adaptatif appliqués à l'AEA

1.6.1. Principe du filtrage adaptatif

Le filtrage adaptatif diffère, par rapport au filtrage classique par la mise à jour récursive des paramètres (coefficients) du filtre. L'algorithme part de conditions initiales prédéterminées et modifie de façon récursive les coefficients du filtre pour s'adapter au processus. Si celui-ci est stationnaire l'algorithme doit converger vers la solution optimale de Wiener, ou il doit être capable de suivre les variations des grandeurs statistiques du processus si celles-ci sont suffisamment lentes [6].

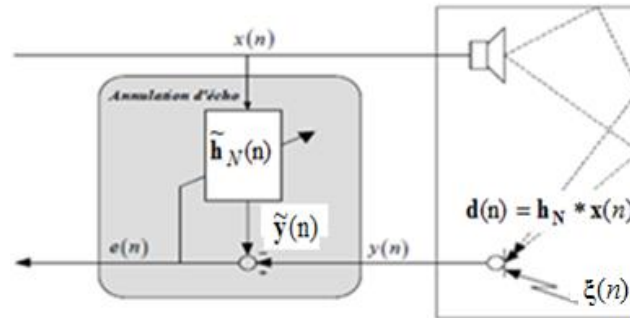


Figure 1.4 : système classique d'annulation d'écho acoustique [6]

Où ;

\mathbf{h}_N : la vraie réponse impulsionnelle.

$\tilde{\mathbf{h}}_N(n)$: réponse impulsionnelle estimée par le filtre adaptatif.

$\mathbf{x}(n)$: signal de la salle de transmission.

$\mathbf{y}(n)$: signal de sortie du système.

$\xi(n)$: représente le bruit du système supposé être stationnaire.

$\tilde{\mathbf{y}}(n)$: signal de sortie du filtre adaptatif.

$\mathbf{e}(n)$: est l'erreur à l'instant n , entre le signal de sortie du système et la sortie du filtre adaptatif.

L'annulation de l'écho est une des applications les plus populaires du filtre adaptatif. Dans les contextes du réseau et de l'annulation de l'écho acoustique à la fois, la solution de base est de bâtissez un modèle de la réponse impulsionnelle du chemin de l'écho à l'aide d'un filtre adaptatif, qui fournit à sa sortie une réplique de l'écho [5].

L'annulation d'écho acoustique est souvent fondée sur des algorithmes de filtrage adaptatif. Les filtres adaptatifs jouent un rôle important dans le traitement du signal et plusieurs différentes catégories apparaissent dans la littérature. Beaucoup d'efforts avaient été fait durant les trois dernières décennies pour dériver des filtres adaptatifs qui convergent rapidement et ayant une faible complexité de calcul. Dans cette section on discute une classe d'algorithmes adaptatifs tels que : LMS, NLMS, RLS,...

La réponse impulsionnelle du chemin de l'écho est estimée par un filtre adaptatif comme le montre la figure 1.4, ceci est obtenu par la minimisation récursive de la somme des carrés du signal d'écho résiduel $\mathbf{e}^2(n)$. Le filtre aura seulement la connaissance du signal de la salle de transmission $\mathbf{x}(n)$, et celui de la salle de réception $\mathbf{y}(n)$, autrement dit, il

estime la réponse impulsionnelle de la salle de réception \mathbf{h}_N et génère $\mathbf{e}(n)$. Dans un filtre adaptatif il y a une fonction de coût à minimiser. Généralement, cette fonction est définie par [18] :

$$\mathbf{J}(n) = \sum_{i=0}^n \mathbf{e}^2(i) \quad (1.1)$$

La fonction coût définie par (1.1) est l'erreur quadratique. La qualité de l'estimation peut être mesurée par $\mathbf{e}(n)$. Evidemment, plus $\mathbf{e}(n)$ sera faible, plus l'estimation sera bonne. On cherche donc un filtre qui minimisera $J(n)$ au lieu de $\mathbf{e}(n)$, car c'est une fonction quadratique facilement dérivable. Le filtre optimal de Wiener correspond au filtre qui minimisera l'EQM. Les paramètres de minimisation sont les coefficients du filtre $\tilde{\mathbf{h}}(n) = [\tilde{h}_1(n), \tilde{h}_2(n), \dots, \tilde{h}_N(n)]^T$, où $\tilde{\mathbf{h}}(n)$ est le filtre adaptatifs, et l'opérateur $(\cdot)^T$ dénote la transposée d'une matrice ou d'un vecteur. Le filtre adaptatif n'exige aucune information *a priori* de la vraie réponse impulsionnelle \mathbf{h} . Les valeurs de $\tilde{\mathbf{h}}(n)$ sont mises à jour de façon récursive selon l'équation (1.3). Le vecteur gradient est donné par :

$$\nabla J(n) = \left[\frac{\partial J(n)}{\partial \tilde{h}_1(n)} \quad \frac{\partial J(n)}{\partial \tilde{h}_2(n)} \quad \dots \quad \frac{\partial J(n)}{\partial \tilde{h}_N(n)} \right]^T \quad (1.2)$$

Ce dernier décrit comment la fonction de coût $J(n)$ est affectée par les petits changements de l'estimé $\tilde{\mathbf{h}}(n)$.

$$\tilde{\mathbf{h}}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}(n) - \mu \nabla J(n) \quad (1.3)$$

où, μ est le pas d'adaptation.

1.6.2. Algorithme LMS mono-voie

Considérons une configuration mono-voie d'un annuleur d'écho acoustique où nous modélisons le chemin d'écho avec la réponse impulsionnelle $\mathbf{h}_N = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T$ en utilisant un filtre adaptatif $\tilde{\mathbf{h}}_N(n)$. Le signal désiré est donné par $\mathbf{y}(n)$. Le système reçoit en entrée $\mathbf{x}(n)$, un vecteur à valeurs réelles et $\xi(n)$ représente le bruit du système supposé

être stationnaire, véritablement évalué et indépendant du signal de l'entrée $\mathbf{x}(n)$. Dans l'algorithme des moindres carrés (LMS), le vecteur du gradient $\nabla J(n)$ est estimé comme,

$$\nabla J(n) = -\mathbf{X}_N(n) \mathbf{e}(n) \quad (1.4)$$

avec, $\mathbf{X}_N(n) = [x(n), x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-N+1)]^T$, est le vecteur qui contient les N derniers échantillons du signal d'entrée. L'algorithme LMS peut être entièrement décrit avec les deux équations suivantes :

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}(n) - \tilde{\mathbf{y}}(n) \quad (1.5)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_N(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N(n) + \mu \mathbf{X}_N(n) \mathbf{e}(n) \quad (1.6)$$

Où $\mathbf{e}(n)$ est l'erreur de filtrage à l'instant n , calculée par la soustraction du signal de sortie du système

$$\mathbf{y}(n) = (\mathbf{h}_N(n))^T \mathbf{X}_N(n) + \xi(n) \quad (1.7)$$

et la sortie modélisée par le filtre adaptatif qui est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{y}}(n) = (\tilde{\mathbf{h}}_N(n))^T \mathbf{X}_N(n) \quad (1.8)$$

avec \mathbf{h}_N , est la réponse impulsionnelle du système, et $\tilde{\mathbf{h}}_N(n)$ est la réponse impulsionnelle du système estimée par le filtre. Le facteur μ représente le pas d'adaptation ($0 < \mu < 2/\lambda_{\max}$, où λ_{\max} est la valeur propre maximale de la matrice corrélation du signal d'entrée) [49].

Nous devons noter ici que l'algorithme LMS est très utilisé dans de nombreuses applications, car il nécessite moins de calcul (faible complexité de calcul) avec un inconvénient majeur de sa vitesse de convergence qui devient lente avec les signaux très corrélés. Le détail de l'algorithme LMS mono-voie est donné par le tableau suivant :

Tableau 1.1 : Algorithme LMS mono-voie.

Valeur initiale : $\tilde{\mathbf{h}}_N(0) = [0, 0, \dots, 0]^T$	
Début	$\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}(n) - \left(\tilde{\mathbf{h}}_N(n)\right)^T \mathbf{X}_N(n)$
Fin	$\tilde{\mathbf{h}}_N(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N(n) + \mu \mathbf{X}_N(n) \mathbf{e}(n)$

Le signal $\mathbf{e}(n)$ représente l'écart entre la valeur observée $\mathbf{y}(n)$ en sortie et ce que l'on aurait dû observer si le filtre $\tilde{\mathbf{h}}_N(n)$ était, à l'instant n , le bon filtre. L'algorithme peut être interprété comme suit: Si $\mathbf{e}(n) = 0$, les coefficients $\tilde{\mathbf{h}}_N(n)$, du filtre adaptatif ont la bonne valeur, alors ils doivent être retenus. Dans le cas contraire, une adaptation de $\tilde{\mathbf{h}}_N(n)$ par le terme $\mu \mathbf{X}_N(n) \mathbf{e}(n)$ est nécessaire pour réduire l'écart $\mathbf{e}(n)$.

1.6.3. L'algorithme NLMS

Depuis qu'aucune moyenne explicite n'est faite dans (1.4), chaque mise à jour récursive de l'algorithme LMS va souffrir du bruit du gradient. Les coefficients du filtre $\tilde{\mathbf{h}}_N(n)$ seront mis à jour correctement seulement en moyenne, ce qui ralentit la convergence de l'algorithme [18]. On note aussi que le critère $\mathbf{J}(n)$ est directement proportionnel au signal de la salle de transmission $\mathbf{x}(n)$. Par conséquent la vitesse de convergence est aussi dépendante de la nature de ce signal. Ceci peut être corrigé par la normalisation du vecteur du gradient estimé avec un facteur égal à l'énergie de $\mathbf{x}(n)$, qui est le scalaire $\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)$.

Pour l'algorithme NLMS, l'équation de la mise à jour (1.6) est modifiée comme suit:

$$\tilde{\mathbf{h}}_N(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N(n) + \frac{\mu \mathbf{X}(n)\mathbf{e}(n)}{\mathbf{X}(n)^T \mathbf{X}(n) + \delta_{\text{NLMS}}} \quad (1.9)$$

Où, μ est le pas de l'adaptation ($0 < \mu < 2$) et δ_{NLMS} , est le facteur de la régularisation c.à.d. une constante qui empêche la division par zéro. L'algorithme NLMS peut être résumé dans le tableau suivant :

Tableau 1.2 : Algorithme NLMS mono-voie.

Valeur initiale : $\tilde{\mathbf{h}}_N(0) = [0, 0, \dots, 0]^T$
Début
$\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}(n) - \left(\tilde{\mathbf{h}}_N(n)\right)^T \mathbf{X}_N(n)$
$\tilde{\mathbf{h}}_N(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N(n) + \frac{\mu \mathbf{X}(n)\mathbf{e}(n)}{\mathbf{X}(n)^T \mathbf{X}(n) + \delta_{\text{NLMS}}}$
Fin

L'algorithme NLMS a une convergence lente dans les régions de fréquences où le signal d'excitation a une faible énergie [18]. Par exemple, étudions la situation où le signal d'excitation $\mathbf{x}(n)$ a une faible énergie dans les fréquences hautes que dans les faibles, comme par exemple le signal de parole. Donc, le vecteur gradient estimé $\mathbf{x}(n)\mathbf{e}(n)$ sera faible dans les régions de hautes fréquences. Le facteur de normalisation, c'est à dire le scalaire $\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)$, sera important à cause de la grande énergie dans les petites fréquences de $\mathbf{x}(n)$. Alors, pour les faibles énergies du signal d'excitation, les mises à jour de $\tilde{\mathbf{h}}_N(n)$ sont lentes. D'autres algorithmes, comme le RLS (réursive least-squares), et l'algorithme des projections affines [11] [18], utilisent le spectre du signal d'excitation $\mathbf{x}(n)$ dans la mise à jour du filtre adaptatif. Ces algorithmes vont donc converger rapidement pour les signaux d'excitation corrélés ou non blancs.

1.6.4. Algorithme RLS

Cet algorithme récursif, estimera les coefficients du filtre à l'instant n à l'aide des nouvelles données disponibles, à partir des coefficients à l'instant $n-1$. La méthode des moindres carrés exacte vise à minimiser, par rapport au vecteur des paramètres $\tilde{\mathbf{h}}_N(n)$ à

chaque instant n , un critère défini sur les erreurs commises depuis l'instant initial. Donc, les paramètres $\tilde{\mathbf{h}}_N(n)$ sont estimés par le critère des moindres carrés suivant:

$$J(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \left(\mathbf{y}(i) - (\tilde{\mathbf{h}}_N(i))^T \mathbf{X}_N(i) \right)^2 \quad (1.10)$$

Où λ ($0 < \lambda \leq 1$) est un facteur de pondération appelé aussi facteur d'oubli exponentiel qui permet à l'algorithme d'oublier le passé trop lointain et de poursuivre les non stationnarités intervenantes dans les signaux. Le cas particulier $\lambda = 1$ correspond à une mémoire infinie. Les signaux $\mathbf{x}(n)$ et $\mathbf{y}(n)$ sont supposés nuls avant l'instant initial $n = 0$; c'est à dire on se place dans le cas de la fenêtre antérieure.

La résolution de ce problème consiste à déterminer le vecteur des coefficients $\tilde{\mathbf{h}}_N(n)$ qui minimise $\mathbf{J}(n)$. La solution est obtenue en annulant les dérivées de la fonction coût $\mathbf{J}(n)$ par rapport aux éléments $\tilde{\mathbf{h}}_N(n)$:

$$\nabla J = 0 \Leftrightarrow \nabla J = -2 \left[\sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} (\mathbf{x}_N(i) \mathbf{y}(i)) - \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} (\mathbf{x}_N(i)) (\mathbf{x}_N(i))^T \tilde{\mathbf{h}}_N(i) \right] = 0 \quad (1.11)$$

Soit :

$$\sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} (\mathbf{x}_N(i) \mathbf{y}(i)) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} (\mathbf{x}_N(i)) (\mathbf{x}_N(i))^T \tilde{\mathbf{h}}_N(i) \quad (1.12)$$

Ce qui donne alors :

$$\mathbf{R}_N(n) \tilde{\mathbf{h}}_N(n) = \mathbf{r}_N(n) \quad (1.13)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_N(n) = \mathbf{R}_N^{-1}(n) \mathbf{r}_N(n) \quad (1.14)$$

où $\mathbf{R}_N(n)$ représente la matrice d'auto-corrélation à court terme à l'itération n qui est donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{R}_N(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{X}_N(i) (\mathbf{X}_N(i))^T \quad (1.15)$$

Le vecteur $\mathbf{r}_N(n)$ désigne le vecteur d'inter-corrélation à court terme à l'instant n donné par la relation :

$$\mathbf{r}_N(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{X}_N(i) \mathbf{y}(i) \quad (1.16)$$

Les équations précédentes peuvent se calculer de manière récursive:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_N(n) &= \lambda \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i-1} \mathbf{X}_N(i) (\mathbf{X}_N(i))^T + \mathbf{X}_N(n) (\mathbf{X}_N(n))^T \\ &= \lambda \mathbf{R}_N(n-1) + \mathbf{X}_N(n) (\mathbf{X}_N(n))^T \end{aligned} \quad (1.15.a)$$

$$\lambda \mathbf{R}_N(n) = \mathbf{R}_N(n) - \mathbf{X}_N(n) (\mathbf{X}_N(n))^T \quad (1.15.b)$$

$$\mathbf{r}_N(n) = \lambda \mathbf{r}_N(n-1) + \mathbf{X}_N(n) \mathbf{y}(n) \quad (1.16.a)$$

$$\lambda \mathbf{r}(n-1) = \mathbf{r}(n) - \mathbf{X}_N(n) \mathbf{y}(n) \quad (1.16.b)$$

Par substitution des équations (1.15.b) et (1.16.b) dans (1.13) on obtient :

$$\lambda \mathbf{R}_N(n-1) \tilde{\mathbf{h}}_N(n-1) = \lambda \mathbf{r}_N(n-1) \quad (1.17.a)$$

La solution équivalente à (1.14) s'obtient sous une forme récursive :

$$\tilde{\mathbf{h}}_N(n) = \tilde{\mathbf{h}}_N(n-1) - \mathbf{K}_N(n) \mathbf{e}(n) \quad (1.17.b)$$

où ;

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}(n) - \tilde{\mathbf{h}}_N^T(n) \mathbf{X}_N(n)$$

$$\mathbf{K}_N(n) = \begin{bmatrix} k_N^1(n) \\ k_N^2(n) \\ \cdot \\ \cdot \\ k_N^N(n) \end{bmatrix} = -\mathbf{R}_N^{-1}(n) \mathbf{X}_N(n) \quad (1.18)$$

Le vecteur $\mathbf{K}_N(n)$ est appelé gain de Kalman. La formule (1.18) nécessite l'inversion d'une matrice carrée d'ordre N dont le coût de calcul est de l'ordre N^3 opérations arithmétiques par itération.

L'algorithme des moindres carrés récursifs (RLS: Réursive Least Square) résout ce problème avec un nombre d'opérations arithmétiques proportionnel à N^2 .

En utilisant, pour $\mathbf{R}_N(n)$, Le lemme d'inversion d'une matrice [7], on obtient le lemme suivant:

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{V}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}}$$

avec

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{R}_N(n-1) \quad ; \quad \mathbf{B} = \mathbf{V} = \mathbf{X}_N(n)$$

On obtient,

$$\mathbf{R}_N^{-1}(n) = \lambda^{-1} \left[\mathbf{R}_N^{-1}(n-1) - \frac{\mathbf{R}_N^{-1}(n-1)(\mathbf{X}_N(n))(\mathbf{X}_N(n))^T \mathbf{R}_N^{-1}(n-1)}{\lambda + (\mathbf{X}_N(n))^T \mathbf{R}_N^{-1}(n-1)\mathbf{X}_N(n)} \right] \quad (1.19)$$

Cet algorithme, appelé « algorithme des moindres carrés récurrents (RLS) », permet de trouver itérativement la solution qui minimise le critère (1.10). Cette solution nécessite un coût en opération arithmétique proportionnel à N^2 . La récapitulation de cet algorithme est donnée par le tableau ci-dessous :

Tableau 1.3 : Algorithme RLS mono-voie.

Valeurs initiales :	$\mathbf{R}_N^{-1}(0) = \frac{1}{\delta} \mathbf{I}_N$, où δ est un petit nombre positif
	$\tilde{\mathbf{h}}_N(0) = 0$
Début	$\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}(n) - \tilde{\mathbf{h}}_N^T(n-1)\mathbf{X}_N(n)$ $\mathbf{R}_N^{-1}(n) = \lambda^{-1} \left[\mathbf{R}_N^{-1}(n-1) - \frac{\mathbf{R}_N^{-1}(n-1)(\mathbf{X}_N(n))(\mathbf{X}_N(n))^T \mathbf{R}_N^{-1}(n-1)}{\lambda + (\mathbf{X}_N(n))^T \mathbf{R}_N^{-1}(n-1)\mathbf{X}_N(n)} \right]$ $\tilde{\mathbf{h}}_N(n) = \tilde{\mathbf{h}}_N(n-1) + \mathbf{R}_N^{-1}(n)\mathbf{X}_N(n)\mathbf{e}(n)$
Fin	

1.6 .5. Algorithmes des moindres carrés transversaux rapides (FTF)

Dans ce paragraphe nous décrivons brièvement l'essentiel des équations qui permettent d'obtenir les algorithmes des moindres carrés transversaux rapides à oubli exponentiel pour le cas de la fenêtre antérieure, faisant intervenir des erreurs a posteriori [8]. La minimisation de la fonction coût (définie comme l'énergie de l'erreur) donnée par (1.10) conduit à la solution (1.14).

La relation de récurrence des coefficients du filtre est donnée par $\tilde{\mathbf{h}}_N(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N(n) + \mathbf{R}_N^{-1}(n+1)\mathbf{X}_N(n+1)\mathbf{e}(n+1)$. Cette dernière relation peut se mettre sous une autre forme de récurrence. Au temps $n+1$, la définition des coefficients donne:

$$\left[\lambda \mathbf{R}_N(n) + \mathbf{X}(n+1)(\mathbf{X}(n+1))^T \right] \tilde{\mathbf{h}}_N(n+1) = \lambda \mathbf{r}_N(n) + \mathbf{X}(n+1)\mathbf{y}(n+1) \quad (1.20)$$

Après quelques manipulations on obtient :

$$\tilde{\mathbf{h}}_N(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N(n) + \lambda \mathbf{R}_N^{-1}(n+1) \mathbf{X}_N(n+1) \varepsilon(n+1) \quad (1.21)$$

Où ,

$$\varepsilon(n+1) = \mathbf{y}(n+1) - (\tilde{\mathbf{h}}_N(n))^T \mathbf{X}_N(n+1) \quad (1.22)$$

Dans ces expressions, la matrice $\mathbf{R}_N^{-1}(n+1)$ peut être mise à jour par la récurrence donnée par (1.15.b) et on retrouve l'expression de (1.19). Donc, le gain d'adaptation $\mathbf{K}_N(n+1)$ est défini par:

$$\mathbf{K}_N(n+1) = \mathbf{R}_N^{-1}(n+1) \mathbf{X}_N(n+1) \quad (1.23)$$

On substitue (1.19) dans (1.23) et après simplification, on obtient:

$$\mathbf{K}_N(n+1) = \frac{\mathbf{R}_N^{-1}(n) \mathbf{X}_N(n+1)}{\lambda + (\mathbf{X}_N(n+1))^T \mathbf{R}_N^{-1}(n) \mathbf{X}_N(n+1)} \quad (1.24)$$

Les relations de récurrence (1.19) et celle du filtre deviennent:

$$\mathbf{R}_N^{-1}(n+1) = \lambda^{-1} \mathbf{R}_N^{-1}(n) - \lambda^{-1} \mathbf{K}_N(n+1) (\mathbf{X}_N(n+1))^T \mathbf{R}_N^{-1}(n) \quad (1.25)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_N(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N(n) + \mathbf{K}_N(n+1) \mathbf{e}(n+1) \quad (1.26)$$

L'équation (1.17b) représente une solution récursive avec une erreur de filtrage à priori (erreur effectuée avant la mise à jour du filtre avec la nouvelle donnée $\mathbf{x}_N(n+1)$). Une autre forme du vecteur $\tilde{\mathbf{h}}_N(n)$ équivalente à (1.17b), utilisant une erreur de filtrage *a posteriori* (erreur calculée après que le filtre a été mis à jour) et un gain d'adaptation appelé gain de Kalman dual, est décrite par (1.26). Les expressions ci-dessus permettent le renouvellement des coefficients du filtre de manière récursive sans recours à l'inversion matricielle. En utilisant la prédiction, on peut même éviter les matrices et réduire plus la complexité de calcul. Les relations entre les variables de moindres carrés sont données dans la référence [7] [8] [9]. L'algorithme RLS rapide basé sur les erreurs *a priori* est résumé dans le tableau 1.4.

Tableau 1.4: L'algorithme RLS rapide basé sur les erreurs *a priori*.

Calcul du gain d'adaptation:	
$\mathbf{e}_a(n+1) = x(n+1) - \mathbf{a}_N^T(n) \mathbf{X}_N(n)$	$\mathbf{a}_N(n+1) = \mathbf{a}_N(n) + \mathbf{K}_N(n) \mathbf{e}_a(n)$
$\bar{\mathbf{e}}_a(n+1) = x(n+1) - \mathbf{a}_N^T(n+1) \mathbf{X}_N(n)$	$\mathbf{J}_N^a(n+1) = \lambda \mathbf{J}_N^a(n) + \mathbf{e}_a(n+1) \bar{\mathbf{e}}_a(n+1)$
$\mathbf{k}_1(n+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{k}(n) \end{bmatrix} + \frac{\bar{\mathbf{e}}_a(n+1)}{\mathbf{J}_N^a(n+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{a}(n+1) \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} \mathbf{k}_t(n+1) \\ m(n+1) \end{bmatrix}$	
$\mathbf{e}_r(n+1) = x(n+1-n) - \mathbf{b}_N^T(n) \mathbf{X}_N(n+1)$	
$\mathbf{k}(n+1) = \frac{\mathbf{k}_t(n+1) + m(n+1) \mathbf{b}(n+1)}{1 - m(n+1) \mathbf{e}_r(n+1)}$	
$\mathbf{b}_N(n+1) = \mathbf{b}_N(n) + \mathbf{K}_N(n+1) \mathbf{e}_r(n+1)$	
Filtrage adaptatif:	
$\mathbf{e}(n+1) = \mathbf{y}(n+1) - \left(\tilde{\mathbf{h}}_N(n) \right)^T \mathbf{X}_N(n+1)$	
$\tilde{\mathbf{h}}_N(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N(n) + \mathbf{K}_N(n+1) \mathbf{e}(n+1)$	

L'initialisation de cet algorithme est la suivante :

$$\mathbf{a}(0) = \mathbf{b}(0) = \mathbf{k}(0) = \mathbf{0}_{L \times 1} \text{ et } \mathbf{J}_N^a(0) = \text{constante positive}$$

La mise à jour du gain d'adaptation nécessite environ $8L$ multiplications et $2L$ multiplications dans la partie filtrage [7] [8] [9].

1.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons détaillé le principe de l'annulation d'écho acoustique par des algorithmes de filtrage adaptatif. Nous avons présentés d'une manière générale quelques algorithmes de filtrage adaptatif qui sont largement utilisés dans le domaine de l'annulation d'écho acoustique. Nous avons conclu que certains algorithmes de filtrage adaptatifs convergent mieux avec les signaux corrélés mais ils ont une complexité de calcul plus élevée. Nous avons constaté que la famille d'algorithme du gradient stochastique est un bon compromis entre ces différentes familles d'algorithmes dédiées pour les applications d'annulation d'écho acoustique.

CHAPITRE 2

ETUDE DE L'ANNULATION STERÉOPHONIQUE DE L'ECHO ACOUSTIQUE

2.1. Introduction

Dans les systèmes de téléconférence actuels, on a besoin des annuleurs stéréophoniques d'écho acoustique (AEAS), qui réduisent l'écho qui résulte du couplage acoustique entre le haut parleur et le microphone [18]. L'AEA identifie le chemin d'écho et le réduit simultanément au moyen d'un filtrage adaptatif. Si le système de conférence a des canaux audio doubles dans chaque direction, l'AEA classique monophonique ne fournira pas la suppression suffisante de l'écho et des annuleurs d'écho acoustique stéréophonique plus sophistiqués sont requis. Dans ce cas l'annulation d'écho devient plus complexe car il s'agit d'identifier la fonction de transfert d'un système multi entrées/sorties. Cette identification est rendue délicate par la corrélation existante entre les signaux d'entrées (signaux captés par les microphones dans la salle distante) [18].

Le présent chapitre concerne l'annulation stéréophonique d'écho. Dans la deuxième section de ce chapitre une analyse de la structure stéréophonique est rappelée. Une formulation du problème et un résumé des méthodes pour réduire la corrélation entre les canaux sont donnés dans la section 2.3. Enfin, les propriétés importantes de certains algorithmes adaptatifs stéréophoniques sont exposées et examinées dans le paragraphe 2.4

2.2. La stéréophonie

Dans un système de conférence stéréophonique, une information audio spatiale est aussi transmise. L'auditeur recevra un son réel et pourra aussi reconnaître de façon auditive le locuteur à l'autre extrémité. Les études ont montré que ceci améliore la perception audio lorsque la parole de plusieurs locuteurs se recouvre [10]. Cependant, il y a quatre chemins

d'écho acoustiques à identifier, deux pour chaque microphone. Ceci causera non seulement la complexité croissante de calcul mais également un nouveau problème fondamental de la solution, comme nous allons le voir plus loin dans ce document.

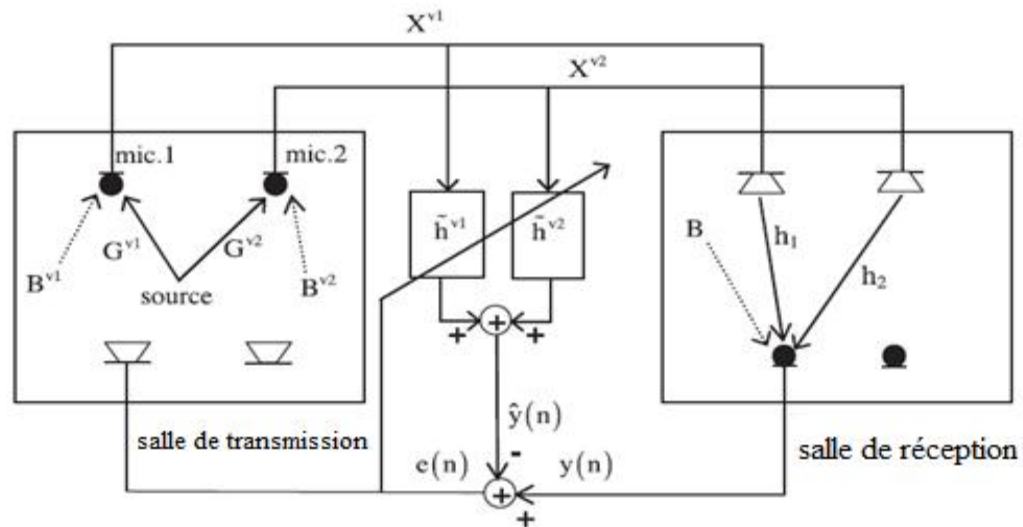


Figure 2.1 : Schéma de principe d'annulation d'écho stéréophonique [39].

Quatre annuleurs d'écho acoustique monophonique, implémentés dans le cas de la stéréo, non seulement devront suivre les changements des chemins d'écho dans la salle de réception mais également dans la salle de transmission. Par exemple, l'annuleur doit converger si un locuteur s'arrête de parler alors qu'un autre commence dans un emplacement différent dans la salle de transmission. Il n'y a aucun algorithme adaptatif qui peut suivre suffisamment vite un tel changement et par conséquent cette idée mène à une mauvaise suppression d'écho. Ainsi, une généralisation de l'AEA monophonique dans le cas de la stéréo n'aboutit pas à la performance satisfaisante [18].

Le problème fondamental est que les deux canaux portent habituellement des signaux liés linéairement qui rendent alternativement, les équations normales (à résoudre par l'algorithme adaptatif), singulières. Cela implique qu'il y a un nombre infini de solutions aux équations (pas de solution unique). Les vraies solutions dépendent de la salle de transmission [18].

La théorie expliquant le problème de l'ASEA a été décrite en premier dans un ancien article [19] et plus tard dans [20] [3]. Dans [3], il a été montré que la seule solution du problème non-unique, doit réduire la corrélation entre les signaux stéréo de la salle de transmission.

Récemment l'attention a été concentré sur l'examen des autres méthodes qui diminuent la corrélation entre les canaux afin d'obtenir la bonne estimation des chemins d'écho, [14], [15], [16], [17]. Le problème principal est comment réduire suffisamment la corrélation sans affecter la perception de la stéréo et la qualité du son [39]. Même si les méthodes ci-dessus peuvent améliorer la capacité de l'ASEA à trouver la vraie solution, les équations normales à résoudre sont encore mal conditionnées [39].

2.3. Les problèmes et les solutions de l'annulation d'écho acoustique stéréophonique

Dans l'annulation d'écho acoustique stéréophonique, il y a quatre chemins indépendants de transmission entre les deux microphones et les deux haut- parleurs, comme le montre la figure 2.1. Les réponses impulsionnelles des quatre chemins d'écho doivent être estimées par l'annuleur d'écho. Habituellement, les deux signaux de la salle de transmission $\mathbf{X}_N^{v1}(n)$ et $\mathbf{X}_N^{v2}(n)$, émanent de la même source, et par conséquent sont extrêmement corrélés. A cause de ceci, il est difficile d'estimer les réponses impulsionnelles, \mathbf{h}_N^{v1} et \mathbf{h}_N^{v2} .

2.3.1. Formulation du Problème

Supposons que les signaux du microphone de la salle de transmission sont, selon la figure 2.1, donnés par les deux relations suivantes [4] :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_N^{v1}(n) &= (\mathbf{G}_M^{v1}(n))^T \mathbf{X}(n) \\ \mathbf{X}_N^{v2}(n) &= (\mathbf{G}_M^{v2}(n))^T \mathbf{X}(n)\end{aligned}\tag{2.1}$$

où

$\mathbf{X}(n)$, représente le signal source dans la salle de transmission.

$\mathbf{G}_M^{v1}(n)$ et $\mathbf{G}_M^{v2}(n)$, sont les chemins de l'écho dans la salle de transmission de longueur M, donnés par :

$$\mathbf{G}_M^{v1} = [g_1^{v1}, g_2^{v1}, \dots, g_M^{v1}]^T, \quad \mathbf{G}_M^{v2} = [g_1^{v2}, g_2^{v2}, \dots, g_M^{v2}]^T$$

Pour simplifier, nous étudierons seulement un chemin de retour de la salle de réception à la salle de transmission mais les remarques semblables seront valides pour l'autre chemin. L'écho résiduel pour ce canal, $\mathbf{e}(n)$ après l'annulation d'écho est [4] :

$$\mathbf{e}(n) = y(n) - (\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n))^T \mathbf{X}_L^{v1}(n) - (\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n))^T \mathbf{X}_L^{v2}(n) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y}(n) = (\mathbf{h}_N^{v1}(n))^T \mathbf{X}_N^{v1}(n) + (\mathbf{h}_N^{v2}(n))^T \mathbf{X}_N^{v2}(n) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{h}_N^{v1} = [h_1^{v1}, h_2^{v1}, \dots, h_N^{v1}]^T, \quad \mathbf{h}_N^{v2} = [h_1^{v2}, h_2^{v2}, \dots, h_N^{v2}]^T \quad (2.4)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1} = [\tilde{h}_1^{v1}, \tilde{h}_2^{v1}, \dots, \tilde{h}_L^{v1}]^T, \quad \tilde{\mathbf{h}}_L^{v2} = [\tilde{h}_1^{v2}, \tilde{h}_2^{v2}, \dots, \tilde{h}_L^{v2}]^T \quad (2.5)$$

\mathbf{h}_N^{v1} et \mathbf{h}_N^{v2} , sont les vraies réponses impulsionnelles de la salle de réception de longueur N.

$\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}$, sont les réponses impulsionnelles estimées de longueur L.

$$\mathbf{X}_N^{v1}(n) = [x_1(n), x_1(n-1), x_1(n-2), \dots, x_1(n-N+1)]^T$$

$\mathbf{X}_N^{v2}(n) = [x_2(n), x_2(n-1), x_2(n-2), \dots, x_2(n-N+1)]^T$, sont les vecteurs des échantillons du signal de sortie des microphones dans la même salle (salle de transmission).

Le critère des moindres carrées est donné la relation suivante :

$$J(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} |e(i)|^2 \quad (2.6)$$

La minimisation de (2.6) permet de résoudre le système des équations linéaires [18] et la solution trouvée est la suivante [14]:

$$\mathbf{R}_L(n) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n) \\ \tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n) \end{bmatrix} = \mathbf{r}_L(n) \quad (2.7)$$

où $\mathbf{R}_N(n)$ est la matrice de corrélation qui est donnée par l'expression suivante [7]:

$$\mathbf{R}_N(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_N^{v1}(i) \\ \mathbf{X}_N^{v2}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_N^{v1}(i))^T & (\mathbf{X}_N^{v2}(i))^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{X^{v1}X^{v1}}(n) & \mathbf{R}_{X^{v1}X^{v2}}(n) \\ \mathbf{R}_{X^{v2}X^{v1}}(n) & \mathbf{R}_{X^{v2}X^{v2}}(n) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Nous notons que le paramètre $\mathbf{r}_N(n)$, représente le vecteur d'inter-corrélation estimé entre les signaux d'entrée et de sortie du signal dans la salle locale, est donné par ce qui suit :

$$\mathbf{r}_N(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} y(i) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_N^{v1}(i) \\ \mathbf{X}_N^{v2}(i) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Le problème fondamental de l'annulation d'écho acoustique stéréophonique est le conditionnement de cette matrice. Si nous définissons l'erreur de désajustement (mis-match) comme étant :

$$\varepsilon(n) = \frac{\|\mathbf{h} - \tilde{\mathbf{h}}(n)\|^2}{\|\mathbf{h}\|^2} \quad (2.10)$$

avec

$$\mathbf{h}(n) = \left[(\mathbf{h}_N^{v1}(n))^T \quad (\mathbf{h}_N^{v2}(n))^T \right]^T \quad (2.11)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}(n) = \left[(\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n))^T \quad (\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n))^T \right]^T \quad (2.12)$$

Il peut être montré [13] que :

$$L \geq M \Rightarrow \mathbf{R}_N(n) \text{ , est singulière } \forall n .$$

$$L < M \Rightarrow \mathbf{R}_N(n) \text{ , est mal conditionnée} \quad (2.13)$$

$$L \geq N \Rightarrow \varepsilon(n) = 0, n \geq N$$

$$L < N \Rightarrow \varepsilon(n) \neq 0, \forall n$$

Où, les deux dernières conditions dans (2.13) exigent que $\mathbf{R}_N(n)$ soit non singulière. L'équation (2.13) est valide dans la situation où aucun bruit n'est ajouté au signal du microphone $\mathbf{y}(n)$, voyons la figure 2.1 [18].

Les queues des réponses impulsionnelles dans les salles de transmission et de réception jouent un rôle important. Grâce aux queues des réponses impulsionnelles dans la salle de transmission, nous pouvons obtenir une solution unique à l'équation normale [3]. Cependant, à cause des queues des réponses impulsionnelles dans la salle de réception, nous avons un grand désajustement (erreur quadratique relative). Nous supposons que $L < M$ et $L < N$ depuis que le cas réel pourra être traité. Théoriquement M et N sont infiniment longs, mais le temps de réverbération normale dans une salle de bureau est environ 0.3 s [18].

Il a été montré dans [18] qu'il y a deux moyens de diminuer le désajustement. La première méthode doit utiliser des filtres adaptatifs plus longs, mais de façon proportionnée. L'algorithme adaptatif devient très lent en termes de vitesse de convergence et plus cher à mettre en application en termes : espace mémoire, complexité arithmétique, etc. En outre la solution n'est pas robuste dans le sens qu'elle est mal conditionnée et sensible aux changements dans la salle de transmission. Une seconde voie, l'approche pratique, est de decorréler partiellement (ou complètement) les deux signaux d'entrée. La difficulté est de decorréler les signaux d'entrée sans dégrader la qualité du signal [18].

2.3.2 Méthodes de decorrélation

La méthode la plus efficace pour réduire la corrélation entre les deux canaux doit probablement ajouter du bruit aléatoire indépendant à chaque signal $\mathbf{X}_N^{v1}(n)$ et $\mathbf{X}_N^{v2}(n)$ [3]. Afin de réduire suffisamment la corrélation, le niveau du bruit doit être supérieur au niveau maximum du bruit non perceptible [18].

Pour réduire la distorsion perçue il serait préférable que le signal decorréolé soit semblable au signal original. Mais le problème principal dans un annuleur stéréophonique d'écho acoustique (ASEA) est que les deux canaux sont linéairement liés, c.à.d. en ajoutant un

signal qui est linéairement lié au signal original ne réduira pas la corrélation entre les deux canaux [18].

Il a été suggéré dans [3] qu'on devrait ajouter un signal source traité, non linéaire au signal source lui-même. Il était trouvé qu'en ajoutant un signal redressé mono-alternance, au signal original, a bien fonctionné en ayant une structure simple et de faible complexité [12], [22], [24]. Ceci peut être indiqué comme :

$$x_k^{v1}(n) = x_k^{v1}(n) + \alpha \frac{x_k^{v1}(n) + |x_k^{v1}(n)|}{2} \quad (2.15)$$

$$x_k^{v2}(n) = x_k^{v2}(n) + \alpha \frac{x_k^{v2}(n) + |x_k^{v2}(n)|}{2} \quad (2.16)$$

Où $k=1, \dots, N$ et α détermine la quantité de distorsion ajoutée. Il a été trouvé que lorsque α varie entre 0.3 et 0.5, la corrélation du canal diminue d'une façon significative, et que la distorsion n'est guère audible dans l'environnement d'un bureau [16]. La perception de la stéréo n'est pas touchée. Certains codeurs audio, installés dans le chemin de transmission entre les salles de transmission et de réception, permettent la decorrélation des canaux (le bruit et les interférences perturbant le canal peuvent être modélisés comme un *bruit additif blanc gaussien* de puissance mono-latérale).

Le codeur peut decorréler le signal parce que le bruit de la quantification, non percevable, est ajouté au signal source. Le degré de decorrélation d'un codeur dépend des méthodes utilisées pour la compression. Par exemple, les codeurs avancés [18] de la stéréo fonctionnent habituellement dans un mode commun, où deux canaux corrélés sont codés conjointement. Ceci peut vraiment augmenter la corrélation entre les canaux, et ne devrait pas être utilisé si le codeur a aussi servi pour decorrélateur [18]. Dans [16], les auteurs ont citées six transformations non linéaires qui peuvent être utilisées pour la décorélation des deux canaux.

Les codeurs audio traditionnels réalisent la meilleure qualité audio pour un rapport donné de compression mieux que les codeurs de parole quand le signal source contient la musique. Pour les signaux de parole pure, il est préférable d'utiliser des codeurs de la parole.

2.3.3. Les structures utilisées pour l'annulation d'écho acoustique stéréophonique

Dans cette section, toutes les parties essentielles d'un ASEA mis en application en temps réel sont présentées. Premièrement, on a besoin qu'un decorrélateur réduise la corrélation entre les deux signaux de la salle de transmission $\mathbf{X}_N^{v1}(n)$ et $\mathbf{X}_N^{v2}(n)$. Cette tâche est généralement réalisée par un redresseur mono-alternance comme présenté dans la section précédente.

Même après la decorrélation, trouver les chemins exacts de l'écho reste encore un problème mal conditionné. L'algorithme RLS deux canaux avait montré une grande capacité dans la majorité des applications de l'ASEA [18]. Par conséquent son choix est primordial comme filtre adaptatif. Cet algorithme a un taux de convergence très rapide pour les signaux ayant une grande étendue de valeur propre de la matrice de corrélation. Les deux principaux inconvénients de l'algorithme RLS sont : La complexité de calcul élevée et les problèmes de stabilité pour les signaux non stationnaires, comme la parole.

La stabilité est améliorée en contrôlant l'état de l'algorithme RLS et en réinitialisant ses paramètres quand ils deviennent instables. Dans la section suivante, une structure à deux voies, des algorithmes fondamentaux, est présentée [22,24].

2.4. Annulation stéréophonique d'écho acoustique

L'optimisation du critère (2.6) dans l'annulation d'écho acoustique stéréophonique est réalisée avec plusieurs filtres adaptatifs à deux canaux. Alors, Il y a une différence majeure dans la performance en fonction de l'algorithme choisi. Dans ce qui suit, on présente quelque choix d'algorithmes. Les algorithmes adaptatifs standards sont le NLMS, l'APA, et le RLS. Pour l'AEAS, des versions rapides des deux derniers ont été utilisées à cause du nombre élevé de paramètres à ajuster. L'inter-corrélation entre les deux canaux est très importante, donc il faut en tenir compte dans l'implémentation d'un ASEA [11]. Dans le cas stéréophonique, les algorithmes qui ne tiennent pas compte de la corrélation entre les canaux, comme le LMS standard et le NLMS, convergent lentement vers la vraie solution.

La plupart des algorithmes robustes comme l'APA (l'algorithme de projection affine) ou le RLS (Algorithme adaptatif des moindres carrés récurrents), qui sont moins

influencés par le conditionnement de la matrice de corrélation, conviennent mieux au cas stéréo. Dans les années récentes, plusieurs versions d'algorithmes adaptatifs à deux canaux et multi-canaux ont été proposées [14], [15], [16], [19], [23]. Quelques algorithmes adaptatifs, qui exploitent la corrélation entre les deux canaux dans l'ASEA, ont été utilisés. En plus de la version standard NLMS à deux canaux, autres algorithmes, tels que le RLS (algorithme des moindres carrés récursifs) et le FRLS (algorithme des moindres carrés récursifs rapides) à deux canaux, sont utilisés. L'algorithme FRLS à deux canaux a un taux de convergence très rapide mais des inconvénients comme le problème d'instabilité et la haute complexité de calcul. Dans cette section, on présente quelques différents types d'algorithmes utilisés dans l'annulation d'écho stéréophonique.

2.4.1 L'algorithme LMS à deux canaux

Une généralisation directe du LMS monocanal (simple) au cas de la stéréophonie (deux canaux) selon la structure donnée par la figure.2.1 est présentée ci-dessous. Dans une situation où les deux signaux d'excitation $\mathbf{X}_N^{v1}(n)$ et $\mathbf{X}_N^{v2}(n)$, sont statistiquement indépendants, cette version est en réalité équivalente à un double filtre LMS (mono canal). Les équations de mise à jour des deux filtres $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ sont :

$$\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n) + \mu_1 e(n) \mathbf{X}^{v1}(n) \quad (2.17)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n) + \mu_2 e(n) \mathbf{X}^{v2}(n) \quad (2.18)$$

avec μ_1, μ_2 sont les pas des filtres adaptatifs et $e(n)$ est l'erreur du filtrage donnée par (2.2). $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$, sont les réponses impulsionnelles estimées de longueur L données par (2.5).

On voit que cet algorithme est simple dans le cas monophonique. Dans le cas où, $\mathbf{X}_N^{v1}(n)$ et $\mathbf{X}_N^{v2}(n)$, ne sont pas statistiquement indépendants, le LMS et le NLMS standards sont développés en tenant compte de la corrélation entre les canaux. La méthode dite « descente de gradient » est donnée par la relation récursive suivante [24] :

$$\tilde{\mathbf{h}}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}(n) + \frac{\mu}{2} (-\nabla_{\tilde{\mathbf{h}}} \mathbf{J}) \quad (2.19)$$

Où, $(\nabla_{\tilde{\mathbf{h}}}\mathbf{J})$ est le gradient par rapport à $\tilde{\mathbf{h}}(n)$ et \mathbf{J} est le critère de l'erreur quadratique moyenne [22,24] :

$$\mathbf{J} = E \left\{ \left| \mathbf{y}(n) - (\mathbf{x}(n))^T \tilde{\mathbf{h}}(n) \right|^2 \right\} \quad (2.20)$$

Après le calcul du gradient on obtient :

$$(\nabla_{\tilde{\mathbf{h}}}\mathbf{J}) = \left[(\nabla_{\tilde{\mathbf{h}}_1}\mathbf{J})^T \quad (\nabla_{\tilde{\mathbf{h}}_2}\mathbf{J})^T \right]^T = -2E \left\{ \mathbf{x}(n) \left[\mathbf{y}(n) - (\mathbf{x}(n))^T \tilde{\mathbf{h}}(n) \right] \right\} \quad (2.21)$$

$$= -2\mathbf{r}(n) + 2\mathbf{R}(n)\tilde{\mathbf{h}}(n) \quad (2.22)$$

Avec ;

$$\mathbf{r}(n) = E \{ \mathbf{x}(n)\mathbf{y}(n) \} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}(n) = E \{ (\mathbf{X}(n))^T \mathbf{X}(n) \}; \quad \text{tel que } \mathbf{r}(n) = [\mathbf{r}_1(n); \mathbf{r}_1(n)] \quad \text{et} \quad \mathbf{X}(n) = [\mathbf{X}_1(n); \mathbf{X}_2(n)]$$

En approximant le gradient dans (2.22) par sa valeur instantanée de (2.19), on obtient le LMS classique pour deux canaux :

$$\tilde{\mathbf{h}}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}(n) + \mu \mathbf{X}(n)\mathbf{e}(n) \quad (2.23)$$

Où, $\tilde{\mathbf{h}}(n)$, est donnée par (2.12) et $\mathbf{e}(n)$ par :

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}(n) - (\tilde{\mathbf{h}}(n))^T \mathbf{X}(n) \quad (2.24)$$

En regardant (2.21) de près, il apparait que le gradient pour $\tilde{\mathbf{h}}_1(n)$ est affecté par les coefficients $\tilde{\mathbf{h}}_2(n)$. Pour calculer la dérivée dans (2.21), il faut tenir compte de cette dépendance entre les deux filtres.

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{h}}_1}\mathbf{J} = -2E \left\{ \mathbf{X}_N^{v1}(n)\mathbf{e}(n) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{h}}_1} \left[\tilde{\mathbf{h}}_2^T(n)\mathbf{X}_N^{v2}(n) \right] \mathbf{e}(n) \right\} \quad (2.25)$$

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{h}}_2}\mathbf{J} = -2E \left\{ \mathbf{X}_N^{v2}(n)\mathbf{e}(n) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{h}}_2} \left[\tilde{\mathbf{h}}_1^T(n)\mathbf{X}_N^{v1}(n) \right] \mathbf{e}(n) \right\} \quad (2.26)$$

De (2.22), on voit qu'à l'état d'équilibre, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{h}}_2(n)}{\partial \tilde{\mathbf{h}}_1(n)} = -\mathbf{R}_{X^{v2}X^{v2}}^{-1}(n)\mathbf{R}_{X^{v2}X^{v1}}(n) \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{h}}_1(n)}{\partial \tilde{\mathbf{h}}_2(n)} = -\mathbf{R}_{X^{v1}X^{v1}}^{-1}(n)\mathbf{R}_{X^{v1}X^{v2}}(n) \quad (2.28)$$

Evaluons (2.25) (resp. (2.26)) en utilisant (2.27) (resp. (2.28)), il a été trouvé que le gradient par rapport à $\tilde{\mathbf{h}}_1(n)$ (resp. $\tilde{\mathbf{h}}_2(n)$) est indépendant des coefficients $\tilde{\mathbf{h}}_2(n)$ (resp. $\tilde{\mathbf{h}}_1(n)$). Après remplacement du gradient, le LMS à deux canaux est :

$$\tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n) + \mu \mathbf{r}_1(n) \mathbf{e}(n) \quad (2.29)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n) + \mu \mathbf{r}_2(n) \mathbf{e}(n) \quad (2.30)$$

Où, $\mathbf{r}_1(n)$ et $\mathbf{r}_2(n)$ expriment le processus d'inter-corrélation entre $\mathbf{X}_N^{v1}(n)$ et $\mathbf{X}_N^{v2}(n)$ (représentent les erreurs de prédiction de Wiener entre les deux canaux [22], dont les équations sont données par :

$$\mathbf{r}_1(n) = \mathbf{X}_N^{v1}(n) - \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v1}\mathbf{X}^{v2}}(n) \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v2}\mathbf{X}^{v2}}^{-1}(n) \mathbf{X}_N^{v2}(n) \quad (2.31)$$

$$\mathbf{r}_2(n) = \mathbf{X}_N^{v2}(n) - \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v2}\mathbf{X}^{v1}}(n) \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v1}\mathbf{X}^{v1}}^{-1}(n) \mathbf{X}_N^{v1}(n) \quad (2.32)$$

La stabilité est assurée [22] si:

$$0 < \mu < \frac{2}{\mathbf{r}_1^T(n) \mathbf{r}_1(n) + \mathbf{r}_2^T(n) \mathbf{r}_2(n)} \quad (2.33)$$

Remarque : Cet algorithme peut être obtenu du RLS (2.42) et (2.43) en utilisant la diagonalisation (2.39) pour les différentes matrices de corrélation (temporelle et spatiale). Cette approximation mène à l'algorithme Extended LMS(ELMS) à deux canaux qui est résumé au tableau 2.1.

2.4.2 L'algorithme NLMS à deux canaux

Depuis que le premier annuleur d'écho a été présenté en 1967 [11], l'algorithme NLMS a été l'algorithme adaptatif le plus communément utilisé. La performance de ce dernier est suffisante dans la plupart des annuleurs d'écho monophonique. Il se caractérise par le comportement robuste et sa structure permet une mise en œuvre simple.

Tableau 2.1 : l'algorithme ELMS à deux canaux [24]

<p>Valeur initiale : $\tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(0) = [0, 0, \dots, 0]^T$ $\tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(0) = [0, 0, \dots, 0]^T$</p> <p>début</p> <div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\mathbf{e}(n) = y(n) - (\tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n))^T \mathbf{X}_N^{v1}(n) - (\tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n))^T \mathbf{X}_N^{v2}(n)$ $\tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n) + \mu \mathbf{r}_1(n) \mathbf{e}(n)$ $\tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n) + \mu \mathbf{r}_2(n) \mathbf{e}(n)$ $\mathbf{r}_1(n) = \mathbf{X}_N^{v1}(n) - \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v1}\mathbf{X}^{v2}}(n) \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v2}\mathbf{X}^{v2}}^{-1}(n) \mathbf{X}_N^{v2}(n)$ $\mathbf{r}_2(n) = \mathbf{X}_N^{v2}(n) - \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v2}\mathbf{X}^{v1}}(n) \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v1}\mathbf{X}^{v1}}^{-1}(n) \mathbf{X}_N^{v1}(n)$ </div> <p>fin</p>
--

Cependant, il a été montré que le NLMS a une vitesse de convergence trop faible dans les anneaux d'écho stéréophoniques. Néanmoins, il est souvent utilisé comme l'algorithme de base pour les autres algorithmes.

Dans le cas où les deux signaux d'excitation $\mathbf{X}_N^{v1}(n)$ et $\mathbf{X}_N^{v2}(n)$, sont statistiquement indépendants, le NLMS standard à deux canaux se réduit à un double filtre NLMS (mono canal). Les équations de mise à jour des deux filtres $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ sont [18 :p24] :

$$\tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n) + \frac{\mu \mathbf{X}_N^{v1}(n) \mathbf{e}(n)}{(\mathbf{X}_N^{v1}(n))^T \mathbf{X}_N^{v1}(n) + (\mathbf{X}_N^{v2}(n))^T \mathbf{X}_N^{v2}(n) + \delta_{NLMS}} \quad (2.34)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n) + \frac{\mu \mathbf{X}_N^{v2}(n) \mathbf{e}(n)}{(\mathbf{X}_N^{v1}(n))^T \mathbf{X}_N^{v1}(n) + (\mathbf{X}_N^{v2}(n))^T \mathbf{X}_N^{v2}(n) + \delta_{NLMS}} \quad (2.35)$$

Où ; le terme δ_{NLMS} représente un petit scalaire, pour éviter la division par zéro. $\mathbf{e}(n)$ représente l'écho résiduel après l'annulation d'écho, et il est donné par l'équation (2.2).

Dans le cas où, les deux signaux d'entrée $\mathbf{X}_N^{v1}(n)$ et $\mathbf{X}_N^{v2}(n)$, sont linéairement liés, le NLMS est déduit du LMS (équation (2.29) et (2.30)) comme suit :

$$\tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n) + \frac{\mu \mathbf{r}_1(n) \mathbf{e}(n)}{(\mathbf{X}_N^{v1}(n))^T \mathbf{X}_N^{v1}(n) + (\mathbf{X}_N^{v2}(n))^T \mathbf{X}_N^{v2}(n) + \delta_{NLMS}} \quad (2.36)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n) + \frac{\mu \mathbf{r}_2(n) \mathbf{e}(n)}{(\mathbf{X}_N^{v1}(n))^T \mathbf{X}_N^{v1}(n) + (\mathbf{X}_N^{v2}(n))^T \mathbf{X}_N^{v2}(n) + \delta_{\text{NLMS}}} \quad (2.37)$$

Où, $\mathbf{r}_1(n)$ et $\mathbf{r}_2(n)$ sont donnés par (2.31) et (2.32).

L'inconvénient principal de cet algorithme est le faible taux de convergence pour, les signaux ayant une grande matrice de corrélation (une étendue de valeurs propres) [15], comme les signaux de parole et les canaux corrélés. Pour les filtres adaptatifs longs, nécessaires à une AEAS, la complexité de calcul est significative. Le nombre de multiplication estimé par échantillon, nécessaire pour les quatre filtres adaptatifs schématisés par la figure. 2.1, est $8L$ pour les signaux réels et $32L$ pour des signaux complexes. La complexité de calcul peut être réduite en utilisant des filtres en sous bandes mais ceci augmentera le retard de transmission. Le tableau 2.2 résume cet algorithme.

Tableau 2.2 : l'algorithme ENLMS à deux canaux [24]

<p>Valeur initiale : $\tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(0) = [0, 0, \dots, 0]^T$, $\tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(0) = [0, 0, \dots, 0]^T$, $\delta_{\text{NLMS}} =$ petit scalaire</p> <p>début</p> $\mathbf{e}(n) = y(n) - (\tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n))^T \mathbf{X}_N^{v1}(n) - (\tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n))^T \mathbf{X}_N^{v2}(n)$ $\tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n) + \frac{\mu \mathbf{r}_1(n) \mathbf{e}(n)}{(\mathbf{X}_N^{v1}(n))^T \mathbf{X}_N^{v1}(n) + (\mathbf{X}_N^{v2}(n))^T \mathbf{X}_N^{v2}(n) + \delta_{\text{NLMS}}}$ $\tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n) + \frac{\mu \mathbf{r}_2(n) \mathbf{e}(n)}{(\mathbf{X}_N^{v1}(n))^T \mathbf{X}_N^{v1}(n) + (\mathbf{X}_N^{v2}(n))^T \mathbf{X}_N^{v2}(n) + \delta_{\text{NLMS}}}$ $\mathbf{r}_1(n+1) = \mathbf{X}_N^{v1}(n) - \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v1} \mathbf{X}^{v2}}(n) \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v2} \mathbf{X}^{v2}}^{-1}(n) \mathbf{X}_N^{v2}(n)$ $\mathbf{r}_2(n+1) = \mathbf{X}_N^{v2}(n) - \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v2} \mathbf{X}^{v1}}(n) \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v1} \mathbf{X}^{v1}}^{-1}(n) \mathbf{X}_N^{v1}(n)$ <p>fin</p>
--

2.4.3 Algorithme des moindres carrés récursif RLS à deux canaux

Sachant que les propriétés statistiques nous sont inconnues, on ne va pas chercher à minimiser $E[e^2(n)]$ mais une somme finie d'erreur au carré donnée par (2.6). Quand cette fonction coût est minimisée en utilisant une réponse impulsionnelle $\tilde{\mathbf{h}}(n)$ associée à $\mathbf{X}_N(n)$,

on obtient l'estimée des moindres carrés. La réponse impulsionnelle est donc fonction des échantillons disponibles et non pas d'une moyenne statistique générale. Elle est donc à modifier à chaque nouvel échantillon. Pour limiter le nombre des calculs, on passe par une équation récursive [11]. Les équations classiques de mise à jour de l'algorithme RLS à deux canaux sont données par :

$$\tilde{\mathbf{h}}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}(n) + \mathbf{R}^{-1}(n) \mathbf{X}(n) \mathbf{e}(n) \quad (2.38)$$

où;

$\mathbf{h}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}(n)$, sont données par (2.11) et (2.12) respectivement. L'erreur $\mathbf{e}(n)$ est donnée par (2.24). La matrice de covariance exprimée par (2.8) peut être factorisée comme suit [22] :

$$\mathbf{R}^{-1}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a^{-1} & \mathbf{0}_{N \times N} \\ \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{R}_b^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N \times N} & -\mathbf{R}_{X^v1 X^v2} \mathbf{R}_{X^v2 X^v1}^{-1} \\ -\mathbf{R}_{X^v2 X^v1} \mathbf{R}_{X^v1 X^v1}^{-1} & \mathbf{I}_{N \times N} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Où,

$$\mathbf{R}_a(n) = \mathbf{R}_{X^v1 X^v1}(n) - \mathbf{R}_{X^v1 X^v2}(n) \mathbf{R}_{X^v2 X^v2}^{-1}(n) \mathbf{R}_{X^v2 X^v1}(n) \quad (2.40)$$

$$\mathbf{R}_b(n) = \mathbf{R}_{X^v2 X^v2}(n) - \mathbf{R}_{X^v2 X^v1}(n) \mathbf{R}_{X^v1 X^v1}^{-1}(n) \mathbf{R}_{X^v1 X^v2}(n) \quad (2.41)$$

L'équation (2.38) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n) + \mathbf{R}_a^{-1}(n) \mathbf{r}_1(n) \mathbf{e}(n) \quad (2.42)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n) + \mathbf{R}_b^{-1}(n) \mathbf{r}_2(n) \mathbf{e}(n) \quad (2.43)$$

Où, les équations de mise à jour de $\mathbf{r}_1(n)$ et $\mathbf{r}_2(n)$ sont données par (2.31) et (2.32).

Si $\mathbf{R}(n) = \mathbf{R} = E\{\mathbf{X}(n)(\mathbf{X}(n))^T\}$, on a les propriétés d'orthogonalités suivantes :

$$E\{(\mathbf{X}_i(n))^T \mathbf{r}_j(n)\} = 0 \quad (2.44)$$

$$E\left\{ \mathbf{r}_i(n) (\mathbf{X}_j(n))^T \right\} = \mathbf{0}_{L \times L}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j \quad (2.45)$$

On voit que l'algorithme RLS à deux canaux (résumé au tableau 2.3) enlève l'inter-corrélation avant la mise à jour des deux filtres RLS monocanaux standards. Ce principe peut être introduit dans le NLMS et l'APA double canaux.

Tableau 2.3 : l'algorithme RLS à deux canaux [24]

Valeurs initiales :	
$\mathbf{R}_a^{-1}(0) = \frac{1}{\delta} \mathbf{I}_N$, $\mathbf{R}_b^{-1}(0) = \frac{1}{\delta} \mathbf{I}_N$, δ est un petit nombre positif	
$\tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(0) = 0$ $\tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(0) = 0$ $\tilde{\mathbf{h}}(0) = [(\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(0))^T (\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(0))^T]^T$	
Pour $n=1,2,\dots,N$.	
début	
Prédiction	$\mathbf{e}(n) = y(n) - (\tilde{\mathbf{h}}(n))^T \mathbf{X}(n)$
Filtrage	$\tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v1}(n) + \mathbf{R}_a^{-1}(n) \mathbf{r}_1(n) \mathbf{e}(n)$
	$\tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_N^{v2}(n) + \mathbf{R}_b^{-1}(n) \mathbf{r}_2(n) \mathbf{e}(n)$
fin	

2.4.4 Algorithme adaptatif des moindres carrés récursif rapide FRLS

Le FRLS se caractérise par une faible complexité de calcul comparé au RLS standard (28N multiplication et 28N additions). Cet algorithme est la version stabilisée de l'algorithme proposé dans [17]. Pour contrôler d'avantage la stabilité, surtout pour les signaux non stationnaires, on définit [22],[24] :

$$\boldsymbol{\chi} = [\mathbf{X}_N^{v1}(n) \quad \mathbf{X}_N^{v2}(n)]^T \quad (2.46)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(n) = [(\boldsymbol{\chi}(n))^T \quad (\boldsymbol{\chi}(n-1))^T \quad \dots \quad (\boldsymbol{\chi}(n-N+1))^T]^T \quad (2.47)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}(n) = [\tilde{h}_1^{v1}(n) \quad \tilde{h}_1^{v2}(n) \quad \dots \quad \tilde{h}_N^{v1}(n) \quad \tilde{h}_N^{v2}(n)]^T \quad (2.48)$$

On définit aussi [22], [24] :

$\mathbf{A}(n)$, $\mathbf{B}(n)$ = matrices de prédiction avant et arrière du filtre.

$E_A(n)$, $E_B(n)$ = matrices d'énergie de l'erreur de prédiction avant et arrière.

$e_A(n)$, $e_B(n)$ = vecteurs de l'erreur de prédiction avant et arrière.

$k(n)$ = vecteur du gain de Kalman.

$u(n)$ = variable de vraisemblance maximale.

$k \in [1.5, 2.5]$, paramètre de stabilisation.

$\lambda \in (0,1)$, facteur d'oubli.

Tableau 2.4 : l'algorithme FRLS à deux canaux [24]

La prédiction:	
$\mathbf{e}_A(n) = \boldsymbol{\chi}(n) - (\mathbf{A}(n-1))^T \bar{\mathbf{x}}(n-1)$	
$\varphi_1(n) = \varphi(n-1) - \mathbf{e}_A^T(n) \mathbf{E}_A^{-1}(n-1) \mathbf{e}_A(n)$	
$\begin{bmatrix} \mathbf{t}(n) \\ \mathbf{m}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{k}(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{A}(n-1) \end{bmatrix} \mathbf{E}_A^{-1}(n-1) \mathbf{e}_A(n)$	
$\mathbf{E}_A(n) = \lambda \left[\mathbf{E}_A(n-1) + \frac{\mathbf{e}_A(n) \mathbf{e}_A^T(n)}{\varphi(n-1)} \right]$	
$\mathbf{A}(n) = \mathbf{A}(n-1) + \frac{\mathbf{k}(n-1) \mathbf{e}_A^T(n)}{\varphi(n-1)}$	
$\mathbf{e}_{B_1}(n) = \mathbf{E}_{B_1}(n-1) \mathbf{m}(n)$	$\mathbf{e}_{B_2}(n) = \boldsymbol{\chi}(n-N) - (\mathbf{B}(n-1))^T \bar{\mathbf{x}}(n)$
$\mathbf{e}_B(n) = k \mathbf{e}_{B_2}(n) + (1-k) \mathbf{e}_{B_1}(n)$	$\mathbf{k}(n) = \mathbf{t}(n) + \mathbf{B}(n-1) \mathbf{m}(n)$
$\varphi(n) = \varphi_1(n) - \mathbf{e}_{B_2}^T(n) \mathbf{m}(n)$	$\mathbf{B}(n) = \mathbf{B}(n-1) + \frac{\mathbf{k}(n) \mathbf{e}_B^T(n)}{\varphi(n)}$
Le filtrage :	
$\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}(n) - (\tilde{\mathbf{h}}(n-1))^T \bar{\mathbf{x}}(n)$	$\tilde{\mathbf{h}}(n) = \tilde{\mathbf{h}}(n-1) + \frac{\mathbf{k}(n) \mathbf{e}(n)}{\varphi(n)}$

Dans cette version, la stabilité est améliorée avec le paramètre de stabilité k . Il est possible de détecter si l'algorithme est sur le point de devenir instable. Dans ce cas, les paramètres $\mathbf{A}(n)$, $\mathbf{B}(n)$ et $\mathbf{K}(n)$ sont initialisés à $\mathbf{0}$, pendant que le filtre adaptatif estimé $\tilde{\mathbf{h}}$, reste inchangé. Les énergies $\mathbf{E}_A(n)$ et $\mathbf{E}_B(n)$ pourraient être initialisées avec une estimation récursive de l'énergie du signal d'entrée. Les trois équations (2.24), (2.38) et (2.39) sont connues sous le nom de l'algorithme RLS.

2.5. Conclusion

Dans ce chapitre 2, nous avons exposé le principe de base de l'annulation stéréophonique de l'écho acoustique en utilisant des algorithmes adaptatifs tels que LMS, NLMS, RLS et FRLS. Nous avons remarqué que l'extension des versions monocanale aux versions multicanales ne se fait pas d'une manière directe. La corrélation due au couplage acoustique entre les canaux doit être prise en compte dans les algorithmes de filtrage adaptatif pour converger vers les solutions optimales.

CHAPITRE 3

ANALYSE DE LA PERFORMANCE DE L'ALGORITHME DE FILTRAGE ADAPTATIF LMS SOUS-MODELISE POUR L'ANNULATION D'ECHO ACOUSTIQUE STEREOPHONIQUE

3.1. Introduction

L'annulation d'écho acoustique demeure un champ de recherche actif après plusieurs années pour deux raisons :

1. Le phénomène d'écho est devenu plus gênant dans les systèmes de communication actuels utilisant des algorithmes de codage évolués. Ces derniers introduisent des retards importants dans les chemins d'écho.
2. L'AEAS est devenue une nécessité dans les systèmes de communication mains libres à cause de l'utilisation abondante de ces derniers.

La performance d'un AEAS est plus influencée par le choix de l'algorithme d'adaptation que dans le cas monovoie (elle dépend du conditionnement de la matrice de covariance des signaux d'entrée).

L'annulation d'écho acoustique est indispensable pour les systèmes de communication comme la téléconférence, afin de diminuer les échos qui dégradent la qualité des communications. Théoriquement, l'annulation d'écho acoustique stéréophonique (AEAS) peut être considérée comme une simple généralisation du principe d'annulation d'écho acoustique monocanal habituel au cas de deux canaux [28], [20], [19] et [42]. En AEAS, on souhaite avoir une qualité et une localisation des sons bien meilleure que ce qui a été fourni avant. Les améliorations de la qualité peuvent être obtenues en augmentant la largeur de bande du signal et en ajoutant également d'avantage de canaux audio dans le système. Ce dernier nécessite l'annulation d'écho acoustique multi-canal.

Dans [14], un nouvel algorithme a été présenté et qui semble être efficace (au moins théoriquement) dans le domaine fréquentiel exploitant la cohérence entre les deux

signaux pour réduire l'effet de leur inter-corrélation. La faible complexité de calcul et le bon comportement d'un algorithme est demandée dans les applications d'AEAS.

Une nouvelle version stéréophonique de l'algorithme Fast Newton Transverse Filter (FNNTF) a été proposée dans [39], ayant une bonne vitesse de convergence et une capacité de poursuite rapide pour des signaux non stationnaires.

Dans [26], on trouve une comparaison entre le cas monocanal et bi-canal des algorithmes RLS et LMS. Les auteurs montrent que le taux de convergence du RLS est insensible aux variations de la dispersion des valeurs propres de la matrice d'auto corrélation $\mathbf{R}(n)$. Cette propriété est conservée dans le cas stéréophonique ce qui laisse le RLS converger de la même façon dans les deux cas. Lorsque la matrice d'auto corrélation est mal conditionnée (signal de parole en entrée par exemple), le LMS converge lentement et possède le même taux de convergence pour les cas monovoie et bi-voies. Par contre, quand la matrice d'auto corrélation est bien conditionnée (signal d'entrée =bruit USASI), le LMS monocanal a une bonne convergence mais le LMS bi-canal converge lentement. Ceci montre que la matrice d'auto corrélation est mal conditionnée dans le cas stéréo puisque les signaux sur les deux voies sont issus d'une même source dans la salle de transmission. Donc, l'algorithme qui ne tient pas compte de cette inter-corrélation converge lentement.

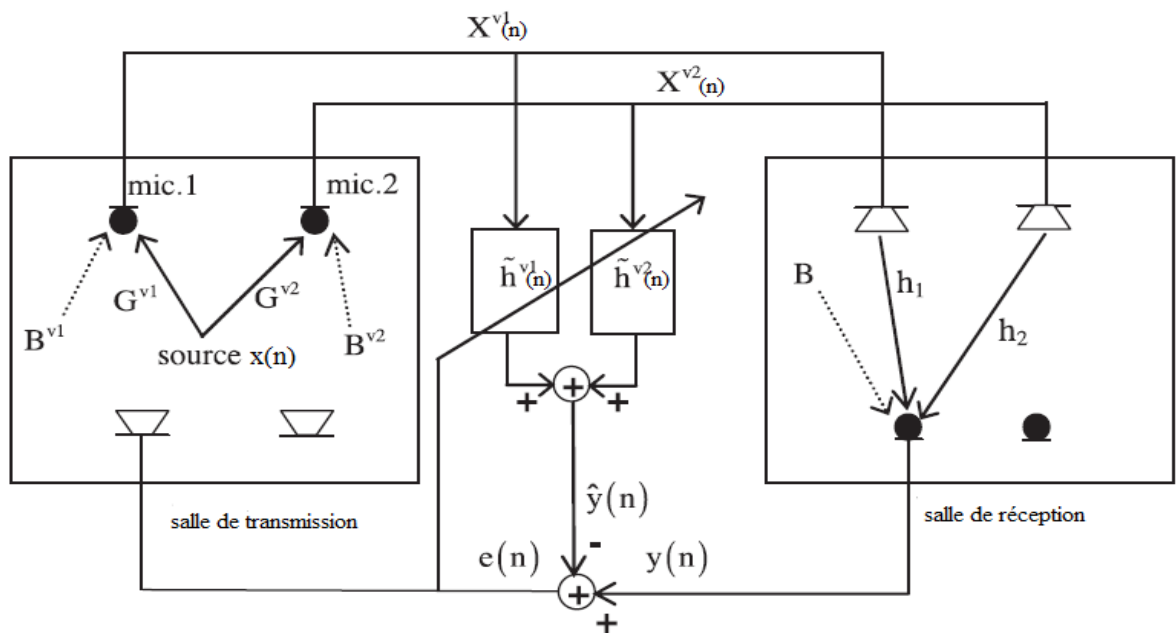


Figure 3.1 : Schéma d'un annuleur d'écho stéréophonique. Utilisation de deux filtres adaptatifs entre la salle 1(de transmission) et la salle 2(de réception)

L'AEA deux canaux est le plus intéressant à étudier, car les problèmes de complexité ne diffèrent que pour le cas du multi-canal général. Un schéma de base pour un AEAS est donné dans la figure 3.1, où on illustre le concept avec une salle de transmission sur la gauche et une salle de réception sur la droite. La salle de transmission est parfois appelée l'autre bout « far-end » et la salle de réception est l'extrémité proche « near-end ». Tel que représenté à la figure 3.1., l'écho est dû à un couplage acoustique entre les haut-parleurs et les microphones dans la salle de réception.

Dans ce schéma, les chemins d'écho acoustique \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 dans la salle locale sont modélisés par des filtres adaptatifs FIR $\tilde{\mathbf{h}}^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}^{v2}(n)$, à partir de laquelle leurs sorties ajoutées produisent un estimé $\hat{\mathbf{y}}$ du vrai écho \mathbf{y} . En effet, les réponses impulsionnelles physiques \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 sont de longueur infinie.

Néanmoins, il est supposé que les filtres $\tilde{\mathbf{h}}^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}^{v2}(n)$ sont "suffisamment longs", en ce sens les queues de \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 , qui ne sont pas modélisées par $\tilde{\mathbf{h}}^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}^{v2}(n)$, ont peu d'énergie et peuvent donc être négligées. Parlant à la suite, des "vraies" réponses impulsionnelles, signifie que nous ne considérons que les premières parties de \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 qui contiennent plus d'énergie, et qui sont supposées être de même taille L que les filtres de modèle $\tilde{\mathbf{h}}^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}^{v2}(n)$.

La modélisation d'un système inconnu par un filtre adaptatif est considérablement influencée par la longueur de ce dernier. Elle agit sur le taux de convergence en augmentant ou en diminuant le temps de calcul. Pour certains pas d'adaptations, la longueur du filtre adaptatif peut rendre le modèle instable et affecter l'erreur quadratique moyenne (EQM) minimale [1]. Le système peut être [6] :

1. Sous-identifié (sous-modélisé) : il y a peu de pôles et /ou des zéros pour modéliser le système, l'EQM minimale est non nulle.
2. sur-identifié (sur-modélisé) : il y a beaucoup de pôles et /ou des zéros pour modéliser le système, l'EQM minimale peut converger vers zéros. Mais le taux de convergence est affecté par l'augmentation de calcul.

La convergence rapide est demandée dans les applications de filtrage adaptatif. Le taux de convergence est lié aux autres caractéristiques de performance. S'il est élevé, il peut provoquer l'instabilité du système (divergence de l'algorithme adaptatif).

Dans ce projet de thèse, nous nous concentrons notre intérêt sur le cas où la longueur des filtres adaptatifs LMS, employé avec l'application d'AEAS dans la salle de réception, sont inférieures à la longueur des filtres réels. Pour ce cas, nous proposons une nouvelle étude, en termes de comportement de convergence moyenne des vecteurs des coefficients d'erreur [51], et de montrer des résultats théoriques qui sont très proches de ceux réels.

Ce chapitre est organisé comme suit: la section 2 explique le problème de l'AEAS et décrit les différences fondamentales entre l'annulation d'écho acoustique mono et stéréo. Dans la section 3, nous présentons la performance de l'analyse de l'algorithme LMS sous-modélisé stéréophonique en termes des solutions moyennes du vecteur des coefficients d'erreur et des valeurs de l'état d'équilibre (état stable). Enfin, dans la section 4, nous donnons des résultats de simulation obtenus avec: 1) entrées gaussiennes fortement corrélées, 2) signal d'entrée gaussien blanc et 3) entrées gaussiennes faiblement corrélées.

3.2. Problème de l'annulation d'écho acoustique stéréophonique AEAS

Dans cette section, nous montrons que la solution de l'équation normale des applications de l'AEAS [12] n'est pas aussi évidente que dans le cas monocanal [41] - [43]. En effet, puisque les deux signaux d'entrée sont obtenus par filtrage à partir d'une source commune, un problème de non-unicité est attendu [2]. Les notations que nous avons utilisées dans ce chapitre sont assez standard. Symboles en caractères gras sont utilisés pour les vecteurs et matrices. Nous avons aussi les notations suivantes:

L : longueur des filtres adaptatifs $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ and $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$

M : longueur des réponses impulsionnelles de la salle de transmission \mathbf{G}_M^{v1} et \mathbf{G}_M^{v2}

N : longueur des réponses impulsionnelles de la salle de réception \mathbf{h}_N^{v1} et \mathbf{h}_N^{v2} .

E désigne l'espérance mathématique,

n indice temporel discret,
 $(.)^T$ opérateur de transposition,

Dans la discussion qui suit, nous distinguons entre la longueur (M) des réponses impulsionnelles dans la salle de transmission, la longueur (L) des filtres de modélisation, et la longueur (N) des réponses impulsionnelles dans la salle de réception [12].

Dans notre étude, nous supposons que le système de la salle à distance est, linéaire et invariant dans le temps, nous avons alors la relation suivante [22,24]:

$$\left(\mathbf{X}_M^{v1}(n)\right)^T \mathbf{G}_M^{v2} = \left(\mathbf{X}_M^{v2}(n)\right)^T \mathbf{G}_M^{v1} \quad (3.1)$$

Où

$$\mathbf{G}_M^{v1} = \left[g_1^{v1}, g_1^{v1}, \dots, g_M^{v1} \right]^T$$

$$\mathbf{G}_M^{v2} = \left[g_1^{v2}, g_1^{v2}, \dots, g_M^{v2} \right]^T$$

sont les réponses impulsionnelles des chemins acoustiques des sources aux microphones dans la salle à distance, comme indiqué dans la Figure.3.1, et

$$\mathbf{X}_M^{v1}(n) = [x_1(n), x_1(n-1), x_1(n-2), \dots, x_1(n-M+1)]^T$$

$$\mathbf{X}_M^{v2}(n) = [x_2(n), x_2(n-1), x_2(n-2), \dots, x_2(n-M+1)]^T$$

sont les vecteurs des échantillons du signal de sortie des microphones dans la même salle (salle de transmission).

Maintenant, nous considérons la fonction de coût du moindre carré récursif (RLS) suivante (voir figure 3.1. pour les notations):

$$\mathbf{J}(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} |e(i)|^2 \quad (3.2)$$

où ;

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}(n) - \left(\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)\right)^T \mathbf{X}_L^{v1}(n) - \left(\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)\right)^T \mathbf{X}_L^{v2}(n) \quad (3.3)$$

; est le signal d'erreur à l'instant n entre la sortie du microphone

$$\mathbf{y}(n) = \left(\mathbf{h}_N^{v1}\right)^T \mathbf{X}_N^{v1}(n) + \left(\mathbf{h}_N^{v2}\right)^T \mathbf{X}_N^{v2}(n) \quad (3.4)$$

et l'écho acoustique stéréophonique estimé et qui doit être annulé par des filtres adaptatifs à deux canaux $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ et λ ($0 < \lambda \leq 1$) est un facteur d'oubli exponentiel. Les vecteurs mentionnés dans (3.3) et (3.4) sont définis comme suit :

$$\mathbf{h}_N^{v1} = \left[h_1^{v1}, h_2^{v1}, \dots, h_N^{v1} \right]^T, \quad \mathbf{h}_N^{v2} = \left[h_1^{v2}, h_2^{v2}, \dots, h_N^{v2} \right]^T$$

$$\mathbf{X}_N^{v1}(n) = \left[x_1(n), x_1(n-1), x_1(n-2), \dots, x_1(n-N+1) \right]^T$$

$$\mathbf{X}_N^{v2}(n) = \left[x_2(n), x_2(n-1), x_2(n-2), \dots, x_2(n-N+1) \right]^T$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1} = \left[\tilde{h}_1^{v1}, \tilde{h}_2^{v1}, \dots, \tilde{h}_L^{v1} \right]^T, \quad \tilde{\mathbf{h}}_L^{v2} = \left[\tilde{h}_1^{v2}, \tilde{h}_2^{v2}, \dots, \tilde{h}_L^{v2} \right]^T$$

Où N est l'ordre des réponses impulsionnelles vraies, et L représente l'ordre des filtres adaptatifs.

$$\mathbf{X}_L^{v1}(n) = \left[x_1(n), x_1(n-1), x_1(n-2), \dots, x_1(n-L+1) \right]^T$$

$$\mathbf{X}_L^{v2}(n) = \left[x_2(n), x_2(n-1), x_2(n-2), \dots, x_2(n-L+1) \right]^T$$

La minimisation de cette fonction de coût (3.2) conduit à la solution suivante [29]:

$$\mathbf{R}_L(n) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n) \\ \tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n) \end{bmatrix} = \mathbf{r}_L(n) \quad (3.5)$$

où $\mathbf{R}_L(n)$ est la matrice de corrélation qui est donnée par l'expression suivante:

$$\mathbf{R}_L(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_L^{v1}(i) \\ \mathbf{X}_L^{v2}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{X}_L^{v1}(i)\right)^T & \left(\mathbf{X}_L^{v2}(i)\right)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v1}\mathbf{X}^{v1}}(n) & \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v1}\mathbf{X}^{v2}}(n) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v2}\mathbf{X}^{v1}}(n) & \mathbf{R}_{\mathbf{X}^{v2}\mathbf{X}^{v2}}(n) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Nous notons que le paramètre $\mathbf{r}_L(n)$, représente le vecteur de corrélation entre les signaux d'entrée et de sortie du signal dans la salle locale, est donné par ce qui suit:

$$\mathbf{r}_L(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} y(i) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_L^{v1}(i) \\ \mathbf{X}_L^{v2}(i) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

est une estimation du vecteur de corrélation croisée entre l'entrée et des signaux de sortie.

Notre objectif est d'obtenir des filtres optimaux de (3. 5). Maintenant, considérons le vecteur:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_M^{v2} & -\mathbf{G}_M^{v1} \end{bmatrix}^T \quad (3.8)$$

Il peut être facilement vérifié que $\mathbf{R}(n).\mathbf{U}=0$ à l'aide de (3.1), ce qui signifie que la matrice $\mathbf{R}(n)$ n'est pas inversible.

Par conséquent, il n'y a pas de solution unique au problème de minimisation de la fonction donnée par (3.2), et l'algorithme adaptatif conduit à une des solutions possibles, qui peut être très différente de la solution optimale espérée $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n) = \mathbf{h}_1^{v1}$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n) = \mathbf{h}_2^{v2}$, Où

$$\mathbf{h}_L^{v1} = \left[h_1^{v1}, h_2^{v1}, \dots, h_L^{v1} \right]^T, \quad \mathbf{h}_L^{v2} = \left[h_1^{v2}, h_2^{v2}, \dots, h_L^{v2} \right]^T$$

Toutefois, en situation pratique, il existe, au moins-deux raisons qui rendent cette matrice inversible:

1) les signaux $\mathbf{X}_L^{v1}(n)$ et $\mathbf{X}_L^{v2}(n)$, au niveau des sorties de la salle éloignée, contiennent des composantes de bruit qui sont corrélés et

2) les filtres $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ qui modélisent la réponse impulsionnelle de la salle locale sont de longueur finie, et donc la taille du $\mathbf{X}_L^{v1}(n)$ et $\mathbf{X}_L^{v2}(n)$ est beaucoup plus petite que la longueur de \mathbf{G}_M^{v1} et \mathbf{G}_M^{v2} et la relation(1) n'est pas satisfaite. Pour cette raison, la matrice $\mathbf{R}_L(n)$ devient inversible (mais elle est mal conditionnée parce que les deux signaux d'entrée sont fortement corrélés) et la vraie solution $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n) = \mathbf{h}_L^{v1}$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n) = \mathbf{h}_L^{v2}$ peut être trouvée en conséquence.

Examinons deux cas possibles en fonction de la longueur des filtres de modélisation [20], comme suit :

1) $L \geq M$

Nous considérons le vecteur $\mathbf{U} = \left[\left(\mathbf{G}_M^{v2} \right)^T 0 \dots 0, -\left(\mathbf{G}_M^{v1} \right)^T 0 \dots 0 \right]^T$ contenant $2 \times (L-M)$ zéros coefficients. Nous pouvons facilement vérifier $\mathbf{R}(n) = \mathbf{0}_{2L \times 1}$ en utilisant (1), donc $\mathbf{R}(n)$ n'est pas inversible.

2) $L < M$

C'est le cas réel, car les filtres à deux canaux \mathbf{G}_M^{v1} et \mathbf{G}_M^{v2} sont en fait d'une longueur infinie. Maintenant, (1) peut être exprimée comme :

$$\left(\mathbf{X}_L^{v1}(n) \right)^T \mathbf{G}_L^{v2} + q_1(n-L) = \left(\mathbf{X}_L^{v2}(n) \right)^T \mathbf{G}_L^{v1} + q_2(n-L) \quad (3.9)$$

Avec ;

$$q_1(n-L) = \sum_{i=L+1}^M x_1(n-i) g_i^{v2} \quad \text{et} \quad q_2(n-L) = \sum_{i=L+1}^M x_2(n-i) g_i^{v1}$$

De (3.1), nous savons que $\mathbf{X}_M^{v1}(n)$ et $\mathbf{X}_M^{v2}(n)$ sont liés linéairement, mais à partir de (3.9), nous pouvons voir que ce n'est pas de même pour les $\mathbf{X}_L^{v1}(n)$ et $\mathbf{X}_L^{v2}(n)$ [Sauf si $q_1(n-L) = q_2(n-L)$ qui se produit uniquement lorsque \mathbf{G}_M^{v1} et \mathbf{G}_M^{v2} ont au moins $M-L$ zéros communs-un événement qui se produit rarement dans la pratique]. Par conséquent, en principe, la matrice de covariance est de rang plein, mais elle est très mal conditionnée car $q_1(n-L)$ et $q_2(n-L)$ sont en général très faibles. Ainsi, pour le cas pratique lorsque $L < M$, Il y a une unique solution de l'équation normale, bien que la matrice de covariance est très mal conditionnée.

Dans la prochaine section 3, nous allons présenter une nouvelle étude des réponses impulsionnelles pour le cas de sous-modélisation d'AEAS de la salle de réception, par des algorithmes LMS stéréophonique. Cette étude peut être considérée comme une analyse complémentaire de celle donnée dans le chapitre 2, où les réponses impulsionnelles sous-modélisées de la salle de transmission sont considérées et non celles de la salle de réception.

3.3. Nouvelle analyse de la performance des algorithmes LMS stéréophoniques sous modélisés

Dans cette analyse, nous supposons que les réponses impulsionnelles dans la salle de réception, entre les deux haut-parleurs et les microphones, peuvent être réécrites comme suit [40], [51]:

$$\mathbf{h}_N^{v1} = [\mathbf{h}_1^* \quad \bar{\mathbf{h}}_1^*]^T, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{h}_N^{v2} = [\mathbf{h}_2^* \quad \bar{\mathbf{h}}_2^*]^T, \quad (3.11)$$

avec

$$\mathbf{h}_1^* = [h_1^{v1}, h_2^{v1}, \dots, h_L^{v1}]^T; \quad \bar{\mathbf{h}}_1^* = [h_{L+1}^{v1}, h_{L+2}^{v1}, \dots, h_N^{v1}]^T \quad \text{et}$$

$$\mathbf{h}_2^* = [h_1^{v2}, h_2^{v2}, \dots, h_L^{v2}]^T; \quad \bar{\mathbf{h}}_2^* = [h_{L+1}^{v2}, h_{L+2}^{v2}, \dots, h_N^{v2}]^T$$

$$\mathbf{X}_N^{v1}(n) = [\mathbf{X}^{v1}(n) \quad \bar{\mathbf{X}}^{v1}(n)]^T \quad (3.12)$$

$$\mathbf{X}_N^{v2}(n) = [\mathbf{X}^{v2}(n) \quad \bar{\mathbf{X}}^{v2}(n)]^T \quad (3.13)$$

$$\mathbf{X}^{v1}(n) = [x_1(n), x_1(n-1), \dots, x_1(n-L+1)]^T,$$

$$\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n) = [x_1(n-L), x_1(n-L-1), \dots, x_1(n-N+1)]^T$$

$$\mathbf{X}^{v2}(n) = [x_2(n), x_2(n-1), \dots, x_2(n-L+1)]^T,$$

$$\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n) = [x_2(n-L), x_2(n-L-1), \dots, x_2(n-N+1)]^T$$

Les vecteurs d'erreur entre les coefficients des filtres modélisés et les coefficients des réponses impulsionnelles dans la salle de réception sont définis comme suit [40], [51]:

$$\mathbf{Z}_1(n) = \tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n) - \mathbf{h}_1^*(n) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{Z}_2(n) = \tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n) - \mathbf{h}_2^*(n) \quad (3.15)$$

Le signal de sortie désiré (la sortie du microphone dans la salle de réception) est le suivant:

$$\mathbf{y}(n) = (\mathbf{X}_N^{v1}(n))^T \mathbf{h}_N^{v1}(n) + (\mathbf{X}_N^{v2}(n))^T \mathbf{h}_N^{v2}(n) \quad (3.16)$$

Le signal de sortie estimé par les filtres adaptatifs est donné par :

$$\tilde{\mathbf{y}}(n) = (\mathbf{X}_L^{v1}(n))^T \tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n) + (\mathbf{X}_L^{v2}(n))^T \tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n) \quad (3.17)$$

où ; les vecteurs $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ sont donnés par :

$$\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1} = [\tilde{h}_1^{v1}, \tilde{h}_2^{v1}, \dots, \tilde{h}_L^{v1}]^T \text{ et } \tilde{\mathbf{h}}_L^{v2} = [\tilde{h}_1^{v2}, \tilde{h}_2^{v2}, \dots, \tilde{h}_L^{v2}]^T$$

Le signal d'erreur à l'instant n entre la sortie du microphone dans la salle de réception, $\mathbf{y}(n)$ et son estimation $\tilde{\mathbf{y}}(n)$ est:

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}(n) - \tilde{\mathbf{y}}(n) \quad (3.18)$$

En remplaçant (3.16) et (3.17) dans (3.18), l'erreur pour les deux canaux, peut être exprimée comme suit:

$$\mathbf{e}_1(n) = (\overline{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \overline{\mathbf{h}}_1^* - (\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n) + \xi_1(n) \quad (3.19)$$

$$\mathbf{e}_2(n) = (\overline{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \overline{\mathbf{h}}_2^* - (\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) + \xi_2(n) \quad (3.20)$$

où $\xi_1(n)$ et $\xi_2(n)$ sont des séquences de bruit de fond à moyenne nulle, stationnaires et indépendantes qui ne sont pas corrélées avec aucun autre signal. La combinaison des deux dernières équations (3.19) et (3.20) donne l'erreur finale de filtrage (voir Figure.3.1).

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{e}_1(n) + \mathbf{e}_2(n) \quad (3.21)$$

En remplaçant $\mathbf{e}_1(n)$ et $\mathbf{e}_2(n)$ par leurs valeurs, cette erreur peut être donnée par :

$$\mathbf{e}(n) = (\overline{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \overline{\mathbf{h}}_1^* + (\overline{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \overline{\mathbf{h}}_2^* - (\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n) - (\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) + \xi(n) \quad (3.22)$$

où $\xi(n) = \xi_1(n) + \xi_2(n)$.

3.4. Nouvelles formules de mise à jour des filtres adaptatifs LMS stéréophoniques

Dans l'application classique de l'ASEA illustrée par la figure 3.1, nous avons utilisé deux filtres adaptatifs basés sur des algorithmes LMS $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ pour les deux canaux. Les coefficients de ces deux algorithmes adaptatifs LMS s'incrémentent selon la formule récursive suivante:

$$\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n) + \mu_1 e(n) \mathbf{X}^{v1}(n) \quad (3.23)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n) + \mu_2 e(n) \mathbf{X}^{v2}(n) \quad (3.24)$$

avec μ_1, μ_2 sont les pas des filtres adaptatifs et $e(n)$ est l'erreur du filtrage. Nous rappelons que $\mathbf{X}^{v1}(n)$, $\mathbf{X}^{v2}(n)$ sont les deux signaux d'entrée des deux algorithmes de filtrage adaptatifs $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$, respectivement. Dans la section suivante, nous allons fournir une étude théorique de l'évolution des vecteurs d'erreur dans les temps et de leur convergence moyenne, pour l'algorithme LMS stéréophonique sous-modélisé.

3.5. Mise à jour des vecteurs d'erreur des coefficients des filtres adaptatifs LMS stéréophoniques sous-modélisés

Nous définissons les vecteurs d'erreur entre les coefficients des filtres modélisés et les coefficients des réponses impulsionnelles dans la salle de réception à l'instant $(n+1)$ comme suit:

$$\mathbf{Z}_1(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n+1) - \mathbf{h}_1^*(n+1) \quad (3.25)$$

$$\mathbf{Z}_2(n+1) = \tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n+1) - \mathbf{h}_2^*(n+1) \quad (3.26)$$

Étant donné que les coefficients réels des filtres $\mathbf{h}_1^*(n+1)$ et $\mathbf{h}_2^*(n+1)$ ont des valeurs constantes, c.-à-d :

$$\mathbf{h}_1^*(n+1) = \mathbf{h}_1^*(n) = \mathbf{h}_1^* \quad (3.27)$$

$$\mathbf{h}_2^*(n+1) = \mathbf{h}_2^*(n) = \mathbf{h}_2^* \quad (3.28)$$

et par l'introduction de (3.25) et (3.27) dans (3.23), la mise à jour du vecteur des coefficients d'erreur LMS $\mathbf{Z}_1(n+1)$ est donné par la nouvelle formule récursive suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(n+1) &= \tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n) + \mu_1 e(n) \mathbf{X}^{v1}(n) - \mathbf{h}_1^* \\ &= \left[\mathbf{I} - \mu_1 \mathbf{X}^{v1}(n) (\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) + \mu_1 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) \\ &\quad + \mu_1 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) - \mu_1 \left[\mathbf{X}^{v1}(n) (\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_1 \xi(n) \mathbf{X}^{v1}(n) \end{aligned} \quad (3.29)$$

De façon similaire, en substituant (3.26) et (3.28) dans (3.24), la mise à jour du vecteur $\mathbf{Z}_2(n+1)$, est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2(n+1) &= \tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n) + \mu_2 e(n) \mathbf{X}^{v2}(n) - \mathbf{h}_2^* \\ &= \left[\mathbf{I} - \mu_2 \mathbf{X}^{v2}(n) (\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_2 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \\ &\quad + \mu_2 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) - \mu_2 \left[\mathbf{X}^{v2}(n) (\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) + \mu_2 \xi(n) \mathbf{X}^{v2}(n) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dans la section suivante, nous tirerons les nouvelles formules récursives déterministes pour le poids moyen des coefficients LMS adaptatifs stéréophoniques.

3.6. Convergence moyenne des coefficients des filtres adaptatifs LMS stéréophonique sous-modélisés.

Dans ce qui suit, on va décrire le comportement moyen des vecteurs d'erreur des coefficients des deux filtres adaptatifs LMS sous-modélisés. En prenant l'espérance des deux membres de (3.29) et (3.30), et en utilisant l'hypothèse d'indépendance entre les signaux d'entrée ($\mathbf{X}_N^{v1}(n)$, $\mathbf{X}_N^{v2}(n)$) et les réponses impulsionnelles (des filtres adaptatifs et du système), il vient [40], [51]:

$$\begin{aligned} E\{ \mathbf{Z}_1(n+1) \} &= E\left\{ \left[\mathbf{I} - \mu_1 \mathbf{X}^{v1}(n) (\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) \right\} + \mu_1 E\left\{ \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) \right\} \\ &\quad + \mu_1 E\left\{ \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) \right\} - \mu_1 E\left\{ \left[\mathbf{X}^{v1}(n) (\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) \right\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
E\{ \mathbf{Z}_2(n+1) \} = & E\left\{ \left[\mathbf{I} - \mu_2 \mathbf{X}^{v2}(n) (\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) \right\} + \mu_2 E\left\{ \left[(\overline{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \overline{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \right\} \\
& + \mu_2 E\left\{ \left[(\overline{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \overline{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \right\} - \mu_2 E\left\{ \left[\mathbf{X}^{v2}(n) (\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) \right\}
\end{aligned} \quad (3.32)$$

Après quelques manipulations, on retrouve les expressions suivantes :

$$E\{\mathbf{Z}_1(n+1)\} = (\mathbf{I} - \mu_1 \mathbf{R}_1(n))E\{\mathbf{Z}_1(n)\} + \mu_1 [\mathbf{b}_1(n) + \mathbf{c}_1(n)] - \mu_1 \mathbf{R}_{12}(n)E\{\mathbf{Z}_2(n)\} \quad (3.33)$$

$$E\{\mathbf{Z}_2(n+1)\} = (\mathbf{I} - \mu_2 \mathbf{R}_2(n))E\{\mathbf{Z}_2(n)\} + \mu_2 [\mathbf{b}_2(n) + \mathbf{c}_2(n)] - \mu_2 \mathbf{R}_{21}(n)E\{\mathbf{Z}_1(n)\} \quad (3.34)$$

Où

$\mathbf{R}_1(n) = E\left\{ \mathbf{X}^{v1}(n) (\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right\}$ et $\mathbf{R}_2(n) = E\left\{ \mathbf{X}^{v2}(n) (\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right\}$ sont les matrices d'auto-corrélation des deux signaux sources dans la salle de transmission, respectivement,

$\mathbf{R}_{12}(n) = E\left\{ \mathbf{X}^{v1}(n) (\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right\}$ et $\mathbf{R}_{21}(n) = E\left\{ \mathbf{X}^{v2}(n) (\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right\}$ sont les matrices d'inter-corrélation des deux signaux sources dans la salle de réception, respectivement,

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= [b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1L}]^T; & \mathbf{b}_2 &= [b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2L}]^T, \\
\mathbf{C}_1 &= [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1L}]^T; & \mathbf{C}_2 &= [c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2L}]^T,
\end{aligned}$$

dont les $i^{\text{èmes}}$ composants sont donnés (pour le cas stationnaire), respectivement par :

$$b_{1i} = \sum_{j=L+1}^N (h_j^{v1}) E\{x_1(n-j+1) x_1(n-i+1)\} = \sum_{j=L+1}^N h_j^{v1} r_{x_1 x_1}(j-i) \quad (3.35)$$

$$b_{2i} = \sum_{j=L+1}^N (h_j^{v2}) E\{x_2(n-j+1) x_2(n-i+1)\} = \sum_{j=L+1}^N (h_j^{v2}) r_{x_2 x_2}(j-i) \quad (3.36)$$

$$c_{1i} = \sum_{j=L+1}^N (h_j^{v2}) E\{x_2(n-j+1) x_1(n-i+1)\} = \sum_{j=L+1}^N h_j^{v2} r_{x_2 x_1}(j-i) \quad (3.37)$$

$$c_{2i} = \sum_{j=L+1}^N (h_j^{v1}) E\{x_1(n-j+1) x_2(n-i+1)\} = \sum_{j=L+1}^N (h_j^{v1}) r_{x_1 x_2}(j-i) \quad (3.38)$$

Lorsque, $L=N$ (modélisation complète), on a $b_{1i}=b_{2i}=c_{1i}=c_{2i}=0$. Rappelons que $\lambda_{1\max} \leq \text{tr}(\mathbf{R}_1(n))$ et $\lambda_{2\max} \leq \text{tr}(\mathbf{R}_2(n))$, où $\lambda_{1\max}$ et $\lambda_{2\max}$ sont les valeurs propres maximales

de $\mathbf{R}_1(n)$ et $\mathbf{R}_2(n)$, respectivement, et $\text{tr}(\cdot)$ est l'opérateur de trace. A partir de (3.33) et (3.34), les algorithmes LMS stéréophoniques sous-modélisés convergent en moyenne si les pas d'apprentissage satisfont les conditions suivantes :

$$0 \leq \mu_1 \leq \frac{2}{\lambda_{1\max}} \quad \text{et} \quad 0 \leq \mu_2 \leq \frac{2}{\lambda_{2\max}} \quad (3.39)$$

Ces conditions de stabilité sont similaires à celles de l'algorithme LMS pour le cas $L = N$.

3.7. Formules de l'état d'équilibre des coefficients de l'algorithme LMS adaptatif stéréophonique sous-modélisé

Nous nous intéressons maintenant au comportement des vecteurs d'erreur des coefficients des deux filtres adaptatifs LMS sous-modélisés dans le régime permanent.

Lorsque n tend vers l'infini, les solutions de l'état d'équilibre de (3.33) et (3.34) sont données, respectivement, par [40], [51] :

$$E\{\mathbf{Z}_1(\infty)\} = (\mathbf{I} - \mu_1 \mathbf{R}_1(n)) E\{\mathbf{Z}_1(\infty)\} + \mu_1 [\mathbf{b}_1(n) + \mathbf{c}_1(n)] - \mu_1 \mathbf{R}_{12} E\{\mathbf{Z}_2(\infty)\} \quad (3.40)$$

$$E\{\mathbf{Z}_2(\infty)\} = (\mathbf{I} - \mu_2 \mathbf{R}_2(n)) E\{\mathbf{Z}_2(\infty)\} + \mu_2 [\mathbf{b}_2(n) + \mathbf{c}_2(n)] - \mu_2 \mathbf{R}_{21} E\{\mathbf{Z}_1(\infty)\} \quad (3.41)$$

En résolvant, ce système à deux inconnues $E\{\mathbf{Z}_1(\infty)\}$ et $E\{\mathbf{Z}_2(\infty)\}$, et après les manipulations nécessaires, la solution finale de (3.40) et (3.41) à l'état permanent sont, respectivement, données par :

$$\left\{ E\{\mathbf{Z}_1(\infty)\} = \left[\mathbf{R}_1(n) + \mathbf{R}_{12}(n) \mathbf{R}_2^{-1}(n) \mathbf{R}_{21}(n) \right]^{-1} \left[\mathbf{b}_1(n) + \mathbf{c}_1(n) - \mathbf{R}_{12}(n) \mathbf{R}_2^{-1}(n) (\mathbf{b}_2(n) + \mathbf{c}_2(n)) \right] \right. \quad (3.42)$$

$$\left. \left\{ E\{\mathbf{Z}_2(\infty)\} = \left[\mathbf{R}_2(n) + \mathbf{R}_{21}(n) \mathbf{R}_1^{-1}(n) \mathbf{R}_{12}(n) \right]^{-1} \left[\mathbf{b}_2(n) + \mathbf{c}_2(n) - \mathbf{R}_{21}(n) \mathbf{R}_1^{-1}(n) (\mathbf{b}_1(n) + \mathbf{c}_1(n)) \right] \right. \right. \quad (3.43)$$

A partir des deux formules de (3.42) et (3.43), puis de (3.15) et (3.16), on obtient les vecteurs des coefficients moyens à l'équilibre des filtres adaptatifs LMS stéréophoniques $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ respectivement, comme suit :

$$E\{\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(\infty)\} = \mathbf{h}_1^* + \boldsymbol{\psi}_1(n) \quad (3.44)$$

$$E\{\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(\infty)\} = \mathbf{h}_2^* + \boldsymbol{\psi}_2(n) \quad (3.45)$$

où

$$\boldsymbol{\psi}_1(n) = \left[\mathbf{R}_1(n) + \mathbf{R}_{12}(n)\mathbf{R}_2^{-1}(n)\mathbf{R}_{21}(n) \right]^{-1} \left[\mathbf{b}_1(n) + \mathbf{c}_1(n) - \mathbf{R}_{12}(n)\mathbf{R}_2^{-1}(n)(\mathbf{b}_2(n) + \mathbf{c}_2(n)) \right] \quad (3.46)$$

$$\boldsymbol{\psi}_2(n) = \left[\mathbf{R}_2(n) + \mathbf{R}_{21}(n)\mathbf{R}_1^{-1}(n)\mathbf{R}_{12}(n) \right]^{-1} \left[\mathbf{b}_2(n) + \mathbf{c}_2(n) - \mathbf{R}_{21}(n)\mathbf{R}_1^{-1}(n)(\mathbf{b}_1(n) + \mathbf{c}_1(n)) \right] \quad (3.47)$$

Les équations (3.44) et (3.45) indiquent que, les signaux d'entrée corrélés $\mathbf{x}^{v1}(n)$ et $\mathbf{x}^{v2}(n)$, introduisent des biais de coefficients non nuls, pour l'état d'équilibre, quantifiés par $\boldsymbol{\psi}_1(n)$ et $\boldsymbol{\psi}_2(n)$ donnés par (3.46) et (3.47), respectivement. Ces deux biais dépendent des points suivants [40], [51]:

- Degré de la sous-modélisation de l'ASEA des filtres sous-modélisés, influencés par L comparé à N.
- Valeurs des coefficients $\bar{\mathbf{h}}_1^*$ et $\bar{\mathbf{h}}_2^*$.
- Les statistiques du signal d'entrée.

Lorsque les signaux d'entrée $\mathbf{x}^{v1}(n)$ et $\mathbf{x}^{v2}(n)$ sont blancs, $\mathbf{b}_1(n) = \mathbf{b}_2(n) = \mathbf{c}_1(n) = \mathbf{c}_2(n) = \mathbf{0}_{N-L-1}$, d'où les deux paramètres $\boldsymbol{\psi}_1(n)$ et $\boldsymbol{\psi}_2(n)$, donnés par (3.46) et (3.47), respectivement, sont nuls et

$$E\{\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(\infty)\}_{\text{Blanc}} = \mathbf{h}_1^* \quad (3.48)$$

$$E\{\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(\infty)\}_{\text{Blanc}} = \mathbf{h}_2^* \quad (3.49)$$

Les équations (3.48) et (3.49) prouvent que, pour les signaux d'entrée non corrélés $\mathbf{x}^{v1}(n)$ et $\mathbf{x}^{v2}(n)$, les filtres adaptatifs LMS stéréophoniques sous-modélisés $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ convergent en moyenne vers les premiers coefficients des réponses impulsionnelles du système inconnu \mathbf{h}_1^* et \mathbf{h}_2^* , respectivement.

Il convient de mentionner que le phénomène de biais dans l'algorithme LMS stéréophonique sous-modélisé, lorsque l'entrée est corrélée apparaît également dans

l'algorithme LMS hiérarchique [43], qui a été montré converger vers une solution biaisée pour les signaux d'entrée corrélés et, dans certaines circonstances, pour les entrées blanches [44], [45] et [4]. Toutes ces expressions théoriques seront approuvées, dans la section suivante, par des simulations.

3.8. Les résultats expérimentaux

Des exemples de simulation sont présentés ici afin de vérifier les résultats théoriques moyens dérivés dans le présent chapitre.

Les expériences sont réalisées dans une configuration de système d'identification. Un bruit blanc gaussien de moyenne nulle est ajouté au signal désiré $y(n)$. Les coefficients du filtre adaptatif ont été initialisés avec des zéros. Les résultats de simulation de Monte Carlo sont obtenus en faisant la moyenne de plus de 1000 essais indépendants.

3.8.1 Entrée gaussienne fortement corrélée

Dans cette expérience, le système inconnu est un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR) de 20 coefficients, c-à-d , $N = 20$, avec,

$$\mathbf{h}_N^{v1} = [0.01, 0.02, -0.04, -0.08, 0.15, 0.45, 0.15, -0.6, 0.6, 0.45, -0.3, 0.15, -0.08, -0.04, 0.02, 0.01, 0.5, 0.3, -0.2, 0.2]^T$$

$$\mathbf{h}_N^{v2} = [0.02, -0.03, 0.45, -0.81, -0.61, -0.30, 0.72, -0.81, -0.35, 0.47, -0.7, -0.45, -0.31, -0.25, 0.4, -0.32, -0.21, 0.18, 0.15, -0.001]^T$$

Ces deux filtres \mathbf{h}_N^{v1} et \mathbf{h}_N^{v2} sont représentés par les figure 3.2 et figure 3.3, respectivement.

Dans le modèle choisi pour la simulation, les systèmes inconnus et les filtres adaptatifs FIR sont excités tous deux avec un signal corrélé généré par :

$$X^{v1}(n) = 0.9 X^{v1}(n-1) + \xi_1(n) \quad (3.50)$$

$$X^{v2}(n) = 0.9 X^{v2}(n-1) + \xi_2(n) \quad (3.51)$$

Où $\xi_1(n)$ et $\xi_2(n)$ sont des séquences gaussiennes non corrélées de moyenne nulle et de variance unité. Nous sélectionnons $L = 15$, $\varepsilon(n) = E(\xi^2) = 0.00015$, et utilisons des petits pas $\mu_1 = \mu_2 = 0.0004$ et d'autres plus grandes $\mu_1 = \mu_2 = 0.001$.

La grande valeur du pas est proche de la valeur maximale qui assure la convergence de l'algorithme. On note que ces signaux d'entrée corrélés utilisent 1000 itérations pour tester le système de la figure 3.1.

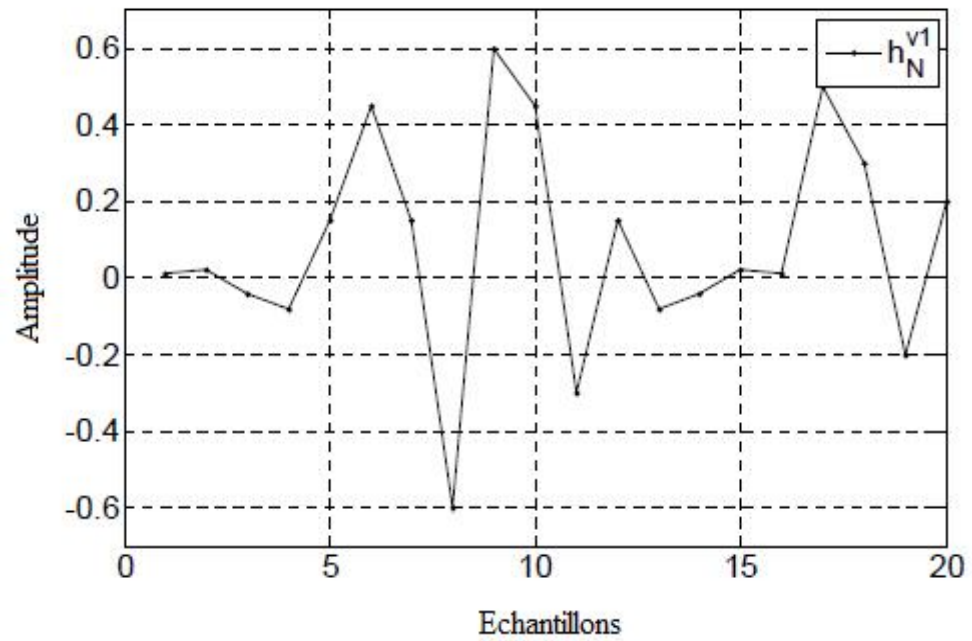


Figure 3.2 : La réponse impulsionnelle h_N^{v1} dans la salle de réception.

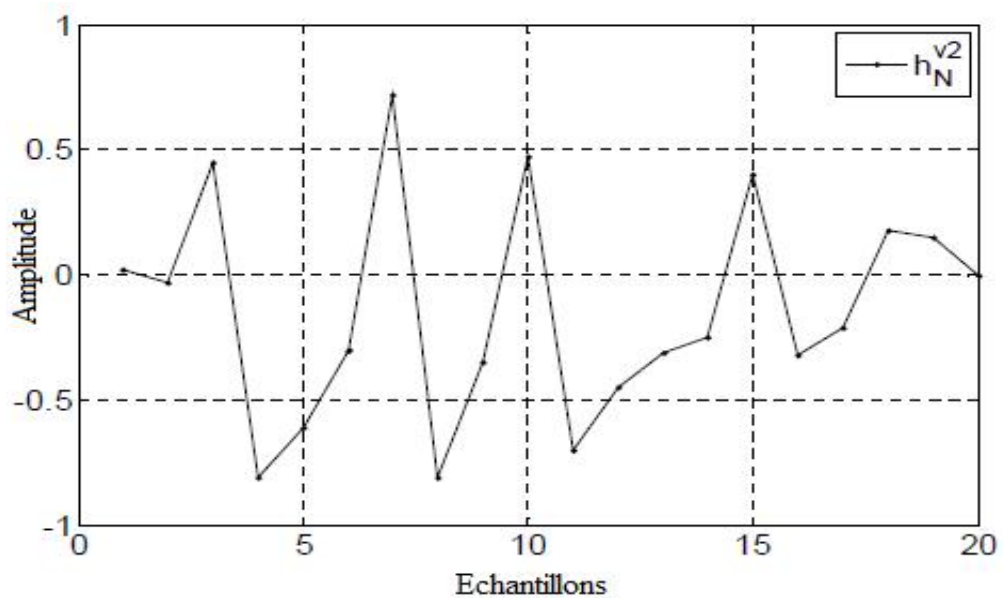


Figure 3.3 : La réponse impulsionnelle h_N^{v2} dans la salle de réception.

Les figure 3.4 et figure 3.5 illustrent le comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur obtenu à partir de simulations et déterminé à partir des expressions théoriques dans (3.33) et (3.34), respectivement. Les résultats obtenus confirment la précision de nos analyses.

Nous avons également observé que la caractéristique de la vitesse de convergence des deux filtres adaptatifs est inversement proportionnelle aux valeurs des pas, c'est à dire quand les valeurs des pas de μ_1 et μ_2 sont petites, les vitesses de convergence des vecteurs des coefficients d'erreur vers zéro (les sixièmes et les huitièmes) sont lentes et, contrairement lorsque les valeurs des pas sont grandes (proches de celles qui assurent la convergence de l'algorithme), la vitesse de convergence vers zéros est rapide.

Les figure.3.6 et figure.3.7 montrent le comportement moyen des sixième et huitième coefficients d'erreurs obtenus à partir des simulations et déterminés à partir des expressions théoriques dans (3.33) (pour le filtre adaptatif $\tilde{\mathbf{h}}_L^v(n)$) et (3.34) (pour le filtre adaptatif $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v^2}(n)$), respectivement. La seule différence entre cette expérience et la précédente est la longueur de sous-modélisation du filtre adaptatif qui est prise égale à $L=10$. Nous avons bien mené cette expérience avec les mêmes valeurs des pas d'adaptation que dans l'expérience précédente. Cette expérience confirme également notre analyse même lorsque la longueur sous-déterminée des filtres adaptatifs ($L = 10$) est très petite par rapport à la longueur exacte de la modélisation.

Nous notons que la vitesse de convergence des deux coefficients, dans ce cas, est lente d'après la première expérience lorsque la longueur L des filtres adaptatifs est proche de la longueur réelle (N).

En autre temps, cette simulation a prouvé la validité de l'analyse, que les résultats théoriques ont été présentés pour prédire avec précision le comportement réel de l'algorithme LMS stéréophonique sous-modélisé, pendant le régime transitoire et les phases de l'équilibre.

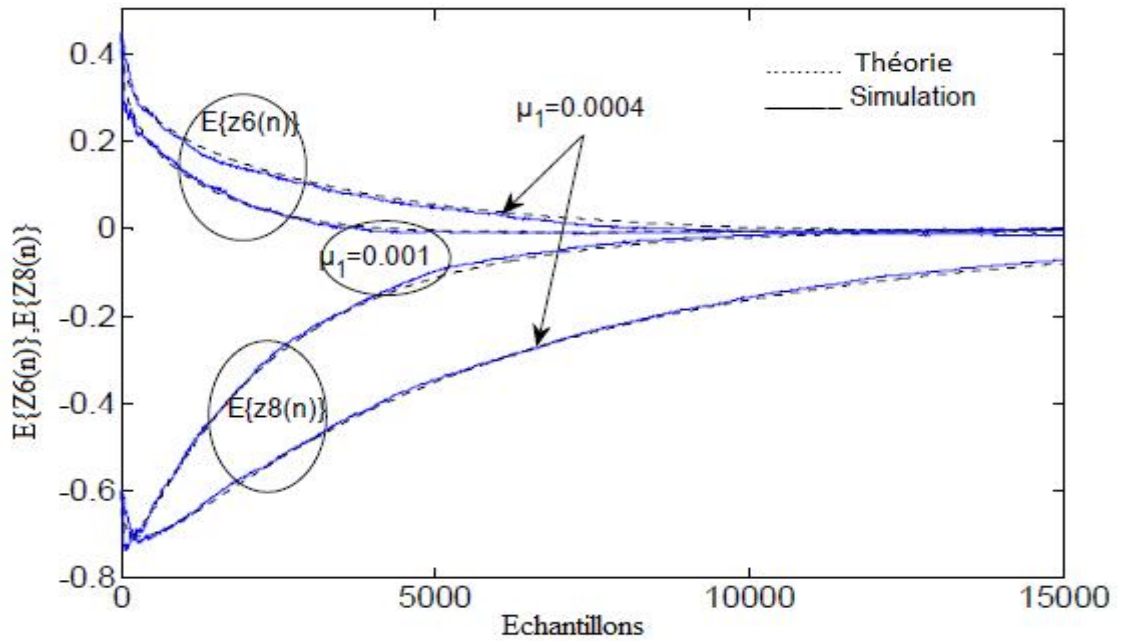


Figure 3.4 : La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous-modélisé $\tilde{h}_L^{v1}(n)$ pour une donnée d'entrée gaussienne corrélée, et $N = 20$, $L = 15$; SNR d'entrée = 40 dB

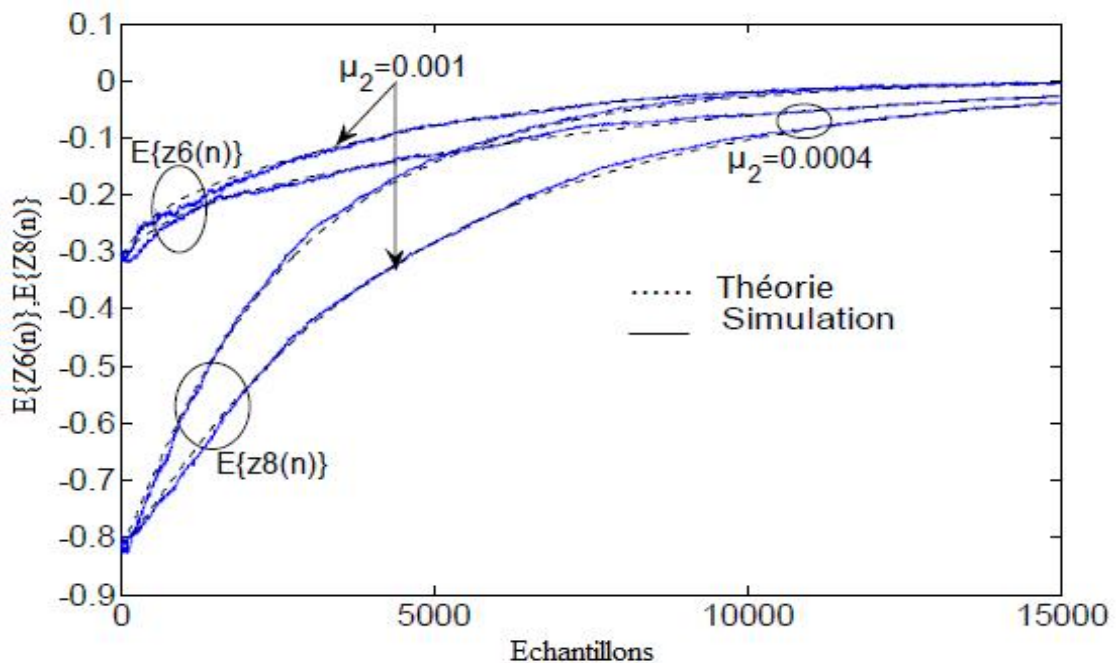


Figure 3.5 : La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous-modélisé $\tilde{h}_L^{v2}(n)$. Signal d'entrée : bruit gaussien corrélé, et $N = 20$, $L = 15$; le SNR d'entrée = 40 dB.

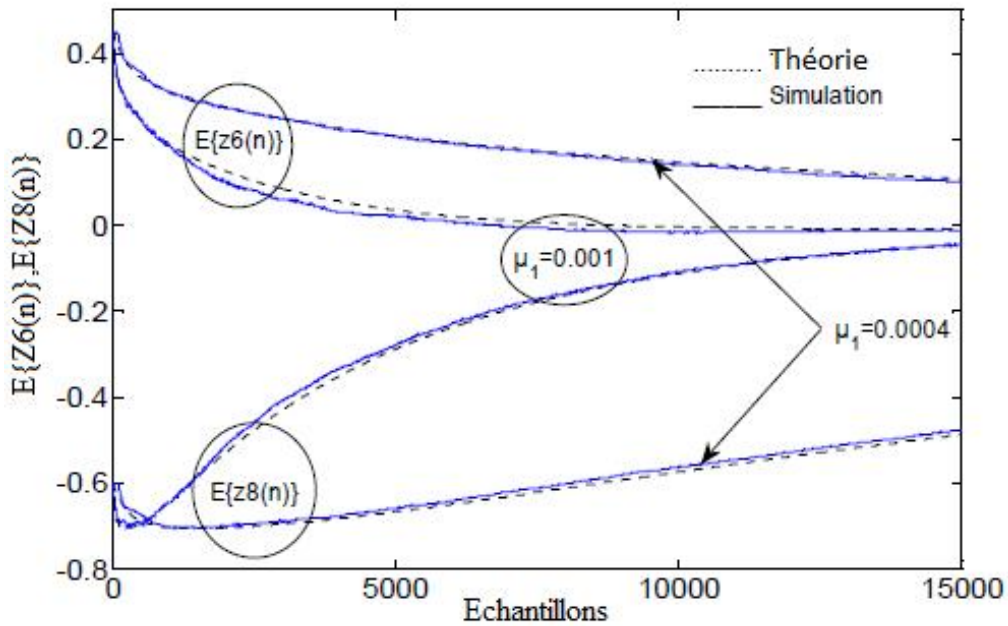


Figure 3.6: La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous-modélisé $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ pour une donnée d'entrée gaussienne corrélée, et $N = 20$, $L = 10$; SNR d'entrée = 40 dB.

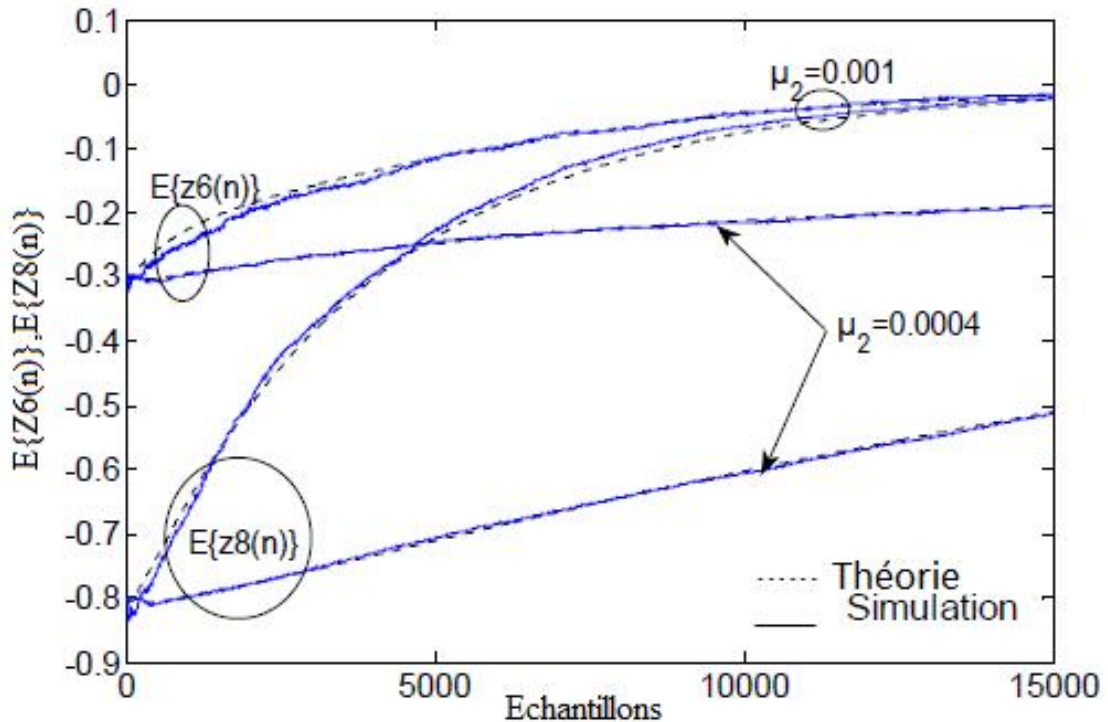


Figure 3.7 : La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous-modélisé $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ pour une donnée d'entrée gaussienne corrélée, et $N = 20$, $L = 10$; SNR d'entrée = 40 dB

3.8.2 Simulation avec un signal d'entrée gaussien blanc

Dans cette expérience, nous avons utilisé un modèle similaire à celui décrit précédemment (cas d'entrée fortement corrélée), sauf que le système inconnu et les deux filtres adaptatifs sont excités par un signal de moyenne nulle, gaussien et blanc $x(n)$, de variance égale à l'unité. Nous avons choisi $L = 15$ pour les deux filtres adaptatifs $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$, et des pas d'adaptation proches des valeurs maximales ($\mu_1 = \mu_2 = 0,005$), et des petits pas ($\mu_1 = \mu_2 = 0,0005$).

Les figure.3.8 et figure.3.9 montrent le comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreurs obtenus à partir des simulations et des expressions théoriques dans (3.33) et (3.34), respectivement.

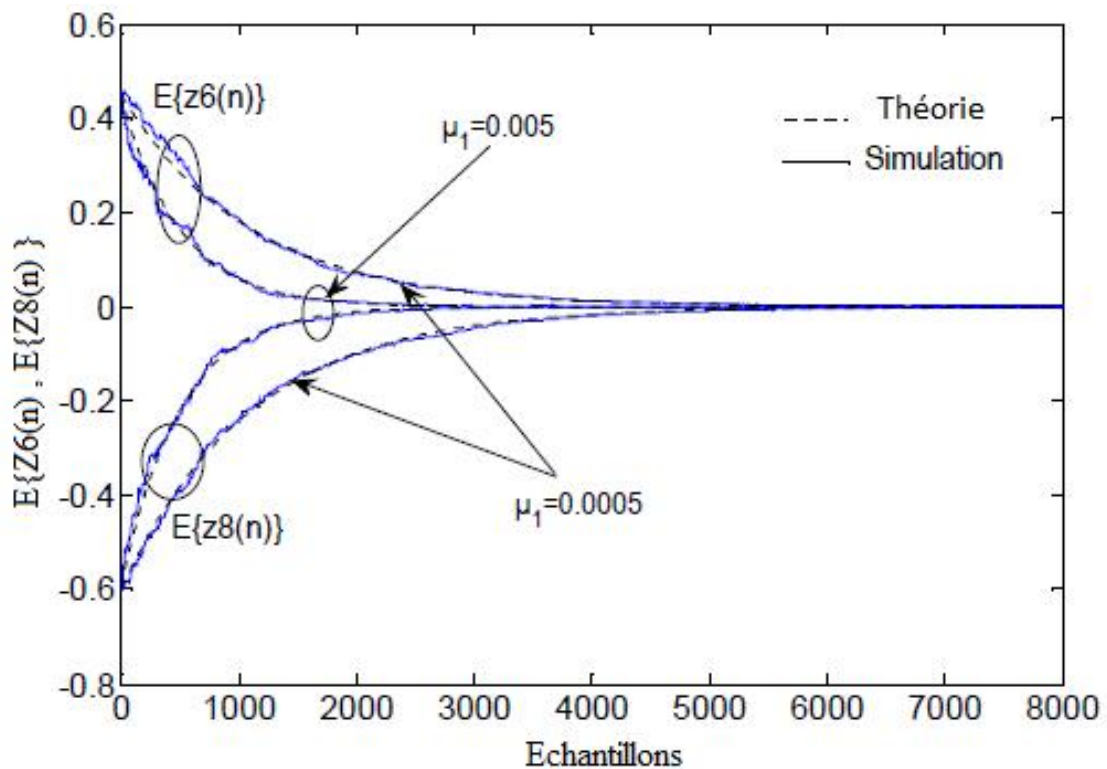


Figure 3.8 : La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous-modélisé $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ pour une donnée d'entrée gaussienne blanche, et $N = 20$, $L = 15$; SNR d'entrée = 40 dB.

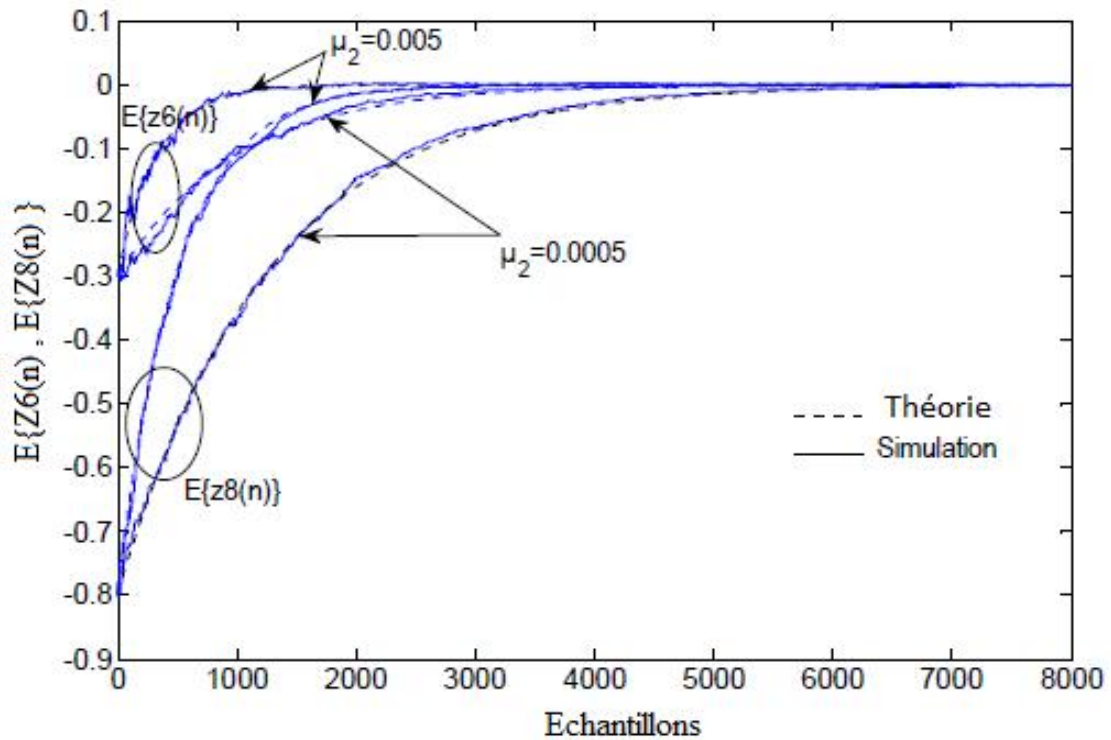


Figure 3.9 : La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous-modélisé $\tilde{h}_L^{v2}(n)$ pour une donnée d'entrée gaussienne blanche, et $N = 20$, $L = 15$; SNR d'entrée = 40 dB.

Nous avons noté une bonne concordance entre les valeurs théoriques et de simulation. Nous avons également noté que la vitesse de convergence vers les coefficients réels pour les deux filtres adaptatifs, dans le cas d'entrées gaussiennes blanches, c'est beaucoup plus rapide que dans le cas de données d'entrée gaussiennes corrélées. De toute évidence, la convergence théorique, en utilisant des petits ou grands pas, présente un parfait accord avec le résultat de simulation et permet une prédiction précise du comportement de l'algorithme pendant les phases transitoires d'adaptation.

3.8.3. Entrée gaussienne faiblement corrélée

Cette expérience peut être classée entre les deux expériences citées ci-dessus. Pour cette raison, nous avons utilisé des entrées gaussiennes faiblement corrélées $\mathbf{X}^{v1}(n)$ et $\mathbf{X}^{v2}(n)$ comme suit,

$$X^{v1}(n) = 0.1 X^{v1}(n-1) + \xi_1(n) \quad (3.52)$$

$$X^{v2}(n) = 0.1 X^{v2}(n-1) + \xi_2(n) \quad (3.53)$$

Ces deux signaux d'entrée sont convolués avec la réponse impulsionnelle d'une salle réelle tronquée à 512 points (voir figure.3.10), c.-à-d $N = 512$. La longueur de sous-modélisation des filtres adaptatifs $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ est choisie égale à $L_1=L_2 = 320$, et la variance du bruit additif à l'entrée est choisie $\varepsilon(n) = E(\xi^2) = 0.000015$. Nous avons sélectionné des pas de grandes valeurs $\mu_1 = \mu_2 = 0,001$ proches des valeurs maximales, celles de la moyenne sont $\mu_1 = \mu_2 = 0,0005$ et les petits $\mu_1 = \mu_2 = 0,0001$. Les grandes valeurs des pas sont proches des valeurs maximales qui assurent la convergence des algorithmes LMS d'un AEAS. Dans cette expérience, nous avons utilisé le critère du système Mismatch pour comparer la théorie et les résultats obtenus par des simulations. Nous avons défini ce critère pour les deux filtres adaptatifs $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ comme suit :

$$\text{System Mismatch} = 10 * \log_{10} \left(\frac{\|\mathbf{h}_L^{vi}(n) - \tilde{\mathbf{h}}_L^{vi}(n)\|^2}{\|\mathbf{h}_L^{vi}(n)\|^2} \right), \quad i \in \{1,2\} \quad (3.54)$$

Théoriquement, le critère du système Mismatch (système d'incompatibilité) est défini par :

$$\text{System Mismatch} = 10 * \log_{10} \left(\frac{\|E(\mathbf{z}_i)\|^2}{\|\mathbf{h}_L^{vi}(n)\|^2} \right), \quad i \in \{1,2\} \quad (3.55)$$

Les résultats de simulation obtenus pour l'évolution du système Mismatch des deux filtres adaptatifs $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$, Calculée par (3.54), sont rapportés sur les figure 3.11 et 3.12, respectivement. Nous avons tracé sur ces deux figures leur Système Mismatch correspondants de (3.55), obtenu théoriquement par les équations (3.33) et (3.34), respectivement. Nous avons clairement indiqué que, pour de longues filtres adaptatifs, il ya concordance parfaite entre la théorie et les résultats des simulations pour des petits pas (dans le cas où $\mu_1 = \mu_2 = 0,0001$ pour les deux figures), alors que pour un pas important (dans les deux autres cas des valeurs de μ_1 et μ_2), la courbe théorique est légèrement moins précise pour prédire les comportements des deux filtres adaptatifs $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ pendant les étapes transitoires de l'adaptation.

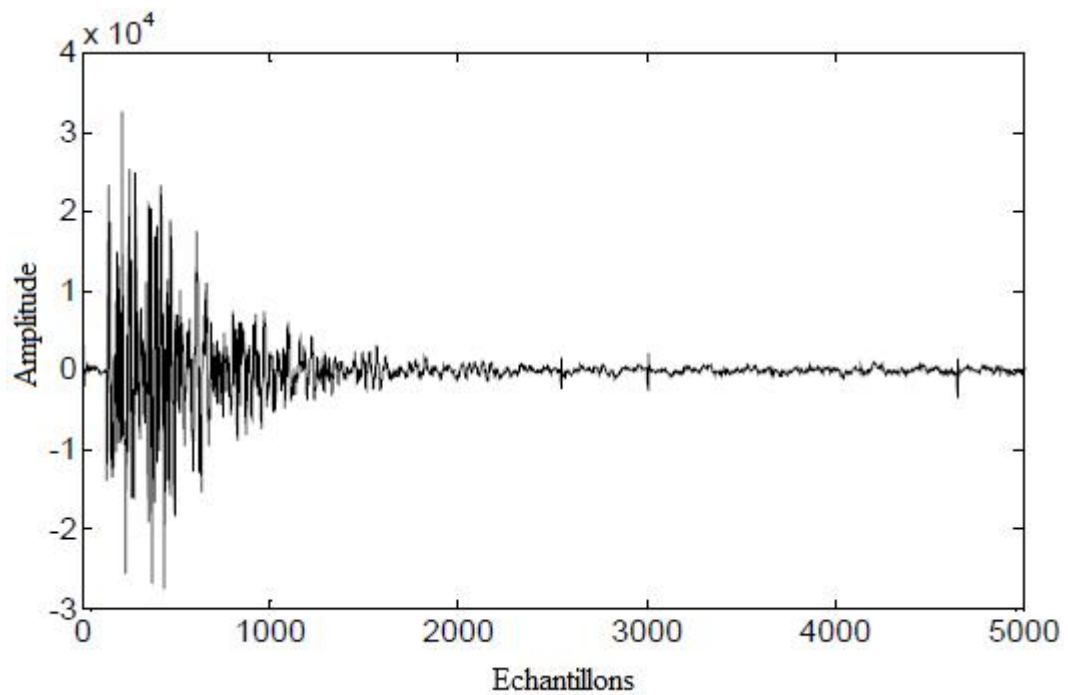


Figure 3.10: Réponse impulsionnelle d'une salle réelle de 5000 points.

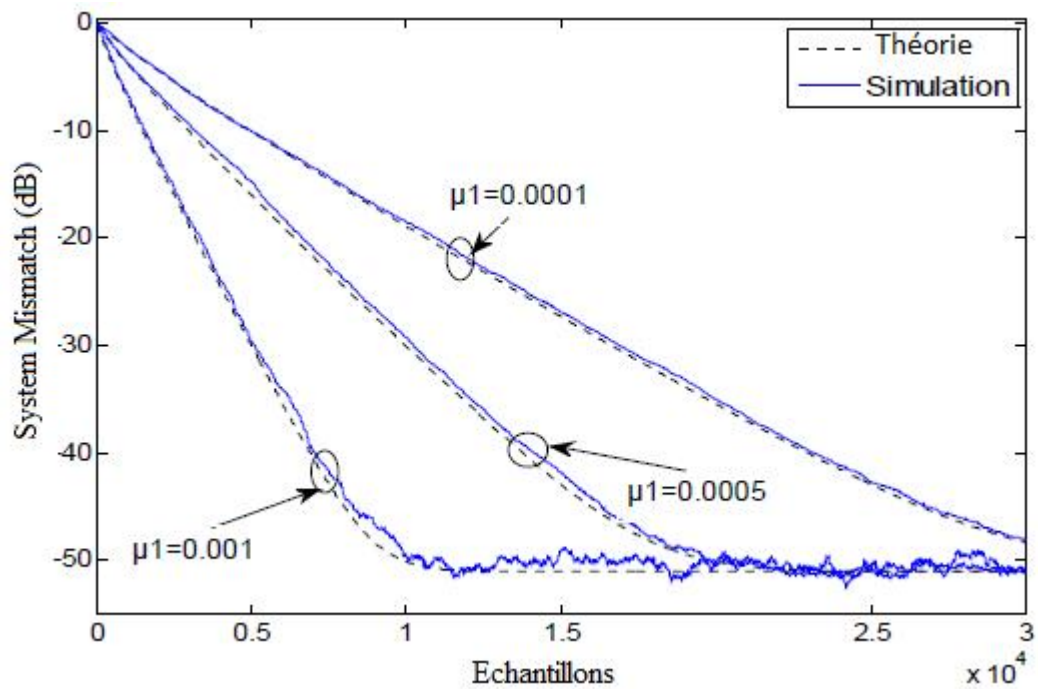


Figure 3.11 : La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous-modélisé $\tilde{\mathbf{h}}_L^{vl}(n)$ pour une donnée d'entrée gaussienne blanche, et $N = 512$, $L = 320$; SNR d'entrée = 60dB.

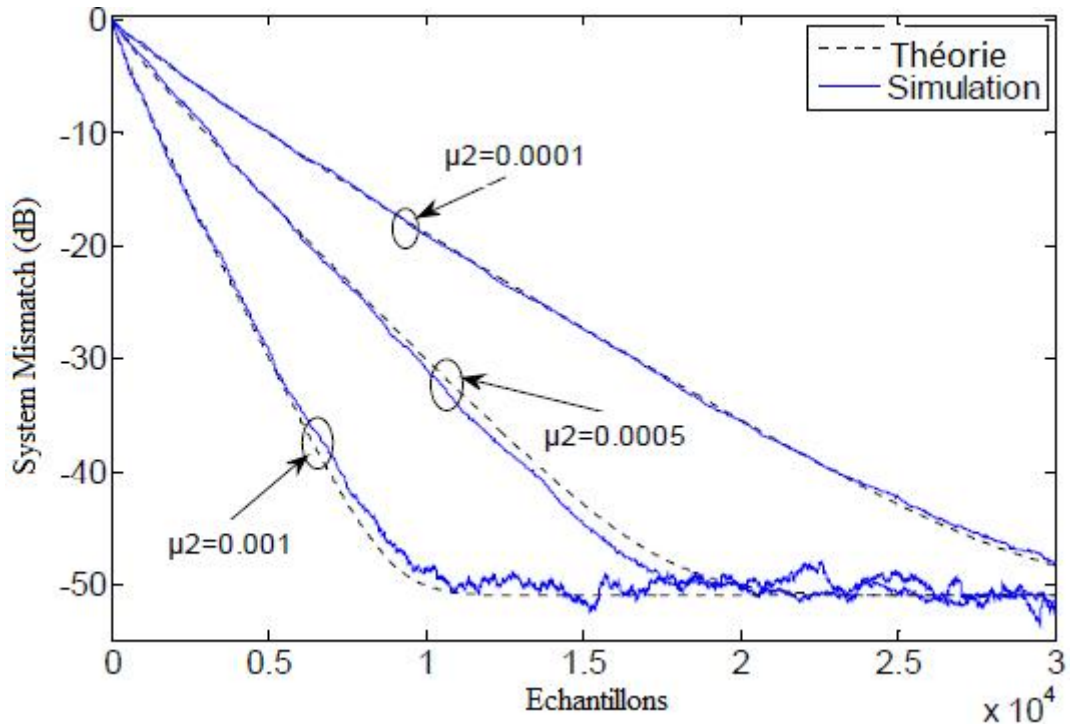


Figure 3.12 :La comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement moyen du sixième et huitième coefficient d'erreur de l'algorithme LMS adaptatif sous-modélisé $\tilde{h}_L^{v^2}(n)$ pour une donnée d'entrée gaussienne blanche, et $N = 512$, $L = 320$; SNR d'entrée = 60dB.

3.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dérivé un modèle analytique pour prédire et analyser le comportement stochastique de l'algorithme LMS (Least Mean Square) stéréophonique, lorsque les filtres adaptatifs sont sous-modélisés. Grâce à notre étude, et en utilisant l'hypothèse d'indépendance, nous avons fourni, des expressions théoriques exactes, des équations récursives pour l'erreur de filtrage et les vecteurs moyens du coefficient erreur au cours des phases transitoire et stable.

Les expressions analytiques montrent que les algorithmes stéréophoniques LMS sous-modélisés avec des entrées corrélées ont un comportement de convergence qui est sensiblement différent de celui de la modélisation stéréophonique exacte des filtres adaptatifs LMS.

Les résultats de simulations de Monte Carlo ont été présentés et ont confirmé la précision de performance de notre analyse de l'ASEA. Les résultats Monte Carlo obtenus sont en excellent accord avec les prédictions théoriques fournis.

CHAPITRE 4

CONVERGENCE QUADRATIQUE MOYENNE DES COEFFICIENTS DES FILTRES ADAPTATIFS LMS STEREOPHONIQUE SOUS-MODELISES

4.1. Introduction

Après avoir décrit le comportement moyen des vecteurs d'erreur des coefficients des deux filtres adaptatifs LMS sous-modélisés, dans le chapitre précédent, on s'intéresse dans ce chapitre à leur comportement en analysant le critère de l'erreur quadratique moyenne en sous-modélisation.

4.2. Analyse de l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) du LMS stéréo sous-modélisé

Dans cette section, nous allons présenter une analyse de l'algorithme LMS stéréo lorsque les deux filtres adaptatifs sont sous-modélisés. Le critère d'analyse est l'erreur quadratique moyenne. De l'équation (3.22) du chapitre précédent, l'erreur globale du filtrage adaptatif pour les deux canaux, est donnée par l'expression suivante [40], [51]:

$$\mathbf{e}(n) = (\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* + (\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* - (\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n) - (\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) + \xi(n) \quad (4.1)$$

où ; $\xi(n) = \xi_1(n) + \xi_2(n)$ avec $\xi_1(n)$ et $\xi_2(n)$ sont des séquences de bruit de moyenne nulle, stationnaires, indépendantes et non corrélées.

La mise à jour des vecteurs des coefficients d'erreur LMS $\mathbf{Z}_1(n+1)$ et $\mathbf{Z}_2(n+1)$ sont donnés respectivement par les formules récursives (3.29) et (3.30) du chapitre 3, ces relations sont rappelées comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(n+1) &= \tilde{\mathbf{h}}_1^{v1}(n) + \mu_1 \mathbf{e}(n) \mathbf{X}^{v1}(n) - \mathbf{h}_1^* \\ &= \left[\mathbf{I} - \mu_1 \mathbf{X}^{v1}(n) (\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) + \mu_1 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) \\ &+ \mu_1 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) - \mu_1 \left[\mathbf{X}^{v1}(n) (\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_1 \xi(n) \mathbf{X}^{v1}(n) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_2(n+1) &= \tilde{\mathbf{h}}_L^{v^2}(n) + \mu_2 \mathbf{e}(n) \mathbf{X}^{v^2}(n) - \mathbf{h}_2^* \\
&= \left[\mathbf{I} - \mu_2 \mathbf{X}^{v^2}(n) (\mathbf{X}^{v^2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_2 \left[(\overline{\mathbf{X}}^{v^2}(n))^T \overline{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v^2}(n) \\
&\quad + \mu_2 \left[(\overline{\mathbf{X}}^{v^1}(n))^T \overline{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v^2}(n) - \mu_2 \left[\mathbf{X}^{v^2}(n) (\mathbf{X}^{v^1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) + \mu_2 \xi(n) \mathbf{X}^{v^2}(n)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

De l'équation (4.1), l'erreur quadratique moyenne $\epsilon(n)$ pour les deux filtres adaptatifs LMS sous-modélisés peut être définie comme suit [40], [51] :

$$\begin{aligned}
\epsilon(n) &= E\{e^2(n)\} = E\{\mathbf{e}(n) \mathbf{e}(n)^T\} \\
&= E\left\{ \left((\overline{\mathbf{X}}^{v^1}(n))^T \overline{\mathbf{h}}_1^* + (\overline{\mathbf{X}}^{v^2}(n))^T \overline{\mathbf{h}}_2^* - (\mathbf{X}^{v^1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n) - (\mathbf{X}^{v^2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) + \xi(n) \right) \times \right. \\
&\quad \left. \left((\overline{\mathbf{X}}^{v^1}(n))^T \overline{\mathbf{h}}_1^* + (\overline{\mathbf{X}}^{v^2}(n))^T \overline{\mathbf{h}}_2^* - (\mathbf{X}^{v^1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n) - (\mathbf{X}^{v^2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) + \xi(n) \right)^T \right\}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Le développement de cette équation nous permet d'écrire $\epsilon(n)$ sous la forme suivante :

$$\epsilon(n) = E\{e^2(n)\} = \epsilon_1(n) + \epsilon_2(n) + \epsilon_3(n) \tag{4.5}$$

L'expression mathématique du critère de l'EQM est obtenue en tenant compte de l'hypothèse d'indépendance entre les signaux d'entrée et les réponses impulsionnelles. Les expressions des EQM partielles de l'équation (4.5) sont données par les formules suivantes :

$$\epsilon_1(n) = \epsilon_{\min}^{(1)} + (\overline{\mathbf{h}}_1^*)^T \overline{\mathbf{R}}_1(n) \overline{\mathbf{h}}_1^* - 2\mathbf{b}_1^T(n) E\{\mathbf{Z}_1(n)\} + \text{tr}\left(\mathbf{R}_1(n) E\{\mathbf{Z}_1(n) (\mathbf{Z}_1(n))^T\}\right) \tag{4.6}$$

$$\epsilon_2(n) = \epsilon_{\min}^{(2)} + (\overline{\mathbf{h}}_2^*)^T \overline{\mathbf{R}}_2(n) \overline{\mathbf{h}}_2^* - 2\mathbf{b}_2^T(n) E\{\mathbf{Z}_2(n)\} + \text{tr}\left(\mathbf{R}_2(n) E\{\mathbf{Z}_2(n) (\mathbf{Z}_2(n))^T\}\right) \tag{4.7}$$

$$\epsilon_3(n) = \epsilon_{\min}^{(3)} + 2(\overline{\mathbf{h}}_1^*)^T \mathbf{R}_{22}(n) \overline{\mathbf{h}}_2^* - 2(\overline{\mathbf{h}}_1^*)^T \overline{\mathbf{R}}_{21}(n) E\{\mathbf{Z}_2(n)\} - 2(E\{\mathbf{Z}_1(n)\})^T \overline{\mathbf{R}}_{12}(n) \overline{\mathbf{h}}_2^* + \text{tr}\left(\mathbf{R}_{12}(n) \mathbf{Z}_1(n) (\mathbf{Z}_2(n))^T\right) \tag{4.8}$$

Où; $tr(\cdot)$ désigne l'opérateur de trace d'une matrice et ;

$$\mathbf{R}_1(n) = E\left\{ \mathbf{X}^{v^1}(n) (\mathbf{X}^{v^1}(n))^T \right\} \quad \mathbf{R}_2(n) = E\left\{ \mathbf{X}^{v^2}(n) (\mathbf{X}^{v^2}(n))^T \right\} \quad \overline{\mathbf{R}}_2(n) = E\left\{ \overline{\mathbf{X}}^{v^2}(n) (\overline{\mathbf{X}}^{v^2}(n))^T \right\}$$

$$\overline{\mathbf{R}}_1(n) = E\left\{ \overline{\mathbf{X}}^{v^1}(n) (\overline{\mathbf{X}}^{v^1}(n))^T \right\} \quad \mathbf{R}_{22}(n) = E\left\{ \overline{\mathbf{X}}^{v^1}(n) (\overline{\mathbf{X}}^{v^2}(n))^T \right\}$$

sont les matrices d'auto-corrélation des deux signaux sources dans la salle de réception, respectivement,

$$-\mathbf{R}_{12}(n) = E\left\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\right\}, \quad -\mathbf{R}_{21}(n) = E\left\{\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T\right\}, \quad -\bar{\mathbf{R}}_{12}(n) = E\left\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T\right\},$$

$$-\bar{\mathbf{R}}_{21}(n) = E\left\{\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\right\}$$

sont les matrices d'inter-corrélation des deux signaux sources dans la salle de réception, respectivement,

et,

$$\epsilon_{\min}^{(1)} = E\{\xi_1^2(n)\}, \quad \epsilon_{\min}^{(2)} = E\{\xi_2^2(n)\} \quad \epsilon_{\min}^{(3)} = 2E\{\xi_1(n)\xi_2(n)\}$$

et ;

$$\mathbf{b}_1 = [b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1L}]^T; \quad \mathbf{b}_2 = [b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2L}]^T,$$

$$\mathbf{c}_1 = [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1L}]^T; \quad \mathbf{c}_2 = [c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2L}]^T,$$

dont les $i^{\text{èmes}}$ composantes sont données, respectivement par les équations (3.35), (3.36), (3.37), (3.38) du chapitre 3. Dans ce cas de figure, et si $M=N$, on a bien $b_{1i}=b_{2i}=c_{1i}=c_{2i}=0$.

4.3. Convergence en erreur quadratique moyenne des coefficients des filtres adaptatifs

LMS stéréophonique sous-modélisés

Pour analyser le comportement quadratique moyen des vecteurs d'erreur des coefficients des deux filtres adaptatifs LMS sous-modélisés, il est nécessaire d'exprimer les termes $E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}$, $E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}$ et $E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}$ qui apparaissent dans (4.6), (4.7) et (4.8), respectivement. On remarque que les expressions récursives de (4.2) et (4.3), nous permettent de simplifier ces quantités récursivement. On a besoin aussi des deux termes $E\{\mathbf{Z}_1(n)\}$ et $E\{\mathbf{Z}_2(n)\}$. Ces deux derniers peuvent être déterminés en utilisant les formules récursives (3.33) et (3.34) respectivement du chapitre précédent.

En prenant l'espérance des deux membres de (4.2) et en utilisant l'hypothèse d'indépendance, il vient :

$$E\{\mathbf{Z}_1(n+1)(\mathbf{Z}_1(n+1))^T\} =$$

$$E\left\{ \left[\mathbf{I} - \mu_1 \mathbf{X}^{v1}(n)(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) + \mu_1 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) + \mu_1 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) \right. \quad (4.9)$$

$$- \mu_1 \left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_1 \xi(n) \mathbf{X}^{v1}(n) \times \left. \left[\mathbf{I} - \mu_1 \mathbf{X}^{v1}(n)(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) + \mu_1 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) \right.$$

$$\left. + \mu_1 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) - \mu_1 \left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_1 \xi(n) \mathbf{X}^{v1}(n) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= E\{(\mathbf{Z}_1(n) - \mu_1 \mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n) + \mu_1 [(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v1}(n) + \mu_1 [(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v1}(n) \\
&- \mu_1 [\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_1 \xi(n) \mathbf{X}^{v1}(n) \times (\mathbf{Z}_1(n) - \mu_1 \mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n) + \mu_1 [(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v1}(n) \\
&+ \mu_1 [(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v1}(n) - \mu_1 [\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_1 \xi(n) \mathbf{X}^{v1}(n))^T \}
\end{aligned}$$

Après développement (voir appendice A) et réarrangement de cette expression, on obtient la relation finale du terme $E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}$. Il est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
E\{\mathbf{Z}_1(n+1)(\mathbf{Z}_1(n+1))^T\} &= E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\} - 2\mu_1 \mathbf{R}_1 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\} + \mu_1 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{b}_1)^T + \mu_1 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{c}_1)^T \\
&- \mu_1 \mathbf{R}_{21} E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\} + \mu_1^2 \mathbf{R}_1 \text{tr}(\mathbf{R}_1 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) - \mu_1^2 \mathbf{R}_1 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{b}_1)^T - \mu_1^2 \mathbf{R}_1 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{c}_1)^T \\
&+ \mu_1^2 \mathbf{R}_1 \text{tr}(\mathbf{R}_{21} E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) + \mu_1 \mathbf{b}_1 E\{\mathbf{Z}_1(n)^T\} - \mu_1^2 \mathbf{R}_1 \mathbf{b}_1 E\{\mathbf{Z}_1(n)^T\} + \mu_1^2 \mathbf{b}_1 (\mathbf{b}_1)^T + \mu_1^2 \mathbf{c}_1 (\mathbf{c}_1)^T \\
&- \mu_1^2 \mathbf{R}_{21} \mathbf{b}_1 E\{\mathbf{Z}_2(n)^T\} + \mu_1 \mathbf{c}_1 E\{\mathbf{Z}_1(n)^T\} - \mu_1^2 \mathbf{R}_1 \mathbf{c}_1 E\{\mathbf{Z}_1(n)^T\} + \mu_1^2 \mathbf{c}_1 (\mathbf{b}_1)^T + \mu_1^2 \mathbf{b}_1 (\mathbf{c}_1)^T - \mu_1^2 \mathbf{R}_{21} \mathbf{c}_1 E\{\mathbf{Z}_2(n)^T\} \\
&- \mu_1 \mathbf{R}_{12} E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\} + \mu_1^2 \mathbf{R}_{12} \text{tr}(\mathbf{R}_1 E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) - \mu_1^2 \mathbf{R}_{12} E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{b}_1)^T - \mu_1^2 \mathbf{R}_{12} E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{c}_1)^T \\
&+ \mu_1^2 \mathbf{R}_{12} \text{tr}(\mathbf{R}_{21} E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) + \mu_1^2 \varepsilon_{\min}^1 \mathbf{R}_1
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Si on procède de la même façon pour développer l'expression finale du terme $E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}$ intervenant dans l'équation (4.3), après développement, on obtient la relation réursive suivante :

$$\begin{aligned}
E\{\mathbf{Z}_2(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\} &= \\
&E\left\{ \left[\begin{array}{l} \left[\mathbf{I} - \mu_2 \mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_2 [(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v2}(n) + \mu_2 [(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v2}(n) - \mu_2 [\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T] \mathbf{Z}_1(n) \\ + \mu_2 \xi(n) \mathbf{X}^{v2}(n) \end{array} \right] \times \right. \\
&\left. \left[\begin{array}{l} \left[\mathbf{I} - \mu_2 \mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_2 [(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v2}(n) + \mu_2 [(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v2}(n) - \mu_2 [\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T] \mathbf{Z}_1(n) \\ + \mu_2 \xi(n) \mathbf{X}^{v2}(n) \end{array} \right]^T \right\}
\end{aligned}$$

En développant d'avantage cette dernière relation, on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned}
E\{\mathbf{Z}_2(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\} &= \\
&E\left\{ \left[\begin{array}{l} \left[\mathbf{I} - \mu_2 \mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_2 [(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v2}(n) + \mu_2 [(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v2}(n) \\ - \mu_2 [\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T] \mathbf{Z}_1(n) + \mu_2 \xi(n) \mathbf{X}^{v2}(n) \end{array} \right] \times \right. \\
&\left. \left[\begin{array}{l} \left[\mathbf{I} - \mu_2 \mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_2 [(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v2}(n) + \mu_2 [(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v2}(n) \\ - \mu_2 [\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T] \mathbf{Z}_1(n) + \mu_2 \xi(n) \mathbf{X}^{v2}(n) \end{array} \right]^T \right\}
\end{aligned}$$

Et la relation réursive finale du terme $E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}$ qu'on obtient est donnée par :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\} = \\
& \mathbb{E}\left\{ \begin{aligned} & (\mathbf{Z}_2(n) - \mu_2 \mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) + \mu_2 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) + \mu_2 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \\ & - \mu_2 \left[\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) + \mu_2 \xi(n) \mathbf{X}^{v2}(n) \times (\mathbf{Z}_2(n) - \mu_2 \mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) \\ & + \mu_2 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) + \mu_2 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) - \mu_2 \left[\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) \\ & + \mu_2 \xi(n) \mathbf{X}^{v2}(n) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Un développement plus poussé de l'équation (4.11)(voir appendice A) a permis d'aboutir à l'expression récurrente finale du terme $\mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\}$. Cette quantité est finalement quantifiée par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\} = \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\} - 2\mu_2 \mathbf{R}_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\} + \mu_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}(\mathbf{b}_2)^T + \mu_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}(\mathbf{c}_2)^T \\
& - \mu_2 \mathbf{R}_{12} \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\} + \mu_2^2 \mathbf{R}_2 \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) - \mu_2^2 \mathbf{R}_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}(\mathbf{b}_2)^T - \mu_2^2 \mathbf{R}_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}(\mathbf{c}_2)^T \\
& + \mu_2^2 \mathbf{R}_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) + \mu_2 \mathbf{b}_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\} - \mu_2^2 \mathbf{R}_2 \mathbf{b}_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\} + \mu_2^2 \mathbf{b}_2 (\mathbf{b}_2)^T \\
& + \mu_2^2 \mathbf{b}_2 (\mathbf{c}_2)^T - \mu_2^2 \mathbf{R}_{12} \mathbf{b}_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\} + \mu_2 \mathbf{c}_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\} - \mu_2^2 \mathbf{R}_2 \mathbf{c}_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\} + \mu_2^2 \mathbf{c}_2 (\mathbf{b}_2)^T + \mu_2^2 \mathbf{c}_2 (\mathbf{c}_2)^T \\
& - \mu_2^2 \mathbf{R}_{21} \mathbf{c}_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\} - \mu_2 \mathbf{R}_{21} \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\} + \mu_2^2 \mathbf{R}_{21} \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) - \mu_2^2 \mathbf{R}_{21} \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{b}_2)^T \\
& - \mu_2^2 \mathbf{R}_{21} \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{c}_2)^T + \mu_2^2 \mathbf{R}_{21} \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) + \mu_2^2 \varepsilon_{\min}^2 \mathbf{R}_2 \quad (4.12)
\end{aligned}$$

D'un autre coté, le développement du terme $\mathbb{E}\{\mathbf{Z}_1(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\}$ a permis d'aboutir à son expression finale suivante :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_1(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\} = \\
& \mathbb{E}\left\{ \begin{aligned} & \left((\mathbf{Z}_1(n) - \mu_1 \mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n) + \mu_1 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) + \mu_1 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) \right) \\ & \left(-\mu_1 \left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_1 \xi(n) \mathbf{X}^{v1}(n) \right) \end{aligned} \right\} \times \\
& \mathbb{E}\left\{ \begin{aligned} & \left((\mathbf{Z}_1(n) - \mu_1 \mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n) + \mu_1 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) + \mu_1 \left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v1}(n) \right)^T \\ & \left(-\mu_1 \left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \right] \mathbf{Z}_2(n) + \mu_1 \xi(n) \mathbf{X}^{v1}(n) \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

La manipulation de l'équation (4.13) (voir appendice A) permet de simplifier d'avantage cette expression. Ce développement mène à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
E\{\mathbf{Z}_1(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\} &= E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\} - \mu_2 \mathbf{R}_2 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\} + \mu_2 E\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{b}_2)^T + \mu_2 E\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{c}_2)^T \\
&- \mu_2 \mathbf{R}_{12} E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\} - \mu_1 \mu_2 \mathbf{R}_1 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\} + \mu_1 \mu_2 \mathbf{R}_1 \text{tr}(\mathbf{R}_2 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) - \mu_1 \mu_2 \mathbf{R}_1 E\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{b}_2)^T \\
&- \mu_1 \mu_2 \mathbf{R}_1 E\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{c}_2)^T + \mu_1 \mu_2 \mathbf{R}_1 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) + \mu_1 \mu_2 \mathbf{b}_1 E\{(\mathbf{Z}_2(n))^T\} - \mu_1 \mu_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{b}_1 E\{(\mathbf{Z}_2(n))^T\} + \mu_1 \mu_2 \mathbf{b}_1 (\mathbf{b}_2)^T \\
&+ \mu_1 \mu_2 \mathbf{b}_1 (\mathbf{c}_2)^T - \mu_1 \mu_2 \mathbf{R}_{12} \mathbf{b}_1 E\{(\mathbf{Z}_1(n))^T\} + \mu_1 \mu_2 \mathbf{c}_1 E\{(\mathbf{Z}_2(n))^T\} - \mu_1 \mu_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{c}_1 E\{(\mathbf{Z}_2(n))^T\} + \mu_1 \mu_2 \mathbf{c}_1 (\mathbf{b}_2)^T + \mu_1 \mu_2 \mathbf{c}_1 (\mathbf{c}_2)^T \\
&- \mu_1 \mathbf{R}_{12} \mathbf{c}_1 E\{(\mathbf{Z}_1(n))^T\} - \mu_1 \mu_2 \mathbf{R}_{12} E\{(\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) + \mu_1 \mu_2 \mathbf{R}_{12} \text{tr}(\mathbf{R}_2 E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) - \mu_1 \mu_2 \mathbf{R}_{12} E\{(\mathbf{Z}_2(n))^T\}(\mathbf{b}_2)^T \\
&- \mu_1 \mu_2 \mathbf{R}_{12} E\{(\mathbf{Z}_2(n))\}(\mathbf{c}_2)^T + \mu_1 \mu_2 \mathbf{R}_{12} \text{tr}(\mathbf{R}_{12} E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) + \mu_1 \mu_2 \varepsilon_{\min}^{(3)} \mathbf{R}_{12}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Dans cette formulation de la sous modélisation des deux filtres adaptatifs LMS, et lorsque $L < N$, nous avons noté les remarques suivantes:

- 1- La convergence de l'EQM de l'algorithme LMS sous modélisé à deux canaux, pour un signal d'entrée Gaussien corrélé, peut être entièrement décrite par les équations (4.5)-(4.8) (3.33), (3.34), (4.10), (4.12) et (4.14).
- 2- Les équations ci-dessus quantifient l'influence du degré de la sous modélisation sur l'évolution de l'algorithme LMS.
- 3- Le comportement quadratique moyen des vecteurs d'erreur des coefficients des deux filtres adaptatifs LMS sous-modélisés est différent de celui des filtres LMS adaptatifs en modélisation exacte et on peut constater que:

- L'EQM dépend des expressions de $E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}$, $E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}$, $E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}$, $E\{\mathbf{Z}_1(n)\}$, $E\{\mathbf{Z}_2(n)\}$.
- Les équations (4.10), (4.12) et (4.14) montrent que $E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}$, $E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}$ et $E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}$ dépendent de $E\{\mathbf{Z}_1(n)\}$, $E\{\mathbf{Z}_2(n)\}$.

Nous pouvons dire aussi que ces termes agissent sur le comportement des vecteurs d'erreur des coefficients des deux filtres adaptatifs LMS sous-modélisés dans le régime permanent et transitoire.

4.4. Convergence en erreur quadratique moyenne des coefficients des filtres adaptatifs LMS stéréophonique sous-modélisés pour des signaux d'entrée blancs.

Dans le cas où les signaux d'entrée sont blancs les coefficients b_{1i} , b_{2i} , c_{1i} et c_{2i} s'annulent. Donc les équations récursives (4.10), (4.12) et (4.14) deviennent respectivement :

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{Z}_1(n+1)(\mathbf{Z}_1(n+1))^T\}_{\text{white}} &= E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}_{\text{white}} - 2\mu_1\sigma_1^2 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}_{\text{white}} - \mu_1\sigma_{21}^2 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}_{\text{white}} \\ &+ \mu_1^2\sigma_1^4 \text{tr}(E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}_{\text{white}})\mathbf{I} + \mu_1^2\sigma_1^2\sigma_{21}^2 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}_{\text{white}} - \mu_1\sigma_{12}^2 E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}_{\text{white}} \\ &+ \mu_1^2\sigma_{12}^2\sigma_1^2 \text{tr}(E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}_{\text{white}})\mathbf{I} + \mu_1^2\sigma_{12}^2\sigma_{21}^2 \text{tr}(E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}_{\text{white}})\mathbf{I} + \mu_1^2\sigma_1^4 \|\bar{\mathbf{h}}_1^*\|^2 \mathbf{I} + \mu_1^2\epsilon_{\min}\sigma_1^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{Z}_2(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\}_{\text{white}} &= E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}_{\text{white}} - 2\mu_2\sigma_2^2 E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}_{\text{white}} \\ &- \mu_2\sigma_{12}^2 E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}_{\text{white}} + \mu_2^2\sigma_2^4 \text{tr}(E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}_{\text{white}})\mathbf{I} + \mu_2^2\sigma_2^2\sigma_{12}^2 E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}_{\text{white}} \\ &- \mu_2\sigma_{21}^2 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}_{\text{white}} + \mu_2^2\sigma_{21}^2\sigma_2^2 \text{tr}(E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}_{\text{white}})\mathbf{I} + \mu_2^2\sigma_2^4 \|\bar{\mathbf{h}}_2^*\|^2 \mathbf{I} + \mu_2^2\epsilon_{\min}\sigma_2^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{Z}_1(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\}_{\text{white}} &= E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}_{\text{white}} - \mu_2\sigma_2^2 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}_{\text{white}} - \mu_2\sigma_{12}^2 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}_{\text{white}} \\ &- \mu_1\mu_2\sigma_1^2 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}_{\text{white}} + \mu_1\mu_2\sigma_1^2\sigma_2^2 \text{tr}(E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}_{\text{white}})\mathbf{I} + \mu_1\mu_2\sigma_1^2\sigma_{12}^2 \text{tr}(E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}_{\text{white}})\mathbf{I} \\ &- \mu_1\mu_2\sigma_{12}^2 E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}_{\text{white}} + \mu_1\mu_2\sigma_{12}^2\sigma_2^2 \text{tr}(E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}_{\text{white}})\mathbf{I} + \mu_1\mu_2\sigma_{12}^4 \text{tr}(E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}_{\text{white}})\mathbf{I} \\ &+ \mu_1\mu_2\sigma_{12}^2\sigma_{21}^2 \left\| \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{h}}_1^* \\ \bar{\mathbf{h}}_2^* \end{pmatrix} \right\|^2 \mathbf{I} + \mu_1\mu_2\epsilon_{\min}\sigma_{12}^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Où les termes supplémentaires intervenants dans ces dernières équations sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= E\{(\mathbf{X}^{v1}(n))^2\} = \mathbf{R}_1(n), \quad \sigma_2^2 = E\{(\mathbf{X}^{v2}(n))^2\} = \mathbf{R}_2(n), \quad \sigma_{12}^2 = E\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\} = \mathbf{R}_{12}(n) \\ \text{et} \quad \sigma_{21}^2 &= E\{\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T\} = \mathbf{R}_{21}(n) \end{aligned}$$

En remplaçant les expressions des deux matrices $\bar{\mathbf{R}}_1(n)$ et $\mathbf{R}_1(n)$ dans la relation (4.6) on obtient :

$$\epsilon_1(n)_{\text{white}} = \epsilon_{\min}^{(1)} + \sigma_1^{-2} \|\bar{\mathbf{h}}_1^*\|^2 + \sigma_1^2 \text{tr}(E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}_{\text{white}}) \quad (4.18)$$

On procède de la même façon pour les autres matrices et les équations (4.7) et (4.8) deviennent respectivement :

$$\epsilon_2(\mathbf{n})_{\text{white}} = \epsilon_{\min}^{(2)} + \sigma_2^{-2} \|\bar{\mathbf{h}}_2^*\|^2 + \sigma_2^2 \text{tr} \left(\mathbb{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(\mathbf{n}) (\mathbf{Z}_2(\mathbf{n}))^T \right\}_{\text{white}} \right) \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_3(\mathbf{n})_{\text{white}} = & \epsilon_{\min}^{(3)} + 2\sigma_{22}^2 \left\| \left(\bar{\mathbf{h}}_1^* \right)^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right\|^2 - 2\sigma_{21}^2 \left\| \left(\bar{\mathbf{h}}_1^* \right)^T \mathbb{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(\mathbf{n}) \right\}_{\text{white}} \right\|^2 \\ & - 2\sigma_{12}^2 \left\| \mathbb{E} \left\{ \mathbf{Z}_1(\mathbf{n}) \right\}_{\text{white}}^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right\|^2 + 2\sigma_{12}^2 \text{tr} \left(\mathbb{E} \left\{ \mathbf{Z}_1(\mathbf{n}) (\mathbf{Z}_2(\mathbf{n}))^T \right\}_{\text{white}} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Finalement, l'erreur quadratique moyenne totale des deux canaux transportant des signaux blancs est donnée par :

$$\epsilon(\mathbf{n})_{\text{white}} = \mathbb{E} \left\{ e^2(\mathbf{n}) \right\} = \epsilon_1(\mathbf{n})_{\text{white}} + \epsilon_2(\mathbf{n})_{\text{white}} + \epsilon_3(\mathbf{n})_{\text{white}} \quad (4.21)$$

4.5. Stabilité de l'erreur quadratique moyenne de l'algorithme LMS adaptatif stéréophonique sous-modélisé.

Nous cherchons à trouver une condition suffisante pour que les coefficients de l'algorithme LMS adaptatif stéréophonique sous-modélisé convergent au sens de l'erreur quadratique moyenne. On considère que les matrices définies précédemment sont symétriques ce qui permet de les décomposer en valeurs propres comme suit :

$$\mathbf{R}_1(\mathbf{n}) = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{X}^{v1}(\mathbf{n}) (\mathbf{X}^{v1}(\mathbf{n}))^T \right\} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Q}_1^T \quad \text{avec} \quad \mathbf{\Lambda}_1 = \text{diag}[\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1L}] \quad (4.21)$$

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{n}) = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{X}^{v2}(\mathbf{n}) (\mathbf{X}^{v2}(\mathbf{n}))^T \right\} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{Q}_2^T \quad \text{avec} \quad \mathbf{\Lambda}_2 = \text{diag}[\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2L}] \quad (4.22)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_1(\mathbf{n}) = \mathbb{E} \left\{ \bar{\mathbf{X}}^{v1}(\mathbf{n}) (\bar{\mathbf{X}}^{v1}(\mathbf{n}))^T \right\} = \bar{\mathbf{Q}}_1 \bar{\mathbf{\Lambda}}_1 \bar{\mathbf{Q}}_1^T \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{\Lambda}}_1 = \text{diag}[\bar{\lambda}_{11}, \bar{\lambda}_{12}, \dots, \bar{\lambda}_{1L}] \quad (4.23)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_2(\mathbf{n}) = \mathbb{E} \left\{ \bar{\mathbf{X}}^{v2}(\mathbf{n}) (\bar{\mathbf{X}}^{v2}(\mathbf{n}))^T \right\} = \bar{\mathbf{Q}}_2 \bar{\mathbf{\Lambda}}_2 \bar{\mathbf{Q}}_2^T \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{\Lambda}}_2 = \text{diag}[\bar{\lambda}_{21}, \bar{\lambda}_{22}, \dots, \bar{\lambda}_{2L}] \quad (4.24)$$

$$\mathbf{R}_{12}(\mathbf{n}) = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{X}^{v1}(\mathbf{n}) (\mathbf{X}^{v2}(\mathbf{n}))^T \right\} = \mathbf{Q}_{12} \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{Q}_{12}^T \quad \text{avec} \quad \mathbf{\Lambda}_{12} = \text{diag}[\lambda_{121}, \lambda_{122}, \dots, \lambda_{12L}] \quad (4.25)$$

$$\mathbf{R}_{22}(\mathbf{n}) = \mathbb{E} \left\{ \bar{\mathbf{X}}^{v1}(\mathbf{n}) (\bar{\mathbf{X}}^{v2}(\mathbf{n}))^T \right\} = \mathbf{Q}_{22} \mathbf{\Lambda}_{22} \mathbf{Q}_{22}^T \quad \text{avec} \quad \mathbf{\Lambda}_{22} = \text{diag}[\lambda_{221}, \lambda_{222}, \dots, \lambda_{22L}] \quad (4.26)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{12}(\mathbf{n}) = \mathbb{E}\left\{\mathbf{X}^{v1}(\mathbf{n})(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(\mathbf{n}))^T\right\} = \bar{\mathbf{Q}}_{12}\bar{\mathbf{\Lambda}}_{12}\bar{\mathbf{Q}}_{12}^T \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{\Lambda}}_{12} = \text{diag}[\bar{\lambda}_{121}, \bar{\lambda}_{122}, \dots, \bar{\lambda}_{12L}] \quad (4.27)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{21}(\mathbf{n}) = \mathbb{E}\left\{\bar{\mathbf{X}}^{v1}(\mathbf{n})(\mathbf{X}^{v2}(\mathbf{n}))^T\right\} = \bar{\mathbf{Q}}_{21}\bar{\mathbf{\Lambda}}_{21}\bar{\mathbf{Q}}_{21}^T \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{\Lambda}}_{21} = \text{diag}[\bar{\lambda}_{211}, \bar{\lambda}_{221}, \dots, \bar{\lambda}_{21L}] \quad (4.28)$$

Où ; les \mathbf{Q}_i sont les matrices des vecteurs propres et $\mathbf{\Lambda}_i = \text{diag}[\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{iL}]$ sont les matrices des valeurs propres des matrices \mathbf{R}_i .

En utilisant les matrices des vecteurs propres on définit les vecteurs d'erreurs circulaires suivants :

$$\tilde{\mathbf{Z}}_1(\mathbf{n}) = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Z}_1(\mathbf{n}); \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{11}(\mathbf{n}) = \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{Z}_1(\mathbf{n}); \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{12}(\mathbf{n}) = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Z}_1(\mathbf{n}) \quad (4.29)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_2(\mathbf{n}) = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Z}_2(\mathbf{n}); \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{21}(\mathbf{n}) = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Z}_2(\mathbf{n}); \quad \tilde{\mathbf{Z}}_{21}(\mathbf{n}) = \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{Z}_2(\mathbf{n})$$

Les vecteurs circulaires représentant les signaux des données sur les deux voies sont définis par :

$$\tilde{\mathbf{X}}^{v1}(\mathbf{n}) = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{X}^{v1}(\mathbf{n}), \quad \tilde{\mathbf{X}}^{v2}(\mathbf{n}) = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{X}^{v2}(\mathbf{n}), \quad \bar{\tilde{\mathbf{X}}}^{v1}(\mathbf{n}) = \bar{\mathbf{Q}}_1^T \bar{\mathbf{X}}^{v1}(\mathbf{n}), \quad \bar{\tilde{\mathbf{X}}}^{v2}(\mathbf{n}) = \bar{\mathbf{Q}}_2^T \bar{\mathbf{X}}^{v2}(\mathbf{n}) \quad (4.30)$$

Le terme $\text{tr}(\mathbf{R}\mathbb{E}\{\mathbf{Z}(\mathbf{n})(\mathbf{Z}(\mathbf{n}))^T\})$ qui apparait dans les expressions développées précédemment devient :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}\mathbb{E}\{\mathbf{Z}(\mathbf{n})(\mathbf{Z}(\mathbf{n}))^T\}) &= \mathbb{E}\{(\mathbf{Z}(\mathbf{n}))^T \mathbf{R} \mathbf{Z}(\mathbf{n})\} = \mathbb{E}\{(\mathbf{Z}(\mathbf{n}))^T \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}(\mathbf{n})\} \\ &= \mathbb{E}\{(\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{n}))^T \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{n})\} = \mathbf{g}^T \mathbf{v}(\mathbf{n}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Où $\mathbf{v}(\mathbf{n})$ est le vecteur du moment d'ordre 2 ayant L composantes qui représentent les éléments diagonaux de la matrice $\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{n})(\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{n}))^T\}$, et $\mathbf{g}_i^T = [\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{iL}]^T$ est le vecteur des valeurs propres.

En appliquant la transformation (4.31) aux termes $\text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_1(\mathbf{n})(\mathbf{Z}_1(\mathbf{n}))^T\})$, $\text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_2(\mathbf{n})(\mathbf{Z}_2(\mathbf{n}))^T\})$ et $\text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_1(\mathbf{n})(\mathbf{Z}_2(\mathbf{n}))^T\})$ de (4.6), (4.7) et (4.8) respectivement, on obtient:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) &= \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T \mathbf{R}_1 \mathbf{Z}_1(n)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Z}_1(n)\} \\ &= \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_1(n)^T \mathbf{\Lambda}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1(n)\} = \mathbf{g}_1^T \mathbf{v}_1(n) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) &= \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T \mathbf{R}_2 \mathbf{Z}_2(n)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Z}_2(n)\} \\ &= \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)^T \mathbf{\Lambda}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2(n)\} = \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_2(n) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) &= \text{tr}(\mathbf{R}_{12}^T \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T \mathbf{R}_{12} \mathbf{Z}_2(n)\} \\ &= \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T \mathbf{Q}_{12} \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{Z}_2(n)\} = \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n)^T \mathbf{\Lambda}_{12} \tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n)\} = \bar{\mathbf{g}}_{12}^T \bar{\mathbf{v}}_{12}(n) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Où ;

$$\mathbf{g}_1^T = [\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1L}]^T ; \quad \mathbf{g}_2^T = [\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2L}]^T ; \quad \bar{\mathbf{g}}_{12}^T = \mathbf{g}_{12}^T = [\lambda_{121}, \lambda_{122}, \dots, \lambda_{12L}]^T$$

$$\mathbf{v}_1(n) = \text{diag}\left(\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_1(n)(\tilde{\mathbf{Z}}_1(n))^T\}\right) ; \quad \mathbf{v}_2(n) = \text{diag}\left(\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)(\tilde{\mathbf{Z}}_2(n))^T\}\right) ; \quad \bar{\mathbf{v}}_{12}(n) = \text{diag}\left(\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n)(\tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n))^T\}\right)$$

En faisant les mêmes transformations pour les autres termes $\text{tr}(\mathbf{R}_x \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_x(n)(\mathbf{Z}_x(n))^T\})$ qui apparaissent dans les expressions (4.10), (4.12) et (4.14), on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) &= \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) \\ &= \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T \mathbf{R}_1 \mathbf{Z}_1(n)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Z}_1(n)\} = \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n)^T \mathbf{\Lambda}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1(n)\} = \mathbf{g}_{21}^T \mathbf{v}_{21}(n) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) &= \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T \mathbf{R}_{12} \mathbf{Z}_2(n)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T \mathbf{Q}_{12} \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{Z}_2(n)\} \\ &= \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n)^T \mathbf{\Lambda}_{12} \tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n)\} = \bar{\mathbf{g}}_{21}^T \bar{\mathbf{v}}_{21}(n) \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) &= \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T \mathbf{R}_2 \mathbf{Z}_1(n)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Z}_2(n)\} \\ &= \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_{12}(n)^T \mathbf{\Lambda}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2(n)\} = \mathbf{g}_{22}^T \mathbf{v}_{22}(n) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) &= \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T \mathbf{R}_{12} \mathbf{Z}_1(n)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T \mathbf{Q}_{12} \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{Z}_1(n)\} \\ &= \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n)^T \mathbf{\Lambda}_{12} \tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n)\} = \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{v}_{11}(n) \end{aligned} \quad (4.38)$$

avec ;

$$\mathbf{g}_{21}^T = \mathbf{g}_1^T = [\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1L}]^T, \quad \mathbf{g}_{22}^T = \mathbf{g}_2^T = [\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2L}]^T, \quad \mathbf{g}_{11}^T = \mathbf{g}_{12}^T = \bar{\mathbf{g}}_{21}^T = [\lambda_{121}, \lambda_{122}, \dots, \lambda_{12L}]^T \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21}(n) &= \text{diag} \left(E \left\{ \tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n) (\tilde{\mathbf{Z}}_1(n))^T \right\} \right), & \bar{\mathbf{v}}_{21}(n) &= \text{diag} \left(E \left\{ \tilde{\bar{\mathbf{Z}}}_{21}(n) (\tilde{\bar{\mathbf{Z}}}_{21}(n))^T \right\} \right), \\ \mathbf{v}_{22}(n) &= \text{diag} \left(E \left\{ \tilde{\mathbf{Z}}_{12}(n) (\tilde{\mathbf{Z}}_2(n))^T \right\} \right), & \mathbf{v}_{11}(n) &= \text{diag} \left(E \left\{ \tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n) (\tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n))^T \right\} \right). \end{aligned}$$

Pour trouver les formules de mise à jour des différents vecteurs moments d'ordre 2 on utilise les expressions (4.10), (4.12) et (4.14). En appliquant l'opérateur $\text{tr}(\cdot)$ aux deux membres de (4.10) on obtient (voir appendice B) :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(n+1) &= (\mathbf{I} - 2\mu_1 \mathbf{A}_1 + \mu_1^2 \mathbf{A}_1^2) \mathbf{v}_1(n) + (\mu_1^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_{12} + \mu_1^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_{21} - \mu_1 \mathbf{A}_{12} - \mu_1 \mathbf{A}_{21}) \mathbf{v}_{21}(n) \\ &+ \mu_1^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_{21} \frac{\mathbf{g}_{12}^T}{\mathbf{g}_1^T} \bar{\mathbf{v}}_{21}(n) + 2\mu_1 (\mathbf{B}_1(n) + \mathbf{C}_1(n)) E \left\{ \tilde{\mathbf{Z}}_1(n) \right\} - 2\mu_1^2 (\mathbf{P}_{1b}(n) + \mathbf{P}_{1c}(n)) \\ &- \mu_1^2 (\mathbf{P}_{12b}(n) + \mathbf{P}_{12c}(n) + \mathbf{P}_{21b}(n) + \mathbf{P}_{21c}(n)) + \mu_1^2 (k_{1b}^2 + k_{1c}^2 + 2k_{1bc}^2) + \mu_1^2 \varepsilon_{\min}^{(1)} \mathbf{g}_1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Où :

$$\mathbf{B}_1(n) = \text{diag} \{ \tilde{\mathbf{b}}_{11}, \tilde{\mathbf{b}}_{12}, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_{1L} \} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{b}}_1(n) = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{b}_1(n)$$

$$\mathbf{C}_1(n) = \text{diag} \{ \tilde{\mathbf{c}}_{11}, \tilde{\mathbf{c}}_{12}, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_{1L} \} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{c}}_1(n) = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{c}_1(n)$$

$$k_{1b}^2 = \tilde{\mathbf{b}}_1(n) \tilde{\mathbf{b}}_1^T(n) \quad k_{1bc}^2 = \tilde{\mathbf{c}}_1(n) \tilde{\mathbf{b}}_1^T(n) \quad k_{1c}^2 = \tilde{\mathbf{c}}_1(n) \tilde{\mathbf{c}}_1^T(n)$$

$$\mathbf{T}_{1c}(n) = E \left\{ \mathbf{R}_1 \left(\mathbf{Z}_1(n) \mathbf{c}_1^T \right) \right\}, \quad \mathbf{P}_{1c}(n) = \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{1c}(n) \mathbf{Q}_1^T \right\}$$

$$\mathbf{T}_{12c}(n) = E \left\{ \mathbf{R}_{12} \left(\mathbf{Z}_2(n) \mathbf{c}_1^T \right) \right\}, \quad \mathbf{P}_{12c}(n) = \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{12c}(n) \mathbf{Q}_1^T \right\}$$

$$\mathbf{T}_{21c}(n) = E \left\{ \mathbf{R}_{21} \left(\mathbf{c}_1 \left(\mathbf{Z}_2(n)^T \right) \right) \right\}, \quad \mathbf{P}_{21c}(n) = \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{21c}(n) \mathbf{Q}_1^T \right\}$$

$$\mathbf{T}_{12b}(n) = E \left\{ \mathbf{R}_{12} \left(\mathbf{Z}_2(n) \mathbf{b}_1^T \right) \right\}, \quad \mathbf{P}_{12b}(n) = \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{12b}(n) \mathbf{Q}_1^T \right\}$$

$$\mathbf{T}_{21b}(n) = E \left\{ \mathbf{R}_{21} \left(\mathbf{b}_1 \left(\mathbf{Z}_2(n)^T \right) \right) \right\}, \quad \mathbf{P}_{21b}(n) = \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{21b}(n) \mathbf{Q}_1^T \right\}$$

En utilisant les notations suivantes :

$$\mathbf{A}_1(n) = (\mathbf{I} - 2\mu_1 \mathbf{A}_1 + \mu_1^2 \mathbf{A}_1^2), \quad \mathbf{A}_{21}(n) = (\mu_1^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_{12} + \mu_1^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_{21} - \mu_1 \mathbf{A}_{12} - \mu_1 \mathbf{A}_{21})$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{21}(n) = \mu_1^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_{21} \frac{\mathbf{g}_{12}^T}{\mathbf{g}_1^T}, \quad \mathbf{Y}_1(n) = (\mathbf{B}_1(n) + \mathbf{C}_1(n)), \quad \mathbf{K}_1(n) = k_{1b}^2 + k_{1c}^2 + 2k_{1bc}^2$$

$$\mathbf{P}_1(n) = (2\mathbf{P}_{1b}(n) + 2\mathbf{P}_{1c}(n) + \mathbf{P}_{12b}(n) + \mathbf{P}_{12c}(n) + \mathbf{P}_{21b}(n) + \mathbf{P}_{21c}(n)), \quad \mathbf{S}_1(n) = 2\mu_1 \mathbf{Y}_1 E \left\{ \tilde{\mathbf{Z}}_1(n) \right\} - \mu_1^2 \mathbf{P}_1(n)$$

L'expression (4.40) devient comme suit :

$$\mathbf{v}_1(n+1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{v}_1(n) + \mathbf{A}_{21} \mathbf{v}_{21}(n) + \bar{\mathbf{A}}_{21} \bar{\mathbf{v}}_{21}(n) + \mathbf{S}_1(n) + \mu_1^2 \mathbf{K}_1(n) + \mu_1^2 \varepsilon_{\min}^{(1)} \mathbf{g}_1 \quad (4.41)$$

De la même manière l'équation (4.12) se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2(n+1) = & (\mathbf{I} - 2\mu_2 \mathbf{A}_2 + \mu_2^2 \mathbf{A}_{22}^2) \mathbf{v}_2(n) + (\mu_2^2 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_{12} + \mu_2^2 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_{21} - \mu_2 \mathbf{A}_{12} - \mu_2 \mathbf{A}_{21}) \mathbf{v}_{22}(n) + \mu_2^2 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_{21} \frac{\mathbf{g}_{12}^T}{\mathbf{g}_2^T} \mathbf{v}_{11}(n) \\ & + 2\mu_2 (\mathbf{B}_2(n) + \mathbf{C}_2(n)) E\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)\} - 2\mu_2^2 (\mathbf{P}_{2b}(n) + \mathbf{P}_{2c}(n)) + \mu_2^2 k_{2b}^2 + \mu_2^2 k_{2c}^2 + 2\mu_2^2 k_{2bc}^2 \\ & - \mu_2^2 (\bar{\mathbf{P}}_{21b}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{21c}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{12b}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{12c}(n)) + \mu_2^2 \varepsilon_{\min}^2 \mathbf{g}_2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Où :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2(n) &= \text{diag}\{\tilde{\mathbf{b}}_{21}, \tilde{\mathbf{b}}_{22}, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_{2L}\} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{b}}_1(n) = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{b}_2(n) \\ \mathbf{C}_2(n) &= \text{diag}\{\tilde{\mathbf{c}}_{21}, \tilde{\mathbf{c}}_{22}, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_{2L}\} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{c}}_2(n) = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{c}_2(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{2b}^2 &= \tilde{\mathbf{b}}_2(n) \tilde{\mathbf{b}}_2^T(n) & k_{2bc}^2 &= \tilde{\mathbf{c}}_2(n) \tilde{\mathbf{b}}_2^T(n) & k_{2c}^2 &= \tilde{\mathbf{c}}_2(n) \tilde{\mathbf{c}}_2^T(n) \\ \mathbf{T}_{2c}(n) &= E\left\{ \mathbf{R}_{2c}(\mathbf{Z}_2(n) \mathbf{c}_2^T) \right\}, & \mathbf{P}_{2c}(n) &= \text{diag}\left\{ \mathbf{Q}_2 \mathbf{T}_{2c}(n) \mathbf{Q}_2^T \right\} \\ \bar{\mathbf{T}}_{12c}(n) &= E\left\{ \mathbf{R}_{21}(\mathbf{Z}_1(n) \mathbf{c}_2^T) \right\}, & \bar{\mathbf{P}}_{12c}(n) &= \text{diag}\left\{ \mathbf{Q}_2 \bar{\mathbf{T}}_{12c}(n) \mathbf{Q}_2^T \right\} \\ \bar{\mathbf{T}}_{21c}(n) &= E\left\{ \mathbf{R}_{21}(\mathbf{c}_2(\mathbf{Z}_1(n)^T)) \right\}, & \bar{\mathbf{P}}_{21c}(n) &= \text{diag}\left\{ \mathbf{Q}_2 \bar{\mathbf{T}}_{21c}(n) \mathbf{Q}_2^T \right\} \\ \bar{\mathbf{T}}_{12b}(n) &= E\left\{ \mathbf{R}_{21}(\mathbf{Z}_1(n) \mathbf{b}_2^T) \right\}, & \bar{\mathbf{P}}_{12b}(n) &= \text{diag}\left\{ \mathbf{Q}_2 \bar{\mathbf{T}}_{12b}(n) \mathbf{Q}_2^T \right\} \\ \bar{\mathbf{T}}_{21b}(n) &= E\left\{ \mathbf{R}_{12}(\mathbf{b}_2(\mathbf{Z}_1(n)^T)) \right\}, & \bar{\mathbf{P}}_{21b}(n) &= \text{diag}\left\{ \mathbf{Q}_2 \bar{\mathbf{T}}_{21b}(n) \mathbf{Q}_2^T \right\} \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2(n) &= (\mathbf{I} - 2\mu_2 \mathbf{A}_2 + \mu_2^2 \mathbf{A}_{22}^2), \quad \mathbf{A}_{22}(n) = (\mu_2^2 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_{12} + \mu_2^2 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_{21} - \mu_2 \mathbf{A}_{12} - \mu_2 \mathbf{A}_{21}) \\ \mathbf{A}_{11}(n) &= \mu_2^2 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_{21} \frac{\mathbf{g}_{12}^T}{\mathbf{g}_2^T}, \quad \mathbf{Y}_2(n) = (\mathbf{B}_2(n) + \mathbf{C}_2(n)), \quad \mathbf{K}_2(n) = k_{2b}^2 + k_{2c}^2 + 2k_{2bc}^2 \\ \mathbf{P}_2(n) &= (2\mathbf{P}_{2b}(n) + 2\mathbf{P}_{2c}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{21b}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{21c}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{12b}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{12c}(n)), \quad \mathbf{S}_2(n) = 2\mu_2 \mathbf{Y}_2(n) E\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)\} - \mu_2^2 \mathbf{P}_2(n) \end{aligned}$$

L'expression (4.42) devient :

$$\mathbf{v}_2(n+1) = \mathbf{A}_2(n) \mathbf{v}_2(n) + \mathbf{A}_{22}(n) \mathbf{v}_{22}(n) + \mathbf{A}_{11}(n) \mathbf{v}_{11}(n) + \mathbf{S}_2(n) + \mathbf{K}_2(n) + \mu_2^2 \varepsilon_{\min}^2 \mathbf{g}_2 \quad (4.43)$$

En procédant de façon similaire avec l'équation (4.14) (voir appendice B), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_{12}(n+1) = & (\mathbf{I} - \mu_1 \mathbf{A}_2 - \mu_1 \mu_2 \mathbf{A}_1 + \mu_1 \mu_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mu_1 \mu_2 \mathbf{A}_{12}^2) \bar{\mathbf{v}}_{12}(n) + \mu_1 \mu_2 (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}_{12}) \bar{\mathbf{v}}_{21}(n) \\ & + \mu_1 \mu_2 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_{12} - \mu_2 \mathbf{A}_{12}) \mathbf{v}_{11}(n) + \mu_2 (\bar{\mathbf{B}}_2 + \bar{\mathbf{C}}_2) E\{\tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n)\} + \mu_1 \mu_2 (\bar{\mathbf{B}}_1 + \bar{\mathbf{C}}_1) E\{\tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n)\} + \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \varepsilon_{\min}^{(3)} \\ & - \mu_1 \mu_2 (\bar{\mathbf{P}}_{11b}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{11c}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{12b}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{12c}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{21b}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{21c}(n) + \mathbf{P}_{22b}(n) + \mathbf{P}_{22c}(n)) + \mu_1 \mu_2 (k_{12b}^2 + k_{12bc}^2 + k_{12cb}^2 + k_{12c}^2) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Où :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{B}}_1 &= \text{diag}\{\bar{b}_{11}, \bar{b}_{12}, \dots, \bar{b}_{1L}\} & \text{avec } \bar{\mathbf{b}}_1(n) &= \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{b}_1(n) \\ \bar{\mathbf{C}}_1 &= \text{diag}\{\bar{c}_{11}, \bar{c}_{12}, \dots, \bar{c}_{1L}\} & \text{avec } \bar{\mathbf{c}}_1(n) &= \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{c}_1(n) \\ \bar{\mathbf{B}}_2 &= \text{diag}\{\bar{b}_{21}, \bar{b}_{22}, \dots, \bar{b}_{2L}\} & \text{avec } \bar{\mathbf{b}}_2(n) &= \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{b}_2(n) \\ \bar{\mathbf{C}}_2 &= \text{diag}\{\bar{c}_{21}, \bar{c}_{22}, \dots, \bar{c}_{2L}\} & \text{avec } \bar{\mathbf{c}}_2(n) &= \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{c}_2(n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{12b}^2 &= \bar{\mathbf{b}}_1(n) \bar{\mathbf{b}}_2^T(n), k_{12bc}^2 = \bar{\mathbf{b}}_1(n) \bar{\mathbf{c}}_2^T(n), k_{12cb}^2 = \bar{\mathbf{c}}_1(n) \bar{\mathbf{b}}_2^T(n), k_{12c}^2 = \bar{\mathbf{c}}_1(n) \bar{\mathbf{c}}_2^T(n) \\ \tilde{\mathbf{T}}_{12b}(n) &= E\{\mathbf{R}_1(\mathbf{b}_2(\mathbf{Z}_2(n))^T)\}, \tilde{\mathbf{T}}_{12c}(n) = E\{\mathbf{R}_1(\mathbf{c}_2(\mathbf{Z}_1(n))^T)\}, \tilde{\mathbf{T}}_{21b}(n) = E\{\mathbf{b}_1 \mathbf{R}_2(\mathbf{Z}_2(n))^T\} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{12b}(n) &= \text{diag}\{\mathbf{Q}_{12} \tilde{\mathbf{T}}_{12b}(n) \mathbf{Q}_{12}^T\}, \tilde{\mathbf{P}}_{12c}(n) = \text{diag}\{\mathbf{Q}_{12} \tilde{\mathbf{T}}_{12c}(n) \mathbf{Q}_{12}^T\}, \tilde{\mathbf{P}}_{21b}(n) = \text{diag}\{\mathbf{Q}_2 \tilde{\mathbf{T}}_{21b}(n) \mathbf{Q}_2^T\} \\ \tilde{\mathbf{T}}_{21c}(n) &= E\{\mathbf{R}_2(\mathbf{c}_1(\mathbf{Z}_2(n))^T)\}, \mathbf{T}_{11b}(n) = E\{\mathbf{b}_1 \mathbf{R}_{12}(\mathbf{Z}_1(n))^T\}, \mathbf{T}_{11c}(n) = E\{\mathbf{R}_{12}(\mathbf{c}_1(\mathbf{Z}_1(n))^T)\} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{21c}(n) &= \text{diag}\{\mathbf{Q}_2 \tilde{\mathbf{T}}_{21c}(n) \mathbf{Q}_2^T\}, \mathbf{P}_{11b}(n) = \text{diag}\{\mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}_{11b}(n) \mathbf{Q}_{12}^T\}, \mathbf{P}_{11c}(n) = \text{diag}\{\mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}_{11c}(n) \mathbf{Q}_{12}^T\} \\ \mathbf{T}_{22b}(n) &= E\{\mathbf{R}_{12}(\mathbf{b}_2(\mathbf{Z}_2(n))^T)\}, \mathbf{T}_{22c}(n) = E\{\mathbf{c}_2 \mathbf{R}_{12}(\mathbf{Z}_2(n))^T\} \\ \mathbf{P}_{22b}(n) &= \text{diag}\{\mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}_{22b}(n) \mathbf{Q}_{12}^T\}, \mathbf{P}_{22c}(n) = \text{diag}\{\mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}_{22c}(n) \mathbf{Q}_{12}^T\}\end{aligned}$$

avec les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}}_{12}(n) &= (\mathbf{I} - \mu_2 \mathbf{\Lambda}_2 - \mu_1 \mu_2 \mathbf{\Lambda}_1 + \mu_1 \mu_2 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{\Lambda}_2 + \mu_1 \mu_2 \mathbf{\Lambda}_2^2), \mathbf{A}_{12}(n) = \mu_1 \mu_2 (\mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{12} - \mathbf{\Lambda}_{12}) \\ \bar{\mathbf{A}}_{11}(n) &= \mu_1 \mu_2 (\mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{\Lambda}_{12} - \mu_2 \mathbf{\Lambda}_{12}), \bar{\mathbf{Y}}_2(n) = (\bar{\mathbf{B}}_2(n) + \bar{\mathbf{C}}_2(n)), \bar{\mathbf{Y}}_1(n) = (\bar{\mathbf{B}}_1(n) + \bar{\mathbf{C}}_1(n)) \\ \mathbf{P}_3(n) &= (\mathbf{P}_{11c}(n) + \tilde{\mathbf{P}}_{12b}(n) + \tilde{\mathbf{P}}_{12c}(n) + \tilde{\mathbf{P}}_{21b}(n) + \tilde{\mathbf{P}}_{21c}(n) + \mathbf{P}_{22b}(n) + \mathbf{P}_{22c}(n)) \\ \mathbf{K}_3(n) &= (k_{12b}^2 + k_{12bc}^2 + k_{12cb}^2 + k_{12c}^2), \mathbf{S}_3(n) = \mu_2 \bar{\mathbf{Y}}_2(n) E\{\tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n)\} + \mu_1 \mu_2 \bar{\mathbf{Y}}_1(n) E\{\tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n)\} - \mu_1 \mu_2 \mathbf{P}_3(n)\end{aligned}$$

L'équation (4.44) devient :

$$\bar{\mathbf{v}}_{12}(n+1) = \bar{\mathbf{A}}_{12}(n) \bar{\mathbf{v}}_{12}(n) + \mathbf{A}_{12}(n) \bar{\mathbf{v}}_{21}(n) + \bar{\mathbf{A}}_{11}(n) \mathbf{v}_{11}(n) + \mathbf{S}_3(n) + \mathbf{K}_3(n) + \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \mathcal{E}_{\min}^{(3)} \quad (4.45)$$

Pour que la convergence de (4.41), (4.42) et (4.45) soit assurée, il faut satisfaire les conditions suivantes :

- 1) toutes les valeurs propres des matrices contenues dans ces expressions appartiennent au cercle unité.
- 2) Les termes $\mathbf{S}_1(n)$, $\mathbf{S}_2(n)$ et $\mathbf{S}_3(n)$ doivent être bornés ce qui exige que les termes $E\{\tilde{\mathbf{Z}}_1(n)\}$, $E\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)\}$, $E\{\tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n)\}$ et $E\{\tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n)\}$ soient bornés. D'après (4.29), on doit avoir $E\{\mathbf{Z}_1(n)\}$ et $E\{\mathbf{Z}_2(n)\}$ bornés.

Les expressions (3.33) et (3.34) permettent de déterminer la condition que doit satisfaire le pas d'adaptation pour assurer la convergence de l'algorithme LMS sous modélisé, on les rappelle comme suit :

$$E\{ \mathbf{Z}_1(n+1) \} = (\mathbf{I} - \mu_1 \mathbf{R}_1(n))E\{\mathbf{Z}_1(n)\} + \mu_1 [\mathbf{b}_1(n) + \mathbf{c}_1(n)] - \mu_1 \mathbf{R}_{12} E\{\mathbf{Z}_2(n)\} \quad (\text{Eq.3.33,}$$

Chapitre 3)

$$E\{ \mathbf{Z}_2(n+1) \} = (\mathbf{I} - \mu_2 \mathbf{R}_2(n))E\{\mathbf{Z}_2(n)\} + \mu_2 [\mathbf{b}_2(n) + \mathbf{c}_2(n)] - \mu_2 \mathbf{R}_{21} E\{\mathbf{Z}_1(n)\}$$

(Eq. 3.34, Chapitre 3).

4.6. Erreur quadratique moyenne à l'état d'équilibre des coefficients de l'algorithme LMS adaptatif stéréophonique sous-modélisé

Dans ce paragraphe, nous allons analyser le comportement des coefficients des vecteurs au sens de l'erreur quadratique moyenne (EQM) à l'état d'équilibre. Pour ce faire, on exploite les développements précédents pour trouver les nouvelles expressions des EQM partielles $\epsilon_1(n)$, $\epsilon_2(n)$ et $\epsilon_3(n)$. [51].

Les expressions (4.6) et (4.32) donnent :

$$\epsilon_1(n) = \epsilon_{\min}^{(1)} + (\bar{\mathbf{h}}_1^*)^T \bar{\mathbf{R}}_1(n) \bar{\mathbf{h}}_1^* - 2\mathbf{b}_1^T(n) E\{\mathbf{Z}_1(n)\} + \mathbf{g}_1^T(n) \mathbf{v}_1(n) \quad (4.46)$$

De (4.7) et (4.33) on obtient :

$$\epsilon_2(n) = \epsilon_{\min}^{(2)} + (\bar{\mathbf{h}}_2^*)^T \bar{\mathbf{R}}_2(n) \bar{\mathbf{h}}_2^* - 2\mathbf{b}_2^T(n) E\{\mathbf{Z}_2(n)\} + \mathbf{g}_2^T(n) \mathbf{v}_2(n) \quad (4.47)$$

De (4.8) et (4.34)

$$\epsilon_3(n) = \epsilon_{\min}^{(3)} + 2(\bar{\mathbf{h}}_1^*)^T \mathbf{R}_{22}(n) \bar{\mathbf{h}}_2^* - 2(\bar{\mathbf{h}}_1^*)^T \mathbf{R}_{21}(n) E\{\mathbf{Z}_2(n)\} - 2(E\{\mathbf{Z}_1(n)\})^T \mathbf{R}_{12}(n) \bar{\mathbf{h}}_2^* + \bar{\mathbf{g}}_{12}^T(n) \bar{\mathbf{v}}_{12}(n) \quad (4.48)$$

En choisissant un pas d'adaptation telle que la stabilité en moyenne et en moyenne quadratique des coefficients d'erreur est assurée et en utilisant les résultats du chapitre précédent donnés par les relations de (3.42) et (3.43), l'EQM de l'état d'équilibre est décrite par les expressions suivantes :

$$\epsilon(\infty) = \epsilon_1(\infty) + \epsilon_2(\infty) + \epsilon_3(\infty)$$

$$\epsilon_1(\infty) = \epsilon_{\min}^{(1)} + (\bar{\mathbf{h}}_1^*)^T \bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{h}}_1^* - 2\mathbf{b}_1^T E\{\mathbf{Z}_1(\infty)\} + \mathbf{g}_1^T \mathbf{v}_1(\infty)$$

$$\epsilon_2(\infty) = \epsilon_{\min}^{(2)} + (\bar{\mathbf{h}}_2^*)^T \bar{\mathbf{R}}_2 \bar{\mathbf{h}}_2^* - 2\mathbf{b}_2^T E\{\mathbf{Z}_2(\infty)\} + \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_2(\infty) \quad (4.49)$$

$$\epsilon_3(\infty) = \epsilon_{\min}^{(3)} + 2(\bar{\mathbf{h}}_1^*)^T \mathbf{R}_{22} \bar{\mathbf{h}}_2^* - 2(\bar{\mathbf{h}}_1^*)^T \mathbf{R}_{21} E\{\mathbf{Z}_2(\infty)\} - 2(E\{\mathbf{Z}_1(\infty)\})^T \mathbf{R}_{12} \bar{\mathbf{h}}_2^* + \bar{\mathbf{g}}_{12}^T \bar{\mathbf{v}}_{12}(\infty)$$

avec :

$$\begin{cases} E\{\mathbf{Z}_1(\infty)\} = \left[\mathbf{R}_1(n) + \mathbf{R}_{12}(n) \mathbf{R}_2^{-1}(n) \mathbf{R}_{21}(n) \right]^{-1} \left[\mathbf{b}_1(n) + \mathbf{c}_1(n) - \mathbf{R}_{12}(n) \mathbf{R}_2^{-1}(n) (\mathbf{b}_2(n) + \mathbf{c}_2(n)) \right] \\ E\{\mathbf{Z}_2(\infty)\} = \left[\mathbf{R}_2(n) + \mathbf{R}_{21}(n) \mathbf{R}_1^{-1}(n) \mathbf{R}_{12}(n) \right]^{-1} \left[\mathbf{b}_2(n) + \mathbf{c}_2(n) - \mathbf{R}_{21}(n) \mathbf{R}_1^{-1}(n) (\mathbf{b}_1(n) + \mathbf{c}_1(n)) \right] \end{cases}$$

4.7. Les résultats expérimentaux

Dans cette section, nous présentons les résultats de simulations obtenus par l'analyse proposée dans le sens de l'erreur quadratique moyenne (EQM). Des exemples de simulation sont présentés ici afin de vérifier les résultats théoriques de convergence moyenne quadratique dérivés dans le présent chapitre. Les expériences sont réalisées dans une configuration de système d'identification. Un bruit blanc gaussien de moyenne nulle est ajouté au signal désiré $y(n)$. Les coefficients du filtre adaptatif ont été initialisés avec des zéros. Les résultats de simulation de Monte Carlo sont obtenus en faisant la moyenne de plus de 2000 essais indépendants.

4.7.1. Signaux d'entrée fortement corrélés

En ce qui concerne les signaux de simulations, nous avons conservé le même modèle et signaux de test qui ont été utilisés et présentés dans le chapitre 3. Nous avons conservé ce modèle de test pour bien voir les performances relatives de notre approche de simulation en sens de l'erreur quadratique moyenne en comparaison avec celle de l'erreur moyenne présentée en chapitre 3. Pour rappeler ces données, nous avons utilisé dans le système à identifier un filtre à réponse impulsionnelle de 20 coefficients, c.à.d. $N=20$. Ces deux filtres \mathbf{h}_N^{v1} et \mathbf{h}_N^{v2} sont montrés par les figure 3.1 et figure 3.2 respectivement dans le chapitre 3.

Dans le modèle choisi pour la simulation avec des signaux fortement corrélés, les systèmes inconnus et les filtres adaptatifs FIR sont excités tous deux avec un signal corrélé généré par les deux expressions 3.20 et 3.21 du chapitre 3. On note que dans ces deux formules ; les séquences du bruit $\xi_1(n)$ et $\xi_2(n)$ sont gaussiennes non corrélées de moyenne nulle et de variance unité. Nous sélectionnons $L=15$, $\epsilon(n) = E\left(\xi^2\right) = 0.00015$, et

utilisons des petits pas $\mu_1 = \mu_2 = 0.0004$ et d'autres plus grandes $\mu_1 = \mu_2 = 0.001$. La grande valeur du pas est proche de la valeur maximale qui assure la convergence de

l'algorithme. Nous avons simulé deux cas de configuration selon le taux de sous-modélisation qui peut être faible ou fort.

A-Taux de sous-modélisation faible

Dans cette simulation, nous avons utilisé les signaux précédemment décrit avec un taux de sous-modélisation de 75%. Les résultats de simulations obtenus dans ce cas de signaux d'entrée qui sont fortement corrélés sont donnés par les deux figures 4.1 et 4.2 suivantes.

Dans la figure 4.1, le SNR d'entrée est sélectionné égal à 40 dB. La taille des réponses impulsionnelles réelles est $N=16$ et la taille des filtres adaptatifs sous modélisés est $L=12$. Les deux pas d'adaptation des deux filtres adaptatifs $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ sont respectivement $\mu_1 = \mu_2 = 0.0004$. Dans la figure 4.1, nous avons montré l'évolution pratique et théorique du critère EQM du filtre adaptatif $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$.

Les valeurs de l'EQM de cette figure, sont moyennées sur 256 échantillons. D'après cette expérience nous remarquons bien que les valeurs expérimentales du critère de l'EQM suivent les valeurs théoriques de la formule 4.4.

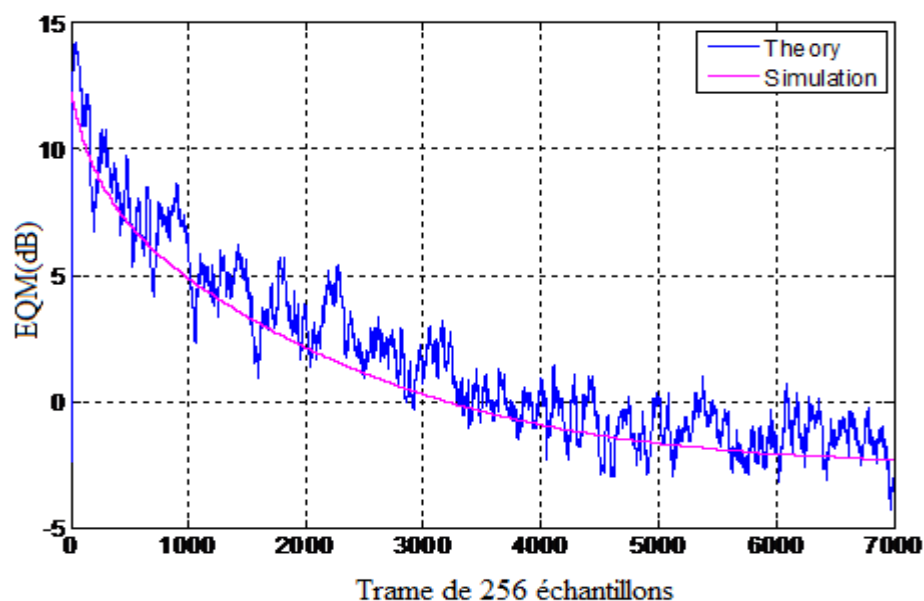


Figure 4.1 : Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement EQM de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour une entrée Gaussienne corrélée, et $N=16$; $L=12$; $SNR_{\text{entrée}}=40\text{dB}$. $\mu_1=\mu_2=0.0004$.

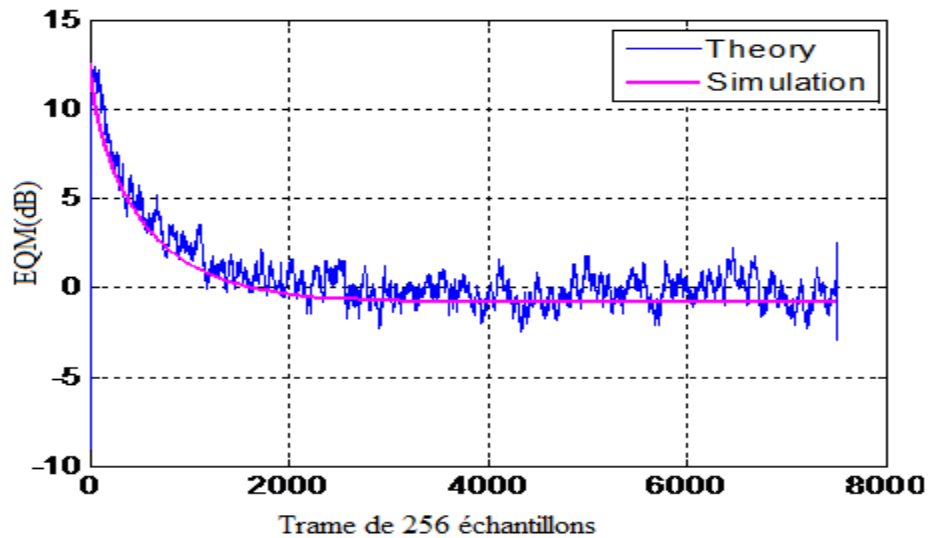


Figure 4.2 : Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement EQM de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour une entrée Gaussienne corrélée, et $N=16$; $L=12$; $SNR_{\text{entrée}}=40\text{dB}$. $\mu_1=\mu_2=0.001$.

Nous avons refaits une deuxième expérience avec les mêmes paramètres que l'expérience de la figure 4.1 à l'exception du choix du pas d'adaptations des filtres adaptatifs qui est sélectionnée $\mu_1=\mu_2=0.001$. Le choix de ces valeurs est conditionné par la condition de convergence.

Les résultats obtenus confirment la performance de nos analyses. Nous avons aussi observé que la caractéristique de la vitesse de convergence du critère EQM est inversement proportionnelle aux valeurs du pas d'adaptation, c-à-d. lorsque les valeurs de μ_1 et μ_2 sont petites, les vitesses de convergence des vecteurs EQM vers zéro sont lentes et, contrairement quand les valeurs du pas d'adaptation sont grandes (proches des valeurs maximales qui assurent la convergence de l'algorithme), la vitesse de convergence vers zéros est rapide.

Ceci est bien montré par les deux expériences des deux figures 4.1 et 4.2. Dans ces deux expériences, la pratique suit la théorie, cela montre que notre analyse théorique du

comportement du LMS stéréo sous-modélisé est précise et reflète bien la réalité de cette situation de sous-modélisation.

B-Taux de sous-modélisation fort

Dans cette simulation nous avons sélectionné un taux de simulation de 50%. Les signaux de tests sont exactement ceux de la section précédente à l'exception de la taille des filtres adaptatifs sous-modélisés $L=8$. On rappelle que la taille des filtres réels est $N=16$. Les résultats de simulation obtenus pour des faibles pas d'adaptations ($\mu_1=\mu_2=0.0004$) et de forts pas d'adaptation ($\mu_1=\mu_2=0.001$), respectivement, sont données par les figure 4.3 et figure 4.4 suivantes. Dans ces deux figures, nous avons présenté le comportement de l'EQM obtenue par simulations et déterminée théoriquement par les expressions dans 4.4.

On note que la vitesse de convergence des valeurs de l'EQM, dans ce cas, est lente par rapport à la première expérience quand la longueur des filtres adaptatifs L est proche aux valeurs réelles (N). Aussi, ces résultats de simulation montrent bien l'exactitude de l'analyse proposée en montrant une évolution de l'EQM pratique très proche de la théorie proposée pour prédire le comportement réel de l'algorithme LMS stéréophonique sous-modélisé, pendant le régime transitoire et les phases de l'équilibre.

Nous avons conclu que cette expérience valide nos analyses même lorsque la longueur de sous-modélisation du filtre adaptatif ($L=8$) est très petite par rapport à la longueur exacte de modélisation.

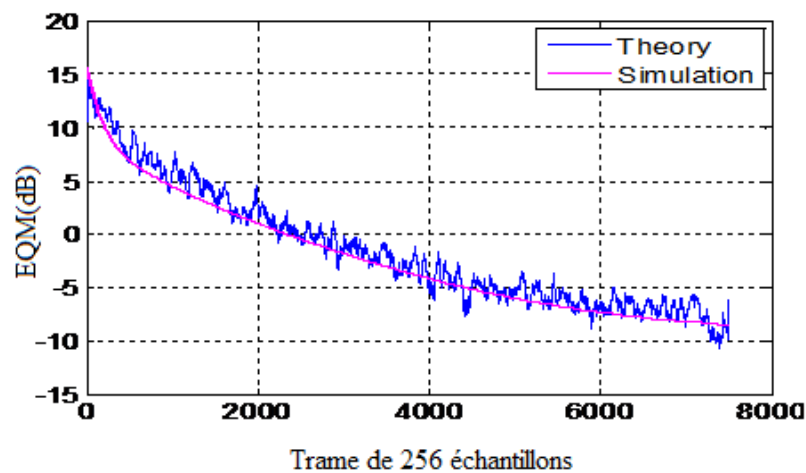


Figure 4.3 : Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement de l'EQM de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour une entrée Gaussienne corrélée, et $N=16$; $L=8$; $SNR_{\text{entrée}}=40\text{dB}$. $\mu_1=\mu_2=0.0004$.

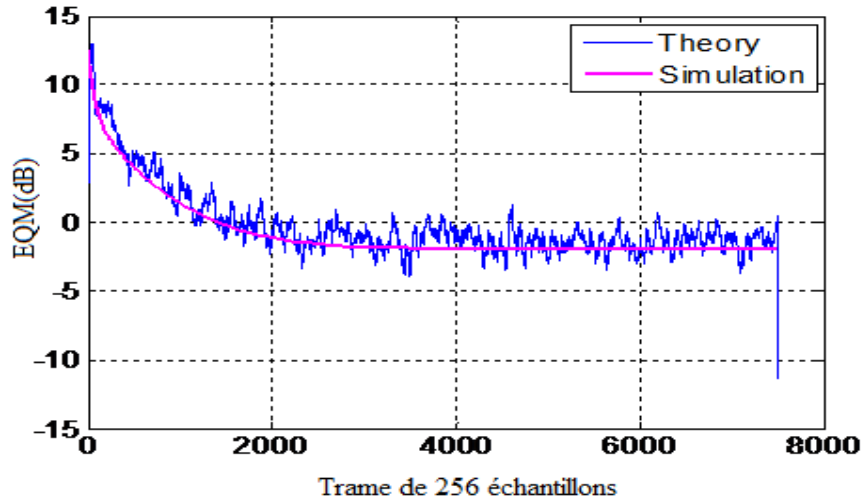


Figure 4.4 : Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement EQM de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour une entrée Gaussienne corrélée, et $N=16$; $L=13$; $SNR_{\text{entrée}}=40\text{dB}$. $\mu_1=\mu_2=0.001$.

4.7.2. Signal d'entrée gaussien blanc

Dans cette expérience, l'excitation $\mathbf{x}(n)$ du système inconnu et des deux filtres adaptatifs est un signal gaussien blanc centré de variance égale unité. La longueur L des deux filtres adaptatifs $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$ a été choisie égale à 13 avec $N=16$ (dimension du système). Nous avons tracé l'évolution de l'EQM pour deux pas d'adaptation différents $\mu_1 = \mu_2 = 0,002$ (proches des valeurs maximales) et $\mu_1 = \mu_2 = 0,0004$ (des pas faibles).

Les deux figures 4.5 et 4.6 montrent le comportement du critère de l'EQM obtenu par simulations et à partir des expressions théoriques données par l'équation 4.4, pour des pas d'adaptation faible et fort, respectivement.

Nous avons remarqué une bonne concordance entre les valeurs pratiques et théoriques. Nous avons noté aussi que la vitesse de convergence de l'état d'équilibre, dans le cas d'un signal d'entrée Gaussien blanc, est plus rapide que dans le cas d'une entrée gaussienne corrélée. Clairement, la convergence théorique utilisant des petits ou grands pas d'adaptation montre une parfaite concordance avec le résultat de simulation et permet une prédiction exacte du comportement pendant les étapes transitoires d'adaptation.

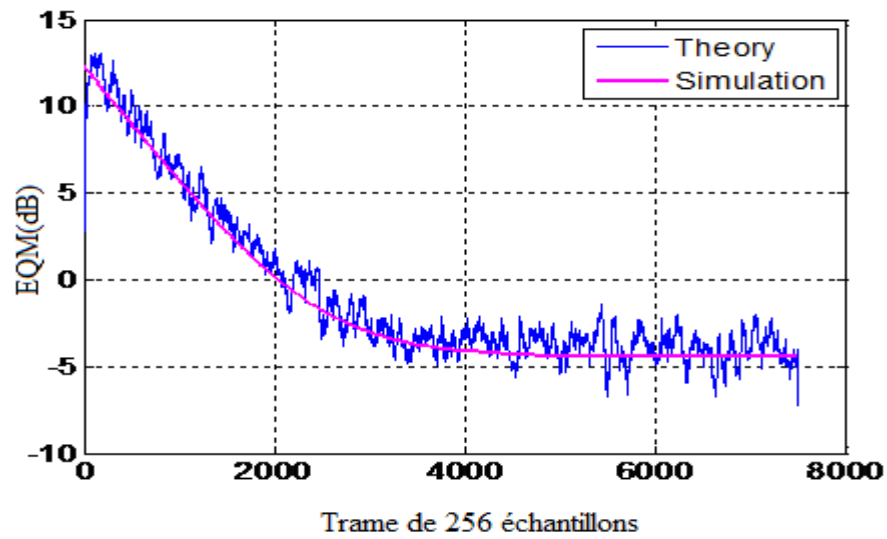


Figure 4.5 : Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement de l'EQM de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour un signal d'entrée Gaussien blanc, et $N=16$, $L=13$; $\text{SNR}_{\text{entrée}}=40\text{dB}$. $\mu_1=\mu_2=0.0004$.

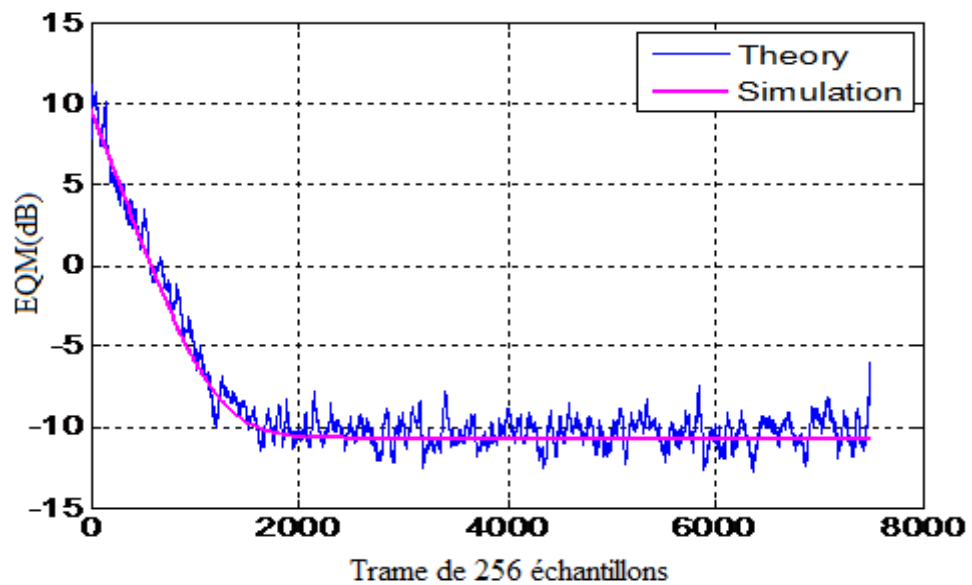


Figure 4.6 : Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement de l'EQM de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour un signal d'entrée Gaussien blanc, et $N=16$, $L=13$; $\text{SNR}_{\text{entrée}}=40\text{dB}$. $\mu_1=\mu_2=0.001$.

4.7.3. Entrée gaussienne faiblement corrélée

Pour tester le comportement du LMS sous-modélisé en fonction de notre analyse proposée, nous avons simulé ce cas de configuration avec des signaux gaussien faiblement corrélés. Cependant, cette expérience peut être classée entre les deux expériences citées précédemment.

Pour se faire, on a utilisé une entrée gaussienne faiblement corrélée comme décrit dans le chapitre 3, et nous avons procédé de la même manière pour générer les signaux de test stéréophonique. On rappelle les paramètres suivants :

Taille des réponses impulsionelle réelles tronquée: $N=128$;

Taille des filtres adaptatifs $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$: $L_1=L_2 = 64$,

Variance du bruit additif à l'entrée : $\varepsilon(n) = E(\xi^2) = 0.000015$.

Rapport du Signal-à-bruit (SNR) : 40 dB.

Nous avons réalisé deux expériences avec : (i) des pas d'adaptations de grandes valeurs $\mu_1 = \mu_2 = 0,001$ proches des valeurs maximales, dont les résultats de simulation de l'EQM sont montrés par la figure 4.7, et (ii) des pas d'adaptation de faibles valeurs, $\mu_1 = \mu_2 = 0,0001$, dont les résultats de simulations de l'EQM sont montrés par la figure 4.8.

Les résultats de simulation obtenus pour l'évolution du critère de l'EQM des deux filtres adaptatifs $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v1}(n)$ et $\tilde{\mathbf{h}}_L^{v2}(n)$, calculée théoriquement par (4.5), sont rapportés sur les figures 4.7 et 4.8, respectivement. Nous avons tracé sur ces deux figures les valeurs des EQM pratiques correspondantes.

Nous avons remarqué que pour des filtres adaptatifs de longue dimensions, il y a concordance parfaite entre la théorie et les résultats des simulations pour des petits pas (dans le cas où $\mu_1 = \mu_2 = 0,0001$ pour les deux figures).

Cependant, nous avons remarqué que la ressemblance entre l'évolution théorique et pratique de l'EQM est moins parfaite lorsque les pas d'adaptations sont choisis grands.

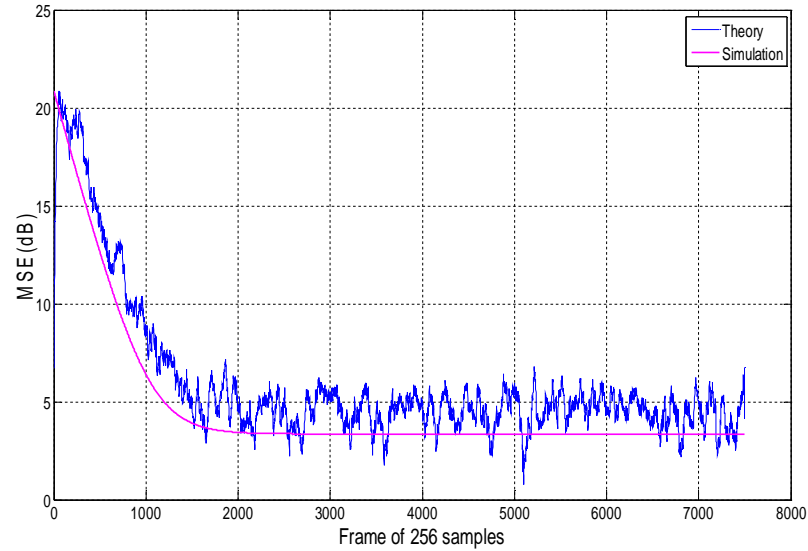


Figure 4.7 : Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement de l'EQM de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour un signal d'entrée Gaussien faiblement corrélé, et $N=128$; $L=64$; $SNR_{\text{entrée}}=40\text{dB}$. Avec $\mu_1=\mu_2=0.001$.

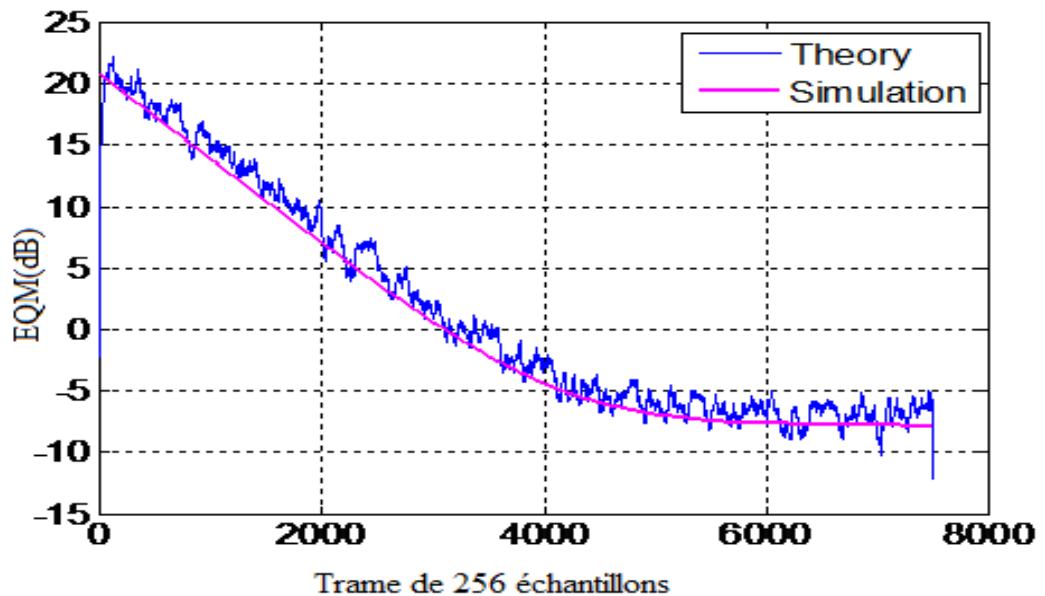


Figure 4.8 : Comparaison des courbes théoriques et de simulation du comportement EQM de l'algorithme adaptatif LMS stéréophonique sous-modélisé pour un signal d'entrée Gaussien faiblement corrélé, et $N=128$; $L=64$; $SNR_{\text{entrée}}=40\text{dB}$. Avec $\mu_1=\mu_2=0.0004$.

4.8. Conclusion

Dans ce chapitre, le comportement de l'algorithme LMS sous modélisé en sens de convergence en erreur quadrature moyenne a été analysé.

En première étape, des développements théoriques de l'erreur quadratique moyenne, pour le cas stéréophonique, ont été exprimés.

Des simulations intensives de comparaison entre la théorie et la pratique ont été réalisées afin de valider le modèle théorique du cas sous-modélisé de l'algorithme LMS stéréo. Ces résultats de simulations ont montré une grande similitude entre la théorie et la pratique ce qui prouve et valide notre analyse théorique.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

L'étude que nous avons présentée dans cette thèse concerne l'annulation d'écho acoustique en contexte stéréophonique en utilisant des filtres adaptatifs LMS sous-modélisés. La première partie de cette thèse avait un aspect de description algorithmique. L'élaboration d'algorithmes permettant l'annulation stéréophonique d'écho acoustique. Nous nous sommes intéressés aux propriétés des algorithmes adaptatifs à descente de gradient stochastiques. Le LMS a été choisi pour sa simplicité d'implémentation et pour son faible coût de calcul par rapport aux autres algorithmes existants.

Les développements théoriques des deux filtres adaptatifs LMS sous-modélisés n'étaient pas aussi simples comme pour le cas monophonique car on a pris en compte l'inter-corrélation entre les deux canaux. Le travail mené dans le cadre de cette thèse peut être organisé selon les volets suivants :

Le premier volet de ce travail de thèse a été consacré au développement de l'algorithme LMS (Least Mean Square) adaptatif conventionnel sous-modélisé dans le domaine temporel. Ainsi, que l'analyse du comportement des vecteurs des coefficients d'erreur en termes de convergence moyenne. Ces vecteurs d'erreurs sont définis comme étant la différence entre les coefficients des filtres modélisés et les coefficients des réponses impulsionnelles dans la salle de réception. Enfin, les nouvelles formules récursives de mise à jour des vecteurs d'erreurs ont été établies. L'étude théorique a montré qu'il y a des biais de coefficients non nuls à l'état d'équilibre pour les signaux d'entrée corrélés.

Dans le deuxième volet de ce travail de thèse, la convergence en erreur quadratique moyenne des coefficients du filtre adaptatif LMS sous-modélisé à deux canaux a été analysée théoriquement pour différents types de signaux d'entrée. En utilisant l'hypothèse de l'indépendance, cette analyse, a donné des expressions théoriques exactes pour les valeurs des filtres d'erreur au sens de l'EQM. Les expressions analytiques ont montré que

les filtres LMS sous-modélisés à entrées corrélées présentent un comportement de convergence sensiblement différent de celui des filtres adaptatifs de longueur exacte. Pour un signal d'entrée blanc, les filtres LMS sous-modélisés ont des propriétés de convergence similaires à ceux de longueur complète.

Dans le dernier volet de cette thèse, nous avons effectué des simulations intensives sur les deux analyses en erreur moyenne et quadratique des expressions mathématiques développées dans les chapitres 3[équations (3.33) et (3.34)] et 4[équations (4.4), (4.6)-(4.8)].

Les résultats de simulations obtenus ont montré une grande similitude entre l'analyse théorique du cas de la sous-modélisation et la pratique. Cela a bien confronté l'exactitude de l'étude que nous avons développée dans le cadre de cette thèse.

Comme perspective à ce travail, nous envisageons le test du modèle proposé dans le cadre de cette thèse pour d'autres algorithmes et situations où le problème de sous-modélisation est présent.

APPENDICE A

Développements pour retrouver les expressions (4.10), (4.12) et (4.14).

En utilisant l'hypothèse d'indépendance entre $\mathbf{X}^{v1}(n)$, $\mathbf{X}^{v2}(n)$, $\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n)$, $\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n)$ et les vecteurs des coefficients d'erreur $\mathbf{Z}_1(n)$ et $\mathbf{Z}_2(n)$ on peut effectuer les opérations suivantes :

a. On développe (4.9) ce qui donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\mathbf{Z}_1(n+1)(\mathbf{Z}_1(n))^T\} &= \mathbb{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\} - \mu_1 \mathbb{E}\left\{\left[\mathbf{Z}_1(n)\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)\right]^T\right\} + \mu_1 \mathbb{E}\left\{\mathbf{Z}_1(n)\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_1^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\right\}^T \\
&+ \mu_1 \mathbb{E}\left\{\mathbf{Z}_1(n)\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_2^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\right\}^T - \mu_1 \mathbb{E}\left\{\mathbf{Z}_1(n)\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\right] \mathbf{Z}_2(n)\right\}^T \\
&- \mu_1 \mathbb{E}\left\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\right\} + \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)\right]^T\right\} \\
&- \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_1^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\right\}^T - \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\mu_1 \mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_2^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\right\}^T \\
&+ \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\right] \mathbf{Z}_2(n)\right\}^T \\
&+ \mu_1 \mathbb{E}\left\{\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_1^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\right\} - \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_1^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)\right]^T\right\} \\
&+ \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_1^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_1^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\right\}^T + \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_1^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_2^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\right\}^T \\
&- \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_1^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\right] \mathbf{Z}_2(n)\right\}^T \\
&+ \mu_1 \mathbb{E}\left\{\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_2^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\right\} - \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_2^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)\right]^T\right\} \\
&+ \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_2^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_1^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\right\}^T + \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_2^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_2^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\right\}^T \\
&- \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_2^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\right] \mathbf{Z}_2(n)\right\}^T \\
&- \mu_1 \mathbb{E}\left\{\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\right] \mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\right\} + \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\right] \mathbf{Z}_2(n)\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)\right]^T\right\} \\
&- \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\right] \mathbf{Z}_2(n)\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_1^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\right\}^T - \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\right] \mathbf{Z}_2(n)\left[\left(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n)\right)^T \bar{\mathbf{h}}_2^*\right] \mathbf{X}^{v1}(n)\right\}^T \\
&+ \mu_1^2 \mathbb{E}\left\{\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\right] \mathbf{Z}_2(n)\left[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\right] \mathbf{Z}_2(n)\right\}^T + \mathbb{E}\left\{\mu_1 \xi(n)\mathbf{X}^{v1}(n)(\mu_1 \xi(n)\mathbf{X}^{v1}(n))^T\right\}
\end{aligned}$$

(4.50)

En remplaçant $E\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T\}$, $E\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\}$ par \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_{12} respectivement et en substituant (3.35) et (3.37) dans (4.50), on aboutit à la relation (4.10).

b. On traite d'une façon similaire la relation (4.11) ce qui donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
E\{\mathbf{Z}_2(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\} &= E\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\} - \mu_2 E\left\{\mathbf{Z}_2(n) \left(\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) \right)^T\right\} + \mu_2 E\left\{\mathbf{Z}_2(n) \left(\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \right)^T\right\} \\
&+ \mu_2 E\left\{\mathbf{Z}_2(n) \left(\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \right)^T\right\} - \mu_2 E\left\{\mathbf{Z}_2(n) \left(\left[\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) \right)^T\right\} \\
&- \mu_2 E\left\{\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\right\} + \mu_2^2 E\left\{\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) \left(\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) \right)^T\right\} \\
&- \mu_2^2 E\left\{\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) \left(\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \right)^T\right\} - \mu_2^2 E\left\{\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) \left(\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \right)^T\right\} \\
&+ \mu_2^2 E\left\{\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) \left(\left[\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) \right)^T\right\} \\
&+ \mu_2 E\left\{\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\right\} - \mu_2^2 E\left\{\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \left(\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) \right)^T\right\} \\
&+ \mu_2^2 E\left\{\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \left(\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \right)^T\right\} + \mu_2^2 E\left\{\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \left(\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \right)^T\right\} \\
&- \mu_2^2 E\left\{\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \left(\left[\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) \right)^T\right\} \\
&+ \mu_2 E\left\{\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\right\} - \mu_2^2 E\left\{\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \left(\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) \right)^T\right\} \\
&+ \mu_2^2 E\left\{\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \left(\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \right)^T\right\} + \mu_2^2 E\left\{\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \left(\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \right)^T\right\} \\
&- \mu_2^2 E\left\{\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \left(\left[\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) \right)^T\right\} \\
&- \mu_2 E\left\{\left[\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\right\} + \mu_2^2 E\left\{\left[\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) \left(\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n) \right)^T\right\} \\
&- \mu_2^2 E\left\{\left[\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) \left(\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \right)^T\right\} - \mu_2^2 E\left\{\left[\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) \left(\left[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^* \right] \mathbf{X}^{v2}(n) \right)^T\right\} \\
&+ \mu_2^2 E\left\{\left[\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) \left(\left[\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \right] \mathbf{Z}_1(n) \right)^T\right\} + \mu_2^2 E\left\{\xi(n) \mathbf{X}^{v2}(n) (\xi(n) \mathbf{X}^{v2}(n))^T\right\}
\end{aligned}
\tag{4.51}$$

En remplaçant $E\{\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\}$, $E\{\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T\}$ par \mathbf{R}_2 et \mathbf{R}_{21} respectivement et en substituant (3.36) et (3.38) dans (4.51), on obtient la relation (4.12).

c. On manipulant la relation (4.13) , il vient:

$$\begin{aligned}
& E\{\mathbf{Z}_1(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\} = \\
& E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\} - \mu_2 E\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n))^T\} + \mu_2 E\{\mathbf{Z}_1(n)([(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v2}(n))^T\} \\
& + \mu_2 E\{\mathbf{Z}_1(n)([(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v2}(n))^T\} - \mu_2 E\{\mathbf{Z}_1(n)([\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T] \mathbf{Z}_1(n))^T\} \\
& - \mu_1 \mu_2 E\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\} + \mu_1 \mu_2 E\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n))^T\} \\
& - \mu_1 \mu_2 E\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)([(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v2}(n))^T\} - \mu_1 \mu_2 E\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)([(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v2}(n))^T\} \\
& + \mu_1 \mu_2 E\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T \mathbf{Z}_1(n)([\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T] \mathbf{Z}_1(n))^T\} \\
& + \mu_1 \mu_2 E\{[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\} - \mu_1 \mu_2 E\{[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n))^T\} \\
& + \mu_1 \mu_2 E\{[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v1}(n)([(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v2}(n))^T\} + \mu_1 \mu_2 E\{[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v1}(n)([(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v2}(n))^T\} \\
& - \mu_1 \mu_2 E\{[(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v1}(n)([\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T] \mathbf{Z}_1(n))^T\} \\
& + \mu_1 \mu_2 E\{[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\} - \mu_1 \mu_2 E\{[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n))^T\} \\
& + \mu_1 \mu_2 E\{[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v1}(n)([(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v2}(n))^T\} + \mu_1 \mu_2 E\{[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v1}(n)([(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v2}(n))^T\} \\
& - \mu_1 E\{[(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v1}(n)([\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T] \mathbf{Z}_1(n))^T\} \\
& - \mu_1 \mu_2 E\{[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T] \mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\} + \mu_1 \mu_2 E\{[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T] \mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T \mathbf{Z}_2(n))^T\} \\
& - \mu_1 \mu_2 E\{[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T] \mathbf{Z}_2(n)([(\bar{\mathbf{X}}^{v2}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_2^*] \mathbf{X}^{v2}(n))^T\} - \mu_1 \mu_2 E\{[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T] \mathbf{Z}_2(n)([(\bar{\mathbf{X}}^{v1}(n))^T \bar{\mathbf{h}}_1^*] \mathbf{X}^{v2}(n))^T\} \\
& + \mu_1 \mu_2 E\{[\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T] \mathbf{Z}_2(n)([\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T] \mathbf{Z}_1(n))^T\} + \mu_1 \mu_2 \varepsilon_{\min}^{(3)} E\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\}
\end{aligned}$$

(4.52)

En remplaçant $E\{\mathbf{X}^{v2}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\}$, $E\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v1}(n))^T\}$, $E\{\mathbf{X}^{v1}(n)(\mathbf{X}^{v2}(n))^T\}$, par \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_{12} respectivement et en substituant (3.35) ,(3.36), (3.37) et (3.38) dans (4.52), on retrouve la relation (4.14).

APPENDICE B

Développements pour retrouver les expressions (4.40), (4.42) et (4.44).

a- Multiplions par \mathbf{R}_1 et appliquons l'opérateur $\text{tr}(\cdot)$ aux deux membres de (4.10),
il vient :

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n+1)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) = \mathbf{g}_1^T \mathbf{v}_1(n+1) \\
& = \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) - 2\mu_1 \text{tr}(\mathbf{R}_1^2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\mathbf{Z}_1(n)^T\}) - \mu_1 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{21} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) \\
& + \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\})) + \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_{21} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\})) - \mu_1 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) \\
& + \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{12} \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\})) + \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{12} \text{tr}(\mathbf{R}_{21} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\})) \\
& + \mu_1 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{b}_1^T)) + \mu_1 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{c}_1^T)) - \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1^2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{b}_1^T)) - \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1^2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{c}_1^T)) \\
& + \mu_1 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T\}) - \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1^2 \mathbf{b}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T\}) + \text{tr}(\mu_1^2 \mathbf{R}_1 \mathbf{b}_1 (\mathbf{b}_1^T)) + \text{tr}(\mu_1^2 \mathbf{R}_1 \mathbf{c}_1 (\mathbf{c}_1^T)) - \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{21} \mathbf{b}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T\}) \\
& + \mu_1 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T\}) - \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1^2 \mathbf{c}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T\}) + \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{c}_1 (\mathbf{b}_1^T)) + \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{b}_1 (\mathbf{c}_1^T)) - \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{21} \mathbf{c}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T\}) \\
& - \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}(\mathbf{b}_1^T)) - \mu_1^2 \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}(\mathbf{c}_1^T)) + \mu_1^2 \varepsilon_{\min}^1 \text{tr}(\mathbf{R}_1^2)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T\}) = \text{tr}(\mathbf{R}_1^2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\mathbf{b}_1^T\}) = \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{b}_1 \mathbf{R}_1 (\mathbf{Z}_1(n))^T\}) \\
& = \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{T}_{1b}(n)\}) = \mathbf{g}_1^T \mathbf{E}\{\mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{1b}(n) \mathbf{Q}_1^T\} = \mathbf{g}_1^T \mathbf{P}_{1b}(n) \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_1^2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\mathbf{c}_1^T\}) = \text{tr}(\mathbf{R}_1^2 \mathbf{c}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T\}) = \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{T}_{1c}(n)\}) = \mathbf{g}_1^T \mathbf{E}\{\mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{1c}(n) \mathbf{Q}_1^T\} = \mathbf{g}_1^T \mathbf{P}_{1c}(n) \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{21} \mathbf{c}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T\}) = \mathbf{g}_1^T \mathbf{E}\{\mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{21c}(n) \mathbf{Q}_1^T\} = \mathbf{g}_1^T \mathbf{P}_{21c}(n) \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\mathbf{c}_1^T\}) = \mathbf{g}_1^T \mathbf{E}\{\mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{12c}(n) \mathbf{Q}_1^T\} = \mathbf{g}_1^T \mathbf{P}_{12c}(n) \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\mathbf{b}_1^T\}) = \mathbf{g}_1^T \mathbf{E}\{\mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{12b}(n) \mathbf{Q}_1^T\} = \mathbf{g}_1^T \mathbf{P}_{12b}(n) \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{21} \mathbf{b}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T\}) = \mathbf{g}_1^T \mathbf{E}\{\mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{21b}(n) \mathbf{Q}_1^T\} = \mathbf{g}_1^T \mathbf{P}_{21b}(n) \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T) = \mathbf{g}_1^T \mathbf{k}_{1b}^2, \quad \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1^T) = \mathbf{g}_1^T \mathbf{k}_{1c}^2, \quad \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{c}_1^T) = \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{b}_1^T) = \mathbf{g}_1^T \mathbf{k}_{1bc}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\mathbf{b}_1^T\}) = \text{tr}(\mathbf{R}_1 (\mathbf{b}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T\})) = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T \mathbf{R}_1 \mathbf{b}_1(n)\} \\
& = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T \mathbf{Q}_1 \Lambda_1 \mathbf{Q}_1^T \mathbf{b}_1(n)\} = \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_1(n)^T \Lambda_1 \tilde{\mathbf{b}}_1(n)\} = \mathbf{g}_1^T \mathbf{B}_1 \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_1(n)\} \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\mathbf{c}_1^T\}) = \text{tr}(\mathbf{R}_1 (\mathbf{c}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)^T\})) = \mathbf{g}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_1(n)\}
\end{aligned}$$

Où ;

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= \text{diag}\{\tilde{\mathbf{b}}_{11}, \tilde{\mathbf{b}}_{12}, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_{1L}\} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{b}}_1(n) = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{b}_1(n) \\
\mathbf{C}_1 &= \text{diag}\{\tilde{\mathbf{c}}_{11}, \tilde{\mathbf{c}}_{12}, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_{1L}\} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{c}}_1(n) = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{c}_1(n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{1b}^2 &= \tilde{\mathbf{b}}_1(n) \tilde{\mathbf{b}}_1^T(n) & \mathbf{k}_{1bc}^2 &= \tilde{\mathbf{c}}_1(n) \tilde{\mathbf{b}}_1^T(n) & \mathbf{k}_{1c}^2 &= \tilde{\mathbf{c}}_1(n) \tilde{\mathbf{c}}_1^T(n) \\
\mathbf{T}_{1c}(n) &= \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_1 \left(\mathbf{Z}_1(n) \mathbf{c}_1^T \right) \right\} & \mathbf{P}_{1c}(n) &= \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{1c}(n) \mathbf{Q}_1^T \right\} \\
\mathbf{T}_{12c}(n) &= \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_{12} \left(\mathbf{Z}_2(n) \mathbf{c}_1^T \right) \right\} & \mathbf{P}_{12c}(n) &= \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{12c}(n) \mathbf{Q}_1^T \right\} \\
\mathbf{T}_{21c}(n) &= \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_{21} \left(\mathbf{c}_1 \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right) \right\} & \mathbf{P}_{21c}(n) &= \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{21c}(n) \mathbf{Q}_1^T \right\} \\
\mathbf{T}_{12b}(n) &= \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_{12} \left(\mathbf{Z}_2(n) \mathbf{b}_1^T \right) \right\} & \mathbf{P}_{12b}(n) &= \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{12b}(n) \mathbf{Q}_1^T \right\} \\
\mathbf{T}_{21b}(n) &= \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_{21} \left(\mathbf{b}_1 \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right) \right\} & \mathbf{P}_{21b}(n) &= \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_1 \mathbf{T}_{21b}(n) \mathbf{Q}_1^T \right\}
\end{aligned}$$

En remplaçant chaque terme par son expression dans (4.53) et en utilisant les relations de (4.35) à (4.39), il vient :

$$\begin{aligned}
& \text{tr} \left(\mathbf{R}_1 \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{Z}_1(n+1) \left(\mathbf{Z}_1(n+1) \right)^T \right) \right\} \right) = \mathbf{g}_1^T \mathbf{v}_1(n+1) \\
& = \mathbf{g}_1^T \mathbf{v}_1(n) - 2\mu_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{g}_1^T \mathbf{v}_1(n) - \mu_1 \mathbf{\Lambda}_{21} \mathbf{g}_{21}^T \mathbf{v}_{21}(n) + \mu_1^2 \mathbf{\Lambda}_1^2 \mathbf{g}_1^T \mathbf{v}_1(n) + \mu_1^2 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{\Lambda}_{21} \mathbf{g}_{21}^T \mathbf{v}_{21}(n) \\
& - \mu_1 \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{g}_{21}^T \mathbf{v}_{21}(n) + \mu_1^2 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{g}_{21}^T \mathbf{v}_{21}(n) + \mu_1^2 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{\Lambda}_{21} \bar{\mathbf{g}}_{21}^T \bar{\mathbf{v}}_{21}(n) + 2\mu_1 \mathbf{g}_1^T \mathbf{B}_1 \mathbf{E} \left\{ \tilde{\mathbf{Z}}_1(n) \right\} \\
& + 2\mu_1 \mathbf{g}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{E} \left\{ \tilde{\mathbf{Z}}_1(n) \right\} - 2\mu_1^2 \mathbf{g}_1^T \mathbf{P}_{1b}(n) - 2\mu_1^2 \mathbf{g}_1^T \mathbf{P}_{1c}(n) - \mu_1^2 \mathbf{g}_1^T \mathbf{P}_{12b}(n) - \mu_1^2 \mathbf{g}_1^T \mathbf{P}_{12c}(n) \\
& - \mu_1^2 \mathbf{g}_1^T \mathbf{P}_{21b}(n) - \mu_1^2 \mathbf{g}_1^T \mathbf{P}_{21c}(n) + \mu_1^2 \mathbf{g}_1^T \mathbf{k}_{1b}^2 + 2\mu_1^2 \mathbf{g}_1^T \mathbf{k}_{1bc}^2 + \mu_1^2 \mathbf{g}_1^T \mathbf{k}_{1c}^2 + \mu_1^2 \varepsilon_{\min}^{(1)} \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_1^T
\end{aligned} \tag{4.54}$$

La factorisation de (4.54) mène à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1^T \mathbf{v}_1(n+1) &= \left(\mathbf{I} - 2\mu_1 \mathbf{\Lambda}_1 + \mu_1^2 \mathbf{\Lambda}_1^2 \right) \mathbf{g}_1^T \mathbf{v}_1(n) + \left(\mu_1^2 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{\Lambda}_{12} + \mu_1^2 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{\Lambda}_{21} - \mu_1 \mathbf{\Lambda}_{12} - \mu_1 \mathbf{\Lambda}_{21} \right) \mathbf{g}_{21}^T \mathbf{v}_{21}(n) \\
& + \mu_1^2 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{\Lambda}_{21} \bar{\mathbf{g}}_{21}^T \bar{\mathbf{v}}_{21}(n) + 2\mu_1 \mathbf{g}_1^T \left(\mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_1 \right) \mathbf{E} \left\{ \tilde{\mathbf{Z}}_1(n) \right\} - 2\mu_1^2 \mathbf{g}_1^T \left(\mathbf{P}_{1b}(n) + \mathbf{P}_{1c}(n) \right) \\
& - \mu_1^2 \mathbf{g}_1^T \left(\mathbf{P}_{12b}(n) + \mathbf{P}_{12c}(n) + \mathbf{P}_{21b}(n) + \mathbf{P}_{21c}(n) \right) + \mu_1^2 \mathbf{g}_1^T \left(\mathbf{k}_{1b}^2 + \mathbf{k}_{1c}^2 + 2\mathbf{k}_{1bc}^2 \right) + \mu_1^2 \varepsilon_{\min}^{(1)} \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_1^T
\end{aligned}$$

En utilisant (4.39), on retrouve (4.40).

b- On suit la même démarche pour obtenir l'équation (4.42)

Multiplions les deux membres de (4.12) par \mathbf{R}_2 et appliquons l'opérateur (tr) :

$$\begin{aligned}
& \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(n+1) \left(\mathbf{Z}_2(n+1) \right)^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(n) \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \right) - 2\mu_2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2^2 \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(n) \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \right) + \mu_2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(n) \right\} \left(\mathbf{b}_2 \right)^T \right) \\
& + \mu_2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(n) \right\} \left(\mathbf{c}_2 \right)^T \right) - \mu_2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(n) \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right\} \right) + \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(n) \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \right) \right) \\
& - \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2^2 \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(n) \right\} \left(\mathbf{b}_2 \right)^T \right) - \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2^2 \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(n) \right\} \left(\mathbf{c}_2 \right)^T \right) + \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(n) \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right\} \right) \right) + \mu_2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \right) \\
& - \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2^2 \mathbf{b}_2 \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \right) + \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{b}_2 \left(\mathbf{b}_2 \right)^T \right) + \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{b}_2 \left(\mathbf{c}_2 \right)^T \right) - \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{12} \mathbf{b}_2 \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right\} \right) + \mu_2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \right) \\
& - \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2^2 \mathbf{c}_2 \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \right) + \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{c}_2 \left(\mathbf{b}_2 \right)^T \right) + \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{c}_2 \left(\mathbf{c}_2 \right)^T \right) - \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{21} \mathbf{c}_2 \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right\} \right) \\
& - \mu_2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{21} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_1(n) \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \right) + \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{21} \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_1(n) \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \right) \right) - \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{21} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_1(n) \right\} \left(\mathbf{b}_2 \right)^T \right) \\
& - \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{21} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_1(n) \right\} \left(\mathbf{c}_2 \right)^T \right) + \mu_2^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{21} \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_1(n) \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right\} \right) \right) + \mu_2^2 \varepsilon_{\min}^2 \text{tr} \left(\mathbf{R}_2^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Où ;

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}(\mathbf{b}_2)^T) = \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T\}) = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T \mathbf{R}_2 \mathbf{b}_2(n)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{Q}_2^T \mathbf{b}_2(n)\} \\
& = \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)^T \mathbf{\Lambda}_2 \tilde{\mathbf{b}}_2(n)\} = \mathbf{g}_2^T \mathbf{B}_2 \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)\} \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}(\mathbf{c}_2)^T) = \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T\}) = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T \mathbf{R}_2 \mathbf{c}_2(n)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{Q}_2^T \mathbf{c}_2(n)\} \\
& = \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)^T \mathbf{\Lambda}_2 \tilde{\mathbf{c}}_2(n)\} = \mathbf{g}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)\} \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T\}) = \text{tr}(\mathbf{R}_2^2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\} \mathbf{b}_2^T) = \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{b}_2 \mathbf{R}_2 (\mathbf{Z}_2(n)^T)\}) = \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{T}_{2b}(n)\}) \\
& = \mathbf{g}_2^T \mathbf{E}\{\mathbf{Q}_2 \mathbf{T}_{2b}(n) \mathbf{Q}_2^T\} = \mathbf{g}_2^T \mathbf{P}_{2b}(n) \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_2^2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\} \mathbf{c}_2^T) = \text{tr}(\mathbf{R}_2^2 \mathbf{c}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)^T\}) = \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{T}_{2c}(n)\}) = \mathbf{g}_2^T \mathbf{E}\{\mathbf{Q}_2 \mathbf{T}_{2c}(n) \mathbf{Q}_2^T\} = \mathbf{g}_2^T \mathbf{P}_{2c}(n) \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{21} \mathbf{c}_2 \mathbf{E}\{(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) = \mathbf{g}_2^T \mathbf{E}\{\mathbf{Q}_2 \bar{\mathbf{T}}_{21c}(n) \mathbf{Q}_2^T\} = -\mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \bar{\mathbf{P}}_{21c}(n) \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{21} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\} (\mathbf{c}_2)^T) = \mathbf{g}_2^T \mathbf{E}\{\mathbf{Q}_2 \bar{\mathbf{T}}_{12c}(n) \mathbf{Q}_2^T\} = \mathbf{g}_2^T \bar{\mathbf{P}}_{12c}(n) \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{21} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\} (\mathbf{b}_2)^T) = \mathbf{g}_2^T \mathbf{E}\{\mathbf{Q}_2 \bar{\mathbf{T}}_{12b}(n) \mathbf{Q}_2^T\} = \mathbf{g}_2^T \bar{\mathbf{P}}_{12b}(n) \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{12} \mathbf{b}_2 \mathbf{E}\{(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) = \mathbf{g}_2^T \mathbf{E}\{\mathbf{Q}_2 \bar{\mathbf{T}}_{21b}(n) \mathbf{Q}_2^T\} = \mathbf{g}_2^T \bar{\mathbf{P}}_{21b}(n) \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2^T) = \mathbf{g}_2^T \mathbf{k}_{2b}^2, \quad \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2^T) = \mathbf{g}_2^T \mathbf{k}_{2c}^2, \quad \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_2^T) = \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{b}_2^T) = \mathbf{g}_2^T \mathbf{k}_{2bc}^2 \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\} (\mathbf{Z}_1(n))^T) = \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{g}_{22}^T \mathbf{v}_{22}(n), \quad \text{tr}(\mathbf{R}_2^2 \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\} (\mathbf{Z}_2(n))^T)) = \mathbf{\Lambda}_{22}^2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_{22}(n), \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_2^2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\} (\mathbf{Z}_1(n))^T)) = \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{g}_{22}^T \mathbf{v}_{22}(n), \quad \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{21} \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\} (\mathbf{Z}_2(n))^T)) = \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{21} \mathbf{g}_{22}^T \mathbf{v}_{22}(n) \\
& , \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_{21} \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\} (\mathbf{Z}_1(n))^T)) = \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{21} \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{v}_{11}(n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{k}_{2b}^2 = \tilde{\mathbf{b}}_2(n) \tilde{\mathbf{b}}_2^T(n) \quad \mathbf{k}_{2c}^2 = \tilde{\mathbf{c}}_2(n) \tilde{\mathbf{c}}_2^T(n) \quad \mathbf{k}_{2bc}^2 = \tilde{\mathbf{c}}_2(n) \tilde{\mathbf{b}}_2^T(n) \quad \mathbf{k}_{2c}^2 = \tilde{\mathbf{c}}_2(n) \tilde{\mathbf{c}}_2^T(n) \\
& \mathbf{T}_{2c}(n) = \mathbf{E}\{\mathbf{R}_{21} (\mathbf{Z}_2(n) \mathbf{c}_2^T)\} \quad , \quad \mathbf{P}_{2c}(n) = \text{diag}\{\mathbf{Q}_2 \mathbf{T}_{2c}(n) \mathbf{Q}_2^T\} \\
& \bar{\mathbf{T}}_{12c}(n) = \mathbf{E}\{\mathbf{R}_{21} (\mathbf{Z}_1(n) \mathbf{c}_2^T)\} \quad , \quad \bar{\mathbf{P}}_{12c}(n) = \text{diag}\{\mathbf{Q}_2 \bar{\mathbf{T}}_{12c}(n) \mathbf{Q}_2^T\} \\
& \bar{\mathbf{T}}_{21c}(n) = \mathbf{E}\{\mathbf{R}_{21} (\mathbf{c}_2 (\mathbf{Z}_1(n))^T)\} \quad , \quad \bar{\mathbf{P}}_{21c}(n) = \text{diag}\{\mathbf{Q}_2 \bar{\mathbf{T}}_{21c}(n) \mathbf{Q}_2^T\} \\
& \bar{\mathbf{T}}_{12b}(n) = \mathbf{E}\{\mathbf{R}_{21} (\mathbf{Z}_1(n) \mathbf{b}_2^T)\} \quad , \quad \bar{\mathbf{P}}_{12b}(n) = \text{diag}\{\mathbf{Q}_2 \bar{\mathbf{T}}_{12b}(n) \mathbf{Q}_2^T\} \\
& \bar{\mathbf{T}}_{21b}(n) = \mathbf{E}\{\mathbf{R}_{12} (\mathbf{b}_2 (\mathbf{Z}_1(n))^T)\} \quad , \quad \bar{\mathbf{P}}_{21b}(n) = \text{diag}\{\mathbf{Q}_2 \bar{\mathbf{T}}_{21b}(n) \mathbf{Q}_2^T\}
\end{aligned}$$

En manipulant (4.55), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n+1)\} (\mathbf{Z}_2(n+1))^T) = \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_2(n+1) \\
& = \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_2(n) - 2\mu_2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_2(n) + 2\mu_2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{B}_2 \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)\} + 2\mu_2 \mu_2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)\} - \mu_2 \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{g}_{22}^T \mathbf{v}_{22}(n) + \mu_2^2 \mathbf{\Lambda}_{22}^2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_2(n) \\
& - 2\mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{P}_{2b}(n) - 2\mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{P}_{2c}(n) + \mu_2^2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{g}_{22}^T \mathbf{v}_{22}(n) + \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{k}_{2b}^2 + \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{k}_{2c}^2 + 2\mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{k}_{2bc}^2 - \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \bar{\mathbf{P}}_{21b}(n) \\
& - \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \bar{\mathbf{P}}_{21c}(n) - \mu_2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{21} \mathbf{g}_{22}^T \mathbf{v}_{22}(n) + \mu_2^2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{21} \mathbf{g}_{22}^T \mathbf{v}_{22}(n) - \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \bar{\mathbf{P}}_{12b}(n) - \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \bar{\mathbf{P}}_{12c}(n) + \mu_2^2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{21} \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{v}_{11}(n) + \mu_2^2 \varepsilon_{\min}^2 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_2^T
\end{aligned} \tag{4.56}$$

En utilisant (4.39), l'équation (4.56) devient :

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n+1)\} (\mathbf{Z}_2(n+1))^T) = \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_2(n+1) \\
& = \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_2(n) - 2\mu_2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_2(n) + 2\mu_2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{B}_2 \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)\} + 2\mu_2 \mu_2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)\} - \mu_2 \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{g}_{22}^T \mathbf{v}_{22}(n) + \mu_2^2 \mathbf{\Lambda}_{22}^2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_2(n) \\
& - 2\mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{P}_{2b}(n) - 2\mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{P}_{2c}(n) + \mu_2^2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{g}_{22}^T \mathbf{v}_{22}(n) + \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{k}_{2b}^2 + \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{k}_{2c}^2 + 2\mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \mathbf{k}_{2bc}^2 - \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \bar{\mathbf{P}}_{21b}(n) \\
& - \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \bar{\mathbf{P}}_{21c}(n) - \mu_2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{21} \mathbf{g}_{22}^T \mathbf{v}_{22}(n) + \mu_2^2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{21} \mathbf{g}_{22}^T \mathbf{v}_{22}(n) - \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \bar{\mathbf{P}}_{12b}(n) - \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T \bar{\mathbf{P}}_{12c}(n) + \mu_2^2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{21} \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{v}_{11}(n) + \mu_2^2 \varepsilon_{\min}^2 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_2^T
\end{aligned} \tag{4.57}$$

En factorisant cette expression on aura :

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\}) = \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_2(n+1) \\
& = (\mathbf{I} - 2\mu_2 \mathbf{\Lambda}_2 + \mu_2^2 \mathbf{\Lambda}_{22}^2) \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_2(n) + (\mu_2^2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{12} + \mu_2^2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{21} - \mu_2 \mathbf{\Lambda}_{12} - \mu_2 \mathbf{\Lambda}_{21}) \mathbf{g}_2^T \mathbf{v}_{22}(n) + \mu_2^2 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_{21} \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{v}_{11}(n) \\
& + 2\mu_2 (\mathbf{B}_2 + \mathbf{C}_2) \mathbf{g}_2^T \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_2(n)\} - 2\mu_2^2 (\mathbf{P}_{2b}(n) + \mathbf{P}_{2c}(n)) \mathbf{g}_2^T + \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T k_{2b}^2 + \mu_2^2 \mathbf{g}_2^T k_{2c}^2 + 2\mu_2^2 \mathbf{g}_2^T k_{2bc}^2 \\
& - \mu_2^2 (\bar{\mathbf{P}}_{21b}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{21c}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{12b}(n) + \bar{\mathbf{P}}_{12c}(n)) \mathbf{g}_2^T + \mu_2^2 \varepsilon_{\min}^2 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_2^T
\end{aligned}$$

Avec ;

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_2 &= \text{diag}\{\tilde{b}_{21}, \tilde{b}_{22}, \dots, \tilde{b}_{2L}\} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{b}}_1(n) = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{b}_2(n) \\
\mathbf{C}_2 &= \text{diag}\{\tilde{c}_{21}, \tilde{c}_{22}, \dots, \tilde{c}_{2L}\} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{c}}_2(n) = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{c}_2(n)
\end{aligned}$$

En divisant les deux membres par \mathbf{g}_2^T , on obtient (4.42).

c- On procède de la même manière pour avoir la relation (4.44) à partir de (4.14) en multipliant ses deux membres par \mathbf{R}_{12} et appliquons l'opérateur (tr) :

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T\}) = \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) - \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) + \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{b}_2)^T) + \mu_1 \mu_2 \varepsilon_{\min}^{(3)} \text{tr}(\mathbf{R}_{12}^2) \\
& + \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{c}_2)^T) - \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12}^2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}) - \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) + \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_1 \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\})) \\
& - \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{b}_2)^T) - \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{c}_2)^T) + \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_1 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\})) + \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{b}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}^T) \\
& - \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}^T) + \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{b}_1 (\mathbf{b}_2)^T) + \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{b}_1 (\mathbf{c}_2)^T) - \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12}^2 \mathbf{b}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}^T) + \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{c}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}^T) \\
& - \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_2 \mathbf{c}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}^T) + \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{c}_1 (\mathbf{b}_2)^T) + \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{c}_1 (\mathbf{c}_2)^T) - \mu_1 \text{tr}(\mathbf{R}_{12}^2 \mathbf{c}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}^T) - \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12}^2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\}) \\
& + \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12}^2 \text{tr}(\mathbf{R}_2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_2(n))^T\})) - \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12}^2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}(\mathbf{b}_2)^T) - \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12}^2 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}(\mathbf{c}_2)^T) + \mu_1 \mu_2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12}^2 \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)(\mathbf{Z}_1(n))^T\}))
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Le développement des différents termes de cette expression est le suivant :

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{b}_2)^T) = \mathbf{E}\{(\mathbf{Z}_1(n))^T \mathbf{Q}_{12} \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{b}_2(n)\} = \mathbf{E}\{(\tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n))^T \mathbf{\Lambda}_{12} \tilde{\mathbf{b}}_2(n)\} = \mathbf{g}_{12}^T \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n)\} \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_1(n)\}(\mathbf{c}_2)^T) = \mathbf{E}\{(\mathbf{Z}_1(n))^T \mathbf{Q}_{12} \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{c}_2(n)\} = \mathbf{E}\{(\tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n))^T \mathbf{\Lambda}_{12} \tilde{\mathbf{c}}_2(n)\} = \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \bar{\mathbf{C}}_2 \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n)\} \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{b}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}^T) = \mathbf{E}\{(\mathbf{Z}_2(n))^T \mathbf{Q}_{12} \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{b}_1(n)\} = \mathbf{E}\{(\tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n))^T \mathbf{\Lambda}_{12} \tilde{\mathbf{b}}_1(n)\} = \mathbf{g}_{12}^T \bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n)\} \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{c}_1 \mathbf{E}\{\mathbf{Z}_2(n)\}^T) = \mathbf{E}\{(\mathbf{Z}_2(n))^T \mathbf{Q}_{12} \mathbf{\Lambda}_{12} \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{c}_1(n)\} = \mathbf{E}\{(\tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n))^T \mathbf{\Lambda}_{12} \tilde{\mathbf{c}}_1(n)\} = \mathbf{g}_{12}^T \bar{\mathbf{C}}_1 \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n)\} \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2^T) = \mathbf{g}_{12}^T k_{12b}^2 \quad ; \quad \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{b}_1 \mathbf{c}_2^T) = \mathbf{g}_{12}^T k_{12bc}^2 \quad ; \quad \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{c}_1 \mathbf{b}_2^T) = \mathbf{g}_{12}^T k_{12cb}^2 \\
& \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2^T) = \mathbf{g}_{12}^T k_{12c}^2 \quad ; \quad \varepsilon_{\min}^{(3)} \text{tr}(\mathbf{R}_{12}^2) = \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{g}_{12}^T \varepsilon_{\min}^{(3)}
\end{aligned}$$

Où ;

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{B}}_1 &= \text{diag} \left\{ \bar{b}_{11}, \bar{b}_{12}, \dots, \bar{b}_{1L} \right\} & \text{avec } \bar{\mathbf{b}}_1(n) &= \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{b}_1(n) \\
\bar{\mathbf{C}}_1 &= \text{diag} \left\{ \bar{c}_{11}, \bar{c}_{12}, \dots, \bar{c}_{1L} \right\} & \text{avec } \bar{\mathbf{c}}_1(n) &= \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{c}_1(n) \\
\bar{\mathbf{B}}_2 &= \text{diag} \left\{ \bar{b}_{21}, \bar{b}_{22}, \dots, \bar{b}_{2L} \right\} & \text{avec } \bar{\mathbf{b}}_2(n) &= \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{b}_2(n) \\
\bar{\mathbf{C}}_2 &= \text{diag} \left\{ \bar{c}_{21}, \bar{c}_{22}, \dots, \bar{c}_{2L} \right\} & \text{avec } \bar{\mathbf{c}}_2(n) &= \mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{c}_2(n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_1 \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_1(n) \mathbf{b}_2^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{b}_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_1 \left(\mathbf{b}_2 \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right) \right\} \right) \\
& = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \tilde{\mathbf{T}}_{12b}(n) \right\} \right) = \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Q}_{12} \tilde{\mathbf{T}}_{12b}(n) \mathbf{Q}_{12}^T \right\} = \mathbf{g}_{12}^T \tilde{\mathbf{P}}_{12b}(n) \\
& \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_1 \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_1(n) \mathbf{c}_2^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{c}_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_1 \left(\mathbf{c}_2 \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right) \right\} \right) \\
& = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \tilde{\mathbf{T}}_{12c}(n) \right\} \right) = \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Q}_{12} \tilde{\mathbf{T}}_{12c}(n) \mathbf{Q}_{12}^T \right\} = \mathbf{g}_{12}^T \tilde{\mathbf{P}}_{12c}(n) \\
& \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{b}_1 \mathbf{R}_2 \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \tilde{\mathbf{T}}_{21b}(n) \right\} \right) \\
& = \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Q}_2 \tilde{\mathbf{T}}_{21b}(n) \mathbf{Q}_2^T \right\} = \mathbf{g}_{12}^T \tilde{\mathbf{P}}_{21b}(n) \\
& \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{b}_1 \mathbf{R}_{12} \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{T}_{11b}(n) \right\} \right) \\
& = \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}_{11b}(n) \mathbf{Q}_{12}^T \right\} = \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{P}_{11b}(n) \\
& \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_2 \mathbf{c}_1 \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_2 \left(\mathbf{c}_1 \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right) \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \tilde{\mathbf{T}}_{21c}(n) \right\} \right) \\
& = \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Q}_2 \tilde{\mathbf{T}}_{21c}(n) \mathbf{Q}_2^T \right\} = \mathbf{g}_{12}^T \tilde{\mathbf{P}}_{21c}(n) \\
& \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{R}_2 \mathbf{c}_1 \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_{12} \left(\mathbf{c}_1 \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right) \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{T}_{11c}(n) \right\} \right) \\
& = \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}_{11c}(n) \mathbf{Q}_{12}^T \right\} = \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{P}_{11c}(n) \\
& \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(n) \mathbf{b}_2^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_{12} \left(\mathbf{b}_2 \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right) \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{T}_{22b}(n) \right\} \right) \\
& = \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}_{22b}(n) \mathbf{Q}_{12}^T \right\} = \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{P}_{22b}(n) \\
& \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Z}_2(n) \mathbf{c}_2^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{c}_2 \mathbf{R}_{12} \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \right) = \text{tr} \left(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{T}_{22c}(n) \right\} \right) \\
& = \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{E} \left\{ \mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}_{22c}(n) \mathbf{Q}_{12}^T \right\} = \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{P}_{22c}(n)
\end{aligned}$$

Où ;

$$\begin{aligned}
k_{12b}^2 &= \bar{\mathbf{b}}_1(n) \bar{\mathbf{b}}_2^T(n), k_{12bc}^2 = \bar{\mathbf{b}}_1(n) \bar{\mathbf{c}}_2^T(n), k_{12cb}^2 = \bar{\mathbf{c}}_1(n) \bar{\mathbf{b}}_2^T(n), k_{12c}^2 = \bar{\mathbf{c}}_1(n) \bar{\mathbf{c}}_2^T(n) \\
\tilde{\mathbf{T}}_{12b}(n) &= \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_1 \left(\mathbf{b}_2 \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right) \right\}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_{12c}(n) = \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_1 \left(\mathbf{c}_2 \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right) \right\}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_{21b}(n) = \mathbf{E} \left\{ \mathbf{b}_1 \mathbf{R}_2 \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\}, \\
\tilde{\mathbf{P}}_{12b}(n) &= \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_{12} \tilde{\mathbf{T}}_{12b}(n) \mathbf{Q}_{12}^T \right\}, \quad \tilde{\mathbf{P}}_{12c}(n) = \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_{12} \tilde{\mathbf{T}}_{12c}(n) \mathbf{Q}_{12}^T \right\}, \quad \tilde{\mathbf{P}}_{21b}(n) = \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_2 \tilde{\mathbf{T}}_{21b}(n) \mathbf{Q}_2^T \right\} \\
\tilde{\mathbf{T}}_{21c}(n) &= \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_2 \left(\mathbf{c}_1 \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right) \right\}, \quad \mathbf{T}_{11b}(n) = \mathbf{E} \left\{ \mathbf{b}_1 \mathbf{R}_{12} \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right\}, \quad \mathbf{T}_{11c}(n) = \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_{12} \left(\mathbf{c}_1 \left(\mathbf{Z}_1(n) \right)^T \right) \right\} \\
\tilde{\mathbf{P}}_{21c}(n) &= \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_2 \tilde{\mathbf{T}}_{21c}(n) \mathbf{Q}_2^T \right\}, \quad \mathbf{P}_{11b}(n) = \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}_{11b}(n) \mathbf{Q}_{12}^T \right\}, \quad \mathbf{P}_{11c}(n) = \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}_{11c}(n) \mathbf{Q}_{12}^T \right\} \\
\mathbf{T}_{22b}(n) &= \mathbf{E} \left\{ \mathbf{R}_{12} \left(\mathbf{b}_2 \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right) \right\}, \quad \mathbf{T}_{22c}(n) = \mathbf{E} \left\{ \mathbf{c}_2 \mathbf{R}_{12} \left(\mathbf{Z}_2(n) \right)^T \right\} \\
\mathbf{P}_{22b}(n) &= \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}_{22b}(n) \mathbf{Q}_{12}^T \right\}, \quad \mathbf{P}_{22c}(n) = \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}_{12} \mathbf{T}_{22c}(n) \mathbf{Q}_{12}^T \right\}
\end{aligned}$$

En remplaçant dans (4.58) chaque terme par son équivalent et en utilisant les relations de (4.35) à (4.39), il vient :

$$\begin{aligned}
& \text{tr}(\mathbf{R}_{12} \mathbf{E}(\mathbf{Z}_1(n+1)(\mathbf{Z}_2(n+1))^T)) = \bar{\mathbf{g}}_{12}^T \bar{\mathbf{v}}_{12}(n+1) \\
& \bar{\mathbf{g}}_{12}^T \bar{\mathbf{v}}_{12}(n) - \mu_2 \Lambda_2 \bar{\mathbf{g}}_{12}^T \bar{\mathbf{v}}_{12}(n) + \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n)) + \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \bar{\mathbf{C}}_2 \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{Z}}_{11}(n)) - \mu_2 \Lambda_{12} \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{v}_{11}(n) - \mu_1 \mu_2 \Lambda_1 \bar{\mathbf{g}}_{12}^T \bar{\mathbf{v}}_{12}(n) \\
& + \mu_1 \mu_2 \Lambda_1 \Lambda_2 \bar{\mathbf{g}}_{12}^T \bar{\mathbf{v}}_{12}(n) - \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \tilde{\mathbf{P}}_{12b}(n) - \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \tilde{\mathbf{P}}_{12c}(n) + \mu_1 \mu_2 \Lambda_1 \Lambda_{12} \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{v}_{11}(n) + \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n)) - \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \tilde{\mathbf{P}}_{21b}(n) \\
& + \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T k_{12b}^2 + \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T k_{12bc}^2 - \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{P}_{11b}(n) + \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \bar{\mathbf{C}}_1 \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{Z}}_{21}(n)) - \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \tilde{\mathbf{P}}_{21c}(n) + \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T k_{12cb}^2 + \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T k_{12c}^2 - \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{P}_{11c}(n) \\
& - \mu_1 \mu_2 \Lambda_{12} \mathbf{g}_{12}^T \bar{\mathbf{v}}_{21}(n) + \mu_1 \mu_2 \Lambda_2 \Lambda_{12} \mathbf{g}_{12}^T \bar{\mathbf{v}}_{21}(n) - \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{P}_{22b}(n) - \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{P}_{22c}(n) + \mu_1 \mu_2 \Lambda_{12}^2 \bar{\mathbf{g}}_{12}^T \bar{\mathbf{v}}_{12}(n) + \mu_1 \mu_2 \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{g}_{12}^{\text{min}(3)} \\
& \tag{4.59}
\end{aligned}$$

En réarrangeant cette expression on trouve (4.44)

REFERENCES

1. Diniz, P.S.R., “Adaptive filtering algorithms and practical implementation”, Second Edition, Springer, (2008).
2. Widrow, B., Stearns, S.D., “Adaptive signal processing”, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, NJ, (1985).
3. Paleologu, C., Benesty, J. and Ciochină, S., “A variable step-size affine projection algorithm designed for acoustic echo cancellation” IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, Vol. 16, no. 8, (Nov. 2008). 1466-1478.
4. Vega, L., Rey, H., Benesty, J. and Tressens, S., “A New Robust Variable Step-Size NLMS Algorithm” IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 56, no. 5, may (2008).
5. Paleologu, C., Benesty, J. and Ciochină, S., “A variable step-size proportionate NLMS algorithm for echo cancellation” Rev. Roum. Sci. Techn.– Électrotechn. et Énerg. Bucarest, **53**, 3, p. 309 – 317, (2008).
6. Ciprian, R. B., Kuosmanen, P., Egiazarian, K., “A New Variable Length LMS Algorithm: Theoretical Analysis and Implementations”, IEEE Transactions on Signal Processing, (2002), pp.1031-1034.
7. S. Haykin, Adaptive Filter Theory, 4th edition, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2002..
8. J. Benesty and T. Gaensler, “A robust fast recursive least squares adaptive algorithm,” in Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP), Salt Lake City, UT, 2001, pp. 3785–3788..
9. Manolakis, D.G., Ingle, V.K., Kogon, S.M., “Statistical and adaptive signal processing”, Artech House, (2005).
10. Mahieux, Y., Gilloire, A. et Khalil, F., “Annulation d'écho en téléconférence stéréophonique ” centre national d'études des télécommunications route de trégastel-22300 lannion, (13 au 16 septembre 1993).
11. Andy W., Khong, H. and Naylor, Patrick.A., “Stereophonic Acoustic Echo Cancellation Employing Selective-Tap Adaptive algorithms” IEEE Transactions on Audio, Speech, Language Processing, Vol. 14, No. 3, May 2006).
12. Benesty, J., Morgan, D.R., and Sondhi, M.M., “A better understanding and an improved solution to the specific problems of stereophonic acoustic echo cancellation” IEEE Trans. Speech Audio Processing, vol. 6, no. 2, pp. 156–165, (Mar. 1998).

13. Eneroth, P., Gay, S.L., Benesty, J., Gaensler, T., "Real-time Implementation of a Stereophonic Acoustic Echo Canceller" *IEEE Transactions on Speech And Audio Processing*, Vol. 9, N^o. 5, (July 2001).
14. Benesty, J., Gilloire, A., Grenier, Y., "A frequency domain stereophonic acoustic echo canceler exploiting the coherence between the channels" *J. Acoust. Soc. Am.* 106(3), Acoustical Society of America, (Sep 1999).
15. Ali, M., "Stereophonic acoustic echo cancellation system using time-varying all-pass filtering for signal decorrelation" in *Proc. IEEE ICASSP*, (1998).
16. Morgan, D.R., Hall, J. L. and Benesty, J., "Investigation of Several Types of Nonlinearities for Use in Stereo Acoustic Echo Cancellation" *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 9, no. 6, (sep. 2001).
17. Andy W., Khong, H., Benesty, J. and Naylor, Patrick.A., "Stereophonic Acoustic Echo Cancellation: Analysis of the Misalignment in the Frequency Domain" *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 13, No. 1, (january 2006).
18. Eneroth, P., "Stereophonic Acoustic Echo Cancellation: Theory and Implementation" Department of electrosience Lund university, Sweden. No. 22. (2001).
19. Sondhi, M.M. and Morgan, D.R., "Acoustic echo cancellation for stereophonic teleconferencing" In *IEEEASSP Workshop on Applications of Signal Processing to Audio Acoustics*, (1991).
20. Sondhi, M.M., Morgan, D.R. and Hall, J.L., "Stereophonic acoustic echo cancellation-An overview of the fundamental problem" *IEEE Signal Processing Lett.*, vol. 2, no. 8, pp. 148–151, (Aug. 1995).
21. Gansler, T. and Eneroth, P., "Influence of audio coding on stereophonic acoustic echo cancellation" In *Proc. IEEE ICASSP*, pp. 3649–3652, (1998).
22. P. Eneroth, S. L. Gay, T. Gänslar, and J. Benesty, "A real-time implementation of a stereophonic acoustic echo canceller," *IEEE Trans. Speech Audio Process.*, vol. 9, no. 4, pp. 513–523, (Jul. 2001).
23. J. M. Cioffi, "The fast adaptive rotor's RLS algorithm," *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Processing*, vol. 38, pp. 631-653, (April 1990).
24. Benesty, J., Gaensler, T., "Stereophonic acoustic echo cancellation and two-channel adaptive filtering: an overview" *Int. J. Adapt. Control and Signal Process.* V. 14, no. 6, 565-586; (Sep. 2000).
25. Bellanger, M.G., "Adaptive Digital Filters and Signal Analysis" (3rd edn). Marcel Dekker: New York, (1987).

26. Benesty, J. , Amand, F. , Gilloire, A. and Grenier, Y., "Adaptive filtering algorithms for stereophonic acoustic echo cancellation" In *Proc. IEEE ICASSP*, , pp. 3099–3102, (1995).
27. Djendi, M., "An efficient stabilized fast Newton adaptive filtering algorithm for stereophonic acoustic echo cancellation SAEC" *Computers and Electrical Engineering* 38 (2012) 938–952.
28. Sondhi, M.M., "An adaptive echo canceller", *The Bell System Technical Journal*. 1967; XLVI: pp.497-510.
29. Amand,F., "Annulation d'Echo Multi-voies et Application à la Téléconférence à Haute Qualité ". .Ph.D. thesis, Lannion, 1996.
30. Shimauchi, S. Makino, S., "Stereo projection echo canceller with true echo path estimation" *Proceedings of IEEE ICASSP*. 1996; pp. 3059-3062.
31. Makino, S., Strauss, K., Shimauchi, S., Haneda, Y., Nakagawa "A. Subband stereo echo canceller using the projection algorithm with fast convergence to the true echo path" *Proceedings of IEEE ICASSP*. 1997; pp. 299-302.
32. Benesty, J., Morgan, D.R. and Sondhi, M.M., "A better understanding and an improved solution to the problems of stereophonic acoustic echo cancellation", *Proceedings of IEEE ICASSP*, pp.303-306, (1997).
33. Emura, S. ,Haneda, Y., Kataoka, A., Makino,S., "Stereo echo cancellation algorithm using adaptive update on the basis of enhanced input-signal vector", In *Signal Processing*, vol. 86, n.7, pp.1157-1167, (2006).
34. Benesty, J., Morgan, D.R. and Sondhi, M.M., "A hybrid mono/stereo acoustic echo canceler", *IEEE Transactions on Speech Audio Processing*. 6: pp. 468-475, (1998).
35. Hirano, A., Sugiyama, A., "A new multi-channel echo canceller with a single adaptive filter per channel" *Proceedings of IEEE ICASSP*, pp. 1922-1925, (1992).
36. Minami, S., "A stereophonic echo canceller using single adaptive filter", *Proceeding of IEEE, ICASSP*, pp.3027-3030, (1995).
37. Gilloire, A. and Turbin, V., "Using auditory properties to improve the behavior of stereophonic acoustic echo cancellers", In *Proceeding, IEEE. ICASSP*, pp. 3681–3684, (1998).
38. Benesty,J., Duhamel, P., Grenier, Y., "Multi-channel adaptive filtering applied to multi-channel acoustic echo cancellation",*Proceedings of EUSIPCO*; pp.1405-1408, (1996).
39. Djendi, M., Guessoum, A., "A new fast Newton-type adaptive filtering algorithm for stereophonic acoustic echo cancellation (SAEC)". *International Journal on Adaptive Control and Signal Processing* 2010, vol. 35, pp.435-444, (June 2010).

40. Mayyas, K., "Performance Analysis of the Deficient Length LMS Adaptive Algorithm" IEEE Transaction on signal processing, Vol. 53, no.8, (August 2005).
41. Yousef, N.R. and Sayed, A.H., "A unified approach to the steady-state and tracking analyzes of adaptive filters" IEEE Transaction on Signal Processing, vol. 49, no. 2, pp. 314–324, (Feb. 2001).
42. Gu, Y., Tang, K., Cui, H. and Du, W., "Convergence analysis of a deficient-length LMS filter and optimal length sequence to model exponential decay impulse response" IEEE Signal Processing Letters, vol. 10, no. 1, pp. 4–7, (Jan. 2003).
43. Homer,J., Bitmead,R.R. and Mareels,I., "Quantifying the effects of dimension on the convergence rate of the LMS adaptive FIR estimator" IEEE Transaction on Signal Processing, vol. 46, no. 10, pp. 2611 –2615, (Oct. 1998).
44. .Woo, T. K., "Fast Hierarchical least mean square algorithm" IEEE Signal Processing Letters, vol. 8, no. 11, pp. 289–291, (Nov. 2001).
45. Stoica,, P. Agrawal, M. and Ahgren, P., "On the hierarchical least-squares algorithm" IEEE Communication Letters, vol. 6, no. 4, pp. 153–155, (Apr. 2002).
46. Macleod, M. D., "Performance of the hierarchical LMS algorithm" IEEE Signal Process. Letters, vol. 9, no. 12, pp. 436–437, (Dec. 2002).
47. Nascimento, V.H., "Analysis of the hierarchical LMS algorithm" IEEE Signal Processing Letters, vol. 10, no. 3, pp. 78–81, (Mar. 2003).
48. Spriet, A., "Adaptive Filtering Techniques for Noise Reduction and Acoustic Feedback Cancellation in Hearing Aids", PhD Thesis, Katholieke University Leuven, Belgium, (Sep. 2004).
49. D. T. Slock, "On the convergence behavior of the LMS and normalized LMS algorithms," IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 40, pp. 2811-2825, (Sept. 1993).
50. Eneroth, P., Benesty, J. , Gaensler, T.,and Gay, S., "based on :Comparison of Different Adaptive Algorithms for Stereophonic Acoustic Echo Cancellation",European Signal Processing Conference, (Sep. 2000).
51. M. Djendi, A. Bounif, Performance analysis of under-modelling stereophonic acoustic echo cancellation by adaptive filtering LMS algorithm, Computers and Electrical Engineering, vol.38 (2012) 1579–1594.