

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA

MEMOIRE DE MAGISTER

Présenté par :

Melle. **BELLAKEHAL Saliha**

SPECIALITE : ELECTRONIQUE
OPTION : CONTROLE

THEME

*Génération de Mouvements et Commande
Coordonnée d'un Robot Manipulateur Mobile*

Devant le jury composé de :

Mr GUESSOUM.A	Professeur	Université de Blida, Président
Mr SALHI.H	Maître de conférence	Université de Blida, Examineur
Mr KAZED.B	Chargé de cours	Université de Blida, Examineur
Mr TADJINE.M	Maître de conférence	ENP, Alger, Examineur
Mr BOUZOUIA.B	Maître de Recherche	CDTA, Alger, Rapporteur

Résumé :

Dans ce mémoire, la modélisation et le contrôle d'un robot manipulateur mobile ont été investis. Le manipulateur mobile considéré est composé d'un bras manipulateur monté sur une plate-forme mobile non-holonome à roues.

Le développement d'un modèle mathématique décrivant la totalité des phénomènes dynamiques agissant sur le manipulateur mobile était notre premier objectif. Ce modèle a l'avantage de permettre l'analyse et l'évaluation des effets d'interaction dynamique entre le bras manipulateur et la plate-forme mobile.

L'étude analytique menée a permis de conclure que les effets de couplage dynamique représentent un pourcentage très important du couple nominal du système ; de ce fait, leur intégration dans la boucle de contrôle est indispensable.

La commande dynamique représente une solution originale dans la mesure où elle prévoit la compensation de tous les phénomènes dynamiques auxquels le manipulateur mobile est sujet. La robustesse de cette loi de commande est vérifiée en simulation pour les tâches de suivi de trajectoire en présence de différents types de perturbations.

Mots-clés :

Manipulateur mobile, Modèle géométrique, Planification de trajectoires, Modèle dynamique, Interaction dynamique, Suivi de trajectoire, Commande dynamique.

Abstract :

Modelling and control of robotic mobile manipulators were investigated in this work. The mobile manipulator considered is composed of a robotic arm mounted on a non-holonomic wheeled mobile platform.

The aim of the project was the development of a mathematical model which describes the whole dynamic phenomenon which affects the mechanical structure. This model allowed the analysis and the evaluation of the dynamic interaction effects between the robotic arm and the mobile platform. Through the conducted analytical study, we had noticed that this effects represents a significant percentage of nominal torque ; therefore, it will be integrated in the feedback control.

The dynamic control law represents an original solution as it provides for the compensation of all dynamic phenomenon which affects the mobile manipulator. The law control robustness is verified by simulation experiments for the tracking tasks in presence of various disturbances.

Key-words :

Mobile manipulator, Geometric model, Path planning, Dynamic model, Dynamic interaction, Tracking, Dynamic control law.

ملخص :

إنجاد نموذج و قانون تحكم في روبات معالج متحرك هو موضوع بحث هذه المذكورة. الروبوت المعالج المتحرك المعتمد يتشكل من روبات معالج مركب على أرضية متحركة على عجلات. تطوير نموذج رياضي يمثل كل الظواهر الديناميكية المؤثرة في الروبوت المعالج المتحرك كان هدفنا الأول. هذا النموذج يسمح بتحليل و تقييم آثار التفاعل الحركي بين الروبوت المعالج و الأرضية المتحركة. الدراسة التحليلية لقوى التفاعل الحركي أظهرت أن هذه الأخيرة تمثل نسبة هامة جدا من عزم المزدوجة الاسمي للبنية الميكانيكية المعنية؛ لذلك، يتوجب أخذ هذه القوى بعين الاعتبار عند اعتماد قوانين التحكم في الروبوت. قانون التحكم الحركي يمثل حلا فريدا كونه يمكن من إدماج كل الظواهر الحركية في حلقة التحكم. تم التحقق من فعالية قانون التحكم الحركي من خلال تجارب المحاكاة لمهام الاقتفاء في وجود عوامل إرباك مختلفة.

كلمات مفاتيح :

روبات معالج متحرك، نموذج هندسي، تخطيط المسلك، نموذج حركي، تفاعل حركي، اقتفاء، قانون التحكم الحركي.



Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé à l'institut d'électronique de l'université de Blida sous la direction de Mr BOUZOUIA.B directeur de recherche au Centre de Développement des Technologies Avancées (CDTA). Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour la confiance et l'aide qu'il m'a accordées ; ses qualités scientifiques et humaines ont été un soutien important pour mener à bien ce travail.

Je remercie très sincèrement Mr BENSEBTI.M directeur de la PGRS de l'institut d'Electronique d'avoir mis à notre disponibilité les moyens nécessaires pour la réalisation de ce travail.

Mes remerciements vont également à Mr GUESSOUM.A doyen de la faculté des sciences de l'ingénieur qui me fait l'honneur de présider de jury de la soutenance de ce mémoire.

Je tiens à remercier les membres de comité de lecture pour leur participation au jury, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour leurs remarques qui m'ont permis d'améliorer la rédaction de ce mémoire :

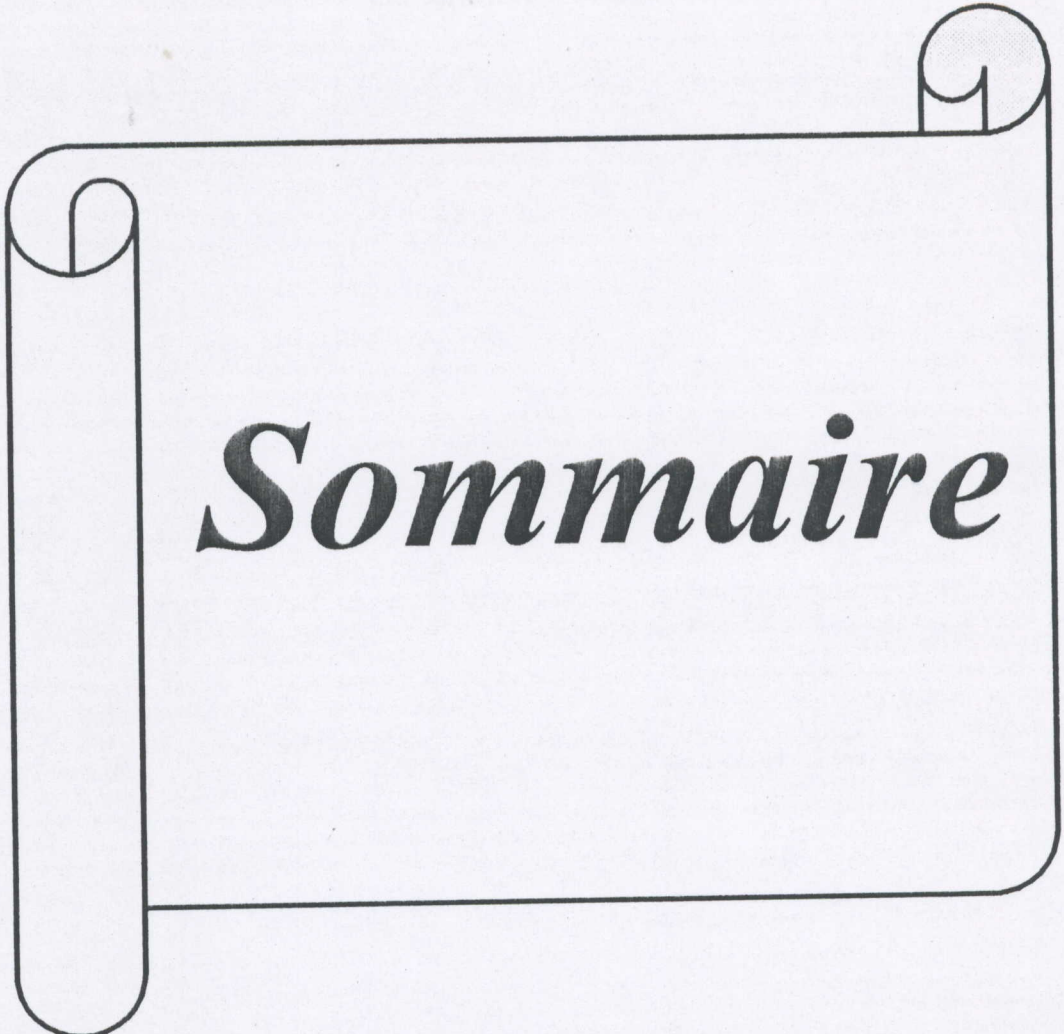
Mr SALHI.H Maître de conférence Université de Blida..

Mr KAZED.B Chargé de cour Université de Blida.

Je remercie Mr TADJINE.M chargé de cours à l'Ecole Nationale Polytechnique d'El-Harrach (ENP) d'avoir accepter de participer au jury de soutenance de ce mémoire.

Je tiens à exprimer toutes mes reconnaissances à Mr KADRI.M attaché de recherche au CDTA et à Mr SEBAA.D maître de conférence au Centre Universitaire de Laghouat pour leurs précieuses contributions à la réalisation de ce travail.

A toute personne m'ayant encouragée et soutenue

A decorative scroll-like frame with a black outline. The frame has a vertical strip on the left side that is rolled up at the top and bottom. The top right corner of the main rectangular area is also rolled up. The word 'Sommaire' is centered within the frame in a bold, italicized serif font.

Sommaire

Sommaire :

Introduction générale.	Chapitre1	1
-------------------------------------	------------------	----------

Chapitre2

Présentation du système :

I. Introduction.	5
II. Présentation géométrique du manipulateur mobile.	5
II.1. Robot mobile.	6
II.2. Robot manipulateur.	8
III. Modèle dynamique du manipulateur mobile.	10
III.1. Equations de mouvement du manipulateur seul.	10
III.2. Equations de mouvement de la plate-forme mobile seule.	13
III.3. Equations de mouvement du manipulateur mobile.	16
IV. Génération de trajectoires.	19
IV.1. Notions et définitions.	19
IV.2. La Trajectoire Généralisée Point à Point (TG-PAP).	22
IV.3. La Trajectoire Opérationnelle Point à Point (TO-PAP).	24
IV.4. La Tâche à Trajectoire Opérationnelle Imposée (TTOI) ; la Tâche à Mouvement Opérationnel Imposé (TMOI).	24
V. Conclusion.	26

Chapitre3

Analyse de l'interaction dynamique :

I. Introduction.	28
II. Le Pendule Inversé Mobile.	28
II.1. Présentation du système.	28
II.2. Equations de mouvements.	29
II.3. Analyse des termes d'interaction.	31
II.4. Interprétation.	36
III. Cas du Manipulateur Mobile.	38
III.1. Analyse des termes d'interaction.	39
III.2. Interprétation.	49
IV. Conclusion.	55

Chapitre4

Commande du Robot Manipulateur Mobile

I. Introduction.	56
II. Modèle Mathématique du Pendule Inversé Mobile.	57
II.1. Commande PID Classique.	57
II.2. Commande Dynamique.	59
II.3. Commande Dynamique avec correction PD.	60
III. Cas du Robot Manipulateur Mobile.	61
III.1. Commande PID Classique.	62
III.2. Commande Dynamique.	64
III.3. Commande Dynamique avec correction PD.	65

Chapitre5

Validation en simulation :

I. Introduction.	68
II. Cadre de simulation.	68
III. Résultats de Simulation.	70
III.1. Pendule Inversé Mobile.	70
III.2. Cas du Robot Manipulateur Mobile.	77
III.2.1. Commande PID.	80
III.2.2. Commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction.	87
III.2.3. Commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction.	94
IV. Conclusion.	104
Conclusion générale.	105

Annexe(A)

Modélisation géométrique et dynamique d'un Manipulateur Mobile :

- I. Modèle géométrique.
- II. Modèle Différentiel.
- III. Modèle Dynamique.

Annexe(B)

Etat de l'art.

Bibliographie



Chapitre Premier :

*Introduction
Générale*

Introduction générale

De nos jours, les bras manipulateurs à base fixe sont partout installés dans les chaînes de production industrielle où ils mènent à bien les tâches qui leur sont confiées. Mais, pour certaines tâches de manipulation qui se font sur un espace de travail de plusieurs mètres ; ces bras manipulateurs ne conviennent plus.

Afin d'élargir l'espace de travail du bras manipulateur, la base de celui-ci est fixé sur un robot mobile pour donner une nouvelle structure appelée "*manipulateur mobile*".

Un robot *manipulateur mobile* est donc constitué d'une plate-forme mobile à roues sur laquelle est installé un bras manipulateur ; cette structure combine la capacité de manipulation offerte par le robot manipulateur et la mobilité introduite par le robot mobile.

Les *manipulateurs mobiles* présentent, de toute évidence, des avantages indéniables par rapport aux manipulateurs à base fixe. Ils permettent, par exemple, d'étendre l'espace de travail de l'organe terminal du manipulateur qui, de borné, devient infini [1]. Ces systèmes trouvent leur application dans l'industrie manufacturière, la maintenance des réacteurs nucléaires, l'exploration de l'espace, l'exploration sous-marine et toutes les tâches qui se font dans un environnement hostile. La figure 1.1 présente un exemple conceptuel d'une application utilisant des manipulateurs mobiles à deux bras qui réalisent une tâche de transport de matériels d'une façon coopérative.

Cependant, la complexité de la structure des *manipulateurs mobiles* rend très difficile leur exploitation ; car l'association d'un bras manipulateur à une plate-forme mobile pose beaucoup de problèmes tels que :

- La redondance introduite par la mobilité de la plate-forme.
- Les contraintes non-holonomiques auxquelles la plate-forme est sujette.
- L'interaction dynamique entre la plate-forme mobile et le bras manipulateur.

La redondance est liée au fait que le nombre de degrés de mobilité du manipulateur mobile est bien supérieur au degré de liberté de son organe terminal ce qui induit une infinité de mouvements possibles du manipulateur mobile pour un mouvement désiré de son organe terminal.

La non-holonomie est due aux conditions de locomotion de la plate-forme, lorsqu'il y a roulement sans glissement sur le sol, ce qui interdit certains mouvements à la plate-forme (la plate-forme ne peut pas se mouvoir dans la direction de l'axe des roues). Ces deux particularités (redondance et non-holonomie) rendent plus complexe la planification de trajectoires réalisables par le manipulateur mobile.

Les efforts de couplage dynamique entre le bras et la plate-forme sont très gênants notamment lorsque le système évolue à des vitesses non-négligeables ou quand l'organe terminal manipule des

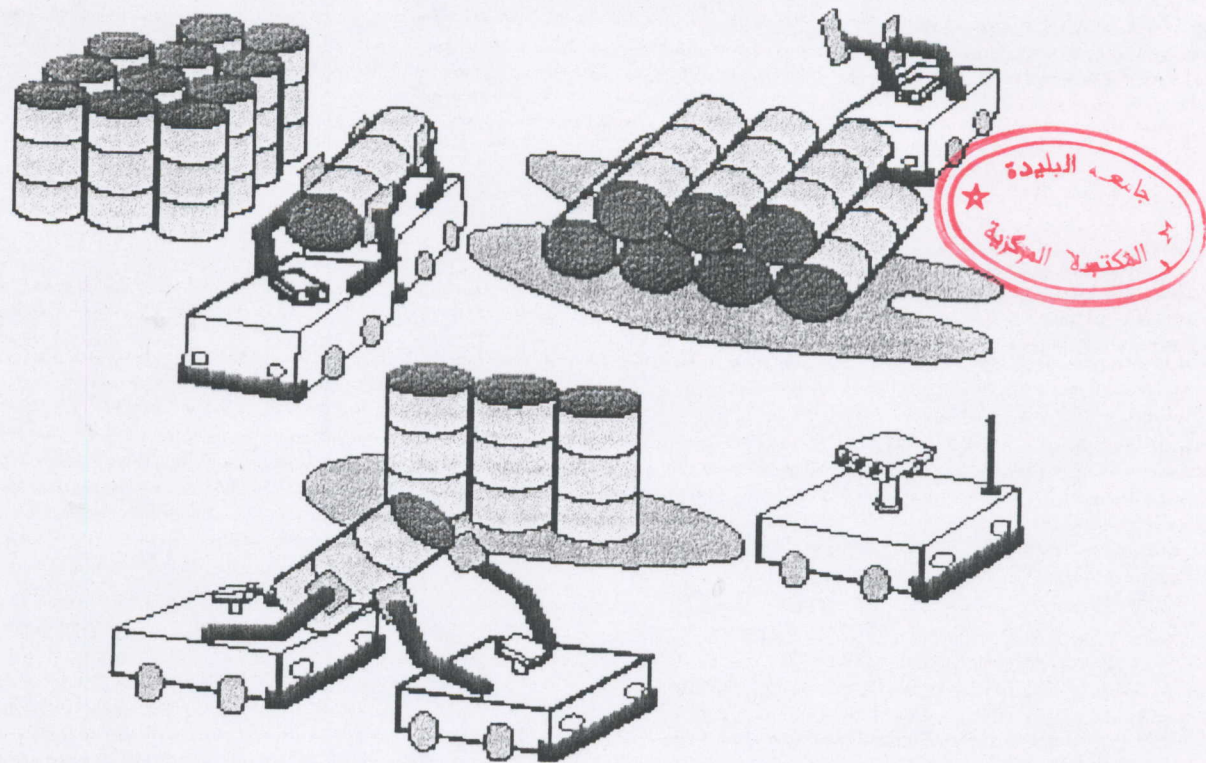


Fig-1.1 : Plusieurs manipulateurs mobiles en coopération.

objets de masses importantes dans des conditions de mouvements rapides et précis ; d'où la nécessité de la prise en considération de ces efforts lors de l'élaboration des lois de commande.

Les travaux concernant la commande d'un manipulateur mobile restent peu nombreux bien que les avantages d'un tel système soient dorénavant reconnus ; d'ailleurs, ces systèmes ne sont étudiés dans la littérature, que depuis une dizaine d'années environ. On peut citer, à titre d'exemple, les travaux de Y.Yamamoto et X.Yun [2, 3, 4] qui se sont intéressés au problème de couplage dynamique entre le bras manipulateur et la plate-forme. Ils utilisent une commande par retour d'état non linéaire pour améliorer les performances de contrôle du système pour les tâches de suivi de trajectoires. Ultérieurement, ces auteurs se sont intéressés à la coordination multi-bras pour un manipulateur mobile constitué d'une plate-forme mobile à roues sur laquelle sont fixés deux bras manipulateurs à trois liaisons chacun [5] ; ces trois sous-systèmes coopèrent pour réaliser les tâches de transport d'objets.

L'équipe de O.Khatib [6] adopte des méthodologies déjà appliquées à des bras manipulateurs redondants (à base fixe) et ils les ont transposées à un manipulateur mobile dont la plate-forme est holonome. En plus de l'extension de ces méthodologies aux manipulateurs mobiles, les auteurs

présentent une nouvelle structure de contrôle décentralisé concernant des tâches de coopération entre plusieurs manipulateurs mobiles.

On peut également citer l'équipe de P.Thomson et G.Rabatel [7] qui ont adopté plusieurs stratégies de contrôle d'un manipulateur mobile destiné aux travaux d'agriculture afin de réduire l'utilisation des produits chimiques. Leur manipulateur mobile est composé d'un système de vision qui détecte les mauvaises herbes et d'un bras manipulateur fixé à une plate-forme mobile pour pointer et éliminer individuellement les mauvaises herbes par électrocution pendant le déplacement de la plate-forme.

Les travaux menés par G.Foulon, M.Renaud et P.Dauchez [1, 8] se restreignent à des méthodes de commande qui n'utilisent que la cinématique des manipulateurs mobiles ; les auteurs s'intéressent à la gestion de la redondance tout en tenant compte des contraintes dues à la non-holonomie de la plate-forme. Ils comparent les méthodes qui utilisent des tâches additionnelles et celles basées sur la minimisation de critère.

Une autre équipe qui s'est intéressée aux tâches de coopération entre plusieurs manipulateurs mobiles est celle de T.Sugar et V.Kumar [9, 10]. Leur système consiste en deux plate-formes mobiles autonomes chacune équipée d'un bras manipulateur ; ces deux bras coopèrent pour transporter un objet. Les auteurs décrivent une architecture d'un système de contrôle temps réel où un robot leader planifie, en se basant sur des informations sensorielles valables, et suit une trajectoire convenable (en évitant les obstacles) ; l'autre manipulateur mobile est suiveur ; il reçoit les informations du leader et contrôle sa trajectoire pour maintenir la position et l'orientation désirées relatives à ces informations.

D'autres travaux réalisés par d'autres équipes de recherche seront cités d'une manière plus explicite à l'annexe (B) de ce mémoire.

Dans notre travail, nous nous intéressons à la coordination mobilité-manipulation d'un manipulateur mobile constitué d'un bras manipulateur de 2 à n degrés de liberté et d'une plate-forme mobile à roues non-holonyme pour la réalisation des tâches de suivi de trajectoires. Les trajectoires imposées sont définies dans l'espace opérationnel ; on aura donc à les convertir en coordonnées généralisées d'où la nécessité de concevoir un planificateur de trajectoires qui réalisera cette transformation. Les vitesses d'évolution du manipulateur mobile sont suffisamment importantes pour que nous ne puissions considérer l'aspect dynamique du problème négligeable. Par conséquent, nous sommes amenés à adopter des lois de commande qui permettent la prise en compte de cet aspect ; la commande dynamique est, sans doute, la manière la plus naturelle d'appréhender le contrôle d'un tel système. Nous focaliserons notre intérêt surtout à l'étude et l'analyse de l'interaction dynamique entre le bras manipulateur et la plate-forme mobile pour tirer pleinement profit de l'utilisation du modèle dynamique du système et notamment pour pouvoir évaluer cette interaction afin de prévoir sa compensation.

Dans cette optique, ce mémoire est organisé comme suit :

- Le premier chapitre est cette introduction où nous avons rapidement présenté les systèmes *robots manipulateurs mobiles*, cité quelques travaux, défini le problème à étudier et présenté l'organisation du mémoire.
- Le deuxième chapitre comportera une présentation géométrique du manipulateur mobile et la modélisation dynamique du bras manipulateur, de la plate-forme mobile et du système global formé de leur association. Dans le même chapitre, on introduira les notions concernant les *espaces des configurations* et des *situations* et les différents types de *tâches* imposées à l'organe terminal du manipulateur mobile ; puis, on présentera des méthodes permettant de planifier des trajectoires géométriques. Ces méthodes seront testées pour quelques exemples de simulation pour un manipulateur mobile dont les modèles *géométrique* et *différentiel* sont présentés en annexe (A).
- Le troisième chapitre sera consacré à l'étude de l'interaction dynamique entre le bras manipulateur et la plate-forme mobile. Cette étude sera menée d'une manière progressive : Dans un premier temps, on étudiera l'interaction dynamique pour un système plus simple qui est le pendule inversé mobile ; puis, on passera au système plus complexe qui est le cas d'un manipulateur mobile. Dans cette étude, on verra comment les efforts de couplage dynamique entre le manipulateur et la plate-forme évoluent vis à vis du couple nominal appliqué lorsque le système est sujet à certaines perturbations.
- Dans le quatrième chapitre, on présentera les lois de commande adoptées et les schémas bloc correspondant pour les deux systèmes étudiés : le pendule inversé mobile et le manipulateur mobile. Deux types de commande sont adoptés : la commande dynamique pour les raisons citées ci-dessus ; et la commande PID classique à gains fixes ; pas dans le but de les comparées bien évidemment ; mais, pour pouvoir évaluer la robustesse de la commande dynamique.
- Le cinquième et dernier chapitre est consacré à l'étude de simulation. Au cours de ce travail, toutes les simulations sont faites au moyen du logiciel mathématique *MATLAB*. Les résultats obtenus pour les deux systèmes (pendule inversé mobile et manipulateur mobile) et pour les lois de commande définies au chapitre 4 seront présentés et interprétés.
- Pour finir, nous donnerons les conclusions et les remarques sur le travail réalisé et les perspectives de développement futures.



Deuxième Chapitre :

*Présentation du
Système*



Deuxième Chapitre :

*Présentation du
Système*

I. Introduction :

Le but de ce chapitre est de présenter le cadre théorique de ce travail d'une manière globale et détaillée. Pour cela, on dresse la présentation géométrique générale d'un manipulateur mobile suivie par une description cinématique plus détaillée de robots mobile et manipulateur. Par la suite, on donnera le modèle dynamique d'une plate-forme mobile non-holonome et d'un bras manipulateur à n degrés de liberté en passant par leurs équations de mouvement pour arriver à élaborer le modèle dynamique complet du manipulateur mobile formé par leur association. On abordera également dans ce chapitre le problème de génération de trajectoire en considérant les différents types de tâches selon que l'évolution de l'organe terminal du bras manipulateur est imposée du début à la fin du mouvement ou que seule la situation finale est imposée ; et ceci selon que le mouvement imposé est défini dans l'espace généralisé ou dans ou dans l'espace opérationnel (espace de la tâche). On termine ce chapitre par une étude en simulation des problèmes de planification de trajectoires d'un manipulateur mobile où les solutions de quelques cas d'exemples seront présentées.

II. Présentation géométrique du manipulateur mobile :

Un manipulateur mobile est un système mécanique formé de l'association de deux sous-systèmes : Un *robot mobile* qui assure la mobilité du système et permet les déplacements à grandes distances ; et un *robot manipulateur* dont l'espace accessible est limité mais qui assure la manipulabilité avec rapidité et précision.

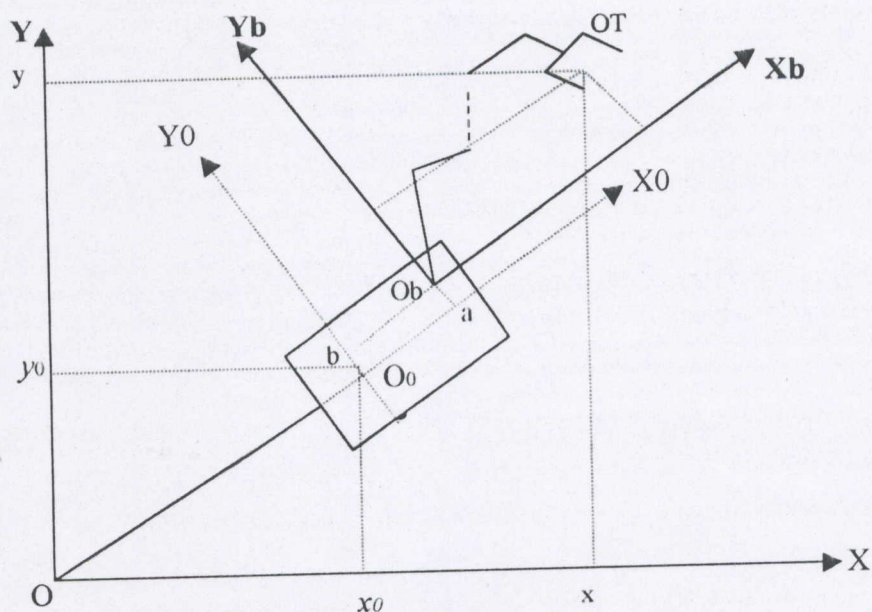


Fig-2.1 : Repères liés au système mécanique.

L'étude d'un manipulateur mobile nécessite la prise en considération des deux sous-systèmes le constituant (robot mobile + robot manipulateur) d'une manière globale comme c'est représenté à la figure 2.1.

Le robot mobile qui est représenté par une forme rectangulaire se déplace uniquement dans le plan ; sa configuration est définie dans un repère fixe $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Un repère mobile $R_0 = (O_0, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ est lié au centre de masse de la plate-forme du robot mobile (voir Fig-2.1). Le bras manipulateur (supposé à n liaisons) est fixé par son socle sur le plateau de la plate-forme au point O_b qui est l'origine du repère R_b lié à la base du bras manipulateur ; $R_b = (O_b, \vec{X}_b, \vec{Y}_b, \vec{Z}_b)$. Le repère R_b est parallèle au repère R_0 , le point O_b a pour coordonnées $(a, b, 0)$ dans le repère R_0 . L'organe terminal du bras manipulateur a pour coordonnées (x_b, y_b, z_b) dans le repère lié à sa base R_b et (x, y, z) dans le repère fixe R . Les coordonnées de l'origine du repère R_0 lié au robot mobile dans le repère fixe R sont (x_0, y_0) (la troisième composante est toujours constante car le mouvement se fait dans le plan). Dans ce qui suit, on va illustrer l'aspect cinématique de chaque sous-système pris séparément.

II.1 Robot mobile :

Un robot mobile est une plate-forme à roues (chariot) qui peut se mouvoir dans le plan grâce au mouvement de ses roues motrices ; il est caractérisé par l'évolution dans le temps et dans l'espace de sa position et son orientation.

Afin de déterminer les différentes variables du robot en fonction de l'évolution désirée, un modèle dans un système de coordonnées est nécessaire.

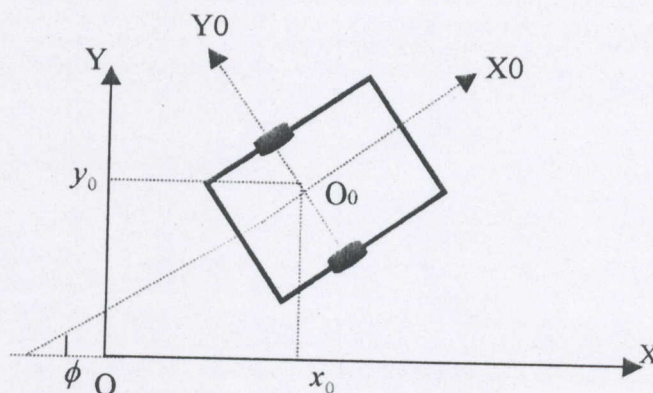


Fig-2.2 : Représentation du robot mobile dans le repère fixe $R(O, X, Y)$.

Le robot dont il s'agit ici est conçu à partir d'une forme rectangulaire dotée de deux roues motrices indépendantes et un certain nombre de roues folles qui permettent au robot de suivre sa trajectoire. Les

deux roues motrices ont un axe commun fixe par rapport au robot. Elles sont mues de deux moteurs DC non-couplés mécaniquement.

La localisation du robot mobile dans le repère R est définie par la position du milieu de l'axe des roues [11]; et l'orientation est perpendiculaire à celui-ci. L'état du robot est défini par :

- Sa position,
- Son orientation,
- et la vitesse de chacune de ses roues.

Une des paramétrisations possibles est :

$$X = (x_0 \quad y_0 \quad \phi \quad \theta_r \quad \theta_l) \quad 2.1$$

avec : - θ_r, θ_l les positions angulaires des roues par rapport à leur axe.

- x_0, y_0 les coordonnées du point O_0 (milieu de l'axe des roues motrices) par rapport au repère fixe R.

- ϕ est l'angle que fait la perpendiculaire à l'axe des roues avec l'axe OX du repère R (c'est l'orientation du robot).

Sous l'hypothèse de roulement sans glissement et en utilisant la paramétrisation (2.1), on aboutit aux contraintes cinématique suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \frac{r}{2} \cos \phi (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \\ \dot{y}_0 = \frac{r}{2} \sin \phi (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \\ \dot{\phi} = \frac{r}{2b} (\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l) \end{cases} \quad 2.2$$

où r : rayon des roues ;

b : demi-longueur de l'axe des roues.

Si l'on prend θ_r et θ_l comme variables de commande en posant $U = (\dot{\theta}_r \quad \dot{\theta}_l)^t$, le système peut être réécrit sous forme d'équation d'état comme suit :

$$\dot{X} = B(X).U$$

avec :

$$B(X) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2} \sin \phi \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.3$$

II.2 Robot manipulateur :

Un robot manipulateur est formé d'une chaîne articulée de corps rigides connectés entre eux par des articulations. Chaque articulation est mue indépendamment, et son mouvement produit le mouvement relatif du corps. Le nombre des articulations est le nombre de degré de liberté du robot manipulateur. La base de la chaîne articulée est liée fermement à un support fixe et son extrémité (l'organe terminal OT) est libre de se mouvoir dans son espace de travail afin d'accomplir les tâches désirées (voir Fig-2.3).

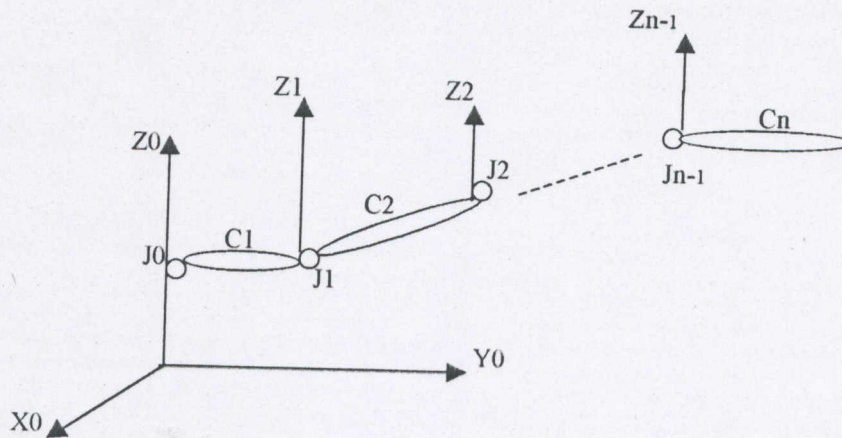


Fig-2.3 : Structure d'une chaîne articulée.

On considère la chaîne articulée de la Fig-2.3 composée de n corps rigides. Les articulations et les corps sont numérotés de telle sorte que l'articulation i connecte les corps i et $i+1$. Chaque paire articulation-corps constitue un degré de liberté. Pour décrire les mouvements du robot on assigne un repère de coordonnées cartésiennes ($o_i x_i y_i z_i$) à chaque articulation, où $i=1,2,\dots,n$; n est le nombre de degré de liberté.

On modélise le système mécanique à n degrés de liberté de la Fig-2.3 en utilisant les coordonnées articulaires q_1, \dots, q_n . La coordonnée articulaire q_i est le déplacement angulaire autour de l'axe z_{i-1} si l'articulation i est rotoïde ; ou un déplacement linéaire le long de l'axe z_{i-1} si l'articulation i est prismatique.

Les paramètres de Denavit –Hartenberg :

La convention de Denavit-Hartenberg a été universellement utilisée dans la littérature de la robotique. Dans cette convention, les positions et orientations relatives des corps rigides sont décrites par des transformations homogènes.

Ces transformations homogènes sont représentées par des matrices 4 par 4 qui incorporent les propriétés géométriques et les configurations des corps rigides [12]. Les vecteurs de positions sont représentés par des vecteurs colonne 4 par 1 ; $P=(X \ Y \ Z \ 1)^t$. Quatre opérations sont nécessaires pour relier le $i^{\text{ème}}$ référentiel au $(i-1)^{\text{ème}}$ référentiel (Fig-2.4) :

1. Rotation d'un angle θ_i autour de l'axe Z_{i-1} de sorte que les axes X_i et X_{i-1} soient parallèles.
2. Translation d'une distance r_i le long de la direction positive de l'axe Z_{i-1} pour que les axes X_i et X_{i-1} soient alignés.
3. Translation d'une distance d_i le long de la direction positive de l'axe X_{i-1} pour que les origines O_{i-1} et O_i coïncident.
4. Rotation d'un angle α_i autour de l'axe $X_{i-1}=X_i$ pour que les deux systèmes coïncident.

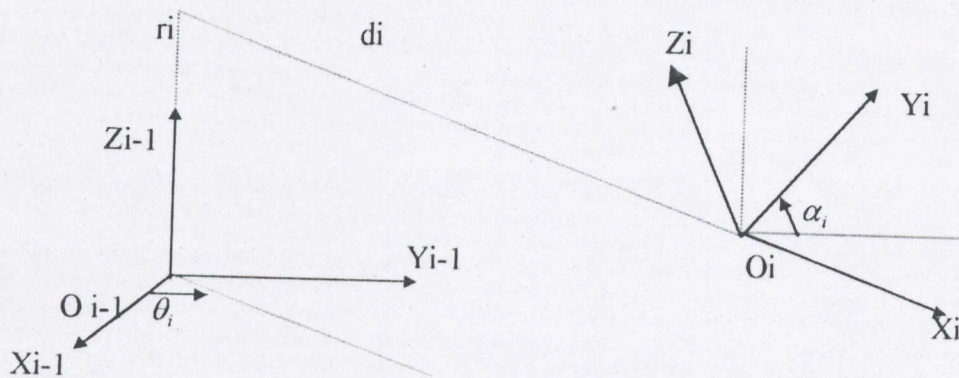


Fig-2.4 : Illustration géométrique de la transformation homogène.

Pour rappel, la position de l'origine d'un référentiel R_0 lié à un solide par rapport au référentiel R_n est donnée par une matrice colonne 3 par 1 :

$$P=(X \ Y \ Z)' = (\rho \cos \theta \ \rho \sin \theta \ z)'$$

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

avec :

$$\theta = \text{arctg} \frac{X}{Y}$$

et l'orientation d'un référentiel R_n par rapport à un référentiel R_0 se fait par le calcul de la matrice passage 3 par 3 définie par :

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\cos \alpha \sin \theta & \sin \alpha \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \alpha \cos \theta & -\sin \alpha \cos \theta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{les angles d'Euler})$$

Par conséquent, les quatre opérations précédentes peuvent être exprimées par la transformation homogène suivante [13] :

$$A_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & d_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \sin \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & d_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.4$$

Le $i^{\text{ème}}$ référentiel est caractérisé donc par les quatre paramètres cinématiques de Denavit-Hartenberg du corps i : θ_i , r_i , d_i et α_i . Si l'articulation i est rotationnelle, $q_i = \theta_i$, α_i , d_i et r_i sont des paramètres constants qui dépendent des propriétés géométriques et de la configuration du corps i . Si l'articulation i est translationnelle, $q_i = r_i$, θ_i , d_i et α_i sont des paramètres constants qui dépendent de la configuration du corps i . Pour les articulations translationnelles et rotationnelles r_i et θ_i sont la distance et l'angle entre le corps i et le corps $(i-1)$ respectivement, tandis que d_i et α_i sont la longueur et la torsion du corps i .

Le vecteur position $P_i = (X_i \ Y_i \ Z_i \ 1)^t$ exprimé dans le référentiel i est en relation avec le vecteur $P_{i-1} = (X_{i-1} \ Y_{i-1} \ Z_{i-1} \ 1)^t$ exprimé dans le référentiel $(i-1)$ par la transformation homogène :

$$P_{i-1} = A_{i-1,i} * P_i$$

Pour plus de généralisation, on peut établir une relation entre la position et l'orientation des référentiels des corps $(j-1)$ et $(i-1)$ lorsque $j > i$, par la matrice de transformation cinématique suivante :

$$A_{i-1,j-1} = A_{i-1,i} A_{i,i+1} \dots A_{j-2,j-1}$$

2.5

III. Modèle dynamique du manipulateur mobile :

III.1 Equations de mouvement du manipulateur seul :

Dans la littérature de la robotique, les lois physiques de la mécanique classique sont utilisées pour formuler les équations dynamiques de mouvement des robots manipulateurs à corps rigides. En négligeant les dissipations mécaniques, le modèle dynamique du robot est donné par l'expression suivante :

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \dot{q}_j C_{jm}(i) \dot{q}_m + g_i = f_i(i) \quad \text{pour } i=1,2,\dots,n$$

2.6

Dans l'équation (2.6), f_i est la force/couple appliqué(e) à l'articulation i . Notons que f_i est une force pour une articulation translationnelle et un couple pour une articulation rotationnelle ; f_i doit être dans la direction de q_i ; c-à-d dans la direction de Z_{i-1} .

La force/couple appliqué(e) f_i est balancé(e) par trois composantes : La première composante est l'inertie de couplage entre les articulations. La deuxième composante inclue les forces/couples centrifuges et de Coriolis ; la troisième représente les forces/couples gravitationnels(les).

Les coefficients d_{ii} dans (2.6) sont des coefficients d'accélération pour les corps constituant le manipulateur : d_{ii} est l'inertie effective de l'articulation i ; le coefficient d'inertie mutuelle d_{ij} ($i \neq j$) représente l'inertie de couplage entre les articulations i et j .

Les coefficients de couplage centrifuges et de Coriolis dans (2.6) $C_{jm}(i)$ caractérisent les forces/couples agissant sur le corps i causés par les vitesses de couplage de tous les autres $n-1$

corps : $C_{jj}(i)$ est le coefficient de force/couple centrifuge agissant sur le corps i dû à la vitesse du corps j ; $C_{jm}(i), (j \neq m)$, est le coefficient de la force/couple de Coriolis agissant sur le corps i dû aux vitesses des corps j et m .

Les coefficients gravitationnels g_i dans (2.6) modélisent les forces/couples agissant sur le corps i causés par le champ gravitationnel.

L'état du robot manipulateur modélisé dans (2.6) est défini à chaque instant par les n coordonnées articulaires $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ et les n vitesses articulaires $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$. La formulation matrice-vecteur des équations dynamiques du mouvement s'écrit :

$$D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = F(t) \quad (2.7)$$

où : $D(q) = [d_{ij}]$: matrice d'inertie n par n .

$C(q, \dot{q}) = [\dot{q}_j C_{jm}(i) \dot{q}_m]$: vecteur de forces/couples centrifuges et de Coriolis n par 1 .

$G(q) = [g_i]$: vecteur de forces/couples gravitationnels(les) n par 1 .

$F(t) = [f_i(t)]$: vecteur de forces/couples extérieurs(es) appliqués(es) à l'articulation n par 1 .

Formalisme de Lagrange-Euler :

Le Lagrangien L d'un mécanisme à n degrés de liberté est égale à la différence entre énergies cinétique et potentielle [15] :

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - V(q(t)) \quad (2.8)$$

Les équations différentielles de mouvement de Lagrange-Euler d'un manipulateur à n degré de liberté sont :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F_i(t) \quad \text{pour } i=1,2,\dots,n \quad (2.9)$$

Dans la convention de Denavit-Hartenberg, les coordonnées du centre de masse $(\bar{X}_k, \bar{Y}_k, \bar{Z}_k)$, les moments d'inertie $(I_{kxx}, I_{kyy}, I_{kzz})$ et les produits d'inertie $(I_{kxy}, I_{kyz}, I_{kxz})$ du corps k pour $k=1,2,\dots,n$, sont spécifiés dans le $k^{\text{ème}}$ repère de coordonnées. Ces paramètres dynamiques ainsi que la masse m_k du corps rigide sont inclus dans la pseudo-matrice d'inertie J_k [12]. La pseudo-matrice d'inertie $J_k = \int_{\text{corp}k} [r_k r_k^t] dm$ pour le corps k dépend uniquement de la distribution de la masse du corps et pas de sa position ni de sa vitesse. Le vecteur position $r_k = (X_k \ Y_k \ Z_k \ 1)^t$ d'un point du corps k est exprimé dans le $k^{\text{ème}}$ repère de coordonnées. Les éléments de J_k sont donc composés des masses, des moments d'inertie, des produits d'inertie et des moments d'ordre 1 $(m_k \bar{X}_k, m_k \bar{Y}_k, m_k \bar{Z}_k)$ du corps k [12] :

$$J_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-I_{kxx} + I_{kyy} + I_{kzz}) & I_{kxy} & I_{kxz} & m_k \overline{X}_k \\ I_{kxy} & \frac{1}{2}(I_{kxx} - I_{kyy} + I_{kzz}) & I_{kyz} & m_k \overline{Y}_k \\ I_{kxz} & I_{kyz} & \frac{1}{2}(I_{kxx} + I_{kyy} - I_{kzz}) & m_k \overline{Z}_k \\ m_k \overline{X}_k & m_k \overline{Y}_k & m_k \overline{Z}_k & m_k \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Cette matrice est symétrique autrement dit $J_k = J_k^t$ pour tout k étant donné que J_k est l'intégrale de la matrice positive semi-définie $\begin{bmatrix} r_k & r_k^t \end{bmatrix}$, J_k est aussi positive semi-définie pour tout k .

L'énergie cinétique K d'un robot manipulateur à n degré de liberté est la suivante :

$$K = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \text{tr}[U_{ki} J_k U_{kj}^t] \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.11)$$

L'énergie potentielle V d'un manipulateur à n degré de liberté est égale à :

$$V = - \sum_{k=1}^n m_k g^t A_{0,k} \overline{r}_k \quad (2.12)$$

où $\overline{r}_k = (\overline{X}_k \ \overline{Y}_k \ \overline{Z}_k \ 1)^t$ est le vecteur position du centre de masse du corps k dans le $k^{\text{ème}}$ repère de coordonnées et $g = (g_x \ g_y \ g_z \ 0)^t$ est le vecteur de gravité ($|g| = 9.81 \text{ m/s}^2$) exprimé dans le référentiel de base.

En substituant (2.11) et (2.12) dans (2.9) on trouve l'expression suivante :

$$F_i = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \text{trace}[U_{kj} J_k U_{ki}^t] \ddot{q}_i + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^k \text{trace}[U_{kjm} J_k U_{ki}^t] \dot{q}_j \dot{q}_m - \sum_{k=1}^n m_k g^t U_{ki} \overline{r}_k ; \text{ pour } i=1, \dots, n \quad (2.13)$$

où U_{ki} et U_{kjm} sont respectivement les dérivées partielles première et seconde de la matrice de transformation $A_{0,k}$ citée dans l'équation (2.5) par rapport aux coordonnées articulaires q_i [14] :

$$U_{ki} = \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} = A_1 A_2 \dots A_{i-1} \frac{\partial A_i}{\partial q_i} A_{i+1} \dots A_k \quad \text{pour } i \leq k \leq n \quad (2.14)$$

$$\text{et } U_{kjm} = \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_j \partial q_m} = A_1 A_2 \dots A_{j-1} \frac{\partial A_j}{\partial q_j} A_{j+1} \dots A_{m-1} \frac{\partial A_m}{\partial q_m} A_{m+1} \dots A_k \quad \text{pour } j \leq m \leq k \leq n \quad (2.15)$$

On identifie les coefficients dynamiques dans les équations de mouvement (2.6) et (2.13) [12], [14]; on trouve :

$$i) \text{ les coefficients d'inertie : } d_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{tr}[U_{kj} J_k U_{ki}^t] \quad (2.16)$$

$$ii) \text{ les coefficients de couplage (centrifuge et Coriolis) : } c_{jm}(i) = \sum_{k=\max(i,j,m)}^n \text{tr}[U_{kjm} J_k U_{ki}^t] \quad (2.17)$$

$$iii) \text{ les coefficients gravitationnels : } G_i = - \sum_{k=i}^n m_k g^t U_{ki} \overline{r}_k \quad (2.18)$$

Dans le formalisme de Lagrange-Euler, la dérivée partielle première de la matrice de transformation homogène A_i par rapport à la coordonnée articulaire q_i peut s'écrire sous forme de produit matriciel [14] :

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_i} = Q_i A_i \text{ pour } i=1,2,\dots,n \quad (2.19)$$

où la matrice éparsse Q_i est :

$$Q_i = Q_r = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

pour une articulation rotationnelle, et :

$$Q_i = Q_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

pour une articulation translationnelle.

La différentiation partielle des matrices A_i est donc remplacée par la multiplication par la matrice éparsse Q_i . Les matrices à dérivées partielles dans (2.14) et (2.15) deviennent alors :

$$U_{ki} = A_1 A_2 \dots A_{i-1} Q_i A_i A_{i+1} \dots A_k \text{ pour } i \leq k \leq n \quad (2.22)$$

$$\text{et } U_{kjm} = A_1 A_2 \dots A_{j-1} Q_j A_j A_{j+1} \dots A_{m-1} Q_m A_m A_{m+1} \dots A_k \text{ pour } j \leq m \leq k \leq n \quad (2.23)$$

III.2 Equations de mouvements de la plate-forme mobile seule :

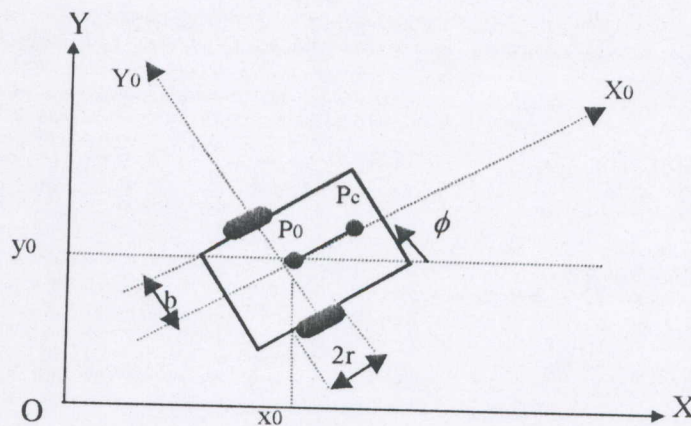


Fig-2.5 : Schéma de la plate-forme mobile à roues.

On considère la plate-forme mobile schématisée ci-dessus. La notation suivante est utilisée :

P_0 : l'intersection de l'axe de symétrie de la plate-forme avec l'axe des roues.

P_c : le centre de masse de la plate-forme.

d : la distance de P_0 à P_c .

b : la demi-longueur de l'axe des roues.

r : le rayon de chaque roue.

m_c : la masse de la plate-forme mobile (sans les roues motrices et les rotors des moteurs DC).

m_w : la masse de chaque roue motrice plus le rotor de son moteur.

I_c : le moment d'inertie de la plate-forme (sans les roues motrices et les rotors des moteurs DC) par rapport à l'axe vertical traversant le point P_0 .

I_w : le moment d'inertie de chaque roue avec le rotor de son moteur par rapport à l'axe des roues.

I_m : le moment d'inertie de chaque roue avec le rotor de son moteur par rapport au diamètre de la roue.

La plate-forme mobile est sujette à trois contraintes. La première est que le robot mobile ne peut pas se mouvoir dans la direction latérale :

$$\dot{y}_0 \cos \phi - \dot{x}_0 \sin \phi = 0 \quad (2.24)$$

où (x_0, y_0) sont les coordonnées du point P_0 dans le repère fixe $R(O, X, Y, Z)$; ϕ est l'angle que fait l'axe de symétrie du robot mobile avec l'axe OX .

Les deux autres contraintes traduisent la condition de roulement sans glissement pour chaque roue motrice :

$$\dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi + b \dot{\phi} = r \dot{\theta}_r \quad (2.25)$$

$$\dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi - b \dot{\phi} = r \dot{\theta}_l \quad (2.26)$$

où θ_r et θ_l sont les positions angulaires des roues droite et gauche respectivement.

Si on définit le vecteur de coordonnées de Lagrange comme suit :

$$q_v = (x_0 \quad y_0 \quad \phi \quad \theta_r \quad \theta_l)^t ;$$

les trois équations peuvent être écrites sous une forme matricielle :

$$A(q_v) \cdot \dot{q}_v = 0 \quad (2.27)$$

où :

$$A(q_v) = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \phi & -\sin \phi & -b & r & 0 \\ -\cos \phi & -\sin \phi & b & 0 & r \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Si on soustrait l'équation (2.26) à l'équation (2.25) on obtient l'équation de la contrainte holonomique :

$$2b\dot{\phi} = r(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l) \quad (2.29)$$

qui donne après intégration :

$$\phi = c(\theta_r - \theta_l) \quad (2.30)$$

où $c = r/2b$.

On déduit que ϕ n'est qu'une notation simplifiée de $c(\theta_r - \theta_l)$ et pas une variable indépendante. On définit donc un nouveau vecteur des coordonnées de Lagrange q_v comme :

$$q_v = (x_0 \quad y_0 \quad \theta_r \quad \theta_l)^t \quad (2.31)$$

La matrice $A(q_v)$ sera explicitée comme suit :

$$A(q_v) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ -\cos \phi & -\sin \phi & cb & cb \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Equations dynamiques :

L'énergie cinétique totale de la plate-forme et des deux roues est égale à [16]:

$$k = \frac{1}{2}m(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + m_c c d (\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l) (\dot{y}_0 \cos \phi - \dot{x}_0 \sin \phi) + \frac{1}{2}I_w (\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2) + \frac{1}{2}I_c^2 (\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l)^2 \quad (2.33)$$

$$\text{avec : } \begin{aligned} m &= m_c + 2m_w \\ I &= I_c + 2m_w \cdot b^2 + 2I_m \end{aligned}$$

Les équations de Lagrange du mouvement du robot mobile sont gouvernées par les équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i - a_{1i} \lambda_1 - a_{2i} \lambda_2 \quad i=1, \dots, 4 \quad (2.34)$$

où q_i représente la coordonnée de Lagrange définie dans (2.31), Q_i est la force généralisée de Lagrange, a_{ij} sont les éléments de la matrice des contraintes cinématique définis dans (2.32) et λ_1, λ_2 sont les multiplicateurs de Lagrange.

En substituant l'équation (2.33) dans (2.34), on obtient :

$$m\ddot{x}_0 - m_c d (\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) = \lambda_1 \sin \phi + \lambda_2 \cos \phi \quad (2.35)$$

$$m\ddot{y}_0 + m_c d (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) = -\lambda_1 \cos \phi + \lambda_2 \sin \phi \quad (2.36)$$

$$m_c c d (\ddot{y}_0 \cos \phi - \ddot{x}_0 \sin \phi) + (I_c^2 + I_w) \ddot{\theta}_r - I_c^2 \ddot{\theta}_l = \tau_1 - cb \lambda_2 \quad (2.37)$$

$$-m_c c d (\ddot{y}_0 \cos \phi - \ddot{x}_0 \sin \phi) - I_c^2 \ddot{\theta}_r + (I_c^2 + I_w) \ddot{\theta}_l = \tau_2 - cb \lambda_2 \quad (2.38)$$

où τ_1, τ_2 sont les couples appliqués aux deux roues motrices.

Ces équations peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante :

$$M(q_v) \ddot{q}_v + C(q_v, \dot{q}_v) = E(q_v) \tau - A'(q_v) \lambda \quad (2.39)$$

où : $A(q_v)$ est définie dans (2.32),

$$M(q_v) = \begin{bmatrix} m & 0 & -m_c c d \sin \phi & m_c c d \sin \phi \\ 0 & m & m_c c d \cos \phi & -m_c c d \cos \phi \\ -m_c c d \sin \phi & m_c c d \cos \phi & I_c^2 + I_w & -I_c^2 \\ m_c c d \sin \phi & -m_c c d \cos \phi & I_c^2 & I_c^2 + I_w \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$C(q_v, \dot{q}_v) = \begin{bmatrix} -m_c d \dot{\phi}^2 \cos \phi \\ -m_c d \dot{\phi}^2 \sin \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$E(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}; \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

III.3 Equation de mouvement du manipulateur mobile :

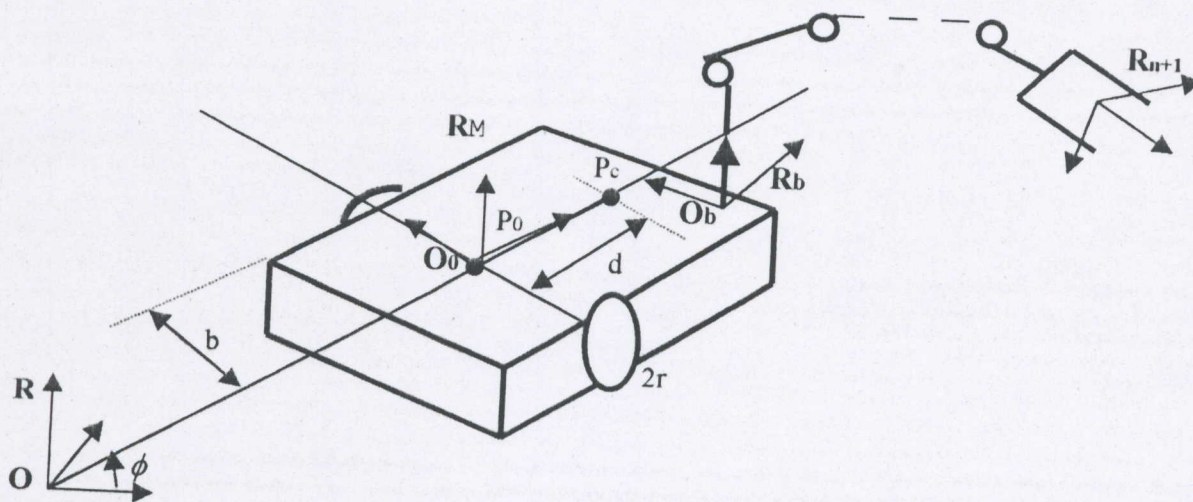


Fig-2.6 : Schéma du manipulateur mobile et des repères considérés.

L'équation de mouvement du manipulateur monté sur la plate-forme mobile est donnée par [16] :

$$M_r(q_r) \ddot{q}_r + C_{r1}(q_r, \dot{q}_r) + C_{r2}(q_r, \dot{q}_r, \dot{q}_v) = \tau_r - R_r(q_r, q_v) \ddot{q}_v \quad (2.42)$$

où q_r est le vecteur des n coordonnées de Lagrange du manipulateur, M_r est la matrice d'inertie du manipulateur dont les éléments sont définis par l'équation (2.16), C_{r1} représente les termes centrifuges et de Coriolis dus aux mouvements des corps constituant le manipulateur et définis par l'équation (2.17), C_{r2} sont les termes des forces centrifuges et de Coriolis causés par le mouvement angulaire de la plate-forme, τ_r est le couple/force appliqué(e) au manipulateur et R_r est la matrice d'inertie qui représente l'effet de la dynamique du véhicule sur le manipulateur.

Soit q_v le vecteur des m coordonnées indépendantes qui déterminent la configuration de la plate-

forme:

$$q_v = (q_{v1}, q_{v2}, \dots, q_{vm})^t$$

La matrice $T_v(q_v)$ est la matrice de transformation homogène du référentiel de la base du manipulateur R_b au référentiel fixe $R(O, X, Y, Z)$. La matrice de transformation T_i du référentiel i du manipulateur, monté sur la plate-forme, au référentiel fixe $R(O, X, Y, Z)$ est donnée par :

$$T_i = T_v A_1^0 A_2^1 \dots A_i^{i-1} \quad i=1, \dots, n \quad (2.43)$$

Les éléments de C_{r2} et R_r sont donnés par les formules suivantes [16] :

$$C_{r2}^{(i)} = 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{h=\max(i,k)}^n \text{trace} \left[\frac{\partial T_h}{\partial q_i} J_h \frac{\partial T_h^t}{\partial q_{v,j} \partial q_k} \right] \dot{q}_{v,j} \dot{q}_k + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{h=i}^n \text{trace} \left[\frac{\partial T_h}{\partial q_i} J_h \frac{\partial T_h^t}{\partial q_{v,j} \partial q_{v,k}} \right] \dot{q}_{v,j} \dot{q}_{v,k} \quad (2.44)$$

$$R_r^{(ij)} = \sum_{k=1}^n \text{trace} \left[\frac{\partial T_k}{\partial q_i} J_k \frac{\partial T_k^t}{\partial q_{v,j}} \right] \quad (2.45)$$

Le premier terme de l'équation (2.44) caractérise l'effet Coriolis sur le segment i du manipulateur dû au couplage des vitesses du segment k du manipulateur et de la variable $q_{v,j}$ de la plate-forme où $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq k \leq n$.

Le second terme représente la totalité des forces centrifuges exercées sur le segment i par la variable $\dot{q}_{v,j}$ de la plate-forme si $j = k$; et les forces de Coriolis exercées sur le segment i dues aux vitesses de couplage des deux coordonnées de la plate-forme $q_{v,j}$ et $q_{v,k}$ quand $j \neq k$.

En regroupant les termes de vitesse en une seule matrice C_r , l'équation (2.42) se simplifie à :

$$M_r(q_r) \dot{q}_r + C_r(q_r, \dot{q}_r, \dot{q}_v) = \tau_r - R_r(q_r, q_v) \dot{q}_v \quad (2.46)$$

L'équation de mouvement de la plate-forme peut prendre la forme suivante [16] :

$$M_{v1}(q_v) \ddot{q}_v + C_{v1}(q_v, \dot{q}_v) + C_{v2}(q_r, q_v, \dot{q}_r, \dot{q}_v) = E_v \tau_v - A^t \lambda - M_{v2}(q_r, q_v) \ddot{q}_v - R_v(q_r, q_v) \ddot{q}_r \quad (2.47)$$

où M_{v1} et C_{v1} sont la matrice d'inertie et les termes dépendant de la vitesse de la plate-forme qui sont définis dans l'équation (2.20) et (2.21) respectivement, M_{v2} et C_{v2} représentent les termes d'inertie et les termes centrifuges et Coriolis dus à la présence du manipulateur, τ_v est le couple d'entrée du véhicule, E_v est une matrice constante, λ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange correspondant aux contraintes cinématique et R_v représente la matrice d'inertie qui reflète l'effet dynamique du mouvement du bras sur le véhicule.

Les termes de l'équation (2.32) qui n'apparaissent pas dans l'équation de la plate-forme seule sont définis par les formules suivantes :

$$M_{v2}^{(ij)} = \sum_{k=1}^n \text{trace} \left[\frac{\partial T_k}{\partial q_{v,i}} J_k \frac{\partial T_k}{\partial q_{v,j}} \right] \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (2.48)$$

$$C_{v2}^{(i)} = 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{h=j}^n \text{trace} \left[\frac{\partial T_h}{\partial q_{v,i}} J_h \frac{\partial T_h'}{\partial q_j \partial q_{v,k}} \right] \dot{q}_j \dot{q}_{v,k} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{h=\max(j,k)}^n \text{trace} \left[\frac{\partial T_h}{\partial q_{v,i}} J_h \frac{\partial T_h'}{\partial q_j \partial q_k} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (2.49)$$

$$R_v^{(ij)} = \sum_{k=j}^n \text{trace} \left[\frac{\partial T_k}{\partial q_{v,i}} J_k \frac{\partial T_k'}{\partial q_j} \right]; \quad 1 \leq i \leq m; \quad 1 \leq j \leq n \quad (2.50)$$

Le premier terme de l'équation (2.49) caractérise l'effet Coriolis sur la coordonnée de la plate-forme $q_{v,i}$ du au couplage des vitesses du segment j du manipulateur et la coordonnée de la plate-forme $q_{v,k}$ avec $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq k \leq m$. Le second terme représente la somme des forces centrifuges exercées sur la coordonnée de la plate-forme $q_{v,i}$ par le segment j du manipulateur si $j=k$; et les forces de Coriolis exercées sur $q_{v,k}$ du au couplage des vitesses de deux différents segments du manipulateur q_j et q_k pour $j \neq k$ [16].

En regroupant les termes d'inertie et les termes de vitesse de l'équation (2.47) dans M_v et C_v respectivement, cette équation se simplifie à la forme suivante :

$$M_v(q_r, q_v) \ddot{q}_v + C_v(q_r, q_v, \dot{q}_r, \dot{q}_v) = E_v \tau_v - A' \lambda - R_v(q_r, q_v) \ddot{q}_r \quad (2.51)$$

Le modèle dynamique du manipulateur mobile est ainsi établi. On remarque qu'en plus des termes de couplage existant entre les différentes variables des liaisons du bras manipulateur et entre les différentes variables d'état de la plate-forme mobile, l'association du bras avec la plate-forme donne naissance à de nouveaux termes de couplage dynamique qui n'existaient pas dans le modèle dynamique de chacun des deux sous-systèmes pris séparément (les termes C_{r2} , R_r , C_{v2} , M_{v2} et R_v). L'étude de l'évolution de ces termes est nécessaire pour pouvoir évaluer leurs effets sur le comportement du système global (manipulateur mobile). Les résultats de cette étude imposent le choix

des lois de commandes requises pour permettre au système d'atteindre les consignes désirées déduites de la résolution du problème de planification de tâches. Ce problème est traité au paragraphe suivant.

IV. Génération de trajectoires :

La réalisation d'une tâche pour un manipulateur mobile s'effectue en deux étapes :

- **La génération de trajectoire (planification)** : Il s'agit de déterminer les configurations que le système devra successivement atteindre pour effectuer la tâche, sans s'intéresser à "comment le faire dans le temps". Les trajectoires obtenues sont purement géométriques et représentent la stratégie de déplacement du robot dans l'espace.
- **La génération de mouvements** : Une fois les configurations successives que le système devra atteindre pour effectuer la tâche soient parfaitement définies, il est possible de rechercher des lois de commande pour le système (vitesses, accélérations) capables de contrôler son évolution tout en respectant la planification établie précédemment. Il s'agit donc ici d'une stratégie de mouvement le long de la trajectoire géométrique.

L'organigramme suivant illustre l'enchaînement de ces étapes.

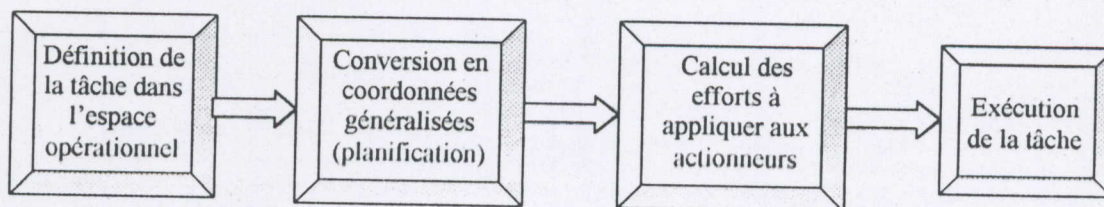


Fig-2.7 : Organigramme représentant les étapes de réalisation d'une tâche par un manipulateur mobile.

La planification ou la génération de trajectoires fait appel à une certaine terminologie et à un certain nombre de concepts très précis. Nous procédons donc, dans un premier temps, à la définition des notions utiles :

IV.1 Notions et définitions :

IV.1.1 Notions d'espaces :

- **Espace des configurations** :

Définition : La configuration d'un système dans un repère R est connue lorsque la position de tous les points du système est définie d'une manière unique dans R . Des coordonnées en nombre

minimum qui permettent de définir cette configuration sont appelées *coordonnées généralisées* du système [8], elles sont notées $q = (q_1, q_2, \dots, q_v)^t$.

Définition : On appelle *espace des configurations* du système l'espace des coordonnées généralisées du système [8]. Il est noté N , et est de dimension v . Dans le cas d'un manipulateur mobile, $v=3+n$; 3 est le nombre de coordonnées de la plate-forme mobile, n est celui du bras manipulateur : $q = (q_1, q_2, \dots, q_v)^t = (x, y, \phi, q_{b1}, q_{b2}, \dots, q_{bn})^t$.

Définition : On appelle *trajectoire généralisée* une courbe paramétrée, définie dans N , reliant deux configurations (initiale et finale q^0, q^f ou proches $q, q + \delta q$). Usuellement, on normalise le paramètre et on le note $s, s \in [0, 1]$.

- **Espace opérationnel :**

Définition : Les *coordonnées opérationnelles* sont des coordonnées, en nombre minimum, qui suffisent à caractériser la situation (position + orientation) de l'organe terminal dans R . Elles sont notées $x = (x_1, x_2, \dots, x_\mu)^t$.

Définition : On appelle *espace opérationnel*, l'espace des coordonnées opérationnelles. Il est noté M , de dimension μ .

Définition : On appelle *trajectoire opérationnelle* une courbe paramétrée, définie dans M , reliant deux situations (initiale et finale x^0, x^f ou proches $x, x + \delta x$). De même, on normalise le paramètre et on le note $s, s \in [0, 1]$.

IV.1.2 Notions des modèles de transformation d'espaces :

- **Modèle Géométrique :**

Définition : [8] Le **Modèle Géométrique Direct (MGD)** du système est le modèle qui permet d'exprimer la situation de l'organe terminal (OT) en fonction de la configuration du système : Le MGD du système est la fonction f :

$$f : N \longrightarrow M \text{ telle que } x = f(q).$$

Définition : Un **Modèle Géométrique Inverse (MGI)** du système est un modèle qui permet d'exprimer la configuration du système en fonction de la situation de l'OT. Un MGI du système est une fonction f^{-1} .

$$f^{-1} : M \longrightarrow N \text{ telle que } q = f^{-1}(x).$$

- **Modèle Différentiel :**

Définition : Le **Modèle Différentiel Direct (MDD)** du système est l'application linéaire qui permet d'exprimer les différentielles des coordonnées opérationnelles de l'OT pour une configuration

donnée, en fonction des différentielles des coordonnées généralisées du système. Il fait intervenir une matrice $J(q)$ dénommée matrice Jacobiennne du système telle que :

$$dx = J(q).dq$$

Définition : Un **Modèle Différentiel Inverse (MDI)** du système est une application linéaire J^{\oplus} , inverse généralisée de $J(q)$.

- **Degré de mobilité :**

Le degré de mobilité d'un système mécanique est par définition égal à la différence entre le nombre de coordonnées généralisées et le nombre de contraintes non-holonomiques indépendantes, égal à 1, il est donc égal à $\nu-1 = n+2$ [17].

Il y a une seule contrainte non-holonome due aux conditions de roulement sans glissement des roues motrices sur le sol :

$$-\sin \phi . dx + \cos \phi . dy = 0 \quad (2.52)$$

ou bien :

$$-\sin q_3 . dq_1 + \cos q_3 . dq_2 = 0.$$

- **Modèle Différentiel Réduit :**

Définition : Les différentielles des coordonnées généralisées sont dépendantes ; elles sont liées par la contrainte non holonome précédente (2.52). On peut faire intervenir une différentielle dp dont le nombre de composantes qui sont indépendantes correspond au degré de mobilité du système. Il suffit de choisir $dp = (dp_1, dp_2, \dots, dp_{\nu-1})^t = (d\sigma, dq_3, \dots, dq_{\nu})^t$.

avec $P = (p_1, p_2, \dots, p_{\nu-1})^t = (\sigma, q_3, \dots, q_{\nu})^t$ appartenant à la variété \bar{N} de dimension $\nu-1$ et donc $R^{\nu-1} = T_p . N$; σ représente l'abscisse curviligne du point O_0 sur sa trajectoire dans le plan (O, \bar{X}, \bar{Y}) .

Le **Modèle Différentiel Direct Réduit (MDDR)** est l'application linéaire :

$$\bar{J}(q) : dx = \bar{J}(q).dp$$

$$\bar{J}(q) : R^{\nu-1} \longrightarrow R^{\mu}$$

$$\begin{array}{ccc} dp & & dx \end{array}$$

Le rang de la matrice $\bar{J}(q)$ est μ par $\nu-1$.

Définition : Le **Modèle Différentiel Inverse Réduit (MDIR)** est le modèle inverse du MDDR. Soient $\bar{J}^{\oplus}(q)$ matrice $\nu-1$ par μ ; une inverse généralisée de $\bar{J}(q)$; I la matrice unité d'ordre $\nu-1$ et Z une matrice colonne $\nu-1$ par 1 ; le MDIR du bras s'écrit :

$$dp = \bar{J}^{\oplus}(q).dx + [\bar{J}^{\oplus}(q). \bar{J}(q) - I] \quad (2.53)$$

IV.1.3 Notions et types de tâches généralisées et opérationnelles :

Une tâche généralisée consiste à piloter les ν coordonnées généralisées. Une tâche opérationnelle consiste à piloter les μ coordonnées opérationnelles. L'évolution de l'organe terminal (OT) en fonction d'un paramètre s variant de 0 à 1 est considérée.

Tâche Généralisée Point A Point : Les configurations initiale q^0 et finale q^f étant imposées, il faut trouver une trajectoire $q(s)$ joignant q^0 à q^f avec $q(0) = q^0$ et $q(1) = q^f$.

Tâche Opérationnelle Point A Point : Les situations initiale x^0 et finale x^f étant imposées, il faut trouver une trajectoire $x(s)$ joignant x^0 à x^f avec $x(0) = x^0$ et $x(1) = x^f$.

Tâche à Trajectoire Opérationnelle Imposée : Les situations x^0 , x^f et la trajectoire opérationnelle $x(s)$ étant imposées, il faut trouver les trajectoires généralisées correspondantes $q(s)$. Si l'évolution temporelle de l'OT le long d'une trajectoire (opérationnelle) est considérée, un quatrième type de tâche est alors défini :

Tâche à Mouvement opérationnel Imposé : Les situations x^0 , x^f et $x(t)$ étant imposées ($t \in [0, t_f]$ $x(0) = x^0$ et $x(t_f) = x^f$), il faut trouver les mouvements généralisés correspondants $q(t)$.

IV.2 La Tâche Généralisée Point A Point : (TG-PAP)

La théorie de commandabilité des systèmes linéaires nous indique que le système mécanique différentiel est commandable.

Par contre, le comportement du système mécanique non-holonyme est différent lorsque l'on désire une évolution de l'OT à trajectoire généralisée imposée entre deux configurations de l'espace généralisé. Toutes les trajectoires ne sont pas admissibles en raison de la contrainte non-holonyme [8].

Pour rechercher les trajectoires admissibles du système mécanique, on va rechercher en premier lieu la (classe de) courbe(s) non pas dans la variété N de dimension ν (espace généralisé), mais dans la variété \bar{N} de dimension $\nu-1$ puis en second lieu, on va exprimer cette solution dans la variété N .

Concernant le bras, on sait que l'on peut choisir indépendamment les q_{bj} comme des fonctions de s . Le plus simple est de considérer que :

$$q_{bj} = q_{bj}(s) = q_{bj}^0 + (q_{bj}^f - q_{bj}^0) s$$

Concernant la plate-forme, les trajectoires sont libres a priori à condition d'être admissibles. Une méthode de génération d'une trajectoire lisse (pour éviter d'avoir des points de passage à vitesse nulle [8]), joignant q^0 à q^f est proposée :

Plutôt que de raisonner dans la variété N_p dont le point générique est (x, y, ϕ) , le raisonnement se fera dans la variété \bar{N}_p dont le point générique est (σ, ϕ) , on a :

$dx = \cos \phi d\sigma$ et $dy = \sin \phi d\sigma$, le plus naturel est d'imposer une loi $\sigma = \sigma(\phi)$ telle que $\sigma(\phi^0) = 0$ et que :

$$x(\phi) = \int \cos U \cdot \sigma'(U) dU + x^0$$

$$\text{et } y(\phi) = \int \sin U \cdot \sigma'(U) dU + y^0.$$

Il suffit alors d'imposer la loi $\sigma'(\phi)$, $\sigma(\phi)$ s'en déduit par intégration étant donné que :

$$\sigma(\phi^0) = 0 \text{ et } \sigma(\phi) = \int \sigma'(U) dU.$$

Etant donné que l'on désire aller de ϕ^0 à ϕ^f , il suffit d'imposer une évolution linéaire à cette coordonnée en fonction du paramètre s : $\phi = \phi(s) = \phi^0 + (\phi^f - \phi^0) s$.

Cette procédure est applicable lorsque $\phi^0 \neq \phi^f$. Si $\phi^f = \phi^0$, il suffit d'imposer une coordonnée intermédiaire $\phi^i \neq \phi^0 = \phi^f$ et d'appliquer la procédure deux fois.

On se met dans le cas où $\phi^0 \neq \phi^f$; l'évolution désirée est :

$$X(s) = x(\phi(s)); y(s) = y(\phi(s)); \phi(s) = \phi^0 + (\phi^f - \phi^0)s.$$

La loi $\sigma'(\phi)$ doit être choisie de telle manière que l'évaluation analytique des intégrales précédentes soit possible; et que le nombre de paramètres qui intervient soit supérieur ou égal à 2 pour pouvoir atteindre x^f et y^f fixés.

Le choix le plus simple est : $\sigma'(\phi) = \alpha + \beta \phi$ où α et β sont deux paramètres.

Les intégrales précédentes s'écrivent alors :

$$x(\phi) = \int \cos U \cdot (\alpha + \beta U) dU + x^0;$$

$$y(\phi) = \int \sin U \cdot (\alpha + \beta U) dU + y^0;$$

Le calcul conduit à :

$$x(\phi) = \alpha(\sin \phi - \sin \phi^0) + \beta(\phi \sin \phi - \phi^0 \sin \phi^0 + \cos \phi - \cos \phi^0) + x^0;$$

$$y(\phi) = -\alpha(\cos \phi - \cos \phi^0) - \beta(\phi \cos \phi - \phi^0 \cos \phi^0 - \sin \phi + \sin \phi^0) + y^0.$$

Les paramètres α et β s'obtiennent sans difficulté à partir de (x^0, y^0, ϕ^0) et (x^f, y^f, ϕ^f) ; et doivent être tels que :

$$\alpha = \frac{(\phi^f \cos \phi^f - \phi^0 \cos \phi^0 - \sin \phi^f + \sin \phi^0)(x^f - x^0) + (\phi^f \sin \phi^f - \phi^0 \sin \phi^0 + \cos \phi^f - \cos \phi^0)(y^f - y^0)}{D}$$

$$\beta = \frac{(\cos \phi^f - \cos \phi^0)(x^f - x^0) + (\sin \phi^f - \sin \phi^0)(y^f - y^0)}{D};$$

$$D = (\phi^f - \phi^0) \sin(\phi^f - \phi^0) - 2(1 - \cos(\phi^f - \phi^0)).$$

IV.3 La Tâche Opérationnelle Point A Point : (TO-PAP)

La résolution du problème posé par la TO-PAP se ramène à celui posé par la TGPAP qui consiste à déterminer $q = q(s)$. En effet, grâce au MGI il suffit de déterminer une configuration initiale q^0 correspondant à la situation initiale x^0 , et une configuration finale q^f correspondant à la situation finale désirée x^f . La trajectoire opérationnelle obtenue est alors $x = x(s) = f(q(s))$.

Un planificateur de tâches opérationnelles point à point se basant sur le raisonnement présenté à la section (IV.2) a été développé sous le logiciel mathématique *MATLAB* pour un système mécanique composé d'une plate-forme mobile non-holonome de forme rectangulaire à deux roues motrices sur laquelle est installé un bras manipulateur à deux degrés de liberté. Les modèles géométrique et différentiel de ce système sont explicités en annexe (A). Les résultats suivants ont été obtenus lors de l'application de ces deux exemples :

Exemple 1 :

On veut que l'organe terminal parte du point x^0 ayant les coordonnées $(-0,90 \ 0,60 \ 0)$ au point $x^f = (5,10 \ 6,90 \ \pi)$.

Le modèle géométrique inverse MGI donne les configurations correspondantes $q^0 = (0,00 \ 0,00 \ 0 \ 0 \ 0)$ et $q^f = (5,50 \ 6,50 \ \pi/4 \ \pi/4 \ \pi/2)$.

Exemple 2 :

On veut que l'organe terminal parte du point x^0 ayant les coordonnées $(-0,63 \ 0,48 \ 2,62)$ au point $x^f = (10,00 \ 10,00 \ 3,93)$.

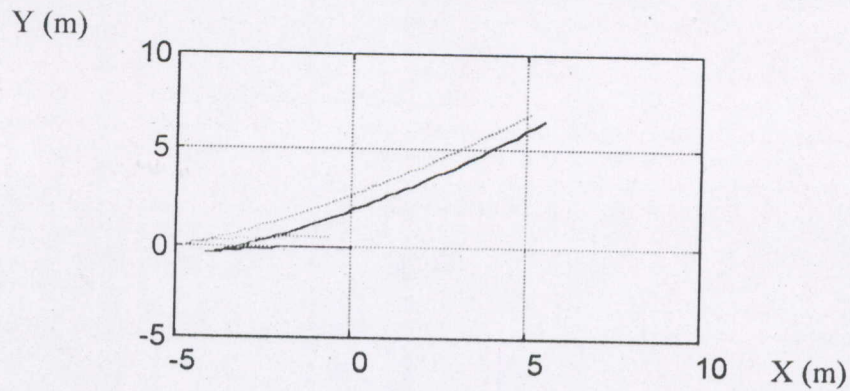
Le modèle géométrique inverse MGI donne les configurations correspondantes $q^0 = (0,00 \ 0,00 \ 0 \ 3\pi/4 \ \pi/12)$ et $q^f = (10,25 \ 9,55 \ \pi/4 \ \pi/2 \ \pi/2)$.

La figure (2.8) ci-après montre que ce planificateur arrive bien à joindre la situation (position et orientation de l'organe terminal) initiale et la configuration initiale qui lui correspond à la situation finale désirée. Il effectue cette tâche (TO-PAP) en produisant presque toujours des points de rebroussement.

IV.4 Tâche à Trajectoire Opérationnelle Imposée, Tâche à Mouvement Opérationnel Imposé :

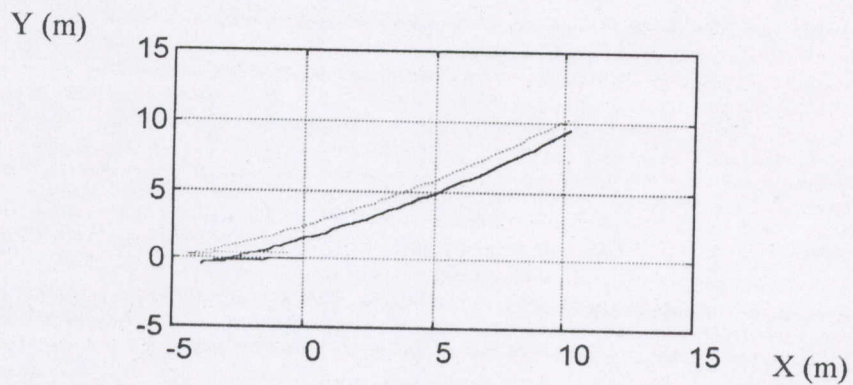
Le problème consiste à calculer les coordonnées et vitesses généralisées d'un manipulateur mobile quand on impose à son OT un mouvement ou une trajectoire (opérationnel(le)). Les problèmes de TTOI et TMOI peuvent être résolus en utilisant les mêmes méthodes à condition de remplacer s par t et trajectoire par mouvement.

Le problème correspondant à la TTOI peut être résolu de la façon suivante :



Exemple 1 : $x^0 = (-0,90 \ 0,60 \ 0)$

$x^f = (5,10 \ 6,90 \ \pi)$



Exemple 2 : $x^0 = (-0,63 \ 0,48 \ 2,62)$

$x^f = (10,00 \ 10,00 \ 3,93)$

Légende :

Centre de masse de la plate-forme: —————

Centre de masse de l'organe terminal: - - - - -

Fig-2.8 : La tâche opérationnelle point à point.

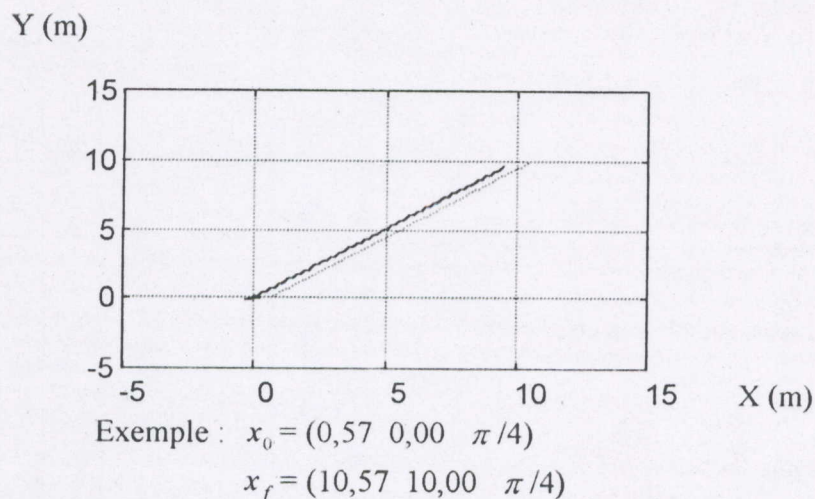
- * On choisit une configuration q^0 par le calcul du MGI telle que $x^0 = f(q^0)$.
- * On calcul à l'aide du MDIR les valeurs $dp = dp(s)$ correspondant à la valeur imposée $dx = dx(s)$. Si le système représenté par le MDDR est compatible, il existe au moins une solution.
- * Si l'on suppose le système linéaire précédent compatible, et s'il y a plusieurs solutions dp au calcul précédent, on choisit une de ces solutions.
- * On déduit la valeur de $dq = dq(s)$ du calcul de $p = p(s)$ et $q = q(s)$ à l'aide des deux relations :

$$dq_1 = \cos q_3 \cdot d\sigma \quad \text{et} \quad dq_2 = \sin q_3 \cdot d\sigma .$$

* Les valeurs de $dq = dq(s)$ et de $q = q(s)$ permettent de calculer la valeur de la configuration suivante.

Exemple :

Un planificateur de tâches à mouvement opérationnel imposé se basant sur l'algorithme cité ci-dessus a été développé sous le logiciel mathématique *MATLAB* pour le système mécanique précédent. Partant d'une configuration initiale $q^0 = (0 \ 0 \ 0 \ -\pi/4 \ \pi/2)$, donc situation initiale $x_0 = (0,57 \ 0,00 \ \pi/4)$, l'organe terminal doit arriver au point $x_f = (10,57 \ 10,00 \ \pi/4)$.



Légende :

Centre de masse de la plate-forme: —————

Centre de masse de l'organe terminal:

Fig-2.9 : La tâche à trajectoire opérationnelle imposée.

V. Conclusion :

Dans ce chapitre, on a commencé par illustrer l'aspect cinématique des robots mobiles et des robots manipulateurs ; on a ensuite élaboré les modèles dynamiques de ces deux systèmes en se basant sur les lois de la mécanique analytique ; le modèle dynamique du manipulateur mobile formé de leur association est ensuite établi.

Ce modèle a l'avantage d'explicitier tous les efforts de couplage dynamique entre les deux sous-systèmes ; ceci permet d'analyser leurs évolutions et d'évaluer l'ordre de grandeur de chaque terme par rapport au couple nominal du système.

On a entamé également le problème de planification de trajectoires. Après avoir donné les définitions et les notions utiles à la compréhension de ce problème, on a réalisé un planificateur de tâches opérationnelles point à point où seule la situation finale de l'OT est imposée ; et un planificateur de tâches à trajectoire opérationnelle imposée où le mouvement de l'OT le long de la trajectoire est imposé. Grâce à ces planificateurs de trajectoires, on peut, partant d'une trajectoire donnée exprimée dans l'espace opérationnel, trouver les coordonnées généralisées correspondantes qui permettent au manipulateur mobile d'atteindre une suite de configurations successives pour lesquelles l'OT arrive à suivre la trajectoire opérationnelle imposée.

Ces planificateurs sont basés sur les modèles géométrique et différentiel donnés en annexe(A) et sont valables pour tout manipulateur mobile constitué d'une plate-forme non-holonome à deux roues motrices et d'un bras manipulateur à deux liaisons rotoides.

Dans cette annexe, les expressions analytiques détaillées de tous les termes du modèle dynamique de ce manipulateur mobile sont également présentées. Ce modèle dynamique est exploité au chapitre suivant pour mener une étude analytique des effets d'interaction dynamique entre le bras manipulateur et la plate-forme mobile.



Troisième Chapitre :

Analyse de l'Interaction Dynamique

I. Introduction :

Le robot manipulateur mobile est formé de l'association de deux sous-systèmes : un robot mobile et un robot manipulateur. Cette association donne naissance à des forces d'interaction dynamique (couplage dynamique) qui n'apparaissent pas dans les modèles dynamiques de chacun des sous-systèmes pris séparément.

Les lois de commande élaborées pour contrôler les deux sous-systèmes avant leur association ne suffisent plus pour maintenir les mêmes performances pour le système manipulateur mobile. La prise en compte des forces d'interaction qui apparaissent après l'association des robots mobile et manipulateur dans les lois de commande du manipulateur mobile s'avère donc nécessaire.

En vue d'évaluer son importance, une étude abordant l'analyse de cette interaction d'une façon progressive est menée en considérant des systèmes mécaniques (robots manipulateurs mobiles) de complexité croissante. Pour ce faire, le pendule inversé mobile (constitué d'un pendule inversé monté sur un chariot mobile qui se déplace suivant une seule direction) est considéré dans un premier temps ; puis en second temps, la même étude sera menée sur un système plus complexe. Il s'agit d'un manipulateur mobile constitué d'une plate-forme mobile à roue se déplaçant dans le plan sur laquelle est monté un bras manipulateur à deux degrés de liberté.

II. Le pendule Inversé Mobile :

II.1 Présentation du système :

Le pendule inversé mobile est composé d'un chariot qui se déplace le long d'un axe OX sous l'effet d'un couple appliqué U_c , et d'un pendule fixé verticalement au chariot par son extrémité basse ; l'autre extrémité reste libre. Le point de contact permet le pivotement du pendule sous l'action de son poids, sous l'action du mouvement du chariot et sous l'action d'un couple appliqué U_p .

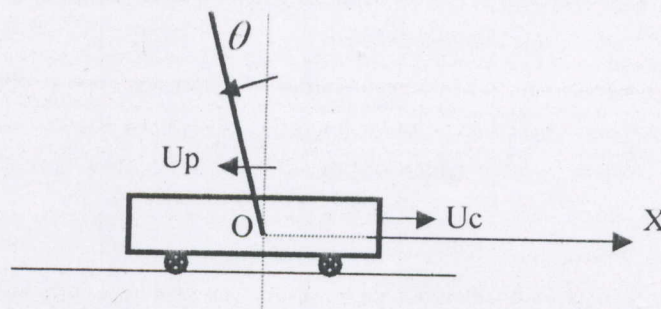


Fig-3.1 : Le système pendule inversé mobile.

II.2 Equations de mouvement :

Si on considère le pendule seul (Fig-3.2), ρ est le vecteur position du centre de masse du pendule distant de l par rapport au point A, e est un vecteur unité qui pointe le long de AB, m est la masse du pendule, θ est l'angle que fait le pendule avec la verticale lors de son mouvement, F est la force agissant sur le pendule due au mouvement du chariot, $m\ddot{\rho}$ est la force de D'Alembert due à l'accélération du pendule et agissant sur son centre de masse, μ_p est le coefficient de frottement autour du point A et U_p est le couple appliquée au point A pour commander le mouvement du pendule.

La géométrie du système donne :

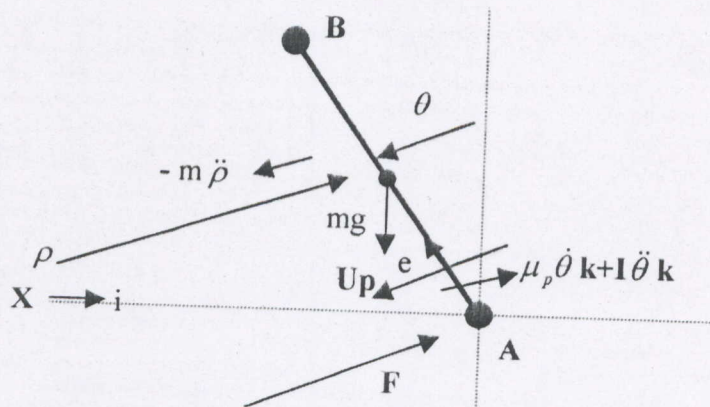


Fig-3.2 : La dynamique du pendule inversé.

$$\rho = x + l \cdot e \tag{3.1}$$

La somme des forces agissant sur le pendule est :

$$F + m \cdot g - m \ddot{\rho} = 0. \tag{3.2}$$

Les moments autour du point A vérifient l'équation :

$$U_p \cdot k - \mu_p \dot{\theta} \cdot k - I \ddot{\theta} \cdot k + m \cdot l \cdot e \times g - m \cdot l \cdot \rho \times \ddot{\rho} = 0. \tag{3.3}$$

où I est le moment d'inertie du pendule par rapport à son centre de masse .

Si on considère le chariot seul (Fig-3.3), les forces agissant sur le chariot vérifient :

$$-M \ddot{x} - F + U_c + R + Mg - \mu_r \text{sign}(\dot{x}) i = 0. \tag{3.4}$$

où M est la masse du chariot, U_c est la force appliquée pour commander le mouvement du chariot, R est la force de réaction et $\mu_r \text{sign}(\dot{x}) i$ est la résistance au roulement du chariot.

Pour éliminer la force F entre le pendule et le chariot, on additionne les équations (3.2) et (3.3) ; ce qui donne :

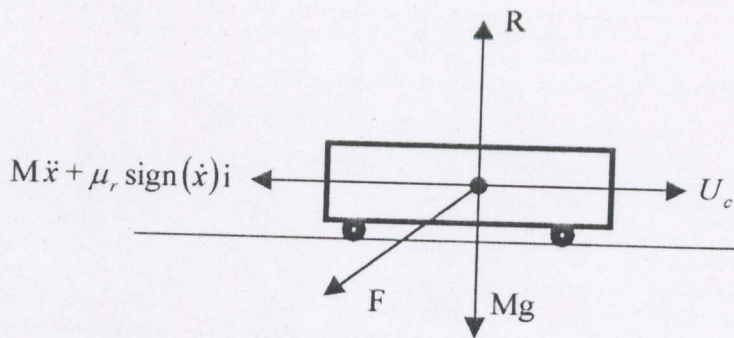


Fig-3.3 : Les forces agissant sur le chariot.

$$-M\ddot{x} + U_c + R + Mg - \mu_r \text{sign}(\dot{x})i + mg - m\ddot{\rho} = 0. \quad (3.5)$$

Pour éliminer la réaction R ; on projette l'équation (3.5) suivant la direction i :

$$-M\ddot{x} + U_c - \mu_r \text{sign}(\dot{x}) - m\ddot{\rho}i = 0 \quad (3.6)$$

$\ddot{\rho}$ peut être éliminé en différentiant deux fois l'équation (3.1) :

$$\ddot{\rho} = \ddot{x} + l\ddot{\theta} \quad (3.7)$$

En substituant dans les équations (3.3) et (3.6) :

$$U_p k - \mu_p \dot{\theta} k - l\ddot{\theta} \cdot k + m l e \times g - m l e \times \ddot{x} - m l^2 e \times \ddot{\theta} = 0. \quad (3.8)$$

$$-M\ddot{x} + U_c - \mu_r \text{sign}(\dot{x})i - m\ddot{x} - m l e \cdot i = 0. \quad (3.9)$$

Les résultats suivants vont être utilisés pour remplacer e dans les équations (3.8) et (3.9) en fonction du terme θ [18] :

$$e \times \ddot{\theta} = \ddot{\theta} \cdot k \quad (3.10)$$

$$e \times g = g \sin(\theta)k \quad (3.11)$$

$$e \times \ddot{x} = -\ddot{x} \cos(\theta)k \quad (3.12)$$

$$\ddot{\theta} \cdot i = -\ddot{\theta} \cos(\theta) + \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \quad (3.13)$$

En substituant dans les équations (3.8) et (3.9) on trouve :

$$U_p k - \mu_p \dot{\theta} k - l \ddot{\theta} \cdot k + m g l \sin(\theta)k + m l \ddot{x} \cos(\theta)k - m l^2 \ddot{\theta} \cdot k = 0. \quad (3.14)$$

$$-M\ddot{x} + U_c - \mu_r \text{sign}(\dot{x}) - m\ddot{x} + m l \ddot{\theta} \cos(\theta) - m l \dot{\theta}^2 \sin(\theta) = 0. \quad (3.15)$$

Ce qui donne finalement :

$$\ddot{\theta} = \frac{-\mu_p \dot{\theta} + \frac{U_p}{ml} + g \sin(\theta) + \frac{\cos(\theta)}{M+m} \{U_c - \mu_r \text{sign}(\dot{x}) - ml \dot{\theta}^2 \sin(\theta)\}}{l \left\{ \frac{l}{ml^2} + 1 - \cos^2(\theta) \frac{m}{M+m} \right\}} ; \quad (3.16)$$

$$\ddot{x} = \frac{U_c - \mu_r \text{sign}(\dot{x}) + ml(\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta))}{M+m} ; \quad (3.17)$$

II.3 Analyse des termes d'interaction :

Pour analyser l'interaction dynamique entre le pendule inversé et le chariot mobile ; il faut extraire les termes d'interaction à partir des équations régissant le comportement dynamique du système pendule inversé mobile.

D'après les équations (3.14) et (3.15), on peut extraire les termes suivants :

$$\text{terme}_1 = ml\ddot{x} \cos(\theta) ;$$

qui représente l'effet de l'accélération du chariot mobile sur le pendule inversé ;

$$\text{terme}_2 = ml\ddot{\theta} \cos(\theta)$$

$$\text{terme}_3 = -ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta)$$

qui représentent l'effet de l'accélération et de la vitesse du pendule inversé sur le chariot.

On va examiner l'évolution de ces termes par rapport aux couples appliqués au système lorsque ce dernier est soumis à différents types de perturbations. On prélèvera les courbes d'évolution des couples U_p et U_c une première fois lorsque les termes de couplage (terme₁, terme₂ et terme₃) sont pris en compte (en trait en pointillé sur les figures) ; et une deuxième fois, lorsque ces termes sont retranchés des expressions de U_p et U_c . Les résultats de cette étude sont illustrés aux figures 3.4 à 3.9.

1. Perturbation cinématique :

On gardera toutes les caractéristiques inertielles et géométriques du système mécanique constantes et on exposera ce dernier à deux types de mouvements :

- Dans le premier cas : le chariot parcourt une distance de 16 mètres en deux secondes avec une vitesse moyenne de 7,96m/s (la vitesse maximale est $V_{\max} = 12\text{m/s}$). Le pendule oscille avec une pulsation de 10rd/s. Les consignes imposées sont alors égales :

$$\theta_c = \sin(10t + 0.1) ;$$

$$x_c = 4(-t^3 + 3t^2 + 1) ;$$

La figure 3.4 montre l'évolution des termes 1, 2 et 3 comparés aux couples nominaux (en haut) et les écarts entre ces couples d'un côté et leurs valeurs sans les termes de couplage de l'autre côté.

- Dans le deuxième cas : le chariot parcourt une distance de 40 mètres en deux secondes avec une vitesse moyenne de 19,9m/s (la vitesse maximale est $V_{max} = 30\text{m/s}$) et le pendule oscille avec une pulsation de 20rd/s. Les consignes imposées au système sont :

$$\theta_c = \sin(20t + 0.1) ;$$

$$x_c = -10t^3 + 30t^2 + 10 ;$$

La figure 3.5 présente l'évolution des termes de couplage et des couples nominaux (en haut) et les écarts entre ces couples et leurs valeurs sans les termes de couplage.

2. Perturbation géométrique :

- **Aspect géométrique :** le système est soumis à des mouvements de vitesse moyenne (les mêmes consignes que celles de la figure 3.4) et la longueur du pendule augmente linéairement de 0.2 à 1.4 mètres. Les courbes obtenues pour ce cas sont présentées à la figure 3.6.

- **Aspect géométrique et cinématique :** (Fig-3.7) Le système est soumis à des mouvements de grandes vitesses (les mêmes consignes que celles de la figure 3.5) et en même temps, la longueur du pendule est variable.

3. Perturbation inertielle :

- **Aspect inertiel :** La masse du pendule augmente linéairement de 0.230Kg à 1.730Kg pendant que le système évolue à des vitesses moyennes. Le résultat est illustré à la figure 3.8.

- **Aspect inertiel et cinématique :** (Fig-3.9) Les vitesses d'évolution du système sont rapides et la masse du pendule est variable.

Les figures 3.4 à 3.9 sont présentées aux pages qui suivent.

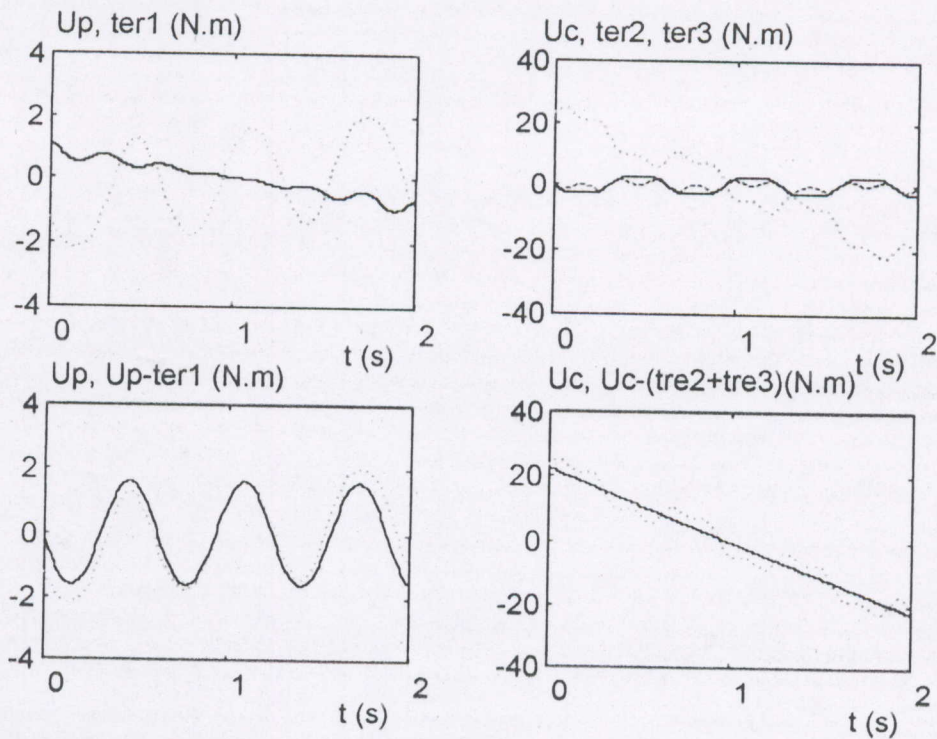


Fig-3.4 : Evolution des couples nominaux U_p , U_c , des termes de couplage $ter1$, $ter2$, $ter3$ et des couples $U_p - ter1$, $U_c - (ter2 + ter3)$.

Légende : U_p , U_c : trait en pointillé.
 $ter1$, $ter2$, $U_p - ter1$, $U_c - (ter2 + ter3)$: ——— trait fort.
 $ter3$: - - - - - trait interrompu.

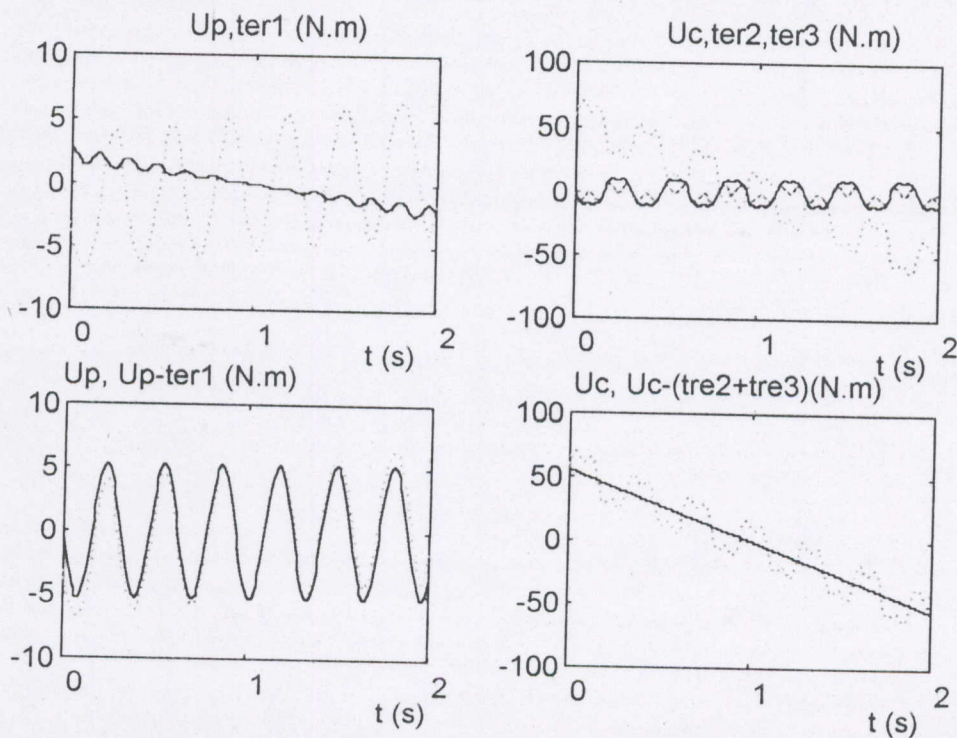


Fig-3.5 : Evolution des couples nominaux U_p , U_c , des termes de couplage $ter1$, $ter2$, $ter3$ et des couples $U_p - ter1$, $U_c - (ter2 + ter3)$ lorsque le système est soumis à des perturbations inertielles.

Légende : U_p , U_c : trait en pointillé.
 $ter1$, $ter2$, $U_p - ter1$, $U_c - (ter2 + ter3)$: ——— trait fort.
 $ter3$: - - - - - trait interrompu.

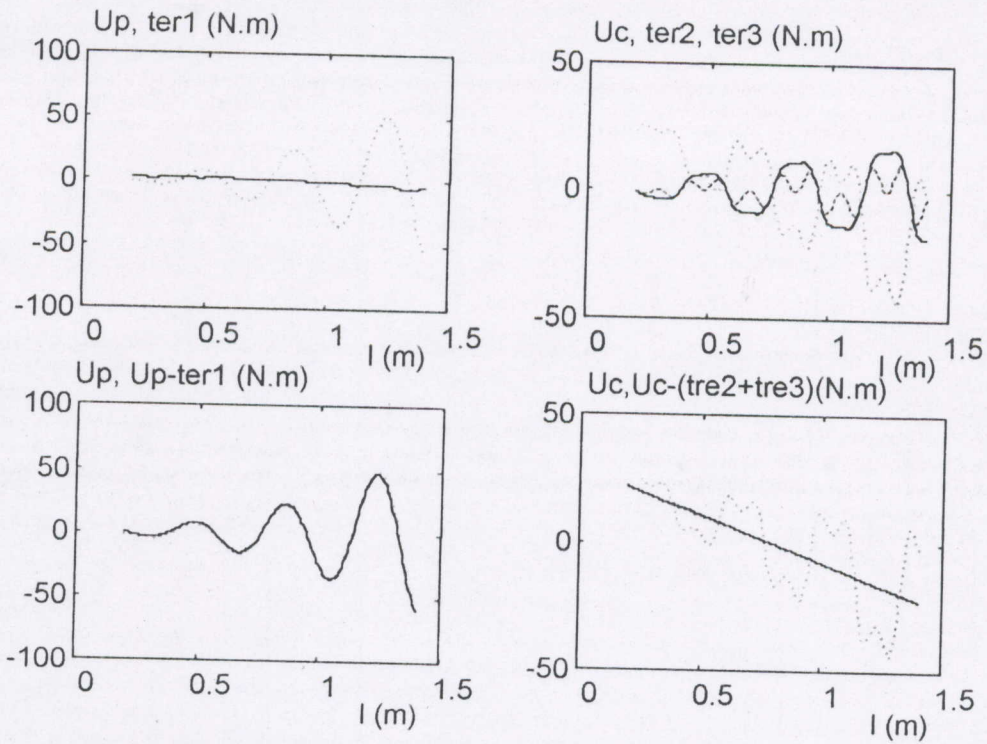


Fig-3.6 : Evolution des couples nominaux U_p , U_c , des termes de couplage $ter1$, $ter2$, $ter3$ et des couples U_p-ter1 , $U_c-(ter2+ter3)$ lorsque le système est soumis à une perturbation géométrique.

Légende : U_p, U_c : trait en pointillé.
 $Ter1, ter2, U_p-ter1, U_c-(ter2+ter3)$: ——— trait fort.
 $Ter3$: - - - - - trait interrompu.

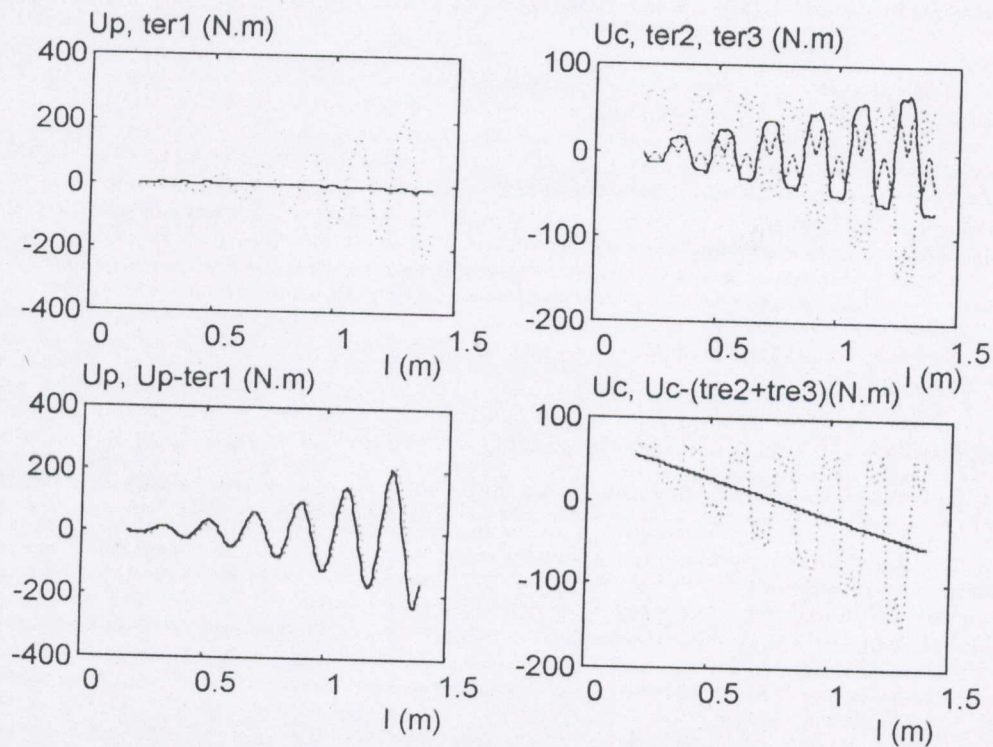


Fig-3.7 : Evolution des couples nominaux U_p , U_c , des termes de couplage $ter1$, $ter2$, $ter3$ et des couples U_p-ter1 , $U_c-(ter2+ter3)$ lorsque le système est soumis à des perturbations cinématique et géométrique.

Légende : U_p, U_c : trait en pointillé.
 $Ter1, ter2, U_p-ter1, U_c-(ter2+ter3)$: ——— trait fort.
 $Ter3$: - - - - - trait interrompu.

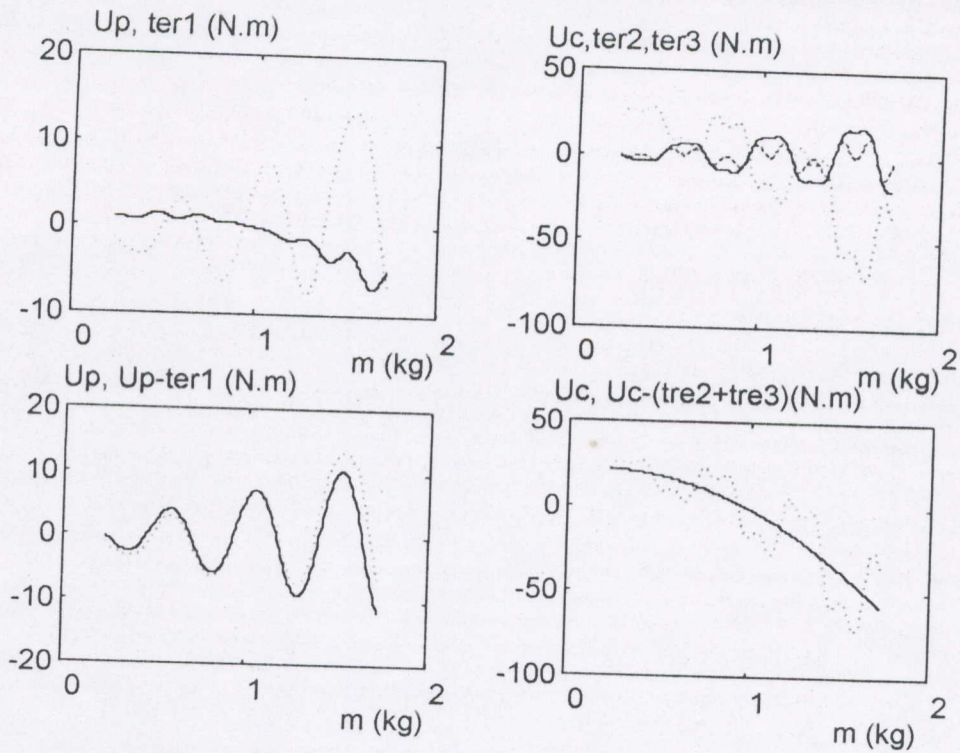


Fig-3.8 : Evolution des couples nominaux U_p , U_c , des termes de couplage $ter1$, $ter2$, $ter3$ et des couples $U_p - ter1$, $U_c - (ter2 + ter3)$ lorsque le système est soumis à une perturbation inertielle.

Légende : U_p , U_c : trait en pointillé.
 $ter1$, $ter2$, $U_p - ter1$, $U_c - (ter2 + ter3)$: ——— trait fort.
 $ter3$: - - - - - trait interrompu.

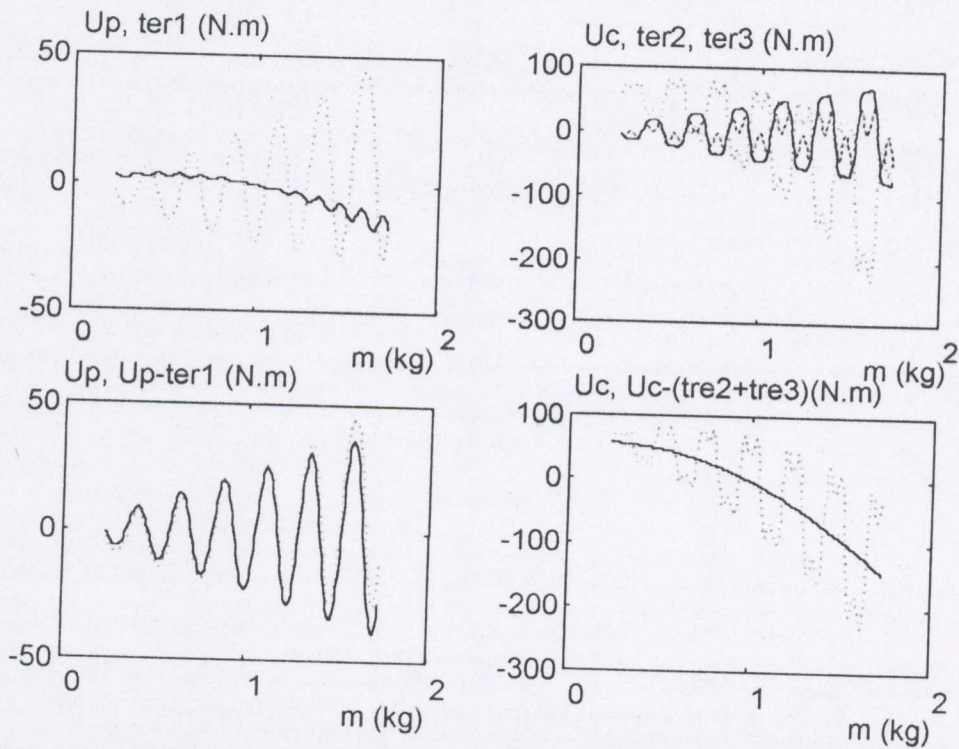


Fig-3.9 : Evolution des couples nominaux U_p , U_c , des termes de couplage $ter1$, $ter2$, $ter3$ et des couples $U_p - ter1$, $U_c - (ter2 + ter3)$ lorsque le système est soumis à des perturbations inertielle et cinématique.

Légende : U_p , U_c : trait en pointillé.
 $ter1$, $ter2$, $U_p - ter1$, $U_c - (ter2 + ter3)$: ——— trait fort.
 $ter3$: - - - - - trait interrompu.

II.4 Interprétation :

1. Aspect cinématique :

A la figure 3.4, le pendule inversé est soumis à des mouvements de vitesses moyennes ; les écarts entre les couples nominaux et leurs valeurs calculées sans les termes de couplage varient dans des intervalles de 49,76% et 16,93% des couples U_p et U_c respectivement ; ce qui signifie que les termes de couplage sont non négligeables.

Lorsque la vitesse d'évolution du système est plus rapide (Fig-3.5), les termes de couplage 2 et 3 augmentent considérablement. Par conséquent, l'écart entre le couple U_c et sa valeur sans ces termes augmente également ; cet écart représente 24,00% de la valeur de U_c dans ce cas. Le tableau 3.1 ci-dessous donne les valeurs moyennes et extrêmes des trois termes de couplage, des couples nominaux (U_p et U_c) et des écarts E_p et E_c qui représentent respectivement les différences entre le couple U_p (respectivement U_c) et sa valeur sans le terme 1 (respectivement les termes 2 et 3). Le terme 1 a augmenté en grandeur et diminué en pourcentage par rapport à U_p comparé au cas précédent ; le rapport entre U_p et E_p est de 39,39% dans ce cas.

Couples	Evolution à faibles vitesses			Evolution à vitesses élevées		
	min	moy	max	min	moy	max
U_p	-2,12	-0,06	2,04	-6,67	-0,25	6,48
Terme1	-0,97	0,00	1,10	-2,43	0,01	2,75
U_c	-22,05	0,19	25,08	-62,91	0,76	70,07
Terme2	-2,58	-0,19	2,58	-10,32	0,55	10,32
Terme3	-1,68	-0,07	1,68	-6,71	-0,21	6,71
E_p	-1,10	0,00	0,97	-2,75	-0,01	2,43
E_c	-3,99	0,19	3,99	-15,96	0,76	15,96

Tableau 3.1 : Statistiques relatifs aux figures 3.4 et 3.5.

2. Aspect géométrique :

La figure 3.6 représente l'évolution des termes de couplage et des couples nominaux en fonction de la longueur du pendule qui augmente linéairement de sa valeur initiale égale à 0.2mètres jusqu'à la valeur de 1.4mètres. Dans cette figure, on remarque que le terme 1 augmente en grandeur mais diminue en pourcentage par rapport au couple U_p ; son pourcentage est de 7,63% de U_p ; il a donc diminué comparé au cas précédent (Fig-3.4). Par contre, les termes 2 et 3

augmentent considérablement en grandeur et en pourcentage ; l'écart E_c est dans ce cas est de 76,41% du couple U_c .

Lorsque le système évolue à une vitesse plus élevée (Fig-3.7), les termes 2 et 3 augmentent encore plus, leur pourcentage par rapport au couple U_c s'approche de 97%. Le tableau 3.2 ci-dessous résume les valeurs limites des couples nominaux, des termes de couplage et des écarts E_p et E_c définis précédemment. Le terme 1 diminue en pourcentage avec l'augmentation de la vitesse quoiqu'il augmente en grandeur ; les courbes du couple U/p et de sa valeur sans le terme 1 sont confondues, l'écart E_p est de 4,55% du couple nominal.

Couples	Evolution à faibles vitesses			Evolution à vitesses élevées		
	min	moy	max	min	moy	max
Up	-55,17	1,39	51,72	-224,91	-3,07	210,97
Terme1	-6,48	-0,87	1,47	-16,13	-2,08	3,68
Uc	-43,46	0,03	25,68	-150,03	2,62	71,50
Terme2	-17,91	0,04	16,30	-71,60	-1,97	66,96
Terme3	-11,33	-0,08	10,78	-45,14	-0,65	43,93
Ep	-1,47	0,87	6,48	-3,68	2,08	16,13
Ec	-25,52	0,03	27,31	-103,15	2,62	111,69

Tableau 3.2 : Statistiques relatifs aux figures 3.6 et 3.7.

3. Aspect inertiel :

Les figures 3.8 et 3.9 représentent l'effet de la variation de la masse du pendule sur l'évolution des termes de couplage.

Couples	Evolution à faibles vitesses			Evolution à vitesses élevées		
	min	moy	max	min	moy	max
Pu	-7,61	1,01	13,54	-28,47	1,32	44,50
Terme1	-6,96	-0,95	1,53	-17,32	-2,26	3,83
Uc	-71,72	-6,04	27,36	-227,17	-12,37	81,18
Terme2	-19,24	0,06	17,36	-76,93	-2,10	71,88
Terme3	-12,17	-0,08	11,57	-48,48	-0,69	47,17
Ep	-1,53	0,95	6,96	-3,83	2,26	17,32
Ec	-27,39	0,02	29,34	-110,75	2,78	120,02

Tableau 3.3 : Statistiques relatifs aux figures 3.8 et 3.9.

Lorsque le système évolue à vitesses moyennes, le terme 1 augmente linéairement avec l'augmentation de la masse ; l'écart E_p dépasse les 38% du couple U_p . Les termes 2 et 3 augmentent également comparés aux cas des figures 3.4 et 3.6 ; leurs valeurs limites sont portées au tableau 3.3 ci-dessus. L'écart E_c est de 57,26% par rapport au couple U_c ; les trois termes de couplage sont donc non-négligeables.

A la figure 3.9 où l'évolution du système est plus rapide, les termes 2 et 3 augmentent considérablement ; par conséquent, l'écart E_c entre le couple U_c et sa valeur sans les termes 2 et 3 est très important (dépasse 74,84% de U_c). Le terme 1 diminue en pourcentage comparé au cas précédent (évolution à vitesses moyennes) mais reste toujours non-négligeable, l'écart E_p atteint 28,99% du couple U_p .

Finalement, on peut conclure que les termes d'interaction dynamique entre le pendule inversé et le chariot mobile évoluent dans une gamme assez large par rapport aux couples nominaux ; ils ne doivent donc pas être négligés. D'un autre côté, ces termes ont un caractère dynamique ; c-à-d qu'ils évoluent en fonction des caractéristiques cinématique, inertielles et dynamiques du système. Par conséquent, pour éliminer leurs effets dynamiques il faut prévoir un compensateur dynamique.

II. Cas du Robot Manipulateur Mobile :

Dans l'expression du modèle dynamique du manipulateur mobile présenté au chapitre deux, les termes de couplage dynamique entre le bras manipulateur et la plate-forme mobile (qui ne figuraient pas dans les équations de mouvement de chaque sous-système pris séparément) ont été données pour le cas général et sous une forme condensée. Pour le manipulateur mobile considéré dans cette étude, le bras manipulateur est un robot à deux liaisons ($n = 2$). Dans ce cas, on peut expliciter l'écriture des expressions des termes de couplage comme suit :

$$C_{r2}^{(1)} = 2 \sum_{j=1}^4 \left(\text{tr} \left[\frac{\partial T_1}{\partial q_1} J_1 \frac{\partial T_1'}{\partial q_{v,j} \partial q_1} \right] + \text{tr} \left[\frac{\partial T_2}{\partial q_1} J_2 \frac{\partial T_2'}{\partial q_{v,j} \partial q_1} \right] \right) \dot{q}_{v,j} \dot{q}_1 + 2 \sum_{j=1}^4 \text{tr} \left[\frac{\partial T_2}{\partial q_1} J_2 \frac{\partial T_2'}{\partial q_{v,j} \partial q_2} \right] \dot{q}_{v,j} \dot{q}_2 +$$

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \left(\text{tr} \left[\frac{\partial T_1}{\partial q_1} J_1 \frac{\partial T_1'}{\partial q_{v,j} \partial q_{v,k}} \right] + \text{tr} \left[\frac{\partial T_2}{\partial q_1} J_2 \frac{\partial T_2'}{\partial q_{v,j} \partial q_{v,k}} \right] \right) \dot{q}_{v,j} \dot{q}_{v,k}$$

$$C_{r2}^{(2)} = 2 \sum_{j=1}^4 \text{tr} \left[\frac{\partial T_2}{\partial q_2} J_2 \frac{\partial T_2'}{\partial q_{v,j} \partial q_1} \right] \dot{q}_{v,j} \dot{q}_1 + 2 \sum_{j=1}^4 \text{tr} \left[\frac{\partial T_2}{\partial q_2} J_2 \frac{\partial T_2'}{\partial q_{v,j} \partial q_2} \right] \dot{q}_{v,j} \dot{q}_2 + \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \text{tr} \left[\frac{\partial T_2}{\partial q_2} J_2 \frac{\partial T_2'}{\partial q_{v,j} \partial q_{v,k}} \right] \dot{q}_{v,j} \dot{q}_{v,k}$$

$$R_r^{(1)} = \sum_{j=1}^4 \left(\text{tr} \left[\frac{\partial T_1}{\partial q_1} J_1 \frac{\partial T_1'}{\partial q_{v,j}} \right] + \text{tr} \left[\frac{\partial T_2}{\partial q_1} J_2 \frac{\partial T_2'}{\partial q_{v,j}} \right] \right) \ddot{q}_{v,j} ;$$

$$R_r^{(2)} = \sum_{j=1}^4 \left(\text{tr} \left[\frac{\partial T_2}{\partial q_2} J_2 \frac{\partial T_2^t}{\partial q_{v,j}} \right] \right) \ddot{q}_{v,j} ;$$

$$C_{v2}^{(i)} = 2 \sum_{k=1}^4 \left\{ \left(\text{tr} \left[\frac{\partial T_1}{\partial q_{v,i}} J_1 \frac{\partial T_1^t}{\partial q_1 \partial q_{v,k}} \right] + \text{tr} \left[\frac{\partial T_2}{\partial q_{v,i}} J_2 \frac{\partial T_2^t}{\partial q_1 \partial q_{v,k}} \right] \right) \dot{q}_1 \dot{q}_{v,k} + \text{tr} \left[\frac{\partial T_2}{\partial q_{v,i}} J_2 \frac{\partial T_2^t}{\partial q_2 \partial q_{v,k}} \right] \dot{q}_2 \dot{q}_{v,k} \right\} \\ + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{h=\max(j,k)}^2 \text{tr} \left[\frac{\partial T_h}{\partial q_{v,i}} J_h \frac{\partial T_h^t}{\partial q_j \partial q_k} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k \quad i = 1, \dots, 4 ;$$

$$R_v^{(i)} = \left(\text{tr} \left[\frac{\partial T_1}{\partial q_{v,i}} J_1 \frac{\partial T_1^t}{\partial q_1} \right] + \text{tr} \left[\frac{\partial T_2}{\partial q_{v,i}} J_2 \frac{\partial T_2^t}{\partial q_1} \right] \right) \ddot{q}_1 + \left(\text{tr} \left[\frac{\partial T_2}{\partial q_{v,i}} J_2 \frac{\partial T_2^t}{\partial q_2} \right] \right) \ddot{q}_2 \quad i=1, \dots, 4 ;$$

$$M_{v2}^{(i)} = \sum_{j=1}^4 \left(\text{tr} \left[\frac{\partial T_1}{\partial q_{v,i}} J_1 \frac{\partial T_1^t}{\partial q_{v,j}} \right] + \text{tr} \left[\frac{\partial T_2}{\partial q_{v,i}} J_2 \frac{\partial T_2^t}{\partial q_{v,j}} \right] \right) \ddot{q}_{v,j} \quad i = 1, \dots, 4 ;$$

(le symbole $\text{tr}[\]$ signifie trace de la matrice $[\]$).

où les matrices J_1 et J_2 sont les matrices de pseudo inertie des liaisons une et deux respectivement, les matrices T_1 et T_2 sont définies comme au chapitre deux :

$$T_1 = Tv(q_v) A_1^0 ;$$

$$T_2 = Tv(q_v) A_1^0 A_2^1 ;$$

où A_1^0 et A_2^1 sont les matrices des transformations homogènes relatives aux liaisons une et deux respectivement, $Tv(q_v)$ est la matrice de transformation homogène du repère lié à la base du bras par rapport au repère lié au sol. Le vecteur q_r est défini par $q_r = (\theta_1 \ \theta_2)^t$, q_v est défini comme au deuxième chapitre par $q_v = (x_0 \ y_0 \ \theta_r \ \theta_l)^t$.

Les expressions analytiques détaillées (après l'évaluations des produits et dérivées matricielles et le calcul des traces des matrices) en fonction des paramètres physiques du système (masses, longueurs, moments, positions, .. etc..) sont listées en annexe (A).

III.1 Analyse des termes d'interaction :

En vue d'évaluer l'importance de l'effet des termes de couplage dynamique cités ci-dessus sur le comportement du système mécanique, l'expression de chaque couple nominal (ils sont au nombre de quatre T_{r1} , T_{r2} , T_{v1} et T_{v2}) sera exprimée de deux manières différentes. Dans la première expression, les termes de couplage seront pris en compte dans le calcul des couples nominaux. Dans la deuxième, les termes de couplage seront retranchés des expressions des couples. On examinera les écarts entre les deux expressions pour chaque couple et l'évolution de

chacun des termes de couplage comparé au couple nominal lui correspondant lorsque le système est soumis à différents types de perturbations.

1. Aspect cinématique :

En gardant les paramètres géométriques et inertiels du système constants, on imposera à ce dernier des déplacements très rapides. La plate-forme poursuit une trajectoire courbée avec une vitesse linéaire moyenne de 12,36m/s (la vitesse atteint une valeur maximale de 16,14m/s). Le bras manipulateur effectue des oscillations très rapides. Les consignes imposées au système sont comme suit :

$$\theta_{1c}(t) = \sin(10t + 0.1) ;$$

$$\theta_{2c}(t) = \sin(10t + 0.1) ;$$

$$x_{0c}(t) = 5 + 15t^2 - 5t^3 ;$$

$$y_{0c}(t) = 0,8 + 3,2t^{2,5} - 0,8t^3 ;$$

$$\theta_{rc}(t) = \sin(12t) ;$$

$$\theta_{lc}(t) = \sin(10t) ;$$

La figure 3.10 illustre l'évolution des termes de couplage explicités précédemment et des couples nominaux ; la figure 3.11 présente l'évolution des couples nominaux calculés des deux manières citées auparavant c.-à-d., en intégrant les termes de couplage (en trait en pointillé) puis en retranchant les termes de couplage des expressions des couples (en trait continu).

2. Aspect géométrique :

L'influence de la variation d'un paramètre géométrique du système sur les couples appliqués est étudiée. Pour ce faire, on considérera que la longueur de la première liaison du bras manipulateur augmente linéairement lorsque le système effectue deux types de mouvements :

* La plate-forme se déplace à une vitesse moyenne par rapport au cas précédent alors que le bras suit les mêmes consignes. Les consignes imposées à la plate-forme sont alors :

$$x_{0c}(t) = 2 + 6t^2 - 2t^3 ;$$

$$y_{0c}(t) = 0,4 + 1,6t^{2,5} - 0,4t^3 ;$$

$$\theta_{rc}(t) = \sin(8t) ;$$

$$\theta_{lc}(t) = \sin(6t) ;$$

La figure 3.12 représente l'évolution des termes de couplage comparés aux couples nominaux et la figure 3.13 illustre l'évolution des couples appliqués (en trait en pointillé) et de leurs valeurs sans intégration des termes d'interaction (en trait continu) en fonction de la longueur l_1 de la première liaison.

* La plate-forme se déplace à vitesse maximale alors que le bras manipulateur suit un mouvement oscillatoire de pulsation moyenne. Les consignes imposées à la plate-forme sont comme au premier cas. Les consignes imposées au bras sont :

$$\theta_{1c}(t) = \theta_{2c}(t) = \sin(5t + 0.1) .$$

Les figures 3.14 et 3.15 illustre l'évolution des couples nominaux et des termes de couplage dans ce cas.

3. Aspect inertiel :

L'influence de l'aspect inertiel du système est étudiée. Pour ce faire, la masse de la deuxième liaison du bras manipulateur sera augmentée linéairement alors que, comme au cas précédent, deux types de mouvement sont imposés au système. Dans le premier type, la plate-forme se déplace à des vitesses moyennes et le bras effectue des oscillations très rapides. Les courbes obtenues des termes de couplage sont présentées à la figure 3.16 et les courbes des couples calculés des deux manières précédentes à la figure 3.17.

Dans le deuxième type de mouvement, la plate-forme se déplace à ses vitesses maximales alors que le bras effectue des oscillations de pulsation moyenne. Le résultat obtenu est présenté aux figures 3.18 et 3.19.

4. Aspects cinématique et géométrique :

Le système entier (plate-forme et bras) est soumis à des mouvements très rapides (comme au premier cas) pendant que la longueur de la première liaison est variée. Les courbes des couples nominaux ainsi que les termes de couplage en fonction de la longueur l_1 sont présentés aux figures 3.20 et 3.21.

5. Aspects cinématique et inertiel :

Pour illustrer cet aspect, le système est soumis à des mouvements très rapides et la masse de la deuxième liaison du bras manipulateur est prise variable. Les résultats obtenus sont illustrés aux figures 3.22 et 3.23.

Les figures 3.10 à 3.23 sont présentées aux pages qui suivent.

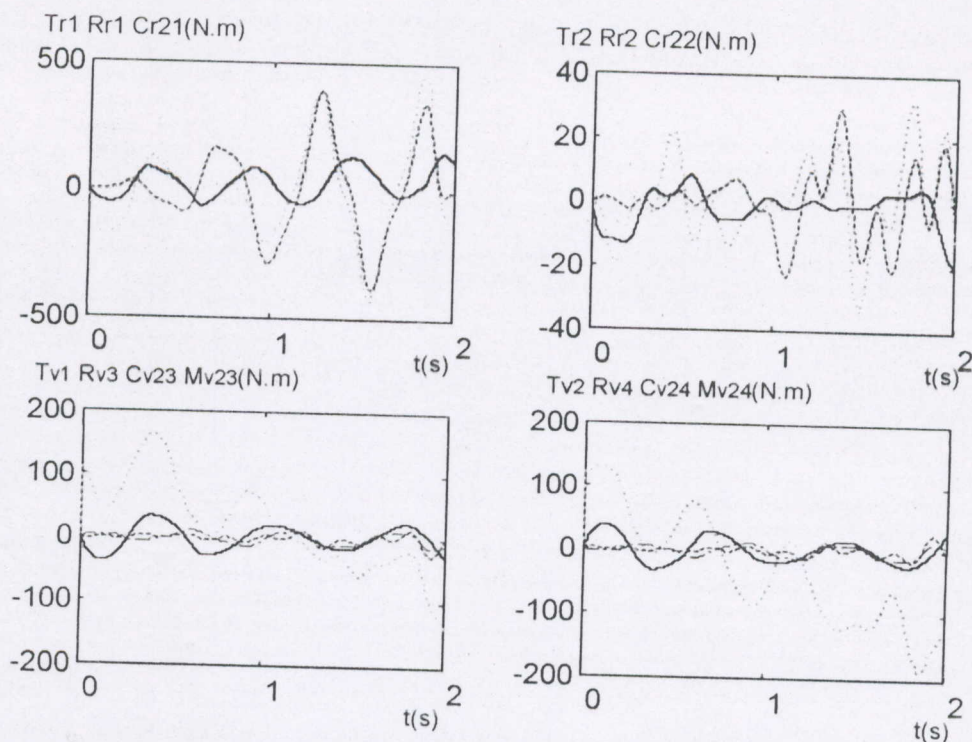


Fig-3.10 : Evolution des termes d'interaction et des couples nominaux lorsque le système est soumis à des perturbations cinématique.

Légende : Couples nominaux
 — Les termes Rr et Rv
 - - - Les termes Cr2 et Cv2
 - - - - Les termes Mv2

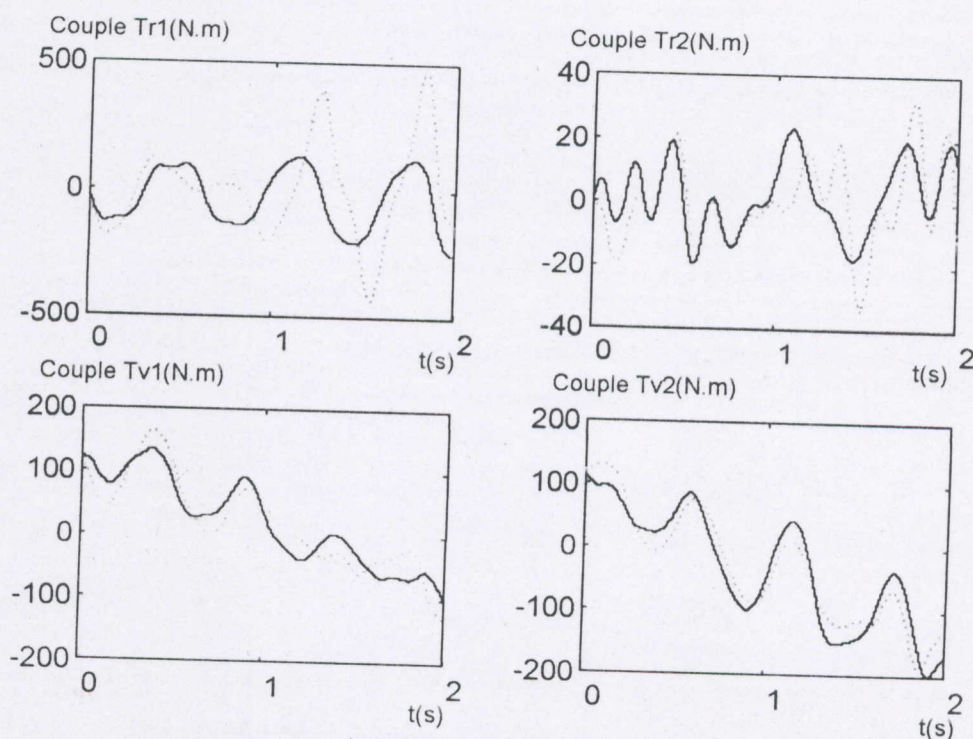


Fig-3.11 : Evolution des couples appliqués lorsque le système est soumis à des perturbations cinématique.

Légende : Couples calculés avec prise en compte des termes de couplage.
 — Couples calculés sans prise en compte des termes de couplage.

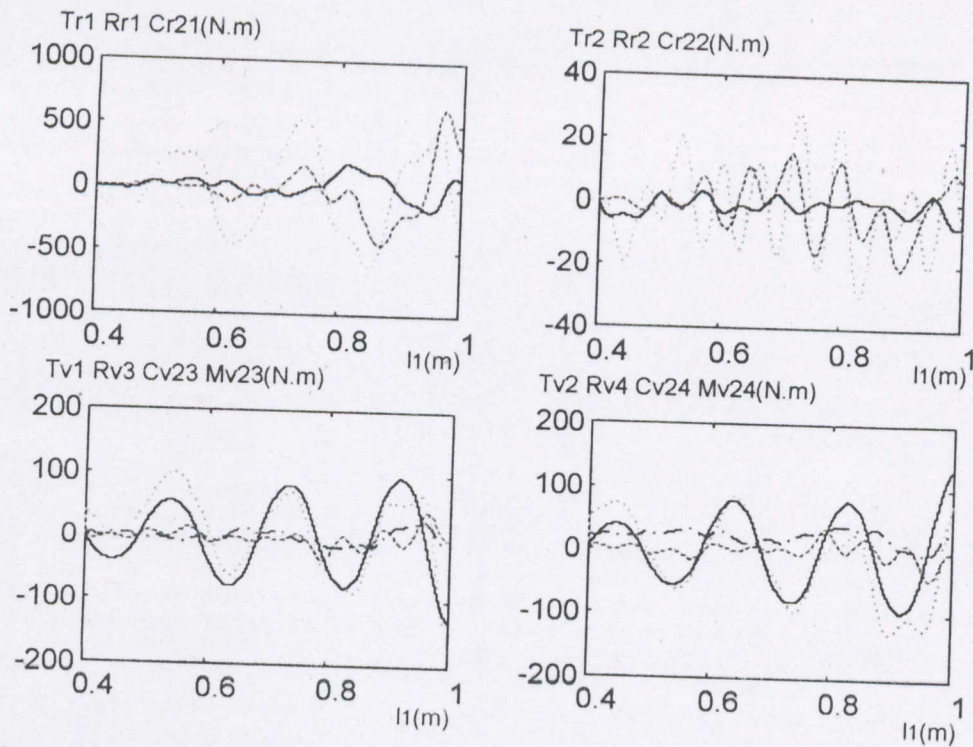


Fig-3.12 : Evolution des termes d'interaction et des couples nominaux en fonction de la longueur de la première liaison lorsque la plate-forme se déplace à une vitesse moyenne et le bras effectue des oscillations rapides.

Légende : Couples nominaux
 — Les termes Rr et Rv
 - - - Les termes Cr2 et Cv2
 - . - Les termes Mv2

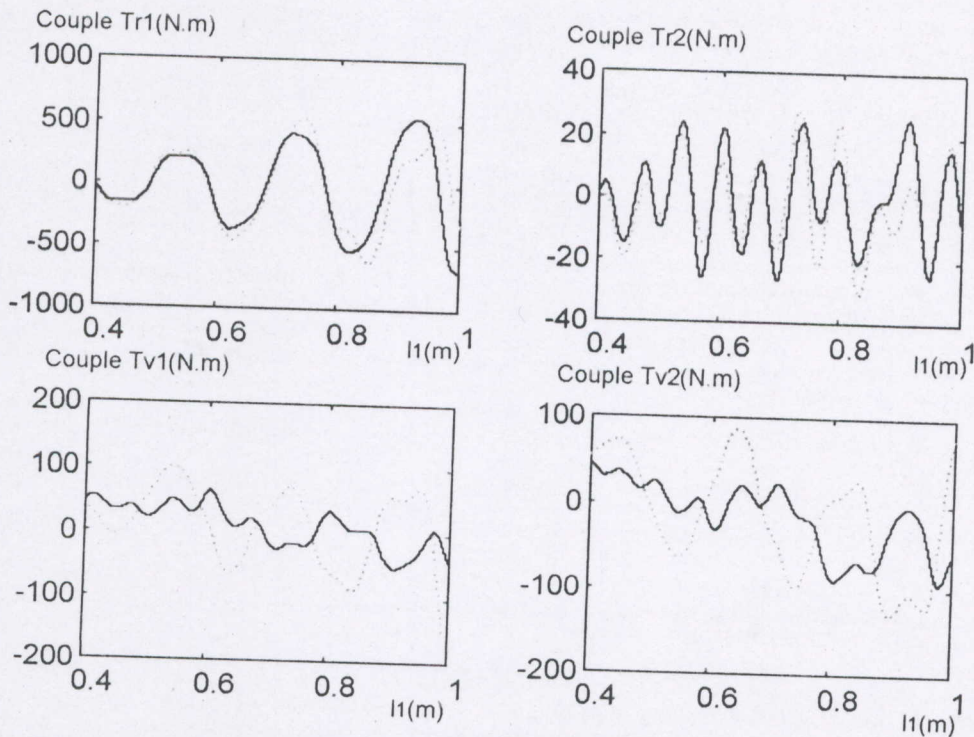


Fig-3.13 : Evolution des couples appliqués en fonction de la longueur de la première liaison lorsque la plate-forme se déplace à une vitesse moyenne et le bras effectue des oscillations rapides.

Légende : Couples calculés avec prise en compte des termes de couplage.
 — Couples calculés sans prise en compte des termes de couplage.

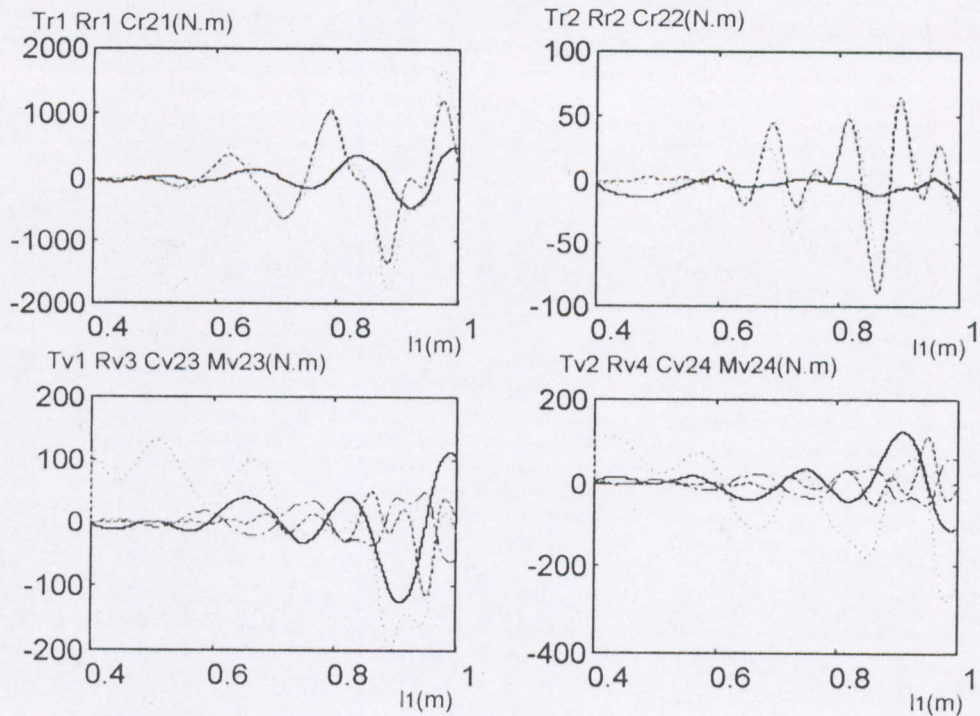


Fig-3.14 : Evolution des termes d'interaction et des couples nominaux en fonction de la longueur de la première liaison lorsque la plate-forme se déplace à grande vitesse et le bras oscille avec une pulsation moyenne.

Légende :
 Couples nominaux
 — Les termes Rr et Rv
 - - - Les termes Cr2 et Cv2
 - . - Les termes Mv2

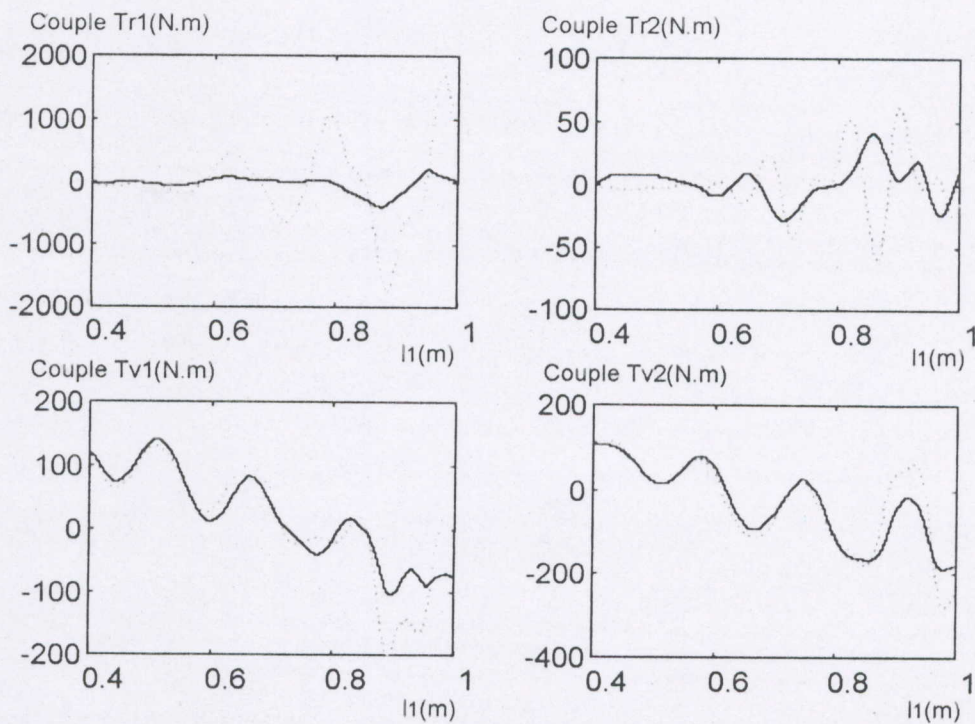


Fig-3.15 : Evolution des couples appliqués en fonction de la longueur de la première liaison lorsque la plate-forme se déplace à grande vitesse et le bras oscille avec une pulsation moyenne.

Légende :
 Couples calculés avec prise en compte des termes de couplage.
 — Couples calculés sans prise en compte des termes de couplage.

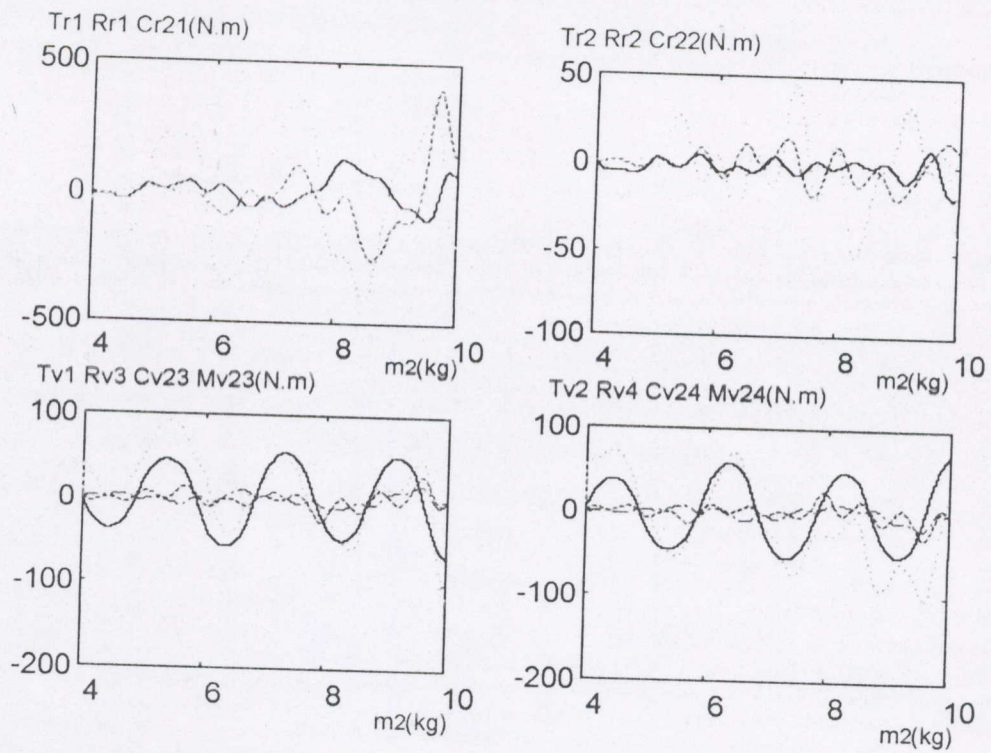


Fig-3.16 : Evolution des termes d'interaction et des couples nominaux en fonction de la masse de la deuxième liaison lorsque la plate-forme se déplace à une vitesse moyenne et le bras effectue des oscillations rapides.

Légende :
 Couples nominaux
 — Les termes Rr et Rv
 - - - Les termes Cr2 et Cv2
 - . - Les termes Mv2

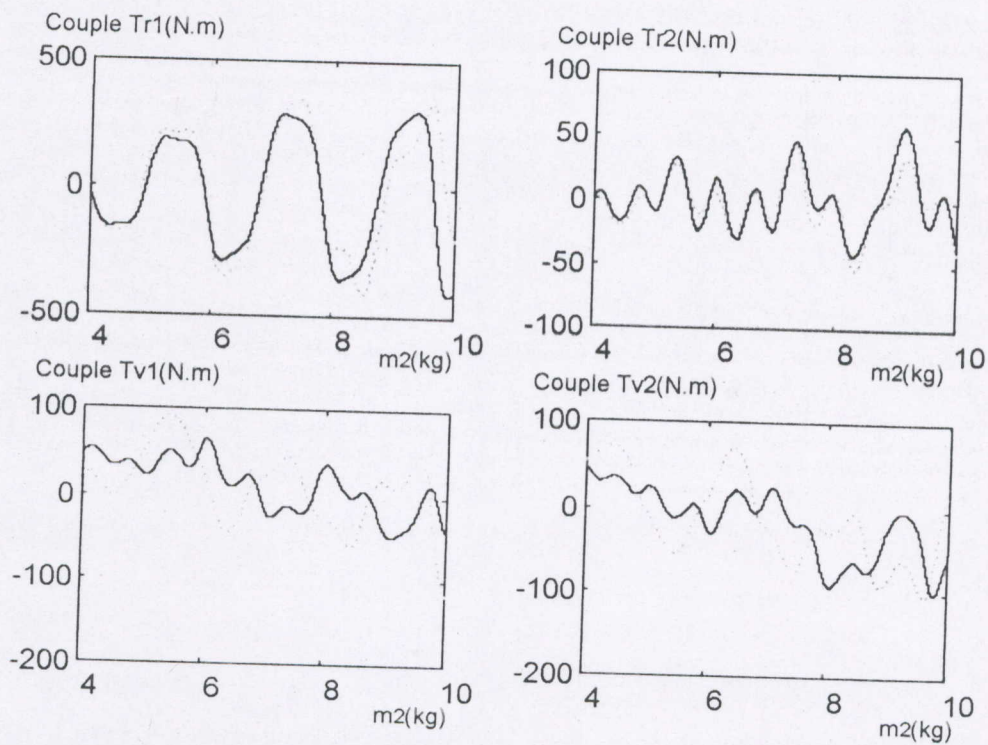


Fig-3.17 : Evolution des couples appliqués en fonction de la masse de la deuxième liaison lorsque la plate-forme se déplace à une vitesse moyenne et le bras effectue des oscillations rapides.

Légende :
 Couples calculés avec prise en compte des termes de couplage.
 — Couples calculés sans prise en compte des termes de couplage.

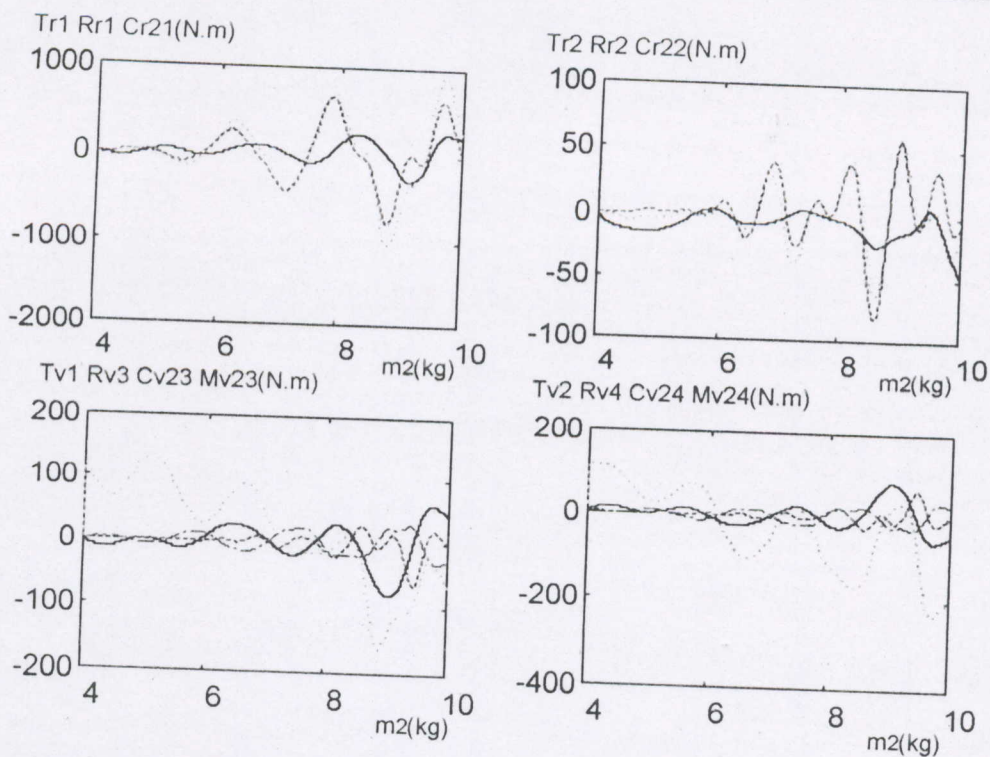


Fig-3.18 : Evolution des termes d'interaction et des couples nominaux en fonction de la masse de la deuxième liaison lorsque la plate-forme se déplace à grande vitesse et le bras oscille avec une pulsation moyenne.

Légende : Couples nominaux
 — Les termes Rr et Rv
 - - - Les termes Cr2 et Cv2
 - . - Les termes Mv2

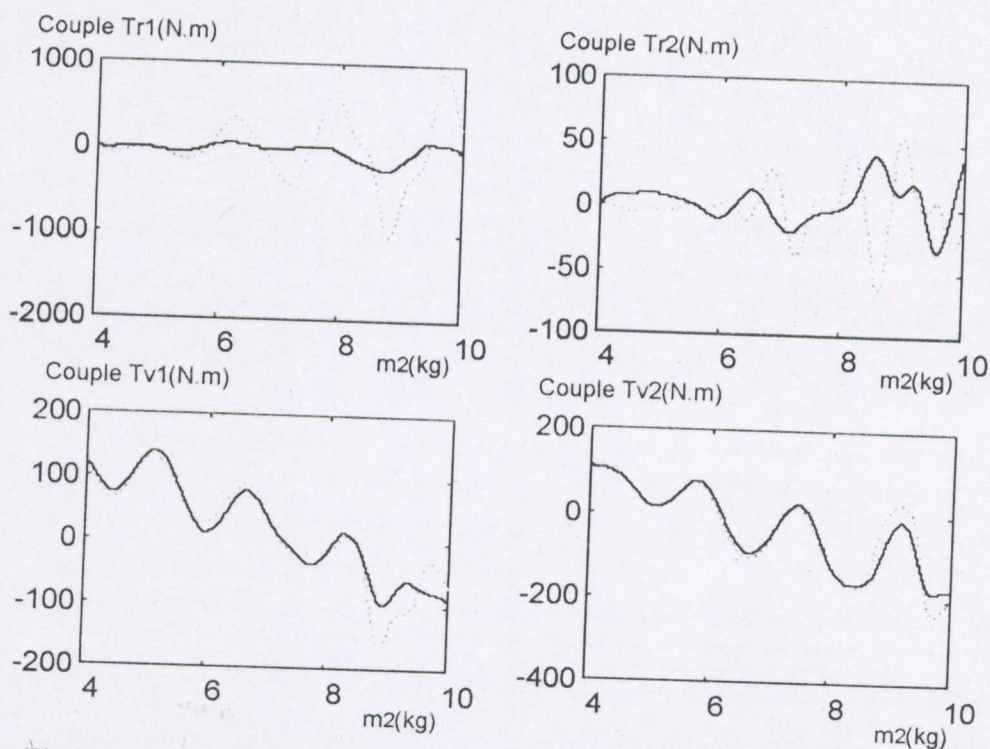


Fig-3.19 : Evolution des couples appliqués en fonction de la masse de la deuxième liaison lorsque la plate-forme se déplace à grande vitesse et le bras oscille avec une pulsation moyenne.

Légende : Couples calculés avec prise en compte des termes de couplage.
 — Couples calculés sans prise en compte des termes de couplage.

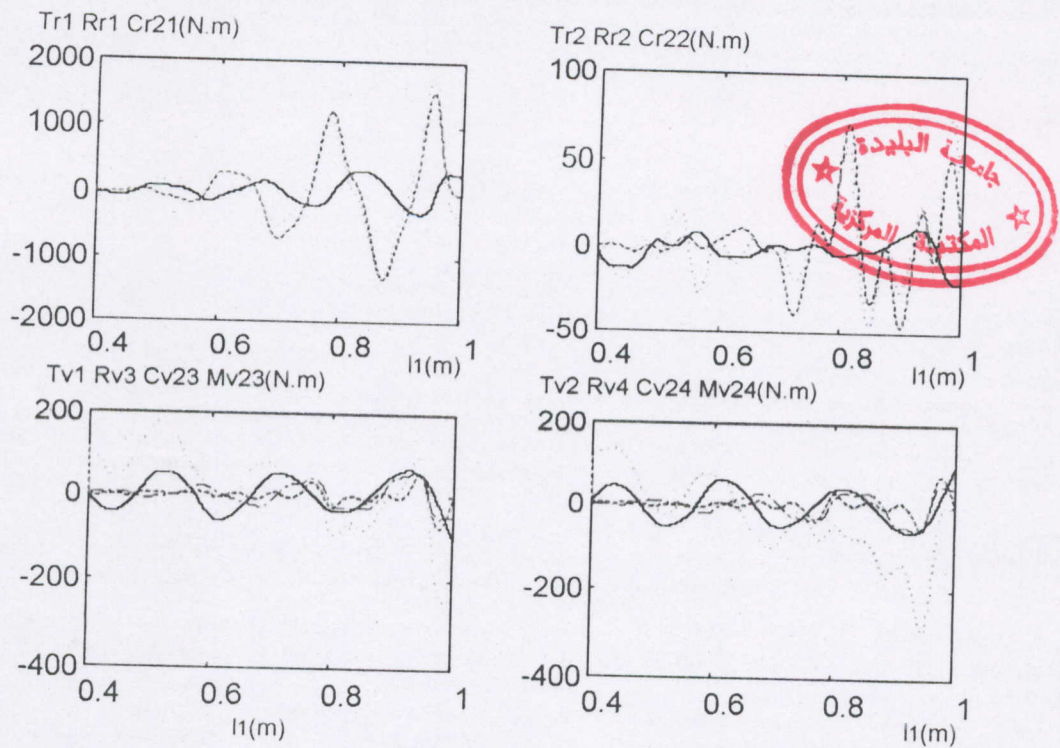


Fig-3.20 : Evolution des termes d'interaction et des couples nominaux en fonction de la longueur de la première liaison lorsque le système est soumis à des perturbations géométrique et cinématique.

Légende :
 Couples nominaux
 — Les termes Rr et Rv
 - - - Les termes Cr2 et Cv2
 - - - Les termes Mv2

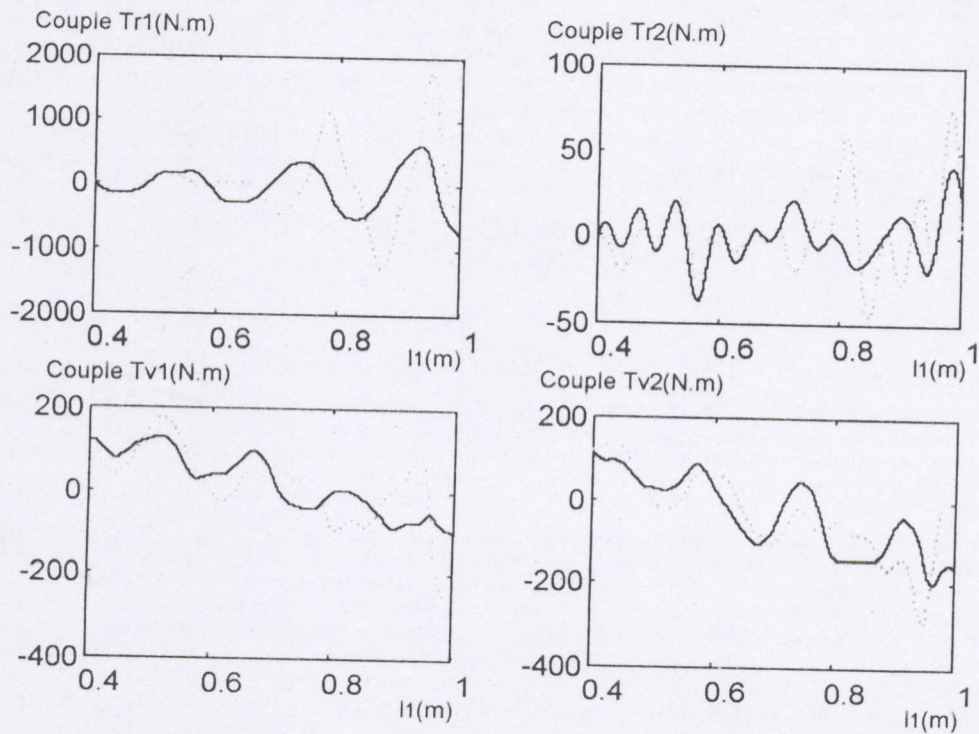


Fig-3.21 : Evolution des couples appliqués en fonction de la longueur de la première liaison lorsque le système est soumis à des perturbations géométrique et cinématique.

Légende :
 Couples calculés avec prise en compte des termes de couplage.
 — Couples calculés sans prise en compte des termes de couplage.

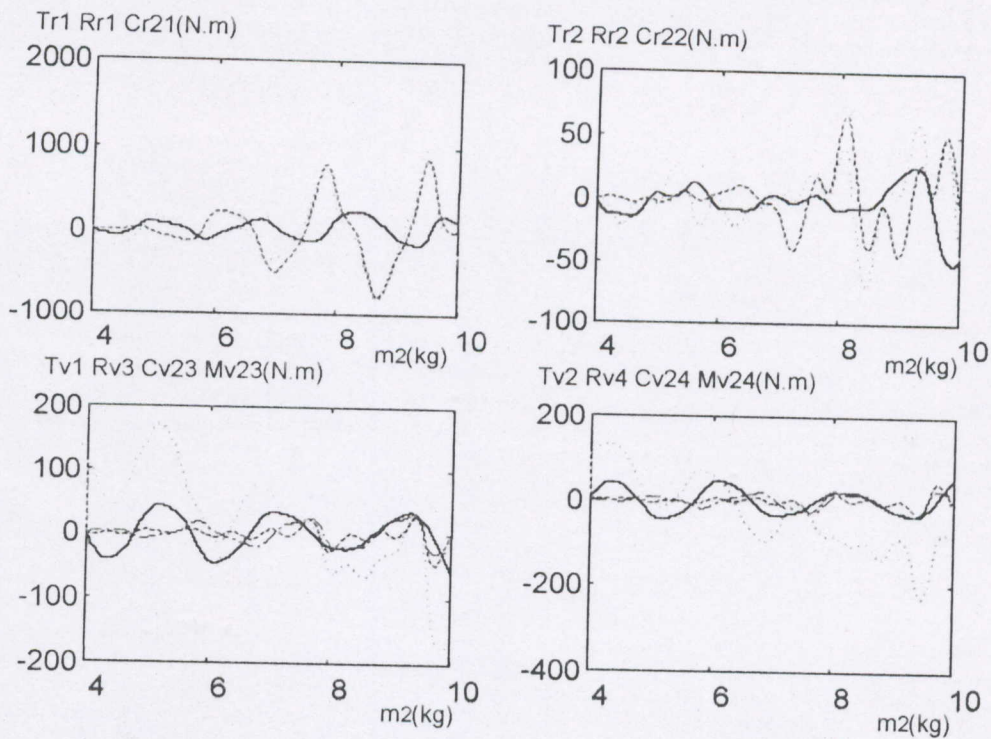


Fig-3.22 : Evolution des termes d'interaction et des couples nominaux en fonction de la masse de la deuxième liaison lorsque le système est soumis à des perturbations inertielle et cinématique.

Légende :
 Couples nominaux
 — Les termes Rr et Rv
 - - - Les termes Cr2 et Cv2
 - - - Les termes Mv2

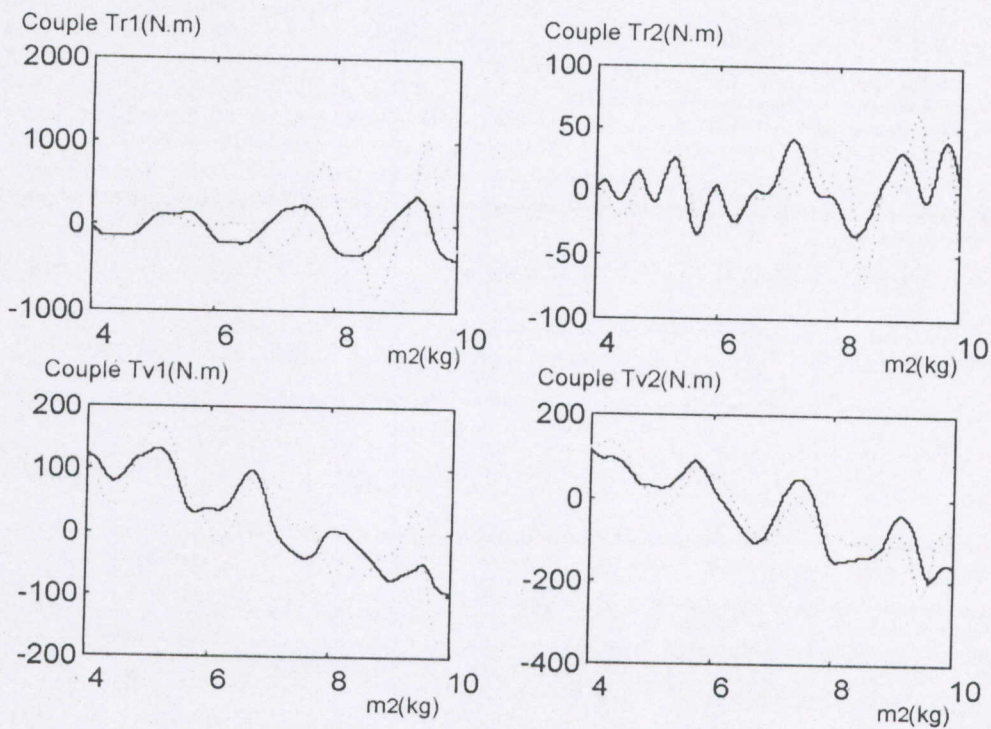


Fig-3.23 : Evolution des couples appliqués en fonction de la masse de la deuxième liaison lorsque le système est soumis à des perturbations inertielle et cinématique.

Légende :
 Couples calculés avec prise en compte des termes de couplage.
 — Couples calculés sans prise en compte des termes de couplage.

III.2 Interprétations :

1. Aspect cinématique :

On observant la figure 3.10, on constate que les termes C_{r2} représentant les efforts Centrifuges et de Coriolis sont très importants comparés aux couples nominaux T_{r1} et T_{r2} (C_{r21} représente 87,31% de T_{r1} et C_{r22} est à 80,37% de T_{r2}). Les termes R_r représentant l'effet de l'inertie d'accélération de la plate-forme sont non-négligeables ; R_{r1} a un pourcentage de 25,87% de T_{r1} et R_{r2} est de 43,38% de T_{r2} . Par conséquent, les écarts E_1 et E_2 représentant les différences entre les couples T_{r1} (ou T_{r2}) et la valeur de ce couple sans les termes de couplage sont considérables (Fig-3.11). Les effets des mouvements du bras sur la plate-forme sont moins importants comparés aux effets des mouvements de la plate-forme sur le bras ; mais ils sont non-négligeables ; en terme de pourcentage, les termes R_{v3} , C_{v23} et M_{v23} sont à 23,73%, 14,00% et 8,54% respectivement du couple T_{v1} . Les tableaux 3.4 et 3.5 ci-dessous donnent les valeurs minimales, moyennes et maximales des couples nominaux, de chacun des termes de couplage et des écarts E_i calculés en différenciant les couples sans considération des termes de couplage (en trait continu) des couples avec prise en compte de ces termes (en trait en pointillé).

Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.	Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.
Tr1	-426,92	28,78	470,44	Tr2	-33,51	1,00	32,30
Rr1	-66,52	28,45	165,71	Rr2	-20,04	-1,32	8,51
Cr21	-383,98	-24,08	399,83	Cr22	-22,94	0,37	29,95
Tv1	-137,62	11,72	165,15	Tv2	-187,57	-44,32	132,47
Rv3	-38,49	1,06	33,36	Rv4	-33,36	-1,06	38,49
Cv23	-27,47	0,39	14,92	Cv24	-14,92	-0,39	27,47
Mv23	-13,57	0,84	12,30	Mv24	-12,30	-0,84	13,57

Tableau 3.4 : Statistiques concernant les courbes illustrés à la Fig-3.10.

Les écarts E_i	Valeurs min	Valeurs moy	Valeurs max
E_1	-307,68	52,53	402,45
E_2	-24,79	-0,95	28,45
E_3	-45,13	-2,29	49,50
E_4	-49,50	-2,29	45,13

Tableau 3.5 : Les valeurs extrêmes et moyennes des courbes de la figure 3.11.

2. Aspect géométrique :

La perturbation géométrique est illustrée par la variation de la longueur de la première liaison l_1 . Dans ce cas, la plate-forme se déplace à une vitesse moyenne alors que le bras effectue des oscillations rapides (Fig-3.12 et 3.13). On remarque que les termes C_{r2} et R_r ne sont pas négligeables mais au début, ils sont moins importants que le cas précédent (à cause de la réduction de la vitesse de la plate-forme) puis ils deviennent très importants avec l'augmentation de la longueur l_1 . Les termes R_v représentant l'effet de l'inertie du bras sur la plate-forme augmentent considérablement dans ce cas ; ils sont presque à 100% des couples nominaux T_{v1} et T_{v2} . Le tableau 3.6 ci-dessous résume les valeurs limites des termes de couplage et des couples nominaux ; le tableau 3.7 donne les valeurs extrêmes des écarts E_i .

Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.	Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.
Tr1	-626,42	38,58	553,91	Tr2	-30,34	-1,52	29,00
Rr1	-167,12	7,42	181,37	Rr2	-7,63	-1,20	3,06
Cr21	-444,46	40,94	2636,16	Cr22	-20,96	-0,36	15,39
Tv1	-178,18	6,01	101,94	Tv2	-128,81	-35,05	88,79
Rv3	-132,07	-0,86	96,53	Rv4	-96,53	0,86	132,07
Cv23	-35,99	2,50	44,85	Cv24	-44,85	-2,50	35,99
Mv23	-16,66	3,31	29,51	Mv24	-29,51	-3,31	16,66

Tableau 3.6 : Les valeurs extrêmes et moyennes des courbes de la figure 3.12.

Les écarts E_i	Valeurs min	Valeurs moy	Valeurs max
E_1	-338,67	48,36	645,75
E_2	-24,31	-1,56	14,48
E_3	-134,71	4,95	110,39
E_4	-110,39	-4,95	134,71

Tableau 3.7 : Statistiques concernant les courbes illustrés à la Fig-3.13.

Considérons le cas des figures 3.14 et 3.15. Dans ce cas, la plate-forme se déplace à grande vitesse alors que le bras oscille avec une pulsation moyenne pendant que la longueur l_1 varie. Les termes C_{r2} sont très importants (presque confondus avec les couples nominaux) à cause de la vitesse

de la plate-forme ; les termes R_i sont également non-négligeables et s'amplifient avec l'augmentation de la longueur l_1 .

Quant à la plate-forme, les termes de couplage sont négligeables lorsque l_1 est inférieur à 0,6 mètres ; dans cet intervalle, les couples nominaux sont confondus avec les couples calculés sans intégration des termes de couplage (Fig-3.15) ; au-delà de cette limite, les termes de couplage commencent à devenir gênant et ils atteignent les mêmes grandeurs que les couples nominaux. Les valeurs limites de tous les termes de couplage et des couples nominaux sont présentées au tableau 3.8 ci-dessous ; des statistiques concernant les écarts entre les couples nominaux avec et sans intégration des termes de couplage sont présentées au tableau 3.9.

Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.	Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.
Tr1	-1.767,1	19,91	1.678,4	Tr2	-60,50	2,10	62,95
Rr1	-457,33	-11,96	468,25	Rr2	-14,31	-3,72	2,48
Cr21	-1.368,3	55,10	1.212,0	Cr22	-89,21	2,34	64,95
Tv1	-200,95	-21,03	132,46	Tv2	-278,62	-43,25	116,31
Rv3	-126,46	-8,25	112,34	Rv4	-112,34	8,25	126,46
Cv23	-114,86	-7,76	51,15	Cv24	-51,15	7,76	114,86
Mv23	-63,31	5,10	50,92	Mv24	-50,92	-5,10	63,31

Tableau 3.8 : Les valeurs extrêmes et moyennes des courbes de la figure 3.14.

Les écarts E_i	Valeurs min	Valeurs moy	Valeurs max
E1	-1.410,1	43,22	1.564,4
E2	-100,39	-1,38	58,77
E3	-101,26	-10,90	90,45
E4	-90,45	10,90	101,26

Tableau 3.9 : Statistiques concernant les courbes illustrés à la Fig-3.15.

3. Aspect inertiel :

Les figures 3.16 à 3.19 illustrent cet aspect. Aux figures 3.16 et 3.17, la plate-forme se déplace à une vitesse moyenne alors que le bras effectue des mouvements très rapides pendant que la masse de la dernière liaison augmente progressivement de 4 à 10Kg. On remarque que l'effet des mouvements du bras sur la plate-forme est très important ; les termes R_i ont le même ordre de

grandeur que les couples nominaux ; par conséquent, les écarts E_3 et E_4 sont considérables du début à la fin du mouvement. Concernant le bras manipulateur, les termes C_{r2} et R_r sont réduits au début (lorsque m_2 est inférieur à 6kg) puis ils augmentent avec l'augmentation de la charge. Les tableaux ci-dessous donnent des statistiques concernant ces figures.

Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.	Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.
Tr1	-407,50	36,42	362,86	Tr2	-53,15	-1,10	46,63
Rr1	-88,92	13,92	133,33	Rr2	-18,67	-1,66	9,17
Cr21	-248,21	22,38	406,28	Cr22	-19,40	-0,11	15,12
Tv1	-118,33	10,70	92,61	Tv2	-103,19	-31,92	71,91
Rv3	-68,47	2,32	55,00	Rv4	-55,00	-2,32	68,47
Cv23	-26,27	1,82	30,65	Cv24	-30,65	-1,82	26,27
Mv23	-11,36	1,69	18,72	Mv24	-18,72	-1,69	11,36

Tableau 3.10 : Les valeurs extrêmes et moyennes des courbes de la figure 3.16.

Les écarts E_i	Valeurs min	Valeurs moy	Valeurs max
E_1	-174,20	36,26	429,45
E_2	-26,98	-1,76	14,35
E_3	-75,77	5,84	66,79
E_4	-66,79	-5,84	75,77

Tableau 3.11 : Statistiques concernant les courbes illustrés à la Fig-3.17.

Aux figures 3.18 et 3.19, la plate-forme se déplace à grande vitesse alors que le bras effectue des oscillations de pulsation moyenne. A cause de la vitesse de la plate-forme, les termes C_{r2} sont très importants et sont presque confondus avec les couples nominaux ; les écarts E_1 et E_2 sont considérables du début à la fin du mouvement.

L'effet du mouvement du bras sur la plate-forme est par contre négligeable au début ; les couples nominaux T_{v1} et T_{v2} sont presque confondus avec les couples calculés sans intégration des termes de couplage jusqu'à ce que la masse m_2 atteigne les 8kg ; au-delà de cette limite, les termes de couplage sont très gênants. Des statistiques concernant ces figures sont données aux tableaux 3.12 et 3.13 ci-dessous.

Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.	Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.
Tr1	-1.016,6	0,81	934,92	Tr2	-63,10	1,06	56,32
Rr1	-283,83	0,90	243,90	Rr2	-47,47	-6,28	7,28
Cr21	-756,53	25,40	675,61	Cr22	-81,49	2,75	58,74
Tv1	-161,86	-5,70	133,78	Tv2	-231,99	-38,14	116,31
Rv3	-82,03	-6,25	60,81	Rv4	-60,81	6,25	82,03
Cv23	-65,48	-3,61	28,79	Cv24	-28,79	3,61	65,48
Mv23	-31,56	3,91	30,55	Mv24	-30,55	-3,91	31,56

Tableau 3.12 : Les valeurs extrêmes et moyennes des courbes de la figure 3.18.

Les écarts E_i	Valeurs min	Valeurs moy	Valeurs max
E1	-778,88	26,30	872,39
E2	-104,15	-3,53	45,13
E3	-67,09	-5,95	53,04
E4	-53,04	5,95	67,09

Tableau 3.13 : Statistiques concernant les courbes illustrés à la Figure 3.19.

4. Aspect géométrique et cinématique :

Dans ce cas, le système entier est soumis à des mouvements très rapides pendant que la longueur l_1 varie de 0.4 à 1 mètre. Tous les termes de couplage représentent un pourcentage très important par rapport aux couples nominaux dans ce cas. Le terme C_{r21} est à 80,89% de T_{r1} ; R_{r1} est à 21,44% ; le terme C_{r22} est à 97,79% de T_{r2} ; R_{r2} est à 27,55%.

Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.	Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.
Tr1	-1.267,2	150,70	1.794,6	Tr2	-45,30	1,57	75,50
Rr1	-299,41	15,86	356,94	Rr2	-20,77	0,02	12,51
Cr21	-1.320,3	120,62	1.156,3	Cr22	-46,32	1,77	71,81
Tv1	-248,01	13,47	179,27	Tv2	-289,93	-67,72	136,11
Rv3	-99,69	6,20	62,81	Rv4	-62,81	-6,20	99,69
Cv23	-75,23	2,51	58,35	Cv24	-58,35	-2,51	75,23
Mv23	-51,16	5,72	59,94	Mv24	-59,94	-5,72	51,16

Tableau 3.14 : Les valeurs extrêmes et moyennes des courbes de la figure 3.20.

Les écarts E_i	Valeurs min	Valeurs moy	Valeurs max
E_1	-1.161,3	136,43	1.474,3
E_2	-40,36	1,80	67,93
E_3	-158,61	14,44	173,93
E_4	-173,93	-14,44	158,61

Tableau 3.15 : Statistiques concernant les courbes illustrés à la Figure 3.21.

Concernant la plate-forme, les écarts E_3 et E_4 qui regroupent tous les termes sont respectivement à 77,83% et 78,05% des couples T_{v1} et T_{v2} ; on remarque l'importance de ces écarts à la figure 3.21. Des statistiques concernant ces figures sont présentées aux tableaux 3.14 et 3.15 ci-dessus.

5. Aspect inertiel et cinématique :

Le système entier effectue des mouvements très rapides alors que la charge augmente. La figure 3.22 montre que les termes C_{r2} et R_r sont très importants par rapport aux couples nominaux ; les écarts E_1 et E_2 sont très importants du début à la fin du mouvement ; ils sont respectivement à 81,68% et 88,88% des couples T_{r1} et T_{r2} . La même remarque est valable pour les écarts E_3 et E_4 ; en terme de pourcentage, le terme R_{v3} est à 29,43% du couple T_{v1} , C_{v23} est à 22,35% et M_{v23} à 17,46%. Les valeurs limites de tous les termes de couplage, des couples nominaux et des écarts E_i sont données aux tableaux 3.16 et 3.17 ci-dessous.

Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.	Termes de couplage	Valeurs min.	Valeurs moy.	Valeurs max.
$Tr1$	-801,20	68,53	1.035,2	$Tr2$	-69,85	2,50	61,88
$Rr1$	-152,62	24,82	244,22	$Rr2$	-51,16	-0,40	26,90
$Cr21$	-785,14	59,65	882,13	$Cr22$	-45,34	1,53	67,69
$Tv1$	-177,01	14,58	172,75	$Tv2$	-225,70	-50,84	134,46
$Rv3$	-59,76	1,82	43,25	$Rv4$	-43,25	-1,82	59,76
$Cv23$	-46,14	1,86	32,02	$Cv24$	-32,02	-1,86	46,14
$Mv23$	-28,69	2,72	32,38	$Mv24$	-32,38	-2,72	28,69

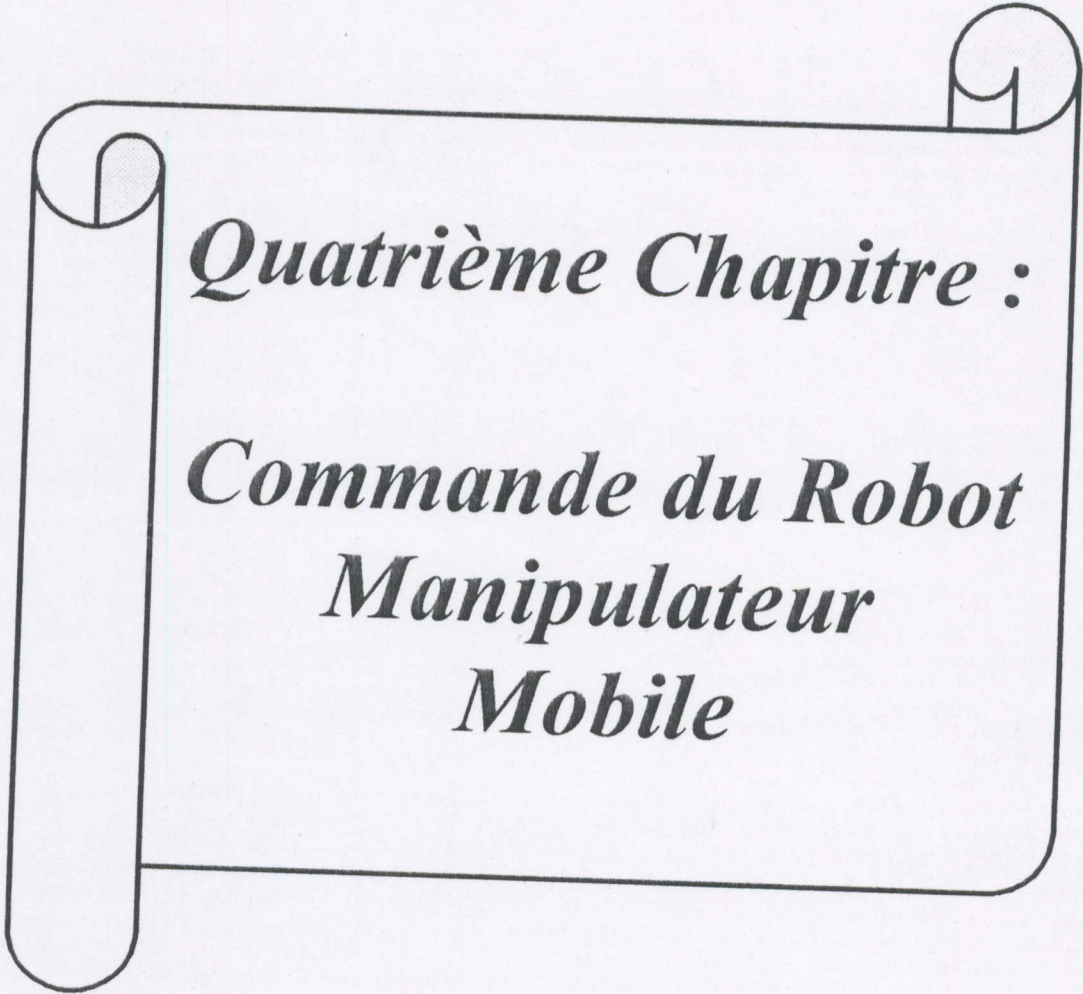
Tableau 3.16 : Les valeurs extrêmes et moyennes des courbes de la figure 3.22.

Les écarts E_i	Valeurs min	Valeurs moy	Valeurs max
E1	-656,97	84,47	842,96
E2	-56,89	1,12	60,19
E3	-85,42	6,39	99,26
E4	-99,26	-6,39	85,42

Tableau 3.17 : Statistiques concernant les courbes illustrés à la Figure 3.23.

VI. Conclusion :

Cette étude nous permis de conclure que les termes de couplage dynamique entre le bras manipulateur et la plate-forme mobile représentent un pourcentage très important du couple nominal du système. Ce pourcentage est directement lié à la vitesse d'évolution du système, à sa géométrie et à la charge transportée par l'organe terminal du manipulateur mobile ; les termes de couplage ont donc un caractère dynamique. Pour arriver à des performances acceptables en poursuite de trajectoires, il y a lieu de prévoir la compensation des ces termes ; en particulier, lorsqu'on exige du robot manipulateur mobile de la précision et de la rapidité dans l'exécution des tâches. Pour toutes ces raisons, nous envisageons aux chapitres suivants l'application d'une commande dynamique intégrant les termes de couplage.



Quatrième Chapitre :

*Commande du Robot
Manipulateur
Mobile*

I. Introduction :

Différents types de commandes ont été adoptés dans la littérature pour commander les manipulateurs mobiles. Ces commandes se résument en trois groupes chaque groupe étant divisible en sous-groupes suivant la méthodologie employée par la suite :

- Les commandes dynamiques :

Elles se basent sur l'utilisation du modèle dynamique du système mécanique et permettent de prendre en compte les forces d'interaction dynamique. Elles sont généralement obtenues avec les équations de Lagrange et les équations de Newton-Euler. Le problème de ce type de commande est la difficulté de l'obtention du modèle dynamique car ce dernier est basé sur des artifices de calcul puissants et le temps de calcul pour une application temps réel.

- Les commandes cinématique :

Ce sont des commandes en position ou en vitesse ; elles s'obtiennent généralement par le calcul du MDD (Modèle Différentiel Direct) ; les consignes en position et en vitesse s'obtiennent par la méthode de pseudo-inverse ou inverse généralisée. Elles s'obtiennent également par interpolation polynomiale des coordonnées et vitesses généralisées entre deux configurations successives proches et connues. Ces commandes sont adoptées lorsque les mouvements désirés sont à faibles vitesses (la dynamique du système n'est pas considérée).

- Les commandes en effort :

Ce type de commande est favorisé lors de l'exécution des tâches impliquant des interactions entre l'organe terminal du robot et son environnement. Le système doit être équipé de capteurs d'effort.

Dans le chapitre précédent, on a vu que les termes de couplage dynamique sont loin d'être négligeables. Ils sont en effet très gênants surtout lorsque les déplacements désirés sont rapides. Dans ces conditions, un asservissement classique à gains fixes ne permet pas de maintenir les performances du système. Il y a lieu de prendre en compte la dynamique du système caractérisée par des équations différentielles de seconde ordre, non-linéaires et fortement couplées. La commande basée sur le modèle dynamique du système mécanique est dite *commande dynamique*. L'utilisation de ce modèle dynamique est défavorisée par la difficulté de son implantation du point de vue temps de calcul. Cependant, à l'heure actuelle, cette solution est plus qu'envisageable dans la mesure où l'emploi du modèle dynamique est facilité par :

- L'évolution technologique en micro-informatique.
- L'évolution technologique des robots mobiles et des robots manipulateurs eux même.
- Le développement de la recherche en matière de modélisation et d'estimation.

La commande dynamique représente une solution originale dans la mesure où elle prévoit la compensation de tous les phénomènes dynamiques agissant sur le système robot manipulateur mobile.

Cependant, nous prévoyant un compensateur PD pour réguler les phénomènes perturbateurs externes. Les variations des différentes grandeurs (inertie d'accélération, inertie de couplage, efforts de Coriolis et forces centrifuges) étant compensées par la partie dynamique, les gains du correcteur PD seront moins élevés, et par conséquent, les problèmes de conservation des propriétés de stabilité ne se poseront pas.

En vue d'évaluer la robustesse de cette loi de commande, nous considérons des structures mécaniques de complexité croissante. On passera du système pendule inversé mobile présenté au chapitre précédent à un manipulateur mobile constitué d'une plate-forme non-holonome à deux roues motrices (donc deux entrées) et d'un bras manipulateur à deux degrés de liberté (deux entrées également).

Pour pouvoir qualifier les performances de cette commande, on va tout d'abord appliquer une commande PID classique aux deux systèmes mécaniques considérés. Les résultats obtenus par celle-ci seront comparés aux résultats qui seront obtenus par la commande dynamique.

Modèle Mathématique du Pendule Inversé Mobile :

Les équations de mouvement du pendule inversé mobile présentées au chapitre précédent sont des équations différentielles de seconde ordre en θ et en x (le déplacement angulaire du pendule et le déplacement linéaire du chariot respectivement) ; le vecteur d'état du système est donc de dimension quatre : $X = (\theta \quad \dot{\theta} \quad x \quad \dot{x})^T$. On a alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta} = X(2) \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = f_1(U_p, U_c, \theta, \dot{\theta}, \dot{x}) \\ \dot{x}_3 = \dot{x} = X(4) \\ \dot{x}_4 = \ddot{x} = f_2(U_c, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dot{x}) \end{cases}$$

II.1 Commande PID classique :

La commande classique consiste à asservir la valeur réelle d'une variable d'état (ou de la coordonnée généralisée) à la valeur désirée (la consigne) de cette même variable (ou coordonnée généralisée). Le correcteur considéré ici est de type proportionnel intégral dérivé (PID).

Pour ce système, les lois de commande sont données par :

$$U_p = K_{PP} e_\theta(t) + K_{PD} \dot{e}_\theta(t) + K_{PI} \int e_\theta(t) dt \quad (4.1)$$

$$U_c = K_{CP} e_x(t) + K_{CD} \dot{e}_x(t) + K_{CI} \int e_x(t) dt \quad (4.2)$$

où : K_{PP} , K_{CP} sont les constantes de gain proportionnelles pour le pendule et le chariot respectivement ; K_{PD} , K_{CD} sont les constantes de gain des dérivateurs et K_{PI} , K_{CI} sont les constantes de gain des intégrateurs; avec :

$$e_{\theta}(t) = \theta_c(t) - \theta(t) \quad (4.3)$$

$$\dot{e}_{\theta}(t) = \dot{\theta}_c(t) - \dot{\theta}(t) \quad (4.4)$$

$$e_x(t) = x_c(t) - x(t) \quad (4.5)$$

$$\dot{e}_x(t) = \dot{x}_c(t) - \dot{x}(t) \quad (4.6)$$

Dans les équations (4.3) à (4.6) ; $\theta_c(t)$ et $\dot{\theta}_c(t)$ sont la consigne de position angulaire du pendule et sa dérivée, $x_c(t)$ et $\dot{x}_c(t)$ sont les consignes position et vitesse du déplacement linéaire du chariot.

L'organigramme de cette loi de commande est représenté à la Fig-4.1 ci-dessous ; et le schéma bloc du pendule inversé mobile avec son contrôleur PID classique est celui de la figure 4.2.

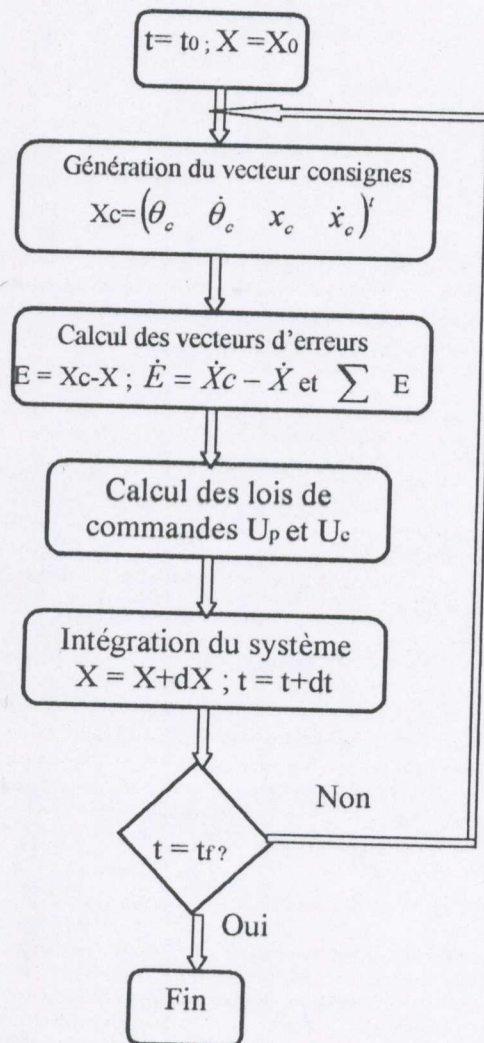


Fig-4.1 : Organigramme de la commande PID classique appliquée au pendule inversé mobile.

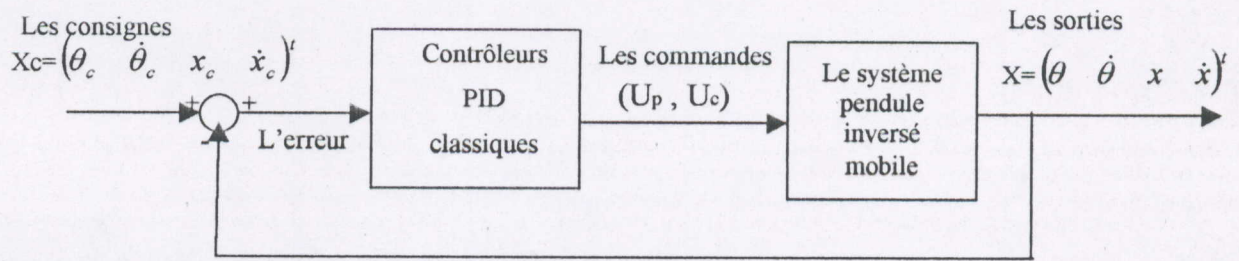


Fig-4.2: Schéma bloc du pendule inversé mobile avec le contrôleur PID classique.

II.2 Commande dynamique :

La loi de commande dynamique est obtenue à partir du modèle dynamique du système considéré. A partir des équations différentielles du pendule inversé mobile décrites au chapitre précédent (équations 3.14 et 3.15), on établit les lois de commande comme suit :

$$U_p = \mu_p \dot{\theta} + (I + ml^2) \ddot{\theta} - ml\ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta \quad (4.7)$$

$$U_c = \mu_c \text{sign}(\dot{x}) + (M + m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta} \cos \theta + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (4.8)$$

L'algorithme de cette loi de commande est représenté à la Fig-4.3 ci-dessous :

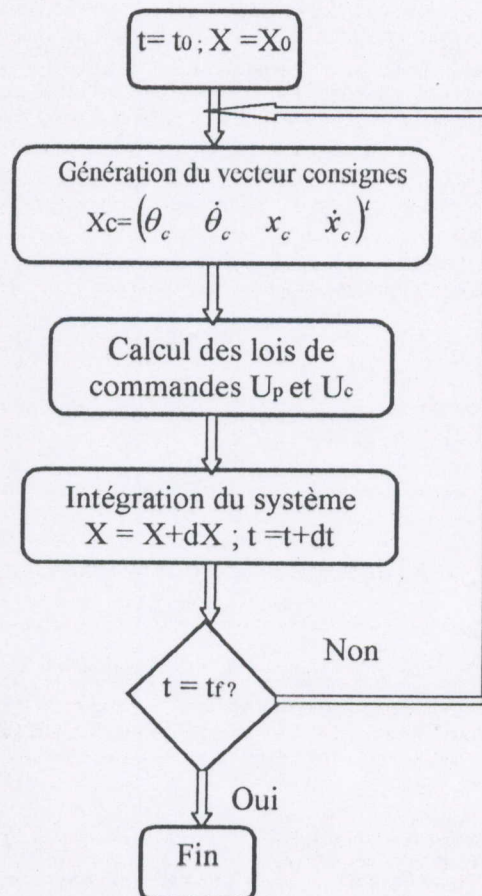


Fig-4.3 : Organigramme de la commande dynamique appliquée au pendule inversé mobile.

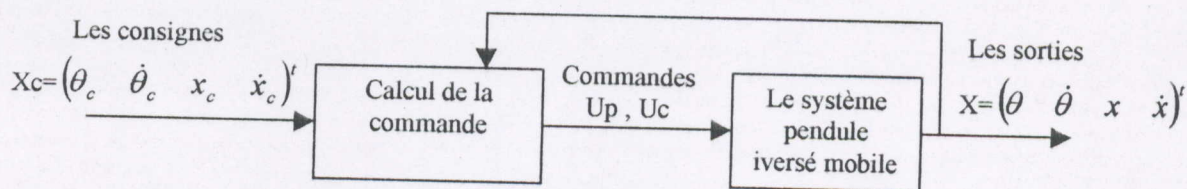


Fig-4.4 : Le schéma bloc du pendule inversé mobile avec la loi de commande dynamique.

II.3. Commande dynamique avec asservissement PD :

Pour remédier aux imperfections dus aux idéalizations de modélisation et aux perturbations externes, un asservissement proportionnel dérivé a été intégré à la commande dynamique. Les nouvelles lois de commande sont alors :

$$U_p = \mu_p \dot{\theta} + (I + ml^2)\ddot{\theta} - ml\ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta + K_{PP}(\theta_c(t) - \theta(t)) + K_{PD}(\dot{\theta}_c(t) - \dot{\theta}(t)); \quad (4.9)$$

$$U_c = \mu_r \text{sign}(\dot{x}) + (M + m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta} \cos \theta + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + K_{CP}(x_c(t) - x(t)) + K_{CD}(\dot{x}_c(t) - \dot{x}(t)); \quad (4.10)$$

Le schéma bloc représentant ce contrôleur est donné ci-dessous (Fig-4.5) et son organigramme est illustré à la figure 4.6.

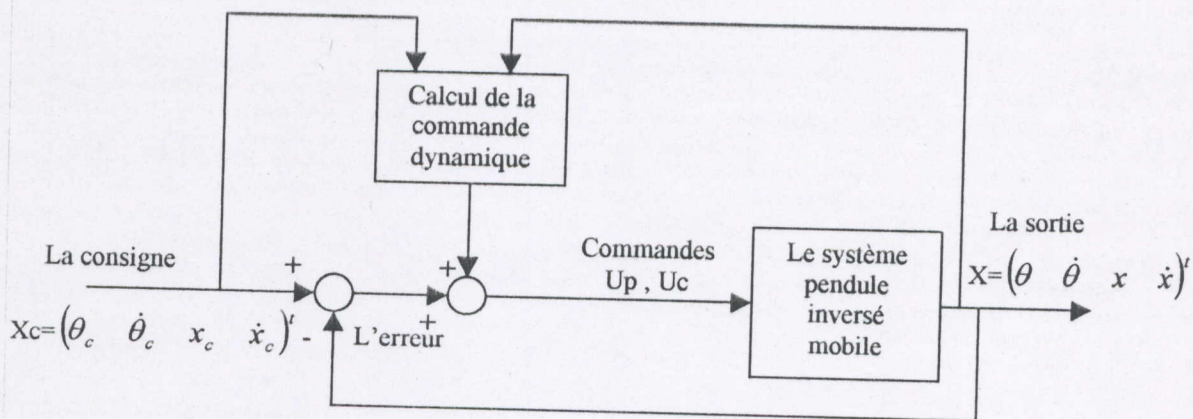


Fig-4.5 : Le schéma bloc de la loi de commande dynamique avec asservissement proportionnel et dérivé appliquée au pendule inversé mobile.

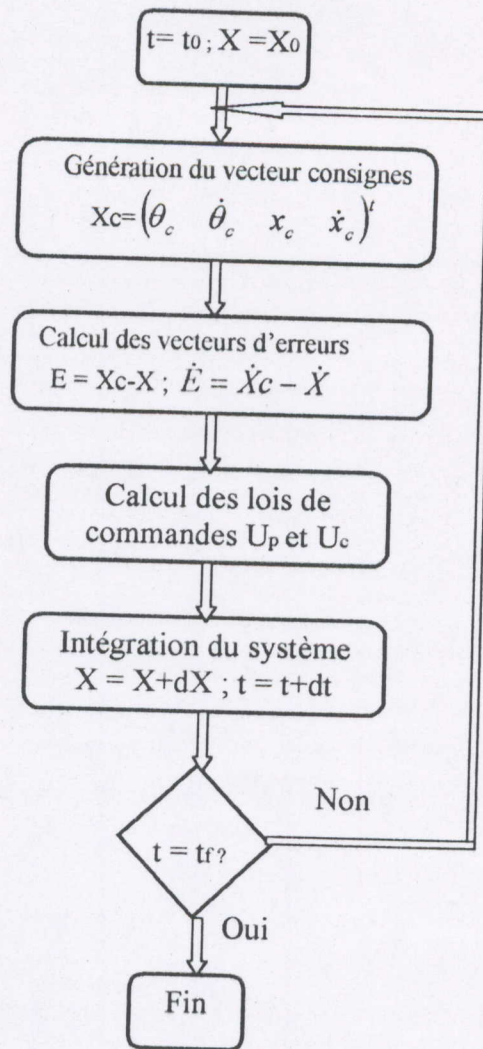


Fig-4.6 : Organigramme de la commande dynamique avec correction PD appliquée au pendule inversé mobile.

III. Cas du Robot Manipulateur Mobile :

Dans cette section, nous établissons les mêmes lois de commande citées précédemment pour le cas du manipulateur mobile. Pour cela, on va tout d'abord expliciter les équations différentielles décrivant l'état du système à partir des équations matricielles présentées au chapitre deux :

$$M_r^{i,j} \ddot{q}_r^j + C_{r1}^i + C_{r2}^i = \tau_r^i - R_r^{i,k} \dot{q}_v^k$$

$$M_{v1}^{m,k} \ddot{q}_v^k + C_{v1}^m + C_{v2}^m = E_v \tau_v - A^t \lambda - M_{v2}^{m,k} \ddot{q}_v^k - R_v^{m,j} \dot{q}_r^j \quad i,j = 1,2 ; m,k = 1,4.$$

où $q_r^j = (\theta_1 \ \theta_2)^t$ vecteur des coordonnées généralisées du bras manipulateur, q_v^k est défini par l'équation 2.31, les matrices d'inertie M_r, M_{v1}, R_r, M_{v2} et R_v sont données par les équations 2.16, 2.40, 2.45, 2.48 et 2.50 respectivement, les coefficients des efforts de Coriolis et Centrifuges C_{r1}, C_{v1}, C_{r2} et C_{v2} sont ceux définis par 2.17, 2.41, 2.44 et 2.49 respectivement, $\tau_r = (T_{r1} \ T_{r2})^t$ est le

vecteur des couples appliqués aux liaisons du manipulateur et $\tau_v = (T_{v1} \ T_{v2})'$ est le vecteur des couples appliqués aux roues droite et gauche de la plate-forme mobile respectivement.

Une forme plus explicite de ces équations est la suivante :

$$M_r^{1,1}\ddot{\theta}_1 + M_r^{1,2}\ddot{\theta}_2 + C_{r1}^1 + C_{r2}^1 = T_{r1} - R_r^{1,1}\ddot{x}_0 - R_r^{1,2}\ddot{y}_0 - R_r^{1,3}\ddot{\theta}_r - R_r^{1,4}\ddot{\theta}_l \quad (4.11)$$

$$M_r^{2,1}\ddot{\theta}_1 + M_r^{2,2}\ddot{\theta}_2 + C_{r1}^2 + C_{r2}^2 = T_{r2} - R_r^{2,1}\ddot{x}_0 - R_r^{2,2}\ddot{y}_0 - R_r^{2,3}\ddot{\theta}_r - R_r^{2,4}\ddot{\theta}_l \quad (4.12)$$

$$M_{v1}^{1,1}\ddot{x}_0 + M_{v1}^{1,2}\ddot{y}_0 + M_{v1}^{1,3}\ddot{\theta}_r + M_{v1}^{1,4}\ddot{\theta}_l + C_{v1}^1 + C_{v2}^1 = \sin\phi\lambda_1 + \cos\phi\lambda_2 - M_{v2}^{1,1}\ddot{x}_0 - M_{v2}^{1,2}\ddot{y}_0 - M_{v2}^{1,3}\ddot{\theta}_r - M_{v2}^{1,4}\ddot{\theta}_l - R_v^{1,1}\ddot{\theta}_1 - R_v^{1,2}\ddot{\theta}_2 \quad (4.13)$$

$$M_{v1}^{2,1}\ddot{x}_0 + M_{v1}^{2,2}\ddot{y}_0 + M_{v1}^{2,3}\ddot{\theta}_r + M_{v1}^{2,4}\ddot{\theta}_l + C_{v1}^2 + C_{v2}^2 = -\cos\phi\lambda_1 + \sin\phi\lambda_2 - M_{v2}^{2,1}\ddot{x}_0 - M_{v2}^{2,2}\ddot{y}_0 - M_{v2}^{2,3}\ddot{\theta}_r - M_{v2}^{2,4}\ddot{\theta}_l - R_v^{2,1}\ddot{\theta}_1 - R_v^{2,2}\ddot{\theta}_2 \quad (4.14)$$

$$M_{v1}^{3,1}\ddot{x}_0 + M_{v1}^{3,2}\ddot{y}_0 + M_{v1}^{3,3}\ddot{\theta}_r + M_{v1}^{3,4}\ddot{\theta}_l + C_{v1}^3 + C_{v2}^3 = T_{v1} - cb\lambda_2 - M_{v2}^{3,1}\ddot{x}_0 - M_{v2}^{3,2}\ddot{y}_0 - M_{v2}^{3,3}\ddot{\theta}_r - M_{v2}^{3,4}\ddot{\theta}_l - R_v^{3,1}\ddot{\theta}_1 - R_v^{3,2}\ddot{\theta}_2 \quad (4.15)$$

$$M_{v1}^{4,1}\ddot{x}_0 + M_{v1}^{4,2}\ddot{y}_0 + M_{v1}^{4,3}\ddot{\theta}_r + M_{v1}^{4,4}\ddot{\theta}_l + C_{v1}^4 + C_{v2}^4 = T_{v2} - cb\lambda_2 - M_{v2}^{4,1}\ddot{x}_0 - M_{v2}^{4,2}\ddot{y}_0 - M_{v2}^{4,3}\ddot{\theta}_r - M_{v2}^{4,4}\ddot{\theta}_l - R_v^{4,1}\ddot{\theta}_1 - R_v^{4,2}\ddot{\theta}_2 \quad (4.16)$$

Les expressions analytiques détaillées des éléments des différentes matrices d'inertie et des différents termes des efforts centrifuge et de Coriolis sont explicitées en annexe (A).

III.1 Commande PID classique :

Le manipulateur mobile possède quatre commandes en entrée. Ceci nécessite quatre contrôleurs PID décentralisés explicités comme suit :

$$T_{r1} = K_{p1}(\theta_{1c}(t) - \theta_1(t)) + K_{v1}(\dot{\theta}_{1c}(t) - \dot{\theta}_1(t)) + K_{i1} \int (\theta_{1c}(t) - \theta_1(t)) dt \quad (4.17)$$

$$T_{r2} = K_{p2}(\theta_{2c}(t) - \theta_2(t)) + K_{v2}(\dot{\theta}_{2c}(t) - \dot{\theta}_2(t)) + K_{i2} \int (\theta_{2c}(t) - \theta_2(t)) dt \quad (4.18)$$

$$T_{v1} = K_{p3}(\theta_{rc}(t) - \theta_r(t)) + K_{v3}(\dot{\theta}_{rc}(t) - \dot{\theta}_r(t)) + K_{i3} \int (\theta_{rc}(t) - \theta_r(t)) dt \quad (4.19)$$

$$T_{v2} = K_{p4}(\theta_{lc}(t) - \theta_l(t)) + K_{v4}(\dot{\theta}_{lc}(t) - \dot{\theta}_l(t)) + K_{i4} \int (\theta_{lc}(t) - \theta_l(t)) dt \quad (4.20)$$

(L'indice *c* signifie *consigne*).

où K_{pi} , K_{vi} et les K_{ii} sont les constantes de gains proportionnels, les gains des dérivateurs et les gains des intégrateurs respectivement.

L'organigramme de cette loi de commande est donné à la figure suivante (Fig-4.7) et les schémas blocs des quatre contrôleurs PID appliqués au manipulateur mobile sont présentés aux figures 4.8 à 4.10 :

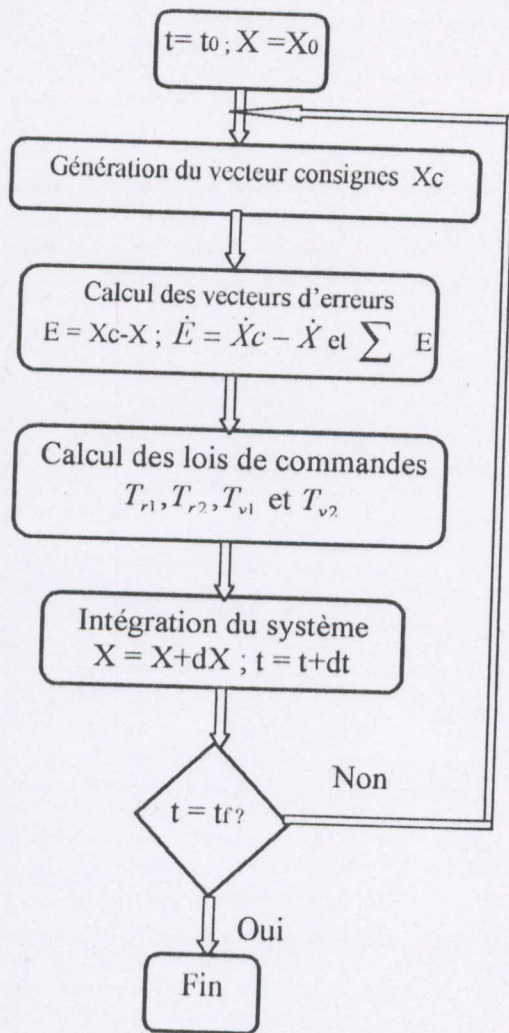


Fig-4.7 : Organigramme de la commande PID classique appliquée au manipulateur mobile.

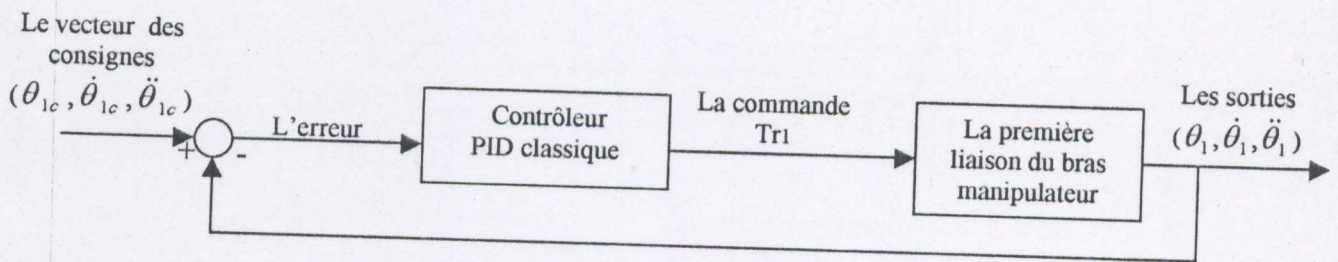


Fig-4.8 : Contrôleurs PID classique appliqué à la première liaison du bras manipulateur.

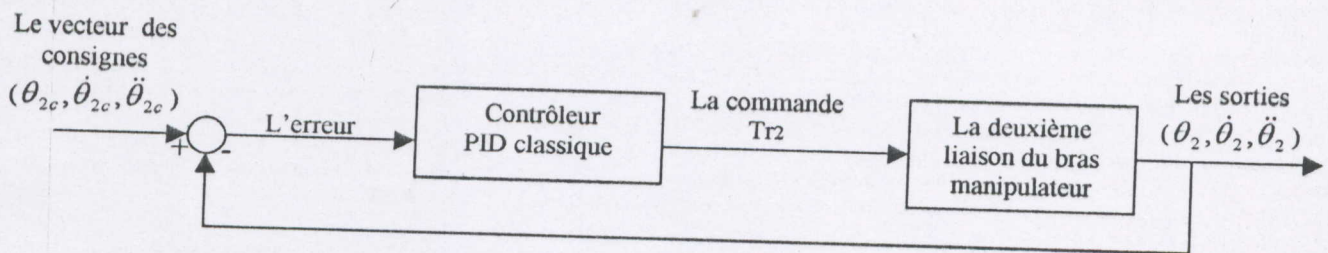


Fig-4.9 : Contrôleurs PID classique appliqué à la deuxième liaison du bras manipulateur.

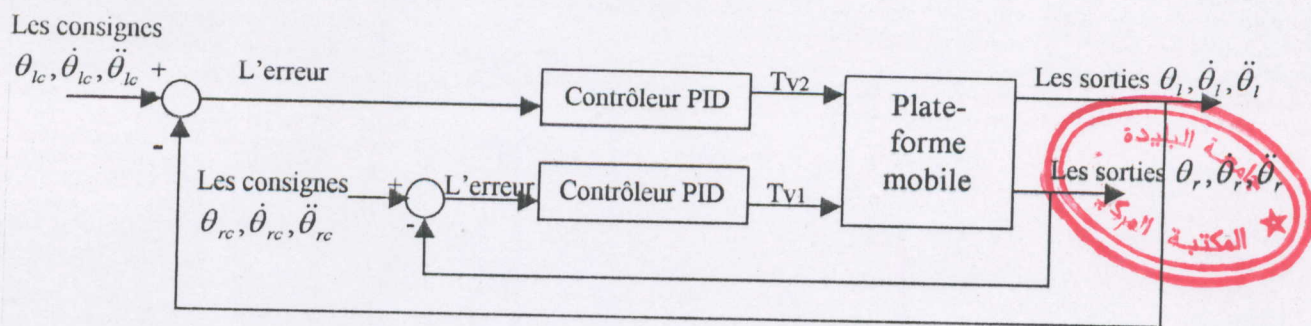


Fig-4.10 : Les deux contrôleurs PID classiques appliqués aux roues motrices droite et gauche de la plate-forme mobile

III.2 Commande dynamique :

Les lois de la commande dynamique se déduisent directement du modèle dynamique décrivant le système. Ce modèle est décrit par les équations (4.11) à (4.16) ; il faut bien sur remplacer l'accélération de chaque coordonnée par l'accélération de la consigne correspondante. Les lois de commande sont alors comme suit :

$$T_{r1} = M_r^{1,1} \ddot{\theta}_{1c} + M_r^{1,2} \ddot{\theta}_{2c} + C_{r1}^1 + C_{r2}^1 + R_r^{1,1} \ddot{x}_{0c} + R_r^{1,2} \ddot{y}_{0c} + R_r^{1,3} \ddot{\theta}_{rc} + R_r^{1,4} \ddot{\theta}_{lc} \quad (4.21)$$

$$T_{r2} = M_r^{2,1} \ddot{\theta}_{1c} + M_r^{2,2} \ddot{\theta}_{2c} + C_{r1}^2 + C_{r2}^2 + R_r^{2,1} \ddot{x}_{0c} + R_r^{2,2} \ddot{y}_{0c} + R_r^{2,3} \ddot{\theta}_{rc} + R_r^{2,4} \ddot{\theta}_{lc} \quad (4.22)$$

$$T_{v1} = (M_{v1}^{3,1} + M_{v2}^{3,1}) \ddot{x}_{0c} + (M_{v1}^{3,2} + M_{v2}^{3,2}) \ddot{y}_{0c} + (M_{v1}^{3,3} + M_{v2}^{3,3}) \ddot{\theta}_{rc} + (M_{v1}^{3,4} + M_{v2}^{3,4}) \ddot{\theta}_{lc} + C_{v1}^3 + C_{v2}^3 + cb\lambda_2 + R_v^{3,1} \ddot{\theta}_{1c} + R_v^{3,2} \ddot{\theta}_{2c} \quad (4.23)$$

$$T_{v2} = (M_{v1}^{4,1} + M_{v2}^{4,1}) \ddot{x}_{0c} + (M_{v1}^{4,2} + M_{v2}^{4,2}) \ddot{y}_{0c} + (M_{v1}^{4,3} + M_{v2}^{4,3}) \ddot{\theta}_{rc} + (M_{v1}^{4,4} + M_{v2}^{4,4}) \ddot{\theta}_{lc} + C_{v1}^4 + C_{v2}^4 + cb\lambda_2 + R_v^{4,1} \ddot{\theta}_{1c} + R_v^{4,2} \ddot{\theta}_{2c} \quad (4.24)$$

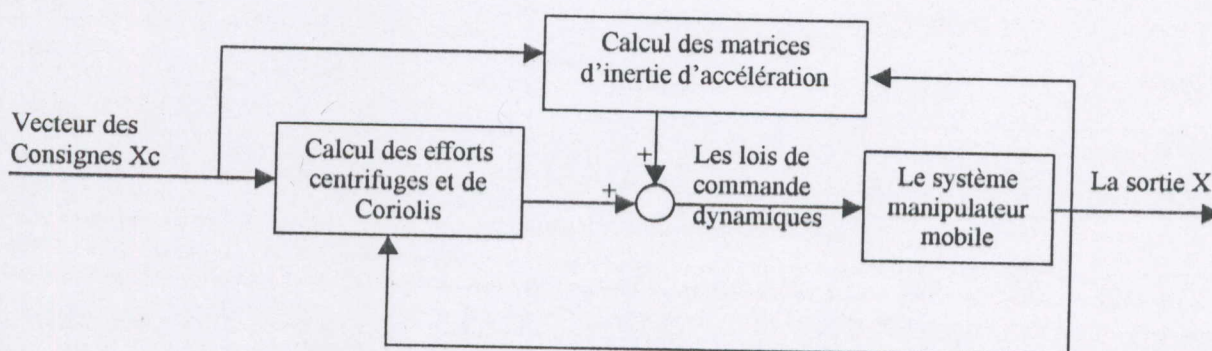


Fig-4.11 : Le schéma bloc du manipulateur mobile avec le contrôleur dynamique.

Le schéma bloc du contrôleur dynamique appliqué au manipulateur mobile est illustré ci-dessus et l'organigramme de cette loi de commande est et représenté à la figure 4.12.

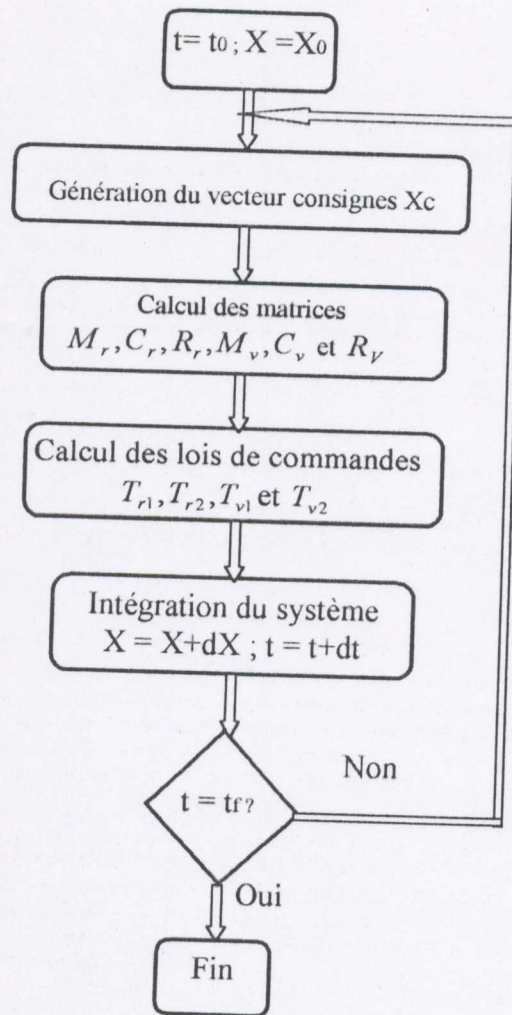


Fig-4.12 : Organigramme de la commande dynamique appliquée au manipulateur mobile.

III.3 Commande dynamique avec correction PD :

Pour minimiser les erreurs dus aux idéalizations et aux perturbations externes, on associe un ajustement proportionnel dérivé à la loi de commande dynamique. Par conséquent, les équations (4.21) à (4.24) décrivant les lois de commande dynamique deviennent :

$$T_{r1} = M_r^{1,1} \ddot{\theta}_{1c} + M_r^{1,2} \ddot{\theta}_{2c} + C_{r1}^1 + C_{r2}^1 + R_r^{1,1} \ddot{x}_{0c} + R_r^{1,2} \ddot{y}_{0c} + R_r^{1,3} \ddot{\theta}_{rc} + R_r^{1,4} \ddot{\theta}_{lc} + K_{p1} (\theta_{1c}(t) - \theta_1(t)) + K_{v1} (\dot{\theta}_{1c}(t) - \dot{\theta}_1(t)) \quad (4.25)$$

$$T_{r2} = M_r^{2,1} \ddot{\theta}_{1c} + M_r^{2,2} \ddot{\theta}_{2c} + C_{r1}^2 + C_{r2}^2 + R_r^{2,1} \ddot{x}_{0c} + R_r^{2,2} \ddot{y}_{0c} + R_r^{2,3} \ddot{\theta}_{rc} + R_r^{2,4} \ddot{\theta}_{lc} + K_{p2} (\theta_{2c}(t) - \theta_2(t)) + K_{v2} (\dot{\theta}_{2c}(t) - \dot{\theta}_2(t)) \quad (4.26)$$

$$T_{v1} = (M_{v1}^{3,1} + M_{v2}^{3,1}) \ddot{x}_{0c} + (M_{v1}^{3,2} + M_{v2}^{3,2}) \ddot{y}_{0c} + (M_{v1}^{3,3} + M_{v2}^{3,3}) \ddot{\theta}_{rc} + (M_{v1}^{3,4} + M_{v2}^{3,4}) \ddot{\theta}_{lc} + C_{v1}^3 + C_{v2}^3$$

$$+ cb\lambda_2 + R_v^{3,1}\ddot{\theta}_{1c} + R_v^{3,2}\ddot{\theta}_{2c} + K_{p3}(\theta_{rc}(t) - \theta_r(t)) + K_{v3}(\dot{\theta}_{rc}(t) - \dot{\theta}_r(t)) \quad (4.27)$$

$$T_{v2} = (M_{v1}^{4,1} + M_{v2}^{4,1})\ddot{x}_{0c} + (M_{v1}^{4,2} + M_{v2}^{4,2})\ddot{y}_{0c} + (M_{v1}^{4,3} + M_{v2}^{4,3})\ddot{\theta}_{rc} + (M_{v1}^{4,4} + M_{v2}^{4,4})\ddot{\theta}_{lc} + C_{v1}^4 + C_{v2}^4 + cb\lambda_2 + R_v^{4,1}\ddot{\theta}_{1c} + R_v^{4,2}\ddot{\theta}_{2c} + K_{p4}(\theta_{lc}(t) - \theta_l(t)) + K_{v4}(\dot{\theta}_{lc}(t) - \dot{\theta}_l(t)) \quad (4.28)$$

L'organigramme de cette loi de commande est présenté ci-dessous et son schéma de principe est illustré à la figure 4.14. Dans ce schéma, les blocs encadrés en pointillé constituent la partie dynamique de la commande.

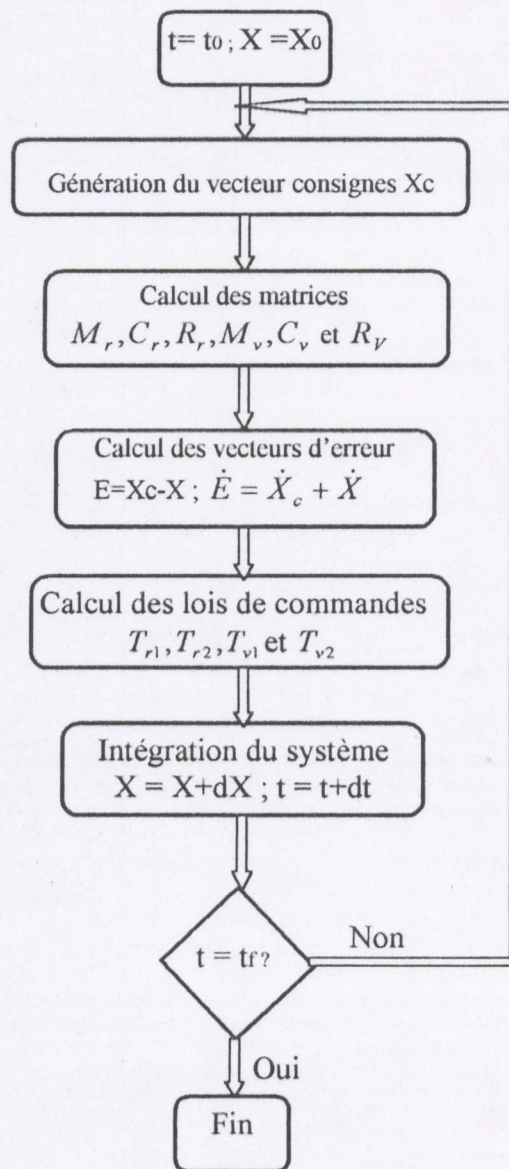


Fig-4.13 : Organigramme de la commande dynamique avec correction PD appliquée au manipulateur mobile.

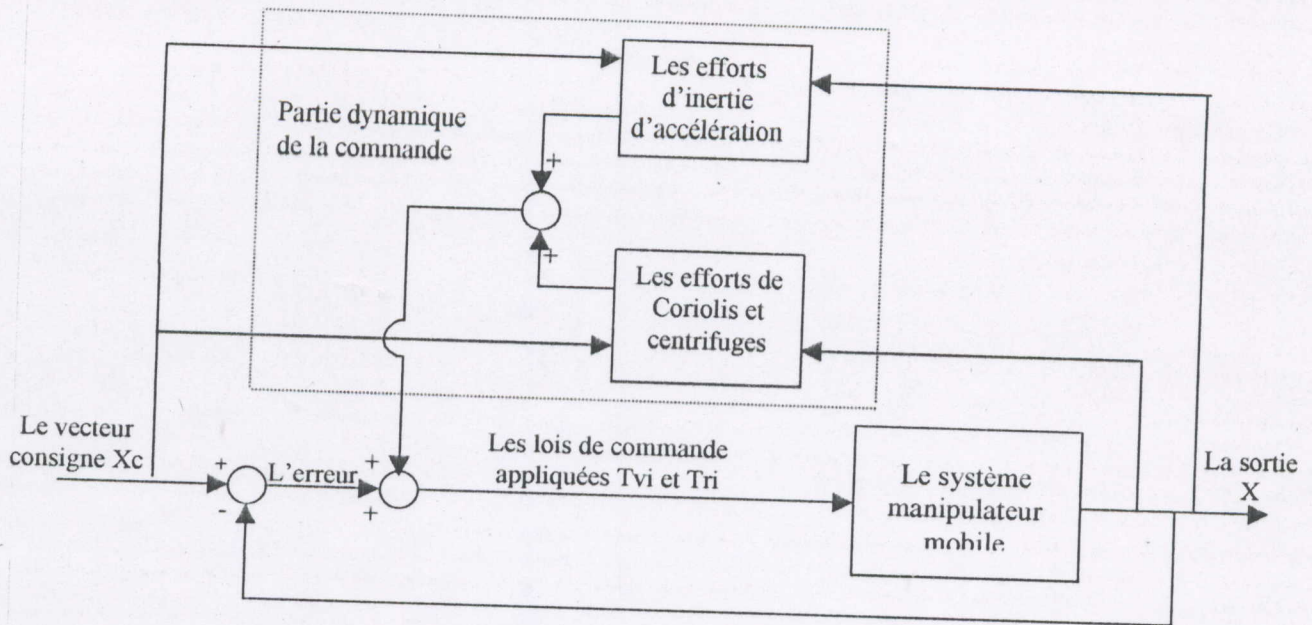


Fig-4.14 : Schéma de principe de la commande dynamique avec correcteurs PD appliquée au manipulateur mobile.

VI. Conclusion :

Afin de dégager une loi de commande capable de maintenir les performances du système même à grandes vitesses, nous avons été amenés à expliciter le modèle dynamique complet du manipulateur mobile afin de pouvoir élaborer les lois de commande dynamique.

Nous avons ensuite associé un correcteur proportionnel dérivé à la commande dynamique. La partie dynamique de la commande est chargée de la compensation de la quasi-totalité des efforts agissant sur le système mécanique (les efforts centrifuges et de Coriolis, les efforts d'inertie d'action et les efforts d'inertie d'interaction) ; le correcteur PD est chargé de la compensation des perturbations externes.

La simulation des deux manipulateurs mobiles considérés en appliquant les lois de commande susmentionnées pour les tâches de suivi de trajectoires fait l'objet du chapitre suivant.



Cinquième Chapitre :

Validation en Simulation

I. Introduction :

Nous décrivons dans ce chapitre les résultats obtenus avec les lois de commande définies au chapitre précédent appliquées au pendule inversé mobile et au manipulateur mobile. L'ensemble des lois de commande en question et les modèles dynamiques des systèmes mécaniques considérés sont simulés au moyen du logiciel *MATLAB*. Cette étude en simulation est l'objet du présent chapitre.

II. Cadre de la Simulation :

Les modèles dynamiques des structures mécaniques considérées sont des systèmes d'équations différentielles de seconde ordre non linéaires et couplées. Pour la simulation, on doit passer de l'utilisation des variables Lagrangiennes à l'utilisation des variables d'état pour avoir des équations différentielles de premier ordre de la forme :

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt} = f(t, X) \text{ avec les conditions initiales : } X(t_0) = X_0 ;$$

Pour l'intégration de ce système d'équations, l'algorithme de Runge-Kutta de quatrième ordre est utilisé. Cet algorithme est basé sur le développement de la série de Taylor qui est de la forme :

$$x(n+1) = x(n) + hx'(n) + h^2 x''(n) + \dots + h^n x^{(n)}(n) \quad (x^{(n)}(n) \text{ est la dérivée } n^{\text{ième}} \text{ de } x(n))$$

où : $x(n) = x(t_n)$ et $t_{n+1} = t_n + h$; h est le pas d'intégration.

Dans l'algorithme de Runge-Kutta, l'expression de $x(n+1)$ est remplacée par l'approximation :

$$x(n+1) = x(n) + (1/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec : $k_1 = h.f(t_n, x(n))$;

$$k_2 = h.f(t_n + \frac{1}{2}h, x(n) + \frac{1}{2}k_1) ;$$

$$k_3 = h.f(t_n + \frac{1}{2}h, x(n) + \frac{1}{2}k_2) ;$$

$$k_4 = h.f(t_n + h, x(n) + k_3) ;$$

$x(1), x(2), \dots, x(n), x(n+1)$ sont calculés pas à pas (le pas est h).

Le schéma bloc de la simulation est le suivant :

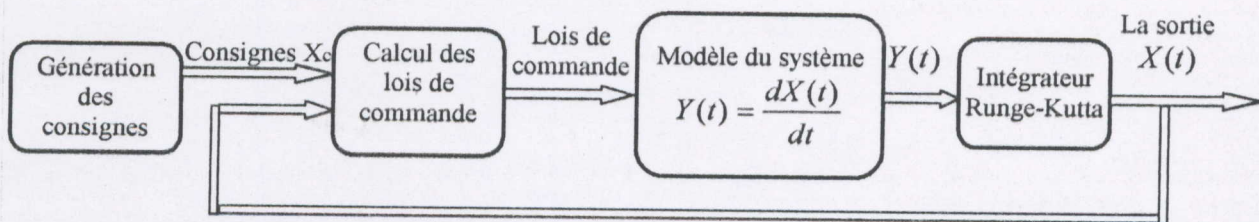


Fig-5.1 : Schéma global de la simulation.

Le modèle du pendule inversé mobile est un système d'ordre quatre défini par les équations suivantes :

$$Y(1) = \dot{\theta} = X(2) ;$$

$$Y(2) = \ddot{\theta} = f_1(t, X(t)) ;$$

$$Y(3) = \dot{x} = X(4) ;$$

$$Y(4) = \ddot{x} = f_2(t, X(t)) ;$$

Les expressions de $f_1(t, X(t))$ et $f_2(t, X(t))$ sont celles données au chapitre trois par les équations (3.16) et (3.17) respectivement. Les caractéristiques physiques de ce système sont fixées aux valeurs portées au tableau ci-dessous :

Paramètres	Valeurs	Unités
m	0.230	Kg
M	0.750	Kg
l	0.200	mètres
I	$ml^2/3$	Kg.m ²
μ_p	$2.\exp(-6)$	Kg.m ² /s
μ_r	$5.\exp(-4)$	Kg.m/s ²

Tableau 5.1 : Les caractéristiques physiques du pendule inversé mobile.

Le modèle dynamique du manipulateur mobile est un système à douze équations, son vecteur d'état $X(t)$ est défini comme suit :

$$X(t) = [q_{r1} \quad \dot{q}_{r1} \quad q_{r2} \quad \dot{q}_{r2} \quad x_0 \quad \dot{x}_0 \quad y_0 \quad \dot{y}_0 \quad \theta_r \quad \dot{\theta}_r \quad \theta_l \quad \dot{\theta}_l] ;$$

d'ou le vecteur $Y(t)$, $Y(t) = [\dot{q}_{r1} \quad \ddot{q}_{r1} \quad \dot{q}_{r2} \quad \ddot{q}_{r2} \quad \dot{x}_0 \quad \ddot{x}_0 \quad \dot{y}_0 \quad \ddot{y}_0 \quad \dot{\theta}_r \quad \ddot{\theta}_r \quad \dot{\theta}_l \quad \ddot{\theta}_l] ;$

Les équations à intégrer reliant ces deux vecteurs sont les suivantes :

$$Y(1) = \dot{\theta}_1 = X(2) ;$$

$$Y(2) = \ddot{\theta}_1 = (T_{r1} - M_r^{1,2}\ddot{\theta}_2 - C_{r1}^1 - C_{r2}^1 - R_r^{1,1}\ddot{x}_0 - R_r^{1,2}\ddot{y}_0 - R_r^{1,3}\ddot{\theta}_r - R_r^{1,4}\ddot{\theta}_l) / M_r^{1,1} ;$$

$$Y(3) = \dot{\theta}_2 = X(4) ;$$

$$Y(4) = \ddot{\theta}_2 = (T_{r2} - M_r^{2,1}\ddot{\theta}_1 - C_{r1}^2 - C_{r2}^2 - R_r^{2,1}\ddot{x}_0 - R_r^{2,2}\ddot{y}_0 - R_r^{2,3}\ddot{\theta}_r - R_r^{2,4}\ddot{\theta}_l) / M_r^{2,2} ;$$

$$Y(5) = \dot{x}_0 = X(6) ;$$

$$Y(6) = \ddot{x}_0 = (-M_{v1}^{1,2}\ddot{y}_0 - M_{v1}^{1,3}\ddot{\theta}_r - M_{v1}^{1,4}\ddot{\theta}_l - C_{v1}^1 - C_{v2}^1 + \sin \phi \lambda_1 + \cos \phi \lambda_2 - M_{v2}^{1,2}\ddot{y}_0 - M_{v2}^{1,3}\ddot{\theta}_r - M_{v2}^{1,4}\ddot{\theta}_l - R_v^{1,1}\ddot{\theta}_1 - R_v^{1,2}\ddot{\theta}_2) / (M_{v1}^{1,1} + M_{v2}^{1,1}) ;$$

$$Y(7) = \dot{y}_0 = X(8) ;$$

$$Y(8) = \ddot{y}_0 = (-M_{v1}^{2,1}\ddot{x}_0 - M_{v1}^{2,3}\ddot{\theta}_r - M_{v1}^{2,4}\ddot{\theta}_l - C_{v1}^2 - C_{v2}^2 - \cos\phi\lambda_1 + \sin\phi\lambda_2 - M_{v2}^{2,1}\ddot{x}_0 - M_{v2}^{2,3}\ddot{\theta}_r - M_{v2}^{2,4}\ddot{\theta}_l - R_v^{2,1}\ddot{\theta}_1 - R_r^{2,2}\ddot{\theta}_2)/(M_{v1}^{2,2} + M_{v2}^{2,2}) ;$$

$$Y(9) = \dot{\theta}_r = X(10) ;$$

$$Y(10) = \ddot{\theta}_r = (T_{v1} - M_{v1}^{3,1}\ddot{x}_0 - M_{v1}^{3,2}\ddot{y}_0 - M_{v1}^{3,4}\ddot{\theta}_l - C_{v1}^3 - C_{v2}^3 - cb\lambda_2 - M_{v2}^{3,1}\ddot{x}_0 - M_{v2}^{3,2}\ddot{y}_0 - M_{v2}^{3,4}\ddot{\theta}_l - R_v^{3,1}\ddot{\theta}_1 - R_v^{3,2}\ddot{\theta}_2)/(M_{v1}^{3,3} + M_{v2}^{3,3}) ;$$

$$Y(11) = \dot{\theta}_l = X(12) ;$$

$$Y(12) = \ddot{\theta}_l = (T_{v2} - M_{v1}^{4,1}\ddot{x}_0 - M_{v1}^{4,2}\ddot{y}_0 - M_{v1}^{4,3}\ddot{\theta}_r - C_{v1}^4 - C_{v2}^4 - cb\lambda_2 - M_{v2}^{4,1}\ddot{x}_0 - M_{v2}^{4,2}\ddot{y}_0 - M_{v2}^{4,3}\ddot{\theta}_r - R_v^{4,1}\ddot{\theta}_1 - R_v^{4,2}\ddot{\theta}_2)/(M_{v1}^{4,4} + M_{v2}^{4,4}) ;$$

Les expressions analytiques des termes d'inertie et des forces centrifuges et de Coriolis en fonction des paramètres géométriques et inertiels du manipulateur mobile sont explicitées en annexe(A). Pour cette simulation, ces paramètres sont fixés aux valeurs portées aux tableaux suivants :

Paramètres	Valeurs	Unités
b	0.171	mètres
r	0.075	mètres
m_c	94.0	Kg
m_w	5.0	Kg
I_c	6.609	Kg.m ²
I_w	0.010	Kg.m ²
I_m	0.135	Kg.m ²

Tableau 5.2 : Caractéristiques de la plate-forme.

Paramètres	Longueur de la liaison [m]	Masse de la liaison [Kg]	Centre de masse de la liaison [m]	Moment d'inertie [Kg.m ²]
N° de la liaison				
1	0.4	4.0	0.2	0.0533
2	0.4	4.0	0.2	0.0533

Tableau 5.3 : Caractéristiques du bras manipulateur.

III. Résultats de simulation :

III.1 Pendule inversé mobile : Le comportement du pendule inversé mobile vis à vis des variations des vitesses d'évolution et des variations de la masse du pendule est étudié. On imposera en

premier temps au pendule inversé mobile des mouvements relativement lents ; les consignes correspondantes sont les suivantes :

$$\theta_c(t) = \sin(5t + 0.1) ; \text{ et } x_c(t) = -2t^3 + 6t^2 + 2 ;$$

Puis dans un second temps, des mouvements plus rapides seront imposés ; les consignes correspondantes sont alors :

$$\theta_c(t) = \sin(20t + 0.1) \text{ et } x_c(t) = 5(-2t^3 + 6t^2 + 2) ;$$

et enfin, en gardant les consignes correspondantes aux mouvements rapides, on imposera au système une perturbation inertielle caractérisée par l'augmentation linéaire de la masse du pendule de sa valeur initiale égale à 0.230kg à une valeur de 1,730kg pendant la durée du mouvement ; ce cas là représente les conditions les plus défavorables.

Cette étude est effectuée pour les deux types de commande :

- **Commande PID :** Dans le but de s'arrêter sur ses limites, la commande PID classique est appliquée au pendule inversé mobile pour les trois situations décrites ci-dessus. Les lois de cette commande sont celles décrites au chapitre quatre par les équations (4.1) et (4.2). Après plusieurs essais, on a fixé les constantes de gains aux valeurs suivantes :

$$\begin{array}{lll} K_{PP} = 4 & K_{PD} = 2 & K_{PI} = 1 \text{ pour le pendule ;} \\ \text{et } K_{CP} = 8 & K_{CD} = 4 & K_{CI} = 2 \text{ pour le chariot.} \end{array}$$

Les courbes représentant l'évolution des sorties du pendule inversé ainsi que les erreurs absolues sur ces sorties sont présentées aux figures 5.2 à 5.4.

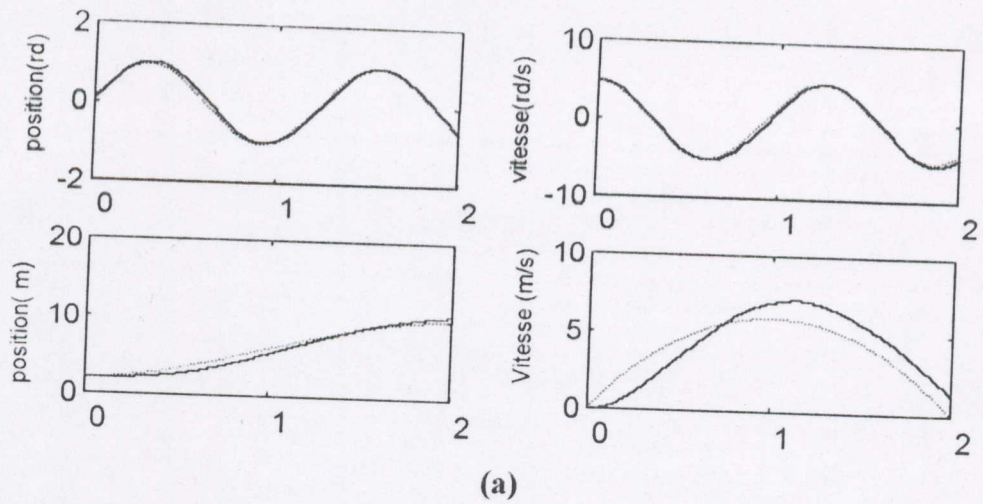
Interprétations :

La figure 5.2 montre qu'un PID assure au pendule une poursuite de trajectoire avec un certain taux d'erreur lorsque les consignes imposées sont à faibles vitesses ; tandis que le résultat obtenu pour le chariot est dégradé.

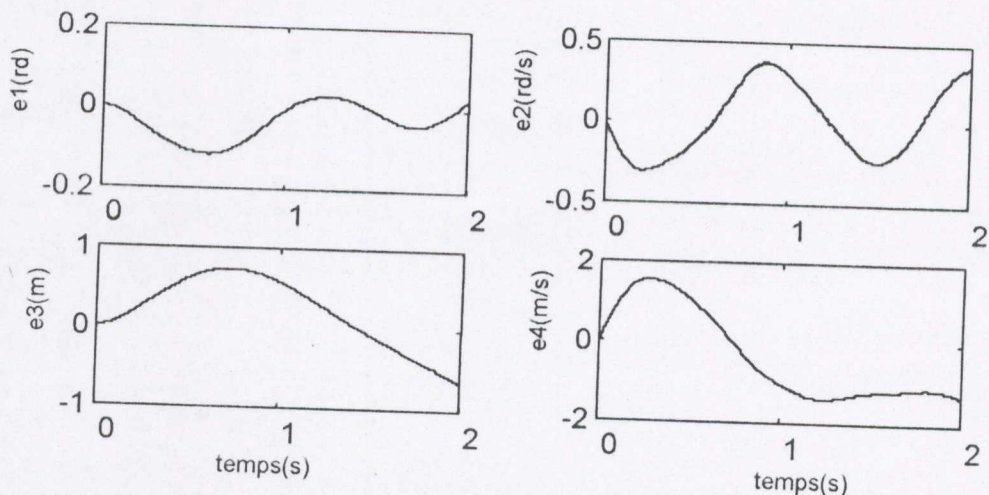
Lorsque les consignes imposées sont à vitesses élevées (Fig-5.3), les erreurs de poursuite augmentent remarquablement pour le pendule ainsi que pour le chariot ; le tableau 5.4 porte les valeurs moyennes et extrêmes des erreurs absolues commises sur les sorties du pendule inversé.

Les erreurs	Evolution à faibles vitesses			Evolution à vitesses élevées			Avec perturbation inertielle		
	min	Moy	max	min	moy	max	min	moy	max
$\theta_c - \theta$	-0,12	-0,03	0,03	-0,39	-0,10	0,30	-1,27	-0,30	1,21
$\dot{\theta}_c - \dot{\theta}$	-0,31	0,02	0,38	-2,49	0,11	2,90	-10,42	1,00	14,90
$x_c - x$	-0,65	0,20	0,73	-3,51	0,99	3,44	-6,06	1,35	4,61
$\dot{x}_c - \dot{x}$	-1,39	-0,35	1,56	-7,78	-1,86	7,53	-17,59	-2,06	8,45

Tableau 5.4 : Résultats comparatifs du pendule inversé mobile (commande PID).



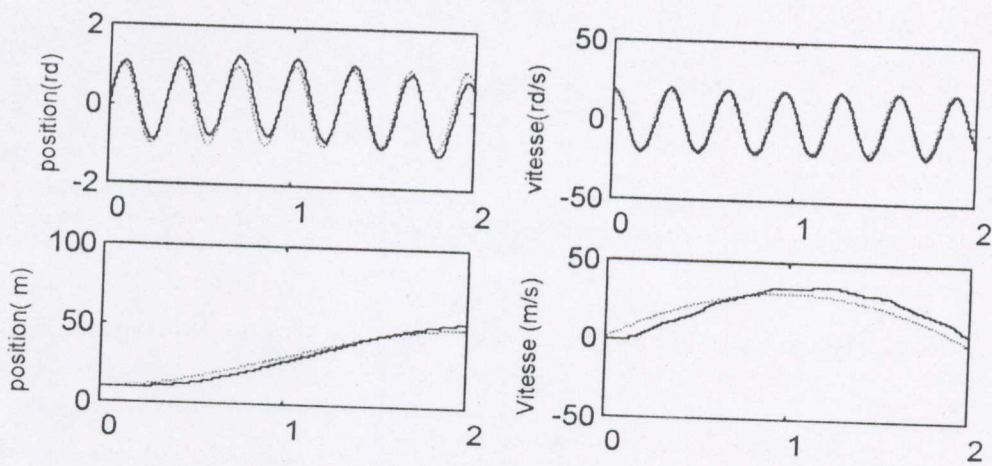
(a)



(b)

Fig-5.2 : Les sorties (a) et les erreurs sur les sorties (b) du pendule inversé mobile dans le cas d'une consigne à faibles vitesses (commande PID).

Légende : Les consignes
 ——— Les sorties réelles



(a)

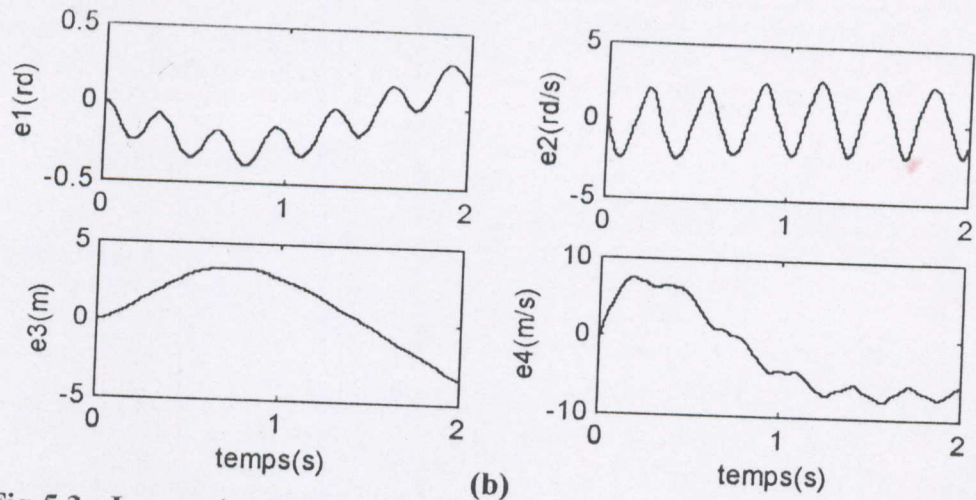


Fig-5.3 : Les sorties (a) et les erreurs sur les sorties (b) du pendule inversé mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées (commande PID).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

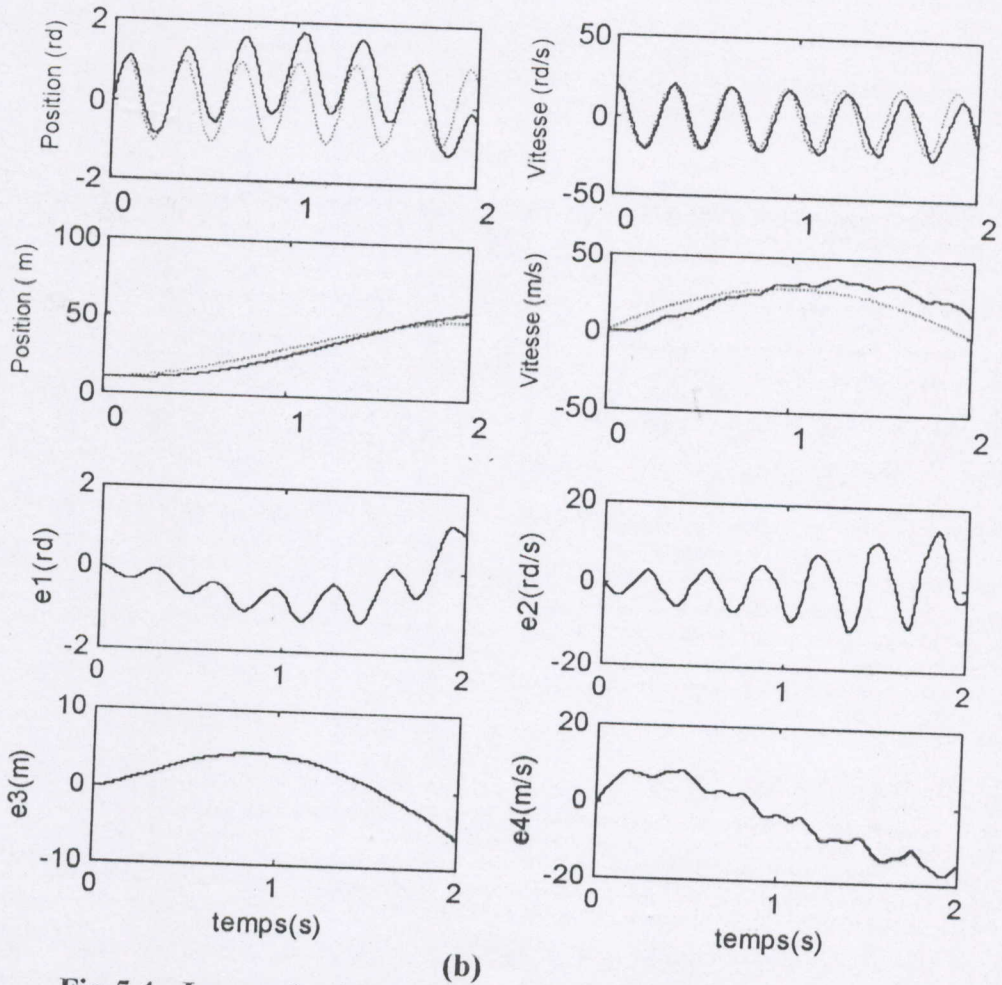


Fig-5.4 : Les sorties (a) et les erreurs sur les sorties (b) du pendule inversé mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées avec perturbation inertielle (commande PID).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

A la figure 5.4 où la masse du pendule est variable, l'état du système s'éloigne encore plus des consignes imposées ; le taux d'erreur sur la position du pendule dépasse 100% de la grandeur de la consigne. Donc pour asservir les sorties de ce système aux consignes imposées, on ne peut pas s'appuyer sur une commande classique telle que le PID.

• **Commande dynamique :**

Commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction :

On appliquera au pendule inversé mobile la commande dynamique dont les lois de commande sont données au chapitre quatre par les équations (4.7) et (4.8) mais sans prendre en compte les termes de couplage dynamique ; on compensera donc partiellement la dynamique du système ; les lois de commandes deviennent alors :

$$U_p = \mu_p \dot{\theta} + (I + ml^2) \ddot{\theta} - mgl \sin \theta$$

$$U_c = \mu_c \text{sign}(\dot{x}) + (M + m) \ddot{x}$$

Les trois situations précédentes sont à considérer :

- Consignes à faibles vitesses (Fig-5.5) ;
- Consignes à vitesses élevées (Fig-5.6) ;
- Consignes à vitesses élevées avec perturbation inertielle (Fig-5.7) ;

Interprétations :

Lorsque le système évolue à faibles vitesses, la commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction donne un résultat dégradé pour le pendule (Fig-5.5). Quant au chariot, la poursuite en position est acceptable tandis que la poursuite en vitesse se fait avec un taux d'erreur non-négligeable. Lorsque l'évolution du système est à grandes vitesses, le pendule s'éloigne encore plus de la trajectoire imposée ; la poursuite du chariot est assez satisfaisante. En présence de perturbations (Fig-5.7), le résultat est complètement dégradé ; les erreurs sur les sorties prennent des valeurs plus importantes au fur et à mesure que la masse du pendule augmente. Le tableau ci-dessous présente les valeurs moyennes et extrêmes de ces erreurs pour les trois situations considérées.

Les erreurs	Evolution à faibles vitesses			Evolution à vitesses élevées			Avec perturbation inertielle		
	min	moy	Max	min	moy	max	min	moy	max
$\theta_c - \theta$	-0,18	-0,04	0,24	-0,95	-0,25	1,06	-1,69	-0,42	2,35
$\dot{\theta}_c - \dot{\theta}$	-0,86	0,07	0,60	-4,49	0,33	5,10	-23,11	1,58	31,18
$x_c - x$	0,00	0,06	0,15	0,00	0,26	0,45	0,00	0,38	0,57
$\dot{x}_c - \dot{x}$	-0,29	0,02	0,31	-1,25	0,05	1,57	-5,43	0,27	5,61

Tableau 5.5 : Résultats comparatifs du pendule inversé mobile (commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction).

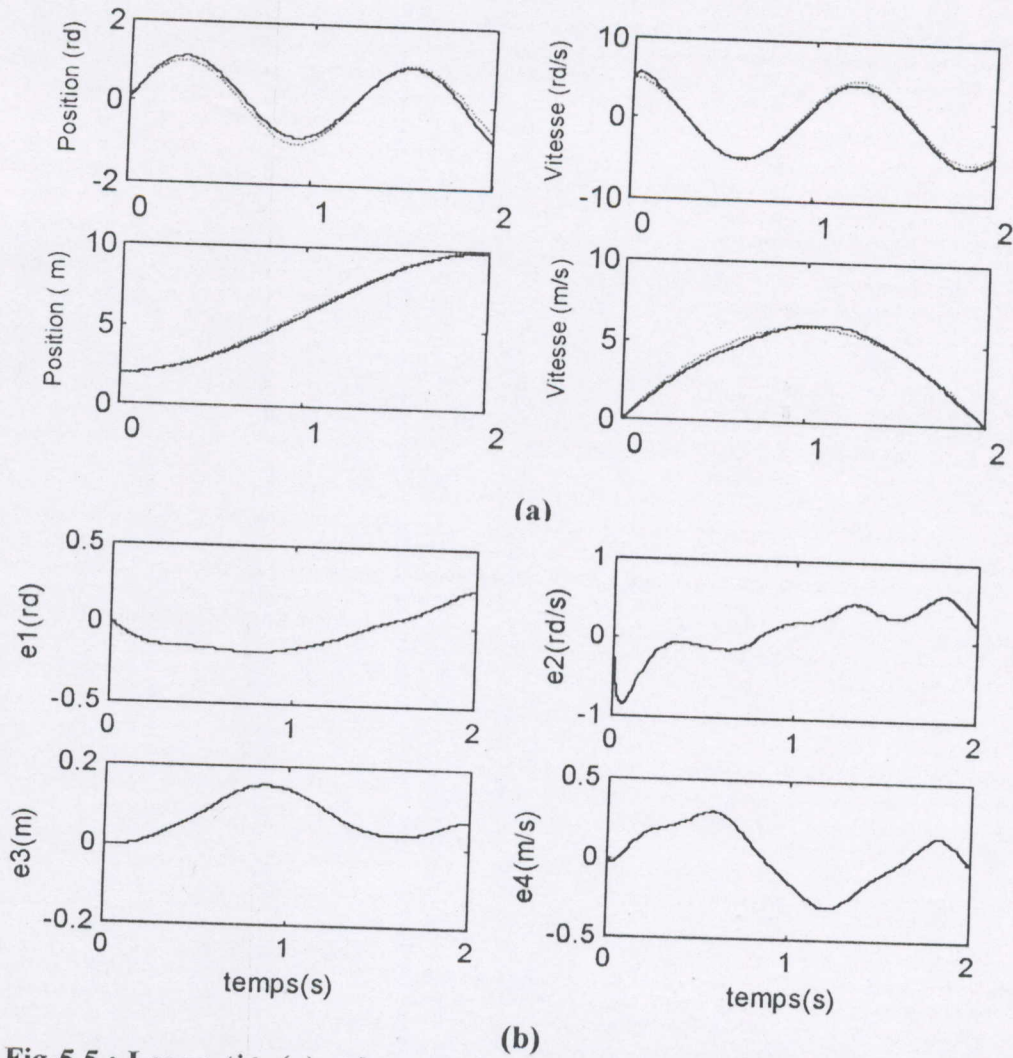
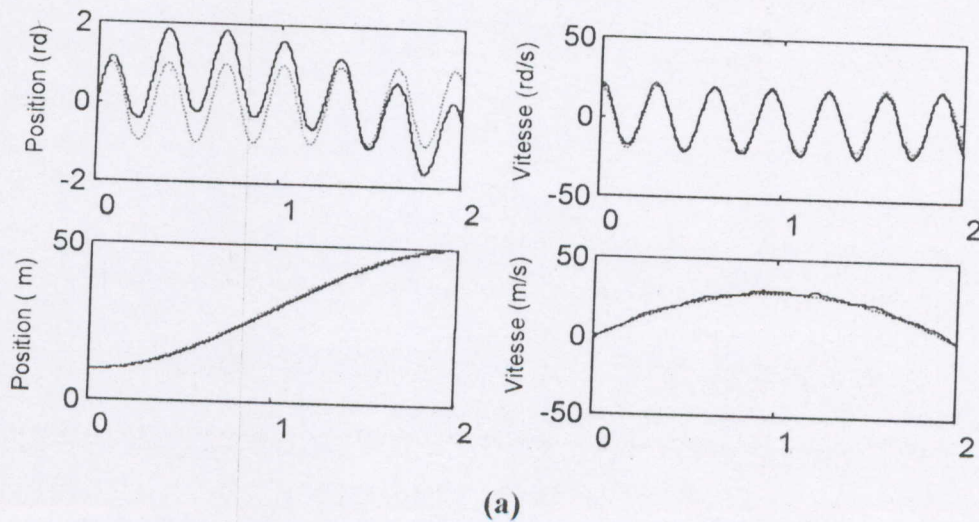


Fig-5.5 : Les sorties (a) et les erreurs sur les sorties (b) du pendule inversé mobile dans le cas d'une consigne à faibles vitesses (commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction).

Légende : Les consignes
 ——— Les sorties réelles



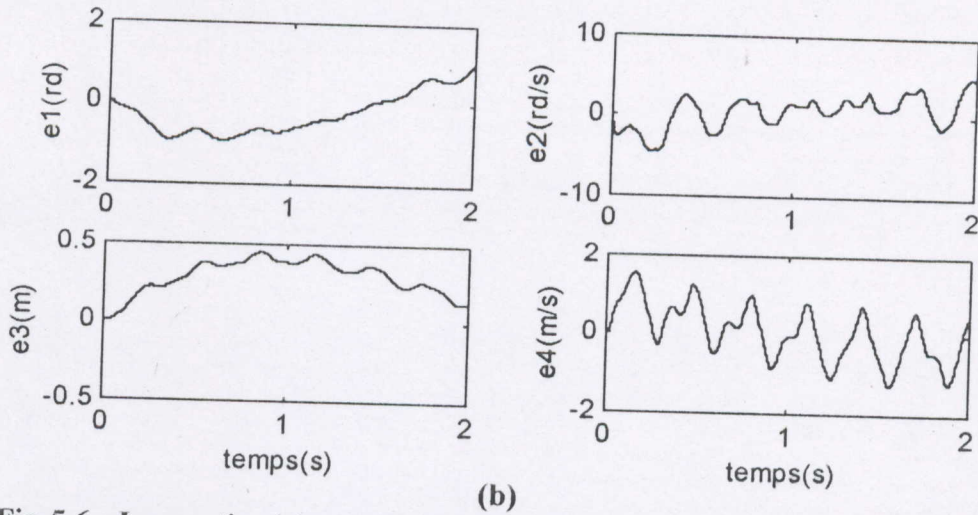


Fig-5.6 : Les sorties (a) et les erreurs sur les sorties (b) du pendule inversé mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées (commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

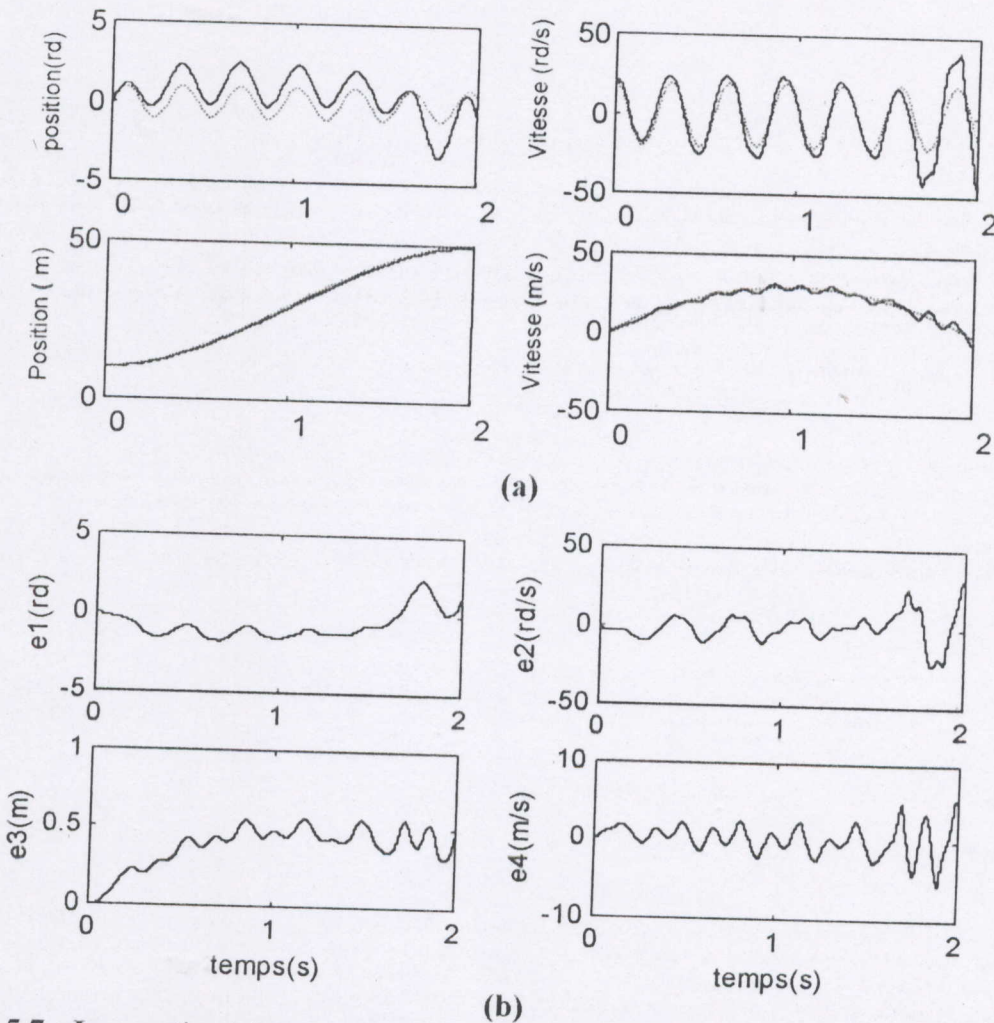


Fig-5.7 : Les sorties (a) et les erreurs sur les sorties (b) du pendule inversé mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées avec une perturbation inertielle (commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

Donc l'utilisation d'une commande dynamique qui ne compense pas les termes de couplage pour contrôler le pendule inversé mobile est insuffisante.

Commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction :

Dans ce cas, l'intégralité de la dynamique modélisée du système est prise en compte ; les lois de commande sont celles données par les équations (4.7) et (4.8). Les trois situations suivantes sont alors à considérer :

Le système évolue à faibles vitesses (Fig-5.8) ;

Le système évolue à vitesses élevées (Fig-5.9) ;

Le système évolue à vitesses élevées avec perturbation inertielle (Fig-5.10) ;

Interprétations :

La figure 5.8 montre qu'on a une très bonne poursuite en position et en vitesse pour l'ensemble du système. Lorsque le système évolue à vitesses élevées, on a également une très bonne poursuite en position et en vitesse pour le pendule ainsi que pour le chariot (Fig-5.9).

En présence de perturbations, les erreurs absolues commises sur les sorties sont plus remarquables comparées aux deux cas précédents (voir le tableau 5.6 ci-dessous) ; mais on a toujours une très bonne poursuite comme il est clair sur la figure 5.10.

Les erreurs	Evolution à faibles vitesses			Evolution à vitesses élevées			Avec perturbation inertielle		
	min	moy	max	min	moy	max	min	moy	max
$\theta_c - \theta$	-0,01	0,00	0,00	-0,02	-0,01	0,00	-0,18	-0,07	0,00
$\dot{\theta}_c - \dot{\theta}$	-0,02	0,00	0,01	-0,10	-0,01	0,09	-0,25	-0,09	0,01
$x_c - x$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00	0,00
$\dot{x}_c - \dot{x}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,02	0,00	0,01

Tableau 5.6 : Résultats comparatifs du pendule inversé mobile (commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction).

III.2 Cas du Robot Manipulateur Mobile :

Le comportement du manipulateur mobile vis à vis des variations des vitesses d'évolution et des variations de ses caractéristiques inertielles est étudié. Pour ce faire, on imposera au manipulateur mobile des mouvements relativement lents dont les consignes correspondantes sont comme suit :

$$x_{c1}(t) = x_{c3}(t) = \sin(5t + 0.1) ;$$

$$x_{c5}(t) = x_{c7}(t) = 2 + 6t^2 - 2t^3 ;$$

$$x_{c9}(t) = x_{c11}(t) = \sin(8t) ;$$

Puis des mouvements plus rapides seront imposés ; les consignes correspondantes sont alors :

$$x_{c1}(t) = x_{c3}(t) = \sin(10t + 0.1) ;$$

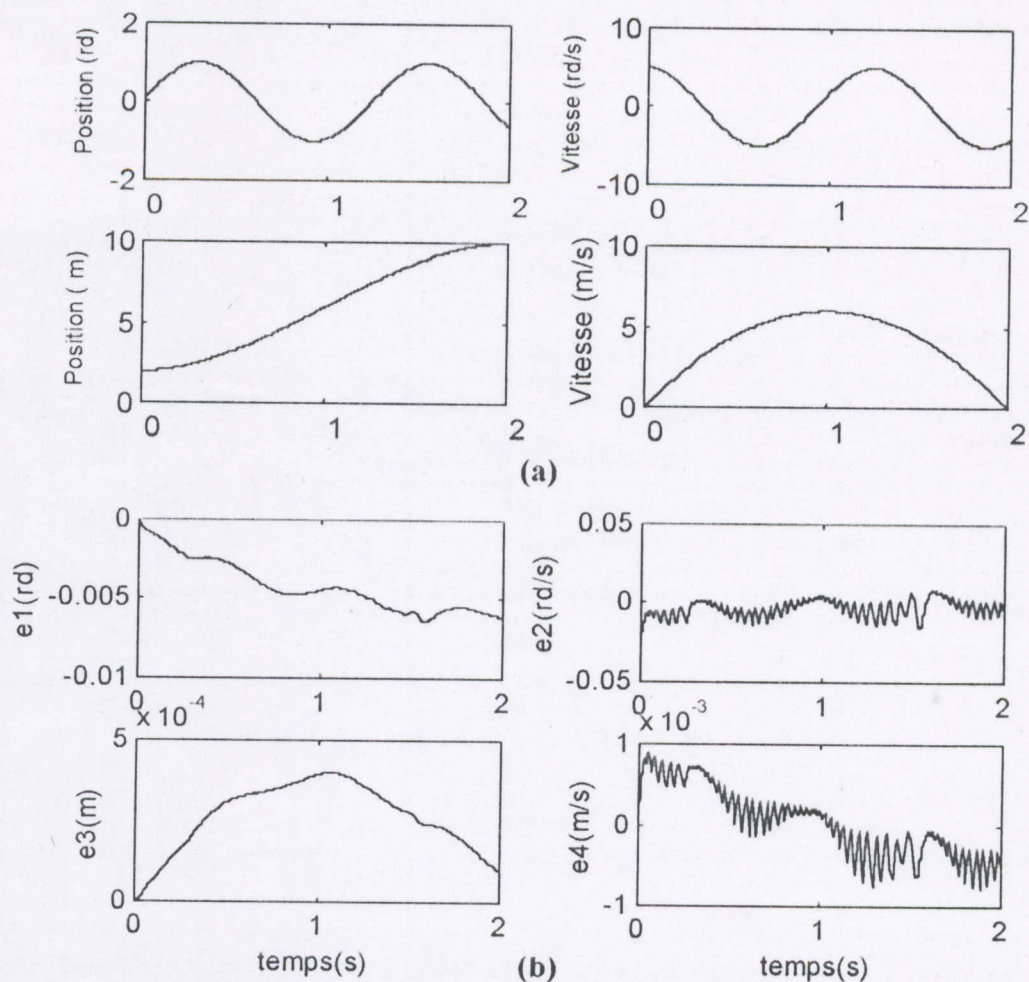
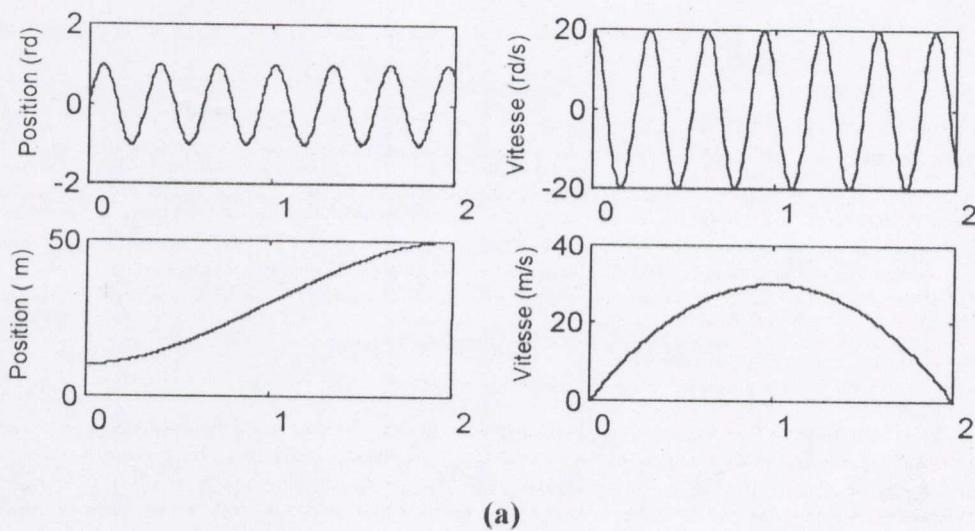


Fig-5.8 : Les sorties (a) et les erreurs sur les sorties (b) du pendule inversé mobile dans le cas d'une consigne à faibles vitesses (commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles



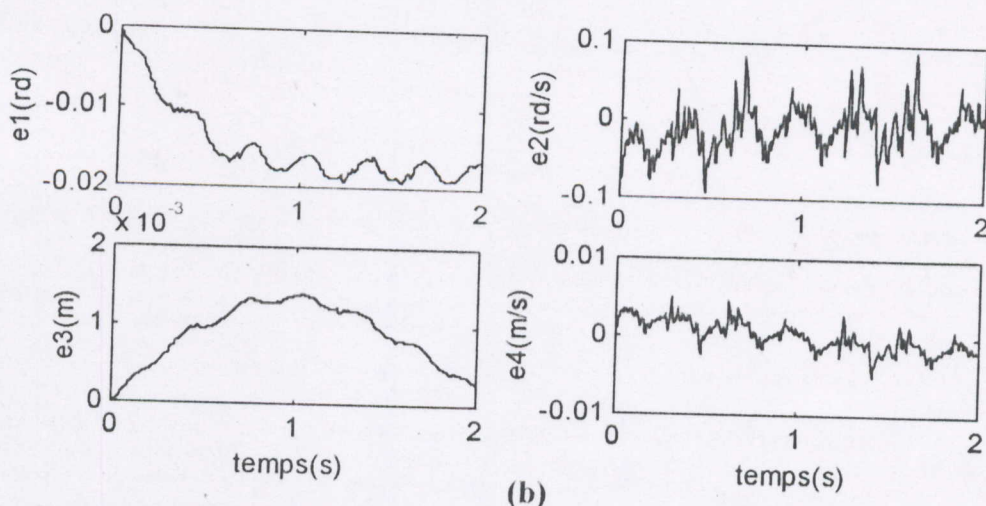


Fig-5.9 : Les sorties (a) et les erreurs sur les sorties (b) du pendule inversé mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées (commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

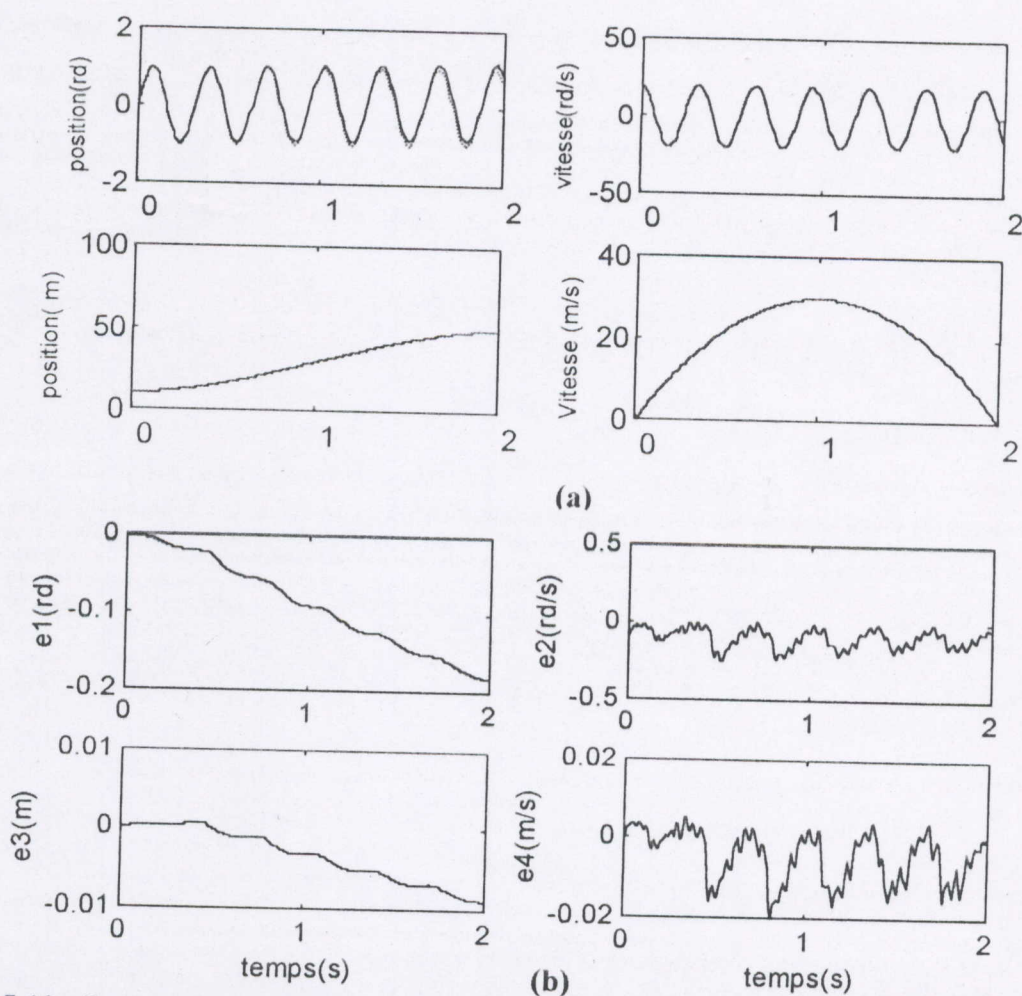


Fig-5.10 : Les sorties (a) et les erreurs sur les sorties (b) du pendule inversé mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées avec une perturbation inertielle (commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

$$x_{c5}(t) = x_{c7}(t) = 5 + 15t^2 - 5t^3 ;$$

$$x_{c9}(t) = x_{c11}(t) = \sin(11t) ;$$

La troisième situation consiste à imposer une perturbation inertielle pendant que le manipulateur mobile est soumis aux mouvements rapides. Cette perturbation inertielle consiste à faire augmenter linéairement la masse du dernier corps du bras manipulateur de sa valeur initiale (égale à 4kg) à une valeur de 10kg pendant la durée du mouvement.

Cette étude s'effectue en trois étapes :

III.2.1 Commande PID :

On applique au système une commande classique de type PID pour voir qu'est ce qu'un PID peut donner pour un système assez complexe comme le manipulateur mobile. Les lois de cette commande sont décrites au chapitre quatre par les équations (4.17) à (4.20). Après plusieurs essais, les constantes de gains sont fixées aux valeurs suivantes :

$$k_{p1} = 80 \quad k_{v1} = 40 \quad k_{i1} = 20 ;$$

$$k_{p2} = 60 \quad k_{v2} = 30 \quad k_{i2} = 15 ;$$

$$k_{p3} = 120 \quad k_{v3} = 60 \quad k_{i3} = 30 ;$$

$$k_{p4} = 60 \quad k_{v4} = 30 \quad k_{i4} = 15 ;$$

Les courbes d'évolution des sorties du système ainsi que les erreurs absolues sur ces sorties pour les trois cas de figure cités précédemment sont présentées aux figures 5.11 à 5.16 aux pages suivantes.

Interprétations :

La figure 5.11 montre que le PID assure la poursuite des consignes par le manipulateur mobile lorsque celles-ci sont à faibles vitesses mais avec un taux d'erreur non-négligeable.

Lorsque le mouvement imposé est plus rapide (Fig-5.13), le taux d'erreur de poursuite augmente d'une manière remarquable ; par exemple, l'erreur E_1 sur la position de la première liaison du bras manipulateur passe de 20% de la grandeur de la consigne lorsque le système évolue à faibles vitesses à 60% lorsque le mouvement imposé est rapide.

Le tableau 5.7 ci-dessous porte les valeurs moyennes et extrêmes des erreurs absolues sur les sorties du système pour les deux types de mouvement.

En présence de perturbation (Fig-5.15), les états du système s'éloignent encore plus des consignes ; la poursuite se fait avec une très mauvaise précision. L'utilisation des contrôleurs classiques est donc limitée aux mouvements de faibles vitesses et sans variation d'aucun des paramètres physiques du système et même dans ces conditions, les erreurs de poursuite ne sont pas négligeables.

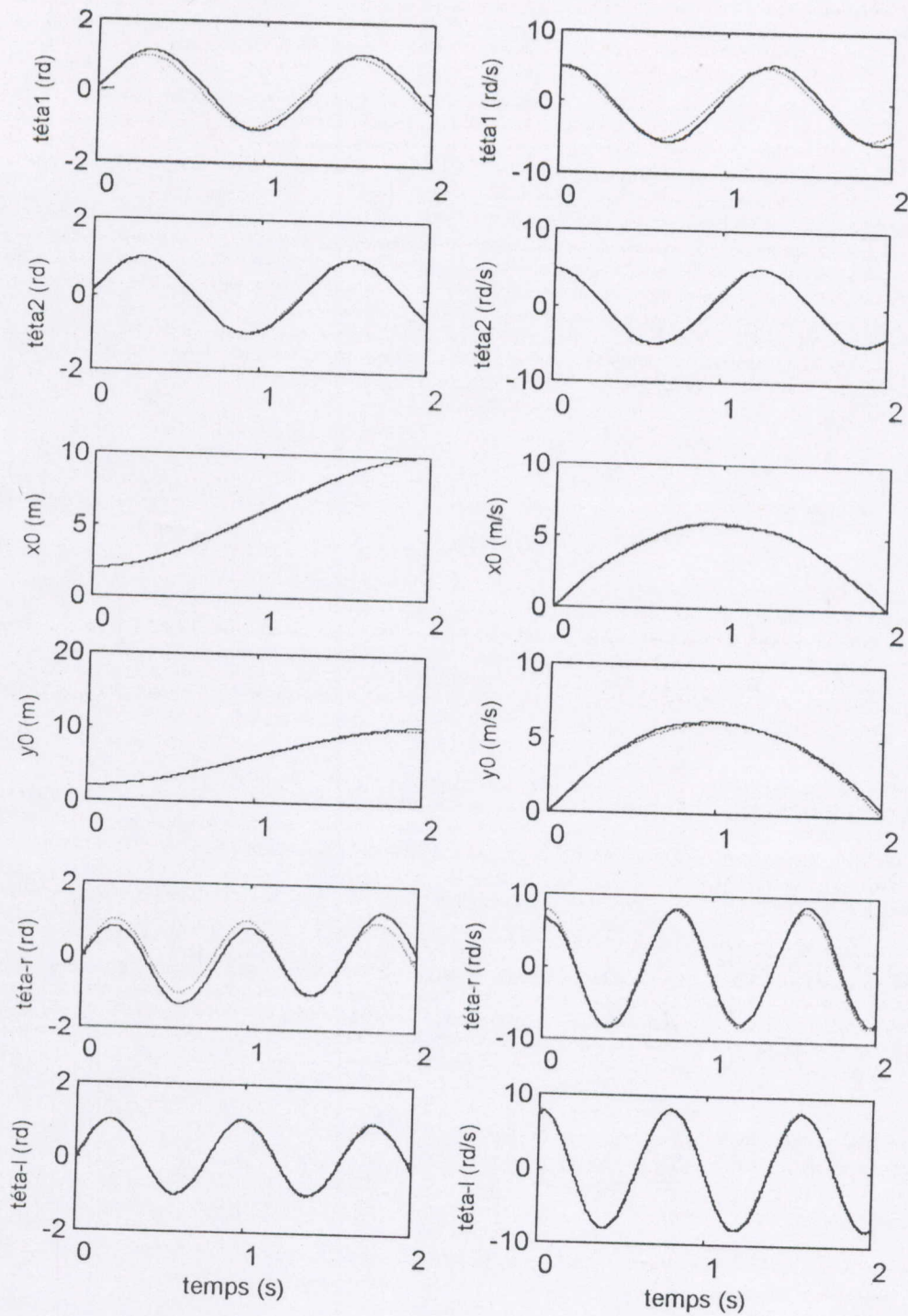


Fig-5.11 : Evolution des sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à faibles vitesses (commande PID).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

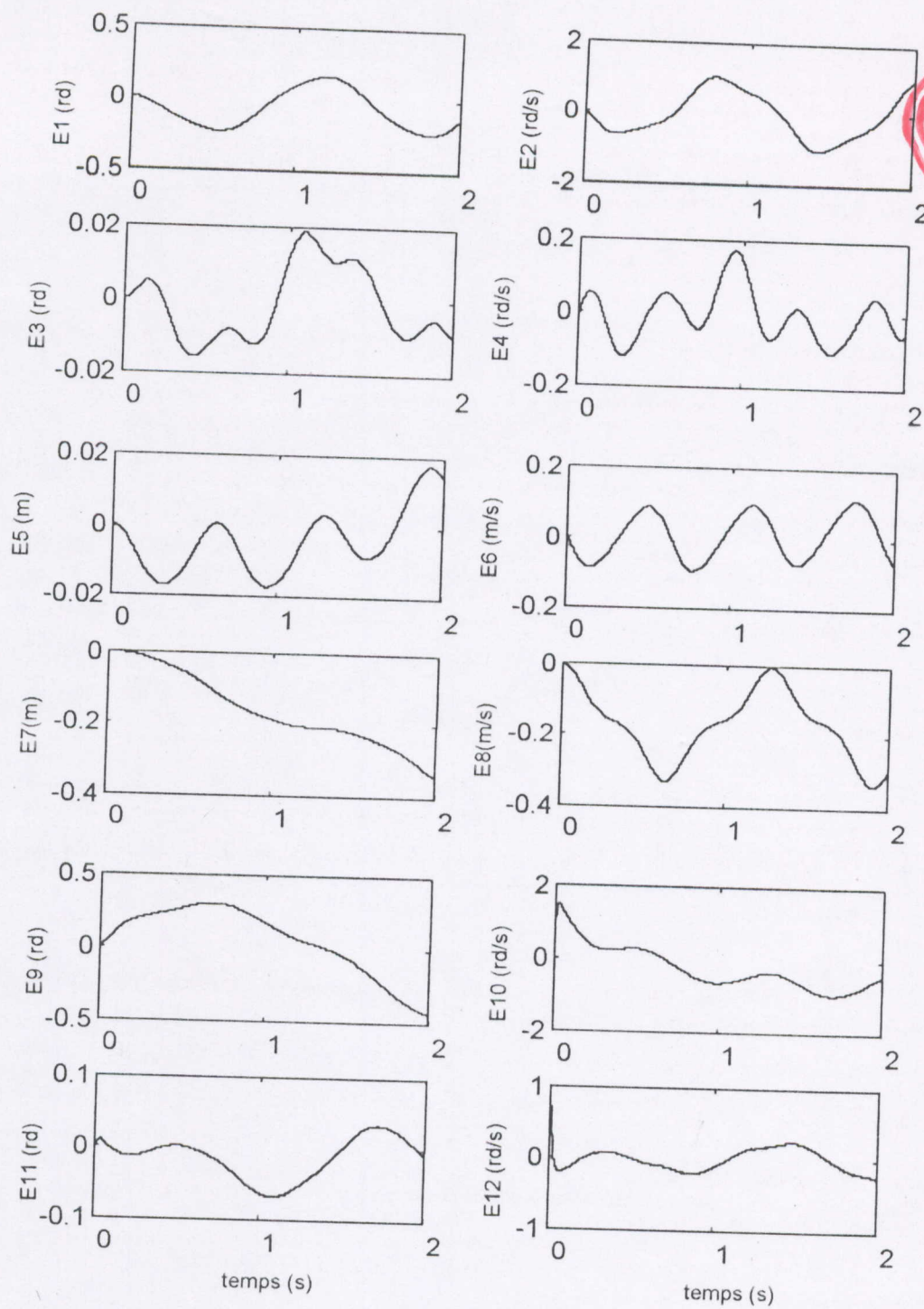


Fig-5.12 : Les erreurs absolues sur les sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à faibles vitesses (commande PID).

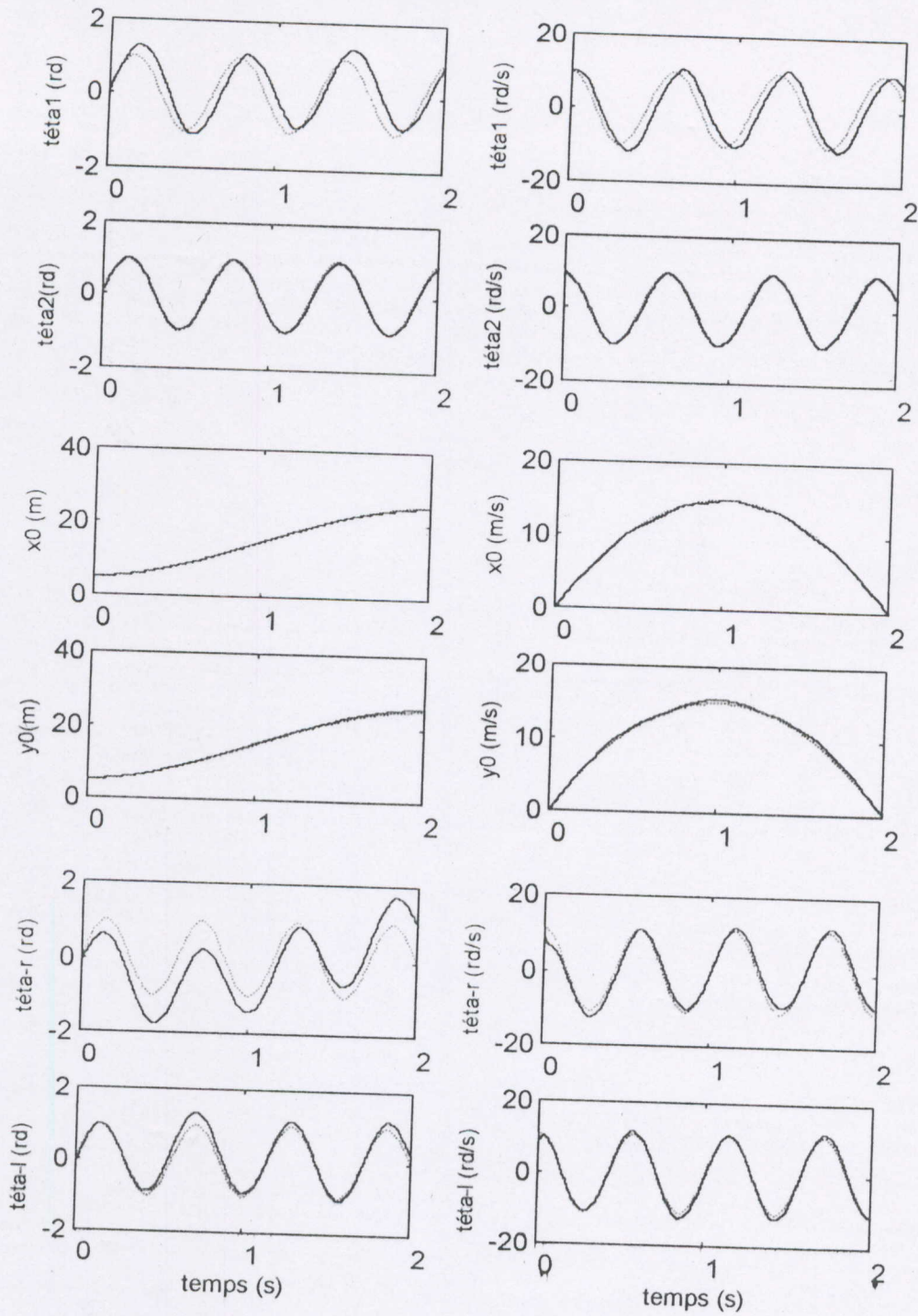


Fig-5.13 : Evolution des sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées (commande PID).

Légende :
 Les consignes
 — Les sorties réelles

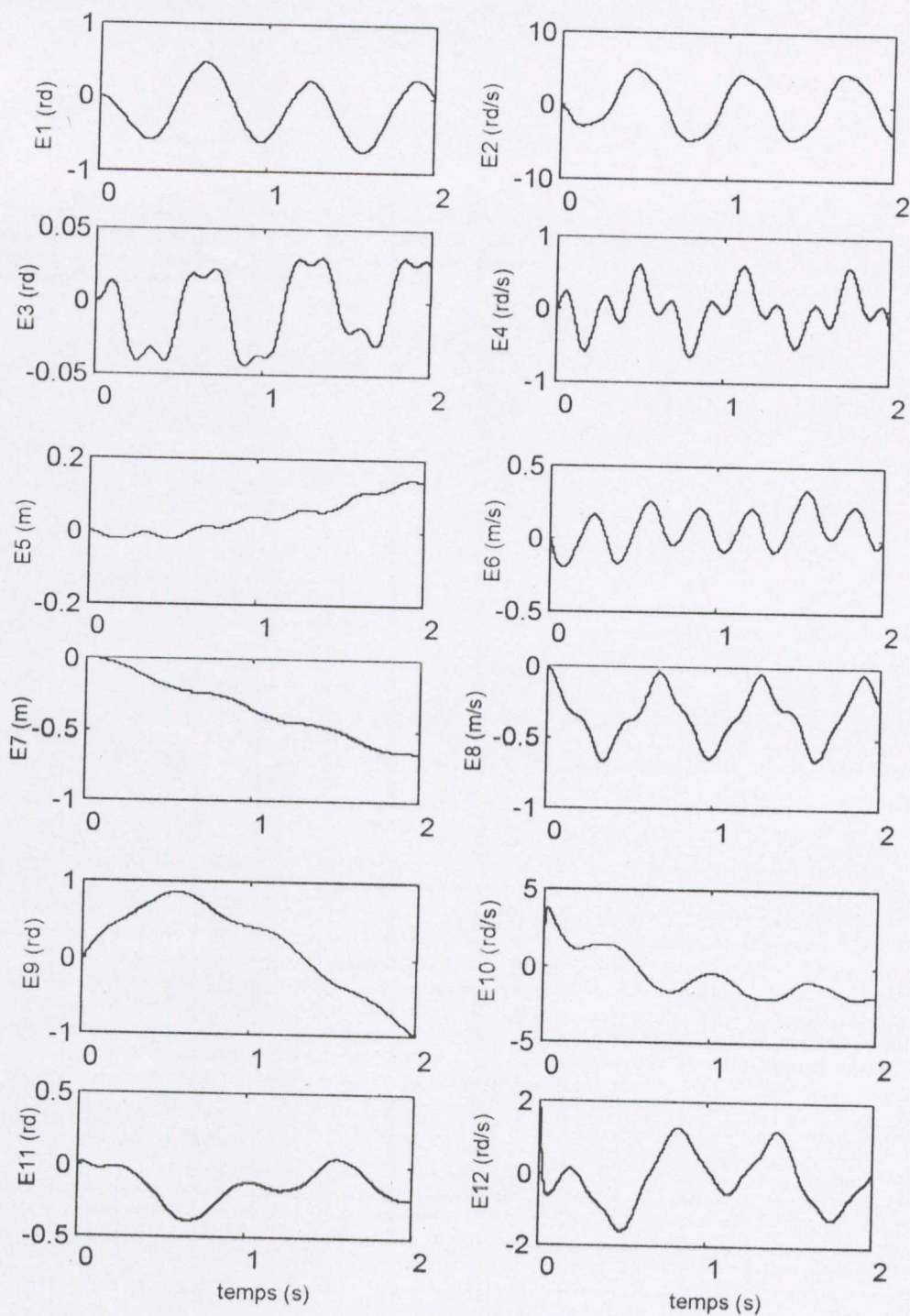


Fig-5.14 : Les erreurs absolues sur les sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées (commande PID).

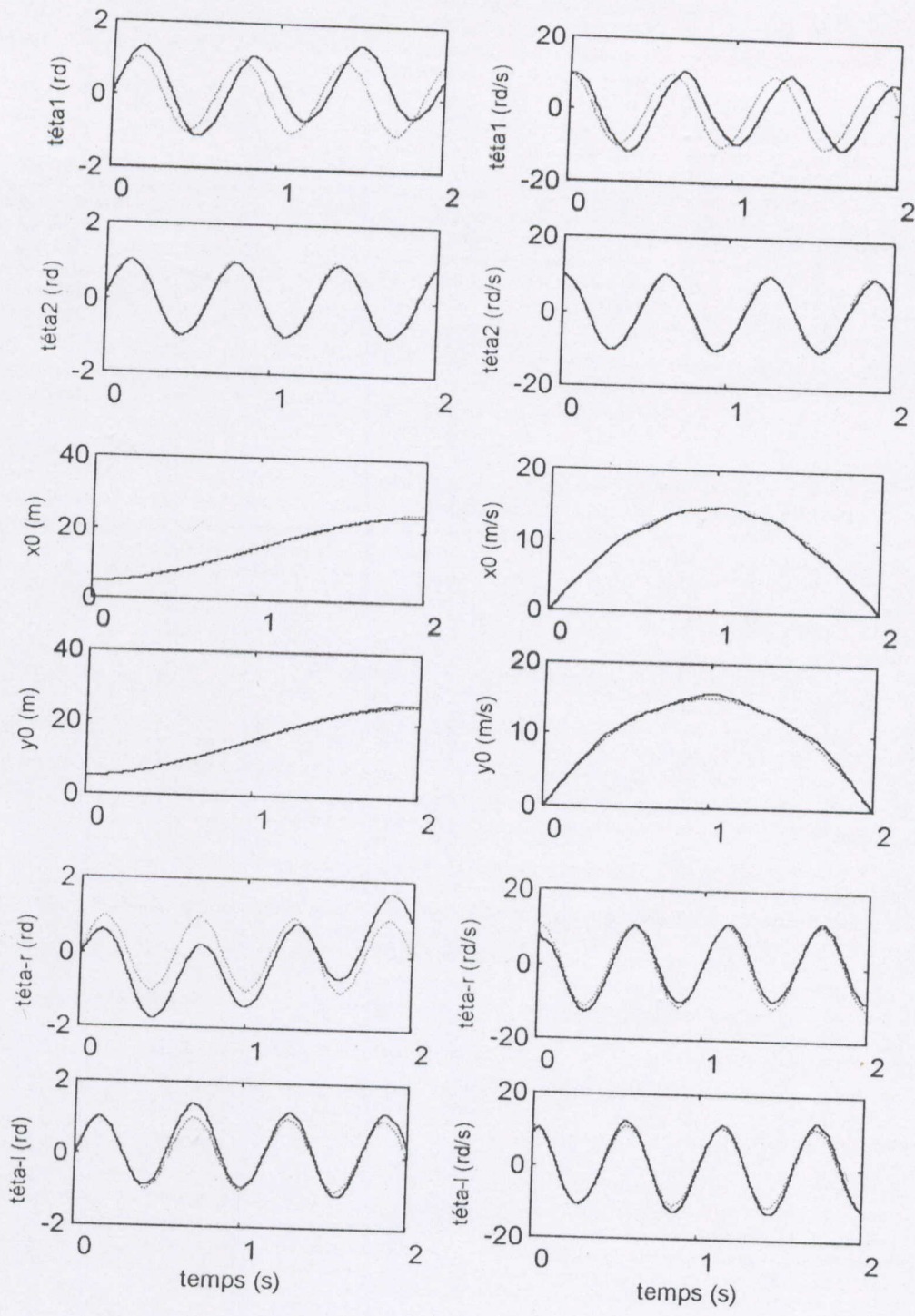


Fig-5.15 : Evolution des sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées avec une perturbation inertielle (commande PID).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

Les erreurs	Evolution à faibles vitesses			Evolution à vitesses élevées			Avec perturbation inertielle		
	min	moy	max	min	moy	max	min	moy	max
E1	-0,24	-0,07	0,17	-0,72	-0,14	0,47	-1,36	-0,23	0,69
E2	-1,05	-0,06	1,06	-4,71	0,02	5,07	-8,04	0,29	8,57
E3	-0,02	0,00	0,02	-0,04	0,00	0,03	-0,07	0,00	0,06
E4	-0,12	0,00	0,18	-0,65	0,02	0,63	-0,95	0,02	1,17
E5	-0,02	0,00	0,02	-0,02	0,04	0,14	-0,02	0,08	0,26
E6	-0,09	0,01	0,11	-0,20	0,07	0,35	-0,21	0,14	0,60
E7	-0,34	-0,16	0,00	-0,66	-0,33	0,00	-0,65	-0,35	0,00
E8	-0,34	-0,17	0,00	-0,67	-0,32	0,00	-0,83	-0,30	0,17
E9	-0,43	0,06	0,30	-1,00	0,17	0,86	-0,94	0,12	0,87
E10	-0,93	-0,19	1,49	-2,06	-0,44	3,73	-2,18	-0,52	3,73
E11	-0,07	-0,01	0,03	-0,39	-0,13	0,06	-0,42	-0,13	0,13
E12	-0,24	0,00	0,71	-1,60	-0,11	1,78	-1,90	-0,16	1,91

Tableau 5.7 : Résultats comparatifs du manipulateur mobile (commande PID).

III.2.2 Commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction :

Pour améliorer les performances de contrôle du système, la commande dynamique dont les lois sont données au chapitre quatre par les équations (4.21) à (4.24) est appliquée au système. En premier temps, les termes d'interaction dynamique ne sont pas intégrés dans les lois de commande ; la dynamique du système est donc partiellement compensée ; les expressions des lois de commande deviennent alors :

$$T_{r1} = M_r^{1,1} \ddot{\theta}_{1c} + M_r^{1,2} \ddot{\theta}_{2c} + C_{r1}^1 ;$$

$$T_{r2} = M_r^{2,1} \ddot{\theta}_{1c} + M_r^{2,2} \ddot{\theta}_{2c} + C_{r1}^2 ;$$

$$T_{v1} = cb\lambda_2 + M_{v1}^{3,1} \ddot{x}_{0c} + M_{v1}^{3,2} \ddot{y}_{0c} + M_{v1}^{3,3} \ddot{\theta}_{rc} + M_{v1}^{3,4} \ddot{\theta}_{lc} + C_{v1}^3 ;$$

$$T_{v2} = cb\lambda_2 + M_{v1}^{4,1} \ddot{x}_{0c} + M_{v1}^{4,2} \ddot{y}_{0c} + M_{v1}^{4,3} \ddot{\theta}_{rc} + M_{v1}^{4,4} \ddot{\theta}_{lc} + C_{v1}^4 ;$$

Ces lois de commande sont appliquées au manipulateur mobile pour les trois situations citées précédemment dans le cas de la commande PID ; les résultats obtenus sont ceux représentés aux figures 5.17 à 5.22.

Interprétations :

Pour une évolution à faibles vitesses, le manipulateur mobile arrive à poursuivre les consignes imposées avec cette commande quoique le taux d'erreur ne soit pas très réduit. Lorsque les vitesses d'évolution du système sont rapides (Fig-5.19), le taux d'erreur augmente considérablement ; l'erreur sur la position de la première liaison par exemple passe de 9,5% de la grandeur de la consigne à 37% et

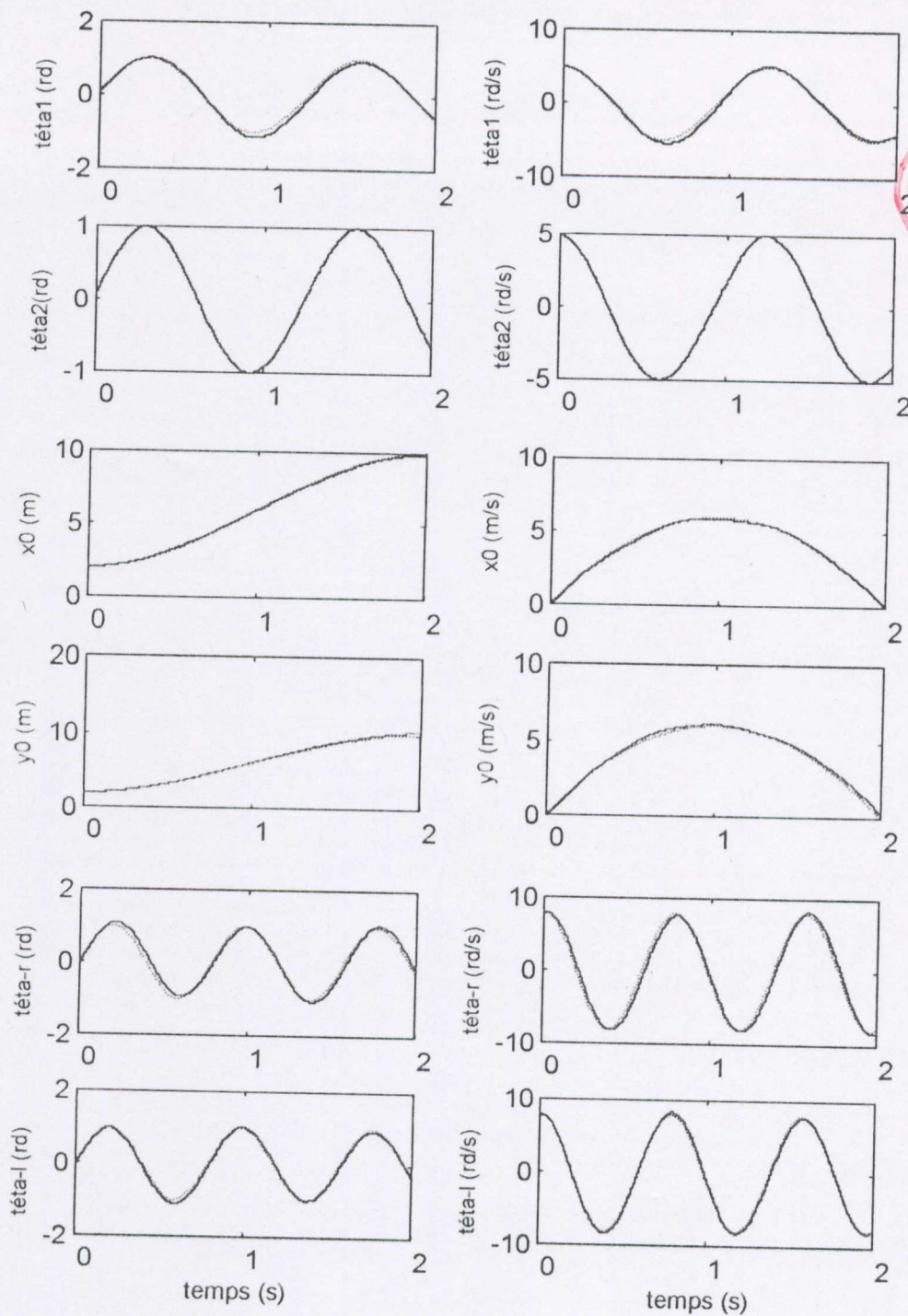


Fig-5.17 : Evolution des sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à faibles vitesses (commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

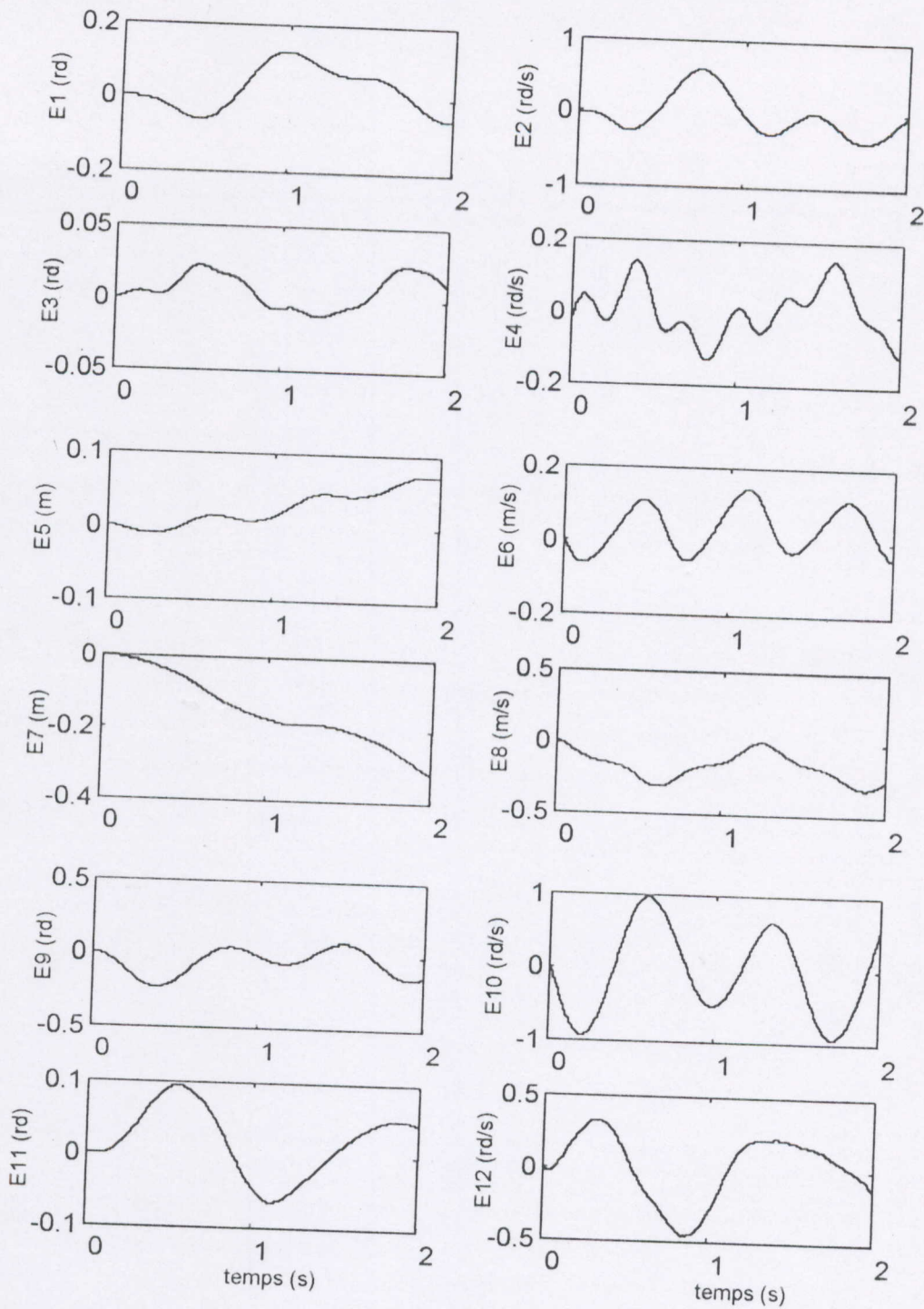


Fig-5.18 : Les erreurs absolues sur les sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à faibles vitesses (commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction).

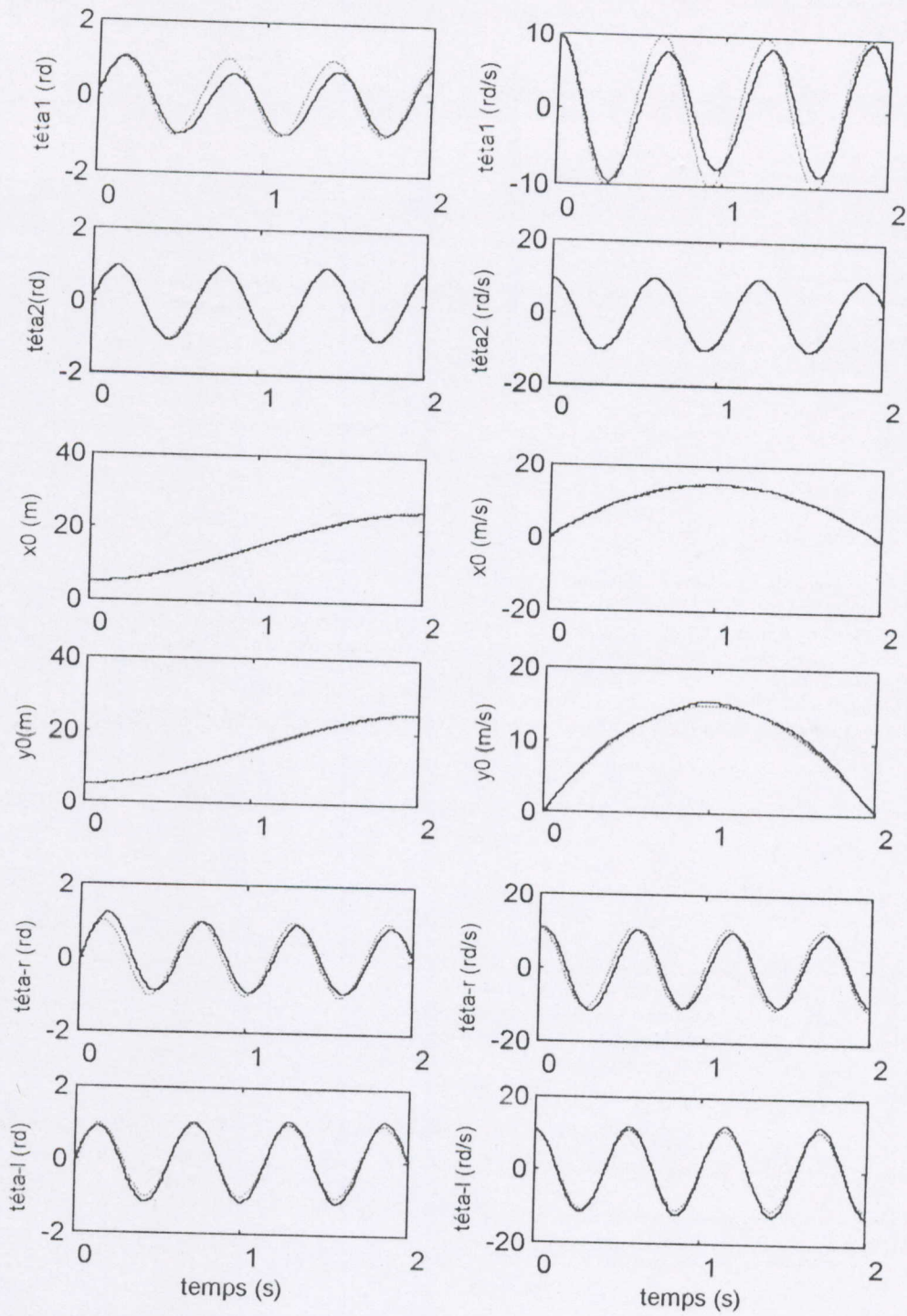


Fig-5.19 : Evolution des sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées (commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction).

Légende : Les consignes
 Les sorties réelles

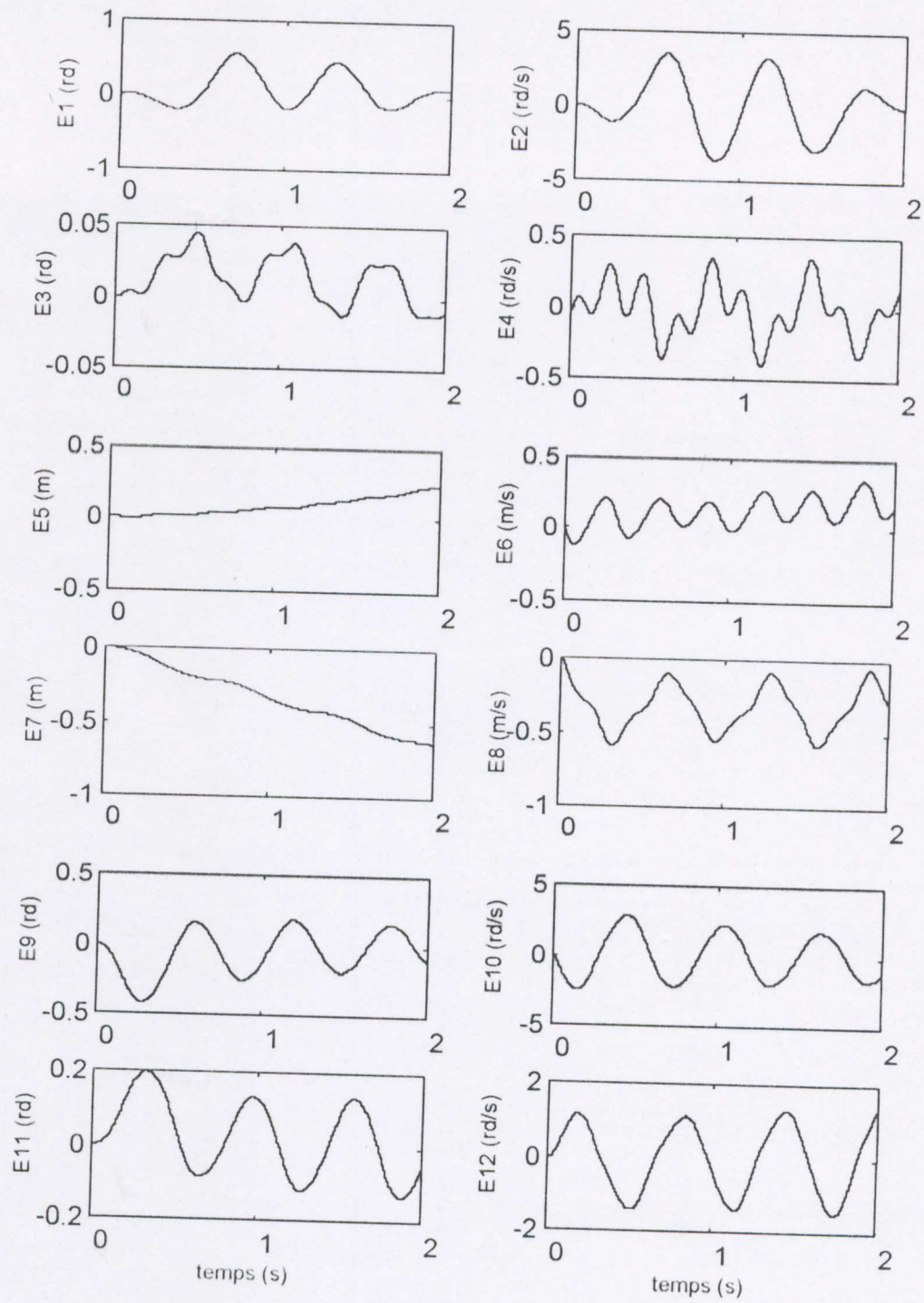


Fig-6.20 : Les erreurs absolues sur les sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées (commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction).

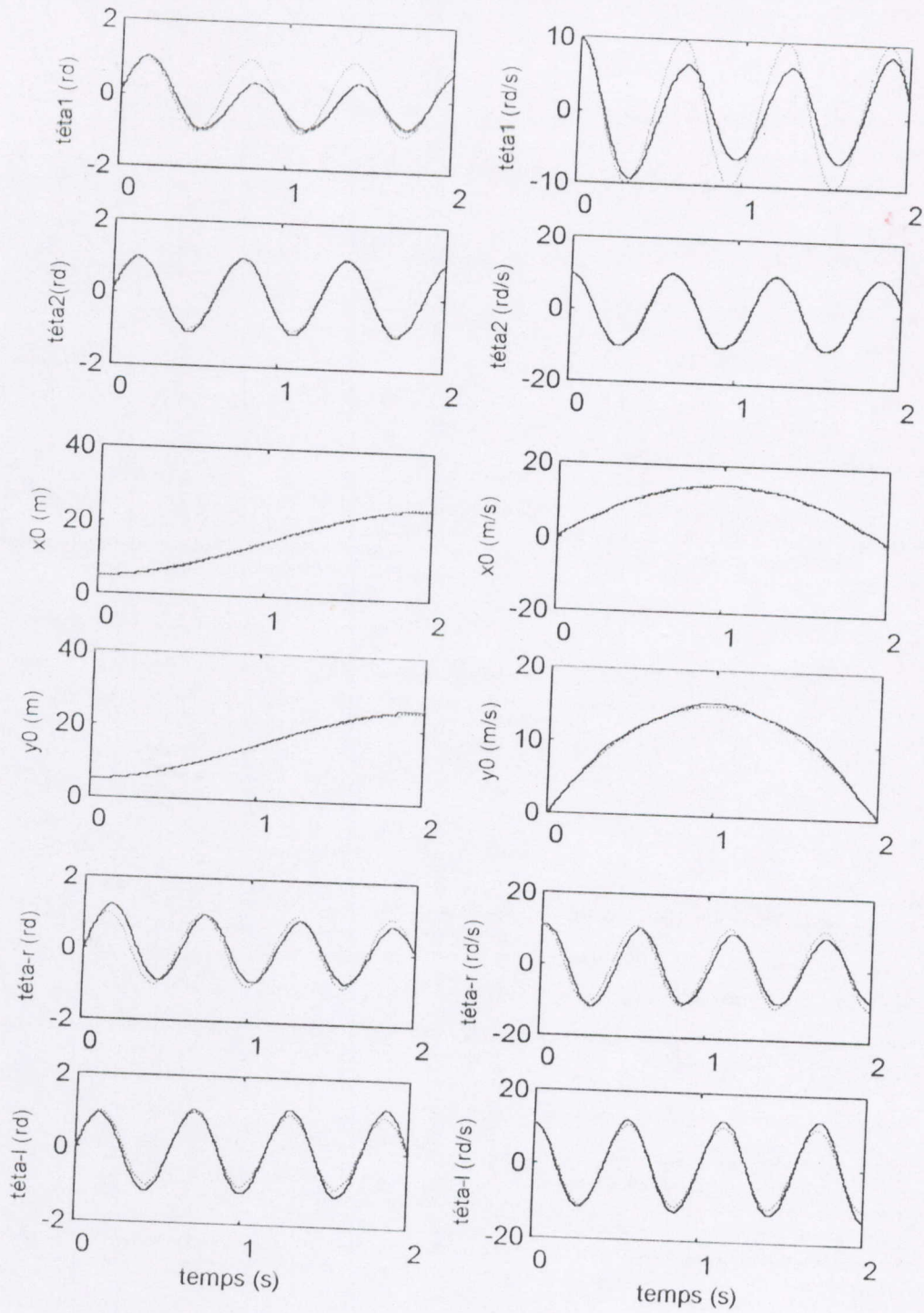


Fig-5.21 : Evolution des sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées avec perturbation inertielle (commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

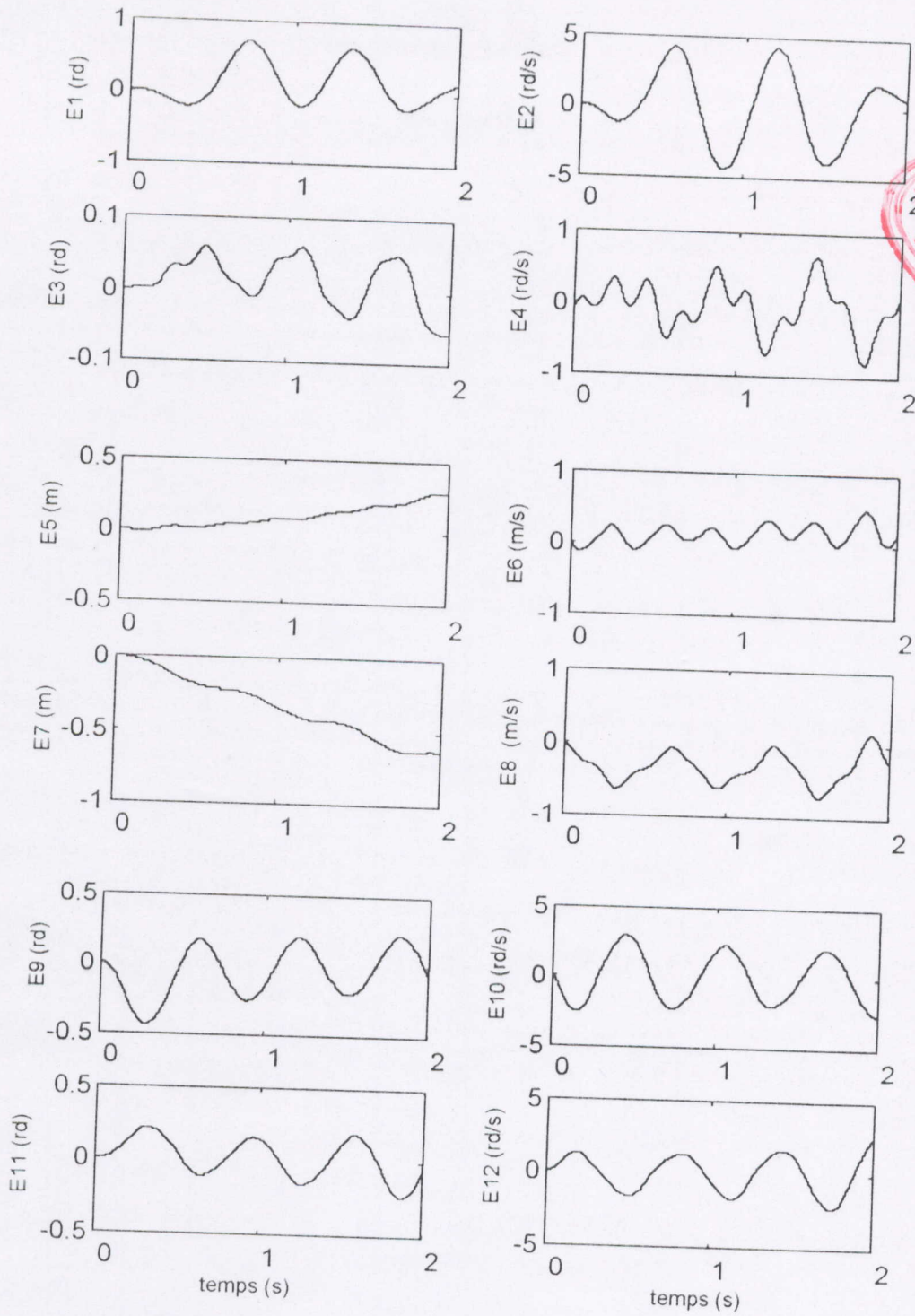


Fig-5.22 : Les erreurs absolues sur les sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées avec perturbation inertielle (commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction).

de même pour les autres variables d'état du système ; le tableau 5.8 ci-dessous résume les valeurs limites des erreurs absolues sur chaque variable.

Lorsque le système est soumis à une perturbation inertielle pendant qu'il évolue à grandes vitesses (le cas le plus défavorable), le résultat obtenu est encore plus dégradé (Fig-5.21) ; les erreurs sur les vitesses des première et deuxième liaisons passent de 35,45% et 3,85% (respectivement) avant l'augmentation de la masse à 43,65% et 7,60% (respectivement) après, et pareil pour les autres variables d'état du système. Cette commande basée sur le modèle dynamique partiel du système n'est donc pas suffisante pour maintenir des performances de contrôle acceptables surtout lorsque le mouvement imposé est rapide.

Les erreurs	Evolution à faibles vitesses			Evolution à vitesses élevées			Avec perturbation inertielle		
	min	moy	max	min	moy	max	min	moy	max
E1	-0,06	0,02	0,13	-0,19	0,08	0,55	-0,22	0,13	0,72
E2	-0,38	-0,03	0,06	-3,59	0,05	3,50	-4,38	0,07	4,35
E3	-0,01	0,01	0,02	-0,01	0,01	0,05	-0,06	0,01	0,06
E4	-0,13	0,00	0,15	-0,40	-0,01	0,37	-0,82	-0,03	0,70
E5	-0,01	0,03	0,07	-0,01	0,08	0,24	-0,01	0,11	0,29
E6	-0,06	0,03	0,15	-0,13	0,11	0,36	-0,13	0,14	0,52
E7	-0,32	-0,14	0,00	-0,62	-0,30	0,00	-0,63	-0,33	0,00
E8	-0,31	-0,15	0,01	-0,59	-0,30	0,00	-0,72	-0,30	0,18
E9	-0,23	-0,05	0,09	-0,42	-0,06	0,18	-0,44	-0,05	0,23
E10	-0,93	-0,06	0,98	-2,49	-0,05	2,90	-2,57	-0,04	3,00
E11	-0,07	0,02	0,10	-0,14	0,02	0,20	-0,24	0,01	0,22
E12	-0,46	0,02	0,33	-1,50	-0,02	1,35	-2,28	-0,02	2,67

Tableau 5.8 : Résultats comparatifs du manipulateur mobile (commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction).

III.2.3 Commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction :

L'intégralité de la dynamique modélisée du système est compensée par les lois de commande ; ces lois sont donc celles données par les équations 4.21 à 4.24. Les résultats obtenus par cette commande pour les trois situations considérées (mouvement lent, mouvement rapide et mouvement rapide avec perturbation inertielle) sont illustrés aux figures 5.23 à 5.28 présentées aux pages suivantes.

Interprétations :

Concernant le bras, le résultat obtenu avec cette commande est de très bonne précision ; les erreurs de poursuite en position et en vitesse des deux articulations sont négligeables même dans les conditions les

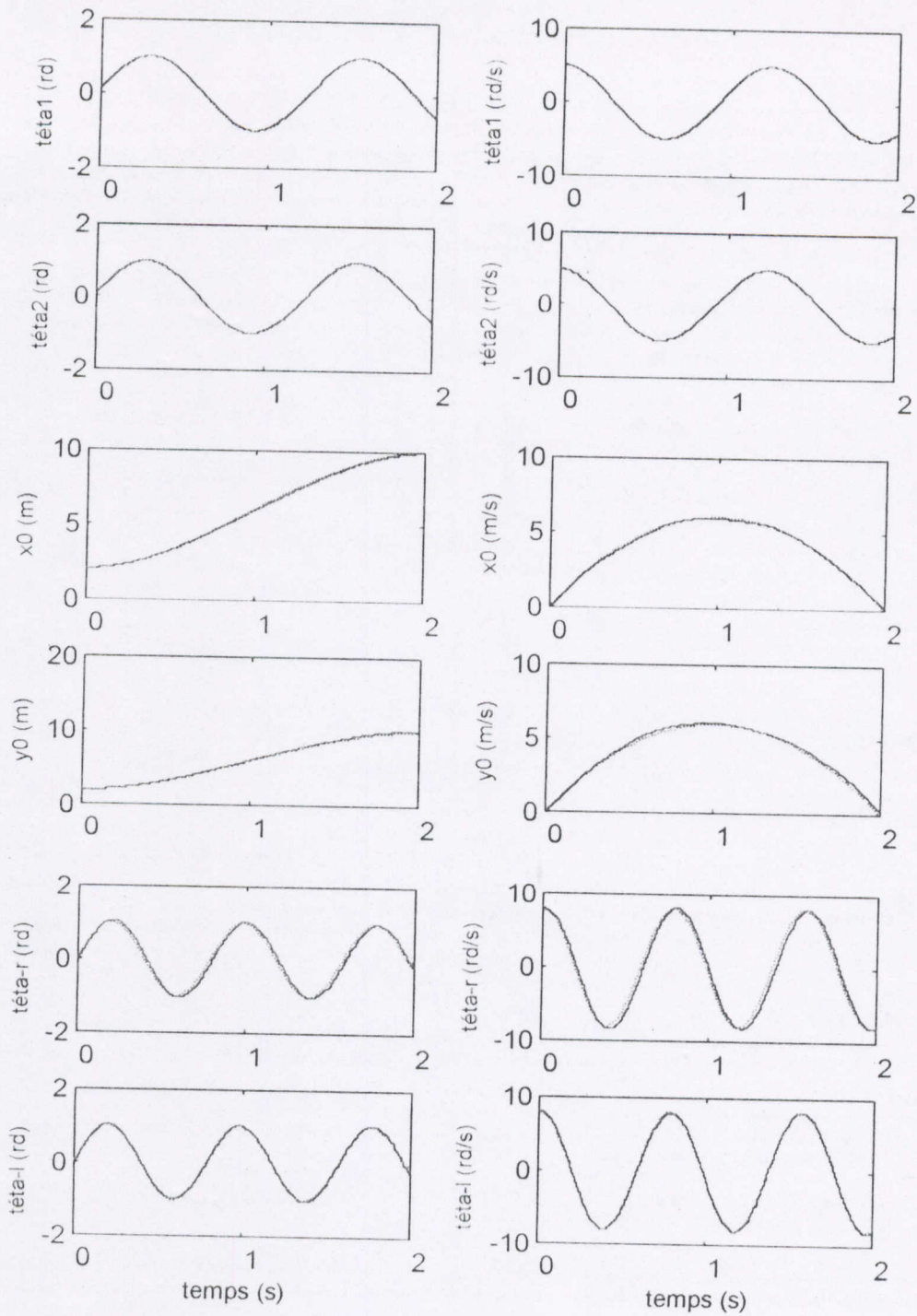


Fig-5.23 : Evolution des sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à faibles vitesses (commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

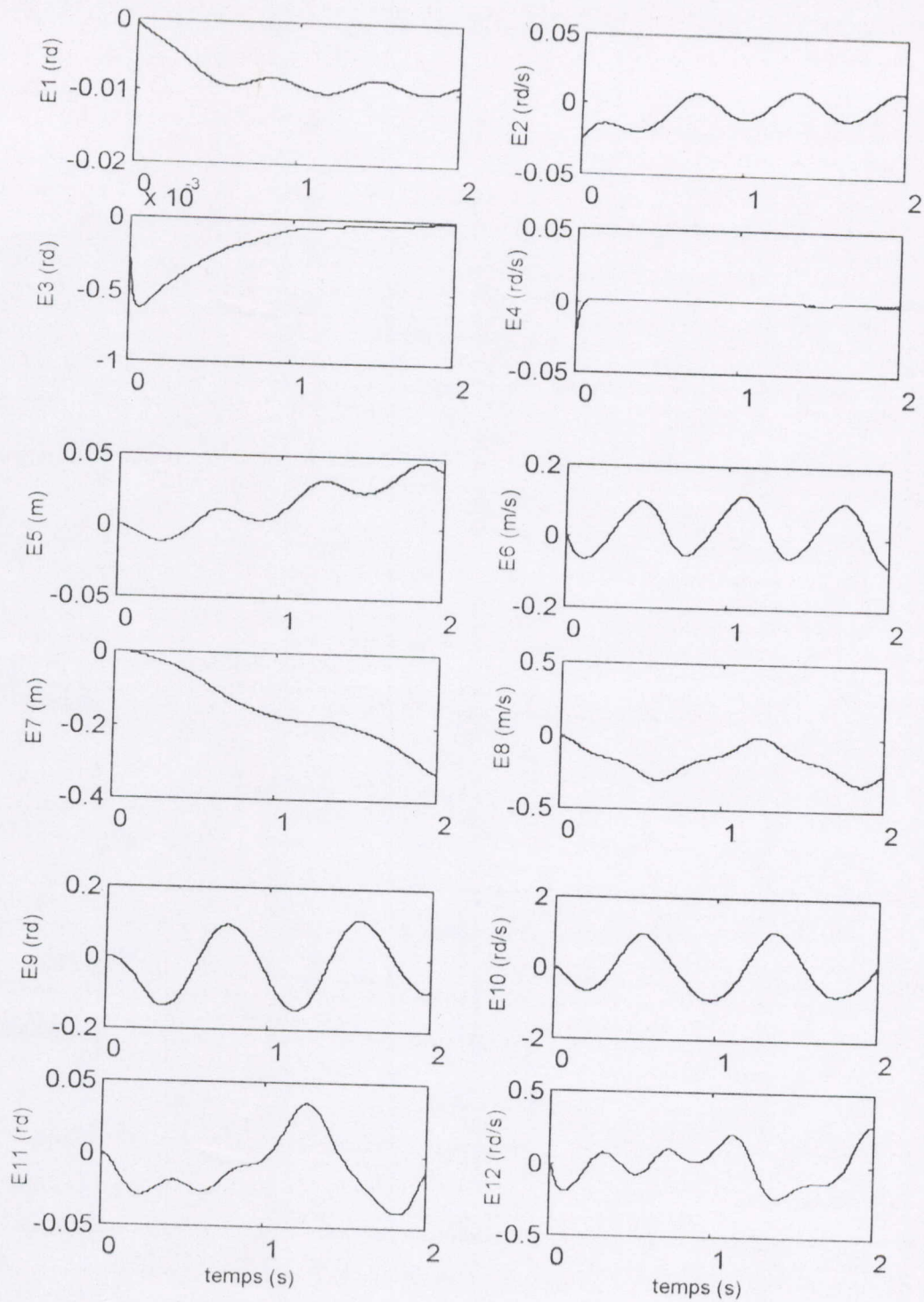


Fig-5.24 : Les erreurs absolues sur les sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à faibles vitesses (commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction).

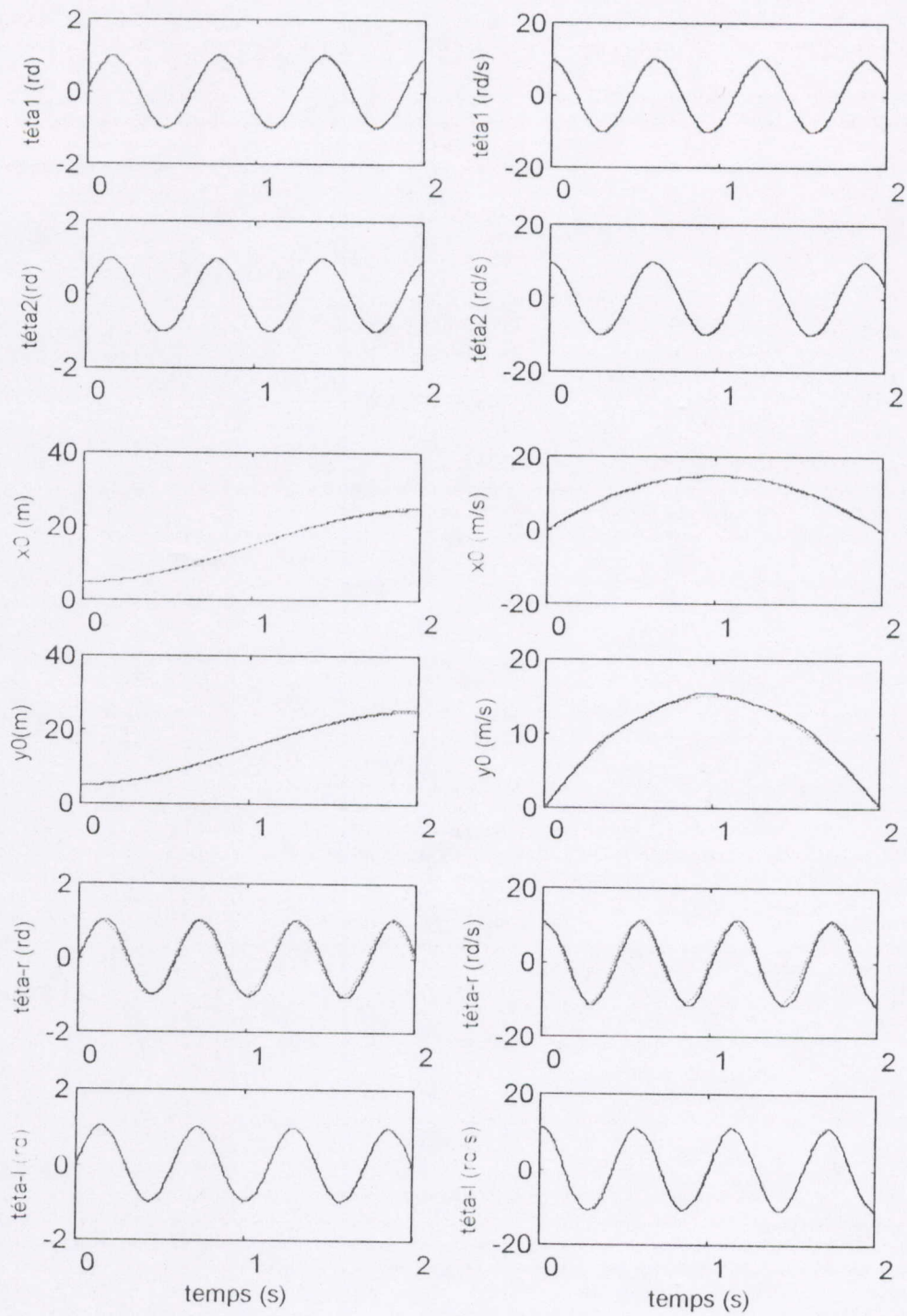


Fig-5.25 : Evolution des sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées (commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

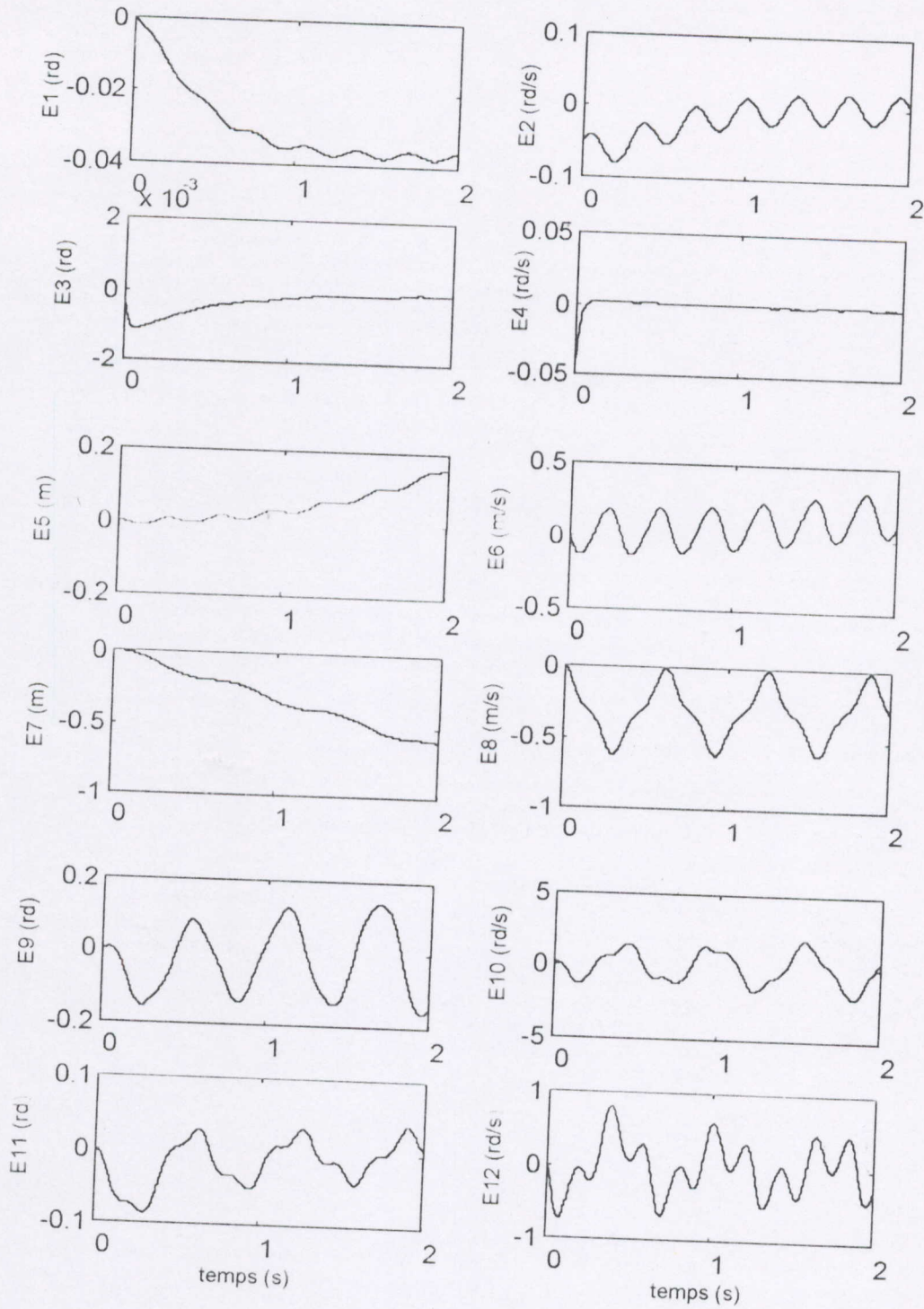


Fig-5.26 : Les erreurs absolues sur les sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées (commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction).

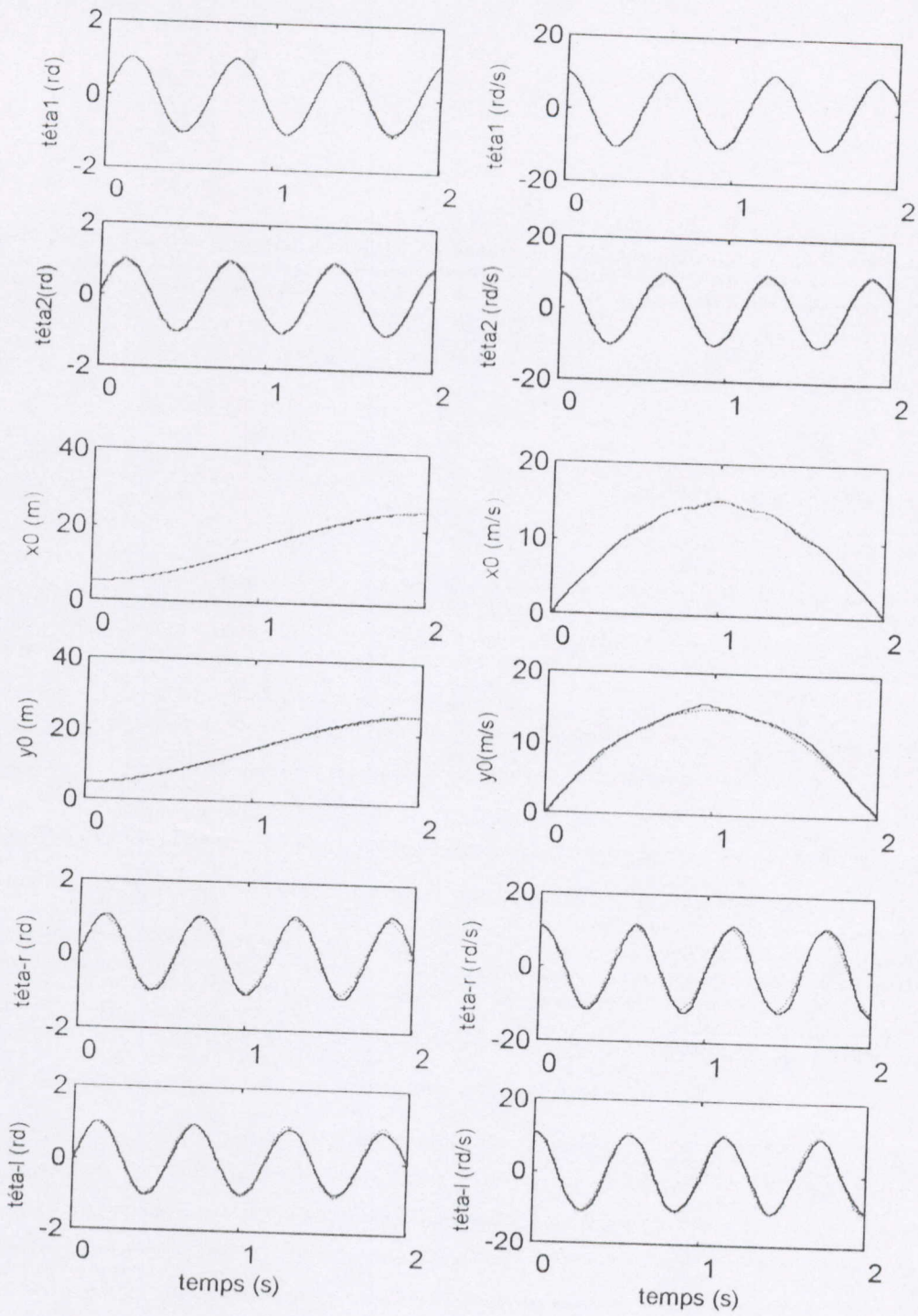


Fig-5.27 : Evolution des sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées avec perturbation inertielle (commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

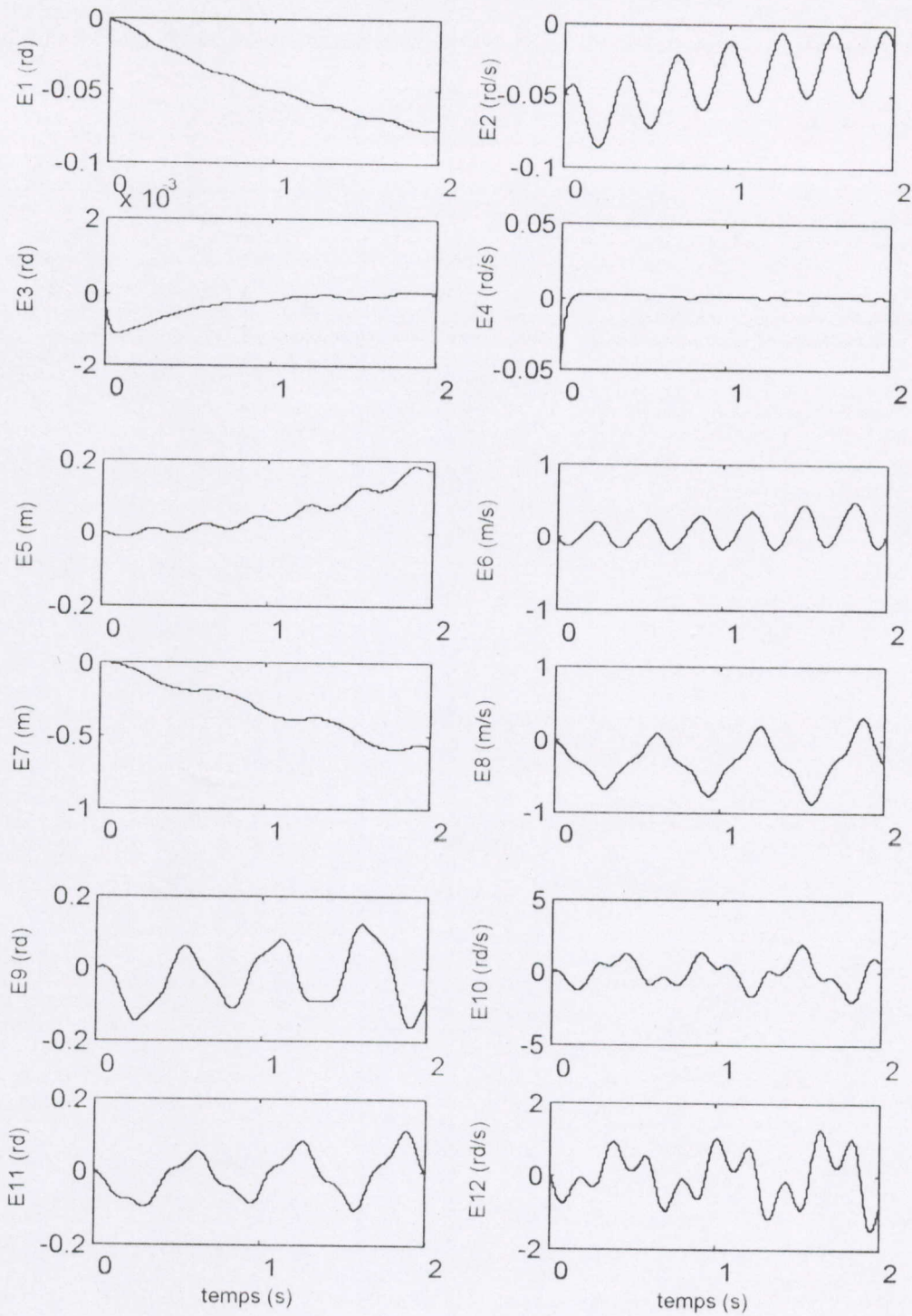


Fig-5.28 : Les erreurs absolues sur les sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées avec perturbation inertielle (commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction).

plus défavorables (évolution à grandes vitesses avec perturbation inertielle) comme c'est montré aux figures 5.27 et 5.28 et au tableau 5.9 présenté ci-dessous.

Les erreurs	Evolution à faibles vitesses			Evolution à vitesses élevées			Avec perturbation inertielle		
	min	moy	max	min	moy	max	min	moy	max
E1	-0,01	-0,01	0,00	-0,04	-0,03	0,00	-0,08	-0,05	0,00
E2	-0,03	-0,01	0,01	-0,08	-0,01	0,02	-0,09	-0,04	0,00
E3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
E4	-0,03	0,00	0,00	-0,05	0,00	0,00	-0,05	0,00	0,00
E5	-0,01	0,02	0,05	-0,01	0,05	0,16	-0,01	0,06	0,18
E6	-0,07	0,02	0,12	-0,13	0,08	0,32	-0,17	0,09	0,51
E7	-0,32	-0,14	0,00	-0,60	-0,30	0,00	-0,59	-0,32	0,00
E8	-0,32	-0,15	0,01	-0,61	-0,29	0,00	-0,87	-0,27	0,32
E9	-0,14	-0,02	0,11	-0,16	0,02	0,14	-0,16	-0,03	0,12
E10	-0,88	-0,03	1,06	-2,06	-0,08	1,92	-2,06	-0,05	1,94
E11	-0,04	-0,01	0,04	-0,09	-0,01	0,04	-0,10	-0,01	0,12
E12	-0,22	-0,01	0,28	-0,73	0,01	0,83	-1,45	0,00	1,28

Tableau 5.9 : Résultats comparatifs du manipulateur mobile (commande dynamique avec prise en compte des termes d'interaction).

Concernant la plate-forme, on a également une bonne poursuite en position et en vitesse pour les trois cas considérés quoiqu'un taux d'erreur négligeable persiste toujours du aux approximations faites lors de l'intégration du système d'équations différentielles représentant la dynamique du manipulateur mobile. L'accumulation de ces erreurs d'intégration simule dans notre cas les perturbations externes qui peuvent être engendré par l'environnement. On prévoit l'adjonction d'un correcteur proportionnel et dérivé (PD) à la commande dynamique pour réduire le taux d'erreur et améliorer les performances de contrôle.

Les lois de la commande dynamique avec correction PD sont celles présentées au chapitre quatre par les équations 4.25 à 4.28 ; les constantes de gains du correcteur PD sont fixées aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 k_{p1} = k_{p2} = 30 & & k_{v1} = k_{v2} = 15 ; \\
 k_{p3} = k_{p4} = 80 & & k_{v3} = k_{v4} = 40 ;
 \end{aligned}$$

Cette loi de commande est appliquée au manipulateur mobile lorsqu'il est soumis à des mouvements rapides et sous l'effet d'une perturbation inertielle ; le résultat est illustré aux figures 5.29 et 5.30.

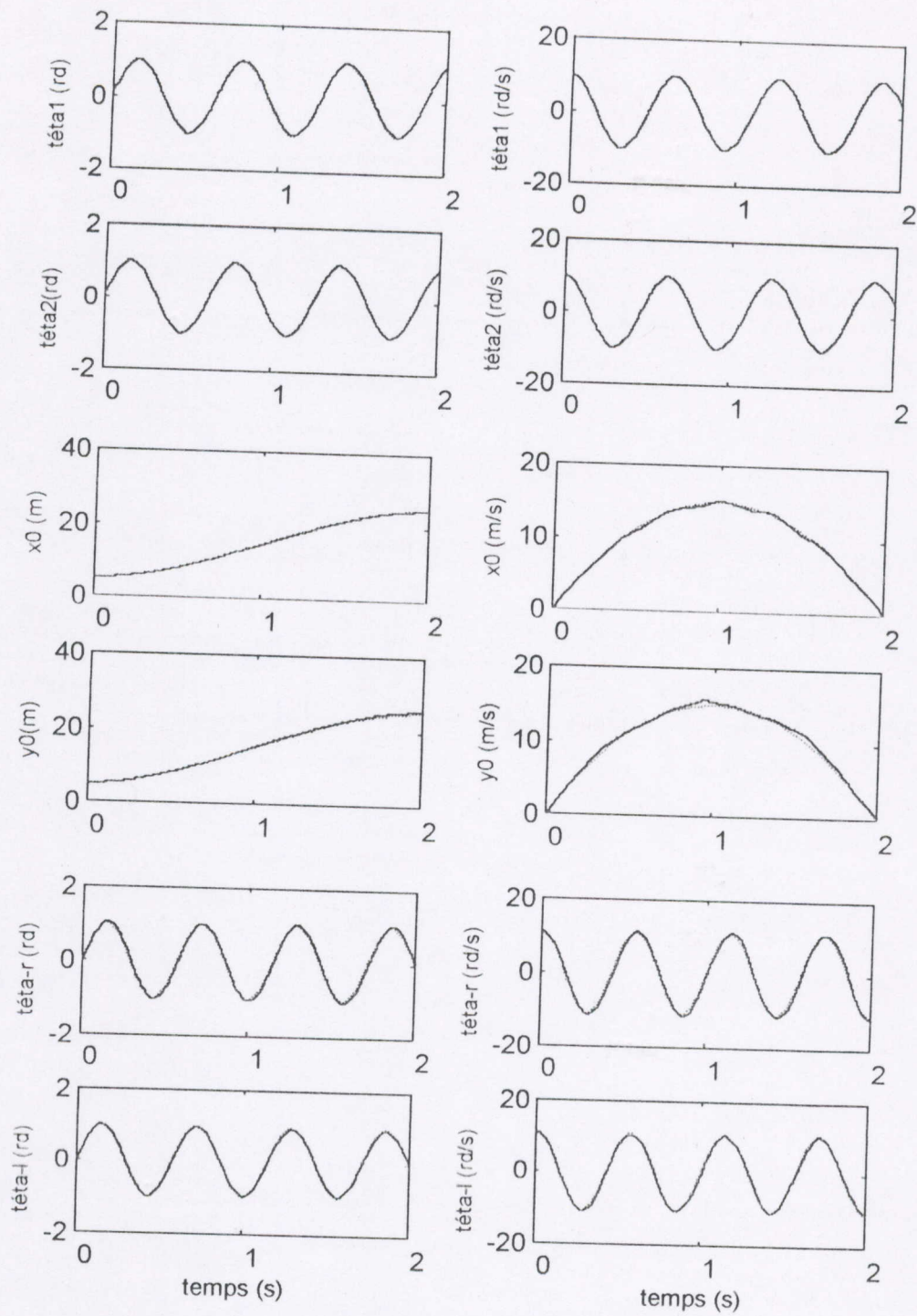


Fig-5.29 : Evolution des sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées avec une perturbation inertielle (commande dynamique avec compensateur PD).

Légende : Les consignes
 — Les sorties réelles

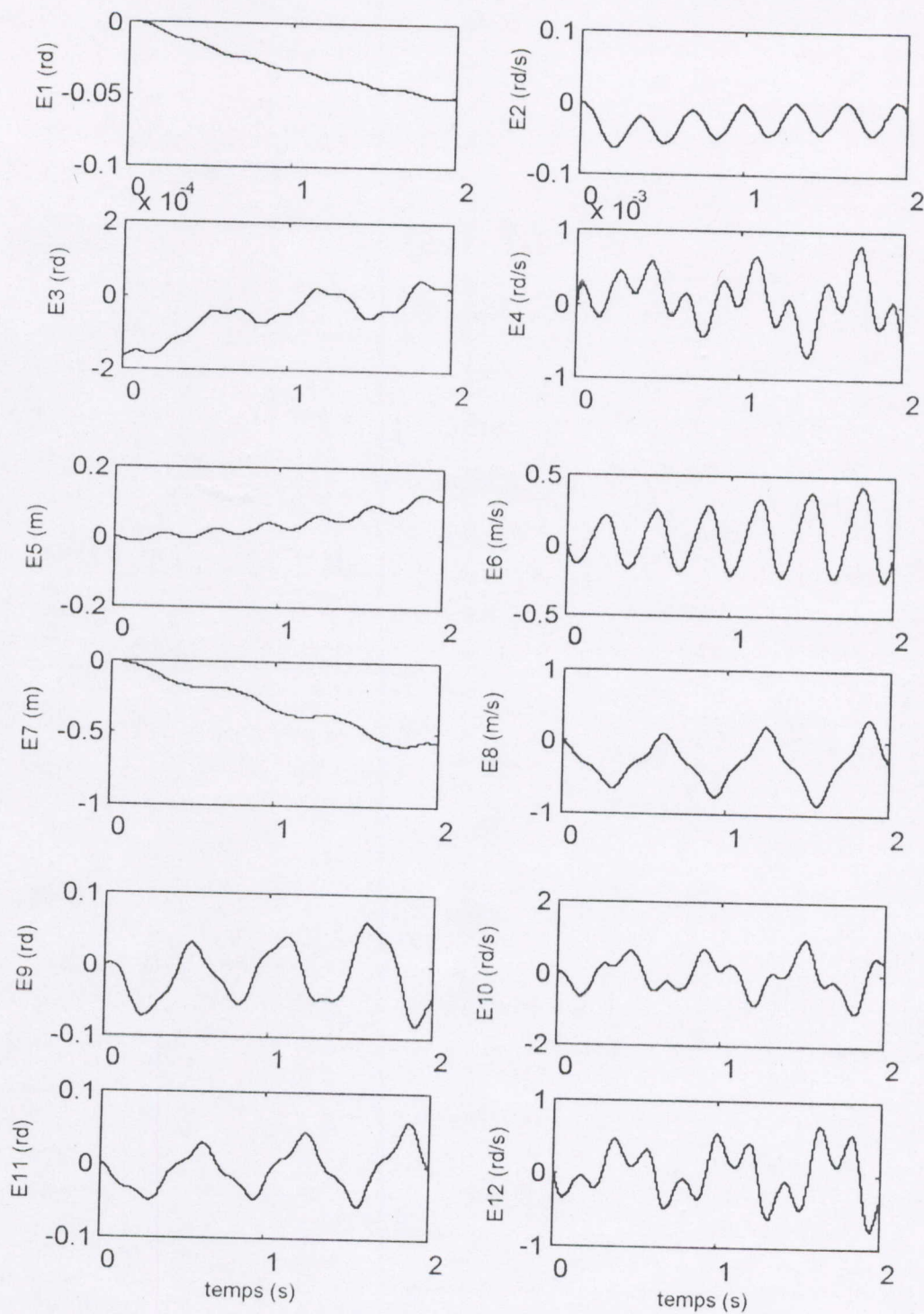


Fig-5.30 : Les erreurs absolues sur les sorties du manipulateur mobile dans le cas d'une consigne à vitesses élevées avec une perturbation inertielle (commande dynamique avec compensateur PD).

Interprétations :

En comparant les figures 5.27 et 5.29, on remarque que la précision pour ce dernier cas est meilleure que ce soit pour le bras manipulateur ou pour la plate-forme ; le tableau 5.10 ci-dessous porte les valeurs limites des erreurs absolues commises sur les états du système pour ce cas là et qui sont nettement aux résultats relatifs à la figure 5.27.

Le contrôleur proportionnel et dérivé (PD) améliore donc les performances de contrôle obtenues par la loi de commande dynamique en diminuant le taux des erreurs de poursuite.

Les erreurs	min	moy	max	Les erreurs	min	moy	max
E1	-0,05	-0,03	0,00	E7	-0,58	-0,32	0,00
E2	-0,06	-0,02	0,01	E8	-0,88	-0,27	0,32
E3	0,00	0,00	0,00	E9	-0,08	-0,01	0,06
E4	0,00	0,00	0,00	E10	-1,06	-0,02	0,99
E5	-0,01	0,05	0,13	E11	-0,06	0,00	0,06
E6	-0,24	0,06	0,44	E12	-0,75	0,00	0,68

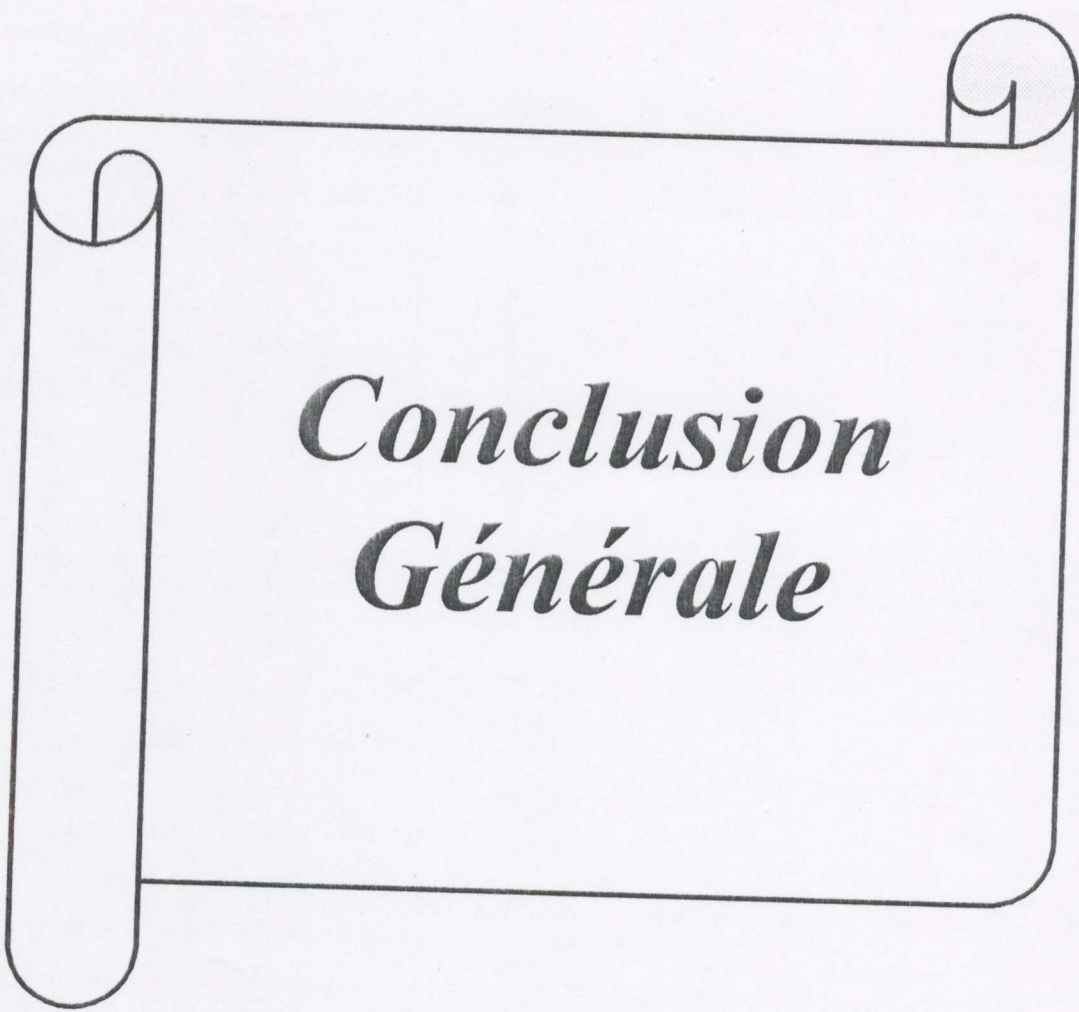
Tableau 5.10 : Les valeurs limites des erreurs des sorties du manipulateur mobile pour un mouvement rapide en présence d'une perturbation inertielle (commande dynamique avec correction PD).

IV. Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre les résultats de simulation du comportement du pendule inversé mobile et du manipulateur mobile vis à vis des variations de leurs vitesses d'évolution et des variations de leurs caractéristiques inertielles. Les résultats obtenus ont montré la non-efficacité des commandes PID classiques et toute commande comparable à contrôler des structures mécaniques assez complexes telles que les manipulateurs mobiles. La commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction est également insuffisante pour avoir des résultats en poursuite performants dès qu'il s'agit d'effectuer des mouvements rapides ou qu'un des paramètres physiques du système varie ; d'où la nécessité de compenser les termes de couplage dynamique.

Une des manières de le faire est la commande dynamique basée sur un modèle mathématique qui décrit l'intégralité des phénomènes dynamiques agissant sur le système. L'application de cette commande au manipulateur mobile a donné des résultats très intéressants en poursuite de trajectoires même dans les conditions les plus défavorables (évolution à grandes vitesses en présence de perturbation).

Vu les résultats obtenus, nous envisageons une mise en œuvre réelle de cette commande par ordinateur ou par processeur spécialisé sur un robot manipulateur mobile au niveau des laboratoires de robotique du CDTA.



***Conclusion
Générale***

Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce mémoire la modélisation et le contrôle des manipulateurs mobiles. Le manipulateur mobile considéré ici consiste en un bras manipulateur monté sur une plate-forme mobile ; il combine la capacité de manipulation des manipulateurs et la mobilité des robots mobiles.

Après avoir donné un bref aperçu sur l'aspect géométrique de ce genre de système, notre souci a été d'élaborer un modèle mathématique décrivant son comportement dynamique ; ceci nous a amené à utiliser le formalisme de la mécanique analytique de Lagrange. La forme générale du modèle dynamique obtenu est valable pour tout manipulateur mobile composé d'une plate-forme mobile non-holonome à deux roues motrices et un bras manipulateur à n liaisons rotoides et/ou prismatiques.

On a ensuite spécifié ces modèles (géométrique et dynamique) dans le cas d'un manipulateur mobile composé d'une plate-forme mobile et d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté.

Le modèle géométrique mis au point était à la base des simulations présentées à la fin du chapitre deux portant sur des exemples d'applications concernant la planification de trajectoires pour les tâches opérationnelles point à point (TO-PAP) et les tâches à trajectoire opérationnelle imposée (TTOI).

Le modèle dynamique obtenu après un calcul fastidieux constitue à lui-même un grand travail de modélisation. Ce modèle comporte explicitement les termes d'interaction dynamique entre le bras manipulateur et la plate-forme mobile.

Ce modèle est à la base des travaux réalisés dans ce mémoire. Dans un premier temps, il a été utilisé pour mener une étude analytique détaillée des effets d'interaction dynamique (cinématique, géométrique et inertielle) entre le bras manipulateur et la plate-forme mobile. Cette étude nous a permis de conclure que la compensation des termes d'interaction est indispensable pour atteindre des performances acceptables.

L'étude menée nous a conduit à adopter une commande dynamique qui incorpore l'intégralité de la dynamique modélisée du système dans la boucle de contrôle. La commande dynamique est préconisée grâce à ses deux importantes qualités :

- Elle permet la prise en compte des non-linéarités et des termes de couplage dynamique dont le manipulateur mobile est sujet.

- Les mouvements rapides et précis sont envisageables par cette commande lorsque le modèle mathématique sur lequel sont basées les lois de commande décrit fidèlement la dynamique du système mécanique.

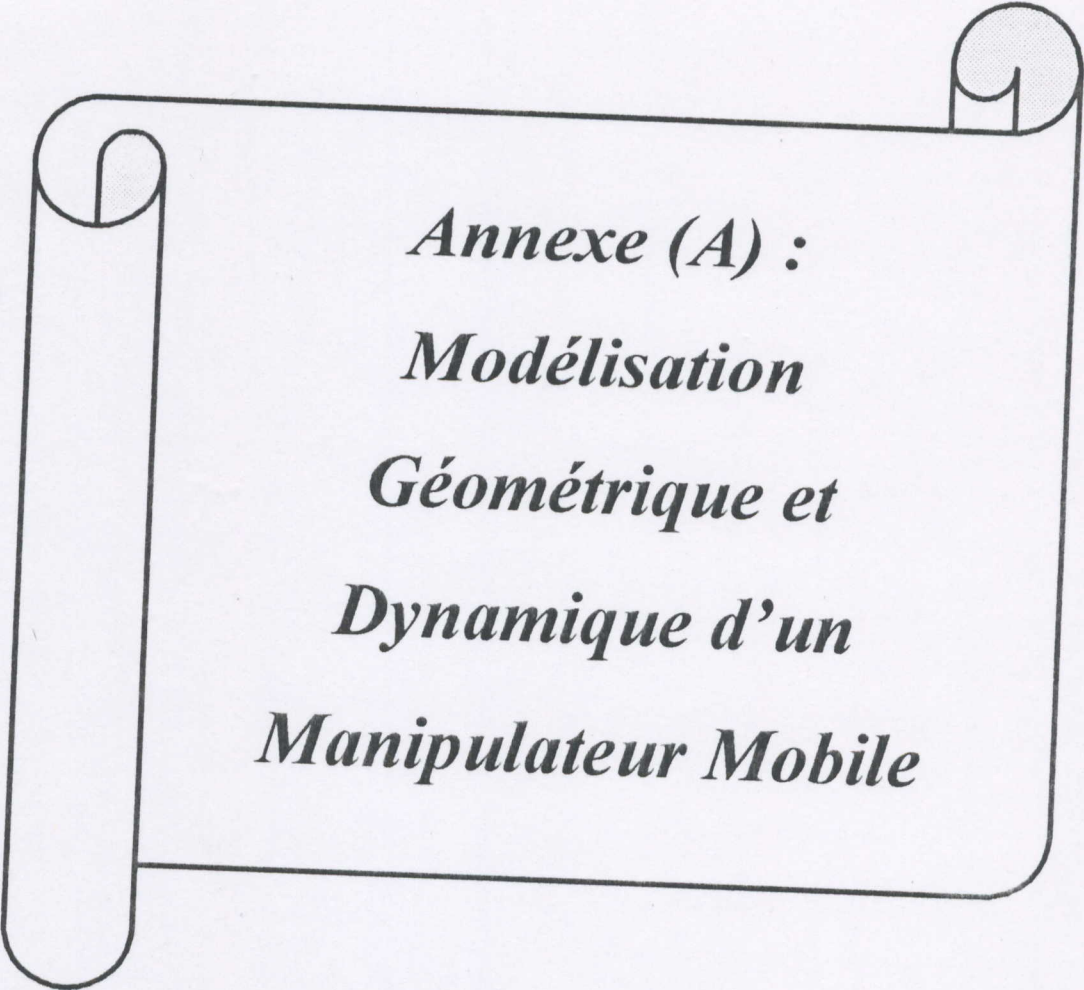
Les efforts généralisés sont donc directement calculés à partir des équations de mouvement du système (le modèle dynamique) en fonction des matrices d'inertie d'accélération, des accélérations consignes et des efforts centrifuges et de Coriolis.

L'étude en simulation du comportement du robot manipulateur mobile a prouvé l'incapacité des commandes PID classiques et toute commande comparable d'atteindre des performances acceptables dès qu'il s'agit d'effectuer des mouvements rapides ou dès qu'un des paramètres physiques du système varie.

Dans cette étude, on a montré qu'une commande dynamique sans prise en compte des termes d'interaction donne également des résultats dégradés lorsque le manipulateur mobile considéré est soumis à des mouvements rapides ou à toute autre sorte de perturbation. Seule une commande dynamique basée sur le modèle dynamique complet du système est capable de maintenir ses performances même dans les conditions les plus défavorables. Ceci est validé par les résultats de simulation présentés au chapitre précédent. Vu les résultats intéressants obtenus par cette commande, sa mise en œuvre réelle sur un robot manipulateur mobile est envisagée aux laboratoires de robotique du CDTA.

Bien entendu, ce travail n'a d'autres prétentions que d'être exploratoire et il reste bien plus de problèmes à examiner qu'il n'en a été résolu ; par exemple :

- Une étude plus profonde et plus avancée du problème de planification de trajectoires exploitant ce qui a été réalisé dans le domaine de la robotique mobile et la planification de trajectoires des bras manipulateurs et introduisant des artifices de coordinations entre le bras et la plate-forme.
- La prise en compte de la présence d'obstacles lors de la planification de trajectoires.
- Une étude fine des expressions analytiques du modèle dynamique pour effectuer toutes les simplifications possibles afin de rendre plus rapide le calcul de la commande.
- L'implémentation de cette loi de commande sur un support matériel adéquat et la résolution des problèmes liés à l'étape de réalisation pratique.



Annexe (A) :
Modélisation
Géométrie et
Dynamique d'un
Manipulateur Mobile

Au cours de ce mémoire, toutes nos simulations ont été menées sur un manipulateur mobile composé d'une plate-forme non-holonome et d'un bras manipulateur à deux degrés de liberté (voir figure A.1).

Dans cette annexe, on va expliciter les modèles géométrique et différentiel de ce manipulateur mobile qui sont à la base des exemples de simulation présentés à la fin du deuxième chapitre, ainsi que son modèle dynamique détaillé calculé à partir des formules générales présentées au même chapitre et sur lequel sont basées les simulations menées au troisième et au cinquième chapitres.

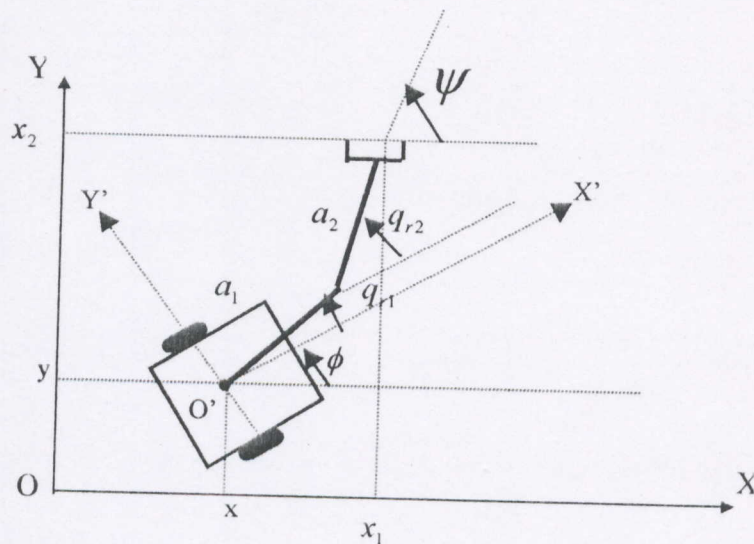


Fig-A.1 : Présentation géométrique du manipulateur mobile.

A.I Modèle géométrique :

Les coordonnées généralisées du bras sont définies par les déplacements angulaires de chacune de ses deux liaisons : $q_r = (q_{r1} \ q_{r2})^t$; donc $n=2$. On en déduit les coordonnées généralisées du système mécanique $q = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5)^t = (x \ y \ \phi \ q_{r1} \ q_{r2})^t$ donc $\nu=5$.

Les coordonnées opérationnelles de l'organe terminal (dans le repère (O,X,Y)) sont $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^t$ avec $x_3 = \psi$. Elles spécifient la position de l'organe terminal grâce aux deux premières coordonnées cartésiennes de son centre dans le repère (O,X,Y) et son orientation grâce à l'angle ψ que fait la direction de l'organe terminal avec l'axe (OX).

Le modèle géométrique direct (MGD) du système mécanique est :

$$x_1 = q_1 + a_1 \cos(q_3 + q_4) + a_2 \cos(q_3 + q_4 + q_5) ;$$

$$x_2 = q_2 + a_1 \sin(q_3 + q_4) + a_2 \sin(q_3 + q_4 + q_5) ;$$

$$x_3 = q_3 + q_4 + q_5 ;$$

A.II Modèle Différentiel :

Le modèle différentiel direct (MDD) du système mécanique est une matrice de dimension 3 par 5 obtenue par dérivation du modèle géométrique présenté ci-dessus. Ce modèle s'écrit comme suit :

$$dx = J(q)dq.$$

Pour ce système, on a :

$$J(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(a_1 S_{34} + a_2 S_{345}) & -(a_1 S_{34} + a_2 S_{345}) & -a_2 S_{345} \\ 0 & 1 & a_1 C_{34} + a_2 C_{345} & a_1 C_{34} + a_2 C_{345} & a_2 C_{345} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On a posé :

$$C_{34} = \cos(q_3 + q_4) ; S_{34} = \sin(q_3 + q_4) ; C_{345} = \cos(q_3 + q_4 + q_5) \text{ et } S_{345} = \sin(q_3 + q_4 + q_5).$$

A.III Modèle Dynamique :

L'étude analytique développée au chapitre trois, et les simulations présentées au chapitre cinq sont basées sur le modèle dynamique du manipulateur mobile présenté ci-dessus. Pour le calcul de son modèle dynamique, on a utilisé les expressions générales présentées au chapitre deux par les équations (2.42) et (2.47) qui, rappelons le, s'écrivent comme suit :

$$M_r(q_r)\ddot{q}_r + C_{r1}(q_r, \dot{q}_r) + C_{r2}(q_r, \dot{q}_r, \dot{q}_v) = \tau_r - R_r(q_r, q_v)\ddot{q}_v ;$$

$$M_{v1}(q_v)\ddot{q}_v + C_{v1}(q_v, \dot{q}_v) + C_{v2}(q_r, q_v, \dot{q}_r, \dot{q}_v) = E_v \tau_v - A' \lambda - M_{v2}(q_r, q_v)\ddot{q}_v - R_v(q_r, q_v)\ddot{q}_r ;$$

On va rappeler également les expressions des matrices d'inertie $M_r, R_r, M_{v1}, M_{v2}, R_v$ et des efforts de Coriolis et forces Centrifuges C_{r1}, C_{r2}, C_{v1} et C_{v2} qui ont été données par les équations numérotées (2.16), (2.17), (2.40), (2.41), (2.44), (2.45), (2.48), (2.49) et (2.50) :

$$M_r = M_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^2 \text{tr} [U_{kj} J_k U_{ki}^t] ; \text{ avec } i, j = 1, 2.$$

$$C_{r1} = C_{jm}(i) = \sum_{k=\max(i,j,m)}^2 \text{tr} [U_{kjm} J_k U_{ki}^t] \text{ avec } i, j, m = 1, 2.$$

$$M_{v1} = M(q_v) = \begin{bmatrix} m & 0 & -m_c c d \sin \phi & m_c c d \sin \phi \\ 0 & m & m_c c d \cos \phi & -m_c c d \cos \phi \\ -m_c c d \sin \phi & m_c c d \cos \phi & I_c^2 + I_w & -I_c^2 \\ m_c c d \sin \phi & -m_c c d \cos \phi & I_c^2 & I_c^2 + I_w \end{bmatrix}$$

$$C_{v1} = C(q_v, \dot{q}_v) = \begin{bmatrix} -m_c d \dot{\phi}^2 \cos \phi \\ -m_c d \dot{\phi}^2 \sin \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{r2}^{(i)} = 2 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 \sum_{h=\max(i,k)}^2 \text{trace} \left[\frac{\partial T_h}{\partial q_i} J_h \frac{\partial T_h^t}{\partial q_{v,j} \partial q_k} \right] \dot{q}_{v,j} \dot{q}_k + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^n \text{trace} \left[\frac{\partial T_h}{\partial q_i} J_h \frac{\partial T_h^t}{\partial q_{v,j} \partial q_{v,k}} \right] \dot{q}_{v,j} \dot{q}_{v,k} ; i=1,2$$

$$R_r^{(ij)} = \sum_{k=1}^2 \text{trace} \left[\frac{\partial T_k}{\partial q_i} J_k \frac{\partial T_k^t}{\partial q_{v,j}} \right] ; i=1,2 ; j=1,\dots,4.$$

$$M_{v2}^{(ij)} = \sum_{k=1}^2 \text{trace} \left[\frac{\partial T_k}{\partial q_{v,i}} J_k \frac{\partial T_k}{\partial q_{v,j}} \right] ; 1 \leq i, j \leq 4$$

$$C_{v2}^{(i)} = 2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{h=j}^2 \text{trace} \left[\frac{\partial T_h}{\partial q_{v,i}} J_h \frac{\partial T_h^t}{\partial q_j \partial q_k} \right] \dot{q}_j \dot{q}_{v,k} + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{h=\max(j,k)}^2 \text{trace} \left[\frac{\partial T_h}{\partial q_{v,i}} J_h \frac{\partial T_h^t}{\partial q_j \partial q_k} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k ; i=1,\dots,4.$$

$$R_v^{(ij)} = \sum_{k=j}^2 \text{trace} \left[\frac{\partial T_k}{\partial q_{v,i}} J_k \frac{\partial T_k^t}{\partial q_j} \right] ; 1 \leq i \leq 4 ; 1 \leq j \leq 2$$

L'élaboration du modèle dynamique de ce manipulateur mobile passe par le calcul de toutes les dérivées matricielles partielles, le développement de chaque produit matriciel et la sommation des traces des matrices résultantes.

Après avoir effectué tous ces calculs, on a pu exprimer chaque élément des matrices M_r , R_r , M_{v1} , M_{v2} , R_v , C_{r1} , C_{r2} , C_{v1} et C_{v2} en fonction des paramètres physiques et de la configuration du système. Les expressions analytiques obtenues de ces éléments sont listés aux pages suivantes.

Dans ces expressions, le vecteur $X(i)$, ($i=1$ à 12) est le vecteur des variables d'état du système défini par :

$X = [q_{r1} \ \dot{q}_{r1} \ q_{r2} \ \dot{q}_{r2} \ x_0 \ \dot{x}_0 \ y_0 \ \dot{y}_0 \ \theta_r \ \dot{\theta}_r \ \theta_l \ \dot{\theta}_l]^t$ où q_{r1} , \dot{q}_{r1} , q_{r2} et \dot{q}_{r2} désignent les positions et les vitesses angulaires des deux liaisons du bras manipulateur, x_0 , \dot{x}_0 , y_0 et \dot{y}_0 désignent les positions et vitesses linéaires du centre de masse de la plate-forme mobile dans le repère fixe, θ_r , $\dot{\theta}_r$, θ_l et $\dot{\theta}_l$ sont les positions et vitesses angulaires des roues droite et gauche respectivement de la plate-forme. Le vecteur $Y(i)$, ($i=1$ à 12) est la dérivée par rapport au temps du vecteur $X(i)$, ce vecteur est défini comme suit :

$$Y = [\dot{q}_{r1} \ \ddot{q}_{r1} \ \dot{q}_{r2} \ \ddot{q}_{r2} \ \dot{x}_0 \ \ddot{x}_0 \ \dot{y}_0 \ \ddot{y}_0 \ \dot{\theta}_r \ \ddot{\theta}_r \ \dot{\theta}_l \ \ddot{\theta}_l]^t .$$

Les notations (phip) et $(\text{phi}2p)$ désignent les dérivées première et seconde par rapport au temps de l'angle (phi) qui représente l'orientation de la plate-forme ϕ .

Le bras manipulateur :

La matrice d'inertie M_r (2 par 2) :

$$M_{r11} = m_1 \cdot l_1^2 / 3 + m_2 \cdot l_2^2 / 3 + m_2 \cdot l_1^2 \cdot \cos(2 \cdot X(1)) + m_2 \cdot r^2 \cdot (\sin(\text{all}))^2 - m_2 \cdot l_2 \cdot r \cdot \sin(\text{all}) \cdot \cos(\text{all}) \cdot \sin(X(3)) + m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(X(3));$$

$$M_{r12} = (m_2 \cdot l_2^2 / 3) \cdot \cos(\text{all}) -$$

$$0.5 \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot r \cdot \sin(\text{all}) \cdot \sin(X(3)) + 0.5 \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\text{all}) \cdot \cos(X(3));$$

$$M_{r21} = (m_2 \cdot l_2^2 / 3) \cdot \cos(\text{all}) -$$

$$0.5 \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot r \cdot \sin(\text{all}) \cdot \sin(X(3)) + 0.5 \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\text{all}) \cdot \cos(X(3));$$

$$M_{r22} = m_2 \cdot l_2^2 / 3;$$

Les coefficients d'inertie d'interaction R_r (2 par 4) :

$$R_{r11} = 0;$$

$$R_{r12} = 0;$$

$$R_{r13} = (-m_1 \cdot l_1^2 / 3 - m_2 \cdot l_2^2 / 3 - m_2 \cdot l_1^2 \cdot \cos(2 \cdot X(1)) - m_2 \cdot r^2 \cdot (\sin(\text{all}))^2 \cdot \cos(2 \cdot X(1)) + m_2 \cdot l_2 \cdot r \cdot \sin(\text{all}) \cdot \cos(\text{all}) \cdot \sin(X(3)) \cdot \cos(2 \cdot X(1)) - m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(X(3)) \cdot \cos(2 \cdot X(1)) - 0.5 \cdot m_2 \cdot r^2 \cdot l_2 \cdot \sin(\text{all}) \cdot \cos(X(3)) \cdot \sin(2 \cdot X(1))) \cdot c;$$

$$R_{r14} = (m_1 \cdot l_1^2 / 3 + m_2 \cdot l_2^2 / 3 + m_2 \cdot l_1^2 \cdot \cos(2 \cdot X(1)) + m_2 \cdot r^2 \cdot (\sin(\text{all}))^2 \cdot \cos(2 \cdot X(1)) - m_2 \cdot l_2 \cdot r \cdot \sin(\text{all}) \cdot \cos(\text{all}) \cdot \sin(X(3)) \cdot \cos(2 \cdot X(1)) + m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(X(3)) \cdot \cos(2 \cdot X(1)) + 0.5 \cdot m_2 \cdot r^2 \cdot l_2 \cdot \sin(\text{all}) \cdot \cos(X(3)) \cdot \sin(2 \cdot X(1))) \cdot c;$$

$$R_{r21} = 0;$$

$$R_{r22} = 0;$$

$$R_{r23} = (m_2 \cdot l_2^2 / 3) - 0.5 \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot r \cdot \sin(\text{all}) \cdot \cos(\text{all}) \cdot \sin(X(3)) \cdot \sin(2 \cdot X(1)) - 0.5 \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot r \cdot \sin(\text{all}) \cdot \sin(X(3)) \cdot \cos(2 \cdot X(1)) + 0.5 \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\text{all}) \cdot \cos(X(3)) \cdot \cos(2 \cdot X(1)) - 0.5 \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(X(3)) \cdot \sin(2 \cdot X(1));$$

$$R_{r24} = (-$$

$$m_2 \cdot l_2^2 / 3 + 0.5 \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot r \cdot \sin(\text{all}) \cdot \cos(\text{all}) \cdot \sin(X(3)) \cdot \sin(2 \cdot X(1)) + 0.5 \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot r \cdot \sin(\text{all}) \cdot \sin(X(3)) \cdot \cos(2 \cdot X(1)) -$$

$$0.5 \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\text{all}) \cdot \cos(X(3)) \cdot \cos(2 \cdot X(1)) + 0.5 \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(X(3)) \cdot \sin(2 \cdot X(1));$$

Les efforts Centrifuges et de Coriolis Cr_1 (2 par 1) et Cr_2 (2 par 2) :

$$Cr_{11} = 2 \cdot (-0.5 \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(X(3)) - 0.5 \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot r \cdot \sin(\text{all}) \cdot \cos(X(3))) \cdot X(2) \cdot X(4) + (-0.5 \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot r \cdot \sin(\text{all}) \cdot \cos(X(3)) - 0.5 \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\text{all}) \cdot \sin(X(3))) \cdot X(4)^2;$$

$$Cr_{12} = (0.5 \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot r \cdot \sin(\text{all}) \cdot \cos(\text{all}) \cdot \cos(X(3)) - 0.5 \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(X(3))) \cdot (X(2))^2;$$

$$Cr_{21} = 2 \cdot c \cdot P_1 \cdot X(10) \cdot X(2) - 2 \cdot c \cdot P_1 \cdot X(12) \cdot X(2) + 2 \cdot c \cdot P_2 \cdot X(10) \cdot X(4) - 2 \cdot c \cdot P_2 \cdot X(12) \cdot X(4) + 2 \cdot c \cdot P_3 \cdot X(10) \cdot X(6) - 2 \cdot c \cdot P_3 \cdot X(12) \cdot X(6) + 2 \cdot c \cdot P_3 \cdot X(10) \cdot X(8) - 2 \cdot c \cdot P_3 \cdot X(12) \cdot X(8) + c \cdot P_3 \cdot (X(10))^2 - c \cdot P_3 \cdot (X(12))^2;$$

$$\begin{aligned} Cr22 = & P4 * X(10) * X(2) - P4 * X(12) * X(2) + P5 * X(10) * X(4) - \\ & P5 * X(12) * X(4) + 2 * c * P6 * X(10) * X(6) - 2 * c * P6 * X(12) * X(6) + 2 * c * P6 * X(10) * X(8) - \\ & 2 * c * P6 * X(12) * X(8) + c * P6 * (X(10))^2 - c * P6 * (X(12))^2; \end{aligned}$$

avec :

$$P1 = -$$

$$m2 * (l1^2 + r2^2 * (\sin(\text{all}))^2) * \sin(2 * X(1)) + m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * \cos(\text{all}) * \sin(X(3)) * \sin(2 * X(1)) -$$

$$m2 * l1 * l2 * \cos(X(3)) * \sin(2 * X(1)) + 0.5 * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * \cos(X(3)) * (\cos(2 * X(1)) - 1);$$

$$P2 = -0.5 * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * \sin(X(3)) * \sin(2 * X(1)) -$$

$$0.5 * m2 * l1 * l2 * \sin(X(3)) * \cos(2 * X(1)) -$$

$$0.5 * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * \cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \cos(2 * c * (X(9) -$$

$$X(11))) + 0.5 * m2 * l1 * l2 * \cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \sin(2 * X(1));$$

$$P3 = -(m1 * l1^2) / 3 - (m2 * l2^2) / 3 - m2 * l1^2 * \cos(2 * X(1)) -$$

$$m2 * r2^2 * (\sin(\text{all}))^2 * \cos(2 * X(1)) + m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * \cos(\text{all}) * \sin(X(3)) * \cos(2 * X(1)) -$$

$$-m2 * l1 * l2 * \cos(X(3)) * \cos(2 * X(1)) - 0.5 * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * \cos(X(3)) * \sin(2 * X(1));$$

$$P4 = (c * m1 * l1 * l2 * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \sin(2 * X(1)) + \sin(X(3)) * \cos(2 * X(1))) + c * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \cos(2 * X(1)) - \sin(X(3)) * \sin(2 * X(1))));$$

$$P5 = (c * m2 * l2^2) / 3 * (1 + (\cos(\text{all}))^2) * \sin(2 * X(1));$$

$$P6 = (m2 * l2^2 * \cos(\text{all}) / 3 - 0.5 * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * \cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \sin(2 * X(1)) -$$

$$0.5 * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * \sin(X(3)) * \cos(2 * X(1)) + 0.5 * m2 * l1 * l2 * \cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \cos(2 * X(1)) - 0.5 * m2 * l1 * l2 * \sin(X(3)) * \sin(2 * X(1));$$

Plate-forme mobile :

Les multiplicateurs de Lagrange :

$$\text{land1} = (\sin(\text{phi}) * \text{land2} + m * y(8) + mc * d * \text{phi2p} * \cos(\text{phi}) - mc * d * (\text{phip}) . ^2 * \sin(\text{phi})) / \cos(\text{phi});$$

$$\text{land2} = (m * y(6) - mc * d * \text{phi2p} * \sin(\text{phi}) - mc * d * (\text{phip}) . ^2 * \cos(\text{phi}) - \text{land1} * \sin(\text{phi})) / \cos(\text{phi});$$

La matrice d'inertie d'accélération Mv1 (4 par 4) :

$$Mv1 = \begin{bmatrix} m & 0 & -mc * c * d * \sin(\text{phi}) & mc * c * d * \sin(\text{phi}) \\ 0 & m & mc * c * d * \cos(\text{phi}) & -mc * c * d * \cos(\text{phi}) \\ -mc * c * d * \sin(\text{phi}) & mc * c * d * \cos(\text{phi}) & (I * c^2 + Iw) & -I * c^2 \\ mc * c * d * \sin(\text{phi}) & -mc * c * d * \cos(\text{phi}) & (-I * c^2) & (I * c^2 + Iw) \end{bmatrix};$$

La matrice d'inertie de couplage Mv2 (4 par 4) :

$$Mv211 = 0;$$

$$Mv212 = 0;$$

$$\begin{aligned} Mv213 = & -c * m1 * l1 * 0.5 * \sin(X(1) - \text{phi}) - c * m2 * l2 * 0.5 * \cos(X(3)) * \sin(X(1) + \text{phi}) - \\ & c * l2 * m2 * 0.5 * \cos(\text{all}) * \sin(X(3)) * \cos(X(1) + \text{phi}) + c * m2 * r2 * \sin(\text{all}) * \cos(X(1) + \text{phi}) - \\ & c * m2 * l1 * \sin(X(1) + \text{phi}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Mv214 = & c*m1*l1*0.5*\sin(X(1)-\phi) + c*m2*l2*0.5*\cos(X(3))*\sin(X(1)+\phi) - \\ & c*l2*m2*0.5*\cos(\alpha) *\sin(X(3))*\cos(X(1)+\phi) - \\ & c*m2*r2*\sin(\alpha) *\cos(X(1)+\phi) + c*m2*l1*\sin(X(1)+\phi); \end{aligned}$$

$$Mv221=0;$$

$$Mv222=0;$$

$$\begin{aligned} Mv223 = & -c*m1*l1*0.5*\cos(X(1)-\phi) - c*m2*l2*0.5*\cos(X(3))*\cos(X(1)-\phi) - \\ & c*m2*l2*0.5*\cos(\alpha) *\sin(X(3))*\sin(X(1)-\phi) + c*m2*r2*\sin(\alpha) *\sin(X(1)-\phi) - \\ & c*m2*l1*\sin(X(1)+\phi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Mv224 = & c*m1*l1*0.5*\cos(X(1)-\phi) + c*m2*l2*0.5*\cos(X(3))*\cos(X(1)- \\ & \phi) + c*m2*l2*0.5*\cos(\alpha) *\sin(X(3))*\sin(X(1)-\phi) - c*m2*r2*\sin(\alpha) *\sin(X(1)- \\ & \phi) + c*m2*l1*\sin(X(1)+\phi); \end{aligned}$$

$$Mv231=0;$$

$$Mv232=0;$$

$$Mv233=-$$

$$c^2*\cos(2*\phi) * (m2*l1^2 + (m1*l1^2)/3 + (m2*l2^2)/3 + m2*r2^2 * (\sin(\alpha))^2 + m2*l1*l2*\cos(X(3)) - m2*l2*r2*\sin(\alpha) *\cos(\alpha) *\sin(X(3)));$$

$$\begin{aligned} Mv234 = & c^2*\cos(2*\phi) * (m2*l1^2 + (m1*l1^2)/3 + (m2*l2^2)/3 + m2*r2^2 * (\sin(\alpha))^2 + m2*l1* \\ & l2*\cos(X(3)) - m2*l2*r2*\sin(\alpha) *\cos(\alpha) *\sin(X(3))); \end{aligned}$$

$$Mv241=0;$$

$$Mv242=0;$$

$$\begin{aligned} Mv243 = & c^2*\cos(2*\phi) * (m2*l1^2 + (m1*l1^2)/3 + (m2*l2^2)/3 + m2*r2^2 * (\sin(\alpha))^2 + m2*l1* \\ & l2*\cos(X(3)) - m2*l2*r2*\sin(\alpha) *\cos(\alpha) *\sin(X(3))); \end{aligned}$$

$$Mv244=-$$

$$c^2*\cos(2*\phi) * (m2*l1^2 + (m1*l1^2)/3 + (m2*l2^2)/3 + m2*r2^2 * (\sin(\alpha))^2 + m2*l1*l2*\cos(X(3)) - m2*l2*r2*\sin(\alpha) *\cos(\alpha) *\sin(X(3)));$$

Les efforts Centrifuges et de Coriolis Cv1 (4 par 1) et Cv2 (4 par 1) :

$$Cv1 = [-mc*d*(\phi)'^2) *\cos(\phi)$$

$$-mc*d*(\phi)'^2) *\sin(\phi)$$

$$0$$

$$0];$$

$$\begin{aligned} Cv21 = & c*m1*l1*\cos(X(1)-\phi) * X(2) * X(10) - c*m1*l1*\cos(X(1)-\phi) * X(2) * X(12) + (- \\ & c*m2*l2*\cos(X(3)) *\cos(X(1)+\phi) + c*m2*l2*\cos(\alpha) *\sin(X(3))*\sin(X(1)+\phi) - \\ & 2*c*m2*r2*\sin(\alpha) *\sin(X(1)+\phi) - \\ & 2*c*m2*l1*\cos(X(1)+\phi)) * X(2) * X(10) + (c*m2*l2*\cos(X(3)) *\cos(X(1)+\phi) - \\ & c*m2*l2*\cos(\alpha) *\sin(X(3))*\sin(X(1)+\phi) + 2*c*m2*r2*\sin(\alpha) *\sin(X(1)+\phi) + 2*c*m2* \\ & l1*\cos(X(1)+\phi)) * X(2) * X(12) + (c*m2*l2*\sin(X(3)) *\sin(X(1)- \\ & \phi) + c*m2*l2*\cos(\alpha) *\cos(X(3))*\cos(X(1)-\phi)) * X(4) * X(10) - \\ & (c*m2*l2*\sin(X(3)) *\sin(X(1)-\phi) + c*m2*l2*\cos(\alpha) *\cos(X(3))*\cos(X(1)- \\ & \phi)) * X(4) * X(12) - 0.5*m1*l1*\sin(X(1)+\phi) * (X(2))^2 + (- \\ & 0.5*m2*l2*\cos(X(3)) *\sin(X(1)+\phi) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m2*l1*\sin(X(1)+\text{phi}) * (X(2)) .^2 + (-m2*l2 * (\cos(X(3))) .^2 * \sin(X(1) - \\
& X(3)) + m2*l2 * \cos(\text{al1}) * \sin(X(3)) * \cos(X(3)) + m2*l2 * \cos(\text{al1}) * \sin(X(3)) * \cos(X(3)) * \cos(X \\
& (1) - X(3)) - m2*l2 * \cos(\text{al1}) * \sin(X(3)) * \cos(X(3)) - \\
& m2*l2 * \cos(\text{al2}) * \sin(X(3)) * \cos(X(3)) * \cos(X(1) - X(3)) - \\
& m2*l2 * \cos(\text{al1}) * \cos(\text{al2}) * (\sin(X(3))) .^2 * \sin(X(1) - \\
& X(3)) + 2*m2*r2 * \sin(\text{al1}) * \cos(X(3)) + 2*m2*r2 * \sin(\text{al2}) * \cos(X(3)) * \cos(X(1) - \\
& X(3)) + 2*m2*r2 * \cos(\text{al1}) * \sin(\text{al2}) * \sin(X(3)) * \sin(X(1) - X(3)) - \\
& 2*m2*l2 * \cos(X(3)) * \sin(X(1) - \\
& X(3)) + 2*m2*l1 * \cos(\text{al1}) * \sin(X(3)) + 2*m2*l2 * \cos(\text{al1}) * \sin(X(3)) * \cos(X(1) - \\
& X(3)) * X(2) * X(4) - \\
& (0.5*m2*l2 * \cos(\text{al1}) * \cos(X(3)) * \sin(X(1) + \text{phi}) + 0.5*m2*l2 * \sin(X(3)) * \cos(X(1) + \text{phi})) * (X \\
& (4)) ^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Cv22} = & -c*m1*l1*\sin(X(1)-\text{phi}) * X(2) * X(10) + c*m1*l1*\sin(X(1)-\text{phi}) * X(2) * X(12) + (- \\
& c*m2*l2*\cos(X(3)) * \sin(X(1)-\text{phi}) + c*m2*l2*\cos(\text{al1}) * \sin(X(3)) * \cos(X(1)-\text{phi}) - \\
& 2*c*m2*r2*\sin(\text{al1}) * \cos(X(1)-\text{phi}) - 2*c*m2*l1*\sin(X(1) - \\
& \text{phi}) * X(2) * X(10) + (c*m2*l2*\cos(X(3)) * \sin(X(1)-\text{phi}) - \\
& c*m2*l2*\cos(\text{al1}) * \sin(X(3)) * \cos(X(1)-\text{phi}) + 2*c*m2*r2*\sin(\text{al1}) * \cos(X(1) - \\
& \text{phi}) + 2*c*m2*l1*\sin(X(1)-\text{phi})) * X(2) * X(12) + (c*m2*l2*\sin(X(3)) * \cos(X(1)-\text{phi}) - \\
& c*m2*l2*\cos(\text{al1}) * \cos(X(3)) * \sin(X(1)-\text{phi})) * X(4) * X(10) + (- \\
& c*m2*l2*\sin(X(3)) * \cos(X(1)-\text{phi}) + c*m2*l2*\cos(\text{al1}) * \cos(X(3)) * \sin(X(1) - \\
& \text{phi})) * X(4) * X(12) + (0.5*m1*l1*\cos(X(1)+\text{phi}) + 0.5*m2*l2*\cos(X(3)) * \cos(X(1)+\text{phi}) - \\
& 0.5*m2*l2*\cos(\text{al1}) * \sin(X(3)) * \sin(X(1)+\text{phi}) + m2*r2*\sin(\text{al1}) * \sin(X(1)+\text{phi}) + m2*l1*\cos \\
& (X(1)+\text{phi})) * (X(2)) ^2 + (m2*l2*\cos(\text{al2}) * \sin(X(3)) * \cos(X(3)) * \sin(X(1) - \\
& X(3)) + m2*l2*\cos(\text{al1}) * \cos(\text{al2}) + m2*l2*\cos(\text{al1}) * \cos(\text{al2}) * (\cos(X(3))) ^2 * \cos(X(1) - \\
& X(3)) - m2*l2*\sin(\text{al1}) * \sin(\text{al2}) * \cos(X(3)) - \\
& m2*l2*\sin(\text{al1}) * \sin(\text{al2}) * \cos(X(3)) * \cos(X(1) - \\
& X(3)) + m2*l2 * (\cos(\text{al2})) ^2 * (\sin(X(3))) ^2 * \cos(X(1) - X(3)) - \\
& m2*l2*\cos(\text{al1}) * (\cos(\text{al2})) ^2 * \sin(X(3)) * \cos(X(3)) * \sin(X(1) - \\
& X(3)) + m2*l2*\sin(\text{al1}) * \sin(\text{al2}) * \cos(\text{al2}) * \sin(X(3)) * \sin(X(1) - X(3)) - \\
& 2*m2*r2*\sin(\text{al1}) * \cos(\text{al2}) * \sin(X(3)) - 2*m2*r2*\sin(\text{al2}) * \cos(\text{al2}) * \sin(X(3)) * \cos(X(1) - \\
& X(3)) + 2*m2*r2*\cos(\text{al1}) * \sin(\text{al2}) * \cos(\text{al2}) * \cos(X(3)) * \sin(X(1) - X(3)) - \\
& 2*m2*r2*\sin(\text{al1}) * (\sin(\text{al2})) ^2 * \sin(X(1) - X(3)) + 2*m2*l2*\cos(\text{al2}) * \sin(X(3)) * \sin(X(1) - \\
& X(3)) + 2*m2*l1*\cos(\text{al1}) * \cos(\text{al2}) * \cos(X(3)) + 2*m2*l2*\cos(\text{al1}) * \cos(\text{al2}) * \cos(X(3)) * \cos \\
& (X(1) - X(2)) - 2*m2*l1*\sin(\text{al1}) * \sin(\text{al2}) - 2*m2*l2*\sin(\text{al1}) * \sin(\text{al2}) * \cos(X(1) - \\
& X(3)) * X(2) * X(4) + (0.5*m2*l2*\cos(\text{al1}) * \cos(X(3)) * \cos(X(1) + \text{phi}) - \\
& 0.5*m2*l2*\sin(X(3)) * \sin(X(1) + \text{phi})) * (X(4)) .^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Cv23} = & - \\
& (2/3) * c^2 * m1 * l1^2 * \sin(2*\text{phi}) * X(2) * X(10) + (2/3) * c^2 * m1 * l1^2 * \sin(2*\text{phi}) * X(2) * X(12) - \\
& 4 * c^2 * \sin(\text{phi}) * \cos(\text{phi}) * (m2 * l1 * l2 * \cos(X(3))) - \\
& m2 * l2 * r2 * \sin(\text{al1}) * \cos(\text{al1}) * \sin(X(3)) + (1/3) * m2 * l2^2 + m2 * l1^2 + m2 * r2^2 * (\sin(\text{al1})) ^2 * \\
& X(2) * X(10) + 4 * c^2 * \sin(\text{phi}) * \cos(\text{phi}) * (m2 * l1 * l2 * \cos(X(3))) - \\
& m2 * l2 * r2 * \sin(\text{al1}) * \cos(\text{al1}) * \sin(X(3)) + (1/3) * m2 * l2^2 + m2 * l1^2 + m2 * r2^2 * (\sin(\text{al1})) ^2 *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X(2) * X(12) + (c^2 * m2 * l1 * l2 * \cos(X(1) + 2 * \text{phi}) * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \sin(X(1)) + \sin(X(3)) * \\
& \cos(X(1))) - c^2 * m2 * l1 * l2 * \sin(X(1) + 2 * \text{phi}) * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \cos(X(1)) - \\
& \sin(X(3)) * \sin(X(1))) + c^2 * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * \sin(X(1) + 2 * \text{phi}) * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \sin \\
& n(X(1)) + \sin(X(3)) * \cos(X(1))) + c^2 * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * \cos(X(1) + 2 * \text{phi}) * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \cos \\
& X(3)) * \cos(X(1)) - \sin(X(3)) * \sin(X(1))) * X(4) * X(10) \\
& + ((1/3) * c * m1 * l1^2 + c * m2 * l1^2 + (c * m2 * l2^2) / 3 + c * m2 * l1 * l2 * \cos(X(3)) + c * m2 * r2^2 * (\sin(\text{all}) \\
&))^2 - c * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * \cos(\text{all}) * \sin(X(3)) * (X(2)) .^2 + (- \\
& 0.5 * c * m2 * l1 * l2 * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \sin(X(1)) - \sin(X(3)) * \cos(X(1))) * \sin(X(1)) - \\
& 0.5 * c * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \sin(X(1)) - \\
& \sin(X(3)) * \cos(X(1))) * \cos(X(1)) + (1/3) * c * m2 * l2^2 * \cos(\text{all}) * \cos(2 * \text{phi}) + 0.5 * c * m2 * l1 * l2 \\
& * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \cos(X(1)) - \sin(X(3)) * \sin(X(1))) * \cos(X(1)) - \\
& 0.5 * c * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \cos(X(1)) - \\
& \sin(X(3)) * \sin(X(1))) * \sin(X(1)) * (X(4)) .^2;
\end{aligned}$$

$$Cv24 = -Cv23;$$

La matrice d'inertie d'interaction Rv (4 par 2) :

$$\begin{aligned}
Rv11 = & -0.5 * m1 * l1 * \sin(X(1) + \text{phi}) + m2 * r2 * \sin(\text{all}) * \cos(X(1) + \text{phi}) - \\
& m2 * l1 * \sin(X(1) + \text{phi}) - 0.5 * m2 * l2 * \cos(X(3)) * \sin(X(1) + \text{phi}) - \\
& 0.5 * m2 * l2 * \cos(\text{all}) * \sin(X(3)) * \cos(X(1) + \text{phi});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Rv12 = & -0.5 * m2 * l2 * \cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \sin(X(1) + \text{phi}) - \\
& 0.5 * m2 * l2 * \sin(X(3)) * \cos(X(1) + \text{phi});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Rv21 = & 0.5 * m1 * l1 * \cos(X(1) + \text{phi}) + 0.5 * m2 * l2 * \cos(X(3)) * \cos(X(1) + \text{phi}) + 0.5 * m2 * l2 * \cos(\text{all}) \\
& * \sin(X(3)) * \sin(X(1) + \text{phi}) + m2 * r2 * \sin(\text{all}) * \sin(X(1) + \text{phi}) + m2 * l1 * \cos(X(1) + \text{phi});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Rv22 = & 0.5 * m2 * l2 * \cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \cos(X(1) + \text{phi}) - \\
& 0.5 * m2 * l2 * \sin(X(3)) * \sin(X(1) + \text{phi});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Rv31 = & (c/3) * m1 * l1^2 + c * m2 * l1 * l2 * \cos(X(3)) - \\
& c * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * \cos(\text{all}) * \sin(X(3)) + (c/3) * m2 * l2^2 + c * m2 * l1^2 + c * m2 * r2^2 * (\sin(\text{all}) \\
&))^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Rv32 = & (- \\
& 0.5 * c * m2 * l1 * l2 * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \sin(X(1)) + \sin(X(3)) * \cos(X(1))) * \sin(X(1)) - \\
& 0.5 * c * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \sin(X(1)) - \\
& \sin(X(3)) * \cos(X(1))) * \cos(X(1)) + (1/3) * c * m2 * l2^2 * \cos(\text{all}) * \cos(2 * \text{phi}) + 0.5 * c * m2 * l1 * l2 \\
& * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \cos(X(1)) - \sin(X(3)) * \sin(X(1))) * \cos(X(1)) - \\
& 0.5 * c * m2 * l2 * r2 * \sin(\text{all}) * (\cos(\text{all}) * \cos(X(3)) * \cos(X(1)) - \\
& \sin(X(3)) * \sin(X(1))) * \sin(X(1));
\end{aligned}$$

$$Rv41 = -Rv31;$$

$$Rv42 = -Rv32;$$



Annexe (B) :

Etat de l'Art

Dans cette annexe, on va essayer de présenter un état de l'art d'un certain nombre des tout derniers travaux concernant la commande des manipulateurs mobiles ; chaque travail s'est surtout investi sur un type de manipulateur mobile bien précis, occultant certains problèmes de commande et mettant d'autres en exergue. On parlera de l'approche du problème et le type de système adopté par chaque équipe de recherche et ceci en suivant la classification donnée au chapitre quatre.

I. Commande dynamique :

Les travaux de **O.Khatib et al** [6] portent sur un manipulateur mobile composé d'une plate-forme holonome de forme circulaire et d'un bras manipulateur à six liaisons du type PUMA560. Les auteurs considèrent le système comme un mécanisme résultant de l'association de deux sous-système: une *macro structure* la plate-forme mobile qui est un système mécanique lent mais dont l'espace de travail accessible est grand et une *micro structure* le bras manipulateur qui est (comparé à la plate-forme) rapide et précis mais son espace accessible est limité.

L'objectif de l'équipe de Khatib est le développement d'un système de plusieurs manipulateurs mobiles en coopération en présentant des méthodologies de base pour leur analyse et leur contrôle. Leurs travaux sont basés sur quatre méthodologies développées précédemment pour des manipulateurs à base fixe :

- La formulation dans l'espace opérationnel de la tâche imposée.
- La coordination dynamique de la plate-forme mobile et du bras manipulateur.
- Le modèle d'objet augmenté (*The Augmented Object Model*) pour la manipulation d'objets pour un robot à plusieurs bras (problème de coopération).
- Le modèle de liaison virtuelle (*The virtual linkage Model*) pour le contrôle de forces internes dans un système multi-bras (problème de coopération).

L'extension de ces méthodologies aux manipulateurs mobiles ainsi qu'une nouvelle structure de contrôle décentralisé pour les tâches de coopération entre plusieurs manipulateurs mobiles sont présentées. La méthode utilisée pour suivre une trajectoire opérationnelle imposée est définie ci-après :

L'équation dynamique d'un manipulateur dans l'espace généralisé est :

$$A(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + g(q) = \Gamma$$

où q est le vecteur des n coordonnées généralisées, $A(q)$ est la matrice d'inertie, $b(q, \dot{q})$ est le vecteur des forces centrifuges et de Coriolis, g est le vecteur des forces de gravité et Γ est le vecteur d'effort généralisé appliqué aux liaisons.

L'équation dynamique du système dans l'espace opérationnel est :

$$\Lambda(x)\ddot{x} + \mu(x, \dot{x}) + p(x) = F$$

où x est le vecteur des m coordonnées opérationnelles, Λ est la matrice énergie cinétique (m par m) associée à l'espace opérationnel, μ , p et F sont respectivement le vecteur des forces centrifuges et de Coriolis, le vecteur des forces de gravité et le vecteur d'effort opérationnel appliqué aux liaisons. Ces vecteurs sont exprimés dans l'espace opérationnel.

Pour les manipulateurs non-redondants la relation entre l'effort opérationnel F et l'effort généralisé Γ est :

$$\Gamma = J(q) F$$

où $J(q)$ est la matrice Jacobienne .

Pour les manipulateurs redondants cette relation devient :

$$\Gamma = J(q) F + [I - J(q) J(q)] \Gamma$$

$$\text{avec } J(q) = A(q) J(q) \Lambda(q) .$$

Cette relation décompose l'effort généralisé en deux vecteurs de commande dynamiquement découplés : $J(q) F$ représente le vecteur force exercé sur l'organe terminal et $[I - J(q) J(q)] \Gamma$ représente le vecteur force interne.

En utilisant cette décomposition, l'organe terminal peut être contrôlé par les forces opérationnelles alors que les déplacements internes sont commandés indépendamment par les forces généralisées sans affecter la dynamique de l'organe terminal. Cette relation est à la base de l'implémentation d'une stratégie de coordination dynamique pour le système manipulateur mobile.

Q.Hiang et S.Sugano [19, 20, 21] ont proposé des concepts de stabilité basés sur le critère du point à moment nul ou *Zéro Moment Point (ZMP)* pour déterminer une zone stable dans laquelle le manipulateur mobile doit se trouver pendant son déplacement. Le mouvement compensatoire du manipulateur pour stabiliser le manipulateur mobile est discuter.

Le ZMP est le point au sol où la somme des couples dus aux forces exercées sur le système est nulle. La trajectoire ZMP est corrigée pour maintenir la stabilité du système et planifier par la méthode champs de potentiel ; le mouvement compensatoire du manipulateur est obtenu par un algorithme itératif basé sur le calcul de positions successives dans des zones dites stables pour aller d'une configuration stable initiale à une configuration stable finale. La méthode FFT (*Finite Fourier Transform*) est aussi appliquée.

Les résultats de la simulation qui porte sur un manipulateur mobile avec un bras à deux liaisons et sur un véhicule à quatre roues montrent que la méthode du ZMP peut augmenter le degré de stabilité du système. L'efficacité de la méthode FFT est aussi vérifiée par les résultats de la simulation.

K.Inoue et al [22] proposent une méthode de contrôle d'impédance pour un manipulateur mobile en vue de le stabiliser par rapport aux efforts extérieurs exercés sur l'organe terminal. Ils s'occupent des tâches où le système ne connaît pas la trajectoire désirée de l'organe terminal d'avance. Il est donc commandé directement par l'effort extérieur exercé sur l'organe terminal, d'où l'impossibilité de planifier le mouvement du manipulateur mobile hors ligne.

Le but de la méthode proposée est de déplacer l'organe terminal comme s'il était commandé par l'effort d'entrée, et en même temps, garder le système aussi stable que possible par rapport aux changements de la configuration du manipulateur mobile et aussi par rapport à l'effort extérieur. Généralement, la réponse du manipulateur est plus rapide que celle de la plate-forme. Pour cette raison, le manipulateur répond au changement rapide de la force d'entrée, et la plate-forme répond au changement lent.

Là aussi la position désirée de la plate-forme est déterminée par la méthode du ZMP (*Zero Moment Point*) ou Point à Moment Nul. Ce critère est utilisé pour déterminer une zone dite *stable* dans laquelle le manipulateur mobile doit se trouver pendant son déplacement.

La position désirée de la plate-forme est donc déterminée de façon que le ZMP du manipulateur mobile puisse venir le plus près possible du centre de polygone formé par les roues motrices et directrices de la plate-forme. En conséquence, la plate-forme se déplace toujours vers la position où le manipulateur mobile devient le plus stable par rapport à l'effort externe.

Les essais de simulation et d'expérimentation sont faits sur un système mécanique composé d'une plate-forme non holonome et d'un bras manipulateur à trois liaisons.

Ces essais montrent que la méthode de contrôle d'impédance d'un manipulateur mobile par rapport à l'effort externe exercé sur l'organe terminal est efficace.

II. Commande cinématique :

W.Miksch et D.Schroeder [23] utilisent une structure de contrôle constituée d'une chaîne directe combinée à un retour d'état pour résoudre le problème de coordination des mouvements du bras et de la plate-forme d'un manipulateur mobile. Pour ce type de système (manipulateur mobile) à neuf degrés de liberté, le vecteur de tâches est augmenté par les degrés de liberté

redondants de la plate-forme mobile non-holonome. Les déplacements externes et internes du manipulateur peuvent être déterminés au moyen de la théorie de contrôle optimal.

Dans la partie chaîne directe de la structure de contrôle, les références du véhicule sont dérivées des références désirées de l'organe terminal. Ceci est fait en optimisant les valeurs de certains critères de performance comme la mesure de manipulabilité du bras manipulateur, les couples exercés, l'énergie cinétique du système.

L'optimisation d'un fonctionnel qui contient tous ces objectifs doit forcer le système mobile à minimiser les erreurs de poursuite sous les conditions des contraintes dynamique et cinématique. Pour cette optimisation ; les auteurs utilisent la méthode de transformation de position pour déterminer les positions du véhicule à partir des positions désirées de l'organe terminal.

Dans la structure de contrôle, le rôle principal du retour d'état est de minimiser les erreurs de poursuite causées par les perturbations externes et internes. Les auteurs montrent que seule la conception d'un contrôleur dans l'espace des tâches peut améliorer les caractéristiques dynamiques du bras du robot et réduire l'effet des perturbations.

Les résultats de la simulation faite dans le cas d'une trajectoire contenant un point de flexion de 90° montrent que la manipulabilité est maintenue à un niveau élevé (perte de 6% uniquement lors du changement d'orientation de 90°) ; sous la contrainte limite des couples. Mais, il faut noter que l'approche est coûteuse de point de vue temps de calcul ; elle est donc convenable pour la planification du mouvement global où la trajectoire désirée (à poursuivre) doit être connue précisément a priori.

H.Seraji [24] adopte une approche simple pour le contrôle et la coordination d'un système mobile composé d'un bras manipulateur monté sur une base mobile. Cette approche est basée sur la formulation de tâches additionnelles. Elle consiste à obtenir des relations mathématiques représentant des variables géométriques, physiques ou des fonctions mathématiques abstraites requises à l'exécution de la tâche pour l'organe terminal, et spécifiées par l'utilisateur parmi l'infinité de solutions (redondance) introduite par la mobilité de la base.

Ainsi, le système d'équations reliant les vitesses généralisées cherchées aux vitesses opérationnelles imposées devient carré (inversible).

Cependant, plutôt que de résoudre ce système linéaire par inversion directe, l'auteur propose de résoudre de manière approchée, en minimisant une fonction coût quadratique et en introduisant une matrice de pondération fonction de l'indice de manipulabilité du système mécanique et de critères de vitesses limites retenues pour chaque liaison.

La simulation est faite sur un système constitué d'un bras manipulateur spatial à trois liaisons rotoides monté sur une base mobile ayant la possibilité de se mouvoir suivant une seule direction (à un degré de liberté). L'effet de la mobilité de la base sur l'indice de manipulabilité est discuté.

L'approche à l'avantage d'être simple, flexible vis à vis des choix des tâches appropriées ; et nécessite moins d'opérations ; elle est donc souhaitable pour le contrôle on-ligne dans les applications temps réel.

Y.Yamamoto et X.Yun [2, 3, 4] ont mené leurs expérimentations sur un système constitué d'une plate-forme mobile LABMATE non holonome à roues et d'un bras manipulateur à 6 liaisons du type PUMA 250. Ils s'intéressent à la compensation de l'effet de l'interaction dynamique entre les deux sous-systèmes par un retour d'état non linéaire pour améliorer les performances du système. Les équations de mouvement de la plate-forme et du manipulateur sont représentées de façon que l'interaction dynamique entre ces deux sous-systèmes apparaisse explicitement dans les équations.

Les performances du système sont examinées pour trois types de trajectoires :

Trajectoire T1 : La trajectoire est en ligne droite qui forme un angle de 135° avec l'axe X du repère fixe à vitesse constante.

Trajectoire T2 : L'organe terminal du manipulateur doit suivre une trajectoire circulaire à vitesse angulaire constante.

Trajectoire T3 : La plate-forme mobile et le manipulateur sont commandés indépendamment. La plate-forme est commandée pour suivre une ligne droite suivant l'axe y à vitesse constante. En même temps, le manipulateur est commandé pour suivre indépendamment un mouvement oscillatoire suivant l'axe X relatif au repère mobile fixé au véhicule.

La stratégie de commande adoptée par les auteurs est basée sur le raisonnement suivant :

Le manipulateur est contrôlé pour poursuivre la trajectoire comme s'il pouvait accomplir la tâche à lui seul. En faisant ceci, le manipulateur s'étend et atteint les limites de son espace de travail. Pour éviter cela, la plate-forme mobile est contrôlée de façon à amener la configuration du manipulateur dans une région d'opération privilégiée. Donc le mouvement désiré du manipulateur est déterminé par la différence entre la configuration privilégiée et la configuration courante du manipulateur. La configuration avec la mesure maximale de manipulabilité est choisie comme configuration privilégiée du manipulateur.

La simulation faite pour le modèle d'un manipulateur à deux degrés de liberté monté sur une plate-forme mobile montre que la compensation de l'interaction dynamique affectée par la plate-

forme au bras manipulateur est plus efficace que celle affectée à la plate-forme par le manipulateur quand la précision de l'organe terminal par rapport au repère fixe lié au sol (cas de la trajectoire T2) est demandée. Si la tâche du manipulateur doit être accomplie par rapport au repère mobile lié à la base du manipulateur (cas de la trajectoire T3), la compensation de la force d'interaction du manipulateur à la plate-forme est plus efficace pour réduire l'erreur de poursuite de la plate-forme affectée par le manipulateur.

L'équipe de **U.M.Nassal et al** [25, 26, 27] s'intéresse aussi à l'intégration de la mobilité et la manipulation mais discutent un nouveau concept pour la réalisation de cette intégration. Leur manipulateur mobile appelé KAMRO (Karlsruhe Autonomous Mobile RObot) est constitué d'une plate-forme à trois degrés de liberté sur laquelle deux bras manipulateurs à six degrés de liberté du type PUMA200 sont montés.

Nassal et al ont utilisé une commande dite *transparente* qui combine les avantages des commandes globales et découplées du système. L'idée est de rendre le mouvement de l'organe terminal indépendant du mouvement du véhicule ; c.-à-d. que si la plate-forme se déplace, l'organe terminal n'est pas affecté ou le mouvement de la plate-forme est transparent pour l'organe terminal. Donc la plate-forme ne participe pas au déplacement externe de l'organe terminal mais uniquement à son déplacement interne.

Pour achever ceci, la commande découplée intégrée dans la boucle de contrôle des manipulateurs va compenser le déplacement de la plate-forme. Aussi, la plate-forme est contrôlée de façon que les manipulateurs arrivent à réaliser leurs tâches dans des configurations optimales en respectant une fonction coût spécifique. Le rôle de la plate-forme est donc de contrôler le déplacement interne des manipulateurs et de réaliser une optimisation locale de leur configuration pendant l'évitement d'obstacles par le manipulateur mobile. Le déplacement interne permet de maintenir un point de travail optimal sans produire d'erreur pour le déplacement externe. Les auteurs confient cette tâche au mécanisme qui a la réponse dynamique la plus lente.

C.Perrier, P.Dauchez et F.Pierrot [28] proposent deux méthodes pour déterminer par simulation un chemin reliant deux configurations fixes d'un manipulateur mobile constitué d'une plate-forme non holonome et d'un bras manipulateur à six liaisons.

Le déplacement global du système est décrit symboliquement en utilisant deux outils de représentation : les matrices homogènes et les quaternions duaux. Les positions initiale et finale du véhicule et les configurations initiale et finale du bras sont supposées connues ; le problème est de

joindre la position initiale à la position finale en calculant une succession de configuration accessible par le système. Les paramètres généralisés correspondants doivent être calculés de telle sorte que le déplacement désiré coïncide avec le déplacement symbolique calculé.

La non holonomie du véhicule est représentée comme un déplacement contraint. Le déplacement total du système est donné soit par le produit des matrices homogènes obtenues à partir des modèles cinématique du bras et du véhicule ou bien par le produit des quaternions duaux pour n itérations ; les variables généralisées sont calculées par la minimisation d'un critère sous certaines contraintes imposées sur les paramètres généralisés.

Les résultats obtenus par simulation montrent que les deux méthodes adoptées par les auteurs convergent bien et donnent des solutions acceptables pour la génération de mouvements d'un manipulateur mobile avec véhicule non holonome. On note la constatation que la méthode des matrices homogènes est plus sensible aux changements d'unité que la méthode des quaternions duaux ; ceci est dû au fait que les approximations faites en utilisant les quaternions duaux sont plus exactes que celles faites lors de l'utilisation des matrices homogènes.

III. Commande en effort :

N.A.M.Hootsmans et S.Dubowsky [29] présentent une étude expérimentale d'un algorithme de contrôle de mouvements d'un manipulateur mobile. L'approche appelée *Mobile Manipulator Jacobian Transpose Control (MMJT)*, est basée sur la transposée d'une matrice Jacobienne qui relie les vitesses généralisées du manipulateur et les vitesses linéaires et angulaires du véhicule aux vitesses linéaires et angulaires de l'organe terminal du manipulateur.

Leur système est constitué d'un manipulateur de 125Kg à trois liaisons rigides hydrauliques avec une charge de 25Kg, monté sur une plate-forme mobile à six degrés de liberté.

Dans l'étude de simulation, quand un contrôleur PD est opté pour le manipulateur, l'erreur de poursuite est relativement large. Ceci est dû principalement à l'interaction entre le manipulateur et le véhicule. Par contre, quand l'algorithme MMJT est appliqué pour la même trajectoire, le résultat est significativement amélioré.

L'étude expérimentale est menée sur un support constitué d'un robot manipulateur PUMA260 monté sur le *MUT Vehicle Emulator System (VES I)* développé au niveau du MIT (*Mobile Manipulator Laboratory*).

Le VES est une plate-forme à six degrés de liberté et à actionneurs hydrauliques, développée spécialement pour étudier expérimentalement le comportement des manipulateurs montés sur bases mobiles.

Le *VES* est un émulateur expérimentale d'une vaste variété de véhicules et opère sous contrôle d'admittance. Des capteurs de force et de couples sont montés à bord pour mesurer les interactions dynamiques entre le manipulateur et la plate-forme. En se basant sur ces forces et couples mesurés, le contrôleur d'admittance résous un modèle dynamique du véhicule pour déterminer le mouvement correspondant. En utilisant un modèle cinématique inverse de la plate-forme, les mouvements du véhicule requis sont transformés en commandes. L'algorithme de contrôle doit tolérer les caractéristiques non-idéales des capteurs utilisés (bruit, temps de réponse considérable) en plus de l'incapacité de capter dans certaines directions.

Les résultats expérimentaux montrent que le contrôleur PD donne des erreurs relativement larges quand la plate-forme entre en mouvement. L'erreur maximale en position de l'organe terminal atteint 183 mm pour une trajectoire en ligne droite de 0.5 m. Par contre, pour le contrôleur MMJT, le manipulateur compense les perturbations dues au mouvement de la plate-forme et au bruit généré par les capteurs. L'erreur maximale sur la position de l'organe terminal est de 18 mm pour la même trajectoire. Cette compensation se traduit par la présence de pics sur la courbe de déplacement de l'OT. Le filtrage résout le problème de pics mais augmente l'erreur. Néanmoins, l'effet des capteurs et des filtres sur la stabilité du système ne présente pas de sérieux problème.

M.Hatano et al [30] se sont intéressés à une méthode de contrôle du manipulateur mobile utilisant les réseaux de neurones pour les opérations de déplacement sur une route à surface ondulée.

Pendant son déplacement sur une route ondulée, le manipulateur mobile est sujet aux effets de couples troublants dus aux irrégularités du terrain. Puisque la forme du terrain est inconnue et difficile à mesurer avec exactitude, elle ne peut donc pas être prise en compte dans le calcul du contrôleur.

Les auteurs proposent alors un contrôleur Neuro-Adaptatif pour améliorer les performances de contrôle du système en utilisant les réseaux de neurones où les couples de compensation sont calculés par apprentissage sans connaître la forme du terrain. Ils ont appliqué un contrôleur adaptatif au manipulateur et un contrôleur de position PD au robot mobile, solution pas suffisamment performante car les informations concernant le robot mobile et la forme de la trajectoire ne sont pas considérées.

Les auteurs ont alors opté à construire un système de contrôle par apprentissage pour les voyages répétés du manipulateur mobile sur les trajectoires spécifiées. Ainsi un réseau de

neurones avec des fonctions d'apprentissage est appliqué au contrôleur adaptatif pour améliorer les performances de contrôle. Les entrées du réseau de neurones sont les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées du manipulateur. La sortie du réseau de neurones est le couple de compensation du manipulateur.

M.Kurisu et T.Yoshikawa [31] se sont intéressés à élaborer une commande qui permet à un manipulateur de faire pousser un objet sur un terrain plat avec point de contact en contrôlant sa position et son orientation le long d'une trajectoire planifiée.

En utilisant une distribution donnée des forces de frottement entre l'objet à pousser et le sol, il faut chercher un point particulier nommé pseudo-centre en lequel le mouvement de l'objet poussé peut être approximé par le mouvement du robot mobile. Par conséquent, une loi de commande par retour d'état différentiel pour robots mobiles est appliquée.

La loi de commande adoptée détermine les vitesses linéaires et rotationnelles du robot mobile selon les erreurs de position et orientation et en respectant la trajectoire désirée exprimée dans un repère de coordonnées lié au robot. La convergence uniforme asymptotique de la trajectoire actuelle du robot à la trajectoire désirée est garantie par cette loi de commande.

Pour la simulation, les auteurs ont utilisé un manipulateur mobile constitué d'un robot mobile à deux roues sur lequel est monté un manipulateur à n degrés de liberté. L'objet est assumé avoir une forme rectangulaire. Les paramètres du contrôle ont des valeurs qui correspondent au cas d'amortissement critique. Le système expérimental est constitué d'un robot mobile à deux roues sur lequel est monté un manipulateur à deux degrés de liberté. L'objet utilisé est une boîte en papier plissé de 0.15[kg] est de dimensions 0.265x0.38x0.12[m]. Aucun glissement n'est observé entre l'objet et le bout du manipulateur, l'objet a pu poursuivre la trajectoire désirée avec de bonnes performances quoique la poursuite en orientation était légèrement dégradée.

Dans leur approche au problème de contrôle des manipulateurs mobiles, **K.Nagatani et S.Yuta** [32] définissent une succession d'actions primitives pour une tâche spécifique qui est l'ouverture d'une porte. Les actions primitives sont définies comme des éléments unitaires d'un comportement complexe comme l'ouverture d'une porte. Ils divisent donc le comportement total en plusieurs mouvements élémentaires. Pour réaliser chaque mouvement, ils appliquent une action primitive comme une unité de contrôle fondamentale pour le contrôle du manipulateur mobile.

Une seule action primitive est activée à la fois, et chaque action primitive est basée sur un algorithme de contrôle commandant la plate-forme et le bras manipulateur.

Le problème majeur est l'accumulation de l'erreur de position de la base mobile du à l'échec du manipulateur à manipuler les objets avec succès. Pour cette raison, chaque action primitive est conçue pour inclure un mécanisme d'ajustement d'erreur pour compenser autant que possible l'erreur accumulée de la position de la base mobile.

Le manipulateur mobile développé par cette équipe s'appelle YAMABICO *type-ten*, sa base mobile est une structure non holonome à deux roues motrices et quatre roues libres. Le bras manipulateur est à six liaisons du type GT6A. Un capteur d'effort et une caméra sont fixés à l'extrémité de l'organe terminal pour détecter le contour de la poignée de la porte et calculer l'ajustement nécessaire en effort et couples.

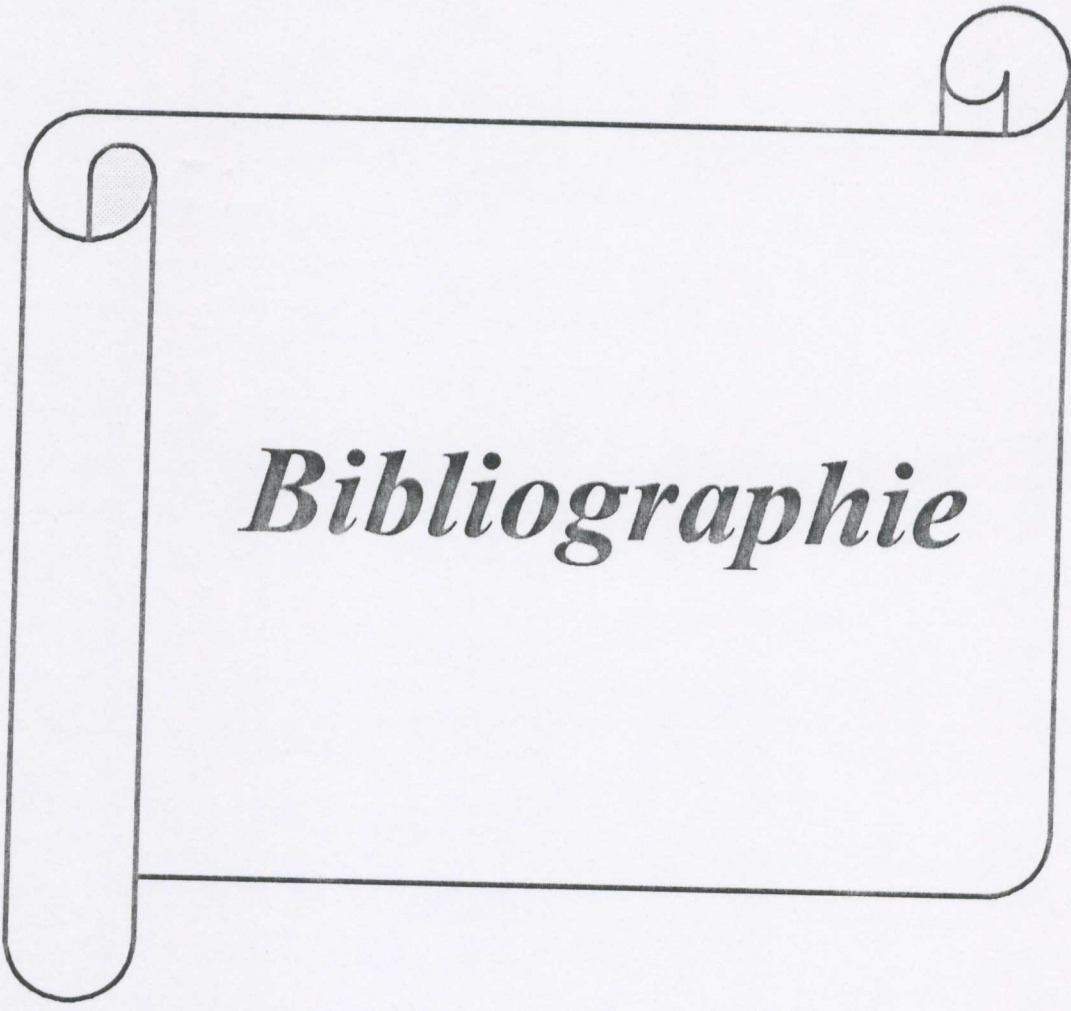
J.K.Lee et al [33] ont proposé une méthode de planification de mouvement d'un manipulateur mobile pour exécuter une tâche multiple qui consiste en une séquence de tâches point à point. Le problème a été formulé comme un problème d'optimisation non linéaire global en tenant compte des trajectoires de mouvement entre tâches et les configurations de commutation simultanément.

Dans le but de simplifier le problème, les auteurs l'ont divisé en deux sous-problèmes : Tout d'abord, ils obtiennent les trajectoires de mouvement assumant que les configurations de commutation sont données, et à l'étape suivante ils obtiennent les configurations de commutation optimales en utilisant les algorithmes génétiques.

Conclusion :

On a tenté, tout au long de cette annexe, de présenter plusieurs travaux abordant le problème de contrôle des manipulateurs mobiles en précisant à chaque fois la nature des systèmes considérés, les tâches à exécuter, le type des lois de commandes adoptées et les résultats obtenus.

Cette étude bibliographique ne peut pas être exhaustive, les travaux sur ce domaine évoluent chaque jour et sont actuellement incontournables. Le but est d'aider à la compréhension du travail développé dans ce mémoire et de le faire situer.

A decorative scroll-like frame with a black outline. The frame has a vertical strip on the left side that is rolled up at the top. The top edge of the frame is also rolled up at the right end. The word "Bibliographie" is written in a bold, italicized serif font in the center of the frame.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] : M.Renaud et P.Dauchez : " *Modélisation et commande des Manipulateurs Mobiles* ". Rapport LAAS du CNRS (Toulouse), Octobre 1999.
- [2] : Y.Yamamoto & X.Yun : " *Coordinating Locomotion and Manipulation of a Mobile Manipulator* ". In Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta(USA), pages 157-181, Mai 1993.
- [3] : Y.Yamamoto & X.Yun : " *Effect of the Dynamic Interaction on Coordinated Control of Mobile Manipulator* ". In Proc. Of IEEE/IROS, 1994.
- [4] : Y.Yamamoto & X.Yun : " *Modeling and Compensation of the Dynamic Interaction of a Mobile Manipulator* ". In Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Diego(USA), pages 2187-2192, Mai 1994.
- [5] : Y.Yamamoto & X.Yun : " *Unified Analysis on Mobility and Manipulability of Mobile Manipulators* ". In Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Détroit, Michigan (USA), pages 1200-1206, Mai 1999.
- [6] : O.Khatib, K.Yokoi, K.Chang, D.Ruspini, R.Holmberg, A.Casal & A.Baader : " *Force Strategie for Cooperative Tasks in Multiple Mobile Manipulation Systems* ". In Proc. International Symposium of Robotics Research, Munich (Germany), October 1995.
- [7] : P.Tompson, G.Rabatel, F.Pierrot, A.Liégeois et F.Sévila : " *Performance Comparison of Various Control Strategies for a Mobile Manipulator* ". In Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages : 473-479, 1995.
- [8] : G.Foulon : " *Génération de Mouvements Coordonnés pour un Ensemble Constitué d'une Plate-forme Mobile et d'un Bras Manipulateur* " (Thèse de doctorat). Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS) du CNRS, Toulouse, soutenue le 05 Octobre 1998.
- [9] : Jaydev.P.Desai & Vijai Kumar : " *Optimal Motion Plans for Cooperating Nonholonomic Mobile Manipulators in an Environment with Obstacles* ". Presented at 2nd Int. Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics, Toulouse, France, 1996.
- [10] : Thomas Sugar & Vijay Kumar : " *Decentralized Control of Cooperating Mobile Manipulators* ". In Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Leuven, Belgium, pages : 2916-2921, May 1998.
- [11] : K.Ait abderrahim : " *Commande de Robot Mobile* " (Thèse de Doctorat), soutenu le 12 Janvier 1993 à l'école de mines de Paris.
- [12] : R.P.Paul : *Robot Manipulators, Mathematics, Programming and Control* . Mit Press, Cambridge, MA, 1981.
- [13] : V.D.Tourassis : " *Dynamic Modeling and Control of Robotic Manipulators* " (Phd Thesis), Pittsburg, Pennsylvania, June 1985.
- [14] : A.K.Bejczy : " *Robot Arm Dynamic and Control* ", Technical Memorandum 33-669, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA, February 1974 .

- [15] : L.D.Landau, E.M.Lifshitz : *Mechanics*. Pergamon Press, New-York, Third edition, 1976.
- [16] : Y.Yamamoto : " Control and Coordination of Locomotion and Manipulation of Wheeled Mobile Manipulator " (Phd Thesis), Grasp Laboratory , University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, August 1994.
- [17] : G.Campion, G.Bastin & B.d'Andréa Novel : " *Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots* ". IEEE Transactions of Robotics and Automation, vol 12, n° 1, pages 47-62, Mars 1996.
- [18] : Timothy Tristram Jervis : " *Connexionist Adaptive Control* " (Phd Thesis). Trinity Hall, Cambridge, England, December 1993.
- [19] : Q.Huang, S.Sugano & I.Kato : " *Stability Control for a Mobile Manipulator Using a Potential Methode* ". In Proc. IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems, Munich (Germany), pages 839-846, September 1994.
- [20] : Q.Huang & S.Sugano : " *Manipulator Motion Planning for Stabilizing a Mobile Manipulator* ". In Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and systems, pages 467-472, 1995.
- [21] : Q.Huang & S.Sugano : " *Motion Planning of Stabilization and Cooperation of a Mobile Manipulator* ". In Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1995.
- [22] : K.Inoue, T.Miyamoto & Y.Okawa : " *Impedance Control of Mobile Manipulator with the Stability to External force* ". In Proc. IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, Osaka (Japan), pages 721-728, November 1996.
- [23] : W.Mikch & D.Schroeder : " *Performance-functional Based Controller Design for a Mobile Manipulator* ". In proc. Of 1992 International Conference on Robotics and Automation, pages 227-232, Nice, France, May 1992.
- [24] : H.Seraji : " *An on-line Approach to Coordinated Mobility and Manipulation* ". In Proc. Of 1993 International Conference on Robotics and Automation, pages 28-35, Vol n°1, Atlanta, GA, May 1993.
- [25] : U.M.Nassal : " *An Approach to Motion Planning for Mobile Manipulator* ". In Proc. IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems, Munich (Germany), pages 831-838, September 1994.
- [26] : U..M.Nassal, M.Damm & T.C.Lueth : " *A Mobile Platform Supporting a Manipulator System for an Autonomous Robot* ". In fifth World Conference on Robotics Research, Cambridge (Massachusetts), pages 121-127, September 1994.
- [27] : T.C.Lueth, U.M.Nassal & U.Rembold : " *Reliability and Integrated Capabilities of Locomotion and Manipulation for Autonomous Robot Assembly* ". Journal on Robotics and Autonomous Systems, Special Issue : Research on Autonomous Mobile Systems, Germany, pages 185-198, 1995.

- [28] : C.Perrier, P.Dauchez et F.Pierrot : “ *A Global Approach for Motion Generation of non-Holonomic Mobile Manipulators*”. In Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Leuven (Belgium), pages 2971-2976, May 1998.
- [29] : N.A.M.Hootsmans : “ *The experimental Performance of a Mobile Manipulator Control Algorithm*”. Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages : 1948-1954, Nice, France, May 1992.
- [30] : M.Hatano, M.Minami, T.Asakura, Y.Takahashi & M.Ichimura : “ *Motion Control of Mobile Manipulators Moving on Waved Road Surfaces Using Neural Networks*”. In Proc. Of IEEE/IROS, pages : 277-282, 1996.
- [31] : M.Kurisu & T.Yoshikawa : “ *Tracking Control for an Object in Pushing Operation*”. In Proc. IROS 96, pages : 729-736, IEEE96.
- [32] : S.Yuta & K.Nagatani : “ *Desining Strategies and Implementation of Mobile Manipulator Control System for Opening Door*” . In Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Minneapolis, Minnesota, pages 2828-2834, April 1996.
- [33] : J.K.Lee & H.S.Cho : “ *Motion Planning for a Mobile Manipulator to Execute a Multiple Point to Point Task*”. IN Proc. IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, Osaka (Japan), pages 737-742, November 1996.