

**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA**

**Faculté de technologie**

**Département d'aéronautique**

**MEMOIRE DE MAGISTER**

**Spécialité : Aéronautique**

**DEVELOPPEMENT D'UN CODE DE CALCUL EN  
UTILISANT LA METHODE DE PANNEAUX EN  
TROIS DIMENSIONS**

**Par :**

**Rahima TAKHNOUNI**

devant le jury composé de :

B.Z. Benaouda	Professeur, université de Blida	Président
T. Rezoug	Professeur, université de Blida	Promoteur
T. Zebbiche	Professeur, université de Blida	Examineur
R. Haoui	Professeur, U.S.T.H.B., Alger	Examineur

**Blida, mars 2013**

## ملخص:

نهدف في هذا العمل إلى تطوير برنامج رقمي باستخدام أسلوب الصفائح ثلاثية الأبعاد من أجل محاكاة التدفق حول المجسمات.

إن نواة البرنامج هي تقسيم المجسم إلى صفائح رباعية مع توزيع مصادر التدفق و ثنائيات أقطاب ثابتة ومن ثم إيجاد قيمها في الشروط الحدية المناسبة.

ومن خلال قيم ثنائيات الأقطاب من السهل حساب السرعة، والضغط، وفي النهاية معاملات دينامية الهواء التي هي الهدف الأساسي.

## RESUME :

Notre travail consiste à développer un code de calcul en utilisant la méthode de panneaux en trois dimensions pour simuler l'écoulement autour d'une configuration aérodynamique.

Le noyau du programme est la discrétisation de la géométrie en panneaux quadrilatères avec une distribution des sources et des dipôles constants et ensuite trouver leurs valeurs avec la condition aux limites appropriées.

A partir des valeurs des dipôles, il est alors facile à calculer la vitesse, la pression et à la fin, les coefficients aérodynamiques qui sont l'objectif principal.

## ABSTRACT:

Our job is to develop a calculation code using the three-dimensional panel method to simulate the flow around an aerodynamic configuration.

The core of the program is discretisation of the geometry with combination of quadrilateral panels with constant source and constant dipole and finding their values with the appropriate boundary condition.

From the dipole values it is then easy to calculate velocity and pressure and at the end, aerodynamic coefficients which are the final goal.

## REMERCIEMENT

Je tien tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

La première personne que je tien à remercier est mon enseignant qui m'a proposé ce sujet Mr. Tahi Ali (que Dieu le garde, lui accorde sa miséricorde), pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Où nous trouvons dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Kherrat Abdelkader, qui s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer surtout après le décès de Mr Tahi, et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

J'exprime ma gratitude à mon promoteur T.Rezoug, qui s'est dévoué pour dispenser de tous conseils et directives utiles pour la réalisation de ce travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail Et de l'enrichir par leurs propositions.

Ces remerciements ne seraient pas complets sans une pensée pour mes parents, qui m'ont soutenu en permanence pendant toutes mes études et m'ont aidé à surmonter les difficultés avec tant de bienveillance.

# *Dédicace*

*Je dédie ce mémoire :*

*À*

*Mon très cher père et ma très chère mère  
en témoignage de ma reconnaissance envers le soutien, les sacrifices et  
tous les efforts qu'ils ont fait pour mon éducation ainsi que ma  
formation*

*À*

*Mon cher frère, et mes chères sœurs  
pour leur affection, compréhension et patience*

*À*

*tous ceux qui ont une relation de proche ou de loin  
avec la réalisation de ce travail.*

*Rahma*

## TABLE DES MATIERES

RESUME	
REMERCIEMENT	
DEDICACE	
TABLE DES MATIERES	
LISTE DES FIGURES	
LISTE DES TABLEAUX	
INTRODUCTION	15
REVUE SUR LES DIFFERENTES METHODES DE PANNEAUX EN TROIS DIMENSIONS	
CHAPITRE 1 : FORMULATION MATHEMATIQUE	17
1.1 Introduction	23
1.2 Hypothèses et équations fondamentales	23
1.3 Techniques de solution	27
1.3.1 Les écoulements élémentaires	27
1.3.1.1 Ecoulement parallèle uniforme	28
1.3.1.2 Le tourbillon	30
1.3.1.3 Source et puits	31
CHAPITRE 2 : METHODE DE PANNEAUX EN DEUX DIMENSIONS	34
2.1 Introduction	34
2.2 Méthode de panneaux pour le calcul des profils (Méthode de Hess et Smith)	34
2.2.1 Définition	34
2.2.2 Fondements mathématiques	36
2.2.2.1 Discrétisation du profil	36
2.2.2.2 Superposition des écoulements potentiels et calcul des vitesses	37
2.2.2.3 Calcul des coefficients de pression et de portance	45
CHAPITRE 3 : LA METHODE DE PANNEAUX EN TROIS DIMENSIONS	47
3.1 Les équations de l'écoulement potentiel	47

3.2	Principes fondamentaux de l'écoulement incompressible non visqueux	49
3.3	La force aérodynamique, la polaire de l'aile et les moments aérodynamiques	51
3.3.1	La force aérodynamique et ses composantes	51
3.3.2	La polaire d'une aile	53
3.3.3	Les moments aérodynamiques	55
3.4	Résolution numérique des équations	55
3.4.1	Calcul des caractéristiques géométriques du maillage	55
3.4.2	Calcul des coefficients d'influence	60
3.4.3	La résolution du système d'équations	70
3.4.4	Calcul de vitesse, de pression, des forces et des moments	71
CHAPITRE 4 :	RESULTATS ET INTERPRETATIONS	74
4.1	Simulation d'une aile seule	74
4.1.1	Etude sur l'aile rectangulaire NACA0006	75
4.1.1.1	Variations de l'envergure	75
4.1.1.2	Variation de la longueur du sillage	77
4.1.1.3	Variation du nombre de points sur le profil	78
4.1.1.4	Variation du nombre de subdivision le long de l'envergure	79
4.1.1.5	Interprétation des résultats	80
4.1.2	Etude sur l'aile NACA2412	81
4.1.2.1	Détermination des caractéristiques aérodynamiques d'une aile rectangulaire	81
4.1.2.2	Détermination des caractéristiques aérodynamiques d'une aile avec flèche	87
4.1.2.3	Détermination des caractéristiques aérodynamiques d'une aile avec effilement	96
4.1.2.4	Détermination des caractéristiques aérodynamiques d'une aile avec flèche et effilement	105
4.1.2.5	Interprétation des résultats	123
4.2	Simulation d'un avion	124

4.2.1	Description de la configuration sélectionnée	124
4.2.2	Discrétisation de la géométrie	127
4.2.3	Comparaison des résultats	128
4.2.4	Interprétation des résultats	133
CONCLUSION GENERALE		134
LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS		
REFERENCE		

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure 1.1 :</b>	Définition du problème	26
<b>Figure 1.2 :</b>	Lignes de courant ( $\psi = cte$ ) et équipotentielles ( $\phi = cte$ ) dans un écoulement parallèle, de vitesse U à deux dimensions.	28
<b>Figure 1.3 :</b>	Lignes de courant et lignes équipotentielles dans un écoulement plan tourbillonnaire autour d'un axe Oz.	30
<b>Figure 1.4 :</b>	Écoulement créé par l'ensemble d'un puits et une source.	32
<b>Figure 2.1 :</b>	représentation du profil en panneaux	35
<b>Figure 2.2 :</b>	Distribution de vortex	36
<b>Figure 2.3 :</b>	Notation des panneaux sur le profil	37
<b>Figure 2.4 :</b>	Définition de $s$ , de $r$ et de $\theta$	39
<b>Figure 2.5 :</b>	Notation sur le panneau $i$	41
<b>Figure 2.6 :</b>	Système de coordonnées lié au panneau $j$	42
<b>Figure 2.7 :</b>	Réduction des équations (2.18) et (2.19) par la géométrie.	43
<b>Figure 3.1</b>	Transformation du système de coordonnées de l'avion au système de coordonnées aérodynamiques.	49
<b>Figure 3.2 :</b>	Division de l'écoulement vers la région visqueuse et non visqueuse	50
<b>Figure 3.3 :</b>	La force aérodynamique et ses composantes	51
<b>Figure 3.3 :</b>	La distribution de pression sur un profil d'aile	52
<b>Figure 3.4 :</b>	La polaire de l'aile	54
<b>Figure 3.5 :</b>	Le système de coordonnées choisi	56
<b>Figure 3.7 :</b>	Indications de panneaux	57
<b>Figure 3.8 :</b>	Le point de collocation et les vecteurs unitaires du panneau	59
<b>Figure 3.9 :</b>	L'élément quadrilatère avec une distribution de doublet et son équivalent un anneau tourbillonnaire	63
<b>Figure 3.10 :</b>	Le panneau quadrilatère	67
<b>Figure 3.11 :</b>	La condition de Kutta sur le bord de fuite d'une aile	70



<b>Figure 4.1 :</b>	Les dimensions de l'aile	74
<b>Figure 4.2 :</b>	L'aile rectangulaire Naca0006	75
<b>Figure 4.3 :</b>	Influence de la variation de l'envergure sur la distribution de pression (APAME)	76
<b>Figure 4.4 :</b>	Influence de la variation de l'envergure sur la distribution de pression (notre programme)	76
<b>Figure 4.5 :</b>	Influence de la longueur du sillage sur la distribution de pression (APAME)	77
<b>Figure 4.6 :</b>	Influence de la longueur du sillage sur la distribution de pression (notre programme)	77
<b>Figure 4.7 :</b>	Influence de la variation du nombre de points du profil sur la distribution de pression (APAME)	78
<b>Figure 4.8 :</b>	Influence de la variation du nombre de points du profil sur la distribution de pression (notre programme)	78
<b>Figure 4.9 :</b>	Influence de la variation du nombre de subdivision le long de l'envergure sur la distribution de pression (APAME)	79
<b>Figure 4.10 :</b>	Influence de la variation du nombre de subdivision le long de l'envergure sur la distribution de pression (notre programme)	79
<b>Figure 4.11 :</b>	Distribution de pression sur le profil naca0006 en utilisant la résolution de Navier Stokes	80
<b>Figure 4.12 :</b>	L'aile rectangulaire Naca2412	82
<b>Figure 4.13 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	82
<b>Figure 4.14 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	83
<b>Figure 4.15 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	83
<b>Figure 4.16 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	84
<b>Figure 4.17 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	84

<b>Figure 4.18 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	85
<b>Figure 4.19 :</b>	la polaire de l'aile rectangulaire naca2412 (APAME)	85
<b>Figure 4.20 :</b>	La polaire de l'aile rectangulaire naca2412 (notre programme)	86
<b>Figure 4.21 :</b>	aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 10°	87
<b>Figure 4.22 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence(APAME)	87
<b>Figure 4.23 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	88
<b>Figure4.24 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	88
<b>Figure 4.25 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	89
<b>Figure 4.26 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence(APAME)	89
<b>Figure 4.27 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	90
<b>Figure 4.28 :</b>	la polaire de l'aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 10°(APAME)	90
<b>Figure 4.29 :</b>	la polaire de l'aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 10°(notre programme)	91
<b>Figure 4.30 :</b>	Aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 20°	91
<b>Figure 4.31 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	92
<b>Figure 4.32 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	92
<b>Figure 4.33 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	93
<b>Figure 4.34 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	93
<b>Figure 4.35 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	94

<b>Figure 4.36 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	94
<b>Figure 4.37 :</b>	La polaire de l'aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 20°(APAME)	95
<b>Figure 4.38 :</b>	La polaire de l'aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 20°(notre programme)	95
<b>Figure 4.39 :</b>	Aile naca2412 avec effilement de 50%	96
<b>Figure 4.40 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	96
<b>Figure 4.41 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	97
<b>Figure 4.42 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	97
<b>Figure 4.43 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	98
<b>Figure 4.44 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	98
<b>Figure 4.45 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	99
<b>Figure 4.46 :</b>	la polaire de l'aile naca2412 avec effilement de 50% (APAME)	99
<b>Figure 4.47 :</b>	la polaire de l'aile naca2412 avec effilement de 50% (notre programme)	100
<b>Figure 4.48 :</b>	Aile naca2412 avec effilement de 75%	100
<b>Figure 4.49 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	101
<b>Figure 4.50 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	101
<b>Figure 4.51 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	102
<b>Figure 4.52 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	102

<b>Figure 4.53 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	103
<b>Figure 4.54 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	103
<b>Figure 4.55 :</b>	la polaire de l'aile naca2412 avec effilement de 75% (APAME)	104
<b>Figure 4.56 :</b>	La polaire de l'aile naca2412 avec effilement de 75%(notre programme)	104
<b>Figure 4.57 :</b>	Aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 50%	105
<b>Figure 4.58 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	105
<b>Figure 4.59 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	106
<b>Figure 4.60 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	106
<b>Figure 4.61 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	107
<b>Figure 4.62 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	107
<b>Figure 4.63 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	108
<b>Figure 4.64 :</b>	La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 50% (APAME)	108
<b>Figure 4.65 :</b>	La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 50% notre programme)	109
<b>Figure 4.66 :</b>	Aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 75%	109
<b>Figure 4.67 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	110
<b>Figure 4.68 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	110

<b>Figure 4.69 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	111
<b>Figure 4.70 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	111
<b>Figure 4.71 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	112
<b>Figure 4.72 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	112
<b>Figure 4.73 :</b>	La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 75% (APAME)	113
<b>Figure 4.74 :</b>	La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 75% (notre programme)	113
<b>Figure 4.75 :</b>	Aile naca2412 avec flèche de 20° et effilement de 50%	114
<b>Figure 4.76 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	114
<b>Figure 4.77 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	115
<b>Figure 4.78 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	115
<b>Figure 4.79 :</b>	Coefficient de traînée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	116
<b>Figure 4.80 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	116
<b>Figure 4.81 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	117
<b>Figure 4.82 :</b>	La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 20° et effilement de 50% (APAME)	117
<b>Figure 4.83 :</b>	La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 20° et effilement de 50% (notre programme)	118
<b>Figure 4.84 :</b>	Aile naca2412 avec flèche de 20° et effilement de 75%	118

<b>Figure 4.85 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	119
<b>Figure 4.86 :</b>	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	119
<b>Figure 4.87 :</b>	Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	120
<b>Figure 4.88 :</b>	Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	120
<b>Figure 4.89 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)	121
<b>Figure 4.90 :</b>	Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)	121
<b>Figure 4.91 :</b>	La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 20° et effilement de 75% (APAME)	122
<b>Figure 4.92 :</b>	La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 20° et effilement de 75%(notre programme)	122
<b>Figure 4.93 :</b>	Trois projections de la configuration avion sélectionnée	126
<b>Figure 4.94 :</b>	Avion avec un maillage de 1554 panneaux.	127
<b>Figure 4.95 :</b>	Avion avec un maillage de 4732 panneaux	127
<b>Figure 4.96 :</b>	Variation de coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (résultats obtenus par Fluent et Apame)	129
<b>Figure 4.97 :</b>	Variation de coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (résultats obtenus par notre programme et Apame)	130
<b>Figure 4.98 :</b>	Variation de coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (résultats obtenus par Fluent et Apame)	130
<b>Figure 4.99 :</b>	Variation de coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (résultats obtenus par notre programme et Apame)	131

<b>Figure 4.100 :</b>	Variation de coefficient de moment de tangage en fonction de d'incidence (résultats obtenus par Fluent et Apame)	131
<b>Figure 4.101 :</b>	Variation de coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (résultats obtenus par notre programme et Apame)	132
<b>Figure 4.102 :</b>	La polaire de l'avion (résultats obtenus par notre programme et Apame)	132

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau1.a :</b>	Comparaison des principaux programmes de la méthode de panneaux: premiers codes	20
<b>Tableau1.b :</b>	Comparaison des principaux programmes de la méthode de panneaux (méthodes avancées)	21
<b>Tableau1.c :</b>	Comparaison des principaux programmes de la méthode de panneaux : codes de production	22
<b>Tableau4.1 :</b>	Comparaison des résultats	123
<b>Tableau4.2 :</b>	Les caractéristiques géométriques de la configuration avion sélectionnée	125
<b>Tableau4.3 :</b>	Les coefficients aérodynamiques en Fluent, Apame et notre programme	128



## INTRODUCTION GENERALE :

Les méthodes de panneaux sont des schémas numériques pour la résolution de l'équation de Prandtl-Glauert pour des écoulements linéaire, non visqueux et irrotationnel aux nombres de mach subsonique ou supersonique. Actuellement, les codes de la méthode de panneaux sont les seuls codes couramment utilisés et qui sont suffisamment développés pour analyser systématiquement les géométries complexes des avions réalistes [1].

Le problème classique en aérodynamique est de déterminer les forces et les moments des avions due à la circulation de l'air. La façon la plus précise consiste à tester l'avion même, mais il s'agit de construire un prototype, et c'est la solution la plus coûteuse (en phase de conception) et inacceptable, le suivant teste est dans la soufflerie, et qui est le pinacle de la technologie, mais il est très coûteux et du point de vue d'analyse et d'optimisation est une méthode très lente.

La méthode de panneaux est relativement une ancienne méthode numérique qui puise ses débuts avec la première apparition des ordinateurs. La méthode résout l'écoulement potentiel autour de la configuration de l'aéronef qui, si l'on étend le problème avec une solution de couche limite à proximité des parois, elle permet de résoudre la plupart des problèmes dans le comportement linéaire de l'avion.

Aujourd'hui la méthode des volumes finis est probablement la plus largement utilisée pour l'analyse numérique des écoulements. Cette méthode est basée sur la discrétisation des équations de Navier-Stokes par des volumes finis (cellules). L'avantage de la méthode des volumes finis est la capacité d'analyser tous les types d'écoulements tel que compressibles et visqueux (turbulent). puisque la méthode des volumes finis utilise l'espace discrétisé, par opposition à la méthode de panneaux où la discrétisation se produit uniquement sur la surface du corps ce qui signifie que la méthode des volumes finis est très lente, et cela rendant ainsi la méthode de panneaux encore présent.[2]

Dans ce travail, notre but est de développer un code numérique en utilisant la méthode de panneaux en trois dimensions créer en langage FORTRAN, dont on utilise une distribution des sources et des doublets sur la surface du corps discrétisé et nous considérons un écoulement subsonique, incompressible et non visqueux . L'une des caractéristiques clés de l'équation de Laplace est la propriété qui permet à l'équation régissant le champ d'écoulement à convertir d'un problème tridimensionnelle dans le champ à un problème à deux dimensions pour trouver la variation de potentiel sur la surface (une équation intégrale). La solution est alors trouvée à l'aide de cette propriété par la distribution de «singularités» de la force inconnue sur une surface représenté par un certain nombre de panneaux, et en résolvant un ensemble d'équations algébriques linéaire pour déterminer les forces inconnus des singularités et puis la distribution de vitesse et de pression ainsi que les différents forces et moments agissant sur le corps à étudier.

Nous commençons notre travail par une revue sur les différents codes de la méthode de panneaux en trois dimensions.

Dans le premier chapitre une base théorique contient les différentes équations régissant l'écoulement tel que l'équation de Laplace et les équations des différents types des singularités a été formulée.

Dans le deuxième chapitre nous exposons la méthode de panneaux en deux dimensions et particulièrement la première méthode qui a été développée, qui est la méthode de Hess and Smith. Cette méthode est concernée par l'étude des profils.

Au troisième chapitre, une explication détaillée sur la méthode de panneaux en trois dimensions où on trouve tous les équations les étapes incluent dans le programme.

Le dernier chapitre est concerné par la simulation de plusieurs configurations, la validation ainsi que l'interprétation des résultats obtenus.

## **REVUE SUR LES DIFFERENTES METHODES DE PANNEAUX EN TROIS DIMENSIONS**

Les méthodes de panneaux sont largement utilisées dans l'industrie aéronautique et elles ont été développées depuis longtemps. La sélection d'un code spécifique sera probablement basée sur des considérations non techniques, comme le coût ou la disponibilité. Un des codes le plus récent de la méthode de panneaux est connu sous le nom PMARC du centre de recherche Ames, il a reçu beaucoup d'effort de développement. Nous fournissons une brève description des plus récents codes disponibles dans les grandes compagnes aériennes. Les tableaux (1.a) à (1.b) ont basés sur le résumé par Magnus and Epton[3] avec une légère mise à jour, et fournissent des références spécifiques.

### **PAN-AIR code développé par Boeing :**

Il est financé par une variété d'agences gouvernementales. Le code fournit la flexibilité totale, c'est-à-dire c'est vraiment un solveur d'équations intégrales et non pas un outil d'un aérodynamicien en soi. C'est une méthode de panneaux d'ordre supérieur, et peut gérer deux flux subsoniques et supersoniques. Il est relativement coûteux et difficile à exécuter (un utilisateur PAN-AIR prendrait des mois à former). Pour utiliser efficacement les codes, de bons systèmes de traitement doit être disponible. Bien que Boeing a ces systèmes en place, où ils ont été développés à l'interne et ne sont pas disponibles en dehors de l'entreprise.

### **Les versions du "Code de Hess" :**

Des développements ultérieurs de l'équipe de recherche à Douglas, maintenant Boeing, McDonnell Douglas a développé de nombreuses versions dans le cadre de divers contacts gouvernementaux et il semble être disponible principalement dans les installations de la Marine.

### **Woodward :**

La vieille méthode de panneaux qui est parfois rencontrée est le code connu sous le nom "Woodward" ou "Woodward-Carmichael». La première méthode a été développée par Boeing et a été soutenue par NASA Ames, principalement pour le programme américain de transport supersonique (qui était un effort national important dans les années 1960). Par la suite, Woodward est entré dans les affaires et a continué à élaborer des codes. USAERO traite des flux à la fois supersonique et subsonique, et une version qui combine un certain nombre de caractéristiques de chaque code, ainsi que des options supplémentaires de conception est également disponible et il est connu en tant que "Woodward 12" ou W12SC3.

### **VSAERO:**

Ce code est développé par AMI: (Analytical Mechanics Inc., Frank Dvorak and Brian Maskew). Il était à l'origine une méthode d'ordre réduit, mais a été prolongé pour inclure des variations de l'intensité de singularité sur un panneau, et maintenant décrit en tant que « multi-ordre ». C'est uniquement pour l'écoulement subsonique. Il manipule des géométries générales, et comprend des options pour traiter les effets de la viscosité et les flux de vortex. Initialement développé pour la NASA, le code a été développé par l'AMI comme un produit commercial (ils ont aussi un outil de traçage et d'autres logiciels de soutien disponibles à l'achat) Ce code exige une formation considérable des utilisateurs. Le soutien de l'AMI est disponible mais aucun des codes n'a le prix indiqué pour l'usage des étudiants. Des améliorations apportées au développement typique du code sont décrites par Nathman.[4]

La version domaine public de ce code a été obtenue par plusieurs groupes qui ont travaillé sur la conception des concurrents de "l'America Cup Yacht" dans le milieu des années 1980. Le code a été employé pour la conception de la coque et de la quille. Une des modifications qui a été faite pour cette application était l'ajout de la surface libre qui représente l'interface air-eau (rappelons que le problème de surface libre signifie que le déplacement en surface est inconnue, et les conditions aux limites est que d'une pression constante existe à l'interface) [5].

### **USAERO :**

Ce code est développé par AMI (Analytical Mechanics Inc). Il calcule les caractéristiques aérodynamiques transitoires de configurations complexes en mouvement arbitraire. Elle est basée sur une procédure de pas de temps, ce qui permet les mouvements relatifs des éléments de configuration. Tant que la méthode de l'intégrale de l'écoulement potentiel et la méthode de la couche limite sont la base de ce code, la solution aérodynamique est utile uniquement sur les surfaces limites pour chaque pas de temps et ne nécessite qu'une surface de maillage. Par ailleurs, tandis que les composants ou les organismes peuvent impliquer les mouvements relatifs, aucun remaillage n'est exigé par le système de solutions. En raison de ces caractéristiques, USAERO soutient des solutions pratiques aux problèmes d'ingénierie tels que les avions de manœuvre, le vol en formation, des avions de transport des marchandises, la réponse des rafales. USAERO résout les équations de l'écoulement potentiel tridimensionnel instationnaire par la méthode intégrale (méthode de panneaux) basée sur la formulation de Morino[6].

**PMARC:**

C'est le code le plus récent. Il a été développé par le centre de recherche Ames de la NASA pour prévoir la résolution numérique de l'écoulement autour des géométries complexe en trois dimensions. La création de PMARC a traduit le besoin à la NASA Ames d'un code de prédiction aérodynamique rapide qui est bien documenté et possède une architecture ouverte, ce qui facilite d'apporter des modifications ou ajouter de nouvelles fonctionnalités. Le code est une méthode de panneaux d'ordre inférieur et peut simuler l'écoulement transitoire ainsi que stable. La position de sillage peut être obtenue dans le cadre de la solution. Il a été utilisé pour des applications sous-marines ainsi que pour les avions [7].

L'histoire des méthodes de panneaux est illustrée dans les tableaux suivants. Le tableau 1.a résume certaines des principales méthodes qui ont été développés au début. (Le code W12SC3 est inclus parce qu'il était une combinaison valable de deux codes offrant une importante capacité de la nouvelle conception, en particulier à des vitesses supersoniques. Malgré le titre du rapport, le code W12SC3 peut être exécuté à des vitesses subsoniques). Le tableau 1.b passe en revue l'ère extrêmement active du développement des méthodes de panneaux avancées. Enfin, le tableau 1.c fournit des détails sur les codes de production

actuels susceptibles d'être utilisés sur des projets aérodynamiques en cours de conception et d'analyse. Les méthodes de panneaux peuvent aussi traiter les écoulements instationnaires, avec un exemple récent étant les développements réalisés par van Zyl. [8]

**Tableau1.a :** Comparaison des principaux programmes de la méthode de panneaux: premiers codes

Nom du créateur et de la méthode	Année	Géométrie du panneau	Type de la source	Type du doublet (dipôle)	Conditions aux limites	Restrictions	Commentaires
<b>Hess and Smith (Douglas)</b>	1962	plane	constant	/	Spécification de l'écoulement normal	Seulement les ailes et les corps non portants	/
<b>Rubbert (vortex lattice)</b>	1964	plane		constant	écoulement normal	ailes planes seulement	
<b>Woodward (Woodward I)</b>	1967	plane	constant	linéaire	écoulement normal	ailes doivent être planes	
<b>Rubbert and Saaris (Boeing A-230)</b>	1968	plane	constant	constant	écoulement normal	la densité du panneau presque constante	
<b>Hess I</b>	1972	plane	constant	linéaire	écoulement normal	Seulement les ailes et les corps	
<b>USAERO (Woodward II)</b>	1973	plane					subsonique et supersonique, Analyse seulement
<b>W12SC3 (Grumman)</b>	1983	plane			Conception et analyse mixte		Combiner les caractéristiques de Woodward I & II

**Tableau 1.b :** Comparaison des principaux programmes de la méthode de panneaux (méthodes avancées)

Nom du créateur et de la méthode	Année	Géométrie du panneau	Type de la source	Type de doublet (dipôle)	Conditions aux limites	Restrictions	Commentaires
<b>Roberts and Rundle</b>	1973	paraboloïdal	Quadratique	Quadratique	écoulement normal		Intégrations numériques, très cher
<b>Mercer, Weber and Lesford</b>	1973	plane		Lisse, cubique, quadratique	Écoulement normal dans le sens des moindres carrés	Ailes planes	Subsonique / supersonique, cubique sens de l'envergure, quadratiques sens de la corde
<b>Morino and Kuo (SOUSSA)</b>	1974	continue, hyperboloïde	constant	constant	potentiel	pas de configurations minces	instable
<b>Johnson and Rubbert</b>	1975	paraboloïdal	linéaire	quadratique	Écoulement normale		
<b>Ehlers and Rubbert (Mach line paneling)</b>	1976	plane	linéaire	Quadratique continue	Écoulement normale	Ailes Planes, panneaux spécial	Écoulement supersonique
<b>Ehlers et al. (PAN AIR pilot code)</b>	1976	plane continue par morceaux	linéaire	Quadratique continue	arbitraire en $\phi, \Delta\phi$		subsonique et supersonique

**Tableau 1.c :** Comparaison des principaux programmes de la méthode de panneaux : codes de production

le nom du créateur et de la méthode	Année	Géométrie du panneau	Type de la source	Type de doublet (dipôle)	Conditions aux limites	Restrictions	Commentaire
<b>MCAIR (McDonnell)</b>	1980	plane	constant	Quadratique			option de conception
<b>PAN AIR (Boeing)</b>	1980	plane continue par morceaux	linéaire continue	Quadratique continue	arbitraire en $\phi, \Delta\phi$		Subsonique et supersonique
<b>Hess II (Douglas)</b>	1981	Parabolique	linéaire	Quadratique	Ecoulement normale		
<b>VSAERO (AMI)</b>	1981	plane	constant	constant	Ecoulement extérieur/ intérieur normale		subsonique
<b>QUADPAN (Lockheed)</b>	1981	plane	constant	constant			
<b>PMARC (NASA-Ames)</b>	1988	plane	constant	constant			instable, sillage



## CHAPITRE 1 :

### FORMULATION MATHÉMATIQUE

#### 1.1 Introduction :

Le problème que l'on veut résoudre en aérodynamique est le comportement d'un corps dans un fluide réel au repos. On veut connaître la pression, la vitesse, la densité et la température autour du corps et plus particulièrement la pression et la friction sur la surface du corps. Ceux-ci nous permettent de calculer les forces agissant sur le corps. Ce problème consiste en un fluide réel en mouvement autour d'un corps au repos. Pour ce type d'écoulement, on doit résoudre les équations de Navier Stokes. Ceci est une tâche extrêmement exigeante. Pour simplifier le problème, on doit donc poser quelques hypothèses simplificatrices.

#### 1.2 Hypothèses et équations fondamentales :

Pour les nombres de Reynolds élevés (de l'ordre de  $10^7$  et plus), l'écoulement autour d'un corps profilé peut être considéré non visqueux et irrotationnel.

Si l'on désigne par  $\rho$  la densité du fluide,  $p$  sa pression et  $V$  sa vitesse, les équations de la continuité et du quantité de mouvement d'un écoulement non visqueux s'écrivent respectivement:

$$\nabla \cdot \vec{V} + \frac{\vec{V}}{\rho} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (1.1)$$

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (1.2)$$

Si le mouvement est irrotationnel et incompressible, on a:

$$\rho = cte \quad (1.3)$$

De plus

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \nabla \left( \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) + \vec{V} \times \nabla \times \vec{V} = \nabla \left( \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) \quad (1.4)$$

Puisque l'écoulement est irrotationnel. Les équations (1.1) et (1.2) deviennent:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.5)$$

$$\nabla \left( \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (1.6)$$

Du fait que l'écoulement est irrotationnel, la vitesse  $\vec{V}$  dérive d'un potentiel  $\phi$  avec :

$$\vec{V} = \nabla \phi \quad (1.7)$$

Finalement, en remplaçant l'expression de  $V$  (équation (1.7)) dans l'équation de la continuité (1.5), on obtient:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.8)$$

L'équation (1.8) est l'équation de Laplace, une des équations les plus étudiée. Les solutions de cette équation sont appelées des fonctions harmoniques.

On peut donc dire que le potentiel de vitesse de tout écoulement irrotationnel et incompressible est gouverné par l'équation de Laplace. A l'inverse, on peut dire que toutes les solutions de l'équation de Laplace représentent le potentiel de vitesse d'un écoulement irrotationnel et incompressible.

Les hypothèses d'incompressibilité et d'irrotationnalité simplifient grandement le problème. En effet, les équations (1.1) et (1.2) forment un système d'équations non linéaires et couplées difficile à résoudre. Un écoulement irrotationnel et

incompressible est également gouverné par deux équations ((1.6) et (1.8)), mais elles ne sont pas couplées. Ce type d'écoulement exige donc la solution d'une seule équation, l'équation de Laplace. L'équation du mouvement est ensuite utilisée pour calculer la pression.

En utilisant l'équation (1.3), on peut réécrire l'équation (1.6) sous la forme suivante:

$$\nabla \left[ \frac{\rho}{2} |\vec{V}|^2 + p \right] = 0 \quad (1.9)$$

En intégrant cette dernière équation, on obtient l'équation de Bernoulli :

$$\frac{\rho}{2} |\vec{V}|^2 + p = cte \quad (1.10)$$

Où encore :

$$\frac{\rho}{2} |\nabla \phi|^2 + p = \frac{\rho}{2} |\vec{V}_\infty|^2 + p_\infty \quad (1.11)$$

Le coefficient de pression est défini comme suit:

$$Cp = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty |\vec{V}_\infty|^2} \quad (1.12)$$

En utilisant l'expression de  $p - p_\infty$  tirée de l'équation de Bernoulli, on obtient:

$$Cp = \left[ 1 - \left( \frac{|\vec{V}|}{V_\infty} \right)^2 \right] \quad (1.13)$$

Avant d'aller plus loin, considérons les écoulements irrotationnels et incompressibles autour de différentes formes aérodynamiques telles qu'une

sphère, un ovoïde de révolution ou une aile d'avion. Les écoulements seront clairement bien différents: les lignes de courant autour de la sphère sont très différentes de celles autour de l'aile d'avion. Ces différents écoulements sont tous gouvernés par la même équation, l'équation de Laplace. Ils diffèrent seulement par les conditions aux frontières.

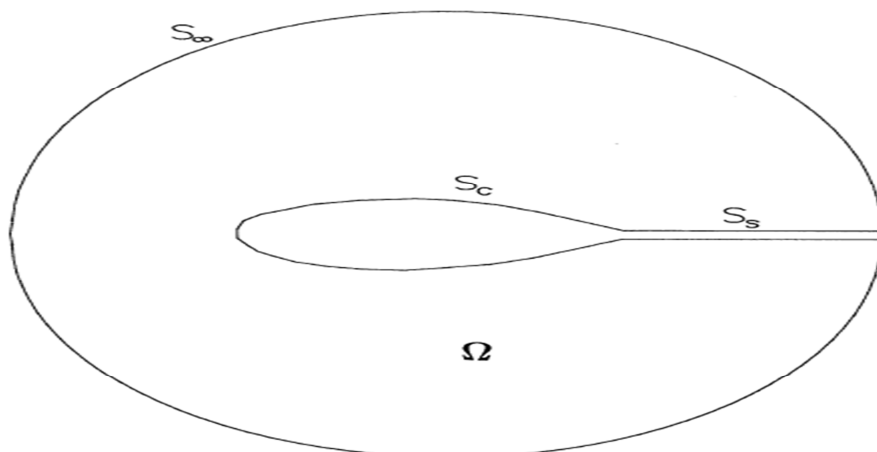
Considérons l'écoulement d'un fluide autour d'un corps au repos (Figure 1.1). Le domaine à étudier est la région à l'extérieur du corps. Les frontières de ce domaine sont donc l'infini et la surface du corps. A l'infini ( $S_\infty$ ), on suppose que la perturbation induite par le corps est négligeable. Sur le corps ( $S_c$ ), on peut affirmer que l'écoulement ne pénètre pas la géométrie. Par contre, puisque l'on est en présence d'un écoulement non-visqueux, le fluide peut glisser sur le corps. Il n'y a pas de condition d'adhérence.

Le problème mathématique à résoudre s'exprime donc de la façon suivante:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.14)$$

$$\vec{V} \rightarrow \vec{V}_\infty \text{ sur } (S_\infty) \quad (1.15)$$

$$\vec{n} \cdot \nabla \phi = 0 \text{ sur } (S_c) \quad (1.16)$$



**Figure 1.1** : Définition du problème

### 1.3 Techniques de solution:

La solution d'un écoulement irrotationnel et incompressible est donc réalisée de la façon suivante:

1. On résout l'équation de Laplace (équation (1.14)) en respectant les conditions aux frontières (équations (1.15) et (1.16)).
2. On calcule le champ de vitesse en utilisant la relation (1.7).
3. On calcule la distribution de pression en utilisant l'équation (1.13).

#### 1.3.1 Les écoulements élémentaires:

L'équation de Laplace est une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. La linéarité de cette équation est extrêmement importante puisqu'elle nous permet d'appliquer le principe de superposition: la somme de différentes solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles est également une solution de cette équation. On n'en conclut donc qu'un écoulement irrotationnel et incompressible complexe, tel que l'écoulement autour d'un profil aérodynamique, peut être représenté par la somme de plusieurs écoulements élémentaires qui sont irrotationnels et incompressibles. Le potentiel  $\phi$  d'un écoulement complexe peut donc être exprimé en fonction de potentiels  $\phi_e$  d'écoulements élémentaires de la façon suivante [9]:

$$\phi = \sum_{e=1}^n a_e \phi_e \quad (1.17)$$

Où  $a_e$  est une constante.

Ces écoulements élémentaires sont générés par ce que l'on appelle des singularités. Nous allons maintenant étudier quatre écoulements élémentaires : l'écoulement uniforme, la source, le tourbillon et le dipôle. Nous analyserons ensuite comment les champs de vitesse de ces écoulements simples peuvent être combinés pour résoudre des problèmes plus complexes.

### 1.3.1.1 Écoulement parallèle uniforme:

Considérant l'écoulement uniforme de vitesse  $U$  dans la direction  $x$  (fig1.2), dont les composantes de vitesse s'écrivent :

$$v_x = U = cte, v_y = 0 \quad \text{dans le cas d'un écoulement à 2 dimensions.}$$

et :

$$v_z = v_y = 0, v_x = U = cte \quad \text{dans le cas d'un écoulement à 3 dimensions.}$$

A deux dimensions, on a :

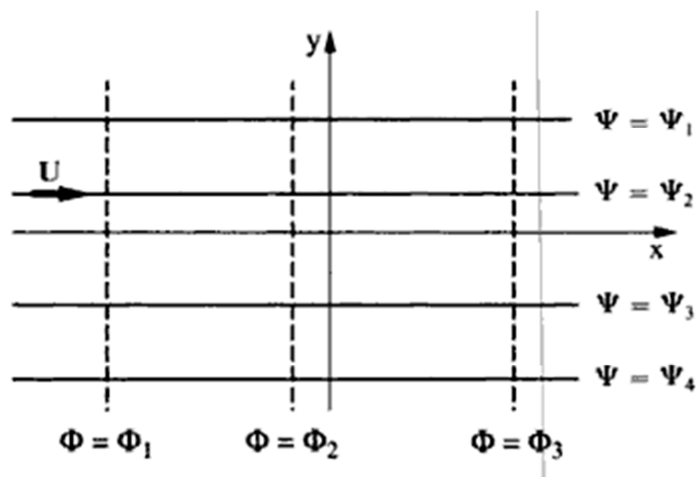
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x = U \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y = 0 \quad (1.18)$$

D'où:

$$\phi = Ux \quad (1.19)$$

et:

$$\psi = Uy \quad (1.20)$$



**Figure 1.2 :** Lignes de courant ( $\psi = cte$ ) et équipotentielles ( $\phi = cte$ ) dans un écoulement parallèle, de vitesse  $U$  à deux dimensions.

A trois dimensions, l'écoulement étant axisymétrique, on peut obtenir un résultat similaire en utilisant la fonction de courant de Stokes  $\psi$ . Nous supposons toujours l'écoulement dirigé suivant l'axe Ox.

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, x)$  on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = v_x = U \qquad \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_r = 0 \qquad (1.21)$$

D'où :

$$\phi = Ux \qquad (1.22)$$

$$\psi = -U \frac{r^2}{2} \qquad (1.23)$$

En coordonnées sphériques  $(r, \varphi, \theta)$ , on a de même :

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = v_r = U \cos \varphi \qquad (1.24)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial r} = v_\varphi = -U \sin \varphi \qquad (2.25)$$

D'où :

$$\phi = Ur \cos \varphi \qquad (1.26)$$

$$\psi = \frac{1}{2} Ur^2 \sin^2 \varphi \qquad (1.27)$$

Rappelons que les lignes (ou surfaces) d'équation  $\psi = \text{constante}$  sont des lignes (ou surfaces) de courant de l'écoulement; elles ont pour équations  $r = \text{cte}$ , et  $r \sin \varphi = \text{cte}$ , respectivement en coordonnées cylindriques et sphériques. Elles sont parallèles à la direction de la vitesse U. Les lignes équipotentielles à deux dimensions (ou les surfaces à trois dimensions) sont les droites (respectivement les plans) perpendiculaires à cette direction.

### 1.3.1.2 Le tourbillon:

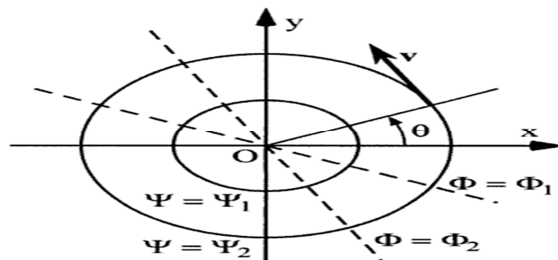
L'écoulement plan tourbillonnaire (figure 1.3) est un écoulement autour d'un axe perpendiculaire en O au plan xOy. Le champ de vitesse est ortho radial (c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe et au rayon vecteur), et les composantes  $v_r$  et  $v_\theta$  vérifient en coordonnées polaires :

$$v_r = 0 \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (1.28)$$

Où,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_r = 0 \quad (1.30)$$



**Figure 1.3 :** Lignes de courant et lignes équipotentielle dans un écoulement plan tourbillonnaire autour d'un axe Oz

Calculons la circulation de la vitesse autour d'un cercle ( $C$ ) de rayon  $r$  centré en O, on trouve:

$$\int_c v \cdot dl = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta = \Gamma \quad (1.31)$$

$\Gamma$  représente donc la circulation sur toute la courbe entourant une fois l'origine.

On obtient :



$$\phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (1.32)$$

et:

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{r}{r_0} \quad (1.33)$$

Où  $r_0$  est une constante arbitraire ( $\psi$  et  $\phi$  sont définies en effet à une constante additive près), permettant de respecter l'absence d'unité de l'argument du logarithme.

### 1.3.1.3 Source et puits:

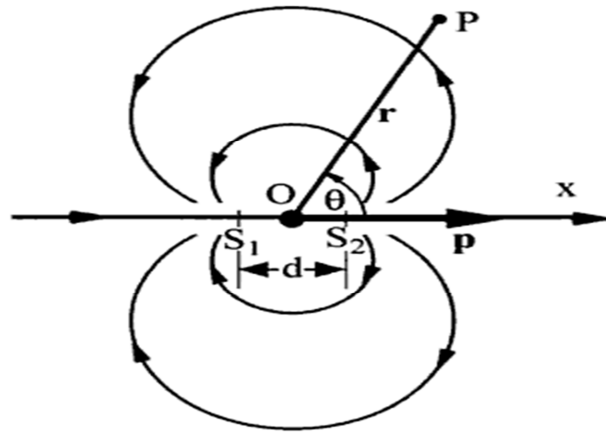
On appelle source et puits les écoulements potentiels élémentaires qui s'effectuent respectivement à partir de, et vers un point (on a  $Q > 0$  pour la source, et  $Q < 0$  pour le puits).

A deux dimensions, l'écoulement à partir d'un point source s'exprime, en coordonnées cylindriques, par la figure (1.4) :

$$v_r(r) = \frac{Q}{2\pi r}, \quad v_\theta = 0 \quad (1.34)$$

En évaluant le flux de la vitesse à travers un cercle de rayon  $r$  centré à l'origine (qui représente simplement l'intensité  $Q$ ), on obtient:

$$\int_C v \cdot n dl = \int_0^{2\pi} r v_r d\theta = Q \quad (1.35)$$



**Figure 1.4 :** Ecoulement crée par l'ensemble d'un puits et une source.

La figure (1.4) montre un écoulement à deux dimensions crée par l'ensemble d'un puits  $S_1$  et d'une source  $S_2$  de même intensité  $Q$ . lorsqu'on fait tendre leur distance  $d$  vers 0, en maintenant constant le produit  $Qd$ , on obtient l'écoulement crée par un dipôle de moment  $p = Qd$ .

Soit, dans la limite où  $d \rightarrow 0$ ,

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r} (|r - r_2| - |r - r_1|) = -\frac{Qd \cos \theta}{2\pi r} \quad (1.36)$$

Ou encore :

$$\phi = -\frac{p \cos \theta}{2\pi r} \quad (1.37)$$

En prenant le gradient du potentiel  $\phi$ , on obtient les composantes de la vitesse:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi r^2} \quad (1.38)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{2\pi r^2} \quad (1.39)$$

Le potentiel et le champ de vitesse ont donc la même forme que le potentiel et le champ électrique créés par un dipôle électrique de moment  $p$ . A partir de ces composantes de la vitesse, on obtient la fonction courant  $\psi$  :

$$\psi = \frac{p}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} = \frac{p \wedge r}{2\pi r^2} \quad (1.40)$$

En opérant de la même manière pour un écoulement à trois dimensions, on obtient le potentiel du dipôle en coordonnées sphériques :

$$\phi = -\frac{p \cos \varphi}{4\pi r^2} = -\frac{p.r}{4\pi r^3} \quad (1.41)$$

Les composantes correspondantes  $v_r$  et  $v_\varphi$  du champ de vitesse sont:

$$v_r = \frac{p \cos \varphi}{2\pi r^3} \quad (1.42)$$

et :

$$v_\varphi = \frac{p \sin \varphi}{4\pi r^3} \quad (1.43)$$

Et la fonction courant  $\psi$  [10]:

$$\psi = \frac{p \sin^2 \varphi}{4\pi r} \quad (1.44)$$

## CHAPITRE II :

### METHODE DE PANNEAUX EN DEUX DIMENSIONS

#### 2.1 Introduction :

La première méthode de panneaux a été développée par Hess et Smith en 1966. Bien avant ce temps, on avait réussi à analyser l'écoulement autour de l'ovale de Rankine en superposant un puits et une source dans un écoulement uniforme. Pour ce cas, on a superposé les singularités d'une certaine façon et on a découvert qu'une ligne de courant en forme d'ovale définissait deux régions distinctes de l'écoulement. Cependant, cette méthode indirecte de superposer des singularités et de voir ensuite le corps que l'on a généré ne peut être envisagée pour l'analyse de corps quelconque. Nous avons plutôt besoin d'une méthode directe consistant à spécifier la forme du corps pour ainsi trouver la distribution de singularités nécessaire pour générer l'écoulement autour de ce corps. Hess et Smith ont conçu la première méthode numérique directe basée sur la superposition de singularités.

#### 2.2 Méthode de panneaux pour le calcul des profils (Méthode de Hess et Smith):

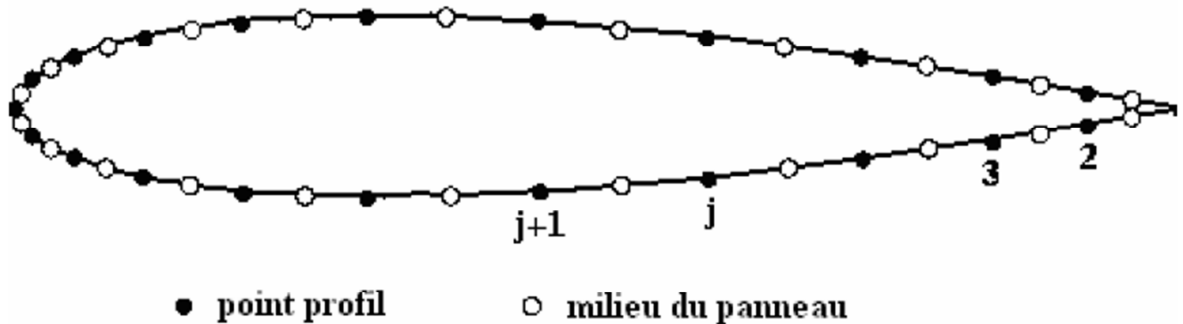
##### 2.2.1 Définition :

La théorie du profil mince donne des résultats acceptables pour les coefficients de portance et de moment, mais elle ne tient pas compte de l'effet de l'épaisseur du profil sur les coefficients aérodynamiques. Suivant cette théorie, la pression aux point d'arrêt n'est pas valable [11].

La méthode de panneaux est une technique de résolution de l'écoulement potentiel de géométrie 2D et 3D. L'écoulement est supposé être incompressible, parfait et irrotationnel. Les systèmes potentiels sont régis par l'équation de Laplace qui adhère au principe de la superposition. Dans cette approche, la

surface du profil est représentée par un nombre de panneaux droits couvrant les points adjacents de toute la surface (fig. 2.1).

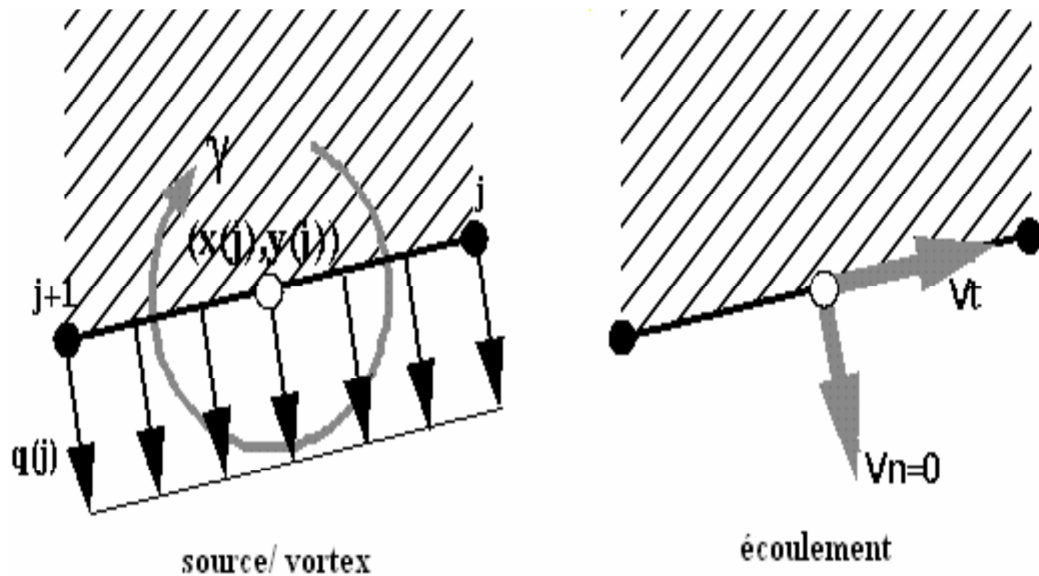
Chaque panneau a une distribution de force de source  $q$  et une distribution de force de vortex (ou tourbillon)  $\gamma$  (fig. 2.2). Le but est de calculer la pression sur chaque panneau qui détermine la surface du profil.



**Figure 2.1** représentation du profil en panneaux

Le contour définissant le profil aérodynamique est partitionné en  $N$  panneaux droits ou éléments. Une source fictive de  $m_j$  de d'intensité constante est distribuée sur le  $j^{\text{ème}}$  ( $1, 2, 3, \dots, N$ ) panneau. Un point vortex fictif d'intensité constante est distribué sur tous les panneaux, l'intensité de la source change d'un panneau à un autre, mais l'intensité du vortex reste la même.

Les intensités des  $N$  sources et de vortex sont calculées en résolvant  $N+1$  équations simultanées. Ces équations sont obtenues en mettant en vigueur la condition de non pénétration par point de contrôle et la condition de Kutta au bord d'attaque [12].



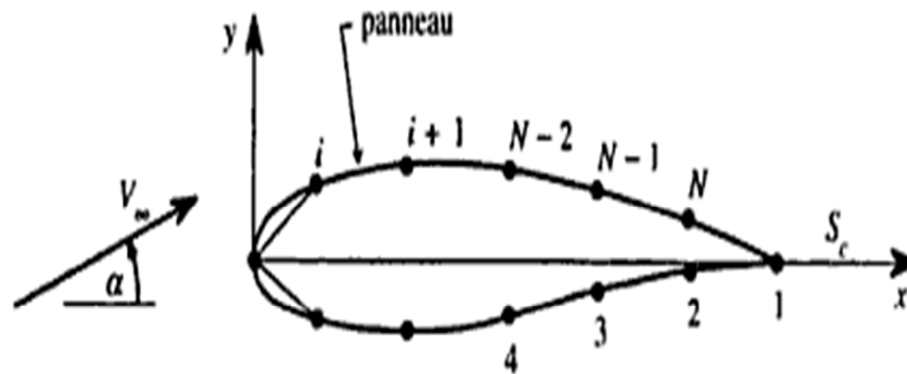
**Figure 2.2** Distribution de vortex

### 2.2.2 Fondements mathématiques :

La méthode élaborée par Hess et Smith consiste à diviser le profil en un certain nombre de panneaux afin d'en approcher le mieux possible le contour. Des sources et des tourbillons, appelées singularités, sont distribués sur chaque panneau pour modéliser l'écoulement. L'intensité des tourbillons est la même sur chaque panneau. L'intensité des sources est propre à chaque panneau. L'intensité de toutes les singularités est déterminée en imposant certaines conditions limites : l'écoulement doit être tangent à chaque panneau (conditions de tangence) et les vitesses tangentes aux 2 panneaux de bord de fuite doivent être égales (condition de Kutta). Le champ de vitesses, les coefficients de pression ainsi que les coefficients de portance et de traînée se déduisent des valeurs des singularités [13].

#### 2.2.1.1 Discretisation du profil :

La discrétisation consiste à remplacer le profil par un polygone à N cotés. Il faut donc diviser la surface du profil en commençant par le bord de fuite en un certain nombre de panneaux pour obtenir une précision correcte.



**Figure 2.3 :** Notation des panneaux sur le profil.

Le profil aérodynamique peut être divisé en deux endroits importants, le bord d'attaque et le bord de fuite où la courbure est importante. Un grand nombre de panneaux doit être utilisé sur ces endroits en utilisant une distribution cosinusoidale des panneaux où :

$$x_i = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta_i) \quad (2.1)$$

et :

$$\theta_i = i \cdot \Delta \theta, \quad \Delta \theta = \frac{2\pi}{N}. \quad (2.2)$$

### 2.2.1.2 Superposition des écoulements potentiels et calcul des vitesses:

Pour un écoulement irrotationnel, le potentiel total autour du profil correspond à l'équation :

$$\phi = \phi_\infty + \phi_s + \phi_v \quad (2.3)$$

où :  $\phi_\infty$  = potentiel de l'écoulement uniforme

$\phi_s$  = potentiel d'une distribution de sources  $q(s)$  par unité de longueur

$\phi_v$  = potentiel d'une distribution de tourbillons d'intensité  $\gamma(s)$

D'après Hess et Smith [14] l'équation du potentiel des vitesses aura la forme suivante:

$$\phi_{\infty} = v_{\infty} (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha) \quad (2.4)$$

$$\phi_s = \int \frac{q(s)}{2\pi} \ln r ds \quad (2.5)$$

$$\phi_v = \int \frac{\gamma(s)}{2} \theta ds \quad (2.6)$$

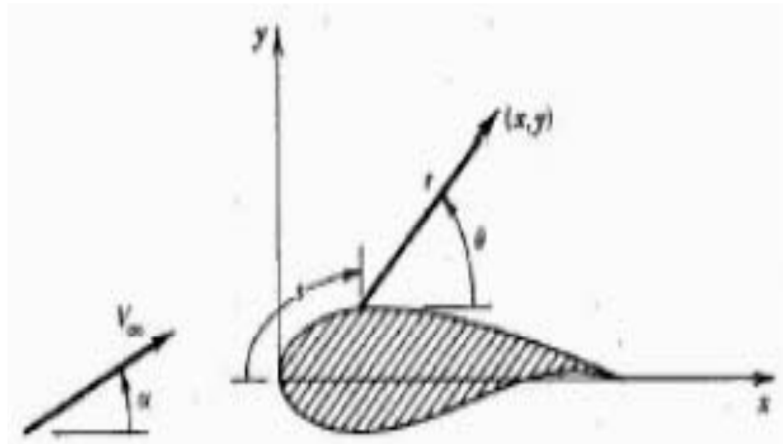
On doit intégrer ces deux dernières équations sur toute la surface du corps. En raison du principe de la superposition des écoulements, le potentiel total  $\phi$  satisfait automatiquement à l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.7)$$

De plus, il satisfait à la condition limite à l'infini  $r \rightarrow \infty, \phi \rightarrow \phi_{\infty}$ . Il reste à déterminer les valeurs des intensités  $q(S)$  et  $\gamma(S)$  qui satisferont à la condition de l'écoulement tangent et à celle de Kutta. La distribution des sources remplira la condition de tangence de l'écoulement sur la surface et l'intensité tourbillonnaire remplira la condition de Kutta au bord de fuite [5].

La condition de Kutta stipule que la pression à l'intrados et à l'extrados au bord de fuite du profil doit être égale et le courant doit prendre la même direction au bord supérieur et inférieur [6].





**Figure 2.4** : Définition de  $s$ , de  $r$  et de  $\theta$

La distribution des sources et des tourbillons sur chaque panneau et en utilisant les équations (2.3) et (2.7), le potentiel résultant devient :

$$\phi = V_{\infty} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{j=1}^N \int_{\text{element } j} \left( \frac{q(s)}{2\pi} \ln r - \frac{\gamma}{2\pi} \theta \right) ds \quad (2.8)$$

Le système aura donc la forme de  $N+1$  équations à  $N+1$  inconnues, ce qui nous permet de choisir arbitrairement les distributions de sources et de tourbillons. D'après Hess et Smith, l'intensité de la source est constante sur chaque panneau, mais elle varie d'un panneau à un autre. Ainsi  $q(S) = q_i$  sur le panneau  $i$ , et  $\gamma(S) = \gamma$  sur tout le profil. Le choix de cette méthode réside dans la limitation du nombre d'inconnues. Les inconnues du problème sont:

$q_i = N$  valeurs pour les sources aux points de contrôle

$\gamma =$  Une valeur pour le tourbillon aux points de contrôle [12].

Les points de contrôles se trouvent au milieu de chaque panneau. Il faut déterminer l'expression pour ces points en regard du panneau  $i$ . pour la condition de Kutta, on va poser que les valeurs des vitesses sur les panneaux  $N$  et  $1$  sont égales.

D'après la figure (2.5), on peut écrire ainsi les relations définissant les vecteurs unitaires dans la direction normale ( $\vec{n}$ ) et tangentielle ( $\vec{t}$ ) sur le panneau  $i$  en fonction de l'angle d'inclinaison du panneau  $\theta_i$  :

$$\vec{n}_i = -\sin \theta_i \vec{i} + \cos \theta_i \vec{j} \quad (2.9)$$

$$\vec{t}_i = \cos \theta_i \vec{i} + \sin \theta_i \vec{j} \quad (2.10)$$

Où:

$$\sin \theta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{l_i}, \quad \cos \theta_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{l_i} \quad (2.11)$$

Le paramètre  $l_i$  correspond à la longueur du panneau  $i$ . Les expressions suivantes définissent les coordonnées du point de contrôle situé au milieu du panneau  $i$ :

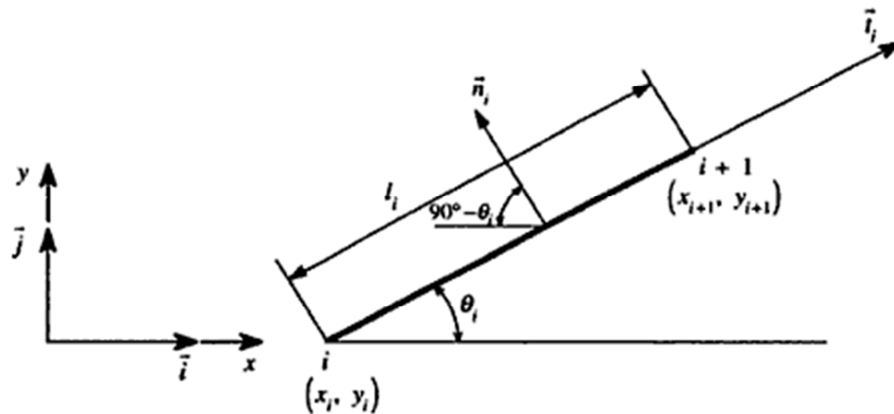
$$(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \right) \quad (2.12)$$

Pour désigner les composantes de vitesse au milieu du  $i^{\text{ème}}$  panneau, on écrit:

$$u_i = u(\bar{x}_i, \bar{y}_i), \quad v_i = v(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \quad (2.13)$$

Avec la condition de tangence, on pose que la vitesse normale sur chaque panneau est nulle. Ainsi, si on se réfère à la figure (2.4), on a pour le panneau  $i$ :

$$-u_i \sin \theta_i + v_i \cos \theta_i = 0 \quad \text{pour } i=1,2,\dots,N \quad (2.14)$$



**Figure 2.5** : Notation sur le panneau i

Avec la condition de Kutta, on obtient la relation suivante pour les panneaux 1 et N (au bord de fuite) :

$$u_1 \cos \theta_1 + v_1 \sin \theta_1 = -u_N \cos \theta_N - v_N \sin \theta_N \quad (2.15)$$

Les composantes de la vitesse  $(u_i, v_i)$  au milieu du panneau i sont formées de contribution de l'écoulement uniforme  $V_\infty$ , de même que les composantes des sources et des tourbillons sur chaque panneau. Les vitesses induites en un point quelconque par les sources et les tourbillons situés sur un panneau donné sont proportionnelles à l'intensité de la source ou du tourbillon sur ce panneau ; dès lors, on peut écrire, pour le panneau i :

$$u_i = V_\infty \cos \alpha + \sum_{j=1}^N q_j u_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N u_{vij} \quad (2.16)$$

$$v_i = V_\infty \sin \alpha + \sum_{j=1}^N q_j v_{sij} + \gamma \sum_{j=1}^N v_{vij} \quad (2.17)$$

Où:  $u_{sij}$  = composante en x de la vitesse au milieu du segment i due à une source unitaire située sur le panneau j.

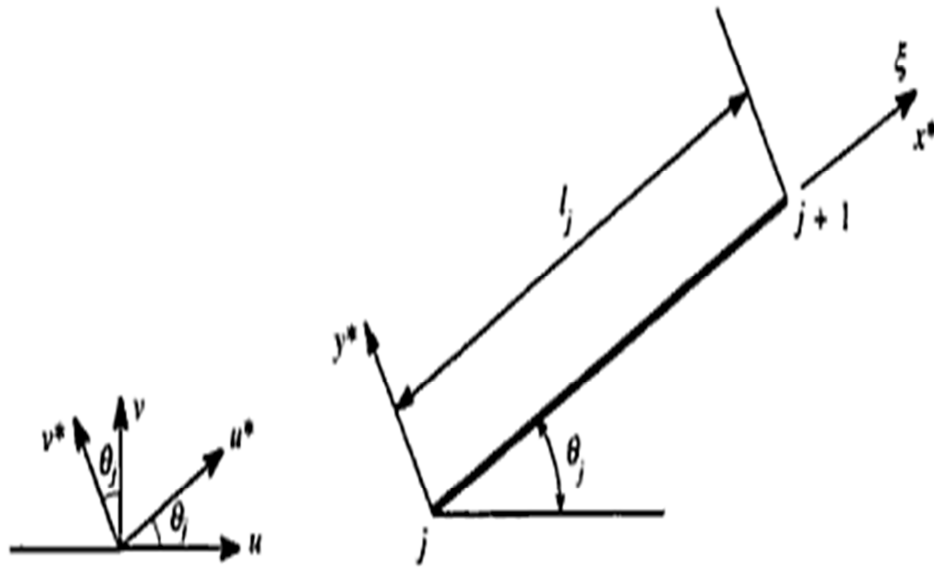
$u_{vij}$  = composante en x de la vitesse au milieu du segment i due à un tourbillon unitaire située sur le panneau j.

Pour évaluer  $u_{sij}$ ,  $v_{sij}$ ,  $u_{vij}$  et  $v_{vij}$ , il est préférable de travailler dans les coordonnées  $(x^*, y^*)$  liées au panneau j (figure 2.6)

Système de coordonnées lié au panneau j: Si on connaît les composantes locales  $(u^*, v^*)$ , on peut évaluer les composantes de la vitesse totale à l'aide des expressions:

$$u = u^* \cos \theta_j - v^* \sin \theta_j \quad (2.18)$$

$$v = u^* \sin \theta_j + v^* \cos \theta_j \quad (2.19)$$



**Figure 2.6 :** Système de coordonnées lié au panneau j

On peut écrire ainsi les composantes de la vitesse au point  $(x_i, y_i)$  due à la distribution d'une source unitaire sur le panneau j :

$$u_{sij}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{(x^* - \xi) d\xi}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} = \left[ -\frac{1}{2\pi} \ln \left[ (x^* - \xi)^2 + y^{*2} \right]^{1/2} \right]_{\xi=0}^{\xi=l_j} \quad (2.20)$$

$$v_{sij}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi = \left[ \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{y^*}{x^* - \xi} \right) \right]_{\xi=0}^{\xi=l_j} \quad (2.21)$$

où  $(x^*, y^*)$  sont les coordonnées locales qui correspondent à  $(x_i, y_i)$ .

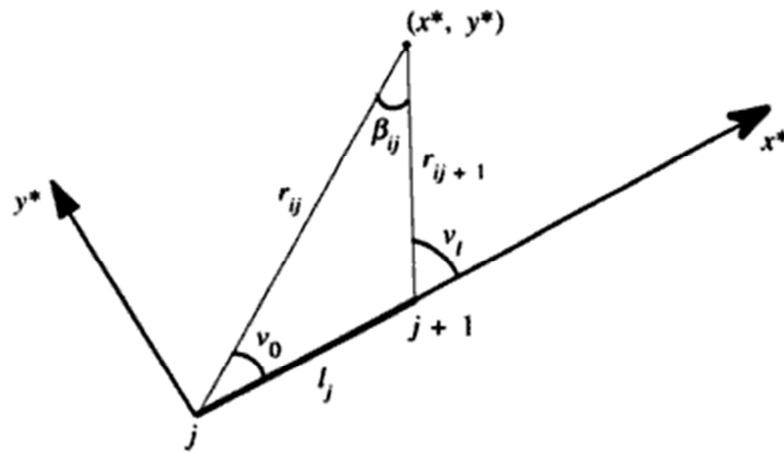
On peut réduire les équations (2.20) et (2.21) par la géométrie (figure 2.7) :

$$u_{sij}^* = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{ij} + 1}{r_{ij}} \quad (2.22)$$

$$v_{sij}^* = \frac{v_l - v_0}{2\pi} = \frac{\beta_{ij}}{2\pi} \quad (2.23)$$

où :  $r_{ij}$  = distance du nœud  $j$  au milieu du panneau  $i$

$\beta_{ij}$  = angle sous lequel on voit le panneau  $j$  du milieu du panneau  $i$



**Figure 2.7** : Réduction des équations (2.20) et (2.21) par la géométrie.

A partir des équations (2.22) et (2.23), on se rend compte  $u_{sii}^* = 0$  (c'est à dire quand  $i=j$ ) représente la vitesse induite par la source sur le milieu du panneau lui-même, mais que  $v_{sii}^* \neq 0$ . Si le point  $(x^*, y^*)$  s'approche du panneau alors  $\beta_{ij} \rightarrow \pi$ .

On calculera  $\beta_{ij}$  comme suit :

$$\beta_{ij} = \arctg \left( \frac{(\bar{y}_i - y_{j+1})(\bar{x}_i - x_j) - (\bar{x}_i - x_{j+1})(\bar{y}_i - y_j)}{(\bar{x}_i - x_{j+1})(\bar{x}_i - x_j) - (\bar{y}_i - y_{j+1})(\bar{y}_i - y_j)} \right) \quad \text{si } (i \neq j)$$

$$\beta_{ij} = \pi \text{ si } (i = j) \quad (2.24)$$

De la même façon que pour  $u_{sij}^*$  et  $v_{sij}^*$ , on calcule la vitesse induite au point  $(x^*, y^*)$  par le tourbillon d'intensité unitaire situé sur le panneau j:

$$u_{vij}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{y^*}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi = \frac{\beta_{ij}}{2} \quad (2.25)$$

$$v_{vij}^* = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{(x^* - \xi)}{(x^* - \xi)^2 + y^{*2}} d\xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{i,j+1}}{r_{ij}} \quad (2.26)$$

Ainsi les conditions de tangence,  $-u_i \sin \theta_i + v_i \cos \theta_i = 0$  prennent la forme:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} q_j + A_{i,N+1} \gamma = b_i \quad (2.27)$$

où:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= -u_{sij} \sin \theta_i + v_{sij} \cos \theta_i \\ &= -u_{sij}^* (\cos \theta_j \sin \theta_i - \sin \theta_j \cos \theta_i) + v_{sij}^* (\sin \theta_j \sin \theta_i - \cos \theta_j \cos \theta_i) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Où:

$$2\pi A_{ij} = \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{i,j+1}}{r_{ij}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \quad (2.29)$$

$$2\pi A_{i,N+1} = \sum_{j=1}^N \left[ \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \frac{r_{i,j+1}}{r_{ij}} - \sin(\theta_i - \theta_j) \beta_{ij} \right] \quad (2.30)$$

et

$$b_i = V_\infty \sin(\theta_i - \alpha) \quad (2.31)$$

La condition de Kutta (au bord de fuite):

$$u_1 \cos \theta_1 + v_1 \sin \theta_1 = -u_N \cos \theta_N + v_N \sin \theta_N \quad (2.32)$$

Peut également s'exprimer ainsi :

$$\sum_{j=1}^N A_{N+1,j} q_j + A_{N+1,N+1} \gamma = b_{N+1} \quad (2.33)$$

$$2\pi A_{N+1,j} = \sum_{k=1, N} \left[ \sin(\theta_k - \theta_j) \beta_{kj} - \cos(\theta_k - \theta_j) \ln \frac{r_{k,j+1}}{r_{kj}} \right] \quad (2.34)$$

$$2\pi A_{N+1,N+1} = \sum_{k=1,N} \sum_{j=1}^N \left[ \sin(\theta_k - \theta_j) \ln \frac{r_{k,j+1}}{r_{kj}} + \cos(\theta_k - \theta_j) \beta_{kj} \right] \quad (2.35)$$

$$b_{N+1} = -V_\infty \cos(\theta_i - \alpha) - V_\infty \cos(\theta_N - \alpha) \quad (2.36)$$

Les équations (2.27) et (2.33) forment un système de (N+1) équations à (N+1) inconnues, soit :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N+1,1} & \cdots & A_{N+1,N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{N+1} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Où :  $q_{N+1} = \gamma$

Pour connaître la vitesse tangentielle au point de contrôle de chaque panneau, on doit résoudre l'équation suivante:

$$\begin{aligned} V_{ii} = & V_\infty \cos(\theta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{2\pi} \left[ \beta_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - \cos(\theta_i - \theta_j) \ln \left( \frac{r_{1,j+1}}{r_{ij}} \right) \right] \\ & + \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left[ \sin(\theta_i - \theta_j) \ln \left( \frac{r_{1,j+1}}{r_{ij}} \right) + \beta_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

### 2.2.1.3 Calcul des coefficients de pression et de portance :

Avec la vitesse tangentielle sur chaque panneau, on peut calculer le coefficient de pression  $C_p$  ; et l'on peut ainsi déterminer le coefficient de pression au point  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  à l'aide de l'expression:

$$C_p(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = 1 - \left( \frac{V_i}{V_\infty} \right)^2 \quad (2.39)$$

Lorsqu'on connaît les valeurs de  $C_p$  sur chaque panneau, on peut tracer les courbes de distribution de pression en fonction de la corde pour un angle d'attaque  $\alpha$  donné.

Le coefficient de portance correspond à la relation suivante:

$$C_l = \frac{L}{q_\infty c} \quad (2.40)$$

Où:

$$L = \rho V_\infty \Gamma (\text{Kutta} - \text{Joukowski})$$

$$q_\infty = (1/2) \rho V_\infty^2$$

Ainsi:

$$C_l = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{(1/2) \rho V_\infty^2 c} = \frac{2\Gamma}{V_\infty c} \quad (2.41)$$

On peut exprimer la circulation,  $\Gamma$ , en fonction de l'intensité tourbillonnaire  $\gamma$  et conséquemment en fonction de la longueur de tous les panneaux:

$$\Gamma = \oint \gamma ds = \gamma \oint ds \quad (2.42)$$

Par contre,  $\oint ds$  représente le contour du profil ou bien la longueur approximative

de tous les panneaux, soit  $\sum_{i=1}^N l_i$ . On a donc:

$$\Gamma = \gamma \sum_{i=1}^N l_i \quad (2.43)$$

Finalement, le coefficient de portance équivaut à [11]:

$$C_l = \frac{2\gamma}{V_\infty c} \sum_{i=1}^N l_i \quad (2.44)$$



## LA METHODE DE PANNEAUX EN TROIS DIMENSIONS

### 3.1 Les équations de l'écoulement potentiel :

Si nous supposons l'écoulement potentiel, l'équation de continuité devient:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = 0 \quad (3.1)$$

L'équation est appelée donc équation de Laplace avec:

$$v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (3.2)$$

Cette dernière s'appelle le potentiel scalaire de vitesse. Il peut facilement montrer que l'écoulement potentiel est irrotationnel.

Une autre équation importante vient de la loi de la conservation de moment dans un écoulement irrotationnel et non visqueux (équation d'Euler) pour le flux stationnaire.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = Cte \quad (3.3)$$

et elle est appelée l'équation d'Euler-Bernoulli.

En résolvant l'équation (3.1) nous obtenons le champ de vitesse et en utilisant l'équation (3.3) nous obtenons le champ de pression. Une propriété très importante de l'équation de Laplace est que la somme de deux solutions de cette équation forme une solution aussi. Cela signifie que l'écoulement peut être disposé pour présenter la somme des singularités dont les valeurs sont trouvés par les conditions aux limites satisfaisant approprié. Ceci est important parce que la méthode présentée dans ce travail consiste précisément à la combinaison des sources et des dipôles sur des panneaux quadrilatères répartis sur la surface du corps aérodynamique.

Par l'intégration de la pression sur la surface du corps nous obtenons les forces et les moments totaux agissant sur le corps:

$$F_i = - \int_s p n_i dS \quad (3.4)$$

$$M_i = \int_s \varepsilon_{ijk} x_j n_k p dS \quad (3.5)$$

Où  $p$  est la pression,  $n_k$  la composante normale de vecteur unité dans la direction  $k$ , et  $x_j$  la distance par rapport au point de référence.

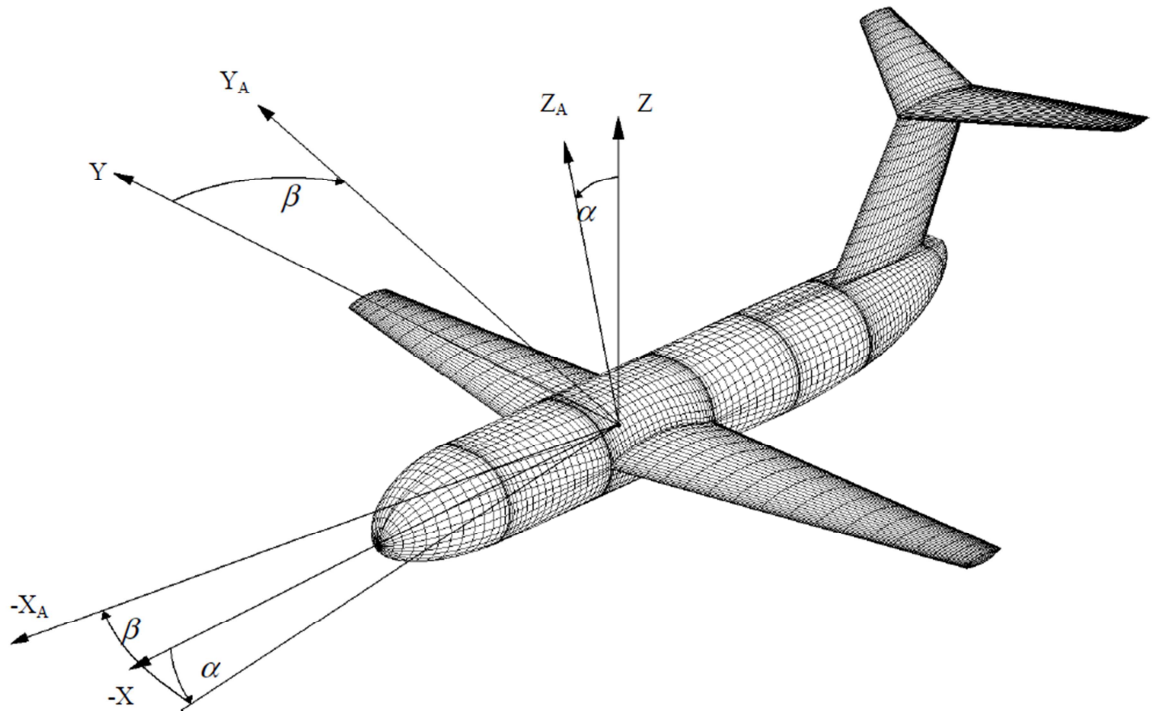
Les coefficients de force et de moment sont calculés selon les termes suivants:

$$C_X = \frac{F_x}{qS_{ref}}, C_Y = \frac{F_y}{qS_{ref}}, C_Z = \frac{F_z}{qS_{ref}} \quad (3.6)$$

$$C_l = \frac{M_l}{qS_{ref} b_{span}}, C_m = \frac{M_m}{qS_{ref} c_{SAT}}, C_n = \frac{M_n}{qS_{ref} b_{span}} \quad (3.7)$$

Où  $S_{ref}$  est la surface de référence (aile),  $c_{SAT}$  longueur de référence (la corde aérodynamique moyenne),  $b_{span}$  la longueur de référence (Envergure) et  $q$  la pression de référence (dynamique).

Les forces de portance et la traînée sont définies dans le système de coordonnées aérodynamiques ( $Ox_A y_A z_A$ ) en tournant le système de coordonnées de l'avion ( $Oxyz$ ), d'abord par l'angle d'attaque ( $\alpha$ ) autour de l'axe  $y$  et ensuite par l'angle de dérapage ( $\beta$ ) autour de l'axe  $z_A$  (figure 3.1).



**Figure 3.1 :** Transformation du système de coordonnées de l'avion au système de coordonnées aérodynamiques.

Étant donné que les forces de portance et de traînée dans le présent document sont surveillées seulement dans l'analyse longitudinale, où seul l'angle d'attaque change, la transformation est donnée comme suit:

$$\begin{bmatrix} C_L \\ C_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_Z \\ C_X \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

### 3.2 Principes fondamentaux de l'écoulement incompressible non visqueux:

Chaque champ de vitesse peut être représentée par la fonction courant et la fonction potentiel sous la forme de:

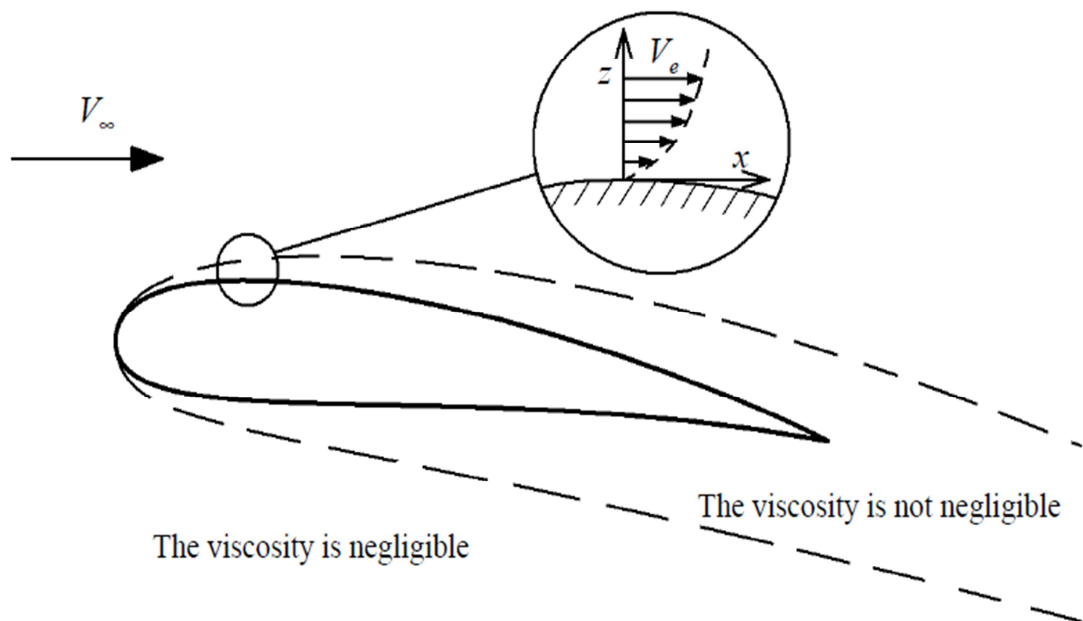
$$v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \quad (3.9)$$

Où la première partie de droite représente la solution d'écoulement potentiel qui est irrotationnel, et la deuxième partie est sans source et représente le tourbillon, mais ne perturbe pas l'équation de continuité.

Ceci est très important puisque ce chemin de circulation autour de profil est introduit en permettant la détermination de la portance.

Dans le cas du corps tridimensionnel cette circulation représenterait une ligne de tourbillon à travers l'envergure d'aile. Un théorème très important, appelé le deuxième théorème de Helmholtz, dit que le tube de vortex (tourbillon) ne peut pas avoir un début ou une fin dans le fluide. Tenant cette perspective, la ligne tourbillonnaire à travers l'envergure des ailes doit se tourner vers l'aval aux extrémités des ailes. Ce phénomène est physiquement visible sous la forme de tourbillons au niveau des bords d'ailerons d'avion.

Il est important de noter que la viscosité peut être négligée dans la zone proche de la paroi du corps (couche limite), mais puisque son épaisseur est relativement faible, il n'affectera pas de manière significative l'écoulement potentiel externe (Figure 3.2) [2].



**Figure 3.2** : Division de l'écoulement vers la région visqueuse et non visqueuse

### 3.3 La force aérodynamique, la polaire de l'aile et les moments aérodynamiques :

#### 3.3.1 La force aérodynamique et ses composantes:

La force (ou résultante) aérodynamique  $F_a$ : c'est la force générée par l'ensemble des surpressions de l'intrados et des dépressions de l'extrados. Elle augmente avec la vitesse et l'angle d'incidence. L'angle d'incidence : c'est l'angle formé entre la corde de l'aile et la trajectoire du vent relatif. Le centre d'application de la force aérodynamique s'appelle le centre de poussée.

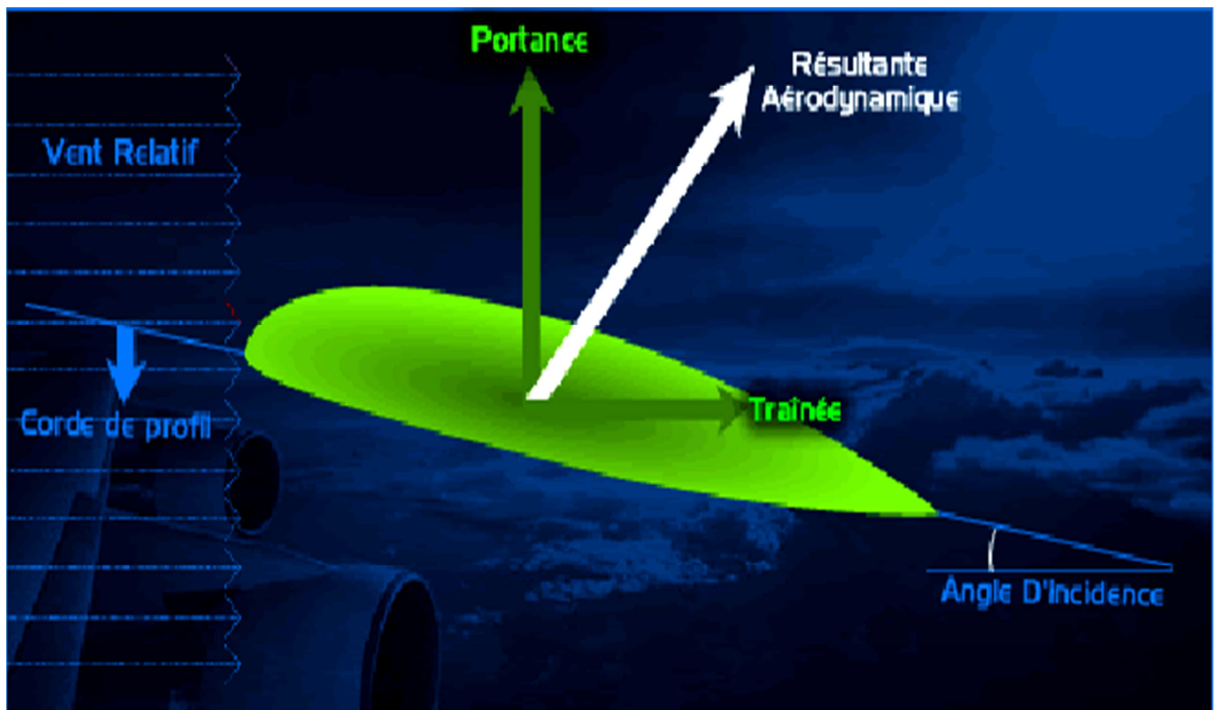
$$F_a = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_a \quad (3.10)$$

Où :  $\rho$  : est la densité de l'air

$S$  : est la surface

$V$  : est la vitesse du vent

$C_a$ : est le coefficient de la force aérodynamique



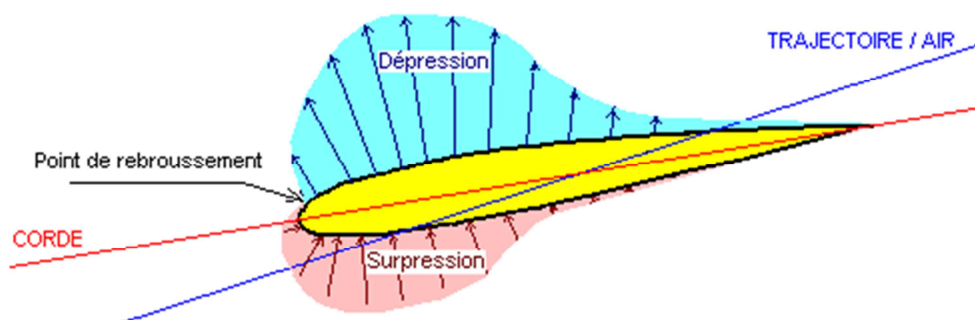
**Figure 3.3 :** La force aérodynamique et ses composantes

La force aérodynamique se décompose en deux forces : la portance et la traînée.

La portance ( $L$ ) est la composante aérodynamique perpendiculaire aux filets d'air du vent relatif. C'est une force, aussi appelée sustentation, dirigée du bas vers le haut, et qui a son centre en un point de l'aile: le centre de poussée. Elle est opposée au poids de l'avion et doit lui être au moins égale pour que l'avion s'élève. Elle résulte de la pénétration dans l'air de l'aile.

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \quad (3.11)$$

Le vent relatif passe sur l'extrados de l'aile et sur son intrados. Il en résulte une dépression sur l'extrados et une surpression sur l'intrados, en vertu du principe de Bernoulli, qui montre que la vitesse du fluide (l'air) augmente lorsque la pression exercée sur le fluide diminue.



**Figure 3.4** : La distribution de pression sur un profil d'aile

L'addition de la surpression et de la dépression donne alors une force appelée portance qui aspire l'aile et donc l'avion vers le haut.

La traînée ( $D$ ) est la composante aérodynamique parallèle aux filets d'air du vent relatif. C'est la force opposée au déplacement de l'avion et qui résulte de sa résistance à l'air. C'est la résistance à l'avancement, on cherche donc à la réduire au maximum.

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \quad (3.12)$$

L'aile est en effet un obstacle pour l'air et elle le freine car elle s'oppose au déplacement de l'air. Cette force est représentée par un vecteur parallèle au vent relatif et partant de l'aile.

Si notre avion n'était soumis qu'à ces deux forces, il reculerait et monterait sans arrêt !!!

Il nous manque le poids de l'avion (qui s'oppose à la portance) et la force de traction créée par notre hélice et son moteur (qui s'oppose à la traînée).

Les coefficients  $C_L$  et  $C_D$  sont respectivement les coefficients de portance et de traînée. Ils varient en fonction :

- De la forme du profil
- De l'angle d'incidence

$C_L$  est le coefficient de portance. Il est en quelque sorte l'aptitude à transformer le courant d'air en portance.

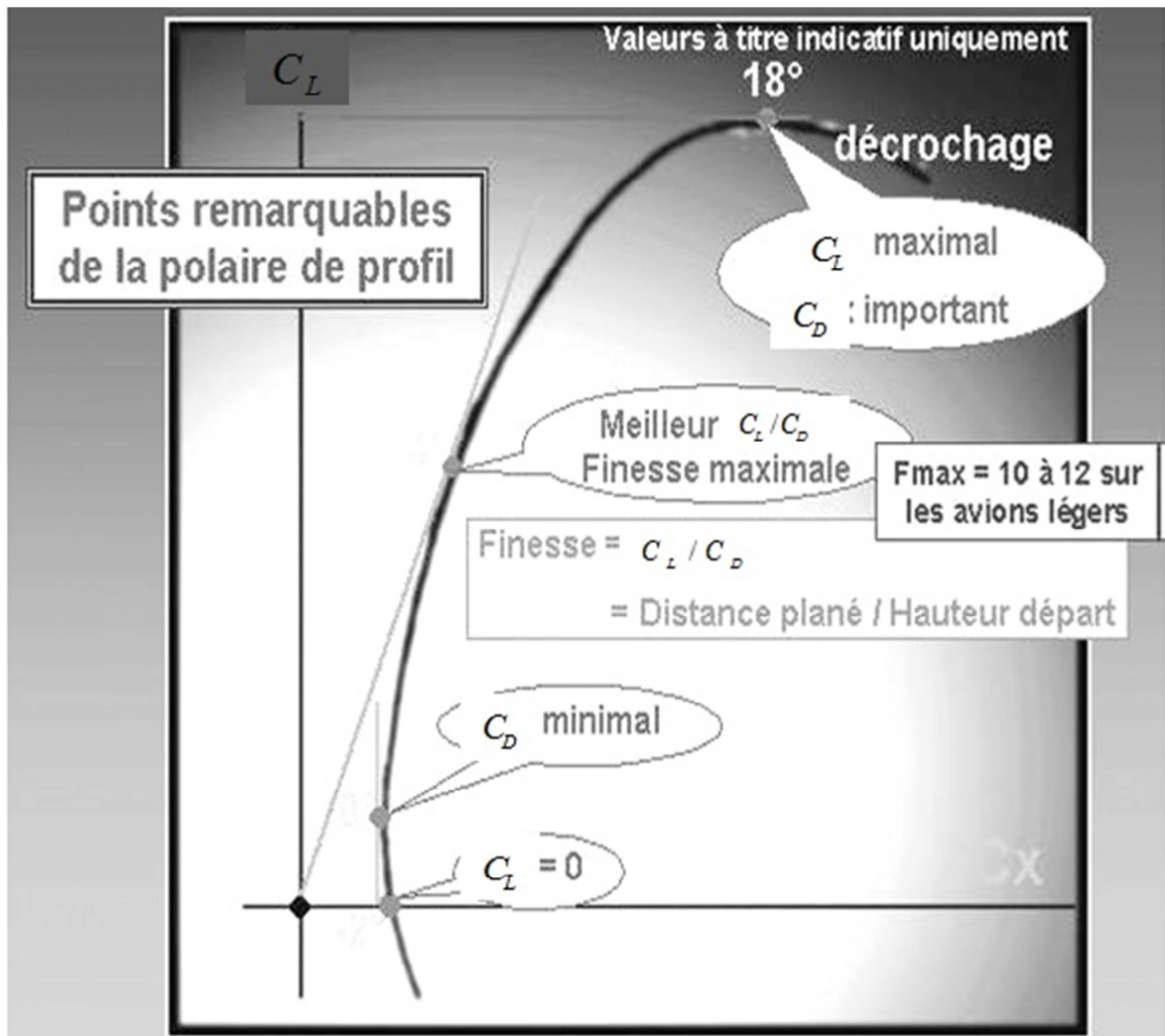
$C_D$  est la caractérisation d'un défaut qui est de fabriquer de la traînée avec le même courant d'air.

### 3.3.2 La polaire d'une aile :

Il s'agit de la représentation graphique du coefficient de portance  $C_L$  en fonction de coefficient de traînée  $C_D$ . Plus l'incidence de l'aile est forte, plus la portance est importante. Mais jusqu'à un certain point ! On comprend que si l'aile devient verticale, notre avion sera tombé depuis longtemps : il aura décroché. De la même façon pour le coefficient de traînée, plus l'incidence est importante, plus la traînée est importante.

Si la portance et la traînée dépendent toutes les deux de l'incidence, pour chaque valeur d'incidence donnée, on peut trouver la portance et la traînée. On peut visualiser cette relation sur un graphique qui montrera donc la portance en fonction de la traînée, cette courbe s'appelle la polaire et c'est donc la 'carte

d'identité' de l'aile. Elle donne les valeurs des coefficients de portance et de traînée pour chaque valeur d'incidence.



**Figure 3.5 :** La polaire de l'aile



### 3.3.3 Les moments aérodynamiques :

Un effort  $F$  qui s'exerce au niveau de centre de gravité d'un corps solide quelconque ne fait pas tourner ce corps. Si le point d'application est écarté d'une distance  $d$  du centre de gravité, l'effort produit un effet qui aura tendance à mettre le corps en rotation : on dit qu'il s'applique un moment  $F \times d$  sur le solide.

Pour évoluer dans les trois dimensions et pour se diriger, l'aéronef subit des moments de roulis, de tangage et de lacet qui le mettent en rotation autour des axes de roulis, lacet et tangage et qui passent par son centre de gravité. Les gouvernes d'un aéronef génèrent des moments de roulis (ailerons d'un avion), de tangage (gouverne de profondeur) et de lacet (gouverne de direction).

Les essais en soufflerie permettent de quantifier les forces et les moments appliqués à un profil d'aile ou à un avion tout entier. Ces moments aérodynamiques sont également dotés de coefficients.

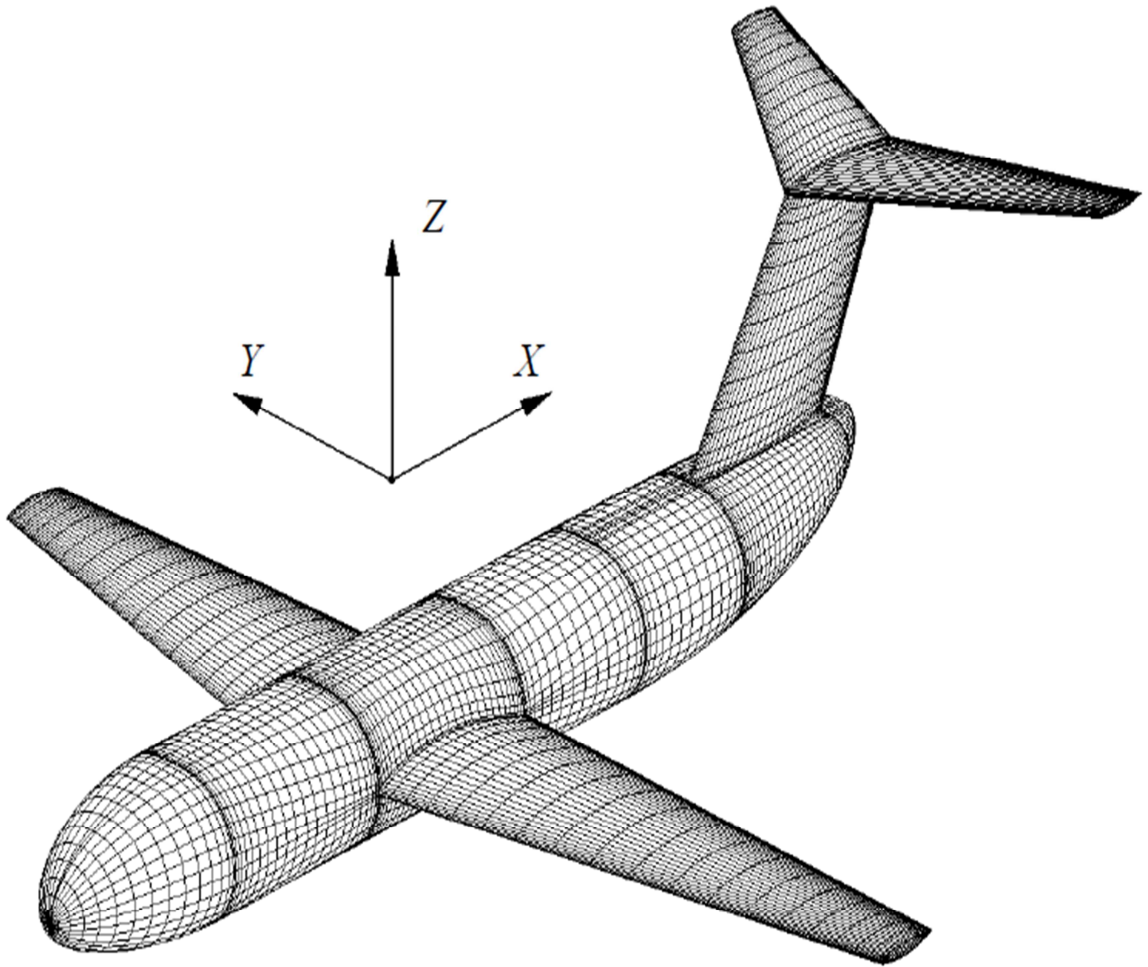
Le moment aérodynamique le plus intéressant est le moment de tangage car c'est lui qui conditionne l'équilibre longitudinal [15].

## 3.4 Résolution numérique des équations :

Puisque l'élaboration du maillage ou la discrétisation de la géométrie (pré-traitement) est une tâche très complexe, la géométrie est tout faite à l'extérieur du programme ainsi que sa discrétisation.

### 3.4.1 Calcul des caractéristiques géométriques du maillage:

Tout d'abord, il est important de définir le système de coordonnées global qui sera utilisé dans le programme. C'est le système de coordonnées cartésiennes avec l'axe  $x$  orienté du nez vers la queue, direction de l'axe  $Y$  dans le sens de l'envergure de l'aile droite et de l'axe  $z$  dirigée verticalement comme on peut le voir sur la configuration de l'avion montré dans la Figure (3.6).



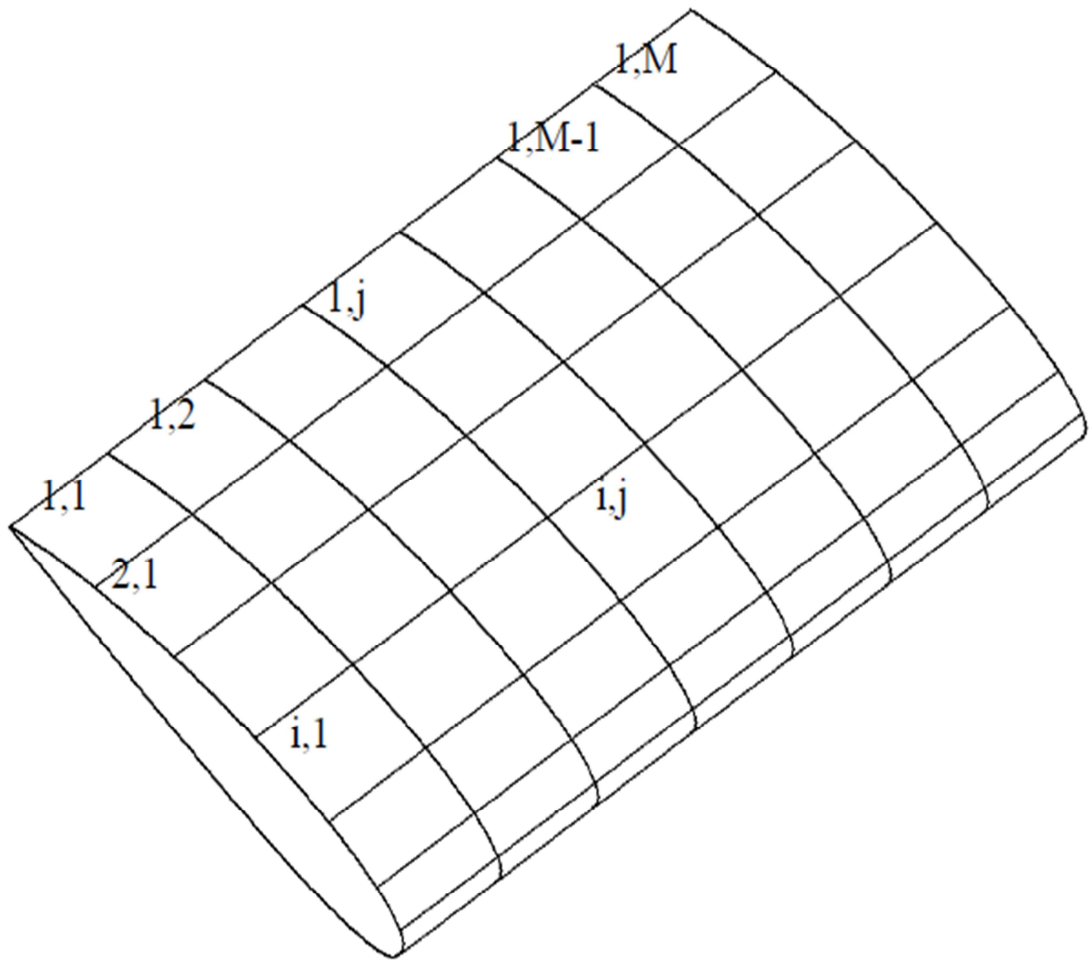
**Figure 3.6** Le système de coordonnées choisi

La géométrie est discrétisée en maillages structurées, avec deux compteurs; “i” est le compteur de nombre de panneaux par corde et “j” est le compteur de nombre de panneaux par envergure, qui définit la position du panneau. L’étiquetage du panneau est très important et doit être adopté par convention.

Dans la figure (3.7) une aile discrétisée est montrée avec indication du nombre de panneaux et du nombre de sommets, le nombre de sommets dépasse le nombre de panneaux de 1.

Le maillage se composera mathématiquement d’une matrice si la géométrie est divisée en un seul patch rectangulaire avec la forme  $M \times N$ . Si le maillage ne peut être déployée en un seul patch rectangulaire, comme c’est le cas pour une géométrie d’avion (plusieurs patches), le maillage est constitué par un tableau de matrice du troisième ordre  $M \times N \times \text{comp}$  où M et N sont le nombre maximum de

panneaux transversaux et longitudinaux et  $komp$  est le nombre de composants qui forment la géométrie. Et concernant les coordonnées des sommets du panneau, la matrice prend la forme du troisième ordre  $(M+1) \times (N+1) \times komp$  pour chacune des trois coordonnées spatiales  $x, y, z$ .



**Figure 3.7 :** Indications de panneaux

Le calcul de la surface du panneau est fait par le module du produit vectoriel des diagonaux du panneau avec l'expression suivante:

$$S = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{2} \quad (3.13)$$

Où  $S$  est la surface, et  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont les vecteurs diagonaux du panneau.

Si la distance entre le point influencé et un panneau est supérieure à  $FF \times D$  (où  $FF$  est le coefficient du champ lointain et  $D$  est la longueur de diagonale du plus grand panneau) le panneau est remplacé par une singularité. Ceci est utilisé pour réduire le temps de calcul.

Le produit vectoriel  $\vec{A} \times \vec{B}$  donnera un vecteur aligné avec le vecteur normal et en divisant le produit de vecteur diagonale par son module on aura le vecteur unitaire normal  $\vec{n}$  du panneau (figure 3.8) tel que:

$$n_1 = \frac{A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y}{|\vec{A} \times \vec{B}|}, n_2 = \frac{A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z}{|\vec{A} \times \vec{B}|}, n_3 = \frac{A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x}{|\vec{A} \times \vec{B}|} \quad (3.14)$$

Où  $n_1, n_2$ , et  $n_3$  sont les coordonnées du vecteur unitaire normal selon les trois directions.  $(A_x, A_y, A_z)$  et  $(B_x, B_y, B_z)$  sont les coordonnées des deux vecteurs diagonaux  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ .

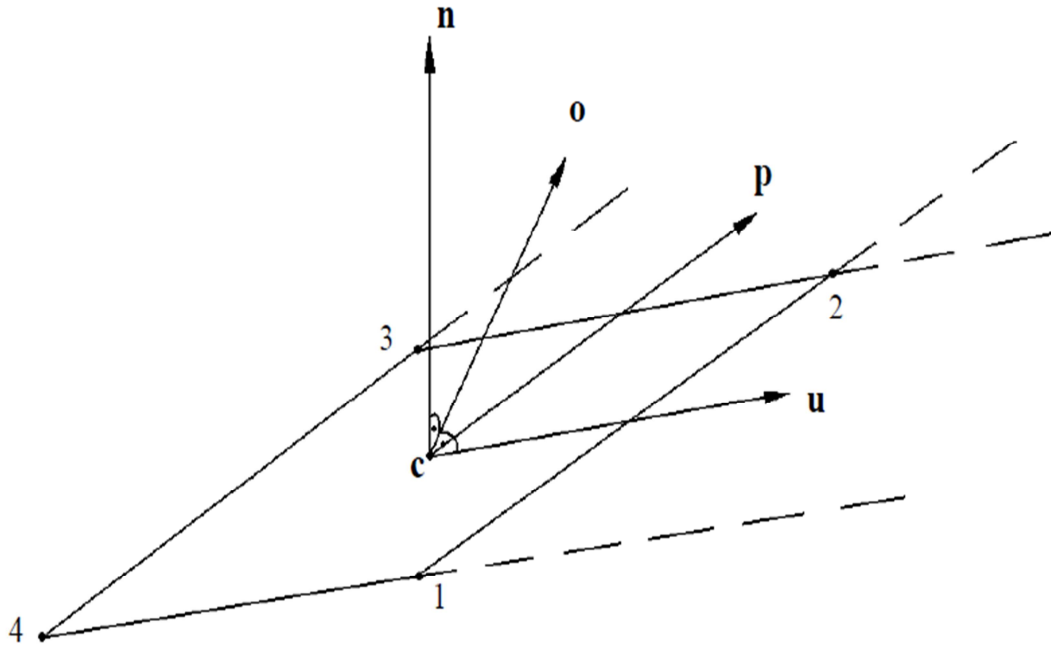
Le calcul du point de collocation  $c$  est fait par la valeur moyenne des coordonnées du panneau:

$$c_x = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{4}, c_y = \frac{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}{4}, c_z = \frac{(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)}{4} \quad (3.15)$$

Où  $c_x, c_y, c_z$  sont les coordonnées du point de collocation du panneau, et  $x_1, y_1, z_1$  à  $x_4, y_4, z_4$  sont les coordonnées des sommets du panneau.

Il serait souhaitable que le point de collocation coïncide avec le centre de gravité pour les panneaux rectangulaires.

Plus tard dans le programme sera nécessaire le calcul de trois vecteurs unitaires  $\vec{u}, \vec{p}$  et  $\vec{o}$  en plus du vecteur unitaire normal  $\vec{n}$  (figure 3.8) où  $\vec{u}$  et  $\vec{p}$  sont les vecteurs unitaires dans les directions longitudinale et transversale du panneau,  $\vec{o}$  est un vecteur unitaire perpendiculaire aux vecteurs unitaires  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$ .



**Figure 3.8 :** Le point de collocation et les vecteurs unitaires du panneau

Le calcul des vecteurs unitaires longitudinal et transversal est réalisé par:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)}{2}, u_y = \frac{(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)}{2}, u_z = \frac{(z_1 + z_2 - z_3 - z_4)}{2} \\ p_x &= \frac{(x_2 + x_3 - x_4 - x_1)}{2}, p_y = \frac{(y_2 + y_3 - y_4 - y_1)}{2}, p_z = \frac{(z_2 + z_3 - z_4 - z_1)}{2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Le vecteur unitaire  $\vec{o}$  est calculé par le produit vectoriel des deux vecteurs unitaire  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$  :

$$\vec{o} = \vec{n} \times \vec{u} \quad (3.17)$$

Dans les problèmes en 2D la condition de Kutta est vérifiée d'une manière qu'un tourbillon au bord de fuite est ajouté, dont l'intensité est égale à la différence d'intensité des tourbillons en haut et en bas du bord de fuite de profil aérodynamique. Dans le cas de trois dimensions, un panneau est ajouté au bord de fuite des ailes (ou d'autres surfaces portantes) qui s'étendent à une distance lointaine derrière l'avion avec une intensité égale à la différence d'intensité entre l'anneau tourbillonnaire supérieur et inférieur du bord de fuite. Ceci se fait

facilement en ajoutant la distance prédéfinie à un point du bord de fuite en direction x.

Pour les besoins de calcul des coefficients d'influence, il sera nécessaire de transformer les coordonnées des sommets du panneau influençant (celui qui affecte) et les coordonnées de point de colocation du panneau influencé (celui qui est affecté) dans le système de coordonnées local. Les coordonnées des sommets de panneaux (figure 3.8) sont calculées avant le calcul des coefficients d'influence:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix}_{local} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ o_1 & o_2 & o_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - c_x \\ y - c_y \\ z - c_z \end{bmatrix}_{global} \quad (3.18)$$

Où  $\begin{bmatrix} x_i & y_i & 0 \end{bmatrix}_{local}^T$  est le vecteur de sommet du  $i^{ème}$  panneau dans le système de coordonnées local avec le composant z égale à zéro,  $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}_{global}^T$  même chose mais dans le système de coordonnées global et,  $u_1, u_2, u_3$  et  $o_1, o_2, o_3$  les vecteurs unitaires du panneau susmentionnés.

### 3.4.2 Calcul des coefficients d'influence:

Avant de présenter les équations pour calculer les coefficients d'influence, l'équation de base pour la résolution de l'écoulement potentiel est montrée :

$$\sum_{i=1}^N a_i \mu_i + \sum_{i=1}^N b_i \sigma_i = 0 \quad (3.19)$$

Dans l'expression (3.19) une condition au limite de type Dirichlet est appliquée qui indique que le potentiel sur la surface du corps est égale à zéro et pour cela une seule équation est calculée ; l'équation du potentiel. Tandis qua la définition du potentiel constant à l'intérieur du corps est équivalente à la condition de Neumann et dans ce cas il est nécessaire de calculer trois composantes de vitesse.

Notre programme de la méthode de panneaux en trois dimensions est constitué d'une distribution des dipôles et des sources constants sur des panneaux quadrilatères (la distribution des dipôles sur des panneaux quadrilatères est équivalente à des anneaux tourbillonnaires). Le calcul des termes de potentiel d'un panneau quadrilatère arbitraire par rapport un point arbitraire dans l'espace dans le système de coordonnées local est montré par [2]:

Source constante :

$$\begin{aligned}
\phi = & \frac{-\sigma}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)}{d_{12}} \ln \frac{r_1+r_2+d_{12}}{r_1+r_2-d_{12}} \right. \right. \\
& + \frac{(x-x_2)(y_3-y_2)-(y-y_2)(x_3-x_2)}{d_{23}} \ln \frac{r_2+r_3+d_{23}}{r_2+r_3-d_{23}} \\
& + \frac{(x-x_3)(y_4-y_3)-(y-y_3)(x_4-x_3)}{d_{34}} \ln \frac{r_3+r_4+d_{34}}{r_3+r_4-d_{34}} \\
& \left. + \frac{(x-x_4)(y_1-y_4)-(y-y_4)(x_1-x_4)}{d_{41}} \ln \frac{r_4+r_1+d_{41}}{r_4+r_1-d_{41}} \right] \\
& - |z| \left[ \tan^{-1} \left( \frac{m_{12}e_1 - h_1}{zr_1} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{m_{12}e_2 - h_2}{zr_2} \right) \right. \\
& + \tan^{-1} \left( \frac{m_{23}e_2 - h_2}{zr_2} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{m_{23}e_3 - h_3}{zr_3} \right) \\
& + \tan^{-1} \left( \frac{m_{34}e_3 - h_3}{zr_3} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{m_{34}e_4 - h_4}{zr_4} \right) \\
& \left. \left. + \tan^{-1} \left( \frac{m_{41}e_4 - h_4}{zr_4} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{m_{41}e_1 - h_1}{zr_1} \right) \right] \right\} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Les composantes de vitesse, basé sur les résultats précédentes sont:

$$\begin{aligned}
v_x = & \frac{\sigma}{4\pi} \left[ \frac{y_2-y_1}{d_{12}} \ln \frac{r_1+r_2-d_{12}}{r_1+r_2+d_{12}} + \frac{y_3-y_2}{d_{23}} \ln \frac{r_2+r_3-d_{23}}{r_2+r_3+d_{23}} \right. \\
& \left. + \frac{y_4-y_3}{d_{34}} \ln \frac{r_3+r_4-d_{34}}{r_3+r_4+d_{34}} + \frac{(y_1-y_4)}{d_{41}} \ln \frac{r_4+r_1-d_{41}}{r_4+r_1+d_{41}} \right] \quad (3.21)
\end{aligned}$$

$$v_y = \frac{\sigma}{4\pi} \left[ \frac{x_1 - x_2}{d_{12}} \ln \frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}} + \frac{x_2 - x_3}{d_{23}} \ln \frac{r_2 + r_3 - d_{23}}{r_2 + r_3 + d_{23}} \right. \\ \left. + \frac{x_3 - x_4}{d_{34}} \ln \frac{r_3 + r_4 - d_{34}}{r_3 + r_4 + d_{34}} + \frac{(x_4 - x_1)}{d_{41}} \ln \frac{r_4 + r_1 - d_{41}}{r_4 + r_1 + d_{41}} \right] \quad (3.22)$$

$$v_z = \frac{\sigma}{4\pi} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{m_{12}e_1 - h_1}{zr_1} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{m_{12}e_2 - h_2}{zr_2} \right) \right. \\ + \tan^{-1} \left( \frac{m_{23}e_2 - h_2}{zr_2} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{m_{23}e_3 - h_3}{zr_3} \right) \\ + \tan^{-1} \left( \frac{m_{34}e_3 - h_3}{zr_3} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{m_{34}e_4 - h_4}{zr_4} \right) \\ \left. + \tan^{-1} \left( \frac{m_{41}e_4 - h_4}{zr_4} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{m_{41}e_1 - h_1}{zr_1} \right) \right] \quad (3.23)$$

Les composantes u et v de la vitesse sont définies partout, mais sur les bords du quadrilatère ils deviennent infinies. En pratique, généralement l'influence de l'élément sur lui-même est recherchée, et à proximité du centre de gravité ces composantes de la vitesse sont proches de zéro. Le saut dans la composante de vitesse normale quand  $z \rightarrow 0$  à l'intérieur du quadrilatère est similaire à :

$$v_z(z = 0\pm) = \frac{\pm\sigma}{2} \quad (3.24)$$

Lorsque le point influencé p se trouve en dehors du quadrilatère, alors :

$$v_z(z = 0\pm) = 0 \quad (3.25)$$

Le champ lointain (Far Field): pour une efficacité améliorée de calcul, lorsque le point influencé p est loin du centre de l'élément  $(x_0, y_0, 0)$  alors l'influence de l'élément quadrilatère d'une superficie S peut être approximée par une source ponctuelle. Le terme "loin" est contrôlé par le programmeur, mais généralement, si la distance est plus de 3 à 5 fois le diamètre du panneau en moyenne alors le rapprochement simplifiée est utilisée. L'influence des sources ponctuelles pour le potentiel de vitesse est:

$$\phi(x, y, z) = \frac{-\sigma S}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} \quad (3.26)$$



Les composantes de vitesse de cet élément source sont:

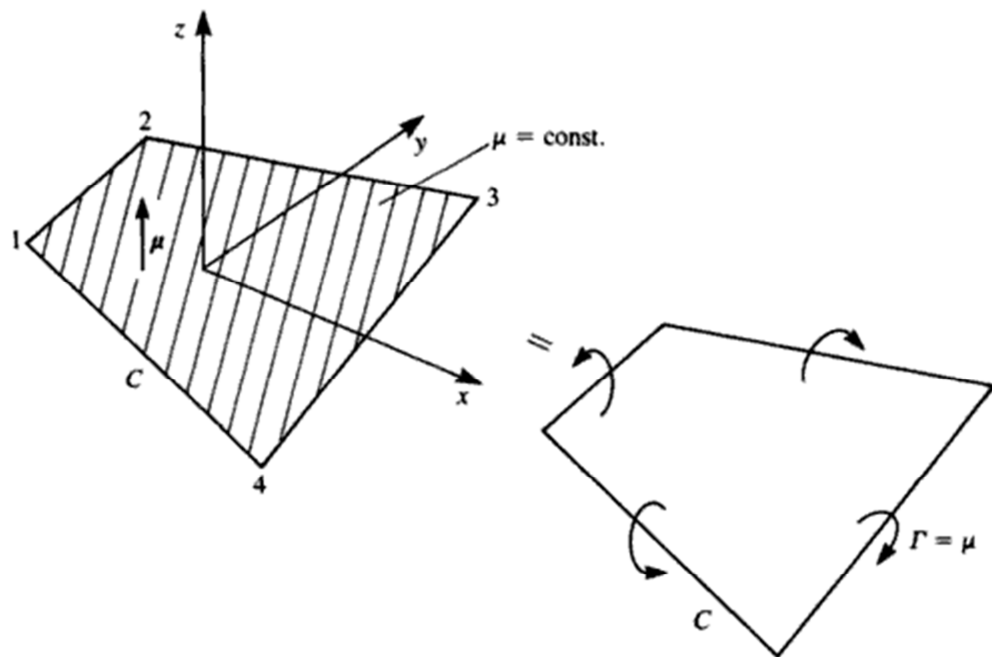
$$v_x(x, y, z) = \frac{\sigma S(x - x_0)}{4\pi \left[ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} \quad (3.27)$$

$$v_y(x, y, z) = \frac{\sigma S(y - y_0)}{4\pi \left[ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} \quad (3.28)$$

$$v_z(x, y, z) = \frac{\sigma S(z - z_0)}{4\pi \left[ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 \right]^{3/2}} \quad (3.29)$$

Dipôle constant:

Considérons l'élément quadrilatère avec une distribution de doublet constant représenté sur la figure (3.9).



**Figure 3.9 :** L'élément quadrilatère avec une distribution de doublet et son équivalent un anneau tourbillonnaire

En utilisant l'élément doublet qui pointe dans la direction  $z$  nous pouvons obtenir le potentiel de vitesse en intégrant les éléments ponctuels, Cette intégrale pour le potentiel est la même intégrale que la composante de vitesse  $w$  de la source quadrilatère et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\phi = & \frac{\mu}{4\pi} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{m_{12}e_1 - h_1}{zr_1} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{m_{12}e_2 - h_2}{zr_2} \right) \right. \\
& + \tan^{-1} \left( \frac{m_{23}e_2 - h_2}{zr_2} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{m_{23}e_3 - h_3}{zr_3} \right) \\
& + \tan^{-1} \left( \frac{m_{34}e_3 - h_3}{zr_3} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{m_{34}e_4 - h_4}{zr_4} \right) \\
& \left. + \tan^{-1} \left( \frac{m_{41}e_4 - h_4}{zr_4} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{m_{41}e_1 - h_1}{zr_1} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.30}$$

et quand  $z \rightarrow 0$  :

$$\phi = \pm \frac{\mu}{2} \tag{3.31}$$

Les composantes de vitesse peuvent être obtenues en dérivant le potentiel de vitesse:

$$(v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
v_x = & \frac{\mu}{4\pi} \left[ \frac{z(y_1 - y_2)(r_1 + r_2)}{r_1 r_2 \{ r_1 r_2 - [(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + z^2] \}} \right. \\
& + \frac{z(y_2 - y_3)(r_2 + r_3)}{r_2 r_3 \{ r_2 r_3 - [(x - x_2)(x - x_3) + (y - y_2)(y - y_3) + z^2] \}} \\
& + \frac{z(y_3 - y_4)(r_3 + r_4)}{r_3 r_4 \{ r_3 r_4 - [(x - x_3)(x - x_4) + (y - y_3)(y - y_4) + z^2] \}} \\
& \left. + \frac{z(y_4 - y_1)(r_4 + r_1)}{r_4 r_1 \{ r_4 r_1 - [(x - x_4)(x - x_1) + (y - y_4)(y - y_1) + z^2] \}} \right]
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
v_y = & \frac{\mu}{4\pi} \left[ \frac{z(x_2 - x_1)(r_1 + r_2)}{r_1 r_2 \left\{ r_1 r_2 - \left[ (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + z^2 \right] \right\}} \right. \\
& + \frac{z(x_3 - x_2)(r_2 + r_3)}{r_2 r_3 \left\{ r_2 r_3 - \left[ (x - x_2)(x - x_3) + (y - y_2)(y - y_3) + z^2 \right] \right\}} \\
& + \frac{z(x_4 - x_3)(r_3 + r_4)}{r_3 r_4 \left\{ r_3 r_4 - \left[ (x - x_3)(x - x_4) + (y - y_3)(y - y_4) + z^2 \right] \right\}} \\
& \left. + \frac{z(x_1 - x_4)(r_4 + r_1)}{r_4 r_1 \left\{ r_4 r_1 - \left[ (x - x_4)(x - x_1) + (y - y_4)(y - y_1) + z^2 \right] \right\}} \right] \quad (3.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_z = & \frac{\mu}{4\pi} \left[ \frac{\left[ (x - x_2)(y - y_1) - (x - x_1)(y - y_2) \right] (r_1 + r_2)}{r_1 r_2 \left\{ r_1 r_2 - \left[ (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + z^2 \right] \right\}} \right. \\
& + \frac{\left[ (x - x_3)(y - y_2) - (x - x_2)(y - y_3) \right] (r_2 + r_3)}{r_2 r_3 \left\{ r_2 r_3 - \left[ (x - x_2)(x - x_3) + (y - y_2)(y - y_3) + z^2 \right] \right\}} \\
& + \frac{\left[ (x - x_4)(y - y_3) - (x - x_3)(y - y_4) \right] (r_3 + r_4)}{r_3 r_4 \left\{ r_3 r_4 - \left[ (x - x_3)(x - x_4) + (y - y_3)(y - y_4) + z^2 \right] \right\}} \\
& \left. + \frac{\left[ (x - x_1)(y - y_4) - (x - x_4)(y - y_1) \right] (r_4 + r_1)}{r_4 r_1 \left\{ r_4 r_1 - \left[ (x - x_4)(x - x_1) + (y - y_4)(y - y_1) + z^2 \right] \right\}} \right] \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Sur l'élément, pour  $z \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
v_x &= 0 \\
v_y &= 0
\end{aligned} \quad (3.36)$$

et la composante z de la vitesse peut être calculée par la formule du champ proche, ce qui réduit à:

$$\begin{aligned}
v_z = & \frac{\mu}{4\pi} \left[ \frac{[(x-x_2)(y-y_1)-(x-x_1)(y-y_2)](r_1+r_2)}{r_1 r_2 \{r_1 r_2 - [(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2)]\}} \right. \\
& + \frac{[(x-x_3)(y-y_2)-(x-x_2)(y-y_3)](r_2+r_3)}{r_2 r_3 \{r_2 r_3 - [(x-x_2)(x-x_3) + (y-y_2)(y-y_3)]\}} \\
& + \frac{[(x-x_4)(y-y_3)-(x-x_3)(y-y_4)](r_3+r_4)}{r_3 r_4 \{r_3 r_4 - [(x-x_3)(x-x_4) + (y-y_3)(y-y_4)]\}} \\
& \left. + \frac{[(x-x_1)(y-y_4)-(x-x_1)(y-y_4)](r_4+r_1)}{r_4 r_1 \{r_4 r_1 - [(x-x_4)(x-x_1) + (y-y_4)(y-y_1)]\}} \right] \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Le champ lointain (far field): les formules de champ lointain pour un doublet quadrilatère avec la surface S peuvent être obtenues en utilisant les équations suivantes [16] :

$$\phi(x, y, z) = \frac{-\mu S}{4\pi} z \left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{-3/2} \quad (3.38)$$

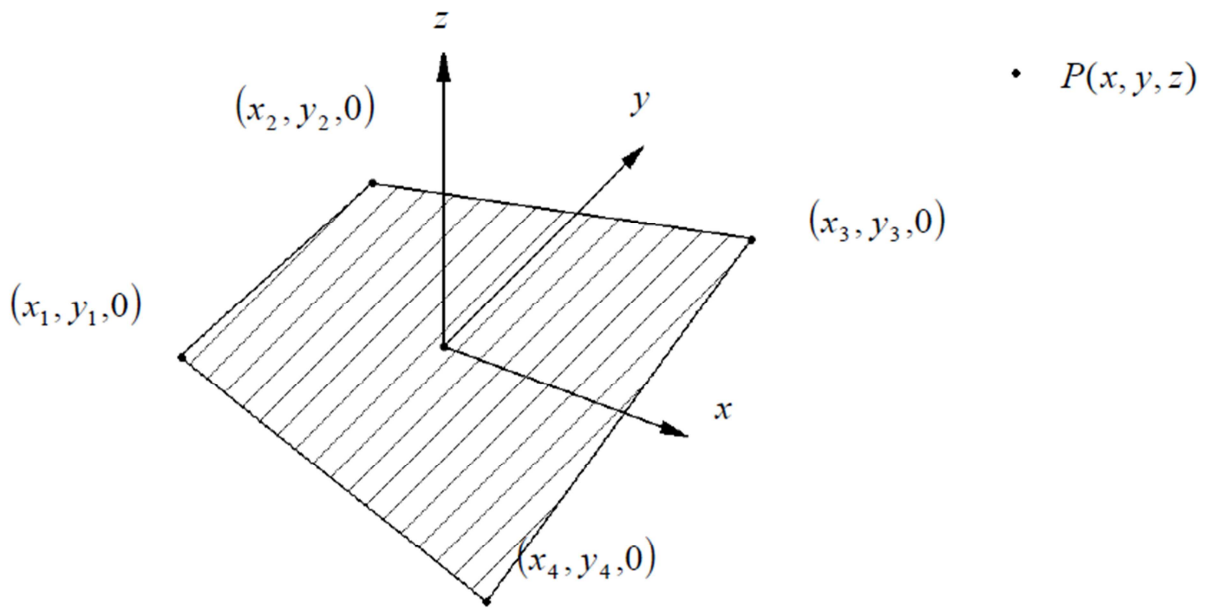
$$v_x = \frac{3\mu S}{4\pi} \frac{(x-x_0)z}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{5/2}} \quad (3.39)$$

$$v_y = \frac{3\mu S}{4\pi} \frac{(y-y_0)z}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{5/2}} \quad (3.40)$$

$$v_z = -\frac{\mu S}{4\pi} \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + 2z^2}{\left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{5/2}} \quad (3.41)$$

**Note:** le coefficient d'influence d'un dipôle constant sur le point de collocation de même panneau est égal à 0,5.

Où, conformément à la figure (3.9),  $x_1 - x_4, y_1 - y_4, z_1 - z_4$  sont les coordonnées des diagonaux du panneau,  $(x, y, z)$  sont les coordonnées du point influencé,  $\sigma$  et  $\mu$  sont les intensités des sources et des dipôles, S est la surface du panneau, et les autres valeurs incluent dans le calcul du potentiel des vitesses seront montrées par la suite:



**Figure 3.10** : Le panneau quadrilatère

Tel que :

$$d_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3.42)$$

$$d_{23} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad (3.43)$$

$$d_{34} = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} \quad (3.44)$$

$$d_{41} = \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2} \quad (3.45)$$

$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, m_{23} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, m_{34} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}, m_{41} = \frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4} \quad (3.46)$$

$$r_k = \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + z^2}, k=1,2,3,4 \quad (3.47)$$

$$e_k = (x-x_k)^2 + z^2, k=1,2,3,4 \quad (3.48)$$

$$h_k = (x-x_k)(y-y_k), k=1,2,3,4 \quad (3.49)$$

Le système de coordonnées local est défini de telle sorte que dans le cas d'un dipôle est orienté à la direction positive de l'axe z. Bien sûr, dans le cas de la source, le choix du système de coordonnées n'est pas indispensable, mais puisque les coordonnées dans le système de coordonnées locales sont déjà calculées, ils seront utilisés.

Dans toutes les expressions précédentes du potentiel, l'intensité des sources et des dipôles  $\sigma$  et  $\mu$  apparaît, pour cela il faut les définir et afin de rendre la solution définie de façon unique, la bonne combinaison des sources et dipôles doit être sélectionné.

L'intensité des sources sont calculées par:

$$\sigma_i = n_i V_\infty \quad (3.50)$$

Où  $V_\infty$  est un vecteur de vitesse de l'écoulement libre (l'écoulement à l'infini), et les valeurs de l'intensité des dipôles  $\mu$  sont inconnues. La raison de calculer l'intensité des sources de cette façon se trouve en effet que pour le cas des corps non portants la combinaison des sources vas prendre la plupart des flux normale sur les murs, et donc diminuer le nombre de valeurs à calculer des intensités de dipôles qui représente un avantage numérique.

En assemblant la matrice des coefficients d'influence et le vecteur de second membre dans le quel une condition au limite est inclus qui permet la résolution de système d'équations dont la solution est précisément les intensités des dipôles. Le système d'équations ressemble à ceci :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Où N est le nombre total de panneaux, a est la matrice de coefficients d'influence des dipôles, b la matrice des coefficients d'influence des source.

Étant donné le côté droit de l'équation (3.51) sont des valeurs connues, elles peuvent être formées un vecteur qui est appelé RHS (right hand side).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ \vdots \\ RHS_N \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

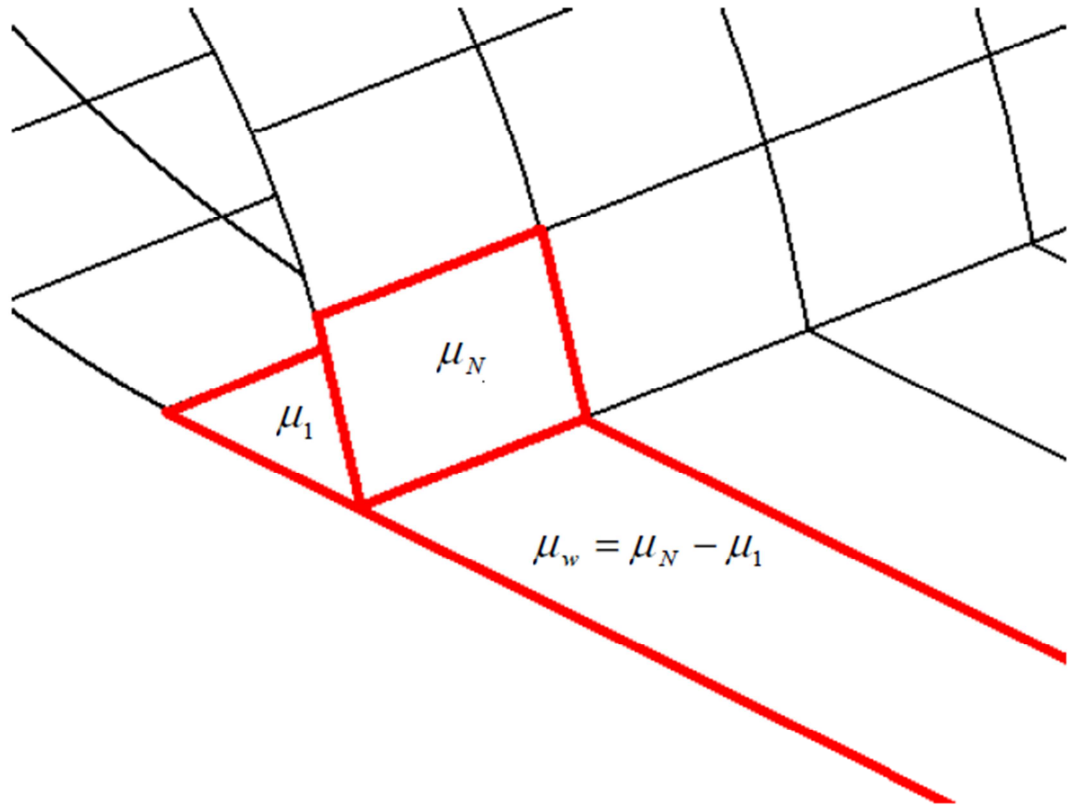
Ou simplement l'équation (3.52) s'écrit :

$$a.\mu = RHS \quad (3.53)$$

Il s'ensuit :

$$\mu = a^{-1}.RHS \quad (3.54)$$

Dans les parties portantes dans les quels la force de portance doit être calculée ainsi que la force de trainée, un équivalent en trois dimensions de la condition de Kutta est appliquée. Dans ce cas, un panneau est ajouté au bord de fuite avec une distribution continue de dipôles (anneaux tourbillonnaires) dont la force correspond à la différence entre les intensités des panneaux supérieur et inférieur sur le bord de fuite, ceci est montré dans la figure (3.10).



**Figure 3.11** : La condition de Kutta sur le bord de fuite d'une aile

Puisque la nouvelle variable introduite (le coefficient d'influence de panneau de sillage) dépend de deux existants (résistance des panneaux ci-dessus et en dessous du bord de fuite), uniquement la matrice des coefficients d'influence est modifiée de sorte que le coefficient d'influence du panneau au bord de fuite est ajouté ou soustraite par le coefficient d'influence du panneau de sillage, selon que le panneau se trouve en haut ou en bas du bord, l'équation est montrée dans (3.55).

$$(a_{11} - a_{1w})\mu_1 + \dots + a_{1i}\mu_i + \dots + (a_{1N} - a_{1w})\mu_N + \sum_{j=1}^N b_{1j}\sigma_j = 0 \quad (3.55)$$

### 3.4.3 La résolution du système d'équations :

Une fois la matrice des coefficients d'influence est assemblé et le vecteur RHS (right hand side) a été calculé, les intensités  $\mu$  des dipôles peut être calculée. En règle générale, le processus implique la matrice d'inversion de coefficients d'influence et de sa multiplication avec le vecteur RHS, mais en langage



FORTRAN on préfère de programmer une méthode itérative qui résout l'équation matricielle dans un temps optimisé. Parmi les méthodes itératives on a choisi la méthode de Gauss Seidel accéléré, c'est une simple méthode à programmer et donne de bons résultats pour des matrices à grands ordres.

#### 3.4.4 Calcul de vitesse, de pression, des forces et des moments :

Une fois les intensités des dipôles ont été calculés, le calcul de la vitesse, la pression et forces peuvent être faites.

Les composantes de la vitesse sont calculés par:

$$q_u = -\frac{\partial\mu}{\partial u}, q_p = -\frac{\partial\mu}{\partial p} \quad (3.56)$$

Qui dit que la vitesse induite est égale au changement local de potentiel dans la direction observée. Dans ce cas, c'est l'intensité du dipôle dans le sens longitudinal et transversal du panneau.

La méthode habituelle (méthode des différences centrale) consiste à :

$$q_u = \frac{\mu_{i-1} - \mu_{i+1}}{\Delta u} \quad (3.57)$$

Ceci indique que la vitesse induite dans la direction u (la direction longitudinale) est égale à la différence entre les intensités de dipôle en face de et derrière le panneau observé divisé par la distance entre les points de colocation du panneau avant et arrière.

Afin de convertir la vitesse du système de coordonnées global au local, le premier vecteur de la vitesse induite transversale doit être converti à la vitesse perpendiculaire induite, ceci est montré dans l'équation (3.58) :

$$q_o = (p.o) q_p \quad (3.58)$$

Où  $p$  et  $o$  sont des vecteurs unitaires transversale et verticale (section 3.4.1), et  $q_p$  et  $q_o$  sont les vitesses induites transversale et perpendiculaire.

Les composantes de vitesse de flux libre convertie au système de coordonnées local sont les suivants:

$$g_u = u.V_\infty, g_o = o.V_\infty \quad (3.59)$$

Où  $g_u$  et  $g_o$  sont des composantes de vitesse de flux libre dans le système de coordonnées local,  $V_\infty$  est le vecteur vitesse de l'écoulement libre,  $u$  et  $o$  sont les vecteurs unitaires longitudinal perpendiculaire du panneau observée. Les Vitesses induites et la vitesse d'écoulement libre sont additionnées pour obtenir la vitesse totale:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & o_x \\ u_y & o_y \\ u_z & o_z \end{bmatrix} [(g_u - q_u) \quad (g_o - q_o)] \quad (3.60)$$

À partir du champ de vitesse, le champ de pression est calculé à l'aide de l'équation d'Euler -Bernoulli:

$$C_p = 1 - \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}{V_\infty^2} \quad (3.61)$$

À partir du champ de pression les forces et les moments sont calculés par:

$$F_i = - \sum_{k=1}^N C_{p_k} S_k n_{i_k} q \quad (3.62)$$

Où :

$$q = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \quad (3.63)$$

Où  $F_i$  est la force dans la direction  $i$ ,  $S_k$  est la surface du panneau,  $n_{i_k}$  est le vecteur unitaire normal du composant  $i$ ,  $N$  est le nombre total de panneaux et  $q$  est la pression de référence (dynamique).

$$M_l = \sum_{k=1}^N C_{p_k} S_k n_{2_i} q c_{z_k} - \sum_{k=1}^N C_{p_k} S_k n_{3_i} q c_{y_k} \quad (3.64)$$

$$M_m = -\sum_{k=1}^N C_{p_k} S_k n_{1_i} q c_{z_k} - \sum_{k=1}^N C_{p_k} S_k n_{3_i} q c_{x_k} \quad (3.65)$$

$$M_n = \sum_{k=1}^N C_{p_k} S_k n_{1_i} q c_{y_k} - \sum_{k=1}^N C_{p_k} S_k n_{2_i} q c_{x_k} \quad (3.66)$$

Où  $M_l$ ,  $M_m$  et  $M_n$  sont les moments de roulis (autour de l'axe longitudinal x), de tangage (autour de l'axe transversale y) et de lacet (autour de l'axe vertical z),  $c_x$ ,  $c_y$  et  $c_z$  sont les coordonnées des points de colocation du panneau observé.[2]

## CHAPITRE 4:

### RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Afin de comparer les résultats, nous allons faire les simulations par deux codes, notre code et un autre connu sous le nom APAME.

APAME (aircraft panel method) est un programme de la méthode de panneaux en trois dimensions utilisée pour le calcul des forces et des moments aérodynamiques agissant sur un aéronef en vol. APAME est un projet open source et donc libre à utiliser. Il est distribué sous licence GPL (General Public License). Il peut remplacer les programmes CFD (Fluent par exemple ...) pour les flux subsoniques, Daniel Filković qui a développé ce code.

Le premier problème qui se pose est la génération de la configuration à simuler, pour cela on a créé un programme qui génère les configurations d'aile de telle sorte qu'elles soient appropriées au fichier input des deux codes.

#### 4.1 Simulation d'une aile seule :

Les simulations sont dans les conditions initiales suivantes :

$$V=27.778\text{m/s}, P=101325\text{pa}, \rho = 1.225\text{kg/m}^3$$

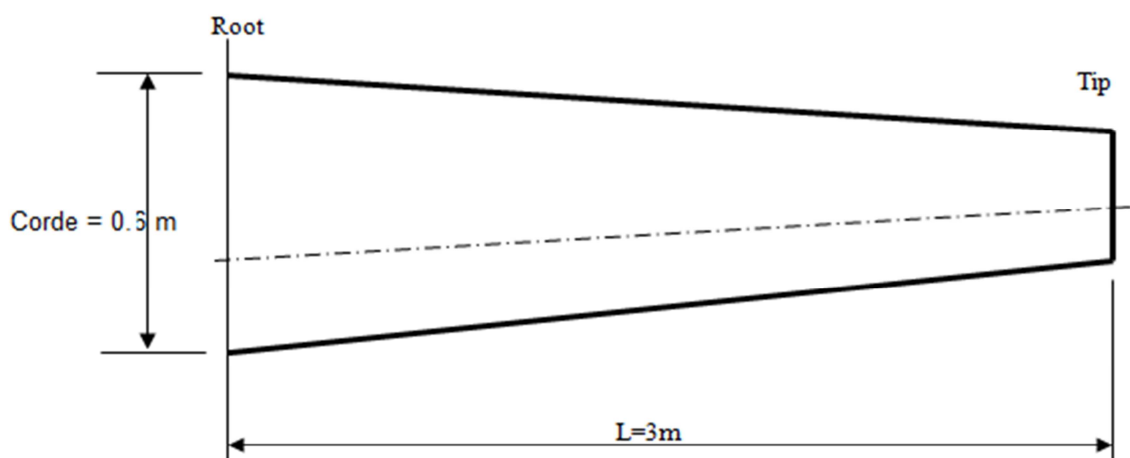
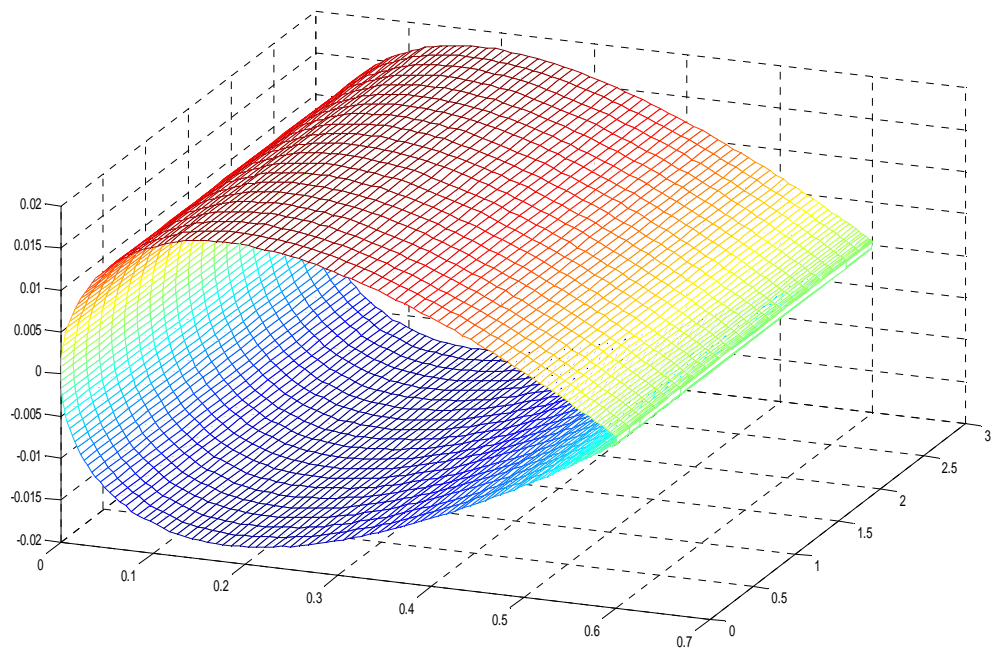


Figure 4.1 : Les dimensions de l'aile

#### 4.1.1 Etude sur l'aile rectangulaire NACA0006 :

Cette étude est pour valider le modèle, la validation est faite par la comparaison de la distribution de pression sur le profil naca0006 entre nos résultats et les résultats d'ABBOTT en variant plusieurs paramètres tel que la longueur de l'envergure, le nombre de panneaux et la longueur du sillage pour déterminer les meilleurs paramètres qui correspond au meilleur résultat.

On fait une projection de l'aile sur le plan (xz), et on dessine la distribution de coefficient de pression sur l'extrados du profil, d'un autre sens aller d'une configuration aile en 3d à un profil en 2d.

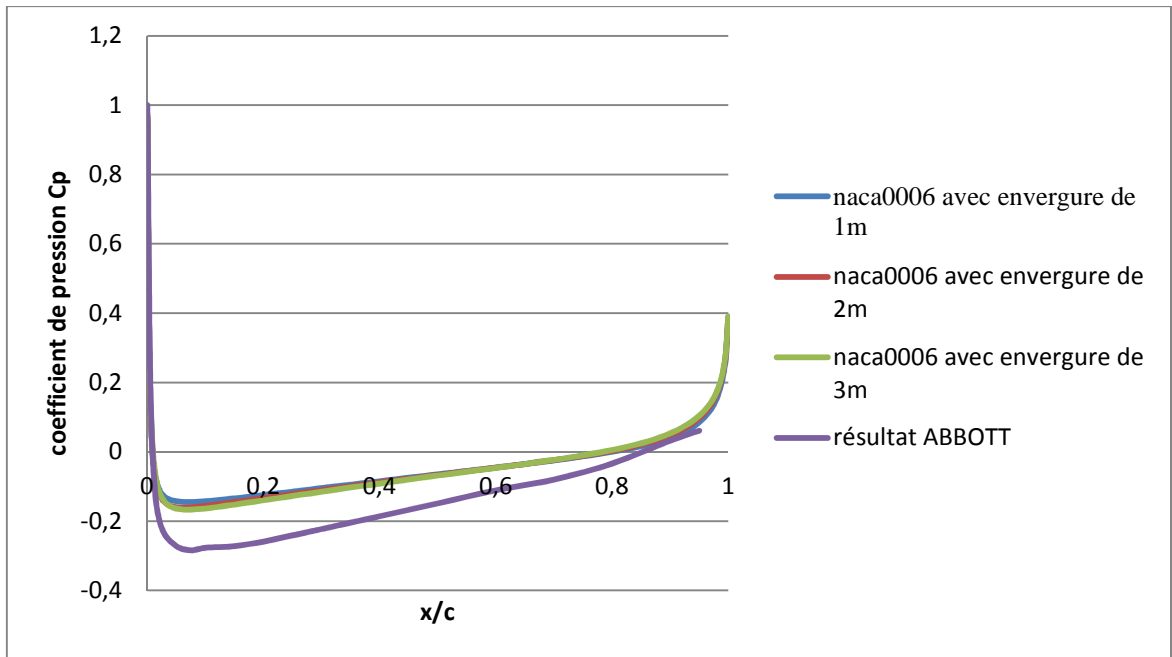


**Figure 4.2 :** L'aile rectangulaire Naca0006

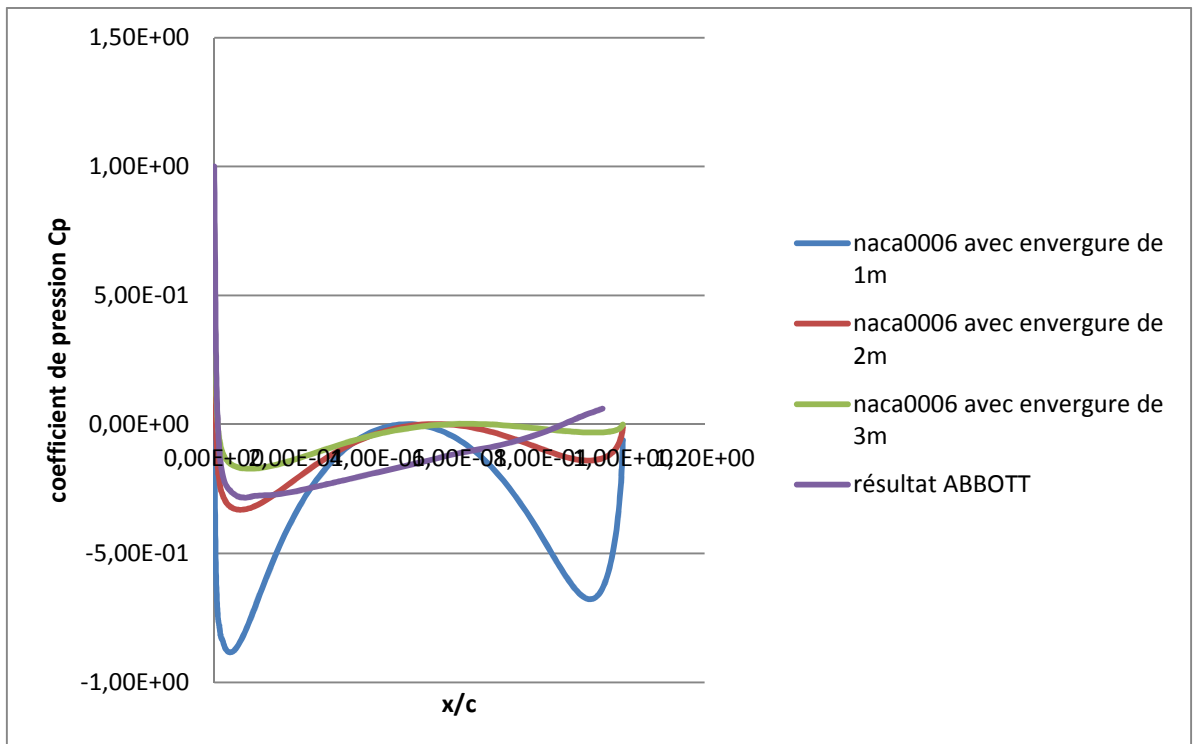
##### 4.1.1.1 Variations de l'envergure :

Une aile rectangulaire naca0006 avec les caractéristiques suivantes :

200 points sur le profil, 21 points le long de l'envergure c'est-à-dire un maillage de 3940 panneaux.



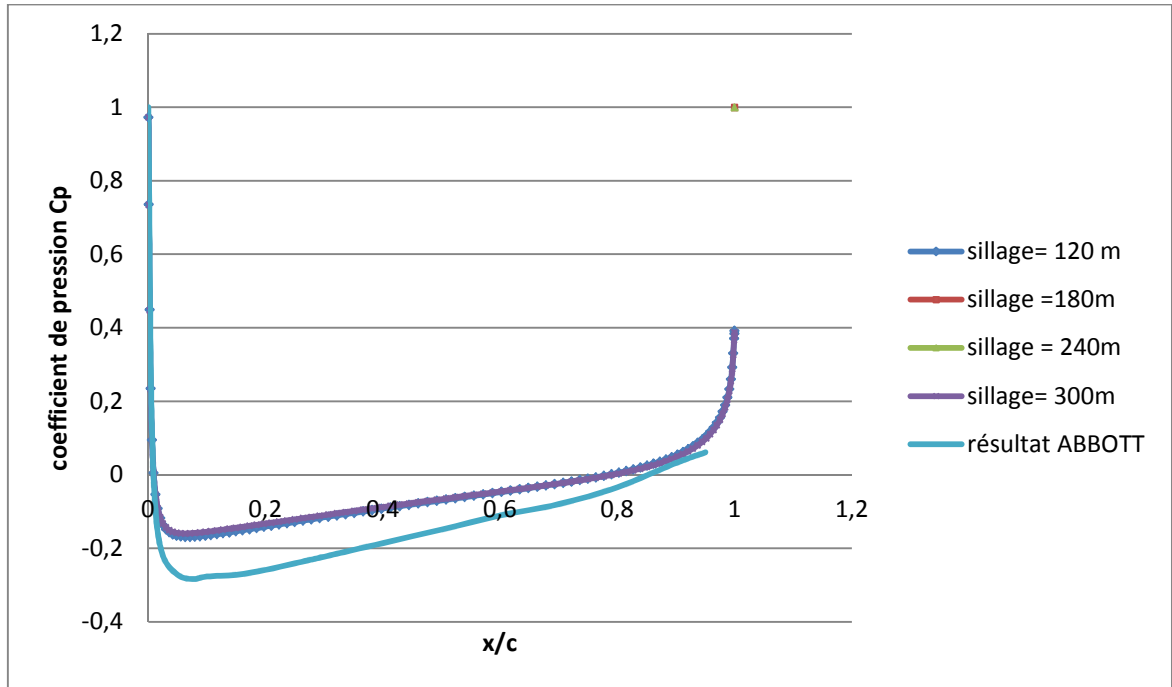
**Figure 4.3 :** Influence de la variation de l'envergure sur la distribution de pression (APAME)



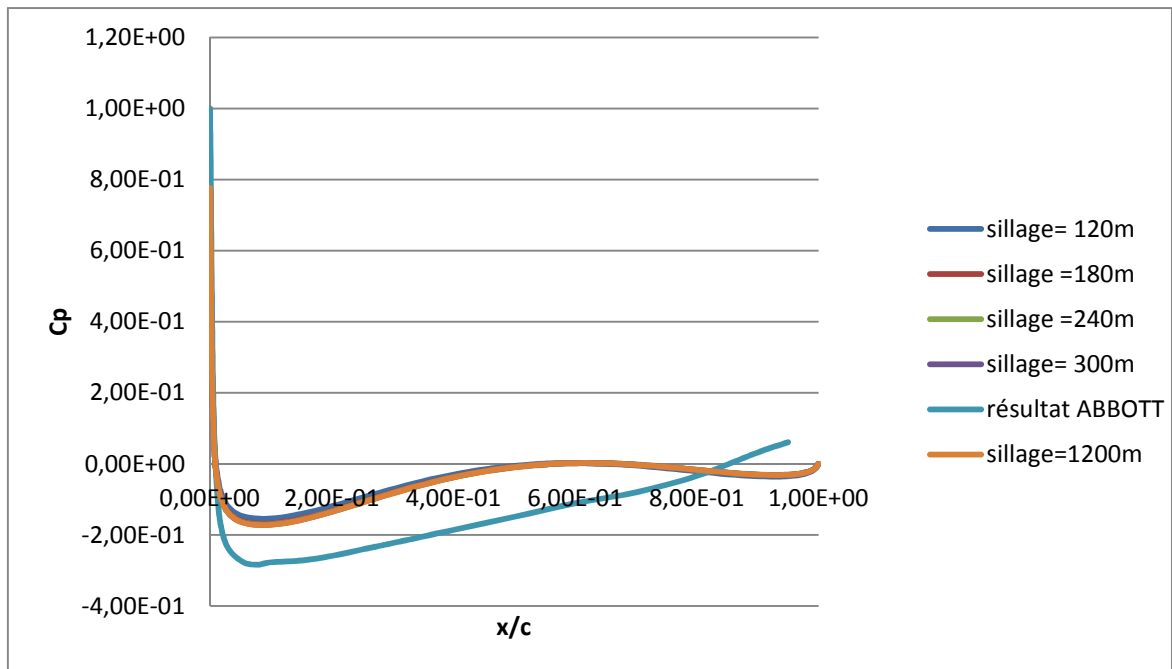
**Figure 4.4** Influence de la variation de l'envergure sur la distribution de pression (notre programme)

#### 4.1.1.2 Variation de la longueur du sillage :

Une aile rectangulaire naca0006 avec un maillage de 3940panneaux, envergure  $L=3m$  et corde  $C=0.6m$

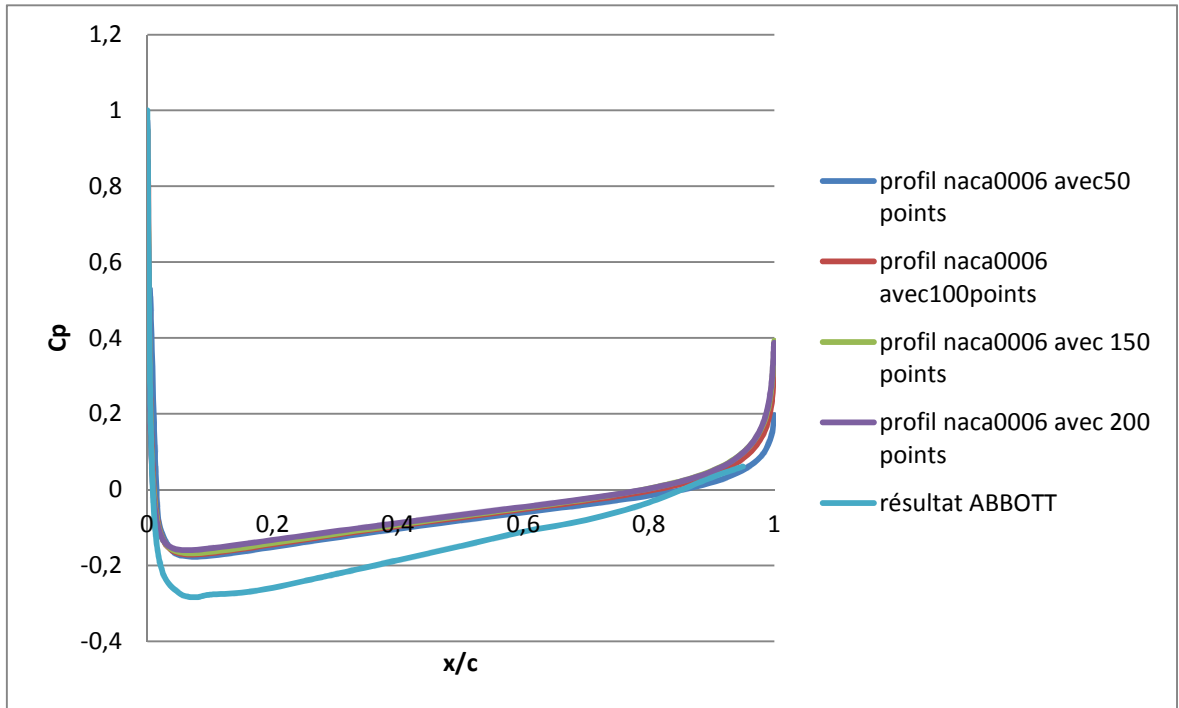


**Figure 4.5** : Influence de la longueur du sillage sur la distribution de pression (APAME)

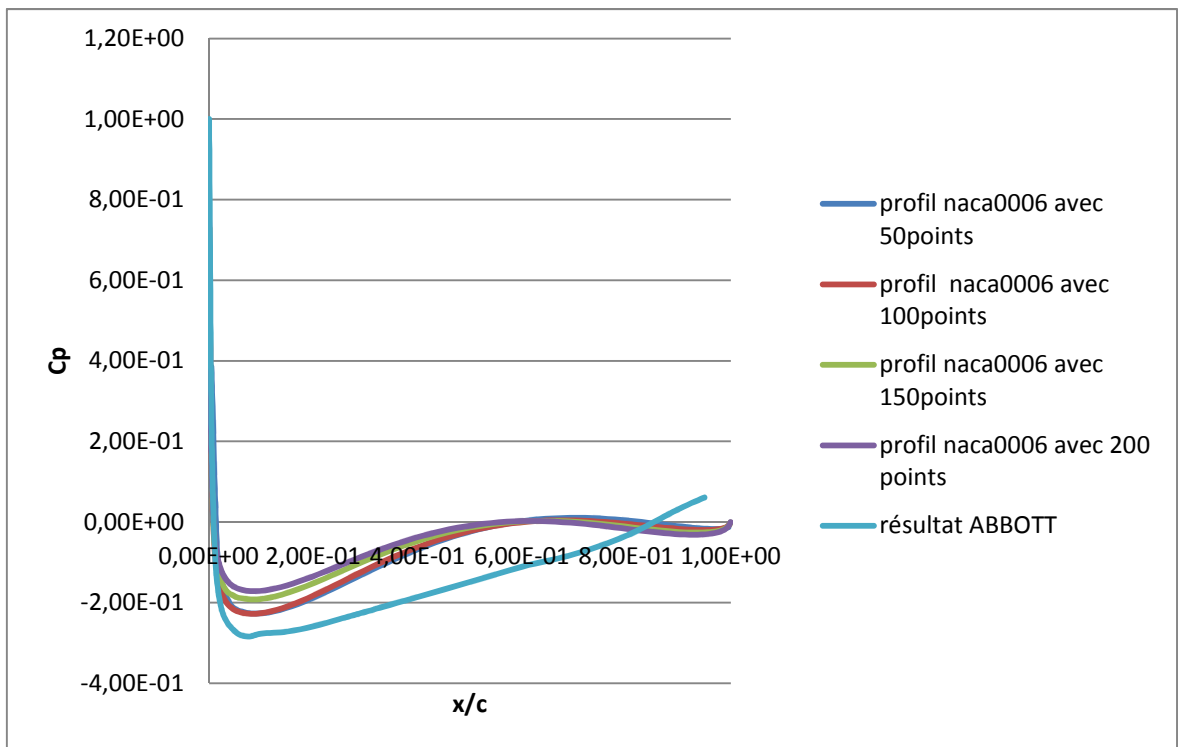


**Figure 4.6** : Influence de la longueur du sillage sur la distribution de pression (notre programme)

#### 4.1.1.3 Variation du nombre de points sur le profil :



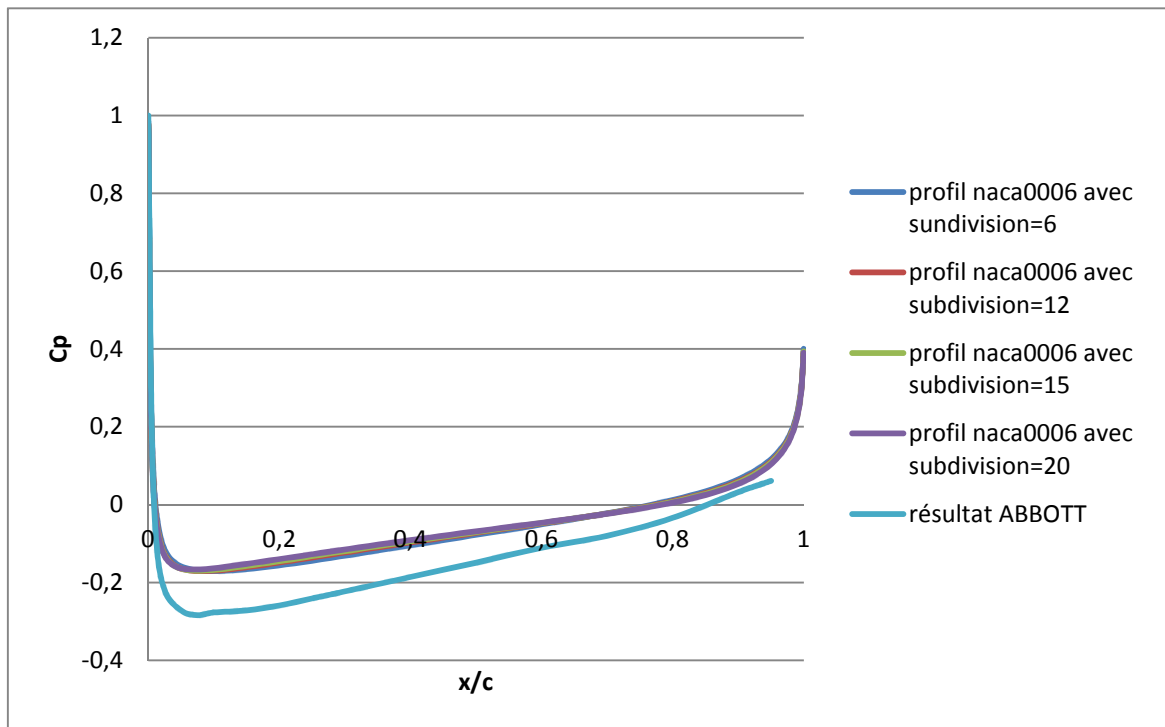
**Figure 4.7** Influence de la variation du nombre de points du profil sur la distribution de pression (APAME)



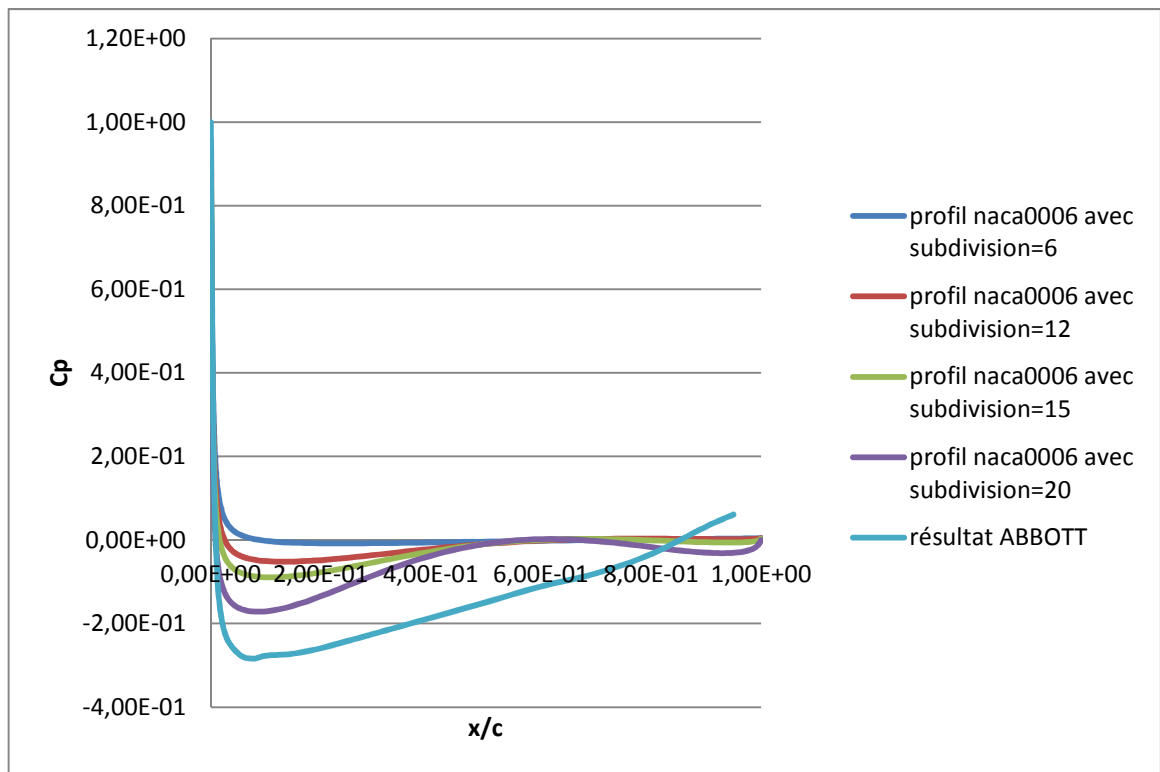
**Figure 4.8** Influence de la variation du nombre de points du profil sur la distribution de pression (notre programme)



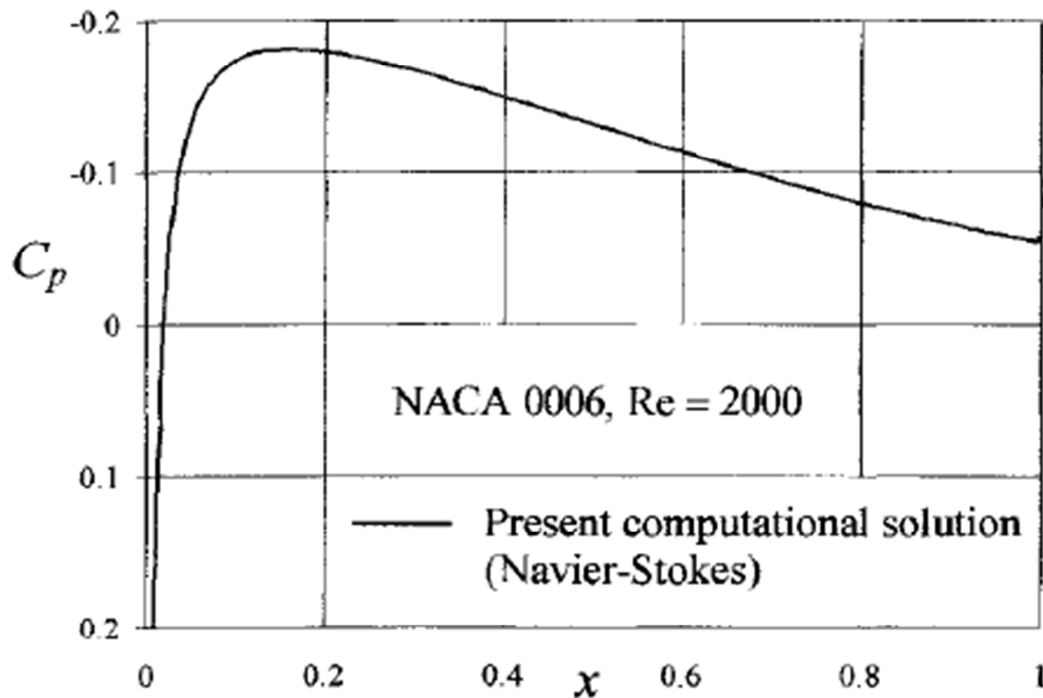
#### 4.1.1.4 Variation du nombre de subdivision le long de l'envergure :



**Figure 4.9 :** Influence de la variation du nombre de subdivision le long de l'envergure sur la distribution de pression (APAME)



**Figure 4.10 :** Influence de la variation du nombre de subdivision le long de l'envergure sur la distribution de pression (notre programme)



**Figure 4.11** : Distribution de pression sur le profil naca0006 en utilisant la résolution de Navier Stokes[17].

#### 4.1.1.5 Interprétation des résultats :

D'après les résultats obtenus on remarque que le programme Apame donne le même résultat pour n'importe quelle configuration avec une légère variation (presque invisible), contrairement à notre programme qui dépend des caractéristiques géométrique de la configuration aile. Les meilleurs paramètres qui correspondent au meilleur résultat sont :

- La variation de l'envergure : l'envergure de l'aile a une grande influence sur le résultat, plus qu'on augmente l'envergure plus que le résultat s'améliore et donc dans notre cas la meilleure envergure est égale à 3m.
- La variation de sillage : la longueur de sillage à une légère influence sur la distribution de pression.
- La variation du nombre de points sur le profil : ce paramètre est très important, plus qu'on augmente le nombre de points plus que le résultat est meilleur, et pour cela la meilleur valeur est égale a 200points sur le profil.

- La variation du nombre de subdivision le long de l'envergure : est de même importance que le nombre de points sur le profil, plus que le nombre de subdivision est grand plus que le résultat est meilleur, la meilleur valeur est 20 points de subdivisions.

Après avoir faire cette discussion on constate que le maillage est un paramètre très important plus qu'on augmente le maillage plus qu'on arrive à un bon résultat, et le meilleur maillage est 3940 panneaux.

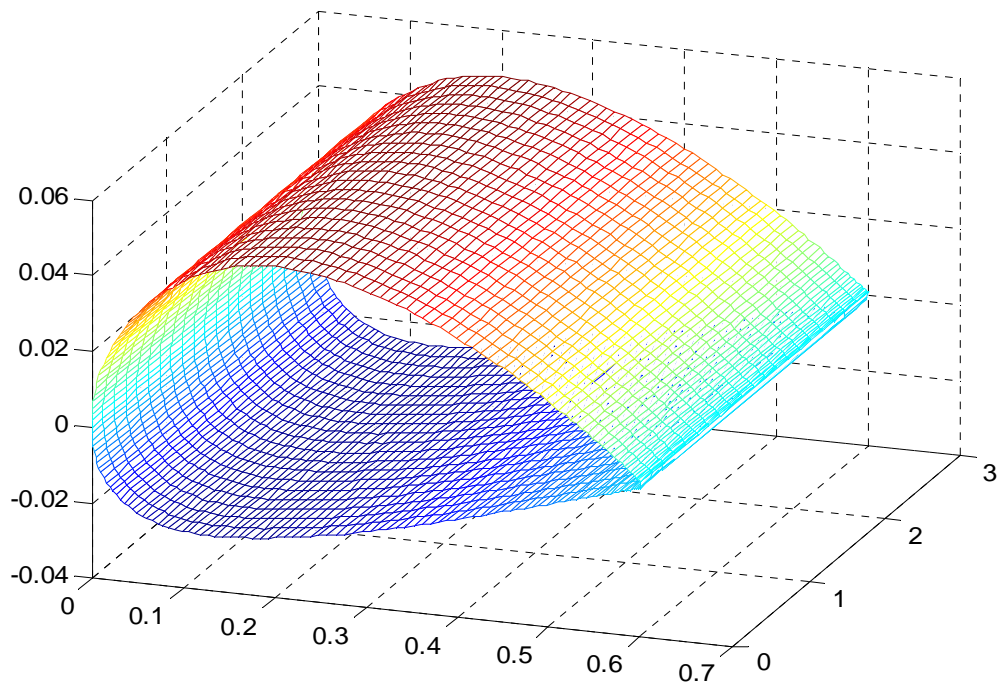
Maintenant on discute le phénomène physique qui se passe : la distribution de pression sur les profils symétrique est connue ; une dépression sur l'extrados et une surpression sur l'intrados, et ce phénomène on le voit clairement sur nos résultats (la dépression sur l'extrados) or que si on compare les valeurs de CP obtenues par les deux code à celles obtenues par ABBOTT et par la résolution de Navier Stocks on trouve qu'elles ne sont pas les mêmes et ceci à cause des hypothèses poser au début et aussi la comparaison entre 3dimensions et deux dimensions.

Remarque : la figure qui correspond aux meilleurs paramètres est figure (4.6).

#### 4.1.2 Etude sur l'aile NACA2412 :

Cette étude est concernée par le calcul des différentes caractéristiques aérodynamiques de plusieurs ailes naca2412 tel que le coefficient de portance, le coefficient de trainée et le coefficient de moment de tangage ,ces paramètres varient en fonction de l'angle d'incidence.

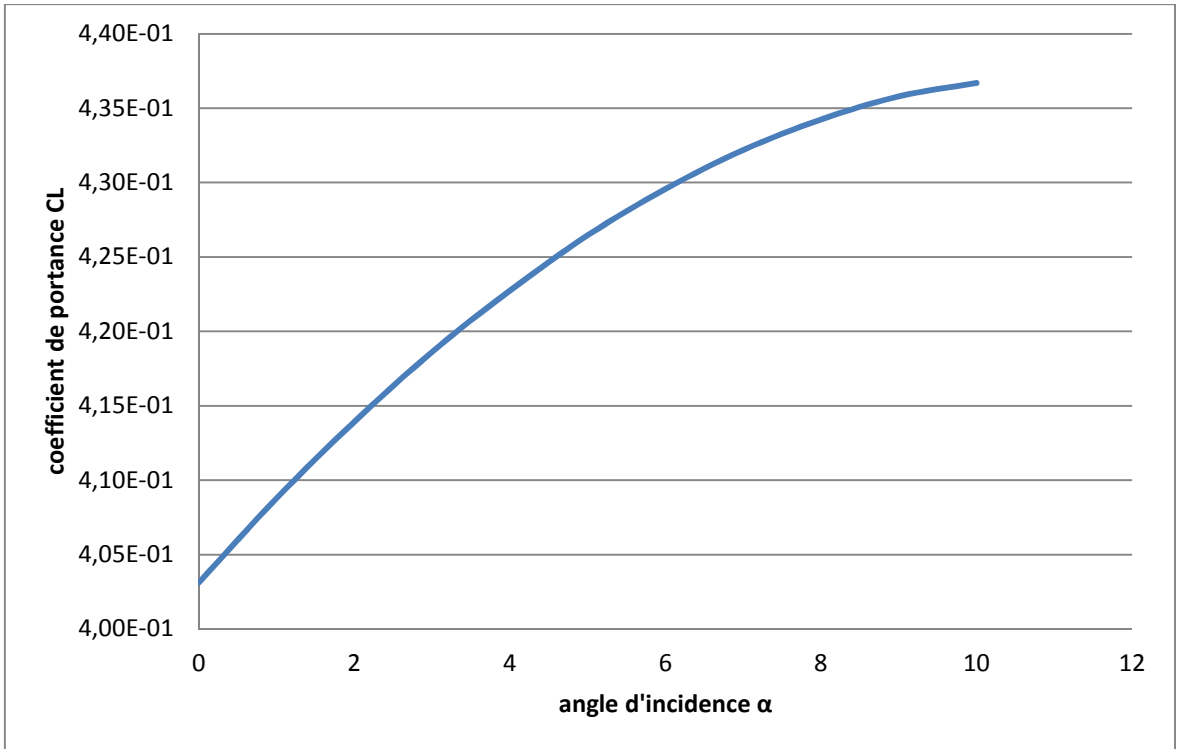
##### 4.1.2.1 Détermination des caractéristiques aérodynamiques d'une aile rectangulaire :



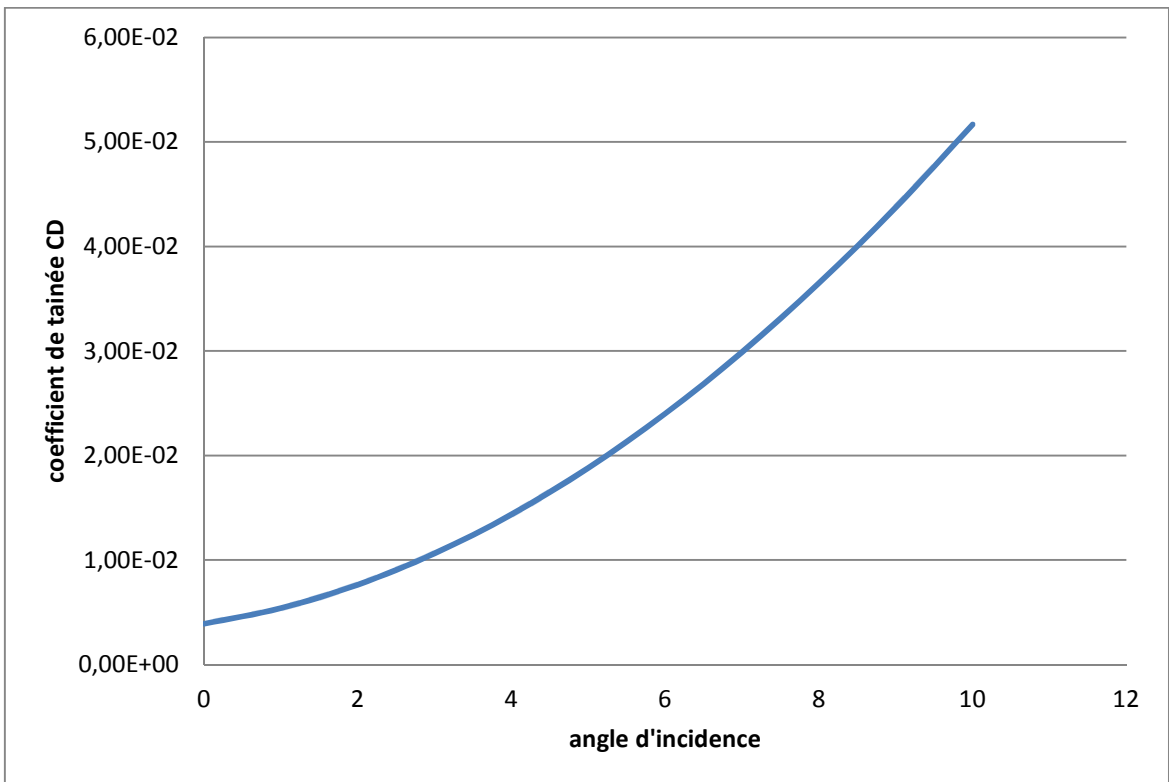
**Figure 4.12 :** L'aile rectangulaire Naca2412



**Figure 4.13 :** Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



**Figure 4.14** : Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



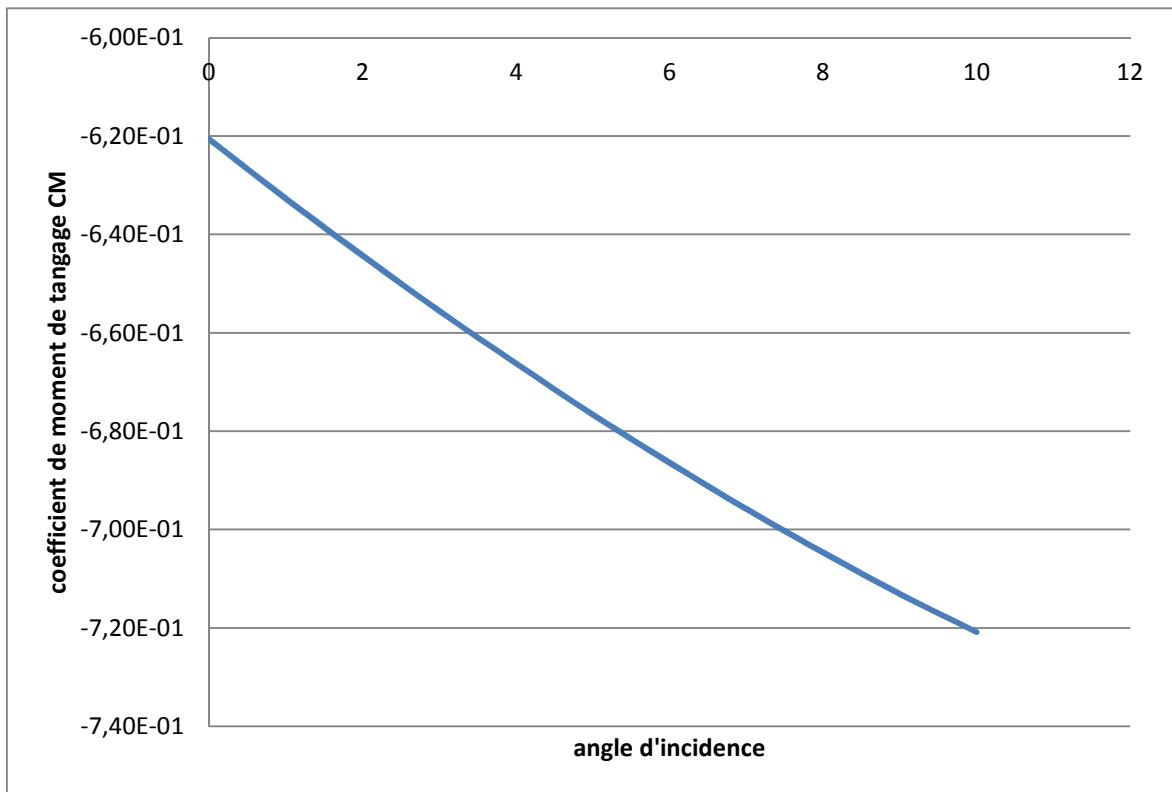
**Figure 4.15** Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



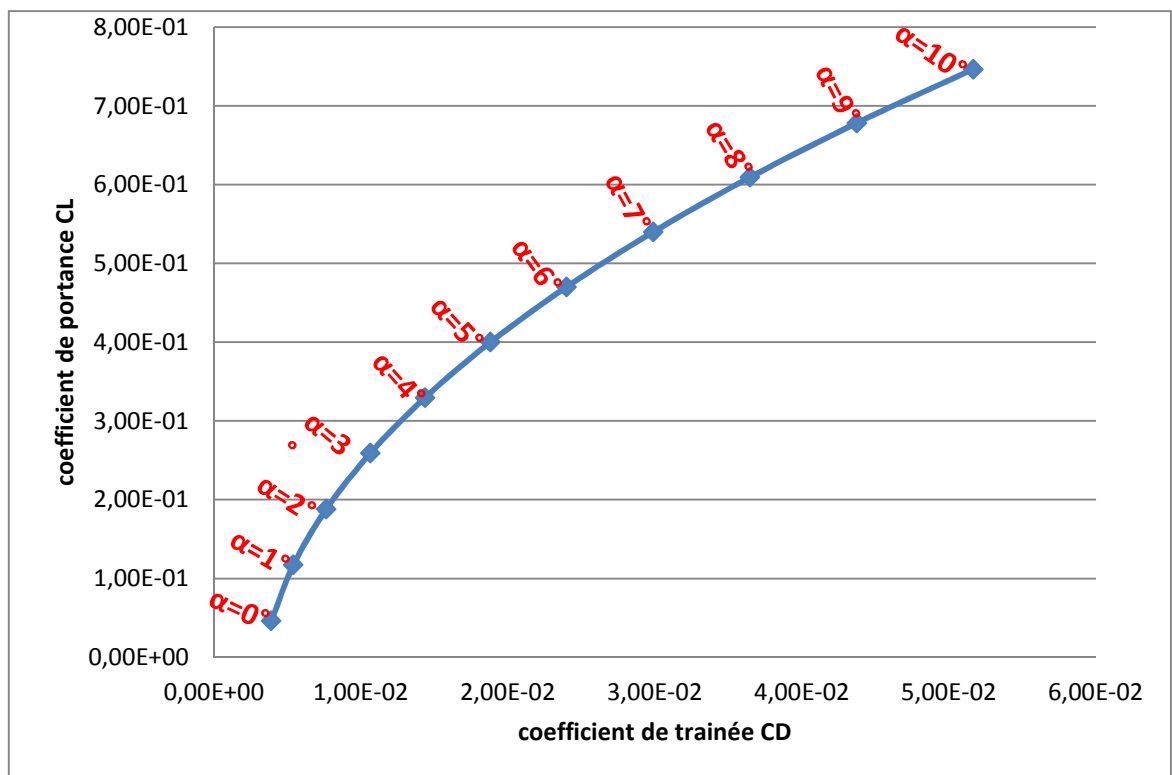
**Figure 4.16 :** Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



**Figure 4.17 :** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



**Figure 4.18 :** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



**Figure 4.19 :** la polaire de l'aile rectangulaire naca2412 (APAME)

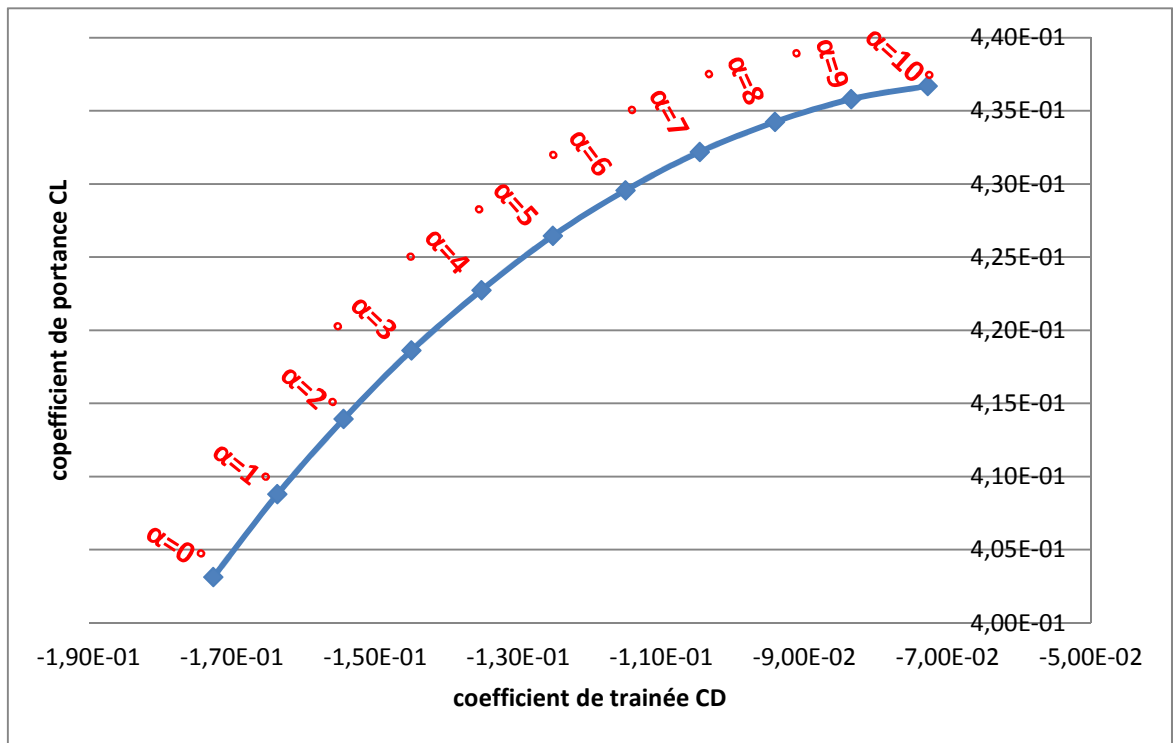
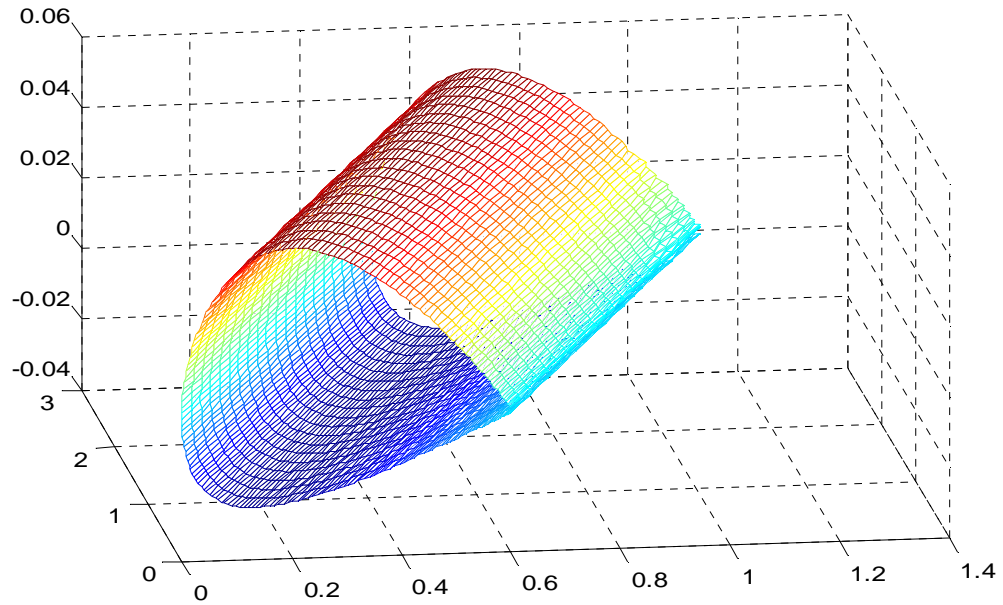


Figure 4.20 : La polaire de l'aile rectangulaire naca2412 (notre programme)

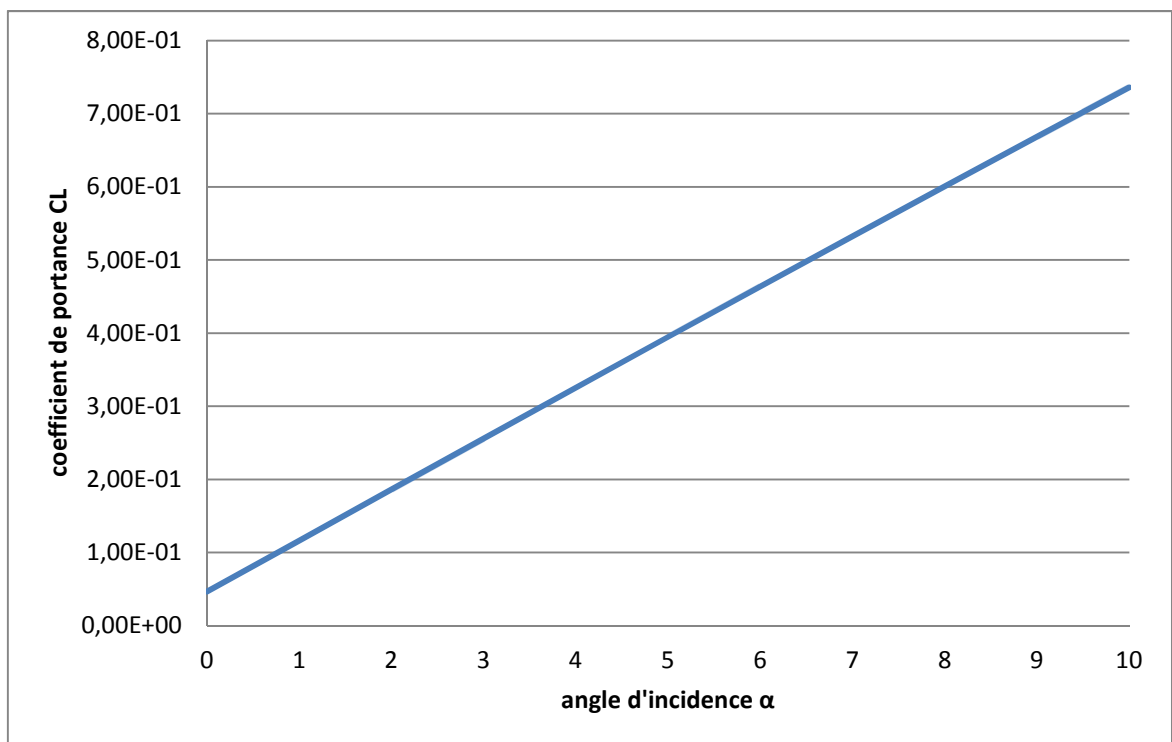


#### 4.1.2.2 Détermination des caractéristiques aérodynamiques d'une aile avec flèche :

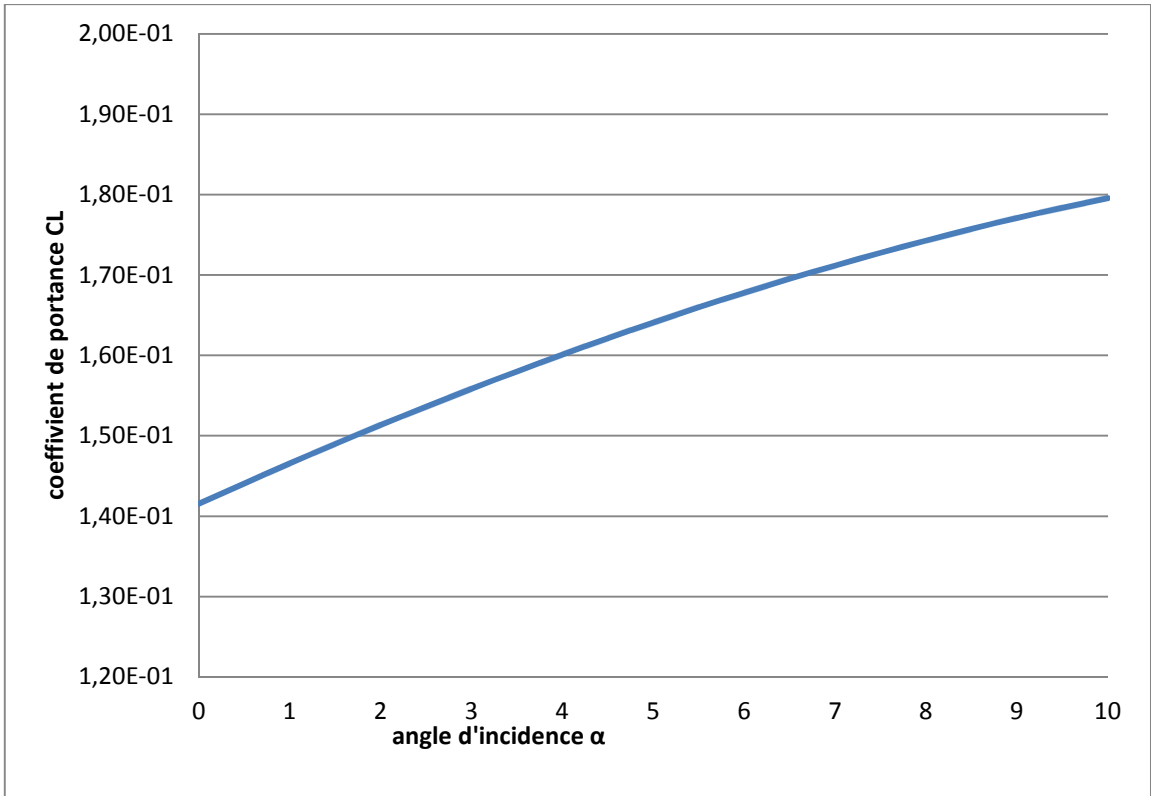
##### 4.1.2.2.1 Aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 10°:



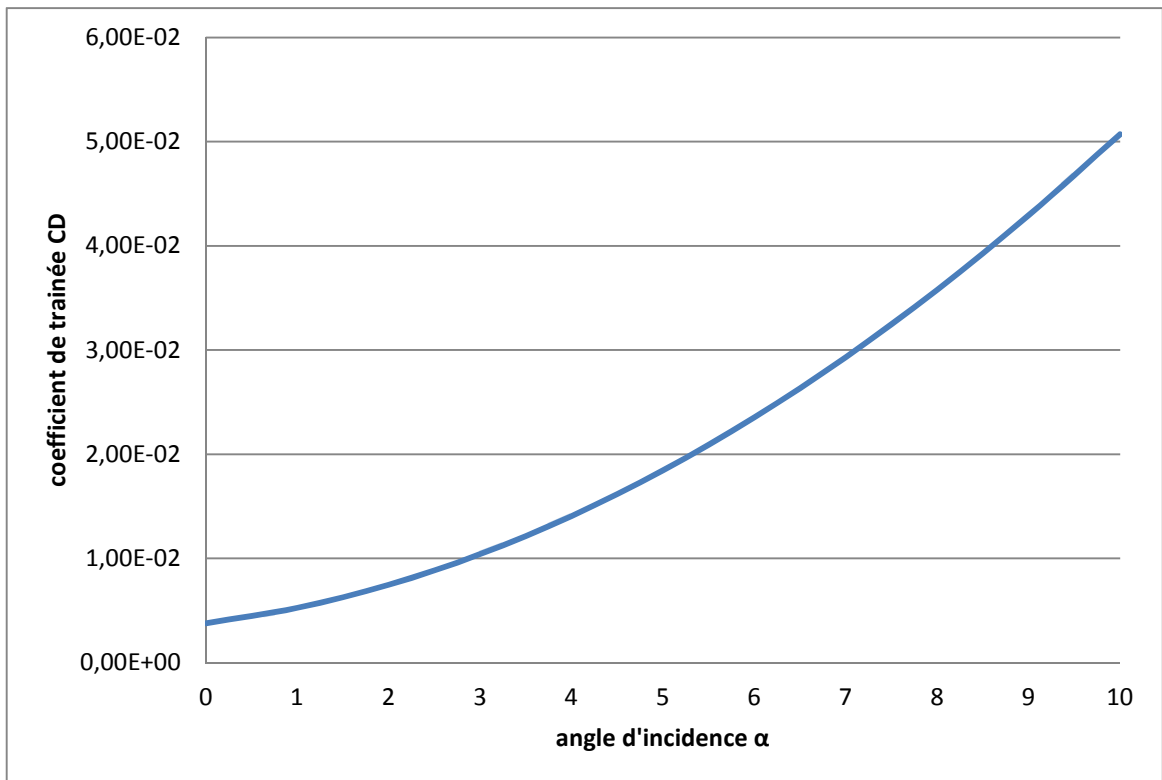
**Figure 4.21 :** aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 10°



**Figure 4.22 :** Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



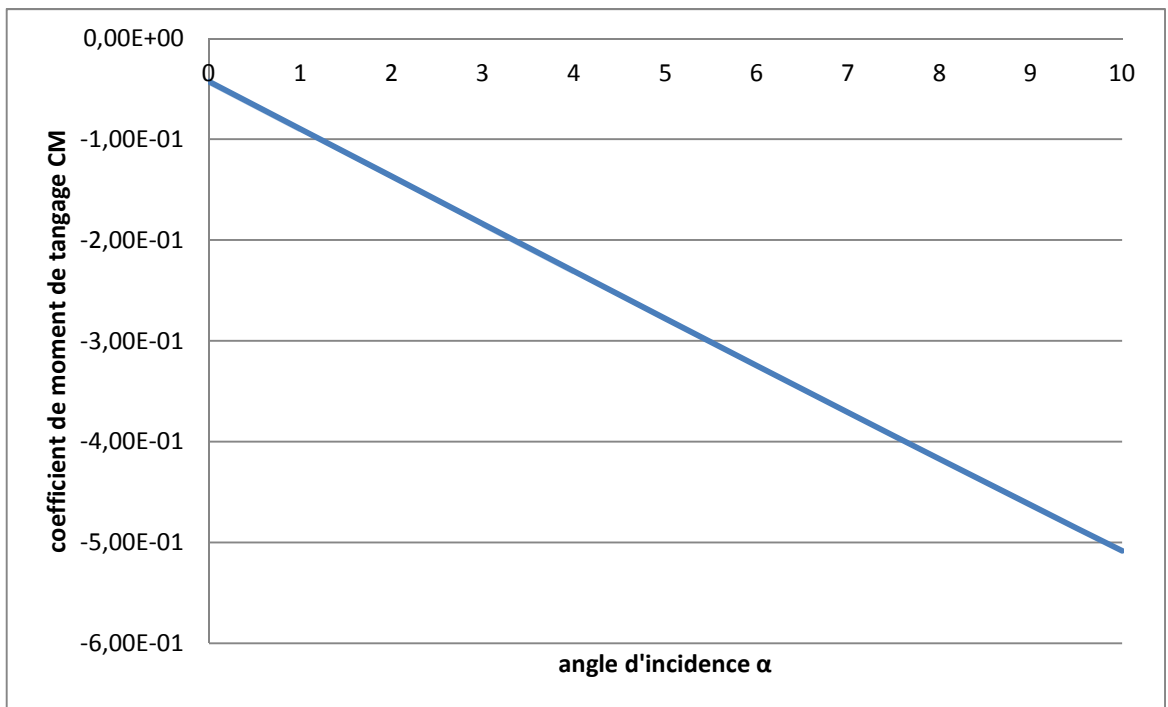
**Figure 4.23 :** Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



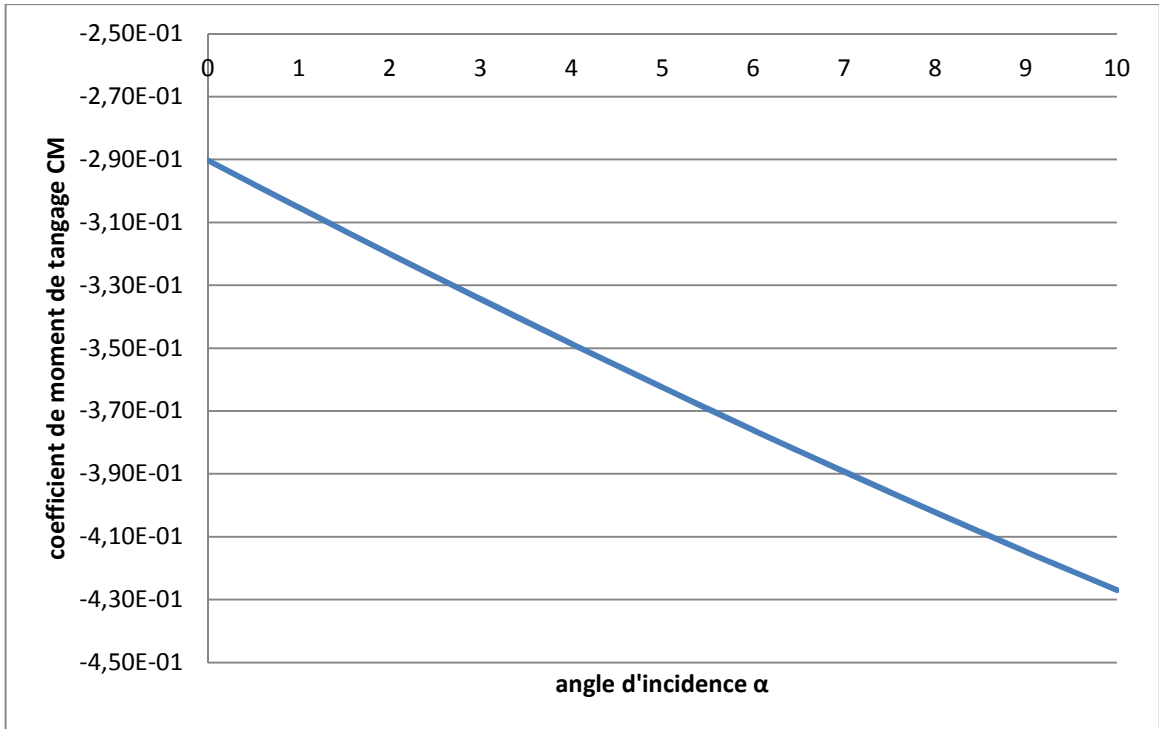
**Figure 4.24 :** Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



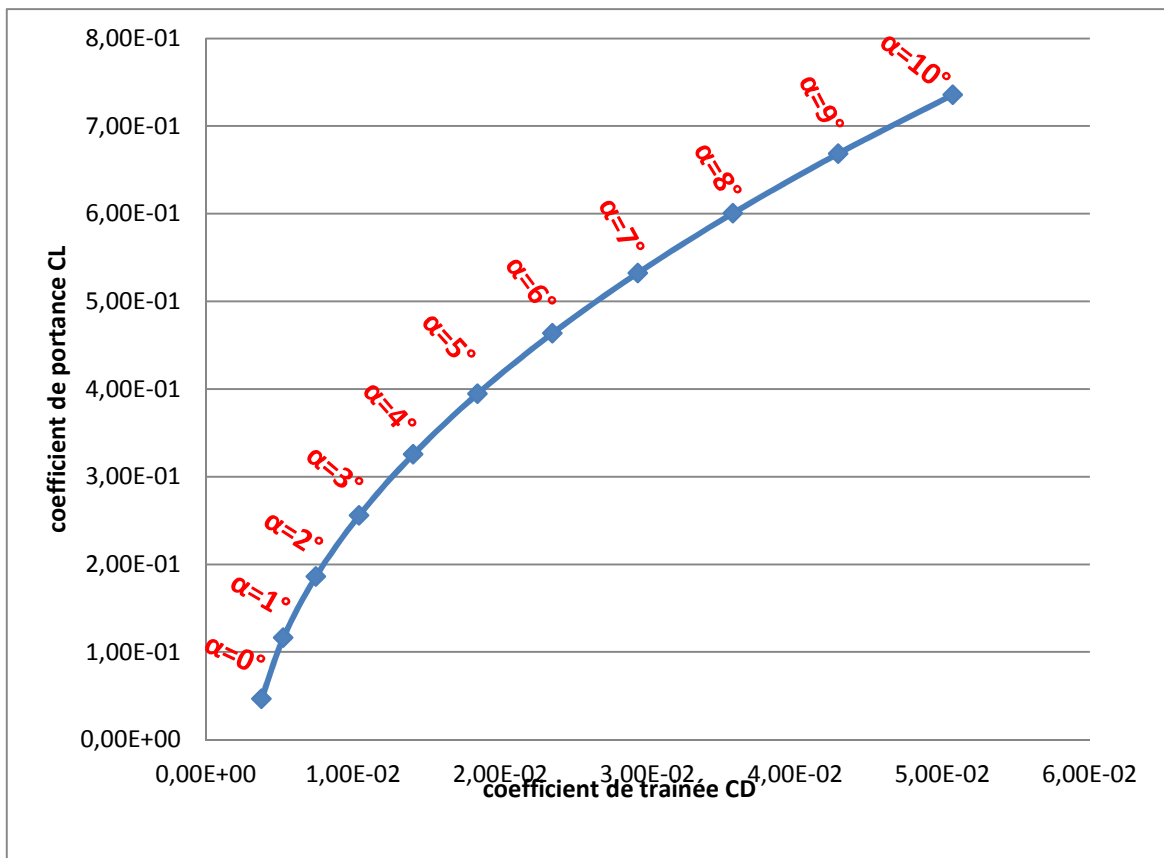
**Figure 4.25 :** Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



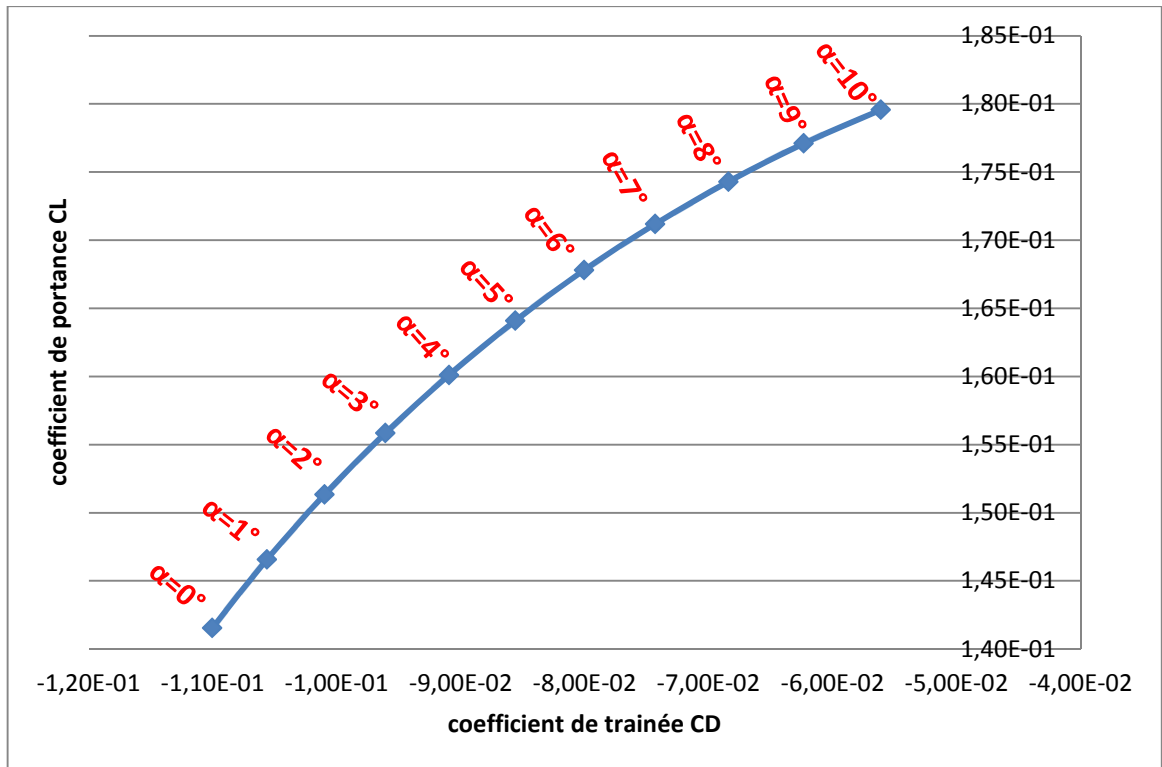
**Figure 4.26 :** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



**Figure 4.27 :** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)

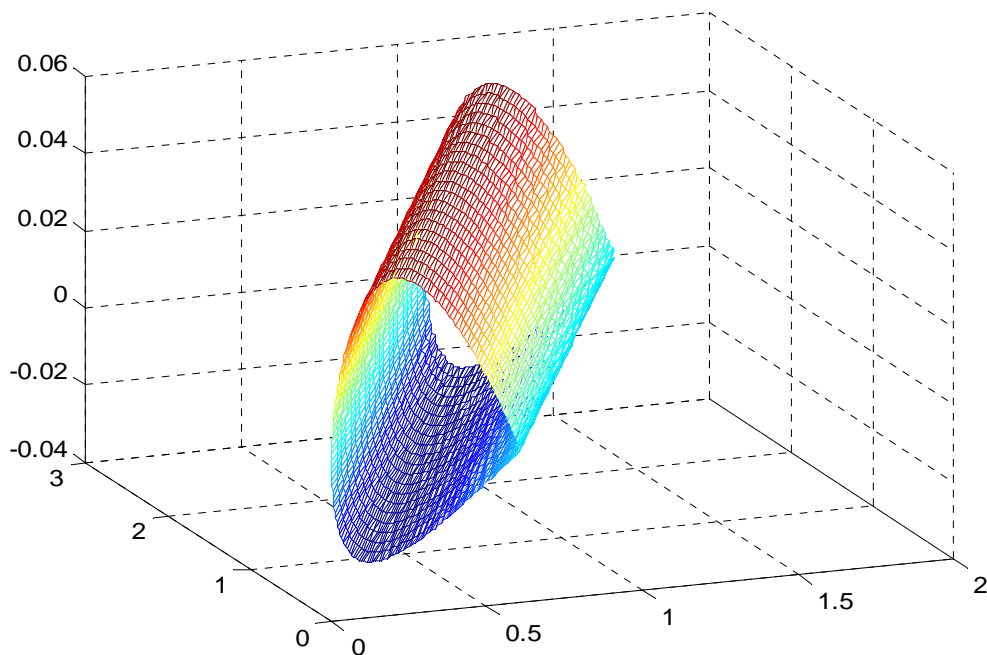


**Figure 4.28 :** la polaire de l'aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 10°(APAME)



**Figure 4.29** : la polaire de l'aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 10°(notre programme)

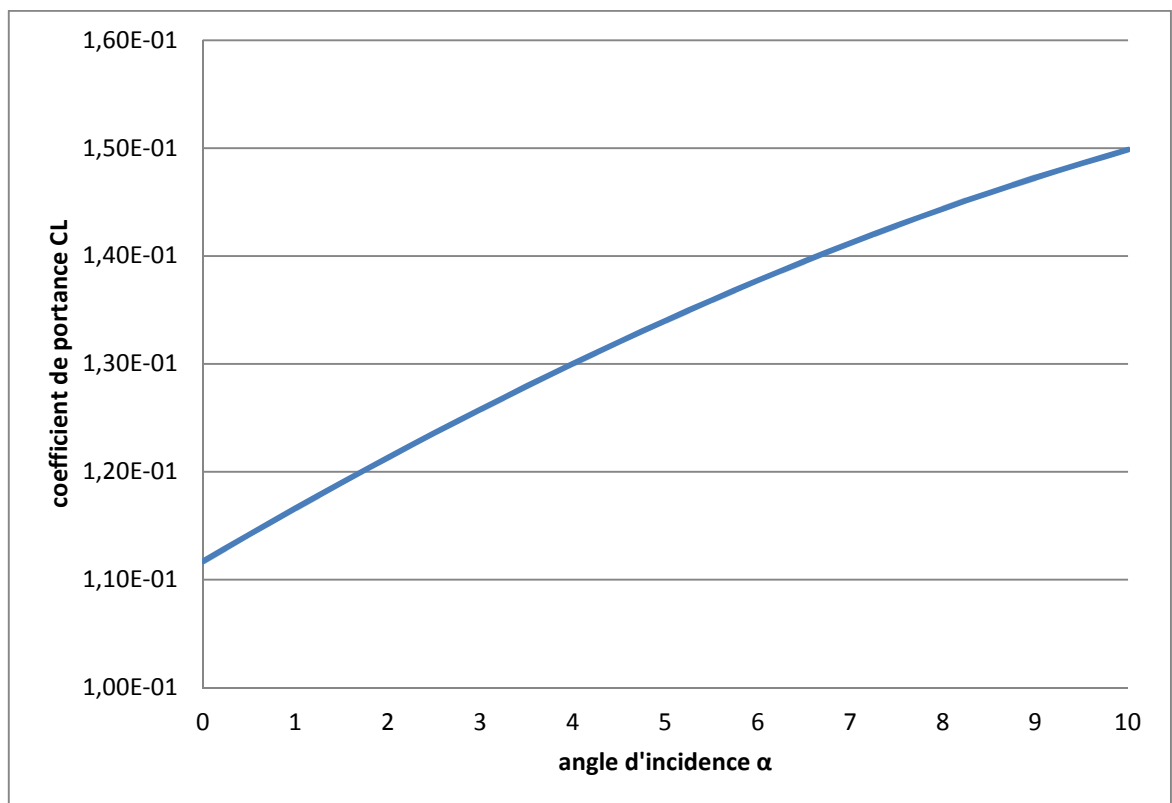
#### 4.1.2.2.2 Aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 20°:



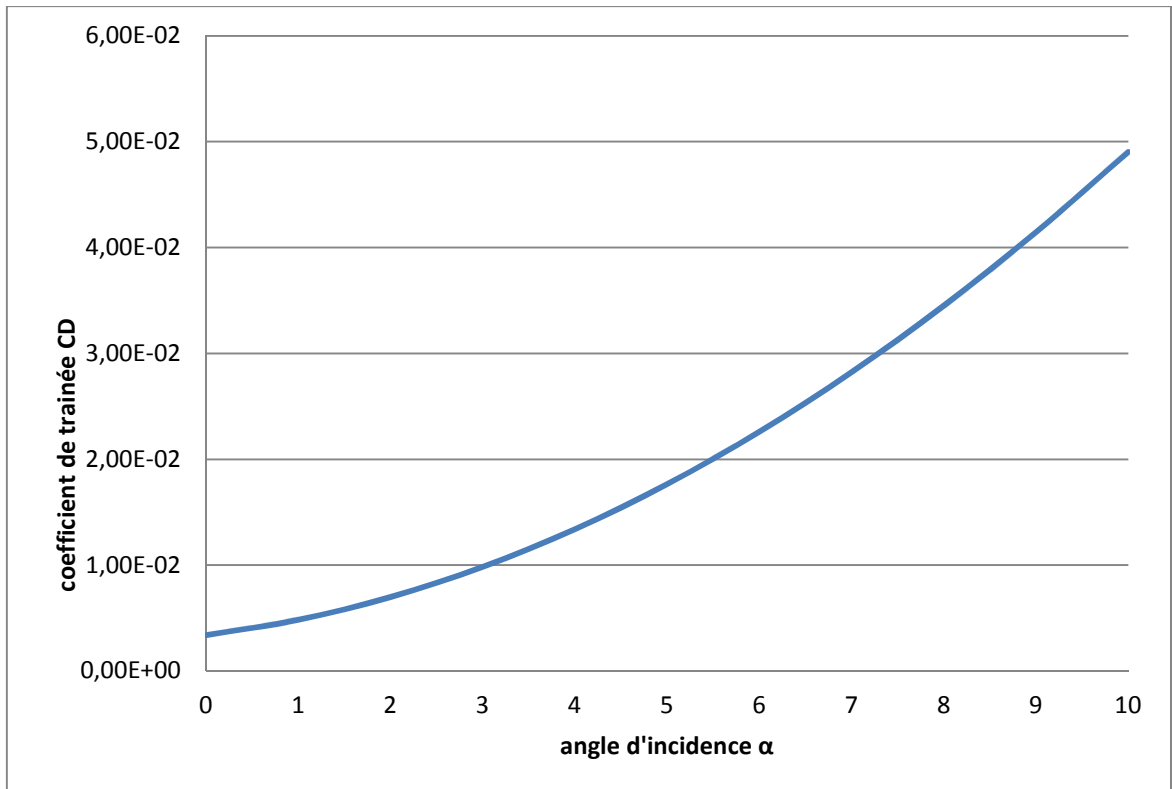
**Figure 4.30** : Aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 20°



**Figure 4.31** : Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



**Figure 4.32** Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



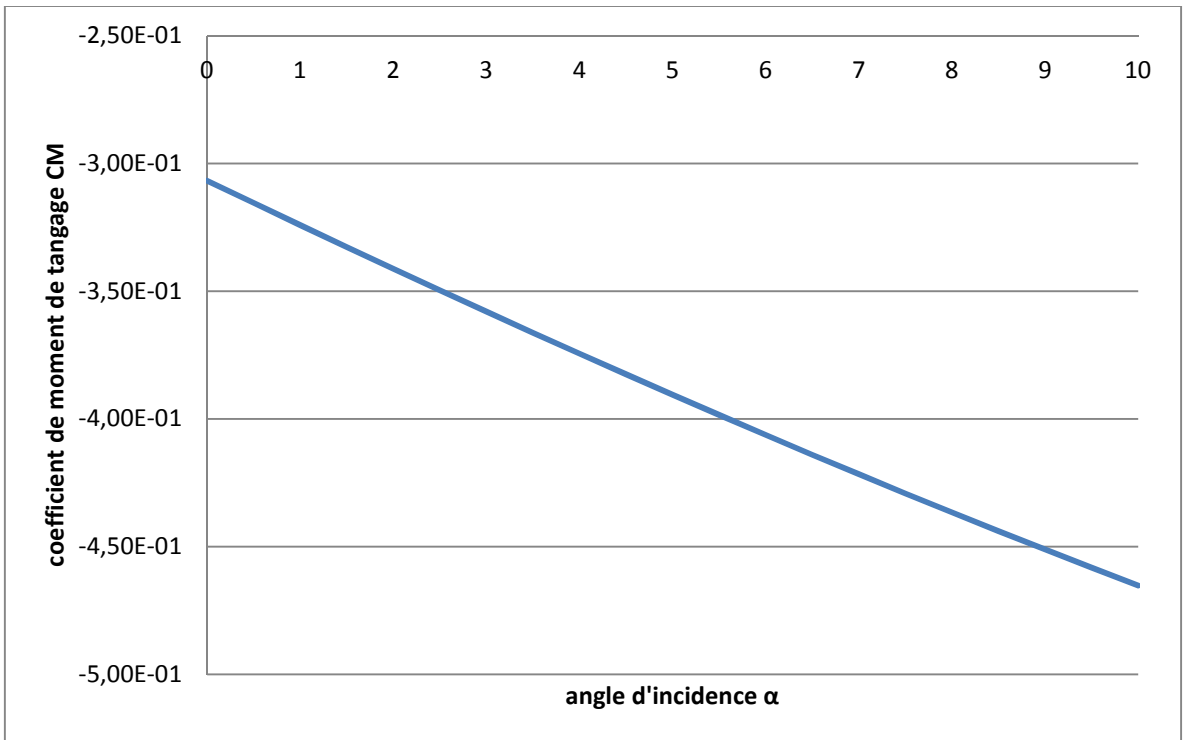
**Figure 4.33 :** Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



**Figure 4.34 :** Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)

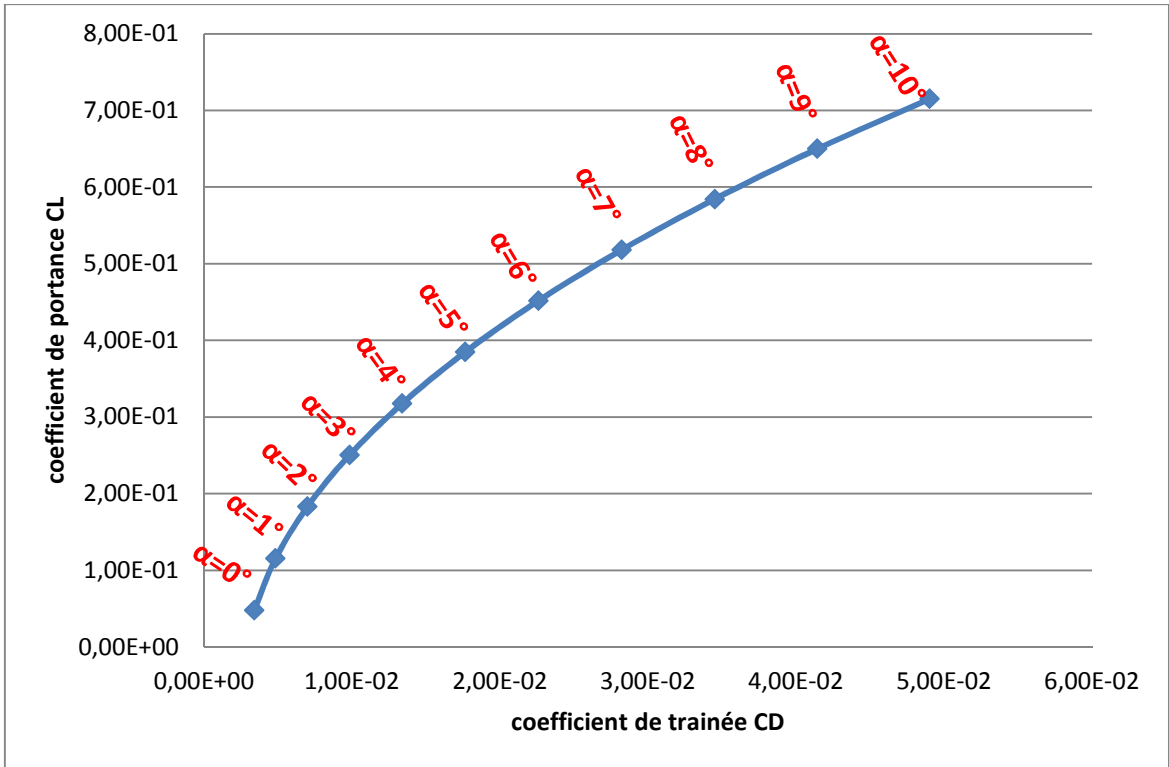


**Figure 4.35 :** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)

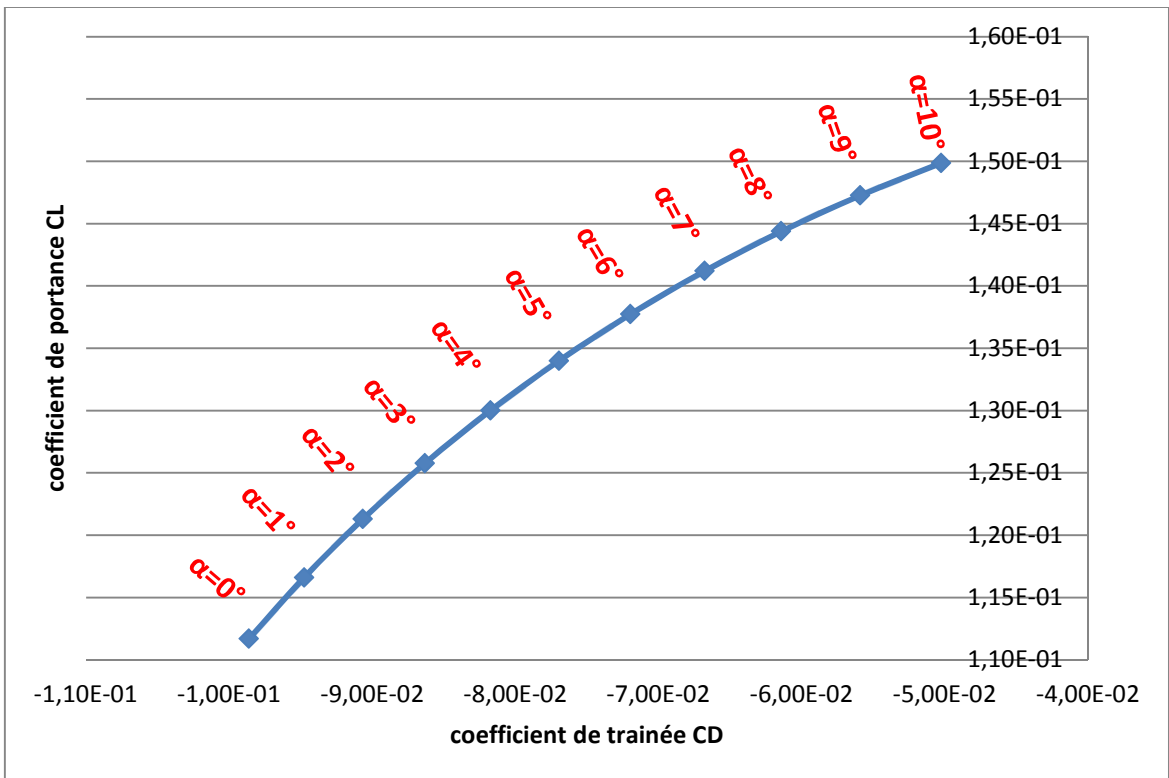


**Figure 4.36 :** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)





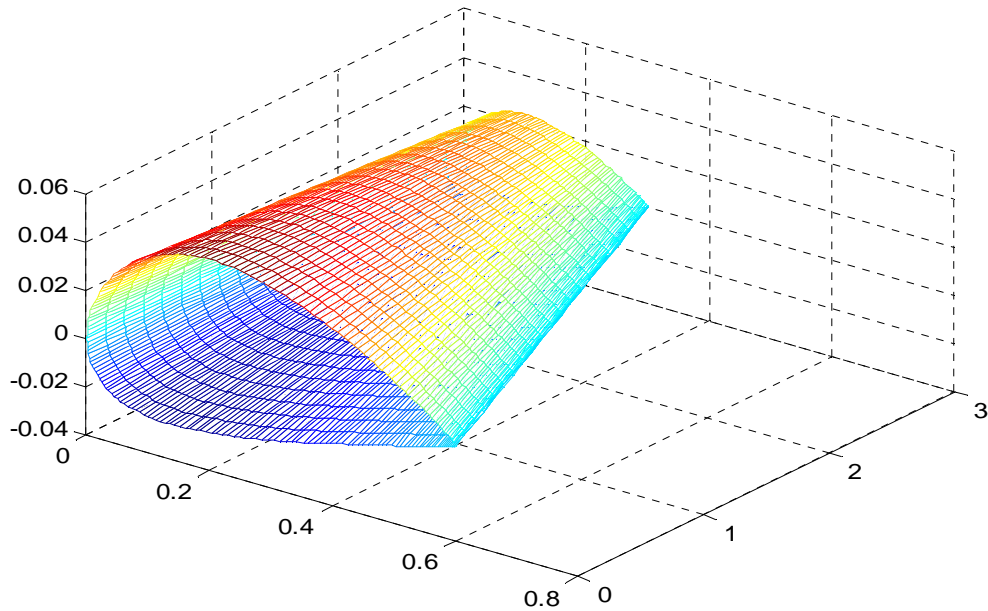
**Figure 4.37 :** La polaire de l'aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 20°(APAME)



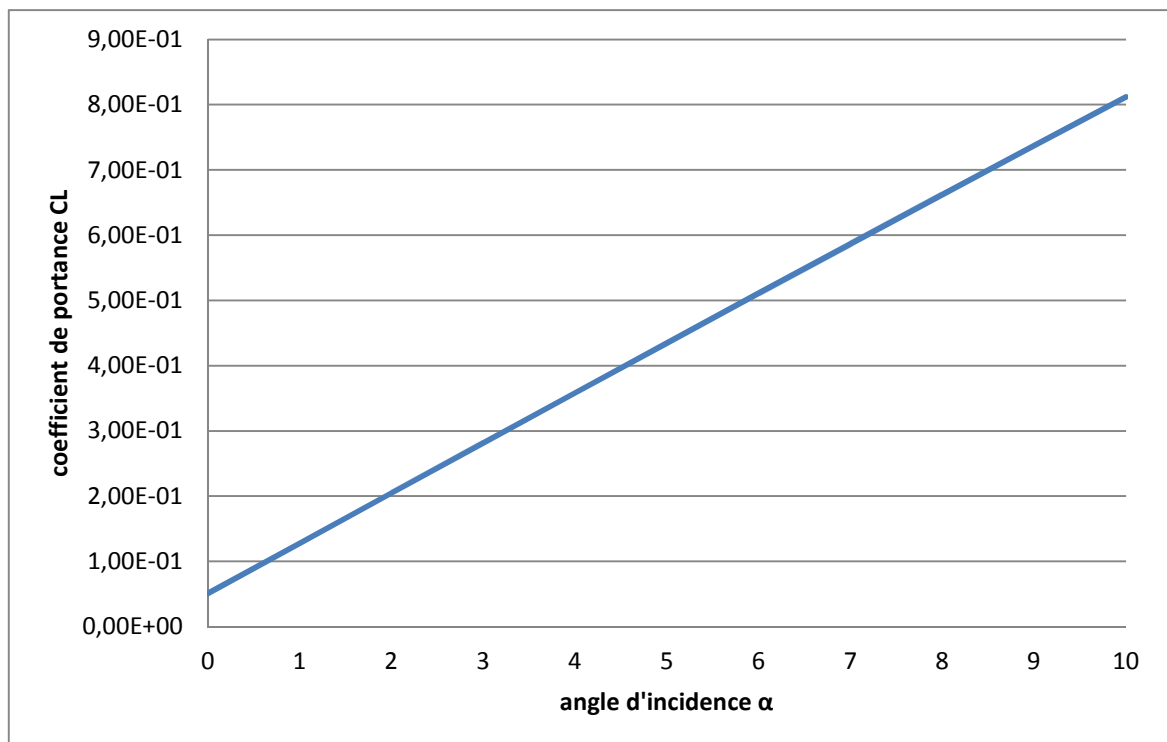
**Figure 4.38 :** La polaire de l'aile rectangulaire naca2412 avec flèche de 20°(notre programme)

### 4.1.2.3 Détermination des caractéristiques aérodynamiques d'une aile avec effilement :

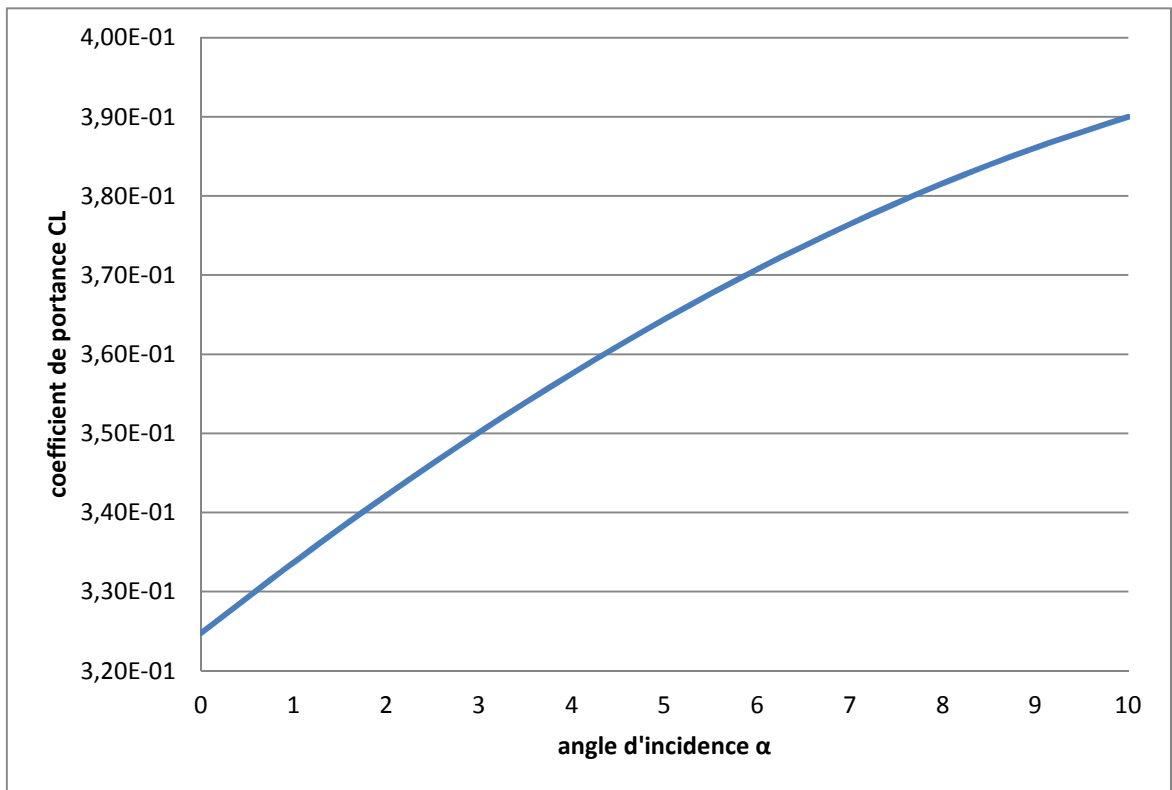
#### 4.1.2.3.1 Aile naca2412 avec effilement de 50% :



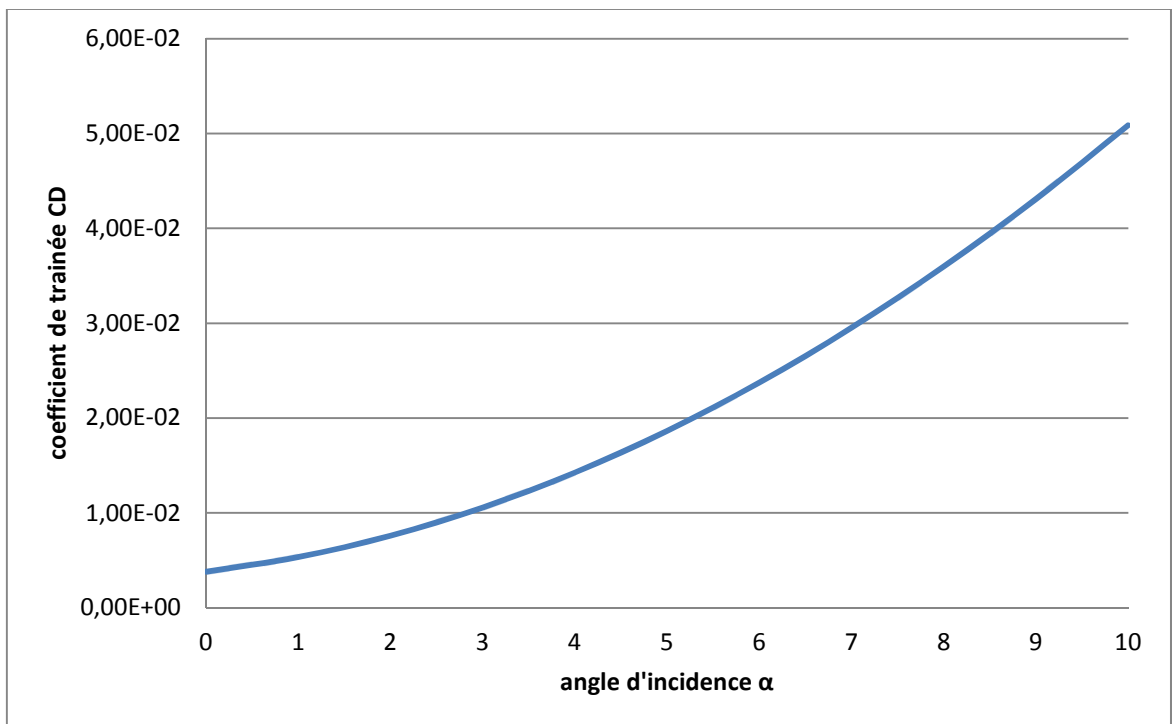
**Figure 4.39 :** Aile naca2412 avec effilement de 50%



**Figure 4.40 :** Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



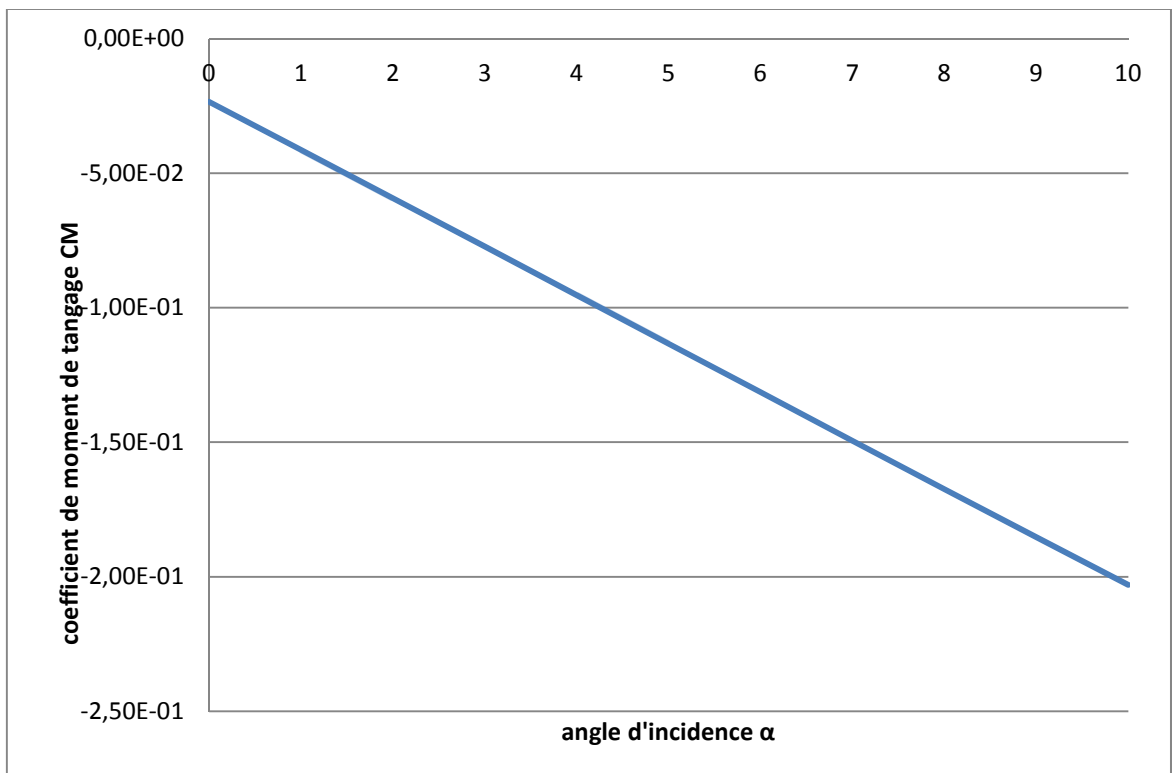
**Figure 4.41** : Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



**Figure 4.42** : Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



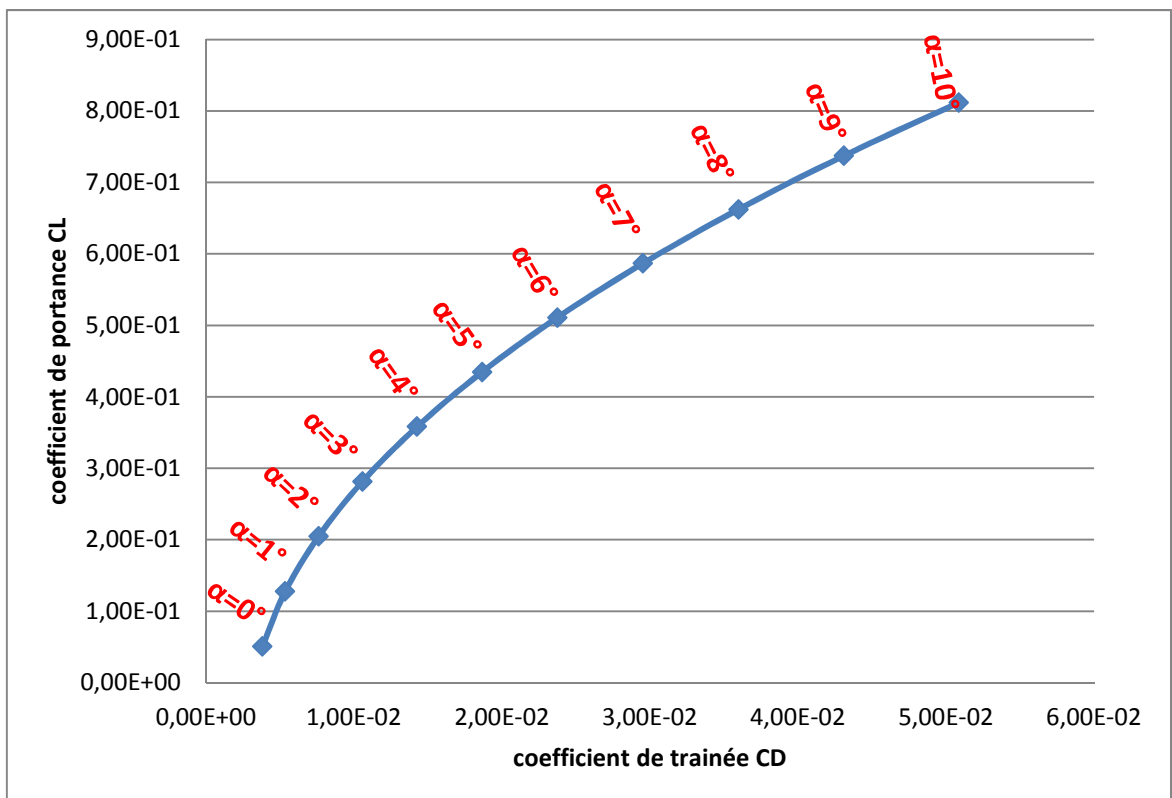
**Figure 4.43 :** Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



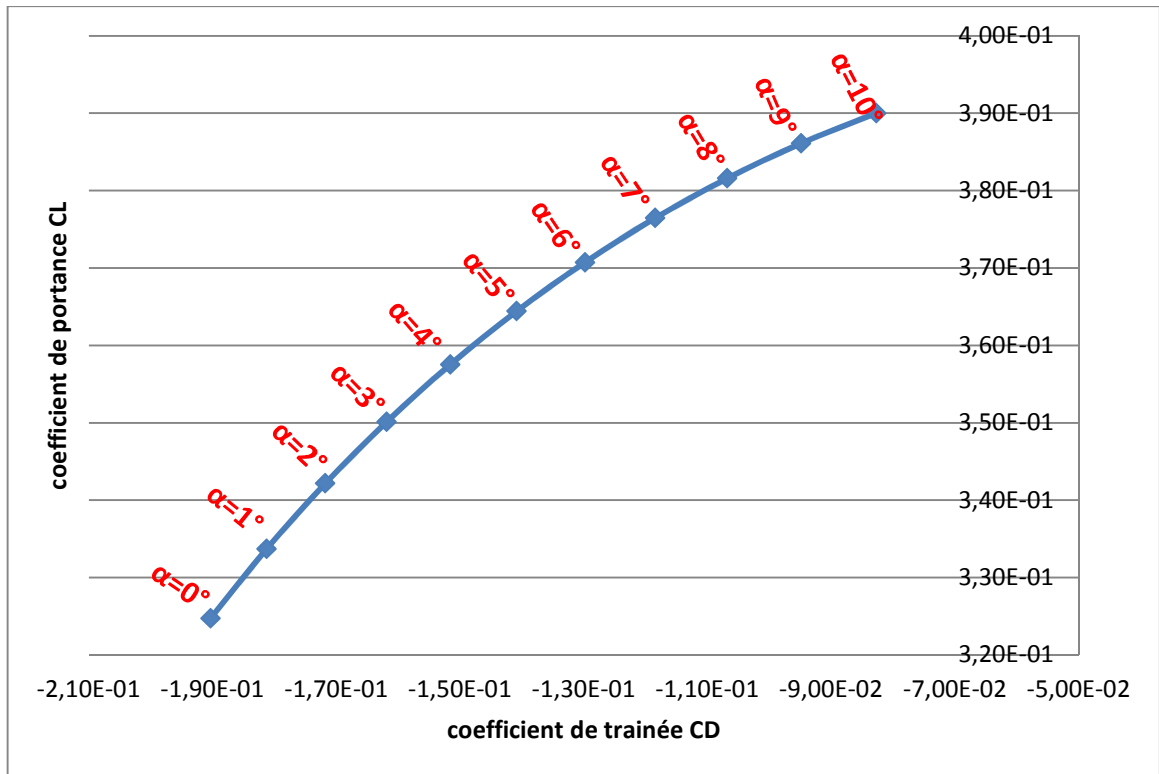
**Figure 4.44 :** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



**Figure 4.45 :** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)

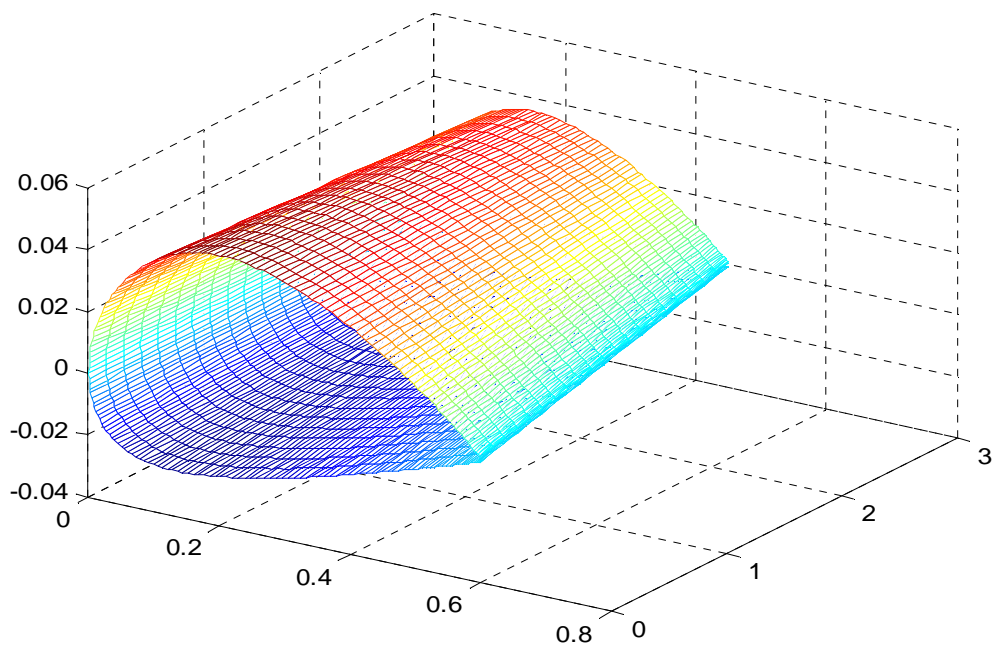


**Figure 4.46 :** la polaire de l'aile naca2412 avec effilement de 50%(APAME)



**Figure 4.47** : la polaire de l'aile naca2412 avec effilement de 50%(notre programme)

#### 4.1.2.3.2 Aile naca2412 avec effilement de 75% :



**Figure 4.48** : Aile naca2412 avec effilement de 75%



Figure 4.49 : Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)

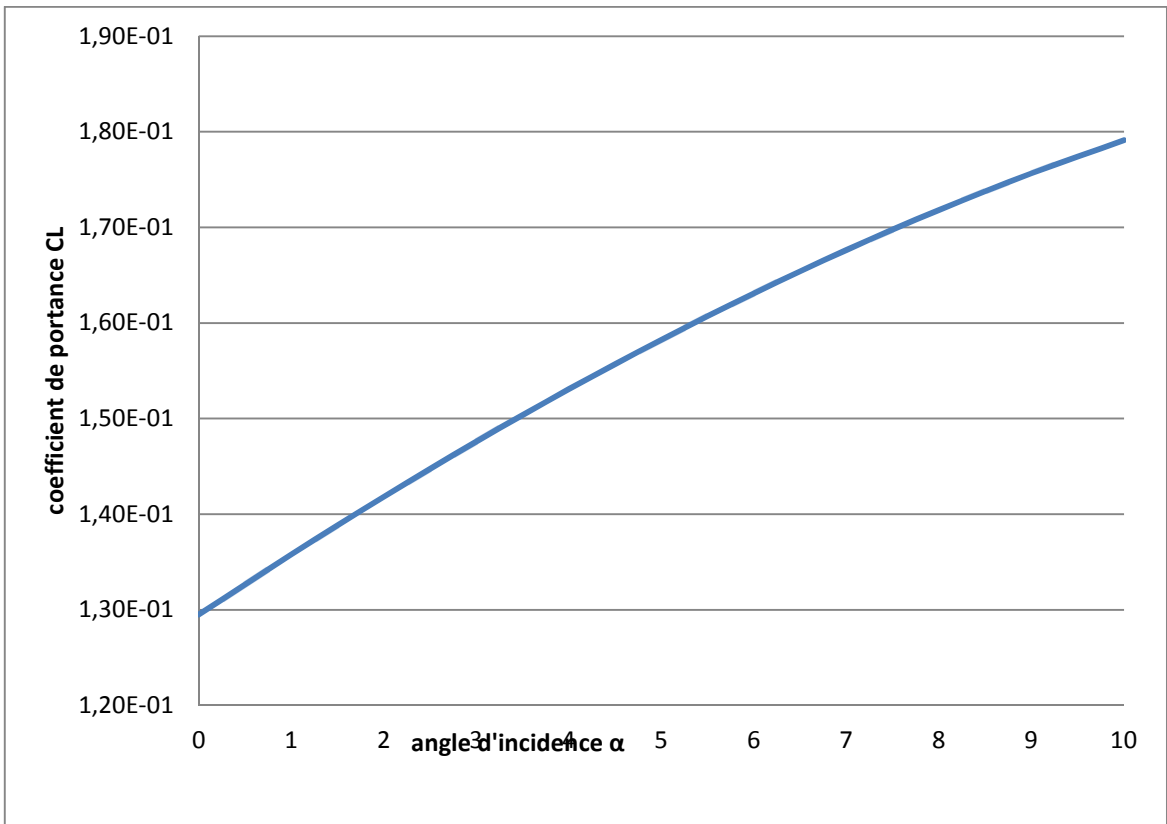
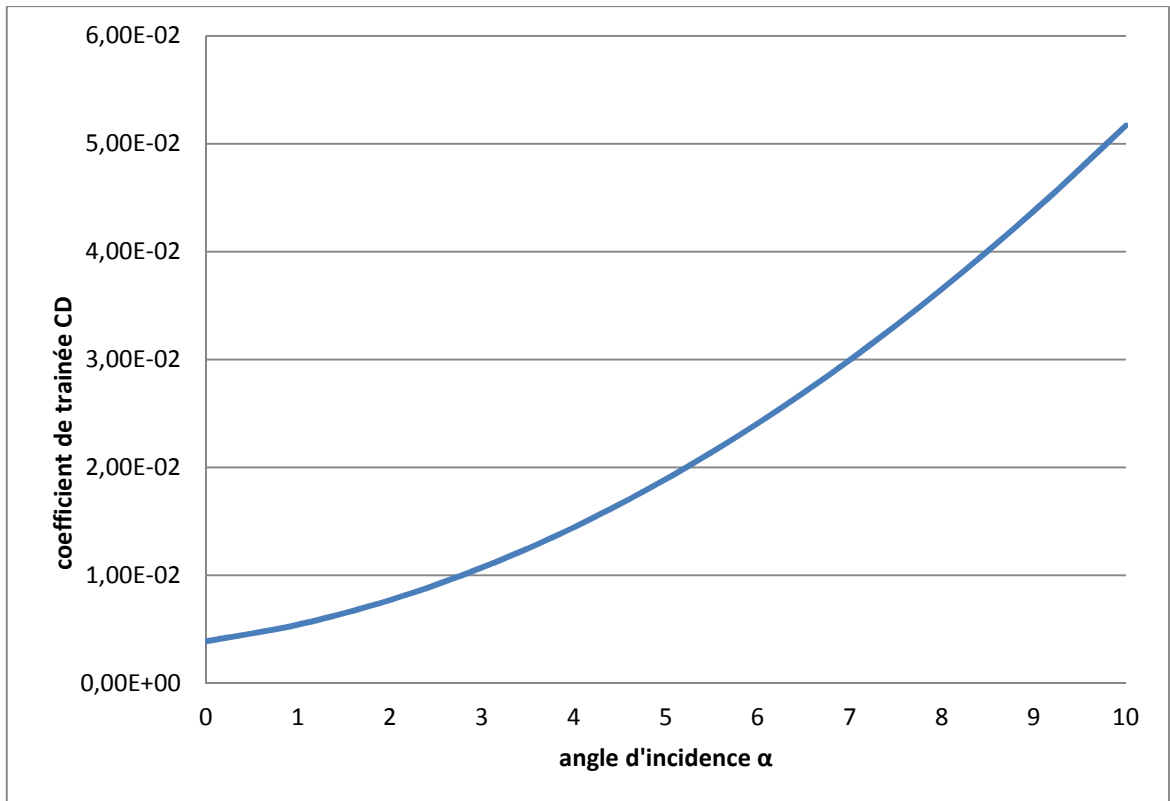
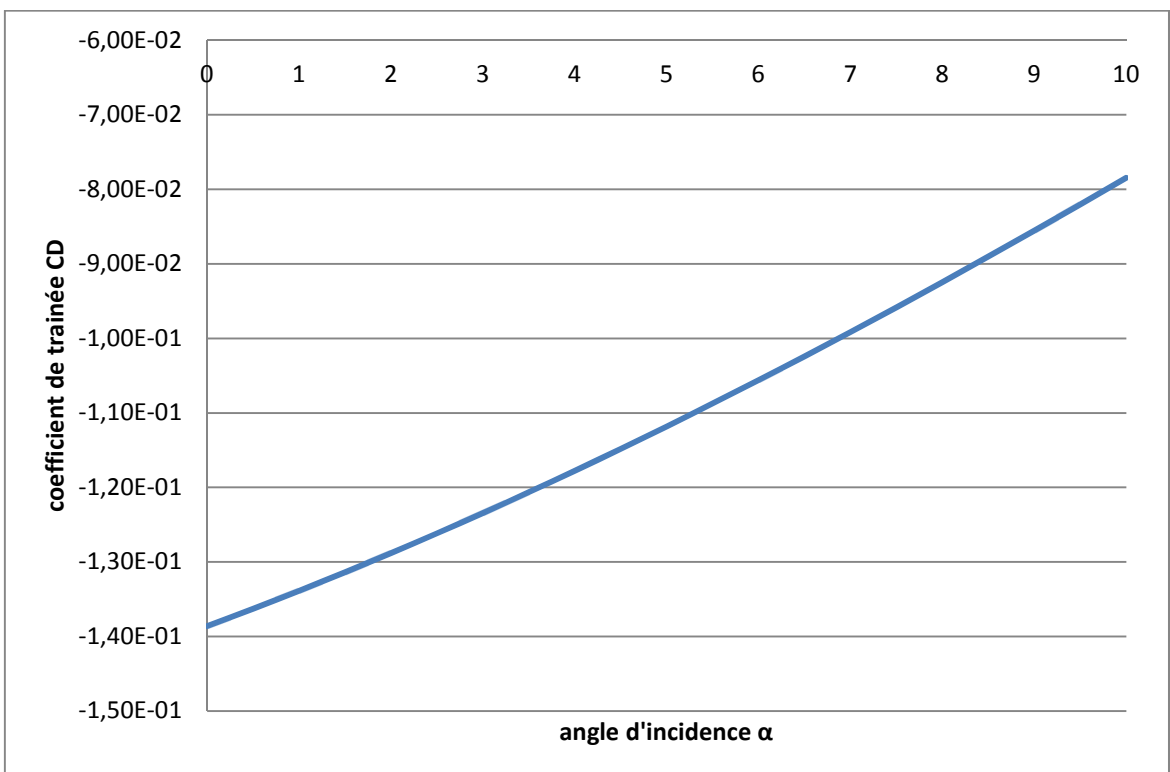


Figure 4.50 : Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)

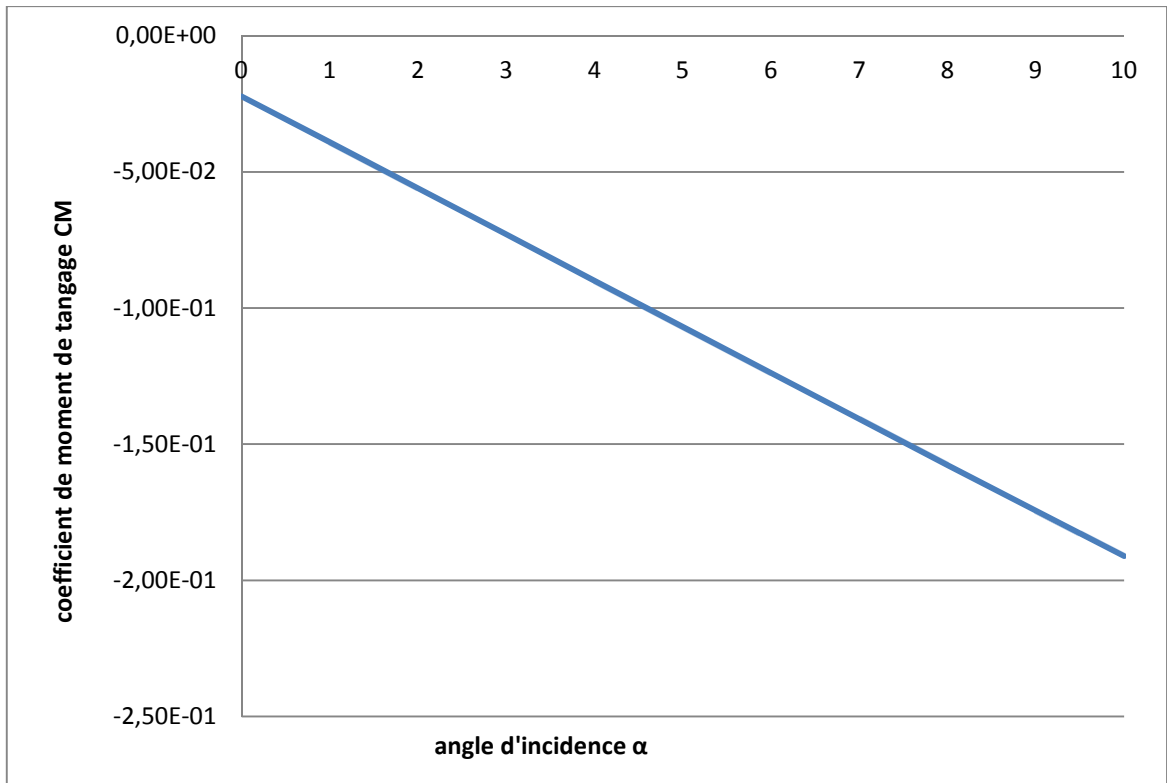


**Figure 4.51** : Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)

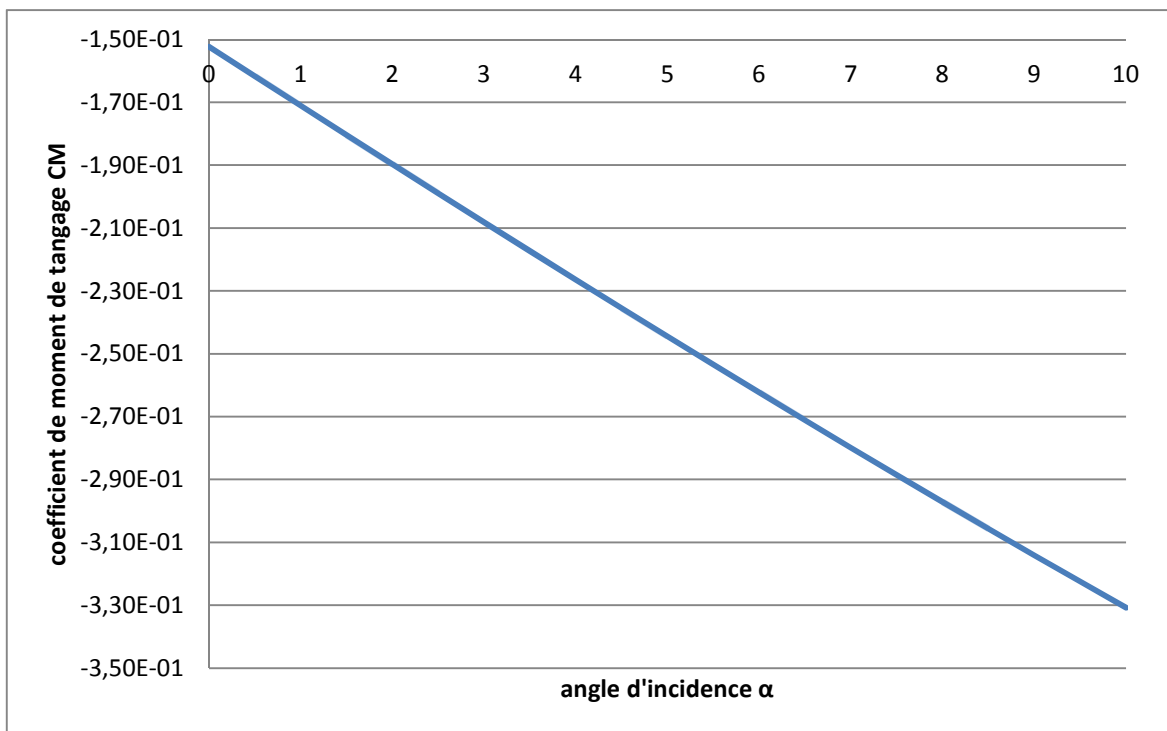


**Figure 4.52** Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)





**Figure 4.53** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



**Figure 4.54** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)

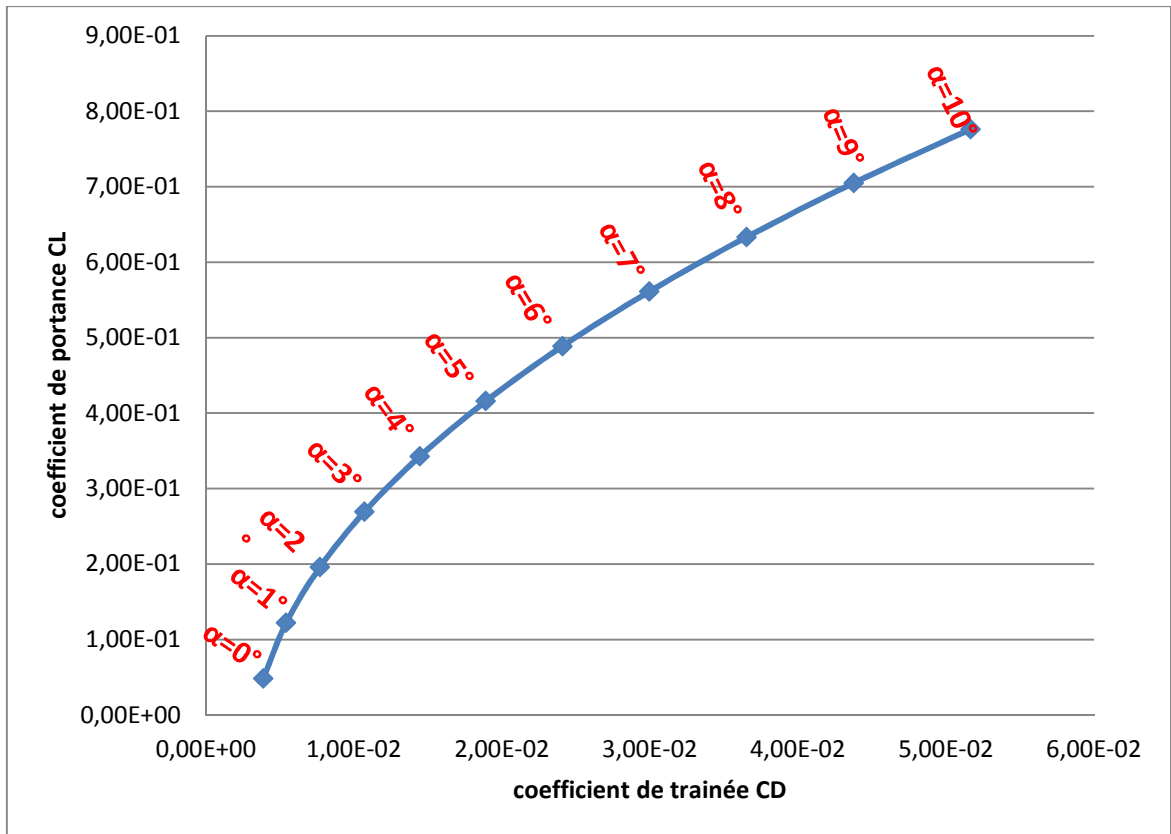


Figure 4.55 : la polaire de l'aile naca2412 avec effilement de 75%(APAME)

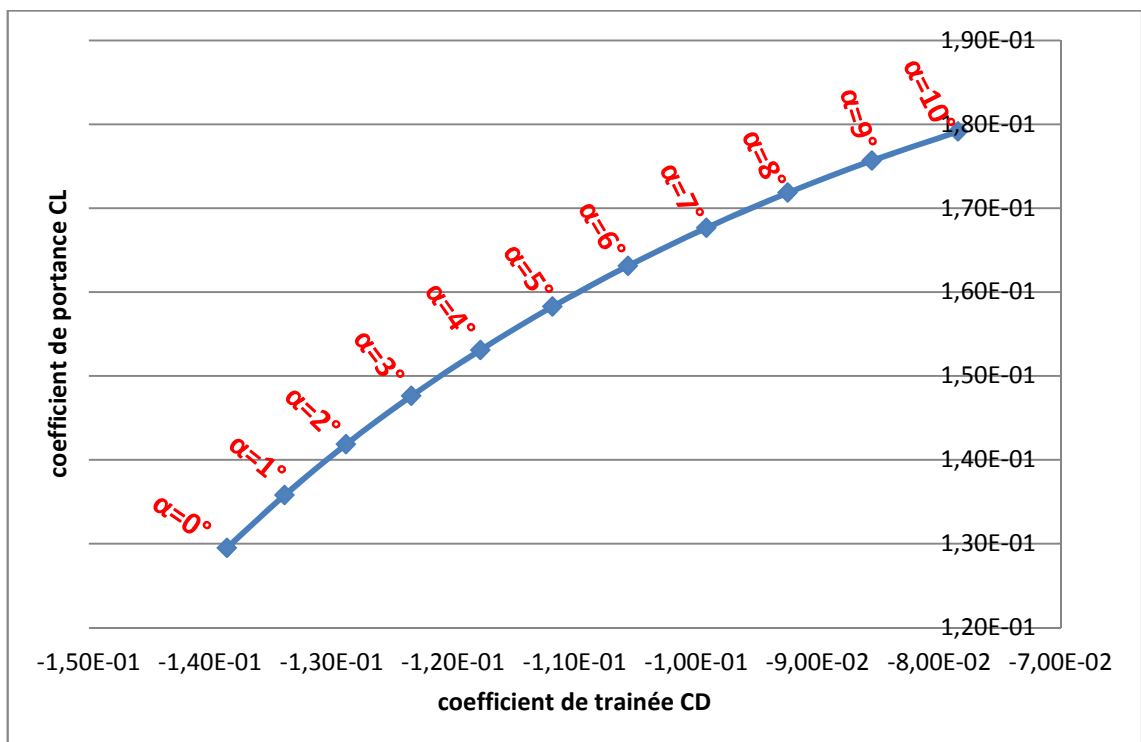
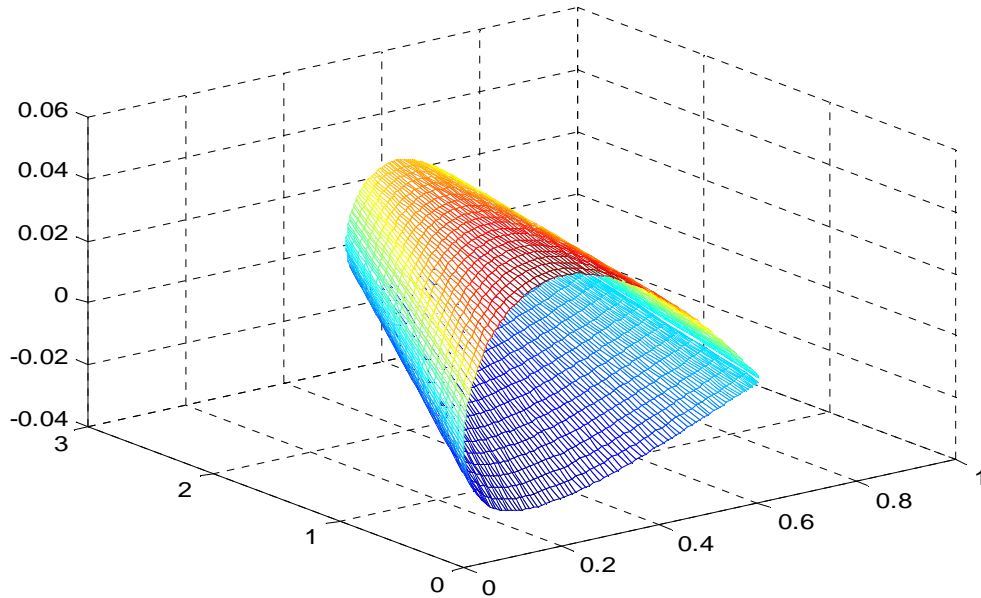


Figure 4.56 : La polaire de l'aile naca2412 avec effilement de 75%(notre programme)

#### 4.1.2.4 Détermination des caractéristiques aérodynamiques d'une aile avec flèche et effilement :

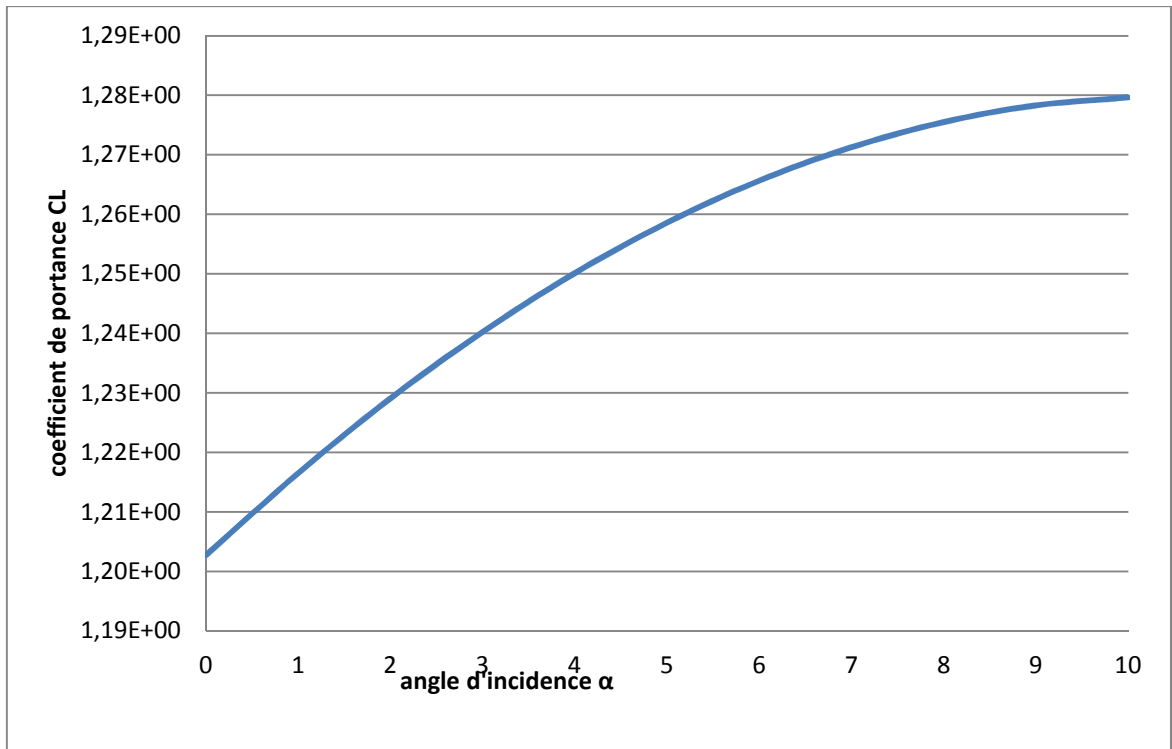
##### 4.1.2.4.1 Aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 50% :



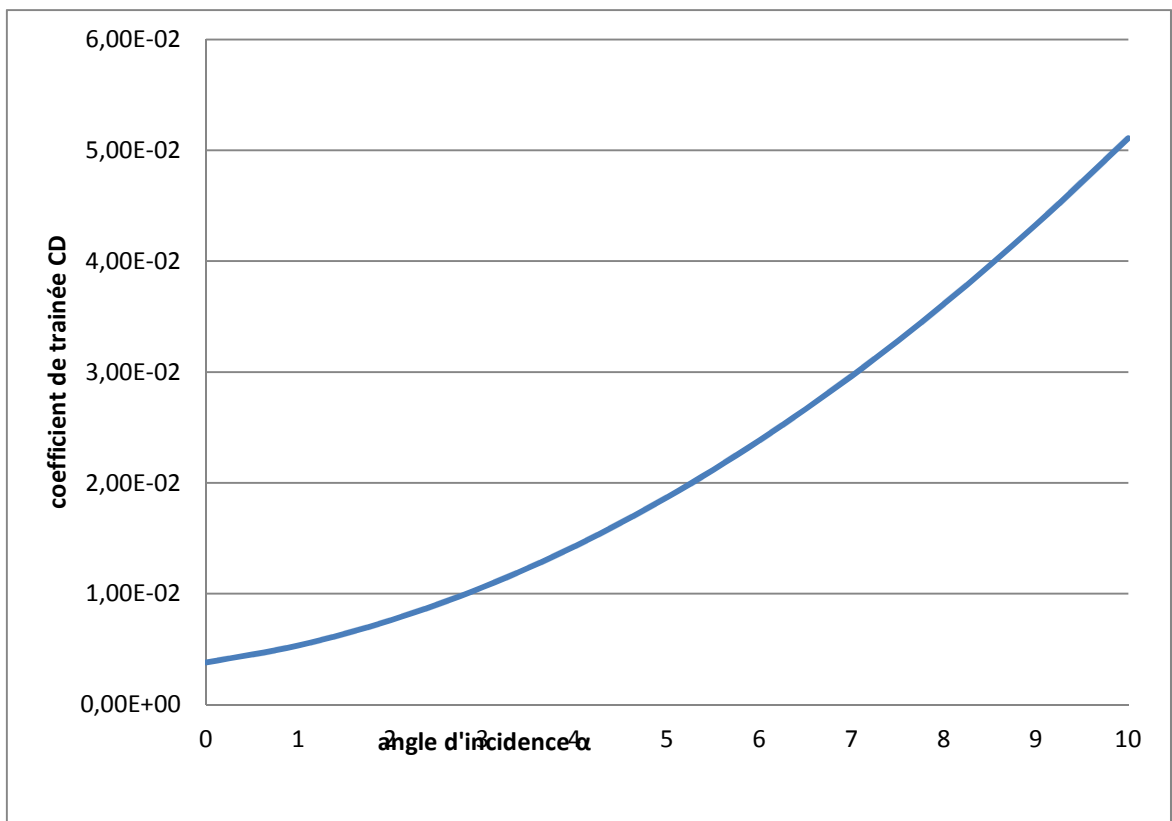
**Figure 4.57** : Aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 50%



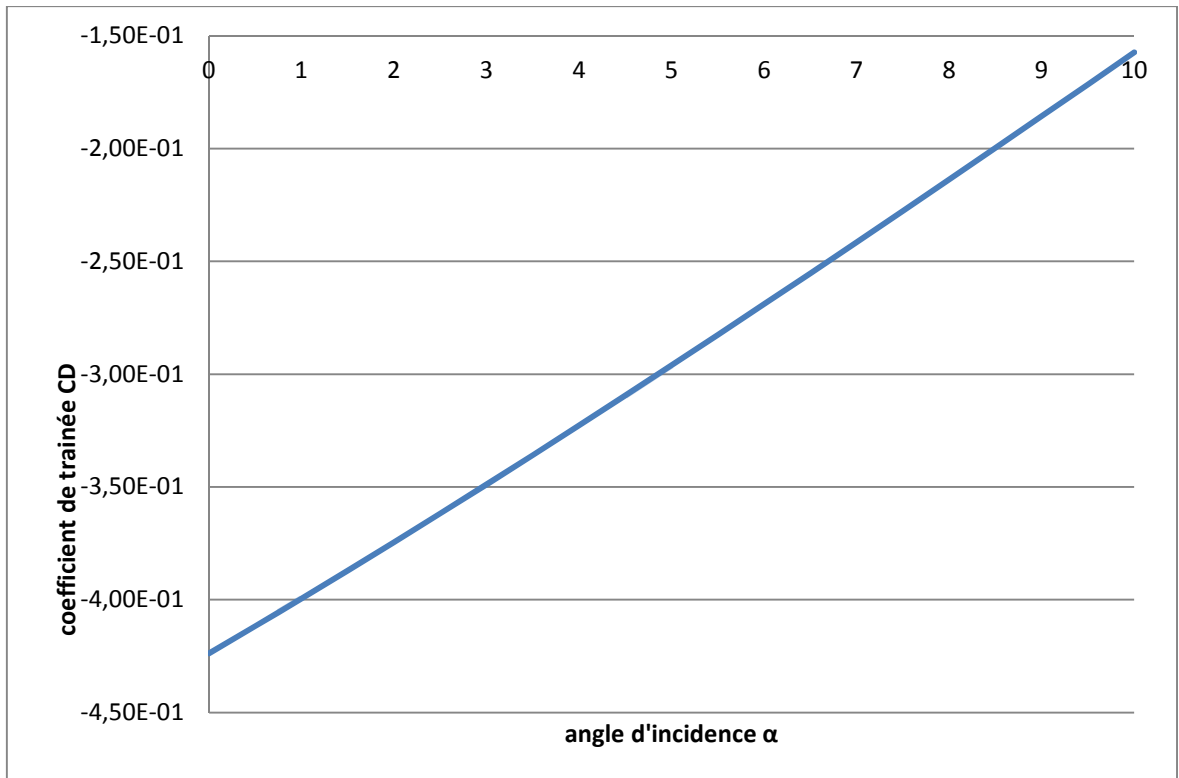
**Figure 4.58** : Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



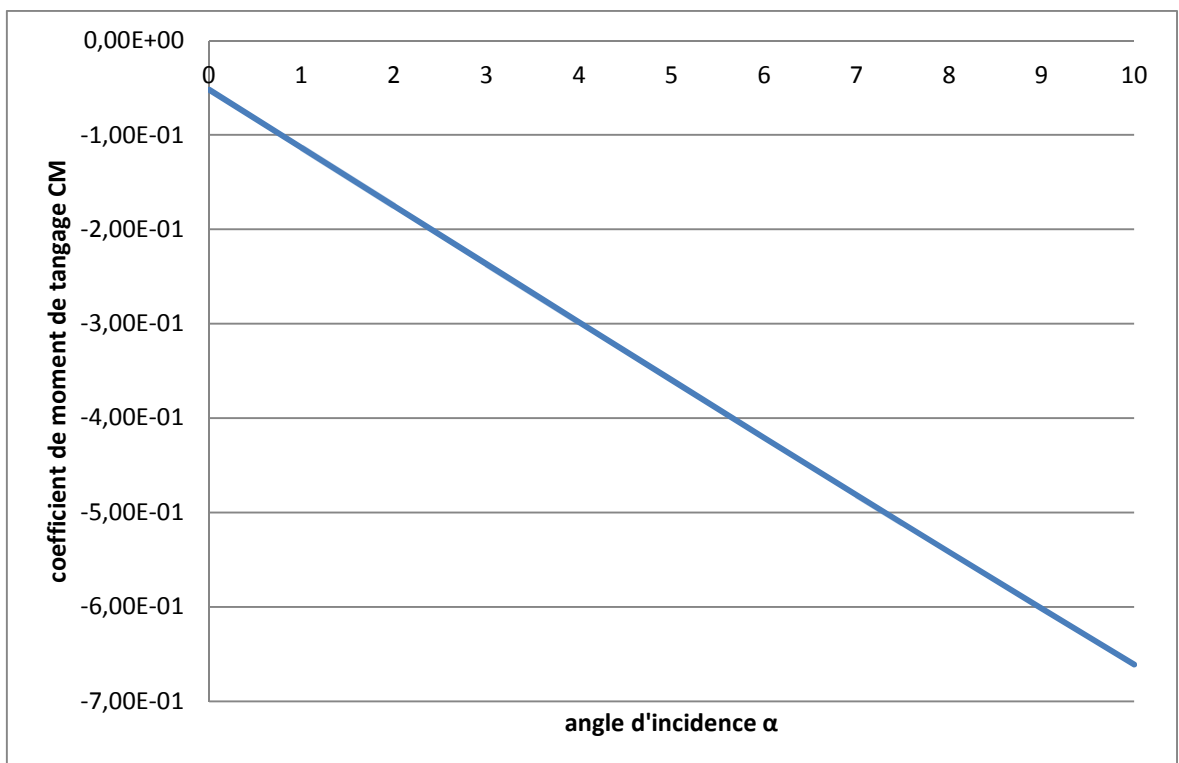
**Figure 4.59** : Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



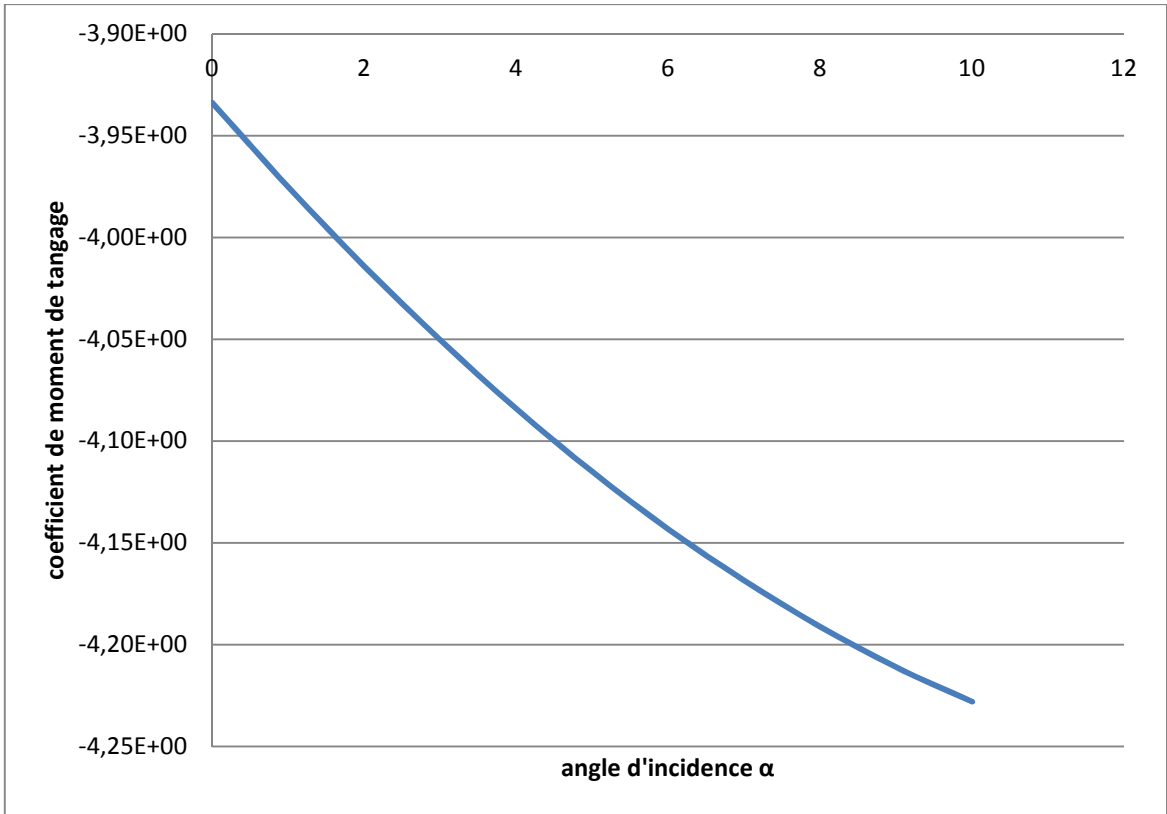
**Figure 4.60** : Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



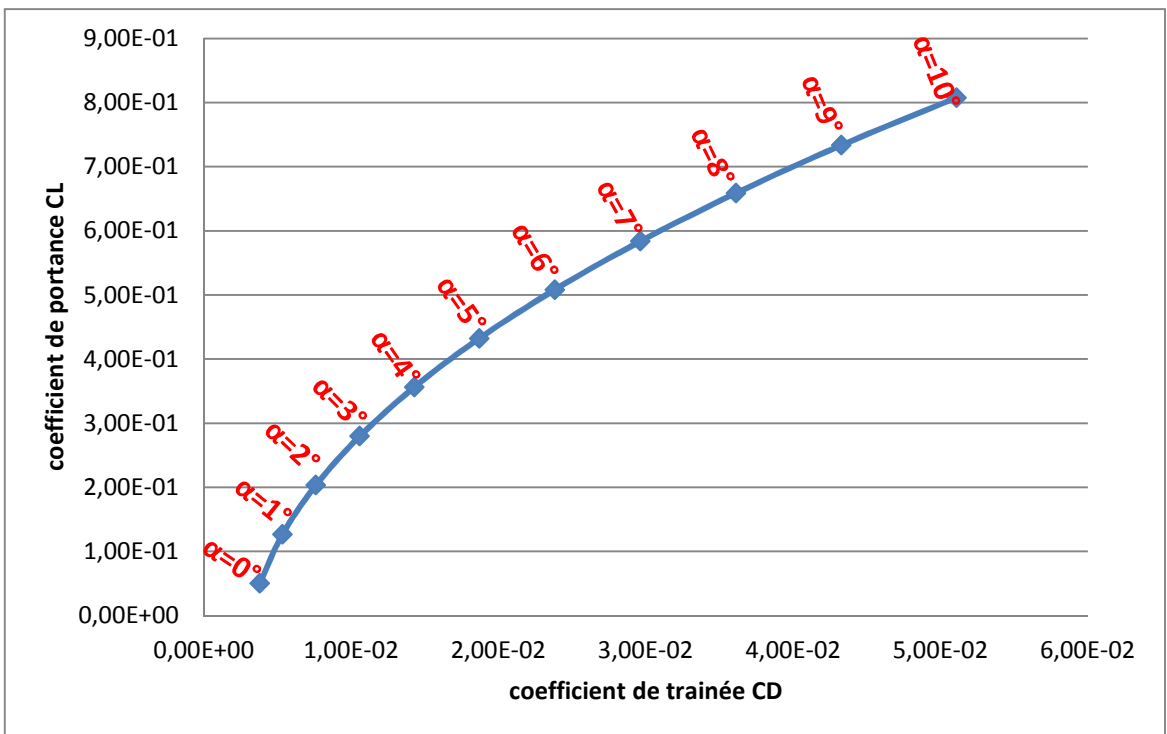
**Figure 4.61** : Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



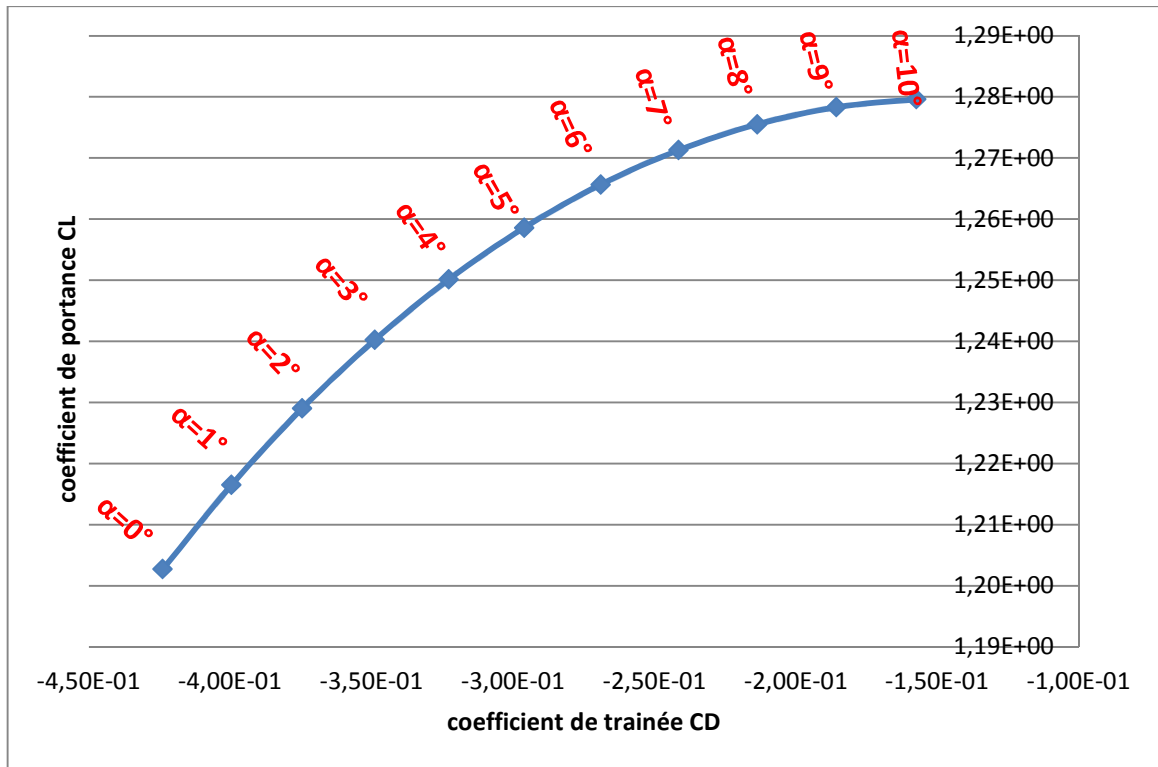
**Figure 4.62** : Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



**Figure 4.63 :** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)

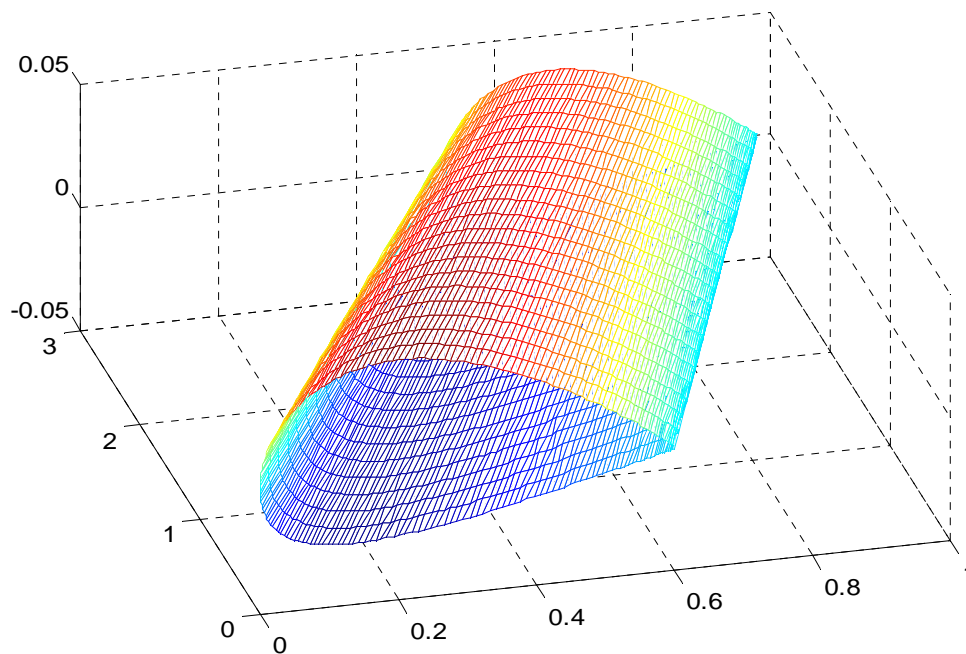


**Figure 4.64 :** La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 50% (APAME)

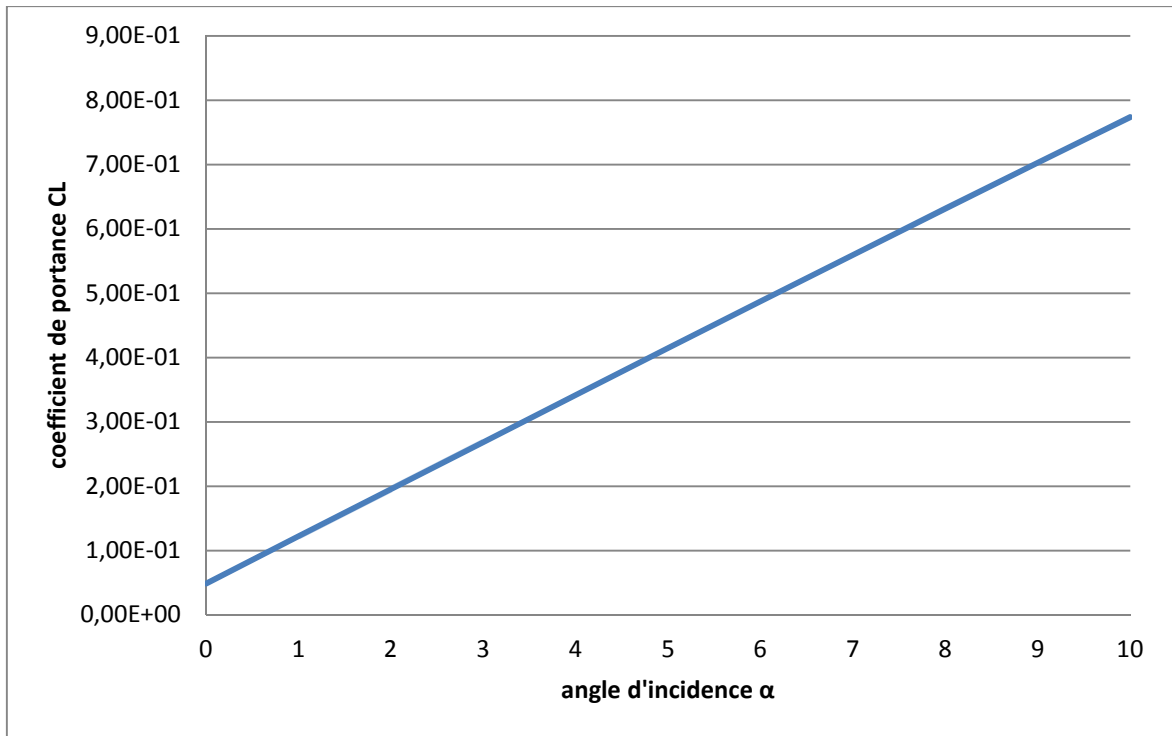


**Figure 4.65 :** La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 50% (notre programme)

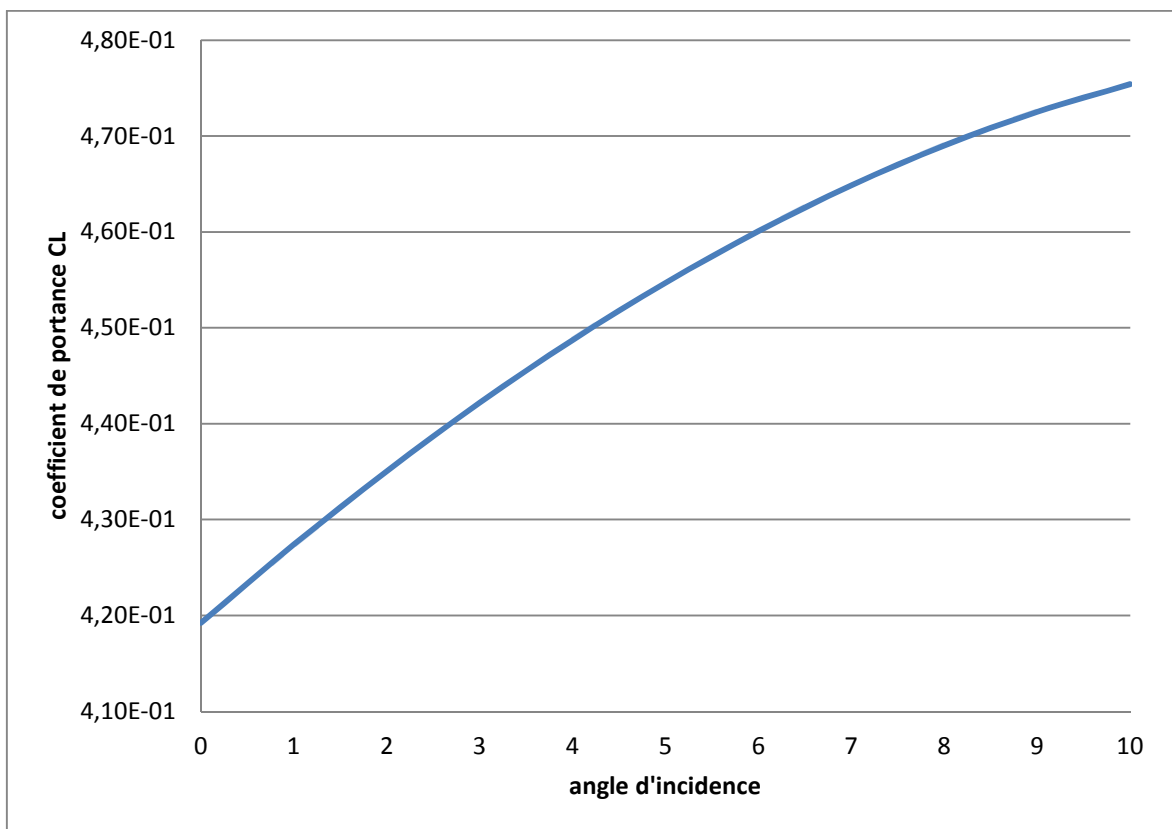
#### 4.1.2.4.2 Aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 75% :



**Figure 4.66 :** Aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 75%

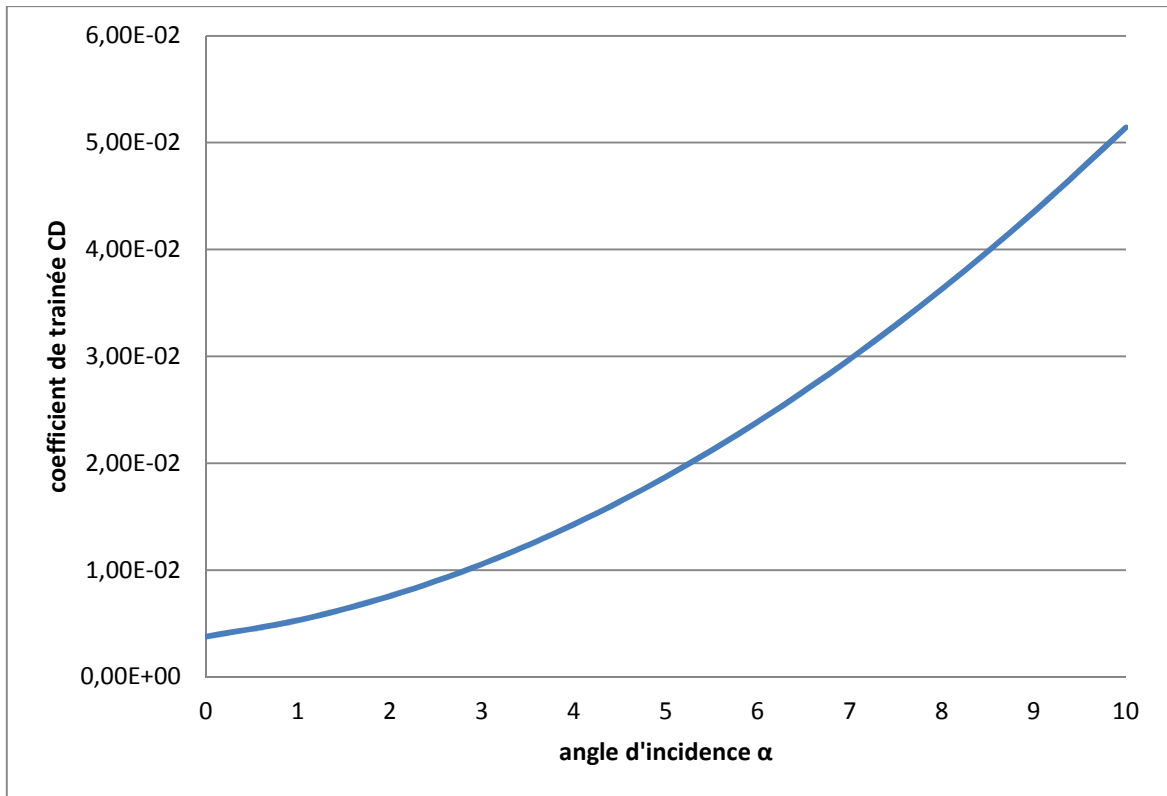


**Figure 4.67** : Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)

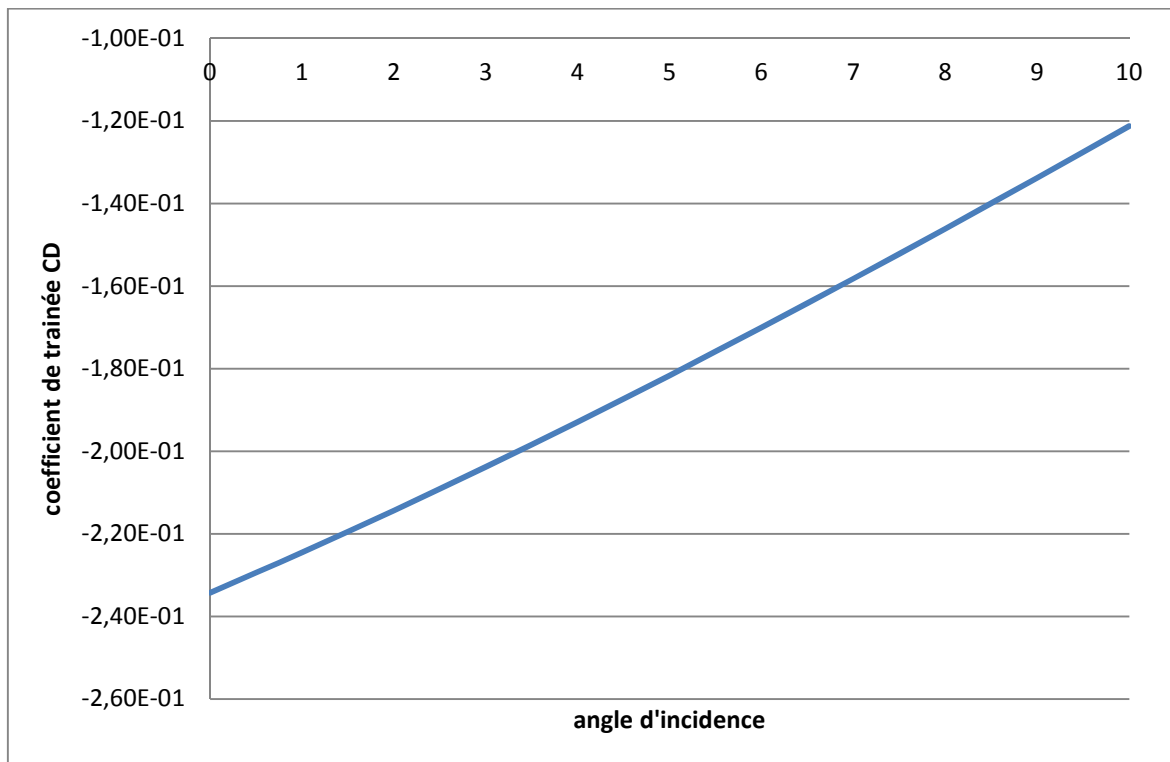


**Figure 4.68** : Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)

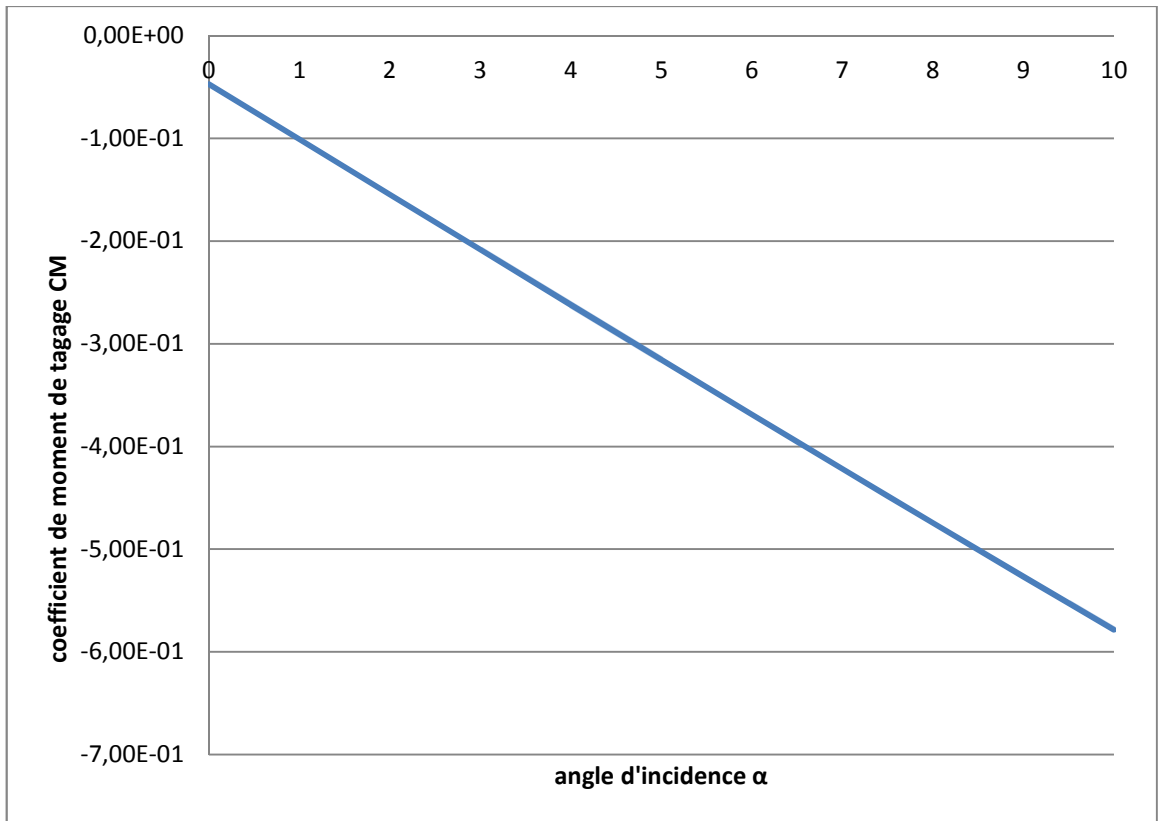




**Figure 4.69** : Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence(APAME)



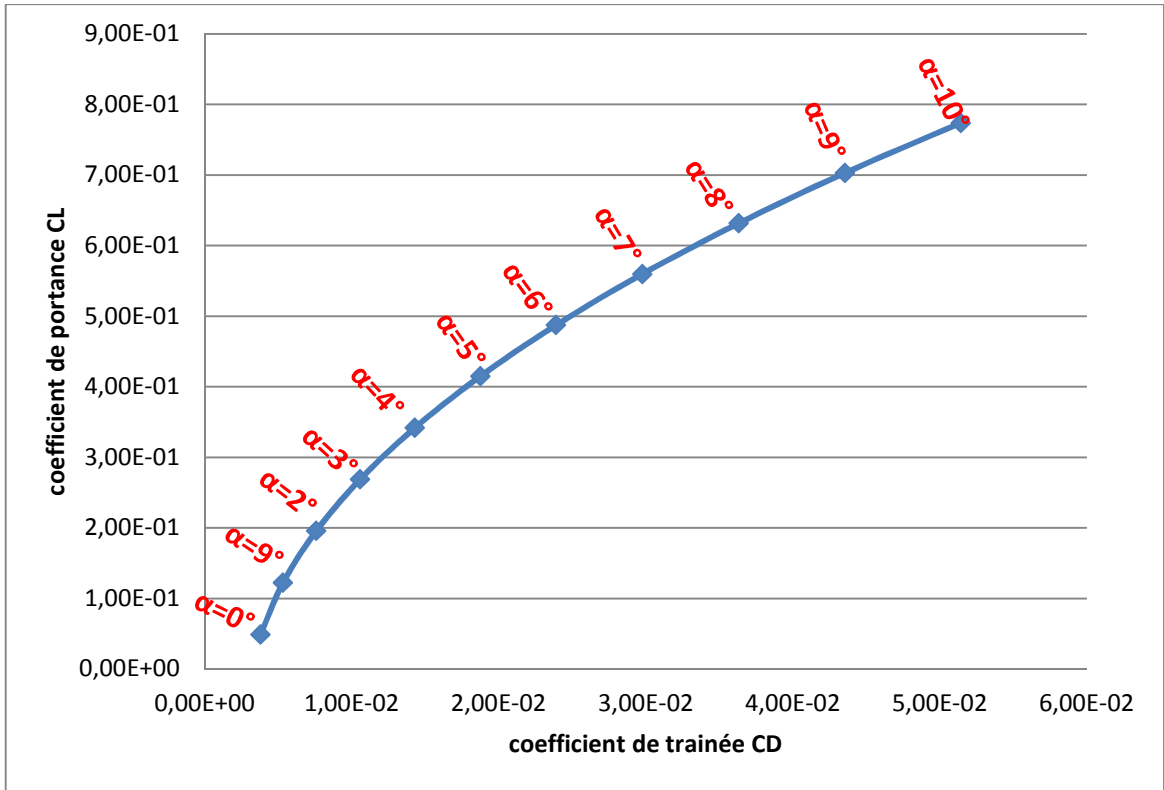
**Figure 4.70** : Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



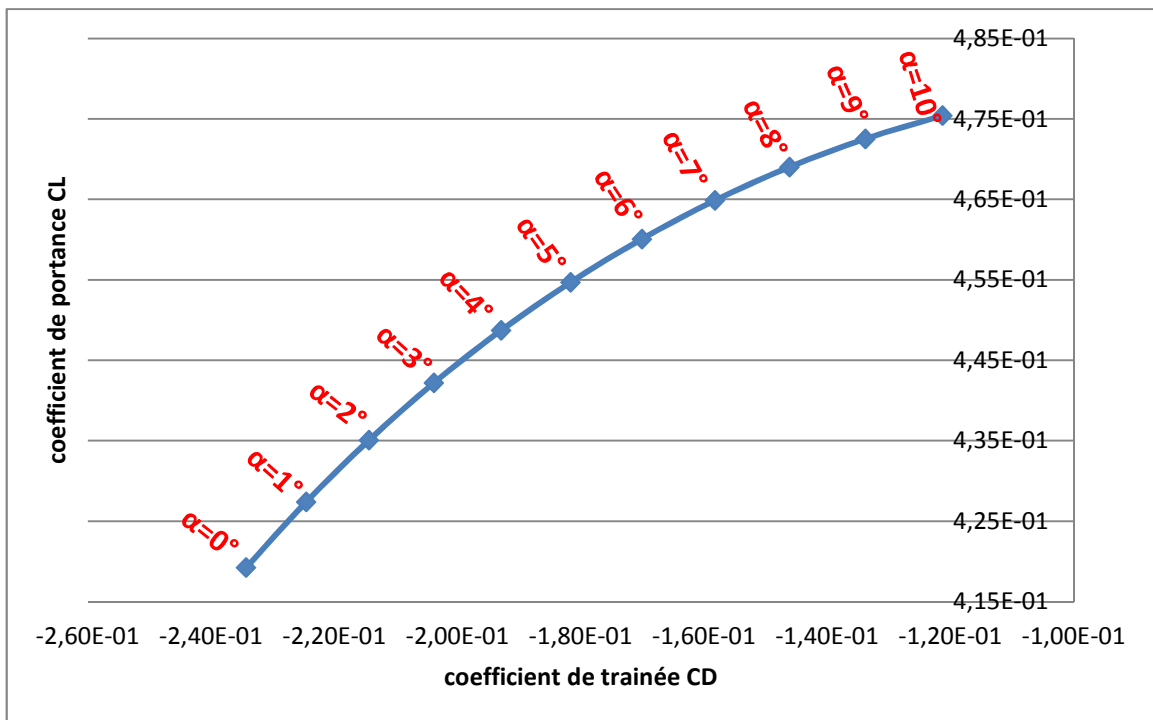
**Figure 4.71** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



**Figure 4.72** : Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)

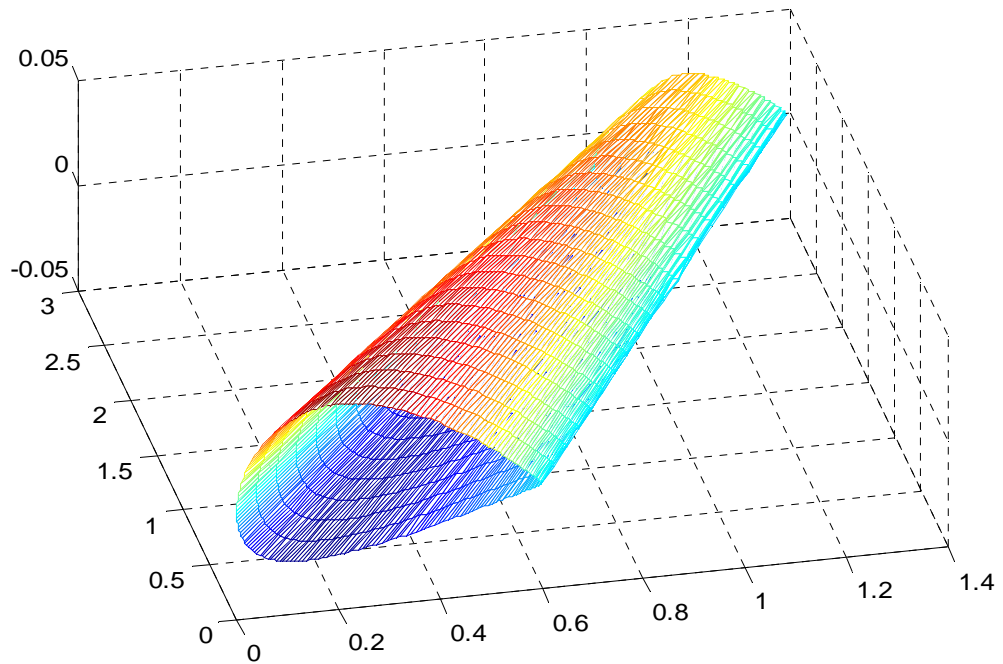


**Figure 4.73 :** La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 75% (APAME)

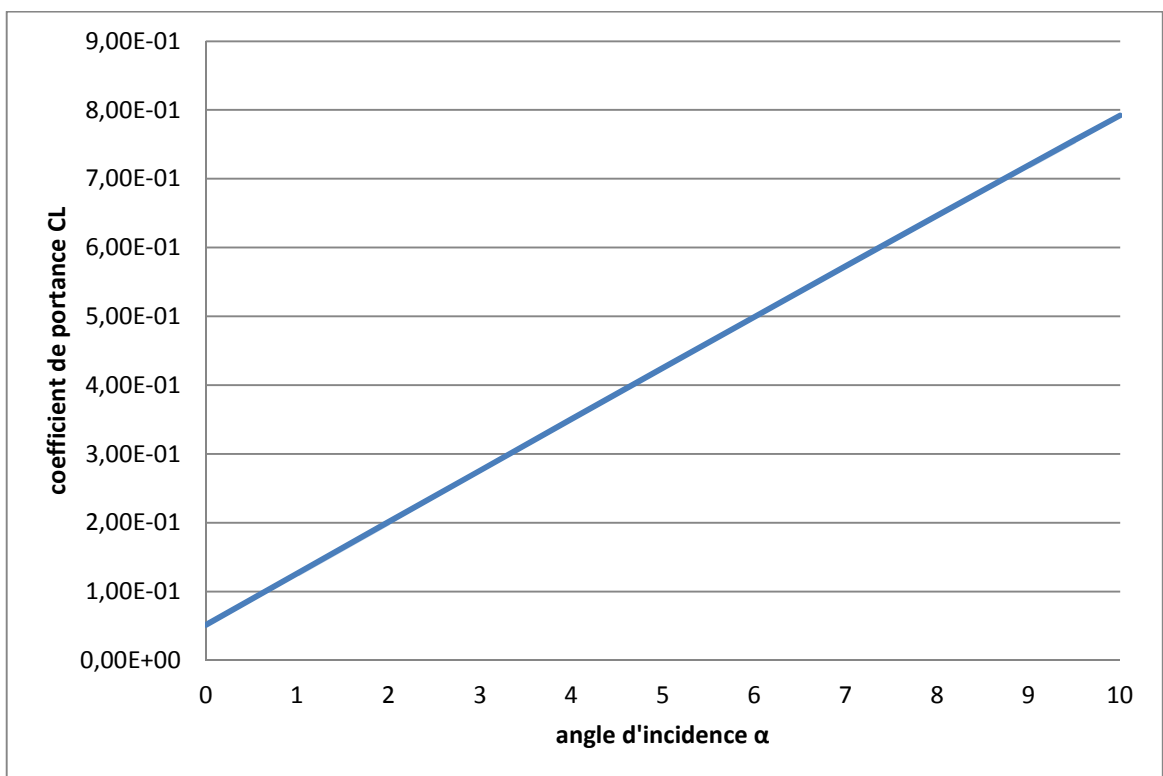


**Figure 4.74 :** La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 10° et effilement de 75% (notre programme)

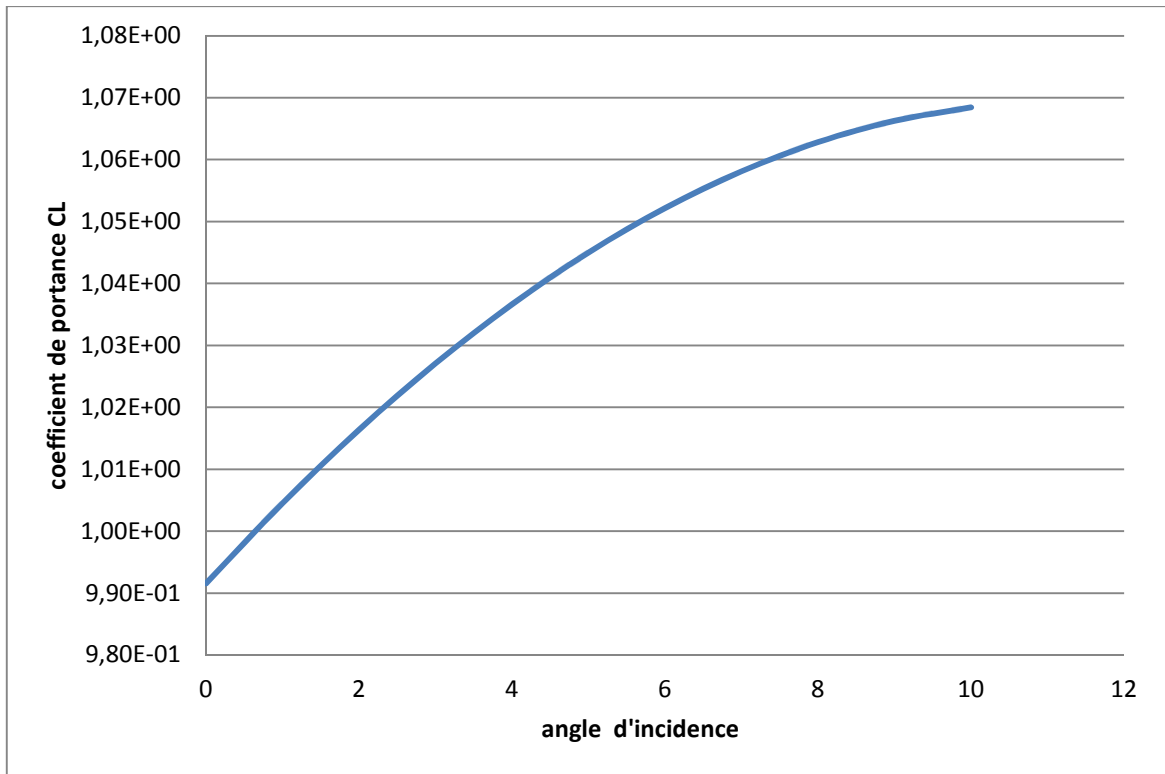
#### 4.1.2.4.3 Aile naca2412 avec flèche de 20° et effilement de 50% :



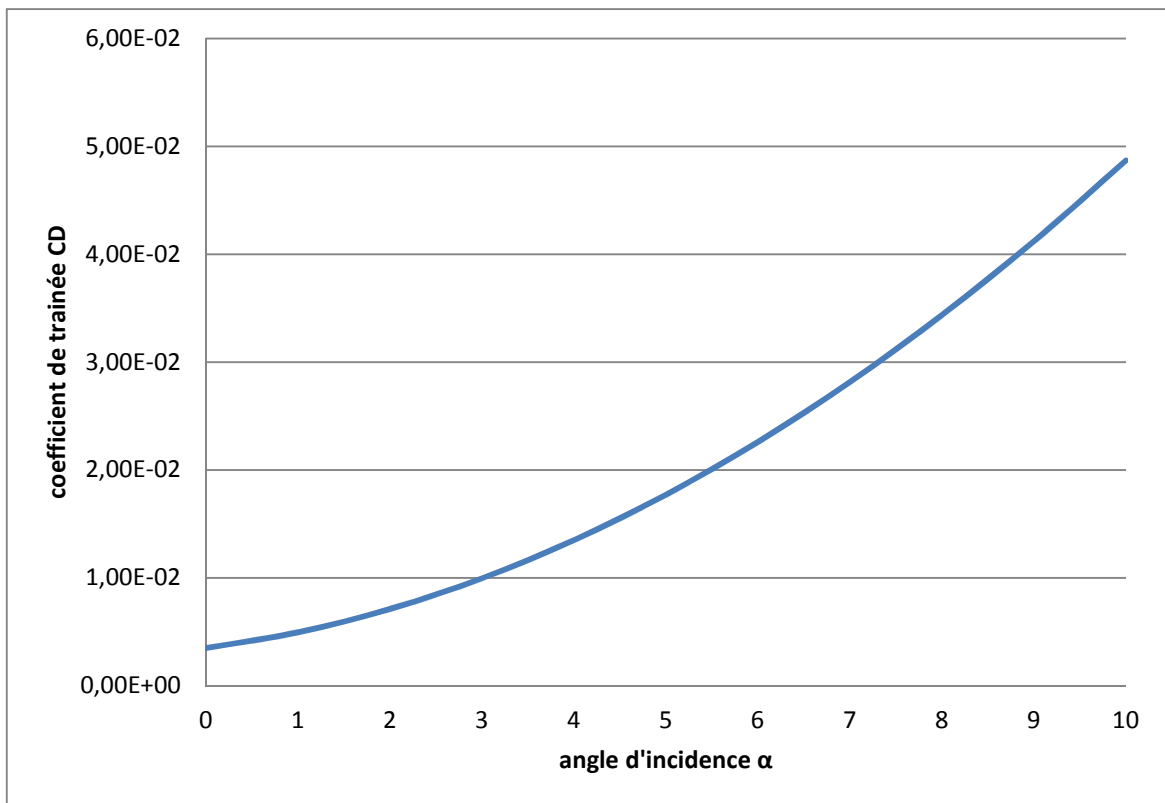
**Figure 4.75** : Aile naca2412 avec flèche de 20° et effilement de 50%



**Figure 4.76** : Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



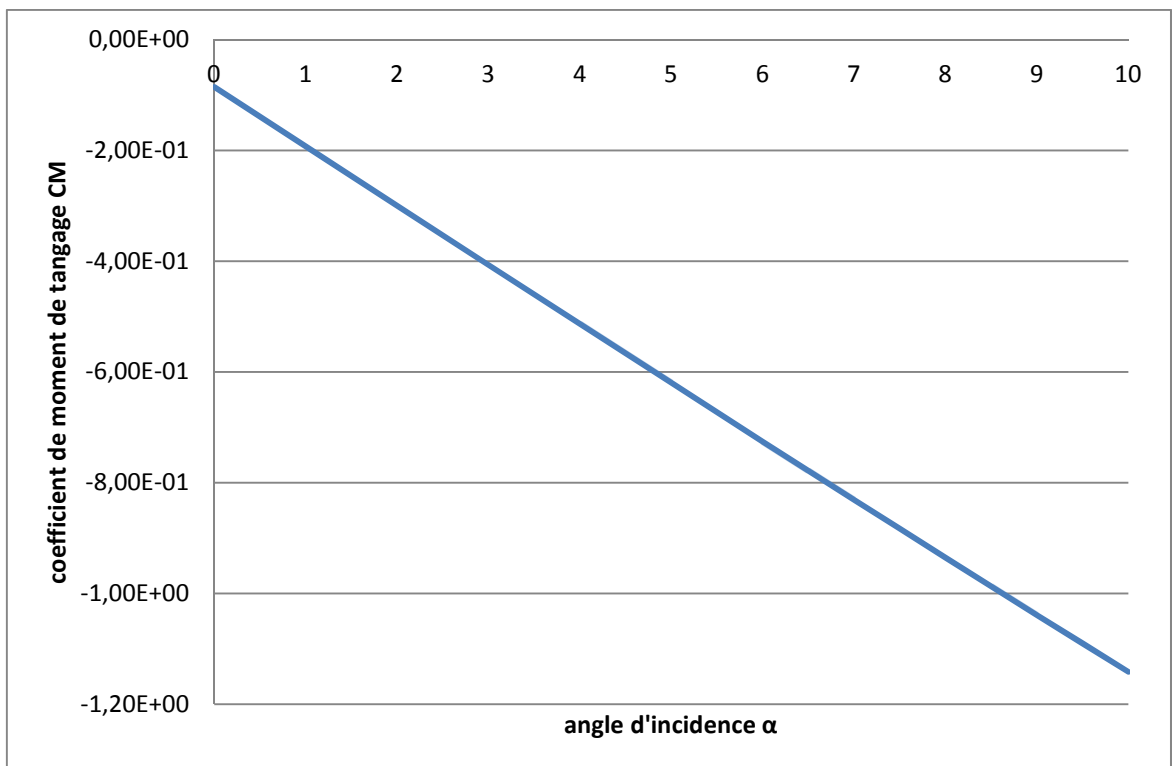
**Figure 4.77** : Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



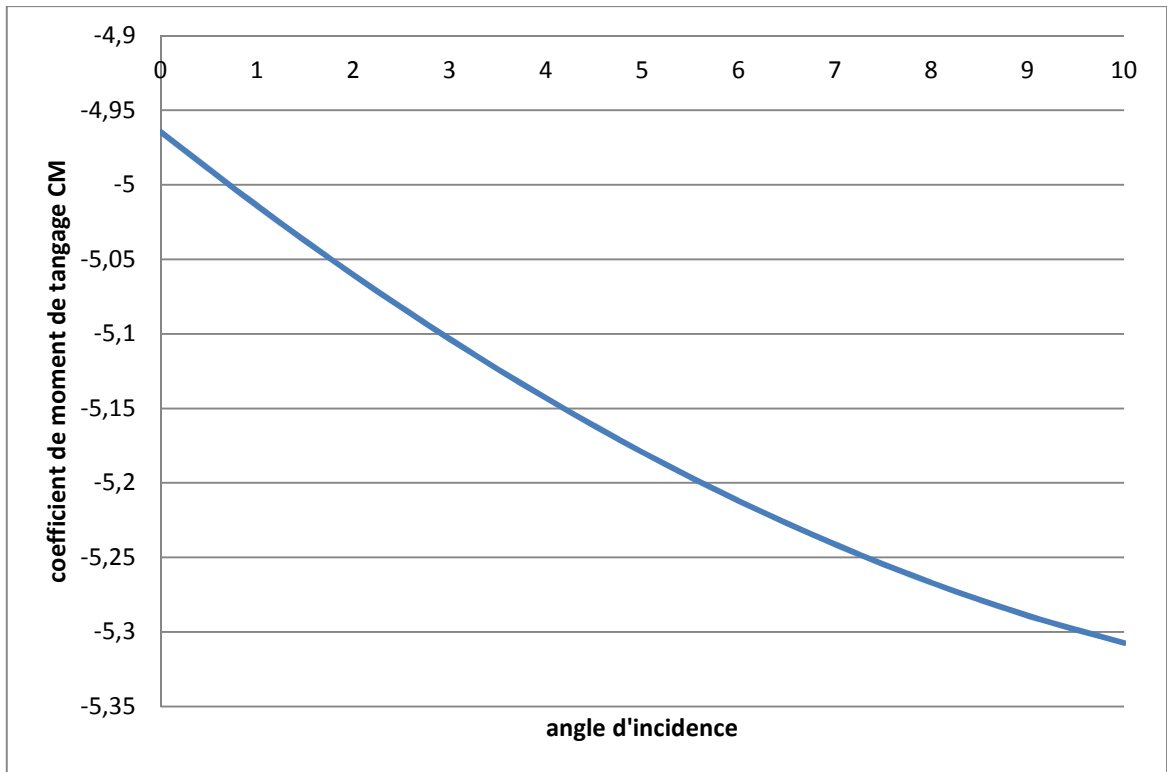
**Figure 4.78** : Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



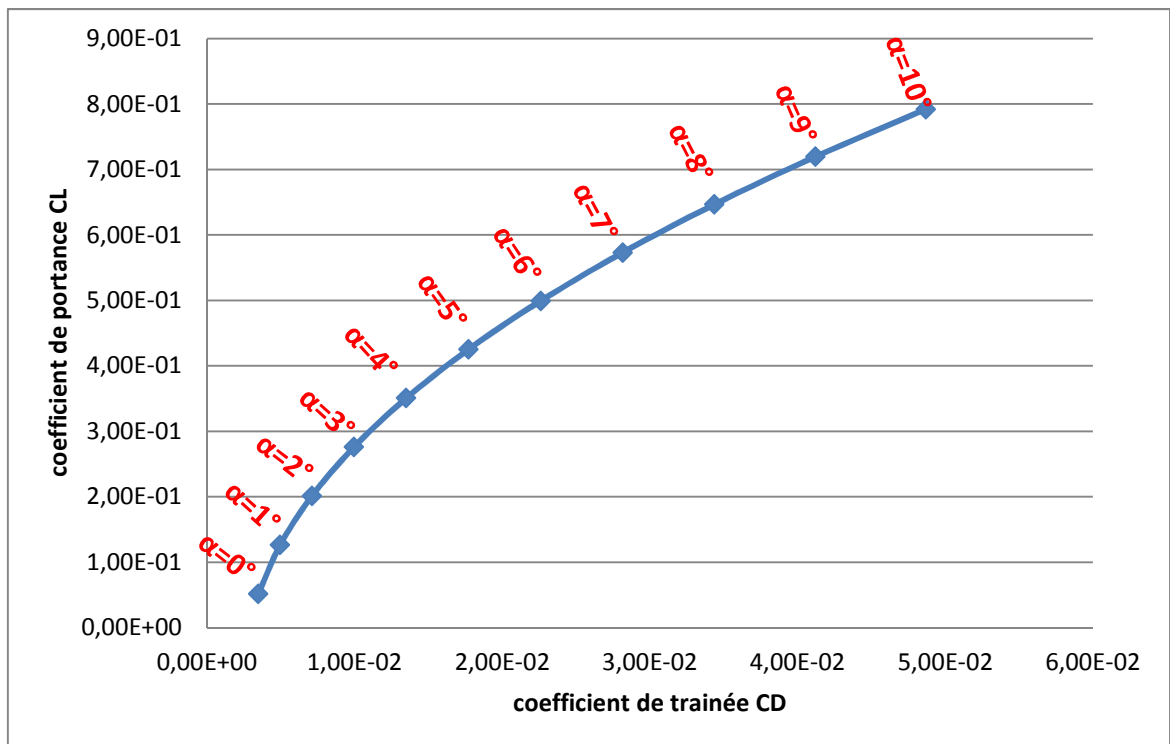
**Figure 4.79 :** Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



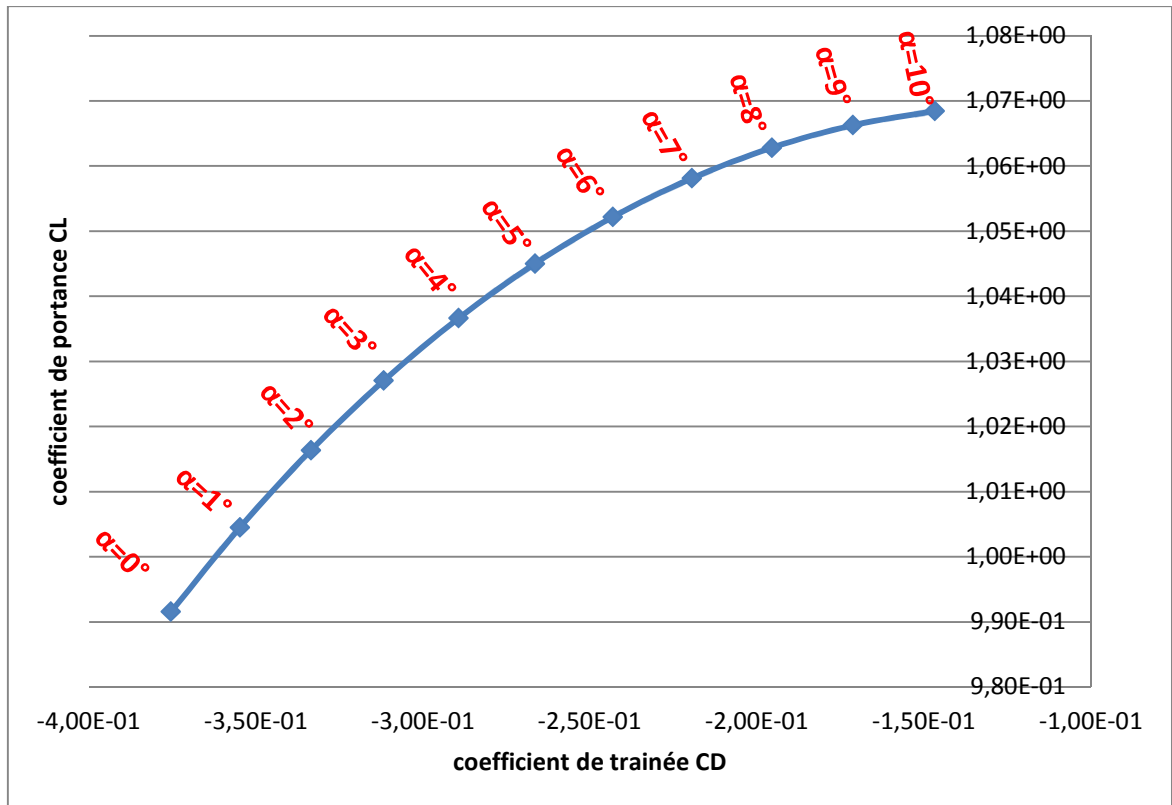
**Figure 4.80 :** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



**Figure 4.81** : Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)

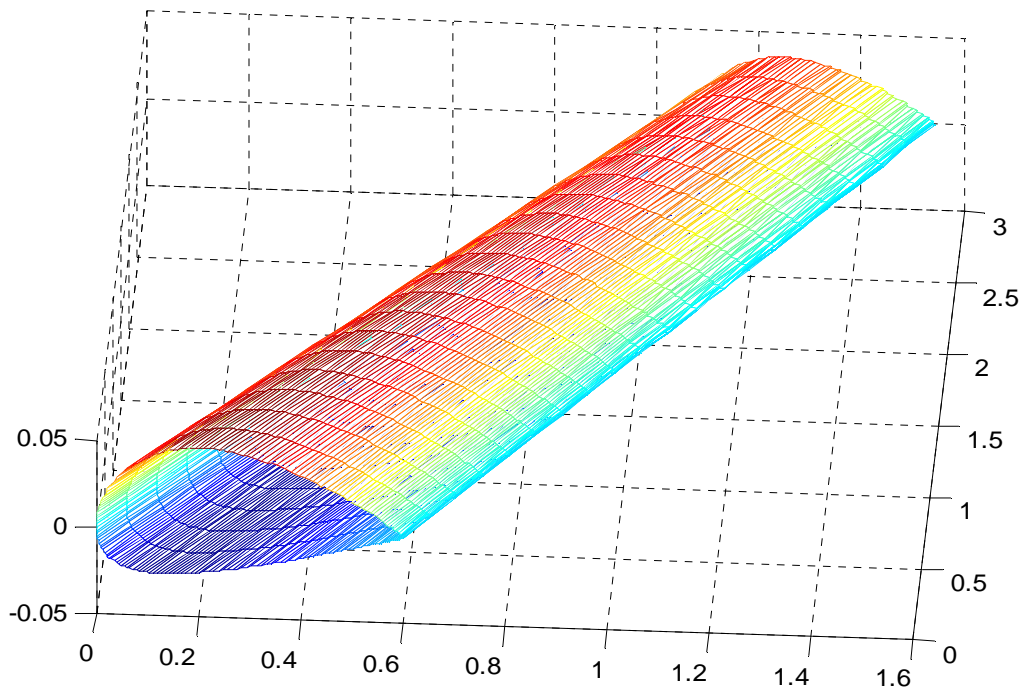


**Figure 4.82** : La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 20° et effilement de 50% (APAME)



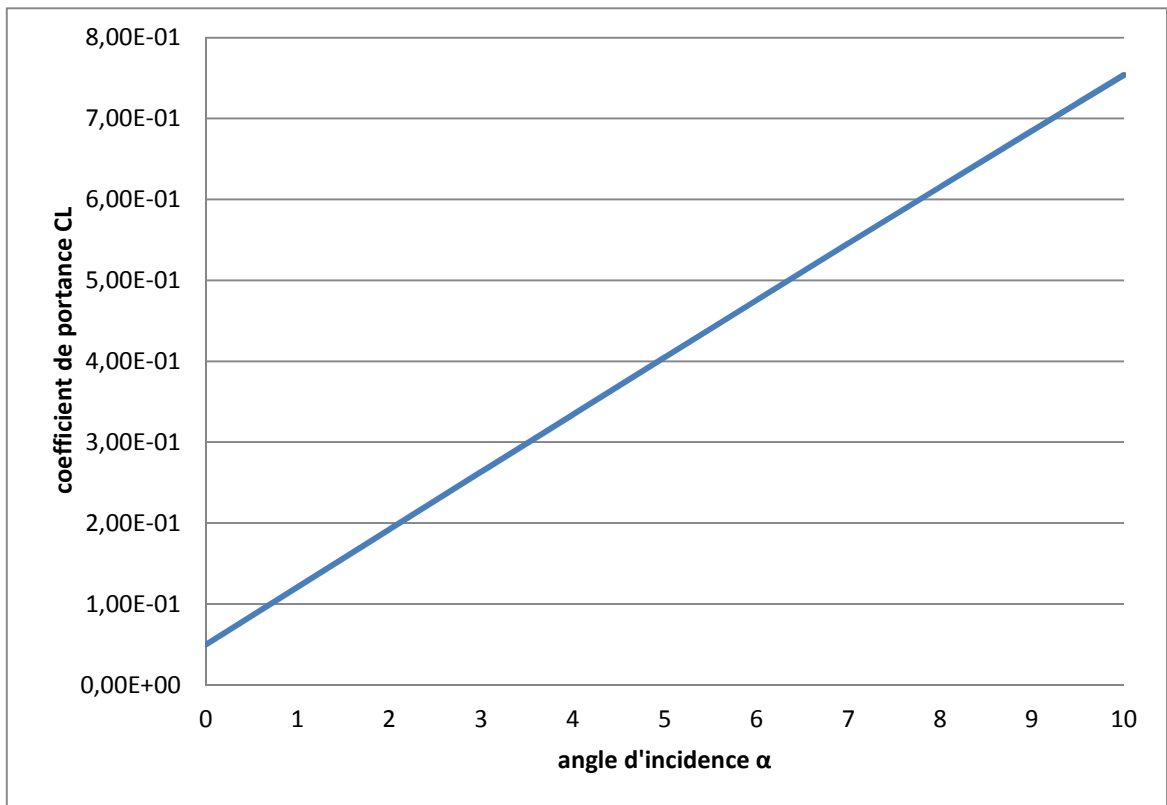
**Figure 4.83** : La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 20° et effilement de 50% (notre programme).

#### 4.1.2.4.4 Aile naca2412 avec flèche de 20° et effilement de 75% :

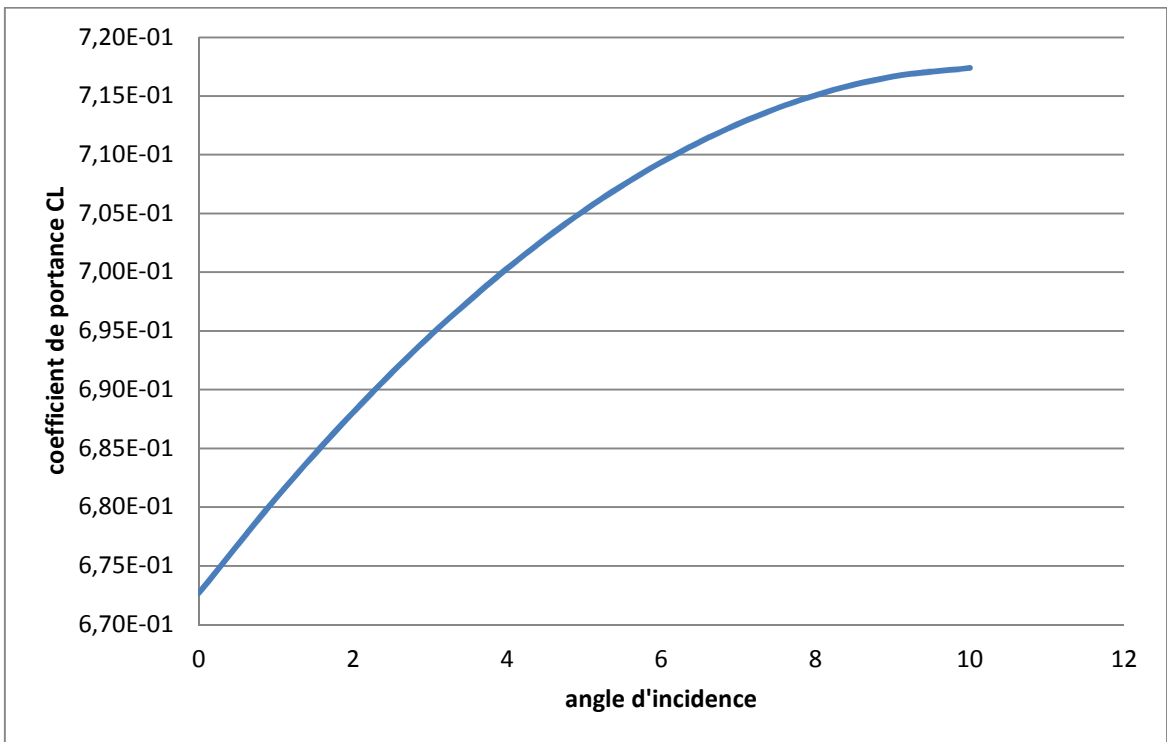


**Figure 4.84** : Aile naca2412 avec flèche de 20° et effilement de 75%

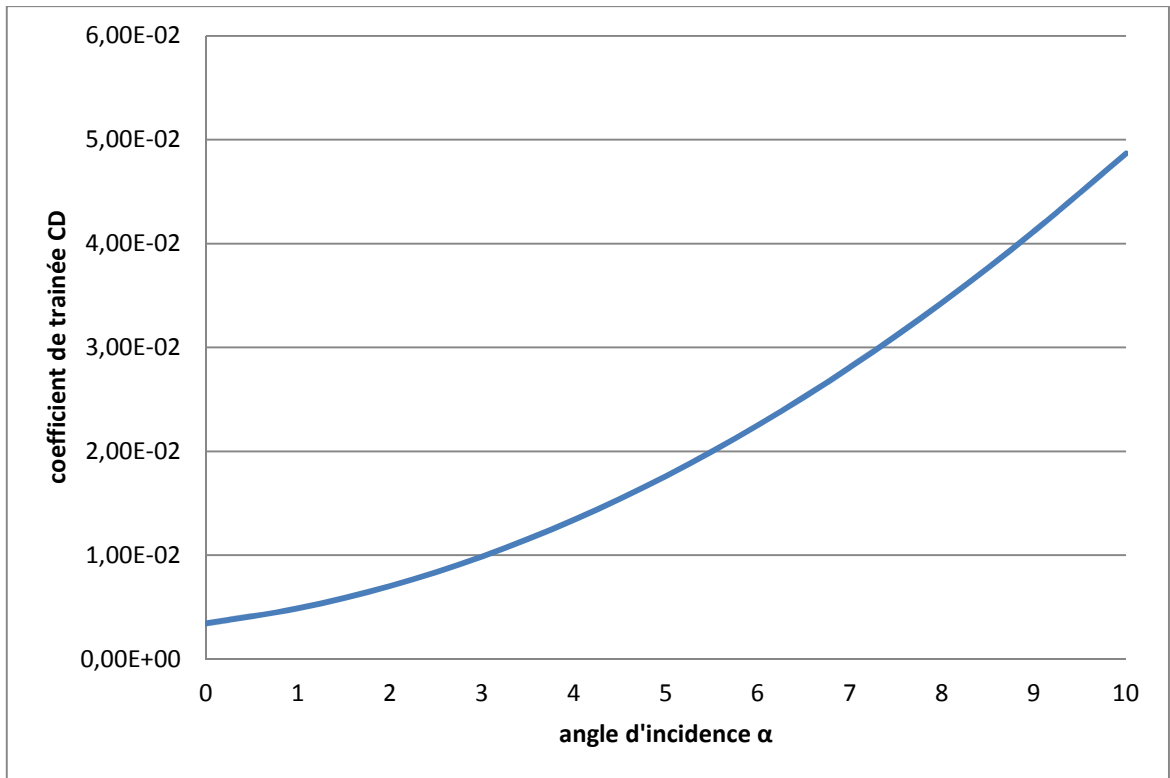




**Figure 4.85 :** Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



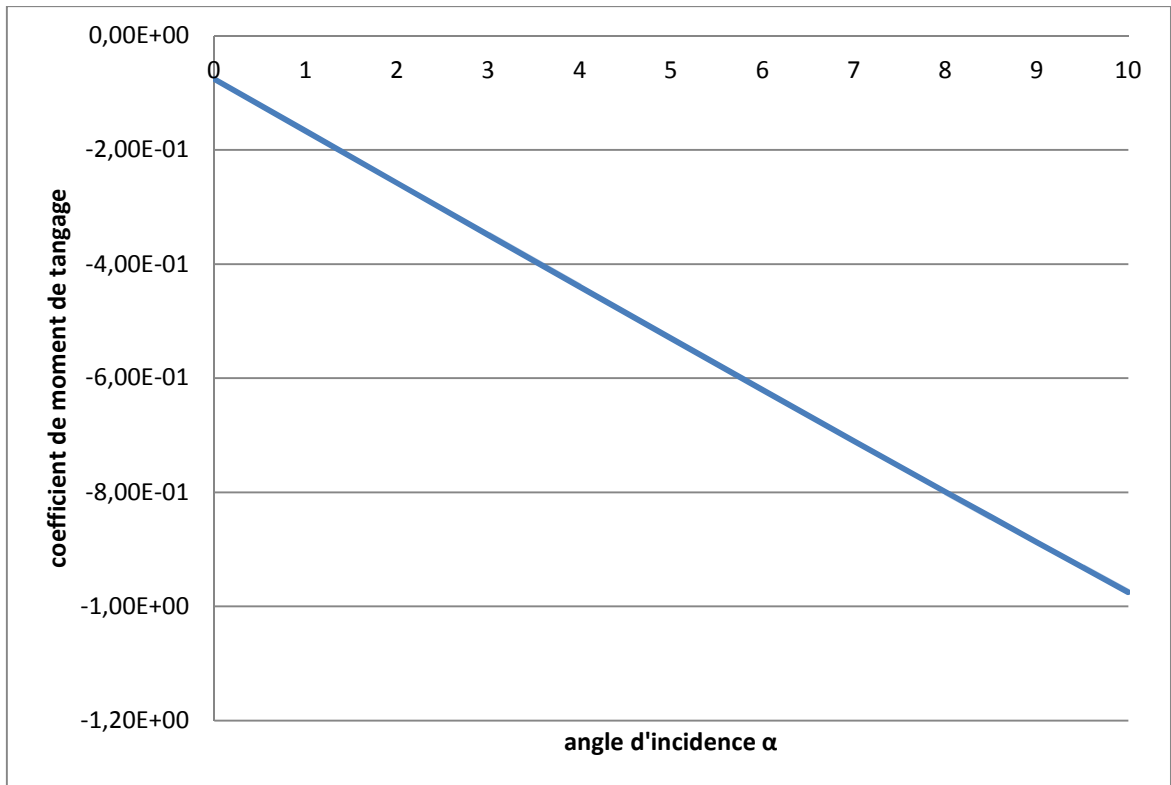
**Figure 4.86 :** Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



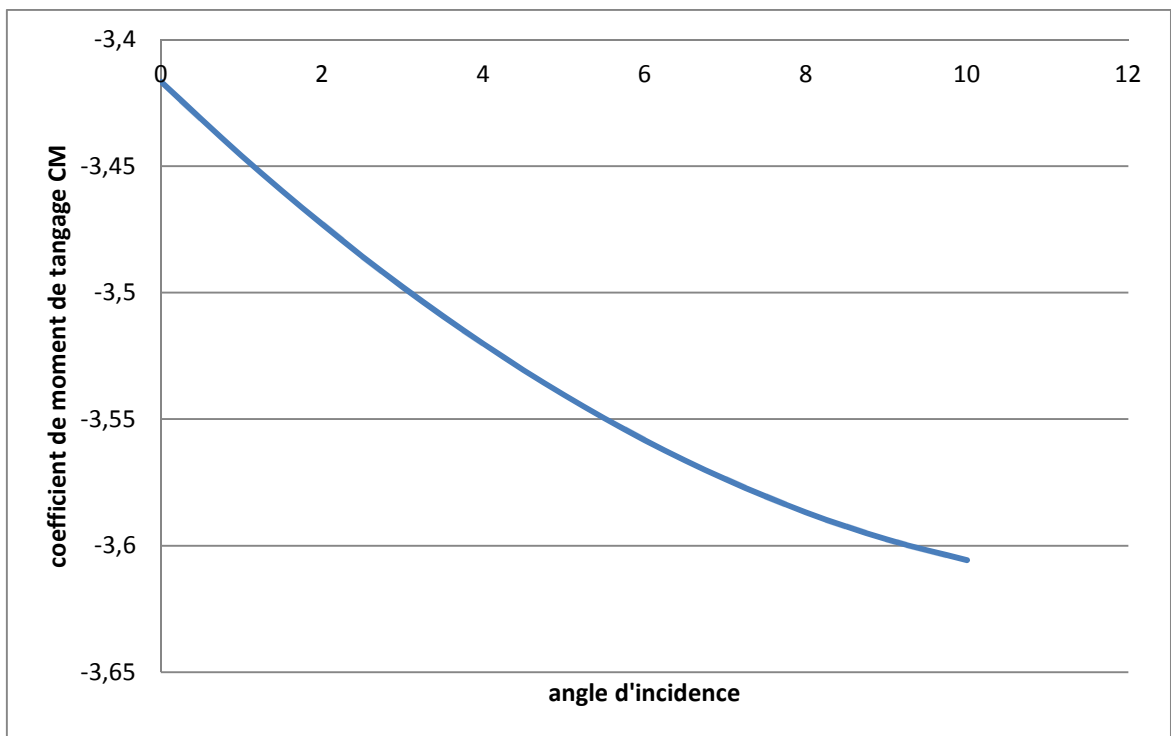
**Figure 4.87** Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



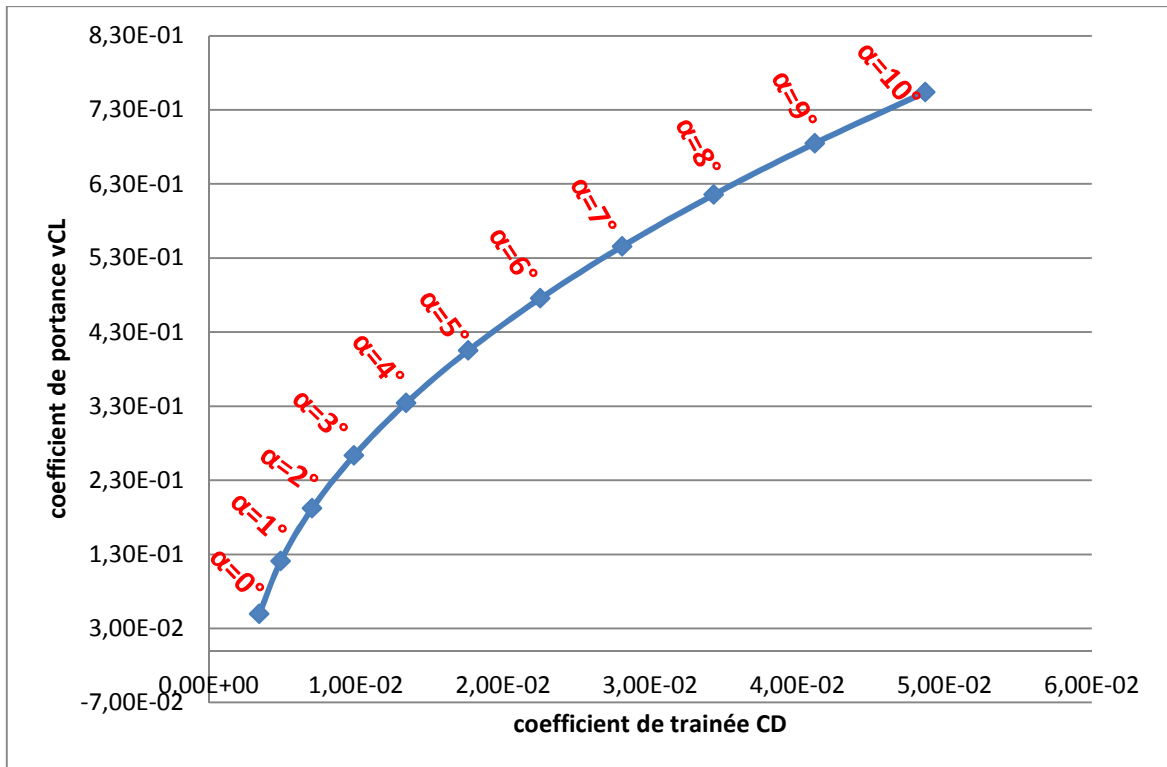
**Figure 4.88** : Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



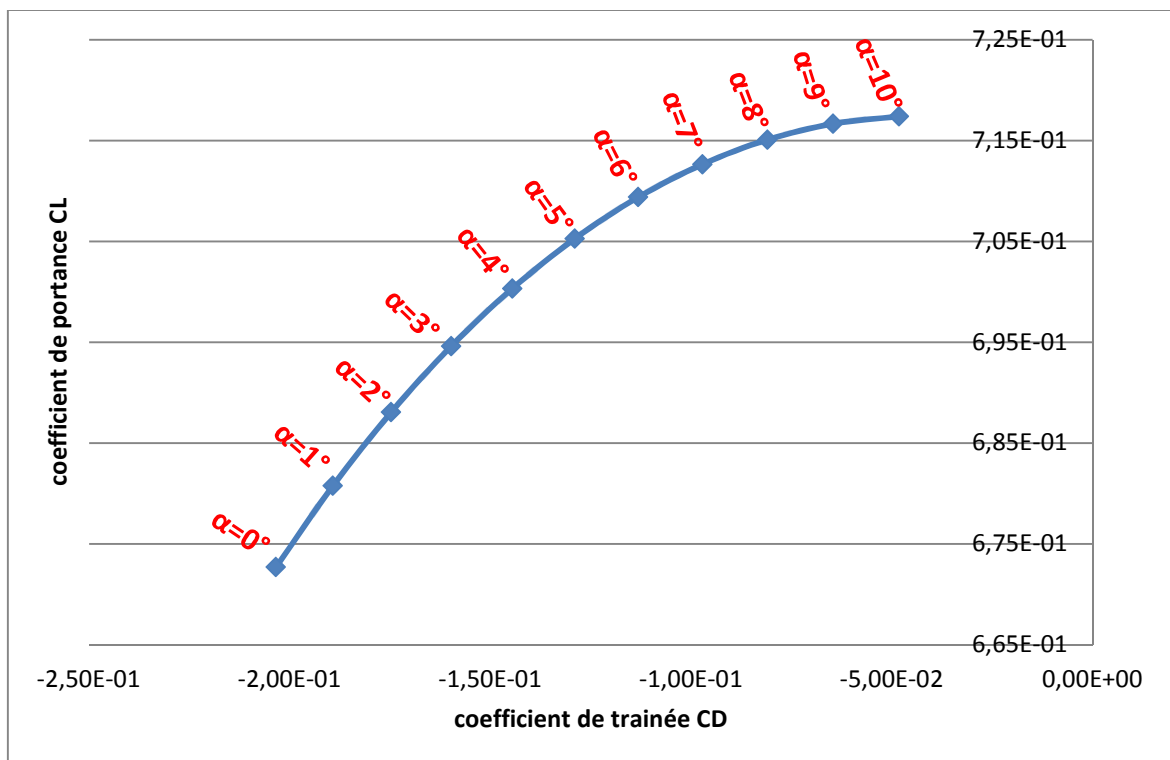
**Figure 4.89 :** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (APAME)



**Figure 4.90 :** Coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (notre programme)



**Figure 4.91** : La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 20°et effilement de 75% (APAME)



**Figure 4.92** : La polaire de l'aile naca2412 avec flèche de 20°et effilement de 75% (notre programme)

#### 4.1.2.5 Interprétation des résultats :

En aérodynamique la portance et la trainée augmentent avec l'incidence mais avec des valeurs positives, concernant les résultats obtenus par notre code cette expression n'est pas totalement vérifiée et ceci est clair dans les valeurs de trainée où elles sont négatives.

A fin d'obtenir la configuration aile naca2412 la plus adaptée qui correspond à un maximum de portance et un minimum de trainée, une comparaison entre les différentes configuration aile simulé précédemment est montrée dans le tableau suivant (tableau 4.1) pour un angle d'incidence de 10°, et puisque les résultats obtenus par notre code sont incomparable en terme de trainée la comparaison sera basée sur les résultats de APAME:

**Tableau 4.1** : Comparaison des résultats

La configuration	Les coefficients aérodynamiques	Le code APAME	Notre code
Aile rectangulaire	CL	0.747	0.437
	CD	0.0517	-0.0728
Aile rectangulaire avec flèche de 10°	CL	0.736	0.18
	CD	0.0507	-0.056
Aile rectangulaire avec flèche de 20°	CL	0.715	0.15
	CD	0.049	-0.0502
Aile avec effilement de 50%	CL	0.812	0.39
	CD	0.0509	-0.0827
Aile avec effilement de 75%	CL	0.776	0.179
	CD	0.0517	-0.0784
Aile avec flèche de 10° et effilement de 50%	CL	0.808	1.28
	CD	0.0511	-0.157
Aile avec flèche de 10° et effilement de 75%	CL	0.774	0.475
	CD	0.0514	-0.121
Aile avec flèche de 20° et effilement de 50%	CL	0.792	1.068
	CD	0.0487	-0.147
Aile avec flèche de 20° et effilement de 75%	CL	0.754	0.717
	CD	0.0487	-0.0482

D'après le tableau (4.1) on constate que la forme de la géométrie influe sur les paramètres aérodynamiques tels que la portance et la trainée. La configuration la plus adaptée est celle qui a une flèche de  $20^\circ$  et un effilement de 50% puisque la trainée est minimale et la valeur de la portance est importante.

#### 4.2 Simulation d'un avion :

##### 4.2.1 Description de la configuration sélectionnée :

Afin d'évaluer le programme de la méthode de panneaux en trois dimensions, une configuration d'un avion a été choisie et qui sera analysée dans la méthode de panneaux en trois dimensions, les caractéristiques de cet avion est montrés dans le tableau (4.2).

L'avion est de configuration classique avec la position de l'aile est au milieu, aile en flèche et empennage de forme T.

**Tableau 4.2 :** Les caractéristiques géométriques de la configuration avion sélectionnée

Longueur de l'avion	45.69 m
L'envergure de l'aile	42.40 m
La hauteur de l'avion	12.91 m
La surface de référence de l'aile	222 m <sup>2</sup>
La corde à l'emplanture de l'aile	7.35 m
La corde à l'extrémité de l'aile	2.60 m
La corde aérodynamique moyenne	6.00 m
La flèche de voilure	15.5°
Le dièdre de l'aile	-4.65 °
Angle de vrillage	-2.00 °
Profil à l'emplanture	NACA65415
Profil à l'extrémité	NACA65015
L'allongement de l'aile	8.52
La largeur de fuselage	6.00 m
La hauteur de fuselage	5.00 m
La hauteur de l'empennage vertical	7.59 m
La corde à l'emplanture de l'empennage vertical	6.65 m
La corde à l'extrémité de l'empennage vertical	5.29 m
La flèche de l'empennage vertical	33 °
Profil de l'empennage vertical	NACA65012
La corde à l'emplanture de l'empennage horizontal	5.29 m
La corde à l'extrémité de l'empennage horizontal	2.18 m
L'envergure de l'empennage horizontal	19.12 m
La flèche de l'empennage horizontal	32°
Profil de l'empennage horizontal	NACA65012

La configuration choisie est similaire à la configuration des turbopropulseurs modernes Airbus A400M du transport militaire avec la différence que l'aile est déplacée de la position haute à la position médiane par rapport au fuselage.

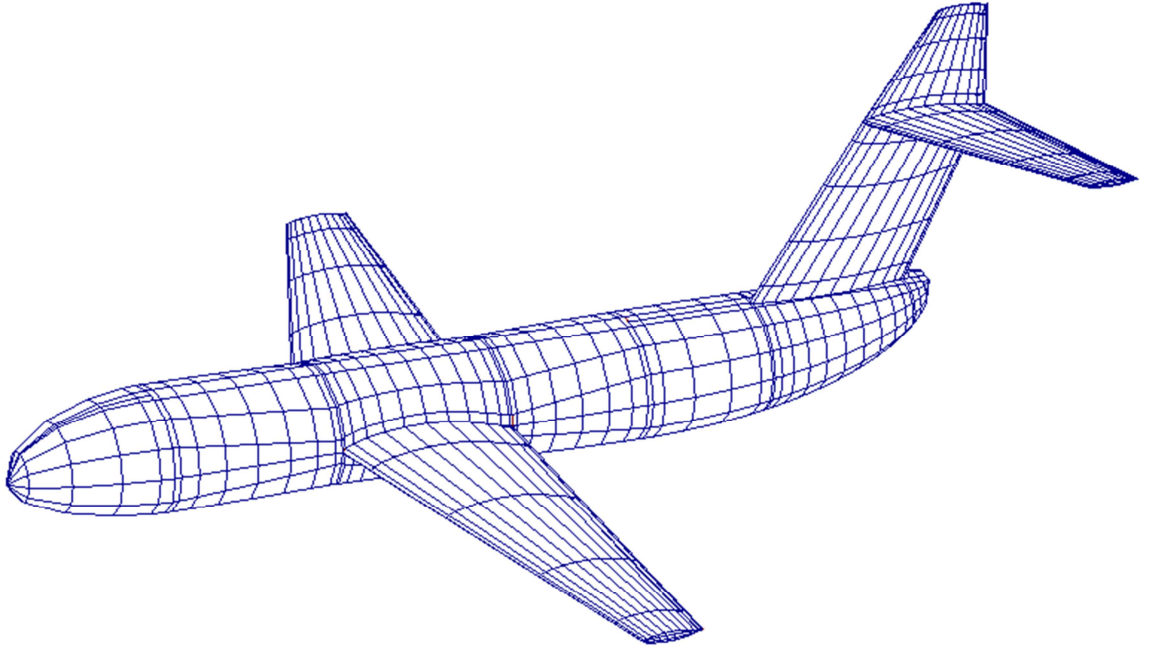


**Figure 4.93** : Trois projections de la configuration avion sélectionnée

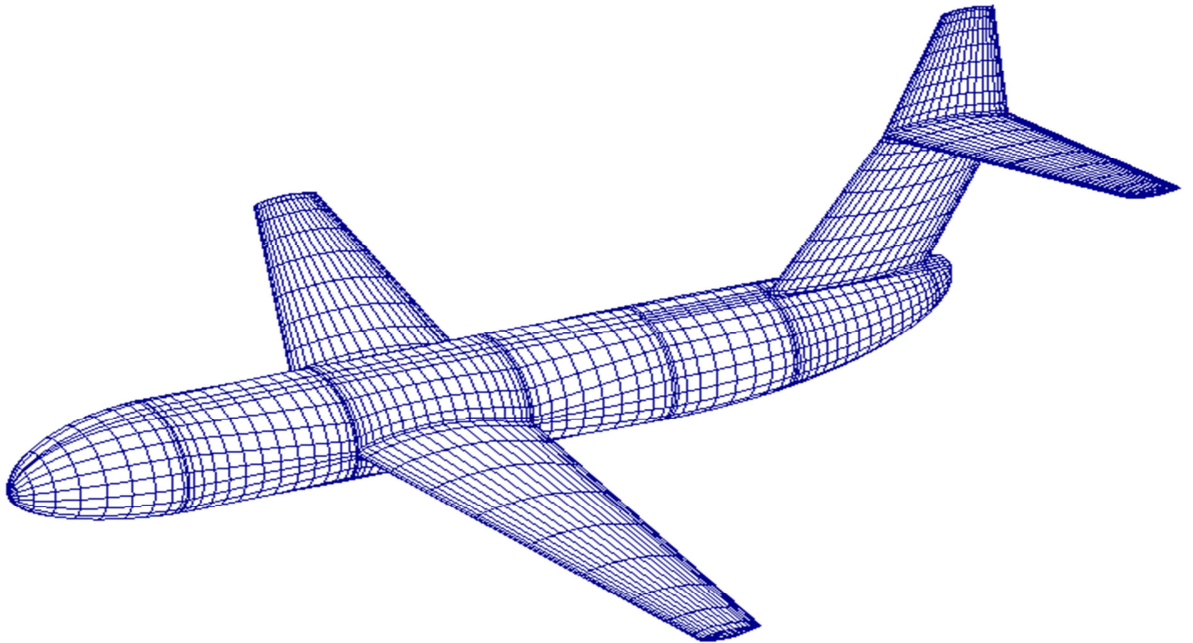


#### 4.2.2 Discrétisation de la géométrie:

La configuration est discrétisé en panneaux quadrilatère avec un maillage fin aux bords.



**Figure 4.94 :** Avion avec un maillage de 1554 panneaux.



**Figure 4.95 :** Avion avec un maillage de 4732 panneaux.

Basée sur les résultats obtenus précédemment, le maillage est un paramètre très important alors la prochaine simulation est faite sur l'avion à 4732 panneaux.

#### 4.2.3 Comparaison des résultats :

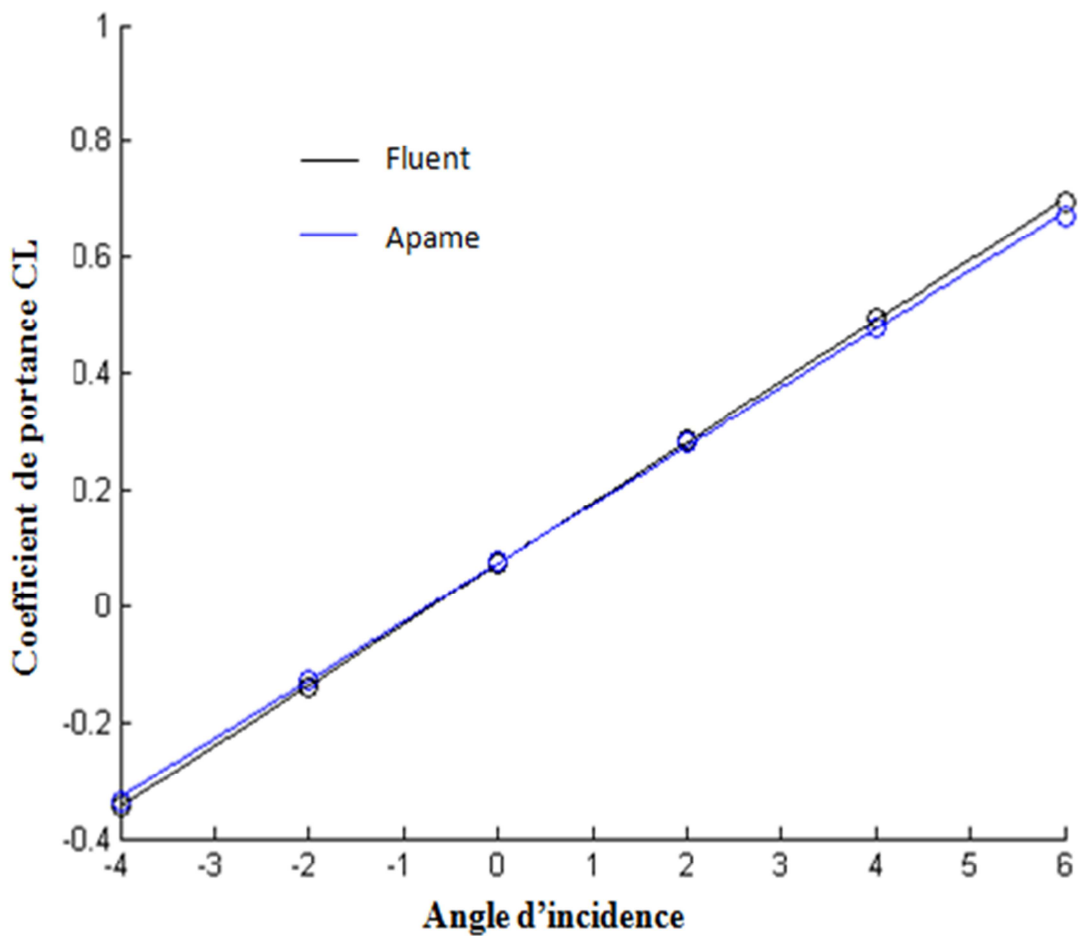
L'analyse a été effectuée pour une plage d'angles d'attaque de 0 à 10 degrés avec un pas de 1 degré et un angle de dérapage fixe et égale à 0 degré. Dans le tableau suivant (Tableau 4.3) les résultats pour un angle d'attaque de zéro degré sont affichés (en forme de coefficients aérodynamiques) et leur différence en pourcentage.

**Tableau 4.3** : Les coefficients aérodynamiques en Fluent, Apame et notre programme

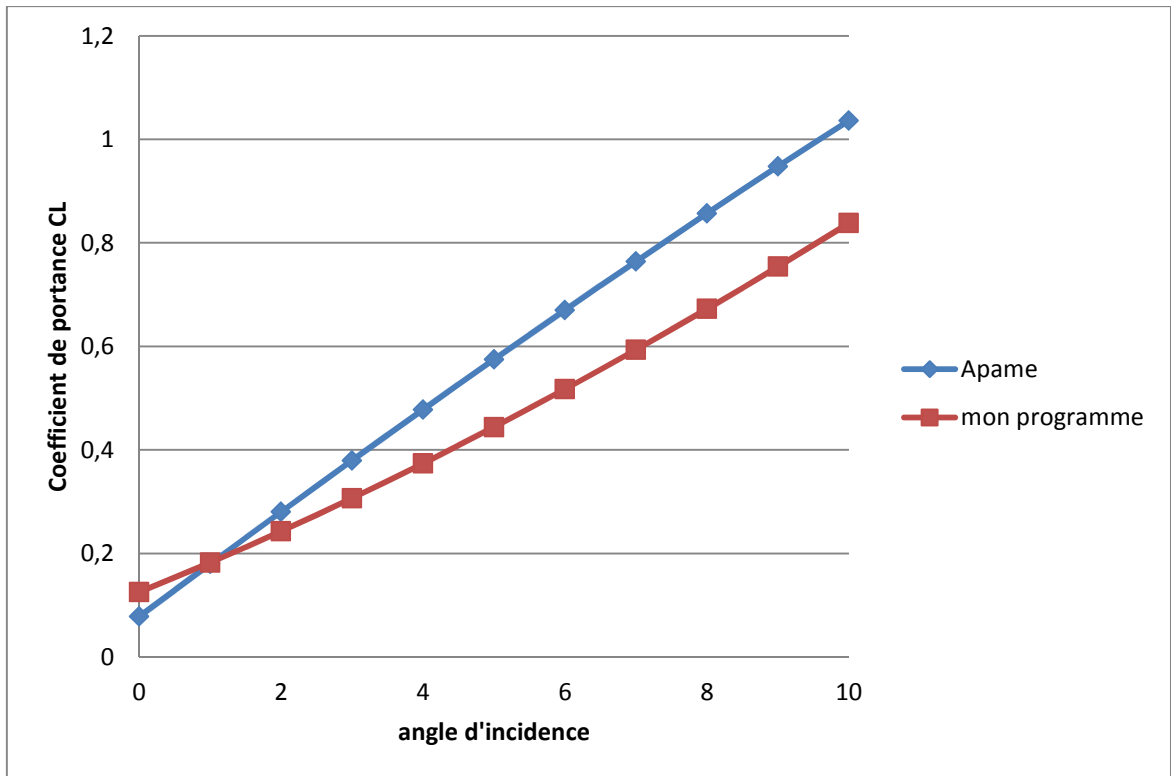
	Les coefficients aérodynamiques	Fluent	Apame	Différence par rapport à fluent	Notre programme	Différence par rapport à fluent
Angle d'incidence $\alpha = 0^\circ$	Coefficient de portance CL	0.0725	0.0783	8%	0.1254	72.96%
	Coefficient de traînée CD	0.0231	-0.0021	/	0.0032	/
	Coefficient de moment de tangage	0.0471	0.022	-46.7%	-0.2856	/
Angle d'incidence $\alpha = 4^\circ$	Coefficient de portance CL	0.4821	0.4779	-0.8%	0.3739	-22.44%
	Coefficient de traînée CD	0.0342	0.0198	-42.1%	0.0199	-62.18%
	Coefficient de moment de tangage	-0.272	-0.2006	-73.75%	-1.0491	/

Les résultats de Fluent sont obtenus à partir de la référence [2]. Le tableau (4.3) montre que les résultats obtenus par le code Apame sont mieux que ceux obtenus par notre programme précisément le coefficient de portance où il est très proche de fluent, les autres coefficients sont incomparable.

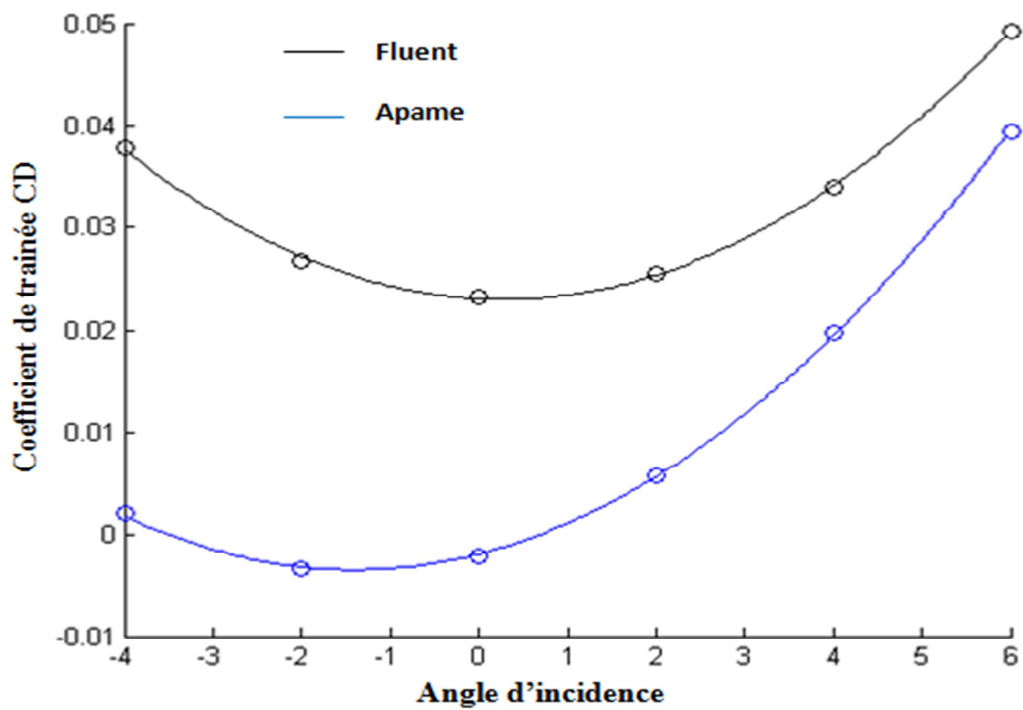
Pour mieux voir la variation de ces coefficients en fonction de l'angle d'attaque, on vous présente les diagrammes suivants :



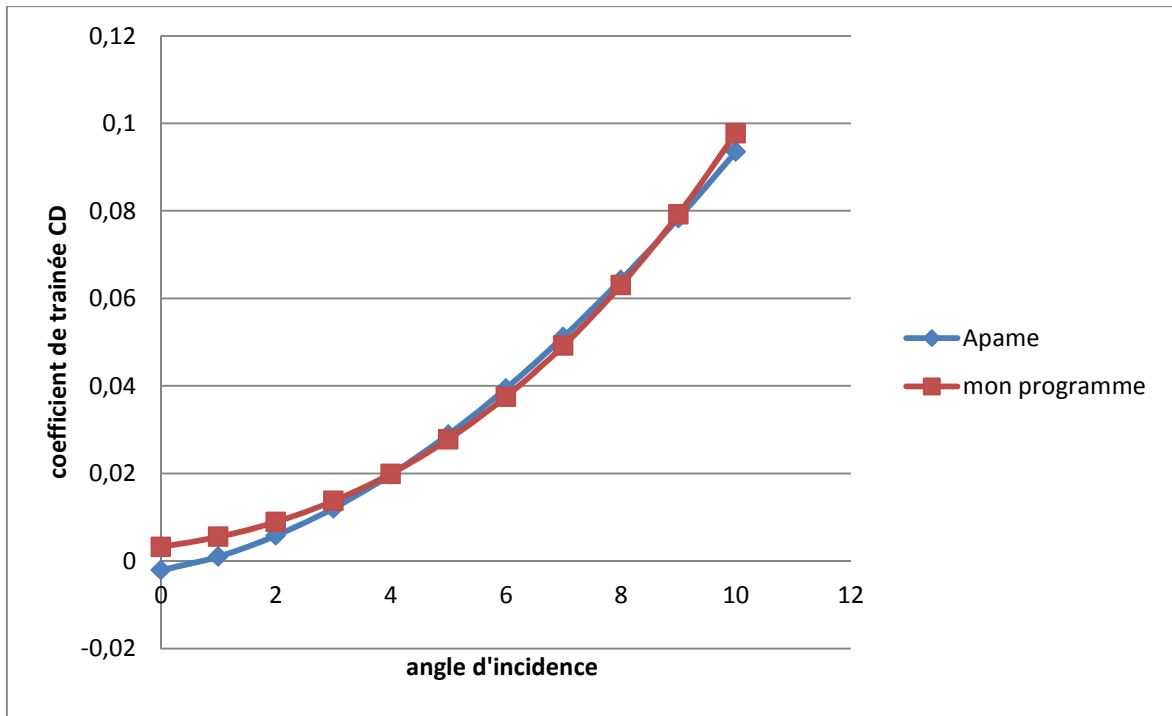
**Figure 4.96 :** Variation de coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (résultats obtenus par Fluent et Apame) [2]



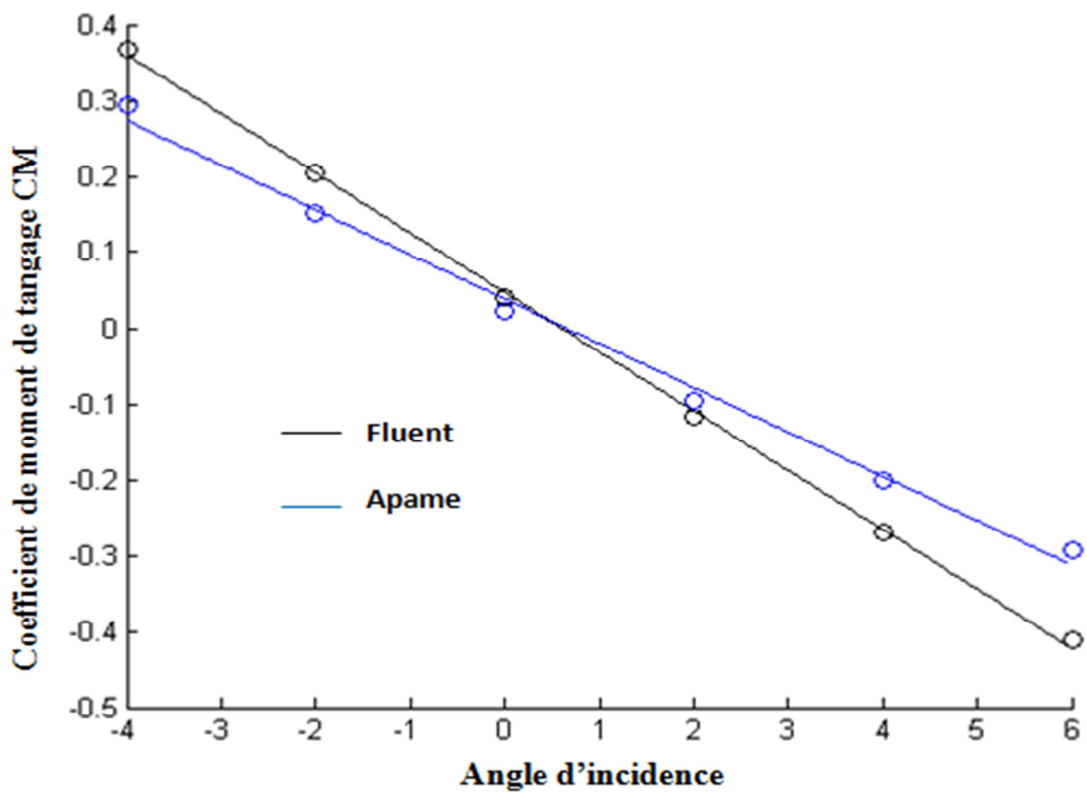
**Figure 4.97 :** Variation de coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence (résultats obtenus par notre programme et Apame)



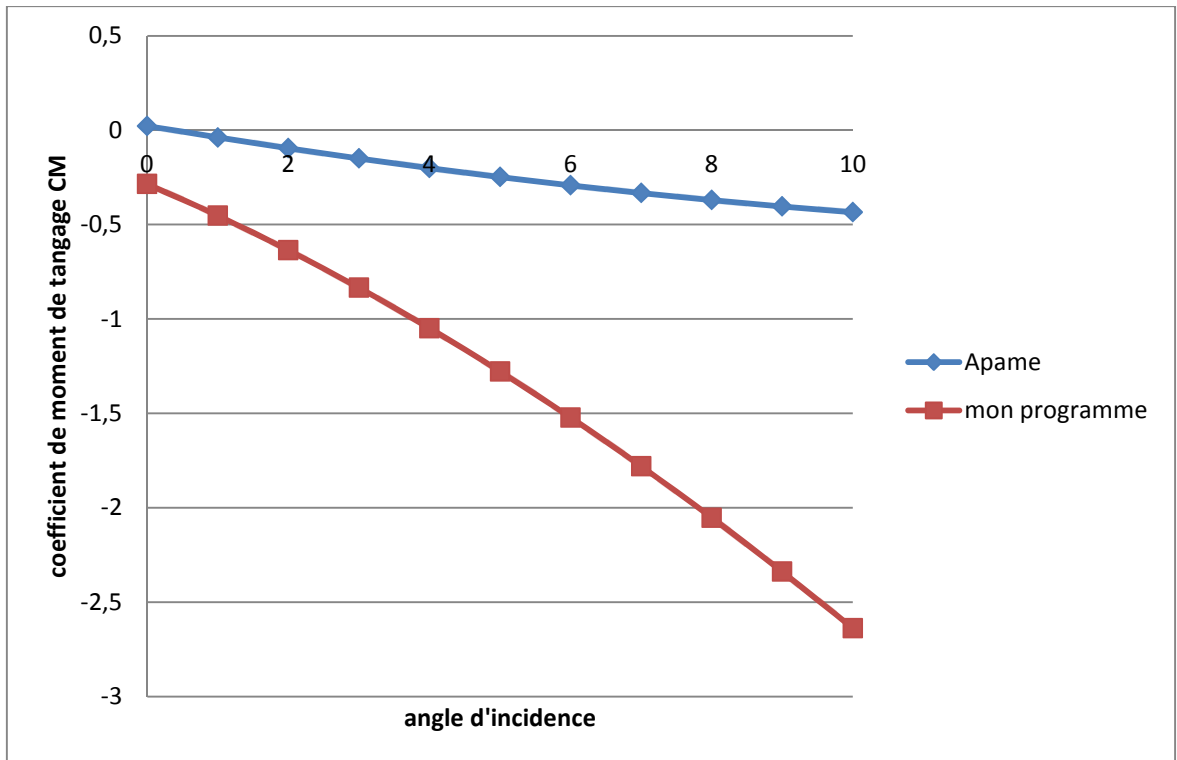
**Figure 4.98 :** Variation de coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (résultats obtenus par Fluent et Apame)[2]



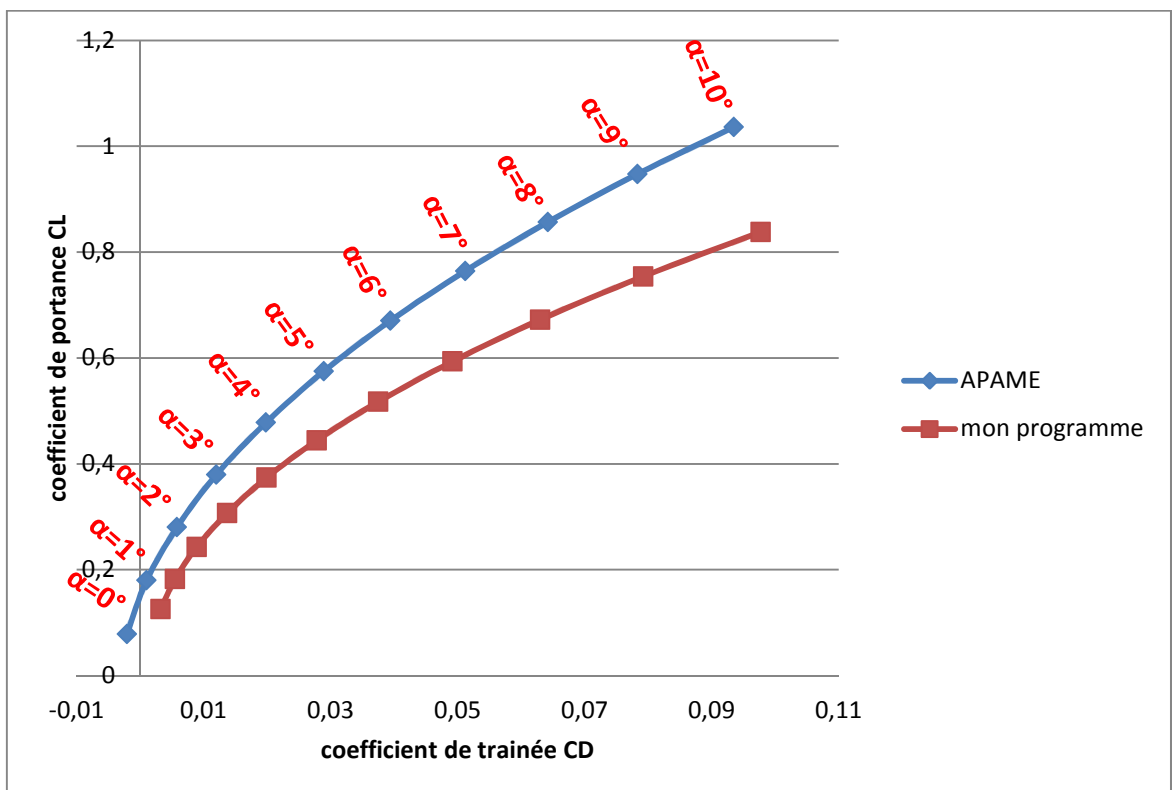
**Figure 4.99** Variation de coefficient de trainée en fonction de l'angle d'incidence (résultats obtenus par notre programme et Apame)



**Figure 4.100** : Variation de coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (résultats obtenus par Fluent et Apame) [2]



**Figure 4.101 :** Variation de coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'incidence (résultats obtenus par notre programme et Apame)



**Figure 4.102 :** La polaire de l'avion (résultats obtenus par notre programme et Apame)

#### 4.2.4 Interprétation des résultats :

A partir des diagrammes précédents quelques conclusions supplémentaires peuvent être faites sur le comportement des coefficients. Dans la théorie des écoulements potentiels la Traînée minimale doit être zéro à un angle auquel la force de portance est également nulle. Il est évident à partir des diagrammes précédents (les figures qui montrent la variation de coefficient de traînée) que la méthode de panneaux donne une traînée minimale proche de zéro (négative par APAME et positive par notre code avec une légère différence entre les deux), tandis que FLUENT a une certaine petite traînée minimale positive mais en générale les valeurs obtenue par la méthode de panneaux et par FLUENT sont incomparables. En outre, à partir de la figure (4.103) on pourrait dire que la similitude entre les coefficients de moment de tangage est mauvaise.

La figure (4.104) donne les valeurs des coefficients de portance et de traînée pour chaque valeur d'incidence, et il est claire que la portance augmente avec l'incidence, on peut prendre par exemple pour chaque point remarquable :

La portance est nulle ( $CL=0$ ) pour une incidence proche de zéro dans les deux courbes.

La finesse max (la finesse est le rapport entre  $CL$  et  $CD$ ) est égale à 11.09 (obtenue par APAME) et à 8.5773 (obtenue par notre programme) qui correspondent à une incidence de  $10^\circ$  pour les deux codes.

$CL$  max= incidence de  $10^\circ$  et plus qu'on augmente l'incidence plus que la portance augmente mais jusqu'à un certain point où l'aile devient vertical et l'avion aura décroché.

## CONCLUSION GENERALE :

Ce document présente la possibilité de calculer les différentes caractéristiques aérodynamiques d'une aile ainsi que d'un avion dans un écoulement subsonique au sol en utilisant la méthode de panneaux en trois dimensions.

Il peut être conclu que, si l'on exclut les résultats associés aux valeurs des paramètres aérodynamiques et si on parle en terme de phénomène physique les résultats de la méthode de panneaux en trois dimensions (notre code) sont en bon accord avec les résultats de APAME qui est aussi en bon accord avec Fluent.

Plusieurs paramètres influent sur la distribution de pression autrement dit sur les forces et les moments aérodynamiques :

- Les hypothèses posées : simplification des équations utilisées selon les hypothèses éloigne les résultats de la réalité
- La surface alaire, c'est-à-dire la surface totale sur laquelle sont appliquées les forces. Plus la surface offerte au courant d'air est grande plus la force aérodynamique (la traînée et la portance) est importante. La surface alaire d'un avion est la surface totale de la voilure, y compris celle qui traverse le fuselage.
- La vitesse de déplacement : l'intensité de la force aérodynamique augmente avec le carré de la vitesse de l'avion..
- La forme de l'aile (profil et allongement). La forme de l'aile selon son profil (en coupe) et son allongement (rapport entre sa longueur et sa largeur) influe sur la force aérodynamique. Un profil fortement cambré possède un bon rendement aux vitesses faibles (60 à 100 km/h), alors qu'un profil peu cambré convient mieux aux vitesses élevées. Sur un grand nombre d'avions modernes, il est possible de modifier la courbure du profil en vol grâce à un système dénommé volets de courbure. Un grand allongement est plus favorable aux faibles vitesses alors qu'un faible allongement



convient aux vitesses élevées. Un des autres avantages d'un grand allongement est de diminuer les tourbillons en bout d'aile. En effet, au bout de l'aile, la dépression de l'extrados et la surpression de l'intrados se rejoignent créant des tourbillons dénommés vortex.

- La position de l'aile par rapport au vent relatif. Le vent relatif est le vent ressenti à bord de l'avion du fait du déplacement de celui-ci, le vent relatif souffle donc toujours suivant la trajectoire de l'avion. Pour repérer l'orientation de l'avion par rapport au vent relatif on définit un angle : l'angle d'incidence  $\alpha$  entre l'axe longitudinal de l'avion et la direction du vent relatif ou entre l'axe longitudinal de l'avion et sa trajectoire. Lorsque l'incidence de l'aile augmente, l'intensité de la résultante aérodynamique augmente, passe par un maximum pour un angle d'incidence compris entre  $15^\circ$  et  $18^\circ$ , puis décroît brusquement. On dit que l'aile décroche.

## LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

$A_{ij}$	: matrice de coefficients d'influence
$A_x, A_y, A_z$	: coordonnées du vecteur diagonal $\bar{A}$
$\bar{A}, \bar{B}$	: vecteurs diagonaux du panneau
$B_x, B_y, B_z$	: coordonnées du vecteur diagonal $\bar{B}$
$C_p$	: coefficient de pression
$C_x$	: coefficient de force longitudinal
$C_y$	: coefficient de force latéral
$C_z$	: coefficient de force normale
$C_l$	: coefficient de moment de roulis
$C_m$	: coefficient de moment de tangage
$C_n$	: coefficient de moment de lacet
$C_l$	: coefficient de portance
$C_L$	: coefficient de portance
$C_D$	: coefficient de trainée
Ca	: coefficient de la force aérodynamique
D	: force de trainée
D	: longueur de diagonale du plus grand panneau
$F_i$	: forces agissant sur le corps
$F_x$	: force longitudinal
$F_y$	: force latéral
$F_z$	: force normale
Fa	: force aérodynamique
FF	: coefficient du champ lointain
$F_i$	: force dans la direction i
L	: force de portance
M	: nombre maximal des panneaux transversaux

$M_l$	: moment de roulis
$M_m$	: moment de tangage
$M_n$	: moment de lacet
$M_i$	: moments agissant sur le corps
N	: nombre maximal des panneaux longitudinaux
N	: nombre de panneaux
$P_x, P_y, P_z$	: coordonnées du vecteur unitaire transversale selon les trois directions
$\bar{p}$	: vecteur unitaires dans la direction transversale
p	: pression du fluide
$p_\infty$	: pression du fluide à l'infini
Q	: intensité de source ou de puits
RHS	: vecteur du second membre (right hand side)
$S_\infty$	: surface à l'infini
$S_c$	: surface du corps
$S_s$	: surface du sillage
$S_1$	: puits
$S_2$	: source
$S_{ref}$	: surface de référence (aile)
U	: vitesse d'écoulement uniforme
V	: vitesse du fluide
$V_\infty$	: vitesse du fluide à l'infini
a	: matrice des coefficients d'influence des dipôles
b	: matrice des coefficients d'influence des sources
$b_{span}$	: longueur de référence (Envergure)
$b_i$	: vecteur du second membre
c	: corde du profil
$c_{SAT}$	: longueur de référence (la corde aérodynamique moyenne)
$c_x, c_y, c_z$	: coordonnées du point de collocation du panneau

$d$	: distance entre la source et le puits
$g_u, g_o$	: composantes de vitesse de flux libre dans les directions longitudinale et perpendiculaire
$i$	: compteur des lignes
$j$	: compteur des colonnes
$komp$	: nombre de composants qui forment la géométrie
$l_i$	: longueur du panneau $i$
$\vec{n}$	: vecteur unitaire dans la direction normale
$n_1, n_2, n_3$	: coordonnées du vecteur unitaire normal selon les trois directions
$\vec{o}$	: vecteur unitaires dans la direction perpendiculaire aux vecteurs unitaires $\vec{n}$ et $\vec{u}$
$q$	: intensité de source
$q_i$	: $N$ valeurs pour les sources aux points de contrôle
$q$	: pression de référence
$q_u, q_p, q_o$	: vitesses induites dans les direction longitudinale, transversale et perpendiculaire
$r$	: rayon
$r, \theta, x$	: coordonnées cylindriques
$r, \varphi, \theta$	: coordonnées sphériques
$r_{ij}$	: distance du nœud $j$ au milieu du panneau $i$
$s$	: surface du corps
$\vec{t}$	: vecteur unitaire dans la direction tangentielle
$u, v$	: composantes de la vitesse totales
$\vec{u}$	: vecteur unitaires dans la direction longitudinale
$u_i, v_i$	: composantes de vitesse au milieu du $i^{\text{ème}}$ panneau
$u_x, u_y, u_z$	: coordonnées du vecteur unitaire longitudinale selon les trois directions
$u_{sij}, v_{sij}$	: composantes de la vitesse au milieu du segment $i$ due à une

	source unitaire située sur le panneau j
$u_{vij}, v_{vij}$	: composantes de la vitesse au milieu du segment i due à un tourbillon unitaire située sur le panneau j
$u^*, v^*$	: composantes de la vitesse locale
$u_{sij}^*, v_{sij}^*$	: composantes de la vitesse locale au milieu du segment i due à une source unitaire située sur le panneau j
$u_{vij}^*, v_{vij}^*$	: composantes de la vitesse locale au milieu du segment i due à un tourbillon unitaire située sur le panneau j
$v_x, v_y, v_z$	: composantes de vitesse en coordonnées cartésiennes
$v_r, v_\theta, v_x$	: composantes de vitesse en coordonnées cylindriques
$v_r, v_\theta, v_\phi$	: composantes de vitesse en coordonnées sphériques
$x, y, z$	: coordonnées cartésiennes
$x, y, z$	: système de coordonnées de l'avion
$x_i, y_i$	: coordonnées du nœud i
$x_{i+1}, y_{i+1}$	: coordonnées du nœud i+1
$\bar{x}_i, \bar{y}_i$	: coordonnées du point de contrôle situé au milieu du panneau i
$x_A, y_A, z_A$	: système de coordonnées aérodynamique
$x_i, y_i, z_i$	: coordonnées des sommets du panneau
$x^*, y^*$	: coordonnées liées au panneau j
$\alpha$	: angle d'attaque
$\beta$	: angle de dérapage
$\beta_{ij}$	: angle sous lequel on voit le panneau j du milieu du panneau i
$\theta_i$	: angle d'inclinaison du panneau i
$\sigma$	: force de source constante
$\gamma$	: intensité de tourbillon
$\partial$	: dérivée partielle
$\mu$	: force de dipôle constant

$\rho$	: densité du fluide
$\rho_\infty$	: densité du fluide à l'infini
$\psi$	: ligne de courant
$\Gamma$	: circulation de vitesse d'écoulement tourbillonnaire
$\psi$	: fonction courant
$\phi$	: potentiel d'écoulement complexe
$\phi_e$	: potentiel d'écoulement élémentaire
$\phi_\infty$	: potentiel de l'écoulement uniforme
$\phi_s$	: potentiel d'une distribution de sources par unité de longueur
$\phi_v$	: potentiel d'une distribution de tourbillons

## REFERENCES

1. Larry L. Erickson, "Panel methods -An introduction", Ames Research Center, Moffett Field, California
2. Daniel Filkovic , "Graduate work for APAME" , University of Zagreb Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, 2008
3. Magnus, A.E., and Epton, M.A., "PAN AIR - A Computer Program for Predicting Subsonic or Supersonic Linear Potential Flows About Arbitrary Configurations Using a Higher Order Panel Method," Volume I - Theory Document (Version 1.0), NASA CR 3251, April 1980.
4. Nathman, J.K., "Subsonic Panel Methods – Second (Order) Thoughts," AIAA Paper 98-5563. Sept. 1998.
5. NASA contractor report 3250, PAN AIR summary document, version 1.0
6. USAERO Unsteady Aerodynamic Software , Analytical Methods, Inc
7. Dale L A shby , "Potential flow theory and operation guide for the panel code PMARC\_14", Ames research center, Moffett Field, California, December 1999
8. William Mason, "Aerospace Engineering", Virginia Polytechnic Institute and State University
9. Christian Masson, "méthode des éléments de frontière Principes de base et formulation portante", Département de génie mécanique Ecole de technologie supérieure Montréal, Canada, Sections 3.8 et 4.3 ,2000

10. Etienne GUYON –jean-pierre HULIN-Luc PETIT-, Hydrodynamique physique, pp 301
11. Ion Paraschivoiu , “Aérodynamique subsonique“ ,Edition de l'école polytechnique de Montréal, pp 183-191
12. M. Boudieb Djamel, ”application des algorithmes évolutionnaires en optimisation géométrique de forme”, résumé de mémoire en magistère en Génie Mécanique productique, département de génie mécanique université de M'hamed Bougara Boumerdes, pp58-64 , 2008
13. Clement Hochart, “simulation numérique et expérimentale de l'écoulement d'air et de l'accrétion de glace autour d'une pale d'éolienne”, université de Québec, pp25-26, 2007.
14. Hess-Smith. “Panel Method”, AA200b, Lecture 3, January 13-18.
15. Deborah Mueller et M.Eduardo Prinicipi, “L'aérodynamique du vol à voile à la navette spatiale”, classe pyam 3MG4, 10.12.2004.
16. Katz J, Plotkin A, “Low Speed Aerodynamics”, Second edition, Cambridge University Press, New York, pp 246- 250, 2001.
17. Mohammed Abdo, “Theoretical and Computational Analysis of Airfoils in Steady and Unsteady Flows”, Department of Mechanical Engineering McGill, University Montreal, Quebec, Canada, june 2004.
18. Ira. Abbott, director of aeronautical and space research national aeronautics and space administration and Alberte Von Doenhoff, research engineer ,”Theory of wings sections including a summary of Airfoil Data”, NASA.



