

**UNIVERSITE DE BLIDA 1**

**Faculté de Technologie**

Département de Mécanique

# **THESE DE DOCTORAT**

Spécialité : Energétique

CONCEPTION A HAUTE TEMPERATURE DES TUYERES  
SUPERSONIQUES TRIDIMENSIONNELLES A DETENTE CENTREE  
DE SECTION DE SORTIE ARBITRAIRE

Par

**ABADA Omar**

devant le jury composé de :

A. Allali	Professeur,	U. de Blida 1	Président
D. Semmar	Professeur,	U. de Blida 1	Examineur
A. Khellaf	Directeur de Recherche,	CDER. Alger	Examineur
N. Seghouani	Maître de Recherche (A),	CRAAG. Alger	Examineur
B. Laribi	Professeur,	U.K. Miliana	Examineur
T. Zebbiche	Professeur,	U. de Blida 1	Rapporteur

Blida, 2015

A mes parents

A ma femme

A mes enfants

A mes frères et ma sœur,

Vous vous êtes dépensés pour moi sans compter.

En reconnaissance de tous les sacrifices consentis  
par tous et chacun pour me permettre d'atteindre  
cette étape de ma vie.

Avec toute ma tendresse.

Je dédie ce travail.

## RESUME

Le but de ce travail est d'améliorer les performances des nouvelles tuyères supersoniques tridimensionnelles *MLN* de section de sortie arbitraire, à partir de la tuyère axisymétrique, en utilisant la définition d'une ligne de courant dans l'espace. L'étude est faite à haute température, inférieure à la température du seuil de dissociation des molécules. L'intérêt de la conception d'une tuyère *3D* asymétrique est d'améliorer les performances d'une tuyère axisymétrique en l'occurrence son nombre de Mach de sortie, sa masse et son coefficient de poussée. Pour ce fait, trois cas peuvent se présenter. Ces cas sont faits pour trouver un type de forme d'une tuyère tridimensionnelle ayant: la même masse, le même nombre de Mach de sortie et la même section au col à celle de la géométrie axisymétrique. La différence donnée par le modèle du gaz parfait par rapport à notre modèle à haute température est présentée. Le calcul peut être fait pour n'importe quelle géométrie de la section de sortie choisie d'une tuyère *3D*. Ainsi. On trouve une infinité de forme en fonction du choix de la valeur du nombre de Mach de sortie, de la valeur de la température génératrice ou du choix de la forme de la section de sortie.

### Mots Clés

Forme des tuyères, Ecoulement Supersonique, Ecoulement à Haute Température, Tuyère *MLN* axisymétrique, Méthode des caractéristiques, Nombre de Mach, Méthode des Caractéristiques *3D*, Coefficient de poussée, Masse de la structure, Section arbitraire, Ligne de courant.

## ABSTRACT

The scope of this work is to perform a new three-dimensional *MLN* supersonic nozzles shape design with arbitrary exit cross section from the axisymmetrical nozzle, using the stream-line definition in space. The study is made at high temperature less than molecule dissociation temperature threshold. The asymmetric nozzle importance lies in improving the axisymmetric nozzle efficiency, higher Mach number, mass and thrust coefficient. For designing three cases are considered. These cases are to find a three-dimensional shape nozzle type with: equal mass, the same exit Mach number and the same throat area compared to the axisymmetric geometry. The difference given by the perfect gas model compared to our model at high temperature is presented. Calculation may be performed for any selected 3D nozzle exit cross section. In this way, an infinite number of shapes are available, depending on the selected exit Mach number, stagnation temperature or exit cross section shape. The application is for air.

### Keys words

Nozzle shape; Supersonic flow; High temperature flow; Axisymmetric *MLN* nozzle; Method of characteristics; Mach number. Method of Characteristic *3D*, Thrust Coefficient, Mass of the structure, Arbitrary Section, Stream-line.

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو تصميم أشكال جديدة لأبواق ثلاثية الأبعاد  $3D$  ما فوق سرعة الصوت من نوع أبواق ذات أطوال قصيرة  $MLN$  وهذا مع اختيار كفي لمقطع العرضي للخروج من فوهة الأبواق ذات محور تناظر باستخدام تعريف خط التيار التدفق في مجال ثلاثية الأبعاد. يتم إجراء هذه الدراسة في مجال فرضية دراجة الحرارة المرتفعة أقل من عتبة دراجة الحرارة تفكك الجزيئات الغاز. أهمية الأبواق الغير المتماثلة ثلاثية الأبعاد تكمن في تحسين كفاءة الأبواق ذات المحور الدائري مع إمكانية رفع عدد ماك لمقطع الخروج ومعامل قوة الدفع وتخفيض كتلة البوق. لتحقيق التصميم ثلاثة حالات تم دراستها. هذه الحالات تكمن في إيجاد أنواع لأشكال ثلاثي أبعاد مع كتلة متساوية لكن ماك الخروج مرتفع بالمقارنة مع البوق ذو المحور التناظري. تم تقديم الفارق بين نموذج الغاز المثالي ونموذجنا الجديد في درجة الحرارة العالية. تم الحساب بالنسبة لأي مقطع الخروج ثلاثي الأبعاد نريد اختياره. في هذه الطريقة عدد لا حصر له من الأشكال يمكن الحصول عليه اعتمادا على اختيار عدد ماك لمقطع الخروج درجة حرارة الركود أو شكل مقطع الخروج. التطبيق بالنسبة للهواء.

## كلمات المفاتيح

تد فق فوق الصوتية، درجة الحرارة مرتفعة، تناسبات ترموديناميكية و هندسية، دالة تزامم، ربط النقاط، غاز كالوريكولي غير ميثالي، طريقة سيمبسون العددية، طريقة غوس ليجوندر العددية، طريقة المميزات، البوق ذو التندد المركزي ثنائى البعد و ذو التناظر المركزي، طريقة الفروق المنتهية، خوارزميات المصححات التنبؤ، منحنى الصوتي مستقيم، البوق ذو جسم مركزي ثنائي البعد، خطأ النسبي،

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier infiniment mon dieu tout puissant pour l'aide qu'il m'a apporté pour la réalisation de ce modeste travail.

. Je tiens à remercier mon directeur de thèse *T. ZEBBICHE*, Professeur à l'institut d'Aéronautique et des études spatiales de l'université de Blida 1, de m'avoir témoigné durant ces six années une totale confiance. Lors de ce travail qu'il m'a confié, il m'a aidé minutieusement avec amabilité et patience malgré ses occupations. J'ai beaucoup admiré sa simplicité, son ardeur au travail, ses qualités humaines et son raisonnement scientifique. C'est ici pour moi l'occasion de lui témoigner toute ma gratitude.

Monsieur *A. ALLALI*, Professeur à l'Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de l'Université de Blida 1, m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

La présence de Monsieur *D. SEMMAR*, Maître de conférences A au département de Mécanique de l'université de Blida 1 dans mon jury, constitue un gage de confiance.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur *A. KHELLAF*, Directeur de recherche au CDER pour sa confiance et d'avoir accepté d'être examinateur de mon travail.

Mes sincères remerciements s'adressent encore à Monsieur *B. LARIBI*, Professeur au département de Mécanique de l'université de Khemis Miliana, pour avoir accepté de critiquer mon travail et d'avoir bien voulu participer au jury.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur *N. SEGHOUANI*, Maître de Recherche A au CRAAG pour avoir bien voulu examiner ce travail et participer à mon jury de thèse

Mes remerciements vont enfin à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

## TABLE DES MATIERES

RESUME	2
REMERCIEMENTS	5
TABLE DES MATIERES	6
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	8
INTRODUCTION	13
1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET PROBLEMATIQUE	17
1.1. Introduction	17
1.2. Définition	17
1.3. Revue bibliographique sur la conception des tuyères supersoniques	18
1.4. Position du problème	22
1.5. Conception des tuyères supersoniques dans le modèle haute température ( <i>HT</i> )	23
1.5.1. Cas bidimensionnelle	24
1.5.2. Cas axisymétrique	27
2. DIMENSIONNEMENT A HAUTE TEMPERATURE DE LA TUYERE À DETENTE CENTREE AXISYMETRIQUE	30
2.1. Introduction	30
2.2. Tuyère à détente centrée	31
2.3. Formulation Mathématique	33
2.3.1. Equation et procédure pour un point interne	36
2.3.2. Procédure pour un nœud interne particulier	39
2.3.3. Equation pour un point sur l'axe de symétrie	40
2.4. Calcul des paramètres thermodynamiques	41
2.5. Procédure de calcul dans la tuyère	42
2.5.1. Région de Kernel	42
2.5.2. Région de Transition et contour de la tuyère axisymétrique	45
2.6. Masse de la structure de la tuyère	51
2.7. Force de pression exercée sur la paroi du divergent	52
3 METHODOLOGIES DE CONCEPTION DES TUYERES SUPERSONIQUES TRIDIMENSIONNELLES	53
3.1. Introduction	53
3.2. Méthode des caractéristiques (MOC) en 3D	53
3.2.1. Equations de mouvement	54
3.2.2. Formulation mathématique	55
3.2.3. Equations de compatibilité	57
3.2.4. Procédure numérique	57
3.2.4.1. Détermination du nouveau plan de référence	58
3.2.4.2. Solution de l'équation des points du champ de Compatibilité	60

3.2.4.3. Calcul du point du corps	61
3.2.4.4. Calcul de la surface du corps	62
3.2.4.5. Solution de l'équation de compatibilité	62
3.3. Méthode basée par des lignes de courant dans l'espace	63
3.4. Méthode basée par l'utilisation du contour de la tuyère axisymétrique	65
3.4.1. Présentation de la méthode	65
4. CONCEPTION DES TUYERES 3D <i>MLN</i> PAR LA METHODE DES LIGNES DE COURANT DANS L'ESPACE	71
4.1. Introduction	71
4.2. Fonction de courant en un point de l'écoulement	71
4.3. Recherche les points d'une ligne de courant tridimensionnelle.	78
4.4. Variation de la fonction de courant dans une section droite	82
4.4.1. Détermination des propriétés au point $P$	83
4.4.2. Variation des paramètres entre deux points proches placés verticalement	83
4.5. Conception de la tuyère 3D asymétrique	85
5. RESULTATS ET DISCUSSIONS	92
5.1. Contour de la tuyère tridimensionnelle asymétrique	92
5.2. Conception de tuyères 3D asymétriques ayant même nombre de Mach de sortie $M_S$	101
5.3. Comparaison entre les tuyères 3D asymétriques et axisymétrique ayant la même masse	118
5.4. Comparaison entre les tuyères 3D asymétriques et axisymétrique ayant la même section au col	122
5.5. Troncature de la tuyère tridimensionnelle asymétrique	126
5.6. Effet du nombre de Mach de sortie $M_S$ sur le contour d'une tuyère 3D	127
5.7. Effet de la température génératrice $T_0$ sur le contour d'une tuyère 3D	130
5.8. Variation de l& fonction de courant d'une tuyère 3D	133
CONCLUSION	135
APPENDICES	138
A. Liste des symboles	138
B. Relations thermodynamiques d'un écoulement à haute température	140
C. Organigramme de programmation	147
REFERENCES	153



## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Tuyère convergente – divergente	18
Figure 1.2	Variation de la longueur de la tuyère à détente centrée 2D [67] (a):en fonction de $M_S$ . (b) :en fonction de $T_0$ lorsque $M_S= 3,00$ .	25
Figure 1.3	Variation de la masse de la structure de la tuyère <i>MLN 2D</i> [67] (a):en fonction de $M_S$ . (b) : en fonction de $T_0$ lorsque $M_S= 3,00$ .	26
Figure 1.4	Variation de la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère <i>MLN 2D</i> [67] (a):en fonction de $M_S$ . (b) : en fonction de $T_0$ lorsque $M_S= 3,00$ .	26
Figure 1.5	Courbes iso-valeurs de la tuyère <i>MLN 2D</i> (a) : Courbes Iso-Mach (b) : Courbes Iso-directions	27
Figure 1.6	Courbes iso-valeurs de la tuyère <i>MLN</i> axisymétrique (a) : Courbes Iso-Mach (b) : Courbes Iso-directions	28
Figure 2.1	Différentes géométries de tuyères	31
Figure 2.2	Présentation du champ de l'écoulement dans la tuyère à détente centrée axisymétrique	32
Figure 2.3	Différentes régions d'écoulement dans une tuyère à détente centrée	32
Figure 2.4	Illustration des lignes caractéristiques et des lignes de Mach	34
Figure 2.5	Nœud interne quelconque	36
Figure 2.6	Nœud interne particulier	39
Figure 2.7	Nœud sur l'axe de symétrie	40
Figure 2.8	Processus de calcul des caractéristiques dans la région de Kernel	43
Figure 2.9	Processus de calcul des $C^-$ de la région de transition	48
Figure 2.10	Différents cas d'intersection de la paroi avec les caractéristiques de la tuyère axisymétrique	49
Figure 2.11	Passage d'une caractéristique à l'autre dans la région de transition	50
Figure 2.12	Présentation d'un tronçon de la tuyère à détente centrée	51
Figure 3.1	Système de coordonnées	56
Figure 3.2	Système de coordonnée du Mach conoïde	56

Figure 3.3	Calcul des points du plan de référence de départ	58
Figure 3.4	Point du champ d'écoulement	59
Figure 3.5	Calcul des paramètres des points du corps	61
Figure 3.6	Exemple de lignes de courant intermédiaires	66
Figure.4.1	Schéma en caractéristiques	72
Figure 4.2	Illustration de la ligne de Mach du col $OA$ et de la zone uniforme $BS$ de sortie	77
Figure 4.3	Différents segments de recherche des points d'une ligne de courant	78
Figure 4.4	Différents cas possible de segment	82
Figure 4.5	Segment de droite placé verticalement	85
Figure 4.6	Section de sortie arbitraire avec différentes dispositions	86
Figure 4.7	Choix de la section de sortie d'une tuyère tridimensionnelle dans la zone d'écoulement uniforme	86
Figure 4.8	Discrétisation de la section de sortie de la tuyère tridimensionnelle et numérotation des nœuds choisis	87
Figure 4.9	Forme en profil de la tuyère passant par un point de la section de sortie	88
Figure 4.10	Éléments finis placé entre deux stations successives de la tuyère $3D$	89
Figure 5.1	Tuyère $3D$ de forme carrée avec et sans raffinement du nombre de sections insérées longitudinalement $N_L$ pour $T_0=2000$ K et $M_S=4,00$	94
Figure 5.2	Effet de raffinement du nombre de sections insérées longitudinale $N_L$ sur la conception de la tuyère $3D$ de forme carrée pour $T_0=2000$ K et $N_T=28$	95
Figure 5.3	Effet du nombre de sections insérées longitudinalement $N_L$ sur la masse d'une tuyère $3D$ asymétrique pour $T_0=2000$ K	95
Figure 5.4	Effet du nombre de sections insérées longitudinalement $N_L$ sur le coefficient de poussée d'une tuyère $3D$	96
Figure 5.5	Tuyère $3D$ de forme carrée avec et sans raffinement du nombre de points insérés transversalement $N_T$ pour $T_0=2000$ K et $M_S=4,00$	98

Figure 5.6	Effet de raffinement du nombre de points insérés sur la section de sortie $N_T$ sur la masse et le coefficient de poussée d'une tuyère 3D de forme carrée pour $T_0=2000$ K et $N_L=50$	99
Figure 5.7	Effet du nombre de points insérés transversalement $N_T$ sur la masse d'une tuyère 3D de forme carrée pour $T_0=2000$ K	100
Figure 5.8	Effet du nombre de points insérés transversalement $N_T$ sur le coefficient de poussée d'une tuyère 3D de forme carrée pour $T_0=2000$ K	100
Figure 5.9	Différentes formes de conception de tuyères tridimensionnelles asymétriques pour $M_S = 4,00$ et $T_0 = 2000$ K	111
Figure 5.10	Variation de la masse et du coefficient de poussée des formes des tuyères 3D asymétriques en fonction de la température $T_0$ pour $M_S=4,00$	113
Figure 5.11	Variation de la masse et du coefficient de poussée des différentes formes des tuyères 3D en fonction du nombre de Mach de sortie $M_S$ et de la température $T_0$	115
Figure 5.12	Effet de la température $T_0$ sur la masse des différentes formes des tuyères 3D ayant même nombre de Mach de sortie pour $M_S=4,00$	116
Figure 5.13	Effet du nombre de Mach de sortie $M_S$ sur la masse des différentes formes des tuyères 3D ayant même nombre de Mach de sortie pour $T_0=2000$ K	116
Figure 5.14	Effet de la température $T_0$ sur le coefficient de poussée $C_F$ des différentes formes des tuyères 3D ayant même nombre de Mach de sortie pour $M_S=4,00$	117
Figure 5.15	Effet du nombre de Mach de sortie $M_S$ sur le coefficient de poussée $C_F$ des différentes formes des tuyères 3D ayant même nombre de Mach de sortie pour $T_0=2000$ K	117
Figure 5.16	Représentation du gain (en masse et $C_F$ ) des diverses formes des tuyères 3D ayant même $M_S$ que la tuyère axisymétrique ( $M_S=4,00$ et $T_0=2000$ K)	118

Figure 5.17	Effet du nombre de Mach de sortie $M_S$ des formes des tuyères 3D ayant même masse que la tuyère axisymétrique pour $T_0=2000$ K	119
Figure 5.18	Variation du coefficient de poussée $C_F$ des différentes formes des tuyères 3D ayant même masse que la tuyère axisymétrique en fonction de $M_S$ pour $T_0=2000$ K	120
Figure 5.19	Représentation du gain en $M_S$ et $C_F$ des diverses formes des tuyères 3D ayant même masse que la tuyère axisymétrique pour $M_S=4,00$ et $T_0=2000$ K	121
Figure 5.20	Effet du nombre de Mach de sortie $M_S$ sur la masse des différentes formes géométriques des tuyères 3D ayant même section au col pour $T_0=2000$ K	122
Figure 5.21	Effet du nombre de Mach de sortie $M_S$ sur le coefficient de poussée des différentes formes géométriques des tuyères 3D ayant même section au col pour $T_0=2000$ K	123
Figure 5.22	Effet de la température $T_0$ sur la masse des différentes formes géométriques des tuyères 3D ayant même section au col pour $M_S=4,00$	123
Figure 5.23	Effet de la température $T_0$ sur le coefficient de poussée des différentes formes géométriques des tuyères 3D ayant même section au col pour $M_S=4,00$	124
Figure 5.24	Représentation du gain en $M_S$ et $C_F$ des formes des tuyères 3D asymétriques ayant même section au col que la tuyère axisymétrique pour $M_S=4,00$ et $T_0=2000$ K	124
Figure 5.25	Représentation du gain en $C_{Masse}$ et la perte du coefficient de poussée d'une tuyère 3D tronquée de forme carrée pour $M_S=4,00$ et $T_0=2000$ K	125
Figure 5.26	Formes des tuyères 3D de forme heptagonale pour différente valeur du nombre de Mach de sortie $M_S$ avec $N_L=10$ et $N_T=63$	128
Figure 5.27	Tuyère 3D de forme carrée en fonction du nombre de Mach de sortie $M_S$ et la température de stagnation $T_0$	132

Figure 5.28	Valeur de la fonction de courant en fonction du rayon de la tuyère pour différentes valeurs de $M_S$ et des stations pour $T_0=2000 K$	134
Tableau 1.1	Table de variation de $C_P(T)$ et $\gamma(T)$ avec la température pour l'air [4]	22
Tableau 5.1	Valeur numérique de l'effet de discrétisation du nombre de section insérée longitudinalement $N_L$ sur $C_F$ pour $T_0=2000 K$	96
Tableau 5.2	Valeur numérique de l'effet du nombre de Mach de sortie $M_S$ des formes des tuyères 3D ayant même masse que l'axisymétrique pour $T_0=2000 K$	119
Tableau 5.3	Valeur numérique de l'effet du nombre de Mach de sortie $M_S$ sur le coefficient de poussée des formes des tuyères 3D ayant même masse que l'axisymétrique pour $T_0=2000 K$	120
Tableau 5.4	Valeurs numériques de conception d'une tuyère 3D tronquée de forme carrée pour $M_S = 4,00$ et $T_0=2000K$	126
Tableau 5.5	Valeurs numériques de conception de la tuyère pour $M_S = 2,00$	127
Tableau 5.6	Valeurs numériques de conception de la tuyère pour $M_S = 3,00$	127
Tableau 5.7	Valeurs numériques de conception de la tuyère pour $M_S = 4,00$	128
Tableau 5.8	Valeurs numériques de conception de la tuyère pour $M_S = 5,00$	128
Tableau 5.9	Valeurs numériques de conception de la tuyère (a) pour $M_S = 1,50$	130
Tableau 5.10	Valeurs numériques de conception de la tuyère (b) pour $M_S = 2,00$	130
Tableau 5.11	Valeurs numériques de conception de la tuyère (c) pour $M_S = 3,00$	131
Tableau 5.12	Valeurs numériques de conception de la tuyère (d) pour $M_S = 4,00$	131
Tableau 5.13	Valeurs numériques de conception de la tuyère (e) pour $M_S = 5,00$	132

## INTRODUCTION

Les tuyères supersoniques jouent un rôle très important dans la conception des engins spatiaux tels que les missiles, les moteurs d'avions et les souffleries supersoniques. De nombreuses études ont été effectuées pour la conception de ces dernières. Ces travaux sont limités seulement aux tuyères bidimensionnelles [4, 5] et axisymétrique [60], ce qui est loin de la réalité. Les références [8, 13, 14, 41, 51, 52] présentent des méthodes de dimensionnement des tuyères supersoniques tridimensionnelles complexes en appliquant la méthode des caractéristiques (MOC).

Une méthode pour obtenir des tuyères tridimensionnelles a été développée afin d'obtenir des contours théoriques. Cette méthode consiste à faire le passage d'une tuyère axisymétrique à la tuyère tridimensionnelle en utilisant la définition d'une ligne de courant dans l'espace. Les travaux antérieurs ont été réalisés dans le cas d'un gaz parfait (*GP*) où la chaleur spécifique à pression constante  $C_P$  et le rapport de chaleur spécifique  $\gamma=C_P/C_V$  sont constants. Ces travaux sont cependant limités pour les basses températures, où nous pouvons aller jusqu'à 1000 K et pour des nombres de Mach de sortie qui ne dépassent pas  $M_S = 2,00$  environ. Dans le cas réel,  $C_P$  et  $\gamma$  varient avec la température.

La deuxième partie de cette recherche consiste à tenir compte de l'effet de la variation de  $C_P$  et  $\gamma$  en fonction de la température pour concevoir la tuyère supersonique, à une température inférieure à la température du seuil de dissociation des molécules. Dans ce cas, le gaz parfait est en plus nommé par gaz calorifiquement imparfait ou gaz à haute température et thermiquement parfait (*HT*). L'application sera pour l'air.

Les relations thermodynamiques pour le modèle *HT* sont présentées dans la référence [66, 69, 70]. Dans ce cas, le modèle mathématique du gaz parfait (*GP*) sera un cas particulier de notre modèle à Haute Température. Zebbiche et Youbi [67] ont ajouté l'effet de variation de la température génératrice  $T_0$  à la chaleur spécifique  $C_P$  et le rapport  $\gamma$  sur la conception des tuyères supersoniques bidimensionnelle et axisymétrique [63, 64], en corrigeant la forme et les résultats de l'écoulement dans ces tuyères.

Le but de notre étude est de donner aux concepteurs un outil qui leurs permettra de concevoir des tuyères tridimensionnelles pour n'importe quelle géométrie de la section de sortie choisie et de connaître son nombre de Mach de sortie, son coefficient de poussée et sa masse. Trois cas intéressants peuvent se présenter :

- Une tuyère *3D* à concevoir, ayant la même masse que celle de la tuyère axisymétrique mais délivrant un nombre de Mach de sortie ou un coefficient de poussée supérieur.
- Une tuyère de forme tridimensionnelle à réaliser, délivrant le même nombre de Mach de sortie que la tuyère axisymétrique mais possédant des performances meilleures que celle-ci.
- Rechercher des tuyères *3D* asymétriques possédant la même section au col que celle à géométrie axisymétrique mais ayant de meilleures performances.

La différence entre le modèle *GP* et notre modèle haute température *HT* est décrite dans cette étude avec précision. Nous allons étudier un type de tuyère donnant un écoulement parallèle et uniforme à la section de sortie. Elle est nommée tuyère à détente centrée de longueur minimale (*MLN*) car elle possède une longueur minimale par rapport aux autres types de tuyères existantes [60, 63, 64].

Pour réaliser cela, on commencera par choisir la géométrie de la section de sortie dans la tuyère axisymétrique. Le calcul se fera à partir de cette section jusqu'au col, en subdivisant la tuyère en plusieurs stations. La valeur de la fonction de courant est connue au niveau de chaque point choisi sur la paroi de la section de sortie et sur l'axe de symétrie de la tuyère *3D*. La géométrie de la section au col doit être la même que celle de la section de sortie choisie. Entre ces deux sections, la tuyère possède une forme qui n'est pas connue à priori.

Une ligne de courant qui passe par un point de la section de sortie et traverse la tuyère jusqu'au col, détermine à chaque station sélectionnée un point de la tuyère asymétrique. Un nombre important de points sélectionnés sur la section de sortie donne un nombre important de lignes de courant qui traversent les stations sélectionnées et par conséquent donnent la forme de la tuyère avec une bonne précision.

Une fois la forme de la tuyère trouvée, on peut facilement déterminer la masse de sa structure et son coefficient de poussée. Ce calcul peut être fait pour n'importe quelle géométrie de la section de sortie choisie de la tuyère asymétrique. Il existe une infinité de formes de tuyères tridimensionnelles selon le choix de la valeur du nombre de Mach de sortie  $M_S$ , de la température génératrice  $T_0$  ou du choix de la forme de la section de sortie.

#### Disposition des chapitres (plan du travail)

Le travail présenté est composé de 4 chapitres :

Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique qui présente les principaux travaux consacrés à la conception des tuyères supersoniques (bidimensionnelle, axisymétrique et tridimensionnelle). On abordera essentiellement dans ce chapitre les travaux pour les deux modèles *GP* et *HT*. On insistera sur les points forts et les limites de chaque travail.

Le second chapitre, présente la méthode de calcul et de conception de la tuyère à détente centrée axisymétrique, par l'utilisation de la méthode des caractéristiques à haute température et la manière de calcul de l'écoulement dans la tuyère avec quelques nomenclatures utilisées. La discrétisation des équations de compatibilité et des caractéristiques est faite par la méthode des différences finies. Ensuite, le calcul de la masse de la tuyère ainsi que la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère sont présentés.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation des méthodes de conception des tuyères supersoniques tridimensionnelles ayant une section de sortie arbitraire. Trois méthodes sont examinées, outre la méthode des caractéristiques (MOC) en 3D, la deuxième méthode est basée sur l'utilisation des lignes de courant dans l'espace. Enfin la dernière méthode est basée sur l'utilisation du contour de la tuyère axisymétrique.

Le quatrième chapitre est consacré à la modélisation mathématique de la méthode, basée sur les lignes de courant dans l'espace. Le modèle numérique utilisé dans la conception est décrit en détail. Par la suite, on calculera les performances de la tuyère comme le nombre de Mach de sortie, le coefficient de poussée et la masse.



Le cinquième chapitre est consacré aux résultats obtenus. Ils sont présentés sous forme de graphes et de tableaux. On trouvera également une comparaison de ce modèle avec le modèle *GP* pour montrer l'efficacité et les performances de ce type de tuyère (tridimensionnelle) par rapport aux tuyères conventionnelles (axisymétrique) du point de vue masse, nombre de Mach de sortie et force de poussée délivrée.

Enfin on présentera une conclusion générale sur le travail élaboré suivi par quelques propositions pour les travaux futurs.

## CHAPITRE 1

### ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET PROBLEMATIQUE

#### 1.1. Introduction

Les tuyères sont des canaux d'éjection ayant pour rôle principal, de transformer l'énergie de pression « enthalpie », en énergie cinétique. Les profils de ces tuyères sont tels qu'ils se confondent avec une ligne de courant. Leur détermination se fait généralement par la méthode des caractéristiques.

Au début, les tuyères ont été considérées comme étant des organes annexes. Leur rôle consistait essentiellement pour le cas d'un turboréacteur, d'assurer le fonctionnement du compresseur à un régime donné et cela par une adaptation convenable de sa forme géométrique. Les tuyères supersoniques dont le but essentiel est d'accélérer les gaz de combustion de vitesses subsoniques à des vitesses supersoniques. Ils interviennent dans beaucoup de structures telles que les moteurs fusées, les moteurs d'avions et dans la fabrication des souffleries supersoniques pour la modernisation et la réalisation expérimentale des écoulements réels. Les tuyères sont devenues des organes essentiels pour le moteur à réaction. Le rendement de ces machines, leurs poussées ainsi que leurs consommations dépendent énormément de la forme géométrique de la tuyère.

#### 1.2. Définition

La poussée d'un système propulsif est dépendante en premier lieu de la quantité des produits de combustion éjectés à travers une tuyère où l'écoulement dans son passage est continuellement accéléré d'un régime subsonique à un régime supersonique à la section de sortie (voir figure 1.1). L'organe tuyère constitue environ 70% de la masse de la structure. Cet organe est formé par deux tranches, une partie convergente et une autre divergente. La partie convergente est indispensable et sert à faire la liaison entre la chambre de combustion et la partie divergente de la tuyère afin de donner un écoulement sonique au col de la tuyère. Cette représentation est appropriée car d'une part, elle permet de déterminer le comportement de chaque section et d'autre part évaluer la poussée développée par le système propulsif. Toute fois différentes

méthodes d'analyse doivent être adaptées afin d'étudier l'écoulement séparément dans chaque partie de la tuyère.

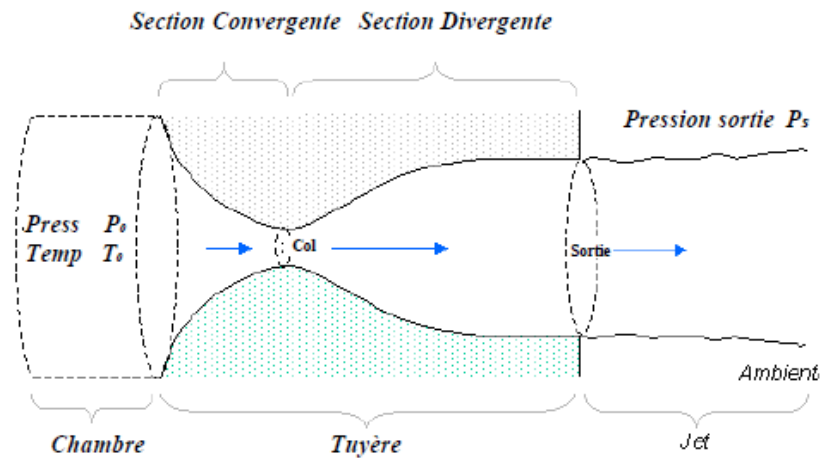


Figure 1.1 : Tuyère convergente – divergente

La vitesse sonique atteinte au col par les gaz d'échappement est fixée par les conditions prévalant au sein de la chambre de combustion. L'écoulement se poursuit en accélération par l'expansion des gaz dans la partie divergente de la tuyère. Cette augmentation de vitesse est dépendante seulement de la configuration géométrique de la paroi du divergent et de la section de sortie. Actuellement, la conception de la partie du divergent supersonique a retenu un grand intérêt de la part des chercheurs afin d'atteindre des vitesses de sortie et des poussées de plus en plus importantes.

L'optimisation du choix de la forme d'une tuyère supersonique doit tenir compte en plus des calculs de dynamique des gaz qui nous intéressent tels que le matériau utilisé, le mode de fabrication de la paroi, les exigences de refroidissement, les limites admissibles de dimensionnement etc.

### 1.3. Revue bibliographique sur la conception des tuyères supersoniques

Plusieurs auteurs sont intéressés par la conception des tuyères supersoniques depuis 70 ans et les études et recherches se poursuivent jusqu'à présent. Ces études sont développées en parallèle avec les problèmes rencontrés, les moyens disponibles en calcul et la capacité des chercheurs à entamer des problèmes sérieux.

S'agissant des tuyères supersoniques, le besoin pour les premières études était la conception pour des nombres de Mach supersoniques faible jusqu'à 2.0 environ et une température dans la chambre de combustion qui ne dépasse pas les 1000 K, vu qu'il n'y a pas un développement convenable en sciences des matériaux pour permettre de découvrir des matériaux réfractaires qui peuvent résister à des températures élevées supérieure à 1000K. Dans ce cas, les hypothèses convenables pour lesquelles on a opté pour faire une telle conception sont celles d'un gaz parfait calorifiquement parfait et thermiquement parfait. Dans ce cas, le modèle mathématique adéquat devient assez simple. Il est basé sur l'utilisation de la méthode des caractéristiques. Regardant les différentes études ponctuelles menées par les chercheurs dans le domaine des tuyères supersoniques. On présentera dans ce qui suit les principaux résultats de ces études en mettant l'accent sur les points forts de ces travaux.

Plusieurs formes de tuyères ont été développées au fur et à mesure avec le temps. Citons une quinzaine de formes connues dans la littérature. Chacune possède des avantages et des inconvénients qui ne se trouvent pas dans l'autre forme. Vu la simplicité du calcul, les concepteurs par ordinateur ont commencé avec les géométries planes à 2D jusqu'à 1970. Ce type de tuyères doit avoir une profondeur assez grande pour bien simuler l'effet bidimensionnel.

Le premier travail effectué pour la conception des tuyères des moteurs fusées c'était en 1940 par Malina [33]. L'auteur a utilisé le modèle basé sur la théorie d'un gaz parfait pour déterminer les caractéristiques et les performances d'un moteur fusée. Dans ce cas les équations seront considérablement simplifiées, où on obtient des équations algébriques. La tuyère de cet engin a été considérée comme conique et l'écoulement à travers cette tuyère est considéré complètement unidirectionnel.

En 1947, Sauer [51] a développé une technique de calcul pour les écoulements supersoniques basée sur la méthode des caractéristiques précisément pour les problèmes axisymétriques. Les hypothèses utilisées sont toujours basées sur l'utilisation d'un gaz parfait. On peut dire que c'est la première étape de l'utilisation du numérique pour aborder les écoulements supersoniques malgré qu'il n'y a pas un développement convenable en domaine informatique.

En 1952, Ruptash [47] a appliqué la théorie d'un gaz parfait calorifiquement parfait pour déterminer les performances des souffleries supersoniques. On peut dire que ce travail est similaire à celui de Malina [33] du point de vue performances des tuyères utilisées en aérospatiales et en souffleries. Après le développement en domaine de l'ordinateur, Beckwith et al en 1952 [9] a développé encore un calcul pour les tuyères axisymétriques appliqué pour un test de géométrie carré. Le premier développement pour la recherche du contour d'une tuyère supersonique en  $2D$  en vue d'optimiser les performances de Malina est réalisé par Rao en 1957 [44]. Ici l'auteur a choisi la tuyère dite coquetier c'est-à-dire un raccordement entre une petite zone circulaire et autre de redressement de forme polynomiale. Les performances de la tuyère sont trouvées à cette époque.

Coburn et Dolph en 1949 [13], ont développé la méthode des caractéristiques pour les écoulements supersoniques tridimensionnelles. Ici le calcul est limité pour les problèmes axisymétriques. Le calcul pour une forme  $3D$  quelconque n'a pas été encore développé. A titre information, la géométrie axisymétrique est considérée comme une géométrie  $3D$ . C'est vrai mais plus précisément c'est une géométrie quasi tridimensionnelle. C'est-à-dire elle représente une présentation en  $3D$  mais le calcul peut être considéré uniquement en  $2D$ .

Le premier calcul utilisant la méthode des caractéristiques en écoulement supersonique  $3D$  pour une géométrie arbitraire a été réalisé par Rakich [41] en 1967, ensuite par Chushkin en 1968 [14] et par la suite par Ranson et al 1970 [42]. Les auteurs ont développés une méthode purement numérique. Notons ici que la seule méthode connue à l'époque pour le calcul des écoulements supersoniques était la méthode des caractéristiques. Chaque auteur a choisi une géométrie  $3D$  et non une tuyère supersonique. C'est-à-dire ils sont utilisés les calculs pour l'aérodynamique externe. A cette époque, on notera un petit développement en puissance des calculateurs numériques.

Le premier calcul utilisant la méthode des caractéristiques pour la conception des tuyères supersoniques  $2D$  et axisymétriques c'était en 1978 par Sivells [57]. La tuyère développée dans ce travail était de type coquetier et le modèle de calcul utilisé c'est-à-dire les hypothèses sont toujours basées sur le gaz calorifiquement et thermiquement parfait. Une variété de forme des tuyères supersoniques utilisées en Aéronautique sont

présentées par Sutton en 1992 [60]. On trouve dans cette références une dizaine de forme de tuyère supersoniques citons notre tuyère de longueur minimale *MLN* appliquée dans notre étude ou tout simplement la tuyère à détente centrée. Plusieurs travaux sont réalisés pour ce type de tuyère citons celui de Argrow et al 1988 [6]. La géométrie utilisée dans cette étude est le *2D* et l'axisymétrique. Les auteurs dans cette étude ont fait la comparaison des performances obtenues suivant le choix de la ligne sonique de départ de calcul dans le divergent de la tuyère. A titre d'information plusieurs considération sur la ligne sonique au col de la tuyère. Toujours dans cette étude les auteurs ont utilisés le modèle du gaz parfait malgré que les résultats obtenus sont élargis jusqu'à nombre de Mach 5.00 mais sans considération de la température de la chambre de combustion.

Des applications pour d'autres types de tuyères sont présentées dans la référence [22] par Gerald et al. Citons la tuyère à corps central et d'autres de type annulaire. La première étude de conception des tuyères *3D* de géométrie quelconque a été réalisée par Haddad et Moss en 1990 [24]. La tuyère choisie dans cette référence est de type coquetier avec utilisation toujours du modèle de gaz parfait. Entre 1970 et 2006 presque tous les travaux sur la conception des tuyères sont basés sur l'utilisation de modèle d'un gaz parfait. Ce problème est considérablement simplifié. Il considère que les chaleurs spécifiques sont constantes et ne varie pas avec la température. Cette hypothèse est valable uniquement à basse température et à faible nombre de Mach.

Notre présent modèle répond bien à la marge supersonique jusqu'à  $M_S=5,00$  et des températures de la chambre de combustion allant jusqu'à 3500 K inférieure au seuil de dissociation des molécules de l'air utilisé précisément pour la tuyère type *MLN*.

#### 1.4. Position du problème

Les résultats obtenus d'un écoulement supersonique d'un gaz parfait présentés dans les références [4, 5, 15, 19, 71, 72] sont valables sous la base de quelques hypothèses. Parmi ces hypothèses, le gaz est considéré comme caloriquement parfait, c'est à dire, les chaleurs spécifiques  $C_P$  et  $C_V$  sont constantes et ne dépendent pas de la température. On trouve dans la référence [4], une table contenant les valeurs de  $C_P$  et  $\gamma$  en fonction de la température pour l'air dans l'intervalle 55 K et 3400 K.

Tableau 1.1 : Table de variation de  $C_P(T)$  et  $\gamma(T)$  avec la température pour l'air [4].

$T$ (K)	$C_P$ (J/Kg K)	$\gamma(T)$	$T$ (K)	$C_P$ (J/Kg K)	$\gamma(T)$	$T$ (K)	$C_P$ (J/Kg K)	$\gamma(T)$
55	1001,9	1,402	900	1120,4	1,344	2500	1273,8	1,291
.	.	.	1000	1140,4	1,336	2600	1277,8	1,290
200	1002,2	1,401	1100	1158,2	1,329	2700	1281,5	1,289
250	1002,8	1,401	1200	1173,8	1,324	2800	1285,0	1,288
300	1004,5	1,400	1300	1187,5	1,319	2900	1288,3	1,287
350	1007,9	1,398	1400	1199,6	1,315	3000	1291,5	1,286
400	1013,1	1,395	1500	1210,2	1,311	3100	1294,4	1,285
450	1020,3	1,391	1600	1219,7	1,308	3200	1297,2	1,284
500	1029,2	1,387	1700	1228,1	1,305	3300	1299,8	1,283
550	1039,4	1,381	1800	1235,7	1,303	3400	1302,3	1,283
800	1098,2	1,354	2300	1264,9	1,294			
850	1109,5	1,349	2400	1269,5	1,292			

D'après le tableau 1.1, on remarque que la chaleur spécifique  $C_p$  et  $\gamma$  varie avec la température ce qui n'est pas valable dans le cas réel lorsque la température croit. Notons ici que la théorie du gaz parfait ne tient pas compte de cette température. Les auteurs Zebbiche et Youbi ont développé un modèle mathématique [66, 69, 70] qui tiendra compte de cette température.

Le nouveau modèle sera appelé modèle du gaz parfait à Haute Température ( $HT$ ). La seule différence entre les deux modèles réside au niveau de l'équation de conservation de l'énergie. On n'a pas un problème au niveau de la conservation de la masse et de la quantité du mouvement. Donc le changement de l'équation de l'énergie par une nouvelle qui tient compte de la variation des chaleurs spécifiques à haute température donne un nouveau modèle sachant que la méthode de résolution ne nécessite que quelques modifications. Il est à noter que pour résoudre un tel problème, il suffit généralement de choisir deux variables d'état pour déterminer le reste des paramètres. Alors le modèle mathématique du gaz parfait devient un cas particulier dans notre modèle à Haute Température. On présentera dans ce qui suit les principales équations du modèle haute température

### 1.5. Conception des tuyères supersoniques dans le modèle haute température (HT)

Les études sur les tuyères supersoniques dans le modèle haute température *HT* sur le dimensionnement de ces dernières, ont été principalement menées par les auteurs Zebbiche et Youbi. On présentera dans ce qui suit les principaux résultats de ces études en mettant l'accent sur les points forts de ces travaux.

- L'utilisation de la forme de la tuyère obtenue sur la base du modèle d'un gaz parfait, dégrade les performances souhaitées; surtout si la température de la chambre de combustion  $T_0$  est élevée (supérieure à 1000 K) [66, 69, 70].
- A faible température et nombre de Mach, l'écart des résultats entre les deux modèles est faible, ce qui donne la possibilité d'étudier un écoulement *HT* en utilisant les relations *GP*. Par contre, lorsque  $T_0$  augmente, la théorie *GP* commence à donner des résultats qui s'éloignent au fur et à mesure du cas réel, d'où la nécessité d'utiliser le modèle *HT*.

L'étude montre que si on conserve la même variation du nombre de Mach à travers la tuyère et par conséquent, le même nombre de Mach de sortie  $M_S$  du modèle d'un gaz parfait, il faut déterminer pour le modèle *HT*, le rayon de chaque section et en particulier le rayon de la section de sortie qui va donner la même variation du nombre de Mach et par conséquent une autre forme de la tuyère sera obtenue. Le rapport des sections obtenu est supérieur au rapport des sections du modèle *GP*. La forme de la tuyère obtenue à  $\gamma$  constant est alors incluse dans la tuyère obtenue par le modèle *HT*.

$$M_S ( HT ) = M_S ( GP ) \quad (1.1)$$

$$M_S ( HT ) = \frac{\sqrt{2 H [T_S( HT)]}}{a [T_S(HT)]} \quad (1.2)$$

Dans ce cas, le rapport des sections entre le modèle *HT* et *GP* est :

$$A_S/A_*( HT ) = \text{Exp} \left( \int_{T_S(HT)}^{T_*} F_A(T) dT \right) > A_S/A_*( GP ) \quad (1.3)$$



La deuxième situation consiste à conserver la forme de la tuyère dimensionnée sur la base du modèle du gaz parfait pour les applications aéronautiques. Dans ce cas, cette tuyère va délivrer un nombre de Mach inférieur à celui souhaité (voir la relation (1.5)). La correction du nombre de Mach pour le modèle à Haute température se fait en premier lieu par la détermination de la température  $T_S$  comme solution de l'équation (1.3). Dans ce cas, les rapports thermodynamiques changent et vont influencer sur les autres paramètres de conception telle que la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère.

$$A_S/A_*(HT) = A_S/A_*(GP) \quad (1.4)$$

Alors, le nombre de mach  $M_S$  entre les deux modèles est :

$$M_S (HT) < M_S (GP) \quad (1.5)$$

### 1.5.1. Cas bidimensionnelle

Zebbiche et Youbi ont menés une étude de conception d'une tuyère supersonique bidimensionnelle à détente centrée *MLN* à haute température [67]. Ils ont ajouté l'effet de variation de  $C_p$  et de  $\gamma$  en fonction de la température  $T_0$  sur la conception des tuyères supersoniques. On présentera dans ce qui suit les principaux résultats de leurs travaux :

#### **Effet sur la longueur ( $L/y^*$ )**

La figure 1.2 montre la variation de la longueur de la tuyère adimensionnelle ( $L/y^*$ ) à détente centrée *2D* en fonction du nombre de Mach de sortie  $M_S$  et en fonction de la température  $T_0$ . On remarque toujours l'influence de la température  $T_0$  surtout si la valeur dépasse les *1000 K environ*. L'étude indique l'influence du changement de la température génératrice sur les paramètres de dimensionnement de la tuyère où l'erreur entre le modèle *HT* et le modèle *GP* est mis en évidence dans cette étude.

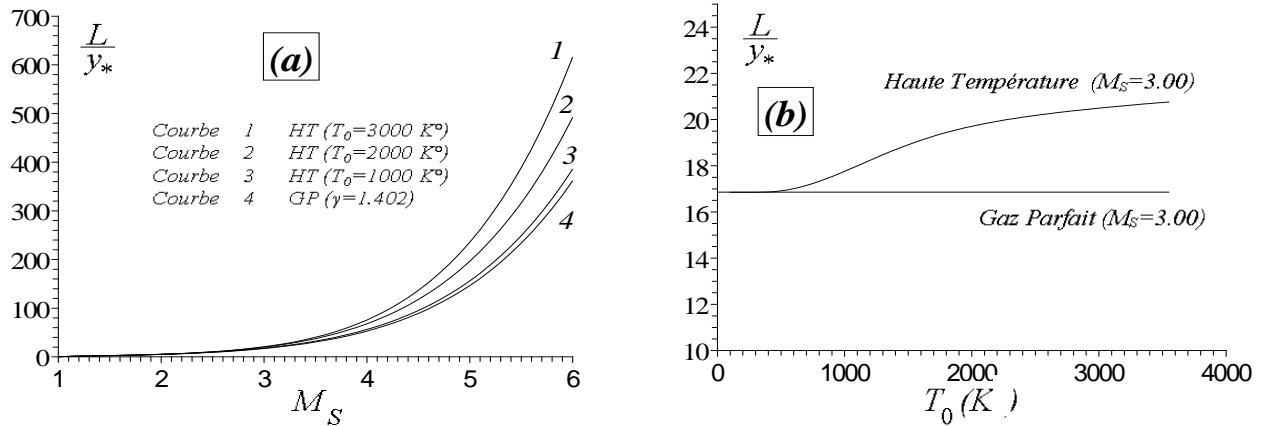


Figure 1.2 : Variation de la longueur de la tuyère à détente centrée 2D [67]  
 (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3,00$ .

### Effet sur la masse ( $C_{Masse}$ )

La figure 1.3a représente la variation de la masse de la structure de la tuyère sous forme adimensionnelle en fonction de  $M_S$ . Si  $M_S < 2,00$  environ, la température  $T_0$  ne présente *presque* aucune influence sur la masse de la structure. De même, la figure 1.30b présente la variation en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3,00$ . Le calcul de la masse est lié avec le calcul de l'arc curviligne de la paroi. On n'a pas pris en compte le calcul de la masse des deux côtés gauche et droite de la tuyère. Ils se trouvent à l'infini (n'existe pas), vu que la tuyère est 2D.

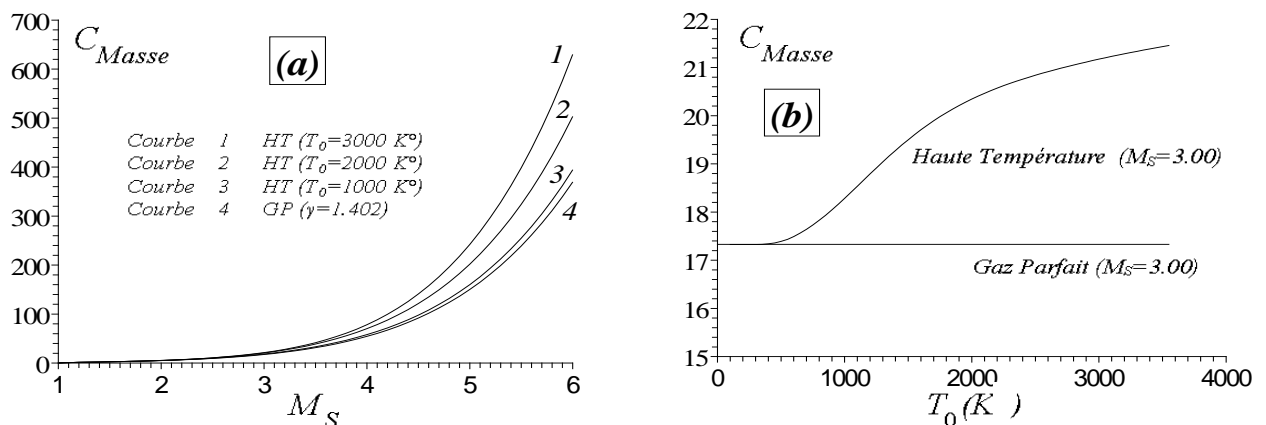


Figure 1.3 : Variation de la masse de la structure de la tuyère MLN 2D [67]  
 (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3,00$

### Effet sur la force de pression ( $C_{Force}$ )

La figure 1.4a représente la variation de la force axiale de pression délivrée sur le divergent en fonction de  $M_S$  pour différentes température  $T_0$ , y compris le cas du gaz parfait. Le but de la figure 1.31b c'est de présenter l'effet de  $T_0$  sur ce paramètre, si on change  $T_0$  de la chambre de combustion sans changer le nombre de Mach  $M_S$ .

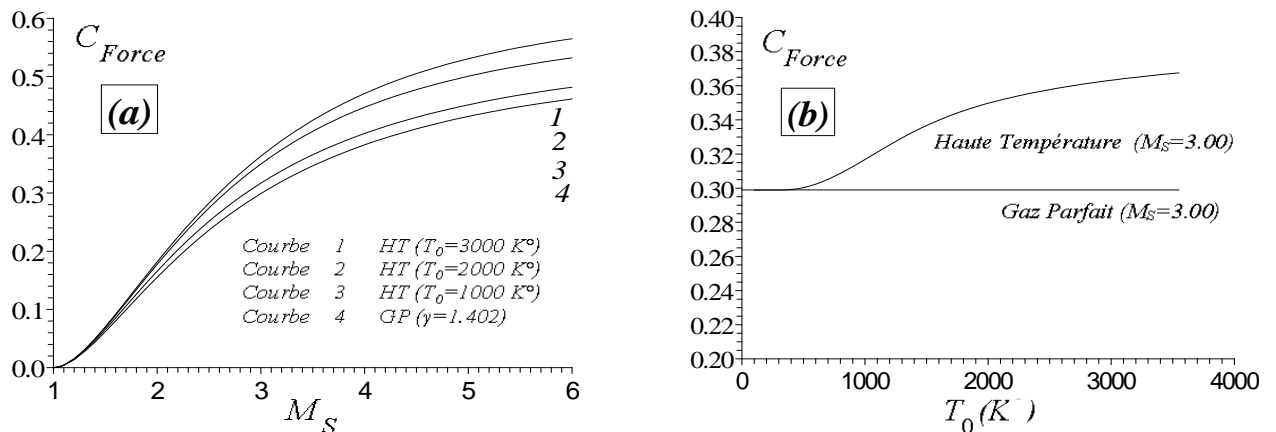


Figure 1.4 : Variation de la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère  
MLN 2D [67]

(a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3,00$ .

La figure 1.5 représente les courbes iso-valeurs, notamment les courbes iso-Mach illustrées sur la figure 1.5a et les courbes iso-directions illustrées sur la figure 1.5b. Cette figure montre que l'écoulement est bidimensionnel. On remarque que les courbes iso-Mach dans la zone de transition sont des lignes droites. L'écoulement commence par une entrée  $1D$  et se termine par une sortie  $1D$ , mais à travers la tuyère l'écoulement est  $2D$ . On peut bien remarquer la détente brusque au coin supérieure où les courbes se passent par ce point dans la région de Kernel. Cette dernière est une zone non simple. Les courbes iso-Mach passant par le coin supérieure possèdent un nombre de Mach  $M^{iso} \leq M^*$ .

Concernant les courbes iso-direction, les points qui possèdent une direction nulle sont les points du col, l'axe horizontal et la partie uniforme triangulaire. Cette figure démontre aussi que l'écoulement est bidimensionnel [67].

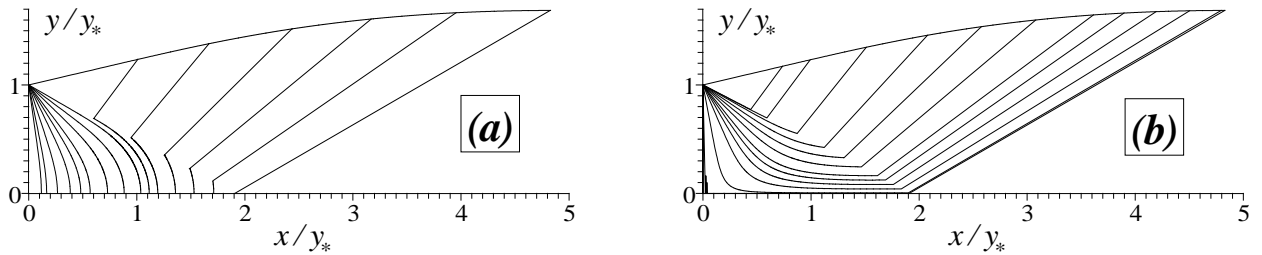


Figure 1.5 : Courbes iso-valeurs de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle.

(a) : Courbes iso-Mach. (b) : Courbes iso-direction.

### 1.5.2. Cas axisymétrique

Les études de conception à haute température des tuyères supersoniques axisymétrique *MLN*, ont été menées seulement par Zebbiche [63, 64], qui représente la seule publication menée sur ce genre d'étude. Elle servira principalement comme un cas de comparaison pour valider notre modèle tridimensionnel. On montrera dans ce qui suit les essentiels résultats de son travail :

- Un maillage raffiné et bien adéquat dans les régions de Kernel et de transition, permet de concevoir une tuyère convenablement avec une erreur minimale.
- La tuyère à détente centrée axisymétrique possède un point d'inflexion ayant un angle  $\theta_{max}$  situé proche du col. Alors, l'angle de déviation de la paroi augmente de  $\theta^*$  à  $\theta_{max}$  ensuite diminue progressivement jusqu'à  $\theta=0$  à la section de sortie.

Un autre résultat important trouvé par Zebbiche [63, 64], est la représentation des courbes iso-valeurs, notamment les courbes iso-Mach illustrées sur la figure 1.6a, et les iso-directions illustrées sur la figure 1.6b. On voit clairement que les courbes obtenues dans la région de transition ne sont pas des lignes de droites, vu que cette zone est de type non simple, contrairement au cas  $2D$ , où on a trouvé des segments de droites, voir figure 1.5. La figure 1.6 démontre que l'écoulement est axisymétrique avec une sortie uniforme et parallèle. Dans la figure 1.6b, on remarque que les courbes coupent la paroi de la tuyère en deux points, qui démontrent l'existence d'un point d'inflexion possédant  $\theta = \theta_{max}$ . On remarque que quelques courbes iso-valeurs passent par le point A du col, qui démontre encore que les courbes iso-Mach possèdent un nombre de Mach  $M \leq M^*$  et les courbes iso-directions possède  $\theta \leq \theta^*$ . Les points possédant une direction nulle sont les points du col, l'axe de symétrie et la partie uniforme triangulaire.

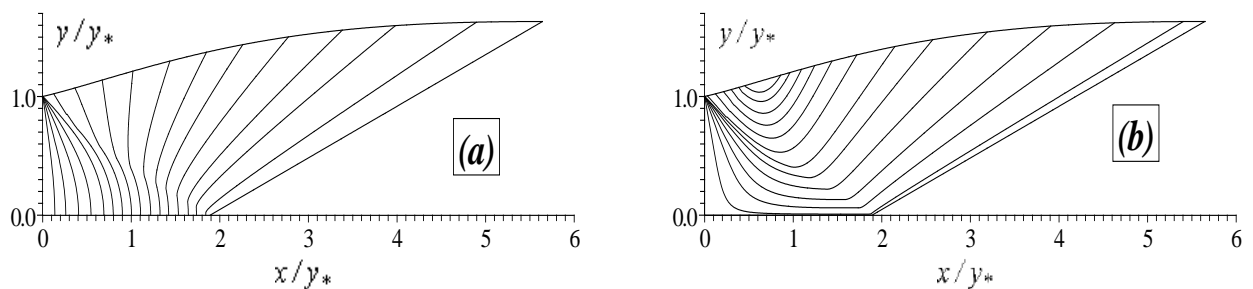


Figure 1.6 : Courbes iso-valeurs de la tuyère à détente centrée axisymétrique [64]

(a) : Courbes iso-Mach. (b) : Courbes iso-directions.

### Objectifs de l'étude

Après une recherche bibliographique assez poussée, on a remarqué que la majorité des travaux *publiés* dans le domaine de la conception des tuyères sont basés sur l'utilisation du modèle du gaz parfait à chaleur spécifique  $C_P$  constante. Cette supposition ne tient pas compte du comportement réel du gaz lorsque la température génératrice est élevée, dépassant les 1000 K.

L'objectif principal de la présente étude, consiste à tenir compte de l'effet de la variation de  $C_p$  et  $\gamma$  en fonction de la température pour concevoir les tuyères supersoniques tridimensionnelles à détente centrée *MLN*, pour n'importe quelle géométrie de la section de sortie choisie, à une température inférieure à la température du seuil de dissociation des molécules. Le calcul des performances de ces tuyères est fait comme le nombre de Mach de sortie, le coefficient de poussée ainsi que la masse. La comparaison sera faite avec les résultats concernant l'étude et la conception à haute température des tuyères supersoniques axisymétrique *MLN* basée sur les travaux des auteurs Zebbiche et Youbi [67].

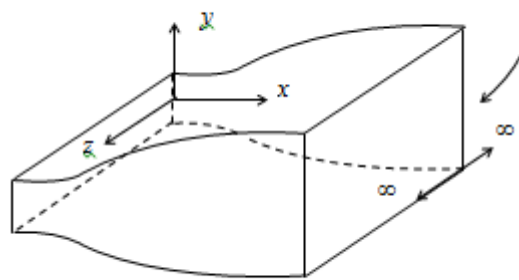
## CHAPITRE 2

### DIMENSIONNEMENT A HAUTE TEMPERATURE DE LA TUYERE À DETENTE CENTREE AXISYMETRIQUE

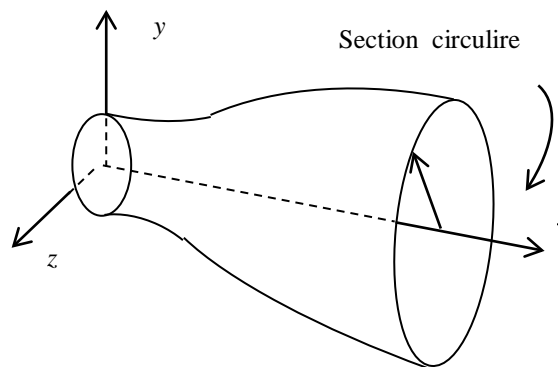
#### 2.1. Introduction

La tuyère supersonique tridimensionnelle est conçue à partir de la tuyère axisymétrique. C'est pourquoi on est obligé de décrire en premier lieu la méthode de dimensionnement d'une tuyère axisymétrique. La figure 2.1 représente les différentes géométries de tuyères supersoniques de propulsion ayant un écoulement horizontal au col et à la section de sortie. Les cas (a) et (b) sont respectivement de géométries bidimensionnelles [5, 23, 67, 70] et axisymétriques [6, 17, 19, 23, 63, 64]. Le cas (c) représente une tuyère tridimensionnelle de section de sortie arbitraire qui sera étudiée dans le chapitre 4. Elle fera l'objet de notre travail.

Section par unité de profondeur



(a): Tuyère bi-dimensionnelle



(b): Tuyère axisymétrique

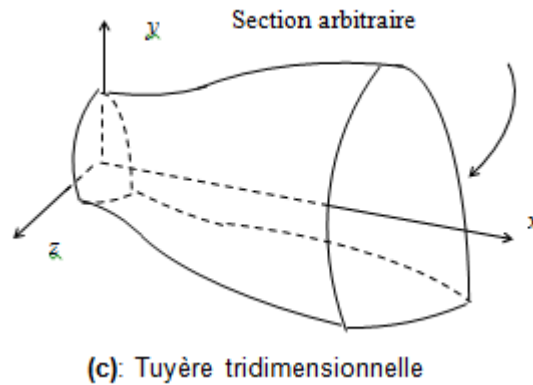


Figure 2.1 : Différentes géométries de tuyères

## 2.2. Tuyère à détente centrée

La tuyère supersonique est divisée en deux parties. Une partie subsonique de forme convergente et une deuxième partie supersonique de forme divergente. Il est à noter que la portion supersonique est indépendante des conditions amont de la ligne sonique. On peut étudier cette partie indépendamment de la partie subsonique. Cette dernière est utilisée pour déterminer la ligne sonique au col de la tuyère. Dans cette étude, on va étudier un type de tuyère donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. Elle est nommée tuyère à détente centrée. Ce type de tuyères donne une longueur minimale par rapport aux autres types existants. Il existe deux catégories pour ce type de tuyères suivant la ligne sonique. Si la ligne sonique est une ligne droite, la paroi au col génère des ondes de détente centrées et divergentes [5, 6, 17, 23]. La deuxième catégorie possède une ligne sonique courbée; dans ce cas l'écoulement à l'intérieur de la tuyère possède des lignes de Mach non centrées [5, 19].

La figure 2.2 illustre le schéma général de la tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite et représente les caractéristiques du champ d'écoulement dans différentes régions [64]. Cette tuyère est nommée tuyère à détente centrée (Minimum Length Nozzle *MLN*).

La figure 1.3 montre le champ d'écoulement dans cette tuyère. L'écoulement entre le col *OA* et la région uniforme *BES* est divisé en deux régions. La région *OAB*, appelée par région de Kernel, est une région d'ondes non simples. La région triangulaire *BES* est une région d'écoulement uniforme au nombre de Mach de sortie  $M_S$ . Dans ce contexte, la paroi, au col, est inclinée d'un angle  $\theta^*$ .



L'application de la tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite est utilisée pour les souffleries hypersoniques ainsi que les moteurs fusées [38, 44, 55]. L'étude dans ce chapitre est limitée pour le cas de la tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite.

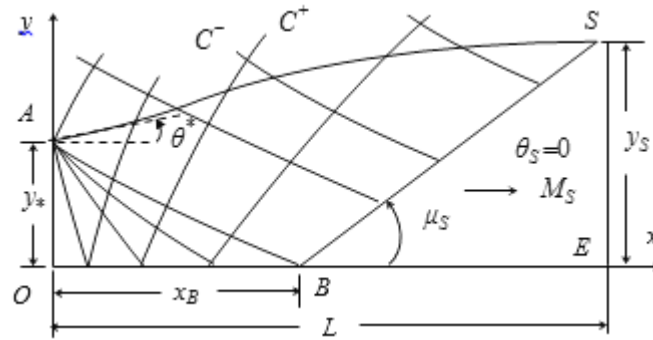
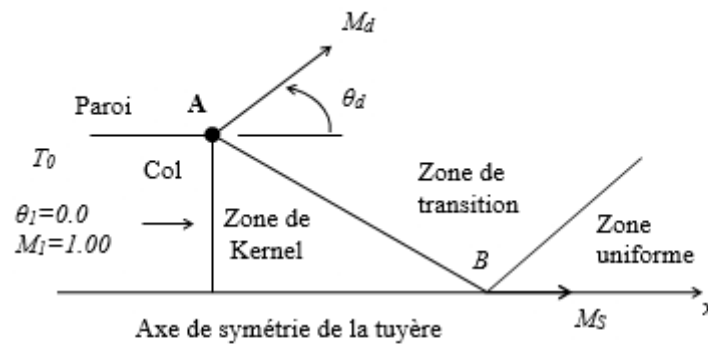


Figure 2.2 : Présentation du champ de l'écoulement dans la tuyère à détente centrée axisymétrique [64].



$AB$  : Dernière caractéristique descendante de la zone de Kernel.

• : Centre de détente au col de la tuyère.

$M_d$  : Nombre de Mach juste après la détente.

$\theta_d$  : Déviation de l'écoulement juste après la détente

Figure 2.3 : Différentes régions d'écoulement dans une tuyère à détente centrée [70]

Comme on l'a mentionné auparavant, le traçage des contours des tuyères supersoniques établi sur la base de l'hypothèse des gaz parfaits, qui ne tient nullement compte de l'effet de la température génératrice pour un nombre de Mach de sortie fixé, on obtient le même profil pour n'importe quelle température. Ceci n'est donc qu'une approche du phénomène réel, car en principe, plus le gaz est chaud plus il prend un espace plus grand pour se détendre afin d'atteindre le nombre de Mach escompté à la section de sortie.

Les auteurs Zebbiche et Youbi [66, 67, 69] ont reconsidéré le problème avec une autre approche où le gaz à très haute température n'est plus entièrement parfait. Ceci conduit par la suite à faire une correction plus au moins notable des profils des tuyères supersoniques selon le nombre de Mach de sortie. Surtout au-delà d'une température génératrice de 1000 K, à partir de laquelle, les chaleurs spécifiques à pression  $C_P$  et à volume constant  $C_V$  varient considérablement avec la température pour la majorité des gaz [66, 69, 70]. Dans ce cas, les équations de conservation restent inchangées sauf l'équation d'énergie. Les nouvelles relations sur des rapports thermodynamiques à haute température sont présentées dans l'appendice B.

### 2.3. Formulation mathématique

Pour un écoulement supersonique, irrotationnel, adiabatique d'un gaz parfait, la méthode des caractéristiques donne les équations suivantes, dites équations des caractéristiques et de compatibilités [3, 63, 64]:

Suivant  $\xi$  (1-3) :

$$\begin{cases} d(v+\theta) = \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\xi \\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \mu) \end{cases} \quad (2.1)$$

Suivant  $\eta$  (2-3) :

$$\begin{cases} d(v-\theta) = \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\eta \\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \mu) \end{cases} \quad (2.2)$$

Les équations (2.1) et (2.2) sont valables respectivement sur les caractéristiques  $C^-$  et  $C^+$  comme le montre la figure 2.4. Dans le cas réel, les caractéristiques sont courbées, et si le maillage est fin de sorte que les points soient proches l'un de l'autre, on peut rapprocher la courbure par une ligne droite, le calcul sera sur les lignes de Mach nommées  $\xi$  sur la caractéristique  $C^-$  et par  $\eta$  sur la caractéristique  $C^+$  comme le montre la figure 2.4.

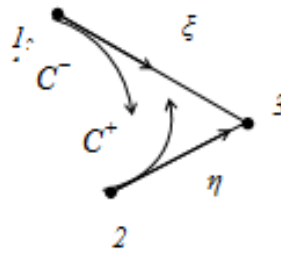


Figure 2.4 : Illustration des lignes caractéristiques et des lignes de Mach.

Les relations dans le système présenté par les équations (2.1) et (2.2) sont données pour notre modèle du gaz à haute température par [66, 67, 69, 70, 71] :

$$dv = F_v(T) = - \frac{C_p(T)}{2 H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT \quad (2.3)$$

$$M(T) = \frac{\sqrt{2 H(T)}}{a(T)} \quad (2.4)$$

$$a(T) = \sqrt{\gamma(T) r T} \quad (2.5)$$

$$\gamma(T) = \frac{C_p(T)}{C_p(T) - r} \quad (2.6)$$

Dans les équations (2.1) et (2.2),  $\theta$  l'angle de déviation du vecteur de vitesse de l'écoulement par rapport à l'horizontal est [4] :

$$\mu = \arcsin (1 / M) \quad (2.7)$$

On peut exprimer les directions  $\xi$  et  $\eta$  des caractéristiques en fonctions des coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  par la relation suivante [5, 17, 71]:

$$\begin{cases} d\xi = \frac{dx}{\cos(\theta - \mu)} \\ d\eta = \frac{dy}{\sin(\theta + \mu)} \end{cases} \quad (2.8)$$

Remplaçant les relations de l'équation (2.8) ainsi que la relation (2.3) dans le système (2.1) et (2.2) on obtient :

Suivant  $\xi$  (1-3):

$$\begin{cases} -\frac{C_P(T)}{2H(T)}\sqrt{M^2(T)-1} dT + d\theta = \frac{\sin\theta \sin\mu}{y \cos(\theta - \mu)} dx \\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \mu) \end{cases} \quad (2.9)$$

Suivant  $\eta$  (2-3):

$$\begin{cases} -\frac{C_P(T)}{2H(T)}\sqrt{M^2(T)-1} dT - d\theta = \frac{\sin\theta \sin\mu}{y \sin(\theta + \mu)} dy \\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \mu) \end{cases} \quad (2.10)$$

Le modèle mathématique développé est un système d'équations différentielles de quatre inconnues ( $x, y, T, \theta$ ). Celui du gaz parfait est basé sur les variables  $x, y, M$  et  $\theta$  à cause de l'équation implicite (2.4) reliant  $M$  et  $T$  dont l'expression analytique inverse n'existe pas, on a considéré la variable  $T$  au lieu de  $M$ .

Comme on la mentionné, les caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$  sont des courbes, l'application de la méthode des caractéristiques oblige à introduire un maillage fin afin d'approximer chaque caractéristique entre deux points par des segments de ligne droite. Les propriétés ( $x, y, T, \theta, \rho, P$ ) en un point de champ d'écoulement, peuvent être déterminées à partir de celles des deux points reliés avec le point considéré par les lignes caractéristiques qui le précèdent. Par exemple les propriétés au point 3 de la figure 2.4 peuvent être déterminées à partir de celles des points 1 et 2 qui les relie. On approche dans ce cas à la variation des paramètres  $y, \theta$  et  $T$  le long les segments reliant les points 1 et 2 et les points 2 et 3 par les expressions suivantes [64, 65, 68] :

$$\theta_{13} = C_\theta \theta_1 + (1 - C_\theta) \theta_3 \quad ; \quad \theta_{23} = C_\theta \theta_2 + (1 - C_\theta) \theta_3 \quad (2.11)$$

$$T_{13} = C_T T_1 + (1 - C_T) T_3 \quad ; \quad T_{23} = C_T T_2 + (1 - C_T) T_3 \quad (2.12)$$

$$y_{13} = C_y y_1 + (1 - C_y) y_3 \quad ; \quad y_{23} = C_y y_2 + (1 - C_y) y_3 \quad (2.13)$$

$C_y$ ,  $C_\theta$  et  $C_T$  sont des coefficients d'interpolation appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ . Si ces coefficients sont égaux à 0.5, on obtient la valeur moyenne des paramètres.

### 2.3.1. Equation et procédure pour un point interne

Un point est nommé point interne s'il est situé dans le champ de l'écoulement supersonique comme le point 3 dans la figure 2.5. Ce point est lié aux deux points 1 et 2 par des lignes de Mach  $\xi$  et  $\eta$  respectivement. Les propriétés  $(x, y, T, \theta)$  aux points 1 et 2 sont connues et le problème devient à déterminer ces propriétés au point 3 [63, 64, 68].

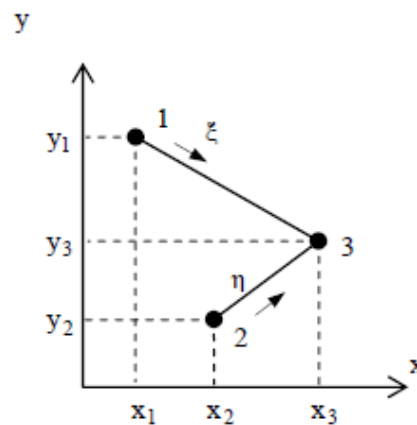


Figure 2.5 : Nœud interne quelconque

L'intégration des équations (2.9) et (2.10) donne :

Suivant  $\xi$  (1 - 3):

$$\begin{cases} A_{13} (T_3 - T_1) + (\theta_3 - \theta_1) = B_{13} (x_3 - x_1) \\ y_3 - y_1 = C_{13} (x_3 - x_1) \end{cases} \quad (2.14)$$

Suivant  $\eta$  (2 – 3):

$$\begin{cases} A_{23} (T_3 - T_2) - (\theta_3 - \theta_2) = B_{23} (y_3 - y_2) \\ y_3 - y_2 = C_{23} (x_3 - x_2) \end{cases} \quad (2.15)$$

Avec :

$$A_{13} = - \frac{C_P(T_{13})}{2 H(T_{13})} \sqrt{M_{13}^2 - 1} \quad ; \quad A_{23} = - \frac{C_P(T_{23})}{2 H(T_{23})} \sqrt{M_{23}^2 - 1} \quad (2.16)$$

$$B_{13} = \frac{\sin(\theta_{13}) \sin(\mu_{13})}{y_{13} \cos(\theta_{13} - \mu_{13})} \quad ; \quad B_{23} = \frac{\sin(\theta_{23}) \sin(\mu_{23})}{y_{23} \sin(\theta_{23} + \mu_{23})} \quad (2.17)$$

$$C_{13} = \text{tg}(\theta_{13} - \mu_{13}) \quad ; \quad C_{23} = \text{tg}(\theta_{23} + \mu_{23}) \quad (2.18)$$

$$\text{Et :} \quad \mu_{13} = \arcsin(1 / M_{13}) \quad ; \quad \mu_{23} = \arcsin(1 / M_{23}) \quad (2.19)$$

$$M_{13} = \frac{\sqrt{2 H(T_{13})}}{a_{13}} \quad ; \quad M_{23} = \frac{\sqrt{2 H(T_{23})}}{a_{23}} \quad (2.20)$$

$$a_{13} = \sqrt{\gamma_{13} r T_{13}} \quad ; \quad a_{23} = \sqrt{\gamma_{23} r T_{23}} \quad (2.21)$$

$$\gamma_{13} = \frac{C_P(T_{13})}{C_P(T_{13}) - r} \quad ; \quad \gamma_{23} = \frac{C_P(T_{23})}{C_P(T_{23}) - r} \quad (2.22)$$

Les équations (2.14) et (2.15) constituent un système d'équations algébriques non linéaires à quatre inconnues ( $x_3$ ,  $y_3$ ,  $T_3$ ,  $\theta_3$ ). L'algorithme par itérations successives s'écrit [40, 45, 59, 63, 64, 67]:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{E_2 - E_1}{C_{13} - C_{23}} \\ y_3 = E_1 + C_{13} x_3 \end{cases} \quad (2.23)$$

$$T_3 = \frac{D_1 + D_2 + [B_{23} y_3 + B_{13} x_3]}{A_{13} + A_{23}} \quad (2.24)$$

$$\theta_3 = D_1 + B_{13} x_3 - A_{13} T_3 \quad (2.25)$$

Avec:

$$E_1 = y_1 - C_{13} x_1 \quad ; \quad E_2 = y_2 - C_{23} x_2 \quad (2.26)$$

$$D_1 = \theta_1 + A_{13} T_1 - B_{13} x_1 \quad ; \quad D_2 = -\theta_2 - B_{23} y_2 + A_{23} T_2 \quad (2.27)$$

Les relations (2.23), (2.24) et (2.25) constituent un système d'équations par itérations pour un écoulement supersonique axisymétrique, permanent et irrotationnel pour notre modèle à Haute Température.

La résolution du système se fait par la procédure d'intégration numérique de prédicteur correcteur par les différences finies [5, 6, 17, 19, 23, 30, 37, 40]. Pour l'algorithme de prédicteur d'Euler, les valeurs initiales de  $y_{i3}$ ,  $T_{i3}$  et  $\theta_{i3}$  ( $i = 1, 2$ ) à l'itération,  $K=0$ , sont données par:

$$T_{13} = T_1 \quad ; \quad \theta_{13} = \theta_1 \quad ; \quad y_{13} = y_1 \quad (2.28)$$

$$T_{23} = T_2 \quad ; \quad \theta_{23} = \theta_2 \quad ; \quad y_{23} = y_2 \quad (2.29)$$

Substituons les expressions (2.28) et (2.29) dans les relations (2.16), (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21) et (2.22) ainsi que dans les relations (2.26) et (2.27), ensuite remplaçons les résultats obtenus dans les relations (2.32), (2.33), (2.34) et (2.35) pour obtenir les valeurs prédictives des paramètres ( $x_3^0$ ,  $y_3^0$ ,  $T_3^0$ ,  $\theta_3^0$ ) au point 3.

Pour l'algorithme du correcteur d'Euler, les valeurs des relations (2.11), (2.12) et (2.13) sont utilisées et substituées dans les équations (2.23), (2.24) et (2.25) pour obtenir les nouvelles valeurs des paramètres au point 3. Les valeurs corrigées sont ( $x_3^1$ ,  $y_3^1$ ,  $T_3^1$ ,  $\theta_3^1$ ).

L'algorithme du correcteur d'Euler sera répété jusqu'à l'obtention de la précision  $\varepsilon$  voulue. Autrement dit, pour  $K$  itérations, il faut satisfaire la condition suivante pour assurer la convergence:

$$\text{Max} \left[ \left| y_3^K - y_3^{K-1} \right|, \left| \theta_3^K - \theta_3^{K-1} \right|, \left| T_3^K - T_3^{K-1} \right| \right] < \varepsilon \quad (2.30)$$

La variable  $x$  converge automatiquement avec la convergence de la condition (2.30).

### 1.3.2. Procédure pour un nœud interne particulier

On rencontre ce type de points comme le montre la figure 2.6 lorsque le point 2 se trouve sur l'axe de symétrie [63, 64, 68].

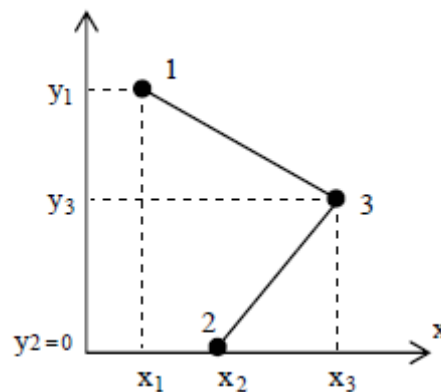


Figure 2.6 : Nœud interne particulier

L'utilisation de l'algorithme du point interne pour le cas axisymétrique pose un problème pour la détermination des propriétés de ce point particulier. Le terme  $B_{23}$  dans la relation (2.16) est indéterminé pour la valeur prédictive, puisque, au point 2 on a  $y_2 = 0$ ,  $\theta_2 = 0$ . Comme le segment de la ligne de Mach montante est petit, le point 3 sera proche de l'axe de symétrie et dans ce cas, on peut rapprocher le numérateur du terme  $B_{23}$  par  $\sin(\theta_{23}) = \sin(\theta_3) \approx \theta_3$  et le dénominateur par  $\sin(\theta_{23} + \mu_{23}) \approx \sin(\mu_{23})$ . Le terme  $B_{23}$  se simplifie à:



$$B_{23} \approx \frac{\theta_3}{y_3} \quad (2.31)$$

L'équation (2.15) ne reste plus valable, et sera remplacée par:

$$A_{23} (T_3 - T_2) - (\theta_3 - \theta_2) = \theta_3 \quad (2.32)$$

Alors, la résolution de l'équation (2.31) par rapport à  $\theta_3$  donne:

$$\theta_3 = \frac{A_{23} T_3 - A_{23} T_2 + \theta_2}{2} \quad (2.33)$$

Remplaçons l'équation (2.33) dans la relation (2.16) et résolvons l'équation obtenue par rapport à  $T_3$  on obtient:

$$T_3 = \frac{2 [D_1 + B_{13} x_3] + A_{23} T_2}{2 A_{13} + A_{23}} \quad (2.34)$$

Comme résultat, l'équation (2.29) sera échangée par l'équation (2.14). Donc pour déterminer les propriétés ( $x_3$ ,  $y_3$ ,  $T_3$ ,  $\theta_3$ ) de ce type de point particulier, on utilise les équations (2.23), (2.24) et (2.40).

### 1.3.3. Equations pour un point sur l'axe de symétrie

D'après la figure 2.7, le point 3 se trouve sur l'axe de symétrie de la tuyère. Donc, le point 2 au-dessous de cet axe est l'image du point 1. Comme résultat, le point 3 est par analogie un point interne.

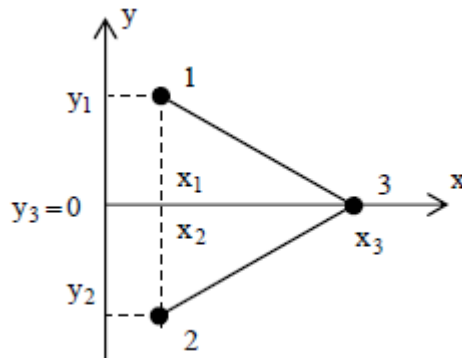


Figure 2.7 : Nœud sur l'axe de symétrie

La procédure de calcul est la même que celle utilisée précédemment pour un point interne sauf que dans le cas actuel  $y_3 = v_3 = \theta_3 = 0$ . On ne tient compte que de la caractéristique  $C^-$ , représentée par le segment de droite 1–3. Les inconnues  $x_3$ ,  $T_3$  sont respectivement obtenues par la résolution du système (2.14). On obtient :

$$x_3 = x_1 - \frac{y_1}{C_{13}} \quad (2.35)$$

$$T_3 = T_1 + \frac{B_{13} (x_3 - x_1) + \theta_1}{A_{13}} \quad (2.36)$$

On peut considérer ce point comme étant un point interne si les propriétés au point 2 sont prises par:

$$x_2 = x_1 \quad ; \quad y_2 = -y_1 \quad ; \quad \theta_2 = -\theta_1 \quad ; \quad T_2 = T_1 \quad (2.37)$$

#### 2.4. Calcul des paramètres thermodynamiques

Une fois qu'on a déterminé les propriétés ( $x$ ,  $y$ ,  $T$  et  $\theta$ ) en un point 3 du champ d'écoulement, on peut déterminer le nombre de Mach  $M_3$  en remplaçant la température  $T = T_3$  dans la relation (2.4). Les autres paramètres (rapports des masses volumiques, rapport des pressions, rapport des vitesses du son, vitesse de l'écoulement et composantes du vecteur de vitesse peuvent être déterminés respectivement par les relations suivantes [63, 64, 68] :

$$\left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_3 = \text{Exp} \left( - \int_{T_3}^{T_0} \frac{C_P(T)}{a^2(T)} dT \right) \quad (2.38)$$

$$\left( \frac{P}{P_0} \right)_3 = \left( \frac{T}{T_0} \right)_3 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_3 \quad (2.39)$$

$$\left( \frac{a}{a_0} \right)_3 = \frac{a(T_3)}{a(T_0)} = \left( \frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)} \right)^{1/2} \left( \frac{T_3}{T_0} \right)^{1/2} \quad (2.40)$$

$$\begin{bmatrix} V \\ a_0 \end{bmatrix}_3 = M_3 \begin{bmatrix} \gamma(T_3) \\ \gamma(T_0) \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} T_3 \\ T_0 \end{bmatrix}^{1/2} \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u \\ a_0 \end{bmatrix}_3 = M_3 \begin{bmatrix} \gamma(T_3) \\ \gamma(T_0) \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} T_3 \\ T_0 \end{bmatrix}^{1/2} \cos(\theta_3) \\ \begin{bmatrix} v \\ a_0 \end{bmatrix}_3 = M_3 \begin{bmatrix} \gamma(T_3) \\ \gamma(T_0) \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} T_3 \\ T_0 \end{bmatrix}^{1/2} \sin(\theta_3) \end{cases}, \quad (2.42)$$

## 2.5. Procédure de calcul dans la tuyère

Le calcul de l'écoulement dans la tuyère est divisé en deux régions nommées respectivement par région de Kernel et de transition.

### 2.5.1. Région de Kernel

Le calcul de l'écoulement dans la région de Kernel commence au point A avec plusieurs manières de conception. la première possibilité consiste à dimensionner la tuyère sur la base de l'angle de détente  $\theta_d$ . la deuxième possibilité est que la conception se fera sur la base du nombre de Mach de sortie  $M_S$  [5, 68].

- Si la conception se fait sur la base de l'angle de détente  $\theta_d$ , le calcul numérique nous oblige à discrétiser la zone de détente de l'écoulement  $0 \leq \theta \leq \theta_d$  en un nombre fini de points. Au total, on obtient  $(N+1)$  C, et entre caractéristiques successives, on a :

$$\Delta\theta = \Delta v = \frac{\theta^*}{N} \quad (2.43)$$

- Si la conception se fait sur la base du nombre de Mach  $M_S$ , le calcul nous oblige d'avoir un pas petit, alors :

$$\Delta\theta = \Delta v = \text{donné} \quad (2.44)$$

Les relations (2.43) et (2.44) donnent un maillage uniforme pour les caractéristiques C de la fin de la région de Kernel avec un espace large, mais pour les premières C

juste après le col, donnent un maillage non uniforme. Ainsi le contour de la paroi juste après le col est mal représenté. Pour corriger ce problème, on opte dans notre étude pour un raffinement du maillage par insertion des  $C^-$  supplémentaires entre la ligne sonique et la 1<sup>ère</sup> caractéristique insérée est réalisée en introduisant la condensation suivante [6, 66, 68]:

$$v_i = \left( \frac{i}{N_i} \right)^\Delta \Delta v \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots, N_i \quad (2.45)$$

$N_i$  : nombre des caractéristiques  $C^-$  insérées entre le col et la 1<sup>ère</sup>  $C^-$

$\Delta$  : nombre réel supérieur à 1

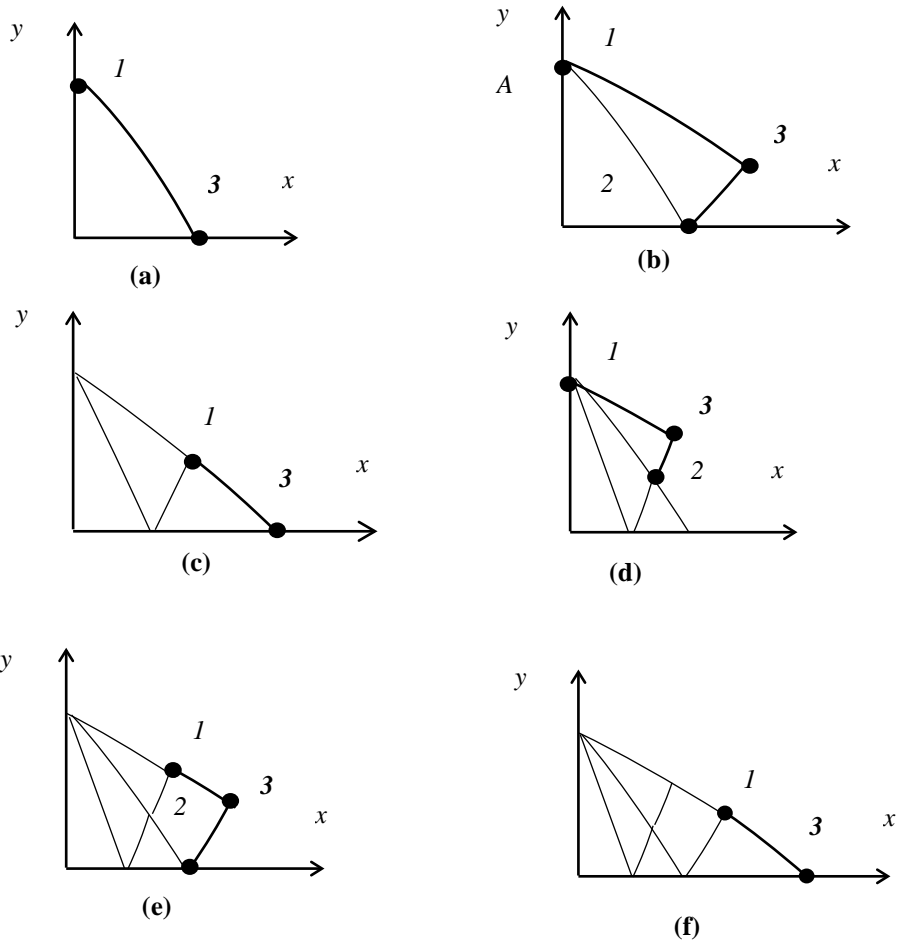


Figure 2.8 : Processus de calcul des caractéristiques dans la région de Kernel.

La procédure de calcul dans la région de Kernel est représentée par la figure 2.8. En premier lieu on détermine les propriétés au point 1 de la figure 2.8a. En ce point, on a  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = y_A = y_d = 1$  et  $\theta_1 = v_1$ . La température  $T_1$  doit être déterminée en résolvant l'équation suivante [63, 64, 68]:

$$\theta_1 = \int_{T_1}^{T^*} F_v(T) dT \quad (2.46)$$

On procède ensuite à la détermination des propriétés au point 3 de la figure 2.8a en utilisant la procédure d'un point sur l'axe de symétrie. Maintenant, la première caractéristique est calculée. On passe à la deuxième  $C$  et le calcul commence par la détermination des propriétés au point 1 de la figure 2.8b. En ce point on a toujours  $x_1 / y^* = 0$ ,  $y_1 / y^* = 1$ , mais  $\theta_1 = v_2$  ou  $\theta_1 = 2 \Delta\theta$  suivant que le maillage soit avec ou sans procédure de condensation. La détermination de la température  $T_1$  se fait toujours par la résolution de l'équation (2.46) avec la nouvelle valeur de  $\theta_1$ . On passe par la suite à la détermination des propriétés au point 3 de la figure 2.8b. Nous finissons le calcul sur cette  $C$  par la détermination des propriétés au point 3 de la figure 2.8c en utilisant la procédure d'un point sur l'axe de symétrie.

Une fois arrivé au point de l'axe de symétrie, la caractéristique descendante concernée est complètement calculée. On passe à la troisième  $C$ . Chaque caractéristique à partir de la troisième, contient 4 types de points. Le premier, c'est le point 1 confondu avec le point A. Un point 3 sur l'axe de symétrie comme le montre la figure 2.8f. Un point 3 interne particulier comme le montre la figure 2.8e et le reste des points sont de type points internes. Chaque type de point nécessite une procédure différente comme présentée auparavant. Notons ici, qu'une  $C$  de numéro  $i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ ) contient  $i + 1$  points à traiter. Si la zone de Kernel contient  $N$  caractéristiques à traiter, le nombre totale  $N_{Total}$  de points à traiter est exactement égal à:

$$N_{Total} = 2 + 3 + 4 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2} - 1 \quad (2.47)$$

Le calcul de l'écoulement dans la région de Kernel s'arrête si le calcul de toutes les  $N$  caractéristiques sélectionnées au départ est achevé. Après la détermination du

champ d'écoulement dans la région de Kernel, on peut déterminer sa longueur (longueur de détente) par:

$$\frac{L_d}{y^*} = \frac{x_B}{y^*} \quad (2.48)$$

### 2.5.2. Région de Transition et contour de la tuyère axisymétrique

La détermination du contour de la paroi de la tuyère axisymétrique se fait en même temps que le calcul de l'écoulement aux points d'intersection des caractéristiques dans la région de transition *ABS* de la figure 2.2.

Le contrôle de la géométrie du maillage dans la région de transition dépend de la distance  $\Delta x$  (non-dimensionnelle) choisie pour les points sélectionnés sur la ligne de Mach uniforme *BS*. Les propriétés des points sur cette ligne sont connues et sont égales aux valeurs de l'écoulement uniforme de la section de sortie. La figure 2.9 représente le processus de calcul et illustre la direction de calcul dans la région de transition. On calcul en premier les propriétés au point 3 de la figure 2.9a. Ici les propriétés au point 2 sont connues puisque ils appartiennent à la dernière *C* dans la région de Kernel. Les propriétés au point 1 sont données par:

$$x_1 = x_B + \Delta x \quad ; \quad y_1 = \Delta x \operatorname{tg}(\mu_S) \quad ; \quad \theta_1 = 0.0 \quad ; \quad T_1 = T_S \quad (2.49)$$

La température  $T_S$  peut être déterminée par la résolution de l'équation (2.4) en remplaçant  $T = T_S$  et  $M = M_S$ . Le calcul des propriétés au point 3 se fait en utilisant la procédure d'un point interne. On passe ensuite au calcul des propriétés au point interne 3 de la figure 2.9b sur la même *C*. On poursuit le calcul suivant la flèche indiquée sur la figure 2.9b jusqu'au premier point (point 3) de la *C* comme le montre la figure 2.9c. Le premier point de la caractéristique précédente est toujours un point de la paroi, déjà déterminé.

Le problème qui se pose c'est de déterminer un point de la paroi de la tuyère qui coupe la *C* calculée. Entre les deux caractéristiques, on peut détecter plusieurs points intermédiaires de la paroi. Les différents cas possibles de détection de point de la paroi sont illustrés sur la figure 2.10.

Sur cette dernière, les segments reliant les points 1 et 3 et les points 2 et 3 ainsi que le segment de la paroi sont considérés comme des lignes droites. Les propriétés aux points 1, 2, 3 et  $W$  sont connues. L'intersection de la paroi avec la  $C^-$  est nommée par le point  $P^-$  de propriétés  $(x^-, y^-, \theta^-, T^-)$  et l'intersection avec la  $C^+$  est nommée par le point  $P^+$  de propriétés  $(x^+, y^+, \theta^+, T^+)$ .

Pour connaître l'intersection du segment de la paroi avec  $C^+$  ou  $C^-$ , on calcule la valeur suivante avec l'approximation initiale  $\theta^\pm = \theta_W$ .

$$\Delta y = y_W - y_1 + (x_1 - x_W) \operatorname{tg}(\varphi) \quad (2.50)$$

Avec

$$\varphi = C_W \theta_W + (1 - C_W) \theta^+ \quad (2.51)$$

$C_W \in [0, 1]$  Coefficient d'interpolation.

- Si  $\Delta y \geq 0$ , on se trouve dans la situation (a) ou (c) de la figure 2.10.
- Si  $\Delta y < 0$ , on se trouve dans la situation (b) ou (d) de la figure 2.10.

### 1<sup>er</sup> Cas: Si $\Delta y \geq 0$

Lorsque  $\xi = 0$ , on a  $\theta_{13}(\xi) = \theta_3$  et lorsque  $\xi = \Delta\xi_{13}$  (distance entre les points 1 et 3) on a  $\theta_{13}(\xi) = \theta_1$ . La variation linéaire de l'angle  $\theta$  donne au point  $P^-$ , le résultat suivant:

$$\theta^- = \theta_3 + \left[ \frac{(x^- - x_3)^2 + (y^- - y_3)^2}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \right]^{1/2} (\theta_3 - \theta_1) \quad (2.52)$$

La détermination de la position du point  $P^-$  se fait en écrivant les équations reliant les points 1 et 3 et les points  $W$  et  $P^-$ . On obtient:

$$\begin{cases} x^- = \frac{y_3 - y_W - x_3 \lambda^- + x_W \operatorname{tg}(\varphi^-)}{\operatorname{tg}(\varphi^-) - \lambda^-} \\ y^- = y_3 + \lambda^- (x^- - x_3) \end{cases} \quad (2.53)$$

Avec:

$$\varphi^- = C_W \theta_W + (1 - C_W) \theta^- \quad (2.54)$$

$$\lambda^- = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad (2.55)$$

2<sup>ème</sup> Cas: Si  $\Delta y < 0$

Lorsque  $\eta = 0$ , on a  $\theta_{23}(\eta) = \theta_2$  et lorsque  $\eta = \Delta\eta_{23}$  (distance entre les points 2 et 3), on a  $\theta_{23}(\eta) = \theta_3$ . La variation linéaire de l'angle  $\theta$ , donne au point  $P^+$ , le résultat suivant:

$$\theta^+ = \theta_2 + \left[ \frac{(x^+ - x_2)^2 + (y^+ - y_2)^2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \right]^{1/2} (\theta_3 - \theta_2) \quad (2.56)$$

La détermination de la position du point  $P^+$  se fait en écrivant toujours les équations reliant les points 2 et 3 et les points  $W$  et  $P^+$ . On obtient:

$$\begin{cases} x^+ = \frac{y_3 - y_W - x_3 \lambda^+ + x_W \operatorname{tg}(\varphi^+)}{\operatorname{tg}(\varphi^+) - \lambda^+} \\ y^+ = y_3 + \lambda^+ (x^+ - x_3) \end{cases} \quad (2.57)$$

Avec :

$$\varphi^+ = C_W \theta_W + (1 - C_W) \theta^+ \quad (2.58)$$

$$\lambda^- = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad (2.59)$$

L'équation (2.53) représente un système algébrique non linéaire permettant de déterminer la position  $(x, y)$  du point  $P$ . En premier lieu, on approxime l'angle  $\theta = \theta_W$ . On introduit cette approximation dans l'équation (2.53) pour obtenir l'approximation initiale de la position du point  $P$ .



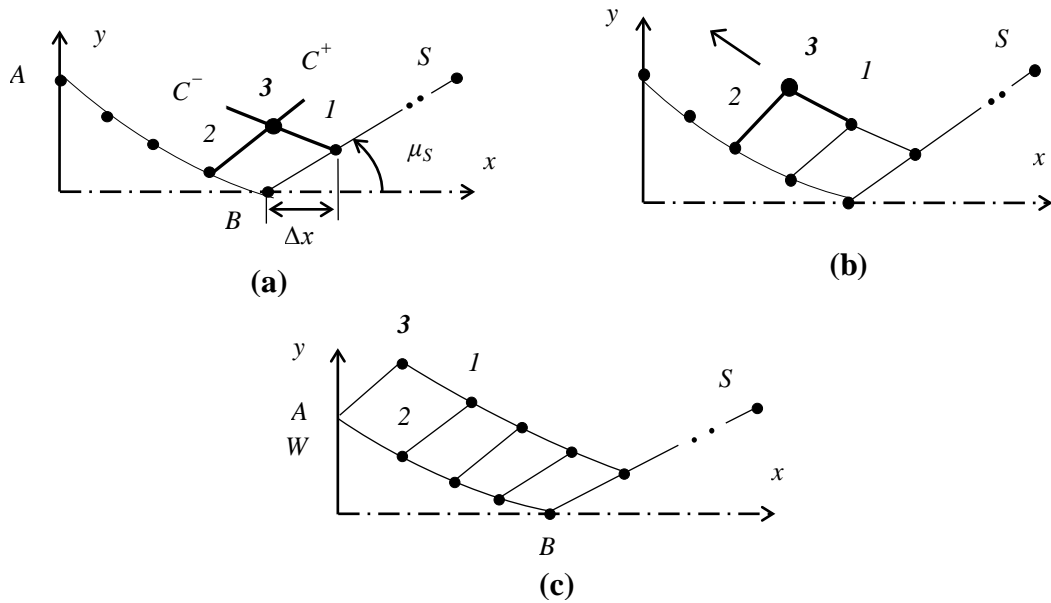


Figure 2.9 : Processus de calcul des  $C^-$  de la région de transition

Pour le point  $P^+$ , l'algorithme est présenté par les équations (2.56) et (2.57) pour obtenir la position de ce point et l'angle de déviation de la paroi.

$$\text{Max} \left[ \left| x^\pm (\text{itération } K) - x^\pm (\text{itération } K-1) \right|, \left| y^\pm (\text{itération } K) - y^\pm (\text{itération } K-1) \right| \right] < \varepsilon \quad (2.60)$$

Entre chaque deux itérations successives il faut vérifier la condition (2.60) pour la nouvelle valeur corrigée de  $\theta^-$  ou  $\theta^+$  pour prendre convenablement les équations nécessaires entre le point  $P^+$  ou  $P^-$  et de détecter exactement le point de la paroi. Une fois la position d'un point déterminée, il sera considéré comme un nouveau point de la paroi et une ou deux parmi les configurations de la figure 2.10 étaient appliquées. La procédure sera répétée pour les prochaines caractéristiques sélectionnées dans la région de transition. La présentation de la paroi dépend du pas  $\Delta x$  choisi pour les points de la ligne de Mach uniforme  $BS$  et des résultats obtenus sur la dernière  $C^-$  de la région de Kernel.

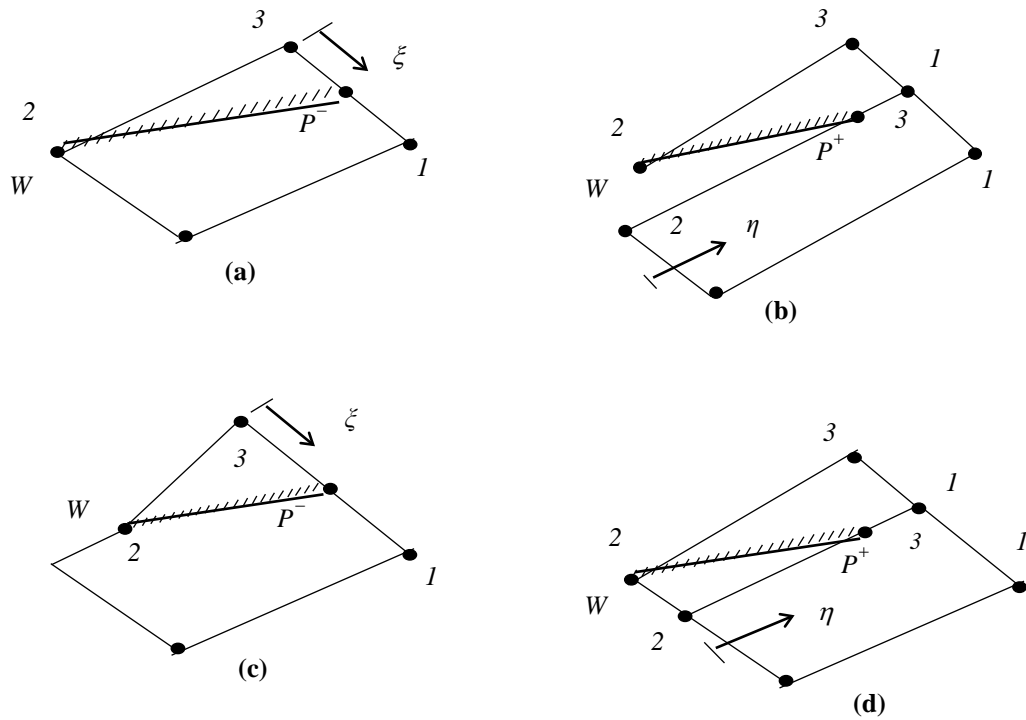


Figure 2.10 : Différents cas d'intersection de la paroi avec les caractéristiques de la tuyère axisymétrique

Une fois la position des points  $P^+$  et  $P^-$  est déterminée, l'angle de déviation de la paroi converge en même temps avec le processus de calcul. La température en ces points peut être calculée en supposons une variation linéaire sur les segments reliant les points 1 et 3 et les points 2 et 3 avec la même démarche comme l'angle  $\theta$ . On aura le résultat suivant, respectivement pour le point  $P^-$  et  $P^+$ :

$$T^- = T_3 + \left[ \frac{(x^- - x_3)^2 + (y^- - y_3)^2}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \right]^{1/2} (T_1 - T_3) \quad (2.61)$$

$$T^+ = T_2 + \left[ \frac{(x^+ - x_2)^2 + (y^+ - y_2)^2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \right]^{1/2} (T_3 - T_2) \quad (2.62)$$

Pour obtenir le nombre de Mach en ce point, on remplace la valeur obtenue de la température dans l'équation (2.4). Les autres paramètres peuvent être obtenus en

remplaçant la valeur de  $T_3$  par la valeur obtenue de  $T^-$  ou  $T^+$  dans les relations (2.38), (2.39), (2.40), (2.41) et (2.42).

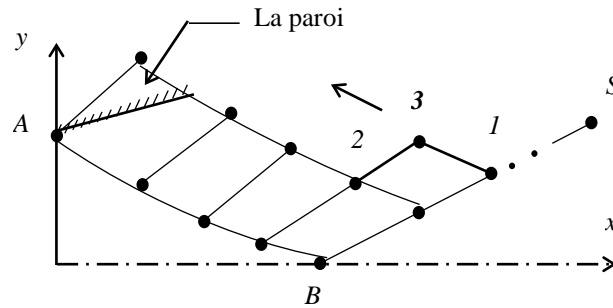


Figure 2.11 : Passage d'une caractéristique à l'autre dans la région de transition

La procédure complète sera répétée pour chaque  $C^-$  sélectionnée dans la région de transition jusqu'à la détermination d'une intersection de la paroi avec la  $C^+$   $BS$  uniforme. Chaque fois qu'on sélectionne un point sur la ligne  $BS$ , le nombre de points interne à calculer sur la  $C^-$  correspondante diminue graduellement jusqu'à l'obtention d'un point. Cette situation est obtenue cela veut dire qu'on est arrivé au point  $S$  de la section de sortie. Par conséquent, le rayon de sortie non-dimensionnel correspondant à la discrétisation sera donné par:

$$\frac{y_S(\text{calculé})}{y_*} = \frac{y_{N_W}}{y_*} \quad (2.63)$$

Le nombre de points trouvés sur la paroi de la tuyère (précisément le nombre  $N_W$  dans la relation (2.63) dépend du pas  $\Delta x$  choisi sur la  $C^-$  uniforme  $BS$  et du nombre de points sur la dernière  $C^-$   $AB$  de la région de Kernel. Il est supérieur ou égal au nombre de points choisi sur la  $C^-$   $BS$  uniforme et même supérieur au nombre de points obtenus sur la dernière  $C^-$   $AB$  de la région de Kernel; ce qui n'est pas le cas pour la géométrie bidimensionnelle, où le nombre de points de la paroi est égal forcément au nombre de points de la dernière  $C^-$   $AB$  de la région de Kernel.

## 2.6. Masse de la structure de la tuyère

Pour arriver à calculer la masse de la structure du divergent de la tuyère, on considère les deux suppositions suivantes [63, 64, 67] :

1. La forme de la paroi entre deux points successifs est une ligne droite. Cette configuration donne de bons résultats lorsque le nombre de points  $N$  de la paroi est très élevé.
2. La structure du divergent est constituée du même matériau, d'une épaisseur  $t_M$  et de masse volumique  $\rho_M$  constantes.

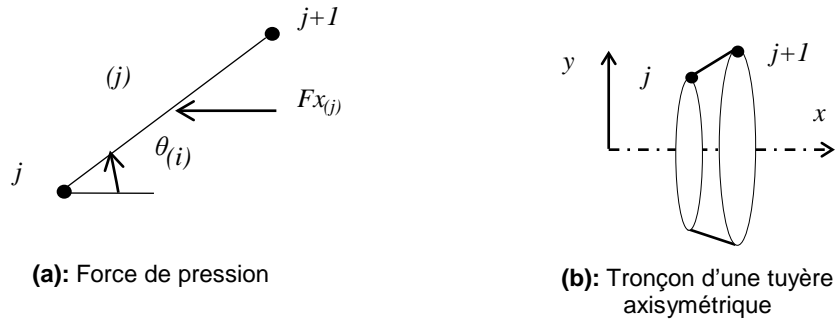


Figure 2.12 : Présentation d'un tronçon de la tuyère à détente centrée

Le calcul de la masse de la structure de la tuyère est lié au calcul de sa surface de révolution. Comme on aura  $(N-1)$  segments de droite, alors, sous forme non-dimensionnelle, la masse peut être obtenue par:

$$\frac{Masse}{\rho_M t_M A_*} = C_{Masse} = \sum_{j=1}^{j=N-1} \frac{S_{(j)}}{A_*} \quad (2.64)$$

$S_{(j)}$  représente la surface de révolution de la couronne circulaire limitée entre les points  $j$  et  $j+1$  ( $j=1, 2, \dots, N-1$ ) comme l'indique la figure 2.12. D'après le théorème de Guldin [11], la surface  $S_{(j)}$ , sous forme non-dimensionnelle, peut être calculée par:

$$\frac{S_{(j)}}{A_*} = \left( \frac{y_j}{y_*} + \frac{y_{j+1}}{y_*} \right) \left[ \left( \frac{x_{j+1}}{y_*} - \frac{x_j}{y_*} \right)^2 + \left( \frac{y_{j+1}}{y_*} - \frac{y_j}{y_*} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.65)$$

### 2.7. Force de pression exercée sur la paroi du divergent

Pour calculer la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère, on suppose encore que la pression exercée sur le tronçon ( $j$ ) de la figure 2.12 est approchée par:

$$P_{(j)} = \sigma P_j + (1 - \sigma) P_{j+1} \quad (2.66)$$

Alors:

$$F_{(j)} = P_{(j)} S_{(j)} \quad (2.67)$$

Pour les applications, on prend  $\sigma = 0,5$ .

La force de pression exercée sur le panneau ( $j$ ), en tenant compte de sa révolution autour de l'axe ( $x$ ) de symétrie est donnée par la projection de la force  $F_{(j)}$  sur l'axe  $x$ . Alors, la force de pression totale  $F_x$  exercée sur la paroi, est obtenue par la somme de toutes les forces de pression exercées sur tous les tronçons. Sous forme non-dimensionnelle, on obtient:

$$\frac{F_x}{P_0 A_*} = C_{Force} = \sum_{j=1}^{j=N-1} \left( \frac{P_{(j)}}{P_0} \right) \left( \frac{S_{(j)}}{A_*} \right) \sin(\theta_{(j)}) \quad (2.68)$$

Le rapport des pressions dans l'expression (2.68) est donné par la relation (2.41) et l'angle  $\theta_{(j)}$  peut être obtenu par la relation suivante:

$$\theta_{(j)} = \arctg \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} \right) \quad (2.69)$$

Le coefficient de la force de pression est une partie du coefficient de poussée globale de propulsion. Dans les relations du calcul de la masse et la force de pression, l'expression  $A_*$  est égale à  $\pi y_*^2$  pour le cas axisymétrique.

## CHAPITRE 3

### METHODOLOGIES DE CONCEPTION DES TUYERES SUPERSONIQUES TRIDIMENSIONNELLES

#### 3.1 Introduction

Les calculs théoriques des performances de la tuyère supersonique sont souvent nécessaires pour aider à évaluer les performances des moteurs des engins aérospatiaux. Dans le passé, la plupart des tuyères ont été réalisées par les programmes informatiques des tuyères axisymétriques et sont bien établis pour le calcul du champ d'écoulement dans les tuyères. Cependant les essais avec des tuyères à trois dimensions (3D) n'ont pas été possibles et aucun programme n'a été disponible pour le calcul d'écoulement dans les tuyères 3D.

C'est pourquoi on présentera les différentes méthodes de conception des tuyères supersoniques tridimensionnelles asymétriques ayant des sections de sortie arbitraire. Trois méthodes peuvent être utilisées :

- La première méthode permet de concevoir la tuyère tridimensionnelle grâce à la méthode des caractéristiques (MOC) en 3D [13, 41, 42].
- La deuxième méthode consiste à faire le passage de la tuyère axisymétrique vers la géométrie tridimensionnelle grâce à la définition d'une ligne de courant dans l'espace. Elle sera l'objet de notre travail.
- La troisième méthode présentée et développée par nous-même consiste à dimensionner la tuyère 3D asymétrique grâce à l'utilisation du contour de la tuyère axisymétrique.

#### 3.2. Méthode des caractéristiques (MOC) en 3D

Dans cette section, la méthode des caractéristiques (MOC) a été choisie comme une solution de l'analyse numérique. La théorie mathématique des caractéristiques est bien établie, et de nombreux programmes informatiques ont été basés sur cette méthode, en

particulier pour les tuyères de formes plane et axisymétrique [4, 5, 6]. Cependant, peu de tentatives ont été faites pour calculer les écoulements internes 3-D supersoniques avec la MOC [3].

### 3.2.1. Equations de mouvement

Les équations d'écoulement 3D stationnaire, non visqueux, pour un gaz parfait sont :

- L'équation de continuité :

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.1)$$

- L'équation de quantité de mouvement :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

- L'équation d'énergie :

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \left( u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} + w \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.5)$$

- L'équation d'état :

$$P = \rho r T \quad (3.6)$$

### 3.2.2. Formulation mathématique

La dérivation des équations de compatibilité commence avec les équations du mouvement pour un fluide non visqueux. Pour ces équations, deux ensembles de surfaces caractéristiques peuvent être dérivés. Ces surfaces sont définies comme suit.

$$(u f_x + v f_y + w f_z) = 0 \quad (3.7)$$

$$(u g_x + v g_y + w g_z)^2 - a^2 (g_x^2 + g_y^2 + g_z^2) = 0 \quad (3.8)$$

Où  $f(x, y, z) = 0$  est défini comme une surface composée de lignes de courant et  $g(x, y, z) = 0$  définit le Mach conoïde. Le long de la surface conoïde, le rayon, également désigné comme une bicaractéristique, est définie par les équations suivantes :

$$dx = (\cos\mu \sin\theta + \sin\mu \cos\theta \cos\delta) dL \quad (3.9)$$

$$dy = (\cos\mu \cos\theta \sin\psi - \sin\mu (\sin\theta \sin\psi \cos\delta - \cos\psi \sin\delta)) dL \quad (3.10)$$

$$dz = (\cos\mu \cos\theta \cos\psi - \sin\mu (\sin\theta \cos\psi \cos\delta + \sin\psi \sin\delta)) dL \quad (3.11)$$

Où :  $\mu$  : Angle de Mach

$dL$  : Distance le long de la bicaractéristique

$\delta$  : Angle paramétrique

$\theta$  et  $\psi$  sont liées au vecteur vitesse  $V$  en utilisant les coordonnées sphériques par :

$$u = V \sin\theta \quad (3.12)$$

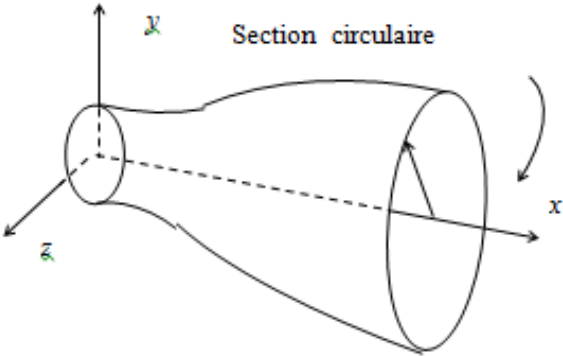
$$v = V \cos\theta \sin\psi \quad (3.13)$$

$$w = V \cos\theta \cos\psi \quad (3.14)$$

L'angle paramétrique  $\delta$  est situé dans le plan perpendiculaire au vecteur vitesse  $V$  et il est mesuré à partir du plan contenant  $V$  et  $x$ .



La figure 3.1 montre le système de coordonnées de la tuyère et la figure 3.2 montre aussi une représentation graphique de ces paramètres.



(b): Tuyère axisymétrique

Figure 3.1 : Système de coordonnées

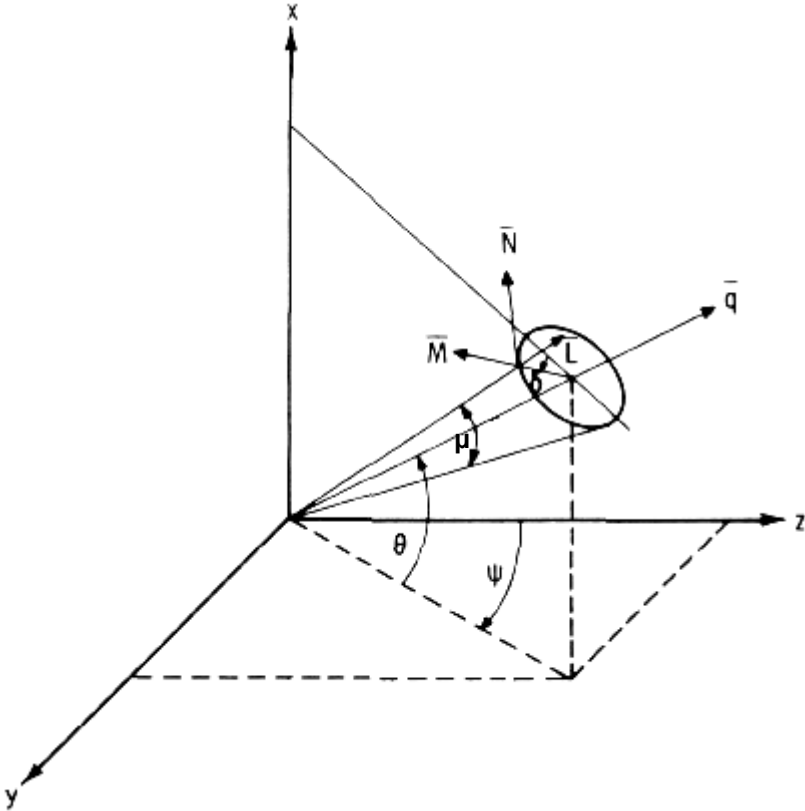


Figure 3.2 : Système de coordonnée sphérique du Mach conoïde

### 3.2.3. Equations de compatibilité

Pour cette solution 3D, les équations de compatibilité sont déterminées à partir des équations d'écoulement à condition que leurs dérivés dans la direction normale à la surface caractéristique soient nuls. Pour la surface, définie par le Mach conoïde, l'équation de compatibilité qui s'applique le long du Mach conoïde est :

$$\frac{\cos \mu}{\rho V^2} \frac{\partial P}{\partial L} + \cos \delta \frac{\partial \theta}{\partial L} + \cos \theta \sin \delta \frac{\partial \psi}{\partial L} + \sin \rho (\cos \theta \cos \delta \frac{\partial \psi}{\partial N} - \sin \delta \frac{\partial \theta}{\partial N}) = 0 \quad (3.15)$$

Où :  $\partial/\partial L$  et  $\partial/\partial N$  sont les dérivés le long et normales à la bicaractéristique.

Les équations de Compatibilité le long d'une ligne de courant pour le modèle GP sont définies par :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} r dT = \frac{1}{\rho} dP \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{\rho} dP = -V dV \quad (3.17)$$

### 3.2.4. Procédure numérique

La procédure numérique est similaire à celle mise au point par Strom [52] pour l'écoulement externe. La solution commence par la définition d'un plan de référence initial. Les plans de référence dans l'ensemble du champ d'écoulement sont supposés être perpendiculaires à l'axe z, tel que défini dans la figure 3.2. Les propriétés d'écoulement ( $P$ ,  $T$ ,  $V$ ,  $\rho$ , ...), à des points approximativement équidistants sur un plan de départ normal à l'axe z, sont supposées connues. La figure 3.3 montre un exemple de cette grille d'espacement.

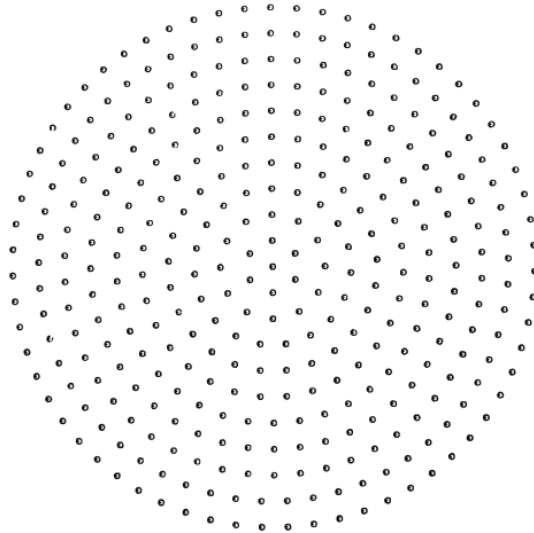


Figure 3.3 : Calcul des points du plan de référence de départ

Les points sur le rayon le plus extérieur définissent le contour de la paroi initiale, et seront désignés en tant que points du corps. Les points restants définissent le champ d'écoulement interne et seront soumis à un champ de points. Dans ce cas, le contour de paroi est défini par l'équation suivante :

$$R_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \quad (3.18)$$

#### 3.2.4.1 Détermination du nouveau plan de référence

Après que la géométrie de la tuyère initiale est définie, un nouveau plan de référence est créé à une distance  $z$ , en aval du plan de référence initial. La distance entre le plan de référence initial et le nouveau plan est définie comme  $(dz)$ . Pour chaque point  $P1$  défini sur le plan initial, un point correspondant  $P2$  sur le nouveau plan de référence est trouvé. Ce processus est répété jusqu'à ce que le dernier plan de référence soit calculé.

$$x_2 = x_1 + \frac{\tan\theta}{\cos\psi} dz \quad (3.19)$$

$$y_2 = y_1 + (\tan\psi) dz \quad (3.20)$$

$$z_2 = z_1 + dz \quad (3.21)$$

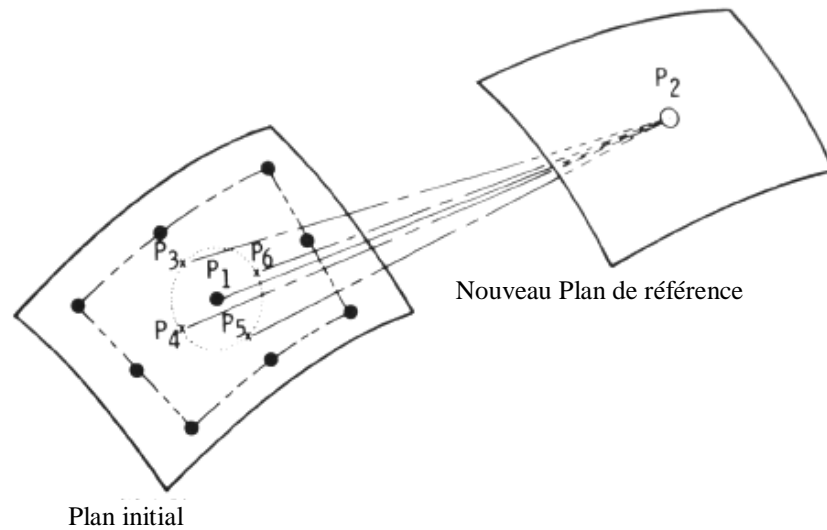


Figure 3.4 : Point du champ d'écoulement

Pour déterminer les propriétés d'écoulement à  $P_2$ , quatre lignes bicaractéristiques  $i$  sont construites à partir de  $P_2$ , par rapport au plan de référence initial. Ces lignes (qui sont les rayons le long d'un Mach conoïde) sont définies par les équations (3.9) à (3.11). L'intersection de ces lignes et le plan initial sont représentés par les points  $P_3$  –  $P_6$  dans la figure 3.4. En manipulant les équations (3.9) à (3.11), la position de ces points est définie comme suit:

$$x_i = x_2 - (\cos\mu \sin\theta + \sin\mu \cos\theta \cos\delta_i) dL_i \quad (3.22)$$

$$y_i = y_2 - [\cos\mu \cos\theta \sin\psi - \sin\mu(\sin\theta \sin\psi \cos\delta_i - \cos\psi \sin\delta_i)] dL_i \quad (3.23)$$

$$z_i = z_2 \quad (3.24)$$

$$dL_i = \frac{dz}{[\cos\mu \cos\theta \cos\psi - \sin\mu(\sin\theta \cos\psi \cos\delta_i + \sin\psi \sin\delta_i)]} \quad (3.25)$$

Les angles paramétriques  $\delta_i$ , pour les points 3 – 6, sont  $0$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $3\pi/2$  respectivement.

Les propriétés d'écoulement en ces points sont alors déterminées en se basant sur une forme de surface du premier plan de référence. L'algorithme d'ajustement de

surface utilisé est basé sur l'équation d'une petite déviation de plaque infinie et les résultats dans la surface équation d'ajustement sont les suivants. :

$$w(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + \sum_{i=1}^N b_i R_i^2 \ln r_i^2 \quad (3.26)$$

Où  $w(x, y)$  représente les propriétés d'écoulement ( $P, T, V, \rho, \dots$ ),  $N$  représente le nombre de points à utiliser dans l'ajustement et  $x, y$  et  $r$  sont définis dans l'équation (3.17). En utilisant cette méthode, il existe  $N + 3$  inconnues ( $a_0, a_1, a_2, b_1, \dots, b_N$ ). Cependant, l'équation (2.26) ne donne que  $N$  équations à résoudre, de sorte que trois autres équations sont nécessaires qui sont :

$$\sum_{i=1}^N b_i = \sum_{i=1}^N x_i b_i = \sum_{i=1}^N y_i b_i = 0 \quad (3.27)$$

#### 3.2.4.2. Solution de l'équation des points du champ de compatibilité

Une fois que les quatre points bicaractéristiques ( $P3 - P6$ ) ont été trouvés et leurs propriétés d'écoulement déterminés, l'équation de compatibilité est alors résolue de chaque point ( $P3 - P6$ ) pour  $P2$ . Comme déjà mis en évidence dans l'équation (3.15), l'équation de compatibilité sous forme de différence est la suivante

$$\begin{aligned} \frac{\cot \mu_i}{\rho_i V_i^2} (P_2 - P_i) + \cos \delta_i (\theta_2 - \theta_i) + \cos \theta_i \sin \theta_i (\psi_2 - \psi_i) \\ + \sin \beta_i \left[ \cos \theta_i \cos \delta_i \left( \frac{\partial \psi}{\partial N} \right)_i - \sin \delta_i \left( \frac{\partial \theta}{\partial N} \right)_i \right] dL_i = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Où :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \theta}{\partial N} \right)_i &= \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_i \left( \frac{\partial x}{\partial N} \right)_i + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_i \left( \frac{\partial y}{\partial N} \right)_i \\ - \left[ \theta_i + \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_i (x_2 - x_1) + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_i (y_2 - y_1) \right] \frac{\left( \frac{\partial z}{\partial N} \right)_i}{dz} + \theta_2 \frac{\left( \frac{\partial z}{\partial N} \right)_i}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial N}\right)_i = -\cos\theta \sin\delta_i \quad (3.30)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial N}\right)_i = \sin\theta \sin\psi \sin\delta_i + \cos\psi \cos\delta_i \quad (3.31)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial N}\right)_i = \sin\theta \cos\psi \sin\delta_i - \sin\psi \cos\delta_i \quad (3.32)$$

Les inconnues de l'équation. (3.29) sont  $P_2$ ,  $\theta_2$  et  $\psi_2$ , alors seulement trois bicaractéristiques sont nécessaires pour avoir une solution. La référence [3] recommande quatre solutions distinctes (utilisant chacun trois points) pour améliorer la précision. L'équation de compatibilité est résolue à l'aide de quatre ensembles de points ( $P_3, P_4, P_5$ ), ( $P_3, P_5, P_6$ ), ( $P_3, P_4, P_6$ ) et ( $P_6, P_4, P_5$ ).

### 3.2.4.3. Calcul du point du corps

Le calcul du point du corps est effectué pour chaque point le long de la paroi de la tuyère. La figure 3.5 montre une représentation graphique des paramètres en question.

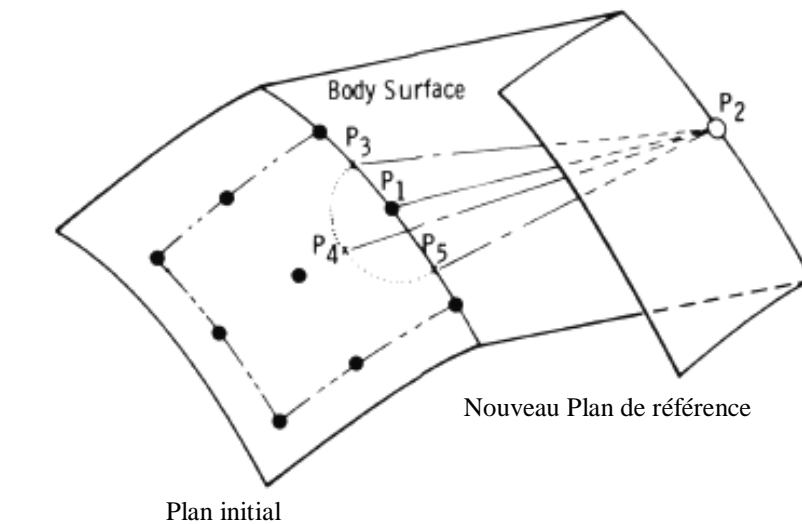


Figure 3.5 : Calcul des paramètres des points du corps

Pour un point du corps  $P1$  donné, un nouveau point  $P2$  se trouve à l'intersection d'un plan défini par l'unité de surface corporelle normale et le vecteur vitesse qui est tangent à la surface du corps  $P1$  et  $P2$ . Cela conduit à la résolution des équations suivantes simultanément.

$$B(x, y, z) = 0 \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} & (n_3 \cos \theta \cos \psi - n_1 \cos \theta \sin \psi)(x - x_1) + (n_1 \sin \theta - n_2 \cos \theta \cos \psi)(y - y_1) \\ & = (n_3 \sin \theta - n_1 \cos \theta \sin \psi) dz \end{aligned} \quad (3.34)$$

Où  $n_1$ ,  $n_2$ , et  $n_3$  sont des vecteurs unitaires normaux à la surface du corps.

#### 3.2.4.4. Calcul de la surface du corps

Sur la base de la géométrie de la paroi de la tuyère autour de  $P1$  et  $P2$ , la surface du corps est évaluée comme l'une des quatre formes suivantes :

- Ligne verticale  $x = c$
- Ligne horizontale  $y = c$
- Ligne inclinée  $ax + by = c$
- Cercle  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$

A chaque point, les valeurs  $a$ ,  $b$ , et  $c$  sont résolus et ensuite utilisés pour déterminer les coefficients normaux.

#### 3.2.4.5. Solution de l'équation de compatibilité

Une fois que l'emplacement de  $P2$  a été trouvé, trois bicaractéristiques sont construites à partir  $P2$  sauvegardé au plan de référence initial. L'intersection de ces lignes avec le plan initial est définie comme  $P3$ ,  $P4$ ,  $P5$ .  $P4$  se trouve sur la ligne

normale à la surface du corps  $P1$ . Mathématiquement, l'angle paramétrique pour  $P4$  est défini comme suit :

$$\delta_4 = \cos^{-1}(-n_1 \sin \theta \cos \psi + n_2 \cos \theta - n_3 \sin \theta \sin \psi) \quad (3.35)$$

Les angles paramétriques pour  $P3$  et  $P5$  sont itérés de sorte que les points se situent dans la région de la tuyère.

Pour ce calcul, il y a trois inconnues,  $P2$ ,  $\theta_2$  et  $\psi_2$ . Pour résoudre tous ces paramètres, on utilise l'équation de compatibilité le long des deux bicaractéristiques et la condition de tangence. La condition de tangence définit la condition que le débit est tangent à la surface au point  $P2$  et est défini comme

$$n_1 \cos \psi_2 + n_2 \tan \theta_2 + n_3 \sin \psi_2 = 0 \quad (3.36)$$

Pour augmenter la précision, trois ensembles d'équations sont résolus et leur résultat c'est la moyenne entre eux. Chaque ensemble a un ensemble différent de bicaractéristiques ( $P3, P4$ ), ( $P3, P5$ ) et ( $P4, P5$ ). L'itération se poursuit jusqu'à ce que l'emplacement et les propriétés d'écoulement en  $P2$  restent constants (à une certaine tolérance). Ce processus est répété pour tous les points du corps.

### 3.3. Méthode basée par des lignes de courant dans l'espace

La méthode de conception des tuyères supersoniques tridimensionnelles est basée sur l'utilisation des lignes de courant dans l'espace commence à partir de la connaissance des résultats de la conception et de dimensionnement de la tuyère supersonique axisymétrique de section circulaire.

La première étape consiste à faire le choix de la forme de la section de sortie désirée pour la nouvelle tuyère ainsi que le nombre de Mach de sortie. Pour n'importe quel écoulement parfait, les lignes de courant, par définition, forment des surfaces où le vecteur vitesse est tangent. Par conséquent, on peut les remplacer par des parois ou des surfaces rigides. Cette idée sera développée dans notre présente recherche, pour détecter la paroi des tuyères non symétriques à partir des tuyères axisymétriques [70].



Le calcul commence à partir de la section de sortie jusqu'au col de la tuyère en divisant cette dernière en plusieurs stations. Les résultats au niveau de la section de sortie sont connus. La valeur de la fonction de courant est connue aussi. Une ligne de courant est caractérisée par  $\psi(r, z) = \text{constante}$  (l'axe de la tuyère est nommé par  $x$ ). Les résultats pour la tuyère axisymétrique, comme la distribution du nombre de Mach, l'inclinaison de l'écoulement, la pression statique, la température, la masse volumique, la valeur de la fonction de courant en chaque point interne du champ d'écoulement de la tuyère axisymétrique sont connues (doivent être déterminées en premier lieu par la méthode des caractéristiques) lors du dimensionnement de la tuyère axisymétrique.

La tuyère tridimensionnelle est incluse dans la tuyère axisymétrique. La valeur de la fonction de courant est connue sur l'axe de symétrie (supposée nulle) et au niveau de la paroi de la section de sortie. La forme de la section au col doit être la même que celle de la section de sortie choisie. Elles sont reliées par l'équation de continuité pour un écoulement unidirectionnelle, puisque l'écoulement est uniforme et parallèle à travers ces deux sections. Entre ces deux sections, la tuyère  $3D$  possède une forme variable qui n'est pas connue à priori. Une ligne de courant qui passe par un point de la section de sortie, traverse la tuyère jusqu'au col. Elle détermine à chaque station sélectionnée, un point  $p(x, y)$  puisque les composantes ( $u, v$ ) du vecteur vitesse sont reliées avec la fonction de courant par :

$$u = V \cos(\theta) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = V \sin(\theta) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.37)$$

Comme la tuyère  $3D$  est incluse dans la tuyère axisymétrique, alors il existe un point qui vérifie ces deux équations à deux inconnues ( $x, y$ ). Un nombre de points sélectionné sur la section de sortie, donne un nombre important des lignes de courant qui traversent les stations sélectionnées et par conséquent donne la forme de la tuyère  $3D$  avec une bonne précision. Une fois la forme de la tuyère  $3D$  est trouvée, on peut facilement déterminer ces caractéristiques comme la masse de la structure, le coefficient de poussée ainsi que d'autres paramètres intéressants.

### 3.4. Méthode basée par l'utilisation du contour de la tuyère axisymétrique

Le calcul numérique nous oblige à penser à développer des méthodes efficaces répondant aux exigences mathématiques comme la convergence qui doit être assurée et le temps d'exécution par trop long. La méthode développée ici dans notre étude qui consiste à déterminer les lignes de courant dans l'espace afin de trouver les formes des tuyères 3D est assez lourde en temps de calcul par ordinateur vu qu'elle utilise le maillage interne de la tuyère axisymétrique. C'est pourquoi, on a pensé à développer une nouvelle méthode de conception des tuyères tridimensionnelles de section de sortie arbitraire basé uniquement sur la connaissance du contour de la tuyère axisymétrique.

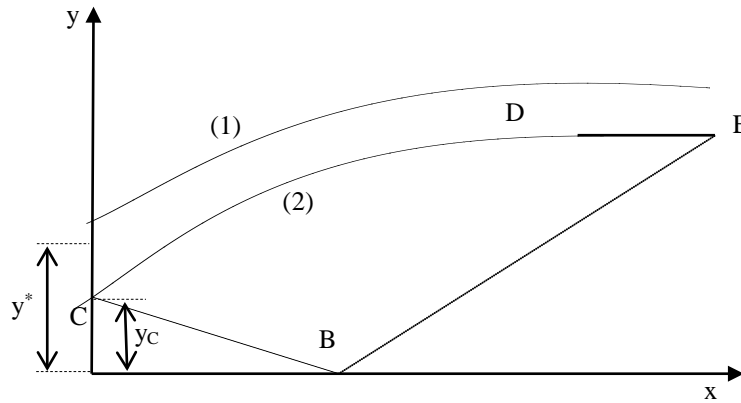
#### 3.4.1. Présentation de la méthode

Pour concevoir des contours théoriques des tuyères supersoniques, on présente une troisième méthode qui définit la tuyère 3D à partir de la tuyère de forme axisymétrique.

Dans cette méthode, on s'intéresse uniquement au contour de la paroi de la tuyère axisymétrique sans passer au stockage des informations des points de maillage interne. Durant le dimensionnement de la tuyère axisymétrique, on a choisi le rayon du col sous la forme adimensionnelle. Les coordonnées d'un point de maillage qu'elles soient interne ou sur la paroi de la tuyère sont données par  $(x/y^*, y/y^*)$ . Alors pour un rayon de col donné compris  $0,00 < y_C < y^*$ , on peut déterminer le contour de la tuyère axisymétrique correspondant à cette valeur de  $y_C$  sans passer au calcul des points internes. Il suffit de multiplier les coordonnées adimensionnelles par  $y_C$  pour trouver les coordonnées réelles de point considéré par :

$$y = \left( \frac{y}{y^*} \right) y_C \quad , \quad z = \left( \frac{z}{y^*} \right) y_C \quad (3.38)$$

Le repère choisi sur la section de la tuyère est nommé par  $oyz$ . Alors l'axe de la tuyère est celui du repère  $ox$ . La forme de la tuyère dans ce cas sera incluse dans la forme principale comme le présente la figure 3.6.



- (1) : Tuyère principale (axisymétrique)  
 (2) : Ligne de courant Intermédiaire  
 DE : Contour droit horizontale de la tuyère

Figure 3.6 : Exemple de lignes de courant intermédiaires

La paroi de la tuyère obtenue dans ce cas, peut représenter une ligne de courant dans la tuyère principale. La longueur de cette ligne de courant est inférieure à la longueur principale. Elle est donnée par

$$L(y_C) = \left( \frac{L}{y_*} \right) y_C \quad (3.39)$$

La longueur de détente de la région de Kernel de la nouvelle forme sera obtenue par la multiplication de la longueur de détente de la tuyère principale par le nombre  $y_C$ .

$$L_d(y_C) = \left( \frac{L_d}{y_*} \right) y_C \quad (3.40)$$

Les propriétés comme  $(M, T/T_0, P/P_0, \rho/\rho_0, \theta)$  aux points de cette ligne de courant seront les mêmes que celles aux points de la forme principale de la tuyère. Concernant la valeur de la fonction de courant aux points de cette ligne de courant intermédiaire peut être calculée directement par

$$\psi(y_C) = \left( \frac{\psi_S}{y_*^2} \right) y_C^2 \quad (3.41)$$

Avec  $\psi_S$  représente la valeur de la fonction de courant principale correspondant à  $y_C=y_*$ .

Pour une particule, qui parcourt le champ d'écoulement sur cette ligne de courant, arrive avec un nombre de Mach de sortie  $M_S$  au point  $D$ . Entre le point  $D$  et  $E$ , la ligne de courant est horizontale puisqu'elle se trouve dans la zone uniforme de la tuyère principale. Donc on s'intéresse uniquement aux informations aux points de cette ligne de courant. En comparant ce nombre de point avec celui qu'il faut trouver dans le champ interne de la tuyère, il est négligeable et sera donc supportable par la taille de la mémoire de l'ordinateur. Le calcul des paramètres de l'écoulement aux points des lignes de courant sera fait une seule fois pour la ligne de courant principale.

Le calcul des paramètres se fait dans la mémoire centrale de l'ordinateur sans passer au stockage dans des fichiers, et dans ce cas le processus sera très rapide même si le nombre de points ou de sections du dimensionnement ( $N_T$  et  $N_L$ ) de la tuyère 3D augmente considérablement.

Ce qui nous intéresse, c'est la recherche de la position  $(x, y, z)$  du point appartenant à la tuyère 3D et qui se trouve sur la ligne de courant considérée. Tous les points situés sur cette ligne de courant possèdent la même valeur de  $\psi$ , y compris les deux points du col et de la section de sortie. La valeur de  $\psi$  est encore la même sur le point du contour de la section de sortie choisie de la tuyère principale. Le problème devient la détermination de l'ordonnée  $y_C < y^*$  de la ligne de courant qui possède cette valeur de  $\psi$  puisque la section 3D est incluse dans la tuyère axisymétrique. Par l'utilisation de la relation (3.41) on peut déterminer l'ordonnée  $y_C$  au col de la ligne de courant à rechercher en égalisant le rayon de la section de sortie de la ligne de courant intermédiaire avec celui du point de la section de sortie 3D choisi par :

$$y_C = \frac{\sqrt{y_P^2 + z_P^2}}{\left[ \frac{y_S}{y^*} \right]} \quad (3.42)$$

Avec  $y_S/y^*$  représente le rapport des sections de sortie par la section au col de la tuyère principale. Il est donné par les équations (3.6) et (3.7) respectivement pour les cas du modèle *PG* [4, 5] et le modèle *HT* [66, 69, 70] :

$$\left(\frac{A_S}{A_*}\right)^2 = \frac{1}{M_S} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_S^2\right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (3.43)$$

$$\left(\frac{A_S}{A_*}\right)^2 = \text{Exp} \left( \int_{T_S}^{T_*} F_A(T) dT \right) \quad (3.44)$$

$(x_P, y_P)$  représente les coordonnées d'un point de la section 3D choisie sur la section de sortie de la tuyère principale. En faisant appel aux vecteurs contenant les positions des nœuds de la tuyère principale, on peut déterminer la ligne de courant correspondante à ce point en utilisant les relations (3.37).

Le problème maintenant devient la recherche de la position  $(y, z)$  du point appartenant à la tuyère 3D. L'abscisse du point appartenant à une station de la figure 3.9 est donnée par  $x_P = x_{\text{Station}}$ . Mais dans le cas où le point  $P$  à rechercher se trouve sur un segment limité par deux points successifs de la ligne de courant recherchée et en identifiant ce segment par la relation (3.30), on peut déterminer  $(y, z)$  par :

$$y_P = R \cos \theta \quad (3.45)$$

$$z_P = R \sin \theta \quad (3.46)$$

Le rayon  $R$  dans les relations (3.45) et (3.46) représente le rayon du point considéré sur la ligne de courant intermédiaire. Il est donné par la relation suivante en se référant à la figure 3.6 :

$$R = \frac{(R_D - R_G)}{(x_D - x_G)} (x_P - x_G) + R_G \quad (3.47)$$

$$R_G = \sqrt{y_G^2 + z_G^2} \quad (3.48)$$

$$R_D = \sqrt{y_D^2 + z_D^2} \quad (3.49)$$

Et

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_i}{z_i}\right) \quad (3.50)$$

Le point  $i$  dans la relation (3.50) représente tous les points de la figure 3.9. Le calcul de l'angle  $\theta$  donne généralement l'angle dans l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Alors on aura un problème de calcul pour les quatre points de coordonnées  $(y, z)$  et  $(-y, z)$ ,  $(y, -z)$  et  $(-y, -z)$ . Le premier et le quatrième point possèdent le même rapport  $y/z$ . Alors le calcul de l'angle par la relation (3.50) donne l'angle correspondant au point  $(y, z)$  du premier quadrant. Alors pour le point du troisième quadrant, on aura un problème de calcul de l'angle correspondant. Pour résoudre ce problème il faut corriger l'angle du troisième quadrant par  $2\pi - \theta$ . Pour le deuxième et le troisième point on aura le même problème. Le calcul par ordinateur va confondre le calcul de  $\theta$  pour ces deux points par la relation (3.49). Alors l'angle  $\theta$  du point  $(y, -z)$  est égale à  $+\pi$ .

Un autre problème peut être rencontré pour les point  $(y=0, z)$  et  $(y=0, -z)$ . L'angle pour le premier point est  $\theta = 0$  alors que le deuxième est  $\theta = \pi$ . Le calcul de l'angle correspondant au deuxième point donne  $\theta = 0$ . Alors il faut corriger ce résultat en ajoutant un  $\pi$ .

Le troisième problème est pour le calcul des points  $(y, z=0)$  et  $(-y, z=0)$ . On aura une division par zéro si on utilise la relation (3.49). Sans faire le calcul de la relation (3.13), en affectant l'angle  $\pi/2$  pour le premier point et  $-\pi/2$  pour le deuxième point. De cette façon, on va calculer exactement l'angle correspondant pour les variétés des points de la figure 3.8 selon leur position et on n'aura plus de problème de calcul de cosinus et de sinus dans la relation (3.45) et (3.46).

Les paramètres de l'écoulement de ce nouveau point, peuvent être déterminés en interpolant par exemple deux paramètres qui sont  $T$  et  $\theta$  pour le modèle  $HT$  en utilisant les relations (3.34) et par l'interpolation de  $M$  et  $\theta$  pour le modèle  $GP$ . Les autres paramètres peuvent être trouvés par la suite en utilisant des relations (3.39) et en remplaçant  $T_{GP}$  par  $T$  du point de la ligne de courant intermédiaire.

En faisant la même démarche pour tous les points sélectionnés sur la forme choisie de la tuyère 3D de la figure 3.9, on peut déterminer les positions de toutes les lignes de courant passant par les points de la figure 3.8 et de même les propriétés de l'écoulement. La méthode de calcul de la masse de la structure de la tuyère ainsi que le coefficient de poussée reste la même que celle utilisée pour la méthode des lignes de courant dans l'espace (voir chapitre 4).

## CHAPITRE 4

### CONCEPTION DES TUYERES 3D *MLN* PAR LA METHODE DES LIGNES DE COURANT DANS L'ESPACE

#### 4.1 Introduction

Le but de la présentation de ce chapitre, est de concevoir et d'étudier la possibilité d'améliorer les performances d'une tuyère tridimensionnelle asymétrique par rapport à celle ayant une géométrie axisymétrique. Trois situations peuvent se présenter.

- La première possibilité consiste à trouver une forme 3D ayant la même masse que celle de la géométrie axisymétrique mais délivrant un nombre de Mach de sortie ou un coefficient de poussée supérieur.
- La deuxième solution c'est de trouver toujours une forme 3D délivrant le même nombre de Mach de sortie mais possédant des performances meilleures que celles de la géométrie axisymétrique.
- La troisième conception consiste à trouver une forme 3D ayant la même section au col donc le même débit massique que celle de la géométrie axisymétrique mais délivrant des performances meilleures.

L'idée principale consiste à faire l'extension d'une tuyère axisymétrique vers la géométrie tridimensionnelle grâce à la définition d'une ligne de courant dans l'espace.

#### 4.2. Fonction de courant en un point de l'écoulement

Considérons l'équation de la conservation de la masse pour les écoulements axisymétriques présentés dans les références [14, 41, 51, 52, 60] écrite en fonction des paramètres  $V$  et  $\theta$  sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\rho V y \cos \theta)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V y \sin \theta)}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$





$$d \eta = \frac{d y}{\sin(\theta + \mu)} \quad (4.5)$$

Remplaçant la relation ( $d\eta$ ) de l'équation (4.5) dans l'équation (4.4), on obtient :

$$d \psi = \frac{\rho}{\rho_0} V y \frac{1}{M} \frac{d y}{\sin(\theta + \mu)} \quad (4.6)$$

L'intégration de l'équation (4.6) entre les états (2 et 3) suivant  $\eta$ , s'écrit :

$$\psi_3 - \psi_2 = \int_{y_2}^{y_3} \frac{\rho}{\rho_0} V y \frac{1}{M} \frac{d y}{\sin(\theta + \mu)} \quad \text{Suivant } \eta \quad (4.7)$$

De la même manière, en considérant la caractéristique descendante  $\xi$ . On peut écrire la relation suivante:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin(\theta - \mu) \quad (4.8)$$

Substituant l'équation (4.2) dans la relation (4.8) et connaissons  $\sin(\theta - \mu) \cos(\theta) - \cos(\theta - \mu) \sin(\theta) = -\sin(\mu)$  et  $\sin(\mu) = 1 / M$ . On obtient:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\frac{\rho}{\rho_0} V y \frac{1}{M} \quad (4.9)$$

A partir de la figure 4.1, on peut écrire la relation suivante reliant les coordonnées  $x$  et la direction des caractéristiques descendante  $\xi$  par:

$$d \xi = \frac{d x}{\sin(\theta - \mu)} \quad (4.10)$$

Le remplacement de la relation (4.9) dans (4.10) donne:

$$d \psi = -\frac{\rho}{\rho_0} V y \frac{1}{M} \frac{d y}{\sin(\theta - \mu)} \quad (4.11)$$

L'intégration de (4.11) entre les états 1 et 3 s'écrit :

$$\psi_3 - \psi_1 = - \int_{y_1}^{y_3} \frac{\rho}{\rho_0} V y \frac{1}{M} \frac{d y}{\sin(\theta - \mu)} \quad \text{Suivant } \xi \quad (4.12)$$

Divisant les relations (4.7) et (4.12) par la vitesse d'arrêt du son  $a_0$  afin d'obtenir des rapports thermodynamiques dans la partie sous le signe intégrale, on obtient :

$$\frac{\psi_3}{a_0} - \frac{\psi_2}{a_0} = \int_{y_2}^{y_3} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{V}{a_0} y \frac{1}{M} \frac{d y}{\sin(\theta + \mu)} \quad \text{Suivant } \eta \quad (4.13)$$

$$\frac{\psi_3}{a_0} - \frac{\psi_1}{a_0} = - \int_{y_1}^{y_3} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{V}{a_0} y \frac{1}{M} \frac{d y}{\sin(\theta - \mu)} \quad \text{Suivant } \xi$$

Comme un point du champ d'écoulement supersonique est en relation avec deux caractéristiques, l'une montante  $\eta$  et l'autre descendante  $\xi$ , on peut obtenir alors la valeur de la fonction de courant  $\psi$  au point 3 par l'utilisation de la relation (4.13). Les valeurs de  $\psi$  aux points 1 et 2 sont connues. Le résultat de l'intégration est toujours positif, puisque tous les paramètres  $M$ ,  $\theta$  et les rapports thermodynamiques sont positifs. Alors, comme résultat, la valeur de  $\psi_3$  est supérieure à  $\psi_2$ , ce qui signifie que la fonction de courant  $\psi$  croît le long de la caractéristique montante  $\eta$ . Autrement dit, la fonction  $\psi$  augmente avec l'ordonnée  $y$ .

#### Approximation :

Dans la relation (4.13), on considère deux variables indépendantes parmi l'ensemble des paramètres. Les autres paramètres peuvent être exprimés en fonction des deux choisis. Alors, on suppose qu'entre les points (2 et 3) et (1 et 3), les paramètres  $\theta$  et  $T$  prennent leurs valeurs moyennes. Cette approximation est valable tant que les points (2 et 3) et (1 et 3) sont très proches l'un de l'autre. Dans ce cas, les variations des paramètres  $y$ ,  $\theta$  et  $T$  entre les segments reliant les points (1 - 2) et (2 - 3) sont approximées par leurs valeurs moyenne [63, 67, 70]. Donc l'intégration des relations (4.13) donne :

$$\frac{\psi_3}{a_0 y_*^2} = \frac{\psi_2}{a_0 y_*^2} + \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{23} \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{23} \frac{1}{M_{23}} \frac{1}{\sin(\theta_{23} + \mu_{23})} \frac{\left( \frac{y_3}{y_*} \right)^2 - \left( \frac{y_2}{y_*} \right)^2}{2} \quad \text{Suivant } \eta \quad (4.14)$$

$$\frac{\psi_3}{a_0 y_*^2} = \frac{\psi_1}{a_0 y_*^2} - \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{13} \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{13} \frac{1}{M_{13}} \frac{1}{\sin(\theta_{13} - \mu_{13})} \frac{\left( \frac{y_3}{y_*} \right)^2 - \left( \frac{y_1}{y_*} \right)^2}{2} \quad \text{Suivant } \xi$$

Dans ce cas les variations des paramètres  $y$ ,  $\theta$  et  $T$  entre les segments reliant les points (1 - 2) et les points (2 - 3) sont approximées par les expressions suivantes [63, 64, 67]:

$$\theta_{13} = C_\theta \theta_1 + (1 - C_\theta) \theta_3 ; \quad T_{13} = C_T T_1 + (1 - C_T) T_3 ; \quad y_{13} = C_y y_1 + (1 - C_y) y_3 \quad (4.15)$$

$$\theta_{23} = C_\theta \theta_2 + (1 - C_\theta) \theta_3 ; \quad T_{23} = C_T T_2 + (1 - C_T) T_3 ; \quad y_{23} = C_y y_2 + (1 - C_y) y_3 \quad (4.16)$$

$C_y$ ,  $C_\theta$  et  $C_T$  sont des coefficients d'interpolations compris entre 0 et 1. Si ces coefficients sont égaux à 0.5 alors on obtient la valeur moyenne des paramètres.

Par analogie avec les relations (4.15) et (4.16), on peut écrire les expressions suivantes [63-70] :

$$\left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{23} = e^{-\int_{T_{23}}^{T_0} F_\rho(T) dT} \quad \text{Suivant } \eta \quad (4.17)$$

$$\left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{13} = e^{-\int_{T_{13}}^{T_0} F_\rho(T) dT} \quad \text{Suivant } \xi \quad (4.18)$$

$$\left[ \frac{V}{a_0} \right]_{23} = M_{23} \left[ \frac{\gamma_{23}}{\gamma(T_0)} \right]^{1/2} \left[ \frac{T_{23}}{T_0} \right]^{1/2} \quad \text{Suivant } \eta \quad (4.19)$$

$$\left[ \frac{V}{a_0} \right]_{13} = M_{13} \left[ \frac{\gamma_{13}}{\gamma(T_0)} \right]^{1/2} \left[ \frac{T_{13}}{T_0} \right]^{1/2} \quad \text{Suivant } \xi \quad (4.20)$$

Les valeurs de  $\mu_{13}$ ,  $\mu_{23}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ ,  $M_{13}$ ,  $M_{23}$ ,  $\gamma_{13}$ ,  $\gamma_{23}$  peuvent être déterminées par les relations (2.19), (2.20), (2.20) et (2.21) du chapitre 2.

Valeur de  $\psi$  au col et à la section de sortie de la tuyère.

En premier lieu, on suppose que sur l'axe de symétrie, la valeur de  $\psi$  est égale à zéro. Le schéma de la figure 4.2 illustre les zones d'écoulement dans la tuyère *MLN*. Sur la ligne de Mach montante *BS* et en utilisant la relation entre les points (2 et 3) de l'équation (4.14), on peut écrire la relation suivante:

$$\frac{\psi_S}{a_0 y_*^2} - \frac{\psi_B}{a_0 y_*^2} = \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{BS} \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{BS} \frac{1}{M_{BS}} \frac{1}{\sin(\theta_{BS} + \mu_{BS})} \frac{(y_S / y_*)^2 - (y_B / y_*)^2}{2} \quad (4.21)$$

Avec :

$$\left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{BS} = \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_S \quad ; \quad \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{BS} = M_{BS} \left[ \frac{a}{a_0} \right]_{BS} \quad ; \quad \left( \frac{a}{a_0} \right)_{BS} = \left( \frac{a}{a_0} \right)_S \quad (4.22)$$

$$\psi_B = 0 \quad ; \quad y_B = 0 \quad ; \quad M_{BS} = M_S \quad ; \quad \theta_{BS} = 0.0 \quad ; \quad \sin(\mu_{BS}) = 1 / M_{BS}$$

L'équation (4.21) devient :

$$\frac{\psi_S}{a_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_S \left( \frac{a}{a_0} \right)_S M_S \frac{y_S^2}{2} \quad (4.23)$$

Le rapport des masses volumiques et des vitesses du son dans la relation (4.23) sont respectivement donnés par les relations suivantes [63 - 70] :

$$\frac{\rho_S}{\rho_0} = \text{Exp} \left( - \int_{T_S}^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad ; \quad \frac{a_S}{a_0} = \left[ \frac{\gamma(T_S)}{\gamma(T_0)} \right]^{1/2} \left[ \frac{T_S}{T_0} \right]^{1/2} \quad (4.24)$$

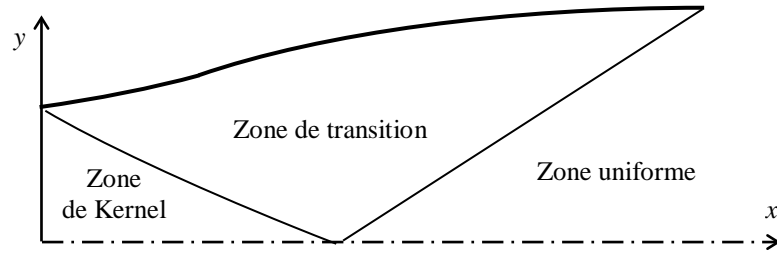


Figure 4.2 : Illustration de la ligne de Mach du col OA et de la zone uniforme BS de sortie

Maintenant sur la ligne de Mach AO du col (ligne sonique), on peut écrire :

$$\frac{\psi_O}{a_0} - \frac{\psi_A}{a_0} = \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{AO} \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{AO} \frac{1}{M_{AO}} \frac{1}{\sin(\theta_{AO} + \mu_{AO})} \frac{y_O^2 - y_A^2}{2} \quad (4.25)$$

Avec :

$$\left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{AO} = \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_* \quad ; \quad \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{AO} = M_{AO} \left[ \frac{a}{a_0} \right]_{AO} \quad ; \quad \left( \frac{a}{a_0} \right)_{AO} = \left( \frac{a}{a_0} \right)_* \quad (4.26)$$

$$\psi_O = 0 \quad ; \quad y_O = 0 \quad ; \quad M_{AO} = 1.00 \quad ; \quad \theta_{AO} = 0.0 \quad ; \quad \mu_{AO} = 90^\circ$$

L'équation (3.25) devient :

$$\frac{\psi_A}{a_0 y_*^2} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_* \left( \frac{a}{a_0} \right)_* \frac{(y_A / y_*)^2}{2} \quad (4.27)$$

Remarque : Puisque la paroi AS de la tuyère représente une ligne de courant, donc on peut écrire :

$$\psi_S = \psi_A \quad (4.28)$$

#### 4.3. Recherche des points d'une ligne de courant tridimensionnelle

Une courbe iso-valeurs, est une courbe dont les points sont situés dans le champ d'écoulement à l'intérieur de la tuyère, et possédant les mêmes propriétés physiques et thermodynamique. Si cette dernière possède des points ayant la même valeur que ceux de la fonction de courant, ces courbes sont appelées lignes de courant. Elles sont très intéressantes pour la description de l'écoulement et pour faire le passage de l'étude du cas axisymétrique vers le cas tridimensionnel. Notons que la paroi de la tuyère est une ligne de courant, dont la fonction de courant est connue.

La méthode consiste à rechercher des points de ces courbes et elle se fait dans chaque segment des caractéristiques montantes ou descendantes par la manière suivante :

Soit  $\psi^{iso}$ , la valeur de la fonction de courant d'un ensemble de points interne dans la tuyère dont les positions sont à déterminer. On détermine en même temps les valeurs de  $M$ ,  $\theta$ ,  $P/P_0$ ,  $\rho/\rho_0$  et  $T$  aux points de chaque ligne de courant. La recherche des points sur la paroi de la tuyère et sur l'axe de symétrie n'est pas nécessaire.

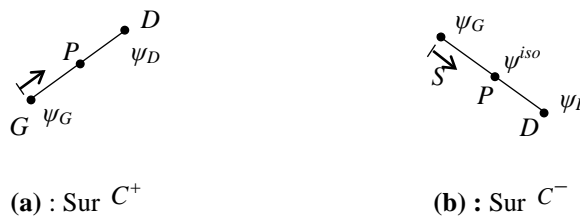


Figure 4.3 : Différents segments de recherche des points d'une ligne de courant

Les propriétés ( $x$ ,  $y$ ,  $M$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $T$ ,  $\rho/\rho_0$  et  $P/P_0$ ) aux points  $G$  et  $D$  sont connus et déjà déterminées lors du calcul de l'écoulement dans la tuyère axisymétrique. Donc le problème devient à déterminer les mêmes propriétés au point  $P$  vérifiant la condition:

$$\psi_P = \psi^{iso} \quad (4.29)$$

Il est à noter que  $\psi^{iso} < \psi_s$  (valeur de la fonction de courant de la paroi de la tuyère).  
Le segment contenant le point  $P$  doit vérifier la condition suivante :

$$(\psi^{iso} - \psi_G) (\psi^{iso} - \psi_D) \leq 0 \quad (4.30)$$

#### Approximation :

L'approximation utilisé est basée sur l'interpolation des paramètres  $T$  et  $\theta$  le long des caractéristiques pour déterminer la position du point  $P$  de la ligne de courant. Il existe deux types de segment contenant le point  $P$  (figure 4.4). On considère la relation suivante.

$$\tau = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta y > 0 \\ -1 & \text{si } \Delta y < 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Le but de l'équation (4.31) est d'englober les équations de la relation (4.14) en une seule équation. La procédure de recherche de la position du point  $P$  commence par l'itération initiale ( $K=0$ ) à l'ordonnée  $y_P$  en utilisant la relation suivante :

$$y_P = \frac{y_G + y_D}{2} \quad (4.32)$$

Le point  $P$  se trouve sur la droite reliant les points  $G$  et  $D$ . L'abscisse  $x_P$  est donnée par :

$$x_P = x_G + \left[ \frac{x_D - x_G}{y_D - y_G} \right] (y_P - y_G) \quad (4.33)$$

Les équations (4.32) et (4.33) donnent l'approximation initiale de la position du point  $P$ . L'interpolation de  $\theta$  et  $T$  sur le segment  $GD$  donne au point  $P$ , les résultats suivants :



$$\begin{cases} \theta_P = \frac{S_{GP}}{S_{GD}} (\theta_D - \theta_G) + \theta_G \\ T_P = \frac{S_{GP}}{S_{GD}} (T_D - T_G) + T_G \end{cases} \quad (4.34)$$

Avec :

$$\begin{cases} S_{GD} = \sqrt{(x_G - x_D)^2 + (y_G - y_D)^2} \\ S_{GP} = \sqrt{(x_G - x_P)^2 + (y_G - y_P)^2} \end{cases} \quad (4.35)$$

Les valeurs de  $x_P$  et  $y_P$  dans l'équation (4.35) sont données par les équations (4.32) et (4.33). Une fois les valeurs de la première approximation sont évaluées, on utilise l'équation (4.14) pour la détermination de la première approximation de la valeur de la fonction de courant  $\psi$  au point  $P$  situé sur la caractéristique  $PG$ :

$$\frac{\psi_P}{a_0 y_*^2} = \frac{\psi_G}{a_0 y_*^2} + \tau f_{GP} \frac{(y_P / y_*)^2 - (y_G / y_*)^2}{2} \quad (4.36)$$

Avec :

$$f_{GP} = \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{GP} \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{GP} \frac{1}{M_{GP}} \frac{1}{\sin(\theta_{GP} + \tau \mu_{GP})} \quad (4.37)$$

Et

$$T_{GP} = \frac{T_G + T_P}{2} \quad ; \quad \theta_{GP} = \frac{\theta_G + \theta_P}{2} \quad ; \quad a(T_{GP}) = \sqrt{\gamma(T_{GP}) r T_{GP}} \quad (4.38)$$

$$\gamma(T_{GP}) = \frac{C_P(T_{GP})}{C_P(T_{GP}) - r} \quad ; \quad M_{GP} = \frac{\sqrt{2 H(T_{GP})}}{a(T_{GP})} \quad ; \quad \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_{GP} = e^{-\int_{T_{GP}}^{T_0} F_\rho(T) dT} \quad (4.39)$$

$$\left[ \frac{V}{a_0} \right]_{GP} = M_{GP} \left[ \frac{\gamma(T_{GP})}{\gamma(T_0)} \right]^{1/2} \left[ \frac{T_{GP}}{T_0} \right]^{1/2} \quad ; \quad \mu_{GP} = \arcsin\left( \frac{1}{M_{GP}} \right) \quad (4.40)$$

En utilisant les références [63-70], on obtient les équations suivantes :

$$\left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_{GP} = e^{-\int_{T_{GP}}^{T_0} F_{\rho}(T) dT} \quad (4.41)$$

Avec :

$$H(T_{GP}) = \int_{T_{GP}}^{T_0} C_P(T) dT \quad (4.42)$$

$$F_{\rho}(T) = \frac{C_P(T)}{a^2(T)} \quad (4.43)$$

Les expressions de  $C_P(T)$  and  $H(T)$  sont présentées dans l'appendice B.

La valeur de la fonction de courant  $\psi_P$  est connue et elle est égale à  $\psi^{iso}$ . Alors, dans la relation (4.36), on peut déterminer la correction de l'ordonnée  $y_P$  par :

$$\frac{y_P}{y_*} = \left[ \left( \frac{y_G}{y_*} \right)^2 + 2 \frac{\frac{\psi^{iso}}{a_0 y_*^2} - \frac{\psi_G}{a_0 y_*^2}}{\tau f_{GP}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.44)$$

L'équation (4.44) permet de corriger l'ordonnée  $y_P$  du point  $P$  appartenant à la ligne de courant. Pour satisfaire la convergence, il faut que l'erreur entre deux itérations successives soit inférieure à une tolérance donnée

$$\left| y_P(\text{iteration } K) - y_P(\text{iteration } K-1) \right| < \varepsilon \quad (4.45)$$

Les paramètres  $x_P$ ,  $T_P$ ,  $\theta_P$  et  $\psi_P$  donnés par (4.33), (4.34) et (4.36) convergent aussi vers la solution désirée. Les autres paramètres au point  $P$  peuvent être déterminés en remplaçons  $T_{GP}$  par  $T_P$  dans les relations (4.39). La pression au point  $P$  peut être déterminée en remplaçons  $T$  par  $T_P$  dans la relation suivante [66, 70] :

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \left( \frac{T}{T_0} \right) \quad (4.46)$$

Remarque:

Les points  $(x_P, y_P)$  déterminés pour chaque ligne de courant sont disposés d'une façon aléatoire après l'exécution du programme de calcul. Donc, il faut organiser les points de telle manière qu'il y a accroissement ou décroissement des abscisses, du premier point du col jusqu'au dernier point de la section de sortie.

4.4. Variation de la fonction de courant dans une section droite

Soit  $x = x_{SEC}$  la position d'une section par rapport au col. Le problème consiste à déterminer la valeur de  $\psi$  dans cette section aux points dans les segments des caractéristiques coupant la section considérée, et déduire les autres paramètres en ces points. Sur l'axe de symétrie on a  $\psi = 0$  et sur la paroi de la tuyère  $\psi = \psi_S$ . On peut avoir deux possibilités comme présente la figure 4.4.

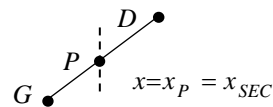
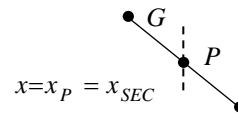
(a): Caractéristique  $C^+$ (b): Caractéristique  $C^-$ 

Figure 4.4 : Différents cas possible de segment

Les propriétés  $(x, y, M, \theta, \psi, T, \rho/\rho_0, P/P_0)$  aux points  $G$  et  $D$  sont connues (déjà déterminées lors de calcul de l'écoulement par la méthode des caractéristiques). Le problème consiste à déterminer la valeur de  $\psi$  et les autres paramètres au point  $P$ , sachant  $x_P = x_{SEC}$ . Le segment contenant le point  $P$  de la section  $x = x_{SEC}$  doit vérifier la condition suivante:

$$(x_{SEC} - x_G) (x_{SEC} - x_D) \leq 0 \quad (4.47)$$

#### 4.4.1. Détermination des propriétés au point $P$

On premier lieu, il faut connaître la position du point  $P$ . Donc il manque l'ordonnée de ce point. Les équations reliant les points  $G$  et  $P$  et les points  $G$  et  $D$ , donne :

$$y_P = \left[ \frac{y_D - y_G}{x_D - x_G} \right] (x_P - x_G) + y_G \quad (4.48)$$

On déterminera les paramètres au point  $P$ , en faisant une interpolation pour  $\theta$  et pour  $T$  entre le point  $G$  ( $S = 0$ ,  $\theta = \theta_G$ ,  $T = T_G$ ) et le point  $D$  ( $S = S_{GD}$ ,  $\theta = \theta_D$ ,  $T = T_D$ ). Les autres paramètres seront déduits par la suite. Les paramètres  $\theta$  et  $T$ , au point  $P$ , peuvent être déterminés par les relations (4.34) et (4.35).

La valeur de la fonction de courant  $\psi_P$  au point  $P$  peut être déterminée en utilisant la relation (4.36). Les paramètres intervenant dans cette relation sont présentés par les relations (4.37) à (4.40).

Le calcul du nombre de Mach et le rapport des masses volumiques au point  $P$  s'obtiennent en remplaçant  $T_{GP}$  par  $T_P$  dans les relations (4.39), et pour le rapport des pressions, on remplacera  $T$  par  $T_P$  dans la relation (4.46).

#### 4.4.2. Variation des paramètres entre deux points proches placés verticalement

Considérons la configuration illustrée dans la figure 4.5 concernant deux points placés verticalement, dont les propriétés ( $y$ ,  $M$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $T$ ,  $\rho/\rho_0$ ,  $P/P_0$ ) aux points  $B$  et  $H$  sont connues. Ces points représentent l'intersection des caractéristiques avec une section de la tuyère. On rencontre ce type de problème après la détermination de tous les points de l'intersection des caractéristiques avec une section droite donnée, lorsque la distance entre les points placés verticalement est assez grande, de sorte que les informations obtenues ne sont pas suffisantes pour déterminer la variation des paramètres suivant l'axe vertical. On rencontre ce genre de problème lorsque le nombre de points du maillage est faible.

On rencontre aussi ce problème dans la région uniforme d'une section droite, où la distance entre le point de l'axe de symétrie et le point de l'intersection de la ligne montante  $BS$  avec la section considérée est grande. Cette distance devient de plus en plus grande plus on se rapproche de la section de sortie.

Le problème consiste donc à déterminer les propriétés en un point  $P$  entre les points  $B$  et  $H$ , connaissons l'ordonnée du point  $P$  par  $y = y_P$ .

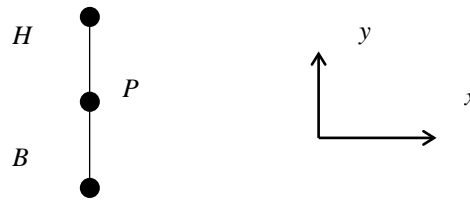


Figure 4.5 : Segment de droite placé verticalement

On peut démontrer, en utilisant la relation (4.14), que la variation de la fonction de courant  $\psi$  entre les points  $B$  et  $H$  est de la forme suivante :

$$\psi(y) = \alpha + \beta y^2 \quad (4.49)$$

Aux points  $B$  et  $H$  on a respectivement ( $y = y_B$ ,  $\psi = \psi_B$ ) et ( $y = y_H$ ,  $\psi = \psi_H$ ). Alors, la variation (4.49) donne au point  $P$ , la valeur suivante:

$$\psi_P = \psi(y = y_P) = \frac{\psi_H - \psi_B}{y_H^2 - y_B^2} (y_P^2 - y_B^2) + \psi_B \quad (4.50)$$

On approche la variation de  $\theta$  et  $T$  sur la droite  $BH$  par une variation linéaire. Lorsque  $y = y_B$  on a  $\theta = \theta_B$  et  $T = T_B$ , et lorsque  $y = y_H$ , on a  $\theta = \theta_H$ ,  $T = T_H$ . Alors, au point  $P$ , on aura les résultats suivants:

$$\theta_P = \frac{\theta_H - \theta_B}{y_H - y_B} (y_P - y_B) + \theta_B \quad , \quad T_P = \frac{T_H - T_B}{y_H - y_B} (y_P - y_B) + T_B \quad (4.51)$$

Le nombre de Mach et la masse volumique au point  $P$  peuvent être déterminés en remplaçant  $T_{GP}$  par  $T_P$  dans les relations (4.39). Le rapport des pressions peut être déterminé en remplaçant  $T$  par  $T_P$  dans la relation (4.46).

Le traçage de la variation de la fonction de courant en fonction du rayon de la tuyère pour chaque section est recommandé. Alors, pour chaque couple  $(T_0, M_S)$ , on peut obtenir un diagramme  $(\psi, y, x)$ .

#### 4.5. Conception de la tuyère 3D asymétrique

Après avoir obtenu l'écoulement en tous points internes du champ d'écoulement dans la tuyère axisymétrique, on peut procéder au dimensionnement de la tuyère 3D en appliquant l'idée de la définition d'une ligne de courant.

La conception commence par le choix de la section de sortie de la tuyère 3D à dimensionner. Plusieurs formes peuvent être choisies. Choisissons des sections ayant un plan de symétrie, d'autres ayant deux plans de symétries, ou qui n'ont aucune symétrie. La figure 4.6 illustre quelques géométries de la section de sortie et leurs emplacements. La section du col sera de la même forme que la section de sortie, vu que l'écoulement à travers ces deux sections est 1D. Le rapport des sections reste toujours valable dans ce cas. Il est donné par les équations (4.52) et (4.53) respectivement pour les cas du modèle  $PG$  [4, 5] et le modèle  $HT$  [66, 69, 70] par :

$$\left(\frac{A_s}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M_S} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_S^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (4.52)$$

$$\left(\frac{A_s}{A^*}\right)^2 = \text{Exp} \left( \int_{T_s}^{T^*} F_A(T) dT \right) \quad (4.53)$$

Avec :

$$F_A(T) = C_P(T) \left[ \frac{1}{a^2(T)} - \frac{1}{2H(T)} \right] \quad (4.54)$$

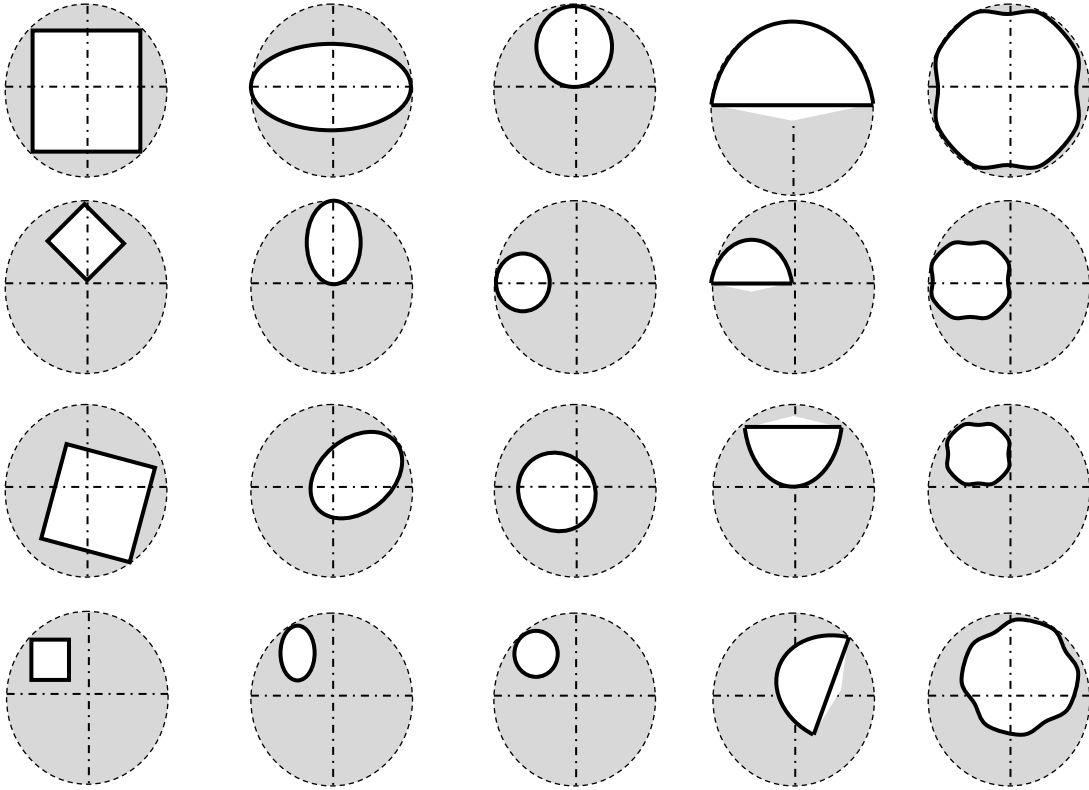


Figure 4.6 : Section de sortie arbitraire avec différentes dispositions

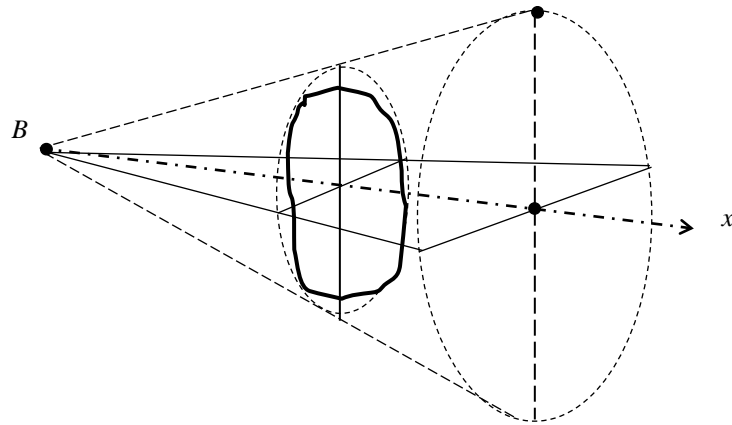


Figure 4.7 : Choix de la section de sortie d'une tuyère tridimensionnelle dans la zone d'écoulement uniforme

La deuxième étape consiste à diviser la section de sortie choisie en plusieurs points et de déterminer leurs positions ainsi que les paramètres  $(\psi, P, T, \rho, M, \theta, x)$  pour chacun de ses points (voir figure 4.8).

Aux points  $i$  ( $i=1,2, \dots, N_T$ ), on a :

$$\frac{y_i}{y^*}, \frac{z_i}{y^*}, \frac{\Psi_i}{a_0 y^*} \text{ \textbf{\u00c0 d\u00e9termin\u00e9es}}$$

$$\frac{P_i}{P_0} = \frac{P_S}{P_0}, \frac{T_i}{T_0} = \frac{T_S}{T_0}, \frac{\rho_i}{\rho_0} = \frac{\rho_S}{\rho_0} \text{ \textbf{(Donn\u00e9es)}}$$

$$M_i = M_S, \theta_i = \theta_S = 0, \frac{x_i}{y^*} = \frac{x_{Station}}{y^*} \text{ \textbf{(Donn\u00e9es)}}$$

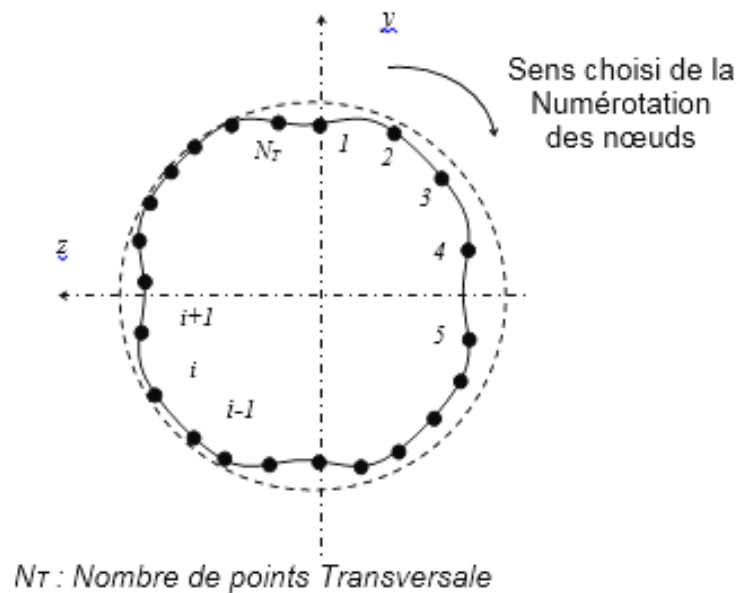


Figure 4.8 : Discr\u00e9tisation de la section de sortie de la tuy\u00e8re tridimensionnelle et num\u00e9rotation des n\u00f4uds choisies

Chaque point sur la section choisie poss\u00e8de sa propre valeur de  $\psi$ . Si deux points ou plus se trouvent \u00e0 la m\u00eame distance de l'axe de sym\u00e9trie, ils poss\u00e8dent la m\u00eame valeur de la fonction de courant.



La troisième étape consiste à diviser l'axe longitudinal en plusieurs stations  $y$  compris le col. Pour chaque points  $i$  ( $i=1, 2, \dots, N_T$ ) de la section de sortie, la tuyère en vue de profil possède la forme présentée dans la figure 4.9, mais avec une disposition différente des points.

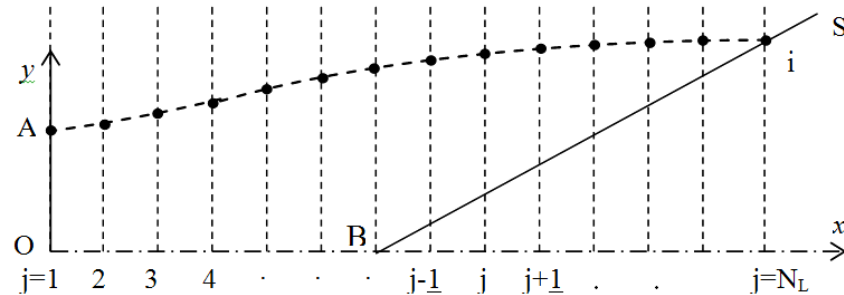


Figure 4.9 : Forme en profil de la tuyère passant par un point de la section de sortie

Tous les points qui se trouvent sur la courbe AS possèdent la même valeur de la fonction de courant, alors on a :

$$\psi_j = \psi_i \quad j = 1, 2, 3, \dots, N_L \quad (4.55)$$

En appliquons cette propriété, on peut déterminer la position  $(x, y, z)$  de chaque point  $j$  ( $j=1, 2, 3, \dots, N_L$ ) de cette ligne de courant en utilisant l'algorithme (4.44). En parallèle, il faut déterminer encore les propriétés  $(M, P, T, \rho, \dots)$  en ces points en appliquant les relations correspondantes pour chaque paramètre. Le nombre total de points à traiter est alors égal à  $N_T \times N_L$

La précision du calcul dépend du nombre de points  $N_T$  choisis sur la section de sortie transversalement et du nombre de stations insérées longitudinalement  $N_L$ . Une fois que la paroi de la tuyère 3D est déterminée, on passera au calcul de la masse et de la force de pression exercée par les gaz sur sa paroi interne. Entre deux stations successives, on obtient des cellules quadrilatères spatiales comme l'illustre la figure 4.10.

On suppose que la tuyère est d'épaisseur constante et homogène. Le calcul de la masse et de la force de pression totale exercée sur la paroi interne de la tuyère sont reliés avec le calcul de l'aire de chaque quadrilatère et de la pression exercée sur la paroi de ce dernier. Le quadrilatère est présenté comme union de deux triangles

adjacents (voir figure 4.10). On notera ici que la force de pression interpolée, exercée sur la paroi du triangle 123, n'est pas parallèle à celle exercée sur le triangle 134.

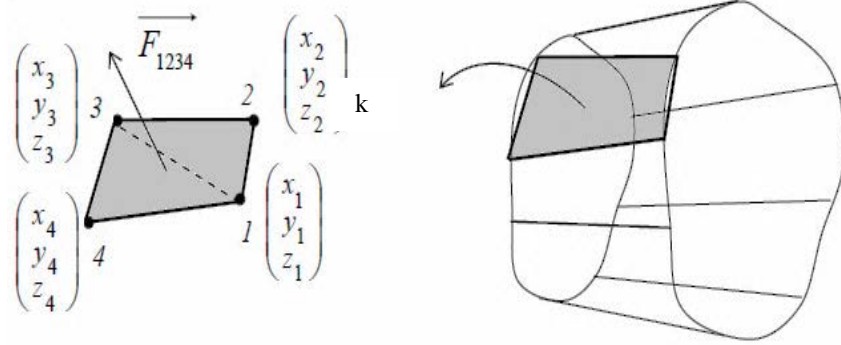


Figure 4.10 : Eléments finis placé entre deux stations successives de la tuyère 3D.

On note que les quatre nœuds ne se trouvent pas dans un même plan dans l'espace. En appliquant le produit vectoriel, on obtient la force exercée sur le quadrilatère et sa masse.

$$\frac{Masse}{\rho_M t_M A_*} = C_{Masse} = \sum_{k=1}^{(N_L-1)N_T} \frac{(A_{1234})_k}{A_*} \quad (4.56)$$

D'où la masse d'une tuyère 3D asymétrique est calculée de la manière suivante :

$$Masse = \rho_M t_M \sum_{k=1}^{(N_L-1)N_T} (A_{1234})_k = \rho_M t_M \sum_{k=1}^{(N_L-1)N_T} (A_{123} + A_{134})_k \quad (4.57)$$

Il est préférable que la masse de la structure de la tuyère tridimensionnelle soit calculée sous la forme normalisée par rapport à  $\rho_M t_M$  comme le montre l'équation (4.58):

$$\frac{Masse}{\rho_M t_M} = \sum_{k=1}^{(N_L-1)N_T} (A_{123} + A_{134})_k \quad (4.58)$$

$$C_{F\ 1234}^{\rightarrow} = \frac{\begin{matrix} \rightarrow \\ 12 \wedge 13 \\ \rightarrow \\ 12 \wedge 13 \end{matrix} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{123} \frac{A_{123}}{A_*} + \frac{\begin{matrix} \rightarrow \\ 41 \wedge 43 \\ \rightarrow \\ 41 \wedge 43 \end{matrix} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{134} \frac{A_{134}}{A_*}}{\quad} \quad (4.59)$$

Où :

$$A_{123} = \frac{1}{2} \left| \begin{matrix} \rightarrow \\ 12 \wedge 13 \\ \rightarrow \\ 12 \wedge 13 \end{matrix} \right| \quad (4.60)$$

$$A_{134} = \frac{1}{2} \left| \begin{matrix} \rightarrow \\ 41 \wedge 43 \\ \rightarrow \\ 41 \wedge 43 \end{matrix} \right| \quad (4.61)$$

$$\left( \frac{P}{P_0} \right)_{123} = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{P_1}{P_0} \right) + \left( \frac{P_2}{P_0} \right) + \left( \frac{P_3}{P_0} \right) \right] \quad (4.62)$$

$$\left( \frac{P}{P_0} \right)_{134} = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{P_1}{P_0} \right) + \left( \frac{P_3}{P_0} \right) + \left( \frac{P_4}{P_0} \right) \right] \quad (4.63)$$

Où:

$$x_{ki} = x_k - x_i$$

$$y_{ki} = y_k - y_i \quad (k = 1, 2, 3, 4) ; (i = 1, 2, 3, 4) \quad (4.64)$$

$$z_{ki} = z_k - z_i$$

$$A_{123} = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (4.65)$$

$$A_{134} = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 + F^2} \quad (4.66)$$

Avec :

$$A = y_{21} z_{31} - z_{21} y_{31} \quad (4.67)$$

$$B = z_{21} x_{31} - x_{21} z_{31} \quad (4.68)$$

$$C = x_{21} y_{31} - y_{21} x_{31} \quad (4.69)$$

$$D = y_{41} z_{43} - z_{41} y_{43} \quad (4.70)$$

$$E = z_{41} x_{43} - x_{41} z_{43} \quad (4.71)$$

$$F = x_{41} y_{43} - y_{41} x_{43} \quad (4.72)$$

Alors, la relation (4.59) devient :

$$C_{F(1234) x} = \frac{1}{2} \left[ \frac{A}{A_*} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{123} + \frac{D}{A_*} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{134} \right] \quad (4.73)$$

$$C_{F(1234) y} = \frac{1}{2} \left[ \frac{B}{A_*} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{123} + \frac{E}{A_*} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{134} \right] \quad (4.74)$$

$$C_{F(1234) z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{C}{A_*} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{123} + \frac{F}{A_*} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{134} \right] \quad (4.75)$$

Le coefficient de poussée  $C_F$  total d'une tuyère 3D *asymétrique*, est obtenu par la somme de tous les coefficients de poussées exercées sur tous les  $N_T$  ( $N_T-1$ ) *quadrilatères*.

Il est nécessaire de calculer la surface au col pour déterminer la masse de la tuyère. Comme la section du col à la même forme que celle de la section de sortie, on écrit:

$$A_* = \sum_{i=1}^{i=N_T} A_i \quad (4.76)$$

Avec :

$$A_i = \frac{1}{2} \left\{ y_o(z_j - z_i) + y_j(z_i - z_o) + y_i(z_o - z_j) \right\} \quad (4.77)$$

$j = i+1$  si  $i < N_T$  et  $j = 1$  lorsque  $i = N$

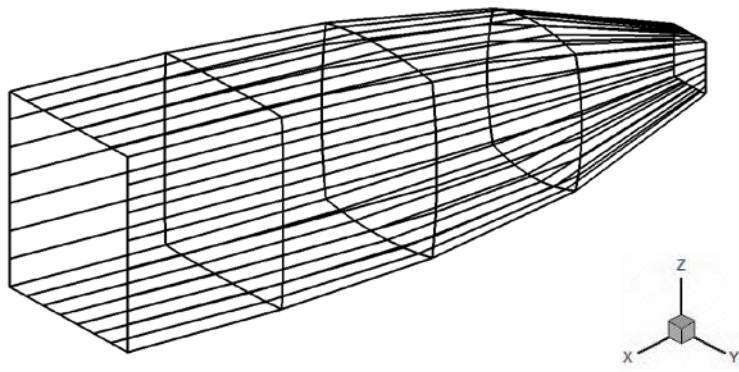
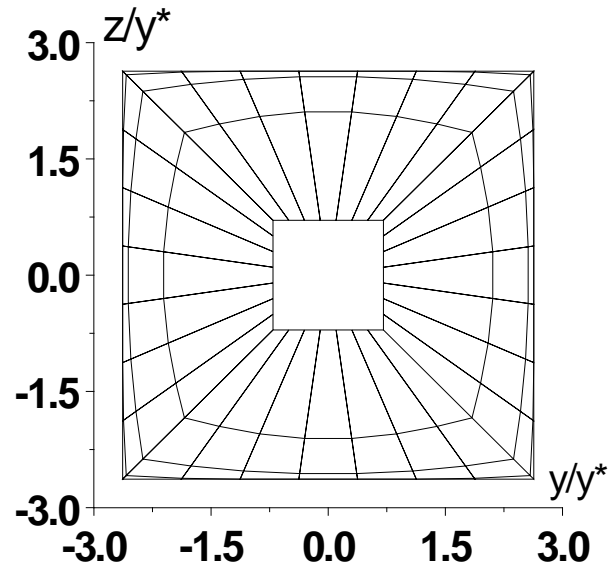
## CHAPITRE 5

### RESULTATS ET DISCUSSIONS

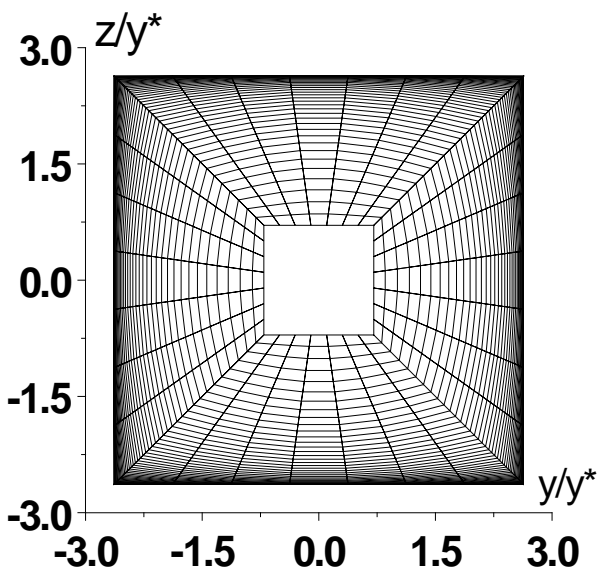
Dans ce chapitre, on présente les divers résultats obtenus par notre programme de calcul élaboré pour des configurations simples telles que le carré, le rectangle, le triangle ou l'ellipse etc...et pour n'importe quelles autres formes complexes choisies arbitrairement pour la section de sortie. Le but de ces figures est de présenter les différents cas possibles de conception et les différents paramètres qui influents sur le dimensionnement et la conception des tuyères tridimensionnelles. Ces résultats sont divisés en quatre parties. La première partie comporte les résultats obtenus pour trouver les contours des tuyères tridimensionnelles *MLN* ainsi que les paramètres d'influence des résultats de conception. La deuxième partie comporte les résultats de conception de quelques formes de tuyères 3D asymétriques ayant le même nombre de Mach de sortie  $M_S$ , la même masse et la même section d'entrée au col, suivie par une comparaison des performances avec celle de la forme axisymétrique. La troisième partie concerne les résultats sur l'effet du nombre de Mach de sortie  $M_S$  et de la température de stagnation  $T_0$  sur le contour de la tuyère 3D afin de montrer avec précision la différence existante entre le modèle *GP* et notre modèle haute température *HT*. A la fin de notre étude, on présentera l'allure des lignes de courant dans le champ de l'écoulement interne de la tuyère 3D ayant une section de sortie arbitraire. On notera que les valeurs des masses calculées dans ce chapitre, sont présentées sous la forme normalisée par rapport à  $(\rho_M t_M)$ , c'est-à-dire que cette valeur est divisée par la masse volumique  $\rho_M$  et l'épaisseur du matériau  $t_M$  (Masse/ $\rho_M t_M$ ).

#### 5.1. Contour de la tuyère tridimensionnelle asymétrique

La figure 5.1 représente une tuyère tridimensionnelle *MLN* ayant une section de sortie carrée pour  $T_0=2000K$  et  $M_S=4,00$ , qui donne un angle de détente au col  $\theta^*=27,49$  degré. Cette figure contient deux présentations de tuyères carrées. Une figure dans le plan  $(y, z)$  et l'autre dans le plan  $(x, y, z)$  afin de bien illustrer le dimensionnement d'une tuyère 3D et de montrer l'effet de raffinement du nombre de sections insérées longitudinalement  $N_L$  sur la conception. Pour le cas (a), on a pris  $N_L=5$  et  $N_T=28$  et pour le cas (b)  $N_L=50$  et  $N_T=28$ .



(a) :  $N_L=5$  et  $N_T=28$



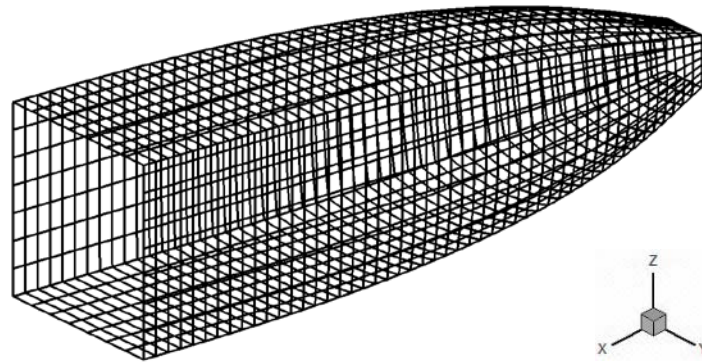
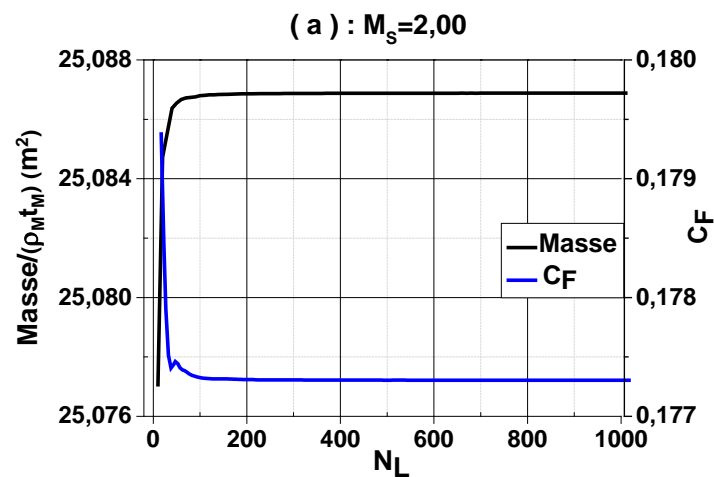
(b) :  $N_L=50$  et  $N_T=28$ 

Figure 5.1 : Tuyère 3D de forme carrée avec et sans raffinement du nombre de sections insérées longitudinalement  $N_L$  pour  $T_0=2000$  K et  $M_S=4,00$

La figure 5.2 (a) – (b) montre la variation de la masse et du coefficient de poussée respectivement en fonction du nombre de sections insérées longitudinalement  $N_L$  pour les nombres de Mach de sortie  $M_S=2,00$  et  $M_S=4,00$ . On remarque clairement que l'augmentation de  $N_L$  entraîne une diminution de l'erreur ( $\epsilon$ ), donc la convergence du processus numérique sera alors atteinte. Par exemple, si on opte pour une erreur de l'ordre de  $10^{-4}$ , la convergence du processus numérique sera alors atteinte à  $N_L=110$  pour la masse et  $N_L=60$  pour le coefficient de poussée si  $M_S=2,00$ . Par contre, pour  $M_S=4,00$ , le nombre de sections insérées longitudinales devient important afin de concevoir et de dimensionner la tuyère asymétrique avec une précision élevée. Dans ce cas, on aura  $N_L=880$  pour la masse et  $N_L=630$  pour le coefficient de poussée  $C_F$ , si on opte toujours une erreur de l'ordre de  $10^{-4}$ .



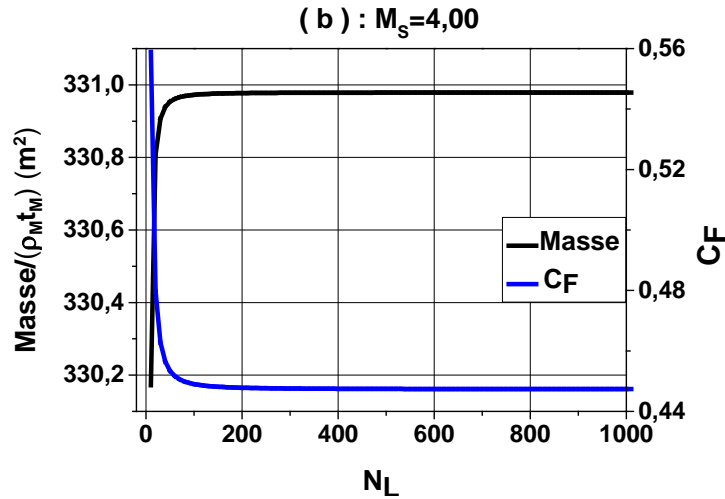


Figure 5.2 : Effet de raffinement du nombre de sections insérées longitudinale  $N_L$  sur la conception de la tuyère 3D de forme carrée pour  $T_0=2000 K$  et  $N_T=28$

La figure 5.3 représente l'effet de discrétisation du nombre de sections insérées longitudinalement  $N_L$  sur la masse d'une tuyère 3D asymétrique (forme carrée). Plus la tuyère délivre un nombre de Mach de sortie  $M_s$  élevé, plus la masse devient élevée. On remarque aussi que les six courbes qui représentent les cas où  $N_L=10, 20, 30, 50, 100$  et  $500$  sont toutes confondues le long de  $M_s$ . On peut conclure que la valeur de la masse d'une tuyère 3D asymétrique est indépendante du nombre de sections insérées longitudinalement  $N_L$ , ce qui est un avantage pour le contrôle du processus numérique et le temps de convergence.

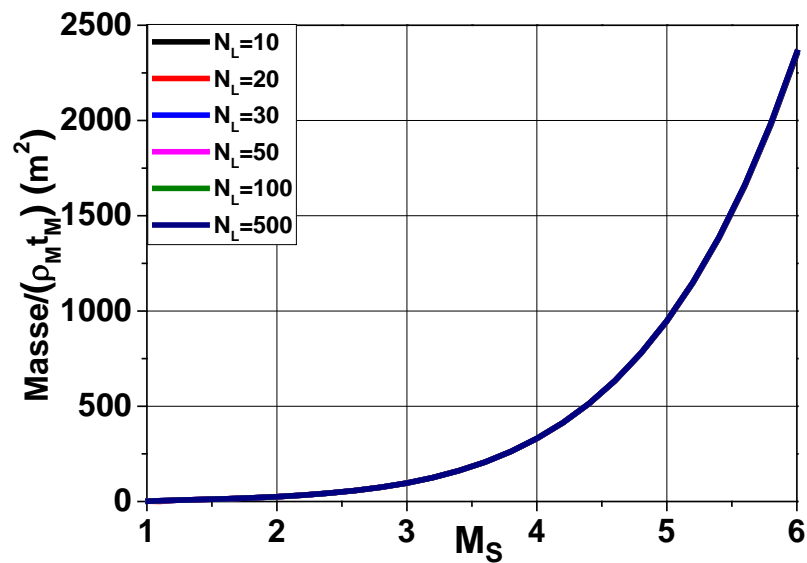


Figure 5.3 : Effet du nombre de sections insérées longitudinalement  $N_L$  sur la masse d'une tuyère 3D asymétrique pour  $T_0=2000 K$



La figure 5.4 illustre la variation du coefficient de poussée  $C_F$  d'une tuyère 3D asymétrique (forme carrée) en fonction du nombre de Mach de sortie  $M_S$  pour diverses valeurs du nombre de sections longitudinales où  $N_L=10, 20, 30, 50, 100$  et  $500$ . On remarque que dans ce cas lorsque le nombre de Mach  $M_S$  est inférieur à 3,00,  $N_L$  ne présente presque aucune influence sur le coefficient de poussée  $C_F$ . Mais au-delà de cette valeur, la différence entre les six courbes s'agrandit graduellement. Donc on conclut que plus le nombre de Mach de sortie  $M_S$  est supérieur à 3,00, plus la convergence nécessite un nombre important de sections insérées longitudinalement  $N_L$ . Le tableau 5.1 illustre bien cette différence pour un nombre de Mach  $M_S$  compris entre 2 et 6.

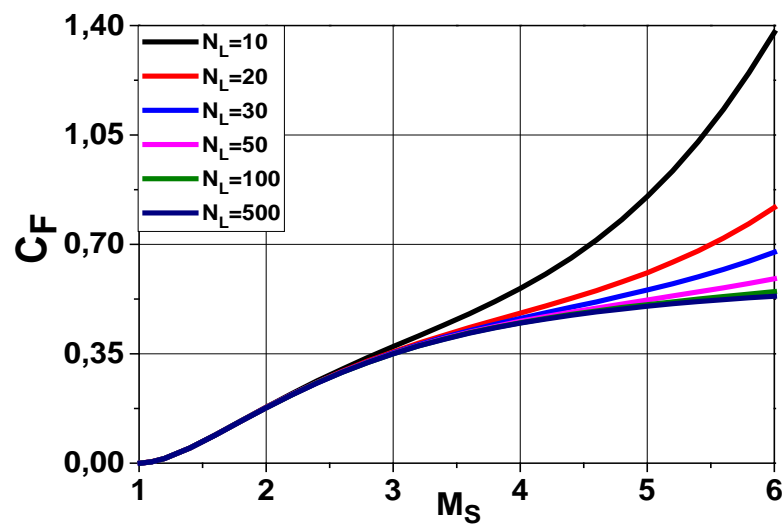


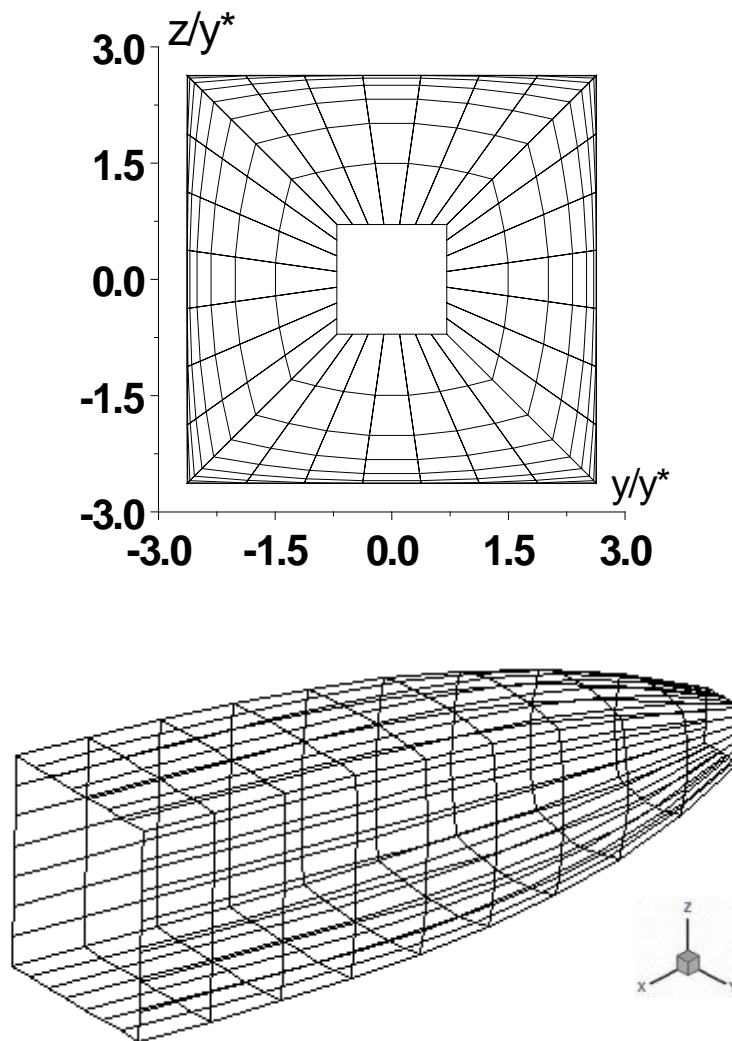
Figure 5.4 : Effet du nombre de sections insérées longitudinalement  $N_L$  sur le coefficient de poussée d'une tuyère 3D asymétrique

Tableau 5.1 : Valeur numérique de l'effet de discrétisation du nombre de sections insérées longitudinalement  $N_L$  sur  $C_F$  pour  $T_0=2000$  K

	$C_F$				
	$M_S=2,00$	$M_S=3,00$	$M_S=4,00$	$M_S=5,00$	$M_S=6,00$
$N_L=10$	0,179	0,373	0,559	0,853	1,378
$N_L=20$	0,178	0,356	0,480	0,609	0,818
$N_L=30$	0,178	0,353	0,463	0,554	0,675
$N_L=50$	0,177	0,351	0,454	0,522	0,590
$N_L=100$	0,177	0,350	0,449	0,507	0,549
$N_L=200$	0,177	0,350	0,448	0,503	0,538
$N_L=300$	0,177	0,350	0,448	0,502	0,536
$N_L=400$	0,177	0,350	0,448	0,502	0,535
$N_L=500$	0,177	0,350	0,448	0,502	0,534
$N_L=600$	0,177	0,350	0,448	0,502	0,534
$N_L=700$	0,177	0,350	0,448	0,502	0,534

Un autre paramètre d'une grande importance et qui va influencer les résultats de conception il s'agit en l'occurrence du nombre de points insérés transversalement  $N_T$  sur le contour de la section de sortie choisie.

La figure 5.5 représente une tuyère tridimensionnelle *MLN* ayant une section de sortie carrée pour  $T_0=2000$  K et  $M_S=4,00$ . Cette figure contient deux présentations de tuyères carrées. Une figure dans le plan  $(y, z)$  et l'autre dans le plan  $(x, y, z)$  afin de bien illustrer la présentation d'une tuyère asymétrique dimensionnée et de montrer l'effet du raffinement du nombre de points  $N_T$  sur la conception de la tuyère. Dans le cas (a), on a pris  $N_L=10$  et  $N_T=28$  et pour le cas (b)  $N_L=10$  et  $N_T=116$ .



(a) :  $N_L=10$  et  $N_T=28$

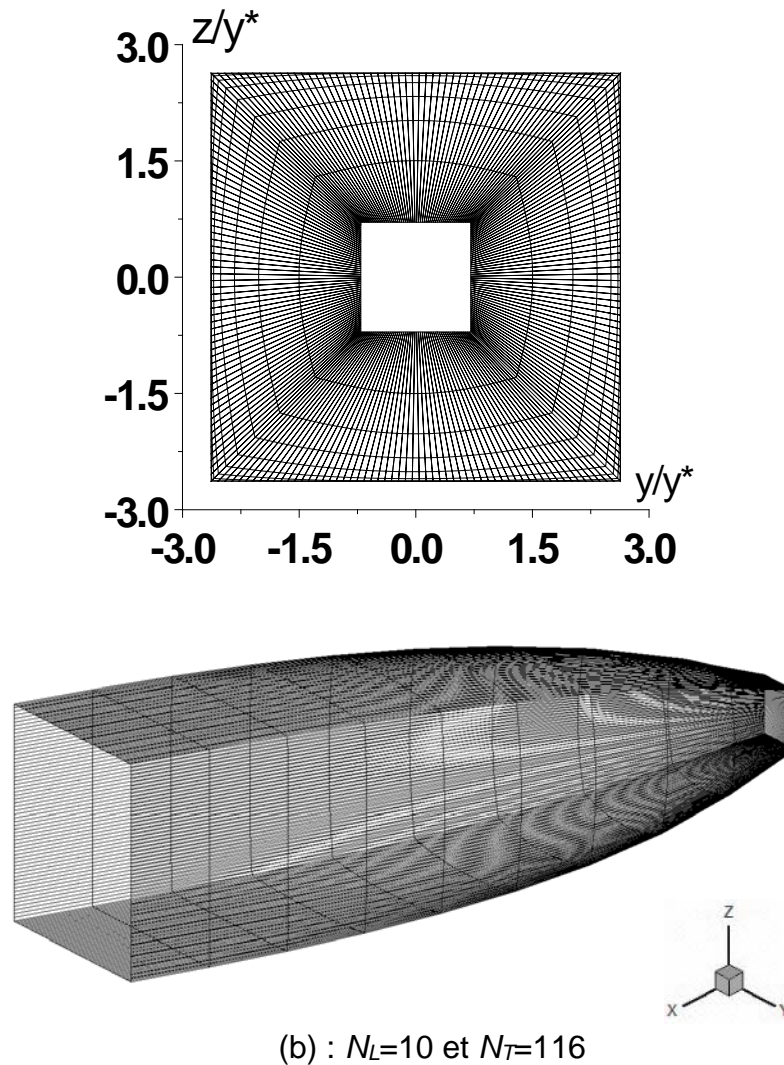


Figure 5.5 : Tuyère 3D de forme carrée avec et sans raffinement du nombre de points insérés transversalement  $N_T$  pour  $T_0=2000$  K et  $M_S=4,00$

La figure 5.6 (a) - (b) montre la variation de la masse et du coefficient de poussée respectivement d'une tuyère tridimensionnelle de forme carrée en fonction du nombre de points insérés transversalement  $N_T$  sur la section de sortie pour un nombre de Mach de sortie  $M_S=2,00$  et  $M_S=4,00$ . On conclut que, l'augmentation du nombre de points insérés transversalement  $N_T$  nous permet de concevoir et de dimensionner la tuyère asymétrique avec une précision élevée. Par exemple, si on opte une erreur de l'ordre de  $10^{-4}$ , la convergence du processus numérique sera alors atteinte à  $N_T=84$  pour la masse et  $N_T=24$  pour le coefficient de poussée  $C_F$  si  $M_S=2,00$ . Par contre, pour  $M_S=4,00$ , il nous faut  $N_T=680$  pour la masse et  $N_T=130$  pour le coefficient de poussée  $C_F$ .

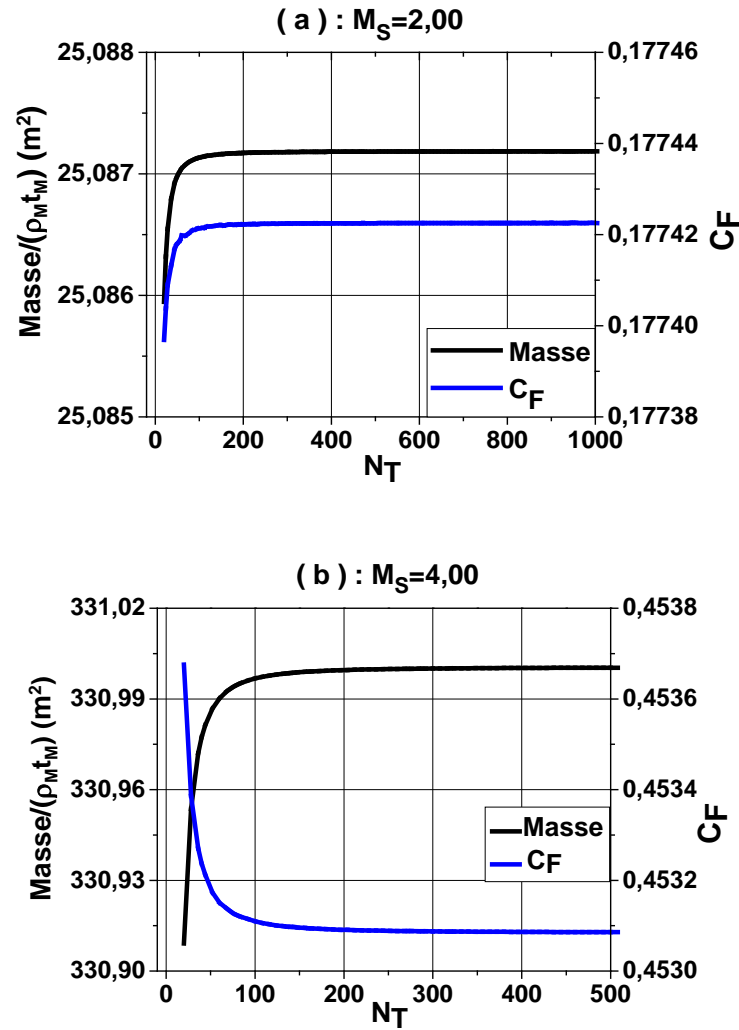


Figure 5.6 : Effet de raffinement du nombre de points insérés sur la section de sortie  $N_T$  sur la masse et le coefficient de poussée d'une tuyère 3D de forme carrée pour  $T_0=2000$  K et  $N_L=50$

Les figures 5.7 et 5.8 illustrent la variation de la masse et du coefficient de poussée  $C_F$  d'une tuyère 3D (forme carrée) en fonction du nombre de Mach de sortie  $M_S$  pour diverses valeurs du nombre de points insérés transversalement où  $N_T=12, 20, 52, 100, 500$  et  $900$  sur la section de sortie. On remarque dans ce cas que les deux paramètres (la masse et  $C_F$ ) restent constants quel que soit la valeur de  $N_T$  et de  $M_S$ . Donc il suffit de prendre seulement quelques points sur le contour de la section choisie et le processus de convergence est alors atteint.

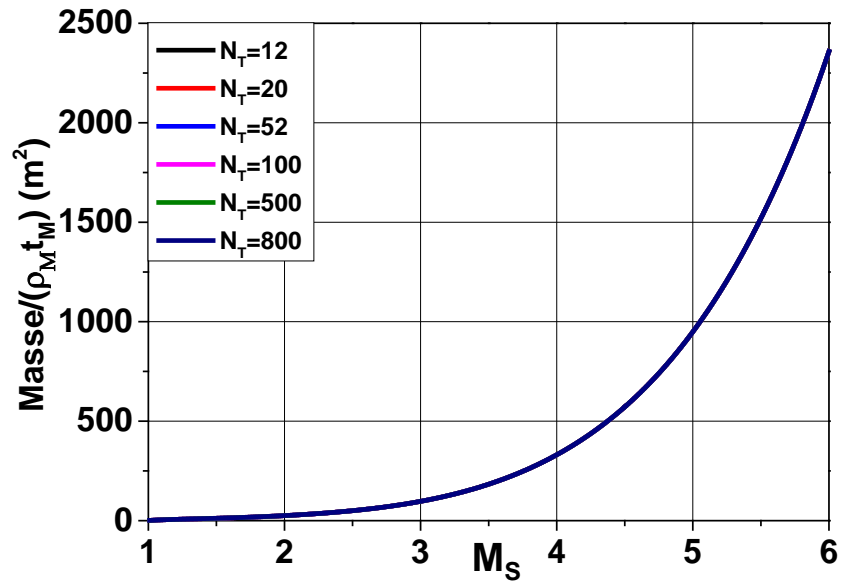


Figure 5.7 : Effet du nombre de points insérés transversalement  $N_T$  sur la masse d'une tuyère 3D de forme carrée pour  $T_0=2000 K$

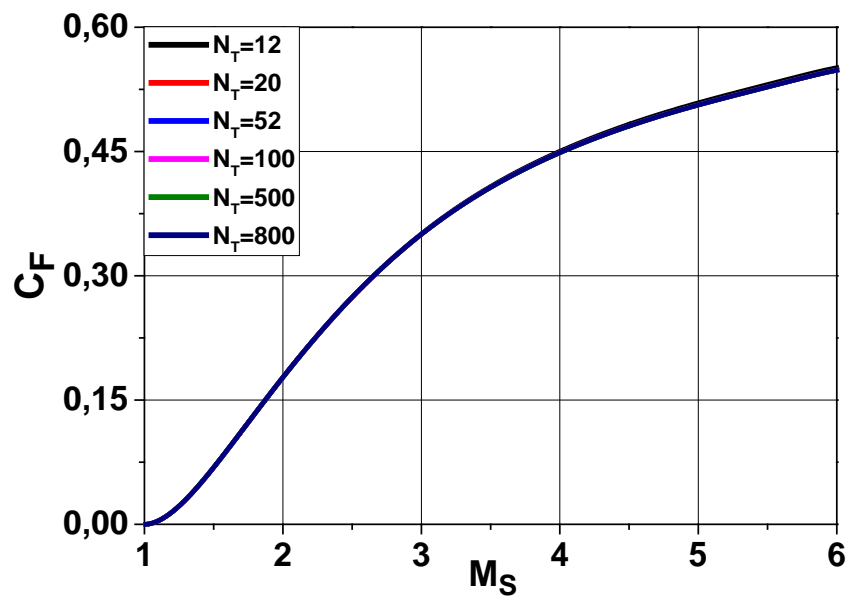
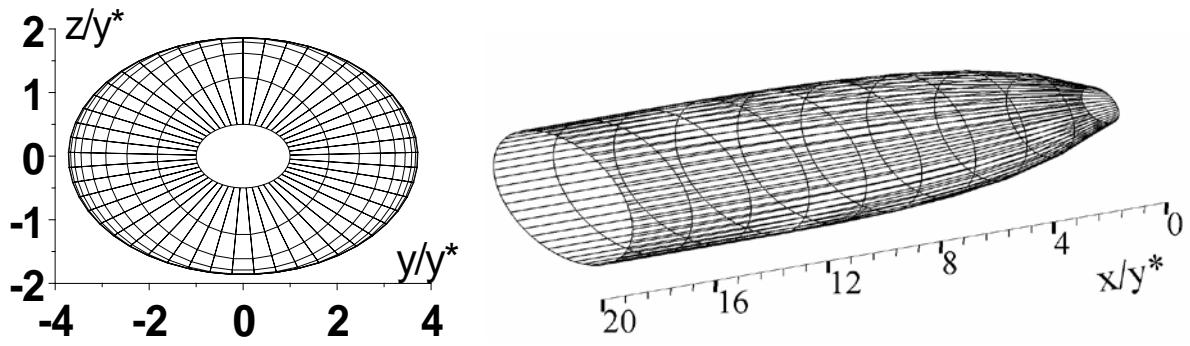


Figure 5.8 : Effet du nombre de points insérés transversalement  $N_T$  sur le coefficient de poussée d'une tuyère 3D de forme carrée pour  $T_0=2000 K$

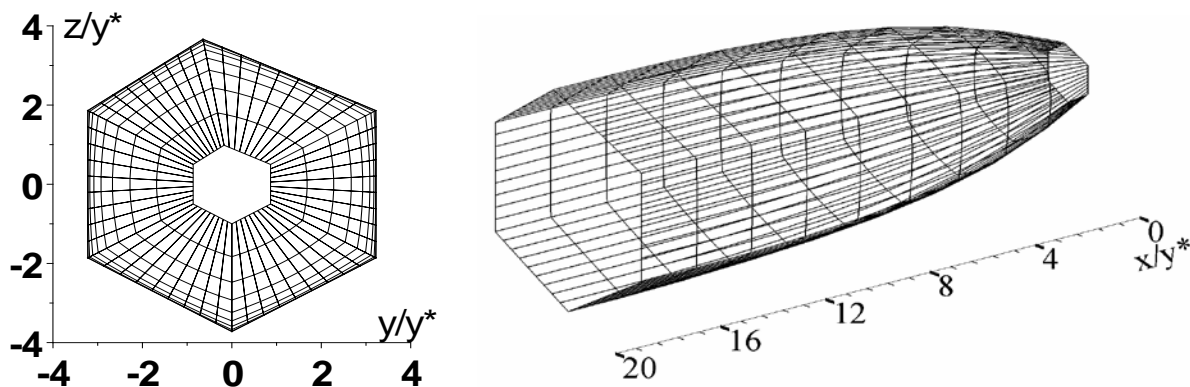
On conclut que le nombre de points  $N_T$  insérés transversalement sur le contour de la section choisie, n'influe pas de manière significatif sur la masse et le coefficient de poussée  $C_F$ .

## 5.2. Conception de tuyères 3D asymétriques ayant même nombre de Mach de sortie $M_S$

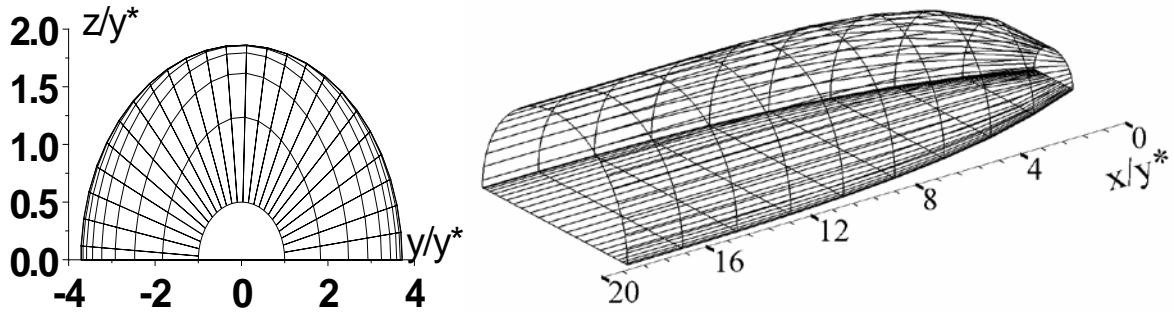
Les formes de tuyères 3D *MLN* qu'on a présenté dans la figure 5.9 possèdent toutes la même longueur, le même nombre de Mach de sortie pour  $M_S=4,00$  et  $T_0=2000$  K. C'est-à-dire qu'on trouve toujours dans toutes les tuyères les zones qui caractérisent une tuyère *MLN* entre autres la zone de Kernel, la zone de transition et la zone uniforme car la tuyère tridimensionnelle asymétrique est incluse dans la tuyère axisymétrique. Par contre, leurs masses et leurs coefficients de poussée respectifs sont différents.



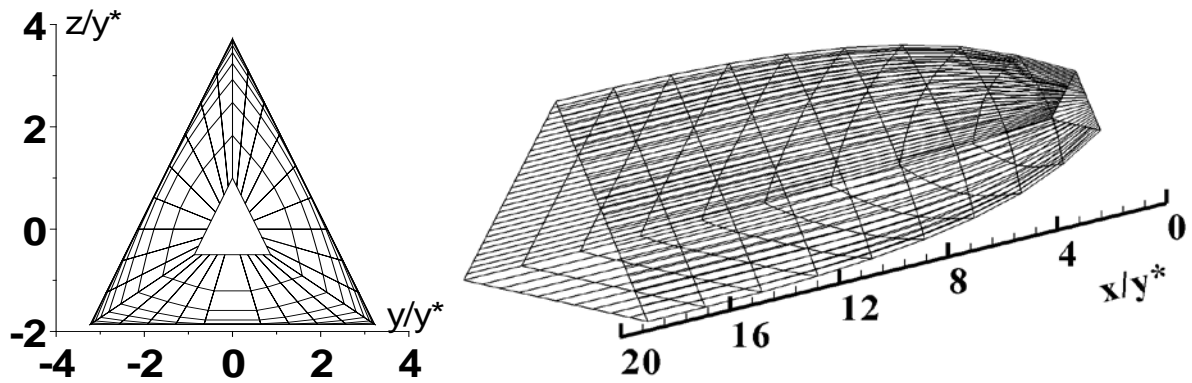
(a): Forme elliptique ( $N_L=10$  et  $N_T=50$ )



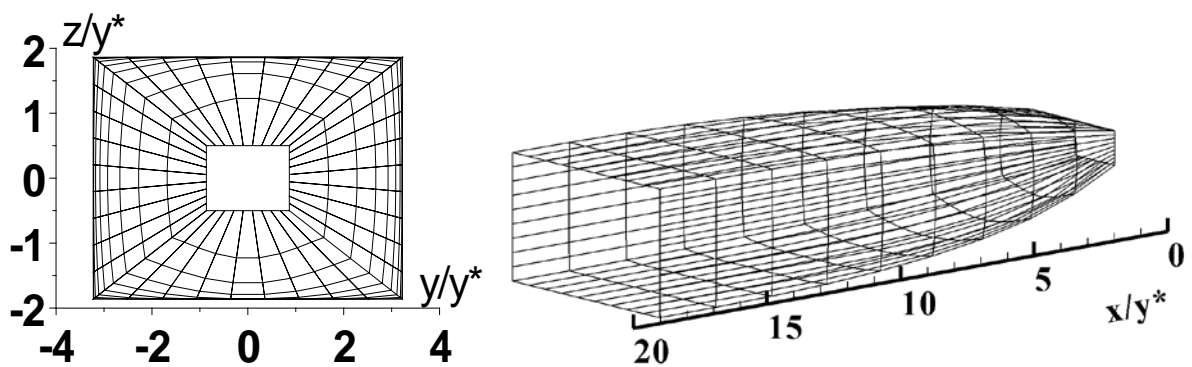
(b): Forme hexagonale ( $N_L=10$  et  $N_T=54$ )



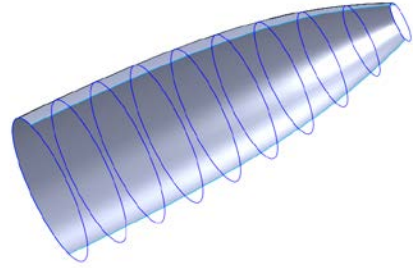
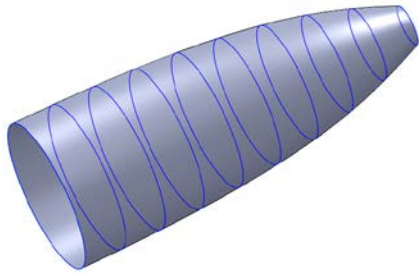
(c): Forme demi-elliptique ( $N_L=10$  et  $N_T=25$ )



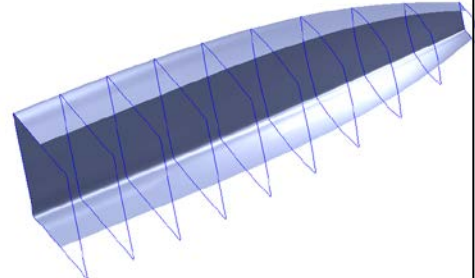
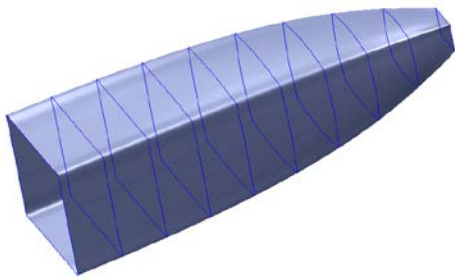
(d): Forme triangulaire ( $N_L=10$  et  $N_T=27$ )



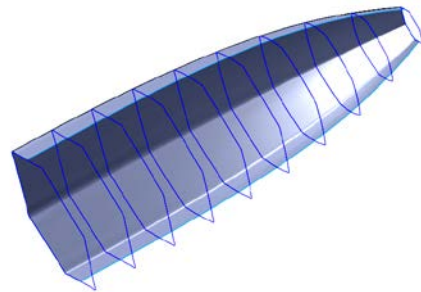
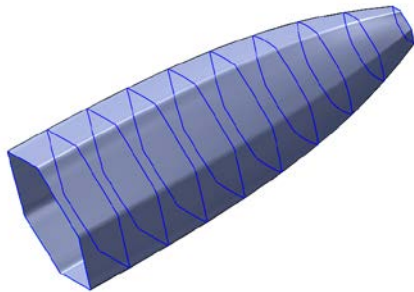
(e): Forme rectangulaire ( $N_L=10$  et  $N_T=36$ )



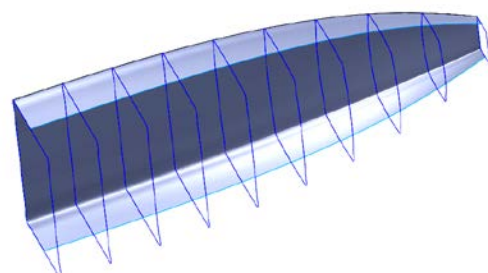
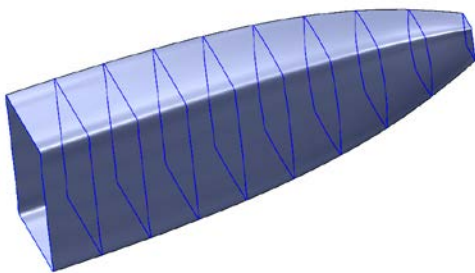
(a) : Forme axisymétrique



(b) : forme carrée

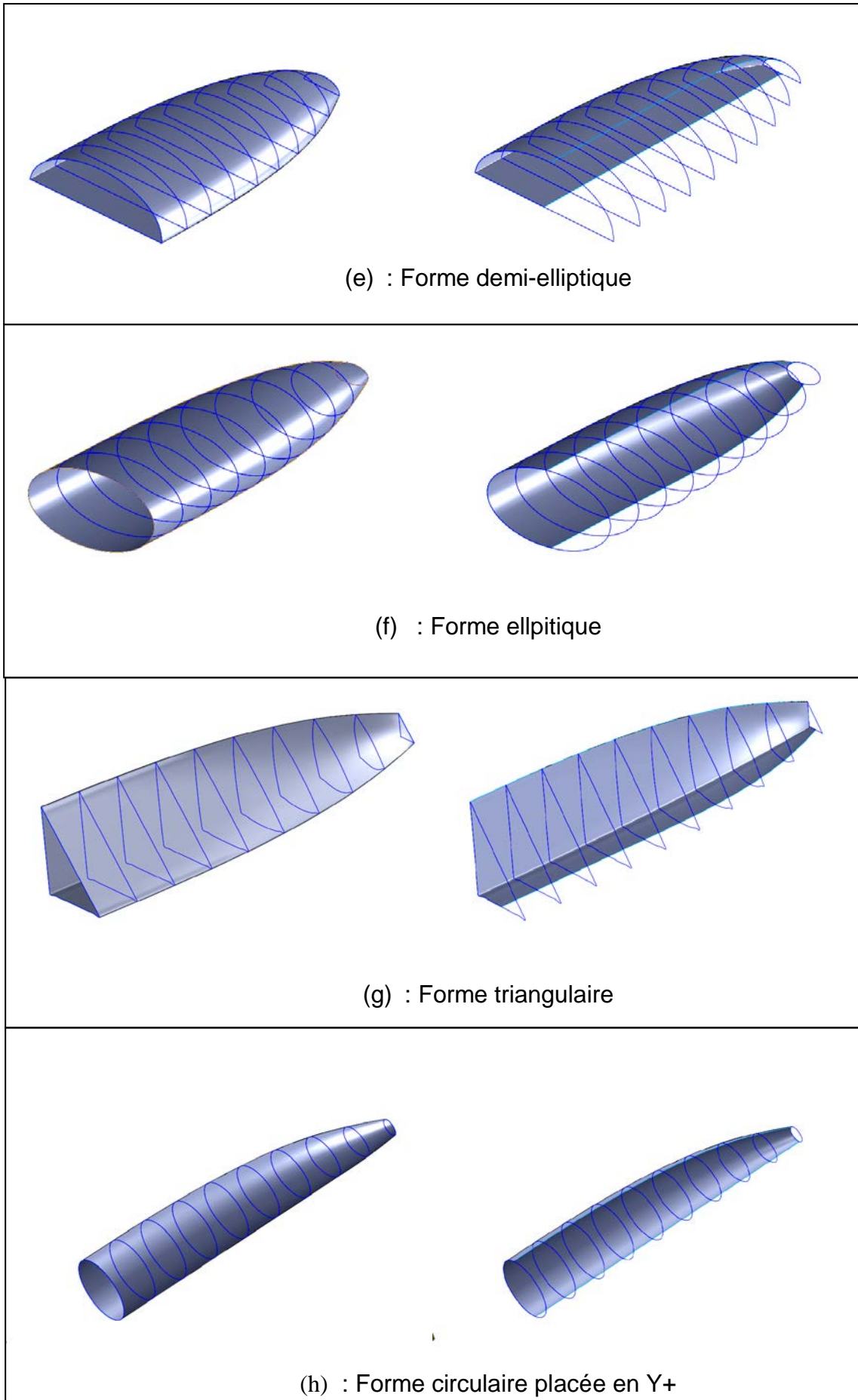


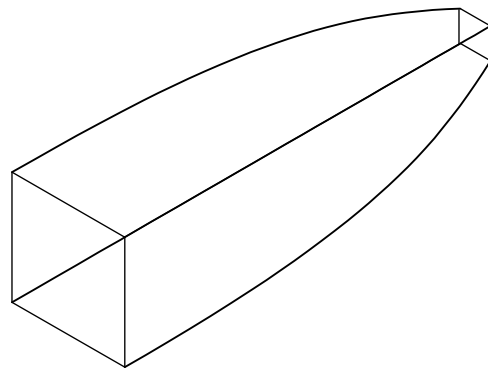
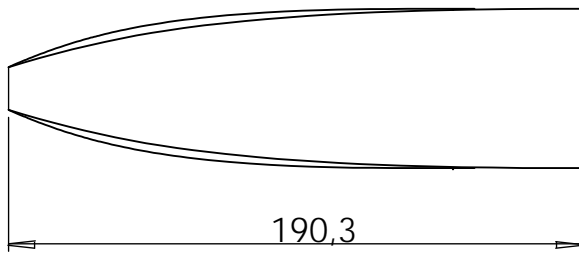
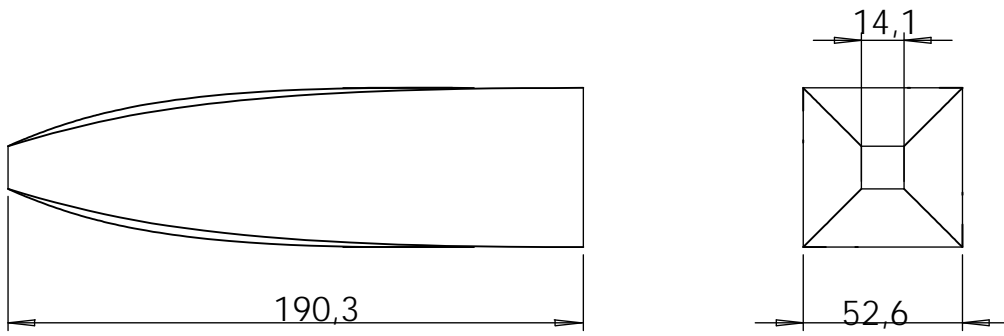
(c) : Forme hexagonale



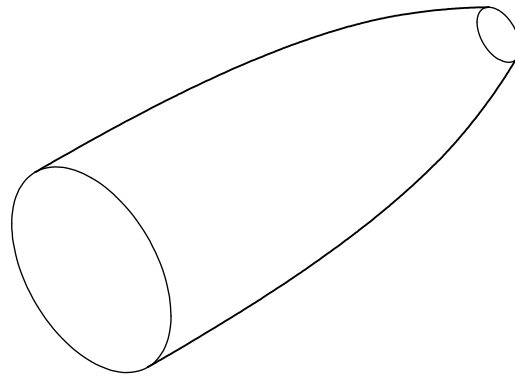
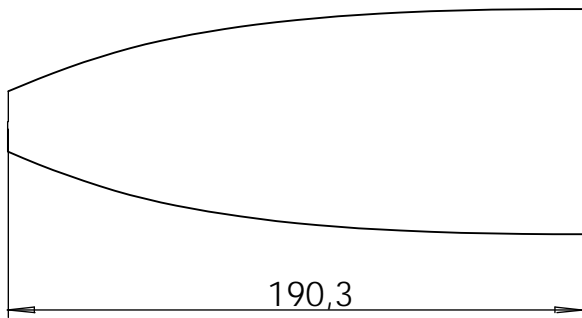
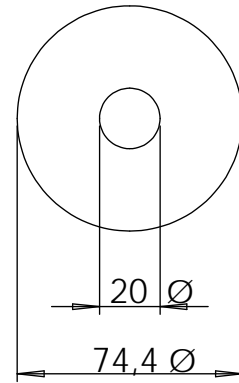
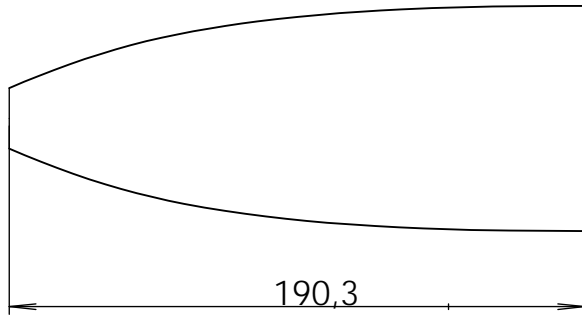
(d) : Forme rectangulaire







Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de Blida	Nom : ABADA Omar	
Tuyère à détente centrée tridimensionnelle de forme carrée	Unité: cm	19 / 04 / 2015
	Echelle 1:25	Feuille: 1 / 1



Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de Blida

Nom : ABADA Omar

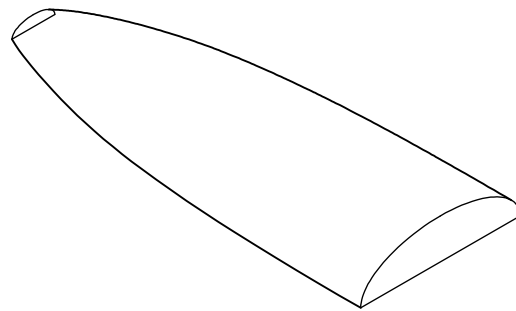
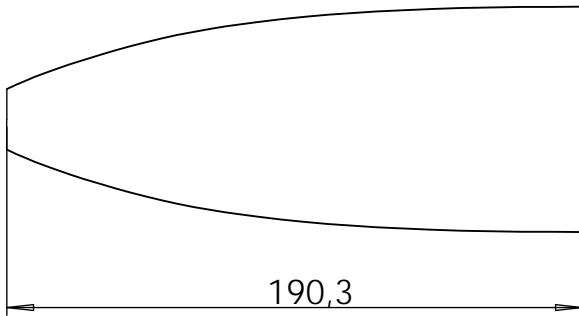
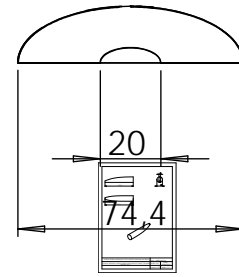
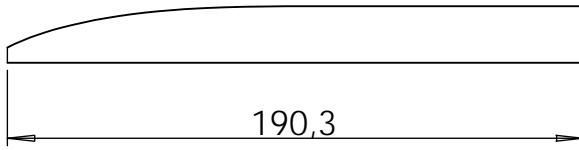
Tuyère à détente centrée tridimensionnelle de  
forme Circulaire

Unité: cm

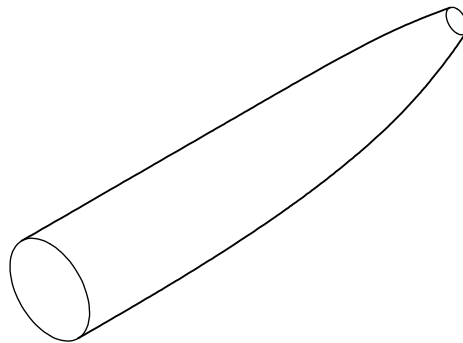
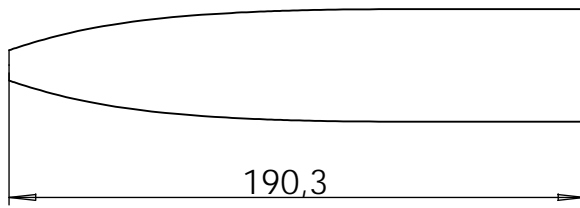
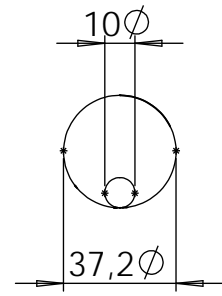
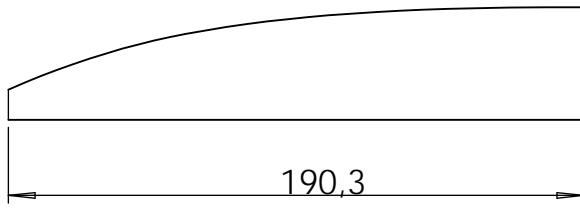
19 / 04 /2015

Echelle 1:25

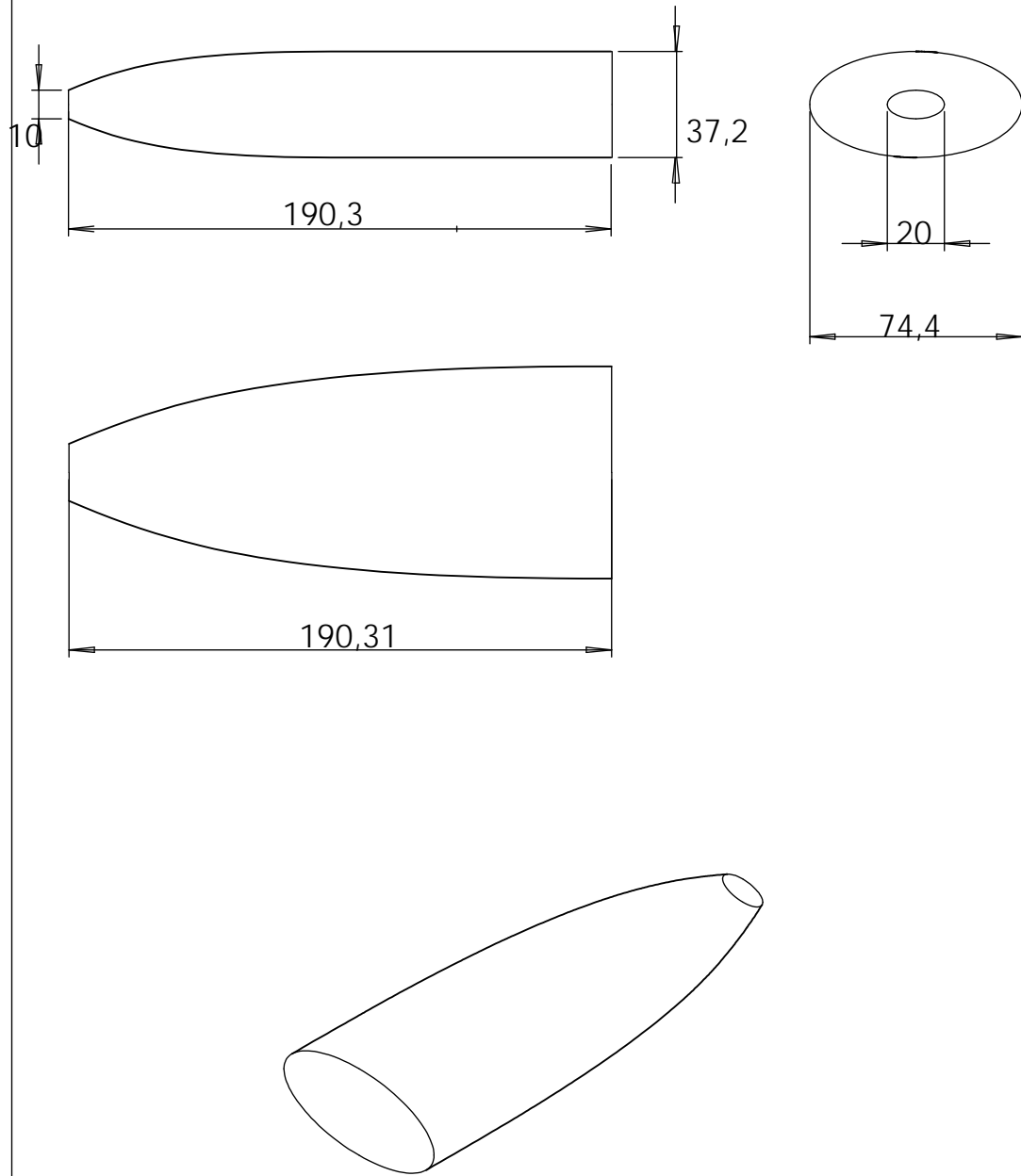
Feuille: 1 / 1



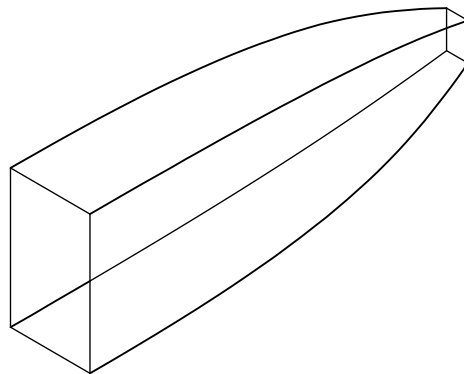
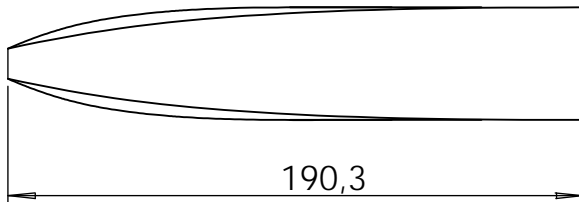
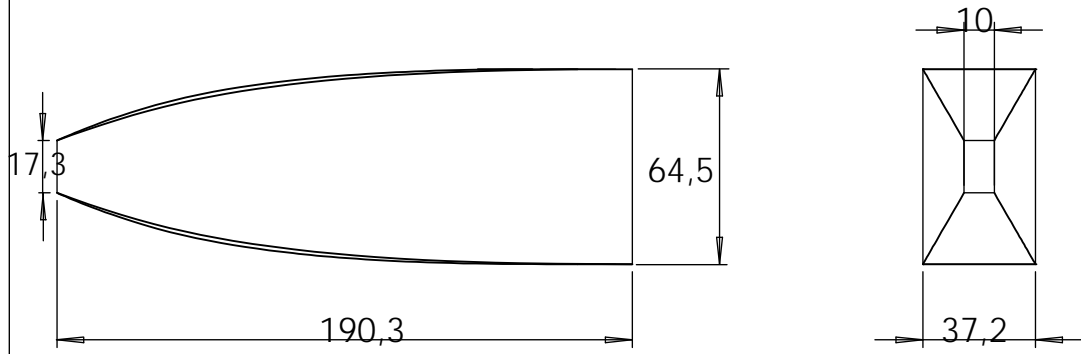
Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de Blida	Nom : ABADA Omar	
Tuyère à détente centrée tridimensionnelle de forme Demi-Elliptique	Unité: cm	19 / 04 / 2015
	Echelle 1:25	Feuille: 1/1



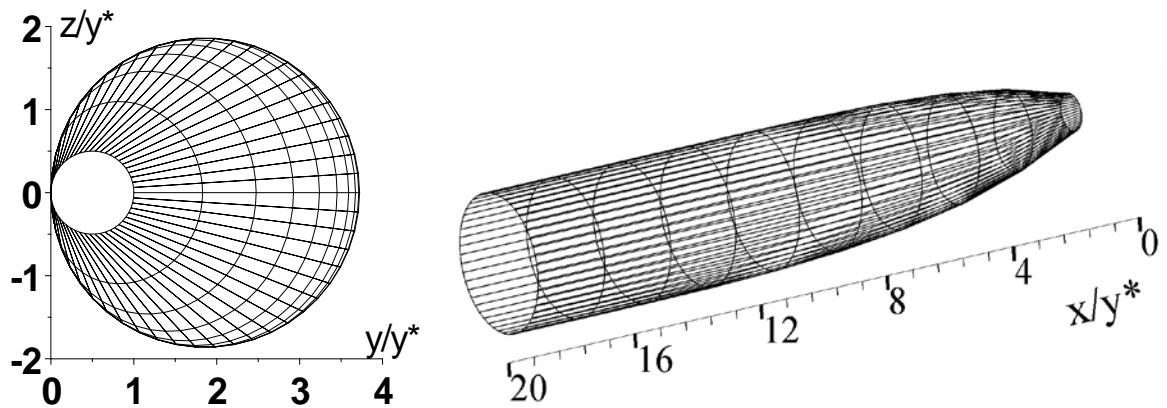
Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de Blida	Nom : ABADA Omar	
Tuyère à détente centrée tridimensionnelle de forme Circulaire placée en $y^+$	Unité: cm	19 / 04 / 2015
	Echelle 1:25	Feuille: 1/1



Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de Blida	Nom : ABADA Omar	
Tuyère à détente centrée tridimensionnelle de forme Elliptique	Unité: cm	19 / 04 / 2015
	Echelle 1:25	Feuille: 1/1



Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de Blida	Nom : ABADA Omar	
Tuyère à détente centrée tridimensionnelle de forme Rectangulaire	Unité: cm	19 / 04 / 2015
	Echelle 1:25	Feuille: 1/1



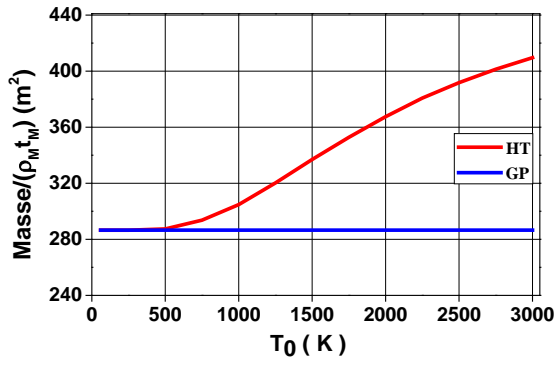
(f) : Section circulaire placé dans l'axe  $Y+$   
 ( $N_L=10$  et  $N_T=40$ )

Figure 5.9 : Différentes formes de conception de tuyères tridimensionnelles  
 pour  $M_S = 4,00$  et  $T_0 = 2000$  K

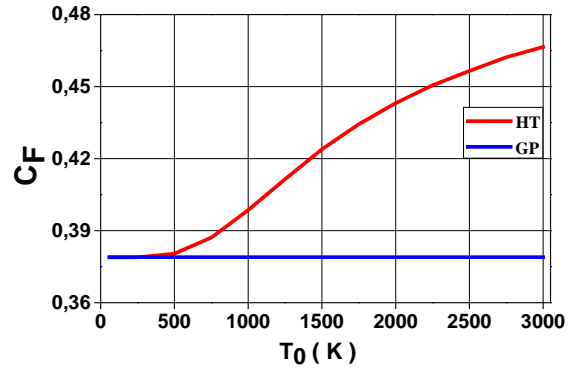
La figure 5.10 représente les variations de la masse et du coefficient de poussée  $C_F$  pour différentes formes de tuyères 3D asymétriques données respectivement par le modèle *GP* comparé au modèle *HT* pour quelques valeurs de  $T_0$ . On remarque clairement que la masse et le coefficient de poussée des tuyères 3D varient de manière similaire et dépendent de la température  $T_0$ ; elles augmentent si  $T_0$  augmente. Par exemple, si on choisit une tuyère 3D de forme elliptique à  $T_0=2000$ K et  $M_S=4,00$ , l'utilisation du modèle *GP* donnera une erreur égale à 22% pour la masse et 14% pour le coefficient de poussée  $C_F$ . On remarque qu'à faible valeur de  $T_0$ , l'erreur est très faible.

On conclut donc qu'il y a possibilité d'utiliser le modèle *GP* jusqu'à une température n'excédant pas 1000 K.

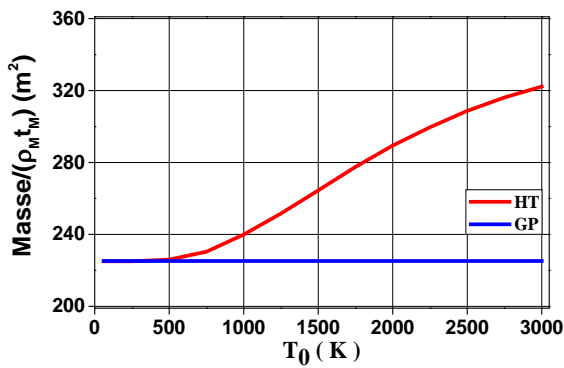




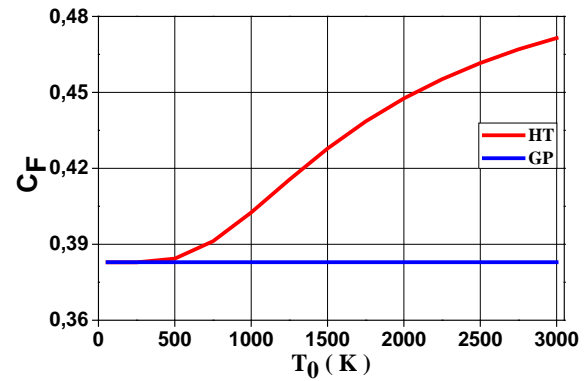
( a ) : Forme Axisymétrique



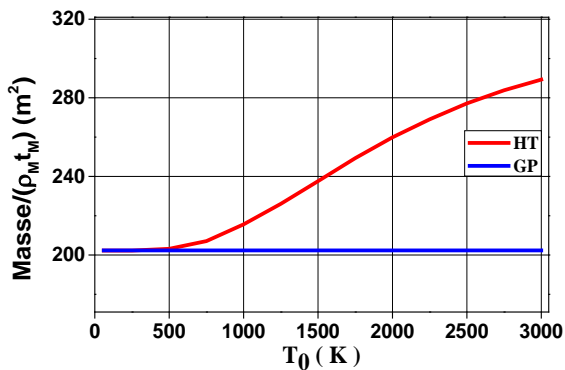
( a ) : Forme Axisymétrique



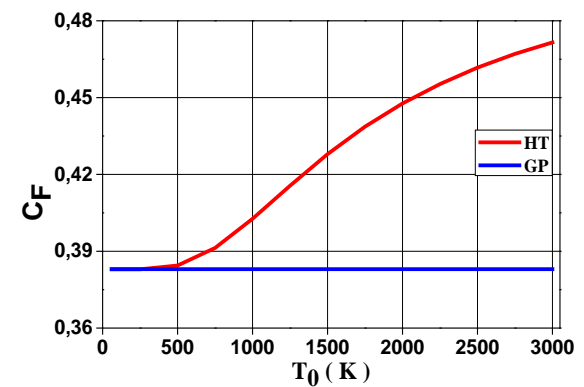
( b ) : Forme Elliptique



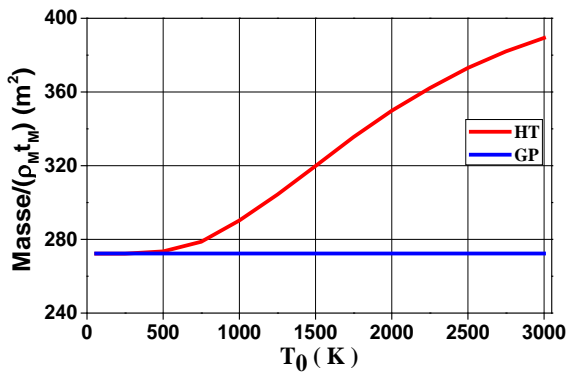
( b ) : Forme Elliptique



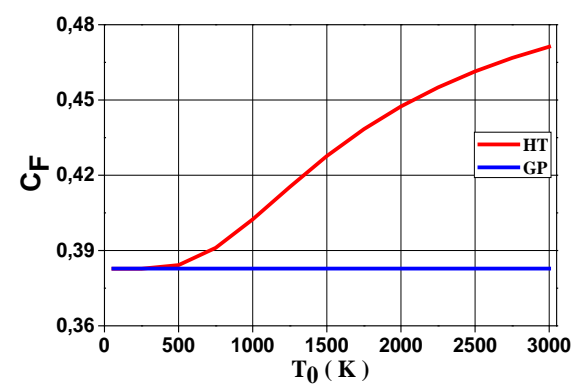
( c ) : Forme Demi-Elliptique



( c ) : Forme Demi-Elliptique



( d ) : Forme Hexagonale



( d ) : Forme Hexagonale

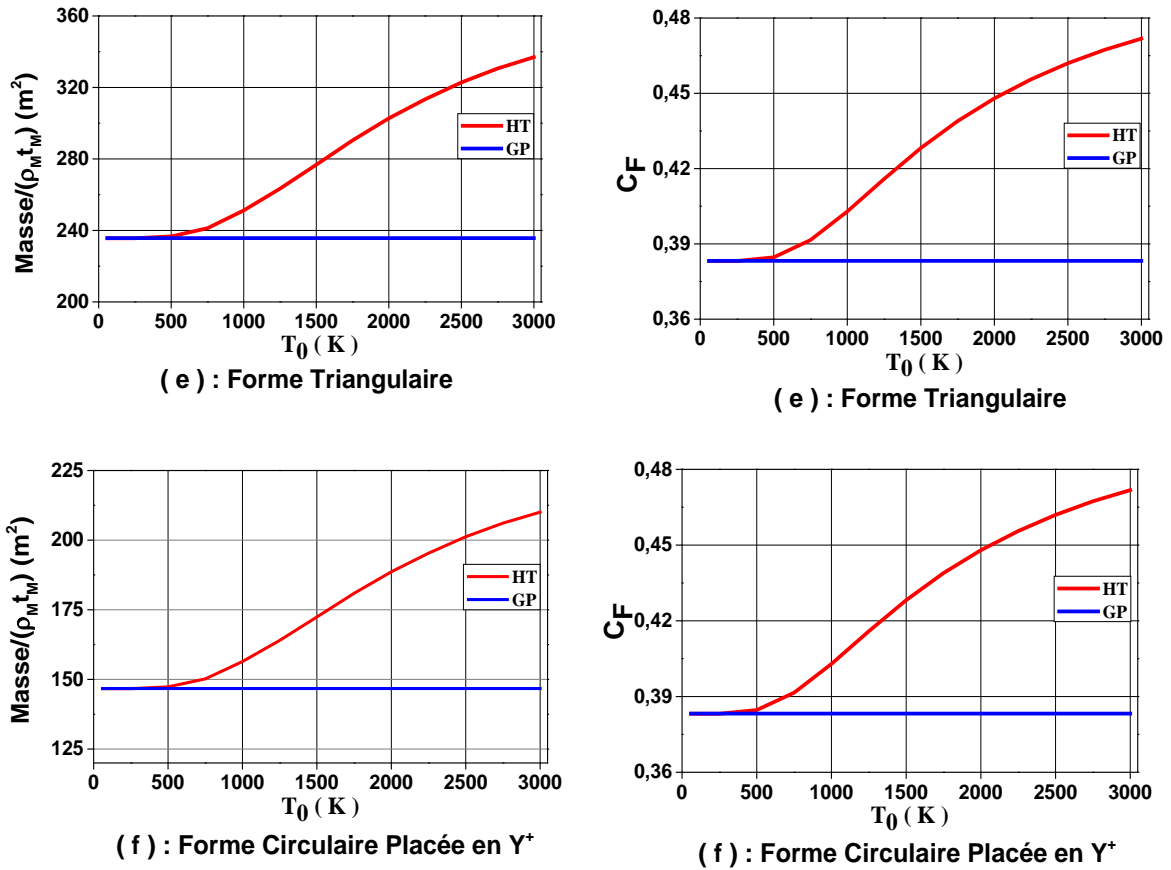
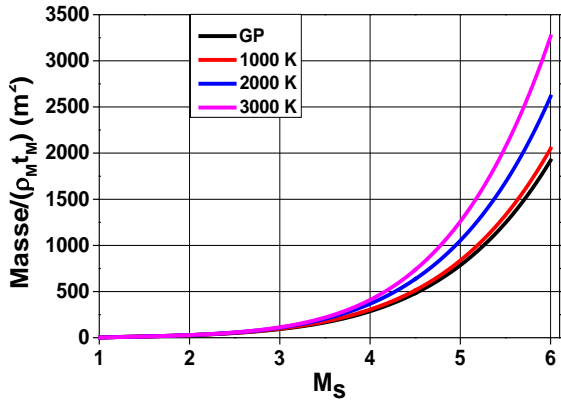
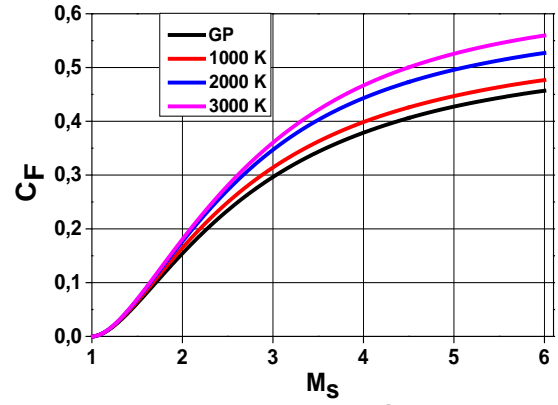


Figure 5.10 : Variation de la masse et du coefficient de poussée des formes des tuyères 3D asymétriques en fonction de la température  $T_0$  pour  $M_S=4,00$

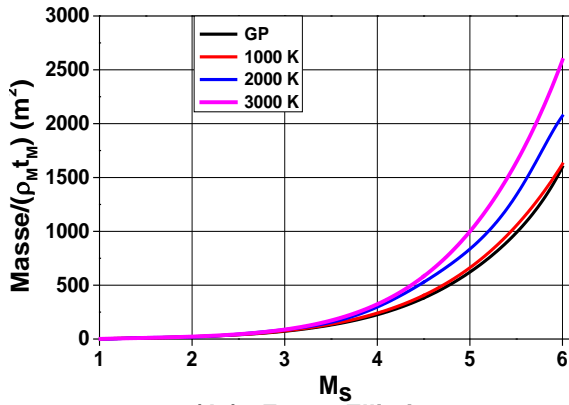
La figure 5.11 représente la variation à haute température de la masse et du coefficient de poussée pour différentes formes de tuyères 3D. On voit bien que ses paramètres dépendent de  $M_S$  et  $T_0$ . Plus la valeur du nombre de Mach est élevée, plus l'écart entre les deux modèles augmente, ce qui rend la nécessité de tenir en compte de la température génératrice  $T_0$ . On remarque que les courbes de chaque figure représentant respectivement les résultats du modèle à haute température sont presque confondues jusqu'à  $M_S=2,00$ . Mais au-delà de cette valeur, elles commencent à être différentes au fur et à mesure que  $M_S$  et  $T_0$  augmentent. Ce résultat s'interprète par la possibilité d'utiliser le modèle GP dans la conception des tuyères supersoniques tant que  $M_S$  est inférieure à 2,00 quel que soit la température génératrice  $T_0$ , ou si  $T_0 < 1000$  K° environ quel que soit  $M_S$ , comme mentionné auparavant.



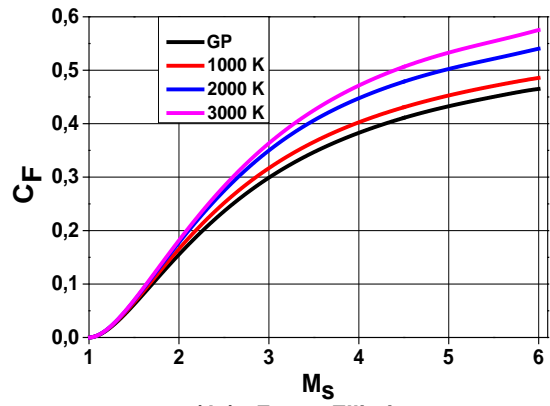
( a ) : Forme axisymétrique



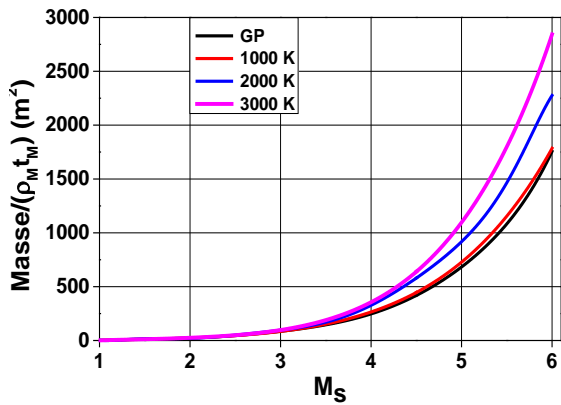
( a ) : Forme axisymétrique



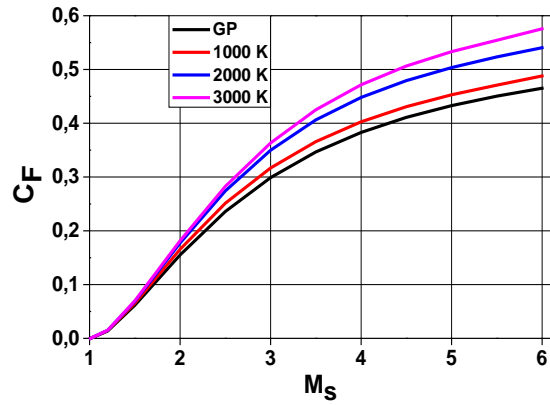
( b ) : Forme Elliptique



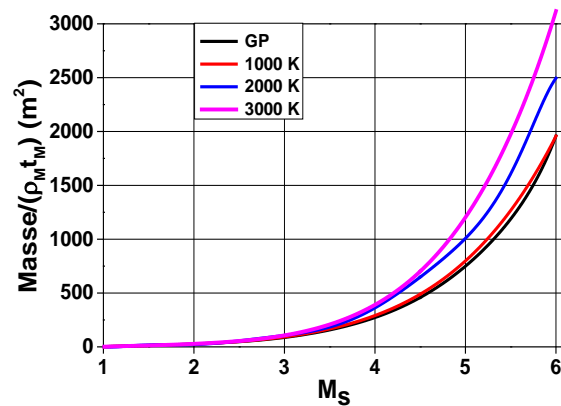
( b ) : Forme Elliptique



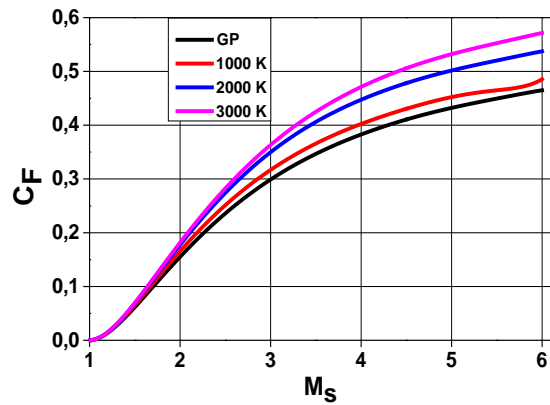
( c ) : Forme Demi-Elliptique



( c ) : Forme Demi-Elliptique



( d ) : Forme Hexagonale



( d ) : Forme Hexagonale

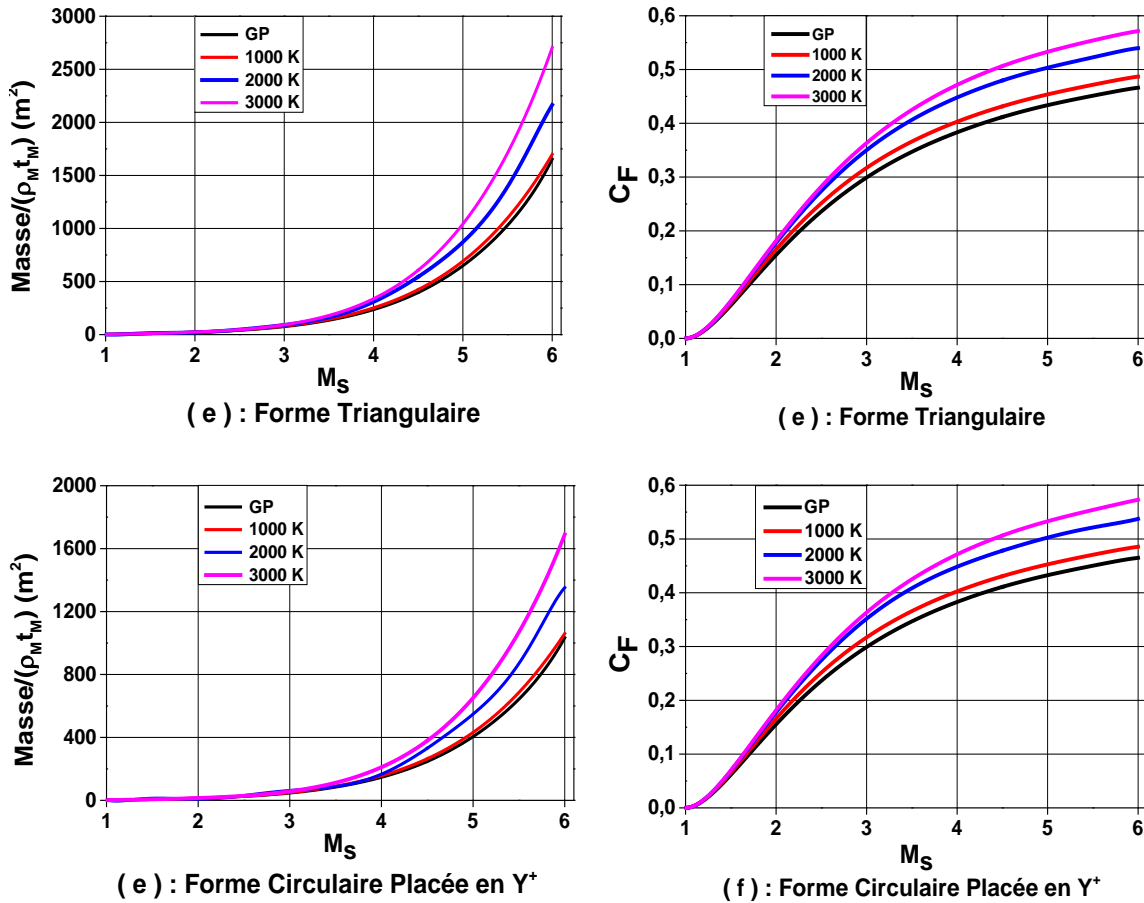


Figure 5.11 : Variation de la masse et du coefficient de poussée des différentes formes des tuyères 3D en fonction du nombre de Mach de sortie  $M_S$  et de la température  $T_0$

Les figures 5.12 et 5.13 montrent une comparaison entre les masses des tuyères tridimensionnelles *MLN* asymétriques de configuration diverses, présentées dans la figure 5.9 et qui ont toutes le même nombre de Mach de sortie  $M_S$ . Nous pouvons voir clairement que toutes les formes des tuyères ont la même évolution avec un gain en masse quand la température de stagnation  $T_0$  ou le nombre de Mach de sortie  $M_S$  augmentent. Ce gain varie selon le choix de la forme géométrique choisie. Nous pouvons dire aussi que si  $T_0 > 1000 \text{ K}$  ou  $M_S > 2,00$ , l'écart entre le modèle *GP* et le modèle *HT* augmente et devient considérable. Par rapport à la tuyère axisymétrique, on constate que toutes les formes de tuyères asymétriques sélectionnées ont un gain en masse. On conclut que toutes les tuyères 3D *MLN* asymétriques réalisent un gain en masse lorsqu'elles possèdent le même nombre de Mach de sortie  $M_S$  que l'axisymétrique. Ce gain en masse dépend de la géométrie de la section de sortie choisie de la tuyère 3D.

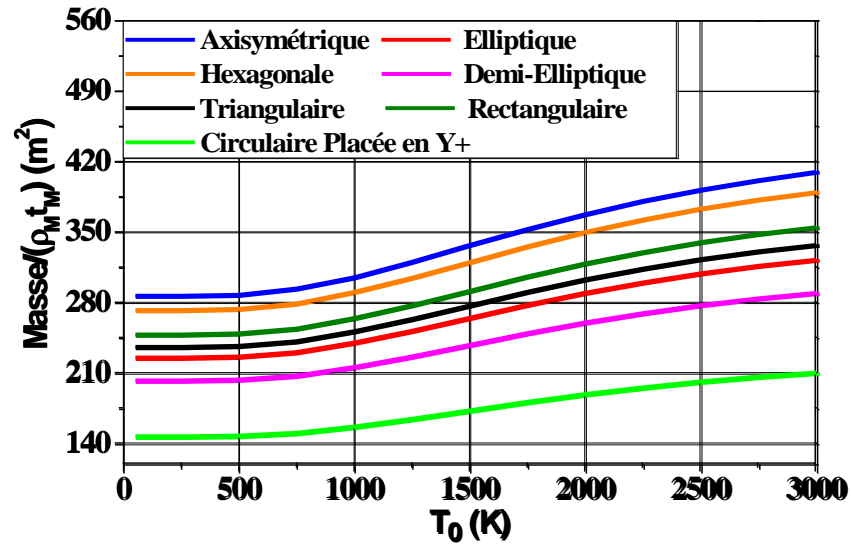


Figure 5.12 : Effet de la température  $T_0$  sur la masse des différentes formes des tuyères 3D ayant même nombre de Mach de sortie pour  $M_S=4,00$

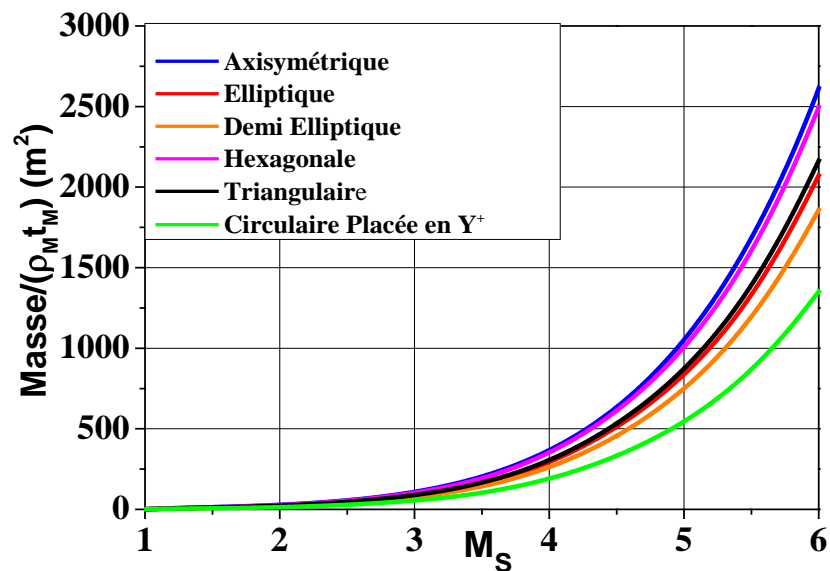


Figure 5.13 : Effet du nombre de Mach de sortie  $M_S$  sur la masse des différentes formes des tuyères 3D ayant même nombre de Mach de sortie pour  $T_0=2000$  K

Les figures 5.14 et 5.15 montrent la comparaison du coefficient de poussée  $C_F$  des tuyères 3D MLN asymétriques en fonction de  $T_0$  et  $M_S$  ayant le même nombre de Mach de sortie  $M_S$  que celle de la tuyère axisymétrique. Nous constatons que toutes les diverses formes des tuyères ont la même valeur de  $C_F$  quand la température de stagnation  $T_0$  ou le nombre de Mach de sortie  $M_S$  augmentent.

Cette conclusion est vérifiée du faite que toutes les tuyères présentées ont même nombre de Mach de sortie, même rapport de section ( $A_S/A^*$ ) et même température de stagnation  $T_0$ . Donc les tuyères tridimensionnelles de même nombre de Mach de sortie  $M_S$ , de même rapport des sections ( $A_S/A^*$ ) et de même température de stagnation  $T_0$  délivrent un coefficient de poussée  $C_F$  constant.

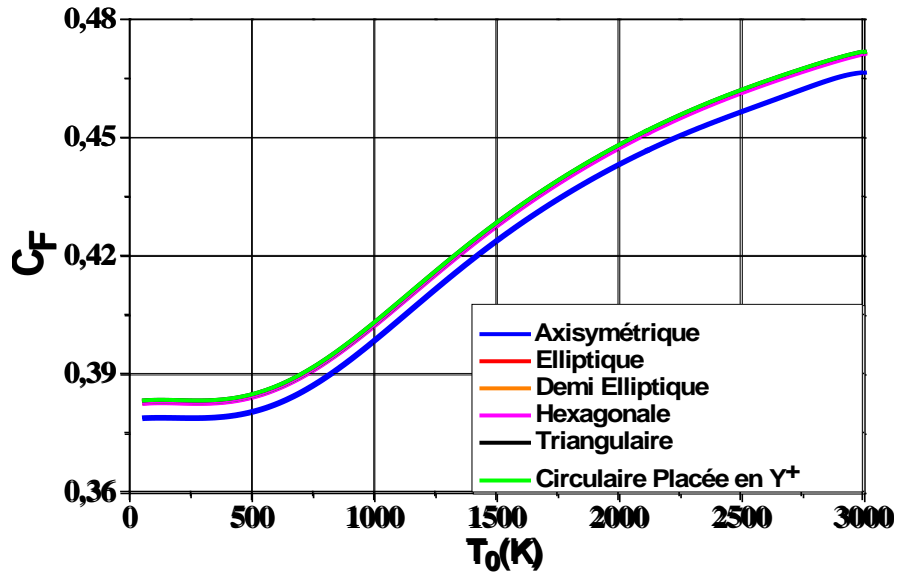


Figure 5.14 : Effet de la température  $T_0$  sur le coefficient de poussée  $C_F$  des différentes formes des tuyères 3D ayant même nombre de Mach de sortie pour  $M_S=4,00$

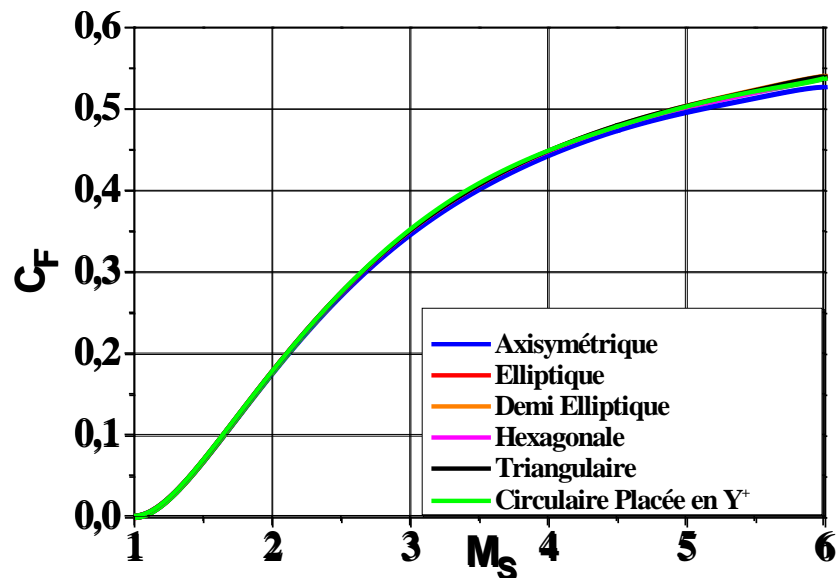


Figure 5.15 : Effet du nombre de Mach de sortie  $M_S$  sur le coefficient de poussée  $C_F$  des différentes formes des tuyères 3D ayant même nombre de Mach de sortie pour  $T_0=2000$  K

La figure 5.16 montre une représentation du gain de la masse et du coefficient de poussée des différentes formes des tuyères 3D asymétriques ayant même nombre de Mach de sortie  $M_S$  que la tuyère axisymétrique pour  $M_S=4.00$  et  $T_0=2000$  K. Le gain par rapport à la masse varie entre 5% et 50% en fonction de la forme géométrique de la section de sortie. Par contre, le coefficient de poussée  $C_F$  ne varie pas et il reste constant pour toutes les formes des tuyères 3D. De ce fait, on conclut que la tuyère 3D *MLN* asymétrique de section de sortie circulaire placé dans l'axe  $y$  positif fournit le meilleur gain en masse (environ 50%). Ce qui est très important dans les applications aérospatiales.

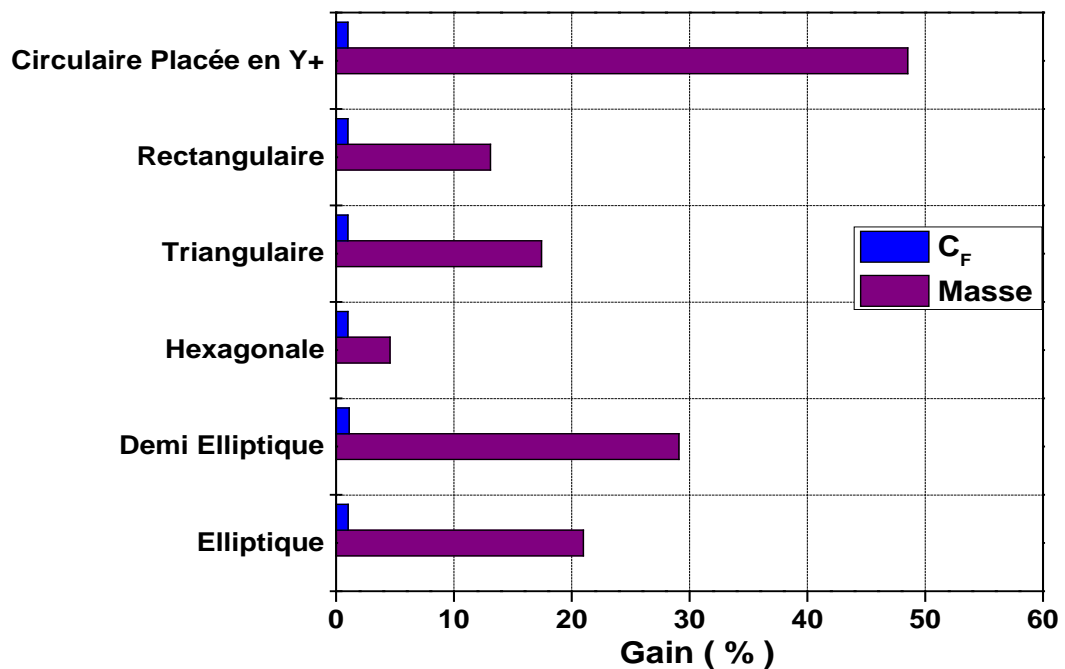


Figure 5.16 : Représentation du gain (en masse et  $C_F$ ) des diverses tuyères 3D ayant même  $M_S$  que la tuyère axisymétrique ( $M_S=4,00$  et  $T_0=2000$  K)

### 5.3. Comparaison entre les tuyères 3D asymétriques et axisymétrique ayant la même masse

Dans cette section, on va étudier la possibilité d'améliorer les performances d'une tuyère asymétrique par rapport à celle ayant une géométrie axisymétrique. La solution est de trouver une forme tridimensionnelle ayant la même masse que l'axisymétrique mais qui délivrera un nombre de Mach de sortie supérieur. La méthode consiste à prendre toutes les formes des tuyères asymétriques conçues avec des masses égales à celle de la tuyère axisymétrique. Calculant ensuite le nombre de Mach de sortie  $M_S$

pour chaque tuyère 3D conçue. Les figures 5.17 et 5.18 montrent les résultats obtenus dans ce contexte. On remarque que le nombre de Mach de sortie et le coefficient de poussée des tuyères 3D est supérieur à celui de la tuyère axisymétrique. Ce gain en  $M_S$  et  $C_F$  varie selon la forme de la géométrie de la section de sortie. Le tableau 5.2 et 5.3 illustrent bien cette différence pour un nombre de Mach compris entre 2 et 5.

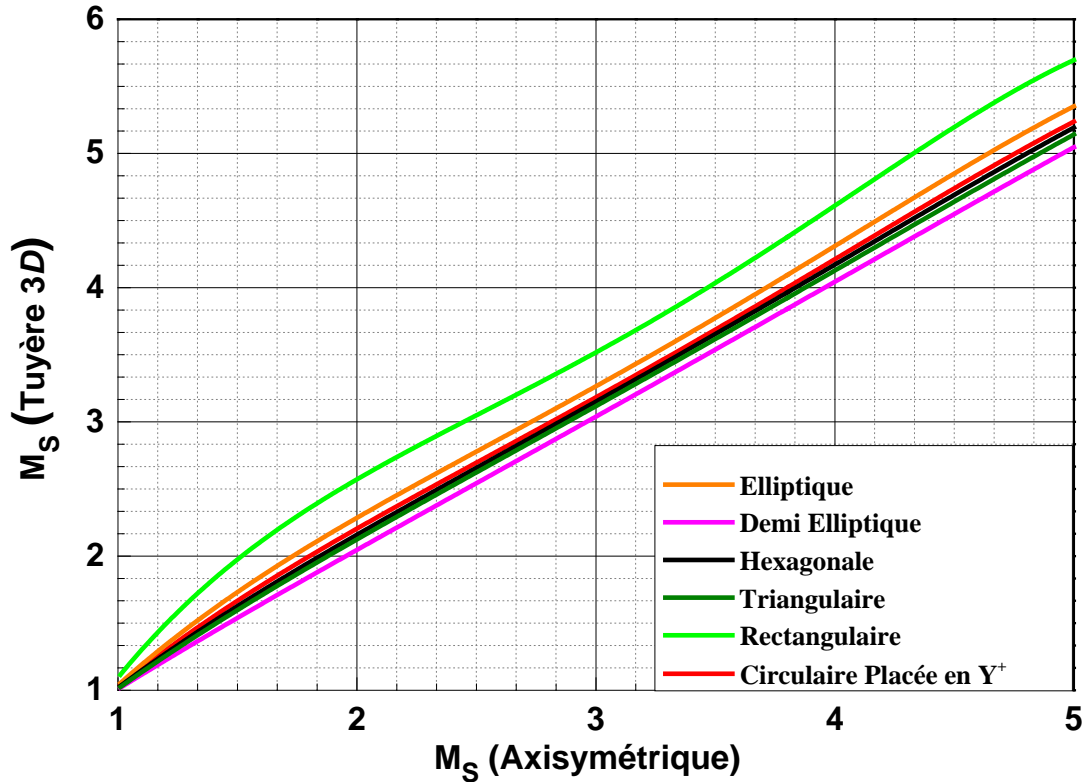


Figure 5.17 : Effet du nombre de Mach de sortie  $M_S$  des formes des tuyères 3D ayant même masse que la tuyère axisymétrique pour  $T_0=2000$  K

Tableau 5.2 : Valeur numérique de l'effet du nombre de Mach de sortie  $M_S$  des formes des tuyères 3D ayant même masse que l'axisymétrique pour  $T_0=2000$  K

$M_S$ (Axisym)	$M_S=2,0$	$M_S=2,5$	$M_S=3,0$	$M_S=3,5$	$M_S=4,0$	$M_S=4,5$	$M_S=5,0$
Elliptique	2,186	2,685	3,193	3,697	4,214	4,727	5,243
Demi-Elliptique	2,264	2,765	3,275	3,789	4,313	4,833	5,359
Hexagonale	2,041	2,541	3,041	3,542	4,044	4,546	5,048
Triangulaire	2,147	2,646	3,161	3,661	4,173	4,682	5,197
Rectangulaire	2,111	2,620	3,122	3,623	4,128	4,635	5,144
Circulaire Placée en Y+	5,144	3,010	3,541	4,067	4,615	5,16	5,711



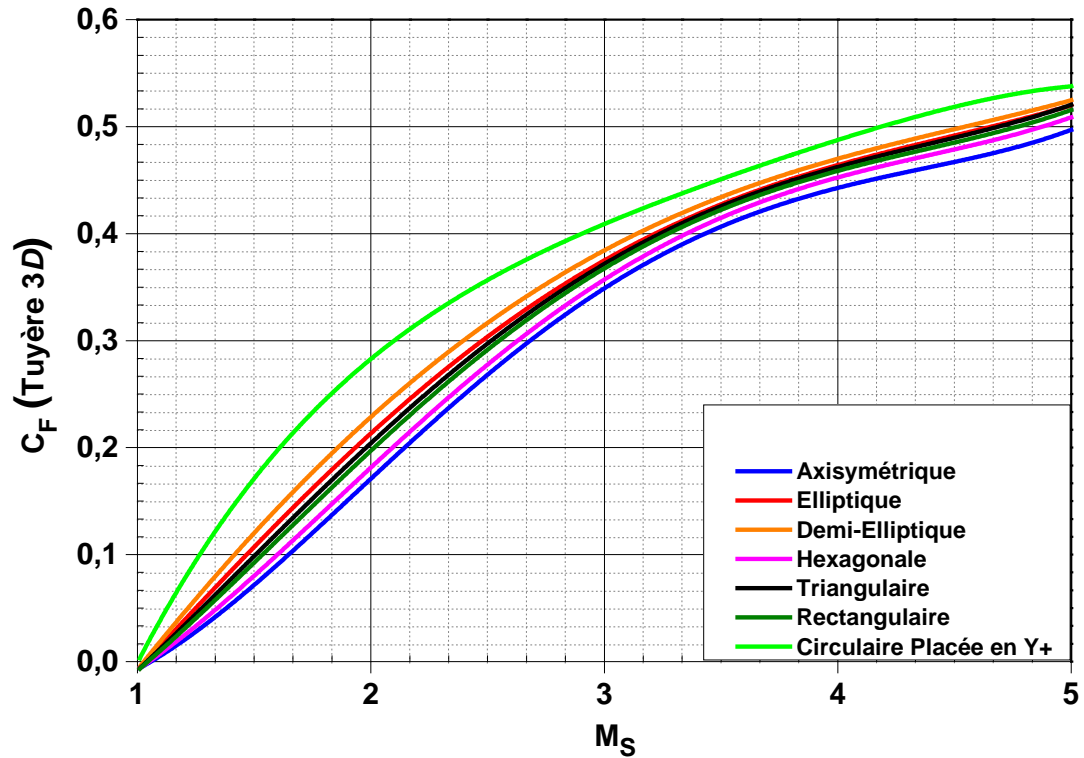


Figure 5.18 : Variation du coefficient de poussée  $C_F$  des différentes formes des tuyères 3D ayant même masse que l'axisymétrique en fonction de  $M_S$  pour  $T_0=2000$  K

Tableau 5.3 : Valeur numérique de l'effet du nombre de Mach de sortie  $M_S$  sur le coefficient de poussée des formes des tuyères 3D ayant même masse que l'axisymétrique pour  $T_0=2000$  K

$M_S$	$M_S=2,0$	$M_S=2,5$	$M_S=3,0$	$M_S=3,5$	$M_S=4,0$	$M_S=4,5$	$M_S=5,0$
Axisymétrique	0,176	0,272	0,347	0,402	0,442	0,472	0,495
Elliptique	0,216	0,305	0,374	0,425	0,464	0,494	0,519
Demi-Elliptique	0,231	0,317	0,383	0,433	0,470	0,499	0,524
Hexagonale	0,186	0,281	0,355	0,411	0,452	0,483	0,507
Triangulaire	0,208	0,299	0,371	0,422	0,462	0,493	0,519
Rectangulaire	0,201	0,294	0,366	0,419	0,458	0,489	0,514
Circulaire Placée en Y+	0,282	0,352	0,411	0,454	0,488	0,515	0,539

La figure 5.19 montre les résultats obtenus du gain en nombre de Mach de sortie des tuyères tridimensionnelles ainsi que leurs coefficients de poussée lorsque ces derniers ont même masse que la tuyère axisymétrique. A première vue, on remarque que les tuyères 3D ont toutes un gain positif en nombre de Mach de sortie et en coefficient de poussée.

Le gain en nombre de Mach de sortie varie entre 1% à 15% en fonction de la forme géométrique de la tuyère 3D lorsque  $M_S=4,00$  et  $T_0=2000$  K. Par contre le gain du coefficient de poussée  $C_F$  des tuyères 3D varie entre 2% à 9% par rapport à la tuyère axisymétrique. C'est la tuyère 3D asymétrique *MLN* de section de sortie circulaire placée sur l'axe des y positifs qui donne les meilleures performances.

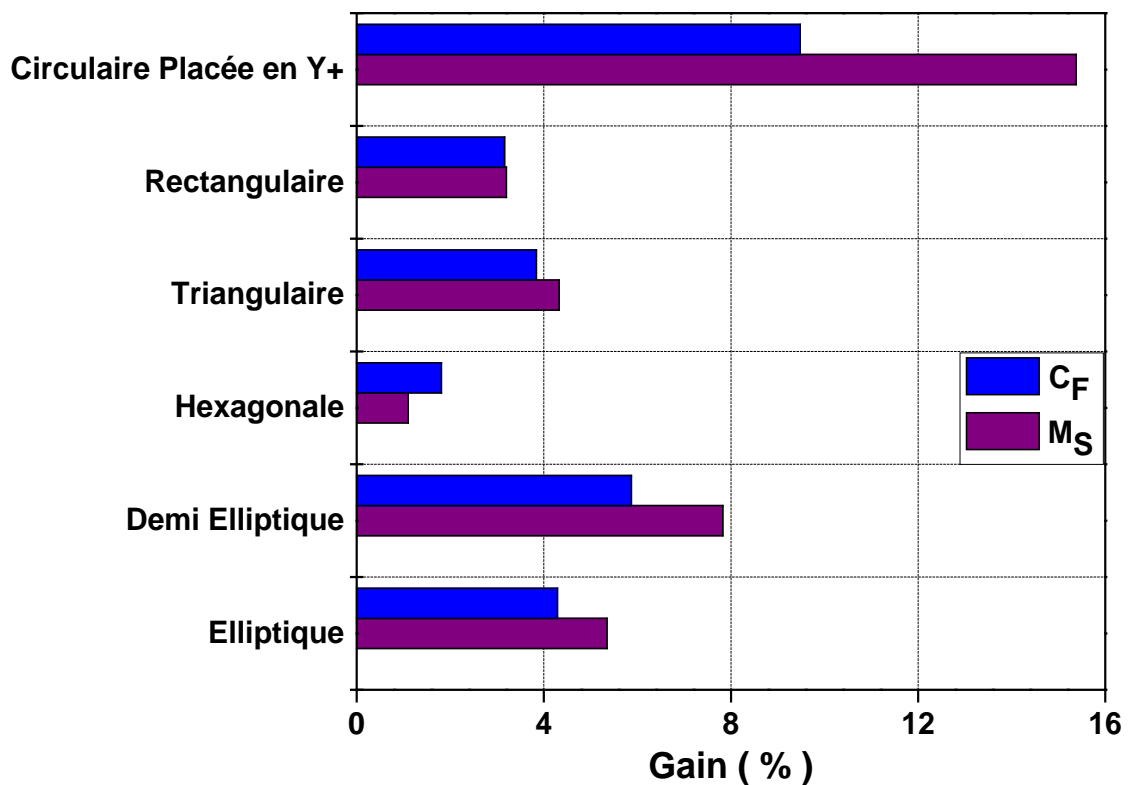


Figure 5.19 : Représentation du gain en  $M_S$  et  $C_F$  des diverses formes des tuyères 3D ayant même masse que la tuyère axisymétrique pour  $M_S=4,00$  et  $T_0=2000$  K

#### 5.4. Comparaison entre les tuyères 3D asymétriques et axisymétrique ayant la même section au col

On a comparé précédemment les tuyères asymétriques conçues avec la tuyère axisymétrique en fixant le nombre de mach de sortie  $M_S$  et la masse de la structure. Un autre paramètre important qui permet de faire une comparaison significative entre les tuyères est la section au col (ou le débit massique). Alors fixant ce dernier pour toutes les tuyères tridimensionnelles asymétrique et axisymétrique.

Les figures 5.20 et 5.21 présentent différents résultats obtenus concernant la masse et le coefficient de poussée. On constate que les tuyères asymétriques possèdent toutes une masse structurale plus importante que celle de la tuyère axisymétrique ce qui représente un inconvénient majeur. Ces tuyères ont toutes le même nombre de Mach de sortie, même rapport de section et même température  $T_0$ , ce qui donnera automatiquement un coefficient de poussée  $C_F$  constant Cette conclusion est illustrée dans les figures 5.22 et 5.23.

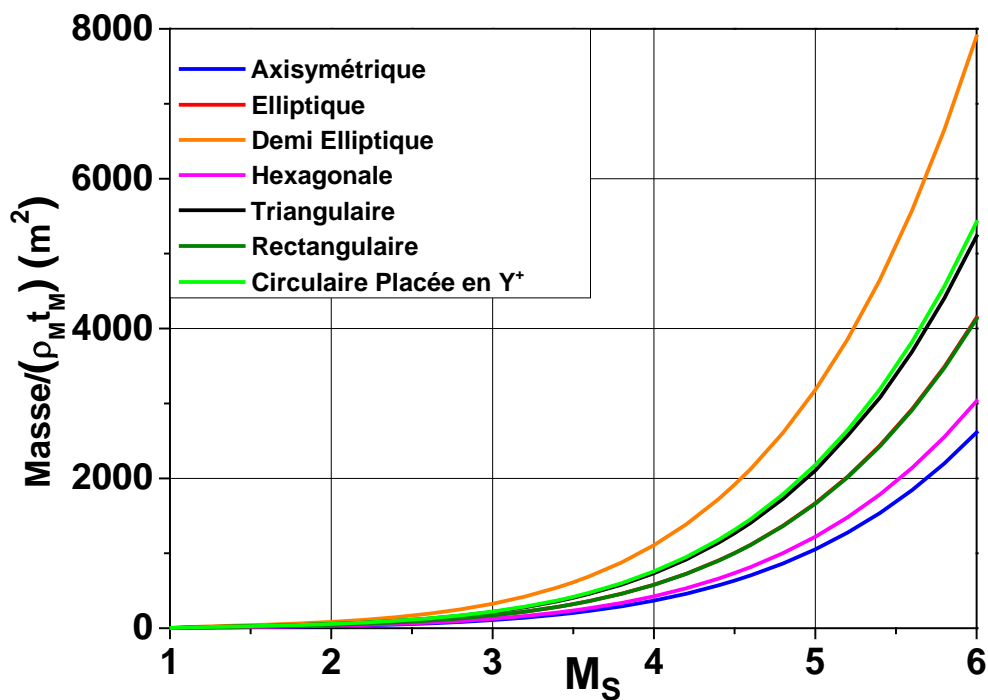


Figure 5.20 : Effet du nombre de Mach de sortie  $M_S$  sur la masse des différentes formes géométriques des tuyères 3D ayant même section au col pour  $T_0=2000$  K

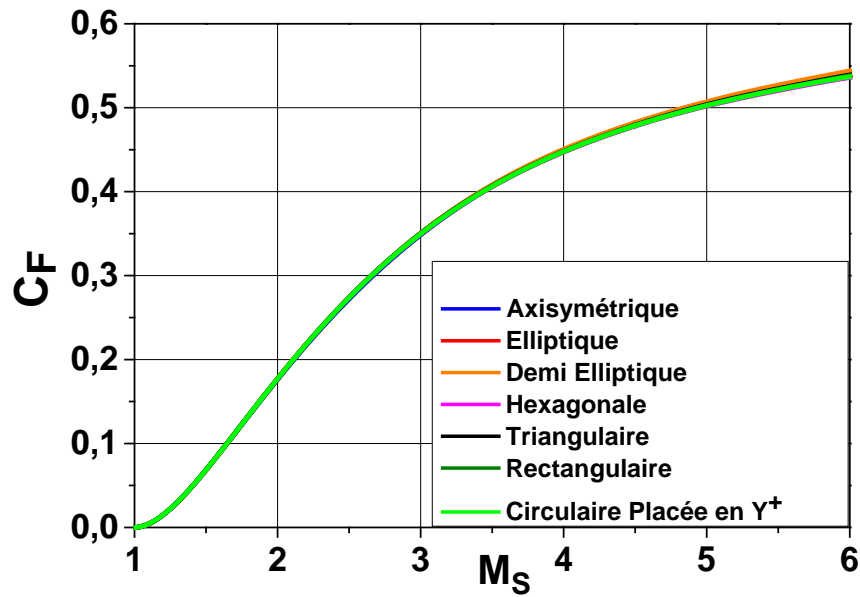


Figure 5.21 : Effet du nombre de Mach de sortie  $M_S$  sur le coefficient de poussée des différentes formes géométriques des tuyères 3D ayant même section au col pour  $T_0=2000$  K

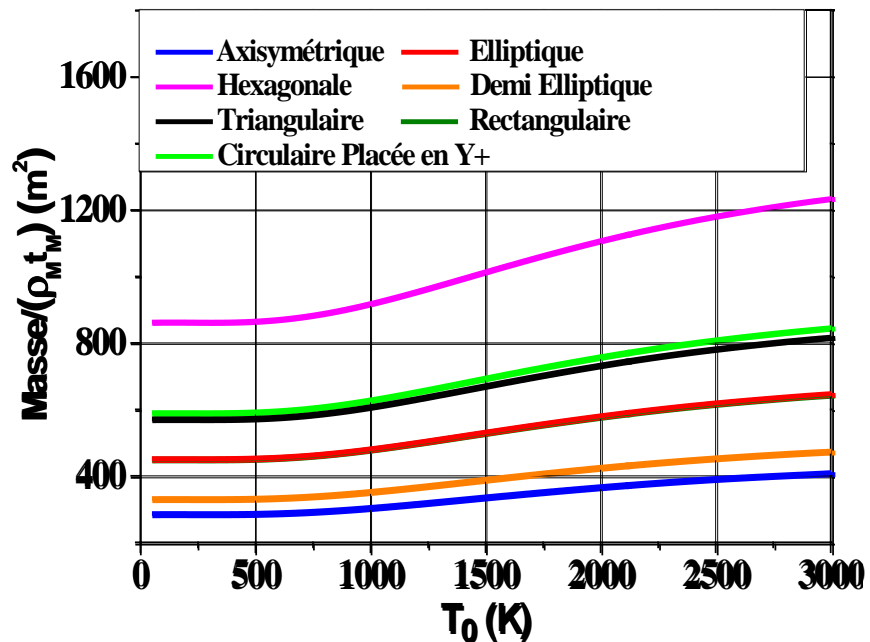


Figure 5.22 : Effet de la température  $T_0$  sur la masse des différentes formes géométriques des tuyères 3D ayant même section au col pour  $M_S=4,00$

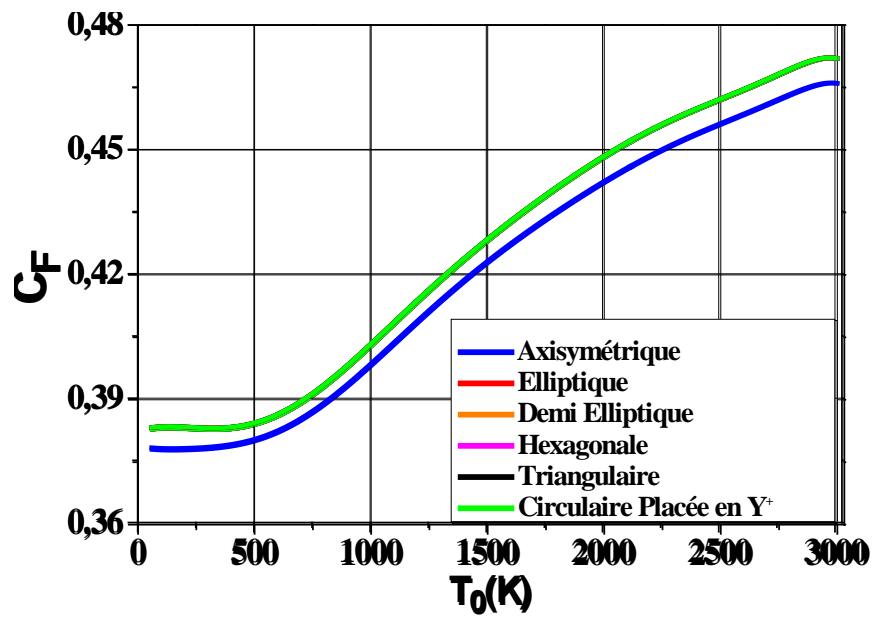


Figure 5.23 : Effet de la température  $T_0$  sur le coefficient de poussée des différentes formes géométriques des tuyères 3D ayant même section au col pour  $M_S=4,00$

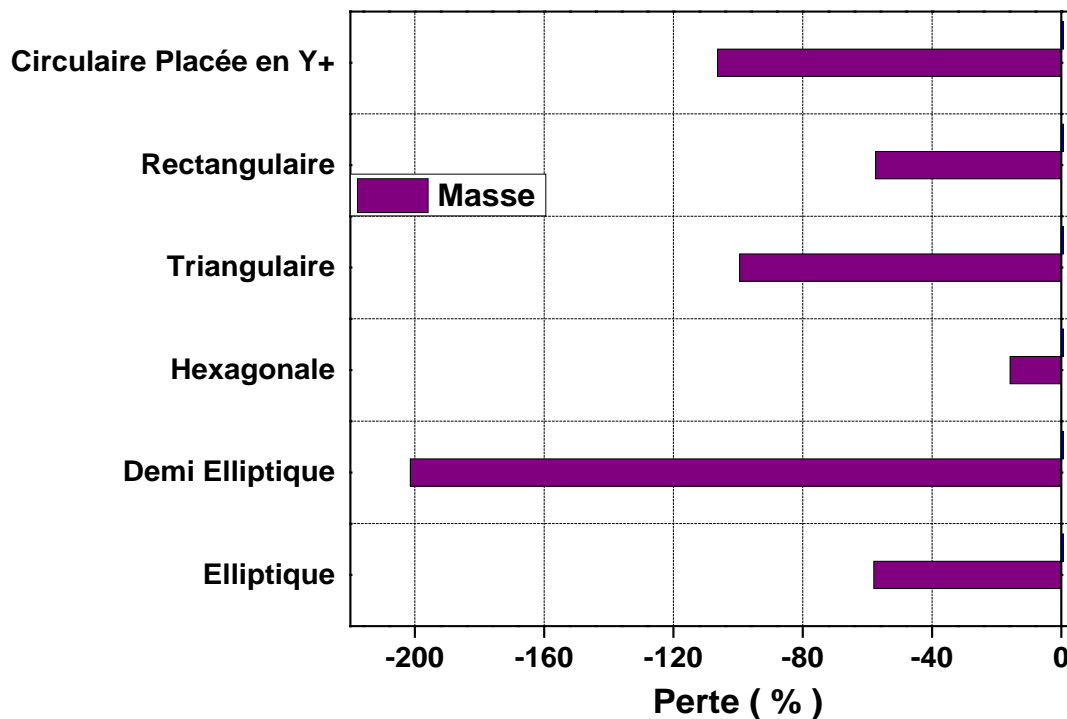


Figure 5.24 : Représentation de la perte en *Masse* et  $C_F$  des formes des tuyères 3D asymétriques ayant même section au col que la tuyère axisymétrique avec pour  $M_S=4,00$  et  $T_0=2000$  K

### 5.5. Troncature de la tuyère tridimensionnelle asymétrique

Une méthode simple qui permet d'augmenter les performances des tuyères 3D est la troncature. Cette méthode consiste à tronquer la tuyère au niveau d'une section bien déterminée possédant presque les mêmes propriétés que ceux de la section de sortie. On parle du nombre de Mach  $M_S$  et de l'inclinaison de l'écoulement  $\theta$ . Dans ce cas, on va réduire considérablement la masse de la tuyère, mais en parallèle la poussée délivrée par la tuyère diminuera légèrement. La figure 5.25 représente le gain en masse et la perte en coefficient de poussée d'une tuyère 3D de forme carrée tronquée à n'importe qu'elle section de troncature allant de la section sortie vers le col.

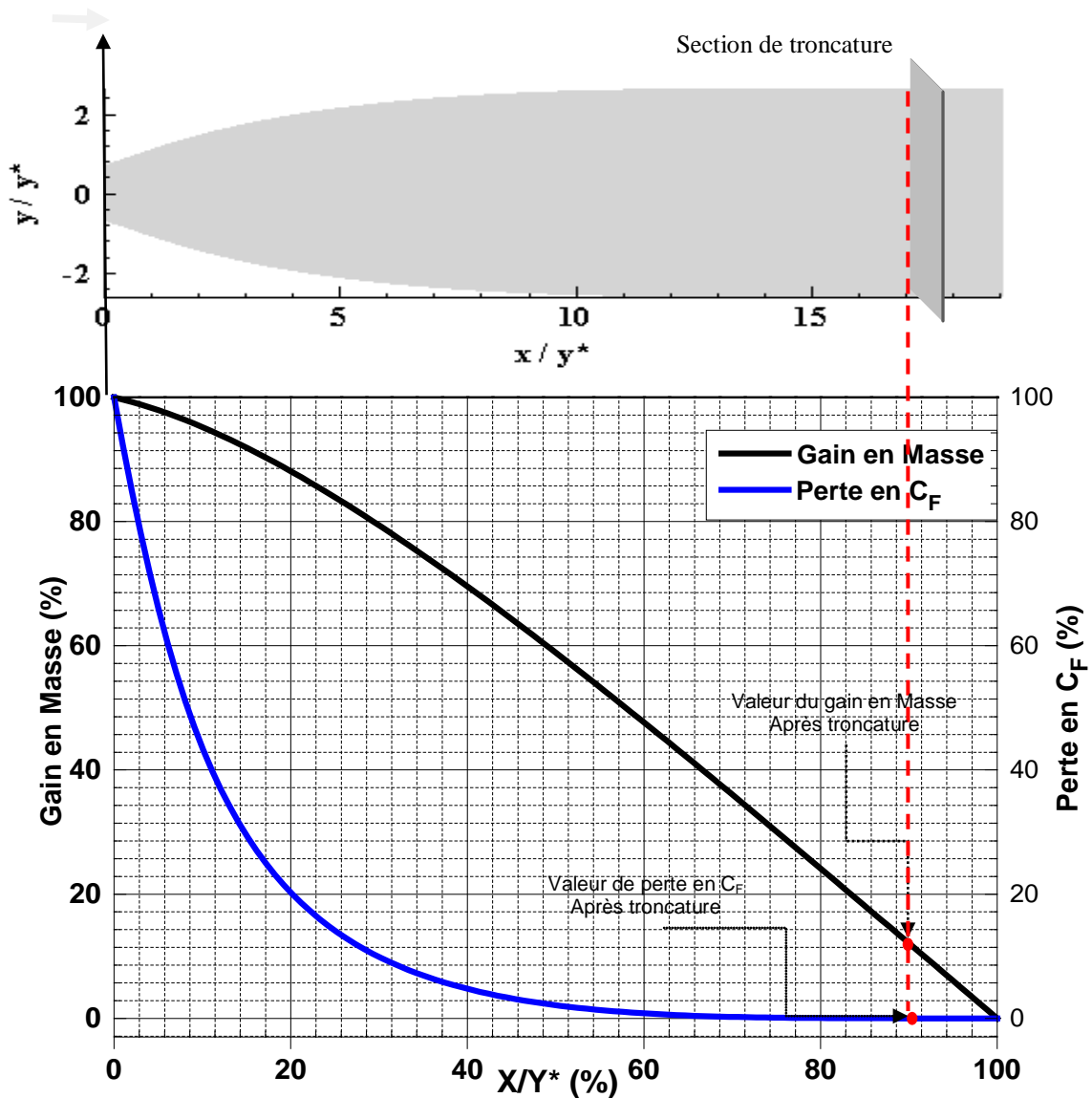


Figure 5.25 : Représentation du gain en Masse et la perte en  $C_F$  d'une tuyère 3D tronquée de forme carrée pour  $M_S = 4,00$  et  $T_0 = 2000$  K

Le tableau 5.4 représente l'exemple des valeurs numériques d'une tuyère 3D tronquée (forme carrée) au niveau des sections située entre 0% à 30% par rapport à la longueur totale de la tuyère ( $L/y^*$ ) (d'un pas de 5% à partir de la section de sortie). Dans ce cas, la tuyère aura les propriétés suivantes

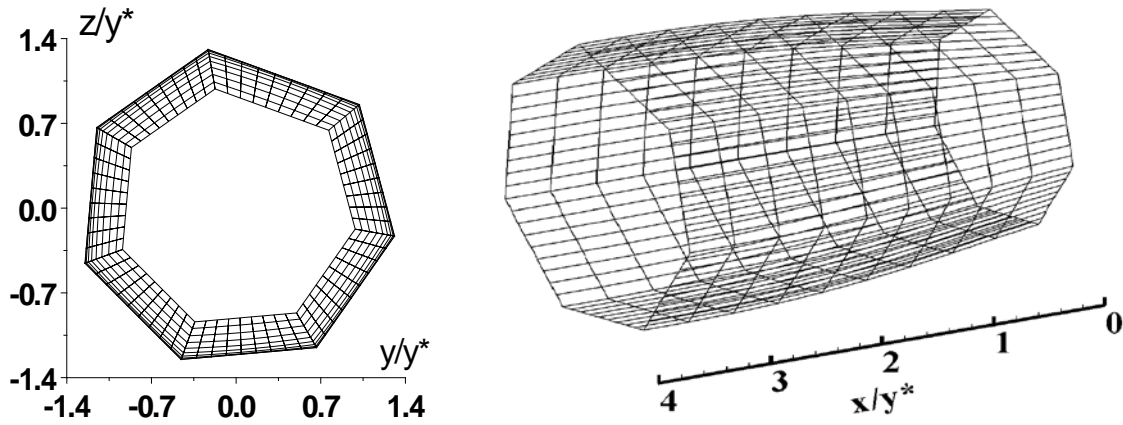
Tableau 5.4 : Valeurs numériques de conception d'une tuyère 3D tronquée de forme carrée pour  $M_S = 4,00$  et  $T_0 = 2000K$

<b>Tuyère tronquée à</b>	$\frac{L}{y^*}$	<b>Masse</b>	<b><math>C_F</math></b>	<b>Gain % (Masse)</b>	<b>Perte % (<math>C_F</math>)</b>
0%	19,0306	331,01312	0,44875	0,00000	0,00000
5%	18,0791	312,80727	0,44875	5,50004	0,00058
10%	17,1275	292,58157	0,44873	11,61028	0,00446
15%	16,1760	272,41207	0,44867	17,70354	0,011783
20%	15,2245	252,31425	0,44853	23,77515	0,04903
25%	14,2730	232,33941	0,44823	29,80961	0,11588
30%	13,3214	212,52433	0,44769	35,79580	0,23621

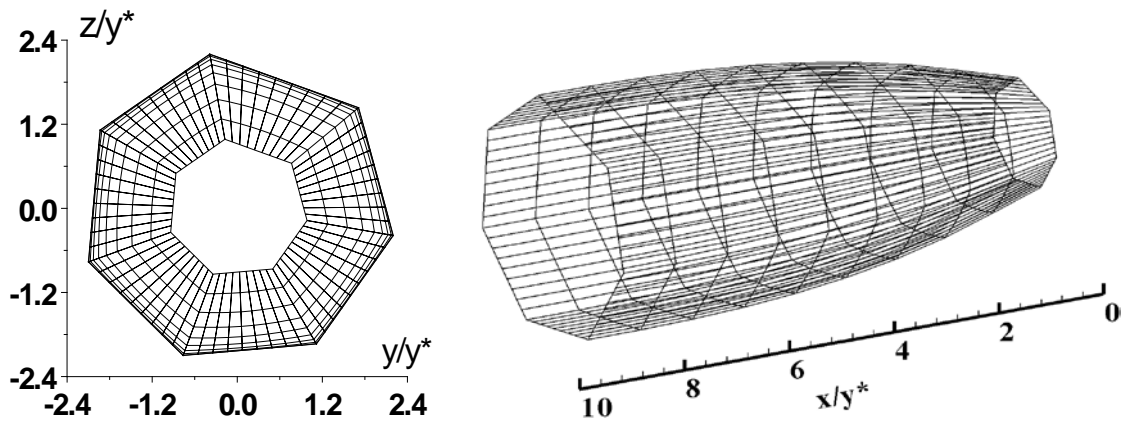
Le gain en masse et la perte en  $C_F$  dépendent de la forme de la section de sortie choisie d'une tuyère 3D, de la position de la section de troncature par rapport à la section de sortie, du nombre de Mach de sortie  $M_S$  de la tuyère ainsi que de la température génératrice  $T_0$ .

### 5.6. Effet du nombre de Mach de sortie $M_S$ sur le contour d'une tuyère 3D

La figure 5.26 (a-d) représente respectivement le dimensionnement d'une tuyère tridimensionnelle asymétrique de forme Heptagonale calculée pour  $M_S = 2,00, 3,00, 4,00$  et  $5,00$  avec  $T_0 = 2000K$ . Les valeurs numériques des paramètres du dimensionnement sont représentées aussi. Nous remarquons que le volume occupé par la tuyère 3D et la masse de la structure augmentent avec le nombre de Mach de sortie  $M_S$ . D'après les formes obtenues à partir des résultats numériques, on remarque que la différence d'un pas de un du nombre de Mach de sortie  $M_S$ , conduit à une augmentation de l'ordre de deux la longueur, la masse et le volume de la tuyère.

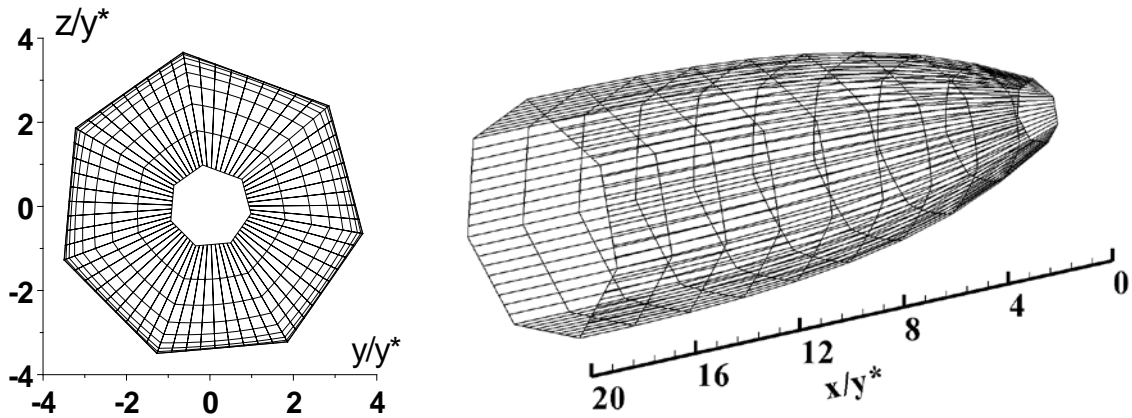
(a):  $M_S = 2,00$ Tableau 5.5 : Valeurs numériques de conception de la tuyère pour  $M_S = 2,00$ 

	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	Masse	$C_F$
$M_S=2,00$	1,363	3,648	6,289	9,000	1,291	26.945	0.177

(b):  $M_S = 3,00$ Tableau 5.6 : Valeurs numériques de conception de la tuyère pour  $M_S = 3,00$ 

	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	Masse	$C_F$
$M_S=3,00$	2,730	9,014	13,082	17,099	1,511	103,727	0.350

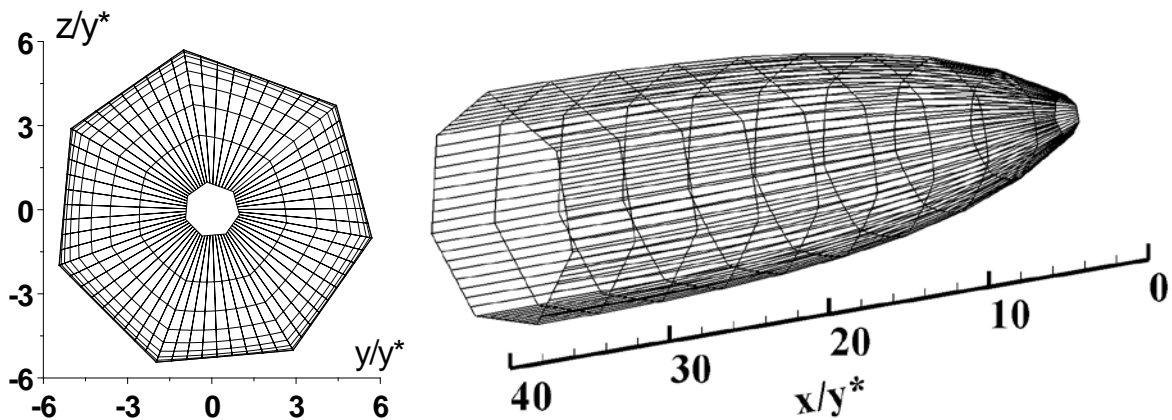




(c) :  $M_S = 4,00$

Tableau 5.7 : Valeurs numériques de conception de la tuyère pour  $M_S = 4,00$

	$\frac{L_d}{y_*}$	$\frac{L}{y_*}$	$\theta^*(\text{°})$	$\theta_{\max}(\text{°})$	$M^*$	Masse	$C_F$
$M_S=4,00$	4,614	19,031	17,971	22,386	1,663	355,218	0,447



(d):  $M_S = 5,00$

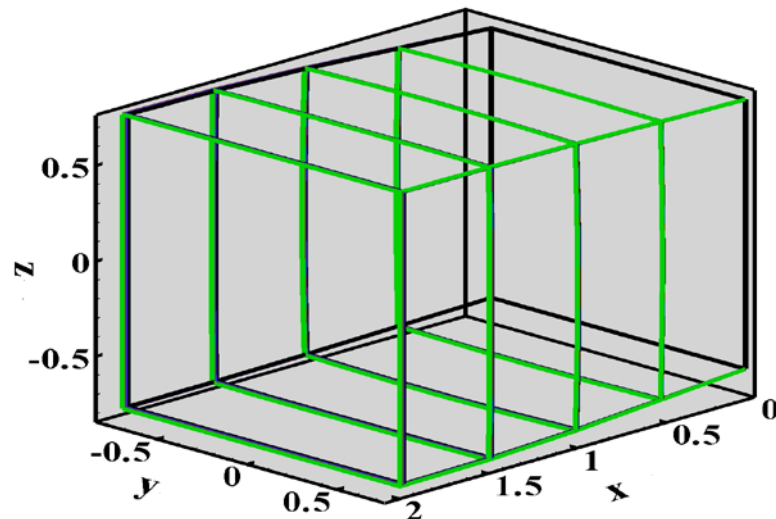
Tableau 5.8 : Valeurs numériques de conception de la tuyère pour  $M_S = 5,00$

	$\frac{L_d}{y_*}$	$\frac{L}{y_*}$	$\theta^*(\text{°})$	$\theta_{\max}(\text{°})$	$M^*$	Masse	$C_F$
$M_S=5,00$	7,065	35,440	21,317	25,796	1,767	1017,600	0,502

Figure 5.26 : Formes des tuyères 3D de forme heptagonale pour différente valeur du nombre de Mach de sortie  $M_S$  pour  $T_0=2000$  K avec  $N_L=10$  et  $N_T=63$

### 5.7 Effet de la température génératrice $T_0$ sur le contour d'une tuyère 3D

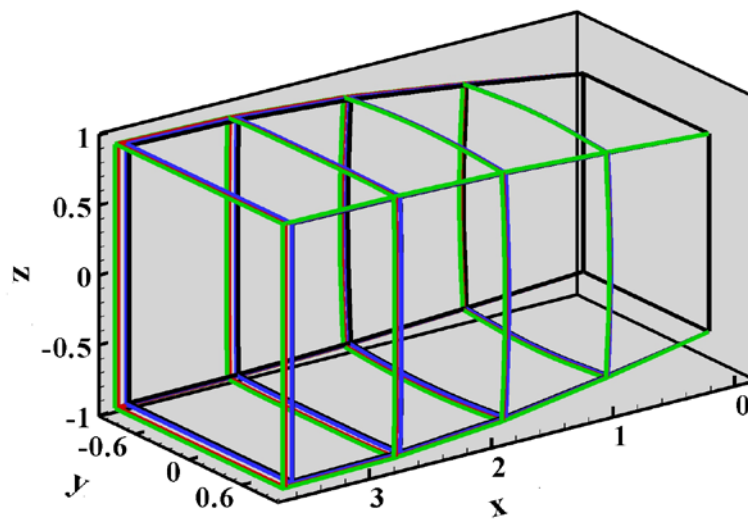
La figure 5.27 représente les allures de tuyères 3D asymétriques de formes carrées obtenues lorsque le nombre de Mach de sortie  $M_S = 1,50, 2,00, 3,00, 4,00$  et  $5,00$  en fonction de la température génératrice  $T_0$ . Chaque cas comprend quatre courbes, trois pour le modèle *HT* avec  $T_0 = 1000\text{ K}, 2000\text{ K}$  et  $3000\text{ K}$  et le quatrième cas pour le modèle *GP* avec  $\gamma = 1.402$ . Les valeurs numériques des paramètres du dimensionnement sont présentées aussi. D'après les formes obtenues dans le cas où  $M_S = 1,50$ , on remarque une très faible différence entre les quatre courbes, qui s'interprète par la non influence de la température génératrice  $T_0$  sur le dimensionnement des tuyères. Pour  $M_S = 2,00$ , on remarque que la différence est toujours faible, mais avec une erreur plus grande en comparant au cas (a) de la figure 5.27. Si le nombre de Mach de sortie  $M_S = 3,00, 4,00, 5,00$ , on constate que l'écart entre les deux modèles augmente considérablement. Cette différence est illustrée respectivement par la figure 5.27 (c-f). On conclut que si la température génératrice  $T_0 > 1000\text{ K}$ , l'écart entre le modèle *GP* et notre modèle *HT* devient considérable, indépendamment du nombre de Mach  $M_S$ . Cette interprétation est valable pour n'importe quelle forme de la section de sortie choisie d'une tuyère asymétrique *MLN*.



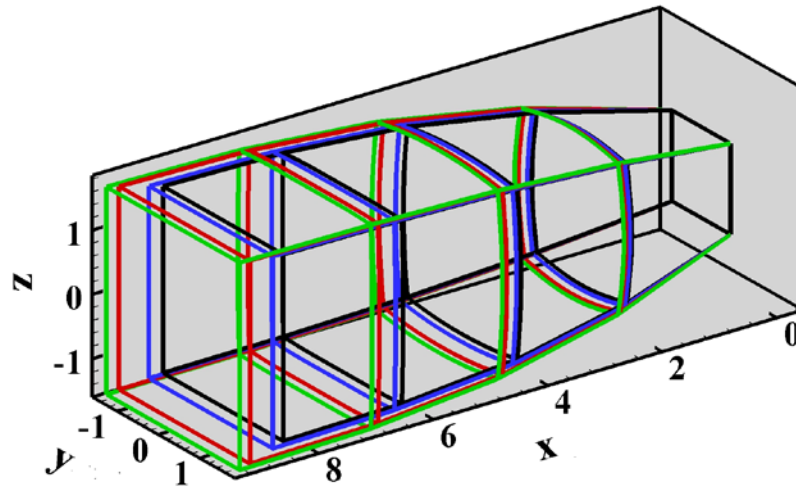
(a) :  $M_S = 1,50$

Tableau 5.9 : Valeurs numériques de conception de la tuyère (a) pour  $M_S = 1,50$ 

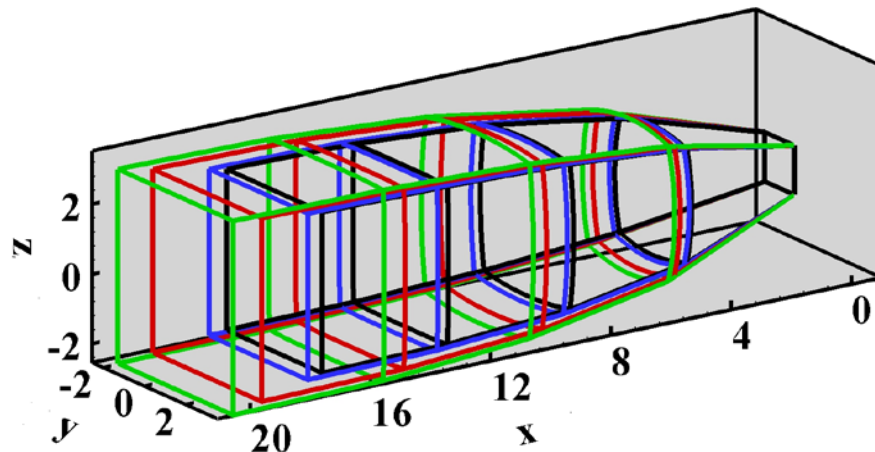
	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	Masse	$C_F$
GP ( $\gamma=1.402$ )	0,804	1,982	2,416	3,754	1,152	11,484	0,0615
$T_0=1000$ K	0,809	1,994	2,525	3,915	1,153	11,609	0,0655
$T_0=2000$ K	0,813	2,002	2,592	4,014	1,154	11,692	0,0687
$T_0=3000$ K	0,814	2,005	2,615	4,047	1,154	11,721	0,0699

(b) :  $M_S=2,00$ Tableau 5.10 : Valeurs numériques de conception de la tuyère (b) pour  $M_S = 2,00$ 

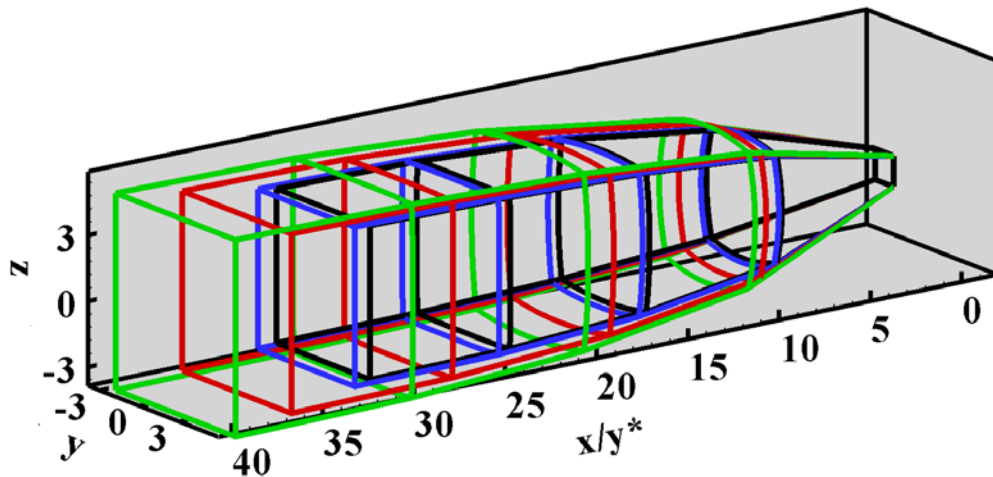
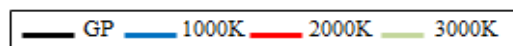
	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	Masse	$C_F$
GP ( $\gamma=1.402$ )	1,326	3,573	5,748	8,280	1,285	24,301	0,155
$T_0=1000$ K	1,343	3,586	6,040	8,667	1,287	24,280	0,166
$T_0=2000$ K	1,363	3,648	6,289	9,000	1,291	25,088	0,177
$T_0=3000$ K	1,370	3,671	6,376	9,115	1,293	25,379	0,182

(c) :  $M_S=3.00$ Tableau 5.11 : Valeurs numériques de conception de la tuyère (c) pour  $M_S=3,00$ 

	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	Masse	$C_F$
GP ( $\gamma=1.402$ )	2,546	8,341	11,711	15,462	1,494	83,137	0,299
$T_0=1000$ K	2,596	8,553	12,245	16,102	1,495	87,411	0,317
$T_0=2000$ K	2,730	9,014	13,082	17,099	1,511	96,563	0,350
$T_0=3000$ K	2,782	9,214	13,389	17,462	1,518	100,795	0,363

(d) :  $M_S=4,00$ Tableau 5.12 : Valeurs numériques de conception de la tuyère (d) pour  $M_S=4,00$ 

	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	Masse	$C_F$
GP ( $\gamma=1.402$ )	4,178	16,799	16,104	20,276	1,643	257,391	0,382
$T_0=1000$ K	4,257	17,328	16,702	20,958	1,639	274,623	0,403
$T_0=2000$ K	4,614	19,031	17,971	22,386	1,663	331,023	0,448
$T_0=3000$ K	4,847	20,087	18,626	23,106	1,678	368,262	0,471

(e) :  $M_S=5,00$ Tableau 5.13 : Valeurs numériques de conception de la tuyère (e) pour  $M_S=5,00$ 

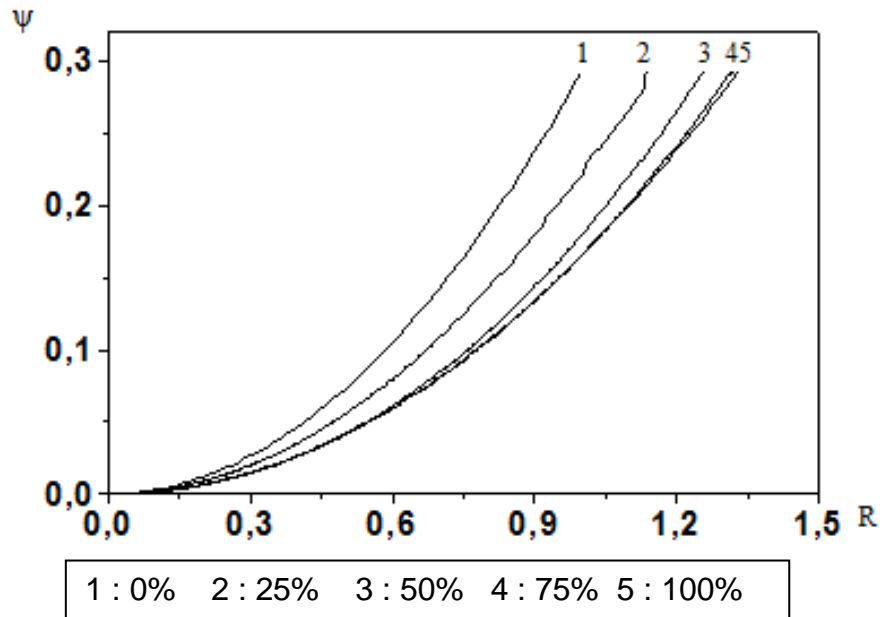
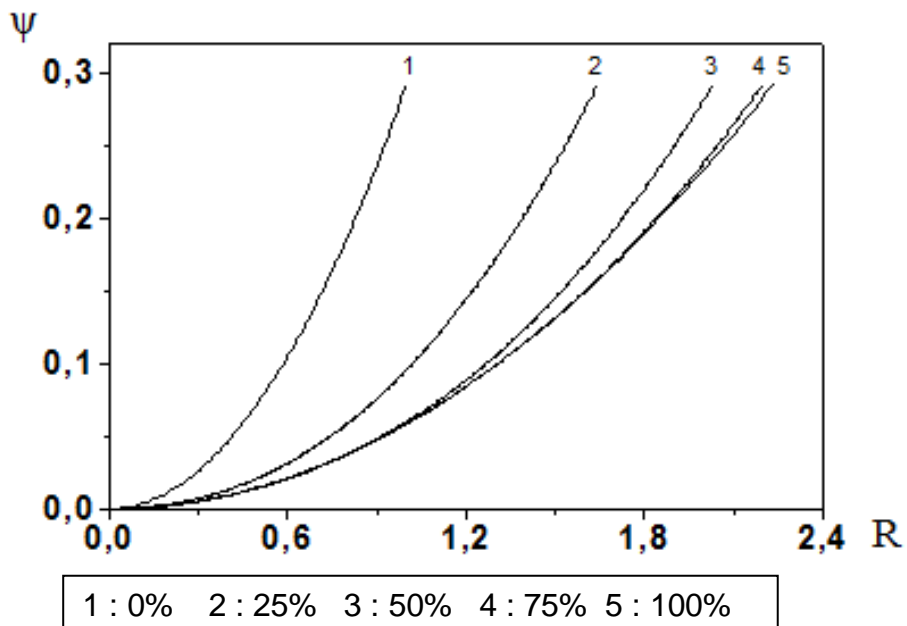
	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	Masse	$C_F$
GP ( $\gamma=1.402$ )	6,331	30,696	19,274	23,552	1,751	707,831	0,430
$T_0=1000$ K	6,439	31,631	19,882	24,226	1,742	754,044	0,453
$T_0=2000$ K	7,065	35,440	21,317	25,796	1,767	949,117	0,502
$T_0=3000$ K	7,655	38,785	22,260	26,793	1,789	1136,540	0,533

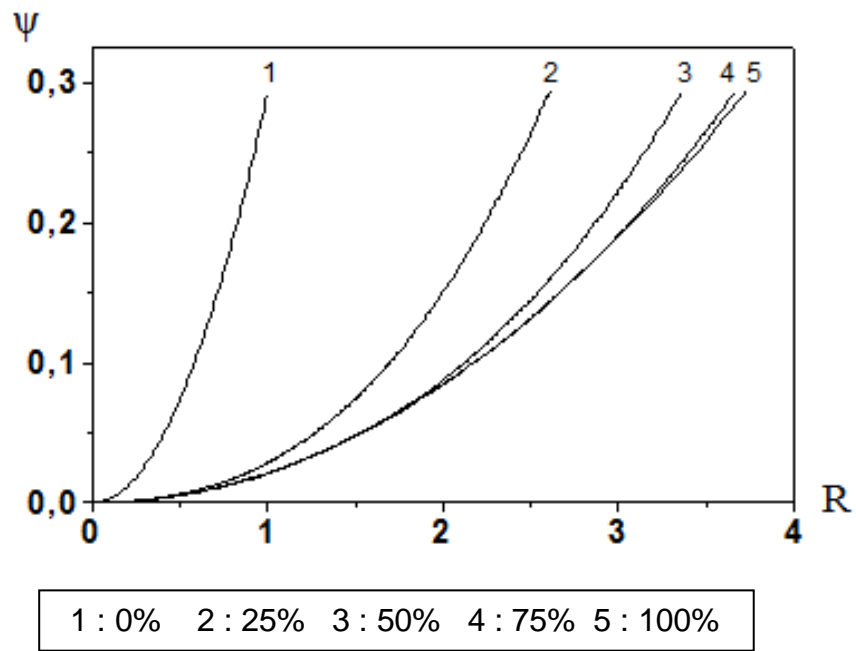
Figure 5.27 : Tuyère 3D de forme carrée en fonction du nombre de Mach de sortie  $M_S$  et la température de stagnation  $T_0$ 

### 5.8. Variation de la fonction de courant d'une tuyère 3D

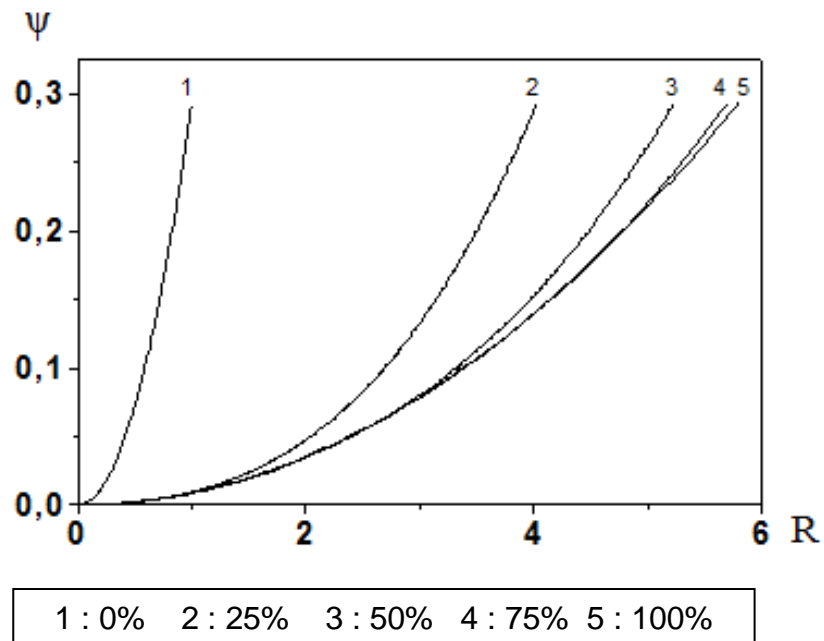
La figure 5.28 représente la variation de la valeur de la fonction de courant  $\psi$  en fonction du rayon de chaque station de la tuyère pour différentes valeurs  $M_S$  et pour différentes stations dans le cas d'une tuyère 3D *MLN* ayant une section de sortie carrée pour  $T_0=2000$  K. On a choisi cinq stations le long de la tuyère, allant du col à la section de sortie. Dans les figures présentées, l'augmentation du nombre de Mach de sortie  $M_S$  engendre un élargissement des lignes de courant. Entre les courbes 3, 4 et 5 qui représentent respectivement les stations 50%, 75% et 100% pour différents nombres de Mach de sortie  $M_S=2,00$ , 3,00, 4,00 et 5,00. On remarque que les courbes sont

confondues ensuite elles se séparent graduellement. Cette ressemblance est justifiée par l'existence de la zone uniforme *BES* (figure. 20). Entre les courbes 1 et 2 c'est-à-dire entre les stations 0% et 25% la différence est remarquable, vu que ces deux courbes se trouvent dans les zones de Kernel et de transition. A titre d'information, l'écoulement dans ces zones est de type non simple. La figure 5.28 représente un grand intérêt pour connaître l'allure des lignes de courant dans le champ de l'écoulement interne de la tuyère *3D* ayant une section de sortie arbitraire.

(a) :  $M_S=2,00$ (b) :  $M_S=3,00$



(c) :  $M_S=4,00$



(d) :  $M_S=5,00$

Figure 5.28 : Valeur de la fonction de courant en fonction du rayon de la tuyère pour différentes valeurs de  $M_S$  et des stations pour  $T_0=2000\text{ K}$

## CONCLUSION

Ce travail de thèse, a été dédié à la conception et à l'étude à haute température des tuyères supersoniques 3D MLN de section de sortie arbitraire. Nous y avons montré que ces tuyères peuvent avoir de meilleures performances que celle de la tuyère axisymétrique. A partir de cette étude, on fait les constats suivants :

Le modèle *GP* est représenté par des relations explicites et simples et ne demande pas un temps de calcul élevé, ce qui n'est pas le cas pour notre modèle *HT*, où il est représenté par la résolution d'une équation algébrique non linéaire et une intégration de fonctions analytiques complexes qui nécessitent un temps de calcul élevé.

A partir de cette étude, nous avons montré que le nombre de points insérés transversalement ( $N_T$ ) sur le contour de la section de sortie, influe peu sur les valeurs numériques de la masse et du coefficient de poussée  $C_F$ . Donc un petit nombre de points  $N_T$  suffirait à faire converger le programme vers la solution exacte. Par contre, si le nombre de Mach de sortie  $M_S$  est supérieur à 3,00, la convergence du processus numérique pour le calcul du coefficient de poussée  $C_F$ , exige un nombre important de section insérées longitudinalement  $N_L$  (supérieur à 500).

On peut obtenir une infinité de formes de tuyères en choisissant la forme de la section de sortie, le nombre de Mach de sortie  $M_S$  ou la température génératrice  $T_0$  de la chambre de combustion.

Si les tuyères 3D asymétriques délivrent toutes le même nombre de Mach de sortie  $M_S$  que délivré par la tuyère axisymétrique, elles possèdent cependant toutes une masse inférieure à celle-ci. Ce gain en masse peut aller jusqu'à 50%, ce qui est très significatif dans les applications aérospatiales. Mais leurs coefficients de poussée restent constants du faite qu'elles ont le même nombre de Mach de sortie  $M_S$ , le même rapport des sections ( $A_S/A^*$ ) et la même température de stagnation  $T_0$ .

Les tuyères tridimensionnelles asymétriques *MLN* délivrent toutes un nombre de Mach de sortie  $M_S$  et un coefficient de poussée  $C_F$  supérieurs à ceux de la tuyère axisymétrique, lorsque leurs masses sont égales, avec un gain variant entre 1% et 20% pour  $M_S$  et jusqu'à 9% pour  $C_F$  selon la géométrie de la section de sortie.



Si on fixe la même section au col c-à-d le même débit, la conception des tuyères 3D donnera des masses supérieures à celles de la tuyère axisymétrique. Par contre, le coefficient de poussée  $C_F$  restera constant pour n'importe quelle tuyère du fait qu'on a toujours le même nombre de Mach de sortie  $M_S$ , le même rapport des sections ( $A_S/A^*$ ) et la même température de stagnation  $T_0$ .

La tuyère asymétrique *MLN* de section de sortie circulaire placée dans l'axe des  $y$  positifs fournit les meilleures performances avec des gains en masse et en poussée significatifs. On conclura que c'est la forme idéale pour les applications aérospatiales.

A faible température  $T_0$  (<1000 K) et au nombre de Mach de sortie  $M_S$  (<2,00), l'écart des résultats entre les deux modèles est faible, ce qui donne la possibilité d'étudier un écoulement *HT* en utilisant les relations *GP*. Par contre, lorsque  $T_0$  augmente, la théorie *GP* donne des résultats éloignés du cas réel, d'où la nécessité de l'utilisation du modèle *HT*.

Comme l'écoulement à la section de sortie est horizontal, on peut tronquer la tuyère à une section possédant une déviation de la vitesse d'un ou de deux degrés. Dans ce cas, on fait un gain important en masse. On réduit la masse. L'écoulement à la sortie de la tuyère tronquée devient incliné au voisinage de la paroi, et dans ce cas la force de pression s'exerçant sur la paroi interne de la tuyère va diminuer légèrement.

A la fin de ce modeste travail, on suggère quelques axes de recherches qui seront considérés comme une continuité de notre travail.

On peut étudier l'effet du gaz de propulsion sur la géométrie de la tuyère 3D en choisissant l'un des gaz suivants :  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $H_2$ ,  $CO$ ,  $CO_2$ ,  $NH_3$ ,  $CH_4$  et  $H_2O$  au lieu de l'air. Les relations restent valables. Il faut seulement tenir compte de la variation de  $C_P$  en fonction de la température  $T_0$  du gaz choisi.

Faire la simulation numérique des écoulements compressibles internes dans les tuyères supersoniques tridimensionnelles en tenant compte de la turbulence des écoulements et l'interaction entre le fluide et la structure (couche limite).

Programmer d'autres méthodes de conception des tuyères tridimensionnelles mentionnées dans cette thèse à savoir la méthode des caractéristiques en 3D et la méthode basée sur l'utilisation du contour de la tuyère axisymétrique et faire la

comparaison entre elles, par rapport au temps d'exécution et la convergence du processus numérique.

Faire l'extension vers le tridimensionnelle des autres types de tuyères telles que la tuyère à bouchon (plug nozzle), tuyère à détente déflexion (Expansion Deflexion nozzle), la tuyère à double galbe (dual galbe) et la tuyère à zone d'expansion (Bell shaped nozzle).

Développer un modèle *HT* qui prend en compte le phénomène d'onde de choc et déterminer les conditions après le choc dans une tuyère supersonique non adaptée et par conséquent évaluer le nombre de Mach à la section de sortie.

Etudier l'effet de la variation de la pression génératrice  $P_0$  sur la conception à haute température des tuyères *3D* asymétriques.

## APPENDICE A

### LISTE DES SYMBOLES

$A$	: Aire d'une section de la tuyère [ $m^2$ ]
$L$	: Longueur de la tuyère [m]
$a$	: Vitesse du son [m/s]
$C_P$	: Chaleur spécifique à pression constant [J/(kgK)]
$C_F$	: Coefficient de poussée
$C_{Masse}$	: Coefficient de masse
$C^-$	: Caractéristique descendante
$C^+$	: Caractéristique montante
$HT$	: Abréviation du terme modèle Haute Température
$M$	: Nombre de Mach
$Masse$	: Masse de la structure de la tuyère normalisée par $(\rho_M t_M)$ [ $m^2$ ]
$F$	: Force de pression exercée sur la paroi interne de la tuyère [N]
$MLN$	: Abréviation du terme Minimum Length Nozzle (tuyère à détente centrée)
$N_L$	: Nombre de section insérés longitudinalement
$N_T$	: Nombre de points insérés sur le contour de la section de sortie
$P$	: Pression [atm]
$GP$	: Abréviation du terme Gaz Parfait
$R$	: Rayon
$T$	: Température [K]
$V$	: Vitesse de l'écoulement [m/s]
$x, y, z$	: Composantes cartésiennes
$H$	: Enthalpie [J/kg]
$\theta$	: Angle de déviation de l'écoulement [rad]
$\mu$	: Angle de Mach
$\rho_M$	: Masse volumique du matériau de la structure de la tuyère [ $kg/m^3$ ]
$\varepsilon$	: Tolérance de calcul (précision voulue)
$\gamma$	: Rapport de Chaleur Spécifique
$\xi$	: Ligne de Mach descendante
$\eta$	: Ligne de Mach montante

$\tau$	: Coefficient utilisé dans l'équation (20)
$\psi$	: Fonction de courant [m <sup>2</sup> /s]
$t_M$	: Epaisseur du matériau de la structure de la tuyère [mm]
$S$	: Abscisse curviligne
$\Delta$	: Coefficient pour la fonction de condensation, équation (2.45)

## Indices

13	: Valeur moyenne entre les points 1 et 3
23	: Valeur moyenne entre les points 2 et 3
3	: Valeur au point 3
0	: Condition d'arrêt (Etat générateur) (chambre de combustion)
*	: Condition critique
$A$	: Point sur la section du col de la tuyère
$B$	: Fin de la région de Kernel
$S$	: Section de Sortie
$(j)$	: Segment
$j$	: Nœud
$SEC$	: Section
$M$	: Matériau

## Exposant

$K$	: Itération
$/so$	: Iso-valeur
-	: Valeur en un point sur la caractéristique descendante
+	: Valeur en un point sur la caractéristique montante

:

## APPENDICE B

### Relations thermodynamiques d'un écoulement à haute température

Les résultats obtenus d'un écoulement supersonique pour un gaz parfait (*GP*) sont valables sur la base de quelques hypothèses. Parmi ces hypothèses, le gaz est considéré comme calorifiquement parfait, c'est à dire, les chaleurs spécifiques  $C_P$  et  $C_V$  sont constantes et ne dépendent pas de la température, ce qui n'est pas valable dans le cas réel lorsque la température croît. Le but de ce chapitre est de présenter le modèle mathématique en ajoutant l'effet de variation de  $C_P$  avec la température. Dans ce cas, le gaz est nommé gaz calorifiquement imparfait ou gaz à Haute Température thermiquement parfait (*HT*).

#### B.1. Polynôme d'interpolation de $C_P(T)$ et $\gamma(T)$

Les résultats obtenus pour l'écoulement d'un gaz parfait, considère que ce dernier est calorifiquement parfait, c'est à dire que les chaleurs spécifiques  $C_P$  et  $C_V$  sont constantes et donc ne dépendent pas de la température quelque soit sa valeur, ce qui n'est pas le cas réellement lorsque la température croît. Ceci est justifiable vu les variations importantes de ses propriétés avec la température surtout au-delà de 1000 K, domaine d'utilisation des tuyères supersoniques. Le gaz parfait dans ce cas est nommé en plus gaz calorifiquement imparfait ou gaz à haute température et thermiquement parfait.

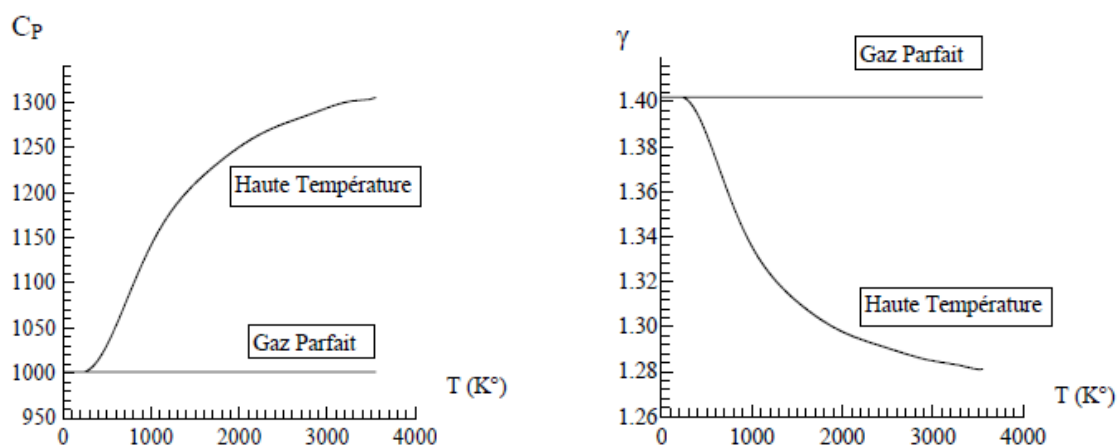


Figure B.1 : Variation de  $C_P$  et  $\gamma$  avec la température [ ]

Afin de trouver une forme analytique pour les fonctions  $C_P(T)$  et  $\gamma(T)$ , nous avons des interpolations polynomiales aux valeurs de la table. Notre choix est orienté sur des interpolations sous forme d'un polynôme de 9<sup>ème</sup> degré pour la fonction  $C_P(T)$  et d'un polynôme de 10<sup>ème</sup> degré pour la fonction  $\gamma(T)$ . La raison de ce choix est de minimiser les opérations mathématiques de calcul.

$$C_P(T)=a_1+T(a_2T(a_3+T(a_4+T(a_5+T(a_6+T(a_7+T(a_8+T(a_9+T(a_{10})))))))))) \quad (\text{B.1})$$

$$\gamma(T)=b_1+T(b_2T(b_3+T(b_4+T(b_5+T(b_6+T(b_7+T(b_8+T(b_9+T(b_{10}+T(b_{11})))))))))) \quad (\text{B.2})$$

Les coefficients  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, 10$ ) sont présentés dans le tableau B.1 suivant

I	$a_i$	$b_i$
1	1007.1058	1.4030049
2	0.040661289	-4.8380251 $10^{-9}$
3	-0.00063376997	5.7713164 $10^{-9}$
4	2.7474759 $10^{-6}$	-2.4333247 $10^{-9}$
5	-4.0338459 $10^{-9}$	4.1173757 $10^{-9}$
6	3.0697736 $10^{-12}$	-3.8217601 $10^{-9}$
7	-1.3509355 $10^{-15}$	2.1579012 $10^{-9}$
8	3.472262 $10^{-19}$	-7.6237753 $10^{-9}$
9	-4.8467531 $10^{-23}$	1.6491564 $10^{-9}$
10	2.8411878 $10^{-6}$	-1.999789 $10^{-9}$
11	/	1.0420059 $10^{-9}$

Tableau B.1 Coefficients des polynômes  $C_P(T)$  et  $\gamma(T)$

Un petit problème se pose durant l'interpolation par la formule (2.39). Après une présentation graphique du polynôme de  $C_P(T)$  et une comparaison avec les valeurs données par le tableau B.1, on remarque une variation ondulée à basse température jusqu'à environ 240 K, au lieu d'avoir une fonction constante dans cette portion conformément aux valeurs de la table. A cet effet, une correction est introduite pour

rapprocher les valeurs interpolées des valeurs du tableau B.1. Alors, si  $T = \bar{T} = 240 \text{ K}^\circ$ , les relations (B.1) et (B.2) donnent les valeurs suivantes :

$$\bar{C}_P = C_P(\bar{T}) = 1001.15868 \text{ J / (Kg K}^\circ\text{)}$$

$$\bar{\gamma} = \gamma(\bar{T}) = 1.40199$$

Donc, la correction est faite de la manière suivante :

- Si  $T \leq \bar{T}$ , on utilise la correction suivante:

$$\begin{cases} C_P(T) = \bar{C}_P \\ \gamma(T) = \bar{\gamma} \end{cases}$$

- Si  $T > \bar{T}$ , nous utilisons les équations (B.1) et (B.2).

## B.2. Calcul des rapports thermodynamiques

Nous procédons maintenant à la détermination des rapports thermodynamiques et géométriques pour un gaz calorifiquement imparfait à une section quelconque du divergent de la tuyère correspondant à un nombre de Mach supersonique  $M_s$ . Ces rapports sont mentionnés dans le tableau 2.2. La détermination des rapports des masses volumiques, des sections et de la fonction de Prandtl Meyer pour un gaz calorifiquement imparfait donné respectivement dans le tableau 2.2, demande des intégrations numériques. Ces fonctions sont données par les relations suivantes

$$\frac{\rho_s}{\rho_0} = \text{Exp} \left( - \int_{T_s}^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad \text{avec : } F_\rho(T) = \frac{C_P(T)}{a^2(T)} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{A}{A_*} = \text{Exp} \left( \int_T^{T_*} F_A(T) dT \right) \quad \text{avec : } F_A(T) = C_P(T) \left[ \frac{1}{a^2(T)} - \frac{1}{2H(T)} \right] \quad (\text{B.4})$$

$$v(T) = \int_T^{T_*} F_V(T) dT \quad \text{avec : } F_V(T) = \frac{C_P(T)}{2H(T)} \sqrt{2H(T)/a^2(T) - 1} \quad (\text{B.5})$$

Nous avons tracé les variations des fonctions ci-dessus  $F_A(T)$ ,  $F_\rho(T)$  et  $F_v(T)$  sous forme de courbes pour avoir une idée sur leurs variations avant de prendre une décision sur le choix de la quadrature d'intégration.

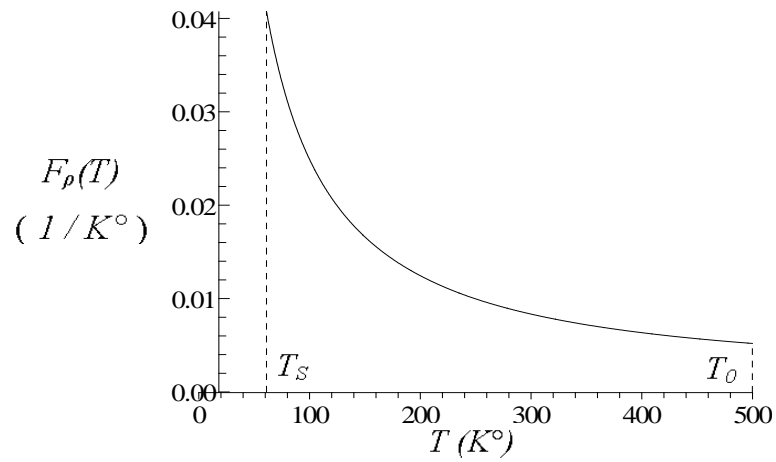


Figure B.2 : Variation de la fonction  $F_\rho(T)$  dans  $[T_0, T_S]$

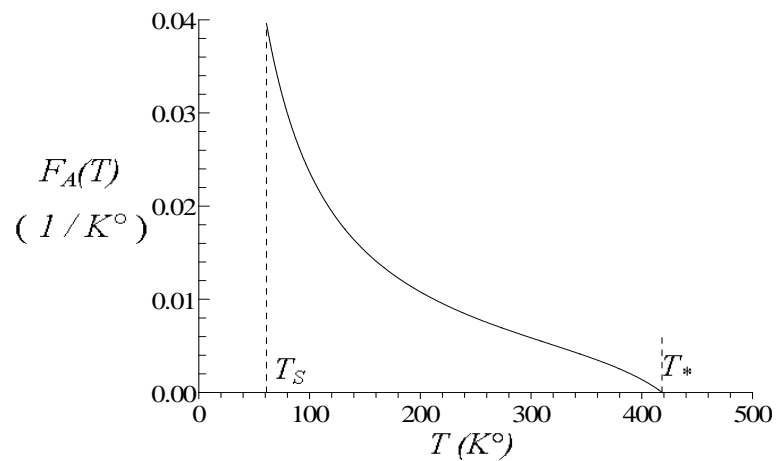


Figure B.3 : Variation de la fonction  $F_A(T)$  dans  $[T^*, T_S]$

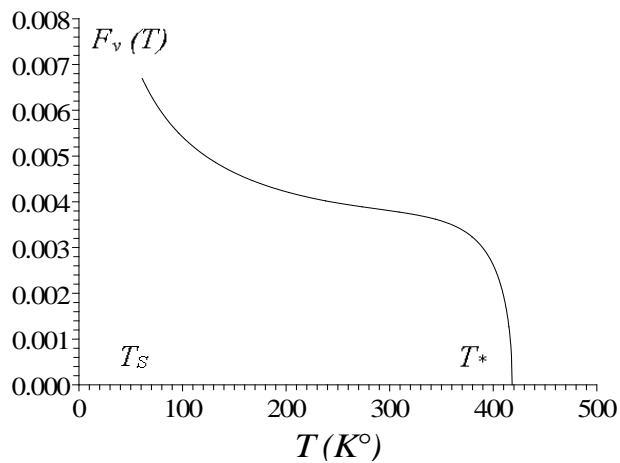


Figure B.4 : Variation de la fonction  $F_v(T)$  dans  $[T_0, T_S]$



La quadrature d'intégration, pour les fonctions  $F_{\rho}(T)$ ,  $F_A(T)$  et  $F_V(T)$ , choisie est celle de SIMPSON [6]. La fonction de condensation utilisée pour nos calculs est celle de ROBERT modifiée par EISEMAN [7]. Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature.

$$s_i = b_1 z_i + (1 - b_1) \left[ 1 - \frac{\tanh[b_2 (1 - z_i)]}{\tanh(b_2)} \right] \tag{B.6}$$

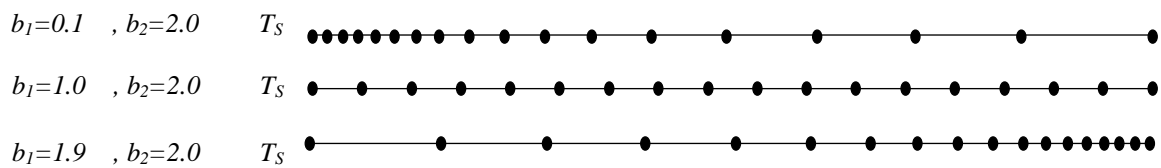
Avec :

$$z_i = \frac{i-1}{N-1} \quad 1 \leq i \leq N$$

$b_1, b_2$  : Paramètres de contrôle de distribution des nœuds

$N_P$  : Nombres de points de la quadrature de Simpson

Le choix des paramètres de contrôle de distribution des nœuds est très important pour le calcul des intégrales des fonctions  $F_{\rho}(T)$ ,  $F_A(T)$  et  $F_V(T)$  par la méthode de Simpson. Citons quelques exemples des choix de  $b_1$  et  $b_2$  qui sont comme suit :



Après la détermination de la fonction de condensations, on peut déterminer la distribution des températures par:

$$T_i = s_i (T_D - T_G) + T_G \tag{B.7}$$

#### B.4. Problème inverse

Un deuxième problème, appelé problème inverse et figurant dans les applications pour les calculs des écoulements supersoniques externes et internes, est représenté par la détermination de la température  $T$  lorsque la valeur de la fonction de PRANDTL-MEYER  $\nu$  de cette température est connue. Nous supposons qu'à la température  $T = T_S$ , lorsque  $M = M_S$ , nous avons  $\nu = \nu_S$ . Le problème se pose pour la détermination de  $T_S$  en connaissant  $\nu_S$ . A partir de la relation (B.5), nous pouvons écrire:

$$F(T_S) = \nu_S - \int_{T_S}^{T^*} F_\nu(T) dT = 0 \quad (\text{B.8})$$

Nous avons constamment la température  $T_S < T^*$ . La fonction  $\nu$  est toujours positive dans le régime supersonique. Pour déterminer  $T_S$ , racine de l'équation (B.8), nous utilisons l'algorithme de dichotomie combiné avec la quadrature de SIMPSON pour évaluer à chaque fois l'intégrale de la relation (2.9). En premier lieu, nous définissons un intervalle fermé  $[T_1, T_2]$  contenant la température  $T_S$  qui vérifie la condition.

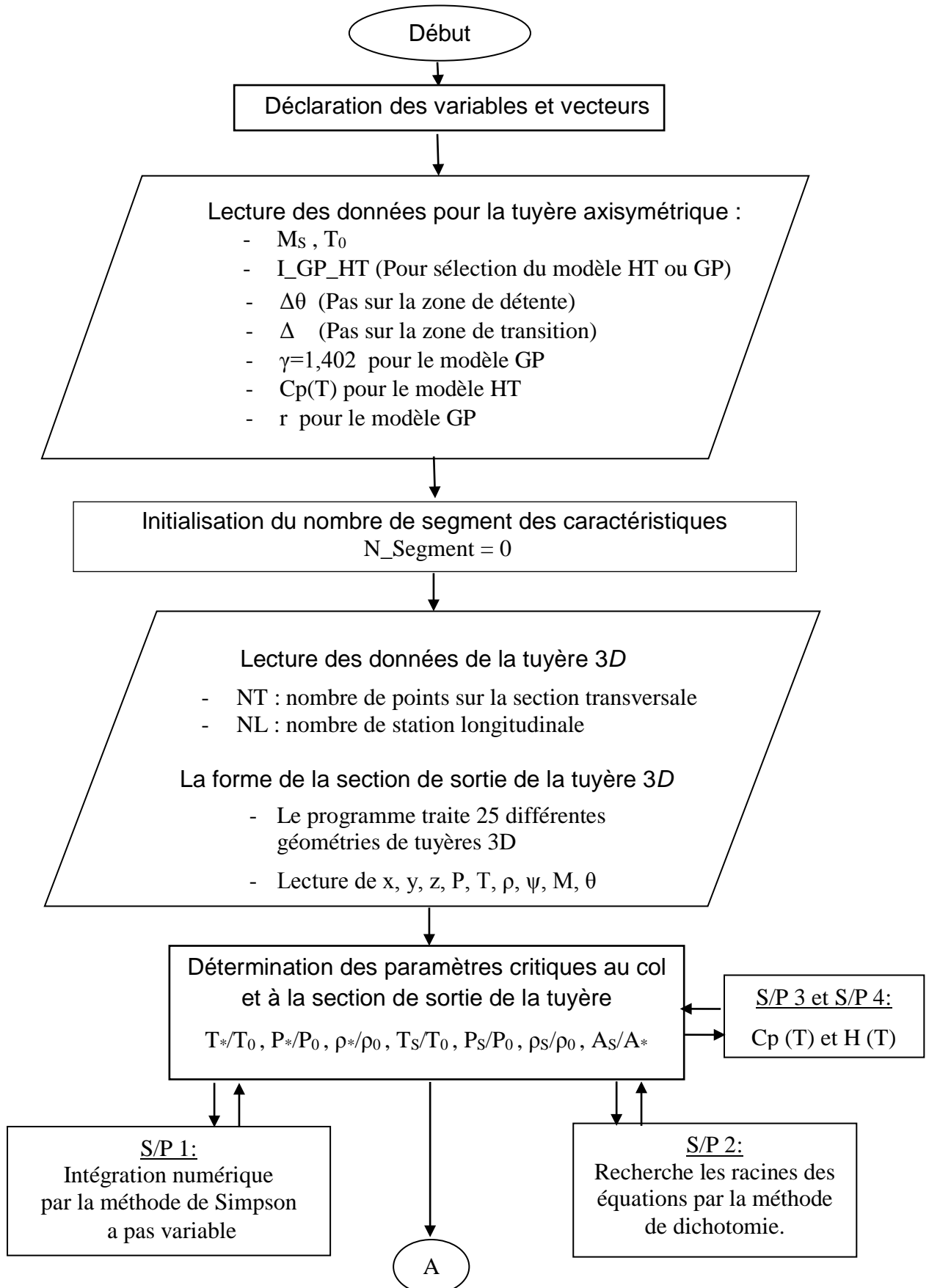
$$F(T_1) \times F(T_2) \leq 0 \quad (\text{B.9})$$

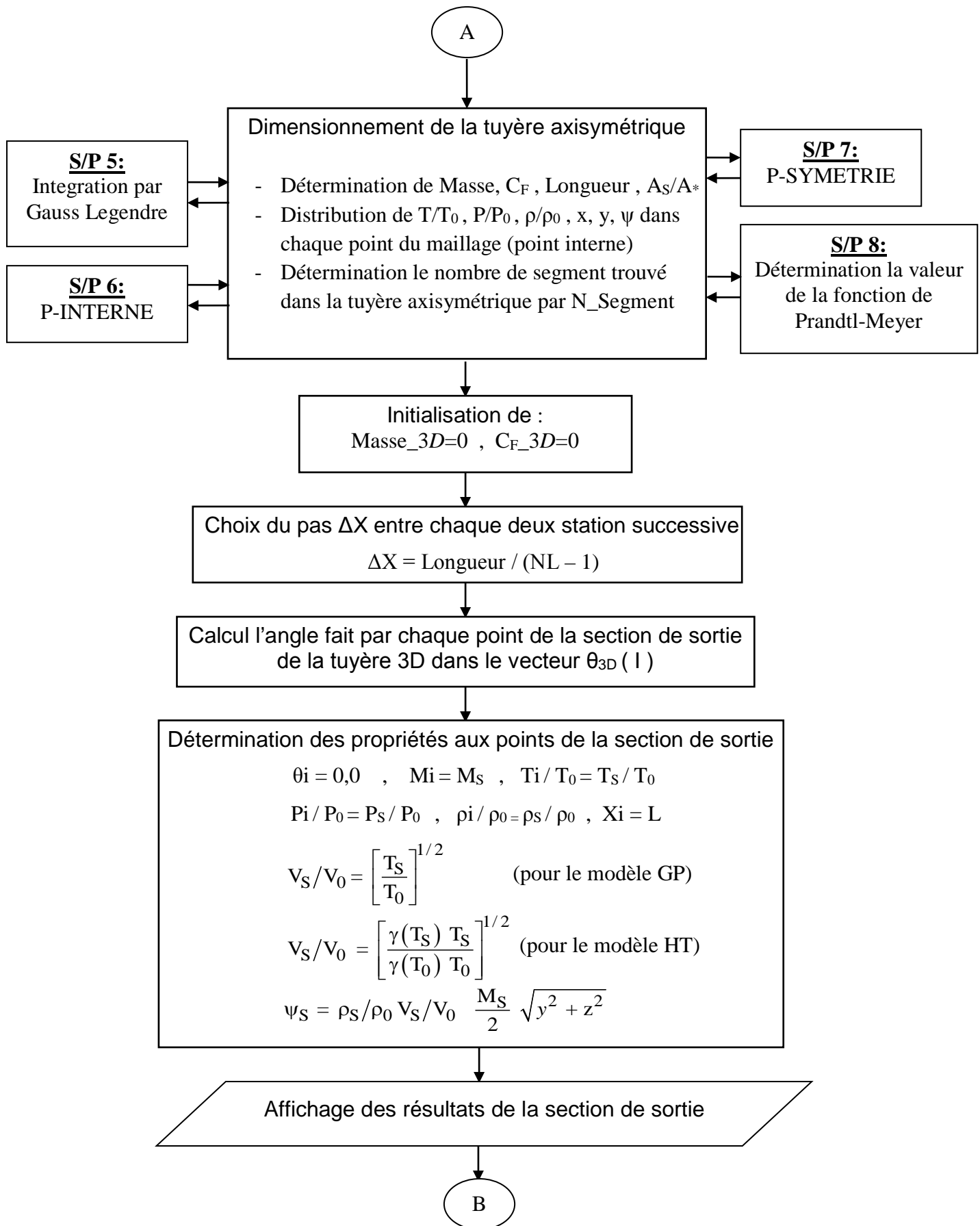
Nous pouvons prendre  $T_2 = T^*$  et  $T_1 = 0$ . En raccourcissant  $[T_1, T_2]$ , nous avons besoin à chaque fois du calcul de la valeur  $F(T_3)$  avec  $T_3$  milieu de  $]T_1, T_2[$ . Dans ce cas nous sommes obligés de calculer  $\nu = \nu_3$ , résultat de l'intégrale de (2.8) lorsque  $T=T_3$ .

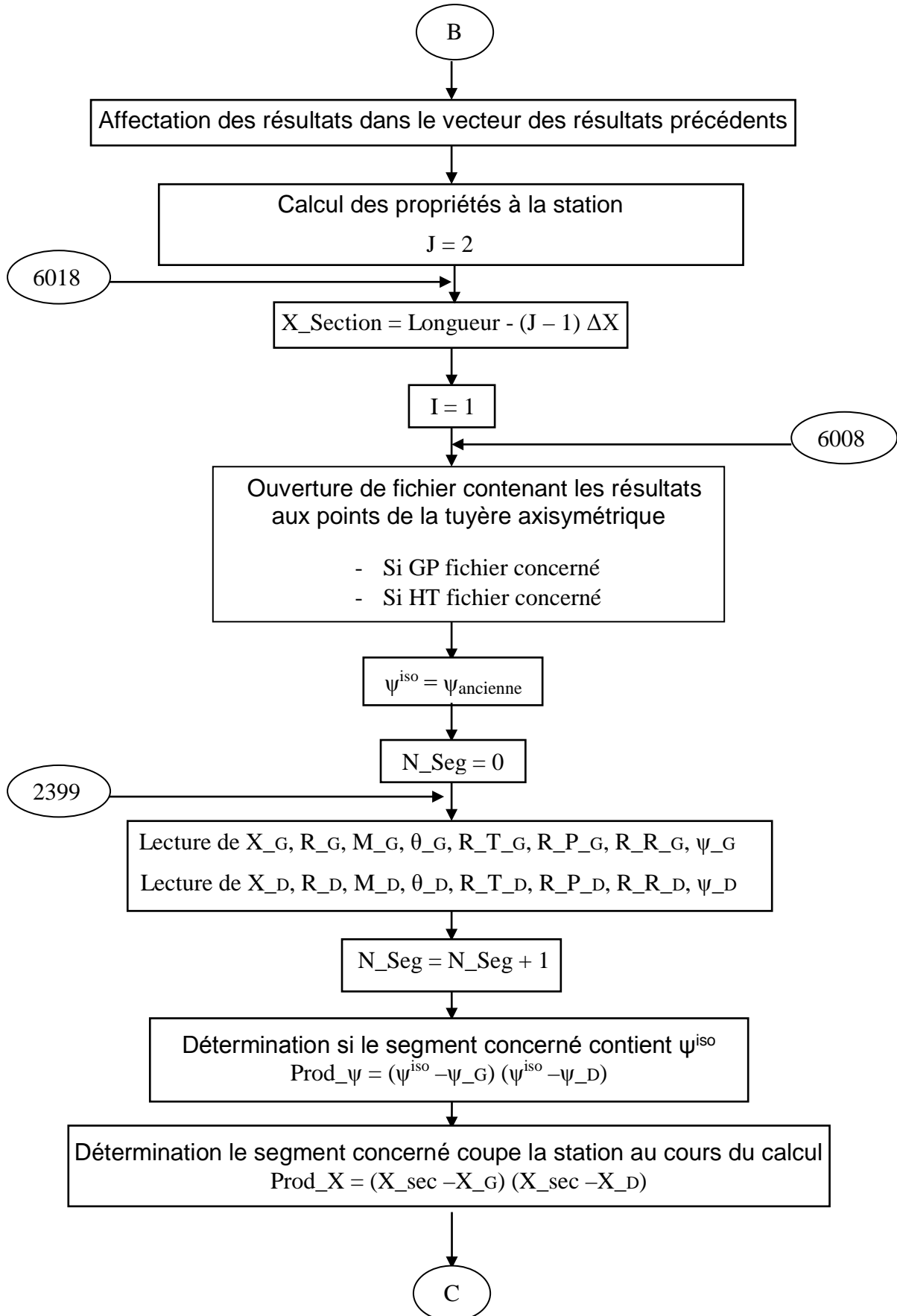
RAPPORTS	GAZ CALORIFIQUEMENT PARFAIT ( $\gamma = 1.402$ )	GAZ CALORIFIQUEMENT IMPARFAIT ( $\gamma = \text{variable}$ )
Température $\frac{T}{T_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{-1}$	Résolution de l'équation / T $M^2(T)a^2(T) - 2H(T) = 0$ T : variable principale
Masse volumique $\frac{\rho}{\rho_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}$	$e^{\int_{T_0}^T \left\{ \frac{C_P(T)}{\gamma(T)rT} \right\} dT}$
Pression $\frac{P}{P_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$	$\frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{T}{T_0}$
Section $\frac{A}{A_*}$	$\frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$	$e^{\int_T^{T_*} C_P(T) \left[ \frac{1}{a^2(T)} - \frac{1}{2H(T)} \right] dT}$
Débit $\frac{\dot{m}}{A_0 \rho_0 a_0}$	$\left[ \frac{\gamma+1}{2} \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$	$\frac{\rho}{\rho_0} \frac{a}{a_0} M \frac{A}{A_*}$
Vitesse du son $\frac{a}{a_0}$	$\sqrt{\frac{T}{T_0}}$	$\sqrt{\frac{\gamma(T)}{\gamma(T_0)} \cdot \frac{T}{T_0}}$
Enthalpie H(T)	$C_P(T - T_0)$	$\int_{T_0}^T C_P(T) dT$
Fonction de Prandtl Meyer v	$\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctg \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} - \arctg \sqrt{M^2 - 1}$	$\int_T^{T_*} \left\{ \frac{C_P(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2 - 1} \right\} dT$
Nombre de Mach M	M : Variable principale	$M(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{a(T)}$
Vitesse $\frac{V}{a_0}$	$M \sqrt{\frac{T}{T_0}}$	$M \sqrt{\frac{\gamma(T)}{\gamma(T_0)} \cdot \frac{T}{T_0}}$

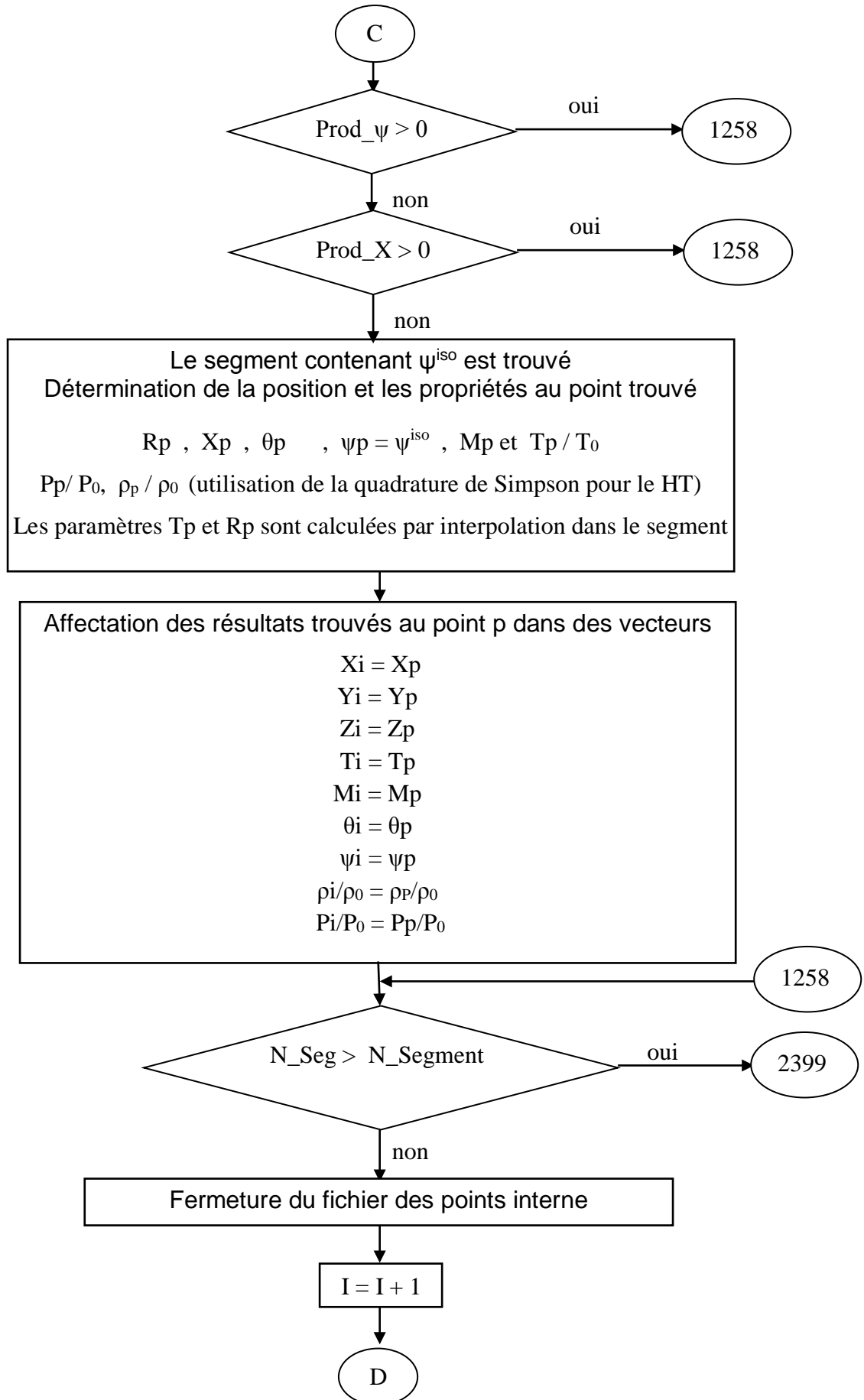
Tableau B.2 : Les équations thermodynamiques d'un écoulement supersonique  
A haute température

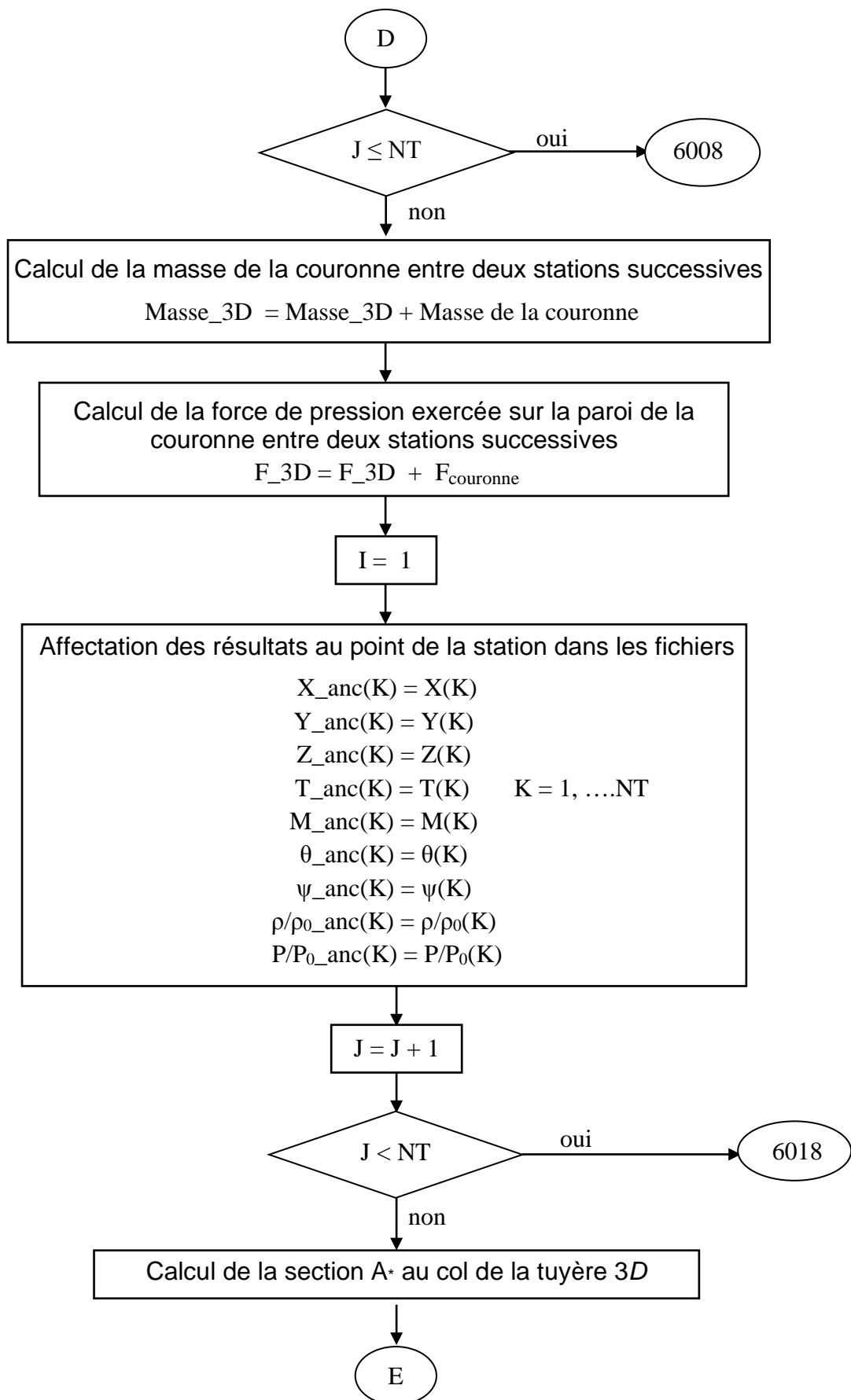
**APPENDICE C**  
**ORGANIGRAMME DE PROGRAMMATION**



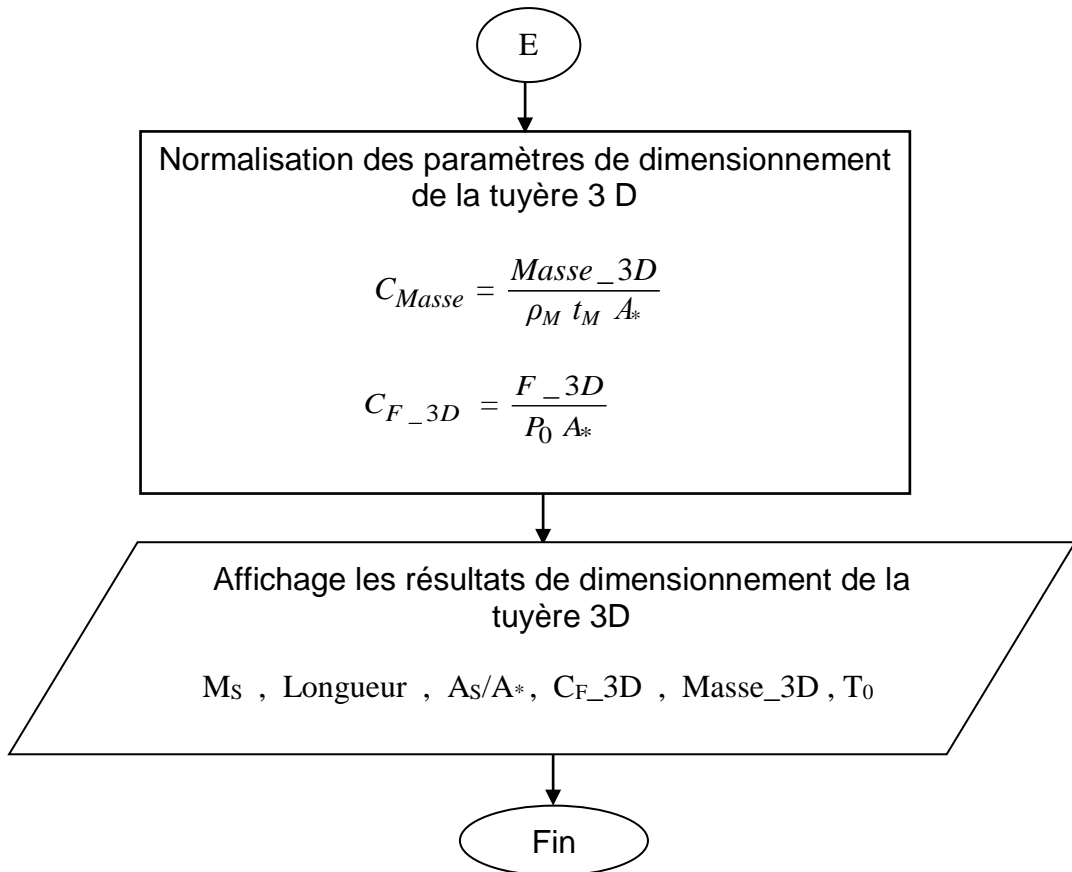












## REFERENCES

1. Al-Ajlouni M., "An Automatic Method for Creating the Profile of Supersonic Convergent-Divergent Nozzle," *Journal of Mechanical and Industrial Engineering*, vol 4 No. 3, (2010), pp. 404-411
2. Armstrong W. C. and Bauer R. C., "Analysis of Three-Dimensional Inviscid Supersonic Flow Between a Body and an Outer Wall (With Application to a Jet Stretcher System)," AEDC-TR-76-103 (ADA029123), (August 1976).
3. Armstrong, W.C., "A Method of Characteristic Computer Program For Three-Dimensional Supersonic Internal Flows," AEDC-TR-78-68, January 1979.
4. Anderson J. D. Jr., "Fundamentals of Aerodynamics," McGraw-Hill Book company, New York, (1988).
5. Anderson J. Jr., "Modern Compressible Flow: With Historical Perspective," McGraw Hill Book company, New York, (1982).
6. Argrow B.M. and Emanuel G., "Comparison of Minimum Length Nozzles," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 110, (September 1988), 283-288.
7. Argrow B. M. and Emanuel G., "Computational Analysis of the Transonic Flow field of Two-Dimensional Minimum Length Nozzles," AIAA-1989-1822, 20<sup>th</sup> Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, Buffalo, NY, (June 1989), 12-14.
8. Aukin M. K., Kraiko A. N., Lubinov D. A., Makarov V. E. and Tillyaeva N. I., "Designing Three-Dimensional Nozzles to Achieve Near Uniform Supersonic or Hypersonic Flow in The Rectangular Exit Section," *Physics and Astronomy*, Vol. 30, n° 30, (1995), 787-794.
9. Beckwith, I. E., Ridyard, H. W., and Cromer, N., "The Aerodynamic Design of High Mach Number Nozzles Utilizing Axisymmetric Flow with Application to a Nozzle of Square Test Section," NACA TN 2711, (1952).
10. Beckwith, I. E., and Moore, J. A., "An Accurate and Rapid Method for the Design of Supersonic Nozzles," (February 1955), NACA TN 3322.
11. Berger M., "Géométrie: Convexes et Polyèdres réguliers, aires et Volumes," Tome 3, Fernand Nathan, Paris, (1978).
12. Birkhoff G., "Interpolation to Boundary Data in Triangles," *J. of Math. Analy. And Appl.*, Vol. 42, (1973), 474-484.
13. Coburn N. and Dolph C. L. t., "Method of Characteristics for Three-Dimensional Supersonic flows," *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, New York, American Mathematical Society, (1949), 55-66

14. Chushkin P. I., "Numerical Method of Characteristics for Three-Dimensional Supersonic Flows," *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 9, (1968), 41-122.
15. Comolet R., "Mécanique Expérimentale des Fluides. Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux," Tome 1, 3<sup>ème</sup> Edition, Masson, (1979).
16. Démidovitch B. and I. Maron., "Eléments de calcul numérique," Editions Mir, Moscow, 1987
17. Dumitrescu L. Z., "Minimum Length Axisymmetric Laval Nozzles," *AIAA Journal*, Vol. 13, (1975), 520-531.
18. Evvard J. C. and Maslen. S. H., "Three-Dimensional Supersonic Nozzles and Inlets of Arbitrary Exit Cross Section," (April 1952), NASA TN-2688.
19. Emanuel G., "Gasdynamic: Theory and Application", New York, AIAA Educational Serie, (1986).
20. Enkenhus, K. R.; and Maher, E. F., "The Aerodynamic Design of Axisymmetric Nozzles for High-Temperature Air," NAWEPS Rep. 7395, (February 1962), U.S. Navy.
21. Fletcher C. A. J. "Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories," Vol. II, (1988), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
22. Gerald H., Hans L., Thong V. N. and Gennady E. D., "Advanced Rocket Nozzle," *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 14, n° 3, (1998), 318-326.
23. Georing M., "Nozzle Design Optimization by Method-of-Characteristics," AIAA-1990-2024, 26<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, (July 16-18 1990), Orlando, Florida.
24. Haddad, A., and Moss, J. B., "Aerodynamic Design for Supersonic Nozzles of Arbitrary Cross Section," *J. Propulsion and Power* (AIAA), Vol. 6, n°. 4, (Nov-Dec 1990), 740-746.
25. Hagemann G., Immich H. and Terhardt M., "Flow phenomena in advanced rocket nozzles - The plug nozzle," AIAA-1998-3522, 34<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, (July 13-15 1998), Cleveland, OH.
26. Hagemann G., Immich H., Van Nguyen T. and Dumnov G. E., "Advanced Rocket Nozzles," *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 14, n° 5, (1998), 620-634.
27. Hannemann, K., "Design of an Axisymmetric, Contoured Nozzle for the HEG," Institut für Theoretische Strömungsmechanik, DLR Report DLR-FB 90-04, (1990), Göttingen, Germany.

28. Johnson, C. B., "Real-Gas Effects on Hypersonic Nozzle Contours With a Method of Calculation," (1963), NASA TN D-1622.
29. Johnson, C. B., and Boney, L. R., "A Method for Calculating a Real-Gas Two-Dimensional Nozzle Contour Including the Effects of Gamma," NASA TM X-3243, (September 1975).
30. Lax P. D. and Wendroff B., "Difference Schemes with High Order of Accuracy for Solving Hyperbolic Equations," CIMS Report NY0-9759, (July 1962), New York Univ, New York.
31. Liepmann, H. W., and Roshko, A., "Elements of Gasdynamics," John Wiley & Sons, Inc., (1966), New York.
32. Maikapar, G.I., "Bodies Formed by the Stream Surfaces of Conical Flows," Fluid Dynamics, Vol. 1, n° 1, (1966).
33. Malina F. J., "Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect gases," J. Franklin Inst., Vol. 230, (1940), 433-450.
34. McLain D. H., "Drawing contours from arbitrary data points," The Computer Journal, Vol. 17, (1974), 318-324.
35. Moeckel W. E., "Use of Characteristic Surfaces for Unsymmetrical Supersonic Flow Problems," NACA TN 1849, (1949).
36. Oosthuisen P. H. and Carscallen W. E., "Compressible Fluid Flow," Mc Graw-Hill, New York, (1997).
37. Ortega J. and Rheinboldt W., "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables," (1970), New York, Academic Press.
38. Peterson C. R. and Hill P. G. "Mechanics and Thermodynamics of Propulsion," Addison-Wesley Publishing Company Inc, (1965), New York.
39. Powell M. J. D., "On the Maximum Error of Polynomial Approximation Defined by Interpolation and by Least Squares Criteria," Comput. J., Vol. 9, (1978), 404-407.
40. Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A. and Vetterling W. T., "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing," Cambridge University Press, Cambridge, (1986).
41. Rakich J. V., "Three-Dimensional Flow Calculation by the Method of Characteristics," AIAA Journal, Vol. 5, n° 10, (1967), 1906-1908.
42. Ranson V. H., Thompson H. D. and Hoffman J. D., "Three-Dimensional Supersonic Nozzle Flowfield Calculation," J. of Spacecraft, Vol. 7, n° 4, (1970), 458-462.

43. Ralston A. and Rabinowitz P., "A First Course in Numerical Analysis," McGraw-Hill Book Company, (1985).
44. Rao, G.V.R, "Exhaust Nozzle Contour for Optimum Thrust," Marquadt Aircraft Co, Presented at the ARC Semi Annual Meeting, (June 10- 13 1957), San Fransisco.
45. Raviart P. A. et Thomas J. M., "Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles," Masson, (1983).
46. Rizkalla O., "Inviscid Design and Analysis of Square Supersonic Nozzles," GASL TL 304, (December 1988).
47. Ruptash, J., "Supersonic Wind Tunnels-Theory, Design and Performance," University of Toronto, (June 1952), Institute of Aerophysics.
48. Ryhming I. L., "Dynamique des Fluides," Presses Polytechnique romandes, (1984), Lausanne, Suisse.
49. Rylov A. I., "Design of Supersonic Asymmetric nozzles," Physics and Astronomy, Vol. 12, n° 03, (1977), 414-420.
50. Sauer R., "General Characteristics of the Flow Through Nozzles at near Critical Speeds," NASA TM-1147, (1947).
51. Sauer R., "Method of Characteristics for Three-Dimensional Axially Symmetrical Supersonic Flows," NACA TM-1133, (1947).
52. Strom C. R., "The Method of Characteristics for Three-Dimensional Real-Gas Flows," Final Report A, April 1967, Air Force Systems Command, (July 1967), AFFDL-TR-67-47.
53. Shapiro A. H., "Compressible Fluid Flow," Vol. 1, (1953), New York, the Ronald Press.
54. Shapiro A. H., "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow," Vol. 1, (1953), The Ronald Press Company, New York.
55. Serra R. A., "Determination of Internal Gas Flows by a Transient Numerical Technique," AIAA Journal, Vol. 10, n° 5, (May 1972), 603-611.
56. Shepard D, "A Two Dimensional Interpolation Function for Irregularly Spaced Data," Proc. 23<sup>rd</sup> Nat. Conf. ACM, (1965), 517-523.
57. Sivells, J. C., "A Computer Program for the Aerodynamic Design of Axisymmetric and Planar Nozzles for Supersonic and Hypersonic Wind Tunnels," AEDC-TR-78-63, (December 1978).
58. Sivells J. C., "Aerodynamic Design of Axisymmetric Hypersonic Wind – Tunnel Nozzles," Journal of Spacecraft, Vol. 7, n°11, (November 1970), 1292-1299.

59. Sod G. A., "Numerical Methods in Fluid Dynamics," Cambridge University Press, (1985), Cambridge.
60. Sutton G. P., "Rocket Propulsion Elements," sixth edition, (1992), California.
61. Tsung, Cheng Chin. "Study of Three-Dimensional Supersonic Flow Problems by a Numerical Method Based on the Characteristic s," Phd. Thesis of Illinois, (1960).
62. Van Wylen J. J. and Sonntag R. E., "Fundamentals of classical thermodynamics," 2<sup>ème</sup> edition, (1976), John Willey and sons, Inc.
63. Zebbiche T., "Stagnation Temperature effect on the Supersonic axisymmetric Minimum Length Nozzle Design with Application for Air, " Advances in Space Research, Vol. 48, n° 23, PP. (2011), 1656-1675.
64. Zebbiche T., "Supersonic Axisymmetric Minimum Length Nozzle Conception at High Temperature," AIAA-2008-3674, 40<sup>th</sup> AIAA Thermophysics Conference, (23-26 June 2008), USA.
65. Zebbiche T., "Stagnation Temperature Effect on the Prandtl Meyer Function," AIAA Journal Vol. 45, n° 4, (2007), 952-954.
66. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Flow Parameters at High Temperature application for Air in Nozzle," DGLR-2005-256, German Aerospace Congress, (26-29, September 2005), Friedrichshafen, Germany.
67. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Two-Dimensionnel Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," Chinese Journal of Aeronautics, Vol. 20, n° 01, (2007), 29-39.
68. Zebbiche T., "New Generalized Form of the Prandtl Meyer Function. Application for Air at High Temperature," AIAA-2006-3674, 25<sup>th</sup> Applied Aerodynamics Conference, (5-8 June 2006), San Francisco, USA.
69. Zebbiche T. and Youbi Z., "Effect of Stagnation Temperature on the Supersonic Flow Parameters with Application for Air in Nozzles, " The Aeronautical Journal, Vol, 111, n° 1115, (Jan 2007), 31-40.
70. Zebbiche T., "Tuyères Supersoniques à Haute Température," Edition Universitaires Européennes, ISBN 978-613-1-50997-1, (May 2010).
71. Zucker R. D. and Bilbarz O., "Fundamentals of GasDynamics," John Wiley & Sons, (2002), New Jersey, USA.
72. Zucro M. J. and Hoffman J. D., "Gas Dynamics," Vol. 1 and Vol. 2, (1976), New York, Wiley, USA.