

**UNIVERSITÉ SAAD DAHLAB DE BLIDA 1**

**Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales**

## **THESE DE DOCTORAT**

Spécialité : Aéronautique

**ETUDE DES COMPOSITES FISSURES VIEILLIS SOUS  
CONDITIONS HYGROTHERMIQUES MODE TRANSITOIRE**

Par

**KHODJET-KESBA Mohamed**

Devant le jury composé de :

S. BERGHEUL	Professeur, Université de Blida 1	Président
Z. SEREIR	Professeur, Université d'Oran	Examineur
A. BEZAZI	Professeur, Université de Guelma	Examineur
A. TOUNSI	Professeur, U. de Sidi Bel Abbès	Examineur
E. ADDA BEDIA	Professeur, U. de Sidi Bel Abbès	Directeur de thèse
A. BENKHEDDA	Maître de Conférences A, U. de Blida 1	Co- Directeur

Blida, Décembre 2016

## RESUME

L'étude présentée concerne l'évolution des propriétés élastiques en fonction de la densité de fissurations dans les composites  $[\beta_n/\theta_m]_s$  stratifiés à matrice organique. Les stratifiés sont soumis à des conditions de température et d'humidité variables dans le temps. Deux approches analytiques ont été utilisées pour évaluer la perte des propriétés élastiques, la méthode de diffusion de cisaillement et le modèle d'HASHIN. Les résultats représentent clairement la dépendance de la réduction des caractéristiques mécaniques en fonction de la densité de fissurations et des conditions d'environnement.

Mots Clé : Fissuration transverse, Hygrothermie, Hashin, Densité de fissurations

## SUMMARY

The presented study concerns the evolution of elastic properties function of the crack density in  $[\beta_n/\theta_m]_s$  composite laminates with organic matrix. The laminates are subjected to the temperature and concentration conditions in transient mode. Two analytical approaches were used to estimate the elastic properties degradation, the Shear Lag and HASHIN models. The results represent clearly the dependence of the mechanical properties degradation on the cracks density and environmental conditions.

Keywords : Transverse crack, Hygrothermal, Hashin, Crack density

## ملخص

إن الدراسة المعروضة والتي تخص تطور الخصائص المرنة وفقا لكثافة التشقق داخل المواد المركبة  $[\beta_n/\theta_m]_s$  ذات النسيج المركب العضوي. هذه الطبقات تتعرض إلى تأثير الحرارة و الرطوبة المتغيرة عبر الزمن, استعمل نهجين تحليليين لتقييم إنخفاض الخصائص المرنة، طريقة نشر الجز، طريقة هاشين. من الواضح أن النتائج تعبر عن علاقة تدهور الخصائص المرنة بالانشقاق العمودي والظروف البيئية. الكلمات المفاتيح : تكسير عرضية, الرطوبة الحرارية, هاشين, كثافة تكسير

## REMERCIEMENTS

*Mes vifs et respectueux remerciements vont tout d'abord à mon Co-Encadreur Madame BENKHEDDA Amina, Docteur à l'université de Blida, à qui je tiens à exprimer toute ma profonde reconnaissance surtout pour sa disponibilité et ses prestigieux conseils dérivant de sa très haute compétence, qui ont donné un encadrement de très haut niveau et de qualité dans la faisabilité de ce travail. Je salue en elle ses grandes qualités humaines, sa bonté, sa modestie, son enthousiasme, son dévouement et son sens extraordinaire de la communication.*

*Je remercie vivement l'équipe du Laboratoire Matériaux et Hydrologie de l'Université de Sidi Bel Abbès et particulièrement le Professeur ADDA BEDIA pour tous les éclaircissements et la documentation qu'il a mis à ma disposition.*

*Je tiens à exprimer ma reconnaissance au Professeur BERGHEUL Said pour avoir accepté de présider le jury ainsi qu'aux Professeurs SEREIR Zouaoui, BEZAZI Abderrezak et TOUNSI Abdelouahed pour avoir accepté la charge d'examineurs de ce travail.*

*Enfin, mes vives pensées vont à toutes les personnes que j'ai côtoyées durant ce parcours et à toutes celles qui m'ont aidée et ont ainsi contribué par leurs présences au bon déroulement de ma thèse de doctorat.*

## TABLE DES MATIERES

RESUME.....	
REMERCIEMENTS.....	
TABLES DES MATIERES.....	
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX.....	
INTRODUCTION.....	13
1. RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE.....	16
1.1 Introduction .....	16
1.2 Problématique .....	17
1.3 Modélisation.....	17
1.4 Orientation du sujet de recherche .....	36
2. MODELISATION DU COMPORTEMENT MECANIQUE D'UN STRATIFIE $[\beta_n/\theta_m]_s$ ENDOMMAGÉ PAR FISSURATION TRANSVERSE.....	37
2.1 Introduction .....	37
2.2 Modélisation analytique .....	38
2.3 Conclusion .....	63
3. SIMULATION ET RÉSULTATS DES STRATIFIÉS $[\beta_m/\theta_n]_s$ FISSURÉS AVEC CHARGEMENT MÉCANIQUE .....	64
3.1 Introduction.....	64
3.2 Organigramme.....	64
3.3 Etude du module de Young longitudinal .....	67
3.4 Etude du module de cisaillement longitudinal.....	80
3.5 Etude du coefficient de Poisson.....	85
3.6 Conclusion.....	92
4. SIMULATION ET RÉSULTATS DES STRATIFIÉS $[\beta_m/\theta_n]_s$ FISSURÉS AVEC CHARGEMENT MÉCANIQUE ET CONDITIONS HYGROTHERMIQUE .....	94
4.1 Introduction.....	94
4.2 Organigramme .....	94

4.3 Effet hygrothermique par le modèle de Tsai « transitoire » .....	97
4.4 Effet hygrothermique sur la réduction de la rigidité relative pour les stratifiés $[\beta_m/\theta_n]_s$ .....	102
4.5 Effet hygrothermique sur la réduction de la rigidité totale pour les stratifiés $[\beta_m/\theta_n]_s$ .....	112
4.6 Effet hygrothermique sur la réduction du module de cisaillement longitudinal pour les stratifiés $[\beta_m/\theta_n]_s$ .....	118
4.7 Effet hygrothermique sur la réduction du coefficient de Poisson pour les stratifiés $[\beta_m/\theta_n]_s$ .....	125
4.8 Conclusion.....	132

CONCLUSION GENERALE.....	133
--------------------------	-----

PERSPECTIVES.....	135
-------------------	-----

LISTE DES SYMBOLES.....	
-------------------------	--

BIBLIOGRAPHIE.....	
--------------------	--

.

## LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1 : Endommagement d'un stratifié croisé sollicité en traction.....	18
Figure 1.2 : Distribution des fissures transverses dans la largeur de l'éprouvette $[0_3/90]_s$ en époxyde-fibres de carbone en fonction du niveau de chargement [27]....	22
Figure 1.3 Evolution de la densité de fissures transverse en fonction de la charge appliquée. Influence de l'épaisseur de la couche transverse [18].....	23
Figure 1.4 Evolution de la densité de fissures transverses en fonction de la charge appliquée pour un stratifié en T300-914 [1]. I: $[0_2/90/0]_s$ , II: $[0_3/90]_s$ , S: $[0_3/90/0_4]_s$ , D: $[0_7/90]_s$ .....	23
Figure 1.5 : Evolution de la densité de fissures transverses en traction quasi-statique pour le stratifié $[0/90_n/0]$ en époxyde 934-fibres de carbone T300 [34].....	26
Figure 2.1 : fissuration transverse et cellule élémentaire.....	38
Figure 2.2 : Contraintes exercées sur un élément de la couche à $\theta^\circ$ .....	43
Figure 2.3 : Cellule élémentaire et fissuration transverse.....	52
Figure 2.4 : stratifié $[\beta_n/\theta_m]_s$ [88].....	56
Figure 2.5 : Cellule de base [88].....	56
Figure 3.1 : Organigramme du TRANCRAK.....	65
Figure 3.2 : Comparaison entre la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié $[0/90]_s$ AS4-3502 et l'expérimental [51].....	67
Figure 3.3 : Comparaison entre la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié $[0/90_2]_s$ AS4-3502 et l'expérimental [51].....	68
Figure 3.4 : Comparaison entre la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié $[0/90_3]_s$ AS4-3502 et l'expérimental [51].....	68

Figure 3.5 : Comparaison de la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissures [0/90] <sub>s</sub> AS/3502 et l'expérimental [51].....	69
Figure 3.6 : Comparaison de la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissures [0/90 <sub>2</sub> ] <sub>s</sub> AS/3502 et l'expérimental [51].....	70
Figure 3.7 : Comparaison de la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissures [0/90 <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> Verre/époxy et l'expérimental [5].....	70
Figure 3.8 : Comparaison entre la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissures [0/90] <sub>s</sub> AS4-3502 pour les trois modèles.....	71
Figure 3.9 : Comparaison entre la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissures [0/90 <sub>2</sub> ] <sub>s</sub> AS4-3502 pour les trois modèles.....	72
Figure 3.10 : Comparaison entre la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissures [0/90 <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> verre/époxy pour les trois modèles.....	72
Figure 3.11 : Réduction du module de Young longitudinal en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié GF/EP [0 <sub>2</sub> /90 <sub>4</sub> ] <sub>s</sub> .....	73
Figure 3.12 : Réduction du module de Young longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié GF/EP [±15/90 <sub>4</sub> ] <sub>s</sub> .....	74
Figure 3.13 : Réduction du module de Young longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié GF/EP [±30/90 <sub>4</sub> ] <sub>s</sub> .....	74
Figure 3.14 : Réduction du module de Young longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié GF/EP [±40/90 <sub>4</sub> ] <sub>s</sub> .....	75
Figure 3.15 : Réduction de la rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissuration pour différentes angle β° (hors fissure) pour le stratifié [β/90 <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> .....	76
Figure 3.16 : Réduction de la rigidité longitudinale en fonction d'angles de fibre β° (hors fissuration) pour différentes densités de fissuration pour le stratifié [β/90 <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> .....	76
Figure 3.17 : Réduction de la rigidité longitudinale en fonction d'angles de fibre β° (hors fissurations) pour différents rapport d'épaisseur avec ρ = 0.3 (1/mm).....	77
Figure 3.18 : Réduction du module de Young longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié verre /époxy [0/45] <sub>s</sub> avec t <sub>45</sub> =0.61mm.....	78
Figure 3.19 : Réduction du module de Young longitudinal en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié verre /époxy [0/45] <sub>s</sub> avec t <sub>45</sub> =0.64mm.....	79

Figure 3.20 : Réduction de la rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissurations pour différents angle $\theta^\circ$ d'orientation des couches fissurées pour le stratifié $[0/\theta_3]_s$ .....	79
Figure 3.21 : Réduction de la rigidité longitudinale en fonction d'angles $\theta^\circ$ d'orientation des couches fissurés pour différentes densités de fissuration pour le stratifié $[0/\theta_3]_s$ .....	80
Figure 3.22 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié verre /époxy $[0/90_n]_s$ avec différents rapport d'épaisseurs.....	81
Figure 3.23 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié verre /époxy $[\beta/90]_s$ avec différents angle de fibre $\beta^\circ$ .....	82
Figure 3.24 : Réduction du module de cisaillement en fonction d'angles de fibre (hors fissuration) pour différentes densités de fissuration pour le stratifié $[\beta/90]_s$ ( $t_{90}=0.61\text{mm}$ ).....	82
Figure 3.25 : Réduction du module de cisaillement en fonction d'angles de fibre (hors fissuration) pour différentes rapport d'épaisseur avec $\rho = 0.3$ (1/mm).....	83
Figure 3.26 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié verre /époxy $[0/45_n]_s$ avec différents rapport d'épaisseurs.....	84
Figure 3.27 : Réduction du module de cisaillement en fonction de la densité de fissurations pour différentes angle $\theta^\circ$ d'orientation des couches fissurés pour le stratifié $[0/\theta_3]_s$ .....	84
Figure 3.28 : Réduction du module de cisaillement en fonction d'angles $\theta^\circ$ d'orientation des couches fissurés pour différentes densités de fissuration pour le stratifié $[0/\theta_3]_s$ .....	85
Figure 3.29 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié GF/EP $[0_2/90_4]_s$ .....	86
Figure 3.30 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié GF/EP $[\pm 15/90_4]_s$ .....	87
Figure 3.31 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié GF/EP $[\pm 30/90_4]_s$ .....	87
Figure 3.32 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié GF/EP $[\pm 40/90_4]_s$ .....	88

Figure 3.33 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour différentes angle $\beta$ (hors fissure) pour le stratifié $[\pm\beta/90_4]_s$ .....	88
Figure 3.34 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction des angles d'orientation des fibres (hors fissuration) pour différentes densités de fissurations pour le stratifié $[\pm\beta/90_4]_s$ .....	89
Figure 3.35 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié verre /époxy $[0/45_n]_s$ avec différents rapport d'épaisseurs.....	90
Figure 3.36 : Réduction coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié verre /époxy $[0/75_n]_s$ avec différents rapport d'épaisseurs.....	90
Figure 3.37 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour différentes angle $\theta^\circ$ d'orientation des couches fissurées pour le stratifié $[0/\theta_3]_s$ .....	91
Figure 3.38 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction d'angle $\theta^\circ$ d'orientation des couches fissurées pour différentes densités de fissurations pour le stratifié $[0/\theta_3]_s$ .....	92
Figure 4.1 Organigramme du TSAITRAN.....	95
Figure 4.2 : Absorption-Désorption [75] .....	97
Figure 4.3 : Cas d'une désorption.....	98
Figure 4.4 : Cas d'une absorption.....	98
Figure 4.5 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les trois environnement hygrothermiques (i=1,2,3) avec $V_f=0.7$ (cas non transitoire).....	104
Figure 4.6 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les trois environnement hygrothermiques (i=1,2,3) avec $V_f=0.7$ et $t=4222h$ (cas transitoire).....	104
Figure 4.7 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire $t=4222h$ et non transitoire).....	105
Figure 4.8 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[\beta/90_3]_s$ T300/5208 et différents angle $\beta$ avec $V_f=0.7$ (cas non transitoire).....	106

Figure 4.9 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[\beta/90_3]_s$ T300/5208 et différents angles $\beta$ avec $V_f=0.7$ et $t=4222h$ (cas transitoire).....	106
Figure 4.10 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[\beta/90_3]_s$ T300/5208 et les deux modèle de Tsai (transitoire $t=4222h$ et non transitoire) avec $V_f=0.7$ .....	107
Figure 4.11 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/15_3]_s$ T300/5208 et $V_f=0.7$ (cas non transitoire).....	108
Figure 4.12 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/30_3]_s$ T300/5208 et $V_f=0.7$ (cas non transitoire).....	108
Figure 4.13 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/45_3]_s$ T300/5208 et $V_f=0.7$ (cas non transitoire).....	109
Figure 4.14 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/15_3]_s$ T300/5208 et $V_f=0.7$ et $t=4222h$ (cas transitoire).....	110
Figure 4.15 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/30_3]_s$ T300/5208 et $V_f=0.7$ et $t=4222h$ (cas transitoire).....	110
Figure 4.16 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/45_3]_s$ T300/5208 et $V_f=0.7$ et $t=4222h$ (cas transitoire).....	111
Figure 4.17 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/\theta_3]_s$ T300/5208 et $T=120^\circ C$ et $C=1\%$ .....	111
Figure 4.18 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/90_3]_s$ T300/5208 et $V_f=0.7$ (cas non transitoire).....	113
Figure 4.19 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/90_3]_s$ T300/5208 et $V_f=0.7$ et $t=4222h$ (cas transitoire).....	114
Figure 4.20 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/90_3]_s$ T300/5208 et $V_f=0.7$ ( $T=120^\circ C$ et $C=1\%$ ).....	114
Figure 4.21 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[15/90_3]_s$ T300/5208 et $V_f=0.7$ (cas non transitoire).....	115
Figure 4.22 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[30/90_3]_s$ T300/5208 et $V_f=0.7$ (cas non transitoire).....	115
Figure 4.23 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[40/90_3]_s$ T300/5208 et $V_f=0.7$ (cas non transitoire).....	116

Figure 4.24 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié [15/90 <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> T300/5208 et Vf=0.7 et t=4222h (cas transitoire).....	116
Figure 4.25 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié [30/90 <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> T300/5208 et Vf=0.7 et t=4222h (cas transitoire).....	117
Figure 4.26: Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié [40/90 <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> T300/5208 et Vf=0.7 et t=4222h (cas transitoire).....	117
Figure 4.27: Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié [β/90 <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> T300/5208 et Vf=0.7 (T=120°C et C=1%).....	118
Figure 4.28 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les trois environnement hygrothermiques (i=1,2,3) avec Vf=0.7 (cas non transitoire).....	119
Figure 4.29 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les trois environnement hygrothermiques (i=1,2,3) avec Vf=0.7 et t=4222h (cas transitoire).....	120
Figure 4.30 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire t=4222h et non transitoire) avec Vf=0.7 (T=120°C et C=1%).....	120
Figure 4.31 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié [β/90 <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> T300/5208 et différents angle β avec Vf=0.7 (cas non transitoire).....	121
Figure 4.32 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié [β/90 <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> T300/5208 et différents angle β avec Vf=0.7 et t=4222h (cas transitoire).....	122
Figure 4.33 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures et différents angle β° pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire t=4222h et non transitoire) avec Vf=0.7 (T=120°C et C=1%).....	122
Figure 4.34 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié [0/15 <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> T300/5208 et différents angle θ avec Vf=0.7 (cas non transitoire).....	123
Figure 4.35 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié [0/45 <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> T300/5208 et différents angle θ avec Vf=0.7(cas non transitoire).....	124

Figure 4.36 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/\theta_3]_s$ T300/5208 et différents angle $\theta$ avec $V_f=0.7$ et $t=4222h$ (cas transitoire).....	124
Figure 4.37 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures et différents angle $\theta^\circ$ pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire $t=4222h$ et non transitoire) avec $V_f=0.7$ ( $T=120^\circ C$ et $C=1\%$ ).....	125
Figure 4.38 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/90_m]_s$ T300/5208 et les trois environnement hygrothermiques ( $i=1,2,3$ ) avec $V_f=0.7$ (cas non transitoire).....	126
Figure 4.39 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/90_m]_s$ T300/5208 et les trois environnements hygrothermiques ( $i=1,2,3$ ) avec $V_f=0.7$ et $t=4222h$ (cas transitoire).....	127
Figure 4.40 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire $t=4222h$ et non transitoire) avec $V_f=0.7$ ( $T=120^\circ C$ et $C=1\%$ ).....	128
Figure 4.41 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[\beta/90_3]_s$ T300/5208 et différents angle $\beta^\circ$ avec $V_f=0.7$ (cas non transitoire).....	128
Figure 4.42 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[\beta/90_3]_s$ T300/5208 et différents angle $\beta^\circ$ avec $V_f=0.7$ et $t=4222h$ (cas transitoire).....	129
Figure 4.43 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures et différents angle $\beta^\circ$ pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire $t=4222h$ et non transitoire) avec $V_f=0.7$ ( $T=120^\circ C$ et $C=1\%$ ).....	130
Figure 4.44 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/\theta_3]_s$ T300/5208 et différents angle $\theta$ avec $V_f=0.7$ (cas non transitoire).....	130
Figure 4.45 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié $[0/\theta_3]_s$ T300/5208 et différents angle $\theta$ avec $V_f=0.7$ et $t=4222h$ (cas transitoire).....	131
Figure 4.46 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures et différents angle $\theta^\circ$ pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire $t=4222h$ et non transitoire) avec $V_f=0.7$ ( $T=120^\circ C$ et $C=1\%$ ).....	132

Tableau 1.1 Influence de l'épaisseur de la couche orientée à 90° sur la valeur de la contrainte à l'initiation de la première fissure transverse en traction quasi-statique...	20
Tableau 1.2 : Influence de l'orientation des plis adjacents et de l'épaisseur de la couche transverse sur la déformation longitudinale dans la couche à 90°, correspondant à l'initiation des fissures transverses pour un composite époxyde 934-fibres de carbone T300 en traction quasi-statique [23].....	21
Tableau 3.1 : Propriétés mécaniques du composite verre/époxyde.....	78
Tableau 4.1 : Caractéristiques de fibres et matrice du T300/5208, [1].....	102
Tableau 4.2 Caractéristiques de variation de température et d'humidité, [1].....	102
Tableau 4.3 Propriétés du T300/5208 Tr=22°C, [1].....	102
Tableau 4.4 Caractéristiques de diffusion du T300/5208, [1].....	102

## INTRODUCTION

La densité des fissures dans les matériaux composites fissurés peut augmenter considérablement sous les effets des chargements mécaniques ainsi que sous les effets environnementaux, auxquels ces matériaux sont sensibles. La propagation de ces fissures et leurs multiplications peut fragiliser le matériau et réduire ses propriétés élastiques, alors que le matériau est tenu de répondre aux sollicitations auxquelles il est soumis d'une manière durable.

Les stratifiés à fibres longues sont des composites particuliers, constitués d'un empilement de couches élémentaires ou plis à l'intérieur desquels les renforts fibreux, noyés dans une matrice, sont alignés selon une direction privilégiée. Lors d'une sollicitation de traction monotone ou cyclique, la dégradation de matériaux homogènes et isotropes est généralement localisée et se produit selon trois stades : l'amorçage, la propagation d'une fissure principale et la ruine finale. Le premier type d'endommagement qui apparaît est la fissuration transverse des couches orientées à  $90^\circ$ . Pour les milieux anisotropes, à un état d'endommagement donné, il peut y avoir un comportement mécanique très différent de celui du matériau sain contrairement aux matériaux isotropes homogènes, dont le comportement est quasiment identique entre l'amorçage d'une fissure et sa propagation, et ceci jusqu'à atteindre un état proche de la rupture ou de la déformation plastique.

L'esprit dans lequel s'inscrit cette recherche, doit tenir compte dans un premier temps de l'évolution de la densité de fissurations dans un stratifié fissuré et soumis à des efforts de traction, avec différents angles d'orientations des fibres des couches intérieurs et extérieurs. Le comportement des structures est ensuite étudié à travers l'étude des propriétés élastiques et leurs évolutions sous différentes conditions environnementales avec la variation de la température et de l'humidité.

L'étude accomplie utilise deux méthodes, la méthode de diffusion de cisaillement et le modèle d'HASHIN. La méthode de diffusion de cisaillement (Shear Lag) s'intéresse à l'étude du champ de déplacement longitudinal, à travers l'épaisseur des couches intérieures et extérieures du stratifié fissuré avec fissurations transverses, alors que la méthode d'HASHIN, étudie le champ de contraintes statiquement admissible minimisant l'énergie complémentaire. Une comparaison entre ces deux méthodes sera établie.

Cette étude a été accomplie, selon les étapes successives suivantes:

1. Le chapitre 1 est consacré à l'étude bibliographique et présente les différents modèles (analytiques et numériques), qui ont été utilisés pour modéliser la fissuration transverse, dans les stratifiés à matrice organique avec différents angles d'orientations des fibres. Cette étape nous a permis d'orienter notre recherche.
2. Comme l'étude s'intéresse aux stratifiés fissurés, le deuxième chapitre concerne la résolution du problème d'élasticité qui consiste à rechercher, dans une cellule élémentaire, le champ des déplacements par la méthode de diffusion de cisaillement, ou le champ de contraintes statiquement admissible minimisant l'énergie complémentaire par la méthode d'Hashin.
3. Dans le troisième chapitre, nous représenterons les résultats obtenus par la simulation du comportement des propriétés élastiques, en fonction de la densité de fissuration d'un composite sous sollicitation uni axiale et avec différents angles d'orientation des fibres. Une comparaison avec les études expérimentales réalisées sera établie.
4. Dans le quatrième chapitre, l'effet du vieillissement hygrothermique est pris en considération au niveau microscopique de la matrice et des fibres par le modèle de Tsai, pour représenter l'évolution des propriétés élastiques en fonction de la

densité de fissures et avec la variation de la température et de l'humidité. Des simulations pour différents angles d'orientation des fibres sont obtenues. Une comparaison entre les modèles hygrothermiques sera faite.

Nous achèverons notre étude par une conclusion générale, en rappelant les principaux résultats obtenus et nous terminerons par les perspectives futures de cette étude.

# CHAPITRE 1

## RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

### 1.1 Introduction

Les matériaux composites sont caractérisés, par une forte hétérogénéité sur le plan microscopique et une anisotropie prononcée de leurs propriétés mécaniques sur le plan macroscopique. Une utilisation rationnelle de ces matériaux, de quelle nature soit elle, exige une bonne compréhension et une modélisation réaliste de leurs propriétés directionnelles.

Dans les années soixante dix, les études réalisées sur la tenue des matériaux composites utilisés dans le transport et le stockage de différents fluides, ont montré que malgré une très bonne tenue à la corrosion, les matériaux composites à matrice polymère pouvaient être fortement altérés par les facteurs environnementaux tels que la température, l'humidité ambiante, les rayons ultraviolets, l'immersion dans certains fluides.

Dans le domaine aéronautique, le cas est d'autant important qu'illustratif. Les structures aéronautiques sont réalisées en grandes parties par des composites à matrice polymère, et elles évoluent dans des conditions d'environnement variables, en termes d'altitudes, de vitesses, de températures et d'humidité.

En effet, il s'est avéré que les propriétés mécaniques de certaines matrices polymères pouvaient être modifiées, suite à une exposition prolongée dans une atmosphère humide et à température variable. L'évolution de ces propriétés avec le temps sous différentes conditions d'utilisation, conditions auxquelles les structures seront confrontées durant leur service, a grandement attisé la curiosité de

nombreuses études et recherches scientifiques, en vue de connaître avec précision la durabilité de la structure composite et de garantir ainsi sa fiabilité.

## 1.2 Problématique

Afin d'évaluer quantitativement le comportement mécanique d'un composite sous sollicitation, il est important de connaître le champ de contraintes dans le composite endommagé. Le problème à résoudre en premier lieu est celui de l'élasticité en fonction de la densité de fissuration sur un stratifié croisé et non croisé. Comme tout problème d'élasticité, sa résolution exacte consiste à rechercher, dans une cellule élémentaire, le champ des déplacements et le champ des contraintes qui satisfont en chaque point les équations d'équilibre, les relations déformations déplacements, et les conditions de compatibilité. La réduction des propriétés mécaniques sera mise en évidence pour différents rapports d'épaisseurs et angle d'orientation des fibres.

Enfin, les effets hygrothermiques seront examinés à travers le modèle de Tsai [1], en régime transitoire.

## 1.3 Modélisation

Dans les matériaux composites à fibres longues soumis à un chargement monotone ou cyclique, la rupture finale du stratifié résulte du développement et de l'accumulation de plusieurs types d'endommagement. A l'échelle microscopique, les différents types d'endommagement observés se résument à des microfissures dans la matrice ou à l'interface des plis, décohésions fibre/matrice, arrachement des fibres ainsi que des ruptures de fibres. A l'échelle macroscopique, les mécanismes d'endommagement rencontrés sont : la rupture de la matrice le long des fibres connue sous le nom de fissuration intra-laminaire, décollement inter-plies appelé délaminage et la rupture des fibres qui représente le mode d'endommagement le plus dangereux puisqu'il apparaît tardivement et conduit à la ruine finale du matériau.

L'étude de chacun des mécanismes d'endommagement cités devient incontournable, sachant que tous les travaux expérimentaux menés durant les deux dernières décennies, montrent que le matériau composite est modifié progressivement [3,4]. Dans le but de décrire l'évolution de l'endommagement dans des stratifiés, il est indispensable de bien comprendre le processus d'endommagement de stratifiés en utilisant deux directions de fibres orthogonales. Pour ce type de stratifiés à matrice organique, sollicités en traction uni-axiale, on observe les quatre types d'endommagement suivants (Fig. 1.1) :

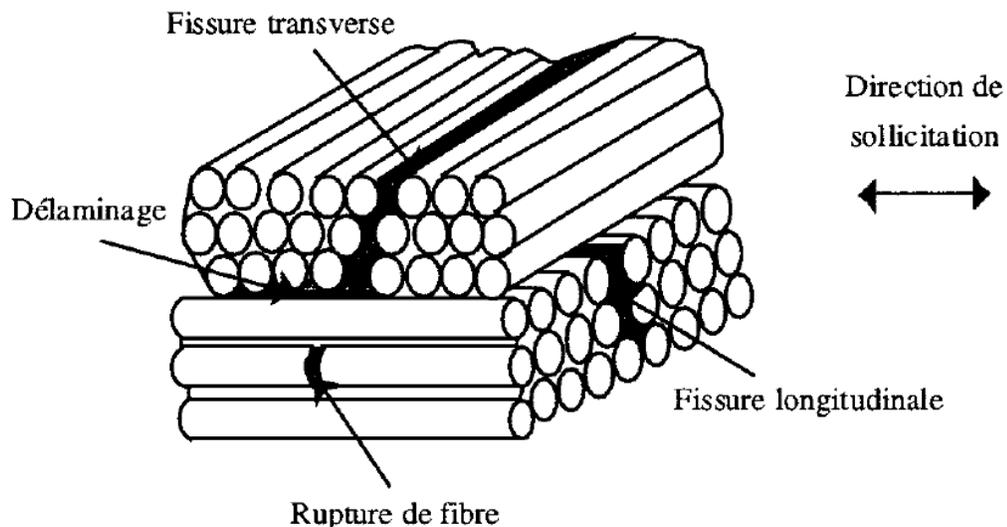


Figure 1.1 : Endommagement d'un stratifié croisé sollicité en traction [2].

- Fissuration transverse : La rupture dans la matrice est provoquée par des criques ou des décohésions fibre/matrice, se propageant le long des fibres désorientées par rapport à la direction de sollicitation.
- Fissuration longitudinale : Ces fissures sont de même nature que les fissures transverses, sauf qu'elles se développent le long des fibres orientées suivant la direction de sollicitation.

- Délaminage : Le décollement à l'interface des couches est causé par des microfissures.
- Rupture des fibres : C'est une étape ultime menant à la ruine finale du matériau composite.

### 1.3.1 Etudes expérimentales

Les travaux expérimentaux montrent que pour des stratifiés à fibres longues soumis à un chargement cyclique ou monotone, la fissuration des plis désorientés par rapport à la direction de la sollicitation est le premier mécanisme d'endommagement qui apparaît. L'évolution de la fissuration transverse dans les plis à  $90^\circ$  a été caractérisée en 1977, par Reifsnider [2,5], et Garrett et Bailey [6] pour des stratifiés croisés sollicités en traction monotone ou cyclique. Ensuite de nombreuses études (Schulte et al. [7], Stinchcomb [8], Boniface et Ogini [9], Joffe et al. [10], Barbero et Cosso [11], Singh et Talreja [12], Li et Hafeez [13], Lundmark et Varna [14], Akula et Garnich [15], Huang et al. [16], Jalalvand et al. [17]) ont été menées, afin de mettre en évidence les différents paramètres pilotant la fissuration transverse. L'évolution de cet endommagement se décompose en deux étapes :

- Initiation de la première fissure transverse.
- Propagation et multiplication des fissures transverses.

#### 1.3.1.1 Apparition de la première fissure transverse

En traction monotone, l'apparition de la première fissure transverse se produit pour une contrainte seuil  $\sigma_{FPF}$  (déformation seuil  $\varepsilon_{FPF}$ ) de rupture de la matrice dans la couche désorientée. Cette contrainte critique dépend de la nature des constituants du composite et de l'architecture du stratifié. Les travaux expérimentaux menés sur un stratifié de type  $[0_m/90_n]$ , par Garrett et Bailey [6] pour un composite époxyde-fibres de verre, Wang [18] et Harrison et Bader [19] pour un composite époxyde-fibres de

carbone, montrent que l'amorçage de la première fissure transverse est plus facile pour une couche désorientée épaisse (Tableau 1.1).

Tableau 1.1 : Influence de l'épaisseur de la couche orientée à 90° sur la valeur de la contrainte à l'initiation de la première fissure transverse en traction quasi-statique.

[0/90 <sub>n</sub> /0] époxyde-fibres de verre [6]		[0/90 <sub>n</sub> /0] époxyde-fibres de carbone [18]		[0 <sub>4</sub> /90 <sub>n</sub> /0 <sub>4</sub> ] époxyde-fibres de carbone [19]	
n	ε <sub>FPF</sub> (%)	n	σ <sub>FPF</sub> (MPa)	n	ε <sub>FPF</sub> (%)
16	0,37	4	305	8	0,3
13	0,38	3	430	4	0,35
10	0,44	2	540	2	0,4
4	0,48	1	915	1	0,65

L'influence des séquences d'empilement sur l'amorçage des fissures a également été mise en évidence par Lafarie-Frenot et al. [20]. Deux séquences d'empilement sont traitées pour des stratifiés croisés constitués de 8 plis et 16 plis en époxyde 914-fibres de carbone T300. Pour le stratifié à 8 plis l'amorçage se produit à une contrainte  $\sigma_{FPF}$  égale à 1250 MPa pour le stratifié [0<sub>2</sub>/90/0]<sub>s</sub> et 750 MPa pour le stratifié [0<sub>3</sub>/90]<sub>s</sub>. Pour le stratifié de 16 plis, la contrainte  $\sigma_{FPF}$  est égale à 1300 MPa pour [0<sub>3</sub>/90/0<sub>4</sub>]<sub>s</sub> et 950 MPa pour [0<sub>7</sub>/90]<sub>s</sub>. Des conclusions similaires sont faites par Highsmith et Reifsnider [21,22] qui ont traité l'influence des séquences d'empilement pour les stratifiés [0/90<sub>3</sub>]<sub>s</sub> et [90<sub>3</sub>/0]<sub>s</sub> en époxyde-fibres de verre.

Les travaux expérimentaux réalisés par Flagg et Kural [23], mettent en évidence l'effet de l'orientation des plis adjacents et l'épaisseur de la couche transverse sur l'initiation des fissures transverses pour des stratifiés de types [±θ/90<sub>n</sub>]<sub>s</sub> en époxyde-fibres de carbone. Ils observent que pour un angle θ important, la déformation

longitudinale dans la couche désorientée, à l'initiation de la première fissure transverse a tendance à diminuer (Tableau 1.2).

Tableau 1.2 : Influence de l'orientation des plis adjacents et de l'épaisseur de la couche transverse sur la déformation longitudinale dans la couche à 90°, correspondant à l'initiation des fissures transverses pour un composite époxyde 934 fibres de carbone T300 en traction quasi-statique [23].

n	$\epsilon^{(90)}_{xx}$ (%), $[0_2/90_n]_s$	$\epsilon^{(90)}_{xx}$ (%), $[\pm 30/90_n]_s$	$\epsilon^{(90)}_{xx}$ (%), $[\pm 60/90_n]_s$
1	0,953	0,879	0,721
2	0,7	0,739	0,666
4	0,59	0,604	0,540
8	0,497	0,496	0,463

### 1.3.1.2 Propagation et multiplication des fissures transverses

En traction quasi-statique, les fissures transverses se propagent instantanément dans toute la largeur de l'éprouvette [24,25,26]. Ces fissures se multiplient avec l'augmentation de la charge appliquée. La distribution des fissures transverses suivant la largeur est illustrée sur la figure 1.2 pour le stratifié  $[0_3/90]_s$ , en époxyde-fibres de carbone T300/914 sollicité en traction quasi-statique [27].

Au cours du prolongement du chargement, un état de saturation du nombre des fissures transverses est parfois observé, en particulier pour les stratifiés en époxyde-fibres de verre. L'espacement inter-fissures transverses étant alors régulier [5,6,9]. Les observations faites par Highsmith et Reifsnider [5], et Boniface et Ogini [9], respectivement sur les stratifiés  $[0/90_3]_s$  et  $[0/90]_s$ , en époxyde-fibres de verre, montrent que l'espacement inter-fissures à la saturation est de l'ordre de l'épaisseur de la couche transverse. Ce résultat ne peut être général, sachant que pour la plupart

des stratifiés en époxyde-fibres de carbone l'état de saturation n'est pas toujours observable.

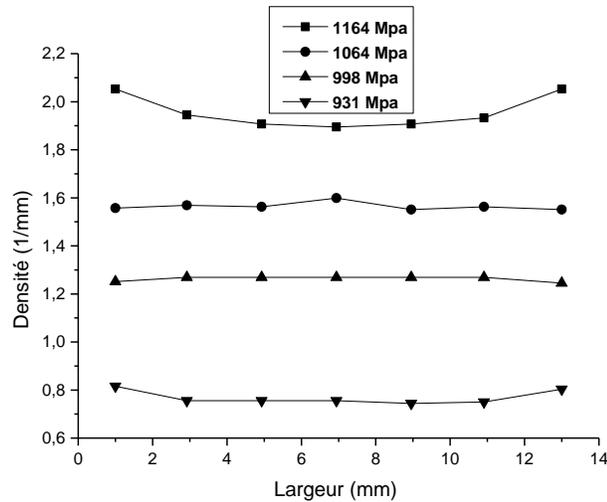


Figure 1.2 : Distribution des fissures transverses dans la largeur de l'éprouvette  $[0_3/90]_s$  en époxyde-fibres de carbone en fonction du niveau de chargement [27].

La multiplication des fissures transverses, leur densité ultime correspondant à la ruine finale, ainsi que l'existence ou non de la saturation sont conditionnées par la nature des constituants du composite [5,9] et l'architecture du stratifié [18,28]. La figure (1.3), illustre l'influence de l'épaisseur de la couche désorientée sur l'évolution de la fissuration transverse, pour un stratifié croisé  $[0/90_n/0]$  en époxyde-fibres de carbone [18]. L'épaisseur de la couche transverse n'a pratiquement pas d'influence sur la vitesse de multiplication des fissures transverses. Contrairement à la densité ultime qui décroît avec l'augmentation du nombre de plis désorientés. La rupture finale est donc plus précoce dans le cas des stratifiés contenant une couche désorientée épaisse. Ce phénomène a également été observé par Henaff-Gardin et al. [28] et Parvizi et al. [29].

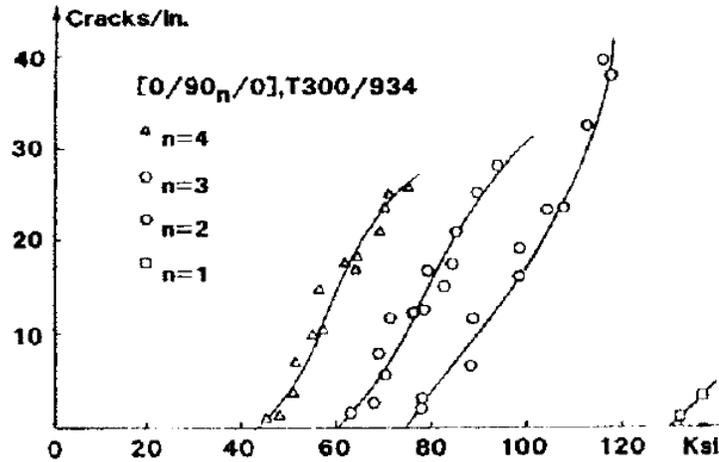


Figure 1.3 : Evolution de la densité de fissures transverses en fonction de la charge appliquée. Influence de l'épaisseur de la couche transverse [18].

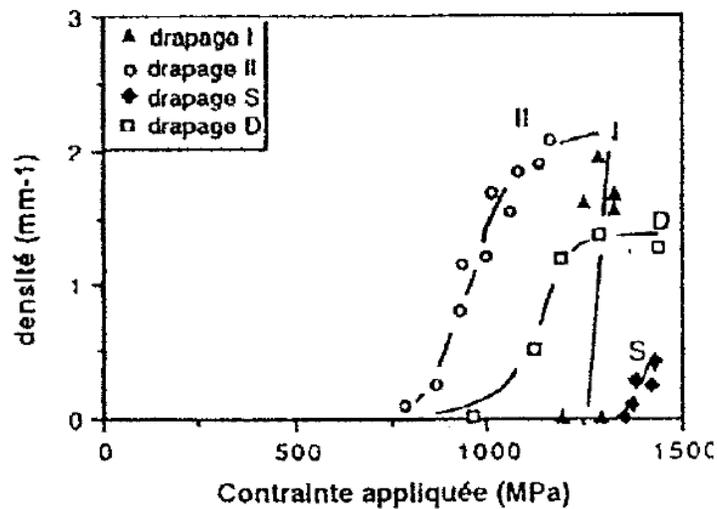


Figure 1.4 : Evolution de la densité de fissures transverses en fonction de la charge appliquée pour un stratifié en T300-914 [1]. I: [0<sub>2</sub>/90/0]<sub>s</sub>, II: [0<sub>3</sub>/90]<sub>s</sub>, S: [0<sub>3</sub>/90/0<sub>4</sub>]<sub>s</sub>, D:[0<sub>7</sub>/90]<sub>s</sub>.

L'influence des séquences d'empilement et du rapport des épaisseurs des couches sur la multiplication des fissures transverses a été mise en évidence par Lafarie-Frenot et al. [21,28,30], pour deux stratifiés croisés d'épaisseur différente (8 plis et 16 plis) en époxyde 914-fibres de carbone T300 (Fig. 1.4). En fin d'essai de traction monotone, on remarque que la valeur ultime de la densité de fissures transverses dépend à la fois des séquences d'empilement et du rapport des épaisseurs des couches (rapport de confinement). Par contre, la contrainte à la rupture dépend seulement du rapport d'épaisseur. Le rapport d'épaisseur est égal à 1/3 pour les stratifiés I, II et 1/7 pour les stratifiés S, D.

Urwald [27] a étudié l'influence d'un endommagement préexistant sur l'évolution des fissures transverses. Pour le stratifié  $[0_3/90]_s$  en T300-914 pré-endommagé par quelques fissures longitudinales, l'évolution des fissures transverses est fortement accélérée et le stratifié casse à 1131 MPa, valeur égale à 85% de la contrainte à la rupture du même stratifié sans dommages préexistants.

Les observations [8-31], effectuées sur des stratifiés de types  $[0_n/\pm 45]_s$  en époxyde-fibres de carbone, montrent que la fissuration des plis désorientés est le mode d'endommagement prédominant. Il va évoluer en cours d'essai de fatigue, pour atteindre un état de saturation des fissures hors-axe. L'influence des séquences d'empilement sur la densité de fissures à la saturation a été mise en évidence par Tahiri [31], qui a trouvé un rapport voisin de 1,5 entre les densités correspondant à la saturation des fissures hors-axe pour les stratifiés  $[0/45_2]_s$  et  $[0_2/45_2/0_2]_s$ . Pour le stratifié  $[\pm 45/0/90]_s$  en époxyde-fibres de verre, Caslini et al. [32] ont observé une saturation des fissures dans les plis désorientés ( $90^\circ$ ,  $-45^\circ$  et  $45^\circ$ ), à 20% de la durée de vie du stratifié. Ceci, à des densités de fissures différentes dans chaque pli :  $d_{90}=5,8 \text{ cm}^{-1}$ ,  $d_{-45}=4 \text{ cm}^{-1}$  et  $d_{45}=1,5 \text{ cm}^{-1}$ .

Selon Peters et Chou [3], il semble que la saturation ne soit jamais complètement atteinte et qu'à une phase d'endommagement brutal succède une production lente,

mais continue de fissures. Ces deux modes peuvent s'interpréter comme correspondant à deux modes – respectivement non perturbé et perturbé de redistribution des contraintes entre les couches à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . Généralement, en première approximation, on considère que le quasi-plateau correspond à une saturation.

### 1.3.2 Approche utilisant la diffusion de cisaillement

En 1977, Reifsnider [2] fut le premier à développer une approche analytique qui modélise le transfert de charge entre les couches orientées à  $90^\circ$  et  $0^\circ$  dans un stratifié croisé endommagé par fissuration transversale. La philosophie consiste à décomposer la demi épaisseur du stratifié en trois couches de rigidité différente: la couche longitudinale à  $0^\circ$ , la couche transverse à  $90^\circ$  et une couche fine riche en résine à l'interface  $0/90$ . L'auteur suppose ensuite que le transfert de charge se fait par diffusion de cisaillement dans la couche fine. L'épaisseur de la couche fine cisailée est obtenue expérimentalement de façon indirecte [5,6,18]. Les contraintes normales obtenues par Reifsnider sont réparties de façon uniforme suivant l'épaisseur des couches. D'autres auteurs ont rajouté un degré de raffinement en introduisant une évolution statistique des déformations à la rupture de la couche fissurée et/ou en donnant un champ de déplacement qui varie de façon linéaire ou parabolique suivant l'épaisseur.

A partir de ce modèle, Highsmith et Reifsnider [5] calculent la perte de rigidité pour le stratifié  $[0/90_3]_s$  en époxyde-fibres de verre. A l'état de saturation des fissures transverses, le modèle prédit une perte de 29% alors que la réduction du module longitudinal observé est de l'ordre de 45%. Ce modèle simplifié permet de décrire l'amorçage des fissures transverses et dans certains cas l'état de saturation.

Garrett et Bailey [6] utilisent le même type d'approche que Highsmith et Reifsnider [5] pour prédire l'amorçage et la multiplication des fissures transverses. Les contraintes normales sont calculées à partir de la déformation moyenne de la couche

transverse. La perte de rigidité obtenue à l'état de saturation est en bon accord avec les résultats expérimentaux pour des couches transverses épaisses. Dans cette approche, le déplacement longitudinal varie de façon linéaire suivant l'épaisseur de la couche transverse.

Steif [33] a affiné le modèle [6], en considérant une variation parabolique du déplacement longitudinal suivant l'épaisseur de la couche transverse. Il donne une expression simplifiée du module longitudinal en fonction de la densité de fissures transverses. La perte de rigidité prévue par ce modèle est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Le point fort du modèle de Steif par rapport aux autres est le fait que le paramètre de cisaillement ne dépend que des caractéristiques mécaniques et géométriques des plis, indépendamment de la couche cisailée plus ou moins fictive.

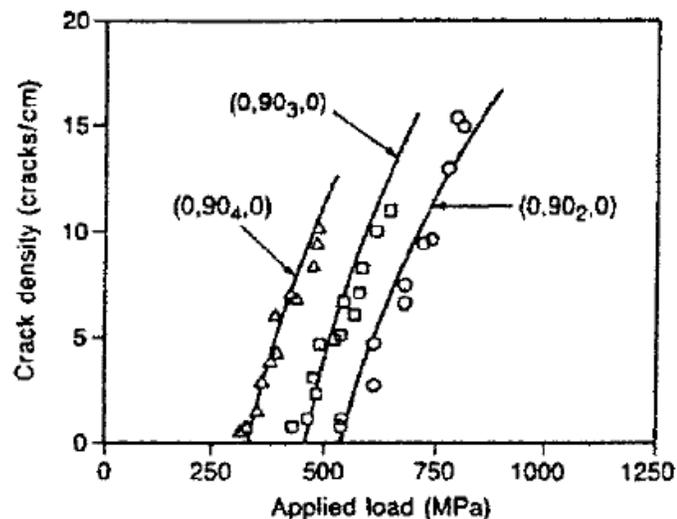


Figure 1.5 : Evolution de la densité de fissures transverses en traction quasi-statique pour le stratifié  $[0/90_n/0]$  en époxyde 934-fibres de carbone T300 [34].

Laws et Dvorak [34] proposent un modèle basé sur la mécanique de la rupture statistique. Ils donnent une expression du module longitudinal et du taux de restitution

d'énergie associé à la multiplication des fissures transverses dans un stratifié croisé, en prenant en compte les contraintes résiduelles. Le paramètre de cisaillement est déterminé à partir de la contrainte  $\sigma_{FPF}$ , correspondant à l'initiation des fissures transverses, obtenue expérimentalement. Les prédictions sur la réduction du module longitudinal en fonction de la densité de fissures et la loi d'évolution de la fissuration transverse en traction quasi-statique (Fig. 1.5), sont en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Wang [18].

Ogin, Smith et Beaumont [34] ont utilisé le modèle de Steif [33] pour prédire la réduction du module longitudinal en fatigue pour le stratifié  $[0/90]_s$  en époxyde-fibres de verre. En début d'essai, la perte de rigidité prévue par le modèle est en bon accord avec l'expérience. Quand le nombre de cycle devient important ( $10^5$  cycles), le modèle prédit mal la réduction du module. Ceci est dû au fait que le modèle présenté ne prend pas en compte les autres mécanismes d'endommagement, à savoir le délaminage et la fissuration longitudinale.

Berthelot et al. [36-40] développent un modèle bidimensionnel généralisé basé sur une approche déplacements d'un stratifié croisé endommagé par fissuration transverse. Les auteurs proposent un champ de déplacements piloté suivant l'épaisseur des couches par une fonction arbitraire à déterminer. Ils montrent que les meilleurs résultats, comparativement à l'analyse par éléments finis [37] sont obtenus en introduisant un cisaillement progressif dans la couches orientée à  $0^\circ$ . Les résultats alors obtenus pour la répartition des contraintes sont en bon accord avec les résultats déduits par le calcul éléments finis, excepté la contrainte normale longitudinale qui vérifie les conditions aux limites en termes de valeurs moyennes ainsi que la contrainte de cisaillement entre les couches orientées  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , au voisinage immédiat des fissures transverses. Ce modèle, associé à des distributions statistiques de contraintes, a ensuite été appliqué à l'analyse de la progression de la fissuration transverse dans divers stratifiés [41].

### 1.3.3 Approches variationnelles

Hashin [42,43,44] propose un modèle similaire, permettant de prédire l'influence des fissures transverses sur la dégradation du module longitudinale et du module de cisaillement longitudinal pour un stratifié croisé. L'auteur donne la borne inférieure du module longitudinal en fonction de la densité de fissures transverses. Les résultats obtenus pour le stratifié  $[0/90_3]_s$ , en époxyde-fibres de verre coïncident avec les valeurs expérimentales données par [22].

Afin d'étudier l'influence des séquences d'empilement sur la fissuration transverse dans des stratifiés croisés, Nairn [45] reprend l'approche variationnelle d'Hashin [42] en introduisant les contraintes résiduelles d'origine thermique. Il traite des stratifiés croisés de type  $[0_m/90_n]_s$ , et  $[90_n/0_n]_s$ . L'auteur donne une expression du taux de restitution d'énergie associé à la création d'une nouvelle fissure, supposée apparaître à mi-distance entre deux fissures consécutives. L'évolution de la fissuration transverse en traction quasi-statique pour les stratifiés  $[0_m/90_n]_s$  en époxyde-fibres de carbone est en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Nairn [46-47].

Rebière et al. [48,49,50] ont développés un modèle bidimensionnel, permettant d'analyser les effets de l'endommagement par fissuration transverse sur le comportement des stratifiés croisés. Cette approche est basée sur la construction d'un champ de contraintes statiquement admissible, en utilisant des séries doubles de Fourier. Les coefficients des séries de Fourier sont déterminés par minimisation de l'énergie complémentaire. A noter que cette approche prend en compte la variation des contraintes normales suivant l'épaisseur des couches. L'auteur propose aussi une expression du taux de restitution d'énergie associé à la fissuration transverse. Les prédictions obtenues pour la réduction du module longitudinal en fonction de la densité de fissures, sont en bon accord avec les valeurs expérimentales obtenues par Highsmith et Reifsnider [22], Groves et al. [51].

Varna et Berglund [52] ont modifié l'approche variationnelle d'Hashin [42], en prenant en compte la variation de la contrainte normale suivant l'épaisseur de la couche longitudinale. La solution approchée est obtenue en minimisant l'énergie complémentaire dans la couche à  $0^\circ$  [52] et du stratifié complet [53]. De la même manière que Nairn [45], les auteurs proposent une loi d'évolution de la fissuration transverse en traction monotone basée sur le taux de restitution d'énergie critique. Les résultats obtenus concernant la réduction du module longitudinal [53] et l'influence de l'épaisseur de la couche transverse, sur l'initiation des fissures transverses [52], sont en bon accord avec les résultats expérimentaux [22,23,51].

Trois modèles analytiques ont été étudiés par Katerelos et al. [54] avec une complexité croissante, tous basés sur la minimisation de l'énergie complémentaire, ils sont aussi comparés quant à leur capacité à prédire la réduction du module de cisaillement dans les stratifiés avec des fissures dans les couches à  $90^\circ$ . Le premier modèle est le modèle le plus simple qui suppose une répartition linéaire des contraintes hors plan de cisaillement à travers l'épaisseur des couches [55,56]. Le deuxième modèle suppose une forme exponentielle des contraintes dans la couche fissurée. Le dernier modèle développé, tient compte d'une distribution non linéaire hors du plan de cisaillement à travers l'épaisseur. Par contre la complexité de ce dernier modèle nécessaire à son application diminue sa valeur en comparant la solution avec la méthode des éléments finis.

#### 1.3.4 Méthodes numériques

Afin d'étudier le comportement d'un stratifié quasi-isotrope à l'état de saturation de la fissuration transverse, Reifsnider et Talug [57] proposent une approche numérique, en utilisant un champ de déplacement à l'état de déformation plane. Le champ de contraintes obtenu à partir des relations contraintes-déformations, est calculé en utilisant une résolution par différences finies des équations d'équilibre. Les auteurs trouvent que les contraintes inter-laminaires prennent les valeurs les plus importantes à l'interface de la couche à  $90^\circ$ .

A.S.D. Wang et Crossman [58,59], ont réalisé une étude par éléments finis à deux dimensions, afin de prédire l'initiation et la propagation des fissures transverses suivant l'épaisseur de la couche transverse ainsi que le délaminage de bord, pour les stratifiés  $[\pm 25/90_n]_s$  ( $n=1,2,3$ ) en époxyde-fibres de carbone. Les auteurs ont utilisé un critère énergétique basé sur le taux de restitution d'énergie, en supposant que le taux de restitution d'énergie critique associé à l'initiation des fissures transverses est le même que celui associé à l'amorçage du délaminage de bord.

A.S.D. Wang, Kishore et Li [60] proposent une modélisation 3D de calcul par éléments finis, permettant de prédire la cinétique d'endommagement des stratifiés croisés, en utilisant le taux de restitution d'énergie critique. Les auteurs étudient l'influence de l'épaisseur de la couche transverse et l'orientation des plis adjacents sur l'amorçage et la propagation des fissures transverses et du délaminage de bord pour des stratifiés de type  $[0/90_n]$ , en époxyde fibres de carbone. Par la suite, ils mettent en évidence l'influence de l'épaisseur de la couche transverse sur l'initiation des fissures transverses, longitudinales et du délaminage local au niveau de l'intersection des fissures intra-laminaires, à l'interface  $0/90$  des stratifiés  $[0_2/90_n]_s$  ( $n=1,2, 4$ ) en époxyde-fibres de carbone.

Herakovich et al. [61] réalisent une étude par éléments finis bidimensionnels, pour analyser l'influence des fissures transverses sur la dégradation des caractéristiques thermo-élastiques pour un stratifié croisé, soumis à un chargement thermomécanique plan. L'influence du rapport des épaisseurs de couches sur la réduction des constantes thermo-élastiques est mise en évidence. Les résultats obtenus coïncident avec ceux prévus par l'approche analytique développée par Aboudi et al. [62].

Guild, Ogin et Smith [63] ont analysé la propagation des fissures transverses suivant la largeur d'un stratifié croisé en époxyde-fibres de verre, en utilisant un calcul par éléments finis tridimensionnels. A partir des variations de la complaisance et du taux de restitution d'énergie, les auteurs montrent que la propagation des fissures

transverses suivant la largeur a un effet mineur sur la dégradation des propriétés mécaniques et sur la cinétique de l'endommagement.

Binienda, Hong et Roberu [64] utilisent un calcul par éléments finis 3D permettant de prédire l'ordre chronologique d'apparition des différents types d'endommagement dans des stratifiés croisés, ainsi que leur propagation. Pour cela, les auteurs utilisent le taux de restitution d'énergie critique associé à la création du défaut pour un stratifié endommagé par une fissure transverse préexistante. L'influence de la nature des constituants (fibre/matrice) est mise en évidence.

El Mahi et al. [65] étudient l'influence des séquences d'empilement sur le premier comportement d'un stratifié croisé endommagé par fissuration transverse, en utilisant la méthode des éléments finis. Les auteurs calculent le champ de contraintes et de déplacements, permettant d'évaluer la chute de la rigidité et la variation du taux de restitution d'énergie en fonction de la densité de fissures transverses, pour deux stratifiés en T300-914. Dans le but de suivre la réduction du module longitudinal au cours de la multiplication des fissures transverses, Leblond et al. [66], utilisent une analyse par éléments finis bidimensionnels et tridimensionnels.

#### 1.3.5 Modèles d'endommagement continu

Ce type d'approches est généralement formulé à partir des concepts de la thermodynamique des milieux continus, en remplaçant le pli fissuré par un pli homogène équivalent. Ces modèles font intervenir des variables d'état internes liées à l'endommagement qui peuvent être des variables géométriques mesurables expérimentalement, ou des variables abstraites liées à la chute de la rigidité du stratifié.

Talreja [67] propose un modèle traitant l'influence des fissures intra-laminaires et des délaminages locaux sur la dégradation des propriétés élastiques du stratifié. Les variables internes sont liées à la géométrie du défaut, caractérisée par un vecteur

défini par la normale au plan de la fissure et sa norme. Talreja et al. [68], utilisent ce modèle, pour évaluer la réduction du module longitudinal et du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures transverses. Les prédictions de cette approche sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Les auteurs ont étudié l'influence de la nature de la matrice du stratifiés  $[0_2/90_2]_s$  constitué de fibre de carbone AS4, en utilisant 3 types de matrice : 3501-6, Tactix<sup>R</sup> 556 et Tactix<sup>R</sup> 695.

Harris et Alten [69] proposent un modèle d'endommagement progressif, en utilisant un tenseur du second ordre, décrivant les variables internes liées à la géométrie du défaut. Ce modèle permet de prédire la réduction des constantes élastiques provoquée par la fissuration intra-laminaire et/ou par le délaminage local dans des stratifiés croisés et quasi-isotropes.

Lee et al. [70] développent un modèle permettant d'obtenir la borne supérieure du module longitudinal d'un stratifié croisé endommagé par fissuration transverse. La variable interne liée à la réduction de la raideur, est déterminée expérimentalement à partir du taux de restitution d'énergie associé à l'évolution des fissures transverses. La perte de rigidité prévue par le modèle est en bonne concordance avec les résultats expérimentaux [5,51].

Renard et Jeggy [71] présentent une modélisation permettant d'évaluer la dégradation des constantes élastiques au cours d'essai de traction monotone ou cyclique, en utilisant une grandeur purement scalaire pour décrire le défaut. Thionnet [72], donne une loi d'évolution de la fissuration transverse et du délaminage de bord, en traction monotone et cyclique, pour les stratifiés  $[0/90_n/90]_s$  ( $n=2,3,4$ ),  $[\pm\theta]_s$  et  $[0_2/\theta_2]_{2s}$  ( $\theta=45^\circ, 60^\circ$ ) en époxyde fibres de carbone. Les résultats obtenus sont en bon accord avec l'expérience. Allix et Ladevèze [73,74], proposent un modèle d'élasto-plasticité, utilisant deux variables abstraites, liées à la perte de rigidité du stratifié provoquée par l'endommagement.

### 1.3.5 Vieillissement hygrothermique

Mercier [75] a traité le vieillissement en milieu humide et l'endommagement par fissuration, de matériaux composites à matrice organique (CMO). La diffusion d'eau dans le matériau (matrice époxy renforcée par des fibres de verre) a été tout d'abord analysée expérimentalement, par détermination des cinétiques d'absorption sous différentes conditions d'humidité. Des baisses de différentes propriétés mécaniques en fonction de la quantité d'eau absorbée, ont été mises en évidence et quantifiées lors d'essais expérimentaux de traction. Les mécanismes physiques à l'origine de ces modifications ont été identifiés. Un mode d'endommagement particulier, la fissuration intra laminaire, ainsi que son couplage avec l'humidité, ont aussi été étudiés expérimentalement.

V. Lietard (1998) [76], examina les effets du vieillissement hygrothermique sur le processus de rupture du composite verre/époxy avec et sans chargement mécanique, les résultats montrent que l'eau absorbée par la résine, induit différents mode de rupture : rupture avec déchaussement des fibres, rupture par délaminage avec séparation des couches, rupture partielle en flexion avec délaminage et rupture franche.

J. Nairn et al. [77] soumettent deux stratifiés composites à matrice polymère, [0/90<sub>2</sub>], utilisées en construction supersonique par Boeing, le Dupont Avimid K3B polymer/IM7 à fibres de carbone et le PETI5/IM7 à fibres de carbone, à une expérience de vieillissement dont la température varie de 35°C à 95°C. L'augmentation d'eau a un comportement obéissant à la loi de Fick, après saturation un comportement non Fickien est observé. Cette augmentation est due à l'apparition de microfissurations dans les plis à 90° en l'absence de tout chargement mécanique. L'eau absorbée induit des microfissurations au bout de 1000 heures à 80°C. On note une dégradation dans la durabilité (résistance à la rupture) pour une exposition à l'eau à température élevée.

A. Megueni, Tounsi et Adda Bedia [78], ont étudié l'évolution du facteur de contrainte sous différentes conditions hygrothermique pour un composite vieilli. Dans un premier temps les résultats montrent que les caractéristiques mécaniques des stratifié vieillis ont un comportement linéaire en fonction de la température et de l'humidité. Pour la modélisation, ils ont étudié le cas d'une plaque 2D modélisée à l'aide d'un code élément fini Franc2D/L, développé à l'université de Kansas (1998). Par la suite une analyse des effets de vieillissement du composite sur le facteur d'intensité de contrainte pour un matériau fissuré et son évolution selon les conditions environnementales, a été accomplie par cette même équipe.

Kim [79], considéra l'effet de température sur la propagation des fissures dans les polymères, après avoir examiné [80] l'effet de température et d'humidité sur un système graphite/epoxy Thornel 300/Namco 5208. L'expérience a été faite sur les trois stratifiés suivants :  $[0_2/\pm 45]_{2S}$ ,  $[90/\pm 45]_{2S}$ , et  $[0/\pm 45/90]_{2S}$ . Les résultats révélèrent que la rigidité à des essais humides à 260°F, est 40% plus faible à la même température mais à sec, l'effet d'humidité et de température combiné, a une influence sur la dégradation de la rigidité dans les stratifiés.

M. Bouazza, Tounsi, Benzair et Adda Bedia [81] ont proposé un modèle mathématique basé sur la notion de la fonction de perturbation de contrainte appliquée sur les composites croisées et fissurées. Les effets hygrothermiques ont été pris en considération pour évaluer la variation du module longitudinale due aux fissurations transverses. Les résultats obtenus montrent la dépendance de la dégradation des propriétés élastiques avec la densité de fissuration et les conditions hygrothermiques.

K. Amara, Tounsi, Megueni et Adda Bedia [82], ont suivi l'évolution de la fissuration transverse dans les stratifiés croisés vieillis, vu que l'évolution et l'état saturé des fissures transverses dépendent de plusieurs paramètres comme, les épaisseurs des couches, la nature du chargement et la séquence d'empilement. Ils ont constaté également que les modèles analytiques proposés par de nombreux

auteurs, permettent la détermination du module longitudinal du stratifié endommagé, en fonction de la densité de fissures. Une partie aussi importante a été visée par cette étude, elle concerne l'analyse des fissures transverses dans les stratifiés croisés vieillis. Les propriétés mécaniques de ces matériaux sont bien affectées par les variations de température et d'humidité.

A. Tounsi, Amara et E.A. Adda Bedia [83], ont examiné théoriquement les changements du module de Young longitudinal sur un matériau composite fissuré, en tenant compte de la diminution des propriétés mécaniques des matériaux par la variation de la température et l'humidité. Les résultats montrent que l'environnement hygrothermique a un effet significatif sur la réduction relative du module de Young longitudinal en présence d'une densité de fissurations importante.

Benzair, Maachou, Amara et Tounsi [84], ont étudié l'effet de la densité de fissurations sur les propriétés élastiques du matériau composite à haute température, en utilisant le modèle modifié de Shear Lag qui tient compte du concept de la fonction de perturbation de contraintes. Ce modèle sera utilisé pour évaluer les effets de fissurations transverses dans la réduction de la rigidité des matériaux composites à haute température. Les résultats ont bien montré l'effet d'une haute température et de l'orientation des fibres des couches extérieures dans la dégradation des propriétés mécaniques.

L'étude proposée par Adda Bedia, Bouazza, Tounsi, Benzair et Maachou en 2008 [85] faite sur un matériau composite fissuré  $[\theta_m \setminus 90_n]_s$ , utilise le modèle Shear Lag modifié pour la prédiction du comportement de la rigidité sur un matériau composite vieillis hygrothermiquement et pour différents angles d'orientation des fibres. Le modèle de Tsai a été utilisé pour modéliser le vieillissement hygrothermique. Tounsi et Amara [86,87] ont étudié la réduction de la rigidité dans les matériaux croisés vieillis hygrothermiquement par le modèle modifié de Shear Lag en introduisant la fonction de perturbation de contraintes.

#### 1.4 Orientation du sujet de recherche

Cette recherche a été réalisée au sein de l'équipe modélisation des structures du laboratoire de recherche sciences aéronautiques, de l'université de Blida1, en collaboration avec le laboratoire Matériaux et Hydrologie de l'université de Sidi Bel Abbès. Cette étude s'insère également dans un axe de recherche au sein de ces deux laboratoires qui est « L'hygrothermie des composites à matrice polymère ».

Il est judicieux de rappeler que plusieurs recherches dans le domaine des composites ont été menées par les équipes conjointement depuis 2011. Les thèmes développés sont entre autres, les effets des vieillissements hygrothermiques, les matériaux FGM, la modélisation des plaques composites par la Higher Shear Deformations.

Le but de notre travail est d'examiner le comportement des matériaux composites croisé et non croisé fissurés, et de voir l'évolution de la densité de fissuration ainsi que de la rigidité, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson en fonction des conditions hygrothermiques variables. Le modèle modifié de Shear Lag introduisant la fonction de perturbation de contraintes, est utilisé.

Les propriétés élastiques des matériaux composites croisés et non croisés fissurés sont déterminées à partir d'un environnement variable, à travers le modèle de Tsai prenant en compte une concentration déterminée à partir des conditions transitoires, en désorption, qu'on appellera modèle de Tsai transitoire. Une comparaison des résultats sur deux modèles de vieillissement à savoir « modèle transitoire », « modèle non transitoire » sera établie à la fin pour prévoir la validité d'un modèle de vieillissement hygrothermique le plus représentatif. L'approche de l'étude sera faite par la simulation numérique.

## CHAPITRE 2

### MODELISATION DU COMPORTEMENT MECANIQUE D'UN STRATIFIE $[\beta_m/\theta_n]_s$ ENDOMMAGÉ PAR FISSURATION TRANSVERSE

#### 2.1 Introduction

La fissuration transverse se manifeste dans les couches ; dont les fibres sont désorientées par rapport à la direction de sollicitation (c.à.d. différent de  $0^\circ$ ). Les fissures apparaissent dans la matrice ou à l'interface entre fibre-matrice, et se propagent parallèlement aux fibres.

En conséquence, la qualité de l'interface fibre matrice joue un rôle important dans le développement de la fissuration transverse. Les fissures partent le plus souvent des bords du matériau, bien que les sur-contraintes locales dues à un défaut dans la matrice puissent à l'occasion en être la cause. Les contraintes résiduelles de cuisson, dues au processus de fabrication du stratifié, peuvent également être à l'origine de la création de nouvelles fissures transverses.

La modélisation de la fissuration transverse est proposée par un schéma appelé modèle de transfert du chargement par cisaillement, schéma qui est en fait l'application à la fissuration transverse de l'analyse de transfert de charge entre fibre et matrice. Ces analyses sont fondées, sur le fait que le chargement mécanique est transféré entre les couches, par l'intermédiaire d'une couche fine situé à l'interface entre les couches. Les modèles de transfert du chargement par cisaillement supposent que le déplacement longitudinal est constant à travers toute l'épaisseur des couches orientées parallèlement à l'axe de sollicitation. Ils conduisent à des contraintes de cisaillement transverse nulles. Cette hypothèse simplifie grandement les analyses, mais elle n'est pas très réaliste puisque les modules de cisaillement transverse des couches sont du même ordre de grandeur.

Dans ce chapitre, nous avons étudié deux modèles pour analyser la fissuration transverse des composites croisés et non croisés, un modèle de diffusion de cisaillement et un modèle variationnel.

## 2.2 Modélisation analytique

### 2.2.1 Méthode de diffusion de cisaillement

Le problème à résoudre est celui du problème d'élasticité du stratifié fissuré  $[\beta_n/\theta_m]_s$ , avec une fissuration dans la couche à  $\theta^\circ$ . Comme tout problème d'élasticité, sa résolution exacte consiste à rechercher, dans la cellule élémentaire le champ des déplacements et le champ des contraintes qui satisfont en chaque point les équations d'équilibre, les relations déformations-déplacements, les conditions de compatibilité, les conditions de continuité aux frontières et les lois de comportement dans les couches à  $\theta^\circ$  et à  $\beta^\circ$ . L'approche déplacement recherche un champ de déplacement vérifiant l'ensemble de ces relations [88].

#### 2.2.1.1 Champs de déplacements

La géométrie de la cellule élémentaire est caractérisée par l'épaisseur  $t_\theta$  de la couche à  $\theta^\circ$ , l'épaisseur  $t_\beta$  de la couche à  $\beta^\circ$  et la distance  $2 \cdot l_0$  entre deux fissures consécutives (Figure 2.1).

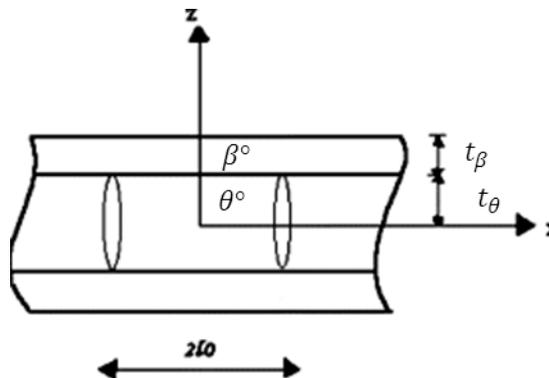


Figure 2.1 : fissuration transverse et cellule élémentaire

Ainsi nous avons exprimé les déplacements longitudinaux sous la forme :

$$u_{\beta}(x, z) = \overline{u_{\beta}}(x) + f(z)A_{\beta}(x) \quad (2.1)$$

$$u_{\theta}(x, z) = \overline{u_{\theta}}(x) + \left( z^2 - \frac{t_{\theta}^2}{3} \right) A_{\theta}(x) \quad (2.2)$$

Où  $\overline{u_{\beta}}(x)$  et  $\overline{u_{\theta}}(x)$  sont respectivement les valeurs moyennes (évaluées dans l'épaisseur des couches) des déplacements longitudinaux  $u_{\beta}(x, z)$  et  $u_{\theta}(x, z)$  dans les couches à  $\beta^{\circ}$  et à  $\theta^{\circ}$ . Soit :

$$\overline{u_{\beta}}(x) = \frac{1}{t_{\beta}} \int_{t_{\beta}}^{t_{\theta}+t_{\beta}} u_{\beta}(x, z) dz \quad (2.3)$$

$$\overline{u_{\theta}}(x) = \frac{1}{t_{\theta}} \int_{-t_{\theta}}^{t_{\theta}} u_{\theta}(x, z) dz \quad (2.4)$$

La relation (2.4) exprime la variation parabolique du déplacement longitudinal dans l'épaisseur de la couche à  $\theta^{\circ}$ . La variation parabolique dans l'épaisseur de la couche à  $\beta^{\circ}$  est considérée dans le cas d'une analyse parabolique complète [89] étendue aux deux couches.

Les fonctions  $\overline{u_{\theta}}(x)$ ,  $\overline{u_{\beta}}(x)$ ,  $A_{\beta}(x)$ ,  $A_{\theta}(x)$  et  $f(z)$  sont déterminées. La relation (2.4) est vérifiée par le choix (2.2) de  $u_{\theta}(x, z)$  alors que la relation (2.3) impose que la fonction  $f(z)$  vérifie la relation :

$$\int_{t_{\theta}}^{t_{\theta}+t_{\beta}} f(z) \cdot d(z) = 0 \quad (2.5)$$

Ensuite, la condition de continuité sur les déplacements entre les couches à  $\beta^{\circ}$  et à  $\theta^{\circ}$  :

$$u_{\beta}(x, \pm t_{\beta}) = u_{\theta}(x, \pm t_{\theta}) \quad (2.6)$$

Impose la relation :

$$\overline{u}_\beta(x) + f(t_\beta) A_\beta(x) = \overline{u}_\theta(x) + \left( \frac{2t_\theta^2}{3} \right) A_\theta(x) \quad (2.7)$$

### 2.2.1.2 Contraintes de cisaillement

Les contraintes de cisaillement dans les deux couches sont données par :

$$\sigma_{xz}^\beta = G_{xz}^\beta \cdot \gamma_{xz}^\beta \quad (2.8)$$

Avec 
$$\sigma_{xz}^\theta = G_{xz}^\theta \cdot \gamma_{xz}^\theta \quad (2.9)$$

$$\gamma_{xz}^i = \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial x} \quad , \quad i = \theta, \beta \quad (2.10)$$

Où  $G_{xz}^\theta$  et  $G_{xz}^\beta$  sont les modules de cisaillement transverse respectivement des couches à  $\theta^\circ$  et  $\beta^\circ$ .

Le modèle néglige ensuite la variation suivant x du déplacement transverse  $w_i$  conduisant à :

$$\gamma_{xz}^i \approx \frac{\partial u_i}{\partial z} \quad (2.11)$$

Par conséquent, les contraintes de cisaillement s'expriment comme suit :

$$\sigma_{xz}^\beta = G_{xz}^\beta \cdot f'(z) \cdot A_\beta(x) \quad (2.12)$$

$$\sigma_{xz}^\theta = 2z \cdot G_{xz}^\theta \cdot A_\theta(x) \quad (2.13)$$

Où

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2.14)$$

Les contraintes dans la cellule élémentaire doivent satisfaire les conditions aux frontières ainsi que les conditions de continuité et de symétrie :

$$\sigma_{xz}^{\theta}(x, 0) = 0 \quad (2.15)$$

$$\sigma_{xz}^{\theta}(x, \pm t_{\theta}) = \sigma_{xz}^{\beta}(x, \pm t_{\theta}) \quad (2.16)$$

$$\sigma_{zz}^{\theta}(x, \pm t_{\theta}) = \sigma_{zz}^{\beta}(x, \pm t_{\theta}) \quad (2.17)$$

$$\sigma_{xz}^{\beta}(x, t_{\theta} + t_{\beta}) = 0 \quad (2.18)$$

$$\sigma_{zz}^{\beta}(x, t_{\theta} + t_{\beta}) = 0 \quad (2.19)$$

$$\sigma_{xx}^{\theta}(\pm l, z) = 0 \quad (2.20)$$

$$\sigma_{xz}^{\theta}(\pm l, z) = 0 \quad (2.21)$$

Les conditions (2.18) sur la frontière latérale impose que :

$$f'(t_{\theta} + t_{\beta}) = 0 \quad (2.22)$$

Et la condition de continuité (2.16) de la contrainte de cisaillement à l'interface entre les couches à  $\beta^{\circ}$  et  $\theta^{\circ}$  conduit à :

$$A_{\beta}(x) = 2 \frac{G_{xz}^{\theta} t_{\theta}}{G_{xz}^{\beta} f'(t_{\theta})} A_{\theta}(x) \quad (2.23)$$

En combinant les équations (2.7) et (2.23) nous obtenons l'expression des déplacements moyens :

$$\bar{u}_{\beta}(x) - \bar{u}_{\theta}(x) = \left[ \frac{2}{3} t_{\theta}^2 - 2 \frac{G_{xz}^{\theta} t_{\theta} f(t_{\theta})}{G_{xz}^{\beta} f'(t_{\theta})} \right] A_{\theta}(x) \quad (2.24)$$

La contrainte de cisaillement  $\tau(x)$  à l'interface entre les couches à  $\beta^{\circ}$  et à  $\theta^{\circ}$  est :

$$\tau(x) = \sigma_{xz}^{\theta}(x, t_{\theta}) \quad (2.25)$$

$$\tau(x) = 2G_{xz}^{\theta} t_{\theta} \cdot A_{\theta}(x) \quad (2.26)$$

En introduisant (2.24) dans (2.26) nous obtenons finalement la relation entre la contrainte de cisaillement à l'interface et les déplacements longitudinaux dans les couches à  $\beta^{\circ}$  et à  $\theta^{\circ}$ .

$$\tau(x) = \frac{3G}{t_\theta} [\bar{u}_\beta(x) - \bar{u}_\theta(x)] \quad (2.27)$$

Où G est le paramètre de cisaillement défini de la manière suivante :

$$G = \frac{G_{xz}^\theta}{1 - 3 \frac{G_{xz}^\theta f(t_\theta)}{G_{xz}^\beta t_\theta f'(t_\theta)}} \quad (2.28)$$

Nous observons que le paramètre de cisaillement dépend de la variation du déplacement longitudinal dans l'épaisseur des couches à  $\beta^\circ$ .

### 2.2.1.3. Détermination des contraintes longitudinales moyennes et de la contrainte de cisaillement à l'interface

L'équilibre des forces longitudinales exercées sur un élément de la couche à  $\theta^\circ$  (figure 2.2) conduit à la relation :

$$\frac{d\bar{\sigma}_{xx}^\theta}{dx} = -\frac{1}{t_\theta} \tau(x) \quad (2.29)$$

En introduisant la contrainte moyenne longitudinale dans la couche à  $\theta^\circ$  définie par :

$$\bar{\sigma}_{xx}^\theta(x) = \frac{1}{2t_\theta} \int_{-t_\theta}^{t_\theta} \sigma_{xx}^\theta(x, z) dz \quad (2.30)$$

Les contraintes longitudinales moyennes dans les couches à  $\theta^\circ$  et à  $\beta^\circ$  sont reliées à la contrainte longitudinale moyenne  $\sigma_c$  appliquée au stratifié par :

$$\alpha \bar{\sigma}_{xx}^\beta(x) + \bar{\sigma}_{xx}^\theta(x) = (1 + \alpha) \sigma_c \quad (2.31)$$

Où  $\alpha$  est le rapport des épaisseurs de la couche à  $\beta^\circ$  et de la couche à  $\theta^\circ$  :

$$\alpha = \frac{t_\beta}{t_\theta} \quad (2.32)$$

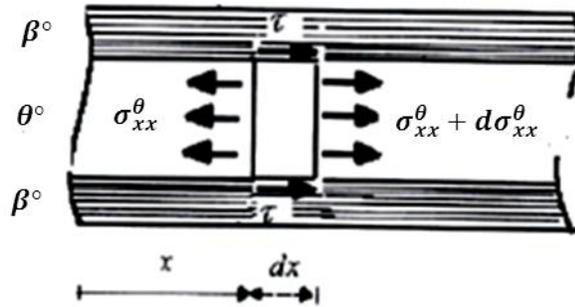


Figure 2.2 : Contraintes exercées sur un élément de la couche à  $\theta^\circ$ .

Enfin, le modèle fait l'hypothèse que les contraintes moyennes dans les couches à  $\beta^\circ$  et  $\theta^\circ$  sont liées aux déformations moyennes par les relations :

$$\overline{\sigma_{xx}^\beta} = E_\beta \cdot \overline{\varepsilon_{xx}^\beta} \quad \text{avec} \quad \overline{\varepsilon_{xx}^\beta} = \frac{d\overline{u_\beta}}{dx} \quad (2.33)$$

$$\overline{\sigma_{xx}^\theta} = E_\theta \cdot \overline{\varepsilon_{xx}^\theta} \quad \text{avec} \quad \overline{\varepsilon_{xx}^\theta} = \frac{d\overline{u_\theta}}{dx} \quad (2.34)$$

Où  $E_\beta$  et  $E_\theta$  sont les modules d'Young respectivement des couches à  $\beta^\circ$  et à  $\theta^\circ$ .

En dérivant par rapport à  $x$  la relation (2.27) nous obtenons :

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{3G}{t_\beta} \left[ \frac{d\overline{u_\beta}}{dx} - \frac{d\overline{u_\theta}}{dx} \right] \quad (2.35)$$

En tenant compte des expressions (2.29), (2.33) et (2.34), la relation précédente devient :

$$\frac{d^2 \overline{\sigma_{xx}^\theta}}{dx^2} = -\frac{3G}{t_\beta} \left[ \frac{\overline{\sigma_{xx}^\beta}}{E_\beta} - \frac{\overline{\sigma_{xx}^\beta}}{E_\theta} \right] \quad (2.36)$$

Puis, en utilisant (2.31), nous obtenons :

$$\frac{d^2 \overline{\sigma_{xx}^\theta}}{dx^2} = -\frac{3G}{t_\theta^2} \left( \frac{1+\alpha}{\alpha E_\beta} \sigma_c - \frac{\alpha E_\beta + E_\theta}{\alpha E_\beta + E_\theta} \overline{\sigma_{xx}^\theta} \right) \quad (2.37)$$

$$\frac{d^2 \overline{\sigma_{xx}^\theta}}{dx^2} = \frac{3G(t_\beta + t_\theta)}{t_\theta^2 t_\beta E_\beta E_\theta} \left( \frac{\alpha E_\beta + E_\theta}{1+\alpha} \overline{\sigma_{xx}^\theta} - E_\theta \sigma_c \right) \quad (2.38)$$

En introduisant le modèle longitudinal du stratifié non endommagé, donné par la loi des mélanges :

$$E_x^0 = \frac{\alpha E_\beta + E_\theta}{1+\alpha} \quad (2.39)$$

La relation (2.38) peut finalement s'écrire sous la forme réduite :

$$\frac{d^2 \overline{\sigma_{xx}^\theta}}{dx^2} - \lambda^2 \overline{\sigma_{xx}^\theta} = -\frac{E_\theta}{E_x^0} \sigma_c \cdot \lambda^2 \quad (2.40)$$

$$\lambda^2 = \frac{3G(t_\beta + t_\theta) E_x^0}{t_\theta^2 t_\beta E_\beta E_\theta} \quad (2.41)$$

La solution de l'équation différentielle (2.40) est de la forme :

$$\overline{\sigma_{xx}^\theta}(x) = A \cosh \lambda x + B \sinh \lambda x + \frac{E_\theta}{E_x^0} \sigma_c \quad (2.42)$$

La contrainte de cisaillement à l'interface entre les couches s'écrit d'après (2.29) :

$$\tau(x) = -t_\theta \lambda (A \sinh \lambda x + B \cosh \lambda x) \quad (2.43)$$

Les constantes A et B sont déterminées de manière à vérifier les conditions suivantes :

- Les surfaces des fissures ne supportent aucune contrainte longitudinale :

$$\overline{\sigma_{xx}^{\theta}}(l) = 0 \quad (2.44)$$

- La condition de symétrie de la contrainte de cisaillement inter laminaire :

$$\tau(0) = 0 \quad (2.45)$$

Ces conditions conduisent ainsi aux expressions de la contrainte longitudinale moyenne dans la couche à  $\theta^\circ$  et de la contrainte de cisaillement à l'interface entre les couches :

$$\overline{\sigma_{xx}^{\theta}} = \sigma_c \frac{E_{\theta}}{E_x^0} \left( 1 - \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \right) \quad (2.46)$$

$$\tau(x) = \sigma_c \frac{E_{\theta}}{E_x^0} \eta \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \quad (2.47)$$

La contrainte longitudinale moyenne dans la couche à  $\beta^\circ$  est ensuite déduite de la relation (2.31) :

$$\overline{\sigma_{xx}^{\beta}} = \sigma_c \frac{E_{\theta}}{E_x^0} \left( 1 + \frac{t_{\theta} E_{\theta}}{t_{\beta} E_{\beta}} \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \right) \quad (2.48)$$

Les expressions (2.46), (2.47) et (2.48) introduisent le rapport géométrique de fissuration :

$$a = \frac{l}{t_{\theta}} \quad (2.49)$$

Et le paramètre de transfert de charge :

$$\eta^2 = \lambda^2 t_\theta^2 = 3 \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{GE_x^0}{E_\beta E_\theta} \quad (2.50)$$

#### 2.2.1.4 Détermination du champ des déplacements et du champ des contraintes

La comparaison des équations (2.26) et (2.47) nous permet de trouver l'expression de la fonction  $A_\theta(x)$ :

$$A_\theta(x) = \sigma_c \frac{E_\theta}{E_x} \frac{1}{2G_{xz}^\theta t_\theta} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \quad (2.51)$$

Puis la relation (2.23) nous donne la fonction  $A_\beta(x)$ :

$$A_\beta(x) = \sigma_c \frac{E_\theta}{E_x} \frac{1}{G_{xz}^\beta f'(t_\theta)} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \quad (2.52)$$

En reportant ces expressions dans les expressions (2.1) et (2.2) puis (2.12) et (2.13) nous obtenons les déplacements longitudinaux et les contraintes de cisaillement transverse dans les couches à  $\beta^\circ$  et à  $\theta^\circ$ :

$$u_\beta(x, z) = \bar{u}_\beta(x) + \sigma_c \frac{E_\theta}{E_x} \frac{1}{G_{xz}^\beta f'(t_\theta)} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} f(z) \quad (2.53)$$

$$u_\theta(x, z) = \bar{u}_\theta(x) + \sigma_c \frac{E_\theta}{E_x} \frac{1}{2G_{xz}^\theta t_\theta} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( z^2 - \frac{t_\theta^2}{3} \right) \quad (2.54)$$

$$\sigma_{xz}^\beta(x, z) = \sigma_c \frac{E_\theta}{E_x} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \frac{f'(z)}{f'(t_\theta)} \quad (2.55)$$

$$\sigma_{xz}^\theta(x, z) = \sigma_c \frac{E_\theta}{E_x} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \frac{z}{t_\theta} \quad (2.56)$$

Les contraintes longitudinales dans les couches à  $\beta^\circ$  peuvent être ensuite évaluées à partir de la relation contrainte-déformation

$$\sigma_{xz}^i(x, z) = E_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \quad i = \beta, \theta \quad (2.57)$$

Ce qui nous donne :

$$\sigma_{xx}^\beta(x, z) = \overline{\sigma_{xx}^\beta}(x) + \sigma_c \frac{E_\beta E_\theta}{E_x^0 G_{xz}^\beta} \frac{1}{t_\theta f'(t_\theta)} \eta^2 \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} f(z) \quad (2.58)$$

$$\sigma_{xx}^\theta(x, z) = \overline{\sigma_{xx}^\theta}(x) + \sigma_c \frac{E_\theta^2}{2E_x^0 G_{xz}^\theta} \eta^2 \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( \frac{z^2}{t_\theta^2} - \frac{1}{3} \right) \quad (2.59)$$

Enfin, les contraintes normales transverses  $\sigma_{zz}^i(x, z)$  peuvent être déduites des équations d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^i}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} = 0 \quad i = \beta, \theta \quad (2.60)$$

Soit :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}^\beta}{\partial z} = -\sigma_c \frac{E_\theta}{E_x^0} \eta^2 a \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \frac{f'(z)}{f'(t_\theta)} \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}^\theta}{\partial z} = -\sigma_c \frac{E_\theta}{E_x^0} \eta^2 a \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \frac{z}{t_\theta} \quad (2.62)$$

En intégrant ces expressions et en considérant les conditions aux limites et à l'interface données par les relations (2.17) et (2.19) nous obtenons :

$$\sigma_{zz}^\beta(x, z) = -\sigma_c \frac{E_\theta}{E_x^0} \eta^2 \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \frac{f(t_\theta) - f(t_\beta - t_\theta)}{t_\theta f'(t_\theta)} \quad (2.63)$$

$$\sigma_{zz}^{\theta}(x, z) = -\sigma_c \frac{E_{\theta}}{E_x^0} \eta^2 \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( \frac{z}{2t_{\theta}^2} - \frac{1}{2} + \frac{f(t_{\theta}) - f(t_{\beta} - t_{\theta})}{t_{\theta} f'(t_{\theta})} \right) \quad (2.64)$$

### 2.2.1.5 Estimation du déplacement longitudinal dans les couches à $\beta^{\circ}$

L'analyse parabolique complète fait l'hypothèse d'une variation parabolique du déplacement longitudinal à travers l'épaisseur de la couche à  $\theta^{\circ}$  et à travers l'épaisseur de la couche à  $\beta^{\circ}$ , alors que les analyses initiales telle l'analyse de STEIF [33] considère un déplacement longitudinal parabolique à travers l'épaisseur de la couche à  $\theta^{\circ}$  et constant à travers l'épaisseur de la couche à  $\beta^{\circ}$ . Dans le cas d'une analyse parabolique complète, la fonction  $f(z)$  est écrite sous la forme [36,37] :

$$f(z) = z^2 + Bz + C \quad (2.65)$$

En tenant compte des conditions (2.5) et (2.22), la fonction  $f(z)$  s'écrit de la façon suivante :

$$f(z) = z^2 - 2(t_{\beta} + t_{\theta})z + \frac{2}{3}t_{\beta}^2 + 2t_{\beta}t_{\theta} + t_{\theta}^2 \quad (2.66)$$

Le paramètre de cisaillement (2.28) est alors donné par :

$$G = \frac{G_{xz}^{\theta}}{1 + \alpha \frac{G_{xz}^{\theta}}{G_{xz}^{\beta}}} \quad (2.67)$$

Où  $\alpha$  est le rapport des épaisseurs de couches, introduit en (2.32).

L'introduction des expressions précédentes dans les relations (2.53) à (2.64), conduit aux expressions des déplacements longitudinaux et des contraintes :

$$u_{\beta}(x, z) = \bar{u}_{\beta}(x) - \sigma_c \frac{E_{\theta}}{E_x^0} \frac{1}{2G_{xz}^{\beta} t_{\beta}} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( z^2 - 2(t_{\beta} + t_{\theta})z + \frac{2}{3}t_{\beta}^2 + 2t_{\beta}t_{\theta} + t_{\theta}^2 \right) \quad (2.68)$$

$$u_\theta(x, z) = \overline{u_\theta}(x) + \sigma_c \frac{E_\theta}{E_x^0} \frac{1}{2G_{xz}^\theta t_\theta} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( z^2 - \frac{t_\theta^2}{3} \right) \quad (2.69)$$

$$\overline{\sigma_{xx}^\beta}(x) = \sigma_c \frac{E_\beta}{E_x^0} \left( 1 + \frac{t_\theta E_\theta}{t_\beta E_\beta} \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \right) \quad (2.70)$$

$$\overline{\sigma_{xx}^\theta}(x) = \sigma_c \frac{E_\theta}{E_x^0} \left( 1 - \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \right) \quad (2.71)$$

$$\sigma_{xx}^\beta(x, z) = \overline{\sigma_{xx}^\beta}(x) - \sigma_c \frac{E_\theta E_\beta}{E_x^0 G_{xz}^\beta} \frac{1}{2t_\beta t_\theta} \eta^2 \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( z^2 - 2(t_\beta + t_\theta)z + \frac{2}{3}t_\beta^2 + 2t_\beta t_\theta + t_\theta^2 \right) \quad (2.72)$$

$$\sigma_{xx}^\theta(x, z) = \overline{\sigma_{xx}^\theta}(x) + \sigma_c \frac{E_\theta^2}{2E_x^0 G_{xz}^\theta} \eta^2 \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( \frac{z^2}{t_\theta^2} - \frac{1}{3} \right) \quad (2.73)$$

$$\sigma_{xz}^\beta(x, z) = \sigma_c \frac{E_\theta}{E_x^0} \eta \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( \frac{2z - 2(t_\beta + t_\theta)}{2t_\beta} \right) \quad (2.74)$$

$$\sigma_{xz}^\theta(x, z) = \sigma_c \frac{E_\theta}{E_x^0} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \frac{z}{t_\theta} \quad (2.75)$$

$$\tau(x) = \sigma_c \frac{E_\theta}{E_x^0} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \quad (2.76)$$

$$\sigma_{zz}^\beta(x, z) = \sigma_c \frac{E_\theta}{E_x^0} \eta^2 \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \frac{t_\beta^2}{2t_\theta t_\beta} \quad (2.77)$$

$$\sigma_{zz}^\theta(x, z) = -\sigma_c \frac{E_\theta}{E_x^0} \eta^2 \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( \frac{z^2 - t_\theta t_\beta - t_\theta^2}{2t_\theta^2} \right) \quad (2.78)$$

### 2.2.1.6 Prise en compte d'un cisaillement progressif dans la couche à $\beta^\circ$

Le développement de l'analyse généralisée introduit seulement deux conditions (2.5) et (2.22) que doit satisfaire la fonction  $f(z)$ . Ensuite le choix de cette fonction, doit être tel, que la fonction décrive au mieux le comportement réel du stratifié.

La fonction  $f(z)$  qui décrit au mieux le comportement est sous la forme [37] :

$$f(z) = A - \cosh B(t_\beta + t_\theta - z) \quad (2.79)$$

Où A et B sont des coefficients à déterminer. Cette fonction satisfait la condition (2.22).

Ensuite la condition (2.5) impose :

$$A = \frac{\sinh B t_\beta}{B t_\beta} \quad (2.80)$$

Et la fonction  $f(z)$  s'écrit :

$$f(z) = \frac{\sinh \alpha \eta_t}{\alpha \eta_t} - \cosh \eta_t \left( 1 + \alpha - \frac{z}{t_\theta} \right) \quad (2.81)$$

Avec  $\eta_t$

$$\eta_t = B \cdot t_\theta \quad (2.82)$$

Le paramètre  $\eta_t$  apparaît comme paramètre de transfert du chargement mécanique à travers l'épaisseur de la couche à  $\beta^\circ$  [90]. En tenant compte des considérations précédentes (effets des paramètres  $E_\beta$ ,  $G_{xz}^\beta$  et  $a$ , différentes expressions de  $\eta_t$  ont été considérées. Les meilleurs résultats ont été obtenus en prenant :

$$\eta_t = \frac{E_\beta}{G_{xz}^\beta} \cdot \frac{1}{a} \quad (2.83)$$

Les choix de  $f(z)$  et du paramètre  $\eta_t$  sont associés à une compréhension inspirée du phénomène de transfert mis en jeu [90].

Comme précédemment dans le cas de la variation parabolique, les expressions des déplacements longitudinaux et des contraintes sont obtenues à partir des expressions (2.53) à (2.64) nous obtenons :

$$u_{\beta}(x, z) = \overline{u_{\beta}}(x) + \sigma_c \frac{E_{\theta}}{E_x^0} \frac{t_{\theta}}{G_{xz}^{\beta} \eta_t} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( \frac{1}{\alpha \eta_t} - \frac{\cosh \eta_t \left( 1 + \alpha - \frac{z}{t_{\theta}} \right)}{\sinh \alpha \eta_t} \right) \quad (2.84)$$

$$u_{\theta}(x, z) = \overline{u_{\theta}}(x) + \sigma_c \frac{E_{\theta}}{E_x^0} \frac{1}{2G_{xz}^{\theta} t_{\theta}} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( z^2 - \frac{t_{\theta}^2}{3} \right) \quad (2.85)$$

$$\sigma_{xz}^{\beta}(x, z) = \sigma_c \frac{E_{\theta}}{E_x^0} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( \frac{2z - 2(t_{\beta} + t_{\theta})}{2t_{\beta}} \right) \quad (2.86)$$

$$\sigma_{xz}^{\theta}(x, z) = \sigma_c \frac{E_{\theta}}{E_x^0} \eta \frac{\sinh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \frac{z}{t_{\theta}} \quad (2.87)$$

$$\sigma_{xx}^{\beta}(x, z) = \overline{\sigma_{xx}^{\beta}}(x) - \sigma_c \frac{E_{\theta} E_{\beta}}{E_x^0 G_{xz}^{\theta} \eta_t} \eta^2 \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( \frac{1}{\alpha \eta_t} - \frac{\cosh \eta_t \left( 1 + \alpha - \frac{z}{t_{\theta}} \right)}{\sinh \alpha \eta_t} \right) \quad (2.88)$$

$$\sigma_{xx}^{\theta}(x, z) = \overline{\sigma_{xx}^{\theta}}(x) + \sigma_c \frac{E_{\theta}^2}{2E_x^0 G_{xz}^{\beta}} \eta^2 \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( \frac{z^2}{t_{\theta}^2} - \frac{1}{3} \right) \quad (2.89)$$

$$\sigma_{zz}^{\beta}(x, z) = \sigma_c \frac{E_{\theta}}{E_x^0} \eta^2 \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \frac{1 - \cosh \alpha \eta_t}{\eta_t \sinh \alpha \eta_t} \quad (2.90)$$

$$\sigma_{zz}^{\theta}(x, z) = -\sigma_c \frac{E_{\theta}}{E_x^0} \eta^2 \frac{\cosh \eta a \frac{x}{l}}{\cosh \eta a} \left( \frac{z^2}{2t_{\beta}^2} - \frac{1}{2} - \frac{1 + \cosh \alpha \eta_t}{\sinh \alpha \eta_t} \right) \quad (2.91)$$

### 2.2.1.7 Module de Young longitudinal

Nous considérons un stratifié non croisé symétrique de type  $[\beta_m/\theta_n]_s$ , soumis à une traction uni axiale  $\sigma_c$  suivant l'axe x. Ce chargement provoque l'apparition puis la multiplication des fissures dans la couche à  $\theta^\circ$  (voir figure 2.3). On suppose que toutes les fissures s'étendent dans toute la largeur de l'éprouvette, et qu'elles sont uniformément réparties le long de l'axe de traction (même espacement entre fissures consécutives). [88]

Ainsi le stratifié endommagé est un empilement de cellules élémentaires suivant l'axe x. Chaque cellule est limitée par les plans de deux fissures consécutives et les bords libres des couches longitudinales. La géométrie de la cellule est caractérisée par les épaisseurs des deux couches et l'espacement entre les fissures.

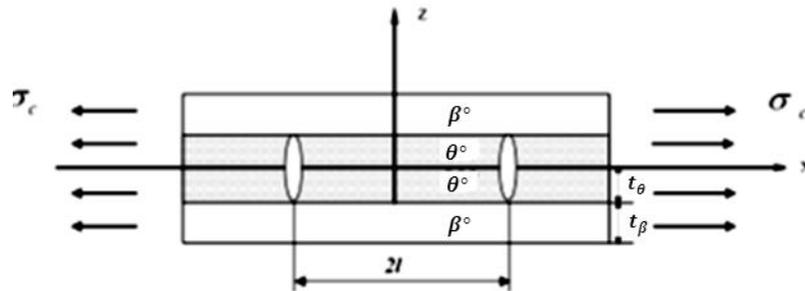


Figure 2.3 : Cellule élémentaire et fissuration transverse

Les équations liant les déformations et les contraintes sont [82]:

a) Dans la couche  $\beta^0$  :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\beta \\ \varepsilon_y^\beta \\ \varepsilon_z^\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^\beta & S_{12}^\beta & S_{13}^\beta \\ S_{12}^\beta & S_{22}^\beta & S_{23}^\beta \\ S_{13}^\beta & S_{23}^\beta & S_{33}^\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^\beta \\ \sigma_y^\beta \\ \sigma_z^\beta \end{Bmatrix} \quad (2.92)$$

$$\varepsilon_{xy}^\beta = S_{66}^\beta \sigma_{xy}^\beta \quad ; \quad \varepsilon_{xz}^\beta = S_{55}^\beta \sigma_{xy}^\beta \quad ; \quad \varepsilon_{yz}^\beta = S_{44}^\beta \sigma_{yz}^\beta \quad (2.93)$$

b) Dans la couche  $\theta^\circ$  :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\theta \\ \varepsilon_y^\theta \\ \varepsilon_z^\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{22}^\theta & S_{12}^\theta & S_{23}^\theta \\ S_{12}^\theta & S_{11}^\theta & S_{12}^\theta \\ S_{23}^\theta & S_{12}^\theta & S_{22}^\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^\theta \\ \sigma_y^\theta \\ \sigma_z^\theta \end{Bmatrix} \quad (2.94)$$

$$\varepsilon_{xy}^\theta = S_{66}^\theta \sigma_{xy}^\theta \quad ; \quad \varepsilon_{xz}^\theta = S_{55}^\theta \sigma_{xy}^\theta \quad ; \quad \varepsilon_{yz}^\theta = S_{66}^\theta \sigma_{yz}^\theta \quad (2.95)$$

Tel que :  $S_{ij}$  sont les éléments de la matrice de souplesse pour un composite unidirectionnelle.

Nous obtenons l'expression de la réduction du module longitudinal du stratifié due aux fissures transverses :

$$\frac{E_x}{E_{x0}} = \frac{1}{1 + \frac{E_\theta t_\theta (1 - \nu_{12} \nu_{xy}^\beta)}{E_\beta t_\beta (1 - \nu_{12} \nu_{21})} \frac{1}{2a} R(a) \left( 1 + \nu_{xy}^\beta \frac{(S_{12}^\beta t_\theta + S_{12}^\theta t_\beta)}{(S_{22}^\beta t_\theta + S_{11}^\theta t_\beta)} \right)} \quad (2.96)$$

### 2.2.1.8 Calcul de la fonction de perturbation de contrainte

Le model développé par Berthelot [36] sera modifié. En introduisant la fonction de perturbation de contrainte:

$$R(a) = \int_{-a}^{+a} \frac{\cosh(\xi \bar{x})}{\cosh(\xi a)} d\bar{x} = \frac{2}{\xi} \tanh(\xi a) \quad (2.97)$$

$$\xi^2 = \bar{G} \frac{t_\theta (t_\theta E_\theta + t_\beta E_\beta)}{t_\beta E_\theta E_\beta} \quad (2.98)$$

Le coefficient  $\bar{G}$  dépend de l'hypothèse utilisée pour la couche cisillée et la distribution des contraintes de cisaillement, pour le cas de d'une variation parabolique on a :

$$\bar{G} = \frac{3G}{t_\theta} \quad (2.99)$$

La diffusion de cisaillement pour une cellule élémentaire est :

$$G = \frac{G_{xz}^\theta}{1 - 3 \frac{G_{xz}^\theta}{G_{xz}^\beta} \frac{f(t_\theta)}{t_\theta f'(t_\theta)}} \quad (2.100)$$

En remplaçons la fonction (2.66) dans (2.100) on aura la diffusion de cisaillement pour le modèle parabolique :

$$G = \frac{G_{xz}^\theta}{1 + \alpha \frac{G_{xz}^\theta}{G_{xz}^\beta}} \quad (2.101)$$

On utilise la fonction  $f(z)$  formule (2.81) pour le cas progressif, on aura la formule finale pour G :

$$G = \frac{G_{xz}^\theta}{1 + 3\alpha \frac{\alpha \eta_t (\tanh \alpha \eta_t)^{-1} - 1}{\alpha \eta_t} \frac{G_{xz}^\theta}{G_{xz}^\beta}} \quad (2.102)$$

### 2.2.1.8 Coefficient de Poisson

A fin d'obtenir le coefficient de Poisson pour un stratifié endommagé, on doit calculer les paramètres suivants [91]:

$$\nu_{xy} = - \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x^\beta} \quad (2.103)$$

Avec

$$\bar{\varepsilon}_x^\beta = \varepsilon_{x0} + \frac{\sigma_{xy}^{\theta_0}}{E_\beta} \frac{1}{2l_0} R(a) \frac{1}{\alpha} (1 - \nu_{12} \nu_{xy}^0) \quad (2.104)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y0} + \sigma_{x0}^{90^\circ} \left( \frac{E_\beta - E_\theta}{E_\beta + \alpha E_\theta} \right) \frac{v_{LT}}{E_\beta} \frac{1}{2a} R(a) \quad (2.105)$$

Finalement, le coefficient de Poisson est sous la forme [84,91]:

$$\frac{v_{xy}}{v_{xy}^0} = \frac{1 - \frac{E_\theta t_\theta}{v_{xy}^0} \frac{(1 - \nu_{12} \nu_{xy}^0)}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \left( \frac{S_{xy}^\beta S_{11}^\theta + S_{12}^\theta S_{yy}^\beta}{(S_{yy}^\beta t_\beta + S_{11}^\theta t_\beta)} \right)}{1 + \frac{E_\theta t_\theta}{E_\beta t_\beta} \frac{(1 - \nu_{12} \nu_{xy}^0)}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \frac{1}{2a} R(a) \left( 1 + \nu_{xy}^\beta \frac{(S_{12}^\beta t_\theta + S_{12}^\theta t_\beta)}{(S_{22}^\beta t_\theta + S_{11}^\theta t_\beta)} \right)} \quad (2.106)$$

## 2.2.2 Modèle variationnel

### 2.2.2.1 Introduction

Nous avons vu qu'il existait déjà beaucoup de travaux sur la fissuration transverse. Un grand nombre d'entre eux repose sur le calcul de contraintes par différentes variantes de la méthode de diffusion du cisaillement (shear lag), laquelle aboutit à des expressions très simples. Ces modèles fournissent des résultats assez importants.

Il existe une autre méthode, encore relativement simple, l'approche variationnelle HASHIN [42-44] qui consiste à rechercher un champ de contraintes statiquement admissible minimisant l'énergie complémentaire.

### 2.2.2.2 Cellule de base

Soit un stratifié  $[\beta_n/\theta_m]_s$  sollicité en traction (figure 2.4) dans la direction (x). Ce chargement provoque l'apparition de fissures dans la couche à  $\theta^\circ$ . On suppose que ces fissures s'étendent dans toute la largeur de la couche (suivant la direction z).

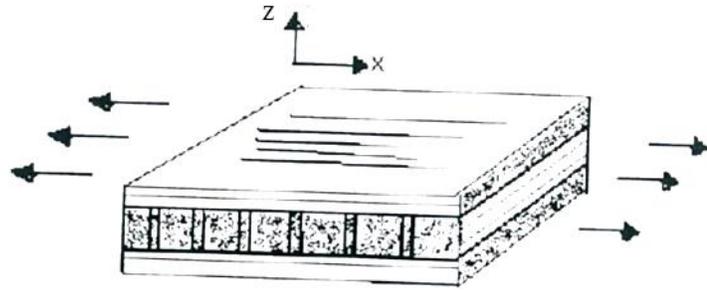


Figure 2.4 : Stratifié  $[\beta_n/\theta_m]_s$  [88].

Pour modéliser ce cas de figure, on prend une cellule de base représentative d'un certain volume du matériau endommagé dont l'état est supposé périodique dans la direction (x) (figure 2.5). Cet élément est limité par deux fissures traversant toute la largeur de la couche à  $\theta^\circ$  et  $\beta^\circ$  [88].

La géométrie de cellule de base est caractérisée par les dimensions suivantes :

- $t_\theta$  : demi-épaisseur de la couche à  $\theta^\circ$ .
- $t_\beta$  : épaisseur de chaque couche à  $\beta^\circ$ .
- $h$  : demi épaisseur du stratifié.
- $l$  : demi épaisseur entre les fissures.

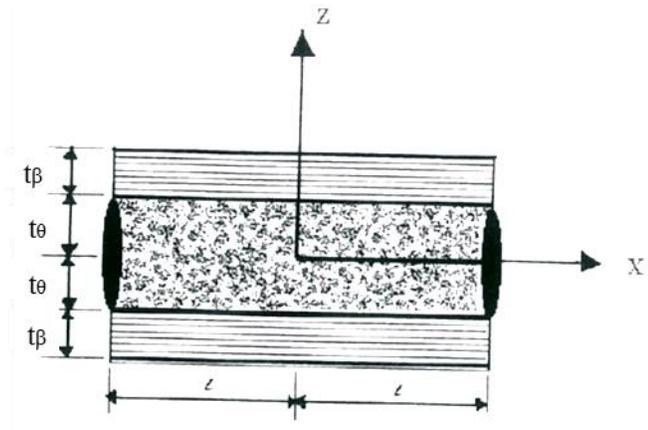


Figure 2.5 : Cellule de base [88].

### 2.2.2.3 Champ de contraintes statiquement admissible

Par hypothèse, les contraintes normales  $\sigma_{xx}$  dans la direction (x), elle même normale à la surface fissurée, sont constantes suivant l'épaisseur (z) et suivant la largeur (y) dans les couches à  $\theta^\circ$  et  $\beta^\circ$  respectivement. Elles sont de la forme :

$$\sigma_{xx}^\theta = \sigma_\theta (1 - \phi_1(x)) \quad (2.107)$$

$$\sigma_{xx}^\beta = \sigma_\beta (1 - \phi_2(x)) \quad (2.108)$$

Où  $\sigma_\theta$ , est la contrainte appliquée sur la couche à  $\theta^\circ$ , calculée par la théorie des plaques stratifiées pour le matériau sain.  $\frac{\sigma_\theta}{\sigma_c} = \frac{E_\theta}{E_x^0}$

$\sigma_\beta$ , est la contrainte appliquée sur la couche à  $\beta^\circ$ , calculée par la théorie des plaques stratifiées pour le matériau sain.  $\frac{\sigma_\beta}{\sigma_c} = \frac{E_\beta}{E_x^0}$

$\phi_1, \phi_2$  sont des fonctions inconnues.

Un champ de contraintes vérifiant les équations d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(n)}}{\partial z} = 0 \quad (2.109)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(n)}}{\partial z} = 0 \quad (2.110)$$

Avec  $n=\theta, \beta$  le champs est de la forme :

$$\sigma_{xz}^\theta = \sigma_\theta (\phi_1'(x)z + f_1(x)) \quad (2.111)$$

$$\sigma_{zz}^\theta = \sigma_\theta \left( \frac{1}{2} \phi_1'(x)z^2 + f_1'(x)z + g_1(x) \right) \quad (2.112)$$

$$\sigma_{xz}^\beta = \sigma_\beta (\phi_2'(x)z + f_2(x)) \quad (2.113)$$

$$\sigma_{zz}^{\beta} = \sigma_{\beta} \left( \frac{1}{2} \phi_2''(x) z^2 + f_2'(x) z + g_2(x) \right) \quad (2.114)$$

Où  $f_n(x)$  et  $g_n(x)$  sont des fonctions inconnues et  $f'$  est la dérivée de la fonction  $f$  par rapport à  $x$ .

Les conditions aux limites sont :

$$\sigma_{xx}^{\theta}(x, 0) = 0 \quad \text{en raison de la symétrie} \quad (2.115)$$

$$\sigma_{xz}^{\theta}(x, t_{\theta}) = 0 \quad \text{en raison de la continuité à l'interface} \quad (2.116)$$

$$\sigma_{xz}^{\beta}(x, h) = 0 \quad \text{en raison de la condition de surface extérieure libre} \quad (2.117)$$

$$\sigma_{zz}^{\beta}(x, t_{\theta}) = \sigma_{zz}^{\theta}(x, t_{\theta}) \quad \text{en raison de la continuité à l'interface} \quad (2.118)$$

$$\sigma_{zz}^{\beta}(x, h) = 0 \quad \text{en raison de la condition de surface extérieure libre} \quad (2.119)$$

$$\sigma_{xx}^{\theta}(\pm l, z) = 0 \quad \text{en raison de la condition de surface extérieure libre} \quad (2.120)$$

$$\sigma_{xz}^{\theta}(\pm l, z) = 0 \quad \text{en raison de la condition de surface extérieure libre} \quad (2.121)$$

On pose maintenant :

$$\phi_1(x) = \phi(x) \quad (2.122)$$

Et on exprime  $\phi_2(x)$  en fonction de  $\phi(x)$  grâce à la relation d'équilibre globale du stratifié :

$$\sigma_{\beta} t_{\beta} \phi_1(x) + \sigma_{\theta} t_{\theta} \phi_2(x) = 0 \quad (2.123)$$

Les conditions aux limites (2.115), (2.116), (2.117), (2.118), (2.119), (2.120), (2.121) permettent de déterminer les fonctions  $f_n(x)$  et  $g_n(x)$ . Les contraintes sont alors de la forme :

$$\sigma_{xx}^{\theta} = \sigma_{\beta} (1 - \phi(x)) \quad (2.124)$$

$$\sigma_{xz}^{\theta} = \sigma_{\beta} \phi'(x) z \quad (2.125)$$

$$\sigma_{zz}^{\theta} = \sigma_{\theta} \phi''(x) \frac{1}{2} (ht_{\theta} - z^2) \quad (2.126)$$

$$\sigma_{xx}^{\beta} = \sigma_{\beta} + \sigma_{\theta} \left( \frac{t_{\theta}}{t_{\beta}} \right) \phi(x) \quad (2.127)$$

$$\sigma_{xz}^{\beta} = \sigma_{\theta} \left( \frac{t_{\theta}}{t_{\beta}} \right) \phi'(x) (h-z) \quad (2.128)$$

$$\sigma_{zz}^{\beta} = \sigma_{\theta} \left( \frac{t_{\theta}}{t_{\beta}} \right) \phi''(x) \frac{1}{2} (h-z)^2 \quad (2.129)$$

Pour satisfaire les conditions aux limites (2.120) et (2.121) compte tenu des expressions (2.124), (2.125), (2.126) on doit avoir :

$$\phi(\pm l) = 1 \quad \phi'(\pm l) = 0 \quad 0 \leq |z| \leq t_{\theta} \quad (2.130)$$

Les formules (2.124), (2.125), (2.126), (2.127), (2.128), (2.129) constituent l'expression d'un champ de contraintes statiquement admissible, dépendant d'une fonction inconnue  $\phi(x)$  devant satisfaire les conditions aux limites.

#### 2.2.2.4 Utilisation du principe de l'énergie Complémentaire Minimum

Pour obtenir l'expression de  $\phi$  qui conduit à la meilleure approximation de la solution, on utilise le principe de l'énergie complémentaire minimale sous forme :

$$u_c = \frac{1}{2} \int_V S_{IJKL} \sigma_{IJ} \sigma_{KL} dV \quad (2.131)$$

Où,  $V$  est le volume de cellule de base.

$S_{IJKL}$  sont les souplesses locales.

$\sigma_{IJ}$  est le champ de contraintes statiquement admissible.

On peut montrer que l'on a :

$$u_c = u_c^0 + u_c' \quad (2.132)$$

Où :

$$u_c^0 = \frac{1}{2} \int_V S_{IJKL} \sigma_{IJ}^0 \sigma_{KL}^0 dV \quad (2.133)$$

$$u_c' = \frac{1}{2} \int_V S_{IJKL} \sigma_{IJ}' \sigma_{KL}' dV \quad (2.134)$$

$$\sigma_{IJ}' = \sigma_{IJ} - \sigma_{IJ}^0 \quad (2.135)$$

Où  $\sigma_{IJ}$  sont les contraintes totales.

$\sigma_{IJ}^0$  sont les contraintes du milieu sain.

On peut écrire :

$$u_c' = 2 \int_{-l_0}^{+l_\theta} \int w_1 dz dx + 2 \int_{-l_\theta}^{+l_h} \int w_2 dz dx \quad (2.136)$$

Où  $w_1$  et  $w_2$  sont les densités volumiques de déformation des deux sortes de couches qui sont données par :

$$2w^\theta = \frac{(\sigma_{xx}^\theta)^2}{E_\theta} - \frac{2\nu_\theta}{E_\theta} \sigma_{xx}^\theta \sigma_{zz}^\theta + \frac{(\sigma_{zz}^\theta)^2}{E_\theta} + \frac{(\sigma_{xz}^\theta)^2}{G_\theta} \quad (2.137)$$

$$2w^\beta = \frac{(\sigma_{xx}^\beta)^2}{E_\beta} - \frac{2\nu_\beta}{E_\beta} \sigma_{xx}^\beta \sigma_{zz}^\beta + \frac{(\sigma_{zz}^\beta)^2}{E_\beta} + \frac{(\sigma_{xz}^\beta)^2}{G_\beta} \quad (2.138)$$

En portant les expressions (2.137) et (2.138) dans (2.136) et en posant  $x = \xi \cdot t_\theta$

On obtient :

$$u_c' = \frac{1}{2} \sigma_\theta^2 t_\theta^2 \int_{-a}^{+a} \left( C_{00} \phi^2 + C_{02} \phi + C_{22} \left( \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} \right)^2 + C_{11} \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 \right) d\xi \quad (2.139)$$

Où,

$$C_{00} = \frac{1}{E_\theta} + \frac{1}{\alpha E_\beta} \quad (2.140)$$

$$C_{02} = \frac{\nu_\theta}{E_\theta} \left( \alpha + \frac{2}{3} \right) - \frac{\alpha \nu_\beta}{3E_\beta} \quad (2.141)$$

$$C_{22} = \frac{1}{60E_\theta} (\alpha + 1)(3\alpha^2 + 12\alpha + 8) \quad (2.142)$$

$$C_{11} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{G_\theta} + \frac{\alpha}{G_\beta} \right) \quad (2.143)$$

$$\alpha = \frac{t_\beta}{t_\theta} \quad (2.144)$$

$$a = \frac{l}{t_\theta} \quad (2.145)$$

$a$  est proportionnel à l'inverse de la densité de fissure.

La fonction  $\phi$  qui assure le minimum de  $u_c'$  est telle que :

$$\frac{d^4 \phi}{d\xi^4} + p \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} + q\phi = 0 \quad (2.146)$$

Où, 
$$p = \frac{C_{02} - C_{11}}{C_{22}} ; \quad q = \frac{C_{00}}{C_{22}} \quad (2.147)$$

La solution qui nous intéresse est de la forme :

$$\phi = A_1 ch\delta\xi \cos\gamma\xi + A_2 sh\delta\xi \sin\gamma\xi \quad (2.148)$$

Avec, compte tenu de (2.130)

$$A_1 = \frac{2(\delta \cdot ch\delta a \cdot \sin\gamma a + \gamma \cdot sh\delta a \cdot \cos\gamma a)}{\delta \cdot \sin 2\gamma a + \gamma \cdot sh 2\delta a} \quad (2.149)$$

$$A_2 = \frac{2(\gamma \cdot ch\delta a \cdot \sin\gamma a + \delta \cdot sh\delta a \cdot \cos\gamma a)}{\delta \cdot \sin 2\gamma a + \gamma \cdot sh 2\delta a} \quad (2.150)$$

$$\delta = q^{\frac{1}{4}} \cos \frac{\mu}{2} ; \quad \gamma = q^{\frac{1}{4}} \sin \frac{\mu}{2} ; \quad \mu = \arctg \sqrt{\frac{4q}{p^2} - 1} \quad (2.151)$$

En supposant que  $q > p^2$ .

Le champ de contraintes peut alors être complètement explicité par :

$$\frac{\sigma_{xx}^{\theta}}{\sigma_c} = \frac{E_{\theta}}{E_x^0} (1 - \phi_1(x)) \quad (2.152)$$

$$\frac{\sigma_{xx}^{\beta}}{\sigma_c} = \frac{E_{\beta}}{E_x^0} \left( 1 + \frac{E_{\theta}}{E_{\beta}} \frac{1}{a} \phi_1(x) \right) \quad (2.153)$$

En multipliant l'expression (2.148) par  $\frac{l}{l}$  on obtient :

$$\phi = A_1 ch\delta a \frac{x}{l} \cos\gamma a \frac{x}{l} + A_2 sh\delta a \frac{x}{l} \sin\gamma a \frac{x}{l} \quad (2.154)$$

### 2.2.2.5 Module de Young longitudinal

A partir des équations du champ de contrainte (2.152) et (2.153), la réduction de la rigidité  $E_x$  peut être exprimée par :

$$\frac{E_x}{E_{x0}} = \frac{1}{1 + \frac{E_{\theta}}{E_{\beta}} \frac{t_{\theta}}{t_{\beta}} \frac{1}{l_0} g(\bar{l}_0)} \quad (2.155)$$

Avec  $g(\bar{l}_0)$  exprimé par :

$$g(\bar{l}_0) = \frac{2\delta\gamma}{\delta^2 + \gamma^2} \frac{\cosh(2\delta\bar{l}_0) - \cos(2\gamma\bar{l}_0)}{\delta \sin(2\gamma\bar{l}_0) + \gamma \sin(2\delta\bar{l}_0)} \quad (2.156)$$

### 2.2.2.6 Module de cisaillement longitudinal

Lorsque la distance entre les fissures est constante, le module de cisaillement longitudinal peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{G_{xy}}{G_{xy}^0} \geq \frac{1}{1 + \frac{\tanh \mu \rho}{\alpha \mu \rho}} \quad (2.157)$$

Tel que

$$\mu = \sqrt{\frac{3 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{1 + \alpha \frac{G_\beta}{G_\theta}}} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{2lt_\theta} \quad (2.158)$$

Lorsque la distance entre les fissures est très importante alors  $\tanh \mu \rho \sim 1$  et la relation (2.157) deviens :

$$\frac{G_{xy}}{G_{xy}^0} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha \mu \rho}} \quad (2.159)$$

Et si la distance entre les fissures est très petite  $\mu \rho \sim 1$ , le module de cisaillement longitudinale devient alors :

$$\frac{G_{xy}}{G_{xy}^0} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}} \quad (2.160)$$

Pour le cas de la densité de fissuration on a deux paramètres :

a) Pour le cas d'un stratifié croisé : on a  $\rho = \frac{1}{2 \cdot l_0}$  (2.161)

b) Pour le cas d'un stratifié non croisé :  $\rho = \frac{1}{2 \cdot l_0 \cdot \sin(\theta)}$  (2.162)

### 2.3 Conclusion

Deux types de modélisation ont été développés dans ce chapitre pour représenter le comportement mécanique d'un stratifié fissuré sous une sollicitation uni axiale et avec différents angles d'orientations des fibres. L'exploitation de ces deux approches nous permet de donner les expressions du module longitudinal, coefficient de Poisson et module de cisaillement ceci, en fonction des densités de fissures transverses.

## CHAPITRE 3

### SIMULATION ET RÉSULTATS DES STRATIFIÉS $[\beta_m/\theta_n]_s$ FISSURÉS AVEC CHARGEMENT MÉCANIQUE

#### 3.1 Introduction

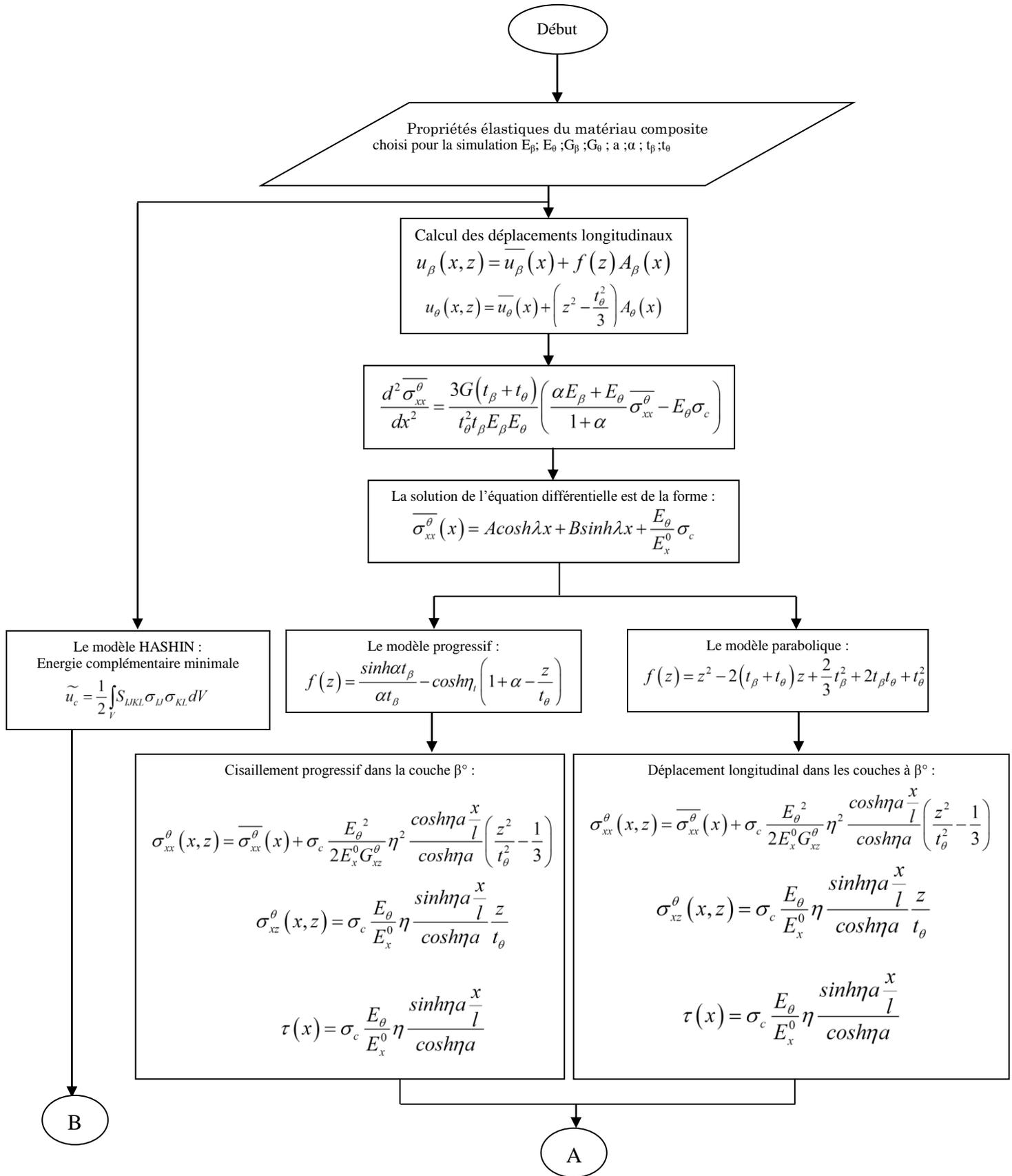
Afin d'évaluer quantitativement le comportement mécanique d'un composite sous une traction monotone, il est important de connaître l'évolution du module de Young, module de cisaillement et coefficient de Poisson. Nous nous intéressons à la fissuration des stratifiés croisés et non croisés.

Une étude du module de Young longitudinal, du module de cisaillement et du coefficient de Poisson en fonction de la densité des fissures transverses, pour les modèles cités précédemment dans le cas des stratifiés croisés et non croisés, est comparée avec l'expérimental [5,51,54,92,94]. La méthode de diffusion de cisaillement semble la plus intéressante pour représenter le comportement mécanique d'un stratifié croisé et non croisé.

Finalement, une conclusion est faite sur le comportement du matériau composite croisé et non croisé, en fonction de la densité de fissuration et sous l'effet d'une traction semi axiale.

#### 3.2 Organigramme

Pour représenter le comportement du matériau composite  $[\beta_m/\theta_n]_s$  fissuré soumis à une traction uni axiale, on a élaboré le programme **TRANCRAK** en se basant sur les différents modèles cités précédemment. Notre programme est décrit à travers l'organigramme présenté ci-dessous :



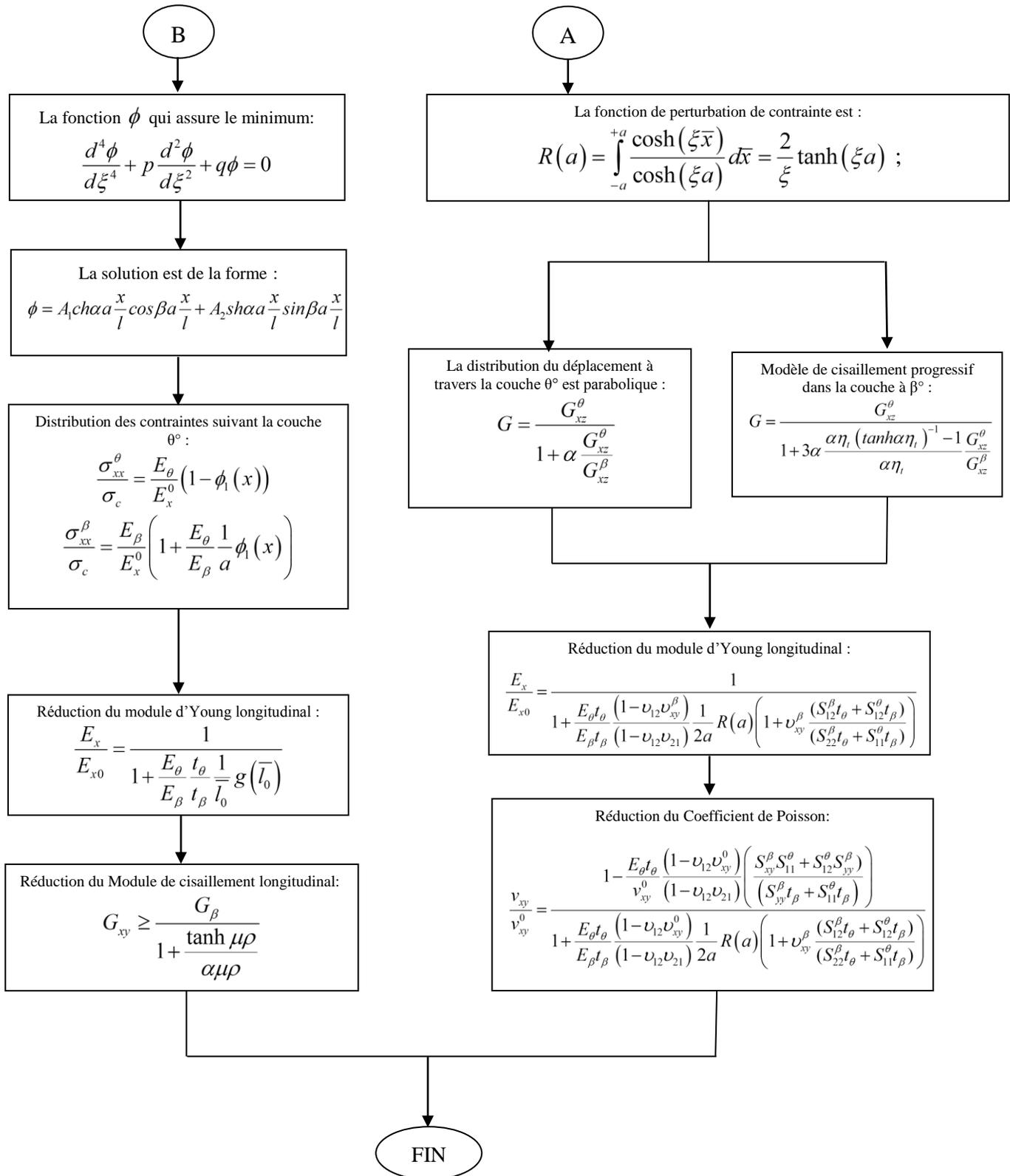


Figure 3.1 : Organigramme du TRANCRAK

### 3.3 Etude du module de Young longitudinal

#### 3.3.1 Présentation du module de Young longitudinal pour les stratifiés croisés [0/90]<sub>s</sub>

##### 3.3.1.1 Présentation du module de Young longitudinal en utilisant le modèle de diffusion de cisaillement

La simulation numérique est effectuée pour le composite AS4-3502 [51] dont les propriétés élastiques sont :  $E_L=144.8\text{GPa}$ ,  $E_T=9.58\text{GPa}$ ,  $G_{LT}=4.79\text{GPa}$ ,  $G_{TT}=4.2\text{GPa}$ ,  $\nu_{LT}=0.31$ ,  $\nu_{TT}=0.4$  avec une épaisseur de chaque couche de 0.127mm.

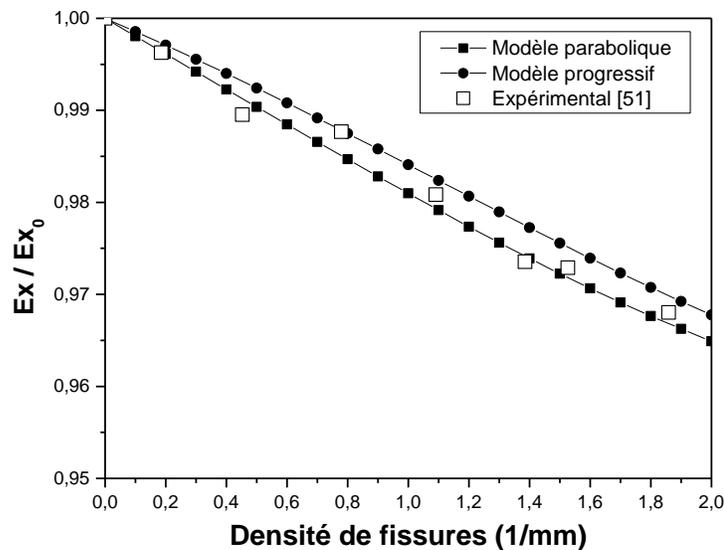


Figure 3.2 : Comparaison entre la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié [0/90]<sub>s</sub> AS4-3502 et l'expérimental [51].

Pour mettre en évidence la perte de rigidité causée par ce type d'endommagement (fissuration transverse), on a étudié la variation du module de Young longitudinal en fonction de la densité des fissures transverses, pour les deux modèles (parabolique et progressif). Nos résultats représentés dans les figures 3.2, 3.3 et 3.4 sont comparés avec les résultats expérimentaux publiés par Groves [51]. Ces résultats ont été déterminés à partir des essais sur le composite [0/90]<sub>n</sub>s AS4-3502.

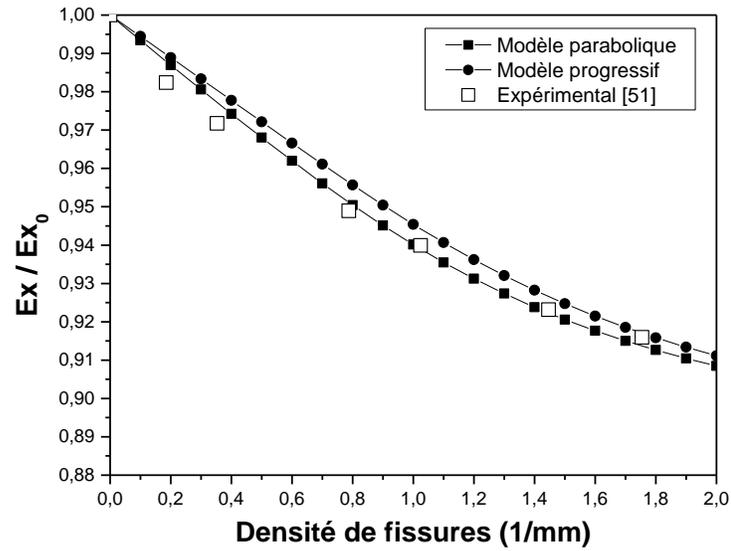


Figure 3.3 : Comparaison entre la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié  $[0/90_2]_s$  AS4-3502 et l'expérimental [51].

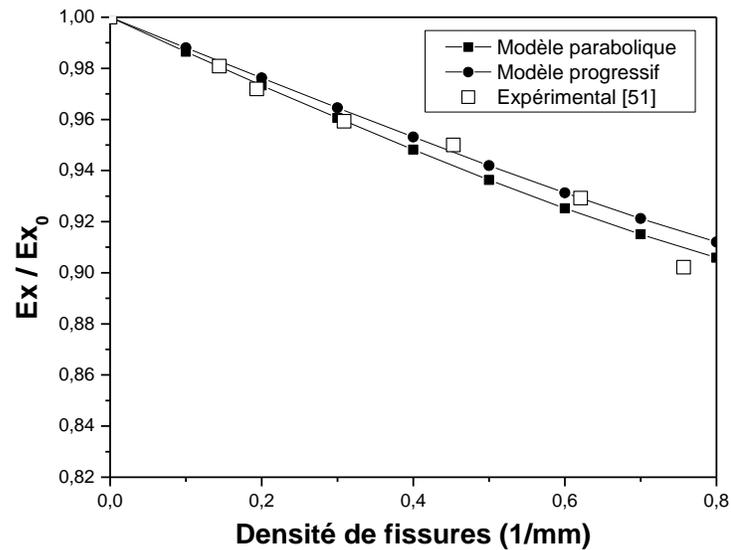


Figure 3.4 : Comparaison entre la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié  $[0/90_3]_s$  AS4-3502 et l'expérimental [51].

On remarque que nos résultats sont plus proches des résultats expérimentaux [51] et sont validés avec les résultats publiés par Adda Bedia, Tounsi, Amara et autres [81,82,84,85,93], cela pour différents alpha ( $\alpha= 1$  ,  $\alpha=1/2$  et  $\alpha=1/3$ ). La réduction du module de Young longitudinal est plus importante lorsque le rapport d'épaisseur est faible et cela en fonction de la densité de fissures (c à d le nombre de couche à  $90^\circ$  est plus important que le nombre de couche à  $0^\circ$ ). Le modèle parabolique semble le plus proche des résultats expérimentaux et pour différents stratifiés  $[0/90_n]_s$ .

### 3.3.1.2 Présentation du module de Young longitudinal pour les stratifiés croisés en utilisant le modèle variationnel

La variation du module longitudinal est étudiée en fonction de la densité des fissures transverses, pour le modèle variationnel sur le matériau composite croisé  $[0/90_n]_s$ . Les résultats obtenus (figures 3.5 et 3.6) sont comparés avec les résultats expérimentaux publiés par Groves [51].

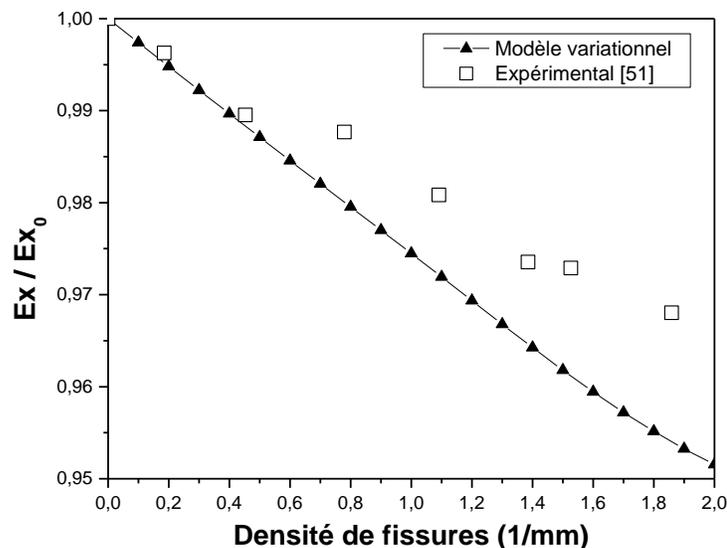


Figure 3.5 : Comparaison de la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissures  $[0/90]_s$  AS/3502 et l'expérimental [51].

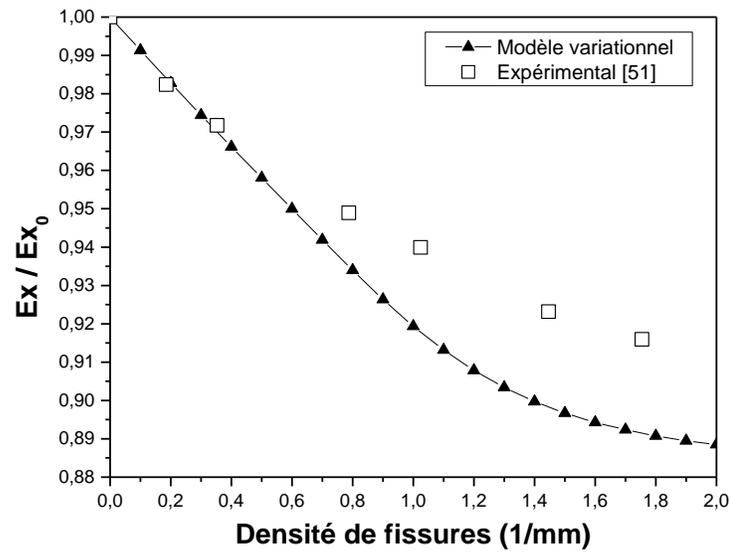


Figure 3.6 : Comparaison de la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissures  $[0/90_2]_s$  AS/3502 et l'expérimental [51].

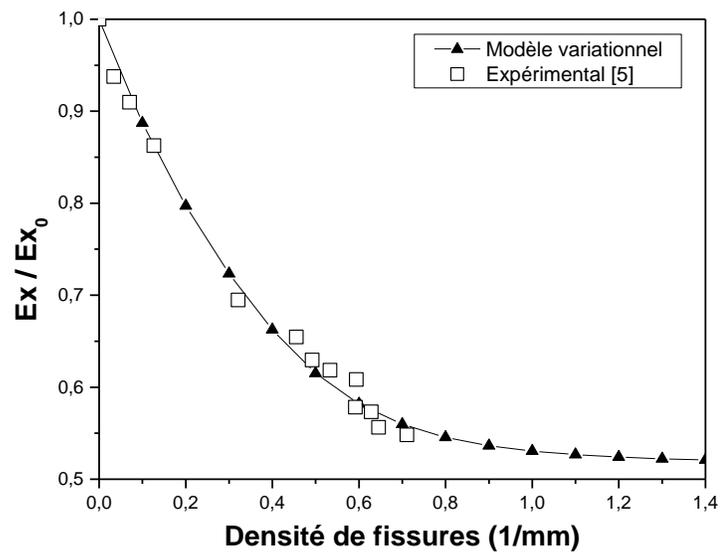


Figure 3.7 : Comparaison de la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissures  $[0/90_3]_s$  Verre/époxy et l'expérimental [5]

Le modèle variationnel pour différents rapport d'épaisseur ( $\alpha = 1$  et  $1/2$ ) donne des résultats (Fig. 3.5 et 3.6) présentant un écart à partir d'une densité de fissures supérieure à  $0.4 \text{ mm}^{-1}$  par rapport aux résultats expérimentaux publiés par Groves [51] pour le stratifié AS/3502. On remarque toujours une réduction plus importante du module de Young longitudinal lorsque le nombre de couche à  $90^\circ$  est très important par rapport aux couches à  $0^\circ$ .

Dans la figure 3.7 on a étudié la réduction du module de Young longitudinal pour le stratifié verre/époxy  $[0/90_3]_s$  dont les propriétés élastiques sont [32]:  $E_L=41.7 \text{ GPa}$ ,  $E_T=13 \text{ GPa}$ ,  $G_{LT}=3.4 \text{ GPa}$ ,  $G_{TT}=4.58 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{LT}=0.3$ ,  $\nu_{TT}=0.42$  et  $h_0=0.203 \text{ mm}$  tout en établissant une comparaison avec les résultats expérimentaux publiés par Highsmith [5]. On note que les résultats analytiques s'approchent des résultats expérimentaux [5] pour un stratifié qui contient un nombre important de couches à  $90^\circ$  par rapport aux couches à  $0^\circ$ .

### 3.3.1.3 Comparaison des modules de Young longitudinaux pour les différents modèles

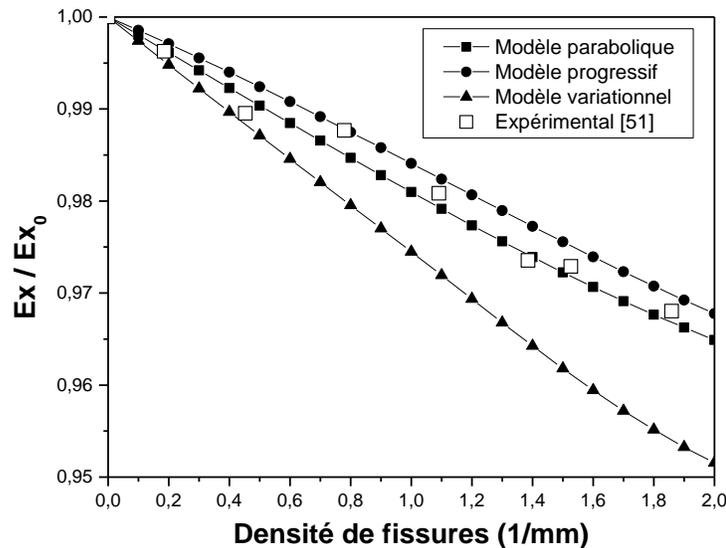


Figure 3.8 : Comparaison entre la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissures  $[0/90]_s$  AS4-3502 pour les trois modèles.

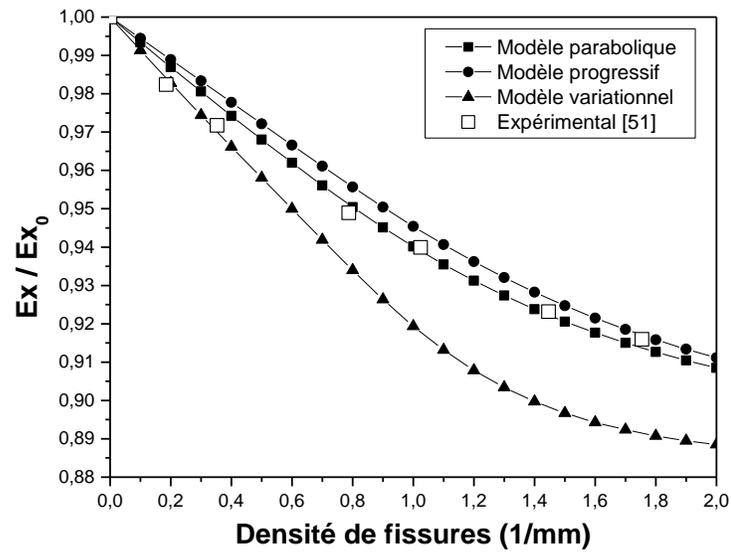


Figure 3.9 : Comparaison entre la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissures  $[0/90_2]_S$  AS4-3502 pour les trois modèles.

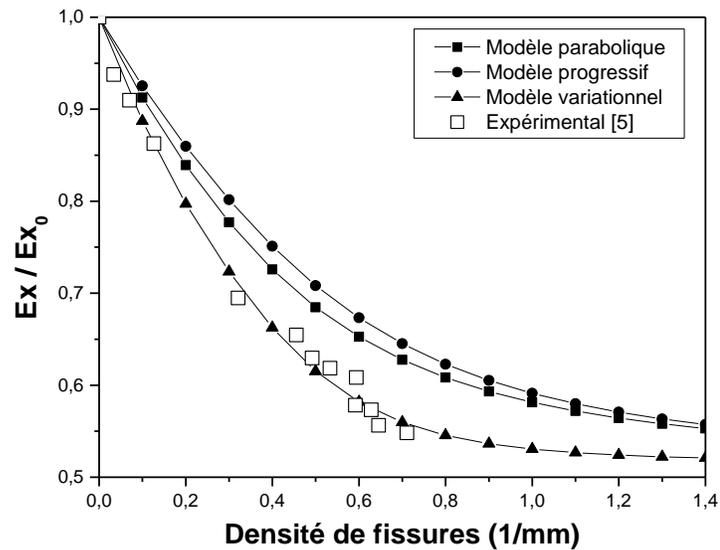


Figure 3.10 : Comparaison entre la réduction du module de Young en fonction de la densité de fissures  $[0/90_3]_S$  verre/époxy pour les trois modèles.

Les résultats dans les figures 3.8 et 3.9 montrent que lorsque les fissures transverses s'initient, le module d'Young longitudinal sera réduit et la meilleure prédiction comparative aux résultats expérimentaux [51] est donnée par le modèle parabolique. Le modèle variationnel prévoit des réductions supérieures à ceux obtenus par les essais expérimentaux. Pour le cas du stratifié  $[0/90_3]_s$  verre/époxy (Fig. 3.10), le modèle variationnel semble le plus proche de l'expérimental [5] dans le cas où on a un nombre important de couche fissurés à  $90^\circ$  par rapport au couche à  $0^\circ$ .

### 3.3.2 Présentation du module de Young longitudinal pour les stratifiés $[\beta_m/\theta_n]_s$

#### 3.3.2.1 Réduction du module de Young longitudinal pour les stratifiés $[\beta_m/90_n]_s$

La simulation numérique est effectuée pour le composite GF/EP verre /époxy [92] dont les propriétés élastiques sont :  $E_L=44.73\text{GPa}$ ,  $E_T=12.76\text{GPa}$ ,  $G_{LT}=5.8\text{GPa}$ ,  $G_{TT}=4.49\text{GPa}$ ,  $\nu_{LT}=0.297$ ,  $\nu_{TT}=0.42$  avec une épaisseur de chaque couche de  $0.144\text{mm}$ .

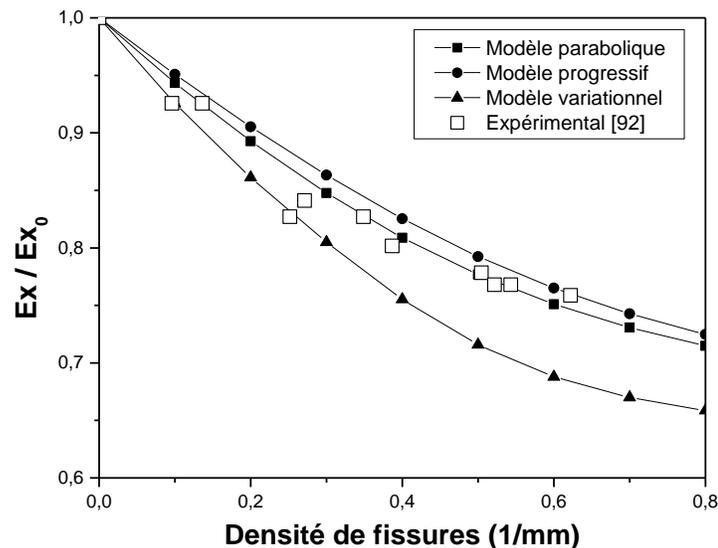


Figure 3.11 : Réduction du module de Young longitudinal en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié GF/EP  $[0_2/90_4]_s$

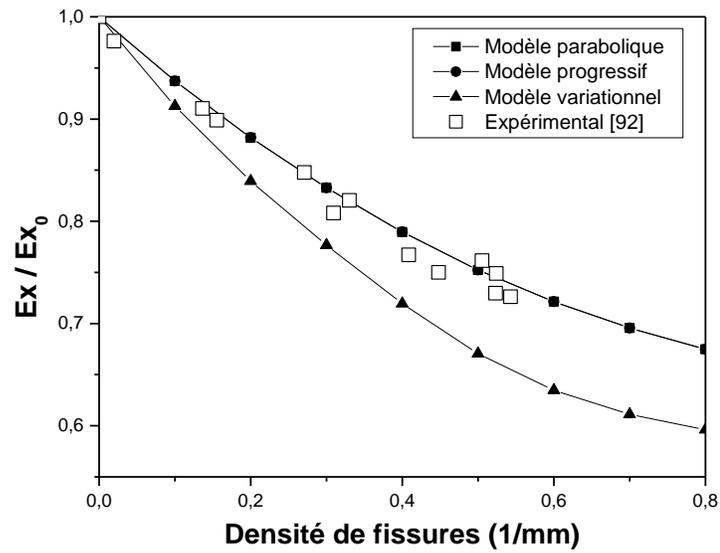


Figure 3.12 : Réduction du module de Young longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié GF/EP  $[\pm 15/90_4]_s$

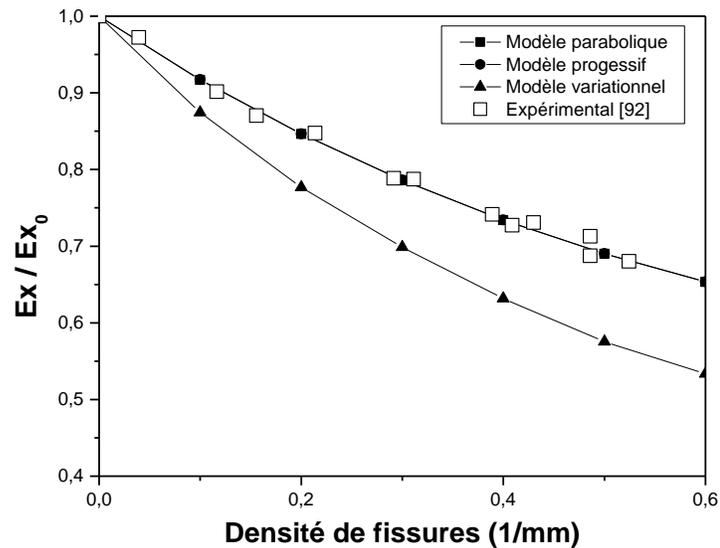


Figure 3.13 : Réduction du module de Young longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié GF/EP  $[\pm 30/90_4]_s$

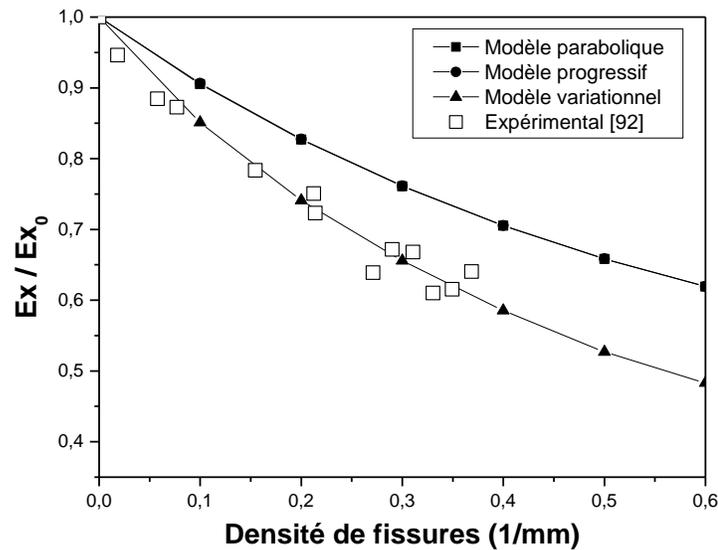


Figure 3.14 : Réduction du module de Young longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié GF/EP  $[\pm 40/90_4]_s$

La réduction de la rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissurations pour un stratifié GF/EP verre /époxy  $[\beta_m/90_n]_s$  est représentée dans les figures (3.11 au 3.14) et comparé avec l'expérimental publié par Joffe [92]. Pour un stratifié croisé  $[0_2/90_4]_s$  le modèle diffusion de cisaillement (parabolique et progressif) donne des résultats (Fig. 3.11) assez proche de l'expérimental [92], par contre le modèle variationnel est un peu loin. Les mêmes résultats ont été remarqué pour  $[\pm 15/90_4]_s$  (Fig. 3.12) et  $[\pm 30/90_4]_s$  (fig. 3.13).

Par contre pour le cas d'un stratifié  $[\pm 40/90_4]_s$  (Fig. 3.14) on remarque que seul le modèle variationnel présente des résultats plus proches à l'expérimental [92], ce qui rend ce modèle très efficace dans l'étude d'interaction de la fissuration transverse avec le délaminage. On note que le modèle parabolique et progressif sont confondu pour  $\beta > 0^\circ$  (c.-à-d. un stratifié non croisé).

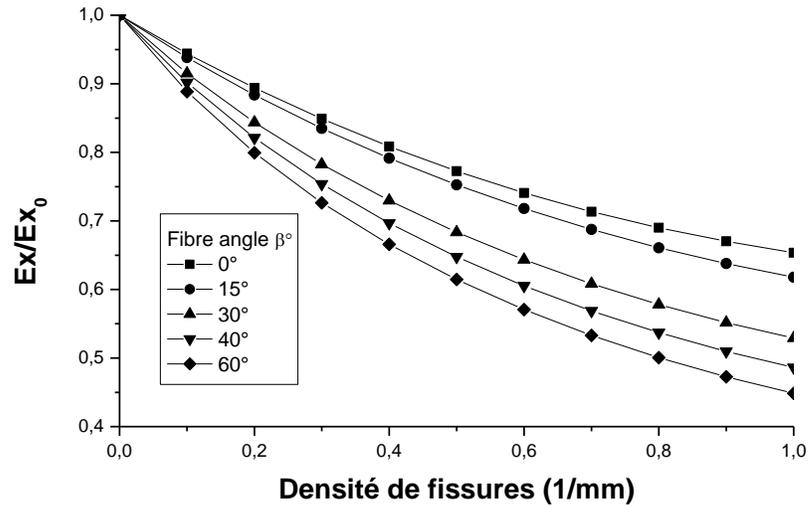


Figure 3.15 : Réduction de la rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissuration pour différents angle  $\beta^\circ$  (hors fissure) pour le stratifié  $[\beta/90_3]_s$

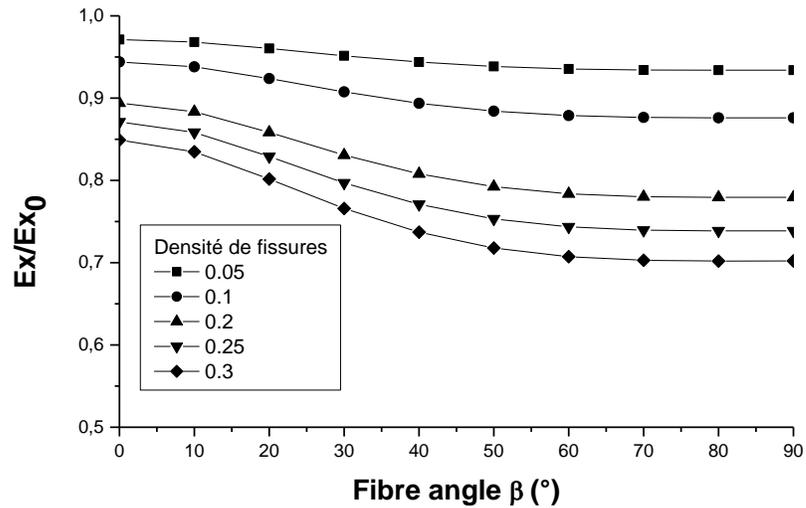


Figure 3.16 : Réduction de la rigidité longitudinale en fonction d'angles de fibre  $\beta^\circ$  (hors fissuration) pour différentes densités de fissuration pour le stratifié  $[\beta/90_3]_s$

La réduction de la rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissuration pour différentes angle  $\beta^\circ$  (hors fissure) pour le stratifié  $[\beta/90_3]_s$ , est représenté dans la figure (3.15) ou on note une réduction plus importante avec l'augmentation de l'angle de fibre  $\beta^\circ$  (hors fissure) et de la densité de fissuration. La même influence est clairement représentée (Fig. 3.16) pour le cas d'une réduction de la rigidité en fonction d'angles de fibre  $\beta^\circ$ (hors fissuration), pour différentes densités de fissurations.

Une réduction de la rigidité longitudinale en fonction d'angles de fibre  $\beta^\circ$  (hors fissuration, Fig. 3.17) est nettement remarqué avec la diminution du rapport d'épaisseur c.-à-d. avec l'augmentation de nombre de couche à  $90^\circ$  (lorsque n est important par rapport à m)

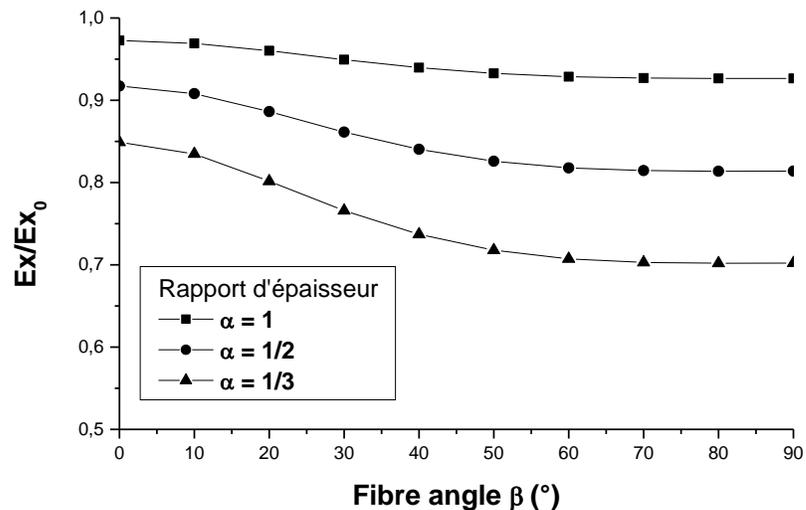


Figure 3.17 : Réduction de la rigidité longitudinale en fonction d'angles de fibre  $\beta^\circ$  (hors fissurations) pour différents rapport d'épaisseur avec  $\rho = 0.3$  (1/mm).

### 3.3.2.2 Réduction du module de Young longitudinal pour les stratifiés $[0_m/\theta_n]_s$

La simulation numérique est effectuée pour le composite verre /époxy [94] dont les propriétés élastiques sont :

Tableau 3.1 : Propriétés mécaniques du composite verre/époxyde

	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
Couche à $0^\circ$	43	13	4.69	0.3
Couche à $90^\circ$	13	43	4.69	0.09
Couche à $45^\circ$	13.36	13.36	8.76	0.42

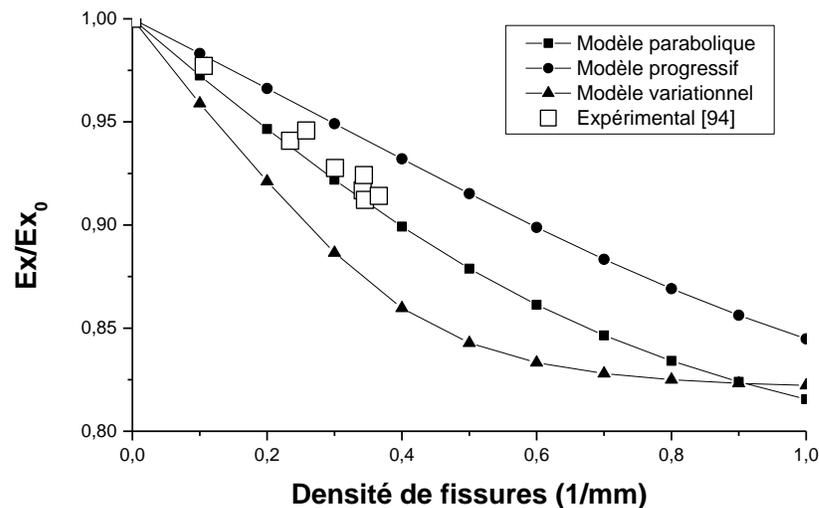


Figure 3.18 : Réduction du module de Young longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié verre /époxy  $[0/45]_s$  avec  $t_{45}=0.61$  mm.

La réduction de la rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié verre /époxy  $[0/45]_s$  (fissuré dans la couche à  $45^\circ$ ) avec une épaisseur de la couche à  $45^\circ$  égal à 0.61 mm, est comparée avec l'expérimental publié par Katerelos [94] (Fig. 3.18). On remarque toujours que le modèle parabolique semble le plus proche de l'expérimental par rapport au modèle progressif et variationnel. Par contre en augmentant l'épaisseur de la couche fissurée à  $45^\circ$  (Fig. 3.19), on note que la méthode variationnelle est la plus proche de l'expérimental [94], ce qui laisse cette dernière très utilisée pour représenter le comportement d'un matériau  $[\beta_m/\theta_n]_s$  sous effet de fissurations transversales et délaminages.

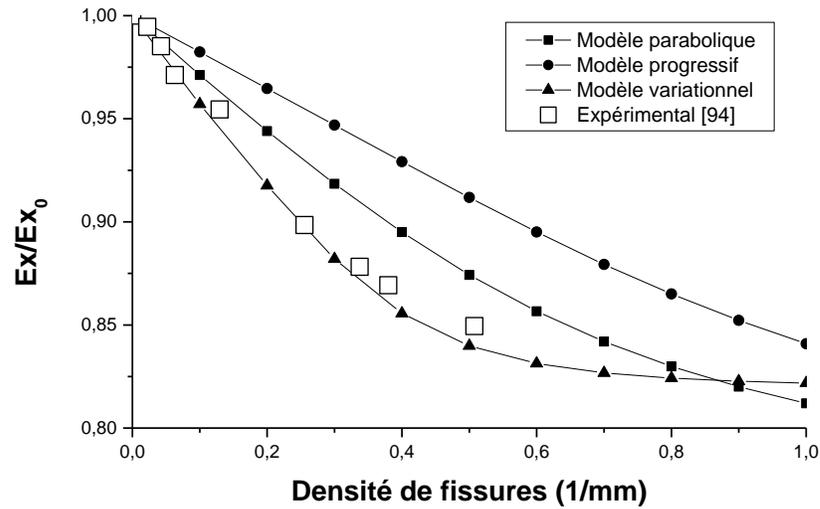


Figure 3.19 : Réduction du module de Young longitudinal en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié verre /époxy  $[0/45]_s$  avec  $t_{45}=0.64\text{mm}$ .

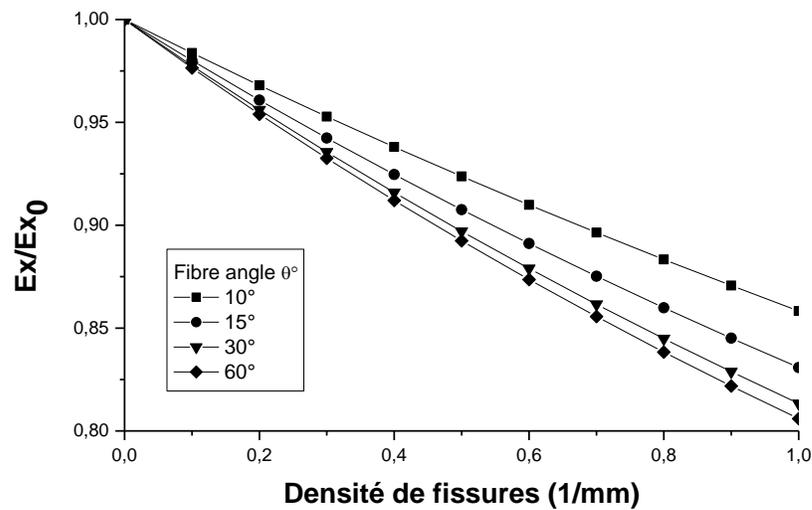


Figure 3.20 : Réduction de la rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissurations pour différents angle  $\theta^\circ$  d'orientation des couches fissurées pour le stratifié  $[0/\theta_3]_s$ .

La réduction de la rigidité longitudinale en fonction de la densité de fissurations pour différents angles  $\theta^\circ$  d'orientation des fibres fissurés pour le stratifié  $[0/\theta_3]_s$  est représentée dans la figure 3.20. Une réduction de la rigidité longitudinale est remarquée avec l'augmentation de l'angle de fibre  $\theta^\circ$  (couche fissuré) et de la densité de fissuration. La même influence est clairement représentée (Fig. 3.21) pour le cas d'une réduction de la rigidité en fonction d'angles de fibre  $\theta^\circ$  (couche fissurés) pour différentes densités de fissurations.

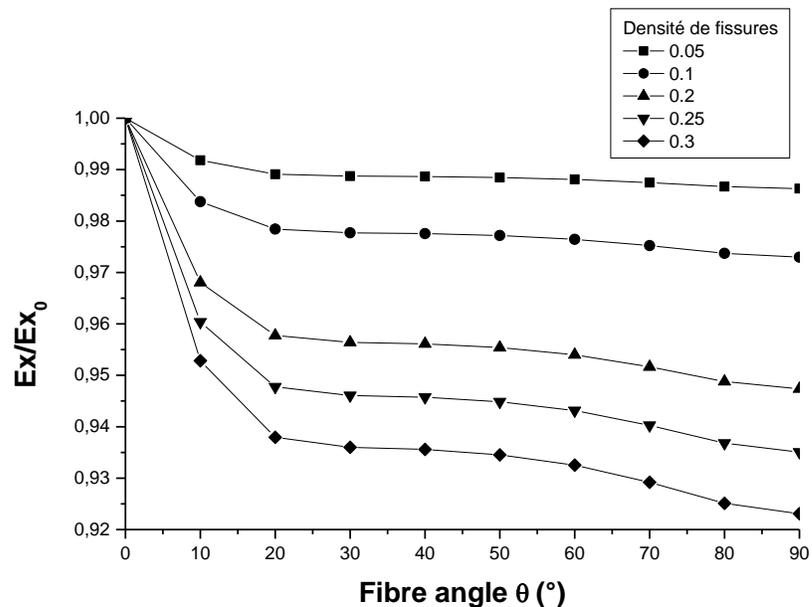


Figure 3.21 : Réduction de la rigidité longitudinale en fonction d'angles  $\theta^\circ$  d'orientation des couches fissurés pour différentes densités de fissuration pour le stratifié  $[0/\theta_3]_s$

### 3.4 Etude du module de cisaillement longitudinal

#### 3.4.1 Présentation du module de cisaillement longitudinal pour les stratifiés croisés $[0_m/90_n]_s$

La simulation numérique est effectuée pour le composite verre /époxy [94] avec différents rapport d'épaisseur en utilisant le modèle variationnel.

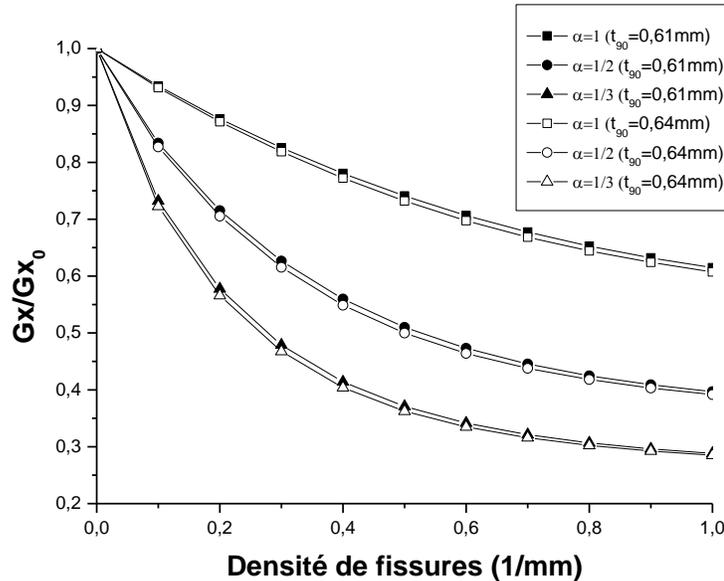


Figure 3.22 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié verre /époxy  $[0/90_n]_s$  avec différents rapport d'épaisseurs.

La réduction du module de cisaillement longitudinale en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié verre /époxy  $[0/90_n]_s$  et avec différents rapports d'épaisseurs est représentée dans la figure 3.22, ou l'effet de l'épaisseur de la couche à  $90^\circ$  a été mise en évidence pour montrer l'influence de ce dernier sur le comportement du module de cisaillement. On remarque que l'augmentation de l'épaisseur de la couche à  $90^\circ$  favorise la réduction du module de cisaillement et encore plus, lorsque le nombre de couche à  $90^\circ$  est plus important que les couches à  $0^\circ$ .

### 3.4.2 Présentation du module de cisaillement longitudinal pour les stratifiés $[\beta_m/\theta_n]_s$

#### 3.4.2.1 Réduction du module de cisaillement longitudinal pour les stratifiés $[\beta_m/90_n]_s$

La simulation numérique est effectuée pour le composite verre /époxy [94] avec différents rapport d'épaisseur.

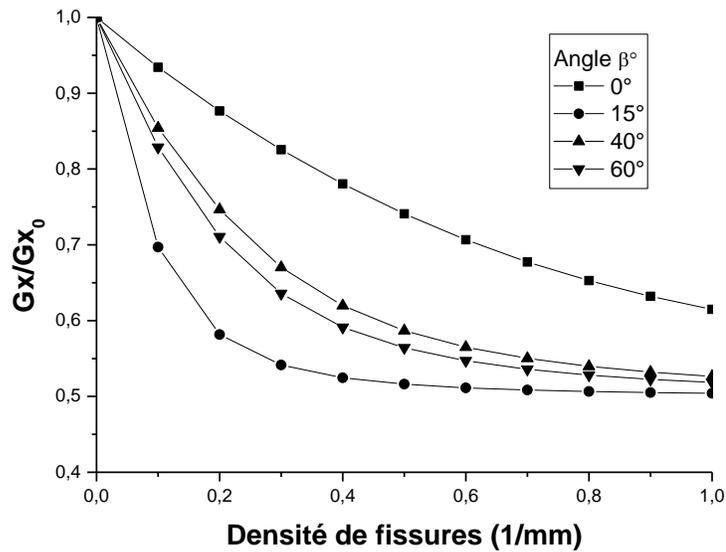


Figure 3.23 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié verre /époxy  $[\beta/90]_s$  avec différents angle de fibre  $\beta^\circ$ .

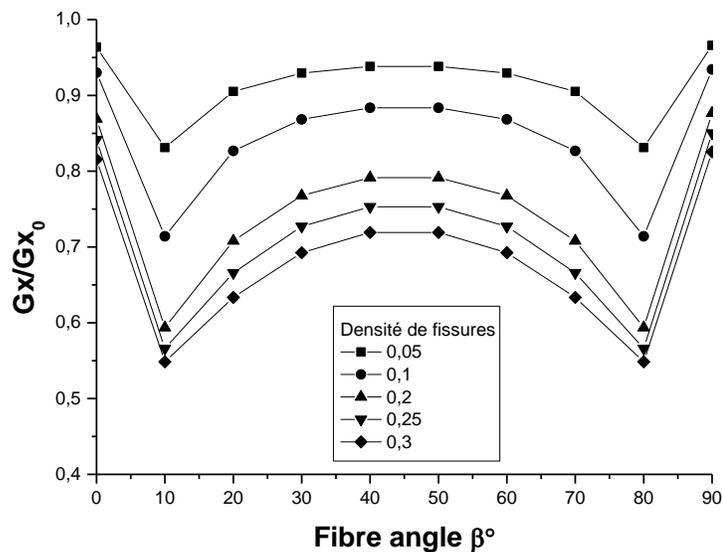


Figure 3.24 : Réduction du module de cisaillement en fonction d'angles de fibre (hors fissuration) pour différentes densités de fissuration pour le stratifié  $[\beta/90]_s$  ( $t_{90}=0.61mm$ ).

L'influence de l'orientation de l'angle de fibre (hors fissurations) et la densité de fissures pour le stratifié verre /époxy  $[\beta/90]_s$  sur le module de cisaillement longitudinal a été représentée dans les figures 3.23 et 3.24. On note deux comportements symétriques du module de cisaillement avec un axe de symétrie qui est un angle de fibre  $\beta^\circ$  de  $45^\circ$ , ou pour  $0^\circ < \beta^\circ < 45^\circ$  on remarque une augmentation du module de cisaillement avec l'augmentation de l'angle de fibre  $\beta^\circ$  et la diminution de la densité de fissures. Par contre un comportement inverse a été observé lorsque  $45^\circ < \beta^\circ < 90^\circ$  ou on a une diminution du module de cisaillement avec l'augmentation de l'angle de fibre  $\beta^\circ$  et l'augmentation de la densité de fissures.

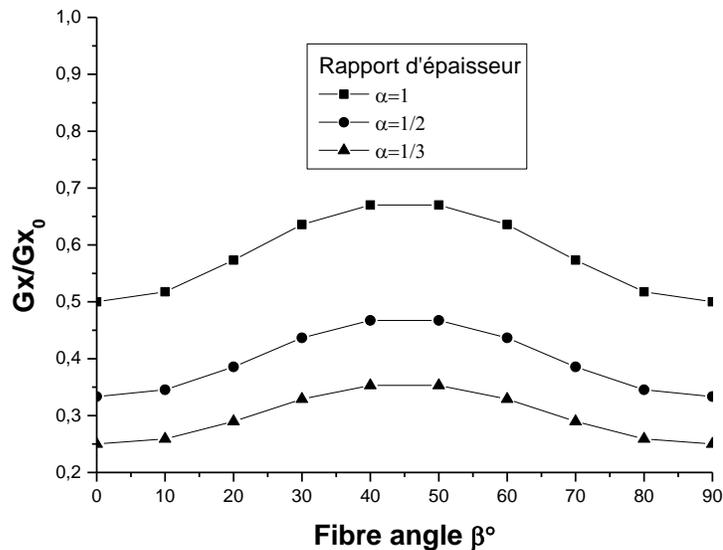


Figure 3.25 : Réduction du module de cisaillement en fonction d'angles de fibre (hors fissuration) pour différentes rapport d'épaisseur avec  $\rho = 0.3$  (1/mm).

L'augmentation du nombre de couche à  $90^\circ$  (c.-à-d. un petit rapport d'épaisseur  $\alpha$ ) donne toujours une diminution du module de cisaillement longitudinale (Fig. 3.25).

#### 3.4.2.2 Réduction du module de cisaillement pour les stratifiés $[0_m/\theta_n]_s$

La simulation numérique est toujours effectuée pour le composite verre /époxy [94] avec différents rapport d'épaisseur, ou les résultats ont été validés avec la méthode ECM (Equivalent Constraint Model) publié par Katerelos [94].

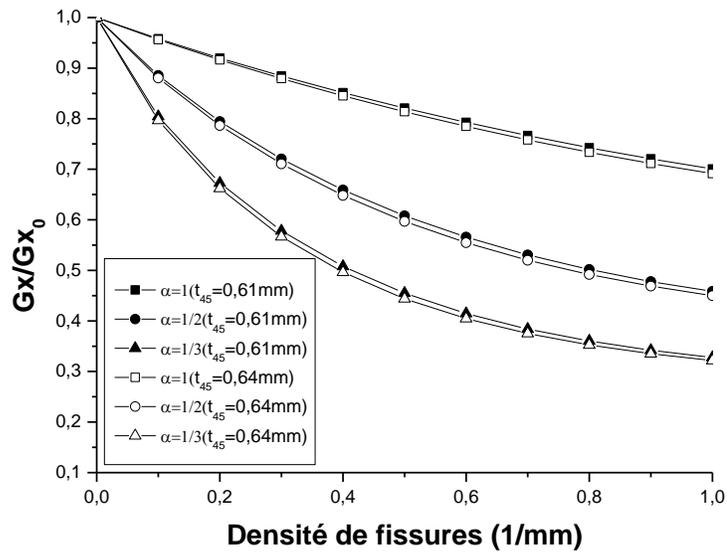


Figure 3.26 : Réduction du module de cisailment longitudinal en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié verre /époxy  $[0/45_n]_s$  avec différents rapport d'épaisseurs.

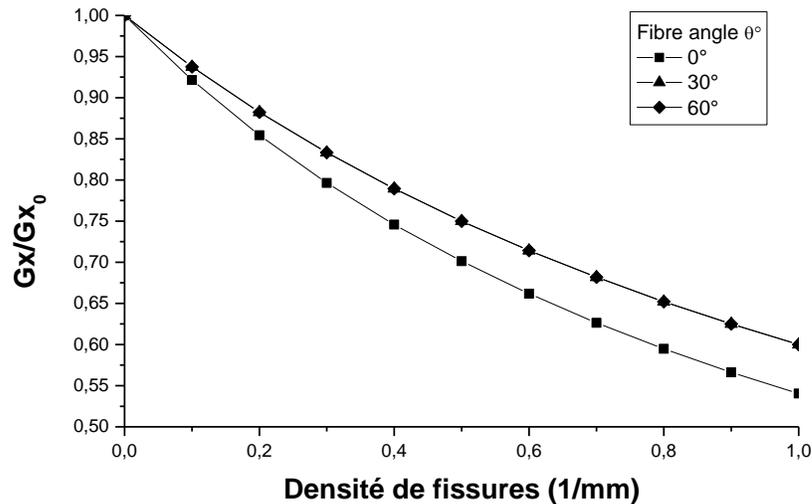


Figure 3.27 : Réduction du module de cisailment en fonction de la densité de fissuration pour différentes angle  $\theta^\circ$  d'orientation des couches fissurés pour le stratifié  $[0/\theta_3]_s$

Les résultats obtenus avec la méthode variationnelle pour un stratifié verre /époxy  $[0/45_n]_s$  et pour différentes épaisseurs des couches à  $90^\circ$  (Fig. 3.26) représentent la même allure des résultats publiés par Katerelos [94], qui utilise la méthode ECM. On remarque toujours une réduction du module de cisaillement longitudinal avec la diminution du rapport d'épaisseur.

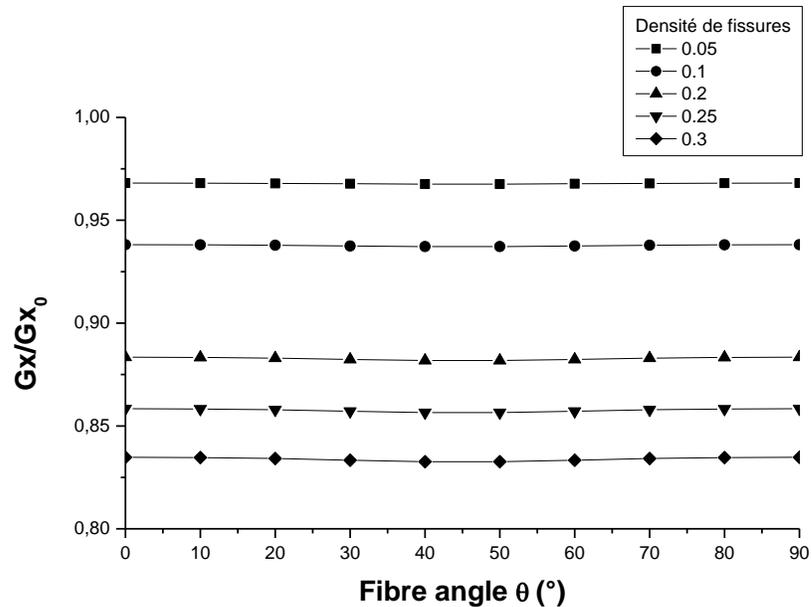


Figure 3.28 : Réduction du module de cisaillement en fonction d'angles  $\theta^\circ$  d'orientation des couches fissurés pour différentes densités de fissuration pour le stratifié  $[0/\theta_3]_s$

Une réduction du module de cisaillement est notée avec l'augmentation de la densité de fissures et la diminution de l'angle  $\theta^\circ$  d'orientation des couches fissurées (Fig. 3.27). A partir d'un angle  $\theta^\circ$  de couche fissurée égale à  $30^\circ$ , on remarque qu'on n'a pas de variation du module de cisaillement longitudinal (Fig. 3.28).

### 3.5 Etude du coefficient de Poisson

#### 3.5.1 Présentation du coefficient de poisson pour les stratifiés croisés $[0_m/90_n]_s$

La simulation numérique est effectuée pour le composite GF/EP verre /époxy [92] dont les propriétés mécaniques ont été cités précédemment. La réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures (Fig. 3.29) est étudiée avec le modèle de diffusion de cisailment puis comparée avec les résultats expérimentaux publiés par Joffe [92]. On note que le coefficient de Poisson diminue avec l'augmentation de la densité de fissures et le modèle parabolique semble le plus proche de l'expérimental [92].

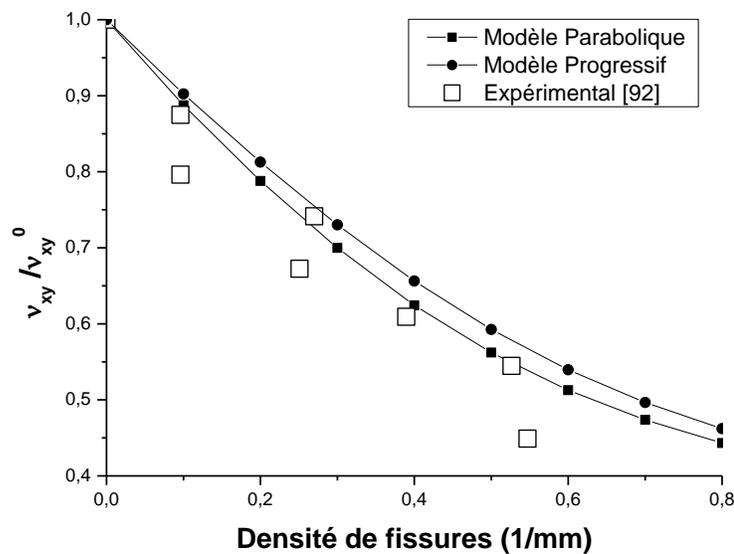


Figure 3.29 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissuration pour le stratifié GF/EP  $[0_2/90_4]_s$

### 3.5.2 Présentation du coefficient de Poisson pour les stratifiés $[\beta_m/\theta_n]_s$

#### 3.5.2.1 Réduction du coefficient de Poisson pour les stratifiés $[\beta_m/90_n]_s$

La simulation numérique est effectuée pour le composite GF/EP verre /époxy [92] dont les propriétés mécaniques ont été cité précédemment.

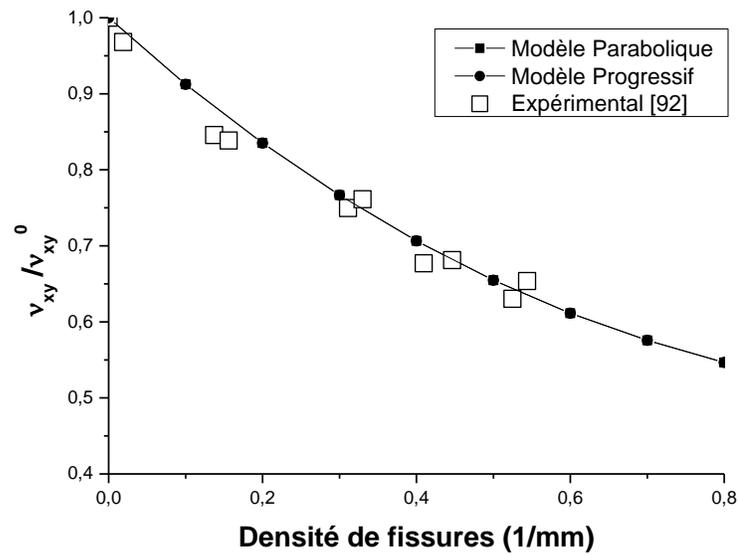


Figure 3.30 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié GF/EP  $[\pm 15/90_4]_s$

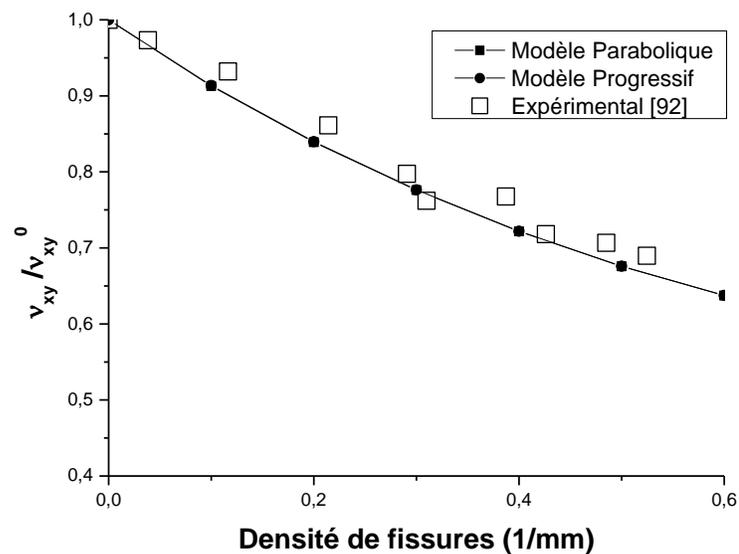


Figure 3.31 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié GF/EP  $[\pm 30/90_4]_s$

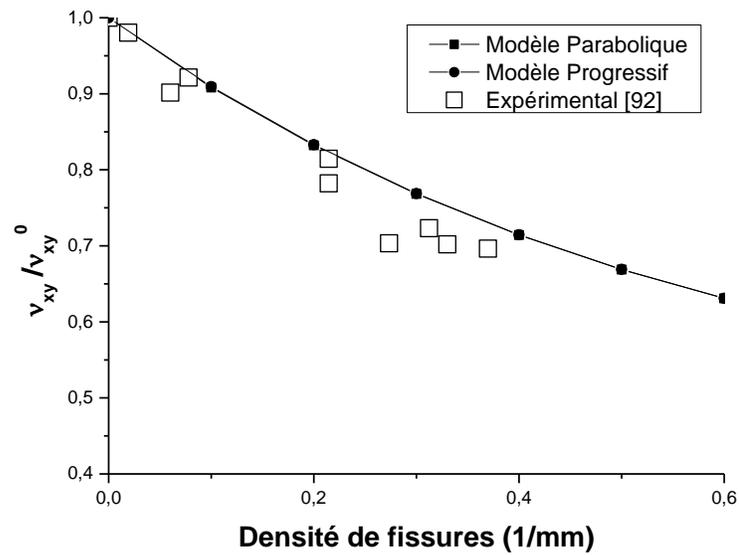


Figure 3.32 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié GF/EP  $[\pm 40/90_4]_s$

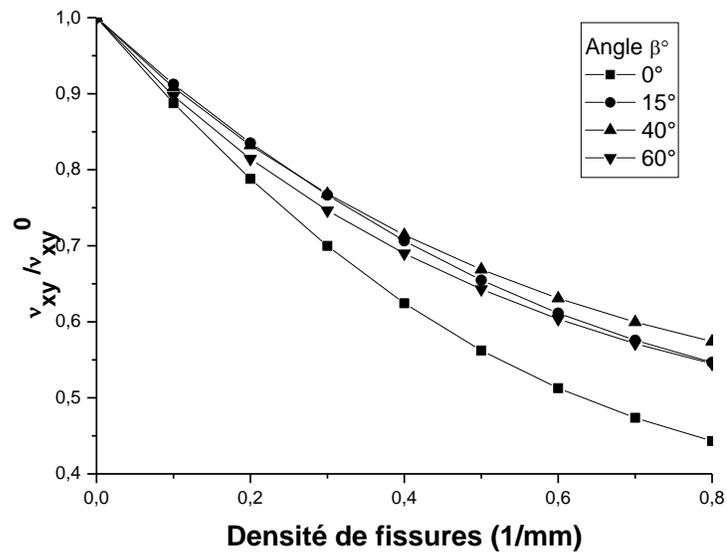


Figure 3.33 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour différentes angle  $\beta$  (hors fissure) pour le stratifié  $[\pm \beta/90_4]_s$

La réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour les stratifiés  $[\beta_m/90_n]_s$  a été présentée dans les figures 3.30 , 3.31 et 3.32. Le modèle de diffusion de cisaillement donne des résultats proches des résultats expérimentaux publiés par Joffe [92] (Fig. 3.30 et 3.31), sauf pour le cas où  $\beta = \pm 40$  (Fig. 3.32) où l'expérimental donne une réduction plus importante que le modèle analytique. Le modèle parabolique et progressif semble confondu pour  $\beta > 0^\circ$  et avec les fissurations de la couche à  $90^\circ$ .

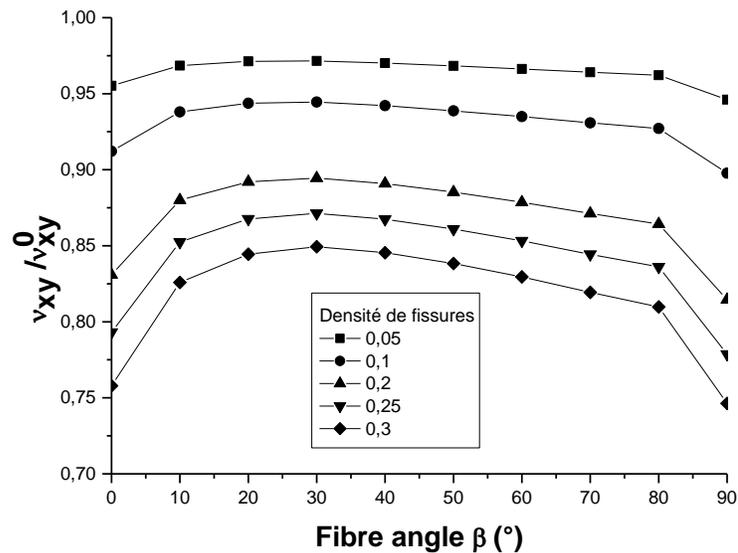


Figure 3.34 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction des angles d'orientation des fibres (hors fissuration) pour différentes densités de fissurations pour le stratifié  $[\pm\beta/90_4]_s$

L'influence de l'orientation de l'angle de fibre  $\beta$  sur le comportement du coefficient de poisson avec différent densités de fissures est représentée dans les figures 3.33 et 3.34. Pour un angle de fibre  $0^\circ \leq \beta \leq 40^\circ$ , on note une réduction du coefficient de Poisson avec l'augmentation de la densité de fissures et la diminution de l'angle de fibre  $\beta$ . Par contre pour  $\beta > 40^\circ$  on a une réduction plus importante du coefficient de Poisson avec l'augmentation de la densité de fissures et l'augmentation de l'angle de fibre  $\beta$ . On note que lorsque  $\beta=0^\circ$  ou  $90^\circ$ , la réduction du coefficient de Poisson est plus influencée par la densité de fissuration que par l'angle de la couche  $\beta$ .

### 3.5.2.2 Réduction du coefficient de Poisson pour les stratifiés $[0_m/\theta_n]_s$

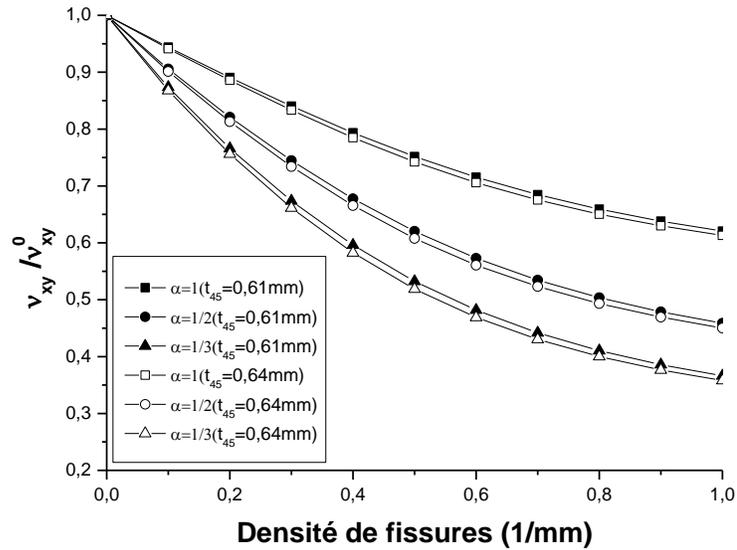


Figure 3.35 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié verre /époxy  $[0/45_n]_s$  avec différents rapport d'épaisseurs.

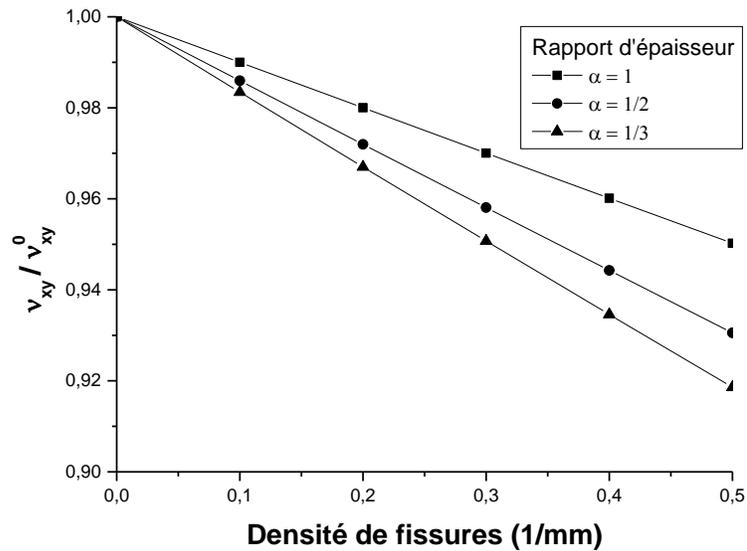


Figure 3.36 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour le stratifié verre /époxy  $[0/75_n]_s$  avec différents rapport d'épaisseurs.

Lorsque la couche fissurée est autre que la couche à  $90^\circ$  (Fig. 3.35), on remarque que le modèle parabolique donne un comportement similaire à la méthode ECM publiée par Katerelos [94] pour une densité de fissures entre 0 et  $0.5 \text{ mm}^{-1}$ , ou on a une réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures. Par contre lorsque la densité de fissures est supérieure à  $0.5 \text{ mm}^{-1}$ , la méthode ECM donne une augmentation subite du coefficient de Poisson jusqu'à une densité de  $1 \text{ mm}^{-1}$  par rapport à notre modèle parabolique, ou on note une réduction continue en fonction de l'augmentation de la densité de fissures.

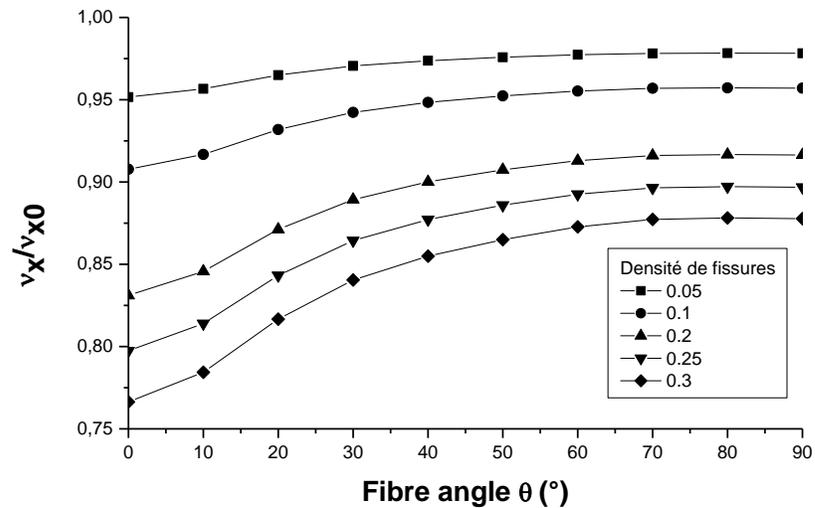


Figure 3.37 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissurations pour différentes angle  $\theta^\circ$  d'orientation des couches fissurées pour le stratifié  $[0/\theta_3]_s$

L'influence du rapport d'épaisseur  $\alpha$  est étudiée pour représenter le comportement du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures (Fig. 3.36). La diminution du rapport d'épaisseur  $\alpha$  (c.-à-d. l'augmentation du nombre de couches fissurées à  $75^\circ$ ) donne une réduction plus importante du coefficient de Poisson en fonction de l'augmentation de densité de fissures. Notre modèle parabolique donne

une allure semblable au modèle analytique développé par Kashtalyan [95] pour le cas d'un stratifié avec fissurations transverses et délaminages.

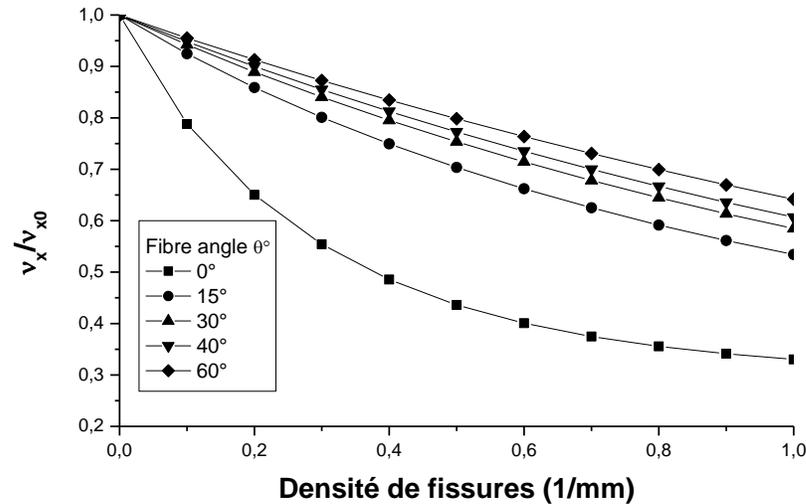


Figure 3.38 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction d'angle  $\theta^\circ$  d'orientation des couches fissurées pour différentes densités de fissurations pour le stratifié  $[0/\theta_3]_s$

Une réduction du coefficient de Poisson est remarquée avec l'augmentation de la densité de fissures et la diminution de l'angle  $\theta^\circ$  d'orientation des fibres des couches fissurées (Fig. 3.37 et 3.38). Un écart très important du taux de réduction (plus de 30%) est noté avec la diminution de l'angle  $\theta^\circ$  d'orientation de  $60^\circ$  à  $0^\circ$ .

### 3.6 Conclusion

Deux modèles analytiques basés sur la diffusion du cisaillement (parabolique et progressif) et un modèle variationnel, ont été utilisés pour mettre en évidence l'influence de la fissuration transversale sur la réduction des propriétés mécaniques des stratifiés.

Une réduction du module de Young longitudinal, du module de cisaillement et du coefficient de poisson caractérisent le comportement du matériau composite croisé et non croisé, soumis à des sollicitations en fonction de la densité de fissurations avec la variation de différents paramètres soient les variations du rapport d'épaisseur, l'épaisseur de la couche fissurée et l'angle d'orientation des fibres pour les couches fissurées et non fissurées.

## CHAPITRE 4

### SIMULATION ET RÉSULTATS DES STRATIFIÉS $[\beta_m/\theta_n]_s$ FISSURÉS AVEC CHARGEMENT MÉCANIQUE ET CONDITIONS HYGROTHERMIQUES

#### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au comportement des propriétés élastiques dans un matériau composite fissuré croisé et non croisé, soumis à des sollicitations de traction et sous différentes conditions hygrothermiques. Les effets du nombre de couche orientées à  $\theta^\circ$  et à  $\beta^\circ$ , ainsi que les effets du changement de température et humidité sont pris en considération dans l'analyse, afin d'examiner l'évolution du comportement mécanique en fonction de la densité de fissures.

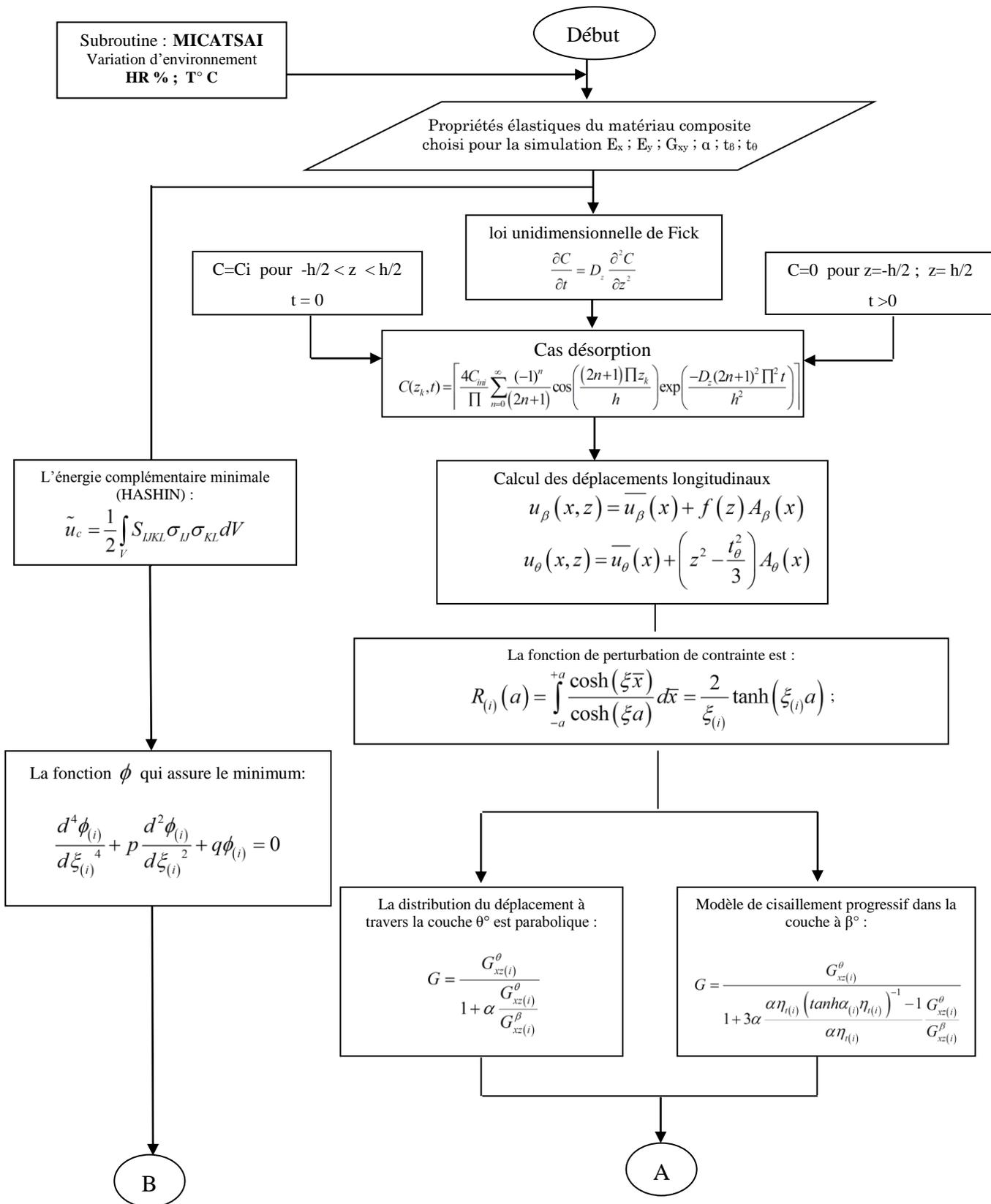
Les modèles régissant la réduction des propriétés élastiques d'un stratifié croisé et non croisé fissuré, soumis à un chargement mécanique ont été établis et validés dans le chapitre précédant. Afin de compléter l'étude du comportement des structures fissurées sous les effets de conditions hygrothermique, à ces équations seront ajoutées des paramètres de vieillissement en température et en humidité à l'échelle fibre-matrice. Les modélisations tiendront compte de l'évolution du facteur temps, d'où on parle de l'analyse transitoire.

Un modèle qui tient compte d'une concentration locale variable dans le temps à travers le stratifié, pour un environnement variable, sera adopté pour représenter le comportement mécanique le plus proche du réel.

Enfin une comparaison entre ces deux modèles sera faite.

#### 4.2 Organigramme

A l'issue de cette étude et pour modéliser le comportement mécanique du matériau composite  $[\beta_m/\theta_n]_s$ , en fonction de la densité de fissuration et sous conditions hygrothermiques, un organigramme TSAITRAN a été établi comme suit :



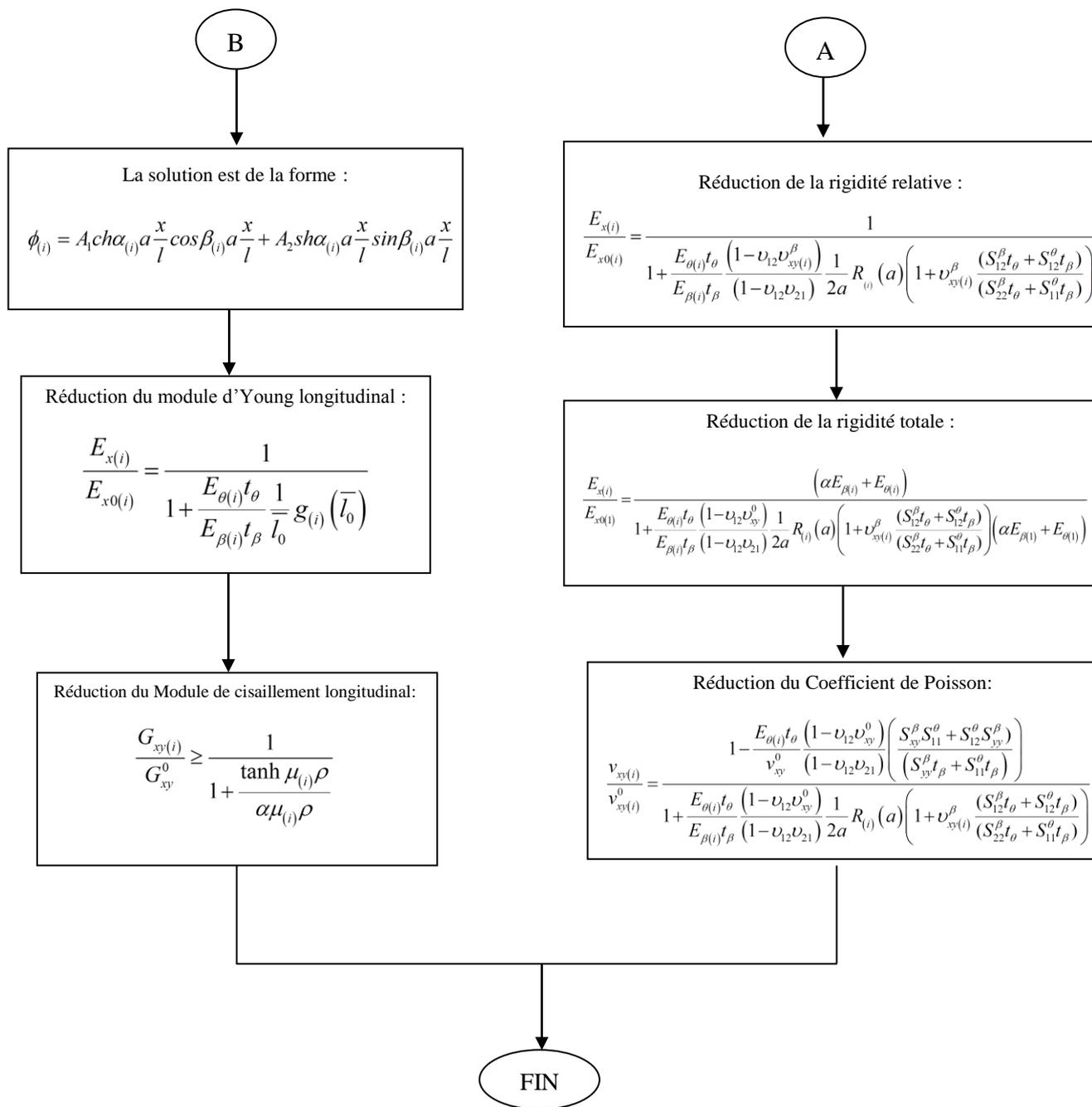


Figure 4.1 : Organigramme du TSAITRAN

#### 4.3 Effet hygrothermique par le modèle de Tsai « transitoire »

Le calcul de la concentration  $C(z,t)$  est obtenue à partir de la résolution de l'équation de Fick unidimensionnelle, pour un cas physique bien précis, absorption ou désorption [96,97,98]. Cette valeur instantanée sera ensuite utilisée dans le modèle de vieillissement hygrothermique de Tsai. Les propriétés mécaniques de l'unidirectionnel en transitoire seront ensuite déterminées. La réduction des propriétés mécaniques en fonction du temps et de l'environnement hygrothermique sera ensuite établie.

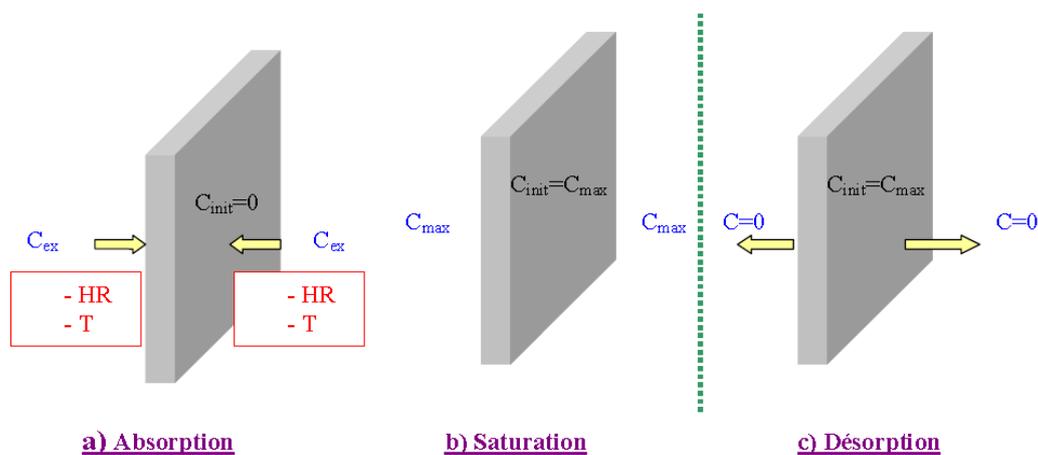


Figure 4.2 : Absorption-Désorption [75]

$C$  est la concentration d'humidité dans la plaque,  $D_z$  est le coefficient de diffusion dans la direction transversale,  $z$  étant la position à travers l'épaisseur. On considère une plaque homogène et plane d'épaisseur  $h$ , soumise à un environnement humide sur ses deux faces. La loi unidimensionnelle de Fick s'écrit [101,102,103]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (4.1)$$

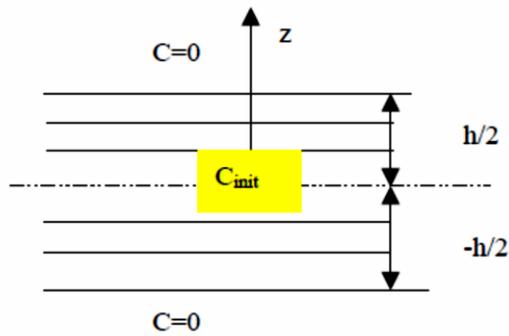


Figure 4.3 : Cas d'une désorption

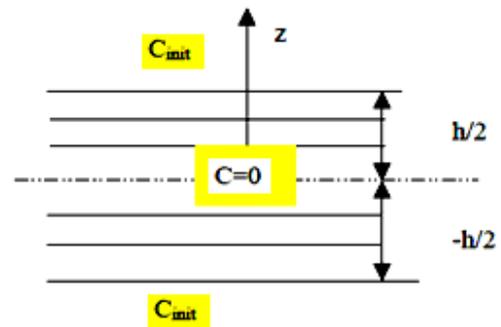


Figure 4.4 : Cas d'une absorption

Les conditions initiales étant uniformes et les conditions aux limites sont constantes, la solution unidimensionnelle de Fick pour le cas désorption peut être exprimée ainsi [100,104]:

$$C(z_k, t) = \left[ \frac{4C_{init}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z_k}{h}\right) \exp\left(\frac{-D_z(2n+1)^2 \pi^2 t}{h^2}\right) \right] \quad (4.2)$$

Les conditions aux limites et initiales pour la désorption sont les suivantes [100] :

$$C=C_{init} \text{ pour } -h/2 \leq z \leq h/2 \text{ et } t = 0 \quad (4.3)$$

$$C=0 \text{ pour } z=-h/2 ; z= h/2 \text{ et } t > 0 \quad (4.4)$$

L'indice  $i$  et représente les valeurs à l'instant initial.

#### 4.3.1 Caractérisation du matériau

Nous allons devoir choisir les modèles des différents modules qui nous permettront de faire la caractérisation de notre matériau. Le module de Young longitudinal et le coefficient de Poisson sont pris d'après les modèles correspondant à ceux issus de la loi des mélanges. Le module de Young transversal et le coefficient

de Poisson, sont pris selon le modèle correspondant à celui de la loi des mélanges modifiée par Hahn décrit en référence [1]. Ce modèle a également été adopté dans les travaux de Sereir et al. [107].

Soit ci-dessous le choix du modèle semi-empirique pour l'évaluation des propriétés du composite en fonction des volumes des fibres [108].

#### 4.3.2 Le module de Young dans la direction des fibres

$$E_x = E_m \cdot V_m + E_{fx} \cdot V_f \quad (4.5)$$

#### 4.3.3 Le module de Young transversal

La relation micromécanique modifiée par Hahn [1] pour le graphite époxy T300/5208 du module de Young transversal est :

$$E_y = \frac{1 + 0.516(V_m / V_f)}{\frac{1}{E_{fy}} + \frac{0.516(V_m / V_f)}{E_m}} \quad (4.6)$$

#### 4.3.4 Le module de cisaillement longitudinal

De même la relation micromécanique modifiée par Hahn [1] pour le graphite époxy T300/5208 du module de Young transversal est :

$$G_{xy} = \frac{1 + 0.316(V_m / V_f)}{\frac{1}{G_{fx}} + \frac{0.316(V_m / V_f)}{G_m}} \quad (4.7)$$

Avec 
$$G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \quad (4.8)$$

#### 4.3.4 Le coefficient de Poisson

$$\nu_{xy} = \nu_m V_m + \nu_{fx} V_f \quad (4.9)$$

#### 4.3.5 Evolution de Tg au cours du vieillissement

Le paramètre Tg est un paramètre quantitatif du phénomène de vieillissement, c'est aussi une caractéristique importante des polymères et représente la transition entre le domaine vitreux et le domaine caoutchoutique du matériau [109,110]. La technique qui permet de suivre l'évolution de la température de transition vitreuse au cours du vieillissement hygrothermique est la DMTA (Differential Mechanical Thermal Analysis), Mercier [75]. Evidemment cette technique est souvent utilisée dans les études expérimentales de vieillissement, pour le suivi de Tg.

L'application de notre étude se fera sur le graphite époxyde T300/5208. La température de transition vitreuse à une température de référence de 22°C est de Tg=160°C, Tsai [1]. On sait que l'absorption d'humidité entraîne la diminution de la température de transition. Les observations de nombreux auteurs tel que Ghorbel [64], confirment une baisse de la Tg d'environ 20°C en humidité relative et de 30°C en immersion. Cette température est d'autant plus décalée vers des températures plus faibles lorsque les conditions de vieillissement sont sévères. La première partie d'analyse doit permettre de suivre l'évolution de la température de transition vitreuse Tg au cours du vieillissement. Tsai [1] assume qu'une absorption d'humidité induit une diminution de la température de transition d'une quantité gc:

$$T_g = T_g^0 - gc \quad (4.10)$$

#### 4.3.6 Température adimensionnelle

Tsai [1] propose la notion de la température adimensionnelle T\*, qui est un élément essentiel pour l'évaluation des caractéristiques du composite :

$$T^* = \frac{T_g - T_{opr}}{T_g - T_{rm}} \quad (4.11)$$

On voit l'effet de la température à travers T<sub>opr</sub> qui est la température d'utilisation ainsi que l'effet de la concentration à travers la température de transition. T<sub>rm</sub> étant la température de référence.

#### 4.3.7 Prise en compte du vieillissement dans les propriétés de la matrice

Tsai [1] relie la température adimensionnelle  $T^*$ , pour déterminer empiriquement les expressions des propriétés de la matrice, en fonction de la température et de l'humidité avant et après le vieillissement, pour le carbone époxyde T300/5208.

$$\frac{E_m}{E_m^0} = (T^*)^a \quad (4.12a)$$

$$\frac{G_m}{G_m^0} = (T^*)^a \quad (4.12b)$$

$$\frac{\nu_m}{\nu_m^0} = (T^*)^a \quad (4.12c)$$

a : étant une constante semi empirique [1], donnée dans le tableau 4.2

#### 4.3.8 Prise en compte du vieillissement dans les propriétés des fibres

Les propriétés des fibres en fonction de la température et de la concentration s'expriment aussi en fonction de la température adimensionnelle.

$$\frac{E_{fx}}{E_{fx}^0} = (T^*)^f \quad (4.13a)$$

$$\frac{E_{fy}}{E_{fy}^0} = (T^*)^f \quad (4.13b)$$

$$\frac{G_{fx}}{G_{fx}^0} = (T^*)^f \quad (4.13c)$$

$$\frac{\nu_{fx}}{\nu_{fx}^0} = (T^*)^f \quad (4.13d)$$

f : étant une constante semi-empirique [1], donnée dans le tableau 4.2

#### 4.3.9 Propriétés du T300/5208 [111]

L'application de notre étude se fera sur le T300/5208. Le T300 est la fibre de carbone et le N5208 est la résine. Nous présentons ci-dessous sous forme de

tableaux les caractéristiques de ce type de matériau, ainsi que les caractéristiques de la matrice époxyde et des fibres de carbone :

Tableau 4.1 : Caractéristiques de fibres et matrice du T300/5208, [1]

$E_{fx}$ (Gpa)	$E_{fy}$ (Gpa)	$\nu_{fx}$	$E_m$ (Gpa)	$\nu_m$	$G_m$ (Gpa)	$G_{fx}$ (Gpa)	$V_f$
259	18.69	0.25	3.4	0.35	1.26	19.69	0.7

Tableau 4.2 Caractéristiques de variation de température et d'humidité, [1]

$T^{\circ}g(^{\circ}C)$	$T_m(^{\circ}C)$	$g(^{\circ}C/c)$	a	b	c	f	h	e
160	22	2000	0.5	0.2	0.9	0.04	0.04	0.2

Tableau 4.3 Propriétés du T300/5208  $T_r=22^{\circ}C$ , [1]

	$E_x$ (Gpa)	$E_y$ (Gpa)	$\nu_{xy}$	$G_{xy}$ (Gpa)	$\alpha_x$ ( $10^{-6} K^{-1}$ )	$\alpha_y$ ( $10^{-6} K^{-1}$ )	$\beta_x$	$\beta_y$
Tsai	181	10.3	0.28	7.17	0.02	22.5	0	0.6
Loi des mélanges modifiée	181.3	10.305	0.28	7.169	0.023	23.5	0	0.62

Tableau 4.4 Caractéristiques de diffusion du T300/5208, [1]

Type de Matériau	Température	humidité relative	D (mm <sup>2</sup> /s)	Cmax
T300/5208	20 <sup>0</sup>	100	2.27 x 10 <sup>-8</sup>	1.5

#### 4.4 Effet hygrothermique sur la réduction de la rigidité relative pour les stratifiés

$[\beta_m/\theta_n]_s$

Dans cette section, on calcul la perte de rigidité du stratifié qui est déjà soumis initialement à un vieillissement hygrothermique. La réduction de la rigidité du stratifié due à la densité de fissuration est évaluée par rapport à la rigidité initiale du stratifié non endommagé, soumis lui aussi aux mêmes conditions hygrothermiques. On note que cette rigidité initiale du stratifié non endommagé est fonction aussi de la température et de l'humidité. Par conséquent, l'équation (2.96) pour le modèle de diffusion de cisaillement devient :

$$\frac{E_{x(i)}}{E_{x0(i)}} = \frac{1}{1 + \frac{E_{\theta(i)} t_{\theta}}{E_{\beta(i)} t_{\beta}} \frac{(1 - \nu_{12} \nu_{xy(i)})}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \frac{1}{2a} R_{(i)}(a) \left( 1 + \nu_{xy(i)}^{\beta} \frac{(S_{12}^{\beta} t_{\theta} + S_{12}^{\theta} t_{\beta})}{(S_{22}^{\beta} t_{\theta} + S_{11}^{\theta} t_{\beta})} \right)} \quad (4.14)$$

D'autre part, l'équation (2.154) du modèle variationnel pour la réduction de la rigidité devient :

$$\frac{E_{x(i)}}{E_{x0(i)}} = \frac{1}{1 + \frac{E_{\theta(i)} t_{\theta}}{E_{\beta(i)} t_{\beta}} \frac{1}{l_0} g_{(i)}(\bar{l}_0)} \quad (4.15)$$

L'indice « i » représente les différents types de conditions d'environnement considéré.

#### 4.4.1 Présentation du module de Young longitudinal pour les stratifiés croisés [0<sub>m</sub>/90<sub>n</sub>]<sub>s</sub>

##### 4.4.1.1 Modèle de Tsai non transitoire

La réduction de la rigidité relative est représentée en fonction de la densité de fissuration sous conditions hygrothermiques et en utilisant le modèle parabolique pour les stratifiés croisés [0/90<sub>n</sub>]<sub>s</sub> T300/5208 (Fig. 4.5). La réduction de la rigidité relative est plus importante pour des densités de fissuration inférieure à 1 et pour des rapports d'épaisseurs faibles. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats publiés par Tounsi et autre [83,86].

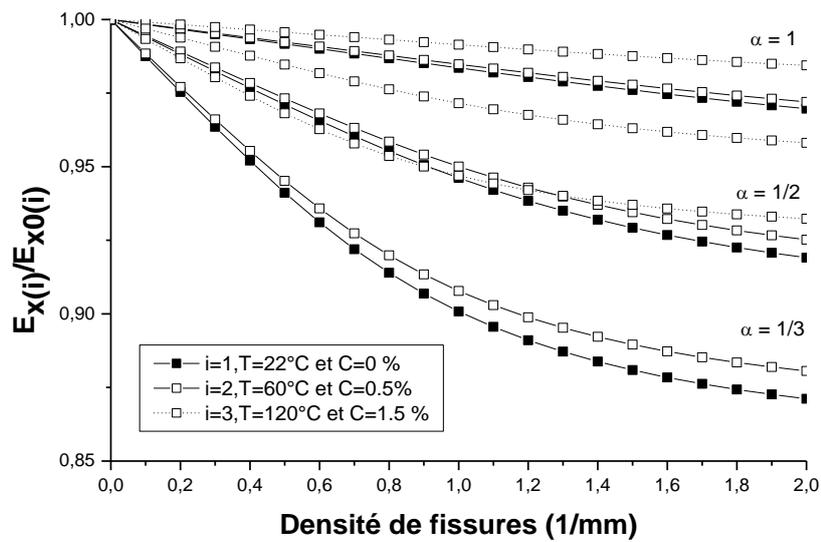


Figure 4.5 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les trois environnement hygrothermiques ( $i=1,2,3$ ) avec  $V_f=0.7$  (cas non transitoire)

#### 4.4.1.2 Modèle de Tsai transitoire

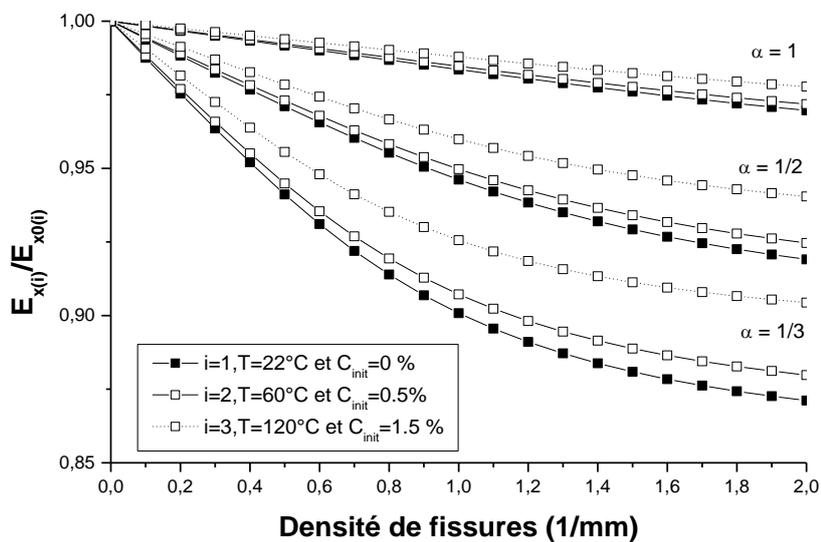


Figure 4.6 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les trois environnement hygrothermiques ( $i=1,2,3$ ) avec  $V_f=0.7$  et  $t=4222h$  (cas transitoire)

Le même comportement de la réduction de la rigidité relative (cas non transitoire) est remarqué pour le cas transitoire (Fig. 4.6).

#### 4.4.1.3 Comparaison entre le modèle de Tsai transitoire et non transitoire

Le modèle de Tsai transitoire (cas de désorption) donne une réduction de la rigidité relative très importante par rapport au modèle de Tsai à concentration constante pour les stratifiés croisés  $[0/90_n]_s$  T300/5208 (Fig. 4.7). Cette différence est très remarquée pour des densités de fissuration supérieure à 1 (1/mm) et à des rapports d'épaisseurs faibles.

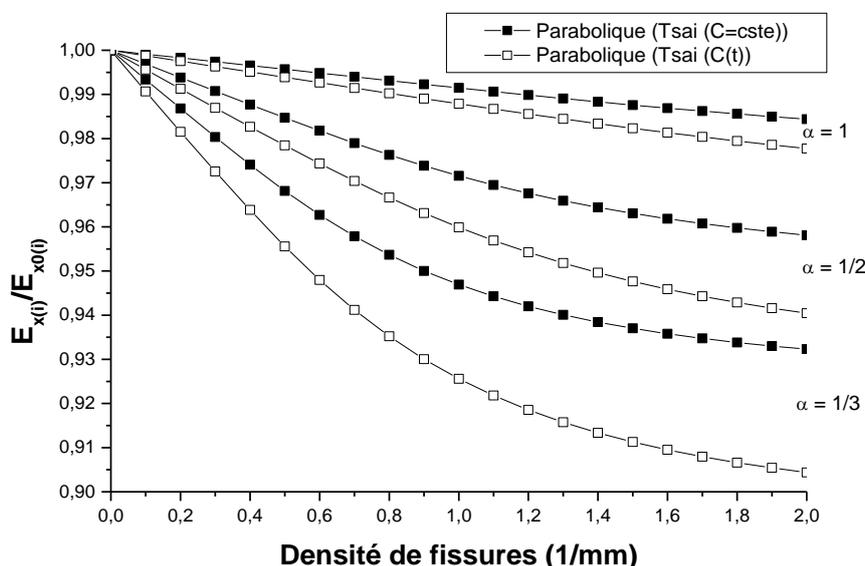


Figure 4.7 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire  $t=4222h$  et non transitoire).

#### 4.4.2 Présentation du module de Young longitudinal pour les stratifiés $[\beta_m/90_n]_s$

##### 4.4.2.1 Modèle de Tsai non transitoire

Dans le cas d'un stratifié  $[\beta/90_3]_s$  T300/5208, la réduction de la rigidité longitudinale augmente avec l'augmentation de la température et l'humidité pour des angles de fibre  $\beta$  égale à  $15^\circ$  (Fig. 4.8). Lorsqu'on a des angles d'orientation des fibres supérieures à  $15^\circ$ , on remarque une réduction plus importante de la rigidité

relative avec l'augmentation de la densité de fissurations, température et humidité. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats publiés par Tounsi et al. [86].

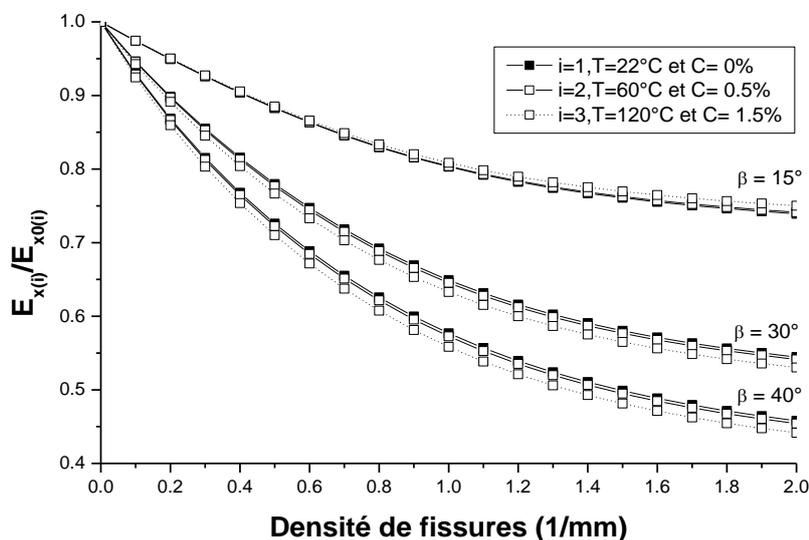


Figure 4.8 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[\beta/90_3]_s$  T300/5208 et différents angle  $\beta$  avec  $V_f=0.7$  (cas non transitoire)

#### 4.4.2.2 Modèle de Tsai transitoire

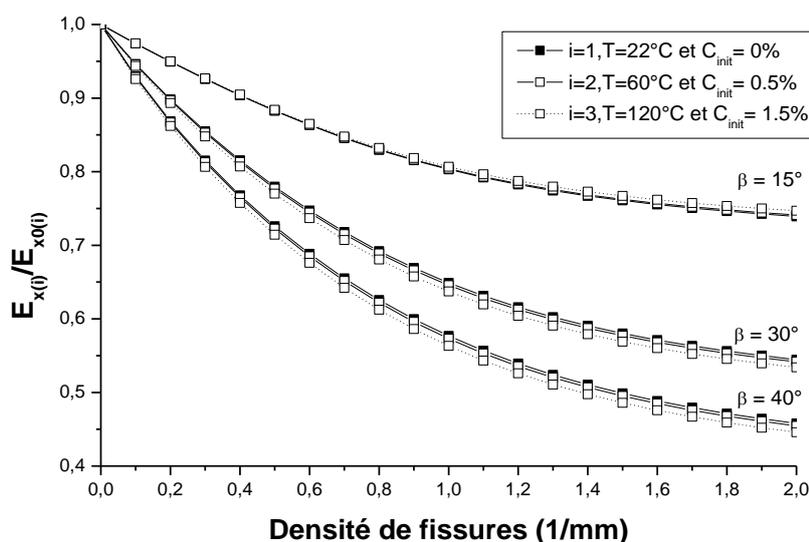


Figure 4.9 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[\beta/90_3]_s$  T300/5208 et différents angles  $\beta$  avec  $V_f=0.7$  et  $t=4222h$  (cas transitoire)

Le même comportement de la réduction de la rigidité relative pour le modèle non transitoire est remarqué pour le cas transitoire (Fig. 4.9).

#### 4.4.2.3 Comparaison entre le modèle de Tsai transitoire et non transitoire

On note une très faible différence entre le modèle de Tsai avec concentration constante et celui ou cette dernière est transitoire (Fig. 4.10). On a toujours une réduction de la rigidité relative plus importante avec l'augmentation des angles d'orientation des fibres et de la densité de fissurations.

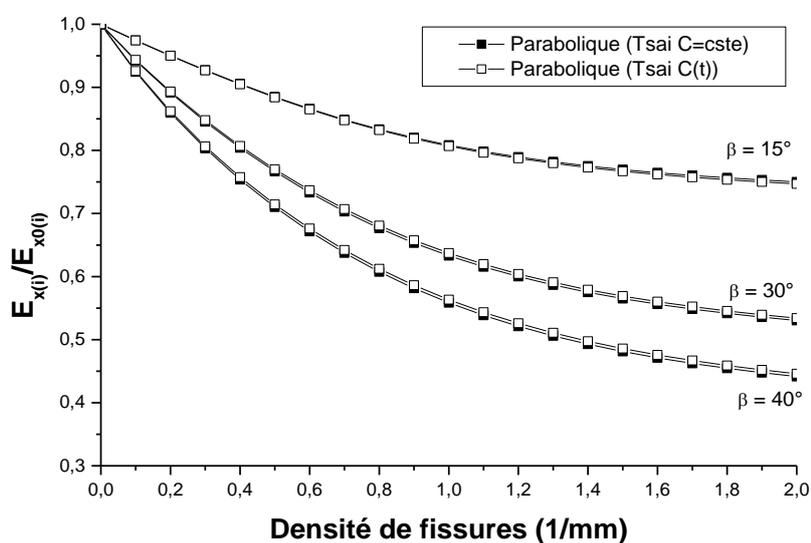


Figure 4.10 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[\beta/90_3]_s$  T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire  $t=4222h$  et non transitoire) avec  $V_f=0.7$

#### 4.4.3 Présentation du module de Young longitudinal pour les stratifiés $[0_m/\theta_n]_s$

##### 4.4.3.1 Modèle de Tsai non transitoire

a)  $\theta = 15^\circ$

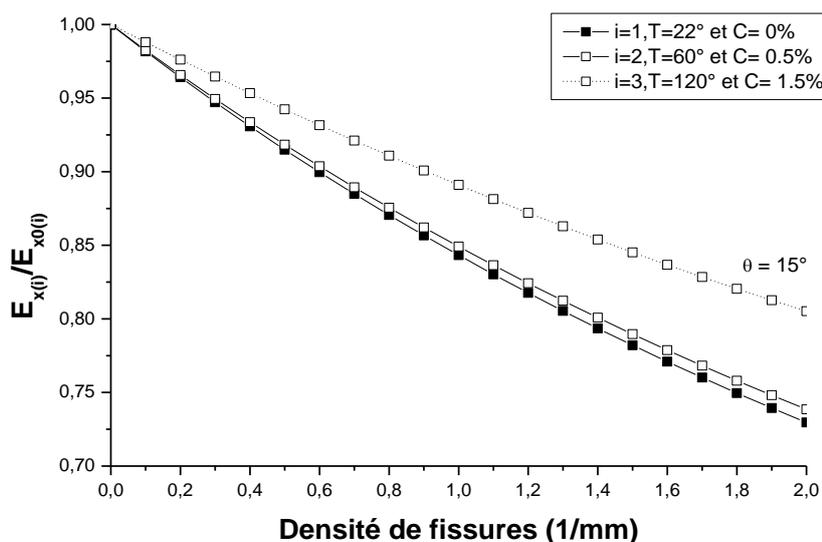


Figure 4.11 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/15_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  (cas non transitoire).

b)  $\theta = 30^\circ$

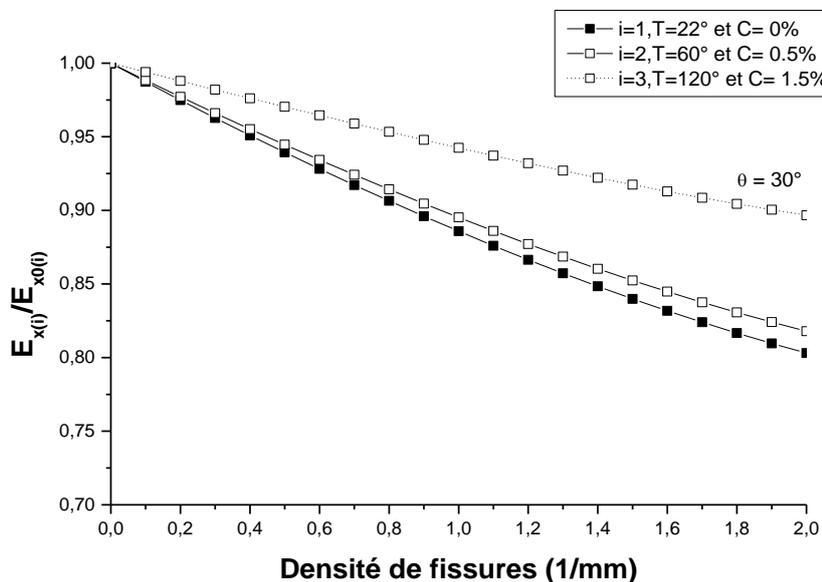


Figure 4.12 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/30_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  (cas non transitoire).

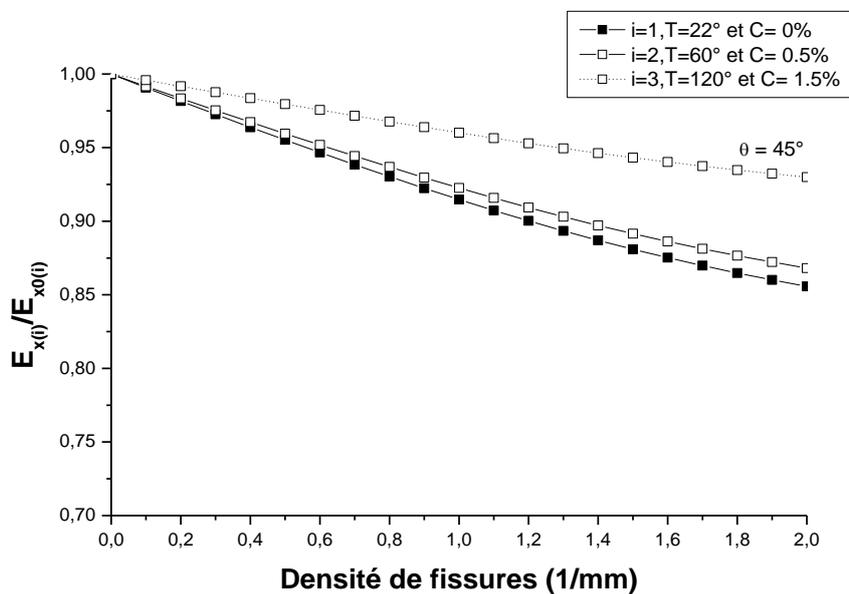
c)  $\theta = 45^\circ$ 

Figure 4.13 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/45_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  (cas non transitoire).

La réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour les stratifiés  $[0_m/\theta_n]_s$  T300/5208 est représentée dans les figures 4.11 à 4.13. L'augmentation de la température et l'humidité donne une réduction de la rigidité relative moins importante par rapport à la condition environnementale standard.

#### 4.4.3.2 Modèle de Tsai transitoire

a)  $\theta = 15^\circ$

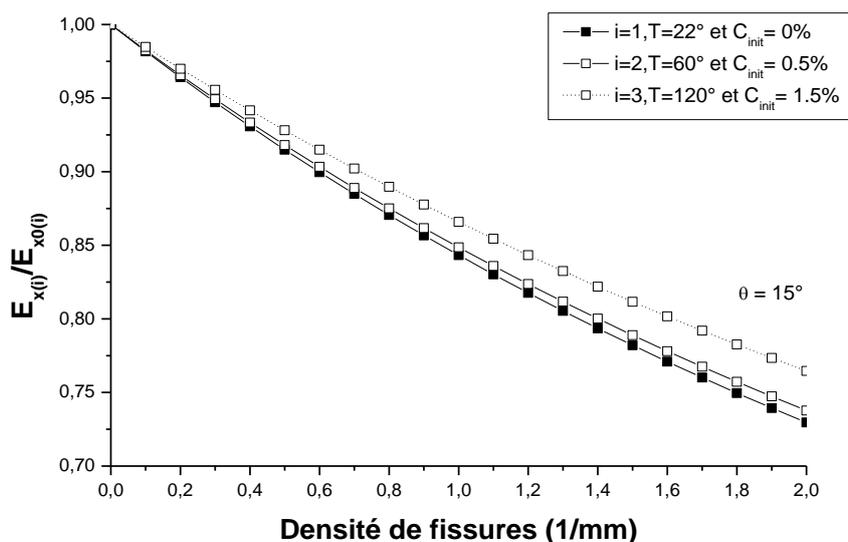


Figure 4.14 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/15_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  et  $t=4222h$  (cas transitoire).

b)  $\theta = 30^\circ$

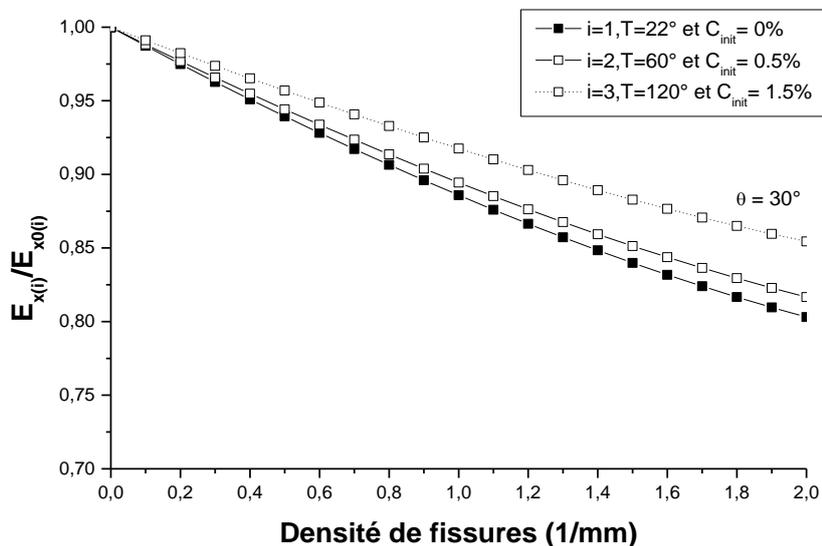


Figure 4.15 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/30_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  et  $t=4222h$  (cas transitoire).

c)  $\theta = 45^\circ$

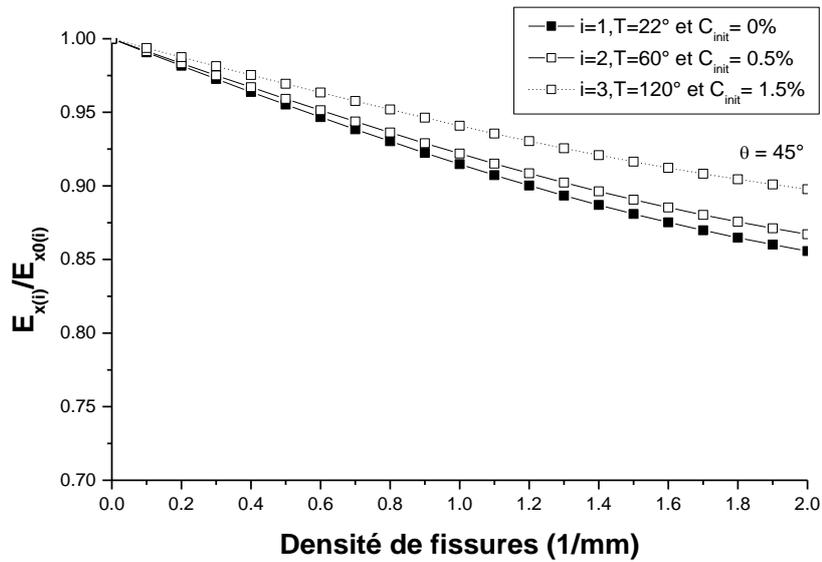


Figure 4.16 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/45_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  et  $t=4222h$  (cas transitoire).

Le même comportement de la réduction de la rigidité relative est remarqué pour le cas transitoire (Fig. 4.14 à 4.16)

#### 4.4.3.3 Comparaison entre le modèle de Tsai transitoire et non transitoire

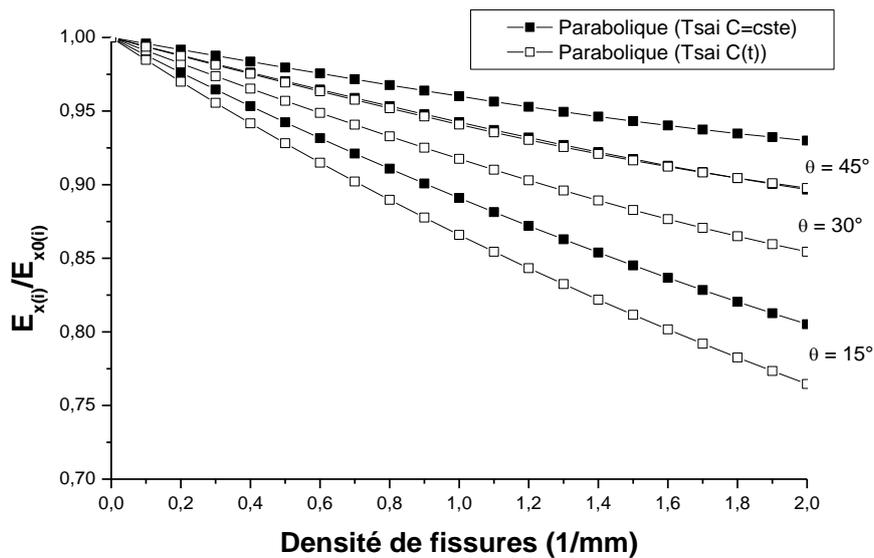


Figure 4.17 : Réduction de la rigidité relative en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/\theta_3]_s$  T300/5208 et  $T=120^\circ C$  et  $C=1\%$ .

La comparaison entre la réduction de la rigidité relative en fonction du modèle de Tsai (C=cste) et Tsai transitoire (cas désorption) est représentée dans la figure 4.17. On remarque une réduction de la rigidité relative avec l'augmentation de la densité de fissures et la diminution de l'angle d'orientation de la fibre hors axe  $\theta$ . Le modèle de Tsai transitoire semble donné une réduction plus importante de la rigidité relative par rapport au modèle de Tsai (C=cste).

#### 4.5 Effet hygrothermique sur la réduction de la rigidité totale pour les stratifiés $[\beta_m/\theta_n]_s$

Dans cette section, on calcul la perte de rigidité du stratifié qui est déjà soumis initialement à un vieillissement hygrothermique. La réduction de la rigidité du stratifié due à la densité de fissurations est évaluée par rapport à la rigidité initiale du stratifié non endommagé dans un environnement « 1 » standard (T=22°C et C=0%).

On note que cette rigidité initiale du stratifié non endommagé est fonction aussi de la température et de l'humidité. Par conséquent, l'équation (4.14) pour le modèle de diffusion de cisaillement devient :

$$\frac{E_{x(i)}}{E_{x0(1)}} = \frac{(\alpha E_{\beta(i)} + E_{\theta(i)})}{1 + \frac{E_{\theta(i)} t_{\theta}}{E_{\beta(i)} t_{\beta}} \frac{(1 - \nu_{12} \nu_{xy}^0)}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \frac{1}{2a} R_{(i)}(a) \left( 1 + \nu_{xy}^{\beta} \frac{(S_{12}^{\beta} t_{\theta} + S_{12}^{\theta} t_{\beta})}{(S_{22}^{\beta} t_{\theta} + S_{11}^{\theta} t_{\beta})} \right)} (\alpha E_{\beta(1)} + E_{\theta(1)}) \quad (4.16)$$

D'autre part, l'équation (4.15) du modèle variationnel pour la réduction de la rigidité devient :

$$\frac{E_{x(i)}}{E_{x0(1)}} = \frac{(\alpha E_{\beta(i)} + E_{\theta(i)})}{1 + \frac{E_{\theta(i)} t_{\theta}}{E_{\beta(i)} t_{\beta}} \frac{1}{l_0} g_{(i)}(\bar{l}_0) (\alpha E_{\beta(1)} + E_{\theta(1)})} \quad (4.17)$$

L'indice « i » représente les différents types de conditions d'environnement considéré.

#### 4.5.1 Présentation de la réduction de la rigidité totale pour les stratifiés croisés $[0_m/90_n]_s$

##### 4.5.1.1 Modèle de Tsai non transitoire

La réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/90_3]_s$  T300/5208 et on utilise le modèle parabolique est représentée dans la figure 4.18. Une réduction très importante de la rigidité totale est remarquée avec l'augmentation de la température et l'humidité et cela même avec une densité de fissurations nulle (taux de réduction entre 9% et 16%). Au final, on peut dire qu'un matériau composite non fissuré est plus influencé par les conditions hygrothermiques par rapport à un matériau fissuré avec des fissurations transverses. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats publiés par Tounsi et al. [83].

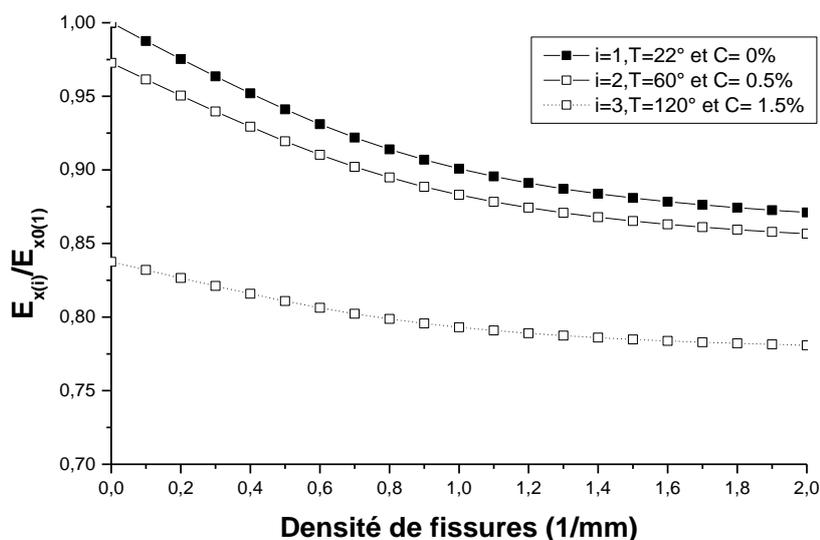


Figure 4.18 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/90_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  (cas non transitoire).

##### 4.5.1.2 Modèle de Tsai transitoire

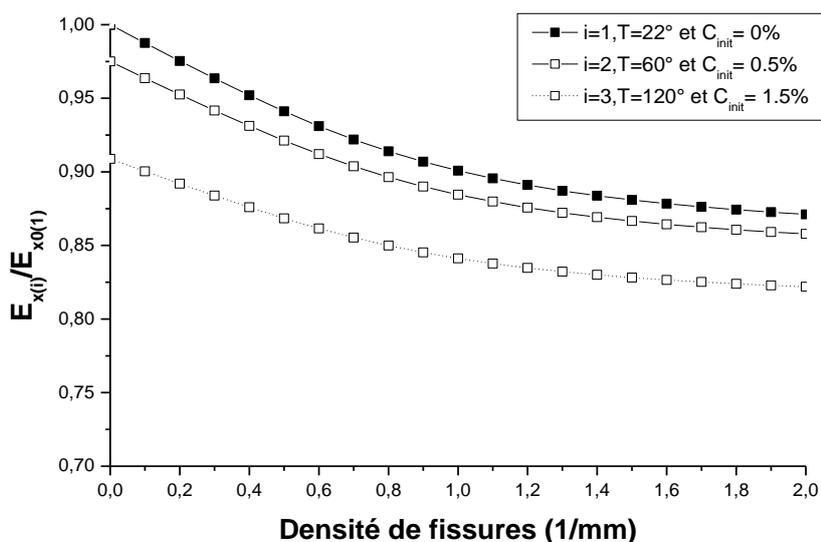


Figure 4.19 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/90_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  et  $t=4222h$  (cas transitoire).

#### 4.5.1.3 Comparaison entre le modèle de Tsai transitoire et non transitoire

On note une réduction moins importante de la rigidité totale du modèle de Tsai transitoire avec l'augmentation de la densité de fissuration, température et l'humidité par rapport au modèle de Tsai non transitoire (écart entre 4% et 7%).

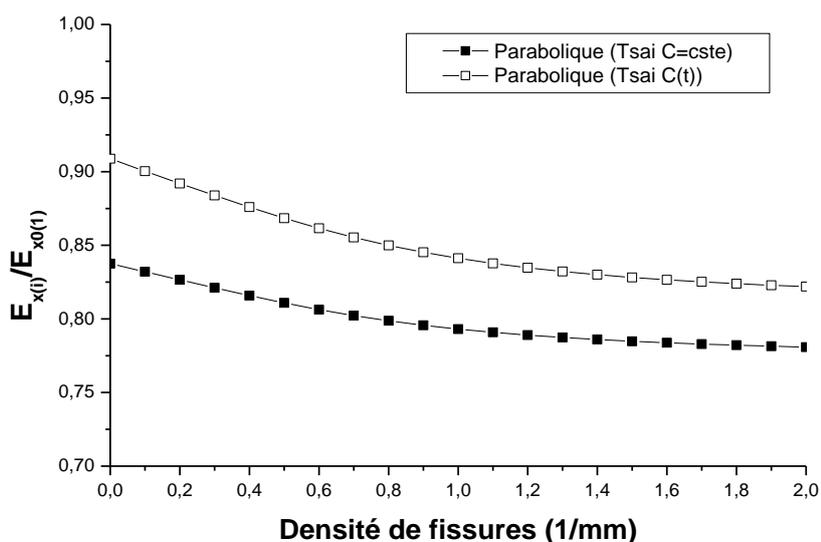


Figure 4.20 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/90_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  ( $T=120^\circ\text{C}$  et  $C=1\%$ ).

## 4.5.2 Présentation de la réduction de la rigidité totale pour les stratifiés $[\beta_m/90_n]_s$

### 4.5.2.1 Modèle de Tsai non transitoire

a)  $\beta = 15^\circ$

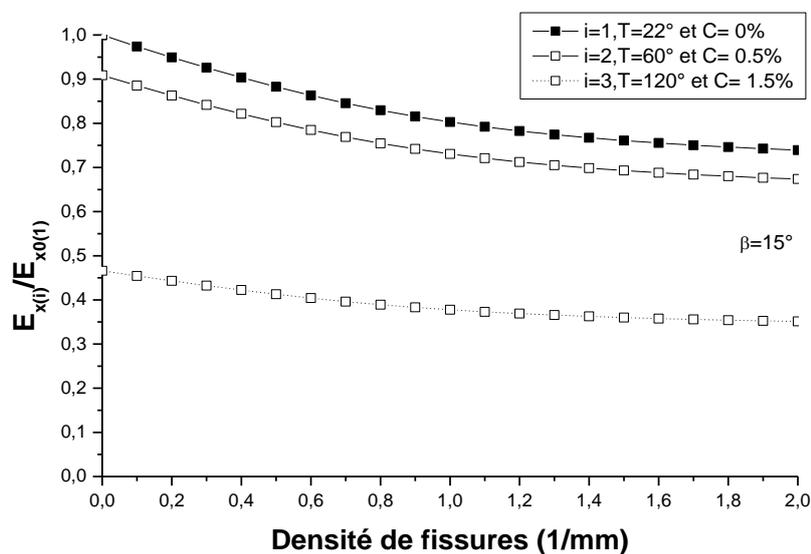


Figure 4.21 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[15/90_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  (cas non transitoire).

b)  $\beta = 30^\circ$

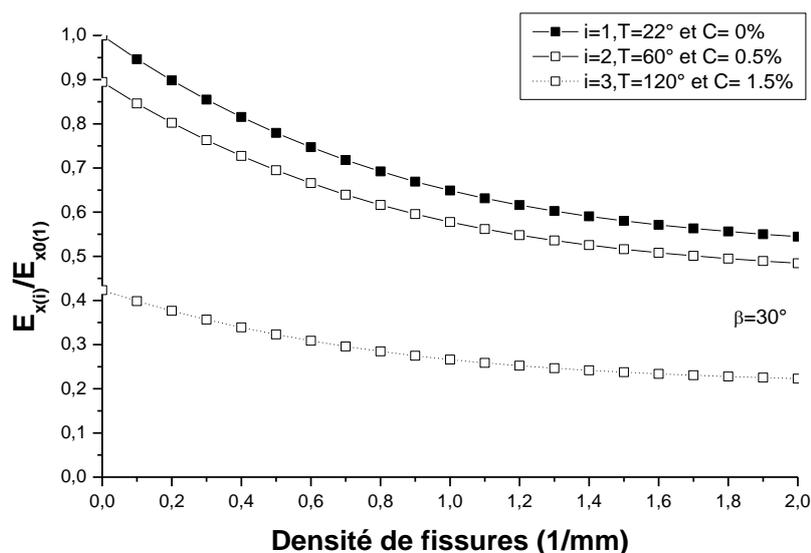


Figure 4.22 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[30/90_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  (cas non transitoire).

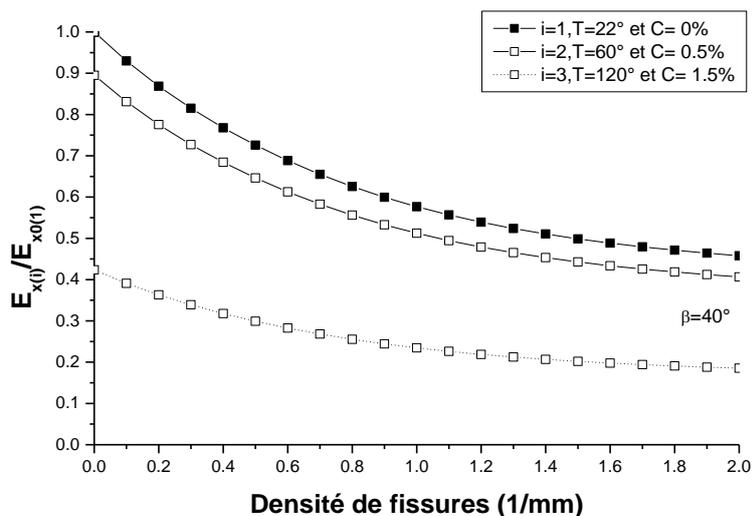
c)  $\beta = 40^\circ$ 

Figure 4.23 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[40/90_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  (cas non transitoire).

On note une réduction importante de la rigidité relative avec l'augmentation de la densité de fissurations et de l'angle d'orientation de fibre  $\beta^\circ$  et les conditions hygrothermiques (Fig. 4.21 à 4.23).

#### 4.5.2.2 Modèle de Tsai transitoire

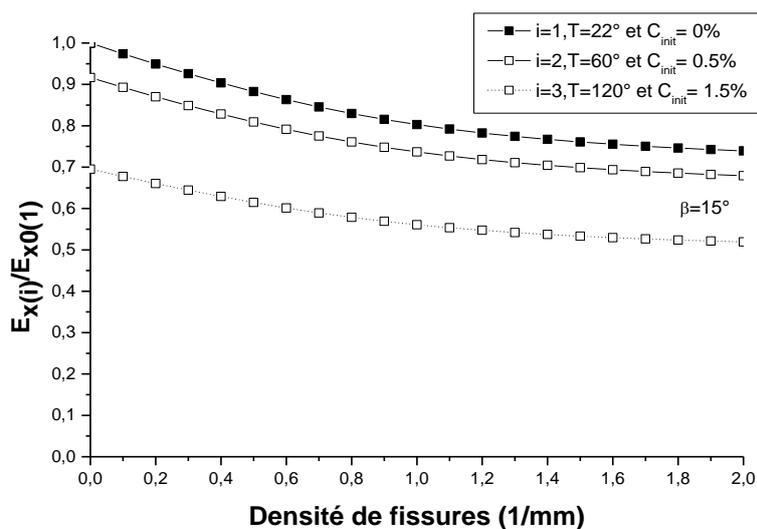
a)  $\beta = 15^\circ$ 

Figure 4.24 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[15/90_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  et  $t=4222h$  (cas transitoire).

b)  $\beta = 30^\circ$

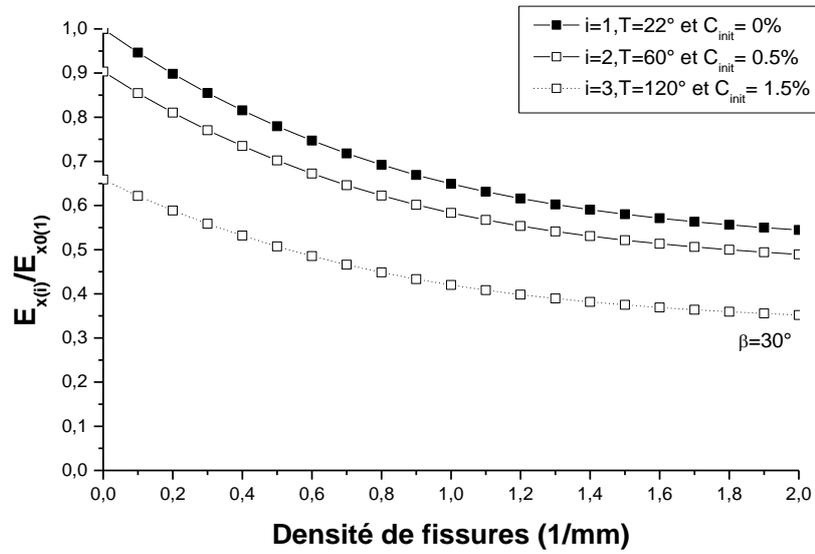


Figure 4.25 : Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[30/90_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  et  $t=4222h$  (cas transitoire).

c)  $\beta = 40^\circ$

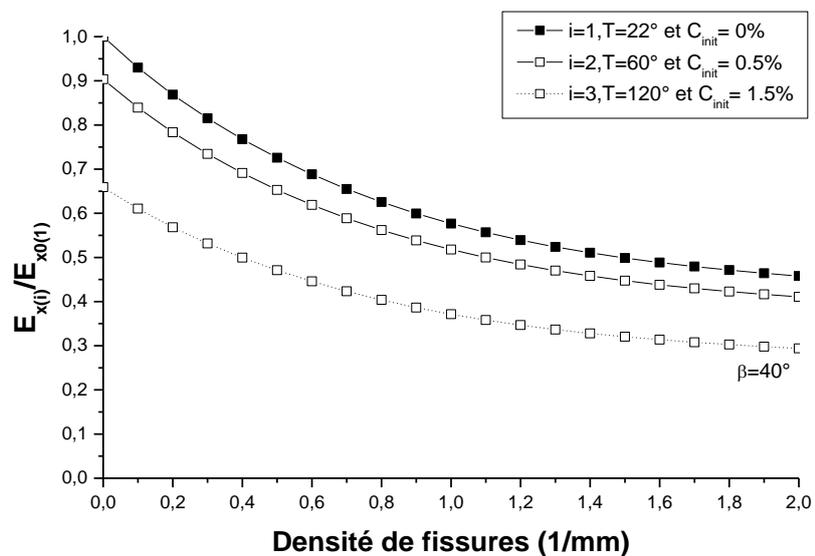


Figure 4.26: Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[40/90_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  et  $t=4222h$  (cas transitoire).

#### 4.5.2.3 Comparaison entre le modèle de Tsai transitoire et non transitoire

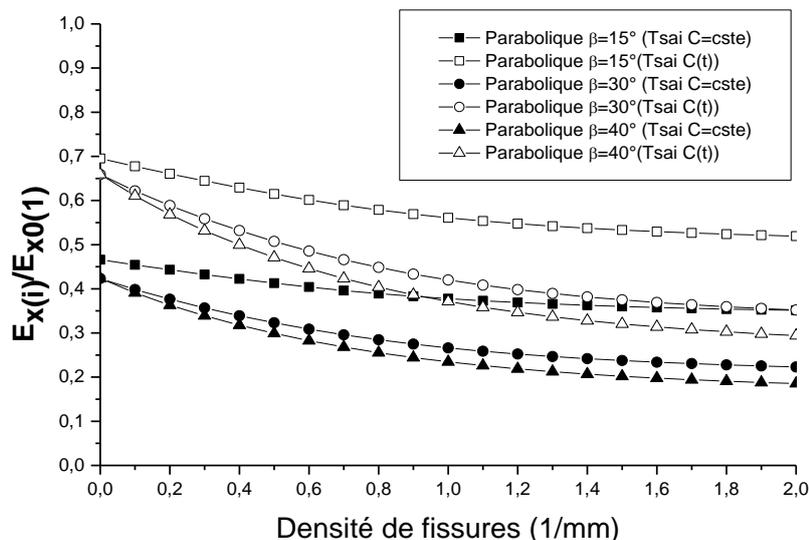


Figure 4.27: Réduction de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[\beta/90_3]_s$  T300/5208 et  $V_f=0.7$  ( $T=120^\circ\text{C}$  et  $C=1\%$ ).

On remarque toujours une réduction importante de la rigidité totale avec l'augmentation de l'angle d'orientation de fibre  $\beta$  et de la densité de fissurations. D'autre part le modèle de Tsai transitoire donne une réduction moins importante de la rigidité totale en fonction de la densité de fissures et pour différents angles par rapport au modèle de Tsai non transitoire (un écart entre 17% et 23% lorsque  $\beta=15^\circ$  ; un écart entre 13% et 24% lorsque  $\beta=30^\circ$  et au final un écart entre 11% et 24% lorsque  $\beta=40^\circ$ ).

#### 4.6 Effet hygrothermique sur la réduction du module de cisaillement longitudinal pour les stratifiés $[\beta_m/\theta_n]_s$

La réduction du module de cisaillement longitudinal du stratifié due à la densité de fissurations est évaluée par rapport au module de cisaillement initiale du stratifié non endommagé, soumis lui aussi aux mêmes conditions hygrothermiques. On note que le module de cisaillement initial du stratifié non endommagé est fonction aussi de la température et de l'humidité. Par conséquent, l'équation (2.156) pour le modèle variationnel devient :

$$\frac{G_{xy(i)}}{G_{xy(i)}^0} \geq \frac{1}{1 + \frac{\tanh \mu_{(i)} \rho}{\alpha \mu_{(i)} \rho}} \quad (4.18)$$

L'indice « i » représente les différents types de conditions d'environnement considéré.

#### 4.6.1 Présentation du module de cisaillement longitudinal pour les stratifiés croisés $[0_m/90_n]_s$

##### 4.6.1.1 Modèle de Tsai non transitoire

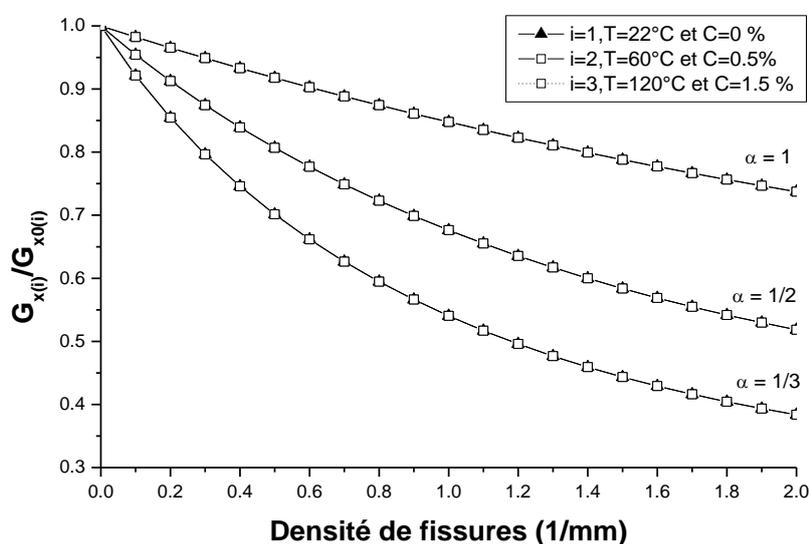


Figure 4.28 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les trois environnements hygrothermiques (i=1,2,3) avec Vf=0.7 (cas non transitoire).

##### 4.6.1.2 Modèle de Tsai transitoire

La réduction du module de cisaillement longitudinal est représentée en fonction de la densité de fissuration sous conditions hygrothermiques pour les stratifiés croisés  $[0/90_n]_s$  T300/5208 (Fig. 4.28 et 4.29). La réduction du module de cisaillement longitudinal est plus importante pour des densités de fissuration inférieure à 1 et pour des rapports d'épaisseurs faibles. On ne note pas d'effet de la température et l'humidité pour les deux modèles hygrothermiques.

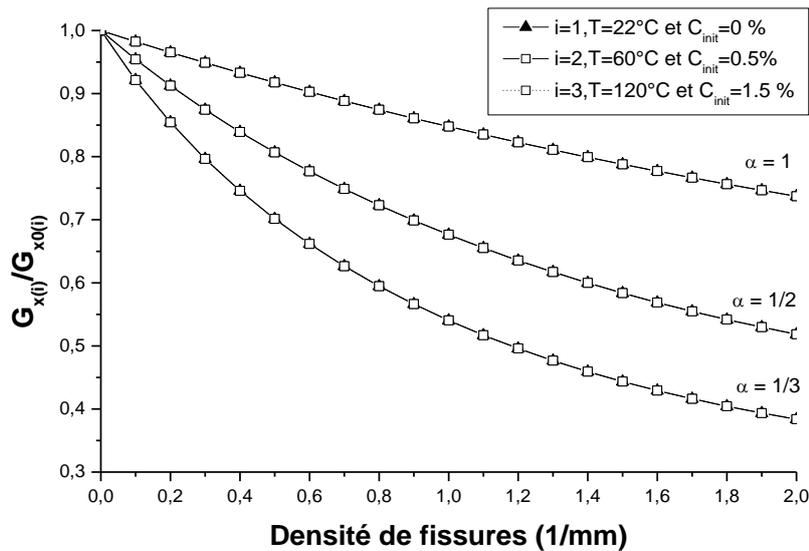


Figure 4.29 : Réduction du module de cisailment longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les trois environnements hydrothermiques ( $i=1,2,3$ ) avec  $V_f=0.7$  et  $t=4222\text{h}$  (cas transitoire).

#### 4.6.1.3 Comparaison entre le modèle de Tsai transitoire et non transitoire

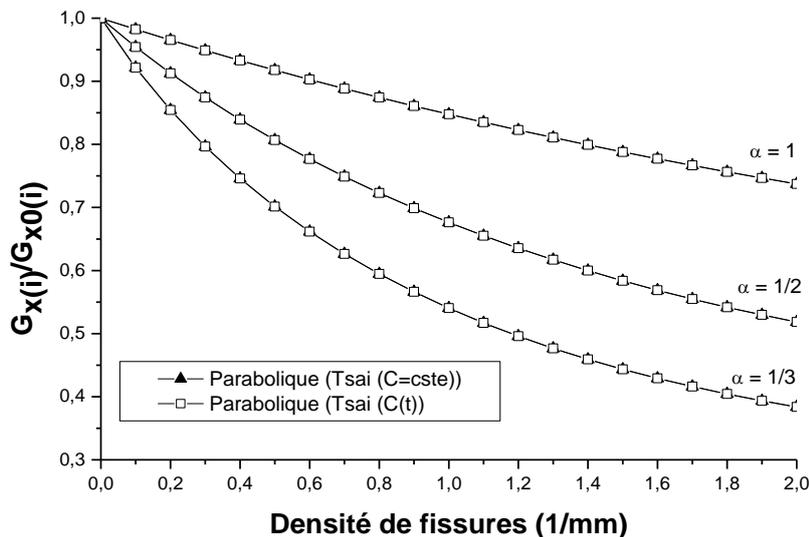


Figure 4.30 : Réduction du module de cisailment longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire  $t=4222\text{h}$  et non transitoire) avec  $V_f=0.7$  ( $T=120^\circ\text{C}$  et  $C=1\%$ ).

On remarque qu'on a les mêmes résultats entre le modèle de Tsai ( $C=cste$ ) et le modèle de Tsai transitoire, ce qui signifie que le phénomène de désorption n'a pas d'influence sur le comportement du module de cisaillement longitudinal (Fig. 4.30).

#### 4.6.2 Présentation du module de cisaillement longitudinal pour les stratifiés $[\beta_m / 90_n]_s$

##### 4.6.2.1 Modèle de Tsai non transitoire

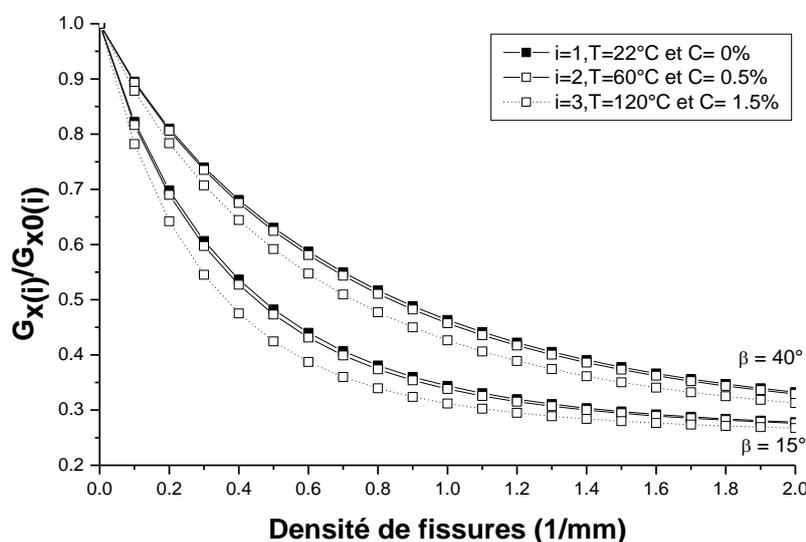


Figure 4.31 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[\beta/90_3]_s$  T300/5208 et différents angle  $\beta$  avec  $V_f=0.7$  (cas non transitoire).

##### 4.6.2.2 Modèle de Tsai transitoire

Une réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de l'augmentation de la densité de fissures, température et l'humidité et aussi en fonction que l'angle  $\beta^\circ$  des plis extérieurs diminue et cela pour les deux modèles hygrothermiques (Fig. 4.31 et 4.32).

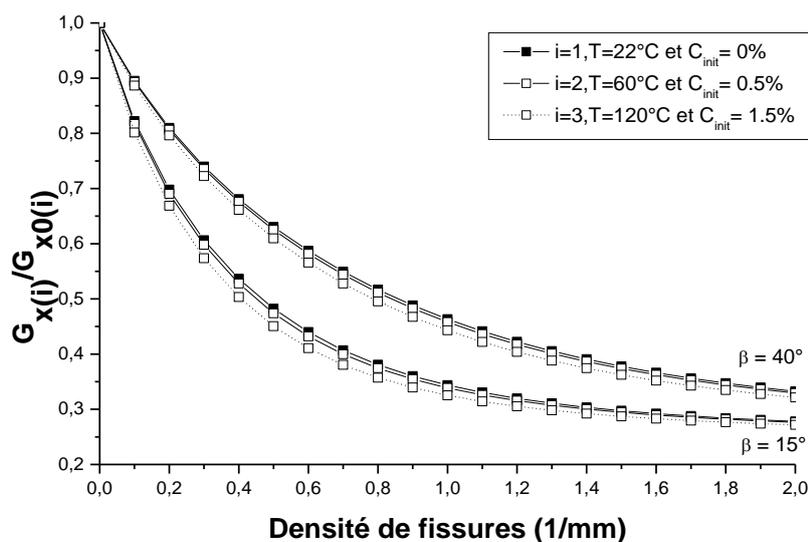


Figure 4.32 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[\beta/90_3]_s$  T300/5208 et différents angle  $\beta$  avec  $V_f=0.7$  et  $t=4222\text{h}$  (cas transitoire).

#### 4.6.2.3 Comparaison entre le modèle de Tsai transitoire et non transitoire

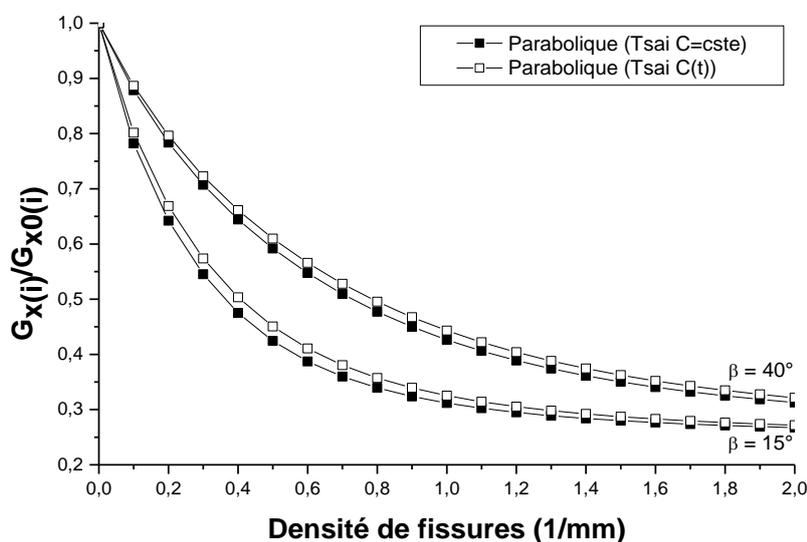


Figure 4.33 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures et différents angle  $\beta^\circ$  pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire  $t=4222\text{h}$  et non transitoire) avec  $V_f=0.7$  ( $T=120^\circ\text{C}$  et  $C=1\%$ ).

Le modèle de Tsai transitoire donne une réduction moins importante du module de cisaillement longitudinal en comparaison avec le modèle de Tsai non transitoire (Fig. 4.33) et cela est plus remarqué lorsque la densité de fissures est inférieure à 1 (1/mm).

#### 4.6.3 Présentation du module de cisaillement longitudinal pour les stratifiés $[0_m/\theta_n]_s$

##### 4.6.3.1 Modèle de Tsai non transitoire

a)  $\theta=15^\circ$

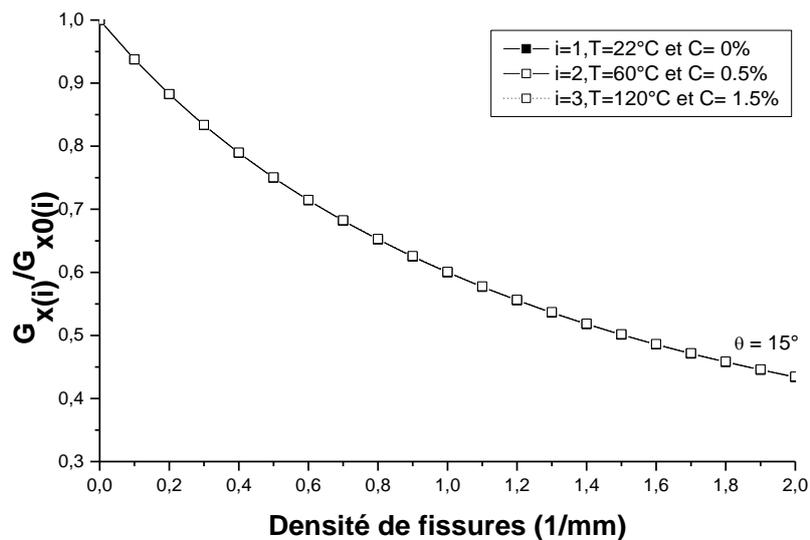


Figure 4.34 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/15_3]_s$  T300/5208 et différents angle  $\theta$  avec  $V_f=0.7$  (cas non transitoire).

b)  $\theta=45^\circ$

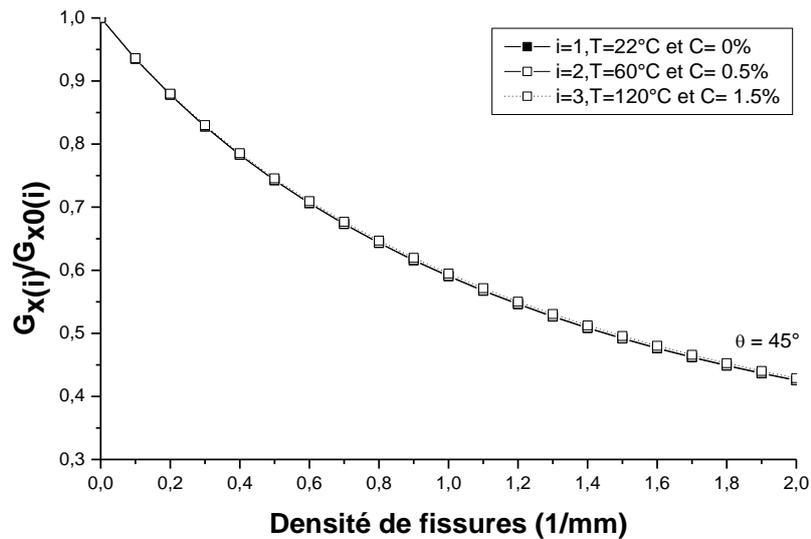


Figure 4.35 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/45_3]_s$  T300/5208 et différents angle  $\theta$  avec  $V_f=0.7$ (cas non transitoire).

### 6.3.2 Modèle de Tsai transitoire

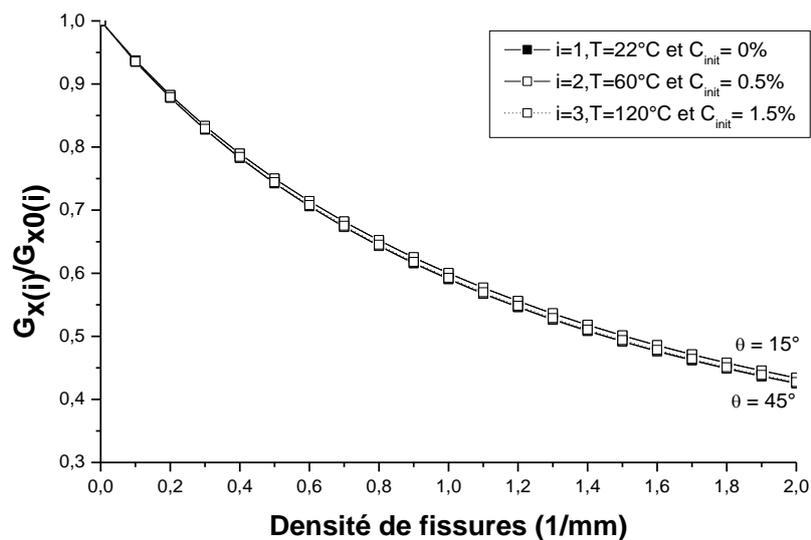


Figure 4.36 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/\theta_3]_s$  T300/5208 et différents angle  $\theta$  avec  $V_f=0.7$  et  $t=4222h$  (cas transitoire).

La réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures et pour différents angles de fissure  $\theta^\circ$  est représentée dans les figures 4.34 à 3.36. Il y a presque pas d'effet de température ni de l'humidité pour un stratifié avec différents angles de fissurations et cela pour les deux modèles hygrothermiques.

#### 4.6.3.3 Comparaison entre le modèle de Tsai transitoire et non transitoire

Les modèles hygrothermiques donnent la même réduction du module de cisaillement longitudinal avec différents angles de fissurations (Fig. 3.37). Finalement, la température et l'humidité n'influent pas sur la réduction du module de cisaillement longitudinal lorsqu'on a des stratifiés avec des angles de fissurations différent de  $90^\circ$ .

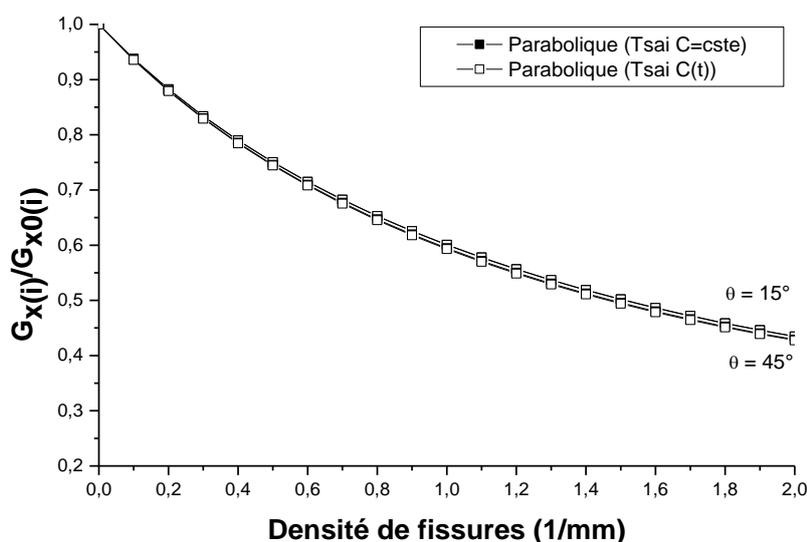


Figure 4.37 : Réduction du module de cisaillement longitudinal en fonction de la densité de fissures et différents angle  $\theta^\circ$  pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire  $t=4222h$  et non transitoire) avec  $V_f=0.7$  ( $T=120^\circ C$  et  $C=1\%$ ).

#### 4.7 Effet hygrothermique sur la réduction du coefficient de Poisson pour les stratifiés

$[\beta_m/\theta_n]_s$

La réduction du coefficient de Poisson du stratifié due à la densité de fissuration est évaluée par rapport au coefficient de Poisson initiale du stratifié non endommagé,

soumis lui aussi aux mêmes conditions hygrothermiques. On note que le coefficient de Poisson initial du stratifié non endommagé est fonction aussi de la température et de l'humidité. Par conséquent, l'équation (2.106) pour le modèle de diffusion de cisaillement devient :

$$\frac{\nu_{xy(i)}}{\nu_{xy(i)}^0} = \frac{1 - \frac{E_{\theta(i)} t_{\theta}}{\nu_{xy(i)}^0} \frac{(1 - \nu_{12} \nu_{xy(i)}^0)}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \left( \frac{S_{xy}^{\beta} S_{11}^{\theta} + S_{12}^{\theta} S_{xy}^{\beta}}{(S_{yy}^{\beta} t_{\beta} + S_{11}^{\theta} t_{\beta})} \right)}{1 + \frac{E_{\theta(i)} t_{\theta}}{E_{\beta(i)} t_{\beta}} \frac{(1 - \nu_{12} \nu_{xy}^0)}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \frac{1}{2a} R(i)(a) \left( 1 + \nu_{xy(i)}^{\beta} \frac{(S_{12}^{\beta} t_{\theta} + S_{12}^{\theta} t_{\beta})}{(S_{22}^{\beta} t_{\theta} + S_{11}^{\theta} t_{\beta})} \right)}$$
 (4.19)

L'indice « i » représente les différents types de conditions d'environnement considéré.

#### 4.7.1 Présentation du coefficient de Poisson pour les stratifiés croisés $[0_m/90_n]_s$

##### 4.7.1.1 Modèle de Tsai non transitoire

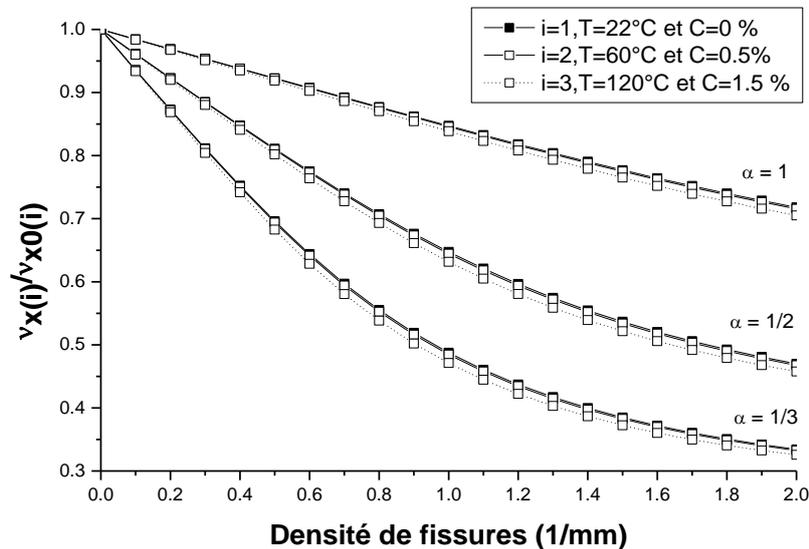


Figure 4.38 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/90_m]_s$  T300/5208 et les trois environnements hygrothermiques ( $i=1,2,3$ ) avec  $V_f=0.7$  (cas non transitoire).

#### 4.7.1.2 Modèle de Tsai transitoire

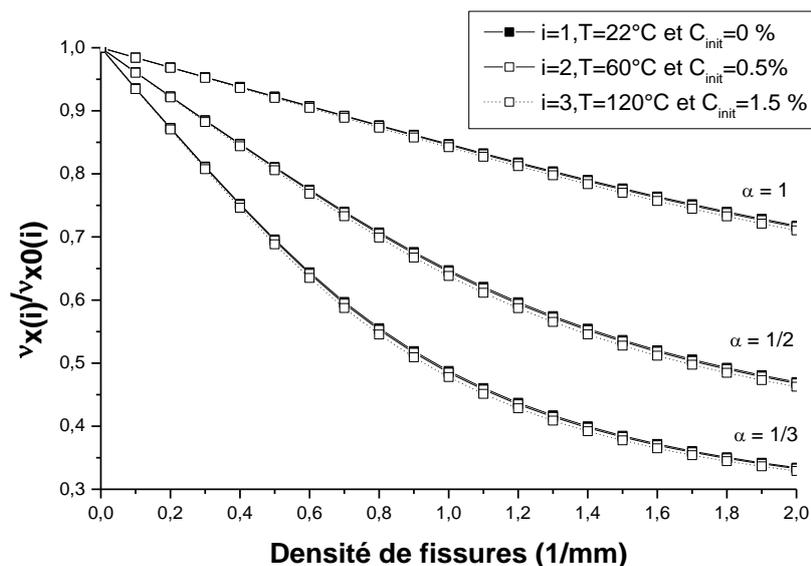


Figure 4.39 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/90_m]_s$  T300/5208 et les trois environnements hygrothermiques ( $i=1,2,3$ ) avec  $V_f=0.7$  et  $t=4222\text{h}$  (cas transitoire).

Les Fig. 4.38 et 4.39 montrent une réduction du coefficient de Poisson pour les stratifiés croisés avec l'augmentation de la densité de fissures, rapport d'épaisseur, température et humidité. Une faible influence hygrothermique est remarquée pour les deux modèles (transitoire et non transitoire).

#### 4.7.1.3 Comparaison entre le modèle de Tsai transitoire et non transitoire

Le modèle hygrothermique transitoire donne presque la même réduction du coefficient de Poisson que le modèle non transitoire et cela avec différent rapport d'épaisseur (Fig. 4.40).

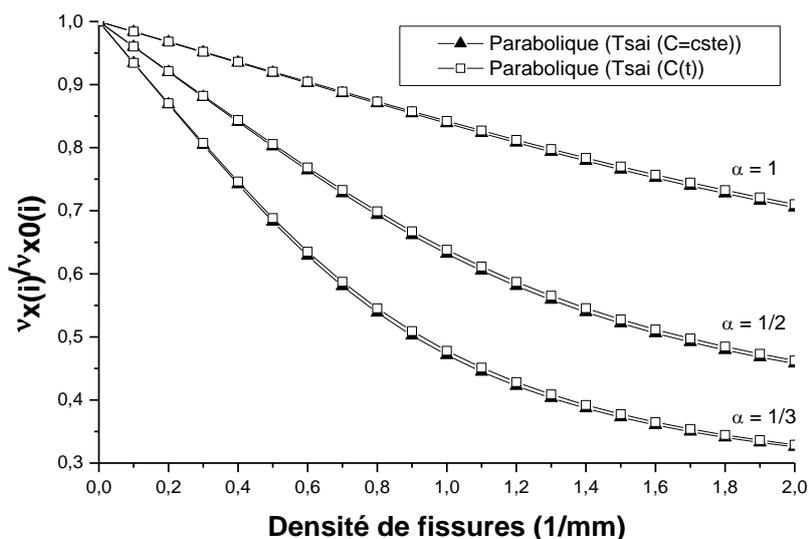


Figure 4.40 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire  $t=4222h$  et non transitoire) avec  $V_f=0.7$  ( $T=120^\circ\text{C}$  et  $C=1\%$ ).

#### 4.7.2 Présentation du coefficient de Poisson pour les stratifiés $[\beta_m/90_n]_s$

##### 4.7.2.1 Modèle de Tsai non transitoire

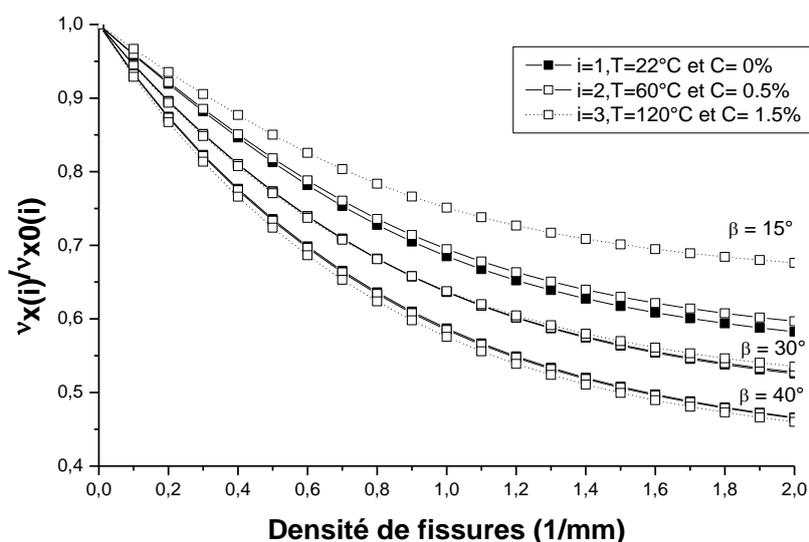


Figure 4.41 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[\beta/90_3]_s$  T300/5208 et différents angle  $\beta^\circ$  avec  $V_f=0.7$  (cas non transitoire)

#### 4.7.2.2 Modèle de Tsai transitoire

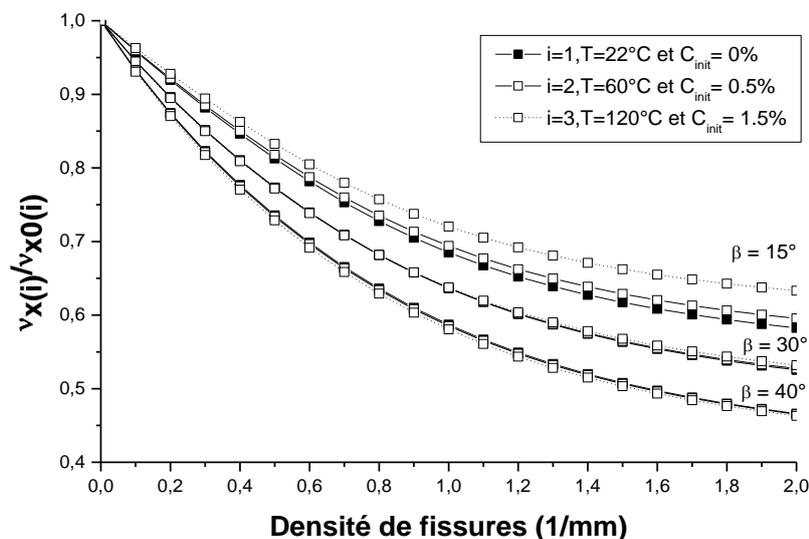


Figure 4.42 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[\beta/90_3]_s$  T300/5208 et différents angle  $\beta^\circ$  avec  $V_f=0.7$  et  $t=4222\text{h}$  (cas transitoire).

Les Fig. 4.41 et 4.42 représentent une réduction du coefficient de Poisson avec l'augmentation de la densité de fissures et de l'angle d'orientation des fibres des couches extérieure. L'influence de température et l'humidité est très remarquée pour les angles d'orientation des fibres faibles.

#### 4.7.2.3 Comparaison entre le modèle de Tsai transitoire et non transitoire

Le modèle hygrothermique transitoire prévoit une réduction plus importante du coefficient de Poisson par rapport au modèle non transitoire lorsque l'angle d'orientation des fibres des couches extérieure est égal à  $15^\circ$ . Presque la même réduction est notée du coefficient de Poisson entre les deux modèles hygrothermiques lorsque l'angle d'orientation des fibres des couches extérieures est  $\beta^\circ > 15^\circ$ .

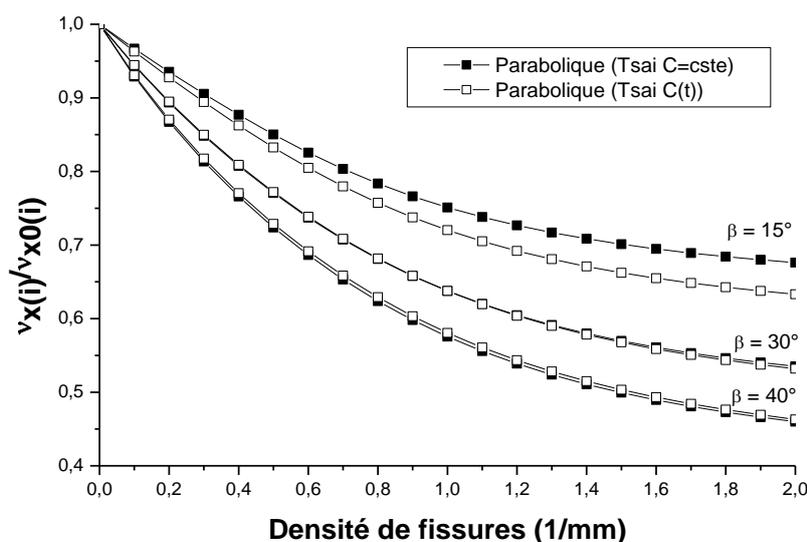


Figure 4.43 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures et différents angle  $\beta^\circ$  pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire  $t=4222h$  et non transitoire) avec  $V_f=0.7$  ( $T=120^\circ C$  et  $C=1\%$ ).

#### 4.7.3 Présentation du coefficient de Poisson pour les stratifiés $[0_m/\theta_n]_s$

##### 4.7.3.1 Modèle de Tsai non transitoire

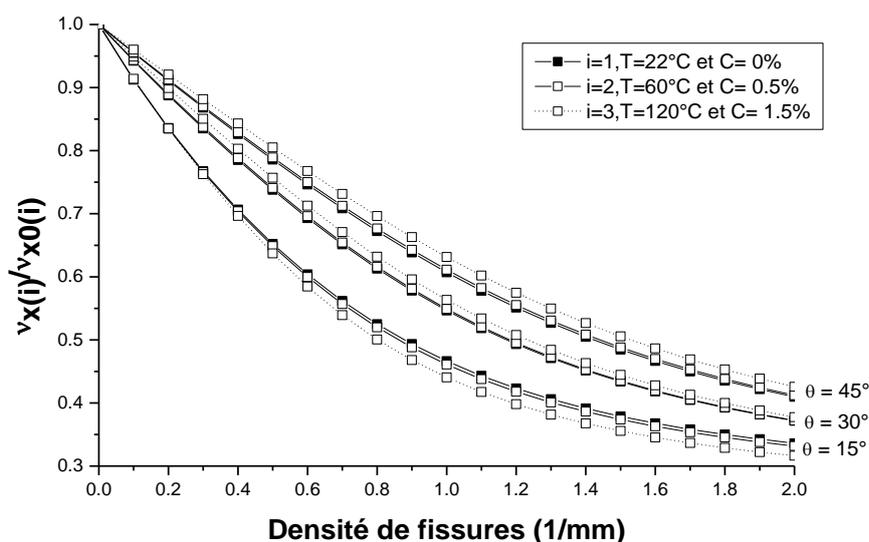


Figure 4.44 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/\theta_3]_s$  T300/5208 et différents angle  $\theta$  avec  $V_f=0.7$  (cas non transitoire).

#### 4.7.3.2 Modèle de Tsai transitoire

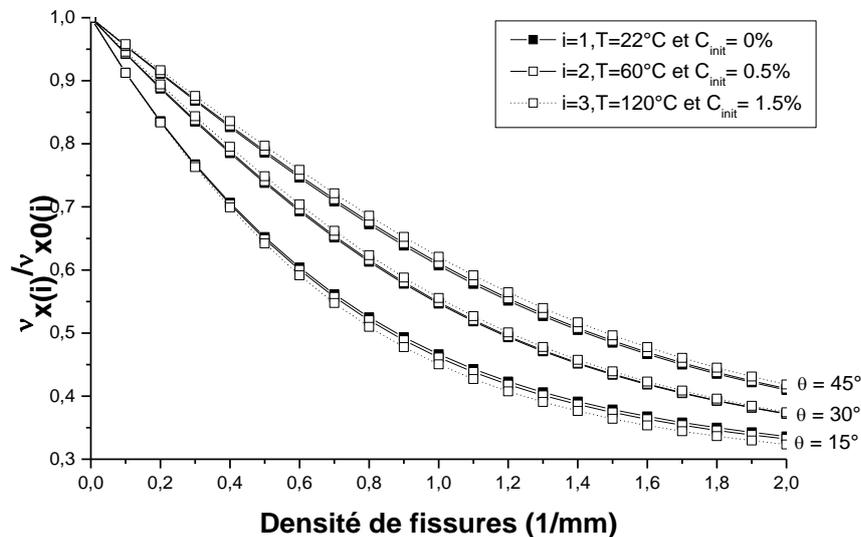


Figure 4.45 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures pour le stratifié  $[0/\theta_3]_s$  T300/5208 et différents angle  $\theta$  avec  $V_f=0.7$  et  $t=4222h$  (cas transitoire).

Une réduction du coefficient de Poisson est remarquée (Fig. 4.44 et 4.45) avec l'augmentation de la densité de fissures et la diminution des angles  $\theta^\circ$  d'orientation des fibres des couches fissurées. Une diminution du coefficient de Poisson avec l'augmentation de la température et l'humidité pour  $\theta=15^\circ$ , l'inverse est remarqué lorsque l'angle d'orientation des fibres des couches fissurés augmente.

#### 4.7.3.3 Comparaison entre le modèle de Tsai transitoire et non transitoire

Une différence très faible est notée entre le modèle hygrothermique transitoire et non transitoire avec la variation de l'angle d'orientation des fibres des couches fissurées (Fig. 4.46).

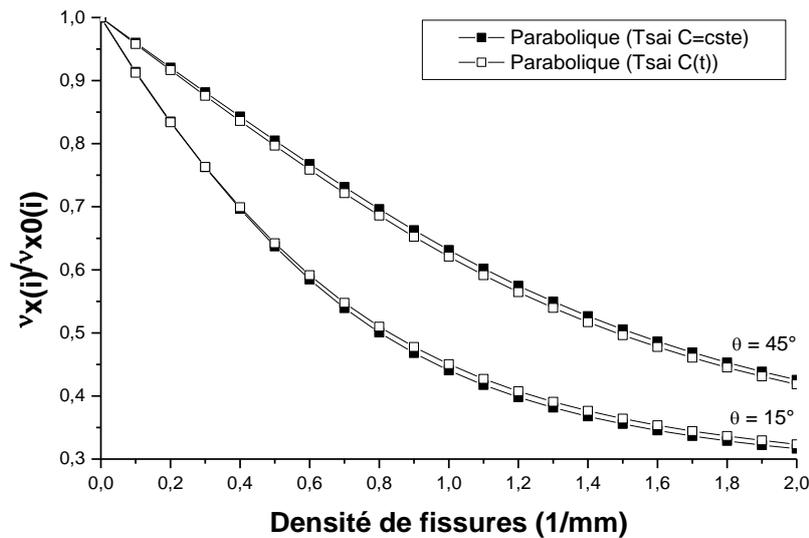


Figure 4.46 : Réduction du coefficient de Poisson en fonction de la densité de fissures et différents angle  $\theta^\circ$  pour le stratifié T300/5208 et les deux modèles de Tsai (transitoire  $t=4222h$  et non transitoire) avec  $V_f=0.7$  ( $T=120^\circ C$  et  $C=1\%$ ).

#### 4.8 Conclusion

Nous avons étudié l'effet des conditions hygrothermiques en terme de température et d'humidité sur la variation des propriétés mécaniques des composites fissurés. Pour cela, nous avons utilisés deux modèles de vieillissement hygrothermique, le modèle de Tsai avec une concentration constante et le modèle de Tsai transitoire pour représenter le comportement des propriétés élastiques en fonction de la densité de fissuration.

Une comparaison entre les deux modèles hygrothermiques est faite pour mieux prédire le comportement le plus proche du comportement réel des stratifiés fissurés et soumis à différents conditions environnementales.

En conclusion, une différence est nettement remarquée du modèle de Tsai transitoire par rapport au modèle constant ce qui rend ce dernier moins fiable pour représenter le meilleur comportement mécanique des stratifiés fissurés et vieilliss.

## CONCLUSION GENERALE

Au cours de ce travail de recherche, nous avons procédé à une étude quantitative sur le comportement des matériaux composites fissurés alternés. L'intérêt a porté essentiellement sur l'étude du comportement des propriétés élastiques en fonction de la densité de fissuration et sous différentes conditions environnementales.

L'étude de la fissuration transverse a été accomplie pour un stratifié croisé et un stratifié non croisé soumis à une traction uni-axiale. La modélisation de la fissuration transverse a été établie à travers un schéma appelé modèle de transfert du chargement par cisaillement, un schéma qui est en fait l'application à la fissuration transverse, de l'analyse de transfert de charge entre les fibres et la matrice. Cette modélisation a permis d'illustrer le comportement des propriétés élastiques en fonction de la densité de fissuration. Ce modèle a été comparé avec le modèle variationnel d'HASHIN. Le comportement des propriétés élastiques a été comparé avec l'expérimental.

Comme deuxième étape de cette étude, le comportement des propriétés mécaniques d'un matériau composite fissuré et soumis à des sollicitations de traction, sous différentes conditions de vieillissement hygrothermiques, a été étudié par simulation numérique. L'étude a été accomplie pour un stratifié croisé et un stratifié non croisé.

La modélisation du vieillissement hygrothermique a été établie selon un modèle à l'échelle micro-analytique, choisi à partir d'un modèle semi empirique qui prend en considération l'effet de la concentration d'humidité et de la température sur les

propriétés des fibres et de la matrice. Ceci nous a permis de quantifier l'évolution des propriétés mécaniques.

L'originalité du travail réside dans le fait que les propriétés élastiques des matériaux composites fissurés, sont déterminées à partir d'un environnement variable, prenant en compte une concentration déterminée, à partir de conditions transitoires, en désorption, à travers le modèle de Tsai. Les résultats les plus significatifs obtenus peuvent être rappelés comme suit :

La réduction de la rigidité pour le modèle transitoire est plus importante que celle obtenue pour le modèle constant. Les résultats sur le comportement de la rigidité relative et totale, montrent que les effets hygrothermiques ont un effet différent sur un composite non fissuré, que sur un composite à fissuration transverse. Effectivement la réduction de cette rigidité relative est plus importante pour un matériau composite non fissuré.

Les réductions du module de cisaillement longitudinal, et du coefficient de Poisson, dépendent largement de la densité des fissures, du rapport d'épaisseur et de l'angle d'orientation des fibres des couches fissurées et des couches non fissurées, ainsi que des conditions hygrothermiques.

Au final, on peut dire que le modèle hygrothermique transitoire semble le mieux adapté à représenter le comportement des propriétés mécaniques d'un stratifié fissuré croisé et non croisé sous traction uni-axiale.

## PERSPECTIVES

Comme perspectives futures de cette recherche, nous proposons d'étaler cette étude à l'influence du couplage du phénomène de délaminage et des fissurations transverse sur les propriétés élastiques pour un matériau composite croisé et non croisé, sous conditions hygrothermiques, par la méthode des éléments finis. L'étude pourra être accomplie aussi bien pour le cas d'absorption que pour le cas de désorption en régime transitoire.

Il serait aussi intéressant d'étaler cette étude au cas des stratifiés hybrides, et d'examiner la variation de la rigidité et des contraintes en fonction de la densité de fissuration et des conditions de vieillissement variables.

Une étude expérimentale pourra être réalisée par de cycles de vieillissement et des tests d'analyse afin de quantifier la densité fissurés et de voir leurs effets direct sur les structures.

## LISTE DES SYMBOLES

- $a, c, f, h, b, e$  : Constantes empiriques
- $(a)$  : Rapport géométrique de fissuration
- $C_{ini}$  : Concentration initiale
- $C$  : Concentration de l'humidité
- $C_{sat}$  : Concentration à la saturation
- $D_z$  : Diffusivité
- $E_{fx}$  : Module longitudinal de Young dans la direction de la fibre
- $E_{fy}$  : Module transversal de Young dans la direction de la fibre
- $E_x$  : Module longitudinal de Young dans le pli fissuré
- $E_{x0}$  : Module longitudinal de Young dans le pli non fissuré
- $E_y$  : Module transversal de Young dans le pli
- $E_{y0}$  : Module transversal de Young dans le pli à température de référence
- $E_\theta$  : Module de Young dans le pli à  $\theta^\circ$
- $E_\beta$  : Module de Young dans le pli à  $\beta^\circ$
- $G_{fx}$  : Module de cisaillement de la fibre
- $G_{xz}^\beta$  : Module de cisaillement dans la couche  $\beta^\circ$
- $G_{xz}^\theta$  : Module de cisaillement dans la couche  $\theta^\circ$
- $G_m$  : Module de cisaillement de la matrice
- $G_{xy}$  : Module de cisaillement dans le pli
- $G_{xy}^0$  : Module de cisaillement du stratifié à la température de référence
- $h$  : Demi épaisseur du stratifié

$h_k$	Épaisseur du pli d'ordre k
$l$	Demi longueur entre deux fissures consécutives
$n$	Nombre de couches à $90^\circ$
$m$	Nombre de couches à $0^\circ$
$S_{ij}$	Élément de la matrice de souplesse (i,j,1,2,3)
$\Delta T$	Température d'opération – température de cuisson
$T_{opr}$	Température d'utilisation
$T_g$	Température de transition
$T_g^0$	Température de transition à la température de référence
$T_{rm}$	Température de référence
$t$	Temps
$t_\beta$	Épaisseur de la couche $\beta^\circ$
$t_\theta$	Demi-épaisseur de la couche $\theta^\circ$
$U_\beta(x, y)$	Déplacement dans la couche à $\beta^\circ$
$\overline{U}_\beta$	Déplacement longitudinale moyenne dans la couche à $\beta^\circ$
$\overline{U}_\theta$	Déplacement longitudinale moyenne dans la couche à $\theta^\circ$
$U_\theta(x, y)$	Déplacement dans la couche à $\theta^\circ$
$x$	Coordonnée longitudinale
$x, y, z$	Repère du pli
$\alpha$	Rapport d'épaisseur
$\sigma_c$	Contraintes de traction appliquée
$\sigma_{FPF}$	Contraintes seuil de rupture
$\sigma_i^\theta$	Contraintes dans la couche $\theta^\circ$ fissurée avec (i=x,y,z)
$\sigma_i^\beta$	Contraintes dans la couche $\beta^\circ$ non fissurée avec (i=x,y,z)
$\tau$	Contrainte de cisaillement
$\nu_{xz}^\beta$	Coefficient de poisson dans la couche $\beta^\circ$

$\nu_{xz}^{\theta}$  : Coefficient de poisson dans la couche  $\theta^{\circ}$

$\theta$  : Angle de la couche fissurée

$\beta$  : Angle de la couche non fissurée

$\eta$  : Paramètre de transfert de charge

$\xi$  : Disposition des fissures

## BIBLIOGRAPHIE

1. Tsai, S. W. « Composites Design » Think Composites, Dayton, Paris, Tokyo, 1987.
2. Reifsnider, K.L., "Some fundamental aspect of the fatigue and fracture response of composite materials", Processing of 14th annual society of engineering science meeting, Lehigh University, Bethlehem, Pa (USA), (1977), 14-16.
3. Peters, M. and Chou, C.P., "Practical Issues in Structural Modeling" Sociological Methods & Research, (1987), 78-117.
4. Ashbee, K., "Water damage in glass fibre/resin composites", Proc. Roy. Soc. A312, (1969), 553-564.
5. Highsmith A.L., and Reifsnider, K.L., "Stiffness-Reduction mechanisms in composite laminates", Damage in Composite Materials, ASTM STP 775, K.L. Reifsnider, Ed., ASTM, (1982), 103-117.
6. Garrett K.W., and Bailey J.E., "Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyester", Journal of Materials Science, V. 12,(1977), 157-168.
7. Schulte, K., and Stinchcomb W.W., "Damage development near edges of composite specimen during quasi-static and fatigue loading", Composites Technology Review, V. 6, n° 1, (1984), 3-9.
8. Stinchcomb, W.W., "Nondestructive evaluation of damage accumulation process in composite laminates", Composite Science and Technology, V. 25, (1986), 103-118.

9. Boniface L., and Ogin S.L., “Application of the Paris equation to the fatigue growth of transverse ply cracks”, *Journal of Composite Materials*, V. 23, (1989), 735-754.
10. Joffe, R., A., Varna, J., “Analytical modelling of stiffness reduction in symmetric and balanced laminates due to cracks in 90° layers”, *Compos. Sci. Technol*, V. 59, (1999), 1641–1652.
11. Barbero, E.J., Cosso, F.A., “Determination of material parameters for discrete damage mechanics analysis of carbon-epoxy laminates”. *Comp. Part B*, V. 56, (2014), 638-646.
12. Singh, C.V. and Talreja, R., “A synergistic damage mechanics approach for composite laminates with matrix cracks in multiple orientations”, *Mech. Mat.*, V. **41**, (2009), 954-968.
13. Li, S. and Hafeez, F., “Variation-based cracked laminate analysis revisited and fundamentally extended”, *Inter. J. of Sol. and Struct.*, V. 46, (2009), 3505-3515.
14. Lundmark, P. and Varna, J., “Stiffness reduction in laminates at high intralaminar crack density: effect of crack interaction”, *International journal of damage mechanics*, V. 20, (2011), 279-297.
15. Akula, V.M.K. and Garnich, M.R., “Effective ply and constituent elastic properties for cracked laminates”, *Composite: part B*, V. 43, (2012), 2143-2151.
16. Huang, Z.Q., Zhou, J.C. and Liew, K.M., “Variational analysis of angle-ply laminates with matrix cracks”, *Inter.J. of Sol. and Struct.*, V. 51, (2014), 3669-3678.
17. Jalalvand, M., Hosseini-Toudeshky, H., Mohammadi, B., “Homogenization of diffuse delamination in composite laminates”, *Comp. Struct.*, V. 100, (2013), 113–120.

18. Wang, A.S.D., "Fracture mechanics of sublaminar cracks in composite materials", *Composite Technology Review*, V. 6, n° 2, (1984), 45-62.
19. Harrison, R.P., and Bader, M.G., "Damage development in CFRP laminates under monotonic and cyclic stressing", *Fibre Science and Technology*, V. 18, (1983), 163-180.
20. Lafarie-Frenot M.C., and Henaff-Gardin, C., "Formation and growth of 90° ply fatigue cracks in carbon/epoxy laminates", *Composite Science and Technology*, V. 40, (1991), 301-324.
21. Reifsnider, K.L., Schulte, K. and Duke, J.C., "Long-term fatigue behavior of composite materials", *Long-term behavior of Composites*, ASTM STP 813, T.K. O'Brien, Ed., ASTM, Philadelphia, (1983), 136-159.
22. Highsmith, A.L., and Reifsnider, K.L., "Internal load distribution effects during fatigue loading of composite laminates", *Composite Materials: Fatigue and Fracture*, ASTM STP 907, H.T. Hahn, Ed., Philadelphia, (1986), 233-251'.
23. Flaggs, D.L., and Kural, M. H., "Experimental determination of in the situ transverse lamina strength in graphite/epoxy laminate", *Journal of composite materials*, V. 16, (1982), 103-116.
24. Jamison, R.D., Kschulte, K.L., Reifsnider and Stinchcomb, w.w., "Characterization and analysis of damage mechanisms in tension-tension fatigue of graphite/epoxy laminates", *Defects in Composite Materials*, ASTM STP 836, (1984), 21-55.
25. Flaggs, D. L., "Prediction of tensile matrix failure in composite laminates", *Journal of Composite Materials*, V. 19, (1985), 29-50.

26. Petitpas, E., Renault M., and Valentin, D., "Fatigue behaviour of cross-ply CFRP laminates", *Journal of Fatigue*, V. 12, n°4, (1990), 245-251.
27. Urwald, E., "Influence de la géométrie et de la stratification sur l'endommagement par fatigue de plaque composites carbone/époxyde", Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers, (1992).
28. Henaff-Gardin, C., Lafarie-Frenot, M.C., Brillaud, J., and El Mahi, A., "Influence of the stacking sequence on fatigue transverse ply cracking in cross-ply laminates", *Damage in composite Materials*, ASTM STP 1128, Philadelphia, (1992), 236-255.
29. Parvizi, A., Garrett, K.W., and Bailey, J.E., "Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy cross-ply laminates", *Journal of Materials Science*, V. 13, (1978), 195-207.
30. Urwald, . E., Lafarie-Frenot, M.C., and Henaff-Gardin, C., "Couplage entre les différents modes d'endommagement par fatigue dans les stratifiés croisés carbone/époxyde", *C.R. des JNC 8*, Palaiseau, (1992), 449-459.
31. Tahiri, V.L., "Endommagement de stratifiés carbone/époxyde de types (0°/45°) et ( $\pm 45$ ) sous chargement quasi-statique et cyclique", Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers, (1995).
32. Caslini, M., Zanotti, C., and O'Brien, T.K., "Study of matrix cracking and delamination in glass/epoxy laminates", *Journal of composites Technology & Research*, V. 9, n°4, (1987), 121-130.
33. Steif, P.S., "Transverse play crack growth and associated stiffness reduction during the fatigue of a simple cross play laminate", 1Eds S.L. Ogin, P.A. Smith and P.W.R. Beaumont, Report CUED/C/MATS/TR105, Cambridge University, (1984).

34. Laws N., and Dvorak, G.J., "Progressive transverse cracking in composite laminates", *Journal of composite Materials*, V. 22, (1988), 900-916.
35. Ogin, S.L., Smith, P.A. and Beaumont, P.W.R., "Matrix cracking and stiffness reduction during the fatigue of 0/90<sub>s</sub> GFRP laminate", *Composite Science and Technology*, V. 22, (1985), 23-31.
36. Berthelot, J.M., El Mahi, A., and Leblond, P., "Transverse cracking of cross-ply laminates: Part 2. Progressive widthwise cracking", *Composites Part A*, V. 27A, (1996), 1003-1010.
37. Berthelot, J.M., Leblond, P., El mahi, A., and Le Corre, J.F., "Transverse cracking of cross ply laminates : part 1 Analysis", *Composites*, 27A, (1996), 989-1001.
38. Berthelot, J.M., "Analysis of the transverse cracking of cross ply laminates: a Generalized Approach", *Journal of Composite Materials*, V. 31, n° 18, (1997), 1780-1805.
39. Berthelot, J.M., and Le Corre, J.F., "Modelling the transverse cracking in cross-ply laminates: application to fatigue", *Composites: Part B*, V. 30, (1999), 569–577.
40. Berthelot, J.M., El Mahi, A., and Le Corre, J.F., "Development of transverse cracking in cross-ply laminates during fatigue tests", *Composites Science and Technology*, V. 61, (2001), 1711–1721.
41. Le Corre, J.F. "Analyse du développement de la fissuration transverse et du délaminage dans les stratifiés croisés", Thèse de Doctorat de l'Université du Maine, (Décembre 1999).
42. Hashin, Z., "Analysis of cracked laminates: a variational approach", *Mech. Mater.* 4, (1985), 121–136.

43. Hashin, Z., "Analysis of stiffness reduction of cracked cross ply laminates", *Engineering Fracture Mechanics*, (1986), 771-778.
44. Vingradov, V. and Hashin, Z., "Variational analysis of cracked angle-ply laminates", *Comp.Sci. and Tech.*, (2010), 638-646.
45. Nairn, J.A., "The strain energy release rate of composite micro cracking: a variational approach", *Journal of Composite Materials*, V. 23, (1989), 1106-1129.
46. J.A. Nairn & S. Hu "The formation and effect of outer-ply microcracks in cross-ply laminates: A variational approach", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 41 (2), 1992, pp. 2043-221.
47. J.A. Nairn, S. Hu & J.S. Bark "A critical evaluation of theories for predicting microcracking in composite laminates", *Journal of Materials Science*, Vol. 28, 1993, pp.5099-5111.
48. Rebière, J.L., and Gamby, D., "Analytical and numerical analysis of transverse cracking in a cross-ply laminate. Influence of the constraining effect", *Composite Structures*, V. 20, (1992), 91-101.
49. Gamby, D., and Rebière, J.L., "A two dimensional analyses of multiple matrix cracking in a laminated composite close to its characteristic damage state", *Composite Structures*, V. 25, (1993), 325-337.
50. Rebière, J.L., "Modélisation du champ des contraintes induit par des fissures de fatigue dans un composite stratifié carbone/polymère", *Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers*, (1992).

51. Groves, S.E., Harris, C.E., Highsmith, A.L., Allen, D.H. and Norvell, R.G. "An experimental and analytical treatment of matrix cracking in cross-ply laminates", *Experimental Mechanics*, V. 22, (1987), 73-79.
52. Varna, J. and Berglund, L.A., "A model for prediction of the transverse cracking strain in cross-ply laminates", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, V. 11, (1992), 708-728.
53. Varna, J. and Berglund, L.A., "Multiple transverse cracking and stiffness reduction in cross-ply laminates", *Journal of Composites Technology and Research, JCTRER*, V. 13, n° 2, 1991, 97-106.
54. Katerelos, D.T.G., Krasnikovs, A. and Varna, J. "Variational models for shear modulus of symmetric and balanced laminates with cracks in 90°-layer", *International journal of solids and structures*, V. 71, (2015), 169-179.
55. Vinogradov, V. "Variational analysis of angle-ply laminates with parallel intralaminar cracks", *ICCM20, At Copenhagen, Denmark*, (2015).
56. Hajikazemi, M. and Sadr, M.H. "Stiffness reduction of cracked general symmetric laminates using a variational approach", *International journal of solids and structures*, V. 51, (2014), 1483-1493.
57. Reifsnider, L.L., and Talug, A., "Analysis of fatigue damage in composite laminates", *Int. Journal of Fracture*, (1980), 3-11.
58. Wang, A.S.D., and Crossman, F.W., "Initiation and growth of transverse cracks and edge delamination in composite laminates. Part I: An energy method", *J. Comp. Mat.*, V. 14 Supplement, (1980), 71-87.

59. Crossman, F.W., Warren, W.J. Wang, A.S.D. and Law Jr, G.E., "Initiation and growth of transverse cracks and edge delamination in composite laminates. Part II: Experimental correlation", J. of Comp. Mat., V. 14, (1980), 88-108.
60. Wang, A.S.D., Kishore, N.N. and Li, C.A., "Crack development in graphite-epoxy cross-ply laminates under uniaxial tension", Composite Science and Technology, V. 24, (1985), 1-31.
61. Herakovich, C.T., Aboudi, J., Lee, S.W. and Strauss, E.A., "Damage in composite laminates: Effects of transverse cracks", Mechanics of Materials, V. 7, (1988), 91-107.
62. Aboudi, J., Lee, S.W., and Herakovich, C.T. "Three dimensional analysis of laminates with cross cracks", Journal of Applied Mechanics, V. 55, (1988), 389-397.
63. Guild, F.J., Ogin, S.L., Smith, P.A. "Modelling of 90° ply cracking in cross-ply laminates, including three-dimensional effects", Journal of Composite Materials, V. 27 n° 7,(1993), 646-667.
64. Binienda, W.K., Hong, A., and Roberts, G.D., " Influence of material parameters on strain energy release rates for cross-ply laminates with pre-existing transverse crack", Comp. Engineering, V. 4, n° 12, (1994), 1167 -1210.
65. El Mahi, A., Berthelot, J.M., and Brillaud, J., "Stiffness reduction and energy release rate of cross-ply laminates during fatigue tests", Composite Struc., V. 29, (1994).
66. Leblond, P., El Mahi, A., and Berthelot, J.M., "Modélisation numérique 2D et 3D des composites stratifiés endommagés par fissuration transverse", C.R. JNC9, Eds J.P.Favre & A.Vautdn, St-Etienne, (1994), 44-52.

67. Talreja, R. "stiffness properties of composite laminates with matrix cracking and interior delamination", *Engineering Fracture Mechanics*, V. 25 n° 5/6, (1986), 751-762.
68. Talreja, R., Yalvac, S., Yats, L.D., and Wetters, D.G., "Transverse cracking and stiffness reduction in cross ply laminates of different toughness", *Journal of Composite Materials*, V. 26, n° 11, (1992), 1644-1663.
69. Harris, C.E., and Allen, D.H., "A continuum damage model of fatigue-induced damage in laminated composites", *SAMPE Journal*, (1988), 43-51.
70. Lee, J.W., Allen, D.H., and Harris, C.E. "Internal state variable approach for predicting stiffness reductions in fibrous laminated composites with matrix cracks", *J. Comp. Mat.*, V. 23, (1989), 1273-91.
71. Renard, J., Favre, J.P., and Jeggy, T., "Influence of transverse cracking on ply behavior introduction of a characteristic damage variable", *Composites Science and Technology*, V. 46, (1993), 29-37.
72. Thionnet, A., "Prévision d'endommagement sous chargements quasi statiques et cycliques des structures composites stratifiées", Thèse de doctorat de l'Université de Paris 6, (1991).
73. Ladevèze, P., Allix, O. and Gasser, A., "Damage mechanics modelling for ceramic composites", special issue on Micromechanics of Composites, *Journal of Engineering Material and Technology*, V. 11, (1994), 331-336.
74. Ladevèze, P., and Le Dantec, E., "Damage modelling of the elementary ply for laminated composites", *composites science and Technology*, V. 43, (1992), 257-267.

75. Mercier, J., Bunsell, A., Castaing, P., Renard, J., "Prise en compte du vieillissement et de l'endommagement dans le dimensionnement de structures en matériaux composites", Thèse de Doctorat, Mines Paris, France, (septembre 2006).
76. Lietard, V., "Etude des effets séparés et couplés d'un environnement hygrothermique et d'un chargement mécanique sur la déformabilité et la ténacité à long terme de composites verre/résine", thèse de doctorat obtenu à l'institut des sciences et technologie de Lille ; (1998).
77. Han, M.H., and Nairn, J. A., "Hygrothermal aging of polyimide matrix composite laminates", Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, V. 34, n° 10, (2003), 979-986.
78. Megueni, A., Tounsi, A., and Adda Bedia, E., "Evolution of the stress intensity factor for patched crack with bonded hygrothermal aged composite repair", Materials and Design, V. 28, (2005), 287-293.
79. Kim, H.S., Wang, X. M., and Nik Abdulah, N.A.H., "Effect of temperature on fatigue crack growth in the polymer ABS", J fatigue & fracture of engineering materials & structures , V. 17, n° 3, (1994), 361-367.
80. Kim, R.Y., "Effect of temperature and moisture on pin bearing strength of composite laminates", J. Composite materials, V.10, (1976), 149-155.
81. Bouazza, M., Tounsi, A., Benzair, A., and Adda-bedia, E.A., "Effect of transverse cracking on stiffness reduction of hygrothermal aged cross-ply laminates", Materials and Design, V. 28, (2007), 1116-1123.
82. Amara, K., Tounsi, A., Megueni, A., Adda Bedia, E., "Evolution de la fissuration transverse dans les stratifiés croisés vieillis", Laboratoire des matériaux et hydrologie, Sidi bel Abbés, (2003).

83. Tounsi, A., Amara, K.H., Adda Bedia, E.A. "Analysis of transverse cracking and stiffness loss in cross-ply laminates with hygrothermal conditions", Computational Materials Science, V. 23, (2004), 167-174.
84. Benzair, A., Maachou, M., Amara, K.H., and Tounsi, A., "Effect of transverse cracks on the elastic properties of high temperature angle-ply laminated composites" Computational Materials Science, V. 37, (2006), 470-475.
85. Adda bedia, E.A., Bouazza, M., Tounsi, A., Benzair, A., and Maachou, M., "Prediction of stiffness degradation in hygrothermal aged [ $\theta$ m/90n]s composite laminates with transverse cracking", Journal of Materials processing, V. 199, (2008), 199-205.
86. Tounsi, A., Amara, K.H., Benzair, A., Megueni, A., "On the transverse cracking and stiffness degradation of aged angle-ply laminates", Materials Letter, V. 60, (2006), 2561-2564.
87. Amara, K., Bouazza, M., Megueni, A., "Evaluation of the stiffness of composite materials with hygrothermal conditions", Leonardo journal of science, (2014), 25 57-64.
88. El Meiche Nourdeddine, "Analyse des champs de contraintes dans les matériaux composites croisées en présence des fissures transversales", Thèse de magister obtenu au département de génie civil de Sidi Bel Abbas, (2000).
89. LAWS, N., DVORAK, G., "Progressive transverse cracking in composite laminate", J. Composite. Mater, n° 22, (1988), 900-916.

90. Fellah, M., Tounsi, A., Amara, K.H., and Adda bedia, E.A. "Effect of transverse cracks on the effective thermal expansion coefficient of aged angle-ply composites laminates", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, V. 48, (2007), 32-40.
91. Varna, J., Krasnikovs, A., "Transverse cracks in cross-ply laminates 2. Stiffness degradation", *Mechanics of Composite Materials*, V. 34, n° 2, (1998).
92. Joffe, R., Krasnikovs, A., Varna, J., "COD-based simulation of transverse cracking and stiffness reduction in  $[S/90n]_S$  laminates". *Compos. Sci. Technol.* V. 61,(2001), 637–656.
93. Amara, K.H., Tounsi, A., Megueni, A., and Adda bedia, E.A., "Effect of transverse cracks on the mechanical properties of angle-ply composites laminates", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, V. 45, (2006), 72-78.
94. Katerelos, D.T.G., Kashtalyan, M., Soutis, C., and Galiotis, C., "Matrix cracking in polymeric composites laminates: Modelling and experiments", *Composites Science and Technology*, V. 68, (2008), 2310–2317.
95. Kashtalyan, M., Costas Soutis, "Analysis of composite laminates with intra-and interlaminar damage", *Progress in Aerospace sciences*, V. 41, (2005), 152-173, 2005.
96. Springer, G.S. "Moisture Content of Composites Under Transient Condition", *Environmental Effects on Composite Materials*, (1981), 63-78.
97. Vautrin, A., "Absorption de l'humidité: synthèse pour les composites à matrice polymère", *Comptes rendus du colloque du greco 92 du CNRS comportement mécanique des composites à fibres*, Evian les bains France, (2-4 mai 1988), 19-34.
98. Loos, A.C., Springer, G.S., "Moisture absorption of graphite-epoxy composites immersed in liquids and in humid air", *J. Composites Materials*, V. 13, (1979).

99. Shen C.H., and Springer, G., "Moisture absorption and desorption of composite materials", J. of composite materials, V.10, (1976), 2-20.
100. Benkhedda, A., Tounsi, A., and Adda bedia, E.A. "Effect of temperature and humidity on transient hygrothermal stress during moisture desorption in laminated composite plates", Composite Structure, V. 82, (2008), 629-635.
101. Mckague, E.L., Halkias, J.e, and Reynolds, "Moisture in composites: The effect of supersonic service on diffusion", J. Composite Materials, V. 9, (1975), 2-9.
102. Van Landingham, M.R., Eduljee, R.F., and Gillespie, J.W., "Moisture Diffusion in Epoxy Systems" , Journal of Applied Polymer Science, V. 71, (1999), 387-798.
103. Benkhedda, A., "Etude hygrothermique des matériaux composites à matrice polymère", mémoire de magister, obtenu au département d'aéronautique de Blida, (2001).
104. Xiao, G. Z., Shanahan, M. E. R., "Irreversible Effects of Hygrothermal Aging on DGEBA/DDA Epoxy Resin", Journal of Applied Polymer Science 69, (1998), 363-369.
105. Hung-Shyong, Huang-Kuang Kung and Chyouhwu Huang, B., "A study for the moisture content of graphite/epoxy composite with hygrothermal cycling", Graduate Institute of Mechatronical Engineering, Kaohsiung, 833, Taiwan, Roc.
106. Choi, H.S., Ahn, K.J., Nam, J-D., and Chun, H.J. "Hygroscopic aspect of epoxy/carbon fiber composite laminates in aircraft environments"; Composites: part A V. 32, (2001), 709-720.

107. Sereir, Z., Adda Bedia E., Tounsi, A., "Effect of the accelerated moisture diffusivity on the hygrothermal behavior laminated plate with symmetrical environmental conditions", Journal of thermal stresses, Taylor & Francis Edition, V. 28, (2005) 889-908.
108. Wang, X., Dong, K., and Wang, X.Y., "Hygrothermal effect on dynamic interlaminar stresses in laminated plates with piezoelectric actuators", Composite Structure, V. 71, (2005), 220-228.
109. Ghorbel, I., "Mecanismes d'endommagement des tubes verre-resine pour le transport d'eau chaude" influence de la ductilité de la matrice, thèse de doctorat Ecole des Mines de Paris, (Juillet 1990).
110. Peyser, P., and Bascom, W. D. "The anomalous lowering of the glass transition of an epoxy resin by plasticization with water", Journal of Materials Science 16, (1981), 75-83.
111. Shen C.H., and Springer, G.S., "Moisture absorption and desorption of composite materials", Environmental effects on composites materials, ed. G.S. Springer, Technomic Publishing Co., Lancaster, PA, (1981).