

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA I**  
**Institut d'aéronautique et des études spatiales**

**THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCE**  
**Spécialité : Aéronautique**

**CARACTERISATION DES CONTRAINTES RESIDUELLES  
PAR LES METHODES DE CONTRÔLE NON DESTRUCTIF  
DES STRUCTURES AERONAUTIQUES FISSUREES**

**Par**

**El-kahina Sari**

**Devant le jury composé de :**

<b>A. Allali</b>	<b>Professeur</b>	<b>Université de Blida I</b>	<b>Président</b>
<b>Y. Benkhedda</b>	<b>Professeur</b>	<b>Université de Blida I</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. Hedji</b>	<b>Professeur</b>	<b>Université de Blida I</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. Bouabdallah</b>	<b>Professeur</b>	<b>Ecole nationale polytechnique</b>	<b>Examineur</b>
<b>R. Draï</b>	<b>Directeur de Recherche</b>	<b>CRTI</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. Zergoug</b>	<b>Directeur de Recherche</b>	<b>CRTI</b>	<b>Rapporteur</b>

**Blida, Juillet 2017**



**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA I**  
**Institut d'aéronautique et des études spatiales**

**THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCE**  
**Spécialité : Aéronautique**

**CARACTERISATION DES CONTRAINTES RESIDUELLES  
PAR LES METHODES DE CONTRÔLE NON DESTRUCTIF  
DES STRUCTURES AERONAUTIQUES FISSUREES**

**Par**

**El-kahina Sari**

**Devant le jury composé de :**

<b>A. Allali</b>	<b>Professeur</b>	<b>Université de Blida I</b>	<b>Président</b>
<b>Y. Benkhedda</b>	<b>Professeur</b>	<b>Université de Blida I</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. Hedji</b>	<b>Professeur</b>	<b>Université de Blida I</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. Bouabdallah</b>	<b>Professeur</b>	<b>Ecole nationale polytechnique</b>	<b>Examineur</b>
<b>R. Draï</b>	<b>Directeur de Recherche</b>	<b>CRTI</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. Zergoug</b>	<b>Directeur de Recherche</b>	<b>CRTI</b>	<b>Rapporteur</b>

**Blida, Juillet 2017**

## RESUME

Dans cette thèse on a caractérisé les contraintes résiduelles dues au chargement uni-axial à basse température des tôles en alliage d'aluminium présentant des fissures, et ceci représente le revêtement de l'avion en croisière, en utilisant différentes méthodes de contrôle non destructif comme les courants de Foucault (CF) et les ultrasons ; afin de déterminer son influence sur les paramètres de la mécanique de la rupture et les caractéristiques mécaniques du matériau. La modélisation des méthodes de contrôle, la contrainte résiduelle, le champ de contrainte à la pointe de la fissure, le champs de températures et les paramètres de la mécanique de la rupture est faite par la méthode des éléments finis en utilisant plusieurs logiciels tel que Matlab, Gmesh, Labview et Comsol Multiphysics.

## ABSTRACT

In this thesis, we characterized the residual stress of the plates with different cracks made with aluminum alloy solicited at low temperature and this presents the skin of the airplane during the cruise by different methods of non destructive testing such as eddy current and ultrasonic control; in order to determine its influence on fracture parameters and the mechanical characteristics of the material. The modeling of the control, residual stress, temperature field and the stress field at the crack tip and the fracture mechanics parameters is made by the finite element method using several software like Gmesh, Matlab, Labview and Comsol Multiphysics.

## ملخص

في هذه الأطروحة قمنا بتمييز الإجهاد لسبائك الألمنيوم التي بها شقوق والتي تمثل في الواقع بطانة الطائرات خلال الرحلة وذلك بأساليب مختلفة من الاختبارات الغير المتلفة مثل تيارات فوكلت الموجات فوق صوتية من اجل قياس عوامل ميكانيكا الكسر و خصائص المواد. معادلات التصميم لطرق الاختبارات الغير المتلفة, الإجهاد الحراري, مجال الإجهاد الميكانيكي في قمة الشق و مميزات ميكانيكا الكسر تتم باستخدام طريقة العناصر المنتهية باستعمال العديد من البرامج مثل ماطلاب , جماش , لاب فيو و كمصول ميلتي فيزيكس.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à témoigner ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse Monsieur M.Zergoug , Directeur de recherche au centre de recherche CRTI, pour tous ses conseils éclairés, sa large expérience scientifique dans le domaine de contrôle non destructif et sa disponibilité malgré ses charges administratives et scientifiques , ont permis l'aboutissement de ce travail.

J'exprime mes vifs remerciements, au Professeur A.Allali le directeur du laboratoire de recherche des Aéronefs au niveau de l'institut d'Aéronautique et des études spatiales, en me faisant l'honneur de présider le Jury de soutenance.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Y.Benkhedda, Professeur au département de mécanique de l'Université de Blida, Monsieur M.Hedji, Professeur au département de mécanique de l'Université de Blida, Monsieur R.Drai, Directeur de recherche au centre de recherche CRTI , Monsieur M.Bouabdallah Professeur à l'ENP qui m'honorent de leur présence dans le jury de ma soutenance.

Je remercie très vivement la super division d'électromagnétisme du centre de recherche CRTI et surtout Smaili, Halimi et Djilali ainsi que toute l'équipe le l'unité de recherche ERMA et spécialement Dr.T.Benkrouf, Dr.M.Boujama et Dr.O.Mimouni.

Mes profonds respects et remerciements sont exprimés aux enseignants de l'Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales pour le savoirs qu'ils m'ont transmis.

Je garde une profonde reconnaissance pour mes proches et spécialement ma mère qui m'a toujours encouragé, soutenu et rassuré beaucoup afin de terminer ce travail. Je réserve aussi un remerciement spécial à mon époux pour sa patience sa confiance et son encouragement durant toutes ces années.

En fin, que tous ceux ou celles qui m'ont prêté leur soutien de près ou de loin tout au long de ce travail, trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus sincères.

## TABLE DES MATIERES

**RESUME**

**REMERCIEMENTS**

**TABLE DES MATIERES**

**LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUE ET TABLEAUX**

**INTRODUCTION**

<b>SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES METHODES DE CND</b>	2 0
I. Les méthodes optiques de CND	23
I.1. Les méthodes visuelles	24
I.2. Le ressuage	24
I.3. La magnétoscopie	24
I.4. La radiographie et la tomographie	25
I.5. La thermographie infrarouge	26
I.6. L'interférométrie holographique	28
I.7. L'interférométrie de Speckle	29
II. Les méthodes acoustiques de CND	30
II.1. L'émission acoustique	31
II.2. L'analyse vibratoire	31
II.2.1. Enregistrement du signale	32
II.2.2. Traitement du système	32
II.3. Contrôle par courant de Foucault	32
II.3.1. Principe de contrôle par courant de Foucault	33
II.3.2. Principe physique de contrôle par CF	34
II.3.3. Phénomène de peau	34
II.3.4. Avantage de la technique	35
II.3.5. Limite de contrôle par CF	36
II.3.6. Objective de contrôle par CF	36
II.3.7. Diagramme de fonctionnement	36

II.3.8. Principaux paramètres influant sur le contrôle	38
II.3.8.1. Paramètres liés au matériau à sonder	38
II.3.8.2. Paramètres liés au montage	38
II.3.8.3. Paramètres électriques	38
II.3.9. Différentes technologie des capteurs inductifs	39
II.3.10. Différents modes d'excitation	39
II.3.10.1. Excitation mono fréquence	39
II.3.10.2. Excitation multifréquence	39
II.3.10.3. Excitations pulsée	40
II.3.11. Différents types des capteurs	40
II.3.11.1. Classification des capteurs selon la géométrie	40
II.3.11.1.1. Capteur a bobine encerclante	40
II.3.11.1.2. Capteur sonde interne	41
II.3.11.1.3. Capteur a sonde ponctuelle	41
II.3.11.1.4. Capteur a bobine plate	42
II.3.11.1.5. Capteur a sonde interne tournante	42
II.3.11.2. Classification des capteurs selon la fonction	42
II.3.11.2.1. Capteur a double fonction	43
II.3.11.2.2. Capteurs à fonctions séparées	43
II.3.11.3. Classification des capteurs selon d le mode de contrôle	43
II.3.11.3.1. Mode absolu	44
II.3.11.3.2. Mode différentiel	44
II.3.12. Caractéristiques géométriques du matériau à contrôler	45
II.3.13. Caractéristiques électromagnétiques du matériau à contrôler	45
II.3.14. Eléments perturbateurs	45
II.4. Le contrôle par ultrason	45
II.4.1. Principe du contrôle	46
II.4.2. Les différentes techniques mises en œuvre	46
II.4.2.1. Contrôle par contact	46
II.4.2.2. Contrôle par immersion	47
II.4.3. Les méthodes d'examens	47
II.4.3.1. Contrôle par transmission	48
II.4.3.2. Contrôle par écho	48



II.4.4. Caractéristique d'une onde ultrasonore	49
II.4.5. Différents types d'onde	49
II.4.5.1. Les ondes longitudinales	50
II.4.5.2. Les ondes transversales	50
II.4.5.3. Les ondes de surfaces	50
II.5. La méthode par diffraction des rayons X	52
II.6. Méthode par effet de bruit de Barkhausen	53
II.7. Contrôle par magnétomètre à échantillon vibrant VSM	55
II.7.1. Principe de fonctionnement	56
II.7.2. Options de VSM	56
II.7.2.1. Option de système de contrôle de température	57
II.7.2.2. Option de magnéto-résistance	57
II.7.2.3. Option de bobinage	57
II.7.2.4. Option de rotation automatique	58
II.7.2.5. Option de magnétomètre de couple	58
III. Conclusion	58

<b>MODELISATIONS DES CONTRAINTES POUR LES PLAQUES FISSUREES</b>	59
I. Mécanique de la rupture	59
I.1. Mode de rupture	59
I.2. Le milieu élastique fissuré	60
I.3. Approche locale	60
I.3.1. Le Facteur d'intensité des contraintes	61
I.4. Approche globale (énergétique)	62
I.4.1. Le taux de restitution d'énergie	62
I.4.2. L'intégrale de contour	63
I.5. Résolution numérique du SIF par MEF pour les deux approches locale et global	64
I.5.1. Formulation faible de l'équilibre et principe des puissances virtuelle	64
I.5.2. l'élément fini isoparamétrique	65
I.5.3. Représentation de la géométrie approchée	65
I.5.4. La fonction d'interpolation	66
I.5.5. Représentation locale des déplacements	67

I.5.6. Représentation globale des déplacements	67
I.5.7. Le vecteur global des degrés de liberté inconnus	68
I.5.8. Maillage	69
I.5.9. Construction du problème d'élasticité approché à l'aide d'éléments finis isoparamétriques	70
I.5.10. Construction à partir d'une formulation faible	70
I.5.11. L'assemblage	72
I.5.11.1. Calcul des intégrales élémentaires	73
I.5.11.2. Matrices de rigidité élémentaires	73
I.5.11.3. Forces nodales élémentaires associées aux efforts extérieurs	74
I.5.11.4. Assemblage de la matrice de rigidité	74
I.5.11.5. Assemblage du vecteur de forces nodales	77
I.5.12. Calcul numérique des facteurs d'intensité de contraintes par la méthode locale	79
I.5.12.1. Maillage et notion de l'élément finis singulier	79
I.5.12.2. Evaluation des facteurs d'intensité de contraintes par extrapolation	80
I.5.13. Détermination de $SIF$ par la méthode $G - \theta$	80
II. Les contraintes résiduelles thermiques	82
II.1. Définition	82
II.2. Classification des contraintes résiduelles	83
II.2.1. Contraintes résiduelles macroscopiques	83
II.2.2. Contraintes résiduelles à l'échelle mésoscopique	83
II.2.3. Contraintes résiduelles à l'échelle Microscopique (micro contraintes)	83
II.3. Origine des contraintes résiduelles	84
II.3.1. Déformation plastique hétérogène due aux contraintes mécaniques	84
II.3.2. Déformation plastique hétérogène due aux contraintes thermiques	85
II.3.3. Transformation de phases non homogènes	86
II.4. Détermination des contraintes résiduelles par les méthodes de CND	86
II.4.1. Méthodes destructives	87
II.4.2. Méthode non destructives	87
II.4.5. Modélisation des contraintes résiduelles de trempe	87
III. Conclusion	88

<b>MODELISATION DES METHODES DE CONTROLE NON DESTRUCTIF</b>	89
I. Modélisation des courants de Foucault	89
I.1. Modélisation des phénomènes électromagnétique	89
I.1.1. Equation de Maxwell en régime dynamique	90
I.1.2. Lois de comportement	90
I.1.3. Hypothèses de simplifications	90
I.1.4. Equations en régime harmonique	91
I.1.5. Formulation Electromagnétique en potentiels A-V	92
I.1.6. Cas d'une source de courant de forme sinusoïdale	93
I.1.6.1. Les condition de Jauge	93
I.1.7. Techniques de calcul d'impédance	93
I.1.7.1. Impédance à travers les énergies électromagnétique	94
I.1.7.2. Impédance à travers la théorie des circuits	94
I.1.7.3. Impédance à travers l'induction magnétique	96
I.2. Résolution numérique par la méthode des éléments finis des équations électromagnétiques	97
I.2.1. Cas magnétostatique	97
I.2.2. Equation magnétodynamique	99
II. Modélisation des ultrasons pour la détermination des contraintes résiduelles	101
III. Conclusion	104
<b>PARTIE EXPERIMENTALE</b>	105
I. Propriétés chimiques et physiques des alliages d'aluminium utilisés	105
II. Préparation des échantillons	106
III. Contrôle par courant de Foucault	108
IV. Contrôle par ultrasons	108
V. Essai Mécanique	109
V.1. Essai de traction	109
V.2. Essai de dureté	110
V.3. Essai de résilience	110
VI. La cryogénie	111
VII. Conclusion	111

<b>RESULTATS ET INTERPRETATION</b>	112
I. Résultats expérimentaux	112
I.1. Caractérisation des contraintes et des défauts par le contrôle par courant de Foucault	112
I.2. Caractérisation des contraintes résiduelles par les ultrasons	130
I.3. Caractérisation du matériau	133
I.3.1. Essai de traction	145
I.3.2. Essai de dureté Vickers et Brinell	145
I.3.3. Essai de résilience	146
II. Résultats numériques	147
II.1. Détermination du champ de contrainte et le SIF pour des tôles avec et sans contraintes résiduelles à température ambiante	147
II.2. Validation numérique du contrôle par CF	147
	157
<b>CONCLUSION</b>	161
<b>APPENDICE A</b>	164
<b>APPENDICE B</b>	169
<b>APPENDICE C</b>	172
<b>APPENDICE D</b>	174
<b>APPENDICE E</b>	177
<b>APPENDICE F</b>	180
<b>REFERENCES</b>	183

## LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1 : principe du ressuage [2]	25
Figure 1.2 : Principe de la magnétoscopie [4]	26
Figure 1.3 : Principe de la radiographie[4]	27
Figure 1.4 : a)Principe de tomographie, b) image tomographique 3D d'une retassure [6]	27
Figure 1.5 : Schémas de deux dispositifs de thermographie active: a)avec excitation par ultrason, b) avec excitation par courant de Foucault [9]	29
Figure 1.6 : Principe de l'holographie :a)enregistrement d'un hologramme, b) restitution d'une virtuelle de l'objet [10]	30
Figure 1.7 : Principe de la shearographie : a) visualisation des défauts d'un matériau Composite (structure sandwich nid d'abeille) [12]	31
Figure 1.8 : Principe de l'émission acoustique [13]	31
Figure 1.9: Analyse du son émis par une poutre en bois [14]	32
Figure 1.10: Principe de génération des courants de Foucault [4]	33
Figure 1.11: Répartition des courants de Foucault dans une pièce en fonction de la profondeur [19]	34
Figure 1.12 : La variation de la profondeur de peau conventionnelle $\delta$ en fonction de la fréquence pour différents matériaux [20]	35
Figure 1.13 : a) plan d'impédance non-normalisée, b) plan d'impédance normalisée [21]	37
Figure 1.14 : L'influence de $\sigma, \mu$ et $h$ sur le diagramme d'impédance normalisé [21]	38
Figure 1.15 : Différentes technologie des capteurs inductifs [4]	39
Figure 1.16 : Bobine encerclante [23]	40
Figure 1.17 : Bobine interne glissante avec noyau [23]	41
Figure 1.18 : Bobine simple avec noyau [23]	41
Figure 1.19 : Bobine plate [23]	41
Figure 1.20 : Capteur interne tournant [23]	42
Figure 1.21 : Capteur à double fonctions [23]	42
Figure 1.22 : Capteur à fonctions séparées [23]	43

Figure 1.23 : Mode absolu [23]	43
Figure 1.24 : Sonde absolue en mode compensé [23]	44
Figure 1.25 : Mode différentiel [23]	44
Figure 1.26 : Définition des paramètres géométriques [26]	45
Figure 1.27: Principe du contrôle par ultrasons [28]	46
Figure 1.28 : Principe du contrôle par immersion [30]	47
Figure 1.29 : Contrôle par transmission [28]	48
Figure 1.30 : Contrôle par écho [28]	48
Figure 1.31 : Caractéristiques d'une onde ultrasonore [4]	49
Figure 1.32 : Différents types des ondes ultrasonores et modes de Propagation [4]	49
Figure 1.33 : Onde de Rayleigh et onde de Love [4]	50
Figure 1.34 : Amplitude relative des deux composantes des ondes de Rayleigh en fonction de la profondeur relative [31]	51
Figure 1.35 : Schéma de principe de la diffraction des rayons X appliqué à la mesure de la contrainte résiduelle [36]	53
Figure 1.36 : Montage du principe du bruit de Barkhausen [37]	54
Figure 1.37 : Schéma de l'appareil de Barkhausen [37]	55
Figure 1.38 : Exemple de pic Barkhausen et les paramètres mesurés [37]	55
Figure 1.39 : le magnétomètre à échantillon vibrant VSM [38]	56
Figure 1.49 : le bobinage sur le VSM [38]	58
Figure 2.1 : Mode de rupture [39]	59
Figure 2.2 : Milieu élastique fissuré [7]	60
Figure 2.3 : Système de coordonnées au voisinage de l'extrémité de la fissure [39]	62
Figure 2.4 : Le contour d'intégration	63
Figure 2.5 : Elément finis singulier [47]	79
Figure 2.6 : Contour d'intégration pour la méthode G-teta	81
Figure 2.7 : Différents types des contraintes résiduelles [49]	84
Figure 2.8 : Effet de la contrainte mécanique sur la contrainte résiduelle [51]	85
Figure 2.9 : Effet de la transformation de phase thermique due à la contrainte Résiduelle [51]	86

Figure 3.1 : Maillage de type éléments finis [23]	97
Figure 4.1 : Plaque d'Al 7075 avec une rainure	107
Figure 4.2 : Plaque d'Al 7075 avec un défaut de surface elliptique centrée	107
Figure 4.3 : Plaque d'Al 7075 avec une entaille	107
Figure 4.4 : Impédance mètre de type Agilent 4284A	108
Figure 4.5 : Générateur d'impulsion Olympus 5800	108
Figure 4.6 : La machine de traction type Instron pour la charge 650KN	109
Figure 4.7 : Dispositif de fixation sur la plaque en tension	109
Figure 4.8 : Duromètre Innovatest Nemesis 900TM	110
Figure 4.9: Modèle Charpy 750 J/D2M	110
Figure 4.10: La cryogénie	111
Figure 5.1 : Les plaques fissurées préparée pour le contrôle	113
Figure 5.2 : Balayage de la sonde sur les plaques fissurées	113
Figure 5.3 : Diagramme d'impédance pour une plaque sans défaut	114
Figure 5.4 : Diagramme d'impédance pour le cas statique de la plaque avec défaut rainure pour les neuf points	114
Figure 5.5 : Diagramme d'impédance pour la cas statique de la plaque avec défaut entaille pour les neuf points	115
Figure 5.6 : Diagramme d'impédance pour la cas statique de la plaque avec défaut centré pour les huit points	117
Figure 5.7 : Diagramme d'impédance pour le cas statique avec contrainte résiduelle pour le défaut rainure pour les neuf points	120
Figure 5.8 : Diagramme d'impédance pour le cas statique avec contrainte résiduelle pour le défaut entaille pour les neuf points	121
Figure 5.9 : Diagramme d'impédance pour le cas statique avec contrainte résiduelle pour le défaut centré pour les huit points	123
Figure 5.10 : Diagramme d'impédance pour les tôles avec défaut rainure sans contrainte résiduelle en appliquant $F = 5KN$ pour les neuf points	125
Figure 5.11 :Diagramme d'impédance pour les tôles avec défaut entaille sans contrainte résiduelle en appliquant $F = 5KN$ pour les neuf points	123

Figure 5.12 : Diagramme d'impédance pour les tôles avec défaut centré sans contrainte résiduelle en appliquant $F = 5KN$ pour les huit points	128
Figure 5.13 : Signal ultrasonore de la plaque sans défaut et sans contrainte résiduelle	131
Figure 5.14 : Signal ultrasonore de la plaque avec défaut rainure et sans contrainte résiduelle pour les neuf points	132
Figure 5.15 : Signal ultrasonore de la plaque avec défaut entaille et sans contrainte résiduelle pour les neuf points	134
Figure 5.16 : Signal ultrasonore de la plaque avec défaut centré et sans contrainte résiduelle pour les huit points	136
Figure 5.17 : Courbe moyenne de l'étalonnage acoustoélastique pour Al 7075-T6[104	137
Figure 5.18 : Signal ultrasonore de la plaque avec défaut rainure et avec contrainte résiduelle pour les neuf points	138
Figure 5.19 : Signal ultrasonore de la plaque avec défaut entaille et avec contrainte résiduelle pour les neuf points	140
Figure 5.20 : Signal ultrasonore de la plaque avec défaut centré et avec contrainte résiduelle pour les huit points	142
Figure 5.21: Courbe caractéristique de traction pour une tôle sans contrainte résiduelle	145
Figure 5.22: Courbe caractéristique de traction pour une tôle avec contrainte résiduelle	146
Figure 5.23: Génération de maillage de la plaque avec un zoom sur la pointe de la Fissure à droite	148
Figure 5.24 : Comparaison entre extrapolation et le résultat analytique avec l'élément $T3$	148
Figure 5.25 : Comparaison entre extrapolation et le résultat analytique avec l'élément $T6$	148
Figure 5.26 : Comparaison entre la méthode $G - \theta$ et le résultat analytique avec l'élément $T3$	150
Figure 5.27 : Comparaison entre la méthode $G - \theta$ et le résultat analytique	150
Figure 5.28 : L'erreur relative et convergence	150
Figure 5.29 : Différents types de	152
Figure 5.30 : $G$ par la méthode $G - \theta$ en fonction de contrainte	153



Figure 5.31 : Comparaison entre les valeurs numériques de SIF et les résultats analytique par la méthode $G - \theta$ en fonction de contrainte	153
Figure 5.32 : Le champ du déplacement $u_x$ sans contrainte résiduelle	154
Figure 5.33 : Le champ du déplacement $u_y$ pour sans contrainte résiduelle	154
Figure 5.34 : Le champ de contrainte $\sigma_{xx}$ sans contrainte résiduelle	154
Figure 5.35 : Le champ de contrainte $\sigma_{yy}$ sans contrainte résiduelle	154
Figure 5.36 : Le champ de contrainte $\sigma_{xy}$ sans contrainte résiduelle	155
Figure 5.37 : Le champ du déplacement $u_x$ avec contrainte résiduelle	155
Figure 5.38 : Le champ du déplacement $u_y$ avec contrainte résiduelle	155
Figure 5.39 : Le champ de contrainte $\sigma_{xx}$ avec contrainte résiduelle	156
Figure 5.40 : Le champ de contrainte $\sigma_{yy}$ avec contrainte résiduelle	156
Figure 5.41 : Le champ de contrainte $\sigma_{xy}$ avec contrainte résiduelle	156
Figure 5.42: Le SIF avec et sans contrainte résiduelle	157
Figure 5.43 : Maillage de la plaque sans défaut	158
Figure 5.44 : Présentation du champ électrique de la plaque sans défaut	158
Figure 5.45 : Présentation de la densité du courant de la plaque sans défaut	159
Figure 5.46 : Présentation de la densité du courant de la plaque avec défaut rainure	159
Figure 5.47 : Présentation de la densité du courant de la plaque avec défaut rainure	159
Figure C.1 : Position du nœud au quart	172
Figure D.1: Présentation du champs de température pour de la plaque sans défaut à $t = 0s, 2s, 5s, 15s$ et $25s$ lors de l'immersion dans l'azote liquide	178
Figure D.2: Présentation des isothermes pour de la plaque sans défaut à $t = 0s, 2s, 5s, 15s$ et $25s$ lors de l'immersion dans l'azote liquide	179
Figure F.1: Contraintes résiduelles thermique de Von Mises de la plaque sans défaut	181
Figure F.2: Contrainte résiduelle thermique de Von Mises de la plaque avec entaille	181
Figure F.3: Contrainte résiduelle thermomécanique de Von Mises de la plaque sans défaut	182
Figure F.4 : Contrainte résiduelle thermomécanique de Von Mises de la plaque avec Défaut entaille	182
Tableau 2.1: Fonction de forme pour un élément finis de référence	66

Tableau 4.1 : Compositions chimiques d'alliage d'Aluminium 7075	106
Tableau 4.2: Propriétés physiques d'alliage d'Aluminium 7075	106
Tableau 4.3: Propriété mécanique des tôles en alliage d'Aluminium 7075 d'épaisseur entre 3mm et 6 mm	106
Tableau 5.1: Valeurs expérimentales de $R$ , $L$ et $\bar{Z}$ de la plaques sans défaut	114
Tableau 5.2 :Valeurs expérimentales de $R$ , $L$ et $\bar{Z}$ de la plaques avec défaut rainure pour les points 4, 5 et 6 pour le cas statique	115
Tableau 5.3: Valeurs expérimentales de $R$ , $L$ et $\bar{Z}$ de la plaques avec défaut entaille pour les points 4, 5 et 6 pour le cas statique	117
Tableau 5.4: Valeurs expérimentales de $R$ , $L$ et $\bar{Z}$ de la plaques avec défaut centré centré pour les points 1, 2,5 et 6 pour le cas statique	118
Tableau 5.5: Valeurs expérimentales de $R$ , $L$ et $\bar{Z}$ de la plaques avec défaut rainure pour les points 4, 5 et 6 pour la cas statique avec contrainte résiduelle	120
Tableau 5.6: Valeurs expérimentales de $R$ , $L$ et $\bar{Z}$ de la plaques avec défaut entaille pour les points 4, 5 et 6 pour la cas statique avec contrainte résiduelle	122
Tableau 5.7: Valeurs expérimentales de $R$ , $L$ et $\bar{Z}$ de la plaques avec défaut centré pour les points 4, 5 et 6 pour la cas statique avec contrainte résiduelle	123
Tableau 5.8: Valeurs expérimentales de $R$ , $L$ et $\bar{Z}$ de la plaques avec défaut rainure pour les points 4, 5 et 6 avec $F = 5KN$	125
Tableau 5.9: Valeurs expérimentales de $R$ , $L$ et $\bar{Z}$ de la plaques avec défaut rainure pour les points 4, 5 et 6 avec $F = 5KN$	127
Tableau 5.10: Valeurs expérimentales de $R$ , $L$ et $\bar{Z}$ de la plaques avec défaut centré centré pour les points 1, 2,5 et 6 avec $F = 5KN$	128
Tableau 5.11: Comparaison des valeurs expérimentales de $R$ , $L$ et $\bar{Z}$ entre les trois types de défauts en pointe de fissure pour le cas statique avec et sans contrainte résiduelle et le cas de la charge uniaxiale $F = 5KN$ pour la fréquence $f = 500Hz$	129
Tableau 5.12: Vitesse et atténuation de la plaque sans défaut	131
Tableau 5.13: Vitesse et atténuation de la plaque avec défaut rainure sans contrainte résiduelle	133
Tableau 5.14: Vitesse et atténuation de la plaque avec défaut entaille sans contrainte résiduelle	135

Tableau 5.15: Vitesse et atténuation de la plaque avec défaut centré sans contrainte résiduelle	136
Tableau 5.16: Vitesse et atténuation de la plaque avec défaut rainure Et contrainte résiduelle	139
Tableau 5.17: Vitesse et atténuation de la plaque avec défaut entaille et contrainte résiduelle	141
Tableau 5.18: Vitesse et atténuation de la plaque avec défaut centré et contrainte résiduelle	142
Tableau 5.19: Contrainte résiduelle de la plaque avec défaut rainure	143
Tableau 5.20: Contrainte résiduelle de la plaque avec défaut entaille	143
Tableau 5.21: Contrainte résiduelle de la plaque avec défaut centré	144
Tableau 5.22: Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques des contraintes résiduelles de la plaque avec défaut entaille	144
Tableau 5.23: Résultats de l'essai de traction pour une tôle sans défaut avec et sans contrainte résiduelle	145
Tableau 5.24: Résultats de l'essai de dureté Vickers et Brinell pour une tôle sans défaut avec et sans contrainte résiduelle	146
Tableau 5.25: Résultats de l'essai de dureté Vickers et Brinell pour une tôle sans défaut avec et sans contrainte résiduelle	147
Tableau 5.26: Les valeurs analytique et numériques du SIF pour différentes longueurs des fissures pour 8908 éléments	150
Tableau 5.27: Les valeurs numériques du SIF et l'erreur relative pour différent nombre d'éléments avec $a = 1$	151
Tableau 5.28 : Les valeur de SIF par la méthode $G - \theta$ et l'erreur relative pour trois différents type de maillage avec 8908 éléments et $a = 1$	152
Tableau 5.29: Les valeurs numériques du SIF et l'erreur relative pour différent nombre d'éléments avec $a = 1$	152
Tableau 5.30 : Comparaison entre les valeurs expérimentales et numériques de R et L des plaques avec et sans défauts rainure	160
Tableau B.1 : Point des Gauss pour une intégrale unidimensionnelle [4]	170
Tableau B.2 :Point des Gauss pour une le triangle de référence [4]	171

## INTRODUCTION

Le CND a pour objectif de vérifier l'intégrité d'une pièce sans l'endommager en détectant les défauts soit de surface ou internes présents dans celui-ci. Les procédés non destructifs employés de nos jours en contrôles industriels (aéronautique, nucléaire, automobile,...) sont assez nombreux à fin de garantir la sûreté de fonctionnement des systèmes critiques. Le choix d'une méthode est conditionné par plusieurs paramètres : la nature du matériau (propriétés physiques), la forme de la pièce à contrôler, l'information cherchée (détection de défauts, mesure d'épaisseur...), l'environnement du contrôle et des contraintes économiques.

La mécanique de la rupture est l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence d'une fissure macroscopique. Cela revient à déterminer le champ des contraintes et déformation au voisinage de la fissure. La difficulté d'une telle étude réside de la prise en compte de la singularité introduite par la pointe de la fissure.

Les contraintes résiduelles peuvent être définies comme étant des tensions et compressions qui existent dans le matériau suite à un procédé de fabrication et /ou de transformation sans application de forces externes ou des gradients thermiques. Les contraintes résiduelles proviennent des procédés de fabrication (la trempe, usinage, soudage...). Elles influent sur la durée de vie des composants mécaniques en accélérant ou en retardant l'apparition des fissures ou des déformations, donc ils n'ont un effet négatif sur le comportement mécanique du matériau. Elles peuvent être bénéfiques pour les structures, lorsque les contraintes de compression en surface sont générées, pour augmenter leur durée de vie en fatigue. Il est très important de connaître l'ampleur et la répartition des contraintes résiduelles depuis le comportement mécanique du matériau est affecté quand ils sont présents. La contrainte résiduelle peut être considérée comme une contrainte moyenne superposée qui modifie localement la charge globale. En outre, son introduction peut

modifier la réponse des matériaux au chargement. Indépendamment de leur nature, de grandes contraintes résiduelles peuvent causer une instabilité dimensionnelle par des phénomènes comme le fluage, la fatigue et la fissuration par corrosion sous tension.

L'objectif de ce travail est de caractériser les contraintes résiduelles dues au chargement uni-axial à basse température des tôles en alliage d'aluminium avec des fissures qui représentent le revêtement de l'avion, par différentes méthodes de contrôle non destructif comme les courants de Foucault et les ultrasons a fin de déterminer son influence sur les paramètres de la mécanique de la rupture et les caractéristiques mécanique du matériau.

Ce mémoire s'articule autour de six chapitres :

Le premier chapitre vise à décrire une synthèse théorique sur les méthodes de CND couramment utilisées aujourd'hui en présentant les principales techniques de CND utilisées en mettant l'accent sur les types de défaut détectés, les avantages et les inconvénients de chaque méthode.

Le deuxième chapitre présente la modélisation et les méthodes numériques les plus utilisées pour la détermination des contraintes d'une pièce fissurée. Nous introduirons les notions locales et globales de la mécanique de la rupture qui nous amèneront à déterminer les différentes méthodes numériques utilisées pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie aussi bien la modélisation des contraintes résiduelles thermique en citant les différents types de ces contraintes résiduelles et les différentes techniques de CND pour les caractériser.

Le troisième chapitre illustre les lois fondamentales de l'électromagnétisme et la formulation en potentiel A-V .Il expose aussi le modèle mathématique du thermique par induction et les différents modes de couplage du modèle magnétothermique et la résolution numérique par la méthode des éléments finis. Ce chapitre apporte aussi la modélisation ultrasonore pour la détermination des contraintes résiduelles thermomécaniques.

Le quatrième chapitre décrit les propriétés chimiques et physiques des alliages d'aluminium, ensuite il présente toutes les étapes nécessaires pour le contrôle par courant de Foucault et les ultrasons en décrivant tout les appareils utilisés pour le contrôle et la caractérisation du matériau ainsi que la cryogénie, en commençant par la préparation des échantillons avec différents types de fissures.

Le cinquième chapitre est consacré à la présentation et interprétations des résultats numériques et expérimentales. Pour la partie numérique, on a déterminé le champ de contraintes au voisinage de la fissure à température ambiante avec et sans contrainte résiduelle par la méthode des éléments finis. Concernant la partie expérimentale on a caractérisé les contraintes par différentes méthodes de contrôle non destructif tel que les courants de Foucault et les ultrasons ainsi que la caractérisation mécanique tel que la dureté, la traction et la résilience.

A la fin ce modeste travail se termine par une conclusion générale et des perspectives.

# CHAPITRE I

## SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES METHODES DE CND

Ce chapitre vise à décrire l'état de l'art des méthodes de CND couramment utilisées aujourd'hui précisons que la modélisation mathématique et la résolution numérique du contrôle par courants de Foucault et ultrason sont traitées dans le chapitre 3.

Le CND a pour objectif de vérifier l'intégrité d'une pièce sans l'endommager en détectant les défauts soit de surface ou internes présents dans celui-ci.

Les défauts de surfaces sont observables en surface du matériau. On distingue deux types : les défauts ponctuels et les défauts d'aspects. Les défauts ponctuels (fissure, criques, piqure) sont les plus nocifs, car ils peuvent provoquer la rupture de la pièce en favorisant l'amorçage des fissures de fatigue. Et les défauts d'aspects sont des variations locales des paramètres géométriques ou physiques (rugosité, les joints de grain, taches). Les défauts internes désignent des hétérogénéités dans le volume du corps à contrôler.

Les procédés non destructifs employés de nos jours en contrôles industriels (aéronautique, nucléaire, automobile,...) sont assez nombreux à fin de garantir la sûreté de fonctionnement des systèmes critiques; et dans ce chapitre, on présente les principales techniques de CND utilisées en mettant l'accent sur les types de défauts détectés et les avantages et inconvénients de chaque méthode. Le choix d'une méthode est conditionné par plusieurs paramètres: la nature du matériau (propriétés physiques), la forme de la pièce à contrôler, l'information recherchée (détection de défauts, mesure d'épaisseur...), l'environnement du contrôle et des contraintes économiques.

## I. Les méthodes optiques de CND

### I.1. Les méthodes visuelles: les examens : visuels, endoscopique et télévisuel

L'examen visuel est le plus ancien, le plus simple et le plus utilisé des contrôles non destructif. C'est aussi le point de départ et final de la majorité des autres procédés non destructif. Il permet la détection des défauts de surface dans tous types des matériaux. Toutefois, il ne permet pas de déterminer l'extension en profondeur des défauts.

L'examen visuel, permet de guider l'opération dans la définition d'une autre technique: direction de magnétisation en magnétoscopie, choix de l'angle de tir en radiologie,...ect.

L'examen visuel direct des pièces permet de détecter les défauts débouchants en surfaces ainsi que les dégradations par les conditions de service ou d'environnement.

Pour l'examen visuel indirect est éventuellement aidé par un dispositif de type endoscopique ou télévisuel [1].

L'endoscope est un appareil permettant d'observer les surfaces non directement accessibles à l'œil telles que les parois d'un tube ou d'une cavité. Et les cameras numériques de télévision permet une observation en distance.

### I.2. Le ressuage

Cette méthode est très ancienne, permet de détecter les défauts débouchant de surfaces très fins dans un contraste coloré ou fluorescent et qui est applicable pour tous les matériaux non poreux à condition qu'ils ne réagissent pas chimiquement avec le pénétrant. Ce contrôle est utilisé dans toutes les industries mécaniques et plus particulièrement dans l'automobile et l'aéronautique. Son principe est simple qui se déroule en plusieurs étapes : la première consiste à nettoyer la pièce à contrôler. Un liquide coloré ou fluorescent dit pénétrant est ensuite appliqué sur la surface de la pièce. Il va s'infiltrer à l'intérieure des anomalies. L'excès du pénétrant est ensuite éliminé par un lavage adapté. La surface est alors recouverte d'une fine couche de révélateur qui absorbe le pénétrant contenu dans les anomalies permettant de la localiser.



Le contrôle par ressuage reste limité car les défauts non débouchant ne peuvent pas être vus, il n'apporte pas une information fiable sur le volume du défaut car les taches colorées obtenues dépendent du temps de pénétration, du pénétrant et du temps de la révélation ; donc il ne permet pas un dimensionnement des défauts débouchant. Ainsi le procédé lui même est relativement lent [2].

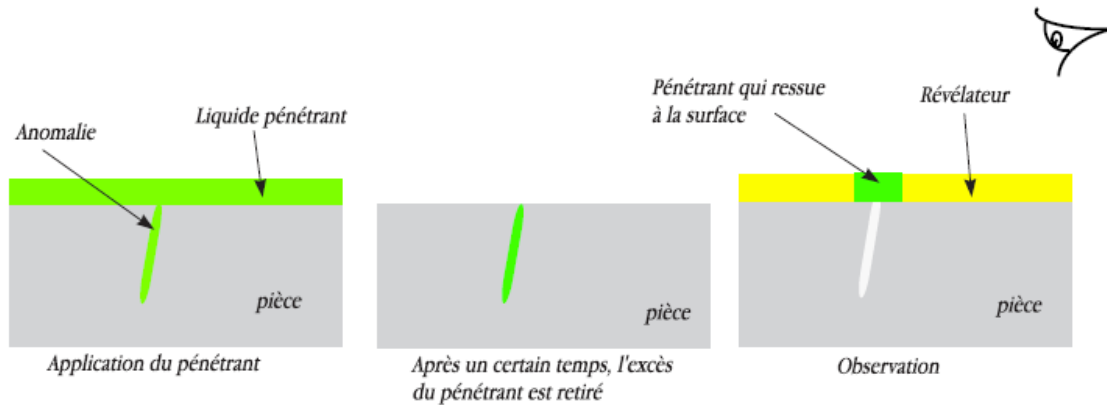


Figure1.1: principe du ressuage [2]

### 1.3. La magnétoscopie

C'est une technique qui révèle les défauts débouchant ou sous-cutané (jusqu'à 5mm de la surface). Toutefois elle ne s'applique qu'aux matériaux ferromagnétique et qui est utilisée en aéronautique, en mécanique et en chaudronnerie [3], [4], [5] .

L'examen par magnétoscopie consiste à soumettre la pièce à un champ magnétique continu ou alternatif. La magnétoscopie exploite le fait qu'une discontinuité voisine de la surface provoque une distorsion des lignes de champ magnétique, on dit qu'il y'a création de fuites magnétiques. Si une poudre magnétique contenant des traceurs magnétiques (oxyde de fer) est projetée à la surface c'est reparti d'une façon homogène, alors la pièce est saine. Mais lorsque un défaut est présent dans la pièce, l'orientation du flux de l'induction magnétique est modifiée localement et son intensité est maximale lorsque les lignes de champ magnétique sont perpendiculaire au défaut. Elle apparait alors une concentration de particules magnétiques qui révèle la présence du défaut.

L'observation de la poudre magnétique est effectuée en lumière blanche avec des traceurs colorés ou en lumière ultraviolette avec des traceurs fluorescents.

On utilise deux techniques d'aimantation selon la forme de la pièce et l'orientation des défauts :

- L'aimantation par passage de flux magnétique : cette technique entraîne une aimantation longitudinale par rapport à l'axe de la pièce. Ce champ sera perturbé par les défauts transversaux.
- L'aimantation par passage du courant : cette technique consiste à transmettre à la pièce un courant qui crée un champ magnétique transversal à l'axe de la pièce. Ce champ sera perturbé par les défauts longitudinaux.

Pour garantir la reproductibilité de l'examen, il est nécessaire de démagnétiser la pièce après le contrôle.

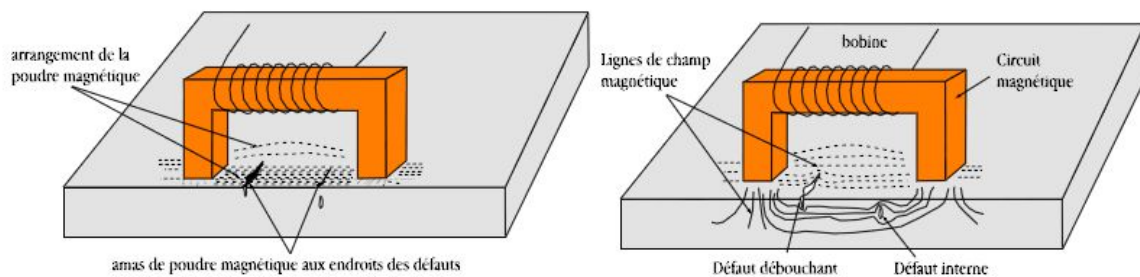


Figure 1.2: Principe de la magnétoscopie [4]

#### I.4. La radiographie et la tomographie

La radiographie [4] est une méthode permet de détecter rapidement les défauts débouchant et internes dans des pièces de fortes épaisseurs, pratiquement tous les matériaux peuvent être contrôlé par cette méthode et dans tous les industries et l'essor de cette dernière du au progrès de l'informatique et à l'augmentation des capacités de traitement.

La méthode met à profit l'absorption par la matière des rayonnements électromagnétiques ionisants. L'examen d'un objet par radiologie consiste à le faire traverser par un rayonnement électromagnétique de très courte longueur d'onde (rayon  $X$  ou  $\gamma$ ) et à visualiser le rayonnement résiduel non absorbé sur un récepteur approprié. On parlera de radiographie  $X$  si la longueur d'onde du rayon  $X$  est comprise entre  $10^{-12}m$  et  $10^{-8}m$  ou de gammagraphie si la longueur d'onde du rayon  $\gamma$  est inférieure à  $10^{-12}m$ .

Pour avoir des informations sur la localisation en profondeur du défaut, il faut réaliser plusieurs clichés sous des angles de tir différents, ce qui n'est pas toujours possible, Un autre moyen est la tomographie industriel [4] qui est la méthode la plus récente appliquée dans le domaine industrielle; son principe consiste à reconstruire une coupe de la pièce par des algorithmes complexes à partir d'une succession d'acquisition suivant des angles différents. La répétition de ce processus permet selon différents hauteur de tir permet d'avoir une image 3D virtuelle complète de l'objet.

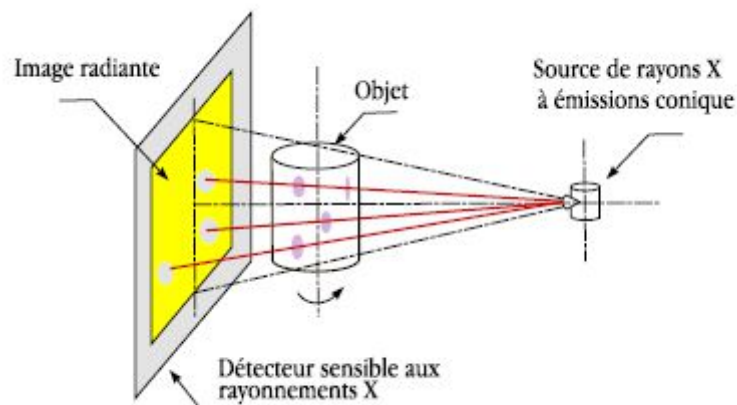


Figure 1.3: Principe de la radiographie[4]

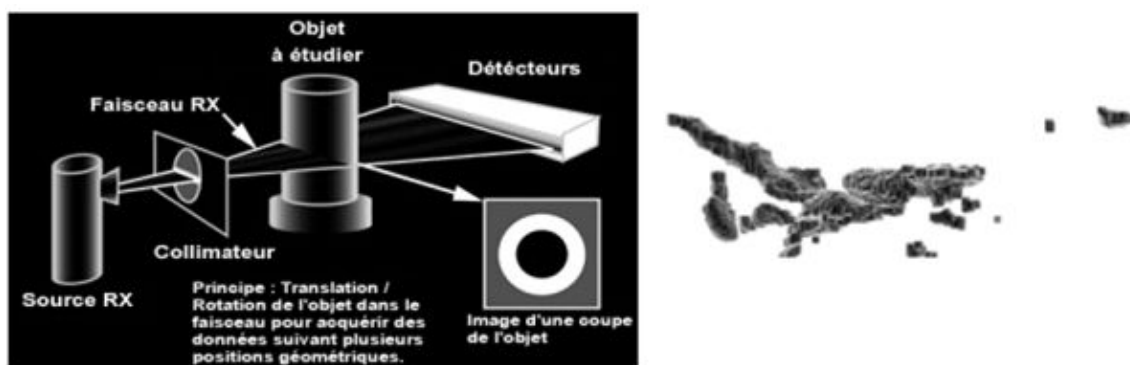


Figure 1.4: a)Principe de tomographie, b) image tomographique 3D d'une retassure [6]

Parmi les inconvénients de cette méthode, l'effet nocifs sur l'organisme humain, la sensibilité de détection quand le défaut est en parallèle à l'axe du tir ce qu'il faut plusieurs clichés sous des angles de tir différents, et ces méthodes induisent des couts de fonctionnements très élevés (prix des sources de rayonnement, entretien du matériel...).

### 1.5. La thermographie infrarouge

C'est une méthode permet de détecter rapidement les défauts débouchant en surface et sous-cutanés dans une grande variété de matériaux métalliques ou composites (pour le contrôle de délaminage et décollement...) de faible épaisseur et de géométrie relativement simple [7].

La thermographie est utilisée notamment dans le secteur de l'automobile et de l'aéronautique.

Cette méthode se repose sur l'étude de la diffusion de la chaleur sur la pièce à contrôler, et cela se fait par l'application d'une source de chaleur (faisceau laser, air chaud, ultrasons ou de courant de Foucault) sur la cible. Et d'après la distribution de la température, rendue visible par une camera infrarouge couplée à un ordinateur en enregistrant les rayonnements infrarouges (onde de chaleur) émis par la pièce contrôlée, les défauts pouvant être détectés [8].

Une distinction est faite entre la thermographie passive qui résulte de la simple observation des gradients thermiques sur une pièce, et la thermographie active lorsqu'une perturbation thermique a été volontairement générée pour le contrôle (par une source de chaleur) .la présence d'une discontinuité dans la pièce perturbe le flux thermique et qui se traduit par un écart de température sur l'image thermique appelé contraste thermique. La mesure de ce contraste lorsqu'il est maximum renseigne sur la nature et la profondeur du défaut.

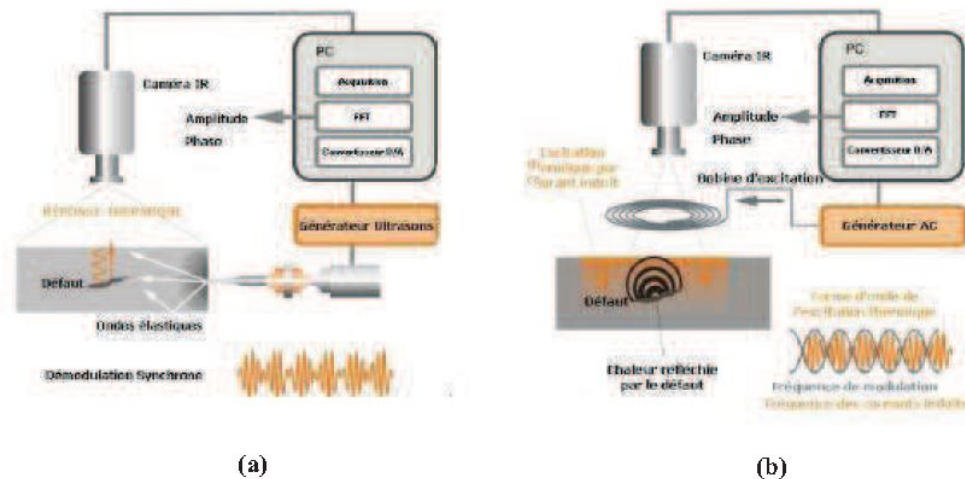


Figure 1.5: Schémas de deux dispositifs de thermographie active : a) avec excitation par ultrason, b) avec excitation par courant de Foucault [9].

### 1.6. L'interférométrie holographique

C'est une méthode de contrôle qui permet de détecter les défauts de surface et internes des pièces métalliques et surtout utiliser pour le contrôle des matériaux composites dans l'industrie aéronautique notamment [10].

Cette méthode est un procédé de photographie en trois dimensions qui utilise les propriétés de la lumière cohérente issue des lasers. C'est une technique qui consiste à enregistrer sur un support photographique le champ d'interférence entre la lumière diffusée par l'objet éclairé par la lumière cohérente d'un laser et d'une onde de référence provenant directement du même laser, on obtient ainsi un hologramme. Lors de la restitution de l'image holographique, l'hologramme est éclairé par l'onde de référence et il agit comme un réseau de diffraction pour former l'image de l'objet initiale et qui permet de mettre en évidence des irrégularités particulières dans les réseaux de franges indiquant les défauts.

Cette technique présente l'avantage d'avoir des très bonnes résolutions spatiales même très inférieures au micron. Mais elle possède un inconvénient majeur qui réside dans l'utilisation des milieux photosensibles nécessitant des lasers pulsés de forte énergie demandant un temps de traitement prohibitif pour de nombreuses applications. Ceci explique le développement de l'holographie numérique permettant l'utilisation de milieux d'enregistrement effaçable électroniquement de type CCD.

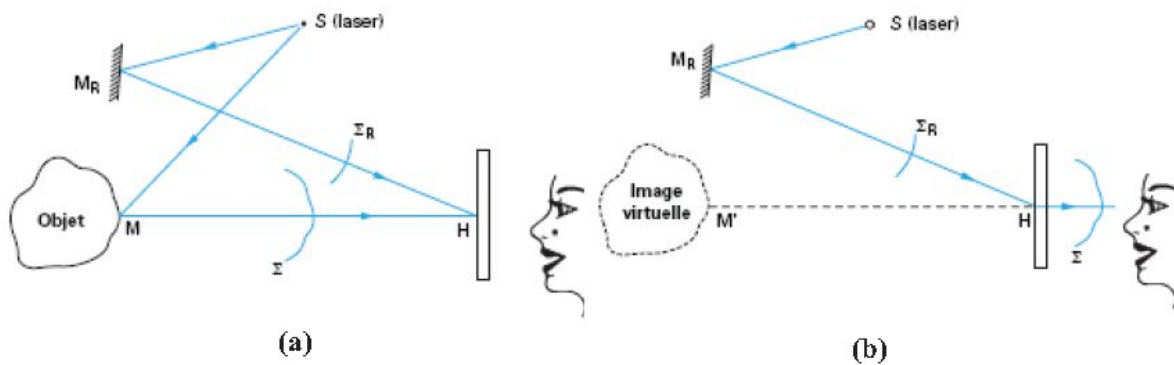


Figure 1.6: principe de l'holographie :a)enregistrement d'un hologramme, b) restitution d'une virtuelle de l'objet [10].

### 1.7. l'interférométrie de speckle

Contrairement à l'holographie classique, l'interférométrie de speckle permet l'utilisation des cameras CCD (Charge Coupled Device) permet d'exploiter directement les franges d'interférence en calculant et visualisant le champ des déplacements d'un objet diffusant.

Le principe de l'interférométrie de speckle consiste à détecter les variations d'intensité et de la phase du speckle (granularité laser) [11] avant et après déformation de l'objet. Pour cela on éclaire au laser la pièce à contrôler et on réceptionne la lumière à l'aide d'un interféromètre, cette première image va être gardée en mémoire. On applique en suite une contrainte sur le matériau et on réalise la seconde image; la comparaison des deux images permet d'identifier la présence d'un défaut en temps réel.

On distingue deux types d'interférométrie : la TV holographie est utilisée pour l'analyse vibratoire et la shearographie est utilisée en contrôle des pièces en matériaux composites en domaine d'aéronautique.

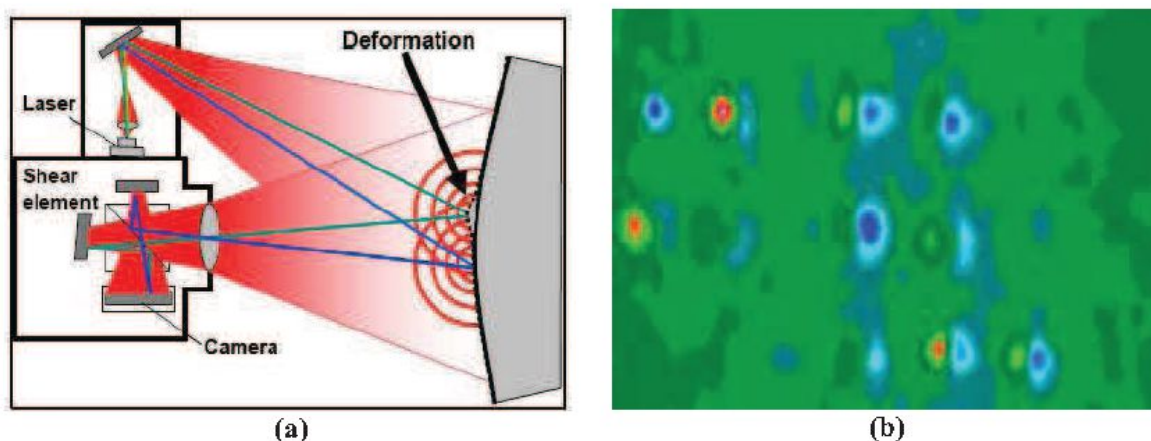


Figure 1.7: Principe de la shearographie: a)visualisation des défauts d'un matériau, b) composite (structure sandwich nid d'abeille) [12]

## II. Les méthodes acoustiques de CND

### II.1. L'émission acoustique

Le principe de l'émission acoustique consiste à utiliser la propagation des ondes élastiques dans les matériaux. Lorsque le matériau se déforme sous l'action d'une contrainte extérieure, il se crée des ondes élastiques qui se propagent dans le matériau en fonction de ses propriétés acoustiques et géométriques ainsi les capteurs. En examinant les signaux, on pourra localiser les défauts [13].

Le contrôle par émission acoustique permet un suivi en temps réel l'endommagement surfacique et interne, toutefois l'interprétation des signaux parfois reste délicate.

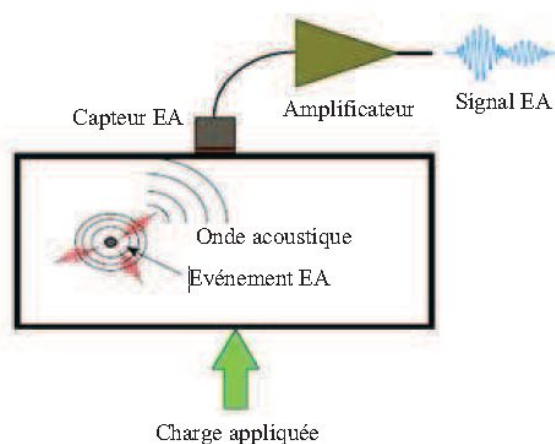


Figure 1.8: Principe de l'émission acoustique[13]

## II.2. L'analyse vibratoire

C'est une méthode simple qui s'applique à tous les matériaux, qui consiste à analyser les oscillations mécaniques autour d'une position de référence à l'aide d'un ou plusieurs capteurs. Cette méthode comporte trois étapes :

### II.2.1. Enregistrement du signal

Les vibrations sont caractérisées par trois grandeurs physiques qui sont liées : le déplacement, la vitesse et l'accélération, ces grandeurs se dépend du choix du capteur utilisé.

### II.2.2. Traitement du système

Le signal enregistré permet de donner l'information contenue dans la vibration en analysant les descripteurs caractérisant sa représentation temporelle, fréquentielle ou bien la représentation temps-fréquence.

Bien que cette méthode est simple et s'applique pour large gamme des matériaux, elle reste purement qualitative qui ne donne pas des informations sur la localisation et la taille des défauts et l'interprétation des signaux parfois reste délicate.

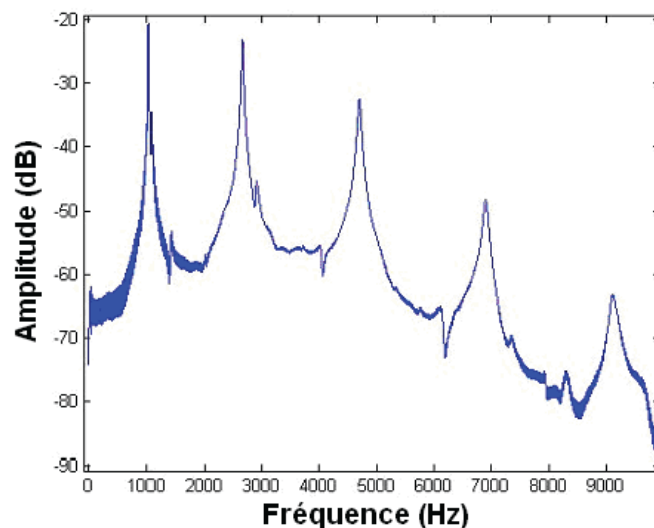


Figure 1.9: Analyse du son émis par une poutre en bois[14]

## II.3. Contrôle par courants de Foucault

Le contrôle non destructif par courant de Foucault [4] est employé pour inspecter des objets conducteurs d'électricité et qui s'applique dans différents domaines



industriels : aéronautique, l'industrie pétrolière et nucléaire. Le phénomène d'induction électromagnétique découvert par Faraday 1831 consiste que tout matériau conducteur placé dans un champ magnétique variable est le siège d'une force électromagnétique d'induction, cette force donne naissance à des courants électriques appelés courant de Foucault par hommage au savant Jean Bernard Léon Foucault, désignés dans le monde anglo-saxon par eddy current (courants tourbillonnaires).

### II.3.1. Principe du contrôle par CF

Le principe consiste à créer dans la pièce à contrôler des courants induits par un champs magnétique variable dans le temps au moyen d'un capteur (bobine). Ces courants circulent localement dans le matériau dont leur répartitions dépendent de la géométrie, la conductivité électrique et la perméabilité magnétique de la structure examinée et qui vont créer à leur tour un champ magnétique qui va s'opposer au champ initial d'excitation (loi de Lenz) en modifiant l'impédance de la bobine [15].

La présence d'une discontinuité dans la pièce contrôlée perturbe la circulation des courants de Foucault . Ceci entraine une variation d'impédance de l'ensemble capteur-pièce. Donc le contrôle par courant de Foucault consiste à interpréter les variations en amplitude et en phase de l'impédance.

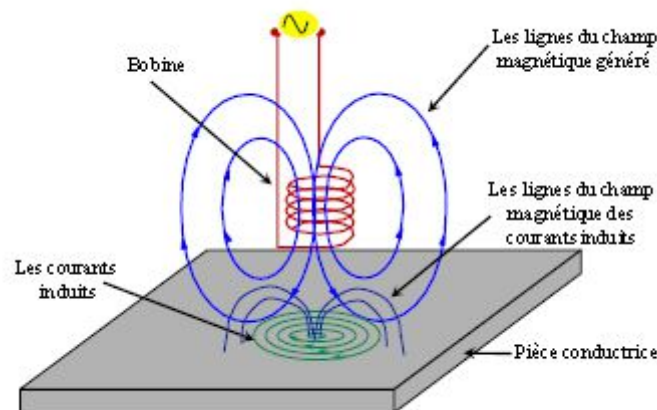


Figure 1.10: Principe de génération des courants de Foucault [4]

### II.3.2. Principe physique du contrôle par CF

L'alimentation de la bobine du capteur par un courant variable dans le temps crée un champ d'excitation variable sous la loi de Maxwell-Ampère. Toute pièce conductrice baignant dans ce champ sera le siège des courants induits: les courants de Foucault selon la loi de Maxwell-Faraday et loi d'ohm. Ces courants produisent à leur tour un champ opposant au champ qui leur a donné naissance (loi de Lenz), le champ résultant modifiera l'impédance du capteur [16],[17],[18].

### II.3.3. Le phénomène de peau

L'intensité des courants de Foucault dans un matériau conducteur caractérisé par une conductivité électrique  $\bar{\sigma}$  et une perméabilité magnétique  $\bar{\mu}$  diminue avec la profondeur du matériau. En effet le champ électromagnétique décroît d'une manière exponentielle suivant la profondeur de la pièce. Cette décroissance est caractérisée par la profondeur de peau conventionnelle  $\delta$  donnée par :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \bar{\mu}_0 \bar{\mu}_r \bar{\sigma}}} \quad (1.1)$$

Si on considère une pièce plane d'épaisseur infinie, excitée par un courant extérieur de fréquence  $f$  parallèle au plan, le module de la densité de courant dans la pièce est :

$$J(z) = J_s e^{-z/\delta} \quad (1.2)$$

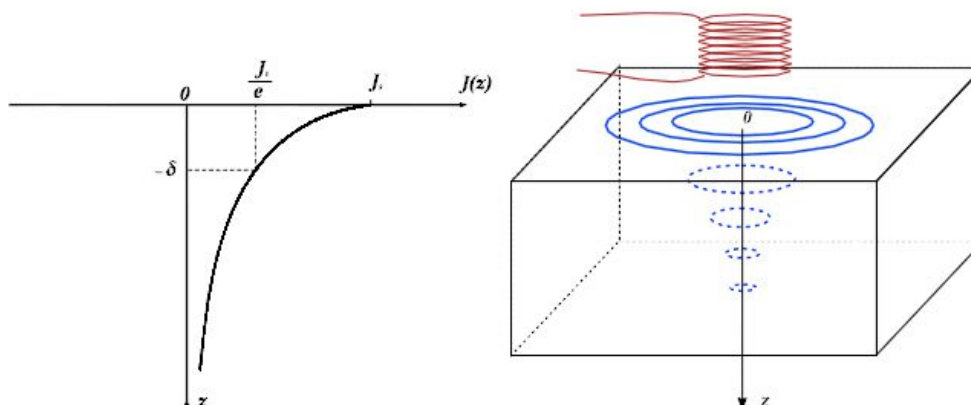


Figure 1.11: Répartition des courants de Foucault dans une pièce en fonction de la profondeur [19]

L'affaiblissement très rapide du champ électromagnétique dans des matériaux conducteurs explique pourquoi le contrôle par courant de Foucauld convient à la caractérisation des pièces minces et la détection des défauts situés près de la surface de la pièce. Ceci explique que les fréquences utilisées sont variables en fonction des applications. Alors pour la détection des défauts internes, on utilise des fréquences élevées au contraire pour le contrôle de qualité des produits ferromagnétiques, on utilise des fréquences très basses.

La plage générale d'utilisation des CF se situe entre 10Hz et 10MHz. En effet, pour une fréquence trop basse, l'amplitude des CF sera faible, et une fréquence trop élevée fait apparaître des phénomènes de résonances et tendent à court-circuiter le circuit inductif.

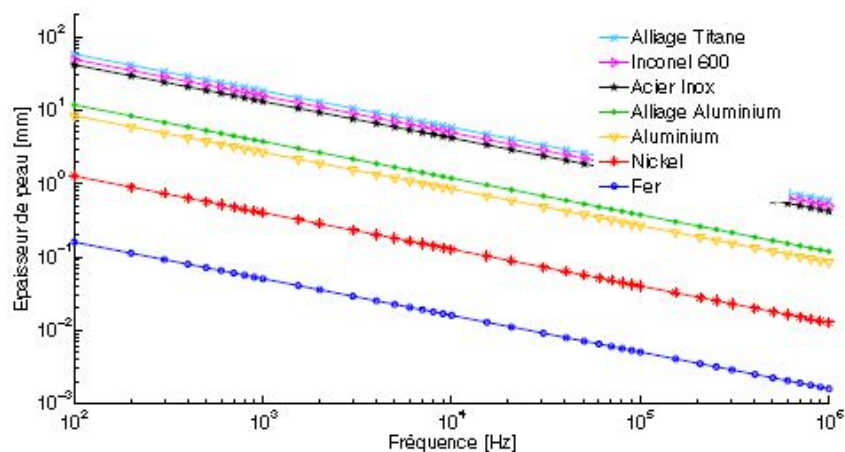


Figure 12 : La variation de la profondeur de peau conventionnelle  $\delta$  en fonction de la fréquence pour différents matériaux [20]

#### II.3.4. Les avantages de la technique

- Rapidité du balayage et de détection.
- Aucune préparation de la surface de contrôle
- Permet la détection des défauts débouchant ou faiblement enfouis dans tous matériaux conducteurs.
- Contrôle non polluant.
- La transportabilité.
- Peut fonctionner sur une large plage de température.

### II.3.5. Limite du contrôle par CF

- Il ne s'applique qu'à des matériaux électriquement conducteurs
- Il n'est pas adapté pour détecter des défauts à fortes profondeurs
- L'interprétation des signaux est souvent complexe

### II.3.6. Objectives du contrôle par CF

La technique du contrôle par CF est utilisée pour accomplir plusieurs tâches. Du fait que l'impédance du système Capteur/pièce est fonction des différentes caractéristiques électromagnétiques et géométriques et de l'état de santé de la pièce.

- Caractérisation géométrique
  - Mesure de l'entrefer
  - Mesure de l'épaisseur
- Caractérisation électromagnétique
  - Mesure de la conductivité
  - Mesure de la perméabilité
- Caractérisation des défauts
  - Détection des défauts
  - Position des défauts
  - Taille des défauts
  - Forme des défauts

### II.3.7. Diagramme de fonctionnement

Les sondes à courants de Foucault sont des bobines caractérisées électriquement par une résistance  $R$  qui englobe les pertes internes du bobine d'excitation et les pertes des courants de Foucault dues à la pénétration du champ dans la cible et par une réactance  $X$  du bobinage liée à la topologie des lignes de champ magnétique émise par le capteur.

$$\bar{Z} = R + jX \quad (1.3)$$

Donc il est possible de représenter la fonction d'une sonde à courant de Foucault par un point du plan complexe  $(R, X)$  appelé le plan d'impédance.

Pour ne conserver dans l'expression de l'impédance que des variations dues à la présence de la cible, on introduit la notion d'impédance normalisée [66].

$$Z_n = R_n + jX_n = (\bar{Z} - R_0)/X_0 \quad (1.4)$$

Avec :

$\bar{Z}_0 = R_0 + jX_0$  est l'impédance à vide du capteur (sans cible).

Donc, en procédant cette normalisation, la mesure dépend uniquement des paramètres de structure, la fréquence d'excitation  $f$ , la géométrie du capteur, les paramètres de la cible ( $\bar{\sigma}, \bar{\mu}$ ) et la distance capteur/cible. Elle devient indépendante des caractéristiques propres de la bobine.

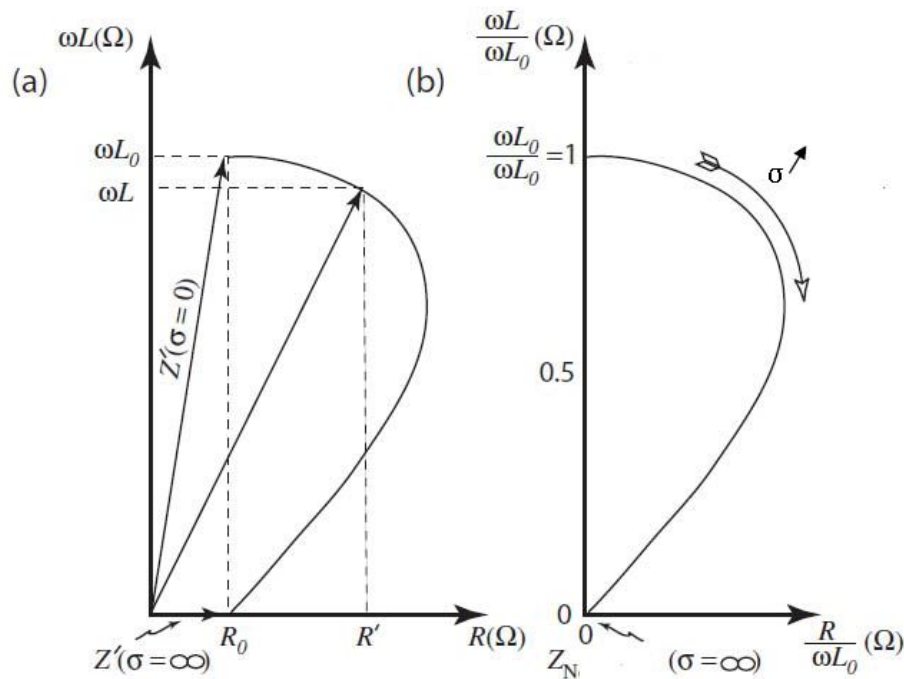


Figure 1.13: a) plan d'impédance non-normalisée, b) plan d'impédance normalisée

[21]

Pour un capteur donnée, toute variation de conductivité électrique, de perméabilité magnétique ou de distance de mesure, induit un déplacement du point représentatif de  $Z_n$  dans le plan d'impédance normalisée.

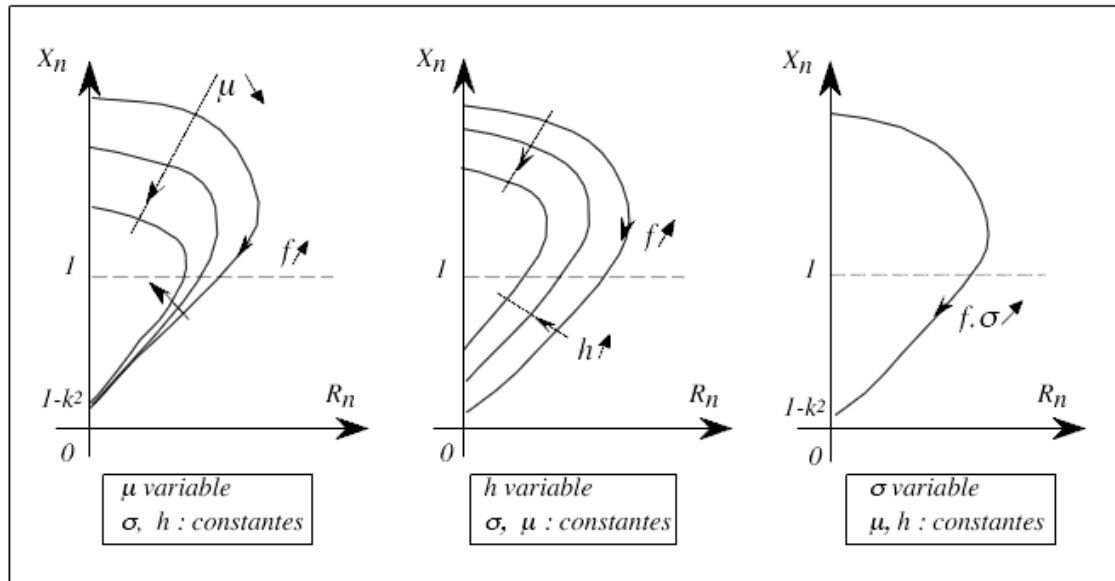


Figure 1.14: L'influence de  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\mu}$  et  $h$  sur le diagramme d'impédance normalisé [21].

### II.3.8. Principaux paramètres influant sur le contrôle

Les principaux paramètres influant sur le contrôle se résument en :

#### II.3.8.1. Paramètres liés au matériau à sonder

Ces paramètres sont la conductivité électrique  $\bar{\sigma}$ , la perméabilité magnétique  $\mu$  et aussi sa forme géométrique. Les variations de ces paramètres ont des causes diverses parmi eux, la présence des contraintes résiduelles.

#### II.3.8.2 Paramètres liés au montage

C'est le couplage entre les bobines et le matériau, donc il s'agit du coefficient du remplissage ou bien du lift-off qui est la distance entre la sonde et la surface à contrôler.

Les variations de position du capteur-cible sont dues aux variations de la géométrie de la surface provoquant des fluctuations d'impédance.

#### II.3.8.3. Paramètres électriques

C'est la fréquence d'excitation de la bobine. L'intensité de magnétisation alternative, liée à l'intensité électrique envoyée dans la bobine n'est pas un facteur déterminant du contrôle.

### II.3.9. Différentes technologies des capteurs inductifs

La technologie des capteurs est dictée par la pièce à contrôler. Alors pour des cibles purement conductrice qui génère des courants de Foucault, on parle des capteurs a courant de Foucauld CCF mais pour des cibles magnétiques non conductrices qui modifie les lignes du champ du capteur qui sont attirées par la pièce, on parle du capteur magnétique CM.

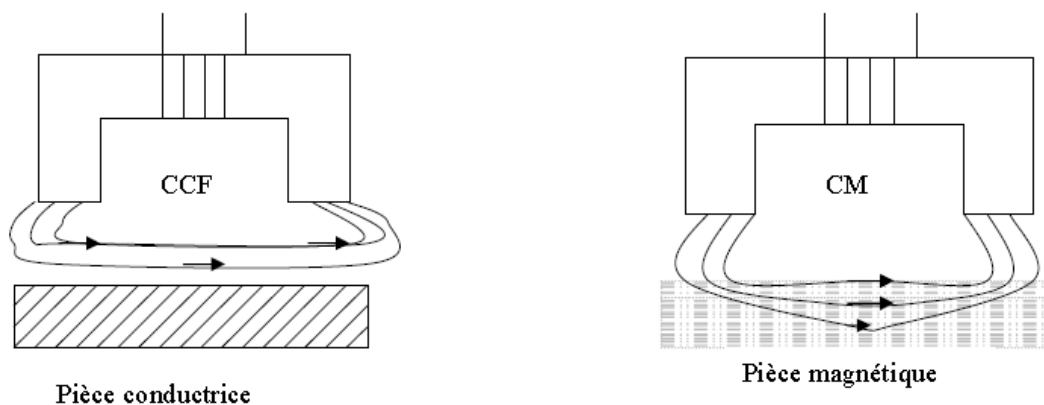


Figure 1.15: Différentes technologie des capteurs inductifs [4]

### II.3.10. Différents modes d'excitation

Le mode d'excitation est un paramètres très important pour avoir des bons informations sur la cible à inspecter. On distingue :

#### II.3 .10.1. Excitations mono fréquence

Les courants induits sont obtenues par une excitation sinusoïdale de fréquence fixe, elle est limitée car elle caractérise difficilement les défauts. Elle devra située dans une gamme raisonnable :

- Pour une fréquence très basse, l'amplitude sera très faible et la précision de mesure est insuffisante à cause du bruit.
- Une fréquence très élevée fait apparaitre des phénomènes capacitifs parasites

#### II.3.10.2. Excitations multifréquence

C'est l'excitation la plus utilisée dans le contrôle par CF et peut être réalisée soit :

- En séquence : fréquence par fréquence en utilisant un dispositif de mesure mono fréquence.
- Simultanément : les fréquences sont générées simultanément et ca nécessite un dispositif de mesure compliqué.

### II.3.10.3.Excitations pulsée

Cette méthode présente une alternative à l'excitation multifréquence qui consiste à émettre un champ magnétique large bande, en excitant le capteur avec un signal impulsionnel.

La forme des signaux d'alimentation peut être rectangulaire, triangulaire ou semi-sinusoïdale, et cette dernière étant la plus utilisée en raison de sa simplicité.

### II.3.11. Différents types des capteurs

La classification des capteurs se diffère selon la géométrie, la fonction et le mode de contrôle :

#### II.3.11.1. Classification des capteurs selon la géométrie

##### II.3.11.1.1.Capteur a bobine encerclante

C'est un capteur dont la bobine entoure la pièce à contrôler, il est utilisé surtout pour le control des tubes et les barres de faible section [22].

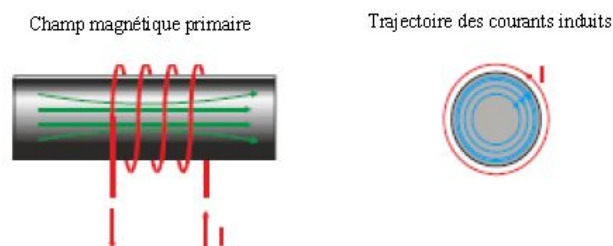


Figure 1.16: Bobine encerclante [23]

##### II.3.11.1.2.Capteur a sonde interne

C'est un capteur destiné pour le mesure d'une pièce creuse dont la bobine entoure l'axe de translation.



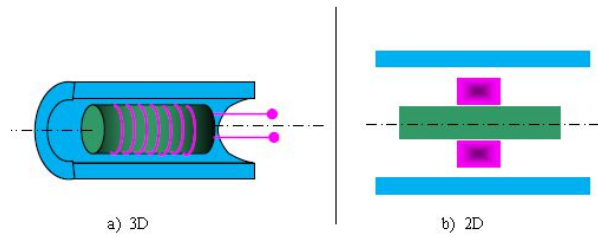


Figure 1.17: Bobine interne glissante avec noyau [23]

### II.3.11.1.3. Capteur à sonde ponctuelle

C'est un capteur utilisé pour le contrôle local des pièces à des endroits bien précis dont l'axe du capteur est perpendiculaire à la surface de la pièce à contrôler.

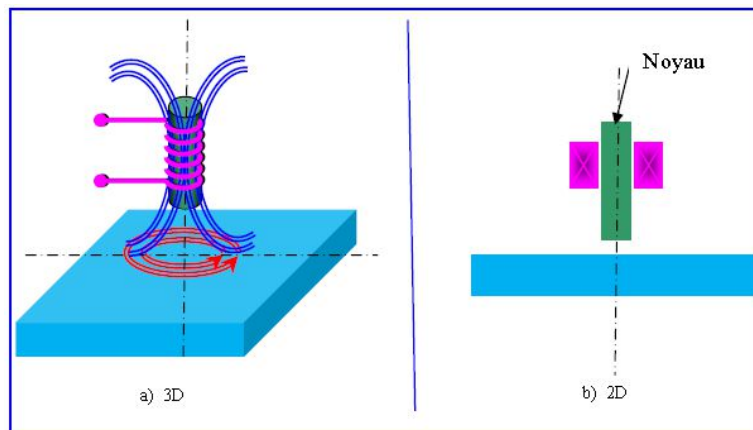


Figure 1.18: Bobine simple avec noyau [23]

### II.3.11.1.4. Capteur à bobine plate

C'est un capteur destiné pour contrôler localement les surfaces des pièces.

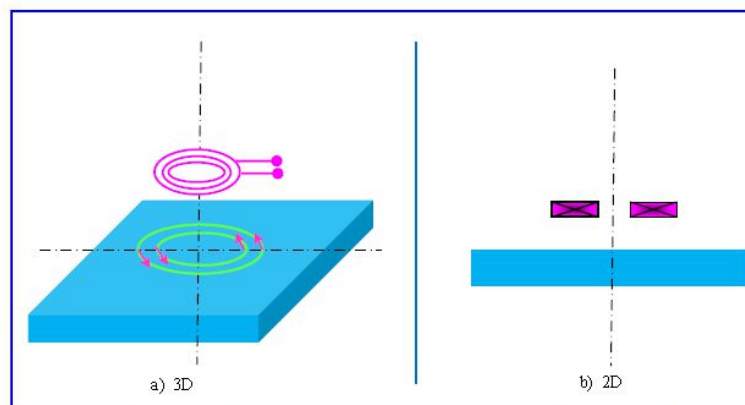


Figure 1.19: Bobine plate [23]

### II.3.11.1.5. Capteur à sonde interne tournante

C'est un capteur tourne autour de l'axe de translation qui permet la détection des défauts sur les surfaces internes des pièces creuses cylindriques .Ce capteur résulte un champ magnétique perpendiculaire à l'axe de la pièce à contrôler.

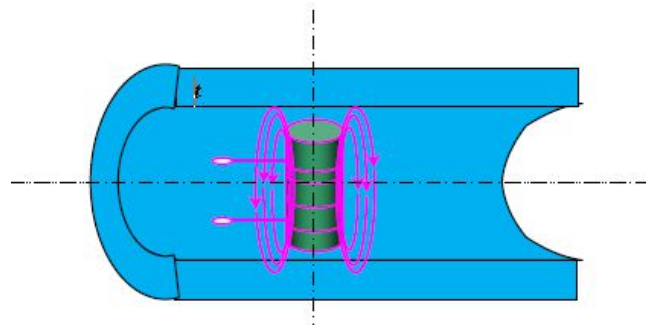


Figure 1. 20: Capteur interne tournant [23]

### II.3.11.2. Classification des capteurs selon la fonction

Le capteur assure deux fonctions : la fonction d'alimentation et la fonction de mesure. Si les deux fonctions sont assurées par un seul enroulement, on parle du capteur à double fonction sinon il s'agit d'un capteur à fonction séparées

#### II.3.11.2.1. Capteur à double fonctions

C'est un capteur qui assure les deux fonctions l'émission et la réception, le contrôle se fait par la mesure de l'impédance ou de la variation de l'impédance.

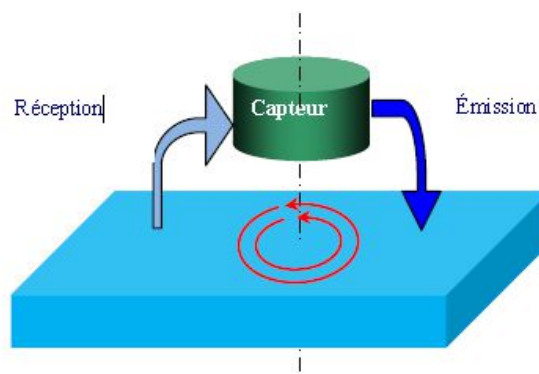


Figure 1.21: Capteur à double fonctions [23]

### II.3.11.2.2. Capteur à fonctions séparées

C'est un capteur muni de deux enroulements, le primaire est conçu spécialement pour créer les courants induits et le secondaire servira uniquement pour la mesure. Parmi les avantages de ce capteur est que la conception de la bobine est optimisée de telle manière à adapter sa taille à la taille des défauts [22].

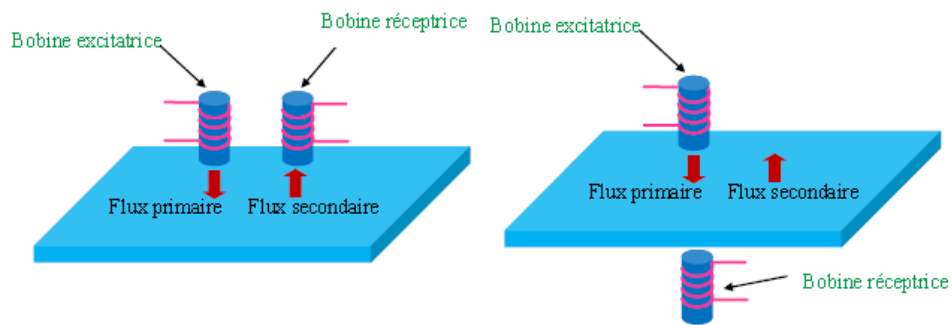


Figure 1.22: Capteur à fonctions séparées [23]

### II.3.11.3. Classification des capteurs selon le mode de contrôle

On distingue deux modes de contrôle: mode absolu et mode différentiel :

#### II.3.11.3.1. Mode absolu

Ce mode utilise un capteur a double fonction et en présence d'un défaut, l'amplitude du signal se modifie .Parmi les inconvénients de ce mode est la sensibilité à la variation de la température.

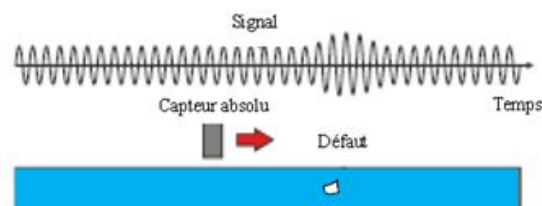


Figure 1. 23: Mode absolu [23]

Et pour réduire l'effet de la variation de température, le mode absolu compensé est le mieux adapté.

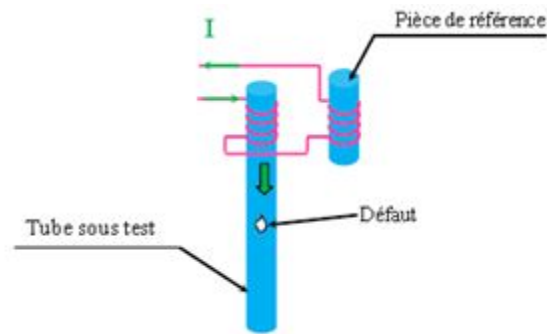


Figure 1. 24: sonde absolue en mode compensé [23]

### II.3.11.3.2. Mode différentiel

C'est une comparaison entre la mesure d'impédance de deux capteurs absolus dont les flux sont opposés. En effet, dans le cas d'une pièce saine, l'impédance différentielle est nulle, par contre cette dernière se modifie si elle présente un défaut.

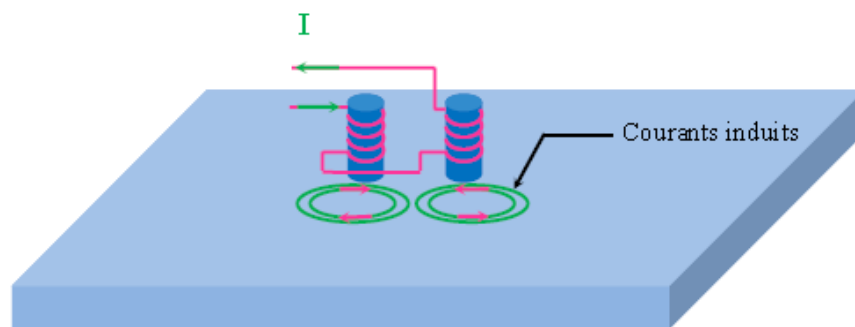


Figure 1.25: Mode différentiel [23]

### II.3.12. Caractéristiques géométriques du matériau à contrôler

Tout déplacement de la sonde provoque une variation du coefficient de remplissage et du lift-off. Ces variations masquent les indications sur les caractéristiques des défauts. Donc il est important de connaître les paramètres géométriques [24] ,[25] ,[26] ,[27].

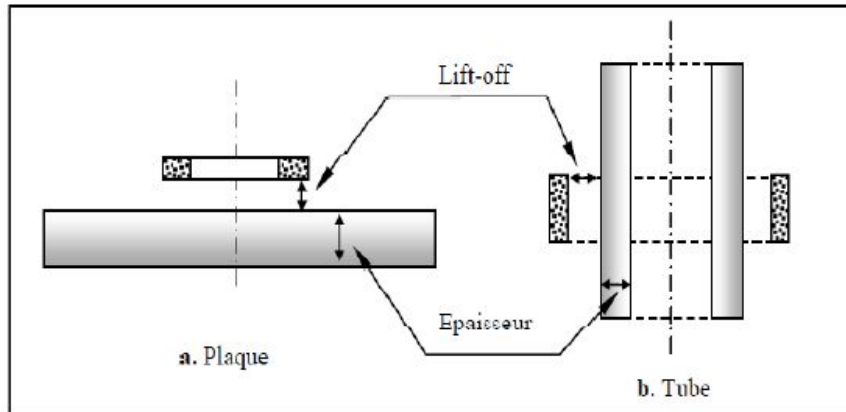


Figure 1.26: Définition des paramètres géométriques [26]

### II.3.13. Caractéristiques électromagnétiques du matériau à contrôler

La variation de conductivité électrique et la perméabilité magnétique modifie l'amplitude du signal fondamental. L'induction magnétique est proportionnelle à la perméabilité magnétique d'un matériau, donc l'inductance résultante augmente ce qui rend l'épaisseur de peau très faible [24], [25], [26].

### II.3.14.Éléments perturbateurs

Dans le domaine de Contrôle non destructif par courant de Foucault, le seul élément perturbateur est la température, car la perméabilité magnétique et la conductivité électrique varient avec la température.

## II.4.Le contrôle par ultrasons

### II.4.1 Principe du contrôle

Les ultrasons sont des vibrations mécaniques qui se propagent dans tout support matériel (solide, liquide ou gaz) ayant une fréquence oscillatoire supérieure à 20KHz qui sont produites par effet piézoélectrique à l'aide des transducteurs.

Le principe du contrôle par ultrasons consiste à émettre une onde ultrasonore qui se propage dans la pièce à contrôler et se réfléchit sur les obstacles qu'elle rencontre. À l'émission, le transducteur génère une onde ultrasonore à l'aide des piézoélectriques, et à la réception de l'onde, le transducteur convertit l'énergie mécanique perturbée en signal électrique.

Lorsque l'émission et la réception sont réalisées par le même transducteur, le contrôle appelé « émission-réception » et lorsque la réception est effectuée par un autre capteur, on lui donne le nom de « contrôle avec émission-réception séparée ». Les échos sont analysés sur un écran ou traités dans une chaîne de mesure. Le signal est maximal lorsque le défaut est perpendiculaire aux ondes émises.

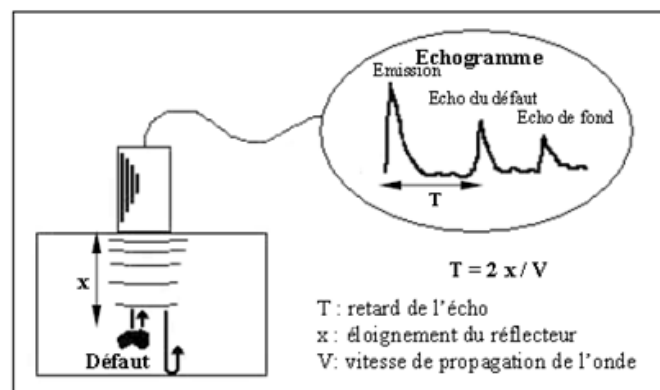


Figure 1. 27: Principe du contrôle par ultrasons [28]

#### II.4.2. Les différentes techniques mises en œuvre

Les ultrasons aux fréquences utilisées (de 1 à 10MHz), à l'interface air/solide il y'aura une très mauvaise transmission et les ondes seront fortement très atténués. Pour assurer le passage des ultrasons entre le transducteur et la pièce à contrôler, il faut placer entre les deux un milieu dit le couplant qui diminue le phénomène de rupture d'impédance et pour garder la propagation d'énergie transmise constante lorsque le transducteur se déplace. Pour assurer ce couplage, il existe deux techniques : contrôle par contact et contrôle par immersion.

##### II.4.2.1. Contrôle par contact

C'est un contrôle où le transducteur est placé directement sur la pièce à contrôler dont le couplant est l'huile ou des gels spéciaux. Cette technique est surtout utilisée lors du contrôle manuel qui nécessite un seul transducteur.

##### II.4.2.2. Contrôle par immersion

C'est le contrôle où la pièce à inspecter est immergée complètement dans l'eau pour analyser une grande partie de celle-ci. Les transducteurs ne sont pas situés au contact de la pièce mais sont fixés à l'extrémité d'un bras manipulateur permettant la

translation verticale et des rotations suivant plusieurs axes, et ainsi on peut le positionner comme on le désire [29].

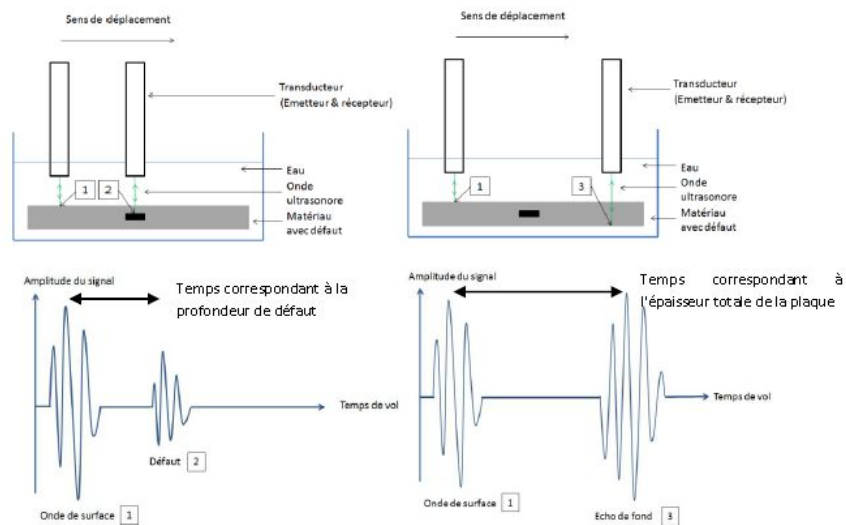


Figure 1. 28: Principe du control par immersion [30]

#### II.4.3. Les méthodes d'examen

Pour le contrôle non destructif des matériaux par ultrason, on distingue deux méthodes d'examen: la méthode par transmission et la méthode par écho.

##### II.4.3.1. La méthode par transmission

Cette méthode consiste à placer deux transducteurs de part et d'autre de la pièce à contrôler, le transducteur émetteur émet une onde ultrasonore dans la pièce, si un défaut existe au sein de cette pièce, l'onde ultrasonore sera réfléchi sélectivement, et le second transducteur sur l'autre face de la pièce sert uniquement à recueillir une énergie faible en présence de ce défaut. Parmi les avantages de cette méthode :

- La localisation précise des défauts.
- La possibilité d'utiliser un seul transducteur émission-réception.
- L'accès à une seule surface de la cible.

Cette méthode présente plusieurs inconvénients :

- La pièce doit être exploitée sur les deux faces parallèles opposées.
- Elle ne permet pas une automatisation simple du contrôle.

- L'utilisation d'une émission continue crée dans la pièce des ondes stationnaires qui perturbent le contrôle.

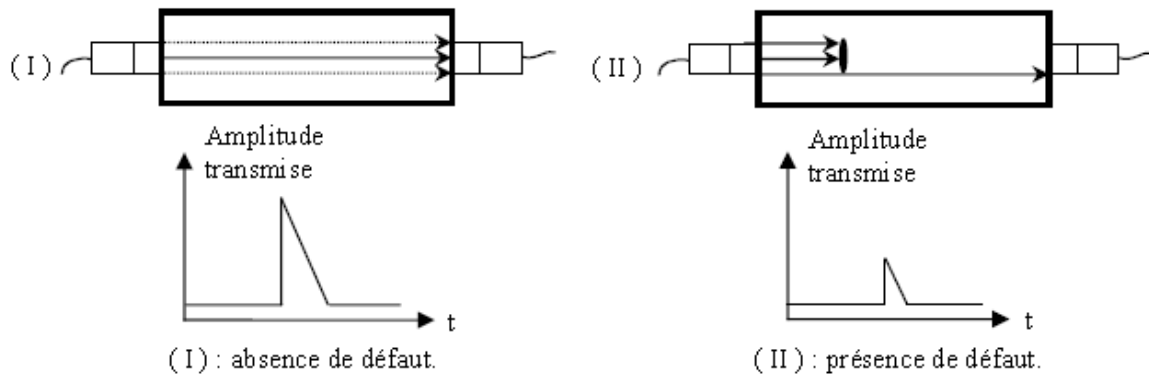


Figure 1.29: Contrôle par transmission [28]

#### II.4.3.2. Contrôle par écho

C'est la méthode la plus utilisée en contrôle par ultrason qui utilise un seul transducteur émetteur-récepteur. Le contrôle consiste à exciter le transducteur par une brève impulsion électrique qui correspond au premier écho d'émission, ce train d'onde progresse dans la pièce et en cas d'absence de défaut ce train frappe la face arrière de la pièce sur laquelle il est réfléchi. En cas de présence de défaut dans la pièce quand le train d'onde est frappé par celui-ci une partie sera réfléchi et revient vers le transducteur ou elle génère un écho de défaut et le train principale poursuit sa propagation vers le fond.

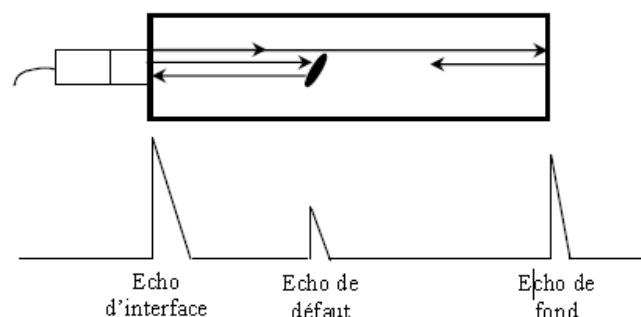


Figure 1.30: Contrôle par écho [28]



#### II.4.4. Caractéristiques d'une onde ultrasonore

L'onde ultrasonore est une onde acoustique qui se propage dans un milieu élastique avec une fréquence supérieure à 20KHz. Il s'agit d'une propagation de l'énergie mécanique dans un milieu matériel sans transport de la matière. Ces ondes sont caractérisées par une vitesse de propagation  $V$  qui dépend du matériau dans lequel l'onde se déplace, la longueur d'onde  $\lambda$  et de la fréquence  $f$ . En contrôle non destructif par ultrason, la plage de fréquence utilisée est de 1MHz à 15 MHz.

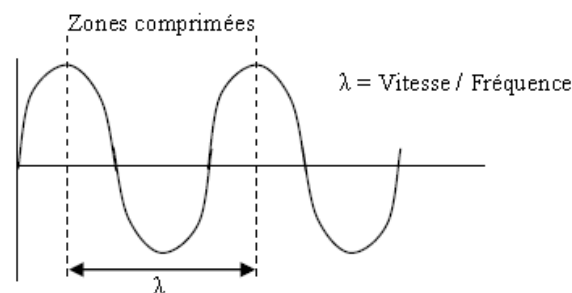


Figure 1.31: Caractéristiques d'une onde ultrasonore [4]

#### II.4.5. Différents types d'onde

Dans un milieu solide isotrope, il existe trois types fondamentales d'onde : les ondes longitudinales  $L$  (appelées aussi ondes de compression), les ondes transversales  $T$  (appelées aussi ondes de cisaillement) et les ondes de surfaces (appelées aussi ondes de Rayleigh et les ondes de Love) qui sont obtenues en inclinant le transducteur par rapport à la surface à la cible et selon l'application on utilisera l'un ou l'autre de ces types d'ondes.

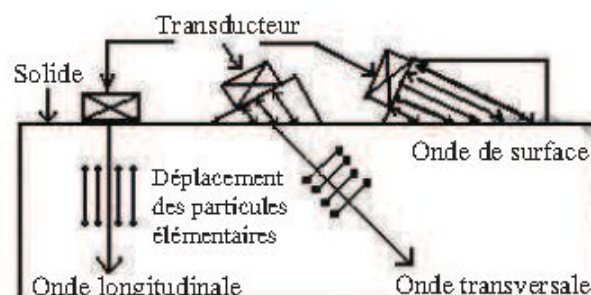


Figure 1.32: Différents types des ondes ultrasonores et modes de Propagation [4]

#### II.4.5.1. Les ondes longitudinales

Ce sont des ondes de compression caractérisées par un déplacement des particules parallèle à la direction de propagation de la vitesse  $V_L$  ce qui provoque des contraintes de compression et de traction. Elles sont bien adaptées pour le contrôle des défauts parallèles à la surface de contrôle.

#### II.4.5.2. Les ondes transversales

Ce sont des ondes de cisaillement caractérisées par un déplacement des particules perpendiculaires à la direction de propagation de la vitesse  $V_T$  ce qui provoque des contraintes de cisaillement. Elles sont utilisées notamment pour détecter les défauts (inclusion, soufflure, fissure, les cordons de soudure non arasés...) et lors du passage de ces ondes le glissement des plans parallèles ne donne lieu à aucune variation de volume. Donc ces ondes ne peuvent exister que dans les solides présentant une rigidité permettant leur transmission.

#### II.4.5.3. Les ondes de surfaces

Elles résultent l'interaction des deux ondes longitudinales et transversales sur une profondeur d'environ une longueur d'onde. Elles sont utilisées pour détecter les défauts de surfaces. Les deux principaux types d'ondes de surfaces sont les ondes de Rayleigh et les ondes de Love, l'amplitude de ces ondes décroît rapidement avec la profondeur.

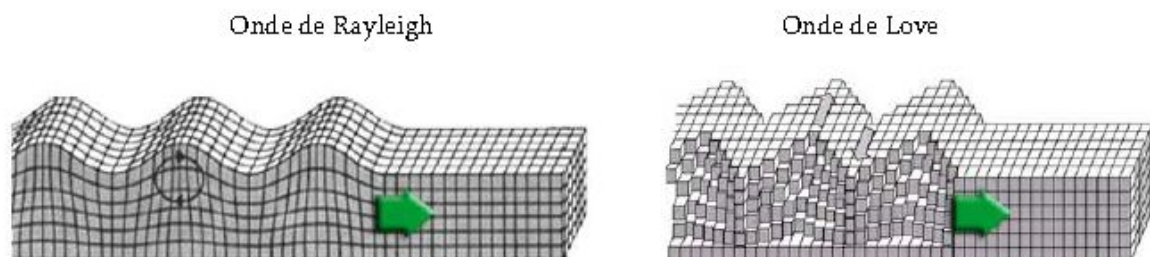


Figure 1.33: Onde de Rayleigh et onde de love [4]

Le déplacement des ondes de love est le même que celui des ondes de cisaillement. Les ondes de Rayleigh sont polarisées dans le plan perpendiculaire à la surface et dans le sens de la propagation. Leurs mouvements peuvent se décomposer en deux polarisations : une composante de compression et une composante de cisaillement.

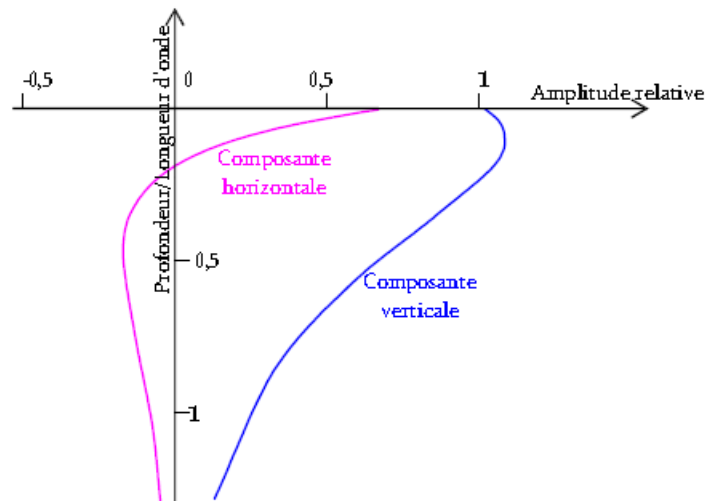


Figure 1.34: Amplitude relative des deux composantes des ondes de Rayleigh en fonction de la profondeur relative [31]

Les vitesses de propagation des ondes ultrasonores longitudinales ( $V_L$ ), transversales ( $V_T$ ) et les ondes de Rayleigh sont liées aux caractéristiques du matériau par les relations suivantes :

$$V_L = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (1.5)$$

$$V_T = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (1.6)$$

$$V_R = 0.9 * V_T \quad (1.7)$$

Le contrôle par ultrason permet la détermination de la taille du plus petit défaut mais parmi les inconvénients de ce contrôle l'existence d'une zone de silence dont il y'a le phénomène d'éblouissement qui donne des erreurs sur le dimensionnement des défauts. Les techniques ultrasonores ont connu des avancées majeures avec l'apparition des capteurs multi-éléments [32], l'introduction de la technique TOFD (time of flight diffraction, diffraction du temps de vol) [33], [34] et le développement des

ultrasons à couplage air [35] .Ces méthodes sont capable de détecter et de dimensionner les défauts situés hors la zone morte dans des nombreux matériaux et permettent de satisfaire aux exigence de rapidité, de fiabilité et d'automatisation. Elles sont utilisées pour le contrôle des composites utilisés en aéronautique et pour le contrôle des soudures dans les centrales nucléaires.

### II.5.La méthode par diffraction des rayon X

Le principe est basé sur la mesure des variations de distance interatomique liées directement à la présence des contraintes résiduelles. Le champ des contraintes résiduelles se manifeste par un champ de déformations, qui correspond à un changement de distance entre plans atomiques dans un cristal par rapport à sa position d'équilibre.

La détermination des contraintes résiduelles par les méthodes de diffraction est basée sur la mesure des angles pour lesquels l'intensité diffractée est maximale lorsqu'une structure cristalline est irradiée par des rayons-X.

A partir de ces angles, la loi de Bragg donne la distance  $dhkl$  entre les plans du réseau cristallin dont la valeur dépend du champ de contrainte au sein du matériau étudié.

Connaissant cette distance, on peut déterminer les contraintes résiduelles par la formule de la mécanique des milieux continus élastique:

$$2dhkl \sin(\theta_f) = \lambda_f \quad \text{loi de Bragg} \quad (1.8)$$

La mesure de  $dhkl$  permet la connaissance de la déformation du réseau cristallin, le champ de déplacement s'exprime alors en fonction de  $dhkl$  et les angles entre la surface du grain étudié est la normale aux plan (hkl) dont l'écart est mesuré par RX [100].La détermination du champ s'effectue grâce à la loi de Hooke.

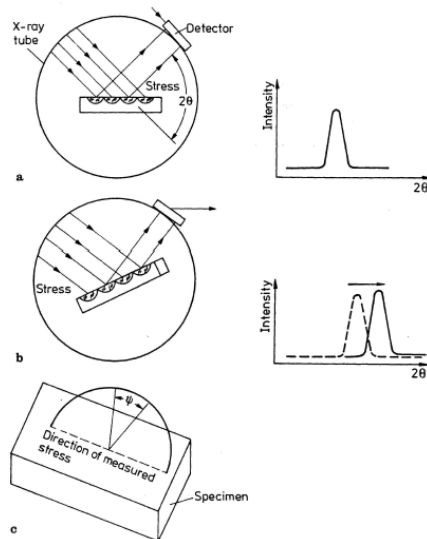


Figure 1.35: Schéma de principe de la diffraction des rayons X appliqué à la mesure de la contrainte résiduelle [36] .

## II.6.Méthode par effet de bruit de Barkhausen

L'application d'un champ extérieur entraîne un réarrangement des domaines structuraux. Cette modification d'organisation est essentiellement due aux déplacements des parois qui limitent les domaines, de telle sorte que les domaines bien orientés augmentent de volume au détriment des domaines mal orientés. Les parois ne se déplacent pas librement, elles sont accrochées sur toutes les micro- hétérogénéités présentes dans la matière (dislocations, précipités, joints de grain, ...). Ceci correspond à un phénomène d'ancrage des parois. Le déplacement des parois est donc discontinu; il se fait par sauts, les parois s'arrachent aux ancrages pour se bloquer sur de nouveaux obstacles et ainsi de suite...

Barkhausen est le premier qui a en évidence ces discontinuités par une expérience simple. En testant un nouvel amplificateur reliant un bobinage placé autour d'un morceau de fer à un haut-parleur, il s'aperçoit que son montage émettait des crachotements lorsqu'un aimant permanent était approché lentement du barreau de fer.

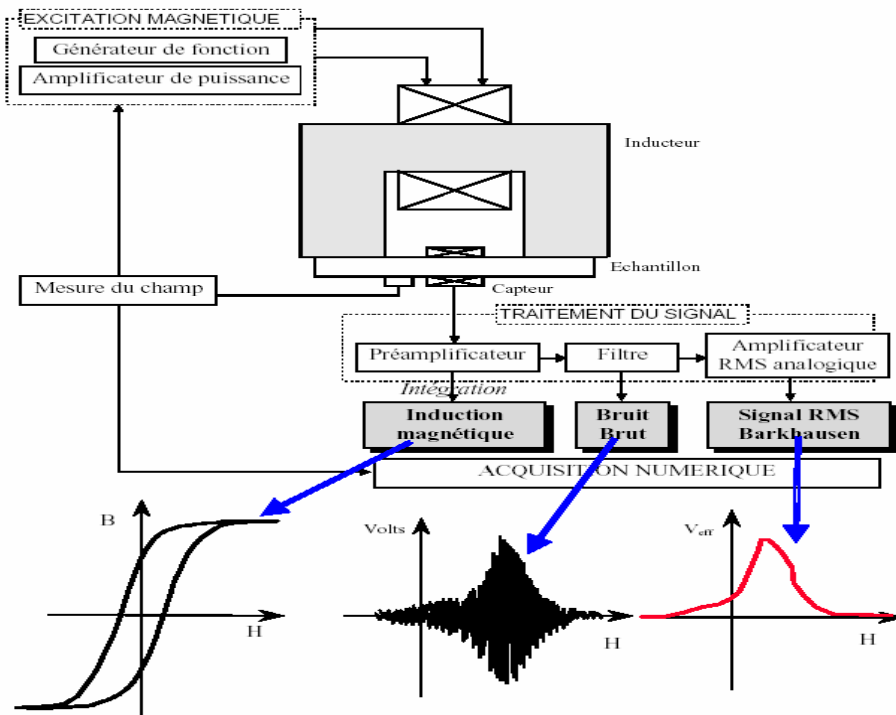


Figure 1.36: Montage du principe du bruit de Barkhausen [37]

Dans cette expérience, chaque mouvement brutal de paroi provoque une petite variation locale de champ que la bobine transforme en une tension électrique. Il se trouve qu'une partie importante du spectre se situe dans le domaine audible. Ce bruit est généralement appelé bruit Barkhausen ou bruit ferromagnétique.

Les appareils actuels sont directement issus de cette expérience, l'excitation est évidemment électrique, provoquée par un inducteur qui magnétise le matériau plus ou moins localement suivant la forme de la pièce. La bobine "capteur" est encerclant comme dans l'expérience de Barkhausen, soit de côté. Dans ce cas, un petit noyau de ferrite lui est souvent adjoint pour augmenter sa sensibilité. Le signal sortant de la bobine capteur est filtré pour isoler la partie intéressante du spectre puis amplifié. Il n'est généralement pas exploité tel quel est, on en prend soit l'enveloppe soit la valeur efficace.

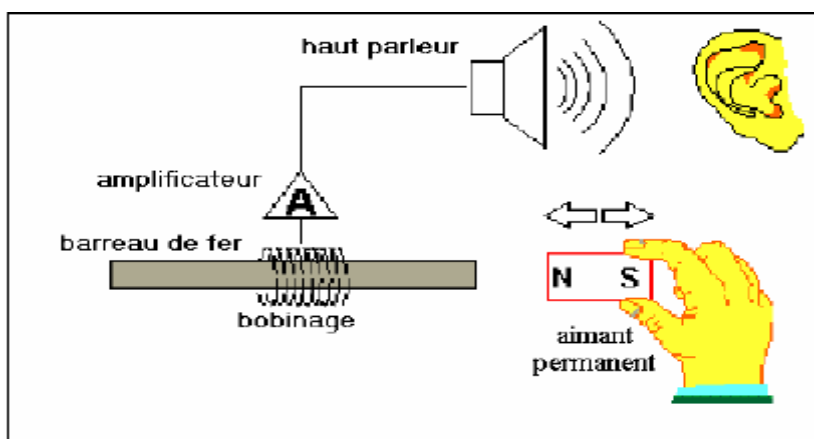


Figure 1.37: Schéma de l'appareil de Barkhausen [37]

L'exploitation quantitative du signal ainsi recueilli se fait généralement grâce à quatre paramètres :  $H_m$ ,  $A_m$ ,  $S$  et  $L_m$

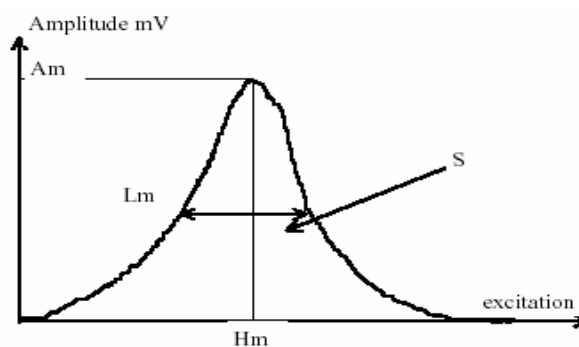


Figure 1.38: Exemple de pic Barkhausen et les paramètres mesurés [37]

## II.7. Le contrôle par magnétomètre à échantillon vibrant VSM

MICROSENSE offre plusieurs modèles VSM à aimant donnant un maximum de champ, ce dernier est commandé directement en temps réel. Ces VSM sont alors très rapides, très précis, et de très haute sensibilité, et sont équipés d'un système de contrôle de température.



Figure 1.39: Le magnétomètre à échantillon vibrant VSM [38]

### II.7.1. Principe de fonctionnement

La vibration d'un échantillon magnétique à proximité d'un ensemble de bobines crée un flux variable. Ce flux est proportionnel au moment magnétique qui est mesuré et tracé en fonction du champ magnétique  $H$ , de l'angle du champ, et de la température de l'échantillon. L'échantillon est relié par une tige (porte échantillon) à une source de vibration. L'échantillon est placé au milieu d'un ensemble de bobinage de détection dans lequel une tension est induite. Un électro-aimant entourant l'échantillon est utilisé pour faire varier le champ dans lequel l'échantillon est exposé de sorte que l'aimantation peut être mesurée en fonction du champ appliqué.

La manipulation du VSM est facilement accomplie avec le logiciel d'EasyVSM, qui est basé sur le langage de programmation Labview. (Des versions plus anciennes ont été écrites avec le langage de programmation Visual Basic.), qui est installé pour extraire les différents paramètres magnétiques afin de caractériser une large variété d'échantillons pour différentes gammes de coercivité.

### II.7.2. Options de VSM

Un certain nombre d'options et de perfectionnements sont disponibles pour le VSM :



### II.7.2.1. Option de système de contrôle de température

Pour cette raison, il faut mesurer l'effet de la température sur la magnétisation d'un échantillon, la température de l'échantillon peut être variée en plaçant l'échantillon dans un cryostat ou dans un four. Ceci exige un matériel facultatif sous forme de chambre de température qui utilise l'azote liquide, le gaz l'argon, ou le gaz d'azote. Le gaz d'argon est employé pour les températures chaudes. Le gaz d'azote et/ou l'azote liquide sont employés pour les températures froides. Une unité de contrôle de température et un amplificateur de contrôleur de température sont utilisés pour visualiser et surveiller les températures.

- L'azote liquide et le gaz d'Argon, peuvent soutenir une température ambiante de 90 K à 1000K
- L'hélium Liquide, le gaz d'azote, et le gaz d'argon, peuvent soutenir une température ambiante de 10 K à 1000K.

### II.7.2.2. Option de magnétorésistance

L'option de magnétorésistance est une sonde de résistance à haute température à 4 points qui peut mesurer des résistances entre 1 et 10,000 Ohms, en fonction du champ magnétique, avec une résolution mieux que 0.01%. La mesure dure juste deux minutes et la taille de l'échantillon arrive jusqu'à un pouce.

### II.7.2.3. Option de bobinage

La magnétisation d'un échantillon est une force, qui est une grandeur scalaire, signifiant qu'elle a une taille et une direction qui dépend du champ, de l'angle de champ et des propriétés de l'échantillon.

Le système standard de VSM est un système scalaire qui mesure la projection du vecteur de magnétisation sur la direction de champ (direction de  $X$  seulement).

Se référer à la figure au-dessous qui montre les vecteurs du bobinage qui se composent d'enroulements des  $X$  et des  $Y$  sure la figure, on voie les enroulements des  $Y$ , alors que les bobinages des  $X$  sont montés sur les pôles.

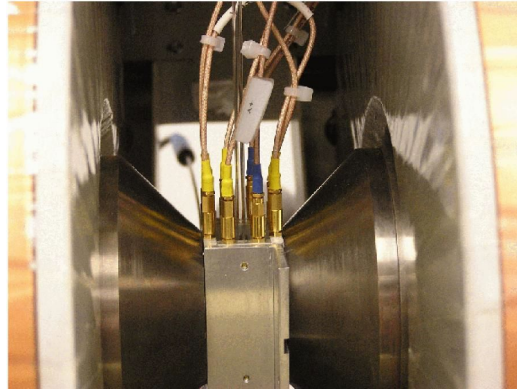


Figure 1.40: le bobinage sur le VSM [38]

#### II.7.2.4. Option de rotation automatique

Une option commode de rotation automatique permet à l'unité de vibration d'être tournée par l'intermédiaire de la commande du logiciel. Cette méthode motorisée est plus précise et moins encombrante que la rotation manuelle.

#### II.7.2.5. Option de magnétomètre du couple

L'option de magnétomètre de couple mesure le couple des matériaux en fonction de l'angle de rotation et du champ appliqué. L'option de magnétomètre de couple est exigée pour la mesure des propriétés angulaires et de l'anisotropie magnétique.

### III. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait une synthèse bibliographique sur les méthodes de CND de la plus ancienne jusqu'à la plus moderne en déterminant ces avantages ainsi que les inconvénients de chaque méthode.

En aéronautique, la caractérisation des contraintes résiduelles thermomécanique dans le revêtement de l'avion contenant des fissures que l'on vient d'étudier est faite par le contrôle ultrasonore qui est la méthode la plus utilisée ces dernières années et le contrôle par courant de Foucault que son étude est très récente.

## CHAPITRE II

### MODELISATION DES CONTRAINTES POUR LES PLAQUES FISSUREES

Dans ce chapitre, on présente les méthodes numériques les plus utilisées pour la modélisation des contraintes d'une pièce fissurée. Alors Nous introduirons les notions locales et globales de la mécanique de la rupture qui nous amèneront à déterminer les différentes méthodes numériques utilisées pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie en présentant la construction et la résolution du problème approché d'équilibre en élasticité au moyen de la méthode des éléments finis en déplacement qui s'appuie sur la formulation faible de l'équilibre résultant du principe des puissances virtuelles.

#### I. Mécanique de la rupture

C'est l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence d'une fissure macroscopique. Cela revient à déterminer le champ des contraintes et déformation au voisinage de la fissure. La difficulté d'une telle étude réside de la prise en compte de la singularité introduite par la pointe de la fissure.

##### I.1. Mode de rupture

La fissuration se manifeste par la séparation d'un milieu continu en deux parties, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants.

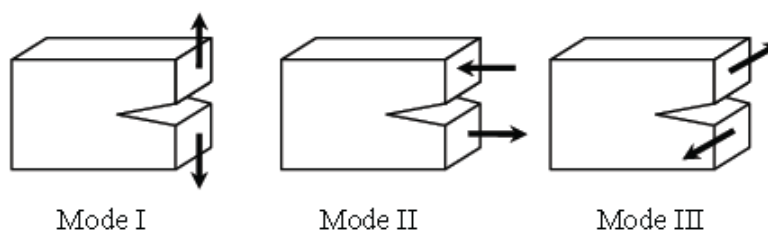


Figure 2.1: Mode de rupture [39]

- Mode I : ouverture : les lèvres de la fissure se déplacent dans des directions opposées et perpendiculaire au plan de la fissure.
- Mode II : cisaillement plan : les lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction perpendiculaire au front de la fissure.
- Mode III : cisaillement anti-plan : les lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de la fissure.

## 1.2. Le milieu élastique fissuré

La région proche à la pointe peut être décomposée en trois zones :

- La zone d'élaboration : se situe au voisinage direct de la pointe de la fissure.
- La zone singulière : dans cette zone le champ de contraintes présente une singularité en  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ .
- La zone des champs lointains : extérieure aux deux précédentes.

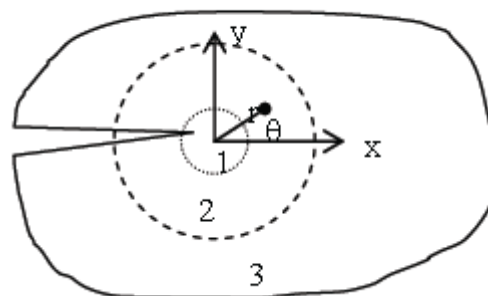


Figure 2.2: milieu élastique fissuré [40]

## 1.3. Approche locale

Cette approche consiste à déterminer les paramètres de la mécanique de la rupture à l'aide de champ des contraintes et de déformation locaux en pointe de fissure. Ces champs étant fortement perturbés par la singularité créée par la pointe. Et pour définir ces champs en pointe de fissure, nous introduisons la notion de facteur d'intensité de contrainte SIF.

### I.3.1. Le Facteur d'intensité des contraintes

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, les contraintes et les déformations au voisinage de la fissure données par Irwin [39] en 1957 s'écrivent :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= K_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{\alpha}(r, \theta) \\ \varepsilon_{ij} &= K_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}^{\alpha}(r, \theta)\end{aligned}\quad (2.1)$$

Le facteur d'intensité des contraintes caractérise la force de la singularité du champ des contraintes à l'extrémité de la fissure et qui ne dépend que de la géométrie et des efforts extérieurs.

Pour un matériau à comportement élastique linéaire, on démontre que les champs de contrainte en un point de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dont l'origine est placée en pointe de fissure (la direction  $\theta = 0$  correspondant à la tangente à la fissure en sa pointe) ont, au voisinage de la pointe (c'est-à-dire pour  $r$  petit devant la longueur  $l$  de la fissure), la forme asymptotique suivante :

En mode I :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (2.2)$$

En mode II :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)\end{aligned}\quad (2.3)$$

En mode III :

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.4)$$

$$\tau_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$$

De même, la discontinuité (vectorielle) de déplacement à la traversée de la fissure et au voisinage de la pointe est donnée par l'expression asymptotique suivante :

$$[u] = \frac{4}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ (1-\nu) [K_I \underline{e}_1 + K_{II} \underline{e}_2] + K_{III} \underline{e}_3 \right\} + O(r) \quad (2.5)$$

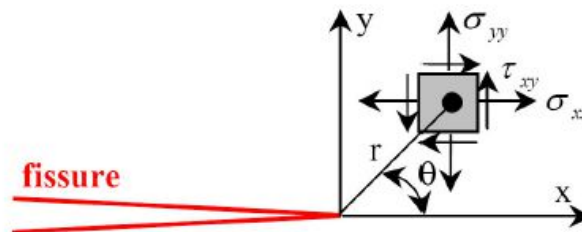


Figure 2.3: Système de coordonnées au voisinage de l'extrémité de la fissure

[39]

#### 1.4.Approche globale (énergétique)

La propagation de la fissure est un phénomène dissipatif d'énergie qui est caractérisé par une grandeur physique qui s'appelle le taux de restitution d'énergie  $G$ .

##### 1.4.1.Le taux de restitution d'énergie

Il représente l'énergie nécessaire pour progresser la fissure d'une longueur unité.

$$G = \frac{\partial w_p}{\partial a} \quad (2.6)$$

et

$$w_p = w_e + w_{ext} \quad (2.7)$$

Avec :

$$w_e = \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon \quad \text{et} \quad w_{ext} = \int_{\Omega} f \cdot u \quad (2.8)$$

On peut relier le facteur d'intensité des contraintes avec le taux de restitution d'énergie en utilisant le champ des contraintes dans la zone singulière et la loi de comportement élastique linéaire [41] par :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.9)$$

#### 1.4.2.L'intégrale de contour

La singularité au voisinage de la pointe d'une fissure peut être étudiée grâce à certaines intégrales de contour qui sont équivalentes au taux de restitution de l'énergie et qui sont indépendantes du contour d'intégration choisi. Parmi ces intégrales, on peut citer l'intégrale de Rice [42] dont la fissure est supposée rectiligne et le contour est ouvert sur les faces supérieure et inférieure de la fissure.

$$J = \int_C \left( w_e(\varepsilon) n - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds \quad (2.10)$$

Avec :

$$\sigma_{ij} = \partial w_e / \partial \varepsilon_{ij} \quad (2.11)$$

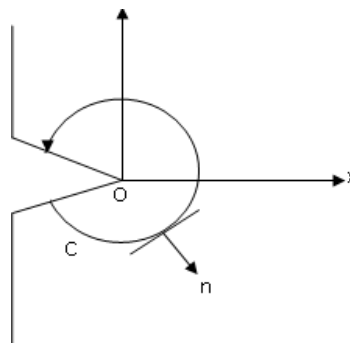


Figure 2.4: Le contour d'intégration

## I.5.Résolution numérique du SIF par MEF pour les deux approches locale et globale

### I.5.1.Formulation faible de l'équilibre et principe des puissances virtuelle

L'équilibre du solide ,sollicité par des densités de forces de volume  $\underline{f}$ , du déplacement  $\underline{u}^D$  imposés sur une partie  $S_u$  de la frontière  $\partial\Omega$  et une densité surfacique d'effort  $\underline{T}^D$  sur la partie complémentaire  $S_T$  de  $\partial\Omega$ , est décrit par des champs de déplacement  $\underline{u}$ , de déformation  $\underline{\varepsilon}$  et de contrainte  $\underline{\sigma}$  gouvernés par les équations locales :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(\nabla\underline{u} + \nabla^T\underline{u})(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega) \quad (2.12)$$

$$\text{div} \underline{\sigma}(\underline{x}) + \rho \underline{f}(\underline{x}) = 0 \quad (\underline{x} \in \Omega) \quad (2.13)$$

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \mathcal{A} : \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega) \quad (2.14)$$

Et les conditions aux limites :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^D(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in S_u) \quad (2.15)$$

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}^D(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in S_T) \quad (2.16)$$

Tel que :

- L'équation (2.12) est l'équation de compatibilité cinématique.
- L'équation (2.13) est l'équation d'équilibre.
- L'équation (2.14) est l'équation de comportement.

L'équation locale d'équilibre (2.13) peut être exprimée sous une forme intégrale équivalente par dualisation, c'est-à-dire multiplication par un champ  $\underline{\omega} \in \mathcal{C}$  arbitraire des déplacements cinématique admissibles et intégration sur  $\Omega$ . On obtient ainsi la forme faible de l'équation locale d'équilibre. Qui correspond au principe des puissances virtuelles (PPV) :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}[\underline{\omega}] dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\omega} dV + \int_{\partial\Omega} [\underline{\sigma} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{\omega} dS \quad (2.17)$$

On peut incorporer dans l'équation (2.17) du principe des puissances virtuelle la relation combinant l'équation (2.12) et (2.14) pour obtenir la formulation faible pour le problème élastique :



$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{u}}] : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{\omega}}] dV = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{\omega}} dV + \int_{S_T} \underline{\underline{T}}^D \cdot \underline{\underline{\omega}} dS \quad (2.18)$$

### I.5.2 l'élément fini isoparamétrique

Dans le domaine de la mécanique des solides, l'approche de référence est celle fondée sur la notion d'élément fini. Elle repose sur la représentation de la configuration géométrique comme assemblage d'éléments de forme simple construite à partir de polynôme.

### I.5.3 représentation de la géométrie approchée

Il importe de disposer d'une méthode permettant la représentation mathématique d'éléments qui résident dans l'espace physique, dont l'emplacement, l'orientation et les dimensions peuvent être choisis arbitrairement, et qui sont susceptibles de présenter des arêtes ou des faces courbes. Diverses formes (triangulaire, quadrangulaire, cubique...) doivent être disponibles. La méthode de représentation autorisant ce degré de généralité et de genericité repose sur la définition d'éléments de référence  $\Delta \subset R^D$ , de formes simples et de dimensions normalisées, comme par exemple :

→ le carré unité ( $D = 2$ )

$$\Delta = \{(a_1, a_2) / -1 \leq a_1, a_2 \leq 1\};$$

→ le cube unité ( $D = 3$ )

$$\Delta = \{(a_1, a_2, a_3) / -1 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1\};$$

→ le triangle unité ( $D = 2$ )

$$\Delta = \{(a_1, a_2) / (a_1, a_2) \geq (0,0), 1 - a_1 - a_2 \geq 0\};$$

→ le tétraèdre unité ( $D = 3$ )

$$\Delta = \{(a_1, a_2, a_3) / (a_1, a_2, a_3) \geq (0,0,0), 1 - a_1 - a_2 - a_3 \geq 0\};$$

La notation  $\underline{\underline{a}}$  désigne le vecteur des coordonnées paramétriques d'un point de l'élément de référence  $\Delta$ .

### I.5.4. La fonction d'interpolation

Considérons alors un élément générique  $E$  de l'espace physique, contenant  $n_e$  nœuds  $\underline{x}^{(k)}$ ,  $1 \leq k \leq n_e$ . Les points de  $E$  sont mis en relation avec ceux de l'élément de référence  $\Delta_e$  approprié par une représentation paramétrique de la forme :

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_K(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \quad (2.19)$$

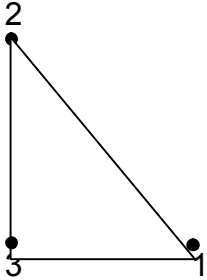
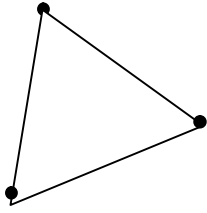
Les fonctions de forme  $N_K(\underline{a})$  sont des polynômes à  $D$  variables. La définition des fonctions de forme  $N_K(\underline{a})$  est soumise à la contrainte suivante: la représentation (2.19) doit être vraie si  $\underline{x}$  est un nœud  $\underline{x}^{(\ell)}$ , ce qui impose de vérifier les identités

$$\underline{x}^{(\ell)} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}^{(\ell)}) \underline{x}^{(k)} \quad (1 \leq \ell \leq n_e) \quad (2.20)$$

Où  $\underline{a}^{(\ell)}$  désigne l'antécédent de  $\underline{x}^{(\ell)}$  sur l'élément de référence  $\Delta$ . Cette condition devant être vraie pour tout choix d'emplacement des  $n_e$  nœuds, les fonctions de forme doivent donc vérifier

$$N_k(\underline{a}^{(\ell)}) = \delta_{k\ell} \quad (1 \leq k, \ell \leq n_e) \quad (2.21)$$

Tableau 2.1: Fonction de forme pour un élément finis de référence.

(référence)	(déformé)	Fonctions de forme
 <p>triangle,</p>	 <p>3 nœuds</p>	$N_1(a_1, a_2) = a_1$ $N_2(a_1, a_2) = a_2$ $N_3(a_1, a_2) = 1 - a_1 - a_2$ <p>(degré partiel 1, degré total 1)</p>

### I.5.5. Représentation locale des déplacements

Une fois construite une représentation du solide selon les principes ci-dessus, on choisit de représenter tout champ de déplacement  $\underline{v}(x)$  par interpolation des valeurs nodales  $\underline{v}^{(k)}$  avec les mêmes fonctions d'interpolation  $N_k(\underline{a})$ . En d'autres termes, on pose pour tout point de l'élément fini  $E$  une interpolation  $\underline{v}_h$  d'un champ  $\underline{v}$  sous la forme :

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{v}^{(k)} \quad (2.22)$$

Le terme « isoparamétrique » fait ainsi référence au fait que les mêmes fonctions de forme, ou d'interpolation, sont utilisées pour représenter la géométrie et les inconnues. Il est commode, en termes de programmation, de disposer l'ensemble des valeurs nodales associées à l'élément  $E_e$  dans un vecteur  $\{\mathbb{V}_e\}$  de longueur  $D \times n_e$  selon la convention :

$$\{\mathbb{V}_e\} = \{\underline{v}^1, \dots, \underline{v}^{n_e}\}^T = \left\{ v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_D^{(n_e)} \right\}^T \quad (2.23)$$

La formule (2.22) d'interpolation isoparamétrique prend alors la forme équivalente

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = [N(\underline{a})]\{\mathbb{V}_e\} \quad (2.24)$$

pour tout  $\underline{x} \in E$  défini par (2.16). Les fonctions de forme étant disposées dans la matrice  $[N(\underline{a})]$  à  $D$  lignes et  $D \times n_e$  colonnes :

$$[N(\underline{a})] = \begin{bmatrix} N_1(\underline{a}) & 0 & \dots & N_{n_e}(\underline{a}) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\underline{a}) & 0 & \dots & N_{n_e}(\underline{a}) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\underline{a}) & 0 & \dots & N_{n_e}(\underline{a}) \end{bmatrix} \quad (\text{si } D = 3) \quad (2.25)$$

### I.5.6. Représentation globale des déplacements

A partir des représentations (2.19) et (2.22) du vecteur position et du déplacement, définies localement (c'est-à-dire élément par élément), un champ de déplacement  $\underline{v}_h$  peut être représenté globalement (c'est-à-dire sur le domaine approché  $\Omega_h$  complet) sous la forme :

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{N_N} \check{N}_n(\underline{x}) \underline{v}^{(n)} \quad (\underline{x} \in \Omega_h) \quad (2.26)$$

$\Omega^{(n)}$ : la région formée par la réunion des éléments finis contenant le nœud  $\underline{x}^{(n)}$

### 1.5.7. Le vecteur global des degrés de liberté inconnus

La représentation (2.26) opère une sommation sur tous les nœuds du maillage et ne fait pas de distinction entre déplacements nodaux inconnus ou imposés via des conditions aux limites de la relation (2.16). Toute composante de déplacement nodal  $v_j^{(n)}$  peut être repérée par l'indice de composante  $j$  ( $1 \leq j \leq D$ ) et le numéro de nœud  $n$  pour pouvoir opérer et systématiser la distinction entre les déplacements de valeur imposée par les conditions aux limites et les autres (qui seront qualifiés de *libres* dans la suite), un numéro d'inconnue  $dof(n, j)$  est attribué à chaque couple  $(n, j)$  selon la convention :

$$dof(n, j) > 0 \text{ ( } v_j^{(n)} \text{ libre),} \quad dof(n, j) \leq 0 \text{ ( } v_j^{(n)} \text{ imposé).} \quad (2.27)$$

de plus, deux déplacements nodaux libres distincts ne doivent pas avoir le même numéro d'inconnue : les numéros (strictement positifs) donnés aux  $v_j^{(n)}$  libres doivent être tous différents. Une méthode non obligatoire mais naturelle consiste à attribuer aux déplacements nodaux libres des numéros consécutifs à partir de 1. La traduction informatique naturelle de la définition (2.27) est la table des inconnues  $dof$  de dimension  $N_N \times D$ .

La représentation (2.26) est alors mise sous la forme :

$$\underline{v}_h(\underline{x}) = \underline{u}_h^{(D)}(\underline{x}) + \underline{v}_h^{(0)}(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in \Omega_h) \quad (2.28)$$

Avec :

$$\underline{u}_h^{(D)}(\underline{x}) = \sum_{(n,i) | dof(n,j) \leq 0} \check{N}_n(\underline{x}) u_j^{(D)}(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j \in C_h(\underline{u}^D), \quad (2.29)$$

$$\underline{v}_h^{(0)} = \sum_{(n,i) | dof(n,j) > 0} \check{N}_n(\underline{x}) v_j^{(n)} \underline{e}_j \in C_h(\underline{0}),$$

Ou  $C_h(\underline{u}^D)$  et  $C_h(\underline{0})$  désignent les ensembles de déplacements cinématiquement admissibles respectivement à la donnée  $\underline{u}^D$  et à zéro) au sens de la discrétisation éléments finis.

avec

$$\underline{\varphi}^K(\underline{x}) = \tilde{N}_n(\underline{x})\underline{e}_j \quad \text{et} \quad \alpha_k = v_j^{(n)} \quad \text{avec} \quad K = dof(n, j). \quad (2.30)$$

La notation  $\{V\}$  signera par convention la liste des valeurs nodales du champ de déplacement  $\underline{v}_h$  laissées inconnues par les conditions aux limites, c'est-à-dire (avec la définition ci-dessus de la table des inconnues) :

$$\{V\} = v_j^{(n)} dof(n, j) > 0, (1 \leq n \leq N_N, 1 \leq j \leq D) \quad (2.31)$$

### 1.5.8. Maillage

On se place à partir de maintenant dans le cadre général d'un solide dont la configuration est décrite par le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^D$  ( $D = 2$  en déformations planes ou contraintes planes  $D = 3$  pour un solide tridimensionnel).

(i) Le domaine  $\Omega$  est divisé en  $N_E$  régions  $E_e (1 \leq e \leq N_E)$  de forme simple : triangles, quadrangles (problème plan) ; parallélépipèdes, prismes ou tétraèdres (solide tridimensionnel). Ces régions pourront être distordues, et en particulier avoir des faces ou côtés curvilignes. Chacune de ces régions définira le support géométrique d'un élément fini.

(ii) On choisit par ailleurs un nombre fini  $N_N$  de points  $\underline{x}^{(n)} (1 \leq n \leq N_N)$  de  $\Omega$ , appelés *nœuds*. Ces nœuds comprennent en particulier tous les sommets des régions du découpage.

L'ensemble des éléments  $E_e$  et des nœuds  $\underline{x}^{(n)}$  ainsi définis constituent un maillage de  $\Omega$ . pour un découpage donné de  $\Omega$  en éléments, le choix des nœuds n'est pas arbitraire. Il doit en effet correspondre à l'une des possibilités répertoriées de familles de fonctions de forme associées à une forme d'élément donnée.

Sur le plan informatique, les données nécessaires à la définition d'un maillage sont habituellement structurées en deux tables :

→ La table des coordonnées nodales, notée  $coor$ , disposée en  $N_N$  lignes et  $D$  colonnes, telle que la ligne  $n$  donne les coordonnées du nœud  $\underline{x}^{(n)}$  :

$$coor(j, n) = x_j^{(n)};$$

→ la table de connectivité, notée  $connec$ , disposée en  $N_E$  lignes, telle que la ligne  $e$  donne la liste des numéros des nœuds situés sur l'élément  $E_e$ . Tous les éléments n'ayant pas nécessairement le même nombre de nœuds, il faut par ailleurs stocker la valeur de  $n_e$  pour chaque élément, par exemple sous la forme d'une colonne supplémentaire de  $connec$ . On aura ainsi :

$$\begin{aligned} connec(e, 0) &= n_e && \text{(Nombre des nœuds de l'élément } E_e), \\ connec(e, 1:n_e) &&& \text{(liste des numéros globaux des nœuds de } E_e) \end{aligned}$$

(Où la notation  $(n:n_e)$  de style MATLAB, désigne l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n_e\}$  d'entiers). De même, la relation  $n = connec(e, k)$  indique que le nœud de numéro local  $k$  relativement à l'élément fini  $E_e$  est le nœud  $\underline{x}^{(n)}$  de numéro global  $n$ .

#### 1.5.9. Construction du problème d'élasticité approché à l'aide d'éléments finis isoparamétriques :

Supposons le solide  $\Omega$  et le champ de déplacement représentés à l'aide d'un maillage d'éléments finis isoparamétriques. La construction du problème approché est alors s'appuyée sur une formulation faible découlant du principe des puissances virtuelles (2.18).

#### 1.5.10. Construction à partir d'une formulation faible

Les formulations faibles issues du principe des puissances virtuelles constituent le support de construction de problèmes approchés par éléments finis en mécanique des solides permettant le plus grand degré de généralité. Pour le cas présent de l'élasticité linéaire, la méthode des éléments finis prend appui sur la formulation faible (2.18), et la construction du problème approché consiste dans son principe à :

→ Construire un domaine approché  $\Omega_h = \cup_e E_e$  au moyen d'un maillage respectant la conformité, ce qui implique le choix des types d'éléments utilisés:

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n_e} N_k(\underline{a}) \underline{x}^{(k)} \quad (\underline{x} \in E_e \quad 1 \leq e \leq N_E); \quad (2.32)$$

→ Chercher le déplacement inconnu  $\underline{u}$  sous la forme (2.28) - (2.29), soit :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \underline{u}_h^{(D)}(\underline{x}) + \underline{u}_h^{(0)}(\underline{x}) \quad \in C_h(\underline{u}^D) \quad (\underline{x} \in \Omega_h); \quad (2.33)$$

Avec :

$$\underline{u}_h^{(D)}(\underline{x}) = \sum_{(n,i) | dof(n,j) \leq 0} \check{N}_n(\underline{x}) u_j^{(D)}(\underline{x}^{(n)}) \underline{e}_j, \quad \in C_h(\underline{u}^D); \quad (2.34)$$

$$\underline{u}_h^{(0)} = \sum_{(n,i) | dof(n,j) > 0} \check{N}_n(\underline{x}) u_j^{(n)} \underline{e}_j \quad \in C_h(\underline{0}); \quad (2.35)$$

→ Utiliser des champs virtuels  $\underline{\omega}$  cinématiquement admissibles à zéro de la forme (2.28) et (2.29), soit

$$\underline{\omega}(\underline{x}) = \sum_{(n,i) | dof(n,j) > 0} \check{N}_n(\underline{x}) \omega_j^{(n)} \underline{e}_j \quad \in C_h(\underline{0}) \quad (\underline{x} \in \Omega_h) \quad (2.36)$$

La forme discrète de la formulation faible (2.18) s'écrit alors

Trouver  $\underline{u}_h^{(0)} \in C_h(\underline{0})$  tel que  $\forall \underline{\omega} \in C_h(\underline{0})$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(0)}] : A : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] dV = \\ - \int_{\Omega_h} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(0)}] : A : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] dV + \int_{\Omega_h} \underline{f} \cdot \underline{\omega} dV + \int_{S_{T,h}} \underline{T}^D \cdot \underline{\omega} dS. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Regroupant les valeurs nodales  $u_j^{(n)}$  et  $\omega_j^{(n)}$  ( $dof(n,j) > 0$ ) dans les vecteurs  $\{\underline{U}\}$  et  $\{\underline{W}\}$  on propose que la taille des vecteurs  $\{\underline{U}\}, \{\underline{W}\}$  est donc égale au nombre  $N$  de degrés de liberté restant inconnus après prise en compte des déplacements imposés), la formulation faible discrète (2.37) prend la forme :

$$\text{Trouver } \{\underline{U}\} \in \mathbb{R}^N \text{ tel que : } \forall \{\underline{W}\} \in \mathbb{R}^N, \{\underline{W}\}^T [\mathbb{K}] \{\underline{U}\} = \{\underline{W}\}^T \{\underline{F}\} \quad (2.38)$$

Où  $[\mathbb{K}]$  est la matrice de rigidité de la structure et  $\{\mathbb{F}\}$  le vecteur des efforts généralisés (forces nodales), qui est équivalente au système d'équations d'inconnue  $\{\mathbb{U}\} \in \mathbb{R}^N$  :

$$[\mathbb{K}]\{\mathbb{U}\} = \{\mathbb{F}\} \quad (2.39)$$

### 1.5.11. L'assemblage

En pratique, le calcul de la matrice de rigidité  $[\mathbb{K}]$  et du vecteur des forces nodales  $\{\mathbb{F}\}$  n'est pas réalisé par substitution explicite des définitions (2.33) et (2.36) dans la relation (2.37), qui demanderait de former explicitement les fonctions de forme globale  $\tilde{N}_n(\underline{x})$ , mais par un procédé *d'assemblage* reposant sur un traitement élément par élément des calculs nécessaires.

Cette approche est fondée sur le fait que les intégrales intervenant dans les relations (2.37) et (2.38) définissant  $[\mathbb{K}]$  et  $\{\mathbb{F}\}$  portent sur  $\Omega_h$  et sa frontière, et sont donc additives par rapport aux éléments finis. Après introduction de la partition  $\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{N_E} E_e$ , les relations (2.37) et (2.38) conduisent à définir  $[\mathbb{K}]$  et  $\{\mathbb{F}\}$  à travers

$$\{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}] \{\mathbb{U}\} = \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(0)}] : A : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] dV, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}\} = \\ \sum_{e=1}^{N_E} \left\{ - \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h^{(D)}] : A : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] dV + \int_{E_e} \underline{f} \cdot \underline{\omega} dV + \int_{\Gamma_T^e} \underline{T}^D \cdot \underline{\omega} dS, \right\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Où  $\underline{\omega} \in C_h(\underline{0})$ , est un champ virtuel associé au maillage et  $\Gamma_T^e = \partial E_e \cap S_T$  désigne la portion de la frontière de l'élément  $E_e$  située sur  $S_T$  (qui est de fait vide pour un grand nombre d'éléments).

Les expressions (2.40) et (2.41) suggèrent que le calcul effectif de la matrice de rigidité  $[\mathbb{K}]$  et du second membre  $\{\mathbb{F}\}$  pourra être effectué à l'aide d'une procédure consistant à :

- (i) évaluer des intégrales sur des éléments et des portions de frontières d'éléments, puis
- (ii) reporter ces contributions dans des matrices et vecteurs associés aux valeurs nodales de l'ensemble du maillage.



En pratique, la procédure de construction de la matrice  $[\mathbb{K}]$  et du vecteur  $\{\mathbb{F}\}$ , en termes d'équilibre des efforts généralisés intérieurs et extérieurs s'écrivent :

$$\{\mathbb{F}^{int}\} + \{\mathbb{F}^{ext}\} = \{0\} \quad (2.42)$$

Avec

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}^{int}\} = - \sum_{e=1}^{N_E} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h] : A : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] dV, \quad (2.43)$$

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\{\mathbb{F}^{ext}\}\} = \sum_{e=1}^{N_E} \left\{ \int_{E_e} \underline{f} \cdot \underline{\omega} dV + \int_{T_e} T^D \cdot \underline{\omega} dS, \right\} \quad (2.44)$$

La raison en est que les contributions des éléments à la matrice de rigidité dans (2.40) et aux efforts généralisés associés aux déplacements imposés dans (2.41) proviennent toutes deux de l'intégrale (2.43) donnant la puissance virtuelle des efforts intérieurs sur l'élément. Il est donc préférable de calculer cette dernière comme un tout sur chaque élément puis d'en extraire les contributions à  $[\mathbb{K}]$  et  $\{\mathbb{F}\}$ .

#### 1.5.11.1. Calcul des intégrales élémentaires

La construction du système (2.39) passe par l'évaluation des contributions de chaque élément fini aux expressions (2.43) et (2.44). Cette section a pour objet de détailler les méthodes permettant l'évaluation de ces contributions, habituellement qualifiées d'élémentaires.

#### 1.5.11.2. Matrices de rigidité élémentaires

La contribution d'un élément générique  $E_e$  à la puissance dans un champ virtuel  $\underline{\omega}$  des efforts intérieurs associés au champ  $\underline{u}_h$  est, d'après (2.43), donnée par

$$\int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h] : A : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] dV. \quad (2.45)$$

L'approche générale et systématique pour l'évaluation de contributions ayant la forme d'une intégrale sur un élément (habituellement appelées *intégrales élémentaires*) consiste à utiliser la correspondance entre  $E_e$  et l'élément de référence  $\Delta_e$ , via le changement de variable  $\underline{x} \in E_e \rightarrow \underline{a} \in \Delta$  défini par (II.8).

La densité de travail des efforts intérieurs est donnée par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h] : A : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] = \{\varepsilon[\underline{u}_h]\}^T [A] \{\varepsilon[\underline{\omega}]\} = \{\mathbb{W}_e\}^T [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] \{\mathbb{U}_e\} \quad (2.46)$$

Tandis que l'élément différentiel de volume se transforme selon

$$dV(\underline{x}) = J(\underline{a}) dV(\underline{a}) \quad (2.47)$$

Cela conduit à écrire l'intégrale élémentaire (II.30) en termes d'une matrice de rigidité élémentaire  $[\mathbb{K}_e]$  :

$$\int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_h] : A : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\omega}] dV = \{\mathbb{W}_e\}^T [\mathbb{K}_e] \{\mathbb{U}_e\} \quad (2.48)$$

Avec

$$[\mathbb{K}_e] = \int_{\Delta_e} [B_e(\underline{a})]^T [A] [B_e(\underline{a})] j_e(\underline{a}) dV(\underline{a}) \quad (2.49)$$

### 1.5.11.3. Forces nodales élémentaires associées aux efforts extérieurs

Les forces nodales généralisées associées aux efforts extérieurs exercés sur l'élément  $E_e$  résultent de l'évaluation des contributions élémentaires

$$\int_{E_e} \underline{f} \cdot \underline{\omega} dV + \int_{\Gamma_{eT}} \underline{T}^D \cdot \underline{\omega} dS = \{\mathbb{W}_e\}^T \{\mathbb{F}_e^{vol} + \mathbb{F}_e^{surf}\} = \{\mathbb{W}_e\}^T + \{\mathbb{F}_e^{ext}\} \quad (2.50)$$

La restriction du champ  $\underline{\omega}$  à l'élément  $E_e$ , l'intégrale sur l'élément  $E_e$  s'écrit, par le passage sur l'élément de référence  $\Delta_e$  :

$$\int_{E_e} \underline{f} \cdot \underline{\omega} dV = \{\mathbb{W}_e\}^T \left\{ [N(\underline{a})]^T \left\{ \underline{f} \underline{x}(\underline{a}) \right\} J_e(\underline{a}) dV(\underline{a}) \right\} = \{\mathbb{W}_e\}^T \mathbb{F}_e^{vol} \quad (2.51)$$

Et

$$\int_{E_e} \underline{T}^D \cdot \underline{\omega} dS = \{\mathbb{W}_e\}^T \left\{ [N(\underline{a})]^T \left\{ \underline{T}^D \underline{x}(\underline{a}) \right\} J_e(\underline{a}) dS(\underline{a}) \right\} = \{\mathbb{W}_e\}^T \mathbb{F}_e^{surf} \quad (2.52)$$

→ L'équation (II.34) représente les forces de volume.

→ l'équation (II.35) représente les forces de surface.

### 1.5.11.4. Assemblage de la matrice de rigidité

Séparation des contributions des déplacements inconnus et imposés sur un élément. La définition (2.48) de la matrice de rigidité élémentaire ne prend pas en

compte l'éventualité que l'élément  $E_e$  supporte des déplacements imposés. Il en effet plus simple sur le plan pratique (programmation) de calculer la matrice élémentaire  $[\mathbb{K}_e]$  complète, que l'élément supporte des déplacements imposés ou non.

On considère un élément fini générique comprenant  $n_e$ , nœuds en dimension  $D = 2$  ou  $3$ . si  $E_e$  supporte des déplacements imposés sur une partie de sa frontière, on opère une partition des  $D_{n_e}$  degrés de liberté de l'élément de façon à différencier les déplacements nodaux libres, dont le nombre est noté  $N_e$  (avec  $N_e < D_{n_e}$ , par hypothèse), et imposés. La liste des numéros locaux de l'ensemble des degrés de liberté de l'élément est  $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, D_{n_e}\}$ . Pour simplifier la présentation, on suppose temporairement que les degrés de liberté libres et imposés correspondent respectivement aux sous-listes  $\mathcal{L}^{(0)} = \{1, 2, \dots, N_e\}$  et  $\mathcal{L}^{(D)} = \{N_e + 1, \dots, D_{n_e}\}$  de numéros. On pose alors :

$$\{U_e\} = \begin{cases} \mathbb{U}_e^{(0)} \\ \mathbb{U}_e^{(D)} \end{cases}, \quad \{W_e\} = \begin{cases} \mathbb{W}_e^{(0)} \\ 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Où les vecteurs  $\{\mathbb{U}_e^{(0)}\}$  des inconnues effectives sur l'élément et  $\{\mathbb{W}_e^{(0)}\}$  des valeurs nodales du champ virtuel sont de longueur  $N_e$ , et le vecteur  $\{\mathbb{U}_e^{(D)}\}$  des déplacements nodaux imposés est de longueur  $\bar{N}_e = (D_{n_e}) - N_e$ . Les définitions (3.26) permettent notamment d'assurer que les restrictions de  $\underline{u}_h^{(0)}$  et  $\underline{\omega}$  à l'élément sont bien cinématiquement admissibles à zéro.

Si  $[\mathbb{K}_e]$  désigne la matrice de rigidité élémentaire donnée par (2.49), c'est-à-dire définie pour tous les degrés de liberté de l'élément (et donc de dimension  $D_{n_e} \times D_{n_e}$ ), la partition opérée dans (2.53) induit une décomposition de  $[\mathbb{K}_e]$  en sous-matrices, de la forme :

$$[\mathbb{K}_e] = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_e^{(00)} & \mathbb{K}_e^{(0D)} \\ \mathbb{K}_e^{(D0)} & \mathbb{K}_e^{(DD)} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Avec  $[\mathbb{K}_e^{(D0)}] = [\mathbb{K}_e^{(0D)}]^T$  les sous-matrices  $[\mathbb{K}_e^{(00)}]$ ,  $[\mathbb{K}_e^{(0D)}]$  et  $[\mathbb{K}_e^{(D0)}]$  ont pour dimensions respectives  $N_e \times N_e$ ,  $N_e \times N_e$  et  $N_e \times N_e$ , la puissance virtuelle élémentaire des efforts intérieurs prend la forme :

$$\{\mathbb{W}_e\}^T \{\mathbb{F}_e^{int}\} = -\{\mathbb{W}_e^{(0)}\}^T \left( [\mathbb{K}_e^{(00)}] \{\mathbb{U}_e^{(0)}\} + [\mathbb{K}_e^{(0D)}] \{\mathbb{U}_e^{(D)}\} \right) \quad (2.55)$$

En d'autres termes, la contribution de l'élément à la matrice de rigidité globale est réduite à la sous-matrice  $[\mathbb{K}_e^{(00)}]$  de dimension  $N_e \times N_e$ , tandis que la contribution aux forces nodales généralisées associées aux déplacements imposés est

$$\{\mathbb{F}_e^u\} = -[\mathbb{K}_e^{(0D)}] \{\mathbb{U}_e^{(D)}\} \quad (2.56)$$

Le vecteur  $\{\mathbb{F}_e^u\}$  est associé par dualité aux  $N_e$  degrés de liberté effectifs des champs cinématiquement admissibles à zéro sur l'élément, et est donc de longueur  $N_e$ .

En pratique, les listes  $\mathcal{L}^{(0)}$  et  $\mathcal{L}^{(D)}$  ne sont en général pas formées de numéros consécutifs. L'expression (2.55) reste alors valable, mais avec les sous-matrices de  $[\mathbb{K}_e]$  définies (avec une notation compacte de style MATLAB) par :

$$[\mathbb{K}_e^{(00)}] = \mathbb{K}_e(\mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(0)}), \quad [\mathbb{K}_e^{(0D)}] = \mathbb{K}_e(\mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(D)}) \quad (2.57)$$

Effectuer la partition (2.54) de la rigidité élémentaire et le calcul de  $\{\mathbb{F}_e^u\}$  par (2.56) n'est nécessaire que si  $E_e$  a au moins un nœud situé sur  $S_u$ . Cette opération ne concerne donc qu'une fraction du nombre total d'éléments d'autant plus faible que le maillage est fin. Avec les notations introduites ci-dessus, le cas d'un élément ne présentant pas de déplacements imposés correspond bien sûr aux valeurs particulières:

$$N_e = D_{n_e}, \quad \bar{N}_e = 0, \quad [\mathbb{K}_e^{(00)}] = [\mathbb{K}_e], \quad \{\mathbb{F}_e^u\} = \{0\} \quad (2.58)$$

L'opération d'assemblage de la matrice de rigidité et du vecteur des forces nodales associées aux déplacements imposés revient alors formellement, avec les notations précédemment introduites, à exploiter les relations

$$\begin{aligned} \{\mathbb{W}\}^T [\mathbb{K}] \{\mathbb{U}\} &= \sum_{e=1}^{N_e} \{\mathbb{W}_e^{(0)}\}^T [\mathbb{K}_e^{(00)}] \{\mathbb{U}_e^{(0)}\}, \\ \{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}^u\} &= -\sum_{e=1}^{N_e} \{\mathbb{W}_e^{(0)}\}^T [\mathbb{K}_e^{(0D)}] \{\mathbb{U}_e^{(D)}\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Résultant de la combinaison de (2.43), (2.48), (2.53) et (2.54), entre la matrice de rigidité globale et les blocs  $[\mathbb{K}_e^{(00)}]$  et  $[\mathbb{K}_e^{(0D)}]$  des matrices de rigidité élémentaires.

Ces relations ne peuvent toutefois pas être appliquées directement. En effet, chaque matrice élémentaire  $[\mathbb{K}_e]$ , une fois calculée selon le procédé décrit dans la section précédente, est définie par référence à la numérotation locale de l'élément  $E_e$ , tandis que la matrice globale  $[\mathbb{K}]$  et le vecteur  $\{\mathbb{F}^u\}$  sont bien sur définis en termes de la numérotation globale. Pour prendre en compte correctement la contribution de  $[\mathbb{K}_e]$  à  $[\mathbb{K}]$  et  $\{\mathbb{F}^u\}$ , il faut donc savoir à quels numéros globaux d'inconnues correspondent les numéros locaux associés à l'élément  $E_e$ . Ainsi, le calcul et l'assemblage de  $[\mathbb{K}]$  et  $\{\mathbb{F}^u\}$ , qui sont effectués simultanément, fonctionnent schématiquement selon le principe suivant :

1. Initialisation :  $[\mathbb{K}] = [0]$  (matrice  $N \times N$ ),  $\{\mathbb{F}^u\} = \{0\}$  (N-vecteur).

2. Boucle sur les éléments : pour  $1 \leq e \leq N_e$ , faire

(i) Déterminer le nombre de nœuds  $n_e = \text{convec}(e, 0)$  de  $E_e$  ;

(ii) Déterminer la liste *nodes* des numéros globaux des nœuds de  $E_e$  ;

$$\text{nodes}(k) = \text{convec}(e, k) \quad 1 \leq k \leq n_e,$$

(iii) Déterminer les coordonnées des nœuds

$$\underline{x}^{(k)} = \text{coor}(\text{nodes}(k), :) \quad 1 \leq k \leq n_e;$$

(iv) Déterminer la restriction *dofe* à l'élément  $E_e$  de la table des inconnues :

$$\text{dofe} = \{\text{dof}(n, j)\}, \quad j = 1, \dots, D \quad \text{et } n \in \text{nodes}$$

(v) Calculer  $[\mathbb{K}_e]$  ;

(vi) Contribution de  $[\mathbb{K}_e]$  à  $[\mathbb{K}]$  et  $\{\mathbb{F}^u\}$ ,

pour  $1 \leq p, q \leq D_{n_e}$  :

$$\mathbb{K}_{IJ} = \mathbb{K}_{IJ} + \mathbb{K}_{e,pq} \quad I = \text{dofe}(p) > 0, J = \text{dofe}(q) > 0$$

$$\mathbb{F}_I^u = \mathbb{F}_I^u - \mathbb{K}_{e,pq} \mathbb{U}_{e,q}^{(D)} \quad I = \text{dofe}(p) > 0, \text{dofe}(q) < 0$$

#### 1.5.11.5. Assemblage du vecteur de forces nodales

Cette opération d'assemblage est réalisée de façon analogue à l'assemblage de  $[\mathbb{K}]$ , par exploitation de la relation :

$$\{\mathbb{W}\}^T \{\mathbb{F}^{ext}\} = \{\mathbb{W}\}^T (\{\mathbb{F}^{vol}\} + \{\mathbb{F}^{surf}\}) = \sum_{e=1}^{N_e} \{\mathbb{W}_e\}^T (\{\mathbb{F}_e^{vol}\} + \{\mathbb{F}_e^{surf}\}) \quad (2.60)$$

Le calcul et l'assemblage de  $\{\mathbb{F}^{vol}\}$  et  $\{\mathbb{F}^{surf}\}$  procèdent alors comme indiqué dans l'encadré ci-après. En pratique, cette procédure est susceptible de ne faire intervenir qu'une faible proportion des éléments finis du maillage. Par exemple :

- (a) Si les sollicitations consistent uniquement en des déplacements imposés, seuls les éléments dont au moins un nœud est situé sur  $S_u$  sont concernés, et les coefficients non nuls de  $\{\mathbb{F}\}$  correspondent aux degrés de liberté portés par ces éléments.
- (b) Si les sollicitations consistent uniquement en des efforts imposés sur la surface, seuls les éléments dont un bord est situé sur  $S_T$  sont concernés, et les coefficients non nuls de  $\{\mathbb{F}\}$  correspondent aux degrés de liberté associés aux nœuds situés sur  $S_T$ .

1. Initialisation :  $\{\mathbb{F}\} = [0]$  (vecteur nul à  $N$  composantes).

2. Boucle sur les éléments : pour  $1 \leq e \leq N_e$ , faire

(i) Déterminer le nombre des nœuds  $n_e = \text{connec}(e, 0)$  de  $E_e$  ;

(ii) Déterminer la liste *nodes* des numéros globaux des nœuds de  $E_e$  :

$$\text{nodes}(k) = \text{connec}(e, k) \quad 1 \leq k \leq n_e,$$

(iii) Déterminer les coordonnées des nœuds :

$$\underline{x}^{(k)} = \text{coor}(\text{nodes}(k), :) \quad 1 \leq k \leq n_e ;$$

(iv) Déterminer la restriction *dofe* à l'élément  $E_e$  de la table des inconnues :

$$\text{dofe} = \{\text{dof}(n, j)\}, \quad j = 1, \dots, D \text{ et } n \in \text{nodes}$$

(v) Calculer  $\{\mathbb{F}_e\}$

(vi) Contribution de  $\{\mathbb{F}_e\}$  à  $\{\mathbb{F}\}$  :

$$\mathbb{F}_I = \mathbb{F}_I + \mathbb{F}_{e,p} \quad 1 \leq p \leq D_{n_e}, \quad I = \text{dofe}(p), I > 0$$

## I.5.12. Calcul numérique du facteur d'intensité de contrainte par la méthode locale

### I.5.12.1. Maillage et notion de l'élément finis singulier

En mécanique linéaire de la rupture, une fissure est modélisée, pour les problèmes plans, par une ligne à travers laquelle le champ de déplacement est discontinu. Un modèle construit par la méthode des éléments finis [43] ,[44] devra donc reproduire cette condition.

Les fonctions de base de la méthode des éléments finis sont par construction continues sur l'ensemble du domaine approché  $\Omega_h$ . Par conséquent, une fissure ne pourra pas traverser des éléments.

Le caractère singulier en pointe de fissure de la solution élastique en déformation et en contrainte modifie les propriétés de convergence de la solution approchée vers la solution exacte quand le pas de maillage tend vers zéro.

La modélisation d'un solide fissuré nécessite ainsi, pour obtenir une précision raisonnable, des aménagements spécifiques, tels que :

- (a) Maillage très raffiné au voisinage de la pointe de fissure, afin d'améliorer la représentation de champs singuliers par les fonctions de base usuelles de la méthode des éléments finis;
- (b) Création de nouveaux éléments finis, spécialement adaptés à la prise en compte de champs de déformations singuliers en  $1/\sqrt{r}$  au voisinage de la pointe de fissure [45], [46], la justification d'utilisation de cet élément se trouve en Annexe C.

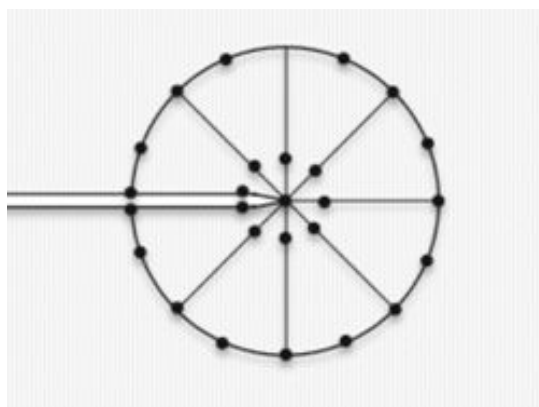


Figure 2.5: élément finis singulier [47]

### I.5.12.2.Évaluation des facteurs d'intensité de contraintes par extrapolation

Cette méthode, peu précise mais de mise en œuvre simple, consiste à exploiter directement les déplacements aux nœuds les plus proches d'une pointe de fissure, en les comparant à l'expression asymptotique (2.5) du saut de déplacement à travers la fissure [47].

$$K_I \approx \frac{-E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{d}} [\underline{u}(B)] \cdot \underline{n} \quad , \quad K_{II} \approx \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{d}} [\underline{u}(B)] \cdot \underline{t} \quad , \quad (2.61)$$

### I.5.13.Détermination de SIF par la méthode globale

#### I.5.13.1.La méthode $G - \theta$

Cette méthode introduite par Destuynder et Djaoua au début des années 1980 [42] consiste à calculer le taux de restitution d'énergie  $G$  par la dérivation de l'énergie potentielle d'une structure fissurée qui effectue une intégration sur une couronne entourant la pointe de fissure et non pas sur un contour.

Pour déterminer la variation d'énergie potentielle totale, on définit une application  $F^\varepsilon$ :

$$F^\varepsilon: R^3 \rightarrow R^3$$

$$\forall M \in \Omega, F^\varepsilon(M) = M^\varepsilon = M + \varepsilon\theta(M)$$

Si la perturbation est infinitésimale [7] le champ de contrainte et  $\sigma$  et de déplacement  $u$  se décompose de la manière suivante :

$$\sigma^\varepsilon = \sigma + \varepsilon\sigma^1 \quad (2.62)$$

$$u^\varepsilon = u + \varepsilon u^1$$

Et la variation de l'énergie potentielle s'écrit :

$$\frac{dw_p}{da} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{w_p^\varepsilon - w_p}{\varepsilon} \quad (2.63)$$

L'énergie potentielle totale du système en prenant le champ de déplacement virtuel  $u$ :

$$w_e = \frac{1}{2} Tr(\sigma \nabla U) \quad (2.64)$$

En utilisant les expressions de  $\sigma^\varepsilon$  et  $u^\varepsilon$ :



$$G = \int_{\Omega} Tr(\sigma \nabla U \nabla \theta) d\Omega - \int_{\Omega} w_e div(\theta) d\Omega \quad (2.65)$$

La solution numérique consiste à calculer l'intégrale (2.65) en utilisant un maillage triangulaire concentrique [48].

Soit  $\theta$  l'angle de propagation de la fissure par rapport à la direction initiale qui est caractérisé par son vecteur de direction  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ .

Ce vecteur doit être unitaire dans  $C_{int}$  et qui varie de 0 à 1 dans  $C_{cour}$  et qui doit être nul dans  $C_{ext}$ .

Si on note  $O$  la pointe de la fissure,  $M$  est le point d'intégration et  $I, J$  sont les points d'intersection de la droite  $OM$  respectivement avec le contour interne et externe de la couronne  $C_{cour}$ , donc nous pouvons définir le vecteur  $\theta(\theta_1, \theta_2)$  tel que :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \left(1 - \frac{IM}{IJ}\right) \cos(\theta) \\ \theta_2 &= \left(1 - \frac{IM}{IJ}\right) \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.66)$$

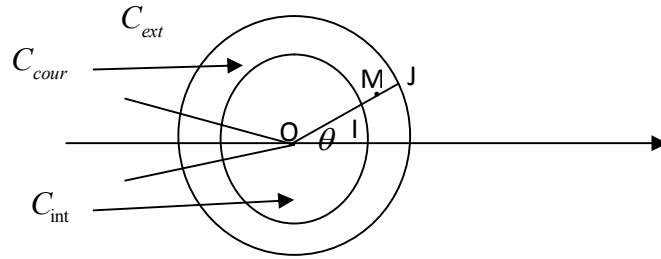


Figure 2.6: Contour d'intégration pour la méthode G- $\theta$

La détermination de  $G$  consiste à utiliser tous les éléments de la couronne et en intégrant numériquement par la méthode des points de Gauss (Annexe A) ce qui donne plus de précision [40].

$$G = \int_{couronne} \left[ Tr(\sigma \nabla U \nabla \theta) - \frac{1}{2} Tr(\sigma \nabla U) div(\theta) \right] dC$$

$$\begin{aligned} G &= \sum_{element} \sum_{pint} \left\{ (\sigma_{11} u_{1,1} + \sigma_{12} u_{1,2}) \theta_{1,1} + (\sigma_{11} + \sigma_{12} u_{2,2}) \theta_{1,2} + \right. \\ & \left. (\sigma_{12} u_{1,1} + \sigma_{22} u_{1,2}) \theta_{2,1} + (\sigma_{12} u_{2,1} + \sigma_{22} u_{2,2}) \theta_{2,2} - \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{11} u_{1,1} + \sigma_{12} u_{1,2} + \sigma_{12} u_{2,1} + \right. \right. \\ & \left. \left. \sigma_{22} u_{2,2}) (\theta_{1,1} + \theta_{2,2}) \right] \right\} w_{int} dS_{int} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Les champs des contraintes et des déplacements se fait par élément finis avec un seul maillage avec des éléments finis classiques. On peut schématiser ce calcul comme suit :

*Pour chaque élément de la couronne*

*Pour chaque point d'intégration de l'élément*

*On connaît  $\sigma_{ij}$*

*On calcul les coordonnées de  $M, I$  et  $J$*

*On calcul  $u_{ij}$  et  $\theta_{ij}$*

*On calcul  $G_{int}$  pour ce point d'intégration*

*On calcul  $G_{tot}$*

## II. Les contraintes résiduelles thermomécaniques

### II.1. Définition

Les contraintes résiduelles peuvent être définies comme étant des tensions et compressions qui existent dans le matériau suite à un procédé de fabrication et /ou de transformation sans application de forces externes ou des gradients thermique.

Les contraintes résiduelles proviennent des procédés de fabrication (la trempe, usinage, soudage...). Elles influent sur la durée de vie des composants mécaniques en accélérant ou en retardant l'apparition des fissures ou des déformations, donc ils n'ont pas toujours un effet négatif sur le comportement mécanique du matériau. Elles peuvent être bénéfiques sur les structures, lorsque les contraintes de compression en surface sont générées, pour augmenter leurs durée de vie en fatigue.

Il est très important de connaître l'ampleur et la répartition des contraintes résiduelles depuis le comportement mécanique du matériau est affectée quand elles sont présents. La contrainte résiduelle peut être considérée comme une contrainte moyenne superposée qui modifie localement la charge globale.

En outre, son introduction peut modifier la réponse des matériaux au chargement. Indépendamment de leur nature, de grandes contraintes résiduelles peuvent causer

une instabilité dimensionnelle par des phénomènes comme le fluage, la fatigue et la fissuration par corrosion sous tension.

## II.2.classification des contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles peuvent être classées par rapport à l'échelle d'observation sur laquelle elles sont significatives en trois types :

### II.2.1.Contraintes résiduelles macroscopiques

Ce type des contraintes résiduelles se développent sur certaines zones sur une échelle plus grande que la taille de grain du matériau et sont aussi appelés contraintes résiduelles de premier ordre  $\sigma^I$ . Ces zones peuvent atteindre localement un état de contraintes de grande intensité.

### II.2.2.Contraintes résiduelles à l'échelle mésoscopique

Ces contraintes varient à l'échelle d'un grain individuel ( $\alpha$  ou  $\beta$ ), appelées contraintes résiduelles du second ordre  $\sigma^{II}$  dues à la structure granulaire polycristalline. A cause des désorientations cristallines entre les grains et du glissement plastique, la déformation plastique est incompatible de grain à grain et responsable de contraintes internes.

Les contraintes résiduelles du second ordre seront alors considérées comme homogènes seulement sur des petits domaines du matériau, sur un grain ou une phase.

### II.2.3.Contraintes résiduelles à l'échelle Microscopique (micro contraintes)

Ce sont des contraintes qui existent dans un grain, appelées contraintes résiduelles du troisième ordre  $\sigma^{III}$  ou la déformation plastique n'est plus uniforme.

Il existe en effet des discontinuités microscopiques comme les bandes de glissement, les dislocations et d'autres défauts cristallins tels que les atomes de substitution, lacunes ou même des précipités. Celles-ci vont engendrer des champs de contraintes très variables localement (à l'échelle atomique).

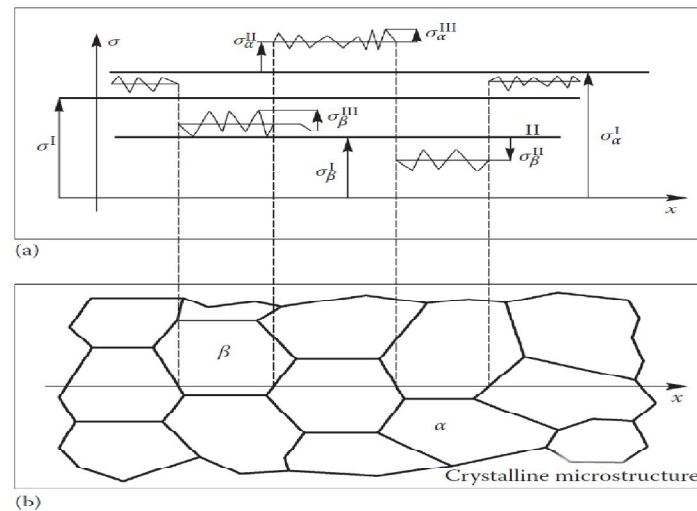


Figure 2.7: Différents types des contraintes résiduelles [49]

### II.3. Origine des contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles se développent durant la plupart des procédés de fabrication, elles peuvent également être aussi produites durant le service par chargement mécanique. Les origines de contraintes résiduelles peuvent être répertoriées sur trois types [50]:

#### II.3.1. Déformation plastique hétérogène due aux contraintes mécaniques

Sous un chargement mécanique, chaque partie d'un objet se déforme de manière non uniforme. Certaines zones subissent de grandes déformations plastiques par rapport à d'autres, tandis que certaines parties subissent seulement des déformations élastiques.

En conséquence, lorsqu'on enlève un chargement mécanique appliqué à l'extérieur, les contraintes résiduelles sont générées à l'intérieur de l'objet.

La cause externe est les contraintes appliquées de manière non uniforme, tandis que la cause interne peut être attribuée aux différentes concentrations de compositions chimiques et des orientations des grains, de telles sortes que chaque partie présente un comportement d'élasticité différent.

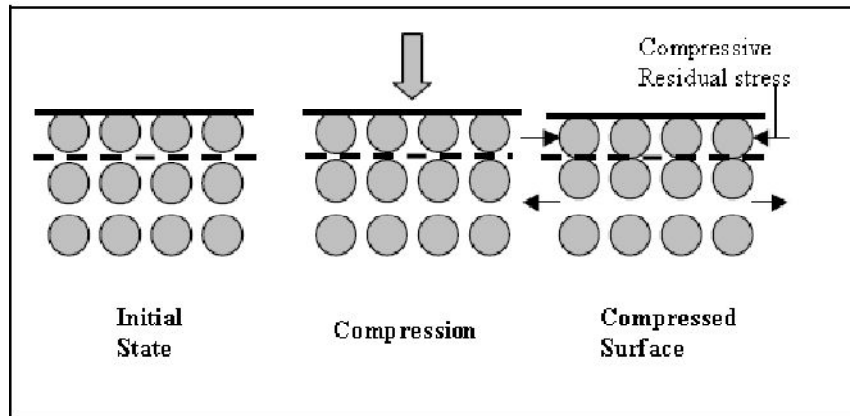


Figure 2.8: Effet de la contrainte mécanique sur la contrainte résiduelle [51]

### II.3.2. Déformation plastique hétérogène due aux contraintes thermiques

Lorsque de la chaleur est ajoutée à la plupart des matériaux, l'amplitude moyenne de vibration des atomes augmente ce qui augmente la distance entre les atomes en étirant les liaisons moléculaires provoquant l'expansion du matériau.

Si les déformations résultantes de contraintes thermiques lors des procédés de chauffage ou de refroidissement restent dans le domaine élastique et le matériau ne subit un changement de phase provoquant un changement de volume, alors les contraintes thermiques sont réversibles.

Mais, quand le matériau sera exposé à de hautes températures lors des procédés de chauffage ou de refroidissement, la limite d'élasticité du matériau est souvent dépassée ce qui provoquera par la suite des déformations plastiques ; les contraintes thermiques induites ne sont plus réversibles. Bien que la température finale dans tout l'objet soit identique, les contraintes thermiques provoqueront des contraintes résiduelles à l'intérieur du corps.

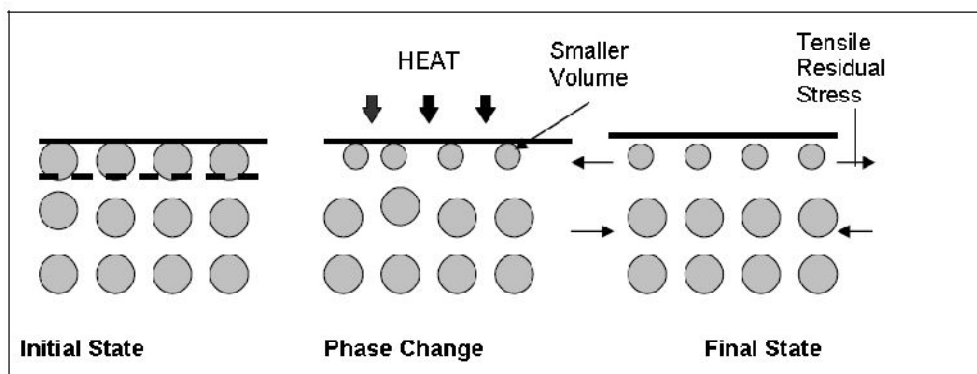


Figure 2.9: Effet de la transformation de phase thermique due la contrainte Résiduelle [51]

### II.3.3. Transformation de phase non homogènes

Au cours du chauffage ou de refroidissement, un matériau peut subir des transformations de phase, tels que la transformation martensitique lors de la trempe et la précipitation lors du vieillissement introduisant des champs de contraintes dues au changement de volume.

Un chauffage ou un refroidissement non uniforme est un résultat externe de contraintes résiduelles causées par des transformations de phase non homogènes, hors que la cause interne est la différence de concentration des composants chimiques.

### II.4. Détermination des contraintes résiduelles par les méthodes de CND

En raison de l'importance de l'influence des contraintes résiduelles sur les qualités et la durée de vie des matériaux dans l'ensemble des domaines d'activité de notre société, il n'est pas surprenant d'observer un intérêt continu pour le développement de nouvelles de mesure des contraintes résiduelles.

Diverses méthodes de mesure des contraintes résiduelles sont développées. Chacune des méthodes utilisées dépend de la forme de la pièce, de ses dimensions et du matériau. Aucune de ces méthodes ne permet de déterminer directement les contraintes. Deux classes de procédés de mesure peuvent être distinguées: les techniques destructives et non destructives.

#### II.4.1.Méthodes destructives

Les mesures destructives sont basées sur les mesures de déformation résultant d'enlèvement successive de la matière.

La variation de la déformation est utilisée, avec des hypothèses et des simplifications par rapport à la nature du champ de contraintes, afin de pouvoir reconstruire le champ de contrainte d'origine. Les hypothèses par rapport à la nature du champ de contraintes comprennent l'amplitude et les gradients dans un champ de contraintes.

Les différentes méthodes sont souvent désignées par le mode d'enlèvement de la matière :

- La méthode de découpage [52]
- La méthode de dissolution [53]
- La méthode de la flèche [54]
- La méthode de perçage [55]
- La méthode de Sachs [56]

#### II.4.2. Méthode non destructives

Les méthodes non destructives sont fondées sur les relations entre les caractéristiques physiques du matériau et le champ des contraintes résiduelles existant dans la pièce. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer :

- La méthode par diffraction des rayons X [57]
- La méthode des ultrasons [58]
- La méthode par effet de bruit de Barkhausen [59]

#### II.5. Modélisation des contraintes résiduelles thermomécanique

La contrainte de traitement thermique en tension de l'ordre de quelques dizaines de MPa, peut être mise en œuvre assez simplement par la loi thermo-élastique pour le tenseur des contraintes qui s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{E}{1-2\nu} \left[ \frac{\nu}{1+\nu} Tr \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3} \alpha \Delta T \right] I \quad (2.69)$$

### III. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'outil numérique nécessaire à une modélisation précise d'une fissure dans un maillage. Nous avons montré les singularités que pouvait engendrer une telle fissure. La bonne maîtrise de la structure de maillage est indispensable si l'on veut obtenir un calcul précis des champs mécaniques. Pour cela nous avons montré l'intérêt des éléments concentriques et des éléments singuliers avec nœud au quart à la pointe de la fissure.

Pour le calcul numérique du facteur d'intensité des contraintes qui introduit la force de la singularité, on a utilisé deux méthodes : la méthode d'extrapolation et la méthode énergétique  $G - \theta$  qui s'effectue à l'aide du taux de restitution d'énergie en utilisant une couronne entourant la pointe de la fissure.

On a vu aussi que la contrainte résiduelle thermomécanique peut se calculer à l'aide d'un modèle thermomécanique couplé.



## CHAPITRE III

### MODELISATION DES METHODES DE CONTROLE NON DESTRUCTIF

Dans ce chapitre, nous présentons les lois fondamentales de l'électromagnétisme et la formulation en potentiel A-V. Nous exposons des équations électromagnétiques et la résolution numérique par la méthode des éléments finis. On a exposé ainsi dans ce chapitre la modélisation ultrasonore pour la détermination des contraintes résiduelles.

#### I. Modélisation des courants de Foucault

Le contrôle non destructif par courant de Foucault est employé pour inspecter les objets conducteurs, ces courants dissipent de la chaleur par effet Joule dans le matériau où ils ont pris naissance. La simulation est pour but à étudier les interactions entre la sonde et la pièce à contrôler. Elle s'appuie sur une modélisation et fait appel à la méthode numérique des éléments finis pour la résolution.

#### I.1. Modélisation des phénomènes électromagnétiques

La répartition des champs magnétiques et des courants induits dans un matériau conducteur, et éventuellement magnétique est régie par les lois fondamentales de l'électromagnétisme dont la formulation la plus générale est donnée par les équations de Maxwell. Ces dernières rendent notamment compte des liens entre des phénomènes magnétiques et électriques en définissant quatre champs vectoriels : un champ électrique  $\vec{E}$  (A/m), une densité de flux électrique  $\vec{D}$  (C/m<sup>2</sup>), un champ magnétique  $\vec{H}$  (A/m) et une densité de flux magnétique  $\vec{B}$  (T) [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66].

### I.1.1. Equation de Maxwell en régime dynamique

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{théoreme d'Ampère – Maxwell}) \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{loi de conservation du flux magnétique}) \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{loi de Faraday}) \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \bar{\rho} \quad (\text{théoreme de Gauss}) \quad (3.4)$$

La première et la troisième équation expriment le couplage et l'évolution des grandeurs électriques et magnétiques alors que la deuxième assure la conservation du flux magnétique.

En utilisant la première et la quatrième équation, nous obtenons la loi de conservation de la charge électrique :

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = 0 \quad (3.5)$$

### I.1.2. Lois de comportement

Les quatre équations précédentes sont associées à des relations constitutives pour un matériau homogène isotrope :

$$\vec{B} = \bar{\mu} \vec{H} + \vec{B}_r \quad \text{et} \quad \bar{\mu} = \mu_0 \mu_r \quad (3.6)$$

$$\vec{D} = \bar{\epsilon} \vec{E} \quad \text{et} \quad \bar{\epsilon} = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (3.7)$$

$$\vec{j} = \bar{\sigma} \vec{E} \quad (\text{loi d'Ohm}) \quad (3.8)$$

### I.1.3. Hypothèses de simplifications

La plupart des travaux accomplis jusqu'à présent dans le domaine de calcul des champs et des courants de Foucault pour les systèmes électromagnétiques, sont fondés sur les hypothèses suivantes :

- Dans un milieu conducteur à basse fréquence le courant de déplacement  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  est petit devant  $\vec{j}$ .
- L'induction magnétique rémanente peut être considérée comme nulle  $\vec{B}_r$  dans le cas où le système ne contient pas d'aimant permanent.

→ Le courant d'alimentation est souvent supposée produit par un générateur de courant parfait. Ainsi la quantité  $\vec{\sigma E}$  peut être décomposée en densité de courant source  $\vec{J}_s$  et une partie due au champ électrique induit :

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{\sigma E} \quad (3.9)$$

→ La densité volumique de charge est considérée comme nulle ce qui est le cas dans presque tous les dispositifs à induction :

$$\bar{\rho} = 0 \quad (3.10)$$

Avec ces hypothèses, les équations à résoudre deviennent :

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.11)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.12)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \vec{\sigma E} \quad (3.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (3.14)$$

Et les équations constitutives deviennent :

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{\sigma E} \quad (3.15)$$

$$\vec{B} = \bar{\mu} \vec{H} \quad (3.16)$$

#### 1.1.4. Equations en régime harmonique

Dans le cas où les sources sont parfaitement sinusoïdales, on peut utiliser la notion complexe pour les représenter :

$$\vec{J}_s(t) = \vec{J}_0 \exp(j\omega t) \quad (3.17)$$

De même pour  $\bar{\rho}, \vec{E}, \vec{B}$ .

Donc les équations de Maxwell réécrivent sous la forme :

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.18)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} - (j\omega \bar{\epsilon} + \bar{\sigma}) \vec{E} = \vec{J}_s \quad (3.20)$$

$$\bar{\epsilon} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.21)$$

### I.1.5. Formulation Electromagnétique en potentiels A-V

Pour résoudre les équations de Maxwell, des changements de variable sont nécessaires, la méthode la plus reconnue est la méthode A-V, le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  et le potentiel scalaire  $V$  qui sont définis par :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.22)$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (3.23)$$

Combinant les équations (3.20), (3.22) et (3.23), on obtient :

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) + \bar{\sigma} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = \vec{J}_s \quad (3.24)$$

Pour résoudre l'équation précédente, il est nécessaire la connaissance des conditions aux limites relative au domaine d'étude soit sur la surface extérieure soit sur le plan de symétrie.

→ Condition type Dirichlet

Le champ électromagnétique imposé nul sur les frontières :

$$\vec{A} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.25)$$

→ Condition type Neumann

La dérivée du champ imposée nulle sur les frontières :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.26)$$

### I.1.6. Cas d'une source de courant de forme sinusoïdale

Pour le cas d'une source de courant parfaitement sinusoïdale le système s'écrit :

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) + j\omega \bar{\sigma} (\vec{A} + \nabla V) = \vec{J}_s \quad (3.27)$$

$$\nabla \cdot \left( -j\omega \bar{\sigma} (\vec{A} + \nabla V) \right) = 0 \quad (3.28)$$

#### I.1.6.1. Les condition de Jauge

Pour assurer l'unicité de la solution du système, il est nécessaire d'ajouter une condition de Jauge qui s'écrit d'une façon générale :

$$\nabla \cdot \bar{U} = 0 \quad (\text{Jauge de Coulomb}) \quad (3.29)$$

$$\nabla \cdot \bar{U} + k \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Jauge de Lorentz}) \quad (3.30)$$

Dans le cas bidimensionnel, on utilise la jauge de Coulomb qui est la plus efficace, cette jauge est introduite par le terme de pénalité :

$$-\nabla \left( \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \vec{A} \right) \quad (3.31)$$

Donc, on obtient la formulation A-V jaugée

$$-\nabla \left( \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \vec{A} \right) + j\omega \bar{\sigma} \vec{A} = \vec{J}_s \quad (3.32)$$

### I.1.7. Techniques de calcul d'impédance

On considère une bobine de section  $\Omega$  formée de  $N$  spire. La densité de courant est de répartition uniforme qui soumis à une tension du par un courant d'intensité  $I_c$ .

$$I_c = \iint_{\Omega} \vec{J} d\Omega \quad (3.33)$$

$$I_c = \frac{J\Omega}{N} \quad (3.34)$$

Il y'a différent type de formulation de l'impédance qui sont possible selon la variable d'état utilisée.

### I.1.7.1. Impédance à travers les énergies électromagnétique

L'énergie électromagnétique du système (capteur-pièce) est égale à l'énergie dissipée par effet Joule :

$$P_J = \iiint_V \frac{J}{\sigma} dV \quad (3.35)$$

Et

$$P_J = RI_c^2 \quad (3.36)$$

D'où :

$$R = \frac{N^2}{S^2 I_c^2} P_J \quad (3.37)$$

De même l'énergie emmagasinée, nous permet de déduire l'inductance (la réactance) du système :

$$X = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{B^2}{\mu} dV \quad (3.38)$$

Et

$$X = \frac{1}{2} LI_c^2 \quad (3.39)$$

D'où

$$L = \frac{2N^2}{S^2 J^2} X \quad (3.40)$$

Cette méthode permet de calculer la résistance et la réactance d'une bobine de manière simple et rapide mais elle est applicable uniquement au capteur double fonctions [ 67].

### I.1.7.2. Impédance à travers la théorie des circuits

La théorie des circuits est généralisée par les équations (3.19) et (3.20) des équations de Maxwell qui traduisent la loi des nœuds et la loi des Maille (Kirchoff). Cette dernière équation est écrite en fonction du potentiel vecteur magnétique et du potentiel scalaire électrique donnée par l'équation (3.23) et réécrite en notation complexe par :

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla V \quad (3.41)$$

Après intégration sur le contour d'une spire l'équation (3.41) devient :

$$-\iint_c \nabla V d\vec{l} = \int_c \vec{E} d\vec{l} + j\omega \int_c \vec{A} d\vec{l} = 0 \quad (3.42)$$

Si  $dU$  est la tension le long du contour  $c$  :

$$U = -\iint_c \nabla V d\vec{l} \quad (3.43)$$

Et l'équation (3.43) devient :

$$U = \int_c \vec{E} d\vec{l} + j\omega \int_c \vec{A} d\vec{l} \quad (3.44)$$

L'expression de la tension totale en fonction des champs s'écrit :

$$U = \frac{1}{\Omega} \iint_{\Omega} \left( \int_c \vec{E} d\vec{l} \right) d\Omega + \frac{j\omega}{\Omega} \iint_{\Omega} \left( \int_c \vec{A} d\vec{l} \right) d\Omega \quad (3.45)$$

Et le courant total traversant le contour est :

$$\bar{Z} = \frac{U}{I_c} = \frac{NU}{\Omega I_c} = R + jX \quad (3.46)$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{\Omega I_c} \iint_{\Omega} \left( \int_c \vec{E} d\vec{l} \right) d\Omega + \frac{j\omega}{\Omega I_c} \iint_{\Omega} \left( \int_c \vec{A} d\vec{l} \right) d\Omega \quad (3.47)$$

Le potentiel vecteur magnétique est écrit sous la forme complexe comme suit :

$$\bar{A} = Ae^{j\omega t} = \text{Re}(\bar{A}) + \text{Im}(\bar{A}) \quad (3.48)$$

En injectant cette expression dans l'équation (3.45), on trouve :

$$U = \iint_{\Omega} \left( \int_c \vec{E} d\vec{l} \right) d\Omega - \omega \iint_{\Omega} \text{Im} \left( \int_c \vec{A} d\vec{l} \right) d\Omega + \omega \iint_{\Omega} \text{Re} \left( \int_c \vec{A} d\vec{l} \right) d\Omega \quad (3.49)$$

En appliquant la relation (3.47), nous arrivons à la forme générale de l'impédance :

$$R = \frac{1}{I_c} \iint_{\Omega} \left( \int_c \vec{E} d\vec{l} \right) d\Omega - \frac{\omega}{I_c} \iint_{\Omega} \text{Im} \left( \int_c \vec{A} d\vec{l} \right) d\Omega \quad (3.50)$$

$$X = j \frac{\omega}{I_c} \iint_{\Omega} \text{Re} \left( \int_c \vec{A} d\vec{l} \right) d\Omega \quad (3.51)$$

### I.1.7.3. Impédance à travers l'induction magnétique

Partant de l'équation (3.19) de Maxwell, après intégration sur la surface  $S$  enveloppée par le contour  $c$  de la bobine et application du théorème de Stokes, nous arrivons à :

$$\int_c \vec{E} d\vec{l} = -j\omega \iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad (3.52)$$

La tension totale de la bobine est la somme des tensions élémentaires des spires, donc :

$$\iint_{\Omega} (\vec{E} d\vec{l}) d\Omega = -j\omega \iint_{\Omega} \left( \iint_S \vec{B} d\vec{S} \right) d\Omega = -j\omega \iint_{\Omega} \phi d\Omega \quad (3.53)$$

Sachant que l'impédance s'écrit comme :

$$\bar{Z} = R + jX = \frac{1}{I_c} \iint_{\Omega} \left( \int_c \vec{E} d\vec{l} \right) d\Omega \quad (3.54)$$

En introduisant la forme complexe du flux magnétique :

$$\bar{Z} = \frac{\omega}{I_c} \left( \iint_{\Omega} \text{Im}(\phi) d\Omega - j \iint_{\Omega} \text{Re}(\phi) d\Omega \right) \quad (3.55)$$

Donc les paramètres de l'impédance sont :

$$R = \frac{\omega}{I_c} \iint_{\Omega} \text{Im}(\phi) d\Omega \quad (3.56)$$

$$X = -j \iint_{\Omega} \text{Re}(\phi) d\Omega \quad (3.57)$$

Ou bien :

$$R = \frac{\omega}{I_c} \iint_{\Omega} \left( \iint_S \text{Im}(\vec{B} d\vec{S}) dS \right) d\Omega \quad (3.58)$$

$$X = -j \frac{\omega}{I_c} \iint_{\Omega} \left( \iint_S \text{Re}(\vec{B} d\vec{S}) dS \right) d\Omega \quad (3.59)$$

Ces expressions sont utilisées pour les capteurs à double fonction ou à fonctions séparées.

En introduisant le potentiel vecteur magnétique, les deux expressions de l'impédance deviennent :

$$\text{Re}(Z) = \frac{N^2}{I_c^2} \omega \iint_S 2\pi r \text{Im}(A) dS \quad (3.60)$$



$$Im(Z) = \frac{N^2}{JS^2} \omega \iint_S 2\pi r Re(A) dS \quad (3.61)$$

## I.2. Résolution numérique par la méthode des éléments finis des équations électromagnétiques

La méthode des éléments finis consiste à transformer des équations aux dérivées partielles à un système d'équation algébrique. Alors on décompose l'ensemble du domaine  $\Omega$  en  $n$  sous ensemble  $\Omega_e$  des éléments, ensuite en défini  $N$  noeud du domaine ou l'on doit chercher une bonne approximation de la grandeur  $\vec{A}$ . On approche la fonction inconnue au moyen d'une interpolation polynomiale en fonction de l'inconnu  $A_j$  sur les nœuds. C'est une approximation nodale par sous domaine  $\Omega_e$  du domaine  $\Omega$  qui permet de choisir les fonctions d'interpolations  $\alpha_i$  différentes sur chaque sous domaine [68].

$$A = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j \quad (3.62)$$

Suite à la transformation intégrale et la discrétisation, on obtient un système matriciel dont la résolution de ce système est la dernière étape de cette méthode numérique.

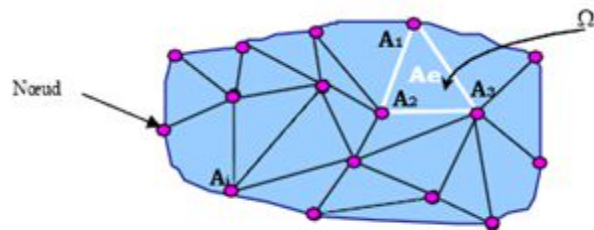


Figure 3.1: Maillage de type éléments finis [23]

### I.2.1. Cas magnétostatique

Pour le cas cartésien, l'équation de l'électromagnétisme est donnée par :

$$-\left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\nu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\nu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right) = J_s \quad (3.63)$$

La formulation intégrale de l'équation (3.63) en appliquant la méthode projective de Galerkin [4], [79] :

$$\iint_{\Omega} \alpha_j \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J_s \right) . dx dy = 0 \quad (3.64)$$

L'équation (3.64) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\iint_{\Omega} \alpha_j \left( - \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right) . dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_j . J_s . dx dy \quad (3.65)$$

En appliquant le théorème de Green au premier terme de l'équation (3.65) nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega} \alpha_j . \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right) . dx dy \\ = - \iint_{\Omega} \bar{v} \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} . \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} . \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \bar{v} \left( \frac{\partial A}{\partial x} . \alpha_j . \cos(n, x) + \frac{\partial A}{\partial y} . \alpha_j . \cos(n, y) \right) \alpha_j d\Gamma \end{array} \right. \quad (3.66)$$

Ou :

$\cos(n, x)$  et  $\cos(n, y)$  : sont les cos directeurs au point considéré de la frontière  $\Gamma$

L'équation peut être écrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \bar{v} \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} . \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} . \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\Gamma} \bar{v} \left( \frac{\partial A}{\partial n} \right) \alpha_j d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_j . J_s . dx dy \quad (3.67)$$

Pour le cas des condition aux limite de type Newman ou Diriklet, le terme de la frontière s'annule tel que :

$$\int_{\Gamma} \bar{v} \left( \frac{\partial A}{\partial n} \right) \alpha_j d\Gamma = 0 \quad (3.68)$$

Et l'équation (3.67) devient :

$$\iint_{\Omega} \bar{v} \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} . \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} . \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_j . J_s . dx dy \quad (3.69)$$

Cette équation, on peut la réécrire de la manière suivante :

$$\iint_{\Omega} \bar{v} (\nabla \alpha_j . \nabla A) dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_j . J_s . dx dy \quad (3.70)$$

Sachant que :

$$A = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j \quad (3.71)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (3.70) :

$$\sum_{j=1}^N \left[ \iint_{\Omega} \bar{v}(\nabla\alpha_i \cdot \nabla\alpha_j) dx dy \right] A_j = \iint_{\Omega} \alpha_j \cdot J_s \cdot dx dy \quad (3.72)$$

L'équation (3.72), on la réécrit sous forme matricielle comme suit :

$$[M][A] = [F] \quad (3.73)$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \bar{v}(\nabla\alpha_i \cdot \nabla\alpha_j) dx dy \quad (3.74)$$

$$F_j = \iint_{\Omega} \alpha_j \cdot J_s \cdot dx dy \quad (3.75)$$

[A] : c'est le vecteur des inconnus du domaine d'étude

### 1.2.2. Equation magnétodynamique

Pour le cas cartésien l'équation de la magnétodynamiques s'écrit de manière suivante :

$$\nabla \times \bar{v} \times A + \bar{\sigma} \frac{\partial A}{\partial t} = J_s \quad (3.76)$$

En régime harmonique l'équation (3.76) s'écrit :

$$\nabla \times \bar{v} \times A + j\bar{\sigma}\omega A = J_s \quad (3.77)$$

Après transformation l'équation (3.77) s'écrit :

$$-\left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right) + j\bar{\sigma}\omega A = J_s \quad (3.78)$$

La formulation intégrale de l'équation (3.78) est donnée par :

$$\iint_{\Omega} \alpha_j \left( -\left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right) + j\bar{\sigma}\omega A - J_s \right) dx dy = 0 \quad (3.79)$$

L'équation (3.79) peut réécrire comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_j \left( - \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right) + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_j \bar{\sigma} A \right) dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_j J_s \cdot dx dy \quad (3.80)$$

On applique le Théorème de Green :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_j \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{v} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy \\ & - \iint_{\Omega} \bar{v} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy \\ & + \int_{\Gamma} \bar{v} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \alpha_j \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \alpha_j \cdot \cos(n, y) \right) \alpha_j d\Gamma \\ & = - \iint_{\Omega} \bar{v} (\nabla \alpha_i \cdot \nabla A) dx dy + \int_{\Gamma} \bar{v} \left( \frac{\partial A}{\partial n} \right) \alpha_i d\Gamma \end{aligned} \right. \quad (3.81)$$

En remplaçant l'équation (3.81) dans l'équation (3.80) et en trouve :

$$\iint_{\Omega} \bar{v} (\nabla \alpha_i \cdot \nabla A) dx dy - \int_{\Gamma} \bar{v} \left( \frac{\partial A}{\partial n} \right) \alpha_i d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_j \bar{\sigma} A dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_j J_s \cdot dx dy \quad (3.82)$$

Dans le cas des équations aux limite de Type Newman ou Diriklet l'équation (3.82) devient :

$$\iint_{\Omega} \bar{v} (\nabla \alpha_i \cdot \nabla A) dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_j \bar{\sigma} A dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_j J_s \cdot dx dy \quad (3.83)$$

Sachant que :

$$A = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j \quad (3.84)$$

En remplaçant dans l'équation (3.83) :

$$\sum_{j=1}^N \left[ \iint_{\Omega} \bar{v} (\nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j) dx dy \right] A_j + j\omega \sum_{j=1}^N \left[ \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \alpha_j \bar{\sigma} dx dy \right] A_j = \quad (3.85)$$

$$\iint_{\Omega} \alpha_j \cdot J_s \cdot dx dy$$

L'équation s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$[M][A] + j\omega[L][A] = [F] \quad (3.86)$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \nu (\nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j) dx dy.$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot dx dy .$$

$$F_j = \iint_{\Omega} \alpha_j \cdot J_z \cdot dx dy .$$

$[A]$  : c'est le vecteur des inconnu du domaine d'étude tel que  $A = A_r + jA_j$

C'est un système d'équation linéaire à résoudre par la méthode directe (Gauss, Cholesky) ou itérative (Jacobi) ou non linéaire (Newton-Raphson).

Pour le cas axisymétrique, la résolution détaillé de l'équation magnétostatique et magnétodynamique se trouve en Annexe D.

## II. Modélisation des ultrasons pour la détermination des contraintes résiduelles

Le contrôle par ultrasons est basé sur le principe de la vitesse de propagation des ondes ultrasonores en fonction de l'état de contrainte du matériau.

Les variations de vitesse des ondes ultrasons peuvent être observées lorsqu'un matériau est soumis des contraintes, ces variations fournissent une mesure de la contrainte moyenne le long du trajet de l'onde.

Les coefficients acousto-élastiques nécessaires pour l'analyse sont généralement calculés en utilisant des tests d'étalonnage. Différents types d'ondes peuvent être utilisés mais la technique couramment utilisée est la méthode d'onde longitudinale. Une meilleure sensibilité est obtenue lorsque l'onde se propage dans la même direction que la contrainte.

Dans un matériau isotrope, l'onde élastique se propage par une vitesse caractéristique.

Les vitesses de l'onde longitudinale ( $V_L$ ) et transversale ( $V_T$ ) sont données par :

$$\rho_m V_L^2 = \lambda + 2\mu = K + \frac{3}{4}\mu \quad (3.87)$$

$$\rho_m V_T^2 = \mu \quad (3.88)$$

En élasticité les propriétés mécaniques sont données par le module de Young ( $E$ ) et le module de cisaillement ( $\bar{G}$ ) telle que :

$$\bar{G} = \mu \quad (3.89)$$

$$E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu) \quad (3.90)$$

$$K = (3\lambda + 2\mu)/3 \quad (3.91)$$

En modifiant l'angle d'incidence, ou bien le principe de la génération d'onde, le faisceau sonore peut être transformé en surface et on l'appelle l'onde rampante. L'onde de Rayleigh ou de surface, c'est l'onde guidée qui suit la forme du composant dont sa vitesse ( $V_R$ ) est donnée par l'approximation de Bergman [69] :

$$V_R = V_T(0.87 + 1.12\nu)/(1 + \nu) \quad (3.92)$$

Le modèle le plus utilisé pour la description de l'effet acoustoélastique est l'effet de l'influence de l'état de contrainte sur la vitesse de propagation des ondes ultrasonores donné par Hyghes et Kelly [70] en utilisant la théorie de déformation de Murnaghan [71] et le troisième terme dans l'énergie élastique du solide.

L'énergie de contrainte de déformation par unité de volume peut être écrite comme une série de puissance de déformation élastique  $\varepsilon$ .

$$\phi(\varepsilon) = \phi_0 + g \cdot C_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} + \frac{1}{6} C_{ijklmn} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} \cdot \varepsilon_{mn} + \dots \quad (3.93)$$

Pour une déformation de zéro l'énergie de déformation est nulle et le second terme qui est l'énergie potentielle peut être égal à zéro si le référentiel n'est pas important.

Avec :

$C_{ijkl}$  : Le tenseur des constantes du second ordre du solide élastique

$C_{ijklmn}$  : Le tenseur des constantes du troisième ordre du solide élastique

Le nombre des constantes élastique se réduit à deux constantes indépendantes de second ordre ( $\lambda, \mu$ ) et trois constantes indépendantes de troisième ordre ( $l, m, n$ ).

Pour le cas d'un matériau isotrope, la densité d'énergie de déformation dépend seulement des invariants  $I_1, I_2$  et  $I_3$  du tenseur de déformation de Lagrange sous une rotation arbitraire :

$$\phi(\varepsilon) = \frac{(\lambda+2\mu)I_1^2}{2} - 2\mu I_2 + \frac{(1+2m)I_1^3}{3} - 2mI_1I_2 + nI_3 \quad (3.94)$$

Et la densité d'un corps déformé peut être exprimé en terme des invariants :

$$\rho_m(\varepsilon) = \rho/(1 + 2I_1 + 4I_2 + 8I_3) \quad (3.95)$$

Pour le cas de la propagation d'une onde plane le long de l'axe principale de déformation, le nombre des déformations se réduit à trois :

$$\varepsilon_{ii}, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} \quad (3.96)$$

Par conséquent les invariants des contraintes se réduit à :

$$I_1 = \varepsilon_{ij} \quad (3.97)$$

$$I_2 = -(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji} + \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki}) \quad (3.98)$$

$$I_3 = 0 \quad (3.99)$$

En remplaçant dans l'équation (3.93) [70], [72], la solution de l'équation d'onde polarisée en une seule direction principale pour un solide avec une structure cubique s'écrit comme :

$$\rho_0 V_{ii}^2 = \lambda + 2\mu + (2l + \lambda)(\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k) + (4m + 4\lambda + 10\mu)\varepsilon_i \quad (3.100)$$

$$\rho_0 V_{ij}^2 = \mu + (\lambda + m)(\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k) + 4\mu\varepsilon_i + 2\mu\varepsilon_j - \frac{n}{2}\varepsilon_k \quad (3.101)$$

$$\rho_0 V_{ik}^2 = \mu + (\lambda + m)(\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k) + 4\mu\varepsilon_i + 2\mu\varepsilon_k - \frac{n}{2}\varepsilon_j \quad (3.102)$$

Avec :

Le premier index de  $V$  représente la direction de propagation du son et le deuxième index représente la direction de vibration.

L'équation (3.100) représente l'équation fondamentale de l'évaluation ultrasonore des contraintes résiduelles utilisée uniquement pour le cas où l'onde ultrasonore se propage et vibre le long de l'axe principale [74].

Dans le cas d'un chargement uniaxial ou le champs de déformation est parallèle au sens de propagation de l'onde, les équations précédente s'écrivent sous la forme :

$$\rho_0 V_{ii}^2 = \lambda + 2\mu + [4(\lambda + 2\mu) + 2(\mu + 2m) + \nu\mu \left(1 + \frac{2l}{\lambda}\right)]\varepsilon \quad (3.103)$$

$$\rho_0 V_{ij}^2 = \mu + [4\mu + \nu \left(\frac{n}{2}\right) + m(1 + \nu)]\varepsilon \quad (3.104)$$

$$\rho_0 V_{ij}^2 = \mu + [4\mu + \nu \left(\frac{n}{2}\right) + m(1 + \nu)]\varepsilon \quad (3.105)$$

Egle et Bray [74] ont défini le coefficient acoustoélastique en effectuant une dérivation des équations précédentes par rapport à la déformation principale. Ce coefficient s'écrit :

$$K_1 = \frac{d\frac{V_{11}}{V_0}}{Ed\varepsilon} = 2 + \frac{\mu + 2m + \nu\mu \left(1 + \frac{2l}{\lambda}\right)}{\lambda + 2\mu} \quad (3.106)$$

L'équation de base pour le calcul de contrainte pour un solide élastique isotrope semi-infini, défini par un plan normal  $(X_1, X_2)$ , les vitesses de propagation des ondes longitudinales suivant les directions principales  $(X_1, X_2)$  d'un champ de contraintes sont exprimées par :

$$\frac{V_{ii} - V_{ii}^{\circ}}{V_{ii}^{\circ}} = K_1 \sigma_{ii} + K_2 \sigma_{jj} \quad (3.107)$$

### III. Conclusion

Dans ce chapitre ,on a vu que la modélisation des CF est faite par la résolution numérique par la méthode des éléments finis des équations de Maxwell, pour le cas ou les sources sont parfaitement sinusoïdales avec quelques hypothèses simplificatrices. On a vu aussi que l'énergie dissipée par effet Joule et l'énergie emmagasinée nous permet de déduire la résistance et la réactance.

Pour la modélisation des contraintes résiduelles par la méthode des ultrason, on a utilisé la théorie de l'acoustoélasticité par la technique des ondes longitudinale qui traduit la vitesse de propagation en fonction de l'état de déformation.



## CHAPITRE 4

### PARTIE EXPERIMENTALE

Dans ce chapitre on a commencé par donner les propriétés chimiques et physiques des alliages d'aluminium, ensuite on a présenté tous les équipements utilisés dans cette thèse et les étapes nécessaires pour le contrôle par courant de Foucault et les ultrasons ainsi que la caractérisation du matériau par les essais mécaniques et la cryogénie, en débutant par la préparation des échantillons avec différents types de fissures.

#### I. Propriétés chimiques et physiques des alliages d'aluminium utilisés

Même si à l'heure actuelle, l'industrie aéronautique lance de nombreux travaux de recherche autour des matériaux composites, les alliages métallique et notamment les alliages d'aluminium, restent incontournables. Les alliages d'aluminium de la série 7000 sont largement utilisés pour des applications mécaniques, l'alliage 7075-T6 étant des précurseurs pour des applications aéronautiques.

L'aluminium pur ne présente que peu d'intérêt, car ses propriétés physico-chimique sont médiocres. Ses alliages sont des matériaux de choix dans des secteurs comme l'aéronautiques et l'automobiles. On distingue essentiellement trois groupes d'aluminium :

1. L'aluminium pur : très ductile, mou, excellent conducteur d'électricité.
2. Les alliages pour corroyage pour fabriquer les bruts laminés ou étirés (les barres, tôles ...)
3. Les alliages d'aluminium de fonderie.

L'alliage d'aluminium utilisé dans cette thèse est le 7075-T6 ses compositions chimiques et propriétés physico-mécaniques sont données par les tableaux suivants :

Tableau 4.1 : compositions chimiques d'alliage d'Aluminium 7075

Alliage	Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	Ti	Autre
7075	0.40	0.50	1.20/2	0.30	2.10/2.90	0.18/0.28	5.10/6.10	0.20	Al :solde

Tableau 4.2: Propriétés physiques d'alliage d'Aluminium 7075

Alliage	Masse Volumique ( $kg/dm^3$ )	Intervalle de fusion Approximatif ( $C^\circ$ )	Coefficient de dilatation linéique	Capacité thermique massive ( $J/kg^\circ$ )	Etat	Conductivité thermique ( $W/mC^\circ$ )	Résistivité à $20C^\circ$ ( $\mu\Omega cm$ )
7075	2.80	475-630	23.5	915	T6	130	5.2

Tableau 4.3: Propriété mécanique des tôles en alliage d'Aluminium 7075 d'épaisseur entre 3mm et 6 mm

Alliage	Module De Young ( $Gpa$ )	Coefficient de poisson	Limite de rupture ( $N/mm^2$ )	Limite d'élasticité ( $N/mm^2$ )	Allongement (%)
7075	72	0.3	535	470	7

## II. Préparation des échantillons

On a préparé 20 plaque d'Al de type 7075 – T6, avec une longueur de 180mm, d'une largeur de 60mm et d'une épaisseur de 3mm. Neuf plaques représentent un défaut de type rainure (Fig 4.1), neuf présentent un défaut de type entaille (Fig 4.2), neuf d'autres présentent des fissures elliptiques centrées (Fig 4.3) ; et deux plaques restent sans défaut.



Figure 4.1: Plaque d'Al 7075 avec une rainure



Figure 4.2: Plaque d'Al 7075 avec un défaut elliptique centré



Figure 4.3: Plaque d'Al 7075 avec une entaille

### III. Contrôle par courant de Foucault

Pour le contrôle par courant de Foucault, on a utilisé un impédance mètre de type Agilent 4284A- LCR Meter, sous une gamme de fréquence de 20Hz à 1MHz. La sonde est en ferrite pointue à l'extrémité, son diamètre  $d = 6.5mm$  et un nombre de spire  $n = 450$  avec un diamètre de fil égal à  $0.013 mm$ . La manipulation du contrôle par CF est facilement accomplie avec un logiciel qui est basé sur le langage de programmation Labview.

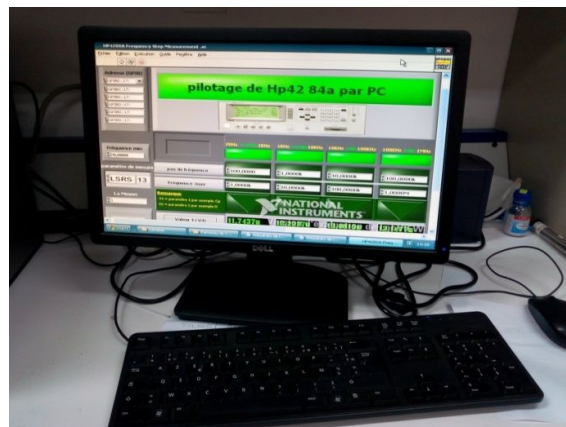


Figure 4.4: Impédance mètre de type Agilent 4284A

### IV. Contrôle par ultrasons

Pour cette technique de contrôle par contact, on a utilisé une sonde de type paramétrique avec un diamètre  $d = 6.5mm$  et de fréquence  $f = 10MHz$ , et un générateur d'impulsion de type Olympus, modèle 5800 d'une gamme de fréquence de  $f = 1KHz$  à  $f = 35MHz$ .

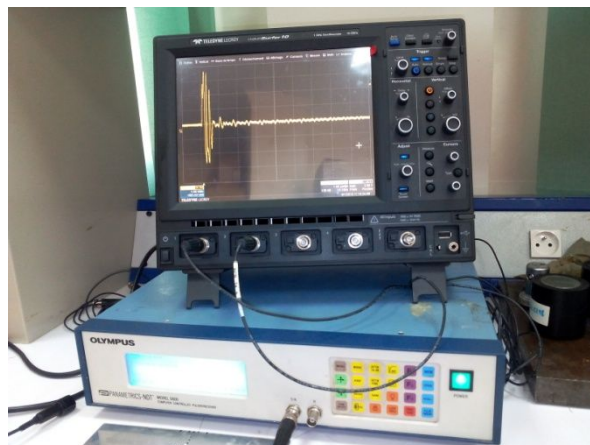


Figure 4.5: Générateur d'impulsion Olympus 5800

## V. Essais Mécanique

### V.1. Essai de traction

La procédure de l'essai consiste à soumettre des éprouvette à un effort de traction unidirectionnel croissant en vue de déterminer la courbe caractéristique du matériau en mesurant l'effort et l'allongement. L'essai de traction sur nos éprouvettes est réalisé par la machine de traction de type Instron pour la charge  $650\text{KN}$  .



Figure 4.6: La machine de traction type Instron pour la charge  $650\text{KN}$

A fin de faire le balayage de la sonde sur la plaque en tension pour le contrôle de Foucault, on a créer un dispositif a fin de bien fixer la sonde sur le point désiré.



Figure 4.7: Dispositif de fixation sur la plaque en tension

### V.2. Essai de dureté

La mesure de la dureté est employé généralement pour caractériser le matériau. Il s'agit de s'assurer de sa résistance. Les essais de dureté Vickers (indenteur en forme de pyramide normalisé en diamant) et Brinell (indenteur en bille en acier) sous une charge de 10g sont fait par le duromètre (Innovatest Nemesis 900TM).



Figure 4.8: Duromètre Innovatest Nemesis 900TM

### V.3. Essai de résilience

La résilience est la capacité d'un matériau à absorber de l'énergie quand il se déforme sous l'effet d'un choc. Cet effet consiste à mètre une éprouvette normalisé entaillé en U ou en V placée sur deux appuis ,et de mesurer l'énergie nécessaire pour rompre l'éprouvette par un pendule qui la frappe par une vitesse de 4m/s. Notre essai est fait par le modèle Charpy 750 J/D2M.



Figure 4.9: Modèle Charpy 750 J/D2M

#### IV. La cryogénie

Pour caractériser les contraintes au voisinage de la fissure suite à un chargement uni-axial à basse température, on a utilisé l'Azote liquide en faisant une immersion des tôles dans cet liquide, ensuite on applique une charge uni-axiale en machine de traction lorsque la température atteint le plage de température  $[-30,-10]$ . Ce gaz se refroidi en dessous de son point d'ébullition à  $-195,79\text{ }^{\circ}\text{C}$ . C'est un liquide cryogénique très courant, tant dans le domaine de la recherche scientifique. On stocke l'Azote liquide dans des bonbonnes isothermes réservées à cet usage.



a: L'Azote liquide



b: Immersion des tôles d'Aluminium dans l'Azote liquide

Figure 4.10 :La cryogénie

#### IIV. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les propriétés mécaniques de l'alliage d'Aluminium 7075-T6 utilisé pour le revêtement des avions ainsi que les équipements utilisés pour le contrôle non destructif et la caractérisation du matériau par les essais mécaniques et la cryogénie

## CHAPITRE V

### RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Ce chapitre présente les résultats numériques et expérimentaux ainsi que les interprétations. Pour la partie numérique, on a déterminé le champ de contraintes au voisinage de la fissure avec et sans contraintes résiduelles ainsi que le facteur d'intensité de contrainte par la méthode des éléments finis. Aussi bien la validation d'essai de contrôle par courant de Foucault. Concernant la partie expérimentale on a caractérisé les défauts et les contraintes résiduelles au voisinage de la fissure par différentes méthodes de contrôle non destructif tel que les courants de Foucault et les ultrasons ainsi une caractérisation mécanique de traction, de dureté et de résilience pour le matériau.

#### I. Résultats expérimentaux

##### I.1. Caractérisation des défauts et des contraintes par le contrôle par courant de Foucault

On a fait un balayage de la sonde sur des plaques qui présentent trois types différents des fissures présentés par la figure 5.24, avec une gamme de fréquence de 20hz -1MHz et une tension de 220V. Le balayage de la sonde sur la surface des plaques autour des fissures est présenté par la figure 5.25 par des points distant de 5mm numérotés dans le sens trigonométrique à fin de caractériser les contraintes autour de la pointe de chaque type de fissure sachant que le point 4 se situe dans la zone d'élaboration, le point 5 se situe dans la zone singulière et le point 6 se situe dans la zone des champs lointains.



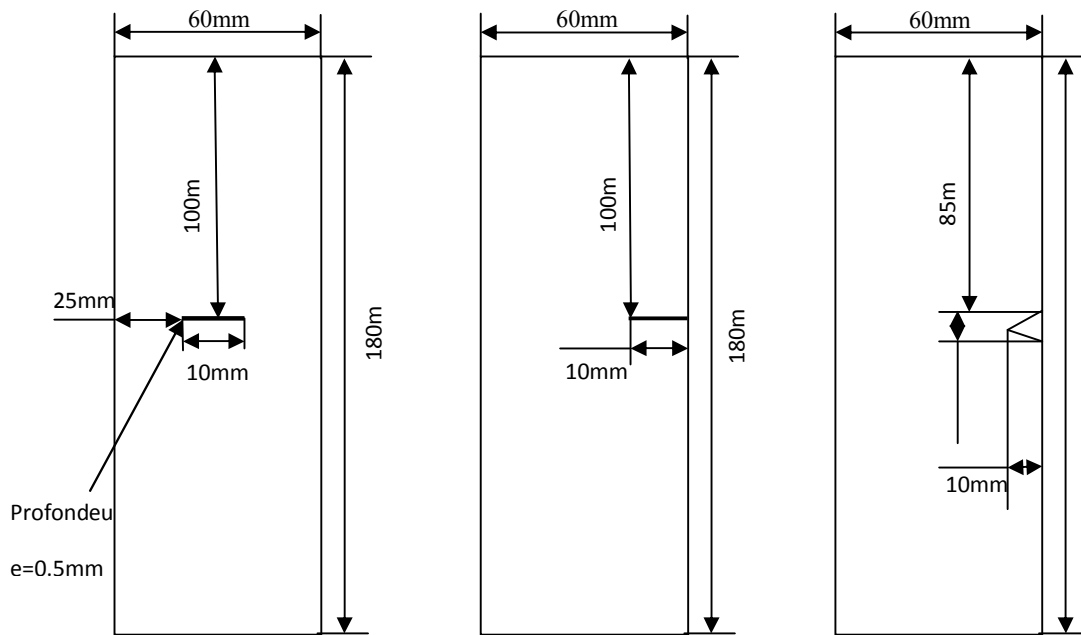


Figure 5.1: Les plaques fissurées préparée pour le contrôle

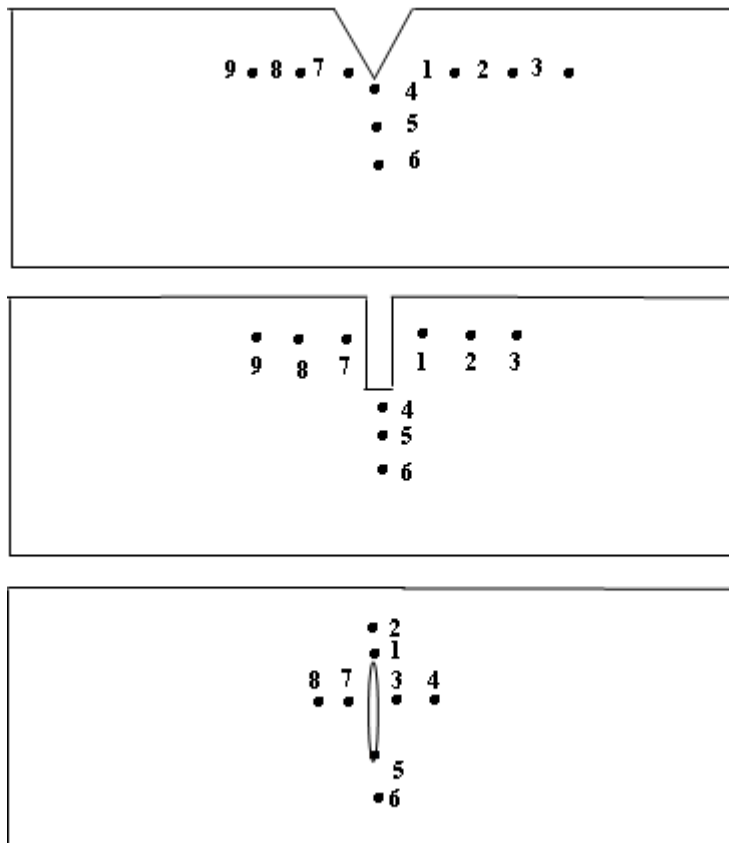


Figure 5.2: Balayage de la sonde sur les plaques fissurées

Le diagramme d'impédance pour une plaque sans fissure est :

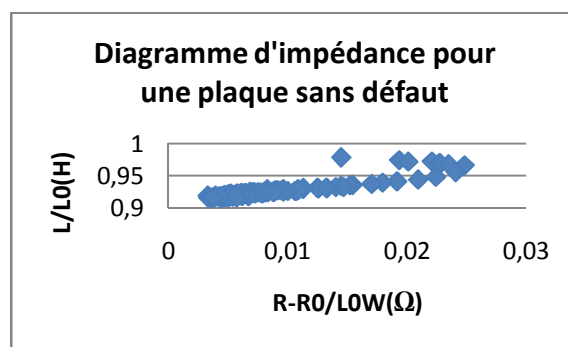


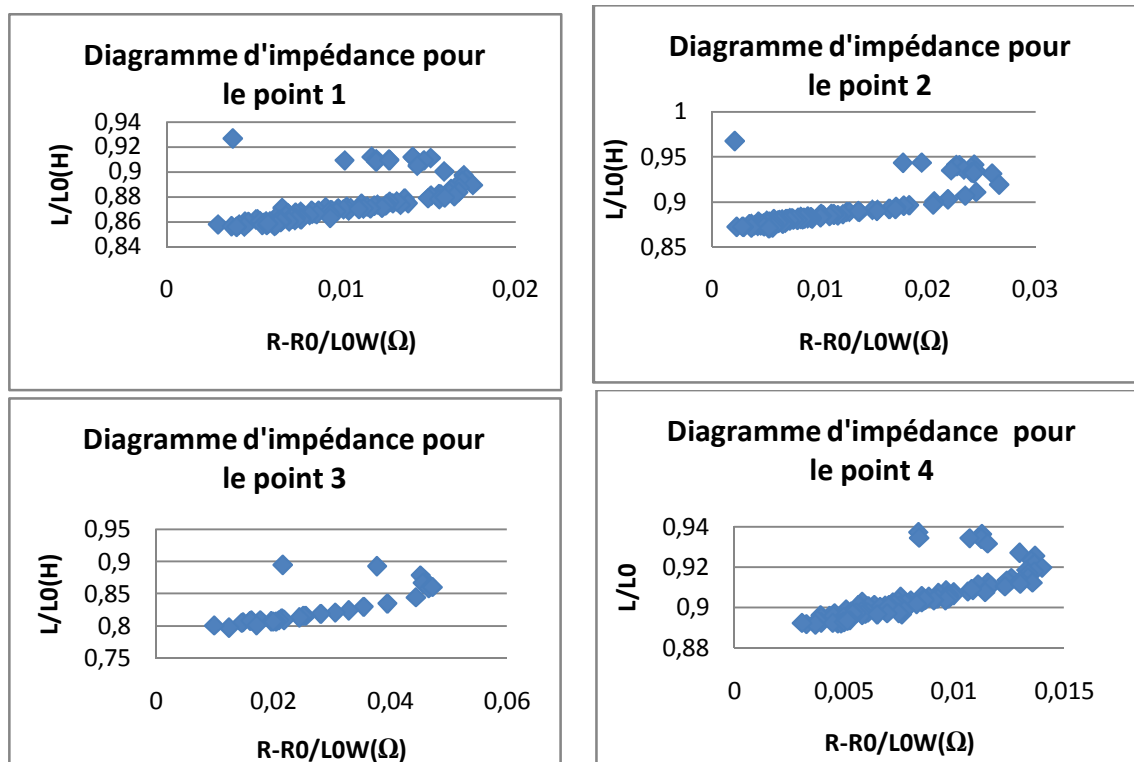
Figure 5.3: Diagramme d'impédance pour une plaque sans défaut

Les valeurs expérimentales de  $R$  et  $L$  de la plaques sans défaut sont données par le tableau suivant :

Tableau 5.1: valeurs expérimentales de  $R$ ,  $L$  et  $\bar{Z}$  de la plaques sans défaut

	$f(\text{Hz})$	$L(\text{H})$	$R(\Omega)$	$\bar{Z}(\Omega)$
Tôle sans défaut	500	0.011808	19.0058	41.6645
	1000	0.011703	19.6532	76.0771
	10000	0.011512	27.3179	723.4695

Pour la plaque avec le défaut rainure sans contrainte résiduelle en cas statique, les résultats sont présentés par les diagrammes d'impédance et tableau suivants :



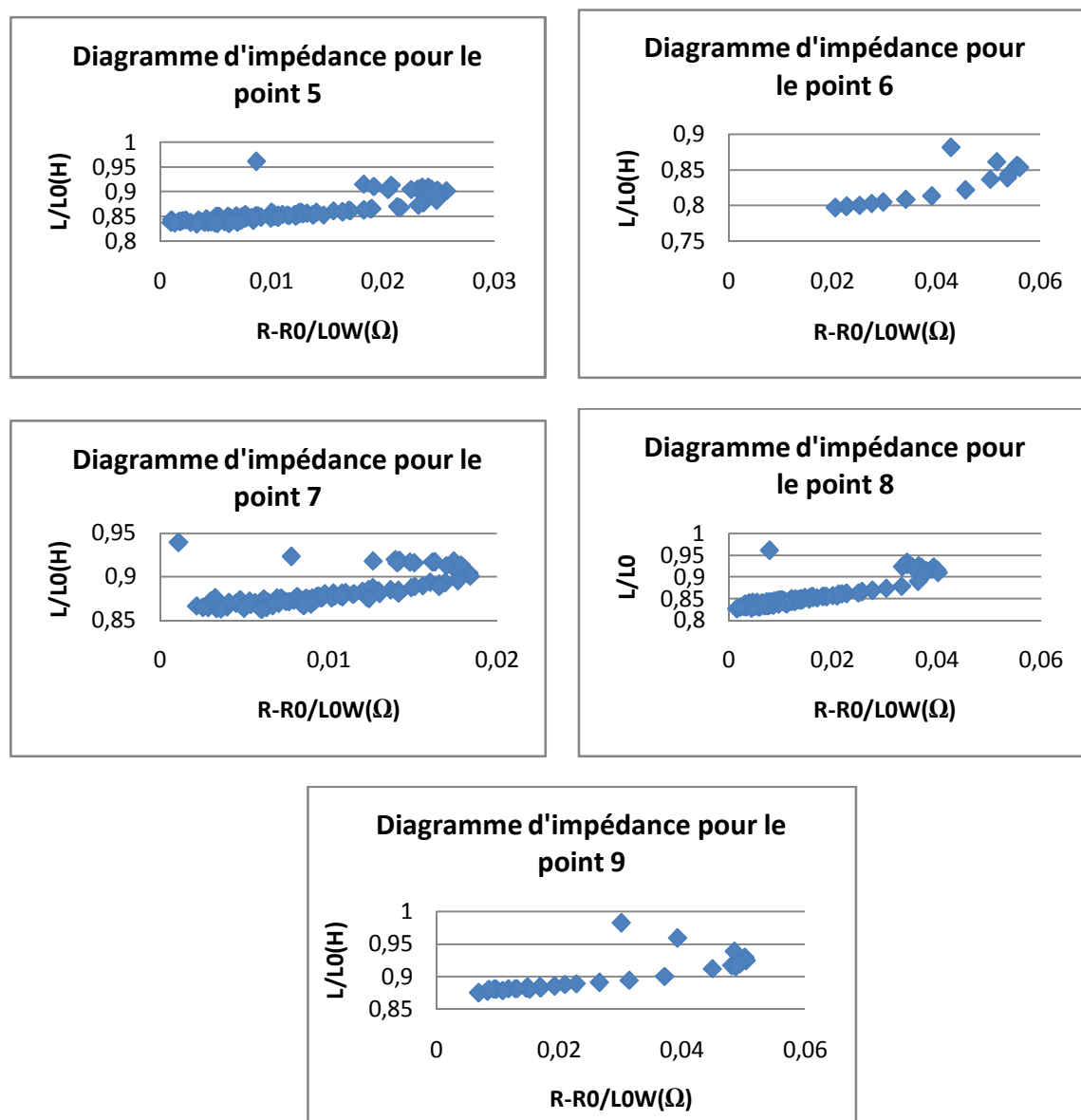
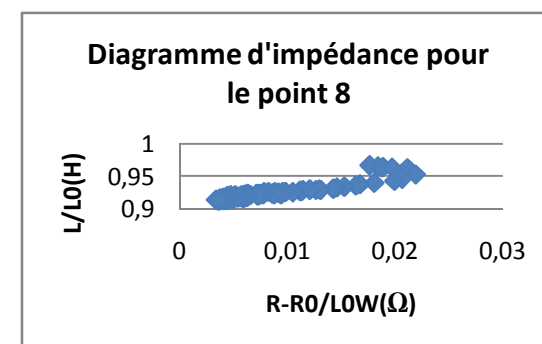
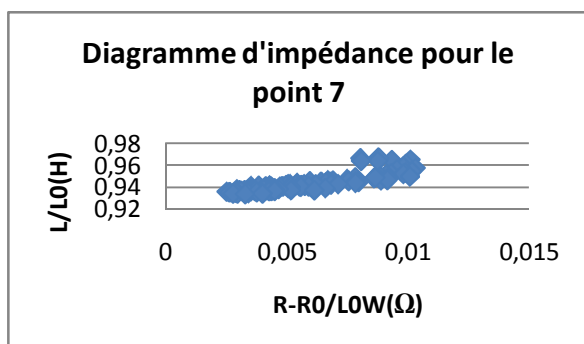
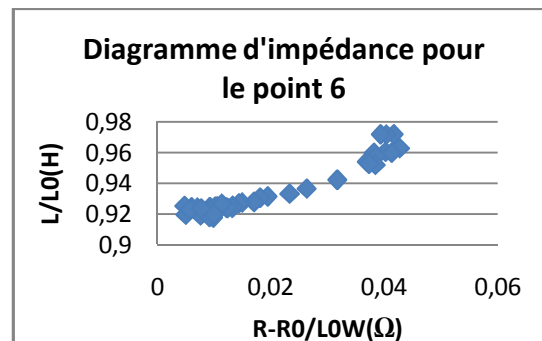
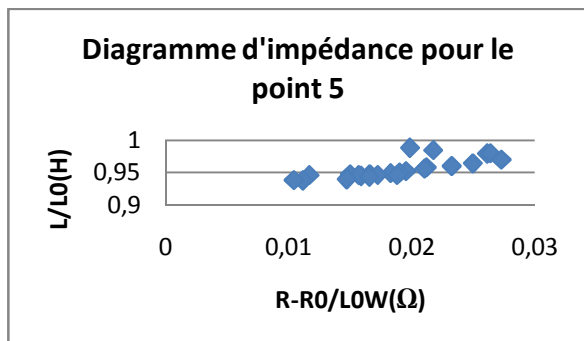
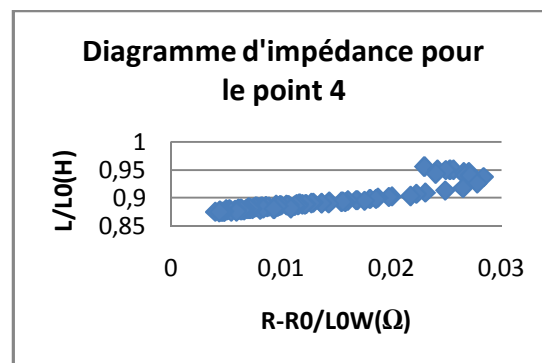
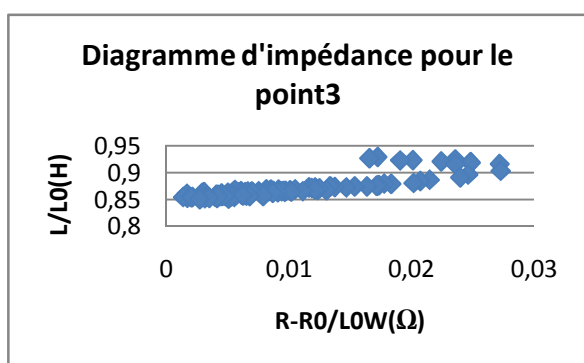
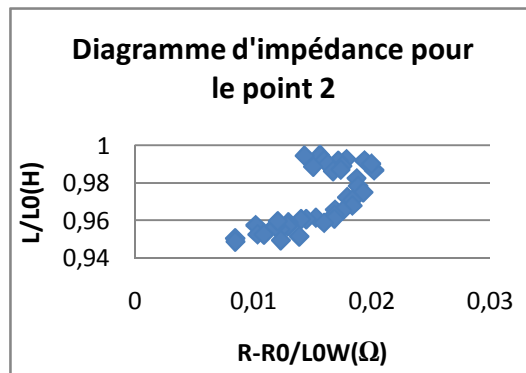
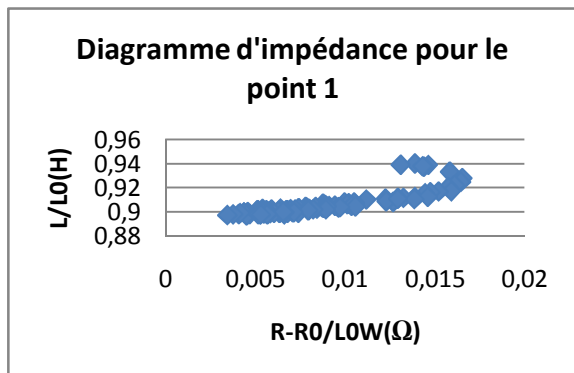


Figure 5.4 : Diagramme d'impédance pour le cas statique sans contrainte résiduelle de la plaque avec défaut rainure pour les neuf points

Tableau 5.2 : valeurs expérimentales de  $R$ ,  $L$  et  $\bar{Z}$  de la plaques avec défaut rainure pour les points 4, 5 et 6 pour le cas statique sans contrainte résiduelle

Point	$f(Hz)$	$L(H)$	$R(\Omega)$	$\bar{Z}(\Omega)$
4	500	0.012073	19.4777	43.1132
	1000	0.011995	21.2804	78.2767
	10000	0.011843	27.6372	744.2537
5	500	0.012191	19.2738	42.8581
	1000	0.011864	21.2493	77.4768
	10000	0.011785	25.6325	740.5417
6	500	0.012337	18.9236	42.6202
	1000	0.011737	21.1603	76.6855
	10000	0.011646	23.4795	731.7455

Pour la plaque avec le défaut entaille sans contrainte résiduelle en cas statique, les résultats sont présentés par les diagrammes d'impédance et tableau et suivants :



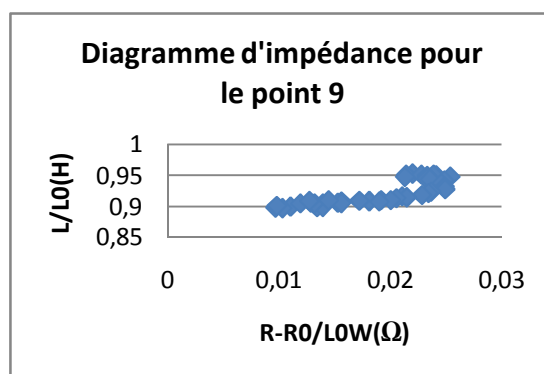
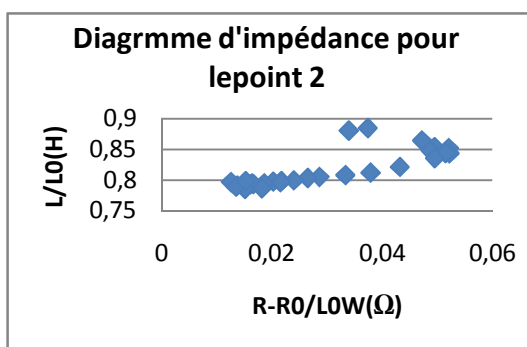
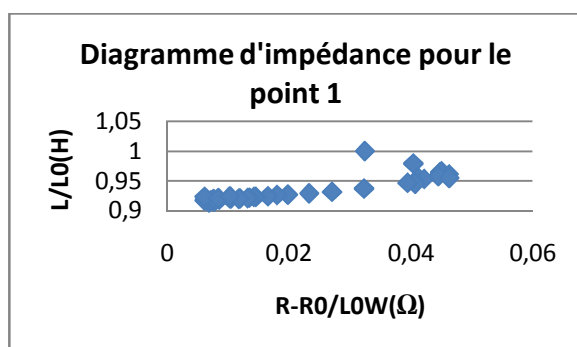


Figure 5.5 : Diagramme d'impédance pour le cas statique sans contrainte résiduelle de la plaque avec défaut entaille pour les neuf points

Tableau 5.3 : valeurs expérimentales de  $R$ ,  $L$  et  $\bar{Z}$  de la plaques avec défaut entaille pour les points 4, 5 et 6 pour le cas statique sans contrainte résiduelle

Point	$f(Hz)$	$L(H)$	$R(\Omega)$	$\bar{Z}(\Omega)$
4	500	0.012148	19.3435	44.9541
	1000	0.012077	19.7102	78.3628
	10000	0.01195	31.7356	751.1307
5	500	0.012192	19.2117	42.8330
	1000	0.011968	20.2287	77.8336
	10000	0.011703	26.3299	735.4198
6	500	0.012954	19.1409	42.7690
	1000	0.011835	20.255a7	77.0345
	10000	0.011098	27.0243	697.4781

Pour la plaque avec le défaut surfacique elliptique centré sans contrainte résiduelle en cas statique, les résultats sont présentés par les diagrammes d'impédance et le tableau suivants :



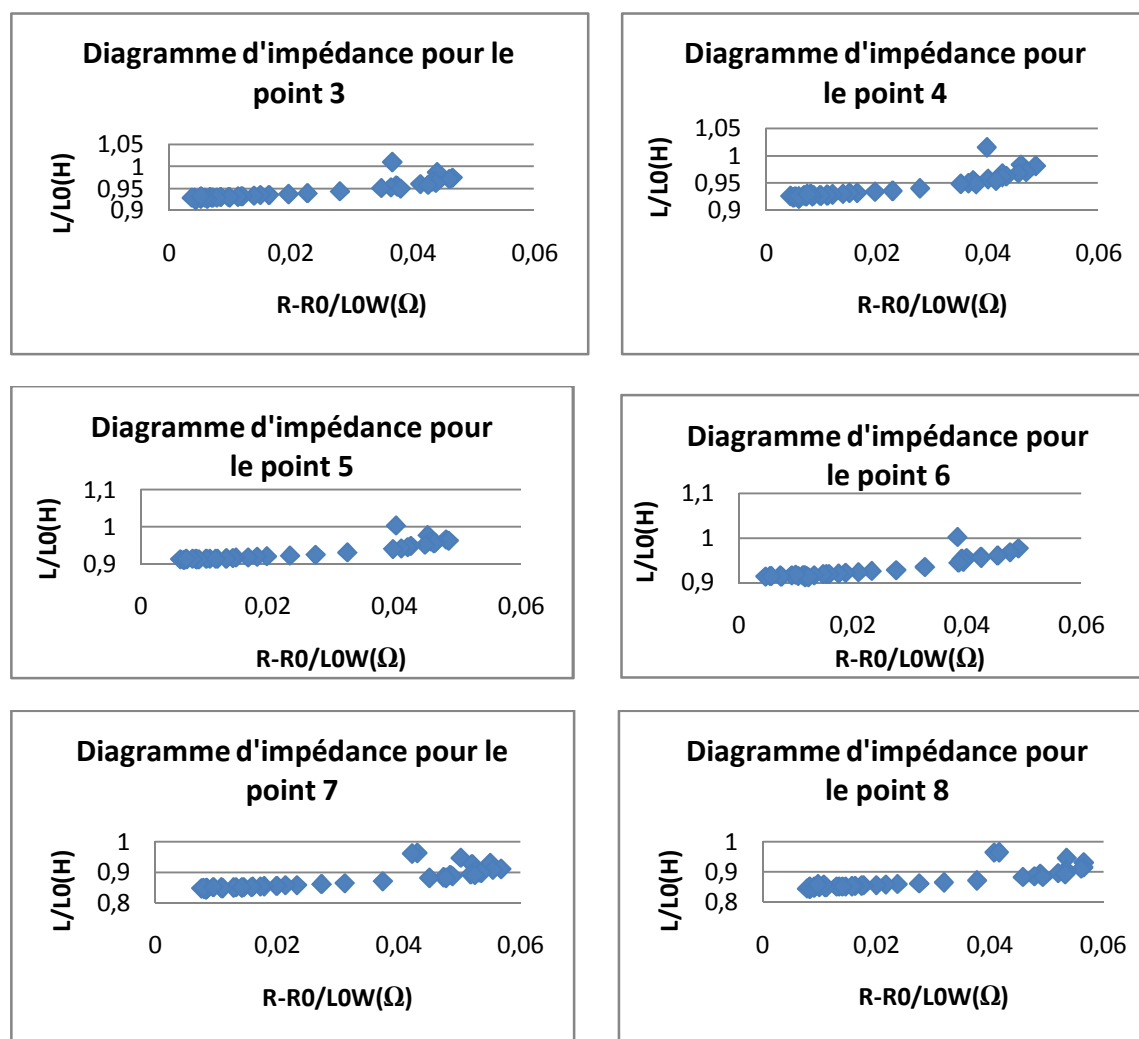
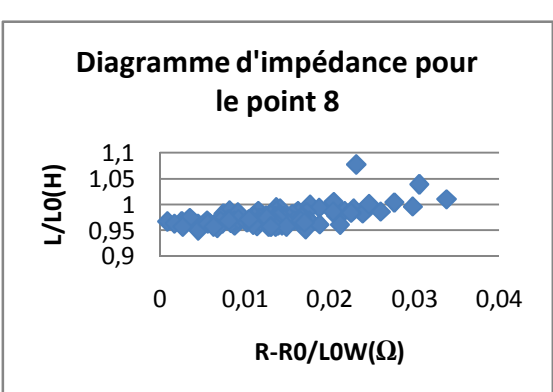
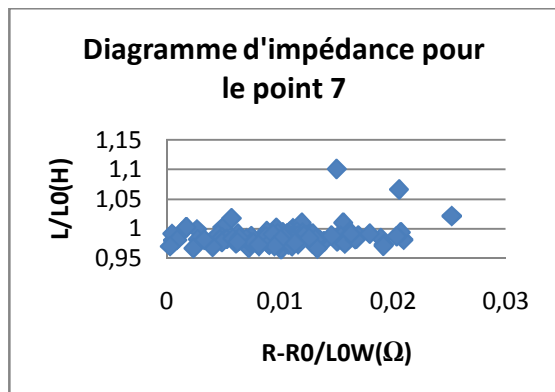
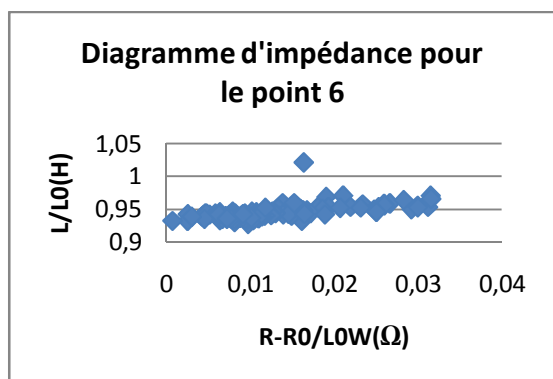
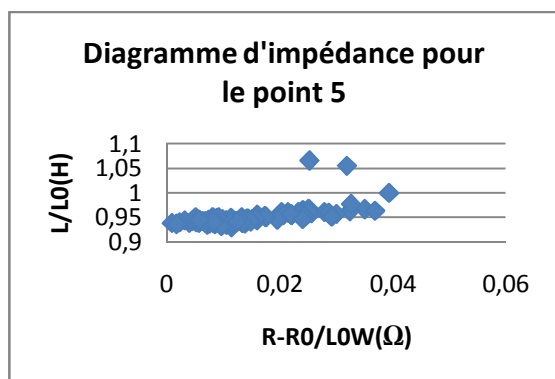
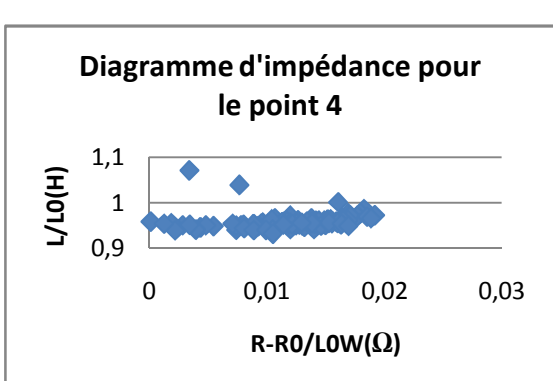
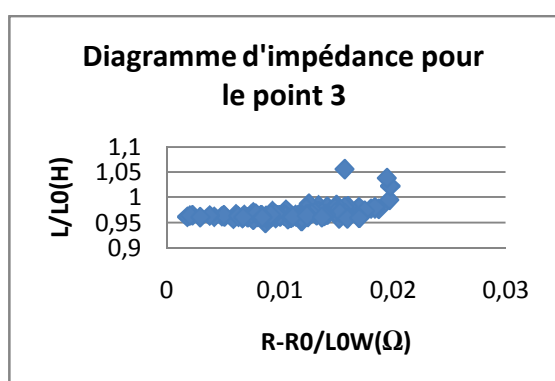
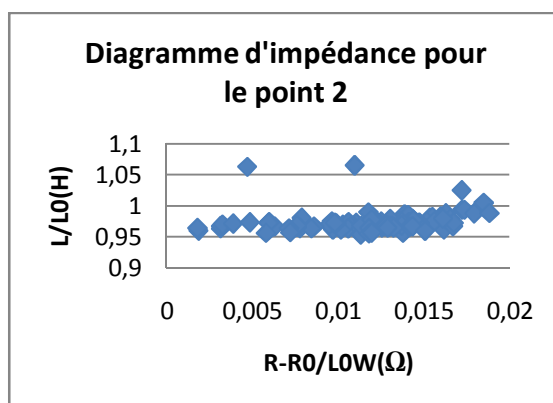
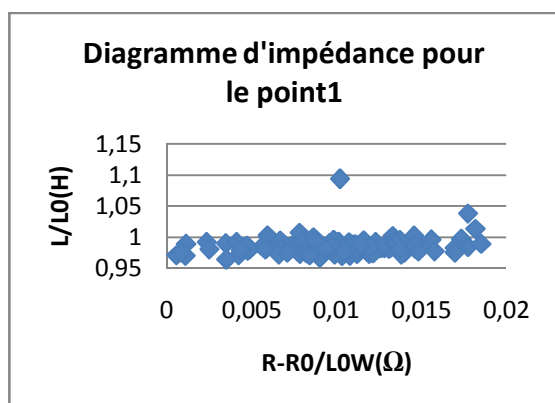


Figure 5.6 : Diagramme d'impédance pour le cas statique sans contrainte résiduelle de la plaque avec défaut elliptique centré pour les huit points

Tableau 5.4: valeurs expérimentales de  $R, L$  et  $\bar{Z}$  de la plaques avec défaut elliptique centré pour les points 1, 2, 5 et 6 pour le cas statique sans contrainte résiduelle

Point	$f(Hz)$	$L(H)$	$R(\Omega)$	$\bar{Z}(\Omega)$
1	500	0.01214	19.616	42.8706
	1000	0.011749	20.5419	77.7313
	10000	0.011674	22.4058	733.4695
2	500	0.012155	19.269	42.7550
	1000	0.011954	20.1616	76.5898
	10000	0.011584	30.336	728.1074
5	500	0.012062	19.3336	42.8631
	1000	0.011799	20.3672	77.7191
	10000	0.011569	22.054	727.999
6	500	0.01215	19.5384	42.5238
	1000	0.011958	20.0204	768459
	10000	0.011587	22.1268	726.8678

Pour la plaque avec contrainte résiduelle pour le défaut rainure en cas statique, les résultats sont présentés par les diagrammes d'impédance et tableaux suivants :



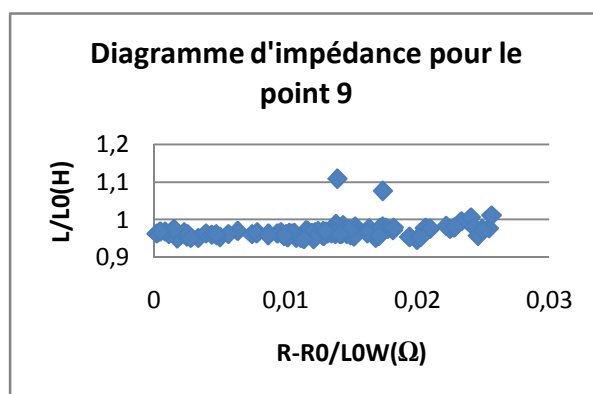
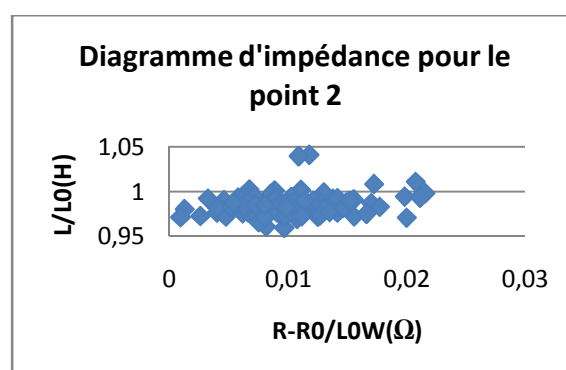
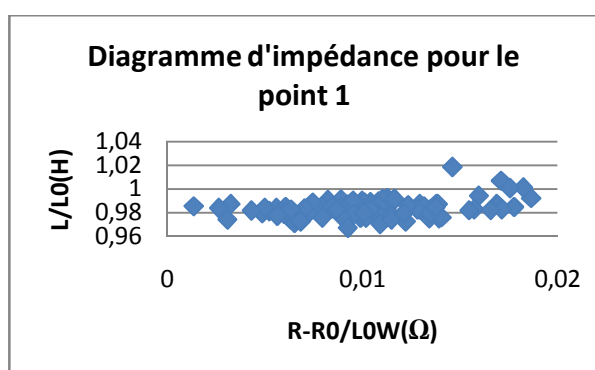


Figure 5.7 : Diagramme d'impédance pour le cas statique avec contrainte résiduelle de la plaque avec défaut rainure pour les neuf points

Tableau 5.5 : valeurs expérimentales de  $R$ ,  $L$  et  $\bar{Z}$  de la plaques avec défaut rainure pour les points 4, 5 et 6 pour le cas statique avec contrainte résiduelle.

Point	$f(Hz)$	$L(H)$	$R(\Omega)$	$\bar{Z}(\Omega)$
4	500	0.012098	19.3295	42.6227
	1000	0.011994	19.8631	77.8973
	10000	0.011656	25.9569	732.4568
5	500	0.011824	19.2057	41.8007
	1000	0.011787	19.7792	76.6193
	10000	0.011652	24.7216	732.1636
6	500	0.011774	19.0475	41.5886
	1000	0.011744	19.5693	76.3044
	10000	0.011589	23.8746	728.1806

Pour la plaque avec contrainte résiduelle pour le défaut entaille en cas statique, les résultats sont présentés par les diagrammes d'impédance et tableau suivants :





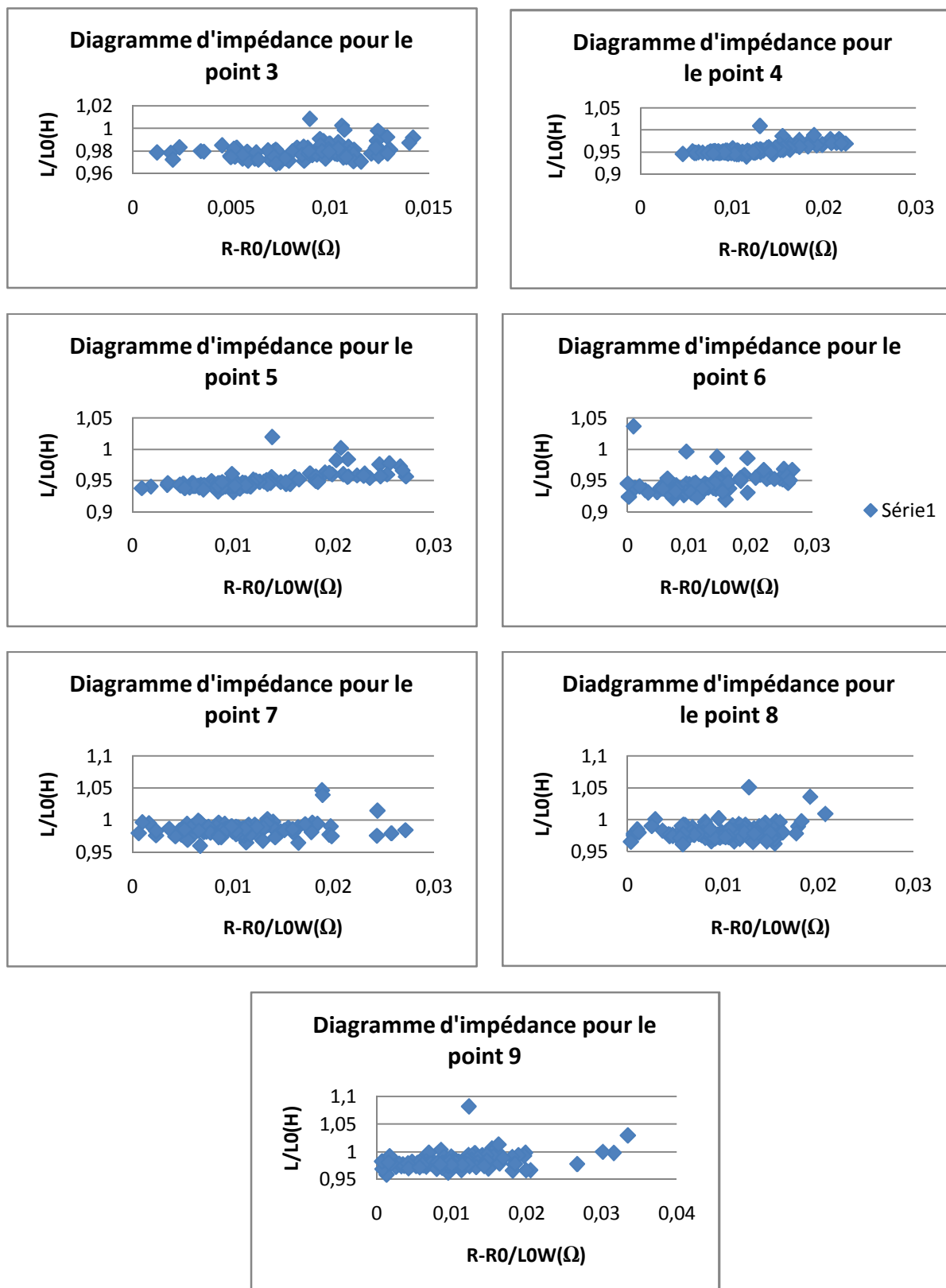
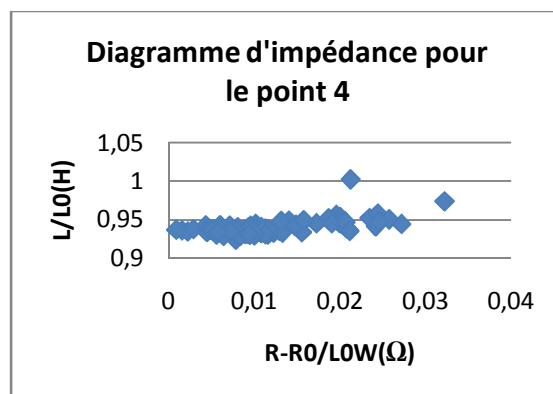
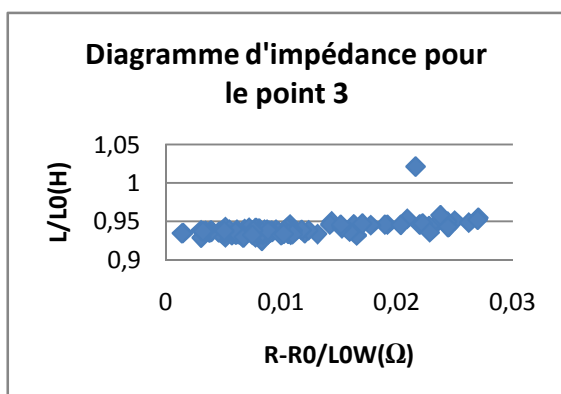
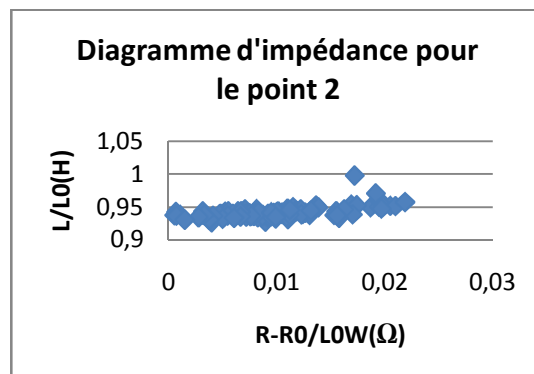
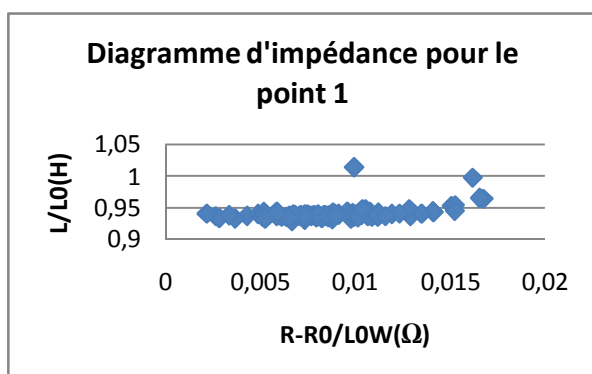


Figure 5.8 : Diagramme d'impédance pour le cas statique avec contrainte résiduelle de la plaque avec défaut entaille pour les neuf points

Tableau 5.6 : valeurs expérimentales de  $R$ ,  $L$  et  $\bar{Z}$  de la plaques avec défaut entaille pour les points 4, 5 et 6 pour le cas statique avec contrainte résiduelle

Point	$f(\text{Hz})$	$L(\text{H})$	$R(\Omega)$	$\bar{Z}(\Omega)$
4	500	0.012036	19.2737	42.4239
	1000	0.011931	19.7345	77.4819
	10000	0.011736	24.0611	737.4134
5	500	0.011949	19.2686	42.1784
	1000	0.011822	19.6123	76.7889
	10000	0.011699	21.6642	735.0165
6	500	0.011785	19.124	41.6544
	1000	0.011692	19.4653	75.9620
	10000	0.011688	19.9231	734.2767

Pour la plaque avec contrainte résiduelle pour le défaut elliptique centré en cas statique , les résultats sont présentés par les diagrammes d'impédance et tableau suivants :



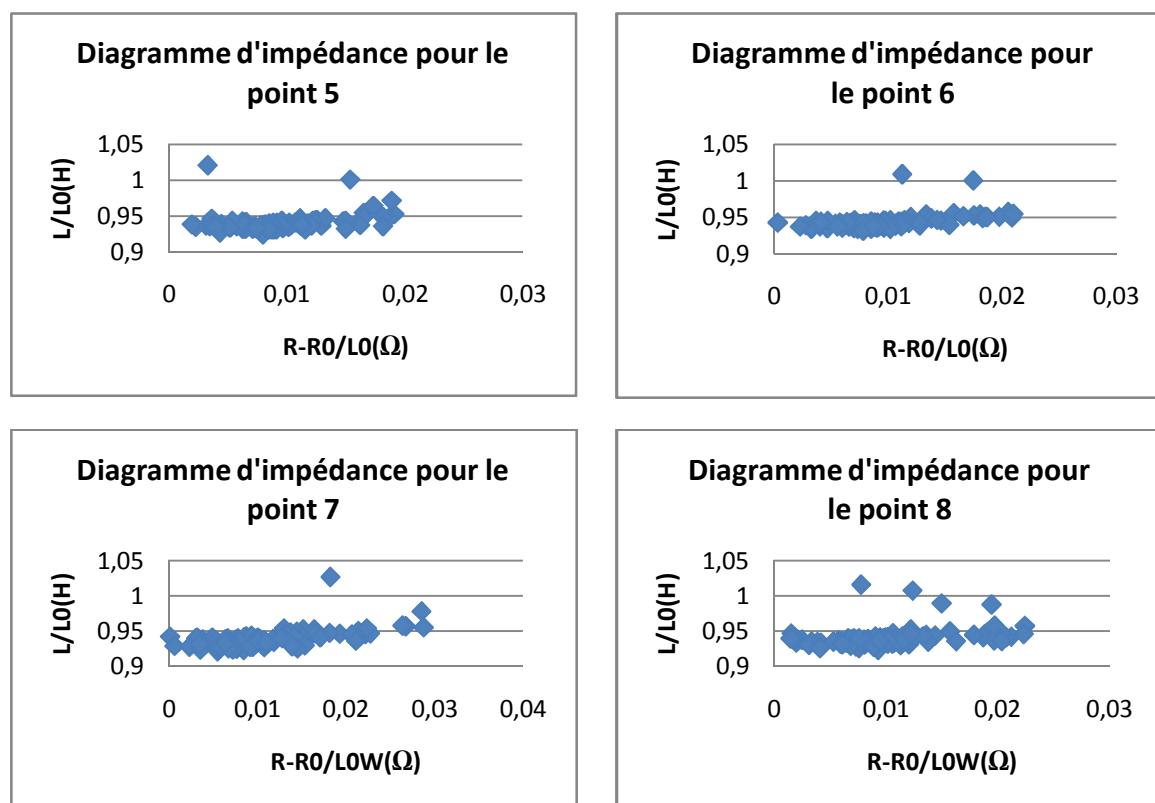
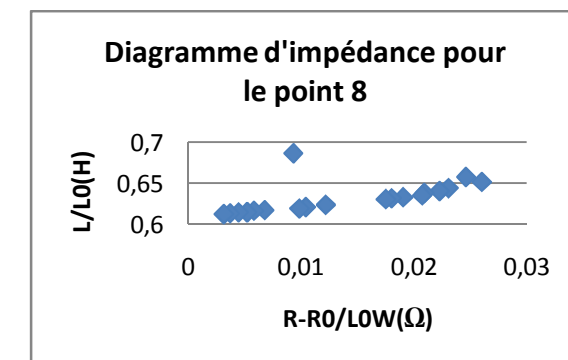
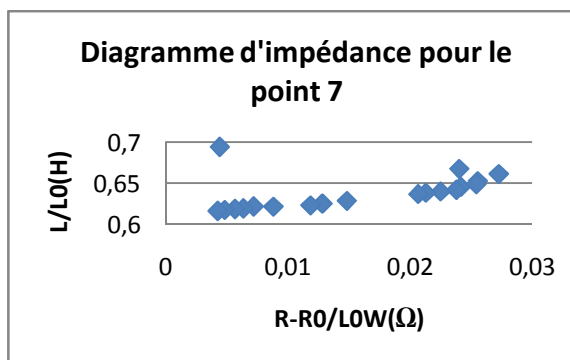
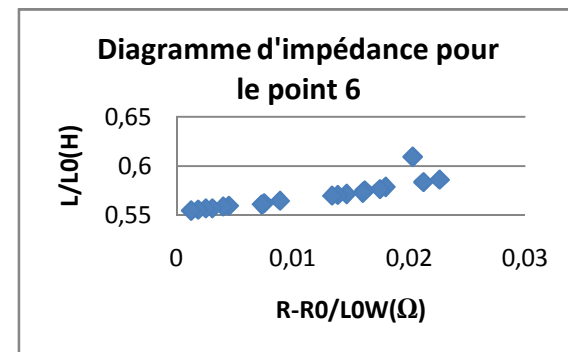
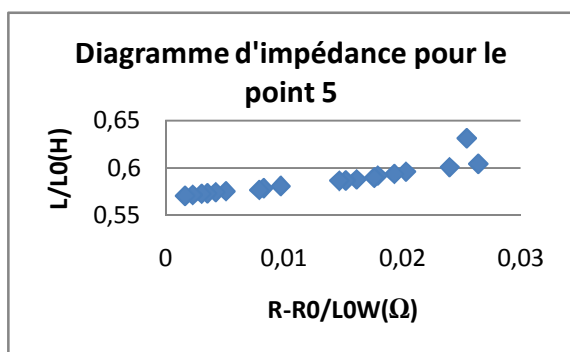
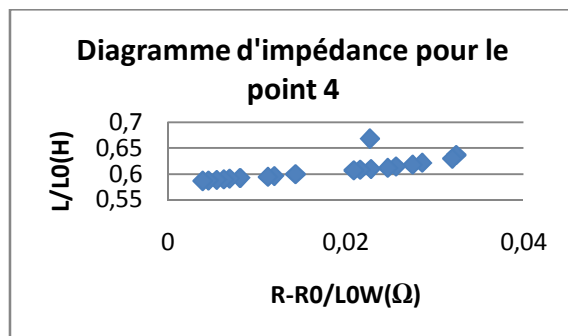
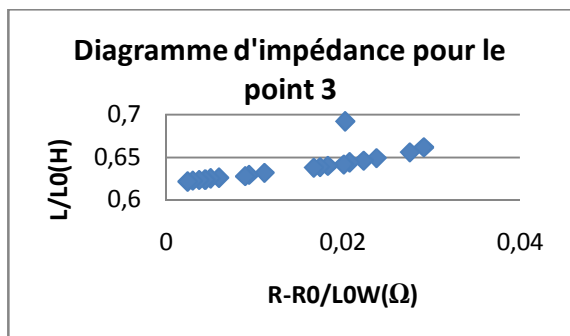
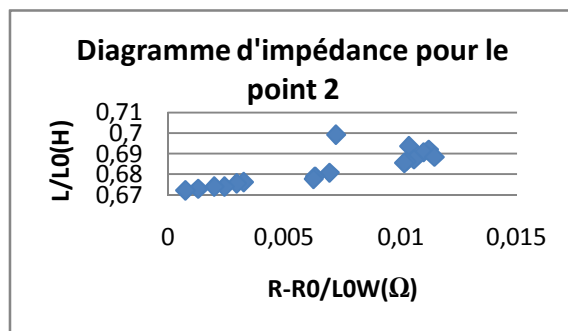
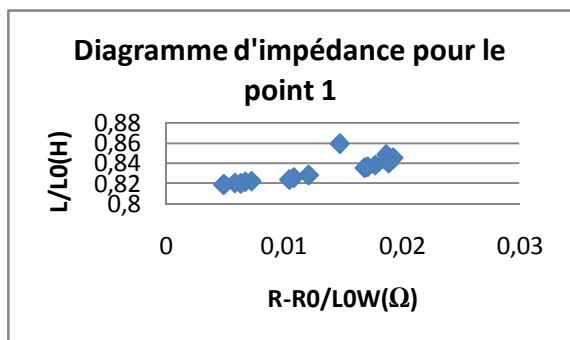


Figure 5.9 : Diagramme d'impédance pour le cas statique avec contrainte résiduelle de la plaque avec défaut elliptique centré pour les neuf points

Tableau 5.7: valeurs expérimentales de  $R, L$  et  $\bar{Z}$  de la plaques avec défaut elliptique centré pour les points 1, 2, 5 et 6 pour le cas statique avec contrainte résiduelle

Point	$f(Hz)$	$L(H)$	$R(\Omega)$	$\bar{Z}(\Omega)$
1	500	0.011782	19.202	41.7239
	1000	0.01167	19.0656	76.0345
	10000	0.011547	22.3561	729.8463
2	500	0.011842	18.9274	41.7239
	1000	0.011724	18.983	76.0345
	10000	0.011617	20.8812	729.8463
5	500	0.011772	19.2956	41.6993
	1000	0.011662	19.7743	76.4646
	10000	0.011581	21.3867	729.5110
6	500	0.011805	19.1003	41.6972
	1000	0.011769	19.6	75.8599
	10000	0.011612	20.1161	727.6011

Pour la plaque avec défaut rainure sans contrainte résiduelle en appliquant une force uni-axiale  $F = 5KN$ , les résultats sont présentés par les courbes et tableau suivants :



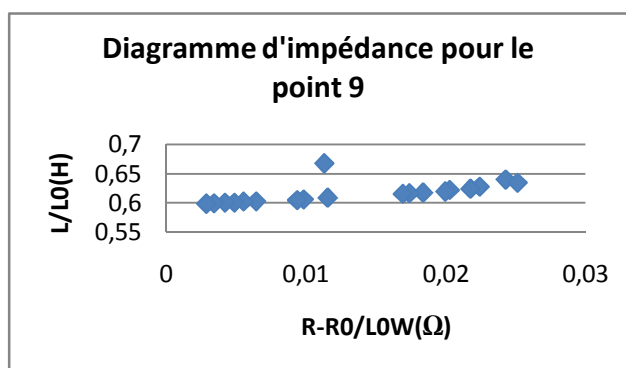
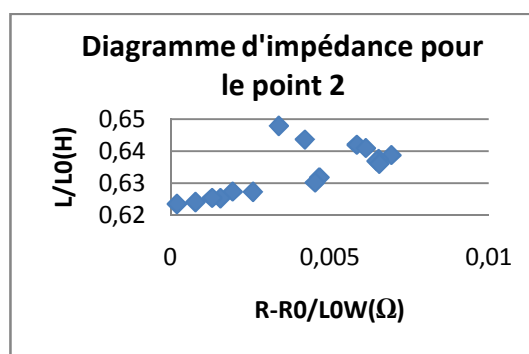
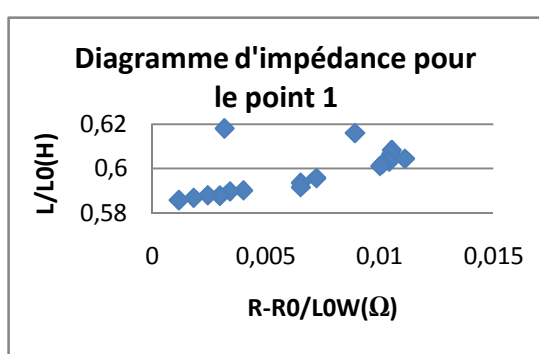


Figure 5.10 : Diagramme d'impédance pour les tôles avec défaut rainure sans contrainte résiduelle en appliquant  $F = 5KN$  pour les neuf points

Tableau 5.8: valeurs expérimentales de  $R$ ,  $L$  et  $\bar{Z}$  de la plaques avec défaut rainure pour les points 4, 5 et 6 avec  $F = 5KN$

Point	$f(Hz)$	$L(H)$	$R(\Omega)$	$\bar{Z}(\Omega)$
4	500	0.001064	12.4502	12.8906
	1000	0.001025	12.6461	14.3432
	10000	0.000995	14.6461	64.1795
5	500	0.001026	12.4408	12.8511
	1000	0.001086	12.618	14.1900
	10000	0.000962	13.9985	62.0142
6	500	0.001123	12.3795	12.8719
	1000	0.00099	12.593	14.0441
	10000	0.000935	13.8668	60.3331

Pour la plaque avec défaut entaille sans contrainte résiduelle en appliquant  $F = 5KN$ , les résultats sont présentés par les courbes et tableau suivants :



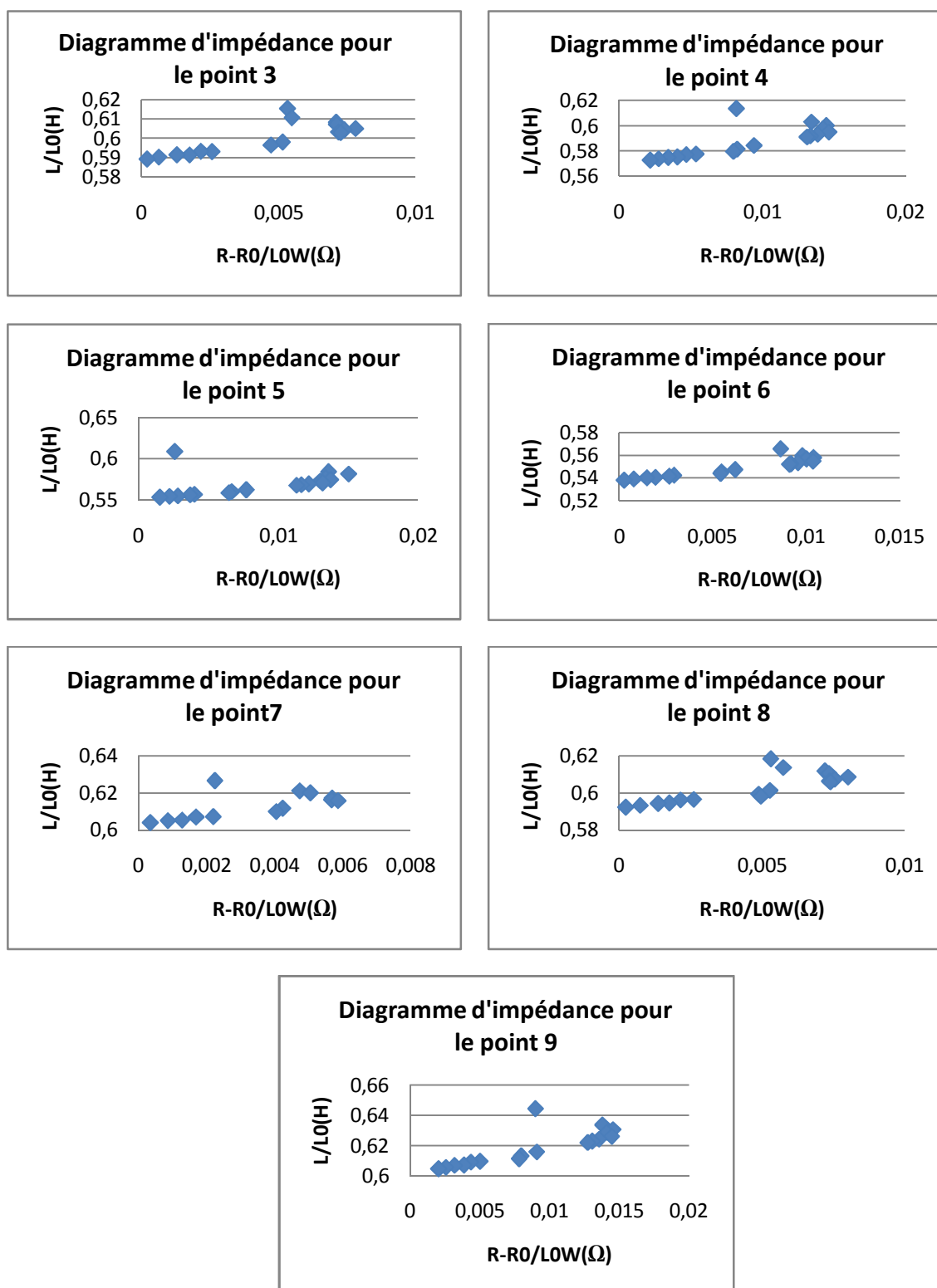
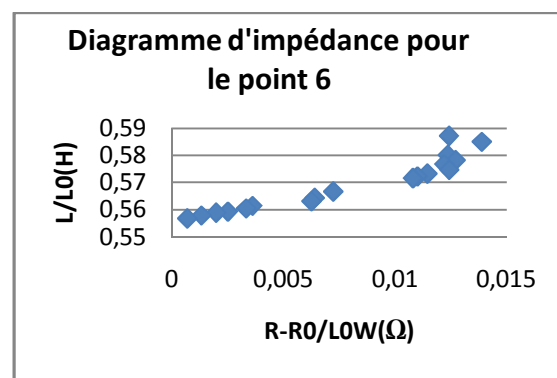
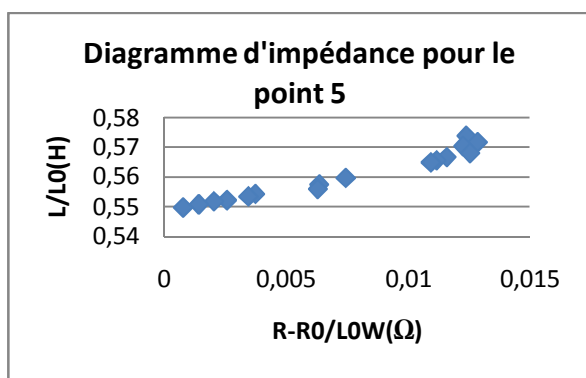
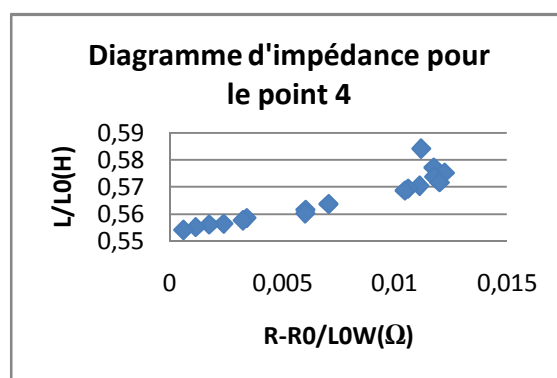
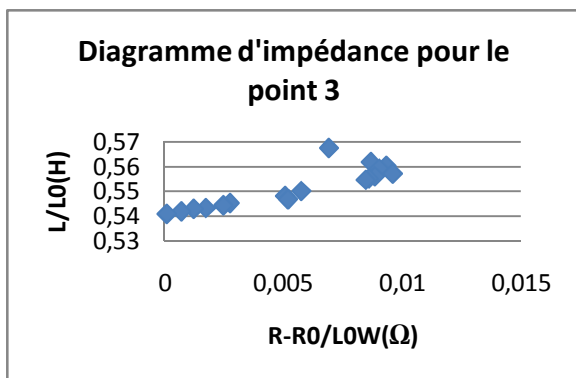
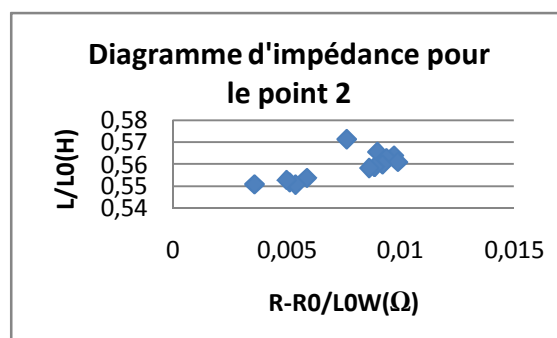
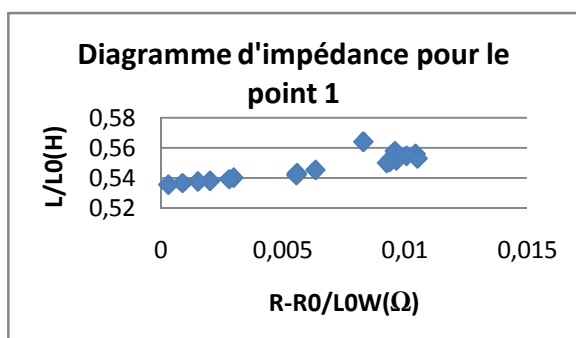


Figure 5.11 : Diagramme d'impédance pour les tôles avec défaut entaille sans contrainte résiduelle en appliquant  $F = 5KN$  pour les neuf points

Tableau 5.9: valeurs expérimentales de  $R$ ,  $L$  et  $\bar{Z}$  de la plaques avec défaut entaille pour les points 4, 5 et 6 avec  $F = 5KN$

Point	$f(Hz)$	$L(H)$	$R(\Omega)$	$\bar{Z}(\Omega)$
4	500	0.001023	12.2365	12.6510
	1000	0.000989	12.4087	13.8762
	10000	0.000969	13.8402	62.4072
5	500	0.000985	12.2094	12.5950
	1000	0.000953	12.3328	13.7082
	10000	0.00093	13.654	59.9788
6	500	0.001049	12.0597	12.5014
	1000	0.001034	12.2149	13.8336
	10000	0.000906	13.4273	58.4597

Pour la plaque avec défaut elliptique centré sans contrainte résiduelle en appliquant  $F = 5KN$ , les résultats sont présentés par les courbes et tableau suivants :



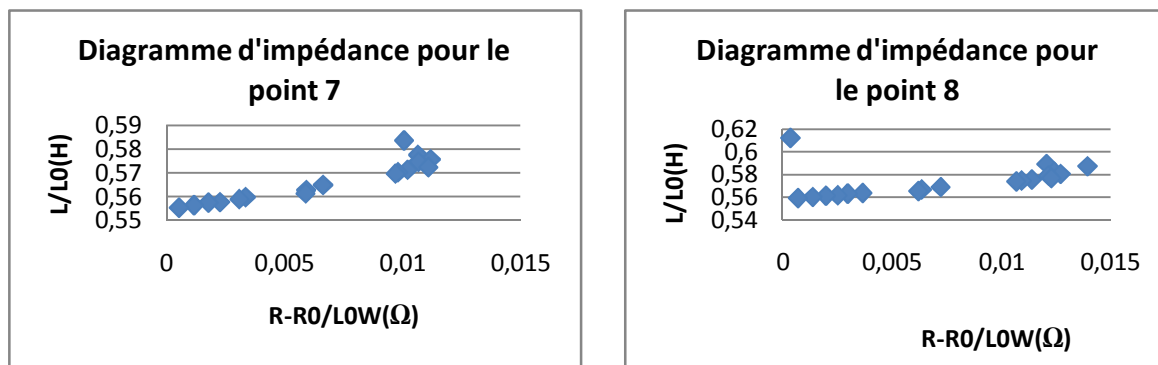


Figure 5.12 : Diagramme d'impédance pour les tôles avec défaut elliptique centré sans contrainte résiduelle en appliquant  $F = 5KN$  pour les huit points

Tableau 5.10: valeurs expérimentales de  $R$ ,  $L$  et  $\bar{Z}$  de la plaques avec défaut elliptique centré pour les points 1, 2,5 et 6 avec  $F = 5KN$

Point	$f(Hz)$	$L(H)$	$R(\Omega)$	$\bar{Z}(\Omega)$
1	500	0.000996	12.1985	12.5930
	1000	0.00095	12.3225	13.6990
	10000	0.000902	13.4418	58.2186
2	500	0.000978	12.1925	12.5732
	1000	0.000962	12.3209	13.7223
	10000	0.000915	13.3775	58.1986
5	500	0.001021	12.2559	12.6682
	1000	0.000951	12.3873	13.7518
	10000	0.000927	13.6154	59.7865
6	500	0.001009	12.2384	12.6418
	1000	0.000981	12.3814	13.8294
	10000	0.000938	13.602	60.4564

Analysant les diagrammes d'impédance des différents points des plaques avec fissure rainure, entaille et elliptique présentés par Fig.5.3, Fig.5.4, Fig.5.5, Fig.5.6, Fig.5.7, Fig.5.8, Fig.5.9, Fig.5.10, Fig.5.11, Fig.5.12, on constate d'abord que toutes les courbes possèdent la forme de la courbe caractéristique d'impédance avec des valeurs différentes, et que l'impédance augmente en s'éloignant de la fissure. On remarque aussi que les points très proches de la pointe de la fissure possèdent presque le même diagramme d'impédance.

D'après les résultats présentés par le tableau 5.2, tableau 5.3, tableau 5.4, tableau 5.5, tableau 5.6, tableau 5.7, tableau 5.8, tableau 5.9, tableau 5.10, on peut constater que la réactance augmente en s'éloignant de la pointe de la fissure pour la même fréquence et diminue avec l'augmentation de la fréquence pour le même point, contrairement à résistance. Cela se traduit par une augmentation de l'impédance en



se rapprochant de la pointe qui s'explique par l'augmentation de l'énergie dissipée par effet Joule et la diminution de l'énergie emmagasinée au voisinage de la pointe des trois types de fissure pour les cas statique sans et avec contrainte.

Prenant maintenant le point de la pointe de fissure pour les trois types de défaut pour le cas statique avec et sans contrainte résiduelle et pour le cas de la contrainte uni-axiale avec une fréquence  $f = 500\text{Hz}$ . Les résultats de la comparaison sont présentés par le tableau suivant :

Tableau 5.11: Comparaison des valeurs expérimentales de  $R$ ,  $L$  et  $\bar{Z}$  entre les trois types de défauts à la pointe de fissure pour le cas statique avec et sans contrainte résiduelle et le cas de la charge uni-axiale  $F = 5\text{KN}$  pour la fréquence  $f = 500\text{Hz}$

Tôle	$L(\text{H})$	$R(\Omega)$	$\bar{Z}(\Omega)$
Sans défaut	0.011808	19.0058	41.6645
Statique avec rainure sans contrainte résiduelle	0.012073	19.4777	43.1132
Statique avec rainure et contrainte résiduelle	0.012098	19.3295	42.6227
Avec rainure sans contrainte résiduelle avec $F = 5\text{KN}$	0.001064	12.4502	12.8906
Statique avec entaille sans contrainte résiduelle	0.012148	19.3435	44.9541
Entaille statique avec contrainte résiduelle	0.012036	19.2737	42.4239
Avec entaille sans contrainte résiduelle avec $F = 5\text{KN}$	0.001023	12.2365	12.6510
Statique elliptique sans contrainte résiduelle	0.01214	19.616	42.8706
Statique elliptique avec contrainte résiduelle	0.011782	19.202	41.7239
Elliptique sans contrainte résiduelle avec $F = 5\text{KN}$	0.000996	12.1985	12.5930

Analysant les résultats mentionnés sur le tableau 5.11, on remarque que la présence du défaut augmente l'impédance, mais elle diminue légèrement avec la présence de la contrainte résiduelle et énormément avec la charge uni-axiale, qui s'explique par l'agitation thermique due à la contrainte qui est plus prononcée à la pointe, en effet la seule contrainte électrique qui agit est la conductivité électrique. Et ça nous permet de constater que les CF sont sensibles à la micro variation.

### 1.2.Détermination des contraintes résiduelles par les ultrasons

Pour la caractérisation statique, on a utilisé la technique de contrôle ultrasonore par contact. Donc on a fait un balayage sur des plaques qui présentent trois types différents des fissures. Les résultats sont donnés par les signaux ultrasonores pour les trois types de défauts.

D'après les signaux, on peut déterminer les vitesses longitudinales et les atténuations illustrées dans le tableau suivant avec:

$$V_L = \frac{2e}{\Delta t}$$

$V_L$  :La vitesse des ondes longitudinales

$e$  :L'épaisseur de la pièce

$\Delta t$  :le temps parcouru l'écho de la face d'entrée et le premier écho de fond.

Et

$$\alpha_L = \frac{1}{2e} Ln \left( \left| \frac{E_n - E_{n+1}}{E_{n+1} - E_{n+2}} \right| \right)$$

$\alpha_L$  :le coefficient d'atténuation

$E_n$  :l'amplitude du  $n^{ième}$  écho

Avec une incertitude d'atténuation de  $\pm 0.0078$  et une incertitude de vitesse de  $\pm 0.05$ .  
Pour une plaque sans défaut le signal ultrasonore est donné par le graphe suivant :

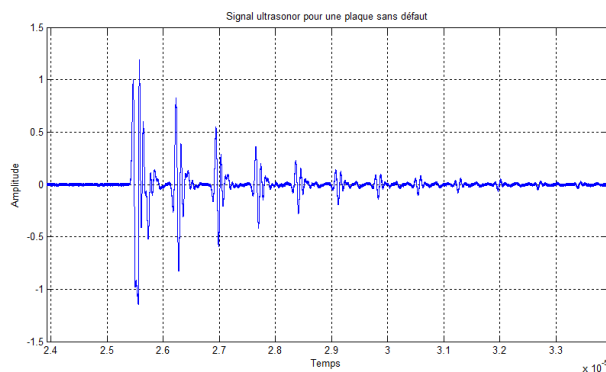


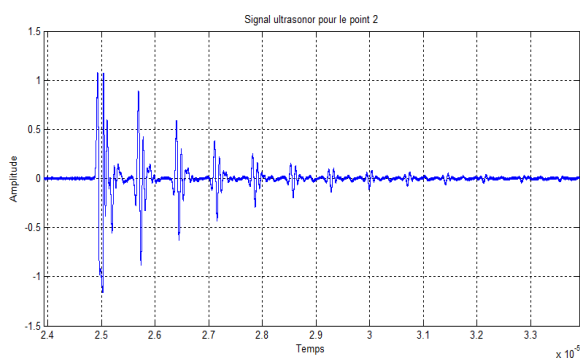
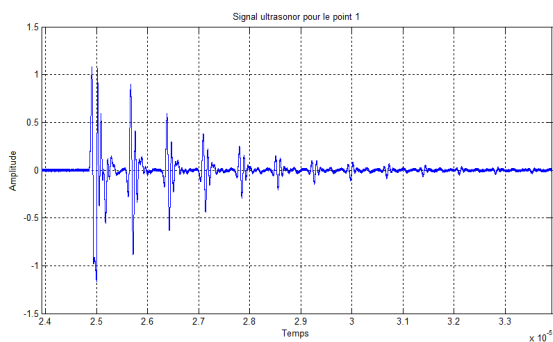
Figure 5.13: Signal ultrasonore de la plaque sans défaut sans contrainte résiduelle

La vitesse et l'atténuation de la plaque sans défaut et sans contrainte résiduelle sont données par le tableau suivant :

Tableau 5.12: Vitesse et atténuation de la plaque sans défaut et sans contrainte résiduelle

Plaque	t1 (s)	t2 (s)	$\Delta t$ (s)	A1 (V)	A2 (V)	Vitesse (m/s)	Epaisseur (mm)	Atténuation (Np/mm)
Sans défaut et sans contrainte résiduelle	2.6225 $10^{-5}$	2.6938 $10^{-5}$	0.0718 $10^{-5}$	0.8284	0.5503	8356.54	3	0.0681

Pour la plaque avec défaut rainure les résultats sont donnés par les graphiques et tableau suivants :



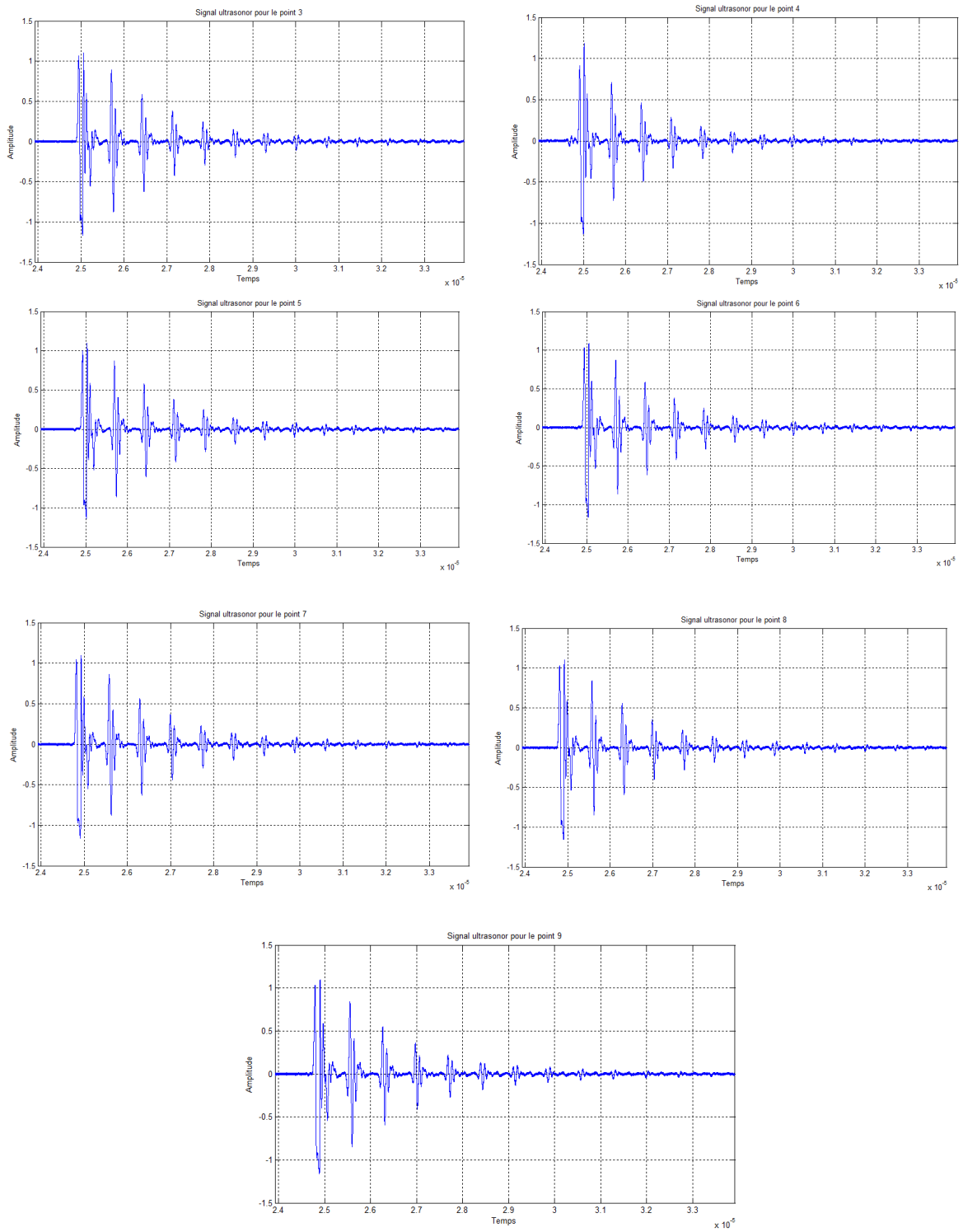
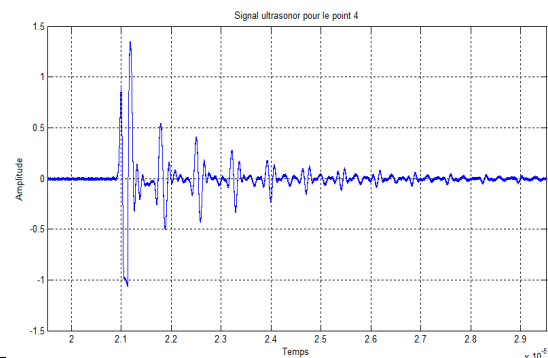
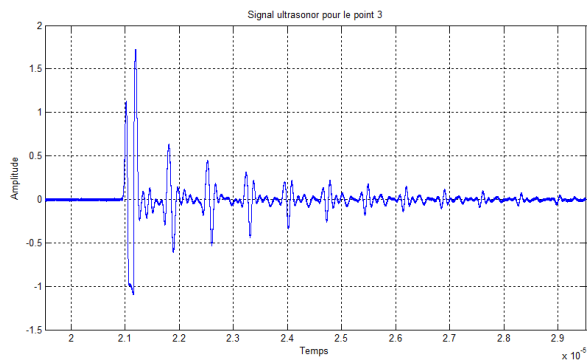
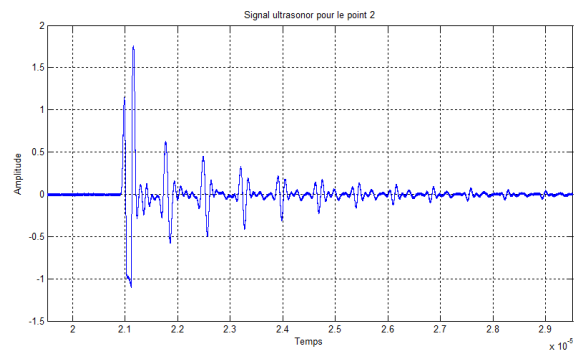
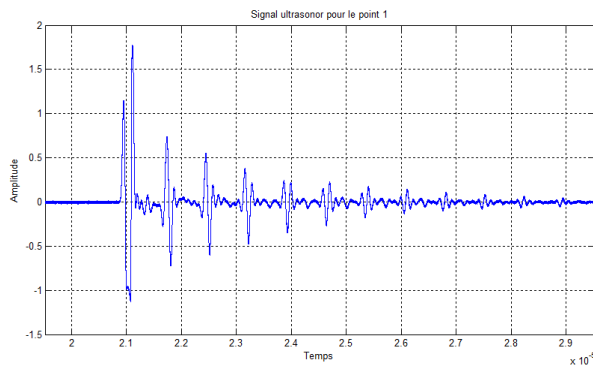


Figure 5.14: Signal ultrasonore de la plaque avec défaut rainure sans contrainte résiduelle pour les neuf points

Tableau 5.13: Vitesse et atténuation de la plaque avec défaut rainure sans contrainte résiduelle

Points	$t1^*$ $10^{-5}$ (s)	$t2^*$ $10^{-5}$ (s)	$\Delta t^*$ $10^{-5}$ (s)	A1 (V)	A2 (V)	Vitesse* $10^2$ (m/s)	Epaisseur (mm)	Atténuation (Np/mm)
1	2.5667	2.6378	0.0711	0.9013	0.5930	84.3881	3	0.0697
2	2.5688	2.6396	0.0708	0.8948	0.5926	84.7457	3	0.0686
3	2.5707	2.6418	0.0711	0.889	0.5894	84.3881	3	0.0684
4	2.5665	2.6376	0.0711	0.7072	0.4597	84.3881	3	0.0717
5	2.5685	2.6392	0.0708	0.8717	0.5837	84.7457	3	0.0668
6	2.5702	2.641	0.0707	0.8735	0.5837	84.8656	3	0.0671
7	2.5574	2.6285	0.0711	0.8631	0.5636	84.3881	3	0.0710
8	2.5567	2.6277	0.071	0.8445	0.5553	84.5070	3	0.0698
9	2.555	2.626	0.071	0.8411	0.5472	84.5070	3	0.0716

Pour la plaque avec défaut entaille les résultats sont donnés par les signaux et tableau suivants :



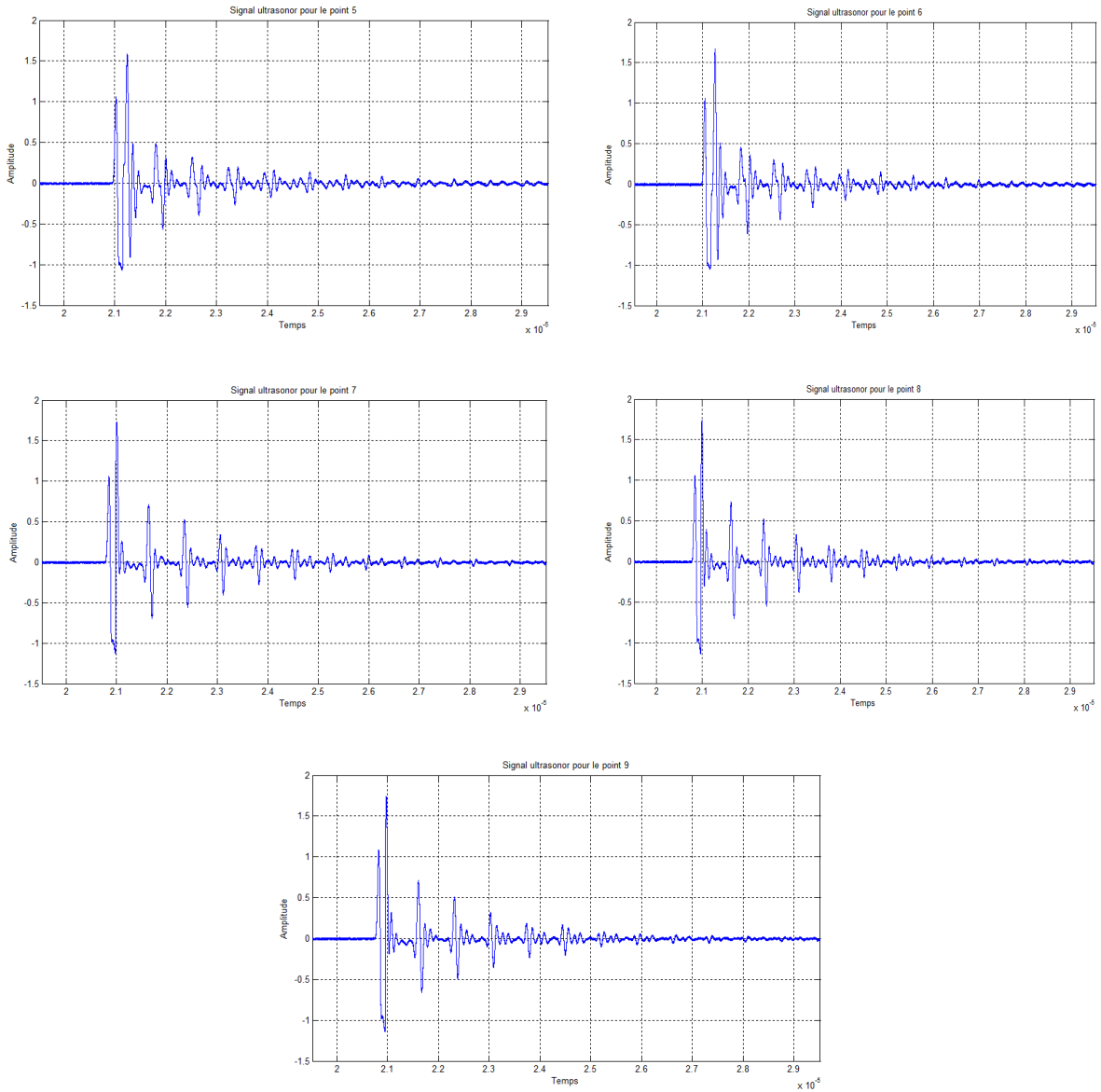
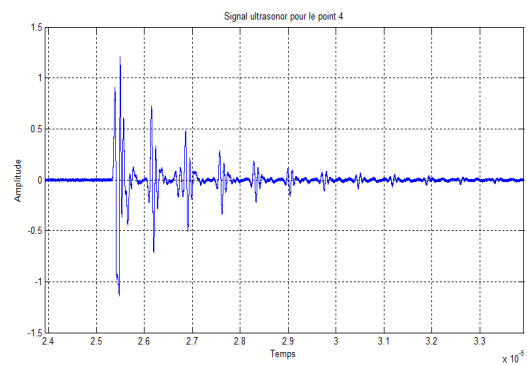
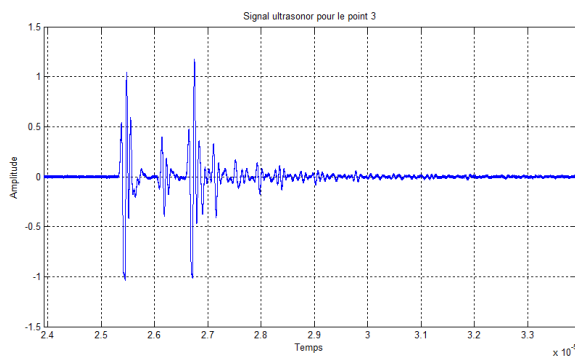
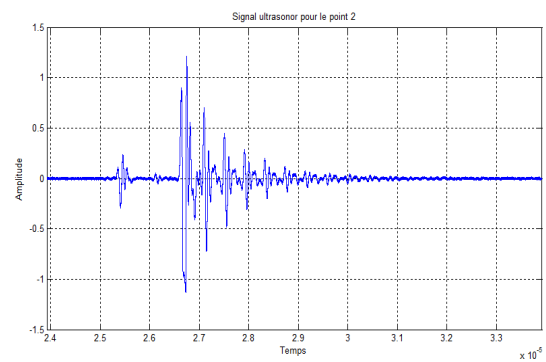
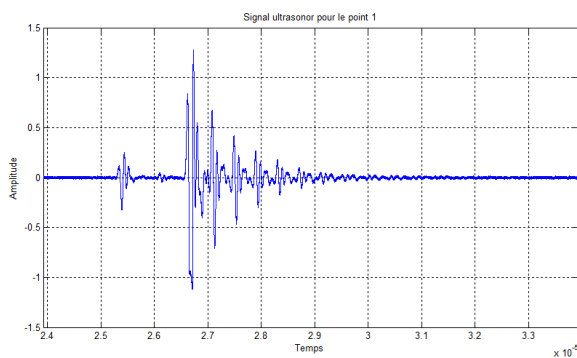


Figure 5.15: Signal ultrasonore de la plaque avec défaut entaille sans contrainte résiduelle pour les neuf points

Tableau 5.14: Vitesse et atténuation de la plaque avec défaut entaille

Points	$t1^*$ $10^{-5}$ (s)	$t2^*$ $10^{-5}$ (s)	$\Delta t^*$ $10^{-5}$ (s)	A1 (V)	A2 (V)	Vitesse* $10^2$ (m/s)	Epaisseur (mm)	Atténuation (Np/mm)
1	2.1734	2.2444	0.071	0.7426	0.553	84.5070	3	0.0491
2	2.1774	2.2488	0.0714	0.6253	0.4532	84.5336	3	0.0536
3	2.1806	2.2524	0.0718	0.638	0.446	84.5654	3	0.0596
4	2.1794	2.2504	0.071	0.546	0.412	84.5070	3	0.0469
5	2.1809	2.2521	0.0712	0.487	0.3231	84.2696	3	0.0683
6	2.1826	2.254	0.0714	0.4548	0.3038	84.5336	3	0.0672
7	2.1636	2.2346	0.071	0.7125	0.5285	84.5070	3	0.0497
8	2.1623	2.2332	0.0709	0.7364	0.5286	84.6262	3	0.0552
9	2.1607	2.2315	0.0708	0.7127	0.5085	84.7457	3	0.0562

Pour la plaque avec défaut elliptique centré les résultats sont donnés par les graphes suivants :



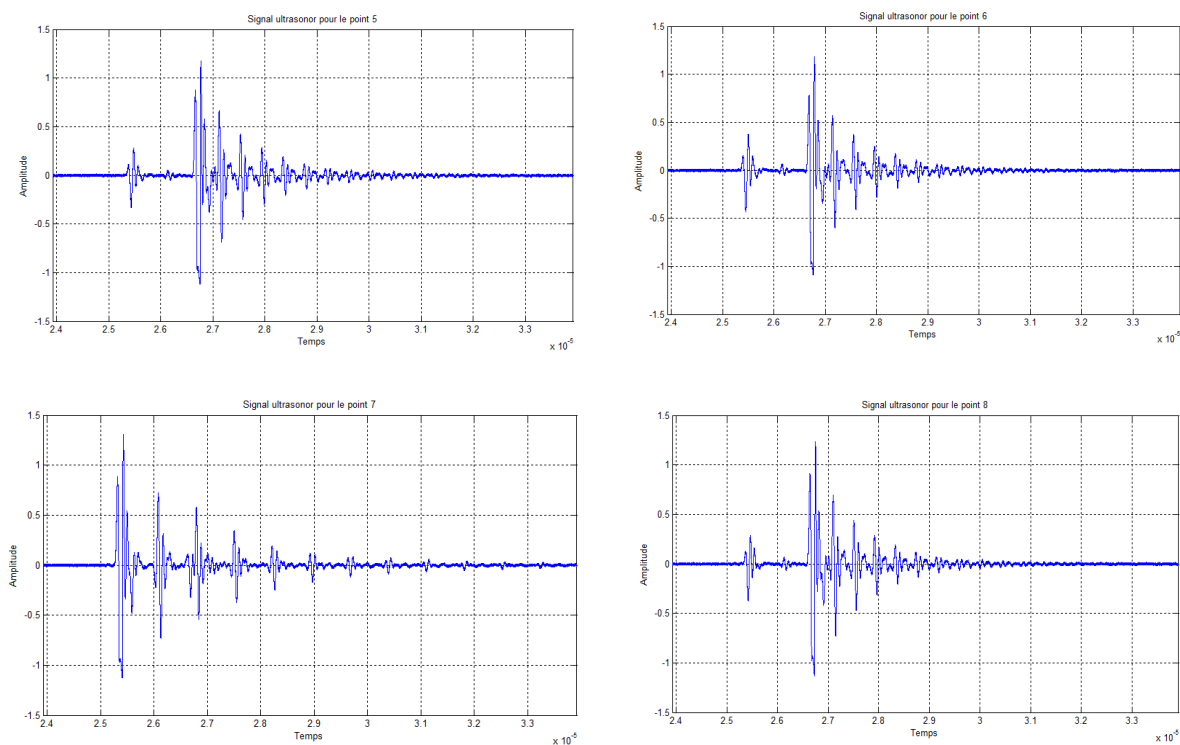


Figure 5.16: Signal ultrasonore de la plaque avec défaut elliptique centré sans contrainte résiduelle pour les huit points

Tableau 5.15: Vitesse et atténuation de la plaque avec défaut elliptique centré sans contrainte résiduelle

Points	$t1^*$ $10^{-5}$ (s)	$t2^*$ $10^{-5}$ (s)	$\Delta t^*$ $10^{-5}$ (s)	A1 (V)	A2 (V)	Vitesse* $10^2$ (m/s)	Epaisseur (mm)	Atténuation (Np/mm)
1	2.708	2.7486	0.0406	0.6744	0.4222	147.7832	3	0.0780
2	2.7095	2.7504	0.04409	0.6999	0.4449	146.6992	3	0.0755
3	2.7105	2.7517	0.0412	0.3319	0.1735	145.6310	3	0.1081
4	2.6148	2.681	0.0662	0.7259	0.4736	90.6310	3	0.0711
5	2.714	2.7548	0.0408	0.667	0.4256	147.0588	3	0.0718
6	2.714	2.7548	0.04080	0.5686	0.3759	147.0588	3	0.0689
7	2.6077	2.6794	0.0717	0.7255	0.5798	83.6820	3	0.0373
8	2.7097	2.7506	0.0409	0.6927	0.441	146.6992	3	0.0752



Pour la détermination de la contrainte résiduelle par la méthode ultrasonore, on utilise la relation (3.104) ce qui est nécessaire de connaître le coefficient acousto-élastique. Il est obtenu par l'intermédiaire d'un calibrage effectué à partir d'essai mécanique. Cet essai permet de quantifier la variation relative du temps de parcours en fonction de la contrainte. Le coefficient acousto-élastique représente la pente de la courbe du temps de vol relative en fonction de la contrainte. Selon la courbe (5.17), on peut déterminer le coefficient acousto-élastique  $K$  pour l'alliage d'Aluminium 7075-T6.

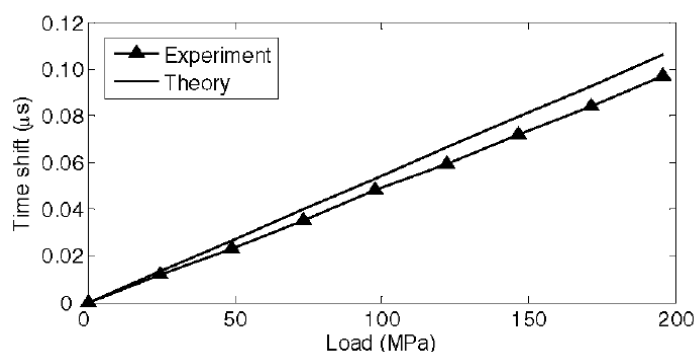
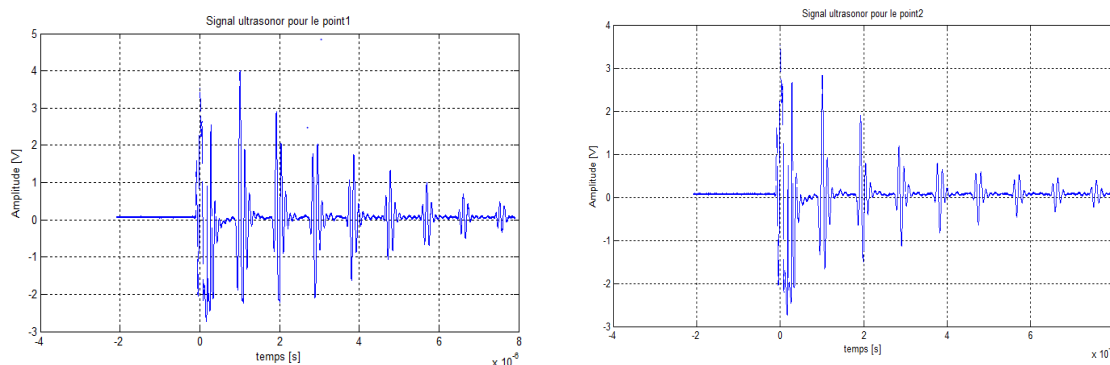


Figure 5.17: Courbe moyenne de l'étalonnage acousto-élastique pour Al 7075-T6 [75]

Pour la plaque avec défaut rainure et contrainte résiduelle, les résultats sont donnés par les graphiques et tableau suivants :



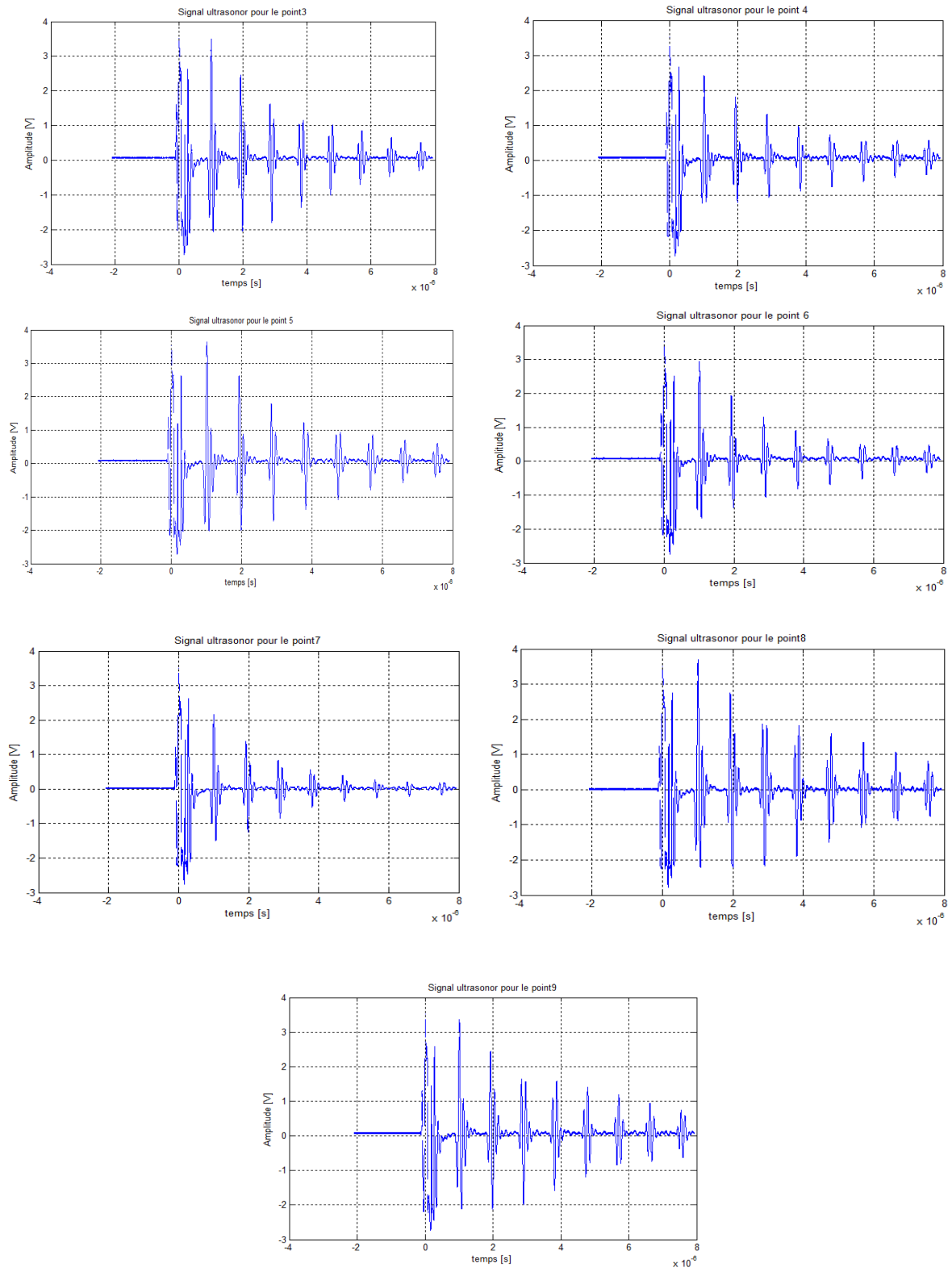
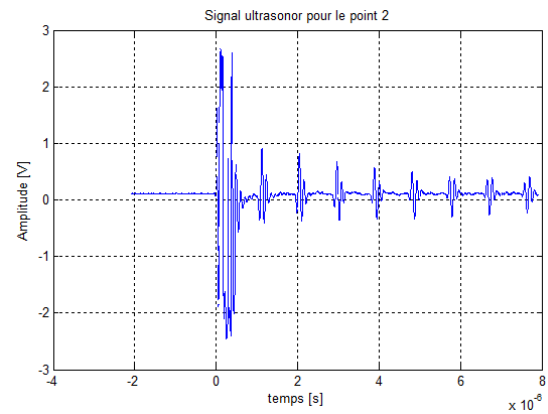
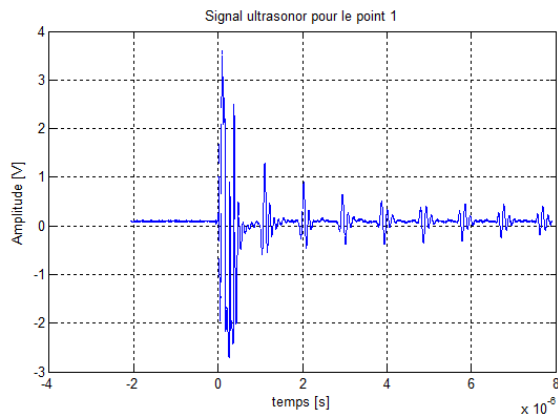


Figure 5.18: Signal ultrasonore de la plaque avec défaut rainure et contrainte résiduelle pour les neuf points

Tableau 5.16: Vitesse et atténuation de la plaque avec défaut rainure et contrainte résiduelle.

Points	$t1^*$ $10^{-6}$ (s)	$t2^*$ $10^{-6}$ (s)	$\Delta t^*$ $10^{-6}$ (s)	A1 (V)	A2 (V)	Vitesse* $10^3$ (m/s)	Epaisseur (mm)	Atténuation (Np/mm)
1	1.01	1.922	0.912	4.004	2.896	6.5789	3	0.0539
2	1.012	1.928	0.916	2.828	1.897	6.5502	3	0.0665
3	1.011	1.927	0.916	3.4948	2.4642	6.5502	3	0.0582
4	1.014	1.934	0.92	2.4264	1.8219	6.5217	3	0.0477
5	1.012	1.929	0.917	3.6323	2.6309	6.5430	3	0.0537
6	1.01	1.93	0.92	2.9364	1.945	6.5217	3	0.0686
7	1.007	1.924	0.917	2.1708	1.3817	6.5430	3	0.0752
8	1.014	1.928	0.914	3.6862	2.751	6.5645	3	0.0487
9	1.011	1.927	0.916	3.3548	2.437	6.5502	3	0.0532

Pour la plaque avec défaut entaille et contrainte résiduelle, les résultats sont donnés par les graphiques et tableau suivants :



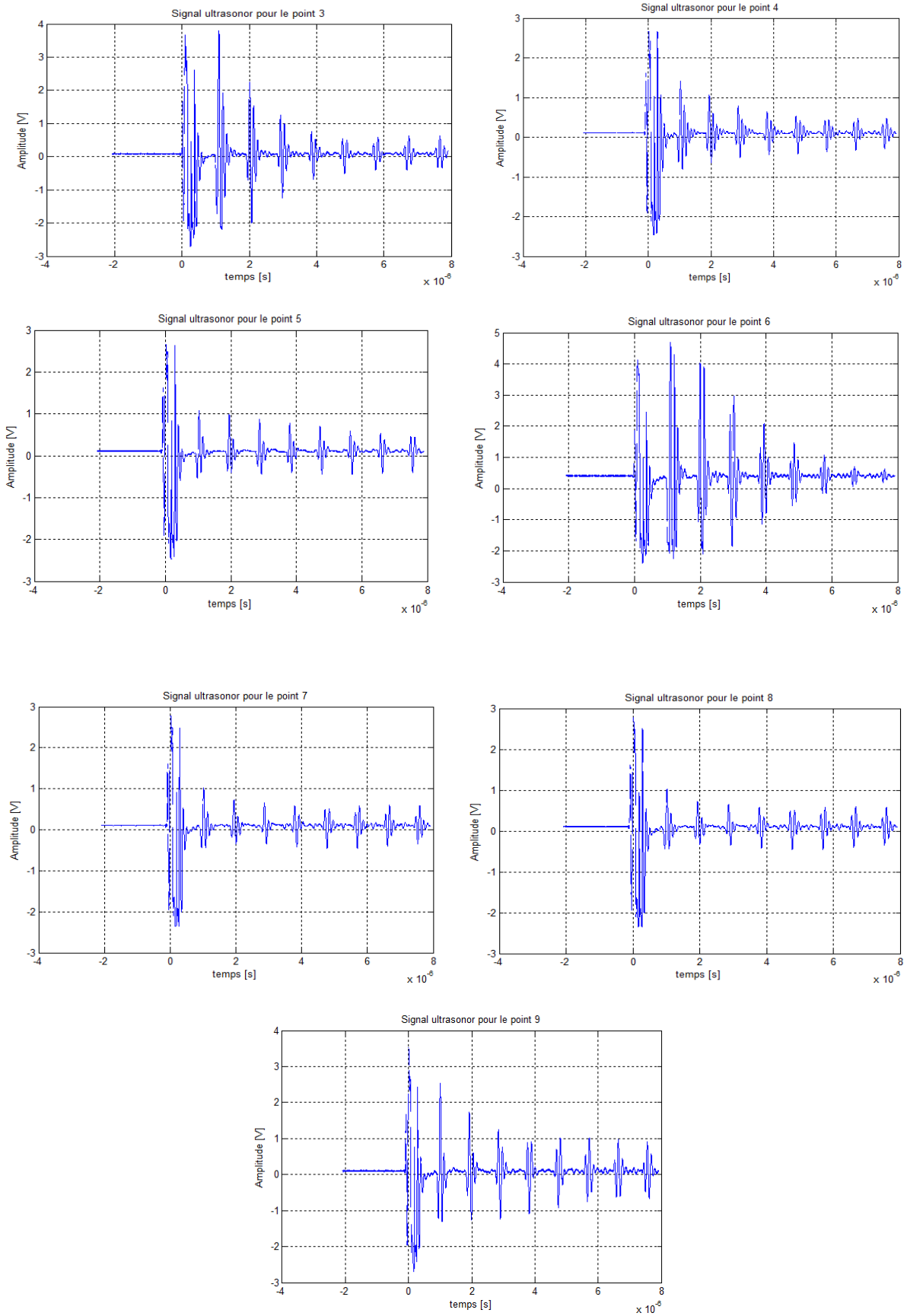
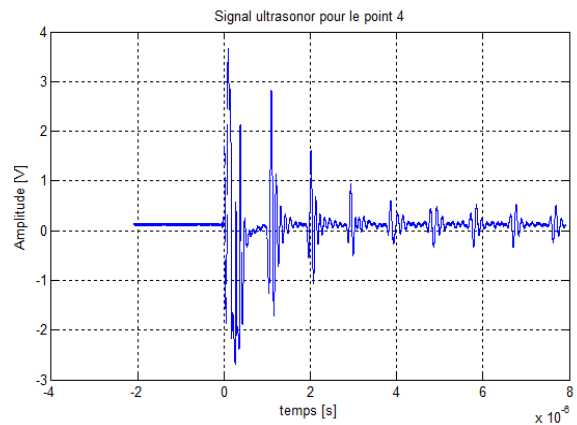
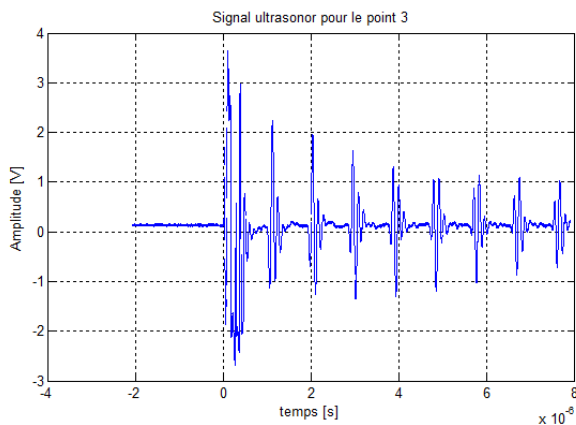
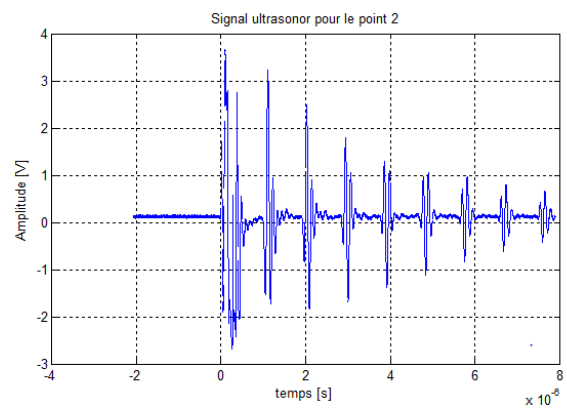
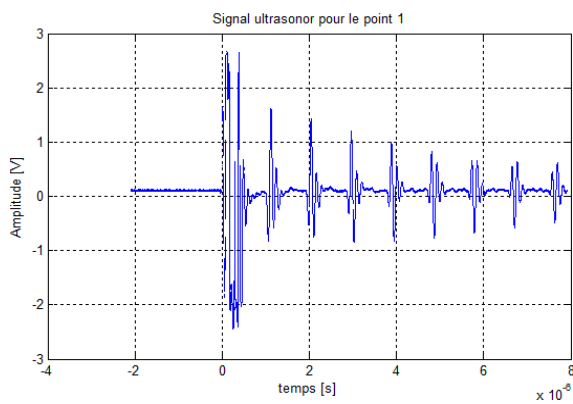


Figure 5.19: Signal ultrasonore de la plaque avec défaut entaille et contrainte résiduelle pour les neuf points

Tableau 5.17: Vitesse et atténuation de la plaque avec défaut entaille et contrainte résiduelle

Points	$t1^*$ $10^{-6}$ (s)	$t2^*$ $10^{-6}$ (s)	$\Delta t^*$ $10^{-6}$ (s)	A1 (V)	A2 (V)	Vitesse* $10^3$ (m/s)	Epaisseur (mm)	Atténuation (Np/mm)
1	1.106	2.03	0.924	1.286	0.8917	6.4935	3	0.0610
2	1.126	2.045	0.919	0.9119	0.8194	6.5288	3	0.0178
3	2.012	2.93	0.918	2.2383	1.2631	6.5359	3	0.0953
4	1.027	1.948	0.921	1.42	1.0578	6.5146	3	0.0490
5	1.954	2.876	0.922	0.9817	0.8673	6.5075	3	0.0206
6	4.855	5.771	0.916	1.4575	1.0813	6.5502	3	0.0497
7	1.019	1.941	0.922	1.0192	0.7234	6.5075	3	0.0571
8	1.019	1.941	0.922	1.0192	0.7234	6.5075	3	0.0571
9	1.002	1.924	0.922	2.526	1.7323	6.5075	3	0.0628

Pour la plaque avec défaut elliptique centré et contrainte résiduelle, les résultats sont donnés par les graphiques et tableau suivants :



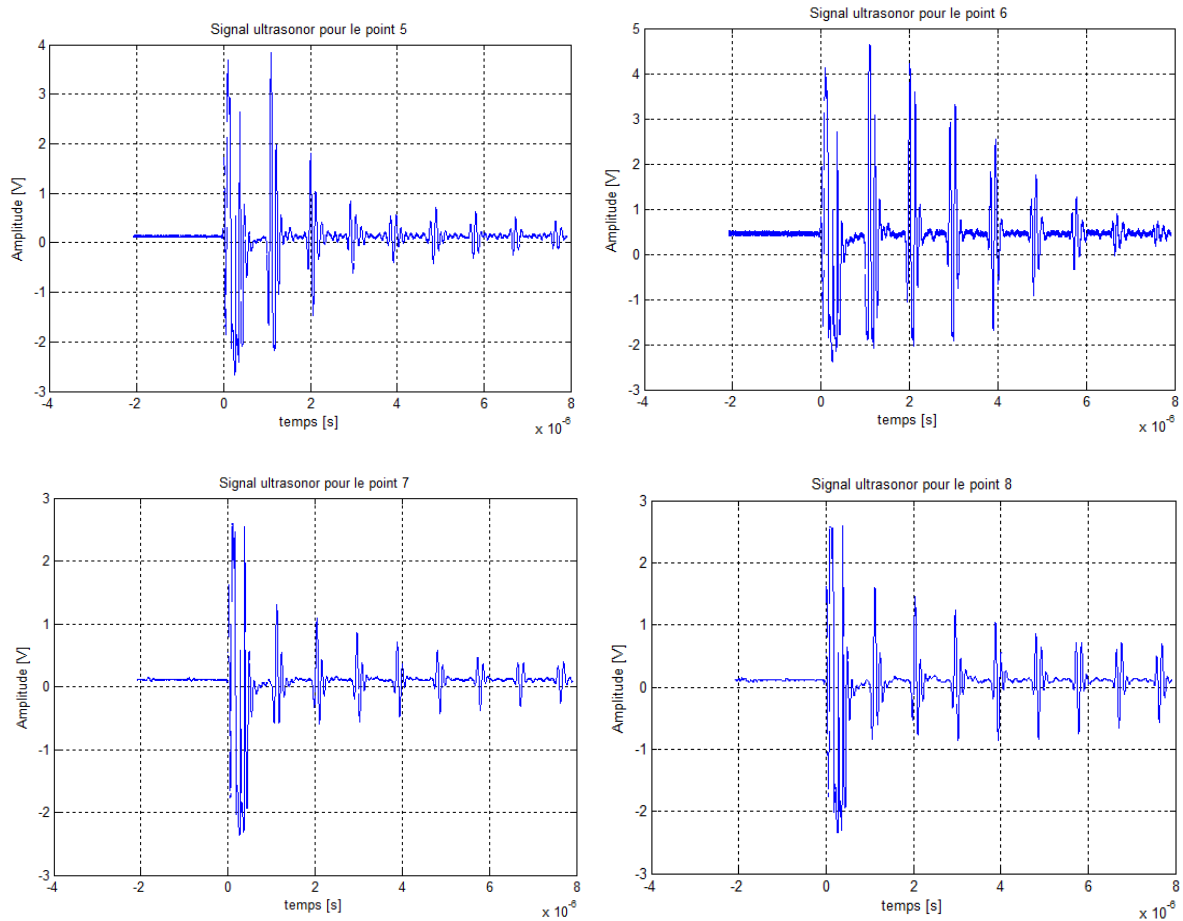


Figure 5.20: Signal ultrasonore de la plaque avec défaut elliptique centré et contrainte résiduelle pour les huit points

Tableau 5.18: Vitesse et atténuation de la plaque avec défaut elliptique centré et contrainte résiduelle.

Points	t1* 10 <sup>-6</sup> (s)	t2* 10 <sup>-6</sup> (s)	Δt* 10 <sup>-6</sup> (s)	A1 (V)	A2 (V)	Vitesse* 10 <sup>3</sup> (m/s)	Epaisseur (mm)	Atténuation (Np/mm)
1	1.12	2.042	0.922	1.6168	1.4278	6.5075	3	0.0207
2	1.105	2.023	0.918	3.2366	2.4812	6.5359	3	0.0442
3	1.114	2.034	0.92	2.2314	1.9656	6.5217	3	0.0211
4	1.098	2.016	0.918	2.8311	1.621	6.5359	3	0.0929
5	2.006	2.924	0.918	1.8041	0.8462	9.5359	3	0.1261
6	1.099	2.008	0.909	4.629	4.212	6.6006	3	0.0157
7	1.121	2.044	0.923	1.3086	1.0854	6.5005	3	0.0311
8	1.12	2.041	0.921	1.6033	1.4511	6.5359	3	0.0166

Le calcul de la contrainte résiduelle pour les tôles avec défaut rainure, entaille et elliptique centré est donné par les tableaux suivants :

Tableau 5.19: Contrainte résiduelle de la plaque avec défaut rainure :

Point	K $Mpa^{-1}$ $*10^{-4}$	$V_1$ (m/s) $*10^3$	$V_0$ (m/s) $*10^3$	La contrainte résiduelle (MPa)
1	5.33	6.5789	8.4388	413.4970
2	5.33	6.5502	8.4745	426.0293
3	5.33	6.5502	8.4388	419.8843
4	5.33	6.5217	8.4388	426.2160
5	5.33	6.5430	8.4745	427.6107
6	5.33	6.5217	8.4865	434.3742
7	5.33	6.5430	8.4388	421.4724
8	5.33	6.5645	8.4507	418.7511
9	5.33	6.5502	8.4507	421.9332

Tableau 5.20: Contrainte résiduelle de la plaque avec défaut entaille :

Point	K $Mpa^{-1}$ $*10^{-4}$	$V_1$ (m/s) $*10^3$	$V_0$ (m/s) $*10^3$	La contrainte résiduelle (MPa)
1	5.33	6.4935	8.4507	434.5241
2	5.33	6.5288	8.4533	427.1366
3	5.33	6.5359	8.4565	426.1036
4	5.33	6.5146	8.4507	429.8281
5	5.33	6.5075	8.4269	427.3267
6	5.33	6.5502	8.4533	422.3908
7	5.33	6.5075	8.4507	431.39688
8	5.33	6.5075	8.4626	433.43191
9	5.33	6.5075	8.4745	435.46632

Tableau 5.21: Contrainte résiduelle de la plaque avec défaut elliptique centré :

Point	K $Mpa^{-1}$ $*10^{-4}$	$V_1$ (m/s) $*10^3$	$V_0$ (m/s) $10^3$	La contrainte résiduelle (MPa)
1	5.33	6.5075	147.7832	1050.0052
2	5.33	6.5359	146.6992	1040.2739
3	5.33	6.5217	145.6310	1035.9731
4	5.33	6.5359	90.6310	523.15144
5	5.33	9.5359	147.0588	1042.3179
6	5.33	6.6006	147.0588	1034.0620
7	5.33	6.5005	83.6820	418.73393
8	5.33	6.5359	146.6992	1042.9967

Analysant les résultats mentionnés sur les tableaux 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, on remarque que les vitesses longitudinales et les coefficients d'atténuation de propagation de l'onde longitudinale pour tous les points aux voisinage de chaque défauts sont presque les mêmes. Et la vitesse longitudinale autour d'un défaut de surface elliptique est plus grande qu'une fissure entaille ou rainure.

En remarquant aussi les résultats présentés par les tableaux 5.19, 5.20, 5.21, on constate que la présence de la contrainte résiduelle diminue la vitesse de l'onde longitudinale, et que la contrainte résiduelle autour d'un défaut de surface elliptique centré est plus grande qu'aux défauts rainure et entaille qui est presque identique. Donc, on peut conclure que la distribution de la contrainte résiduelle autour des défauts est une distribution homogène et que la contrainte résiduelle autour des défauts de surfaces est plus grande que les défaut de type rainure et entaille.

Tableau 5.22: Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques des contraintes résiduelles de la plaque avec défaut entaille :

	Contrainte Résiduelle(MPa)		Erreur (%) relative
	Résultat expérimental	Résultat numérique Contrainte thermomécanique	
Tôle avec défaut entaille	434.5241	500	0.13%



Comparant les résultats expérimentaux et numériques (Annexe F) présentés par le tableau 5.22, on peut dire qu'il y'a une bonne concordance avec une erreur relative acceptable.

### I.3.Caractérisation du matériau

#### I.3.1.Essai de traction

Pour la tôles avec et sans contrainte résiduelle les résultats de l'essai de traction sont donnés par les courbes caractéristique de traction et tableau suivants :

Tableau 5.23: Résultats de l'essai de traction pour une tôle sans défaut avec et sans contrainte résiduelle

Tôle	Limite d'élasticité [Mpa]	Charge Max [KN]	Résistance à la traction [Mpa]	Déplacement Max [mm]
Tôle sans contrainte résiduelle	98.58	20.11	111.72	23.49
Tôle avec contrainte résiduelle	102.90	20.59	117.14	28.16

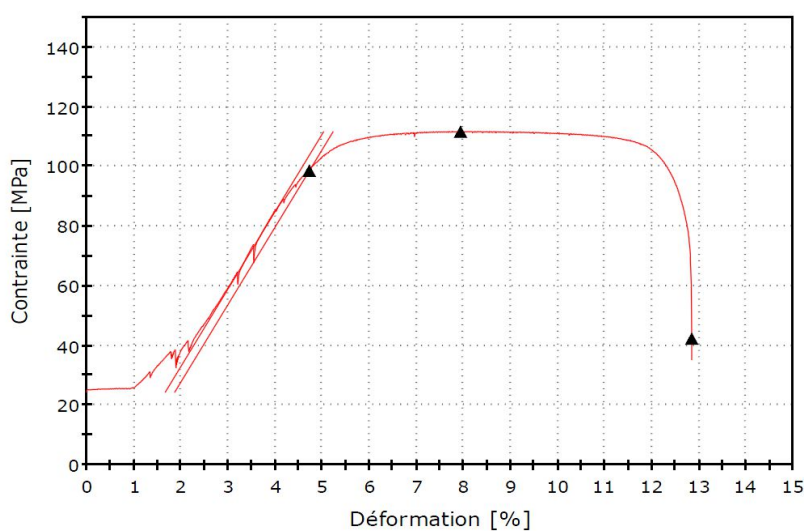


Figure 5.21: Courbe caractéristique de traction pour une tôle sans contrainte résiduelle

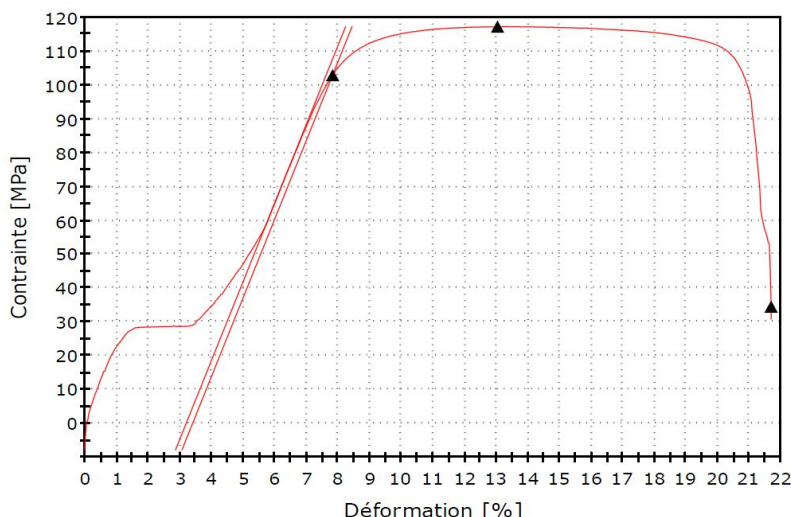


Figure 5.22: Courbe caractéristique de traction pour une tôle avec contrainte résiduelle

On remarque que le matériau s'est écroui qui se traduit par une augmentation des valeurs moyennes des propriétés mécaniques pour les tôles immergées dans l'Azote cela s'explique par une transformation martensitique induite par la baisse de température qui durcisse le matériau sous l'effet des mouvements des dislocations qui sont thermiquement activées.

### 1.3.2. Essai de dureté Vickers et Brinell

Les valeurs moyenne des résultats pour l'essai de dureté Vickers et Brinell pour une charge de 10g sont donnés par le tableau suivant :

Tableau 5.24: Résultats de l'essai de dureté Vickers et Brinell pour une tôle sans défaut avec et sans contrainte résiduelle

Tôle	Dureté Vickers [HV10]	Dureté Brinell [HV10]
Sans contrainte résiduelle	38.466	31.1
Avec contrainte résiduelle	38.533	31.6

On remarque que la valeur moyenne de dureté Vickers et Brinell est augmentée pour les tôles avec contrainte résiduelle due à la traction à basse température.

### I.3.3.Essai de résilience

Pour la tôles ISO-U à  $20C^{\circ}$  avec et sans contrainte résiduelle les valeurs moyennes de l'essai Charpy sont donnés par le tableau suivant :

Tableau 5.25: L'énergie de la résilience pour une tôle avec et sans contrainte résiduelle

	Echantillon avec contrainte résiduelle	Echantillon sans contrainte résiduelle
La résilience ( $J$ )	13	18.2

On remarque que la valeur de l'énergie au choc pour la tôles avec contrainte résiduelle est plus petite que l'énergie au choc pour la tôle sans contrainte résiduelle. Donc la présence de la contrainte résiduelle diminue la capacité d'absorber le choc.

## II.Résultats numériques

### II.1 .Détermination du champ de contrainte et le SIF pour des tôles avec et sans contraintes résiduelles à température ambiante

On considère une plaque mince de  $3mm$  d'épaisseur en alliage d'aluminium de type 7075-T6 avec une largeur  $W = 6cm$  , une longueur  $V = 18cm$  , un coefficient de poisson  $\nu = 0.3$  et un module de Young  $E = 72GPa$ . L'origine des coordonnées est choisie au centre de la plaque. On considère que la plaque possède une fissure elliptique centrée à l'origine sa longueur  $a = 1cm$ . Cette plaque est chargée par une contrainte uni-axiale  $\sigma = 1GPa$  (Fig.5.23).

Pour la génération du maillage on a utilisé le générateur du maillage Gmesh qui est le même pour les deux techniques « Extrapolation et  $G - \theta$  ». Alors on a adopté l'élément finis triangulaire avec trois nœuds  $T3$  et l'élément finis spéciale avec six nœuds avec un nœud situé à un quart de l'arête dont ce dernier présente beaucoup d'avantage (Fig.2.5).

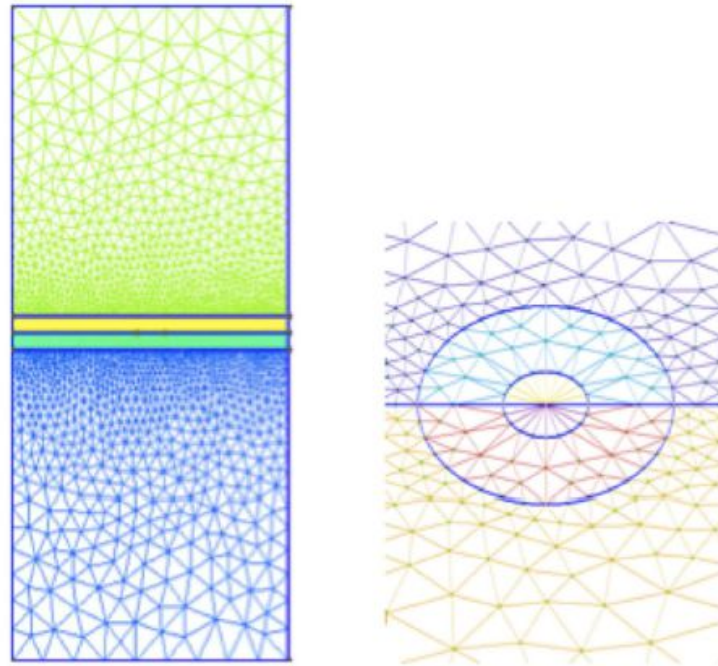


Figure 5.23: Génération de maillage de la plaque avec un zoom sur la pointe de la Fissure à droite par Gmesh [76].

Pour la détermination du champ de contrainte, on doit commencer par le calcul du facteur d'intensité de contrainte SIF dont on a utilisé deux techniques : la méthode d'extrapolation et la méthode énergétique  $G - \theta$ .

Alors on a développé un logiciel sous Matlab pour ce calcul en adoptant la méthode des éléments finis dont le développement de la méthode est détaillé dans le chapitre 2.

Comparant les deux méthodes extrapolation et  $G - \theta$  avec la solution analytique [76], on a remarqué que la méthode d'extrapolation avec l'élément finis à trois nœuds T3 est moins précise qu'avec l'élément finis spécial avec six nœuds T6 qui nécessite un raffinement important aux voisinage de la pointe de la fissure pour assurer la convergence sans arriver au point singulier. Par contre pour la méthode  $G - \theta$ , on a remarqué que les résultats sont similaire avec la solution analytique et cela pour les deux éléments finis T3 et T6 qui se traduit par une erreur relative par rapport à la technique d'extrapolation [76].

Les résultats de la comparaison entre les deux méthodes sont illustrés par les figures : Fig 5.24, Fig 5.25, Fig 5.26, Fig 5.27 et les tableaux 5.26. Pour le calcul d'erreur les résultats sont motionnés par la figure 5.28 et le tableau 5.27.

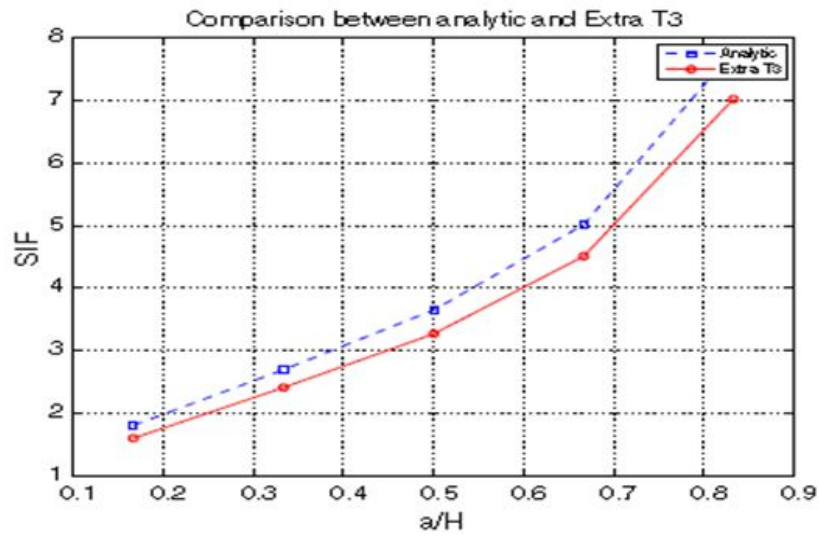


Figure 5.24: Comparaison entre extrapolation et le résultat analytique avec l'élément  $T3$

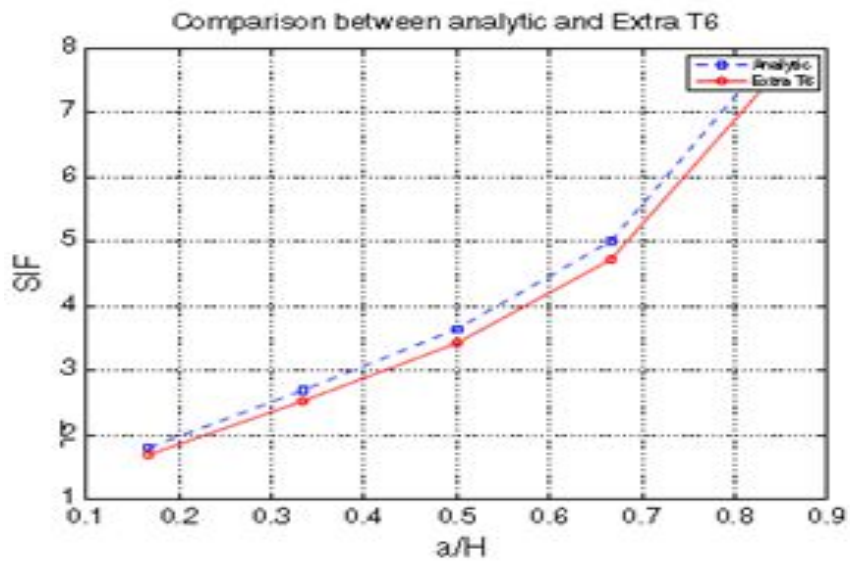


Figure 5.25: Comparaison entre extrapolation et le résultat analytique avec l'élément  $T6$

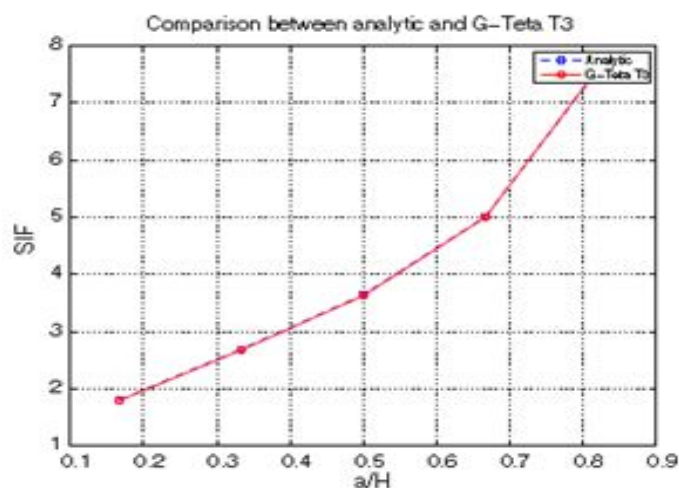


Figure 5.26: Comparaison entre la méthode  $G - \theta$  et le résultat analytique avec l'élément  $T3$

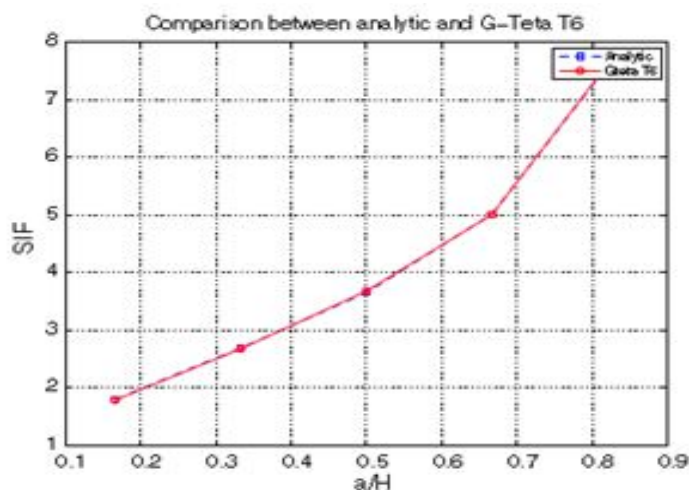


Figure 5.27: Comparaison entre la méthode  $G - \theta$  et le résultat analytique avec l'élément  $T6$

Tableau 5.26: Les valeurs analytique et numériques du SIF pour différentes longueurs des fissures pour 8908 éléments

SIF ( $GPa \cdot \sqrt{cm}$ )	a=1	a=2	a=3	a=4	a=5
Solution analytique	1.8034	2.6935	3.6508	5.0132	7.7904
Extrapolation technique T3	1.5981	2.4094	3.2696	4.5075	7.0202
Extrapolation technique T6	1.6930	2.5292	3.4283	4.7243	7.4221
G-teta T3	1.7868	2.6781	3.6307	5.0009	7.8196
G-teta T6	1.8034	2.6935	3.6508	5.0011	7.8199

Tableau 5.27: Les valeurs numériques du SIF et l'erreur relative pour différent nombre d'éléments avec  $a = 1$

Nombre d'éléments	SIF ext T3	RE	SIF ext T6	RE	SIF G- $\theta$ T3	RE
2750	1.4990	0.1687	1.6483	0.0860	1.7101	0.0517
6128	1.5849	0.1211	1.6905	0.0626	1.7845	0.0104
8908	1.5981	0.1138	1.6930	0.0612	1.7868	0.0092
11638	1.6052	0.1099	1.6931	0.0611	1.7911	0.0068
22834	1.6169	0.1034	1.6956	0.0597	1.7959	0.0041

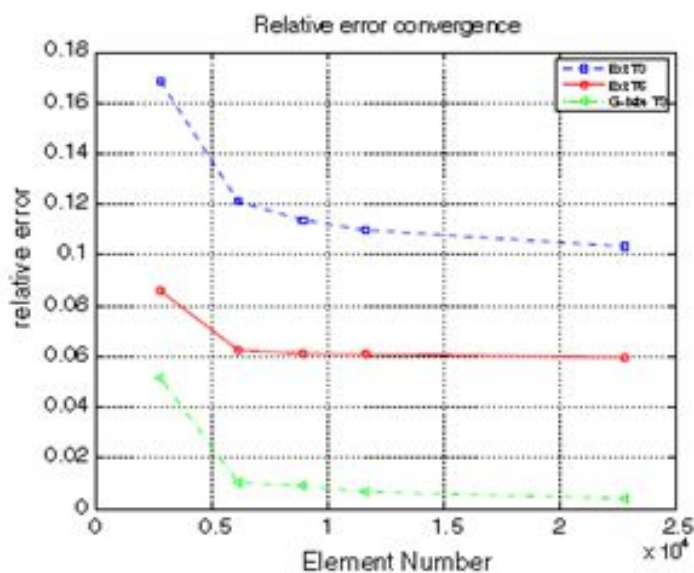


Figure 5.28: L'erreur relative et convergence

A fin d'étudier l'influence du maillage par la méthode  $G - \theta$ , on a utilisé trois types de maillage tel qu'il est représenté par la figure 5.29. D'après les résultats qui sont présentés par le tableau 5.28, on a constaté que le SIF est presque le même quelle que soit le maillage avec la même erreur relative de 0.9%.

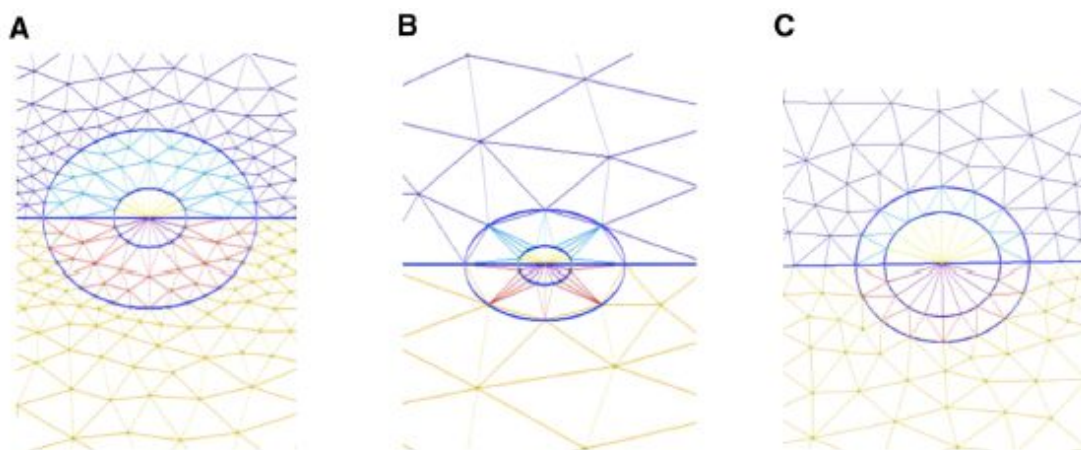


Figure 5.29: Différents types de maillages

Tableau 5.28 : Les valeurs de SIF par la méthode  $G - \theta$  et l'erreur relative pour trois différents types de maillages avec 8908 éléments et  $\alpha = 1$

	A	B	C
SIF $G-\theta$	1.7868	1.7866	1.7867
RE	0.0092	0.0093	0.0092

D'après les résultats du tableau 5.29, on a constaté que la position du contour d'intégration n'influe pas sur les résultats numériques du SIF avec une erreur relative de 0.9%.

Tableau 5.29: Les valeurs numériques du SIF et l'erreur relative pour différents nombres d'éléments avec  $\alpha = 1$

Ri	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2
Re	0.5	0.48	0.46	0.44	0.42	0.4
SIF	1.7868	1.7870	1.7871	1.7864	1.7861	1.7857
RE	0.0092	0.0090	0.0090	0.0094	0.0095	0.0098

Le calcul du taux de restitution de l'énergie  $G$  en fonction de la contrainte est donné par la Fig 5.30, sachant que la validation est satisfaite en comparant la valeur numérique et analytique du SIF pour différentes valeurs de contraintes Fig 5.31.



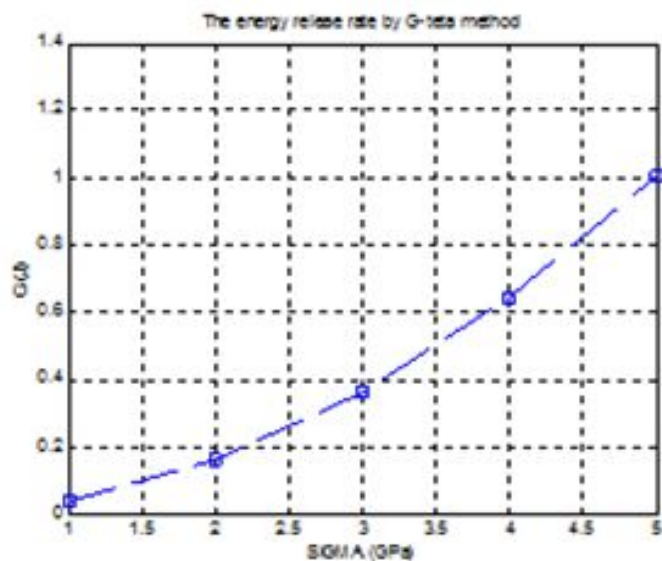


Figure 5.30:  $G$  par la méthode  $G - \theta$  en fonction de contrainte

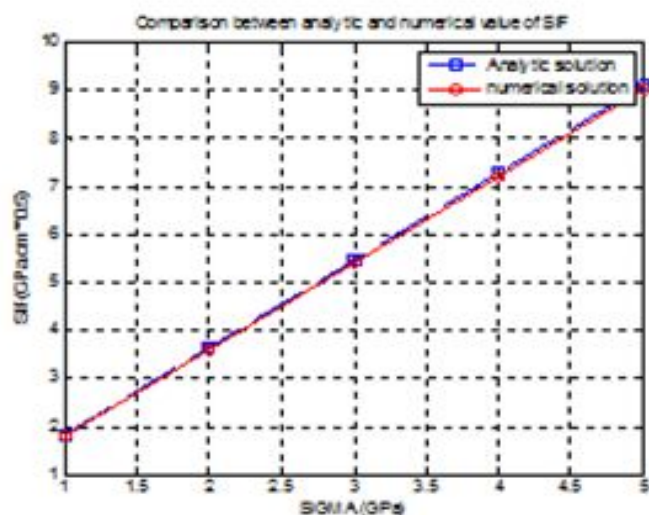


Figure 5.31: Comparaison entre les valeurs numériques de SIF et les résultats analytique par la méthode  $G - \theta$  en fonction de contrainte

Les résultats du champ de déplacement et contrainte et du SIF pour une force uniaxiale avec et sans contrainte résiduelle thermomécanique (Annexe F) sont donnés par les figures : Fig 5.32, Fig 5.33, Fig 5.34, Fig 5.35, Fig 5.36, Fig 5.37, Fig 5.38, Fig 5.39, Fig 5.40, Fig 5.41 et Fig 5.42 :

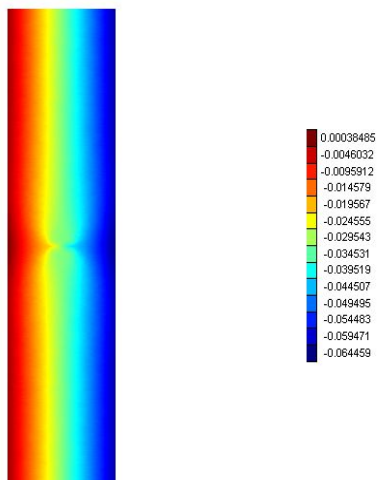


Figure 5.32 :Le champ du déplacement  $u_x$  sans contrainte résiduelle

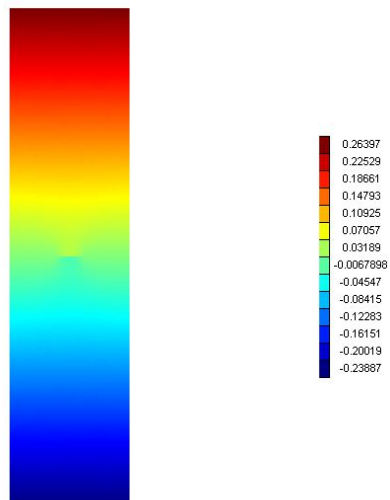


Figure 5.33 :Le champ du déplacement  $u_y$  sans contrainte résiduelle

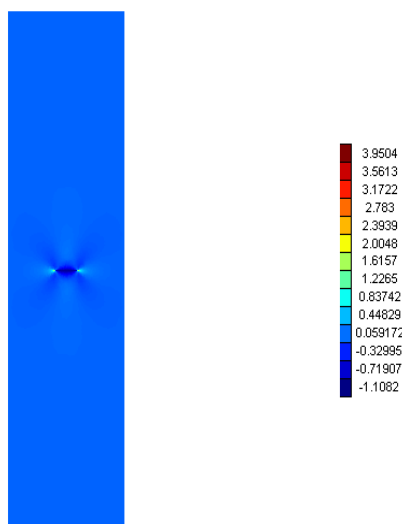


Figure 5.34: Le champ de contrainte  $\sigma_{xx}$  sans contrainte résiduelle

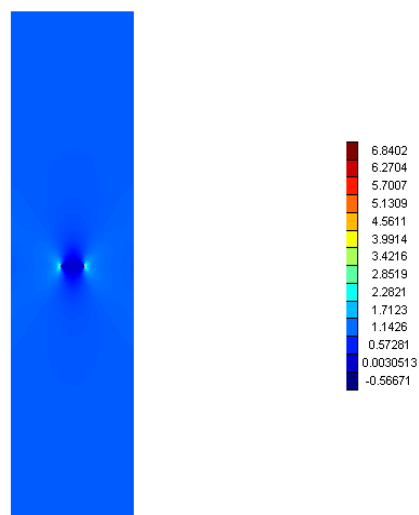


Figure 5.35 :Le champ de contrainte  $\sigma_{yy}$  sans contrainte résiduelle

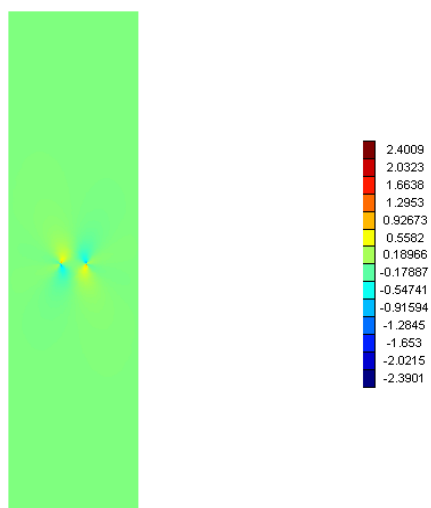


Figure 5.36: Le champ de contrainte  $\sigma_{xy}$  sans contrainte résiduelle

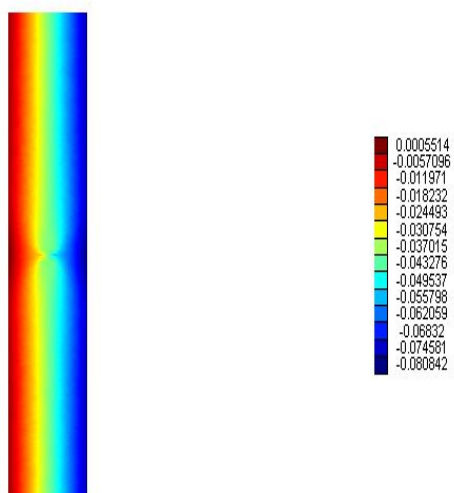


Figure 5.37 : Le champ du déplacement  $u_x$  avec contrainte résiduelle

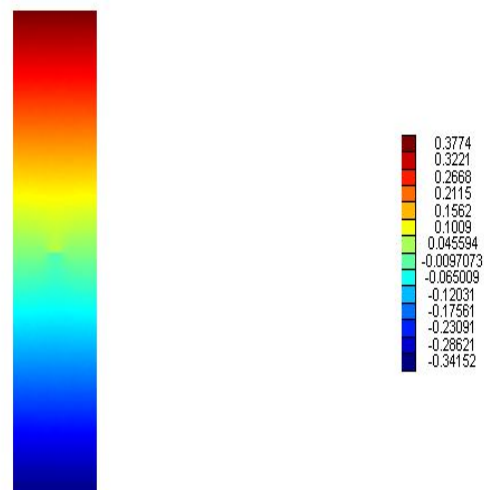


Figure 5.38 :Le champ du déplacement  $u_y$  avec contrainte résiduelle

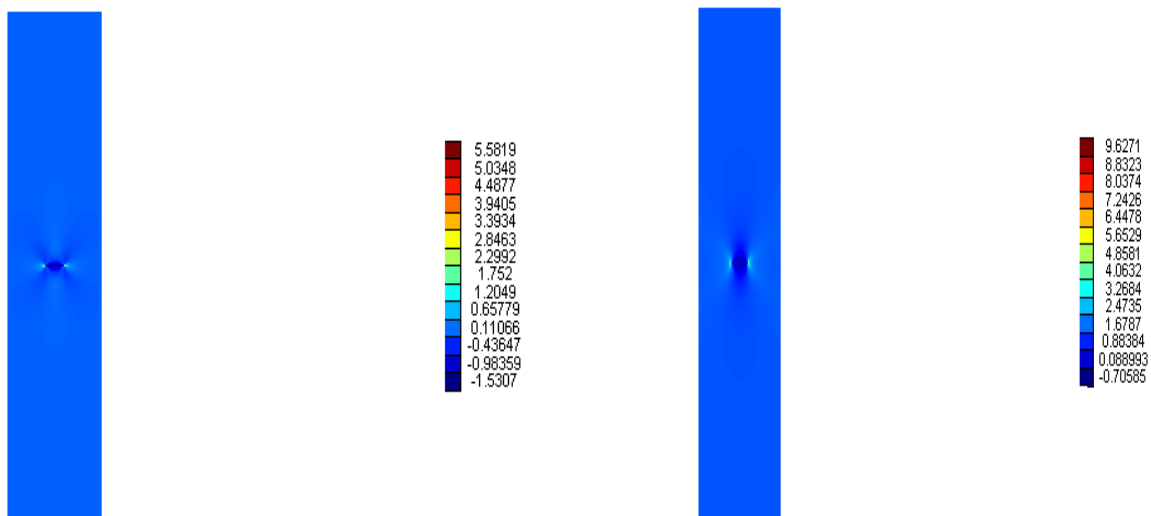


Figure 5.39: Le champ de contrainte  $\sigma_{xx}$  avec contrainte résiduelle

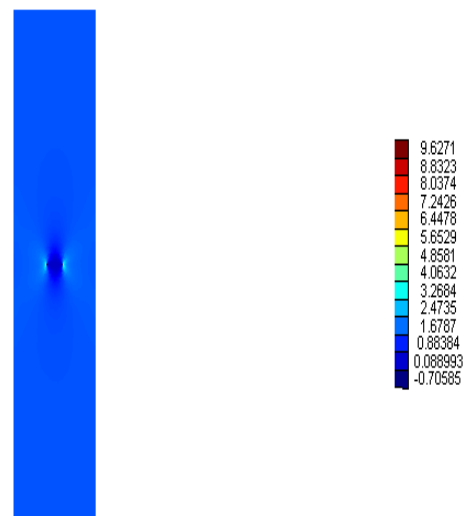


Figure 5.40: Le champ de contrainte  $\sigma_{yy}$  avec contrainte résiduelle

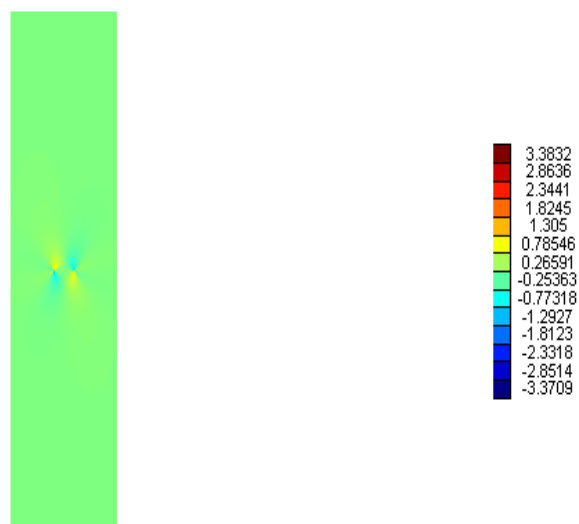


Figure 5.41: Le champ de contrainte  $\sigma_{xy}$  avec contrainte résiduelle

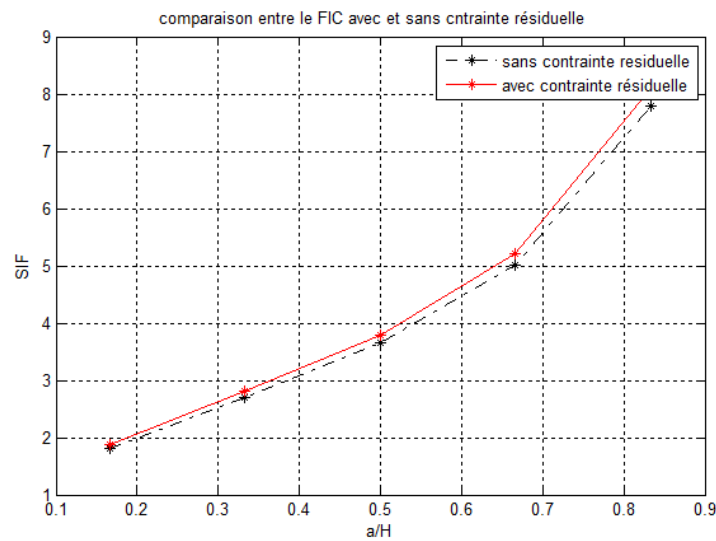


Figure 5.42: Le SIF avec et sans contrainte résiduelle

Remarquons les figures ci-dessus, on déduit que la présence de la contrainte résiduelle augmente les valeurs des contraintes et des déplacements au voisinage de la fissure ainsi que le facteur d'intensité de contrainte.

## II.2. Validation numérique du contrôle par CF

Pour le calcul de la résistance  $R$  et de l'inductance  $L$ , on doit résoudre l'équation (3.20) qui est une équation aux dérivées partielles elliptique avec des conditions de type Dirichlet par la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel Matlab. Pour cela on a commencé par générer un maillage triangulaire avec 36352 éléments finis. Après l'obtention de  $E$  et  $B$ , on calcule l'énergie dissipée et emmagasinée à travers les énergies électromagnétiques données par les équations (3.35), (3.36), (3.38) et (3.39) nécessaires pour tirer enfin la résistance et l'inductance []. Pour résoudre notre problème, on a pris les hypothèses suivantes :

- On considère que le champ électrique est uniforme :

$$\vec{E}_x = \vec{E}_y = \vec{E}$$

- On travaille avec une sonde conique c.à.d. la surface de contact entre la sonde et la pièce est considérée comme un point ponctuel.
- La densité du flux magnétique est donnée par la relation suivante :

$$\vec{B} = \frac{J}{\omega} \vec{E}$$

Les caractéristiques électromagnétiques de la pièce en AL 7075-T6 sont les suivants :

La perméabilité magnétique  $\bar{\mu} = 4\pi 10^{-7} F/m$

La conductivité électrique  $\bar{\sigma} = 19.10^6 (\Omega m)^{-1}$

La perméabilité magnétique relative  $\mu_r = 1 F/m$

Le coefficient diélectrique  $\bar{\epsilon} = 8.854 . 10^{-12} V/m$

Les résultats sont présentés par les figures et les tableaux suivants :

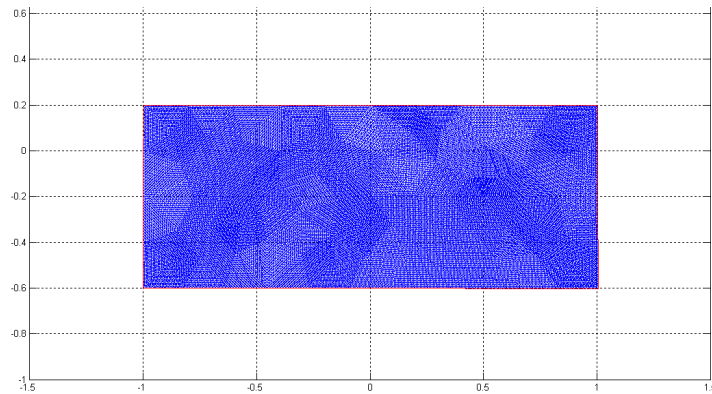


Figure 5.43: Maillage de la plaque sans défaut

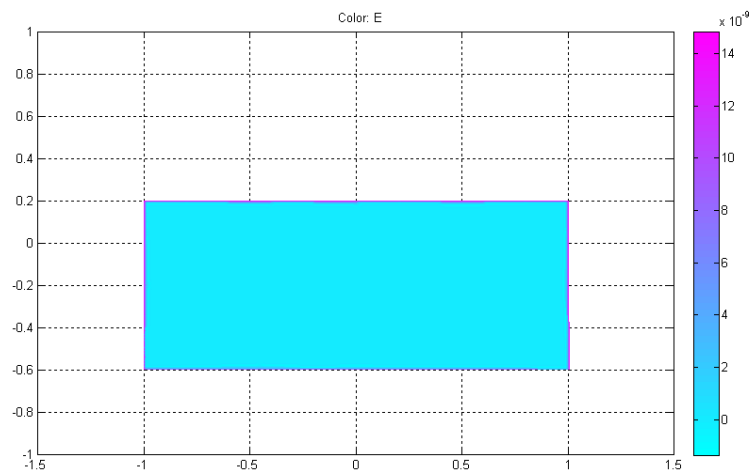


Figure 5.44: présentation du champ électrique de la plaque sans défaut

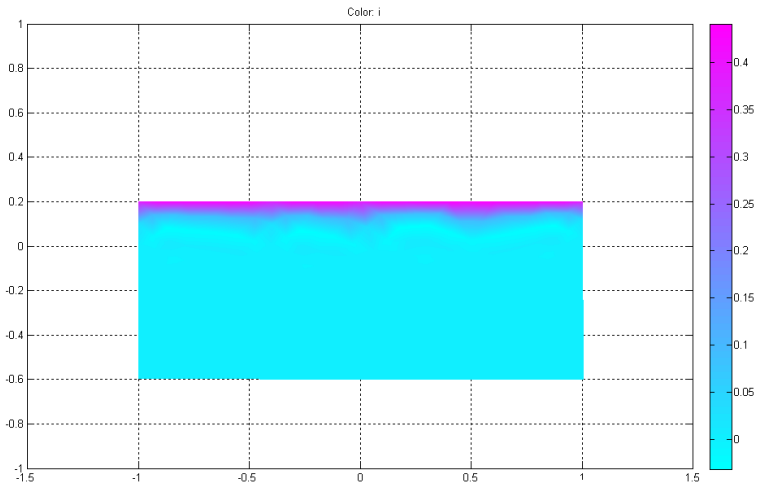


Figure 5.45: présentation de la densité du courant de la plaque sans défaut

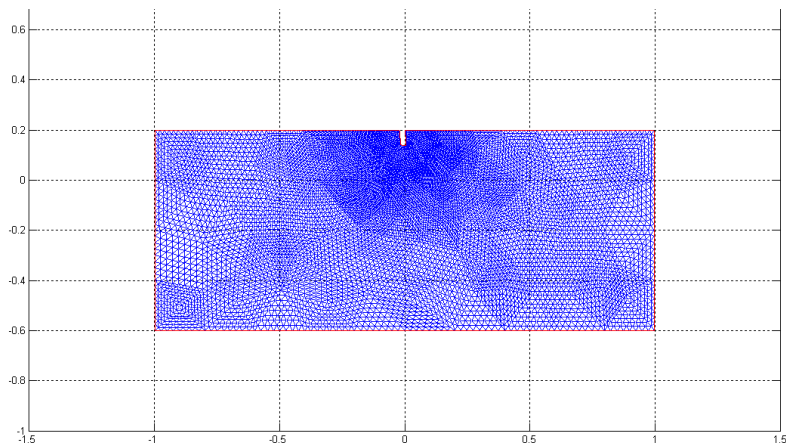


Figure 5.46: présentation de la densité du courant de la plaque avec défaut rainure

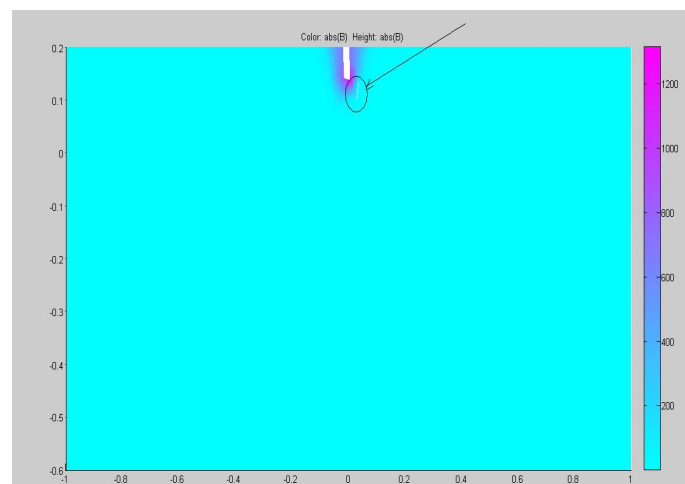


Figure 5.47: présentation de la densité du courant de la plaque avec défaut rainure

Tableau 5.30 : Comparaison entre les valeurs expérimentales et numériques de R et L des plaques avec et sans défauts rainure.

Plaques	Le courant de Foucault (mA)	$f$ KHz	$L \cdot 10^{-3}$		Erreur %	R		Erreur %
			(H)			$(\Omega)$		
			$L_{exp}$	$L_n$		$R_{exp}$	$R_n$	
Plaque sans défaut	7.3850	20	633.4410	696.6800	9.9830	11.0094	10.6300	1.27
	4.4430	50	631.6200	653	3.3800	11.6514	11.8000	1.28
	2.4430	100	634.0970	594.1800	6.3000	12.7636	13.4000	4.99
	1.2270	200	650.1600	588.8700	9.4300	15.6421	16.6000	6.12
	0.7865	300	680.5600	627.8800	7.7400	19.8908	21.0100	5.63
Plaque avec défaut rainure	7.3860	20	633.1330	598	5.5400	10.9760	11.4700	4.56
	4.4440	50	631.4400	573.4800	9.1800	11.6020	12.3000	6.02
	2.4440	100	633.9540	582	8.1000	12.6939	10.8400	14.57
	1.2270	200	650.4100	577	11.1600	15.5383	14.3100	7.85
	0.7866	300	680.4600	624	8.2900	19.7447	17.4100	11.8

D'après les résultats illustrés par le tableau 5.30, pour une gamme de fréquence de 20KHz – 500KHz , on distingue que la réactance augmente avec la fréquence et décroît avec la présence du défaut rainure, mais la résistance augmente avec la présence du défaut et avec l'augmentation de la fréquence ce qui explique une forte concentration de la densité de courant au niveau du défaut présenté par la figure 5.47. Et comparant les résultats expérimentaux et numérique, on a déduit que les résultats sont bon avec une erreur relative acceptable.



## CONCLUSION

Dans ce travail nous avons caractérisé les contraintes résiduelles des plaques en alliage d'aluminium avec des fissures qui représente le revêtement de l'avion, par différentes méthodes de contrôle non destructif comme les courants de Foucault, les ultrasons afin de déterminer son influence sur les paramètres de la mécanique de la rupture et les caractéristiques mécaniques du matériau.

Ce travail se fonde sur deux approches numérique et expérimentale a fin de caractériser le champ de contrainte. Alors nous avons traité la modélisation par la méthode des éléments finis pour la détermination des contraintes d'une pièce fissurée. Nous introduisons les notions locales et globales de la mécanique de la rupture qui nous amèneront à déterminer les différentes méthodes numériques utilisées pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie nécessaire pour la détermination du champ de contrainte au voisinage de la fissure. Nous avons aussi illustré les lois fondamentales de l'électromagnétisme et la modélisation ultrasonore pour la détermination des contraintes résiduelles thermomécanique. Et a la fin on a englobé notre travail par une caractérisation mécanique du matériau.

D'après la synthèse de tous les résultats obtenus, on peut tirer les conclusions suivantes :

Après une analyse des résultats obtenus par le contrôle par CF pour les deux cas statique avec et sans contrainte résiduelle et à l'application d'une charge uni-axiale, on a constaté :

- Les résultats numériques et expérimentaux sont bons avec une erreur relative acceptable.
- une augmentation de l'impédance par rapport à une tôle sans défaut en se rapprochant de la pointe qui s'explique par l'augmentation de l'énergie

dissipée par effet Joule et la diminution de l'énergie emmagasinée au voisinage de la pointe.

- L'impédance diminue légèrement avec la présence de la contrainte résiduelle et énormément avec la charge uni-axiale, qui s'explique par l'agitation thermique due à la contrainte qui est plus prononcée à la pointe.

La méthode d'extrapolation avec l'élément finis à trois nœuds T3 est moins précise qu'avec l'élément finis spécial avec six nœuds T6 qui nécessite un raffinement important au voisinage de la pointe de la fissure pour assurer la convergence sans arriver au point singulier. Par contre pour la méthode  $G - \theta$ , on a remarqué que les résultats sont similaires avec la solution analytique et cela pour les deux éléments finis T3 et T6 qui se traduit par une erreur relative par rapport à la technique d'extrapolation. Cette méthode nous conduit à déterminer le champ de contrainte et déplacement avec et sans présence de la contrainte résiduelle.

D'après les résultats obtenus pour le contrôle par ultrason on a constaté que :

- Les résultats numériques et expérimentaux sont très bons avec une acceptable erreur relative .
- les signaux obtenus pour le contrôle ultrasonore sont très bons.
- la présence de la contrainte résiduelle diminue la vitesse de l'onde longitudinale.
- la distribution de la contrainte résiduelle autour des défauts est une distribution homogène.
- La contrainte résiduelle autour du défaut de surface elliptique centré est plus grande que la contrainte résiduelle autour des défauts rainure et entaille.

La caractérisation mécanique du matériau nous a mené à conclure que la dureté et la résistance à la traction sont augmentées par l'écrouissage du matériau mais la résistance au choc a diminué par l'influence de la contrainte résiduelle.

Comme perspectives à cette étude, les travaux suivants peuvent être proposés :

- Prédiction de l'évolution des défauts par CF.
- Une caractérisation des contraintes résiduelles par la méthode de contrôle DRX.
- Une estimation des contraintes résiduelles par les méthode de processus stochastique tel que la méthode de Monté Carlo.
- Etude expérimentale et numérique de fatigue pour les tôles subissant la contrainte résiduelle.
- Une caractérisation des contrainte à basse température par les méthodes de CND en utilisant le SQUID.
- Une simulation numérique pour le calcul des paramètre de la mécanique de la rupture à basse température.
- Une simulation numérique pour la propagation de la fissure à basse et à température ambiante.
- Une étude des contraintes résiduelle sur un autre matériau aéronautique qui subit des contraintes résiduelle thermique à haute température tel que l'acier inoxydable austénitique, les alliages de Titane et les matériaux composites.
- Une caractérisation mécanique par la nano indentation au voisinage de la fissure.
- Une caractérisation métallographique au voisinage de la fissure.
- Etude de l'influence de pression.

## APPENDICE A

## LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

Symbole	Significations	Unité
$\vec{A}$	le potentiel vecteur magnétique	
$A_m$	l'amplitude du pic Barkhausen	V
$A_1$	l'amplitude du premier écho	V
$A_2$	l'amplitude du deuxième écho	V
$\vec{B}$	la densité de flux magnétique	T
$\vec{B}_r$	l'induction magnétique rémanente	T
$C_{int}$	le champ $\theta$ est constant au norme unitaire (1,0)	
$C_{ext}$	la champ $\theta$ est nulle (0,0)	
$C_{cour}$	la champ $\theta$ varie de (1,0) à (0,0)	
$C_{ijkl}$	le tenseur des constantes du second ordre du solide élastique	
$C_{ijklmn}$	le tenseur des constantes du troisième ordre du solide élastique	
$C_p$	la chaleur spécifique	$\frac{J}{kg} / k^\circ$
$\vec{D}$	la densité de flux électrique	C/m <sup>2</sup>
$dS_{int}$	la surface associé au point d'intégration	
$\vec{E}$	le champ électrique	A/m
$E$	le module de Young	Mpa
$E_n$	l'amplitude du $n^{ième}$ écho	V
$e$	l'épaisseur de la tôle	m
$f$	la fréquence de contrôle Hz	
$G$	le taux de restitution d'énergie	J
$\bar{G}$	le module de cisaillement	
$f, g$	des fonctions donnant la répartition angulaire	
$\vec{H}$	le champ magnétique	A/m
$H_m$	la valeur du champ correspondant au maximum du pic Barkhausen	A/m

$h$	le coefficient d'échange convectif	$\frac{W}{m^2}/k^\circ$
$I$	le point d'intersection de la droite $OM$ avec le contour interne de la couronne $C_{cour}$	
$I_c$	l'intensité du courant	$A$
$\vec{j}$	la densité de courant	$A/m^2$
$J(Z)$	le module de la densité du courant à la profondeur $Z$	$A/m^2$
$J_s$	le module de la densité du courant à la surface de la pièce	$A/m^2$
$J$	le point d'intersection de la droite $OM$ avec le contour externe de la couronne $C_{cour}$	
$K$	le coefficient acoustoélastique	$\frac{1}{MPa}$
$K_i$	coefficients acoustoélastiques de l'onde longitudinale	$\frac{1}{MPa}$
$K_\alpha$	le facteur d'intensité des contraintes en mode $\alpha$	$Pa.\sqrt{m}$
$k$	la conductivité thermique	$\frac{W}{m}/k^\circ$
$L$	la réactance	$H$
$L_m$	largeur à mi-hauteur du pic Barkhausen	
$L_n$	la réactance numérique	$H$
$L_{exp}$	la réactance expérimentale	$H$
$L_0$	la réactance à vide	$H$
$M$	le point d'intégration	
$N$	le nombre de spire de la bobine	
$i, j, k$	les axes du système des coordonnées cartésien	
$l, n, m$	constantes de troisième ordre de Murnaghan	
$O$	la pointe de la fissure	
$P_j$	l'énergie électromagnétique du système	
$q$	le flux de chaleur	$W/m^2$
$R$	la résistance	$\Omega$
$R_n$	la résistance normalisée du capteur	$\Omega$
$R_0$	la résistance à vide du capteur	$\Omega$
$r$	le rayon de la bobine	$m$
$S$	la surface sous la courbe du pic Barkhausen	$m^2$

$T$	la température	$C^{\circ}$
$T_a$	la température ambiante	$C^{\circ}$
$t_1$	le temps de parcours du premier écho	$s$
$t_2$	le temps de parcours du deuxième écho	$s$
$U$	la tension	$V$
$u$	le vecteur déplacement	$m$
$u^{\varepsilon}$	le champ du déplacement pendant la perturbation	$m$
$u^1$	représente les premières variations du déplacement lors de la perturbation $\varepsilon$ de $\Omega$	$m$
$V$	le potentiel scalaire	
$V_L$	la vitesse de propagation des ondes ultrasonores longitudinales	$m/s$
$V_T$	la vitesse de propagation des ondes ultrasonores transversales	$m/s$
$V_R$	la vitesse des ondes de Rayleigh	$m/s$
$V_{ii}$	la vitesse de l'onde longitudinale suivant la direction $i$	$m/s$
$V_{ij}, V_{ik}$	les vitesses de l'onde tangentielle polarisée perpendiculairement l'une par rapport à l'autre	$m/s$
$V_{ii}^{\circ}$	vitesse de propagation de l'onde longitudinale à l'état de référence dans la direction $X_1$	$m/s$
$V_0$	la vitesse longitudinale du milieu non contraint	$m/s$
$V_1$	la vitesse longitudinale du milieu contraint	$m/s$
$\omega$	la pulsation	
$w_p$	l'énergie potentielle totale	$J$
$w_e$	l'énergie potentielle locale de déformation élastique	$J$
$w_{ext}$	l'énergie potentielle des forces extérieures	$J$
$w_{int}$	les poids de Gauss	
$X$	l'inductance	$H$
$X_0$	l'inductance à vide du capteur	$H$
$X_n$	l'inductance normalisée du capteur	$H$
$Z$	la profondeur	$m$
$\bar{Z}$	l'impédance	$\Omega$
$\bar{Z}_0$	l'impédance à vide du capteur	$\Omega$

$Z_n$	l'impédance normalisée	$\Omega$
$\alpha$	le coefficient de dilatation thermique	
$\alpha_L$	l'atténuation de l'onde longitudinale	Np/m
$\varepsilon$	la déformation ou perturbation	
$\bar{\varepsilon}$	la permittivité électrique du matériau	F/m
$\varepsilon_0$	la permittivité électrique du vide	F/m
$\theta$	représente la position de chaque point du corps perturbé en fonction de sa position initiale avant la perturbation $\varepsilon$	
$\theta_f$	l'angle d'incidence du faisceau	°
$\lambda$ et $\mu$	constantes de second ordre de Lamé	
$\lambda_\theta$	la longueur d'onde du faisceau	m
$\mu_r$	la perméabilité magnétique relative du matériau	H/m
$\mu_0$	la perméabilité magnétique à vide du matériau	H/m
$\bar{\mu}$	la perméabilité magnétique du matériau	H/m
$\mu_0$	la perméabilité magnétique du vide	H/m
$\nu$	le coefficient de poisson	
$\bar{\nu}$	reluctivité magnétique	$H^{-1}m$
$\rho$	la masse volumique du matériau	$kg/m^3$
$\bar{\rho}$	la densité volumique de charge électrique	$C/m^3$
$\rho_0$	la masse volumique à l'état non contraint du matériau	$kg/m^3$
$\sigma$	le champ de contraintes	MPa
$\bar{\sigma}$	la conductivité électrique du matériau	$\Omega m^{-1}$
$\sigma^1$	représente les premières variations du champ de contrainte lors de la perturbation $\varepsilon$ de $\Omega$	MPa
$\sigma^I$	la contrainte résiduelle du premier ordre	
$\sigma^{II}$	la contrainte résiduelle du second ordre	MPa
$\sigma^{III}$	la contrainte résiduelle du troisième ordre	MPa
$\sigma^\varepsilon$	le champ de contrainte pendant la perturbation	MPa
$\sigma_{ii}$	la contraintes principale selon la direction $i$	MPa
$\sigma_{jj}$	la contraintes principale selon la direction $j$	MPa
$\partial a$	l'incrément de surface correspond à l'extension de la fissure	m

$\Gamma$	la frontière	
$\Omega$	la section de la bobine	$m^2$
$\Delta t$	le temps de vol	s

**Abréviations d'origine Anglophone/Francophone :**

<i>CND</i>	le contrôle non destructif
<i>CF</i>	le contrôle par courant de Foucault
<i>FIC, SIF</i>	le facteur d'intensité de contrainte
<i>MEF, FEM</i>	la méthode des élément finis
<i>RE</i>	l'erreur relative
$R_i$	le rayon intérieur de la couronne de l'intégrale
$R_e$	le rayon extérieur de la couronne de l'intégrale
<i>US</i>	le contrôle par ultrason



## APENDICE B

### INTERGATION NUMERIQUE PAR POINTS ET POIDS DE GAUSS

Toute formule d'intégration numérique par points de gausse est définie au moyen de  $G$  points,  $a_g$  et poids  $w_g$  de sorte que la valeur approchée d'une intégrale est calculée par :

$$\int_{\Delta} f(a)dV(a) \approx \sum_{g=1}^G w_g f ( a_g) \quad (\text{B.1})$$

$\Delta$ :est un domaine de forme simple( triangle ,cube ,tétraèdre,...).

#### Intégrale unidimensionnelle

La formule d'intégration approchée est donnée par la forme suivante :

$$\int_{-1}^1 f(a)da \approx \sum_{g=1}^G w_g f ( a_g) \quad (\text{B.2})$$

Tels que  $-1 < a_g < 1$  et  $w_g > 0$  , et les points sont disposés symétriquement par rapport à  $a = 0$  et sont symétriquement ayant le même poids  $w_g$

Tableau B.1 : Point des Gauss pour une intégrale unidimensionnelle [47]

G	$\pm a_g$	$w_g$
1	0.	2.
2	0.57735026918962576450	1.
3	0. 0.77459666924148337703	0.8888888888888888889 0.5555555555555555556
4	0.33998104358485626480 0.86113631159405257522	0.65214515486254614262 0.34785484513745385737
5	0. 0.53846931010568309103 0.90617984593866399279	0.5688888888888888889 0.47862867049936646804 0.23692688505618908751
6	0.23861918608319690863 0.66120938646626451366 0.93246951420315202781	0.46791393457269104738 0.36076157304813860756 0.17132449237917034504

### Intégrale sur des carrés ou des cubes

La formule d'intégration approchée sur des carrés est donnée par la formule suivante :

$$\int_{C^2} f(a_1, a_2) da_1 da_2 \approx \sum_{g1=1}^G \sum_{g2}^G w_{g1} w_{g2} f(a_{g1}, a_{g2}) \quad (B.3)$$

Une intégrale sur le carré unité  $C^2 = \{-1 \leq a_1, a_2 \leq 1\}$

La formule d'intégration approchée sur des cubes est donnée par la formule suivante :

$$\int_{C^3} f(a_1, a_2, a_3) da_1 da_2 da_3 \approx \sum_{g1=1}^G \sum_{g2}^G \sum_{g3}^G w_{g1} w_{g2} w_{g3} f(a_{g1}, a_{g2}, a_{g3}) \quad (B.4)$$

Une intégrale sur le cube unité  $C^3 = \{-1 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1\}$

Pour les triangles en deux dimensions, les intégrales sont évaluées par des formules spécifiques tel que :

$$\int_{T^2} f(a) da_1 da_2 \approx \sum_{g=1}^G w_g f(a_g) \quad (B.5)$$

Ou  $T^2 = \{a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, 1 - a_1 - a_2 \geq 0\}$  est le triangle de référence et pour les points  $a_g$  et poids  $w_g$  s'expriment par des règles d'intégration.

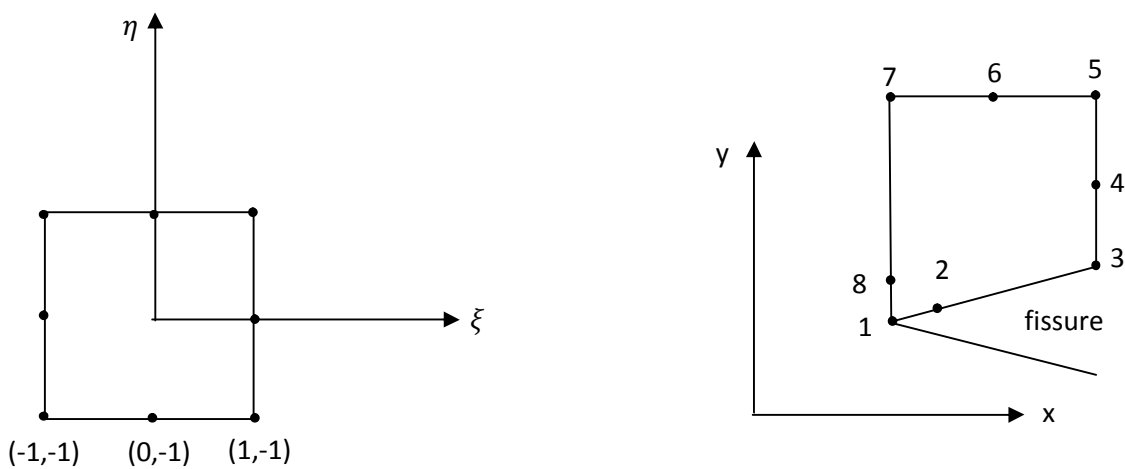
Tableau B.2 :Point des Gauss pour une le triangle de référence [47]

G	$a_{1,g}$	$a_{2,g}$	$w_g$	M
3	0.166666666666667	0.166666666666667	0.166666666666667	3
6	0.445948490915965	0.445948490915965	0.111690794839005	3
	0.091576213509771	0.091576213509771	0.054975871827661	3
7	0.333333333333333	0.333333333333333	0.112500000000000	1
	0.470142064105115	0.470142064105115	0.066197076394253	3
	0.101286507323456	0.101286507323456	0.062969590272414	3

## APPENDICE C

### Justification des éléments singuliers

On montre ici l'utilité du nœuds au quart pour faire apparaître la singularité en  $1/\sqrt{r}$



a :Élément de référence

b :Élément réel

Figure C.1 : Position du nœud au quart

Pour simplifier le calcul, on se placera dans le cas d'un élément dégénéré 1D, c'est-à-dire sur l'axe  $\eta = -1$ . Les fonctions de formes ont alors les expressions suivantes :

$$\begin{cases} N^{(1)} = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \\ N^{(2)} = 1 - \xi^2 \\ N^{(3)} = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_i = \sum_{n=1}^8 N^{(n)}(\xi, \eta) x_i^{(n)} \\ u_i = \sum_{i=1}^8 N^{(n)}(\xi, \eta) u_i^{(n)} \end{cases}$$

Alors :

$$x_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)x_1^{(1)} + (1-\xi^2)x_2^{(2)} + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)x_3^{(3)}$$

$$u_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)u_1^{(1)} + (1-\xi^2)u_2^{(2)} + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)u_3^{(3)}$$

Considérons maintenant que les arêtes sont de longueur  $L$  et que le nœud milieu est placé au quart :

$$x_1^{(1)} = 0, x_1^{(2)} = \frac{L}{4}, x_1^{(3)} = L$$

$$\text{Alors } x_1 = \frac{L}{4}(1+\xi)^2 \text{ soit encore : } \xi = 2\sqrt{\frac{x_1}{L}} - 1$$

$$\text{On obtient la déformation par : } \varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1}$$

Après calcul , on retrouve bien la singularité en  $1/\sqrt{r}$  :

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{2}{L} - \frac{3}{2\sqrt{x_1 L}}\right)u_1^{(1)} - \left(\frac{4}{L} - \frac{2}{\sqrt{x_1 L}}\right)u_1^{(2)} + \left(\frac{2}{L} - \frac{1}{2\sqrt{x_1 L}}\right)u_1^{(3)}$$

Si les éléments à la pointe de la fissure sont raisonnablement précis , ce n'est pas la cas pour les valeurs des contraintes et des déplacements dans les éléments adjacents à la fissure ;il doivent donc être ignorés pour le calcul de facteur d'intensité de contraintes.

La précisions obtenues en utilisant ces éléments est meilleure que celle obtenue avec des éléments normaux.

Pour une démonstration plus complète, et pour le cas 3D, le lecteur pourra se référer à l'article de Barsoon [ 46]

## APENDICE D

### EQUATION MAGNETOSTATIQUE ET MAGETODYNAMIQUE POUR LE CAS AXISYMETRIQUE

#### Equation magnétostatique

L'équation magnétostatique est donnée par :

$$\left( -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) = J_\varphi \quad (D.1)$$

Puisque :  $A = rA_\varphi$

Alors l'équation (D.1) devient :

$$\left( -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) = J_\varphi \quad (D.2)$$

La formulation intégrale de l'équation (D.1) est donnée comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left( \left( -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) - J_\varphi \right) dr dz = 0 \quad (D.3)$$

L'équation (D.3) peut être écrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left( \left( -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) \cdot dr dz = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_\varphi dr dz \quad (D.4)$$

L'application du théorème de Green au premier terme de (D.4) nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega} \alpha_i \left( \left( -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) \cdot dr dz \\ \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \int_{\Gamma} \frac{v}{r} \cdot \left( \frac{\partial A}{\partial r} \alpha_i \cdot \cos(n, r) + \frac{\partial A}{\partial z} \alpha_i \cos(n, z) \right) \cdot d\Gamma \end{array} \right. \quad (D.5)$$

En remplaçant (D.4) dans (D.5), on obtient :

$$\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \overrightarrow{\nabla \alpha_1} \cdot \overrightarrow{\nabla A} \cdot dr dz - \int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \cdot \alpha_j \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_j \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (D.6)$$

Pour des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann sur la frontière :

$$\int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \cdot \alpha_j \cdot d\Gamma$$

L'équation (D.6) devient :

$$\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \overrightarrow{\nabla \alpha_1} \cdot \overrightarrow{\nabla A} \cdot dr dz = \iint_{\Omega} \alpha_j \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (D.7)$$

Sachant que :

$$A = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j$$

Et en remplaçant dans (D.7) on obtient :

$$\sum_{j=1}^N \left[ \iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \overrightarrow{\nabla \alpha_1} \cdot \overrightarrow{\nabla A} \cdot dr dz \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_j \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (D.8)$$

Cette écriture permet d'obtenir un système d'équation matricielle suivant :

$$[M][A] = [K] \quad (D.9)$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_1} \cdot \overrightarrow{\nabla A} \cdot dr dz$$

$$K_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz$$

### Equation magnétodynamique

On considère que le régime est harmonique, la formulation intégrale est donnée par :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left( \left( -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) \cdot dr dz + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \sigma A \frac{dr dz}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (D.10)$$

En appliquant le théorème de Green :

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \overrightarrow{\nabla \alpha_1} \cdot \overrightarrow{\nabla A} \cdot dr dz - \int_{\Gamma} \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \cdot \alpha_j \cdot d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \sigma A \frac{drdz}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_j \cdot J_{\varphi} \cdot drdz \quad (D.11)$$

Avec l'application des conditions aux limites de type Dirichlet ou Newman, l'équation (D.11) s'écrit :

$$\sum_{j=1}^N \left[ \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \overrightarrow{\nabla \alpha_1} \cdot \overrightarrow{\nabla A} \cdot dr dz \right] \cdot A_j + j\omega \sum_{j=1}^N \left[ \iint_{\Omega} \alpha_i \sigma A \frac{drdz}{r} \right] A_j = \iint_{\Omega} \alpha_j \cdot J_{\varphi} \cdot drdz \quad (D.12)$$

L'écriture matricielle de l'équation (D.12) est :

$$[M][A] + j\omega[L][A] = [K] \quad (D.13)$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_1} \cdot \overrightarrow{\nabla A} drdz$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \alpha_i \sigma A \frac{drdz}{r}$$

$$K_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} drdz$$

$$A = A_r + jA_i$$



## APENDICE E

### Champs de température et des isothermes lors de l'immersion des tôles dans l'Azote liquide

Le modèle mathématique est donné par l'équation classique de la diffusion de la chaleur donné par :

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{E.1})$$

Puisqu'il y'a un transfert de chaleur par convection avec le milieu ambiant , la condition au limite est donnée par :

$$q = -h(T - T_a) \quad (\text{E.2})$$

Et la température initiale du matériau est égale à la température ambiante  
 $T_0 = 298.15K$

Le champs de température et les isothermes simulés par Comsol Multiphysics version 5.2 des tôles sans défaut sont présentés par les figures suivantes :

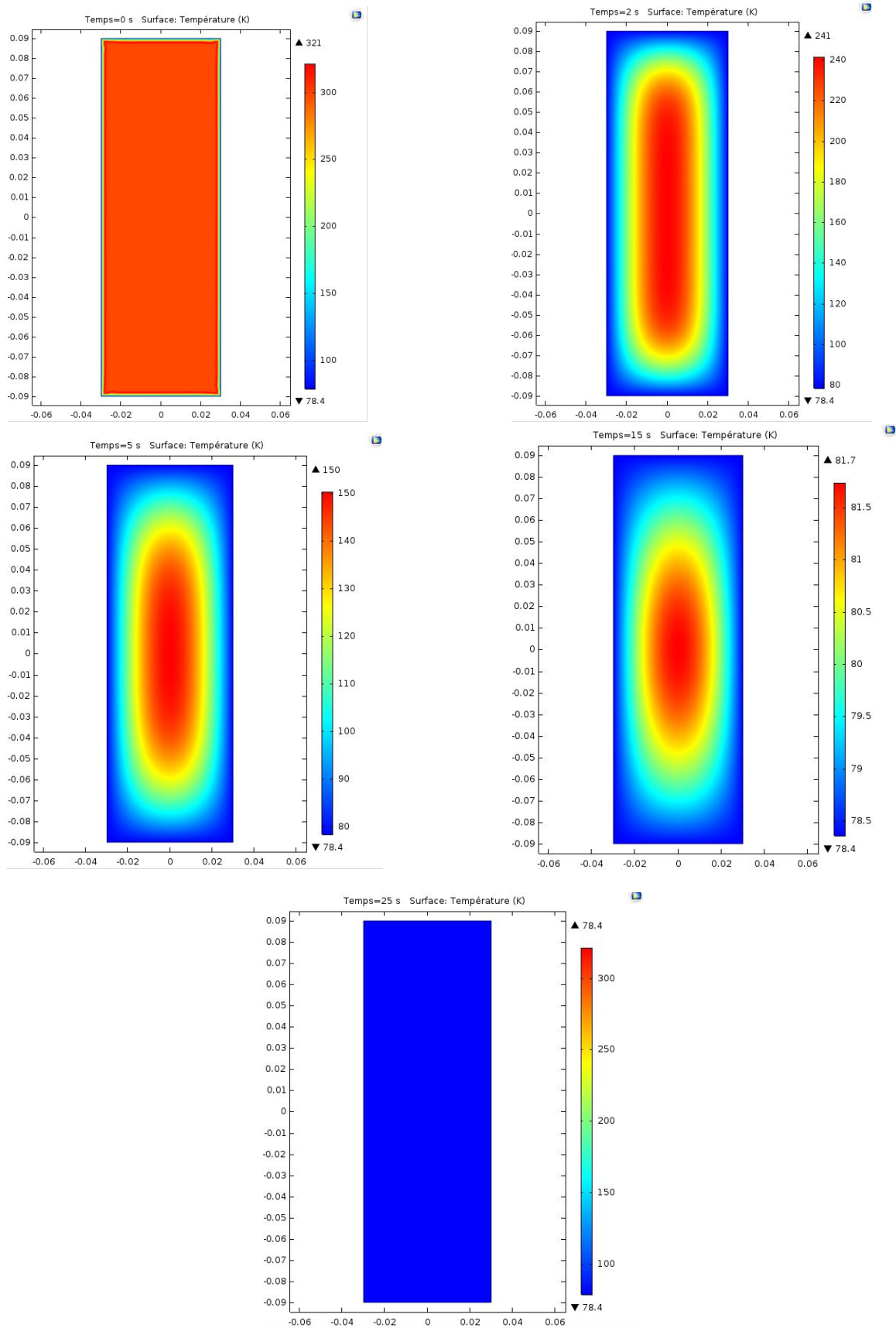


Figure E.1: présentation du champs de température pour de la plaque sans défaut à  $t = 0s, 2s, 5s, 15s$  et  $25s$  lors de l'immersion dans l'azote liquide

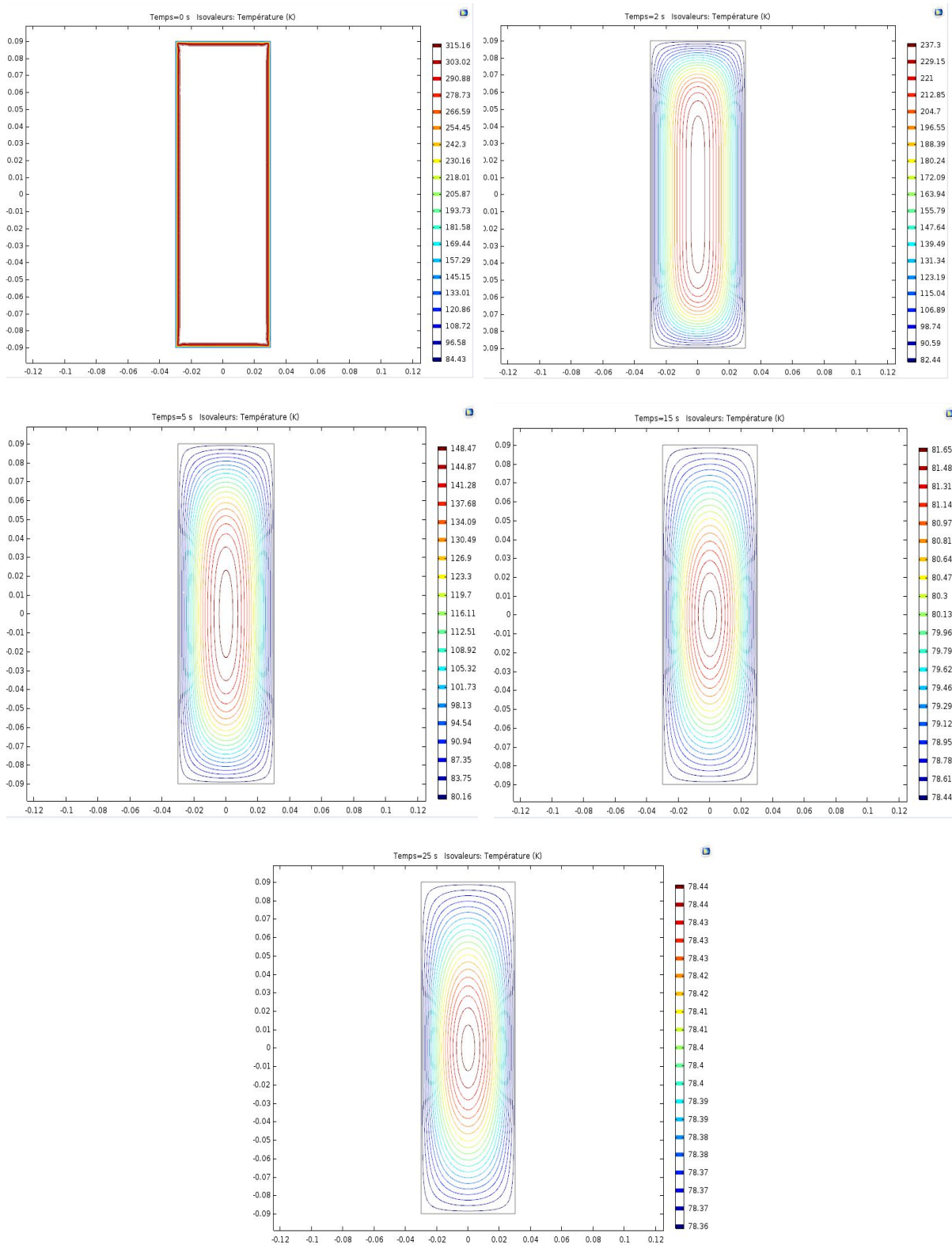


Figure E.2: présentation des isothermes pour de la plaque sans défaut à  $t = 0s, 2s, 5s, 15s$  et  $25s$  lors de l'immersion dans l'azote liquide

## APENDICE F

### Contrainte résiduelle thermomécanique de Von Mises

La loi du comportement du matériau isotrope subit une immersion dans l'azote liquide est donnée par le modèle thermomécanique stationnaire suivant :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{E}{1-2\nu} \left[ \frac{\nu}{1+\nu} Tr \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3} \alpha \Delta T \right] I \quad (F.1)$$

Et :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\underline{u}} + \nabla^T \underline{\underline{u}}) \quad (F.2)$$

$$div \underline{\underline{\sigma}} = 0 \quad (F.3)$$

Avec la conditions aux limites :

$$q = -h(T - T_a)$$

Et La loi du comportement du matériau isotrope subit une traction de  $F=5KN$  dans une plage de température  $[-30,-10]$  C° est l'équation (F.1) avec les condition aux limites :

$$F = 5KN$$

$$q = -h(T - T_a)$$

Les résultats de simulation par Comsol Multyphysics sont :

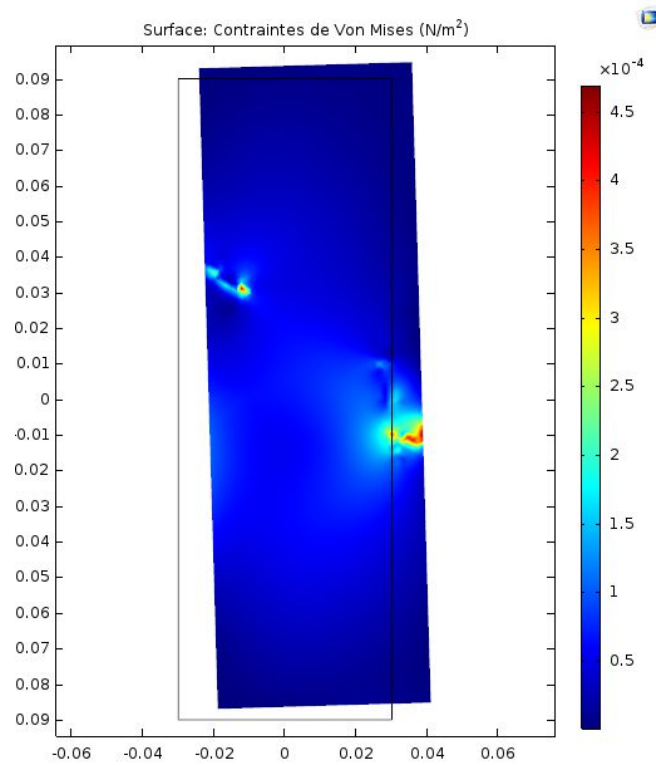


Figure F.1: Contraintes résiduelles thermique de Von Mises pour de la plaque sans défaut

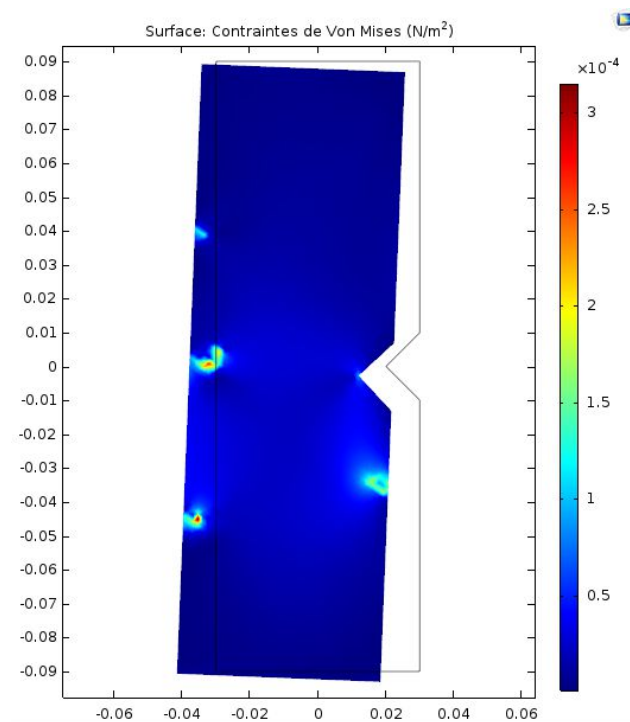


Figure F.2: Contraintes résiduelles thermique de Von Mises pour de la plaque avec entaille

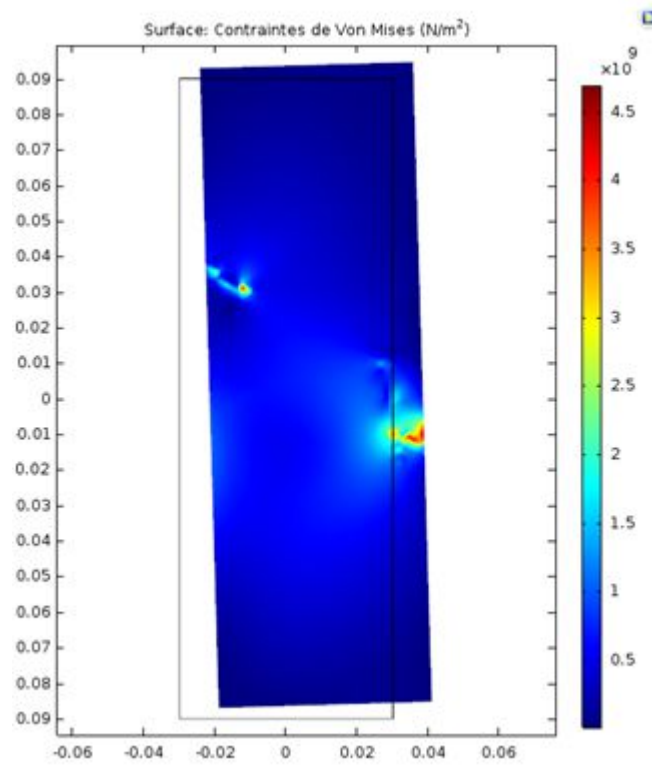


Figure F.3: Contraintes résiduelles thermomécanique de Von Mises pour de la plaque sans défaut

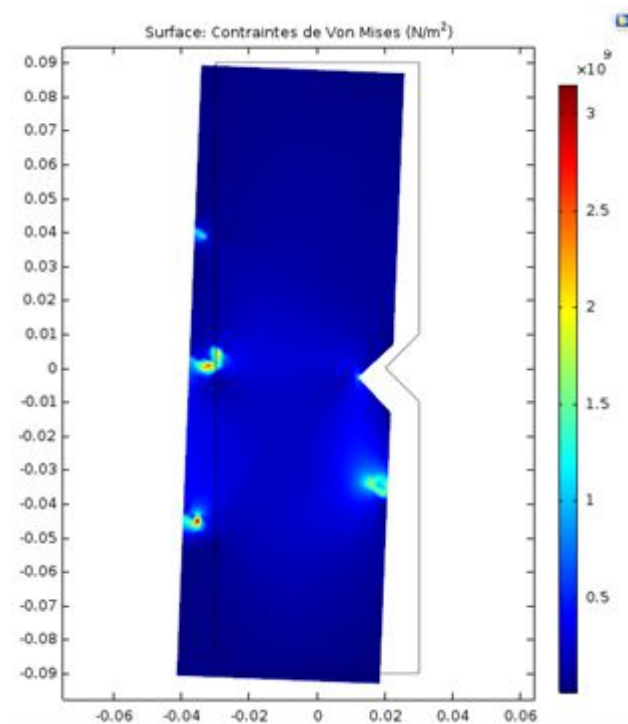


Figure F.4: Contraintes résiduelles thermomécanique de Von Mises pour de la plaque avec entaille

## REFERENCES

1. E.Rayer, F.Daubigney, et M.Peyrot, «l'utilisation de la vidéo endoscopie en remplacement de la radiographie pour les contrôles non destructifs », Journées COFREND Toulouse, (mai 2008).
2. H.Berg,k ;alward, K .Lessmann, « Penetrant testing of standard parts, practical examples of process optimization », 9<sup>th</sup> European conference on NDT , Berlin, (2006).
3. S. Graveleau, « la magnétoscopie avancée », Journées COFREND Toulouse, (mai 2008).
4. J.Dumont-Fillon, «Contrôle non destructive (cnd) »Technique de l'ingénieur,R1400 , Mesure mécanique et dimensionnelles,(1996).
5. F.I. Al-Naemi, J.P. Hall , A.J Moses, « FEM modeling techniques of magnetic flux leakage type NDT for ferromagnetic plate inspection», Journal of magnetism and magnetic materials, (2006).
6. P.Hairy,P.Bouvet, Y.Gaillard, V.Buecher, et F.Granereau, « Quantification des défauts en fonderie sous pression par radioscopie numérique et tomographie haute résolution » , Journées COFREND Toulouse, (mai 2008).
7. M. Piriou, « La camera photothermique :état de l'art et dernier résultats », Journées COFREND Toulouse, (mai 2008).
8. X.Maldague, « Theory and practice of infrared thermography for NDT », John Wiley and Sons, London, (2001).
9. S.Maillard, J.Cadith, H. Walaszek, A. Dillenz et L.L. Bodnar, « La thermographie infrarouge stimulée, une nouvelle technique de contrôle sur les lignes de production », Journée COFREND Toulouse, (mai 2008).
- 10.P.Smigielski, « Holographie optique Interferometrie holographique »,Technique de l'ingénieur, dossier R6330, (mars 2001) .
- 11.P. Smigielski, « interfrometrie de speckle », Technique de l'ingénieur, dossier R6331,(mars 2001).
- 12.J. Collrep, E. Moser, « Maintenance inspection of composite materials with shearography », conference ECNDT, Berlin, (Septembre 2006).

13. M. Riethmuller, « L'émission acoustique : applications aux équipements industriels, » Journées COFREND Toulouse, (mai 2008).
14. Julien Kerouedan, « Conception et réalisation de sondes hyperfréquences pour la détection de microfissure de fatigue à la surface des métaux », thèse de doctorat en électronique, Université de Bretagne Occidentale (UBO), (Mars 2009).
15. X. Ma, and A.J. Peyton, « Eddy Current Measurement of Electrical Conductivity and Porosity of metal Foams » IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement, vol.55, no.2, (avril 2006) .
16. J.C. Vérité, J-P. Ducreux, G. Tanneau, P. Baraton, et B. Paya, « Calcul de champ électromagnétique-Exemple d'application », Collection EDF&D, Edition TEC & DOC , Paris, (2007).
17. M. Mayon, M. Lambert, C. Gilles-Pascaud, M. Dessendre, N. Dominguez, F. Foucher, et A. Abakar, « Groupe de travail COFREND sur simulation des END par courant de Foucault, Bilan d'activités », Journées COFREND, Toulouse, (mai 2008).
18. Zaoui, H. Menana, M. Addallah, « Generalization of the Ideal Crack Model for an Arrayed Eddy Current Sensor », IEEE Transaction on Magnetics, vol. 44, no. 6, (Juin 2008).
19. Choua, Y. « Application de la méthode des éléments finis pour la modélisation de configuration de contrôle non destructive par courant de Foucault » thèse de doctorat, Université Paris-sud 11, (2009).
20. Chiara .Z, « Contrôle non destructif par courant de foucault des milieux ferromagnétiques : de l'expérience au modèle d'interaction », Thèse de Doctorat en science , Paris –Sud 11, (Février 2012).
21. P.J. Shull, « Nondestructive evaluation theory, Techniques, and Application » édition Marcel Dekker, New York, ( 2002).
22. G-M. Javier, G-G. J'aime and V-S. Ernesto, « Non-Destructive Techniques Based on Eddy Current Testing » , Sensors Journal, pp. 2525-2565, ( 2011).
23. Bouchala .T, « Développement des méthodes rapides pour la résolution des problèmes directs dans les systèmes des CND par courant de Foucault », thèse de doctorat en science en électrotechnique, Université de Batna, (Juin 2014).



24. W. Yin, A.J. Peyton, « Thickness measurement of non-magnetic plates using multifrequency eddy current sensors », *NDT&E International*, Vol 40, (2007).
25. C. Weiyang, I. Komura, « Simulation of Transient Eddy Current Measurement of the Characterization of Depth and conductivity of a Conductive plate », *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol. 44, (2008).
26. Y. Le Bihan, « Conception et caractérisation d'un dispositif à courant de Foucault pour l'évaluation non destructif de l'épaisseur de paroi d'aube de turbines creuses » Thèse de doctorat ,Cachan, (2000).
27. B. Maouche, M. Feliachi , N. Khenfer, « A half-analytical formulation of the impedance variation in axisymmetrical modeling of eddy current non destructive testing», *European Physical Journal Applied Physics*, Vol. 33, (2006).
28. Abdessalam benammar, « Etude et Implémentation d'outil de traitement du signal dans la détection des imperfections multiples noyées dans le bruit. Application au contrôle ultrasonore des matériaux », thèse du magister ,département d'électronique, université de Blida, (2004).
29. Hecht, «Time of Diffraction Technique (TOFD)-An Ultrasonic Testing Method for all Application», *NDTnet* , 2(09), (1997).
30. Gheorghe, V simona, A. Veronica, O. Elena Amza, M.Dobre, «Research on Ultrasonic non destructive examination in water immersion of composite material», *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> WSEAS international Conference on finite differences-Finite Elements-Finite Volumes-Bounadary Elements-Bucarest, Roumanie*, (Avril 2010).
31. S.Foti, «Multistation method for geotechnical characterization using surface waves», *PhD Dissertation, Politecnico di Torino, Italy*,( 2000).
32. P. Bredif, C. Poidevin and O. Dupond, «A phased Array Tehnique for Crack Characterization», *Conference ECNDT 2006, Berlin*, (Septembre 2006).
33. O. Zahran and W.Al-Nuaimy, « Image Processing for Accurante Sizing of Weld Defects Using Ultrasonic Time –Of-Flight Diffraction », *conference ECNDT 2006 , Berlin*, ( Septembre 2006).
34. Fatima Zohra Louai, « Modèles magnétodynamiques d'élément finis pour structures tridimensionnelles de chauffage par induction », thèse de doctorat de l'université de Nantes, (1995).

35. J. Kunkle, R. Vun, T. Eischeid, M. Langron, N. Bhardwaj, and M. Bhardwaj, «Phenomenal Advancements in Transducers and Piezoelectric Composites for Non-Contact and Other Applications», conference ECNDT, Berlin, (Septembre 2006).
36. Noyan I.C., COHEN J.B, « Residual Stress, measurement by diffraction and interpretation», Springer-Verlag .ISBN: 0-387-96378-2. New York (1987).
37. Silvério F., Silva J.R., «Determining Residual Stresses in Ferromagnetic Materials by Barkhausen Noise Measurement», 15<sup>th</sup> WCNDT Conference, Roma , (2000).
38. Easy VSM, Operating Software for the MISCORENSE vibrating Simple Magnetometer, Microsense.
39. Tada H, Paris. P, Irwin. G., «The stress analysis of cracks handbook», (1986).
40. Pierre- Olivier Bouchard, «Contribution à la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structure multi matériaux », thèse du doctorat, école nationale supérieure des mines de Paris, Septembre (2000 ) .
41. Y. Murakami and al, «Stress intensity factor handbook», Pergamon press, (1987).
42. Ph. Destuynder, M. Djaoua, « Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile », Math. Meth. In the Appl .Sci. Vol .3, pp.70-87, (1981).
43. Smith, I.M.; Griffiths, V., «Programming the Finite Element Method», 3rd eds. ISBN:0471965421 ,(1998).
44. Ingraffea, A.R.; Wawrzynek, P.A., «Finite element methods for linear elastic fracture Mechanics», In: de Borst, R., Mang, H.A. (eds.) Comprehensive Structural Integrity, pp. 1-88. Elsevier , Amsterdam (2003).
45. Lyness and J.N. Jespersen D., «Moderne degree symmetric quadrature rules for the Triangle», J. Inst.Math. Appl., 15:19-32.(1975).
46. Barsoom, R.S., « On the use of isoparametric finite element in linear fracture mechanics» , International Technical Meeting, vol. 10, pp. 25-37 (1976).
47. M. Bonet and A. Frangi, « Analyse des solide déformable par la méthode des éléments finis », ISBN 978-2-7302-1349, Science publication, Decembrer (2007).

48. H.G. De Lorenzi, « Energy release rate calculations by the finite element method », *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 21, N°1, pp. 129-143, (1985).
49. G.Maeder, J.L.Lebrun, « Contrainte résiduelle et mise en forme », *Physique et Mécanique de la mise en forme des métaux*, dirigé par F.Moussy et P.Franciosi, presses du C.N.R.S/I.R.S.I.D,(1990).
50. Clyne T.W, « Residual stresses in thick and thin substrate coating in *Encyclopaedia of materials: Science and technology* », 4.1.3b, P.JWithers (ed), Elsevier, The Netherlands, (2001).
51. G.Maeder, J.L.Lebrun, J.M.Sprael; « Détermination par diffraction des rayons X des contraintes internes. Aspects macro et microscopique-Physique et Mécanique de la mise en forme des métaux », dirigé par F. Moussy et P.Franciosi, presses du C.N.R.S/I.R.S.I.D,(1990).
52. Plaut-Aubry. R., « Mesure de contraintes résiduelles par interférométrie de speckle », *Mémoire d'ingénieur C.N.A.M*, (2000).
53. Flahaut P., « Caractérisation et comportement mécanique de placages bimétalliques », *Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille*, (1995).
54. Clyne T.W, Gill S.C., « Residual stresses in thermal spray and their effect on interfacial adhesion », *A review of recent work. J. Therm. Spray. Technol.*, 5 (1996) 401.
55. Lu J. Flavenor J.F., « Applications of incremental hole-drilling method for measurement of residual stress distribution », *Experimental Techniques*, 13 (1989) 18.
56. Chabenat A., Martin R., « La mesure des contraintes résiduelles-méthode de Mathar et Soete-méthode de Sachs », *Les mémoires techniques du CETIM*, n°24, (1975).
57. Lu J., Reira D., « A review of recent developments and applications in the field of X-ray diffraction for residual stress studies », *J. Strain Analysis.*, 33-2 (1998) 127.
58. Don, E. Bray, « Current directions of Ultrasonic Stress Measurement Techniques ». 15 th WCNDT Conference, Roma, (2000).
59. Sipahi L.B., « Overview of applications of Micromagnetic Barkhausen Emissions as Noninvasive Material Characterization Technique », *J. Appl. Phys.*, 75-10 (1994) 6978.

60. E. Durant, «Magnétostatique» Université de Pris-VI,(1969).
61. P .Lorrain, D.P. Corson,F. Lorrain, « Electromagnetic field and waves », W.H.Freeman and Co. New York,(1988).
62. R.Petit, "Ondes électromagnétiques», Masson, Paris ,(1989).
63. E.Amzallag ,N.Picolli, « électromagnétisme » Tome 3, édition Ediscience, Paris (1996).
64. B.Thidé , « Electromagnetic field theory », edition epsilon, Uppsala,(2001)
65. E.Boridy, «Electromagnétique théorie et application», Presses de l'université du Québec,(1992).
66. Bioridy, Eli , «Electromagnetisme theory et application», Saint-Foy(Que): Press de l'université du Quebec,(2003).
67. L .Hyang-Beom , K.Dong-Hun, « Impedance calculation for plate with crack in eddy current NDT using 3D inderect BIEM », IEEE Transaction on magnetic, Vol.36,(2000).
68. M.Tanaka, «Finite element model of natural crack in eddy current testing problem», IEEE Transaction on magnetic, Vol.37,(2001).
69. R.E. Green Jr., «Ultrasonic Investigation of Mechanical Properties, Treatise on Materials Science and Technology», H. Herman (ed), Academic Press ,New York and London (1973)Vol. 3, 73-126.
70. L. Bergman , Der Ultraschall, 6. Ausgabe, Hirzel Verlag, Stuttgart,(1954).
71. D.S. Hughes, J.L. Kelly «Second Order Elastic Deformation of Solid» ,Physical Review 92(1953)5, 1145-1149.
72. Robert P, Uhlig ,Mladen Zec, Hartmut Brauer , « Lorentz Force Eddy Current Testing:a prototype Model », J Nondestruct Eval,ISBN 10921-012-0147-7, Springer
73. Victor Hauk, «Structural and residual stress Analysis by Nondestructive Methods, Evaluation-Application -Assessment», ISBN :0 444 82476 6,Elsevier ,(1997).
74. Egle, D. M., and Bray, D. E., «Measurement of acoustoelastic and third order elastic constants for rail steels», J.A.S.A, 60, 3, pp741-744, (1976).

75. D. D. Muir, J. E. Michaels, and T. E. Michaels, «An ultrasonic angle beam method for determining third order elastic constants via acoustoelasticity measurements», Review of progress in quantitative nondestructive evaluation: 34<sup>th</sup> Annual Review of Progress in Quantitative Evaluation, ISBN: 978-0-7354-0494-6, Colorado, (2008).
76. Sari. E, M. Zergoug, « FEM Techniques Comparison for SIF Computing of Cracked Plate», Arabian Journal for Science and Engineering, ISSN 1319-8025, (2015).