

# UNIVERSITE DE BLIDA 1

Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales

## THESE DE DOCTORAT

En Aéronautique

Spécialité : Aéronautique

EFFET DE LA PRESSION GENERATRICE SUR LA CONCEPTION DES  
TUYERES SUPERSONIQUES. APPLICATION A LA TUYERE  
A DETENTE CENTREE BIDIMENSIONNELLE.

Par

**SALHI Merouane**

Devant le jury composé de :

BENAOUDA ZOUAOUI Braham	Professeur,	U. de Blida 1,	Président
SALAH Boualam	Professeur,	ENSH Blida,	Examineur
ZAARAOUI Abdelkader	Maitre de Conférences (A),	U. Khemis Miliana,	Examineur
NOURA Belkheir	Maitre de Conférences (A),	U. Khemis Miliana,	Examineur
BENKHEDA Younes	Professeur,	U. de Blida 1,	Examineur
ZEBBICHE Toufik	Professeur,	U. de Blida 1,	Rapporteur

Blida, Novembre 2016

## RESUME

Le but de ce travail est de réaliser un nouveau code de calcul numérique permettant de faire la conception des tuyères supersoniques à détente centrée, après le développement des nouvelles relations et des expressions concernant l'écoulement supersonique, une nouvelle forme généralisée de la fonction de Prandtl Meyer et une nouvelle version améliorée de la méthode des caractéristiques. La résolution des équations obtenues se fait par la méthode des différences finies en utilisant l'algorithme de prédicteur correcteur, et les hypothèses d'équation d'état de Berthelot qui expliquent des effets de taille moléculaire et de force intermoléculaire, et que les changements des chaleurs spécifiques sous l'effet de la vibration des molécules pour un gaz caloriquement et thermiquement imparfait. Le programme numérique réalisé résout les équations algébriques non linéaires, systèmes d'équations non linéaires, dérivations et intégrations des fonctions analytiques complexes, La nouvelle fonction de Prandtl Meyer est présentée sous la forme d'une intégrale de deux fonctions complexes, où la procédure analytique d'intégration est impossible. Alors, notre intérêt s'oriente vers la détermination des solutions numériques approchées. Les fonctions et les bornes d'intégration contenant la température et de la masse volumique critiques. Les résultats obtenus d'un écoulement supersonique des gaz parfait sont valables sous la base de hypothèse d'un gaz caloriquement et thermiquement parfait c'est à dire, les chaleurs spécifiques  $C_p$  et  $C_v$  sont constantes et ne dépendent pas de la température, basé sur l'utilisation de l'équation d'état d'un gaz parfait, et les résultats obtenus par le modèle haute température sont valables sous la base de hypothèse d'un gaz caloriquement imparfait, mais notre modèle est basé sur les hypothèses d'un gaz caloriquement et thermiquement imparfait, c'est-à-dire, les deux modèles devient deux cas particuliers de notre modèle. Les expressions et les méthodes développées utilisées pour faire la conception des tuyères supersonique à détente centrée sous l'effet de la pression génératrice  $P_0$ . Pour chaque partie, une étude sur l'erreur donnée par les paramètres des modèles *GP* et *HT* par rapport au modèle *RG* est présentée. La comparaison est faite entre les trois modèles pour but de déterminer une limite d'application des modèles *GP* et *HT*.

### Mots Clés

Écoulement Supersonique, Gaz Réel, Rapports Thermodynamiques et Géométriques, Fonction de Condensation, Gaz Caloriquement Imparfait, Gaz thermiquement Imparfait, Quadrature de Simpson, Quadrature de Gauss Legendre, Fonction de Prandtl Meyer, Méthode des Caractéristiques, Tuyère à Détente Centrée bidimensionnelle, Méthode des Différences Finies, Algorithme de Prédicteur Correcteur, Erreur Relative.

## ABSTRACT

The aim of this work is realizing a numerical code allow for the design of supersonic centered expansion nozzles, after the development of new relationships and expressions concerning the supersonic flow, a new form of the Prandtl Meyer function and an improved version of the characteristics method. The equations resolution obtained by the finite difference method using the predictor corrector algorithm, with Berthelot state equation assumptions that explains the effects of molecular size, intermolecular force, and that the changes in specific heats under the molecules vibration effect for a calorically and thermally imperfect gas. The computational program solve the nonlinear algebraic equations, nonlinear equations systems, derivations and integrations of complex analytic functions, the new function Prandtl Meyer is presented as an integral of two complex functions, where the analytical integration procedure is impossible. When our interest is directed towards the determination of approximates solutions. The integrand functions in intervals containing the critical temperature and masse density. The results of a supersonic flow of perfect gas are valid under the caloric and thermal perfect gas assumption, i.e., the specific heats  $C_p$  and  $C_v$  are constant and do not depend on temperature, based on the use of a perfect gas state equation, and the results obtained by the high temperature model are valid under the assumption of a caloric imperfect gas, but our model based on the thermally and calorically imperfect gas assumptions, that's mean, the two models becomes two special case in our model. The developed expressions and methods for the design of supersonic centered expansion nozzles under the stagnation pressure effect  $P_0$ . For each part, an error study given by the parameters of GP and HT models compared to the model RG is presented. The comparison is made between the three models for the aim to determine an application limit of GP and HT models.

### Keywords

Flow Supersonic, Real Gas, Thermodynamics and Geometrics Ratios, Condensation function, Thermal imperfect gas, Caloric imperfect gas, Simpson's Quadrature, Gauss Legendre's Quadrature, Prandtl Meyer function, the characteristics method, bi-dimensional centered expansion nozzle, Finite Differences method, Predictor Corrector Algorithm, Relative Error.

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو الوصول لتحقيق برنامج رقمي لتصميم فوهات المحركات الأسرع من الصوت من نوع التمدد المركزي، وهذا بعد تطوير لعلاقات ولمعادلات جديدة المتعلقة بالتدفق الأسرع من الصوت، و لشكل مطور لمعادلة براندتل ماير ونسخة محسنة من نظرية الخصائص، حل المعادلات التي تم الحصول عليها تم بواسطة طريقة الفروق المحدودة، و باستخدام خوارزمية المتنبئ و المصحح، مع فرضيات معادلة الحالة لبرثيلو التي توضح آثار الحجم الجزئي و القوى بين الجزيئات، والتغيرات في الحرارة النوعية نتيجة لاهتزاز الجزيئات من اجل الغازات الغير مثالية نوعيا و حراريا، البرنامج الرقمي يحل المعادلات الجبرية غير الخطية، جملة المعادلات غير الخطية، الاشتقاقات والتكاملات للدوال التحليلية المعقدة، المعادلة الجديدة لبراندتل ماير مقدمة من تكاملين لدالاتين معقدتين، حيث أن التكامل المباشر مستحيل. لذلك تم توجيه اهتمامنا نحو الحلول الرقمية. والدوال التي خضعت للتكامل في مجالات محددة تحتوي على درجة الحرارة والكتلة الحجمية الحرجتين. النتائج المتحصل عليها المتعلقة بالتدفق الأسرع من الصوت للغاز المثالي صالحة في ظل افتراض أن الغاز مثالي نوعيا و حراريا، معناه ان الحرارتين النوعيتين  $C_p$  و  $C_v$  ثابتين وغير مرتبطين بدرجة الحرارة، ومستندتين على استخدام معادلة الحالة للغاز المثالي، و النتائج التي تم الحصول عليها عن طريق نموذج الحرارة العالية HT صالحة في ظل افتراض وجود الغاز غير كامل نوعيا، ولكن نموذجنا GR يقوم على افتراض أن الغاز غير مثالي نوعيا و حراريا ، معناه أن النموذجين السابقين يصبحان حالتين خاصتين في نموذجنا. العلاقات والمعادلات المطورة استخدمت من اجل تصميم فوهات المحركات الأسرع من الصوت من نوع التمدد المركزي تحت تأثير الضغط المولد  $P_0$  ، لكل جزء، تمت دراسة الخطأ لكل العناصر و المتغيرات للنماذج GP و HT مقارنة مع نموذجنا RG.

### الكلمات المفاتيح:

التدفق الأسرع من الصوت، غاز حقيقي، تناسبات وديناميكية وهندسية، دالة التكتيف، معادلة برتولو، غاز غير مثالي حراريا ونوعيا، طريقة سيمبسون العددية، طريقة غوس ليجوندر، براندتل ماير، نظرية الخصائص، فوهات المحركات من نوع التمدد المركزي ثنائية الابعاد، طريقة الفروق المحدودة، خوارزمية المتنبئ و المصحح، الخطأ النسبي.

## DEDECACES

*Je dédier ce modeste travail, synonyme de  
concrétisation de tous mes efforts fournis  
ces six dernières années :*

*A mes très chers parents, ma raison de vivre,  
symbole de courage.*

*et de sacrifice, que Dieu les gardes.*

*A mes très chères soeurs.*

*A mes oncles et mes tantes.*

*A mes cousins et mes cousines.*

*A toutes les familles SALHI et HAMMEL.*

*A tous mes Amis*

*SALHI Merouane*

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier infiniment mon dieu tout puissant pour l'aide qu'il m'a apporté pour la réalisation de ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse **T. ZEBBICHE**, Professeur à l'institut d'Aéronautique et des études spatiales de l'université de Blida 1, de m'avoir témoigné durant ces cinq années une totale confiance. Lors de ce travail qu'il m'a confié, il m'a aidé minutieusement avec amabilité et patience malgré ses occupations. J'ai beaucoup admiré sa simplicité, son ardeur au travail, ses qualités humaines et son raisonnement scientifique. C'est ici pour moi l'occasion de lui témoigner toute ma gratitude.

Monsieur **B. BENAOUA ZOUAOUI**, Professeur à l'institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de l'Université de Blida 1, m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

La présence de Monsieur **B. NOURA**, Maitre de Conférences A au département de Génie Mécanique de l'Université de Khemis Meliana, dans mon jury, constitue un gage de confiance.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur **Y. BENKHEDA**, Professeur au département de Génie Mécanique de l'Université de Blida 1, pour sa confiance et d'avoir accepté d'être examinateur de mon travail.

Mes sincères remerciements s'adressent encore à Monsieur **B. SALAH**, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de l'Hydraulique de Blida, pour avoir accepté de critiquer mon travail et d'avoir bien voulu participer au jury.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur **A. ZAARAOUI**, Maitre de Conférences A au département de Génie Mécanique de l'Université de Khemis Meliana, pour avoir bien voulu examiner ce travail et participer à mon jury de thèse.

Mes remerciements vont enfin à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

## TABLE DES MATIERES

RESUME	1
REMERCIEMENTS	4
TABLE DES MATIERES	5
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	10
ETAT DE L'ART	16
INTRODUCTION	19
<b>1. MODELES DES GAZ REELS</b>	<b>24</b>
1.1. Introduction	24
1.2. Relation entre le Volume d'un Gaz et sa Pression : Loi de Boyle-Mariotte	25
1.3. La relation entre Volume et Température pour les gaz parfaits	28
1.4. Le Comportement des Gaz Parfaits	30
1.5. Limitation de l'équation d'état d'un gaz parfait	35
1.6. Les gaz réels	35
1.6.1. Le covolume	36
1.6.2. Les forces d'attraction intermoléculaires	37
1.6.3. Equation d'État des gaz réels	38
1.6.3.1. Effet du volume exclu	38
1.6.3.2. Effet des forces d'attractions intermoléculaires	40
1.6.4. Equation générale	41
1.7. Les équations des gaz réels (par ordre de complexité)	41
1.7.1. Equation de VAN DER WAALS	41
1.7.2. Equation de BERTRHELOT	44
1.7.3. Equation de CLAUSIUS	44
1.7.4. Equation de REDLICH-KWONG	45
1.7.5. Equation de BERTTIE- BRIDGEMAN	45
1.7.6. Equation de DIETERICI	46
1.7.7. Equation de WOHL	46

1.7.8.	Equation de BERTHELOT Modifiée	46
1.8.	Les coordonnées du point critique- équations réduites	47
1.8.1.	Application sur l'équation de BERTHELOT	48
1.8.2.	Calcul des constants a, b et R	49
1.8.3.	Equation réduite	49
1.9.	Equations de VIRIEL	51
1.9.1.	La fonction du volume v du gaz	51
1.9.2.	La fonction de la pression P du gaz	52
1.10.	Facteur de compressibilité	54
1.11.	Choix de l'équation d'état	54
1.12.	Validation du choix de l'équation de Berthelot	55
1.13.	Conclusion	57
<b>2.</b>	<b>EFFET DE LA PRESSION GENERATRICE SUR LES PARAMETRES THERMODYNAMIQUES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE</b>	<b>58</b>
2.1.	Introduction	58
2.2.	Hypothèses de base	59
2.3.	Configuration des équations	60
2.3.1.	L'équation de la conservation d'énergie	60
2.3.2.	Détermination la différentielle dP en fonction de dp	62
2.3.3.	Détermination la différentielle dp/ρ	63
2.3.4.	Détermination les paramètres thermodynamique pour les gaz réels	63
2.3.4.1.	L'état générateur	66
2.3.4.2.	La forme intégrale de l'équation d'énergie pour l'équation de Berthelot	66
2.4.	Détermination du nombre de Mach	67
2.4.1.	Calcul de la vitesse	68
2.4.2.	Détermination de la célérité du son	68
2.4.3.	Le nombre de Mach	69
2.5.	La chaleur spécifique à volume constante $c_v(T, \rho)$	70
2.6.	La chaleur spécifique à pression constante $c_p(T, \rho)$	71



2.7	Rapport des chaleurs spécifiques $\gamma$	72
2.8.	Calcul numérique des rapports thermodynamiques	72
2.8.1	La méthode de Newton	74
2.8.2	Algorithme de la méthode de Newton appliquée aux systèmes	76
2.8.3	Le choix de la solution initial	76
2.9	Détermination des paramètres critiques	77
2.10	Détermination de rapport des sections d'un écoulement	77
2.11	Détermination de l'expression du débit massique critique	78
2.12	La Poussée	79
2.12.1	Le coefficient de poussée	81
2.13.	Erreur entre le modèle du gaz réel et les modèles GP et HT	81
2.13.1	Erreur du modèle gaz parfait	83
2.13.2	Erreur du modèle haute température	83
2.14	Conclusion	84
<b>3.</b>	<b>EFFET DE LA PRESSION GENERATRICE SUR LA FONCTION DE PRANDTL MEYER</b>	<b>85</b>
3.1.	Introduction	85
3.2.	Détente de Prandtl-Meyer	86
3.3.	Le modèle GP (caloriquement et thermiquement parfait)	87
3.4.	Le modèle HT (caloriquement imparfait et thermiquement parfait)	88
3.5.	Détermination de la fonction de Prandtl Meyer pour un GR	88
3.5.1.	Formulations mathématiques	89
3.5.2	Détermination la fonction de Prandtl Meyer d'un gaz parfait à partir de la nouvelle fonction	91
3.5.3.	Détermination la fonction de Prandtl Meyer d'un gaz à haute température à partir de la nouvelle fonction	94
3.6.	Les Procédures du calcul numérique	94
3.6.1.	Détermination la masse volumique génératrice $\rho_0$	94
3.6.2.	Détermination les rapports thermodynamiques	95

3.6.3.	Détermination les rapports critiques au col	95
3.6.4.	Procédure de calcul par la méthode de Simpson	96
3.6.5.	Procédure de calcul par la méthode de Gauss Legendre	99
3.6.6.	Effet de la quadrature sur la convergence du problème	102
3.7.	Conclusion	103
4.	<b>LA NOUVELLE FORME DE LA METHODE DES CARACTERISTIQUES</b>	104
4.1.	Introduction	104
4.2.	Tuyère à détente centrée	104
4.3.	Formulation mathématique	107
4.3.1.	Equation et procédure pour un point interne	112
4.3.2.	Procédure pour un nœud interne particulier	116
4.3.3.	Equations pour un point sur l'axe de symétrie	117
4.4.	Calcul des paramètres thermodynamiques	118
4.5.	Méthodologie de conception des tuyères supersoniques	118
4.5.1.	Procédure de calcul dans la tuyère	118
4.5.2.	Masse de la structure de la tuyère	125
4.5.3.	Force de pression exercée sur la paroi du divergent	126
4.6.	Erreur du modèle du gaz à haute température	127
5.	<b>RESULTATS ET COMMENTAIRES</b>	128
5.1.	Résultats pour les caractéristiques d'un gaz réel	129
5.2.	Résultats pour les paramètres critiques (au col)	136
5.3.	Résultats pour les paramètres supersoniques	141
5.4.	Résultats sur l'erreur pour les paramètres supersoniques	148
5.5.	Résultats sur la fonction de Prandtl Meyer	157
5.6.	Résultats sur l'erreur pour la fonction de Prandtl Meyer	159

5.7.	Résultats sur la tuyère à détente centrée bidimensionnelle (2D MLN)	162
5.7.1.	Effet de la discrétisation et le raffinement du maillage sur la convergence	162
5.7.2.	Effet de la pression $P_0$ sur l'allure de la paroi	168
5.7.3.	Variation des paramètres à travers la paroi de la tuyère	169
5.7.4.	Paramètres de conception	177
5.7.5.	Résultats sur les erreurs de conception	187
	CONCLUSION	189
	APPENDICE	193
A.	Liste des symboles	193
	REFERENCES	196

## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure. 1.1	Appareil pour la détermination de la relation entre la pression et le volume de l'air emprisonné	25
Figure 1. 2	Isothermes d'un gaz suivant la loi de Boyle Mariotte	27
Figure 1 .3	Loi de Gay-Lussac Variation du volume d'un gaz en fonction de la température, lorsque la pression est maintenue constante. Toutes les pentes sont égales à $V_0 / 273$	29
Figure. 1 .4	Partie de la surface traduisant la relation entre le volume d'un gaz, la pression et la température été fait par logiciel Maple	31
Figure 1.5	Variations de la température dans l'atmosphère terrestre avec l'altitude	32
Figure 1.6	Configuration des molécules dans un gaz parfait	34
Figure 1.7	Représentation de l'effet de covolume	37
Figure 1.8	Représentation des forces intermoléculaires	37
Figure 1.9	Le volume soustrait autour de chaque sphère dure	39
Figure 1.10	Comparaison entre les courbes $P = f(V)$ obtenues par l'équation de Van der Waals et les données expérimentales au voisinage du point critique	42
Figure 1.11	Représentation graphique de l'état du fluide pour le cas d'un gaz réel	47
Figure 2.1	Représentation de la force résultante de la poussée	80
Figure 3.1	Schéma de la détente de Prandtl-Meyer	87
Figure 3.2	Présentation de la condensation des nœuds	97
Figure 3.3	Variation de la fonction $F_{vT}(T, \rho)$ dans $[T_S, T^*]$	98
Figure 3.4	Condensation des nœuds vers les deux extrémités de l'intervalle $[T_S, T^*]$	98
Figure 3.5	Variation de la fonction $F_{vp}(T, \rho)$ dans $[\rho_S, \rho^*]$	99
Figure 4.1	Différentes géométries de tuyères	104
Figure 4.2	Présentation du champ de l'écoulement dans la tuyère à détente centrée bidimensionnelle	105
Figure 4.3	Champ d'écoulement dans une tuyère à détente centrée	106

Figure 4.4	Illustration des lignes caractéristiques et des lignes de Mach	108
Figure 4.5	Nœud interne quelconque	112
Figure 4.6	Nœud interne particulier	116
Figure 4.7	Nœud sur l'axe de symétrie	117
Figure 4.8	Processus du calcul des caractéristiques dans la région de Kernel	119
Figure 4.9	Différents type de dimensionnement de la tuyère	122
Figure 4.10	Processus de détermination des points de la paroi	123
Figure 4.11	Présentation les paramètres de calcul du point $P_i$ de la paroi de la tuyère	125
Figure 4.12	Présentation d'un tronçon de la tuyère	126
Figure 5.1	Variation de la masse volumique génératrice $\rho_0$	1 30
Figure 5.2	Variation de l'erreur relative de $\rho_0$ en fonction de $T_0$	131
Figure 5.3	Variation de facteur de compressibilité en fonction de $T_0$ pour quelque valeur de pression $P_0$	132
Figure 5.4	Variation de la chaleur spécifique $C_p$ en fonction de $T_0$ pour différentes $P_0$	133
Figure 5.5	Variation du rapport des chaleurs spécifiques $\gamma$ en fonction de $T_0$ pour quelques valeurs de la pression $P_0$	134
Figure 5.6	Variation du coefficient $C_T$ en fonction de $T_0$ pour quelque valeur de $P_0$	135
Figure 5.7	La célérité du son en fonction de la température génératrice $T_0$ pour quelques valeurs de pression $P_0$	136
Figure 5.8	Rapport des températures critiques en fonction de $T_0$ pour quelques valeurs de la pression $P_0$	137
Figure 5.9	Rapport des masses volumique critiques en fonction de $T_0$ pour quelques valeurs de la pression $P_0$	138
Figure 5.10	Rapport des pressions critiques en fonction de $T_0$ pour quelques valeurs de la pression $P_0$	139
Figure 5.11	Rapport des vitesses du son critiques en fonction de $T_0$ pour quelques valeurs de la pression $P_0$	140
Figure 5.12	Rapport de débit massique critique en fonction de $T_0$ pour quelques valeurs de la pression $P_0$	141

Figure 5.13	Variation de rapport des températures en fonction du nombre de Mach	142
Figure 5.14	Variation de rapport des densités en fonction du nombre de Mach	143
Figure 5.15	Variation de rapport de pressions en fonction du nombre de Mach	144
Figure 5.16	Variation de rapport des célérités du son en fonction du nombre de Mach	145
Figure 5.17	Variation de rapport des sections en fonction du nombre de Mach	146
Figure 5.18	Correction de nombre de Mach du modèle GR par rapport aux modèle GP	148
Figure 5.19	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des températures en fonction de nombre de Mach	149
Figure 5.20	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des masses volumiques en fonction de nombre de Mach	151
Figure 5.21	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport de pression en fonction de nombre de Mach	153
Figure 5.22	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des célérités du son en fonction de nombre de Mach	155
Figure 5.23	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des sections en fonction de nombre de Mach	156
Figure 5.24	Variation de la fonction de Prandtl Meyer en fonction de nombre de Mach pour quelques valeurs de la pression génératrice $P_0$	158
Figure 5.25	Variation de la fonction de Prandtl Meyer $v$ en fonction de la température génératrice pour quelques valeurs de pression génératrice $P_0$	159
Figure 5.26	Variation de l'erreur relative de la fonction de Prandtl Meyer $v$ entre les modèles GP et GR en fonction du nombre de Mach	160
Figure 5.27	Variation de l'erreur relative de la fonction de Prandtl Meyer $v$ entre les modèles HT et RG en fonction du nombre de Mach	162
Figure 5.28	Raffinement du maillage dans la zone de Kernel de la tuyère	163

*MLN 2D sans insertion des caractéristiques supplémentaire*

Figure 5.29	Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère <i>MLN 2D</i> avec $\Delta\theta=3.0$	164
Figure 5.30	Effet du coefficient de condensation $\Delta$ sur la qualité du maillage en caractéristique d'une tuyère <i>MLN 2D</i> avec $\Delta\theta=2.5$ degré et $Ni=10$	166
Figure 5.31	Qualité du maillage final d'une tuyère <i>MLN 2D</i> avec $\Delta\theta=0.6$ degré, $Ni=10$ et $\Delta=8$	167
Figure 5.32	Formes des tuyères <i>MLN 2D</i> donnant à la sortie $MS=1.50$	168
Figure 5.33	Formes des tuyères <i>MLN 2D</i> donnant à la sortie $MS=3.00$	169
Figure 5.34	Formes des tuyères <i>MLN 2D</i> donnant à la sortie $MS=6.00$	169
Figure 5.35	Variation de rapports des températures le long de la paroi de la tuyère lorsque $M_S=3.00$	171
Figure 5.36	Variation de rapports des pressions le long de la paroi de la tuyère lorsque $M_S=3.00$	172
Figure 5.37	Variation du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère <i>MLN 2D</i> donnant $M_S=3.00$	174
Figure 5.38	Variation du nombre de Mach le long de l'axe de symétrie <i>MLN 2D</i> donnant $M_S=3.00$	175
Figure 5.39	Variation de l'angle de déviation de l'écoulement le long de la paroi de la tuyère <i>MLN 2D</i> lorsque $M_S=3.00$	176
Figure 5.40	Variation de l'angle $\theta^*$ du col pour la tuyère en fonction de $M_S$ et $T_0$	178
Figure 5.41	Variation du nombre de Mach $M^*$ au col pour la tuyère en fonction de $M_S$ et $T_0$	180
Figure 5.42	Variation de la longueur de Kernel de la tuyère en fonction de $M_S$ et $T_0$	181
Figure 5.43	Variation de la longueur de la tuyère en fonction de $M_S$ et $T_0$	182
Figure 5.44	Variation de la masse de la structure de la tuyère en fonction de $M_S$ et $T_0$	184
Figure 5.45	Variation de la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère en fonction de $M_S$	185
Figure 5.46	Variation du rayon de la section de sortie de la tuyère en	185

	fonction de $M_S$	
Figure 5.47	Variation de l'erreur relative donnée par la longueur de la tuyère en fonction de $M_S$ .	187
Figure 5.48	Variation de l'erreur relative donnée par le rayon de la section de sortie de la tuyère en fonction de $M_S$	188
Tableau 1.1	Pressions et volumes d'air correspondants dans l'expérience de BOYLE	26
Tableau 1.2	Donnes relatives à l'atmosphère standard	33
Tableau 1.3	Volumes molaires du dioxyde de carbone, $CO_2$ à 320 K. Comparaison de l'équation de Van der Waals et de la loi des gaz parfaits près de la température critique	43
Tableau 1.4	Comparaison entre les valeurs expérimentales de l'air et les résultats numériques pour chaque équation du gaz réel	55
Tableau 1.5	Valeurs numériques de la masse volumique $\rho$ par le modèle de Berthelot pour des différentes pressions	56
Tableau 1.6	Valeurs expérimentales de la masse volumique $\rho$ pour des différentes pressions et températures	56
Tableau 2.1	les équations thermodynamiques des modèles GP et HT	82
Tableau 2.2	Les coefficients polynômiaux du $C_p$	83
Tableau 3.1	Abscisses et coefficients associés de la quadrature d'intégration de Gauss Legendre d'ordre 32	100
Tableau 3.2	Efficacité des quadratures sur le résultat pour une précision $\varepsilon=10^{-6}$	103
Tableau 5.1	Effet de raffinement de la zone de Kernel sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère <i>MLN 2D</i> pour $P_0=10$ bar, $T_0=2000$ K, $M_S=3.00$ et $Ni=0$	163
Tableau 5.2	Effet de l'insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère <i>MLN 2D</i> pour $P_0=10$ bar, $T_0=2000$ K, $M_S=3.00$ et $\Delta\theta=2.5$	165
Tableau 5.3	Effet de changement du coefficient de condensation $\Delta$ sur la qualité du maillage dans la zone de Kernel et la convergence des paramètres de conception de la tuyère <i>MLN 2D</i> pour	166



$P_0=10 \text{ bar}$ ,  $T_0=2000 \text{ K}$ ,  $M_S=3.00$ ,  $Ni=10$  et  $\Delta\theta=2.5$

Tableau 5.4	Effet du nombre de Mach de sortie sur le nombre de points obtenus sur la dernière $C^*$ de la zone de Kernel de la tuyère <i>MLN 2D</i> lorsque $T_0=2000 \text{ K}$ sans effet de condensation	167
Tableau 5.5	Effet de la température $T_0$ sur le nombre de points obtenus sur la dernière $C^*$ de la zone de Kernel de la tuyère <i>MLN 2D</i> lorsque $M_S=3.00$ sans effet de condensation	167
Tableau 5.6	Effet de la pression $P_0$ sur le nombre de points obtenus sur la dernière $C^*$ de la zone de Kernel de la tuyère <i>MLN 2D</i> lorsque $M_S=3.00$ sans effet de condensation	167
Tableau 5.7	Nombre de Mach $M^*$ et les rapports thermodynamiques correspondants pour la tuyère <i>MLN 2D</i> lorsque $M_S=3.00$	176

## ETAT DE L'ART

La phase de conception d'une tuyère supersonique durant une période de 70 ans depuis 1940 jusqu'à aujourd'hui, est passée par plusieurs étapes et elle marche en commun avec plusieurs d'autres disciplines nécessaires, telles le développement en parallèle en matières informatique, calculs numériques, développement des méthodes numériques répondant aux besoins de calcul [55]. Aussi il faut parler encore de la matière de construction. Alors il faut développer des matériaux réfractaires résistants aux distributions de température et de pression trouvées lors de la conception. Donc le développement en parallèle en science des matériaux est nécessaire.

Après une recherche bibliographique, on a remarqué que la majorité des travaux publiés dans le domaine de la conception des tuyères supersoniques sont basés sur l'utilisation de deux modèles qui sont soit le modèle du gaz parfait à chaleur spécifique  $C_p$  constante [4], [5] [6], [7], [8], [16] et [22] ou le modèle dit à haute température lorsque  $C_p$  est fonction de la température [59], [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67], [68], [69] et [70]. Ces suppositions ne tiendront pas de compte du comportement réel du gaz lorsque la pression génératrice est élevée qui peut arriver à 300 bars environ ou même plus. Dans ce cas, le modèle mathématique du calcul change et à revoir complètement.

Dès l'année 1660, Robert Boyle [32] effectua une série d'expériences par lesquelles il détermina l'effet de la pression sur un certain volume d'air, à l'aide d'une petite quantité de mercure était introduite par l'extrémité ouverte du tube pour enfermer un volume d'air dans l'autre extrémité fermée. Sur un plan qualitatif, il apparaît immédiatement que, au fur et à mesure que croît la pression imposée à l'air, le volume diminue.

Le travail le plus ancien est dû à Charles [2] en 1787. Par la suite, en 1808, Gay-Lussac [54] montra que si la pression est maintenue constante, le volume de l'échantillon de gaz varie linéairement avec la température.

Il a fallu 150 ans pour que cette équation d'état dite des gaz parfaits prenne sa forme définitive, telle qu'énoncée par Clapeyron en 1834 [17]. Mais il ne faudra pas

longtemps pour trouver les limites de l'équation des gaz parfait, qui indique qu'une masse non-nulle de gaz parfait occupe un volume nul à température nulle. Strictement parlant, le gaz parfait ne peut exister, le modèle mathématique ci-haut perd son sens à très basse température puisqu'il ne tient pas compte du volume des molécules lui-même.

La référence [56] a étudiée les effets des imperfections gazeuses sur les écoulements d'air et elle a utilisée l'équation d'état de van der Waals [25]. Des solutions approximatives aux équations isentropiques et unidimensionnelles de choc normales ont été obtenues. L'effet de joule Thomson a été négligé dans l'analyse de Tsien, cependant, de ce fait présentant une certaine erreur. Les auteurs de la référence [26] ont observés cette erreur, et ils ont étudiés les effets des imperfections calorifiques sur la conception des tuyères axisymétriques, l'effet des vibrations moléculaires est présenté dans ce travail, mais avec des approximations sur les rapports thermodynamiques théoriques qui sont présentées comme les rapports d'un gaz parfait, ce modèle reste valable lorsque la pression génératrice est faible.

La référence [59] a développée un modèle appelé par modèle du gaz parfait à Haute Température. La seule différence entre ce modèle et le modèle gaz parfait réside au niveau de l'équation de conservation de l'énergie. Donc le changement de l'équation de l'énergie par la nouvelle qui tient compte de la variation des chaleurs spécifiques à haute température donne un nouveau modèle à résoudre et un domaine d'application de température et nombre de Mach élargi et une erreur relative très petite aux résultats trouvés sur le dimensionnement. Dans ce cas, le gaz est nommé par gaz calorifiquement imparfait ou gaz à Haute Température. Ce modèle reste valable pour les basses pressions génératrices, et donne une erreur considérable à haute pression.

Les résultats obtenus d'un écoulement supersoniques des gaz parfait sont valables sous la base de hypothèse d'un gaz calorifiquement et thermiquement parfait c'est à dire, les chaleurs spécifiques  $C_P$  et  $C_V$  sont constantes et ne dépendent pas de la température [5], [36], basé sur l'utilisation de l'équation d'état d'un gaz parfait, et les résultats obtenus par le modèle haute température sont valables sous la base de hypothèse d'un gaz calorifiquement imparfait [59], [62], [64],

mais notre modèle basé sur les hypothèses d'un gaz caloriquement et thermiquement imparfait. Dans ce cas les deux modèles deviennent deux cas particuliers de notre modèle.

La fonction de Prandtl Meyer développée dans les références [5], [36], [44] est valable sous la base de hypothèse d'un gaz caloriquement et thermiquement parfait c'est à dire, les chaleurs spécifiques  $C_P$  et  $C_V$  sont constantes et ne dépendent pas de la température, basé sur l'utilisation de l'équation d'état d'un gaz parfait, et la fonction de Prandtl Meyer développée par le modèle à haute température HT [65], [66], [67], est valable à sous l'hypothèse de l'imperfection calorique du gaz, c.-à-d., les chaleurs spécifiques  $C_P$  et  $C_V$  varient avec la température, et qui donne une erreur considérable à haute pression, par contre, notre modèle RG basé sur les hypothèses de un gaz thermiquement et caloriquement imparfait (gaz réel), donc, une nouvelle forme de la fonction de Prandtl Meyer développée, variée avec la température et la masse volumique, corrigent le modèle HT, surtout à haute pression.

La méthode de conception et dimensionnement des tuyères type à détente centrée bidimensionnelle développée dans cette étude appelée la méthode des caractéristiques [19], [47], [48]. Mais tant que en ajoutant l'effet de la pression génératrice sur toutes les paramètres, qui devient en fonction de la température et la masse volumique, ce qui est valable lorsque la température et la pression génératrice de la chambre de combustion sont élevées.

Une méthode pour obtenir des tuyères a été développée afin d'obtenir des contours théoriques. Cette méthode consiste à faire les corrections aux modèles GP et HT. Les travaux antérieurs ont été réalisés dans le cas d'un gaz parfait (GP). Ces travaux sont cependant limités pour les basses températures et pression, où nous pouvons aller jusqu'à 1000 K et pour des nombres de Mach de sortie qui ne dépassent pas  $M = 2,00$  environ.

## INTRODUCTION

Le besoin en amélioration des performances des tuyères supersoniques joue un rôle très important dans le domaine de la propulsion aérospatiale. La tuyère supersonique contient une portion très importante dans un engin, notamment les missiles et avions supersoniques [29]. La masse de la tuyère peut arriver à 80 % de la masse totale de l'engin [6], [36]. Alors c'est intéressant de trouver des solutions physiques généralement aux trois problèmes différents d'amélioration des performances. Les performances d'une tuyère supersonique sont généralement la masse de la structure, le coefficient de poussée, la durée de vol, nombre de Mach de sortie délivré, vu que la conception de la tuyère est faite sur la base d'un fluide non visqueux.

La conception des tuyères supersoniques est réservée aux problèmes dits indirectes et inverses. Le domaine de déroulement de l'écoulement est inconnu ou la paroi de la tuyère est inconnue a priori. Elle est déterminée numériquement point par point afin de respecter une certaine condition nécessaire [67]. Le dimensionnement généralement se fait par deux manières. Soit par rapport au nombre de Mach désiré à la section de sortie, ou par rapport à la déviation initiale au col de la tuyère.

Parmi plusieurs types de tuyères connues dans la construction aérospatiale. On compte qu'il y a une vingtaine formes de tuyère, on s'intéresse dans notre travail à la tuyère dite tuyère à détente centrée ou par la tuyère MLN [62], [63], pour raison que la construction internationale de plusieurs projets aérospatiaux actuels utilisent ce type de tuyère [55].

La résolution des équations de mouvement dites par équations de conservations est faite en première étape par la méthode des caractéristiques afin de transformer ces équations à des équations algébriques non linéaires couplées simplifiées suivant des directions privilégiées appelées les caractéristiques [50], [71], [72]. Dans ce cas les équations obtenues sont considérablement simplifiées mais le maillage de calcul devient très complexe [3]. La génération de maillage est faite en parallèle avec le calcul des paramètres de l'écoulement. Pour avoir un écoulement supersonique à travers le divergent il faut que l'écoulement soit sonique au col de la

tuyère [43]. Si ce n'est pas le cas on aura une infinité de solution subsonique dans le divergent et ce problème n'est pas intéressé dans notre travail [43].

Le but de ce travail consiste à étudier l'effet de la pression génératrice sur les trois fameux problèmes suivants dans le cadre de résoudre le problème d'amélioration des performances des tuyères supersoniques en terme de masse, poussée et nombre de Mach de sortie par rapport à la construction actuelle :

- Paramètres thermodynamiques et géométriques d'un écoulement supersonique, par la généralisation de la théorie des écoulements supersoniques dans une tuyère conçue pour le modèle d'un gaz parfait à  $\gamma$  constant et le modèle à haute température. Pour cette étape, on a étudié et déterminé les paramètres thermodynamiques et géométriques. On parle sur les rapports des pressions, des températures, masse volumiques et le rapport des sections critiques à fin de généraliser les modèles GP et HT.
- La fonction de Prandtl Mayer. cette étape consiste à développer une nouvelle forme de la fonction de Prandtl Mayer sur la base d'ajouter l'effet de pression génératrice sur cette fonction. Toujours la forme classique de la fonction de Prandtl Mayer devient un cas particulier de la forme généralisée et le domaine d'application de la nouvelle fonction est élargi.
- La conception des tuyères supersoniques. ici on a choisi la tuyère à détente centrée pour faire une application, et par le développement d'un nouveau modèle de la méthode des caractéristiques basé sur la nouvelle forme de la fonction de Prandtl Mayer, ensuite utiliser ce modèle pour faire la conception et le dimensionnement des tuyères supersoniques à fin de trouver l'effet de la pression génératrice sur les formes et les paramètres des tuyères supersoniques trouvées. Sans connaître la thermodynamique des gaz on ne peut pas entamer le problème de conception des tuyères.

Les modèles mathématiques des trois parties sont basés sur quelques hypothèses. Citons l'hypothèse du gaz réel. On a choisi l'équation appropriée du gaz réel. Concernant les autres hypothèses, on est basé sur les hypothèses du gaz thermiquement imparfait et calorifiquement imparfait.

Plusieurs résultats étés trouvés, où, alors on a fait une comparaison avec les modèles HT et GP. L'application est faite pour l'air.

Pour arriver à notre but, on a suivi le plan du travail suivant :

- Recherche bibliographique poussée.
- Développement des modèles mathématiques pour les trois étapes sous la considération des hypothèses adoptées.
- Développement des programmes de calcul numérique pour les trois problèmes en utilisant le Fortran Power Station.
- Changement des paramètres.
- Calcul l'erreur entre notre modèle (GR) et les modèles Gaz Parfait (PG) et à Haute Température (HT), comme une comparaison.

Selon le travail réalisé, des équations d'écoulement unidimensionnel sont obtenues à l'aide de l'équation d'état de Berthelot [56]. Cette équation, plutôt que Van der Waals, est utilisée pour que des évaluations légèrement meilleures des effets de force intermoléculaire puissent être obtenues. On le suppose que des imperfections caloriques peuvent être expliquées dans les expressions des chaleurs spécifiques.

La différence entre notre modèle GR et les modèles à haute température HT et gaz parfait GP est décrite dans cette étude avec précision. Dans cette étude, nous allons étudier un type de tuyère donnant un écoulement parallèle et uniforme à la section de sortie, pour raison d'éliminer les pertes de poussée engendrée par l'effet de l'inclinaison de la paroi.

Une fois la forme de la tuyère est trouvée, on peut facilement par suite déterminer la masse de sa structure et son coefficient de poussée. On trouve une infinité de formes de tuyères selon le choix de la valeur du nombre de Mach de sortie  $M_s$ , de la température génératrice  $T_0$ , et de la pression génératrice  $P_0$ .

#### Disposition des chapitres (plan du travail)

Le travail présenté est composé de 5 chapitres:

Le premier chapitre est consacré à la démonstration des limitations de l'équation d'état des gaz parfaits et de discuter les différences entre cette dernière et les autres équations d'état caractérisent le comportement réel des gaz en intervenant les notions de covolume et les forces d'attraction intermoléculaires, ainsi de

comparer les équations d'état des gaz réels afin de choisir un modèle approprié aux objectifs de notre étude. Nous postulons l'équation d'état de Berthelot.

Le deuxième chapitre présente le développement des nouvelles expressions et relations thermodynamiques avec l'hypothèse de l'expansion supersonique isentropique, tenant en compte le comportement vibratoire des molécules, dans une large plage de pression et de température afin de trouver la forme générale des plusieurs paramètres tel que,  $C_p$ ,  $C_v$ ,  $M$  et  $a$ , l'équation de l'énergie et les rapports thermodynamiques qui sont présentés par la résolution numérique des équations, où la solution exacte n'existe pas. On a déterminé aussi des nouvelles formes des rapports des sections géométriques et du débit massique critique, caractérisant un écoulement supersonique sans oublier de déterminer le coefficient de poussé qui joue un rôle très important en propulsion aérospatiale, parce qu'il nous donne une idée auquel point notre modèle est performant, d'une façon précieuse. La méthode de dichotomie pour résoudre les équations simples, et l'algorithme de Newton pour la résolution des équations non linéaires sont utilisées.

Le troisième chapitre a pour but de déterminer la forme générale de la fonction de Prandtl Meyer pour un gaz réel suivant le modèle de Berthelot. Les formes de cette fonction pour les modèles gaz parfaits et des gaz parfaits à haute température (dite calorifiquement imparfait) seront des cas particuliers de la forme générale. Lorsqu'on introduise l'effet de la pression génératrice sur cette fonction qui sera trouvé sous une forme de deux intégrales, ça va nécessiter l'intégration numérique à cause de sa complexité qui mise une solution analytique impossible. On utilise plusieurs méthodes d'intégration numériques et on opte sur les méthodes appropriées qui est celles du Simpson à pas variable et de Gauss Legendre.

Le quatrième chapitre présente la méthode de calcul et de conception de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle, par le développement d'une nouvelle forme de la méthode des caractéristiques et la manière de calcul de l'écoulement dans la tuyère avec quelques nomenclatures utilisées. La discrétisation des équations de compatibilité et des caractéristiques est faite par la méthode des différences finies. Ensuite, le calcul de la masse de la tuyère ainsi que la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère sont présentées.



Le cinquième chapitre est consacré aux résultats obtenus, ils sont présentés sous la forme de graphes et de tableaux. On trouvera également une comparaison de ce modèle avec les modèles GP et HT pour montrer l'efficacité et les performances de ce type de tuyère (MLN 2D) du point de vue masse, la longueur totale, nombre de Mach de sortie et force de poussée délivrée.

Enfin on présente une conclusion générale sur le travail élaboré suivi par quelques propositions de quelques travaux de futurs.

## CHAPITRE 1

### MODELES DES GAZ REELS

#### 1.1. Introduction

L'étude de la nature des gaz constitue une introduction idéale à la thermodynamique. Cette étude, poursuivie dans les deux premiers chapitres, présente trois aspects nettement caractéristiques. Le premier se borne à la mise en ordre des résultats expérimentaux obtenus à partir de l'étude du monde qui nous entoure, en d'autres termes du monde macroscopique, afin d'aboutir à des conclusions générales ou lois. Le deuxième nous amène à l'élaboration d'un modèle pour les molécules, ce qui revient à une étude du monde sub-microscopique ou moléculaire. Finalement, ces deux points de vue se rassemblent pour conduire à une interprétation faisant fournir un aperçu sur le développement des équations d'état pour le calcul des propriétés thermodynamiques des gaz.

Rarement les aspects expérimentaux et théoriques d'une étude n'ont été aussi nettement séparés qu'ils le sont ici. Néanmoins, nous trouvons une bonne illustration de la façon dont ces deux aspects d'un problème scientifique vont de pair, pour conduire à une interprétation plus profonde du monde qui nous entoure. Cependant, la plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont antérieurs aux interprétations théoriques du chapitre suivant. Pour mémoire, rappelons que l'intervention de l'hypothèse moléculaire pour la matière est née avec le dix-neuvième siècle et devient convenablement élaborée à la fin de ce même siècle.

Signalons que certains travaux expérimentaux marquants des époques antérieures au dix-neuvième siècle, non guidés de manière appréciable par une quelconque théorie existante alors, furent vraiment empiriques.

Ce chapitre fournit un aperçu sur le développement des équations d'état pour le calcul des propriétés thermodynamiques des gaz. En commençant par l'équation d'état des gaz parfaits, ses applications et ces limites puis les premières modélisations des équations d'état semi-empiriques des gaz réels datant du 19<sup>ème</sup> siècle et leur développement pendant le 20<sup>ème</sup> siècle. Le lecteur est invité à suivre

les grandes lignes du développement de ces équations en insistant sur les changements des approches moléculaires (notion de covolume et des forces d'attraction intermoléculaires ) entre le modèle des gaz parfaits, et les modèles des gaz réels. Ainsi que l'impact sur le calcul des fonctions thermodynamiques tel que l'énergie interne, l'entropie et l'enthalpie. On procédera aussi dans ce chapitre spécifiquement à l'étude (détermination des coefficients de covolume et de l'attraction moléculaire à partir du point critique) et l'application du modèle de Berthelot pour les gaz réels.

### 1.2. Relation entre le Volume d'un gaz et sa Pression : Loi de Boyle-Mariotte

Dès l'année 1660, **Robert Boyle** [32] effectua une série d'expériences par lesquelles il détermina l'effet de la pression sur un certain volume d'air, à l'aide de l'appareil représenté sur la Fig.1.1 Une petite quantité de mercure était introduite par l'extrémité ouverte du tube pour enfermer un volume d'air dans l'autre extrémité fermée. Il était possible ainsi de mesurer le volume de l'air emprisonné pour différentes quantités de mercure ajoutées par l'orifice. Le Tableau 1.1 montre quelques résultats des mesures obtenues par Boyle.

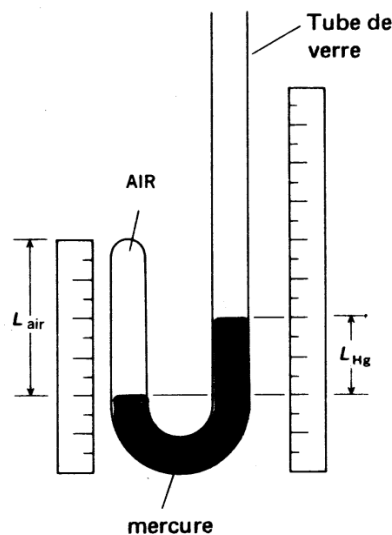


Figure. 1.1 : Appareil pour la détermination de la relation entre la pression et le volume de l'air emprisonné

Sur un plan qualitatif, il apparaît immédiatement que, au fur et à mesure que croît la pression imposée à l'air, le volume diminue.

Tableau 1.1 : Pressions et volumes d'air correspondants dans l'expérience de BOYLE

$L_{\text{air}}$ Unité arbitraire	$L_{\text{Hg}}$ Cm	$L_{\text{Hg}} + 73,9775$ Cm	$(L_{\text{Hg}} + 73,9775) * L_{\text{air}}$ Cm
12	0	73,9775	349
10	15,71625	89,69375	353
8	38,57625	112,23625	353
6	75,40625	149,38375	353
4	147,6375	221,615	349
3	224,63125	298,60875	353

Un tel résultat nous incite à aller plus avant et à voir s'il y a une relation quantitative simple entre la pression  $P$  et le volume  $V$ . Il est alors naturel de considérer la relation :

$$V \propto \frac{1}{P} \text{ ou } V = \frac{Cste}{P} \text{ ou } P.V = Cste \quad (1.1)$$

Les données sont facilement confrontées avec la forme définitive de cette relation, ce qui se trouve réalisé dans le Tableau 1.1 avec le produit de la hauteur effective de la colonne de mercure par la hauteur de la colonne d'air. (Les unités utilisées ne sont pas cohérentes mais c'est seulement la constance du résultat qui nous intéresse). Dans la limite des erreurs expérimentales nous obtenons une valeur constante, et ainsi Boyle fut capable de conclure que le volume d'air varie en sens inverse de la pression. Des expériences ultérieures montrèrent que cette relation nécessitait que la température soit constante, en outre, que beaucoup de gaz se comportaient sensiblement de la même façon que l'air. La loi de Boyle-Mariotte peut maintenant se formuler ainsi : Le volume d'une quantité donnée de gaz varie de façon inversement proportionnelle à la pression, la température étant maintenue constante.

Les processus qui se déroulent à température constante sont qualifiés d'isothermes. Les données relatives à la pression et au volume, obtenues dans ces conditions, sont fréquemment portées sur un graphique donnant  $P$  en fonction de  $V$  pour vérifier la loi de Boyle-Mariotte. La courbe obtenue est une hyperbole

dont la Fig. 1. 2 retrace l'allure, pour une température donnée c'est un exemple de fonction désignée par isotherme.

D'après la loi de Boyle-Mariotte, la pression et le volume d'une quantité donnée de gaz, prise à température constante, varient de telle façon que le produit PV ait toujours la même valeur. Quelquefois nous pouvons avoir affaire à un processus isotherme qui met en jeu le gaz dans un état initial où la pression est  $P_1$  et le volume  $V_1$  pour aboutir aux valeurs  $P_2$  et  $V_2$ . Puisque le produit de P par V est constant, nous écrivons une expression de la loi de Boyle-Mariotte souvent utilisée :

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2 \quad (1.2)$$

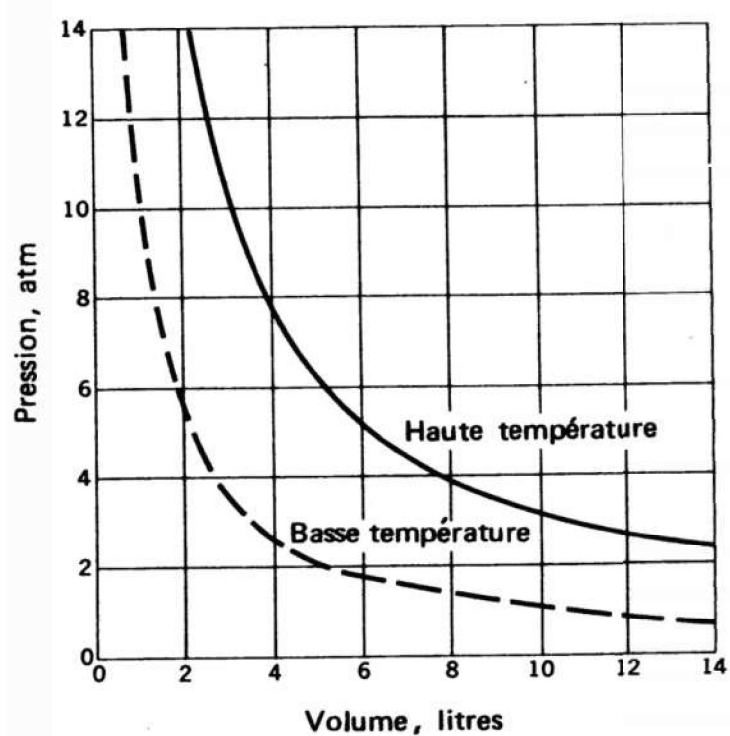


Figure 1. 2 : Isothermes d'un gaz suivant la loi de Boyle Mariotte

Nous verrons ultérieurement que des mesures plus nombreuses et plus précises révèlent, en fait, que les gaz ont un comportement qui ne peut pas se décrire exactement par la loi de Boyle-Mariotte. En premier lieu il est possible d'ignorer ces complications supplémentaires et de centrer notre attention sur ce qui est défini comme ayant le comportement d'un gaz parfait, comportement qui se représente très simplement.

La simplicité de la loi de Boyle-Mariotte et la présentation habituelle dans les manuels de chimie élémentaire ne nous amènent pas toujours à penser que c'est en fait le comportement attendu. Par contre, pour les liquides et les solides, il n'existe aucune relation aussi simple entre  $V$  et  $P$ . Par exemple, le fait de doubler la pression, pour un gaz choisi parmi beaucoup d'autres, réduit le volume du gaz étudié à la moitié de sa valeur initiale, c'est un résultat très remarquable que la théorie présentée dans la suite doit expliquer.

### 1.3. La relation entre Volume et Température pour les gaz parfaits

Il s'écoula plus d'un siècle avant la découverte d'une autre relation complétant la loi de Boyle Mariotte : il s'agit d'une relation entre la température et le volume du gaz. La cause de cette longue attente est liée aux difficultés inhérentes au concept de température, difficultés supérieures à celles rencontrées pour définir la pression. Bien que les différences qualitatives entre le chaud et le froid aient pu être facilement reconnues, les moyens d'aboutir à des mesures quantitatives de la chaleur ne furent pas aussi facilement décelés. Cependant, vers la fin du dix-huitième siècle, il y eut un consensus presque général pour adopter, comme méthode satisfaisante de détermination de la température, la dilatation d'un liquide dans un tube de verre ; ainsi se constitua l'essentiel du thermomètre moderne. De plus, en Europe, un accord se réalisa pour choisir le point de congélation de l'eau à  $0^{\circ}\text{C}$  et son point d'ébullition à  $100$  dans l'échelle des températures. L'existence de thermomètres, avec des échelles reconnues, permit de mener à bien des recherches sur la variation du volume d'un gaz avec la température.

Le travail le plus ancien est dû à Charles [2] en 1787. Par la suite, en 1808, Gay-Lussac [54] montra que si la pression est maintenue constante, le volume de l'échantillon de gaz varie linéairement avec la température, ainsi que le traduisent les traits pleins de la Fig. 1.3.

L'extrapolation aux basses températures de ces tracés est significative (voir Fig. 1.3). Toutes les courbes s'extrapolent à  $V=0$  pour une température voisine de  $-273^{\circ}\text{C}$ . De l'existence de ce comportement assez général, il apparaît plus adapté de mesurer la température à partir de ce point, c'est-à-dire, à partir de  $t = -273^{\circ}\text{C}$ , plutôt que de prendre le zéro de l'échelle des degrés Celsius. Si nous gardons la même grandeur pour le degré que celle de l'échelle Celsius, mais si le zéro est

déplacé, c'est l'échelle des températures absolues de Kelvin qui est définie. En utilisant la valeur admise actuellement pour le zéro absolu, nous voyons que les températures  $T$  dans cette échelle sont reliées aux températures  $t$  de l'échelle de Celsius par :

$$T = t + 273,15 \quad (1.3)$$

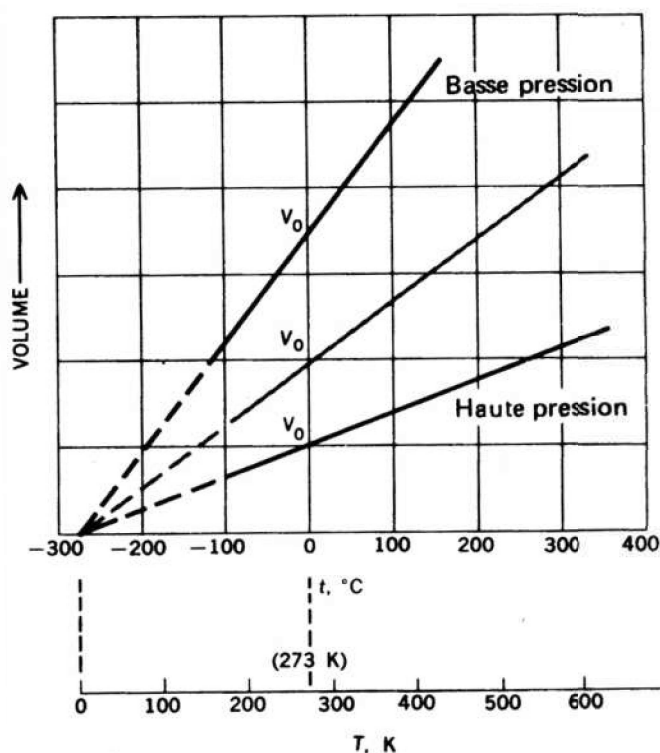


Figure 1 .3 : Loi de Gay-Lussac Variation du volume d'un gaz en fonction de la température, lorsque la pression est maintenue constante. Toutes les pentes sont égales à  $V_0 / 273$

Une température sur cette échelle absolue est affectée du symbole K, en hommage à Lord Kelvin. (Ultérieurement dans ce chapitre, après avoir examiné plus attentivement le comportement des gaz réels et la relation entre  $P$ ,  $V$  et  $T$ , nous considérerons en détail les bases et la méthode permettant d'édifier cette échelle de température).

Avec l'introduction de cette échelle absolue de température, figurée au-dessous de l'échelle de Celsius sur la Fig. 1.3, il est possible d'écrire une relation

entre  $V$  et  $T$ , voisine de celle de Boyle Mariotte. Les relations linéaires de la Fig. 1.3, s'extrapolant toutes à  $V = 0$  pour  $T=0$ , nous permettent d'écrire :

$$V \propto T \text{ ou } V = Cste \cdot V \text{ ou } \frac{V}{T} = Cste \quad (1.4)$$

Le résultat est appelé loi de Gay-Lussac, ou quelquefois aussi loi de Charles : Le volume d'une masse donnée de gaz varie proportionnellement avec la température absolue si la pression est maintenue constante. Comme la loi de Boyle-Mariotte, cette relation n'est suivie que de manière approximative par beaucoup de gaz, et un comportement conforme à la loi de Gay-Lussac constitue une autre caractéristique du comportement idéal des gaz parfaits.

#### 1.4. Le Comportement des Gaz Parfaits

Les lois de Boyle-Mariotte et de Gay-Lussac décrivent indépendamment la variation du volume d'un gaz avec la pression et la température. La dépendance avec les deux variables peut être traduite par la surface de la Fig. 1.4. Toute section perpendiculaire à l'axe des températures  $T$ , c'est-à-dire une coupe à température constante, doit représenter la relation hyperbolique de Boyle. Toute section perpendiculaire à l'axe des pressions  $P$ , c'est-à-dire, une section pour une pression constante, doit traduire la relation linéaire entre température et volume de la loi de Gay-Lussac [54].

La surface de la Fig. 1.4 nécessite, pour sa représentation mathématique complète, une expression de la forme :

$$V = f(P, T) \quad (1.5)$$

où  $f(P, T)$  désigne une fonction des variables  $P$  et  $T$ .

La relation correspondant à l'équation (1.5) doit permettre de retrouver les cas limites, c'est-à-dire les lois de Boyle-Mariotte et de Gay-Lussac, ainsi nous sommes amenés à écrire :

$$V \propto \frac{T}{P} \quad (1.6)$$



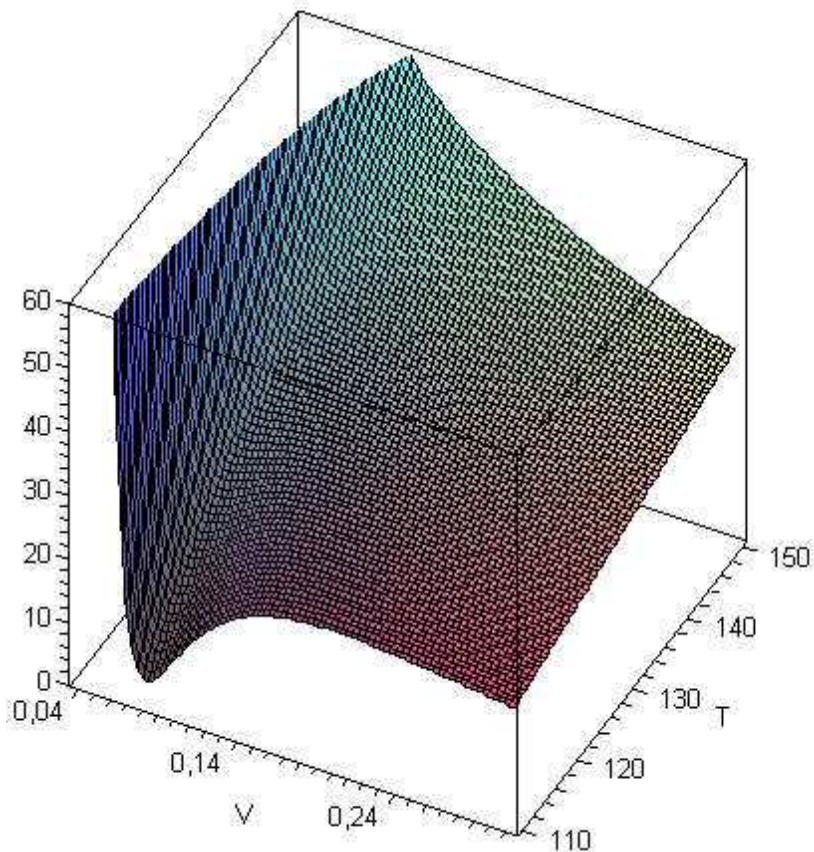


Figure. 1 .4 : Partie de la surface traduisant la relation entre le volume d'un gaz, la pression et la température été fait par logiciel Maple

Pour un échantillon de gaz dont le volume est connu, pour une température et une pression données, il faudra écrire l'égalité :

$$V = Const \cdot \frac{T}{P} \quad (1.7)$$

Pour décrire la surface présentée sur la Fig. 1.4.

Les expériences au laboratoire nous conduisent souvent à utiliser l'équation (1.7), pour calculer le volume d'un gaz à des pressions et des températures autres que celles correspondant aux conditions expérimentales. Une illustration intéressante et typique de la situation des gaz soumis à différentes températures et différentes pressions se trouve aussi dans notre environnement et particulièrement dans l'atmosphère terrestre. Les variations de la température

avec l'altitude sont traduites par les courbes de la Fig. 1.5, ces variations et celles de la pression sont par ailleurs présentées sous forme de tableau 1. 2.

Pour calculer les changements de volume d'un gaz à partir de l'équation (1.7) ou pour construire une surface telle que celle de la Fig. 1.4, les paramètres de l'échantillon du gaz à déterminer sont le volume à une température donnée et pour une pression définie. Cependant, il est souvent plus adapté de caractériser l'échantillon au moyen du nombre de moles  $n$  du gaz. Quand la quantité de gaz d'un échantillon est évaluée de cette façon, il est possible d'établir une expression de la loi des gaz applicable à tous ceux qui se comportent comme des gaz parfaits.

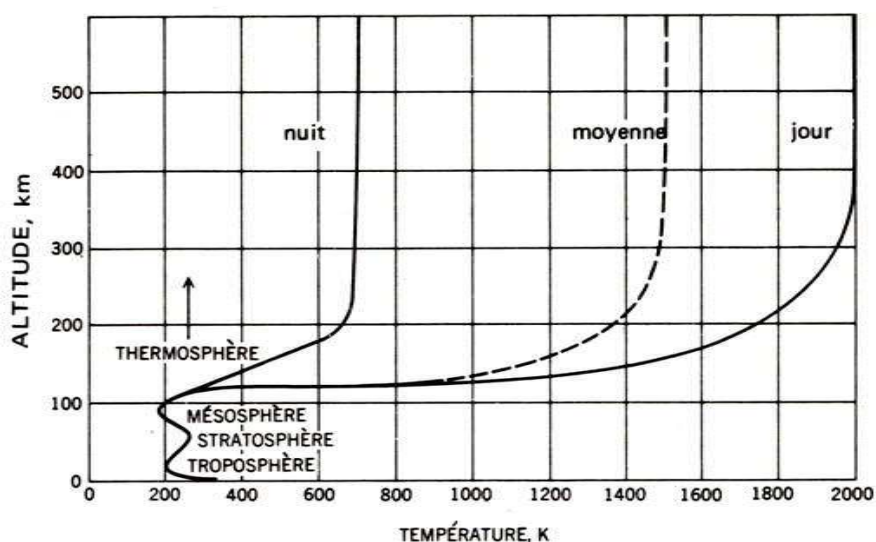


Figure 1.5 : Variations de la température dans l'atmosphère terrestre avec l'altitude

Il est entendu qu'il s'agit d'une atmosphère de référence pour laquelle les variations entre la nuit et le jour, comme avec le lieu et tous les autres paramètres, sont éliminées ; les mesures formant ainsi un ensemble assez cohérent [46].

Tableau 1.2: Données relatives à l'atmosphère standard

<i>Altitude</i> (km)	<i>Température</i> (K)	<i>Pression</i> (atm)	<i>masse volumique</i> ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3} = \text{g}\cdot\text{dm}^{-3}$ ) = $\text{g}\cdot\text{l}^{-1}$ )
0	288	1,00	1,22
20	217	$5,4 \times 10^{-2}$	$8,9 \times 10^{-2}$
40	261	$3,0 \times 10^{-3}$	$4,0 \times 10^{-3}$
60	254	$2,5 \times 10^{-4}$	$3,5 \times 10^{-4}$
80	166	$9,9 \times 10^{-6}$	$2,1 \times 10^{-5}$
100	199	$2,1 \times 10^{-7}$	$3,7 \times 10^{-7}$
200	1404	$1,6 \times 10^{-9}$	$3,7 \times 10^{-10}$
300	1423	$2,5 \times 10^{-10}$	$4,7 \times 10^{-11}$
400	1480	$5,6 \times 10^{-11}$	$9,0 \times 10^{-12}$
500	1576	$1,6 \times 10^{-11}$	$2,2 \times 10^{-12}$
600	1691	$5,2 \times 10^{-12}$	$6,6 \times 10^{-13}$
700	1812	$2,0 \times 10^{-12}$	$2,3 \times 10^{-13}$

La mise en évidence de la constitution de la matière par les molécules et l'introduction de la mole comme mesure d'une certaine quantité de matière, ne doivent pas toutefois nous faire perdre de vue les études expérimentales, en anticipant sur le sujet du chapitre suivant. Cependant, c'est cette anticipation qui nous permet d'utiliser l'énoncé général : Pour tout gaz parfait, une mole occupe le même volume à la même température et à une pression donnée, et ainsi la mole\* est définie de telle façon que le volume occupé par celle-ci est de 22,414 litres pour une température de 273,15 K et une pression de 1 atm.

Maintenant la proportionnalité traduite par l'expression (1.6) peut être présentée de façon à introduire la dépendance entre le volume et la quantité de matière, exprimée par le nombre de moles  $n$ , ainsi :

$$V = n \cdot \frac{T}{P} \quad (1.8)$$

Par suite, avec la généralisation énoncée précédemment et avec  $R$  jouant le rôle de constante de proportionnalité, nous écrivons l'égalité :

$$P \cdot V = R \cdot n \cdot T \quad (1.9)$$

De plus,  $R$  doit avoir une valeur unique, applicable pour tous les gaz qui se comportent comme des gaz parfaits.

Ce résultat est utile pour effectuer les calculs de volumes de gaz ; par ailleurs il contient les lois empiriques de Boyle-Mariotte et de Gay-Lussac et l'hypothèse d'Avogadro. Le but principal de la théorie du comportement des gaz qui doit être développée dans le prochain chapitre sera la démonstration de ce résultat important.

Pour obtenir une valeur numérique de la constante des gaz  $R$  il faut rappeler que pour 1 atm et à  $0^{\circ}\text{C}$ , 1 mole d'un gaz parfait occupe 22,414 litres. Ces données introduites dans l'expression (1.9) donnent :

$$R = \frac{(1 \text{ atm})(22,414 \text{ L})}{(1 \text{ mol})(273,15 \text{ K})} = 0,0820561 \frac{\text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad (1.10)$$

La relation importante  $P \cdot V = R \cdot n \cdot T$  peut être écrite sous une autre forme qui est quelquefois plus intéressante, en remarquant que le nombre de moles  $n$  est donné par la masse  $m$  de l'échantillon divisée par la masse molaire  $M$ , soit  $m/M$  et que la masse volumique  $\rho$  s'exprime par  $m/V$ . Ainsi la relation  $P \cdot V = R \cdot n \cdot T$  devient d'abord :

$$P = \rho RT \quad (1.11)$$

Le gaz parfait est le modèle le plus simple que l'on puisse imaginer pour représenter le comportement d'un gaz. Selon ce modèle, les molécules se comportent comme des sphères rebondissant les unes contre les autres. On peut imaginer un grand nombre de très petites boules de billard en mouvement chaotique, qui se percutent et rebondissent les unes contre les autres sans jamais s'attirer ni dissiper leur énergie par frottement [44].

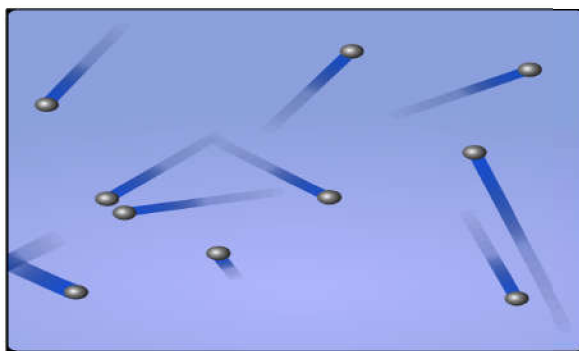


Figure 1.6 : Configuration des molécules dans un gaz parfait

### 1.5. Limitation de l'équation d'état d'un gaz parfait

Il a fallu 150 ans pour que cette équation d'état dite des gaz parfaits prenne sa forme définitive, telle qu'énoncée par Clapeyron en 1834 [17]. Mais il ne faudra pas longtemps pour trouver les limites de l'équation des gaz parfait, qui indique qu'une masse non-nulle de gaz parfait occupe un volume nul à température nulle. Strictement parlant, le gaz parfait ne peut exister, le modèle mathématique ci-haut perd son sens à très basse température puisqu'il ne tient pas compte du volume des molécules lui-même. Leur influence est d'autant plus importante quand les molécules sont structurellement complexes et lentes [31].

Le comportement réel des molécules lorsqu'elles sont proches les unes des autres est en réalité très complexe, ainsi, pas seulement le volume des molécules qui a une influence mais aussi les forces d'attraction entre ces molécules y jouent un rôle déterminant. Ces conditions permettent de s'assurer que les forces d'attraction entre les molécules gardent un rôle précieux dans le comportement global du gaz. Elles doivent être respectées pour l'air dans la grande majorité de ses applications spécialement en régime supersonique [37].

Pour cela l'équation (1.9) est satisfaisante pour des gaz à basse pression (en pratique jusqu'à quelques atmosphères), mais reste en général inadéquate pour la représentation des systèmes à moyennes et hautes pressions [2].

Plusieurs autres équations d'état peuvent être utilisées pour correspondre aux gaz réels sur une plus grande plage de propriétés. Ces équations prennent en compte l'interaction moléculaire et l'effet de covolume ignoré par le modèle des gaz parfaits.

### 1.6. Les gaz réels

Le modèle du gaz parfait décrit les gaz réels lorsque leur pression est faible, c'est-à-dire lorsque leur densité,  $n / v$ , est petite [2]. Dans de telles conditions, les molécules constitutives du gaz interagissent peu entre elles. En fait, le modèle du gaz parfait suppose qu'il n'y a *aucune interaction* entre les molécules.

Dans ce cas, la différence entre un gaz réel et un gaz parfait c'est l'aptitude du gaz réel à se comprimer, ce phénomène de compressibilité est dû à l'effet des forces d'attraction intermoléculaire et à l'effet de covolume [3], alors, on peut tenir compte de ces interactions afin d'obtenir une meilleure équation d'état.

Des molécules proches l'une de l'autre ne peuvent s'interpénétrer et exercent donc l'une sur l'autre une action répulsive. Au contraire, des molécules éloignées exercent l'une sur l'autre une faible force d'attraction.

Cette interaction peut être décrite par le potentiel de van der Waals [25].

Pour des molécules prises au sein du gaz, les interactions avec les autres molécules ont une moyenne nulle. Pour celles proches des parois, en revanche, l'attraction exercée par les molécules du gaz n'est pas compensée. Il en résulte une force tendant à ramener ces molécules vers l'intérieur du gaz, équivalente à une pression supplémentaire,  $p_i$ , dite *pression interne*.

Le volume accessible aux molécules est celui du récipient, diminué de celui occupé par les autres molécules. Le volume qu'occupent les autres molécules est appelé *covolume* et noté ***nb***.

### 1.6.1 Le covolume

Si on se réfère à l'équation des gaz parfaits on remarquera que pour une température constante le volume tend vers zéro si la pression tend vers l'infinie.

$$T = cte \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} v = 0 \quad (1.12)$$

Mais la répulsion entre les molécules d'un gaz impose un volume minimal appelé le covolume. Prenant compte ainsi de l'impossibilité de réduire à zéro le volume réellement occupé par la matière.

Pour étudier le volume réellement disponible d'un récipient contenant un gaz réel on doit apporter à l'équation (1.1) la correction suivante  $(v-b)$ ,  $b$  étant le volume réel des molécules, ce que l'on nomme aussi le covolume.

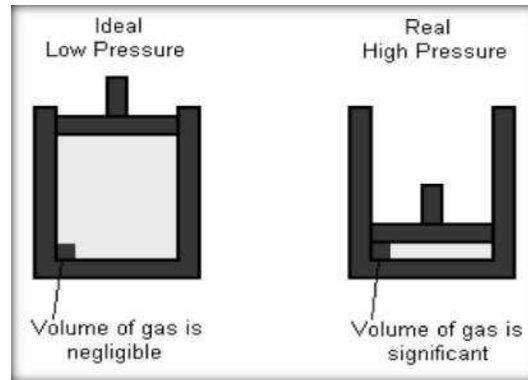


Figure 1.7 : Représentation de l'effet de covolume

### 1.6.2. Les forces d'attraction intermoléculaires

Dans un fluide non parfait les interactions entre molécules ne sont pas nulles. Au sein du fluide, une molécule est soumise à une force résultante nulle puisqu'elle est entourée de façon isotrope par les molécules voisines; ceci n'est plus vrai quand la molécule s'approche de la paroi car les molécules voisines n'occupent plus que le demi-espace interne et la molécule est freinée. La pression résultante, conséquence des chocs contre la paroi, en est diminuée [25].

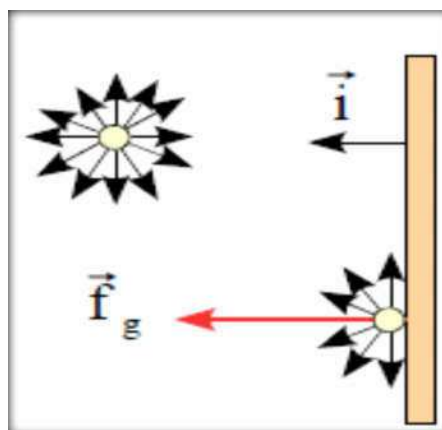


Figure 1.8 : Représentation des forces intermoléculaires

Si une molécule est loin de la paroi, la distribution de ces forces d'attraction est isotrope et leur résultante est nulle. Si une molécule est contre la paroi, la résultante,  $\vec{f}_g$  de ces forces est orientée vers l'intérieur du gaz pour maintenir les molécules. Ce qui cause une diminution de la pression au voisinage des parois.

### 1.6.3 Equation d'État des gaz réels

Les fluides réels regroupent les liquides ainsi que les gaz aux pressions suffisamment élevées pour que leur comportement s'écarte notablement de celui du gaz parfait. La différence essentielle entre les fluides réels et le gaz parfait est que *l'on ne peut plus négliger les interactions entre les particules du fluide*.

Concernant ces interactions, on retiendra seulement :

- qu'elles sont généralement attractives à grande distance.
- qu'elles sont répulsives à courte distance (les particules ne s'interpénètrent pas).

L'équation (1.13) introduit deux corrections dans la loi des gaz parfaits :

1. Les molécules ont un volume non nul et incompressible (volume exclu).
2. Il existe des forces d'attraction entre les molécules.

Introduisant les valeurs corrigées du volume et de la pression dans l'équation des gaz parfaits, van der Waals aboutit à l'équation [56] :

$$(p + p_i)(v - nb) = nRT \quad (1.13)$$

La pression interne est fonction croissante de la densité du gaz. Une analyse détaillée montre que [56] :

$$p_i = \frac{an^2}{v^2} \quad (1.14)$$

Les valeurs de  $a$  et  $b$  varient selon la nature du gaz étudié.

#### 1.6.3.1 Effet du volume exclu

Si on place  $N$  molécules dans un récipient de volume  $V$  peuvent se déplacer dans le volume total  $V$  seulement si le volume occupé par les molécules elles-mêmes est nul. En fait, les molécules occupent un volume non-nul et il existe dans le récipient un certain volume exclu, non-disponible. Soient deux molécules supposées sphériques et de diamètre  $d$ . le volume exclu pour cette paire de molécules, c'est-à-dire le volume inaccessible à chacun des deux centres de gravité est une sphère de rayon  $d$  [1]:



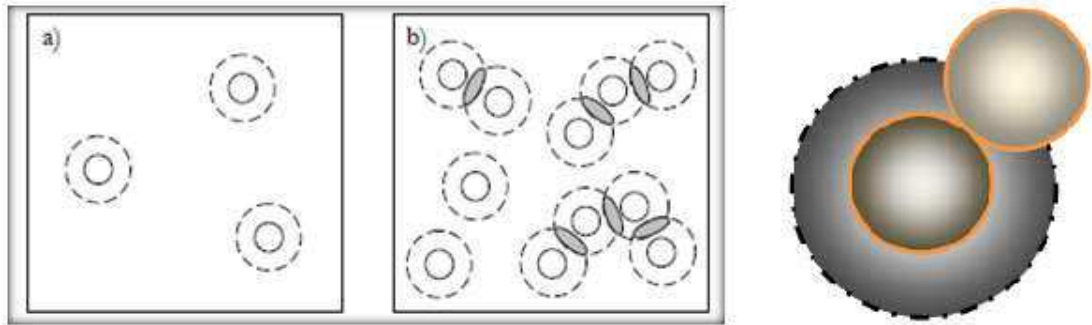


Figure 1.9 : Le volume soustrait autour de chaque sphère dure  
a) basses densités, b) hautes densités

$$\text{Volume exclu par paire} = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d}{2} \right)^3$$

$$\text{Volume exclu par molécule} = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \pi d^3 \right) = 4 \left[ \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d}{2} \right)^3 \right]$$

$$\text{Volume exclu par mole} = b = 4 N_A \left[ \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d}{2} \right)^3 \right]$$

On Remarque que le volume exclu représente 4 fois le volume occupé par les molécules. Le volume réellement disponible dans un récipient de volume  $V$  contenant  $n$  moles de gaz est :

$$V_{\text{disponible}} = V_{\text{récipient}} - n b \quad (1.15)$$

L'équation d'État, basée sur l'équation des gaz parfaits corrigée pour la taille des molécules, s'écrit donc:

$$\text{force} \propto C_1 \times C_2 \quad (1.16)$$

$$\text{Concentration dans le gaz:} \quad C = \frac{n}{V} \quad (1.17)$$

$$\text{force} \propto \left( \frac{n}{V} \right)^2 \text{ et } P_{\text{int}} \propto \left( \frac{n}{V} \right)^2 \quad (1.18)$$

$$P_{\text{int}} = a \left( \frac{n}{V} \right)^2 \quad (1.19)$$

$$P(V_{\text{récipient}} - nb) = nRT \quad (1.20)$$

### 1.6.3.2 Effet des forces d'attraction intermoléculaires

Le terme de pression  $P$  qui intervient dans l'équation d'état d'un gaz est, de façon rigoureuse, la pression qui confine les molécules dans le récipient de volume  $V$ . en l'absence d'interactions, cette pression est identique à la pression appliquée à l'extérieur du récipient,  $P_{\text{ext}}$ . Les forces d'attraction entre molécules sont équivalentes à une pression intérieure,  $P_{\text{int}}$ , qui réduit la pression extérieure nécessaire pour maintenir le gaz dans le volume  $V$ . la pression que subit le gaz lui-même est  $P = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$ . Pour exprimer quantitativement  $P_{\text{int}}$ , on considère deux petits éléments de volume  $V_1$  et  $V_2$  choisis au hasard dans le gaz et contenant chacun 1 molécule. La force d'attraction entre  $V_1$  et  $V_2$  est  $F$ . si on ajoute une deuxième molécule dans  $V_1$  la force d'attraction devient  $2 F$ . si on ajoute une troisième molécule dans  $V_1$ , la force d'attraction devient  $3 F$ , etc., l'effet est le même si l'on ajoute les molécules dans  $V_2$ . La force d'attraction entre  $V_1$  et  $V_2$  est donc proportionnelle à  $C_1$ , la concentration de molécules dans  $V_1$  et à  $C_2$ , la concentration de molécules dans  $V_2$ , en moyenne, la concentration de molécule dans le gaz est  $C$ , identique dans tout le volume. Par conséquent, la force entre les deux éléments de volume  $V_1$  et  $V_2$  est proportionnelle à  $C^2$ . De la même manière,  $P_{\text{int}}$  est proportionnelle à  $C^2$ . Le coefficient de proportionnalité, note  $a$  dépend de la nature chimique de gaz considéré.

L'équation d'état de Van der Waals [25]. S'obtient finalement en remplaçant  $P$  par  $(P_{\text{ext}} + P_{\text{int}})$  :

$$\left( P_{\text{ext}} + \frac{an^2}{V^2} \right) (V_{\text{récipient}} - nb) = nRT \quad (1.21)$$

En pratique, on écrira  $P$  au lieu de  $P_{\text{ext}}$  mais en se souvenant que cela représente la pression extérieure imposée au gaz, telle qu'un expérimentateur peut la mesurer à l'aide d'un piston, par exemple. On écrira aussi  $V$  au lieu de  $V_{\text{récipient}}$  pour représenter le volume total du récipient :

$$\left( P + \frac{a n^2}{V^2} \right) (V - n b) = n R T \quad (1.22)$$

$$\left( P + \frac{a}{\bar{V}^2} \right) (\bar{V} - b) = R T \quad (1.23)$$

Si  $\bar{V}$  est le volume total exprime par une mole de gaz

#### 1.6.4. Equation générale

La théorie cinétique des gaz amène à remplacer l'équation caractéristique des gaz parfaits  $P v = R T$  par une équation générale.

$$(P + \pi)(v - b) = R T \quad (1.24)$$

Avec :

$\pi$  : Excès de pression du à l'attraction mutuelle des particules (pression intérieure). La pression au sein de fluide est supérieure à la pression au voisinage de la paroi (tient compte des forces intermoléculaires).

$b$  : le covolume, c'est le volume minimum que peut occuper l'unité de masse du gaz considéré (tient compte du volume propre des molécules environ 4 fois)

### 1.7. Les équations des gaz réels ( par ordre de complexité )

#### 1.7.1. Equation de VAN DER WAALS

A la suite des considérations théoriques, en 1873 Johannes Van Der Waals [25], démontre que la pression interne  $P$  est inversement proportionnelle au carré du volume molaire :

$$\pi = \frac{a}{v^2} \quad (1.25)$$

Cette pression  $\pi$  est proportionnelle à la masse spécifique ( $a$ ) des molécules attirantes et celles des molécules attirées. Elle est inversement proportionnelle au carré du volume.

L'équation de **VAN DER WAALS** devient donc :

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT \quad (1.26)$$

Ou bien :

$$P(T,v) = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{v^2} \quad (1.27)$$

Connaissons :

$$V = 1/\rho \quad (1.28)$$

Avec:  $a = \frac{27 R^2 T_c^2}{64 P_c}$  ,  $b = \frac{RT_c}{8 P_c}$  et  $R = \frac{8 P_c V_c}{3 T_c}$

$a$  : Est le paramètre d'attraction est une mesure de l'intensité d'attraction entre les molécules. On l'appelle également pression de liaison.

$b$  : est le covolume définit auparavant.

$(V-b)$  : est appelé volume effectif dans la contribution de répulsion.

$a$  et  $b$  sont des constantes empiriques, on parle en détail sur le calcul de ces constantes.

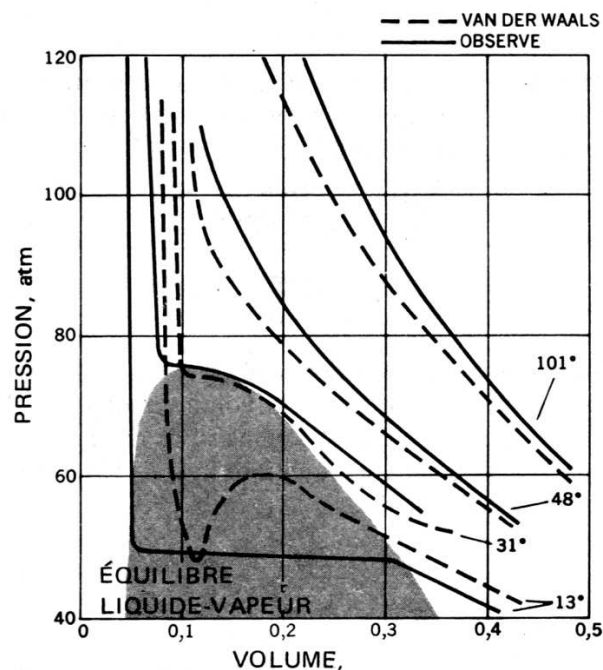


Figure 1.10 : Comparaison entre les courbes  $P = f(V)$  obtenues par l'équation de Van der Waals et les données expérimentales au voisinage du point critique

La validité de cette équation bien adaptée au comportement des variables  $P$ ,  $V$  et  $T$  d'un gaz réel, se mesure en choisissant les valeurs  $a$  et  $b$ , différentes pour chaque gaz et pour chaque température, de façon à avoir une corrélation aussi bonne que possible avec les mesures [2]. Bien que nous obtenions rarement une coïncidence parfaite entre les volumes calculés et observés pour un grand domaine de pression, l'amélioration par rapport à l'expression de la loi des gaz parfaits  $PV = nRT$  est considérable. La Figure 1.10 et le Tableau 1.3 montrent de façon quantitative l'amélioration pour les domaines où le comportement non idéal est très apparent. Le succès de l'équation de Van der Waals pour traduire les relations entre  $P$ ,  $V$  et  $T$ , est bien meilleur que ce qui pourrait être escompté pour toute expression purement empirique avec seulement deux paramètres ajustables. Cependant, le comportement du gaz dans le domaine à deux phases, apparent sur la Figure 1.10, ne peut se représenter par l'équation de Van der Waals, le maximum et le minimum doivent être obligatoirement écartés.

Comme le montre la Fig. 1.10, l'équation de Van der Waals permet de traduire assez correctement le comportement d'un gaz dans le domaine proche de celui correspondant à l'équilibre liquide- vapeur. Bien plus, il y aura une température pour laquelle l'équation de Van der Waals avec les valeurs choisies pour  $a$  et  $b$ , présentera le point d'inflexion à tangente horizontale qui est mis en évidence sur l'isotherme critique. Cette coïncidence fournit une méthode convenable, mais qui n'est pas toujours satisfaisante, pour obtenir les valeurs de  $a$  et  $b$ .

Tableau 1.3 : Volumes molaires du dioxyde de carbone,  $\text{CO}_2$  à 320 K. Comparaison de l'équation de Van der Waals et de la loi des gaz parfaits près de la température critique [23].

P(atm)	V (litres)		
	Observé	Van der Waals	Gaz Parfait
1	26,2	26,2	26,3
10	2,52	2,53	2,63
40	0,54	0,55	0,66
100	0,098	0,10	0,26

### 1.7.2. Equation de BERTHELOT

L'équation de Berthelot s'écrit par [56]:

$$\left( P + \frac{a'}{T v^2} \right) (v - b) = RT \quad (1.29)$$

Ou bien :

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{T v^2} \quad (1.30)$$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a \rho^2}{T} \quad (1.31)$$

Avec:  $a = 3 P_c V_c^2$  ,  $b = \frac{V_c}{3}$  et  $R = \frac{8 P_c V_c}{3 T_c}$

### 1.7.3. Equation de CLAUSIUS (1880)

L'équation de Clausius s'exprime par [52]:

$$\left( P + \frac{a}{T(v+c)^2} \right) (v - b) = RT \quad (1.32)$$

Ou bien:

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{T(v + c)^2} \quad (1.33)$$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a \rho^2}{T(1 + c \rho)^2} \quad (1.34)$$

$$a = \frac{27 R^2 T_c^3}{64 P_c}, \quad b = V_c - \frac{RT_c}{4 P_c}, \quad c = \frac{3 RT_c}{8 P_c} - V_c$$

Cette équation constitue une amélioration de l'équation de VAN DER WAALS. Elle donne une approximation assez bonne dans le domaine correspondant à :  $V > 1 V_c$ ,  $P < 4 P_c$ ,  $T < 2 T_c$ .

Mauvaise approximation dans le domaine des gaz à pression et température élevées et dans le domaine des liquides.

#### 1.7.4. Equation de REDLICH-KWONG (1949)

L'équation de REDLICH-KWONG s'écrit par [35]:

$$(v-b) \left[ P + \frac{a}{\sqrt{T} v(v-b)} \right] = RT \quad (1.35)$$

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{\sqrt{T} v(v-b)} \quad (1.36)$$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a \rho^2}{\sqrt{T} (1+\rho b)} \quad (1.37)$$

$$a = \frac{0.42748 R^2 T_c^{2.5}}{P_c} \quad \text{et} \quad b = \frac{0.08662 RT_c}{P_c}$$

Basée sur des considérations théoriques et pratiques. Fournit une bonne approximation pour les températures  $T > T_c$ .

Dans les domaines des liquides et du gaz à masse volumique élevée, les résultats quoique moins bons sont satisfaisants.

#### 1.7.5. Equation de BERTTIE- BRIDGEMAN (1928)

L'équation de BERTTIE- BRIDGEMAN s'exprime par [35]:

$$P(T, v) = \frac{RT}{v^2} \left( 1 - \frac{c}{vT^3} \right) \left( v + B_0 - \frac{bB_0}{v} \right) - \frac{A_0}{v^2} \left( 1 - \frac{a}{v} \right) \quad (1.38)$$

$$P(T, \rho) = RT \rho + \left( B_0 RT - A_0 - \frac{Rc}{T^2} \right) \rho^2 - \left( -B_0 b RT + A_0 a - \frac{RB_0 c}{T^2} \right) \rho^3 + \frac{RB_0 b c}{T^2} \rho^4 \quad (1.39)$$

Les constantes a, b, c, a<sub>0</sub>, et B<sub>0</sub> sont déterminées empiriquement à partir des données expérimentales P, V, T

- En général, elle peut être appliquée pour  $V > 2V_c$  et  $T > 1.5T_c$
- Elle est meilleure que les équations de VAN DER WAALS et CLAUSIUS.
- Inapplicable dans la région située au voisinage des points critiques.

### 1.7.6. Equation de DIETERICI

L'équation de DIETERICI s'exprime par [12]:

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v-b)} e^{\frac{-a}{RTv}} \quad (1.40)$$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} e^{\frac{-a\rho}{RT}} \quad (1.41)$$

$$a = P_c V_c^2 e^2, \quad b = \frac{V_c}{2} \quad \text{et} \quad R = \frac{P_c e^2 V_c}{2T_c}$$

### 1.7.7. Equation de WOHL

L'équation de WOHL s'exprime par [1]:

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv(v-b)} + \frac{c}{T^2 v^3} \quad (1.42)$$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1-\rho b)} - \frac{a\rho^2}{T(1-\rho b)} + \frac{c\rho^3}{T^2} \quad (1.43)$$

$$a = 6 P_c T_c V_c^2, \quad b = \frac{V_c}{4}, \quad \text{et} \quad c = 4 P_c V_c^3 T_c^2$$

### 1.7.8. Equation de BERTHELOT Modifiée

L'équation finale de la pression en fonction de la température et de la masse volumique sous la forme [46]:

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{\left[ 1 - \left[ \left( \frac{9\rho RT_c}{128 P_c} \right) \left( 1 - \frac{6T_c^2}{T^2} \right) \right] \right]} \quad (1.44)$$



### 1.8. Les coordonnées du point critique- équations réduites

Pour  $T > T_C$ ,  $P$  diminue quand  $V$  augmente. Pour une valeur de  $P$ , correspond une seule valeur de  $V$  qui est le volume réellement occupé par le gaz à cette température et à cette pression.

Pour  $T < T_C$ , les isothermes présentent un minimum  $E$  et un maximum  $F$ .

A une valeur de  $P$ , peuvent correspondre 3 valeurs de volumes (3 racines). A mesure de l'accroissement de la température, les 3 racines se confondent fournissant un point d'inflexion sur l'isotherme correspondante où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Ce point est caractérisé par une pression critique  $P_C$ , une température critique  $T_C$  et un volume critique  $V_C$ .

Physiquement seules les branches  $BG$  et  $AH$  représentent des états stables du fluide.

$BG$  c'est l'état gazeux et  $AH$  c'est l'état liquide.

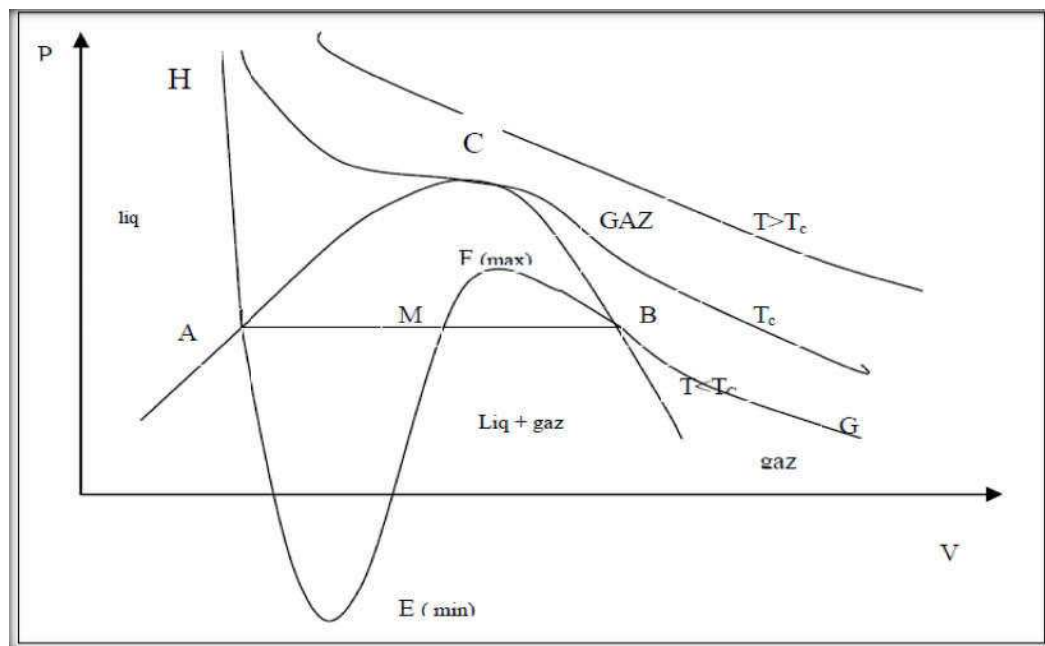


Figure 1.11 : Représentation graphique de l'état du fluide pour le cas d'un gaz réel

Les états d'équilibres du fluide représentés par des portions AE et BF de l'isotherme sont des états d'équilibre métastables.

AE : correspond au retard de la vaporisation.

BF : correspond au retard de la condensation.

La portion d'isotherme EMF n'est pas observable car elle est relative à des états instables. P et V évoluent dans le même sens.

### 1.8.1. Application pour l'équation de BERTHELOT

Elle s'écrit:

$$\left( P + \frac{a}{T v^2} \right) (v - b) = RT$$

Ou bien :

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{T v^2}$$

Calculons les coordonnées du point critique C ( $P_c$ ,  $V_c$ ,  $T_c$ ) en fonction de (a, b et r).

L'équation caractéristique: 
$$P(T, v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{T v^2}$$

Au point critique C : 
$$P_c = \frac{RT_c}{(V_c - b)} - \frac{a}{T_c V_c^2} \quad (1.45)$$

Tangente horizontale en C : 
$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T_c} = 0 \Rightarrow \frac{RT_c}{(V_c - b)^2} = \frac{2a}{T_c V_c^3} \quad (1.46)$$

Point inflexion en C: 
$$\left( \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_{T_c} = 0 \Rightarrow \frac{RT_c}{(V_c - b)^3} = \frac{3a}{T_c V_c^4} \quad (1.47)$$

Divisons l'équation (1.46) par l'équation (1.47), on obtient:

$$(V_c - b) = \frac{2}{3} V_c \Rightarrow V_c = 3b \quad (1.48)$$

Remplaçons l'équation (1.48) dans l'équation (1.47), on obtient:

$$T_c = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb} \quad (1.49)$$

Remplaçons les équations (1.48) et (1.49) dans l'équation (1.30), on obtient:

$$P_c = \frac{a}{27b^2} \quad (1.50)$$

### 1.8.2. Calcul des constants a, b et R

Au point C, on a :

$$\begin{cases} V_c = 3b \\ T_c = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb} \\ P_c = \frac{a}{27b^2} \end{cases}$$

Ici nous avons trois équations à trois inconnues, la solution de ce système donne :

$$\begin{cases} a = 3 P_c V_c^2 \\ b = \frac{V_c}{3} \\ R = \frac{8 P_c V_c}{3 T_c} \end{cases} \quad (1.51)$$

Les caractéristiques critiques de l'air sont :  $T_c=132.6$  K,  $P_c=37.7 \cdot 10^5$  Pa et  $V_c=0.1173$  L.

### 1.8.3. Equation réduite

En remplaçant les constantes a, b et R dans l'équation de BERTHLOT :

On obtient :

$$\left( P + \frac{3P_c V_c^2 T_c}{TV^2} \right) \left( v - \frac{V_c}{3} \right) = \frac{8}{3} P_c V_c \frac{T}{T_c} \quad (1.52)$$

Divisons par  $P_c$  et  $V_c$ , ça donne :

$$\left( \frac{P}{P_c} + 3 \frac{V_c^2}{V^2} \frac{T_c}{T} \right) \left( \frac{V}{V_c} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \frac{T}{T_c} \quad (1.53)$$

L'équation réduite de BERTHELOT sous la forme:

$$\left( \omega + 3 \frac{1}{\theta \varphi^2} \right) \left( \varphi - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \theta \quad (1.54)$$

Cependant, à la suite d'expériences, BERTHELOT a trouvé une meilleure représentation des résultats expérimentaux pour les gaz réels en dehors du point critique, par l'équation modifiée suivante :

$$\left( \omega + \frac{16}{3} \frac{1}{\theta \varphi^2} \right) \left( \varphi - \frac{1}{4} \right) = \frac{32}{9} \theta \quad (1.55)$$

L'équation (1.55) s'appelle Équation réduite modifiée de BERTHELOT, Avec cette équation, les constantes  $a$ ,  $b$  et  $R$ , auront pour valeurs dans l'équation de BERTHELOT :

$$\begin{cases} a = \frac{16}{3} P_c V_c^2 T_c \\ b = \frac{V_c}{4} \\ R = \frac{32}{9} \frac{P_c V_c}{T_c} \end{cases}$$

Il est à rappeler que l'équation réduite modifiée de BERTHELOT, à l'encontre de celle de VAN DER WAALS, n'est pas applicable au point critique et en son voisinage. Par ailleurs, l'équation réduite de BERTHELOT est plus précise que celle de VAN DER WAALS. Elles servira en particulier pour les calculs des correction à apporter aux grandeurs thermodynamiques des gaz parfaits.

### 1.9. Equations de VIRIEL

L'équation d'état relative à une mole de gaz réel peut être représentée par un développement du produit  $P.V/RT$  :

- Soit en fonction du volume  $v$  du gaz :

$$\frac{PV}{rT} = 1 + \frac{A}{V} + \frac{B}{V^2} + \frac{C}{V^3} + \dots \quad (1.56)$$

- Soit en fonction de la pression  $P$  du gaz :

$$\frac{PV}{rT} = 1 + \bar{A}P + \bar{B}P^2 + \bar{C}P^3 + \dots \quad (1.57)$$

Ces deux équations  $\frac{PV}{rT} = f\left(\frac{1}{V}\right)$  et  $\frac{PV}{rT} = f(P)$  portent le nom *d'équations de VIRIEL*.

Généralement s'en limitera aux trois premiers termes du développement. Il est à noter que les coefficients  $A, \bar{A}, B, \bar{B}, C, \bar{C}$  sont fonction de la température.

#### 1.9.1. Fonction du volume $v$ du gaz

On cherche une relation de la forme :  $\frac{PV}{rT} = f\left(\frac{1}{V}\right)$

L'équation de Berthelot:  $P = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2}$

Ou bien :

$$P = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2}$$

Le développement de l'équation de Berthelot donne :

$$PV = RT + Pb - \frac{a}{TV} + \frac{ab}{TV^2} \quad (1.58)$$

Remplaçons l'équation (1.30) dans (1.58), on trouve :

$$PV = RT - \frac{a}{TV} + \left( \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2} \right) b + \frac{ab}{TV^2} \quad (1.59)$$

$$PV = RT - \frac{a}{TV} + \frac{RTb}{(v-b)} = RT \left( 1 + \frac{b}{(v-b)} - \frac{a}{RT^2V} \right) \quad (1.60)$$

$$\left(\frac{b}{V-b}\right) = \frac{b}{V\left(1-\frac{b}{V}\right)} \quad \text{D'après la relation approchée } \frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon$$

$$\left(\frac{b}{V-b}\right) \approx \frac{b}{V}\left(1+\frac{b}{V}\right) \approx \frac{b}{V} + \frac{b^2}{V^2} \quad (1.61)$$

Remplaçons (1.61) dans (1.60):

$$PV = RT \left[ 1 + \frac{b}{V} + \frac{b^2}{V^2} - \frac{a}{RT^2V} \right] = RT \left[ 1 + \left( b - \frac{a}{RT^2} \right) \frac{1}{V} + b^2 \frac{1}{V^2} \right] \quad (1.62)$$

$$PV = RT \left[ 1 + A \frac{1}{V} + B \frac{1}{V^2} \right] \quad (1.63)$$

Les coefficients de VIRIEL sont donc :  $A = \left( b - \frac{a}{RT^2} \right)$ ,  $B = b^2$

### 1.9.2. Fonction de la pression P du gaz

On cherche une relation de la forme :  $\frac{PV}{rT} = f(P)$

L'équation de Berthelot:

$$P = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{Tv^2} \Rightarrow v = \frac{rT}{P + \frac{a}{Tv^2}} + b = \frac{rT}{P} \frac{1}{\left( 1 + \frac{a}{PTv^2} \right)} + b \quad (1.64)$$

Or, d'après la relation approchée :  $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon$ , on aura :

$$v = \frac{rT}{P} \left( 1 - \frac{aP}{P^2Tv^2} \right) + b = \frac{rT}{P} \left( 1 - \frac{aP}{P^2Tv^2} + \frac{bP}{rT} \right) \quad (1.65)$$

En première approximation,  $P^2v^2 \approx r^2T^2$

$$V = \frac{RT}{P} \left( 1 - \frac{aP}{R^2T^3} + \frac{bP}{RT} \right) \Rightarrow \frac{1}{V} = \frac{P}{RT} \left[ \frac{1}{\underbrace{\left( 1 - \frac{aP}{R^2T^3} + \frac{bP}{RT} \right)}_{\varepsilon}} \right] = \frac{P}{RT} \left[ 1 + \frac{aP}{R^2T^3} - \frac{bP}{RT} \right] \quad (1.66)$$

Soit

$$\frac{1}{V} = \frac{P}{RT} \left[ 1 + \frac{a}{R^2T^3} P - \frac{b}{RT} P \right] \quad (1.67)$$

En remplaçant (1.67) dans (1.58), on obtient :

$$PV = RT - \frac{aP}{RT^2} \left( 1 + \frac{a}{R^2T^3} P - \frac{b}{RT} P \right) + Pb + \frac{abP^2}{R^2T^3} \left( 1 + \frac{a}{R^2T^3} P - \frac{b}{RT} P \right)^2 \quad (1.68)$$

En se limitant aux termes du second degré en P, on obtient :

$$PV = RT - \frac{aP}{RT^2} - \frac{a^2P^2}{R^3T^5} + \frac{abP^2}{R^2T^3} + bP + \frac{abP^2}{R^2T^3} \quad (1.69)$$

$$PV = RT + \left( b - \frac{a}{RT^2} \right) P + \frac{2ab}{R^2T^3} P^2 - \frac{a^2P^2}{R^3T^5} = RT + \left( b - \frac{a}{RT^2} \right) P + \frac{2a}{R^2T^3} \left( b - \frac{a}{2RT^2} \right) P^2 \quad (1.70)$$

$$PV = RT \left[ 1 + \frac{1}{RT} \left( b - \frac{a}{RT^2} \right) P + \frac{2a}{R^3T^4} \left( b - \frac{a}{2RT^2} \right) P^2 \right] \quad (1.71)$$

Ou :

$$\frac{PV}{RT} = \left[ 1 + \left( \frac{b - \frac{a}{RT^2}}{RT} \right) P + \frac{2a}{R^3T^4} \left( b - \frac{a}{2RT^2} \right) P^2 \right] \quad (1.72)$$

$$\frac{PV}{RT} = \left[ 1 + \bar{A}P + \bar{B}P^2 \right] \quad (1.73)$$

Les coefficients de VIRIEL sont donc :  $\bar{A} = \left( \frac{b - \frac{a}{RT^2}}{RT} \right)$ ,  $\bar{B} = \frac{2a}{R^3 T^4} \left( b - \frac{a}{2RT^2} \right)$

### 1.10. Facteur de compressibilité

L'équation d'état des gaz réels peut également être utilisée sous la forme très générale  $P.V = Z.R.T$ ,  $Z$  est appelé coefficient ou facteur de compressibilité.

L'équation de Berthelot :  $\left( P + \frac{a}{TV^2} \right) (v - b) = RT$

$$\left( P + \frac{a}{TV^2} \right) (V - b) = RT \Rightarrow PV - Pb + \frac{a}{TV} - \frac{ab}{TV^2} = RT \quad (1.74)$$

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{Pb}{RT} - \frac{a}{RT^2 V} + \frac{ab}{RT^2 V^2} \quad (1.75)$$

Finalement :

$$Z = 1 + \frac{Pb}{RT} - \frac{a}{RT^2 V} + \frac{ab}{RT^2 V^2} \quad (1.76)$$

### 1.11. Choix de l'équation d'état

Les différentes lois d'état ont été exposées. Il convient maintenant de choisir laquelle nous allons utiliser dans notre modèle.

Le tableau 1.4 représente une comparaison entre les valeurs expérimentales de l'air et les résultats numériques obtenu par des séries de testes pour chaque équation du gaz réel. Si on accepte une erreur inférieure à 5 %, ce qui est le cas généralement pour les applications aérodynamiques, on peut étudier un écoulement supersonique en utilisant les d'un gaz réels, si la température  $T$  et la pression  $P$  bien déterminées. Les conditions nécessaires pour obtenir une erreur inférieure à 5 % présentées dans le tableau suivant :

Tableau 1.4 : Comparaison entre les valeurs expérimentales de l'air [14] et les résultats numériques trouvées pour chaque équation du gaz réel.



	1 Bar	10 Bar	100 Bar
<b>Van der Waals</b>	✓	T > 132,5 K	T > 300 K
<b>Berthelot</b>	✓	✓	✓
<b>Dieterici</b>	T > 170 K	T > 230 K	T > 440 K
<b>Redlich Kwong</b>	✓	T > 170 K	T > 270 K
<b>Beattie-Bridgeman</b>	✓	T > 170 K	T > 298 K
<b>Clausius</b>	T > 201 K	T > 489 K	$\varepsilon > 5\%$
<b>Wohl</b>	✓	T > 186 K	T > 300 K
<b>Berthelot modifiée</b>	✓	T > 166 K	T > 274 K

L'équation du Viriel, tronquée au deuxième ou troisième coefficient, ne traduit pas suffisamment les effets observés à haute pression, elle n'est donc pas adaptée à notre étude [2].

Les équations empiriques et semi-empiriques dites non analytiques sont généralement plus précises mais nécessitent de connaître un grand nombre de constantes qui peuvent être difficiles à obtenir dans la littérature.

Ainsi, notre choix se porte sur l'équation d'état analytique de Berthelot requière un nombre de paramètres limité et peuvent être résolue de manière analytique tout en conduisant à une bonne estimation du comportement des gaz. L'équation d'état de Berthelot ne nécessite que deux coefficients,  $a$  et  $b$ , disponibles dans la littérature.

#### 1.12. Validation du choix de l'équation de Berthelot

Nous venons de choisir la loi d'état de Berthelot pour son faible nombre de coefficient et sa simplicité, ainsi pour le domaine d'application. Il convient donc de s'assurer de la validité des résultats que donne cette loi, et aussi de vérifier les différences par rapport à la loi des gaz parfaits pour le gaz retenu pour cette validation qui est dans notre étude l'air. On compare, sur le Tableau 1.5, la masse

volumique de l'air calculée avec la loi des gaz parfaits et la loi de Berthelot, aux valeurs expérimentales d'une base de données [14], sur le Tableau 1.6. On remarque que pour ces températures et ces pressions, les gaz ne se comportent pas du tout comme des gaz parfait, et que la loi de Berthelot donne des valeurs plus correctes de la masse volumique, l'analyse de ces résultats sera bien détailler dans le quatrième chapitre. La loi de Berthelot est donc utilisable et justifiée

Tableau 1.5 : Valeurs numériques de la masse volumique  $\rho$  par le modèle de Berthelot pour différentes pressions

T(K)	P=1 (atm)			P=10 (atm)			P=100 (atm)		
	$\rho(g/m^3)$	$\rho(g/m^3)$	Erreur	$\rho(g/m^3)$	$\rho(g/m^3)$	Erreur	$\rho(g/m^3)$	$\rho(g/m^3)$	Erreur
	GP	Berthelot	%	GP	Berthelot	%	GP	Berthelot	%
298.15	1.18413	1.18262	0.127	11.84131	11.69331	1.250	118.41314	105.10024	11.243
500	0.70609	0.70554	0.078	7.06097	7.00792	0.751	70.60975	65.64144	7.036
1000	0.35304	0.35291	0.039	3.53048	3.51714	0.378	35.30487	34.01631	3.650
1500	0.23536	0.23530	0.025	2.35365	2.34772	0.252	23.53658	22.95672	2.464
2000	0.17652	0.17644	0.042	1.76524	1.76190	0.189	17.65243	17.32422	1.859
2500	0.14121	0.14114	0.049	1.41219	1.41004	0.152	14.12195	13.91110	1.493
3000	0.11768	0.11764	0.028	1.17682	1.17532	0.128	11.76829	11.62150	1.247

Tableau 1.6 : Valeurs expérimentales de la masse volumique  $\rho$  pour des différentes pressions et températures

La pression P (bar)	La température T (K)	masse volumique $\rho$ ( $g/m^3$ )
1	500	0.696
1	1000	0.348
10	200	17.835
10	300	11.643
10	500	6.944
10	1000	3.471
100	200	213.950
100	300	116.945
100	500	66.934
100	1000	33.613

### 1.13. Conclusion

Dans le but de développer les relations des rapports thermodynamiques et géométriques nécessaires, et d'étudier l'écoulement supersonique isentropique pour un gaz réel (cas de l'air) en utilisant l'équation de Berthelot qui introduit les effets de taille moléculaire et de la force intermoléculaire. Cette équation, plutôt que les autres équations d'états, est utilisée pour que des évaluations légèrement meilleures des effets de force intermoléculaire puissent être obtenues. Cette dernière sera utilisé pour développer un nouveau modèle mathématique pour déterminer les relations thermodynamiques et géométriques dans le chapitre suivant.

## CHAPITRE 2

### EFFET DE LA PRESSION GENERATRICE SUR LES PARAMETRES

### THERMODYNAMIQUES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE

#### 2.1. Introduction

Une large variété de problèmes dans l'écoulement compressible a été résolue sur l'hypothèse que l'air se comporte comme gaz parfait. Cette hypothèse est justifiée, fourni la pression et la température ambiante d'intérêt sont petites et proche de l'atmosphère. Cependant, quand l'air est soumis aux changements de l'état aux pressions et aux températures loin de conditions atmosphériques, il cesse de se conformer à la loi simple de gaz et présente d'autres propriétés non caractéristiques d'un gaz parfait. En conséquence, des procédés d'écoulement dans lequel l'air sous réserve de ces conditions extrêmes peut être prévu s'écarter du comportement de gaz parfait. il est connu que qu'un tel écoulement sera produit dans des souffleries hypersoniques et par le vol d'avions aux vitesses anémométriques supersoniques élevées, par conséquent, la nature et l'ampleur de ce départ deviennent des considérations importantes en aérodynamique.

Les théories et les expériences classiques ont prouvé que des trois propriétés de gaz réel, d'abord il peut montrer des caractéristiques à la différence de ceux d'un gaz parfait. Ces propriétés peuvent être classifiées en tant qu'imperfections thermiques et calorifiques. Les imperfections thermiques sous forme de forces intermoléculaires et de taille moléculaire sont sensiblement manifestes à de basses températures et de pressions. Les changements des capacités de chaleur deviennent une imperfection calorique importante relativement à températures élevées. Des circonstances dans lesquelles les effets de la dissociation moléculaire ou de l'excitation électronique deviennent importants (les températures sensiblement au-dessus de 3550 K [36].) peuvent être négligées pour le présent. Pour autant que des gaz en équilibre soient concernés, il est habituellement suffisant d'expliquer la force intermoléculaire et les effets de taille moléculaires avec des limites additionnelles dans l'équation d'état. De même,

des changements des capacités de chaleur des molécules peuvent être expliqués avec une fonction de la température dans les expressions des chaleurs spécifiques.

Dans ce chapitre, des équations d'écoulement sont obtenues à l'aide de l'équation d'état de Berthelot. Cette équation, plutôt que Van der Waals', est utilisée pour que des évaluations légèrement meilleures des effets de force intermoléculaire puissent être obtenues. On suppose que des imperfections caloriques peuvent être expliquées dans les expressions des chaleurs spécifiques [56].

## 2.2. Hypothèses de base

- L'air se comporte comme un gaz diatomique qui a :
  - une constante universelle du gaz  $R=8.3145 \text{ J / ( mol. K)}$ .
  - une température caractéristique de vibration  $\theta=3056 \text{ K}$ .
  - une masse molaire  $m=28.96 \text{ g/mol}$ .
- Les paramètres de stagnation (pression et température génératrices) obéissent à la loi des gaz réels, en exploitant l'équation de Berthelot qui introduit les effets de taille moléculaire (covolume) et de la force intermoléculaire.
- La combustion et l'écoulement des gaz dans les différentes stations sont adiabatiques, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte de chaleur due à l'environnement.
- Les conditions d'un état stable existent au cours des opérations thermiques. Ceci veut dire que les conditions ou procédés qui surviennent ne changent pas avec le temps (pour des conditions géométriques données) durant la combustion (régime stationnaire).
- L'expansion (la détente) de l'air a lieu de manière uniforme sans choc ni discontinuités.
- L'écoulement à travers la tuyère est unidimensionnel et isentropique.
- La vitesse, la pression, la température et la densité de l'écoulement est uniforme à travers n'importe quel coupe perpendiculaire à l'axe de la tuyère.

- La force de frottement dû à l'écoulement des produits d'échappement est négligeable mais la force d'attraction intermoléculaire de Berthelot existe.
- Les effets de transfert thermique par conduction, convection ou rayonnement ne sont pas considérés.
- Le fluide (air) est thermiquement et calorifiquement imparfait.

Toute hypothèse supplémentaire sera dictée -si c'est nécessaire- durant les prochaines analyses. Bien qu'il semble avoir eu beaucoup de suppositions simplificatrices, celles-ci sont toutes raisonnables et on peut s'attendre qu'elles reflètent le véritable comportement de notre domaine d'étude assez précisément.

### 2.3. Configuration des équations

Dans le but de développer les relations des rapports thermodynamiques et géométriques nécessaires, et d'étudier l'écoulement supersonique isentropique pour un gaz réel (cas de l'air) en utilisant l'équation de Berthelot qui introduit les effets de taille moléculaire et de la force intermoléculaire.

L'équation de Berthelot elle s'écrit [6], [37]:

$$\left(P + \frac{a}{T v^2}\right)(v - b) = RT \quad (2.1)$$

Ou bien :

$$P(T, v) = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{a}{T v^2} \quad (2.2)$$

Connaissons:  $v = \frac{1}{\rho}$

$$P(T, \rho) = \frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a \rho^2}{T} \quad (2.3)$$

Avec:  $a = 3 P_c V_c^2$  et  $b = \frac{V_c}{3}$

#### 2.3.1. L'équation de la conservation d'énergie

L'équation d'énergie pour un écoulement adiabatique est [50] :

$$dH + VdV = 0 \quad (2.4)$$

D'autre part [52]:

$$dH = C_p dT + (h + v) dP \quad (2.5)$$

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP \quad (2.6)$$

Avec :

$$\left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = h + V \quad (2.7)$$

$$h = -T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \quad (2.8)$$

Alors :

$$\left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = V - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \quad (2.9)$$

On a [28]:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_P = -1 \Rightarrow \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{-1}{\left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_P} \quad (2.10)$$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_T \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = - \frac{\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v}{\left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_T} \quad (2.12)$$

L'équation de Berthelot:  $P = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{T v^2}$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{(v-b)} - \frac{a}{T^2 v^2}, \quad \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_T = \frac{-RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{T v^2},$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = - \frac{-RT^2 v^3 (v-b) + a v (v-b)^2}{2 a T (v-b)^2 - RT^3 v^2} \quad (2.13)$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = v \cdot \left( \frac{3 a (v-b)^3 - RT^2 v^2 b}{2 a (v-b)^2 - RT^2 v^2} \right) \quad (2.14)$$

Posons:

$$C = \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T \Rightarrow C = v \cdot \left( \frac{3 a (v-b)^3 - RT^2 v^2 b}{2 a (v-b)^2 - RT^2 v^2} \right) \quad (2.15)$$

Connaissons:

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (2.16)$$

Remplaçons l'équation (2.16) dans l'équation (2.15) on obtient:

$$C = \left( \frac{3ab^2\rho^2 - 6ab\rho - RT^3b + 3a}{2ab^2\rho^3 - 4ab\rho^2 + 2a\rho - RT^2} \right) \quad (2.17)$$

### 2.3.2. Détermination la différentielle dP en fonction de dp

En thermodynamique on peut caractériser ou présenter chaque fonction d'état par deux variables d'état, alors :

La relation (2.6) s'écrit :  $dH = C_p dT + C dP$  (2.18)

Avec:  $C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p$ , et  $C = \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T$

$$P = \frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a\rho^2}{T}$$

La différentielle dP en fonction de dp lorsque la température T est constante donne [33]:

$$dP = d \left( \frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a\rho^2}{T} \right)_{T=cte} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho RT}{(1 - \rho b)} - \frac{a\rho^2}{T} \right)_{T=cte} d\rho$$

$$dP = \left( \frac{RT^3 - 2a\rho(1 - \rho b)^2}{T(1 - \rho b)^2} \right) d\rho \quad (2.19)$$

Remplaçons l'équation (2.19) dans l'équation (2.18), on obtient:

$$dH = C_p dT + \underbrace{\left( C \cdot \left( \frac{RT^3 - 2a\rho(1 - \rho b)^2}{T(1 - \rho b)^2} \right) \right)}_{C_T} d\rho$$

Alors:

$$C_T(T, \rho) = C \cdot \left( \frac{RT^3 - 2a\rho(1 - \rho b)^2}{T(1 - \rho b)^2} \right) = \left( \frac{3ab^2\rho^3 - 6ab\rho - RT^3b + 3a}{2T\rho b - T b^2\rho^2 - T} \right) \quad (2.20)$$

Donc:

$$dH = C_p(T, \rho) dT + C_T(T, \rho) d\rho \quad (2.21)$$

L'identification entre les relations (2.4) et (2.21) donne:

$$VdV = -dH = -C_p(T, \rho) dT - C_T(T, \rho) d\rho \quad (2.22)$$



### 2.3.3. Détermination la différentielle dp/ρ

L'équation de Bernoulli donne [71] :

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.23)$$

Par la multiplication et la division par dp, on trouve :

$$VdV + \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_{S=cte} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.24)$$

Connaissons que la célérité du son [18]. :

$$C_s^2 = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_{S=cte} \quad (2.25)$$

La relation (2.24) devient :

$$VdV + C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.26)$$

Remplaçons l'équation (2.22) dans l'équation (2.26), on obtient:

$$[-C_p(T, \rho) dT - C_T(T, \rho) d\rho] + C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.27)$$

Alors:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_p(T, \rho)}{C_s^2} dT + \frac{C_T(T, \rho)}{C_s^2} d\rho \quad (2.28)$$

### 2.3.4. Détermination les paramètres thermodynamique pour les gaz réels

L'écoulement isentropique d'un gaz caractérisé par l'équation de Berthelot peut être étudié à l'aide de la différentielle de l'équation d'expansion isentropique [57]:

$$du + dw = 0 \quad (2.29)$$

Sachant que:

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv + \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT \quad (2.30)$$

On a [4]:

$$v = \frac{1}{\rho} \Rightarrow dv = -\frac{1}{\rho^2} d\rho \quad (2.31)$$

Remplaçons l'équation (2.31) dans l'équation (2.30), on obtient:

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T d\left( \frac{1}{\rho} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT \quad (2.32)$$

$$dw = Pdv \quad (2.33)$$

Remplaçons les équations (2.32) et (2.33) dans l'équation (2.29), on obtient:

$$du + dw = \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T \cdot d\left( \frac{1}{\rho} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + p d\left( \frac{1}{\rho} \right) \quad (2.34)$$

Avec: 
$$\left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = C_v \quad (2.35)$$

L'effet de Joule-Thomson est donné par [31].:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho - \frac{\rho RT}{1-b\rho} + \frac{a\rho^2}{T} \quad (2.36)$$

La différentielle de la pression est calculée à partir de l'équation (2.3) :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho = \frac{R\rho}{1-\rho b} + \frac{a\rho^2}{T^2} \quad (2.37)$$

L'équation (2.36) devient: 
$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = \frac{2a\rho^2}{T} \quad (2.38)$$

Combinant les équations (2.35), (2.31) et (2.38) et substituant la valeur de p de l'équation de Berthelot dans l'équation (2.34), on trouve :

$$c_v dT - \frac{a}{T} d\rho - \frac{RT}{\rho(1-b\rho)} d\rho = 0 \quad (2.39)$$

Maintenant l'expression de la différentielle de  $c_v$  est donnée par :

$$\left( \frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_T = T \left( \frac{\partial p^2}{\partial T^2} \right)_\rho \quad (2.40)$$

La deuxième dérivée de la pression par rapport à la température à masse volumique constante est calculée en exploitant l'équation de Berthelot, donc :

$$\left(\frac{\partial p^2}{\partial T^2}\right)_\rho = -2\frac{a\rho^2}{T^3}, \text{ donc : } T\left(\frac{\partial p^2}{\partial T^2}\right)_\rho = -2\frac{a\rho^2}{T^3} \quad (2.41)$$

Alors l'équation (2.40) s'écrit :

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T = -2\frac{a\rho^2}{T^3} \quad (2.42)$$

L'intégration de l'équation (2.42) en utilisant la pression de l'équation d'état de Berthelot nous donne :

$$\int\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = \int -\frac{2a}{T^2 v^2} dv \quad (2.43)$$

Donc :

$$c_v = \int\left(-\frac{2a}{T^2 v^2}\right) dv \quad (2.44)$$

Avec  $v^2 = \frac{1}{\rho^2}$

$$c_v = c_v^0 + \frac{2a\rho^2}{T} \quad (2.45)$$

Où  $c_v^0$  est la fonction qui décrit la variation de  $c_v$  en fonction de la température, et le deuxième terme représente l'effet de l'imperfection du gaz sur  $c_v$ .

La fonction choisie pour  $c_v^0$  est déterminée sous la considération de la structure moléculaire et la gamme de température où l'effet sur  $c_v$  existe.

Pour un gaz diatomique la gamme de température est important à partir de la température de liquéfaction jusqu'à quelque milles de degré Kelvin, dans ce cas (gaz diatomique) le nombre de degré de liberté transrationnel et rotationnel est constant alors que  $c_v^0$  est varié en fonction de la température vibrationnelle. Pour ce fait la fonction de  $c_v^0$  peut-être s'écrit comme suite :

$$c_v^0 = c_{v,sp} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left( \frac{\theta}{T} \right) \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}}{\left( 1 - e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)} \right)} \right\} \quad (2.46)$$

Le deuxième terme dans les parenthèses, essentiellement le terme de Planck, explique la contribution vibratoire de la chaleur spécifique à volume constant.

La supposition est que les molécules du gaz se comportent comme les oscillateurs harmoniques linéaires pour autant que les degrés de liberté vibrationnels soient concernés.

#### 2.3.4.1. L'état générateur

L'état générateur est représenté par la chambre de combustion où la vitesse de l'écoulement est considérée comme étant nulle [61] et [69] ( $V_0 = 0 \Rightarrow M = 0$ ), et les propriétés de stagnation ( $T_0, \rho_0, P_0$ ) sont des paramètres générateurs. En d'autres mots,  $T_0$  est la température de combustion,  $P_0$  est la pression de la chambre et  $\rho_0$  est la densité de combustion sous les conditions de la chambre.

$T_0$  et  $P_0$  sont des paramètres liés à la conception de la chambre de combustion. la détermination de  $\rho_0$  sera obtenue par l'application de la méthode de dichotomie [15] sur l'équation de Berthelot.

#### 2.3.4.2. La forme intégrale de l'équation d'énergie pour l'équation de Berthelot

Une expression qui gouverne l'expansion isentropique d'un gaz réel diatomique peut s'obtenir maintenant par la substitution des équations (2.45) et (2.46) dans l'équation (2.39) et on intègre de l'état génératrice à un état statique donné on trouve:

$$c_v dT - \frac{a}{T} d\rho - \frac{RT}{\rho(1-b\rho)} d\rho = 0 \quad (2.47)$$

Devisant cette équation par "T" on obtient :

$$c_v \frac{dT}{T} - \frac{a}{T^2} d\rho - \frac{R}{\rho(1-b\rho)} d\rho = 0 \quad (2.48)$$

On intègre l'équation (2.48) de l'état génératrice à un état statique donné on trouve:

$$\int_{T_0}^T c_v \frac{dT}{T} - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{a}{T^2} d\rho - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{R}{\rho(1-b\rho)} d\rho = 0 \quad (2.49)$$

$$\int_{T_0}^T c_v \frac{dT}{T} = C_{V_{sp}} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln\left(\frac{e^{\frac{\theta}{T_0}} - 1}{e^{\frac{\theta}{T}} - 1}\right) + R \left( \frac{\theta}{T} \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{e^{\frac{\theta}{T}} - 1} - \frac{\theta}{T_0} \frac{e^{\frac{\theta}{T_0}}}{e^{\frac{\theta}{T_0}} - 1} \right) \quad (2.50)$$

Maintenant :

$$-\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{a}{T^2} d\rho = -a \left( \frac{\rho}{T^2} - \frac{\rho_0}{T_0^2} \right) \quad (2.51)$$

Et :

$$-\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{R}{\rho(1-b\rho)} d\rho = R \ln \frac{\rho_0(1-b\rho)}{\rho(1-b\rho_0)} \quad (2.52)$$

$$C_{V_i} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln \frac{\rho_0(1-b\rho)}{\rho(1-b\rho_0)} - a \left( \frac{\rho}{T^2} - \frac{\rho_0}{T_0^2} \right) + R \ln \left( \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T_0}\right)} - 1}{e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)} - 1} \right) + R \left( \frac{\theta}{T} \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}}{e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)} - 1} - \frac{\theta}{T_0} \frac{e^{\left(\frac{\theta}{T_0}\right)}}{e^{\left(\frac{\theta}{T_0}\right)} - 1} \right)^2 = 0 \quad (2.53)$$

La relation (2.53) représente la forme intégrale de l'équation d'énergie d'une détente isentropique caractérisé par l'équation de Berthelot on prend en considération le comportement vibratoire des molécules.

#### 2.4. Détermination du nombre de Mach

Dans le but de déterminer la fonction du nombre de Mach il est nécessaire de trouver la vitesse de l'écoulement ainsi la célérité du son. Ces deux quantités peuvent être trouvées en utilisant l'équation d'énergie pour un écoulement adiabatique [52] :

$$du + d(pv) + VdV = 0 \quad (2.54)$$

### 2.4.1. Calcul de la vitesse

Substituant les équations de Berthelot, (2.38), (2.45) et (2.46) dans l'équation (2.54) et on intègre de l'état génératrice à un état statique (température et la masse volumique donné on trouve [16], [50]:

$$VdV = -\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V dT - d\left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (2.55)$$

$$\int VdV = \int_{\rho_0, T_0}^{\rho, T} \frac{2a}{T} d\rho - \int_{\rho_0, T_0}^{\rho, T} c_v dT - \int_{\rho_0, T_0}^{\rho, T} d\left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (2.56)$$

Finalement la fonction de vitesse sera :

$$V^2(T, \rho) = 2 \left\{ c_{v,sp} (T_0 - T)^2 + R\theta \left[ \frac{1}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T}\right)}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 - e^{\left(\frac{\theta}{T_0}\right)}\right)^2} \right] + 4a \left( \frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) \right\} \quad (2.57)$$

Substituant l'équation (2.22) entre l'état génératrice (0) à un état statique quelconque (1) donné par  $(T_1, P_1, \rho_1$  et  $V_1)$ , on trouve:

$$\int_0^{V_1} VdV = - \int_{T_0}^{T_1} C_p(T, \rho) \Big|_{\rho=\rho_1} dT - \int_{\rho_0}^{\rho_1} C_T(T, \rho) \Big|_{T=T_1} d\rho \quad (2.58)$$

Donc :

$$V^2 = -2 \int_{T_0}^{T_1} C_p(T, \rho) \Big|_{\rho=\rho_1} dT - 2 \int_{\rho_0}^{\rho_1} C_T(T, \rho) \Big|_{T=T_1} d\rho \quad (2.59)$$

Alors, on peut calculer la vitesse par deux méthodes, la première méthode est une méthode explicite et simple présentée par l'équation (2.57), ou bien par la méthode intégrale présentée par l'équation (2.59), le test numérique montre que les deux méthodes donnent exactement les mêmes résultats.

### 2.4.2 Détermination de la célérité du son

La célérité du son correspondante est déterminée par la substitution des équations de Berthelot, (2.45), (2.46) et (2.47) dans l'équation générale suivante [13], [44] :

$$a^2 = d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \frac{dT}{d\rho} \quad (2.60)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{RT}{(1-b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{T} \quad (2.61)$$

D'après l'équation (2.48), on a :

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{1}{c_v} \left( \frac{a}{T} + \frac{RT}{\rho(1-b\rho)} \right) \quad (2.62)$$

L'expression résultante de la célérité du son est :

$$a^2(T, \rho) = \frac{RT^3}{(1-b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{T} + \frac{\rho^2 T^2 \left( \frac{a}{T^2} + \frac{R}{\rho(1-b\rho)} \right)^2}{c_{v_{gp}} \cdot \left[ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left\{ \left( \frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\left( \frac{\theta}{T} \right)}}{\left( 1 - e^{\left( \frac{\theta}{T} \right)} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \right\} \right]} \quad (2.63)$$

### 2.4.3. Le nombre de Mach

Combinant (2.57) et (2.63) on trouve l'équation du nombre du Mach suivante [5], [16]:

$$M(T, \rho) = 2 \left( \frac{\frac{1}{(\gamma_i - 1)} \left( \frac{T_0}{T} - 1 \right)^2 + \left( \frac{\theta}{T} \right) \left( \frac{1}{1 - e^{\left( \frac{\theta}{T} \right)}} - \frac{1}{1 - e^{\left( \frac{\theta}{T_0} \right)}} \right)^{0.5} + \frac{1}{RT} \left( 4a \left( \frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) \right)}{\frac{(\gamma_i - 1) \left( \frac{1}{1 - b\rho} + \frac{a\rho}{RT} \right)^2}{\left[ 1 + (\gamma_i - 1) \left( \frac{\theta}{T} \right) \frac{e^{\left( \frac{\theta}{T} \right)}}{\left( 1 - e^{\left( \frac{\theta}{T} \right)} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT} \right]} + \frac{1}{(1-b\rho)^2} - \frac{4a\rho}{RT}} \right) \quad (2.64)$$

Si on considère que  $\theta$ ,  $b$ , et  $\dot{a}$  sont nuls ; on obtient l'équation suivante :

$$M^2 = 2 \left( \left( \frac{T_0}{T} - 1 \right) \left( \frac{1}{\gamma_{gp} - 1} \right) \right) \quad (2.65)$$

Dans ce cas, le rapport des températures devient :

$$\frac{T}{T_0} = \left( 1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \quad (2.66)$$

Ces relations (2.65) et (2.66) sont les équations qui caractérisent exactement le nombre de mach (cas de détente), et le rapport des températures pour un gaz parfait [33], [61].

Donc l'équation (2.64) pour un gaz réel, représente la forme générale du nombre de Mach (calorifiquement et thermiquement imparfait).

### 2.5. La chaleur spécifique à volume constant $c_v(T, \rho)$

La chaleur spécifique à volume constant est obtenue en substituant les équations (2.46) dans l'équation (2.45), pour qu'on trouve la relation suivante :

$$c_v(T, \rho) = c_{v_{gp}} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left( \left( \frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\left( \frac{\theta}{T} \right)}}{\left( 1 - e^{\left( \frac{\theta}{T} \right)} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT^2} \right) \right\} \quad (2.67)$$

On remarque clairement que la chaleur spécifique à volume constant est indépendante de l'effet de covolume  $b$ , et que les paramètres qui l'influent sont seulement les forces d'attraction intermoléculaires et le comportement vibratoire.

Si c'est deux paramètres sont nulles il est aussi clair qu'en revenant à l'état d'un gaz thermiquement et calorifiquement parfait c'est-à-dire

$$c_v(T, \rho) = c_{v(gp)}$$

Si les forces d'attraction intermoléculaires sont nulles ( $\dot{a}=0$ ) ça va nous revenir au cas d'un gaz thermiquement parfait mais calorifiquement imparfait où la chaleur spécifique à volume constante ne dépend que de la température et le



paramètre de comportement vibratoire  $\theta$ [56] (ce qu'on appelle le modèle HT ou bien gaz parfait à haute température) :

$$c_v(T, \rho) = c_{v(gp)} \left\{ 1 + (\gamma_{(gp)} - 1) \left( \frac{\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left( 1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} \right\} \quad (2.68)$$

## 2.6. La chaleur spécifique à pression constante $c_p(T, \rho)$

La chaleur spécifique à pression constante est par définition donnée par la relation suivante [6]:

$$c_p(T, \rho) = c_v(T, \rho) - \frac{\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho}{\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T} \quad (2.69)$$

On rappelle l'équation de Berthelot en termes de volume :  $p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{Tv^2}$

D'où :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{Tv^3} = -\frac{RT\rho^2}{(1-b\rho)^2} + \frac{2a\rho^3}{T} \quad (2.70)$$

L'expression résultante de  $c_p(T, \rho)$  sera donc obtenue en substituant les équations (2.68),(2.70) et(2.37) dans l'équation(2.69)

$$c_p(T, \rho) = c_{p(gp)} \left[ 1 + \frac{\gamma_{(gp)} - 1}{\gamma_{(gp)}} \left\{ \left( \frac{\theta}{T^2} \right) \frac{\theta}{\left( 1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{4a\rho}{RT} \left[ 1 + \frac{\left( \frac{2+b\rho}{1-b\rho} + \frac{a\rho}{2RT} \right)}{\frac{1}{(1-b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{RT}} \right] \right\} \right] \quad (2.71)$$

Si on considère que  $\theta$ ,  $b$ , et  $a$  sont nuls ; en revenant à l'état d'un gaz thermiquement et caloriquement parfait :

$$c_p(T, \rho) = c_{p(gp)}$$

Si on néglige l'effet de l'imperfection des gaz réel ( $b$  et  $a$  nuls) on obtient une relation qui représente le cas d'un gaz thermiquement parfait mais caloriquement imparfait:

$$c_p(T, \rho) = c_{p(gp)} \left( 1 + \frac{\gamma_{(gp)} - 1}{\gamma_{(gp)}} \left( \left( \frac{\theta}{T} \right) \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left( 1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} \right) \right) \quad (2.72)$$

Où la chaleur spécifique à pression constante ne dépend que de la température et le paramètre de comportement vibratoire  $\theta$ [56] (modèle gaz parfait à haute température).

### 2.7. Rapport des chaleurs spécifiques $\gamma$

Notre domaine d'étude est limité dans le régime supersonique pour un nombre de Mach  $M \in [1.0, 6.0]$ . Le rapport des chaleurs spécifiques donne la relation suivante:

$$\gamma(T, \rho) = \frac{c_p(T, \rho)}{c_v(T, \rho)} \quad (2.73)$$

Ce rapport des chaleurs spécifique est obtenu en divisant l'équation (2.71) par l'équation (2.67) :

$$\gamma(T, \rho) = \gamma_{(gp)} \frac{\left[ 1 + \frac{\gamma_{(gp)} - 1}{\gamma_{(gp)}} \left\{ \left( \frac{\theta^2}{T} \right) \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left( 1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)} + \frac{4a\rho}{RT} \left[ 1 + \frac{\left( \frac{2+b\rho}{1-b\rho} + \frac{a\rho}{2RT} \right)}{\frac{1}{(1-b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{RT}} \right] \right\} \right]}{1 + (\gamma_{(gp)} - 1) \left( \frac{\theta^2}{T} \right) \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left( 1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2a\rho}{RT}} \quad (2.74)$$

Cas de l'air :  $\gamma_i = 1.402$ ,  $R = 287.0 \text{ [J/Kg K]}$ ,  $C_{V_i} = \frac{R}{\gamma_i - 1}$

$a = 117.2666 \text{ [Pas. m}^6\text{]} b = 1.07334 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]} , \theta = 3056 \text{ K}$

### 2.8. Calcul numérique des rapports thermodynamiques

Pour calculer les rapports il faut d'abord trouver les paramètres thermodynamiques d'état dans une section donnée  $(T, P, \rho)$ , et les diviser par les

paramètres générateurs  $(T_0, \rho_0, P_0)$  respectivement. La détermination des paramètres  $(T, P, \rho)$  sera possible en résolvant numériquement le système d'équation algébrique non linéaire [34] formé par les équations (2.3), (2.53) et (2.64) :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{V_i} \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + R \ln \frac{\rho_0 (1 - b\rho)}{\rho (1 - b\rho_0)} - 4\dot{a} \left( \frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) + R \ln \left( \frac{e^{\frac{\theta}{T_0}} - 1}{e^{\frac{\theta}{T}} - 1} \right) + R \left( \frac{\theta}{T} \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{e^{\frac{\theta}{T}} - 1} + \frac{\theta}{T_0} \frac{e^{\frac{\theta}{T_0}}}{e^{\frac{\theta}{T_0}} - 1} \right) = 0 \\ \\ M^2 = 2 \frac{\frac{1}{(\gamma_{sp} - 1)} \left( \frac{T_0}{T} - 1 \right)^2 + \left( \frac{\theta^2}{T} \right) \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{\theta}{T}}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{\theta}{T_0}}} \right) + \frac{1}{RT} \left( 4\dot{a} \left( \frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) \right)}{\frac{(\gamma_{sp} - 1) \left( \frac{1}{1 - b\rho} + \frac{\dot{a}\rho}{RT} \right)^2}{\left( 1 + (\gamma_{sp} - 1) \left( \frac{\theta^2}{T} \right) \frac{e^{\frac{\theta}{T}}}{\left( 1 - e^{\frac{\theta}{T}} \right)^2} + \frac{2\dot{a}\rho}{RT} \right)}} + \frac{1}{(1 - b\rho)^2} + \frac{4\dot{a}\rho}{RT} \\ \\ p = \frac{\rho RT}{(1 - b\rho)} - \frac{\dot{a}\rho^2}{T} \end{array} \right. \quad (2.75)$$

Ces trois équations composent un système d'équation fortement non linéaire où la solution analytique est impossible à trouver. Les phénomènes non linéaires sont extrêmement courants en pratique. Ils sont sans doute plus fréquents que les phénomènes linéaires. Dans ce cas, nous examinons les systèmes non linéaires et nous montrons comment les résoudre à l'aide d'une suite de problèmes linéaires, auxquels on peut appliquer diverses techniques [40].

Le problème consiste à trouver le vecteur  $[T, \rho, P]$  vérifiant les 3 équations non linéaires suivantes:

$$\begin{cases} f_E(T, \rho, P) = 0 \\ f_M(T, \rho, P) = 0 \\ f_B(T, \rho, P) = 0 \end{cases} \quad (2.76)$$

Où  $f_E$ ,  $f_M$  et  $f_B$  sont des fonctions de trois variables que nous supposons différentiables et réfèrent respectivement aux équations (2.3) et (2.53), (2.64).

Contrairement aux systèmes linéaires, il n'y a pas de condition simple associée aux systèmes non linéaires qui permette d'assurer l'existence et l'unicité de la solution. Le plus souvent, il existe plusieurs solutions possibles et seul le contexte indique laquelle est la bonne [15].

Les méthodes de résolution des systèmes non linéaires sont nombreuses. Notamment, nous ne présentons que la méthode la plus importante et la plus utilisée en pratique, soit la méthode de Newton [40] et [34].

### 2.8.1. La méthode de Newton

L'application de cette méthode à un système de deux équations non linéaires est suffisante pour illustrer le cas général [34].

Considérons donc le système:

$$\begin{cases} f_E(T, \rho) = 0 \\ f_M(T, \rho) = 0 \end{cases}$$

Soit  $[T_i, \rho_i]$ , une approximation initiale de la solution de ce système.

Cette approximation initiale, est cruciale et doit toujours être choisie avec soin. Le but de ce qui suit est de déterminer les pas  $[dT, d\rho]$  à  $[T_i, \rho_i]$  de telle

sorte que:

$$\begin{cases} f_E(T_i + dT, \rho_i + d\rho) = 0 \\ f_M(T_i + dT, \rho_i + d\rho) = 0 \end{cases} \quad (2.77)$$

Pour déterminer  $[dT, d\rho]$  il suffit maintenant de faire un développement de Taylor en deux variables pour chacune des deux fonctions [40]:

$$\begin{cases} 0 = f_E(T_i, \rho_i) + \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho + \dots \\ 0 = f_M(T_i, \rho_i) + \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho + \dots \end{cases} \quad (2.78)$$

Dans les relations précédentes, les pointillés désignent des termes d'ordre supérieur ou égal à deux et faisant intervenir les dérivées partielles d'ordre correspondant. Pour déterminer  $[dT, d\rho]$  il suffit de négliger les termes d'ordre supérieur et d'écrire:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho = -f_E(T_i, \rho_i) \\ \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \rho_i)dT + \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i, \rho_i)d\rho = -f_M(T_i, \rho_i) \end{cases} \quad (2.79)$$

Où encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \rho_i) & \frac{\partial f_E}{\partial \rho}(T_i, \rho_i) \\ \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \rho_i) & \frac{\partial f_M}{\partial \rho}(T_i, \rho_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dT \\ d\rho \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_E(T_i, \rho_i) \\ f_M(T_i, \rho_i) \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

Ce système linéaire s'écrit, également sous une forme plus compacte [15]:

$$J(T_i, \rho_i)\Delta\vec{k} = -\vec{R}(T_i, \rho_i) \quad (2.81)$$

Où  $J(T_i, \rho_i)$  désigne la matrice des dérivées partielles ou matrice jacobienne évaluée au point  $(T_i, \rho_i)$ , où  $\Delta\vec{k}$  est le vecteur des corrections relatives à chaque variable ( $\Delta\vec{k} = [\Delta T, \Delta\rho]$ ) et où  $-\vec{R}(T_i, \rho_i)$  est le vecteur résidu évalué en  $(T_i, \rho_i)$ . Le déterminant de la matrice jacobienne est appelé le jacobien.

Le jacobien doit bien entendu être différent de 0 pour que la matrice jacobienne soit inversible. On pose ensuite:

$$\begin{cases} T_{i+1} = T_i + \Delta T \\ \rho_{i+1} = \rho_i + \Delta\rho \end{cases} \quad (2.82)$$

Qui est la nouvelle approximation de la solution du système non linéaire. On cherchera par la suite à corriger  $(T_{i+1}, \rho_{i+1})$  d'une nouvelle quantité  $\Delta \vec{k}$ , et ce jusqu'à la convergence. Pour en arriver à l'algorithme général suivant :

### 2.8.2. Algorithme de la méthode de Newton appliquée aux systèmes

1. Étant donné  $\varepsilon$ , un critère d'arrêt.
2. Étant donné N, le nombre maximal d'itérations.
3. Étant donné  $\vec{k} = [T_i, \rho_i]$  une approximation initiale de la solution du système

4. Résoudre le système linéaire:  $J(T_i, \rho_i) \Delta \vec{k} = -\vec{R}[T_i, \rho_i]$  et poser:

$$\begin{cases} T_{i+1} = T_i + \Delta T \\ \rho_{i+1} = \rho_i + \Delta \rho \end{cases}$$

5. Si  $\|T_i - T_{i+1}\| + \|\rho_i - \rho_{i+1}\| < \varepsilon$  et  $\|\vec{R}[T_i, \rho_i]\| \leq \varepsilon$

- convergence atteinte
- écrire la solution
- arrêt

6.  $i$  reçois  $i+1$  et retour à l'étape 4

7. Si le nombre maximal d'itérations N est atteint:

- convergence non atteinte en N itérations.
- arrêt.

### 2.8.3. Le choix de la solution initial

La convergence de la méthode de Newton dépend directement de l'approximation initial  $(T_i, \rho_i)$  de la solution, un mauvais choix de  $(T_i, \rho_i)$  causera une divergence, pour cela on va initialiser la solution en utilisant les paramètres thermodynamiques d'un gaz parfait par la suite on verra si ce choix est justifié.

Notre étude est focalisé sur la détente isentropique unidimensionnelle, l'écoulement dans ce cas est considéré comme supersonique ( $1 < M < 6$ ). On va varier le nombre de mach définie dans l'équation  $f_M$  dans ce domaine est pour

chaque valeur de M on calcule les paramètres initiaux (celles du gaz parfait) on appliquant les lois suivantes [61] et [70]:

$$\frac{T_i}{T_0} = \left[ 1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M_i^2 \right]^{-1}, \frac{\rho_i}{\rho_0} = \left[ 1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M_i^2 \right]^{\frac{-1}{\gamma_{gp} - 1}}, \frac{P_i}{P_0} = \left[ 1 + \frac{\gamma_{gp} - 1}{2} M_i^2 \right]^{\frac{-\gamma_{gp}}{\gamma_{gp} - 1}} \quad (2.83)$$

## 2.9. Détermination des paramètres critiques

Les paramètres critiques  $[T_*, \rho_*, P_*]$  représentent les propriétés thermodynamiques au niveau du col ( $M=1$ ). Pour les déterminer il suffit de résoudre le système (2.75) par la méthode de Newton prenant en compte le nombre du mach critique ( $M=1$ ).

## 2.10. Détermination de rapport des sections d'un écoulement

D'après l'équation de conservation de la masse on a [44]:

$$\rho V A = cte \quad (2.84)$$

$$\log(\rho V A) = \log(cte)$$

La différentielle de la relation (2.84) donne [18]:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (2.85)$$

Dans ce cas :

$$\frac{dA}{A} = - \left( \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} \right) \quad (2.86)$$

D'après la relation (2.26), on peut écrire :

$$V dV - C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.87)$$

$$\frac{dV}{V} = - \frac{1}{M^2} \frac{d\rho}{\rho} \quad (2.88)$$

Remplaçons l'équation (2.88) dans l'équation (2.86) on obtient:

$$\frac{dA}{A} = \left( \frac{1 - M^2}{M^2} \right) \frac{d\rho}{\rho} \quad (2.89)$$

Remplaçons l'équation (2.28) dans l'équation (2.89) on obtient:

$$\frac{dA}{A} = \left( \frac{1-M^2}{M^2} \right) \left[ \frac{C_p(T, \rho)}{a^2} dT + \frac{C_T(T, \rho)}{a^2} d\rho \right] \quad (2.90)$$

Finalemment :

$$\frac{dA}{A} = \left[ \left( \frac{1-M^2(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho) \right) dT + \left( \frac{1-M^2(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \right) d\rho \right] \quad (2.91)$$

Substituant la relation (2.91) entre l'état critique(\*) donné par (T\*, P\*, ρ\*, M\*=1, A\*), et l'état (1) supersonique donné par (T, P, ρ, M, A), on trouve :

$$\int_{A^*}^A \frac{dA}{A} = \int_{T^*}^T \left( \frac{1-M^2(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho) \right) dT + \int_{\rho^*}^{\rho} \left( \frac{1-M^2(T, \rho)}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \right) d\rho \quad (2.92)$$

Alors:

$$\frac{A}{A^*} = \text{Exp} \left( \int_{T^*}^T FA_T(T, \rho) dT + \int_{\rho^*}^{\rho} FA_\rho(T, \rho) d\rho \right) \quad (2.93)$$

## 2.11. Détermination de l'expression du débit massique critique

Le débit massique traversant une section A est donné par [13], [44]:

$$\dot{m} = \int_A \rho V \cos \alpha dA \quad (2.94)$$

$\alpha$  : Est l'angle que fait le vecteur de vitesse avec la normale à la section A.

Si nous divisons la relation (2.40) par la quantité  $A_* \rho_0 a_0$ , pour rendre le calcul non dimensionnel, nous aurons :

$$\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0} = \int_A \frac{\rho}{\rho_0} \frac{a}{a_0} M \cos \alpha \frac{dA}{A_*} \quad (2.95)$$



Sachant que le débit critique est constant, on peut le calculer au niveau du col de la tuyère. A cette section on  $\rho=\rho^*$ ,  $A=A^*$ ,  $a=a^*$ ,  $M=1$  et  $\alpha=0$  (écoulement horizontal). Donc, notre relation se réduit à une relation plus simple:

$$\frac{\dot{m}}{A_*\rho_0 a_0} = \frac{\rho_*}{\rho_0} \times \frac{a_*}{a_0} \quad (2.96)$$

Finalement :

$$\frac{\dot{m}}{A_*\rho_0 a_0} = \frac{\left( \frac{RT_*\rho_*}{(1-b\rho_*)} - \frac{2\dot{a}\rho_*^2}{T_0} + \frac{\rho_*^3 T_*^3 \left( \frac{\dot{a}}{T_*} + \frac{R}{(1-b\rho_*)} \right)}{c_{v_{gp}} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left( \frac{\theta}{T_*} \right) \frac{e^{\frac{\theta}{T_*}}}{\left( 1 - e^{\frac{\theta}{T_*}} \right)^2} + \frac{2\dot{a}\rho_*}{RT_*} \right\}} \right)}{\left( \frac{RT_0\rho_0}{(1-b\rho_0)^2} - \frac{2\dot{a}\rho_0^2}{T_0} + \frac{\rho_0^3 T_0^2 \left( \frac{\dot{a}}{T_0^2} + \frac{R}{(1-b\rho_0)} \right)}{c_{v_{gp}} \left\{ 1 + (\gamma_{gp} - 1) \left( \frac{\theta}{T_0} \right) \frac{e^{\frac{\theta}{T_0}}}{\left( 1 - e^{\frac{\theta}{T_0}} \right)^2} + \frac{2\dot{a}\rho_0}{RT_0^2} \right\}} \right)} \quad (2.97)$$

Pour avoir un écoulement supersonique à travers le divergent, le débit à travers la tuyère doit satisfaire la condition (2.97), sinon on aura un écoulement subsonique à travers ce divergent et notre étude ne s'intéresse à ce cas.

## 2.12. La Poussée

La poussée est le paramètre fondamental des performances qui caractérise un engin aérospatial.

Sans aucun doute, ce paramètre est le plus important pour n'importe quel designer de machine. La poussée, étant la force qu'exerce un moteur, est ce qui propulse un appareil.

La poussée est créée par l'expulsion de masse (échappement) traversant la tuyère à haute vitesse. L'expression pour la poussée est donnée par [36] :

$$F = \int P dA = \dot{m} \times V_s + (P_s - P_a) A_s \quad (2.98)$$

$A_s$  : la section de sortie des gaz

$P_s$  : la pression à la sortie de la tuyère

$P_a$  : la pression extérieure (pression atmosphérique)

Où le terme à droit de l'équation (2.98) représente l'addition des forces de pression (résultante) agissant sur la chambre et la tuyère, projetées sur une normale à l'axe de symétrie de la tuyère, comme le montre la figure 2.1.

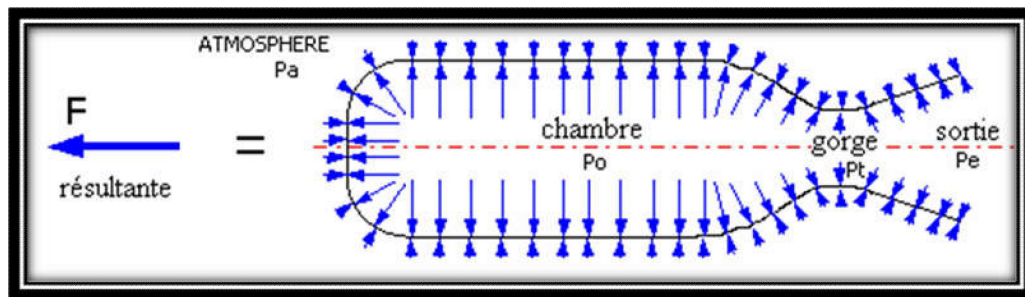


Figure 2.1 : Représentation de la force résultante de la poussée

La pression interne est à son maximum à l'intérieur de la chambre et diminue graduellement dans la tuyère à la sortie. La pression externe (atmosphérique) est uniforme sur les surfaces extérieures.

Dans le premier terme du côté droit de l'équation (2.98),  $\dot{m}$  est le débit de masse des produits d'échappement et  $V_s$  est la vitesse d'échappement. Le deuxième terme du côté droit est la pression de poussée, qui est égale à zéro pour une tuyère avec un rapport d'expansion optimal ( $P_s = P_a$ ) ;  $A_s$  est l'aire de la sortie de la tuyère [3] et [55].

En considérant la continuité (conservation de masse) au col de la tuyère et que ( $P_s = P_a$ ), l'équation précédente (2.98) peut être réécrite comme suite :

$$F = \rho_* A_* V_* \times V \quad (2.99)$$

Donc l'expression de la poussée sera :

$$F = \rho_* A_* a_* M \times a \quad (2.100)$$

### 2.12.1. Le coefficient de poussée

Le degré auquel la poussée est amplifiée par la tuyère est quantifié par le coefficient de poussée  $C_f$ , et est définie en termes de la pression de la chambre et de l'aire du col [21].

D'après l'équation (2.96) débit massique, au col on a [20] :

$$\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0} = \left( \frac{\rho_*}{\rho_0} \right) \left( \frac{a_*}{a_0} \right) \quad (2.101)$$

Remplaçons l'équation (2.101) dans l'équation de poussée (2.100) on obtient:

$$F = A_* \rho_0 a_0 \left( \frac{\rho_*}{\rho_0} \right) \left( \frac{a_*}{a_0} \right) M_s a_s \quad (2.102)$$

Le coefficient de poussée est donné par la relation [22]:

$$C_f = \frac{F}{A_* P_0} \quad (2.103)$$

Remplaçons l'équation (2.102) dans l'équation (2.103) on obtient:

$$C_f = \frac{F}{P_0 A_*} = \frac{A_* \rho_0 a_0 \left( \frac{\rho_*}{\rho_0} \right) \left( \frac{a_*}{a_0} \right) M_s a_s}{P_0 A_*} = M_s \left( \frac{\rho_*}{\rho_0} \right) \left( \frac{a_*}{a_0} \right) \frac{\rho_0}{P_0} a_0$$

Finalement :

$$C_f = M_s(T, \rho) \cdot \left( \frac{\rho_*}{\rho_0} \right) \cdot \frac{\rho_0}{P_0} a_*(T_*, \rho_*) \quad (2.104)$$

### 2.13 Erreur entre le modèle du gaz réel et les modèles GP et HT

Pour faire une comparaison entre ce modèle et les modèles du gaz parfait ou haute température, on rappelle les relations thermodynamiques d'un gaz parfait ou bien les relations thermodynamiques correspond le modèle haute température, le tableau 2.1 illustre ces relations.

Tableau 2.1 : Les équations thermodynamiques des modèles GP et HT.

Rapports	Gaz thermiquement et calorifiquement Parfait <b>GP</b> $\gamma = 1.402$ [72] M : variable Principale	Gaz thermiquement parfait et calorifiquement Imparfait <b>HT</b> $\gamma =$ variable [60-67] T : variable Principale
Température $\frac{T}{T_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{-1}$	Résolution de l'équation / T : $M^2(T) \cdot a^2(T) - 2H(T) = 0$
Masse Volumique $\frac{\rho}{\rho_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}$	$e^{\int_{T_0}^T \left\{ \frac{C_p(T)}{\gamma(T) \cdot r \cdot T} \right\} dT}$
Pression $\frac{P}{P_0}$	$\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$	$\frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{T}{T_0}$
Section $\frac{A}{A_*}$	$\frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma-1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$	$e^{\int_T^{T_*} \left\{ \frac{C_p(T)}{\gamma(T) \cdot r \cdot T - 2H(T)} \right\} dT}$
Débit $\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0}$	$\left[ \frac{\gamma+1}{2} \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$	$\left( \frac{\rho^*}{\rho_0} \right) \cdot \left( \frac{a^*}{a_0} \right)$
Vitesse du son a	$\sqrt{\gamma \cdot r \cdot T}$	$\sqrt{\gamma(T) \cdot r \cdot T}$
Enthalpie H	$C_p(T - T_0)$	$\int_T^{T_0} C_p(T) dT$
Nombre de Mach M	Variable principale	$\frac{\sqrt{2 \cdot H(T)}}{a(T)}$
Rapport $\frac{V}{a_0}$	$M \sqrt{\frac{T}{T_0}}$	$\sqrt{\frac{2 \cdot H(T)}{\gamma(T_0) \cdot r \cdot T_0}}$

Cas des gaz parfaits GP [71]

$$\gamma = 1.402$$

$$C_p = 1001.28932 \text{ J/(Kg K)}$$

Cas des gaz à haute température HT [30, 51, 60]

$$C_p(T) = a_1 + T(a_2 + T(a_3 + T(a_4 + T(a_5 + T(a_6 + T(a_7 + T(a_8 + T(a_9 + T(a_{10})))))))))) \quad (2.105)$$

Les coefficients  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, 10$ ) sont présentées dans le tableau suivant:

Tableau 2.2 : Les coefficients polynômiaux du  $C_p$

$i$	$a_i$	$i$	$a_i$
1	1001.1058	6	$3.067736 \cdot 10^{-12}$
2	$4.0661289 \cdot 10^{-2}$	7	$-1.3509355 \cdot 10^{-15}$
3	$-6.3376997 \cdot 10^{-4}$	8	$3.472262 \cdot 10^{-19}$
4	$2.7474759 \cdot 10^{-6}$	9	$-4.8467531 \cdot 10^{-23}$
5	$-4.0338459 \cdot 10^{-9}$	10	$2.8411878 \cdot 10^{-27}$

$$\gamma(T) = \frac{C_p(T)}{C_p(T) - r} \quad (2.106)$$

### 2.13.1. Erreur du modèle gaz parfait

Le modèle mathématique d'un gaz parfait est développé sur la base de CP la chaleur spécifique et le rapport  $\gamma$  constantes, ce qui donne des résultats acceptables pour des faibles températures et pressions. Selon cette étude, nous pouvons remarquer une différence sur les résultats donnés entre le modèle du gaz parfait et notre modèle. L'erreur donnée par le modèle PG par rapport à notre modèle RG (gaz réel) peut être calculé pour chaque paramètre. Donc, pour chaque valeur ( $P_0, T_0, M$ ), l'erreur de  $\varepsilon$  peut être évaluée par la relation suivante [68]:

$$\varepsilon_{Parameter}(\%) = \left| 1 - \frac{Parameter_{PG}(P_0, T_0, M)}{Parameter_{RG}(P_0, T_0, M)} \right| \times 100 \quad (2.107)$$

pour l'application aérodynamique, l'erreur doit être inférieure à 5%.

### 2.13.2. Erreur du modèle haute température

Les résultats obtenus par le modèle a haute température HT, sont valables à sous l'hypothèse de l'imperfection calorique du gaz, c.-à-d., les chaleurs spécifiques  $C_p$  et  $C_v$  varient avec la température, et qui donne une erreur considérable à haute pression, par contre, notre modèle RG basé sur les hypothèses de un gaz thermiquement et caloriquement imparfait, donc, des

nouvelles expressions d'un gaz réel sont développées, variées avec la température et la masse volumique, corrigent le modèle HT, surtout à haute pression et donne une erreur considérable à haute pression. Alors, pour chaque valeur ( $P_0$ ,  $T_0$ ,  $M$ ), l'erreur de  $\varepsilon$  peut être évaluée par la relation suivante [68]:

$$\varepsilon_{Parameter}(\%) = \left| 1 - \frac{Parameter_{HT}(P_0, T_0, M)}{Parameter_{RG}(P_0, T_0, M)} \right| \times 100 \quad (2.108)$$

#### 2.14. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté d'une manière détaillée les relations thermodynamiques et géométriques lorsque l'on tient compte de la pression génératrice, nous présentons aussi la technique numérique de Newton pour résoudre un système d'équation non linéaire formé par trois équations. Ces paramètres thermodynamiques et géométriques sera employées pour élaborer et développer une nouvelle forme de la fonction de Prandtl Meyer.

## CHAPITRE 3

### EFFET DE LA PRESSION GENERATRICE SUR LA FONCTION DE PRANDTL MEYER

#### 3.1. Introduction

La fonction de Prandtl Meyer joue un rôle très important dans le calcul des écoulements supersoniques. Si on veut concevoir une tuyère supersonique donnant un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie, il est nécessaire de connaître l'angle de détente initiale au col qu'il faut donner pour avoir le nombre de Mach de sortie voulu [7], [8], [16]. La conception de ce type de tuyère est basée sur l'application de la méthode des caractéristiques [5], [19], [58]. Cette dernière est formulée sur la base de la fonction de Prandtl Meyer. Une deuxième application c'est de calculer l'écoulement supersonique autour d'un dièdre dans un milieu ambiant chaud, notamment le calcul de l'écoulement autour d'un profil d'aile pointu [68] ou d'un cône de révolution [4].

Les théories et les expériences classiques ont prouvé que les propriétés d'un gaz réel, d'abord il pour montrer des caractéristiques à la différence de ceux d'un gaz parfait. Ces propriétés peuvent être classifiées en tant qu'imperfections thermiques et caloriques [1, 12]. Les imperfections thermiques sous forme de forces intermoléculaires et de taille moléculaire sont sensiblement manifestes à de basses températures et à pressions. Les changements des capacités de chaleur deviennent une imperfection calorique importante relativement à températures élevées [36].

Dans ce chapitre on va étudier l'effet de la pression génératrice sur la fonction de Prandtl Meyer, Le travail consiste essentiellement à développer des nouvelles relations et des expressions concernant l'écoulement supersonique et une nouvelle forme de la fonction de Prandtl Meyer en utilisant les hypothèses d'équation d'état des Berthelot qui explique des effets de taille moléculaire et de force intermoléculaire, et que des changements des capacités de chaleur [56]. Des expressions sont développées pour analyser des écoulements supersoniques

pour un gaz calorifiquement et thermiquement imparfait. Et pour développer une nouvelle forme de la fonction de Prandtl Meyer basée sur ces hypothèses.

Les résultats obtenus d'un écoulement supersoniques des gaz parfait [5], [36, [44] sont valables sous la base de hypothèse d'un gaz calorifiquement et thermiquement parfait c'est à dire, les chaleurs spécifiques  $CP$  et  $CV$  sont constantes et ne dépendent pas de la température, basé sur l'utilisation de l'équation d'état d'un gaz parfait, et les résultats obtenus par le modèle haute température sont valables sous la base de hypothèse d'un gaz calorifiquement imparfait, c'est à dire, les chaleurs spécifiques  $CP$  et  $CV$  sont variables avec la température, mais notre modèle basé sur l'hypothèses d'un gaz calorifiquement et thermiquement imparfait, c'est-à-dire, des nouvelles expressions sont développées, variées avec la température et la masse volumique, et basées sur l'hypothèse d'un gaz réel.

Les résultats obtenus par le modèle a haute température HT [65], [66], [67], sont valables à sous l'hypothèse de l'imperfection calorique du gaz, c.-à-d., les chaleurs spécifiques  $C_P$  et  $C_V$  varient avec la température, et qui donne une erreur considérable à haute pression, par contre, notre modèle RG basé sur les hypothèses de un gaz thermiquement et calorifiquement imparfait, donc, des nouvelles expressions d'un gaz réel sont développées, variée avec la température et la masse volumique, corrigent le modèle HT, surtout à haute pression.

L'application est pour l'air dans le domaine supersonique, inférieure au seuil de dissociation des molécules, qui sera applicable si le nombre de Mach reste inférieur à 6.00 environ.

### 3.2. Détente de Prandtl-Meyer

La détente de Prandtl-Meyer est un écoulement supersonique d'un fluide (l'air pour notre cas) sur une plaque plane terminée par une rampe déviée vers le bas comme l'indique la figure 3.1 [44].

La déviation de cet écoulement génère des ondes de détentes (lignes de Mach) qui ont pour effet l'augmentation du nombre de Mach et la diminution des caractéristiques du fluide (masse volumique, pression et température).



Dans le cas où la déviation de la rampe est vers le haut les ondes générées sont des ondes de compression et les effets obtenus sont contraires à ceux mentionnés précédemment [44]. L'importance de ces écoulements apparait dans l'étude aérodynamique autour des profils.

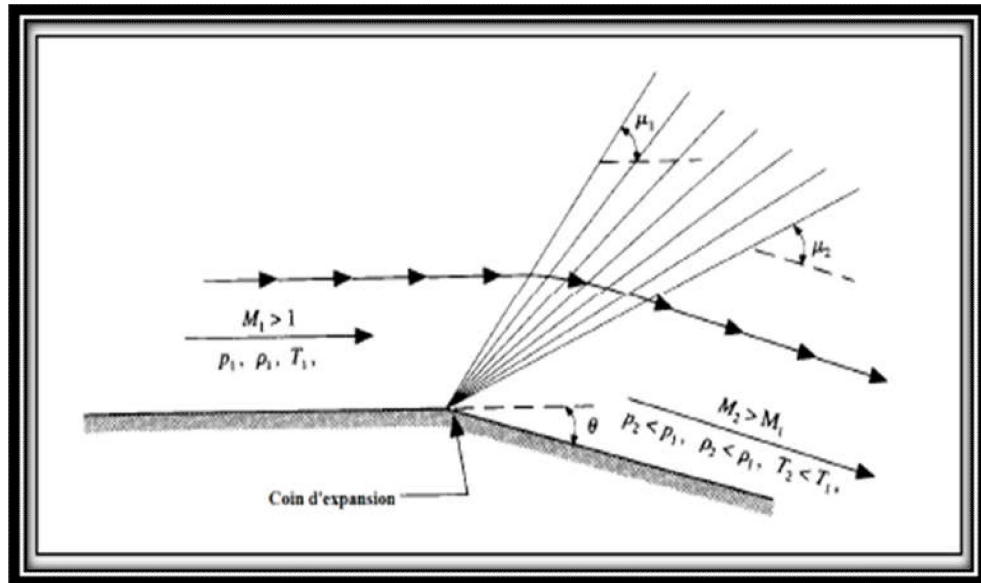


Figure3.1: Schéma de la détente de Prandtl-Meyer

### 3.3. Le modèle GP (caloriquement et thermiquement parfait)

Les résultats obtenus d'un écoulement supersoniques d'un gaz parfait présentés dans les références [44] et [70] sont valables sous la base de l'hypothèse d'un gaz caloriquement et thermiquement parfait, c'est à dire, les chaleurs spécifiques  $C_p$  et  $C_v$  sont constantes et ne dépendent pas de la température, qui n'est pas valable dans le cas réel lorsque la température et la pression croient.

Pour faire une comparaison entre les cas GRet GP, on rappelle la fonction de Prandtl Meyer donnée par la théorie d'un gaz parfait [5] et [17]:

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctg \left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} (M^2 - 1) \right]^{\frac{1}{2}} - \arctg (M^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

La fonction de Prandtl-Meyer (3.1) est reliée explicitement avec le nombre Mach, qui est la variable principale pour le gaz parfait, au contraire pour le modèle

HT, où la variable principale est la température  $T$  et notre modèle GR, où on a deux variables principales qui sont la température  $T$  et la masse volumique  $\rho$ .

### 3.4. Le modèle HT (calorifiquement imparfait et thermiquement parfait)

Le modèle des gaz parfait à haute température (dite HT) est concentré sur une hypothèse qui dite que lorsque la température génératrice  $T_0$  de la chambre de combustion, d'un gaz parfait augmente, la chaleur spécifique  $C_p$  et le rapport  $\gamma$  ne restent plus constants et commencent à varier avec la température  $T_0$ . Le gaz reste parfait, sauf qu'il sera nommé en plus gaz calorifiquement imparfait [25].

La fonction de Prandtl Meyer pour ce modèle est donnée par [65-66-70]:

$$\nu = \int_{T_s}^{T_s} \left( \frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{2H(T)/a^2(T) - 1} \right) dT \quad (3.2)$$

Avec :

$$2H(T) = V^2 \quad (3.3)$$

Donc:

$$V^2 / a^2(T) = M^2 \quad (3.4)$$

Alors la fonction de Prandtl Meyer pour le modèle HT est définie comme :

$$\nu = \int_{T_s}^{T_s} \frac{C_p(T)}{V^2} \sqrt{M^2 - 1} \quad (3.5)$$

### 3.5. Détermination de la fonction de Prandtl Meyer pour un GR

On cherche à trouver une expression générale pour cette fonction en exploitant l'équation d'état de Berthelot qui porte des corrections importante par l'intervention des termes de covolume et la force d'attraction intermoléculaire sans oublier l'effet de vibration qui rend le gaz calorifiquement imparfait.

La nouvelle forme de la fonction de Prandtl Meyer sera le cas général et les autres expressions de cette fonction pour le modèle de gaz parfait (GP) et le modèle des gaz parfait à haute température (HT) deviennent des cas particuliers de notre modèle (GR).

### 3.5.1. Formulations mathématiques

La déviation d'un écoulement supersonique peut engendrer une expansion ou une compression. Lorsque l'intensité du choc  $\Delta P/P$  tend vers zéro, fournissent l'outil nécessaire à l'étude de ce phénomène [44]. En effet, l'onde de choc oblique devient une onde de Mach. La vitesse normale à l'onde est la vitesse du son. Une petite déviation d'écoulement ( $d\nu$ ) en aval de l'onde est liée à une différence de vitesse ( $dV$ ) par la relation suivante [20], [64] et [65] on a :

$$d\nu = -\cot g(\mu) \frac{dV}{V} \quad (3.6)$$

$\mu$  : Représente l'angle de mach

$d\nu$  : Représente une déflexion élémentaire [44].

Notons que l'angle  $d\nu$  est considéré positif quand l'écoulement s'éloigne de la direction normale à l'onde (onde de compression) et négatif quand l'écoulement rapproche de la direction normale à l'onde (onde de détente) selon les conventions de la dynamique des fluides.

En insérant la relation entre l'angle de Mach  $\mu$  et le nombre de Mach  $M$  [44] dans l'équation (3.6), on obtient:

$$d\nu = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (3.7)$$

Tel que :  $\nu$  est définie comme étant la fonction de Prandtl Meyer.

Pour traiter le cas d'un angle fini  $\nu$ , il faut intégrer la relation ci-dessus, ce qui suppose que l'on puisse exprimer  $\frac{dV}{V}$  en fonction de  $dM$  et de  $M$ .

Connaissions [5] :

$$-d\theta = (M^2 - 1)^2 \frac{dV}{V} \quad (3.8)$$

D'après la relation (2.26), on peut écrire :

$$VdV - C_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (3.9)$$

Divisons la relation (3.9) par  $V^2$  on obtient :

$$\frac{VdV}{V^2} = -\frac{C_s^2}{V^2} \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.10)$$

Remplaçons l'équation (3.10) dans l'équation (3.8) on obtient:

$$-d\theta = -\frac{1}{M^2} (M^2 - 1) \left( \frac{d\rho}{\rho} \right) \quad (3.11)$$

Remplaçons l'équation (2.28) dans l'équation (3.11) on obtient:

$$-d\theta = -\frac{1}{M^2(T, \rho)} (M^2(T, \rho) - 1)^2 \left( \frac{C_p(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)} dT + \frac{C_T(T, \rho)}{C_s^2(T, \rho)} d\rho \right) \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow d\theta = \left( \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho) \right) dT + \left( \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \right) d\rho \quad (3.13)$$

Alors :

La valeur de la fonction de Prandtl Meyer à un état quelconque supersonique donné par  $(T, P, \rho, M, )$  est :

$$dv = -d\theta \quad (3.14)$$

$$dv = -\left( \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho) \right) dT - \left( \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \right) d\rho \quad (3.15)$$

Substituant la relation entre l'état critique (\*)  $(T_*, \rho_*, P_*, M_* = 1, v_* = 0)$  et un état supersonique  $(T, \rho, P, M, v)$  et on intègre :

$$\int_{v_*}^v dv = v - v_* = v$$

Finalement la fonction de Prandtl Meyer sera :

$$v(T, \rho) = \int_T^{T_*} \left( \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho) \right) dT + \int_{\rho}^{\rho_*} \left( \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \right) d\rho \quad (3.16)$$

Ou bien :

$$v(T, \rho) = \int_T^{T_*} Fv_T(T, \rho) \Big|_{\rho} dT + \int_{\rho}^{\rho_*} Fv_{\rho}(T, \rho) \Big|_T d\rho \quad (3.17)$$

Avec :

$$Fv_T(T, \rho) = \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho) \quad (3.18)$$

$$Fv_{\rho}(T, \rho) = \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \quad (3.19)$$

On remarque clairement que la fonction de Prandtl-Meyer est reliée directement avec la température et la masse volumique.

Aussi il faut noter que cette fonction de Prandtl Meyer est strictement positive parce que notre étude est consacrée spécialement à une détente supersonique où les paramètres supersoniques  $(T, \rho)$  sont toujours inférieurs aux paramètres critiques du col  $(T_*, \rho_*)$ .

### 3.5.2. Détermination la fonction de Prandtl Meyer d'un gaz parfait à partir de la nouvelle fonction

Dans le but de déterminer et confirmer que la relation de Prandtl Meyer pour un gaz parfait donnée par l'équation (3.1), est un cas particulier de l'équation (3.16) qu'on a trouvée en exploitant notre modèle, il faut éliminer les paramètres d'imperfection thermique de gaz ( $b$  et  $a$ ) dans l'équation d'état de Berthelot, ainsi le paramètre d'imperfection calorifique qui est la température caractérise le comportement vibratoire des molécules ( $\theta$ ).

Pour montrer que l'équation (3.1) est identique avec l'équation (3.16) si on remplace les paramètres ( $b$ ,  $a$  et  $\theta$ ) par des zéros, il est mieux de comparer ces deux équation en forme différentielle afin de simplifier un peu les calculs.

L'équation (3.1) sous forme différentielle s'écrit [70]:

$$dV = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (3.20)$$

Le nombre de Mach est défini comme étant le rapport de la vitesse par rapport à la célérité du son :

$$M = \frac{V}{a} \quad (3.21)$$

La dérivée logarithmique de l'équation (3.21) nous donne :

$$\frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} - \frac{da}{a} \quad (3.22)$$

On souhaite maintenant d'exprimer  $\frac{da}{a}$  en fonction de  $dM$  et  $M$  :

On utilise la relation qui donne la célérité du son pour un gaz parfait [44] :

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (3.23)$$

Tant que  $R$  et  $\gamma$  sont considérés constantes dans le cas d'un gaz parfait, alors on peut utiliser la célérité du son génératrice et écrire :

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \frac{\gamma RT}{\gamma RT_0} = \frac{T}{T_0} \quad (3.24)$$

En exprimant le rapport de température en fonction de nombre de Mach pour un gaz parfait [70] on trouve :

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} \quad (3.25)$$

Posons pour simplifier la démarche :

$$f(M) = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

Alors l'équation (3.25) s'écrit :

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \frac{1}{f(M)} \quad (3.26)$$

La dérivée logarithmique de l'équation (3.26) nous permet d'écrire :

$$\frac{da}{a} = -\frac{1}{2} \frac{f'(M)}{f(M)} dM \quad (3.27)$$

Remplaçant  $f(M)$  et sa dérivée par ces valeurs on obtient :

$$\frac{da}{a} = -\frac{1}{2} \frac{(\gamma-1)M}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)} dM \quad (3.28)$$

La substitution de l'équation (3.28) dans l'équation (3.22) donne :

$$\frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} + \frac{1}{2} \frac{(\gamma-1)M}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)} dM \quad (3.29)$$

On peut encore écrire :

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} \left( \frac{2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right) - (\gamma-1)M^2}{2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)} \right) = \frac{dM}{M} \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)} \quad (3.30)$$

Si on remplace l'équation (3.28) et l'équation (3.30) dans l'équation (3.25) on trouve :

$$dv = \left( \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \right) \left( \frac{dV}{V} + \frac{(\gamma-1)M^2}{2} \frac{dV}{V} \right) \quad (3.31)$$

Si on prend  $\frac{dV}{V}$  comme facteur commun et simplifie encore l'équation (3.31):

$$dv = \left( \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \right) \left( 1 + \frac{(\gamma-1)M^2}{2} \right) \frac{dV}{V} = \sqrt{M^2-1} \frac{dV}{V} \quad (3.32)$$

Alors :

$$\frac{dV}{V} = -\frac{C_p dT}{V^2} \quad (3.33)$$

$$v = \int_{T_s}^{T_*} \frac{C_p dT}{V^2} \sqrt{M^2-1} \quad (3.34)$$

Cette équation représente la fonction de Prandtl Meyer pour un gaz parfait. Il est très visible qu'elle est identique à l'équation (3.16) qui indique l'équation de notre modèle en considérant que ( $\dot{a}=b=\theta=0$ ), delà on peut assurer que l'équation de Prandtl Meyer donnée pour le modèle gaz parfait est un cas

particulier de la fonction trouvée par l'exploitation de l'équation d'état de Berthelot qui garantit l'imperfection thermique des gaz d'une part, et l'existence de l'effet vibratoire des molécules de l'autre part.

### 3.5.3. Détermination la fonction de Prandtl Meyer d'un gaz à haute température à partir de la nouvelle fonction

Si on cherche à comparer cette équation (3.5) avec l'équation (3.16) qui exprime la fonction de Prandtl Meyer avec notre modèle, il faut juste remplacer les valeurs qui caractérisent l'imperfection du gaz (le covolume et les forces d'attraction intermoléculaires) par des valeurs nulles dans les termes constituant l'équation (3.16) tel que l'équation (2.64) du nombre de Mach, l'équation (2.57) de la vitesse, l'équation (2.71) de  $C_p(T, \rho)$  et l'équation (2.20) qui exprime le  $C_T(T, \rho)$ , cela nous donne :

$$v = \int_{T_s}^{T_s} \frac{C_p(T, \rho)}{V^2} \sqrt{M^2 - 1} \quad (3.35)$$

Cette équation (3.35) est identique avec l'équation (3.5) ce qui permet de conclure que la fonction de Prandtl Meyer déterminée par le modèle HT est un cas particulier de l'équation trouvée dans notre modèle GR.

## 3.6. Les Procédures du calcul numérique

### 3.6.1. Détermination la masse volumique génératrice $\rho_0$

Après de fixer les valeurs de la pression et la température génératrices, il faut calculer la masse volumique génératrice  $\rho_0$ , cette dernière calculée numériquement à partir de l'équation de Berthelot par la méthode de dichotomie [15], on peut choisir facilement un intervalle  $[\rho_1, \rho_2]$  contenant la masse volumique  $\rho_0$  et qui doit vérifier la condition  $F(\rho_1) F(\rho_2) \leq 0$ . On peut prendre  $\rho_1 = 0 \text{ Kg/m}^3$  et  $\rho_2 = \rho_1 + \text{pas}$ . Une fois que cet intervalle est déterminé, on peut calculer  $\rho_0$  avec une précision  $\varepsilon$  et un pas très petit. La valeur  $\rho_0$  obtenue dépend de la précision  $\varepsilon$  et du pas. Le nombre d'itérations correspondant à la précision  $\varepsilon$  nécessaire pour déterminer la masse volumique génératrice  $\rho_0$  est donné par [40] :



$$K = \frac{2}{0.6931} \text{Log}\left(\frac{Pas}{\varepsilon}\right) + 1 \quad (3.36)$$

Si  $\varepsilon = 10^{-16}$ , et le pas =  $10^{-4}$ , le nombre d'itérations  $K$  ne peut excéder 41 itérations.

### 3.6.2. Détermination les rapports thermodynamiques

Avant de déterminer les rapports thermodynamiques, On calcule numériquement en premier lieu, les paramètres de l'état statique  $T, P, \rho$ , avec un nombre de Mach  $M$  connu, ces paramètres statique peuvent être trouvées on résoudre le système d'équation algébrique non linéaire formé par les équations (2.3), (2.53) et (2.64), le calcul se fait en utilisant l'algorithme de newton [34], [40] avec une dérivation numérique de ces équations, une fois par rapport à la température, et deuxième fois par rapport à la masse volumique, en mettant les paramètres statique  $T, P, \rho$  du cas d'un gaz parfait comme un vecteur initial pour le démarrage du calcul, concernant notre algorithme, la dérivation se fait avec un pas =  $10^{-4}$ , et le calcul se fait avec une précision  $\varepsilon = 10^{-8}$ , et le nombre d'itérations  $K$  ne peut excéder 100 itérations.

Une fois que ces paramètres statiques sont déterminés, le calcul de rapports thermodynamiques se fait avec une précision  $\varepsilon = 10^{-16}$  en divisant ces paramètres statiques par nos paramètres génératrices pour trouver le rapport des températures  $T/T_0$ , le rapport des pressions  $P/P_0$ , le rapport des masses volumiques  $\rho/\rho_0$ , et le rapport des vitesses du son  $a/a_0$ , par le remplacement dans l'équation (2.63) les paramètres de l'état génératrice  $T_0, P_0, \rho_0$  pour trouver la célérité du son génératrice  $a_0$ , et les paramètres de l'état statique  $T, P, \rho$  pour trouver la célérité du son  $a$ .

### 3.6.3. Détermination les rapports critiques au col

L'état générateur est donné par le nombre de Mach nul ( $M=0$ ). Alors, les paramètres critiques ( $T^*, P^*, \rho^*$  et  $a^*$ ) correspondant à la température  $T_0$  et la masse volumique  $\rho_0$ , et au nombre de Mach  $M=1$  (ce qui est le cas au col de la tuyère), peuvent être déterminés. Si on remplace  $M=1$  dans la relation (2.64), et on résoudre le système d'équation algébrique non linéaire formé par les équations (2.3), (2.53) et (2.64), par la méthode de Newton, en mettant les paramètres

critiques  $T_c, P_c, \rho_c$  du cas d'un gaz parfait comme un vecteur initial pour le démarrage du calcul, concernant la méthode utilisée (méthode de Newton), la dérivation se fait numériquement des équations (2.3), (2.53) et (2.64), une fois par rapport à la température, et deuxième fois par rapport à la masse volumique, avec un pas= $10^{-4}$ , et le calcul se fait avec une précision  $\varepsilon=10^{-8}$ , et le nombre d'itérations  $K$  ne peut excéder 100 itérations.

#### 3.6.4 Procédure de calcul par la méthode de Simpson

La détermination de la valeur de Prandtl Meyer  $v_s$  correspondant au nombre de Mach  $M_s$  ( $T=T_s$ ) et ( $\rho=\rho_s$ ) demande les intégrations numériques des fonctions  $F_{vT}(T, \rho)$  et  $F_{vp}(T, \rho)$  dans les intervalles  $[T_s, T^*]$  et  $[\rho_s, \rho^*]$ . Notons ici que les intégrations dépendent des paramètres  $T_0$  et  $P_0$ . Dans les figures 3.3 et 3.5, on a présenté la variation de ces fonctions pour voir une idée sur la forme exacte avant de prendre décision sur le choix de la quadrature d'intégration. On peut conclure que les quadratures d'intégrations à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision vu la variation très rapide de la fonction  $F_{vT}(T, \rho)$  aux extrémités de l'intervalle.

Le traçage des fonctions est choisi pour  $T_0=2000$  K et  $M_s=6.00$  (extrême supersonique) pour une bonne présentation aux extrémités. La fonction  $F_{vT}(T, \rho)$  présente une dérivée très grande au voisinage de la température  $T^*$  et infini à  $T=T^*$  et moins au voisinage de  $T_s$ . Mais pour la deuxième fonction  $F_{vp}(T, \rho)$  une simple intégrale avec pas constant comme Trapèze ou Simpson à pas constant donne un meilleur résultat.

Une condensation des nœuds est alors indispensable et nécessaire aux voisinages des températures  $T^*$  et  $T_s$ . Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature. La quadrature d'intégration choisie est celle de Simpson [15] et [40] pour le calcul numérique de l'intégrale donnée par (3.17). La forme de condensation optée dans notre calcul est présentée par la relation (3.37). Après avoir obtenu  $s$ , on peut facilement déterminer la distribution des valeurs de  $T$  par [40]:

$$S_i = b_1 \cdot z_i + (1-b_1)^2 \cdot \left[ 1 - \frac{\tanh[b_2 \cdot (1-z_i)]^2}{2 \cdot \tanh(b_2)} \right] \quad (3.37)$$

Avec:

$$z_i = \frac{i-1}{N} \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.38)$$

$$\left( \frac{T - T_S}{T_* - T_S} \right)^2 = f(s) \quad (3.39)$$

La fonction  $f(s)$  de la relation (3.39) est arbitraire. Pour notre calcul, on opte la forme  $f(s) = s$ . Alors, la distribution des nœuds se fait de la manière suivante:

$$T_i = S_i \cdot (T_* - T_S) + T_S \quad (3.40)$$

Si on prend des valeurs de  $b_1$  proche de zéro (exemple  $b_1=0.1$ ) et  $b_2=2.0$ , on peut condenser les nœuds vers l'extrémité gauche  $T_S$  de l'intervalle. Pour des valeurs de  $b_1$  proche de 2.0 (exemple  $b_1=1.9$ ) et  $b_2=2.0$ , on peut condenser les nœuds vers l'extrémité droite  $T^*$ . La fonction de condensation (3.37) permet uniquement de condenser les nœuds vers une seule extrémité gauche ou droite.

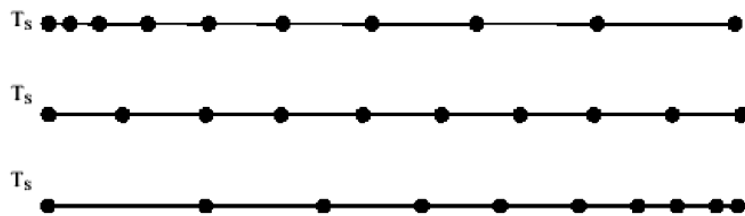


Figure 3.2 : Présentation de la condensation des nœuds

Comme notre fonction présente une variation très rapide aux deux extrémités, il est nécessaire de condenser les nœuds vers les deux aux mêmes temps. Il est alors nécessaire de diviser l'intervalle d'intégration  $[T_S, T^*]$  en deux parties, (égales par exemple)  $[T_S, T_M]$  et  $[T_M, T^*]$  telle que:

$$T_M = \frac{T_* - T_S}{2} \quad (2.41)$$

Pour l'intervalle  $[T_S, T_M]$  gauche, on prend  $b_1$  proche de zéro (exemple  $b_1=0,1$ ) et  $b_2=2.00$  et pour l'intervalle  $[T_M, T^*]$  de droite, on doit prendre des valeurs de  $b_1$  proche de 2.00 (exemple  $b_1=1.9$ ) et  $b_2=2.00$  pour condenser respectivement les noeuds vers l'extrémité gauche  $T_S$  et droite  $T^*$  pour chaque intervalle. On divise encore le nombre  $N$  en deux parties. Alors, la subdivision de l'intervalle  $[T_S, T^*]$  possède la forme présentée sur la figure 2.

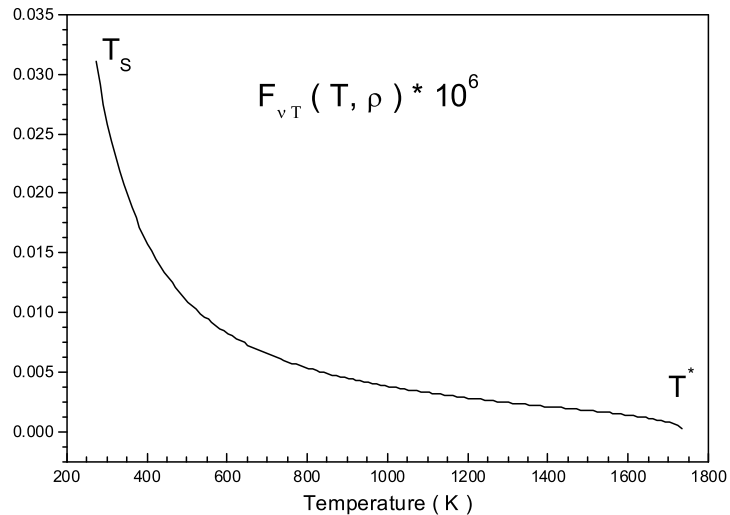


Figure 3.3 : Variation de la fonction  $F_{vT}(T, \rho)$  dans  $[T_S, T^*]$



Figure 3.4 : Condensation des noeuds vers les deux extrémités de

l'intervalle  $[T_S, T^*]$

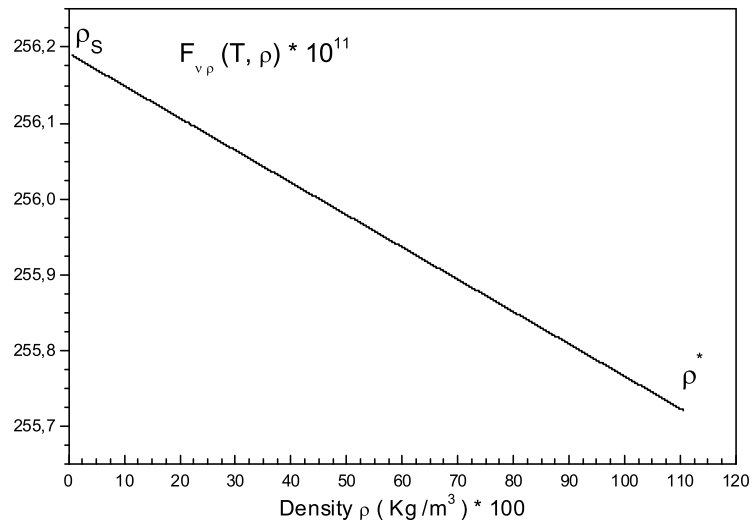


Figure 3.5 : Variation de la fonction  $F_{vp}(T, \rho)$  dans  $[\rho_S, \rho^*]$

Après la détermination de la fonction de condensations, on peut déterminer la distribution des températures et des masses volumiques par:

$$T_i = S_i \cdot (T_D - T_G) + T_G \quad (2.42)$$

$$\rho_i = S_i \cdot (\rho_D - \rho_G) + \rho_G \quad (2.43)$$

La valeur de  $v_S$  correspondant au  $T_S$  et  $\rho_S$  peut être obtenue par la sommation d'intégration de la fonction  $F_{vT}(T, \rho)$  dans l'intervalle  $[T_S, T^*]$  et d'intégration de la fonction  $F_{vp}(T, \rho)$  dans l'intervalle  $[\rho_S, \rho^*]$ , en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers les deux extrémités.

Enfin si on veut déterminer l'influence des paramètres générateurs, spécialement la pression génératrice, sur la fonction de Prandtl Meyer, pour l'air en exploitant l'équation d'état de Berthelot il suffit de tracer cette fonction pour différentes valeurs des paramètres générateurs et de la comparer avec les modèles de gaz parfait et haute température afin de les corriger par notre modèle qui est le plus proche d'un cas d'écoulement supersonique réel.

### 3.6.5 Procédure de calcul par la méthode de Gauss Legendre

Dans le domaine mathématique de l'analyse numérique, les méthodes de quadrature sont des approximations de la valeur numérique d'une intégrale [41].

En général, on remplace le calcul de l'intégrale par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration. La méthode de quadrature de Gauss, du nom de Carl Friedrich Gauss, est une méthode de quadrature exacte pour un polynôme de degré  $2n - 1$  avec  $n$  points pris sur le domaine d'intégration. Si ce dernier est  $(a, b)$ , qui permet de calculer, sur un intervalle fini  $[a, b]$ , l'intégrale définie  $\int_a^b f(x)dx$  d'une fonction  $f$  continue donnée.

La méthode est de la forme :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (2.44)$$

Où  $f(x_i)$  une fonction de pondération, qui peut assurer l'intégrabilité de  $f$ . Les  $w_i$  sont appelés les coefficients de quadrature (ou poids). Les points  $x_i$  ou nœuds, sont réels, distincts, uniques et sont les racines de polynômes pour le produit scalaire.

Les coefficients de la quadrature  $w_i$  ainsi que les abscisses  $x_i$  pour une intégration d'ordre 64 sont présentes dans le tableau 3.1.

Nous distinguerons deux optiques :

- la fonction à intégrer est remplacée par une fonction interpolante ou par une fonction d'approximation.
- l'intégrale est approchée par une somme pondérée de valeurs prises par la fonction en des points situés dans un voisinage de  $[a, b]$ .

Tableau 3.1 : Abscisses et coefficients associés de la quadrature d'intégration de Gauss Legendre d'ordre 64

$i$	$\pm x_i$	$w_i$
1	.006368073	0.003509312
2	.0071942277	0.0091372115
3	0.0276188818	0.0156959771
4	0.0325469453	0.0171370005
5	0.0518394344	0.0234179378
6	0.0653161897	0.0254990642

7	0.1227581033	0.0283420289
8	0.1539089403	0.0329111118
9	0.1984778666	0.0371728923
10	0.2361421214	0.0390969435
11	0.2665500455	0.0416559573
12	0.2993243619	0.0438260415
13	0.3640656989	0.0455869341
14	0.3803563189	0.0469221942
15	0.4577640192	0.0478193546
16	0.4758461672	0.0482700387
17	0.5541538328	0.0482700387
18	0.5722359808	0.0478193546
19	0.6496436811	0.0469221942
20	0.6659343011	0.0455869341
21	0.7406756381	0.0438260415
22	0.7534499545	0.0426559573
23	0.8038578786	0.0390969435
24	0.8315221334	0.0361728923
25	0.8860910597	0.0349111118
26	0.8972418967	0.0303420289
27	0.9346838103	0.0274990642
28	0.9481605656	0.0234179378
29	0.9774530547	0.0191370005
30	0.9823811182	0.0156959771
31	0.9828057723	0.0091372115
32	0.9986319268	0.0015093120

---

### Algorithme du calcul par la méthode de Gauss Legendre

L'équation (3.16) demande une intégration de deux fonctions, mais d'après la variation de ces fonctions, on s'intéresse à intégrer la première fonction  $F_{VT}(T, \rho)$  par la méthode de Gauss Legendre dans  $[T_s, T^*]$ , voir figure 3.3, l'algorithme suivant présente d'une manière détaillée l'intégration numérique de la fonction  $F_{VT}(T, \rho)$ .

**Algorithme d'intégration  $F_{VT}(T, \rho)$**   $F_{VT}(T, \rho) = \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_P(T, \rho)$

- **Lecture des données :**

1. T et  $\rho$  : sont calculées (Voir paragraphe 3.6.2)

2.  $T^*$  : calculée (Voir paragraphe 3.6.3)

- **Changement des variables :**

$$X_{\text{sup}}=T^*$$

$$X_{\text{inf}}=T$$

- **Initialisation ( $v_1=0$ )**

➤ Pour  $i=1$  jusqu'à 64

Faire ;

$$v_1 = v_1 + w_i \cdot \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(x, \rho)} \cdot C_p(x, \rho)$$

Fin pour;

- La valeur du premier intégral est

$$v = v \cdot (x_{\text{sup}} - x_{\text{inf}})$$

La valeur finale de la fonction de Prandtl Meyer est la sommation de  $v_1$  donné par  $F_{VT}(T, \rho)$  et  $v_2$  donné par  $F_{VP}(T, \rho)$

$$v = v_1 + v_2$$

Cette valeur sera calculée en radian, alors la conversion vers le degré fait par la relation suivante :

### 3.6.6. Effet de la quadrature sur la convergence du problème

L'exemple choisi est pour  $T_0=2000$  K et  $M_S=6.00$ . Cet exemple demande une quadrature d'ordre élevée par rapport au autre triple ( $T_0$ ,  $\rho_0$  et  $M_S$ ) pour même précision voulue (le cas le plus défavorable). Le résultat donné par la quadrature est toujours inférieur à la solution exacte, c'est-à-dire que la convergence de la solution aura lieu d'une façon monotone.

Le contrôle de fixation des chiffres décimaux exactes conduit à dire que, pour avoir la précision  $\varepsilon=10^{-6}$ , on a besoin de la quadrature de Gauss Legendre d'ordre 64 pour avoir le résultat. Alors, quelque soit le triple ( $T_0$ ,  $\rho_0$  et  $M_S$ ), on peut utiliser la quadrature d'ordre  $n=64$  au maximum pour avoir la même précision  $\varepsilon$ . A titre information, pour avoir une précision  $\varepsilon=10^{-6}$  pour le même exemple, les



quadratures de rectangle, de trapèze et de Simpson à pas constant ou variable demande un nombre de points *minimum* présenté dans le tableau 3.2 suivant:

Tableau 3.2 : Efficacité des quadratures sur le résultat pour une précision  $\varepsilon=10^{-6}$

Quadrature	Rectangle	Trapèze	Simpson A Pas constant	Simpson A Pas Variable	Gauss Legendre
Minimum Nombre de points pour avoir une précision $\varepsilon=10^{-6}$	274.827	162.914	8.637	3734	64

On peut avoir la même précision  $\varepsilon$  en utilisant la quadrature de rectangle, de trapèze ou Simpson avec un nombre de points inférieure à celui indiqué dans le tableau 3.2, si on utilise la condensation des nœuds vers les deux extrémités de l'intervalle d'intégration  $[T_s, T^*]$  comme présente la référence [29], Dans ce cas, la quadrature de Simpson demande 8.637 points, et la quadrature de trapèze demande 162.914 points. On peut même obtenir des valeurs inférieures à celles indiquées, si on choisi d'autres paramètres de la fonction de condensation (3.37).

### 3.7. Conclusion

Ce chapitre présente le développement et l'élaboration de la forme générale de la fonction de Prandtl Meyer pour un gaz réel qui sera valable pour tous les cas haute et basse température ou de pression, cette dernière calculée par l'intégration de deux fonctions complexes. Les formes de cette fonction pour les modèles gaz parfaits et des gaz parfaits à haute température (dite calorifiquement imparfait) seront des cas particuliers de notre forme générale. Des méthodes du calcul numérique seront améliorées pour ce problème, et pour facilite la conception des tuyères supersoniques par la méthode des caractéristiques pour le chapitre suivant.

## CHAPITRE 4

### LA NOUVELLE FORME DE LA METHODE DES CARACTERISTIQUES

#### 4.1. Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter la méthode de conception et dimensionnement des tuyères type à détente centrée bidimensionnelle en utilisant la méthode des caractéristiques [19], [47], [48] en ajoutant l'effet de la pression génératrice sur toutes les paramètres, qui devient en fonction de la température et la masse volumique, ce qui est valable lorsque la température et la pression génératrice de la chambre de combustion est élevées, inférieur au seuil de dissociation des molécules.

La figure 4.1 représente les différentes géométries de tuyères supersoniques de propulsion ayant un écoulement horizontal au col et à la section de sortie. Les cas (a) et (b) sont respectivement de géométries bidimensionnelles [62, 63] et axisymétriques. Le cas (c) représente une tuyère tridimensionnelle de section de sortie arbitraire.

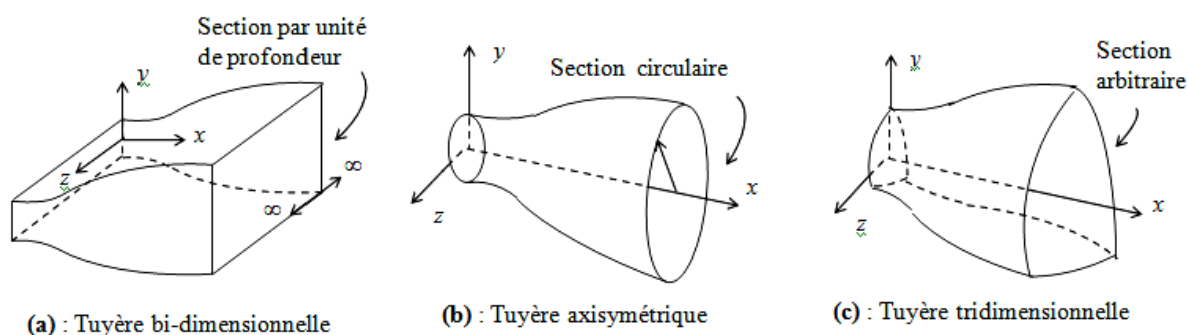


Figure 4.1: Différentes géométries de tuyères

#### 4.2. Tuyère à détente centrée

La tuyère supersonique est divisée en deux parties. Une partie subsonique de forme convergente et une deuxième partie supersonique de forme divergente. Il est à noter que la portion supersonique est indépendante des conditions amont

de la ligne sonique. On peut étudier cette partie indépendamment de la partie subsonique. Cette dernière est utilisée pour déterminer la ligne sonique au col de la tuyère. Dans cette étude, on va étudier un type de tuyère donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. Elle est nommée tuyère à détente centrée. Ce type de tuyères donne une longueur minimale par rapport aux autres types existants. Il existe deux catégories pour ce type de tuyères suivant la ligne sonique. Si la ligne sonique est une ligne droite, la paroi au col génère des ondes de détente centrées et divergentes [5, 7, 19]. La deuxième catégorie possède une ligne sonique courbée; dans ce cas l'écoulement à l'intérieur de la tuyère possède des lignes de Mach non centrées [5, 16].

La figure 4.2 illustre le schéma général de la tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite et représente les caractéristiques du champ d'écoulement dans différentes régions [62, 63]. Cette tuyère est nommée tuyère à détente centrée (Minimum Length Nozzle MLN).

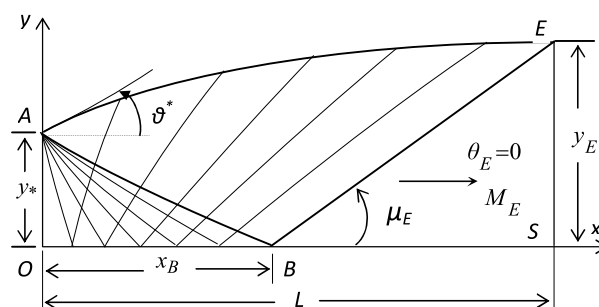
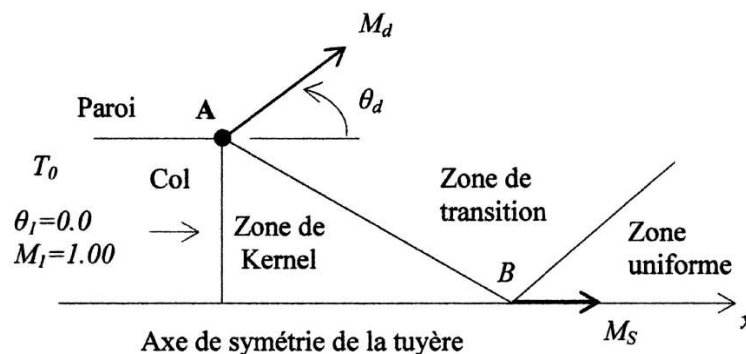


Figure 4.2: Présentation du champ de l'écoulement dans la tuyère à détente centrée bidimensionnelle

La figure 4.3 montre le champ d'écoulement dans cette tuyère. L'écoulement entre le col OA et la région uniforme BES est divisé en deux régions. La région OAB, appelée par région de Kernel, est une région d'ondes non simples. La région triangulaire BES est une région d'écoulement uniforme au nombre de Mach de sortie  $M_E$  de sortie. Dans ce contexte, la paroi, au col, est inclinée d'un angle  $\theta^*$ .

L'application de la tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite est utilisée pour les souffleries hypersoniques ainsi que les moteurs fusées [36,

42, 49]. L'étude dans ce chapitre est limitée pour le cas de la tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite.



**AB:** Dernière caractéristique descendante de la zone de Kernel.

**\*** : Centre de détente au col de la tuyère.

**$M_d$ :** Nombre de Mach juste après la détente.

**$\theta_d$ :** Déviation de l'écoulement juste après la détente

Figure 4.3 : Champ d'écoulement dans une tuyère à détente centrée [67]

Comme on l'a mentionné auparavant, le traçage des contours des tuyères supersoniques établi sur la base de l'hypothèse des gaz parfaits, qui ne tient nullement compte de l'effet de la température génératrice pour un nombre de Mach de sortie fixé, on obtient le même profil pour n'importe quelle température. Ceci n'est donc qu'une approche du phénomène réel, car en principe, plus le gaz est chaud plus il prend un espace plus grand pour se détendre afin d'atteindre le nombre de Mach escompté à la section de sortie.

Les auteurs Zebbiche et Youbi [66, 67, 69] ont reconsidéré le problème avec une autre approche où le gaz à très haute température n'est plus entièrement parfait. Ceci conduit par la suite à faire une correction plus au moins notable des profils des tuyères supersoniques selon le nombre de Mach de sortie. Surtout au-delà d'une température génératrice de 1000 K, à partir de laquelle, les chaleurs spécifiques à pression  $C_p$  et à volume constant  $C_v$  varient considérablement avec la température pour la majorité des gaz [26, 58, 63, 67]. Dans ce cas, les équations de conservation restent inchangées sauf l'équation d'énergie.

Les équations des caractéristiques présentées par le système (4.1) et (4.2) restent toujours valables sous cette forme. Ici, il faut insérer l'équation de Prandtl

Meyer développée dans le système pour obtenir notre propre modèle mathématique valable lorsque l'effet à la pression génératrice est prise en compte. Comme résultats, le modèle mathématique développé dans ce chapitre est une généralisation des équations des caractéristiques du modèle du gaz parfait à  $C_P$  et  $\gamma$  constants, ou bien le modèle a haute température, Généralement les résultats dans la dynamique des gaz sont acceptés pour une erreur inférieure à 5%.

#### 4.3. Formulation mathématique

Pour un écoulement supersonique, irrotationnel, adiabatique, la méthode des caractéristiques donne les équations suivantes, dites équations des caractéristiques et de compatibilités [63, 67]:

Suivant  $\xi$  (1-3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(v + \theta) = \delta \frac{\sin \theta \cdot \sin \mu}{y} d\xi \\ \frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Suivant  $\eta$  (2-3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(v - \theta) = \delta \frac{\sin \theta \cdot \sin \mu}{y} d\eta \\ \frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

$\delta = 0$ : le cas plan

$\delta = 1$ : le cas axisymétrique

Les équations (4.1) et (4.2) sont valables respectivement sur les caractéristiques  $C^-$  et  $C^+$  comme le montre la figure 4.4. Dans le cas réel, les caractéristiques sont courbées, et si le maillage est fin de sorte que les points soient proches l'un de l'autre, on peut rapprocher la courbure par une ligne droite,

le calcul sera sur les lignes de Mach nommées sur la caractéristique C et par z sur la caractéristique C comme le montre la figure 4.4.

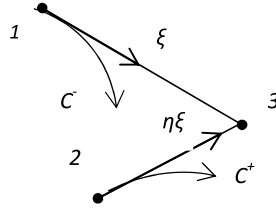


Figure 4.4: Illustration des lignes caractéristiques et des lignes de Mach

Les relations dans le système d'équations (4.1) et (4.2) sont développées pour notre modèle dans les chapitres 2 et 3 précédents:

$$dv(T, \rho) = - \left( \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho) \right) dT - \left( \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \right) d\rho \quad (4.3)$$

$$c_p(T, \rho) = c_{p_{PG}} \left[ 1 + \left( \frac{\gamma_{PG} - 1}{\gamma_{PG}} \right) \left\{ \left( \frac{\theta}{T} \right) \frac{z}{(1-z)} + \frac{2a\rho}{RT} \left[ 1 + \frac{\left( \frac{2-b\rho}{1-b\rho} + \frac{a\rho}{2RT} \right)}{\frac{1}{(1-b\rho)} - \frac{2a\rho}{RT}} \right] \right\} \right] \quad (4.4)$$

$$C_T(T, \rho) = \left( \frac{3ab^2\rho - 6ab\rho + RT^3b + 4a}{2T\rho b - Tb^2\rho^2 - T} \right) \quad (4.5)$$

$$c_v(T, \rho) = c_{v_{PG}} \left[ 1 + (\gamma_{PG} - 1) \left( \left( \frac{\theta}{T} \right) \frac{z}{(1-z)} + \frac{2a\rho}{RT} \right) \right] \quad (4.6)$$

$$\gamma(T, \rho) = \left[ \frac{c_p(T, \rho)}{c_v(T, \rho)} \right] \quad (4.7)$$

$$V^2(T, \rho) = 2 \left\{ C_{v_{PG}} (T_0 - T)^2 + R^2 \theta \left( \frac{1}{(1-Z)} + \frac{1}{(1-Z_0)} \right) \right. \\ \left. + 4a \left( \frac{\rho}{T} - \frac{\rho_0}{T_0} \right) \right\} \quad (4.8)$$

$$C_S(T, \rho) = \frac{RT^2}{(1-b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{T} + \frac{\rho^2 T^2 \left( \frac{a}{T} + \frac{R^2}{\rho(1-b\rho)} \right)}{C_{V_{PG}} \cdot \left[ 1 + (\gamma_{PG} - 1) \left\{ \left( \frac{\theta}{T} \right) \frac{Z}{(1-Z)} + \frac{2a\rho}{RT} \right\} \right]} \quad (4.9)$$

$$M^2(T, \rho) = \left( \frac{V^2(T, \rho)}{C_S^2(T, \rho)} \right) \quad (4.10)$$

Dans les systèmes (4.1) et (4.2),  $\theta$  l'angle de déviation du vecteur de vitesse de l'écoulement par rapport à l'horizontal, L'angle de Mach  $\mu$  est donné par est [4]:

$$\mu(T, \rho) = \arcsin \left( \frac{1}{M(T, \rho)} \right) \quad (4.11)$$

On peut exprimer les directions  $\xi$  et  $\eta$  des lignes de Mach en fonction des coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  par les relations suivantes [10] et [53]:

$$d\xi = \frac{dx}{\cos(\theta - \mu)} \quad ; \quad d\eta = \frac{dy}{\sin(\theta + \mu)} \quad (4.12)$$

On a:

$$\begin{cases} d(v + \theta) = dv + d\theta \\ d(v - \theta) = dv - d\theta \end{cases} \quad (4.13)$$

Remplaçant les relations (4.12) et (4.3) dans le système (4.1) et (4.2) on obtient, le modèle mathématique pour les gaz réels de la méthode des caractéristiques:

On peut considérer que le système comme suit :

Suivant  $\xi$  (1-3) :

$$\begin{cases} -\frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_P(T, \rho) dT - \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) d\rho + d\theta = \delta \frac{\sin \theta \cdot \sin \mu}{y} \frac{dx}{\cos(\theta - \mu)} \\ dy = \tan(\theta - \mu) dx \end{cases} \quad (4.14)$$

Suivant  $\eta$  (2-3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho) dT - \frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) d\rho - d\theta = \delta \frac{\sin \theta \cdot \sin \mu}{y} \frac{dy}{\sin(\theta + \mu)} \\ dy = \tan(\theta + \mu) dx \end{array} \right. \quad (4.15)$$

$M(T, \rho)$ ,  $C_s(T, \rho)$ ,  $V(T, \rho)$ , et  $\mu(T, \rho)$  sont données respectivement par les relations (4.10), (4.9), (4.8) et (4.11).

Comme tous les paramètres dépendants aux  $T$  et  $\rho$ , alors notre modèle mathématique dépend essentiellement de la pression génératrice  $P_0$  de la chambre de combustion.

Le modèle mathématique développé est un système d'équations différentielles de cinq inconnues ( $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $T$  et  $\rho$ ). Celui du gaz parfait est basé sur les variables  $x$ ,  $y$ ,  $M$  et  $\theta$  à cause de l'équation implicite (4.10) reliant  $M$  et  $T$  dont l'expression analytique inverse n'existe pas, on a considéré les variables  $T$  et  $\rho$  au lieu de  $M$ , par contre le modèle à haute température basé sur les quatre variables ( $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  et  $T$ ).

Comme on la mentionné, les caractéristiques  $C^-$  et  $C^+$  sont des courbes, l'application de la méthode des caractéristiques oblige à introduire un maillage fin afin d'approximer chaque caractéristique entre deux points par des segments de ligne droite. Les propriétés ( $x$ ,  $y$ ,  $T$ ,  $\theta$ ,  $\rho$ ,  $P$ ) en un point de champ d'écoulement, peuvent être déterminées à partir de celles des deux points reliés avec le point considéré par les lignes caractéristiques qui le précèdent. Par exemple les propriétés au point 3 de la figure 4.4 peuvent être déterminées à partir de celles des points 1 et 2 qui les relient. On approche dans ce cas à la variation des paramètres  $y$ ,  $\theta$ ,  $\rho$  et  $T$  le long les segments reliant les points 1 et 2 et les points 2 et 3 par les expressions suivantes :

L'intégration des systèmes (4.14) et (4.15) donne :

Suivant  $\xi$  (1-3) :



$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{T_1}^{T_3} \left( -\frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho) \right) dT + \int_{\rho_1}^{\rho_3} \left( -\frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \right) d\rho + (\theta_3 - \theta_1) = \int_{x_1}^{x_3} \delta \frac{\sin \theta \cdot \sin \mu}{y \cdot \cos(\theta - \mu)} dx \\ y_3 - y_1 = \int_{x_1}^{x_3} \tan(\theta - \mu) dx \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Suivant  $\eta$  (2-3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{T_2}^{T_3} \left( -\frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_p(T, \rho) \right) dT + \int_{\rho_2}^{\rho_3} \left( -\frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \right) d\rho - (\theta_3 - \theta_2) = \int_{y_2}^{y_3} \delta \frac{\sin \theta \cdot \sin \mu}{y \cdot \sin(\theta + \mu)} dy \\ y_3 - y_2 = \int_{x_2}^{x_3} \tan(\theta + \mu) dx \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Lorsque nos systèmes a cinq inconnues (x, y,  $\theta$ , T et  $\rho$ ), on a besoin d'ajouter une autre équation présentée dans le chapitre 2.

L'équation (2.33) donne :

$$\left[ \frac{1}{\rho} - \frac{C_T(T, \rho)}{a^2(T, \rho)} \right] d\rho = \left[ \frac{C_p(T, \rho)}{a^2(T, \rho)} \right] dT \quad (4.18)$$

Suivant  $\xi$  (1-3) :

$$\int_{\rho_1}^{\rho_3} \left[ \frac{1}{\rho} - \frac{C_T(T, \rho)}{a^2(T, \rho)} \right] d\rho = \int_{T_1}^{T_3} \left[ \frac{C_p(T, \rho)}{a^2(T, \rho)} \right] dT \quad (4.19)$$

Suivant  $\eta$  (2-3) :

$$\int_{\rho_2}^{\rho_3} \left[ \frac{1}{\rho} - \frac{C_T(T, \rho)}{a^2(T, \rho)} \right] d\rho = \int_{T_2}^{T_3} \left[ \frac{C_p(T, \rho)}{a^2(T, \rho)} \right] dT \quad (4.20)$$

$$\theta_{13} = \alpha_{\theta_{13}} \cdot \theta_1 + (1 - \alpha_{\theta_{13}}) \cdot \theta_3 \quad ; \quad \theta_{23} = \alpha_{\theta_{23}} \cdot \theta_2 + (1 - \alpha_{\theta_{23}}) \cdot \theta_3 \quad (4.21)$$

$$T_{13} = \alpha_{T_{13}} \cdot T_1 + (1 - \alpha_{T_{13}}) \cdot T_3 \quad ; \quad T_{23} = \alpha_{T_{23}} \cdot T_2 + (1 - \alpha_{T_{23}}) \cdot T_3 \quad (4.22)$$

$$\rho_{13} = \alpha_{\rho_{13}} \cdot \rho_1 + (1 - \alpha_{\rho_{13}}) \cdot \rho_3 \quad ; \quad \rho_{23} = \alpha_{\rho_{23}} \cdot \rho_2 + (1 - \alpha_{\rho_{23}}) \cdot \rho_3 \quad (4.23)$$

$$y_{13} = \alpha_{y_{13}} \cdot y_1 + (1 - \alpha_{y_{13}}) \cdot y_3 \quad ; \quad y_{23} = \alpha_{y_{23}} \cdot y_2 + (1 - \alpha_{y_{23}}) \cdot y_3 \quad (4.24)$$

$\alpha_{\theta_{13}}, \alpha_{\theta_{23}}, \alpha_{T_{13}}, \alpha_{T_{23}}, \alpha_{\rho_{13}}, \alpha_{\rho_{23}}, \alpha_{y_{13}}$  et  $\alpha_{y_{23}}$  sont des coefficients d'interpolation appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ . Si ces coefficients sont égaux à 0.5, on obtient la valeur moyenne des paramètres [11].

#### 4.3.1. Equation et procédure pour un point interne

Un point est nommé point interne s'il est situé dans le champ de l'écoulement supersonique comme le point 3 dans la figure 4.5. Ce point est lié aux deux points 1 et 2 par des lignes de Mach  $\xi$  et  $\eta$  respectivement. Les propriétés  $(X, y, T, \rho, \theta)$  aux points 1 et 2 sont connues et le problème devient à déterminer ces propriétés au point 3 [62, 63].

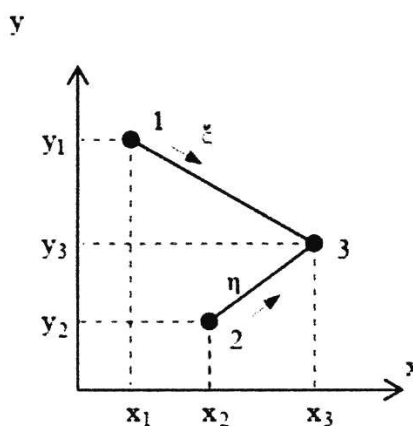


Figure 4.5: Nœud interne quelconque

Les systèmes prennent les formes algébriques suivantes:

Suivant  $\xi$  (1-3) :

$$\begin{cases} \int_{T_1}^{T_3} A_{13}(T, \rho) dT + \int_{\rho_1}^{\rho_3} B_{13}(T, \rho) d\rho + (\theta_3 - \theta_1) = \delta \int_{x_1}^{x_3} C_{13}(T, \rho, \theta, y) dx \\ y_3 - y_1 = \int_{x_1}^{x_3} D_{13}(T, \rho, \theta) dx \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_3} E_{13} d\rho = \int_{T_1}^{T_3} F_{13} dT \quad (4.26)$$

Suivant  $\eta$  (2-3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{T_2}^{T_3} A_{23}(T, \rho) dT + \int_{\rho_2}^{\rho_3} B_{23}(T, \rho) d\rho - (\theta_3 - \theta_2) = \delta \int_{y_2}^{y_3} C_{23}(T, \rho, \theta, y) dy \\ y_3 - y_2 = \int_{x_2}^{x_3} D_{23}(T, \rho, \theta) dx \end{array} \right. \quad (4.27)$$

$$\int_{\rho_2}^{\rho_3} E_{23} d\rho = \int_{T_2}^{T_3} F_{23} dT \quad (4.28)$$

Les expressions sont nommées comme suit:

$$A_{13} = -\frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T_{13}, \rho_{13})} \cdot C_P(T_{13}, \rho_{13}) ; \quad A_{23} = -\frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T_{23}, \rho_{23})} \cdot C_P(T_{23}, \rho_{23}) \quad (4.29)$$

$$B_{13} = -\frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T_{13}, \rho_{13})} \cdot C_T(T_{13}, \rho_{13}) ; \quad B_{23} = -\frac{(M^2(T, \rho) - 1)^2}{V^2(T_{23}, \rho_{23})} \cdot C_T(T_{23}, \rho_{23}) \quad (4.30)$$

$$C_{13} = \frac{\sin(\theta_{13}) \cdot \sin(\mu_{13})}{y_{13} \cdot \cos(\theta_{13} - \mu_{13})} ; \quad C_{23} = \frac{\sin(\theta_{23}) \cdot \sin(\mu_{23})}{y_{23} \cdot \sin(\theta_{23} + \mu_{23})} \quad (4.31)$$

$$E_{13} = \frac{1}{\rho_{13}} - \frac{C_T(T_{13}, \rho_{13})}{a^2(T_{13}, \rho_{13})} ; \quad E_{23} = \frac{1}{\rho_{23}} - \frac{C_T(T_{23}, \rho_{23})}{a^2(T_{23}, \rho_{23})} \quad (4.32)$$

$$F_{13} = \frac{C_P(T_{13}, \rho_{13})}{a^2(T_{13}, \rho_{13})} ; \quad F_{23} = \frac{C_P(T_{23}, \rho_{23})}{a^2(T_{23}, \rho_{23})} \quad (4.33)$$

Les pentes prennent des valeurs constantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{13} = D_{13}(T_{13}, \rho_{13}, \theta_{13}) = \tan(\theta_{13} - \mu_{13}) \\ \mu_{13} = \arcsin \frac{1}{M_{13}(T_{13}, \rho_{13})} \end{array} \right. \quad (4.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{23} = D_{23}(T_{23}, \rho_{23}, \theta_{23}) = \tan(\theta_{23} + \mu_{23}) \\ \mu_{23} = \arcsin \frac{1}{M_{23}(T_{23}, \rho_{23})} \end{array} \right. \quad (4.35)$$

Suivant  $\xi$  (1-3) :

$$A_{13}(T_3 - T_1)^2 + B_{13}(\rho_3 - \rho_1)^2 + (\theta_3 - \theta_1) = \delta C_{13}(x_3 - x_1) \quad (4.36)$$

$$y_3 - y_1 = D_{13}(x_3 - x_1) \quad (4.37)$$

$$E_{13}(\rho_3 - \rho_1) = F_{13}(T_3 - T_1) \quad (4.38)$$

Suivant  $\eta$  (2-3) :

$$A_{23}(T_3 - T_2)^2 + B_{23}(\rho_3 - \rho_2)^2 - (\theta_3 - \theta_2) = \delta C_{23}(y_3 - y_2) \quad (4.39)$$

$$y_3 - y_2 = D_{23}(x_3 - x_2) \quad (4.40)$$

$$E_{23}(\rho_3 - \rho_2) = F_{23}(T_3 - T_2) \quad (4.41)$$

Les équations (4.36), (4.37), (4.38), (4.39), (4.40) et (4.41) constituent un système d'équations algébriques non linéaires à cinq inconnues ( $x_3$ ,  $y_3$ ,  $T_3$ ,  $\rho_3$ ,  $\theta_3$ ). L'algorithme par itérations successives s'écrit [39, 43]:

$$x_3 = \frac{G_2 - G_1}{(D_{13} - D_{23})^2} \quad (4.42)$$

$$y_3 = G_1 + D_{13} \cdot x_3 \quad (4.43)$$

$$T_3 = \frac{Z_1 + Z_2 - \rho_3 (B_{13} + B_{23})^2 + \delta [C_{13} \cdot x_3 + C_{23} \cdot y_3]}{(A_{13} + A_{23})^3} \quad (4.44)$$

$$\theta_3 = Z_1 - B_{13} \cdot \rho_3 + \delta C_{13} \cdot x_3 \quad (4.45)$$

$$\rho_3 = \frac{Z_1 - \theta_3 - A_{13} \cdot T_3 + \delta C_{13} \cdot x_3}{B_{13}} \quad (4.46)$$

Et la valeur de la fonction de Prandtl Meyer en ce point(3) est donnée par :

$$v_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)^2 + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{\delta}{2}[C_{13}(x_3 - x_1) + C_{23}(y_3 - y_2)] \quad (4.47)$$

Avec :

$$\begin{cases} G_1 = y_1 - D_{13} \cdot x_1 \\ G_2 = y_2 - D_{23} \cdot x_2 \end{cases} \quad (4.48)$$

$$\begin{cases} D_{13} = \tan(\theta_{13} - \mu_{13}) \\ D_{23} = \tan(\theta_{23} + \mu_{23}) \end{cases} \quad (4.49)$$

$$\begin{cases} Z_1 = \theta_1 + B_{13} \cdot \rho_1 - H_{13} \cdot x_1 \\ Z_2 = -\theta_2 + B_{23} \cdot \rho_2 - H_{23} \cdot y_2 \end{cases} \quad (4.50)$$

$$H_{13} = \delta C_{13} \quad \text{et} \quad H_{23} = \delta C_{23} \quad (4.51)$$

Les relations (4.42), (4.43), (4.44), (4.45) et (4.46) constituent un système d'équations par itérations pour un écoulement supersonique bi-dimensionnelle, permanent et irrotationnel pour notre modèle.

La résolution du système se fait par la procédure d'intégration numérique de prédicteur correcteur par les différences finies [5, 7, 8, 16, 27, 34, 45]. Pour l'algorithme de prédicteur d'Euler, les valeurs initiales de  $T_{i3}$ ,  $\theta_{i3}$ ,  $\rho_{i3}$  et  $y_{i3}$  ( $i = 1, 2$ ) a l'itération,  $K=0$ , sont données par:

$$T_{13} = T_1 \quad ; \quad T_{23} = T_2 \quad (4.52)$$

$$\theta_{13} = \theta_1 \quad ; \quad \theta_{23} = \theta_2 \quad (4.53)$$

$$\rho_{13} = \rho_1 \quad ; \quad \rho_{23} = \rho_2 \quad (4.54)$$

$$y_{13} = y_1 \quad ; \quad y_{23} = y_2 \quad (4.55)$$

Substituons les expressions (4.52), (4.53), (4.54) et (4.55) dans les relations (4.29), (4.30), (4.31), (4.32), (4.33), (4.34) et (4.35) ainsi que dans les relations (4.48), (4.49), (4.50) et (4.51) ensuite remplaçons les résultats obtenus dans les relations (4.42), (4.43), (4.44), (4.45) et (4.46) pour obtenir les valeurs prédictives des paramètres ( $x_3^0$ ,  $y_3^0$ ,  $T_3^0$ ,  $\rho_3^0$ ,  $\theta_3^0$ ) au point 3.

Pour l'algorithme du correcteur d'Euler, les valeurs des relations (4.21), (4.22), (4.23) et (4.24) sont utilisées et substituées dans les équations (4.42),

(4.43), (4.44), (4.45) et (4.46) pour obtenir les nouvelles valeurs des paramètres au point 3. Les valeurs corrigées sont  $(x_3^1, y_3^1, T_3^1, \rho_3^1, \theta_3^1)$ .

L'algorithme du correcteur d'Euler sera répété jusqu'à l'obtention de la précision  $\varepsilon$  voulue. Autrement dit, pour K itérations, il faut satisfaire la condition suivante pour assurer la convergence:

$$Erreur = \text{Max} \left\{ \left( y_3^k - y_3^{k-1} \right), \left( \theta_3^k - \theta_3^{k-1} \right), \left( T_3^k - T_3^{k-1} \right), \left( \rho_3^k - \rho_3^{k-1} \right) \right\} \leq \varepsilon \quad (4.56)$$

La variable x converge automatiquement avec la convergence de la condition (4.56).

#### 4.3.2. Procédure pour un nœud interne particulier

On rencontre ce type de points comme le montre la figure 1.6 lorsque le point 2 se trouve sur l'axe de symétrie [63, 64, 68].

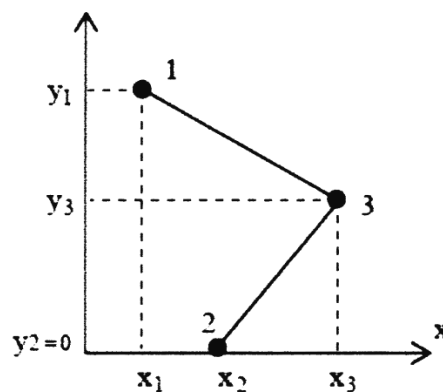


Figure 4.6: Nœud interne particulier

L'utilisation de l'algorithme du point interne pour notre cas pose un problème pour la détermination des propriétés de ce point particulier. Le terme  $C_{23}$  dans la relation (4.31) est indéterminé pour la valeur prédictive, puisque, au point 2 on a  $y_2=0, \theta_2=0$ . Comme le segment de la ligne de Mach montante est petit, le point 3 sera proche de l'axe de symétrie et dans ce cas, on peut rapprocher le numérateur du terme  $C_{23}$  par  $\sin(\theta_{23}) = \sin(\theta_3) \approx \theta_3$  et le dénominateur par  $\sin(\theta_{23} + \mu_{23}) \approx \sin(\mu_{23})$ . Le terme  $C_{23}$  se simplifie à:

$$C_{23} = \frac{\theta_3}{y_3} \quad (4.57)$$

L'équation (4.39) ne reste plus valable, et sera remplacée par:

$$A_{23}(T_3 - T_2)^2 + B_{23}(\rho_3 - \rho_2)^2 - (\theta_3 - \theta_2) = \theta_3 \quad (4.58)$$

Alors, la résolution de l'équation (4.58) par rapport à  $\theta_3$  donne:

$$\theta_3 = \frac{A_{23}(T_3 - T_2)^2 + B_{23}(\rho_3 - \rho_2)^2 + \theta_2}{2} \quad (4.59)$$

Remplaçons l'équation (4.59) dans la relation (4.36) et résolvons l'équation obtenue par rapport à  $T_3$  on obtient:

$$T_3 = \frac{2[Z_1 - B_{13} \cdot \rho_3 + \delta C_{13} \cdot x_3] - B_{23}(\rho_3 - \rho_2)^2}{A_{13} + A_{23}} \quad (4.60)$$

Comme résultat, l'équation (4.44) sera échangée par l'équation (4.60). Donc pour déterminer les propriétés  $(X_3, y_3, T_3, \rho_3, \theta_3)$  de ce type de point particulier, on utilise les équations (4.42), (4.43), (4.46), (4.59) et (4.60).

#### 4.3.3. Equations pour un point sur l'axe de symétrie

D'après la figure 4.7, le point 3 se trouve sur l'axe de symétrie de la tuyère. Donc, le point 2 au-dessous de cet axe est l'image du point 1. Comme résultat, le point 3 est par analogie un point interne.

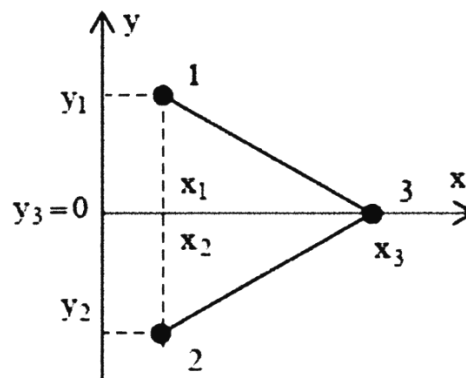


Figure 4.7: Nœud sur l'axe de symétrie

La procédure de calcul est la même que celle utilisée précédemment pour un point interne sauf que dans le cas actuel  $y_3 = v_3 = \theta_3 = 0$ . On ne tient compte que de la caractéristique  $C^-$ , représentée par le segment de droite 1-3. Les inconnues  $X_3$  et  $T_3$  sont respectivement obtenues par la résolution des équations algébriques (4.36) et (4.37). On obtient:

$$T_3 = \frac{\delta C_{13} (x_3 - x_1)^2 - B_{13} (\rho_3 - \rho_1)^2}{A_{13}} \quad (4.61)$$

$$x_3 = x_1 - \frac{y_1}{D_{13}} \quad (4.62)$$

On peut considérer ce point comme étant un point interne si les propriétés au point 2 sont prises par:

$$x_2 = x_1 \quad y_2 = y_1 \quad T_2 = T_1 \quad \rho_2 = \rho_1 \quad \theta_2 = \theta_1 \quad (4.63)$$

#### 4.4. Calcul des paramètres thermodynamiques

Une fois qu'on a déterminé les propriétés ( $x$ ,  $y$ ,  $T$ ,  $\rho$  et  $\theta$ ) en un point 3 du champ d'écoulement, on peut déterminer par exemple le nombre de Mach  $M_3$  en remplaçant la température  $T=T_3$  et la masse volumique  $\rho=\rho_3$  dans la relation (4.10). Les autres paramètres (rapports des masses volumiques, rapport des pressions, rapport des vitesses du son, vitesse de l'écoulement et composantes du vecteur de vitesse peuvent être déterminés respectivement.

#### 4.5. Méthodologie de conception des tuyères supersoniques

##### 4.5.1. Procédure de calcul dans la tuyère

La tuyère est un organe utilisée pour accélérer un écoulement supersonique jusqu'à un nombre de Mach supersonique, afin d'engendrer une force de poussée comme une résultante de cette accélération. Le calcul de l'écoulement dans la tuyère est divisé en deux parties nommées respectivement par région de Kernel et de transition.

##### 4.5.1.1 Région de Kernel

Le calcul de l'écoulement dans la région de Kernel commence au point A avec plusieurs manières de conception.

La première possibilité consiste à dimensionner la tuyère sur la base de l'angle de détente  $\theta^*$ . Le nombre  $N$  des  $C^-$  à calculées dans cette région sera parmi les



données. Ici le nombre de Mach  $M_S$  correspond à cet angle sera déterminé juste après le calcul de l'écoulement dans la région de Kernel.

La deuxième possibilité est que la conception se considère sur la base du nombre de Mach  $M_S$  de sortie. Ici le pas  $\Delta\theta$  doit être parmi les données. L'angle de détente  $\theta^*$  correspondante sera déterminé juste après le calcul de la région de Kernel. Dans ce cas un problème se rencontre durant le calcul, présenté par la figure 4.8, qui sera discuté plus tard.

$$v(T, \rho) = \int_T^{T^*} Fv_T(T, \rho) \Big|_{\rho} dT + \int_{\rho}^{\rho^*} Fv_{\rho}(T, \rho) \Big|_T d\rho \quad (4.64)$$

Les valeurs de  $T^*$  et  $\rho^*$  représentent la température et la masse volumique critique au col de la tuyère, voir paragraphe 3.6.3. La température  $T_S$  et la masse volumique  $\rho_S$  peut être déterminées par la résolution numérique du système d'équation algébrique non linéaire formé par les équations (2.3), (2.53) et (2.64).

Substituons par suite les valeurs de  $T^*$ ,  $T_S$ ,  $\rho^*$  et  $\rho_S$  dans la relation (4.64) pour obtenir la valeur de  $v_S$  et par suite, on peut obtenir la valeur de l'angle de détente  $\theta^*$  correspondant au nombre de Mach de sortie. La procédure d'intégration de la relation (4.2) est présentée dans le chapitre 3.

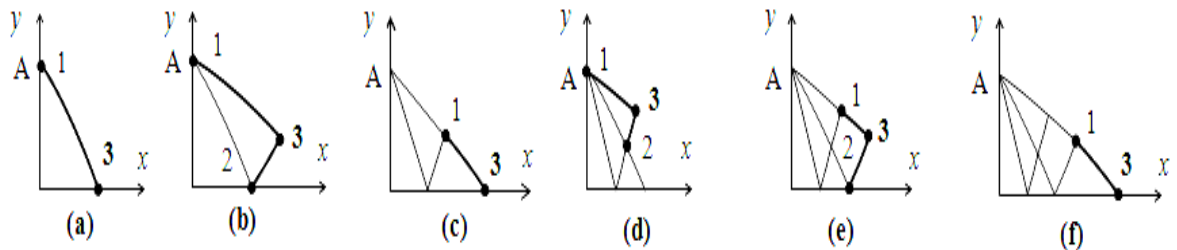


Figure 4.8: Processus du calcul des caractéristiques dans la région de Kernel

Il y a une infinité d'ondes de Mach qui seront issues du point A et qui se réfléchies sur l'axe de symétrie. Si la conception se fait su la base de l'angle de détente  $\theta^*$ , le calcul numérique nous oblige de discrétiser la zone de détente de l'écoulement  $0 \leq \theta \leq \theta^*$  en un nombre fini  $N$  de point. En total, on obtient  $N+1$  C ; y compris les deux extrémités. Alors, entre deux caractéristiques successives, on opte:

$$\Delta\theta = \Delta v \quad (4.65)$$

Si la conception se fait sur la base du nombre de Mach  $M_S$ , le calcul nous oblige de considérer un pas  $\Delta\theta = \Delta v$  assez petit.

Chaque passage à une caractéristique suivante, on incrémente l'angle de déviation de l'écoulement au point A par un pas  $\Delta\theta$ . Le nombre des  $C^-$  à calculées est inconnu a priori et dépend essentiellement sur le pas  $\Delta\theta$  opté et sur la valeur de  $M_S$  choisi.

Le pas  $\Delta\theta$  donné par cette manière donne un maillage uniforme pour les  $C^-$  de la fin de la région de Kernel et un espace large et maillage non uniforme pour les premières  $C^-$  juste après le col. En conséquence, le contour de la paroi juste après le col sera mal présenté. Pour corriger ce problème, on opte dans notre étude, un raffinement du maillage par insertion des  $C^-$  supplémentaires entre la ligne sonique et la première caractéristique régulière descendante. La distribution des caractéristiques insérées est réalisée en introduisant la condensation suivante [8, 63]:

$$v_i = \left( \frac{i}{N_i} \right)^\Delta \cdot \Delta v \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots, N_i \quad (4.66)$$

Avec  $N_i$  indique le nombre des  $C^-$  insérées entre le col et la première caractéristique régulière descendante et  $\delta$  représente un nombre réel supérieur à l'unité.

La procédure de calcul dans la région de Kernel est présentée dans la figure 4.8. On premier lieu on détermine les propriétés au point 1 de la figure 4.8a. En ce point, on a  $x_1=0$ ,  $y_1=y_A=y^*=1$ ,  $\theta_1=v_1$  si on opte un maillage avec condensation et est égale à  $\theta_1=\Delta\theta$  si le maillage est sans procédure de condensation. La température  $T_1$  et la masse volumique  $\rho_1$  doit être déterminée en résolvons le système d'équations suivant [20, 34]:

$$\begin{cases} \theta_1 = \int_{T_1}^{T^*} Fv_T(T, \rho) \Big|_{\rho} dT + \int_{\rho_1}^{\rho^*} Fv_{\rho}(T, \rho) \Big|_T d\rho \\ \int_{\rho^*}^{\rho_1} \left[ \frac{1}{\rho} - \frac{C_T(T, \rho)}{a^2(T, \rho)} \right] d\rho = \int_{T^*}^{T_1} \left[ \frac{C_p(T, \rho)}{a^2(T, \rho)} \right] dT \end{cases} \quad (4.67)$$

La résolution du système d'équations (4.67) se fait par la méthode de dichotomie couplée avec la méthode d'intégration de Gauss Legendre.

On procède ensuite à la détermination des propriétés au point 3 de la figure 4.8a en utilisant la procédure d'un point sur l'axe de symétrie. Maintenant la première caractéristique est calculée. On passe à la deuxième  $C^-$  et le calcul commence par la détermination des propriétés au point 1 de la figure 4.7b. En ce point on a toujours  $x_1=0$  et  $y_1=y_A$ , mais  $\theta_1=v_2$  ou  $\theta_1=2\Delta\theta$  suivant que le maillage est ou sans procédure de condensation. La détermination de la température  $T_1$  et la masse volumique  $\rho_1$  se fait toujours par la résolution du système d'équations (4.67) avec la nouvelle valeur de  $\theta_1$ . On passe par suite à la détermination des propriétés au point 3 de la figure 4.8b en utilisant la procédure d'un point interne. Finissons le calcul sur cette  $C^-$  par la détermination des propriétés au point 3 de la figure 4.8c en utilisant la procédure d'un point sur l'axe de symétrie. Une fois qu'on arrive au point de l'axe de symétrie, la caractéristique descendante concernée est calculée complètement. On passe à la troisième  $C^-$ . Chaque caractéristique à partir de la troisième, contient 4 types de points. Le premier, c'est le point 1 confondu avec le point A. Un point 3 sur l'axe de symétrie comme la montre la figure 4.8f. Un point 3 interne particulier comme la montre la figure 4.8e et le reste des points sont de type point interne. Chaque type de point nécessite une procédure différente comme présentée au paravent. Notons ici, qu'une  $C^-$  de numéro  $i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ ) contient  $i+1$  points à traiter. Si la zone de Kernel contient  $N$  caractéristiques à traiter, le nombre totale  $N_T$  de points à traité est exactement égale à:

$$N_T = 2 + 3 + 4 + \dots + N \quad (4.68)$$

Qui se partage en  $(N-1)$  points au début de chaque  $C^-$ ,  $(N-1)$  points sur l'axe de symétrie,  $(N-2)$  points interne particulier et le reste sont des points internes.

Le calcul de l'écoulement dans la région de Kernel s'arrête suivant le type de conception. Si le dimensionnement se fait sur la base de l'angle de détente  $\theta^*$ , le processus s'arrête si le calcul suivant toutes les  $N$  caractéristiques sélectionnées au départ est achevé. Dans ce cas, le nombre de Mach  $M_S$  est déterminé comme le nombre de Mach du dernier point calculé sur l'axe de symétrie. Les propriétés

en ce point sont celles de la section de sortie. Dans ce cas aucun problème ne se pose et la fin de calcul se fait d'une façon normale comme le montre la figure 4.9b.

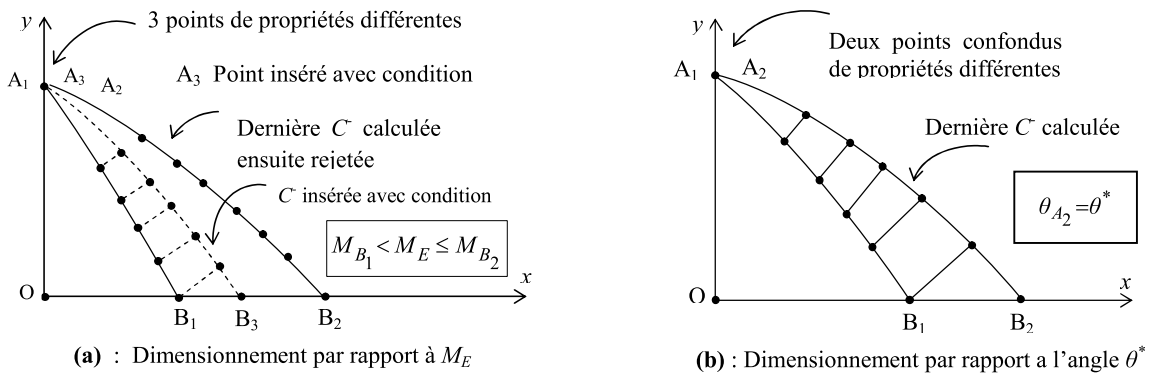


Figure 4.9 : Différents type de dimensionnement de la tuyère

Si le dimensionnement se fait sur la base du nombre de Mach  $M_S$  de sortie, chaque fois qu'on détermine les propriétés aux points d'une  $C$ , on contrôle si le nombre de Mach  $M_3$  de l'axe de symétrie est égal ou juste supérieur au nombre de Mach  $M_S$  pour arrêter le calcul. En général, c'est très rare de trouver  $M_3 = M_S$ . A cette raison, un problème est rencontré, consiste à détecter la caractéristique  $C$  contenant le nombre de Mach  $M_S$  sur l'axe de symétrie avec une précision  $\varepsilon$ . Cette situation est présentée sur la figure 4.9a. L'algorithme de dichotomie [5] sera utilisé pour insérer et éliminer des  $C$  entre les deux dernières  $C$  régulières, celle la dernière  $A_2B_2$  et l'avant dernière  $A_1B_1$  puisque on a trouvé la relation suivante:

$$M_{B_1} < M_S \leq M_{B_2} \quad (4.69)$$

Une  $C$   $A_3B_3$  sera insérée entre les  $C$   $A_1B_1$  et  $A_2B_2$ , qui remplace la dernière rejetée. En premier lieu, on insère un point  $A_3$  avec la condition suivante:

$$\theta_{A_3} = \theta_1 = \frac{\theta_{A_1} + \theta_{A_2}}{2} \quad (4.70)$$

On détermine la température  $T_{A_3}$  en résolvons le système d'équations (4.5) après le remplacement de l'expression (4.70) ensuite calculons les propriétés aux points de la  $C$   $A_3B_3$  jusqu'au point  $B_3$  et vérifions la condition (4.69). Le calcul sera répété jusqu'on détermine la valeur de  $M_S$  avec une précision  $\varepsilon$  voulue. Le nombre de  $C$  totale à traité sera augmenté légèrement par rapport à celui déterminé avant l'application de l'algorithme de dichotomie dans cette région. Après la

détermination du champ d'écoulement dans la région de Kernel, on peut déterminer sa longueur (longueur de détente) par:

$$\frac{L_d}{y^*} = \frac{x_b}{y^*} \quad (4.71)$$

#### 4.5.1.2 Contour de la paroi de la tuyère MLN 2D

La détermination du contour de la paroi se fait suivant le processus présenté sur la figure 4.10. Le processus de calcul à la forme d'une suite de récurrence et le calcul ne dépend pas des résultats aval du point considéré. Si on connaît les propriétés à un point, il est facile de déterminer celles du point adjacent à droite et vis vers ça jusqu'au point de la section de sortie.

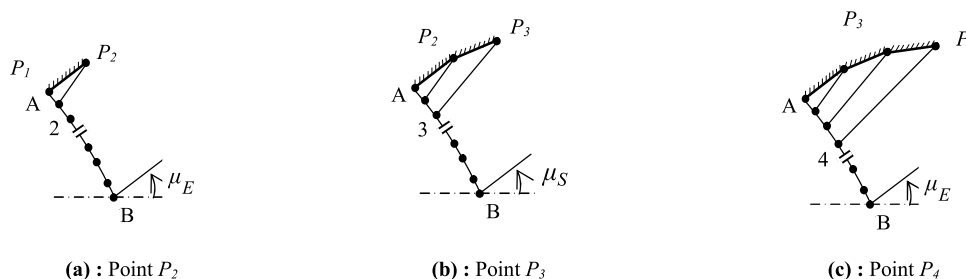


Figure 4.10 : Processus de détermination des points de la paroi

La paroi de la tuyère passe par le point A. En ce point, on a  $x_A=0.0$ ,  $y_A=y^*$ ,  $M_A=M^*$  et  $\theta_A=\theta^*$ . La valeur de  $M^*$  est égale au nombre de Mach au point A juste après la détente et correspondant au nombre de Mach au premier point sur la dernière caractéristique descendante AB, voir figure 4.2.

Les propriétés de l'écoulement sur chaque ligne de Mach montante dans la région de transition ABE sont constantes, alors les paramètres ( $T$ ,  $\theta$ ,  $M$ ,  $P$ ,  $\rho$ ) sur les points  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) de la paroi sont connues et il nous reste qu'à déterminer les positions ( $x$ ,  $y$ ) de chaque points. A titre information, les lignes de Mach montante dans cette région représentent une portion des lignes iso-Mach.

La figure 4.11 présente un schéma général pour déterminer les équations nécessaires pour l'obtention de la position du point  $P_i$ . La pente d'un panneau numéro ( $i-1$ ) entre les points  $i-1$  et  $i$  est approximée par l'angle  $\alpha_{(i-1)}$  illustré sur

cette figure. La position du point  $P_i$  peut être déterminée par les relations suivantes:

$$\begin{cases} \frac{x_{P_i}}{y^*} = \frac{\left(\frac{y_i}{y^*}\right) - \left(\frac{y_{P_{i-1}}}{y^*}\right) + \left(\frac{x_{P_{i-1}}}{y^*}\right) \operatorname{tg}(\alpha_{(i-1)}) - \left(\frac{x_i}{y^*}\right) \operatorname{tg}(\theta_i + \mu_i)}{\operatorname{tg}(\alpha_{(i-1)}) - \operatorname{tg}(\theta_i + \mu_i)} \\ \frac{y_{P_i}}{y^*} = \frac{y_{P_{i-1}}}{y^*} + \left(\frac{x_{P_i}}{y^*} - \frac{x_{P_{i-1}}}{y^*}\right) \operatorname{tg}(\alpha_{(i-1)}) \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (4.72)$$

$$\text{Avec} \quad \alpha_{(i-1)} = \alpha_\theta \cdot \theta_{i-1} + (1 - \alpha_\theta) \cdot \theta_i \quad (4.73)$$

$$\text{Pour } i=1, \text{ on a} \quad \frac{x_{P_1}}{y^*} = 0.0 \quad , \quad \frac{y_{P_1}}{y^*} = 1$$

Lorsque  $i=N$ , On obtient la position du dernier point de la paroi qui représente le point de la section de sortie. Alors, a partir de ce point, et sous forme non-dimensionnelle, on peut calculer la longueur de la tuyère et la section de sortie correspondant à cette discrétisation de  $N$  points par: sous forme non-dimensionnelle, on a :

$$x_S = x_{P_N} \quad , \quad y_S = y_{P_N}$$

La section de sortie correspondant à la discrétisation de  $N$  points est donnée, sous forme non-dimensionnelle, par:

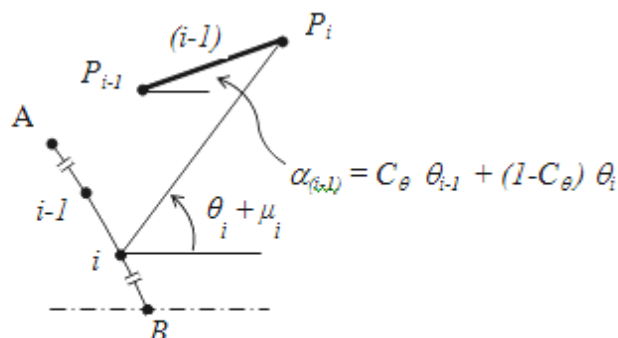
$$\frac{L}{y^*} = \frac{x_S}{y^*} = \frac{x_{P_N}}{y^*} \quad (4.74)$$

$$\frac{A_s}{A_*} = \frac{y_S}{y^*} (\text{calculé}) = \frac{y_{P_N}}{y^*} \quad (4.75)$$

La comparaison des résultats numériques obtenus sera faite entre le rayon de la section de sortie calculé numériquement et le rapport des sections théorique normalisé ( $y^* = 1.0$ ) présenté par la formule suivante illustré dans la référence [13].

$$\frac{y_S}{y^*} = \frac{A_S}{A_*} = EXP \left( \int_{T^*}^T \left( \frac{(1 - M^2(T, \rho))^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_P(T, \rho) \right) dT + \int_{\rho^*}^{\rho} \left( \frac{(1 - M^2(T, \rho))^2}{V^2(T, \rho)} \cdot C_T(T, \rho) \right) d\rho \right) \quad (4.76)$$

Le nombre de points trouvés sur la paroi de la tuyère est égale au nombre de points de la dernière  $C^-$  AB de la région de Kernel.



*AB: Dernière caractéristique descendante de la zone de Kernel*

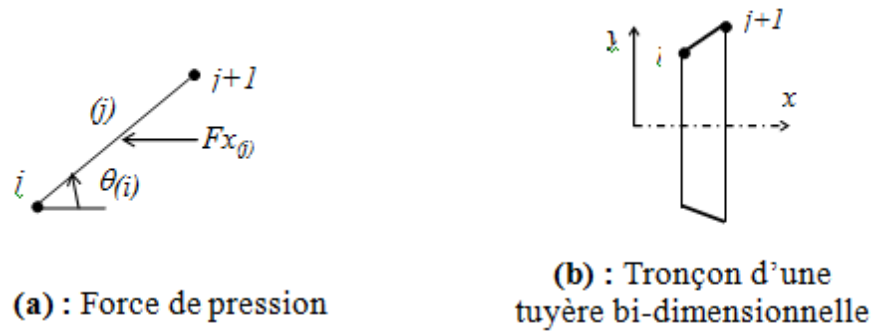
Figure 4.11 : Présentation les paramètres de calcul du point  $P_i$  ( $i=2, 3, 4, \dots, N$ ) de la paroi de la tuyère

Il est très intéressant de déterminer des courbes dans le champ d'écoulement de la tuyère, possédants même propriétés physique. Ces courbes sont appelées courbes iso-valeurs. Les plus intéressantes sont les courbes iso-Mach et les iso-directions. Notons ici, que les courbes iso pressions, iso températures, iso masse volumiques sont elles mêmes les iso-Machs. La détermination de ces courbes se fait après le calcul de l'écoulement dans la tuyère. La recherche des points de ces courbes se fait dans chaque segment des caractéristiques que se soit montantes, descendantes, ou sur les segments de l'axe de symétrie, y compris la paroi de la tuyère.

#### 4.5.2 Masse de la structure de la tuyère

Pour arriver à calculer la masse de la structure du divergent de la tuyère, on considère les deux suppositions suivantes:

1. La forme de la paroi entre deux points successifs est une ligne de droite. Cette supposition donne de bon résultat plus le nombre de points  $N$  de la paroi soit très élevé.
2. La structure du divergent est constituée de même matériau, d'une épaisseur  $t_M$  et masse volumique  $\rho_m$  constante.



(a) : Force de pression

(b) : Tronçon d'une tuyère bi-dimensionnelle

Figure 4.12 : Présentation d'un tronçon de la tuyère

Le calcul de la masse est lié avec le calcul de l'arc curviligne de la paroi. Sous la forme non-dimensionnelle, on obtient [57]:

$$C_{Masse} = \frac{Masse}{\rho_M t_M y^* l} = \sum_{j=1}^{j=N-1} \left[ \left( \frac{x_{j+1}}{y^*} - \frac{x_j}{y^*} \right) + \left( \frac{y_{j+1}}{y^*} - \frac{y_j}{y^*} \right) \right] \quad (4.77)$$

#### 4.5.3 Force de pression exercée sur la paroi du divergent

Pour calculer la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère, on suppose encore que la pression exercée sur le tronçon (j) de la figure B.5, nommée par  $P_{(j)}$ , est approximée par:

$$P_{(j)} = \alpha P_j + (1-\alpha) P_{j+1} \quad (4.78)$$

Alors: 
$$F_{(j)} = P_{(j)} S_{(j)} \quad (4.79)$$

Pour les applications, on prend  $\alpha=0.5$ .

La force de pression axiale exercée sur le panneau (j), par unité de profondeur, est donnée par:

$$F_{x_{(j)}} = P_{(j)} (y_{j+1} - y_j) l \quad (4.80)$$

Alors, la force de pression axiale  $F_x$  exercée sur la paroi, est calculée comme la somme de toutes les forces de pression exercées sur tous les tronçons. Sous forme non-dimensionnelle, on obtient:



$$C_F = \frac{F_x}{P_0 y_* l} = \sum_{j=1}^{j=N-1} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{(j)} \left[ \frac{y_{j+1}}{y_*} - \frac{y_j}{y_*} \right] \quad (4.81)$$

Le rapport des pressions dans l'expression (B.19) est donné par la relation (3.43).

#### 4.6. Erreur du modèle du gaz à haute température

Le modèle mathématique d'un gaz à haute température est développé sur la base de considérer le gaz est parfait avec une chaleur spécifique  $C_p$  et le rapport  $\gamma$  variables avec la température, qui donne des résultats acceptables avec une certaine erreur pour des faibles valeurs de la pression génératrice. D'après cette étude, une différence entre les résultats donnés entre le modèle *HT* et notre modèle *RG* sera présentée. L'erreur donnée par le modèle *GP* par rapport à notre modèle peut être calculée pour chaque paramètre de conception. Alors pour chaque triple  $(P_0, T_0, M_S)$ , l'erreur  $\varepsilon$  peut être évaluée par la relation suivante:

$$\varepsilon_{paramètre} \% = \left| 1 - \frac{Paramètre_{HT}}{Paramètre_{RG}} \right| \times 100 \quad (4.82)$$

Le mot paramètre dans la relation (4.81) peut représenter tous les paramètres de conception, spécialement la longueur de la tuyère, la masse de la structure, la force de pression exercée sur la paroi et le rapport des sections. Dans les applications aérodynamiques, généralement les auteurs optent une erreur inférieure à 5 %.

4.5.

## CHAPITRE 5

### RESULTATS ET COMMENTAIRES

Dans ce chapitre, on procède à la présentation des divers résultats obtenus par un programme de calcul élaboré en exploitant les différentes équations trouvées par notre modèle dans les chapitres précédents et de les comparer avec les résultats obtenus par le modèle du gaz parfait GP et le modèle haute température HT. Nos résultats sont exposés sous forme de courbes divisées en sept parties. La première partie sert à la présentation des résultats concernant les caractéristiques d'un gaz réel. La deuxième partie concerne les paramètres critiques au niveau du col. La troisième partie comporte les résultats les paramètres supersoniques pour les trois modèles GR, GP et HT, suivi par les résultats sur l'erreur pour ces paramètres en quatrième partie. La cinquième partie présente la fonction de Prandtl Meyer pour un gaz réel caractérisé par l'équation d'état de Berthelot dans un régime supersonique au seuil de la dissociation moléculaire (le comportement vibratoire des molécules est inclus) en insistant sur l'effet de la pression génératrice et son influence sur la fonction de Prandtl Meyer. La sixième partie assiste à donner une illustration sur les différences et les écarts entre les modèles GR, GP et HT avec une précision de  $10^{-5}$  afin de bien suivre les changements qui deviennent. Ainsi d'avoir les corrections qui peuvent être porté pour les modèles du gaz thermiquement et caloriquement parfait et même pour le modèle thermiquement parfait mais caloriquement imparfait en intervenant les effets de covolume ( $b$ ) et les forces d'attraction intermoléculaires ( $c$ ), sans oublier l'effet de la température caractéristique de vibration moléculaire ( $\theta$ ). La septième partie comporte les résultats sur la tuyère à détente centrée bidimensionnelle (2D MLN) par la présentation discrétisation et la qualité du maillage, l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur l'allure de la paroi de la tuyère, la variation des paramètres thermodynamiques à travers la paroi de la tuyère, les paramètres de conception de la tuyère MLN. A la fin de notre étude, on présentera les résultats sur les erreurs de conception comme la longueur de la tuyère et le rayon de la section de sortie.

On a préféré la présentation des figures pour tous les régimes générateurs possibles, c'est à dire pour les quatre cas suivant:

- basse température et basse pression.
- basse température et haute pression.
- Haute température et haute pression.
- Température et pression modérées.

La gamme de température choisie est de 220 K (au-dessus de la température de liquéfaction) jusqu'à 3000 K (au-dessous du seuil de dissociation moléculaire), et la gamme de pression sélectionnée est de 1 Bar jusqu'à 100 bar pour tous les résultats sauf la fonction de Prandtl Meyer où on augmente la pression jusqu'au 550 bar afin de bien établir l'effet de la pression sur cette fonction.

Les résultats présentés concernant le modèle GP et le modèle HT sont obtenus par notre calcul mais aussi peuvent être trouvés dans les références indiquées dans chaque chapitre.

### 5.1. Résultats pour les caractéristiques d'un gaz réel

La figure 5.1 représente la variation de la masse volumique génératrice  $\rho_0$  calculée numériquement par la méthode de dichotomie en fonction de la température génératrice  $T_0$ . Pour quelques valeurs de la pression génératrice  $P_0$ , avec une précision de  $10^{-7}$ . On remarque une diminution de la masse volumique lorsque  $T_0$  augmente, pour des faibles valeurs de  $T_0$ , nous remarquons que les résultats obtenus par le modèle gaz réelle s'éloignent de ceux obtenus par le modèle gaz parfait et s'approche pour des grandes valeurs de  $T_0$ , on remarque aussi que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une augmentation de la masse volumique, dans ce cas pour des faibles valeurs de la température, nous remarquons que les résultats obtenus par le gaz réelle s'éloigne de ceux obtenus le modèle gaz parfait et s'approchent pour des grandes valeurs de la température  $T_0$ . Cette variation montre les effets de taille moléculaire ( $b$ ) et de la force intermoléculaire ( $c$ ) liées par l'équation de Berthelot. Mais en bref on peut le dire que les deux modelés suivent la même allure de décroissance.

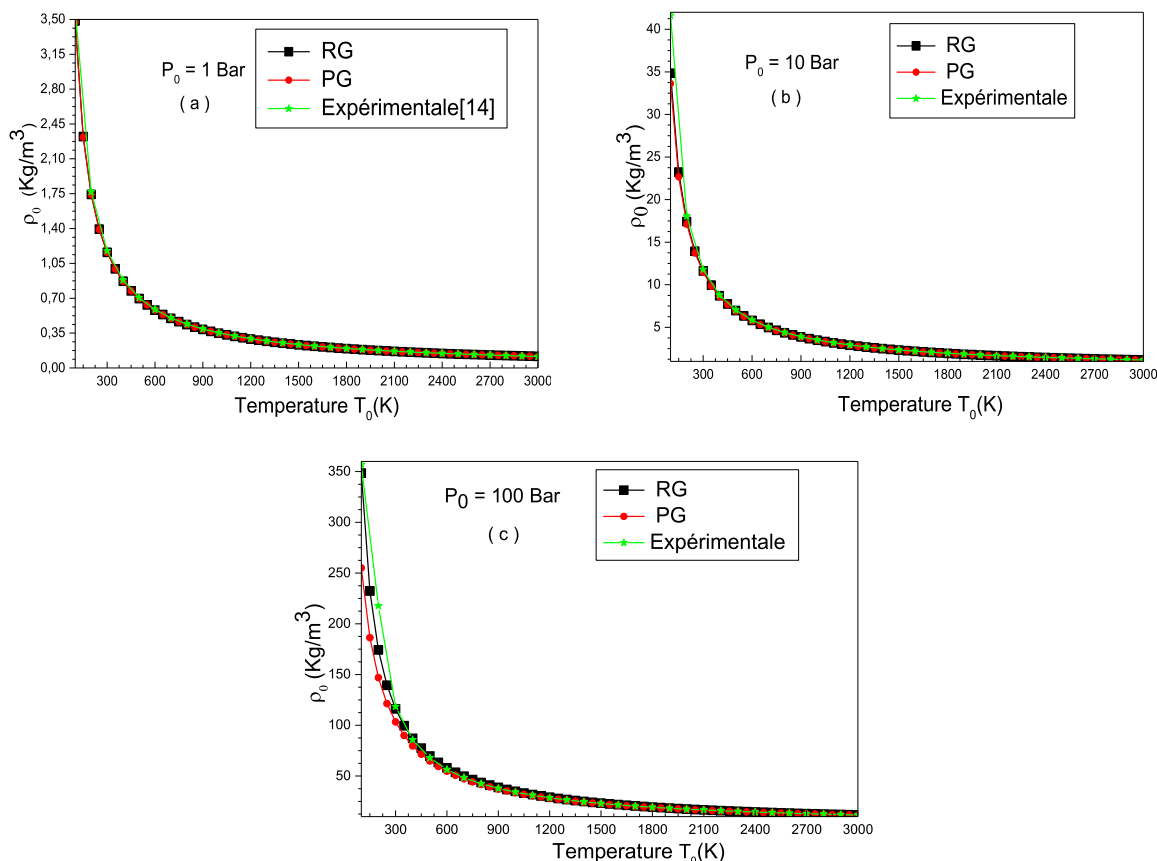


Figure 5.1 : Variation de la masse volumique génératrice  $\rho_0$

La figure 5.2 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage donnée par la masse volumique génératrice  $\rho_0$  du modèle gaz réelle au modèle gaz parfait en fonction de la température génératrice  $T_0$ , Pour quelques valeurs de la pression génératrice  $P_0$ .

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à 5 %, le modèle GP peut être utilisé, si  $P_0$  soit inférieure à 4 Bar pour n'importe quelle valeur de la température génératrice  $T_0$ , ou jusqu'à  $T_0=1000$  K pour n'importe quelle valeur de  $P_0$  n'excède pas 200 Bar. Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de  $P_0$  et  $T_0$  modéré.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $T_0$  et  $P_0$  et elle augmente si  $P_0$  augmente ce qui monte les effets de taille moléculaire  $a$  et de la force intermoléculaire  $c$  dans l'équation de Berthelot. Par exemple si  $T_0=250$  K, l'utilisation du modèle GP va nous donner une erreur relative égale à  $\varepsilon=12.298$  % pour  $P_0=100$  Bar, qui donne une différence de  $16.20$  Kg/m<sup>3</sup> entre les valeurs des

températures des deux modèles,  $\varepsilon=1.36\%$  pour  $P_0=10\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon=0.14\%$  pour  $P_0=1\text{ Bar}$ .

On peut remarquer qu'à haute pression et basse température, l'erreur  $\varepsilon$  est grande. Cette position est interprétée par l'impossibilité d'utiliser le modèle GP jusqu'à  $T_0=1000\text{ K}$  pour les applications aéronautiques, si on accepte une erreur inférieure à 5%. Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur diminue au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle GP indépendamment de la pression  $P_0$ , si la température est grande.

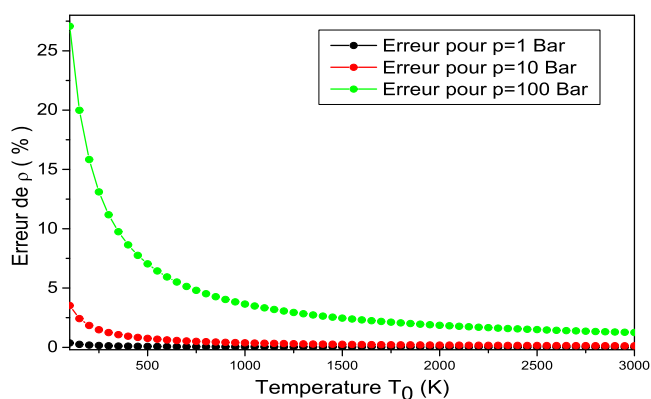


Figure 5.2 : Variation de l'erreur relative de  $\rho_0$  en fonction de  $T_0$

La figure 5.3 représente la variation du facteur de compressibilité  $Z$  calculé numériquement à partir de l'équation (1.76) du modèle gaz réel (modèle de Berthelot) en fonction de la température génératrice  $T_0$ , Pour quelques valeurs de la pression génératrice  $P_0$ .

On remarque que l'augmentation de la pression  $P_0$  pour une température  $T$  donnée entraîne une augmentation du facteur de compressibilité  $Z$ , on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour une pression  $P$  donnée entraîne une diminution du facteur de compressibilité  $Z$ .

Finalement, on peut conclure que notre modèle (modèle de Berthelot), soit proche au modèle du gaz parfait ( $Z=1$ ) lorsque la pression est très faible, ou bien à haute température même si la pression est élevée.. Et l'écart entre les deux modèles devient important pour le cas haute pression basse température. Dans ce cas on peut voir la différence entre les deux modèles. Dans tous les cas, le

facteur de compressibilité ne peut jamais être égale à un ( $Z=1$ ) ce qui implique les limites de l'équation d'état des gaz parfaits.

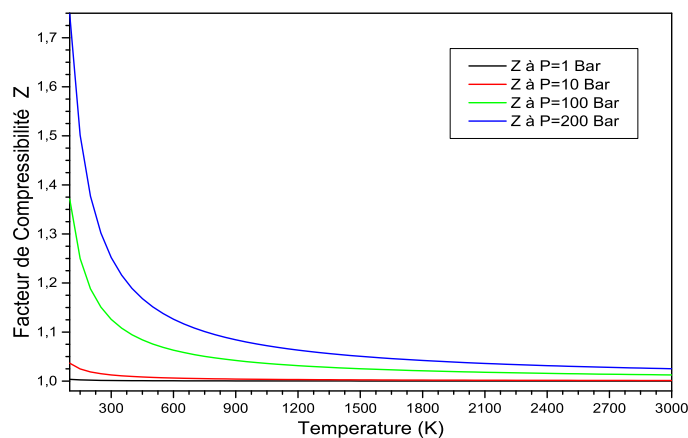


Figure 5.3 : Variation de facteur de compressibilité en fonction de  $T_0$  pour quelque valeur de pression  $P_0$

La figure 5.4 représente la variation des chaleurs spécifiques  $C_P$  en fonction de la température jusqu'à  $3000\text{ K}$ , pour quelque valeurs de la pression  $P_0$ , et pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*. Le graphe à Haute Température est présenté en utilisant le polynôme d'interpolation. A basse température on remarque que les deux modèles *HT* et *GP* suivent la même allure, sauf notre modèle *RG* varier dépend à la pression  $P_0$ , par exemple a  $T_0=100\text{ K}$ , on trouve  $C_P = 1001.289\text{ J/Kg k}$  pour le modèle *GP*,  $C_P = 1001.159\text{ J/Kg k}$  pour le modèle *HT*,  $C_P = 1001.536, 1003.602, 1014.94\text{ J/Kg k}$  pour le modèle *RG* qui correspondent les pressions  $P_0=1, 10$  et  $100\text{ Bar}$ , dans ce cas on peut dire que les deux modèles *GP* et *HT* être considérées comme calorifiquement parfait, mais lorsque la température  $T_0$  augmente, on remarque que les deux modèles *HT* et *RG* augmentent et prennent la même allure jusqu'à  $1300\text{ K}$ , dans ce cas on peut dire que les deux modèles *HT* et *RG* sont calorifiquement imparfait. On remarque aussi que le  $C_P$  et reste constante pour le modèle *RG* pour n'apporte qu'elle valeurs de la pression  $P_0$  et donne des valeurs toujours inférieure par rapport au modèle *HT*. Mais si la température  $T_0$  augmente supérieur a  $1300\text{ K}$ , on peut voir la différence entre les deux modèles *HT* et *RG*, ce qui montre les effets de taille moléculaire  $a$ , de la force intermoléculaire  $b$ , et la température caractéristique de vibration  $\theta$ , cette variation va influent sur le comportement thermodynamique de l'écoulement, et

dans ce cas on peut dire que notre modèle est thermiquement et calorifiquement imparfait.

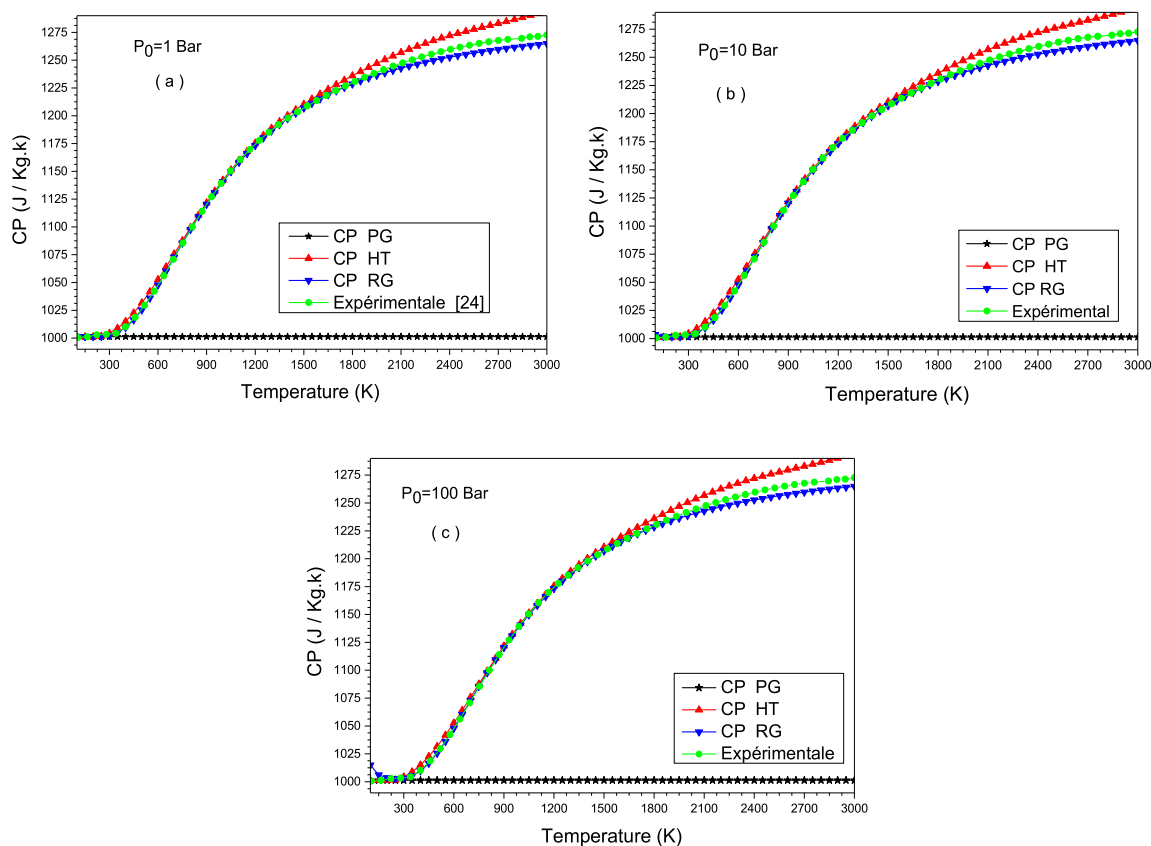


Figure 5.4 : Variation de la chaleur spécifique  $C_p$  en fonction de  $T_0$  pour différentes  $P_0$

La figure 5.5 représente la variation du rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$  en fonction de la température jusqu'à  $3000\text{ K}$ , pour quelques valeurs de la pression  $P_0$ , et pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*. Le graphe à Haute Température est présenté en utilisant le polynôme d'interpolation. A basse température on remarque que les deux modèles *HT* et *GP* suivent la même allure, sauf notre modèle *RG* qui varie avec la pression  $P_0$ , par exemple à  $T_0=100\text{ K}$ , on trouve  $\gamma = 1.402$  pour le modèle *GP*,  $\gamma = 1.40188$  pour le modèle *HT*,  $\gamma = 1.40218$ ,  $1.40367$ ,  $1.4092$  pour le modèle *RG* qui correspondent les pressions  $P_0=1, 10$  et  $100\text{ Bar}$ , mais lorsque la température  $T_0$  augmente, on remarque que les deux modèles *HT* et *RG* diminuent et prennent la même allure jusqu'à  $1300\text{ K}$ , Mais si la température  $T_0$  augmente supérieur à  $1300\text{ K}$ , on peut voir la différence entre les

deux modèles HT et RG, ce qui montre les effets de taille moléculaire  $a$ , de la force intermoléculaire  $b$ , et la température caractéristique de vibration  $\theta$ , cette variation va influent sur le comportement thermodynamique de l'écoulement, on remarque aussi que le rapport  $\gamma$  reste constante pour le modèle RG pour n'apporte qu'elle valeurs de la pression  $P_0$  et donne des valeurs toujours supérieur par rapport au modèle HT.

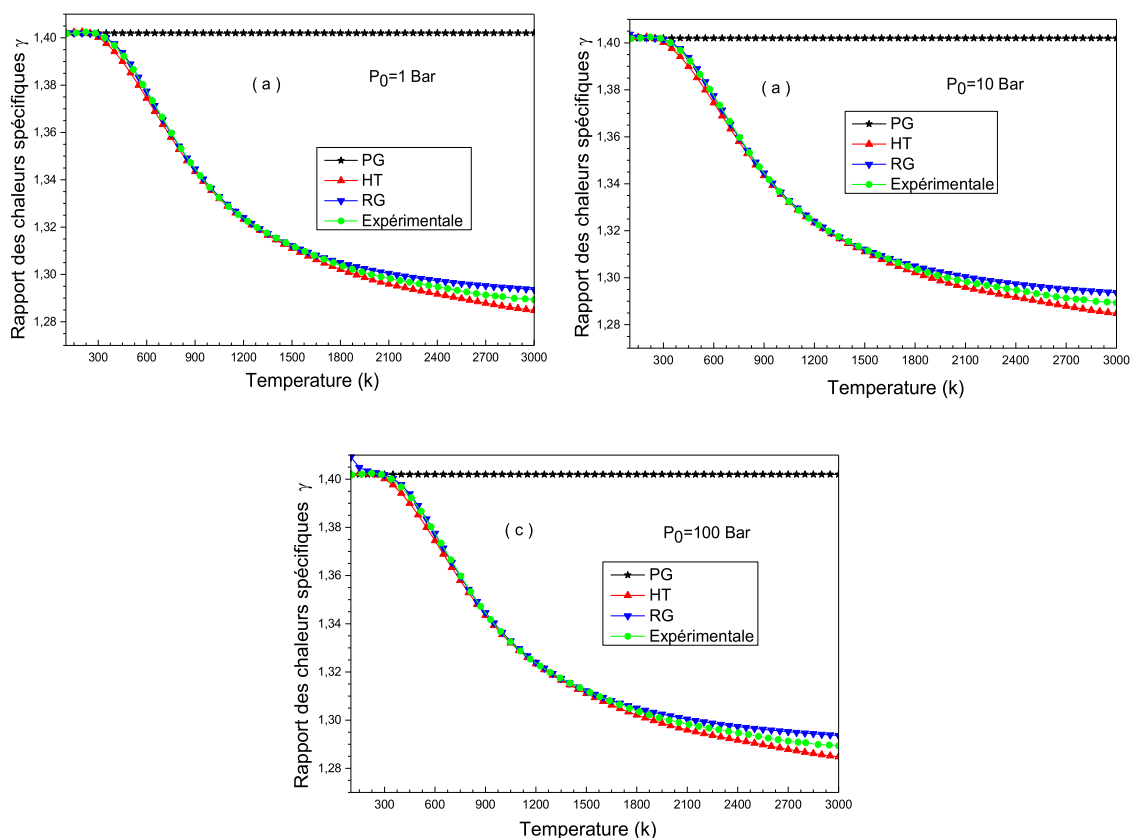


Figure 5.5 : Variation du rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$  en fonction de  $T_0$  pour quelques valeurs de la pression  $P_0$

La figure 5.6 représente la variation du coefficient  $C_T$  dépend le modèle RG en fonction de la température  $T_0$  jusqu'à  $3000\text{ K}$ , pour quelque valeurs de la pression  $P_0$ . Pour voir une idée sur la variation de ce paramètre, il faut l'analyser précieusement. On remarque que le coefficient  $C_T$  croit linéairement avec la température  $T_0$ . On remarque aussi que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une augmentation du coefficient  $C_T$ , par exemple a  $T_0=1500\text{ K}$ , on trouve  $C_T= 462.23, 464.33, 473.74, 485.64$  (  $\text{J/Kg K}$  )



respectivement pour les pressions génératrices  $p_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $50 \text{ Bar}$  et  $100 \text{ Bar}$ , cette figure montre que le coefficient  $C_T$  dépend à la pression et la température génératrices.

Donc pour l'équation d'état de Berthelot on a développé un nouveau paramètre thermodynamique dépend essentiellement de la taille moléculaire (le covolume  $b$ ) et les forces d'attraction intermoléculaire ( $c$ ) et qui doit s'annuler pour les modèles des gaz colorifiquement et thermiquement parfait (gaz parfait) et le modèle calorifiquement imparfait et thermiquement parfait (gaz parfait à haute température)

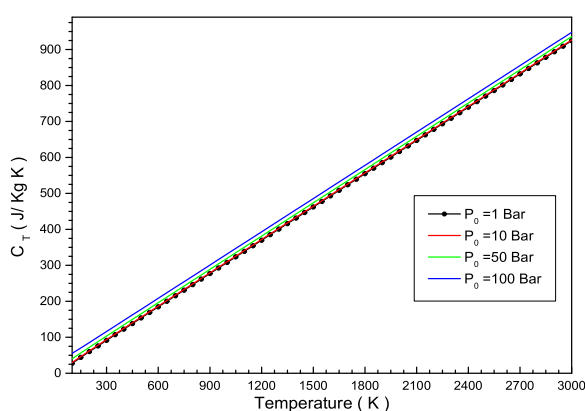


Figure 5.6 : Variation du coefficient  $C_T$  en fonction de  $T_0$  pour quelque valeur de  $P_0$

La figure 5.7 représente la variation de la vitesse du son  $a$  en fonction de la température jusqu'à  $3000 \text{ K}$ , pour quelque valeurs de la pression  $P_0$ , et pour les modèles  $HT$ ,  $GP$  et  $RG$ . On remarque que l'augmentation de la température  $T_0$ , pour toutes les modèles entraîne une augmentation de la vitesse du son  $a$ . A basse température on remarque que les deux modèles  $HT$  et  $GP$  prennent presque la même allure, sauf notre modèle  $RG$ , il dépend à la pression  $P_0$ , d'autant important pour  $P_0 = 100 \text{ Bar}$ , par exemple à  $T_0 = 700 \text{ K}$ , on trouve  $a = 530.81 \text{ ms}^{-1}$  pour le modèle  $GP$ ,  $a = 523.45 \text{ ms}^{-1}$  pour le modèle  $HT$ ,  $a = 524.12, 526.67, 552.17 \text{ ms}^{-1}$  pour le modèle  $RG$  qui correspondent les pressions  $P_0 = 1, 10$  et  $100 \text{ Bar}$ , mais lorsque la température  $T_0$  augmente, on peut voir la différence entre les deux modèles  $GP$ ,  $HT$  et  $RG$ , par exemple  $T_0 = 2000 \text{ K}$ , on trouve  $a = 897.23 \text{ ms}^{-1}$  pour le modèle  $GP$ ,  $a = 863.22 \text{ ms}^{-1}$  pour le modèle  $HT$ ,  $a = 864.72, 866.19, 880.93 \text{ ms}^{-1}$  pour le modèle  $RG$  qui correspondent les

pressions  $P_0=1,10$  et  $100$  Bar, cette variation va influencer sur le comportement thermodynamique de l'écoulement, et ce qui montre les effets de taille moléculaire  $a$ , de la force intermoléculaire  $b$ , et la température caractéristique de vibration  $\theta$ . On remarque aussi que de la vitesse du son de notre modèle RG dépend  $a$  la température  $T_0$  et la pression  $P_0$ .

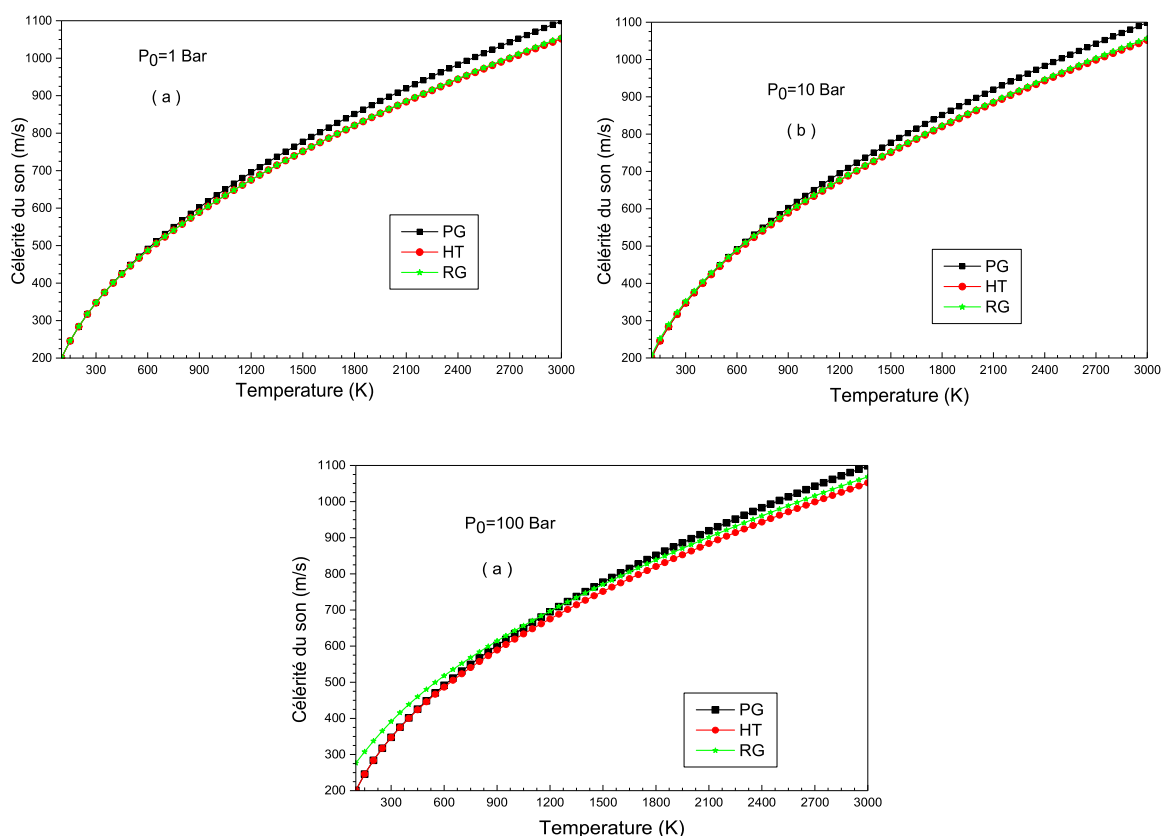


Figure 5.7 : La célérité du son en fonction de la température génératrice  $T_0$  pour quelques valeurs de pression  $P_0$

## 5.2. Résultats pour les paramètres critiques (au col)

La figure 5.8 représente la variation des rapports de température critiques  $T^*/T_0$  en fonction de la température génératrice  $T_0$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0=1$  Bar,  $10$  Bar,  $50$  Bar, on remarque que l'augmentation de la température génératrice  $T_0$  pour différents modèles entraîne une augmentation des rapports de température critiques  $T^*/T_0$ , cette augmentation devient considérable lorsque la valeur de  $T_0$  est élevée, ce qui

n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, on remarque aussi que les rapports de température critiques obtenues par notre modèle RG sont toujours inférieure de ceux obtenus par le modèle HT, ce qui donne que notre modèle plus refroidi le gaz par rapport au modèle HT, et que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une diminution des rapports de température critiques  $T^*/T_0$ , mais si la température génératrice  $T_0$  supérieure à 2000 K, on remarque que les trois courbes de notre modèle RG s'approchent, et s'éloignent lorsque la valeur de la température génératrice  $T_0$  diminue, cet éloignement devient considérable lorsque la température génératrice  $T_0$  est inférieure à 1000 K, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure au égale à 50 Bar, ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur les paramètres critiques de l'écoulement, Les valeurs numériques présentées sont déterminées avec une précision meilleure à  $\epsilon = 10^{-16}$ .

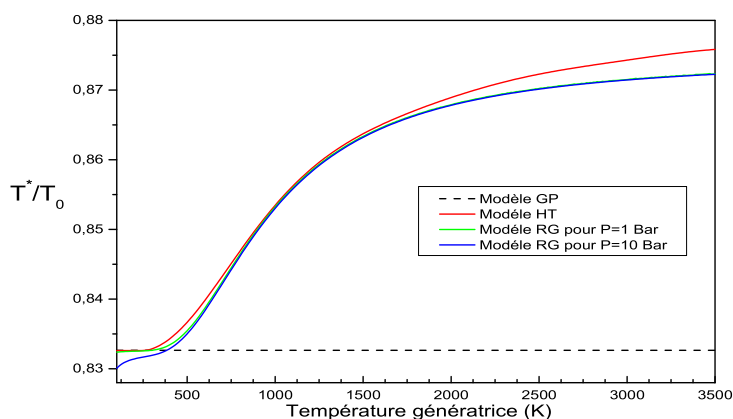


Figure 5.8 : Rapport des températures critiques en fonction de  $T_0$  pour quelques valeurs de la pression  $P_0$

La figure 5.9 représente la variation des rapports de la masse volumique critiques  $\rho^*/\rho_0$  en fonction de la température génératrice  $T_0$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar, 50 Bar, on remarque que l'augmentation de la température génératrice  $T_0$  pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de la masse volumique critiques  $\rho^*/\rho_0$ , cette diminution devient considérable lorsque la valeur de  $T_0$  est inférieure à 1400 K, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, on remarque aussi que les rapports de la masse volumique critiques  $\rho^*/\rho_0$  obtenues par notre modèle *RG* sont toujours supérieures de ceux obtenus par le modèle *HT* et que

l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une augmentation des rapports de la masse volumique critiques  $\rho^* / \rho_0$ , mais si la température génératrice  $T_0$  supérieure à 2000 K, on remarque que les trois courbes de notre modèle RG s'approchent, et s'éloignent lorsque la valeur de la température génératrice  $T_0$  diminue, cet éloignement devient considérable lorsque la température génératrice  $T_0$  est inférieure à 1000 K, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure au égale à 50 Bar, ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur les paramètres critiques de l'écoulement, Les valeurs numériques présentées sont déterminées avec une précision meilleure à  $\epsilon = 10^{-16}$ .

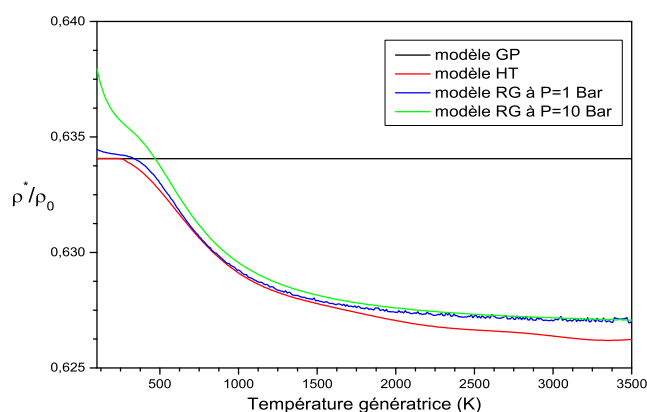


Figure 5.9 : Rapport des masses volumique critiques en fonction de  $T_0$  pour quelques valeurs de la pression  $P_0$

La figure 5.10 représente la variation des rapports de la pression critiques  $P^* / P_0$  en fonction de la température génératrice  $T_0$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar, 50 Bar, on remarque que l'augmentation de la température génératrice  $T_0$  pour différents modèles entraîne une augmentation des rapports de la pression critiques  $P^* / P_0$ , cette augmentation devient considérable lorsque la valeur de  $T_0$  est élevée, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, on remarque aussi que les rapports de la pression critiques obtenues par notre modèle *RG* sont toujours inférieure de ceux obtenus par le modèle *HT* et que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une diminution des rapports de la pression critiques  $P^* / P_0$ , mais si la température génératrice  $T_0$  supérieure à 2000 K, on remarque que les trois courbes de notre modèle *RG* s'approchent, et s'éloignent lorsque la

valeur de la température génératrice  $T_0$  diminue, cet éloignement devient considérable lorsque la température génératrice  $T_0$  est inférieure à 1000 K, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure ou égale à 50 Bar, ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur les paramètres critiques de l'écoulement. Les valeurs numériques présentées sont déterminées avec une précision meilleure à  $\varepsilon = 10^{-16}$ .

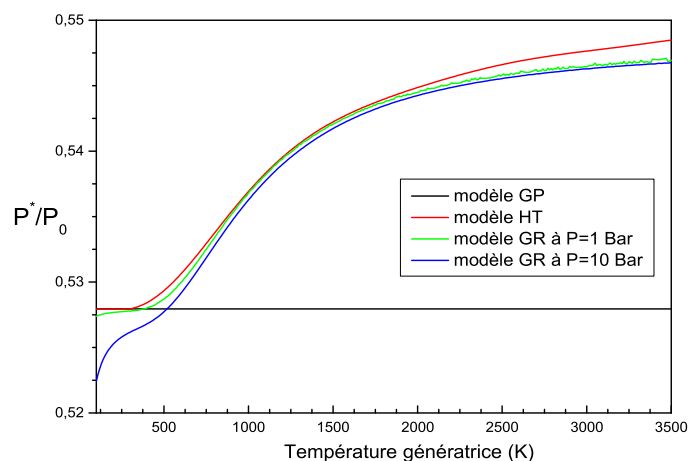


Figure 5.10 : Rapport des pressions critiques en fonction de  $T_0$  pour quelques valeurs de la pression  $P_0$

La figure 5.11 représente la variation des rapports de la vitesse du son critiques  $a^*/a_0$  en fonction de la température génératrice  $T_0$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar, 50 Bar, on remarque que l'augmentation de la température génératrice  $T_0$  pour différents modèles entraîne une augmentation des rapports de la vitesse du son critiques  $a^*/a_0$ , cette augmentation devient considérable lorsque la valeur de  $T_0$  est élevée, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, on remarque aussi que les rapports de la vitesse du son critiques obtenus par notre modèle *RG* sont toujours inférieurs de ceux obtenus par le modèle *HT* et que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une diminution des rapports de la vitesse du son critiques  $a^*/a_0$ , mais si la température génératrice  $T_0$  supérieure à 2000 K, on remarque que les trois courbes de notre modèle *RG* s'approchent, et s'éloignent lorsque la valeur de la température génératrice  $T_0$  diminue, cet éloignement devient considérable lorsque la température génératrice  $T_0$  est inférieure à 1000 K, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure ou égale à

50 Bar, ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur les paramètres critiques de l'écoulement, Les valeurs numériques présentées sont déterminées avec une précision meilleure à  $\epsilon = 10^{-16}$ .

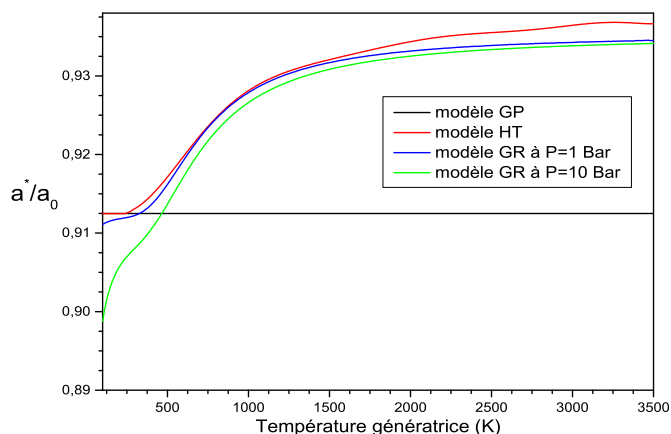


Figure 5.11 : Rapport des vitesses du son critiques en fonction de  $T_0$  pour quelques valeurs de la pression  $P_0$

La figure 5.12 représente la variation du débit massique critique non dimensionnel traversant par exemple une tuyère supersonique en fonction de la température génératrice  $T_0$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar, 50 Bar, on remarque que l'augmentation de la température génératrice  $T_0$  pour différents modèles entraîne une augmentation des débits massiques critiques, cette augmentation devient considérable lorsque la valeur de  $T_0$  est élevée, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, on remarque aussi que les débits massiques critiques obtenues par notre modèle *RG* sont toujours inférieures de ceux obtenus par le modèle *HT* et que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une diminution des rapports du débit massique critiques, mais si la température génératrice  $T_0$  supérieure à 2000 K, on remarque que les trois courbes de notre modèle *RG* s'approchent, et s'éloignent lorsque la valeur de la température génératrice  $T_0$  diminue, cet éloignement devient considérable lorsque la température génératrice  $T_0$  est inférieure à 1000 K, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure ou égale à 50 Bar, ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur les paramètres critiques de l'écoulement, et cette variation entre les trois modèles *GP*, *HT* et *RG* va influencer sur la valeur de la force de poussée, surtout si la pression  $P_0$  est grande. Ce manque va influencer sur

l'information donnée sur la durée de la vie du carburant, qui sera inférieure par rapport à la durée de vie donnée par le modèle GP, et supérieure par rapport à la durée de vie donnée par le modèle HT.

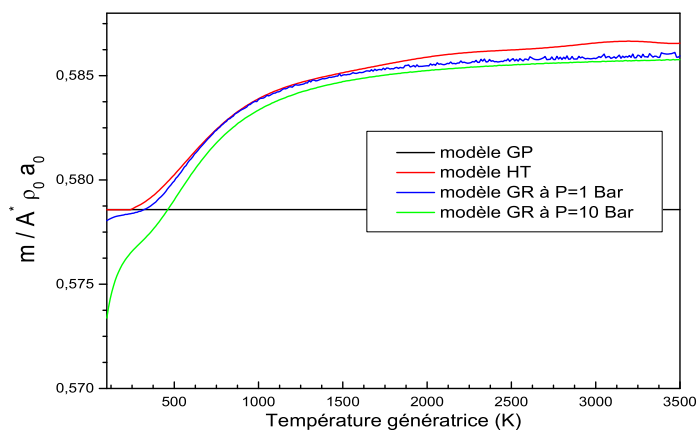


Figure 5.12 : Rapport de débit massique critique en fonction de  $T_0$  pour quelques valeurs de la pression  $P_0$

### 5.3. Résultats pour les paramètres supersoniques

La figure 5.13 représente la variation du rapport de température  $T/T_0$  en fonction du nombre de Mach, pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0=1$  Bar, 10 Bar et 50 Bar, on remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de température, on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs  $T_0 = 1000K, 2000K, 3000K$ , influe sur le rapport de température, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, par exemple à  $M=3.0$  et  $T_0=2000K$ ,  $T/T_0 = 0.35599$  pour le modèle GP,  $T/T_0 = 0.40569$  pour le modèle HT,  $T/T_0 = 0.40467, 0.40479, 0.40533$  pour le modèle RG qui correspond les pressions 1 Bar, 10 Bar et 50 Bar, avec des erreurs relatives entre le modèle HT et notre modèle RG égale à  $\epsilon = 0.25 \%$  pour  $p_0=1$  Bar,  $\epsilon = 0.22 \%$  pour  $p_0=10$  Bar, et  $\epsilon = 0.09 \%$  pour  $p_0=50$  Bar, sur notre figure le courbe du modèle GP indique que le gaz parfait va refroidi l'écoulement par rapport au comportement thermodynamique réel du gaz. Les valeurs numériques présentées sont déterminées avec une précision meilleure à  $\epsilon = 10^{-16}$ .

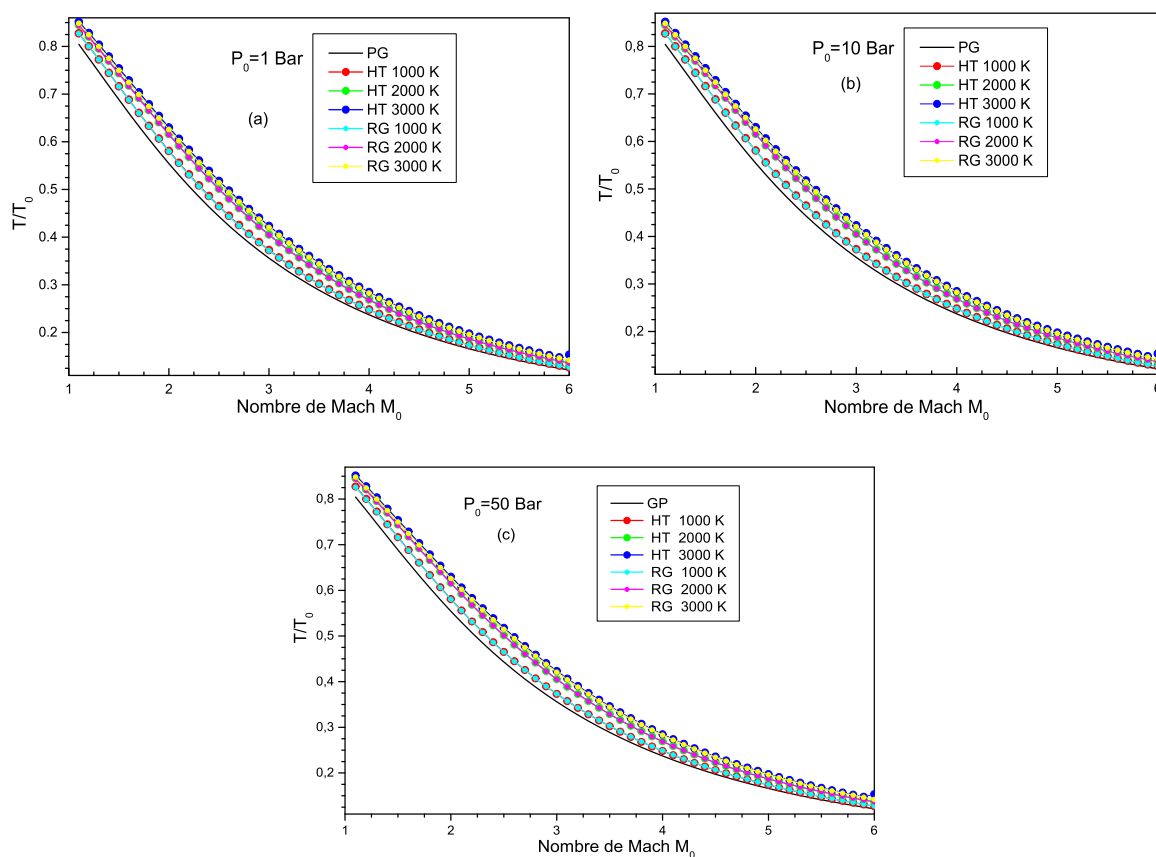


Figure 5.13 : Variation de rapport des températures en fonction du nombre de Mach

La figure 5.14 représente la variation du rapport de la masse volumique  $\rho/\rho_0$  en fonction du nombre de Mach, pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar et 50 Bar, on remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de la masse volumique, on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs  $T_0 = 1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$ ,  $3000\text{K}$ , influe sur le rapport de la masse volumique, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, par exemple à  $M=2.5$  et  $T_0=2000\text{K}$ ,  $\rho/\rho_0 = 0.1321$  pour le modèle *GP*,  $\rho/\rho_0 = 0.11149$  pour le modèle *HT*,  $\rho/\rho_0 = 0.11188$ ,  $0.11212$ ,  $0.11317$  pour le modèle *RG* qui correspond les pressions 1 Bar, 10 Bar et 50 Bar, avec des erreurs relatives entre le modèle *HT* et notre modèle *RG* égale à  $\varepsilon = 0.348\%$  pour  $p_0=1$  Bar,  $\varepsilon = 0.562\%$  pour  $p_0=10$  Bar, et  $\varepsilon = 1.485\%$  pour  $p_0=50$  Bar. Les valeurs numériques présentées sont déterminées avec une précision meilleure à  $\varepsilon = 10^{-16}$ .



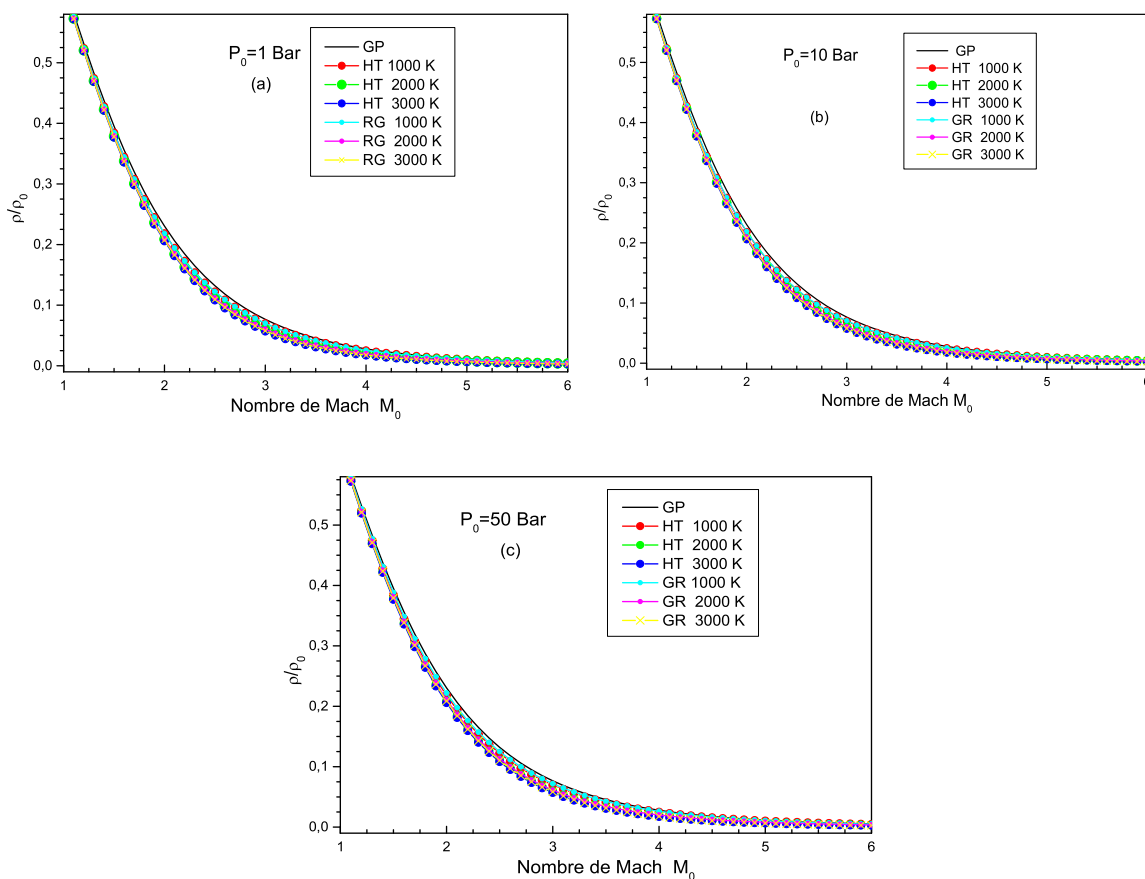


Figure 5.14 : Variation de rapport des densités en fonction du nombre de Mach

La figure 5.15 représente la variation du rapport de la pression  $P/P_0$  en fonction du nombre de Mach, pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar et 50 Bar, on remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de la pression, on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs  $T_0 = 1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$ ,  $3000\text{K}$ , influe sur le rapport de la pression, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, par exemple à  $M=2.0$  et  $T_0=2000\text{K}$ ,  $P/P_0 = 0.12775$  pour le modèle *GP*,  $P/P_0 = 0.12872$  pour le modèle *HT*,  $P/P_0 = 0.12874$ ,  $0.12878$ ,  $0.12897$  pour le modèle *RG* qui correspond les pressions 1 Bar, 10 Bar, 50 Bar, avec des erreurs relatives entre le modèle *HT* et notre modèle *RG* égale à  $\varepsilon = 0.015\%$  pour  $p_0=1$  Bar,  $\varepsilon = 0.047\%$  pour  $p_0=10$  Bar, et  $\varepsilon = 0.194\%$  pour  $p_0=50$  Bar. Les valeurs numériques présentées sont déterminées avec une précision meilleure à  $\varepsilon = 10^{-16}$ .

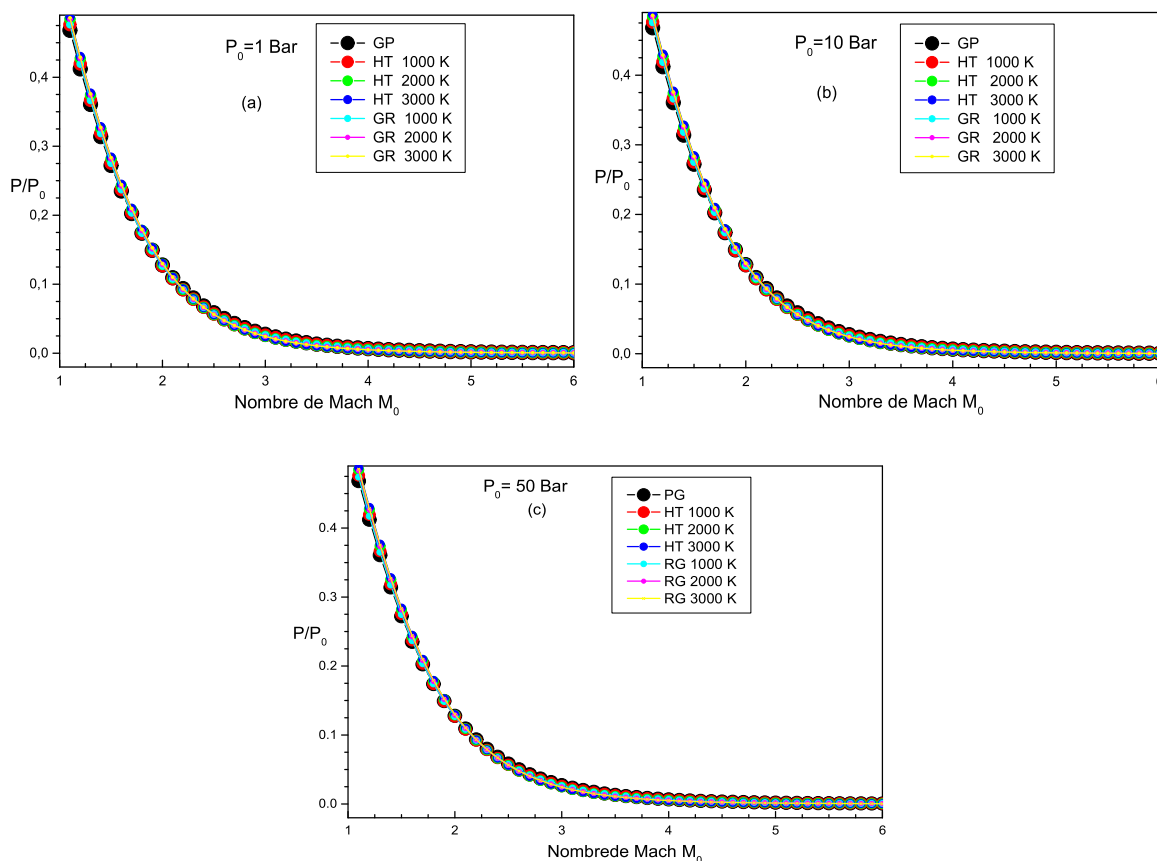


Figure 5.15 : Variation de rapport de pressions en fonction du nombre de Mach

La figure 5.16 représente la variation du rapport de la vitesse du son  $a/a_0$  en fonction du nombre de Mach, pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar et 50 Bar, on remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de la vitesse du son, on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs  $T_0 = 1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$ ,  $3000\text{K}$ , influe sur le rapport de la vitesse du son, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, par exemple à  $M=3.0$  et  $T_0=3000\text{K}$ ,  $a/a_0 = 0.59666$  pour le modèle *GP*,  $a/a_0 = 0.6594$  pour le modèle *HT*,  $a/a_0 = 0.65507$ ,  $0.65443$ ,  $0.6516$  pour le modèle *RG* qui correspond les pressions 1 Bar, 10 Bar, 50 Bar, avec des erreurs relatives entre le modèle *HT* et notre modèle *RG* égale à  $\varepsilon = 0.66\%$  pour  $p_0 = 1$  Bar,  $\varepsilon = 0.76\%$  pour  $p_0 = 10$  Bar, et  $\varepsilon = 1.20\%$  pour  $p_0 = 50$  Bar. On remarque que lorsque la pression génératrice  $P_0$  augmente les rapports de la vitesse du son obtenus par le modèle *RG* s'éloignent de ceux obtenus par le modèle *HT*, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure au égale à 50

Bar, ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$ . Les valeurs numériques présentées sont déterminées avec une précision meilleure à  $\varepsilon = 10^{-16}$ .

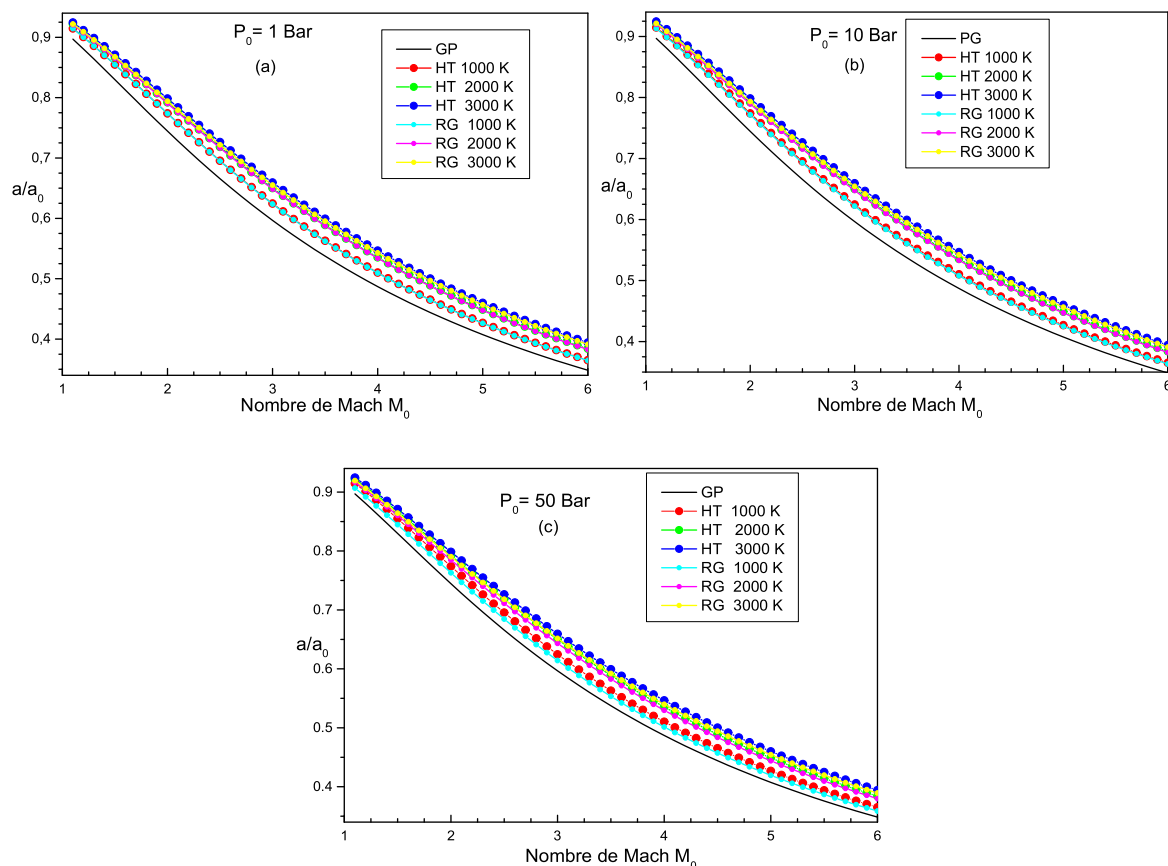


Figure 5.16 : Variation de rapport des célérités du son en fonction du nombre de Mach

La figure 5.17 représente la variation des rapports critiques des sections  $A/A^*$  en fonction du nombre de Mach, et pour les modèles  $HT$ ,  $GP$  et  $RG$ , et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar et 50 Bar, on remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une augmentation des rapports critiques des sections  $A/A^*$ , on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs  $T_0 = 1000$ K, 2000K, 3000K, influe sur les rapports critiques des sections  $A/A^*$ , les rapports critiques des sections  $A/A^*$  augmente lorsque  $T_0$  augmente, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, mais si le nombre de Mach inférieur à  $M_0 = 2.0$ , on remarque que les trois modèles  $GP$ ,  $HT$ , et  $RG$  sont confondus, et s'éloignent lorsque le nombre de Mach augmente, par exemple à  $M = 5.0$  et  $T_0 = 3000$ K,  $A/A^* = 24.74917$  pour le modèle  $GP$ ,  $A/A^* = 40.38428$  pour le modèle  $HT$ ,  $A/A^* =$

39.87358, 39.82898, 39.63156 pour le modèle RG qui correspond les pressions 1 Bar, 10 Bar et 50 Bar, avec des erreurs relatives entre le modèle HT et notre modèle RG égale à  $\varepsilon = 1.28 \%$  pour  $p_0 = 1$  Bar,  $\varepsilon = 1.40 \%$  pour  $p_0 = 10$  Bar, et  $\varepsilon = 1.90 \%$  pour  $p_0 = 50$  Bar. On remarque que lorsque la pression génératrice  $P_0$  augmente les des rapports critiques des sections  $A/A^*$  obtenues par le modèle RG s'éloigne de ceux obtenus par le modèle HT, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure au égale à 50 Bar, ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$ , Les valeurs numériques présentées sont déterminées avec une précision meilleure à  $\varepsilon = 10^{-16}$ .

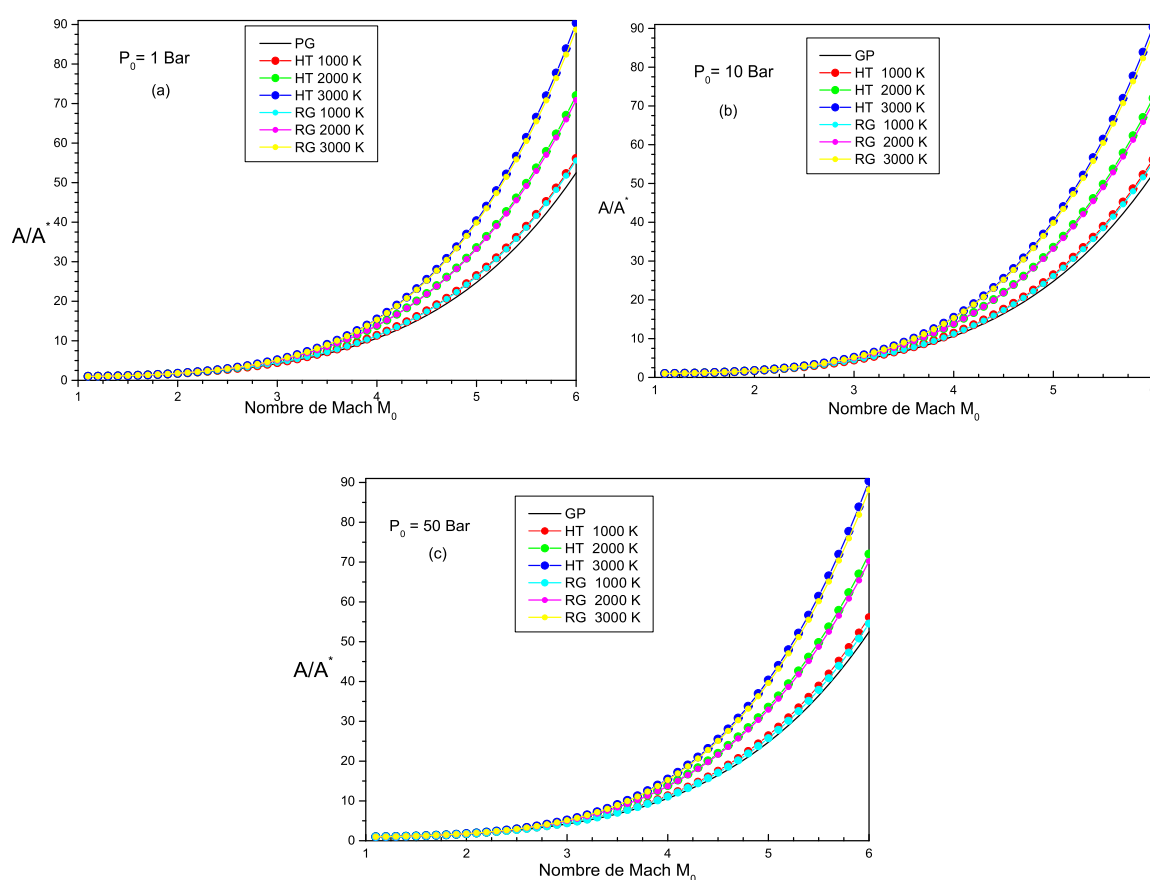
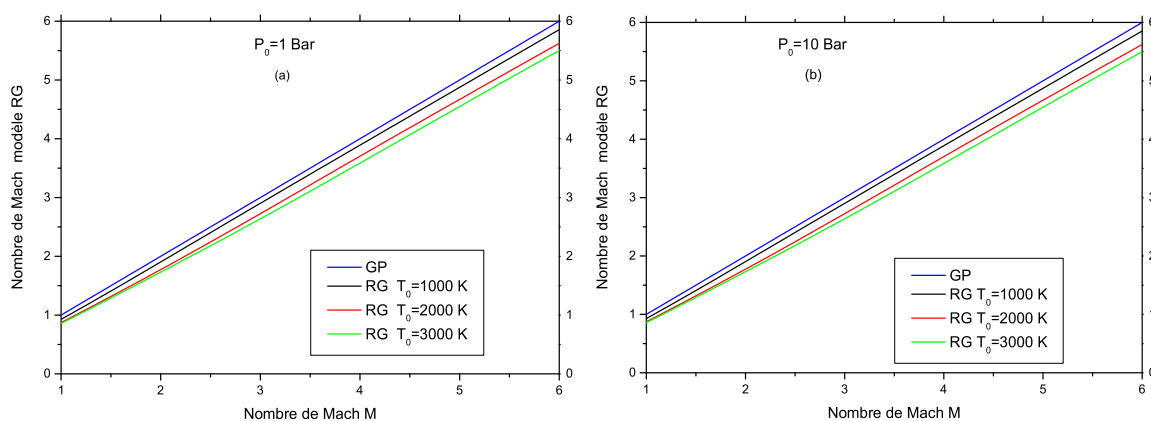


Figure 5.17 : Variation de rapport des sections en fonction du nombre de Mach

La figure 5.18 représente la correction du nombre de Mach du modèle du gaz parfait GP par le nombre de Mach du modèle des gaz réels, données respectivement par les pressions génératrices  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar, 100 Bar et 500 Bar, et les températures génératrices  $T_0 = 1000$  K, 2000 K, et 3000 K en fonction du nombre de Mach de sortie, du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que la variation du nombre de Mach dépend de  $P_0$ ,  $T_0$ . Si  $T_0$  et  $P_0$  augmentent, le nombre de Mach du modèle des gaz réels diminue. Par exemple si  $T_0=2000\text{ K}^\circ$  à une pression génératrice de  $P_0=1\text{ Bar}$ , lorsque le nombre de Mach délivré par le modèle GP est  $M_{GP}=6.00$ , le nombre de Mach délivré par le modèle RG est de  $M_{RG}=5.623$ . Pour la même température génératrice  $T_0=2000\text{ K}^\circ$  mais à une pression de 500 Bar, le nombre de Mach délivré par le modèle GP est  $M_{GP}=6.00$ , le nombre de Mach délivré par le modèle GR est de  $M_{RG}=5.551$ . Maintenant si on fixe la pression génératrice à  $P_0=1\text{ Bar}$ , si la température génératrice est de  $T_0=1000\text{ K}^\circ$ , si le nombre de Mach délivré par le modèle GP est  $M_{GP}=6.00$ , le nombre de Mach délivré par le modèle RG est de  $M_{RG}=5.856$ . Pour ces même valeurs de pression génératrice et  $M_{GP}=6.00$  si  $T_0=1000\text{ K}^\circ$ , le nombre de Mach délivré par le modèle GR est de  $M_{RG}=5.500$ .

D'après ces résultats on tire que le nombre de Mach pour un gaz réel ne peut jamais atteindre le nombre de Mach du gaz parfait sous n'importe quels conditions. La diminution du nombre de Mach en augmentant la pression et la température génératrices est tout à fait normale parce que la cette augmentation engendre une augmentation de la célérité du son et cette dernière est inversement proportionnelle au nombre du Mach.



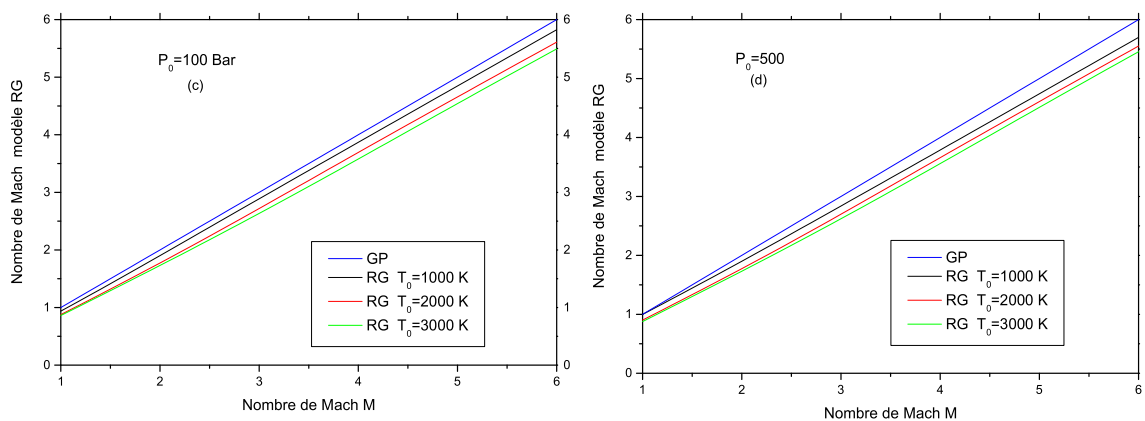


Figure 5.18 : Correction de nombre de Mach du modèle RG par rapport aux modèle GP

#### 5.4. Résultats sur l'erreur pour les paramètres supersoniques

La figure 5.19 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de température  $T/T_0$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{ K}$ , et  $3000\text{ K}$  et les pressions génératrices  $P_0= 1\text{ Bar}$ ,  $10\text{ Bar}$ , et  $50\text{ Bar}$ , en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M_s$  et elle augmente si  $T_0$  et  $P_0$  augmentent. Par exemple si  $T_0=2000\text{ K}^\circ$  et  $M=3.00$ , l'utilisation du modèle GP va nous donner une erreur relative égale à  $\varepsilon= 12.028\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 1\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon= 12.054\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 10\text{ Bar}$ , et  $\varepsilon= 12.17\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 50\text{ Bar}$ , qui donne une différence de  $97.36\text{ K}$ ,  $97.6\text{ K}$ ,  $98.68\text{ K}$  entre les valeurs des températures des deux modèles.

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieur à  $5\%$ , le modèle GP peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure à  $1000\text{ K}$  et la pression  $P_0$  soit inférieure à  $90\text{ Bar}$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de  $P_0$   $M$  et  $T_0$  modéré.

On peut remarquer qu'à faible valeur de  $M$ ,  $T_0$  et  $P_0$ , l'erreur  $\varepsilon$  est faible. Sur ces figures, la Figure 5.19.a se trouve au-dessous de l'erreur 5%. Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle  $GP$  jusqu'à  $T_0=1000\text{ K}^\circ$  pour les applications aéronautiques, mais a pression génératrice bien modéré et ne dépasse pas 90 Bar, si on accepte une erreur inférieure à 5%. Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle  $GP$  indépendamment à la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=2.00$  avec une erreur de 12% environ.

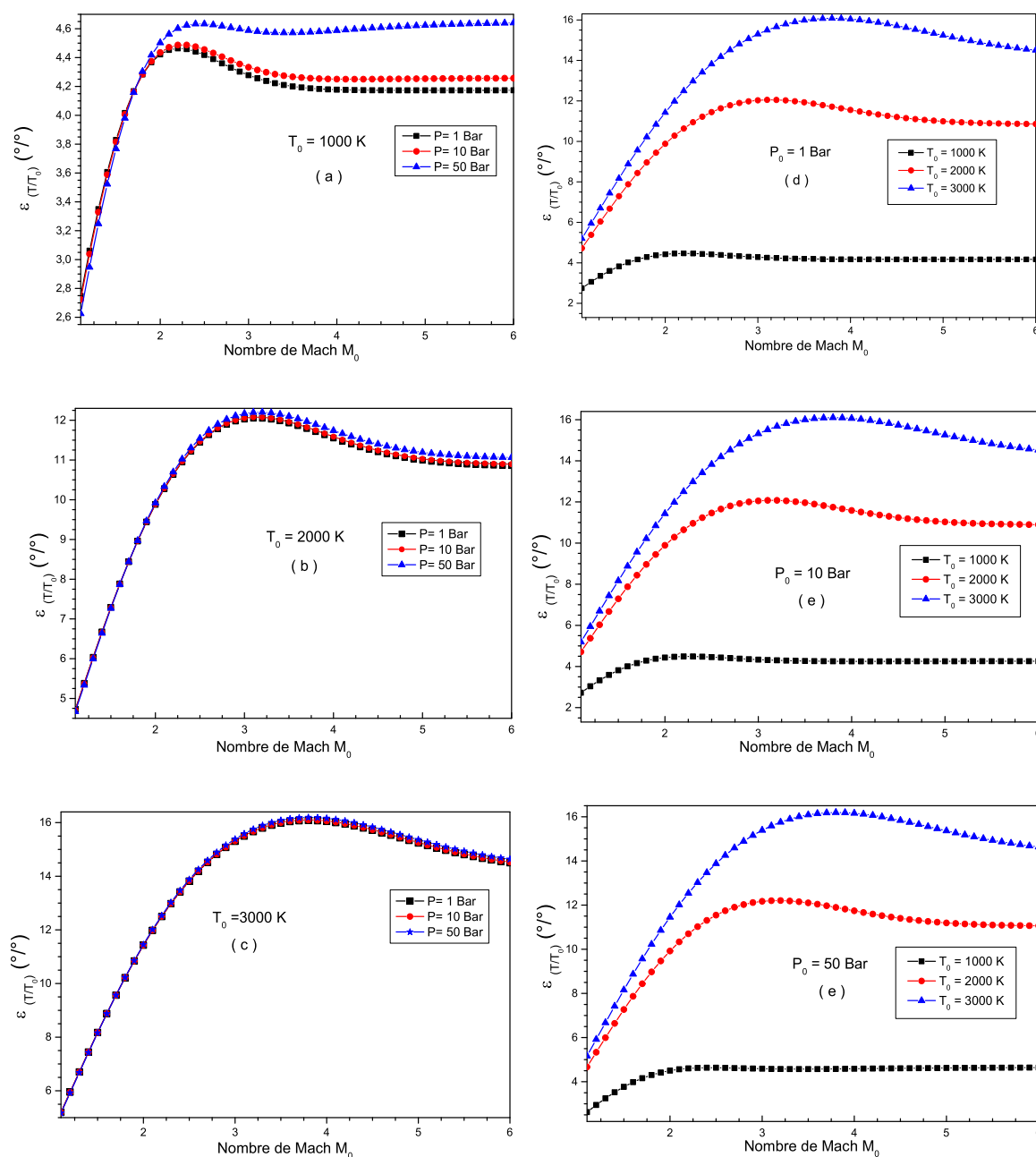


Figure 5.19 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des températures en fonction de nombre de Mach

La figure 5.20 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de masse volumique  $\rho/\rho_0$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{ K}$ , et  $3000\text{ K}$  et les pressions génératrices  $P_0= 1\text{ Bar}$ ,  $10\text{ Bar}$ , et  $50\text{ Bar}$ , en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M_s$  et elle augmente si  $T_0$  augmente. Mais elle diminue lorsque  $P_0$  augmente, Par exemple si  $T_0=2000\text{ K}$  et  $M=3.00$ , l'utilisation du modèle GP va nous donner une erreur relative égale à  $\varepsilon= 26.86\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 1\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon= 26.55\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 10\text{ Bar}$ , et  $\varepsilon= 25.19\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 50\text{ Bar}$ , qui donne une différence de  $0.0029\text{ Kg/m}^3$ ,  $0.029\text{ Kg/m}^3$ ,  $0.134\text{ Kg/m}^3$  entre les valeurs des masse volumiques des deux modèles.

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieur à  $5\%$ , le modèle GP peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure à  $1000\text{ K}$  et la pression  $P_0$  soit supérieure à  $60\text{ Bar}$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de  $P_0$ ,  $M$  et  $T_0$  modéré.

On peut conclure qu'à faible valeur de  $M$ ,  $T_0$ , l'erreur  $\varepsilon$  est faible. Se trouve au-dessous de l'erreur  $5\%$ . Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle GP jusqu'à  $T_0=1000\text{ K}$  pour les applications aéronautiques, mais a pression génératrice bien modéré et dépasse  $60\text{ Bar}$ , si on accepte une erreur inférieur à  $5\%$ . Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle GP indépendamment à la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=2.00$  avec une erreur de  $12\%$  environ.



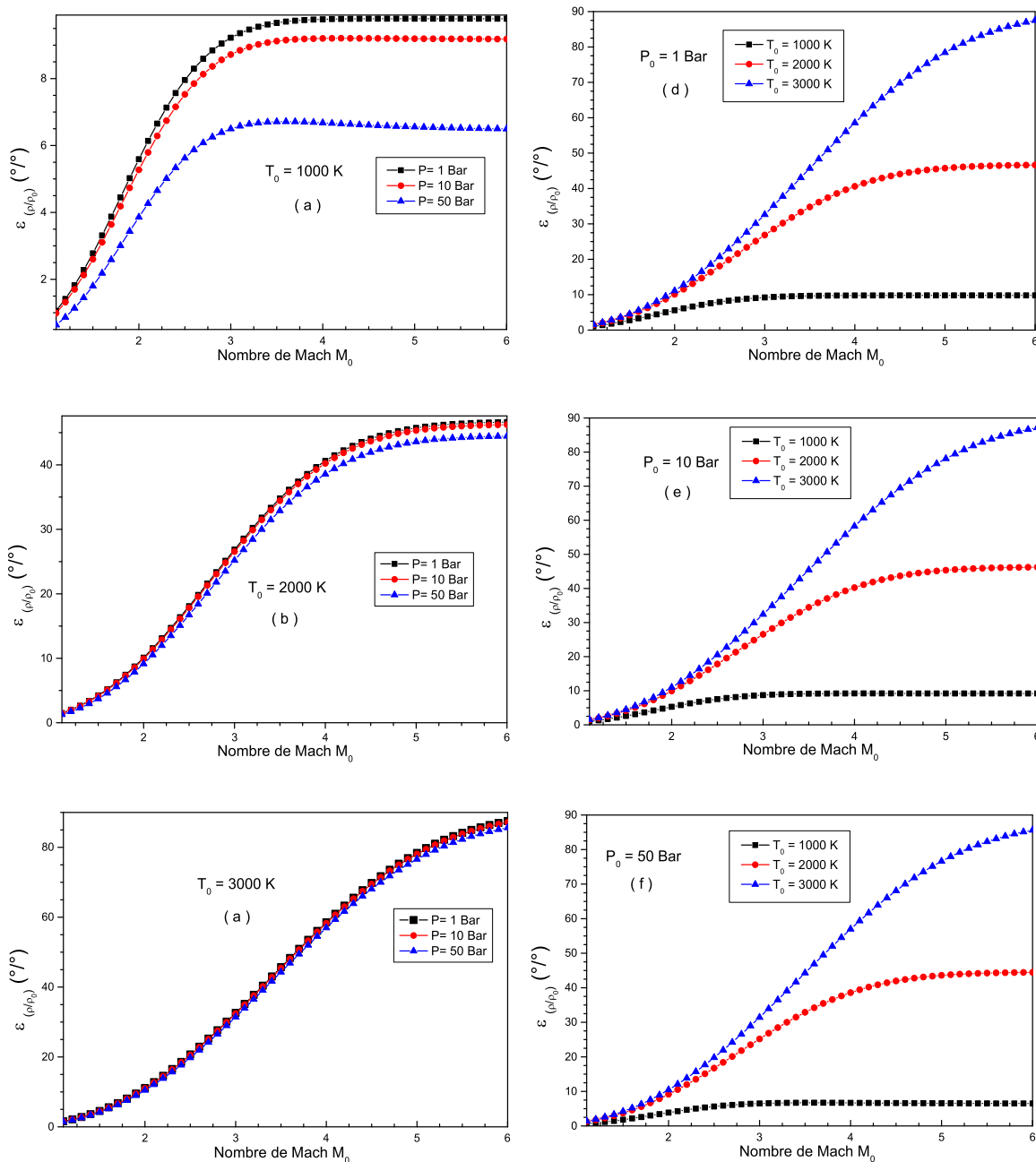


Figure 5.20 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des masses volumiques en fonction de nombre de Mach

La figure 5.21 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de pression  $P/P_0$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000$ K,  $2000$  K, et  $3000$  K et les pressions génératrices  $P_0= 1$  Bar,  $10$  Bar, et  $50$  Bar, en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M_s$  et elle augmente si  $T_0$  et  $P_0$  augmentent. Par exemple si  $T_0=2000\text{ K}^\circ$  et  $M=4.00$ , l'utilisation du modèle *GP* va nous donner une erreur relative égale à  $\varepsilon=24.39\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 1\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon=24.22\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 10\text{ Bar}$ , et  $\varepsilon=23.44\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 50\text{ Bar}$ , qui donne une différence de  $0.0013\text{ Bar}$ ,  $0.013\text{ Bar}$ ,  $0.065\text{ Bar}$  entre les valeurs des pressions des deux modèles, on remarque que l'erreur  $\varepsilon=0.001\%$  si le nombre de Mach  $M=1.8$ ,  $T_0=1000\text{ K}$ ,  $P_0=1\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon=0.1\%$  à  $M=2.1$ ,  $T_0=2000\text{ K}$ ,  $P_0=1\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon=0.3\%$  à  $M=2.2$ ,  $T_0=3000\text{ K}$ ,  $P_0=1\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon=0.005\%$  à  $M=1.8$ ,  $T_0=1000\text{ K}$ ,  $P_0=10\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon=0.05\%$  à  $M=2.1$ ,  $T_0=2000\text{ K}$ ,  $P_0=10\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon=0.27\%$  à  $M=2.2$ ,  $T_0=3000\text{ K}$ ,  $P_0=10\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon=0.08\%$  à  $M=1.8$ ,  $T_0=1000\text{ K}$ ,  $P_0=50\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon=0.13\%$  à  $M=2.1$ ,  $T_0=2000\text{ K}$ ,  $P_0=50\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon=0.11\%$  à  $M=2.2$ ,  $T_0=3000\text{ K}$ ,  $P_0=50\text{ Bar}$ . On conclut qu'on peut diminuer l'erreur de la pression à  $\varepsilon < 1.0\%$ , si on prend un intervalle de nombre de Mach entre  $M=1.8$  et  $M=2.2$ , dans cet intervalle on peut dire que les erreurs instantanées indépendantes de  $P_0$  et  $T_0$ .

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à  $5\%$ , le modèle *GP* peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure à  $1000\text{ K}$  et la pression  $P_0$  soit supérieure à  $1\text{ Bar}$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle *GP* dans un intervalle de  $P_0$ ,  $M$  et  $T_0$  modéré.

On peut remarquer qu'à faible valeur de  $M$  inférieure à  $2.6$ , l'erreur  $\varepsilon$  est faible. Sur ces figures, se trouve au-dessous de l'erreur  $5\%$ . Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle *GP* jusqu'à  $T_0=3000\text{ K}$  pour les applications aéronautiques, mais a pression génératrice bien modéré et dépasse  $1\text{ Bar}$ , si on accepte une erreur inférieure à  $5\%$ . Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle *GP* indépendamment à la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=3.0$  avec une erreur de  $12\%$  environ.

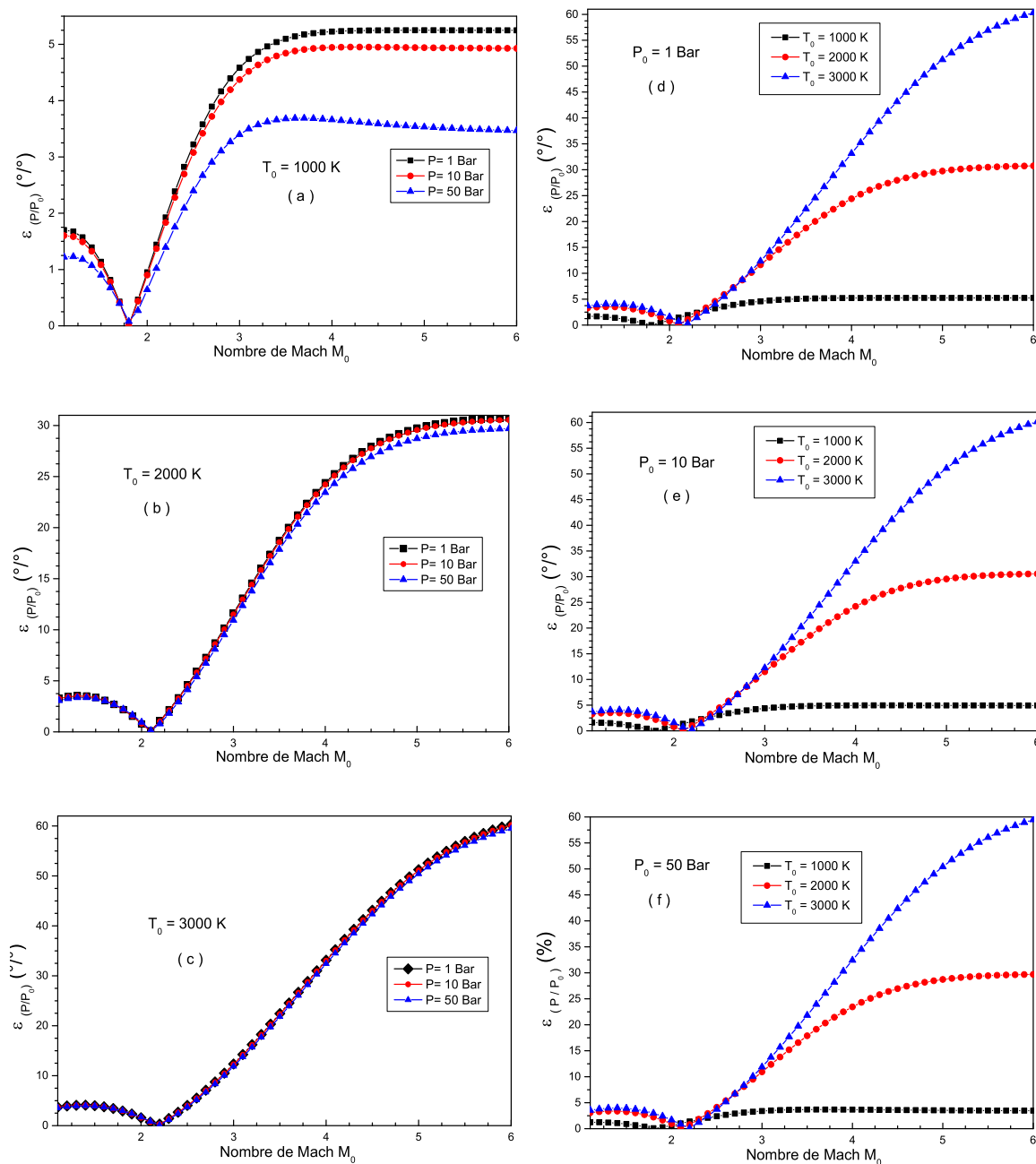


Figure 5.21 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport de pression en fonction de nombre de Mach

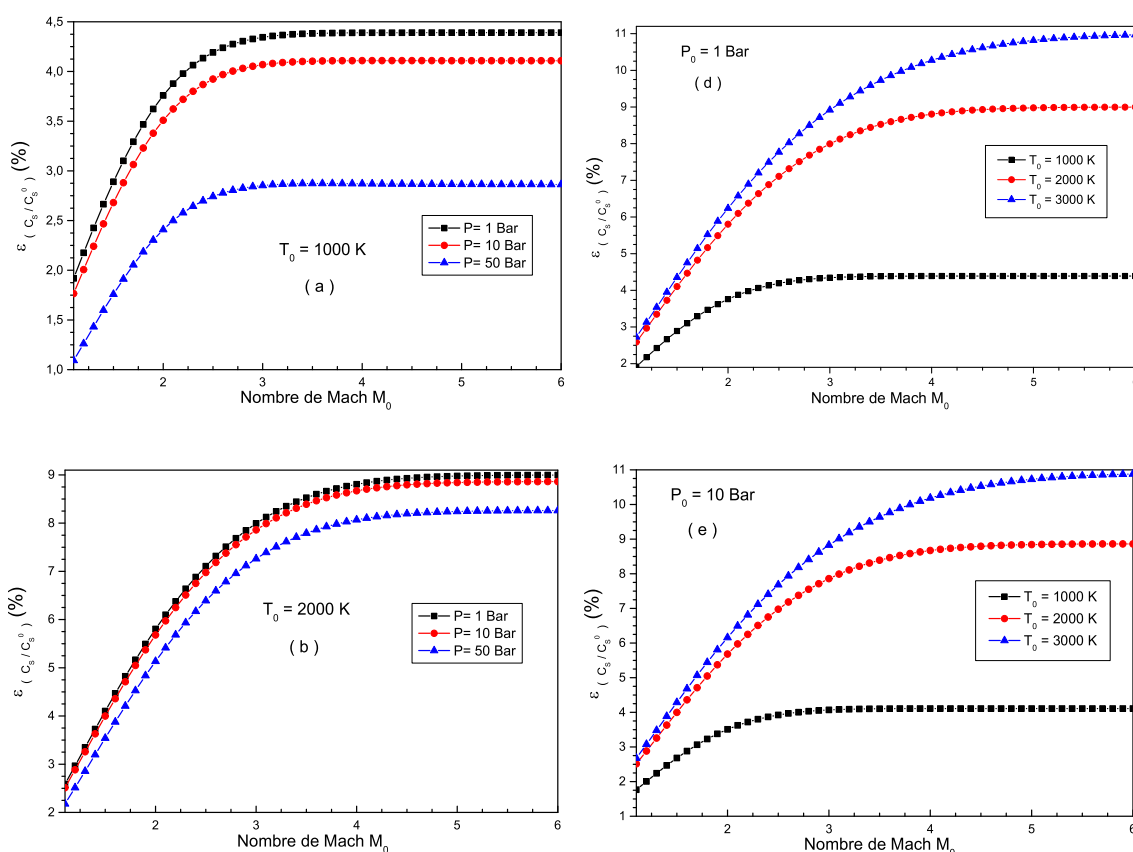
La figure 5.22 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de vitesse du son  $a/a_0$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{ K}$ , et  $3000\text{ K}$  et les pressions génératrices  $P_0= 1\text{ Bar}$ ,  $10\text{ Bar}$ , et  $50\text{ Bar}$ , en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M_s$  et elle augmente si  $T_0$  augmente. Mais elle diminue lorsque  $P_0$  augmente, Par

exemple si  $T_0=2000\text{ K}$  et  $M=3.00$ , l'utilisation du modèle *GP* va nous donner une erreur relative égale à  $\varepsilon= 8.00\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 1\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon= 7.86\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 10\text{ Bar}$ , et  $\varepsilon= 7.26\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 50\text{ Bar}$ .

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à  $5\%$ , le modèle *GP* peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure ou égale à  $1000\text{ K}$  et la pression  $P_0$  soit supérieure ou égale à  $1\text{ Bar}$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle *GP* dans un intervalle de  $P_0$ ,  $M$  et  $T_0$  modéré.

On peut conclure qu'à faible valeur de  $M$ ,  $T_0$ , l'erreur  $\varepsilon$  est faible. Se trouve au-dessous de l'erreur  $5\%$ . Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle *GP* jusqu'à  $T_0=1000\text{ K}$  pour les applications aéronautiques, mais a pression génératrice bien modéré, si on accepte une erreur inférieure à  $5\%$ . Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle *GP* indépendamment à la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=6.00$  avec une erreur de  $11\%$  environ.



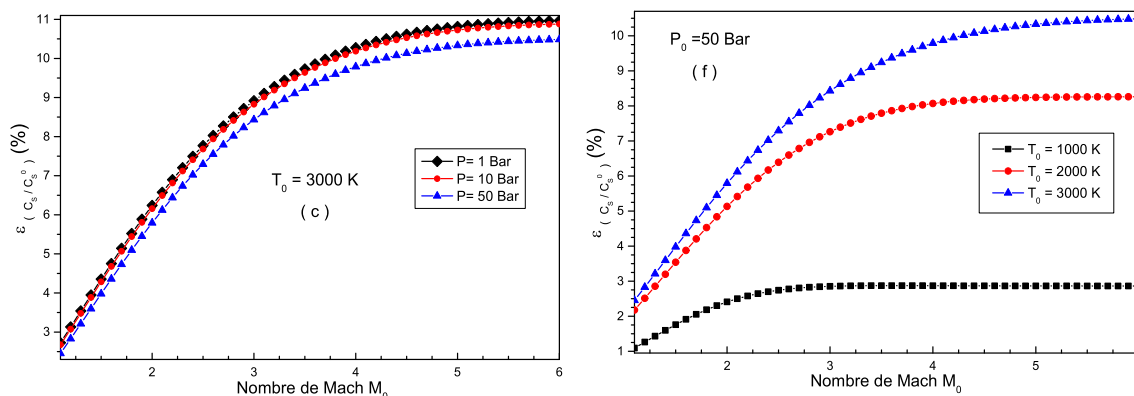


Figure 5.22 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des célérités du son en fonction de nombre de Mach

La figure 5.23 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports critiques des sections  $A/A^*$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000$ K, 2000 K, et 3000 K et les pressions génératrices  $P_0= 1$  Bar, 10 Bar, et 50 Bar, en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M_s$  et elle augmente si  $T_0$  augmente. Mais elle diminue lorsque  $P_0$  augmente, Par exemple si  $T_0=2000$  K et  $M=3.00$ , l'utilisation du modèle GP va nous donner une erreur relative égale à  $\varepsilon= 15.33$  % pour une pression génératrice  $P_0 = 1$  Bar,  $\varepsilon= 15.21$  % pour une pression génératrice  $P_0 = 10$  Bar, et  $\varepsilon= 14.70$  % pour une pression génératrice  $P_0 = 50$  Bar.

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à 5 %, le modèle GP peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure à 1000 K et la pression  $P_0$  soit supérieure à 1 Bar pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de  $P_0$ ,  $M$  et  $T_0$  modéré.

On peut conclure qu'à faible valeur de  $M$ ,  $T_0$ , l'erreur  $\varepsilon$  est faible. Se trouve au-dessous de l'erreur 5 %. Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle GP jusqu'à  $T_0=1000$  K pour les applications aéronautiques, avec une pression génératrice bien modéré et supérieure a 1 Bar, si on accepte

une erreur inférieure à 5%. Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle *GP* indépendamment de la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=2.50$  avec une erreur de 11% environ.

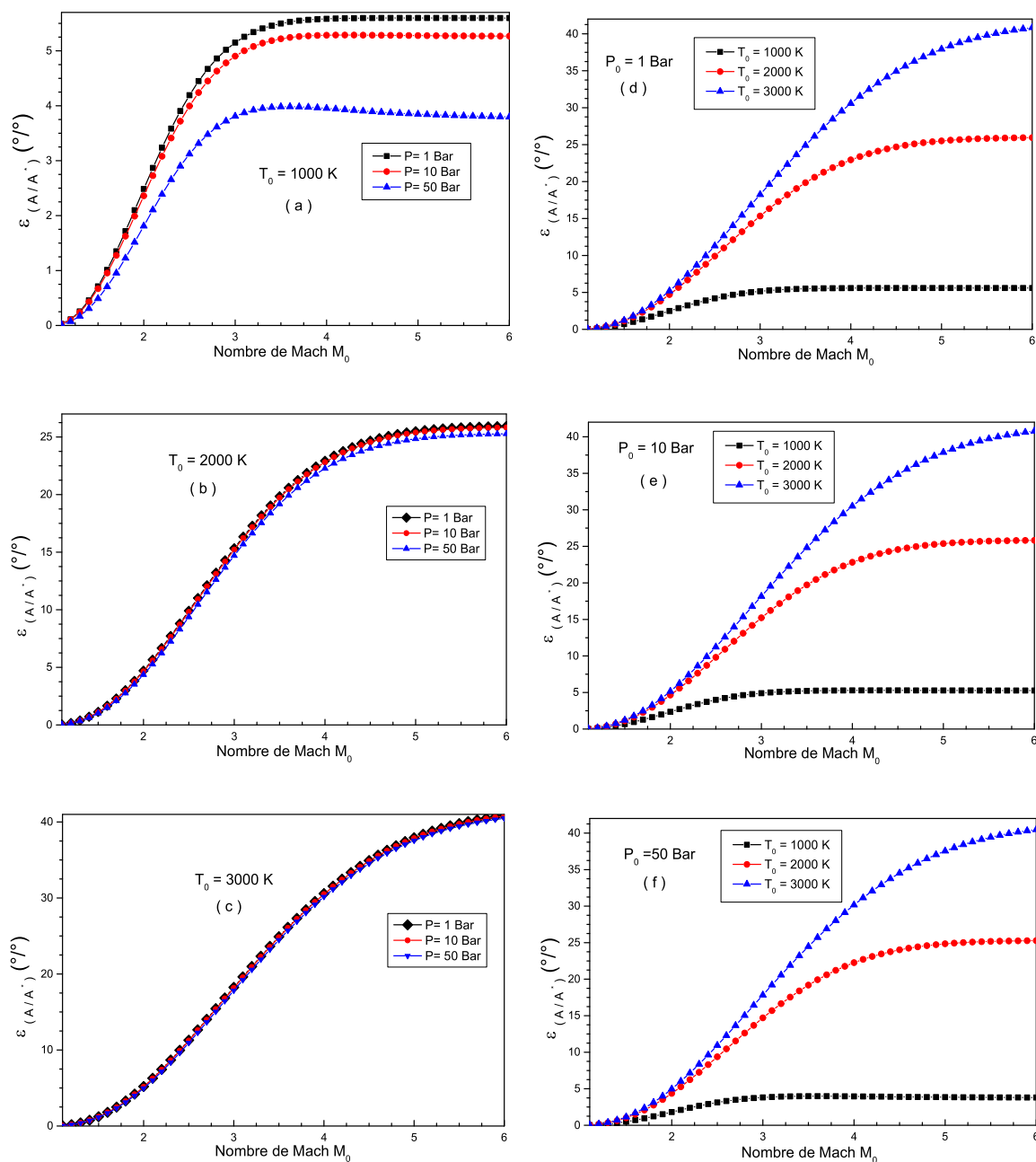
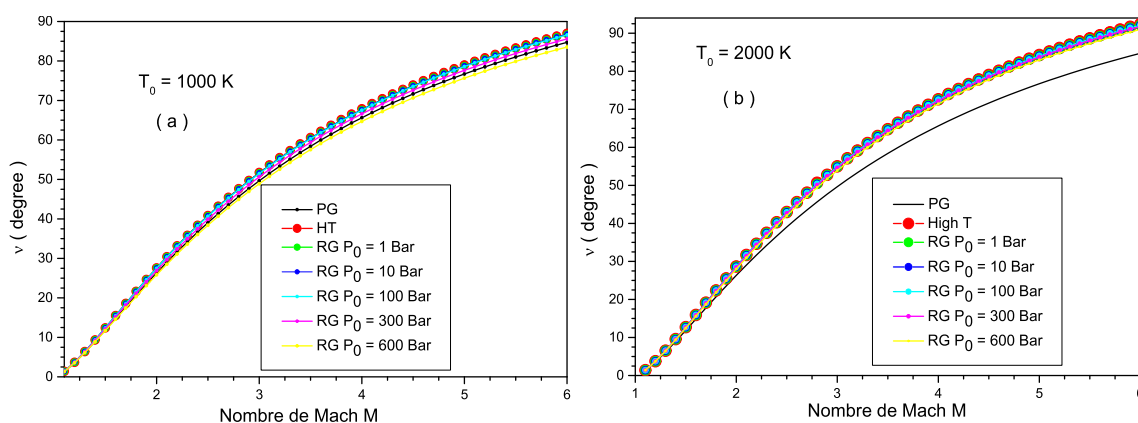


Figure 5.23 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des sections en fonction de nombre de Mach

### 5.5. Résultats sur la fonction de Prandtl Meyer

La figure 5.24 représente la variation de la fonction de Prandtl Meyer  $\nu$  donnée respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$ , et  $3000\text{K}$  et les pressions génératrices  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $10\text{Bar}$ ,  $100\text{Bar}$ ,  $300\text{Bar}$  et  $600\text{Bar}$ , en fonction du nombre de Mach jusqu'à  $M=6.0$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*. On remarque clairement que si on prend en considération l'imperfection thermique et calorifique, la pression génératrice  $P_0$  influe sur la grandeur de cette fonction, on remarque aussi que les trois modèles *HT*, *GP* et *RG* suivent la même allure, surtout à faible nombre de Mach, les trois modèles s'approchent et s'éloignent lorsque le nombre de Mach augmente, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, on remarque encore que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$ , pour notre modèle *RG*, entraîne une diminution de la valeur de  $\nu$ , et d'autant importante à basse température (voir fig. 5.24.a), dans ce cas la valeur de  $\nu$  varie considérablement et s'éloigne des modèles *GP* et *HT*, d'où, la nécessité d'utiliser le modèle *RG* pour corriger les résultats, cette variation montre les effets de taille moléculaire  $a$ , de la force intermoléculaire  $b$ , et la température caractéristique de vibration  $\theta$ , et on peut dire que notre modèle est thermiquement et calorifiquement imparfait.



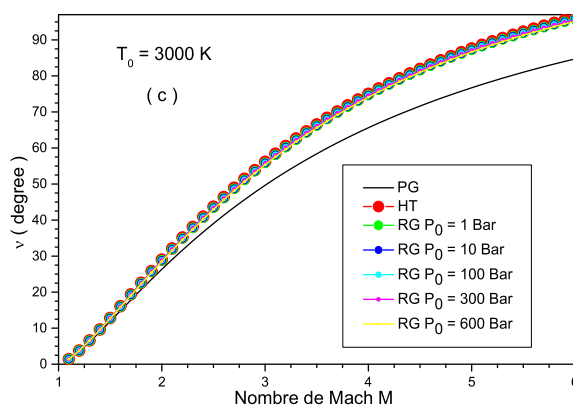


Figure 5.24 : Variation de la fonction de Prandtl Meyer en fonction de nombre de Mach pour quelques valeurs de la pression génératrice  $P_0$

La figure 5.25 représente la variation de la fonction de Prandtl Meyer  $\nu$  donnée respectivement par les pressions génératrices  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar, 100 Bar, 300 Bar et 550 Bar lorsque le nombre de Mach  $M = 2.0$  et  $4.0$ , en fonction de la température génératrice  $T_0$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, on remarque que l'augmentation de la température génératrice  $T_0$  pour différents modèles entraîne une augmentation de la valeur de  $\nu$ , cette augmentation devient considérable lorsque la valeur de  $T_0$  est élevée, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, mais dans le cas basse température basse pression, le gaz peut être considéré comme calorifiquement et thermiquement parfait et cela jusqu'à environ  $240$  K, on remarque aussi que les valeurs de  $\nu$  obtenues par notre modèle *RG* sont toujours inférieures de ceux obtenus par le modèle *HT*, et que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une diminution de la valeur de  $\nu$ , mais à haute température génératrice  $T_0$ , on remarque que les deux modèles *HT* et *RG* s'approchent, et s'éloignent à basse température génératrice  $T_0$ , cet éloignement d'autant important lorsque la pression génératrice  $P_0$  est élevée, d'où, la nécessité d'utiliser le modèle *RG* pour corriger les résultats, et pour montrer l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur la fonction de Prandtl Meyer.



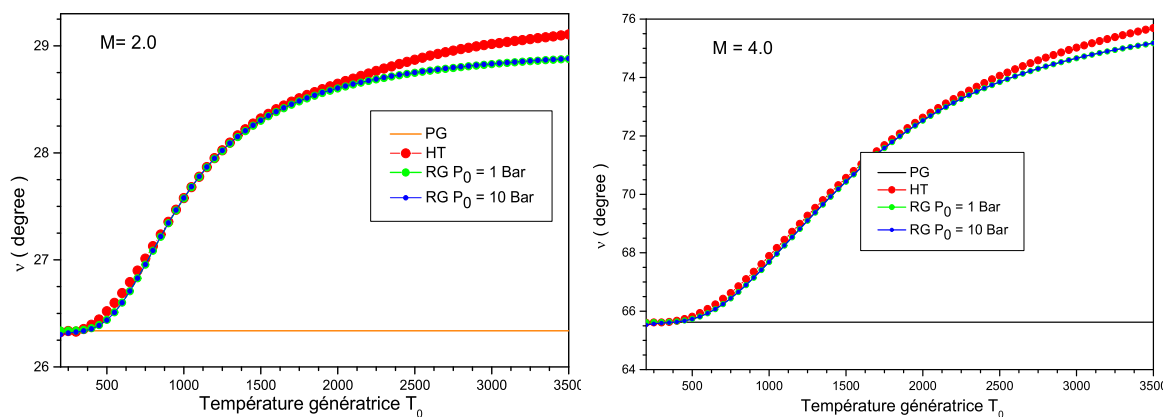


Figure 5.25 : Variation de la fonction de Prandtl Meyer  $v$  en fonction de la température génératrice pour quelques valeurs de pression génératrice  $P_0$

### 5.6. Résultats sur l'erreur pour la fonction de Prandtl Meyer

La figure 5.26 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage de la fonction de Prandtl Meyer  $v$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$ , et  $3000\text{K}$  et les pressions génératrices  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $10\text{Bar}$ ,  $100\text{Bar}$ ,  $300\text{Bar}$  et  $600\text{Bar}$ , en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M$ , elle augmente si  $T_0$  augmentent, et diminue si  $P_0$  augmente, Par exemple si  $T_0=3000\text{K}$  et  $M=4.00$ , l'utilisation du modèle GP va nous donner une erreur relative égale à  $\varepsilon=12.10\%$  pour une pression génératrice  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $\varepsilon=12.10\%$  pour une pression génératrice  $P_0=10\text{Bar}$ ,  $\varepsilon=12.09\%$  pour une pression génératrice  $P_0=100\text{Bar}$ ,  $\varepsilon=11.91\%$  pour une pression génératrice  $P_0=300\text{Bar}$ ,  $\varepsilon=11.41\%$  pour une pression génératrice  $P_0=600\text{Bar}$ , qui donne une différence de  $9.034^\circ$ ,  $9.039^\circ$ ,  $9.032^\circ$ ,  $8.876^\circ$ ,  $8.457^\circ$  entre les valeurs des  $v$  des deux modèles.

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à  $5\%$ , le modèle GP peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure au égale à  $1000\text{K}$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de  $P_0$ ,  $M$  et  $T_0$  modéré.

On peut remarquer qu'à faible valeur de  $M$ , et  $T_0$ , l'erreur  $\varepsilon$  est faible. Sur ces figures, la figure 5.26.a se trouve au-dessous de l'erreur 5%. Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle GP jusqu'à  $T_0=1000\text{ K}$  pour les applications aéronautiques, surtout à haute pression génératrice  $P_0$ , si on accepte une erreur inférieure à 5%. Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle GP indépendamment à la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=2.00$  avec une erreur de 8.80 % environ.

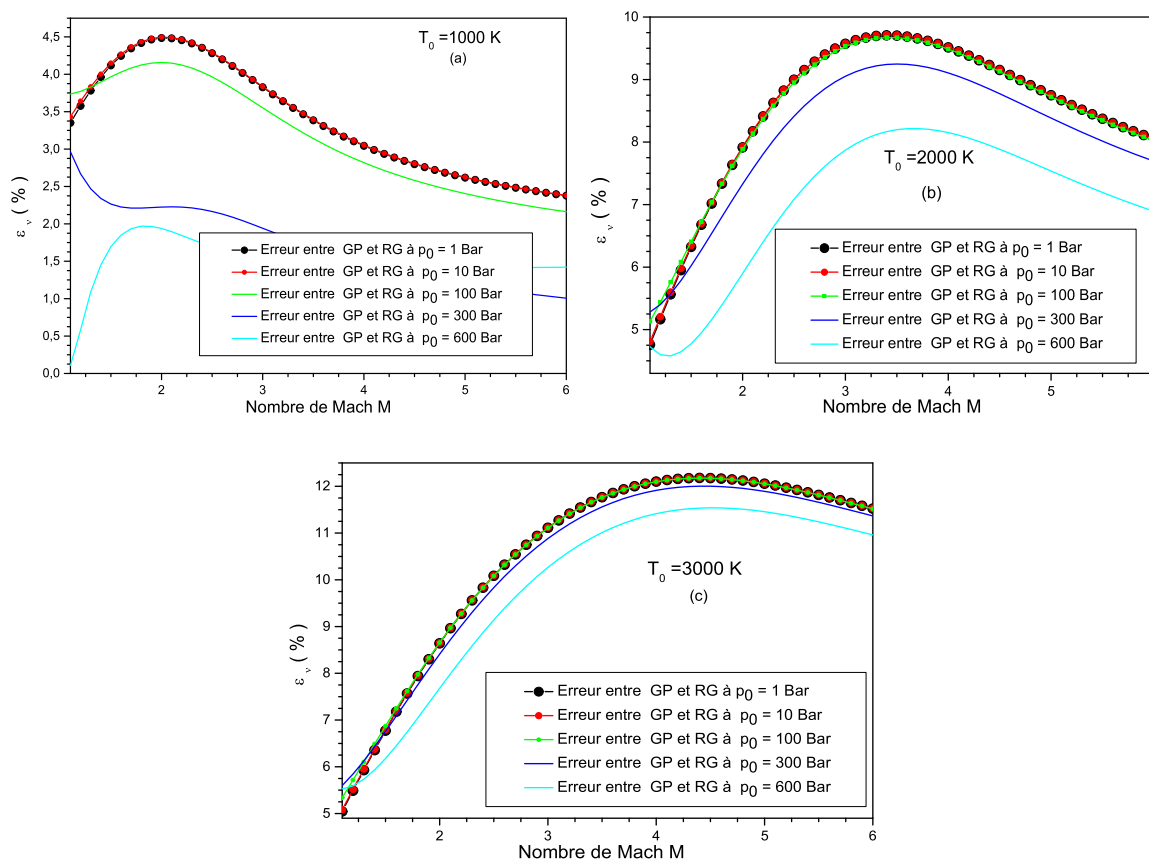


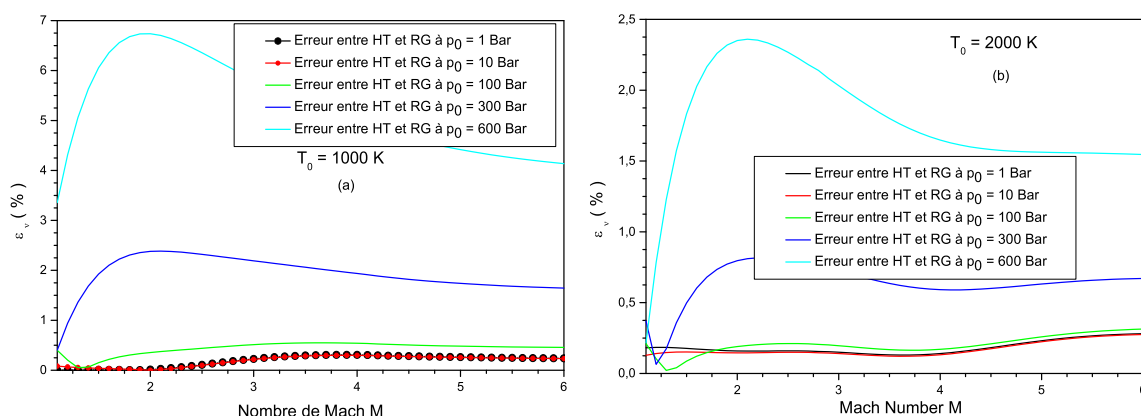
Figure 5.26 : Variation de l'erreur relative de la fonction de Prandtl Meyer  $v$  entre les modèles GP et GR en fonction du nombre de Mach

La figure 5.27 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage de la fonction de Prandtl Meyer  $v$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{ K}$ , et  $3000\text{ K}$  et les pressions génératrices  $P_0= 1\text{ Bar}$ ,  $10\text{ Bar}$ ,  $100\text{ Bar}$ ,  $300\text{ Bar}$  et  $600\text{ Bar}$ , en fonction du nombre de Mach, du modèle HT comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M$ , elle augmente si  $P_0$  augmentent, et diminue si  $T_0$  augmente, Par exemple si  $T_0=1000$  K et  $M=2.00$ , l'utilisation du modèle *HT* va nous donner une erreur relative égale à  $\varepsilon=0.012$  % pour une pression génératrice  $P_0 = 1$  Bar,  $\varepsilon=0.012\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 10$  Bar,  $\varepsilon=0.354$  % pour une pression génératrice  $P_0 = 100$  Bar,  $\varepsilon=2.38\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 300$  Bar,  $\varepsilon=6.74\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 600$  Bar, qui donne une différence de  $0.003^\circ$ ,  $0.003^\circ$ ,  $0.097^\circ$ ,  $0.641^\circ$ ,  $1.741^\circ$  entre les valeurs des  $v$  des deux modèles.

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieur à 5 %, le modèle *HT* peut être utilisé, si  $T_0$  soit supérieure à 1000 K pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle *HT* dans des intervalles de  $P_0$ ,  $M$  et  $T_0$  bien modérées.

On peut remarquer qu'à faible valeur de  $P_0$ , l'erreur  $\varepsilon$  est faible. Sur ces figures, les figures 5.27.b et 5.27.c se trouve au-dessous de l'erreur 5%. Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle *HT* pour les applications aéronautiques, surtout à haute Température  $T_0$ , si on accepte une erreur inférieur à 5%. Mais à basse température  $T_0$ , l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle *HT* indépendamment à la pression  $P_0$ .



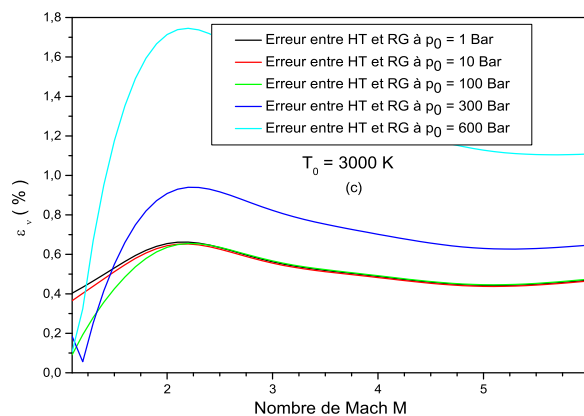


Figure 5.27 : Variation de l'erreur relative de la fonction de Prandtl Meyer  $v$  entre les modèles HT et RG en fonction du nombre de Mach

### 5.7. Résultats sur la tuyère à détente centrée bidimensionnelle (2D MLN)

Dans cette partie du chapitre, on va présenter les divers résultats de dimensionnement et de conception des tuyères à détente centrée.

#### 5.7.1 Effet de la discrétisation et le raffinement du maillage sur la convergence

La figure 5.28 représente le raffinement du maillage en caractéristiques dans la zone de Kernel de la tuyère *MLN 2D* sans insertion des caractéristiques supplémentaire et sans condensation, on a pris l'exemple avec  $P_0=10$  bar,  $T_0=2000$  K et  $M_S=3.00$ . Cette figure représente les quatre cas possibles de maillage et leurs effets sur les résultats numériques de dimensionnement et de conception qui est présenté dans les tableaux 5.1, on remarque que la diminution du pas de déviation du vecteur vitesse au centre de détente  $\Delta\theta$  entraîne une convergence des résultats de la conception et de dimensionnement, et deviennent meilleures avec une précision élevée lorsque  $\Delta\theta$  inférieure à 0.8, par exemple pour avoir une précision de 0.04% il faut prendre  $\Delta\theta=0.01^\circ$ , qui donne environ 2750 points sur la dernière  $C^-$  AB. Le nombre de points trouvés sur la dernière  $C^-$  dans la région de Kernel, qui représente aussi le nombre de points sur la paroi de la tuyère est présenté dans les tableaux 5.3 et 5.4.

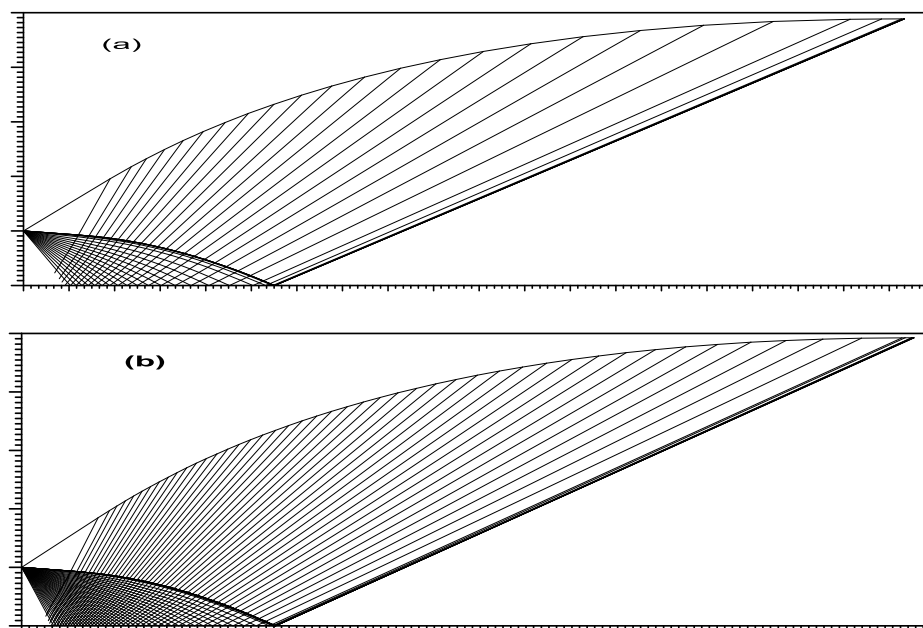


Figure 5.28 : Raffinement du maillage dans la zone de Kernel de la tuyère *MLN 2D* sans insertion des caractéristiques supplémentaire

(a) : Zone de Kernel gros avec  $\Delta\theta=2.5$ . (b) : Zone de Kernel fin avec  $\Delta\theta=0.20$ .

Tableau 5.1 : Effet de raffinement de la zone de Kernel sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère *MLN 2D* pour  $P_0=10$  bar,  $T_0=2000$  K,  $M_S=3.00$  et  $Ni=0$

$\Delta\theta^\circ$	$N_C$	$\frac{y_s}{y^*}$	$\theta^*$	$M^*$	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$C_{masse}$	$C_{force}$	$\varepsilon(\%)$
2.5	25	4.881223	27.421722	1.963792	5.513274	19.572756	21.350985	0.473660	6.439725
1.25	35	4.874886	27.421722	1.963792	5.498488	19.436897	21.291913	0.467544	4.319750
0.8	43	4.869523	27.421777	1.963792	5.460470	19.314139	20.949106	0.465234	3.981405
0.4	81	4.867559	27.421300	1.963034	5.398343	19.266261	20.291913	0.462638	3.345605
0.2	149	4.863870	27.421000	1.963034	5.269442	19.197919	19.708707	0.460970	3.071212
0.1	285	4.861550	27.420742	1.963034	5.254834	19.126860	19.708707	0.458822	2.852652
0.05	556	4.860388	27.420287	1.963792	5.241427	19.081234	19.569638	0.456528	1.61878
0.01	2750	4.860269	27.419999	1.963640	4.236586	19.032194	18.472171	0.452336	0.048517

La figure 5.29 représente le raffinement du maillage en caractéristiques dans la zone de Kernel de la tuyère *MLN 2D* avec l'insertion des caractéristiques supplémentaire et sans condensation, on a pris l'exemple avec  $P_0=10$  bar,  $T_0=2000$  K et  $M_S=3.00$ . Cette figure représente les quatre cas possibles de maillage obtenus si en utilise l'insertion progressive des caractéristiques

supplémentaires dans la région de Kernel entre la ligne sonique et la première  $C^-$  régulière. On remarque que malgré le pas  $\Delta\theta$  est grand, la paroi au voisinage du col est bien présentée. La distance entre la ligne sonique et la 1<sup>ère</sup>  $C^-$  régulière est diminuée, cette diminution entraîne une convergence des résultats numériques de dimensionnement et de conception qui est présenté dans les tableaux 5.2, on remarque que l'insertion des caractéristiques supplémentaire entraîne une convergence des résultats de la conception et de dimensionnement, et deviennent meilleures avec une précision élevée lorsque  $N_i$  supérieur à 10, par exemple pour avoir une précision de 0.04% il faut prendre  $N_i = 50$ , qui donne environ 107 points sur la dernière  $C^- AB$ .

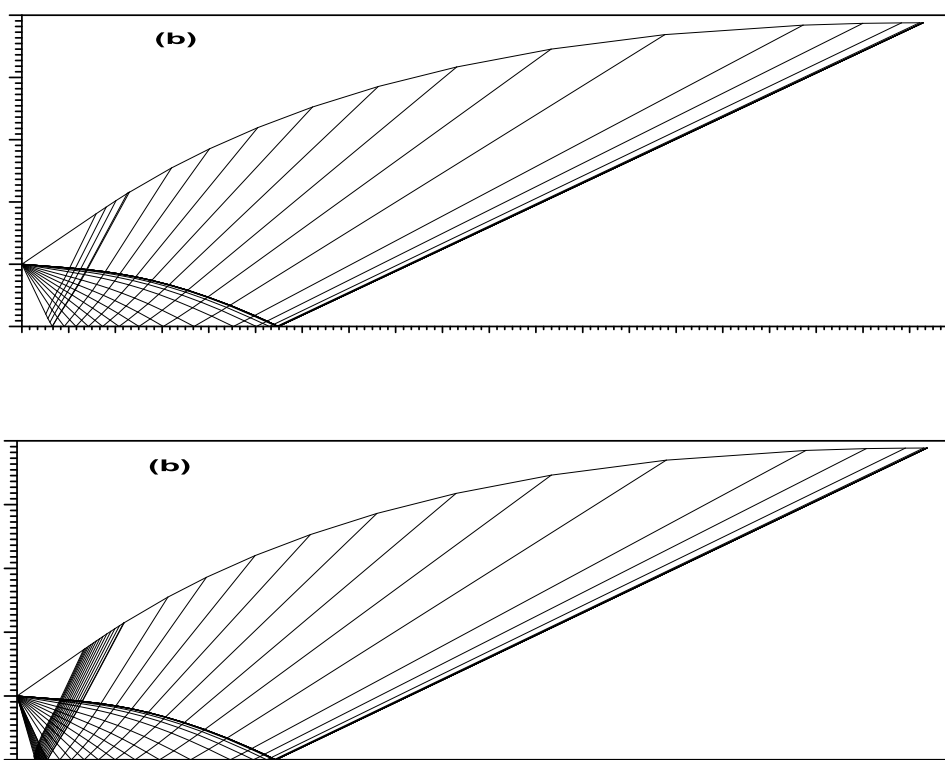


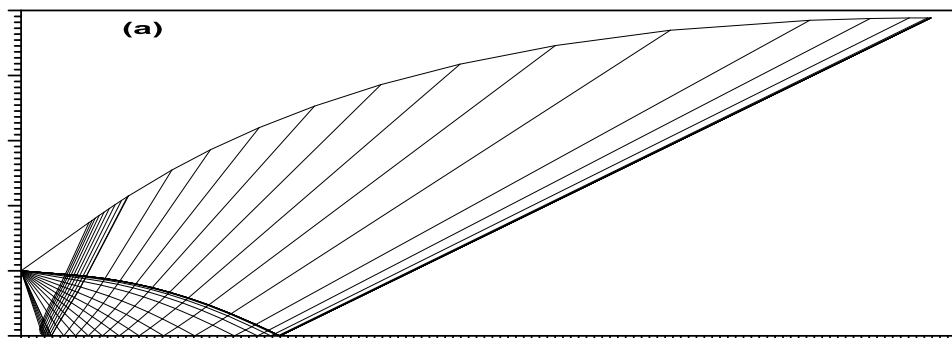
Figure 5.29 : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère *MLN 2D* avec  $\Delta\theta=3.0$

(a) : Sans insertion  $N_i=0$ . (b): Insertion avec  $N_i=20$ .

Tableau 5.2 : Effet de l'insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère *MLN 2D* pour  $P_0=10$  bar,  $T_0=2000$  K,  $M_S=3.00$  et  $\Delta\theta=2.5$

$N_i$	$N_C$	$\frac{y_s}{y^*}$	$\theta^*$	$M^*$	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$C_{masse}$	$C_{force}$	$\varepsilon(\%)$
0	25	4.881223	27.421722	1.963792	5.513274	19.572757	21.350985	0.473660	6.439725
5	62	4.877834	27.419701	1.963438	5.511786	19.432153	21.091462	0.468346	1.890117
10	67	4.874764	27.417501	1.963438	5.260855	19.263809	20.036646	0.465237	1.649238
20	77	4.865540	27.416801	1.963438	5.165584	19.138006	19.467255	0.461787	0.887096
50	107	4.861643	27.415794	1.963578	4.247328	19.068734	18.507535	0.458743	0.044627

La figure 5.30 représente le raffinement du maillage en caractéristiques dans la zone de Kernel de la tuyère *MLN 2D* avec la condensation  $\Delta$ , on a pris l'exemple avec  $P_0=10$  bar,  $T_0=2000$  K,  $M_S=3.00$ ,  $\Delta\theta=2.5$  degré et  $N_i=10$ . Cette figure représente les quatre cas possibles de maillage obtenus si on change le coefficient de condensation  $\Delta$  dans la région de Kernel au voisinage du col. On remarque que malgré le pas  $\Delta\theta$  est grand, la paroi au voisinage du col est bien présentée. Le vide entre la ligne sonique et la 1<sup>ère</sup> C<sup>-</sup> régulière est diminuée, cette diminution entraîne une convergence des résultats numériques de dimensionnement et de conception qui est présenté dans les tableaux 5.3. Les tuyères dans les quatre exemples sont présentées par le même nombre de points sauf la disposition des points qui influe sur la conception de la tuyère. On remarque aussi que l'augmentation de  $\Delta$  entraîne une convergence des résultats de la conception et de dimensionnement, et deviennent meilleures avec une précision élevée lorsque  $\Delta$  supérieur à 8, par exemple pour avoir une précision de 0.04% il faut prendre  $\Delta =50$ , qui donne environ 107 points sur la dernière C<sup>-</sup> AB.



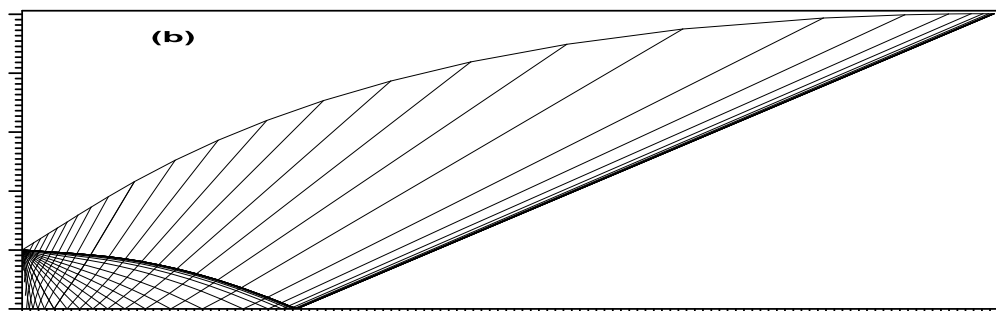


Figure 5.30 : Effet du coefficient de condensation  $\Delta$  sur la qualité du maillage en caractéristique d'une tuyère *MLN 2D* avec  $\Delta\theta=2.5$  degré et  $Ni=10$   
**(a) :  $\Delta=2$ . (b) :  $\Delta=8$ .**

Tableau 5.3 : Effet de changement du coefficient de condensation  $\Delta$  sur la qualité du maillage dans la zone de Kernel et la convergence des paramètres de conception de la tuyère *MLN 2D* pour  $P_0=10$  bar,  $T_0=2000$  K,  $M_S=3.00$ ,  $Ni=10$  et  $\Delta\theta=2.5$

$\Delta$	$N_C$	$\frac{y_s}{y^*}$	$\theta^*$	$M^*$	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$C_{masse}$	$C_{force}$	$\varepsilon(\%)$
1	67	4.874764	27.417501	1.963438	5.260855	19.263809	20.036646	0.465237	1.649238
2	67	4.871807	27.416801	1.963338	5.180762	19.218432	19.717465	0.46428	1.238989
4	67	4.868219	27.415901	1.963296	5.089975	19.139741	19.260047	0.46178	0.710426
8	67	4.863876	27.415438	1.963269	4.245987	19.097645	18.538755	0.459376	0.045677

La figure 5.31 représente la qualité finale du maillage de la tuyère *MLN 2D* pour  $\Delta\theta=0.6$  degré,  $Ni=10$  et  $\Delta=8$ . A partir des tableaux 5.4, 5.5 et 5.6 On peut dire que le nombre de point  $N_C$  à trouvé sur la dernière C- dépend de nombre de Mach de sortie  $M_S$ , la température génératrice  $T_0$ , la pression génératrice  $P_0$ , le pas de déviation  $\Delta\theta$ , le nombre des caractéristiques insérées  $N_i$ , le coefficient de condensation  $\Delta$ . On remarque qu'il est très intéressant de raffiner le maillage sur la paroi au voisinage du col, par ce que la nature d'un écoulement supersonique détermine les propriétés en un point en fonction de deux points qui se trouvent en amont. Alors, une mauvaise présentation de la paroi au col va propager et agrandir les erreurs à la sortie, et par conséquent, on va déterminer une mauvaise allure de la paroi. Le control des résultats se fait par l'utilisation du rapport des sections qui reste toujours valable puisque l'écoulement à la sortie de la tuyère est uniforme et parallèle.



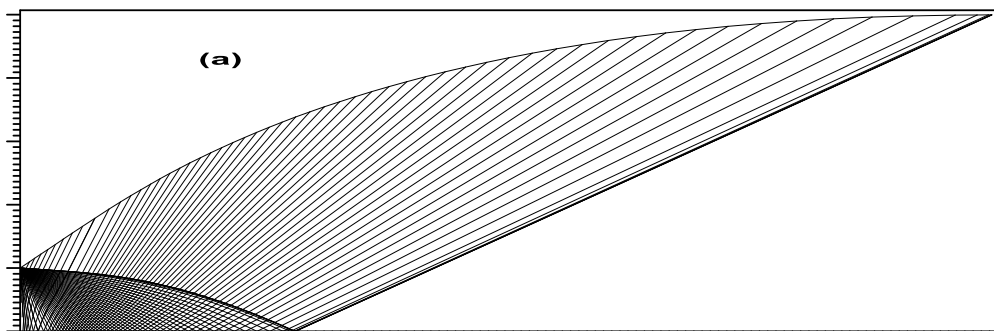


Figure 5.31 : Qualité du maillage final d'une tuyère *MLN 2D* avec  $\Delta\theta=0.6$  degré,  $N_i=10$  et  $\Delta=8$ .

Tableau 5.4 : Effet du nombre de Mach de sortie sur le nombre de points obtenus sur la dernière  $C$  de la zone de Kernel de la tuyère *MLN 2D* lorsque  $T_0=2000$  K sans effet de condensation

	$M_s=1.5$	$M_s=3.0$	$M_s=6.0$
$\Delta\theta=2.00^\circ$	15	26	47
$\Delta\theta=1.00^\circ$	18	39	58
$\Delta\theta=0.50^\circ$	23	66	99
$\Delta\theta=0.25^\circ$	35	120	182
$\Delta\theta=0.10^\circ$	75	285	433
$\Delta\theta=0.05^\circ$	137	556	853

Tableau 5.5 : Effet de la température  $T_0$  sur le nombre de points obtenus sur la dernière  $C$  de la zone de Kernel de la tuyère *MLN 2D* lorsque  $M_s=3.00$  sans effet de condensation

	$T_0=1000$ K	$T_0=2000$ K	$T_0=3000$ K
$\Delta\theta=2.00^\circ$	23	26	29
$\Delta\theta=1.00^\circ$	37	39	42
$\Delta\theta=0.50^\circ$	62	66	69
$\Delta\theta=0.25^\circ$	116	120	124
$\Delta\theta=0.10^\circ$	268	285	296
$\Delta\theta=0.05^\circ$	524	556	564

Tableau 5.6 : Effet de la pression  $P_0$  sur le nombre de points obtenus sur la dernière  $C$  de la zone de Kernel de la tuyère *MLN 2D* lorsque  $M_s=3.00$  sans effet de condensation

	$P_0=1$ bar	$P_0=10$ bar	$P_0=100$ bar
--	-------------	--------------	---------------

$\Delta\theta=2.00^\circ$	25	26	28
$\Delta\theta=1.00^\circ$	37	39	41
$\Delta\theta=0.50^\circ$	65	66	67
$\Delta\theta=0.25^\circ$	119	120	121
$\Delta\theta=0.10^\circ$	282	285	287
$\Delta\theta=0.05^\circ$	554	556	559

### 5.7.2 Effet de la pression $P_0$ sur l'allure de la paroi

Les figures 5.32, 5.33 et 5.34 représentent respectivement la variation de l'allure des tuyères  $y/y^*$  obtenues lorsque le nombre de Mach  $M_S=1.50$ ,  $3.0$  et  $6.0$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$ , et  $3000\text{K}$  et les pressions génératrices  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $10\text{Bar}$ , et  $100\text{Bar}$ , en fonction du nombre d'abscisse  $x/y^*$ , du modèle RG comparé aux modèles PG et HT. on remarque que l'augmentation de  $x/y^*$  pour différents modèles entraîne une augmentation de  $y/y^*$ , on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs  $P_0 = 1\text{ bar}$ ,  $10\text{ bar}$  et  $100\text{ bar}$ , influe sur  $y/y^*$ , les allures diminuent lorsque  $P_0$  augmente, ce qui n'est pas le cas pour les modèles PG ou HT, cette diminution d'autant importante et remarquable lorsque la pression génératrice  $P_0$  et le Mach de sortie élevées (voir fig. 5.34), d'où, la nécessité d'utiliser le modèle *RG* pour corriger les résultats, et pour montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur la conception. Entre les figures présentées, on peut dire que si la pression génératrice  $P_0$  augmente, l'écart entre les modèles *GP* et *HT* et notre modèle *RG* agrandie et devient considérable, indépendamment au nombre de Mach  $M_S$ , ou a partir du  $M_S>2.00$  pour n'importe quelle pression  $P_0$ . Cette limite peut être trouvée si on opte une erreur  $\varepsilon$  inférieure à 5%.

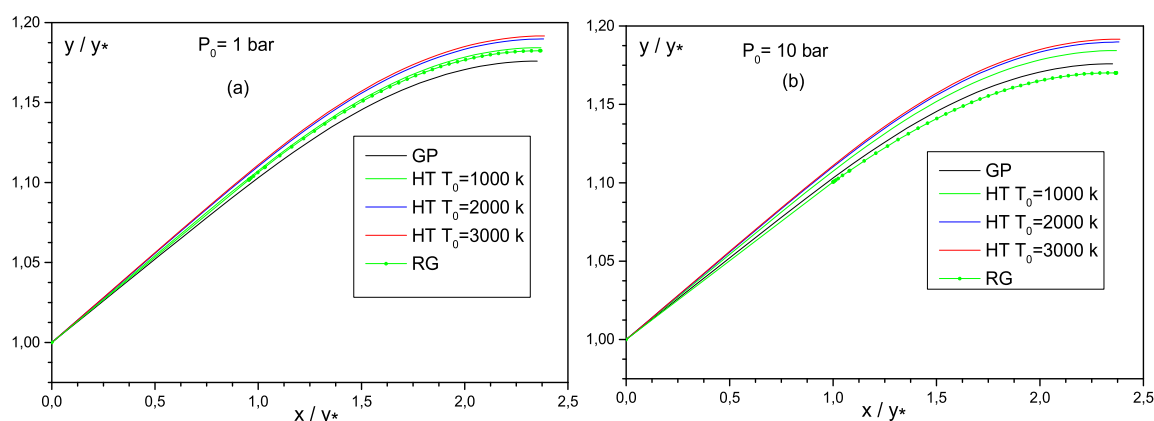


Figure 5.32 : Formes des tuyères *MLN 2D* donnant à la sortie  $M_S=1.50$

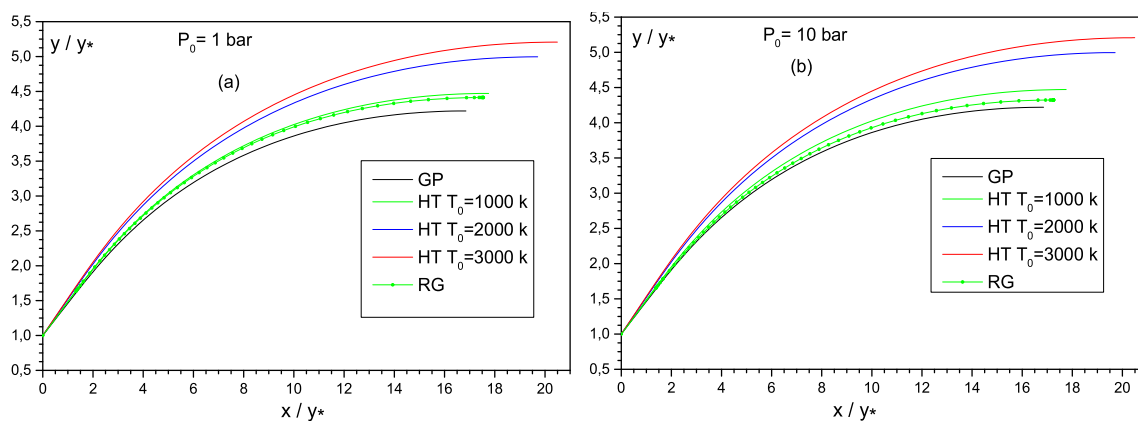


Figure 5.33 : Formes des tuyères *MLN 2D* donnant à la sortie  $M_S=3.00$

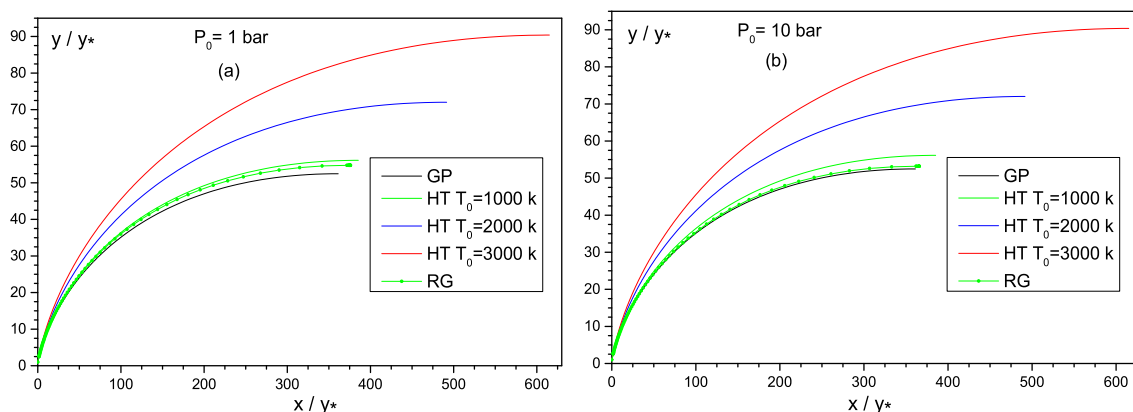
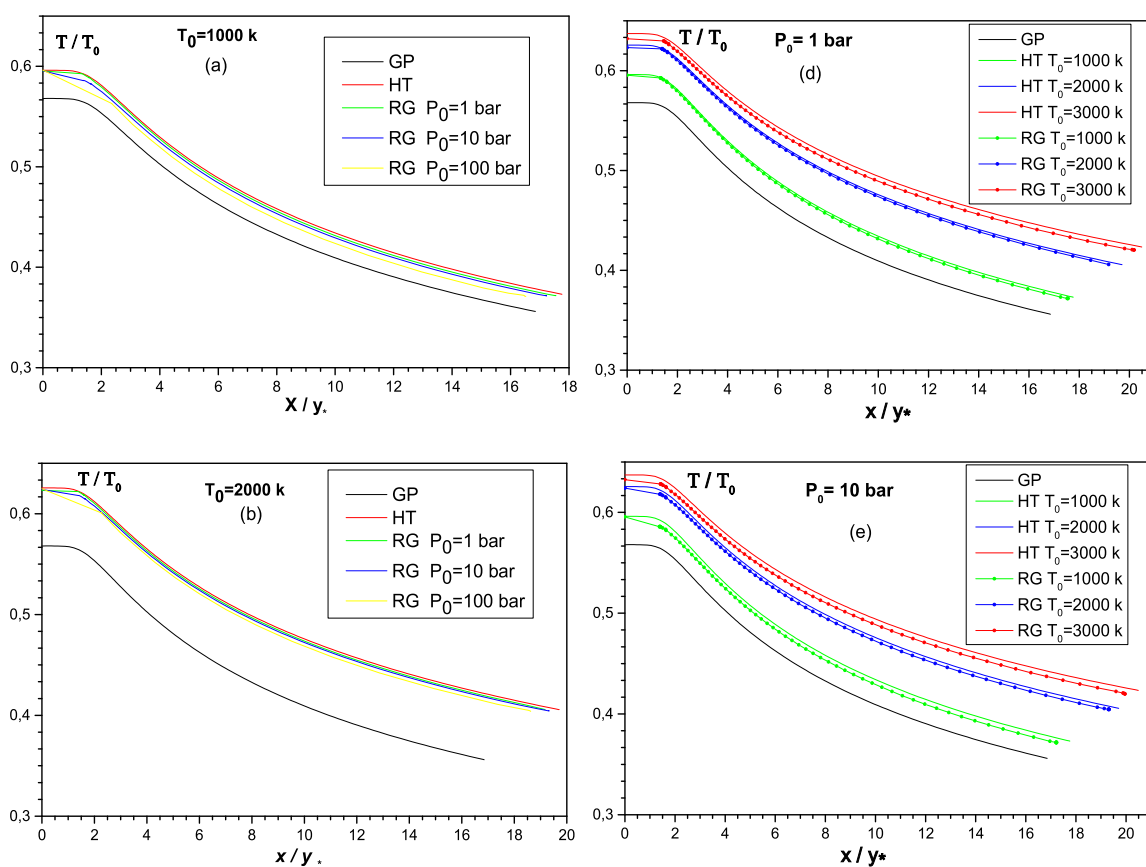


Figure 5.34 : Formes des tuyères *MLN 2D* donnant à la sortie  $M_S=6.00$

### 5.7.3 Variation des paramètres à travers la paroi de la tuyère

La figure 5.35 représente la variation du rapport des températures  $T/T_0$  en fonction de  $x/y^*$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0=1$  Bar, 10 Bar et 100 Bar, on remarque que l'augmentation de l'abscisse  $x/y^*$  pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de température. On remarque la diminution de ces rapports de ceux correspondants à  $M=1$  du col à ceux correspondants à  $M=M^*$  juste après la détente, ensuite à ceux correspondants à  $M=M_S$  de la section de sortie, on remarque aussi que la variation de la température ou la pression génératrice, influe sur le rapport de température, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait ou haute température.

Le nombre de Mach  $M^*$  et les rapports thermodynamiques correspondants, sont présentés dans le tableau 5.7. Ces rapports représentent l'intersection des courbes de la figure 5.35 avec l'axe vertical. A titre information la valeur  $M=M^*$  représente encore l'intersection des courbes de la figure 5.37 avec l'axe vertical. La variation du rapport  $T/T_0$  nous donne une indication sur le choix convenable du matériau de construction qui va résister à cette température. Ce rapport nous servie encore pour déterminer la condition au limite interne du modèle mathématique du transfert de chaleur à travers le matériau utilisé pour la construction de la tuyère. Au cours de la détente, le gaz va se refroidir, où la température critique est toujours supérieure à la température de la section de sortie. On remarque encore que le gaz parfait indique un refroidissement par rapport au comportement thermodynamique réel, surtout si la température  $T_0$  est élevée. Alors il est possible que le matériau choisi fait sur la base des modèles gaz parfait ou haute température ne peut résister à la température de notre modèle puisque le gaz se comporte à haute température.



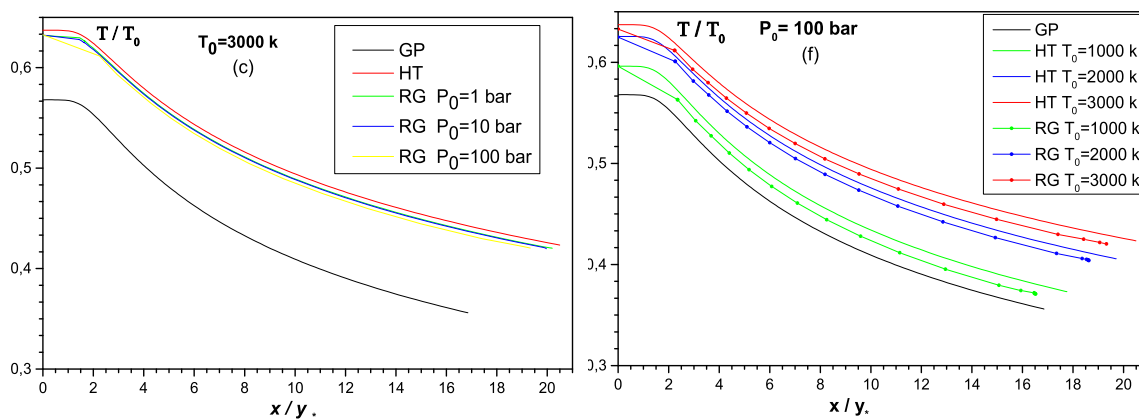


Figure 5.35 : Variation de rapports des températures le long de la paroi de la tuyère lorsque  $M_S=3.00$

La figure 5.36 représente la variation du rapport des pressions  $P/P_0$  en fonction de  $x/y^*$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0=1$  Bar, 10 Bar et 100 Bar, on remarque que l'augmentation de l'abscisse  $x/y^*$  pour différents modèles entraîne une diminution des rapports des pressions. On remarque que les résultats obtenus par notre modèle *RG* s'éloignent de *GP* et *HT* lorsque  $x/y^*$  augmente, cet éloignement devient considérable juste après la zone de détente, ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur les paramètres d'écoulement, cette dernière devient forcée par la pression génératrice, ces résultats ont prouvées auparavant dans la figure 5.21, cette variation entre les trois modèles *GP*, *HT* et *RG* va influe sur la valeur de la force de poussée, surtout si la pression  $P_0$  est grande. Alors ces résultats servira pour déterminer la force de pression exercée sur la paroi du divergent. Cette figure indique une chute de pression à travers le divergent qui va délivrer une force de pression. Ce rapport servi encore pour faire l'étude sur la distribution de la contrainte radiale et tangentielle, pour but d'étudier la résistance du matériau. Les modèles *GP* et *HT* indique que la force de pression est inférieure à celle donnée par le modèle *RG*, qui est proche du comportement réel de l'écoulement dans la tuyère.

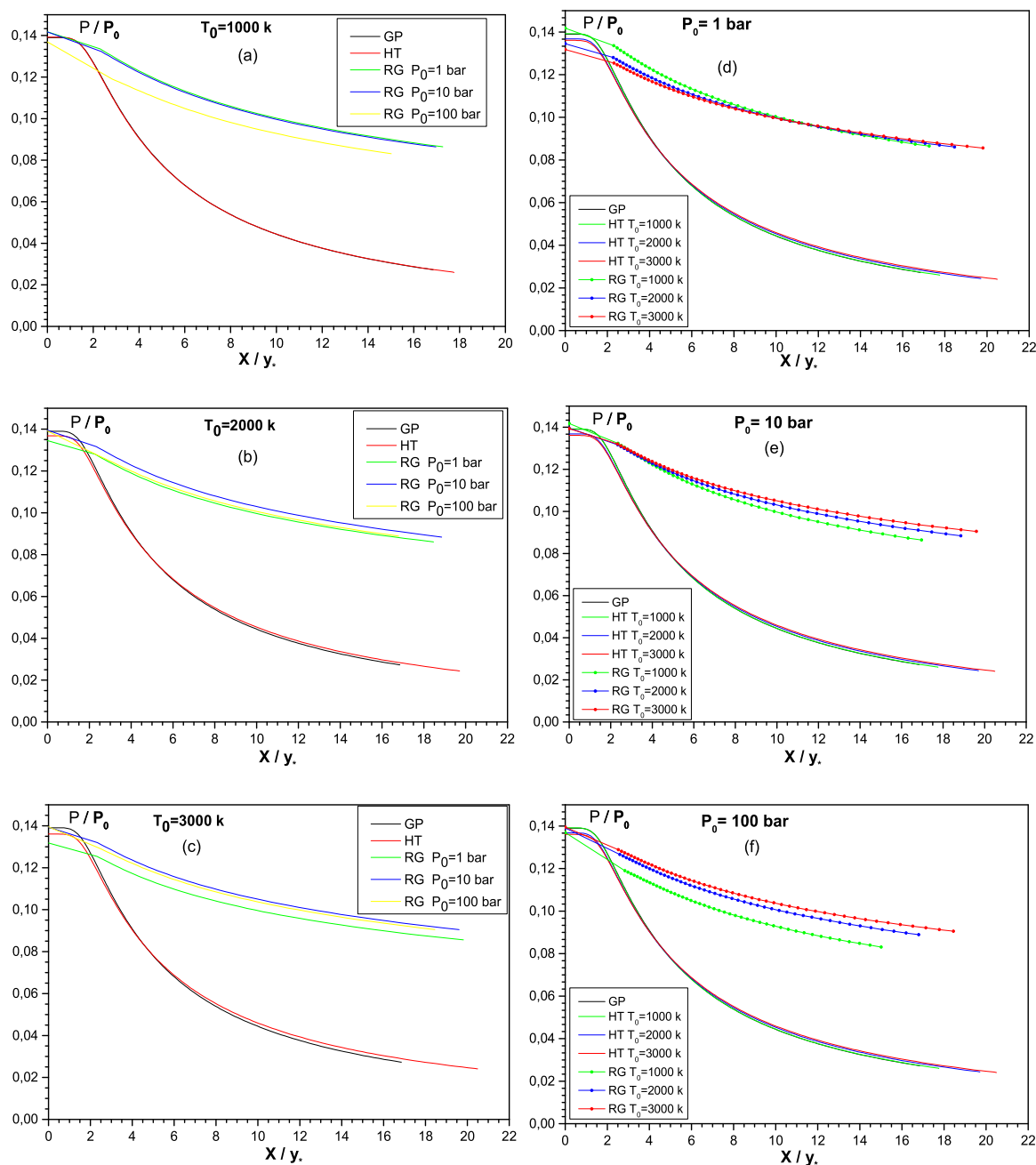
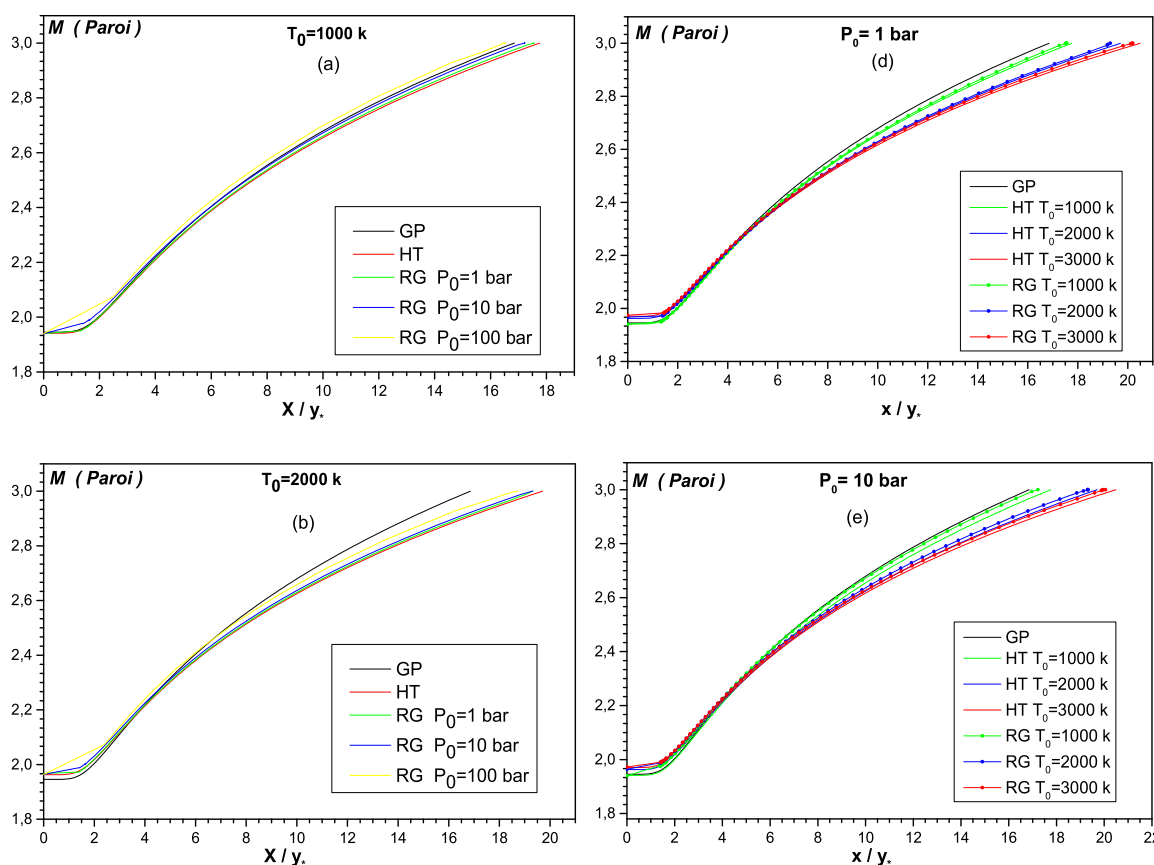


Figure 5.36 : Variation de rapports des pressions le long de la paroi de la tuyère lorsque  $M_S=3.00$

Les figures 5.37 et 5.38 représentent respectivement la variation du nombre de Mach le long de la paroi et sur l'axe de symétrie de la tuyère en fonction de  $x/y^*$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0=1$  Bar, 10 Bar et 100 Bar. Sur la figure 5.37 on remarque l'augmentation du nombre de Mach de  $M=1$  au col à  $M=M^*$  juste après la détente ensuite à  $M=M_S$  à la sortie de la tuyère. L'exemple pris ici est pour  $M_S=3.00$ . On

remarque une portion uniforme à nombre de Mach constant le long de la paroi au voisinage du col quelque soit  $T_0$  et  $P_0$ , qui s'interprète par l'existence d'une zone d'écoulement presque uniforme dans cette région pour ce type de tuyère. L'augmentation du nombre de Mach à travers la paroi s'interprète par la détente du gaz jusqu'à la section de sortie. Pour la figure 5.38 on remarque une portion constante des courbes. Cette portion indique la région uniforme  $BS$  de la figure 4.2 du chapitre 4. L'autre portion indique la variation du nombre de Mach dans la région de Kernel  $AB$  jusqu'à nombre de Mach  $M_S=3.00$ . La longueur de la zone de Kernel est différente pour les tuyères. On remarque clairement l'effet de la pression  $P_0$  sur l'allure des paramètres.



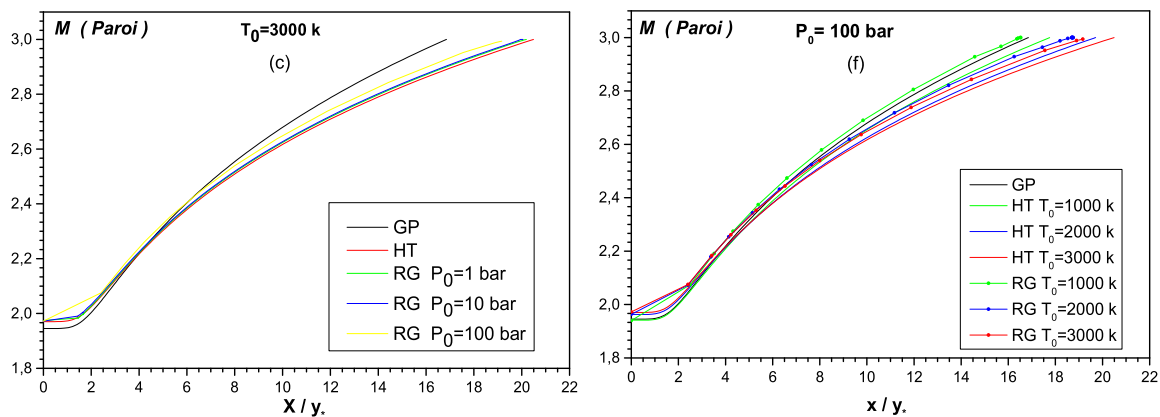
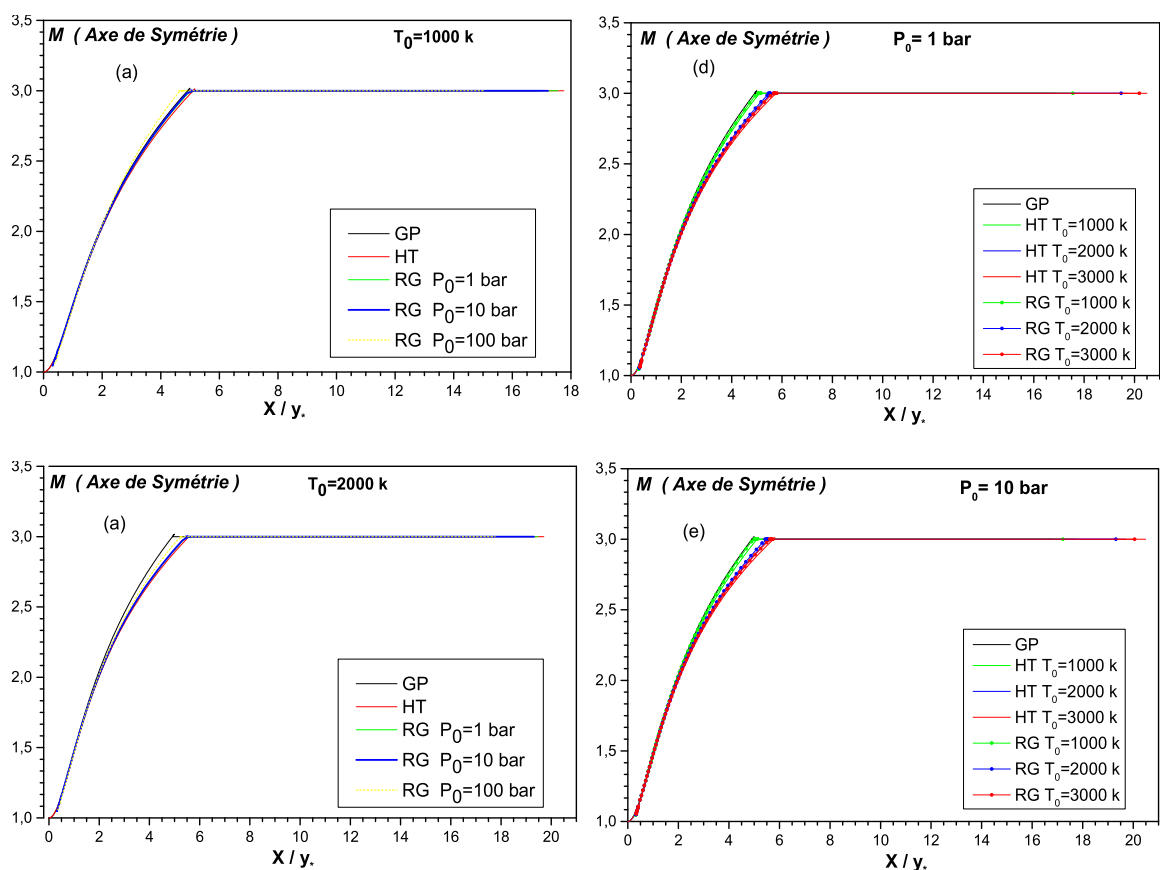


Figure 5.37 : Variation du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère *MLN* 2D





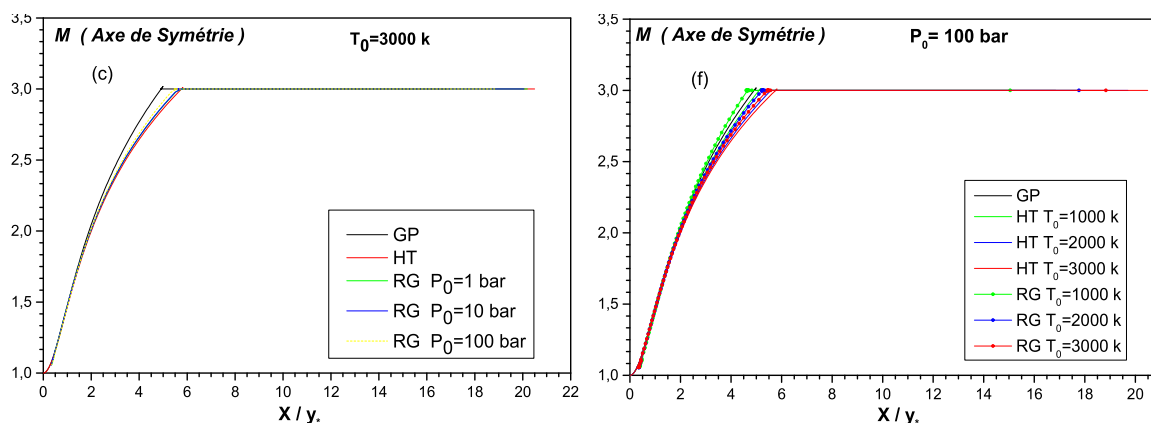
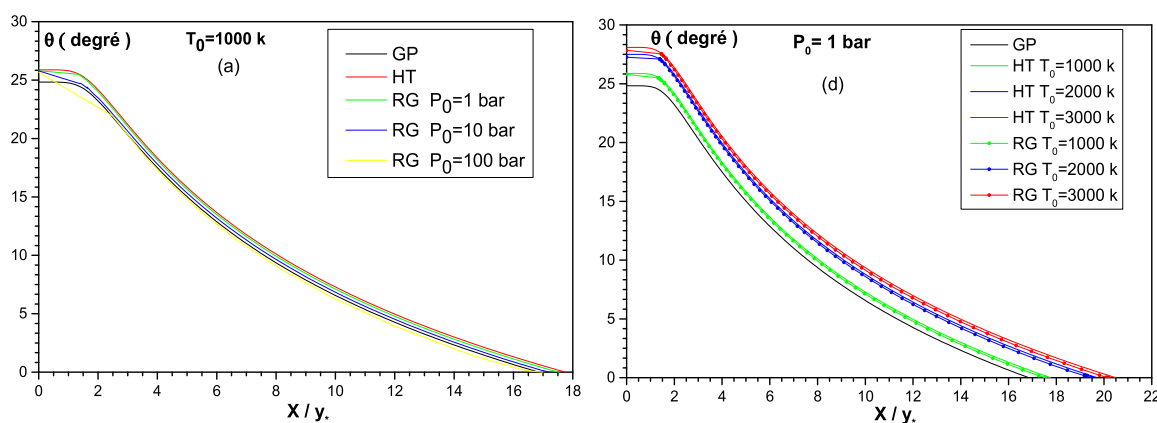


Figure 5.38 : Variation du nombre de Mach le long de l'axe de symétrie  $MLN$  2D donnant  $M_S=3.00$

La figure 5.39 représente la variation de l'angle de déviation de l'écoulement le long de la paroi de la tuyère en fonction de  $x/y^*$ , pour les modèles  $HT$ ,  $GP$  et  $RG$ , et pour quelques valeurs de la pression  $P_0=1$  Bar, 10 Bar et 100 Bar, On remarque qu'il y a redressement de l'écoulement. L'angle de déviation augmente brusquement de  $\theta=0.0$  à  $\theta=\theta^*$  au centre de détente  $A$ , ensuite diminue à travers la paroi jusqu'à où il devient nul à la section de sortie. L'intersection des courbes avec l'axe vertical correspondant à l'angle de détente initiale  $\theta^*$  et non pour  $\theta=0.0$ . Au col de la tuyère on a une discontinuité du nombre de Mach. Ici on remarque bien l'influence de la pression  $P_0$  sur les paramètres de conception. L'intersection des courbes des figures 5.35, 5.36, 5.37, et 5.39 avec l'axe vertical correspondant aux valeurs pour  $M=M^*$  et non pour  $M=1.00$ . Autrement dit, elle correspondant à la valeur juste après la détente, puisque la détente est brusque au point  $A$ .



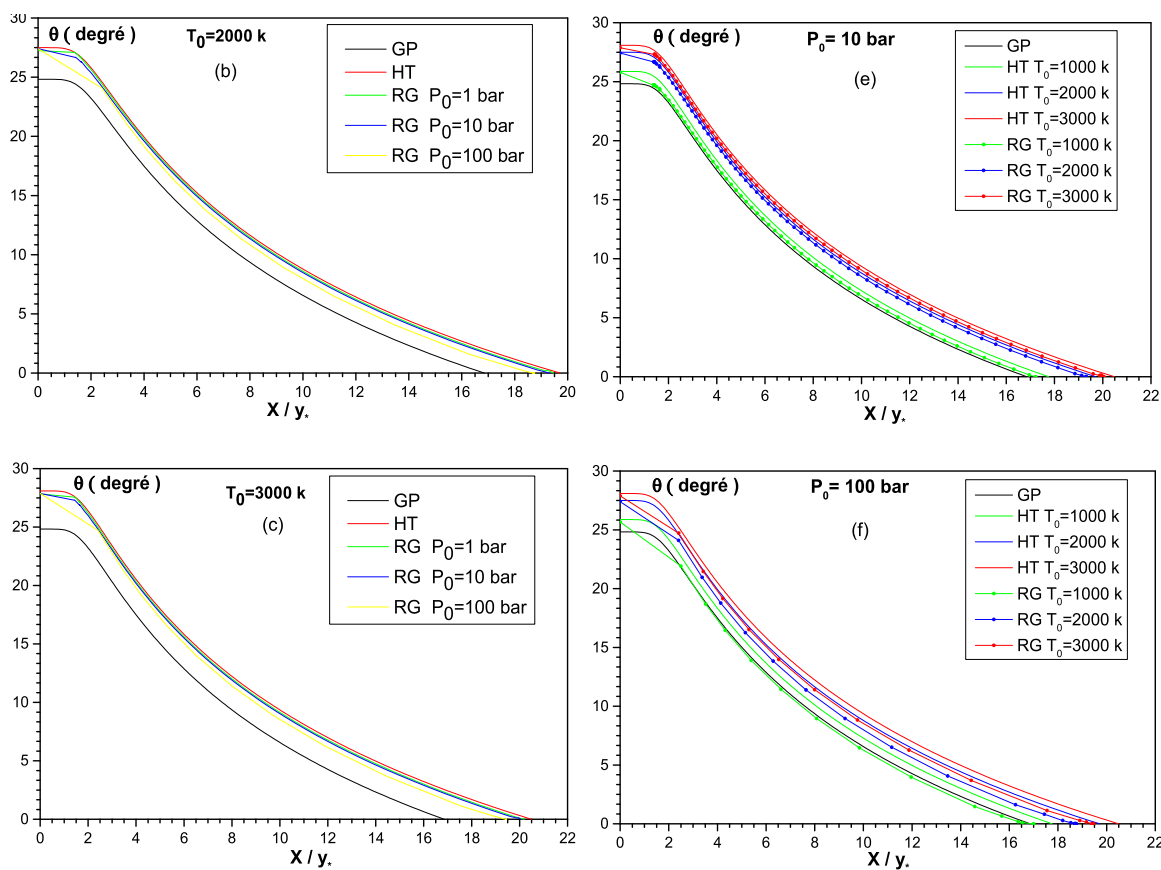


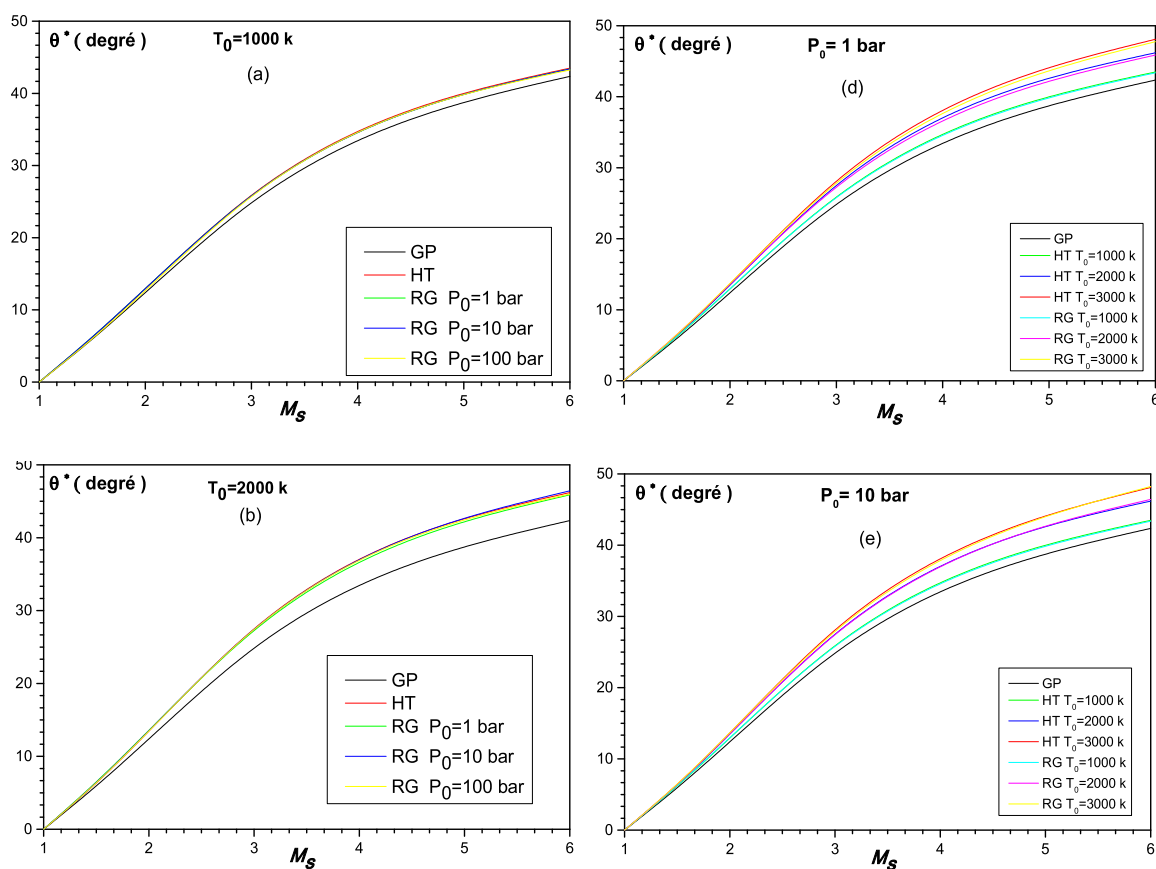
Figure 5.39 : Variation de l'angle de déviation de l'écoulement le long de la paroi de la tuyère *MLN 2D* lorsque  $M_S=3.00$

Tableau 5.7: Nombre de Mach  $M^*$  et les rapports thermodynamiques correspondants pour la tuyère *MLN 2D* lorsque  $MS=3.00$

Modèles	$P_0$ (bar)	$T_0$ (K)	$M^*$	$T/T_0$	$\rho/\rho_0$	$P/P_0$
GP	--	--	1.9454	0.5679	0.2448	0.1390
HT	--	1000	1.9414	0.5961	0.2335	0.1392
		2000	1.9627	0.6256	0.2187	0.1368
		3000	1.9705	0.6372	0.2135	0.1361
RG	1	1000	1.9401	0.5954	0.2382	0.1418
		2000	1.9673	0.6231	0.2289	0.1345
		3000	1.9743	0.6320	0.2186	0.1318
	10	1000	1.9398	0.5955	0.2387	0.1417
		2000	1.9638	0.6240	0.2238	0.1395
		3000	1.9722	0.6325	0.2204	0.1393
	100	1000	1.9403	0.5962	0.2363	0.1369
		2000	1.9634	0.6245	0.2259	0.1391
		3000	1.9721	0.6328	0.2226	0.1395

### 5.7. 4 Paramètres de conception

La figure 5.40 représente la variation de l'angle de déviation  $\theta^*$  du col en fonction du nombre de Mach  $M_S$  et  $T_0$ , pour les modèles *GP*, *HT* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$  et  $100 \text{ Bar}$ , pour but d'illustrer clairement l'effet de la température  $T_0$  sur l'angle de détente initiale. Donc plus  $T_0$  augmente, plus il y a ouverture de la paroi au col. Les courbes obtenues par le modèle *RG* sont presque confondues avec les autres modèles *GP* et *HT* jusqu'à environ  $MS=2.00$ , ensuite commencent à différencier. Mais si la pression génératrice augmente, les résultats obtenus par notre modèle *RG* s'approchent de ceux obtenus par le modèle *HT*, Entre les courbes, on peut remarquer une petite différence entre les valeurs d'un gaz parfait et les autres modèles *HT* et *RG*. Sur la figure 5.40.g, on a présenté une ligne droite horizontale concernant le gaz parfait pour prouver que ce modèle ne tient pas compte de  $T_0$ .



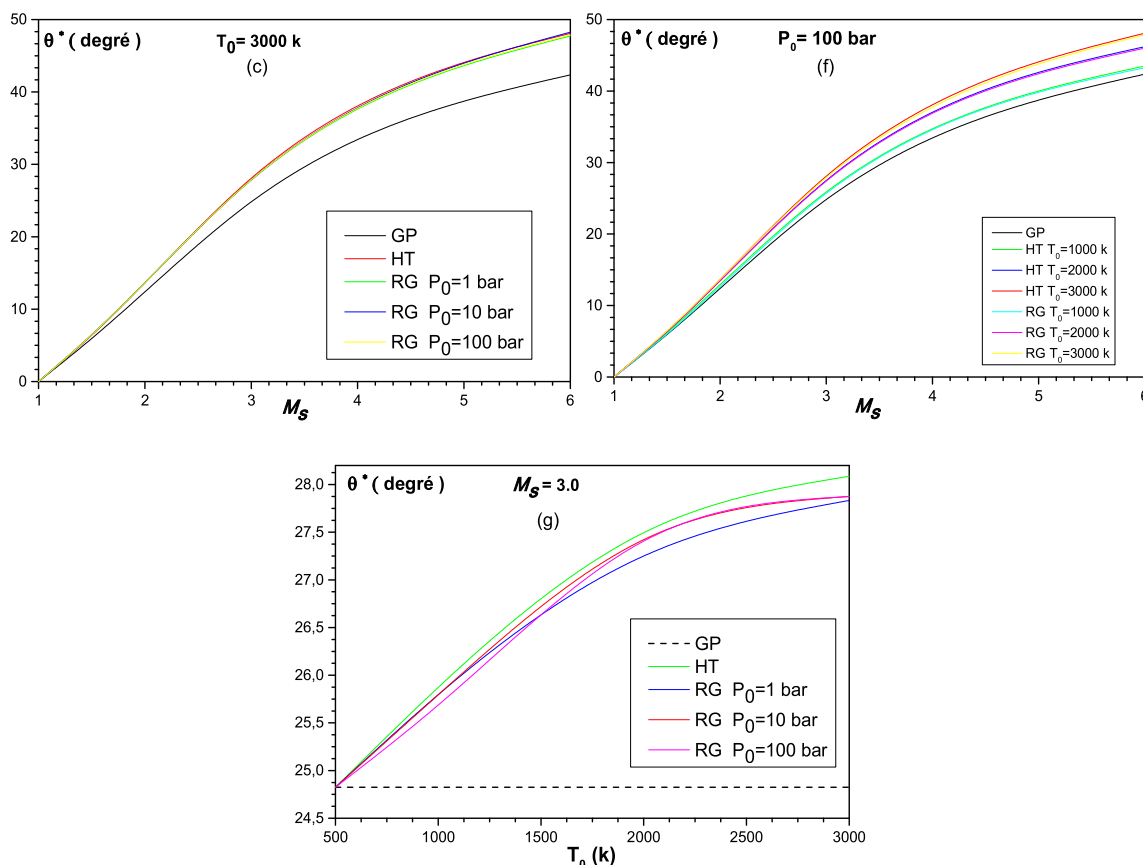


Figure 5.40 : Variation de l'angle  $\theta^*$  du col pour la tuyère en fonction de  $M_S$  et  $T_0$

La figure 5.41 représente la variation du nombre de Mach  $M^*$  au col pour la tuyère en fonction du nombre de Mach  $M_S$  et  $T_0$ , pour les modèles *GP*, *HT* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar et 100 Bar. On peut démontrer qu'il y a une détente brusque centrée au point *A*, qui augmente le nombre de Mach de  $M=1$  à  $M=M^*$ . Si  $P_0$  augmente, la portion de redressement du gaz à travers la paroi diminue pour même nombre de Mach de sortie, vu que l'intervalle  $[M^*, M_S]$  diminue si  $P_0$  augmente. La figure 5.41.g démontre que le modèle *GP* ne dépend pas de  $T_0$  ou  $P_0$ , et que  $M^*$  dépend essentiellement de  $P_0$  pour notre modèle *RG*, qui influence sur la conception de la tuyère. La variation ondulée de  $M^*$  avec  $P_0$  existe pour n'importe quelle valeur de  $M_S$ . On a fait des calculs, où on a changé  $M_S$ , et chaque fois on a tracé le même graphique que la figure 5.41.g, et on a trouvé la même variation ondulée. Ce qui nous intéresse de cette variation est que  $M^*$  tiens compte de la variation de  $T_0$  et  $P_0$ .

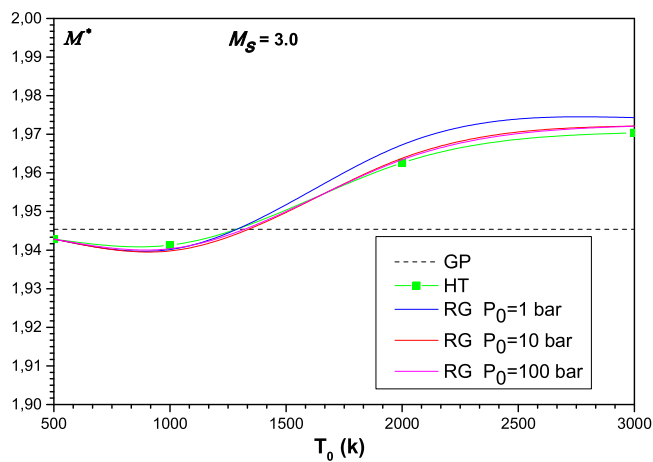
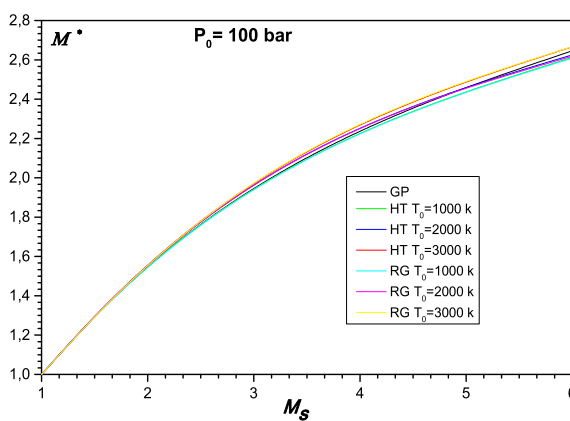
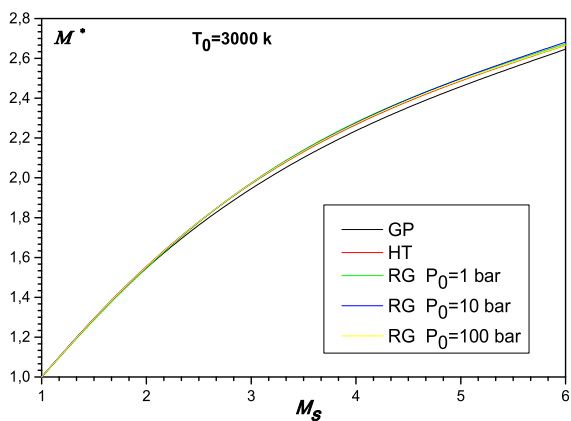
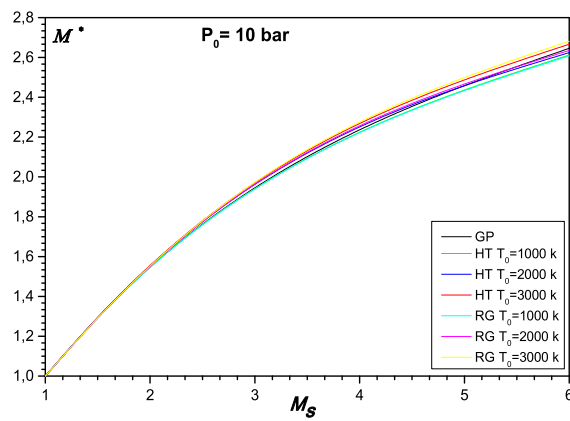
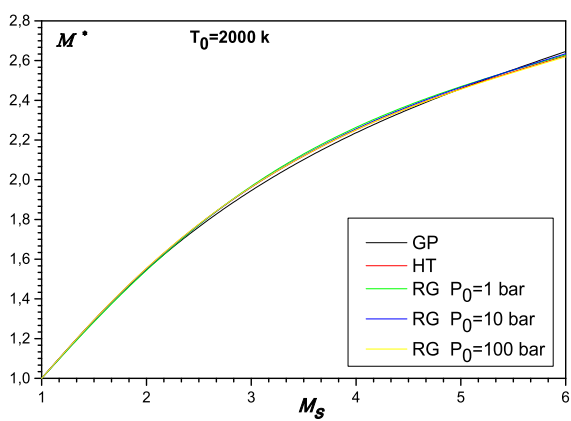
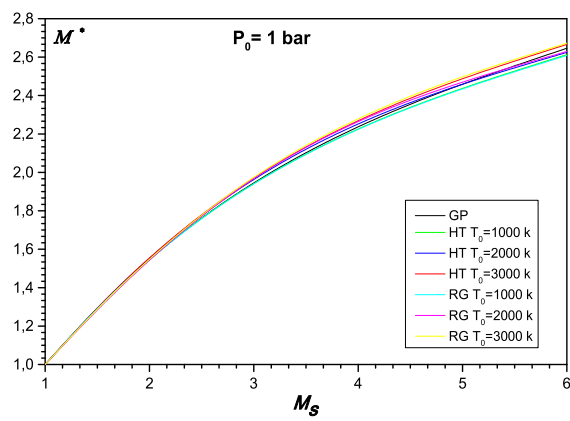
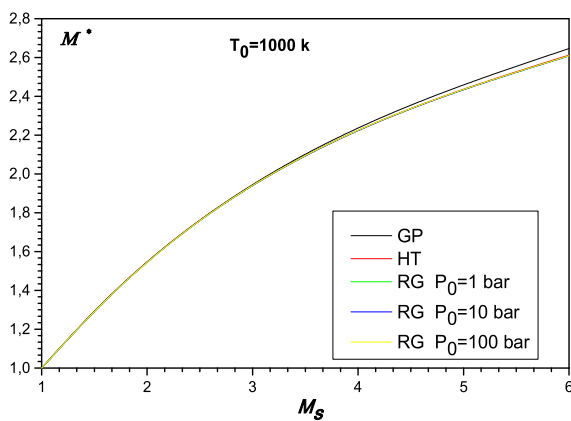


Figure 5.41 : Variation du nombre de Mach  $M^*$  au col pour la tuyère en fonction de  $M_S$  et  $T_0$

Les figures 5.42 et 5.43 représentent respectivement la variation de la longueur de Kernel et la longueur de la tuyère en fonction de  $M_S$  et  $T_0$ , pour les modèles *GP*, *HT* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar et 100 Bar. Pour la figure 5.42 on remarque que plus la tuyère délivre un nombre de Mach de sortie élevé, plus la longueur de la zone de Kernel devient élevée. Le but de la présentation de cette variation est que, à partir de la longueur de cette zone, on peut déduire la longueur de la tuyère directement sans faire le calcul de l'écoulement dans la zone de transition. Toujours on remarque que les courbes se confondent à faible nombre de Mach jusqu'à environ  $M_S = 2.00$ . A partir de cette valeur, les courbes commencent à différencier, et les résultats obtenus par notre modèle *RG* s'éloignent de ceux obtenus par le modèle *HT* lorsque la température  $T_0$  ou la pression génératrice  $P_0$  augmentent, on peut dire que la théorie d'un gaz parfait donne des bon résultats si cette condition est vérifiée. La figure 5.42.g représente la variation de la longueur de Kernel en fonction de  $T_0$  pour même nombre de Mach de sortie. Il est clair que la longueur de Kernal augmente avec  $T_0$ , et par conséquent, la longueur et la masse de la tuyère augmente. La portion horizontale du col existe toujours pour ce paramètre. La longueur de la tuyère peut être calculée à partir de la longueur de Kernel par la relation suivante:

$$\frac{L}{y^*} = \frac{L_d}{y^*} + \frac{A_S}{A^*} \sqrt{M_S^2 - 1} \quad (5.1)$$

Le rapport des sections dans cette relation doit être calculé par la formule (2.93) du chapitre 2. La longueur de la zone uniforme peut être déterminée par la relation (5.1). La figure 5.45 représente la variation de la longueur de la tuyère en fonction de  $M_S$  et  $T_0$ . On remarque toujours l'influence de la température  $T_0$  et la pression  $P_0$ . Les figures 5.42 et 5.43 possèdent même commentaires.

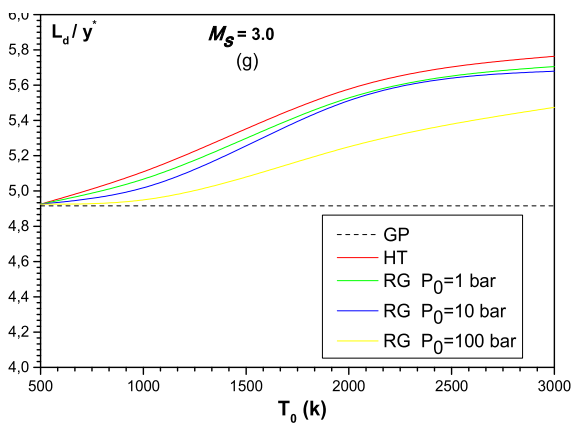
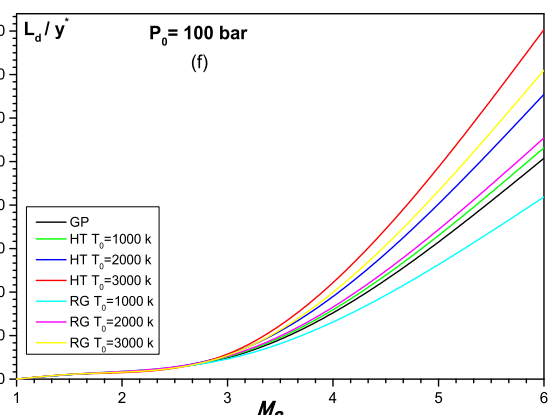
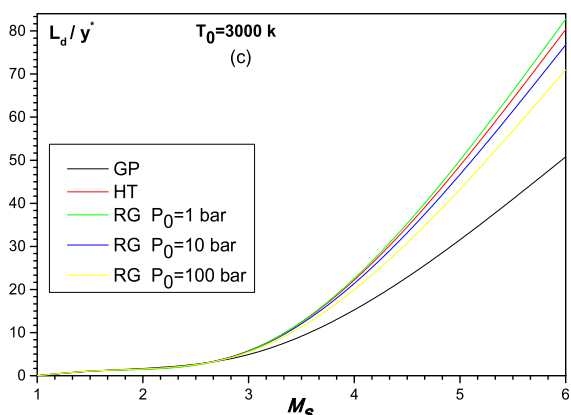
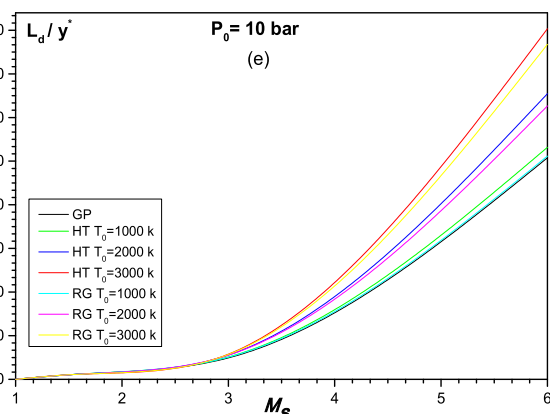
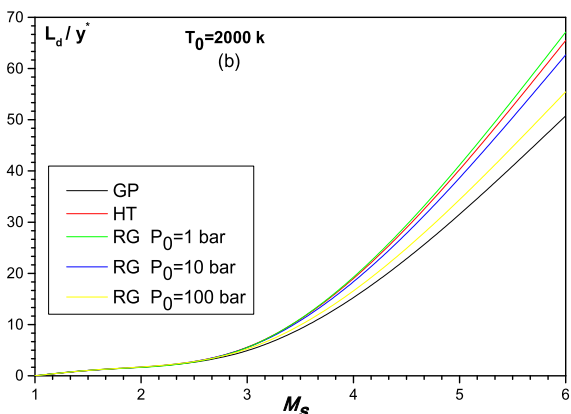
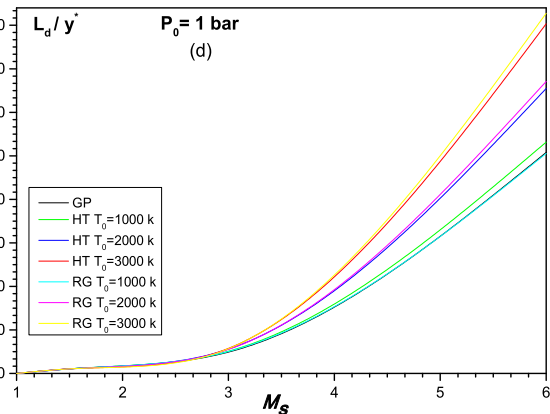
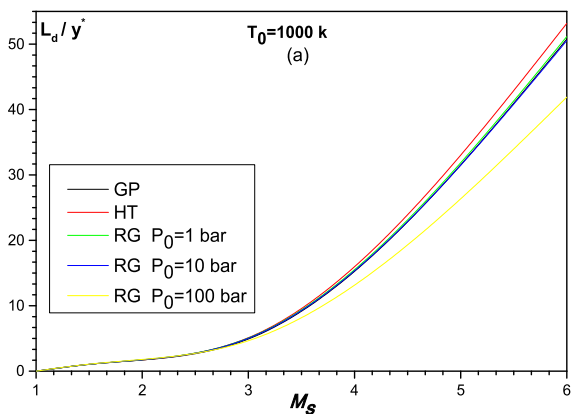


Figure 5.42 : Variation de la longueur de Kernel de la tuyère en fonction de  $M_S$  et  $T_0$

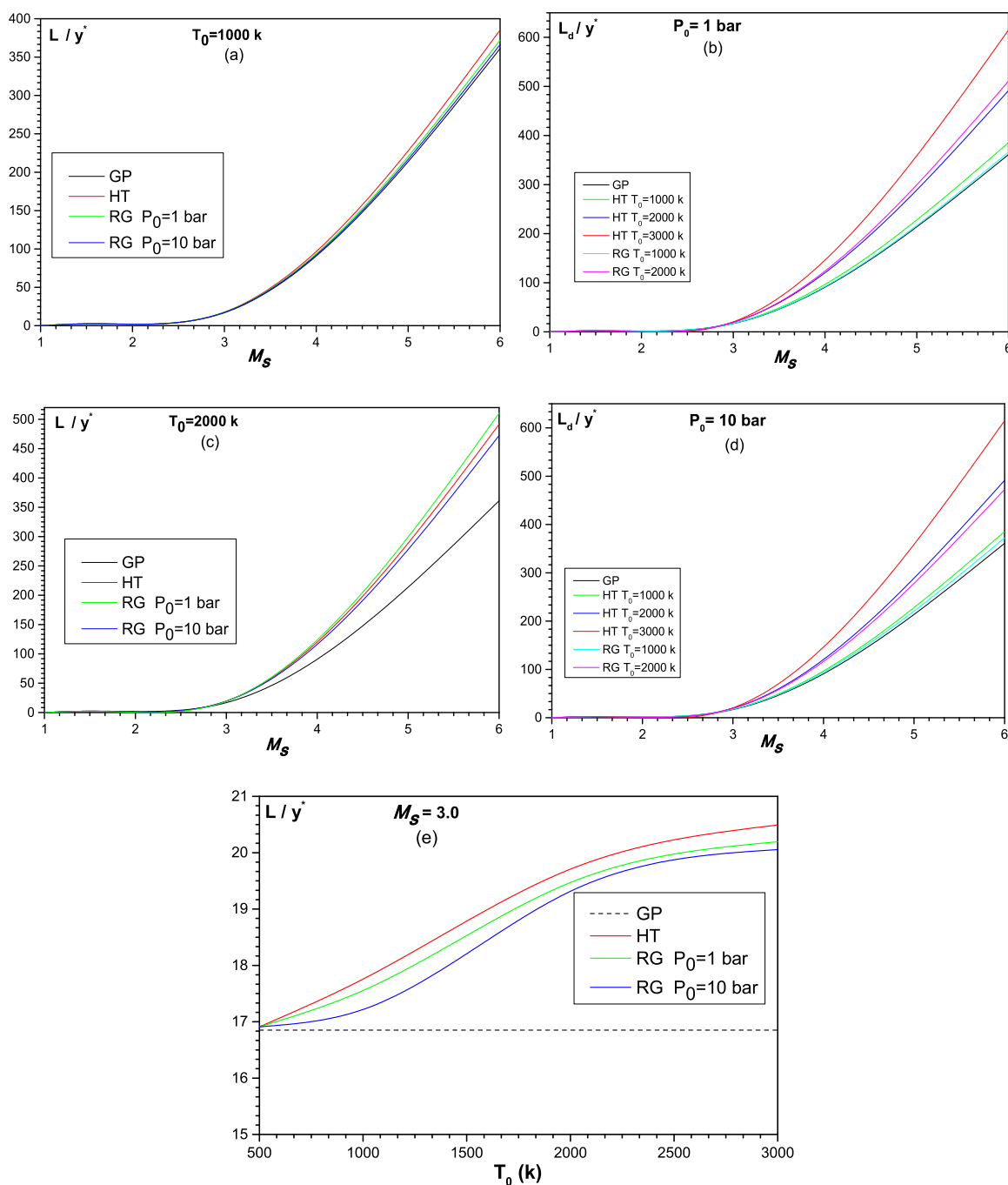


Figure 5.43 : Variation de la longueur de la tuyère en fonction de  $M_S$  et  $T_0$

La figure 5.44 représente la variation de la masse de la structure de la tuyère en fonction de  $M_S$  et  $T_0$ , pour les modèles *GP*, *HT* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$  et  $100 \text{ Bar}$ . On remarque que si  $M_S < 2.50$  environ, la température  $T_0$  et la pression  $P_0$  ne présentent presque aucune



influence sur la masse de la structure. Mais lois de cette valeur de  $M_S$  les résultats obtenus par notre modèle RG s'éloignent de ceux obtenus par le modèle HT lorsque la température  $T_0$  augmente, et masse de la structure de la tuyère diminue et devient inférieure de ceux obtenus par le modèle HT lorsque la pression génératrice augmente. Le calcul de la masse est lié avec le calcul de l'arc curviligne de la paroi. On n'a pas pris en compte le calcul de la masse des deux cotés gauche et droite de la tuyère. Ils se trouvent à l'infini (n'existe pas), vu que la tuyère est  $2D$ .

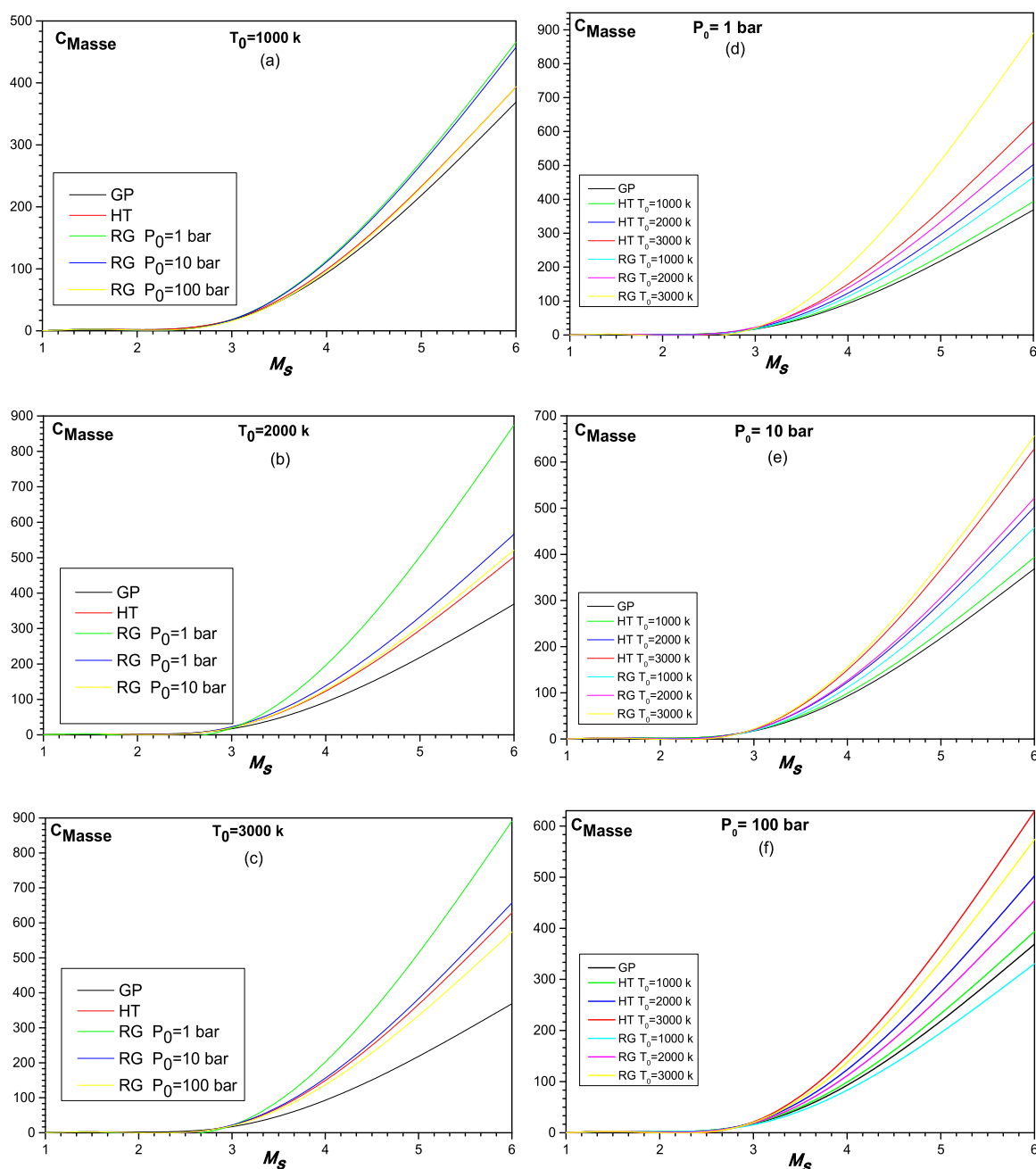
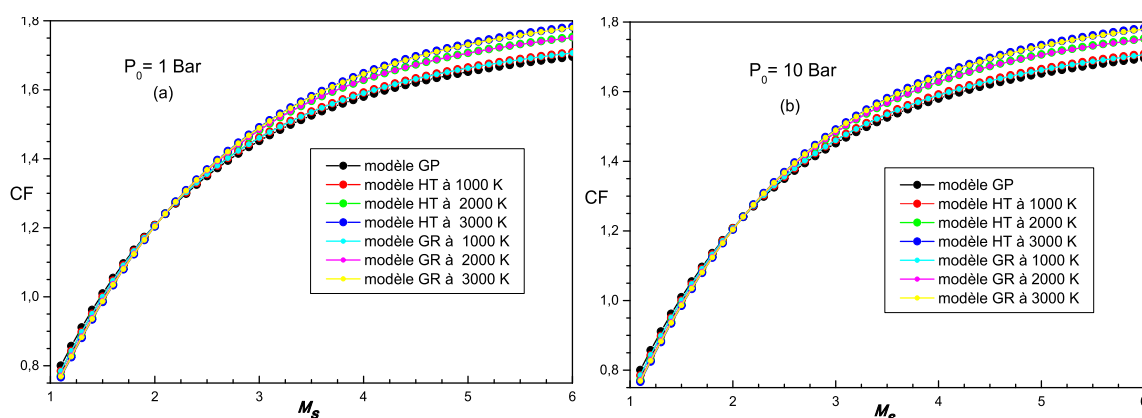


Figure 5.44 : Variation de la masse de la structure de la tuyère en fonction de  $M_S$  et  $T_0$

La figure 5.45 représente la variation de la force de pression axiale délivrée sur le divergent et exercée sur la paroi de la tuyère en fonction de  $M_S$ , pour les modèles *GP*, *HT* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar et 100 Bar. On remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une augmentation des coefficients de poussée, on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs  $T_0 = 1000$ K, 2000K, 3000K, influe sur le  $C_F$ , le coefficient  $C_F$  augmente lorsque  $T_0$  augmente, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, mais si le nombre de Mach de sortie inférieur à  $M_S = 2.0$ , on remarque que les trois modèles *GP*, *HT*, et *RG* sont confondus, et s'éloignent lorsque  $M_S$  augmente, par exemple à  $M = 5.0$  et  $T_0 = 3000$ K,  $C_F = 1.65234$  pour le modèle *GP*,  $C_F = 1.73381$  pour le modèle *HT*,  $C_F = 1.73114, 1.73094, 1.72893$  pour le modèle *RG* qui correspond les pressions 1 Bar, 10 Bar, 100 Bar, avec des erreurs relatives entre le modèle *HT* et notre modèle *RG* égale à  $\varepsilon = 0.15\%$  pour  $p_0 = 1$  Bar,  $\varepsilon = 0.165\%$  pour  $p_0 = 10$  Bar, et  $\varepsilon = 0.283\%$  pour  $p_0 = 100$  Bar. On remarque que lorsque la pression génératrice  $P_0$  augmente le coefficient de poussée  $C_F$  obtenus par le modèle *RG* s'éloigne de ceux obtenus par le modèle *HT*, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure au égale à 50 Bar, ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur cet paramètre.



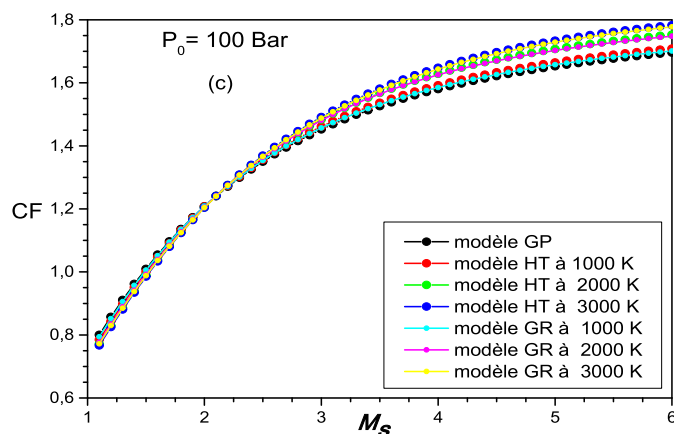


Figure 5.45 : Variation de la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère en fonction de  $M_S$

La figure 5.46 représente la variation du rayon de la section de sortie de la tuyère en fonction de  $M_S$ , pour les modèles *GP*, *HT* et *RG*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1$  Bar, 10 Bar et 100 Bar. Même commentaires comme les figures 5.42, 5.43 et 5.44.

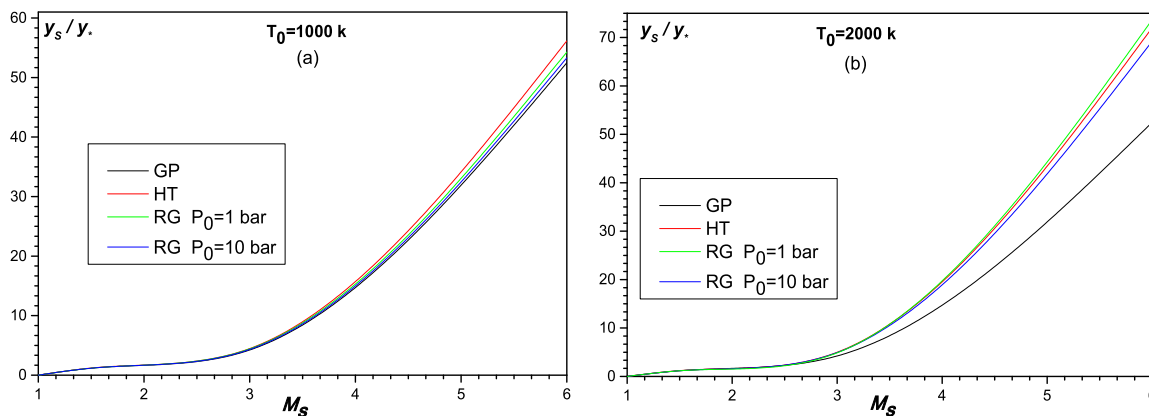


Figure 5.46 : Variation du rayon de la section de sortie de la tuyère en fonction de  $M_S$

### 5.7. 5 Résultats sur les erreurs de conception

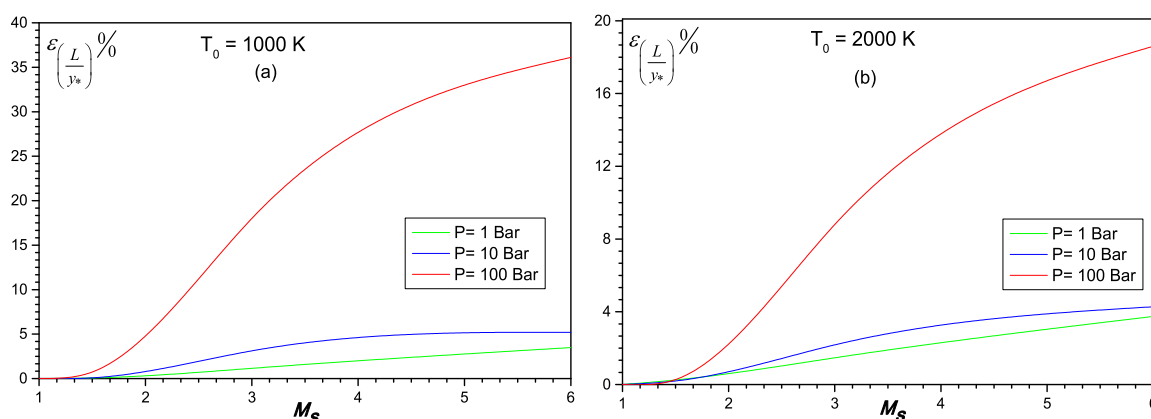
La figure 5.47 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage du longueur de la tuyère données respectivement par les températures génératrices  $T_0 = 1000$  K, 2000 K, et 3000 K et les pressions génératrices  $P_0 = 1$

Bar, 10 Bar, et 100 Bar, en fonction du nombre de Mach de sortie  $M_S$ , du modèle HT comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M_S$  et elle augmente si  $P_0$  et  $M_S$  augmentent, et diminue si la température  $T_0$  augmente. Par exemple si  $T_0=1000\text{ K}$  et  $M_S=6.00$ , l'utilisation du modèle HT va nous donner une erreur relative égale à  $\varepsilon=3.5\%$  pour une pression génératrice  $P_0=1\text{ Bar}$ ,  $\varepsilon=5.06\%$  pour une pression génératrice  $P_0=10\text{ Bar}$ , et  $\varepsilon=36.03\%$  pour une pression génératrice  $P_0=100\text{ Bar}$ , cette dernière va diminuer jusqu'à  $\varepsilon=15.56\%$  lorsque température  $T_0=3000\text{ K}$ .

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à 5 %, le modèle HT peut être utilisé, si la pression  $P_0$  soit inférieure à 10 Bar pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach ou de température  $T_0$ . Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle HT dans un intervalle de  $P_0$  et  $T_0$  modéré.

On peut remarquer qu'à faible valeur de  $M$ ,  $T_0$  et  $P_0$ , l'erreur  $\varepsilon$  est faible. Sur cette figure se trouve au-dessous de l'erreur 5%. Cette position est interprétée par la possibilité d'utiliser le modèle HT pour les applications aéronautiques, mais à pression génératrice bien modérée et ne dépasse pas 10 Bar, si on accepte une erreur inférieure à 5%. Mais si la pression  $P_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle GP indépendamment de la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=2.00$  avec une bonne erreur.



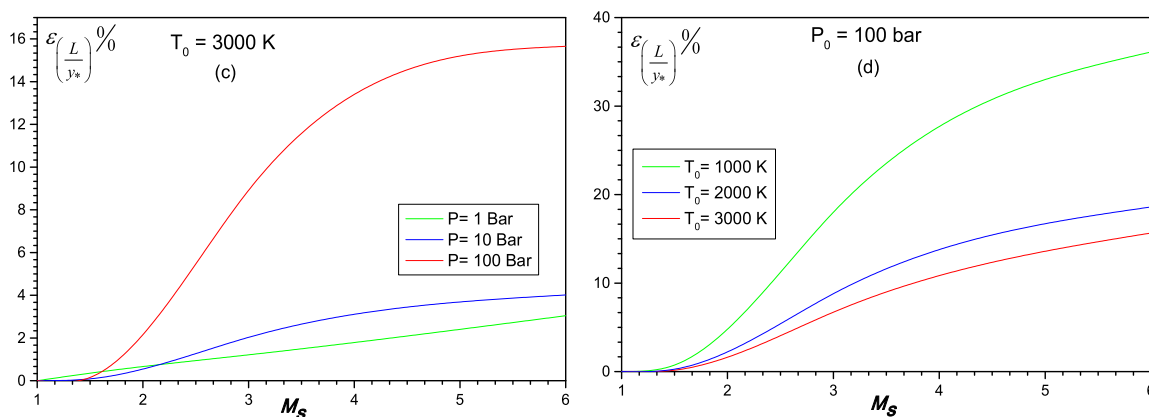


Figure 5.47 : Variation de l'erreur relative donnée par la longueur de la tuyère en fonction de  $M_S$

La figure 5.48 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage du rayon de la section de sortie de la tuyère donnée respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000 \text{ K}$ , et  $3000 \text{ K}$  et les pressions génératrices  $P_0= 1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ , et  $100 \text{ Bar}$ , en fonction du nombre de Mach de sortie  $M_S$ , du modèle HT comparé au modèle RG.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M_S$  et elle augmente si  $P_0$  et  $M_S$  augmentent, et diminue si la température  $T_0$  augmente. Par exemple si  $T_0=1000 \text{ K}$  et  $M_S=6.00$ , l'utilisation du modèle HT va nous donner une erreur relative égale à  $\varepsilon = 3.35 \%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $\varepsilon = 5.37\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 10 \text{ Bar}$ , et  $\varepsilon = 38.04 \%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 100 \text{ Bar}$ , cette dernière va diminuer jusqu'à  $\varepsilon = 15.32 \%$  lorsque température  $T_0=3000 \text{ K}$ .

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à  $5 \%$ , le modèle HT peut être utilisé, si la pression  $P_0$  soit inférieure à  $10 \text{ Bar}$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach ou de température  $T_0$ . Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle HT dans un intervalle de  $P_0$  et  $T_0$  modéré.

On peut remarquer qu'à faible valeur de  $M$ ,  $T_0$  et  $P_0$ , l'erreur  $\varepsilon$  est faible. Sur cette figure se trouve au-dessous de l'erreur  $5\%$ . Cette position est interprétée par

la possibilité d'utiliser le modèle *HT* pour les applications aéronautiques, mais a pression génératrice bien modéré et ne dépasse pas 10 Bar, si on accepte une erreur inférieure à 5%. Mais si la pression  $P_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle *GP* indépendamment à la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=2.00$  avec une bonne erreur.

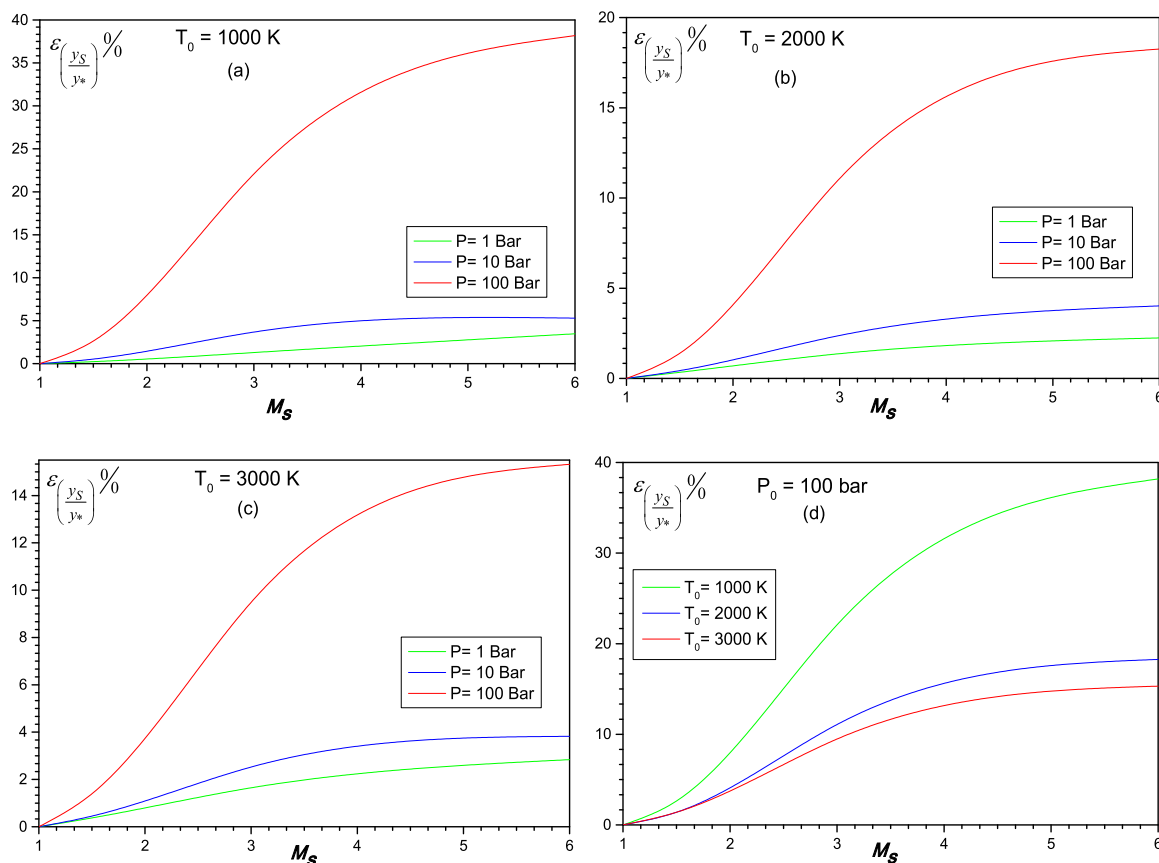


Figure 5.48 : Variation de l'erreur relative donnée par le rayon de la section de sortie de la tuyère en fonction de  $M_S$

## CONCLUSION

A partir de cette étude, on peut citer les points suivants :

Si on accepte une erreur inférieure à 5 %, ce qui est le cas généralement pour les applications aérodynamiques, on peut étudier un écoulement supersonique en utilisant les relations d'un gaz parfait, si la température génératrice  $T_0$  est inférieure à 1000 K pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach, avec une pression génératrice bien déterminée, ou lorsque le nombre de Mach soit inférieure à 2.00 pour n'importe quelle température génératrice jusqu'à 3000 K environ.

Le modèle  $GP$  est représenté par des relations explicites et simples et ne demande pas un temps de calcul élevé, ce qui n'est pas le cas pour notre modèle  $RG$ , où il est présenté par la résolution d'une équation algébrique non linéaire, résolution d'un système d'équation algébrique non linéaire formé par trois équations, et dérivation et intégration des fonctions analytiques complexes nécessitent un temps de calcul élevé et programmation numérique.

Les variables principales pour notre modèle  $RG$  est la température et la masse volumique, la température pour le modèle  $HT$ , et pour le modèle  $GP$  est le nombre de Mach à cause d'une équation implicite non linéaire reliant  $T$ ,  $\rho$ , et  $M$ .

On peut choisir d'autre substance au lieu de l'air. Les relations restent valables. Il faut déterminer les constantes des forces intermoléculaires et de taille moléculaire, ainsi que la température caractéristique de vibration.

Le rapport des sections présenté par la relation (2.93) peut être utilisé comme une *source de comparaison pour la validation des résultats numériques du dimensionnement des diverses tuyères supersoniques* donnant un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie par la méthode des caractéristiques et la fonction du Prandtl Meyer. Les rapports thermodynamiques peuvent être utilisés

pour déterminer les paramètres de conception des diverses formes de tuyères sous la base du modèle *RG*.

On peut obtenir les relations d'un gaz parfait à partir des relations du modèle *RG* en annulant toutes les constantes des forces intermoléculaire (  $a$  ) et de taille moléculaire (  $b$  ), ainsi que la température caractéristique de vibration  $\Theta$ . Dans ce cas, le modèle *GP* devient un cas particulier de notre modèle *RG*.

On peut, aussi obtenir les relations d'un haute température *HT* à partir des relations du modèle *RG* en annulant toutes les constantes des forces intermoléculaire (  $a$  ) et de taille moléculaire (  $b$  ). Dans ce cas, le modèle *HT* devient un cas particulier de notre modèle *RG*.

A faibles pression, température et nombre de Mach, l'écart en résultats entre les trois modèles est petit, ce qui donne la possibilité d'étudier un écoulement *RG* en utilisant les relations *GP*. Par contre, lorsque  $T_0$  et  $P_0$  augmentent, la théorie *GP* commence de donnée des résultats qui s'éloignent de fur et à mesure du cas réel, d'où la nécessité d'utilisation le modèle *RG*.

Notre modèle *RG* valable pour n'importe quel domaine, surtout dans le domaine haute pression et basse température ou bien pour une pression très élevé soit supérieure à 500 bar et pour n'importe quelle valeur de la température, dans ces cas on trouve l'écart en résultats entre notre modèle *RG* et les autres modèles *HT* et *GP* est grand (voir la figure 5.2), d'où la nécessité d'utilisation le modèle *RG*, mais notre hypothèses sur la conception des tuyères supersoniques, basée sur une pression ne dépasse pas 200 Bar environ, car l'augmentation de la pression influe sur l'épaisseur de la tuyère, donc sur la masse totale de la tuyère, et ça elle considère un grand inconvénient pour la conception, et sur la consommation du carburant.

Sans connaître la thermodynamique des gaz on ne peut pas entamer le problème de calcul des paramètres thermodynamiques à haute pression ainsi que la fonction de Prandtl Meyer et la conception des tuyères supersoniques.

La fonction du Prandtl Meyer présentée par la relation (3.17) peut être utilisé comme une source de comparaison pour la validation des résultats numériques du dimensionnement des diverses tuyères supersoniques donnant un



écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie par la méthode des caractéristiques.

On peut obtenir la fonction du Prandtl Meyer d'un gaz parfait à partir des relations du modèle *RG* en annulant toutes les constantes des forces intermoléculaire (  $a$  ) et de taille moléculaire (  $b$  ), ainsi que la température caractéristique de vibration  $\Theta$ . Dans ce cas, le modèle *GP* devient un cas particulier de notre modèle *RG*.

On peut, aussi obtenir la fonction du Prandtl Meyer d'un gaz à haute température *HT* à partir des relations du modèle *RG* en annulant toutes les constantes des forces intermoléculaire (  $a$  ) et de taille moléculaire (  $b$  ). Dans ce cas, le modèle *HT* devient un cas particulier de notre modèle *RG*.

A faibles température, l'écart en résultats de la fonction du Prandtl Meyer entre les modèles *GP* et *RG* est petit, ce qui donne la possibilité d'étudier un écoulement *RG* en utilisant les relations *GP*. Surtout à haute pression. Par contre, lorsque  $T_0$  augmentent, la théorie *GP* commence de donner des résultats qui s'éloignent de plus en plus du cas réel, d'où la nécessité d'utiliser le modèle *RG*.

On peut considérer que la conception à haute température est un modèle à un paramètre, tandis que le modèle *RG* est considéré comme un modèle à deux paramètres.

A faibles pression, l'écart en résultats de la fonction du Prandtl Meyer entre les modèles *HT* et *RG* est petit, ce qui donne la possibilité d'étudier un écoulement *RG* en utilisant les relations *HT*. Surtout à haute température. Par contre, lorsque  $P_0$  augmentent, la théorie *HT* commence de donner des résultats qui s'éloignent de plus en plus du cas réel, d'où la nécessité d'utiliser le modèle *RG*.

Notre fonction du Prandtl Meyer valable pour n'importe quel domaine, surtout dans le domaine haute pression et basse température, dans ce cas on trouve l'écart en résultats entre notre modèle *RG* et les autres modèles *HT* et *GP* est grand, d'où la nécessité d'utiliser le modèle *RG* pour corriger les résultats.

Si les tuyères MLN 2D du modèle RG délivrent toutes le même nombre de Mach de sortie  $M_s$  que délivré par les tuyères MLN 2D des modèles HT et GP, elles possèdent cependant toutes une masse inférieure à celle-ci. Ce gain en masse peut aller jusqu'à 20%, ce qui est très significatif dans les applications aérospatiales. Mais leurs coefficients de poussée restent constants du faite qu'elles ont le même nombre de Mach de sortie  $M$ .

Des gains importants trouvées sur longueur de Kernel et la longueur de la tuyère, ainsi que du rayon de la section de sortie de la tuyère et masse de la structure de la tuyère, alors une amélioration des performances de la tuyère par la réduction du volume occupée par la tuyère et sa masse, cette variation de la masse peut remplacer l'augmentation de la charge utile de l'appareil.

Comme l'écoulement à la section de sortie est horizontal, on peut tronquer la tuyère à une section possédant une déviation de la vitesse d'un ou de deux degrés. Dans ce cas, on fait un gain important en masse. On réduit la masse. L'écoulement à la sortie de la tuyère tronquée devient incliné au voisinage de la paroi, et dans ce cas la force de pression s'exerçant sur la paroi interne de la tuyère va diminuer légèrement.

A la fin de ce modeste travail, on suggère quelques axes de recherches qui seront considérés comme une continuité de notre travail.

Faire l'extension vers l'axisymétrique et tridimensionnelle et pour des autres types de tuyères telles que la tuyère à bouchon (plug nozzle), tuyère à détente déflexion (Expansion Deflexion nozzle), la tuyère à double galbe (dual galbe) et la tuyère à zone d'expansion (Bell shaped nozzle).

Développer un modèle RG qui prend en compte le phénomène d'onde de choc et déterminer les conditions après le choc dans une tuyère supersonique non adaptée et par conséquent évaluer le nombre de Mach à la section de sortie.

Programmer d'autres méthodes de conception des tuyères et faire la comparaison entre elles, par rapport au temps d'exécution et convergence du processus numérique et faire l'analyse physique et la simulation numérique des écoulements compressibles dans les tuyères propulsives supersoniques.

## APPENDICE A

## LISTE DES SYMBOLES

$a$	Constante des forces intermoléculaire.
$b$	Constante de taille moléculaire.
$m$	Débit massique critique.
$l$	Unité de profondeur de la tuyère bidimensionnelle.
$u$	Energie interne.
$v$	Volume spécifique.
$x$	Abscisse d'un point.
$y$	Rayon d'un point.
$u, v$	Composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse.
$A$	Air d'une section de la tuyère.
$H$	Enthalpie.
$L$	Longueur de la tuyère.
$M$	Nombre de Mach.
$N$	Nombre des caractéristiques descendantes régulières pour la tuyère $MLN$ .
$P$	Pression.
$R$	Constant thermodynamique de l'air.
$T$	Température.
$V$	Vitesse de l'écoulement.
$W$	Travail.
$Z$	Facteur de compressibilité.
$C_P$	Chaleur spécifique a pression constante.
$C_V$	Chaleur spécifique a volume constant.
$C_T$	Constant déterminée a température constante.
$C_F$	Coefficient de la force de pression.
$C_S$	Célérité du son.
$C_{Masse}$	Coefficient de la masse de la structure de la tuyère.
$C_y$	Coefficient de l'interpolation de l'ordonnée $y$ .
$C_\theta$	Coefficient de l'interpolation du paramètre $\theta$ .

$CT$	Coefficient de l'interpolation du paramètre $T$ .
$t_M$	Epaisseur du matériau de la structure de la tuyère.
$F_x$	Force de pression exercée sur la paroi interne de la tuyère.
$N_i$	Nombre des caractéristiques descendantes insérées dans la région de Kernel.
$b_1, b_2$	Coefficients de la fonction de la condensation.
$\gamma$	Rapport des chaleurs spécifiques.
$\rho$	Masse volumique.
$\theta$	Température caractéristique de vibration.
$\varepsilon$	Tolérance.
$v$	Fonction de Prandtl Meyer.
$\mu$	Angle de Mach.
$\theta$	Déviations du vecteur vitesse.
$\Delta$	Coefficient de la fonction de condensation.
$\rho_M$	Masse volumique du matériau de la structure de la tuyère.
$\delta$	Géométrie de la tuyère. $\delta=0$ cas 2D. $\delta=1$ cas axisymétrique.
$\xi, \eta$	Lignes de Mach descendante et montante respectivement.
$\Delta x$	Pas non-dimensionnel ( $\Delta x/y^*$ ) pour le calcul dans la région de transition

### Abréviations

RG	Gaz réel.
HT	Haute Température.
GP	Gaz Parfait.
MLN	Abréviation du terme Minimum Length Nozzle (tuyère à détente centrée).
C +	Caractéristique montante.
C -	Caractéristique descendante.

### Indices

0	Condition d'arrêt (Etat générateur) (chambre de combustion).
*	Condition critique ou juste après le col.
13	Valeur moyenne entre les points 1 et 3.
23	Valeur moyenne entre les points 2 et 3.
3	Concernant la valeur au point 3.

<i>A</i>	Point sur la section du col de la tuyère.
<i>B</i>	Fin de la région de karnel.
<i>d</i>	Détente de Kernel.
<i>W</i>	paroi.
<i>S</i>	Section de sortie.

**Exposant**

*	valeur au col juste après la détente.
<i>K</i>	itération.

## REFERENCES

1. A. Wohl., "Investigation of the condition equation," *Zeitschrift für Physikalische Chemie* (Leipzig) 87 pp. 1–39 (1914).
2. Adcock, L.H., "The Egg in the Bottle Revisited: Air Pressure and Amontons' Law (Charles' Law)," *Journal of Chemical Education*, 75 (12): 156, (1998).
3. Al-Ajlouni M., "An Automatic Method for Creating the Profile of Supersonic Convergent-Divergent Nozzle," *Journal of Mechanical and Industrial Engineering*, vol 4 No. 3, (2010), pp. 404-411.
4. Anderson J. D. Jr., "Fundamentals of Aerodynamics," McGraw-Hill Book company, New York, (1988).
5. Anderson, J. D. *Modern Compressible Flow With Historical Perspective*. Second edition, (1992), McGraw-Hill Book, Company, New York, USA.
6. Annamalai K. Ishwar K. P. and Milind A. J., "Advanced Thermodynamics engineering," 2<sup>nd</sup> edition, CRC press, Taylor and Francis Group, USA, ( 2011).
7. Argrow B. M. and Emanuel G., "Computational Analysis of the Transonic Flow field of Two-Dimensional Minimum Length Nozzles," AIAA-1989-1822, 20th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, Buffalo, NY, (June 12-14, 1989).
8. Argrow B.M. and Emanuel G., "Comparison of Minimum Length Nozzles," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 110, PP. 283-288, (September 1988).
9. Beckwith, I. E., and Moore, J. A., "An Accurate and Rapid Method for the Design of Supersonic Nozzles," (February 1955), NACA TN 3322.
10. Berger M., "Géométrie: Convexes et Poly topes, Polyèdres réguliers, aires et Volumes," Tome 3, Fernand Nathan, Paris, (1978).
11. Birkhoff G., "Interpolation to Boundary Data in Triangles," *J. of Math. Analy. And Appl.*, Vol. 42, (1973), 474-484.
12. C. Dieterici, *Ann. Phys. Chem. Wiedemanns Ann.* 69, 685 (1899).
13. Comolet R., "Mécanique Expérimentale des Fluides. Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux," Tome 1, 3<sup>ème</sup> Edition, Masson, (1979).
14. CRC., "handbook of chemistry and physics", 75th A ready reference book of chemical and physical data, Oxford University, (1995).

15. Demidovitch B. et I. Maron I., "Éléments de calcul numérique," (1987), Edition MIR, Moscou, Russia.
16. Emanuel G., "Gas dynamic: Theory and Application", New York, AIAA Educational Serie, (1986).
17. Ferri, A. Elements of Aerodynamics of Supersonic Flow. Phoenix ed., Dover Publication, (2005).
18. Fletcher C. A. J. "Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories," Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1988).
19. Georing M., "Nozzle Design Optimization by Method-of-Characteristics," AIAA-1 990 2024, 26111 AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, (July 16-18 1990), Orlando, Florida.
20. Gerald H., Hans L., Thong V. N. and Gennady E. D., "Advanced Rocket Nozzle," Journal of Propulsion and Power, Vol. 14, N° 3, (1998), PP. 318-326.
21. Gordan J. Van Wylen and Richard E. Sonntag, *Fundamental of Classical Thermodynamics*, 3rd ed, New York, John Wiley & Sons, (1986).
22. Hagemann G., Immich H., Van Nguyen T. and Dumnov G. E., "Advanced Rocket Nozzles," Journal of Propulsion and Power, Vol. 14, N° 5, PP. 620-634, (1998).
23. Haynes W.M., J.W. Magee and M.J. Hiza., "Isochoric ( $p, \rho, T$ ) measurements for five natural gas mixtures from  $T=(225$  to  $350)$  K at pressures to 35 MPa," Journal of Chemical Thermodynamics, Volume 29, Issue 12, (December 1997), Pages 1439-1454.
24. Hilsenrath J. W. Beckett C. Benedict W.S. Fano L. J. Hoge H. F. Masi J. L. Nuttall R. S. Touloukian Y. W. Woolley H., "Tables of Thermal Properties of Gases", National Bureau of Standard, (1955).
25. J. D. van der Waals: On the Continuity of the Gaseous and Liquid States, ed. J. S. Rowlinson, North Holland, Amsterdam, (1988).
26. Johnson, C. B., and Boney, L. R., "A Method for Calculating a Real-Gas Two Dimensional Nozzle Contour Including the Effects of Gamma," NASA TM X-3243, (September 1975).
27. Lax P. D. and Wendroff B., "Difference Schemes with High Order of Accuracy for Solving Hyperbolic Equations," CIMS Report NY0-9759, (July 1962), New York Univ., New York.
28. Liepmann, H. W., and Roshko, A., "Elements of Gas dynamics," John Wiley & Sons, Inc., (1966), New York.

29. Malina F. J., "Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect gases," J. Franklin Inst., Vol. 230, PP. 433-450, (1940).
30. McLain D. H., "Drawing contours from arbitrary data points," The Computer Journal, Vol. 17, PP. 318-324, (1974).
31. Nag, P. K. Engineering Thermodynamics. 4th Edition, McGraw-Hill, New Delhi, INDIA, (2008).
32. NEVILLE, R. G., "The Discovery of Boyle's Law," J. Chem. Educ., 39-356 (1962).
33. Oosthuisen P. H. and Carscallen W. E., "Compressible Fluid Flow," Mc Graw-Hill, New York, (1997).
34. Ortega J. and Rheinboldt W., "Iterative Solution of Nonhinear Equations in Several Variables," , (1970), New York, Academic Press.
35. PARTINGTON, J. S., "An Advanced Treatise on Physical Chemistry," vol. 1, pp. 551 ff, Longmans, Green & Co., Ltd., London, (1949).
36. Peterson C. R. and Hill P. G. "Mechanics and Thermodynamics of Propulsion," Addition-Wesley Publishing Company Inc, (1965), New York.
37. Picard Ch., "Thermochimie," 2<sup>ème</sup> Edition, Bruxelles, Belgium (1996).
38. Powell M. J. D., "On the Maximum Error of Polynomial Approximation Defined by Interpolation and by Least Squares Criteria," Comput. J., Vol. 9, (1978), 404-407.
39. Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A. and Vetterling W. T., "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing," Cambridge University Press, UK, (1986).
40. Ralston A. and Rabinowitz P., "A First Course in Numerical Analysis," McGraw-Hill Book Company, (1985).
41. Raltson A., "A Family of Quadrature Formulas Which Achieve High Accuracy in Composite Rules," J. Ass. Comput. Mach., Vol. 6, PP. 384-394, (1984).
42. Rao, G.V.R, "Exhaust Nozzle Contour for Optimum Thrust," Marquadt Aircraft Co, Presented atthe ARC Semi Annual Meeting, (June 10- 13 1957), San Fransisco.
43. Raviart P. A. et Thomas J. M., "Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles," Masson, (1983).
44. Rhyiming I. L., "Dynamique des fluides," Press polytechnique Romandes, (1984) Lausanne, Suisse.
45. Rizkalla O., "Inviscid Design and Analysis of Square Supersonic Nozzles," GASL TL 304, (December 1988).



46. ROGERS, E. M.: "Physics for the Enquiring Mind," pp. 416-424, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1960).
47. Ruptash, J., "Supersonic Wind Tunnels-Theory, Design and Performance," University of Toronto, (June 1952), Institute of Aerophysics.
48. Sauer R., "General Characteristics of the Flow Through Nozzles at near Critical Speeds," NASA TM-1 147, (1947).
49. Serra R. A., "Determination of Internal Gas Flows by a Transient Numerical Technique," AIAA Journal, Vol. 10, n° 5, (May 1972), 603-611.
50. Shapiro A. H., "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow," Vol. 1, (1953), The Ronald Press Company, New York.
51. Shepard D., "A Two Dimensional Interpolation Function for Irregularly Spaced Data," Proc. 23rd Nat. Conf. ACM, (1965), 517-523.
52. Singh O., "Applied Thermodynamics," new age international limited publishers, New Delhi, India, (2003).
53. Sod G. A., "Numerical Methods in Fluid Dynamics," Cambridge University Press, (1985), Cambridge.
54. Spurgin, CB, "Gay-Lussac's gas-expansivity experiments and the traditional mis-teaching of 'Charles's Law'", *Annals of Science*, 44 (5): 489-505, (1987).
55. Sutton G. P., "Rocket Propulsion Elements," Eighth edition, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, USA, (2010).
56. Tsien, Hsue-Shen. "One-Dimensional Flow of a Gas Characterized by Van Der Waal's Equation of State," *Jour. of Math. And Phy.*, vol. XSV, no. 6, (Jan. 1947), pp. 301-324.
57. Van Wylen J. J. and Sonntag R. E., "Fundamentals of classical thermodynamics," 2ème edition, (1976), John Willey and sons, Inc.
58. Zebbiche T. and Youbi Z., "Design of Two-Dimensional Supersonic Minimum Length Nozzle at High Temperature. Application for Air," DGLR 2005-257, German Aerospace Congress 2005, (26-29 Sep. 2005), Friedrichshafen, Germany.
59. Zebbiche T. and Youbi Z., "Effect of Stagnation Temperature on the Supersonic Flow Parameters with Application for Air in Nozzles," *The Aeronautical Journal*, Vol, 111, n° 1115, (Jan 2007), 31-40.
60. Zebbiche T. and Youbi Z., "Parameters of Supersonic Flow at High Temperature. Application for Air," 4th International Conferences on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics HEFAT, (19-22 Sep. 2005), Caire, Egypt.

61. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Flow Parameters at High Temperature application for Air in Nozzle," DGLR-2005-256, German Aerospace Congress, (26-29, September 2005), Friedrichshafen, Germany.
62. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Two-Dimensionnel Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," Chinese Journal of Aeronautics, Vol. 20, n° 01, (2007), 29-39.
63. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Two-Dimensional Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," AIAA-2006-4599, 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Sacramento, California, (July 09-12, 2006).
64. Zebbiche T. et Youbi Z., "Fonction de Prandtl Meyer A Haute Température," Conférence Internationale de la Mécanique Avancée, CIMA'04, Boumerdès (Algérie), (30 Nov., 02 Déc. 2004).
65. Zebbiche T., "New Generalized Form of the Prandtl Meyer Function. Application for Air at High Temperature," AIAA-2006-3674, 25th Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, (California, 5-8 Jun 2006).
66. Zebbiche T., "Stagnation Temperature Effect on the Prandtl Meyer Function," AIAA Journal Vol. 45, n° 4, (2007), 952-954.
67. Zebbiche T., "Tuyères Supersoniques à Haute Température," Edition Universitaires Européennes, ISBN 978-613-1-50997-1, (May 2010).
68. Zebbiche T., Salhi M. and Boun-jad M., "Numerical computational of supersonic flow around a pointed airfoil," Journal of computational methods in sciences and engineering 12 (2012) papers 213-233.
69. Zebbiche, T. New Generalized Form of the Prandtl Meyer Function. Application for Air at High Temperature. AIAA 2006-3674, 25th Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, California, (5-8 Jun 2006).
70. Zebbiche, T., "Conception et Dimensionnement des tuyères supersoniques de Propulsion," Thèse de Doctorat, Département d'Aéronautique, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université SAAD Dahleb de Blida, (2006), Algeria.
71. Zucker R. D. and Bilbarz O., "Fundamentals of Gas Dynamics," John Wiley & Sons, (2002), New Jersey, USA.
72. Zucro M. J. and Hoffman J. D., "Gas Dynamics," Vol. 1 and Vol. 2, (1976), New York, Wiley, USA.