

UNIVERSITE SAAD DAHLAD DE BLIDA 1
INSTITUT D'AERONAUTIQUE ET DES ETUDES SPATIALES

THESE DE DOCTORAT

En Aéronautique
Spécialité : Aéronautique

ELABORATION DES LOIS DE COMMANDE DEDIEES
AU GUIDAGE D'UN AVION SOUPLE

Par

Smain DILMI

Devant le jury composé de :

S. Boukraa	Professeur, U. de Blida 1	Président
A. Guessoum	Professeur, U. de Blida 1	Examineur
H. Salhi	Professeur, U. de Blida 1	Examineur
N. Achour	Professeur, U. S.T.H.B., Alger	Examineur
M. Hamerlain	Directeur de recherche, C.D.T.A., Alger	Examineur
B. Bouzouia	Directeur de recherche, C.D.T.A., Alger	Directeur de thèse.

Juin 2017

RESUME

La tendance de l'amélioration des performances au moyen des techniques d'asservissement Fly-by-Wire tend à augmenter en fréquence de la bande passante du contrôleur, alors que la dynamique flexible des avions de transport civil tend à être de plus en plus basse fréquence. Ainsi, ces deux tendances introduisent un risque d'interaction entre le contrôleur et la dynamique flexible. Cette interaction peut rendre le système dynamique en boucle fermé instable (phénomène de *spillover*) si le concepteur n'en tient pas compte dans son design. La présente thèse a pour objectif d'élaborer des lois de commande robustes et performantes afin qu'elles soient utilisables pour un avion de transport dont la dynamique flexible n'est pas négligeable.

L'élaboration de lois de commande s'effectue à partir des modèles qui ne sont que des approximations de la réalité. Particulièrement, en aéronautique civile, la flexibilité de la structure des avions a été négligée pendant de nombreuses années, et ce sont les modèles rigides qui ont été traditionnellement utilisés pour la conception des lois de commande. Cette approche purement rigide est en train de disparaître parce qu'elle génère le phénomène d'instabilité aéroélastique. En effet, du point de vue économique, les avions seront de plus grande envergure avec l'utilisation de matériaux composites plus légers, ce qui entraîne une augmentation de la flexibilité de la structure et a un impact sur le couplage aéroélastique entre la mécanique de vol et la dynamique de structure, particulièrement à haute vitesse. Un autre point de vue qui représente les besoins de l'industrie aéronautique correspond au fait que pour augmenter les performances de manœuvrabilité d'appareil, les constructeurs envisagent de remplacer les lois de commande classiques de type *pilote-in-the-loop* dans la boucle de contrôle par une technologie purement électrique (F.B.W). Cependant, la technique F.B.W augmente la bande passante du contrôleur qui peut rendre celui-ci sensible aux premiers modes flexibles (ceux de plus basses fréquences), alors qu'ils ne l'étaient pas pour un contrôle *pilote-in-the-loop*. C'est pourquoi le risque de *spillover* est augmenté si ces modes ne sont pas modélisés et pris en compte durant la conception du contrôleur.

En résumé, que ce soit la conception de la structure de l'avion qui amène des modes flexibles aux basses fréquences, ou soit l'amélioration par F.B.W des

performances du contrôleur qui augmente sa bande passante vers de plus hautes fréquences, il semble nécessaire de prendre en compte le phénomène aéroservoélastique. Ainsi, les constructeurs d'avions ont besoin que soient développés des outils permettant de s'assurer que leurs avions ne sont pas affectés par ces problèmes. Cependant, si les avions peuvent être affectés, il faut des outils permettant de concevoir des lois de commande robustes prenant en compte les modes flexibles.

Après une recherche bibliographique sur la modélisation de la dynamique de vol de l'avion flexible et les méthodes de commande dédiées à ce type de système très complexe, nous avons tracé deux champs d'investigation permettant des contributions dans ce cadre de recherche :

Le première champ est consacré à l'élaboration et la mise en œuvre des lois de commande appliquées à une section d'aile pour un avion flexible afin de supprimer les problèmes d'instabilité aéroélastique qui peuvent avoir des conséquences graves conduisant à la destruction de l'avion ou un de ses éléments (actionneur ou surface de commande par exemple). Une première étude est consacrée à un modèle aéroélastique linéaire type TAMU Wing II de l'université de Texas avec deux surfaces de contrôle. Des incertitudes paramétriques liées à la structure et à l'aérodynamique quasi stationnaire sont intégrées dans le modèle nominal. Les commandes LQR et PRLQR ont été synthétisées pour les deux modèles nominal et augmenté. Ensuite, le modèle aéroélastique non linéaire TAMU Wing II a été considéré dans la synthèse d'une loi de commande robuste non linéaire par régime glissant. Les trois méthodes de commande ont été appliquées avec succès pour retarder la vitesse de flottement et augmenter l'amortissement rapide des modes d'oscillation malgré la présence de turbulence.

Le deuxième champ a été consacré à la modélisation et l'étude du modèle flexible de l'avion en boucle ouverte et fermée. Vu la confidentialité des données liés aux paramètres avion flexible, un modèle numérique disponible dans la littérature a été utilisé. Ce dernier considère la dynamique longitudinale avec un mode rigide (short period), cinq modes flexibles et deux surfaces de contrôle (gouverne de profondeur et canard). L'objectif de la validation en simulation est l'étude de la réduction de l'effet des modes flexibles et de perturbation atmosphérique

(turbulence) sur l'accélération que subi l'avion en utilisant des lois de commande optimale et robuste. Les lois de commande synthétisées, pour ce cas, sont : la commande linéaire quadratique gaussienne LQG, la commande H_2 et H_∞ . Les résultats de la validation de ces lois de commande en simulation en boucle fermée montrent l'élimination presque totale de l'accélération en comparant avec celle en boucle ouverte. Pour l'étude de la robustesse des lois de commande, nous avons envisagé d'augmenter le modèle par des incertitudes non structurées fréquentielles. Ensuite, une commande μ -analysis a été synthétisée en utilisant l'algorithme D-K itération. Après le calcul des normes fréquentielles et la conduite de la validation en simulation de ces lois de commande en boucle fermée, on a constaté la dégradation de la robustesse du contrôleur H_∞ alors que pour la commande μ -analysis, la robustesse est améliorée avec l'utilisation de la méthode D-K itération. Par la suite, la commande LQR et la commande non linéaire optimale par mode glissant ont été utilisées pour commander en poursuite la vitesse de tangage. Un excellent résultat est obtenu par cette dernière commande, avec une très forte robustesse.

REMERCIEMENTS

Je voudrais adresser ma reconnaissance et mes remerciements à :

- **Brahim Bouzzouia**, mon directeur de thèse, pour m'avoir guidé tout au long de cette thèse. Je le remercie pour la confiance qu'il a placée en moi et les encouragements que j'ai reçus de sa part pendant les phases difficiles de la thèse. Il a fait preuve d'une grande disponibilité tout au long de ma thèse, m'a fourni un soutien constant et une aide précieuse. Il a toujours su me conseiller durant mon travail de recherche, me faisant profiter ainsi de ses compétences théoriques et de son expérience. L'implication active et la rigueur qu'il a consacrée à ce travail m'ont permis d'avancer et d'aboutir sur ce manuscrit.
- **T. Rezzoug** actuel directeur du laboratoire des sciences aéronautiques pour avoir contribué à mon intégration au sein du laboratoire et pour nos différentes discussions sympathiques.
- Au président de jury qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ma thèse et aux examinateurs d'avoir acceptés d'évaluer ce manuscrit.
- Tous les membres de l'équipe de navigation aérienne du LSA.
- Tous les membres de ma famille et plus particulièrement à ceux qui m'ont permis d'arriver à ce niveau.

TABLE DES MATIERES

RESUME	1
REMERCIEMENTS	4
TABLE DES MATIERES	5
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	6
1. ETAT DE L'ART	8
1.1. Généralités	8
1.2. Dynamique aéroserveoélastique	9
1.3. Classification des problèmes aéroserveoélastiques	11
1.4. Revue de la littérature	12
2. MODELISATION DE L'AVION SOUPLE	22
2.1. Introduction	22
2.2. Modèle mathématique de l'avion rigide	30
2.3. Modèle Mathématique de l'avion flexible	44
2.4. Modélisation de système aéroélastique	54
3. METHODE DE SYNTHESE DE LOIS DE COMMANDES ROBUSTES	61
3.1 Introduction	61
3.2. Historique	61
3.3. Commande Linéaire Quadratique Optimale	65
3.4. La commande LQR avec observateur	66
3.5. La commande PRLQR	68
3.6. Synthèse de loi de commande par l'approche H^∞	70
3.7. Technique de μ -analyse et μ synthèse	77
3.8. La Commande par mode glissant (SMC)	79
4. RESULTATS ET SIMULATION	89
4.1. Introduction	89
4.2. Simulation du modèle aile flexible type TAMU WING II	90
4.3. Simulation du modèle longitudinal de l'avion flexible B52	109
CONCLUSION	130
APPENDICES	133
A. Liste des symboles	133
B. Les coefficients du modèle aéroélastique TAMU II	138
C. Notions préliminaires sur la stabilité et la commande des systèmes	146
REFERENCES	152

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1 : Domaine de l'Aéroservoélasticité	10
Figure 2 : Schéma de principe des commandes de vol.....	26
Figure 3 : Schéma de la boucle ouverte.....	26
Figure 4 : Surfaces de contrôle	27
Figure 5 : Systèmes de commande d'un avion de transport moderne	30
Figure 6 : Angles et conventions	31
Figure 7 : Repère avion-sol.....	32
Figure 8 : Orientation d'angle d'Euler (ψ) ³ , (θ) ² , (ϕ) ¹	37
Figure 9 : Le modèle aéroélastique d'une section d'aile	55
Figure 10 : Boucle de suivi (tracking)	71
Figure 12 : Système en boucle fermée avec incertitudes.....	72
Figure 13 : La forme standard	73
Figure 14 : Système pondéré.....	74
Figure 15 : Modèle Avion pondéré.....	75
Figure 16 : Modèle Avion incertain.....	77
Figure 17 : Forme standard de μ synthèse	77
Figure 18 : Schéma de principe d'un système bouclé par mode glissant.....	80
Figure 19 : Différentes modes pour la trajectoire dans le plan de phase.	81
Figure 20 : Réponse du système en boucle ouverte à une vitesse $V=13m/s$	91
Figure 21 : Réponse de système en boucle ouverte à la vitesse $V=14m/s$	91
Figure 22 : Schéma bloc du régulateur par retour d'état.....	92
Figure 23 : Résultats de la commande LQR à $V_1 = 13 m/s$	93
Figure 24 : Résultats de la commande LQR à $V_2 = 14 m/s$	94
Figure 25 : Résultats de la commande LQR vis-à-vis la variation de la vitesse.	95
Figure 26 : Réponse du modèle non linéaire à $V = 11m/s$	96
Figure 27 : Schéma bloc du régulateur PRLQR.....	97
Figure 28 : Réponse du système incertain pour $V=14 m/s$	99
Figure 29 : Résultats de la commande PRLQR avec saturation.	99
Figure 30 : Réponse du système pour des vitesses entre 11m/s et 16 m/s.	100
Figure 31 : Schéma bloc du régulateur mode glissant.	100
Figure 32 : Réponse du système non linéaire en boucle ouverte.	102
Figure 33: Résultats de la méthode SMC.	103
Figure 34 : Résultats de la méthode SMC avec une contrainte sur le braquage des gouvernes de $\pm 25 deg$	104

Figure 35 : Résultats de la méthode SMC perturbée avec une contrainte sur le braquage des gouvernes de $\pm 25 \text{ deg}$;	105
Figure 36 : Résultats de la méthode SMC (...) Conventiionnelle et SMC (—) proposée.	106
Figure 37 : Résultats de la méthode SMC perturbée avec une action de la commande après 2 s et une contrainte sur le braquage des gouvernes de $\pm 25 \text{ deg}$;	106
Figure 38 : Résultats de la méthode SMC avec perturbation à $U = 35 \text{ m/s}$;	107
Figure 39 : Evolution de déflexion des surfaces de commande en fonction des vitesses aérodynamiques.....	107
Figure 40 : Schéma bloc de réduction de l'effet de turbulence.....	111
Figure 41 : Rafales des vents utilisées	111
Figure 42 : Réponse de l'avion :(a) Accélération $az(g)$; (b), (c), (d) : signaux des rafales des vents	112
Figure 43 : Régulateur LQG.....	113
Figure 44 : Résultats de la commande LQG.....	114
Figure 45 : Régulateur $H2$ et $H\infty$	115
Figure 46 : Résultats de la commande $H2$	116
Figure 47 : Résultats de la commande $H\infty$	117
Figure 48 : Amplitude de la fonction de pondération et la fonction de sensibilité. ...	117
Figure 49 : Norme des pondérations en incertitude.	119
Figure 50 : Valeur singulière structurée pour l'analyse en performance.....	121
Figure 51 : Valeur singulière structurée avec D-K itération.	121
Figure 52 : Les modes flexibles et les modes rigides.....	124
Figure 53 : Schéma bloc de la commande LQR.....	125
Figure 54 : Evolution de la vitesse de tangage par la commande LQR.....	126
Figure 55 : Evolution de la vitesse de tangage commandée par LQR en présence de perturbations atmosphérique.....	126
Figure 56 : Schéma bloc de la commande par mode glissant.....	127
Figure 57 : Réponse du système par LQR avec action intégrale et mode glissant en absence de perturbation	128
Figure 58 : Réponse du système par mode glissant en présence de perturbation	128
Tableau 1 : Gains de la commande PRLQR	98
Tableau 2 : Synthèse de la commande par mode glissant.....	101
Tableau 3 : Résumé des résultats obtenus.....	108
Tableau 4 : modes Rigides et flexibles en boucle ouverte.	110
Tableau 5 : Résultats de calcul de la commande $H\infty$	120
Tableau 6 : Résultats de calcul des méthodes utilisées.....	122

CHAPITRE 1

ETAT DE L'ART

1.1. Généralités :

Le progrès dans la construction aéronautique moderne conduit les industriels à fabriquer des avions de transport de plus en plus rapides, légers, et de dimension très larges. Ces caractéristiques conduisent les avions d'être plus flexibles et avoir par conséquent des problèmes d'instabilité aéroélastique [1, 2]. De plus, le progrès dans l'amélioration des performances au moyen des techniques de commande de vol électrique connu par « Fly By Wire » a augmenté en fréquence la bande passante du contrôleur, alors que la dynamique flexible de ces avions tend vers des basses fréquences [3]. Ainsi, ces progressions introduisent un risque d'interaction entre le contrôleur et la dynamique flexible. Cette interaction peut rendre le système dynamique en boucle fermée instable (phénomène de *spillover* : interaction instable entre le système de commande et les modes structuraux flexibles) si le concepteur n'en tient pas compte dans sa synthèse (Dynamique aéro-servoélastique) [4, 5].

La recherche dans ce domaine est très compliquée et donne beaucoup d'importance aux problèmes associés au contrôle des avions flexibles tant en aéronautique civile que militaire. L'élaboration de lois de commande s'effectue à partir des modèles qui ne sont que des approximations de la réalité. Particulièrement, en aéronautique civil, la dynamique flexible des avions a été négligée pendant de nombreuses années, et ce sont les modèles rigides qui ont été utilisés pour la synthèse des lois de commande [6, 7, 8,]. Cette approche purement rigide est en train de disparaître parce qu'elle génère le phénomène de *spillover* [9-15]. En effet, du point de vue économique, les avions seront de dimension importante pour plus de passager et fabriqués avec des matériaux plus légers pour avoir moins de poids, ce qui entraîne une forte flexibilité de la structure et un couplage entre l'aéroélasticité et la commande de vol particulièrement à

haute vitesse [16, 17]. Un autre point de vue qui représente les besoins de l'industrie aéronautique correspond au fait que pour augmenter les performances de manœuvrabilité d'appareil, les constructeurs envisagent de remplacer les lois de commande classiques de type *pilote-in-the-loop* par une technologie de pilotage et de guidage automatique purement électrique appelée CDVG (Commande de Vol Généralisée) ou FMGS (Flight Management and Guidance System) [18, 19]. En effet, le FMGS améliore considérablement les performances de manœuvrabilité d'un avion dans le domaine fréquentiel (marge de gain et de phase) et temporel (réponse transitoire et erreur en régime permanent). Cependant, cette technique augmente la bande passante du contrôleur qui peut rendre celui-ci sensible aux premiers modes flexibles (ceux de plus basses fréquences), alors qu'ils ne l'étaient pas pour un contrôle *pilote-in-the-loop* [9-15, 20, 21]. C'est pourquoi le risque de spillover est augmenté si ces modes flexibles ne sont pas modélisés et pris en compte durant la conception du contrôleur.

En résumé : que ce soit la conception de la structure de l'avion qui amène des modes flexibles aux basses fréquences, ou soit l'amélioration des performances par un calculateur qui augmente sa bande passante vers de plus hautes fréquences, il semble très nécessaire de prendre en compte le phénomène d'instabilité aéroélastique (flottement et cycle d'oscillation limité) et la réponse dynamique de l'avion à des perturbations atmosphériques (rafale ou turbulence). Ainsi, les constructeurs d'avions ont besoin que soient développés des outils permettant de s'assurer que leurs avions ne sont pas affectés par ces problèmes, si non, il faut concevoir des moyennes de commande robuste prenant en compte dans la modélisation dynamique flexibles.

La présente thèse a pour objectif d'élaborer des lois de commande robustes et performantes afin qu'elles soient utilisables pour un avion de transport dont la dynamique est flexible.

1.2. Dynamique aéro-servoélastique :

La dynamique du vol et l'aéroélasticité sont deux disciplines qui étudient deux aspects bien différents d'un même système, en l'occurrence ici l'avion. La dynamique du vol considère l'avion comme un solide rigide évoluant dans l'espace et relève l'influence des forces aérodynamiques, de poussée et de gravité

et plus particulièrement des commandes sur l'évolution du mouvement de l'avion. L'aéroélasticité quant à elle, en modélisant l'avion comme un solide flexible, met davantage l'accent sur l'interaction des forces structurales d'élasticité avec les forces aérodynamiques [22].

L'aéroservoélasticité est à l'interaction de nombreuses sciences et technique de l'ingénierie mécanique et électrique (figure 1.1) [2, 23]. De ce fait, certains articles sur le sujet peuvent traiter la modélisation par éléments finis d'un avion flexible alors que d'autres traitent d'algorithmes de contrôle. Le champ d'investigation est très large. Ainsi cette recherche bibliographique se concentre sur les travaux présentant la manière de modéliser la dynamique de l'avion flexible et sur la manière de contrôler ce système. La modélisation du système dynamique comprend évidemment la modélisation dynamique d'un avion flexible mais aussi la modélisation des actionneurs et des capteurs. De plus, ces modèles très complexes doivent éventuellement être réduits, et des incertitudes sont à modéliser. Tous ces points sont essentiels à connaître pour pouvoir tracer un chemin à la synthèse des lois de commande.

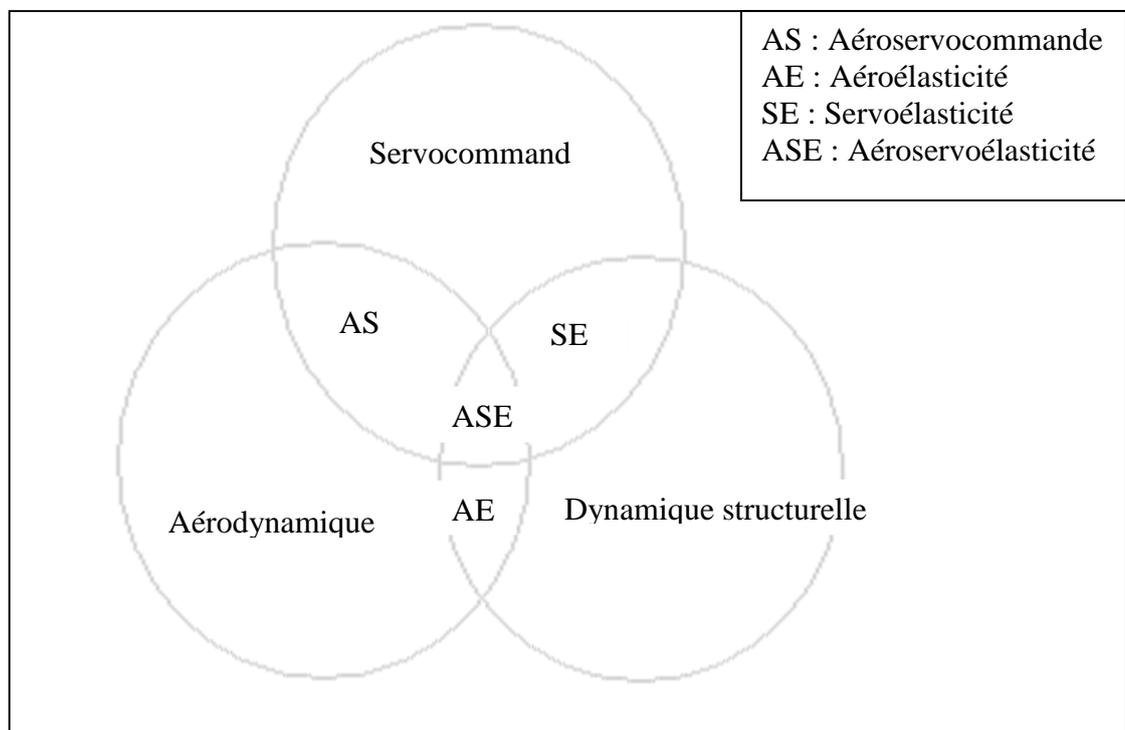


Figure 1.1 : Domaine de l'Aéroservoélasticité.

1.3. Classification des problèmes aéroservoélastiques :

Historiquement, la conception des avions a subi d'importantes modifications suite à des progrès significatifs dans l'efficacité structurale des avions, notamment le rapport de la résistance des nouveaux matériaux (composites) à leur poids, et par l'utilisation des systèmes de commande de vol avec une réponse rapide et une grande autorité. Les concepteurs d'avion, en essayant de réduire le poids structurel de chaque nouvel avion, ont fait augmenter la flexibilité de la structure. D'un autre côté, les ingénieurs de la commande de vol ont développé des nouvelles fonctionnalités pour le système de commande automatique de vol qui ont amélioré la performance de l'avion, la stabilité, et les qualités du vol. Malheureusement, ces efforts sont généralement indépendants les uns des autres jusqu'à ce que les premières analyses aéroservoélastiques aient été effectuées.

Mener une analyse aéroservoélastique sur un avion est donc un problème complexe et très important, dans lequel les instabilités issues des interactions entre l'aérodynamique, la structure de l'avion et les lois de contrôle peuvent survenir en tout point de l'enveloppe de vol. Les problèmes les plus importants résultent de ces interactions sont [2, 24] :

- le *flottement* : il s'agit d'une instabilité dynamique, couplant un écoulement instationnaire aux modes de vibration de la structure, se traduisant par des oscillations d'amplitude non décroissantes (on parle d'amortissement négatif), pouvant conduire à la fatigue de structure, une perte de contrôle et même entraîner la destruction d'une partie ou la totalité de l'avion;
- Oscillations auto-entretenues (LCO *limit-cycle oscillations*): un état stationnaire d'oscillation de grande amplitude. Bien que ne présentant pas un amortissement négatif comme le flottement, cette situation peut accélérer la fatigue des matériaux et être une source d'inconfort pour le pilote et les passagers.
- la *réponse dynamique* : la flexibilité de l'avion peut modifier de façon significative sa réponse à des perturbations atmosphériques (rafales, turbulence) ou à des manœuvres rapides.

– *l'inversion de commande* : l'efficacité des surfaces de contrôle (gouvernes de profondeur, ailerons,...) est également modifiée par les effets aéroélastiques, et il peut même exister une vitesse au-delà de laquelle leur effet s'inverse.

1.4. Revue de la littérature :

Cette revue de la littérature est basée sur les travaux de recherche dans le domaine d'aéroservoélasticité. Ces derniers concernent la modélisation et la simulation des systèmes aéroélastiques (une aile complète, une section d'aile de l'avion flexible ou l'avion flexible complet) pour prédire les problèmes de vibration, d'instabilité ainsi que les recherches qui proposent des solutions aux problèmes d'aéroélasticité par l'application d'une commande active.

Modélisation dynamique d'un avion flexible :

Le développement des équations de mouvement de l'avion rigide se trouve dans plusieurs documentations, et ce, depuis de nombreuses années. Par contre, le problème est beaucoup plus complexe et très confidentiel pour la modélisation d'un avion flexible, qui se trouve dans des références très limitées. En effet, contrairement à la dynamique de l'avion rigide, la dynamique flexible fait intervenir un nombre très élevé de degrés de liberté. Dès lors, il est nécessaire d'effectuer des hypothèses simplificatrices et des réductions sur le modèle qui va avoir une grande influence sur les équations de mouvement que l'on désire obtenir.

Pour le modèle de l'avion rigide, il est très bien documenté dans plusieurs livres [6, 7]. Dérivé à partir de la loi de Newton, le modèle est composé de douze équations différentielles ordinaires non linéaires du premier ordre avec six degrés de liberté, trois en translation et trois en rotation. La dynamique de l'avion sera développée en détail dans le prochain chapitre. Au contraire du modèle rigide, le modèle flexible comporte plusieurs versions avec une infinité de degrés de liberté. D'après notre recherche bibliographique, on distingue deux méthodes principales de modélisation : la méthode pour le modèle intégré de Langley et la méthode pour le modèle de l'ONERA.

Développé au *Langley research center* (NASA), ce modèle est cité en référence dans la majorité des articles et thèses traitant l'avion flexible [22, 25, 26, 27]. Il n'est pas l'unique modèle, mais il est sans doute le plus documenté et est représentatif de ce type de modèle.

Waszak [22] a proposé une méthodologie d'unification de l'aéroélasticité et la dynamique du vol, basée sur des concepts de l'énergie cinétique et potentielle avec la formulation de Lagrange en dérivant les équations de mouvement relativement au repère à axe moyen lié au ceps du système. L'utilisation des axes moyens permet de minimiser le couplage inertiel entre le corps rigide et les modes flexibles. Cependant, ce couplage entre les modes rigides et flexibles de l'avion existe mais s'effectue par les forces généralisées qui sont dépendantes de tous les états du système, qu'ils soient rigides ou bien flexibles. Grâce à l'utilisation de quelques simplifications, le modèle conduit à des équations de mouvement non linéaires intégrant les modes flexibles à celle des équations conventionnelles d'un avion rigide qu'il faudra linéariser autour d'un point de fonctionnement afin d'obtenir un modèle d'état de l'avion et, éventuellement, un modèle longitudinal et un modèle latéral.

Un programme de recherche a été lancé par l'ONERA avec le soutien technique d'Airbus pour l'élaboration d'un modèle de l'avion souple (flexible) qui porte le nom du modèle de l'ONERA, ainsi que des techniques de commande dédiées à ce type d'avion. De nombreuses thèses et articles ont été publiés, tels que les travaux de Kubica, Livet, Dardenne, Madeleine, et Alazard [9-15, 20, 21, 28, 29]. Aux fins de ces recherches, des modèles d'avion souples ont été mis au point (restent toujours confidentiels). En consultant les thèses de Kubica, Livet et Dardenne les parties concernant la modélisation de l'avion souple sont confidentielles à part Puyou [30] dans sa thèse où il a donné un aperçu sur la modélisation mais les résultats numériques sont toujours confidentiels. De plus, une première analyse sur des modèles d'avions souples utilisés montre, en comparant les résultats numériques obtenues à ceux présentés par Kubica, Livet, Dardenne et Puyou que les modèles sont strictement les mêmes mais dans différentes conditions de vol.

L'aeroservoélasticité peut être traitée sur l'avion on considérant l'avion complet, ou uniquement un élément flexible comme l'aile par exemple ou une section d'aile a deux degré de liberté. Cette dernière a attiré l'intention de beaucoup de chercheurs pour l'étude de l'effet aéroélasticité non linéaire sur le comportement dynamique pour prédire le phénomène de flottement et d'oscillation. La modélisation du système peut être plus au moins compliquée

selon les hypothèses de calcul, par exemple le régime du vol subsonique, transsonique ou supersonique et la nature du modèle aérodynamique considéré stationnaire, quasi stationnaire ou instationnaire. De plus, le modèle peut devenir plus compliqué en considérant la non linéarité structurelle (le coefficient de rigidité est incertain ou dépend d'un paramètre variable comme l'incidence par exemple). Les phénomènes d'instabilité apparaissent sur le modèle lors de simulation ou l'expérimentation ont conduit les chercheurs à trouver des solutions pour ces problèmes en se basant beaucoup plus sur la commande active. Cette dernière fait appel au rajout de surfaces de commande aérodynamiques. Dans ce cas, on parle des becs, volets et spoilers installés sur les ailes des avions modernes [31]. Les lois de commande dédiées à ce système sont multiples qu'elles soient linéaires ou non linéaires. Dans ce cadre, J. Block [32] a utilisé la commande optimale LQR avec un observateur pour augmenter la vitesse de flottement d'une section d'aile flexible avec la surface de commande de bord de fuite. Le système en boucle fermée montre une stabilité avec des vitesses légèrement supérieures à la vitesse de flottement. J. Ko a investi la commande adaptative sur le même modèle avec la prise en considération de la non linéarité structurelle [33]. Les résultats de simulation montrent une stabilité asymptotique locale avec l'apparition d'instabilité si le régime de vol est augmenté. Afin d'améliorer ces résultats, J. Ko suggère l'addition d'une autre surface de commande au bord d'attaque. Les résultats de cette étude ont été validés expérimentalement avec une nette amélioration dans la vitesse de flottement [34]. Récemment, plusieurs techniques de la commande adaptative non linéaire ont été appliquées sur le modèle aéroélastique avec deux surfaces de commande [34, 35, 36]. Afin d'ajouter une contribution, nous proposons l'application de la technique robuste PRLQR sur le même modèle avec des incertitudes paramétriques [37, 38, 39]. De même la technique la commande par mode glissant été proposée pur améliorer la stabilité du système [40].

Dans le coté numérique et avec le développement des ordinateurs et les codes de calcul, l'avion flexible est modélisé numériquement par la combinaison du code CFD (Computational Fluid Dynamics), CSD (computational Structure Dynamics) et CFM (Computational Flight Mecanics) [41]. Ces modèles donnent d'une manière exacte le comportement flexible de l'avion et permet uniquement

d'étudier la stabilité de l'avion et l'effet des modes flexibles sur les modes rigides ainsi que la réponse de l'avion en cas des perturbations atmosphériques [5, 41, 42].

Synthèse des lois de commande pour avions flexibles :

L'élaboration des lois de commande dédiées au pilotage des avions flexibles est l'un des problèmes supplémentaires et crucial dans les systèmes aéroélastiques. Essentiellement, il s'agit d'ajuster un compensateur de manière à obtenir les propriétés et le comportement désirés en boucle fermée, sans exciter un mode flexible non contrôlé, ou bien en amortissant certains modes flexibles critiques. Cette tâche est compliquée par deux difficultés principales. D'une part, la conception s'exécute sur un modèle idéalisé de système. Il faut donc assurer la robustesse aux incertitudes de ce modèle, c'est-à-dire garantir les propriétés désirées pour toute une famille de systèmes autour du modèle de référence. D'autre part, il s'agit de rechercher un compromis entre la robustesse et la performance. Cette synthèse bibliographique permet de faire l'état des recherches sur le sujet.

Les différentes méthodes de conception :

Il existe une grande variété de théories et de méthodes de conception de lois de commande basées sur un modèle donné. Les méthodes sont tout d'abord classées en deux groupes : les méthodes de contrôle classique et celles de contrôle moderne multivariable.

L'approche classique :

L'approche classique de contrôle F.B.W est utilisée pour concevoir les contrôleurs des avions rigides pour l'avionique classique. Typiquement, la structure du contrôleur est un suiveur par retour de sortie. La boucle interne, un proportionnel généralisé, sert d'augmenter la stabilité de système. La boucle externe, généralement un proportionnel intégral (P.I), sert à augmenter la performance de guidage de l'avion. Shearer [26, 43] a utilisé cette commande dans la boucle externe pour guider l'avion flexible HALE en altitude et en roulis. Dans la boucle interne, la commande LQR et la dynamique inverse sont utilisées

pour le mode latéral et le mode longitudinal respectivement. Les résultats de simulation de guidage sont acceptables mais moins performants. Ces méthodes (PID) trouvent vite leurs limites avec un avion flexible, car elles ne peuvent tenir compte de tous les pôles du système et sont donc prédisposées au risque spillover, l'utilisation de cette approche pour commander un avion flexible conduit à des résultats médiocres même pour la performance nominale [4, 9, 10, 11, 26]. Il faut donc passer à des techniques plus complexes, celles du contrôle moderne.

Le placement de pôles :

La technique de placement de pôles consiste à déterminer les gains d'un contrôleur en fonction de la position désirée de certains pôles choisis par le concepteur. Si on désire placer tous les pôles du système, alors il faut effectuer un contrôle par retour d'état. Le retour d'état est un concept très intéressant et performant, mais peu utile pour l'industrie aéronautique (nombre de capteurs est celle des états) et surtout dans le cas d'un avion flexible où le nombre des états est important. Si on désire placer que quelques pôles, alors il est possible d'utiliser un retour de sortie, cette méthode est simple mais moins robuste pour un modèle flexible [4, 21, 44]. D'un autre côté, elle très intéressante pour la conception de la commande par séquençement de gain [45, 46, 47]. Hélas, encore une fois, en effectuant le placement de certains pôles et en ne se préoccupant pas des autres, on risque d'avoir un phénomène de spillover comme le démontre Kubica [9-11]. Cette étude démontre que cette technique n'est plus adaptée au problème de l'avion flexible. Donc, il faut passer à des méthodes de conception de contrôleurs plus complexes.

L'approche optimale :

Les techniques de commande optimales sont très utilisées dans la littérature pour les avions rigides ou flexibles [4, 16, 26, 43, 44, 46, 48, 49, 50], car elles permettent de prendre en compte l'aspect énergétique associé aux modes flexibles et consistent à déterminer le gain d'un contrôleur par minimisation d'une fonction quadratique de coût. Cette technique est utilisée selon différentes approches:

L'approche avec retour de sortie :

Cette technique consiste à utiliser des algorithmes optimaux pour réguler les gains et obtenir un système stable en boucle fermée. En effet, cette technique permet d'optimiser de façon numérique la valeur des gains en fonction d'un critère quadratique. Ce critère quadratique fait intervenir les sorties et les entrées du système à contrôler, pénalisées par des matrices de pondération régulées manuellement par le concepteur [3, 5, 51, 52, 53]. Dans [52] par exemple, sur un modèle longitudinale flexible instable, cette méthode est appliquée pour la commande de tangage en boucle fermée. Les résultats de simulation montrent la stabilité du modèle avec une bonne poursuite. Le test de robustesse de la commande a été effectué par injection d'un signal de perturbation sur une surface de commande, le résultat de simulation montre la dégradation des performances. Les performances ont été nettement améliorées suite à l'utilisation d'une action intégrale. Afin de couvrir tout un domaine de vol (plusieurs points de référence), la méthode de séquençement de gain est exigée. Sur un modèle d'avion flexible latérale, cette technique a été appliquée avec de très bons succès quant à la stabilité, mais avec une piètre performance en poursuite [4, 10, 11, 15].

Une deuxième méthode est proposée par KUBICA [10, 11], pour adapter les gains d'un régulateur par retour de sortie sans estimateur : la *méthode mixte*, car elle cherche à combiner la commande modale et la commande optimale à travers un problème d'optimisation. Les résultats obtenus avec cette méthode conduisent à un système stable, mais dont les marges de stabilité sont moins bonnes. De plus cette méthode n'assure pas explicitement une robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques. Or, la prise en compte de telles incertitudes est très importante pour le contrôle d'un avion flexible. La récente technique PRLQR (Parametric Robust Linear quadratic Regulator) de réglage très simple permet de prendre en compte ce type d'incertitude dans un design LQR. Cette méthode est utilisée par Kron [4], le résultat obtenu lui permet d'obtenir la stabilité robuste (évite donc le spillover), mais les performances sont trop limitées. Cette méthode a été appliquée avec succès sur un modèle aéroélastique dans [38].

L'approche avec estimateur :

La commande optimale avec estimateur LQG a été testée dans [16, 46, 50] où le contrôleur est composé d'un estimateur d'état de Kalman et d'un contrôleur LQR (dont les entrées sont des états estimés). Cette technique semble d'être limitée puisqu'elle exige un observateur de même ordre que le système est donc obligé la réduction du modèle afin de trouver un contrôleur d'ordre raisonnable. Appliquée sur un modèle flexible simple, cette méthode montre une forte dégradation, tant au niveau de performance qu'au niveau de la robustesse paramétrique [4, 28]. Dans [16, 48], la commande a été appliquée sur un avion léger flexible pour réguler les états du système vers zéro avec présence de perturbation. Les résultats de simulation montrent une stabilité du système mais avec des performances médiocres. Il paraît donc très utile de prendre directement en compte les incertitudes durant la conception. Cette autre approche est l'approche robuste.

Le contrôle Robuste :

D'après la littérature, la commande robuste semble incontournable pour les avions flexibles. En effet, on a vu que la modélisation d'un avion nécessite de faire des approximations sur le modèle dynamique, rendant le système incomplet et incertain tant par la dynamique négligées que par la valeur approximative des paramètres du modèle ainsi que les perturbations externes. A cette effet, l'approche robuste tient compte des incertitudes comme contrainte de design du contrôleur et peut donc garantir une stabilité robuste et même, si désiré, une performance robuste. C'est pourquoi elle est très attrayante pour les problèmes de contrôle d'avions. Néanmoins, cette approche a tout de même des limites, dont la plus importante est que le contrôle a une dimension importante et sa robustesse se paye par une perte de performance. Tout l'art de la conception consiste à gérer ce compromis entre performance et robustesse [26, 30, 35, 44, 49, 50].

Les techniques de contrôle robuste les plus communes utilisent un modèle nominal sujet à des incertitudes. Alors, le contrôleur est synthétisé à partir du système nominal pour qu'il respecte un critère garantissant la robustesse. Les critères utilisés sont la norme H_∞ ainsi que la valeur singulière structurée. Le design H_∞ optimise la norme H_∞ des fonctions de transfert entre les entrées et les

sorties du système non utilisées par la boucle de contrôle, autrement dit : le problème H_∞ est un problème de rejection de perturbation [60]. Si le supremum des valeurs singulières de la matrice de fonctions de transfert du système est plus petit que l'unité pour toutes les fréquences, alors la stabilité robuste est assurée. La synthèse d'un contrôleur optimisant un de ces critères ne conduit pas forcément à un système aux performances adéquates. En effet, effectuer la conception par rapport au supremum, c'est effectuer la conception en considérant le pire cas de perturbation sur tout le domaine fréquentiel. Cependant, ce pire cas ne se produit, qu'à une fréquence donnée. On effectue donc un design très conservateur. Pour y remédier, l'idée consiste à augmenter le système nominal avec des fonctions fréquentielles de pondération de manière à conditionner le problème à obtenir des résultats plus intéressants [3]. La réussite du design dépend de la capacité du concepteur à augmenter intelligemment son système initial pour que le contrôleur ait les propriétés recherchées. C'est l'étape la plus importante et la plus complexe du design. Ainsi, si elles sont convenablement utilisées, les techniques H_∞ et μ -synthèse permettent l'obtention d'un contrôleur avec une robustesse garantie. Cependant, ces techniques génèrent un contrôleur d'ordre très élevé.

Ces approches ont déjà fait l'objet de plusieurs travaux pour le contrôle d'avion rigides, tels que les travaux présentés dans notre thèse de magister [67]. De même, elles sont utilisées pour le contrôle d'avions flexibles militaires de haute performance, particulièrement dans le contrôle de problème de flottement [44, 49, 50]. Pour ce qui est des avions flexibles de transport, la recherche utilisant l'approche H_∞ provient d'ALAZARD [28], qui a proposé cette méthode et a obtenu des résultats très intéressants. L'étude considère deux modèles confidentiels représentant la dynamique latérale d'un même avion flexible dans deux conditions de vol différentes. L'objectif est la conception d'un contrôleur fonctionnel pour les deux modèles. Ici encore, le design consiste à interconnecter judicieusement un modèle nominal de design (soumis à une gamme d'incertitudes) à des matrices de pondérations et à synthétiser un contrôleur robuste par optimisation de la norme H_2 . Remarquons que l'interconnexion proposée est très pertinente aux systèmes flexibles, puisqu'elle tend à placer les pôles de la dynamique rigide en des zones désirées sans exciter les modes flexibles.

Une méthode robuste conventionnelle consisterait à définir un modèle nominal et une gamme d'incertitudes qui recouvre les deux modèles. Ainsi, un contrôleur robuste à ces incertitudes garantirait la robustesse pour tous les modèles. Cependant, en plus d'obtenir la robustesse, ALAZARD désire améliorer l'amortissement des modes flexibles de l'avion considéré. Ainsi, il considère les incertitudes uniquement sur les facteurs d'amortissement des modes flexibles. En effet, par ce biais, la synthèse du contrôleur va déplacer proportionnellement aux incertitudes les pôles flexibles vers la gauche du plan imaginaire afin de donner au système bouclé de la marge sur l'amortissement et assurer ainsi la robustesse aux incertitudes sur ces paramètres. ALAZARD ne cherche pas à modéliser des incertitudes représentatives aux variations entre les deux modèles afin d'assurer la robustesse, mais crée des incertitudes fictives comme moyen d'augmenter les performances du système. Evidemment, dans un tel cas, la norme H_∞ , obtenue peut être largement trop grande pour garantir la robustesse. C'est pourquoi le design obtenu doit être testé sur les deux modèles afin de s'assurer de la robustesse. Des itérations sont effectuées jusqu'à ce que le compromis entre robustesse et performance soit acceptable pour le concepteur. Ainsi, cette méthode détourne l'utilisation des incertitudes qui ne servent plus à modéliser de véritables incertitudes mais à générer une meilleure performance sur le système nominal. La robustesse du contrôleur est testée à posteriori comme pour les méthodes optimales. De plus, cette robustesse n'est pas validée pour un continuum d'incertitudes autour d'un système nominal, mais sur deux modèles discrets.

AOUF [49, 50], dans ses articles, a développé des lois de commande robustes, qui sont appliquées à plusieurs problèmes en aéronautique. Ces travaux contribuent à plusieurs aspects de la commande de vol évoluée par la résolution de plusieurs problèmes théoriques dont les solutions élaborées sont susceptibles de donner satisfaction sur des modèles complexes d'avions réels. Il a traité le problème des rafales et leurs effets sur un avion flexible. Il a montré l'efficacité d'intégrer des lois de commande robustes afin d'alléger les effets de rafales sur l'avion et d'améliorer leur performances. La commande robuste a été appliquée sur le modèle flexible B52 pour une poursuite de l'assiette longitudinale et minimiser l'effet de turbulence. En plus, il a montré l'efficacité de la commande

sur un modèle longitudinale flexible en poursuite de l'angle de tangage avec la présence de la turbulence appliqué sur la gouverne de commande. La robustesse de la commande a été validée suivant différents points de vol [50]. Li [35], a utilisé la même commande avec incertitude pour élaborer un contrôleur adéquat basé sur les méthodes de réduction des modes structuraux. La robustesse de la commande a été testé par l'addition des bruit blanc au niveau des entrées et sorties de système avec actionneur non linéaire. KRON [4], à son tour, il a montré l'efficacité d'utiliser ces commandes robustes pour un avion flexible. Ses travaux présentent des innovations, dont les plus importantes sont : l'amélioration de la méthode mixte (retour d'état par LQR et retour de sortie), de la technique de migration des pôles et la mise au point d'une approche dynamique à 2-DDL de synthèse H_∞ avec modèle de référence spécifiquement adaptée aux avions flexibles. Des méthodes de réduction et restructuration ont été appliquées afin de rendre le contrôleur efficace et robuste. Ces techniques ont été testées sur le modèle latéral de l'avion de transport civil hyper flexible de l'ONERA. Les résultats permettent d'obtenir la stabilité, mais une performance robuste de qualité limitée.

CHAPITRE 2

MODELISATION DE L'AVION SOUPLE

2.1. Introduction :

Dans la discipline de la *stabilité et commande avion* on va apprendre la manière avec laquelle l'avion peut voler et la facilité avec laquelle il peut être contrôlé.

Par stabilité, on va comprendre la tendance de l'avion de revenir à sa position d'équilibre après avoir été perturbé. La perturbation provient des actions de commande de la part du pilote ou des phénomènes atmosphériques. Les perturbations atmosphériques peuvent être des rafales de vent ou des turbulences de l'air.

On considère la stabilité d'un avion excellente, lorsque le pilote n'est pas fatigué en contrôlant constamment l'avion soumis aux perturbations externes. Les avions ayant très peu ou pas de stabilité aérodynamique ne sont pas sécuritaires pour voler, sauf s'ils sont équipés d'un appareil électromécanique appelé système d'augmentation de la stabilité (en anglais : *Stability Augmentation System*).

Deux conditions de vol sont nécessaires pour l'accomplissement d'un vol excellent de l'avion. Celui-ci devrait être capable d'achever son vol en équilibre et devrait être capable de manœuvrer sur une grande plage des vitesses de vol et des altitudes. Pour achever l'équilibre ou performer des manœuvres, l'avion devrait être équipé des contrôles aérodynamiques et propulsifs. Le design et la performance des systèmes de commande sont une partie intégrale de la stabilité et de contrôle de l'avion.

Les caractéristiques de stabilité et de contrôle de l'avion sont liées aux qualités de vol ou de maniabilité. Il est important au pilote que l'avion possède des

qualités de maniabilité satisfaisantes. Les avions avec des qualités de maniabilité faibles sont difficiles à voler et peuvent être potentiellement dangereux. Les pilotes ont des opinions sur les avions en se basant sur les qualités de maniabilité de l'avion. Un avion est considéré d'avoir un design faible si il n'a pas des qualités de vol. Dans l'étude de la stabilité et du contrôle, on s'intéresse à ce que rend l'avion stable, comment on va concevoir les systèmes de commande, et quelles conditions sont nécessaires pour obtenir des bonnes qualités de maniabilité?

Stabilité statique :

La stabilité est une propriété de l'état d'équilibre. Pour discuter de la stabilité, on devrait premièrement définir ce qu'on veut entendre par l'équilibre. Si un avion devrait rester en vol uniforme stationnaire, la force résultante et le moment résultant dans le centre de gravité sont égaux à zéro. Un avion satisfaisant ces conditions est dans l'état d'équilibre ou il vole pour une condition de vol. De l'autre côté, si la somme des forces et les moments n'est pas nulle, l'avion aura des accélérations en translation et en rotation.

Le sujet de la stabilité de l'avion se divise en stabilité statique et dynamique. La stabilité statique est la tendance initiale d'un avion de revenir dans sa position d'équilibre après avoir été perturbé, donc l'avion devrait développer une force et / ou un moment qui vont ramener l'avion dans sa position initiale d'équilibre.

Stabilité dynamique :

On regarde ici surtout la variation avec le temps du mouvement de l'avion après avoir été perturbé à partir de la position d'équilibre.

La réduction de la perturbation avec le temps indique qu'il existe une résistance au mouvement et, par la suite, l'énergie est dissipée. La dissipation de l'énergie s'appelle amortissement positif. Si l'énergie est ajoutée au système, alors on aura un amortissement négatif. L'amortissement positif pour un avion est fourni par des forces et des moments qui apparaissent lors du mouvement de l'avion.

Dans le cas de l'amortissement positif, ces forces et moments vont s'opposer au mouvement de l'avion et causer l'amortissement de la perturbation avec le temps. Un avion avec l'amortissement aérodynamique négatif est

dynamiquement instable; pour faire voler un tel avion, l'amortissement artificiel serait désigné dans l'avion. L'amortissement artificiel est fourni par un système d'augmentation de la stabilité (SAS).

Ce système est un appareil électromécanique qui va saisir le mouvement non-désirable et qui va déplacer les contrôles appropriés pour amortir le mouvement. Ceci est accompli avec des mouvements faibles de contrôle et, alors, les actions de commande du pilote ne sont pas influencées par le système.

Le degré de la stabilité dynamique est d'un intérêt particulier au pilote et au designer. La stabilité dynamique est spécifiée habituellement par le temps que prend la perturbation pour qu'elle soit amortie à la moitié de l'amplitude initiale ou, dans le cas d'un mouvement instable, le temps que prend à l'amplitude initiale de la perturbation pour doubler. Dans le cas d'un mouvement oscillatoire, la fréquence et la période du mouvement sont extrêmement importantes.

Jusqu'à maintenant, on a discuté de la réponse de l'avion face aux perturbations externes pendant que les contrôles sont maintenus fixés. Quand on intègre le pilote au système, des complications additionnelles peuvent apparaître. Par exemple, un avion stable dynamiquement aux perturbations externes avec les contrôles fixés peut devenir instable par des actions de commande de la part du pilote.

Si le pilote essaye de corriger le mouvement pour une perturbation, et au cas où son entrée de commande est en dehors de la phase du mouvement oscillatoire de l'avion, les actions de commande vont augmenter ce mouvement plus que le corriger.

Ce type de réponse de l'avion de la part du pilote est appelé *oscillation induite du pilote* (PIO). Il y a beaucoup de facteurs qui contribuent à la tendance PIO de l'avion. Parmi ces facteurs, on peut énumérer : l'amortissement aérodynamique insuffisant; l'amortissement du système de commande insuffisant; et le temps de réaction du pilote.

Une compréhension des caractéristiques dynamiques de l'avion est importante dans les qualités de vol ou de maniabilité de l'avion, aussi bien que pour la conception des pilotes automatiques. Les qualités de vol de l'avion sont dépendantes de l'opinion du pilote, alors, le pilote aime ou n'aime pas selon les mouvements variés de l'avion.

Commande de vol :

On montre sur le schéma de la figure 2.1 les commandes de vol électrique dans leur principe. Macroscopiquement on peut dire que : la mécanique du vol de l'avion est excitée par les actionneurs, puis les mouvements générés sont mesurés par les capteurs avant d'être traités par les calculateurs afin de délivrer de nouveaux ordres aux actionneurs en fonction soit des objectifs demandés en temps réel par le pilote via les organes de pilotage soit des objectifs assignés par le pilote automatique. Ce sont ainsi les lois qui ferment la boucle de contrôle de l'avion. Ainsi la chaîne, vue par les lois, qu'il convient de modéliser sera donnée par la figure 2.2. Nous allons consacrer une partie à chacun des sous-ensembles. Nous commencerons par les actionneurs, puis nous aborderons le système automatique de vol, et enfin la dynamique de l'avion. Il nous faudra toutefois ici distinguer deux points. On parlera tout d'abord de la mécanique du vol de l'avion, en le considérant comme rigide. Puis nous étudierons la souplesse structurelle de l'avion qui a d'une part un effet sur la partie précédente et d'autre part une dynamique propre. Enfin nous étudierons la modélisation des capteurs ainsi que des différents calculateurs.

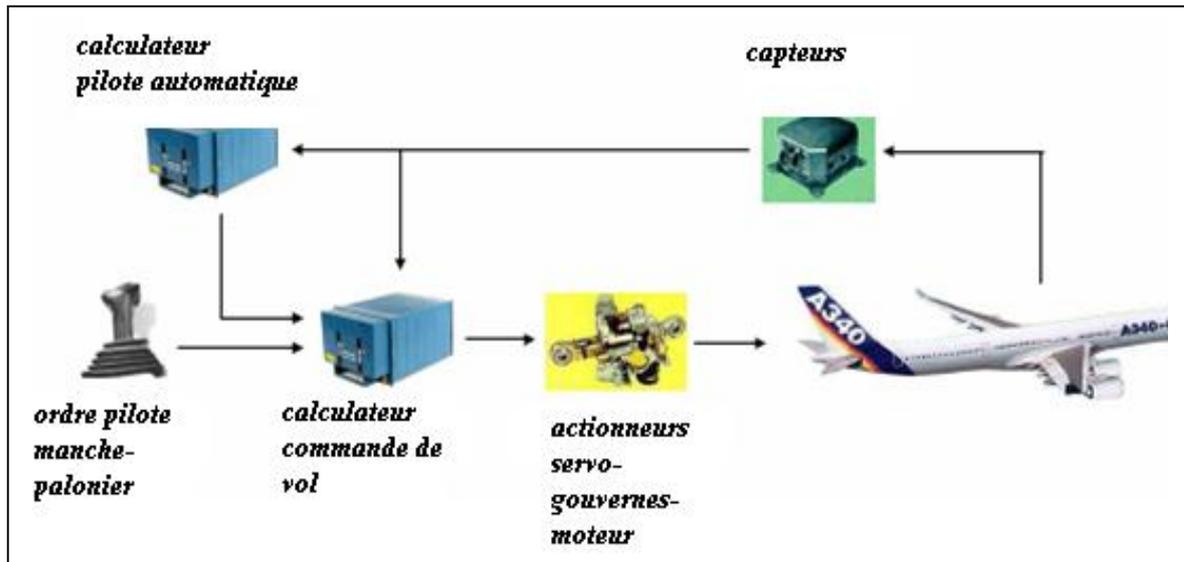


Figure 2.1: Schéma de principe des commandes de vol [30]



Figure 2.2: Schéma de la boucle ouverte [30]

Modèle Actionneurs :

Il est difficile de parler de manière générale des actionneurs d'un avion puisque leur type, leur nombre et leur positionnement peuvent fortement varier entre différents modèles. Le schéma de la figure 2.3 fournit à cet égard une bonne vision des possibilités.

Dans le cas du contrôle de l'avion en croisière nous nous restreindrons à trois actionneurs: la profondeur, la direction et les ailerons internes et externes.

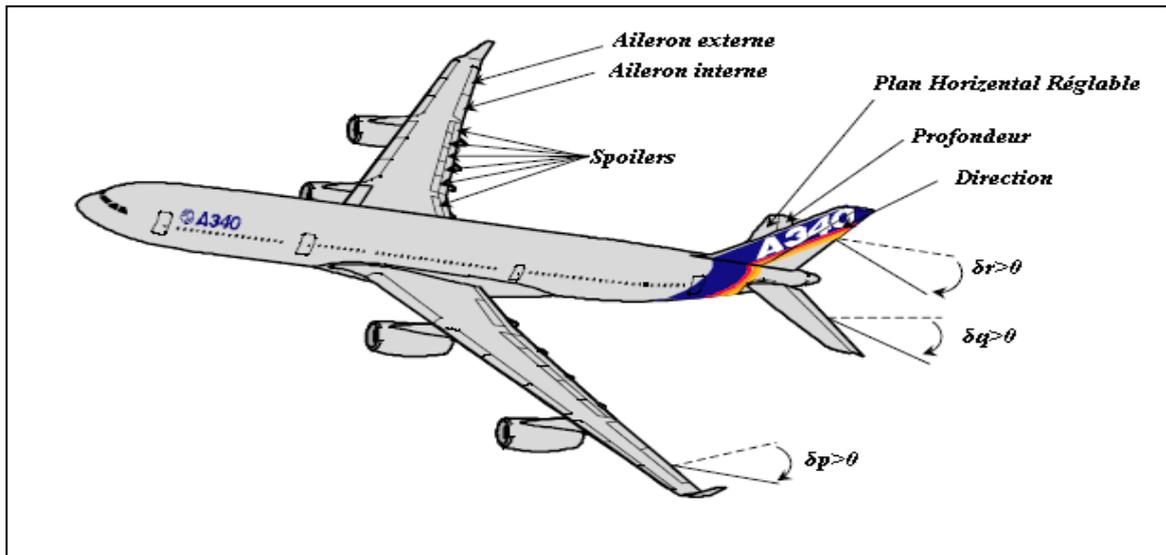


Figure 2.3: Surfaces de contrôle [30]

Systèmes de commande automatique de vol :

Les systèmes de commande automatique de vol à bord des aéronefs civils ont deux fonctions principales.

- Amélioration des qualités de vol de l'avion naturel : il s'agit de ramener les qualités de vol de l'avion naturel à un comportement suffisamment standard pour l'équipage et supportable par l'ensemble des passagers. L'amélioration des qualités de vol de l'avion naturel est réalisée par un ensemble de systèmes dénommés stabilisateurs (*Stability Augmentation System*).
- Assistance au pilotage et au guidage : il s'agit de libérer le pilote de tâches fastidieuses ou délicates afin de ne pas altérer la vigilance du pilote. Ces tâches proviennent soit du fait qu'il ait à piloter longtemps (avion long-courrier) ou du fait qu'elles exigent une très grande attention comme par exemple le pilotage par mauvaises conditions météorologiques ou l'atterrissage de nuit. L'assistance au pilotage et au guidage est réalisée par un ensemble de systèmes dénommés pilotes automatiques (*autopilot*).

D'une manière générale, les systèmes de commande automatique de vol permettent d'assurer une meilleure sécurité des vols à un moindre coût (i.e. amener les passagers à destination en temps voulu et à un prix acceptable).

Systemes de pilotage :

Les systèmes de pilotage permettent de faire évoluer de manière progressive l'avion d'une situation d'équilibre statique à une autre. Ainsi, le premier principe utilisé dans la conception de lois de pilotage automatique est celui de la séparation des petits mouvements de l'avion autour d'une position d'équilibre dans son plan longitudinal et latéral. Ceci conduit donc à considérer pour le pilote automatique des modes de fonctionnement longitudinaux et latéraux.

- Modes de fonctionnement longitudinaux :
 1. commande de l'attitude longitudinale ou la vitesse de tangage (pilote automatique longitudinal agissant sur la profondeur) ;
 2. commande de la vitesse (auto-manette ou gestion de la vitesse à la profondeur).

- Modes latéraux :
 1. Commande de l'attitude latérale ou de roulis (pilote automatique latéral agissant sur les ailerons) ;
 2. Commande de lacet (stabilisateur et coordination des virages agissant sur la direction).

Les méthodes classiques de synthèse de lois de commande automatique de vol font appel à la théorie des asservissements linéaires à entrée et sortie uniques (système SISO). Un avion étant un système dynamique complexe à plusieurs entrées (braquage des gouvernes et réglage des moteurs) et plusieurs sorties couplées (ainsi, par exemple, une variation du braquage de la gouverne de profondeur provoque une variation de la vitesse de tangage, de l'assiette longitudinale, de l'incidence, de la pente, de la vitesse verticale et de l'altitude), la

théorie des asservissements linéaires à entrée et sortie uniques n'a pu être appliquée avec succès que grâce à l'ordonnement des variables à commander en fonction de leur vitesse de variation et en tenant compte des relations de cause à effet existants entre elles. C'est le principe du découplage en fréquence, appelée aussi commande à plusieurs échelles de temps, qui se traduit dans le cas linéaire par une superposition des boucles d'asservissement : la réalisation dans un premier temps de l'asservissement des modes les plus rapides permet généralement dans un deuxième temps de réaliser l'asservissement des modes les plus lents.

Boucle de pilotage et boucle de guidage :

L'application du principe de superposition des boucles d'asservissement aux chaînes de commande de vol d'un avion de transport commercial conduit alors à l'organisation du pilote automatique en deux boucles principales :

- La boucle de pilotage, appelée aussi boucle d'attitude ou petite boucle et qui est associée aux fonctions de pilotage. Cette boucle permet de fixer l'attitude de l'avion par rapport à son centre de gravité. Sur les avions de transport anciens, cette boucle commandait l'assiette longitudinale et l'assiette latérale de l'avion. Sur les avions de transport récents (à partir de l'Airbus A320), cette boucle (boucle *CDVE* ou *FBW* : *Commande De Vol Electrique (Flight By Wire)*) commande le facteur de charge longitudinal, le taux de tangage et de roulis, système anti turbulence et l'amortissement des modes structuraux.
- La boucle de guidage ou grande boucle. Cette boucle permet de fixer la trajectoire du centre de gravité dans l'espace. Elle permet donc l'acquisition ou le maintien d'une trajectoire. Pour les mouvements longitudinaux, ce sont le niveau de vol, la vitesse verticale, la pente ou vitesse air qui sont commandés; pour les mouvements latéraux, ce sont le cap ou la route qui sont commandés. Ces modes de guidage sont sélectionnés soit directement par le pilote au travers d'un boîtier de commande (*FCU :Flight Control Unit*), soit indirectement par le *FMS (Flight Management System)* de l'avion.

Ces deux boucles sont placées en amont du système de commande des actionneurs (boucle de gouverne et auto-manette), comme illustré sur la figure 2.4 suivante :

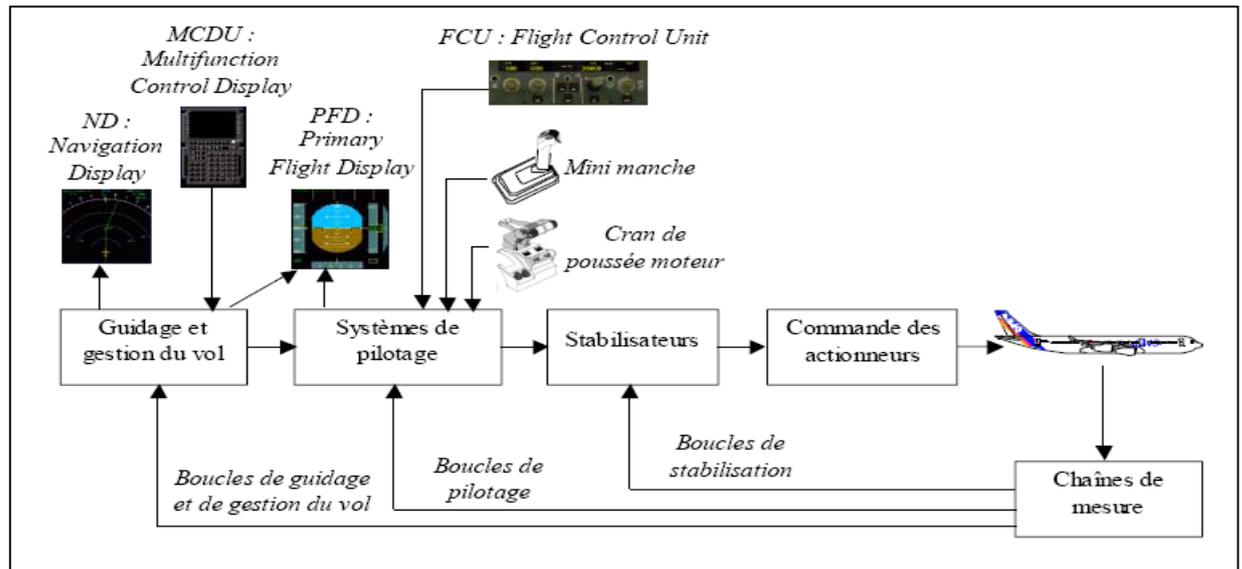


Figure 2.4 : Systèmes de commande d'un avion de transport moderne [19]

2.2. Modèle mathématique de l'avion rigide :

Le but de la mécanique du vol "rigide" est de décrire l'attitude de l'avion ainsi que son déplacement dans l'espace, c'est à dire les mouvements de rotation de l'avion autour de son centre de gravité, ainsi que les déplacements du centre de gravité dans l'espace.

2.2.1. Description des variables

Pour ne pas surcharger la présentation nous proposons ici une vision simplifiée des variables utiles à travers la figure 2.5. Ces dernières sont définies comme suit :

θ , ϕ , α , γ et β sont les angles de tangage, de roulis, d'incidence, de pente et de dérapage respectivement. p , q , et r sont les vitesses de roulis, de tangage et de lacet respectivement. N_y et N_z sont les facteurs de charge latéral et vertical respectivement.

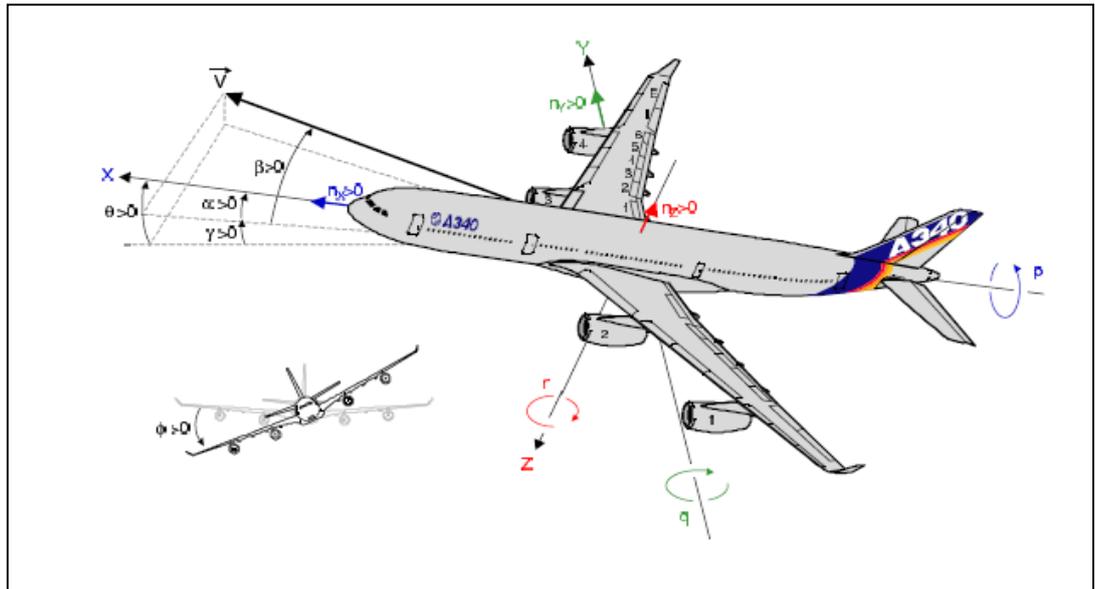


Figure 2.5: Angles et conventions [30].

2.2.2 Mise en équation du mouvement avion rigide

Le calcul des équations de stabilité de l'avion se réalise selon les lois de la physique et les lois de Newton. Ce calcul se divise sur le mouvement de l'avion en deux grandes parties : la première partie pour le mouvement longitudinal et la deuxième partie le mouvement latéral de l'avion.

Le calcul des charges (forces et moments) sera fait par rapport à un système de repère lié au corps de l'avion, fixé dans son centre de gravité (CG). Les axes de l'avion sont orientés selon la direction du nez de l'avion OX, la direction de l'aile droite OY et vers le bas OZ (selon la règle de la main droite). Le calcul des forces et moments sera ensuite exprimé dans le repère terrestre T.

2.2.2.1 Les forces agissant sur l'avion

Le système avec sous scripte **a** est lié à l'avion, quant au système avec sous scripte **T** est lié à la terre. Nous allons d'abord considérer un point matériel de masse δm et en faisant partie de l'avion **a** (figure 2.6). Nous allons ensuite calculer les forces dans un système des coordonnées lié à la terre T, en utilisant les composantes des vecteurs vus dans le système de l'avion **a**.

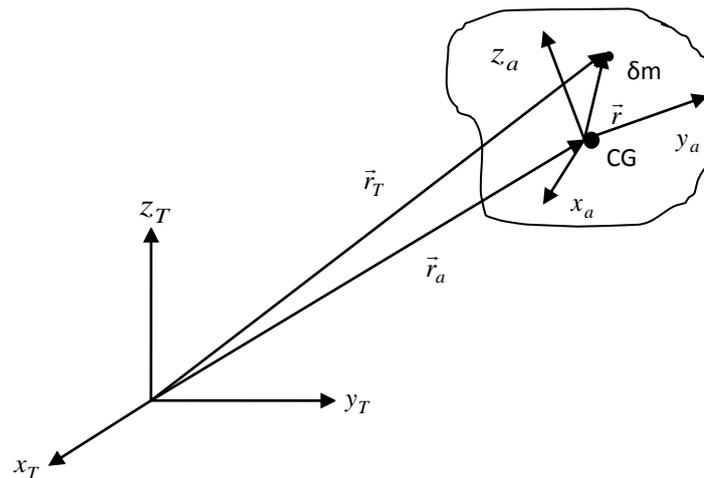


Figure 2.6: Repère avion-sol

Les coordonnées de point matériel δm sont x_a , y_a et z_a , et la position de ce point matériel est décrite par l'équation suivante :

$$\vec{r} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \quad (2.1)$$

Où \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} sont les vecteurs unitaires sur des axes de l'avion x_a , y_a , z_a .

Les projections des vecteurs \vec{v}_a et $\vec{\omega}_a$ sur les mêmes axes sont U, V, W et, respectivement, P, Q, R. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \vec{v}_a &= U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k} \\ \vec{\omega}_a &= P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \end{aligned} \quad (2.2)$$

La force totale qui agit sur le point de masse δm doit être calculée dans le système de coordonnées inertiel lié à Terre T. On peut écrire la force élémentaire agissant sur le point matériel de masse δm comme suite (seconde loi de Newton) :

$$\delta \vec{F} = \frac{d}{dt} (\delta m \vec{v}) \quad (2.3)$$

La force totale est la somme des forces élémentaires qui agissent sur la totalité des points matériels. On peut écrire :

$$\vec{F} = \sum \delta\vec{F} = \sum \delta m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.4)$$

La vitesse du point matériel δm est :

$$\vec{v} = \vec{v}_a + \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.5)$$

Où \vec{v}_a est la vitesse du système lié à l'avion vis-à-vis de système inertiel, et $\frac{d\vec{r}}{dt}$ est la vitesse du point matériel considéré vis-à-vis de système lié à l'avion.

En remplaçant l'équation (2.5) dans l'équation (2.4), on obtient :

$$\vec{F} = \sum \delta\vec{F} = \frac{d}{dt} \sum \vec{v} \delta m = \frac{d}{dt} \sum \left(\vec{v}_a + \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \delta m = \frac{d}{dt} \left(\sum \vec{v}_a \delta m \right) + \frac{d^2}{dt^2} \sum \vec{r} \delta m \quad (2.6)$$

Le terme $\sum \vec{r} \delta m$ est égal à zéro, parce que le système de coordonnées lié à l'avion a son origine dans le centre de masse de l'avion, par la suite :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}_a}{dt} \quad (2.7)$$

On peut voir que la force est calculée dans le système inertiel T, mais on va l'exprimer en fonction de composantes vectorielles dans les équations (2.2), qui se trouvent dans le système lié à l'avion a. La transformation de la dérivée du vecteur \vec{v}_a , du système inertiel T au système lié à l'avion a est réalisée par l'équation suivante :

$$\left(\frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_T = \left(\frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_a + (\vec{\omega}_a \times \vec{v}_a)_a \quad (2.8)$$

Dans cette équation, intervient, outre la variation temporelle du vecteur de la vitesse, la variation supplémentaire induite par la rotation du système non inertiel. Par la suite, en utilisant les équations (2.7) et (2.8), on obtient :

$$\vec{F} = m \left(\begin{array}{c} \dot{U}\vec{i} + \dot{V}\vec{j} + \dot{W}\vec{k} + \begin{pmatrix} P & Q & R \\ U & V & W \end{pmatrix} \end{array} \right) = \quad (2.9)$$

$$m(\dot{U} + QW - RV)\vec{i} + m(\dot{V} + RU - PW)\vec{j} + m(\dot{W} + PV - QU)\vec{k}$$

Les variables ayant un point au-dessous sont leurs dérivées de premier ordre par rapport au temps. Les composantes de cette force, vues du système inertiel, projetées sur les axes de l'avion, sont :

$$\begin{aligned} F_x &= m(\dot{U} + QW - RV) \\ F_y &= m(\dot{V} + RU - PW) \\ F_z &= m(\dot{W} + PV - QU) \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2.2.2 Les moments agissant sur l'avion

Le moment angulaire élémentaire appliqué dans le point matériel δm est par définition :

$$\delta \vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \delta m = (\vec{r} \times \vec{v}_a) \delta m + [\vec{r} \times (\vec{\omega}_a \times \vec{r})] \delta m \quad (2.11)$$

Le moment angulaire équivalent total est :

$$\vec{h} = \sum \delta \vec{h} = \sum \delta m \vec{r} \times \vec{v}_a + \sum [\vec{r} \times (\vec{\omega}_a \times \vec{r})] \delta m \quad (2.12)$$

Le premier terme est nul pour la même raison que précédemment. Après développement du deuxième terme, le moment angulaire devient :

$$\vec{h} = (PI_{xx} - QI_{xy} - RI_{xz})\vec{i} + (-PI_{xy} + QI_{yy} - RI_{yz})\vec{j} + (-PI_{xz} - QI_{yz} + RI_{zz})\vec{k} \quad (2.13)$$

Où les I_0 sont les moments d'inertie de l'avion :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum (y_a^2 + z_a^2) \delta m, \quad I_{xy} = \sum x_a y_a \delta m, \quad I_{xz} = \sum x_a z_a \delta m, \quad I_{yy} = \sum (x_a^2 + z_a^2) \delta m, \quad I_{yz} = \sum y_a z_a \delta m, \\ I_{zz} &= \sum (x_a^2 + y_a^2) \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, le moment angulaire s'écrit :

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_{x_a} \\ h_{y_a} \\ h_{z_a} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Le moment \mathbf{G} dans le système inertiel est la dérivée du moment angulaire \mathbf{h} , et sera écrit sous la forme suivante :

$$\vec{G} = \left(\frac{d\vec{h}}{dt} \right)_T = \left(\frac{d\vec{h}}{dt} \right)_a + (\vec{\omega}_a \times \vec{h})_a \quad (2.15)$$

Le développement de l'équation (2.15) conduit à l'expression suivante :

$$\vec{G} = (\dot{h}_{x_a} + Qh_{z_a} - Rh_{y_a})\vec{i} + (\dot{h}_{y_a} + Rh_{x_a} - Ph_{z_a})\vec{j} + (\dot{h}_{z_a} + Ph_{y_a} - Qh_{x_a})\vec{k} \quad (2.16)$$

Avec leurs composantes :

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{h}_{x_a} + Qh_{z_a} - Rh_{y_a} \\ \dot{h}_{y_a} + Rh_{x_a} - Ph_{z_a} \\ \dot{h}_{z_a} + Ph_{y_a} - Qh_{x_a} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

On remplace l'équation (2.14) dans l'équation (2.17), les équations des moments de l'avion dans le système inertiel deviennent :

$$\begin{aligned} L &= I_{xx}\dot{P} - (I_{xy}\dot{Q} + I_{xz}\dot{R}) + (I_{zz} - I_{yy})QR + (I_{xy}R - I_{xz}Q)P + (R^2 - Q^2)I_{yz} \\ M &= I_{yy}\dot{Q} - (I_{xy}\dot{P} + I_{yz}\dot{R}) + (I_{xx} - I_{zz})PR + (I_{yz}P - I_{xy}R)Q + (P^2 - R^2)I_{xz} \\ N &= I_{zz}\dot{R} - (I_{xz}\dot{P} + I_{yz}\dot{Q}) + (I_{yy} - I_{xx})PQ + (I_{xz}Q - I_{yz}P)R + (Q^2 - P^2)I_{xy} \end{aligned} \quad (2.18)$$

On tient compte de la symétrie de l'avion dans le plan xz , lorsque $I_{xy} = I_{yz} = 0$, on obtient alors les composantes de moments comme suit :

$$\begin{aligned} L &= I_{xx}\dot{P} - I_{xz}(\dot{R} + PQ) + QR(I_{zz} - I_{yy}) \\ M &= I_{yy}\dot{Q} - I_{xz}(P^2 - R^2) + PR(I_{xx} - I_{zz}) \\ N &= I_{zz}\dot{R} - I_{xz}(\dot{P} + PQ) + I_{xz}QR \end{aligned} \quad (2.19)$$

De plus, pour les grands avions de transport qui ne génèrent pas de grandes vitesses angulaires, les troisièmes termes des équations précédentes sont souvent négligés et les équations de moments deviennent :

$$L = I_{xx}\dot{P} - I_{xz}(\dot{R} + PQ)$$

$$M = I_{yy}\dot{Q} - I_{xz}(P^2 - R^2) \quad (2.20)$$

$$N = I_{zz}\dot{R} - I_{xz}(\dot{P} - QR)$$

D'autres hypothèses sont prises dans ces équations : le produit d'inertie I_{xz} est assez petit pour qu'il soit négligé. Pour un avion où les vitesses angulaires sont basses, les termes PQ , QR et $P^2 - R^2$ peuvent être négligés. Comme R^2 est plus petit que P^2 , on peut le négliger.

2.2.2.3. L'orientation et la position de l'avion (angles d'Euler)

Les deux systèmes des coordonnées \mathbf{T} (lié à la Terre) et \mathbf{a} (lié à l'avion), présentés dans la figure 2.6, diffèrent suite à un mouvement de translation et suivi par un autre mouvement de rotation. Les composantes de vecteur vitesse dans le système lié à l'avion \mathbf{a} sont U, V et W.

Maintenant la question est de trouver les composantes du même vecteur selon les axes du système inertiel lié à la Terre \mathbf{T} . Pour calculer ces composantes, on néglige la translation des deux systèmes (il suffit que les axes soient parallèles pour notre démarche). Dans un cas plus général, présenté dans la figure 2.6, on est capable d'atteindre cet objectif par trois rotations successives. L'ordre de ces trois rotations est important. Chaque rotation se fait autour de l'un des trois axes, chaque fois d'un axe différent.

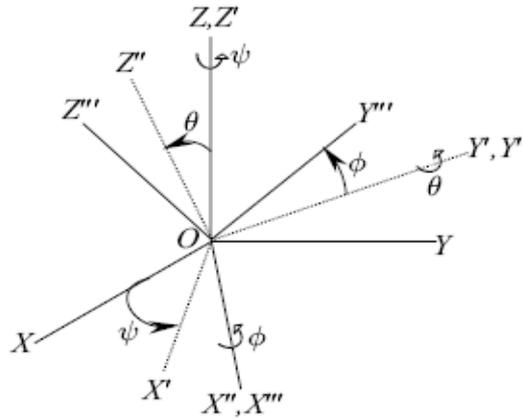


Figure 2.7: Orientation d'angle d'Euler $(\psi)_3, (\theta)_2, (\phi)_1$.

Dans le but d'atteindre la position finale des axes de la manière montrée dans la figure 2.7, on va réaliser les trois rotations successives classiques : la première rotation d'angle ψ autour de l'axe OZ, la deuxième rotation d'angle θ autour de l'axe OY et la troisième rotation d'angle ϕ autour de l'axe OX.

La matrice de rotation pour l'orientation $(\psi)_3, (\theta)_2, (\phi)_1$ est donnée par :

$$C = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \psi \\ (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) & (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) & \sin \phi \cos \theta \\ (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) & (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Au final, on trouve 12 équations différentielles non-linéaires dans les 12 inconnues $x_0, y_0, z_0, \phi, \theta, \psi, u, v, w, p, q$ et r puisque les forces et couples aérodynamiques X, Y, Z, L, M et N dépendent du mouvement de l'avion représenté par son vecteur vitesse u, v, w et son vecteur vitesse de rotation p, q, r , ainsi que son vecteur de paramètres de commandes. Ces équations se résument comme suit :

$$m(\dot{U} + QW - RV) = -mg \sin \theta + X$$

$$m(\dot{V} + RU - PW) = mg \sin \phi \cos \theta + Y \quad (2.22)$$

$$m(\dot{W} + PV - QU) = mg \cos \phi \cos \theta + Z$$

$$I_{xx}\dot{P} - (I_{xy}\dot{Q} + I_{xz}\dot{R}) + (I_{zz} - I_{yy})QR + (I_{xy}R - I_{xz}Q)P + (R^2 - Q^2)I_{yz} = L$$

$$I_{yy}\dot{Q} - (I_{xy}\dot{P} + I_{yz}\dot{R}) + (I_{xx} - I_{zz})PR + (I_{yz}P - I_{xy}R)Q + (P^2 - R^2)I_{xz} = M \quad (2.23)$$

$$I_{zz}\dot{R} - (I_{xz}\dot{P} + I_{yz}\dot{Q}) + (I_{yy} - I_{xx})PQ + (I_{xz}Q - I_{yz}P)R + (Q^2 - P^2)I_{xy} = N$$

$$\dot{\phi} = P + \tan \theta (\sin \phi \cdot Q + \cos \phi \cdot R)$$

$$\dot{\theta} = \cos \phi \cdot Q - \sin \phi \cdot R \quad (2.24)$$

$$\dot{\psi} = \sec \theta (\sin \phi \cdot Q + \cos \phi \cdot R)$$

$$\dot{x}_0 = \cos \theta \cos \psi \cdot U + (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi)V + (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)W$$

$$\dot{y}_0 = \cos \theta \cos \psi \cdot U + (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi)V + (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)W \quad (2.25)$$

$$\dot{z}_0 = -\sin \theta \cdot U + \sin \phi \cos \theta \cdot V + \cos \phi \cos \theta \cdot W$$

On considérera par la suite le cas le plus fréquent où le plan xz est un plan de symétrie. Dans ces conditions, les produits d'inertie I_{xy} et I_{yz} sont nuls. Si l'on prend comme axes du repère avion les axes principaux d'inertie, alors le produit d'inertie I_{xy} est nul également. Lorsqu'on étudie des petites perturbations autour d'un état d'équilibre symétrique (et donc un vol sans dérapage), il s'avère toutefois plus commode d'employer comme repère avion un repère dans lequel l'axe x est aligné avec la direction de vecteur vitesse à l'équilibre, car cela simplifie grandement l'expression des forces et moments aérodynamiques.

Dans l'étude du mouvement de l'avion décrite par ce système, on peut distinguer divers types de problèmes :

Stabilité – commandes fixes : Dans ce type de problèmes, on étudie le mouvement de l'avion consécutif à une perturbation, les commandes étant maintenues en position, c'est-à-dire pour un vecteur de commande constant. En raison de la non-linéarité du système mentionné précédemment, il n'existe en général pas de solution analytique. Toutefois, pour des mouvements de faible amplitude, les équations du mouvement peuvent être linéarisées, ce qui permet d'obtenir des solutions analytiques.

Stabilité – commandes libres : Dans ce cas également, on étudie le mouvement de l'avion consécutif à une perturbation, mais cette fois les commandes sont libres de se déplacer sous l'effet des couples aérodynamiques qui s'appliquent sur elles. Les variables de commande ne sont donc plus spécifiées, mais sont elles-mêmes liées aux variables d'état du système (orientation, vitesse, vitesse angulaire) par l'entremise des équations décrivant le mouvement des commandes, qui s'ajoutent donc au système de base.

Stabilité – commandes automatiques : C'est encore une fois le mouvement de l'avion consécutif à une perturbation que l'on étudie, mais lorsque celui-ci est sous le contrôle d'un système de pilotage automatique qui actionne les commandes en fonction de l'évolution des variables d'état et éventuellement de commandes extérieures telles que données par un système de navigation.

Réponse aux commandes : On étudie dans ce cas le mouvement de l'avion consécutif à l'actionnement d'une commande selon une loi de variation dans le temps spécifiée, généralement un échelon de commande.

Réponse à la turbulence atmosphérique : L'étude du mouvement de l'avion et des forces qui s'exercent sur lui en raison de turbulences atmosphériques est extrêmement importante, tant du point de vue de la conception que du point de vue opérationnel. Les équations du mouvement se modifient simplement par l'ajout du vent atmosphérique, fluctuant en raison de la turbulence, au vecteur vitesse de l'avion par rapport à l'atmosphère (u, v, w) .

2.2.2.4 Théorie des petites perturbations

Dans la théorie des petites perturbations on considère des mouvements de faible amplitude autour d'un état d'équilibre ou ce qu'on appelle un vol stationnaire « steady flight condition » (l'avion est en vol non accéléré à une altitude constante et selon une trajectoire rectiligne). Toutes les variables dans les équations de mouvement sont remplacées par une valeur de référence plus une perturbation. Dans ces conditions, les équations du mouvement peuvent se linéariser. L'expérience a montré que cette théorie simplifiée donne de bons résultats, notamment pour l'analyse de la stabilité des états d'équilibre et de la réponse aux commandes.

2.2.2.5 Linéarisation des équations

On commence par décomposer le mouvement entre l'état d'équilibre de référence (vol rectiligne uniforme) identifié par l'indice 0 et les écarts par rapport à cet état (perturbations), identifiés par le caractère minuscule. Par exemple :

$$U = U_0 + u; R = R_0 + r; Q = Q_0 + q; M = M_0 + m_1 \quad (2.26)$$

A l'équilibre les équations de forces et de moments peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} m(Q_0 W_0 - R_0 V_0) &= -mg \sin \theta_0 + X_0 \\ m(R_0 U_0 - P_0 W_0) &= mg \sin \phi_0 \cos \theta_0 + Y_0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$m(P_0 V_0 - Q_0 U_0) = mg \cos \phi_0 \cos \theta_0 + Z_0$$

$$L_0 = -P_0 Q_0 I_{xz} + Q_0 R_0 (I_{zz} - I_{yy})$$

$$M_0 = -I_{xz} (P_0^2 - R_0^2) + P_0 R_0 (I_{xx} - I_{zz}) \quad (2.28)$$

$$N_0 = P_0 Q_0 (I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz} Q_0 R_0$$

Les équations des forces et moments correspondant à la perturbation deviennent :

$$x = m(\dot{u} + Q_0 w + W_0 q - R_0 v - V_0 r + g \theta \cos \theta_0)$$

$$y = m(\dot{v} + R_0 u + U_0 r - P_0 w - W_0 p - g \phi \cos \phi_0 \cos \theta_0 + g \theta \sin \phi_0 \sin \theta_0) \quad (2.29)$$

$$z = m(\dot{w} + P_0 v + V_0 p - Q_0 u - U_0 q + g \phi \sin \phi_0 \cos \theta_0 + g \theta \cos \phi_0 \sin \theta_0)$$

$$\Delta L = I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} + (I_{zz} - I_{yy}) (Q_0 r + R_0 q) - I_{xz} (P_0 q + Q_0 p)$$

$$\Delta M = I_{yy} \dot{q} + (I_{xx} - I_{zz}) (P_0 r + R_0 p) + 2I_{xz} (P_0 p - R_0 r) \quad (2.30)$$

$$\Delta N = I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + (I_{yy} - I_{xx}) (P_0 q + Q_0 p) + I_{xz} (Q_0 r + R_0 q)$$

La dernière équation qu'on peut rendre linéaire est l'équation (2.24) qui lie les vitesses angulaires aux dérivées des angles d'Euler. Les équations liées aux perturbations deviennent :

$$\begin{aligned}
p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta_0 \\
q &= \dot{\theta} \cos \phi_0 + \dot{\psi} \sin \phi_0 \cos \theta_0 \\
r &= \dot{\psi} \cos \phi_0 \cos \theta_0 - \dot{\theta} \sin \phi_0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

L'état de référence étant un mouvement rectiligne uniforme, $P_0 = Q_0 = R_0 = 0$. De plus, on supposera que l'état de référence est un vol *symétrique*, de sorte que $V_0 = \phi_0 = 0$. Enfin, on peut sans perte de généralité prendre $W_0 = 0$ en alignant l'axe x avec le vecteur vitesse à l'équilibre (repère avion de stabilité) et $\psi_0 = 0$ en choisissant la direction x_0 du repère sol dans le plan de symétrie de l'avion. Les équations des forces et moments de perturbation deviennent :

$$\begin{aligned}
x &= m(\dot{u} + W_0 q + g \theta \cos \theta_0) \\
y &= m(\dot{v} + U_0 r - W_0 p - g \phi \cos \phi_0 \cos \theta_0)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
z &= m(\dot{w} - U_0 q + g \theta \sin \theta_0) \\
\Delta L &= I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} \\
\Delta M &= I_{yy} \dot{q} \\
\Delta N &= I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Les équations (2.32) et (2.33) peuvent être séparées en deux ensembles d'équations, longitudinal et latéral :

Equations pour le mouvement longitudinal :

$$\begin{aligned}
x &= m(\dot{u} + W_0 q + g \theta \cos \theta_0) \\
z &= m(\dot{w} - U_0 q + g \theta \sin \theta_0) \\
\Delta M &= I_{yy} \dot{q} \\
q &= \dot{\theta}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Equations pour le mouvement latéral :

$$y = m(\dot{v} + U_0 r - W_0 p - g\phi \cos \phi_0 \cos \theta_0)$$

$$\Delta L = I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} \quad (2.35)$$

$$\Delta N = I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p}$$

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta_0$$

$$r = \dot{\psi} \cos \theta_0$$

2.2.2.6 Développement des forces et des moments aérodynamiques :

Les séries de Taylor servent aux calculs des équations linéaires du mouvement latéral et longitudinal de l'avion. L'expansion des équations des mouvements longitudinales et du mouvement latérales est réalisée en tenant compte des variables qui entrent dans le calcul des perturbations des forces et moments.

Par exemple, pour le mouvement en plan longitudinal, les paramètres qui varient sont la vitesse axiale u orientée sur l'axe des x , la vitesse verticale w orientée sur l'axe des y et la vitesse angulaire de tangage q autour de l'axe Oy .

Le contrôle de l'avion en mouvement longitudinal est assuré principalement par les trois types de surfaces de commande : le gouvernail de profondeur δ_e , les volets δ_F , les aérofreins δ_{sp} et la force de poussée δ_T .

En utilisant le développement des forces et moments en séries de Taylor, on obtient par exemple :

$$x = \frac{\partial X}{\partial u} u + \frac{\partial X}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial X}{\partial w} w + \frac{\partial X}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial X}{\partial q} q + \frac{\partial X}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \dot{\delta}_e} \dot{\delta}_e + \dots \quad (2.36)$$

Il est possible maintenant d'écrire l'équation (2.34) et (2.35) comme suit :

$$\frac{\partial X}{\partial u} u + \frac{\partial X}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial X}{\partial w} w + \frac{\partial X}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial X}{\partial q} q + \frac{\partial X}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \dot{\delta}_e} \dot{\delta}_e = m(\dot{u} + W_0 q + g\theta \cos \theta_0)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u} u + \frac{\partial Z}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial Z}{\partial w} w + \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial Z}{\partial q} q + \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \dot{\delta}_e} \dot{\delta}_e = m(\dot{w} - U_0 q + g\theta \sin \theta_0) \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial M}{\partial u} u + \frac{\partial M}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial M}{\partial w} w + \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial M}{\partial q} q + \frac{\partial M}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial M}{\partial \dot{\delta}_e} \dot{\delta}_e = I_{yy} \dot{q}$$

$$q = \dot{\theta}$$

Pour simplifier la notation, on note:

$$X_x = \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial x}; Z_x = \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{\partial x}; M_x = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M}{\partial x} \quad (2.38)$$

Substituant l'équation (2.38) dans (2.37), le modèle longitudinal devient:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= X_u u + X_{\dot{u}} \dot{u} + X_w w + X_{\dot{w}} \dot{w} + X_q q + X_{\dot{q}} \dot{q} - W_0 q - g \theta \cos \theta_0 + X_{\delta_e} \delta_e + X_{\dot{\delta}_e} \dot{\delta}_e \\ \dot{w} &= Z_u u + Z_{\dot{u}} \dot{u} + Z_w w + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_q q + Z_{\dot{q}} \dot{q} + U_0 q - g \theta \sin \theta_0 + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\dot{\delta}_e} \dot{\delta}_e \\ \dot{q} &= M_u u + M_{\dot{u}} \dot{u} + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\dot{q}} \dot{q} + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\dot{\delta}_e} \dot{\delta}_e \\ \dot{\theta} &= q \end{aligned} \quad (2.39)$$

Où $X_{(\)}$, $Z_{(\)}$ et $M_{(\)}$: sont les coefficients des dérivés de stabilité de l'avion pour le modèle longitudinal.

Par la même procédure, on peut établir le modèle latéral de l'avion et les équations (2.35) deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Y_v v + Y_{\dot{v}} \dot{v} + Y_r r + Y_p p + Y_{\dot{r}} \dot{r} + Y_{\dot{p}} \dot{p} + U_0 r - W_0 p - g \cos \theta_0 \phi + Y_{\delta_a} \delta_a + Y_{\delta_r} \delta_r \\ \dot{p} &= \frac{I_{xz}}{I_{xx}} \dot{r} + L_v v + L_{\dot{v}} \dot{v} + L_r r + L_{\dot{r}} \dot{r} + L_p p + L_{\dot{p}} \dot{p} + L_{\delta_a} \delta_a + L_{\delta_r} \delta_r \\ \dot{r} &= \frac{I_{xz}}{I_{zz}} \dot{p} + N_v v + N_{\dot{v}} \dot{v} + N_r r + N_{\dot{r}} \dot{r} + N_p p + N_{\dot{p}} \dot{p} + N_{\delta_a} \delta_a + N_{\delta_r} \delta_r \\ \dot{\phi} &= p + r \tan \theta_0 \\ \dot{\psi} &= r \sec \theta_0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.3. Modèle Mathématique de l'avion flexible

Lorsque les effets aéroélastiques pour un avion flexible sont pris en considération, il devient nécessaire d'augmenter les équations de mouvement pour un avion rigide, en ajoutant aux variables d'état un ensemble de coordonnées généralisées associées aux modes flexibles. Ces modes flexibles sont calculés en supposant que le comportement de la structure de l'avion est linéaire et que le déplacement de la structure est petit par rapport aux dimensions totales de l'avion. Avec ces suppositions, chaque mode est caractérisé par une fréquence naturelle distincte [1,27].

La démarche pour obtenir le modèle aéroélastique débute par une analyse de vibration de la structure. Habituellement la structure de l'avion est modélisée par des éléments-finis, constitués de N nœuds.

2.3.1 Hypothèses et formalisation

Nous allons nous attacher ici à étudier les déformations structurales dues au couplage des modes structuraux avec les forces aérodynamiques in-stationnaires. La démarche adoptée est la suivante: [22, 30]

1. On considère tout d'abord la structure libre (i.e. pas de forces aérodynamiques),
2. Après une discrétisation par la méthode des éléments finis on obtient un nombre fini N de degrés de liberté qui sont les déplacements des nœuds choisis,
3. On calcule alors les formes et les fréquences propres par résolution des N équations différentielles de l'avion structure libre,
4. Par une interpolation de ces N déformations on écrit l'équation de flottement,
5. On ajoute enfin les forces aérodynamiques afin d'obtenir la représentation d'état de l'avion flexible.

2.3.2. Mise en Equation

On part classiquement du principe de Hamilton sur la conservation de l'énergie dans le cas d'un système conservatif qui est donnée par [1, 22, 30] :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(T-U)dt = 0 \quad (2.41)$$

Où T est l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle.

Ce principe se généralise au cas des systèmes non conservatifs par l'introduction des travaux virtuels des forces dans l'équilibre :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(T-U)dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0 \quad (2.42)$$

Si on note d_i les déplacements élémentaires des nœuds sélectionnés, on peut écrire :

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j M_{ij} \dot{d}_i \dot{d}_j = \frac{1}{2} \dot{d}^T M \dot{d}$$

(2.43)

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j K_{ij} d_i d_j = \frac{1}{2} d^T K d \quad (2.44)$$

$$\delta W = \sum_i F_i d_i = F d \quad (2.45)$$

pour un système non dissipatif.

En supposant qu'aux instants t_0 et t_1 les déplacements d_i sont nuls, on peut alors écrire l'équation des forces comme un système de n équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{d}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial d_i} + \frac{\partial U}{\partial d_i} = F_i \quad i = 1, \dots, n$$

(2.46)

On obtient alors pour un système non dissipatif l'équation différentielle suivante :

$$M \ddot{d} + K d = F \quad (2.47)$$

Pour un système dissipatif, il faut introduire la force d'amortissement visqueux dans les forces généralisées :

$$M \ddot{d} + B \dot{d} + K d = F \quad (2.48)$$

Où on note : M : matrice de masse ; K : matrice de raideur ; B : matrice d'amortissement visqueux et F : forces généralisées qui ne sont ni inertielle, ni potentielle, ni dissipative.

Ces matrices peuvent être calculées par un modèle d'élément fini de l'avion et la méthode de panneaux pour les forces aérodynamiques instationnaires. Dans la littérature, on trouve souvent les logiciels de NASA STARS et NASTRAN qui sont utilisés à cet effet. Une autre méthode approximative linéaire peut être utilisée pour les forces aérodynamiques instationnaires, il s'agit de la méthode du Padé ou Roger [23, 54].

2.3.3. Résolution de l'équation de la structure libre :

On résout l'équation (2.48) du système conservatif afin de caractériser la base modale. On se place ensuite dans cette base modale afin de découpler les équations par un changement de variable $\eta = \Phi^{-1}d$, où Φ est une matrice de forme orthogonale qui regroupe les vecteurs propres issus de l'analyse de vibrations libres

En posant :

- $\mu = \Phi^T M \Phi$ matrice de masse généralisée
- $\gamma = \Phi^T K \Phi$ matrice de raideur généralisée
- $\beta = \Phi^T B \Phi$ matrice de dissipation généralisée
- $\hat{F} = \Phi^T F \Phi$ matrice de force généralisée

On obtient l'équation réduite suivante :

$$\mu \ddot{\eta} + \beta \dot{\eta} + \gamma \eta = \hat{F} \quad (2.49)$$

2.3.4. Introduction des forces extérieures : Equation de flottement

Nous allons maintenant considérer non nulles les forces extérieures. Examinons tout d'abord les forces issues de la modélisation de l'aérodynamique instationnaire. On peut écrire :

$$F_{aero} = qF_q(M, k)\eta \quad (2.50)$$

où :

- $q = \frac{1}{2} \rho V^2$ représente la pression dynamique
- $k = \frac{\omega}{V}$ représente la pulsation réduite
- ω les pulsations harmoniques de la structure
- F_q la matrice des forces généralisées de mouvement pour l'aérodynamique instationnaire.

A cela, il faut ajouter les forces induites par le braquage des gouvernes :

$$F_{gouverne} = qF_\delta(M, \omega)\delta \quad (2.51)$$

où

- F_δ sont les forces généralisées de mouvement dues aux forces aérodynamiques créées par le braquage des surfaces de commande.
- δ est l'entrée correspond au braquage des gouvernes.

Ainsi que les forces générées par la turbulence :

$$F_{gust} = qF_g(M, k) \frac{\omega_g}{V} \quad (2.52)$$

où

- F_g représente les forces généralisées de turbulence dues au vent.
- ω_g est le torseur des vitesses vent

Au final :

$$\mu\ddot{\eta} + \beta\dot{\eta} + \gamma\eta = F_{aero} + F_{gouverne} + F_{gust} \quad (2.53)$$

2.3.5. Approximation des forces aérodynamiques instationnaires :

Afin d'exprimer les forces généralisées et de rendre l'équation de mouvement linéaire pour en extraire une représentation d'état, nous avons adopté dans notre travail deux méthodes, la première est basée sur l'utilisation de l'approximation de Roger, qui permet de d'écrire les forces sous forme rationnelle en utilisant la variable s (variable de Laplace) et la seconde basée sur le développement des forces en fonction des variables d'état.

L'approximation de Roger consiste à écrire la force sous forme d'un polynôme en fonction de la variable de Laplace comme suit :

$$[F_{ap}] = [F_0] + [F_1]s' + [F_2]s'^2 + \sum_{j=3}^N \frac{[F_j]s'}{s' + \gamma_{j-2}} \quad (2.54)$$

Où

s' est la variable de Laplace adimensionnelle $s' = ik = s/V$

Les termes $F_j \frac{s'}{s' + \gamma_j}$ traduisent les retards aérodynamiques.

De manière pratique les retards sont choisis arbitrairement dans la bande de fréquence utile et les coefficients F_j sont ensuite optimisés via la méthode des moindres carrés.

Ainsi on peut écrire :

$$F_{\eta} = F_0^{\eta}\eta + F_1^{\eta}\frac{\dot{\eta}}{V} + F_2^{\eta}\frac{\ddot{\eta}}{V^2} + \sum_{j=3}^N F_j^{\eta}\eta_j \quad \eta_j = L^{-1}\left(\frac{s}{s+V\cdot\gamma_j^{\eta}}\right) \quad (2.54)$$

$$F_{\delta} = F_0^{\delta}\delta + F_1^{\delta}\frac{\dot{\delta}}{V} + F_2^{\delta}\frac{\ddot{\delta}}{V^2} + \sum_{j=3}^N F_j^{\delta}\delta_j \quad \delta_j = L^{-1}\left(\frac{s}{s+V\cdot\gamma_j^{\delta}}\right) \quad (2.55)$$

$$F_g = F_0^g w + F_1^g \frac{\dot{w}}{V} + F_2^g \frac{\ddot{w}}{V^2} + \sum_{j=3}^N F_j^g w_j \quad w_j = L^{-1}\left(\frac{s}{s+V\cdot\gamma_j^g}\right) \quad (2.56)$$

2.3.6. Mise en forme du modèle d'état

2.3.6.1. Modèle de l'ONERA :

Un programme de recherche a été lancé par l'ONERA avec le soutien technique d'Airbus pour l'élaboration d'un modèle de l'avion souple (flexible) qui porte le nom du modèle de l'ONERA, ainsi que des techniques de commande dédiées à ce type d'avion. Ce modèle est considéré dans la plupart des travaux des chercheurs européens [15, 16, 48-55].

Le système d'état est considéré comme suit :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (2.57)$$

Où :

Le vecteur d'état : $X = [\eta \quad \dot{\eta} \quad \eta_i \quad \delta_i \quad w_i]^T$

Le vecteur de commande : $U = [\delta \quad \dot{\delta} \quad \ddot{\delta} \quad w \quad \dot{w} \quad \ddot{w}]^T$

La matrice d'état et de commande sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -M_\eta^{-1}K_\eta & -M_\eta^{-1}K_\eta & qM_\eta^{-1}[F_i^\eta]_i & qM_\eta^{-1}[F_i^\delta]_i & qM_\eta^{-1}[F_i^w]_i & 0 \\ \begin{bmatrix} I_\eta \\ \vdots \\ I_\eta \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & V\gamma_i^\eta I_\eta & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & V\gamma_i^\delta I_\delta & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & V\gamma_i^w I_w & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_0^\delta & M_1^\delta & M_2^\delta & M_3^w & M_4^w & M_5^w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} I_\delta \\ \vdots \\ I_\delta \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} I_w \\ \vdots \\ I_w \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

On note par :

$$M_\eta = \mu - q \frac{F_2^\eta}{V^2} ; \beta_\eta = \beta - q \frac{F_1^\eta}{V} ; K_\eta = \gamma - qF_0^\eta$$

$$M_0^\delta = qM_\eta^{-1}F_0^\delta ; M_1^\delta = \frac{q}{V}M_\eta^{-1}F_1^\delta ; M_2^\delta = \frac{q}{V^2}M_\eta^{-1}F_2^\delta$$

$$M_0^w = qM_\eta^{-1}F_0^w ; M_1^w = \frac{q}{V}M_\eta^{-1}F_1^w ; M_2^w = \frac{q}{V^2}M_\eta^{-1}F_2^w$$

2.3.6.2. Modèle Langley

Développé au *Langley research center* (NASA), ce modèle est cité en référence dans la majorité des articles et thèses traitant l'avion flexible [1,16, 22, 25-27,47-50, 25-30, 55-59], le modèle dynamique de l'avion flexible est donné par :

$$\begin{aligned} M \begin{bmatrix} \dot{U} - rV + qW + g \sin\theta \\ \dot{V} - pW + rU - g \sin\phi \cos\theta \\ \dot{W} - qU + pV - g \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} &= Q_x \\ M \begin{bmatrix} \dot{V} - pW + rU - g \sin\phi \cos\theta \\ \dot{W} - qU + pV - g \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} &= Q_y \\ M \begin{bmatrix} \dot{W} - qU + pV - g \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} &= Q_z \\ I_{xx}\dot{p} - (I_{xy}\dot{q} + I_{xz}\dot{r}) + (I_{zz} - I_{yy})qr + (I_{xy}r - I_{xz}q)p + (r^2 - q^2)I_{yz} &= Q_\phi \\ I_{yy}\dot{q} - (I_{xy}\dot{p} + I_{yz}\dot{r}) + (I_{xx} - I_{zz})pr + (I_{yz}p - I_{xy}r)q + (p^2 - r^2)I_{xz} &= Q_\theta \\ I_{zz}\dot{r} - (I_{xz}\dot{p} + I_{yz}\dot{q}) + (I_{yy} - I_{xx})pq + (I_{xz}q - I_{yz}p)r + (q^2 - p^2)I_{xy} &= Q_\psi \\ \ddot{\eta}_j + 2\zeta_j\omega_j\dot{\eta}_j + \omega_j^2\eta_j &= Q_\eta^j / M_j \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.60)$$

Où les équations de forces $Q_{(\)}$ sont données en fonctions des coefficients de stabilité $C_{(\)}$ dérivatives comme suit :

$$\begin{aligned} Q_X &= \frac{1}{2} \rho V_0^2 S \left(C_{X_0} + C_{X_\alpha} \alpha + C_{X_\delta} \delta + \sum_{i=1}^{\infty} C_{X\eta_i} \eta_i \right) + \frac{1}{4} \rho V_0 S \bar{c} \left(C_{X_\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_{X_q} q + \sum_{i=1}^{\infty} C_{X\dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i \right) + T_X \\ Q_Y &= \frac{1}{2} \rho V_0^2 S \left(C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_\delta} \delta + \sum_{i=1}^{\infty} C_{Y\eta_i} \eta_i \right) + \frac{1}{4} \rho V_0 S b \left(\sum_{i=1}^{\infty} C_{Y\dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i \right) + T_Y \\ Q_Z &= \frac{1}{2} \rho V_0^2 S \left(C_{Z_0} + C_{Z_\alpha} \alpha + C_{Z_\delta} \delta + \sum_{i=1}^{\infty} C_{Z\eta_i} \eta_i \right) + \frac{1}{4} \rho V_0 S \bar{c} \left(C_{Z_\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_{Z_p} p + C_{Z_q} q + \sum_{i=1}^{\infty} C_{Z\dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i \right) + T_Z \\ Q_\phi &= \frac{1}{2} \rho V_0^2 S b \left(C_{L_0} + C_{L_\beta} \beta + C_{L_\delta} \delta + \sum_{i=1}^{\infty} C_{L\eta_i} \eta_i \right) + \frac{1}{4} \rho V_0 S b^2 \left(C_{L_p} p + C_{L_r} r + \sum_{i=1}^{\infty} C_{L\dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i \right) + L_T \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned}
Q_\theta &= \frac{1}{2} \rho V_0^2 S \bar{c} \left(C_{M_0} + C_{M_\alpha} \alpha + C_{M_\delta} \delta + \sum_{i=1}^{\infty} C_{M_{\eta_i}} \eta_i \right) + \frac{1}{4} \rho V_0 S \bar{c}^2 \left(C_{M_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha} + C_{M_q} q + \sum_{i=1}^{\infty} C_{M_{\dot{\eta}_i}} \dot{\eta}_i \right) + M_T \\
Q_\psi &= \frac{1}{2} \rho V_0^2 S b \left(C_{N_0} + C_{N_\beta} \beta + C_{N_\delta} \delta + \sum_{i=1}^{\infty} C_{N_{\eta_i}} \eta_i \right) + \frac{1}{4} \rho V_0 S b^2 \left(C_{N_p} p + C_{N_r} r + \sum_{i=1}^{\infty} C_{N_{\dot{\eta}_i}} \dot{\eta}_i \right) + N_T \\
Q_{\eta_j} &= \frac{1}{2} \rho V_0^2 S \bar{c} \left(C_0^{\eta_j} + C_\alpha^{\eta_j} \alpha + C_\beta^{\eta_j} \beta + C_\delta^{\eta_j} \delta + \sum_{i=1}^{\infty} C_{\eta_i}^{\eta_j} \eta_i \right) + \frac{1}{4} \rho V_0 S \bar{c}^2 \left(C_{\dot{\alpha}}^{\eta_j} \dot{\alpha} + C_p^{\eta_j} p + C_q^{\eta_j} q + C_r^{\eta_j} r + \sum_{i=1}^{\infty} C_{\dot{\eta}_i}^{\eta_j} \dot{\eta}_i \right)
\end{aligned}$$

Ce modèle peut être linéarisé autour d'un point d'équilibre et découplé en modèle longitudinal et latéral en utilisant les mêmes hypothèses utilisées pour le modèle rigide.

2.3.7. Le modèle longitudinal linéaire:

L'approximation de mouvement longitudinal de courte période est exprimée sous une forme alternative en utilisant au lieu de la vitesse verticale w , l'angle d'attaque α . La relation entre ces deux variables α et w est exprimée par:

$$\alpha = \frac{w}{U_0} \quad (2.62)$$

On a supposé que la dynamique du mouvement longitudinal de l'avion flexible considéré est associée à cinq modes de flexion [27]. Le vecteur d'état x est défini comme suit :

$$x^T = [\alpha \quad q \quad \eta_1 \quad \dot{\eta}_1 \quad \eta_5 \quad \dot{\eta}_5 \quad \eta_7 \quad \dot{\eta}_7 \quad \eta_8 \quad \dot{\eta}_8 \quad \eta_{12} \quad \dot{\eta}_{12}] \quad (2.63)$$

où α est l'angle d'attaque et q est la vitesse de tangage.

Le vecteur de commande u est défini tel que:

$$u(t) = [\delta_e \quad \delta_{hc}]^T \quad (2.64)$$

où δ_e est la déflexion de la surface de commande de profondeur et δ_{hc} est la déflexion de canard horizontal.

$$\dot{\alpha} = Z_\alpha \alpha + q + Z_{\eta_1} \eta_1 + Z_{\dot{\eta}_1} \dot{\eta}_1 + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_{hc}} \delta_{hc}$$

$$\dot{q} = M_\alpha \alpha + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_q q + M_{\eta_1} \eta_1 + M_{\dot{\eta}_1} \dot{\eta}_1 + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_{hc}} \delta_{hc}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\eta}_1 &= \eta_{1\alpha} \alpha + \eta_{1q} q + (-2\zeta_1 \omega_1 + \eta_{1\dot{\eta}_1}) \dot{\eta}_1 + (-\omega_1^2 + \eta_{1\eta_1}) \eta_1 + \eta_{1\delta_e} \delta_e + \eta_{1\delta_{hc}} \delta_{hc} \\
\ddot{\eta}_5 &= \eta_{5\alpha} \alpha + \eta_{5q} q + (-2\zeta_5 \omega_5 + \eta_{5\dot{\eta}_5}) \dot{\eta}_5 + (-\omega_5^2 + \eta_{5\eta_5}) \eta_5 + \eta_{5\delta_e} \delta_e + \eta_{5\delta_{hc}} \delta_{hc} \\
\ddot{\eta}_7 &= \eta_{7\alpha} \alpha + \eta_{7q} q + (-2\zeta_7 \omega_7 + \eta_{7\dot{\eta}_7}) \dot{\eta}_7 + (-\omega_7^2 + \eta_{7\eta_7}) \eta_7 + \eta_{7\dot{\eta}_8} \dot{\eta}_8 + \eta_{7\eta_8} \eta_8 + \eta_{7\delta_e} \delta_e + \eta_{7\delta_{hc}} \delta_{hc} \\
\ddot{\eta}_8 &= \eta_{8\alpha} \alpha + \eta_{8q} q + (-2\zeta_8 \omega_8 + \eta_{8\dot{\eta}_8}) \dot{\eta}_8 + (-\omega_8^2 + \eta_{8\eta_8}) \eta_8 + \eta_{8\dot{\eta}_7} \dot{\eta}_7 + \eta_{8\eta_7} \eta_7 + \eta_{8\delta_e} \delta_e + \eta_{8\delta_{hc}} \delta_{hc} \\
\ddot{\eta}_{12} &= \eta_{12\alpha} \alpha + \eta_{12q} q - 2\zeta_{12} \omega_{12} \dot{\eta}_{12} - \omega_{12}^2 \eta_{12} + \eta_{12\delta_e} \delta_e + \eta_{12\delta_{hc}} \delta_{hc}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Il est possible de représenter la dynamique de l'avion flexible sous forme d'équation d'état:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{2.66}$$

Avec la matrice d'état $A \in R^{12 \times 12}$ et la matrice de commande $B \in R^{12 \times 2}$ sont données en Appendice B.

Pour s'assurer de la mesure correcte des variables de mouvement de l'avion, il serait nécessaire de placer les capteurs de mouvement au centre de la gravité de l'avion. Cependant, dans la pratique, il est impossible de localiser avec précision tous les Capteurs au c.g. Une certaine correction est nécessaire. Un autre réglage est exigé quand le mouvement de flexion est présent. Pour illustrer ceci, il faut mesurer l'accélération dans un avion rigide avec un accéléromètre situé à une certaine distance x , du c.g. (x , est positif quand l'accéléromètre est situé en avant de c.g de l'avion). L'accélération normale mesurée par les capteurs est alors:

$$a_{zA} = a_{zcg} - x_a \dot{q} \tag{2.67}$$

L'accélération normale a_{zcg} , mesurée dans le c.g de l'avion est donnée par:

$$a_{zcg} = U_0 (\dot{\alpha} - q) \tag{2.68}$$

Quand les effets de la flexibilité sont inclus dans la dynamique de l'avion, les accélérations dues au mouvement structural sont ajoutées, de telle sorte que l'accélération normale devient :

$$a_{zA} = U_0(\dot{\alpha} - q) - x_a \dot{q} + \phi_{A,1} \ddot{\eta}_1 + \phi_{A,5} \ddot{\eta}_5 + \phi_{A,7} \ddot{\eta}_7 + \phi_{A,8} \ddot{\eta}_8 + \phi_{A,12} \ddot{\eta}_{12} \quad (2.69)$$

Où $\phi_{A,i}$ sont les coefficients de déplacement des modes structuraux.

Si l'accélération normale mesurée est prise comme la sortie, l'équation de sortie devient :

$$y = a_{zA} = Cx + Du \quad (2.70)$$

Où $C \in R^{1 \times 12}$, est donnée comme suit :

$$C = [C_{11} \ C_{12} \ C_{13} \ C_{14} \ C_{15} \ C_{16} \ C_{17} \ C_{18} \ C_{19} \ C_{110} \ C_{111} \ C_{112}] \quad (2.71)$$

Et la matrice $D \in R^{1 \times 2}$ est donnée par :

$$D = [D_{11} \ D_{12}] \quad (2.72)$$

Les coefficients des deux matrices C et D peuvent être déterminés en remplaçant les équations (2.65) dans l'équation (2.69) et après développement on aura :

$$C_{11} = U_0 Z_\alpha - x_a (M_\alpha + M_{\dot{\alpha}} Z_\alpha) + \phi_{A,1} \eta_{1\alpha} + \phi_{A,5} \eta_{5\alpha} + \phi_{A,7} \eta_{7\alpha} + \phi_{A,8} \eta_{8\alpha} + \phi_{A,12} \eta_{12\alpha} \quad (2.73)$$

$$C_{12} = -x_a (M_q + M_{\dot{\alpha}}) + \phi_{A,1} \eta_{1q} + \phi_{A,5} \eta_{5q} + \phi_{A,7} \eta_{7q} + \phi_{A,8} \eta_{8q} + \phi_{A,12} \eta_{12q} \quad (2.74)$$

$$C_{13} = \phi_{A,1} (\eta_{1\dot{\eta}_1} - 2\zeta_1 \omega_1) \quad (2.75)$$

$$C_{14} = \phi_{A,1} (\eta_{1\eta_1} - \omega_1^2) \quad (2.76)$$

$$C_{15} = \phi_{A,5} (\eta_{5\dot{\eta}_5} - 2\zeta_5 \omega_5) \quad (2.77)$$

$$C_{16} = \phi_{A,5} (\eta_{5\eta_5} - \omega_5^2) \quad (2.78)$$

$$C_{17} = \phi_{A,7} (\eta_{7\dot{\eta}_7} - 2\zeta_7 \omega_7) + \phi_{A,8} \eta_{8\dot{\eta}_7} \quad (2.79)$$

$$C_{18} = \phi_{A,7}(\eta_{7\eta_7} - \omega_7^2) + \phi_{A,8}\eta_{8\eta_7} \quad (2.80)$$

$$C_{19} = \phi_{A,8}(\eta_{8\dot{\eta}_8} - 2\zeta_8\omega_8) + \phi_{A,7}\eta_{7\dot{\eta}_8} \quad (2.81)$$

$$C_{110} = \phi_{A,8}(\eta_{8\eta_8} - \omega_8^2) + \phi_{A,7}\eta_{7\eta_8} \quad (2.82)$$

$$C_{111} = -\phi_{A,12}2\zeta_{12}\omega_{12} \quad (2.83)$$

$$C_{112} = -\phi_{A,12}\omega_{12}^2 \quad (2.84)$$

$$D_{11} = (U_0 - x_a M_{\dot{\alpha}})Z_{\delta_e} - x_a M_{\delta_e} + \phi_{A,1}\eta_{1\delta_e} + \phi_{A,5}\eta_{5\delta_e} + \phi_{A,7}\eta_{7\delta_e} + \phi_{A,8}\eta_{8\delta_e} + \phi_{A,12}\eta_{12\delta_e} \quad (2.85)$$

$$D_{12} = (U_0 - x_a M_{\dot{\alpha}})Z_{\delta_{ch}} - x_a M_{\delta_{ch}} + \phi_{A,1}\eta_{1\delta_{ch}} + \phi_{A,5}\eta_{5\delta_{ch}} + \phi_{A,7}\eta_{7\delta_{ch}} + \phi_{A,8}\eta_{8\delta_{ch}} + \phi_{A,12}\eta_{12\delta_{ch}} \quad (2.86)$$

Le modèle adopté dans cette thèse est le modèle de Langley avec l'approximation longitudinale courte période de l'avion bombardier Boeing B-52.

2.4. Modélisation de système aéroélastique :

On applique le formalisme de Lagrange sur une section d'aile bidimensionnelle afin d'obtenir les équations de mouvement qui régissent le comportement de système aéroélastique. Au départ, le modèle obtenu est un modèle nominal, puis on introduit des incertitudes paramétriques sur ce dernier pour avoir un modèle incertain.

2.4.1. Hypothèses du modèle :

Afin de faciliter l'étude de notre système on effectue des hypothèses afin d'éliminer les effets physiques de faible importance. Les hypothèses considérées dans notre cas sont :

- l'effet de la gravité est négligé
- l'angle de tangage α est supposé faible.
- La force de portance L et le moment M sont calculés en régime quasi-stationnaire.

2.4.2. Modèle dynamique :

La dynamique de l'aile possède deux surfaces de commande de bord d'attaque et de bord de fuite avec deux degrés de liberté, un mouvement de tangage α autour d'un axe élastique qui est défini comme étant l'axe perpendiculaire à l'axe de cisaillement (torsion) et un mouvement vertical h (flexion) comme le montre la figure 2.8 suivante.

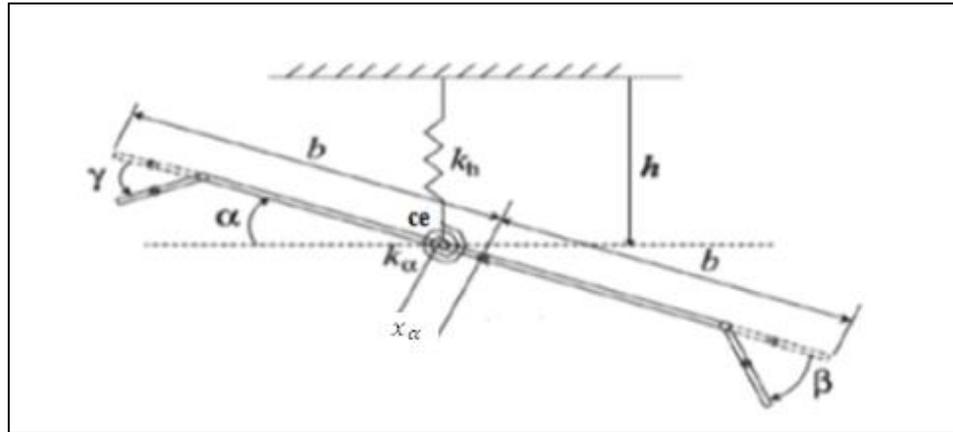


Figure 2.8 : Le modèle aéroélastique d'une section d'aile

Le modèle mathématique pour cette section d'aile est donné par : [2, 34, 56]

$$m_T \ddot{h} + m_w x_\alpha b \ddot{\alpha} + c_h \dot{h} + k_h h = -L \quad (2.87)$$

$$m_w b x_\alpha \dot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + c_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha(\alpha) \alpha = M \quad (2.88)$$

Où

m_T : La masse totale de l'aile et de sa structure de support

m_w : La masse de l'aile seulement.

b : Demi de la corde aérodynamique moyenne de profile d'aile.

x_α : Le paramètre de déséquilibre statique (distance entre le centre de gravité et le centre élastique)

c_h : Le coefficient d'amortissement structurel pour le mouvement vertical.

c_α : Le coefficient d'amortissement structurel pour le tangage.

k_h : Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement vertical

k_α : Le coefficient de rigidité structurel pour le mouvement de tangage

I_{ea} : Moment d'inertie autour de l'axe élastique.

La force de portance aérodynamique $L(t)$ et le moment $M(t)$ sont donnés comme suit [2, 56] :

$$L(t) = \rho V^2 b s c_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + \rho V^2 b s c_{l_\beta} \beta + \rho V^2 b s c_{l_\gamma} \gamma \quad (2.89)$$

$$M(t) = \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + \rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} \beta + \rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} \gamma \quad (2.90)$$

Avec :

c_{l_α} : La dérivé de coefficient de portance par rapport à α .

c_{l_β} : La dérivé de coefficient de portance par rapport à β .

c_{l_γ} : La dérivé de coefficient de portance par rapport à γ .

c_{m_α} : La dérivé de coefficient de moment par rapport à α

c_{m_β} : La dérivé de coefficient de moment par rapport à β

c_{m_γ} : La dérivé de coefficient de moment par rapport à γ

β et γ : Sont les angles de déflexion de surface de commande de bord de fuite et d'attaque respectivement.

s : L'envergure de l'aile.

ρ : La densité de l'air.

V : La vitesse de l'écoulement

a : La distance adimensionnelle entre le centre de gravité et le centre élastique.

2.4.3. La représentation d'état de modèle :

Pour obtenir la représentation d'état pour notre système, On substitue l'équation (2.89) dans (2.87) on obtient :

$$m_T \ddot{h} + m_w x_\alpha b \ddot{\alpha} + c_h \dot{h} + k_h h = -\rho V^2 b s c_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] - \rho V^2 s c_{l_\beta} - \rho V^2 b s c_{l_\gamma} \gamma \quad (2.91)$$

Et on substitue M par sa valeur dans (2.88) on aura :

$$m_w b x_\alpha \ddot{h} + I_{ea} \ddot{\alpha} + k_\alpha(\alpha) \alpha + c_\alpha(\dot{\alpha}) \dot{\alpha} = \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + \rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} \beta + \rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} \gamma \quad (2.92)$$

Les deux équations précédentes (2.91) et (2.92) peuvent être écrites comme suit :

$$\ddot{h} = a_{31}h + a_{32}\alpha + a_{33}\dot{h} + a_{34}\dot{\alpha} + b_{31}\beta + b_{32}\gamma \quad (2.93)$$

$$\ddot{\alpha} = a_{41}h + a_{42}\alpha + a_{43}\dot{h} + a_{44}\dot{\alpha} + b_{41}\beta + b_{42}\gamma \quad (2.94)$$

Où les coefficients a_{ij} et b_{ij} sont donnés en Appendice B.

Finalement, les matrices du modèle d'état s'écrivent :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [h \ \alpha \ \dot{h} \ \dot{\alpha}]^T \quad u = [\beta \ \gamma]^T$$

2.4.4. Modélisation des incertitudes paramétriques :

Dans cette section nous considérons que le système est soumis à des perturbations paramétriques linéaires. Les paramètres incertains sont : le coefficient d'amortissement C_h , le coefficient de rigidité K_α et la pression dynamique q . Ces derniers sont définis comme suit :

$$q = q_{nom} + \delta_q \quad (2.95)$$

Où : q_{nom} et δ_q représentent la pression dynamique nominale et l'incertitude respectivement.

$$C_h = C_{h-nom} + W_3\delta_3 \quad (2.96)$$

Où : δ_3 est la perturbation liée au coefficient d'amortissement tel que $\delta_3 \in R$ et $|\delta_3| \leq 1$.

La pondération sur la perturbation associée au coefficient d'amortissement nominal C_{h-nom} pour le mouvement vertical est $W_3 = e_3 C_{h-nom}$ avec e_3 est l'erreur de pondération.

Le coefficient de rigidité pour le mouvement de tangage peut être exprimé comme :

$$K_\alpha = K_{\alpha-nom} + W_4 \delta_4 \quad (2.97)$$

Avec :

δ_4 est la perturbation associée au coefficient de rigidité nominale $K_{\alpha-nom}$ pour le mouvement de tangage tel que $\delta_4 \in R$ et $|\delta_4| \leq 1$ et $W_4 = e_4 K_{\alpha-nom}$ représente la pondération sur la perturbation associée au coefficient de rigidité nominal d'une erreur e_4 .

En substituant l'équation (2.95) dans (2.89), on trouve la force aérodynamique comme suit :

$$L(t) = q_{nom} 2b s c_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + q_{nom} 2b s c_{l_\beta} \beta + q_{nom} 2b s c_{l_\gamma} \gamma + w_1 \quad (2.98)$$

$$\text{Avec : } w_1 = \delta_q z_1 = \delta_1 z_1$$

Et

$$z_1 = 2b s c_{l_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2b s c_{l_\beta} \beta + 2b s c_{l_\gamma} \gamma \quad (2.99)$$

De la même manière, le moment aérodynamique devient :

$$M(t) = q_{nom} 2b^2 s C_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + q_{nom} 2b^2 s C_{m_\beta} \beta + q_{nom} 2b^2 s C_{m_\gamma} \gamma + w_2 \quad (2.100)$$

$$\text{Avec } w_2 = \delta_q z_2 = \delta_2 z_2 \text{ et}$$

$$z_2 = 2b^2 s C_{m_\alpha} \left[\alpha + \left(\frac{\dot{h}}{V} \right) + \left(\frac{1}{2} - a \right) b \left(\frac{\dot{\alpha}}{V} \right) \right] + 2b^2 s C_{m_\beta} \beta + 2b^2 s C_{m_\gamma} \gamma \quad (2.101)$$

Par combinaison des équations (2.96-101) avec les équations (2.91) et (2.92), on obtient le modèle dynamique incertain comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{h} &= a_{31} h + a_{32} \alpha + a_{33} \dot{h} + a_{34} \dot{\alpha} + b_{31} w_1 + b_{32} w_2 + b_{33} w_3 + b_{34} w_4 + b_{35} \beta + b_{36} \gamma \\ \dot{\alpha} &= a_{41} h + a_{42} \alpha + a_{43} \dot{h} + a_{44} \dot{\alpha} + b_{41} w_1 + b_{42} w_2 + b_{43} w_3 + b_{44} w_4 + b_{45} \beta + b_{46} \gamma \\ z_1 &= c_{12} \alpha + c_{13} \dot{h} + c_{14} \dot{\alpha} + d_{15} \beta + d_{16} \gamma \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$z_2 = c_{22} \alpha + c_{23} \dot{h} + c_{24} \dot{\alpha} + d_{25} \beta + d_{26} \gamma$$

$$z_3 = W_3 \dot{h} = c_{33} \dot{h}$$

$$z_4 = W_4 \dot{h} = c_{42} \dot{h}$$

Où les coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} et d_{ij} sont donnés en appendice B.

Finalement, le modèle d'équation (2.102) peut être écrit sous la forme LFT comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & M & B \\ N & 0_{4 \times 4} & D \\ C & 0_{2 \times 4} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

$$\text{Avec : } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{35} & b_{36} \\ b_{45} & b_{46} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & W_3 & 0 \\ 0 & W_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} d_{15} & d_{16} \\ d_{16} & d_{26} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce chapitre, le modèle dynamique de l'avion rigide et souple a été présenté en détail. D'après la recherche bibliographique, le modèle souple se présente sous la forme de deux modèles linéaires représentant le même système dans deux configurations (modèle de l'ONERA et de Langley). Sur la base du deuxième modèle, on a choisi uniquement le modèle longitudinal pour être utilisé dans cette thèse. En effet, il permet la modélisation de perturbation extérieure comme le bruit de rafale de vent. De plus, le modèle numérique utilisé présente ce type d'entrée afin de tester mieux la robustesse des commandes à ce type de perturbation.

Un deuxième modèle dynamique aéroélastique d'une section d'aile d'un avion flexible a été aussi présenté et analysé en détail. Ce modèle possède la caractéristique d'être un peu simple mais il est non linéaire. De plus, on a l'avantage de proposer la modélisation des incertitudes paramétriques dans le modèle afin de tester la robustesse des commandes vis-à-vis ce type de perturbation.

Maintenant que nous avons d'écrit le système de l'avion flexible et le modèle aéroélastique, le chapitre suivant nous présente une synthèse de lois de commandes jugées mieux adaptées au problème spécifique des systèmes flexibles.

CHAPITRE 3

METHODE DE SYNTHESE DE LOIS DE COMMANDES ROBUSTES

3.1. Introduction

Nous nous intéressons ici à la synthèse de lois de commande jugées mieux adaptées au problème spécifique de l'avion flexible mentionné dans le chapitre 1. Après un rappel de l'histoire du développement des commandes de vol automatiques et des méthodes de synthèse utilisées jusqu'à nos jours pour leur conception, nous présentons la méthodologie adoptée dans cette thèse pour concevoir les lois de commande de l'avion souple.

3.2. Historique :

Pendant plusieurs années les avionneurs ont eu un intérêt particulier sur la sécurité et la stabilité des avions en vol, c'est l'un des sujets de recherche importants en aéronautique pour assurer un vol stable et pour éviter toute action néfaste pour la structure de l'appareil et le confort des utilisateurs, les systèmes du contrôle doivent fournir la stabilité et les performances adéquate pour le vol.

Dans les années 40, Bode, Nyquist et Nichols ont proposés des méthodes fréquentielles capables de quantifier la performance et la robustesse d'un système linéaire SISO à travers les notions de marge de gain et marge de phase. L'analyse de la stabilité et des performances d'avions équipés de système de commande s'est alors développée. Et nombre d'avions actuellement en service, volent avec des lois de pilotage synthétisées principalement à l'aide de ces techniques monovariabiles classiques.

Dans les années 60, et par l'utilisation de représentation d'état et des techniques d'optimisation, des propriétés de robustesse intéressantes ont été montrées sur le régulateur LQR et LQG. Dans la fin des années 80, Doyle et al. ont proposés l'utilisation de la norme H_∞ , pour la synthèse d'une loi de commande H_∞ , cette dernière est un outil très intéressant pour analyser la

robustesse en stabilité des systèmes vis-à-vis des variations paramétriques et le rejet des perturbations. De manière générale, le problème H_∞ est un problème de stabilisation du système et de rejet des perturbations. Ces techniques ont été utilisées pour la synthèse de lois de commande sur les avions rigides. Les premières applications aéronautiques significatives remontent à 1978 chez l'avionneur Boeing : la loi de pilotage automatique latéral du Boeing 767 a ainsi été intégralement utilisée avec succès par une approche LQ afin d'éliminer un phénomène d'oscillation latérale constaté en vol. De même, ces méthodes sont largement utilisées pour le problème de contrôle actif du flottement ou pour la commande des structures flexibles [27, 48, 60], car elles permettent d'assurer un amortissement global et simultané de nombreux modes flexibles.

Basée sur la minimisation d'un critère quadratique, la commande LQR classique engendre des lois de commande stabilisante qui sont réglées par l'intermédiaire des fonctions de pondération dont la manipulation exerce une action sur les réponses du système (états ou sorties) et les commandes. La résolution de cette commande est immédiate et donne des résultats satisfaisants, assurant de bonnes marges de robustesse quand l'état est entièrement disponible (commande par retour d'état) [25, 46]. Par contre, lorsque tous les états n'est pas mesurable, on peut utiliser une approche qui consiste à transformer le retour de sortie à l'aide d'un filtre de Kalman qui reconstitue l'état du système (approche LQG). Cette dernière garantit la stabilité mais ne conserve généralement pas les bonnes propriétés de robustesse [28]. La synthèse d'un régulateur LQG consiste comporte deux étapes duales et indépendantes, à savoir la synthèse du retour d'état (LQR) et d'un filtre de Kalman. Une robustification a posteriori est donc nécessaire : une solution est d'utiliser les techniques de type PRLQR (PRLQG) mais elles requièrent une modélisation des variations paramétriques du modèle d'état, non disponible pour le modèle de l'avion. Par contre, on a développé un modèle aéroélastique incertain dans le chapitre 2 afin d'appliquer et pour la première fois à notre connaissance la commande PRLRQ qui va être une contribution dans cette thèse.

Les techniques de synthèse H_∞ et μ , actuellement en plein essor, sont utilisées dans la commande de vol et des structures flexibles [3, 52]. Initiée par

Zames au début des années 1980 fut développée ensuite par Doyle, Glover, Khargonekar et Francis, la commande H_∞ est une nouvelle approche de l'Automatique Fréquentielle. Elle permet de résoudre un problème de stabilité interne du système commandé tout en minimisant l'impact de perturbations externes ou certaines incertitudes, souvent introduites sous formes d'erreurs. Devenue une des méthodes puissante de la commande robuste, elle est utilisée pour la mise au point rapide de lois de commande robustes basée sur la résolution de deux équations découplées de Riccati. Dans cette approche, l'un des points intéressants est qu'elle permet de prendre en compte, à priori et explicitement, via des filtres de pondérations, tout un ensemble de spécifications fréquentielles et temporelles du cahier des charges, qui est ainsi traduit directement sous forme d'un critère mathématique à vérifier. Celui-ci est formulé en utilisant la norme H_∞ , d'où le nom qu'on donne à cette méthode de synthèse.

La commande H_∞ peut être considérée en première approche comme une méthode de stabilisation robuste face à une perturbation non structurée de modèle. Toutefois, en présence d'incertitudes structurées (erreur paramétriques par exemple), la modélisation adoptée par l'approche H_∞ devient inadéquat [48].

Afin d'obtenir une condition nécessaire et suffisante de stabilité, on recourt alors à la notion de la valeur singulière structurée (V.S.S) ou μ , introduite par Doyle et Safonov dans le cadre des systèmes linéaires. En pratique, on calcule une borne supérieure ou inférieure de la v.s.s μ .

Les techniques H_∞/μ ont par conséquent été utilisées pour la commande des structures flexibles. En effet, elles permettent de prendre en compte les différents types d'incertitudes présentes dans les modèles flexibles [28, 49, 50], soit sous forme d'incertitudes paramétriques [56, 61].

L'une des principales raison qui peut freiner l'utilisation de ces techniques pour la synthèse des lois de commande est que, d'une manière générale, la non linéarité des modèles élaborée par les lois de la physiques. Dans ce cas, on a choisi la commande non linéaire par mode glissant dont nous détaillons son principe à la fin de ce chapitre.

La commande par mode glissant ou la commande à structure variable par mode glissant a essentiellement pour vocation de permettre l'obtention, en boucle fermée, d'une dynamique largement indépendante de celle du processus et surtout de ses variations éventuelles. En ce sens, elle peut être considérée comme appartenant à la classe des commandes robustes. Les premiers travaux sur ce type de commande ont été menés dans l'ancienne U.R.S.S à partir des années cinquante (Popovsky, 1950 ; Neimark et Emelyanov, 1957 ; Filippov, 1960 ; Utkin, 1966 ; Mira *et al.*, 1972 ; Utkin, 1978) [62]. Le véritable essor de l'utilisation de cette technique date de la parution des livres d'Itkis, 1976 et d'Utkin, 1978. Par la suite, ces travaux ont été repris ailleurs, soit pour compléter l'étude théorique, soit pour étudier quelques applications (Slotine et Coestsee, 1986 ; Hashimoto *et al.*, 1987 ; Sira-Ramirez, 1988 ; Hsu *et al.*, 1990 ; Fliess et Messenger, 1992 ; Nouri *et al.*, 1993 ; Lopez *et al.*, 1994 ; Lopez, 1997 ; Edwards et Spurgeon, 1998 ; Fridman 1999 ; Tondu et Lopez, 2000 ; Perruquetti et Barbot, 2002 ; Shtessel 2002, 2007, 2009, 2012 ; Song 2013).

Sur le plan théorique, la technique des modes glissants consiste à amener le système vers la surface de glissement et de le faire commuter à l'aide d'une commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d'équilibre, d'où le phénomène de glissement, et d'y rester par la suite sur cette surface malgré d'éventuelle perturbations.

Sur le plan pratique, l'utilisation d'une commutation dans la commande peut évidemment poser à priori des problèmes correspondant au phénomène de « *chattering* » qui a freiné le recours aux régimes glissants pendant plusieurs années, puisque, idéalement, la commande bat à haute fréquence.

Cet inconvénient n'est plus fondé aujourd'hui car :

- le « *chattering* » au niveau de la commande de l'actionneur est considérablement réduit par le concept de la commande équivalente en mode glissant.
- le « *chattering* » au niveau de la sortie ne se voit pas, vu le caractère filtre passe-bas des systèmes réels bouclés.

De plus, la composante discontinue peut être linéarisée dans un voisinage de la surface de commutation, permettant ainsi d'éviter le phénomène de « *chattering* ». Les applications de ces méthodes de commande à un modèle aéroélastique ou avion souple sont confidentielles ou n'existent pas d'après notre recherche bibliographique, comme le cas par exemple de la commande par mode glissant sur un avion flexible. C'est pourquoi on estime pertinent de mettre en œuvre ces techniques, voire de les adapter et de les appliquer à un modèle de l'avion flexible afin d'obtenir nos propres résultats et de déterminer qu'elles sont les capacités de performance de ce type de contrôleur.

3.3. Commande Linéaire Quadratique Optimale

On suppose que la dynamique de l'avion soit modélisée sous la forme différentielle suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + B u(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $x^T = [\alpha \ q \ \eta_1 \ \dot{\eta}_1 \ \eta_5 \ \dot{\eta}_5 \ \eta_7 \ \dot{\eta}_7 \ \eta_8 \ \dot{\eta}_8 \ \eta_{12} \ \dot{\eta}_{12}] \in R^{12}$ est le vecteur d'état du système, $y = a_{zA} \in R^1$ est l'accélération normale mesurée est prise comme la sortie, $A \in R^{12 \times 12}$ est la matrice d'état de système, $B \in R^{12 \times 2}$ la matrice de commande, $C \in R^{1 \times 12}$ Matrice d'observation, $D \in R^{1 \times 2}$ la matrice d'action directe. $u = [\delta_e \ \delta_{hc}]^T \in R^2$ le vecteur de commande.

Pour minimiser l'effet de l'accélération dans l'avion dû à la turbulence, le critère suivant doit être minimisé :

$$J = \int_0^{\infty} [y^T Q y + u^T R u] dt \quad (3.2)$$

Où (Q, R) Sont des matrices de pondération symétrique positive semi-définie et positive défini respectivement.

On peut transformer l'équation 3.1 sous la forme :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T (Q_1 - N R_1 N^T) x + u_1^T R_1 u_1] dt \quad (3.3)$$

Où : $Q_1 = C^T Q C$, $R_1 = D^T Q D$, $N = C^T Q D$, $u_1 = u + R_1^{-1} N x$

La commande optimale minimisant le critère de l'équation 3.3 est donnée par :

$$u_1 = -R_1^{-1}B^T Px \quad (3.4)$$

Par conséquent, la commande finale minimisant le critère de l'équation 3.2 est donnée par :

$$u = -R_1^{-1}(B^T P + N^T)x \quad (3.5)$$

où P est une matrice positive définie solution de l'équation algébrique de Riccati suivante :

$$PA + A^T P - (PB + N)R^{-1}(B^T P + N^T) + Q = 0 \quad (3.6)$$

3.4. La commande LQR avec observateur :

Dans tout ce qui précède, nous sommes partis du principe que le système est parfaitement bien connu et toutes les composantes du vecteur d'état sont mesurables. Nous avons donc supposé que le système soit certain et complètement instrumenté (tous les états sont mesurables), mais en réalité, les systèmes physiques sont incertains et très peu instrumentés. La solution pour faire face à ces contraintes est d'utiliser des commandes robustes ou bien désigné un observateur qui permet d'estimer les états à partir des informations d'entrée et de sortie. Deux types d'observateurs sont utilisés à cet effet : le premier est destiné pour un système déterministe ou LTI standard appelé l'observateur de Luenberger, alors que le deuxième est l'observateur de Kalman destiné pour un système stochastique. Puisque les conditions de vol sont de nature stochastique (turbulence atmosphérique), on s'intéresse uniquement à la deuxième commande.

3.4.1. Commande LQG et filtre de Kalman:

Le filtre de Kalman est basé sur un traitement du processus probabiliste et sur la mesure des bruits. Il est un observateur utilisé pour la navigation et d'autres applications qui exigent la reconstruction de l'état à partir de mesures bruitées.

On suppose que la dynamique de l'avion est modélisée par:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gw \\ y = Cx + Du + v \end{cases} \quad (3.7)$$

Où w et v sont les vecteurs qui représentent les sources de perturbation atmosphérique (turbulence ou rafale de vent) et les effets du bruit de mesures (bruit du capteur) respectivement.

On sait que n'importe quel signal gaussien peut être caractérisé par sa valeur moyenne σ et sa covariance ρ . On considère dans un premier temps que les bruit sont blancs centrés de variance $E\{ww^T\}=Q>0$ et $E\{vv^T\}=R\geq 0$.

A partir du vecteur y de mesures bruitées (retour de sortie), nous recherchons une loi de commande qui minimise le critère de l'équation 3.2.

Basé toujours sur le principe de séparation, l'observateur de Kalman permettant de donner l'estimée \hat{x} de x par la relation suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - \hat{y}) \quad (3.8)$$

Où \hat{y} le vecteur de sortie estimée et K_f le gain de l'estimateur calculer pour réduire au minimum la covariance d'erreur d'estimation définie par $\tilde{x} = x - \hat{x}$. Il est donnée par :

$$K_f = P_f C^T R^{-1} \quad (3.9)$$

Avec P_f la solution de l'équation algébrique de Riccati de covariance d'erreur suivante :

$$P_f A^T + A P_f - P_f C^T R^{-1} C P_f + G Q G^T = 0 \quad (3.10)$$

Ainsi, le régulateur quadratique et le filtre de Kalman peuvent être utilisés ensemble pour construire le régulateur LQG.

Dans le cas où le signal w n'est un bruit blanc mais une rafale de vent, il peut être générée à partir d'un filtre linéaire de Dryden (ou de Von karman) excité par un bruit blanc (voir appendice B).

3.4.2. Choix des matrices de pondération :

La commande LQR repose directement sur les matrices de pondération Q et R . d'après la littérature, il n'y a pas une règle générale qui permet de choisir ces dernières d'une manière exacte. Au départ, on choisit généralement des matrices pondérations symétriques et diagonales égales aux matrices identités que l'on

peut ensuite améliorer par simulation successives jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant.

3.5. La commande PRLQR :

Pour appliquer cette méthode, tous les états du système doivent être observables, et le système aéroélastique incertain développé dans chapitre 2 doit être de la forme LFT suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & M & B \\ N & 0 & D \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Le principe de la commande PRLQR permet d'obtenir un gain de retour d'état, robuste aux incertitudes paramétriques bornées. Ce retour d'état est défini par [3, 51, 63]:

$$u(t) = -K_{PRLQR}x(t) \quad (3.12)$$

Avec :

$$K_{PRLQR} = \frac{1}{\rho} B^T P \quad (3.13)$$

Où P est une matrice définie positive et solution de l'équation de Riccati suivante :

$$PA + A^T P + (Q_{X0} + \hat{\gamma} N^T N) - P \left(\frac{1}{\rho} B B^T - \frac{1}{\hat{\gamma}} M M^T \right) P = 0 \quad (3.14)$$

Où Q_{X0} et ρ ont respectivement les pondérations sur l'état et la commande, choisies pour le système nominal, et $\hat{\gamma}$ une constante positive choisie a priori et suffisamment élevée pour que P existe.

L'expression de la fonction coût qu'on cherche à minimiser est définie par [3]:

$$J = \int_0^{\infty} \left(x^T Q_{X0} x + x^T \hat{\gamma} N^T N x + x^T \frac{1}{\hat{\gamma}} P M M^T P x + \rho u^T u \right) dt \quad (3.15)$$

L'expliciter revient à la décomposer en quatre termes pénalisants :

- Le premier d'entre eux $x^T Q_{X0} x$, est la pénalisation sur la performance choisie pour le système nominal.
- Le second terme, $x^T \hat{\gamma} N^T N x$, traduit l'énergie incertaine, c'est-à-dire l'énergie du système vue par les directions incertaines (les plus sensibles) de l'espace d'état.

- Le terme $x^T \frac{1}{\gamma} P M M^T P x$ est en fait un terme, permettant de prendre en compte une perturbation pire cas dans la direction M définie par les paramètres incertains.
- Enfin, $\rho u^T u$ est le terme de pondération sur la commande. Il permet de limiter l'amplitude de la commande et selon la valeur de ρ , la bande passante du système diffère.

Nous avons donc augmenté la garantie de robustesse en stabilité par rapport aux incertitudes modélisées et les garanties de robustesse en performance on ajoutant des termes au critère LQR. Les effets de ces termes sont de minimiser l'influence de l'énergie incertaine stockée par le système et de réaliser une barrière aux perturbations pire-cas agissant dans la direction des paramètres incertains M . Leur importance relative est pondérée par γ .

Le rôle de la constante γ est de réaliser un compromis entre la minimisation de l'énergie incertaine ($\gamma N^T N$) et la désensibilisation aux perturbations pire-cas orientées dans la direction des paramètres incertains ($\frac{1}{\gamma} P M M^T P$). Si γ est très grand, l'énergie incertaine du système est fortement pondérée. Cette pondération suffit à rendre le système robuste aux incertitudes paramétriques, mais les performances sont dégradées dès que $\gamma N^T N \gg Q_{x0}$.

En revanche, quand γ tend vers 0, plus aucune perturbation n'est permise dans la direction M . Autrement dit, les paramètres incertains ne doivent pas influencer la réponse du système.

Pour un meilleur compromis, il est préférable de prendre une valeur intermédiaire de γ .

Le second rôle de γ est, de fait, d'influencer la bande passante du système en boucle fermée. Il est facile de vérifier que la commande PRLQR donne une bande passante plus grande que la commande LQR, puisqu'on désensibilise le système aux variations paramétriques. Par ailleurs, plus la bande passante n'est large et moins le système est robuste aux incertitudes hautes fréquences non modélisées. C'est la contrepartie « redoutable » de la bonne robustesse aux incertitudes paramétriques [3]. Pour plus de détail, le lecteur peut se référer aux références [3, 38, 63].

3.6. Synthèse de loi de commande par l'approche H_∞ :

Cette section présente la technique de commande robuste H_∞ envisagée pour la réduction de l'effet de turbulence sur l'accélération de l'avion. Mais avant l'élaboration de la loi de commande, on doit introduire brièvement des notions préliminaires concernant la robustesse à l'incertitude.

3.6.1. Robustesse à l'incertitude :

L'élaboration d'une commande s'effectue à partir d'un modèle souvent appelé modèle nominal ou modèle de référence. Ce modèle est établi à partir des équations de la physique ou d'un processus d'identification. En tout cas, ce modèle n'est qu'une approximation du modèle réel. L'origine de cette approximation est due aux dynamiques et non linéarités négligées ou mal connues, incertitude sur certains paramètres physiques, hypothèses simplificatrices pour réduire la complexité du modèle, erreurs de mesure des capteurs, etc. De plus, certains paramètres du système sont sensibles aux conditions de fonctionnement et varient avec le temps. Enfin, des facteurs externes imprévisibles peuvent venir perturber le fonctionnement du système asservi.

Il est donc insuffisant d'établir une commande par rapport au modèle nominal: il faut aussi prendre en considération l'incertitude de modélisation et les aléas externes. Bien que ces facteurs sont mal connus, mais on dispose en général d'informations sur leur amplitude maximale. Par exemple, l'intensité maximale de rafale du vent, ou des bornes min et max sur la valeur d'un paramètre de vol. C'est à partir de ces incertitudes qu'on va tenter de "robustifier" l'asservissement.

On distingue d'une manière générale une classe de facteurs incertains qui comprend selon la figure 3.1 :

- les perturbations de la commande qui peuvent provenir d'erreurs de discrétisation ou de quantification de la commande ou d'actions parasites sur les actionneurs.
- Les perturbations en sortie qui correspondent à des actions extérieures secondaires ou imprévisibles sur le système; par exemple, une rafale de vent, un changement de pression ou de température atmosphérique pour un avion en vol, etc.

- Les bruits de mesure au niveau des capteurs qui dégradent l'estimation de la valeur courante de la sortie y .

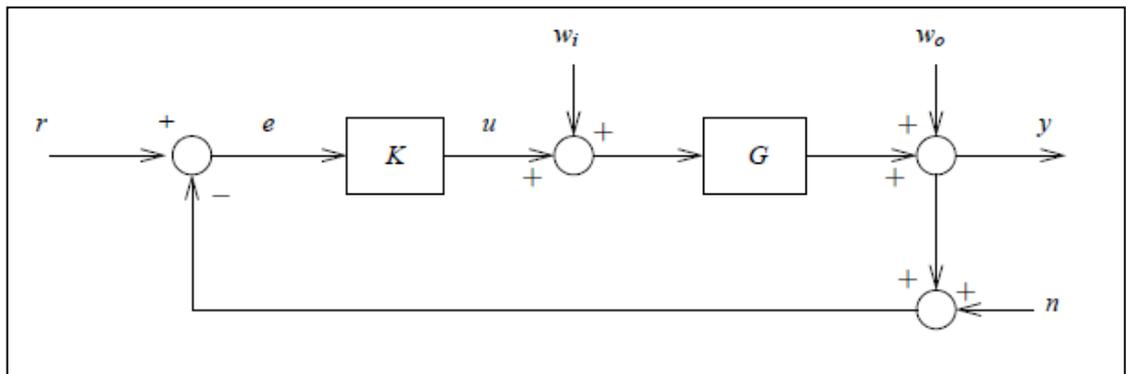


Figure 3.1 : Boucle de suivi (tracking).

Une deuxième classe de facteurs incertains réunit les imperfections et variations du modèle dynamique du système. Rappelons qu'en générale les techniques de commande robuste s'appliquent à des modèles linéaires de dimension finie alors que les systèmes réels sont généralement non-linéaires et de dimension infinie. Par exemple, pour le cas d'un avion flexible où les équations de la dynamique sont non-linéaires et les modes flexibles ont de dimension infinie. En pratique, le modèle utilisé néglige donc les non-linéarités et les modes flexibles de haute fréquence, donc il n'est valable que dans une bande de fréquence limitée. Il dépend de plus de paramètres physiques dont la valeur peut fluctuer et n'est souvent connue qu'approximativement. Pour des raisons pratiques, on distinguera:

- l'incertitude non structurée qui rassemble les dynamiques négligées dans le modèle. On ne dispose en général que d'une borne supérieure sur l'amplitude de ces dynamiques. On doit donc prendre des précautions pour le pire des cas dans la limite de cette borne sinon on peut avoir un problème de spillover.
- L'incertitude structurée qui est liée aux variations des paramètres physiques du système. Ces dernières interviennent principalement lorsque le modèle est obtenu à

partir des équations de la physique. La manière dont les paramètres influent sur le comportement du système détermine la “structure” de l’incertitude.

Les incertitudes non structurées peuvent être représentées en générale de deux façons additives et multiplicatives comme le montre la figure 3.2. Le modèle incertain est écrit comme suit :

$$G_p(s) = \Delta_a(s) + G(s)[I + \Delta_m(s)] \quad (3.16)$$

Où $\Delta(s)$ est une fonction de transfert stable qui vérifie

$$\|W_l(s)\Delta(s)W_r(s)\|_\infty < 1 \quad (3.17)$$

Où W_l et W_r sont des fonctions de pondérations permettent d’incorporer l’information sur la dépendance fréquentielle et directionnelle de l’amplitude maximale de $\Delta(s)$.

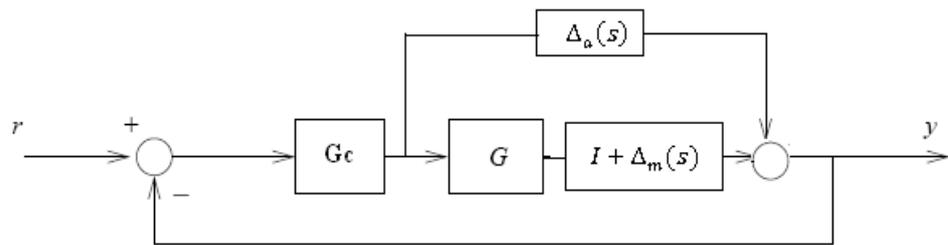


Figure 3.2 : Système en boucle fermée avec incertitudes

3.6.2. Formulation standard:

Pour effectuer la synthèse de la commande H_∞ , il est nécessaire d’introduire sa forme la plus simple dite standard représentée par la figure 3.3, où $P(s)$ est le modèle de synthèse augmenté des pondérations traduisant les objectifs de performance et de robustesse et $K(s)$ le gain de commande en feedback. w sont les entrées exogènes qui peuvent être les consignes ou les perturbations. z sont les sorties à réguler. Le problème est un problème de réjection de perturbation ou bien de minimiser l’effet d’une perturbation sur le comportement du système. Il s’agit donc de synthétiser à partir de la sortie mesurée une loi de commande $u = K(s)y$ qui minimise l’impact de w sur z .

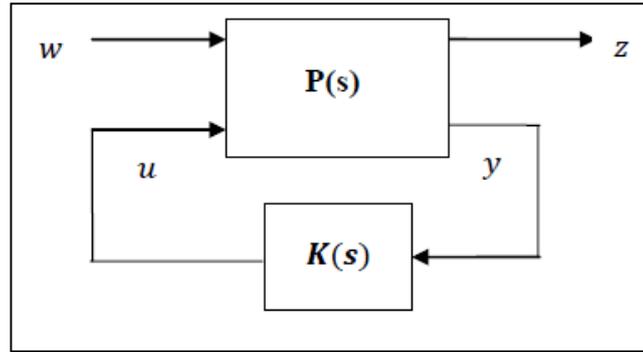


Figure 3.3 La forme standard

La matrice de transfert $P(s)$ qui représente un système LTI modélise les interactions dynamiques entre deux ensemble d'entrées et deux ensembles de sorties comme suit :

$$\begin{pmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Ainsi, le transfert boucle fermée de w à z est donné par la Transformation Linéaire Fractionnelle (LFT):

$$F_l(P, K) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(sI - P_{22}(s)K(s))^{-1}.P_{21}(s) \quad (3.19)$$

Le problème décrit ci-dessus peut se formuler mathématiquement comme suit:

Problème H_∞ standard sous-optimal : étant donné $\gamma > 0$, trouver un compensateur $K(s)$ qui stabilise le système de manière interne et assure $\|F_l(P(s), K(s))\|_\infty < \gamma$.

Problème H_∞ standard optimal : trouver un compensateur $K(s)$ qui stabilise de manière interne le système bouclé et minimise $\|F_l(P(s), K(s))\|_\infty$.

3.6.3. Synthèse H_∞ pondérée pour avion flexible :

Une mise en œuvre possible de la synthèse H_∞ consiste à introduire des fonctions de pondérations sur les entrées exogènes w et les sorties régulées z . Il s'agit donc de bien choisir ces filtres de pondération afin d'obtenir les propriétés désirées en boucle fermée. Il est important de souligner dans ce contexte que les fonctions de pondération peuvent être placées à différents endroits à l'intérieur du système augmenté comme le montre la figure 3.4, de manière à avoir une matrice de transfert pondérée entre les entrées exogènes w et les sorties à minimiser z .

L'augmentation par des matrices de pondération du système flexible de l'avion correspond à la méthode assez courante pour la préparation à la synthèse H_∞ . Cette approche consiste à considérer, en plus des sorties d'incertitude z_1 deux sorties de performances (le signal de commande z_3 et les sorties d'intérêts z_y) à considérer, en plus des entrées w_1 d'incertitudes, deux entrées pondérées (un bruit sur la mesure w_n et une perturbation sur la commande w_u). Les mesures réelles y sont utilisées pour la rétroaction, et le signal de commande u est issu du contrôleur. L'ajout des entrées et sortie de la méthode a deux utilités : C'est avant tout une astuce permettant de bien conditionner le problème pour qu'il puisse être résolu par les algorithmes de calcul. On note que, le bruit de n'est pas spécifié, la matrice de pondération de bruit de mesure est réglée petite. En effet, ce réglage permet tout simplement de conditionner l'algorithme par l'ajout de l'entrée w_n sans vraiment influencer le design, puisque l'influence de bruit très petit sur le contrôleur se manifeste sous forme de dynamiques très rapides et non dominantes qui peuvent être tronquées par la suite. L'autre utilité de la méthode est d'empêcher que la H_∞ conduise à une solution avec annulation entre pôles et zéros.

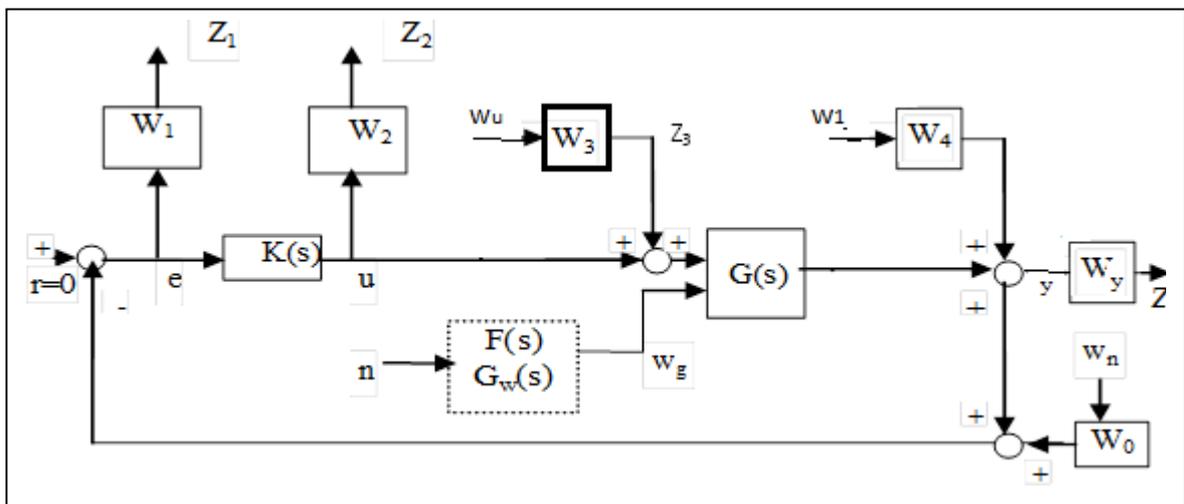


Figure 3.4 : Système pondéré.

Considérons dans un premier temps un cas particulier et simplifier du schéma général précédant comme le montre la figure 3.5. Cette forme est utilisée pour élaborer un contrôleur robuste afin de réduire l'effet de turbulence sur l'accélération verticale de l'avion flexible.

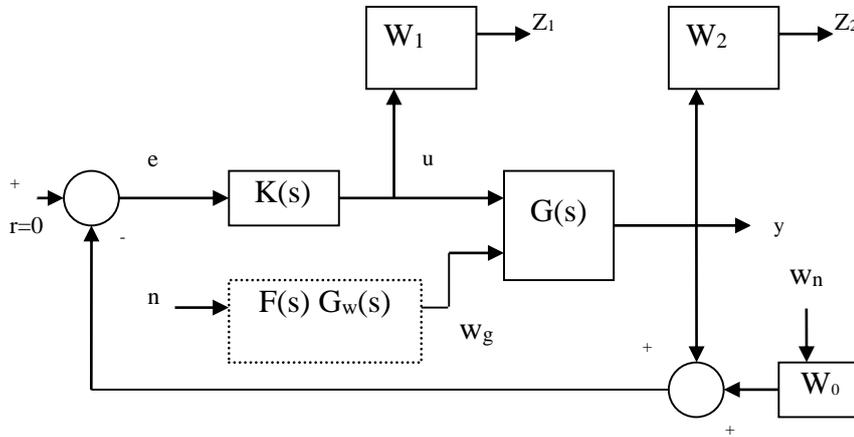


Figure 3.5 : Modèle Avion pondéré.

Le modèle de l'avion est représenté la matrice de transfert suivante :

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & [B \ G_w] \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Les matrices de pondérations W_1 et W_2 sont ajoutées afin de réduire l'accélération au minimum avec un effort raisonnable sur le braquage des gouvernes de commande.

Le signal w_g représente une rafale de vent, il peut être générée à partir d'un filtre linéaire de Dryden $F(s)$ (ou de Von karman) excité par un bruit blanc.

Le système de la figure 3.4 peut être transformé facilement sous la forme standard de la figure 3.3 et le modèle augmenté de l'équation 3.18 devient comme suit (ici on néglige l'incertitude sur la mesure) :

$$P(s) = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ W_2 G \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 G \end{bmatrix} \\ -G & -G \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Maintenant une fois le modèle de l'avion est préparé pour la synthèse de la commande H_∞ , cette dernière va générer un contrôleur $K(s)$ qui minimise la norme H_∞ de l'ensemble des fonction de transfert entre les entrées et les sorties de $P(s)$. Autrement dit, réduire la norme $\|T_{wz}\|_\infty = \|F_l(P(s), K(s))\|_\infty$.

3.6.4. Choix de fonction de pondération

Le choix requiert en générale plusieurs essais et il est difficile de donner des règles absolues qui fonctionneront dans tous les cas. Néanmoins, il existe quelques guides pour le choix initial, qu'il faudra éventuellement affiner par la suite :

- le gabarit sur la fonction de pondération sur l'erreur nous permet de fixer plusieurs aspects de l'asservissement. On prend en général un passe-bas d'ordre 1 de la forme :

$$W(s) = \frac{s + \omega_1}{M_1 + \omega_1 \varepsilon_1} \quad (3.22)$$

La pulsation ω_1 pour laquelle le gabarit possède un gain unitaire peut être interprétée comme la bande passante minimale souhaitée. La précision du système est assurée par un faible choix de ε_1 aux basses fréquences. Enfin la valeur de M_1 aux hautes fréquences limite le maximum de la réponse fréquentielle de $S = (I + KG)^{-1}$, ce qui impose une marge de module au moins égale à $1/M_1$.

- Le gabarit de la pondération sur la commande permet de limiter l'action du contrôleur lui-même. On prend typiquement une constante ou un passe-haut d'ordre 1 de la forme :

$$W(s) = \frac{s + \frac{\omega_2}{M_2}}{\varepsilon_2 s + \omega_2} \quad (3.23)$$

L'amplitude de $|SK|$ aux basses fréquences est essentiellement limitée par les capacités de l'actionneur ; le gain M_2 est choisi en fonction. La pulsation ω_2 permet de régler la bande passante du contrôleur ; au-delà de cette pulsation, un certain roll off est censé atténuer les hautes fréquences. Enfin on rend le filtre propre grâce à une faible valeur de ε_2 , qui introduit un pôle aux hautes fréquences.

3.7. Technique de μ -analyse et μ synthèse:

Les lois de commande présentées précédemment sont destinées à priori pour un modèle d'avion nominal. Alors que pour des modèles incertains, la commande μ analyse fournit un cadre général pour l'étude de la robustesse d'une boucle fermée soumise à des incertitudes paramétrique ou dynamiques négligées.

3.7.1. Synthèse de la commande μ analyse

Considérons dans cette section que notre modèle d'avion nominal est soumis à différentes incertitudes au niveau des actionneurs et capteurs comme le montre la figure 3.5.

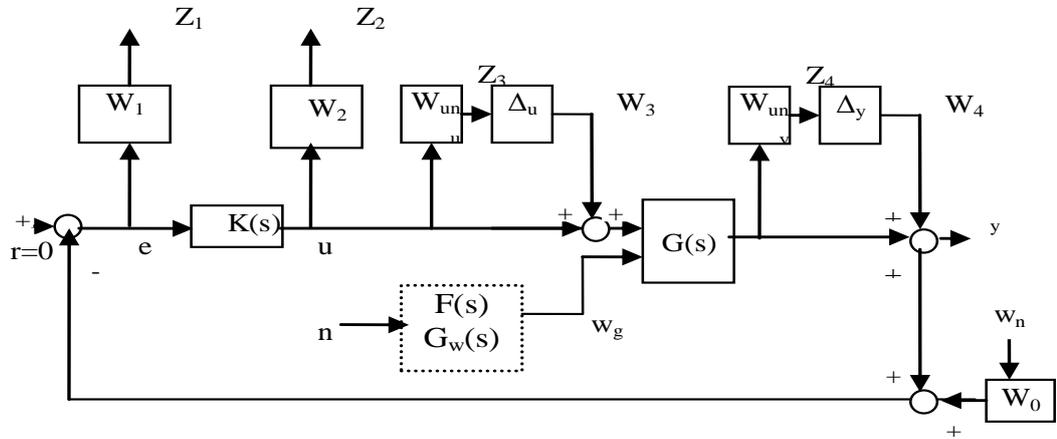


Figure 3.6 : Modèle Avion incertain

Si on désire appliquer la technique de μ analyse, on doit transformer cette boucle de façon à se ramener au schéma d'interconnexions standard $M(s) - \Delta$ suivante :

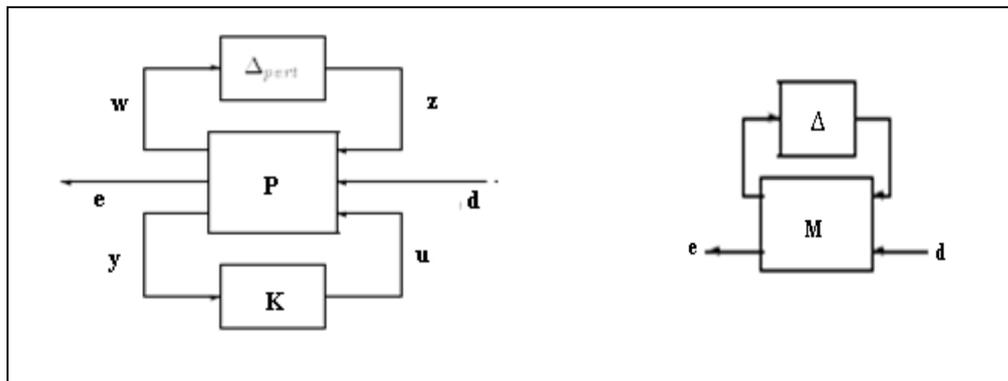


Figure 3.7 : Forme standard de μ synthèse

Où $M(s)$ la matrice de la boucle fermée nominale et Δ les effets des incertitudes sur la boucle.

3.7.2. Valeur singulière structurée :

La valeur singulière structurée VSS de M est définie, notée également $\mu(M_\omega)$, de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mu(M_\omega) = \min_{\Delta \in \underline{\Delta}} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \setminus \det(I - \Delta M_\omega) = 0 \}^{-1} , \\ \mu(M_\omega) = 0 \text{ si } \det(I - \Delta M_\omega) \neq 0 \forall \Delta \in \underline{\Delta}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Où $\underline{\Delta}$ est l'ensemble des fonctions de transfert entre les entrées et les sorties du bloc $\Delta(s)$ définie par :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta} = \\ \left\{ \Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{R_1}, \dots, \delta_m I_{R_m}, \delta_1 I_{C_1}, \dots, \delta_n I_{C_n}, \Delta_1, \dots, \Delta_p) : \delta_i \in R, \delta_j \in C, \Delta_k \in C^{q_k \times q_k}, \right. \\ \left. 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq p \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Supposons maintenant que la $\mu(M_\omega)$ soit calculée sur toute la gamme de fréquence ω et que sa valeur pic soit nommée γ . Cela veut dire que toute matrice Δ de structure appropriée satisfaisant $\max \bar{\sigma}(\omega) < \frac{1}{\gamma}$ est stable. De plus, il existe une matrice de perturbation Δ de structure appropriée satisfaisant $\max \bar{\sigma}(\omega) = \frac{1}{\gamma}$ qui cause l'instabilité.

Le calcul de μ est connu comme étant un problème difficile de complexité qui croît en fonction de la taille du problème. On a généralement recours à un encadrement par valeur supérieure, tel que

$$\mu_\Delta(M) \leq \bar{\sigma}(M) \quad (3.26)$$

Dans les cas réels et pour les systèmes flexibles, le tracé de la borne supérieure présente généralement des pics très étroits. Avec la discrétisation fréquentielle, il y a de grande chance de sous évaluer l'amplitude du pic, ce qui revient à dire que la borne supérieure obtenue n'est pas réellement une borne supérieure. La méthode suivante visant à obtenir une majoration garantie est disponible.

3.7.3. Méthode basée sur les scalings :

On présente ici de manière très succincte l'approche classique de calcul de la borne supérieure. Il s'appuie sur un multiplieur $D(s)$ appelées scalings qui doit avoir la propriété de commuter avec la perturbation Δ de modèle i.e :

$$D^{-1}(s)\Delta(s)D(s) = \Delta(s) \quad (3.27)$$

Où, le multiplieur $D(s)$ peut appartenir à l'ensemble suivant :

$$D = \left\{ D = \text{diag} \left(D_1^R, \dots, D_m^R, D_1^C, \dots, D_n^C, d_1^C I_{C_1}, \dots, d_p^C I_{C_p} \right) : \right. \\ \left. D_i^R \in R^{q_i \times q_i}, D_j^C \in C^{r_j \times r_j}, d_k^C \in C \right\} \quad (3.28)$$

La nouvelle borne supérieure de μ s'écrit :

$$\mu_\Delta(M) = \mu_\Delta(DMD^{-1}) \leq \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (3.29)$$

3.7.4. La μ -synthèse :

La μ -synthèse est la minimisation, à travers tous compensateurs stabilisants $K(s)$, de la valeur du pic de $\mu_\Delta(M) = \mu_\Delta(F_l(P, K))$:

$$\underbrace{\min}_{k(s)} \left[\max_{\omega} \mu_\Delta(M) \right] \quad (3.30)$$

La μ -synthèse s'effectue en fait au moyen d'un processus itératif nommé la D-K itération. Il existe des matrices (multiplieurs) D (à ne confondre avec la matrice D du système), telles que $\mu_\Delta(M) = \mu_\Delta(DMD^{-1})$. Le processus consiste à effectuer une synthèse H_∞ sur $(D_\omega M(j\omega) D_\omega^{-1})$ plutôt que sur $M(j\omega)$ où les matrices D et K sont alternativement optimisées pour minimiser μ .

3.8. La Commande par mode glissant (SMC) :

La commande par mode glissant ou la commande à structure variable par mode glissant a essentiellement pour vocation de permettre l'obtention, en boucle fermée, d'une dynamique largement indépendante de celle du processus et surtout de ses variations éventuelles. En ce sens, elle peut être bien adaptée pour la commande des systèmes électroaérodynamiques linéaire ou non linéaire. Dans cette section, la commande par mode glissant annonce deux contributions majeures de cette thèse. La première consiste à élaborer d'une loi de commande pour

l'amélioration de régulation des états de déplacement vertical et l'angle d'incidence du système non linéaire aéroélectrique, la deuxième, il s'agit de combiner la commande classique LQR et la commande par mode glissant afin de commander la vitesse de tangage de l'avion flexible.

3.8.1. Principe de la commande par mode glissant.

Le principe de la commande à structure variable, par mode glissant et à commande discontinue peut s'énoncer ainsi (voir figure 3.8) : on applique à l'entrée de l'actionneur, une commande $u(t)$ fournie par un algorithme utilisant une fonction S (fréquemment linéaire) de la sortie $y(t)$ et de ses dérivées (ou de l'erreur en sortie $e = y - y_d$ et des dérivées de l'erreur), fonction appelée par abus de langage SURFACE car ses zéros appartiennent à la surface dite de glissement d'équation $S = 0$ construite dans l'espace d'état. La surface $S = 0$ peut être une droite ou une hypersurface selon l'ordre du système à commander, dans l'espace des phases de la sortie (ou l'espace des phases de l'erreur en sortie). La commande nécessaire $u(t)$ est solution d'une équation dépendant du signe de la fonction de surface S . Sous cette commande discontinue $u(t)$, le comportement dynamique du système bouclé devient celui du système défini par $S = 0$. Il y a ainsi «structure variable» puisque la dynamique du système à commander est maintenant définie par $S = 0$ au lieu d'être définie par la transmittance entre la sortie $y(t)$ et l'entrée $u(t)$.

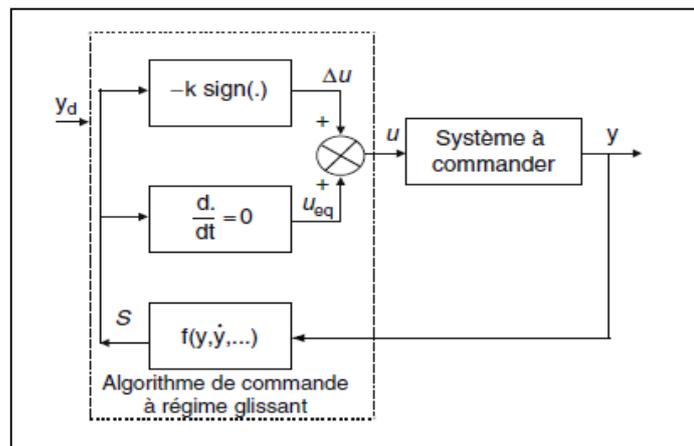


Figure 3.8 : Schéma de principe d'un système bouclé par mode glissant.

La commande se compose de deux termes, une commande dite équivalente caractérisant la dynamique du système sur la surface de glissement et une commande discontinue en fonction du signe de la surface de glissement.

$$u(t) = u_{eq} + u_n \quad (3.31)$$

u_{eq} : Correspondant à un mouvement idéal de glissement (pour lequel non seulement le point de fonctionnement reste sur la surface mais aussi pour lequel la dérivée de la fonction de surface reste nulle). Elle est obtenue grâce aux conditions d'invariance de la surface de glissement.

u_n : c'est le terme qui impose au point de fonctionnement de rester au voisinage de la surface (voir figure 3.9). Le glissement est utile pour compenser les incertitudes du modèle. Il est constitué de la fonction signe « sign » de la surface de glissement, multipliée par une constante.

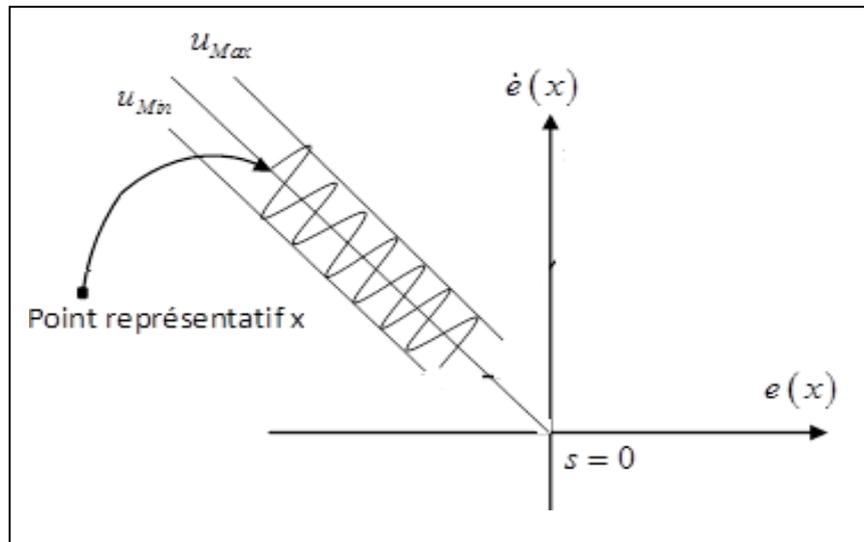


Figure 3.9 : Différentes modes pour la trajectoire dans le plan de phase.

3.8.2. Elaboration de la commande pour le aéroélastique.

Rappelons que le modèle dynamique non linéaire est écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} m_t & m_w x_\alpha b \\ m_w x_\alpha b & I_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ M \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Après réarrangement et simplification le modèle est présenté sous forme d'état adéquat comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= a_{h_1}x_1 + a_{\dot{h}_1}x_2 + a_{\alpha_{11}}x_3 + a_{\alpha_{12}}x_3^2 + a_{\alpha_{13}}x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_1}x_4 + b_{\beta_1}\beta + b_{\gamma_1}\gamma \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= a_{h_2}x_1 + a_{\dot{h}_2}x_2 + a_{\alpha_{21}}x_3 + a_{\alpha_{22}}x_3^2 + a_{\alpha_{23}}x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_2}x_4 + b_{\beta_2}\beta + b_{\gamma_2}\gamma
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Avec le vecteur d'état défini par : $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [h \ \dot{h} \ \alpha \ \dot{\alpha}]^T$ et les coefficients du modèle d'équations 4.3 sont donnés en appendice B.

Considérons à nouveau le modèle dynamique 3.33 sous forme d'état suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= a_{h_1}x_1 + a_{\dot{h}_1}x_2 + a_{\alpha_{11}}x_3 + a_{\alpha_{12}}x_3^2 + a_{\alpha_{13}}x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_1}x_4 + u_1 + w_1 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= a_{h_2}x_1 + a_{\dot{h}_2}x_2 + a_{\alpha_{21}}x_3 + a_{\alpha_{22}}x_3^2 + a_{\alpha_{23}}x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_2}x_4 + u_2 + w_2
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Avec :

w_1 et w_2 représentent des perturbations bornées dont l'origine sont des dynamiques négligées comme l'effet de l'aérodynamique instationnaire ou bien externe comme la turbulence.

u_1 et u_2 combinent la déflexion des deux surfaces de commande comme suit :

$$u_1 = b_{\beta_1}\beta + b_{\gamma_1}\gamma \tag{3.35}$$

$$u_2 = b_{\beta_2}\beta + b_{\gamma_2}\gamma \tag{3.36}$$

Pour élaborer les deux lois en mode glissant, considérons une trajectoire désirée x_1^d et une erreur tel que :

$$e_1 = x_1 - x_1^d \tag{3.37}$$

La dérivée de e_1 conduit à :

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_1^d = x_2 - x_2^d \tag{3.38}$$

Définissons une surface de glissement comme suit :

$$s_1 = c_1 e_1 + \dot{e}_1 \tag{3.39}$$

Avec c_1 : est une constante positive.

Pour atteindre les objectifs de la commande en performance désirée, désignons notre contrôleur comme suit :

$$u = u_{1eq} + u_{1Ks_1} + \Delta u \quad (3.40)$$

u_{1eq} est la commande équivalente pour avoir $\dot{s} = 0$ quand $s = 0$, Δu est la commande par commutation et $u_{1Ks_1} = -Ks_1, K > 0$ est une compensation par feedback.

Considérons maintenant la dérivé de la surface de glissement s_1 donnée par:

$$\dot{s}_1 = c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_1^d) + f_1(x, \dot{x}) + u_1 + w_1 - \ddot{x}_1^d \quad (3.41)$$

$$\text{Où } f_1(x, \dot{x}) = a_{h_1}x_1 + a_{\dot{h}_1}x_2 + a_{\alpha_{11}}x_3 + a_{\alpha_{12}}x_3^2 + a_{\alpha_{13}}x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_1}x_4$$

La commande est tirée à partir de $\dot{s}_1 = 0$ et on suppose que $w_1 = 0$

$$u_{1eq} = (-c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_1^d) - f_1(x, \dot{x}) + \ddot{x}_1^d) \quad (3.42)$$

3.8.3. Conditions de convergence et d'existence (reachability condition):

Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester indépendamment de la perturbation.

La théorie impose pour le glissement sur $s_1 = 0$ la condition globale à tout instant $s_1\dot{s}_1 < 0$. C'est la première condition de convergence, elle est proposée et étudiée par EMILYANOV et UTKIN. Cette condition traduit l'attractivité de la surface S pour la trajectoire du point de fonctionnement. Autrement dit, quand sa trajectoire se dirige vers $s_1 = 0$ alors $s_1\dot{s}_1 < 0$; quand la trajectoire s'en écarte $s_1\dot{s}_1 > 0$; quand la trajectoire est sur $s_1 = 0$ alors le glissement est idéal. Cette condition (nécessaire et non suffisante) de glissement est générale, théorique et globale. Elle est indépendante de la nature non linéaire ou linéaire de la surface (cette condition reste vraie pendant le régime transitoire) et peut être tirée facilement par le choix de la fonction de Lyapunov candidate $V = \frac{1}{2}s_1^2$.

Une autre condition locale est ajoutée par (Slotine et Li, 1991), s'écrit sous la forme [64, 65] :

$$s_1 \dot{s}_1 \leq -\mu |s_1|, \mu > 0 \quad (3.43)$$

Cette condition permet d'accélérer la convergence pour atteindre la surface de glissement en un temps fini ($t_r \leq \frac{|s_1(0)|}{\mu}$) et d'y rester par la suite sur cette surface malgré d'éventuelles perturbations.

Finalement, la commande pour le premier sous-système qui conduit s_1 vers le zéro avec un temps fini est donnée par :

$$u_1 = -(a_{h_1} + \mu_1 c_1)x_1 - (a_{\dot{h}_1} + c_1)x_2 - (a_{\alpha_{11}}x_3 + a_{\alpha_{12}}x_3^2 + a_{\alpha_{13}}x_3^3 + a_{\alpha_1}x_4) - K_1 s_1 - \mu_1 s_1 - M_1 \cdot \text{sign}(s_1) \quad (3.44)$$

Avec la même manière, on peut obtenir la loi de commande pour le deuxième sous-système.

Pour étudier la stabilité dynamique de s_1 , une fonction de Lyapunov candidate est introduite comme suit :

$$V = \frac{1}{2} S^2 \quad (3.45)$$

La stabilité asymptotique autour du point d'équilibre $S = 0$ est obtenue sous les conditions suivantes :

1. $\dot{V} < 0$ pour $S \neq 0$
2. $\lim_{|S| \rightarrow \infty} V = \infty$

Les deux conditions sont vérifiées directement via la fonction de Lyapunov.

3.8.4. Elaboration de la commande par mode glissant pour l'avion flexible :

On considère un système linéaire de l'avion, défini par son équation d'état :

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw \quad (3.46)$$

Où $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $x \in R^n$ et $u \in R^m$, $G \in R^{n \times p}$

Supposons que le système est contrôlable alors la matrice B est de rang plein.

Définissons m surfaces de commutation et le glissement sera supposé se faire à l'intersection de ces m surfaces.

Soit donc les surfaces de glissements définies par :

$$\sigma(x) = Sx(t) \quad (3.47)$$

Où S une matrice appartenant à l'espace $R^{m \times n}$ et tel que $(SB)^{-1}$ existe.

Si on est en glissement, c'est-à-dire $\sigma(x) = 0$, alors on a également $\dot{\sigma}(x) = 0$

D'après l'équation 3.46 et si on néglige dans un premier temps la perturbation, la dérivée de l'équation 3.47 peut être écrite comme suit:

$$S\dot{x}(t) = SAx(t) + SBu(t) = 0 \quad (3.48)$$

Et donc tout se passe comme si le système était soumis à une entrée équivalente donnée par :

$$u_{eq} = -(SB)^{-1}SAx(t) \quad (3.49)$$

On remarque bien que la commande équivalente dépend de la surface de glissement et la disponibilité des états du système.

La commande de commutation permet au point de fonctionnement de rester au voisinage de la surface et d'augmenter la robustesse vis-à-vis les perturbations.

Cette commande est obtenue à travers la condition d'attractivité $\sigma\dot{\sigma} < 0$ qui doit être vérifiée. Pour cela considérons la surface de glissement suivante :

$$S = B^T P x \quad (3.50)$$

Où P est une matrice définie positive qui représente dans notre cas la solution de l'équation (3.6) de Riccati. La dérivée de cette surface permet d'écrire :

$$\dot{S} = B^T P \dot{x} = B^T P (Ax + Bu + Gw) \quad (3.51)$$

Pour simplifier un peu le problème, on pose $Gw = Bw_g$ avec $|w_g| < \delta_f$, l'équation (3.51) devienne alors :

$$\dot{S} = B^T P (Ax + B(u + w_g)) = B^T P B (u_n + w_g) \quad (3.52)$$

Si on choisit la commande de commutation u_n comme suit :

$$u_n = -(B^T PB)^{-1}(|B^T PB|\delta_f + k)\text{sign}(S) \quad (3.53)$$

Avec k est une constante positive et $\text{sign}(\)$ est la fonction signe.

L'équation (3.52) devienne :

$$\dot{S} = -(|B^T PB|\xi + k)\text{sing}(S) + B^T PBw_g \quad (3.54)$$

Si on va choisir la fonction de Lyapunov candidate $= \frac{1}{2}S^2$, on a alors :

$$\dot{V} = S\dot{S} = -(|B^T PB|\delta_f + k)|S| + B^T PBw_g < -k|S| \quad (3.55)$$

D'où la stabilité au sens se Lyapunov.

3.8.5. Phénomène réticence ou de chattering :

Les notions précédentes de glissement sur S , de dynamique équivalente (continue) et de commande équivalente (continue), ne doivent pas faire oublier qu'un tel fonctionnement robuste n'est possible que grâce aux discontinuités sur la commande qui obligent le système à rester sur la surface de commutation. L'évolution du point de fonctionnement de part et l'autre de la surface de glissement correspond à des variations de signe pour la fonction S et par suite une commande de type discontinue Cela signifie donc que la commande « bat » de $+U$ à $-U$ à une fréquence infinie (si la commutation est instantanée). Ce phénomène est appelé « *le phénomène de réticence ou de chattering* ».

Cependant, dans les systèmes réels, il est impossible de réaliser une telle commutation de la commande pour des raisons technologiques telles que : la présence de retard, limitation des actionneurs et des surfaces aérodynamiques de commande qui exigent une commande souple. De plus, ces oscillations dans la commande peuvent excitées des vibrations structurelles surtout pour les avions dont la structure est considérée comme flexible allant jusqu'à une fatigue importante et parfois jusqu'à la rupture de la structure. Il est donc important de

pouvoir limiter, voire supprimer, ce phénomène tout en gardant la robustesse de la commande.

Pour remédier ce problème, plusieurs solutions ont été proposées jusqu'à ce jour pour réduire ce phénomène (problème de recherche ouvert), parmi les solutions on peut mentionner :

- Utilisation du concept de la commande équivalente et exploitation du caractère filtre passe-bas dans les systèmes réels bouclés ;
- Remplacer la fonction discontinue « sign () » par une fonction continue ou souple, tel que la fonction saturation à grand gain ou bien une fonction souple [64]. Cette solution conduit à réduction du chattering mais avec une perte de robustesse vis-à-vis aux perturbations.

D'autres solutions récentes sont proposées par les chercheurs du domaine tel que :

- La commande par mode glissant d'ordre élevé (SOSMC, HOSMC) où le terme de commutation est caché derrière l'action intégrale [37-39]
- Mode glissant avec un gain dynamique [65].

Ce chapitre est donc, consacré à l'élaboration des lois de commande classique et modernes pour la stabilité du système aéroélastique et le pilotage de l'avion flexible. Il présente deux méthodes pour modéliser les incertitudes sur les deux modèles aéroélastiques et les approches d'élaboration de contrôleur robuste qui leur sont associées.

La première méthode consiste à modéliser le système incertain par une augmentation du système nominal par des matrices de perturbations. La robustesse est alors garantie par la minimisation de la norme H_2 , H_∞ et la VSS. La μ -synthèse est une méthode itérative qui augmente l'ordre du contrôleur pour minimiser la VSS.

La deuxième méthode pour modéliser le système aéroélastique incertain, consiste à augmenter le modèle nominal par des incertitudes paramétrique. Le contrôle PRLQR permet d'obtenir par optimisation un contrôleur robuste. Cette méthode est itérative et ne modifie pas l'ordre du contrôleur.

Ce chapitre fait aussi la synthèse de la commande non linéaire par mode glissant. Cette commande conduit à un système indépendant des paramètres du modèle et elle est très robuste vis-à-vis les perturbations.

Le chapitre suivant est consacré à la mise en œuvre en simulation de ces techniques de commande qui permet de conclure sur leurs pertinences pour les modèles flexibles envisagés, leurs avantages et leurs limites.

CHAPITRE 4

RESULTATS ET SIMULATION

4.1. Introduction

Une partie essentielle de cette thèse consiste à évaluer et à comparer les lois de commande envisagées pour deux modèles aéroélastique : le modèle de l'aile flexible et le modèle longitudinal de l'avion flexible. En effet, ces modèles ont été utilisés par plusieurs auteurs pour l'étude de l'efficacité des lois de commande robustes [27, 56]. La première partie est dédiée l'application de lois de commande LQR, PRLQR et le mode glissant pour une section d'aile aéroélastique de l'avion. L'objectif est de réguler les états du système pour l'amortissement rapide des modes de vibration et augmenter au maximum la vitesse de flottement par rapport à la vitesse critique de flottement en mouvement libre. Pour le modèle incertain, l'amélioration consiste à remplacer la commande LQR par la commande robuste PRLQR. Cette approche conduit à un contrôleur beaucoup plus intéressant qu'un LQR classique. En effet, elle permet de prendre en compte les incertitudes paramétriques du modèle sans augmenter l'ordre du contrôleur. Pour le modèle non linéaire, l'amélioration consiste à utiliser la commande non linéaire par mode glissant. Cette méthode conduit à un contrôleur très performant et très robuste qu'un contrôleur linéaire. La deuxième partie est dédiée à la commande de l'avion flexible pour la réduction de l'effet de la turbulence sur la l'accélération verticale et le contrôle de la vitesse de tangage. Puisque l'ordre du modèle est très élevé et possède un terme de bruit en entrée, les méthodes LQG, H_2 et H_∞ semble bien adaptées pour alléger l'effet de la turbulence sur l'accélération verticale. Afin de tester la robustesse de la commande, le modèle nominal est augmenté par des matrices de perturbation au niveau des actionneurs et de capteur, l'amélioration de la robustesse dans ce cas consiste à utiliser la méthode μ -synthèse. Cette méthode conduit à un contrôleur robuste mais avec un ordre plus élevé. En fin, les commandes LQR et le mode glissant sont élaborées à la commande de la vitesse de tangage de l'avion flexible. D'après notre recherche bibliographique, aucune

documentation ne fait état de l'utilisation de cette dernière. L'efficacité de l'approche par mode glissant pour le contrôle robuste d'avion flexible nous semble démontrée par cette application.

4.2. Simulation du modèle aile flexible type TAMU WING II

Dans cette partie, nous allons appliquer différentes lois de commande pour notre système aéroélastique, et nous présentons les résultats de simulation sous l'environnement MATLAB/SIMULINK®. Dans un premier temps la commande LQR est appliquée sur le modèle linéaire nominal, ensuite il sera question de la mise en œuvre de la méthode PRLQR pour le système incertain développé dans la section 2.4 du chapitre 2. Enfin, la commande non linéaire par mode glissant est validée pour le modèle aéroélastique non linéaire.

4.2.1. Analyse du modèle en boucle ouverte :

Le modèle dynamique développé dans la section 2.4 dépend de la vitesse de l'écoulement aérodynamique, pour étudier le comportement des états du système et repérer la vitesse de flottement, un modèle numérique est calculé à la vitesse $V=13$ m/s donné par :

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -9.2941 & -2.8623 & -0.1670 \\ 860.0497 & -24.0620 & 8.6826 & -0.2106 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -5.7551 & 0.4122 \\ 1.9681 & -4.8177 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La réponse temporelle du système linéaire donné par l'équation 4.1 suivant conditions initiales $[h \ \alpha \ \dot{h} \ \dot{\alpha}]^T = [0.01 \ 0.1 \ 0 \ 0]^T$ est présentées sur la figure 4.1, on constate qu'à la vitesse 13m/s, le système possède des oscillations de faible amplitude pour le déplacement vertical h et l'angle de tangage α puis convergent lentement vers l'équilibre (le système prend 5s pour les amortir) avec des coefficients d'amortissement positifs ($\varepsilon_1 = 0.08, \varepsilon_2 = 0.0594$).

Un autre modèle est calculé pour une vitesse d'écoulement égale à 14 m/s, la réponse de système est montrée sur la figure 4.2, le modèle devient instable, les

modes du système possède un coefficient d'amortissement négatif ($\varepsilon_2 = -0.0071$) ce qui illustre la présence du phénomène de flottement.

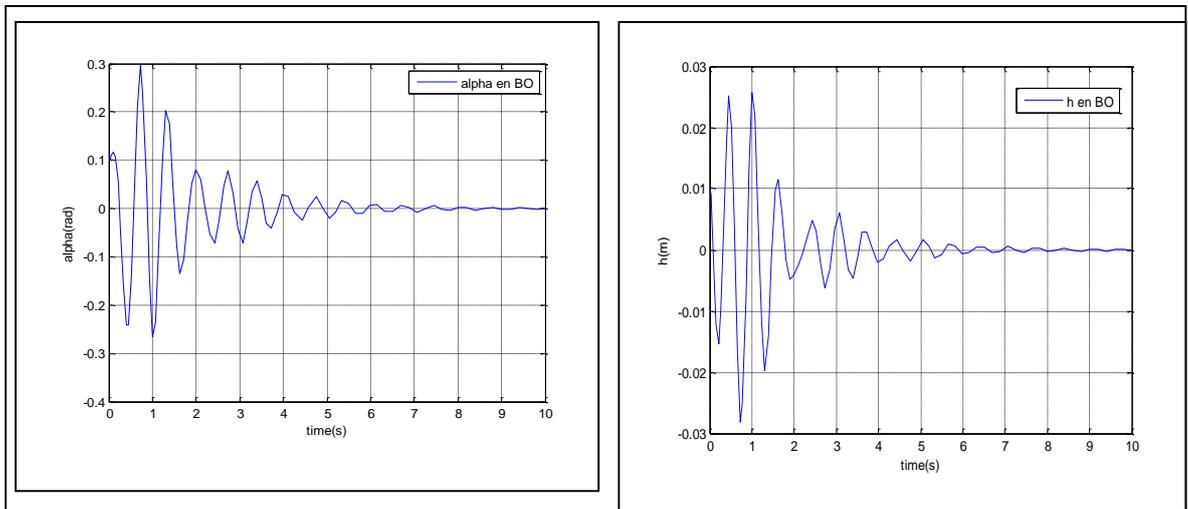


Figure 4.1 : Réponse du système en boucle ouverte à une vitesse $V=13\text{m/s}$.

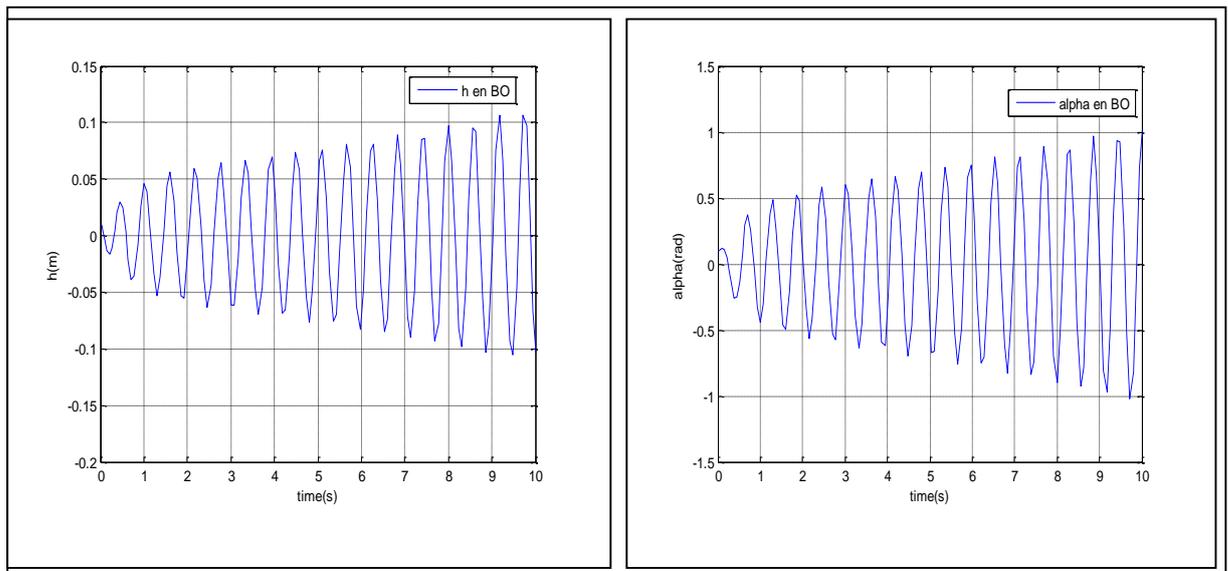


Figure 4.2 : Réponse de système en boucle ouverte à la vitesse $V=14\text{m/s}$

D'après ces deux simulations, on constate donc qu'il existe une vitesse de transition s'appelle la vitesse de flottement, qui conduit le système de la stabilité vers l'instabilité. Avec des simulations successives, cette vitesse est repérée à $V=13.954\text{m/s}$.

4.2.2. Application de la commande LQR pour le modèle aéroélastique linéaire :

Le problème du régulateur LQR par retour d'état consiste à trouver la matrice du correcteur K qui minimise la fonction de coût suivante :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (4.1)$$

Où $x = [h \ \alpha \ \dot{h} \ \dot{\alpha}]^T$ est le vecteur d'état, $u = [\beta \ \gamma]^T$ est le vecteur de commande, (Q, R) sont des matrices de pondération symétrique positive semi-définie et positive défini respectivement.

La matrice de gain K qui minimise cette fonction est donnée par :

$$K = R^{-1} B^T P \quad (4.2)$$

Où P est la solution de l'équation algébrique de Riccati suivante:

$$PA + A^T P - PB R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (4.3)$$

La commande LQR peut être résolu en utilisant un retour d'état linéaire donné par :

$$u = -K x(t) \quad (4.4)$$

Le schéma-bloc de la figure illustre un tel contrôleur. Pour effectuer un tel control, le système doit être contrôlable et bien sûr tous les états doivent être disponibles.

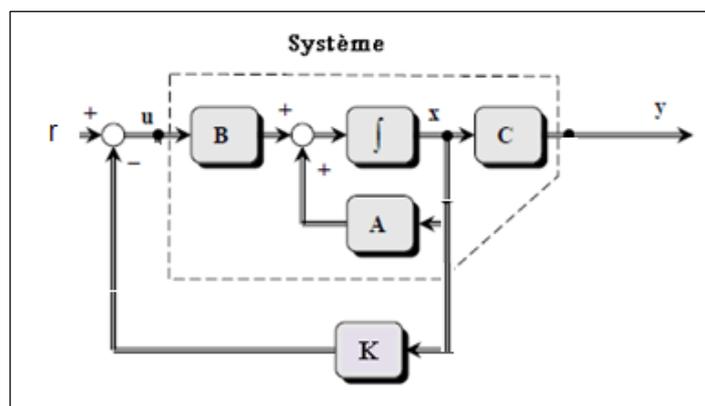


Figure 4.3 : Schéma bloc du régulateur par retour d'état.

Les résultats de calcul et simulation en boucle fermée en appliquant la commande LQR sont obtenus pour les cas suivants :

1^{er} cas : $V_1=13$ m/s, les matrices de pondérations sont choisies comme suit:

$$Q_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 0], R = [1 \ 0; 0 \ 1],$$

Le gain de la commande calculé est donné par:

$$K = \begin{bmatrix} -4.6022 & -0.0063 & -1.0653 & -0.1539 \\ -0.7500 & -0.0830 & -0.0574 & -0.0143 \end{bmatrix}$$

D'après la figure 4.4, on constate que les deux états convergent plus rapidement (2 secondes) et avec des amplitudes moins importantes par rapport à celles en boucle ouverte. On retrouve aussi une amélioration dans le coefficient d'amortissement ε après l'application de la commande (on passe de 0.08 à 0.3), ce qui rend le système bien amorti. En ce qui concerne la commande, on constate que les angles de déflexions des volets sont dans la limite autorisée (± 0.2 rad en β , ± 0.02 rad en γ).

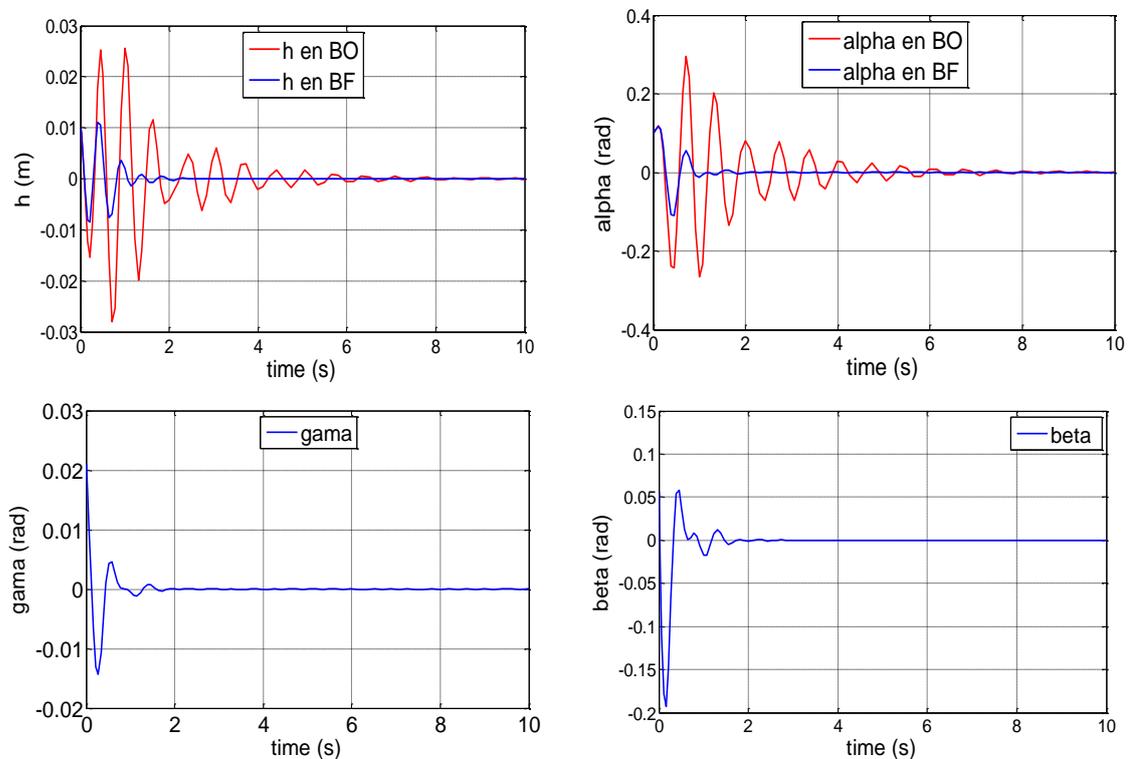


Figure 4.4 : Résultats de la commande LQR à $V_1 = 13$ m/s.

En appliquant la commande LQR pour la vitesse $V_2=14$ m/s, on obtient un système fortement stable et une convergence très rapide avec une amélioration très appréciable dans le coefficient d'amortissement ε (d'une valeur non amortie de -0.06 vers une valeur amortie et positive 0.75). La convergence des états observés se fait avec des angles de braquage des gouvernes dans la limite autorisée (± 0.4 rad en β , ± 0.25 rad en γ).

4.2.3 Robustesse de la commande

Afin de tester la robustesse de la commande, plusieurs simulations sont réalisées vis-à-vis la variation de la vitesse d'écoulement (variation des paramètres internes de système). La figure 4.6 montre la réponse du système pour une plage de vitesse entre 11 m/s et 16 m/s.

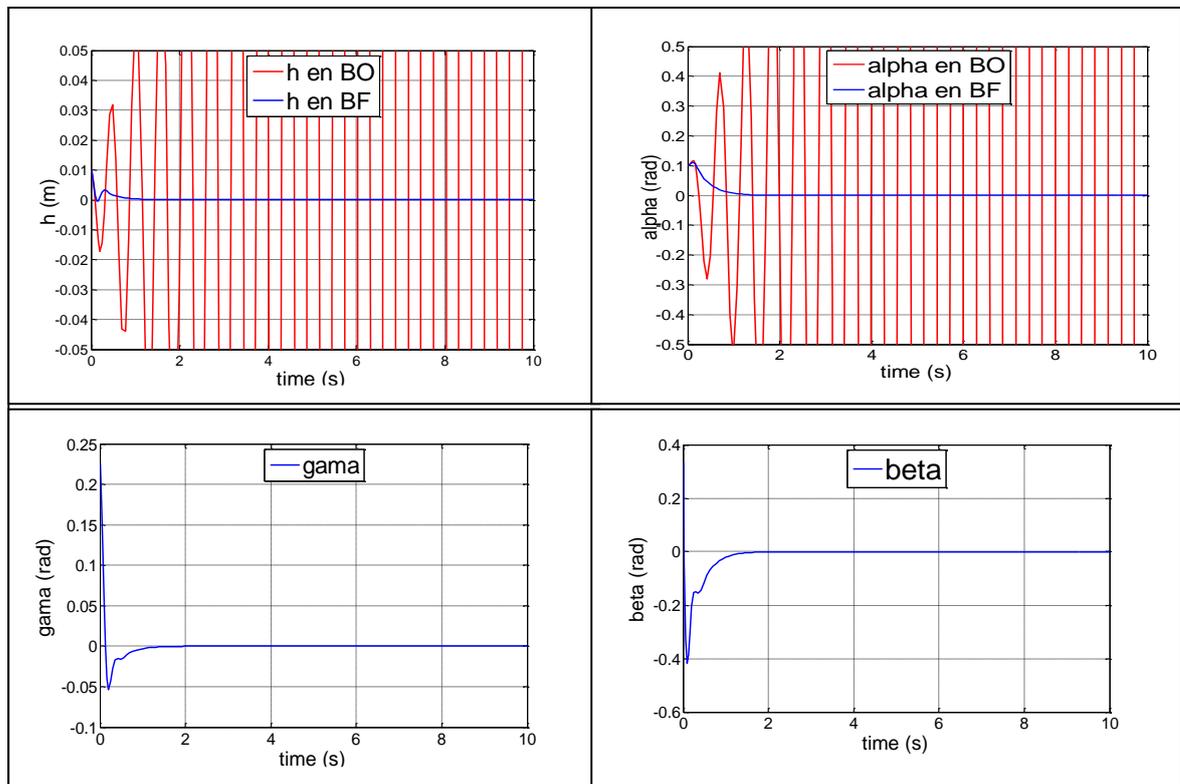


Figure 4.5 : Résultats de la commande LQR à $V_2 = 14$ m/s.

On remarque bien la dégradation de la réponse du système en performance lorsque la vitesse augmente au-delà de la vitesse de flottement mais le système reste stable. La vitesse de flottement en boucle fermée est repérée à 20.1793 m/s, ce qui donne un gain en vitesse de 6.2253 m/s.

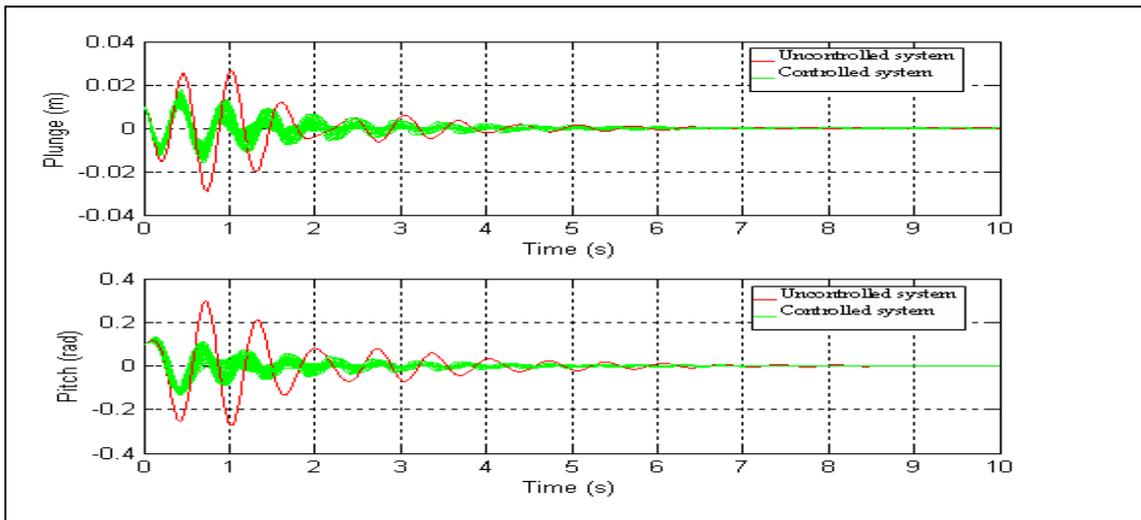


Figure 4.6 : Résultats de la commande LQR vis-à-vis la variation de la vitesse.

A partir des résultats précédents on peut dire que la commande LQR conçue conduit à des résultats satisfaisants en terme de gain en vitesse et de la rapidité d'amortir les oscillations, notamment avec l'utilisation des matrices de pondération adéquates. Ces résultats sont obtenus avec un modèle dont ses paramètres structurels sont supposés linéaires, cependant des non linéarités structurelles et aérodynamiques peuvent exister, donc il est nécessaire de tester la robustesse de cette commande vis-à-vis ces non linéarités.

On va étudier dans ce qui suit la robustesse de la commande vis-à-vis la non linéarité structurelle pour le coefficient de rigidité K_α . Mais avant de simuler le système en boucle fermée, on doit tout d'abord repérer la vitesse de flottement de système non linéaire en boucle ouverte. Après plusieurs simulations successives, la vitesse de flottement est localisée à 10.65 m/s. Ce résultat montre que, la non linéarité structurelle agit d'une manière néfaste sur les caractéristiques dynamiques du système par rapport au système linéaire, ce qui confirme encore l'effet de la flexibilité sur les systèmes dynamiques.

À une vitesse supérieure à la vitesse de flottement, la réponse du système non linéaire en boucle fermée est montrée sur la figure 4.7. On remarque bien que la commande a réussi de stabiliser le système malgré les fortes oscillations enregistrées en boucle ouverte (phénomène de LCO). Avec des simulations

successives, la nouvelle vitesse de flottement du système non linéaire en boucle fermée est repérée à $V_{\text{flottement}} = 12.74 \text{ m/s}$. Donc, on obtient un gain de vitesse égale à 2.09 m/s .

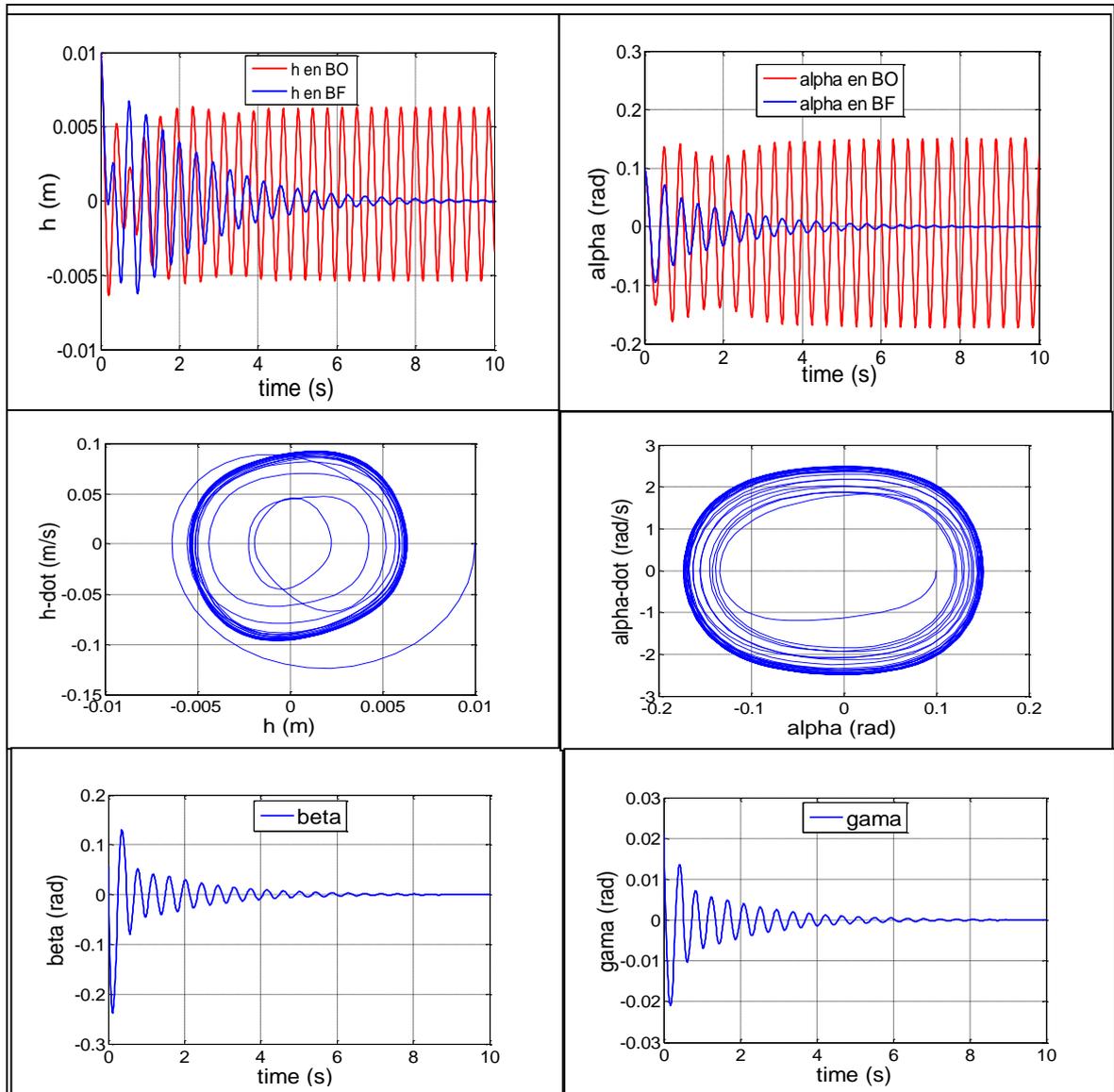


Figure 4.7 : Réponse du modèle non linéaire à $V = 11 \text{ m/s}$.

4.2.4. Application de la commande PRLQR.

La synthèse PRLQR et ses équations sont présentées à la section 3.5 du chapitre 3. Elle permet de synthétiser un contrôleur robuste aux incertitudes paramétriques (modélisées sous forme LFT de la figure 4.8) prise en compte lors du design. Le critère coût PRLQR est donné par l'équation 3.15. Le gain qui minimise ce critère est donné par l'équation 3.13 qui dépend de l'équation de

Riccati 3.14. Ces trois équations font intervenir des paramètres qu'il faut fixer : Q, M, N, γ et ρ . Pour la matrice Q , on pose tout simplement $Q = C^T C$. En effectuant l'analogie des matrices de l'équation 2.103 du chapitre 2 avec celle de l'équation 3.11 du chapitre 3, les matrices M et N sont immédiatement identifiées. Les paramètres γ et ρ sont réglés en fonction du compromis performance/robustesse.

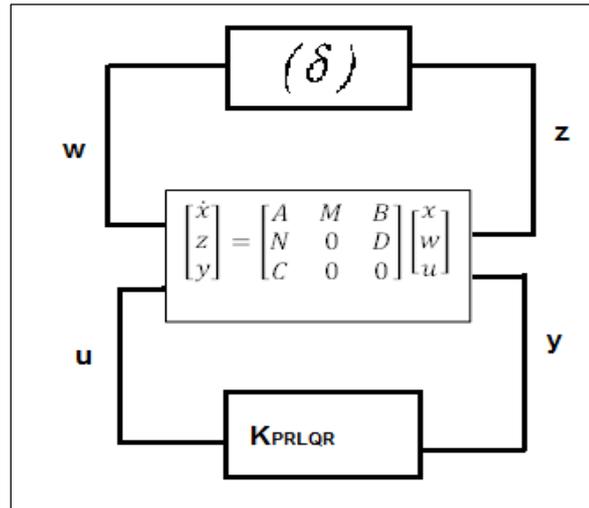


Figure 4.8 : Schéma bloc du régulateur PRLQR.

La vitesse de flottement du système incertain en boucle ouverte est localisée à 13.2 m/s. Si on compare cette valeur à celle du modèle nominal (13.954 m/s), on remarque bien que les performances du système sont dégradées, ce qui confirme l'effet néfaste des incertitudes sur les systèmes physiques.

Pour appliquer cette commande, tous les états du modèle aéroélastique doivent être observables, et le système incertain doit être de la forme LFT de l'équation 3.11.

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont obtenus pour une vitesse $V=13$ m/s comme l'indique le Tableau 4.1.

On note que la valeur importante de gain conduit à des meilleures réponses de système en termes d'amortissement des oscillations, mais avec une grande énergie délivrée par la commande. Pour résoudre ce problème, il est préférable de choisir à partir du Tableau 4.1 un gain intermédiaire qui permet de combiner ces deux objectifs.

ρ	$\dot{\gamma}$	P	K_{PRLQR}
1	1	$P < 0$	-
1	2	$P > 0$	$K = \begin{bmatrix} -667.36 & 2.56 & -24.45 & -5.74 \\ -374.97 & -1.85 & -4.31 & -3.67 \end{bmatrix}$
1	4	$P > 0$	$K = \begin{bmatrix} -218.88 & 2.55 & -23.74 & -1.50 \\ -135.27 & -2.50 & -0.08 & -1.54 \end{bmatrix}$
1	10	$P > 0$	$K = \begin{bmatrix} -160.76 & 2.28 & -35.29 & -0.84 \\ -112.86 & -4.41 & 1.28 & -1.55 \end{bmatrix}$
1	100	$P > 0$	$K = \begin{bmatrix} -143.06 & 0.61 & -109.37 & -0.45 \\ -126.87 & -18.74 & 6.48 & -2.82 \end{bmatrix}$
4	4	$P > 0$	$K = \begin{bmatrix} -54.72 & 0.63 & -5.93 & -0.37 \\ -33.81 & -0.62 & -0.02 & -0.38 \end{bmatrix}$
10	10	$P > 0$	$K = \begin{bmatrix} -16.07 & 0.22 & -3.52 & -0.08 \\ -11.28 & -0.44 & 0.12 & -0.15 \end{bmatrix}$

Tableau 4.1 Gains de la commande PRLQR.

Pour des valeurs de gain intermédiaire on choisit le gain correspondant à $\rho = 4$ et $\dot{\gamma} = 4$ est :

La réponse temporelle du système bouclé sur K_{PRLQR} est présentée sur la figure 4.9. On obtient un système bien amorti dont La convergence se fait sans oscillations avec un temps de réponse de 1s néanmoins les angles de déflexion des surfaces de commande sont en dehors des limites autorisées, car la valeur initiale de $\beta = 1.5 \text{ rad}$ et $\gamma = 1.6 \text{ rad}$. Pour remédier à ce problème, on ajoute une action des saturateurs dans la commande. Ceci est illustré dans figure 4.10, on constate que cette modification dans la commande n'a pas d'impact significatif sur la réponse de système.

Le test de robustesse de la commande vis-à-vis la variation de vitesse est illustré sur la figure 4.11. On remarque une excellente robustesse de cette commande pour les variations des paramètres internes du système.

Le calcul de la vitesse de flottement en boucle fermée conduit à la valeur de 28.8716 m/s. Donc, on a une marge considérable, de 15.6716 m/s ce qui confirme de plus la robustesse de la commande.

A partir de ces résultats obtenus, on peut dire que la commande PRLQR permet d'avoir des résultats très satisfaisants en termes de la robustesse vis-à-vis du changement de la vitesse d'écoulement et les paramètres incertains.

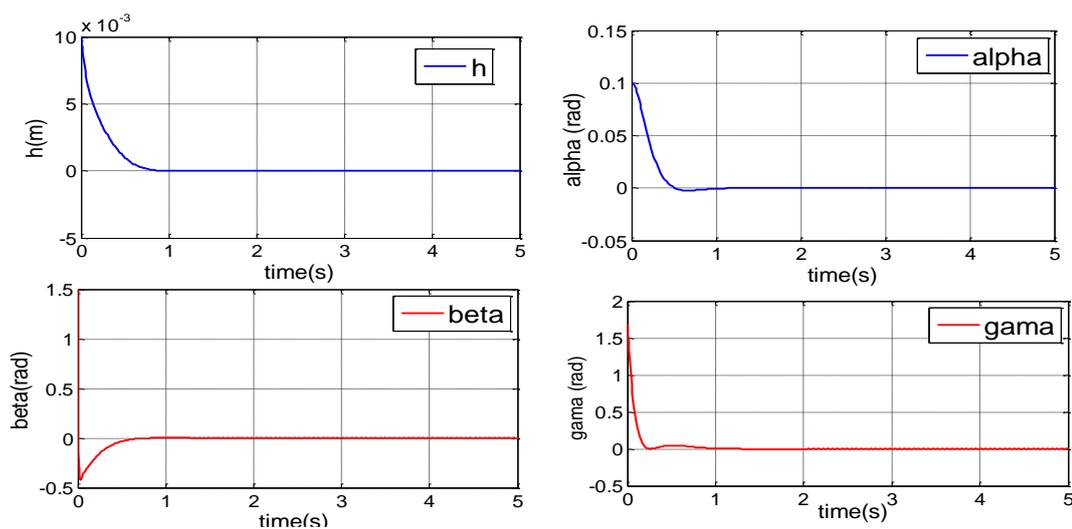


Figure 4.9 : Réponse du système incertain pour $V=14$ m/s.

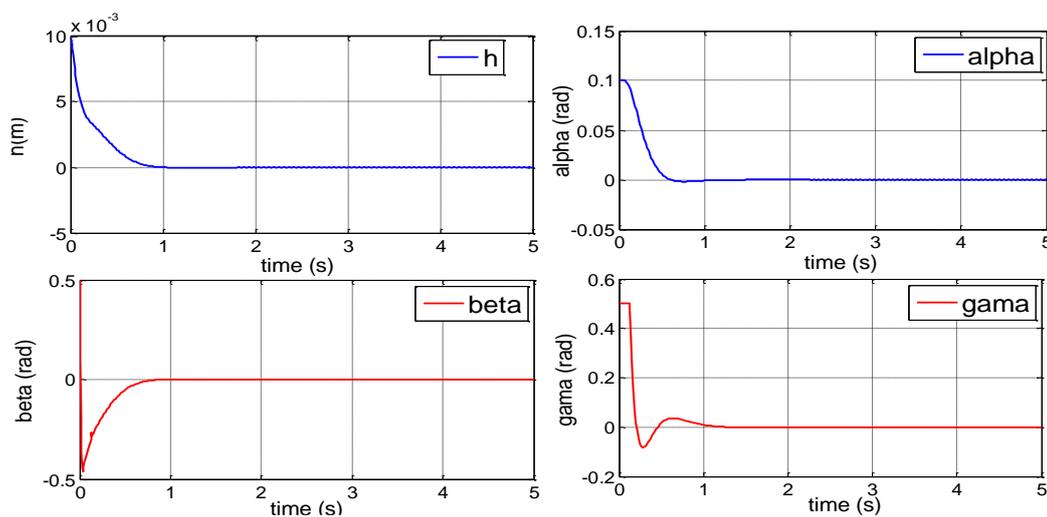


Figure 4.10 : Résultats de la commande PRLQR avec saturation.

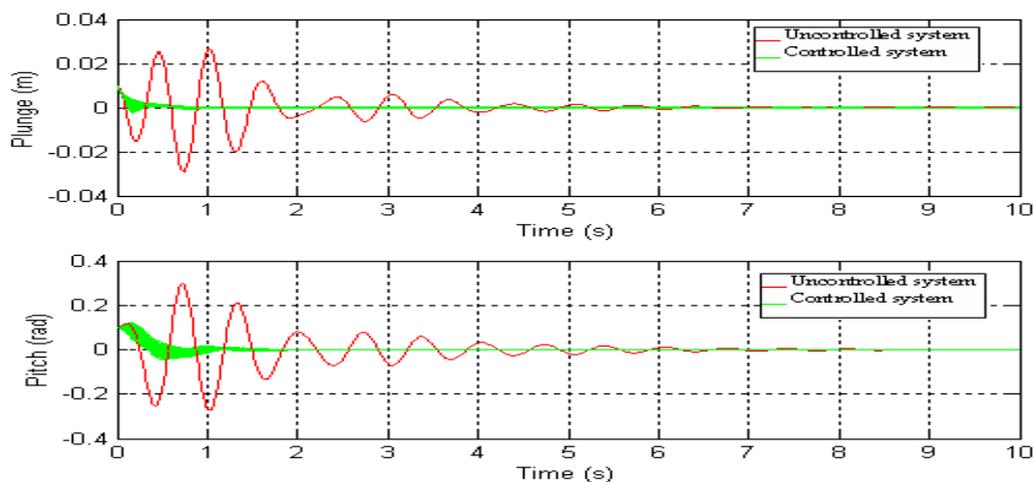


Figure 4.11 : Réponse du système pour des vitesses entre 11m/s et 16 m/s.

4.2.5. Application de la commande non linéaire par mode glissant :

L'objectif de cette section est d'améliorer les performances et la robustesse de notre modèle aéroélastique en boucle fermée par la commande non linéaire par mode glissant comme le montre la figure 4.12. L'amélioration concerne l'annulation rapide du phénomène LCO et l'éloignement de la vitesse de flottement par rapport à la vitesse critique de flottement en boucle ouverte. De plus, un gain élevé par retour de surface de glissement est ajouté à l'équation de commande par mode glissant afin d'améliorer la vitesse de convergence et réduire le phénomène de chattering.

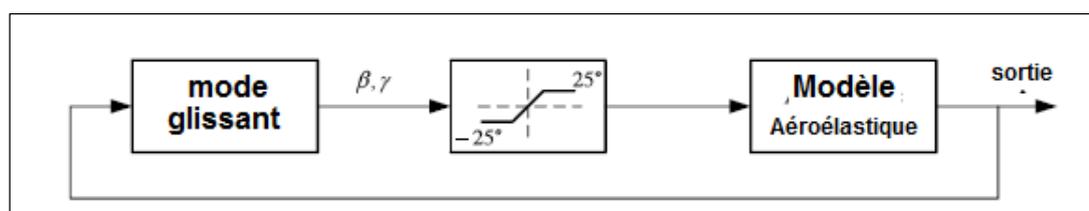


Figure 4.12 : Schéma bloc du régulateur mode glissant.

La loi de commande élaborée dans le deuxième chapitre pour le sous-système 1 est montrée sur le tableau 4.2. De la même manière on peut obtenir la loi de commande pour le sous-système 2.

Sous-système 1	$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{h_1}x_1 + a_{\dot{h}_1}x_2 + a_{\alpha_{11}}x_3 + a_{\alpha_{12}}x_3^2 + a_{\alpha_{13}}x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_1}x_4 + u_1 \\ &\quad + w_1 \end{aligned}$
surface de glissement	$s_1 = c_1x_1 + x_2$
Loi de commande	$\begin{aligned} u_1 &= u_{1eq} + u_{1Ks} + \Delta u \\ u_{1eq} &= -(a_{h_1} + \mu_1c_1)x_1 - (a_{\dot{h}_1} + c_1)x_2 \\ &\quad - (a_{\alpha_{11}}x_3 + a_{\alpha_{12}}x_3^2 + a_{\alpha_{13}}x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_1}x_4) \\ u_{1Ks} &= -K_1s_1 \\ \Delta u &= -\mu_1s_1 - M_1 \cdot \text{sign}(s_1) \end{aligned}$

Tableau 4.2 : Synthèse de la commande par mode glissant.

Résultats de simulation :

Dans cette section, on va présenter les résultats de simulation du modèle aéroélastique non linéaire en boucle ouverte et en boucle fermée. La méthode de Runge-Kutta avec un pas variable est utilisée pour résoudre les équations de notre système implantées en SIMULINK.

La figure 4.13 montre le mouvement de tangage et le déplacement vertical du système en boucle ouverte. Cette simulation est réalisée avec une vitesse aérodynamique $U = 19.0 \text{ m/s}$ supérieure à la vitesse critique de flottement localisée à $U = 10.7 \text{ m/s}$. Les valeurs de conditions initiales sont choisies comme suit : $x(0) = (h, \alpha, \dot{h}, \dot{\alpha}) = (0.01 \text{ m}, 5.73^\circ, 0 \text{ m/s}, 0^\circ/\text{s})$

On constate d'après la figure 4.13 (a) et (b), que le système possède un mouvement oscillatoire instable. On remarque aussi, que le système présente au départ un mouvement vertical chaotique montré sur la figure 4.13(d) et devienne oscillatoire instable par la suite.

Ce mouvement indésirable pour la stabilité est le confort des avions flexibles conduit la structure vers la fatigue ou bien pour le pire des cas à la destruction de l'appareil. Donc, pour faire face à ce phénomène, une commande performante robuste est exigée.

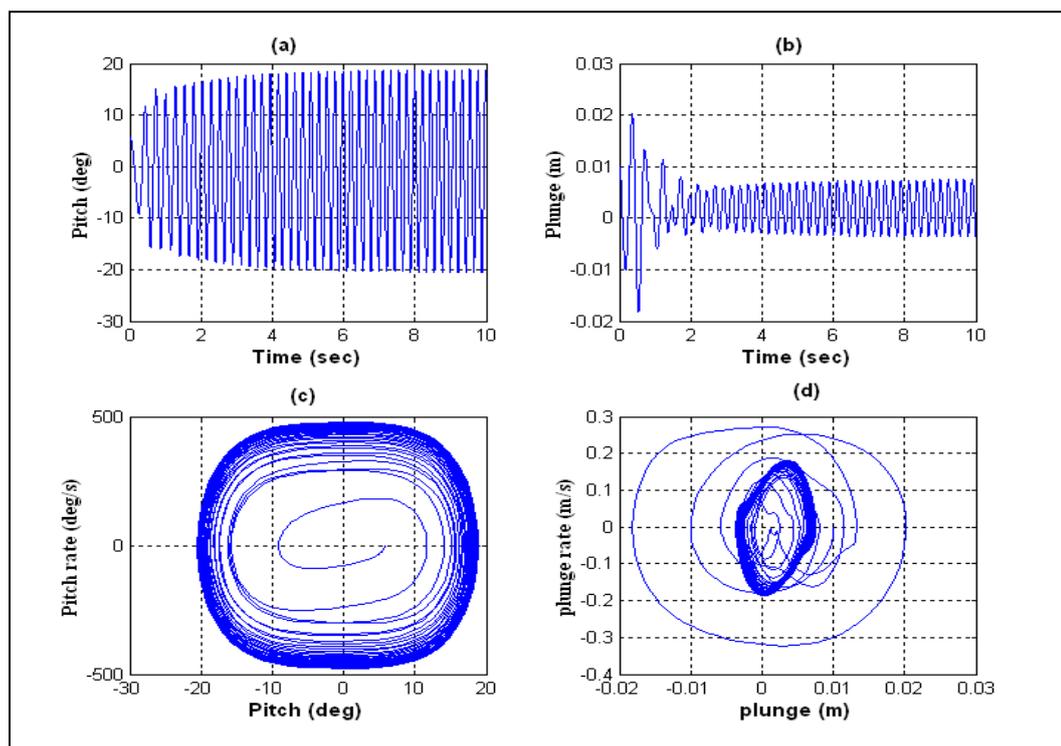


Figure 4.13 : Réponse du système non linéaire en boucle ouverte.

Les simulations en boucle fermée sont réalisées avec les mêmes conditions qu'en boucle ouverte et les paramètres de commande sont choisis comme suit :

$$c_1 = c_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1, K_1 = 1, K_2 = 10, M_1 = 0.05, \text{ et } M_2 = 0.1.$$

Une forme sinusoïdale est utilisée pour simuler la turbulence, elle est donnée par :

$$w_1 = w_2 = 0.01\sin(t) .$$

La figure 4.14 montre le mouvement du système en tangage et en déplacement vertical ainsi la déflexion des deux surfaces de commande de bord d'attaque (LE) et bord de fuite (TE). On constate bien qu'avec la commande par mode glissant les oscillations sont éliminées et les états de tangage et de déplacement vertical convergent d'une manière souple vers le zéro pendant 2s. Néanmoins, le braquage de la gouverne dépasse les limites autorisées, ceci est en dehors de la capacité de l'actionnaire qui peut être détruit facilement (figure d). Les figures (e) et (f) montrent l'évolution de la surface de glissement, on remarque une convergence rapide vers le zéro. L'évolution des états (x_1, x_2) et (x_3, x_4) dans l'espace des phases sont considérés dans les figures (g) et (h) respectivement.

On constate que la trajectoire du point de fonctionnement après avoir atteint la surface de glissement (durant un régime transitoire appelé « reaching time ») oscille de part et d'autre de la surface (avec une fréquence élevée et une amplitude faible) et tend rapidement vers le point de fonctionnement désiré. La régulation reste très satisfaisante en présence de perturbation.

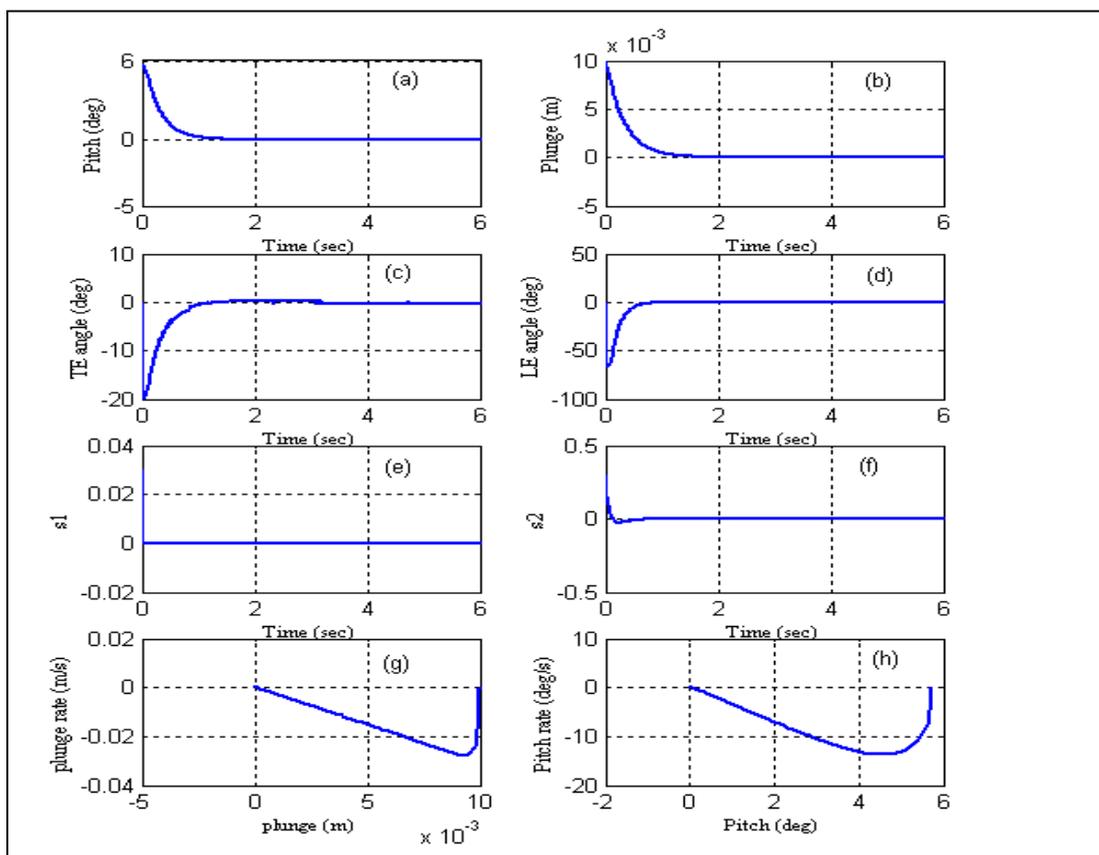


Figure 4.14: Résultats de la méthode SMC.

La figure 4.15 montre la réponse du système avec une contrainte sur la déflexion des gouvernes limité entre $\pm 25^\circ$. On note que, les deux mouvements convergent aussi rapidement vers le point d'équilibre, le signal de commande se limite dans les capacités des actionnaires. Néanmoins, le temps de réponse est un peu lent par rapport au cas précédant.

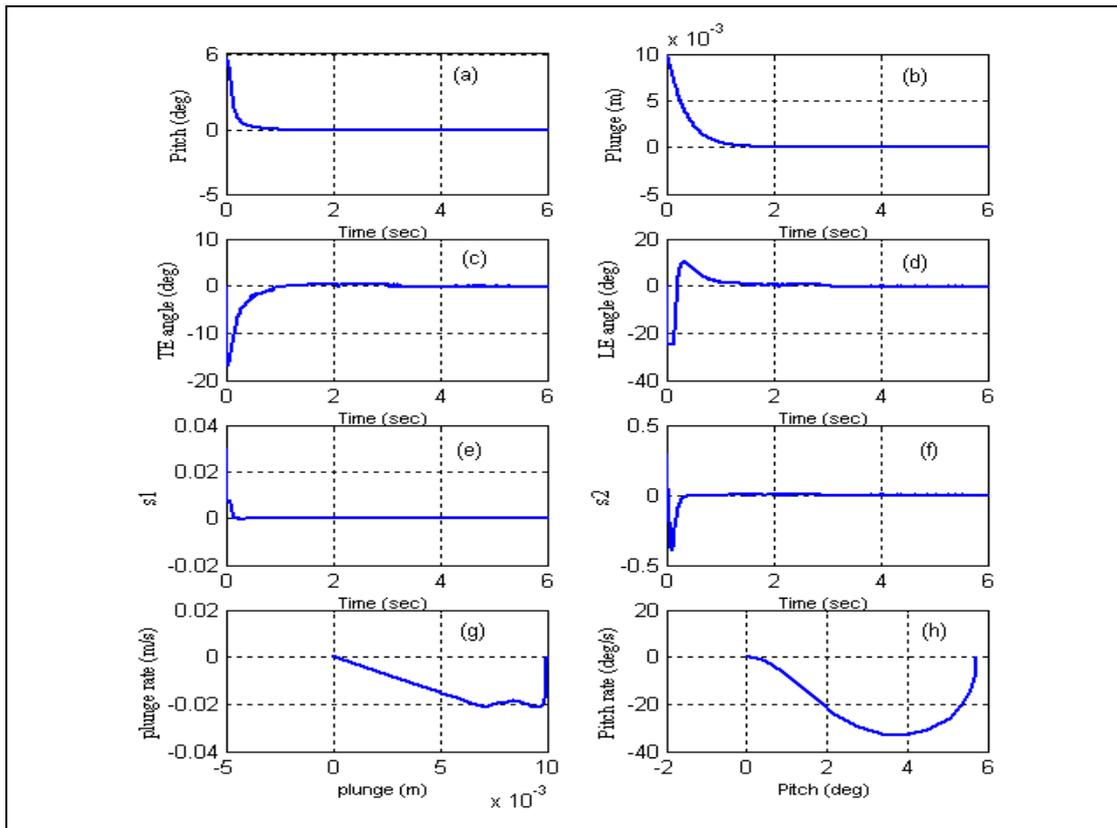


Figure 4.15 : Résultats de la méthode SMC avec une contrainte sur le braquage des gouvernes de $\pm 25^\circ$.

La figure 4.16 présente la régulation des deux mouvements du système avec une fonction de commutation contenu au voisinage de la surface $S = 0$ pour éviter le problème de chattering. Nous remarquons une très bonne performance de régulation malgré la présence de perturbation et la contrainte sur la commande ce qui témoigne la robustesse de la commande.

La figure 4.17 présente une comparaison entre la commande proposée et la commande conventionnelle. On remarque clairement la dégradation des performances du système en utilisant la commande par mode glissant conventionnelle par rapport à la commande proposée.

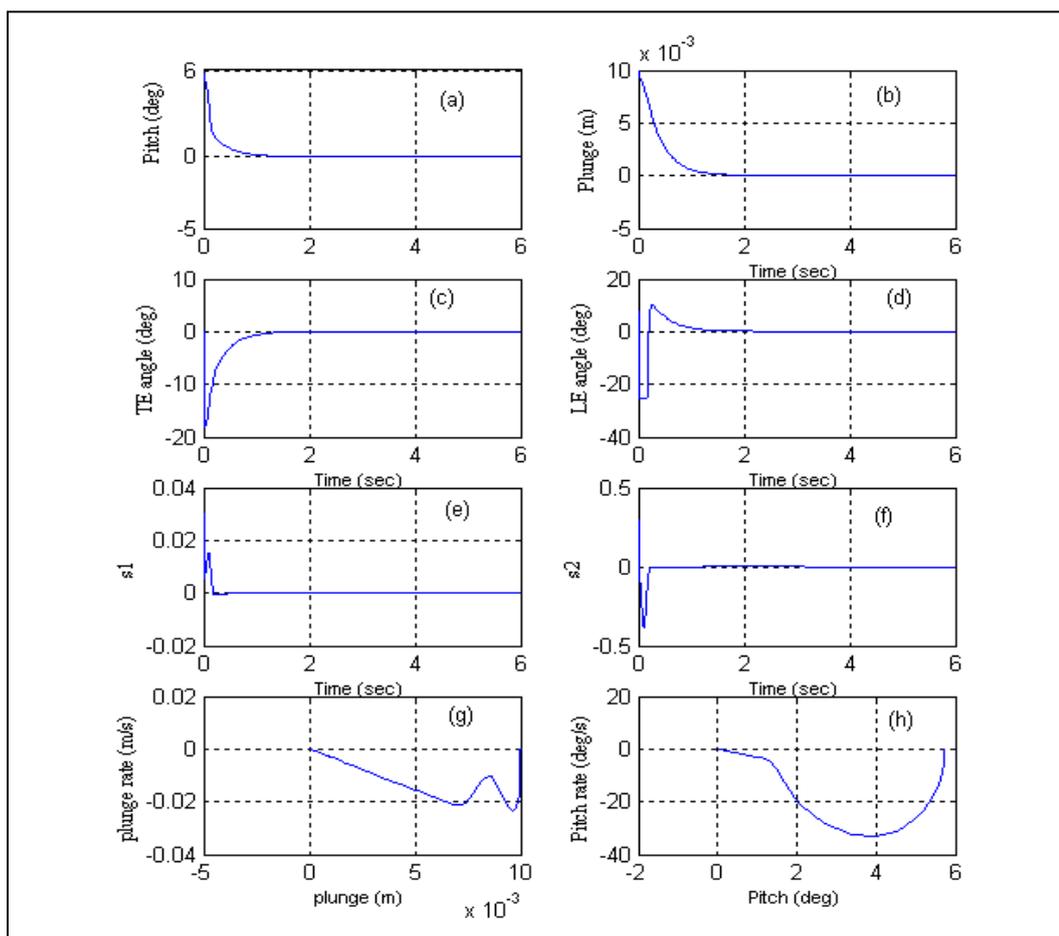


Figure 4.16 : Résultats de la méthode SMC perturbée avec une contrainte sur le braquage des gouvernes de $\pm 25^\circ$;

Pour tester encore mieux la robustesse de la commande, cette dernière est engagée 2s après le début des oscillations comme le montre la figure 4.18. On constate bien que ces dernières sont rapidement amorties, ce qui justifié encore l'excellente robustesse de la commande.

D'autres simulations sont considérées pour des vitesses supérieures à la vitesse de flottement. On a remarqué toujours la convergence des deux mouvements vers le point d'équilibre comme le montre par exemple la figure 4.19 pour une vitesse de 35 m/s . Une autre remarque très intéressante d'après la figure 4.20 ci-dessous, montre que dès qu'on augmente la vitesse, la commande devienne de plus en plus efficace et converge vers les limites de capacité des actionnaires.

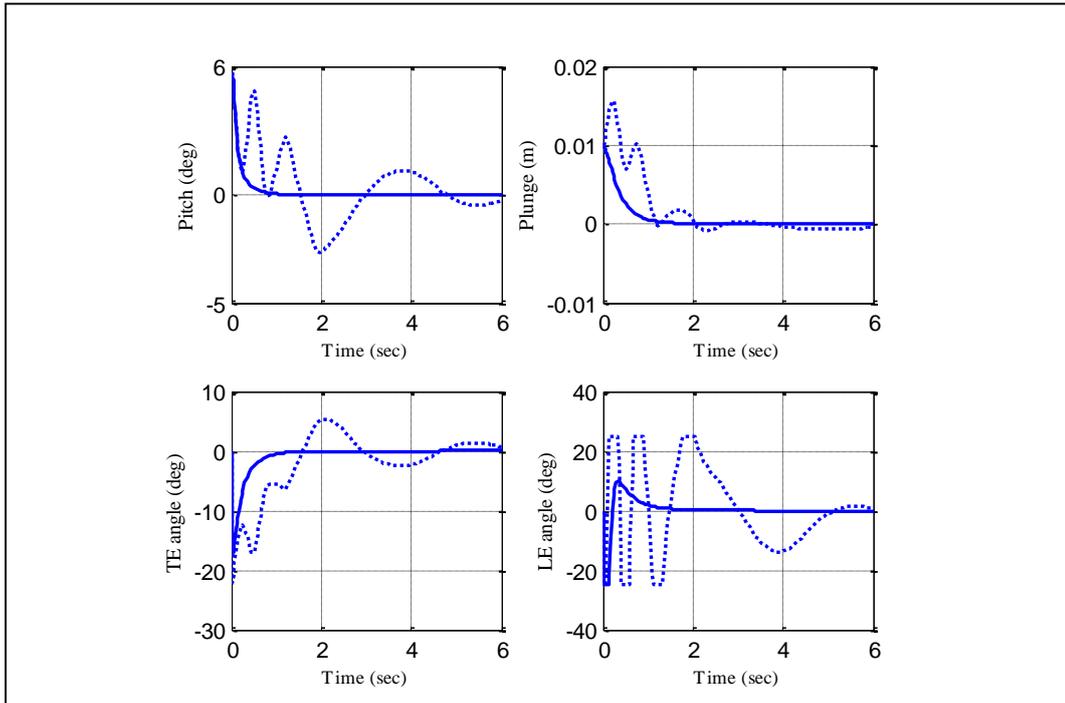


Figure 4.17: Résultats de la méthode SMC (...) Conventionnelle et SMC (—) proposée.

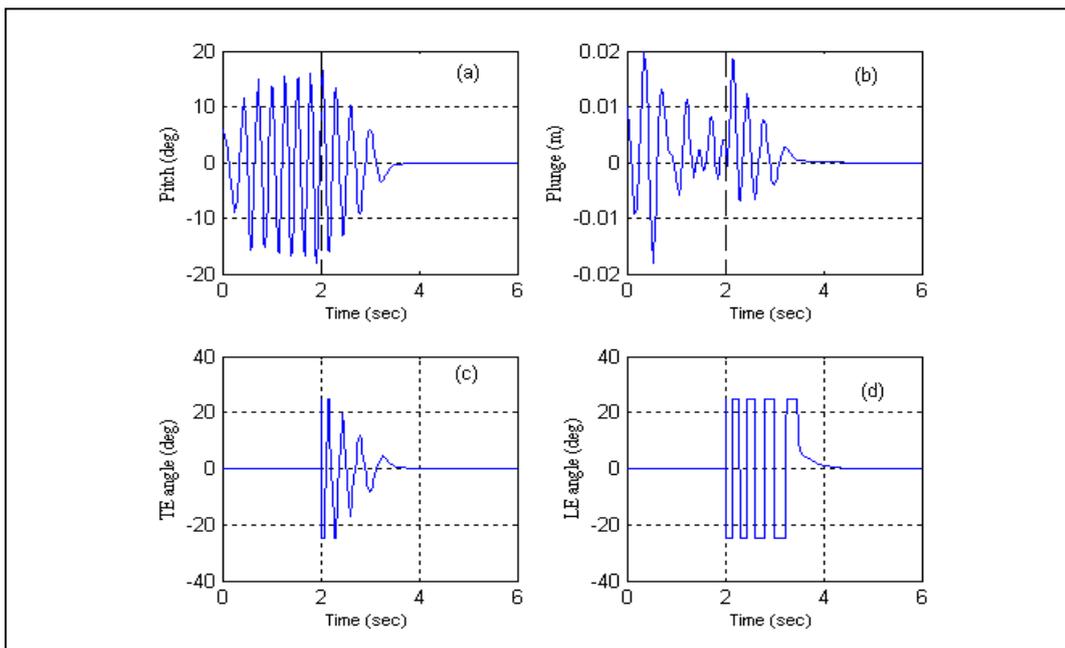


Figure 4.18 : Résultats de la méthode SMC perturbée avec une action de la commande après 2 s et une contrainte sur le braquage des gouvernes de $\pm 25^\circ$;

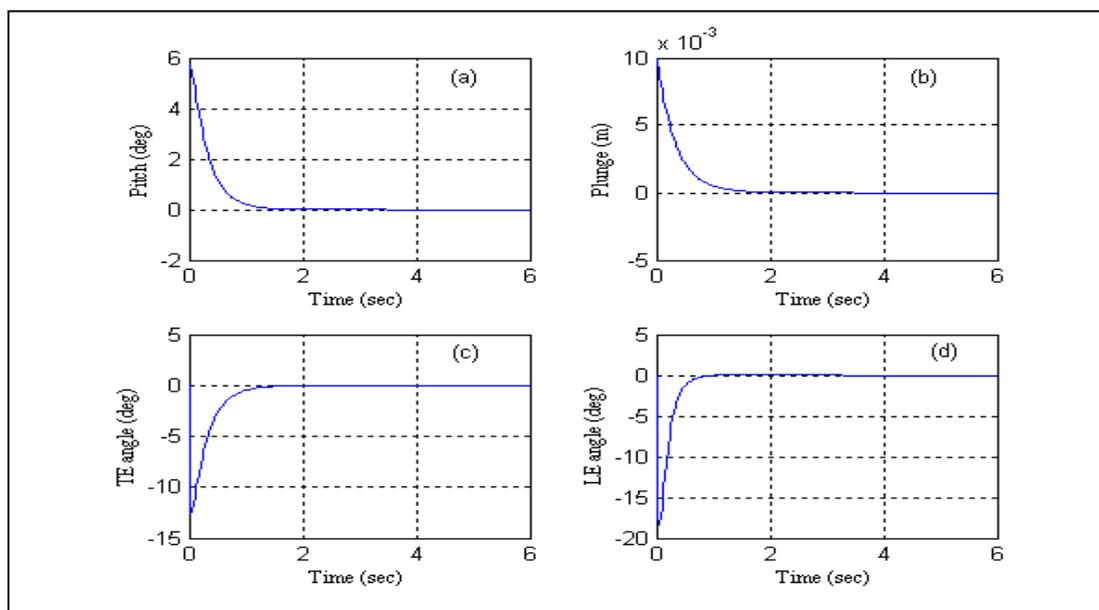


Figure 4.19 : Résultats de la méthode SMC avec perturbation à $U = 35 \text{ m/s}$;

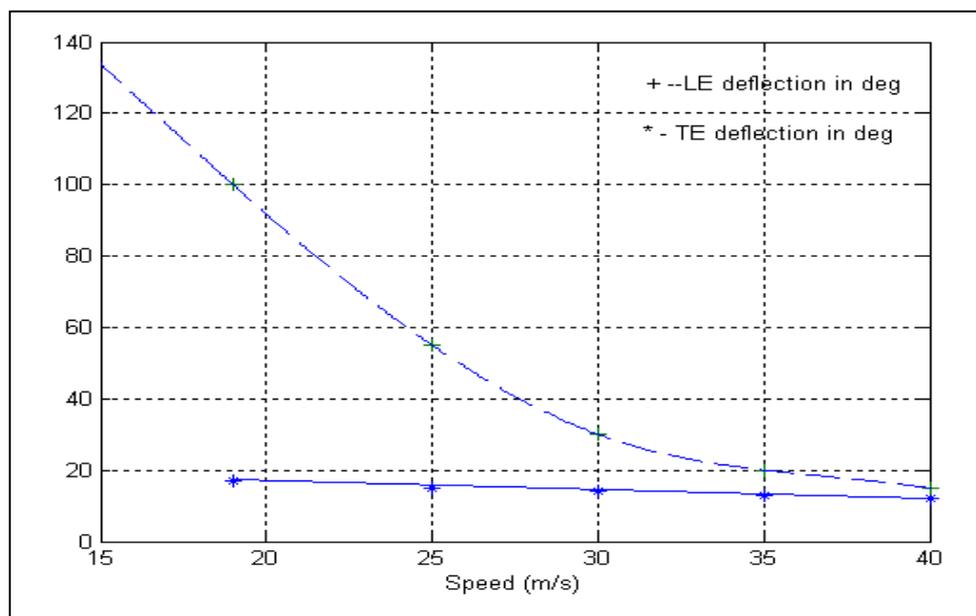


Figure 4.20 : Evolution de déflexion des surfaces de commande en fonction des vitesses aérodynamiques.

Pour conclure cette partie, le tableau 4.3 suivant établit une comparaison entre les méthodes de commande élaborées pour le modèle aéroélastique. La première ligne nous indique que la vitesse de flottement du modèle diminue en présence des incertitudes et dues non linéarités du modèle, autrement dit, que ces derniers jouent un rôle néfaste sur les caractéristiques dynamique du modèle. Avec la présence de la commande constate bien que les caractéristiques du modèle vis-à-vis la vitesse

de flottement sont nettement améliorées surtout par la commande PRLQR et mode glissant, ce qui nous permet de dire que, la robustesse les performances sont très bien améliorées en utilisant les commande PRLQR et mode glissant.

Pour la commande PRLQR, un gain en vitesse très important est obtenu ce qui montre la robustesse de la commande vis-à-vis du changement de la vitesse de l'écoulement ainsi que les incertitudes paramétriques qui affecte le système.

Pour la commande par mode glissant, puisque la non linéarité est supprimée par la commande équivalente et les perturbations internes ou externes sont compensées par la commande de commutation, donc la robustesse de la commande est garantie.

La commande utilisée	Commande LQR	Commande PRLQR	Commande non linéaire par mode glissant
Vitesse de flottement en BO en m/s	13.9540	13.2000	10.65
Vitesse de flottement en BF en m/s	20.1793	28.8716	néant.
Gain en vitesse en m/s	6.2253	15.6716	-
Performance	moins performante	performante	très performante
Robustesse	Moins robuste	Robuste	très robuste

Tableau 4.3 : Résumé des résultats obtenus.

Pour conclure, on peut dire qu'une forte amélioration dans la vitesse de flottement est obtenue en utilisant la commande PRLQR et la commande non linéaire par mode glissant par rapport à la commande classique LQR, ce qui justifie leurs robustesse vis-à-vis les incertitudes paramétriques et la non linéarité du modèle respectivement.

4.3. Simulation du modèle longitudinal de l'avion flexible B52.

4.3.1. Simulation et interprétation des résultats en boucle ouverte :

La dynamique longitudinale de l'avion flexible B52 est considérée dans cette étude, ce dernier est composé du mode courte période (short period) et cinq modes flexibles. Le modèle d'état est caractérisé par 2 entrées de commande, 3 entrées de perturbations, 2 sorties, et 12 états.

Les 2 entrées sont :

- Une commande de braquage des gouvernes de profondeur δ_e permettant le mouvement de l'avion autour de son axe latéral (mouvement de tangage) ;
- Une commande de braquage des gouvernes de canard δ_c permettant la réduction de l'effet de la turbulence ;

Les 2 sorties correspondent aux mesure de :

- La vitesse de tangage ;
- L'accélération longitudinale effectuée en 3 points régulièrement espacés sur le fuselage.

Le vecteur d'état se compose de :

- 2 états rigides, l'angle d'incidence α et la vitesse de tangage q ;
- 10 états correspondant à 5 modes flexibles modélisés entre 7 et 39 rad/s. Les états sont sous forme de coordonnées généralisées η_j et $\dot{\eta}_j$ ($j = 1, \dots, 5$).

L'analyse numérique des modes rigides et flexibles sont indiquées dans le tableau 4.4 :

Modes	Valeurs propres	Amortissement	Fréquences (rad/s)
mode Short period	$-1.76 \pm 2.61i$	0.559	3.14
1. mode flexible	$-3.03 \pm 6.97i$	0.399	7.60
2. mode flexible	$-0.856 \pm 15.2i$	0.0563	15.2
3. mode flexible	$-0.214 \pm 19.7i$	0.0108	19.7
4. mode flexible	$-1.36 \pm 20.2i$	0.0672	20.2
5. mode flexible	$-0.877 \pm 38.3i$	0.0229	38.3

Tableau 4.4: modes Rigides et flexibles en boucle ouverte.

Ces données permettent de caractériser les modes du système en termes d'amortissement et pulsation. On constate que les modes flexibles sont moins amortis que le mode rigide. On remarque aussi que le premier mode flexible est beaucoup plus amorti que les autres modes flexibles et il est très proche du mode rigide. Sur le plan fréquence, on remarque que les pulsations des modes flexibles sont proches de la bande des modes rigides et surtout pour le premier mode flexible, ce qui confirme les notions qu'on a présentées précédemment.

4.3.2. Réduction des effets de turbulence sur les accélérations.

Le schéma bloc de la figure 4.21 suivante représente le principe de la commande en boucle fermée pour la réduction de l'effet de turbulence sur l'accélération de l'avion.

Le modèle de l'avion pondéré G est présenté sur la figure 3.5 dans la section 3.6 du chapitre 3. Il possède deux entrées u et w_g et une sortie y . La commande u représente le braquage des gouvernes de profondeur et de canard horizontal.

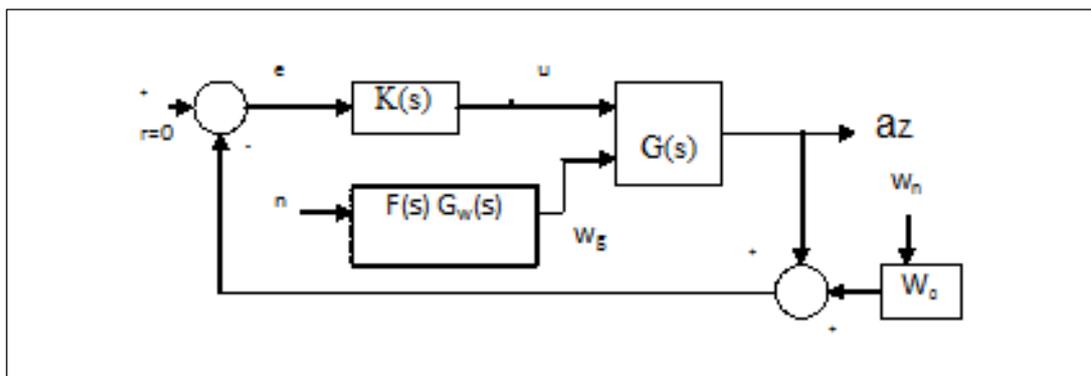


Figure 4.21 : Schéma bloc de réduction de l'effet de turbulence

Le signal de turbulence $w_g = [w_{g1} \ w_{g2} \ w_{g3}]^T$ agissant sur l'avion en trois stations par rapport au centre de gravité est généré par le filtre de Dryden selon la figure 4.22 suivante :

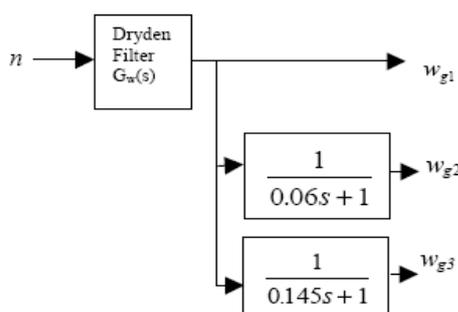


Figure 4.22 : Rafales des vents utilisées [27]

La figure montre que w_{g1} est la première rafale sur l'avion. La deuxième et la troisième rafale w_{g2} et w_{g3} représentent la rafale w_{g1} retardée par 0.06s et 0.145s respectivement.

Pour le bon conditionnement du correcteur et des ordres, on fixe un gain constant en pondération afin de minimiser l'amplitude et l'ordre du contrôleur par $W_1 = \text{diag}(5,2)$. La spécification en performance $\|T_{w_g y}(j\omega)\|$ est renforcée par la fonction de pondération W_2 pour avoir $\|W_2 T_{w_g y}\|_{\infty} < 1$. Après plusieurs essais en simulation, la fonctionne W_2 est ajustée comme $W_2(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$, $k=500$, $\tau = 0.05$.

Une pondération faible de l'ordre de $W_0 = 10^{-4}$ est prise pour les bruits de mesures.

4.3.2.1. Discussions des résultats en simulation :

Les résultats du programme qu'on a développé sous MATLAB/SIMUINK dans cette partie sont basés de manière similaire à l'étude présentée dans [50], permettant ainsi d'obtenir nos propres résultats, à des fins de comparaison et reviennent à étudier l'importance du régulateur pour alléger l'effet de turbulence type orage ($\sigma_w = 4\text{m/s}$, $L_w = 580\text{m}$). On compare les résultats réalisée entre la réponse de l'avion en boucle ouverte et la réponse en boucle fermée avec les trois régulateurs envisagés (LQG, H_2 et H_∞).

La réponse temporelle de l'avion en boucle ouverte due aux rafales verticales agissant sur l'avion est représentée sur la figure 4.23. La figure 4.23 (a) montre la réponse de l'avion en termes d'accélération aux signaux d'entrée des rafales présentées sur la figure 4.23 (b, c, d), on constate que l'accélération est très sévère et inconfortable ($\pm 2g$).

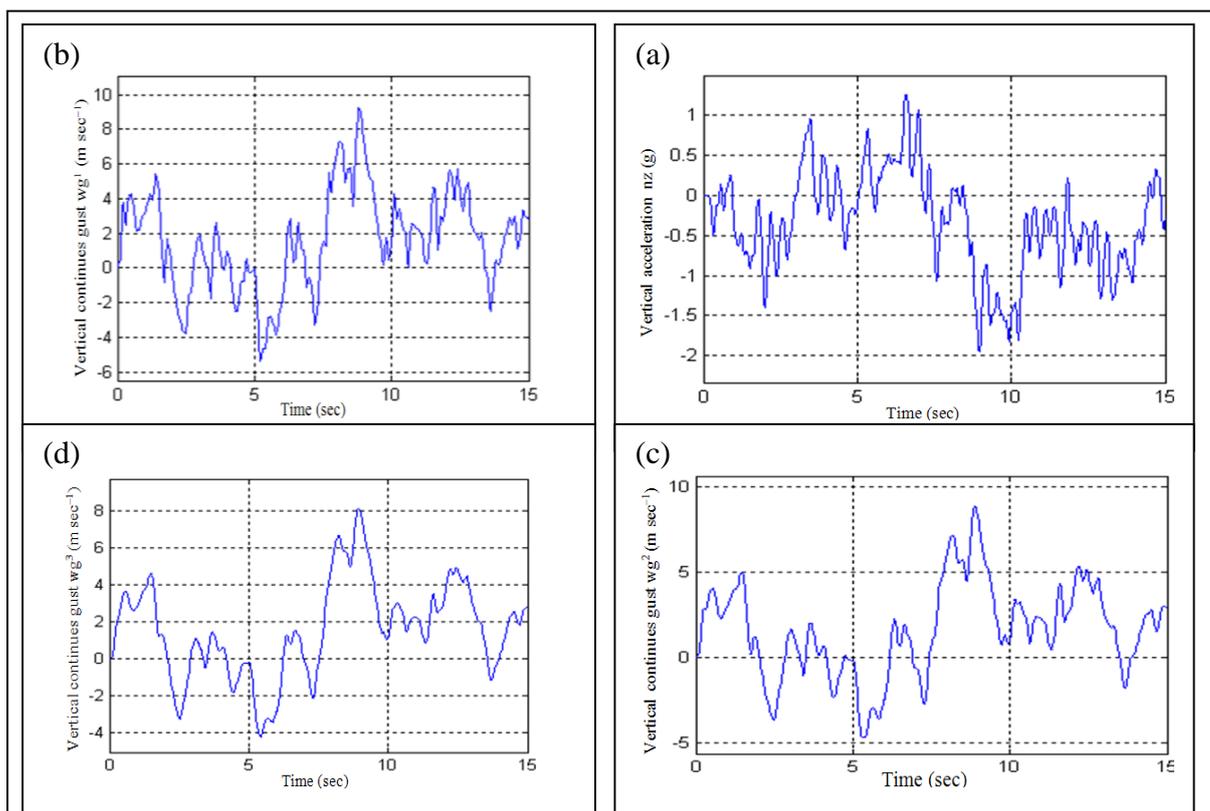


Figure 4.23 : Réponse de l'avion : (a) Accélération $a_z(g)$; (b), (c), (d) : signaux des rafales des vents.

4.3.2.2. Application de la commande LQG :

Le schéma bloc de la commande optimale avec estimateur LQG est montré sur la figure 4.24 où le contrôleur est composé d'un estimateur d'état de KALMAN et d'un contrôleur LQR (dont les entrées sont des états estimés).

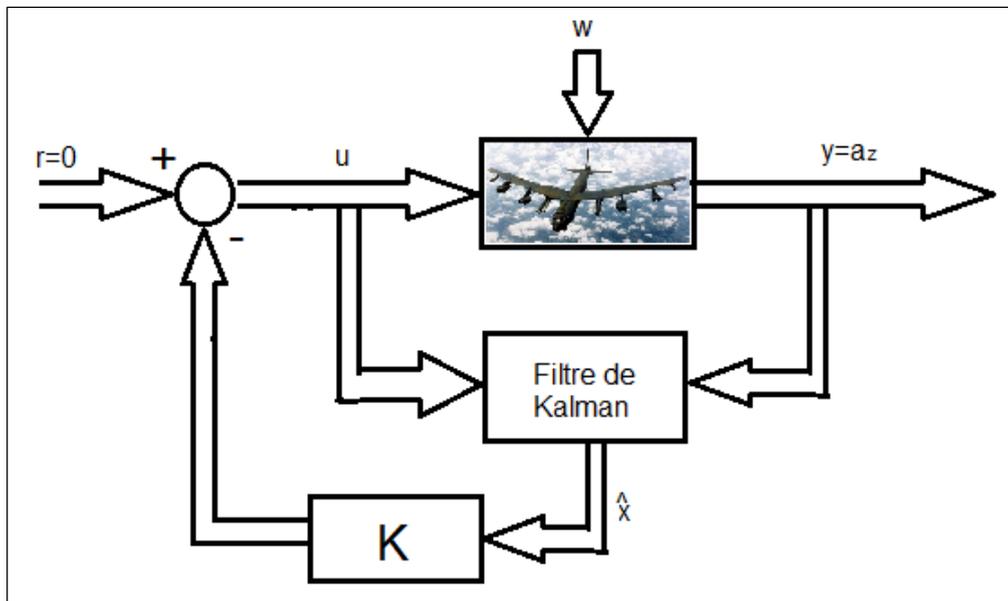


Figure 4.24 : Régulateur LQG.

Selon la figure 4.24 et l'étude présentée dans la section 3.4 du chapitre 3, la représentation d'état du correcteur LQG s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK - K_f C & K_f \\ -K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ u \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

La mise en œuvre de la commande optimale LQG sur notre modèle avion ayant pour effet d'alléger la rafale de vent est présentée sur la figure 4.25. Dans cette figure, la variation de l'accélération verticale de l'avion dans le temps est montrée sur la figure (a) où le contrôleur LQG va agir sur les deux gouvernes de commande du mouvement longitudinal : la gouverne de profondeur et le canard horizontal. Ainsi, on voit bien que l'accélération est radicalement réduite par un facteur de 10^{-4} par rapport à la réponse en boucle ouverte. Cela signifie que cette accélération est presque nulle et elle très confortable. La déflexion des deux surfaces de commande sont acceptables ($\mp 0.015 \text{ rad}$ pour la gouverne de profondeur et $\mp 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ pour le canard) d'après les figures (b) et (c).

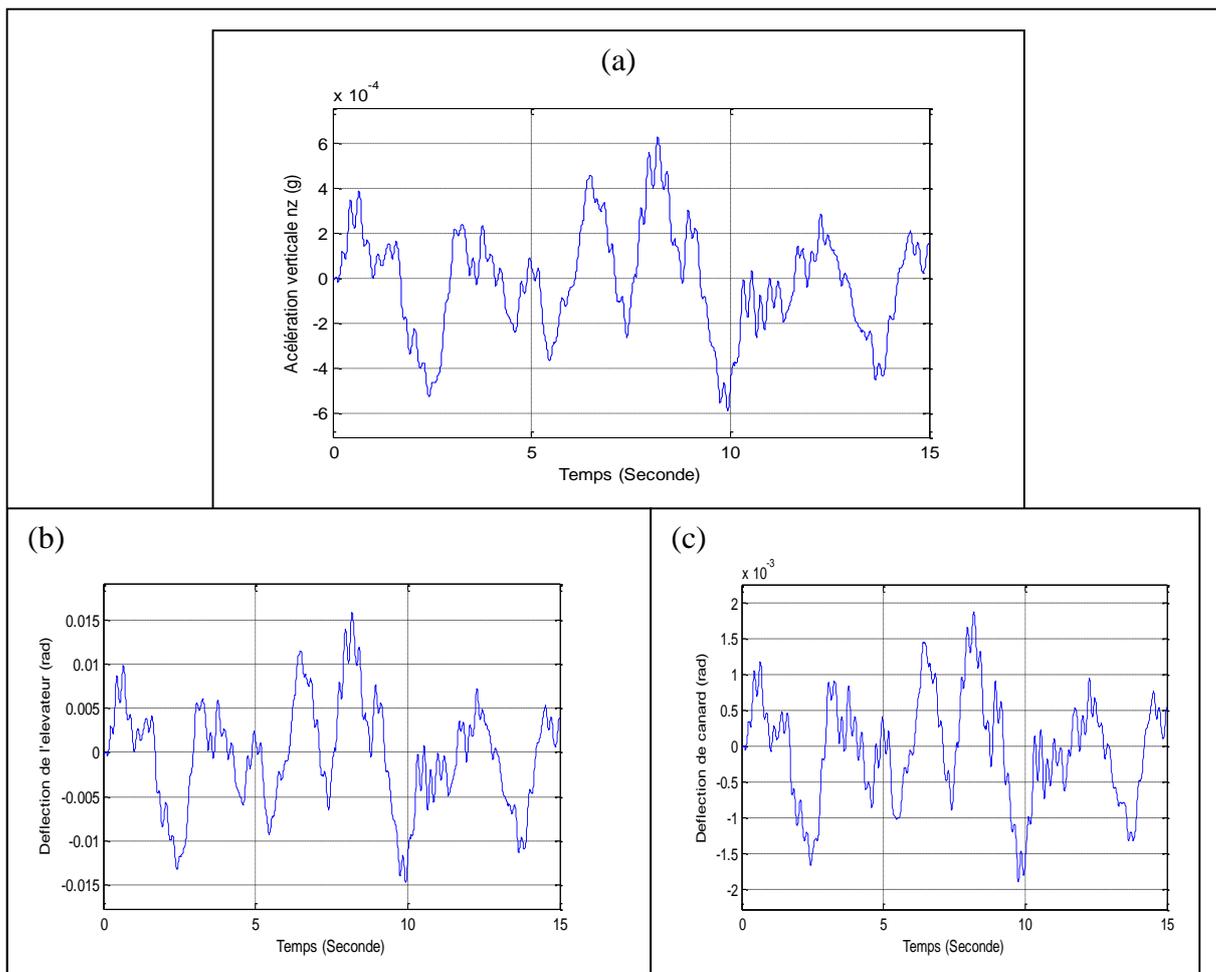


Figure 4.25 : Résultats de la commande LQG.

4.3.2.3. Application des commandes H_2 et H_∞ :

Pour élaborer le contrôleur H_2 et H_∞ sur le modèle nominal de l'avion afin d'atteindre les spécifications de performance et de robustesse, ce dernier a été augmenté par les fonctions de pondérations mentionnées précédemment sur la figure 3.5 dans la section 3.6 du chapitre 3.

La synthèse H_∞ et H_2 vise à concevoir, à partir du modèle nominal de l'avion flexible, un contrôleur qui minimise suffisamment la norme $H_\infty(H_2)$ pour que le contrôle réduit l'effet de la turbulence sur l'accélération verticale. La structure de schéma bloc du système en boucle fermée est présentée sur la figure 4.26.

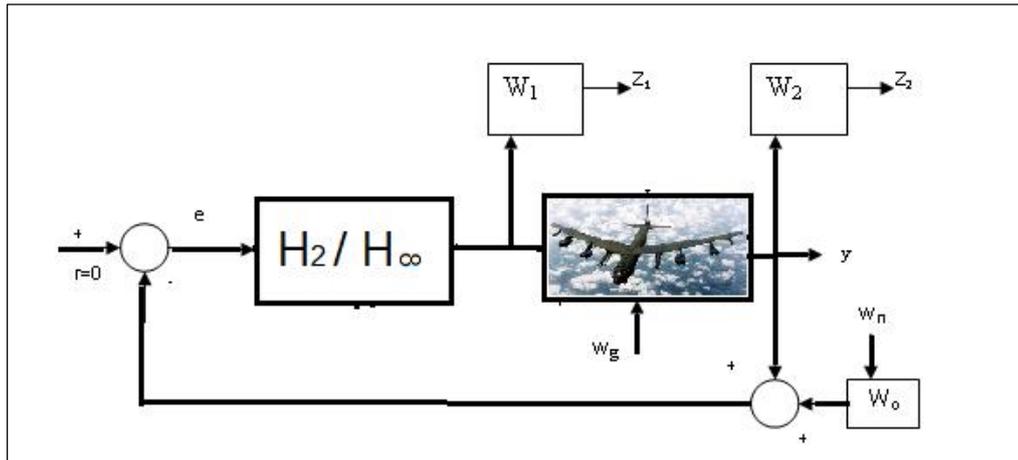


Figure 4.26 : Régulateur H_2 et H_∞

Pour le bon conditionnement du correcteur et des ordres, on fixe un gain constant en pondération afin de minimiser l'amplitude et l'ordre du contrôleur par $W_1 = \text{diag}(5,2)$. La spécification en performance $\|T_{w_g y}(j\omega)\|$ est renforcée par la fonction de pondération W_2 pour avoir $\|W_2 T_{w_g y}\|_\infty < 1$. Après plusieurs essais en simulation, la fonction W_2 est ajustée comme suit :

$$W_2(s) = \frac{k}{\tau s + 1}, \quad k=500, \quad \tau = 0.05.$$

Une pondération faible de l'ordre de $W_0 = 10^{-4}$ est prise pour le bruit de mesure afin de limiter son influence sur l'élaboration du contrôleur.

Le comportement temporelle de l'avion en accélération sous l'effet de turbulence en appliquant la commande H_2 et H_∞ est montré sur la figure 4.27 et 4.28 respectivement.

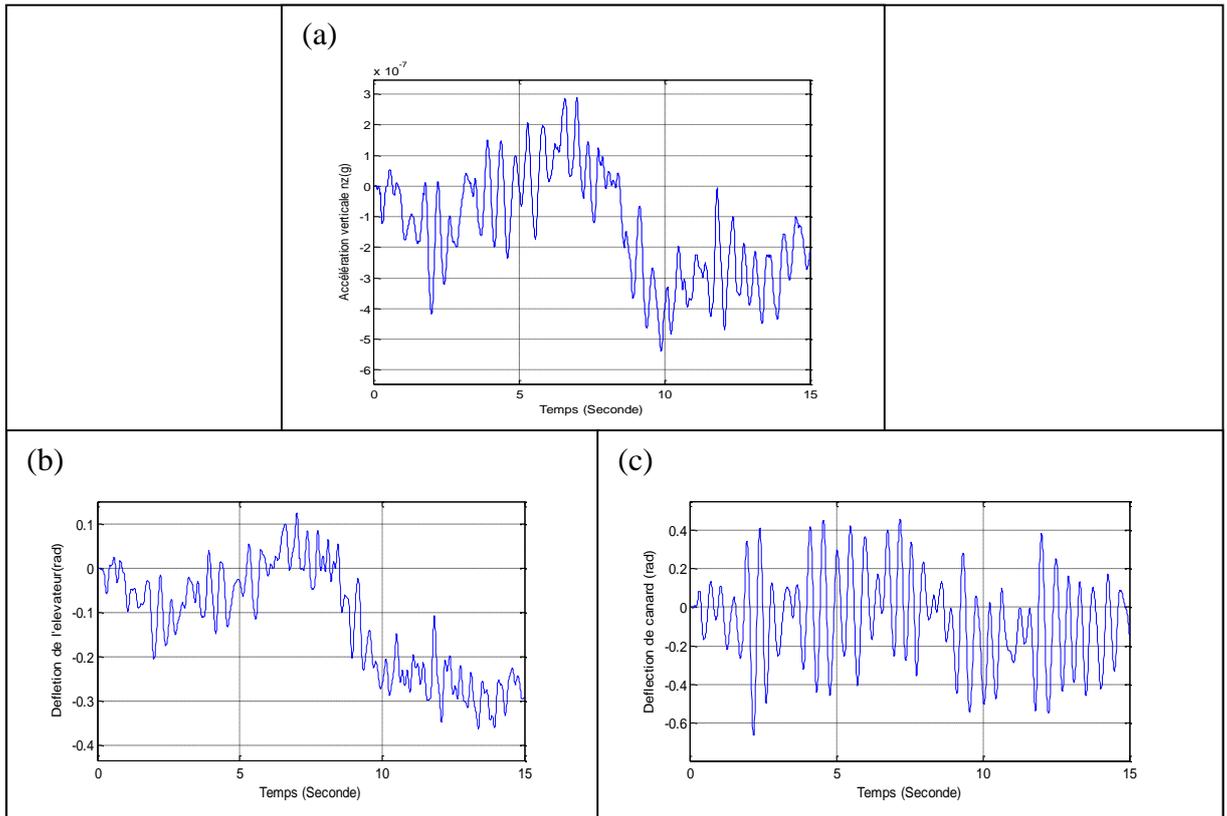


Figure 4.27 : Résultats de la commande H_2 .

On voit clairement que l'accélération est radicalement réduite presque par un facteur de 10^{-7} pour les deux commandes H_2 et H_∞ par rapport à la réponse en boucle ouverte. Ce qui donne une accélération presque nulle et très confortable. La déflexion des deux surfaces de commande est acceptable ($\pm 0.25 \text{ rad}$) pour la gouverne de profondeur et $\pm 0.6 \text{ rad}$ pour le canard) d'après les figures 4.27 (b, c) et 4.28 (b, c).

Dans le domaine fréquentiel, la figure 4.29 suivante montre la variation de la fonction de pondération et la fonction de sensibilité accélération-turbulence. On constate bien que pour les deux commandes H_2 et H_∞ , le transfert entre la sortie accélération et la turbulence est inférieure à 10^{-5} dans bande de fréquence des modes de l'avion $[3, 38] \text{ rad/s}$. On remarque aussi, que dans cette bande $\|T_{w_g y}\| < \|W_2^{-1}\|$ c'est-à-dire que l'objectif de performance est atteint.

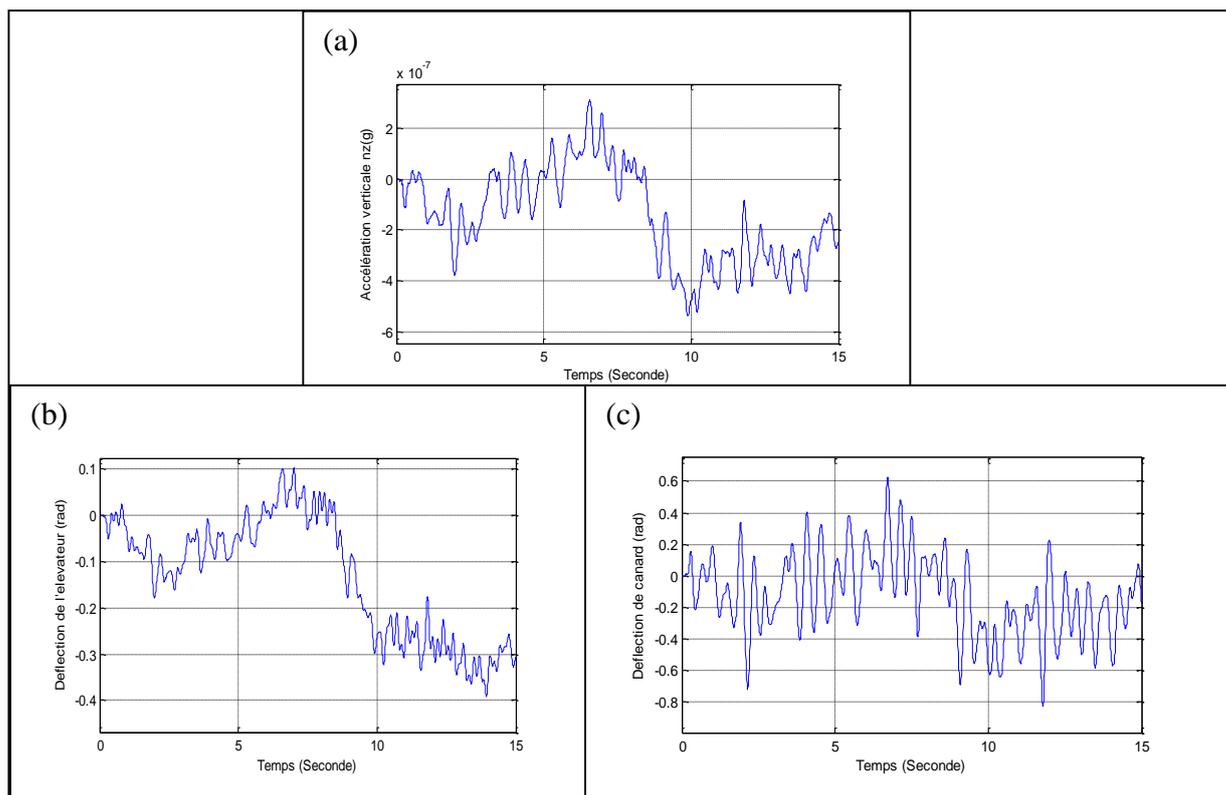


Figure 4.28 : Résultats de la commande H_∞ .

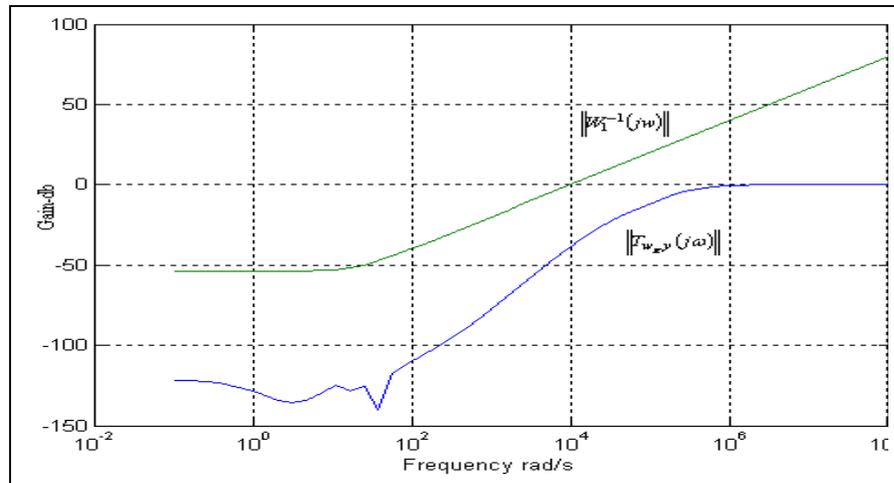


Figure 4.29 : Amplitude de la fonction de pondération et la fonction de sensibilité.

On peut dire que les performances et la robustesse de la commande dans ce cas dépendent fortement du choix des fonctions de pondération (filtres complémentaires). Néanmoins, un bon choix des fonctions de pondération est une tâche qui n'est pas facile qui est un savoir-faire lié à l'expérience, à des intuitions et à de bonnes connaissances dans l'élaboration des contrôleurs.

4.3.2.4. Application de la commande μ -analyse.

Les lois de commande présentées précédemment sont appliquées sur le modèle nominal de l'avion flexible. Alors que pour des modèles incertains, la commande μ analyse fournit un cadre général pour l'étude de la robustesse d'une boucle fermée soumise à des incertitudes paramétrique ou dynamiques négligées. Cette partie démontre comment mettre en œuvre la commande μ -analyse pour obtenir des performances robustes lors de la synthèse d'un contrôleur pour le modèle d'avion flexible incertain. Rappelons que la méthode est décrite dans la section 3.7 du chapitre 3.

Puisque dans la plupart des systèmes dynamique les pannes ou les incertitudes se localisent dans la partie commande (actionneurs) et mesure (capteurs), selon le schéma bloc de la figure 3.6 du chapitre 3, on a introduit pour modéliser le système incertain deux incertitudes Δ_u et Δ_y pondérées par W_{unu} et W_{uny} respectivement.

$$W_{unu} = \begin{bmatrix} \frac{0.75s + 80}{s + 400} & 0 \\ 0 & \frac{0.75s + 30}{s + 400} \end{bmatrix}; W_{uny} = \frac{0.15s + 3}{s + 100}$$

Une incertitude de 20% et 8% est spécifiée pour les deux actionneurs et de 3% pour le capteur en basses fréquences. Ces incertitudes augmentent à des valeurs constantes en hautes fréquences comme le montre la figure 4.30.

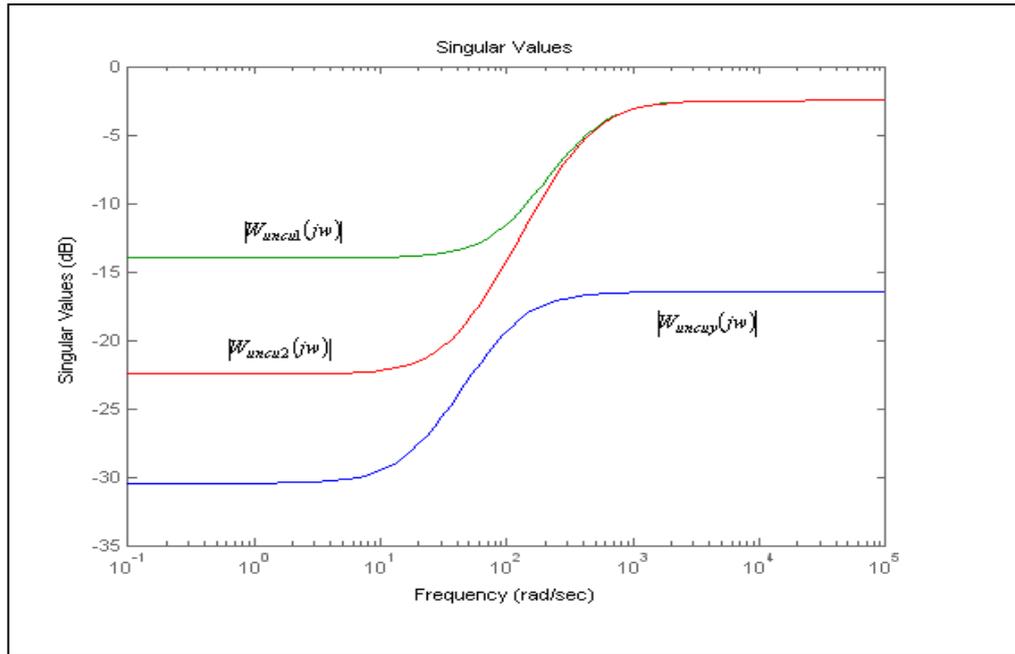


Figure 4.30 : Norme des pondérations en incertitude.

Le programme Matlab suivant permet d'avoir le nouveau système incrémenté par les pondérations et les incertitudes.

```

systemnames = ' w1 w2 wuncu plant wuncy';
inputvar = '[z3(2);z4;dn;gust(3);control(2)]';
outputvar = '[w1;w2;wuncu ;wuncy;plant+wuncy;-plant-wuncy-0.001*dn]';
input_to_plant = '[ control+z3;gust]';
input_to_w1 = '[-plant-wuncy-0.001*dn ]';
input_to_w2 = '[control]';
input_to_wuncu = '[control]';
input_to_wuncy = '[plant]';
sysoutname = 'P_icp';
cleanupysic = 'yes';
sysic

```

L'application de la commande H_∞ sur le modèle incrémenté donne le résultat présentée sur le tableau 4.5.

Test bounds: 0.7758 < gamma <= 100.0000						
gamma	hamx_eig	xinf_eig	hamy_eig	yinf_eig	rrho_xy	pf
100.000	2.3e-001	2.8e-006	2.7e-001	-9.3e-011	0.0012	p
50.388	2.3e-001	2.8e-006	2.7e-001	0.0e+000	0.0047	p
25.582	2.3e-001	2.8e-006	2.7e-001	-1.3e-017	0.0183	p
13.179	2.3e-001	2.8e-006	2.7e-001	0.0e+000	0.0689	p
6.977	2.3e-001	2.8e-006	2.7e-001	-1.9e-010	0.2468	p
3.877	2.3e-001	2.9e-006	2.7e-001	-9.3e-011	0.8093	p
2.326	2.3e-001	2.9e-006	2.7e-001	0.0e+000	2.3206#	f
3.566	2.3e-001	2.9e-006	2.7e-001	0.0e+000	0.9592	p
Gamma value achieved: 3.5665						

Tableau 4. 5: Résultats de calcul de la commande H_∞ .

On remarque bien que le contrôleur calculé par la commande H_∞ , conduit à une norme de 3.5665 en boucle fermée, ce qui conduit bien sûr à une perte de robustesse de la commande pour une incertitude de $\|\Delta\|_\infty = \frac{1}{3.5665}$ et à l'instabilité du système.

Le calcul de la valeur singulière structurée par la μ -analyse sur un ensemble de valeurs de la pulsation donne les résultats présentés sur la figure 4.31.

On observe une valeur maximale de la VSS égale à 1.39 qui reste élevée par rapport à 1. C'est-à-dire que le système reste moins robuste avec une marge de $\frac{1}{1.39}$.

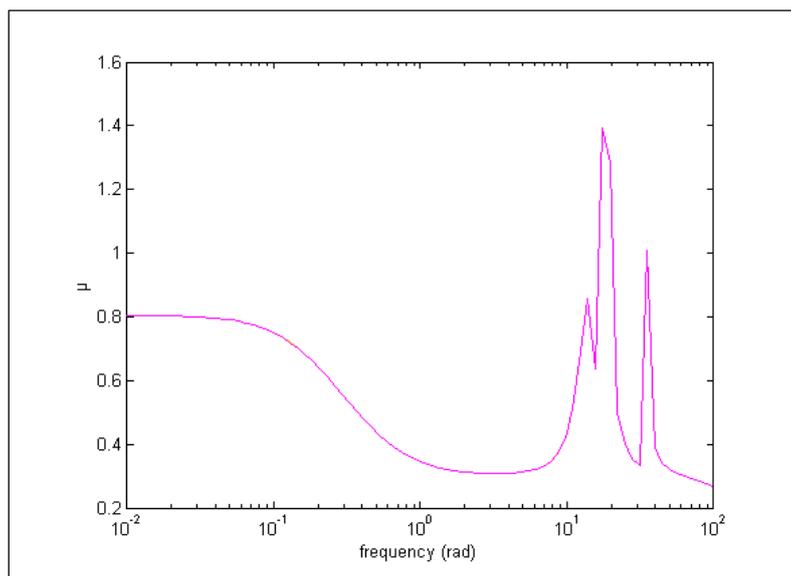


Figure 4.31 : Valeur singulière structurée pour l'analyse en performance.

Afin de remédier, on doit minimiser sur l'ensemble des compensateurs stabilisants, la borne supérieure de μ en utilisant l'algorithme de La D-K itération. Après deux itérations de calcul, les résultats de la VSS sont présentés sur la figure 4.32 suivante :

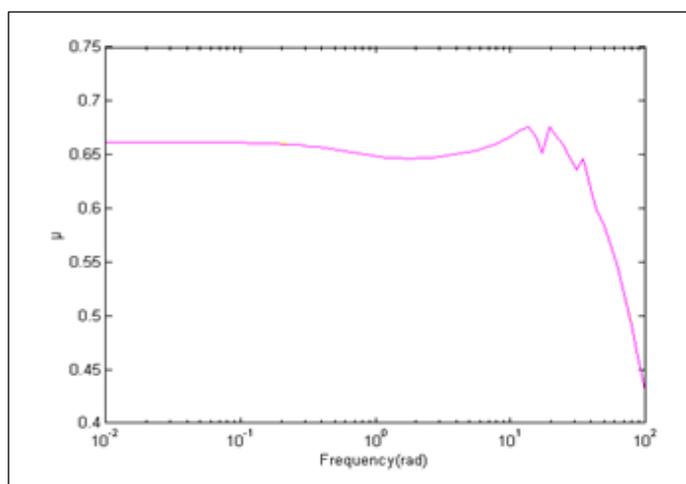


Figure 4.32 : Valeur singulière structurée avec D-K itération.

On observe bien d'après la figure 4.32 que la borne supérieure est égale à 0.676. Ce qui signifie que l'objectif de la robustesse en performance est atteint avec une marge de 1.48.

En résumé, le tableau 4.6 permet de faire une comparaison entre les méthodes utilisées dans cette section.

commande	LQG	H_2	$H_\infty \text{nom}/H_\infty \text{inc}$	μ	$\mu(DK)$
Accélération verticale n_z (g)	6×10^{-4}	5.5×10^{-7}	$5.5 \times 10^{-7} / 2 \times 10^{-6}$	2×10^{-6}	5×10^{-9}
$ \delta_e _{max}$ (rad)	0.015	0.35	0.4/0.45	0.45	0.45
$ \delta_c _{max}$ (rad)	2×10^{-3}	0.65	0.8/1.5	1.5	1.9
Ordre du contrôleur	12	13	13/16	16	36
Norme $\ \cdot\ _\infty$	0.25	0.15	0.1/3.56	1.39	0.676
Marge de robustesse	4	6.66	10/0.28	0.71	1.47

Tableau 4. 6: Résultats de calcul des méthodes utilisées

La première ligne du tableau 4.6 montre le facteur de réduction de l'accélération des trois premières méthodes utilisées pour le modèle nominal. On remarque une forte réduction de l'accélération des méthodes H_2 et H_∞ par rapport à la méthode LQG. Ce qui montre une bonne robustesse de ces commandes vis-à-vis les perturbations externes. Pour le modèle incertain, les commandes H_∞ , μ -analyse et μ -analyse via D-K itération montrent encore leurs robustesse pour réduire l'effet de la turbulence sur l'accélération. On constate que la μ -analyse via D-K itération est meilleure que les méthodes H_∞ et μ -analyse. Le rejet de la turbulence sur l'accélération est traduit par la déflexion maximale des surfaces de commande présentée dans la deuxième et la troisième ligne du tableau. On remarque que la déflexion de l'élévateur reste acceptable pour toutes les commandes. Alors que, pour la gouverne de canard, cette déflexion devienne importante est inacceptable pour les commandes H_∞ , μ -analyse et μ -analyse via D-K itération. Pour régler ce problème, l'avion doit éviter une intensité de

turbulence dont l'accélération dépasse $0.5 g$. Le tableau 4.6 présente aussi l'ordre du contrôleur pour les commandes utilisées. On remarque bien que l'ordre est égale à l'ordre du système sauf pour la commande D-K itération où l'ordre devient très élevé ce qui constitue un grand problème pour l'implantation. Le calcul de la norme présentée dans le tableau, nous permet de comparer la marge de robustesse des méthodes utilisées. Les trois premières méthodes présentent une bonne marge de robustesse vis-à-vis les perturbations externes pour le modèle nominal. Cette robustesse se dégrade rapidement dès qu'on ajoute des incertitudes dans le système. Cette dégradation dans la robustesse est améliorée par les méthodes μ -analyse et garantie par la μ -analyse via D-K itération.

4.3.3. Commande de la vitesse de tangage :

Dans cette section, on s'intéresse à la commande de la vitesse de tangage pour un avion dont la structure est large et sensible à l'effet de vibration structurelle. Le modèle dynamique de l'avion flexible est considéré avec le mouvement longitudinal dont la dynamique rigide est approximée par le mode courte période. La dynamique du système est associée aux quatre premiers modes flexibles. La commande du mode rigide permet la stabilité d'attitude et ainsi mettre l'avion sur sa trajectoire. La commande linéaire optimale LQR est combinée avec la commande non-linéaire par mode glissant pour construire une commande performante et robuste.

Le modèle numérique utilisé pour la simulation est sélectionné de la référence [52]. La figure 4.33 représente la réponse de l'avion à une excitation d'incidence de 0.1 rad en boucle ouverte. On constate bien que tous les modes du système (rigide et flexibles) sont instables. Cela signifie qu'une petite action sur le manche ou une excitation suite à une rafale de vent peuvent conduire l'avion vers l'instabilité et la perte de sa trajectoire. Donc, un contrôleur performant et robuste est nécessaire pour le maintien de la stabilité et la trajectoire de l'avion.

Le schéma bloc de la méthode LQR pour commander la vitesse de tangage est donné sur la figure 4.34. Il est important de noter que la sortie utilisée pour la réponse temporelle n'est pas le vecteur de mesure utilisé par la commande. Pour le vecteur de commande, on a choisi une commande qui représente la moyenne de déflexion de l'élevateur et le canard horizontal, comme suite :

$u = \frac{1}{2}(\delta_e - \delta_{hc})$, une telle commande est standard dans les systèmes aérospatiaux et appelée « control allocation »[52].

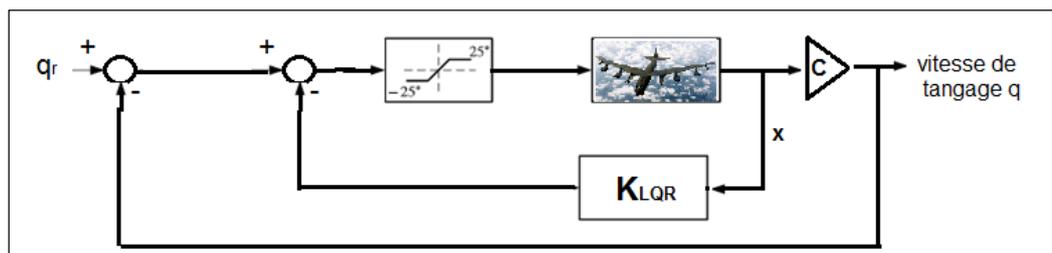


Figure 4.34 : Schéma bloc de la commande LQR.

Le gain de la commande LQR calculé est le suivant :

$$K = [2.3109 \ 0.7432 \ -0.9765 \ -0.0597 \ -0.0000 \ -0.0000 \ 0.0168 \ 0.0028 \ -0.2739 \ -0.0551]$$

La réponse du système en boucle fermée commandé par LQR, ainsi que le braquage de la surface de commande sont présentées par la figure 4.35.

On constate une très bonne poursuite de la réponse de l'avion par rapport à la consigne avec un braquage de la gouverne acceptable en amplitude et souple en variation. Cette réponse est justifiée par le fait que la commande LQR possède une bonne performance due principalement à la méthode elle-même et à la disponibilité de tous les états (système bien connu).

Afin de tester la robustesse de la commande vis-à-vis la perturbation atmosphérique, nous avons utilisé le modèle de Dryden de la figure 4.22. La réponse en tangage est présentée dans la figure 4.36.

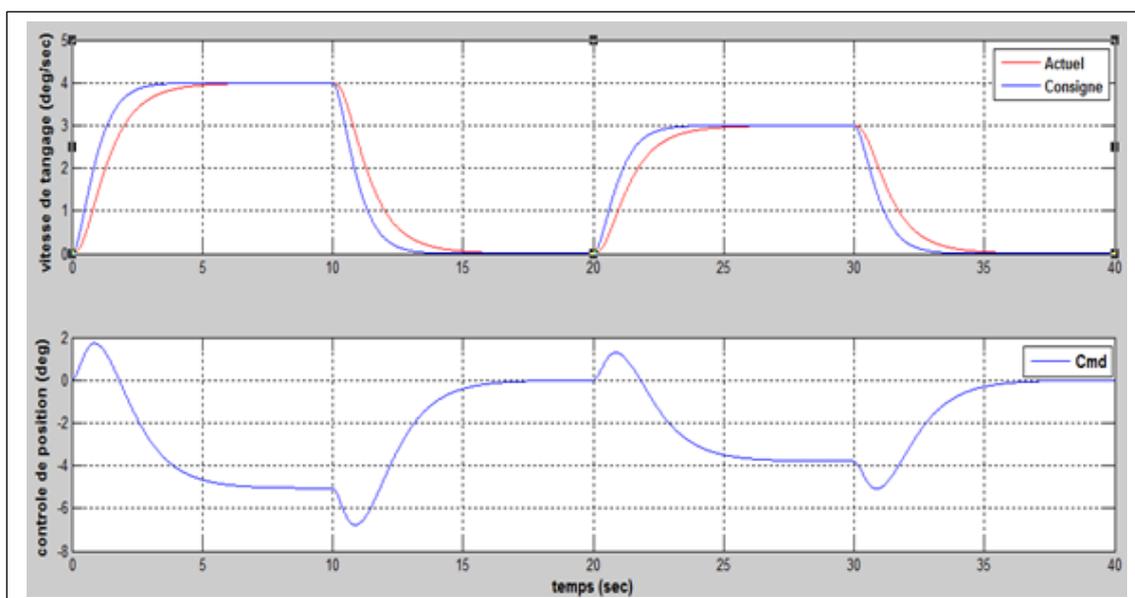


Figure 4.35 : Evolution de la vitesse de tangage par la commande LQR.

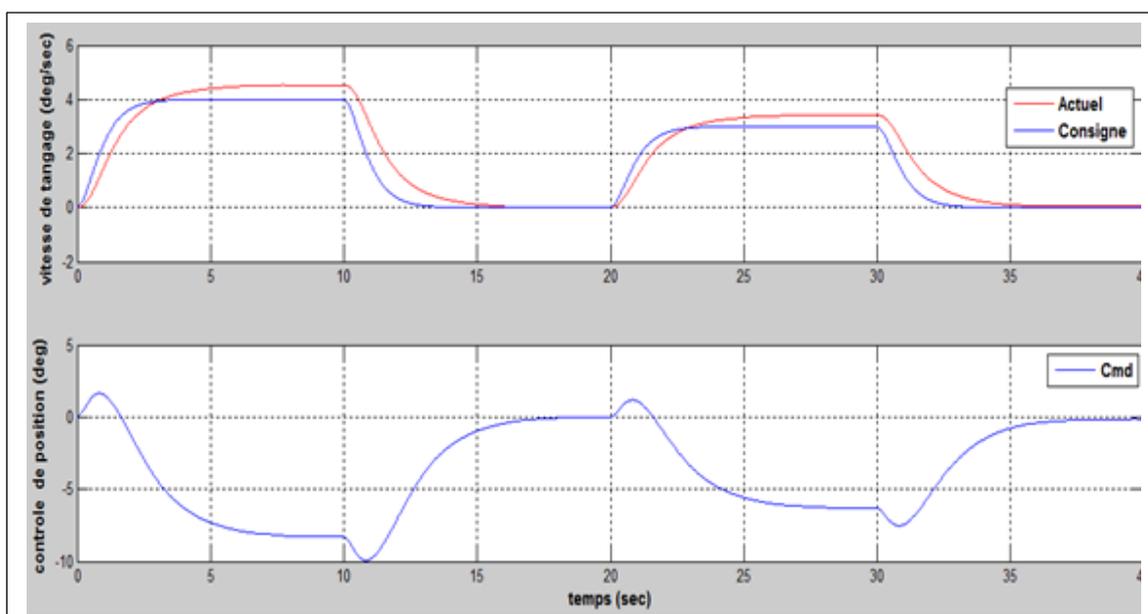


Figure 4.36 Evolution de la vitesse de tangage commandée par LQR en présence de perturbations atmosphérique.

On constate une dégradation dans la poursuite du signal de référence. C'est-à-dire que la commande est moins robuste en performance.

On peut conclure que la commande LQR ne permet pas d'éliminer les erreurs de poursuite et elle est sensible aux incertitudes et aux perturbations externes. D'où la nécessité de faire appel à des lois de commandes non-linéaire plus avancées qui permettront une meilleur adaptation de la commande au système pour avoir une meilleur poursuite du signal de sortie par rapport au signal de référence choisi.

4.3.3.2. Application de la commande non linéaire par mode glissant (SMC):

D'après nos investigations, la commande par mode glissant n'a pas été appliquée aux problèmes de l'avion flexible ce qui présente une contribution dans cette thèse pour la mise en œuvre de la méthode.

Le schéma bloc permettant de commander la vitesse de tangage par mode glissant est donné par la figure 4.37. La synthèse de la méthode a été développée dans la section 3.4.8 du chapitre 3. Comme le montre la figure 4.37, la commande est basée sur le vecteur de mesure des états x correspondant aux mesures prises par les capteurs utilisés.

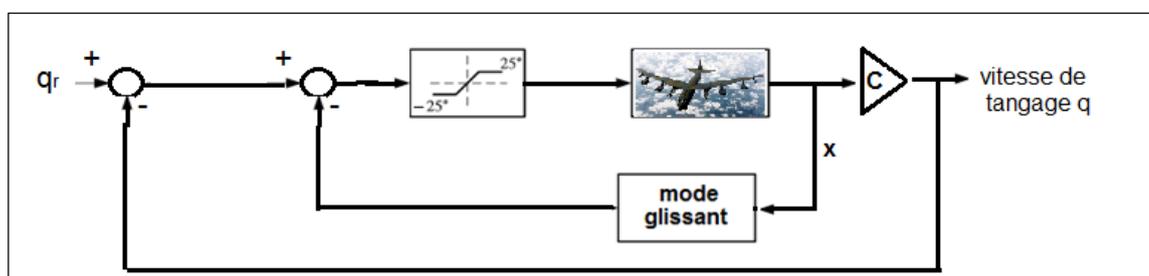


Figure 4.37 : Schéma bloc de la commande par mode glissant.

La réponse temporelle de l'avion pour la vitesse de tangage ainsi que le braquage de la surface de commande sont présentées dans la figure 4.38, en absence de perturbations.

On observe une excellente poursuite de la réponse par rapport à la consigne, avec une commande très acceptable. La figure 4.39 montre la réponse lorsqu'on injecte les perturbations dues à la rafale. On constate une excellente poursuite malgré la présence de perturbations. En effet, la commande par mode glissant améliore nettement la réponse du système et elle est très robuste aux perturbations.

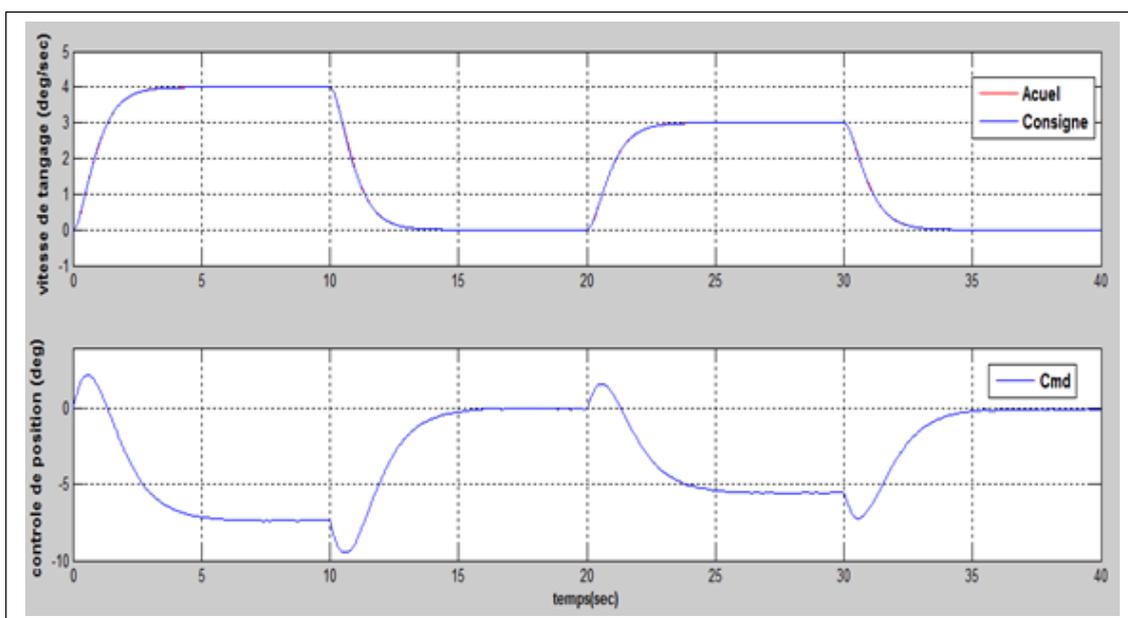


Figure 4.38 : Réponse du système par LQR avec action intégrale et mode glissant en absence de perturbation

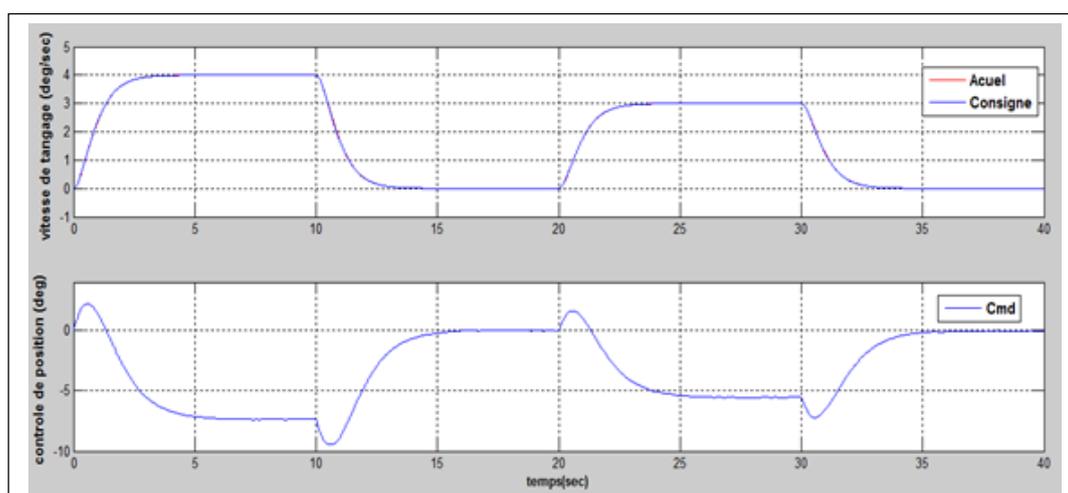


Figure 4.39 : Réponse du système par mode glissant en présence de perturbation

Dans ce chapitre, nous avons montré les résultats qu'il a été possible d'obtenir pour le contrôle robuste appliqué au modèle aéroélastique et de l'avion flexible par les différentes lois envisagées. La première partie a été consacrée à la commande du modèle aéroélastique nominal par la commande classique LQR. Pour le modèle incertain, l'amélioration consiste à remplacer la commande LQR par la commande robuste PRLQR. Cette approche conduit à un contrôleur beaucoup

plus intéressant qu'un LQR classique. En effet, elle permet de prendre en compte les incertitudes paramétriques sans augmenter l'ordre du contrôleur. Pour le modèle non linéaire, l'amélioration consiste à utiliser la commande non linéaire par mode glissant. Cette méthode conduit à un contrôleur très performant et très robuste qu'un contrôleur linéaire. La deuxième partie a été dédiée à la commande de l'avion flexible par la réduction de l'effet de la turbulence et le contrôle de la vitesse de tangage. Les méthodes LQG, H_2 et H_∞ ont été appliquées sur le modèle nominal pour réduire l'accélération verticale en présence de perturbation atmosphérique. Par la suite, le modèle nominal de l'avion a été augmenté par des matrices de perturbation au niveau des actionnaires et le capteur accéléromètre, l'amélioration de la robustesse consiste à utiliser la méthode μ -synthèse. Cette méthode conduit à un contrôleur robuste mais avec un ordre plus élevé. Ensuite, la commande LQR et par mode glissant ont été mise en œuvre pour la commande de la vitesse de tangage de l'avion flexible. D'après notre recherche bibliographique, aucune documentation ne fait état de l'utilisation de cette dernière. L'efficacité de l'approche par mode glissant pour le contrôle robuste d'avion flexible nous semble être démontrée par cette application.

CONCLUSION

Dans cette thèse, l'élaboration et la mise en œuvre des lois de commande Fly by Wire robustes pour le guidage et le contrôle de la stabilité d'un avion flexible sont considérées comme l'objectif principal de cette recherche. Nous avons présenté au début un état de l'art afin de bien situer le problème et dégager un champ d'investigation bien précis. Cette recherche bibliographique a constitué une première contribution dans cette thèse puisque elle présente une synthèse multidisciplinaire adaptée à l'industrie aéronautique. A partir de là, nous avons dégagé deux grands champs d'investigations dans le domaine d'aéroservoélasticité :

1. L'élaboration des contrôleurs dynamiques et robustes adaptés à une structure flexible aéroélastique.
2. L'élaboration des contrôleurs dynamiques et robustes adaptés au guidage longitudinal d'un avion flexible.

L'étude de la dynamique du système a constitué le contenu du deuxième chapitre. Malgré les difficultés et la confidentialité du sujet, nous sommes arrivés à établir deux modèles dynamiques afin d'aboutir aux objectifs de la thèse. Le premier concerne la dynamique de l'avion flexible où le modèle linéaire de Warzak est démontré, puis ce modèle a été simplifié pour aboutir à la dynamique longitudinale courte période « short period » avec plusieurs modes flexibles. Ce dernier peut conduire à un véritable danger pour le guidage de l'avion s'il n'est pas pris en considération lors de la conception de la commande ainsi que les modes flexibles. Le second modèle constitue un cas particulier de l'avion flexible, puisqu'il considère le mouvement de tangage et le déplacement vertical d'une section d'aile d'avion. Une telle dynamique peut conduire à un phénomène très dangereux pour les avions, c'est le phénomène de flottement. Le modèle dynamique incertain développé sous forme LFT, constitue ici une bonne contribution pour qu'il soit bien adapté aux lois de commande par la suite.

Dans ce document, l'étude des contrôleurs dynamiques et leurs choix pour les systèmes aéroélastiques est abordée dans le troisième chapitre. Celui-ci fait

un rappel des techniques dynamiques de contrôle robuste les plus représentatives de l'état de l'art actuel et pour lesquelles des logiciels de mise en œuvre sont disponible pour certaines méthodes comme la commande LQR, H_2 , H_{inf} et μ -synthèse. Alors que pour la méthode PRLQR et le mode glissant, on a développé notre propre programme de mise en œuvre. Il se présente comment un système dynamique, dont les paramètres sont incertains, peut être représenté, soit par un modèle nominal en rétroaction avec une matrice d'incertitudes paramétriques (forme LFT), soit par un ensemble fini de modèles choisis judicieusement pour la mise en œuvre de la méthode. Dans le premier cas, classiquement, l'analyse de robustesse s'effectue par la μ -analyse et la conception du contrôleur par les méthodes LQG, H_2 , H_{inf} ou par la μ -synthèse. Dans le second cas (ensemble fini de modèles), l'analyse et la conception sont effectuées par les méthodes LQR et PRLQR. L'application et la mise en œuvre de ces techniques de commande fait l'objet du dernier chapitre. Les méthodes de commande choisies sont appliquées d'une manière très efficace afin d'améliorer les performances du système aéroélastique et avoir une marge de vitesse de flottement très significative et de réduire l'effet de la turbulence sur le contrôle du mouvement de tangage « pitch rate », puisque la maîtrise de ce dernier facilite beaucoup la tâche devant le pilote pour un bon guidage de l'appareil et la poursuite de la trajectoire. Dans cette partie de la thèse, la mise en œuvre de la commande PRLQR sur le modèle aéroélastique incertain constitue une première application dans la littérature et elle a l'avantage d'améliorer la qualité des réponses temporelles. De plus, l'ajustement des paramètres du PRLQR pour faire un bon compromis performance/robustesse et le choix de paramètres de pondération de la fonction de coût sont critiques et sollicitent plusieurs essais pour démontrer l'efficacité de la méthode. Mais cette technique reste limitée à un nombre fini de modèles linéaires. C'est pour cela, nous avons proposé la commande non linéaire par mode glissant pour améliorer encore le compromis performance/robustesse sur le modèle aéroélastique réelle. L'efficacité de la mise en œuvre de cette méthode nous a permis d'atteindre facilement notre objectif et constitue une autre contribution dans cette thèse.

Une autre contribution visait à la mise en œuvre des contrôleurs LQG, H_2 , H_{inf} et μ -synthèse pour alléger l'effet de la turbulence sur l'accélération verticale de l'avion flexible.

Pour la commande H_∞ , les résultats montrent son efficacité dans la réduction de la turbulence avec une dégradation de la robustesse vis-à-vis les incertitudes introduites sur le modèle nominal. Afin de remédier cette situation, la commande μ -synthèse semble bien adapté puisqu'elle tient en considération des incertitudes lors de la synthèse du contrôleur. Par voie de conséquence, l'ordre de ce dernier devient plus élevé si on augmente le nombre d'itérations, ce qui constitue un obstacle majeur dans la pratique. Dans l'ensemble, ces commandes semblent bien adaptées sur le plan théorique, mais moins désirables sur la plan pratique surtout lorsque l'ordre du système est élevé comme dans le cas des avions flexibles.

Ensuite, nous avons proposé et pour la première fois la combinaison de la commande LQR et mode glissant pour contrôler la vitesse de tangage sur l'avion souple B-52. Cet objectif a été atteint et les résultats de simulation pour le mouvement longitudinal de l'avion B-52, confirment la fonctionnalité de la méthode.

L'inconvénient de la théorie de LQR avec retour d'état nécessite souvent la mesure de toutes les variables d'état ce qui est impossible dans la pratique, bien qu'elle soit performante et efficace en termes de stabilité et peu sensible aux perturbations extérieurs. Pour cela on a fait appel à la commande non-linéaire optimale par mode glissant afin d'améliorer les performances du système en boucle fermée et augmenter sa robustesse. Toutes ces propriétés sont obtenues en choisissant convenablement la surface de glissement et les matrices de pondération de la commande LQR.

Enfin, si la présente thèse a montré la fonctionnalité et le potentiel de certaines lois de commande pour certains systèmes aéroélastiques, le domaine d'aéroservoélasticité et la commande des avions souple reste très compliqué dans le sens où on ne trouve plus jusqu'au aujourd'hui des produits fini et disponible en matière de logiciel pour bien servir la recherche scientifique et l'industrie aéronautique.

APPENDICES

A. Liste des symboles

- $a_{z_{cg}}$: accélérations normale mesurées au centre de gravité de l'avion.
- a_{zA} : accélérations normale mesurées à une certaine distance de centre de gravité.
- d_i : déplacements élémentaires des nœuds.
- g : accélération de la gravité terrestre.
- m : masse de l'avion.
- \vec{r} : vecteur de position du point matériel dans le repère avion
- δ_m : un point matériel.
- \vec{v}_a : vitesse du système lie à l'avion
- δF : force élémentaire agissant sur le point matériel.
- δh : moment angulaire élémentaires.
- h : moment angulaire équivalent total.
- \vec{F} : vecteur de force totale.
- I_{ij} : Composante du moment d'inertie de l'avion
- G : moment dans le système inertiel.
- C : matrice de rotation d'orientation
- L : moment de roulis
- M : moment de tangage
- N : moment de lacet
- x_a, y_a, z_a : les coordonnées du point matériel
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: vecteurs unitaires sur les axes de l' avion.
- \vec{v}_a : vecteur vitesse linéaire dans le repère avion.
- $\vec{\omega}_a$: vecteur vitesse angulaire dans le repère avion.
- Ψ : Angle de Lacet, rad
- θ : angle de Tangage, rad
- Φ : angle de Roulis, rad
- x_0, y_0, z_0 : position de l'avion dans le repère terrestre.

- p : vitesse de Roulis
 q : vitesse de Tangage
 r : vitesse de Lacet
 U : vitesse longitudinale de l'avion
 V : vitesse latérale de l'avion
 W : vitesse verticale de l'avion
 X : Forces aérodynamiques suivant l'axe OX
 Y : Forces aérodynamiques suivant l'axe OY
 Z : Forces aérodynamiques suivant l'axe OZ
 x_a : point de mesure de l'accélération par rapport au c.g de l'avion.
 ω : vitesse angulaire
 w_g : vitesse de la rafale verticale
 U_0 : vitesse à l'équilibre de l'avion.
 α : angle d'attaque
 δ_e : angle de déflexion de la gouverne de profondeur.
 δ_a : angle de déflexion de la gouverne de gauchissement.
 δ_r : angle de déflexion de la gouverne de direction.
 δ_{hc} : angle de déflexion de la gouverne horizontal (canard).
 Φ : matrice de passage modale
 ρ : Densité de l'air, kg/m^3
 η_i : déplacement des modes flexion
 ζ_i : coefficients d'amortissements aérodynamique
 F : Vecteur des forces aérodynamiques, N
 I : Moment d'inertie total, $\text{kg } m^2$
 C : Corde aérodynamique moyenne de l'aile, m
 q_i : Coordonnés généralisé
 Q_i : Force aérodynamique généralisée
 $c.g$: Centre de gravité
 T : énergie cinétique
 U : énergie potentielle
 δW : travail virtuel
 M : matrice de masse
 K : matrice de raideur
 B : matrice d'amortissement visqueux

F : forces généralisées qui ne sont ni inertielle, ni potentielle, ni dissipative.

μ : matrice de masse généralisée

γ : matrice de raideur généralisée

β : matrice de dissipation généralisée

q : représente la pression dynamique

k : représente la pulsation réduite

ω : les pulsations harmoniques de la structure

F_q : matrice des forces généralisées de mouvement pour l'aérodynamique instationnaire.

$F_{gouverne}$: forces induites par le braquage des gouvernes

F_{gust} : force générée par la turbulence

$F_{aero} = qF_q(M, k)\eta$ force générée par l'aérodynamique instationnaire

$C_{()}$: coefficients de stabilité dérivatives aérodynamiques

$c.g$: Centre de gravité

m_T : La masse totale de l'aile et de sa structure de support

m_w : La masse de l'aile seulement.

b : Demi corde moyenne de profile d'aile.

x_α : distance entre le centre de gravité et le centre élastique)

c_h : coefficient d'amortissement structurel pour le mouvement vertical.

c_α : coefficient d'amortissement structurel pour le tangage.

k_h : coefficient de rigidité structurel pour le mouvement vertical

k_α : coefficient de rigidité structurel pour le mouvement de tangage

I_{ea} : moment d'inertie autour de l'axe élastique.

q_{nom} : pression dynamique nominale et l'incertitude respectivement.

δ_q : pression dynamique incertain

u : vecteur longitudinal de commande

x : vecteur d'état du mouvement longitudinal

y : vecteur de sortie du systeme

\hat{x} : estimé de x

A : Matrices d'état du systeme

B : matrice de commande du système
 C : matrice de mesure d'état
 D : matrice de l'effet de la commande sur la sortie
 G : matrice de perturbation
 Q, R : matrices de pondération pour la commande LQR
 P : matrice de Riccati
 K : gain de commande
 J : index quadratique de performance
 t : temps
 t_f : temps terminal
 S_f : matrice de pondération pour les états terminaux
 H : fonction Hamiltonienne de la commande LQR
 λ : index optimal
 e : erreur d'estimation
 M : gain de précommande
 H_∞ : commande robuste H-infinie
 H_2 : commande robuste H-2
 W_c : grammien de contrôlabilité et d'observabilité
 W_o : grammien d'observabilité
 λ_i : valeurs propres d'une matrice
 $\gamma_{min}, \gamma_{max}$: borne inférieure et supérieure
 $M(s)$: matrice de fonction de transfert d'un système
 $\Delta(s)$: matrice de fonction de transfert d'incertitude
 $d(t)$: perturbation agissant sur le système
 $n(t)$: bruit de mesure
 $S(s)$: fonction de sensibilité
 $T(s)$: fonction de sensibilité complémentaire
 F_l : fonction de transfert en boucle fermée
 σ_{max} : valeur singulière maximale
 W_s, W_T : fonctions de pondérations
 $W_i(s)$: filtres de pondération
 F : modèle de référence

K_c : gain de commande

K_f : gain d'estimation

X, Y : solution de l'équation de Riccati

$D(s)$: multiplieur scalings

u_{eq} : commande équivalente par mode glissant

u_n : commande discontinue par mode glissant

$S(x)$: surface de glissement

V : fonction de Lyapunov

\bar{A} : matrice d'état en boucle fermée

$\sigma(x)$: hyper surface de glissement

FBW : commande de vol électrique

FMS : système de gestion de vol

LQR : régulateur quadratique linéaire (Linear Quadratic Regulator)

LTI : système linéaire invariant (linear time invariant)

LQG : linéaire quadratique gaussien

PRLQR : régulateur quadratique linéaire paramétrique robuste

LFT: transformation Linéaire Fractionnelle

VSS : commande à structure variable

SMC : commande par mode glissant

B. Les coefficients du modèle aéroélastique TAMU II :

Modèle aéroélastique nominal

$$\ddot{h} = a_{31}h + a_{32}\alpha + a_{33}\dot{h} + a_{34}\dot{\alpha} + b_{31}\beta + b_{32}\gamma;$$

$$\ddot{\alpha} = a_{41}h + a_{42}\alpha + a_{43}\dot{h} + a_{44}\dot{\alpha} + b_{41}\beta + b_{42}\gamma;$$

Avec :

$$d = m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2; a_{31} = \frac{-k_h I_{ea}}{d}$$

$$a_{32} = \frac{k_\alpha(\alpha) m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^3 s C_{m_\alpha} m_w x_\alpha - \rho V^2 b s c_{l_\alpha} I_{ea}}{d};$$

$$a_{33} = \frac{-\rho V^2 b^3 s C_{m_\alpha} m_w x_\alpha - I_{ea} [c_h + \rho V^2 b s c_{l_\alpha}]}{d};$$

$$a_{34} = \frac{c_\alpha m_w x_\alpha b - \rho V^2 b^4 s C_{m_\alpha} (\frac{1}{2} - a) m_w x_\alpha - \rho V^2 b^2 s c_{l_\alpha} (\frac{1}{2} - a) I_{ea}}{d};$$

$$b_{31} = \frac{-\rho V^2 b^3 s C_{m_\beta} m_w x_\alpha - \rho V^2 b s c_{l_\beta} I_{ea}}{d};$$

$$b_{32} = \frac{-\rho V^2 b^3 s C_{m_\gamma} m_w x_\alpha - \rho V^2 b s c_{l_\gamma} I_{ea}}{d};$$

$$a_{41} = \frac{k_h m_w x_\alpha b}{d};$$

$$a_{42} = \frac{\rho V^2 b^2 s c_{l_\alpha} m_w x_\alpha - m_T k_\alpha(\alpha) + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{d};$$

$$a_{43} = \frac{c_h m_w x_\alpha b + \rho V^2 b^2 s c_{l_\alpha} m_w x_\alpha + m_T \rho V^2 b^2 s C_{m_\alpha}}{d};$$

$$a_{44} = \frac{\rho V^2 b^3 s c_{l_\alpha} (\frac{1}{2} - a) m_w x_\alpha - m_T c_\alpha + m_T \rho V^2 b^3 s C_{m_\alpha} (\frac{1}{2} - a)}{d};$$

$$b_{41} = \frac{\rho V^2 b^2 s c_{l_\beta} m_w x_\alpha + \rho V^2 b^2 s C_{m_\beta} m_T}{d};$$

$$b_{42} = \frac{\rho V^2 b^2 s c_{l_\gamma} m_w x_\alpha + \rho V^2 b^2 s C_{m_\gamma} m_T}{d};$$

Le modèle numérique à la vitesse de 13 m/s est comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -9.2941 & -2.8623 & -0.1670 \\ 860.0497 & -24.0620 & 8.6826 & -0.2106 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -5.7551 & 0.4122 \\ 1.9681 & -4.8177 \end{bmatrix}$$

Le modèle aéroélastique incertain :

$$\ddot{h} = a_{31}h + a_{32}\alpha + a_{33}\dot{h} + a_{34}\dot{\alpha} + b_{31}w_1 + b_{32}w_2 + b_{33}w_3 + b_{34}w_4 + b_{35}\beta + b_{36}\gamma$$

$$\ddot{\alpha} = a_{41}h + a_{42}\alpha + a_{43}\dot{h} + a_{44}\dot{\alpha} + b_{41}w_1 + b_{42}w_2 + b_{43}w_3 + b_{44}w_4 + b_{45}\beta + b_{46}\gamma$$

Avec :

$$d = m_T I_{ea} - (m_w x_\alpha b)^2; a_{31} = \frac{-k_h I_{ea}}{d}$$

$$a_{32} = \frac{k_{anom} m_w x_\alpha b - q_{nom} 2bs (c_{l_\alpha} I_{ea} + C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b^2)}{d};$$

$$a_{33} = \frac{-I_{ea} c_{hnom} - q_{nom} 2bs [c_{l_\alpha} I_{ea} + C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b^2] \left(\frac{1}{V}\right)}{d};$$

$$a_{34} = \frac{c_\alpha m_w x_\alpha b - q_{nom} 2bs (c_{l_\alpha} I_{ea} + C_{m_\alpha} m_w x_\alpha b^2) \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{b}{V}\right)}{d}; b_{31} = \frac{-I_{ea}}{d}; b_{33} = \frac{-I_{ea}}{d}$$

$$b_{32} = \frac{-m_w x_\alpha b}{d}; b_{34} = \frac{m_w x_\alpha b}{d};$$

$$b_{35} = \frac{-q_{nom} 2bs (c_{l_\beta} I_{ea} + C_{m_\beta} m_w x_\alpha b^2)}{d}; b_{36} = \frac{-q_{nom} 2bs (c_{l_\gamma} I_{ea} + C_{m_\gamma} m_w x_\alpha b^2)}{d};$$

$$a_{41} = \frac{k_h m_w x_\alpha b}{d}; a_{42} = \frac{-m_T k_{anom} + q_{nom} 2bs (m_T b C_{m_\alpha} + m_w x_\alpha b c_{l_\alpha})}{d};$$

$$a_{43} = \frac{m_T x_\alpha b c_{hnom} + q_{nom} 2bs (m_T b C_{m_\alpha} + m_w x_\alpha b c_{l_\alpha}) \left(\frac{1}{V}\right)}{d};$$

$$a_{44} = \frac{-m_T c_\alpha + q_{nom} 2bs (m_T b C_{m_\alpha} + m_w x_\alpha b c_{l_\alpha}) \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{b}{V}\right)}{d};$$

$$b_{41} = \frac{m_w x_\alpha b}{d}; b_{42} = \frac{m_T}{d}; b_{43} = \frac{m_w x_\alpha b}{d};$$

$$b_{44} = \frac{-m_T}{d}; b_{45} = \frac{q_{nom} 2bs (m_T b C_{m_\beta} + m_w x_\alpha b c_{l_\beta})}{d};$$

$$b_{46} = \frac{q_{nom} 2bs (m_T b C_{m_\gamma} + m_w x_\alpha b c_{l_\gamma})}{d};$$

$$c_{12} = 2bs c_{l_\alpha}; c_{13} = \frac{2bs c_{l_\alpha}}{V}; c_{14} = 2bs c_{l_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{b}{V}\right); d_{15} = 2bs c_{l_\beta};$$

$$d_{16} = 2bs c_{l_\gamma}; c_{22} = 2b^2 s C_{m_\alpha}; c_{23} = \frac{2b^2 s C_{m_\alpha}}{V}; c_{24} = 2b^2 s C_{m_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{b}{V}\right);$$

$$d_{25} = 2b^2 s C_{m_\beta}; d_{26} = 2b^2 s C_{m_\gamma};$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -214.1696 & -9.2941 & -2.8623 & -0.1670 \\ 860.0497 & -24.0620 & 8.6826 & -0.2106 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0753 & -0.3024 & -0.0753 & 0.3024 & -5.7551 & 0.4122 \\ 0.3024 & 8.2595 & 0.3024 & -8.2595 & 1.9681 & -4.8177 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1.5305 & 0.1177 & 0.0263 \\ 0 & -0.0501 & -0.0039 & -0.0009 \\ 0 & 0 & 10.9720 & 0 \\ 0 & 1.7625 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8584 & -0.0355 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0290 & -0.0043 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le modèle aéroélastique non linéaire :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{h_1}x_1 + a_{\dot{h}_1}x_2 + a_{\alpha_{11}}x_3 + a_{\alpha_{12}}x_3^2 + a_{\alpha_{13}}x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_1}x_4 + b_{\beta_1}\beta + b_{\gamma_1}\gamma$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = a_{h_2}x_1 + a_{\dot{h}_2}x_2 + a_{\alpha_{21}}x_3 + a_{\alpha_{22}}x_3^2 + a_{\alpha_{23}}x_3^3 + a_{\dot{\alpha}_2}x_4 + b_{\beta_2}\beta + b_{\gamma_2}\gamma$$

Avec

$$a_{h_1} = -dI_\alpha k_h$$

$$d = (m_t I_\alpha - (m_w x_\alpha b)^2)^{-1}$$

$$a_{\dot{h}_1} = d \left(-I_\alpha c_h - I_\alpha c_1 c_{l_\alpha} \left(\frac{1}{U} \right) - m_w x_\alpha b c_2 c_{m_\alpha - eff} \left(\frac{1}{U} \right) \right)$$

$$a_{\alpha_{11}} = d (m_w x_\alpha b k_1 - I_\alpha c_1 c_{l_\alpha} - m_w x_\alpha b c_2 c_{m_\alpha - eff})$$

$$a_{\alpha_{12}} = m_w x_\alpha b k_2$$

$$a_{\alpha_{13}} = m_w x_\alpha b k_3$$

$$a_{\dot{\alpha}_1} = d \left(m_w x_\alpha b c_\alpha - I_\alpha c_1 c_{l_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{b}{U} \right) - m_w x_\alpha b c_2 c_{m_\alpha - eff} \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{b}{U} \right) \right)$$

$$b_{\beta_1} = d \left(-I_\alpha c_1 c_{l_\beta} - m_w x_\alpha b c_2 c_{m_\beta - eff} \right)$$

$$b_{\gamma_1} = d \left(-I_\alpha c_1 c_{l_\gamma} - m_w x_\alpha b c_2 c_{m_\gamma - eff} \right)$$

$$a_{h_2} = d m_w x_\alpha b k_h$$

$$a_{\dot{h}_2} = d \left(m_w x_\alpha b c_h + m_w x_\alpha b c_1 c_{l_\alpha} \left(\frac{1}{U} \right) + m_t c_2 c_{m_\alpha - eff} \left(\frac{1}{U} \right) \right)$$

$$a_{\alpha_{21}} = d \left(-m_t k_1 + m_w x_\alpha b c_1 c_{l_\alpha} + m_t c_2 c_{m_\alpha - eff} \right)$$

$$a_{\alpha_{22}} = -d m_t k_2$$

$$a_{\alpha_{23}} = -d m_t k_3$$

$$a_{\dot{\alpha}_2} = d \left(m_t c_\alpha + m_w x_\alpha b c_1 c_{l_\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{b}{U} \right) - m_t c_2 c_{m_\alpha - eff} \left(\frac{1}{2} - a \right) \left(\frac{b}{U} \right) \right)$$

$$b_{\beta_2} = d \left(m_w x_\alpha b c_1 c_{l_\beta} + m_t c_2 c_{m_\beta - eff} \right)$$

$$b_{\gamma_2} = d \left(m_w x_\alpha b c_1 c_{l_\gamma} + m_t c_2 c_{m_\gamma - eff} \right)$$

$$c_1 = \rho U^2 b s_p$$

$$c_2 = \rho U^2 b^2 s_p$$

Modèle Dynamique de l'avion flexible

La matrice d'état et de commande du modèle longitudinal de l'avion flexible sont données comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

Avec

$$A_{11} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 & Z_{\eta_1} \\ M_\alpha & M_q & M_{\eta_1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{12} = \begin{bmatrix} Z_{\dot{\eta}_1} & 0 & 0 \\ M_{\dot{\eta}_1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} \eta_{1\alpha} & \eta_{1q} & (\eta_{1\eta_1} - \omega_1^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ \eta_{5\alpha} & \eta_{5q} & 0 \end{bmatrix}; A_{22} =$$

$$\begin{bmatrix} (-2\zeta_1\omega_1 + \eta_{1\dot{\eta}_1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & (\eta_{5\eta_5} - \omega_5^2) & (-2\zeta_5\omega_5 + \eta_{5\dot{\eta}_5}) \end{bmatrix};$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \eta_{7\alpha} & \eta_{7q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{33} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\eta_{7\eta_7} - \omega_7^2) & 0(-2\zeta_7\omega_7 + \eta_{7\dot{\eta}_7}) & \eta_{7\eta_8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \eta_{7\eta_8} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{41} = \begin{bmatrix} \eta_{8\alpha} & \eta_{8q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \eta_{12\alpha} & \eta_{12q} & 0 \end{bmatrix}; A_{42} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_{43} = \begin{bmatrix} \eta_{8\eta_7} & \eta_{8\dot{\eta}_7} & (\eta_{8\eta_8} - \omega_8^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{44} = \begin{bmatrix} (-2\zeta_8\omega_8 + \eta_8\dot{\eta}_8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_{12}^2 & -2\zeta_{12}\omega_{12} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} Z_{\delta e} & M_{\delta e} & 0 & \eta_{1\delta e} & 0 & \eta_{5\delta e} & 0 & \eta_{7\delta e} & 0 & \eta_{8\delta e} & 0 & \eta_{12\delta e} \\ Z_{\delta ch} & M_{\delta ch} & 0 & \eta_{1\delta ch} & 0 & \eta_{5\delta ch} & 0 & \eta_{7\delta ch} & 0 & \eta_{8\delta ch} & 0 & \eta_{12\delta ch} \end{bmatrix}^T$$

Modélisation de la turbulence

Lorsqu'un avion vole ses mouvements peuvent être affectés par plusieurs facteurs comme les commandes des manœuvres, les perturbations atmosphériques et autres.

Les commandes des manœuvres sont appliquées par un pilote ou sont fournies par un système de navigation ou de guidage. Ces commandes sont des entrées aux systèmes actifs de commande, et elles devraient changer la trajectoire de vol de l'avion. D'autres effets sont des perturbations non désirées pour le mouvement de l'avion. Une des fonctions principales des systèmes actifs de commande est la suppression ou la minimisation le plus possible des effets indésirables des telles perturbations non désirées.

L'air par lequel un avion vole ne reste jamais fixe. Par conséquent, toutes les fois que l'avion vole, le mouvement de l'air autour de l'avion est erratique, perturbe, donc turbulent. La nature des perturbations de l'air est influencée par beaucoup de facteurs externes. Habituellement on considère la turbulence qui apparaît au-dessus de la région où l'atmosphère se comporte comme une couche limite. Ainsi, les sources de la turbulence, les caractéristiques des rafales discrètes et continues, la théorie de la densité spectrale de puissance ainsi que le facteur de chargement sont décrites dans les sections suivantes.

Les sources de la turbulence sont les suivantes :

- **L 'orage**, la source la plus commune de turbulence grave.
- Le **nuage accumule'** qui a le même mécanisme que l'orage, mais il est moins grave.
- La **turbulence claire d'air, CAT** (Clear Air Turbulence), habituellement beaucoup moins grave que les deux premières sources, qui par définition n'est pas visible, peut être produite par des vents qui coulent au-dessus et entre les montagnes, et par convection due au chauffage de l'air près de la terre le matin, particulièrement au-dessus du désert.

Caractéristiques des rafales :

Le phénomène de turbulence étant varié, les meilleures méthodes pour l'analyse des problèmes dynamiques dans lesquelles la turbulence est impliquée sont les méthodes statistiques. Car même, des rafales de large amplitude, qui sont modélisables par une fonction déterministe peuvent apparaître, mais à des temps aléatoires.

Dans le but de voir l'effet des rafales sur la structure de l'avion, on peut utiliser une rafale discrète ou continue.

Rafale discrète

Ce modèle de vent est défini dans le domaine temporel par :

$$w_g = \frac{k}{T} [1 - \cos(2\pi/T)t]$$

où T : est la durée de la rafale(s) tel que $T = L/U$, U : est la vitesse de l'avion à l'équilibre (m/s), c : est la corde aérodynamique moyenne de l'aile de l'avion (m), L est la longueur d'onde de la rafale (m), donc $L=25c$ et enfin k est un facteur choisi pour réaliser l'intensité exigée de la rafale.

L'équation algébrique de la rafale Delta est donnée par :

$$w_g(t) = \begin{cases} A \frac{t}{t_1} \text{ for } 0 \leq t \leq t_1 \\ -A \frac{t}{t_1} + 2A \text{ for } t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 \text{ elsewhere} \end{cases}$$

où A est la valeur maximale de la rafale verticale de la forme Delta (m/s).

Rafale continues

Il y a deux représentations analytiques pour la fonction de densité spectrale de puissance DSP de la turbulence atmosphérique, qui sont utilisés dans les études des systèmes actifs de commande de vol comme suit :

Formulations de Von Karman

$$\Phi_w(\omega) = \frac{\sigma_w^2 \frac{L_w}{U_0} \left[1 + \frac{3}{8} \left(1.339 \frac{L_w \omega}{U_0} \right)^2 \right]}{\left[1 + \left(1.339 \frac{L_w \omega}{U_0} \right)^2 \right]^{1/6}}$$

Formulations de Dryden

$$\Phi_w(\omega) = \frac{\sigma_w^2 L_w \left[1 + 3 \left(\frac{L_w \omega}{U_0} \right)^2 \right]}{\pi U_0 \left[1 + \left(\frac{L_w \omega}{U_0} \right)^2 \right]^2}$$

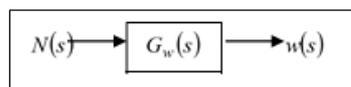
σ_w est le RMS de la turbulence (m/s),

L_w est l'échelle de turbulence qui varie avec l'altitude.

U_0 est la vitesse d'équilibre de l'avion (m/s).

Génération des rafales continues transrationnelles

Pour générer des signaux de rafales sous la forme Dryden ou Von Karman avec l'intensité exigée, il est nécessaire qu'une source de bruit avec une fonction DSP $\phi_N(\omega)$ est utilisée pour fournir le signal d'entrée à un filtre linéaire. Ce filtre est choisi tel qu'il donne une réponse en fréquence appropriée, tel que le signal de sortie du filtre ait me fonction DSP $\phi_i(\omega)$. Ce schéma est représenté dans le diagramme bloc de la Figure suivante.



Genérateur de rafale

Où

$N(s)$: est un bruit blanc

$w(s)$: Rafale de vent

$G_w(s)$: Fonction de transfert

La décomposition de la DSP pour la turbulence verticale nous amène à:

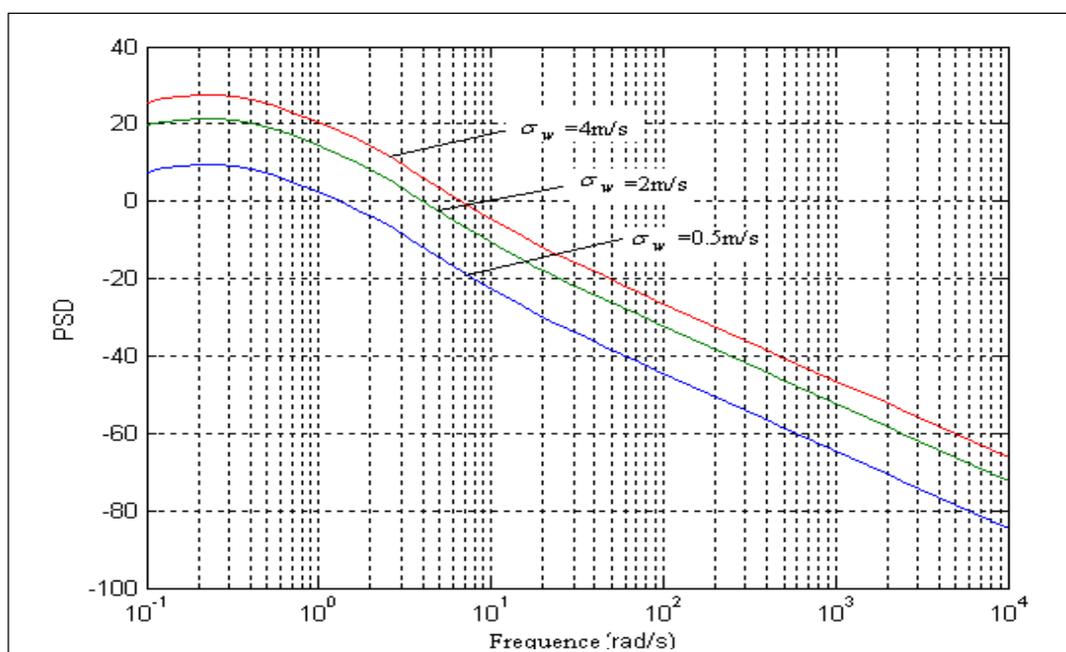
Filtre de Dryden

$$G_w(s) = \sqrt{\frac{3U_0\sigma_w^2}{\pi L_w} \frac{U_0 + s}{\sqrt{3L_w} \left[\frac{U_0}{L_w} + s \right]^2}} \quad \square$$

Filtre de Von Karman

$$G_w(s) = \sigma \sqrt{\frac{L_w}{U_0}} \frac{1 + 2.7478 \left(\frac{L_w}{U_0} \right) s + 0.3378 \left(\frac{L_w}{U_0} \right) s^2}{1 + 2.9958 \left(\frac{L_w}{U_0} \right) s + 1.9752 \left(\frac{L_w}{U_0} \right)^2 s^2 + 0.1539 \left(\frac{L_w}{U_0} \right)^3 s^3}$$

La variation de l'amplitude de $\phi(\omega)$ en fonction de σ_w est représenté dans la figure ci-dessous. On remarque que la plage des fréquences de 0.1 Hz à 1 Hz représente l'intensité maximale du spectre de la rafale de vent. Au fur et à mesure que la fréquence augmente, l'intensité de la rafale diminue.



Densité spectrale de la turbulence verticale pour plusieurs de σ

Le modèle d'état de à partir de filtre de Dryden est donné par [58] :

$$\begin{cases} \dot{x}_w = A_w x_w + B_w N \\ w_g = C_w \end{cases}$$

$$\text{Avec : } A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_w^2 & -2\lambda_w \end{bmatrix}; B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_w = [\sqrt{k_w}\beta_w \quad \sqrt{k_w}]$$

$$\lambda_w = \frac{U_0}{L_w}, \beta_w = \frac{U_0}{\sqrt{3}L_w}, k_w = \frac{3U_0\sigma_w^2}{\pi L_w}$$

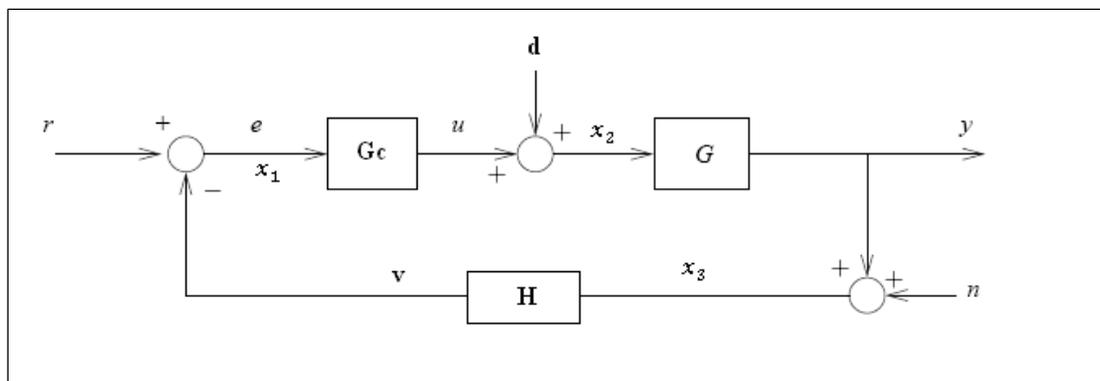
Ce modèle est utilisé pour représenter le modèle de l'avion avec présence de turbulence.

C. Notions préliminaires sur la stabilité et la commande des systèmes

Définition de la stabilité

La notion de stabilité dans un système est une exigence critique dans le désigne d'un contrôleur. Une perte de stabilité conduit à un comportement oscillatoire et donc à une situation incontrôlable; au pire la génération de signaux de grande énergie qui vont endommager ou détruire le système.

On s'intéresse dans un premier lieu à la **stabilité BIBO** (*bounded input/bounded output*) et la **stabilité interne** pour un système LTI. La première notion traite le comportement externe du système asservi et exige que l'énergie des signaux en sortie soit bornée dès que l'énergie fournie en entrée est bornée. En terme des fonctions de transfert, correspond à la stabilité de la fonction de sensibilité complémentaire T . Alors que la seconde exige que tous les signaux circulant dans la boucle soient d'énergie finie. Cette dernière est plus restrictive et plus importante en pratique puisque les composants à l'intérieur du système sont également sensibles aux énergies excessives. Afin de mieux expliquer cette idée, considérons le schéma de la boucle suivante :



Systeme en boucle fermée

Définition 1 : Le système bouclé de la figure (III.1) est bien posé si les neuf fonctions de transfert entre les signaux d'entrées (r, d, n) et de sortie (u, y, v) existes.

Théorème 1: Le système est bien posé si et seulement si la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & H(s) \\ -G_c(s) & 1 & 0 \\ 0 & -G(s) & 1 \end{bmatrix}$$

n'est pas singulière c'est-à-dire, le déterminant de la matrice $1 + G(s)G_c(s)H(s)$ n'est pas égale à zéro.

Définition 2 : Le système de la figure précédente est internement stable si les neuf fonctions de transfert entre les signaux d'entrées (r, d, n) et les signaux internes (x_1, x_2, x_3) sont stable.

Les neuf fonctions de transfert sont données par :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + G(s)G_c(s)H(s)} \begin{bmatrix} 1 & -G(s)H(s) & -H(s) \\ G_c(s) & 1 & -G_c(s)H(s) \\ G(s)G_c(s) & G(s) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

Théorème 2 : Le système est internement stable si est seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaisantes :

1. La fonction de transfert $1 + G(s)G_c(s)H(s)$ n'a pas de zéro dans $Re(s) \geq 0$
2. $G(s)G_c(s)H(s)$ n'a pas de simplification pole-zéros dans $Re(s) \geq 0$

Dans le second lieu, la notion de la stabilité est considérée pour un système continu décrit par une équation différentielle non-linéaire suivante :

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathcal{R}^n$$

Définition 3 (Point d'équilibre)

Un vecteur $x_e \in \mathcal{R}^n$ est dit point ou état *d'équilibre* si $f(x_e) = 0$

Remarque: Tout point d'équilibre peut être ramené à l'origine par un simple changement de variable $x \leftarrow x - x_e$. Donc, sans perte de généralité, les définitions et théorèmes qui suivent seront établis en considérant $x_e = 0$

Définition 4 (Stabilité locale et asymptotique)

Le point ou l'état d'équilibre $x_e = 0$ du système est :

stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r = r(\varepsilon)$, tel que

$$\|x(t=0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > 0$$

asymptotiquement stable, s'il est stable et si r peut être choisi tel que :

$$\|x(t=0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

marginalement stable, s'il est stable sans être asymptotiquement stable.

Définition 5 (Stabilité asymptotique globale)

Si le système est asymptotiquement stable quel que soit le vecteur d'état initial $x(t=0)$ alors le point d'équilibre est *globalement asymptotiquement* (ou *exponentiellement*) *stable*.

Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe

La stabilité au sens de Lyapunov indique que si l'énergie totale d'un système se dissipe continuellement (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors ce système est stable (converge vers un état d'équilibre). La *méthode directe* cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique ou quadratique qui admet une dérivée temporelle négative.

Définition 6 : Fonction positive définie

Une fonction scalaire $V(x)$ contenue différentiable à x est dite positive définie dans la région Ω autour de l'origine si :

1. $V(0) = 0$
2. $V(x) > 0 \forall x \in \Omega$ pour $x \neq 0$
3. Si $V(x) \geq 0$ alors la fonction est dite semi-positive définie.

Définition 7 : Fonction quadratique positive définie

La fonction quadratique $V(x) = x^T Q x$ où $Q_{n \times n}$ est une matrice réelle symétrique, est dite positive définie si toutes les valeurs propres de la matrice $Q_{n \times n}$ sont strictement positives

Théorème 3 : (Stabilité locale) L'état d'équilibre $x_e = 0$ est stable si il existe une fonction continuellement dérivable $V(x)$ telle que :

- (1) $V(x) = 0$,
- (2) $V(x) > 0 \forall x \neq 0, x \in \Omega$
- (3) $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \neq 0, x \in \Omega$

Où \dot{V} est la dérivée de V par rapport au temps et Ω est une région autour de 0. Si de plus (3) est remplacée par $\dot{V}(x) < 0$ alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable.

Théorème 4 : (Stabilité globale) L'état d'équilibre x_e est globalement asymptotiquement stable si il existe une fonction continument dérivable $V(x)$ telle que :

- (1) $V(x) > 0 \forall x \neq 0$ (définie positive)
- (2) $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \neq 0$ (définie négative)
- (3) $V(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$

Normes de signaux et systèmes :

Les normes de signaux et systèmes sont introduit afin de servir comme étant la base de la commande robuste.

La taille d'un signal $u(t)$ est souvent mesurée dans la norme \mathcal{L}_p définie par :

$$\|u(t)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

Où p est un entier positif. Les normes suivant sont couramment utilisées :

La norme \mathcal{L}_1 : $\|u(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt$

La norme \mathcal{L}_2 , qui mesure la puissance du signal : $\|u(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)^2 dt}$

La norme \mathcal{L}_∞ : $\|u(t)\|_\infty = \sup_t |u(t)|$

La taille d'un système présenté par une fonction de transfert $G(s)$ est souvent mesurée par la norme \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ .

La norme \mathcal{H}_2 est définie par :

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega}$$

Cette norme représente l'énergie en sortie du système lorsqu'on injecte un Dirac en entrée. La norme $\|G(s)\|_2$ est finie si et seulement si $G(s)$ est strictement propre.

La norme \mathcal{H}_∞ est définie par :

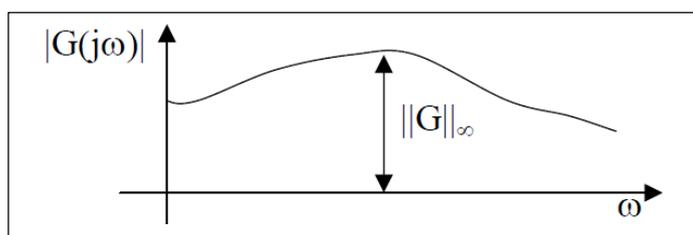
$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{u(t) \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}$$

Où $u(t)$ et $y(t)$ sont l'entrée et la sortie du système respectivement. Pour un système stable, la norme \mathcal{H}_∞ du système peut être calculée par :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)|$$

Cette norme mesure le gain maximal de la réponse fréquentielle de $G(j\omega)$ et elle représente la plus grande valeur singulière pour les systèmes MIMO comme le montre la figure suivante.

On note que les valeurs singulières permettent de visualiser les bandes passantes et les bandes atténuées du système. Elles jouent donc un rôle très important pour définir les performances, la stabilité et la robustesse d'un système.



Norme H_∞ gain de Bode maximum

Propriétés des normes \mathcal{L} et \mathcal{H} : [66]

1. $\|y(t)\|_2 \leq \|G(s)\|_\infty \|u(t)\|_2$
2. $\|y(t)\|_\infty \leq \|G(s)\|_2 \|u(t)\|_\infty$
3. $\|G_1(s)G_2(s)\|_\infty \leq \|G_1(s)\|_\infty \|G_2(s)\|_\infty$.

Synthèse de la commande \mathcal{H}_2

Le problème de la commande optimale \mathcal{H}_2 est de trouver un contrôleur stabilisant le système augmenté $P(s)$ donné par :

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

De tel sorte que la norme \mathcal{H}_2 de la transformation LFT donner par :

$$\|T_{zw}(s)\|_2 = \|P_{11}(s) + P_{12}(s)[I - K(s)P_{22}(s)]^{-1}K(s)P_{21}(s)\|_2 < 1$$

Soit minimisée.

Le contrôleur optimal \mathcal{H}_2 est donné par :

$$K_c = \begin{bmatrix} A - K_f C_2 - B_2 K + K_f D_{22} K & K_f \\ K & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$K_f = (Y C_2^T + N_f) W^{-1}$$

Où Y une matrice symétrique positive définie solution de l'équation de Riccati

$$AY + YA^T - (Y C_2^T + N_f) W^{-1} (C_2 Y + N_f^T) + V = 0$$

Et la commande par retour d'état $u_2 = -K \hat{x}$ avec

$$K = R^{-1} (B_2^T X + N_c^T) = (D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_2^T X + D_{12}^T C_1)$$

Où X une matrice symétrique positive définie solution de l'équation de Riccati

$$A^T X + XA - (X B_2 + N_c) R^{-1} (B_2^T X + N_c^T) + Q = 0$$

REFERENCES

- [1] Bisplinghoff, R.L et Ashley, H. "Principal of Aeroelasticity," Dover Publication, INC, New York, (1975).
- [2] Fung, Y.C., "An Introduction to the Theory of Aeroelasticity", Dover Publication, New York, (1955).
- [3] Alazard,D., Cumer, C., Apkarian, P., M.Gauvrit, M., et Ferreres, G., "Robustesse et Commande Optimale", CEPADUES, France, (1999).
- [4] KRON.A, "Conception de lois de commande Fly-by-wire robustes pour avions de transport civil dont la structure est considérée flexible", thèse de doctorat, Canada, (2004).
- [5] Xiang, J., Yan, Y., Li, D., "Recent advance in nonlinear aeroelastic analysis and control of the aircraft", Chinese Journal of Aeronautics, V.27, n°1, (2014), 12–22
- [6] Etkin. B., "Dynamics of Flight Stability and Control", JOHN WILEY & SONS, (1982).
- [7] Cook, M.V. "Flight Dynamics Principles", Arnold,(2007).
- [8] Nelson, R.C. "Flight Stability and Automatic Control", McGraw-Hill, (1989).
- [9] Kubica, F., Livet, T., Le T.X., Bucharles, A., "Parameter Robust Control System for a Flexible Aircraft", IFAC Symposium on Automatic control in aerspace, (1994).
- [10] Kubica, F., Livet, T., "Flight Control Law Synthesis for a Flexible Aircraft", Proceeding of AIAA Guidance Navigation and Control Conference, Phoenix, Arizona, (1994).

- [11] Kubica, F., Livet, T., "Design of Flight Control System for an Aeroelastic Aircraft", Proceedings of 3rd IEEE Conference on control application, Glasgow, (1994).
- [12] Livet, T., Kubica, F., Magni, J.F., "Performance Improvement by Feedforward: application to civil aircraft control design", Proceedings of 3rd IEEE Conference on control application, Glasgow, (1994).
- [13] Livet, T., Kubica, F., Magni, J.F., Fabre, P., "Robust Flight Control Design with respect to Delays and Control Efficiencies", IFAC Symposium on Automatic control in aerospace, (1994).
- [14] Livet, T., Kubica, F., FABRE, P., Magni, J.F., "Robust Flight Design for a highly Flexible Aircraft by Pole Migration", IFAC Symposium on Automatic control in aerospace, California (1994).
- [15] Livet, T., "Conception de Lois de Commande Robustes et Performantes pour le Pilotage Automatique d'Avion Civils : Application au cas de l'Avion Souple", thèse de doctorat, SUPAERO, (1995).
- [16] Tuzcu, I., "Dynamics and control of flexible aircraft", Virginia Polytechnic Institute, thèse PhD (2001).
- [17] Li, D., Guo, S., Xiang, J., "Aeroelastic dynamic response and control of an airfoil section with control surface nonlinearities", Journal of Sound and Vibration, V. 329, (2010), 4756-4771.
- [18] Collinson, R.P.G., "Introduction to Avionics Systems", Springer Dordrecht Heidelberg London New York, (2011).
- [19] Moir, I., Seabridge, A., Malcolm J., "Civil Avionics Systems", John Wiley & Sons, (August 2013).
- [20] Dardenne, I., "Développement de méthodologies pour la synthèse de lois de commande d'un avion de transport souple", thèse de doctorat, SUPAERO, (1998).
- [21] Bucharles, A., Vacher, P., "Flexible aircraft model identification for control design", Aerospace Science and Technology, V. 6, (2002), 591-598.
- [22] Waszak, M.R. et Buttrill, C.S., "Modelling and Model Simplification of Aeroelastic Vehicles: An Overview", NASA Technical Memorandum 107691, (1992).
- [23] EARL H. DOWELL, E.H., "A Modern Course in Aeroelasticity", Springer Science + Business Media, (2005).

- [24] Laurent, S., "Aéroélasticité Notes de cours", Université de Liège, (2007).
- [25] Gregory.I.M, "Design and stability Analysis of an Integrated Controller for Highly Flexible Advanced Aircraft Utilising the Novel Nonlinear dynamic Inverse", thèse PhD, California Institute of Technology, (2005).
- [26] Shearer, C.M, "Coupled Nonlinear Flight Dynamics, Aeroelasticity, and Control of Very flexible aircraft", thèse PhD, university of Michigan, (2006).
- [27] McLean, D., "Automatic Flight Control Systems", Cambridge University Press, (1990).
- [28] Alazard, D, "Méthodologies de synthèse de commande de vol d'un avion souple", APII-JESA. Commandes robustes, V. 35, (2001), 169-189.
- [29] DEWEY, H., HODGES, G., ALVIN, P., "Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity", Cambridge University Press, (2005).
- [30] Puyou, G., "Conception multi-objectifs de lois de pilotage pour un avion de transport civil", thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, (2005).
- [31] WU, Z., *et al.* "Gust response modeling and alleviation scheme design for an elastic aircraft", *Sci China Tech Sci*, V.53, n°.11, (November 2010), 3110–3118
- [32] Block, J. J., Strganac, T.W., "Applied active control for a nonlinear aeroelastic structure", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, V. 21, n°6, (1998), 838-845.
- [33] Ko, J., Strganac, T.W., Kurdila, A.J., "Stability and control of a structurally nonlinear aeroelastic system", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, V. 21, (1998), 718-725.
- [34] G. Platanitis, G., et Strganac, T.W., "Control of a Nonlinear Wing Section Using Leading and Trailing-Edge Surfaces". *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, V. 27, (2004), 52-58.
- [35] Li, D., Xiang, J., Guo, S., "Adaptive control of a nonlinear aeroelastic system", *Aerospace Science and Technology*, V 15, (2011), 343-352.
- [36] Gujjula, S., Singh, S.N., Yim, W., "Adaptive and neural control of a wing section using leading- and trailing-edge surfaces", *Aerospace Science and Technology*, V. 9, (2005), 161–171.

- [37] Dilmi, S., Bouzouia, B., "Modeling and Control of Flexible Wing with Trailing and Leading Edge Control Surfaces", Fourth European Modelling Symposium on Computer Modelling and Simulation, Italy, (November 2010), 254-259.
- [38] Dilmi, S., Bouzouia, B., "LQR and PRLQR Controllers for an Aeroelastic Airfoil with Leading and Trailing Edge Control Surfaces", 7th Jordanian International Electrical & Electronics Engineering Conference, Jordan, (2011), 261-267.
- [39] Dilmi, S., Bouzouia, B., "Dynamic and Control of Flexible Wing with Two Control Surfaces", International Journal of Simulation Systems Science & Technology V. 11, n° 6, 1-8.
- [40] Dilmi, S., Bouzouia, B., "Improving Performance for Nonlinear Aeroelastic Systems via Sliding Mode Controller", Arab J Sci Eng, Springer-Verlag, V.41, n°9, (2016), 3739-3748 .
- [41] Dillmann, A. et al., "Nonlinear Numerical Flight Dynamics of Flexible Aircraft in the Time Domain by Coupling of CFD, Flight Mechanics, and Structural Mechanics", *New Results in Numer. & Exp. Fluid Mech.*, (2013), 339–347.
- [42] Haiwei, Y., Jinglong, H., "Robust flutter analysis of a nonlinear aeroelastic system with parametric uncertainties", *Aerospace Science and Technology* V.13, (2009), 139–149.
- [43] Shearer, M.C., et Cesnik, C.E.S., "Trajectory Control for Very Flexible Aircraft", *JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL, AND DYNAMICS*, V. 31, n°. 2, (Avril 2008).
- [44] Chavez, F.R., "Characterizing model variation for robust control of flexible atmospheric flight vehicles", PhD thesis, (2000).
- [45] Lie.Z, "Gain scheduling of aircraft pitch attitude and control of discrete, affine, linear parametrically varying systems", thèse PhD, Iowa State University, (2002).
- [46] Patil, J., "Nonlinear Aeroelastic Analysis, Flight Dynamics and Control of a complete Aircraft", thèse PhD, Georgia Institute of technology, (1999).
- [47] Aouf, N., et Benoit, B., et Botez, R., "A Gain Scheduling Approach for a Flexible Aircraft", *Proceeding of the American Control Conference* (2002).

- [48] Tuzcu, I., "On the stability of flexible aircraft", *Aerospace Science and Technology*, V.12 (2008), 376–384.
- [49] Aouf, N., Botez, R., "Robust Gust Load Alleviation for a Flexible Aircraft", *Canadian aeronautic and space journal*, V 46, n° 3, (2000), 131-139.
- [50] Aouf, N., "Robust Control Techniques for Aerospace Vehicles", PhD thesis, McGill University, (2001).
- [51] Ostertag, E., "Mono- and Multivariable Control and Estimation Linear, Quadratic and LMI Methods", Springer-verlag, New York, (2011).
- [52] Eugene, L., Kevin, A.W., "Robust and Adaptive Control with Aerospace Applications", Springer-Verlag, London, (2013).
- [53] Xue, D., Chen, Y.Q, Atherton, D.P., "Linear Feedback Control Analysis and Design with MATLAB", SIAM, (2007).
- [54] Tewari, A., "Aeroservoelasticity Modeling and Control", Springer-Verlag, NewYork, (2015).
- [55] Richard.R.E, "Optimized Flutter Control for an Aeroelastic Delta Wing", thèse PhD, Duke University, (2002).
- [56] Teng.Y., "Modelling and Simulation of Aeroelastic Control with Multiple Control Surface Using μ Method", thèse PhD, Copyright © by the author, (2005).
- [57] Karkas,G., "The simulation of flexible aircraft", thèse de Master, University of Toronto, (2003).
- [58] Dignan, J., "Simulation of flexible aircraft using real time aerodynamic calculation", thèse de Master, University of Toronto, (2005).
- [59] Loftus, J., "Motion Simulation of Flexible Aircraft", thèse de Master, University of Toronto (2007).
- [60] Chong, S.C., "Vibration and Aeroelastic Analysis of Highly Flexible HALE Aircraft", Georgia Institute of Technology, these PhD, (2006).
- [61] Fatehi, M., Moghaddam, M., Rahim, M., "Robust flutter analysis and control of a wing", *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, V. 84, n° 6, (2012), 423 – 438.
- [62] Lopez, P., Nouri, A.S., "Théorie élémentaire et pratique de la commande par les régimes glissants", Springer-Verlag, New York, (2006).

- [63] Douglas, J., Athans, M., "Robust Linear Quadratic Designs with Real Parameter Uncertainty," Transactions, on Automatic Control, V. 39, n°1, (January 1994).
- [64] Slotine, J.J., Li, W., "Applied Nonlinear Control", Prentice Hall, New Jersey, (1991).
- [65] Liu, J., Wang, X., "Advanced Sliding Mode Control for Mechanical Systems Design, Analysis and MATLAB Simulation", Springer-Verlag, (2012).
- [66] Dingyu Xue, Yang Quan Chen, Derek P. Atherton, Linear Feedback Control Analysis and Design with MATLAB, SIAM 2007.
- [67] Dilmi, S., "Elaboration d'un contrôleur H_2/H_{inf} dédié au guidage d'un avion léger", thèse de Magister, Université de Blida (2000).