

UNIVERSITE DE BLIDA 1**Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales****THESE DE DOCTORAT**

En Aéronautique

Spécialité : Aéronautique

**ETUDE D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE
TEMPERATURE AUTOUR D'UN CONE A INCIDENCE NULLE**

Par

Toufik ELAICHI

Devant le jury composé de :

B. BENAOUDA Z.	Professeur, U. de Blida1,	Président
B. SALAH	Professeur, ENSH Blida,	Examineur
A. ZAARAOUI	Maitre de Conférences A, U. Khemis Miliana,	Examineur
B. NOURA	Maitre de Conférences A, U. Khemis Miliana,	Examineur
Y. BENKHEDDA	Professeur, U. de Blida1,	Examineur
T. YAHIAOUI	Professeur, U. de Blida1,	Rapporteur

Blida, 10 Juillet 2018

- A la mémoire de mes parents
- A ma femme
- A mes enfants,

Vous vous êtes dépensés pour moi sans compter.

En reconnaissance de tous les sacrifices consentis
par tous en chacun pour me permettre d'atteindre
cette étape de ma vie.

Je dédie ce travail

RESUME

La résolution des écoulements supersoniques autour du cône est généralement traitée sous l'hypothèse que l'air est calorifiquement parfait. Autrement dit, la chaleur spécifique à pression constante C_p est une constante. Cette hypothèse est vraie tant que la température est proche de celle de l'atmosphère ambiante. Cependant, lorsque la température augmente l'air devient calorifiquement imparfait. Donc la chaleur spécifique à pression constante C_p varie avec cette augmentation de la température.

Le but de notre travail consiste à développer un programme numérique basé sur une nouvelle approche mathématique permettant de déterminer les paramètres de l'écoulement supersonique à travers un choc conique à haute température inférieure au seuil de dissociation des molécules. Dans le but de corriger le modèle mathématique actuel basé sur un gaz parfait. Dans ce cas, la température génératrice devient un paramètre important et crucial dans les calculs. Le modèle mathématique est présenté par un système d'équations différentielles non linéaires de premier ordre à trois inconnues couplées avec conditions initiales. La résolution numérique de ce système est faite par l'adaptation de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4. Les résultats obtenus dépendent de nombre de Mach amont, la température génératrice, la déviation de cône et de gaz utilisé. La comparaison des résultats est faite avec le modèle d'un gaz parfait pour des valeurs faibles de la température génératrice, de nombre de Mach amont et de l'angle de déviation de cône. Un calcul de l'erreur est fait entre notre modèle à haute température et le modèle actuel d'un gaz parfait dans le but de déterminer la limite d'application de ce dernier.

Mots Clés

Ecoulement Supersonique, Choc Conique, Choc oblique, Haute Température, Modèle de Gaz Parfait, Gaz Calorifiquement Imparfait, Intégration Numérique, Méthode de Runge Kutta, Rapports Thermodynamiques.

ABSTRACT

The resolution of supersonic flow a round conical body is taken under calorically perfect gas hypothesis. Then the heat specific value C_p at constant pressure is constant. When the temperature increase the air became calorically imperfect so the heat specific value C_p change with this temperature.

The aim of this work is to realize a numerical calculation program based on the development of a new mathematical model allowing determining the supersonic flow parameters through a conical shock under a hypothesis at high temperature lower than the threshold of the molecules dissociation, in the context of correcting the perfect gas model. The stagnation temperature becomes a crucial and an important parameter in the calculation. The mathematical model is presented by the numerical resolution of a first-order nonlinear differential equations system with three coupled unknowns with initial conditions. The numerical resolution is made by adapting the fourth order Runge Kutta method to determine the two components of the velocity vector and the temperature. All the results depend on four parameters which are the upstream Mach number, the stagnation temperature, the cone deviation and the thermodynamic of the used gas. The convergence of the results depends on the step used in the Runge Kutta method. The comparison of the results is done with the perfect gas model for low stagnation temperature, upstream Mach number and cone deviation angle. A calculation of the error is made between our high temperature model and the perfect gas model for aim to determine the limit of application of this latter.

Key words

Supersonic Flow, Conical shock, Oblique shock, High temperature, Perfect Gas model, Calorically imperfect gas, Numerical integration, Runge Kutta method, Thermodynamical ratios.

ملخص

الهدف من هذه الدراسة هو تقديم برنامج حاسوب قائم على تطوير نموذج رياضي جديد لتحديد معالم تدفق الهواء أسرع من الصوت لصدمة حول مخروط ذو قاعدة دائرية من خلال فرضية درجة حرارة عالية دون درجة تفكك جزيئات العتبة في إطارالنموذج الصحيح للغاز المثالي. في هذه الحالة الحرارة النوعية عند ضغط ثابت لاتبقى ثابتة وترتفع مع ارتفاع درجة الحرارة. درجة حرارة المولد هو معيار مهم في الحساب. يتم تقديم نموذج رياضي من خلال حل لنظام معادلات تفاضلية غير خطية من الدرجة الأولى مع ثلاثة مجاهيل تحت الشروط الأولية. يتم الحل الرقمي من خلال تكييف طريقة رونج كوتا لتحديد توزيع احداثيات السرعة وكذا درجة الحرارة عند كل نقطة من نقاط الحساب. يتم التطبيق بالنسبة للهواء. تعتمد كل النتائج التي تم الحصول عليها على أربعة المعاملات التي هي عدد ماخ عند نهاية القبلية، درجة حرارة عند نهاية الاحتراق، انحراف المخروط والغاز المستخدم.. تمت مقارنة النتائج مع نموذج الغاز المثالي في حالة درجات حرارة المنبع المنخفضة وانحراف الضعيف للمخروط وكذا عدد ماخ ضعيف. تم إجراء حساب الخطأ بين نموذج ارتفاع درجة الحرارة من الغاز المثالي و نموذج الغاز المثالي في حالة دراجة الحرارة المنخفضة لأغراض تحديد الحد من تطبيق هذا الأخير.

كلمات المفاتيح

تدفق الأسرع من الصوت، صدمة مخروطية، صدمة المنحرفة، الغاز درجة الحرارة عالية، نموذج الغاز المثالي، تكامل الرقمي، الطريقة الإنقسام، طريقة رونج كوتا، نسب الديناميكا الحرارية.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier infiniment mon dieu tout puissant pour l'aide qu'il m'a apporté pour la réalisation de ce modeste travail.

Je tiens donner ma gratitude remerciement à mon directeur de thèse, monsieur **Toufik YAHIAOUI**, Professeur à l'Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de l'Université de Blida1 pour avoir assuré la direction de mon travail, et pour m'avoir apporté la rigueur scientifique nécessaire à son bon déroulement. Je le remercie encore pour sa disponibilité et son total dévouement de tous les jours malgré ces empêchements.

Monsieur **BENAOUDA ZOUAOUI Braham**, Professeur à l'Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales de l'Université de Blida1, m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

A monsieur **Boualem SALAH**, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique de Blida, j'exprime ma profonde gratitude pour son apports scientifiques et d'avoir accepté d'honorer par sa présence notre jury d'examen.

La présence de Monsieur **Belkheir NOURA**, Maitre de Conférences A au Département de Génie Mécanique de la Faculté des Sciences et de la Technologie de l'Université Djillali Bounaama de Khemis Miliana, dans mon jury, constitue un gage de confiance.

Mes remerciements s'adressent aussi à monsieur **Abdelkader ZAARAOUI**, Maitre de Conférences A au Département de Génie Mécanique de la Faculté des Sciences et de la Technologie de l'Université Djillali Bounaama de Khemis Miliana pour sa confiance et d'avoir accepté être examinateur de mon travail.

Je remercie également monsieur **Younes BENKHEDDA**, Professeur au Département de Génie Mécanique de la Faculté de Technologie de l'Université de Blida1 pour l'acceptation d'être membre de jury de cette thèse et surtout pour les critiques que je trouve à la hauteur.

Mes remerciements vont enfin à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIERES

DEDICACES.....	1
RESUME.....	2
REMERCIEMENTS.....	5
TABLE DES MATIERES.....	6
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX.....	8
INTRODUCTION.....	17
1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET PROBLEMATIQUE.....	22
1.1. Etude bibliographique.....	23
1.2. Position du problème par rapport à la littérature.....	29
1.3. Objectifs de l'étude.....	30
1.4. Motivation.....	30
2. PARAMETRES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE	
A HAUTE TEMPERATURE.....	32
2.1. Formulation Mathématique du problème.....	33
2.2. Procédure du calcul.....	35
2.3. Chaleur spécifique à pression constante.....	38
3. FORMULATION MATHEMATIQUE DES ONDES DE CHOC	
NORMALE, OBLIQUE ET CONIQUE A HAUTE TEMPERATURE.....	40
3.1. Hypothèses de calcul.....	41
3.2. Onde de choc normale à haute température.....	43
3.3. Onde de choc oblique à haute température.....	48
3.4. Onde de choc conique à haute température.....	51
3.5. Comparaison entre un choc oblique et un choc conique.....	54
3.6. Onde de détente à haute température.....	55
3.7. Applications.....	56
3.8. Calcul de l'erreur de modèle GP par rapport au modèle <i>HT</i>	58

4. PROCEDURE NUMERIQUE DE CALCUL D'UN CHOC CONIQUE A HAUTE TEMPERATURE.....	59
4.1. Procédure numérique.....	59
4.2. Adaptation de la méthode de Runge Kutta.....	61
4.3. Algorithme de programme principal.....	66
5. RESULTATS ET COMMENTAIRES.....	72
5.1. Exemple typique.....	72
5.2. Variation des paramètres pour des cas remarquables.....	76
5.3. Variation des paramètres en fonction de θ	79
5.4. Variation des paramètres avec θ_C et M_1 (T_0 fixée).....	82
5.5. Variation à <i>HT</i> des paramètres en fonction de θ_C pour M_1 fixé.....	89
5.6. Variation à <i>HT</i> des paramètres en fonction de M_1 lorsque θ_C est fixé.....	96
5.7. Variation des paramètres en fonction de T_0 pour θ_C et M_1 fixés.....	103
5.8. Comparaison des modèles GP et <i>HT</i> pour $\theta_C=20.00$ degré.....	110
5.9. Comparaison entre le cône et le dièdre.....	116
CONCLUSION.....	123
APPENDICE A Liste des symboles.....	127
APPENDICE B Méthode de Runge Kutta.....	129
B.1. Runge Kutta d'ordre 3 (1 ^{ère} version)	129
B.2. Runge Kutta d'ordre 3 (2 ^{ème} version).....	130
B.3. Runge Kutta d'ordre 4 (1 ^{ère} Version).....	130
B.4. Runge Kutta d'ordre 4 (2 ^{ème} Version).....	130
B.5. Runge Kutta d'ordre 4 (3 ^{ème} Version).....	130
B.6. Runge Kutta d'ordre 6.....	131
B.7. Runge Kutta d'ordre 7.....	131
REFERENCES.....	132

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 2.1 : Présentation de la condensation des nœuds	35
Figure 3.1 : Illustration d'une onde de choc normale	43
Figure 3.2 : Onde de choc oblique autour d'un dièdre	48
Figure 3.3 : Présentation d'un choc conique en coordonnées cylindriques	51
Figure 3.4 : Présentation d'un cône de forme progressive	56
Figure 3.5 : Position adéquate du cône-nacelle pour prise d'air	57
Figure 5.1 : Variation à HT de M avec θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré d'un choc faible.....	80
Figure 5.2 : Variation à HT de T/T_0 le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	80
Figure 5.3 : Variation à HT de ρ/ρ_{02} le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	80
Figure 5.4 : Variation à HT de P/P_{02} le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	81
Figure 5.5 : Variation à HT de M le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc fort	81
Figure 5.6 : Variation à HT de T/T_0 le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc fort	81
Figure 5.7 : Variation à HT de ρ/ρ_{02} le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc fort	82
Figure 5.8 : Variation à HT de P/P_{02} le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc fort	82
Figure 5.9 : Variation de θ_S en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	84
Figure 5.10 : Variation de M_2 à travers le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	84
Figure 5.11 : Variation de ψ après le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	84
Figure 5.12 : Variation de T_2/T_1 à travers le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	85

Figure 5.13 : Variation de ρ_2/ρ_1 à travers le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	85
Figure 5.14 : Variation de P_2/P_1 à travers le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	85
Figure 5.15 : Variation de P_{02}/P_{01} à travers le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	86
Figure 5.16 : Variation de $\Delta S_{21}/R$ à travers le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	86
Figure 5.17 : Variation de T_2/T_0 juste après le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	86
Figure 5.18 : Variation de ρ_2/ρ_{02} juste après le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	87
Figure 5.19 : Variation de P_2/P_{02} juste après le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	87
Figure 5.20 : Variation de M_c sur la surface de cône pour le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	87
Figure 5.21 : Variation de T_c/T_0 sur la surface de cône pour le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	88
Figure 5.22 : Variation de ρ_c/ρ_{02} sur la surface de cône pour le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	88
Figure 5.23 : Variation de P_c/P_{02} sur la surface de cône pour le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	88
Figure 5.24 : Variation de C de la prise d'air pour le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	89
Figure 5.25 : Variation de la traînée D de cône pour le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K	89
Figure 5.26 : Variation à HT de θ_s en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50$, 2.00 et 4.00	91
Figure 5.27 : Variation à HT de M_2 en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50$, 2.00 et 4.00 pour le choc faible	91

Figure 5.28 : Variation à <i>HT</i> de ψ en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50, 2.00$ et 4.00 pour le choc faible	91
Figure 5.29 : Variation à <i>HT</i> de T_2/T_1 en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc faible	92
Figure 5.30 : Variation à <i>HT</i> de ρ_2/ρ_1 en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc faible	92
Figure 5.31 : Variation à <i>HT</i> de P_2/P_1 en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc fiable	92
Figure 5.32 : Variation à <i>HT</i> de P_{02}/P_{01} en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc faible	93
Figure 5.33 : Variation à <i>HT</i> de $\Delta S_{21}/R$ en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc fiable	93
Figure 5.34 : Variation à <i>HT</i> de T_2/T_0 en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc faible	93
Figure 5.35 : Variation à <i>HT</i> de ρ_2/ρ_{02} en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc fiable	94
Figure 5.36 : Variation à <i>HT</i> de P_2/P_{02} en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc fiable	94
Figure 5.37 : Variation à <i>HT</i> de M_C en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc faible	94
Figure 5.38 : Variation à <i>HT</i> de T_C/T_0 en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc faible	95
Figure 5.39 : Variation à <i>HT</i> de ρ_C/ρ_{02} en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc faible	95
Figure 5.40 : Variation à <i>HT</i> de P_C/P_{02} en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc faible	95
Figure 5.41 : Variation à <i>HT</i> de C en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc faible	96
Figure 5.42 : Variation à <i>HT</i> de D en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50,$ 2.00 et 4.00 pour le choc faible	96
Figure 5.43 : Variation à <i>HT</i> de θ_S en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré	98

Figure 5.44 : Variation à HT de M_2 en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	98
Figure 5.45 : Variation à HT de ψ en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	98
Figure 5.46 : Variation à HT de T_2/T_1 en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	99
Figure 5.47 : Variation à HT de ρ_2/ρ_1 en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	99
Figure 5.48 : Variation à HT de P_2/P_1 en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	99
Figure 5.49 : Variation à HT de P_{02}/P_{01} en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	100
Figure 5.50 : Variation à HT de $\Delta S_{21}/R$ en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	100
Figure 5.51 : Variation à HT de T_2/T_0 en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	100
Figure 5.52 : Variation à HT de ρ_2/ρ_{02} en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	101
Figure 5.53 : Variation à HT de P_2/P_{02} en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	101
Figure 5.54 : Variation à HT de M_c en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	101
Figure 5.55 : Variation à HT de T_c/T_0 en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	102
Figure 5.56 : Variation à HT de ρ_c/ρ_{02} en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	102
Figure 5.57 : Variation à HT de P_c/P_{02} en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	102
Figure 5.58 : Variation à HT de C en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	103
Figure 5.59 : Variation à HT de D en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible	103
Figure 5.60 : Variation de θ_S en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	104

Figure 5.61 : Variation de M_2 en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	104
Figure 5.62 : Variation de ψ en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	105
Figure 5.63 : Variation de T_2/T_1 en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	105
Figure 5.64 : Variation de ρ_2/ρ_1 en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	105
Figure 5.65 : Variation de P_2/P_1 en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	106
Figure 5.66 : Variation de P_{02}/P_{01} en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	106
Figure 5.67 : Variation de $\Delta S_{21}/R$ en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	106
Figure 5.68 : Variation de T_2/T_0 en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	107
Figure 5.69 : Variation de ρ_2/ρ_{02} en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	107
Figure 5.70 : Variation de P_2/P_{02} en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	107
Figure 5.71 : Variation de M_c en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	108
Figure 5.72 : Variation de T_C/T_0 en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	108
Figure 5.73 : Variation de ρ_C/ρ_{02} en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	108
Figure 5.74 : Variation de P_C/P_{02} en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	109
Figure 5.75 : Variation de C en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	109
Figure 5.76 : Variation de D en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible	109
Figure 5.77 : Variation de $\varepsilon(\theta_S)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	110

Figure 5.78 : Variation de $\varepsilon(M_2)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	111
Figure 5.79 : Variation de $\varepsilon(\psi)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	111
Figure 5.80 : Variation de $\varepsilon(T_2/T_1)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	111
Figure 5.81 : Variation de $\varepsilon(\rho_2/\rho_1)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	112
Figure 5.82 : Variation de $\varepsilon(P_2/P_1)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	112
Figure 5.83 : Variation de $\varepsilon(P_{02}/P_{01})$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	112
Figure 5.84 : Variation de $\varepsilon(\Delta S_{21}/R)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	113
Figure 5.85 : Variation de $\varepsilon(T_2/T_0)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	113
Figure 5.86 : Variation de $\varepsilon(\rho_2/\rho_{02})$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	113
Figure 5.87 : Variation de $\varepsilon(P_2/P_{02})$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	114
Figure 5.88 : Variation de $\varepsilon(M_C)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	114
Figure 5.89 : Variation de $\varepsilon(T_d/T_0)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	114
Figure 5.90 : Variation de $\varepsilon(\rho_c/\rho_{02})$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	115
Figure 5.91 : Variation de $\varepsilon(P_d/P_{02})$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	115
Figure 5.92 : Variation de $\varepsilon(C)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	115
Figure 5.93 : Variation de $\varepsilon(D)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés	116
Figure 5.94 : Comparaison à HT entre le cône et le dièdre sur θ_S en fonction de φ pour $M_1=4.00$	117

Figure 5.95 : Comparaison à HT entre M_2 de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$	117
Figure 5.96 : Comparaison à HT entre ψ de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$	117
Figure 5.97 : Comparaison à HT entre T_2/T_1 de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$	118
Figure 5.98 : Comparaison à HT entre ρ_2/ρ_1 de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$	118
Figure 5.99 : Comparaison à HT entre P_2/P_1 de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$	118
Figure 5.100 : Comparaison à HT entre P_{02}/P_{01} de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$	119
Figure 5.101 : Comparaison à HT entre $\Delta S_{21}/R$ de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$	119
Figure 5.102 : Comparaison à HT entre T_2/T_0 de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$	119
Figure 5.103 : Comparaison à HT entre ρ_2/ρ_{02} de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$	120
Figure 5.104 : Comparaison à HT entre P_2/P_{02} de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$	120
Figure 5.105 : Comparaison à HT entre M_{Surface} de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$	120
Figure 5.106 : Comparaison à HT entre le cône et le dièdre sur T_{Surface}/T_0 en fonction de φ pour $M_1=4.00$	121
Figure 5.107 : Comparaison à HT entre le cône et le dièdre sur $\rho_{\text{Surface}}/\rho_{02}$ en fonction de φ pour $M_1=4.00$	121
Figure 5.108 : Comparaison à HT entre le cône et le dièdre sur $P_{\text{Surface}}/P_{02}$ en fonction de φ pour $M_1=4.00$	121
Figure 5.109 : Comparaison à HT entre le cône et le dièdre sur C en fonction de φ pour $M_1=4.00$	122
Figure 5.110 : Comparaison à HT entre le cône et le dièdre sur D en fonction de φ pour $M_1=4.00$	122

Tableau 2.1 : Coefficients du polynôme $C_p(T)$ pour l'air selon la relation (2.23)	38
Tableau 2.2 : Variation de $C_p(T)$ avec la température pour l'air	39
Tableau 3.1 : Comparaison entre le choc oblique et le choc conique	53
Tableau 4.1 : Algorithme de programme principal	67
Tableau 4.2 : Algorithme de programme déterminant la valeur de M_1 et T	68
Tableau 4.3 : Algorithme de programme déterminant la valeur de M_{1Lim} Pour θ_C et T_0	70
Tableau 4.4 : Algorithme de calcul de θ_C correspondant à θ_S , M_1 et T_0 par la méthode inverse	71
Tableau 5.1 : Effet de T_0 sur les paramètres isentropiques juste avant le choc pour $M_1=4.00$ degré pour l'air	73
Tableau 5.2 : Effet de T_0 sur les paramètres d'un choc faible lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air	73
Tableau 5.3 : Effet de T_0 sur les paramètres isentropiques juste après le choc faible lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air	74
Tableau 5.4 : Effet de T_0 sur les paramètres de cône pour un choc faible lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air	74
Tableau 5.5 : Effet de T_0 sur l'écart entre les modèles GP et HT pour tous les paramètres d'un choc conique faible lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air	74
Tableau 5.6 : Effet de T_0 sur les paramètres d'un choc fort lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air	75
Tableau 5.7 : Effet de T_0 sur les paramètres isentropiques juste après le choc fort lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air	75
Tableau 5.8 : Effet de T_0 sur les paramètres de cône pour un choc fort lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air	75
Tableau 5.9 : Effet de T_0 sur l'écart entre les modèles GP et HT pour tous les paramètres d'un choc conique fort lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air	75
Tableau 5.10 : Effet de T_0 sur les paramètres d'un choc correspondant à la déviation maximale θ_{Cmax} lorsque $M_1=4.00$ pour l'air	77

Tableau 5.11 : Effet de T_0 sur les paramètres d'un choc correspondant $M_2=1.00$ lorsque $M_1=4.00$ pour l'air	77
Tableau 5.12 : Effet de T_0 sur les paramètres d'un choc correspondant $M_C=1.00$ lorsque $M_1=4.00$ pour l'air	78
Tableau 5.13 : Effet de T_0 sur les paramètres d'un choc pour un nombre de Mach amont minimal lorsque $\theta_C=20$ degré pour l'air	78
Tableau 5.14 : Effet de T_0 sur l'écart entre les modèles GP et HT pour certains résultats lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air....	79
Tableau 5.15 : Valeurs de $\theta_{C_{\max}}$ à HT pour des valeurs de M_1 à $T_0=2000K$	89
Tableau 5.16 : Valeurs à HT de $\theta_{C_{\max}}$ pour certaines valeurs de M_1	96
Tableau 5.17 : Valeurs de $M_{1_{\min}}$ à HT pour certaines valeurs de θ_C	103

INTRODUCTION

Le problème de l'écoulement supersonique autour d'un cône joue une grande importance dans les applications aérospatiales. La majorité des structures en face de l'écoulement sont de forme conique rapprochant de la forme circulaire [2-4, 16, 43, 45, 57]. On trouve cette forme conique en particulier au nez d'un avion supersonique, d'un missile ainsi que dans la prise d'air d'un moteur supersonique. Cette dernière nécessite une adaptation très adéquate afin de ne pas avoir une réflexion de l'onde de choc dans le moteur. L'écoulement supersonique autour d'un cône est un écoulement tridimensionnel obtenu par la rotation d'un dièdre 2D autour d'un axe de révolution. Ce problème peut être traité par l'utilisation des équations de conservations. Cependant, les coordonnées cylindriques sont les plus adaptées pour la présentation de son modèle mathématique.

Certains auteurs utilisent des formes courbées des cônes [10, 24] afin d'avoir un écoulement progressif pour d'autres une ligne droite [7, 11, 15, 20-22, 24-25, 28-30, 32-33, 36, 40, 50, 51, 53, 55-59]. Par contre la forme pointue du cône au bord d'attaque est très intéressante car nous permet la possibilité d'avoir des ondes de choc attachées. Dans les références [32-33], on trouve la première étude sur la détermination des chocs coniques pour un gaz parfait, calorifiquement et thermiquement parfait. Cette étude suppose que la chaleur spécifique C_p soit une valeur constante donc ne varie pas avec la température. Cette étude donne des bons résultats uniquement si les trois paramètres M_1 , T_0 et θ_C sont petits et qui ne dépassent pas respectivement ces valeurs 2.00, 240 K et 20.0 degré. Maintenant si M_1 commence à augmenter graduellement de 2.00 jusqu'à la valeur limite $M_1=5.00$, ce qui est notre cas, aussi lorsque T_0 commence à dépasser les 240 K, et lorsque θ_C dépasse graduellement les 20.0 degré, on remarque que les résultats présentés dans ces références sont différents des résultats réels. Puisque le comportement physique de gaz change et devient calorifiquement imparfait et thermiquement parfait, c'est-à-dire que $C_p(T)$ va dépendre de la température. Ainsi, l'équation de la conservation d'énergie change complètement. Ce modèle est appelé modèle à haute température, inférieure au seuil de dissociation des molécules. Le nouveau modèle présenté dépend essentiellement

de la température génératrice qui devient un paramètre important et crucial en plus des autres paramètres optés pour le modèle d'un gaz parfait.

En premier temps, pour le cas de l'air on a trouvé une série de valeurs tabulées concernant la fonction $C_P(T)$, dans les références [3-4, 35, 42, 44-45, 57, 61, 68-69] entre les températures 55K et 3550K (température limite pour éviter la dissociation de l'air). Alors une interpolation polynomiale de ces valeurs pour trouver une forme analytique appropriée, c'était vraiment nécessaire dans ce cas. Après plusieurs tentatives et essais, on a choisi un polynôme de 9^{ème} degré qui donne une erreur maximale inférieure à 0.01 % entre la valeur donnée par notre polynôme et la valeur tabulée pour n'importe quelle température dans l'intervalle indiquée précédemment. Plus des détails sur cette interpolation peuvent être trouvées dans les références [67-69].

Le but de ce travail consiste à développer un modèle mathématique répondant au problème de la température élevée HT et qui permet par la suite de faire des corrections aux résultats donnés par le modèle classique de gaz parfait GP [1, 4, 6-7, 11, 15, 24, 28-30, 32-33, 36, 40, 50-51, 53, 56-57]. Ce modèle va être appliqué à l'écoulement supersonique autour d'un cône droit à incidence nulle avec une augmentation graduelle des trois paramètres (M_1, θ_C, T_0) , avec T_0 est inférieure à la température du seuil de dissociation des molécules. Le problème donc consiste à déterminer un nouveau modèle mathématique et de développer dans contexte un nouveau programme de calcul numérique. Ce programme permet de déterminer des nouvelles valeurs avant le choc conique ainsi que les valeurs de $(M_2, P_2/P_1, T_2/T_1, \rho_2/\rho_1, \psi, P_{02}/P_{01}, \Delta S_{21})$ à travers et après le choc. En plus les paramètres thermodynamiques sur la surface de cône $(M_c, T_c/T_0, P_c/P_{02}, \rho_c/\rho_{02})$. Ces résultats peuvent être utilisés pour déterminer, d'autres caractéristiques aérodynamiques, comme la distance d'adaptation de la prise d'air et la trainée d'onde de choc délivrée par l'écoulement supersonique sur le cône. Tous ces résultats sont fonction de $(M_1, T_0$ et $\theta_c)$ pour notre modèle HT. Par contre, le modèle GP dépend de $(M_1, \gamma$ et $\theta_c)$. Cependant, notre modèle HT peut être considéré comme une généralisation du modèle GP. La première étape consiste à déterminer la déviation θ_S de choc correspondant à $(M_1, \theta_C$ et $T_0)$, vu que l'application est pour l'air. On peut déterminer par suite tous les paramètres nécessaires par la résolution des équations non linéaires ou intégration numérique de certaines fonctions assez complexes. En plus, dans ce type d'écoulement, on

aura deux différents chocs. L'un dit faible et l'autre dit fort, selon le nombre de Mach trouvé juste après le choc. Généralement le choc faible qui se produit dans la réalité.

Le modèle mathématique obtenu pour la région située juste entre l'endroit après le choc et la surface de cône est donnée par un système de trois équations différentielles non linéaires de premier ordre à trois inconnues couplées avec conditions initiales. La résolution de ce système est faite la première fois par l'adaptation de la méthode Runge Kutta [8-9, 13, 17, 31, 37, 39, 47, 49, 54, 62]. Vu qu'il existe plusieurs versions de cette méthode on a utilisé la méthode d'ordre 4 pour plusieurs raisons techniques. La méthode de Runge Kutta est très adaptée avec les équations différentielles. C'est une méthode numériquement stable, explicite et efficace. Elle donne des résultats avec précision élevée avec une discrétisation et temps de calcul réduits. On a fait une adaptation de cette méthode à notre système équations différentielles à trois inconnues. Un seul inconvénient de cette méthode c'est qu'elle présente une programmation numérique assez difficile.

La méthode utilisée pour la résolution numérique de problème de choc conique pour le modèle GP dans les références [32-33, 36, 50] est la méthode des différences finies. Cette méthode est conditionnellement stable, elle demande une discrétisation assez élevée pour avoir une précision convenable et qui rend impossible et même soit en contradiction avec le choix de pas pour réaliser la stabilité du son schéma numérique. Donc un problème de convergence est rencontré dans le cas général. Parmi les avantages de cette méthode c'est qu'elle présente une grande simplicité de programmation contrairement à la méthode de Runge Kutta.

Pour la détermination des paramètres à travers le choc oblique, on a utilisé et amélioré le modèle *HT* présenté dans les références [26-27, 58-59] après faire une correction dans l'équation qui relie la déviation de choc avec la déviation de dièdre et le nombre de Mach amont. Car ces auteurs ont utilisés dans le calcul *HT*, l'équation conçue pour le modèle GP pour raison de manque d'équation analytique. Cette équation est la plus intéressante dans le calcul des paramètres de choc. Du fait que tous les autres paramètres dépendent de la déviation de choc correspondante à la déviation de dièdre et nombre de Mach amont. Alors en sens des résultats, on a trouvé des corrections aux résultats présentées dans les dites

références. Une autre modification est faite au niveau de l'interpolation de $C_p(T)$ utilisée dans ces références et notre propre interpolation. On a remarqué que la fonction $C_p(T)$ utilisé dans ces références présente une légère discontinuité au passage de $T=1000$ K en plus elle donne une erreur maximale dans les environs de 27% entre la fonction calculée et les valeurs tabulées présentées dans les références [34-35, 42, 44-45, 57, 61, 67-69]. Ces deux modifications vont forcément nous donner une précision importante aux niveaux des résultats obtenus et qui vont influencer obligatoirement sur la résolution de l'écoulement à travers la région de cône. Concernant la prise d'air supersonique, pour éviter la réflexion de l'onde de choc crée au nez de cône dans le moteur, et afin d'éviter l'augmentation de la trainée et la perturbation de l'écoulement dans le moteur sous la présence de l'onde de choc. On va déplacer le cône pour que la ligne de choc soit placée avec la carène de la nacelle. Cependant, ce déplacement de cône dépend de la déviation de choc qui elle dépend de M_1 et θ_c pour le modèle GP. En plus de ces deux paramètres cette déviation dépend aussi de T_0 dans le modèle HT. Alors une correction au déplacement de cône est nécessaire pour éviter le cas défavorable donné par le modèle GP. Pour l'écoulement externe autour de nez d'un avion ou missile ou même projectile supersonique, les nouveaux paramètres trouvés selon notre modèle HT corrigent tous les paramètres, et en particulier la force de trainée calculée par le modèle GP qui influe directement sur l'aérodynamique et l'autonomie de l'engin en sens de la portée, la durée de vol et la puissance délivrée.

Disposition des chapitres (plan du travail)

Le travail présenté est composé de 5 chapitres.

Le *premier chapitre* est consacré à l'étude bibliographique, en présentant les principales recherches effectuées sur les méthodes et les modèles de calcul des ondes de choc normales, oblique et conique. Ainsi la détermination des paramètres aérodynamiques et thermodynamiques à travers et après le choc. En tenant compte de l'hypothèse d'un gaz calorifiquement et thermiquement parfait et imparfait à haute température. Dans notre cas le gaz considéré est l'air [1-13, 15-18, 20-33, 36, 38, 40-41, 43, 45-46, 50-59, 62-66, 70, 75-76].

Dans le deuxième chapitre on va définir les paramètres d'un écoulement supersonique isentropique à haute température, en présentant les relations nécessaires dans ce contexte. Le contenu de ce chapitre est nécessaire, vu que l'écoulement après le choc autour d'un cône n'est pas constant. Mais il varie avec la déviation radiale de l'écoulement [2-4, 12, 14, 16, 19, 23-34, 35, 37, 39, 42-45, 47, 54, 57-58, 60-61, 65-66, 68-70].

Le troisième chapitre consiste à développer des modèles mathématiques à haute température pour l'onde de choc normale, oblique et conique, en présentant les équations et les relations nécessaires pour ce contexte [2-7, 10-12, 14-16, 18-30, 32-33, 35, 37, 39, 43, 45, 54, 57-59, 66-71, 73-74].

Dans le quatrième chapitre on présente le modèle numérique développé et proposé pour le calcul des paramètres de l'écoulement à travers le choc conique. La résolution numérique est faite par l'adaptation de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4. On trouve une présentation de quelques versions de la méthode de Runge Kutta pour différents ordres dans l'appendice B [2-4, 6, 8-9, 12-14, 16-17, 26-28, 31, 41, 43, 47, 49, 54, 58-59, 62-63, 68-69].

Le cinquième chapitre présente les résultats obtenus sous forme de graphes et de tableaux des paramètres de l'écoulement à travers le choc conique. Ainsi que les paramètres de l'écoulement après le choc et sur le cône. Une comparaison des résultats obtenus pour un cône d'un choc oblique est faite. Cette comparaison est traduite par un calcul d'erreurs entre les résultats de notre modèle à haute température *HT* et ceux de modèle d'un gaz parfait *GP*.

Finalement, une conclusion détaillée est faite sur le travail élaboré suivi des recommandations, ainsi que des travaux futurs sont proposés selon cet axe de recherche.

CHAPITRE 1

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET PROBLEMATIQUES

L'écoulement supersonique autour d'un cône est passé par plusieurs étapes depuis 1937 jusqu'à ce jour. Le cône représente une forme très importante dans la construction aérospatiale précisément les structures en face de l'écoulement supersonique. A titre d'exemple, on trouve cette forme dans la prise d'air d'un moteur supersonique, le nez d'un missile et le nez d'un avion supersonique. Ainsi le cône est une forme aérodynamique très intéressante qui mérite à donner une grande vision et attention. Dans le régime supersonique, l'écoulement autour d'un cône est caractérisé par l'apparition d'une onde de choc révolutionnaire dite choc conique. En général, on a trois types de choc qui peuvent se produire selon la géométrie de l'obstacle envisagé en face de l'écoulement. Citons l'onde de choc normale (1D), l'onde de choc oblique (2D) et l'onde de choc conique (3D). En outre, selon l'emplacement du choc lui-même il existe deux chocs, l'un dit choc attaché et l'autre dit choc détaché. Cependant on s'intéresse à ce dernier qui se produit généralement lorsque l'obstacle en face de l'écoulement supersonique a une déviation assez importante ou même sur les obstacles de forme arrondie au bord d'attaque. Dans la pratique, on rencontre ce genre de choc sur les véhicules spatiaux durant leur rentrée dans l'atmosphère avec une température statique après le choc très élevée. Donc afin d'éviter le transfert de l'énergie vers la structure de corps, on choisit un obstacle arrondi pour avoir forcément un choc détaché. Le choc attaché a aussi un intérêt pratique pour les structures aérodynamiques. A titre d'exemple, les écoulements supersoniques de nombre de Mach jusqu'à 5.00 environ. On opte pour ces cas un choc attaché. D'où la déviation de cône doit être calculée soigneusement en fonction de nombre de Mach. Il faut préciser que cette déviation ne doit pas dépasser une certaine valeur limite, afin d'éviter que le choc soit détaché. D'autre part, selon l'intensité de ce choc conique ou oblique, on aura soit un choc faible ou un choc fort. Cette intensité est caractérisée par l'augmentation de saut d'entropie et un taux de bruit. Le choc normal apparaît généralement dans les écoulements supersoniques, exemple les tuyères supersoniques en régime non adapté. On trouve aussi ce

choc normal dans les écoulements autour des profils d'ailes en régime transsonique. Ainsi on voit bien l'importance de la forme conique dans les écoulements supersoniques, précisément dans la construction d'une prise d'air pour l'entrée d'air d'un moteur avion supersonique. Ce qui nécessite un calcul très précis lors de la détermination de la déviation de l'onde de choc afin d'éviter la réflexion de cette dernière dans le moteur. Car l'existence de l'onde de choc dans le moteur va dégrader les paramètres thermodynamiques et aérodynamiques.

Dans la littérature, l'onde de choc est définie comme étant une discontinuité mathématique et physique, traduit par une zone de discontinuité d'une épaisseur très mince de l'ordre d'un dixième de millimètre. Alors une petite erreur commise lors de la détermination de la déviation de l'onde de choc va engendrer la non adaptation de la prise d'air. Par conséquent la réflexion de l'onde de choc à l'intérieur de moteur entre surface du cône et la carène du moteur. Cette onde de choc réfléchie à l'intérieur de moteur, va contribuer à l'augmentation du bilan de la force traînée totale. Alors que l'écoulement est considéré comme un gaz parfait. Cette partie de traînée est appelée traînée d'onde de choc, qui sera ajoutée uniquement dans le cas de l'écoulement supersonique. Dans la pratique cette traînée d'onde est prépondérante par rapport aux autres sources de traînées qui sont la traînée de pression, de frottement et de forme de l'obstacle. Alors un calcul non précis dans la détermination de la traînée d'onde va influencer par la suite sur le bilan total des forces appliquées. Par conséquent une dégradation du rendement du moteur.

Finalement, on peut dire que le problème traité dans ce travail réunit et même demande des connaissances dans plusieurs disciplines. Citons l'aérodynamique, l'écoulement supersonique, la thermodynamique, l'analyse numérique et la simulation numérique.

1.1. Etude bibliographique

Actuellement, toutes les études sur l'écoulement supersonique autour d'un cône sont traitées suivant trois approches qui sont l'expérimentale, théorique et numérique. Cette dernière créée récemment depuis les années 1980 avec l'arrivée des ordinateurs connue sous le nom du CFD. Auparavant, on ne fait que les études expérimentales et théoriques. Sachant que l'approche théorique, dans

plusieurs cas arrive à ces limites. Alors on peut dire que les études expérimentales étaient la seule façon de valider l'approche théorique et par suite combler les lacunes de cette dernière dans la construction aérospatiale.

Depuis l'aube de l'aérodynamique, les scientifiques ont développés toutes les équations gouvernantes les divers écoulements de la nature. Ces équations appelées équations de conservation, sont des équations différentielles aux dérivées partielles. Généralement elles sont de premiers ordres pour les écoulements d'un gaz parfait et de deuxième ordre pour les écoulements d'un fluide visqueux. Pour résoudre ces équations différentielles, on a besoin des conditions aux limites qui varient d'un problème physique à un autre. On prend l'exemple d'écoulement supersonique, qui est dans notre cas, l'écoulement supersonique autour d'un cône ne dépend pas des conditions aux limites aval. Mais par contre il dépend des conditions aux limites amont. La résolution analytique de ces équations, est impossible dans la majorité des cas. Afin de trouver une solution à ce problème major, on pose toujours des hypothèses en premier temps. Qui se rapprochent le maximum de problème physique. Cependant, le besoin et la réflexion actuelle concernant les applications aérospatiales ne sont pas comme le besoin et l'orientation des applications auparavant. Le passage entre le passé et l'actuel est fait d'une façon progressive.

La naissance de la discipline calcul numérique et de l'informatique a ouvert la porte sur la possibilité de résoudre d'énormes problèmes. Ces problèmes qui ont été considérés comme très complexes avant. Cette approche n'était pas réalisée qu'à la fin des années 1970 et le début des années 1980. Le calcul numérique par ordinateur a contribué au développement des modèles numériques adéquats pour la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles. Parmi ces modèles numériques on trouve la méthode de différences finies, d'éléments finis, de volumes finis et la méthode de Runge Kutta. Comme on a déjà précisé auparavant que les hypothèses de calcul influent considérablement sur les résultats surtout au niveau des frontières de domaine de calcul considéré. Ce qui nécessite toujours de reformuler les hypothèses afin d'élargir le domaine d'application avec une précision plus élevée. Par conséquent le modèle mathématique devient de plus en plus compliqué et généralement abouti à un modèle d'équations non linéaires. La plupart, des modèles mathématiques développés sont accompagnés d'une marge d'erreur. Ainsi le modèle qui répond

bien à notre besoin, c'est celui qui donne des résultats plus proches des résultats trouvés par l'expérience avec une erreur plus petite que possible. Cependant, pour faire une expérience il n'est pas possible car elle est très coûteuse. L'existence d'une discipline intermédiaire entre l'expérience et la théorie est très importante aujourd'hui, pour résoudre les problèmes complexes avec précision sans passer par l'expérience. Actuellement, dans les CFD pour valider les nouveaux modèles numériques on compare les résultats. Autrement dit, ces résultats trouvés par les nouveaux modèles numériques sont comparés avec les résultats publiés par la littérature. Ces derniers ne sont que résultats des codes de calcul très performants, développés et approuvés par des laboratoires réputés. A titre d'exemple, citons les codes de calcul ANSYS et Fluent. Il est à signaler que ces codes sont réalisés sous la base de certaines hypothèses, qui peuvent être parfois assez loin de la réalité. Ainsi on voit clairement que le modèle mathématique c'est la phase la plus difficile à réaliser après les hypothèses posées.

La première étude concernant l'écoulement supersonique autour d'un cône est faite en 1938 par Maccoll [32], puis en 1947 par [29], où l'auteur a présenté une table des paramètres supersoniques d'un choc conique. En 1949, Neice [41] a publié une table sur les paramètres thermodynamiques d'un choc oblique. De même Stone [56] a fait une étude sur l'écoulement supersonique autour d'un cône mince à faible inclinaison. Kopal [30] en 1949, a traité le choc conique.

En 1951, Ferri [18] a calculé pour la première fois l'écoulement supersonique autour d'un cône droit, sous un angle incidence nulle. L'étude est faite par la méthode des différences finies avec un schéma implicite. Maslen a présenté aussi dans sa référence [33], en 1952 un écoulement supersonique autour d'un cône à incidence nulle. Par contre en 1955 Hord, dans la référence [22] a réalisé une étude approximative sur l'écoulement supersonique autour d'un cône circulaire avec présentation des ondes de choc conique.

Les études présentées, dans les dites références [22, 29, 30, 32, 33, 41] sont faites analytiquement pour une discrétisation très faible afin d'obtenir des solutions approximatives pour un choc conique et oblique. Sans oublier de signaler que ces études ont été développées sous la base d'un gaz parfait. En plus sous l'hypothèse aussi qu'il est calorifiquement et thermiquement parfait c'est-à-dire à chaleurs spécifiques C_p et rapport γ constants. Ces études ont été faites aussi

pour des faibles valeurs de nombre de Mach inférieur à 2.00 ($M < 2.00$) et une température génératrice environ 300K. Cependant, on peut extraire de ces références l'intérêt de leurs modèles mathématiques qu'on va se servir dans notre modèle à haute température. En 1960, Mauger [36] a changé la forme du cône. Il a fait son calcul pour un cône circulaire ayant une courbure progressive. Vu l'intérêt de cette géométrie dans les applications aérospatiales.

Briggs [7], dans l'année 1960 était le premier qui a étudié et calculé numériquement l'écoulement supersonique autour d'un cône droit ayant une base elliptique. L'auteur a utilisé la méthode des différences finies dans son modèle numérique. Stocker et Mauger [55], à leurs tour durant l'année 1962, ont élargi l'étude de Briggs [7] mais pour une section circulaire de cône droit en face d'un écoulement supersonique. Par contre, Simon et Walker [50], en 1963, ont déterminés une approche pour calculer l'écoulement supersonique autour d'un cône. Cette approche consiste à simplifier les équations non linéaires pour une faible inclinaison de cône afin d'obtenir une solution approximative analytique.

Sims [51] en 1964, a déterminé une table pour l'onde de choc conique autour d'un cône droit à incidence nulle pour un gaz parfait caloriquement et thermiquement parfait. South [52], a présenté une étude sur l'écoulement autour d'un cône et dièdre en utilisant une méthode appelée méthode des relations intégrales. En 1965, Eastman et Omar [15] ont utilisé la méthode inverse pour le calcul de choc conique. Cette méthode consiste à considérer une déviation de choc conique puis on détermine la déviation de cône correspondant. Belotserkovskiy [5], en 1967, a fait étude sur l'écoulement supersonique autour d'un corps arrondi. L'auteur a déterminé le choc détaché produit au nez de l'obstacle. Il a fait son calcul par la méthode des différences finies et la technique de 'shock capturing'. Moretti [38], s'intéresse plutôt à l'étude de l'écoulement non visqueux autours d'un cône pointu à angle d'incidence nulle par la méthode des différences finies avec un schéma implicite. Gonidou [21] en 1968, a rejoint Briggs [7] dans son étude sauf qu'il a changé la méthode de calcul en utilisant la méthode des volumes finis. Jones [24], a étudié le même problème d'écoulement autour d'un cône droit à incidence nulle mais cette fois si avec la méthode des différences finies pour un schéma explicite.

Dans la publication de Jones [25], en 1969, on trouve une table pour un écoulement supersonique autour d'un cône circulaire avec incidence à $\gamma=1.4$. Les

résultats présentés sont les paramètres thermodynamiques après le choc pour différent angle incidence. Ndefo [40], a présenté une étude numérique sur l'écoulement supersonique autour d'un cône à base arbitraire 3D accompagné d'un choc. De son coté, Rakich [46], a présenté pour la première fois la méthode des caractéristiques 3D pour le calcul de l'écoulement supersonique autour d'un corps de révolution. Woods [64] a présenté le même travail que la référence Briggs [7] mais avec la méthode des caractéristiques et une comparaison avec les résultats présentés dans [7]. Chiang [11], en 1970, a étudié les paramètres de l'écoulement supersonique autour d'un cône avec l'analyse des paramètres obtenus. South et Klunker [53] ont développé une nouvelle méthode analytique approximative pour le calcul de l'écoulement supersonique autour d'un cône. Cette méthode consiste à linéariser les équations de conservation de mouvement suivi d'une approximation sur les deux composantes de vecteur vitesse pour une déviation de l'écoulement faible. Dans l'année 1971 les mêmes auteurs Klunker, South et Ruby [28], ont développé une méthode appelée la méthode des lignes de courants. Cette méthode consiste à rechercher des lignes de courants et les propriétés physiques sur ces lignes de courants pour déterminer l'écoulement que ce soit subsonique ou supersonique autour d'un cône droit. Amidon [1], en 1985, a présenté les caractéristiques aérodynamiques d'un écoulement supersonique autour d'un corps de section elliptique. Ces caractéristiques sont la distribution de nombre de Mach sur la surface de corps, les coefficients de trainée, de portance et moment de tangage en régime supersonique.

Kenneth [26, 27], et Taturu [59] en 1996 et 1997, ont fait une étude sur les paramètres et les propriétés d'un choc oblique autour d'un dièdre à haute température. Ces références sont la base de notre travail dans le calcul de choc oblique. Néanmoins on a quelques remarques sur ces références. Parmi ces remarques ils ont utilisé une relation analytique qui relie le nombre de Mach, la déviation de dièdre et la déviation de choc oblique d'un gaz parfait calorifiquement et thermiquement parfait. En plus, les résultats obtenus dans cette référence sont à discuter aussi. Du moment que, la détermination de choc conique doit passer par le choc oblique. Dans notre cas, on a modifié cette relation par l'utilisation d'une nouvelle approche permettant de déterminer les paramètres de choc oblique. Chen et Li [10] en 2000, ont déterminé l'écoulement supersonique autour d'un cône pointu à surface curviligne. Selon la courbure de cette surface on peut

rencontrer non seulement des chocs progressifs mais aussi une détente progressive. Yahya [65], en 2006 a présenté un document global avec illustration des tables thermodynamiques d'un écoulement isentropique compressible d'un gaz caloriquement et thermiquement parfait. Pour une variante de nombre de Mach et le rapport des chaleurs spécifiques. Ce document est nécessaire pour l'évaluation des paramètres isentropique avant et après le choc oblique pour le cas de modèle GP. Il peut nous servir pour comparer les paramètres thermodynamiques pour notre modèle lorsque $\gamma=1.40$ pour l'air.

Zebbiche [70], en 2009 a proposé un modèle numérique pour déterminer les paramètres à travers un choc normale à haute température. Lorsque le nombre de Mach et la température génératrice sont élevés pour une application sur l'air. Cette étude présente une base solide dans notre étude. Vu que dans la détermination des paramètres de choc oblique à haute température, on a utilisé le modèle présenté dans cette référence [70] avec une transformation appropriée. Qu'on va présenter dans le chapitre 4.

Les références [1, 5, 7, 11, 15, 21, 24, 25, 28, 36, 40, 46, 51, 52, 55, 58, 65] citées auparavant sont réalisées sur la base d'un gaz caloriquement et thermiquement parfait. Ce modèle est conçu pour des faibles températures génératrices qui ne peuvent pas dépasser les 300K environ. Par conséquent, les résultats obtenus pour un nombre de Mach élevé jusqu'à 5.00 ou même plus jusqu'à 10.0, sont loin de la réalité. Par contre sont bons pour un nombre de Mach inférieur à 2.00. Car le comportement de fluide à nombre de Mach élevé diffère à celui à bas nombre de Mach. Pour cette raison, c'est avéré trop important de développer un nouveau modèle répondant aux exigences de l'écoulement à nombre de Mach très élevé et à haute température. Ce qui démontre l'intérêt de notre travail.

Dans les références indiquées au paravent, on a donné un bref historique sur les principales études réalisées dans le cas du choc normal, oblique et conique. Pour le domaine d'application des ondes de choc conique, les références [3, 6, 20, 45, 57] ont présentées des études sur les ondes de choc obliques et coniques dans des prises d'air supersoniques. Sans oublier à mentionner que ces études sont faites pour le cas d'un gaz parfait caloriquement et thermiquement parfait.

Une autre application, pour l'aérodynamique externe afin de calculer la traînée d'onde et les caractéristiques aérodynamiques de l'écoulement supersonique est

présentée dans les références [2, 4, 12, 16, 45, 57]. Toujours pour le cas de gaz calorifiquement et thermiquement parfait. On trouve aussi une discussion du problème de l'écoulement supersonique autour d'un dièdre et d'un cône dans ces mêmes références.

Pour la résolution numérique d'un système d'équations différentielles non linéaires couplées de premier ordre avec conditions initiales, il existe plusieurs méthodes numériques aujourd'hui. L'application de telle ou d'autre méthode est basée sur le type d'équations obtenues et la simplicité de domaine d'application. Ce type de système peut être soit hyperbolique, elliptique ou parabolique. Parmi les méthodes de résolution on a la méthode des différences finies [23, 43, 47, 48, 54], de volume finis [23, 43, 47, 48, 54], des éléments finis [23, 48, 54], la méthode des caractéristiques [46, 66, 72, 75, 76] et pour la première fois l'adaptation de la méthode de Runge Kutta [8, 9, 13, 17, 23, 31, 47, 47, 49, 62] comme pour notre problème.

1.2. Position du problème par rapport à la littérature

Après un balayage modeste sur les travaux réalisés dans le but de trouver des travaux ayant un l'intérêt avec notre travail ainsi que la citation des dites références. On remarque que le problème de calcul de choc que ce soit normal, oblique et conique est présenté uniquement pour le cas d'un gaz calorifiquement et thermiquement parfait durant tout la période écoulé. On précis aussi que ces études sont réalisés à faible nombre de Mach, faible température génératrice et faible inclinaison de cône.

Notre travail élaboré répond aux besoins actuels et futurs, qui demandent des applications pour un régime de vol supersonique à un nombre de Mach 5.00. Avec une température génératrice jusqu'à 3550 K. En plus le cône peut avoir une déviation assez élevée sans dépasser l'application d'une onde de choc attachée. Finalement, on précise qu'on a déterminé dans cette étude un modèle mathématique qui peut déterminer les résultats dans la marge indiquée de M , T_0 et θ_C avec une précision élevée. Avec présentation de l'écart obtenu entre nos résultats et les résultats donnés par le modèle GP. Ainsi ce modèle actuel GP devient un cas particulier de notre modèle *HT*.

1.3. Objectifs de l'étude

L'objectif de notre travail est de développer un modèle mathématique. Ce modèle va être traduit en code de calcul. Ce code est réalisé en langage Fortran 90 dans le but de corriger l'actuel modèle. Pour le calcul de l'écoulement supersonique autour d'un cône circulaire droit à incidence nulle sous l'hypothèse d'un gaz calorifiquement imparfait. Avec une haute température mais toujours inférieure à celle de dissociation des molécules. Sans oublier que l'application est pour l'air. Durant notre étude, on a utilisé les deux modèles à haute température pour une onde de choc normale et celui d'une onde de choc oblique. Ces deux modèles ont été développés en 2009 [70]. Plusieurs disciplines ont été exploitées pendant la réalisation de notre travail. A titre d'exemple, citons la programmation numérique, les mathématiques pour le développement du nouveau modèle, analyse numérique. Pour cette dernière, on a utilisé et adapté la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 pour un système de trois équations différentielles non linéaires couplés du premier ordre. Cependant, on a estimé que l'ordre 4 de cette méthode est largement suffisant pour l'obtention des résultats avec une très bonne précision dans un temps réduit. Dans l'appendice B on a présenté quelques méthodes de Runge Kutta d'ordre supérieures. La décision de prendre l'ordre 4 est fait après des essais de programmation des diverses méthodes parmi celles de l'appendice B.

1.4. Motivation

Le modèle *HT* en général est développé par le co-auteur de ce travail auparavant en 2006. L'application est faite pour la conception des tuyères supersoniques de propulsion. Le directeur de thèse a estimé à cette époque que le modèle *HT* peut être développé comme un nouvel axe de recherche afin de corriger le modèle *GP* pour tout type d'écoulement supersonique interne ou externe. Même revoir si c'est possible les modèles utilisés dans les logiciels ANSYS et Fluent conçus pour ces types d'écoulements en adaptant nos approches de calcul ainsi que les nouvelles équations obtenues. Reste à signaler que le directeur de thèse a été convaincu cette fois qu'il est temps d'utiliser ce modèle *HT* pour les écoulements supersoniques coniques. Vu l'intérêt pratique de cette géométrie dans le domaine de construction aérospatiale.

La décision de réaliser ce travail d'une façon officielle est faite après avoir fait une recherche bibliographique approfondie dans le but d'enlever le doute d'existence des travaux antérieurs similaires. Le résultat de la recherche démontre l'absence des travaux scientifiques publiés, qui adoptent la même approche. Pour cette raison on a pris décision avec le directeur de thèse d'entamer cette étude dans le cadre de l'obtention du diplôme de doctorat. D'où les résultats obtenus.

Enfin notre étude est considérée comme une valeur ajoutée à la communauté internationale vu que le travail réalisé est publié dans un journal scientifique renommé reconnu à comité de lecture.

Dans le chapitre prochain on va développer notre modèle à haute température HT pour l'écoulement supersonique. Dans un premier temps on détermine l'expression de la chaleur spécifique à pression constante $C_p(T)$ ensuite les autres paramètres thermodynamiques et physiques, qui dépendent de cette dernière .

CHAPITRE 2

PARAMETRES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE

Les résultats publiés dans les références [2-4, 12, 16, 43, 45, 57, 60, 65-66] sont pour un écoulement supersonique d'un gaz parfait calorifiquement parfait. Autrement dit, les chaleurs spécifiques C_p et C_v sont constantes, dans ce cas-là et ne dépendent pas de la température. Ce qui n'est pas valable réellement lorsque la température croît [34-35, 42, 44-45, 57, 61, 68-70]. Cependant, dans ce chapitre on va présenter un modèle mathématique, qui tient compte de la variation de C_p en fonction de la température. Dans ce cas, le gaz sera appelé gaz calorifiquement imparfait ou gaz à Haute Température. On trouve dans les références [34-35, 42, 44-45, 57, 61, 68-70], les lois de variation de $C_p(T)$ pour une variété de substances qu'on peut trouver dans la nature. Les formules mathématiques présentées, dans ces références sont toujours valables et indépendantes de la fonction d'interpolation et de type du gaz aussi. Les lois mathématiques développées sont sous forme d'équations algébriques non linéaires et des intégrales des fonctions analytiques complexes. Alors, notre but est de résoudre ces modèles mathématiques complexes par simulation numérique. Pour cela, on va utiliser la méthode de dichotomie pour la résolution des équations algébriques non linéaires trouvées. Par contre l'algorithme de Simpson et de Gauss Legendre seront utilisés pour l'intégration numérique des fonctions trouvées dans les références [14, 23, 37, 39, 47, 54, 68-69].

Généralement les fonctions à intégrer possèdent des gradients très élevés aux extrémités de l'intervalle d'intégration. Dans ce cas une discrétisation très dense est demandé pour certaines régions de l'intervalle. La solution de ce problème est l'introduction d'une fonction de distribution des points [19,68-69]. Dans le but de condenser des points à l'endroit où le gradient est important. Généralement, les gradients importants apparaissent aux endroits des chocs.

2.1 Formulation Mathématique du problème

Le développement des relations thermodynamiques est basé sur les équations de conservations sous forme différentielle [2, 4, 12, 16, 18-19, 43, 45, 66, 68-69]. On rappelle que l'équation d'état d'un gaz parfait reste valable et elle est donnée par:

$$P = \rho R T \quad (2.1)$$

2.1.1. Equation de la vitesse du son

La vitesse du son, par définition, est donnée par [2-4, 12, 16, 43, 65-66, 68-69]:

$$a^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{s=\text{constante}} \quad (2.2)$$

Après faire des transformations mathématiques, on aboutit au résultat suivant :

$$a^2(T) = \gamma(T) R T \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) prouve l'invariance de la relation de la vitesse du son, qui reste toujours valable pour le modèle à Haute Température. Sauf qu'il faut tenir compte de la variation du rapport des chaleurs spécifiques $\gamma(T)$ avec la température.

2.1.2. Relation entre la vitesse et la température

L'équation de conservation de l'énergie sous forme différentielle s'écrit [2-4, 12, 16, 43, 65-66, 68-69]:

$$C_p dT + V dV = 0 \quad (2.4)$$

Intégrant la relation (2.4), entre l'état générateur donné, qui est la chambre de combustion pour les problèmes test ou le milieu ambiant, par $(V_0 \approx 0, T_0)$ et un état quelconque donné par (V, T) . On obtient:

$$\int_{V_0}^V V dV = - \int_{T_0}^T C_p(T) dT \quad (2.5)$$

A la sortie de la chambre de combustion on a $V_0 \approx 0$ et T_0 donnée, donc on peut trouver la vitesse à un point supersonique à partir de la relation suivante

$$V^2 = -2 \int_{T_0}^T C_p(T) dT \quad (2.6)$$

On pose

$$H(T) = \int_T^{T_0} C_p(T) dT \quad (2.7)$$

Donc

$$V^2 = 2 H(T) \quad (2.8)$$

2.1.3. Relation entre le nombre de Mach et la température

Par définition, le nombre de Mach est défini par [1-7, 10-12, 15-16, 18-22, 24-30, 32-33, 36, 38, 40-41, 43, 45-46, 50-53, 55-59, 63-76] :

$$M = \frac{V}{a} \quad (2.9)$$

Remplaçons l'expression (2.3) dans (2.9) et élevant la relation au carré, ensuite substituons la relation (3.8), on obtient:

$$M(T) = \frac{\sqrt{2 H(T)}}{a(T)} \quad (2.10)$$

La relation (2.10) montre la variation du nombre de Mach en fonction de la température pour un gaz calorifiquement imparfait.

2.1.4. Relation entre la masse volumique et la température

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement connue par l'équation de Bernoulli sous forme différentielle s'écrit [2-4, 12, 16, 43, 65-66, 68-69] :

$$V dV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.11)$$

En figurant le nombre de Mach, en remplaçant la relation (2.9), ensuite remplaçant les relations (2.8) et (2.10) on aura

$$\frac{d\rho}{\rho} = F_\rho(T) dT \quad (2.12)$$

Avec

$$F_\rho(T) = \frac{C_P(T)}{a^2(T)} \quad (2.13)$$

Le rapport des masses volumiques correspondant à la température T peut être obtenu en intégrant l'équation (2.12) entre l'état générateur (ρ_0, T_0) et l'état concerné donné par (ρ, T) , on obtient

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \text{Exp}\left(-\int_T^{T_0} F_\rho(T) dT\right) \quad (2.14)$$

2.1.5. Relation entre la pression et la température

Le rapport des pressions est donné, en utilisant la relation suivante une fois les rapports des masses volumiques et des températures seront connus.

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \left(\frac{T}{T_0}\right) \quad (2.15)$$

2.2. Procédure du calcul

2.2.1. Calcul numérique des rapports thermodynamiques

La détermination des rapports des masses volumiques est donnée par les formules de (2.14) jusqu'à (2.19), qui demande l'intégration numérique de la fonction $F_\rho(T)$ dans l'intervalle $[T, T_0]$. Cette fonction $F_\rho(T)$ dépend du paramètre T_0 . Une distribution adéquate des nœuds est nécessaire au voisinage d'une section supersonique de température T_S . C'est-à-dire une condensation de points pour calculer la valeur de l'intégrale avec une précision dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature.

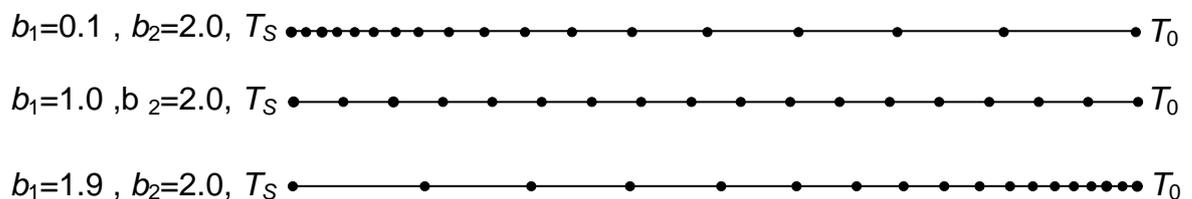


Figure 2.1 : Présentation de la condensation des nœuds

La quadrature d'intégration utilisée est celle de *Simpson*, pour le calcul numérique de l'intégrale (2.14). La fonction de condensation utilisée est celle de *Robert* ensuite modifiée par *Eiseman* [19]. Elle est donnée par :

$$s_i = b_1 z_i + (1 - b_1) \left[1 - \frac{\tanh[b_2 \cdot (1 - z_i)]}{\tanh(b_2)} \right] \quad (2.16)$$

Avec

$$z_i = \frac{i-1}{N-1} \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.17)$$

Après la détermination de la fonction de condensation s , on peut déterminer la distribution des températures par:

$$T_i = s_i (T_D - T_G) + T_G \quad (2.18)$$

La température T_D égale à T_0 pour la fonction $F_\rho(T)$, par contre la température T_G égale à T^* pour le cas critique (sonique), et égale à T_S pour le cas d'une section supersonique. Si on prend une valeur de b_1 proche de zéro ($b_1=0.1$) et $b_2=2.0$, on condense les nœuds vers l'extrémité gauche T_S de l'intervalle. Si on prend des valeurs de b_1 proche de 2 (par exemple $b_1=1.9$), on condense les nœuds vers l'extrémité droite. Pour des sous intervalles de même longueurs, on prend $b_1=1.0$. La figure (2.1) présente la distribution des nœuds suivant le choix de la valeur de b_1 . Il faut noter que notre intérêt est de condenser les nœuds vers l'extrémité gauche T_S près de choc vu la variation de la fonction $F_\rho(T)$.

2.2.2. Paramètres critiques correspondant à T_0

L'état générateur est donné par le nombre de Mach nul ($Mo=0.0$). Alors que les paramètres critiques (T^* , P^* , ρ^* et a^*) sont donnés pour le nombre de Mach $M=1.0$ et en fonction aussi de la température T_0 . Ils peuvent être déterminés en remplaçant, dans la relation (2.10), les paramètres M et T par les conditions critiques du col ($M^*=1.0$, $T=T^*$), on obtient :

$$F(T_*) = 2 H(T_*) - a^2(T_*) = 0 \quad (2.19)$$

La détermination de la racine T^* de l'équation (2.19) se fait en utilisant l'algorithme de dichotomie. Sachant que $T^* < T_0$, on peut choisir facilement un intervalle $[T_1, T_2]$ contenant la température T^* et qui doit vérifier la condition $F(T_1) F(T_2) \leq 0$. On peut prendre $T_1=0^\circ\text{K}$ et $T_2=T_0$. Une fois que cet intervalle est déterminé, on peut calculer T_1 avec une précision ε , et par suite le rapport T^*/T_0 correspondant à la température T_0 . La valeur T^* obtenue dépend de la précision ε .

Le nombre d'itération N_{iter} minimum pour trouver la solution dépend de la précision ε par la relation suivante :

$$N_{iter} = 1.4426 \text{Log} \left[\frac{T_2 - T_1}{\varepsilon} \right] + 1 \quad (2.20)$$

Pour les applications, on a pris $\varepsilon = 10^{-5}$, dans ce cas le nombre d'itération minimum $N_{iter} = 24$.

Si nous remplaçons $T = T^*$ dans la relation (2.14) et nous intégrons la fonction, dans l'intervalle $[T^*, T_0]$. Puis on utilise la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche ($T = T^*$), on obtient le rapport critique des masses volumiques suivant:

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \text{Exp} \left(- \int_{T^*}^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad (2.21)$$

Le rapport critique des pressions P^*/P_0 est déterminé en remplaçant les valeurs de la température critique $T = T^*$ et de la masse volumique ($\rho = \rho^*$) dans la relation (3.15).

2.2.3. Paramètres supersoniques correspondant à T_0

On procède maintenant à la détermination des rapports thermodynamiques et géométrique à une section quelconque qui correspond à un nombre de Mach supersonique $M_S > 1.00$. Cette section est caractérisée par $\rho = \rho_S$, $P = P_S$, $A = A_S$ et $T = T_S$.

L'obtention du rapport des températures se fait en premier lieu par le remplacement de $T = T_S$ et $M = M_S$ dans la relation (2.10), on obtient:

$$F(T_S) = 2H(T_S) - M_S^2 a^2(T_S) = 0 \quad (2.22)$$

La détermination de la racine T_S de l'équation (2.22), se fait de la même manière que celle de T^* et avec la même démarche en utilisant l'algorithme de dichotomie. Sauf ici, nous avons $T_S < T^*$. Une fois l'intervalle $[T_1, T_2]$ est déterminé, on peut facilement déterminer T_S avec une précision ε et par suite le rapport T_S/T_0 correspondant à la température T_0 . On peut prendre dans ce cas $T_1 = 0^\circ\text{K}$ et $T_2 = T^*$. La valeur déjà obtenue de T^* dépend de la précision ε .

Remplaçons $T=T_S$ dans la relation (2.14) et intégrons la fonction $F_\rho(T)$ dans $[T_S, T_0]$, en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche, nous obtenons le rapport des masses volumiques ρ_S/ρ_0 . Le rapport des pressions à un état supersonique ($M=M_S>1.00$) peut être déterminé en remplaçant ceux des températures $T=T_S$ et des masses volumiques $\rho=\rho_S$ dans la relation (2.15). La précision du résultat de l'intégration de (2.21) dépend essentiellement des valeurs de N , b_1 et b_2 .

2.3. Chaleur spécifique à pression constante

La loi de variation de $C_p(T)$ de l'air comme une interpolation des valeurs tabulées présentées dans le tableau (2.2) est choisie comme un polynôme de 9^{ème} degré. Il est présenté dans les références [68-69], récapitulé par :

$$C_p(T)=a_1+T(a_2+T(a_3+T(a_4+T(a_5+T(a_6+T(a_7+T(a_8+T(a_9+T(a_{10})))))))))) \quad (2.23)$$

Les coefficients a_i ($i=1, 2, \dots, 10$) sont présentés dans le tableau (2.1). Dans la formule (2.23) on a préféré d'écrire la formule qui utilise le schéma de Horner pour but de diminuer les tailles des valeurs manipulées intermédiaires lors de calcul de la valeur de C_p pour une température donnée.

Tableau 2.1 : Coefficients du polynôme $C_p(T)$ pour l'air selon la relation (2.23).

1	1001.1058	3	$-6.3376 \cdot 10^{-4}$	5	$-4.0338 \cdot 10^{-9}$	7	$-1.3509 \cdot 10^{-15}$	9	$-4.846 \cdot 10^{-23}$
2	$4.066128 \cdot 10^{-2}$	4	$2.7474 \cdot 10^{-6}$	6	$3.0697 \cdot 10^{-12}$	8	$3.47222 \cdot 10^{-19}$	10	$2.8411 \cdot 10^{-27}$

Un petit problème s'est posé durant l'interpolation par la formule (2.23). Après une présentation graphique du polynôme de $C_p(T)$ et une comparaison avec les valeurs tabulées [45, 68-69]. On a remarqué une variation ondulée à basses températures jusqu'à environ $T=240^\circ K$, au lieu d'avoir une fonction constante. A cet effet, une correction est faite à cette fonction pour rapprocher les valeurs interpolées aux valeurs tabulées.

Alors, si $T = \bar{T} = 240 \text{ }^\circ K$, la relation (2.23) donne la valeur suivante:

$$\bar{C}_p = C_p(\bar{T}) = 1001.15868 \text{ J}/(\text{Kg K}) \quad (2.24)$$

Donc, la correction est faite de la manière suivante

- Si $T \leq \bar{T}$, on opte la correction suivante: $C_P(T) = \bar{C}_P$ (2.25)
- Si $T > \bar{T}$, on utilise la formule (2.23).

Tableau 2.2 : Variation de $C_P(T)$ avec la température pour l'air.

T (K)	C_P (J/(Kg K))	T (K)	C_P (J/(Kg K))	T (K)	C_P (J/(Kg K))
55.538	1001.104	833.316	1107.192	2111.094	1256.813
.	.	888.872	1119.078	2222.205	1263.410
222.205	1001.101	944.427	1131.314	2333.316	1270.097
277.761	1002.885	999.983	1141.365	2444.427	1273.476
305.538	1004.675	1055.538	1151.658	2555.538	1276.877
333.316	1006.473	1111.094	1162.202	2666.650	1283.751
361.094	1008.281	1166.650	1170.280	2777.761	1287.224
388.872	1011.923	1222.205	1178.509	2888.872	1290.721
416.650	1015.603	1277.761	1186.893	2999.983	1294.242
444.427	1019.320	1333.316	1192.570	3111.094	1297.789
499.983	1028.781	1444.427	1204.142	3222.205	1301.360
555.538	1054.563	1555.538	1216.014	3333.316	1304.957
611.094	1054.563	1666.650	1225.121	3444.427	1304.957
666.650	1067.077	1777.761	1234.409	3555.538	1308.580
722.205	1080.005	1888.872	1243.883		
777.761	1093.370	1999.983	1250.305		

Le rapport des chaleurs spécifiques est calculé par la relation suivante [45, 68] :

$$\gamma(T) = \frac{C_P(T)}{C_P(T) - R} \quad (2.26)$$

Selon la relation (2.25), on peut déduire que le modèle GP à chaleur spécifique constante ($C_P = \text{constante}$) et γ constant représente un cas particulier du modèle HT à basse température T_0 . Cette température doit être inférieure à 240°K. Si on remplace la valeur de C_P donnée par la relation (2.24) dans la relation (2.26) on obtient la valeur du rapport γ qui est égale à 1.402.

En conclusion après qu'on a développé le modèle mathématique à haute température qui est traduit par les expressions de $C_P(T)$ et $\gamma(T)$. On passe dans le prochain chapitre à l'application de ce modèle HT développé à l'écoulement supersonique. Ce dernier est caractérisé par l'apparition des ondes de choc. Ces ondes de choc peuvent être soit une onde normale, oblique ou conique.

CHAPITRE 3

FORMULATION MATHÉMATIQUE DES ONDES DE CHOC A HAUTE TEMPERATURE

Lorsqu'on place un obstacle dans un écoulement d'un fluide en régime supersonique, l'arrêt ou la déviation brusque non isentropique du fluide se caractérise par l'apparition d'une onde de choc. Dans la réalité, ce choc apparaît comme une très fine région de l'espace où on observe de très forte variation des propriétés thermodynamiques et de la vitesse du fluide. Une onde de choc, c'est un champ où il y a une transition spatiale discontinue en mouvement. Dans une région de choc on a une transformation d'une partie de l'énergie cinétique en énergie interne [2-7, 10-12, 15-16, 18-22, 24-30, 32-33].

On va étudier, dans ce chapitre la formulation mathématique des trois types de choc qui peuvent apparaître dans la pratique. Citons le choc normal, oblique et conique avec un aperçu sur une onde de détente. Une onde de choc normale, oblique ou conique ne peut apparaître que dans l'écoulement supersonique. Par contre après le choc, l'écoulement peut être subsonique ou supersonique.

Chaque fois qu'un écoulement supersonique 2D ou 3D est détourné d'un angle de déviation $\psi > 0$, une onde de choc oblique peut se produire, et lorsqu'il est détourné d'un angle de déviation $\psi < 0$, une onde de détente peut se produire. Quand l'onde oblique (ou conique) est infiniment faible, elle devient une onde de Mach, qui fait un angle μ par rapport au sens d'écoulement en amont. Mais lorsque l'onde oblique devient forte où l'écoulement conserve sa direction, elle devient une onde de choc normale.

L'onde de choc normale et l'onde de Mach ne sont que les deux cas limites de l'onde de choc oblique (ou conique). Car l'angle de l'onde choc est limité entre 90.0 degré et $\arcsin(1/M)$. L'onde de choc normale est un problème unidirectionnel où les paramètres thermodynamiques varient seulement en fonction du nombre de Mach. L'onde de choc oblique est un problème bidimensionnel où les paramètres thermodynamique varient en fonction du nombre de Mach et de l'angle de déviation. L'onde de choc conique est un problème tridimensionnel. Mais comme

les vitesses tangentielles sont les mêmes avant et après le choc, on aura que les directions normales de la vitesse, dans ce cas le problème sera unidirectionnel. Lorsque l'onde de choc oblique (ou conique) est infiniment faible, elle devient une onde de Mach, qui fait un angle μ par rapport au sens de l'écoulement amont. Cet angle est définie par $\mu = \arcsin(1/M)$. Lorsque l'onde de choc oblique devient forte où l'écoulement conserve sa direction, elle devient une onde de choc normale. Alors, l'onde de choc normale et l'onde de Mach se sont que des cas limites de choc oblique, où l'angle de choc est limité entre $\arcsin(1/M) < \theta_S < \pi/2$. Néanmoins le choc fort reste insignifiant dans la pratique. Cependant il est à souligner que la différence entre le choc faible et le choc fort se traduit par l'intensité de la pression aval (le taux de compression). Où le choc fort se distingue par un grand taux de compression par rapport au choc faible.

Il est à noter que lorsque la déviation ψ dépasse une certaine limite ψ_{Max} , le modèle de choc oblique (ou conique) attaché n'est plus valable, on aura le choc qui devient détaché. Par ailleurs, dans le cas du choc détaché ($\psi > \psi_{max}$); un choc courbé va avoir lieu. Ce dernier sera composé d'un choc normal à la partie centrale, suivi d'un choc fort où l'écoulement en aval dans cette zone est subsonique ainsi qu'une ligne sonique limitant les différents cas. Après cette ligne sonique, un choc faible va se produire et l'écoulement devient supersonique. A la fin une onde de Mach va apparaitre une fois que le choc faible est devenu infiniment faible. Pour un nombre de Mach M_1 donné, plus l'angle de déviation de dièdre ψ ou de cône θ_S augmente, plus on aura un choc fort. En plus une fois qu'il dépasse une certaine valeur limite, on obtient un choc détaché. Pour un angle de déviation ψ donné, de plus en plus le nombre de mach M_1 augmente, on aura un choc fort. L'un des objectifs d'une onde de choc oblique (ou conique) est la conception d'une entrée d'air supersonique adéquate, qui nous aide à obtenir un écoulement plus adapté à l'entrée du compresseur.

3.1. Hypothèses de calcul

On tient à souligner, que le calcul des ondes de choc se fait sous certaines hypothèses. Ces hypothèses doivent refléter la réalité et traduisent le phénomène physique étudié. Afin d'obtenir des résultats plus proche de la réalité.

- La première hypothèse on suppose toujours que le gaz est parfait dans le calcul. Cette hypothèse suppose que la masse occupée par les molécules de gaz est nulle. Ceci est traduit par l'équation universelle du gaz parfait $P=\rho RT$.
- La deuxième hypothèse on considère que l'écoulement est non visqueux. Toujours le calcul d'onde se fait sur la négligence de la viscosité du gaz. Les équations d'Euler dans ce cas sont plus adaptées.
- Le gaz est considéré comme un gaz parfait. Mais l'application est faite à haute température et un nombre de Mach élevé. La température peut atteindre la valeur 3500 K pour l'air. Cette valeur limite d'utilisation de la température ne doit pas dépasser la température de dissociation des molécules de gaz. Dans ce cas, le gaz est appelé un gaz thermiquement parfait.
- La quatrième hypothèse est qu'on est en accord avec la troisième hypothèse alors que le gaz est considéré comme caloriquement imparfait. Puisque la température maximale utilisée est élevée. Dans ce cas, la chaleur spécifique C_p ne reste pas constante mais varie avec la température. L'équation d'énergie connue pour un gaz parfait ($C_p=\text{constante}$) ne sera plus valable et nécessite des modifications.
- L'écoulement est considéré comme 3D axisymétrique, compte tenu de la géométrie de cône.
- L'écoulement est considéré comme stationnaire. C'est-à-dire que les paramètres de l'écoulement ne dépendent pas du temps et ils sont déterminés après la phase transitoire.
- L'écoulement est considéré comme adiabatique. Cette condition est nécessaire et elle est très logique et acceptable avec la qualité des résultats obtenus par rapport à la réalité. Cette hypothèse indique que le transfert de chaleur entre les particules de gaz est absent. Cette condition n'est pas contradictoire avec la première hypothèse, puisque la masse des molécules est nulle, le transfert de chaleur entre les molécules est absent, ce qui est en accord avec la première hypothèse.
- L'écoulement est considéré comme irrotationnel. Cette condition indique qu'il s'agit d'une dissipation provoquée par l'apparition des ondes de choc qui augmentent le taux d'entropie. La détente de l'écoulement est nécessaire pour un cône courbé soit irrotationnel sans dissipation.

- L'écoulement est supposé être purement supersonique. Cette condition est nécessaire vu que l'apparition des ondes de choc se fait uniquement dans le domaine supersonique et hypersonique.
- Absence de toute source de chaleur, que ce soit par conduction, convection ou rayonnement au contact de la paroi.
- Négligence de la force de gravité et l'absence de toutes les forces externes à distance d'une source magnétique ou électrique en contact avec le gaz. Dans le cas contraire il faut ajouter l'effet de ces forces dans les équations de conservation de quantité de mouvement.

Toutes ces hypothèses citées précédemment vont influencer la forme des équations de conservation qui seront obtenues, modifiées et utilisées. Afin de déterminer un nouveau modèle d'équations mathématiques permettant de calculer avec précision les propriétés de choc conique. Les résultats obtenus à partir de ces hypothèses seront acceptables et très proches de la réalité.

Il est à noter qu'il existe plusieurs modèles tous appelés modèles à haute température à différentes valeurs de cette haute température. Si la température dépasse la limite de dissociation des molécules, on aura aussi un autre modèle qui nécessite des équations particulières.

3.2. Onde de choc normale à haute température

Le but de ce paragraphe est de développer un modèle mathématique pour l'onde de choc normale sous les hypothèses citées auparavant. Ainsi l'hypothèse principale est celle à haute température. La figure (3.1) représente une onde de choc normale avec les paramètres de l'écoulement avant et après le choc.

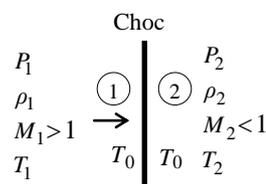


Figure 3.1 : Illustration d'une onde de choc normale.

L'étude est basé sur l'utilisation des équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie y compris l'équation d'état du gaz parfait [2-4, 43, 45, 71] par:

$$\rho V = \text{constante} \quad (3.1)$$

$$dP + \rho V dV = 0 \quad (3.2)$$

$$C_P dT + V dV = 0 \quad (3.3)$$

$$P = \rho R T \quad (3.4)$$

Avec

$$R = 287.1029 \text{ J/(kg K)} \quad (3.5)$$

L'épaisseur de l'onde de choc est très petite, de sorte qu'il est comme une discontinuité dans l'écoulement. On souligne que l'écoulement d'une part et d'autre le choc sont isentropiques. L'intégration des équations (3.1), (3.2) et (3.3) entre l'état amont et aval du choc donne respectivement:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = q \quad (3.6)$$

$$P_2 - P_1 + q(V_2 - V_1) = 0 \quad (3.7)$$

$$2 H(T_1) - 2 H(T_2) - (V_1^2 - V_2^2) = 0 \quad (3.8)$$

Avec $H(T)$ est donnée par la relation (2.7) dans le chapitre 2.

Nous pouvons obtenir une expression pour $V_1 + V_2$ et $V_1 - V_2$ de (3.6) et (3.7) respectivement. Par substitution de leur produit en (3.8) puis l'élimination de la pression en utilisant l'équation (3.4) et après réarrangement donnent le résultat suivant:

$$x_T x_\rho^2 - \left(\frac{2 H(T_1) - 2 H(T_2)}{RT_1} - x_T + 1 \right) x_\rho^{-1} = 0 \quad (3.9)$$

D'après la relation (3.6), elle donne $V_2 = \rho_1 V_1 / \rho_2$ et $q = \rho_1 V_1$. On remplace ces quantités dans (3.7) et on écrit l'expression $P_1 - P_2$. En divisant le résultat par P_1 puis élimination de P_1 et P_2 en utilisant la relation (3.4). Ensuite en utilisant la relation (3.5) et en remplaçant le terme RT_1 par a_1 et $\gamma(T_1)$. Puis on introduit le nombre de Mach M_1 , on obtient après réarrangement, l'expression suivante:

$$x_T x_\rho^2 - [1 + M_1^2 \gamma(T_1)] x_\rho + M_1^2 \gamma(T_1) = 0 \quad (3.10)$$

Les équations (3.9) et (3.10) constituent un système d'équations non linéaires

avec deux inconnues T_2 et x_p .

L'intégration de la relation (3.3) entre l'état de stagnation ($M \approx 0$, $T = T_0$) d'un côté et respectivement entre la condition critique donnée par ($M = 1$, T^*) et l'état amont avant le choc donné par (M_1 , T_1) d'un d'autre coté. Puis on introduit le nombre de Mach M_1 , on obtient l'équation suivante [3]:

$$2H(T_i) - M_i^2 a^2(T_i) = 0 \quad i = *, 1 \quad (3.11)$$

La détermination de T^* et T_1 à partir de la relation (3.11) respectivement lorsque $i = *$ et $i = 1$ est faite par l'utilisation de l'algorithme dichotomie [5, 9]. Les rapports T^*/T_0 et T_1/T_0 correspondant à T_0 et M_1 peut être déterminé par la suite.

Le rapport des masses volumiques isentropique juste avant et après le choc peut être calculé en utilisant la relation suivante lorsque $i = 1$. Cette relation est présentée dans [68-69]. Ensuite on utilise les formules de Simpson [5] avec une condensation des nœuds [19], on obtient :

$$\frac{\rho_i}{\rho_{0_i}} = \text{Exp} \left(- \int_{T_i}^{T_0} \frac{C_P(T)}{a^2(T)} dT \right) \quad i = 1, 2 \quad (3.12)$$

Le rapport des pressions isentropique en amont du choc peut être déterminé par la relation (3.13) lorsque $i = 1$.

$$\frac{P_i}{P_{0_i}} = \left(\frac{\rho_i}{\rho_{0_i}} \right) \left(\frac{T_i}{T_0} \right) \quad i = 1, 2 \quad (3.13)$$

Étant donné que $x_T > 0$ (juste au-dessus de l'unité), la relation (3.9) montre que l'une des solutions de x_p est négative et l'autre positive. Alors que dans l'équation (3.10), les deux solutions de x_p sont positives. Pour trouver directement la solution, faisant la différence entre (3.9) et (3.10), on obtient:

$$x_p = \frac{RT_1 [1 + M_1^2 \gamma(T_1)]}{-2H(T_1) + 2H(T_2) + RT_1 [x_T + M_1^2 \gamma(T_1)]} \quad (3.14)$$

La solution donnée par (3.14) est celle acceptée physiquement à travers le choc. Si nous remplaçons l'expression de x_p donnée par (3.14) dans (3.12), nous obtenons une équation algébrique non-linéaire avec une inconnue T_2 :

$$F(T_2)=0 \quad (3.15)$$

A ce stade, on sait que $T_2 > T_1$. Pour donner une majoration mathématique à la température T_2 , considérons la discrimination de l'équation (3.10). Alors:

$$\Delta = [1 + M_1^2 \gamma(T_1)]^2 - 4 x_T M_1^2 \gamma(T_1) \quad (3.16)$$

Pour obtenir une solution, il faut que $\Delta > 0$. Donc :

$$T_{Max} = \frac{[1 + M_1^2 \gamma(T_1)]^2}{4 M_1^2 \gamma(T_1)} T_1 \quad (3.17)$$

La relation (3.17) montre que $T_{Max} > T_1$. Donc, $T_1 < T_2 < T_{Max}$. L'obtention de la racine de $F(T_2)=0$ est faite en utilisant l'algorithme de dichotomie [14, 23, 37, 39, 47, 54, 68-69].

La valeur de $F(T_1)=0$ signifie que ce n'est pas un choc. On peut démontrer que $F(T_{Max}) > 0$, quelles que soient les valeurs de M_1 et T_0 . On calcule la valeur de $F(T_M)$, avec $T_M = (T_1 + T_{Max})/2$, milieu de l'intervalle $]T_1, T_{Max}[$. Si $F(T_M) > 0$, la solution se trouve dans $]T_1, T_M [$, et si $F(T_M) < 0$, la solution se trouve dans l'intervalle $]T_M, T_{Max}[$. Cette procédure sera répétée jusqu'à satisfaire la précision souhaitée. Le rapport x_ρ peut être calculé par la relation (3.16). Une fois que la valeur de T_2 est trouvée avec une précision désirée, on peut facilement déduire le rapport des températures x_T à travers le choc.

Le nombre de Mach M_2 en aval du choc peut être déterminé en utilisant la relation (2.10) lorsque $T=T_2$ par:

$$M_2 = \frac{\sqrt{2H(T_2)}}{a(T_2)} \quad (3.18)$$

Le rapport de pression isentropique après le choc peut être déterminé par la relation (3.13) lorsque $i=2$. Le rapport des pressions statique et totale à travers le choc peuvent être déterminés par:

$$x_P = x_\rho x_T \quad (3.19)$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left(\frac{\rho_1/\rho_{01}}{\rho_2/\rho_{02}} \right) x_\rho \quad (3.20)$$

Le rapport isentropique ρ_2/ρ_{02} après le choc peut être calculé par la relation (3.12) lorsque $i=2$.

Pour faire une comparaison avec le modèle GP, ces relations à travers une onde de choc sont présentées dans [12, 16, 43]. Le nombre de Mach et la vitesse du son de stagnation sont toujours égaux à zéro. Alors:

$$M_{0_1}=M_{0_2}=M_0=0 \quad (3.21)$$

$$V_{0_1}=V_{0_2}=V_0=0 \quad (3.22)$$

Considérons maintenant l'évolution de la température totale correspondant aux régions avant et après le choc lorsque la chaleur spécifique $C_P(T)$ varie avec la température. Sachons que pour le modèle PG, la température totale à travers le choc reste constante. On peut écrire la relation (3.3) sous trois formes :

La première forme se situe entre l'état total et l'état juste avant le choc. La deuxième relation est entre l'état total après le choc et l'état immédiatement après le choc. La troisième relation est entre l'état juste avant et après le choc. On aura respectivement:

$$V_1^2 = 2 \int_{T_1}^{T_{0_1}} C_P(T) dT \quad (3.23)$$

$$V_2^2 = 2 \int_{T_2}^{T_{0_2}} C_P(T) dT \quad (3.24)$$

$$(V_2^2 - V_1^2) = 2 \int_{T_2}^{T_1} C_P(T) dT \quad (3.25)$$

Faisons la différence entre les relations (3.23) et (3.24) et comparons le résultat avec la relation (3.26), nous obtenons:

$$2 \int_{T_2}^{T_{0_2}} C_P(T) dT - 2 \int_{T_1}^{T_{0_1}} C_P(T) dT = 2 \int_{T_2}^{T_1} C_P(T) dT = 2 \int_{T_2}^{T_{0_2}} C_P(T) dT + 2 \int_{T_{0_2}}^{T_{0_1}} C_P(T) dT + 2 \int_{T_{0_1}}^{T_1} C_P(T) dT \quad (3.26)$$

Après simplification on obtient :

$$\int_{T_{0_2}}^{T_{0_1}} C_P(T) dT = 0 \quad (3.27)$$

D'où :

$$T_{0_2} = T_{0_1} = T_0 \quad (3.28)$$

D'où on confirme que la température totale à travers le choc reste constante pour le modèle HT. Ensuite, le phénomène de choc passe par la conservation de la température totale.

On peut dire que l'écoulement isentropique subsonique ou supersonique se fait avec la conservation de l'entropie qui prévoit que cet écoulement se fait avec conservation de la pression totale. Par conséquent, la vitesse totale du son reste constante des deux côtés du choc. En utilisant les relations (3.5), (3.6) et (3.28), nous obtenons:

$$a_{0_2} = a_{0_1} = a_0 = \sqrt{\gamma(T_0) R T_0} \quad (3.29)$$

La pression de stagnation totale et la densité peuvent être déterminées par la relation (3.20). La relation (3.22) est donnée en fonction des conditions à travers le choc. Nous pouvons démontrer à partir de la relation (3.21) que l'intégration entre les conditions totales avant et après le choc donne:

$$\Delta S_{12} = -R \operatorname{Log} \left(\frac{\rho_{0_2}}{\rho_{0_1}} \right) = -R \operatorname{Log} \left(\frac{P_{0_2}}{P_{0_1}} \right) \quad (3.30)$$

Il est à noter qu'on ne peut pas aborder l'étude de phénomène de choc oblique sans passer par l'étude de phénomène de l'onde de choc normale.

3.3. Onde de choc oblique à haute température

On va présenter dans ce paragraphe les différentes équations pour résoudre le problème de choc oblique à haute température selon les hypothèses illustrées dans cette étude. On va utiliser le principe d'une onde de choc normale pour développer les équations et l'algorithme de calcul des paramètres thermodynamique d'un choc oblique. Pour cela on ajoute à la vitesse V_1 amont au choc une vitesse tangentielle w identique de part et d'autre de choc normale. On obtient le principe d'une onde de choc oblique comme le montre la figure (3.2) [2, 4, 6, 12, 16, 26-27, 43, 58-60, 66].

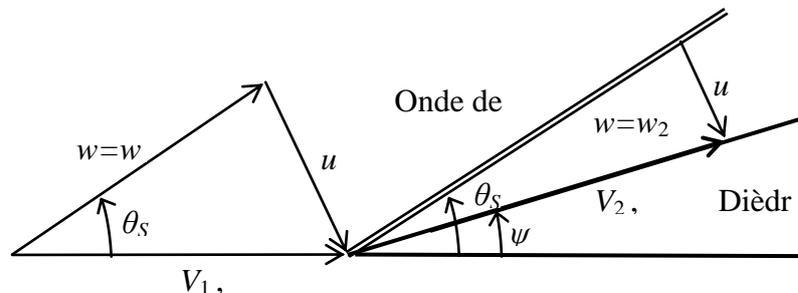


Figure 3.2 : Onde de choc oblique autour d'un dièdre.

L'hypothèse précédente, nous permet d'écrire :

$$w_1 = w_2 = w \quad (3.31)$$

On remarque que les composantes normales de la vitesse n'influent pas. Donc les paramètres thermodynamiques de l'onde de choc oblique sont les mêmes que ceux de l'onde de choc normale. On remplace le nombre de Mach amont M_1 par la composante normale M_{n1} selon la figure (3.2). La composante normale de nombre de Mach amont au choc oblique s'écrit :

$$M_{n1} = M_1 \sin(\theta_S) \quad (3.32)$$

La composante normale de nombre de Mach aval au choc oblique s'écrit :

$$M_{n2} = M_1 \sin(\theta_S - \psi) \quad (3.33)$$

D'après la figure (3.2) et d'après l'équation de continuité (3.1) on peut écrire :

$$\frac{\tan(\theta_S - \psi)}{\tan(\theta_S)} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (3.34)$$

Les relations (3.31) à (3.34) sont appliquées pour le modèle d'un gaz parfait et sont appliquées aussi pour le modèle à haute température, puisque il s'agit de la géométrie présentée dans la figure (3.1).

A partir de l'équation de la conservation d'énergie (3.10) pour un choc normale, on peut extraire le nombre de Mach amont. Si on remplace l'expression (3.32) dans la relation trouvée, on obtient :

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 - \frac{M_1^2 \sin^2(\theta_S) \gamma(T_1) \left[1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right]}{\left[\frac{\rho_2}{\rho_1} \right]} \quad (3.35)$$

On utilise l'équation d'état d'un gaz parfait, on obtient :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - M_1^2 \sin^2(\theta_S) \times \gamma(T_1) \times \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2} \quad (3.36)$$

On introduit la relation (3.6) dans la relation (3.7), ensuite on fait le terme $\rho_2 u_2^2$ en facteur et on remplace ρ_2 par le terme P_2/RT_2 d'après la relation (3.4). Puis on remplace le terme $\gamma(T_2) R T_2$ d'après la relation (3.5) par la célérité du son

a₂, ensuite on remplace le terme $(u_2/a_2)^2$ par $(M_{r2})^2$ normale au choc. Puisque il s'agit de la relation de l'onde de choc normale. Par suite on remplace la relation (3.33) dans le résultat obtenu. On obtient finalement la relation de nombre de Mach aval M_2 suivante :

$$M_2^2 = \frac{1 - \frac{P_2}{P_1}}{\sin^2(\theta_S - \psi) \times \gamma(T_2) \times \left[1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right] \frac{P_2}{P_1}} \quad (3.37)$$

Le reste des paramètres à travers le choc oblique comme le rapport des pressions totales P_{02}/P_{01} et le saut d'entropie ΔS_{12} sont calculés de la même façon comme le cas d'un choc normal en utilisant respectivement les relations (3.20) et (3.30). Les paramètres isentropiques juste après le choc ρ_2/ρ_{02} et P_2/P_{02} peuvent être calculés respectivement par les relations (3.12) et (3.13) une fois la température T_2 est obtenue.

Alors pour déterminer tous les paramètres thermodynamiques à travers le choc oblique, il faut en premier lieu déterminer la déviation de choc θ_S correspondant à M_1 , T_0 et ψ . Puisqu'ils dépendent directe de θ_S dans la relation (3.34). Donc le problème major c'est la détermination de l'inclinaison de choc θ_S .

Une fois le rapport ρ_2/ρ_1 est obtenu par (3.34), on remplace le résultat obtenu dans (3.34) et (3.35) pour déterminer respectivement les rapports P_2/P_1 et T_2/T_1 . On remplace ensuite les résultats obtenus dans la relation (3.37) pour obtenir M_2 .

En ce qui concerne la détermination d'une relation analytique reliant les paramètres (θ_S, M_1, ψ) à haute température comme le cas de gaz parfait, on n'a pas pu arriver à expliciter une formule analytique. Par conséquent, la détermination de la valeur de θ_S correspondant à M_1 , ψ et T_0 est faite implicitement. C'est-à-dire en développant un nouvel algorithme présenté dans le chapitre prochain. Par l'utilisation de modèle de l'onde de choc normale à haute température présenté dans présent chapitre.

Il est à signaler que les auteurs dans les références [26-27, 58-59] utilisent la relation suivante conçue pour le modèle d'un gaz parfait calorifiquement et thermiquement parfait pour déterminer la valeur de θ_S correspondant à M_1 et ψ . Ils ont remplacés uniquement la variation de γ avec la température, et utiliser aussi les relations (2.25) et (2.23).

$$\tan(\psi) = \frac{2}{\tan(\theta_s)} \frac{M_1^2 \sin^2(\theta_s) - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\theta_s) + 2} \quad (3.38)$$

On admet que l'algorithme développé pour le calcul de θ_s correspondant à M_1 , Ψ et T_0 détermine deux valeurs de θ_s . Une solution est pour le choc faible et l'autre solution est pour le choc fort. Donc tous les paramètres thermodynamiques vont admettre deux solutions suivant les deux types de choc.

3.4. Onde de choc conique à haute température

Il est à noter qu'on ne peut pas déterminer les propriétés d'une onde de choc conique à haute température sans passer par l'étude des ondes de choc oblique et normale à haute température. Le calcul de l'écoulement supersonique isentropique autour d'un cône et la détermination des propriétés thermodynamiques à travers un choc conique pour le modèle à haute température sont basés sur l'utilisation des équations de conservation de mouvement. Cette équation est sous forme différentielle [2-4, 16] avec une modification appropriée au niveau de l'équation d'énergie.

La figure (3.3) représente une onde de choc conique avec les paramètres physiques avec une adaptation des coordonnées cylindriques pour un écoulement autour d'un cône.

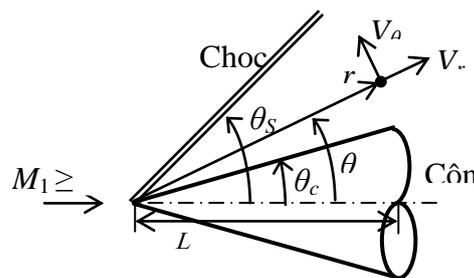


Figure 3.3 : Présentation d'un choc conique en coordonnées cylindriques.

L'équation de continuité pour un écoulement en coordonnées cylindriques, sous forme différentielle, est donnée par [2-4, 16, 45]:

$$2V_r + V_\theta \frac{1}{\tan(\theta)} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\theta}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0 \quad (3.39)$$

La condition d'irrotationalité de l'écoulement est donné par l'équation suivante [2-4, 16, 45] :

$$\frac{dV_r}{d\theta} = V_\theta \quad (3.40)$$

L'équation de la conservation de quantité de mouvement est traduit par [2-4, 16, 45, 68-69] :

$$dP = -\rho V dV \quad (3.41)$$

En coordonnées cylindriques, on a :

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 \quad (3.42)$$

On remplace la relation (3.42) dans (3.41) et l'équation qui relie la vitesse de son et la pression. Ensuite on divise le résultat par $d\theta$ puis on remplace le terme $dp/d\theta$ de la relation (3.39) dans le résultat obtenu, on aura après réarrangement, le résultat suivant :

$$\frac{dV_\theta}{d\theta} = \frac{a(T) [2V_r \operatorname{tg}(\theta) + V_\theta] - V_\theta^2 V_r \operatorname{tg}(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta) [V_\theta^2 - a(T)]} \quad (3.43)$$

L'équation de la conservation d'énergie sous forme différentielle s'écrit [2-4, 16, 45, 68-69] :

$$C_P dT + V dV = 0 \quad (3.44)$$

Alors la relation (3.44) devient :

$$V^2 = 2H(T) \quad (3.45)$$

Avec $H(T)$ est donnée par la relation (2.7).

On remplace la relation (3.42) dans (3.45) et on dérive le résultat par rapport à l'angle θ . Ensuite on remplace la relation (3.40) et la dérivée de la relation (3.44) dans le résultat. Puis on remplace la relation (3.43) dans le résultat obtenu on aboutit à :

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{V_\theta a(T) [V_r \operatorname{tg}(\theta) + V_\theta]}{\operatorname{tg}(\theta) C_p(T) [a(T) - V_\theta^2]} \quad (3.46)$$

Pour arriver aux relations (3.43) et (3.46), on a besoin d'utiliser les relations (2.3) et (2.25). Les formules (3.40), (3.43) et (3.46) constituent un système de trois équations différentielles à trois inconnues (V_r , V_θ et T). Vu la complexité des équations obtenues, les solutions analytiques exactes n'existent pas. D'où on a intérêt d'aller vers la solution numérique. Une fois qu'on détermine les trois inconnus précédents. Les autres paramètres V , a , M , μ , ρ/ρ_{02} et P/P_{02} peuvent être déterminés respectivement par les relations (3.42), (2.3), (2.9), (3.47), (3.48) et (3.49).

$$\mu = \arcsin\left(\frac{1}{M}\right) \quad (3.47)$$

$$\frac{\rho}{\rho_{02}} = \exp\left(-\int_T^{T_0} \frac{C_p(T)}{a^2(T)} dT\right) \quad (3.48)$$

$$\frac{P}{P_{02}} = \left(\frac{T}{T_0}\right) \left(\frac{\rho}{\rho_{02}}\right) \quad (3.49)$$

Le rapport P_{02}/P_{01} est déterminé par le calcul de l'écoulement à travers le choc conique. Il est constant entre le choc et la surface de cône vu que l'écoulement est isentropique dans cette région. Les relations (3.40), (3.43) et (3.46) démontrent que les paramètres de l'écoulement sont constants le long de chaque direction radiale. Les relations (3.40), (3.43), (3.46), (3.42), (2.3), (2.9), (3.47), (3.48) et (3.49) déterminent les paramètres de l'écoulement isentropique entre l'état juste après le choc jusqu'à la surface de cône en fonction de l'angle θ comme présente la figure (3.3).

3.5. Comparaison entre un choc oblique et un choc conique

Le tableau (3.1) représente la comparaison entre un choc oblique et un choc conique. Cette comparaison sera justifiée et présentée dans le chapitre des résultats.

Tableau 3.1 : Comparaison entre le choc oblique et le choc conique

Choc oblique	Choc conique
<ul style="list-style-type: none"> • Le dièdre est un profil 2D, écoulement bidimensionnel. • Choc oblique attaché rectiligne à partir du nez. • Ecoulement aval uniforme avec des lignes de courants parallèles au dièdre. • La pression sur la surface de dièdre est égale à la pression statique après le choc P_2. • Pour le même angle de déviation, et même nombre de Mach amont, l'angle de choc faible de dièdre est plus grand par rapport à celui du cône, c'est l'inverse du cas de choc fort. • Le choc est plus fort par rapport au cône. 	<ul style="list-style-type: none"> • Le cône est une géométrie 3D, écoulement 3D axisymétrique. • Choc oblique attaché rectiligne émanant du bout. • Les lignes de courants après le choc sont courbées, où elles s'inclinent d'un angle plus petit que celui de l'angle de déviation et deviendront plus tard droite. • La pression sur la surface de cône P_c est inférieure que la pression statique après le choc P_2 pour le cas de dièdre. • Pour le même nombre de Mach M_1, l'angle de déviation maximale du cône est plus grand par rapport au dièdre surtout pour un nombre de Mach M_1 petit. • Le nombre de Mach aval M_c sur la surface de cône est supérieur que le nombre de Mach M_2 pour le cas de dièdre.

3.6. Onde de détente à haute température

Une autre forme de cône peut être traitée comme un autre problème à part. C'est le cône d'une forme progressive, qui se produit une série de chocs de détente à sa surface voir figure (3.4). Dans ce cas la fonction de Prandtl Meyer PM joue un rôle important dans le calcul des flux supersoniques. Lorsque la déviation de l'écoulement augmente, on aura une détente de l'écoulement. Cette détente est de type Prandtl Meyer, alors une nouvelle forme à haute température de la relation PM est présentée comme une généralisation du cas de gaz parfait.

Pour un choc oblique infinitésimal, la relation entre la déviation d'écoulement dans un point et la variation de vitesse des deux côtés de l'onde de Mach est connue par la fonction PM . Dans la forme différentielle est donnée par [2-4, 43, 66, 70, 72-73]

$$dv = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (3.50)$$

Pour intégrer l'équation (3.50), le terme dV/V et le nombre de Mach doivent être exprimés par leurs expressions (2.10) à haute température. La formule suivante est obtenue:

$$dv = -\frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{\frac{2H(T)}{a^2(T)} - 1} dT \quad (3.51)$$

Avec les expressions de $C_p(T)$, $H(T)$, $a(T)$ sont données respectivement par les relations (2.23), (2.7) et (2.3).

La valeur de v pour $M > 1.0$ ($T < T^*$) est donnée par

$$v(T) = \int_T^{T^*} \frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{\frac{2H(T)}{a^2(T)} - 1} dT \quad (3.52)$$

La valeur de la fonction de Prandtl Meyer représente la déviation de l'écoulement entre le vecteur de vitesse supersonique à l'état considéré et le vecteur de vitesse à l'état sonique. Dans ce cas il faut calculer la température T^* correspondant au nombre de Mach $M=1.00$. La valeur de v pour $M=1.00$ est prise égale à zéro. Lorsque la surface de cône est progressivement courbée, de telle manière qu'on a une augmentation de la déviation de l'écoulement comme c'est présenté dans la figure (3.4) ci-dessous. Dans la pratique on rencontre ce type de formes dans les projectiles supersoniques et les winglettes supersoniques.

Cependant, le calcul des propriétés de l'écoulement à chaque déviation est caractérisé par l'étude de phénomène d'une détente de Prandtl Meyer et se fait par l'utilisation de la fonction (3.52).

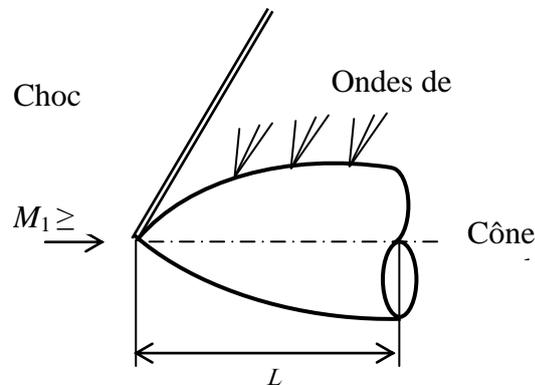


Figure 3.4 : Présentation d'un cône de forme progressivement courbée.

Lorsque la déviation de l'écoulement diminue par rapport à la déviation amont, on aura dans ce cas un choc progressif. Donc il faut utiliser le phénomène de choc conique à chaque déviation considérée par rapport à la déviation juste amont.

3.7. Applications

Le phénomène de choc conique joue un rôle très important dans le domaine de la construction aérospatiale. Plusieurs applications peuvent être trouvées. On va un aperçu brièvement sur deux applications de choc conique. La première application pour l'adaptation d'une prise d'air supersonique et la deuxième pour le calcul de la trainée d'onde en soufflerie.

3.7.1. Prise d'air supersonique

La prise d'air est formée par une nacelle et un cône central qui se déplace vers l'extérieure et l'intérieure pour permettre l'adaptation de la prise d'air. Cette adaptation est nécessaire, pour ne pas avoir la dégradation des paramètres de l'écoulement notamment l'augmentation de la trainée, causée par la réflexion de l'onde de choc dans le moteur. L'adaptation de prise d'air c'est de déplacer le cône axialement à un endroit pour avoir la mite de choc avec la carène de la nacelle. Cet endroit convenable dépend de la déviation de choc et la dimension de la prise d'air. La figure (3.5) représente un schéma représentatif d'une prise d'air

adaptée. La position initiale de cône est donnée lorsque le bord d'attaque de cône est sur même ligne verticale que la rentrée de la nacelle.

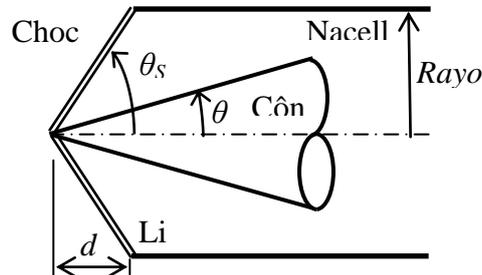


Figure 3.5: Position adéquate du cône-nacelle pour prise d'air adaptée.

D'après la figure (3.5), pour que la prise d'air soit adaptée, la distance de déplacement de cône doit être calculée par la relation suivante :

$$C = \frac{d}{\text{Rayon}} = \frac{1}{\text{tg}(\theta_s)} \quad (3.53)$$

La valeur de θ_s dépend de M_1 , T_0 et θ_C pour l'air. Alors pour des valeurs de M_1 et T_0 et θ_C , élevés le modèle GP va causer la non adaptation de la prise d'air.

3.7.2. Trainée d'onde de choc à haute température

Le calcul de la force de trainée d'onde exercée sur la surface de révolution de cône est d'un grand intérêt dans les applications aérospatiales. Alors, en utilisant le théorème de Guldin [37, 39], on peut démontrer que la trainée développée sur la surface de cône est donnée par la formule suivante :

$$D = \frac{\text{Drag}}{L^2 P_0} = \pi \text{tg}^2(\theta_C) \left(\frac{P_c}{P_{0_2}} \right) \left(\frac{P_{0_2}}{P_{0_1}} \right) \quad (3.54)$$

3.7.3. Test en soufflerie

La température T_0 dans ce cas représente la température de la chambre de combustion formée par la soufflerie. Généralement cette température est élevée et qui peut dépasser les 1000 K jusqu'à arriver à 3000 K. Cela va causer une influence de T_0 sur les paramètres trouvés sur la maquette (cône dans ce cas). D'après la référence [35, 45, 57], $T_0=2100$ K pour les applications en souffleries et aérospatiales. L'application de modèle GP donne des valeurs éloignées par

rapport aux valeurs réelles de prélèvement du test. Alors qui sont proches au modèle *HT*, ce qui donne un grand intérêt du présent travail.

3.8 Calcul de l'erreur de modèle GP par rapport au modèle *HT*

Le modèle mathématique du gaz parfait GP est développé en considérant la chaleur spécifique C_p constante, ce qui donne des résultats acceptables pour les basses températures. Selon cette étude, nous pouvons remarquer une différence sur les résultats donnés entre le modèle de gaz parfait GP et le modèle à haute température *HT* développé. Alors, l'erreur donnée par le modèle GP par rapport à notre modèle *HT* peut être calculée pour chaque paramètre. Par conséquent, pour chaque valeur de M_1 et T_0 , l'erreur ε peut être évaluée par la relation suivante:

$$\varepsilon_y(T_0, M_1) = \left| 1 - \frac{y_{PG}(T_0, M_1)}{y_{HT}(T_0, M_1)} \right| \times 100 \quad (3.55)$$

Le paramètre y dans la formule (3.55) va représenter tous les paramètres thermodynamiques et physiques de choc, dans ce cas.

Finalement, après qu'on a développé notre modèle mathématique à haute température autour du cône, qui est traduit par les formules mathématiques précédentes. Dans le chapitre prochain on va discrétiser nos équations différentielles du premier ordre et développer les algorithmes de calculs numériques pour les différentes formules et méthodes développées précédemment.

CHAPITRE 4

PROCEDURE NUMERIQUE DE CALCUL D'UN CHOC CONIQUE A HAUTE TEMPERATURE

Nous exposons, dans ce chapitre, La résolution numérique du problème de l'écoulement supersonique autour d'un cône à haute température. Pour cela on va suivre deux raisonnements l'un est dit inverse et l'autre est dit direct. En plus on va faire les calculs en trois étapes.

4.1. Procédure numérique

Dans le raisonnement inverse on suppose que la déviation de choc est donnée et on va déterminer la déviation de cône qui coïncide avec ce choc. Alors que réellement c'est le contraire qui se passe, c'est-à-dire la déviation de cône est donnée et on doit déterminer le choc correspondant. Dans ce cas, les paramètres de notre problème sont θ_S et M_1 pour une température T_0 donnée de l'air. En plus il faut connaître la variation de $C_p(T)$ en fonction de la température et la constante R de l'air.

La première étape consiste à déterminer tous les paramètres isentropiques (T_1/T_0 , ρ_1/ρ_{01} , P_1/P_{01}) correspondants à M_1 et T_0 juste avant le choc. Bien sûr en utilisant les relations d'un écoulement supersonique isentropique [3, 63, 68-69]. L'intégrale (14) est faite en utilisant la quadrature de Simpson avec une condensation adéquate des nœuds. On fait la même chose pour la quadrature de Gauss Legendre.

La deuxième étape consiste à déterminer les propriétés de l'écoulement à travers le choc, qui se résument par (M_2 , ψ , T_2/T_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} , ΔS_{21}). On utilise les relations d'une onde de choc oblique à HT , qui sont présentées respectivement par les relations (3.34), (3.35), (3.36), (3.37), (3.20) et (3.30). Ainsi que les relations (3.12) et (3.13) lorsque $i=2$ pour déterminer les rapports isentropiques juste après le choc.

Dans le chapitre 3, on a démontré que la température totale à travers le choc est conservée. C'est-à-dire on a $T_0=T_{01}=T_{02}$. Mais la pression et la masse volumique totales par contre changent de valeurs. D'où $P_{02}/P_{01}=\rho_{02}/\rho_{01}\neq 1.0$. Pour la pression totale on pose $P_0=P_{01}$.

Deux solutions peuvent être trouvées selon la valeur de nombre de Mach M_2 juste après le choc. Ce qui implique que tous les paramètres thermodynamiques vont admettre deux solutions. Si $M_2\geq 1.00$, on obtient un choc faible. Si $M_2<1.00$, on obtient un choc fort. Généralement le choc le faible qui apparait en réalité.

Avant déterminer des paramètres présentés dans les relations (3.34), (3.35), (3.36), (3.37), (3.20) et (3.30), il faut déterminer en premier lieu la déviation de l'écoulement ψ juste après le choc. Dans les références [27-28, 58-59], les auteurs ont utilisés la relation pour un gaz parfait à C_p constant, vu la difficulté de trouver une forme analytique. Ce qui donne des résultats assez loin de la réalité et qui ne répond pas au besoin du cas *HT*. Cependant dans ce travail, on va déterminer la déviation ψ avec précision élevée selon le modèle *HT*. Tous les paramètres justes après le choc dépendent d'une façon directe et explicite de la valeur de ψ . Comme le développement d'une relation analytique reliant les paramètres θ_s et ψ est assez compliqué. On va utiliser les relations d'une onde de choc normale à *HT* [70] pour déterminer la valeur de M_2 . Avec d'autre procédure présentée dans [58]. Dans cette référence, La relation entre le nombre de Mach au choc normal et un choc avec une direction ψ s'écrit [2-4, 6, 12, 16, 26-27, 41, 43, 58-59] :

$$M_2(\psi) = \frac{M_{2n}}{\sin(\theta_s - \psi)} \quad (4.1)$$

La valeur de M_{2n} peut être trouvée en utilisant la procédure présentée dans la référence [26]. Elle dépend de T_0 et de M_{1n} amont normale au choc qu'est égale à $M_1 \sin(\theta_s)$. Donc il ne dépend pas de ψ comme M_{2n} donné par (4.1).

Le calcul de la valeur de ψ se fait de telle manière que la valeur de M_2 donné par la relation (4.1) soit égale à la valeur de M_2 donnée par (3.37). Le calcul se fait par itération. Pour cette raison, considérons la différence entre la valeur de M_2 donnée par (4.1) et la valeur de M_2 donnée par (3.37) par la relation suivante :

$$f = M_2(\psi) - M_2 \quad (4.2)$$

Commençant par $\psi=\psi_G=0.0$, dans ce cas la valeur de $f_G=f>0.0$. En incrémentant la valeur de ψ par un pas $\Delta\psi$ choisi, on obtient :

$$\psi_D=\psi_G+\Delta\psi \quad (4.3)$$

Pour la valeur de $\psi=\psi_D$, on calcule les valeurs de M_2 respectivement par les relations (3.37) et (4.1) et évaluons la différence f_D par (4.2). Si la valeur de $f_D>0.0$, dans ce cas on affecte les valeurs de ψ_D et f_D respectivement dans ψ_G et f_G et on calcule la nouvelle valeur de ψ_D par la relation (4.3). Le calcul sera répété jusqu'à trouver une valeur de ψ_D , qui donne une valeur de $f_D<0.0$. Dans ce cas la solution physique de ψ appartient à l'intervalle ouverte $]\psi_G, \psi_D[$. On utilise l'algorithme de bipartition [14, 47, 54] pour déterminer la valeur de ψ , solution de (4.2), avec une précision ε donnée. Pour les applications on a pris $\varepsilon=10^{-8}$ et $\Delta\psi=1.0$ degré. Dans ce cas le nombre de subdivision n minimal est égal à 21. A cette étape on peut déterminer la valeur de ψ correspondante aux données M_1, T_0 pour l'air. On remplace la valeur de ψ dans les relations (3.34), (3.35), (3.36), (3.37), (3.20) et (3.30), on peut déterminer tous les paramètres à travers le choc.

4.2. Adaptation de la méthode de Runge Kutta

La troisième étape consiste à trouver les paramètres de l'écoulement isentropique dans la région juste après le choc et la surface de cône. Ce calcul se fait par la résolution des équations différentielles (3.40), (3.43) et (3.46) simultanément par la méthode Runge Kutta. Afin de trouver à chaque direction θ , comme présente la figure 3.3, les paramètres V_r, V_θ et T , ensuite par l'utilisation des relations (3.42), (2.3), (2.9), (3.48) et (3.49) on peut trouver respectivement $V, a, M, \rho/\rho_{02}$ et P/P_{02} .

Parmi plusieurs versions et différents ordres de la méthode Runge Kutta qu'on peut trouver dans la littérature [8-9, 13, 17, 31, 47, 49, 54, 62]. On a utilisé et adapté dans ce travail, la méthode de Runge Kutta d'ordre 4. C'est une méthode numériquement stable et très adaptée avec le modèle mathématique trouvé. L'ordre 4 de la méthode est largement suffisant pour l'obtention des résultats avec une très bonne précision et dans un temps réduit en comparant avec la même méthode à différents ordres.

Dans l'appendice B, on a présenté la méthode de Runge Kutta avec différents ordres. A titre exemple citons la méthode de Runge Kutta d'ordre 3, 4, 6, 7, 10 et 18, avec plusieurs versions, selon les références [8-9, 13, 17, 31, 47, 49, 54, 62].

Le domaine de variation de la solution est $\theta < \theta_S$. Donc il faut trouver $\theta = \theta_c < \theta_S$ pour avoir la solution $V_\theta = 0.0$. Dans ce cas on peut remplacer à cette direction $\theta = \theta_c$ une surface rigide, vu que la vitesse normale imperméable est égale à 0.0. Cette surface peut représenter la surface de cône cherché. Qui va supporter le choc donné à l'avance.

Pour se permettre d'utiliser cette méthode, les valeurs initiales de V_r , V_θ et T lorsque $\theta = \theta_S$ sont données par les relations (4.4), (4.5) et (4.6) suivantes.

$$V_r = V_2 \cos(\theta_S - \psi) \quad (4.4)$$

$$V_\theta = -V_2 \sin(\theta_S - \psi) \quad (4.5)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} T_2 \\ T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_0 \end{bmatrix} T_0 \quad (4.6)$$

Avec

$$V_2 = M_2 a(T_2) \quad (4.7)$$

Le rapport T_2/T_1 dans la relation (4.6) est déterminé durant le calcul du choc oblique suivant la deuxième étape. Le rapport T_1/T_0 dans la relation (4.6) est obtenu durant la première étape lors de calcul des paramètres isentropiques correspondants à M_1 et T_0 . La valeur de $a(T_2)$ dans la relation (4.7) peut être obtenue par le remplacement de $T = T_2$ dans la relation (2.3).

Pour résoudre les équations différentielles (3.40), (3.43) et (3.46) dans un ordre croissant, on considère le changement de variable suivant :

$$x = \theta_S - \theta \quad (4.8)$$

Dans ce cas la position juste après le choc $\theta = \theta_S$ correspondant à $x = 0.0$ et la position de cône $\theta = \theta_c$ correspondant à $x = x_c = \theta_S - \theta_c > 0.0$. La dérivée $dx = -d\theta$ doit être remplacé dans les relations (3.40), (3.43) et (3.46). Alors ces relations deviennent :

$$\frac{dV_r}{dx} = f(x, V_r, V_\theta, T) \quad (4.9)$$

$$\frac{dV_\theta}{dx} = g(x, V_r, V_\theta, T) \quad (4.10)$$

$$\frac{dT}{dx} = h(x, V_r, V_\theta, T) \quad (4.11)$$

Avec

$$f = -V_\theta \quad (4.12)$$

$$g = -\frac{a(T) \left[2 V_r \operatorname{tg}(\theta_S - x) + V_\theta \right] - V_\theta^2 V_r \operatorname{tg}(\theta_S - x)}{\operatorname{tg}(\theta_S - x) \left[V_\theta^2 - a(T) \right]} \quad (4.13)$$

$$h = -\frac{V_\theta a(T) \left[V_r \operatorname{tg}(\theta_S - x) + V_\theta \right]}{\operatorname{tg}(\theta_S - x) C_p(T) \left[a(T) - V_\theta^2 \right]} \quad (4.14)$$

L'algorithme de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 au système (4.9), (4.10) et (4.11) s'écrit :

$$k_1 = \Delta x f(x_i, V_{r_i}, V_{\theta_i}, T_i) \quad (4.15)$$

$$l_1 = \Delta x g(x_i, V_{r_i}, V_{\theta_i}, T_i) \quad (4.16)$$

$$m_1 = \Delta x h(x_i, V_{r_i}, V_{\theta_i}, T_i) \quad (4.17)$$

Et

$$k_2 = \Delta x f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, V_{r_i} + \frac{1}{2}k_1, V_{\theta_i} + \frac{1}{2}l_1, T_i + \frac{1}{2}m_1\right) \quad (4.18)$$

$$l_2 = \Delta x g\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, V_{r_i} + \frac{1}{2}k_1, V_{\theta_i} + \frac{1}{2}l_1, T_i + \frac{1}{2}m_1\right) \quad (4.19)$$

$$m_2 = \Delta x h\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, V_{r_i} + \frac{1}{2}k_1, V_{\theta_i} + \frac{1}{2}l_1, T_i + \frac{1}{2}m_1\right) \quad (4.20)$$

Et

$$k_3 = \Delta x f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, V_{r_i} + \frac{1}{2}k_2, V_{\theta_i} + \frac{1}{2}l_2, T_i + \frac{1}{2}m_2\right) \quad (4.21)$$

$$l_3 = \Delta x g\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, V_{r_i} + \frac{1}{2}k_2, V_{\theta_i} + \frac{1}{2}l_2, T_i + \frac{1}{2}m_2\right) \quad (4.22)$$

$$m_3 = \Delta x h\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, V_{r_i} + \frac{1}{2}k_2, V_{\theta_i} + \frac{1}{2}l_2, T_i + \frac{1}{2}m_2\right) \quad (4.23)$$

Et

$$k_4 = \Delta x f(x_i + \Delta x, V_{r_i} + k_3, V_{\theta_i} + l_3, T_i + m_3) \quad (4.24)$$

$$l_4 = \Delta x g(x_i + \Delta x, V_{r_i} + k_3, V_{\theta_i} + l_3, T_i + m_3) \quad (4.25)$$

$$m_4 = \Delta x h(x_i + \Delta x, V_i + k_3, V_{\theta_i} + l_3, T_i + m_3) \quad (4.26)$$

Et

$$V_{r_{i+1}} = V_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.27)$$

$$V_{\theta_{i+1}} = V_{\theta_i} + \frac{1}{6} (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \quad (4.28)$$

$$T_{i+1} = T_i + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \quad (4.29)$$

Au point initial $i=0$ correspondant au point juste après le choc. Dans ce cas, V_r , V_{θ} et T prennent les valeurs données respectivement par les relations (4.4), (4.5) et (4.6). En ce point $i=0$, on a $V_{\theta} < 0.0$, puisque V_{θ} est dirigée dans le sens inverse que celui présenté dans la figure (3.3). Le pas Δx peut être constant ou variable. Dans le calcul on a pris un pas constant très petit. Pour chaque valeur de $i > 0$ correspondant à une valeur de $x_i = i \Delta x$ et par conséquent une valeur de $\theta = \theta_S - x_i$ calculée par la relation (4.8), on peut déterminer les paramètres V_{r_i} , V_{θ_i} et T_i respectivement par les relations (4.27), (4.28) et (4.29). Ensuite on peut déterminer V_i , a_i , M_i , ρ_i/ρ_{02} , P/P_{02} respectivement par les relations (3.42), (2.3), (2.9), (3.48) et (3.49). A titre d'information, on a besoin de 78 opérations mathématiques pour faire une itération par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 utilisé sans compter les opérations mathématiques pour évaluer les fonctions f , g et h . On peut déterminer encore à chaque direction θ_i , la déviation de vecteur vitesse V_i de l'écoulement par rapport à l'horizontal par la relation suivante :

$$\alpha_i = \theta_i - \arctg\left(\frac{V_{\theta_i}}{V_{r_i}}\right) \quad (4.30)$$

Lorsque $i=0$, la valeur de α_0 donnée par (4.30) est égale à ψ .

On peut vérifier les résultats obtenus en cours de calcul. Puisque l'écoulement est isentropique après le choc, les paramètres M et T obtenus par (2.9) et (4.37), sont liés par la relation (2.10), [11-12] dans notre modèle HT, où une autre valeur de M peut être calculée par (2.10) et comparée après avec celle donnée par (2.9).

Le calcul s'arrête si pour une valeur de i on trouve $V_{\theta} \geq 0.0$. C'est rare où on trouve dans un calcul pour un pas discret Δx donné, directement $V_{\theta} = 0.0$. Dans ce cas un raffinement de résultat ou précisément une correction de la valeur de x_i est faite à fin de trouver la solution avec une précision élevée. On utilise par

conséquent l'algorithme de bipartition au dernier intervalle] x_{i-1} , x_i [. La longueur de cet intervalle est égale à Δx , si le pas est constant ou égale au dernier pas utilisé dans la méthode Runge Kutta. Dans les calculs on a utilisé un pas $\Delta x=0.001$ et une précision $\varepsilon=10^{-8}$. Dans ce cas le nombre de subdivision de l'intervalle] x_{i-1} , x_i [est égale à 17.

Une fois on détermine la valeur de x qui annule V_θ , on peut déterminer l'angle de cône correspondant par la relation (4.8) et les valeurs de $V=V_r$ et T correspondantes au dernier point de calcul représentent les valeurs sur la surface de cône. Dans ce cas les paramètres de l'écoulement comme M , ρ/ρ_{02} , P/P_{02} sur la surface de cône peuvent être trouvés en utilisant respectivement les relations (2.9), (3.48) et (3.49). Pour cette dernière valeur de i , la direction de vecteur de vitesse donnée par (4.30) est égale à la déviation de cône correspondant.

Le phénomène physique démontre qu'il existe une déviation maximale de cône $\theta_{C_{\max}}$ permettra d'avoir une limite entre l'apparition d'une onde de choc attachée et une onde de choc détachée. Cette déviation dépend de M_1 et de T_0 ainsi que de $C_p(T)$ et R de gaz. Alors si l'angle de cône $\theta_C \leq \theta_{C_{\max}}$ on aura dans ce cas une onde de choc attachée. Ceci implique que la méthode présentée dans cette étude est valable. Maintenant si $\theta_C > \theta_{C_{\max}}$ on aura une onde de choc détachée et par suite la présente étude n'admet pas de solution.

La détermination de cette valeur limite nous donne la possibilité d'éviter la méthode inverse présentée dans cette étude et de considérer la résolution de problème par la méthode directe. C'est-à-dire on considère maintenant la déviation de cône θ_C parmi les données et on détermine l'angle de choc θ_S correspondant. Un calcul supplémentaire est fait, dans ce cas pour calculer la valeur de $\theta_{C_{\max}}$ avant de déterminer le choc correspondant. Puisque si $\theta_C > \theta_{C_{\max}}$ le programme développé ne donne pas la solution physique à notre problème et affiche un message qui indique qu'un choc détaché est apparait dans ce cas.

Un autre problème intéressant consiste à déterminer le nombre de Mach minimum, appelé par $M_{1_{\min}}$ correspondant à la déviation de cône pour avoir une limite de choc attaché. Si $M_1 \geq M_{1_{\min}}$ on aura une onde de choc attaché. Dans le cas contraire un choc détaché se produit. Cette limite dépend de θ_C , T_0 et de $C_p(T)$ et R de gaz.

Il est très commode pour avoir plus d'informations sur le comportement de l'écoulement afin de le maîtriser par la suite, de déterminer certains résultats particuliers sur la déviation d'un cône. Qui donne un nombre de Mach juste après le choc $M_2=1.00$ et l'autre donne un nombre de Mach sur la surface de cône $M_c=1.00$. Les deux déviations des cônes correspondants à $M_2=1.00$ et $M_c=1.00$ dépendent de M_1 , T_0 , $C_p(T)$ et R . En variant les paramètres M_1 , θ_s et T_0 , on peut trouver tous les paramètres possibles et en particulier l'effet de T_0 très élevée.

4.3. Algorithme de programme principal

On présente dans ce paragraphe l'algorithme de notre programme numérique principal développé. Il est à noter que chaque figure ou même courbe présentées dans le chapitre 5 de la présentation des résultats nécessite dans la majorité des cas une modification au programme principal. Cette modification mérite d'ajouter une boucle de variation d'un paramètre en considérons les autres paramètres comme constants.

La courbe de détermination des paramètres de l'écoulement correspondants au nombre de Mach sonique juste après le choc ($M_2=1.00$) nécessite l'écriture d'un programme ou subroutine à part.

La détermination des paramètres thermodynamiques correspondants au nombre de Mach sur la surface de cône égale à l'unité ($M_c=1.00$) nécessite le développement d'un programme numérique à part ou même ajouter une subroutine pour cette raison.

La détermination de l'angle de déviation maximale de cône $\theta_{C_{\max}}$ (limite entre le choc attaché et le choc détaché) correspondant aux données (M_1 , T_0) et les paramètres correspondants nécessite aussi le développement d'un programme séparé ou ajouter une subroutine pour cette raison.

La détermination de nombre de Mach limite $M_{1_{Lim}}$ entre le choc attaché et le choc détaché et les paramètres correspondants mérite le développement d'un programme numérique ou même subroutine pour cette raison.

La détermination des erreurs commises par le modèle GP par rapport au modèle *HT* nécessite cette fois ci un programme à part pour ce but.

Alors que le but de programme principal c'est de déterminer la déviation de l'onde de choc conique θ_s pour le cas de choc faible attaché et le choc fort

attaché. En plus les paramètres thermodynamiques correspondants pour chaque cas. Aussi la déviation maximale de cône $\theta_{C_{\max}}$, le nombre de Mach limite $M_{1_{Lim}}$ et les autres paramètres correspondants en fonction de M_1 , θ_C et T_0 pour l'air. On rappelle que ce calcul se fait par le résonnement inverse déjà discutée précédemment.

Le programme principal est développé sur la base de 8 sous-routines et 8 fonctions. Il est à noter que la déclaration des variables réels est faite en double précision. Pour la détermination des résultats pour le modèle GP, il suffit de donner au programme numérique une valeur de $T_0=240$ K, et utiliser les relations conçues pour le modèle GP. Notons que le programme peut traiter les deux types de modèles. De même on peut utiliser la fonction $C_P(T)$ donnée par la relation (2.23) en annulant tous les coefficients de cette fonction sauf le premier a_1 . On présente maintenant les algorithmes des différents programmes réalisés dans ce travail. L'algorithme de programme principal est présenté dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1 : Algorithme de programme principal

<p>1. Début</p> <p>2. Les données de problème</p> <p style="padding-left: 40px;">$M_1, \theta_C, T_0, [C_P(T) \text{ et } R \text{ de l'air}]$</p> <p style="padding-left: 40px;">$\Delta\theta$ (Pas utilisé dans la méthode de Runge Kutta).</p> <p style="padding-left: 40px;">Les points de la quadrature de Gauss Legendre d'ordre 12.</p> <p style="padding-left: 40px;">Les paramètres de la fonction de condensation.</p> <p style="padding-left: 40px;">Tolérance pour l'algorithme de bipartition.</p> <p>3. Détermination des paramètres thermodynamiques critiques $T^*/T_0, \rho^*/\rho_0$ et P^*/P_0</p> <p>4. Détermination des paramètres thermodynamiques isentropiques juste avant le choc $T_1/T_0, \rho_1/\rho_{01}$ et P_1/P_{01}</p> <p>5. Détermination de $\theta_{C_{\max}}$ correspondant à M_1 par une sous-routine spéciale.</p> <p>6. Détermination de $M_{1_{Lim}}$ correspondant à θ_C par une sous-routine spéciale.</p> <p>7. Si ($\theta_C > \theta_{C_{\max}}$) On aura une onde de choc détachée. Le programme s'arrête avec affichage le message d'une onde de choc détachée.</p>

8. Si ($M_1 < M_{1Lim}$) On aura une onde de choc détachée. Le programme s'arrête avec affichage le message d'une onde de choc détachée.
9. Détermination de la déviation θ_S pour le cas de choc faible.
10. Détermination les rapports thermodynamiques Ψ , M_2 , P_2/P_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} et ΔS_{12} à travers le choc pour le cas de choc faible.
11. Détermination les paramètres thermodynamiques isentropiques T_2/T_0 , ρ_2/ρ_{02} et P_2/P_{02} pour le cas de choc faible.
12. Détermination de la déviation M_C , T_C/T_0 , ρ_C/ρ_{02} et P_C/P_{02} sur la surface de cône pour le cas de choc faible.
13. Détermination de la variation de M , T/T_0 , ρ/ρ_{02} , P/P_{02} en fonction de l'angle θ entre la déviation de choc et la surface de cône.
14. Détermination la valeur de C par la formule (3.53) concernant la prise d'air.
15. Détermination la valeur de D par la formule (4.31) concernant la traînée d'onde.
16. Refaire les étapes 9 à 15 pour le cas de choc fort.
17. Affichage de θ_S , Ψ , M_2 , P_2/P_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} et ΔS_{12} , T_2/T_0 , ρ_2/ρ_{02} et P_2/P_{02} , M_C , T_C/T_0 , ρ_C/ρ_{02} et P_C/P_{02} correspondant à M_1 , θ_C et T_0 pour le choc faible et le choc fort.
18. Fin

Tableau 4.2 : Algorithme qui calcule la valeur $\theta_{C_{max}}$ pour M_1 et T_0 .

1. Début
2. Les données de problème M_1 , T_0 , [$C_P(T)$ et R de l'air]
3. $\theta_{S1} = \arcsin(1/M_1) + \text{Tolérance}$; $\theta_{C1} = 0.0$
4. $\theta_{S2} = \pi/2 - \text{Tolérance}$; $\theta_{C2} = 0.0$
5. $\theta_{S3} = (\theta_{S1} + \theta_{S2})/2$
6. Calcul les paramètres de choc oblique Ψ , M_2 , P_2/P_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} et ΔS_{12} correspondant à $\theta_S = \theta_{S3}$.
7. Calcul de la déviation de cône θ_{C3} , M_C , T_C/T_0 , ρ_C/ρ_{02} et P_C/P_{02} correspondant à $\theta_S = \theta_{S3}$.
8. $\text{NITER} = \text{INT}(\text{Log}((\theta_{S2} - \theta_{S1})/\text{Tolérance})/0.6931) + 1$
9. $K = 1$

10. $\theta_{S4} = (\theta_{S1} + \theta_{S3})/2$
11. Calcul les paramètres de choc oblique Ψ , M_2 , P_2/P_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} et ΔS_{12} correspondant à $\theta_S = \theta_{S4}$.
12. Calcul de la déviation de cône θ_{C4} , M_C , T_C/T_0 , ρ_C/ρ_0 et P_C/P_0 correspondant à $\theta_S = \theta_{S4}$.
13. $\theta_{S5} = (\theta_{S2} + \theta_{S3})/2$
14. Calcul les paramètres de choc oblique Ψ , M_2 , P_2/P_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} et ΔS_{12} correspondant à $\theta_S = \theta_{S5}$.
15. Calcul de la déviation de cône θ_{C5} , M_C , T_C/T_0 , ρ_C/ρ_0 et P_C/P_0 correspondant à $\theta_S = \theta_{S5}$.
16. $\theta_{C_{\max}} = \text{Max}(\theta_{C3} + \theta_{C4} + \theta_{C5})$
17. Si ($\theta_{C_{\max}} = \theta_{C3}$) alors $\theta_{S1} = \theta_{S4}$; $\theta_{C1} = \theta_{C4}$; $\theta_{S2} = \theta_{S5}$; $\theta_{C2} = \theta_{C5}$; Fin Si.
18. Si ($\theta_{C_{\max}} = \theta_{C4}$) alors $\theta_{S2} = \theta_{S3}$; $\theta_{C2} = \theta_{C3}$; $\theta_{S3} = \theta_{S4}$; $\theta_{C3} = \theta_{C4}$; Fin Si
19. Si ($\theta_{C_{\max}} = \theta_{C5}$) alors $\theta_{S1} = \theta_{S3}$; $\theta_{C1} = \theta_{C3}$; $\theta_{S3} = \theta_{S5}$; $\theta_{C3} = \theta_{C5}$; Fin Si
20. $K = K + 1$
21. Si ($K \leq \text{NITER}$) Allez à l'étape 9 ; Fin Si.
22. $\theta_S = \theta_{S1} = \theta_{S2} = \theta_{S3} = \theta_{S4} = \theta_{S5}$
23. Affichage de $\theta_{C_{\max}}$ correspondant à M_1 et T_0 .
24. Affichage de θ_S , Ψ , M_2 , P_2/P_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} et ΔS_{12} , T_2/T_0 , ρ_2/ρ_0 et P_2/P_0 , M_C , T_C/T_0 , ρ_C/ρ_0 et P_C/P_0 correspondants à $\theta_{C_{\max}}$, M_1 et T_0 .
25. Fin

L'algorithme qui calcule de la valeur de $M_{1_{Lim}}$ est donné par :

Tableau 4.3 : Algorithme qui calcule la valeur de $M_{1_{Lim}}$ en fonction de θ_C et T_0 .

1. Début
2. Les données de problème θ_C , T_0 , [$C_P(T)$ et R de l'air]
3. $M_{1G} = 1.0 + \text{Tolérance}$; $\theta_{C_{\max G}} = 0.0$; $\text{Val}_G = -1.00$
4. $M_{1D} = M_{1G} + 1.0$
5. Calcul de $\theta_{C_{\max D}}$ correspondant à M_{1D} .

6. $Val_D = \theta_{C_{max_D}} - \theta_C$
7. $Prod = Val_G \times Val_D$
8. Si ($Prod < 0.0$) alors allez à l'étape 9 ; Fin Si.
9. $\theta_{C_{max_G}} = \theta_{C_{max_D}}$; $M_{1G} = M_{1D}$; $Val_G = Val_D$; Allez à l'étape 4.
10. $NITER = INT(\text{Log}((M_{1D} - M_{1G}) / \text{Tolérance}) / 0.6931) + 1$
11. $K = 1$
12. $M_{1M} = (M_{1G} + M_{1D}) / 2$
13. Calcul de $\theta_{C_{max_M}}$ et les paramètres Ψ , M_2 , P_2/P_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} et ΔS_{12} , T_2/T_0 , ρ_2/ρ_{02} et P_2/P_{02} , M_C , T_d/T_0 , ρ_d/ρ_{02} et P_d/P_{02} correspondant pour M_{1M}
14. $Val_M = \theta_{C_{max_M}} - \theta_C$
15. $Prod = Val_G \times Val_M$
16. Si ($Prod < 0.0$) alors $\theta_{C_{max_D}} = \theta_{C_{max_M}}$; $M_{1D} = M_{1M}$; $Val_D = Val_M$; Fin Si.
17. Si ($Prod \geq 0.0$) alors $\theta_{C_{max_G}} = \theta_{C_{max_M}}$; $M_{1G} = M_{1M}$; $Val_G = Val_M$; Fin si.
18. $K = K + 1$
19. Si ($K \leq NITER$) alors allez à l'étape 11.
20. $M_{1Lim} = M_{1M}$
21. Affichage de M_{1Lim} correspondant à θ_C et T_0 .
22. Affichage de θ_S , Ψ , M_2 , P_2/P_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} et ΔS_{12} , T_2/T_0 , ρ_2/ρ_{02} et P_2/P_{02} , M_C , T_d/T_0 , ρ_d/ρ_{02} et P_d/P_{02} correspondant à M_{1Lim} , θ_C et T_0 .
23. Fin.

Dans le tableau 4.4 on présente l'algorithme qui calcule de la déviation de cône θ_C à une déviation de choc θ_S donnée pour M_1 et T_0 par la méthode inverse.

Tableau 4.4 : Algorithme qui calcule θ_C pour θ_S , M_1 et T_0 par la méthode inverse

1. Début
2. Les données de problème M_1 , θ_S , T_0 , $\Delta\theta$, θ_S , Tolérance, $[C_P(T)$ et R de l'air]
3. Calcul de Ψ , M_2 , P_2/P_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} et ΔS_{12} , T_2/T_0 , ρ_2/ρ_{02} et P_2/P_{02} ,

4. Calcul de a_2 , V_2 , V_{2r} , $V_{2\theta}$ par les relations (2.3), (4.7), (4.4) et (4.5).
5. $J=0$
6. $X_1=0.0$; $Y_1=V_{2r}$; $Z_1= - V_{2\theta}$; $S_1=T_2$
7. $J=J+1$
8. Calcul de X_2, Y_2, Z_2, S_2 par la méthode Runge Kutta
9. Si $Z_2 \geq 0.0$ Allez à l'étape 12
10. $X_1=X_2$; $Y_1=Y_2$; $Z_1=Z_2$; $S_1=S_2$
11. Si ($X_1 \leq \theta_S$) Alors allez à l'étape 7
12. $NITER=INT(\text{Log}((X_2-X_1)/\text{Tolérance})/0.6931)+1$
13. $K=1$
14. $X_3=(X_1+X_2)/2$
15. $\Delta\theta=X_3-X_1$
16. Calcul de X_3, Y_3, Z_3, S_3 par la méthode Runge Kutta
17. $\text{Prod}=Z_1 \times Z_3$
18. Si ($\text{Prod} \leq 0.0$) Alors $X_2=X_3$; $Y_2=Y_3$; $Z_2=Z_3$; $S_2=S_3$ Fin Si.
19. Si ($\text{Prod} > 0.0$) Alors $X_1=X_3$; $Y_1=Y_3$; $Z_1=Z_3$; $S_1=S_3$ Fin Si.
20. $K=K+1$
21. Si ($K \leq NITER$) Alors allez à l'étape 14.
22. $\theta_C=\theta_S-X_3$
23. $V_C=Y_3$; $T_C=S_3$; $M_C=V_C/a_C$
24. $C_{PC}=C_P(T_C)$; $\gamma_C=C_{Pd}/(C_{PC} - R)$; $a_C=DSQRT(\gamma_C \times R \times T_C)$
25. Calcul de ρ_C/ρ_{02} par la quadrature de Gauss Legendre
26. Calcul de $P_C/P_{02}=(T_C/T_0) \times (\rho_C/\rho_{02})$
27. Calcul de C et D par les relations (3.53) et (3.54).
28. Fin.

En conclusion, après qu'on a développé les différents algorithmes et programmes du problème physique traité. On a commencé à exécuter le code de calcul en faisant varier les paramètres principaux dans les calculs afin d'obtenir le maximum de résultats. Ces résultats qu'on va présenter dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 5

RESULTATS ET COMMENTAIRES

Dans ce chapitre, on va présenter nos résultats avec une interprétation. Pour cela on a partagé les résultats en 9 parties afin de faciliter la tâche aux lecteurs. Tous les résultats obtenus sont fonction de trois données physiques principales M_1 , θ_C et T_0 . Notamment que notre application est faite pour l'air. La convergence des résultats dépend de la discrétisation qui se traduit par le choix de pas utilisé dans la méthode de Runge Kutta. Cependant notre programme réalisé peut traiter n'importe quel type de gaz, malgré qu'on a utilisé la fonction $C_p(T)$ et R de l'air uniquement. Dans les applications on a pris un pas $\Delta x=0.001$ après plusieurs tests de convergence pour avoir une précision de $\varepsilon=10^{-4}$.

Pour la validation les résultats d'un choc conique pour le cas de gaz parfait GP ($\gamma=1.402$) peuvent être trouvés et comparés à ceux dans les références [1-4, 8-10]. Dans ces références on trouve les résultats pour $\gamma=1.400$.

Toujours pour la validation les résultats du choc oblique pour le cas GP ($\gamma=1.402$) peuvent être trouvés dans les références [2-4, 12, 16, 27-28, 57-60]. Pour le modèle *HT*, Ces résultats présentés peuvent être trouvés dans les références [27-28, 58-60] avec une différence légèrement modérée. Vu le changement effectué au modèle mathématique. Cette modification se trouve au niveau de la relation qui lie la déviation de choc et la déviation de dièdre ainsi qu'au niveau de l'interpolation de $C_p(T)$ pour raison de modéliser le modèle *HT* avec une grande précision.

5.1. Exemple typique

Les tableaux (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6), (5.7), (5.8) et (5.9) présentent les résultats obtenus par le programme numérique réalisé pour un gaz parfait $\gamma=1.402$ lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20.0$ degré en variant la température T_0 pour 1000K, 2000K et 3000k. Dans le but de voir l'effet de cette température T_0 sur les paramètres d'un choc conique faible et fort.

Le tableau (5.1) représente l'effet de T_0 sur les paramètres isentropiques juste avant le choc oblique correspondant à $M_1=4.00$.

Le tableau (5.2) représente l'effet de T_0 sur les paramètres physiques à travers le choc oblique faible lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20.0$.

Le tableau (5.3) représente l'effet de T_0 sur les paramètres isentropiques juste après le choc faible.

Le tableau (5.4) représente l'effet de T_0 sur les paramètres sur la surface de cône lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20.0$.

On remarque que les résultats isentropiques trouvés justes après le choc (tableau 5.3) et ainsi que M_2 (tableau 5.2) sont différents à ceux trouvés sur la surface de cône. Ce qui montre que les paramètres juste après le choc varient et ne restent plus constants jusqu'à la surface de cône. Sur ce tableau on a ajouté les résultats pour la prise d'air adaptée (valeur de C) et celle pour la trainée d'onde (valeur de D) vu leurs importances dans la pratique.

Le tableau (5.5) illustre l'erreur donnée par le modèle GP par rapport à notre modèle HT sur tous les paramètres calculés. Dans le cas de choc faible lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20.0$. On remarque l'influence de T_0 l'écart de GP par rapport à HT . Alors l'erreur maximale est remarquée plus pour le rapport ρ_C / ρ_{02} . Pour la trainée on a trouvé une erreur arrivant à 39%. En aérodynamique, l'erreur ne doit pas être supérieure à 0.1% [2-4, 19, 45, 57, 60, 74-75] entre l'expérience et le calcul.

Dans les tableaux (5.6), (5.7), (5.8) et (5.9), on a présenté les résultats pour le cas de choc fort avec les mêmes valeurs de $M_1=4.00$ et $\theta_C=20.0$ degré.

En réalité on s'intéresse beaucoup au choc faible qu'au choc fort vu son apparition dominante dans la pratique.

Tableau 5.1 : Effet de T_0 sur les paramètres isentropiques juste avant le choc pour $M_1=4.00$ degré cas de l'air.

	<i>GP</i>	1000 K	2000 K	3000 K
T_1 / T_0	0.2371	0.2480	0.2693	0.2847
ρ_1 / ρ_{01}	0.0278	0.0251	0.0197	0.0172
P_1 / P_{01}	0.0066	0.0062	0.0053	0.0049

Tableau 5.2 : Effet de T_0 sur les paramètres à travers un choc faible lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré cas de l'air.

	<i>GP</i>	1000 K	2000 K	3000 K
θ_S (deg)	26.492	26.412	26.208	26.104
M_2	2.967	2.985	3.057	3.100

ψ (deg)	14.426	14.484	14.620	14.690
T_2 / T_1	1.522	1.510	1.464	1.423
ρ_2 / ρ_1	2.331	2.351	2.400	2.427
P_2 / P_1	3.549	3.550	3.515	3.455
P_{02} / P_{01}	0.819	0.832	0.840	0.834
$\Delta S_{21} / R$	0.198	0.183	0.173	0.180

Tableau 5.3 : Effet de T_0 sur les paramètres isentropiques juste après le choc faible lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air.

	<i>GP</i>	1000 K	2000 K	3000 K
T_2 / T_0	0.361	0.375	0.395	0.406
ρ_2 / ρ_{02}	0.079	0.070	0.056	0.050
P_2 / P_{02}	0.028	0.026	0.022	0.020

Tableau 5.4 : Effet de T_0 sur les paramètres sur le cône pour un choc faible lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air.

	<i>GP</i>	1000 K	2000 K	3000 K
M_C	2.886	2.906	2.985	3.032
T_C / T_0	0.373	0.388	0.408	0.417
ρ_C / ρ_{02}	0.086	0.077	0.061	0.054
P_C / P_{02}	0.032	0.029	0.024	0.022
C	2.006	2.013	2.031	2.040
D	0.0110	0.0103	0.0087	0.0079

Tableau 5.5 : Effet de T_0 sur l'écart entre les modèles *GP* et *HT* pour tous les paramètres d'un choc conique faible lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air.

$\varepsilon(\%)$	1000 K	2000 K	3000 K
$\varepsilon(\theta_S)$	0.30	1.08	1.48
$\varepsilon(\psi)$	0.40	1.32	1.80
$\varepsilon(M_2)$	0.60	2.94	4.29
$\varepsilon(T_2 / T_1)$	0.79	3.96	6.95
$\varepsilon(\rho_2 / \rho_1)$	0.85	2.87	3.95
$\varepsilon(P_2 / P_1)$	0.02	0.96	2.72
$\varepsilon(P_{02}/P_{01})$	1.56	2.50	1.80
$\varepsilon(\Delta S_{21} / R)$	8.19	14.45	10.00
$\varepsilon(T_2 / T_0)$	3.73	8.60	11.08
$\varepsilon(\rho_2 / \rho_{02})$	12.85	41.07	58.00
$\varepsilon(P_2 / P_{02})$	7.69	27.27	40.00
$\varepsilon(M_C)$	0.68	3.31	4.81
$\varepsilon(T_C / T_0)$	3.86	8.57	10.55

$\varepsilon(\rho_C / \rho_{02})$	11.68	40.98	59.25
$\varepsilon(P_C / P_{02})$	10.34	33.33	45.45
$\varepsilon(C)$	0.34	1.23	1.66
$\varepsilon(D)$	6.79	26.43	39.24

Tableau 5.6 : Effet de T_0 sur les paramètres d'un choc fort lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air.

	<i>GP</i>	1000 K	2000 K	3000 K
θ_S (deg)	88.443	88.541	88.679	88.737
M_2	0.438	0.434	0.419	0.410
ψ (deg)	5.501	5.509	5.530	5.547
T_2 / T_1	4.058	3.905	3.617	3.429
ρ_2 / ρ_1	4.556	4.799	5.211	5.418
P_2 / P_1	18.496	18.745	18.855	18.581
P_{02} / P_{01}	0.139	0.132	0.112	0.101
$\Delta S_{21} / R$	1.968	2.022	2.187	2.284

Tableau 5.7 : Effet de T_0 sur les paramètres isentropiques juste après le choc fort lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air.

	<i>GP</i>	1000 K	2000 K	3000 K
T_2 / T_0	0.962	0.969	0.974	0.976
ρ_2 / ρ_{02}	0.909	0.911	0.916	0.919
P_2 / P_{02}	0.875	0.882	0.893	0.898

Tableau 5.8 : Effet de T_0 sur les paramètres sur le cône pour un choc fort lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air.

	<i>GP</i>	1000 K	2000 K	3000 K
M_C	0.377	0.374	0.361	0.354
T_C / T_0	0.972	0.976	0.980	0.982
ρ_C / ρ_{02}	0.932	0.933	0.937	0.939
P_C / P_{02}	0.906	0.911	0.919	0.923
C	0.027	0.025	0.023	0.022
D	0.0526	0.0501	0.0429	0.0391

Tableau 5.9 : Effet de T_0 sur l'écart entre les modèles *GP* et *HT* pour tous les paramètres d'un choc conique fort lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air.

$\varepsilon(\%)$	1000 K	2000 K	3000 K
$\varepsilon(\theta_S)$	0.11	0.26	0.33
$\varepsilon(\psi)$	0.14	0.52	0.83

$\varepsilon(M_2)$	0.92	4.53	6.82
$\varepsilon(T_2 / T_1)$	3.91	12.19	18.34
$\varepsilon(\rho_2 / \rho_1)$	5.06	12.56	15.90
$\varepsilon(P_2 / P_1)$	1.32	1.90	0.45
$\varepsilon(P_{02}/P_{01})$	5.30	24.10	37.62
$\varepsilon(\Delta S_{21} / R)$	2.67	10.01	13.83
$\varepsilon(T_2 / T_0)$	0.72	1.23	1.43
$\varepsilon(\rho_2 / \rho_{02})$	0.22	0.76	1.08
$\varepsilon(P_2 / P_{02})$	0.79	2.01	2.56
$\varepsilon(M_C)$	0.80	4.43	6.49
$\varepsilon(T_C / T_0)$	0.40	0.81	1.01
$\varepsilon(\rho_C / \rho_{02})$	0.32	0.53	0.74
$\varepsilon(P_C / P_{02})$	0.54	1.41	1.84
$\varepsilon(C)$	8.00	17.39	22.72
$\varepsilon(D)$	5.00	22.61	34.52

5.2. Variation des paramètres pour des cas remarquables

Dans les tableaux (5.10), (5.11), (5.12), (5.13) et (5.14) on s'intéresse aux résultats les plus importants en pratique pour l'exemple proposé $M_1=4.00$ et $\theta_C=20.0$ degré. En premier temps, selon le tableau (5.10), On prend l'effet de T_0 sur la déviation maximale $\theta_{C_{\max}}$. C'est-à-dire que doit avoir le cône comme déviation limite lorsque $M_1=4.00$ pour déterminer le point limite entre le choc attaché et le choc détaché. D'après le nombre de Mach M_2 , cette déviation correspond à un choc fort.

Il est parfois très intéressant de trouver la déviation de cône donnant respectivement $M_2=1.00$ et $M_C=1.00$ pour M_1 donné et déduire tous les paramètres correspondant à ces deux cas. D'où l'intérêt des résultats présentés dans les tableaux (5.11) et (5.12). Les résultats présentés sur les tableaux (5.10), (5.11) et (5.12) sont présentés sous forme de graphes dans les figures (5.9) à (5.25) en fonction de θ_C pour différentes valeurs de M_1 . Lorsque $T_0=2000$ K. Par exemple la courbe correspondant à $M_2=1.00$ donne la possibilité de voir la disparition de choc fort, c'est-à-dire elle donne la limite entre le choc fort et le choc faible. La courbe correspondant à $M_C=1.00$ montre qu'il n'existe pas un choc fort sur le cône. Sur le tableau (5.13) on a présenté l'effet de T_0 sur la valeur minimale $M_{1_{\min}}$ de nombre de Mach amont M_1 lorsque la déviation de cône θ_C est donnée. Afin d'avoir une limite entre le choc attaché et un choc détaché. Dans ce cas si

$M_1 \geq M_{1\min}$ on aura une onde de choc attaché. Pour l'application faite dans le tableau (5.13) pour $\theta_C=20.0$ degré. On a présenté à titre information les paramètres de l'écoulement correspondant à $\theta_C=20.0$ degré et $M_1=M_{1\min}$.

Sur le tableau (5.14), les erreurs entre le modèle GP et HT sont présentés en fonction de T_0 respectivement pour $\theta_{C\max}$ et $M_{1\min}$.

Tableau 5.10 : Effet de T_0 sur les paramètres d'un choc correspondant à la déviation maximale $\theta_{C\max}$ lorsque $M_1=4.00$ pour l'air toujours.

	GP	1000 K	2000 K	3000 K
$\theta_{C\max}$ (deg)	52.734	53.622	55.059	55.692
θ_S (deg)	72.315	72.748	73.353	73.645
M_2	0.765	0.769	0.766	0.762
ψ (deg)	37.142	38.208	40.046	40.853
T_2 / T_1	3.771	3.651	3.399	3.234
ρ_2 / ρ_1	4.450	4.678	5.090	5.289
P_2 / P_1	16.786	17.085	17.305	17.106
P_{02} / P_{01}	0.163	0.155	0.132	0.120
$\Delta S_{21} / R$	1.809	1.860	2.020	2.114
T_2 / T_0	0.894	0.908	0.919	0.923
ρ_2 / ρ_{02}	0.758	0.753	0.754	0.756
P_2 / P_{02}	0.678	0.684	0.693	0.698
M_C	0.696	0.703	0.704	0.702
T_C / T_0	0.911	0.922	0.930	0.933
ρ_C / ρ_{02}	0.793	0.788	0.787	0.787
P_C / P_{02}	0.723	0.727	0.732	0.735
C	0.318	0.310	0.298	0.293
D	0.642	0.654	0.625	0.598

Tableau 5.11 : Effet de T_0 sur les paramètres d'un choc correspondant $M_2=1.00$ lorsque $M_1=4.00$ pour l'air.

	GP	1000 K	2000 K	3000 K
θ_C (deg)	50.938	51.915	53.397	54.015
θ_S (deg)	65.225	65.976	66.824	67.152
M_2	1.000	1.000	1.000	1.000
ψ (deg)	38.687	39.763	41.637	42.443
T_2 / T_1	3.510	3.424	3.205	3.056
ρ_2 / ρ_1	4.338	4.556	4.966	5.158
P_2 / P_1	15.230	15.606	15.921	15.767

P_{02} / P_{01}	0.190	0.181	0.155	0.141
$\Delta S_{21} / R$	1.656	1.708	1.862	1.953
T_2 / T_0	0.832	0.853	0.868	0.874
ρ_2 / ρ_{02}	0.634	0.629	0.627	0.626
P_2 / P_{02}	0.527	0.536	0.544	0.547
M_C	0.942	0.944	0.949	0.951
T_C / T_0	0.848	0.867	0.880	0.884
ρ_C / ρ_{02}	0.664	0.659	0.654	0.653
P_C / P_{02}	0.564	0.571	0.576	0.578
C	0.461	0.445	0.428	0.421
D	0.513	0.529	0.510	0.488

Tableau 5.12 : Effet de T_0 sur les paramètres d'un choc correspondant $M_C=1.00$ lorsque $M_1=4.00$ pour l'air.

	<i>GP</i>	1000 K	2000 K	3000 K
θ_c (deg)	50.196	51.224	52.789	53.435
θ_s (deg)	63.663	64.514	65.540	65.939
M_2	1.056	1.053	1.049	1.047
ψ (deg)	38.538	39.637	41.536	42.345
T_2 / T_1	3.443	3.368	3.161	3.018
ρ_2 / ρ_1	4.307	4.524	4.936	5.127
P_2 / P_1	14.834	15.237	15.606	15.478
P_{02} / P_{01}	0.198	0.188	0.161	0.146
$\Delta S_{21} / R$	1.615	1.669	1.825	1.917
T_2 / T_0	0.816	0.839	0.857	0.863
ρ_2 / ρ_{02}	0.604	0.600	0.600	0.600
P_2 / P_{02}	0.493	0.504	0.514	0.518
M_C	1.000	1.000	1.000	1.000
T_C / T_0	0.832	0.853	0.868	0.874
ρ_C / ρ_{02}	0.634	0.629	0.627	0.626
P_C / P_{02}	0.527	0.536	0.544	0.547
C	0.495	0.476	0.454	0.446
D	0.474	0.492	0.478	0.459

Tableau 5.13 : Effet de T_0 sur les paramètres d'un choc correspondant au nombre de Mach amont minimal lorsque $\theta_c=20$ degré pour l'air.

	<i>GP</i>	1000 K	2000 K	3000 K
$M_{1\min}$	1.211	1.204	1.200	1.199
θ_c (deg)	20.000	20.000	20.000	20.000
θ_s (deg)	71.462	71.891	71.792	72.028

M_2	0.950	0.949	0.952	0.950
ψ (deg)	4.233	4.192	4.173	4.168
T_2 / T_1	1.095	1.083	1.071	1.068
ρ_2 / ρ_1	1.251	1.254	1.251	1.254
P_2 / P_1	1.371	1.359	1.341	1.340
P_{02} / P_{01}	0.996	0.996	0.997	0.997
$\Delta S_{21} / R$	0.003	0.003	0.002	0.002
T_2 / T_0	0.846	0.866	0.879	0.885
ρ_2 / ρ_{02}	0.660	0.656	0.653	0.653
P_2 / P_{02}	0.558	0.568	0.574	0.578
M_C	0.797	0.798	0.802	0.800
T_C / T_0	0.886	0.902	0.911	0.915
ρ_C / ρ_{02}	0.741	0.738	0.735	0.735
P_C / P_{02}	0.657	0.665	0.670	0.673
C	0.335	0.327	0.328	0.324
D	0.272	0.276	0.278	0.279

Tableau 5.14 : Effet de T_0 sur l'écart entre les modèles GP et HT pour des résultats particuliers lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour l'air.

$\varepsilon(\%)$	1000 K	2000 K	3000 K
$\varepsilon(\theta_{C_{\max}}(M_1))$	1.65	4.22	5.31
$\varepsilon(M_{1_{\min}}(\theta_c))$	0.66	0.91	1.00

5.3. Variation des paramètres en fonction de θ

Dans cette troisième partie, on a représenté respectivement dans les figures (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6), (5.7) et (5.8), l'effet de T_0 y compris le cas GP sur la variation des paramètres physiques de l'écoulement isentropique (M , T/T_0 , ρ/ρ_{02} et P/P_{02}) dans la région entre la déviation de choc θ_S et la déviation de cône θ_C en fonction de l'angle θ pour le choc faible et le choc fort lorsque $M_1=4.00$ et $\theta_C=20.0$ degré. Les valeurs de θ_S peuvent être trouvées dans le tableau (5.2) pour les figures (5.1), (5.2), (5.3) et (5.4) de choc faible et dans le tableau (5.6) pour les figures (5.5), (5.6), (5.7) et (5.8) de choc fort. Ces figures démontrent que les paramètres de l'écoulement ne restent plus constants dans cette région pour le cône, contrairement au dièdre, où les paramètres après le choc restent constants. La variation des paramètres avec θ est valable quel que soit M_1 , θ_C et T_0 . La même façon de variation des paramètres est remarquée entre le choc faible et fort.

Concernant le programme développé, et pour faire le traçage des figures (5.1) à (5.8), on a pas déclaré dans le programme des vecteurs pour le stockage des valeurs de M_i , T_i/T_0 , ρ_i/ρ_{02} et P_i/P_{02} à chaque position θ_i de l'écoulement. On a utilisé des fichiers pour le stockage et le traçage.

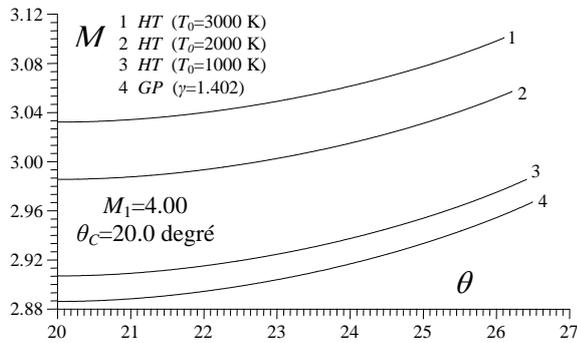


Figure 5.1 : Variation à HT de M le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_c=20$ degré pour le choc faible.

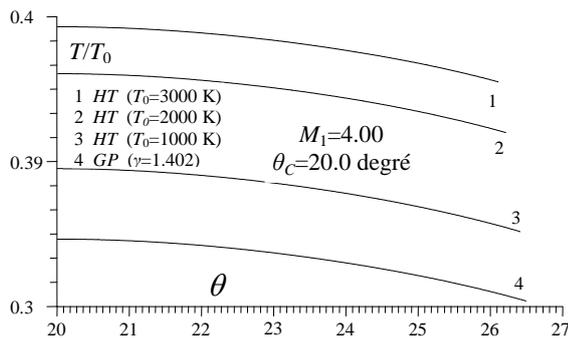


Figure 5.2 : Variation à HT de T/T_0 le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_c=20$ degré pour le choc faible.

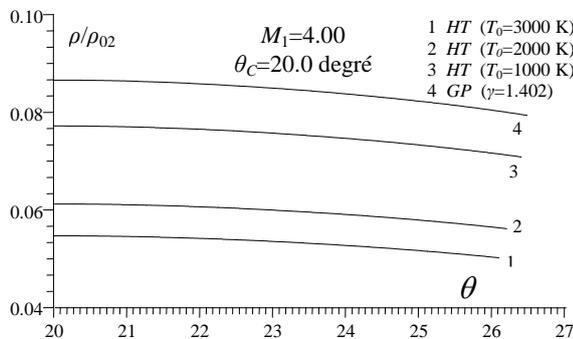


Figure 5.3 : Variation à HT de ρ/ρ_{02} le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_c=20$ degré pour le choc faible.

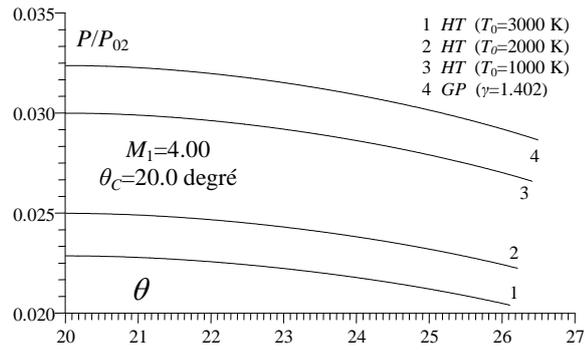


Figure 5.4 : Variation à HT de P/P_{02} le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_c=20$ degré pour le choc faible.

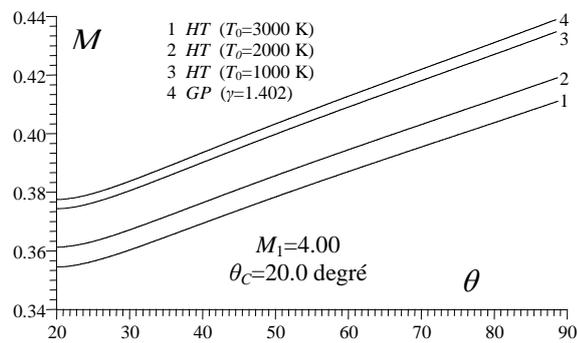


Figure 5.5 : Variation à HT de M le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_c=20$ degré pour le choc fort.

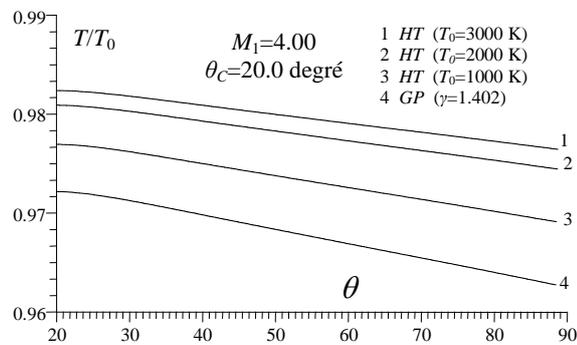


Figure 5.6 : Variation à HT de T/T_0 le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_c=20$ degré cas choc fort.

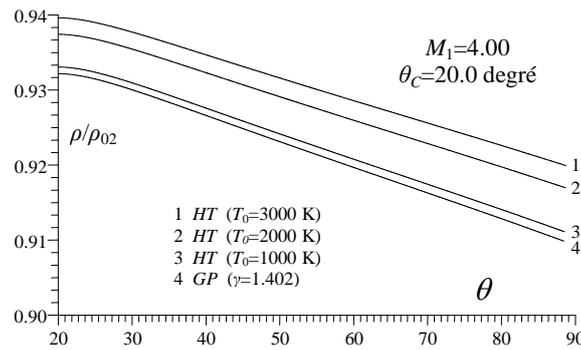


Figure 5.7 : Variation à HT de ρ/ρ_{02} le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc fort.

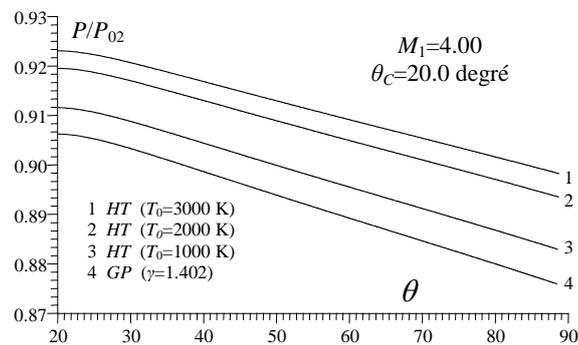


Figure 5.8 : Variation à HT de P/P_{02} le long de θ pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc fort.

5.4. Variation des paramètres en fonction de θ_C et de M_1 lorsque T_0 est fixe.

Les figures (5.9), (5.10), (5.11) (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), (5.16), (5.17), (5.18), (5.19), (5.20), (5.21), (5.22), (5.23), (5.24) et (5.25) représentent respectivement la variation des paramètres physiques à travers le choc conique θ_S , M_2 , ψ , T_2/T_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} , $\Delta S_{21}/R$, isentropique juste après le choc T_2/T_0 , ρ_2/ρ_{02} , P_2/P_{02} , isentropique sur la surface de cône M_C , T_d/T_0 , ρ_d/ρ_{02} , P_d/P_{02} ainsi que C et D en fonction de la déviation de cône θ_C pour six valeurs de nombre de Mach amont $M_1=1.30$, 1.50, 2.00, 3.00, 4.00 et 5.00 lorsque $T_0=2000$ K. Dans chaque figure, on a ajouté trois courbes correspondantes à $\theta_{C_{\max}}$ (pour limiter le choc attaché et détaché), $M_2=1.00$ (pour limiter le choc faible et le choc fort) et $M_C=1.00$. Pour chaque M_1 , il existe un $\theta_{C_{\max}}$.

La figure (5.9) représente la variation de la déviation de l'angle de choc avec la déviation de cône. Dans cette figure on a représenté les résultats de choc faible et

de choc fort sur le même graphe vu leur intérêt pratique. Tandis que pour les autres figures de (5.10) à (5.25), on a représenté uniquement des résultats de choc faible.

On remarque que entre les figures (5.10), (5.17), (5.18), (5.19), qui représentent les paramètres physiques isentropiques justes après le choc et les figures (5.20), (5.21), (5.22), (5.23) représentant les paramètres isentropiques sur la surface de cône, qu'il y a dégradation de nombre de Mach à travers la rotation θ . C'est-à-dire on a $M_C \leq M_2$, $T_2/T_0 \leq T_C/T_0$, $\rho_2/\rho_{02} \leq \rho_C/\rho_{02}$ et $P_2/P_{02} \leq P_C/P_{02}$. C'est possible qu'on trouve $M_C < 1.00$ et $M_2 > 1.00$ pour le choc faible. La figure (5.15) présente que la pression totale à travers le choc diminue avec l'augmentation de θ_C , donnant une augmentation de l'entropie selon la figure (5.16), conformément au phénomène physique de choc.

L'intersection de chaque courbe de M_1 avec un axe vertical donne deux possibilités de chocs correspondants à $\theta_C = 0.0$ degrés. Dans ce cas le cône n'existe pas. La première valeur correspond à $\theta_S = 90.0$ donc un choc normal type fort. Les résultats pour ce choc à *HT* peuvent être trouvés dans les références [15, 17]. Deuxième valeur limite inférieure correspond à l'angle de Mach μ donné par la relation (13). Les paramètres correspondant sont dans figures (5.10) à (5.25) pour les résultats isentropiques avant le choc (M_1 , T_1 , ρ_1 et P_1 , P_{01}). Dans ce cas $M_2 = M_1$, $\psi = 0.0$ (pas de dièdre), $T_2/T_1 = 1.0$, $\rho_2/\rho_1 = 1.0$, $P_2/P_1 = 1.0$, $P_{02}/P_{01} = 1.0$, $\Delta S_{21}/R = 0$, $T_2/T_0 = T_1/T_0$, $\rho_2/\rho_{02} = \rho_1/\rho_{01}$, $P_2/P_{02} = P_1/P_{01}$, $M_C = M_1$, $T_C/T_0 = T_1/T_0$, $\rho_C/\rho_{02} = \rho_1/\rho_{01}$, $P_C/P_{02} = P_1/P_{01}$, $D = 0.0$ (pas de trainée). Pour la valeur de C , d'après la relation (3.53), elle devient égale pour cette deuxième limite à la valeur suivante :

$$C = \sqrt{M_1^2 - 1} \quad (5.1)$$

On remarque cette dernière limite ne dépend pas de T_0 .

Les commentaires et les variations restent les mêmes pour n'importe quelle valeur de T_0 y compris le cas GP.

Le tableau (5.15) représente la valeur maximale de l'angle de déviation de cône $\theta_{C_{\max}}$ pour les cinq valeurs de M_1 sur la figure (5.9) lorsque $T_0 = 2000$ K. Ces valeurs représentent la limite entre le choc attaché et le choc détaché.

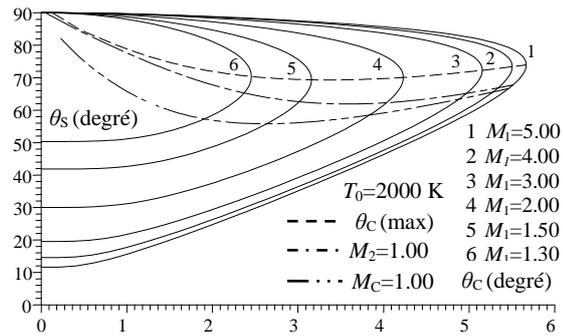


Figure 5.9 : Variation de θ_S en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

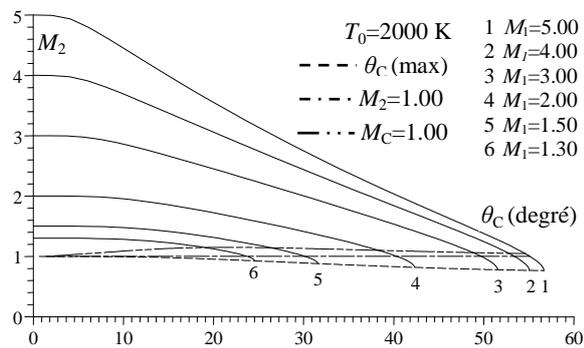


Figure 5.10 : Variation de M_2 à travers le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

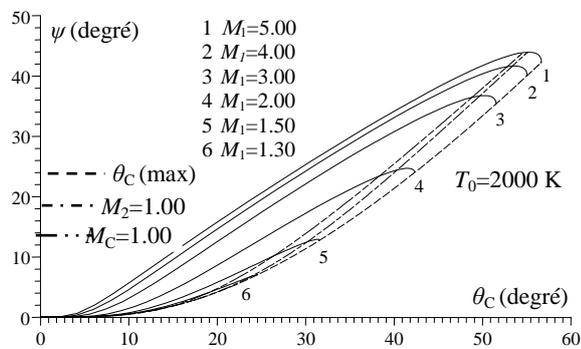


Figure 5.11 : Variation de ψ après le choc faible en fonction de θ_C pour des valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

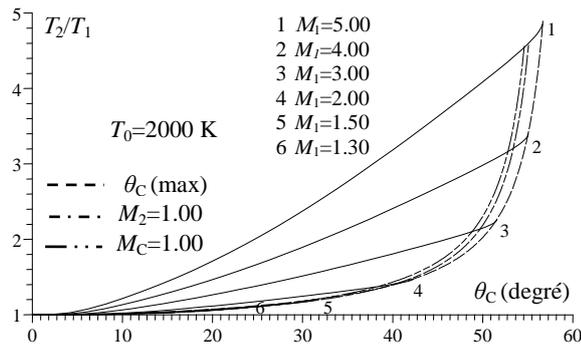


Figure 5.12 : Variation de T_2/T_1 à travers le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

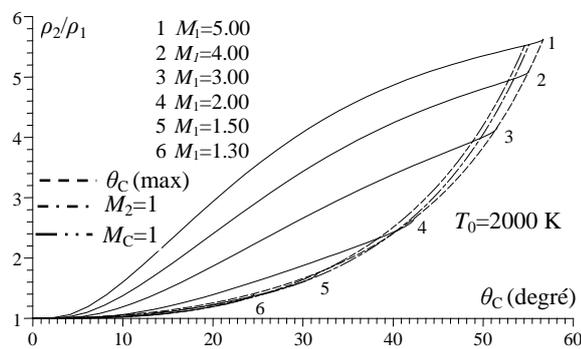


Figure 5.13 : Variation de ρ_2/ρ_1 à travers le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

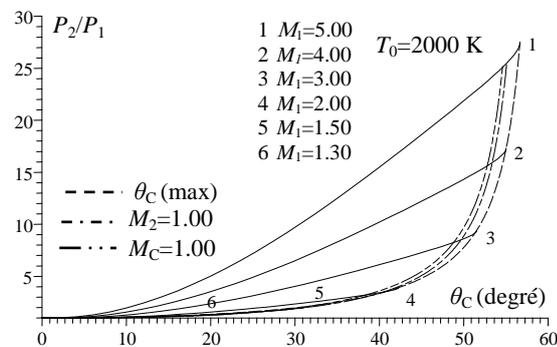


Figure 5.14 : Variation de P_2/P_1 à travers le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

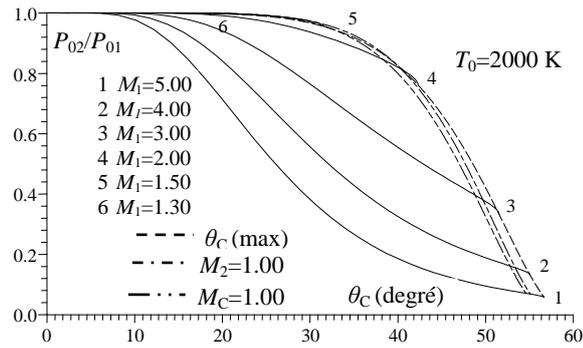


Figure 5.15 : Variation de P_{02}/P_{01} à travers le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

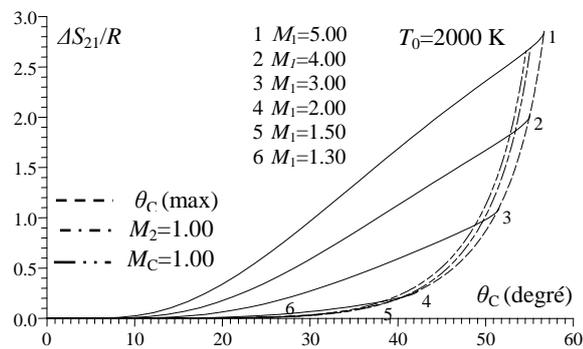


Figure 5.16 : Variation de $\Delta S_{21}/R$ à travers le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

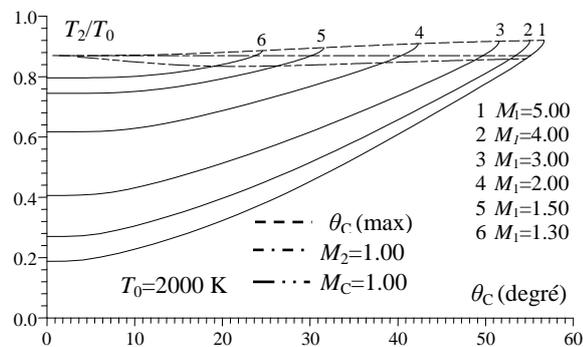


Figure 5.17 : Variation de T_2/T_0 juste après le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

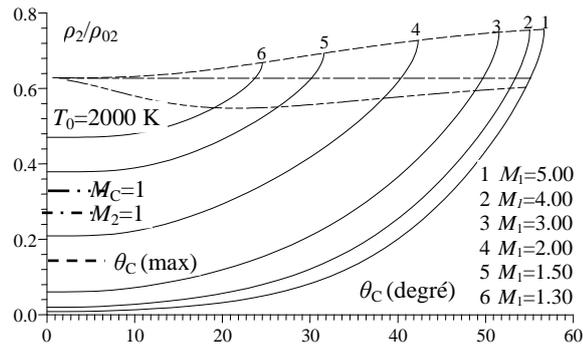


Figure 5.18 : Variation de ρ_2/ρ_{02} juste après le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

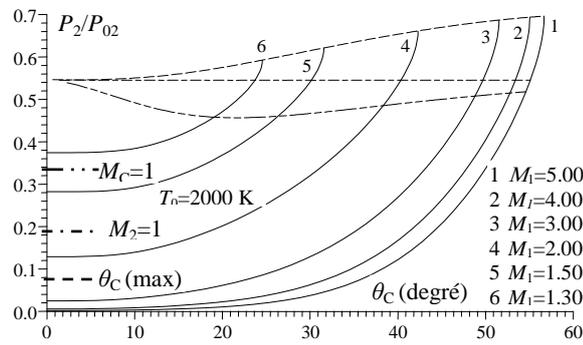


Figure 5.19 : Variation de P_2/P_{02} juste après le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

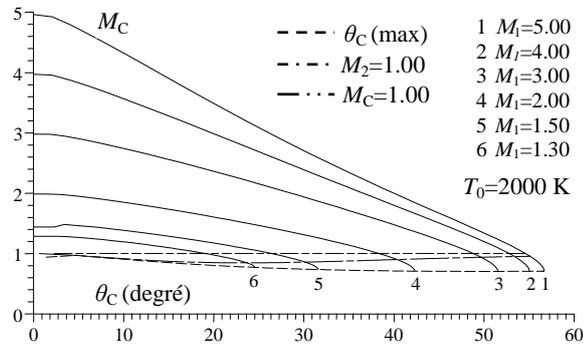


Figure 5.20 : Variation de M_C sur la surface de cône pour le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

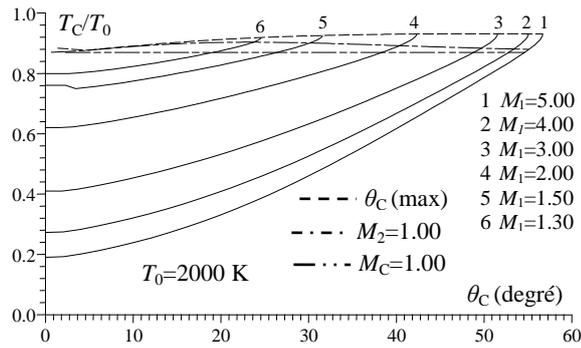


Figure 5.21 : Variation de T_C/T_0 sur la surface de cône pour le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

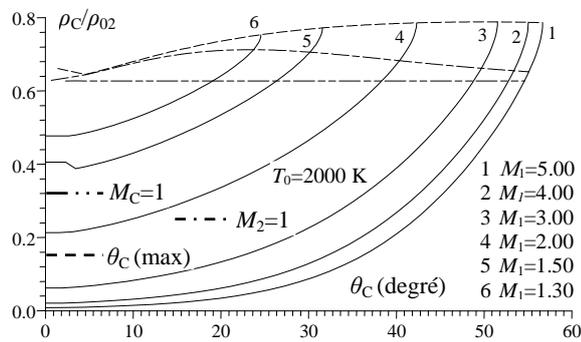


Figure 5.22 : Variation de ρ_C/ρ_{02} sur la surface de cône pour le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

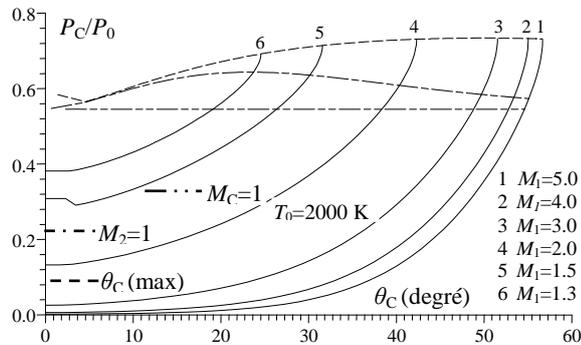


Figure 5.23 : Variation de P_C/P_{02} sur la surface de cône pour le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

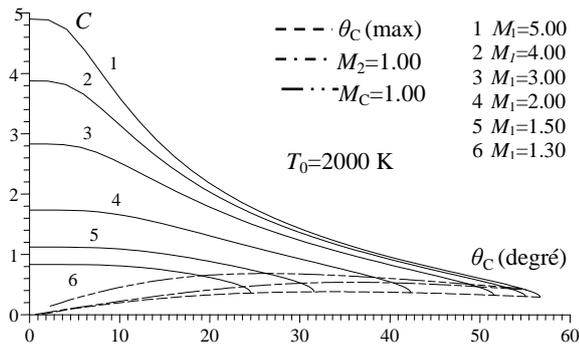


Figure 5.24 : Variation de C de la prise d'air pour le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

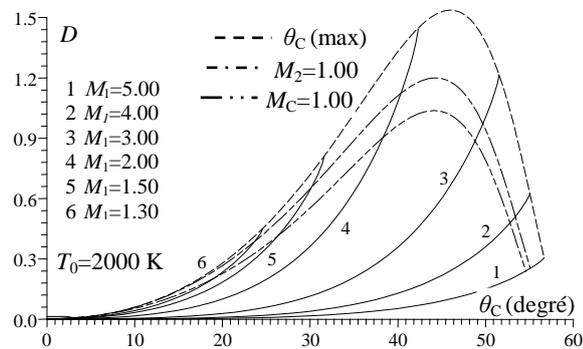


Figure 5.25 : Variation de la traînée D de cône pour le choc faible en fonction de θ_C pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

Tableau 5.15 : Valeurs de $\theta_{C_{\max}}$ à HT pour quelques valeurs de M_1 lorsque $T_0=2000$ K.

T_0 (K)	M_1					
	1.30	1.50	2.00	3.00	4.00	5.00
2000	24.551	31.560	42.300	51.525	55.059	56.691

5.5. Variation à HT des paramètres en fonction de θ_C pour M_1 fixé.

Les figures (5.26) à (5.42) représentent l'effet de T_0 y compris le cas GP ($\gamma=1.402$) respectivement sur la variation de tous les paramètres de l'écoulement θ_S , M_2 , ψ , T_2/T_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} , $\Delta S_{21}/R$, T_2/T_0 , ρ_2/ρ_{02} , P_2/P_{02} , M_C , T_C/T_0 , ρ_C/ρ_{02} , P_C/P_{02} , C et D en fonction de l'angle de déviation de cône lorsque le nombre de Mach $M_1=1.50$, 2.00 et 4.00 .

Dans la figure (5.26) on a présenté les résultats pour les deux chocs faible et fort. Tandis que les autres figures (5.27) à (5.42), on a limité la présentation que pour le choc faible car on s'intéresse pratiquement qu'au choc faible.

On remarque clairement l'effet de T_0 sur tous les paramètres de l'écoulement et l'écart entre les modèles GP et HT qui augmente encore si M_1 et θ_C augmentent graduellement. Pour $\theta_C < 20.0$ degré environ (avec une précision), on ne peut pas parler sur l'effet de M_1 ou de T_0 . Autrement dit, on peut appliquer le modèle GP pour obtenir des résultats avec une bonne précision. Tandis que si $\theta_C > 20.0$ degré, le modèle GP commence à tomber par défaut au fur et à mesure, où des corrections à ce modèle sont nécessaires ce qui montre l'intérêt de l'application de modèle HT.

La figure (5.32) présente que la pression totale à travers le choc diminue avec l'augmentation de θ_C et M_1 donnant une augmentation de l'entropie selon la figure (5.33), conformément au phénomène physique de choc.

La même remarque présentée maintenant entre les figures (5.27), (5.34), (5.35), (5.36) représentant les paramètres physique isentropique juste après le choc et les figures (5.37), (5.38), (5.39), (5.40) représentant les paramètres isentropiques sur la surface de cône, on remarque qu'il y a dégradation de nombre de Mach à travers la rotation θ , c'est-à-dire $M_C \leq M_2$, $T_2/T_0 \leq T_C/T_0$, $\rho_2/\rho_{02} \leq \rho_C/\rho_{02}$ et $P_2/P_{02} \leq P_C/P_{02}$. C'est possible qu'on trouve $M_C < 1.00$ et $M_2 > 1.00$ pour le choc faible.

Le tableau (5.16) représente l'effet de T_0 et M_1 sur la valeur maximale de l'angle de déviation de cône $\theta_{C_{\max}}$ pour les 12 courbes de chaque figure (5.26) à (5.42). Ces valeurs représentent la limite entre le choc attaché et le choc détaché. Cette limite donne la possibilité de trouver des solutions de choc attaché dans la limite donnée par le modèle GP. Alors que cette limite donne une solution attachée pour HT. Maintenant si T_0 prendre une valeur assez élevée. L'écart entre le modèle GP et HT augmente si M_1 augmente aussi pour même T_0 et θ_C .

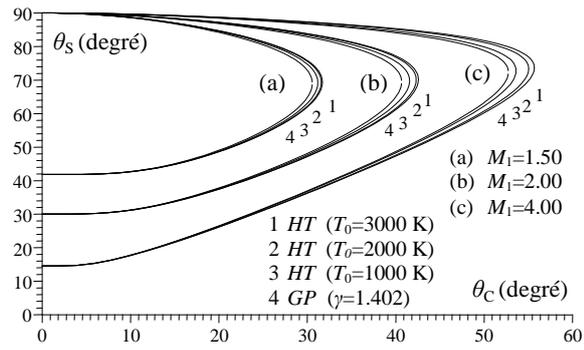


Figure 5.26 : Variation à HT de θ_s en fonction de θ_c lorsque $M_1=1.50, 2.00$ et 4.00 .

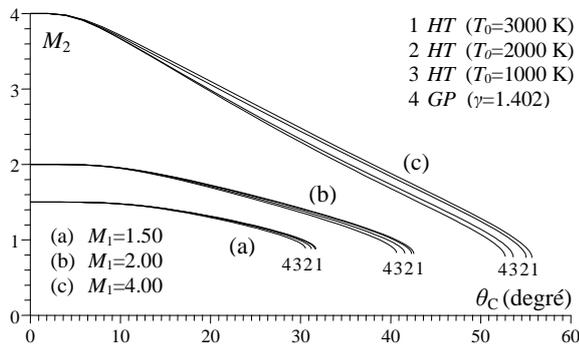


Figure 5.27 : Variation à HT de M_2 en fonction de θ_c lorsque $M_1=1.50, 2.00$ et 4.00 pour le choc faible.

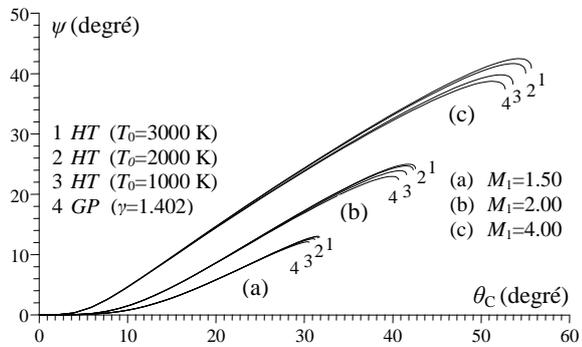


Figure 5.28 : Variation à HT de ψ en fonction de θ_c lorsque $M_1=1.50, 2.00$ et 4.00 pour le choc faible.

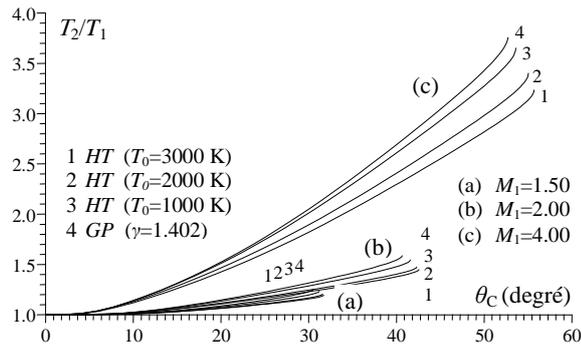


Figure 5.29 : Variation à HT de T_2/T_1 en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50, 2.00$ et 4.00 pour le choc faible.

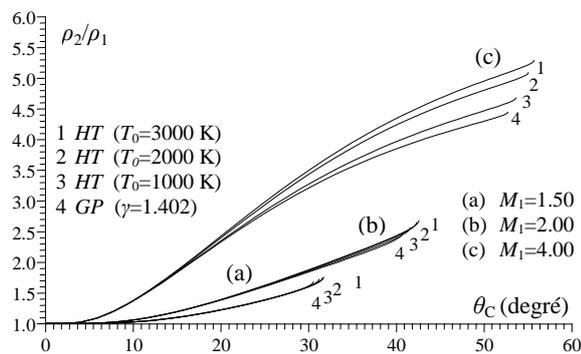


Figure 5.30 : Variation à HT de ρ_2/ρ_1 en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50, 2.00$ et 4.00 pour le choc faible.

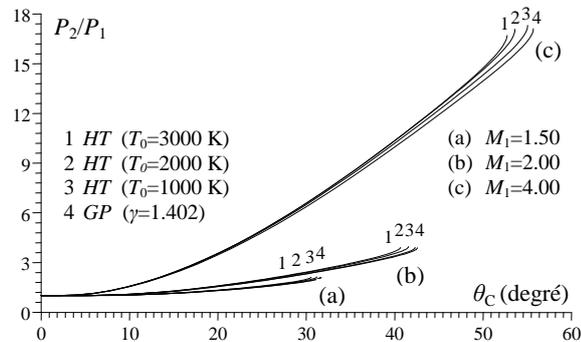


Figure 5.31 : Variation à HT de P_2/P_1 en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50, 2.00$ et 4.00 pour le choc faible.

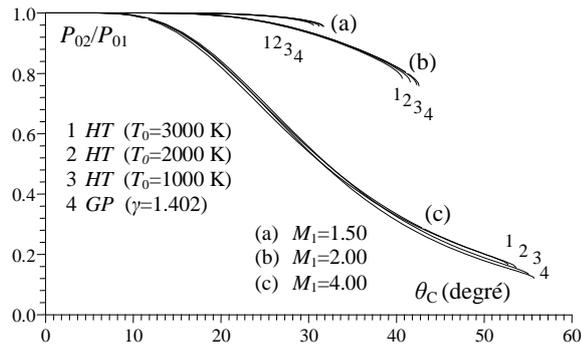


Figure 5.32 : Variation à HT de P_{02}/P_{01} en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50$, 2.00 et 4.00 pour le choc faible.

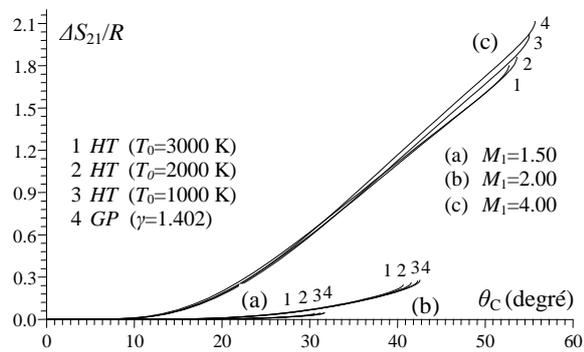


Figure 5.33 : Variation à HT de $\Delta S_{21}/R$ en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50$, 2.00 et 4.00 pour le choc faible.

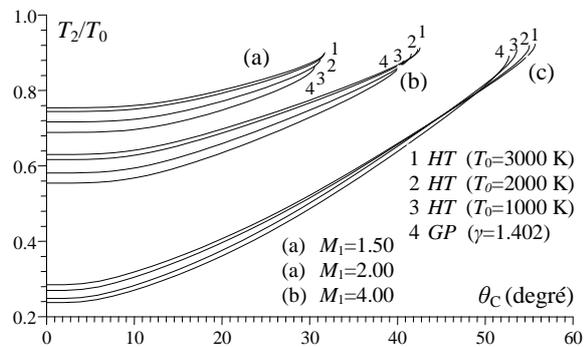


Figure 5.34 : Variation à HT de T_2/T_0 en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50$, 2.00 et 4.00 pour le choc faible.

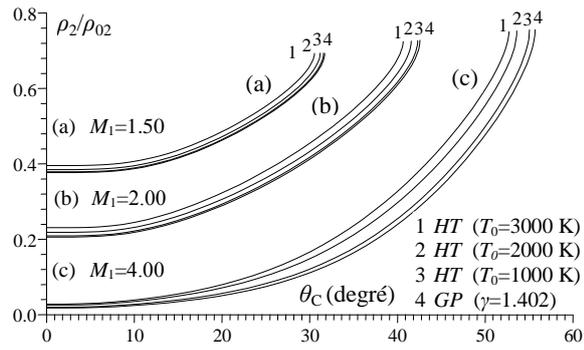


Figure 5.35 : Variation à *HT* de ρ_2/ρ_{02} en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50, 2.00$ et 4.00 pour le choc faible.

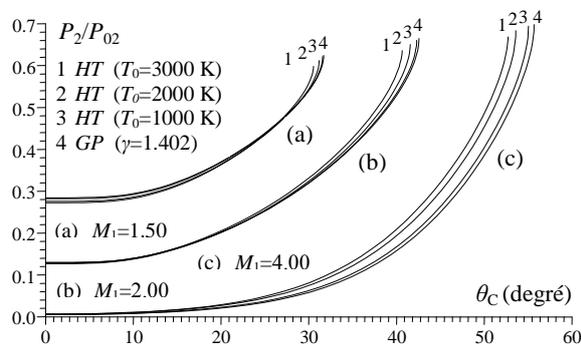


Figure 5.36 : Variation à *HT* de P_2/P_{02} en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50, 2.00$ et 4.00 pour le choc faible.

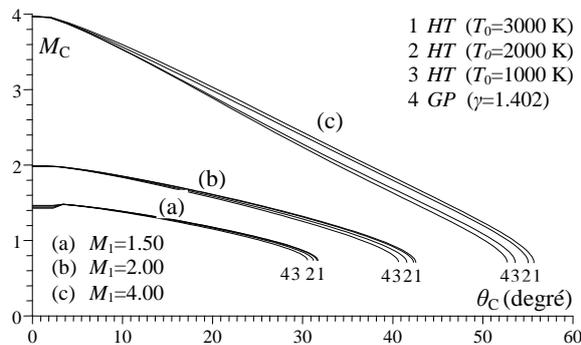


Figure 5.37 : Variation à *HT* de M_C en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50, 2.00$ et 4.00 pour le choc faible.

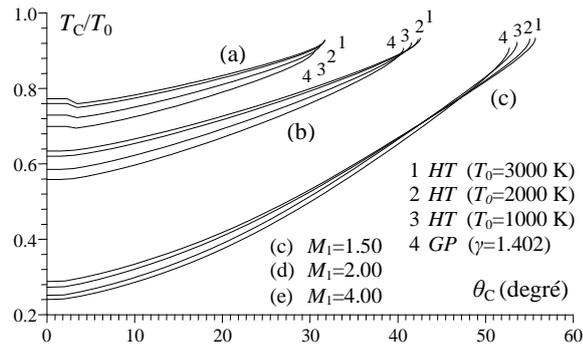


Figure 5.38 : Variation à HT de T_C/T_0 en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50$, 2.00 et 4.00 pour le choc faible.

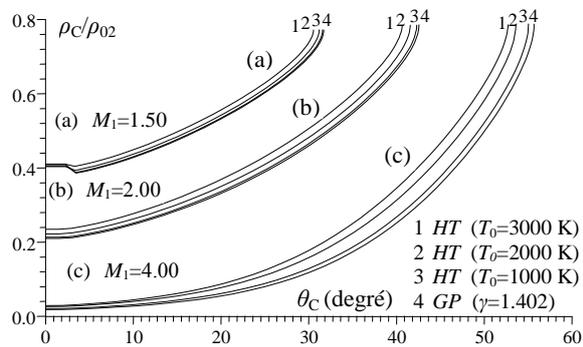


Figure 5.39 : Variation à HT de ρ_C/ρ_{02} en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50$, 2.00 et 4.00 pour le choc faible.

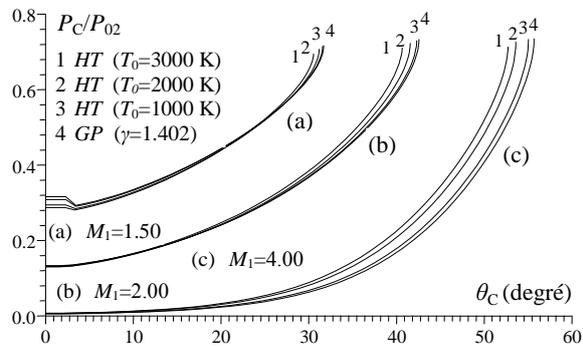


Figure 5.40 : Variation à HT de P_C/P_{02} en fonction de θ_C lorsque $M_1=1.50$, 2.00 et 4.00 pour le choc faible.

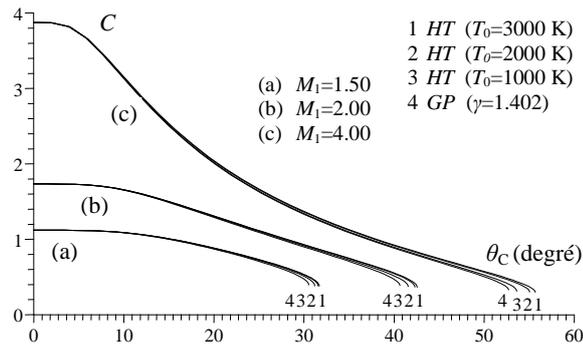


Figure 5.41 : Variation à HT de C en fonction de θ_C lorsque $M_1 = 1.50, 2.00$ et 4.00 pour le choc faible.

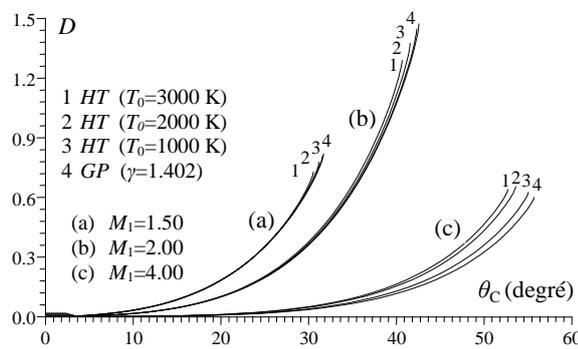


Figure 5.42 : Variation à HT de D en fonction de θ_C lorsque $M_1 = 1.50, 2.00$ et 4.00 pour le choc faible.

Tableau 5.16 : Valeurs à HT de $\theta_{C_{max}}$ pour quelques valeurs de M_1

M_1	GP	1000 K	2000 K	3000 K
1.50	30.542	31.172	31.560	31.689
2.00	40.657	41.559	42.300	42.556
4.00	52.734	53.622	55.059	55.692

5.6. Variation à HT des paramètres en fonction de M_1 lorsque θ_C est fixé.

Les figures (5.43) à (5.59) représentent l'effet de T_0 y compris le cas GP ($\gamma = 1.402$) respectivement sur la variation de tous les paramètres de l'écoulement $\theta_s, M_2, \psi, T_2/T_1, \rho_2/\rho_1, P_2/P_1, P_{02}/P_{01}, \Delta S_{21}/R, T_2/T_0, \rho_2/\rho_{02}, P_2/P_{02}, M_C, T_C/T_0, \rho_C/\rho_{02}, P_C/P_{02}, C$ et D en fonction de nombre de Mach amont M_1 . Lorsque l'angle de déviation de cône égale respectivement à $\theta_C = 20$ degré et 40 degré. Dans la figure (5.43) on a présenté les résultats pour le choc faible et fort. Tandis que les autres figures (5.44) à (5.59) on a limité la présentation pour le choc faible. Vu la mauvaise présentation au même temps de choc fort. En plus on s'intéresse

pratiquement au choc faible en réalité. On remarque clairement l'effet de T_0 sur tous les paramètres et l'écart entre les modèles GP et *HT* qui augmente encore si M_1 et θ_C augmentent graduellement. Pour $\theta_C < 20.0$ degré environ les 4 courbes sont presque confondues (avec une précision), on ne peut pas parler sur l'effet de T_0 . Autrement dit, on peut appliquer le modèle GP pour obtenir des résultats avec une bonne précision. Tandis que si $\theta_C > 20.0$ degré, le modèle GP commence à tomber par défaut au fur et à mesure, où des corrections à ce modèle sont nécessaires ce qui montre l'intérêt de l'application de modèle *HT*. On remarque encore que si $M_1 < 2.00$, les 4 courbes de chaque figure sont presque confondues indépendamment de l'angle θ_C de cône, ce qui démontre la possibilité d'utilisation de modèle GP pour l'évaluation des paramètres de l'écoulement. Tandis que si $M_1 > 2.00$ graduellement les 4 courbes commence à se séparer. Qui est traduit par l'augmentation de l'écart entre les modèles GP et *HT*. La figure (5.49) présente que la pression totale à travers le choc diminue avec l'augmentation de θ_C et M_1 donnant une augmentation de l'entropie selon la figure (5.50), conformément au phénomène physique de choc. Entre les figures (5.44), (5.51), (5.52), (5.53) représentant les paramètres physique isentropique juste après le choc et les figures (5.54), (5.55), (5.56), (5.57) représentant les paramètres isentropiques sur la surface de cône, on remarque qu'il y a dégradation de nombre de Mach à travers la rotation θ , c'est-à-dire $M_C \leq M_2$, $T_2/T_0 \leq T_C/T_0$, $\rho_2/\rho_{02} \leq \rho_C/\rho_{02}$ et $P_2/P_{02} \leq P_C/P_{02}$.

Le tableau (5.17) représente l'effet de T_0 et θ_C sur la valeur minimale de nombre de Mach amont $M_{1_{\min}}$ pour les 8 courbes de chaque figure (5.43) à (5.59). Ces valeurs représentent la limite entre le choc attaché et le choc détaché. Si $M_1 \geq M_{1_{\min}}$ on aura un choc attaché et la solution de problème peut être trouvée. Alors, la variation de M_1 est entre $M_{1_{\min}} \leq M_1 \leq 5.00$. Cette limite précise donne encore la possibilité de trouver des solutions de choc attaché dans la limite donner par le modèle GP, cette limite donne une solution détachée pour GP, et on aura une solution de choc attaché pour *HT* si T_0 prendre une valeur assez élevée. L'écart entre le modèle GP et *HT* augmente si θ_C augment aussi pour même T_0 et M_1 .

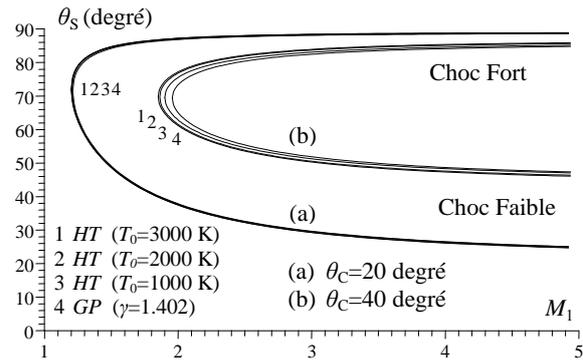


Figure 5.43 : Variation à HT de θ_s en fonction de M_1 pour $\theta_c = 20$ et 40 degré.

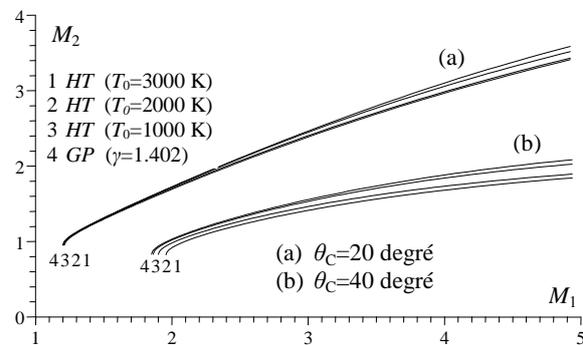


Figure 5.44 : Variation à HT de M_2 en fonction de M_1 pour $\theta_c = 20$ et 40 degré pour le choc faible.

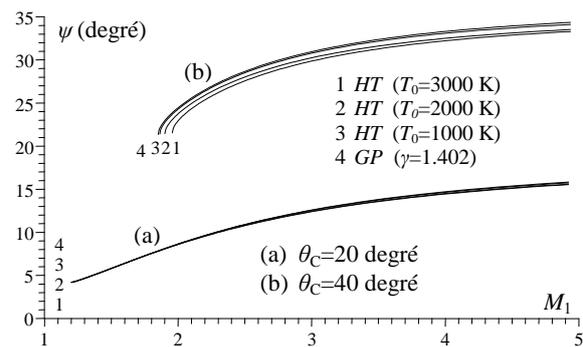


Figure 5.45 : Variation à HT de ψ en fonction de M_1 pour $\theta_c = 20$ et 40 degré pour le choc faible.

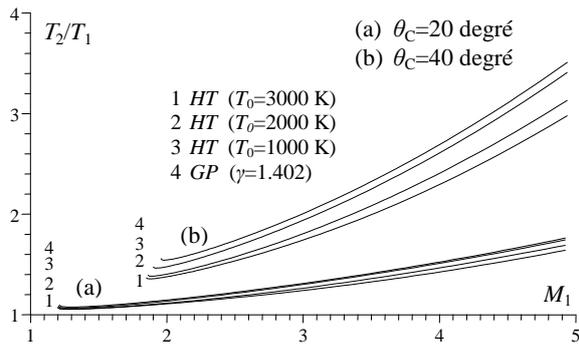


Figure 5.46 : Variation à *HT* de T_2/T_1 en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible.

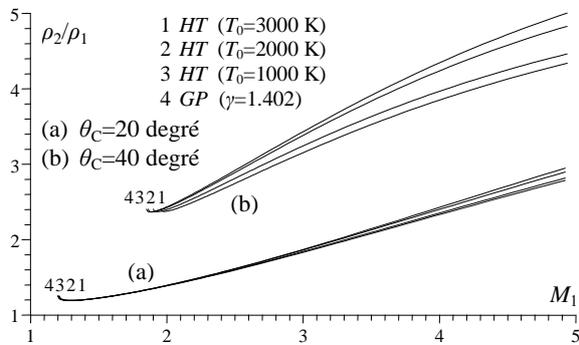


Figure 5.47 : Variation à *HT* de ρ_2/ρ_1 en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible.

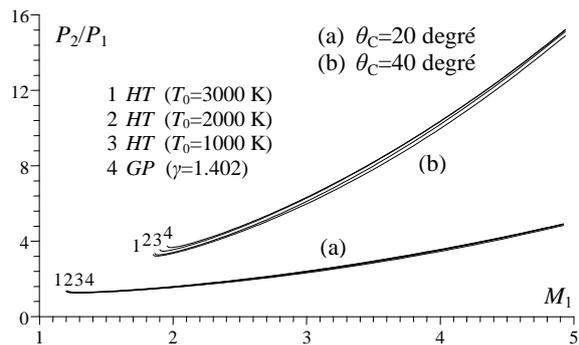


Figure 5.48 : Variation à *HT* de P_2/P_1 en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible.

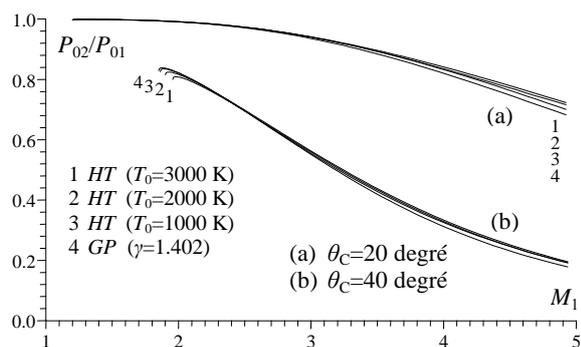


Figure 5.49 : Variation à HT de P_{02}/P_{01} en fonction de M_1 pour $\theta_c=20$ et 40 degré pour le choc faible.

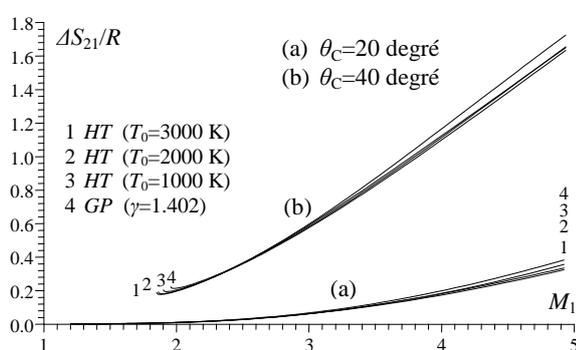


Figure 5.50 : Variation à HT de $\Delta S_{21}/R$ en fonction de M_1 pour $\theta_c=20$ et 40 degré pour le choc faible.

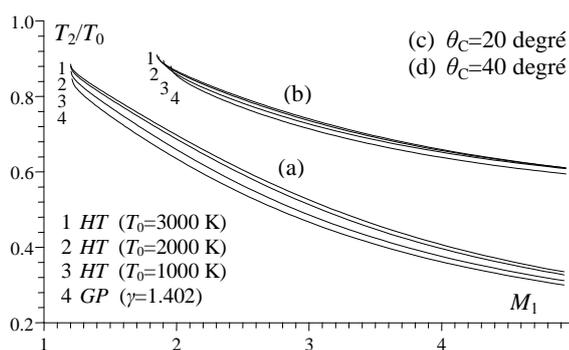


Figure 5.51 : Variation à HT de T_2/T_0 en fonction de M_1 pour $\theta_c=20$ et 40 degré pour le choc faible.

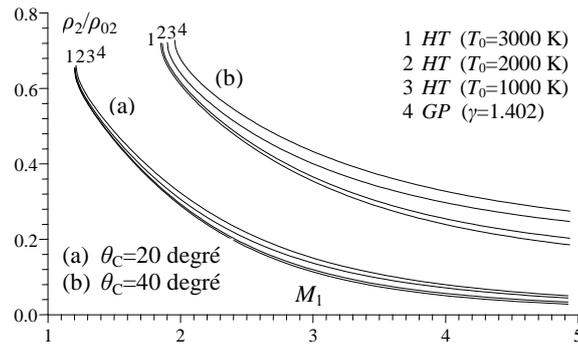


Figure 5.52 : Variation à HT de ρ_2/ρ_{02} en fonction de M_1 pour $\theta_c=20$ et 40 degré pour le choc faible.

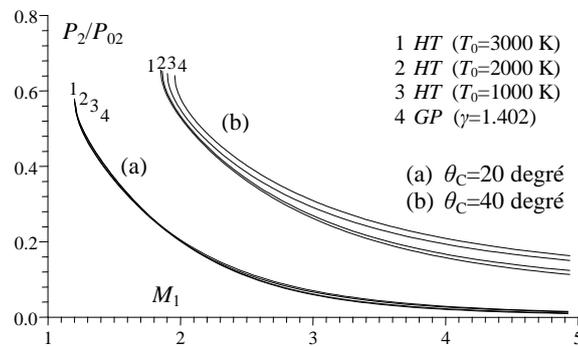


Figure 5.53 : Variation à HT de P_2/P_{02} en fonction de M_1 pour $\theta_c=20$ et 40 degré pour le choc faible.

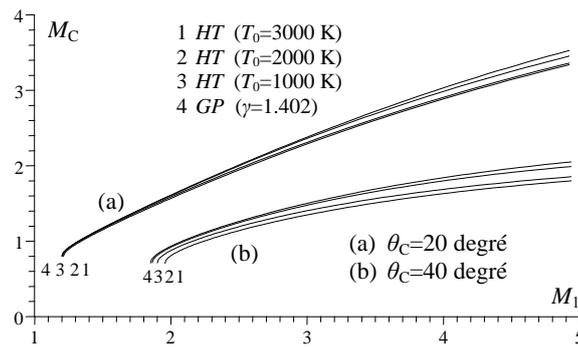


Figure 5.54 : Variation à HT de M_c en fonction de M_1 pour $\theta_c=20$ et 40 degré pour le choc faible.

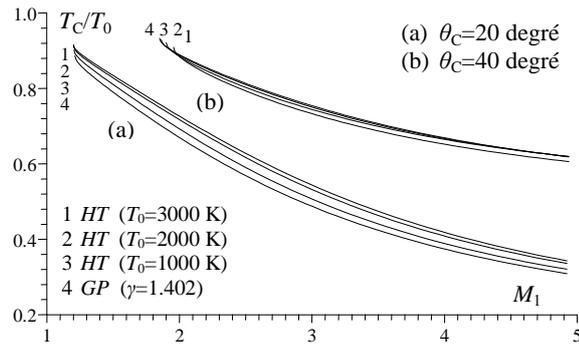


Figure 5.55 : Variation à HT de T_c/T_0 en fonction de M_1 pour $\theta_c=20$ et 40 degré pour le choc faible.

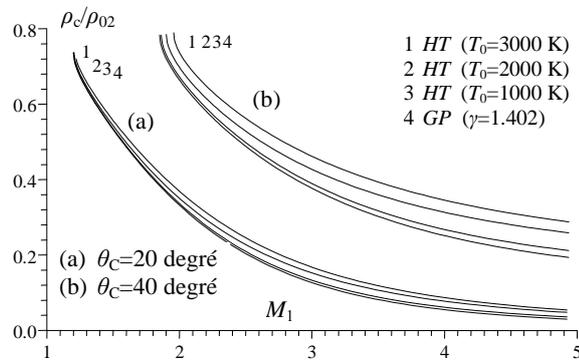


Figure 5.56 : Variation à HT de ρ_c/ρ_{02} en fonction de M_1 pour $\theta_c=20$ et 40 degré pour le choc faible.

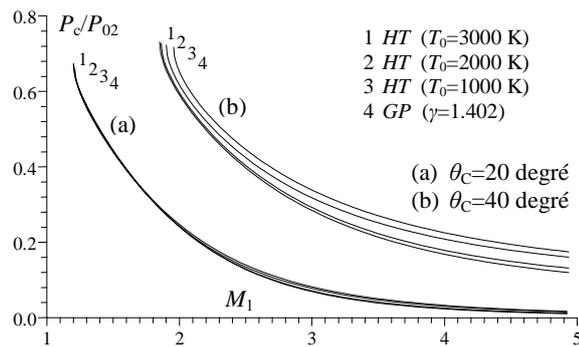


Figure 5.57 : Variation à HT de P_c/P_{02} en fonction de M_1 pour $\theta_c=20$ et 40 degré pour le choc faible.

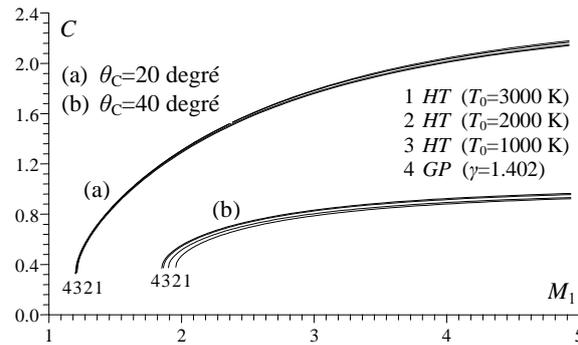


Figure 5.58 : Variation à HT de C en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible.

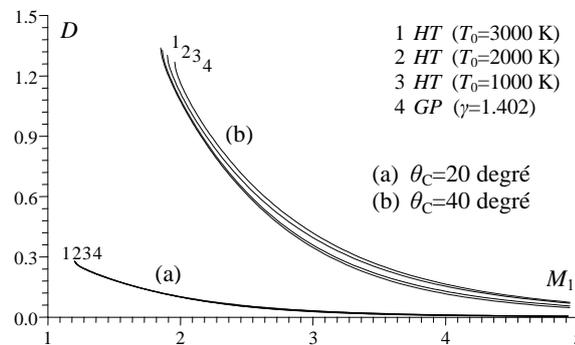


Figure 5.59 : Variation à HT de D en fonction de M_1 pour $\theta_C=20$ et 40 degré pour le choc faible.

Tableau 5.17 : Valeurs de $M_{1_{\min}}$ à HT pour quelques valeurs de θ_C

θ_C (degré)	GP	1000 K	2000 K	3000 K
20	1.211	1.203	1.200	1.199
40	1.955	1.899	1.861	1.849

5.7. Variation des paramètres en fonction de T_0 pour θ_C et M_1 fixés.

Les figures (5.60) à (5.76) représentent la variation de tous les paramètres de l'écoulement θ_s , M_2 , ψ , T_2/T_1 , ρ_2/ρ_1 , P_2/P_1 , P_{02}/P_{01} , $\Delta S_{21}/R$, T_2/T_0 , ρ_2/ρ_{02} , P_2/P_{02} , M_C , T_C/T_0 , ρ_C/ρ_{02} , P_C/P_{02} , C et D directement en fonction de T_0 lorsque $\theta_C=20$ degré et $M_1=4.00$ pour le cas de choc faible et la comparaison avec le modèle GP ($\gamma=1.402$). On note que le modèle GP ne dépend pas de T_0 . Les valeurs des paramètres de l'écoulement pour le modèle GP peuvent être trouvées dans les tableaux (5.2), (5.3) et (5.4). On remarque clairement l'effet de T_0 sur tous les paramètres de l'écoulement, et l'écart entre les modèles GP et HT qui augmente

au fur et à mesure que T_0 augmente. Pour $T_0 < 240.0$ K environ, les 2 courbes sur toutes les figures (5.60) à (5.76) sont presque confondues (avec une précision). Autrement dit, on peut appliquer le modèle GP pour obtenir des résultats avec une bonne précision. Tandis que si $T_0 > 240$ K, le modèle GP commence à tomber par défaut au fur et à mesure, où des corrections à ce modèle sont nécessaires ce qui montre l'intérêt de l'application de modèle *HT*.

Les résultats montrent encore que si M_1 ou θ_C augmentent, l'écart entre les modèles GP et *HT* pour même T_0 augmente aussi. Avec le même raisonnement qu'auparavant, on peut faire une extension afin de déterminer une température $T_{0_{\min}}$ limite minimale qui va donner la limite entre l'apparition de choc attaché et de choc détaché si M_1 et θ_C sont donnés.

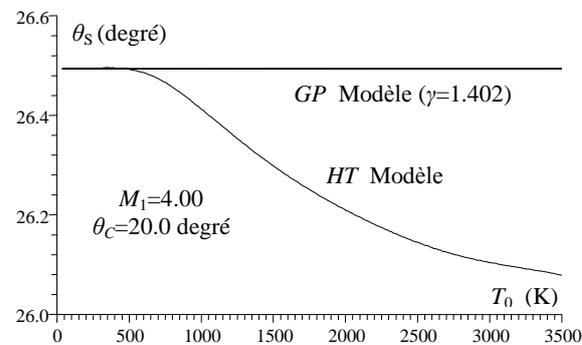


Figure 5.60 : Variation de θ_S en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

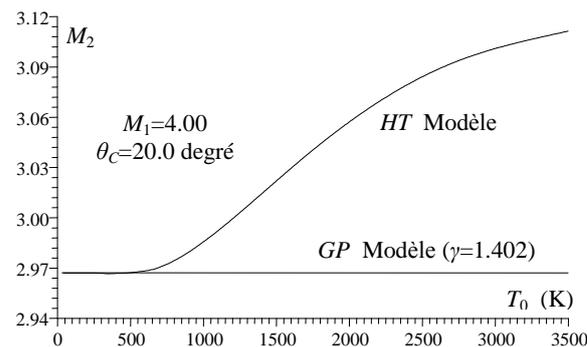


Figure 5.61 : Variation de M_2 en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

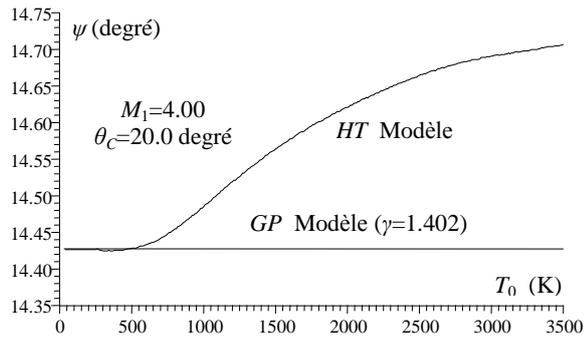


Figure 5.62 : Variation de ψ en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_c=20$ degré pour le choc faible.

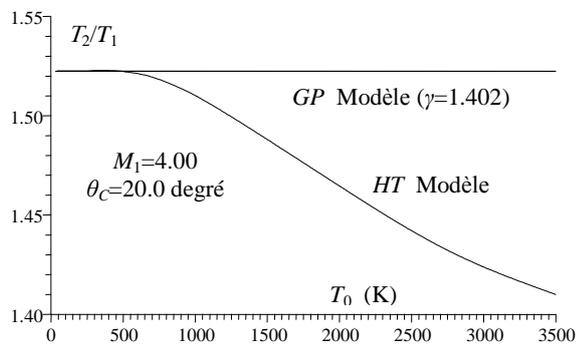


Figure 5.63 : Variation de T_2/T_1 en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_c=20$ degré pour le choc faible.

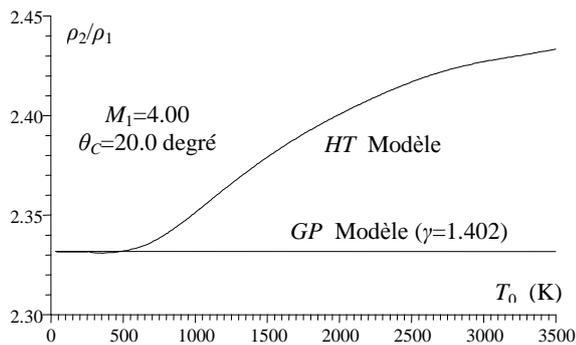


Figure 5.64 : Variation de ρ_2/ρ_1 en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_c=20$ degré pour le choc faible.

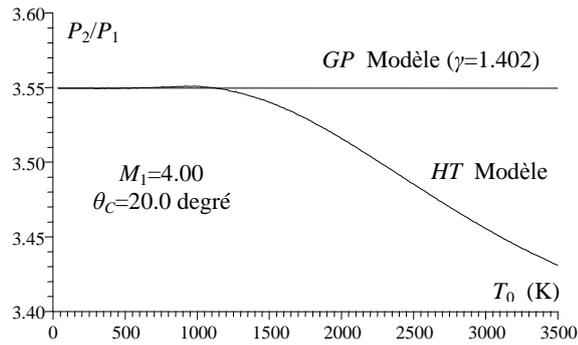


Figure 5.65 : Variation de P_2/P_1 en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

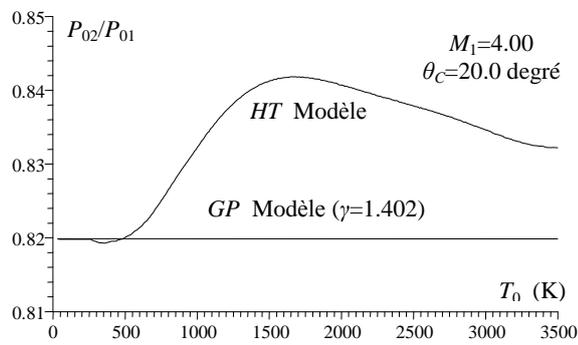


Figure 5.66 : Variation de P_{02}/P_{01} en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

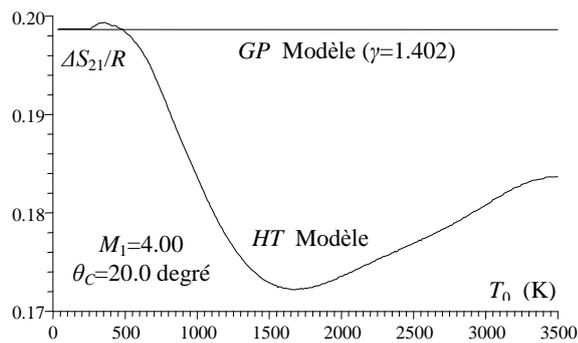


Figure 5.67 : Variation de $\Delta S_{21}/R$ en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

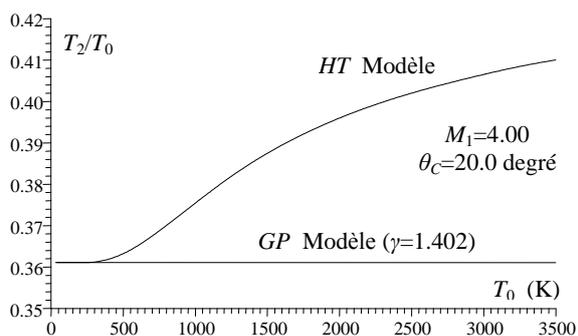


Figure 5.68 : Variation de T_2/T_0 en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

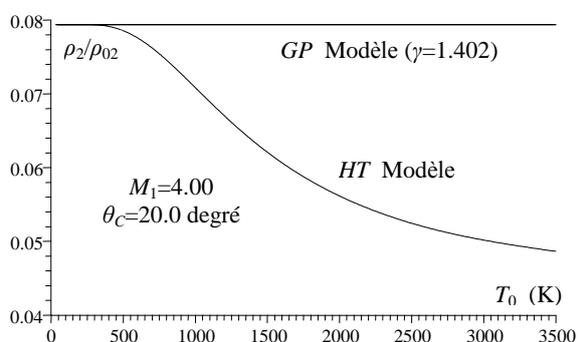


Figure 5.69 : Variation de ρ_2/ρ_{02} en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

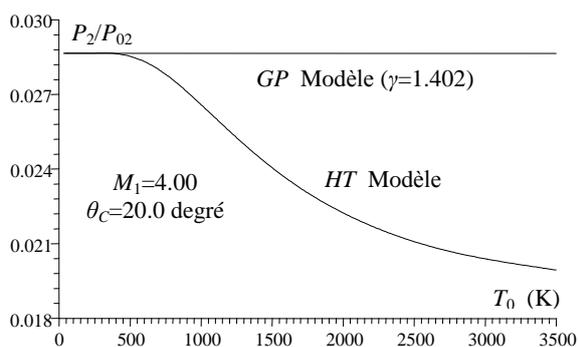


Figure 5.70 : Variation de P_2/P_{02} en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

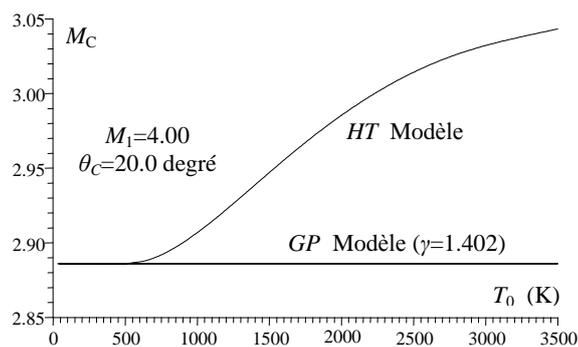


Figure 5.71 : Variation de M_C en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

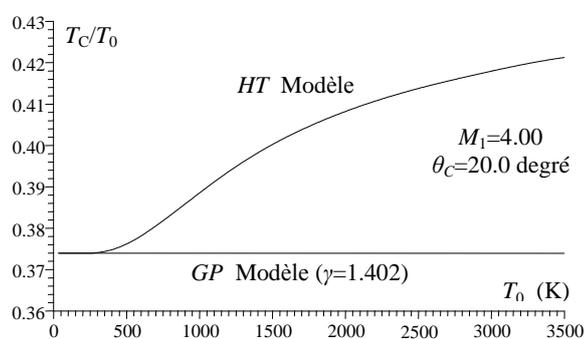


Figure 5.72 : Variation de T_C/T_0 en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

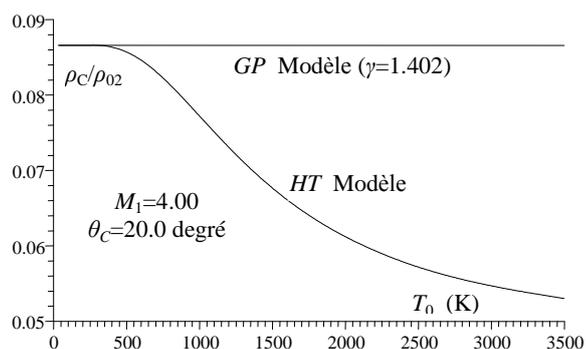


Figure 5.73 : Variation de ρ_C/ρ_{02} en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

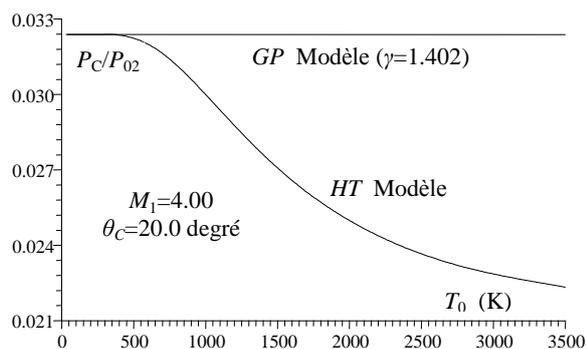


Figure 5.74 : Variation de P_C/P_{02} en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

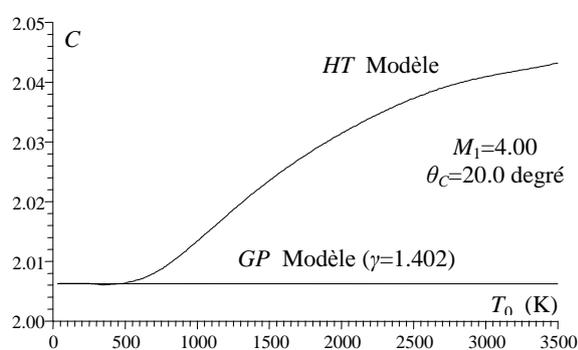


Figure 5.75 : Variation de C en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

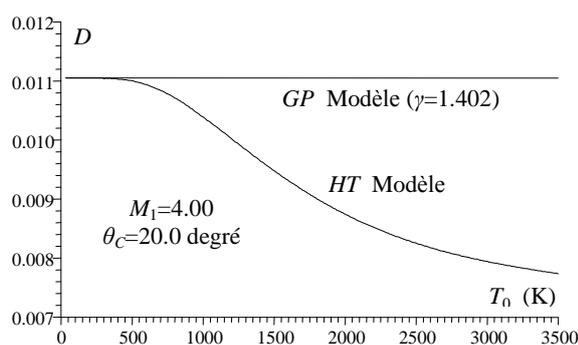


Figure 5.76 : Variation de D en fonction de T_0 pour $M_1=4.00$ et $\theta_C=20$ degré pour le choc faible.

5.8. Comparaison des modèles *GP* et *HT* pour $\theta_C=20.00$ degré.

Dans les figures (5.77) à (5.93), on a représenté l'erreur commise par le modèle *GP* par rapport au modèle *HT* lorsque $T_0=1000$ K, 2000 K et 3000K, respectivement pour tous les paramètres de l'écoulement en fonction de M_1 lorsque $\theta_C=20.0$ degré pour le choc faible. On remarque clairement l'effet de T_0 sur l'écart relatif sur tous les paramètres entre le modèle *GP* et *HT*. L'erreur maximale de problème est constatée au niveau de rapport ρ_c/ρ_{02} et elle est égale à 90 % environ lorsque $T_0=3000$ K. Pour la trainée D , elle peut atteindre 60%. Pour l'entropie selon la figure (5.84), l'erreur peut atteindre 22 % entre les deux modèles. Pour la valeur de C , l'erreur peut égale 2.0%. Malgré cette erreur est petite, elle peut provoquer une non adaptation de la prise d'air vu que l'épaisseur de l'onde de choc est très petite. On remarque que l'erreur augmente avec l'augmentation de T_0 et θ_C , ce qui nécessite l'utilisation de modèle *HT* lorsque T_0 augmente pour des éventuelles corrections. Pour des faibles valeurs de T_0 , le modèle *GP* donne des bons résultats. La limite d'utilisation de modèle *GP* dépend de la précision voulue. Les erreurs sont présentées pour $\theta_C=20.0$ degré. Alors les calculs effectués montrent que l'erreur augmente aussi si θ_C augmente. Alors pour tous les paramètres, l'erreur augmente si T_0 ou M_1 ou θ_C augmentent graduellement. Le nombre de Mach M_1 dans ces figures varie de $M_1=M_{1_{\min}}$ (limite entre le choc attaché et détaché) jusqu'à $M_1=5.00$ (extrême supersonique). Les valeurs de $M_{1_{\min}}$, pour $\theta_C=20.0$ degré sont présentées dans le tableau (5.17).

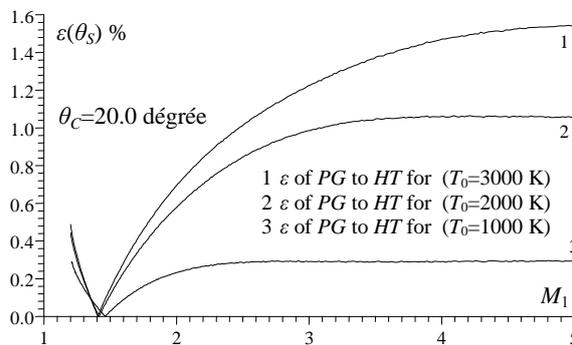


Figure 5.77 : Variation de $\varepsilon(\theta_s)$ de *PG* par rapport à *HT* en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés.

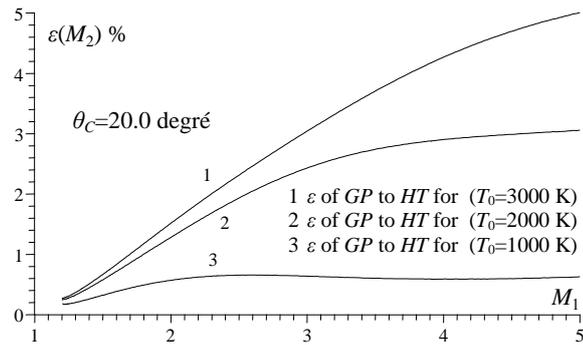


Figure 5.78 : Variation de $\varepsilon(M_2)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés.

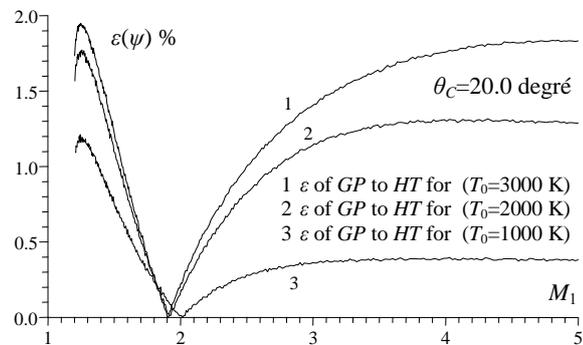


Figure 5.79 : Variation de $\varepsilon(\psi)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés.

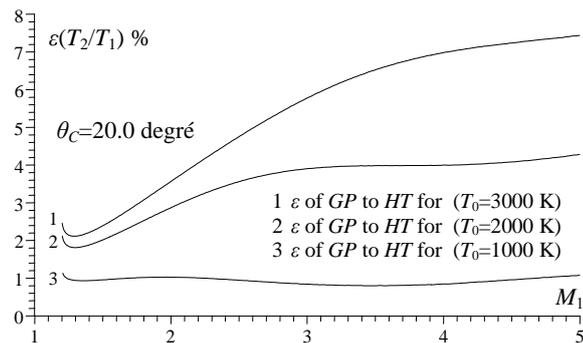


Figure 5.80 : Variation de $\varepsilon(T_2/T_1)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés.

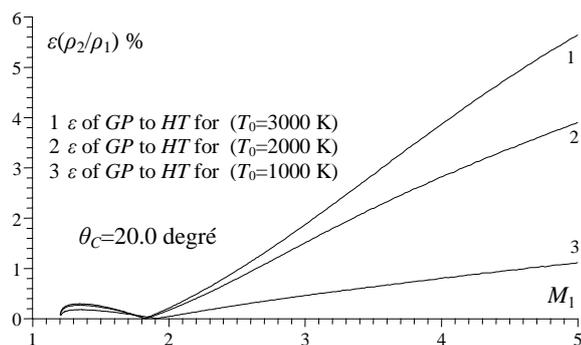


Figure 5.81 : Variation de $\varepsilon(\rho_2/\rho_1)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degré.

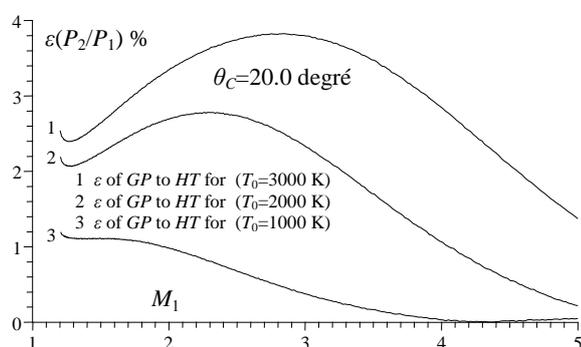


Figure 5.82 : Variation de $\varepsilon(P_2/P_1)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degré.

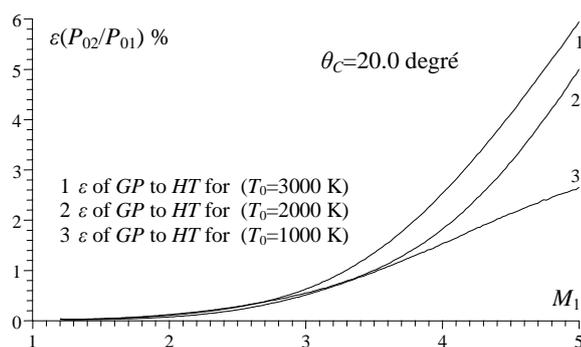


Figure 5.83 : Variation de $\varepsilon(P_{02}/P_{01})$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés.

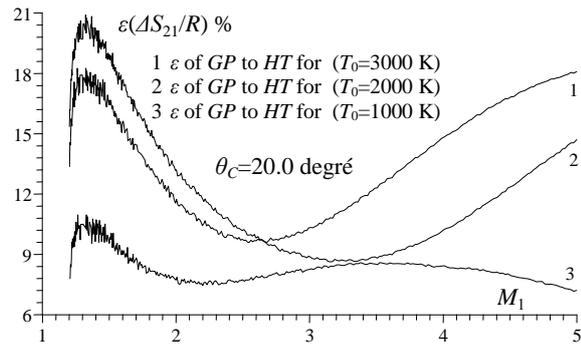


Figure 5.84 : Variation de $\varepsilon(\Delta S_{21}/R)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degré.

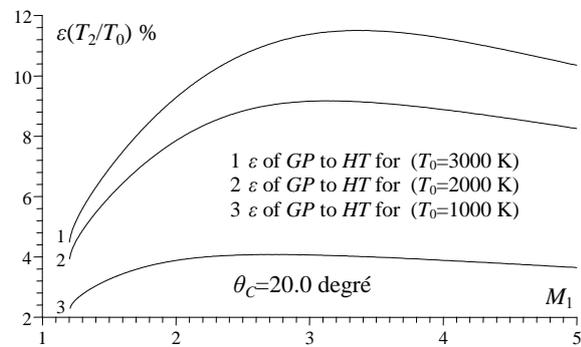


Figure 5.85 : Variation de $\varepsilon(T_2/T_0)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degré.

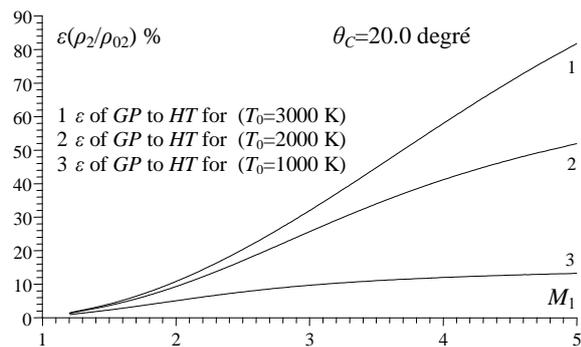


Figure 5.86 : Variation de $\varepsilon(\rho_2/\rho_{02})$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C=20$ degrés.

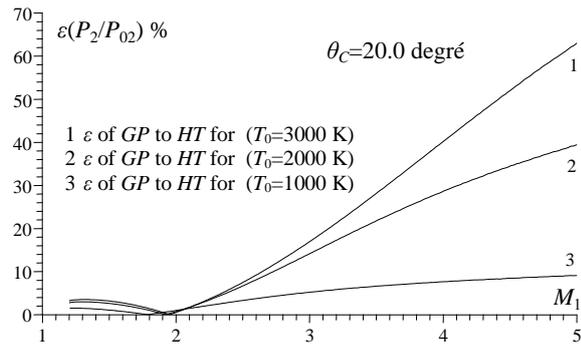


Figure 5.87 : Variation de $\varepsilon(P_2/P_{02})$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_c=20$ degré.

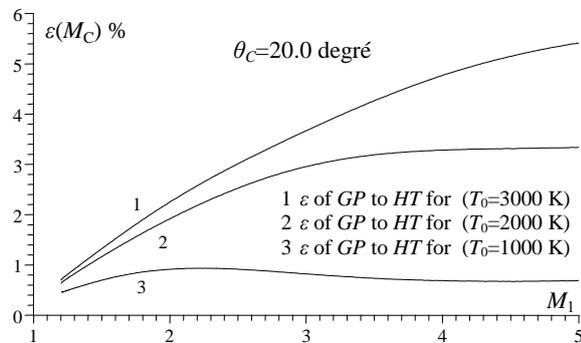


Figure 5.88 : Variation de $\varepsilon(M_c)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_c=20$ degré.

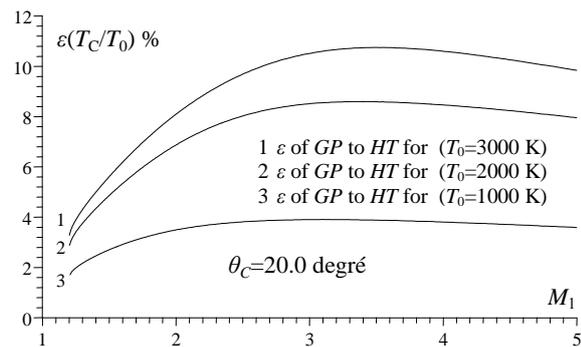


Figure 5.89 : Variation de $\varepsilon(T_c/T_0)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_c=20$ degré.

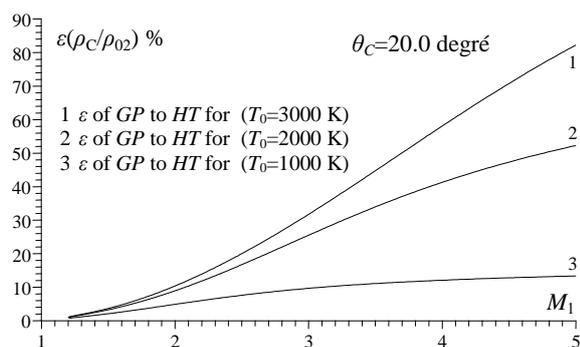


Figure 5.90 : Variation de $\varepsilon(\rho_c/\rho_{02})$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_c=20$ degré.

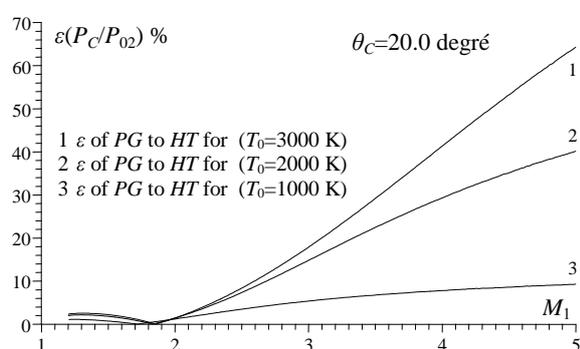


Figure 5.91 : Variation de $\varepsilon(P_c/P_{02})$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_c=20$ degré.

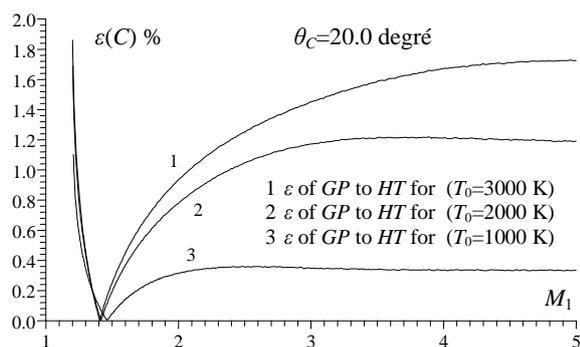


Figure 5.92 : Variation de $\varepsilon(C)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_c=20$ degré.

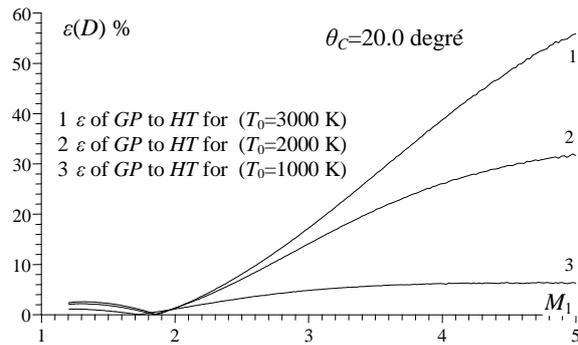


Figure 5.93 : Variation de $\varepsilon(D)$ de GP par rapport à HT en fonction de M_1 pour le choc faible et $\theta_C = 20$ degrés.

5.9. Comparaison entre le cône et le dièdre

Pour les figures (5.94) à (5.112), on a l'angle $\varphi = \theta_C$ pour le cône et égale à $\varphi = \psi$ pour le dièdre. Sur ces figures on a fait une comparaison de tous les résultats obtenus entre le dièdre et le cône lorsque $M_1 = 4.00$ dans le cas à HT, y compris le cas GP ($\gamma = 1.402$). Sur les figures (5.94) et (5.95) on a représenté les résultats pour le choc faible et fort. Tandis que dans les figures (5.96) à (5.112), on a limité la comparaison uniquement pour le choc faible. Les paramètres dans la région entre le choc et la surface de cône dépendent de la direction θ , et pour le dièdre, ces paramètres sont constants et ne dépendent pas de θ . Alors pour le dièdre, on peut dire que $M_2 = M_{\text{Surface}}$, $T_2/T_0 = T_{\text{Surface}}/T_0$, $\rho_2/\rho_{02} = \rho_{\text{Surface}}/\rho_{02}$ et $P_2/P_{02} = P_C/P_{02}$, tandis que pour le cône ces rapports sont différents, ce qui veut dire que les 4 courbes en pointillées concernant le dièdre dans la figure (5.95) sont les mêmes que les 4 courbes présentées dans la figure (5.105) et les 4 courbes en pointillées dans la figure (5.102) sont les mêmes que les 4 courbes présentées dans la figure (5.106), et les 4 courbes en pointillées présentées dans la figure (5.103) sont les mêmes que les 4 courbes en pointillées de la figure (5.107), et les 4 courbes de dièdre de la figure (5.104) sont les mêmes que celles de dièdre de la figure (5.108). Pour $\varphi = 0.0$ (écoulement isentropique) ou $\varphi = 90.0$ (onde de choc droite), les paramètres physiques pour le cône ou le dièdre sont les mêmes. On remarque que la déviation maximale de cône correspondant à M_1 et T_0 est supérieure à la déviation de dièdre, ce qui donne qu'il y a plus d'intervalle de solution de problème de choc attaché pour le cône. On remarque encore l'influence de T_0 sur tous les paramètres physique aussi pour le dièdre.

Le problème de choc conique est un type de problème tridimensionnel. Tandis que le choc oblique est un type de problème bidimensionnel. En plus le travail est destiné pour la résolution de problème de choc conique à *HT*, aussi des nouveaux résultats sur le dièdre à *HT* sont déterminés présentés comme une amélioration des résultats présentés dans les références [26-27, 58-59] vu les modifications apportées à leurs modèle mathématique dans ce travail.

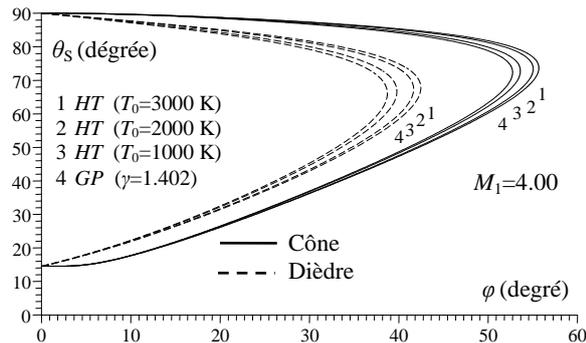


Figure 5.94 : Comparaison à *HT* entre le cône et le dièdre sur θ_s en fonction de ϕ pour $M_1=4.00$.

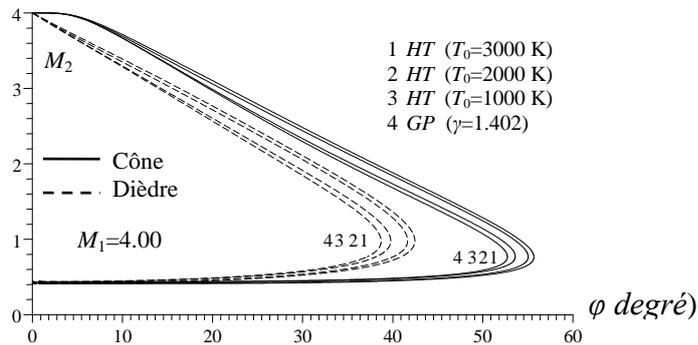


Figure 5.95 : Comparaison à *HT* entre M_2 de cône et le dièdre en fonction de ϕ pour $M_1=4.00$.

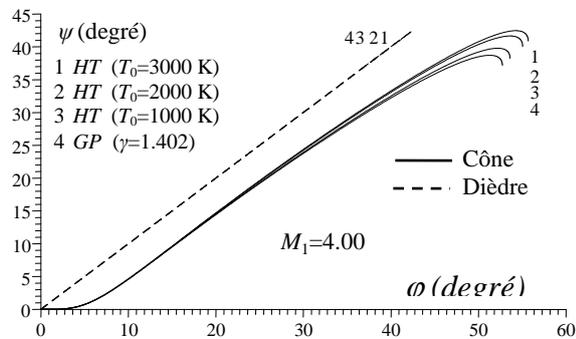


Figure 5.96 : Comparaison à *HT* entre ψ de cône et le dièdre en fonction de ϕ pour $M_1=4.00$.

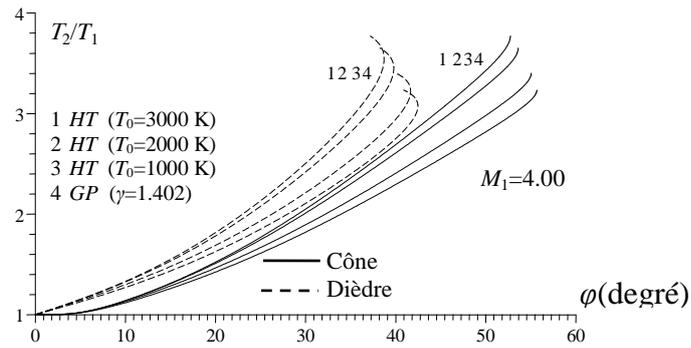


Figure 5.97 : Comparaison à HT entre T_2/T_1 de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$.

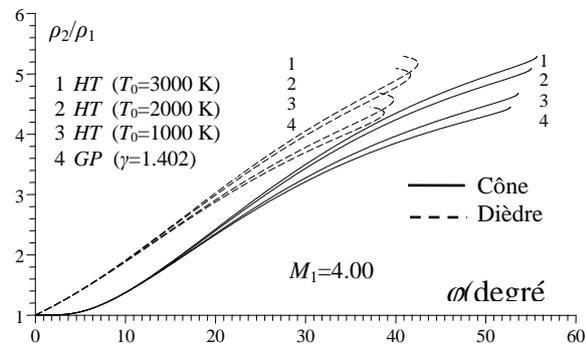


Figure 5.98 : Comparaison à HT entre ρ_2/ρ_1 de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$.

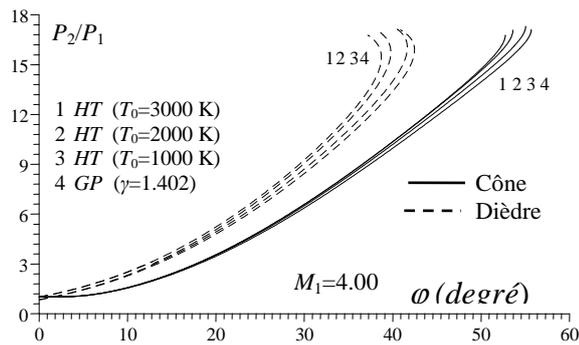


Figure 5.99 : Comparaison à HT entre P_2/P_1 de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$.

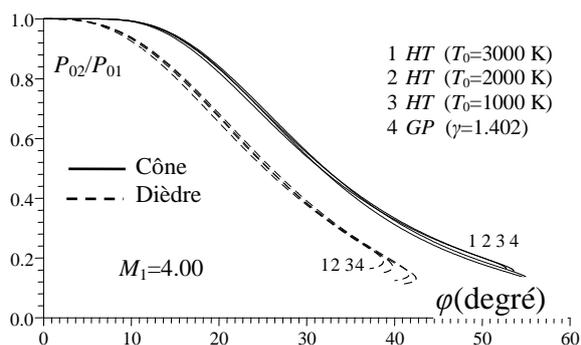


Figure 5.100 : Comparaison à *HT* entre P_{02}/P_{01} de cône et le dièdre en fonction de ϕ pour $M_1=4.00$.

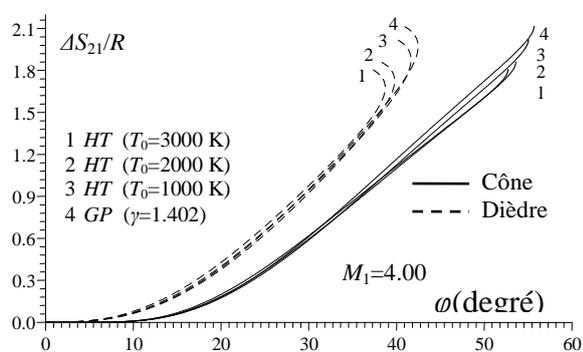


Figure 5.101 : Comparaison à *HT* entre $\Delta S_{21}/R$ de cône et le dièdre en fonction de ϕ pour $M_1=4.00$.

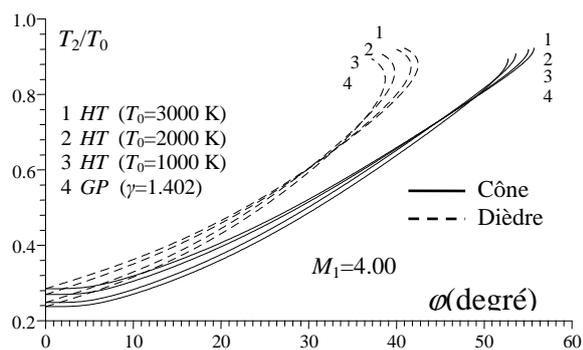


Figure 5.102 : Comparaison à *HT* entre T_2/T_0 de cône et le dièdre en fonction de ϕ pour $M_1=4.00$.

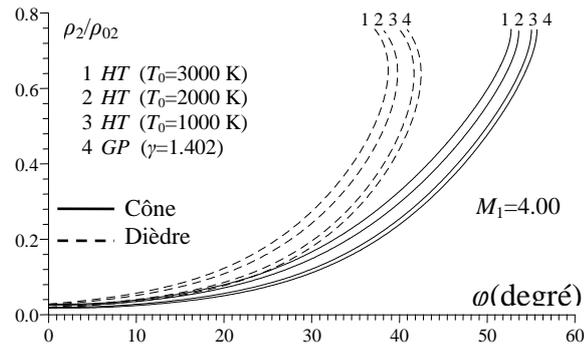


Figure 5.103 : Comparaison à HT entre ρ_2/ρ_{02} de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$.

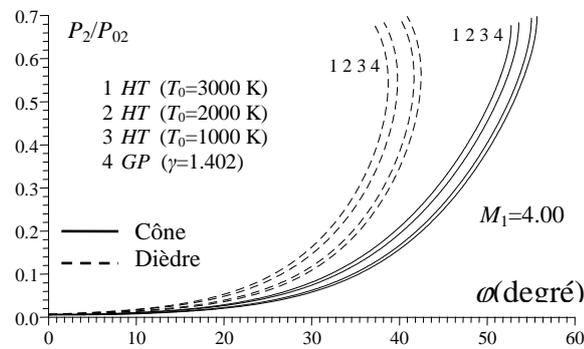


Figure 5.104 : Comparaison à HT entre P_2/P_{02} de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$.

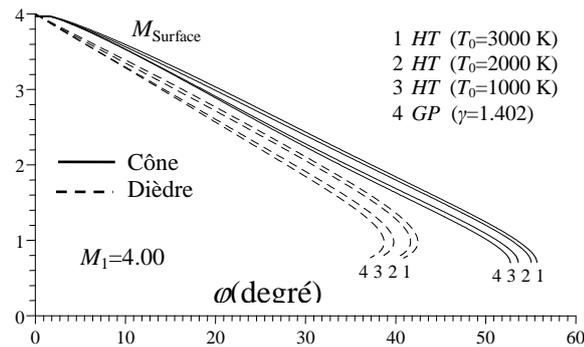


Figure 5.105 : Comparaison à HT entre M_{Surface} de cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4.00$.

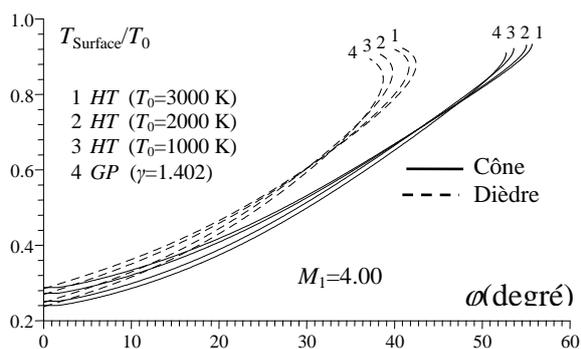


Figure 5.106 : Comparaison à HT entre le cône et le dièdre sur T_{Surface}/T_0 en fonction de φ pour $M_1=4.00$.

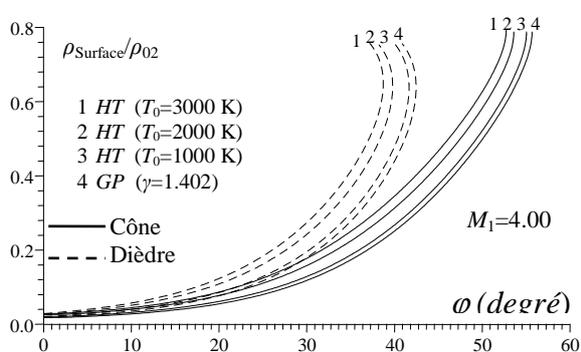


Figure 5.107 : Comparaison à HT entre le cône et le dièdre sur $\rho_{\text{Surface}}/\rho_{02}$ en fonction de φ pour $M_1=4.00$.

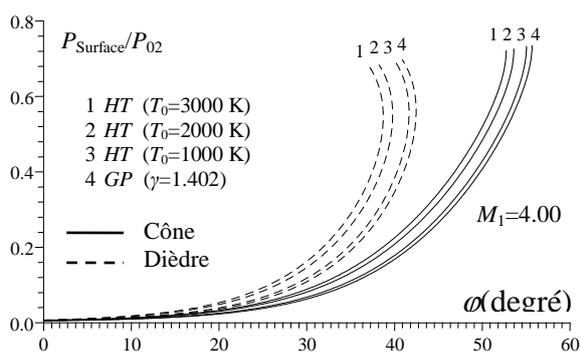


Figure 5.108 : Comparaison à HT entre le cône et le dièdre sur $P_{\text{Surface}}/P_{02}$ en fonction de φ pour $M_1=4.00$.

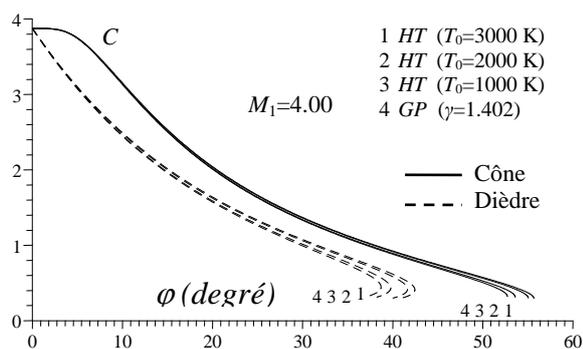


Figure 5.109 : Comparaison de C à HT entre le cône et le dièdre en fonction de φ pour $M_1=4$.

La relation (3.54), pour un dièdre, devient sous la forme suivante :

$$D = \frac{Drag}{L l P_0} = 2 \sin(\psi) \left(\frac{P_2}{P_{0_2}} \right) \left(\frac{P_{0_2}}{P_{0_1}} \right) \quad (5.2)$$

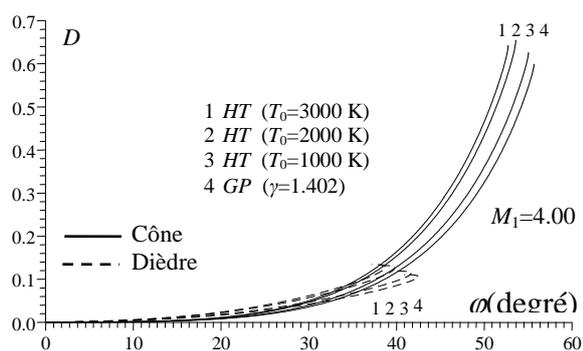


Figure 5.110 : Comparaison à HT entre le cône et le dièdre sur D en fonction de φ pour $M_1=4.00$.

CONCLUSION

Dans cette étude, une stratégie originale pour la simulation de l'écoulement supersonique autour d'un cône, a été développée. Nous avons suivi une nouvelle approche, qui consiste à reformuler toutes les équations connues pour un gaz parfait isentropique, dans notre cas ce gaz est l'air, à des hautes températures. Afin de voir le comportement de ce dernier et par la suite proposer un nouveau modèle mathématique dépendant de certaines conditions locales de l'écoulement. Le domaine d'application est une prise d'air supersonique. La simulation numérique de ce modèle à haute température a demandé des efforts particuliers de comparaison et de validation avec des résultats expérimentaux publiés dans les références. Ces résultats sont disponible uniquement pour le cas d'un gaz parfait à des chaleurs spécifiques C_p constantes et rapport γ constant. Nous avons notamment mis en évidence, le modèle HT proposé en le comparant ensuite au modèle GP, qu'on se permet de l'appeler modèle classique.

A cet effet, nous sommes arrivés dans cette étude à plusieurs conclusions, qu'on va citer :

1. Le modèle *PG* donne des bons résultats pour des faibles valeurs de $M_1 < 2.00$, $T_0 < 240$ K et $\theta_C < 20.00$ degré environ. Par contre, lorsque M_1 , T_0 ou θ_C augmentent, le modèle *GP* commence à donner des résultats qui s'éloignent au fur et à mesure du cas réel. D'où la nécessité d'utilisation le modèle *HT*.
2. Le programme numérique développé peut donner des résultats pour n'importe quel type de gaz. Il suffit de donner, dans ce cas la chaleur spécifique $C_p(T)$ en fonction de la température, la constante R du gaz utilisé et calculer la fonction $H(T)$.
3. La fonction $C_p(T)$, R et le rapport $\gamma(T)$ caractérisent le pouvoir calorifique des gaz et influent principalement sur tous les paramètres que se soient thermodynamiques ou physiques de l'écoulement.
4. On peut obtenir les relations d'un gaz parfait à partir des relations du modèle *HT* en annulant toutes les constantes d'interpolations de la fonction $C_p(T)$ sauf le premier. Dans ce cas, le modèle *GP* devient un cas particulier de notre modèle *HT*.
5. La convergence des résultats demande un temps de calcul supplémentaire pour le modèle *HT* par rapport au modèle *GP* pour la même précision.

6. Une condensation des nœuds dans la quadrature de Simpson est employée pour intégrer toute fonction avec précision élevée dans un temps réduit.
7. Le modèle mathématique à travers le choc et entre le choc et la surface de cône dépend de trois paramètres (M_1 , C_P , θ_C) pour le modèle *GP*. Par contre ce modèle dépend de quatre paramètres (M_1 , C_P , θ_C et T_0) dans le cas de modèle *HT*. Ainsi on conclut que le modèle *HT* devient une généralisation de modèle *GP*.
8. Pour le cône, le modèle *HT* est présenté par trois équations différentielles déterminantes (V_r , V_θ et T). Les autres paramètres peuvent être déterminés par la résolution des équations algébriques non linéaires, ou intégration numérique de certaines fonctions complexes.
9. Le modèle *GP* perturbe les performances de choc conique si M_1 , T_0 et θ_C augmente graduellement.
10. A haute température, le modèle *GP* donne une mauvaise adaptation de la prise d'air. Par conséquent une dégradation des performances de cette prise d'air.
11. Les paramètres de l'écoulement entre le choc et la surface de cône sont variables et dépendent de la direction transversale θ au cône. Contrairement au dièdre où ces paramètres sont constants.
12. Parmi tous les paramètres de l'écoulement calculés, on a constaté que l'écart maximal est celui du rapport ρ_C/ρ_{02} . Qui peut atteindre 95% lorsque $T_0=3500K$ pour $\theta_C=20.0$ degré et $M_1=5.00$. Cette erreur augmente graduellement avec θ_C jusqu'à atteindre 135 % pour $\theta_C=40.0$ degré.
13. Deux types de choc peuvent être rencontrés, l'un appelé choc faible et l'autre choc fort. Généralement le choc faible qui se produit dans la pratique.
14. Pour chaque M_1 donné, il existe une déviation maximale de cône $\theta_{C_{max}}$. Si $\theta_C \leq \theta_{C_{max}}$ on aura une onde de choc attaché, dans le cas contraire on aura une onde de choc détachée. Cette valeur limite dépend aussi de T_0 et de gaz considéré.
15. Pour chaque déviation θ_C de cône, il existe une valeur minimale $M_{1_{min}}$ de nombre de Mach amont pour éviter le choc détachée. Si $M_1 \geq M_{1_{min}}$ on aura une onde de choc attachée. Dans le cas contraire on aura une onde de choc détachée. Cette valeur limite dépend aussi de T_0 et de gaz utilisé.

16. La température génératrice T_0 est un paramètre capital de notre modèle *HT*. Par contre les résultats de modèle *GP* ne dépendent pas de T_0 .
17. L'effet de la température génératrice T_0 dégrade les paramètres θ_S , T_2/T_1 , P_2/P_1 , $\Delta S_{21}/R$, ρ_2/ρ_{02} , P_2/P_{02} , ρ_C/ρ_{02} , P_C/P_{02} , D et augmente les paramètres M_2 , ψ , ρ_2/ρ_1 , P_{02}/P_{01} , T_2/T_0 , M_C , T_C/T_0 et C par rapport aux résultats donnés par le modèle *PG*. Cette différence entre les deux modèles augmente avec l'augmentation de T_0 .
18. Pour la résolution de système d'équations différentielles, on a utilisé la méthode Runge Kutta d'ordre 4. On peut utiliser la méthode Runge Kutta d'ordre supérieure pour voir l'effet de cette méthode sur la précision des résultats obtenus, sur la convergence et le temps d'exécution.
19. Pour $\theta_C < 20.0$ degré, on peut utiliser le modèle *GP* pour l'évaluation de l'écoulement, indépendamment des valeurs de M_1 et de T_0 . Mais si $\theta_C > 20.0$ degré, les corrections données par le modèle *HT* deviennent nécessaires pour l'évaluation des paramètres de l'écoulement avec précision.
20. Indépendamment de θ_C et de T_0 , pour $M_1 < 2.00$, Le modèle *GP* donne des bons résultats des paramètres de l'écoulement. Mais si $M_1 > 2.00$, les corrections données par le modèle *HT* deviennent nécessaires pour déterminer les paramètres de l'écoulement avec précision élevée.
21. Indépendamment de θ_C et de M_1 , pour $T_0 < 240$ K environ, on peut utiliser le modèle *GP* pour l'évaluation de l'écoulement. Mais si T_0 dépasse les 240 K, les corrections données par le modèle *HT* deviennent nécessaires pour l'évaluation des paramètres de l'écoulement avec précision.
22. La limite d'utilisation de modèle *GP* en termes de valeurs maximale de M_1 , θ_C et T_0 est fixée selon la précision demandée.
23. Le choc conique présente un problème d'écoulement tridimensionnel. Tandis que le choc oblique présente un écoulement bidimensionnel.

Finalement, on propose pour travaux futures, pour résoudre les équations différentielles de premier ordre, l'utilisation des méthodes de différences finies ou volumes finis. On propose aussi l'adaptation de ce modèle *HT* pour l'écoulement autour d'un profil d'aile pointu. Ce problème constitue la base de l'aérodynamique externe supersonique. Dans ce cas, il faut utiliser la relation de Prandtl Meyer pour

la détente à haute température [67, 71, 73-74] afin d'évaluer les paramètres de l'écoulement.

On peut généraliser cette étude afin de déterminer les paramètres physiques d'un écoulement autour d'un cône de forme elliptique. Autre proposition c'est l'application de modèle HT pour d'autre type de gaz hors que l'air. Enfin une comparaison des résultats du notre modèle HT avec ceux calculés par les codes de calculs en CFD.

APPENDICE A

LISTE DES SYMBOLES

M	Nombre de Mach.
V	Vitesse de l'écoulement [m/s].
u	Composante normale au choc oblique de la vitesse (m/s).
w	Composante tangentielle au choc oblique de vitesse (m/s).
ψ	Déviaton de l'écoulement juste après le choc [rad].
a	Vitesse du son [m/s].
r	Composante radiale de vitesse de l'écoulement [m/s].
P	Pression [atm].
T	Température [K].
L	Longueur longitudinale du cône [m].
R	Constante thermodynamique de l'air [J/kg K].
H	Enthalpie [J/kg].
ΔS	Saut d'entropie à travers le choc [J/kg].
C_P	Chaleur spécifique à pression constante [J/kg K].
μ	Angle de Mach [rad].
v	Fonction de Prandtl Meyer (rad).
x_ρ	Rapport des masses volumiques à travers le choc ($x_\rho = \rho_2 / \rho_1$).
x_T	Rapport des températures statiques à travers le choc ($x_T = T_2 / T_1$).
x_P	Rapport des pressions à travers le choc ($x_P = P_2 / P_1$).
θ	Déviaton de la composante radiale du vecteur de vitesse de l'écoulement [rad].
α	Déviaton du vecteur de vitesse par rapport à l'horizontal pour chaque direction θ [rad].
γ	Rapport des chaleurs spécifiques.
ρ	Masse volumique [kg/m ³].
ε	Erreur relative causée par le modèle <i>PG</i> par rapport au modèle <i>HT</i> .
n	Nombre de subdivision selon la méthode de bipartition.
Δx	Pas de variation de la méthode de Runge Kutta.
d	Distance pour la prise d'air adaptée [m]
<i>Rayon</i>	Rayon de la nacelle de prise d'air [m].

<i>C</i>	Relié au distance de prise d'air [m].
<i>L</i>	Longueur longitudinale de cône [m].
<i>D</i>	Trainée de cône normalisée par sa longueur [N].
<i>HT</i>	Haute Température.
<i>GP</i>	Gaz Parfait.

Indices

0_1	Condition d'arrêt avant le choc.
0_2	Condition d'arrêt après le choc.
0	Condition d'arrêt.
1	Paramètre juste avant le choc.
2	Paramètre juste après le choc.
<i>S</i>	Choc.
<i>C</i>	Cône.
θ	Direction transversale au cône.
<i>r</i>	Direction Radiale au cône.
Surface	Surface de cône ou de dièdre.
φ	Déviatiion de cône ou de dièdre.

APPENDICE B

METHODES DE RUNGE KUTTA

Soit à résoudre l'équation différentielle du 1^{er} ordre de la forme suivante :

$$y' = f(x, y)$$

$$x = a, \quad y(x=a) = b$$

Parmi plusieurs méthodes d'intégration numérique, on propose la méthode de Runge Kutta d'ordre P suivante :

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$

$$k_i = h_n f\left(x_n + c_i h_n, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} k_j\right) \quad i=1, 2, 3, \dots, P$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{i=P} b_i k_i$$

$c_i, b_i (a_{i,j} \quad j=1, 2, 3, \dots, i-1) \quad (i=1, 2, 3, \dots, P)$ sont des constantes

Avec $x_{n+1} = x_n + h_n$

Parmi le nombre très important des méthodes de Runge Kutta on présente les méthodes suivantes

B.1. Runge Kutta d'ordre 3 (1^{ère} version) [9, 47, 49, 54, 62]

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{3}{4}h_n, y_n + \frac{3}{4}k_2\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3)$$

Avec $x_{n+1} = x_n + h_n$

B.2. Runge Kutta d'ordre 3 (2^{ème} version) [9, 47, 49, 54, 62]

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h_n f(x_n + h_n, y_n - k_1 + 2k_2)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

Avec $x_{n+1} = x_n + h_n$

B.3. Runge Kutta d'ordre 4 (1^{ère} Version) [9, 47, 49, 54, 62]

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Avec $x_{n+1} = x_n + h_n$

B.4. Runge Kutta d'ordre 4 (2^{ème} Version) [9, 47, 49, 54, 62]

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h_n f(x_n + 0.4h_n, y_n + 0.4k_1)$$

$$k_3 = h_n f(x_n + 0.45573725h_n, y_n + 0.29697761k_1 + 0.15875965k_2)$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n + 0.21810040k_1 - 3.05096516k_2 + 3.83286476k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.17476028k_1 - 0.55148066k_2 + 1.20553560k_3 + 1.71184784k_4$$

Avec $x_{n+1} = x_n + h_n$

B.5. Runge Kutta d'ordre 4 (3^{ème} Version) [9, 47, 49, 54, 62]

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right)$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n - k_2 + 2k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4)$$

Avec $x_{n+1} = x_n + h_n$

B.6. Runge Kutta d'ordre 6 [8-9, 31, 47, 49, 54]

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right)$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n - k_2 + 2k_3)$$

$$k_5 = h_n f\left(x_n + \frac{2}{3}h_n, y_n + \frac{7}{27}k_1 + \frac{10}{27}k_2 + \frac{1}{27}k_4\right)$$

$$k_6 = h_n f\left(x_n + h_n, y_n + \frac{28}{625}k_1 - \frac{1}{5}k_2 + \frac{546}{625}k_3 + \frac{54}{625}k_4 - \frac{378}{625}k_5\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24}k_1 + \frac{5}{48}k_4 + \frac{27}{56}k_5 + \frac{125}{336}k_6$$

Avec $x_{n+1} = x_n + h_n$

B.7. Runge Kutta d'ordre 7 [8-9, 13, 47, 49, 54]

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_1)$$

$$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{3}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2\right)$$

$$k_4 = h_n f\left(x_n + \frac{2}{3}h_n, y_n + \frac{8}{27}k_1 + \frac{2}{27}k_2 + \frac{8}{27}k_3\right)$$

$$k_5 = h_n f\left(x_n + 0.1726731646h_n, y_n + 0.0516407685k_1 - 0.0493351898k_2 + 0.2960111393k_3 - 0.1256435533k_4\right)$$

$$k_6 = h_n f\left(x_n + 0.8273268353h_n, y_n - 1.1854881643k_1 - 0.2363790958k_2 - 0.7481756236k_3 + 0.8808545802k_4 + 2.1165151389k_5\right)$$

$$k_7 = h_n f\left(x_n + h_n, y_n + 4.5065024887k_1 + 0.6666666666k_2 + 6.0173399699k_3 - 4.1117044797k_4 - 7.0189140975k_5 - 0.9401094519k_6\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{9}{180}k_1 + \frac{64}{180}k_3 + \frac{49}{180}k_5 + \frac{49}{180}k_6 + \frac{9}{180}k_7$$

Avec $x_{n+1} = x_n + h_n$

REFERENCES

1. Amidon P. F., "Supersonic Aerodynamic Characteristics of Elliptic Cross-Section Bodies," AIAA Paper No.1607-1985.
2. Anderson J. D. Jr., "Fundamentals of Aerodynamics," 2nd Edition., McGraw-Hill Book Company, New York, USA, 1988.
3. Anderson J. D. Jr., "Hypersonic and high temperature gas dynamics," McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.
4. Anderson J. D. Jr., "Modern Compressible Flow With Historical Perspective," 2nd edition, McGraw-Hill Book Company, New York, USA, 1982.
5. Belotserkovskiy O. M., "Supersonic Gas Flow Around Blunt Bodies - Theoretical and Experimental Investigations," NASA TT F-453, 1967.
6. Ben-Dor G., "Shock Wave Reflection Phenomena," Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, PP. 15-17, 2007.
7. Briggs B. R., "The Numerical Calculation of Flow Past Conical Bodies Supporting Elliptic Conical Shock Waves at Finite Angles of Incidence," NASA TN D-340, 1960.
8. Butcher J. C., "On Runge-Kutta processes of high order," Journal of Australian Mathematical Society, Vol. 4, PP. 179-194, 1964.
9. Butcher J. C., "A history of Runge Kutta methods," Applied Numerical Mathematics, Vol. 20, N° 03, PP. 247-260, 1996.
10. Chen S. X. and Li D. N., "Supersonic flow past a symmetrically curved cone," Indiana University Mathematical Journal, Vol. 49, PP. 1411-1435, 2000.
11. Chiang C. W. and Wagner R. D. Jr., " Analysis of Supersonic Conical Flows," NASA TN D-5884, 1970.
12. Comolet R., "Mécanique Expérimentale des Fluides. Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux," Tome 1, 3^{ème} Edition, Masson, 1979.
13. Curtis A. R., "High-ordre Explicit Runge Kutta Formulae. Their Uses, and Limitations. Journal Institute Mathematical Applied, Vol. 16, PP. 35-55, 1975.
14. Démidovitch B. and Maron I., "Eléments de calcul numérique," Editions MIR, Moscow, Russia, 1987.
15. Eastman E. W., and Omar M. E., "Flow Fields About Highly Yawed Cones by the Inverse Method," AIAA Journal, Vol. 3, N° 9, PP. 1782-1784, 1965.

16. Emanuel G., "Gasdynamic: Theory and Application," AIAA Educational Series, New York, 1986.
17. England R., "Error estimates for Runge-Kutta Type Solutions in Systems of Ordinary Differential Equations," Computer Journal, Vol ; 12, PP. 166-170, 1969.
18. Ferri A., "Supersonic Flow Around Circular Cones at Angles of Attack," NACA Rep. 1045, 1951. (Supersedes NACA TN 2236.)
19. Fletcher C. A. J. "Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories," Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
20. Goldsmith E. L. and Seddon J., "Intake Aerodynamics," Blackwell Science, Second Edition, 1999.
21. Gonidou R., "Supersonic Flows Around Cones at Incidence," NASA TT F-11,473, 1968.
22. Hord R. A., "An Approximate Solution for Axially Symmetric Flow Over a Cone With an Attached Shock Wave," NACA TN 3485, 1955.
23. Iserles A., "A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations," [Cambridge University Press](#), 1996.
24. Jones D. J., "Numerical Solution of the flow field for conical bodies in a supersonic stream," National Research Council of Canada, Aeronautical Report, LR-507, Ottawa, 1968.
25. Jones D. J., "Tables of Inviscid Supersonic Flow About Circular Cones at Incidence $\gamma = 1.4$," AGARDograph 137, Pts. I and 11, Nov. 1969.
26. Kenneth E. T., "Computation of thermally perfect properties of oblique shock waves," NASA CR-4749, 1996.
27. Kenneth E. T., "Computation of thermally perfect oblique shock waves properties," AIAA-97-0868, 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Aerospace Sciences Meetings, 06-09 January 1997.
28. Klunker E. B., South J. C. Jr. and Ruby M. D., "Calculation of nonlinear conical flows by the method of lines," NASA TR R-374, 1971.
29. Kopal Z., "Tables of Supersonic Flow Around Cones," Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineering Tech. Report No. 1, Cambridge, Mass., 1947.

30. Kopal Z., "Tables of Supersonic Flow Around Cones of Large Yaw," Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineering, Tech. Report No. 5, Cambridge, Mass., 1949.
31. Luther H. A., "Further explicit fifth-order Runge-Kutta formulas," SIAM Review, Vol. 8, PP. 374-380, 1966.
32. Maccoll J. W., "The conical shock wave formed by a cone moving at high speed," Proceedings of the Royal Society of London A, N° 159, PP. 459-472, 1937.
33. Maslen S. H., "Supersonic Conical Flow," NACA TN 2651, 1952.
34. McBride B. J., Gordon S. and Reno M. A., "Coefficients for Calculating Thermodynamic and Transport Properties of Individual Species," NASA TM 4513, 1993.
35. McBride B. J., Gordon S. and Reno M. A., "Thermodynamic Data for Fifty Reference Elements," NASA TP-3287, January 1993.
36. Mauger F. E., "Steady Supersonic Flow Past Conical Bodies," A.R.D.E. Rep. (B)3/60, Brit. War Office, May 1960.
37. Merzbach U. C. and Boyer C. B., "A history of mathematics," John Wiley and sons., 3rd edition, 2011.
38. Moretti G., "Inviscid Flowfield About a Pointed Cone at an Angle of Attack," AIAA J., Vol. 5, N° 4, PP. 789-791, 1967.
39. Mouris K., "Mathematical thought from ancient to modern times," Vol. 1, Oxford university press, 1972.
40. Ndefo D. E., "A Numerical Method for Calculating Steady Unsymmetrical Supersonic Flow Past Cones," Rep. No. AS-69-11 (AFOSR Grant 268-68), U.S. Air Force, May 1969. (Available from DDC as AD 691 270.)
41. Neice M. M., "Table and Charts of Flow Parameters Across Oblique Shocks," NACA TN 1673, 1948.
42. Newton L. G. and Randall M., "Thermodynamics," 2nd Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
43. Oosthuisen P. H. and Carscallen W. E., "Compressible Fluid Flow," Mc Graw Hill, New York, 1997.
44. Parker V. B., Wagman, D. D., and Evans, W. H., "Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties," NBS TN 270-6, 1971.

45. Peterson C. R. and Hill P. G., "Mechanics and Thermodynamics of Propulsion," Addison-Wesley Publishing Company Inc., New York, USA, 1965.
46. Rakich J. V., "A Method of Characteristics for Steady Three-Dimensional Supersonic Flow With Application to Inclined Bodies of Revolution," NASA TN D-5341, 1969.
47. Ralston, A. and Rabinowitz A., "A First Course in Numerical Analysis," McGraw Hill Book Company, 1985.
48. Raviart P. A. et Thomas J. M., "Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles," Masson, 1983.
49. Rosser J. B., "A runge-Kutta for All Seasons," SIAM Rev., Vol. 9, PP. 417-452, 1967.
50. Simon W. .E. and Walter A., "Approximations for Supersonic flow over cones," AIAA Journal, Vol. 01, PP. 1696-1698, 1963.
51. Sims J. L., "Tables for Supersonic Flow Around Right Circular Cones at Zero Angle of Attack," NASA SP-3004, 1964.
52. South J. C. Jr., "Application of the Method of Integral Relations to Supersonic Nonequilibrium Flow Past Wedges and Cones," NASA TR R-205, 1964.
53. South J. C. Jr. and Klunker E. B., "Methods for Calculating Nonlinear Conical Flows. Analytic Methods in Aircraft Aerodynamics," NASA SP-228, 1970, PP. 131-155, Discussion, PP. 156-158, 1970.
54. Stoer J. and Burlisch B., "Introduction to Numerical Analysis," text in Applied Mathematics, 12, Springer, 3rd Edition 2002.
55. Stocker P. M. and Mauger F. E., "Supersonic Flow Past Cones of General CrossSection," Journal of Fluid Mechanics, Vol. 13, N° 3, PP. 383-399, 1962.
56. Stone A. H., "On the Supersonic Flow Past a Slightly Yawing Cone," Part 1. Journal of Mathematics and Physics, Vol. 27, No. 1, PP. 67-81, 1948.
57. Sutton G. P. and Biblarz O., "Rocket Propulsion Elements," 8^{ème} édition, John Wiley and Sons., 2010.
58. Taibi H., "Ecoulement supersonique à haute température autour d'un dièdre," [dissertation] Mémoire de Magister, Department of Aeronautics, Faculty of Technology, University of Blida 1, January 2011, Supervisor Toufik Zebbiche.

59. Tatum K. E., "Computation of Thermally Perfect Oblique Shock Wave Properties," 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, AIAA-97-0868, 1997.
60. Thompson A. P., "Compressible Fluid Dynamics," McGraw-Hill Company, 1995.
61. Van Wylen G. J., "Fundamentals of classical thermodynamics," John Wiley and Sons, Inc, 1973.
62. Verner J. H., "Explicit Runge-Kutta pairs with lower stage order, Numerical Algorithms," Vol. 65, N° 03, PP. 555-577, 2014.
63. Witte D. W., Tatum K. E., and Williams S. B., "Computation of Thermally Perfect Compressible Flow Properties," AIAA-96-0681, January 1996.
64. Woods B. A., "The Supersonic Flow Past an Elliptic Cone," Aeronaut. Quart., VO~. XX, pt. 4, PP. 382-404, 1969.
65. Yahya S. M., "Gas tables for compressible flow calculation," Fifth edition, New Age International Publishers, New Delhi, 2006.
66. Zucro M. J. and Hoffman J. D., "Gas Dynamics," Vol. 1 and 2, Wiley, New York, 1976.
67. Zebbiche T. and Boun-jad M., "Numerical quadrature for the Prandtl—Meyer function at high temperature with application for air," Thermophysics and Aeromechanics, Vol. 19, No. 3, PP. 381-384, 2012.
68. Zebbiche T. and Youbi Z., "Effect of stagnation temperature on the supersonic flow parameters with application for air in nozzles," The Aeronautical Journal, Vol. 111, N° 1115, PP. 31–40, 2007.
69. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Flow Parameters at High Temperature. Application for Air in nozzles," German Aerospace Congress 2005, DGLR-2005-0256, 26-29 Sep. 2005, Friedrichshafen, Germany.
70. Zebbiche T., "Effect of Stagnation Temperature on the Normal Shock Wave," International Journal of Aeronautical and Space Sciences, Vol. 10, N° 01, PP. 1-14, 2009.
71. Zebbiche T. "Stagnation temperature effect on the Prandtl Meyer function," AIAA Journal. Vol. 45, N° 4, PP. 952–954, 2007.
72. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Two-Dimensional Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," AIAA-2006-4599,

- 42st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Sacramento, California, July 09-12, 2006.
73. Zebbiche T., “New Generalized Form of the Prandtl Meyer Function. Application for Air at high Temperature,” AIAA-2006-3674, 25th Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, California, 5-8 Jun 2006.
74. Zebbiche T., “Prandtl Meyer Function at High Temperature. Application for Air,” Proceeding of the 4th Meeting of the Saudi Physical Society, 11-12 November 2008, King Abdulaziz City for Sciences & Technology, Riyadh, Saudi Arabia, 2008.
75. Zebbiche T. and Youbi, Z., “Supersonic two-dimensional minimum length nozzle design at high temperature. Application for air,” Chinese Journal of Aeronautics, Vol. 20, N° 1, PP. 29–39, 2007.
76. Zebbiche T., “Stagnation temperature effect on the supersonic axisymmetric minimum length nozzle design with application for air,” Advances in Space Research, Vol. 48, PP. 1656–1675, 2011.

Les travaux publiés dans le cadre de cette thèse

[Elaichi Toufik](#) and Zebbiche Toufik, “Stagnation temperature effect on a conical shock with applications for air,” Chinese Journal of Aeronautics, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2018.02.009>, In press, Accepted 31 July 2017, Available online 20 February 2018, 2018.

Fiche Technique du Journal de notre publication

Titre de Journal : **Chinese Journal of Aeronautics**

ISSN : **1000-9361** (version imprimée)

Impact Factor: **1.307** (2016 Journal citation reports, Thomson Reuters).

DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cja.2018.02.009>

Indexation : **Web Of Science (Thomson Reuters) Catégorie A.**

Organisme de publication : **Chinese Society of Aeronautics and Astronautics & Beihang University (China).**

URL: <https://www.journals.elsevier.com/chinese-journal-of-aeronautics>