

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Blida

Département Aéronautique

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur
d'état en aéronautique
Option : Structure

THEME

**Etude Thermo-élastique des Plaques
Composites avec la prise en Compte
de l'Effet du Cisaillement Transverse.**

Soutenu le 21 Juin 2006 au Département d'Aéronautique.

Présenté par :

- M' BENMESMOUDI RACHID.
- M' CAMARA OUMAR.

Proposé par :

M^{lle} BENKHEDDA AMINA

ANNEE UNIVERSITAIRE 2005/2006

REMERCIEMENTS

Nous remercions Dieu tout puissant de nous avoir donné la force de mener à bien ce travail.

*Nous tenons à remercier notre promotrice, notre maître, Mlle **BENKHEDDA AMINA** pour tout son appui, mais aussi pour sa grande richesse scientifique et humaine, qu'elle nous a fait partagée durant ces mois et qui, sans lesquels nous ne pourrions achever ce travail aussi rapidement. La présente étude est le fruit de sa collaboration et de sa plus grande rigueur tant sur le plan scientifique que sur le plan de l'encadrement. Nous ne la remercierions jamais assez pour son aide précieuse et ses directives, notamment sur la façon d'appréhender et de résoudre les problèmes scientifiques.*

Nous remercions tous les professeurs du Département d'Aéronautique de Blida qui nous, ont très bien encadré pendant nos trois années de spécialisation et tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin pour la réalisation de notre projet.

Enfin, nous remercions très chaleureusement tous ceux qui nous sont chers : nos familles et nos amis et amies d'Algérie et du Mali et tous ceux qui ont été là pour nous soutenir et nous encourager.

BENMESMOUDI RACHID

CAMARA OUMAR

Promotion 2005-2006

Dédicaces

J'offre ce travail à :

- *Mes parents, à qui je dois mon existence,*
- *Ma famille surtout Mohamed pour leur soutien*

Et à mes amis:

- *Nour Islam et sa famille,*
- *Lakhal Hamza et sa famille,*
- *Sadak Belkacem et sa famille,*
- *Boudanie Abdelkader et sa famille,*
- *Trabelssi Mohamed amine et sa famille,*
- *Taalbi Ahmed Lamine et sa famille,*
- *Chef Boulama Radouane et sa famille,*
- *Abid Mohamed et Benadjmea Djamel,*
- *Bekar Mohamed et Mahboub Abdelmadjid,*
- *Megharbi Mostefa, Nasri Khalefa et Menasar Salim,*
- *Chena Farid, Boumedienne Omar et Barchi Faress*
- *Akabe Mohamed Amine, Achar Khalef et Djeda Billal*
 - *Boulama Ali,*
 - *Block "02" en Général,*
- *La deuxième promotion des IP 2000. particulièrement Talbi, Belatar, Grene, Nouh, Abdelli et Kadouche.*
- *Et à tout ceux qui m'aiment.*

BENMESMOUDI RACHID

SOMMAIRE

Résumé

Introduction Générale	01
Chapitre I : Généralités sur les Matériaux Composites.....	04
I.1. Définition.....	04
I.2. Caractéristiques générales	04
I.3. Définitions des principaux constituants.....	04
I.4. Classification des matériaux composites	05
I.5. différentes familles des matériaux composites (schémas).....	06
I.6. Matériaux Orthotropes	07
I.7. Les repères	07
I.8. Microanalyse.....	08
I.9. Lois De Comportement	09
I.10. Matériaux composites bidirectionnels	10
I.11. Contraintes Planes Généralisées	14
I.12. Conclusion.....	15
Chapitre II : Modélisation Mécaniques des Plaques Épaisses.....	18
II.1. Théorie des plaques épaisses.....	18
II.2. Classification des plaques	18
II.3. Théorie classique et limitation	18
II.4. HSDT	19
II.5. Champs de déplacement	20
II.6. Champ des déformations	21
II.7. Champ des Contraintes	24
II.8. Expression des résultantes et moments	26
II.9. Equations du comportement mécanique d'un stratifié	32
II.10. Conclusion	35
Chapitre III : Modélisation Thermiques des Plaques Epaisses.....	36
III.1. Modélisation du comportement thermo-élastique	36
III.2. Modèles utilisés pour le prédimensionnement thermique	36
III.3. Comportement thermoélastique	36
III.4. L'équation constitutive thermoélastique	44
III.5. Modélisation de température.....	46
III.6. Conclusion.....	47
CHAPITRE IV : Code De Calcul et Résultats.....	48
IV.1. Organigrammes pour les plaques minces	48
IV.2. Simulation des Plaques Minces.....	52
IV.3. Organigrammes des plaques épaisses	62
IV.4. Simulation Mécanique des Plaques Epaisses.....	67
IV.5. Simulation thermique des Plaques Epaisses	79

IV.6. Conclusion.....	113
Conclusion Générale.....	114
Références bibliographiques	
Annexes	

Table des figures

<i>Figure (I.1)</i> : Les différentes familles de renfort.	06
<i>Figure (I.2)</i> : Les différentes familles de matrice	06
<i>Figure (I.3)</i> : Le repère local (L, T).	07
<i>Figure (I.4)</i> : Le repère global (X, Y).	07
<i>Figure (II.1)</i> : présentation des couches de stratifié.	19
<i>Figure (II.2)</i> : Déformation dans un plan.	21
<i>Figure (II.3)</i> : Contraintes dans un élément cubique.	25
<i>Figure (IV.1)</i> : Organigramme de calcul des contraintes et déformations Mécaniques (TCS).	49
<i>Figure (IV.2)</i> : Organigramme de calcul des contraintes et déformations thermiques sans chargement mécanique.	51
<i>Figure (IV.3)</i> : Stratifié $[30^\circ/-15^\circ/-30^\circ/15^\circ]$.	52
<i>Figure (IV.4)</i> : Déformations mécaniques du stratifié $[15^\circ/-30^\circ/-15^\circ/30^\circ]$. $[1.5/1/1.5/1]$ (TCS).	55
<i>Figure (IV.5)</i> : contraintes mécaniques du stratifié $[15^\circ/-30^\circ/-15^\circ/30^\circ]$. $[1.5/1/1.5/1]$ (TCS).	56
<i>Figure (IV.6)</i> : Stratifié $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$.	57
<i>Figure (IV.7)</i> : Déformations thermiques du $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ $[1/1/1]$ (ATRS).	61
<i>Figure (IV.8)</i> : Contraintes thermiques du $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ $[1/1/1]$ (ATRS).	62
<i>Figure (IV.9)</i> : Organigramme de calcul des contraintes et déformation Mécaniques (HSDT).	64
<i>Figure (IV.10)</i> : Organigramme de calcul des contraintes et déformations thermiques sans chargement mécanique.	66
<i>Figure (IV.11)</i> : Stratifié à quatre couches de l'application.	67
<i>Figure (IV.12)</i> : mécaniques du stratifié $[15^\circ/-30^\circ/-15^\circ/30^\circ]$. $[1.5/1/1.5/1]$ HSDT.	68
<i>Figure (IV.13)</i> : Contraintes mécaniques du stratifié $[15^\circ/-30^\circ/-15^\circ/30^\circ]$. $[1.5/1/1.5/1]$ HSDT.	69
<i>Figure (IV.14)</i> : Déformations mécaniques du stratifié dans le plan XY HSDT.	72
<i>Figure (IV.15)</i> : Contraintes mécaniques du stratifié dans le plan XY HSDT.	74
<i>Figure (IV.16)</i> : Contraintes mécaniques du stratifié dans le plan XY HSDT des plaques épaisses.	76
<i>Figure (IV.17)</i> : Contraintes mécaniques du stratifié dans le plan XY HSDT des plaques épaisses.	78
<i>Figure (IV.18)</i> : Contraintes résiduelles dans le stratifié $[0/90/0/90/0/90]$ dans le plan XY de coordonnées (6,3,3/2).	81
<i>Figure (IV.19)</i> : Contraintes résiduelles dans le stratifié $[0/90/0/90/0/90]$ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0) .	82
<i>Figure (IV.20)</i> : Contraintes résiduelles dans le stratifié $[0/90/0/90/0/90]$ dans le plan XY de coordonnées (6,3,3/2).	84
<i>Figure (IV.21)</i> : Contraintes résiduelles dans le stratifié $[0/90/0/90/0/90]$ dans le plan (X, Y) de coordonnées (0,0,0).	85
<i>Figure (IV.22)</i> : Contraintes résiduelles dans le stratifié $[0/90/0/90/0/90]$ dans le plan XY de coordonnées (15,15/2,3/2).	86
<i>Figure (IV.23)</i> : Contraintes résiduelles dans le stratifié $[0/90/0/90/0/90]$ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).	87

<i>Figure (IV.24) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan XY de coordonnées (30,15,3/2).</i>	88
<i>Figure (IV.25) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).</i>	89
<i>Figure (IV.26) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan XY de coordonnées (6,3,3/2).</i>	91
<i>Figure (IV.27) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).</i>	92
<i>Figure (IV.28) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-45/45]₃ dans le plan XY de coordonnées (6,3,3/2).</i>	93
<i>Figure (IV.29) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-45/45]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).</i>	94
<i>Figure (IV.30) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [25/30/45]_s dans le plan XY de coordonnées (6,3,3/2).</i>	96
<i>Figure (IV.31) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [25/30/45]_s dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).</i>	97
<i>Figure (IV.32) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (30,30,3/2).</i>	98
<i>Figure (IV.33) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).</i>	98
<i>Figure (IV.34) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (30,30,3/2).</i>	99
<i>Figure (IV.35) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).</i>	100
<i>Figure (IV.36) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (30,30,3/2).</i>	100
<i>Figure (IV.37) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).</i>	101
<i>Figure (IV.38) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (30,30,3/2).</i>	102
<i>Figure (IV.39) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).</i>	102
<i>Figure (IV.40) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (15/2,15/4,3/2).</i>	103
<i>Figure (IV.41) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).</i>	104
<i>Figure (IV.42) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (15/2,15/2,3/2).</i>	105
<i>Figure (IV.43) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).</i>	105
<i>Figure (IV.44) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (15/2,15/2,3/2).</i>	106
<i>Figure (IV.45) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).</i>	107
<i>Figure (IV.46) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (15/2,15/2,3/2).</i>	107
<i>Figure (IV.47) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).</i>	108
<i>Figure (IV.48) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XY de coordonnées (15/2,15/2,3/2).</i>	109
<i>Figure (IV.49) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).</i>	110

<i>Figure (IV.50) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (15/2,15/2,3/2).</i>	109
<i>Figure (IV.51) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (0,0,0).</i>	110
<i>Figure (IV.52) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (15/2,15/2,3/2).</i>	111
<i>Figure (IV.53) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (0,0,0).</i>	112
<i>Figure (IV.54) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (15/2,15/4,3/2).</i>	112
<i>Figure (IV.55) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (0,0,0) .</i>	113

Liste des Tableaux

Tableau (IV.1) : Conditions mécanique de la simulation (1) TCSM.....	52
Tableau (IV.2) : Conditions de chargement de la simulation (2) TCST.....	57
Tableau (IV.3) : Données du matériau de la simulation (1) HSDTM.....	67
Tableau (IV.4) : Conditions du chargement de la simulation (1) HSDTM.....	67
Tableau (IV.5) : Données du matériau T300/5208.....	70
Tableau (IV.6) : Conditions du 1 ^{er} chargement de T300/5208.....	71
Tableau (IV.7) : Conditions du 2 ^{ème} chargement de T300/5208.....	75
Tableau (IV.8) : Conditions du 3 ^{ème} chargement de T300/5208.....	77
Tableau (IV.9) : Données du matériau de la simulation (2) HSDTT.....	79
Tableau (IV.10) : Conditions du 1 ^{er} chargement de la simulation (2) HSDTT.....	79
Tableau (IV.11) : Conditions du 2 ^{ème} chargement de la simulation (2) HSDTT.....	82

Nomenclature

- (L, T) : Repère local de stratifié.
- (X, Y) : Repère global du stratifié.
- E_f^l : Module d'élasticité longitudinale de fibre.
- E_f^t : Module d'élasticité transversale de fibre.
- G_f : Module de glissement de fibre.
- ν_f : Coefficient de poisson de fibre.
- ρ_f : masse volumique de fibre de matrice.
- α_f : Coefficient de dilatation thermique de fibre.
- E_m : Module d'élasticité longitudinale de matrice.
- G_m : Module d'élasticité transversale de matrice.
- ν_m : Module de glissement de matrice.
- ρ_m : Coefficient de poisson de matrice.
- α_m : Coefficient de dilatation thermique de matrice
- V_f : Fraction de fibre en volume.
- V_m : Fraction de matrice en volume.
- G_{LT} : Module de cisaillement longitudinal.
- G_{LT} : Module de cisaillement transversal.
- G_{IT} : Module de cisaillement latéral.
- ν_{LT} et ν_{TL} : coefficient de poisson.
- ρ : Masse volumique.
- E_1 : Module d'élasticité longitudinale.
- E_2 : Module d'élasticité transverse.
- ν_{12} : Coefficient de poisson.
- G_{12} : Module de cisaillement.

- G_{13} : Module de cisaillement.
- G_{23} : Module de cisaillement.
- n : Nombre du plis ou de couches.
- h_k : Cote du pli d'ordre k .
- e_k : Epaisseur du pli k .
- M : Point matériel.
- u_0 : Déplacement du point M suivant l'axe x .
- v_0 : Déplacement du point M suivant l'axe y .
- w_0 : Déplacement du point M suivant l'axe z .
- θ_x, θ_y : Angle de rotation respectivement dans les directions x et y .
- α_x, α_y : Angle de gauchissement respectivement dans les directions x et y .
- θ : angle des empilements.
- c : $\cos\theta$
- s : $\sin\theta$
- $[T]$: Matrice de transition qui relie les contraintes dans le repère local avec celles du repère global.
- $[T']$: Matrice de transition qui relie les déformations dans le repère local avec celles du repère global.
- Q_{ij}, C_{ij} : Constantes de rigidité dans le repère (L, T) .
- Q'_{ij}, C'_{ij} : Constantes de rigidité dans le repère (x, y) .
- $[Q]$: Matrice de rigidité dans le repère (L, T) .
- $[Q']$: Matrice de rigidité dans le repère (x, y)
- $[S]$: Matrice de flexibilité ou matrice souplesse.
- S_{ij} : Constantes de souplesse dans le repère (L, T) .
- S'_{ij} : Constantes de souplesse dans le repère (x, y) .
- $[A]$: Matrice de rigidité en membrane.
- $[B]$: Matrice de couplage membrane- flexion -torsion.
- $[C]$: la matrice de couplage membrane –flexion –torsion et gauchissement.
- $[D]$: Matrice de rigidité en flexion.
- $[E]$: la matrice de couplage membrane –flexion –torsion et gauchissement.
- $[F]$: la matrice de rigidité en gauchissement.

- [A'] : la matrice de rigidité en cisaillement transversal.
- [D'] : la matrice de couplage en cisaillement transversal et gauchissement cisaillement.
- [E'] : la matrice de rigidité en gauchissement-cisaillement.
- N_x, N_y : Efforts résultant respectivement dans la direction x et y.
- M_x, M_y : Moments fléchissant respectivement dans la direction x et y.
- N_{xy} : Efforts de cisaillement dans le plan x y.
- M_{xy} : Moments de torsion dans le plan xy.
- $\sigma(M)$: Tenseur des contraintes.
- $\varepsilon(M)$: Tenseur des déformations.
- $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0$: Déformation en membrane.
- $\varepsilon_{xx}^f, \varepsilon_{yy}^f, \gamma_{xy}^f$: Déformations en flexion et en torsion.
- $\varepsilon_{xx}^w, \varepsilon_{yy}^w, \gamma_{xy}^w$ déformations en gauchissement.
- γ_{xz}, γ_{yz} : déformations en cisaillement et cisaillement-gauchissement.
- $\gamma_{xz}^s, \gamma_{yz}^s$: déformations en cisaillement
- $\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT}$: Contraintes normales, suivant (L, T) et dans le plan (L,T).
- $\sigma_{LT'}, \sigma_{TT'}$: Contraintes de cisaillement dans le plan (L, T') et dans le plan (T, T').
- $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$: Contraintes normales respectivement suivant les axes x, y et le plan (x, y).
- σ_{xz}, σ_{yz} : Contraintes de cisaillement dans le plan (X, Z) et dans le plan (Y, Z).
- $\sigma_{LT'}, \sigma_{TT'}$: Contraintes de cisaillement dans le plan (L, T') et dans le plan (T, T').
- $\varepsilon_L, \varepsilon_T, \gamma_{LT}$ Déformations linéaires respectivement suivant les axes L, T et le plan (L, T).
- $\gamma_{LT'}, \gamma_{TT'}$: Déformations de cisaillement dans le plan (L, T') et dans le plan (T, T').
- $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}$: Déformations linéaires respectivement suivant les axes X, y et le plan (x, y).
- γ_{xz}, γ_{yz} : Déformations de cisaillement dans le plan (X, Z) et dans le plan (Y, Z).
- ΔT : La variation de température.
- T^+ : Température de la face supérieure.
- T^- : Température de la face inférieure.
- a : longueur du stratifié.
- b : Largeur du stratifié.

- h : hauteur du stratifié.
- α_i : Coefficients de dilatation thermique.
- $\alpha_L, \alpha_T, \alpha_{T'}$: Coefficient de dilatation thermique dans le repère (L, T).
- $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$: Coefficients de dilatations thermiques dans le repère (x, y).
- α_{xz}, α_{yz} : Coefficients de dilatations thermiques dans les plans (X,Z) et (Y,Z)
- e_L, e_T, e_{LT} : Les déformations thermiques, dans les axes principaux (L, T)
- $e_{LT'}, e_{TT'}$: Les déformations thermiques, dans les axes principaux (L, T') et (T, T')
- e_x, e_y, e_{xy} : Les déformations thermiques, dans les axes du stratifié x et y
- e_{xz}, e_{yz} : Les déformations thermiques, dans les axes du stratifié (X, Z) et (Y, Z)
- t_k : épaisseur de la couche k.
- $[M']$: Moments thermiques.
- $[N']$: Forces thermiques.
- $[P']$: résultantes de gauchissement thermique.
- $[R']$: résultantes de cisaillement transversal thermique.
- $[Q']$: résultantes de cisaillement-gauchissement thermique.
- T_0 : température de l'envenimement.
- T_p : température de polymérisation.
- Z_k : coordonnée du point sur l'axe Z
- HSDT: Higher order Shear Deformation Theory.
- HSDTM: Higher order Shear Deformation Theory-Mécanique
- HSDTT: Higher order Shear Deformation Theory-Thermique
- TCS: Théorie Classique Des Stratifiés.
- TCSM: Théorie Classique Des Stratifiés - Mécanique
- TCST: Théorie Classique Des Stratifiés- Thermique
- FSDT: First order Shear Deformation Theory

Résumé

Résumé :

Dans ce travail les comportements mécaniques et thermoélastiques des structures composites en plaques épaisses ont été observés. La modélisation est basée sur la théorie de déformations d'ordre supérieur qui adopte un schéma de déformations de type parabolique.

Un code de calcul en FORTRAN a été élaboré. Ce code comporte quatre sous programmes qui permettent de calculer les contraintes et déformations.

Abstract

In this work the mechanical and thermal behaviour of thick composites laminated are observed. The modelisation is based on the Higher order Shear Deformation Theory (HSDT) that use a parabolic schema for deformations. We established a code in FORTRAN which contain four programs that give stresses and strains.

Introduction

Générale

INTRODUCTION GENERALE

Le progrès technologique est le résultat d'un développement continu de types de matériaux structuraux et de la connaissance de leurs propriétés. Un des résultats de la technologie moderne est le développement et l'application des matériaux composites, qui devient un besoin de plus en plus croissant dans l'industrie aérospatiale grâce à l'avantage de légèreté, de rigidité, de gain de masse et de la grande résistance à la fatigue.

Le succès des matériaux composites provient de la possibilité d'obtenir des propriétés très diverses en fonction des caractéristiques des phases constituantes. La caractéristique effective d'un matériau composite ne dépend pas seulement des propriétés physiques de ses constituants, mais elle est également déterminée par la microgéométrie d'un tel système hétérogène. Il s'agit principalement des formes d'inclusions, de leurs répartitions dans la matrice, de leurs orientations par rapport aux contraintes externes (forces mécaniques, forces thermiques, ...), et de leurs fractions volumiques (concentration). Ainsi, la caractéristique effective du matériau est une fonction très complexe, dépendant de tous ces facteurs et souvent difficile à décrire.

Les critères de choix des matériaux pour des applications telles que les pièces ou les structures aéronautiques, sont étroitement liés à une parfaite connaissance de leurs propriétés à long terme et à leur spécificité vis-à-vis de l'endommagement, dans leur environnement réel d'utilisation. Les problèmes de ces structures composites c'est qu'elles posent souvent une complexité qui est due au couplage entre les différents modes de déformations, cet aspect est plus dominant dans les plaques épaisses. Plusieurs modèles sont proposés pour déterminer les déformations en cisaillement transversales et les contraintes.

Dans l'espace des structures la température varie à cause de la conduction et à cause du flux de chaleur solaire. Les structures sont alors régulièrement exposées à des variations de température dans le temps à travers l'échauffement et le refroidissement, par exemple au cours du vol à des vitesses supersoniques un échauffement local des extrémités des ailes et dans les régions à courbures élevées se produit. En conséquence la prédiction du comportement thermoélastique des structures composites est indispensable lors de la conception.

Plusieurs investigations se sont multipliées afin de mettre à la disposition des utilisateurs des modèles tentant de prendre en compte tous ces phénomènes lors de toute tentative de modélisations :

- Van-Karman (1910) a mis au point la théorie des grands déplacements, qui intéresse la famille des plaques minces. Kirchoff proposa ensuite un schéma de degré un pour les déformations par la théorie classique des stratifiés pour les plaques minces.
- En (1944-1945), E-Reissner a mis au point l'effet du gauchissement de la section il a proposé une théorie simple des plaques épaisses, en introduisant l'effet du cisaillement transversal à travers le complément d'énergie du à cet effet, et qui a été complété en 1951 par Mindlin en dynamique ou il a pris en compte l'effet de cisaillement transversal avec un facteur de correction « K » et l'inertie de rotation.
- Nelson (1974), et Lakh (1977) ont contribué à l'élaboration de modèles pour plaques épaisses (1977).
- En 1993 JN Reddy et DH Robbins ont élaboré les théories et les modèles informatiques pour les composites stratifiés.
- En 1997 JN Reddy propose un autre modèle permettant de prendre en considération le cisaillement des composites épais.
- Tabakov (2003) et T. Pervez (2005), ont travaillé sur la HSDT (Higher order Shear Deformation Theory).

BUT

Le but de notre étude est de :

1. mettre au point un modèle thermoélastique pour les plaques composites, qui nous permettra de faire l'analyse mécanique et thermoélastique des structures en plaques.
2. L'élaboration d'un code numérique en fortran qui permettra de faire l'analyse de ces plaques et par la suite des prévisions

Pour l'élaboration analytique des modèles nous utiliserons un schéma de déformations de cisaillement transversale de degré supérieur de forme parabolique HSDT (Higher order shear deformation theory) [3], qui nous fera aboutir dans un premier temps aux modèles du comportement mécanique, puis par la suite nous utiliserons un champs de température suivant les trois directions de l'espace pour parvenir au modèle thermoélastique.

ORGANISATION DU MANUSCRIT

Ce mémoire a été organisé en quatre chapitres.

- Dans le premier chapitre on présente des définitions élémentaires essentielles sur les matériaux composites.
- Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de types de plaques à étudier (plaques épaisses) puis à leurs modélisations mécaniques, c'est-à-dire: les différentes équations mathématiques (déformations, déplacements, lois de comportement,.....).
- Dans le troisième chapitre, on va présenter les caractéristiques de la modélisation thermique des plaques épaisses.
- Dans le quatrième chapitre, nous présentons le code de calcul avec les différents sous programmes qui nous permettront de faire l'analyse mécanique et thermique des plaques épaisses en composites à fibres. Nous exposons par la suite les résultats et les commentaires, puis nous terminerons par une conclusion.

Généralités

Sur les Matériaux

Composites

Chapitre I

Généralités sur les Matériaux Composites

Avant de procéder à la modélisation macroscopique des plaques composites, il est nécessaire de connaître les éléments de base et les outils indispensables à toute modélisation de ce milieu anisotrope, [2], [4], [8].

I.1. Définition :

Dans un sens large, le mot « composite » signifie « constitué de deux ou plusieurs parties différentes ». Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont les performances sont supérieures à celles des composantes prises séparément.

I.2. Caractéristiques générales :

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général en une ou plusieurs phases discontinues, réparties dans une phase continue. La phase continue est appelée matrice et la phase discontinue est appelée renfort ou matériau renforçant.

I.3. Principaux constituants :

I.3.1. Renforts :

I.3.1.1. Définition :

Les renforts assurent la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites, ils se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donne au matériau un effet directif.

I.3.1.2. Formes et types de fibres :

C'est des filaments décomposés en fil de base et en mèche puis en demi-produits comme la verranne, les rowings (mèches de fils sans torsion, directs, assemblés, bouclés, ensimés), la sillionne (fils de 102 à 408 filaments ensimés), les fils coupés (de base, textiles, texturés, coupés, broyés, de 3 à 5 mm de long, ensimés), qui sont tous des fibres de tissage mise en oeuvre par compression et cuisson (Polymérisation).

I.3.1.3. Conditionnement des renforts à base de fibres :

L'assemblage des fibres utilisées lors de la fabrication du matériau constitue le « renfort » ; celui-ci peut être :

- **Unidimensionnel** : fibres unidirectionnelles, c'est-à-dire orientées suivant une même direction dans l'espace.
- **Bidimensionnel** : surface tissées (tissus).
- **Tridimensionnel** : volumes constitués par des fibres orientées suivant plusieurs directions.

I.3.2. Matrice :

I.3.2.1. Définition :

La matrice lie les fibres entre elles, répartie les efforts (résistance à la compression ou à la flexion), assure la protection chimique et permet de donner la forme désirée au produit final. Elle est généralement de nature polymérique.

I.4. Classification des matériaux composites :

Les composites peuvent être classés suivant la forme et la nature des composantes.

I.4.1. Classification suivant la forme des constituants :

Les composites sont classés en deux grandes classes en fonction de la forme des constituants : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

I.4.1.1. Composites à fibres :

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous formes de fibres continues, soit sous formes de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes,..... etc.

L'arrangement des fibres et leurs orientations, permettent de moduler à la plaque, les propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant des matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. Le concepteur possède donc là un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécaniques et physiques en jouant sur :

- La nature des constituants,
- La proportion des constituants,
- L'orientation des fibres.

1.4.1.2. Composites à particules :

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particule. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance de l'abrasion, la diminution du retrait,.....etc. Dans nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques.

Le choix de l'association matrice particules dépend des propriétés souhaitées.

1.5. Les différentes familles des matériaux composites (schémas) :

1.5.1. Différentes familles de renfort :

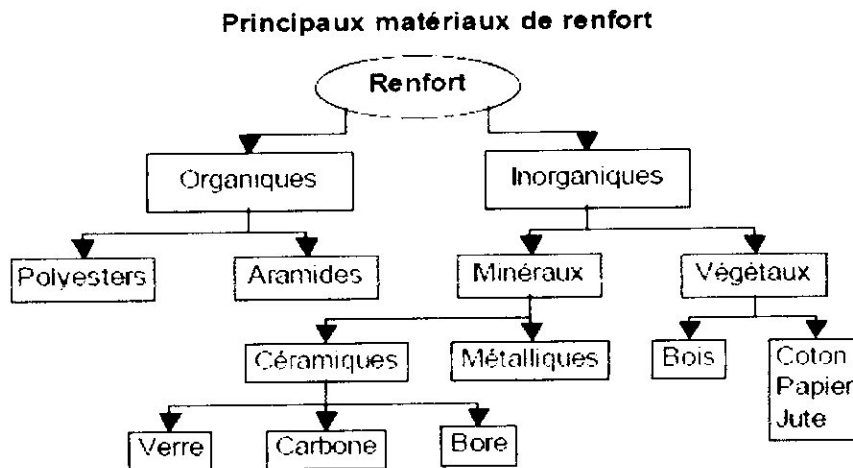


Figure (I.1) : Les différentes familles de renfort.

1.5.2. Différentes familles de matrice :

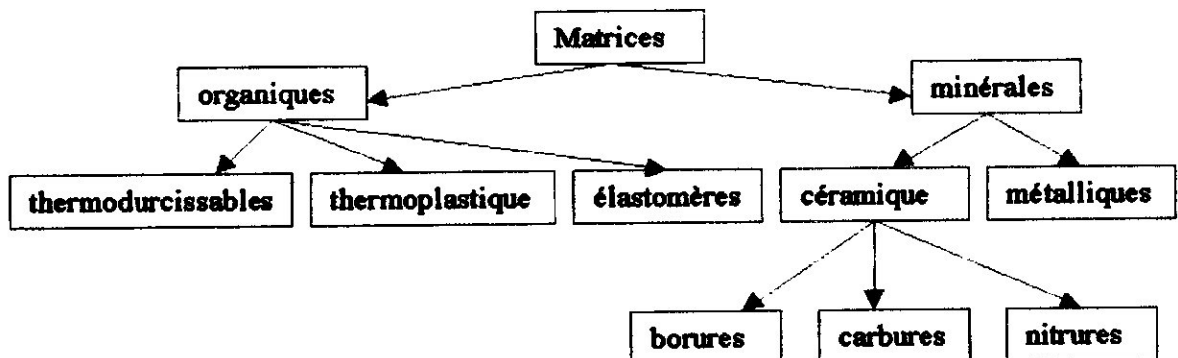


Figure (I.2) : Les différentes familles de matrice.

I.6. Matériaux Orthotropes :

Un matériau orthotrope est un matériau qui possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième.

I.7. Les repères :

I.7.1. Le repère principal (LT) :

Le repère principal (LT) est lié à chaque couche de composite, la direction L est parallèle à la fibre c'est la « direction longitudinale » et la direction normale qui est perpendiculaire à la direction de fibre est appelée « direction transversale ».

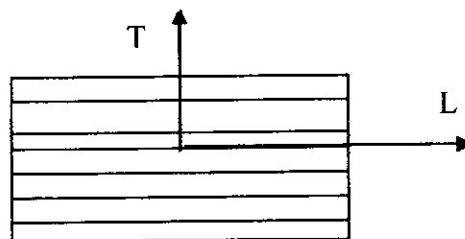


Figure (I.3) : Le repère local (L, T).

I.7.2. Repère du stratifié (XY) :

Les stratifiés étant élaborés par couches suivant des directions de fibres décalées d'une couche à une autre d'un angle θ , il est nécessaire de rapporter le comportement élastique de chaque couche à un système d'axe noté XYZ appelé repère de stratifié.

θ est l'angle entre le repère (L, T) et le repère (X, Y).

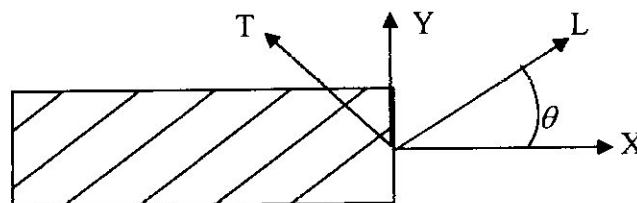


Figure (I.4) : Le repère global (X, Y).

I.8. Microanalyse :

L'analyse des matériaux composites à l'échelle microscopique, met en évidence les caractéristiques élémentaires des constituants (fibre et matrice).

I.8.1. Fraction de fibre en volume :

$$V_f = \frac{\text{volume des fibres}}{\text{volume total}} \quad (I.1)$$

I.8.2. Fraction de matrice en volume :

$$V_m = \frac{\text{volume de la matrice}}{\text{volume total}} \quad (I.2)$$

Ainsi, on aura :

$$V_f + V_m = 1 \quad (I.3)$$

I.8.3. Module de Young longitudinal E_l :

$$E_l = V_f E_f + V_m E_m \quad (I.4)$$

I.8.4. Module de Young transversal E_T :

$$E_T = E_m \left[\frac{1}{(1-V_f) + \frac{E_m}{E_f} V_f} \right] \quad (I.5)$$

I.8.5. Module de cisaillement longitudinal G_{LT} :

$$G_{LT} = G_m \left[\frac{1}{\frac{G_m}{G_f} V_f + (1-V_f)} \right] \quad (I.6)$$

I.8.6. Module de cisaillement longitudinal $G_{LT'}$:

$$G_{LT'} = G_m \left[\frac{1}{G_m V_f + (1-V_f)} \right] \quad (I.7)$$

I.8.7. Module de cisaillement longitudinal $G_{TT'}$:

$$G_{TT'} = \frac{E_T}{2(1+\nu_{TT'})} \quad (I.8)$$

1.8.8. Coefficient de poisson ν_{LT} et ν_{TL} :

$$\nu_{LT} = \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m \quad (I.9)$$

1.8.9. Masse volumique ρ :

D'après le principe de la loi de mélange, la masse volumique ρ du composite est définie par :

$$\rho = \frac{\text{masse total}}{\text{volume total}} \quad (I.10)$$

$$\rho = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (I.11)$$

1.8.10. le coefficient de dilatation thermique longitudinal α_L :

$$\alpha_L = \frac{\nu_f E_f \alpha_f + \nu_m E_m \alpha_m}{\nu_f E_f + \nu_m E_m} \quad (I.12)$$

1.8.11. le coefficient de dilatation thermique transversal α_T

$$\alpha_T = \nu_f (\alpha_f + \nu_f \nu_f) + \nu_m \alpha_m (1 + \nu_m) - \alpha_L (\nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m) \quad (I.13)$$

1.9. Lois de Comportement :

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois permettent de rendre compte au mieux les phénomènes observés.

1.9.1. Matrice de rigidité :

La matrice de rigidité décrivant le comportement élastique macroscopique du stratifié, est donnée par :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (I.14)$$

Les coefficients C_{ij} sont appelés les constantes de rigidité.

La matrice de rigidité $[C]$ est une matrice non singulière parce que les coefficients C_{ij} sont des valeurs physiques non nulles. Donc elle est inversible.

I.9.2. Matrice de flexibilité :

En introduisant la matrice inverse de la matrice de rigidité, la matrice S est appelée la matrice de flexibilité ou matrice de souplesse, et se présente sous la forme :

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (I.15)$$

$$\text{Avec} \quad S = C^{-1} \quad (I.16)$$

Les coefficients S_{ij} sont appelés constantes de flexibilité ou constantes de souplesse.

I.10. Matériaux composites bidirectionnels :

I.10.1. Relation d'élasticité dans un repère local :

La loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité C symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général sous une forme condensée.

Dans notre étude les matériaux composites sont bidirectionnels, l'équation d'élasticité se met sous la forme suivante :

$$\sigma = C \varepsilon \quad (I.17)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{ZZ} \\ \tau_{LZ} \\ \tau_{TZ} \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{ZZ} \\ \gamma_{LZ} \\ \gamma_{TZ} \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} \quad (I.18)$$

$$\varepsilon = S\sigma \quad (\text{I.19})$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{ZZ} \\ \gamma_{LZ} \\ \gamma_{TZ} \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{ZZ} \\ \tau_{LZ} \\ \tau_{TZ} \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} \quad (\text{I.20})$$

Avec $S = C^{-1}$ la matrice de compliance (ou de flexibilité), inverse de la rigidité.

S : c'est aussi la matrice de souplesse

I.10.2. Constantes de rigidité dans repère (L, T):

Les modules de l'ingénieur sont les modules d'Young, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement, ces modules sont mesurés dans des essais simples tels que des essais de traction biaxiale ou de cisaillement.

Ces modules sont liés aux constantes de rigidité, elles s'écrivent :

$$C_{11} = E_L + 4\nu_{LT}^2 K_L \quad (\text{I.21.a})$$

$$C_{12} = 2K_L \nu_{LT} \quad (\text{I.21.b})$$

$$C_{22} = G_{TT} + K_L \quad (\text{I.21.c})$$

$$C_{23} = -G_{TT} + K_L \quad (\text{I.21.d})$$

$$C_{66} = G_{LT} \quad (\text{I.21.e})$$

$$C_{44} = Q_{44} = G_{TT} \quad (\text{I.21.f})$$

$$C_{55} = Q_{55} = G_{LT} \quad (\text{I.21.g})$$

$$K_L = \frac{1}{2(S_{22} + S_{23} - 2\frac{S_{12}^2}{S_{11}})} \quad (\text{I.22})$$

I.10.3. Constantes de souplesse dans le repère (L, T) :

Les constantes de souplesse s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_L} \quad (a) & S_{12} &= -\frac{\nu_{LT}}{E_L} \quad (c) & S_{66} &= \frac{1}{G_{LT}} \quad (e) \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_T} \quad (b) & S_{23} &= -\frac{\nu_{TT}}{E_T} \quad (d) & S_{44} &= \frac{1}{Q_{44}} \quad (f) \\
 & & & & S_{55} &= \frac{1}{Q_{55}} \quad (g)
 \end{aligned} \tag{I.23}$$

I.10.4. Relation d'élasticité dans le repère (X, Y) :

De même on peut écrire l'équation dans ce repère sous la forme :

$$\sigma = C' \varepsilon \tag{I.24}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{I.25}$$

$$\varepsilon = S' \sigma \tag{I.26}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{I.27}$$

I.10.5. Constantes de rigidité dans repère (X, Y) [2] :

Les constantes de rigidité d'un composite bidirectionnel, dont la direction des fibres fait un angle θ avec la direction x sont :

$$\begin{aligned}
 C'_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta + C_{22} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 C'_{13} &= C_{12} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta \\
 C'_{14} &= 0 \quad , C'_{15} = 0 \quad , C'_{16} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C'_{22} &= C_{11} \sin^4 \theta + 2(C_{12} + C_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{22} \cos^4 \theta \\
C'_{23} &= C_{12} \sin^2 \theta + C_{23} \cos^2 \theta \\
C'_{24} &= 0, \quad C'_{25} = 0, \quad C'_{26} = 0 \\
C'_{33} &= C_{22}, \quad C'_{34} = 0, \quad C'_{35} = 0, \quad C'_{36} = 0 \\
C'_{44} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \cos^2 \theta + C_{66} \sin^2 \theta \\
C'_{45} &= 0, \quad C'_{46} = 0 \\
C'_{55} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \sin^2 \theta + C_{66} \cos^2 \theta, \quad C'_{56} = 0 \\
C'_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + C_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
\end{aligned} \tag{1.28}$$

I.10.6. Constantes de souplesse dans repère (X, Y) [2] :

Les constantes de souplesse d'un composite bidirectionnel, hors de ses axes principaux sont :

$$\begin{aligned}
S'_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
S'_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
S'_{13} &= S_{12} \cos^2 \theta + S_{23} \sin^2 \theta \\
S'_{14} &= 0, \quad S'_{15} = 0, \quad S'_{16} = 0 \\
S'_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \cos^4 \theta \\
S'_{23} &= S_{12} \sin^2 \theta + S_{23} \cos^2 \theta \\
S'_{24} &= 0, \quad S'_{25} = 0, \quad S'_{26} = 0 \\
S'_{33} &= S_{22}, \quad S'_{34} = 0, \quad S'_{35} = 0, \quad S'_{36} = 0 \\
S'_{44} &= 2(S_{22} - S_{32}) \cos^2 \theta + S_{66} \sin^2 \theta \\
S'_{45} &= 0, \quad S'_{46} = 0 \\
S'_{55} &= 2(S_{22} - S_{23}) \sin^2 \theta + S_{66} \cos^2 \theta, \quad S'_{56} = 0 \\
S'_{66} &= 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
\end{aligned} \tag{1.29}$$

I.11. Contraintes:**I.11.1. Etat de contraintes:**

Cet état de contrainte est un état de contrainte à deux dimensions, dont la direction z est la direction principale qui est nulle, le tenseur est caractérisé par :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (I.30)$$

I.11.2. Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux « repère local » (L, T) [2] :

Rapportée aux axes principaux, la relation d'élasticité se met sous la forme :

$$[Q]_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \quad (I.31)$$

Ces constantes de rigidité réduites sont :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} \quad (I.32.a)$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \quad (I.32.b)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22} \quad (I.32.c)$$

$$Q_{66} = G_{LT} \quad (I.32.d)$$

$$Q_{44} = C_{44} = G_{TT} \quad (I.32.e)$$

$$Q_{55} = C_{55} = G_{LT} \quad (I.32.f)$$

I.11.3. La matrice de rigidité de chaque pli dans du stratifié (XY) [2]:

La relation d'élasticité peut s'écrire sous la forme :

$$[Q']_{ij} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix} \quad (I.33)$$

Avec :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ Q'_{66} &= [(Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)] \\ Q'_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\ Q'_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta \\ Q'_{45} &= \cos \theta \sin \theta (Q_{55} - Q_{44}) \end{aligned} \quad (I.34)$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} Q'_{11} \\ Q'_{22} \\ Q'_{12} \\ Q'_{66} \\ Q'_{16} \\ Q'_{26} \\ Q'_{44} \\ Q'_{55} \\ Q'_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 & 0 & 0 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 & 0 & 0 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4 + s^4 & -4c^2s^2 & 0 & 0 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 & 0 & 0 \\ c^3s & -cs^3 & -cs(c^2 - s^2) & -2cs(c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ cs^3 & -c^3s & cs(c^2 - s^2) & 2cs(c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2 & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^2 & c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -cs & cs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{44} \\ Q_{55} \end{bmatrix} \quad (I.35)$$

I.12. Conclusion :

Après avoir définis les outils nécessaires à la modélisation, nous allons établir les équations du modèle dans le chapitre suivant.

Modélisation

Mécanique

des Plaques

Epaisses

Chapitre II

Modélisation Mécaniques

des Plaques Épaisses

Ce chapitre est une synthèse d'équations qui permettent de modéliser le comportement mécanique des plaques épaisses orthotropes. Connaissant le champ d'efforts extérieurs appliqués, il est possible de déterminer le champ de déformations et le champ de contraintes dans les couches, pour un chargement mécanique de ces plaques.

II.1. Théorie des plaques épaisses :

Les plaques étaient toutes régies jusqu'à la fin du siècle dernier, par la théorie de **Love Kirchhoff** qui considère qu'une section droite normale à la fibre moyenne avant les déformations reste droite, après la déformation.

Au début de siècle (1910) **Van-Karman** mit au point la théorie des grands déplacements qui intéresse la famille des plaques minces.

En (1944-1945), **E-Reissner** a mis au point l'effet du **gauchissement** de la section, il a proposé une théorie simple des plaques épaisses, en introduisant l'effet du cisaillement transversal à travers le complément d'énergie du à cet effet, et à qui été complété en 1951 par **Mindlin** en dynamique où il a pris en compte l'effet du cisaillement transversal avec un facteur de correction « K » et l'inertie de rotation.

Beaucoup d'auteur se sont intéressés par la suite à ce sujet, nous citerons notamment Donnel, Warwak, Kaczkowsk, Jemelieta et Szozesniak,...etc. [9]

II.2. Classification des plaques :

Suivant leurs épaisseurs, les plaques sont classées en trois familles :

II.2.1. Plaques très minces :

Ces plaques sont telles que, $\frac{L}{h} \geq 100$, ce sont les plaques avec grands déplacements (théorie de Van-Karman).

II.2.2. Plaques minces :

Ces plaques sont telles que, $20 \leq \frac{L}{h} \leq 100$, ce sont les plaques classiques régies par la théorie de Kirchhoff.

II.2.3. Plaques épaisses :

Ces plaques sont telles que, $4 \leq \frac{L}{h} \leq 20$, ce sont les plaques de grandes épaisseurs ou la section après la déformation est gauchie (théorie de E-Riessner 1945).

II.3. Théorie classique et limitation :

En général, le stratifié est constitué de n couches, numérotées de la face supérieure. La surface moyenne est choisie comme plan de référence (oxy) et l'axe (oz) est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches. Chaque couche k est repérée par les cotes algébriques de sa face intérieure (h_{k-1}) et de sa face supérieure (h_k).

L'étude du comportement mécanique d'une structure c'est connaître le champ des contraintes et le champ des déplacements en tout point de cette structure. [2]

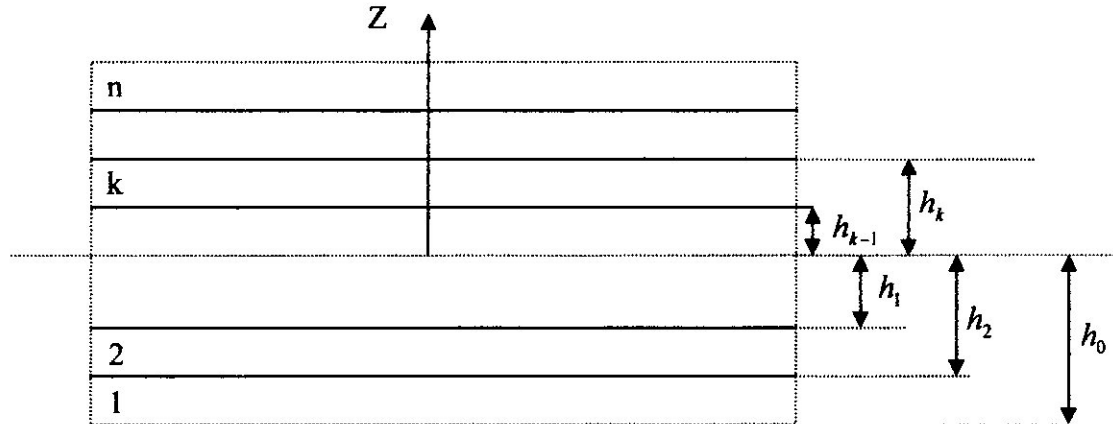


Figure (II.1) présentation des couches de stratifié.

La théorie classique des stratifiés basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et déformations dans les matériaux composites stratifiés peu épais, excepté dans les régions peu étendues près des bords des stratifiés. La validité de la théorie des stratifiés a pu être établie en comparant les résultats obtenus à partir de cette théorie aux solutions exactes des équations d'élasticité.

Par contre, dans le cas stratifiés épais (rapport largeur sur épaisseur inférieur à 10), la théorie classique devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique : flèche du stratifiés, répartition des contraintes, etc. Une première amélioration consiste à tenir compte du cisaillement transverse, avec une théorie des plaques du premier degré (relation (II.4) et (II.5)). Une deuxième amélioration consiste à modifier cette théorie, en introduisant des facteurs de corrections aux modules de cisaillement transverse du stratifiés. Cette approche, présente à la relation (II.6), est une extension aux cas des stratifiés, des théories développés par E.Reissner.

II.4. HSDT (développement) :

La théorie élastique tridimensionnelle est très laborieuse et devient inefficace lorsque le nombre de plis augmente. Dans le schéma de degré deux le cisaillement transversal est calculé en utilisant le schéma de déformations du premier degré FSDT, mais les contraintes à travers l'épaisseur sont constantes à cause de l'angle de cisaillement constant.

Nous utilisons dans notre modélisation la théorie de déformations de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) qui utilise une variation parabolique de la déformation du cisaillement transversal à travers l'épaisseur.

II.5. Champs de déplacement : [15]

Dans la théorie des plaques de HSDT, les composantes des champs de déplacement sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y, 0) - z \theta_x + z^3 \alpha_x \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y, 0) - z \theta_y + z^3 \alpha_y \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y, 0) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

θ_x et θ_y sont les angles de rotation de la déformée du plan moyen et s'expriment en fonction du déplacement transversal $w_0(x, y)$ de ce point par :

$$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} \text{ Suivant la direction } \vec{i} \quad (\text{II.2.a})$$

$$\theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ Suivant la direction } \vec{j} \quad (\text{II.2.b})$$

$$u(x, y, z) = u_0(x, y, 0) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) + z^3 \alpha_x \tag{II.3.a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y, 0) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) + z^3 \alpha_y \tag{II.3.b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y, 0) \tag{II.3.c}$$

u et v sont les déplacements dans le plan de la plaque, w est le déplacement transverse et enfin θ_x et θ_y les rotations en flexion de normales transverses aux axes x et y et α_x, α_y les angles de cisaillement gauchissement. [15]

II.6. Champ des déformations :

II.6.1. Déformation d'un volume élémentaire :

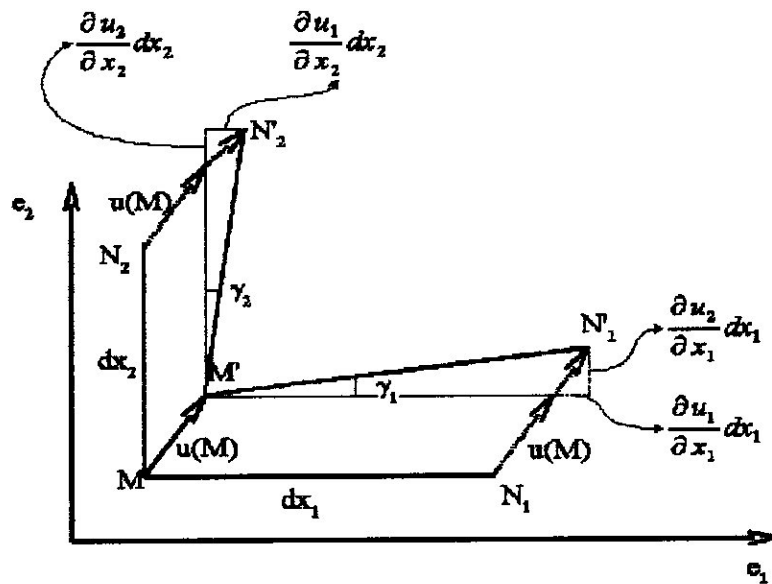


Figure (II.2) : Déformation dans un plan.

II.6.2. Expression du champ des déformations: [15]

Le champ des déformations s'écrit :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \tag{II.4.a}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \tag{II.4.b}$$

$$\epsilon_{zz} = 0 \tag{II.4.c}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial w_0^2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \quad (\text{II.4.d})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \omega_0}{\partial x} + \alpha_y \quad (\text{II.4.e})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \omega_0}{\partial y} + \alpha_x \quad (\text{II.4.f})$$

Telque: $\gamma = 2\varepsilon$ (II.4.g)

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

La matrice des déformations se réduit à cinq composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Le champ des déformations est la superposition des déformations membranes, flexion, torsion, des déformations en cisaillements et cisaillement gauchissement soient :

- **Le champ des déformations en membrane, flexion et gauchissement:**

Comme dans le cas de la théorie classiques des stratifiés, le champ des déformations en membrane flexion est la superposition:

- **des déformations en membrane :**

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

S'exprimant exclusivement (en fonction des déplacements u_0, v_0) dans le plan (oxy) des points de ce plan.

- et des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (II.8)$$

Les déformations en flexion et torsion s'expriment en fonction de la matrice des courbures suivant la relation:

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y) \quad (II.9)$$

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (II.10)$$

- des déformations en gauchissement :

$$\varepsilon_w(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^w \\ \varepsilon_{yy}^w \\ \gamma_{xy}^w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (II.11)$$

- des déformations en cisaillement:

$$\gamma_s = \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^s \\ \gamma_{yz}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (II.12)$$

- des déformations en cisaillement-gauchissement :

$$\gamma_{sw} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^{sw} \\ \gamma_{yz}^{sw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_y \\ \alpha_x \end{bmatrix} \quad (II.13)$$

- Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$\varepsilon = \varepsilon_m - z \varepsilon_f + \varepsilon_s + z^3 \varepsilon_w + 3z^2 \varepsilon_{sw} \tag{II.14}$$

ou :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \end{bmatrix} + 3z^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_y \\ \alpha_x \end{bmatrix} \tag{II.15}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (a) & \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y) \quad (c) & \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) \quad (e) \\ k_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y) \quad (b) & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y) \quad (d) & \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y) \quad (f) \end{aligned} \tag{II.16}$$

Ou $k_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$ (g) , $k_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}$ (h) , $k_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}$ (i)

II.7. Champ des Contraintes :

II.7.1. Forme du Champ des Contraintes :

Le tenseur des contraintes en M est sous la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \tag{II.17}$$

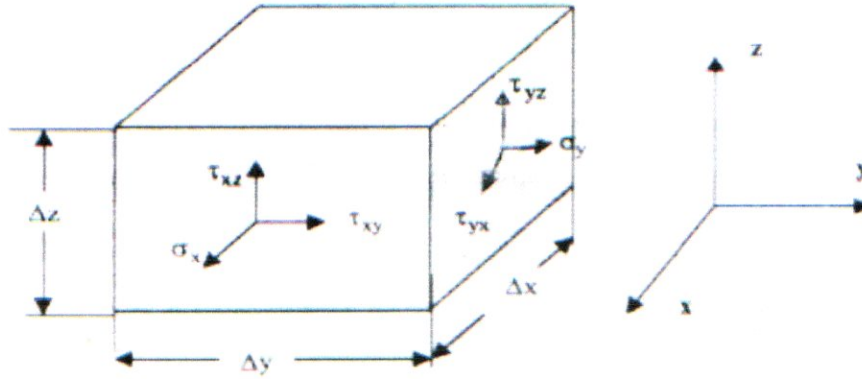


Figure (II.3) : Contraintes dans un élément cubique.

II.7.2. Expression des contraintes :

Les contraintes dans la couche k s'expriment par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}_k = Q'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}_k \tag{II.18}$$

$$[Q'_{ij}]_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix}_k \tag{II.19}$$

Où Q'_{ij}_k est la matrice de rigidité réduite de la couche k. donnée dans l'équation (I.33)

Les paramètres Q'_{ij} de la couche k sont rapportés aux axes de références du stratifié. Ils s'expriment en fonction des paramètres dans les axes principaux des couches et sont données dans la relation (I.34).

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y) = Q'_k \varepsilon_m(x, y) - z Q'_k \varepsilon_f(x, y) + z^3 Q'_k \varepsilon_w(x, y) + Q'_k \varepsilon_s(x, y) + 3z^2 Q'_k \varepsilon_{sw}(x, y) \tag{II.20}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 + z^3 \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \end{bmatrix} \\
 + 3z^2 \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_y \\ \alpha_x \end{bmatrix} \tag{II.21}
 \end{aligned}$$

$\sigma_k(M)$ représente la matrice des contraintes dans la couche $k : h_{k-1} \leq z \leq h_k$. la matrice de rigidité réduite Q'_k varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes, entre couches successives. [2]

II.8. Expression des résultantes et moments : [15]

II.8.1. Résultante en membrane, courbure et gauchissement:

Le champ des résultantes en membrane, courbure et gauchissement à travers la plaque est défini :

$$\{[N], [M], [P]\} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} (1, z, z^3) dz \tag{II.22}$$

Tel que:

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} (a), M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} (b), P(x, y) = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{bmatrix} (c), \sigma_k(M) = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} (d) \tag{II.23}$$

N_x, N_y, N_{xy} sont les résultantes par unité de longueur, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et dans le plan (x, y).

M_x et M_y sont les moments de flexion et M_{xy} le moment de torsion.

P_x, P_y, P_{xy} sont les résultantes du gauchissement.

la relation (II-23) se met sous la forme :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_k(M).dz \quad (II.24)$$

$$M(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_k(M).zdz \quad (II.25)$$

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_k(M).z^3 dz \quad (II.26)$$

Les expressions (II.24), (II.25) et (II.26) conduisent à l'expression des résultantes en membrane, courbure et gauchissement. Nous obtenons :

➤ **Les résultantes en membrane :**

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[Q_k' \varepsilon_m(x, y) + z Q_k' \kappa(x, y) + z^3 Q_k' \varepsilon_w(x, y) \right] dz \quad (II.27)$$

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[Q_k' \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[Q_k' \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[Q_k' \varepsilon_w(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^3 dz \right] \quad (II.28)$$

$$N(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q_k' \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q_k' \right] \kappa(x, y) + \left[\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (h_k^4 - h_{k-1}^4) Q_k' \right] \varepsilon_w(x, y) \quad (II.29)$$

$$M(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[Q_k' \varepsilon_m(x, y) + z Q_k' \kappa(x, y) + z^3 Q_k' \varepsilon_w(x, y) \right] .zdz \quad (II.30)$$

$$M(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[Q_k' \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[Q_k' \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[Q_k' \varepsilon_w(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^4 dz \right] \quad (II.31)$$

$$M(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q_k' \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q_k' \right] \kappa(x, y) + \left[\frac{1}{5} \sum_{k=1}^n (h_k^5 - h_{k-1}^5) Q_k' \right] \varepsilon_w(x, y) \quad (II.32)$$

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k \kappa(x, y) + z^3 Q'_k \varepsilon_w(x, y) \right] z^3 dz \quad (\text{II.33})$$

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[Q'_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^3 dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[Q'_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^4 dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[Q'_k \varepsilon_w(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^6 dz \right] \quad (\text{II.34})$$

$$P(x, y) = \left[\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (h_k^4 - h_{k-1}^4) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{5} \sum_{k=1}^n (h_k^5 - h_{k-1}^5) Q'_k \right] \kappa(x, y) + \left[\frac{1}{7} \sum_{k=1}^n (h_k^7 - h_{k-1}^7) Q'_k \right] \varepsilon_w(x, y) \quad (\text{II.35})$$

En final :

$$N(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + B \kappa(x, y) + \bar{C} \varepsilon_w(x, y) \quad (\text{II.36})$$

$$M(x, y) = B \varepsilon_m(x, y) + D \kappa(x, y) + E \varepsilon_w(x, y) \quad (\text{II.37})$$

$$P(x, y) = \bar{C} \varepsilon_m(x, y) + E \kappa(x, y) + F \varepsilon_w(x, y) \quad (\text{II.38})$$

En introduisant les matrices :

$$A = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \quad (\text{II.39.a})$$

$$A = [A_{ij}] \text{ avec } A_{ij} = (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k \quad (\text{II.39.b})$$

$$B = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \quad (\text{II.40.a})$$

$$B = [B_{ij}] \text{ avec } B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k \quad (\text{II.40.b})$$

$$\bar{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} (h_k^4 - h_{k-1}^4) Q'_k \quad (\text{II.41.a})$$

$$\bar{C} = [\bar{C}_{ij}] \text{ avec } \bar{C}_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (h_k^4 - h_{k-1}^4) (Q'_{ij})_k \quad (\text{II.41.b})$$

$$D = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \quad (\text{II.42.a})$$

$$D = [D_{ij}] \text{ avec } D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k \quad (\text{II.42.b})$$

$$E = \sum_{k=1}^n \frac{1}{5} (h_k^5 - h_{k-1}^5) Q'_k \quad (\text{II.43.a})$$

$$E = [E_{ij}] \text{ Avec } E_{ij} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n (h_k^5 - h_{k-1}^5) (Q'_{ij})_k \quad (\text{II.43.b})$$

$$F = \sum_{k=1}^n \frac{1}{7} (h_k^7 - h_{k-1}^7) Q'_k \quad (\text{II.44.a})$$

$$F = [F_{ij}] \text{ Avec } F_{ij} = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^n (h_k^7 - h_{k-1}^7) (Q'_{ij})_k \quad (\text{II.44.b})$$

L'expression développée des résultantes s'écrit donc :
par :

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{22} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{66} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{22} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{66} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{22} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{66} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{11} & E_{12} & E_{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{12} & E_{22} & E_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{16} & E_{26} & E_{66} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{16} & E_{26} & E_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II-})$$

45)

Et finalement on obtient la forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & \bar{C} \\ B & D & E \\ \bar{C} & E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_f \\ \varepsilon_w \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane (N_x, N_y, N_{xy}) ne sont pas seulement fonctions des déformations en

membrane $(\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0)$, mais sont également fonctions des courbures en flexion et torsion

$(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})$ et aussi des gauchissements $\left[\frac{\partial \alpha_x}{\partial x}, \frac{\partial \alpha_y}{\partial y}, \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right]$.

II.8.2. Résultante en cisaillement transversale:

Les résultantes en cisaillement transversal et cisaillement-gauchissement sont définies de la même manière par:

$$\{[Q], [R]\} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} (1, z^2) dz \tag{II.47}$$

Tel que :

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix} \quad (a), \quad R(x, y) = \begin{bmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \end{bmatrix} \quad (b) \tag{II.48}$$

$$Q(x, y, z) = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz \tag{II.49}$$

$$R(x, y) = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} z^2 dz \tag{II.50}$$

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q'_k \varepsilon_s(x, y) + 3z^2 Q'_k \varepsilon_{sw}(x, y)] dz \tag{II.51}$$

$$R(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q'_k \varepsilon_s(x, y) + 3z^2 Q'_k \varepsilon_{sw}(x, y)] z^2 dz \tag{II.52}$$

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[Q'_k \varepsilon_s(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[3Q'_k \varepsilon_{sw}(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \tag{II.53}$$

$$R(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[Q'_k \varepsilon_s(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[3Q'_k \varepsilon_{sw}(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^4 dz \right] \tag{II.54}$$

$$Q(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right] \varepsilon_s(x, y) + \left[\sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \right] \varepsilon_{sw}(x, y) \tag{II.55}$$

$$R(x, y) = \left[\frac{1}{3} \sum_1^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q_k' \right] \varepsilon_s(x, y) + \left[\frac{3}{5} \sum_1^n (h_k^5 - h_{k-1}^5) Q_k' \right] \varepsilon_{sw}(x, y) \quad (\text{II.56})$$

$$Q(x, y) = A' \varepsilon_s(x, y) + 3D' \varepsilon_{sw}(x, y) \quad (\text{II.57})$$

$$R(x, y) = 3D' \varepsilon_s(x, y) + 9E' \varepsilon_{sw}(x, y) \quad (\text{II.58})$$

Q_{xz}, Q_{yz} : sont les résultantes du cisaillement transversal

R_{xz}, R_{yz} : sont les résultantes du cisaillement-gauchissement

En introduisant les matrices :

$$A' = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q_k' \quad (\text{II.59.a})$$

$$A' = [A'_{ij}] \text{ avec } A'_{ij} = (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k \quad (\text{II.59.b})$$

$$D' = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q_k' \quad (\text{II.60.a})$$

$$D' = [D'_{ij}] \text{ Avec } D'_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k \quad (\text{II.60.b})$$

$$E' = \sum_{k=1}^n \frac{1}{5} (h_k^5 - h_{k-1}^5) Q_k' \quad (\text{II.61.a})$$

$$E' = [E'_{ij}] \text{ Avec } E'_{ij} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n (h_k^5 - h_{k-1}^5) (Q'_{ij})_k \quad (\text{II.61.b})$$

Compte tenu des expressions (II.20), l'équation des résultantes en cisaillement s'écrit:

$$\begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \\ R_{xz} \\ R_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{44} & A'_{45} & 3D'_{44} & 3D'_{45} \\ A'_{45} & A'_{55} & 3D'_{45} & 3D'_{55} \\ 3D'_{44} & 3D'_{45} & 9E'_{44} & 9E'_{45} \\ 3D'_{45} & 3D'_{55} & 9E'_{45} & 9E'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \alpha_y \\ \alpha_x \end{bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

$$\text{Ou :} \quad \begin{bmatrix} Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & 3D' \\ 3D' & 9E' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_{sw} \end{bmatrix} \quad (\text{II.63})$$

On remarque que :

- Les coefficients A'_{ij} ont même forme que les coefficient A'_{ij} .

- Les coefficients D_{ij} ont même forme que les coefficient D'_{ij} .
- Les coefficients E_{ij} ont même forme que les coefficient E'_{ij} .

En final on obtient la forme contractée qui traduit l'équation constitutive :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & 0 & 0 \\ B & D & E & 0 & 0 \\ C & E & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A' & 3D' \\ 0 & 0 & 0 & 3D' & 9E' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_m \\ \epsilon_f \\ \epsilon_w \\ \epsilon_s \\ \epsilon_{sw} \end{bmatrix} \tag{II.64}$$

II.9. Equations du comportement mécanique d'un stratifié :

II.9.1. Equation constitutive :

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane, courbures, gauchissement, cisaillement transversal et gauchissement cisaillement. Soit l'écriture matricielle :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ P_x \\ P_y \\ P_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \\ R_x \\ R_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & C_{11} & C_{12} & C_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & C_{12} & C_{22} & C_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & C_{16} & C_{26} & C_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 3D'_{44} & 3D'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 3D'_{45} & 3D'_{55} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3D'_{44} & 3D'_{45} & 9E'_{44} & 9E'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3D'_{45} & 3D'_{55} & 9E'_{45} & 9E'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \\ \alpha_y \\ \alpha_x \end{bmatrix} \tag{II.65}$$

Où :

[A] : la matrice de rigidité en membrane.

[D] : la matrice de rigidité en flexion torsion.

[B] : la matrice de couplage membrane –flexion -torsion.

[C] : la matrice de couplage membrane –flexion –torsion et gauchissement.

[E] : la matrice de couplage membrane –flexion –torsion et gauchissement.

[F] : la matrice de gauchissement.

[A'] : la matrice de cisaillement transversal.

[D'] : la matrice de couplage en cisaillement transversal et gauchissement cisaillement.

[E'] : la matrice de gauchissement-cisaillement.

II.9.2. Détermination des déformations et des contraintes :

Les problèmes de conception des structures en matériaux composites consistent à trouver les déformations en membrane, courbures, gauchissement, cisaillement transversal et cisaillement gauchissement puis les contraintes tout en connaissant les résultantes en membrane, courbure, gauchissement, cisaillement, cisaillement gauchissement et les moments à partir de l'équation constitutive.

II.9.2.1. Déformations en membrane, courbures et gauchissement

Les expressions des déformations en fonction des caractéristiques du stratifié, et des efforts et des moments extérieurs à partir de l'équation (II.46). [2]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ M_f \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* & C^* \\ B^* & D^* & E^* \\ C^* & E^* & F^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ K \\ \varepsilon_w \end{bmatrix} \quad (\text{II.66})$$

Avec:

$$\begin{aligned} A^* &= A^{-1} & (a) \\ B^* &= -A^{-1}B & (b) \\ C^* &= -A^{-1}C = (-B^*)' & (c) \\ D^* &= D - BA^{-1}B = D + BB^* & (d) \\ E^* &= E - BA^{-1}C = E + BB^* & (e) \\ F^* &= F - CA^{-1}C = F + CC^* & (f) \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

II.9.2.2. Déformations en cisaillement et gauchissement cisaillement :

Les expressions des déformations en fonction des caractéristiques du stratifié, et des efforts de cisaillement transversal et cisaillement gauchissement est à partir de l'équation (II.63).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{**} & 3D^{**} \\ 3D^{**} & 9E^{**} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ \varepsilon_{sw} \end{bmatrix} \quad (II.68)$$

Finalement, on conclue que:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ M_f \\ P \\ \varepsilon_s \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* & C^* & 0 & 0 \\ B^* & D^* & E^* & 0 & 0 \\ C^* & E^* & F^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^{**} & 3D^{**} \\ 0 & 0 & 0 & 3D^{**} & 9E^{**} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ K \\ \varepsilon_w \\ Q \\ \varepsilon_{sw} \end{bmatrix} \quad (II.69)$$

II.9.3. Champ des déformations

➤ Le champ des déformations en membrane, flexion, gauchissement:

Le champ des déformations au point (x,y,z) est déterminé à partir de l'équation (II.1)

Les déformations, exprimées dans les axes principaux de la couche d'orientation θ par rapport aux axes du stratifié, dans la couche k, et rapportées aux axes principaux (L, T) de cette couche, s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \\ \gamma_{TT'} \\ \gamma_{LT'} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (II.70)$$

Avec :

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (II.71)$$

II.9.4. Champ des contraintes :

Les contraintes exprimées par rapport aux axes principaux de la couche, se calculent par l'équation (II.21).

Les contraintes, exprimées par rapport aux axes principaux de la couche, l'ensemble des équations donne:

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \\ \tau_{LT'} \\ \tau_{TT'} \end{bmatrix}_K = T' \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}_K \quad (\text{II.72})$$

Avec:

$$T' = [T'(-\theta)]^t = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.73})$$

II.10. Conclusion :

Après avoir établis les équations qui permettent de modéliser le comportement mécanique des plaques composites par la théorie de déformations de cisaillements de degré supérieur (HSDT), nous allons passer aux modèles qui permettent de tenir compte d'un environnement thermique, dans le chapitre suivant.

Modélisation

Thermique

des Plaques

Epaisses

Chapitre III

Modélisation Thermiques

des Plaques Epaisses

III.1. Modélisation du comportement thermo élastique :

Les composites thermo-structuraux sont destinés à assurer les fonctions mécaniques à très haute température (jusqu'à un 3000°C). C'est lors de la conception qu'on doit prendre en compte les contraintes mécaniques et thermiques. Il devient aujourd'hui essentiel de pouvoir prédire les propriétés thermiques des composites avant même leur élaboration. En effet, lorsqu'un architecte industriel doit dimensionner une structure, il fait appel, entre autres aux propriétés des matériaux qu'il envisage d'utiliser. Le fabricant de matériaux doit lui-même pouvoir être une force de proposition et fournir des propriétés en avance de phases des fabrications et caractérisations des matériaux.

Les modèles retenus dans le cadre de la stratégie globale de prédimensionnement sont analytiques ou numériques selon l'échelle d'hétérogénéité à la quelle on se situe. Les résultats obtenus montrent entre autres l'influence des propriétés des constituants (fibres et matrice) sur le tenseur d'élasticité, de conductivité thermique et de thermo-élasticité des composites. [4]

III.2. Modèles utilisés pour le prédimensionnement thermique :

Dans ce paragraphe nous décrivons les modèles utilisés pour modéliser les propriétés effectives en mécanique, thermique, thermomécanique. Ces modèles sont soit analytiques, soit numériques ; ils sont issus de la littérature existante puis développés pour notre besoin. [3]

III.3. Comportement thermoélastique :

III.3.1. Equations du comportement des stratifiés tenant compte des phénomènes de dilatation :

La variation de la température, produit une dilatation thermique (extension ou contraction) du matériau. Les phénomènes de dilatation thermique, peuvent être décrits en écrivant les déformations en un point (x,y,z) à l'instant t , sous la forme :

$$e_{i(thermique)}^* = \alpha_i \Delta T(x, y, z, t) \quad i=1.2.3...6 \quad (III.1)$$

où α_i sont les coefficients de dilatation thermique, et ΔT est la variation de température à partir d'une température de référence, pour laquelle les déformations thermiques sont considérées comme étant égales à zéro. La répartition des températures dans la structure et au cours de temps, est déterminée à partir des phénomènes de transfert de chaleur tel que la loi de Fourier. [1]

En incluant les effets des phénomènes de dilatation, les lois d'élasticité écrites dans un état de référence ou les déformations dues aux phénomènes de dilatation sont nulles, doivent être modifiées et écrites respectivement sous la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \sum_{j=1}^6 S_{ij} \sigma_j + e_i^* \quad (a) \\ \sigma_i &= \sum_{j=1}^6 C_{ij} (\varepsilon_j - e_j^*) \quad (b) \end{aligned} \quad i=1.2...6 \quad (III.2)$$

$$e_i^* = e_{i(thermique)}^*$$

III.3.2. Coefficients d'expansion thermique pour les plaques :

Le comportement thermique des stratifiés bidirectionnels est caractérisé par trois coefficients d'expansions thermiques α_L , α_T et α_{LT} .

- Dans le repère (x, y, z) les coefficients de dilatations thermiques :

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_L m^2 + \alpha_T n^2 \\ \alpha_y &= \alpha_L n^2 + \alpha_T m^2 \\ \alpha_{xy} &= 2(\alpha_L - \alpha_T) mn \\ \alpha_{xz} &= 2(\alpha_L - \alpha_T) mn \\ \alpha_{yz} &= 2(\alpha_T - \alpha_L) mn \end{aligned} \quad (III.3)$$

Avec : $m = \cos\theta$ Et $n = \sin\theta$

III.3.3. Déformations thermiques dans les plaques [15]:

Les déformations thermiques, dans les axes principaux du stratifié sont :

$$\begin{aligned} e_L &= \varepsilon_L^t = \alpha_L \Delta T \\ e_T &= \varepsilon_T^t = \alpha_T \Delta T \\ e_{T'} &= \varepsilon_{T'}^t = \alpha_T \Delta T \\ e_{LT} &= \varepsilon_{LT}^t = 0 \\ e_{LT'} &= \varepsilon_{LT'}^t = 0 \end{aligned} \quad (III.4)$$

Les déformations thermiques, dans les axes du stratifié sont définis par :

$$\begin{aligned} e_x &= \varepsilon'_x = \alpha_x \Delta T \\ e_y &= \varepsilon'_y = \alpha_y \Delta T \\ e_{xy} &= \varepsilon'_l = \alpha_l \Delta T \\ e_{xz} &= \varepsilon'_m = \alpha_m \Delta T \\ e_{yz} &= \varepsilon'_r = \alpha_r \Delta T \end{aligned} \tag{III.5}$$

III.3.4. Relations thermiques :

III.3.4.1. Contraintes et déformations :

Lorsque un stratifié tri directionnel, est assujéti à des chargements thermiques (ΔT), l'état principal thermique $[\varepsilon]_{xy}^t, [\varepsilon]_{xz}^t, [\varepsilon]_{yz}^t$ dans le stratifié, est égal à la somme des déformations produites par les contraintes dans le stratifié

III.3.4.2. Contraintes et déformations membrane, courbure et gauchissement :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_l \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xl} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yl} \\ S_{xl} & S_{yl} & S_{ll} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_l \end{bmatrix}_k + \Delta T \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_l \end{bmatrix}_k \tag{III.6}$$

et

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_l \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{21} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x - e_x \\ \varepsilon_y - e_y \\ \gamma_l - e_l \end{bmatrix}_k \tag{III.7}$$

D'Ou

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_l \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{21} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + zk_x + z^3 \varepsilon_x^w - e_x \\ \varepsilon_y^0 + zk_y + z^3 \varepsilon_y^w - e_y \\ \varepsilon_l^0 + zk_l + z^3 \varepsilon_l^w - e_l \end{bmatrix}_k \tag{III.8}$$

Soit finalement :

$$[\sigma]_{x,y}^k = [Q]_{x,y}^k [\varepsilon^0]_{x,y} + [Q]_{x,y}^k [k]_{x,y} z + [Q]_{x,y}^k [\varepsilon^w]_{x,y} z^3 - [Q]_{x,y}^k [e]_{x,y}^k \tag{III.9}$$

L'intégration des contraintes à partir de l'équation des contraintes à travers l'expression de chaque couche, donne la résultante en force :

$$[\sigma]_{x,y} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\sigma]_{x,y}^k dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q]_{x,y}^k \left\{ [\varepsilon^0]_{x,y} + z[k]_{x,y} + z^3 [\varepsilon^w]_{x,y} - [e]_{x,y}^k \right\} dz \quad (III.10)$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} N_x^t \\ N_y^t \\ N_l^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_l^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^w \\ \varepsilon_y^w \\ \gamma_l^w \end{bmatrix} \quad (III.11)$$

✚ **Les forces thermiques sont:**

$$\begin{bmatrix} N_x^t \\ N_y^t \\ N_l^t \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xl} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yl} \\ Q_{xl} & Q_{yl} & Q_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_l \end{bmatrix} t_k \quad (III.12)$$

$t_k = h_k - h_{k-1}$, est l'épaisseur de la couche k.

✚ **Les moments thermiques résultants à travers les plis du stratifié :**

$$[M]_{x,y}^t = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\sigma]_{x,y} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q]_{x,y}^k \left\{ [\varepsilon^0]_{x,y} + z[k]_{x,y} + z^3 [\varepsilon^w]_{x,y} - [e]_{x,y}^k \right\} z dz \quad (III.13)$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} M_x^t \\ M_y^t \\ M_l^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_l^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^w \\ \varepsilon_y^w \\ \gamma_l^w \end{bmatrix} \quad (III.14)$$

✚ **les moments thermiques :**

$$\begin{bmatrix} M_x^t \\ M_y^t \\ M_l^t \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xl} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{yl} \\ Q_{xi} & Q_{yl} & Q_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_l \end{bmatrix} z_k t_k \quad (III.15)$$

Les gauchissements résultants à travers les plis du stratifié :

$$[P]_{x,y}^t = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\sigma]_{x,y}^k z^3 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q]_{x,y}^k \left\{ [\varepsilon^0]_{x,y} + z[k]_{x,y} + z^3 [\varepsilon^w]_{x,y} - [e]_{x,y}^k \right\} z^3 dz \quad (III.16)$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} P_x^t \\ P_y^t \\ P_l^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_l^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^w \\ \varepsilon_y^w \\ \gamma_l^w \end{bmatrix} \quad (III.17)$$

les gauchissements thermiques :

$$\begin{bmatrix} P_x^t \\ P_y^t \\ P_l^t \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xl} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{yl} \\ Q_{xl} & Q_{yl} & Q_{ll} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_l \end{bmatrix}_k \cdot (z^3)_k t_k \quad (III.18)$$

En conclusion finale :

$$\begin{bmatrix} N^t \\ M^t \\ P^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \\ \varepsilon^w \end{bmatrix} \quad (III.19)$$

III.3.4.3. Contraintes et déformations cisaillements transversal et cisaillements

gauchissement :

$$\begin{bmatrix} \gamma_m \\ \gamma_r \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} S_{mm} & S_{mr} \\ S_{mr} & S_{rr} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{bmatrix}_k + \Delta T \begin{bmatrix} e_m \\ e_r \end{bmatrix}_k \quad (III.20)$$

et

$$\begin{bmatrix} \tau_w \\ \tau_r \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} R'_{44} & R'_{45} \\ R'_{45} & R'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_w - e_w \\ \gamma_r - e_r \end{bmatrix}_k \quad (III.21)$$

D'Ou

$$\begin{bmatrix} \tau_m \\ \tau_r \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} R'_{44} & R'_{45} \\ R'_{45} & R'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_m^s + \gamma_m^{sw} - e_m \\ \gamma_r^s + \gamma_r^{sw} - e_r \end{bmatrix}_k \quad (III.22)$$

Soit finalement :

$$[\tau]_{x,y}^k = [Q]_{x,y}^k [\varepsilon^s]_{x,y} + (3z^2)[Q]_{x,y}^k [\varepsilon^{sw}]_{x,y} - [Q]_{x,y}^k [e]_{x,y}^k \quad (III.23)$$

L'intégration des contraintes à partir de l'équation des contraintes à travers l'expression de chaque couche, donne:

$$[\tau]_{x,z} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\tau]_{x,y}^k dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q]_{x,y}^k \left\{ [\varepsilon^s]_{x,y} + (3z^2)[\varepsilon^{sw}]_{x,y} - [e]_{x,y}^k \right\} dz \quad (III.24)$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} Q'_m \\ Q'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{44} & A'_{45} \\ A'_{45} & A'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m^s \\ \varepsilon_r^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3D'_{44} & 3D'_{45} \\ 3D'_{45} & 3D'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m^{sw} \\ \varepsilon_r^{sw} \end{bmatrix} \quad (III.25)$$

- Les forces thermiques de cisaillement sont:

$$\begin{bmatrix} Q'_m \\ Q'_r \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} e_m \\ e_r \end{bmatrix}_k t_k \quad (III.26)$$

$t_k = h_k - h_{k-1}$, est l'épaisseur de la couche k.

- Les forces thermiques des cisaillement-gauchissement résultants à travers les plis du stratifié :

$$[\tau]_{y,z} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\tau]_{x,y}^k z^2 dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q]_{x,y}^k \left\{ [\varepsilon^s]_{x,y} + (3z^2)[\varepsilon^{sw}]_{x,y} - [e]_{x,y}^k \right\} z^2 dz \quad (III.27)$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} R'_m \\ R'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3D'_{44} & 3D'_{45} \\ 3D'_{45} & 3D'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m^s \\ \varepsilon_r^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9E'_{44} & 9E'_{45} \\ 9E'_{45} & 9E'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m^{sw} \\ \varepsilon_r^{sw} \end{bmatrix} \quad (III.28)$$

- Les forces thermiques de cisaillement sont:

$$\begin{bmatrix} R'_m \\ R'_r \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} e_m \\ e_r \end{bmatrix}_k z^2 t_k \quad (III.29)$$

En conclusion finale :

$$\begin{bmatrix} Q' \\ R' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & 3D' \\ 3D' & 9E' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^s \\ \varepsilon^{sw} \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Donc le système sous forme contractée est :

$$\begin{bmatrix} N' \\ M' \\ P' \\ Q' \\ R' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & 0 & 0 \\ B & D & E & 0 & 0 \\ C & E & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A' & 3D' \\ 0 & 0 & 0 & 3D' & 9E' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \\ \varepsilon^w \\ \varepsilon^s \\ \varepsilon^{sw} \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

III.3.4.4. Etude des contraintes :

Tous les résultats établis sont tout à fait généraux, que ces contraintes soient d'origine mécanique (due à l'application des forces) ou d'origine thermique (due à l'application d'un champ de température) ou les deux.

III.3.5. Les problèmes générales des thermoélasticité :

On se donne :

- La géométrie des solides constituant la structure.
- Les caractéristiques (E, ν, α) des matériaux.
- Les liaisons internes et externes.
- Les axes $\{0,xyz\}$ choisis, liés à la structure.
- Les chargements mécanique et thermiques.

III.3.6. Contraintes résiduelles :

Les contraintes résiduelles, sont introduites dans les stratifiés multidirectionnels durant la fabrication, sur le plan microscopique les contraintes résiduelles sont introduites dans les couches bidirectionnelles autour des fibres à cause d'une imperfection dans les propriétés thermiques des constituants. Des contraintes résiduelles sont aussi développées dans les couches à cause de l'anisotropie sur le plan macroscopique. [5]

L'inverse des relations (III.15),(III.18),(III.21),(III.28),(III.31) , donne les déformations en membrane ε^0 , courbures $[k]$,gauchissement ε^w , cisaillement transversal ε^s , cisaillement-gauchissement ε^{sw} produit par un chargement thermique seulement. Dans ce cas ces déformations sont aussi appelées les déformations non mécaniques.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_l^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x^t \\ N_y^t \\ N_l^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^t \\ M_y^t \\ M_l^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x^t \\ P_y^t \\ P_l^t \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x^t \\ N_y^t \\ N_l^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^t \\ M_y^t \\ M_l^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{16} \\ e_{12} & e_{22} & e_{26} \\ e_{16} & e_{26} & e_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x^t \\ P_y^t \\ P_l^t \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^w \\ \varepsilon_y^w \\ \varepsilon_l^w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x^t \\ N_y^t \\ N_l^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{16} \\ e_{12} & e_{22} & e_{26} \\ e_{16} & e_{26} & e_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^t \\ M_y^t \\ M_l^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{16} \\ f_{12} & f_{22} & f_{26} \\ f_{16} & f_{26} & f_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x^t \\ P_y^t \\ P_l^t \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m^s \\ \varepsilon_r^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^t_m \\ Q^t_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3d'_{44} & 3d'_{45} \\ 3d'_{45} & 3d'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^t_m \\ R^t_r \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m^{sw} \\ \varepsilon_r^{sw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3d'_{44} & 3d'_{45} \\ 3d'_{45} & 3d'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^t_m \\ Q^t_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9e'_{44} & 9e'_{45} \\ 9e'_{45} & 9e'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^t_m \\ R^t_r \end{bmatrix} \quad (\text{III.35})$$

➤ les déformations thermiques de la couche d'ordre k sont obtenues par l'équation :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \end{bmatrix} + 3z^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_y \\ \alpha_x \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

➤ les déformations résiduelles dans chaque couche k sont données par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xe} \\ \varepsilon_{ye} \\ \gamma_{me} \\ \gamma_{le} \\ \gamma_{re} \end{bmatrix}_{k \text{ résiduelles}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_m \\ \gamma_l \\ \gamma_r \end{bmatrix}_{k} - \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_m \\ e_l \\ e_r \end{bmatrix}_{k} \quad \text{(III.37)}$$

➤ les contraintes résiduelles dans chaque couche k sont données par (XY) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}_{k \text{ résiduelles}} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{21} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{44} & Q'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xe} \\ \varepsilon_{ye} \\ \gamma_{me} \\ \gamma_{le} \\ \gamma_{re} \end{bmatrix}_{k \text{ résiduelles}} \quad \text{(III.38)}$$

➤ les contraintes résiduelles dans chaque couche sont données par (LT):

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \\ \tau_{LT'} \\ \tau_{TT'} \end{bmatrix}_{k \text{ résiduelle}} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}_{k \text{ résiduelle}} \quad \text{(III.39)}$$

III.4. L'équation constitutive thermoélastique :

L'équation constitutive thermomélastique sans chargement mécanique peut être explicitée comme suit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ P_x \\ P_y \\ P_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \\ R_x \\ R_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ P_x \\ P_y \\ P_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \\ R_x \\ R_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & \overline{C}_{16} & \overline{C}_{26} & \overline{C}_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{26} & D_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{C}_{12} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{C}_{16} & \overline{C}_{26} & \overline{C}_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 3D_{44} & 3D_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & A_{55} & 3D_{45} & 3D_{55} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3D_{44} & 3D_{45} & 9E_{44} & 9E_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3D_{45} & 3D_{55} & 9E_{45} & 9E_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \varepsilon_{xx}^w \\ \varepsilon_{yy}^w \\ \varepsilon_{xy}^w \end{bmatrix} \quad (III.40)$$

Remarque :

- Pour un chargement thermomélastique, les déformations en membrane, courbures et gauchissement sont obtenues à partir de l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \varepsilon_{xx}^w \\ \varepsilon_{yy}^w \\ \varepsilon_{xy}^w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} & \overline{c}_{11} & \overline{c}_{12} & \overline{c}_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{12} & b_{22} & b_{26} & \overline{c}_{12} & \overline{c}_{22} & \overline{c}_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{16} & b_{26} & b_{66} & \overline{c}_{16} & \overline{c}_{26} & \overline{c}_{66} \\ b_{11} & b_{12} & b_{16} & d_{11} & d_{12} & d_{16} & e_{11} & e_{12} & e_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & d_{12} & d_{22} & d_{26} & e_{12} & e_{22} & e_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{66} & e_{16} & e_{22} & e_{26} \\ \overline{c}_{11} & \overline{c}_{12} & \overline{c}_{16} & e_{11} & e_{12} & e_{16} & f_{11} & f_{12} & f_{16} \\ \overline{c}_{12} & \overline{c}_{22} & \overline{c}_{26} & e_{12} & e_{22} & e_{26} & f_{12} & f_{22} & f_{26} \\ \overline{c}_{16} & \overline{c}_{26} & \overline{c}_{66} & e_{16} & e_{22} & e_{26} & f_{16} & f_{22} & f_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{N}_{xx} \\ \overline{N}_{yy} \\ \overline{N}_{xy} \\ \overline{M}_{xx} \\ \overline{M}_{yy} \\ \overline{M}_{xy} \\ \overline{P}_{xx} \\ \overline{P}_{yy} \\ \overline{P}_{xy} \end{bmatrix} \quad (III.41)$$

Avec : $\overline{N}_{x,y,l} = N'_{x,y,xy}$ (III.42)

et : $\overline{M}_{x,y,l} = M'_{x,y,xy}$ (III.43)

- Pour un chargement thermomélastique, les déformations en cisaillement transversal et gauchissement cisaillement sont obtenues à partir de l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xz}^s \\ \varepsilon_{yz}^s \\ \varepsilon_{xz}^{sw} \\ \varepsilon_{yz}^{sw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{44}' & a_{44}' & 3d_{44}' & 3d_{45}' \\ a_{45}' & a_{55}' & 3d_{45}' & 3d_{55}' \\ 3d_{44}' & 3d_{45}' & 9e_{44}' & 9e_{45}' \\ 3d_{45}' & 3d_{55}' & 9e_{45}' & 9e_{55}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{Q_{xz}} \\ \overline{Q_{yz}} \\ \overline{R_{xz}} \\ \overline{R_{yz}} \end{bmatrix} \quad (III.44)$$

avec :

$$\overline{Q_{xz,yz}} = Q'_{xz,yz} \quad (III.45)$$

$$\text{et : } \overline{R_{xz,yz}} = R'_{xz,yz} \quad (III.46)$$

*/en final on obtient :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \\ \varepsilon^w \\ \varepsilon^s \\ \varepsilon^{sw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & \bar{c} & 0 & 0 \\ b & d & e & 0 & 0 \\ \bar{c} & e & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a' & 3d' \\ 0 & 0 & 0 & 3d' & 9e' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{N} \\ \overline{M} \\ \overline{P} \\ \overline{Q} \\ \overline{R} \end{bmatrix} \quad (III.47)$$

III.5. Modélisation de température :

Dans l'équation (III.1) la température ΔT représente la variation de température entrée, la température d'utilisation et la température de polymérisation, $\Delta T = T_u - T_p$.

La problème qui se pose dans les plaques épaisses c'est le modèle de ΔT (surtout que x et y ne sont pas négligeable).

Nous avons choisi un modèle de température en fonction de x,y,z d'après la références[15]. Ce modèle correspond à la solution d'une plaque rectangulaire soumise à un champ de température variable, le champ de température est linéaire à travers l'épaisseur z et correspond à une distribution sinusoïdale plane suivant x et y.

$$\Delta T = (T_0 + z T_1) T(x, y) \quad (III.48)$$

$$T_0 = \frac{1}{2}(T^* + T^\infty) \quad (III.49)$$

$$T_1 = \frac{1}{2h}(T^* - T^\infty) \quad (III.50)$$

$$T(x, y) = \sin \alpha x \sin \beta y$$

Telque :

$$\alpha = \frac{\Pi}{a} \quad \beta = \frac{\Pi}{b}$$
(III.51)

III.6. Conclusion :

La variation de température dans le temps engendre des contraintes résiduelles non uniformes dans les plis même sans chargement mécanique. Leurs prises en considération lors de l'analyse du stratifié sont nécessaires.

Généralement, les propriétés des matériaux composites sont affectées par les conditions d'environnement aux quelles ils sont soumis, ce qui introduit des déformations en l'absence de tout chargement mécanique, ces phénomènes sont les conséquence de la variation de température, introduisant des déformations et des contraintes qui peuvent modifier considérablement le comportement mécanique des structures en composite.

L'effet thermique apparaît dans cette description comme un effort supplémentaire appliqué sur un volume élémentaire de plaque. A partir de la matrice de comportement du stratifié, on détermine les déformations de la plaque. Les contraintes faisant apparaître le couplage entre les différents plis sont alors calculées en utilisant la matrice de raideur de chaque pli.

On note que les contraintes thermiques, selon les empilements choisis, peuvent engendrer de la traction et du cisaillement en membrane, mais aussi de la flexion de la torsion, du gauchissement, cisaillement et gauchissement cisaillement. Cependant, il est important de mentionner que si le stratifié est symétrique, il n'a pas de moment de flexion ou de torsion induit par un effet thermique.

Après ainsi poser l'équation de modélisation thermique et mécanique pour les plaques épaisses, l'outil d'informatique est nécessaire pour toute étude. Dans le prochain chapitre sera cocernée à l'élaboration du code avec simulation et résultats.

Code

de Calcul

et

Résultats

Chapitre IV

Code de Calcul et Résultats

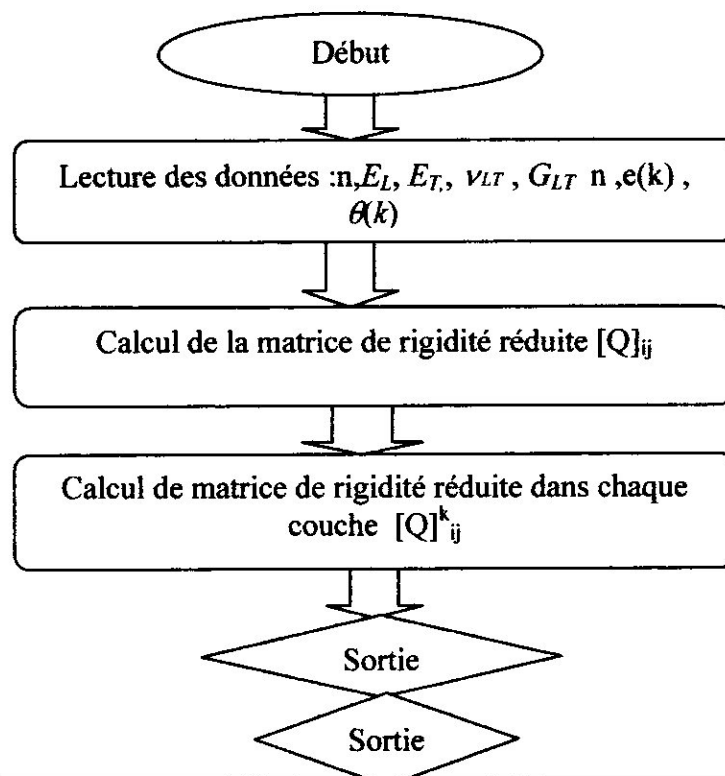
Après établissement de modèles mécaniques et thermiques pour les plaques épaisses composites par la HSDT, nous présentons dans ce chapitre les organigrammes et le code de calcul, qui permettent de déterminer les comportements mécaniques et thermiques des plaques épaisses, que nous avons élaboré. Des applications de simulation seront exposées.

En effet le programme fortran de notre code de calcul est composé de quatre sous-programmes à savoir :

- Le sous-programme TCSM.FOR permet de calculer le comportement mécanique des plaques minces, par la méthode de la Théorie Classique des Stratifiés ;
- Le sous-programme TCST.FOR détermine le comportement thermomécanique des plaques minces par la méthode de la Théorie Classique des Stratifiés;
- Le sous-programme HSDTM.FOR permet de calculer le comportement mécanique des plaques épaisses, par la méthode de la HSDT (High order Shear Deformation Theory) ;
- Le sous-programme HSDTT.FOR donne le comportement thermomécanique des plaques épaisses, par la méthode de la HSDT (High order Shear Deformation Theory).

IV.1. Organigrammes pour les plaques minces :

IV.1.1. Organigramme de calcul des contraintes mécaniques :(TCSM)



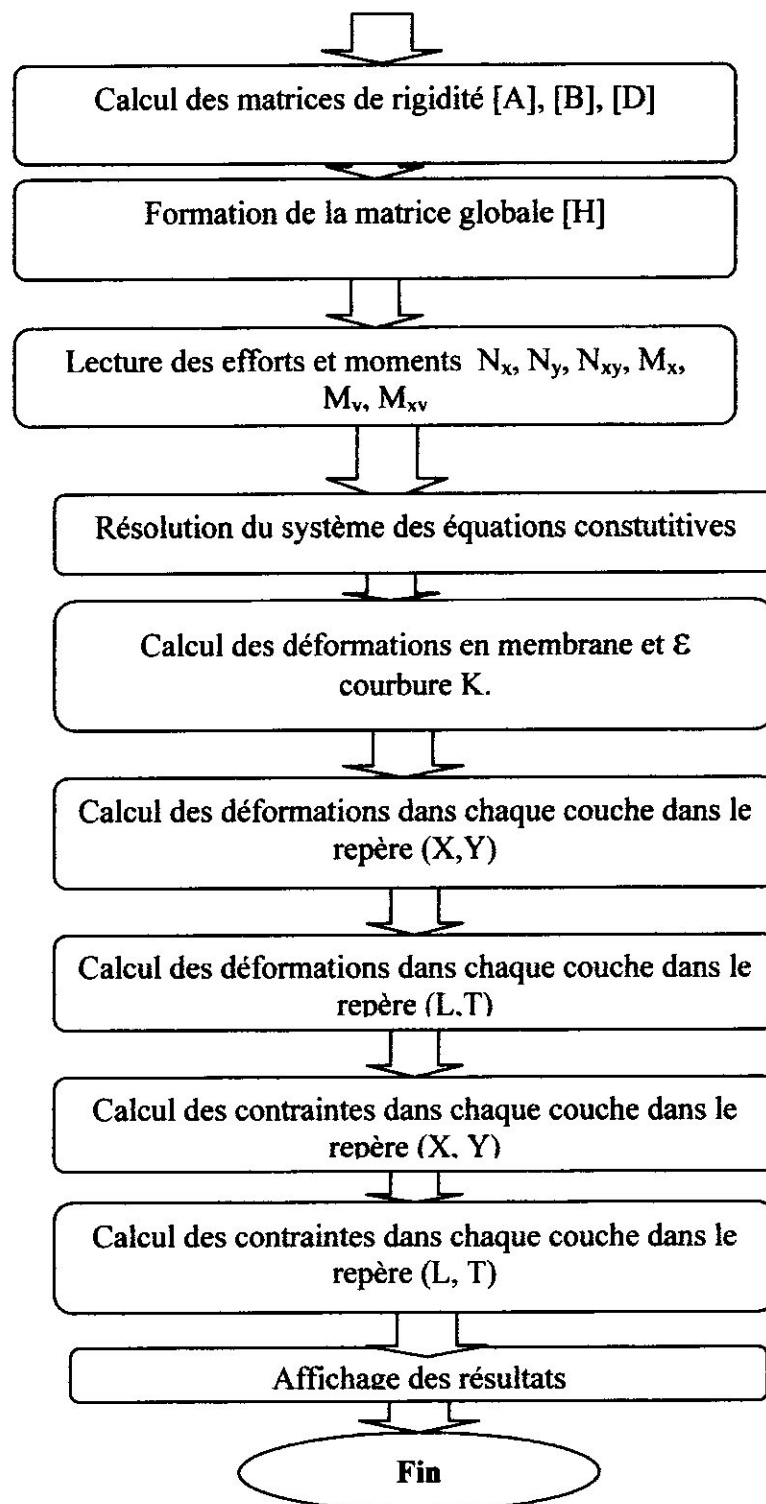
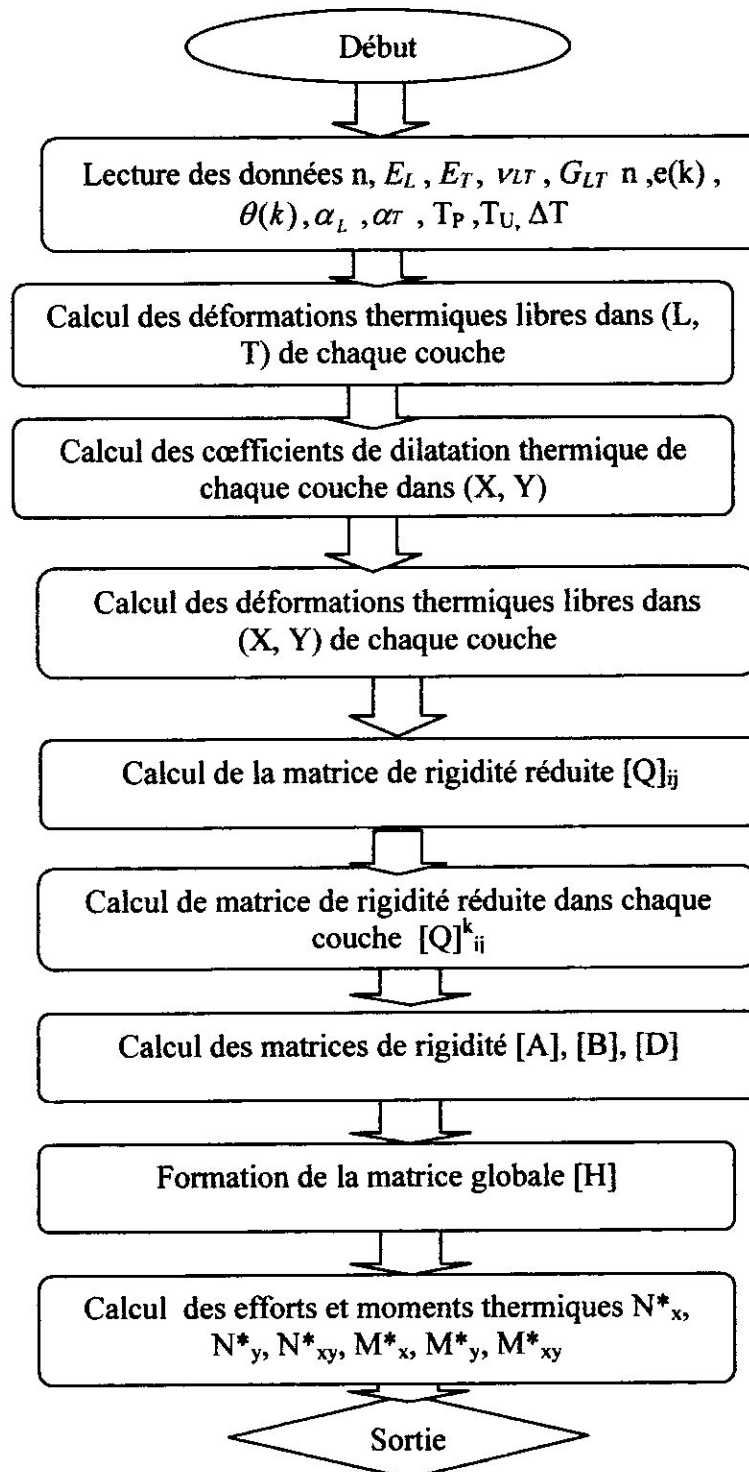


Figure (IV.1) : Organigramme de calcul des contraintes et déformations Mécaniques (TCSM).

Validation (1) :

Le programme a été validé à travers les exemples de la référence [2] en annexe A, la simulation est donnée en pages (55) (61) et les graphes (IV-4) et (IV-5).

IV.1.2. Organigramme de calcul des contraintes et déformations thermiques sans chargements mécaniques : (TCST)



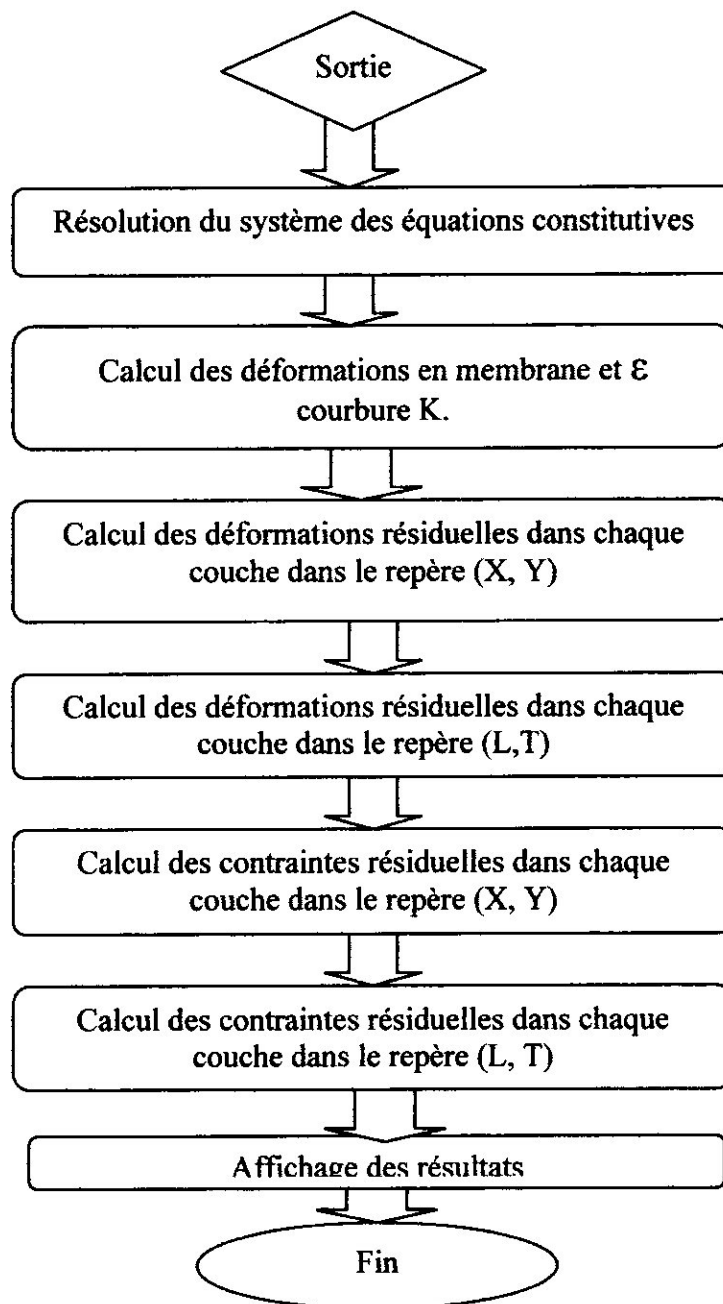


Figure (IV-2) : Organigramme de calcul des contraintes et déformations thermiques sans chargement mécanique.

Validation (2) :

Le programme a été validé avec les exemples de la référence [2] en annexe B, la simulation est donnée en pages (61), (62) et figures (IV-7) et (IV-8)

VI.2. Simulation des Plaques Minces :

VI.2.1. Simulation (1) TCSM :

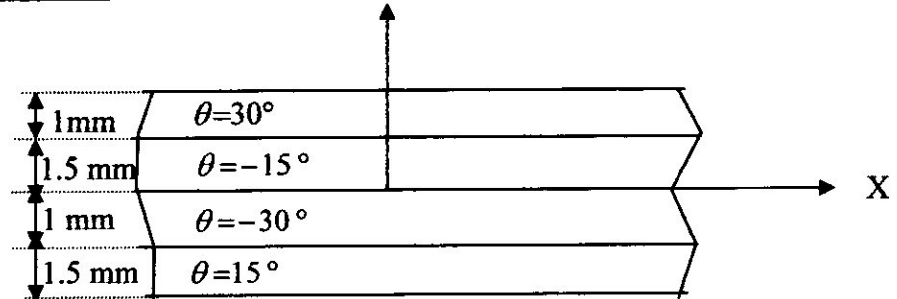


Figure (IV.3): Stratifié [30°/-15°/-30°/15°].

VI.2.1.1. Conditions mécaniques :

Pour l'étude mécanique nous considérons le stratifié de la figure (IV.3) constitué de quatre couches unidirectionnelles dont les propriétés sont les suivantes :

E_L (MPa)	38000
E_T (MPa)	9000
G_{LT} (MPa)	3600
ν_{LT}	0.32
N_X (N/mm)	10^6
N_Y (N/mm)	$5 \cdot 10^5$
N_{XY} (N/mm)	$2.5 \cdot 10^5$
$M_X = M_Y = M_{XY}$ (N/mm ²)	0

Tableau (IV.1) : Conditions mécaniques.

VI.2.1.2. Résultats obtenus:

VI.2.1.2.1. La matrice Q est :

38.9445E+03	2.9516E+03	000.0000E-03
2.9516E+03	9.2237E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	3.6000E+03

VI.2.1.2.2. La matrice de rigidité de la couche 1 est:

35.2120E+03	4.6931E+03	6.7316E+03
4.6931E+03	9.4731E+03	698.6221E+00
6.7316E+03	698.6221E+00	5.3416E+03

VI.2.1.2.3. La matrice de rigidité de la couche 2 est:

26.2896E+03	8.1763E+03	-9.4512E+03
8.1763E+03	11.4292E+03	-3.4183E+03
-9.4512E+03	-3.4183E+03	8.8247E+03

VI.2.1.2.4. La matrice de rigidité de la couche 3 est:

35.2120E+03	4.6931E+03	-6.7316E+03
4.6931E+03	9.4731E+03	-698.6221E+00
-6.7316E+03	-698.6221E+00	5.3416E+03

VI.2.1.2.5. La matrice de rigidité de la couche 4 est:

26.2896E+03	8.1763E+03	9.4512E+03
8.1763E+03	11.4292E+03	3.4183E+03
9.4512E+03	3.4183E+03	8.8247E+03

VI.2.1.2.6. La matrice A est:

158.2153E+03	30.4320E+03	000.0000E-03
30.4320E+03	51.2776E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	33.6741E+03

VI.2.1.2.7. La matrice B est:

-13.3836E+03	5.2247E+03	-1.6154E+03
5.2247E+03	2.9342E+03	5.9258E+03
-1.6154E+03	5.9258E+03	5.2247E+03

VI.2.1.2.8. La matrice D est:

327.3846E+03	64.2708E+03	60.6855E+03
64.2708E+03	107.3173E+03	15.4383E+03
60.6855E+03	15.4383E+03	71.0251E+03

VI.2.1.2.9. La matrice H est:

158.2153E+03	30.4320E+03	000.0000E-03	-13.3836E+03	5.2247E+03	-1.6154E+03
30.4320E+03	51.2776E+03	000.0000E-03	5.2247E+03	2.9342E+03	5.9258E+03
000.0000E-03	000.0000E-03	33.6741E+03	-1.6154E+03	5.9258E+03	5.2247E+03
-13.3836E+03	5.2247E+03	-1.6154E+03	327.3846E+03	64.2708E+03	60.6855E+03
5.2247E+03	2.9342E+03	5.9258E+03	64.2708E+03	107.3173E+03	15.4383E+03
-1.6154E+03	5.9258E+03	5.2247E+03	60.6855E+03	15.4383E+03	71.0251E+03

VI.2.1.2.10. La matrice inverse de la matrice H est:

7.2071E-06	-4.3217E-06	69.1553E-09	415.4357E-09	-525.4145E-09	278.6491E-09
-4.3217E-06	22.2972E-06	279.2297E-09	-187.3827E-09	-42.0731E-09	-1.8099E-06
69.1553E-09	279.2297E-09	30.5076E-06	1.0321E-06	-1.9209E-06	-2.7302E-06
415.4357E-09	-187.3827E-09	1.0321E-06	4.0518E-06	-2.0576E-06	-3.0655E-06
-525.4145E-09	-42.0731E-09	-1.9209E-06	-2.0576E-06	10.7473E-06	-445.1164E-09
278.6491E-09	-1.8099E-06	-2.7302E-06	-3.0655E-06	-445.1164E-09	17.1537E-06

VI.2.1.2.11. Le vecteur des déformations dans XY est:

5.0635E+00	6.8967E+00	7.8357E+00	579.7662E-03	-1.0267E+00	-1.3089E+00
------------	------------	------------	--------------	-------------	-------------

VI.2.1.2.12. Les déformations en membrane rapportées aux axes de référence (X, Y), sont:

5.0635E+00	6.8967E+00	7.8357E+00
------------	------------	------------

VI.2.1.2.13. Les déformations en courbure rapportées aux axes de référence (X, Y), sont:

579.7662E-03 -1.0267E+00 -1.3089E+00

VI.2.1.2.14. Les déformations dans chaque couche du stratifié dans le repère (X, Y):

-2.5000E+00	3.6141E+00	9.4634E+00	11.1078E+00
-1.0000E+00	4.4838E+00	7.9234E+00	9.1445E+00
-1.0000E+00	4.4838E+00	7.9234E+00	9.1445E+00
000.0000E-03	5.0635E+00	6.8967E+00	7.8357E+00
000.0000E-03	5.0635E+00	6.8967E+00	7.8357E+00
1.5000E+00	5.9332E+00	5.3567E+00	5.8724E+00
1.5000E+00	5.9332E+00	5.3567E+00	5.8724E+00
2.5000E+00	6.5130E+00	4.3300E+00	4.5635E+00

VI.2.1.2.15. Les déformations dans chaque couche du stratifié dans le repère (L, T):

-2.5000E+00	6.7829E+00	6.2946E+00	12.5443E+00
-1.0000E+00	7.0003E+00	5.4068E+00	9.6392E+00
-1.0000E+00	1.3840E+00	11.0232E+00	1.5935E+00
0.0000E+00	2.1289E+00	9.8313E+00	2.3303E+00
0.0000E+00	3.2274E+00	8.7328E+00	5.8693E+00
1.5000E+00	4.4265E+00	6.8634E+00	5.3739E+00
1.5000E+00	8.3319E+00	2.9580E+00	2.4369E+00
2.5000E+00	7.9433E+00	2.8997E+00	391.2793E-03

VI.2.1.2.16. Les contraintes mécaniques dans chaque couches dans le plan (X, Y):

-2.5000E+00	246.4466E+00	114.3690E+00	90.2731E+00
-1.000E+00	256.6252E+00	102.4901E+00	84.5643E+00
-1.000E+00	96.2334E+00	95.9601E+00	11.2363E+00
0.000E+00	115.4511E+00	93.4403E+00	-2.2840E+00
0.0000E+00	157.9182E+00	83.6225E+00	2.9509E+00
1.500E+00	194.5287E+00	74.4869E+00	-12.3143E+00
1.500E+00	255.2800E+00	129.8074E+00	126.2084E+00
2.5000E+00	249.7572E+00	118.3396E+00	116.6282E+00

VI.2.1.2.17. Les contraintes mécaniques dans chaque couche exprimée dans le plan (L, T):

-2.5000E+00	282.7356E+00	78.0799E+00	45.1594E+00
-1.000E+00	288.5823E+00	70.5330E+00	34.7011E+00
-1.000E+00	86.4342E+00	105.7593E+00	5.7365E+00
0.000E+00	111.9264E+00	96.9650E+00	8.3890E+00
0.000E+00	151.4659E+00	90.0749E+00	21.1295E+00
1.5000E+00	192.6446E+00	76.3710E+00	19.3460E+00
1.5000E+00	333.2116E+00	51.8758E+00	8.7729E+00
2.5000E+00	317.9059E+00	50.1910E+00	1.4086E+00

VI.2.1.3. Représentation graphique:

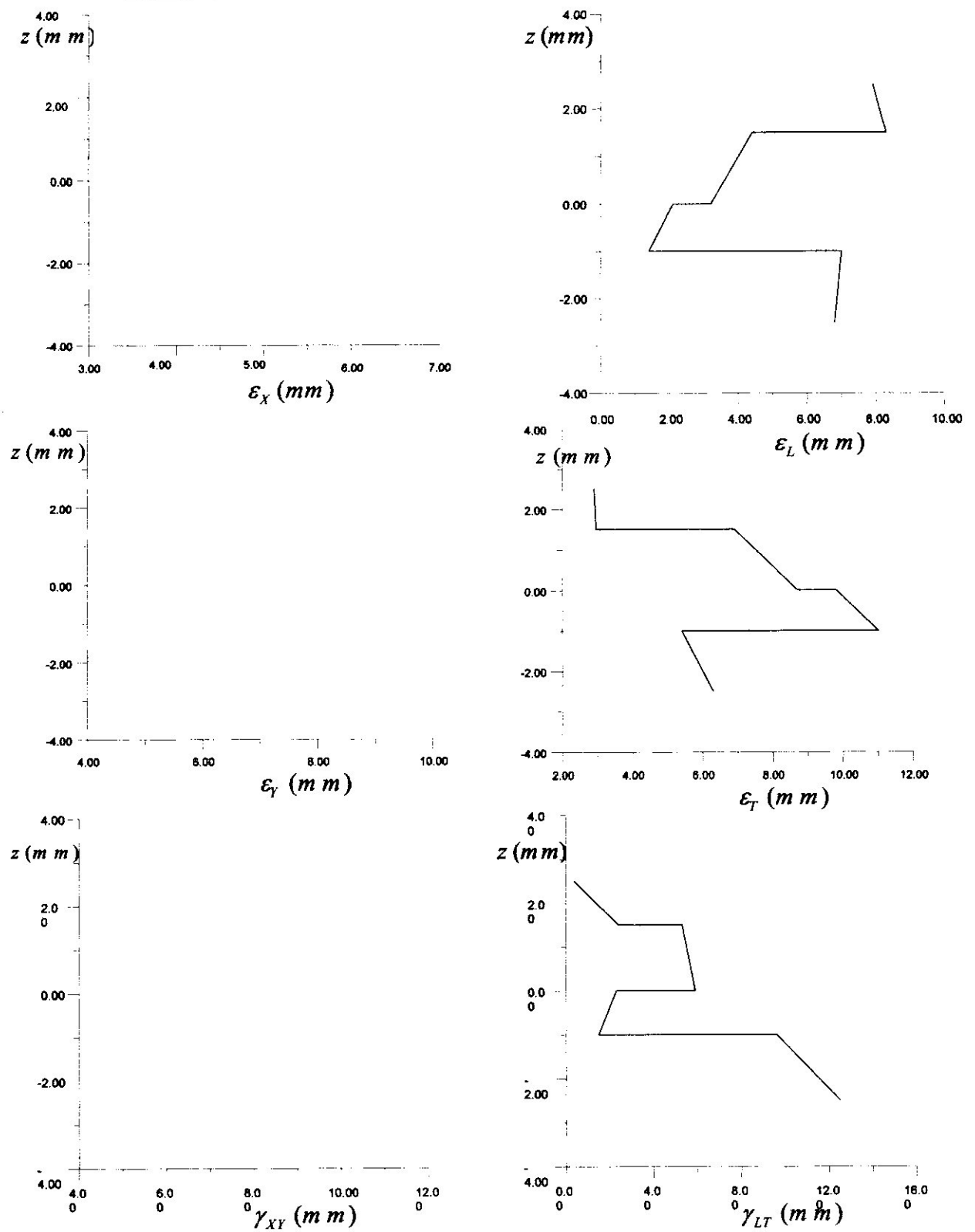


Figure (IV.4) : Déformations mécaniques du stratifié $[15^\circ/-30^\circ/-15^\circ/30^\circ].[1.5/1/1.5/1]$ (TCSM).

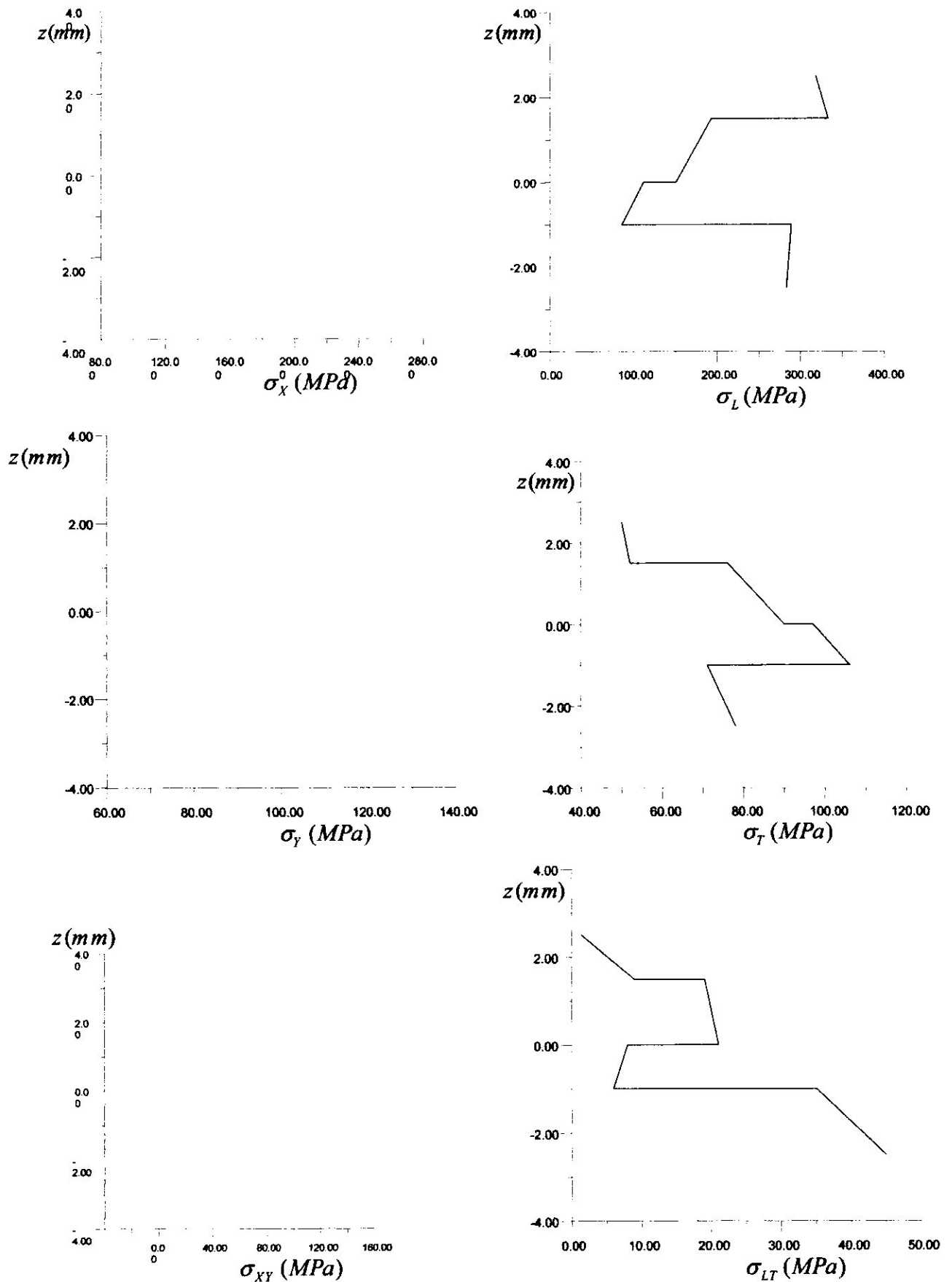


Figure (IV.5) : contraintes mécaniques du stratifié $[15^0/-30^0/-15^0/30^0].[1.5/1/1.5/1]$ (TCSM).

IV.2.2. Simulation (2) TCST :

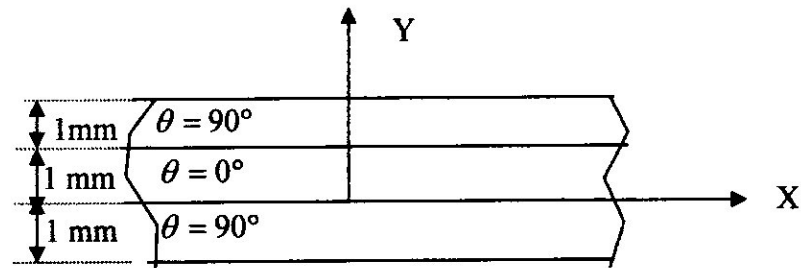


Figure (IV.6) : Stratifié [90°/0°/90°].

IV.2.2.1. Conditions thermiques :

Pour l'étude thermique nous considérons le stratifié de la figure (IV.6) constitué de trois couches unidirectionnelles dont les propriétés sont les suivantes :

E_L (GPa)	45
E_T (GPa)	10
G_{LT} (GPa)	4.5
ν_{LT}	0.31
α_L (C°) ⁻¹	$5 \cdot 10^{-6}$
α_T (C°) ⁻¹	$20 \cdot 10^{-6}$

Tableau (IV.2): Propriétés des couches.

Avec : la température de polymérisation du stratifié $T_P=120C^\circ$ et la température d'utilisation $T=20C^\circ$

IV.2.2.2. Résultats obtenus :**IV.2.2.2.1. La matrice Q est:**

45.9820E+03	3.1676E+03	000.0000E-03
3.1676E+03	10.2182E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	4.5000E+03

IV.2.2.2.2. La matrice de rigidité de la couche 1 est:

10.2182E+03	3.1676E+03	000.0000E-03
3.1676E+03	45.9820E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	4.5000E+03

IV.2.2.2.3. La matrice de rigidité de la couche 2 est :

45.9820E+03	3.1676E+03	000.0000E-03
3.1676E+03	10.2182E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	4.5000E+03

IV.2.2.2.4. La matrice de rigidité de la couche 3est:

10.2182E+03	3.1676E+03	000.0000E-03
3.1676E+03	45.9820E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	4.5000E+03

IV.2.2.2.5. La matrice A est:

66.4184E+03	9.5029E+03	000.0000E-03
9.5029E+03	102.1822E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	13.5000E+03

IV.2.2.2.6. La matrice B est:

000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03

IV.2.2.2.7. La matrice D est:

25.9713E+03	7.1272E+03	000.0000E-03
7.1272E+03	100.4791E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	10.1250E+03

IV.2.2.2.8. La matrice H est:

66.4184E+03	9.5029E+03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
9.5029E+03	102.1822E+03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	13.5000E+03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	25.9713E+03	7.1272E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	7.1272E+03	100.4791E+03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	10.1250E+03

IV.2.2.2.9. La matrice inverse de la matrice H est :

15.2591E-06	-1.4191E-06	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
-1.4191E-06	9.9184E-06	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	74.0741E-06	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03

000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	39.2684E-06	-2.7854E-06	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	-2.7854E-06	10.1499E-06	000.0000E-03
000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	000.0000E-03	98.7654E-06

IV.2.2.2.10. Les déformations thermiques dans les axes (L, T) eL, eT, eLT

-5.000000000000000E-004 -2.000000000000000E-003 0.000000000000000E+000

IV.2.2.2.11. Les coefficients de dilatation thermique ALPHAx, ALPHAy, ALPHAxY pour la couche 1 est:

2.000000000000000E-005 5.000000000000000E-006 0.000000000000000E+000

IV.2.2.2.12. Les déformations thermiques libres dans la couche 1: Ex, Ey, Es :

-2.000000000000000E-003 -5.000000000000000E-004 0.000000000000000E+000

IV.2.2.2.13. Les coefficients de dilatation thermique ALPHAx, ALPHAy, ALPHAxY pour la couche 2est:

5.000000000000000E-006 2.000000000000000E-005 0.000000000000000E+000

IV.2.2.2.14. Les déformations thermiques libres dans la couche 2: Ex, Ey, Es ;

-5.000000000000000E-004 -2.000000000000000E-003 0.000000000000000E+000

IV.2.2.2.15. Les coefficients de dilatation thermique ALPHAx, ALPHAy, ALPHAxY pour la couche 3est:

2.000000000000000E-005 5.000000000000000E-006 0.000000000000000E+000

IV.2.2.2.16. Les déformations thermiques libres dans la couche 3: Ex,Ey,Es :

-2.000000000000000E-003 -5.000000000000000E-004 0.000000000000000E+000

IV.2.2.2.17. Les efforts Nx est:

-73.366788626062260

IV.2.2.2.18. Les efforts Ny est:

-80.672812870875320

IV.2.2.2.19. Les efforts Nxy est:

0.000000000000000E+000

IV.2.2.2.20. Le moments Mx est:

0.000000000000000E+000

IV.2.2.2.21. Le moments My est:

0.000000000000000E+000

IV.2.2.2.22. Le moments Mxy est:

0.000000000000000E+000

IV.2.2.2.23. Le vecteur des moments et efforts N, M est:

-73.366788626062260 -80.672812870875320 0.000000000000000E+000

0.000000000000000E+000 0.000000000000000E+000 0.000000000000000E+000

IV.2.2.2.24. Le vecteur des déformations THERMIQUES dans XY est:

-1.0050E-03 -696.0323E-06 000.0000E-03

000.0000E-03 000.0000E-03 000.0000E-03

IV.2.2.2.25. ϵ_0 "X, Y, s" sont:

-1.0050E-03 -696.0323E-06 000.0000E-03

IV.2.2.2.26. K "X, Y" sont:

000.0000E-03 000.0000E-03 000.0000E-03

IV.2.2.2.27. Les déformations résiduelles dans chaque couche exprimées dans le repère (X, Y) sont:

-1.5000E+00 994.9708E-03 -196.0323E-03 000.0000E-03
 -0.5000E+00 994.9708E-03 -196.0323E-03 000.0000E-03
 -0.5000E+00 -505.0292E-03 1.3040E+00 000.0000E-03
 0.5.5000E+00 -505.0292E-03 1.3040E+00 000.0000E-03
 0.5.5000E+00 994.9708E-03 -196.0323E-03 000.0000E-03
 1.5000E+00 994.9708E-03 -196.0323E-03 000.0000E-03

IV.2.2.2.28. Les déformations résiduelles dans chaque couche exprimées dans le repère (L, T) sont:

-1.5000E+00 -196.0323E-03 994.9708E-03 000.0000E-03
 -0.5000E+00 -196.0323E-03 994.9708E-03 000.0000E-03
 -0.5000E+00 -505.0292E-03 1.3040E+00 000.0000E-03
 0.5000E+00 -505.0292E-03 1.3040E+00 000.0000E-03
 0.5000E+00 -196.0323E-03 994.9708E-03 000.0000E-03
 1.5000E+00 -196.0323E-03 994.9708E-03 000.0000E-03

IV.2.2.2.29. Les contraintes résiduelles dans chaque couche exprimées dans le repère (X, Y) sont:

-1.5000E+00 9.5459E+00 -5.8622E+00 000.0000E-03
 -0.5000E+00 9.5459E+00 -5.8622E+00 000.0000E-03
 -0.5000E+00 -19.0917E+00 11.7245E+00 000.0000E-03
 0.5000E+00 -19.0917E+00 11.7245E+00 000.0000E-03
 0.5000E+00 9.5459E+00 -5.8622E+00 000.0000E-03
 1.5000E+00 9.5459E+00 -5.8622E+00 000.0000E-03

IV.2.2.2.30. Les contraintes résiduelles dans chaque couche exprimées dans le repère (L, T) sont:

-1.5000E+00 -5.8622E+00 9.5459E+00 000.0000E-03
 -0.5000E+00 -5.8622E+00 9.5459E+00 000.0000E-03
 -0.5000E+00 -19.0917E+00 11.7245E+00 000.0000E-03
 0.5000E+00 -19.0917E+00 11.7245E+00 000.0000E-03
 0.5000E+00 -5.8622E+00 9.5459E+00 000.0000E-03
 1.5000E+00 -5.8622E+00 9.5459E+00 000.0000E-03

IV.2.2.3. Représentation graphique:

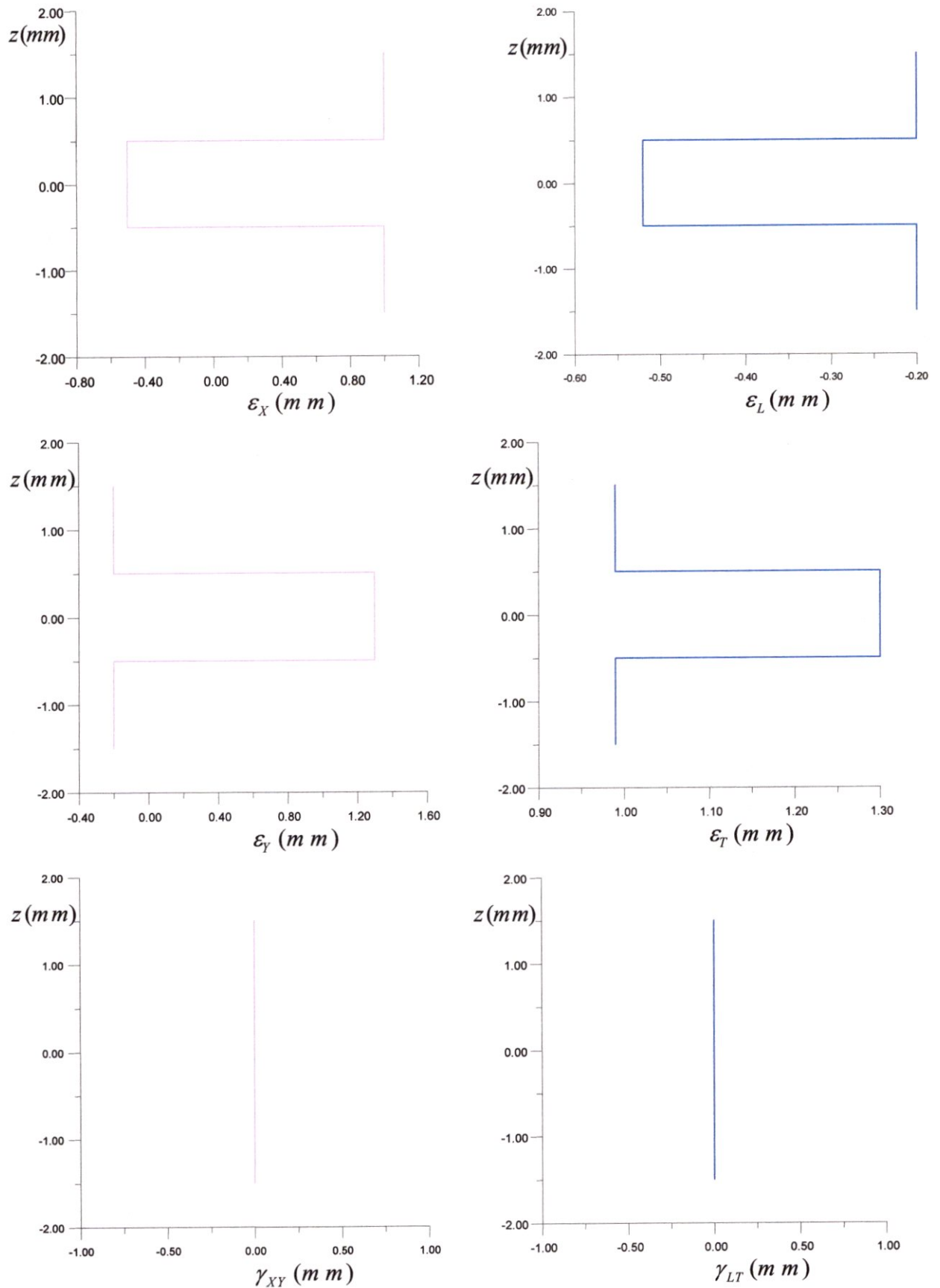


Figure (IV.7) : Déformations thermiques du [90°/0°/90°] [1/1/1] (TCST).

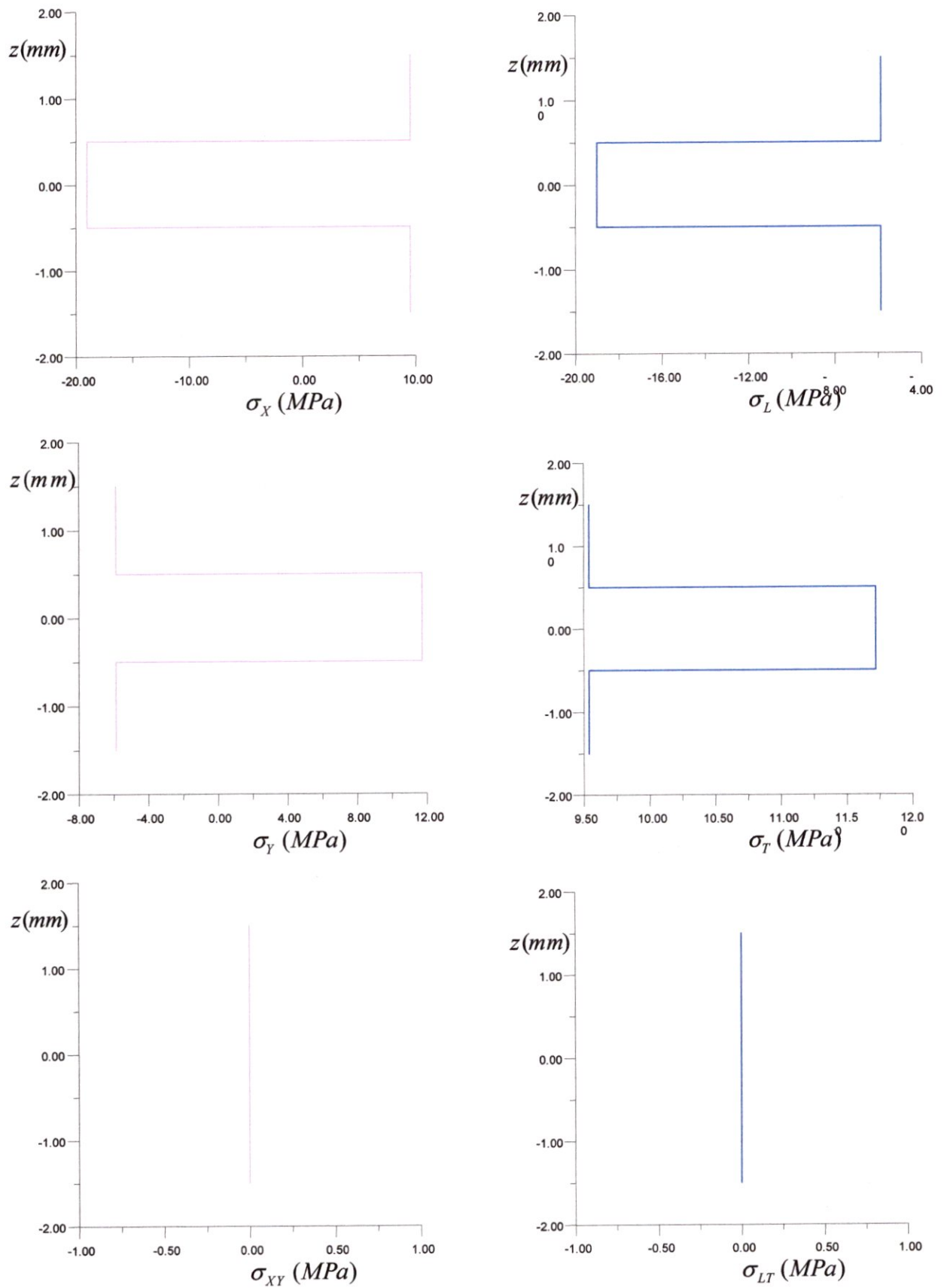
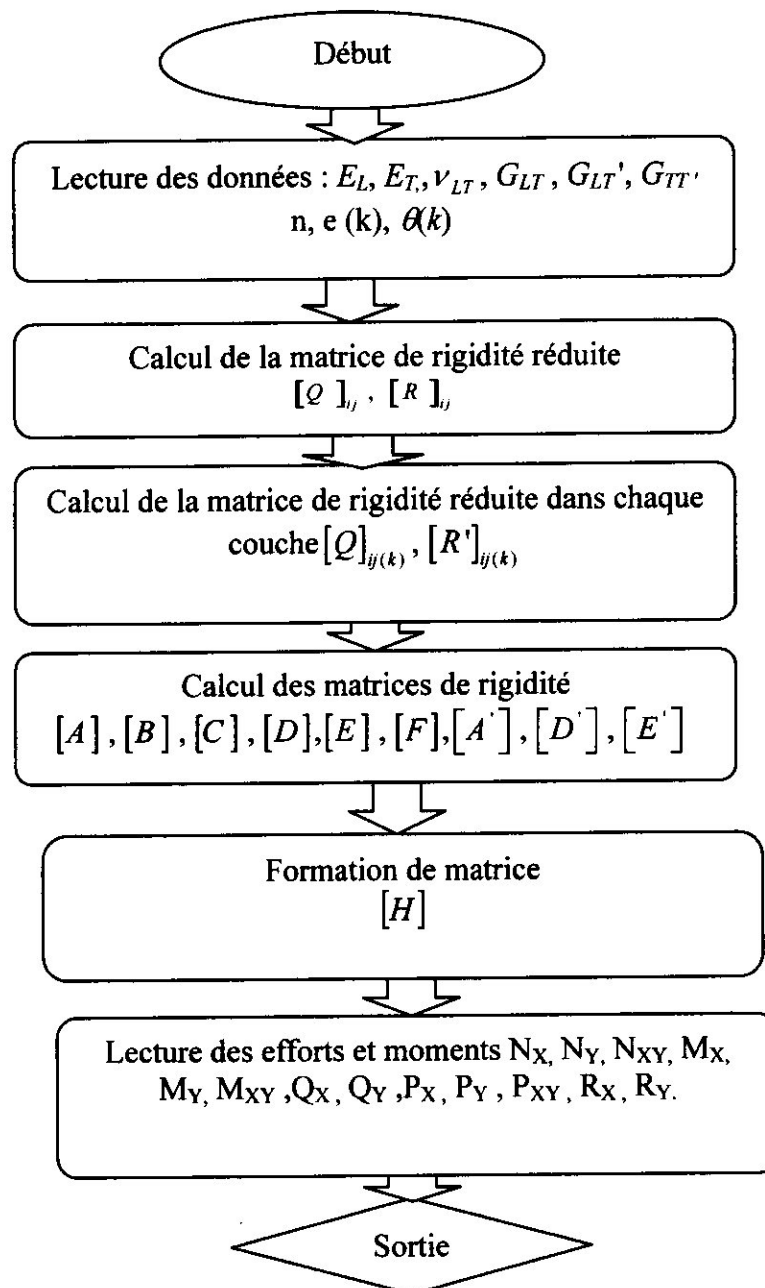


Figure (IV.8) : Contraintes thermiques du [90°/0°/90°] [1/1/1] (TCST).

IV.3. Organigrammes des plaques épaisses :

Après avoir établi les organigrammes pour les plaques minces et après avoir validé les sous-programmes, nous abordons les plaques épaisses.

IV.3.1. Organigramme de calcul des contraintes mécaniques :(HSDTM)



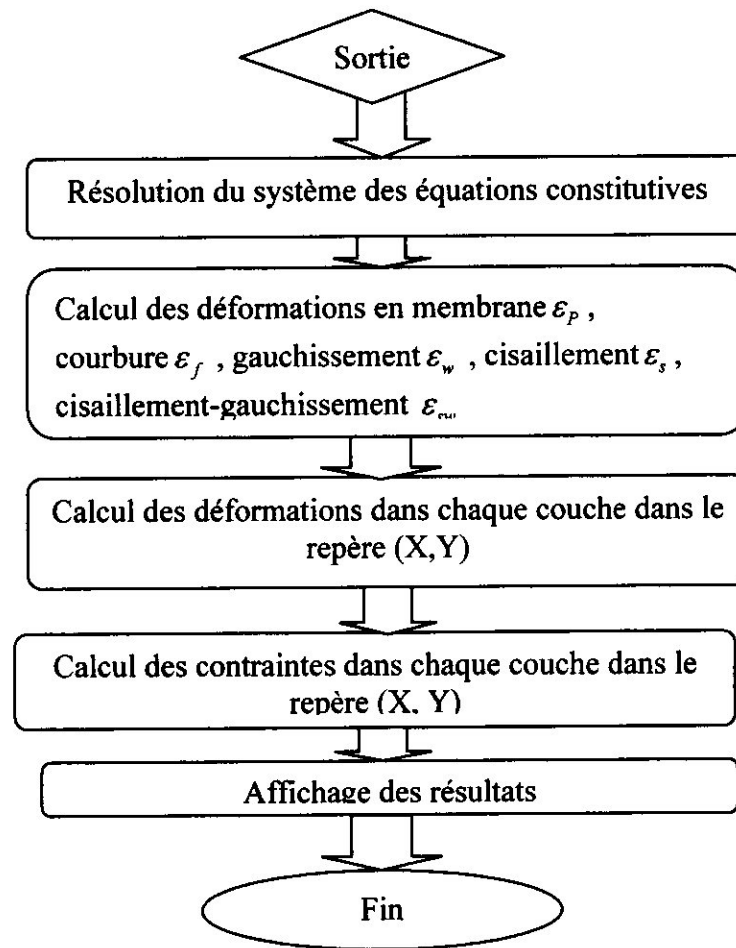
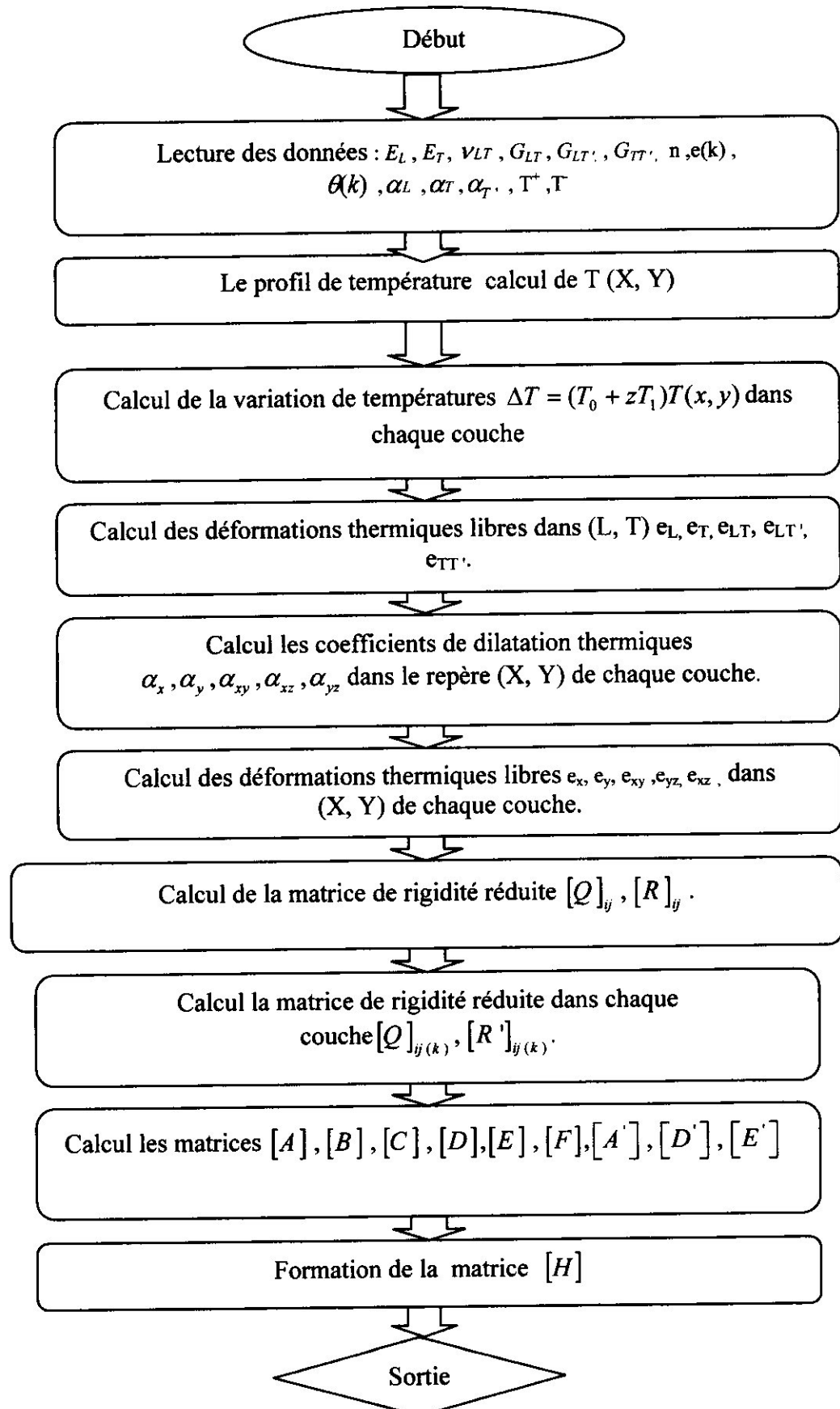


Figure (IV.9) : Organigramme de calcul des contraintes et déformation Mécaniques (HSDTM).

IV.3.2. Organigramme de calcul des contraintes thermiques sans chargements mécaniques avec une température variable: (HSDTT)



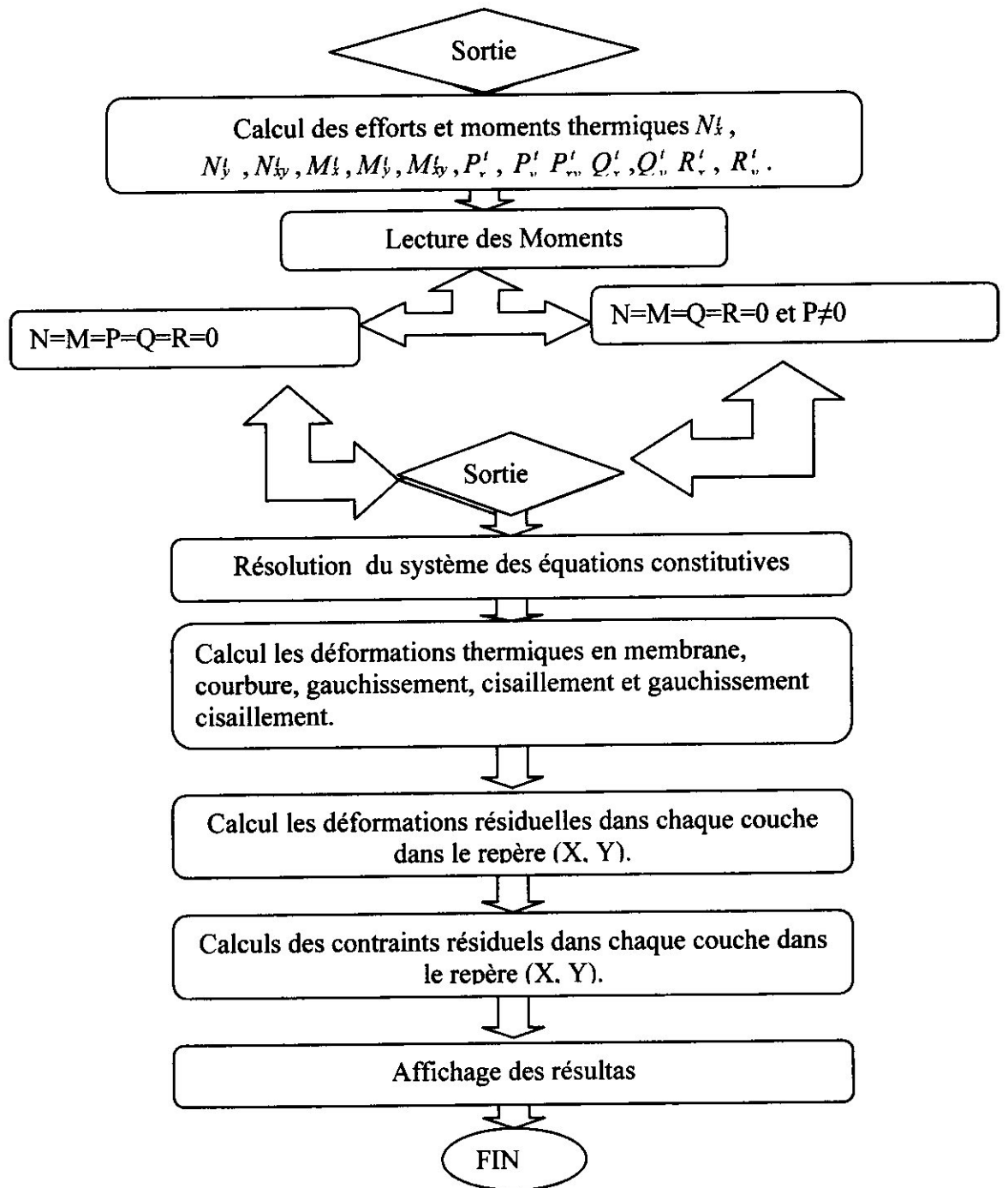


Figure (IV.10) : Organigramme de calcul des contraintes et déformations thermiques sans chargement mécanique.

IV.4. Simulation Mécanique des Plaques Epaises :

IV.4.1. La validation du schéma à plusieurs degrés :

IV.4.1.1. Simulation (1) HSDTM :

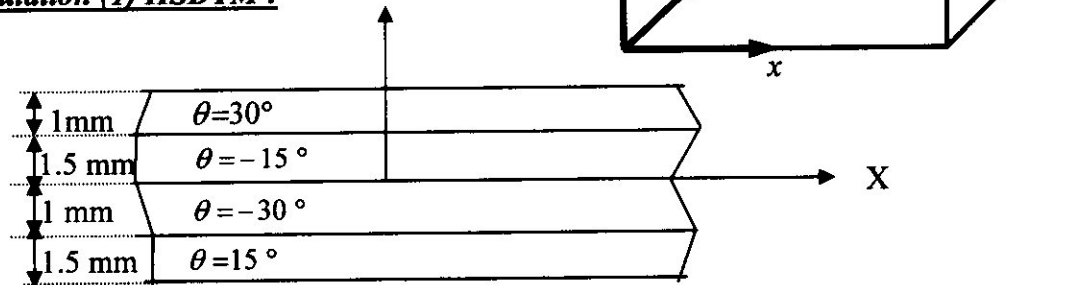


Figure (IV.11): Stratifié à quatre couches de l'application.

IV.4.1.2. Conditions mécaniques :

Pour l'étude mécanique nous considérons le stratifié de la figure (IV.11) constitué de quatre couches bidirectionnelles avec des propriétés suivantes :

E_L (MPa)	38000
E_T (MPa)	9000
G_{LT} (MPa)	3600
$G_{LT'}$ (MPa)	3600
$G_{TT'}$ (MPa)	2500
ν_{LT}	0.32

Tableau (IV.3) : données du matériau.

N_X (N/mm)	10^6
N_Y (N/mm)	$5 \cdot 10^5$
N_{XY} (N/mm)	$2.5 \cdot 10^5$
$M_X = M_Y = M_{XY}$ (N.mm/mm)	0
P_X (N.mm ³ /mm)	250
P_Y (N.mm ³ /mm)	0
P_{XY} (Nmm ³ /mm)	100
Q_X (N/mm)	25
Q_Y (N/mm)	50
R_X (N.mm ² /mm)	30
R_Y (N.mm ² /mm)	50

Tableau (IV.4) : condition du chargement.

IV.4.1.3. représentations graphiques:

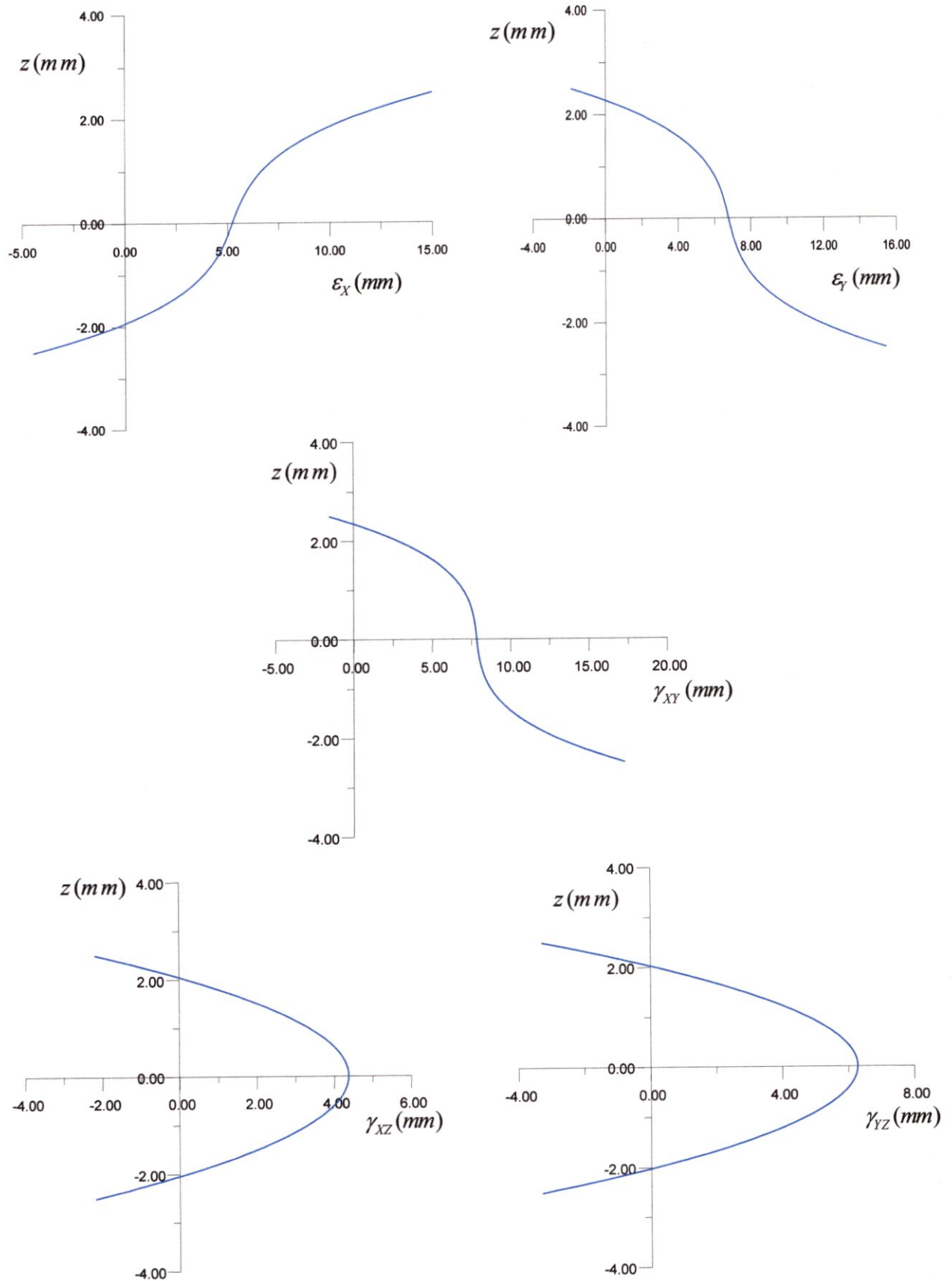


Figure (IV.12): Déformations mécaniques du stratifié $[15^0/-30^0/-15^0/30^0].[1.5/1/1.5/1]$ HSDTM.

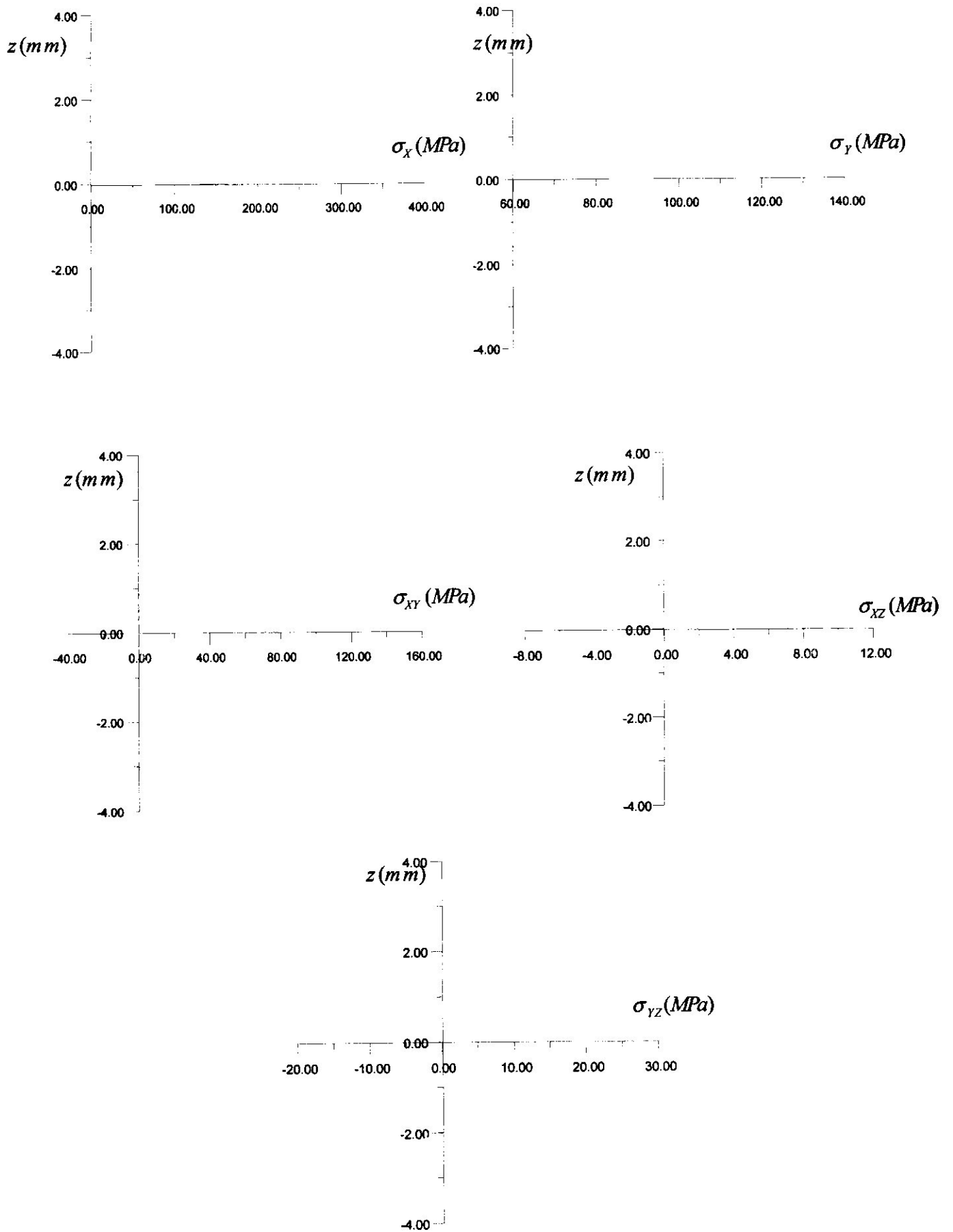


Figure (IV.13) : Contraintes mécaniques du stratifié [15⁰/-30⁰/-15⁰/30⁰] .[1.5/1/1.5/1] HSDTM.

IV.4.2. Application du code pour la prévision des comportements des structures en plaques composites:

Nous allons utiliser le code pour les prévisions du comportement des plaques pour 2 types de chargements, chargement mécanique et chargement thermique.

IV.4.2.1. choix du matériau :

Le matériau considéré est le T300/5208 graphite-époxyde à matrice polymère, actuellement très utilisés en construction aéronautique en raison de sa légèreté et sa rigidité. L'épaisseur de chaque couche est prise à 0.125mm, les caractéristiques du matériau sont reportées dans les tableaux (IV.5), (IV.6):

E_L (MPa)	22900
E_T (MPa)	1390
G_{LT} (MPa)	860
$G_{LT'}$ (MPa)	860
$G_{TT'}$ (MPa)	468
ν_{LT}	0.32
α_L (C°) ⁻¹	5.10^{-6}
α_T (C°) ⁻¹	20.10^{-6}
$\alpha_{T'}$ (C°) ⁻¹	20.10^{-6}

Tableau(IV.5) :données du matériau.

IV.4.2.1.1. le premier chargement :

N_X (N/mm)	10^6
N_Y (N/mm)	5.10^5
N_{XY} (N/mm)	$2.5. 10^5$
$M_X = M_Y = M_{XY}$ (N.mm/mm)	0
P_X (N.mm ³ /mm)	250
P_Y (N.mm ³ /mm)	0
P_{XY} (Nmm ³ /mm)	100

Q_X (N/mm)	25
Q_Y (N/mm)	50
R_X (N.mm ² /mm)	30
R_Y (N.mm ² /mm)	50

Tableau (IV.6) : condition du chargement.

IV.4.2.1.1.1. Choix du stratifié :

Nous traitons l'exemple de matériaux symétriques et non symétriques

$$[0_4/90_2/0_2]_s [0_4/90_4/0_4/90_4]$$

Dans cette application nous mettons en évidence l'effet d'empilement, et d'épaisseur sur le comportement mécanique du stratifié (effet de l'anisotrope), comme suit.

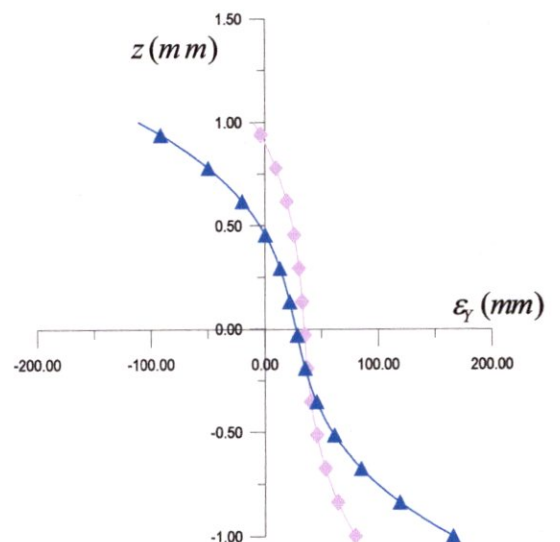
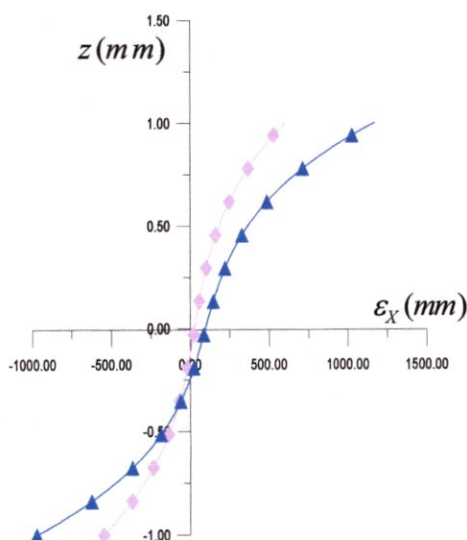
Applications	Orientations	épaisseurs	Symbole graphique
1	$[0^\circ_{(4)}/90^\circ_{(2)}/0^\circ_{(2)}]_s$	$[0.125_{(4)}/0.125_{(2)}/0.125_{(4)}]_s$	■
2	$[0^\circ_{(4)}/90^\circ_{(4)}/0^\circ_{(4)}/90^\circ_{(4)}]$	$[0.125_{(4)}/0.125_{(4)}/0.125_{(4)}/0.125_{(4)}]$	▲

IV.4.2.1.1.2. représentations graphiques:

IV.4.2.1.1.2.1. Les déformations :

■ $[0_4/90_2/0_2]_s [0.125_{(4)}/0.125_{(2)}/0.125_{(4)}]$	Max 650MPa
▲ $[0_4/90_4/0_4/90_4] [0.125_{(4)}/0.125_{(4)}/0.125_{(4)}/0.125_{(4)}]$	1150MPa

■ $[0_4/90_2/0_2]_s [0.125_{(4)}/0.125_{(2)}/0.125_{(4)}]$	Max 75MPa
▲ $[0_4/90_4/0_4/90_4] [0.125_{(4)}/0.125_{(4)}/0.125_{(4)}/0.125_{(4)}]$	75MPa



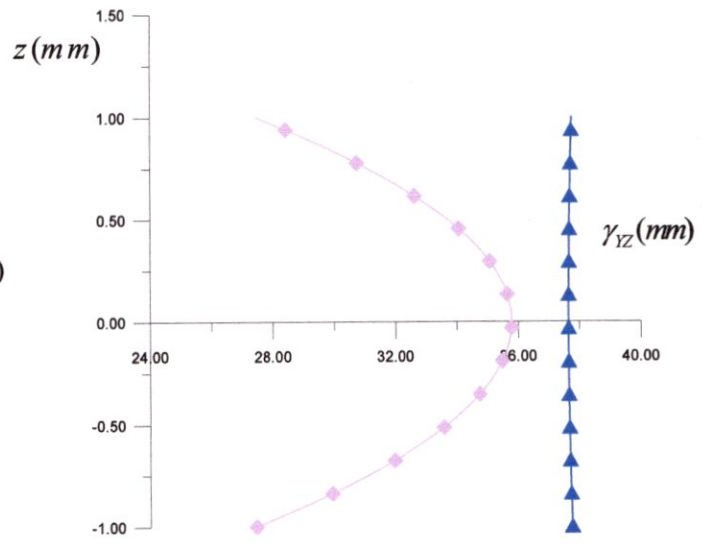
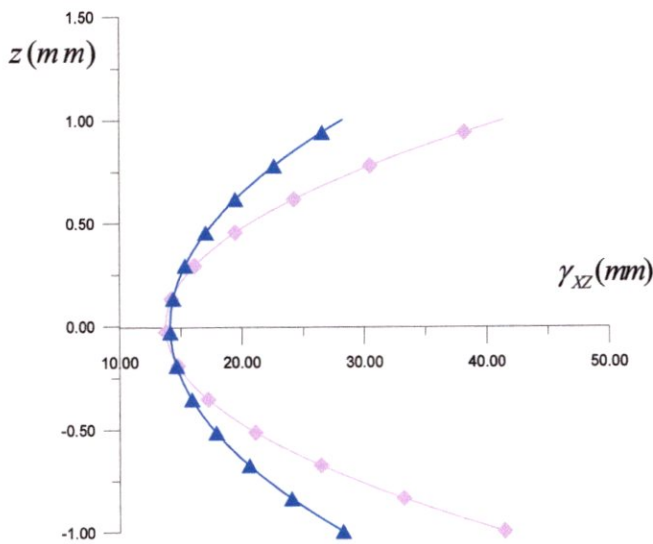
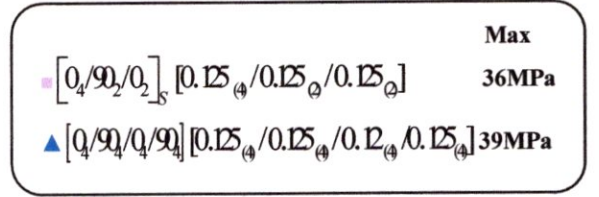
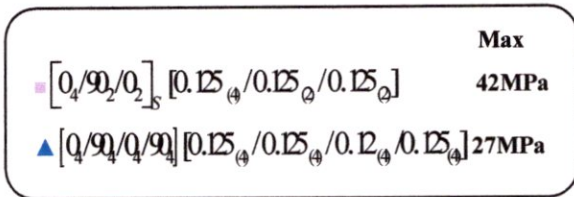
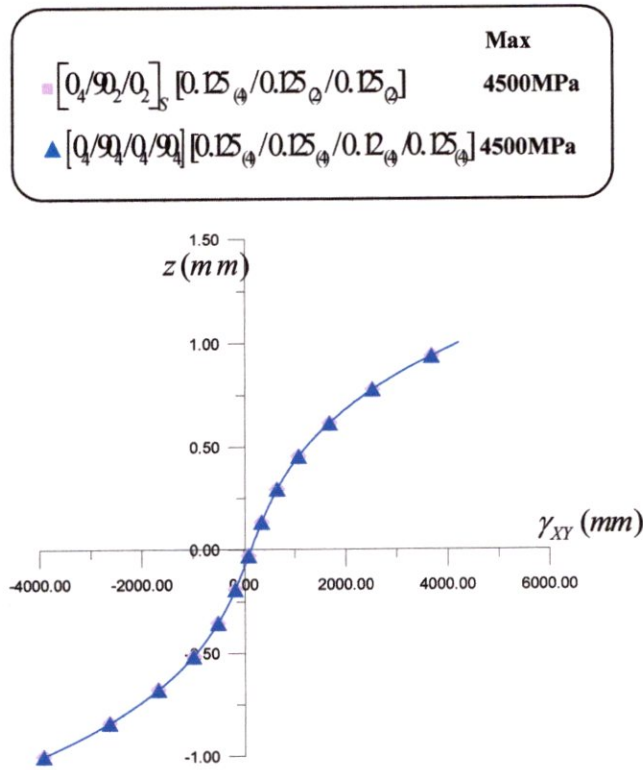
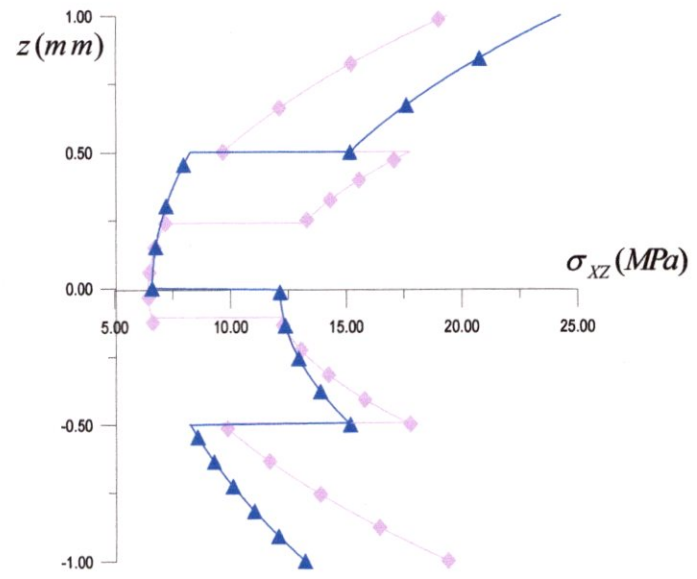
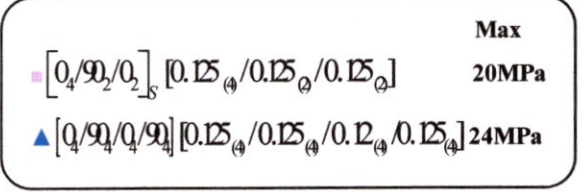
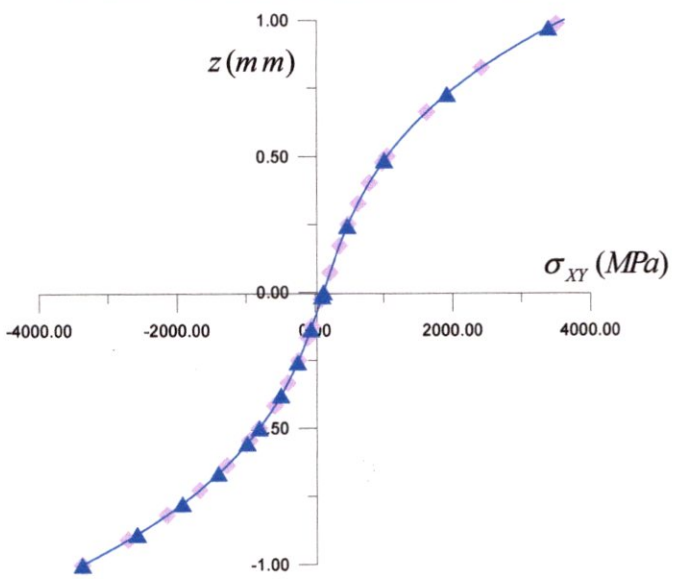
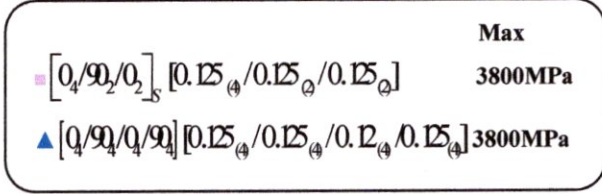
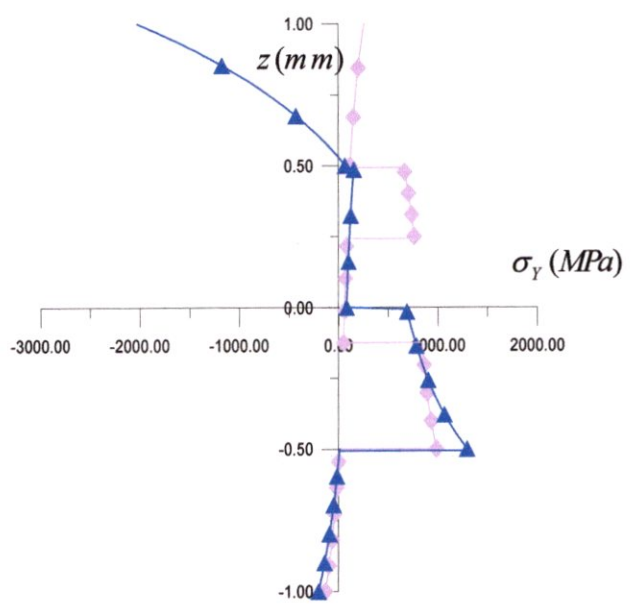
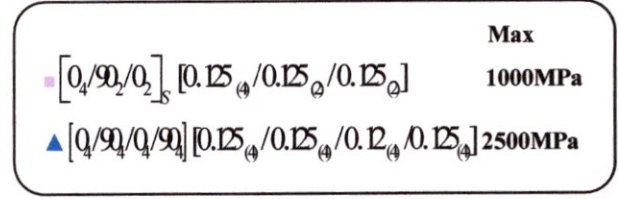
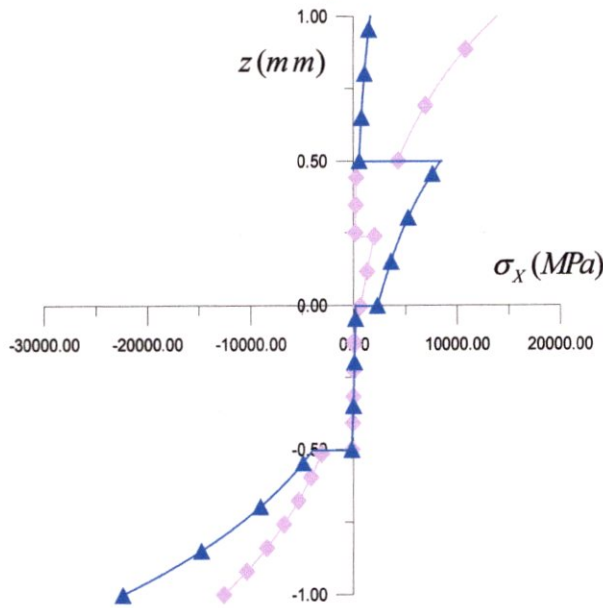
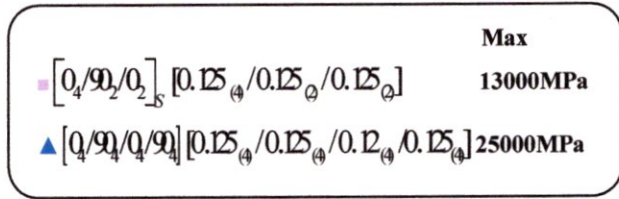


Figure (IV.14): Déformations mécaniques du stratifié dans le plan XY HSDTM.

IV.4.2.1.1.2.2. Les contraintes:



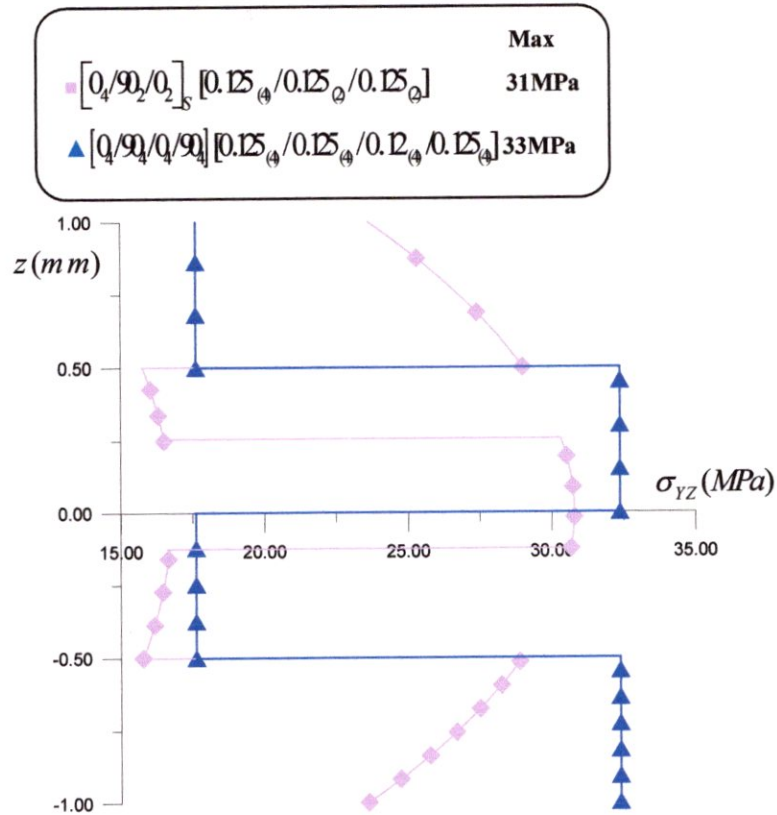


Figure (IV.15) : Contraintes mécaniques du stratifié dans le plan XY HSDTM.

IV.4.2.1.1.3. Interprétations des résultats :

D'après l'allure des graphes des déformations et contraintes, on remarque lorsqu'on change les empilements les courbes subissent aussi des modifications, donc les propriétés des stratifiés seront influencées, cela est due à l'effet de l'anisotropie du stratifié et de plus le stratifié dissymétrique se déforme plus vite que la stratifié symétrique, soumis aux même efforts.

Les contraintes σ_{XX} et σ_{YY} ne font pas de grand changement dans les plis intérieurs; par contre les plis extérieurs sont très touchés par le phénomène de l'anisotropie. Les plis externes sont sollicités en traction et les plis internes en compression.

Les contraintes σ_{XY} de cisaillement ne sont pas affectées par le changement des empilements.

Les contraintes σ_{XZ} et σ_{YZ} sont les plus touchées, elles atteignent les valeurs maximales suivantes : $\sigma_{XZ_{\max}}=18\text{Mpa}$ pour le stratifié symétrique et $\sigma_{XZ_{\max}}=24\text{Mpa}$ pour le stratifié dissymétrique, ce qui est équivalent à une augmentation de 25% par rapport au stratifié symétrique ; $\sigma_{YZ_{\max}}=31\text{Mpa}$ pour le stratifié symétrique et $\sigma_{YZ_{\max}}=33\text{Mpa}$ pour le stratifié dissymétrique, ce qui est équivalent à une augmentation de 6% par rapport au stratifié symétrique, pour les valeurs des contraintes.

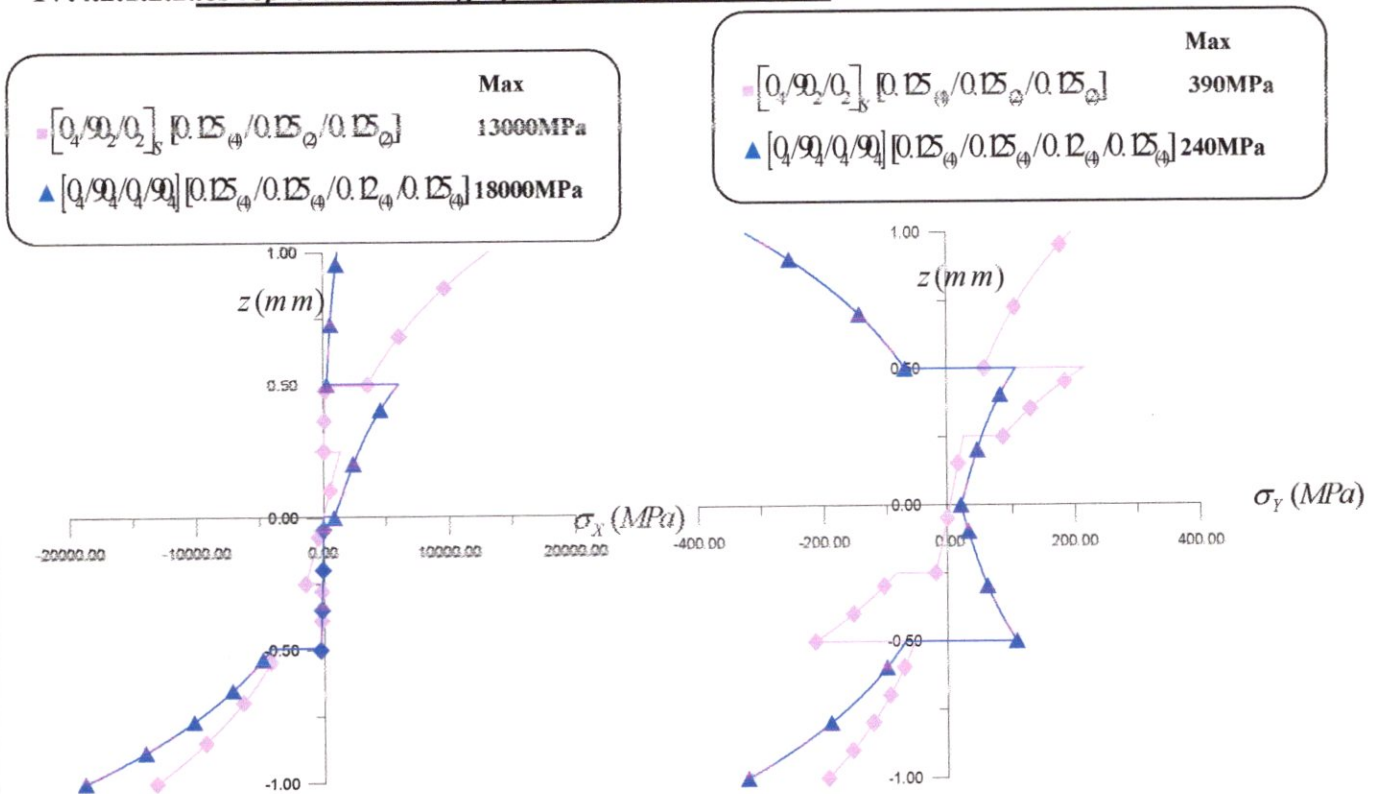
IV.4.2.1.2. le deuxième chargement :

$N_X = N_Y = N_{XY}$ (N/mm)	0
$M_X = M_Y = M_{XY}$ (N.mm/mm)	0
P_X (N.mm ³ /mm)	250
P_Y (N.mm ³ /mm)	0
P_{XY} (Nmm ³ /mm)	100
Q_X (N/mm)	25
Q_Y (N/mm)	50
R_X (N.mm ² /mm)	30
R_Y (N.mm ² /mm)	50

Tableau (IV.7) : condition du chargement.

IV.4.2.1.2.1. le choix du stratifié : (voir tableau (IV.5))

IV.4.2.1.2.2. les représentations graphiques des contraintes :



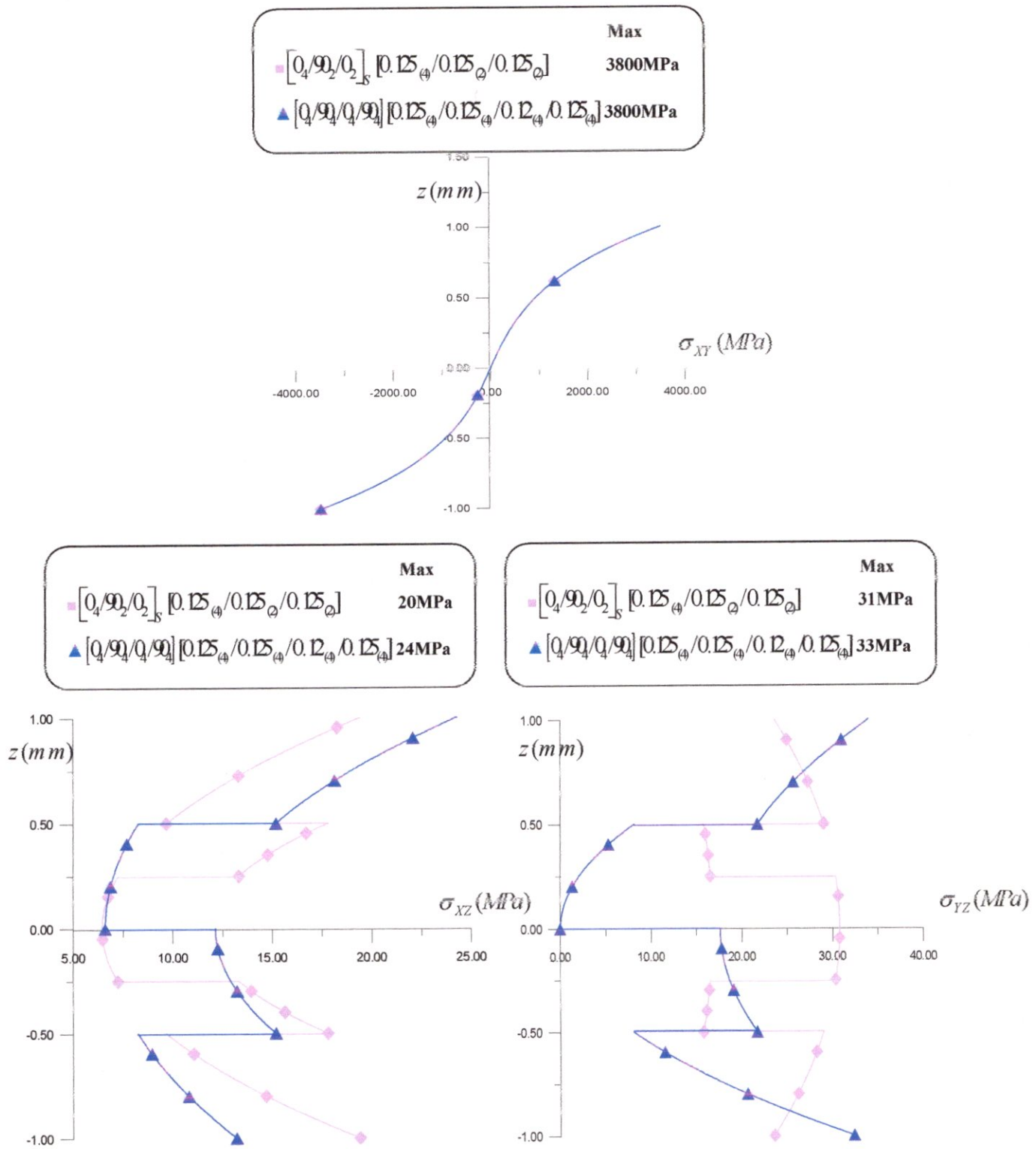


Figure (IV.16) : Contraintes mécaniques du stratifié dans le plan XY HSDTM des plaques épaisses.

IV.4.2.1.2.3. Interprétation :

Lorsque les efforts et les moments sont nuls ($N=M=0$), on remarque que les contraintes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , sont très importantes et les σ_{xz} , σ_{yz} restent inchangées. Donc on peut conclure que les efforts de gauchissement provoquent de très grandes déformations dans le plan XY.

IV.4.2.1.3. le troisième chargement :

$N_X = N_Y = N_{XY}$ (N/mm)	0
$M_X = M_Y = M_{XY}$ (N.mm/mm)	0
$P_X = P_Y = P_{XY}$ (N.mm ³ /mm)	0
$Q_X = Q_Y$ (N/mm)	0
$R_X = R_Y$ (N.mm ² /mm)	0

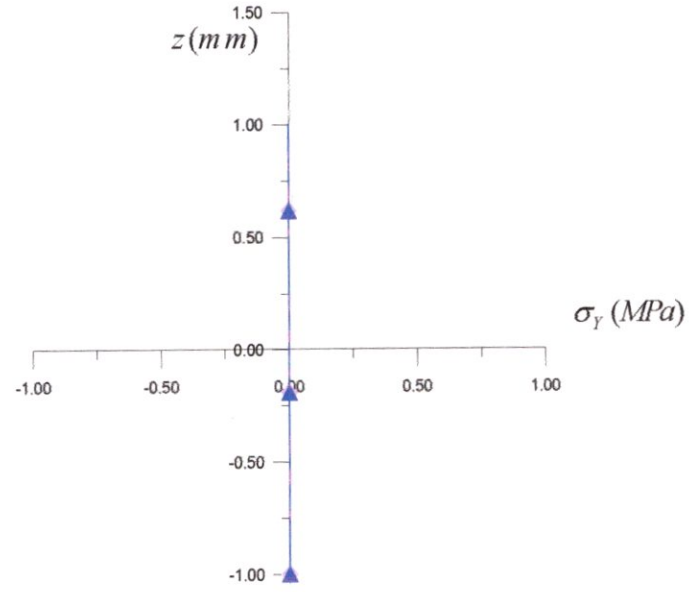
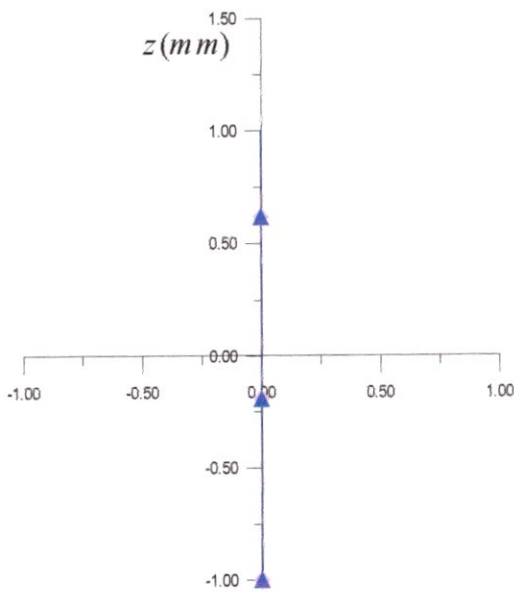
Tableau (IV.8) : condition du chargement.

IV.4.2.1.3.1. le choix du stratifié : (voir tableau (IV.5))

IV.4.2.1.3.2. les représentations graphiques des contraintes:

$\blacksquare [0_4/90_2/0_2]_s [0.125_{(4)}/0.125_{(2)}/0.125_{(2)}]$	Max 00MPa
$\blacktriangle [0_4/90_4/0_4/90_4] [0.125_{(4)}/0.125_{(4)}/0.125_{(4)}/0.125_{(4)}]$	00MPa

$\blacksquare [0_4/90_2/0_2]_s [0.125_{(4)}/0.125_{(2)}/0.125_{(2)}]$	Max 00MPa
$\blacktriangle [0_4/90_4/0_4/90_4] [0.125_{(4)}/0.125_{(4)}/0.125_{(4)}/0.125_{(4)}]$	00MPa



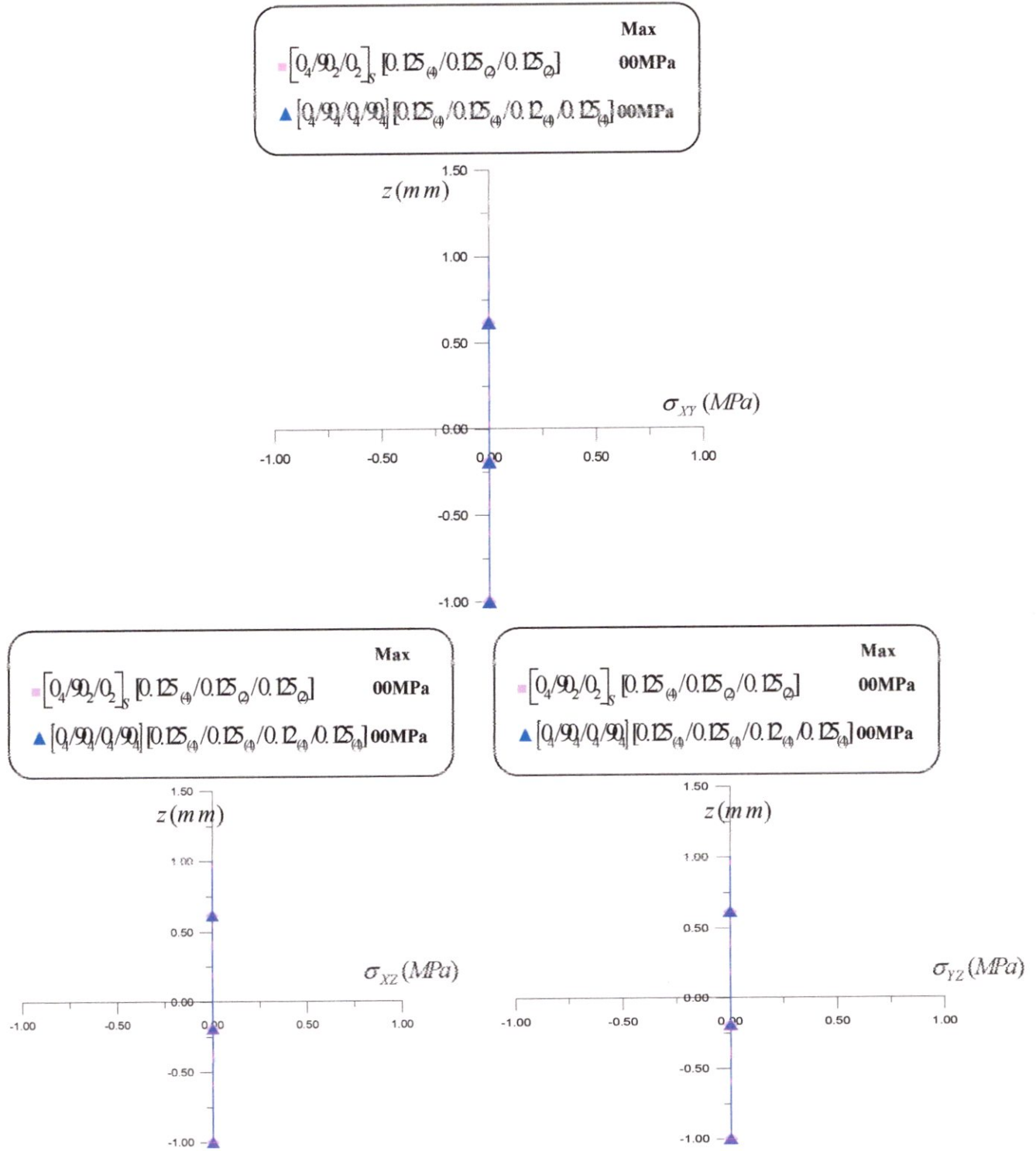


Figure (IV.17) : Contraintes mécaniques du stratifié dans le plan XY HSDTM des plaques épaisses.

IV.4.2.1.3.3. Interprétation :

Lorsque $N=M=P=R=Q=0$, on remarque pas de déformations ni de contraintes, donc la structure n'est pas sollicitée.

IV.5. Simulation thermique des plaque épaisses :(HSDTT)

IV.5.1. Choix du matériau :

L'épaisseur de chaque couche est prise à 0.5mm les caractéristiques du matériaux sont :

E_L (MPa)	175000
E_T (MPa)	7000
G_{LT} (MPa)	3500
$G_{LT'}$ (MPa)	3500
$G_{TT'}$ (MPa)	1400
ν_{LT}	0.25
α_L (C°) ⁻¹	5.10^{-6}
α_T (C°) ⁻¹	20.10^{-6}
$\alpha_{T'}$ (C°) ⁻¹	20.10^{-6}
a (mm)	12
b (mm)	6
T ⁺ (C°)	148.88
T ⁻ (C°)	15.55

Tableau (IV.9) : données du matériau.

IV.5.1.1. la première condition chargement :

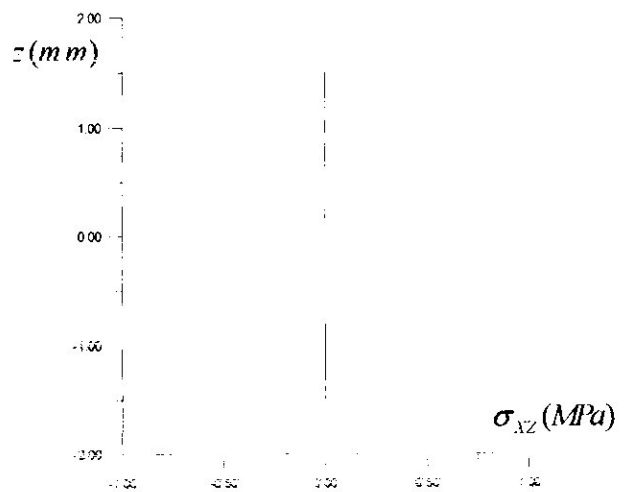
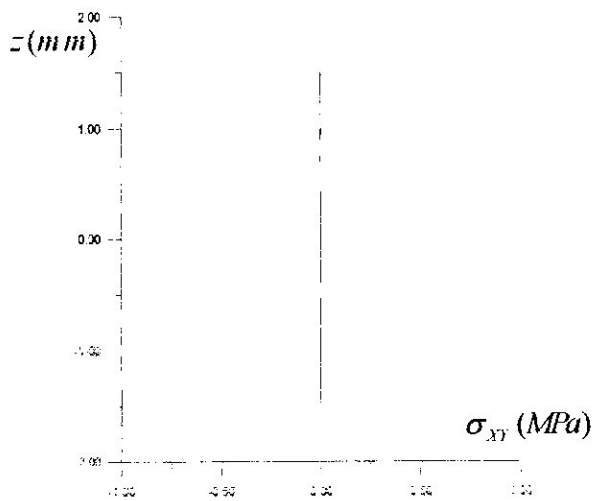
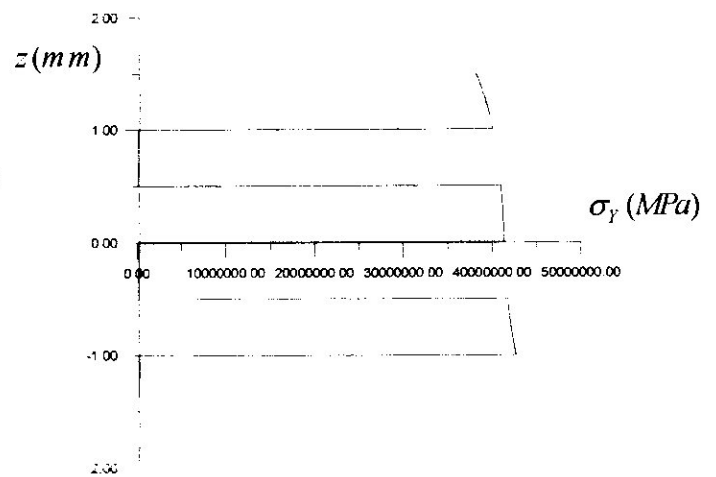
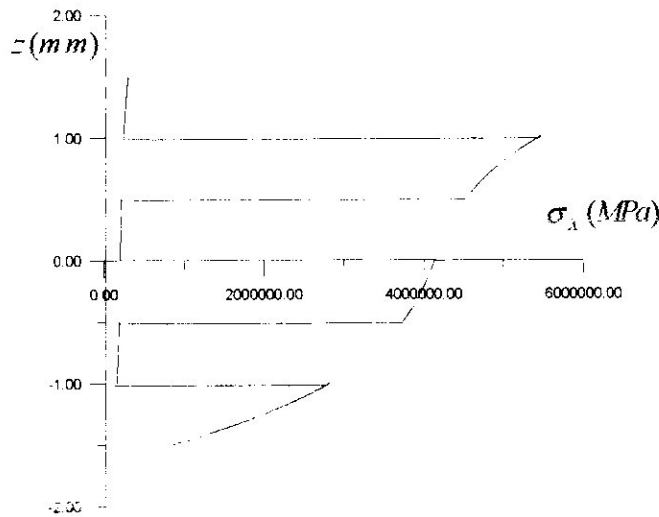
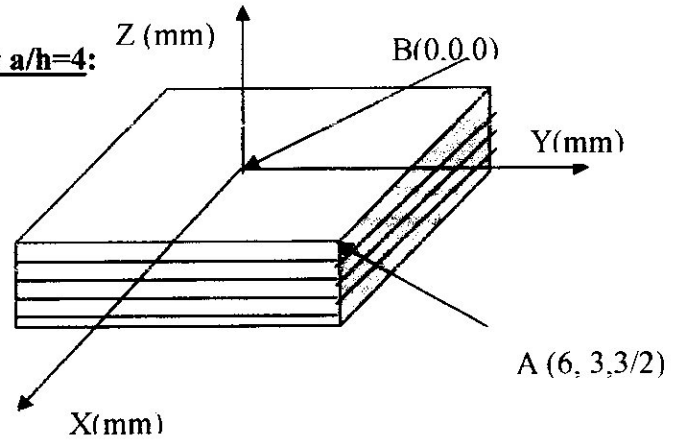
$N_X = N_Y = N_{XY}$ (N/mm)	0
$M_X = M_Y = M_{XY}$ (N.mm/mm)	0
$P_X = P_Y = P_{XY}$ (N.mm ³ /mm)	0
$Q_X = Q_Y$ (N/mm)	0
$R_X = R_Y$ (N.mm ² /mm)	0

Tableau (IV.10) : condition du chargement.

Avec $a/b=2$ et , $h=3$ mm, a etant la longueur suivant x et b etant la largeur suivant y

IV.5.1.1.1. représentation graphique pour $a/h=4$:

IV.5.1.1.1.1. pour le point A (6, 3, 3/2) :



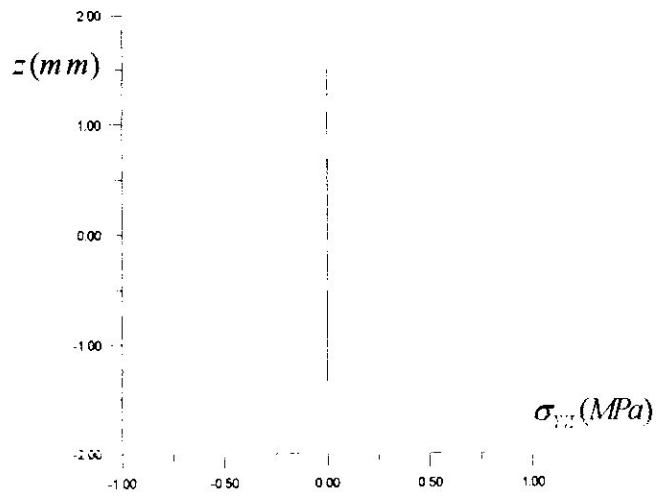
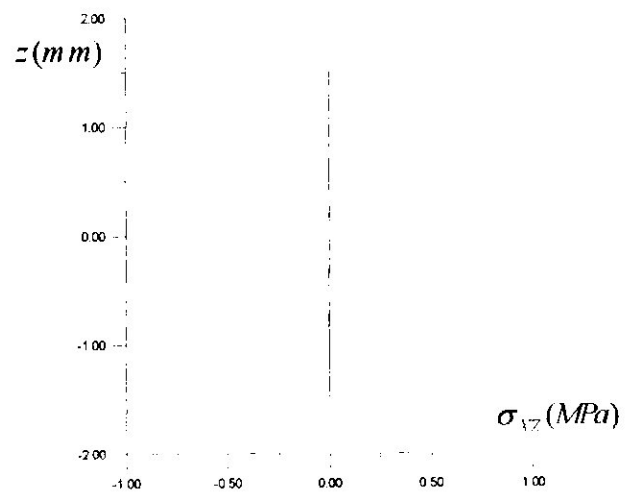
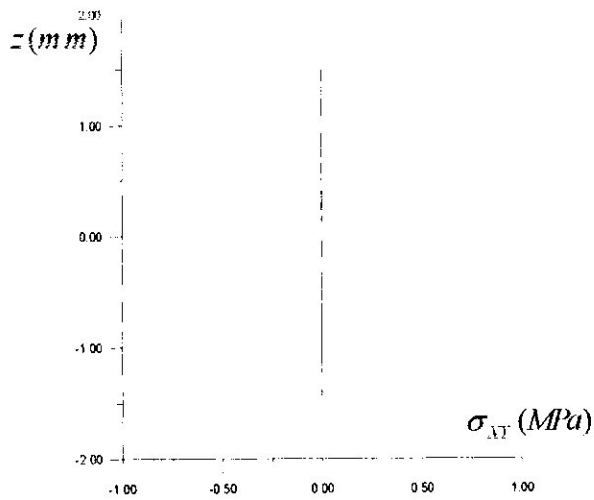
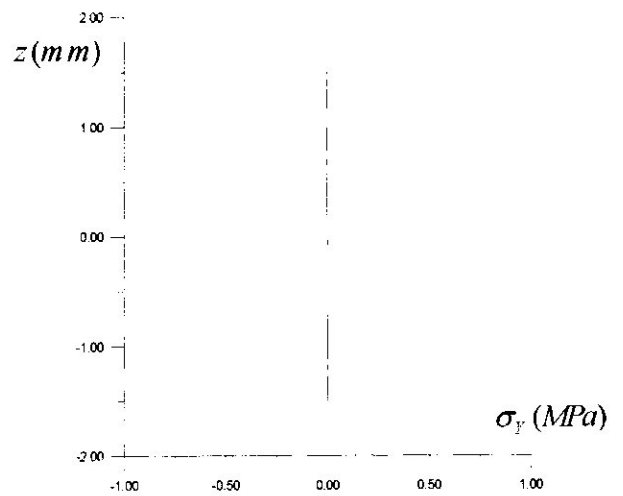
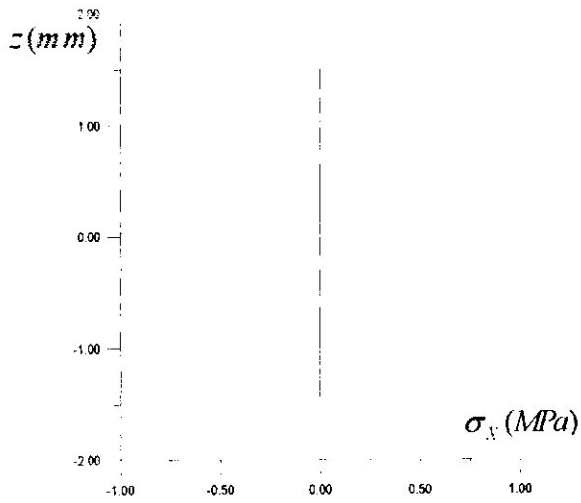


Figure (IV.18) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan XY de coordonnées (6.3.3/2).

IV.5.1.1.1.2. pour le point B (0, 0, 0) :



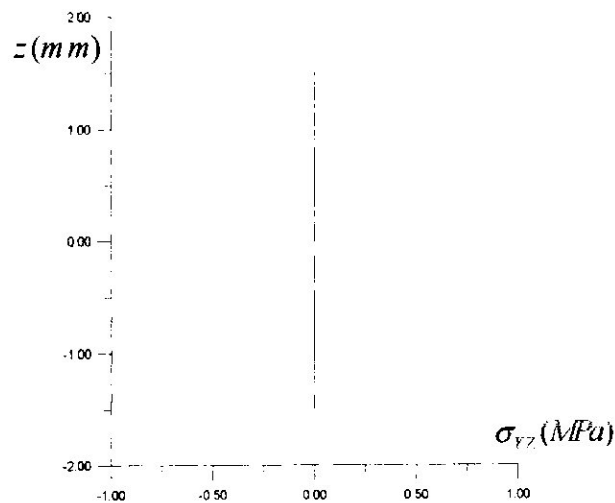


Figure (IV.19) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan XY de coordonnées (0,0,0) .

IV.5.1.1.2. Interprétation :

Les contraintes résiduelles sont nulles au milieu du stratifié (le point B(0, 0,0)) , au niveau du bord (le point A(6, 3, 3/2)) on constate que les contraintes résiduelles σ_x et σ_y tendent vers de très grandes valeurs et les autres contraintes sont nulles.

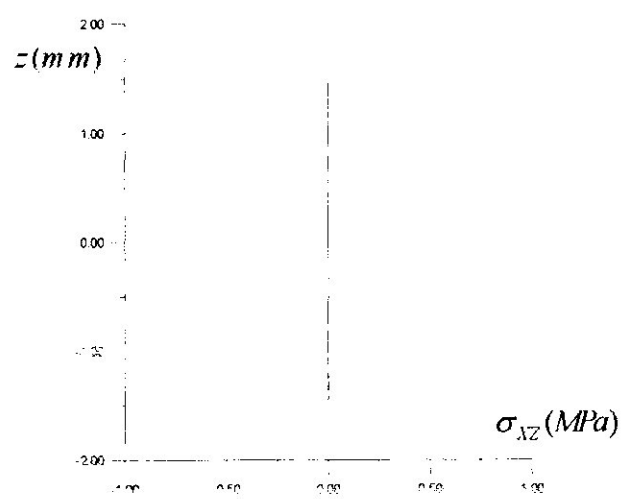
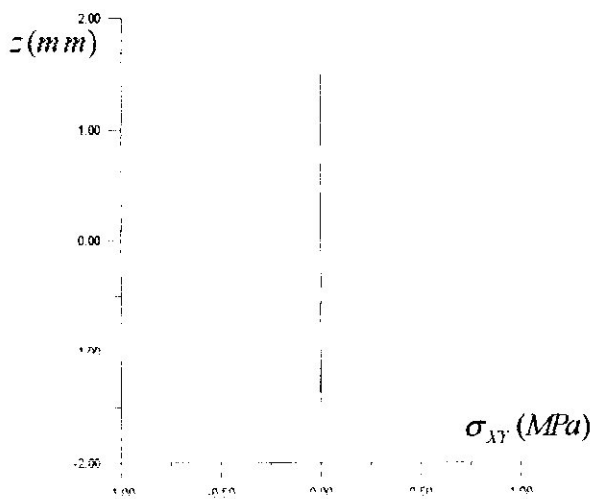
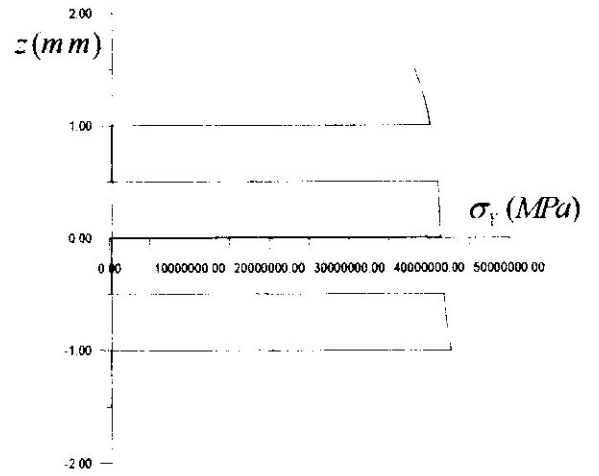
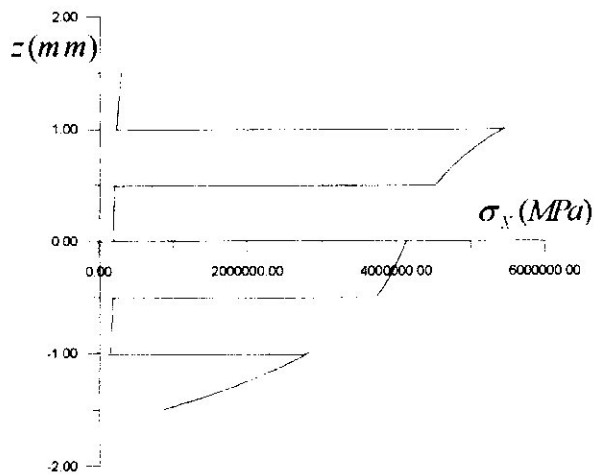
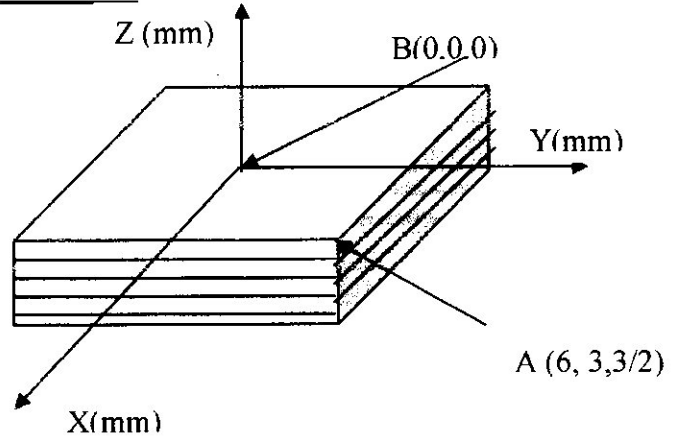
IV.5.1.2. la deuxième condition du chargement.

$N_X = N_Y = N_{XY}$ (N./mm)	0
$M_X = M_Y = M_{XY}$ (N.mm/mm)	0
P_X (N.mm ³ /mm)	100
P_Y (N.mm ³ /mm)	0
$P_Y = P_{XY}$ (Nmm ³ /mm)	0
$Q_X = Q_Y$ (N/mm)	0
$R_X = R_Y$ (N.mm ² /mm)	0

Tableau (IV.11) : condition du chargement.

IV.5.1.2.1 représentations graphiques pour $a/h=4$:

IV.5.1.2.1.1. Pour le point A(6,3,3/2) :



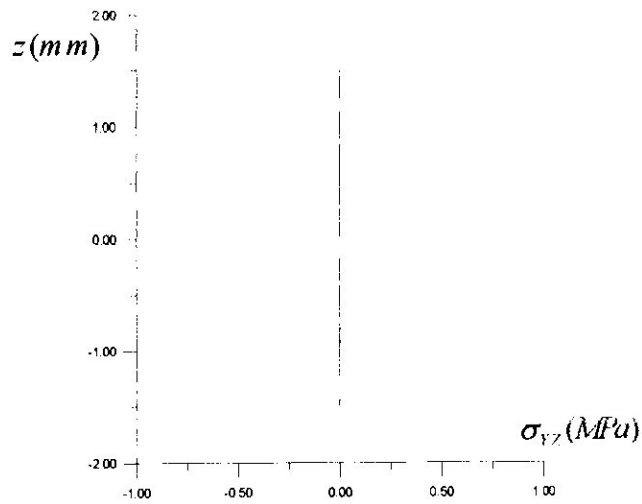
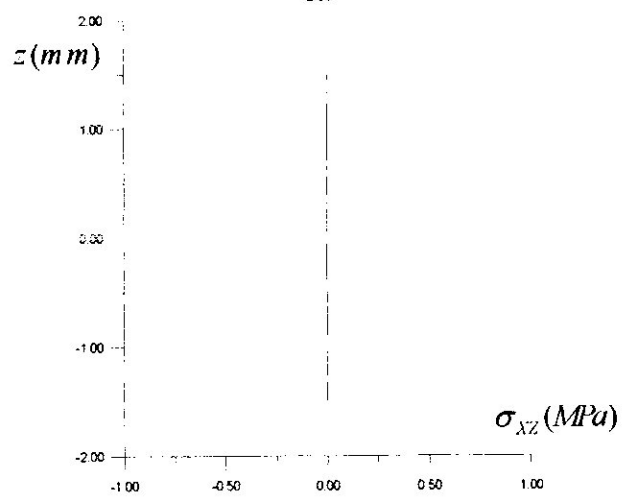
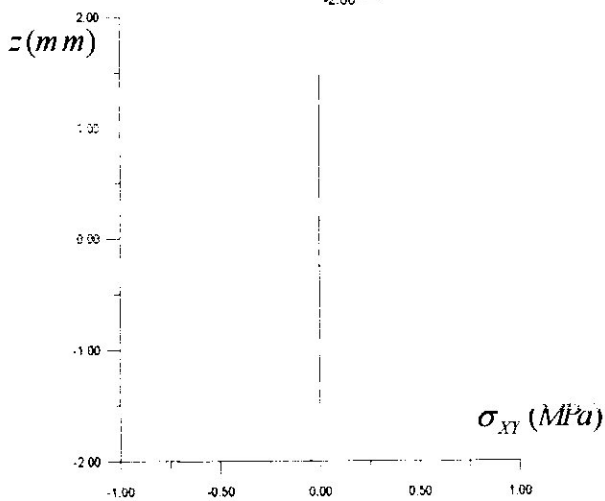
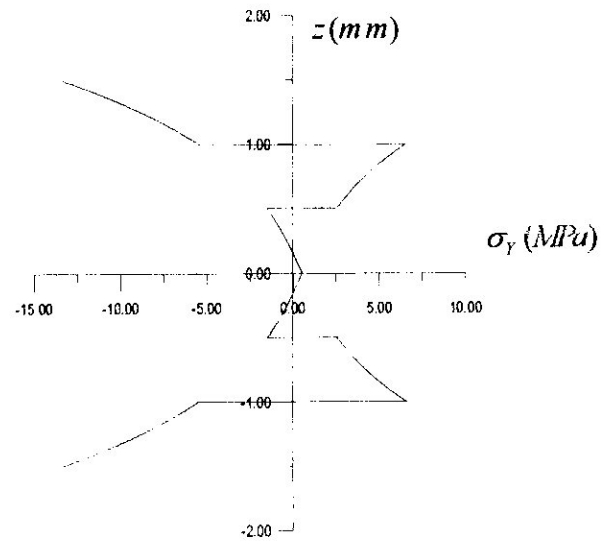
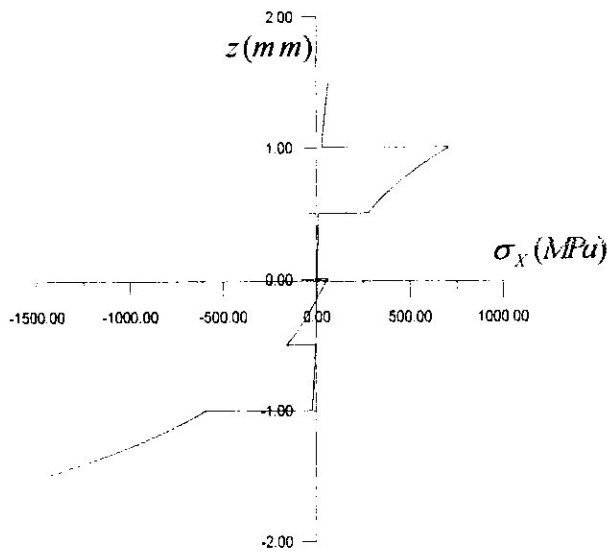


Figure (IV.20) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan XY de coordonnées (6,3,3/2).

IV.5.1.2.1.2. Pour le point B(0,0,0) :



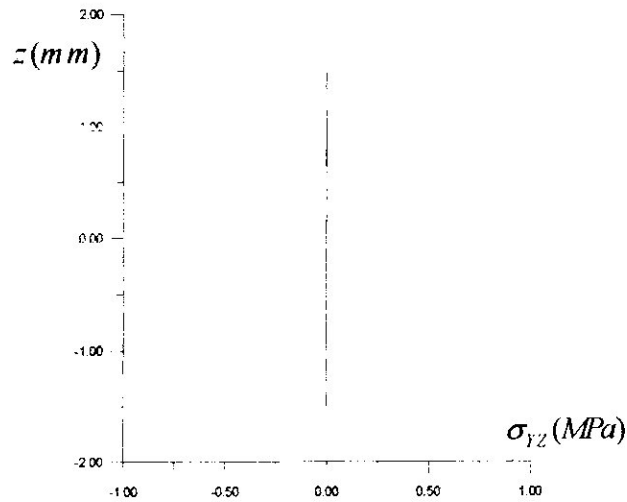
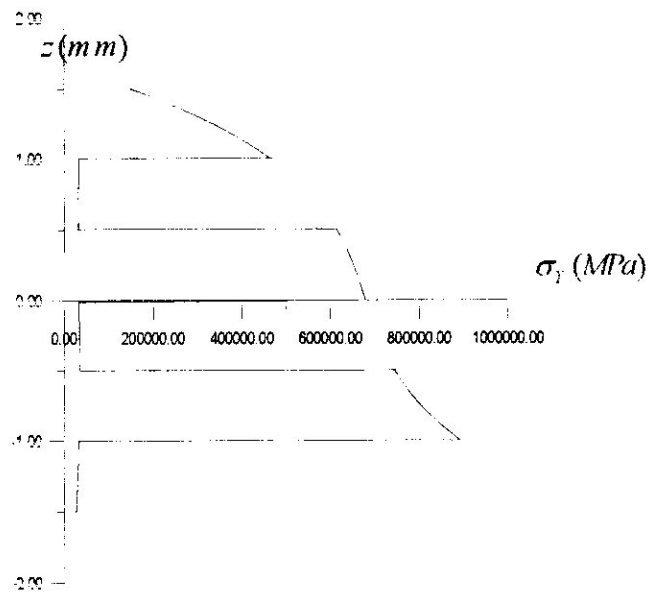
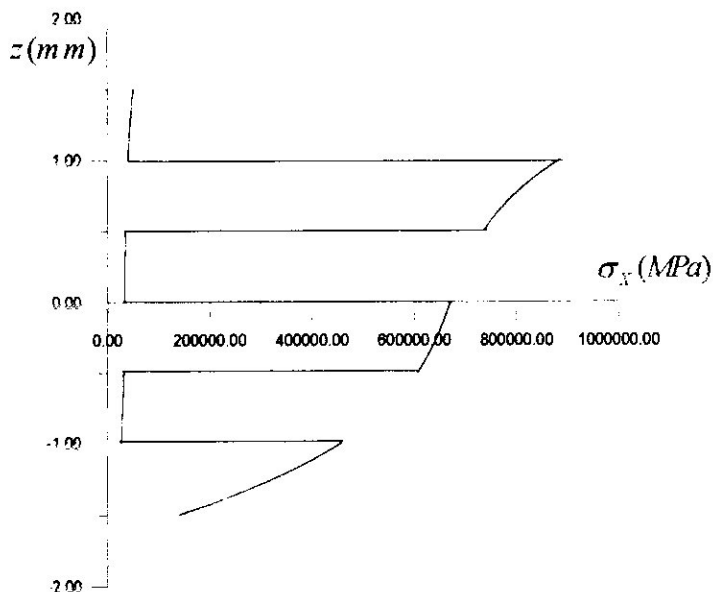
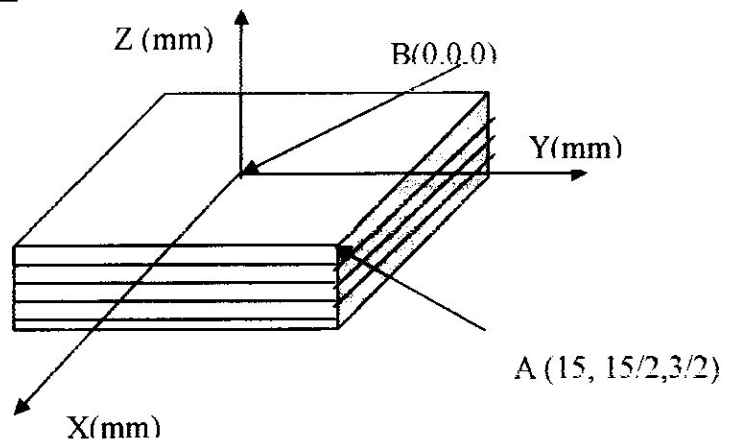


Figure (IV.21) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan (X, Y) de coordonnées (0,0,0).

IV.5.1.2.2 représentations graphiques pour a/h=10 :

IV.5.1.2.2.1. Pour le point A (15,15/2,3/2) :



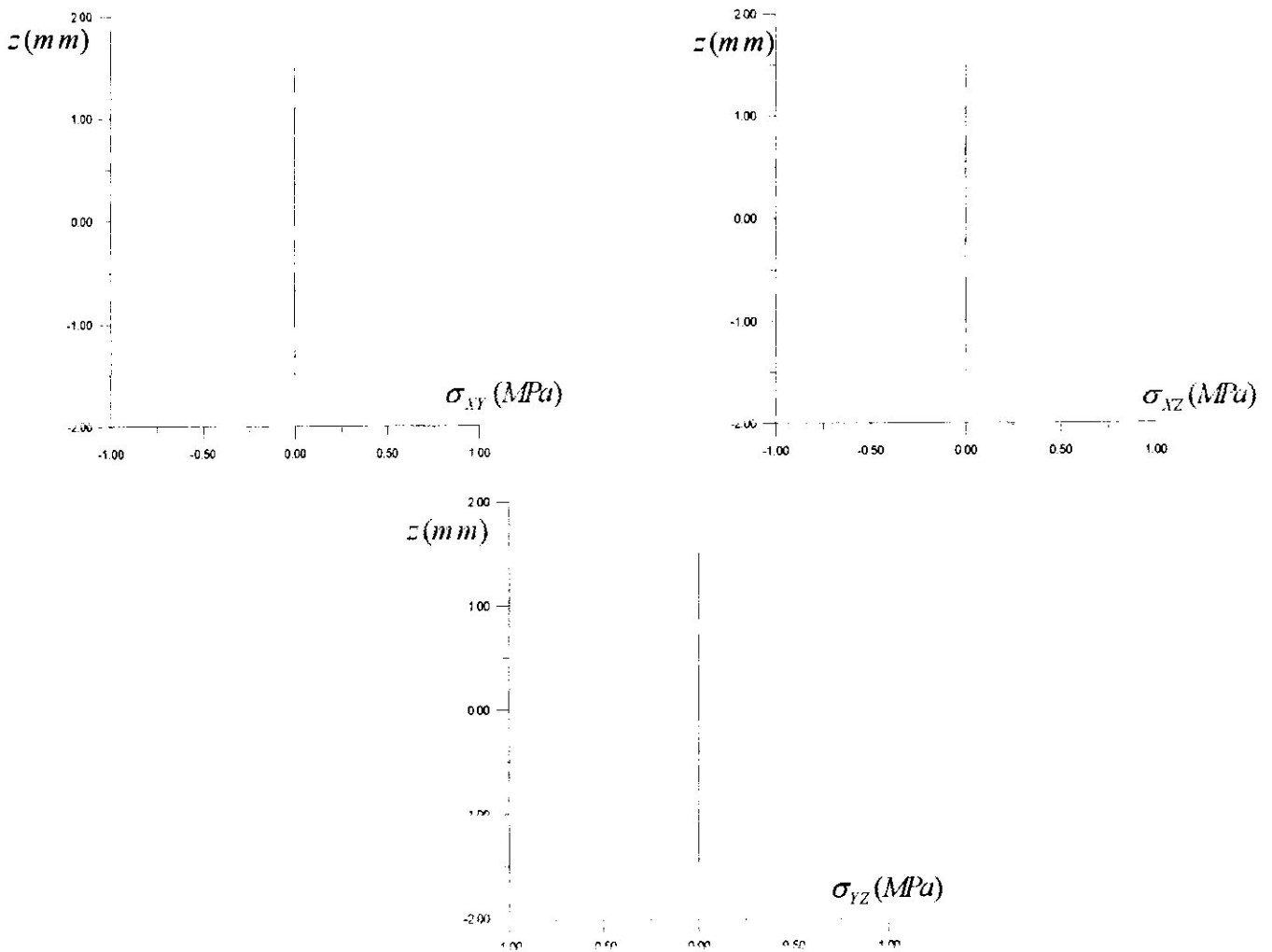
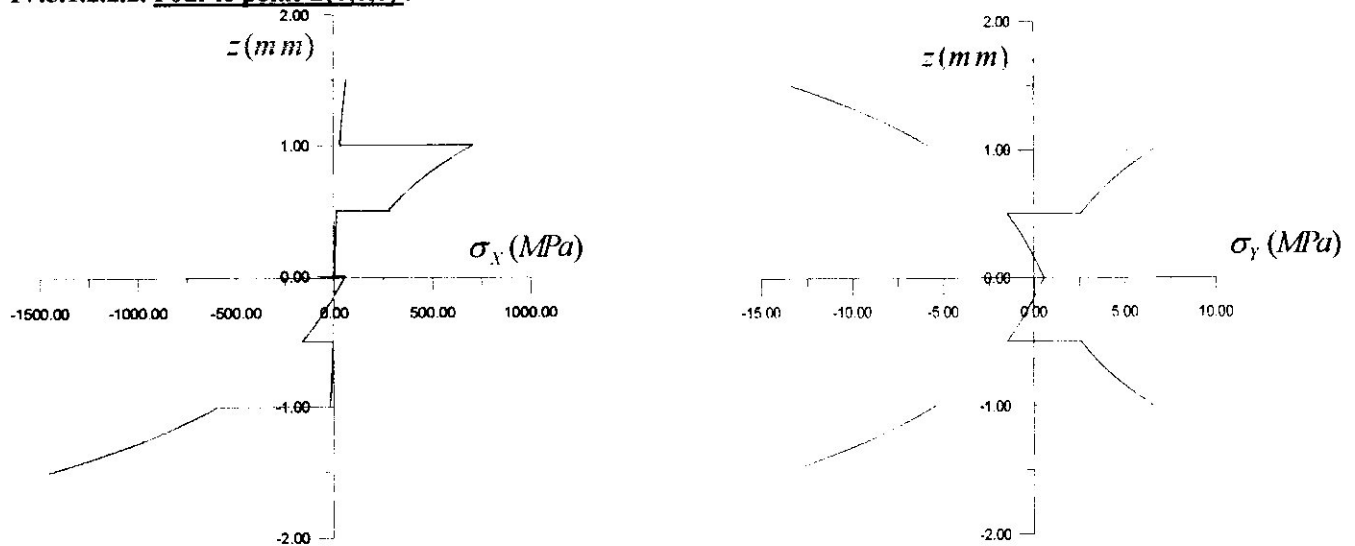


Figure (IV.22) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan XY de coordonnées (15,15/2,3/2).

IV.5.1.2.2.2. Pour le point B(0,0,0) :



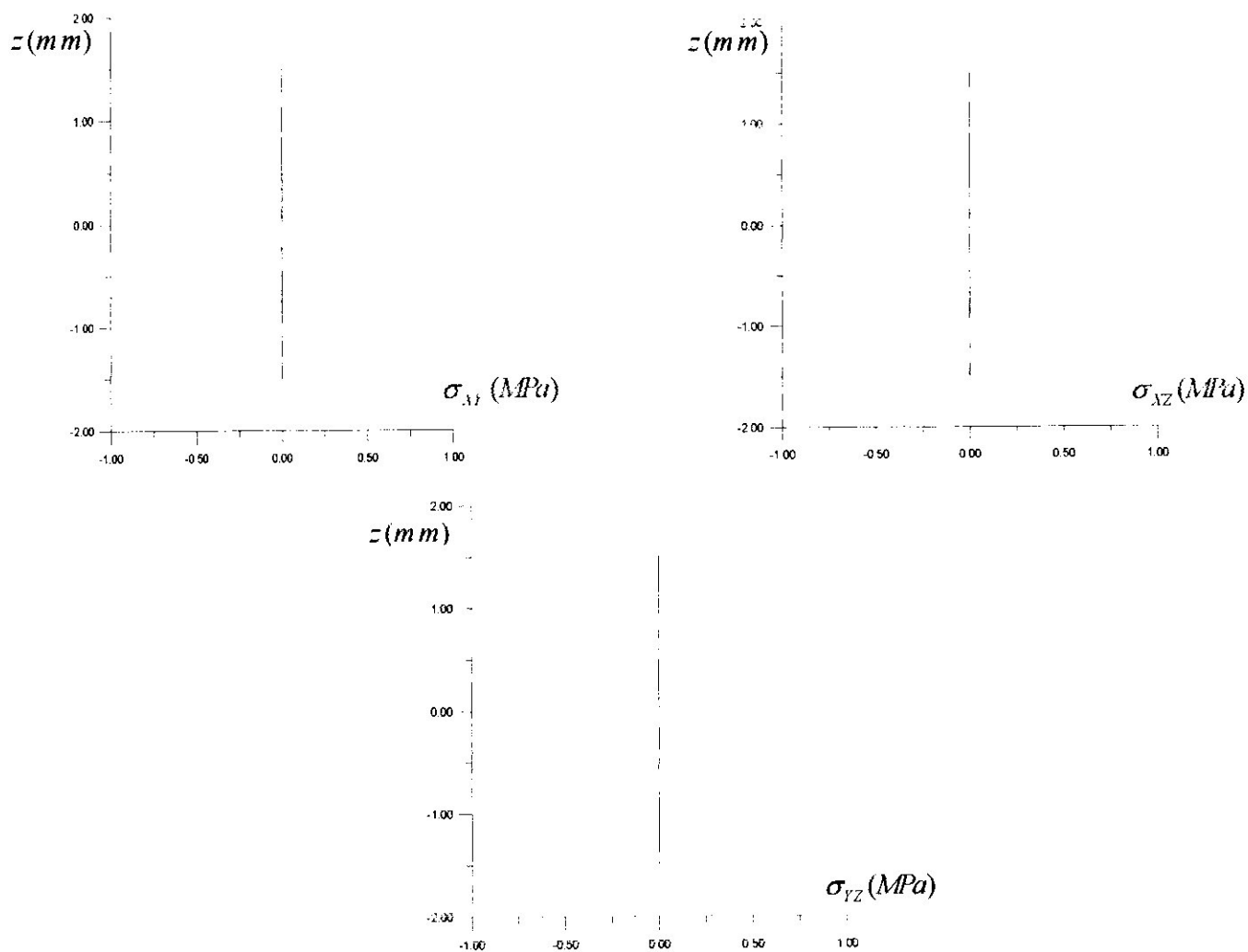
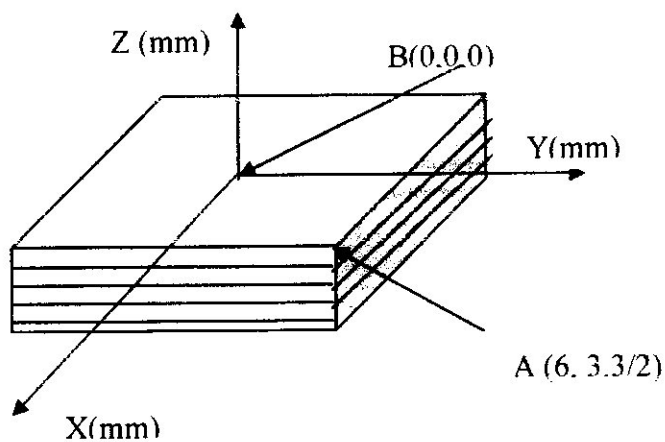


Figure (IV.23) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).

IV.5.1.2.3. représentations graphiques pour a/h=20 :

IV.5.1.2.3.1. Pour le point A(30,15,3/2) :



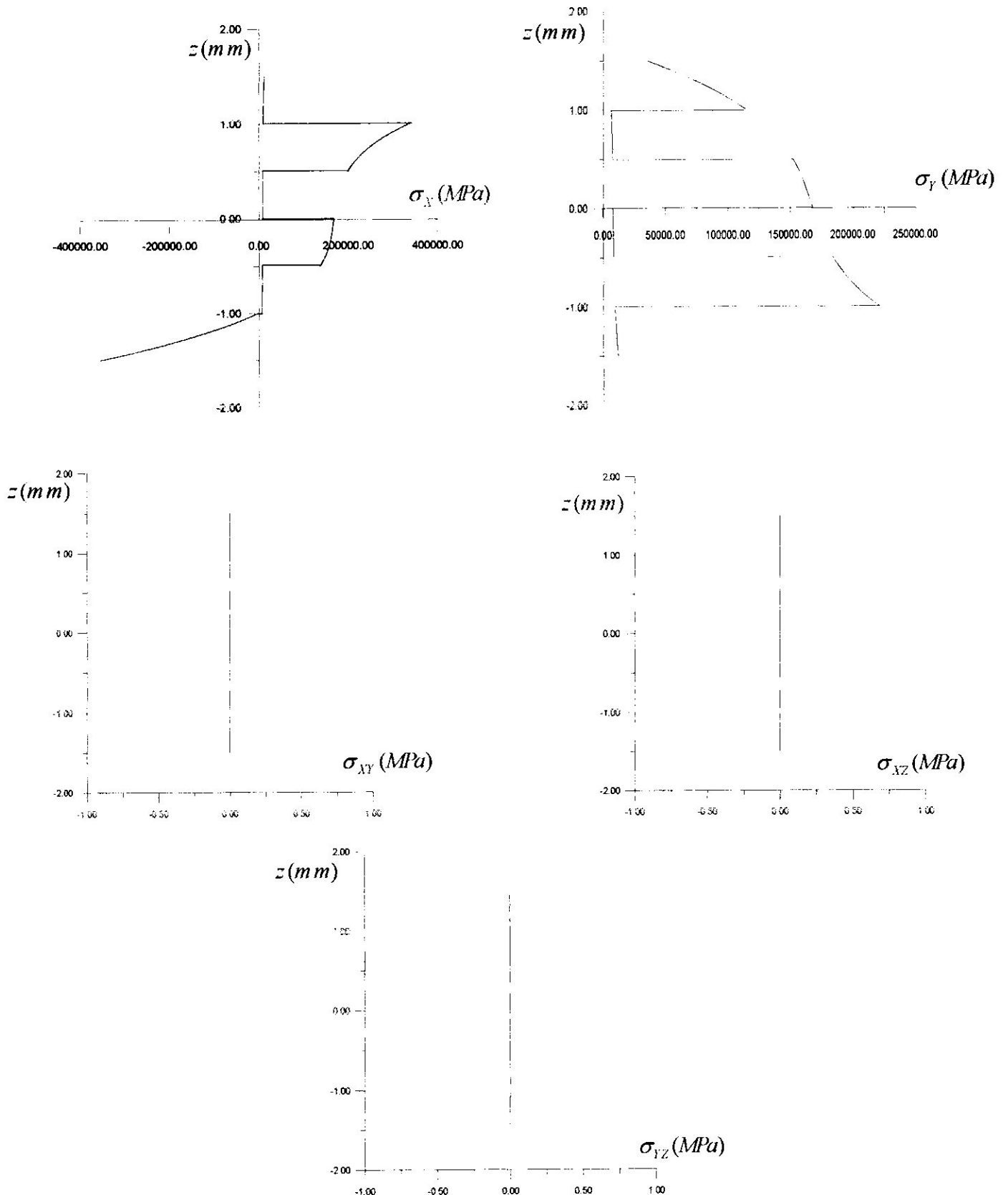


Figure (IV.24) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan XY de coordonnées (30,15,3/2).

IV.5.1.2.3.2. Pour le point B(0,0,0) :

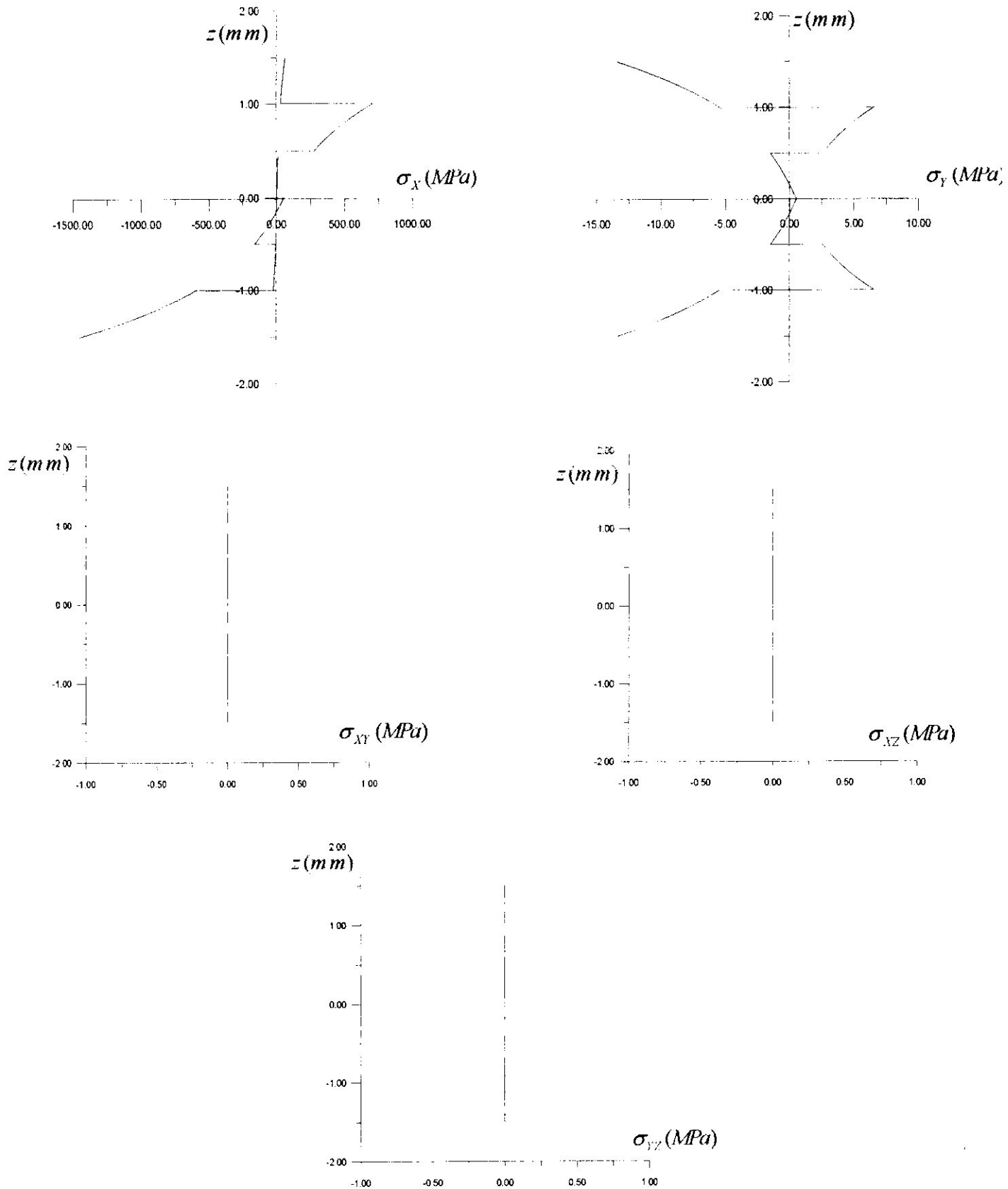


Figure (IV.25) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).

IV.5.1.2.4. conclusion :

On remarque que les contraintes σ_x et σ_y augmentent lorsque le rapport a/h diminue pour le point A (l'extrémité de la plaque). Elles restent constantes au point du milieu de la plaque (le point B). Et les contraintes σ_{xy} , σ_{xz} et σ_{yz} sont toutes nulles en tout point du stratifié, cela est du à l'empilement choisi.

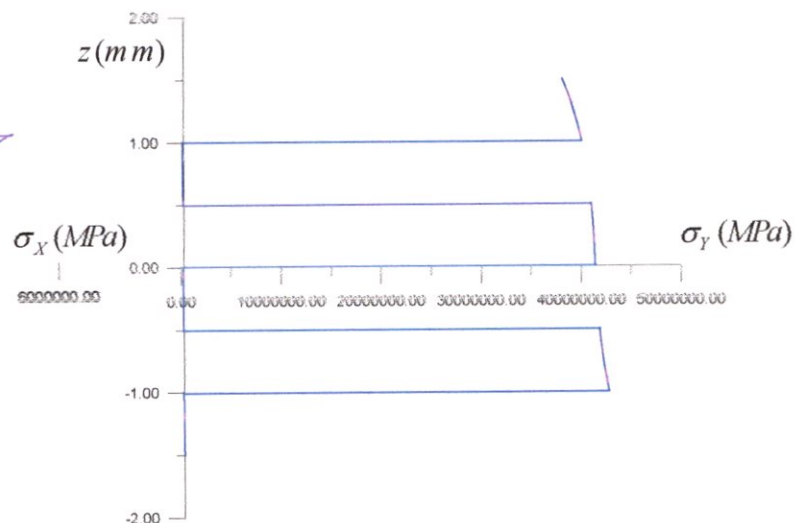
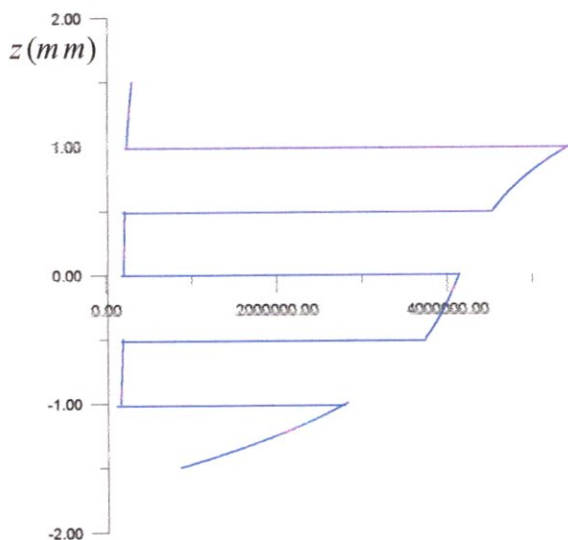
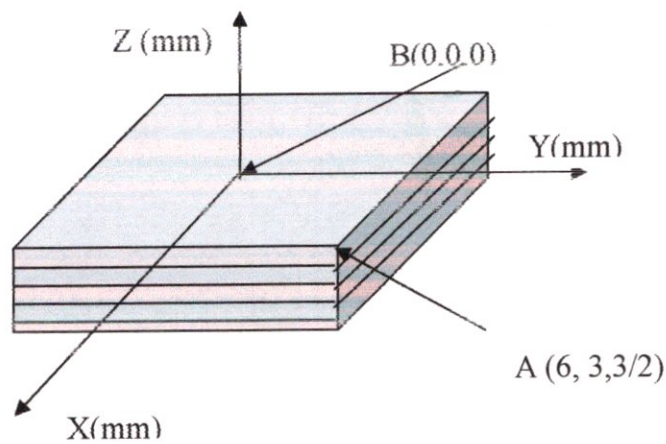
IV.5.2. l'effet de l'anisotropie :

$a/h=4$

IV.5.2.1. Antisymétriques :

IV.5.2.1.1. le stratifié [0/90/0/90/0/90]

IV.5.2.1.1.1. représentation graphique pour le point A(6,3,3/2) :



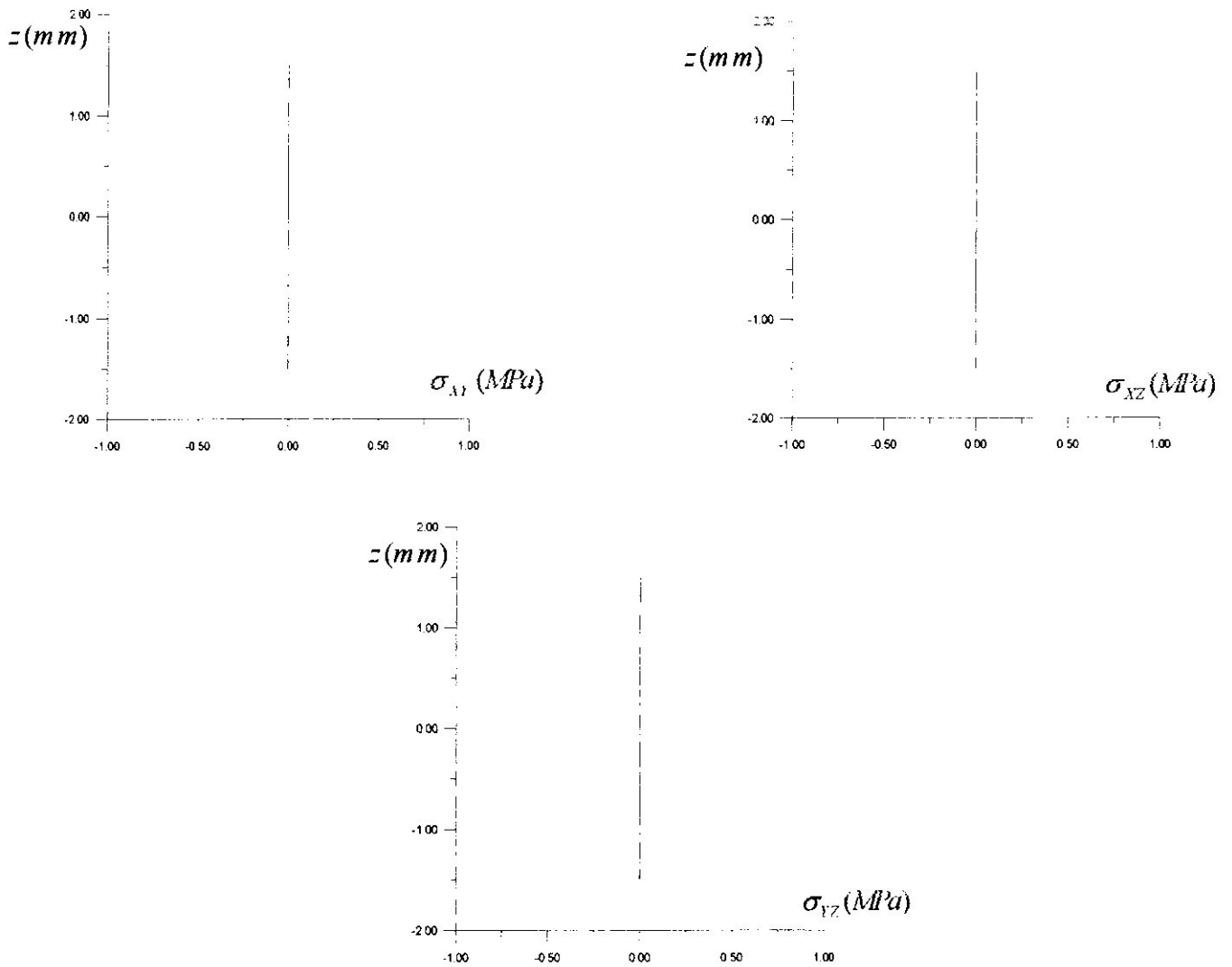
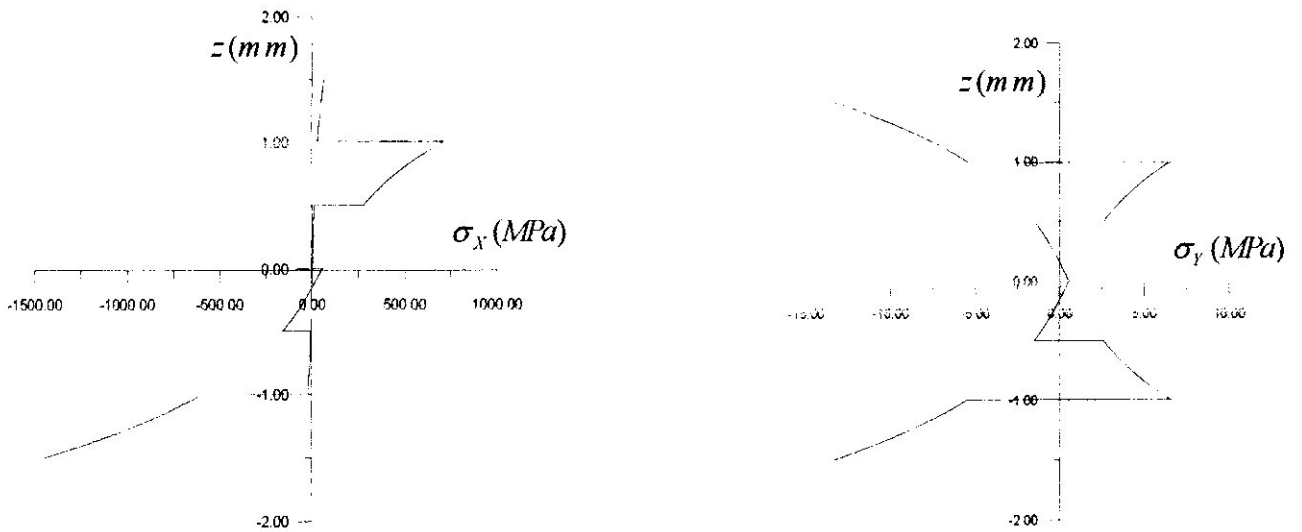


Figure (IV.26) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan XY de coordonnées (6,3,3/2).

IV.5.2.1.1.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0) :



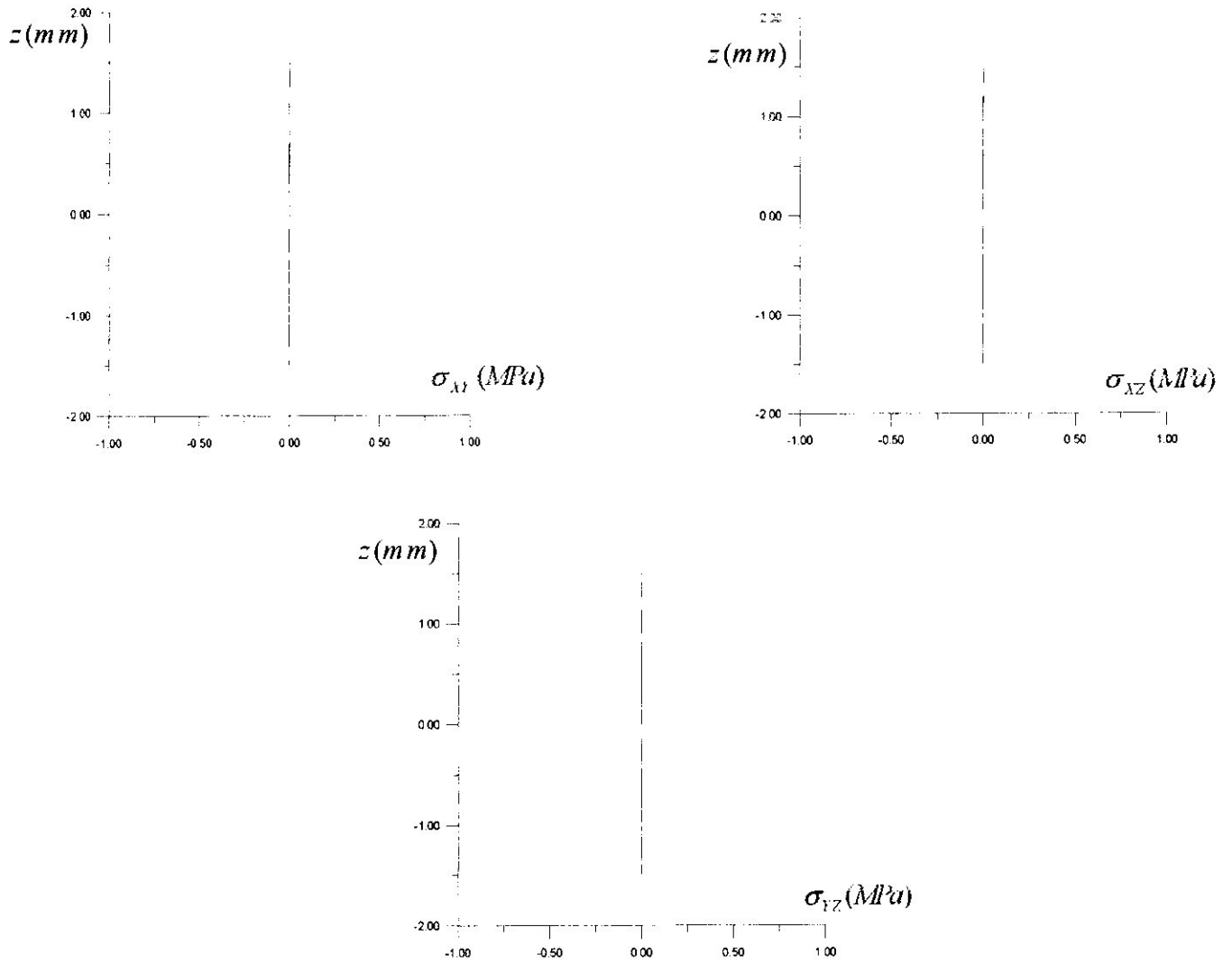
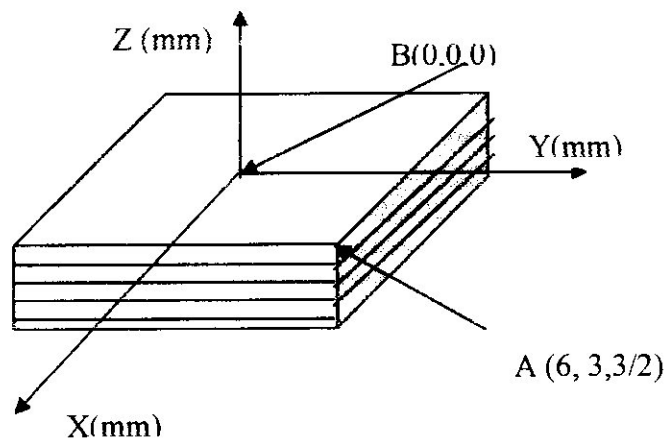


Figure (IV.27) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [0/90/0/90/0/90] dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).

IV.5.2.1.2. le stratifié [-45/45]₃

IV.5.2.1.2.1. représentation graphique pour le point A(6,3,3/2)



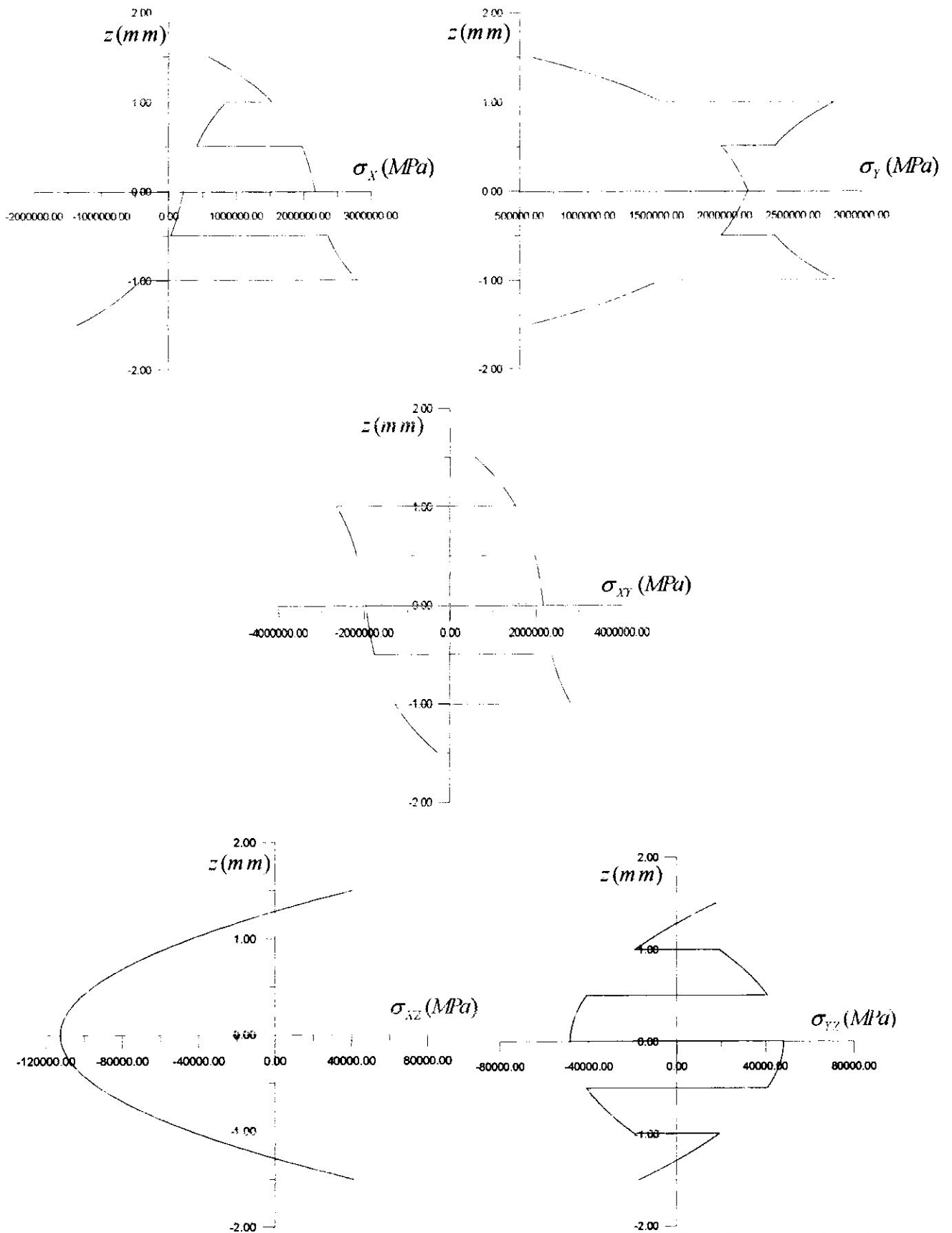


Figure (IV.28) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-45/45]₃ dans le plan XY de coordonnées (6,3,3/2).

IV.5.2.1.2.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0)

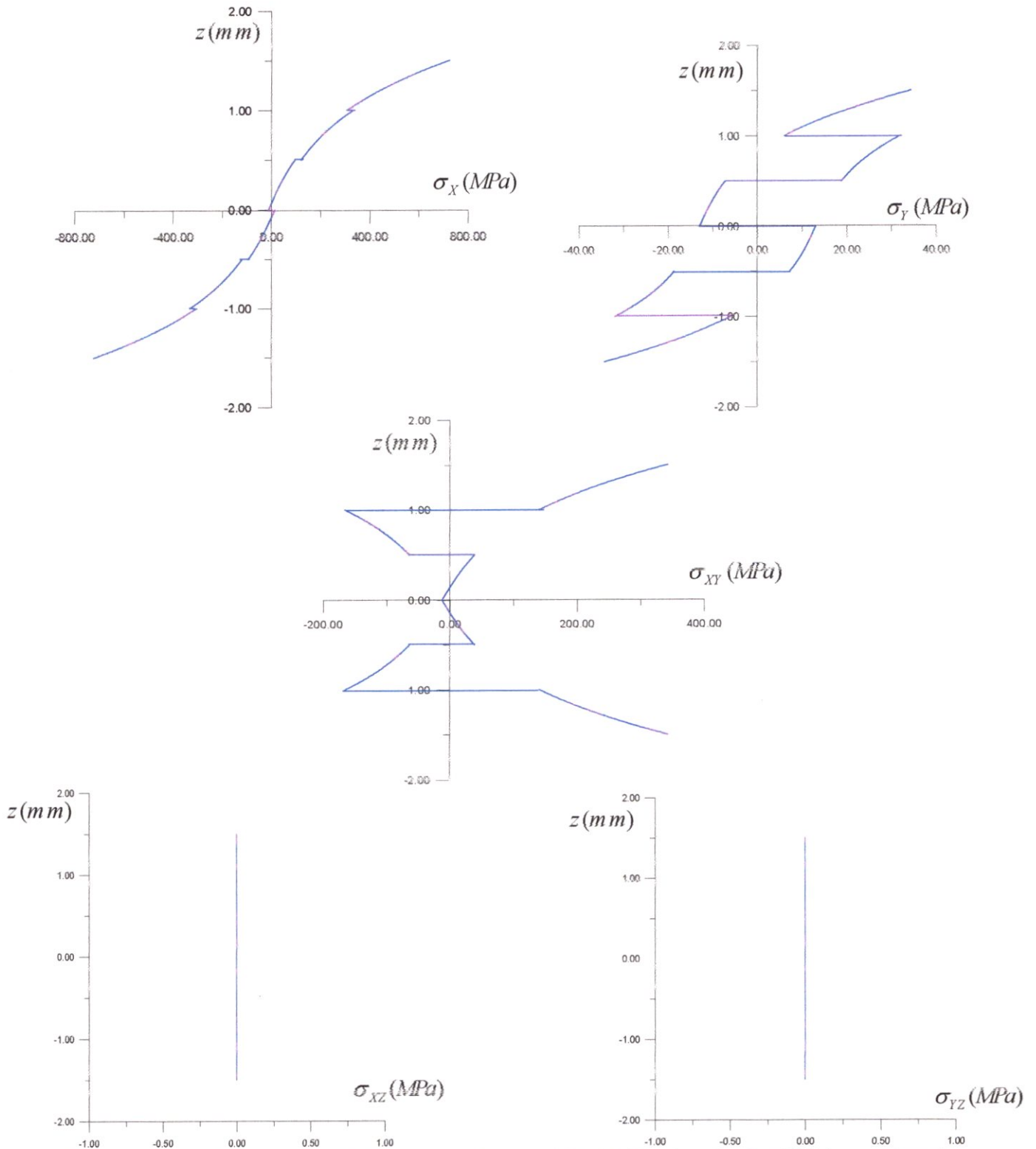


Figure (IV.29) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-45/45]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).

IV.5.2.1. 3. Interprétation :

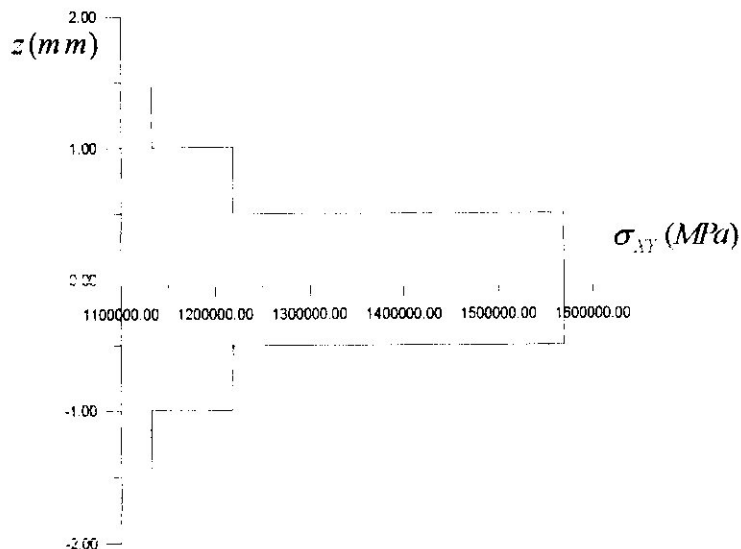
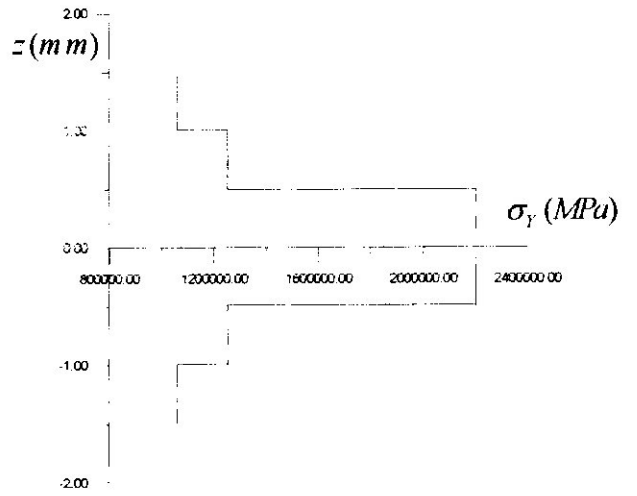
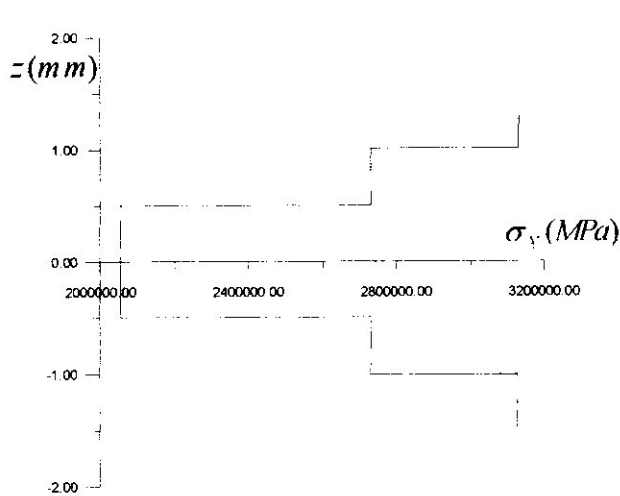
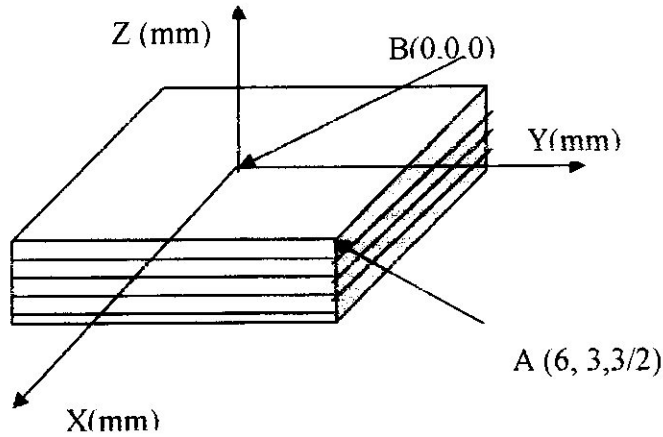
On constate que seules les contraintes σ_x et σ_y sont non nulles dans le stratifié [0/90]₃ Et dans le stratifié [-45/45]₃, il y a apparition des contraintes de cisaillement plane σ_{xy} , de cisaillement

transversal σ_{xz} , de cisaillement-gauchissement σ_{yz} au point A(6,3,3/2); les contraintes de cisaillement transversal σ_{xz} , de cisaillement-gauchissement σ_{yz} deviennent nulles au point B(0,0,0).

IV.5.2.2. symétries :

IV.5.2.2.1. le stratifié [25/30/45]_s

IV.5.2.2.1.1. représentations graphique du point A(6,3,3/2) :



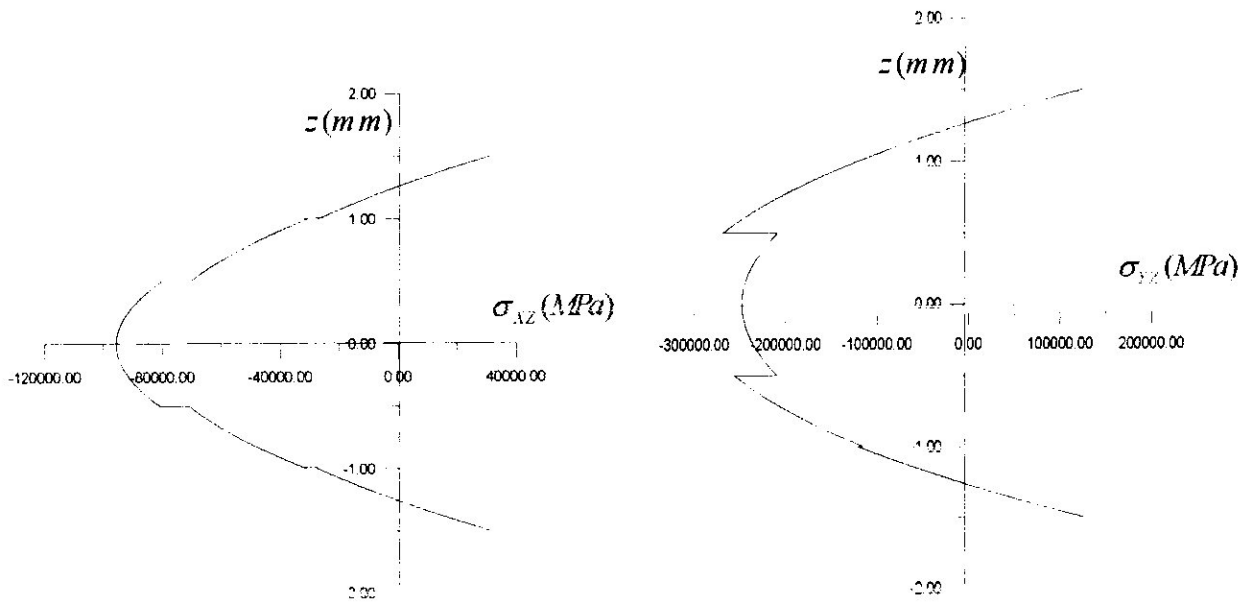
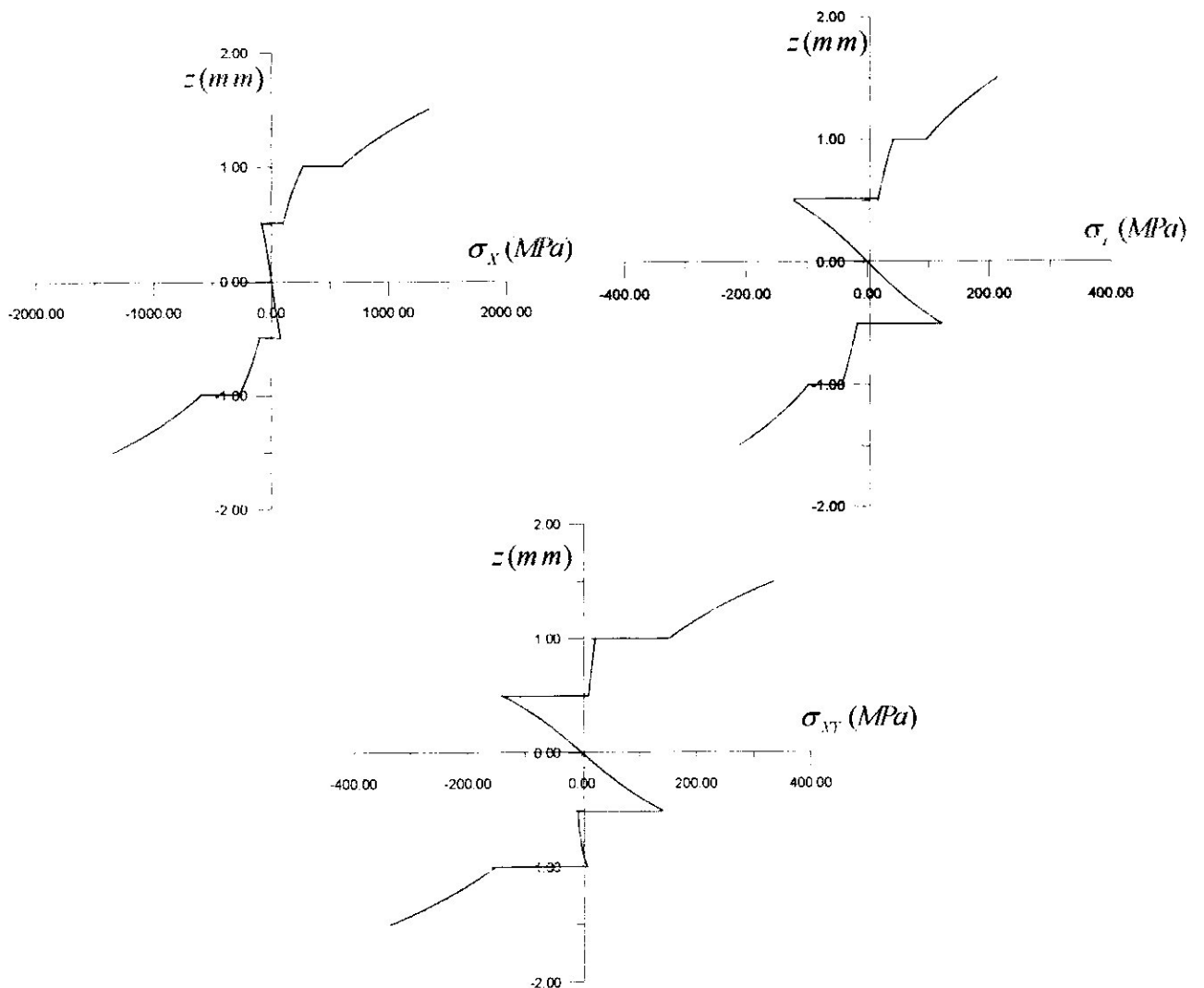


Figure (IV.30) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [25/30/45]_s dans le plan XY de coordonnées (6,3,3/2).

IV.5.2.2.1.2. représentations graphique du point B(0,0,0) :



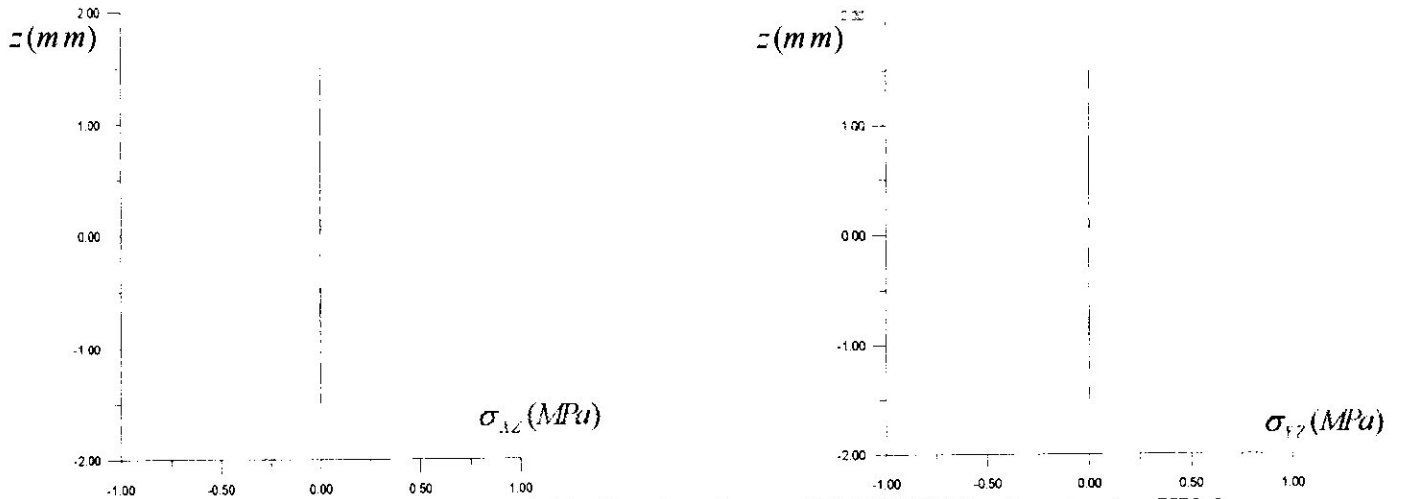


Figure (IV.31) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [25/30/45]_s dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).

IV.5.2.2.2. Interprétation :

Les contraintes σ_x , σ_y , σ_{xy} , σ_{xz} et σ_{yz} sont très importantes au point A(6,3,3/2). Et les σ_{xz} et σ_{yz} son nulles au point B(0,0,0).

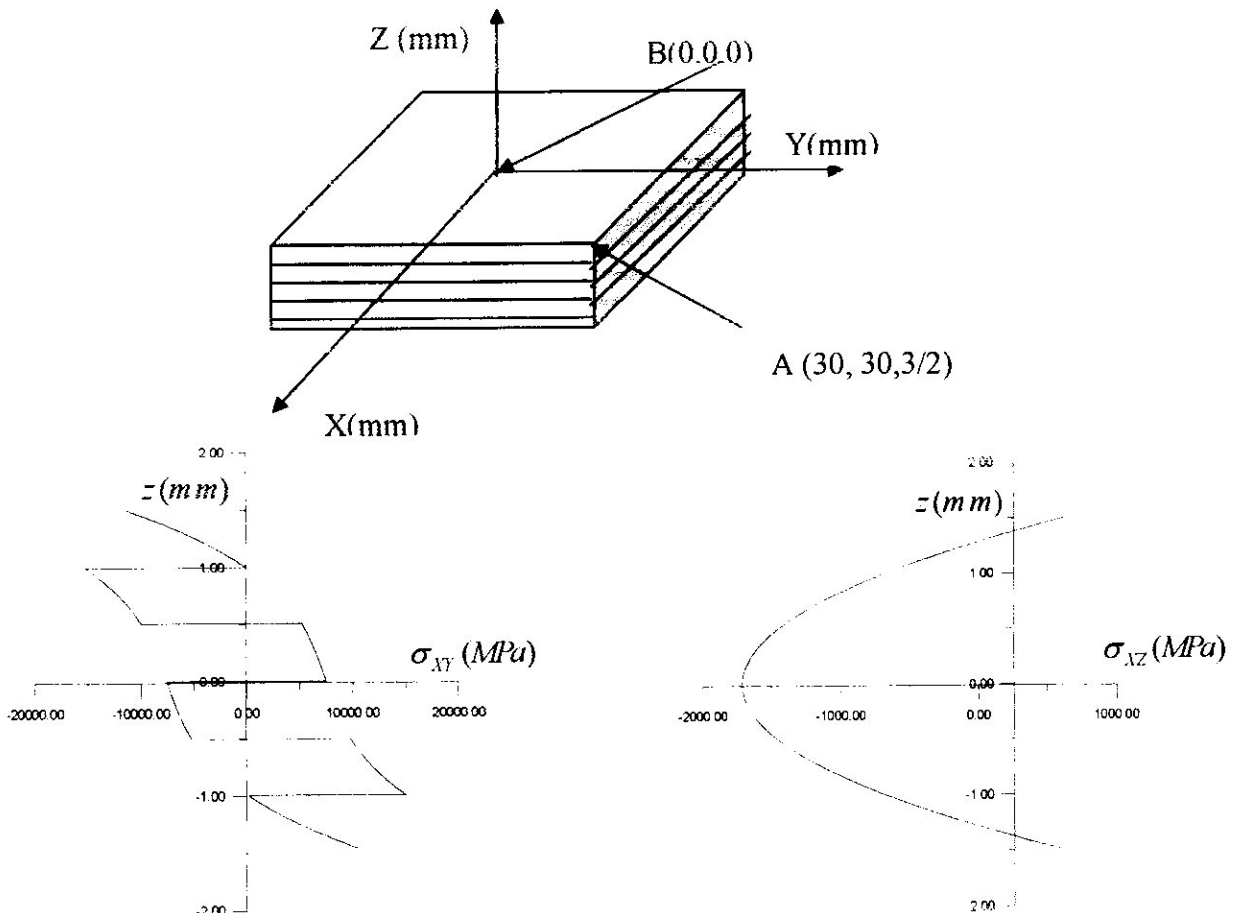
IV.5.3. variation du E1/E2

E2=7000 Mpa a=b=60mm

IV.5.3.1. Pour a/h=20 :

IV.5.3.1.1. Pour E1/E2=5 :

IV.5.3.1.1.1. représentation graphique pour le point A(30,30,3/2)



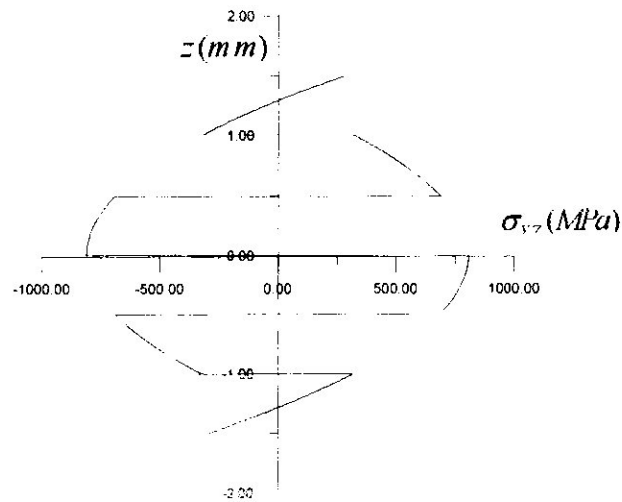


Figure (IV.32) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (30,30,3/2).

IV.5.3.1.1.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0)

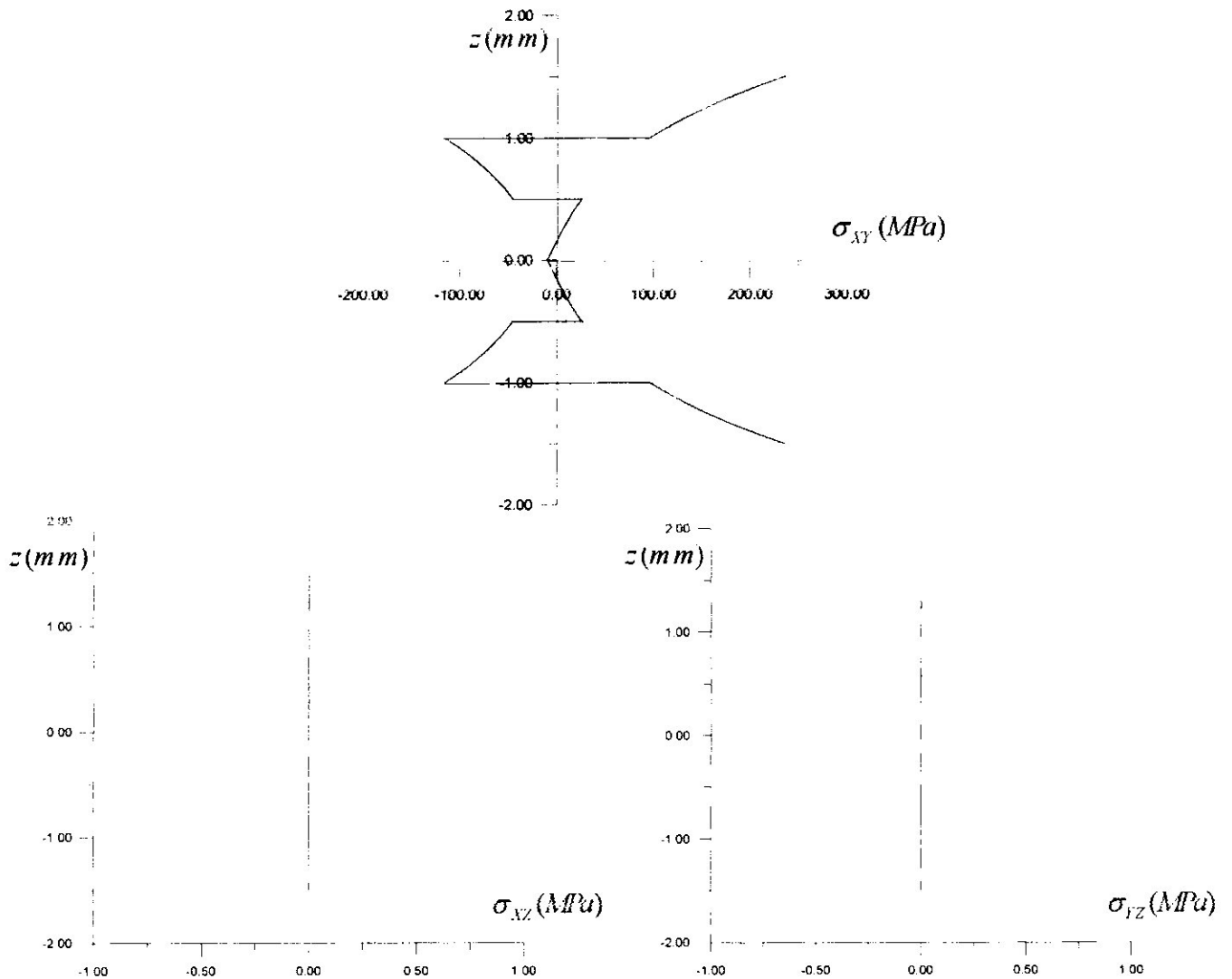


Figure (IV.33) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).

IV.5.3.1.2. Pour $E1/E2=10$:

IV.5.3.1.2.1. représentation graphique pour le point A(30,30,3/2)

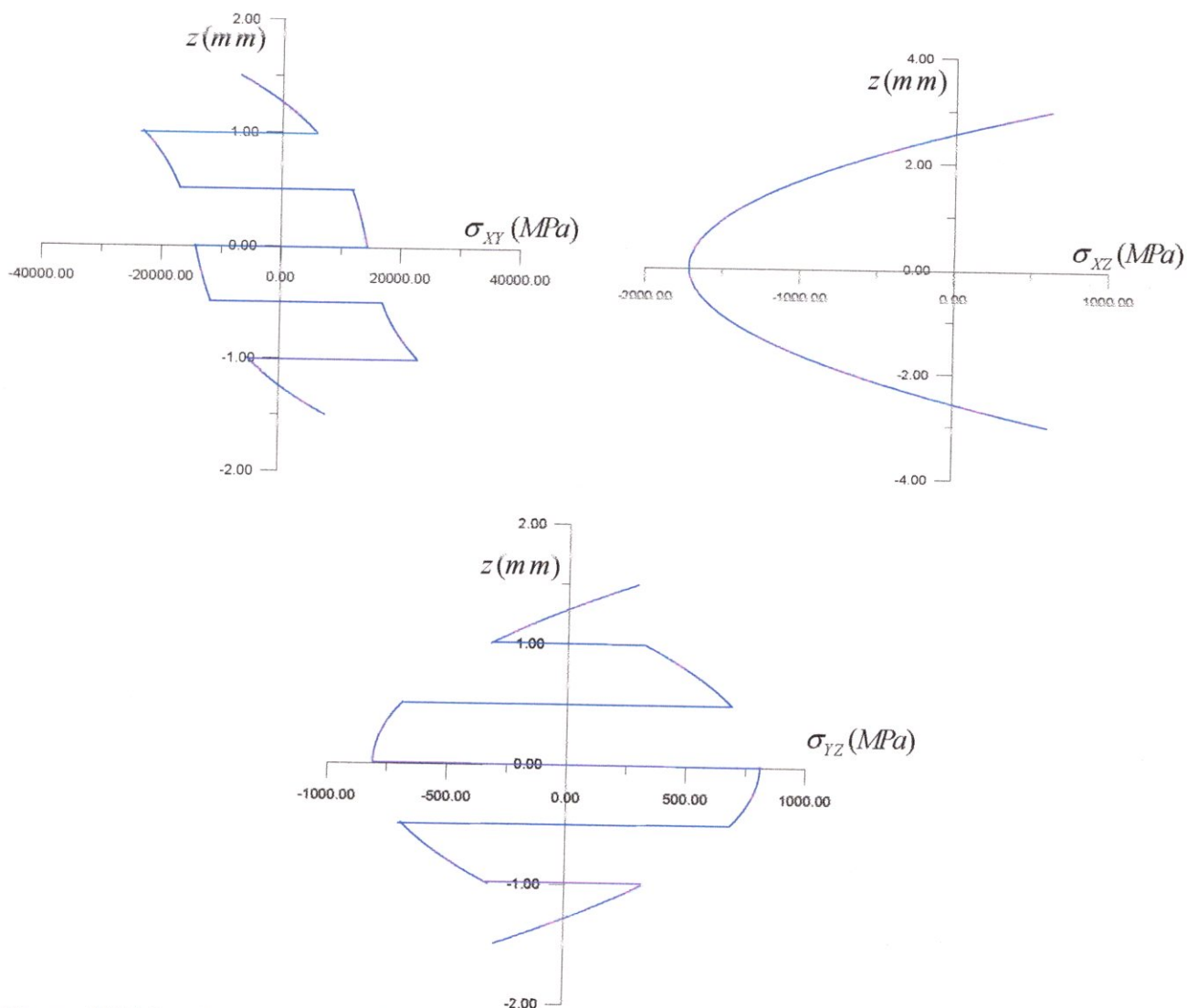
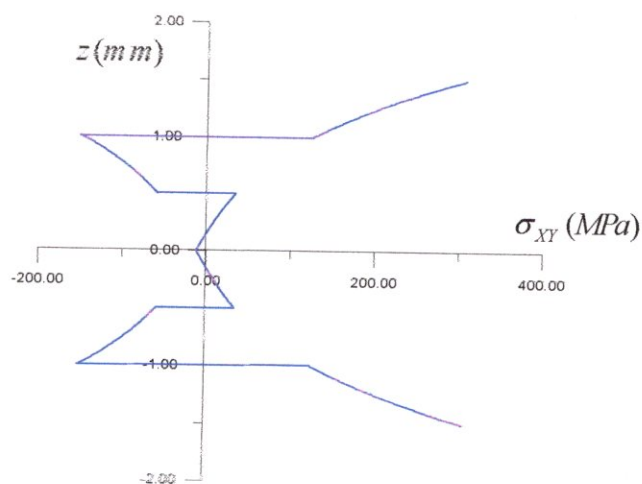


Figure (IV.34) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (30,30,3/2).

IV.5.3.1.2.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0)



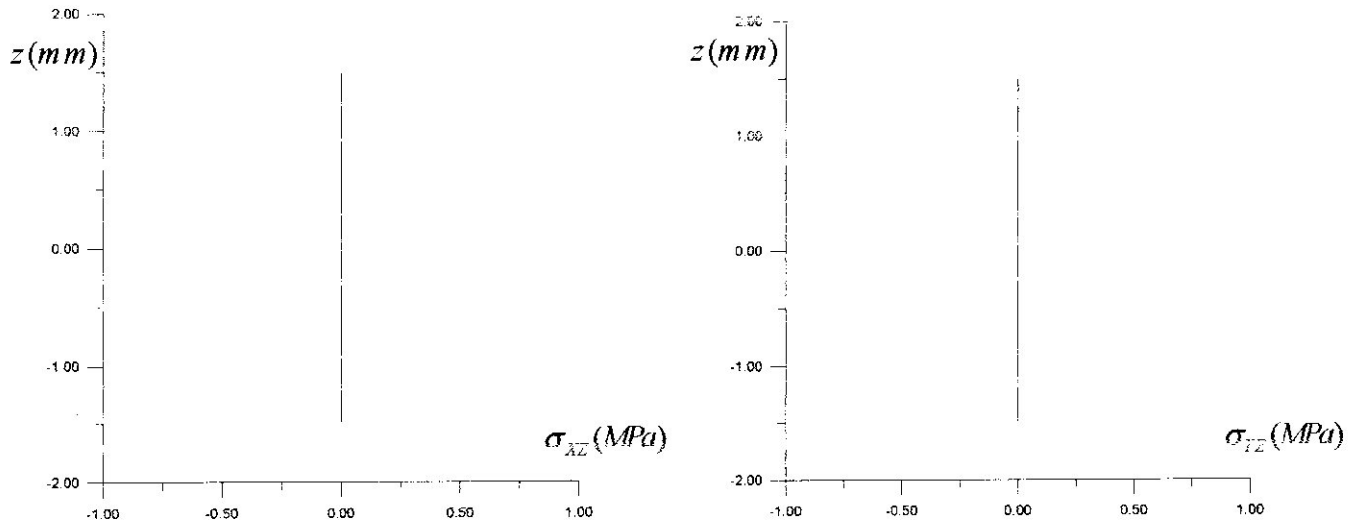


Figure (IV.35) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).

IV.5.3.1.3. Pour E1/E2=20:

IV.5.3.1.3.1. représentation graphique pour le point A(30,30,3/2)

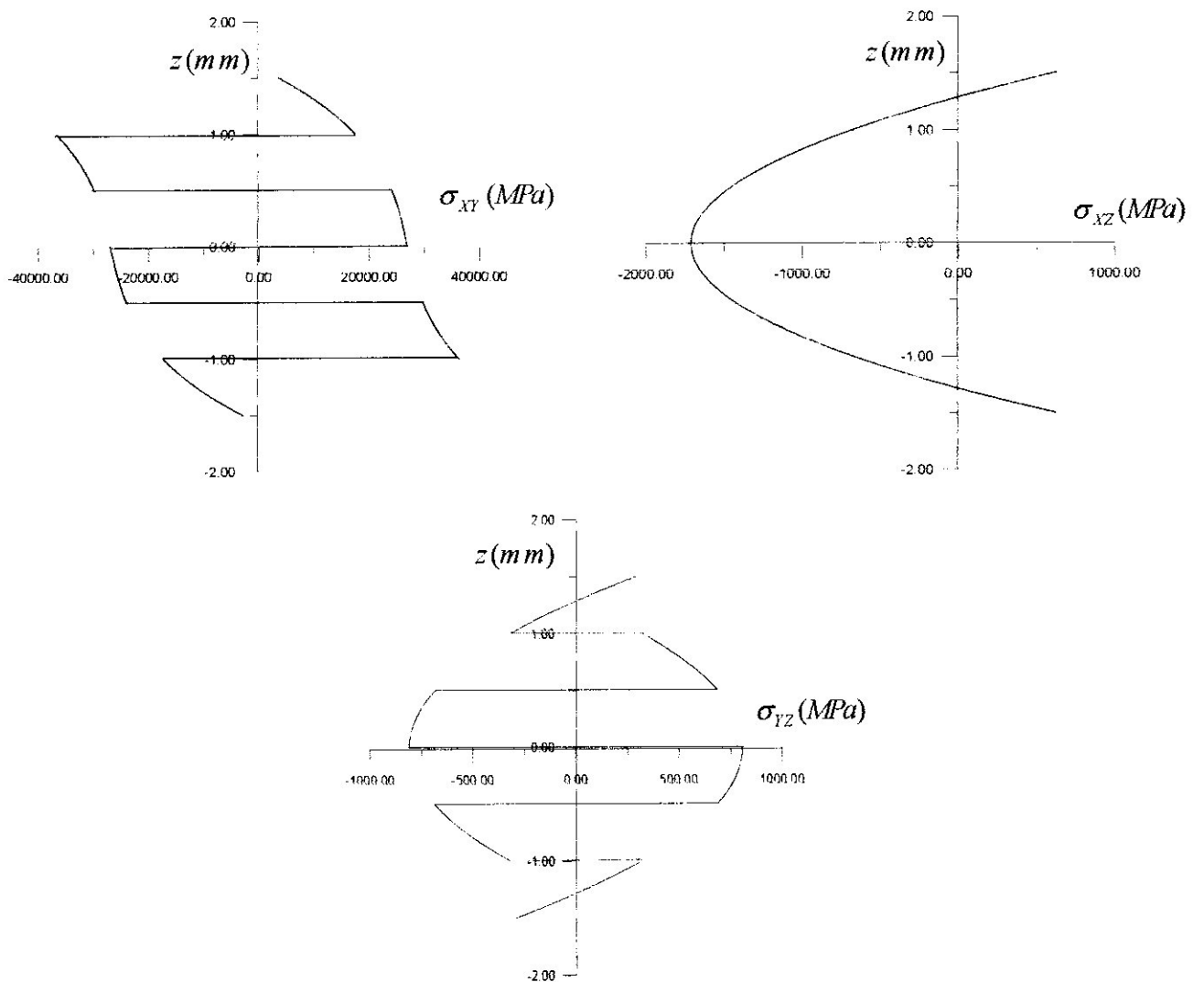


Figure (IV.36) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (30,30,3/2).

IV.5.3.1.3.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0)

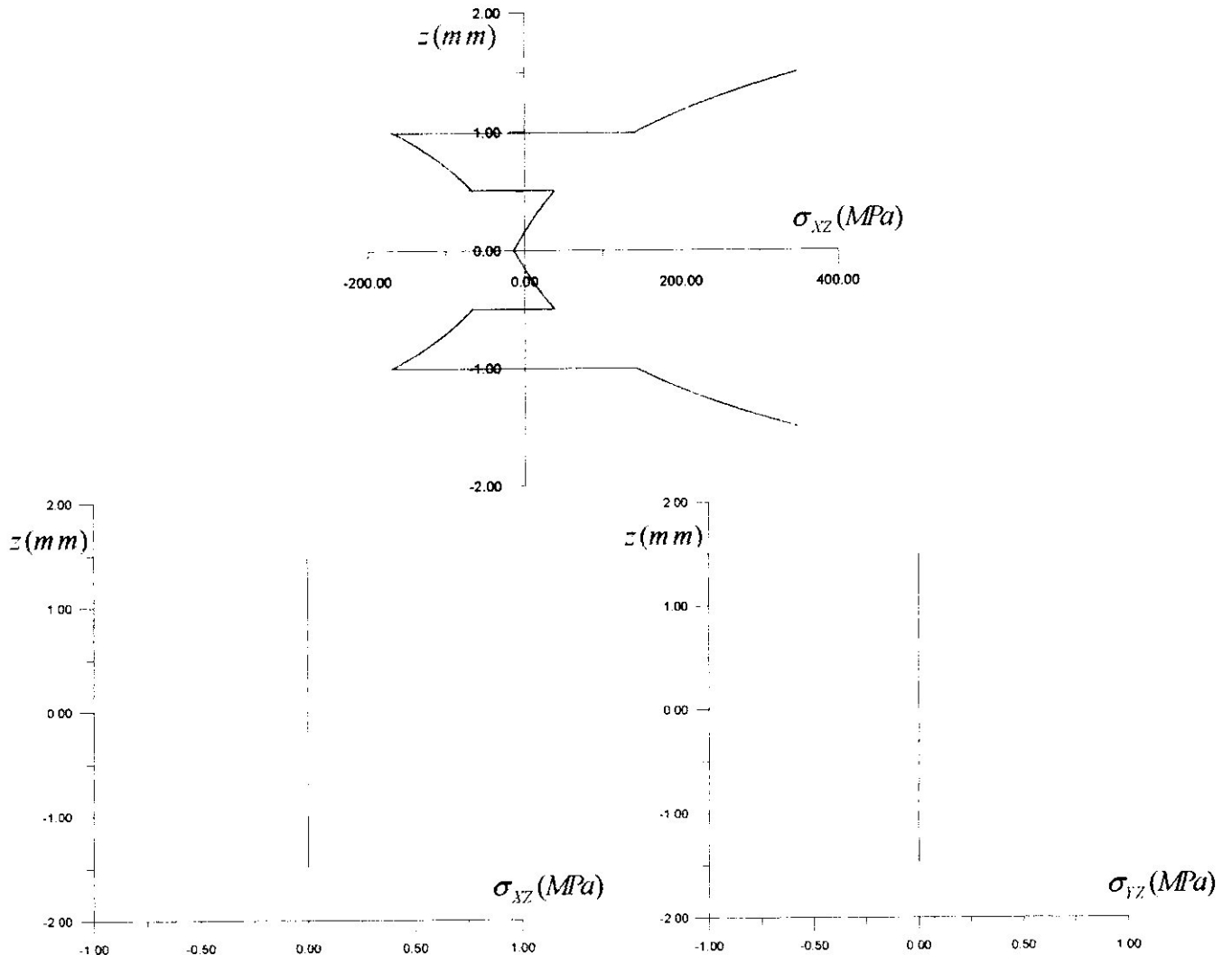
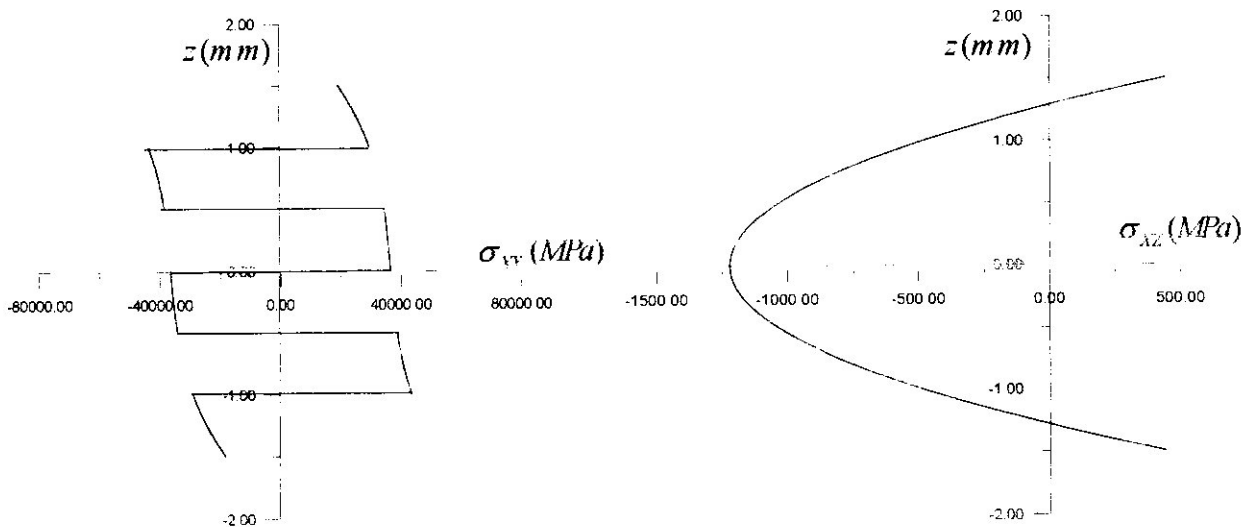


Figure (IV.37) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).

IV.5.3.1.4. Pour $E1/E2=40$:

IV.5.3.1.4.1. représentation graphique pour le point A(30,30,3/2)



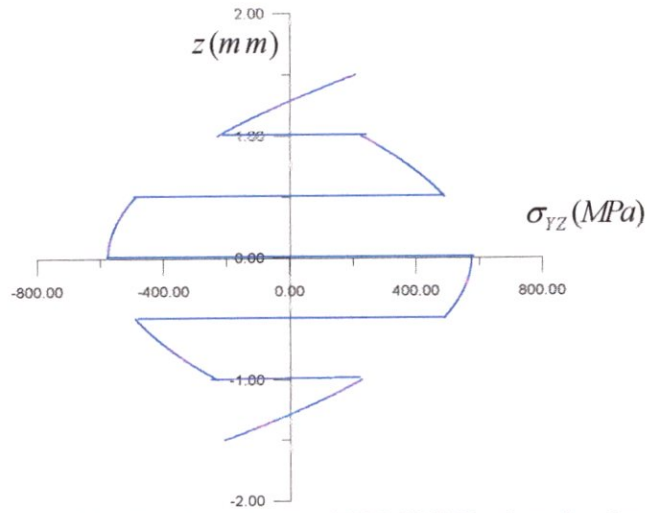


Figure (IV.38) : Contraintes résiduelles dans le stratifié $[-30/30]_3$ dans le plan XY de coordonnées $(30,30,3/2)$.

IV.5.3.1.4.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0)

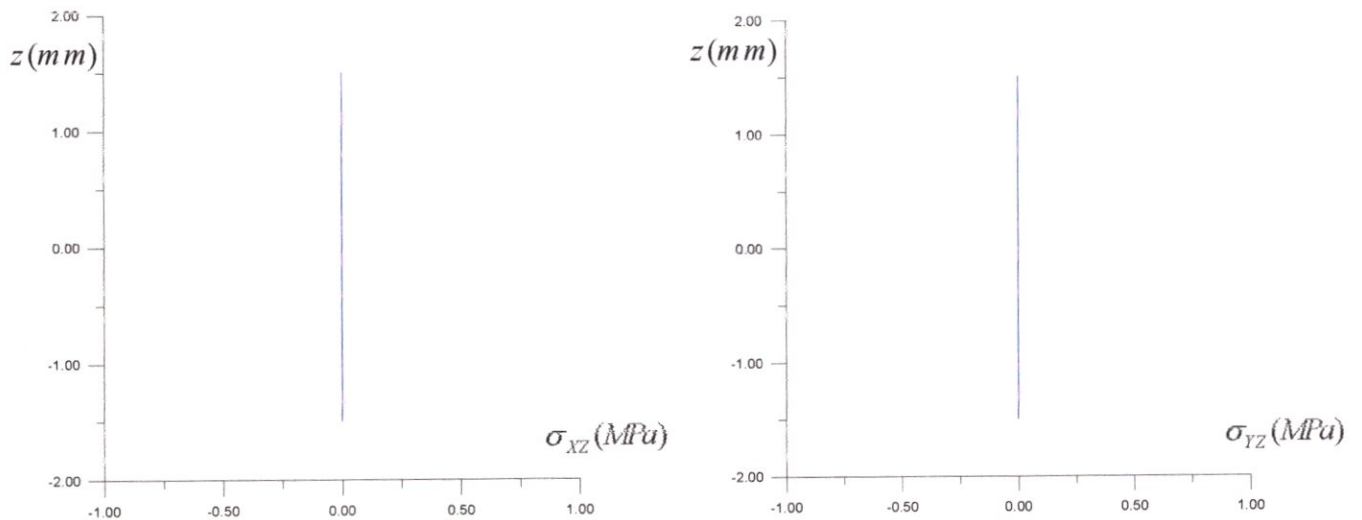
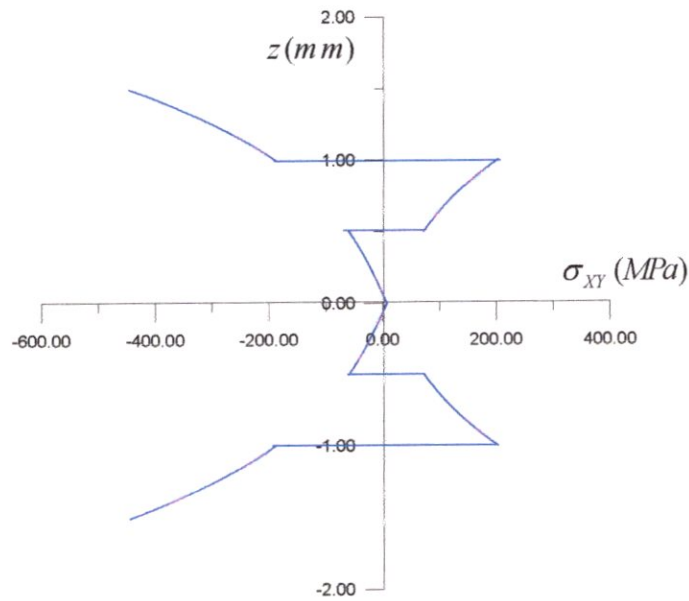


Figure (IV.39) : Contraintes résiduelles dans le stratifié $[-30/30]_3$ dans le plan XY de coordonnées $(0,0,0)$.

IV.5.3.1.5. interprétation :

Lorsque le rapport $E1/E2$ augmente, on constate que les contraintes de cisaillement plan σ_{XY} de cisaillement transversal σ_{YZ} et de cisaillement –gauchissement σ_{XZ} augmentent pour le point A(30,30,3/2). Au point B(0,0,0), la contrainte de cisaillement plan σ_{XY} demeure constante en valeur absolue et celles de cisaillement transversal σ_{YZ} et de cisaillement –gauchissement σ_{XZ} sont nulles.

IV.5.3.2. Pour $a/h=5:(a=15mm)$

IV.5.3.2.1. Pour $E1/E2=5 :$

IV.5.3.2.1.1. représentation graphique pour le point A(15/2,15/2,3/2)

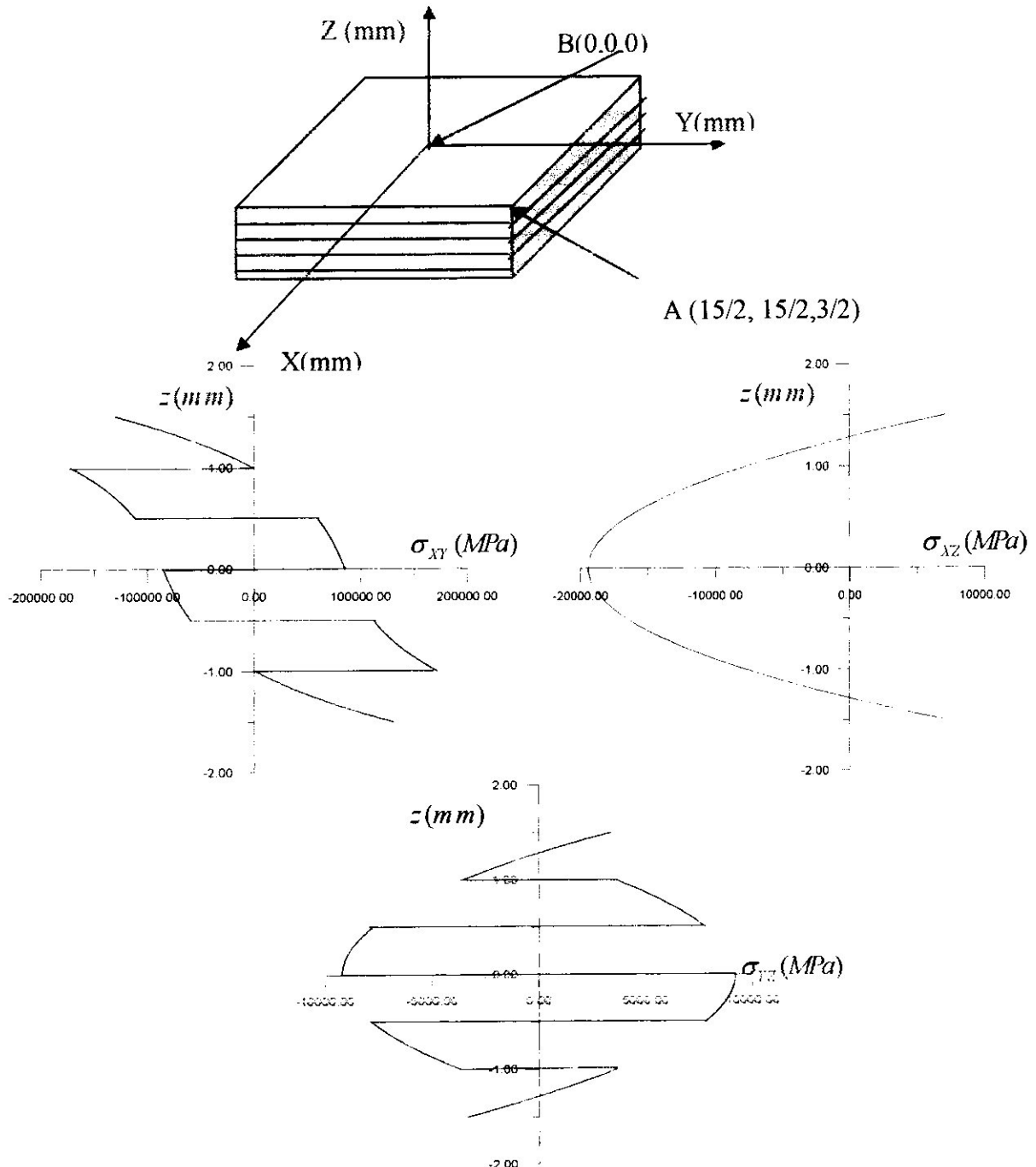


Figure (IV.40) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (15/2,15/4,3/2).

IV.5.3.2.1.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0)

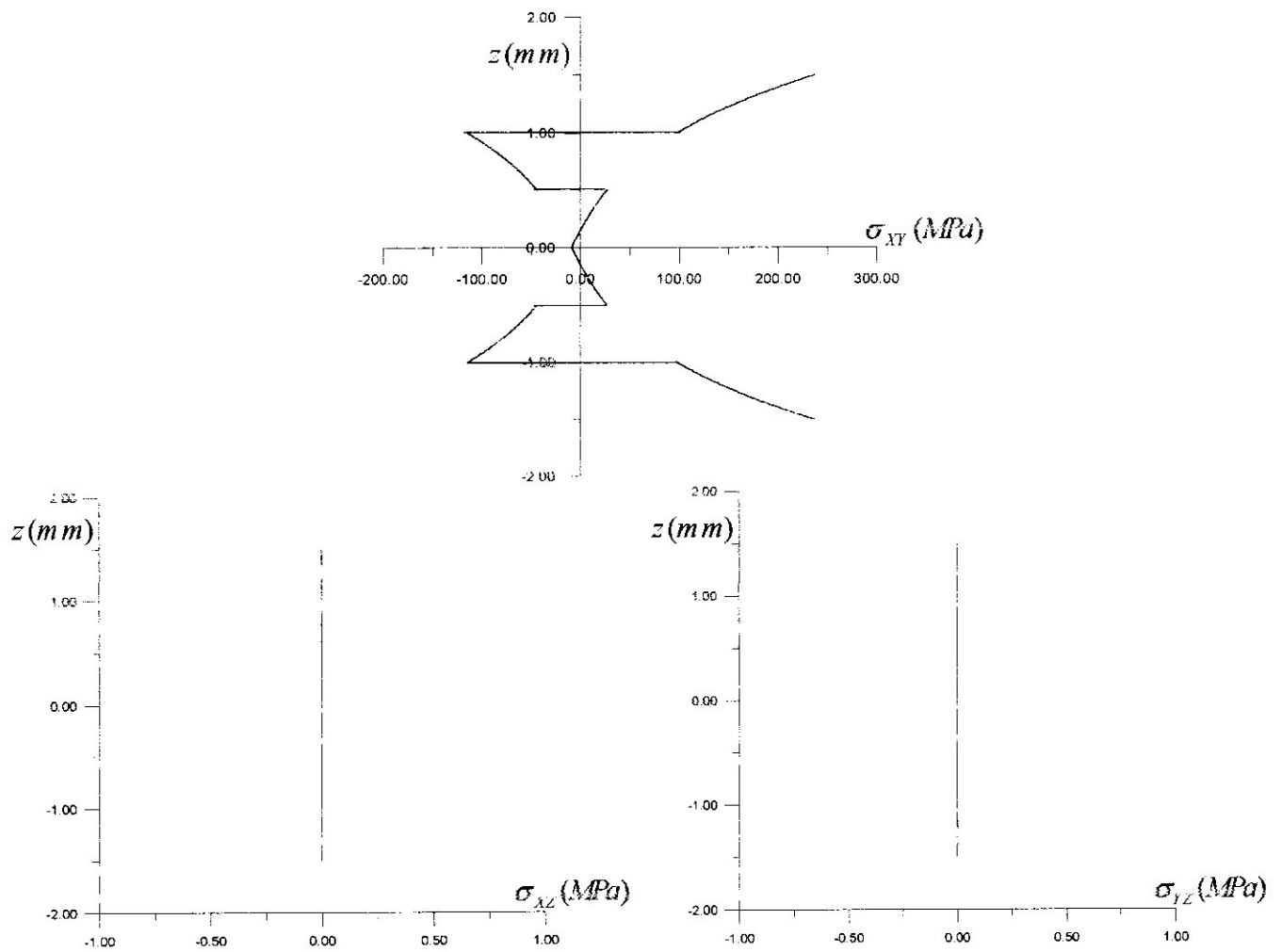
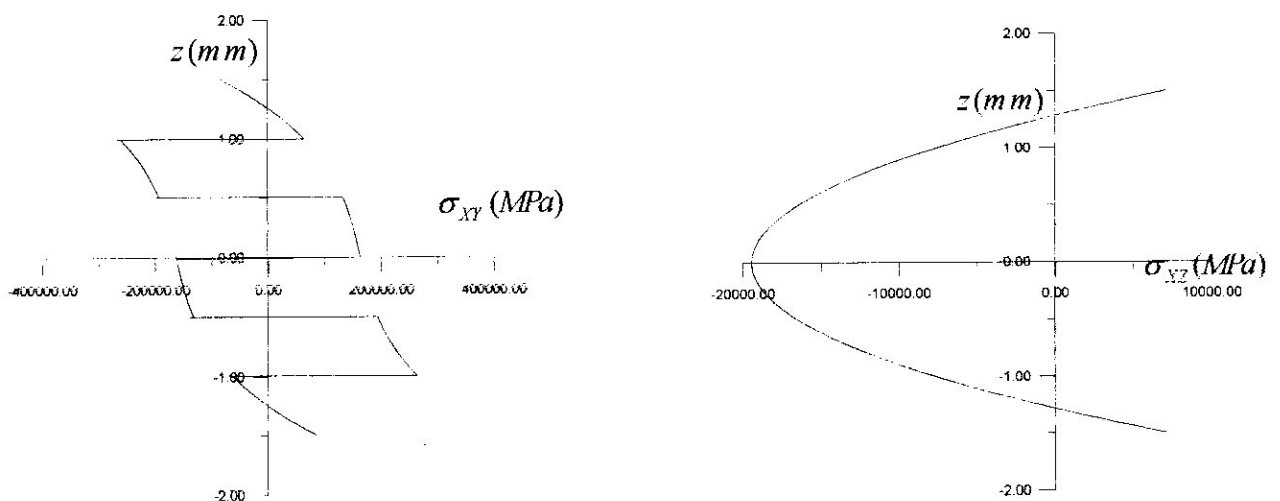


Figure (IV.41) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).

IV.5.3.2.2. Pour E1/E2=10 :

IV.5.3.2.2.1. représentation graphique pour le point A(15/2,15/2,3/2)



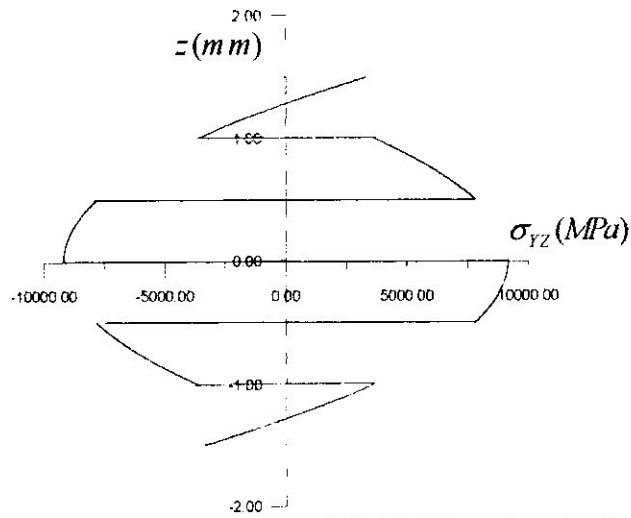


Figure (IV.42) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (15/2,15/2,3/2)

IV.5.3.2.2.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0)

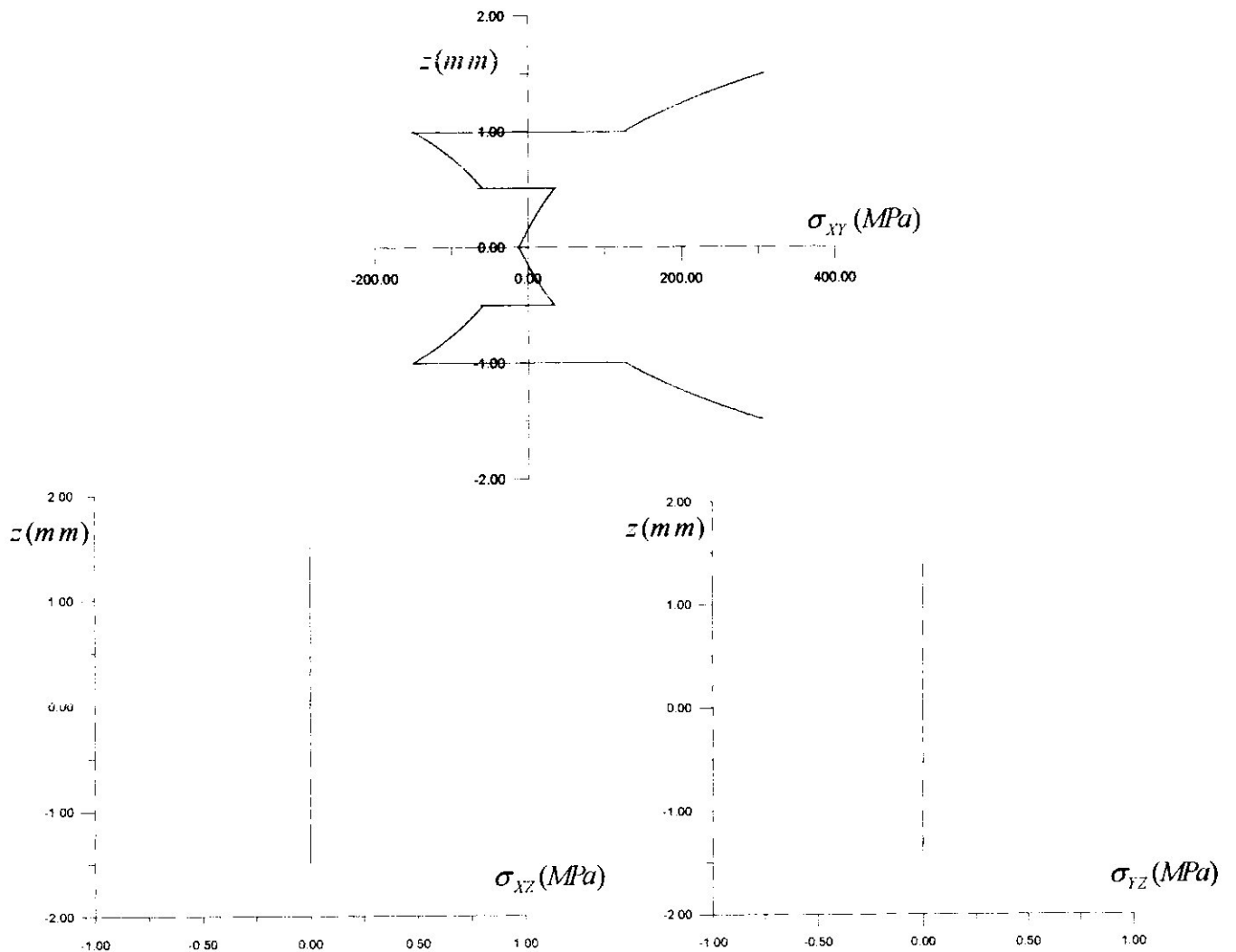


Figure (IV.43) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).

IV.5.3.2.3. Pour $E1/E2=20$:
IV.5.3.2.3.1. représentation graphique pour le point A(15/2,15/2,3/2):

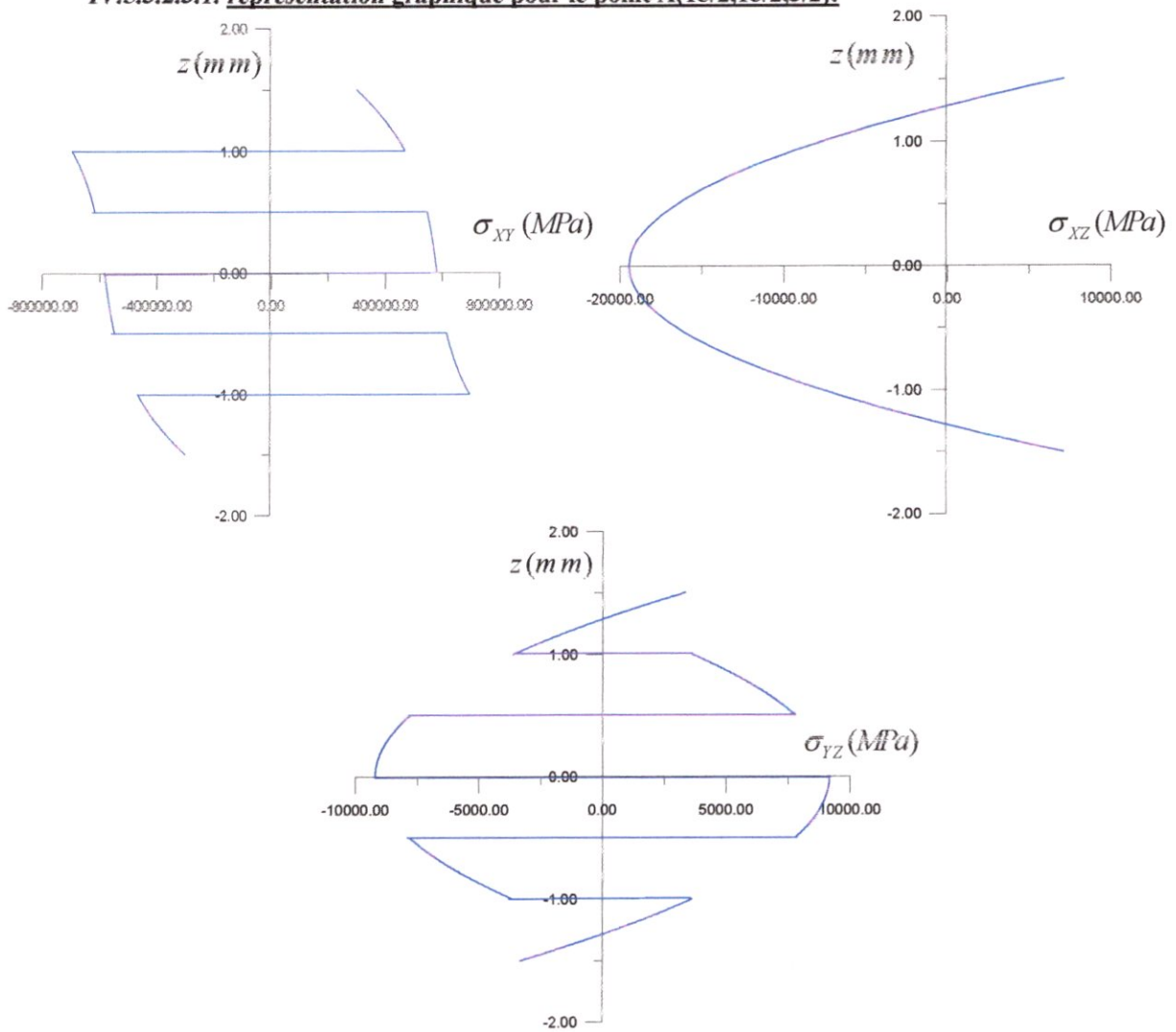
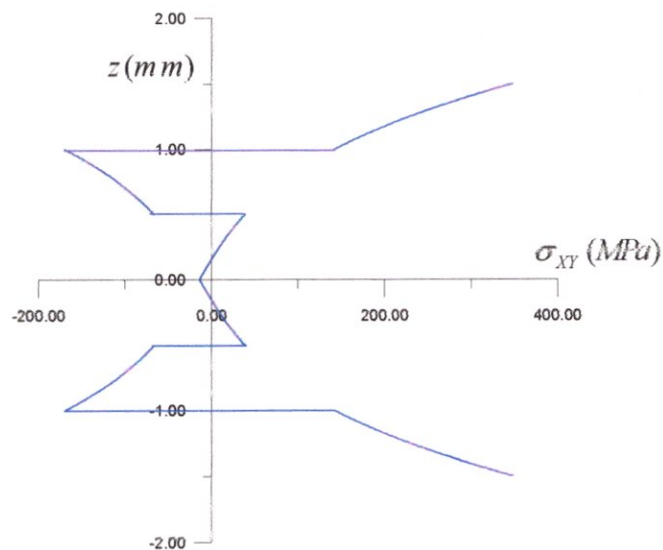


Figure (IV.44) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (15/2,15/2,3/2).

IV.5.3.2.3.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0):



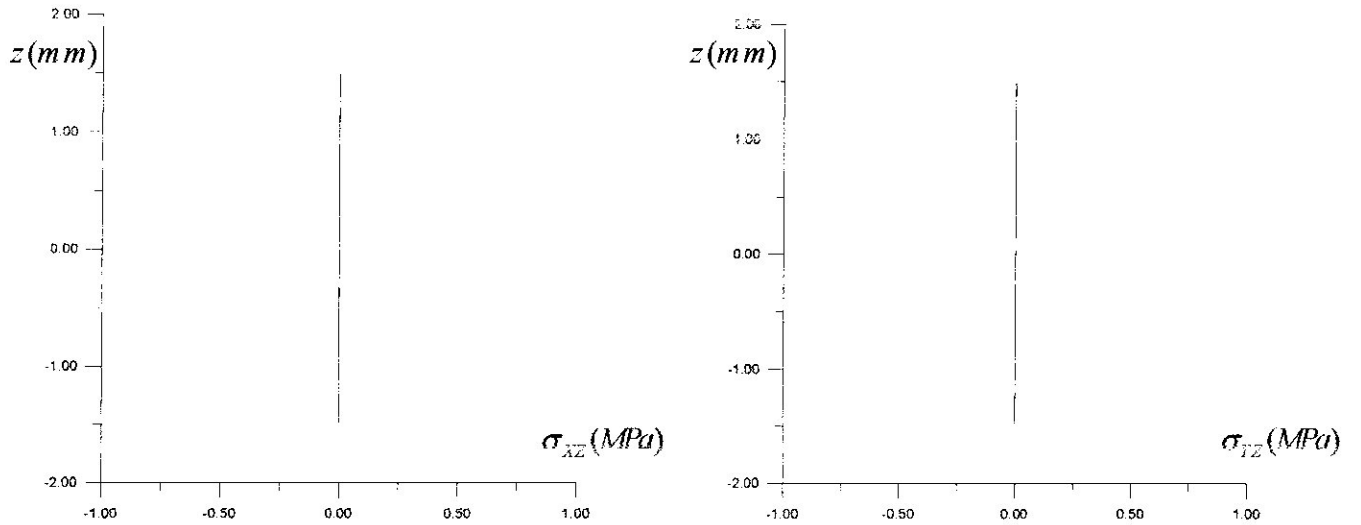


Figure (IV.45) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (0,0,0).

IV.5.3.2.4. Pour E1/E2=40 :

IV.5.3.2.4.1. représentation graphique pour le point A(15/2,15/2,3/2):

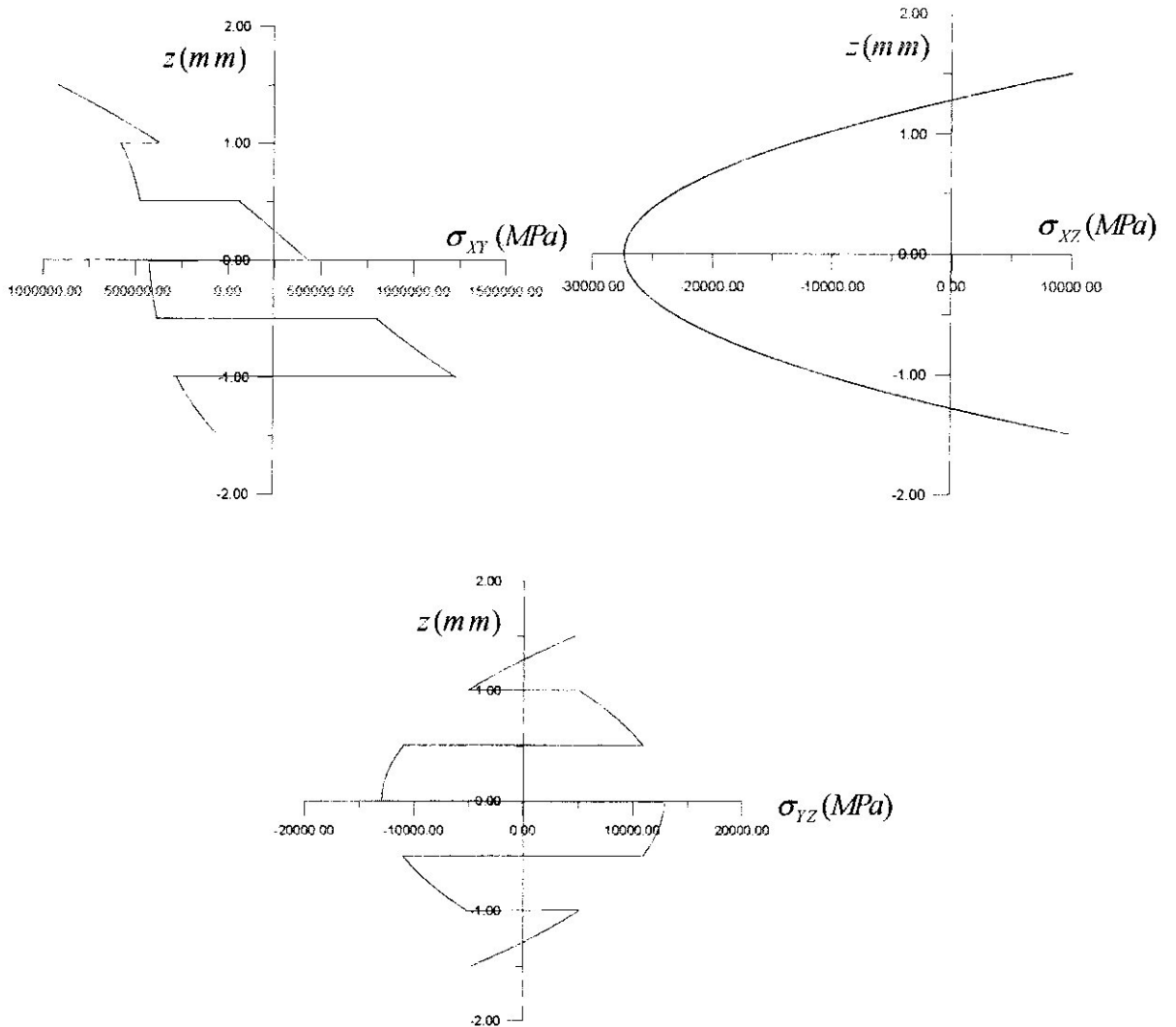


Figure (IV.46) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY de coordonnées (15/2,15/2,3/2).

IV.5.3.2.4.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0):

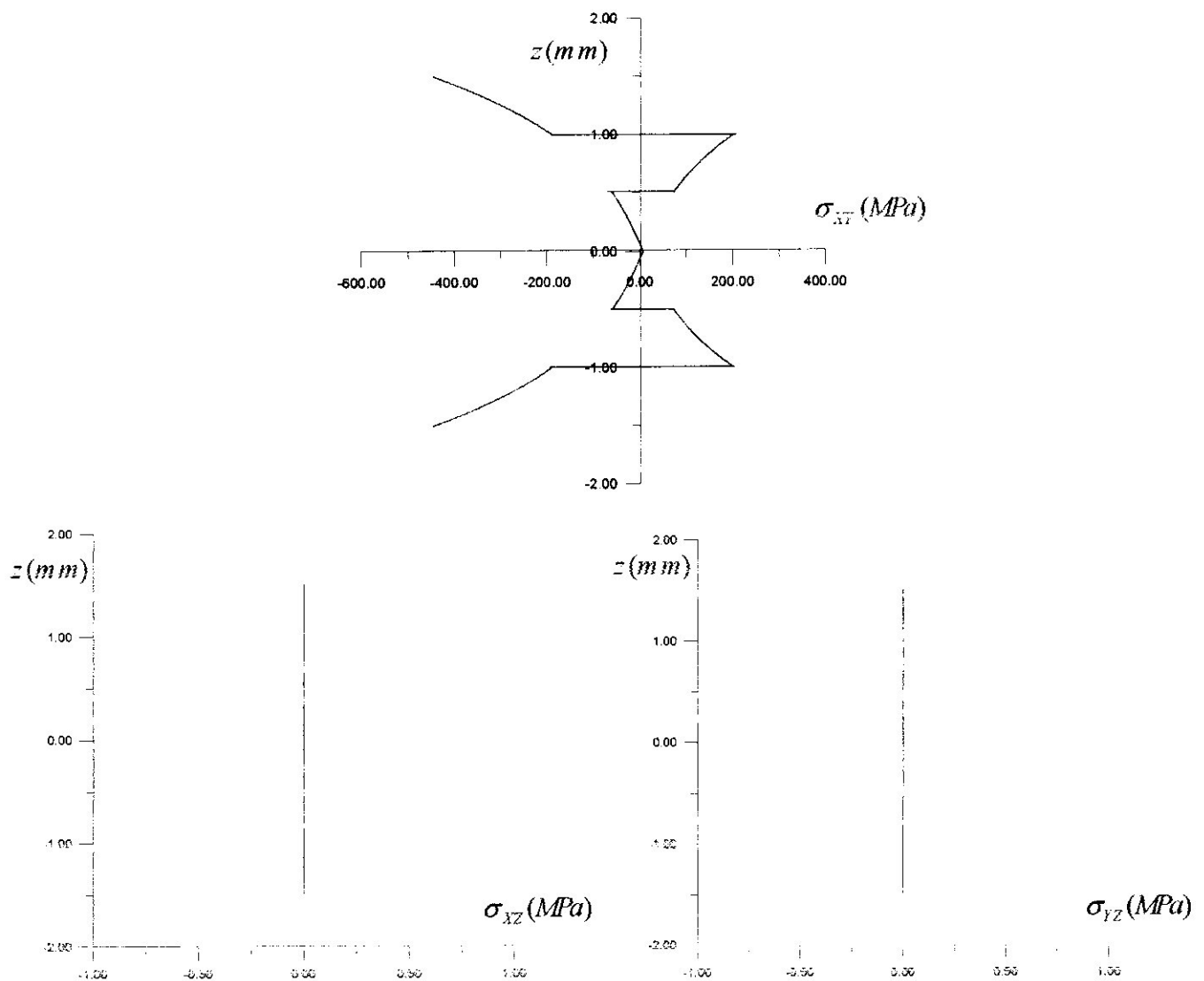


Figure (IV.47) : Contraintes résiduelles dans le stratifié [-30/30]₃ dans le plan XY du coordonnées (0,0,0).

IV.5.3.2.5. Interprétation :

Lorsque les rapports $E1/E2$ et a/h augmentent, on constate que les contraintes de cisaillement plan σ_{xy} de cisaillement transversal σ_{xz} et de cisaillement –gauchissement σ_{xz} augmentent pour le point A(30,30,3/2). Au point B(0,0,0), la contrainte de cisaillement plan σ_{xy} demeure constante en valeur absolue et celles de cisaillement transversal σ_{yz} et de cisaillement –gauchissement σ_{xz} sont nulles.

IV.5.4 Comparaison entre [45/30/90]_s, [90/45/30]_s et [30/90/45]_s par rapport à σ_{xz}

$a=b, a/h=5$

IV.5.4.1. pour $E1/E2=5$:

IV.5.4.1.1. représentation graphique pour le point A(15/2,15/2,3/2) :

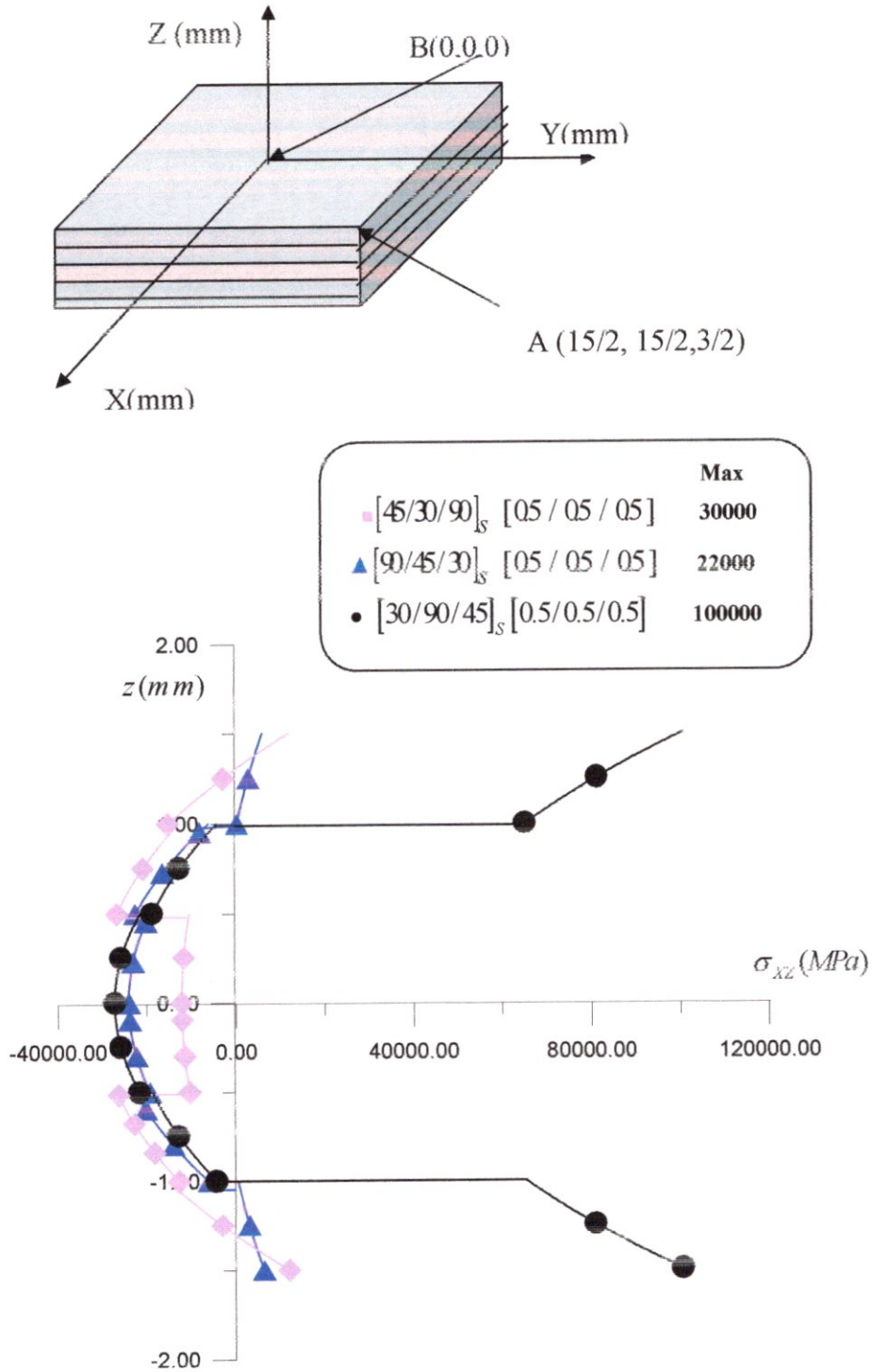


Figure (IV.48) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (15/2,15/2,3/2).

IV.5.4.1.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0) :

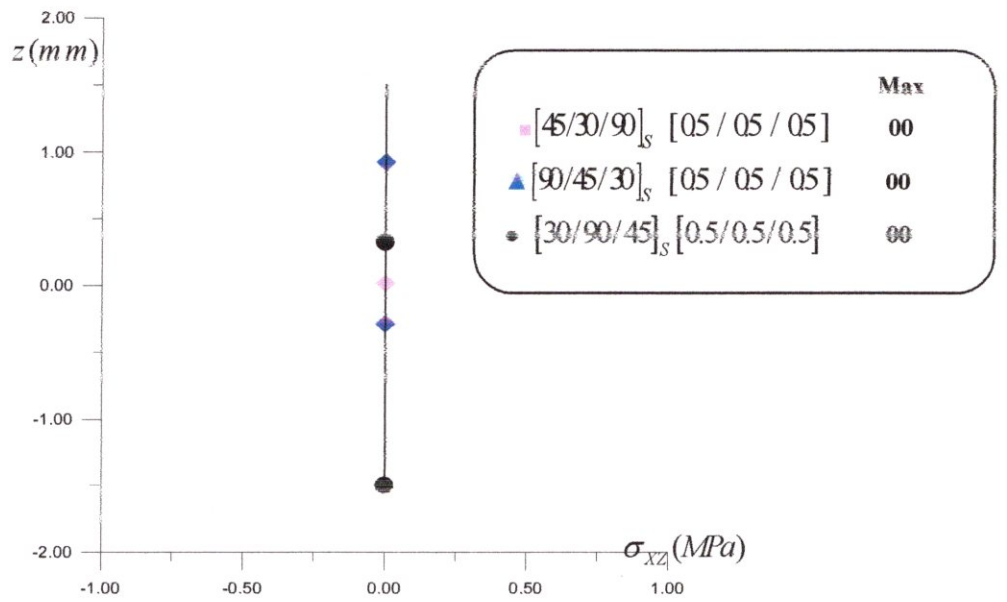


Figure (IV.49) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (0,0,0).

IV.5.4.2 pour E1/E2=10:

IV.5.4.2.1. représentation graphique pour le point A(15/2,15/2,3/2) :

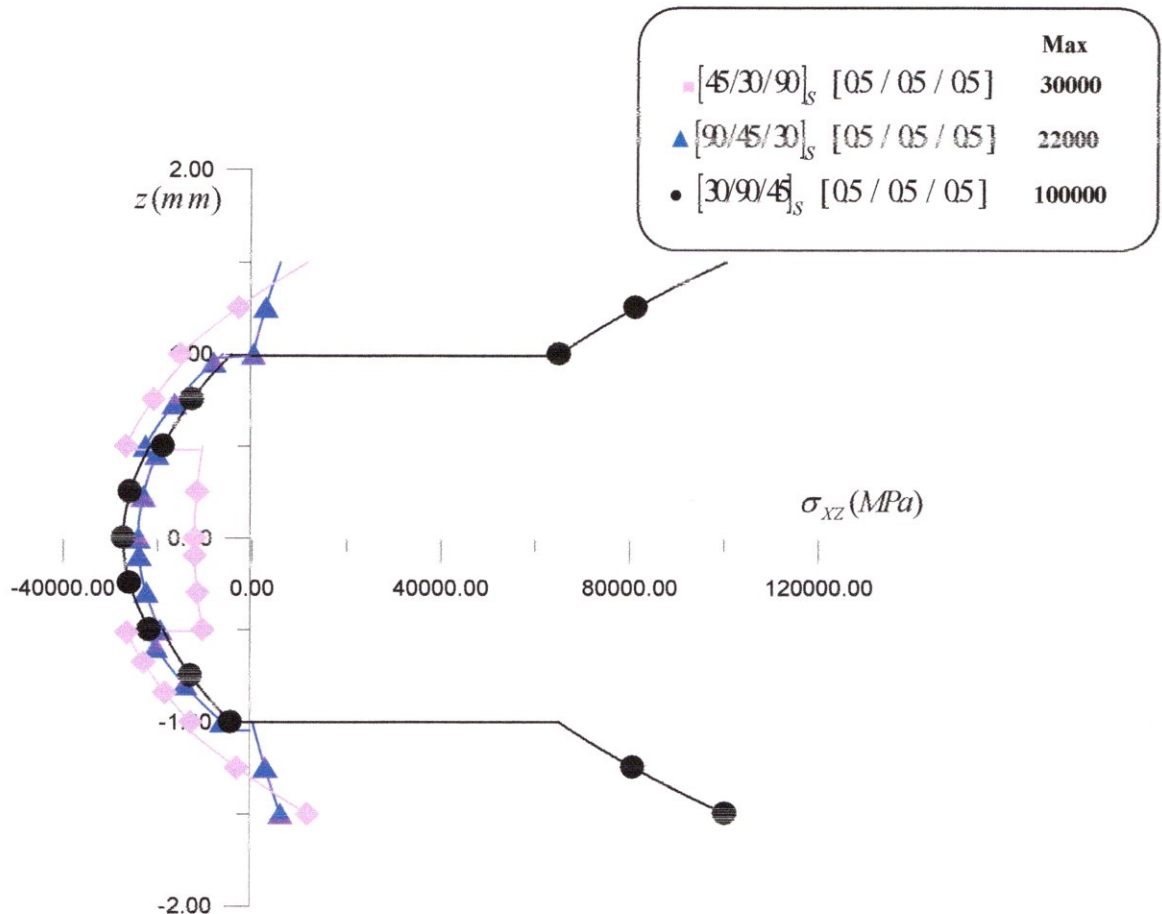


Figure (IV.50) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (15/2,15/2,3/2).

IV.5.4.2.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0) :

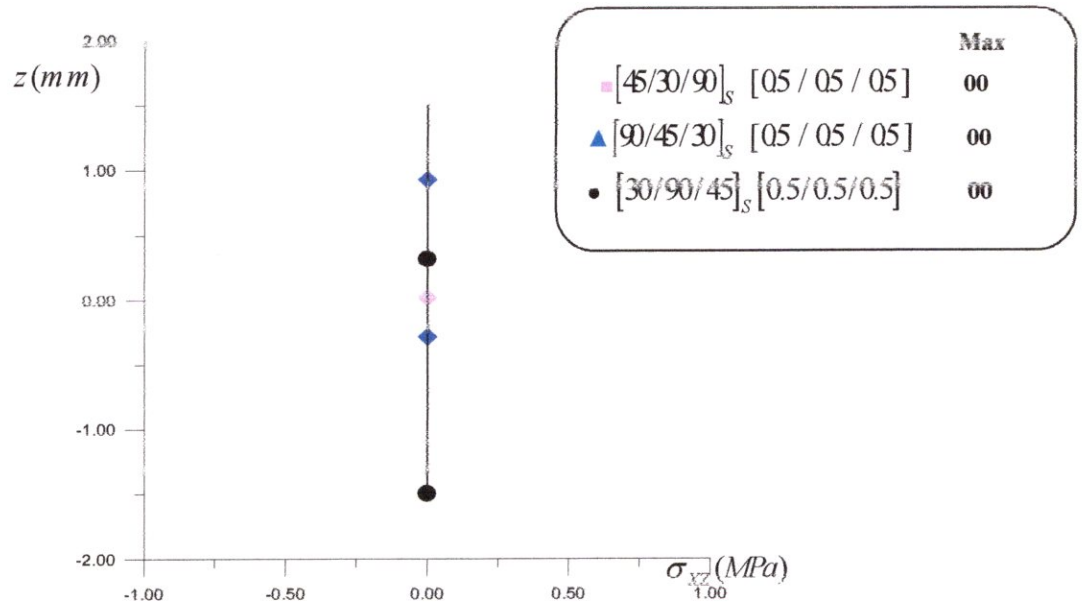


Figure (IV.51) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (0,0,0).

IV.5.4.3. pour $E1/E2=20$:

IV.5.4.3.1. représentation graphique pour le point A(15/2,15/2,3/2) :

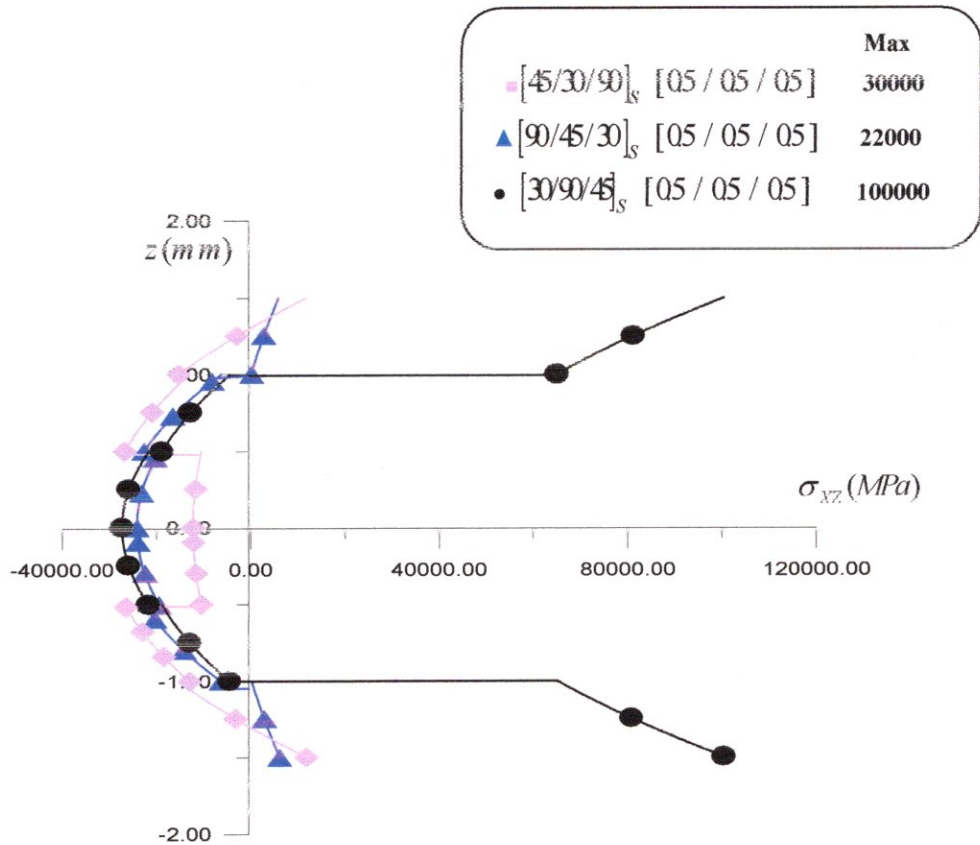


Figure (IV.52) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (15/2,15/2,3/2).

IV.5.4.3.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0) :

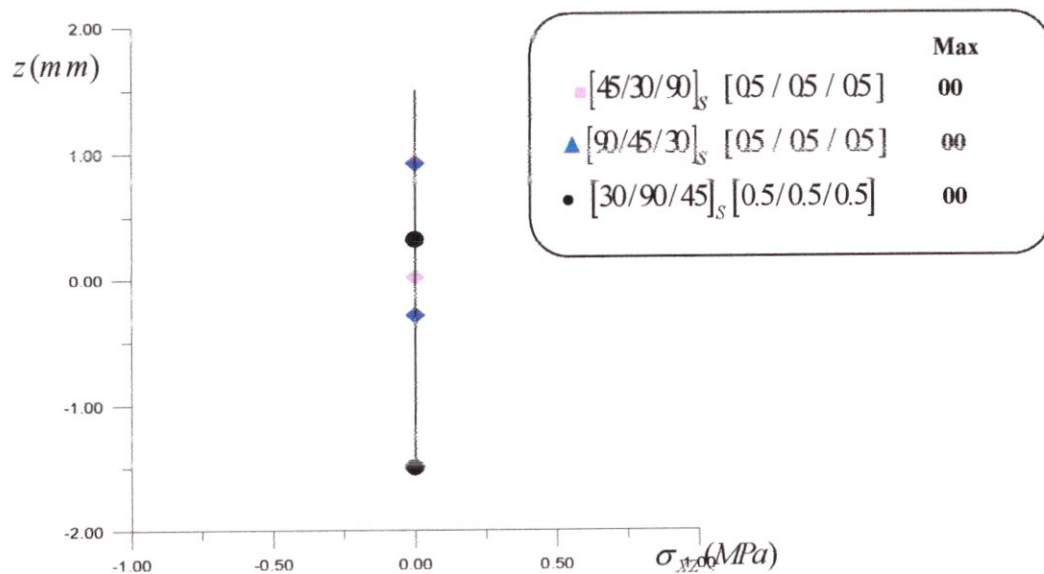


Figure (IV.53) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (0,0,0).

IV.5.4.4. pour E1/E2=40:

IV.5.4.4.1. représentation graphique pour le point A(15/2,15/2,3/2) :

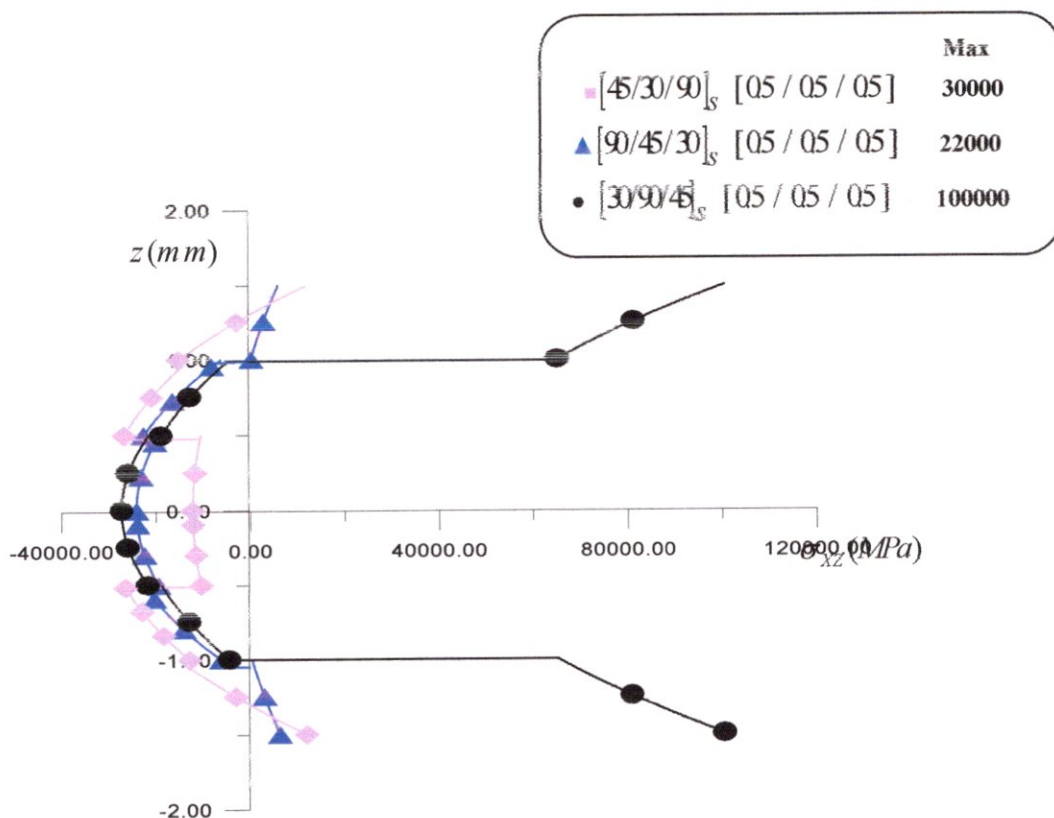


Figure (IV.54) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (15/2,15/4,3/2).

IV.5.4.4.2. représentation graphique pour le point B(0,0,0) :

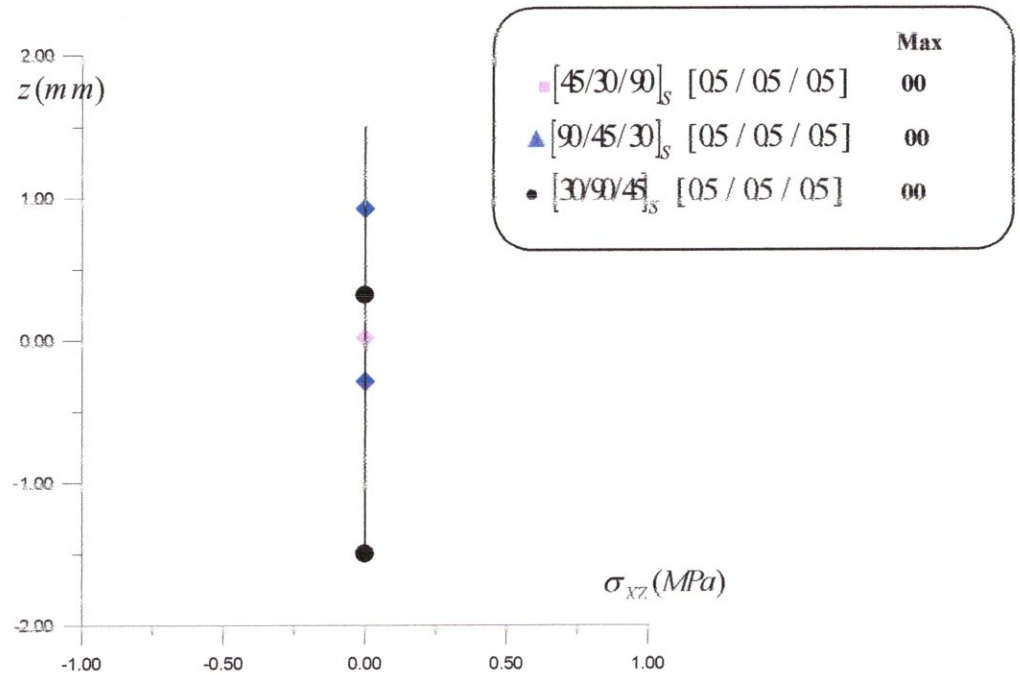


Figure (IV.55) : Contraintes résiduelles dans le stratifié dans le plan XZ de coordonnées (0,0,0) .

IV.5.4.4.3. Interprétation :

On remarque que dans des stratifiés symétriques la variation de $E1/E2$ n'a aucune influence sur les contraintes de cisaillement transversal σ_{xz} au point A ; par contre au point B elles sont toutes nulles.

IV.5.5 Conclusion :

	σ_{xxMAX} (MPa)	σ_{yyMAX} (MPa)	σ_{xyMAX} (MPa)
TCS	260	130	130
HSDT	361	135	140

On remarque que les valeurs des contraintes trouvées par le modèle de HSDT sont très importantes que celles données par le modèle TCS et cela est due à l'influence des efforts de gauchissement.

Le modèle HSDT donne une très grande précision sur le comportement mécanique du composite, car il prend en considération plusieurs phénomènes tels que le cisaillement, le gauchissement, et le cisaillement-gauchissement.



Conclusion

Générale

Conclusion Générale

Au cours de cette étude, nous avons montré l'influence des phénomènes de cisaillement, de gauchissement, et de cisaillement-gauchissement sur le comportement final du stratifié épais et la répartition des contraintes dépend du schéma de déformations choisi, aussi bien pour le cas du chargement mécanique que celui du chargement thermique lorsque les plaques subissent des variations de température suivant les trois directions de l'espace.

L'effet de symétrie montre que dans les stratifiés symétriques présentent une absence de couplage membrane-flexion. En outre les stratifiés symétriques ne présentent pas une tendance au gauchissement lors des déformations résiduelles induites, ce type de stratifié sera utilisé afin d'éliminer le couplage entre membrane et flexion. Par contre certaines applications nécessitent l'utilisation de stratifiés non symétriques. Par contre, ce couplage est nécessaire dans le cas où une meilleure rigidité en cisaillement est recherchée au sein des structures et se sont les stratifiés non symétriques qui présentent cette particularité.

Le changement de température à lui seul peut provoquer des déformations et des contraintes à travers la variation de température sans aucun chargement mécanique. ceux-ci est du à l'effet résiduel lié à la conception des structure, ces déformations et contraintes peuvent atteindre rapidement des valeurs critiques.

Lorsque l'épaisseur des structures stratifiées prend des valeurs importantes, il y apparition l'aspect gauchissement, à ce niveau la Théorie Classique des Stratifiés est insuffisante pour décrire le comportement des composites. La HSDT. Permet d'approcher au mieux le comportement des plaques épaisses.

Dans les plaques minces l'équilibre instantané thermique a lieu au bout de deux minutes, il est indépendant du temps, nous proposons comme perspective future d'examiner le comportement thermoélastique en transitoire des plaques composites épaisses par résolution d'abord de l'équation de Fourier en bidirectionnel en fonction du temps.

Annexes

Annexe "A"

$$D_{ij} = \frac{1}{3} [(2,5)^3 - (1,5)^3] [(Q_{ij})_{30} + (Q_{ij})_{15}] + \frac{1}{3} [(1,5)^3 - (0,5)^3] [(Q_{ij})_{15} - (Q_{ij})_{05}]$$

$$= \frac{1}{3} [12,25 (Q_{ij})_{30} + Q_{ij})_{30}] + 3,375 (Q_{ij})_{15} + Q_{ij})_{15}]$$

$$D = \begin{bmatrix} 293,93 & 77,332 & 0 \\ 77,332 & 114,60 & 0 \\ 0 & 0 & 84,087 \end{bmatrix} \text{ N.m}^2$$

4. Matrice de rigidité

La matrice de rigidité de l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 158,22 \cdot 10^6 & 30,432 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 & 22,659 \cdot 10^3 \\ 30,432 \cdot 10^6 & 51,277 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 & 12,101 \cdot 10^3 \\ 0 & 0 & 33,676 \cdot 10^6 & 22,659 \cdot 10^3 & 12,101 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 22,659 \cdot 10^3 & 293,93 & 77,332 & 0 \\ 0 & 0 & 12,101 \cdot 10^3 & 77,332 & 114,60 & 0 \\ 22,659 \cdot 10^3 & 12,101 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 84,087 \end{bmatrix}$$

Exemple 14.4.3.3

L'influence de l'alternance des couches peut être illustrée en considérant le stratifié de la figure 14.4, obtenu en intervertissant les couches 15° et -30° du stratifié (figure 14.3) de l'exemple précédent.

$$A_{ij} = (Q_{ij})_{-30} + (Q_{ij})_{30} + 1,5 [(Q_{ij})_{15} + (Q_{ij})_{-15}]$$

La matrice A est inchangée par rapport à l'empilement [-30°/15°/-15°/30°]

$$B_{ij} = \frac{1}{3} [(2,5)^2 - (1,5)^2] [(Q_{ij})_{15} - (Q_{ij})_{-15}] + \frac{1}{3} [(1,5)^2 - (0,5)^2] [(Q_{ij})_{15} + (Q_{ij})_{-15}]$$

$$= \begin{bmatrix} 13,384 & 5,2247 & -1,6154 \end{bmatrix}$$

Soit $B = \begin{bmatrix} 5,2247 & 2,9342 & 5,9258 \\ -1,6154 & 5,9258 & 5,2247 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ N.m}^{-2}$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} [(2,5)^3 - 1] [(Q_{ij})_{15} + (Q_{ij})_{-15}] + \frac{1}{3} [(1,5)^3 - (0,5)^3] [(Q_{ij})_{15} - (Q_{ij})_{-15}]$$

$$= \begin{bmatrix} 327,38 & 64,271 & 60,686 \end{bmatrix}$$

Soit $D = \begin{bmatrix} 64,271 & 107,32 & 15,438 \\ 60,686 & 15,438 & 71,025 \end{bmatrix} \text{ N.m}^2$

Le changement d'alternance des couches garde inchangée la matrice membrane A, alors qu'il modifie les matrices de flexion-torsion et de couplage.

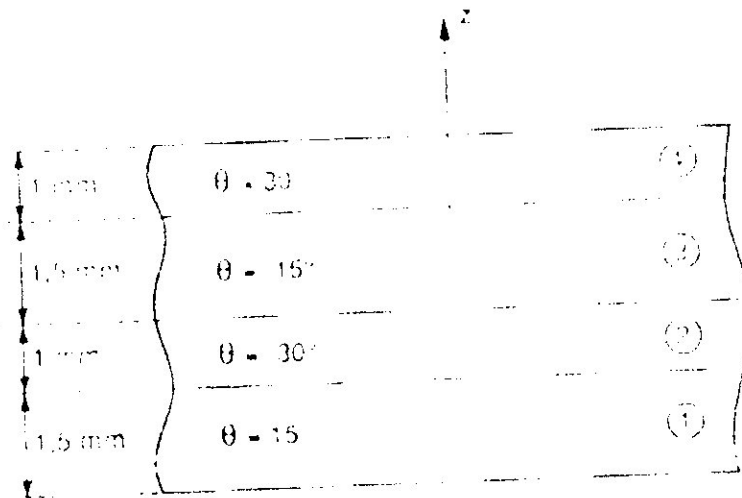


Figure 14.4 Stratifié à quatre couches de l'exemple 14.4.3.

14.5 DETERMINATION DES DEFORMATIONS ET DES CONTRAINTES

14.5.1 Problème à résoudre

L'équation constitutive (14.29) exprime les résultantes en membrane N_x, N_y, N_{xy} et les moments de flexion-torsion M_x, M_y, M_{xy} en fonction des déformations en membrane $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ et des courbures $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$. Les problèmes de conception des structures en matériaux composites nécessitent de résoudre le problème inverse : connaissant les résultantes en membrane et les moments, trouver les déformations en membrane et les courbures, puis les contraintes.

14.5.2 Déformations en membrane et courbures

L'expression (14.30) peut être écrite en séparant la matrice N des résultantes en membrane et la matrice M_f des moments :

$$N = A \epsilon_m + B \kappa \quad (14.34)$$

$$M_f = B \epsilon_m + D \kappa \quad (14.35)$$

De la première relation, nous pouvons extraire les déformations en membrane, soit :

$$\epsilon_m = A^{-1} N - A^{-1} B \kappa \quad (14.36)$$

et en reportant dans (14.35), la matrice des moments s'écrit :

$$M_f = B A^{-1} N + (D - B A^{-1} B) \kappa \quad (14.37)$$

Les expressions (14.36) et (14.37) peuvent être réécrites sous une forme semi-inversée :

$$\varepsilon_m = A^* N + B^* \kappa \quad (14.38)$$

$$M_f = C^* N + D^* \kappa \quad (14.39)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (14.40)$$

avec

$$\begin{aligned} A^* &= A^{-1} \\ B^* &= -A^{-1} B \\ C^* &= B A^{-1} = (B^*)^t \\ D^* &= D - B A^{-1} B = D + B B^* \end{aligned} \quad (14.41)$$

Dans le cas général, les matrices A^* et D^* sont symétriques, alors que la matrice B^* ne l'est pas.

De l'expression (14.39), nous tirons :

$$\kappa = D^{*-1} M_f - D^{*-1} C^* N \quad (14.42)$$

et en reportant dans (14.38) :

$$\varepsilon_m = (A^* - B^* D^{*-1} C^*) N + B^* D^{*-1} M_f \quad (14.43)$$

Les deux dernières équations peuvent être regroupées pour obtenir la forme inverse de l'équation constitutive des stratifiés, soit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} \quad (14.44)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= A^* - B^* D^{*-1} C^* = A^* + B^* D^{*-1} B^{*t} \\ B &= B^* D^{*-1} = -D^{*-1} C^* = D^{*-1} B^{*t} \\ C &= -D^{*-1} C^* = B^{*t} \\ D &= D^{*-1} \end{aligned} \quad (14.45)$$

La forme inverse de l'équation constitutive est écrite (14.44) sous une forme matricielle à la forme (14.30). Elle fait intervenir des inversions sur des sous-matrices de \mathbb{S}^3 de la forme directe. La matrice de rigidité inverse peut également être obtenue par inversion directe de la matrice de rigidité introduite en (14.29).

14.5.3 Champ des déformations

Le champ des déformations au point (x, y, z) est ensuite déterminé à partir des déformations en membrane et des courbures à l'aide de l'équation (14.13)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Compte tenu des hypothèses faites (schéma du 1), de plus les déformations ε_x^0 , ε_y^0 et γ_{xy}^0 varient linéairement dans l'épaisseur de stratifié.

Les déformations, exprimées dans les axes principaux de la couche k (numérotés $1, 2$ par rapport à $1, 2$ de la couche 0), sont obtenues à partir de la relation générale (6.41) de changement de base. Dans le cas présent, ces relations sont limitées à trois déformations. Les déformations dans la couche k , et rapportées aux axes principaux (L, T, F') de cette couche, s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (14.16)$$

avec

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (14.17)$$

14.5.4 Champ des contraintes

Les contraintes dans la couche k sont ensuite obtenues par l'une des équations (14.19) ou (14.20). Par exemple :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Les contraintes, exprimées par rapport aux axes principaux, peuvent aussi être calculées ensuite soit en effectuant un changement de base sur les contraintes σ_x , σ_y et σ_{xy} , soit directement à partir des déformations ε_L , ε_T et γ_{LT} dans les axes principaux.

Par changement de base, l'expression est obtenue à partir de la relation générale (5.44). Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (14.48)$$

avec

$$T = T(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (14.49)$$

A partir des déformations dans les axes principaux, les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_T \\ \epsilon_{LT} \end{bmatrix} \quad (14.50)$$

14.5.5 Exemple

Les efforts imposés à une structure en stratifié sont tels qu'ils se réduisent en un point à des résultantes de membrane N_x, N_y, N_{xy} (figure 14.5). Déterminer au point considéré :

1. les déformations en membrane et les courbures ;
 2. les déformations dans chaque couche rapportées aux axes du stratifié, puis aux axes principaux des couches ;
 3. les contraintes dans chaque couche rapportées aux axes du stratifié, puis aux axes principaux des couches ;
- dans le cas où le stratifié est celui de l'exemple 14.4.3.3 (figure 14.4), et les valeurs des résultantes de membrane sont : $N_x = 1\,000 \text{ N/mm}$; $N_y = 500 \text{ N/mm}$; $N_{xy} = 250 \text{ N/mm}$.

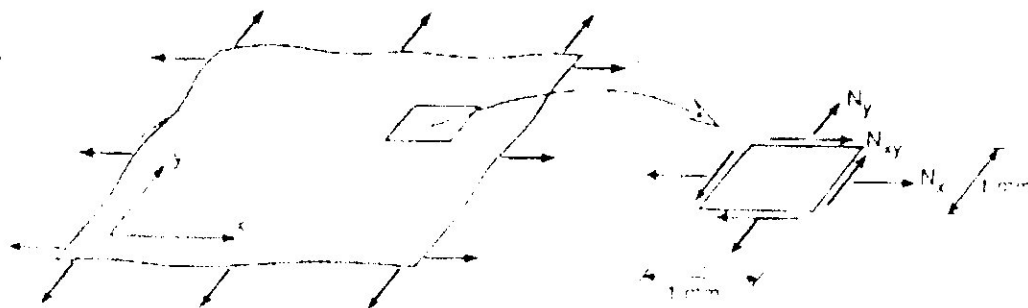


Figure 14.5. Efforts de membrane exercés en un point d'un stratifié

1. Déformations en membrane et courbures

Compte tenu des résultats établis dans l'exemple 14.4.3.3, l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix}
 1 \\
 0,25 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1,8,22 \cdot 10^6 & 30,432 \cdot 10^6 & 0 & 33,391 \cdot 10^3 & -8,2292 \cdot 10^3 & 1,8 \cdot 10^3 \\
 30,432 \cdot 10^6 & 81,217 \cdot 10^6 & 0 & 32,217 \cdot 10^3 & 2,934 \cdot 10^3 & 8,9258 \cdot 10^3 \\
 0 & 0 & 33,634 \cdot 10^6 & 1,6154 \cdot 10^3 & -8,9258 \cdot 10^3 & 8,2292 \cdot 10^3 \\
 33,391 \cdot 10^3 & 32,217 \cdot 10^3 & 1,6154 \cdot 10^3 & 421,8 & 64,271 & 60,656 \\
 -8,2292 \cdot 10^3 & 2,934 \cdot 10^3 & -8,9258 \cdot 10^3 & 64,271 & 10,315 & 18,115 \\
 1,8 \cdot 10^3 & 8,9258 \cdot 10^3 & 8,2292 \cdot 10^3 & 60,656 & 18,115 & 71,25
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \epsilon_x^0 \\
 \epsilon_y^0 \\
 \gamma_{xy}^0 \\
 \kappa_x \\
 \kappa_y \\
 \kappa_z
 \end{bmatrix}$$

Par inversion directe ou par blocs, l'équation inverse s'écrit :

$$\begin{bmatrix}
 \epsilon_x^0 \\
 \epsilon_y^0 \\
 \gamma_{xy}^0 \\
 \kappa_x \\
 \kappa_y \\
 \kappa_z
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1,267 & -4,322 & 3,069 & -2,41 \cdot 10^3 & 6,126 \cdot 10^3 & -2,279 \cdot 10^3 \\
 4,322 & 22,297 & 0,279 & -0,187 \cdot 10^3 & 0,042 \cdot 10^3 & -1,810 \cdot 10^3 \\
 0,069 & 0,279 & 30,568 & 1,032 \cdot 10^3 & -1,92 \cdot 10^3 & 2,730 \cdot 10^3 \\
 -0,415 \cdot 10^3 & -0,187 \cdot 10^3 & 1,032 \cdot 10^3 & 4,052 \cdot 10^6 & 2,058 \cdot 10^6 & -3,068 \cdot 10^6 \\
 -0,525 \cdot 10^3 & 0,042 \cdot 10^3 & -1,92 \cdot 10^3 & 2,058 \cdot 10^6 & 10,747 \cdot 10^6 & -0,445 \cdot 10^6 \\
 0,279 \cdot 10^3 & -1,810 \cdot 10^3 & 2,730 \cdot 10^3 & -3,068 \cdot 10^6 & -0,445 \cdot 10^6 & 12,15 \cdot 10^6
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 0,25 \\
 0,25 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \cdot 10^{-3}$$

D'où les déformations en membrane et courbures :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx}^0 &= 5,064 \cdot 10^{-3} & \kappa_x &= 0,580 \\
 \epsilon_{yy}^0 &= 6,897 \cdot 10^{-3} & \kappa_y &= -1,027 \\
 \gamma_{xy}^0 &= 7,836 \cdot 10^{-3} & \kappa_z &= -1,309
 \end{aligned}$$

Dans l'équation inverse ci-dessus, nous noterons que la matrice inverse est symétrique, comme la matrice de rigidité de l'équation constitutive. Il en est de même des matrices-blocs A' et D' . Par contre, les matrices blocs C' et B' (transposées l'une de l'autre) ne sont pas symétriques.

2. Déformations dans les couches

Les déformations rapportées aux axes (x, y) de référence sont (relation 14.14) exprimées suivant :

$$\begin{bmatrix}
 \epsilon_{xx} \\
 \epsilon_{yy} \\
 \gamma_{xy}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \epsilon_{xx}^0 \\
 \epsilon_{yy}^0 \\
 \gamma_{xy}^0
 \end{bmatrix}
 + z
 \begin{bmatrix}
 \kappa_x \\
 \kappa_y \\
 \kappa_z
 \end{bmatrix}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,064 \\ 6,897 \\ 7,836 \end{bmatrix} 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,580 \\ -1,027 \\ -1,309 \end{bmatrix} z$$

Les variations des déformations ε_x , ε_y et γ_{xy} en fonction de z sont représentées en la figure 14.6.

Les déformations dans chaque couche, rapportées aux axes principaux de la couche, sont ensuite obtenues à partir de la relation (14.46). Soit pour la couche k :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{lT} \end{bmatrix} = A_k + B_k z$$

avec

$$A_k = T \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad B_k = T \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

où T est la matrice définie en (14.47). Nous en déduisons :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{lT} \end{bmatrix}_{10} = \begin{bmatrix} 8,914 \\ 3,045 \\ 5,505 \end{bmatrix} 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,388 \\ 0,058 \\ 2,046 \end{bmatrix} z \quad 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{lT} \end{bmatrix}_{10} = \begin{bmatrix} 2,129 \\ 9,831 \\ 2,330 \end{bmatrix} 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,745 \\ -1,192 \\ 0,737 \end{bmatrix} z \quad -1 \text{ mm} \leq z \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{lT} \end{bmatrix}_{10} = \begin{bmatrix} 7,145 \\ 4,815 \\ 7,702 \end{bmatrix} 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,145 \\ 0,592 \\ 1,937 \end{bmatrix} z \quad -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{lT} \end{bmatrix}_{10} = \begin{bmatrix} 3,227 \\ 8,733 \\ 5,869 \end{bmatrix} 10^{-3} + \begin{bmatrix} 0,567 \\ -1,246 \\ 0,330 \end{bmatrix} z \quad 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm}$$

D'où les relations donnant ε_l , ε_T , γ_{lT} en fonction de z :

$$\begin{aligned} 2,5 \text{ mm} \leq z \leq 1 \text{ mm} & \quad -1 \text{ mm} \leq z \leq 0 \\ \varepsilon_l &= 7,145 \cdot 10^{-3} + 0,145 z & \varepsilon_l &= 2,129 \cdot 10^{-3} + 0,745 z \\ \varepsilon_T &= 4,815 \cdot 10^{-3} + 0,592 z & \varepsilon_T &= 9,831 \cdot 10^{-3} - 1,191 z \\ \gamma_{lT} &= 7,702 \cdot 10^{-3} + 1,937 z & \gamma_{lT} &= 2,330 \cdot 10^{-3} + 0,737 z \end{aligned}$$

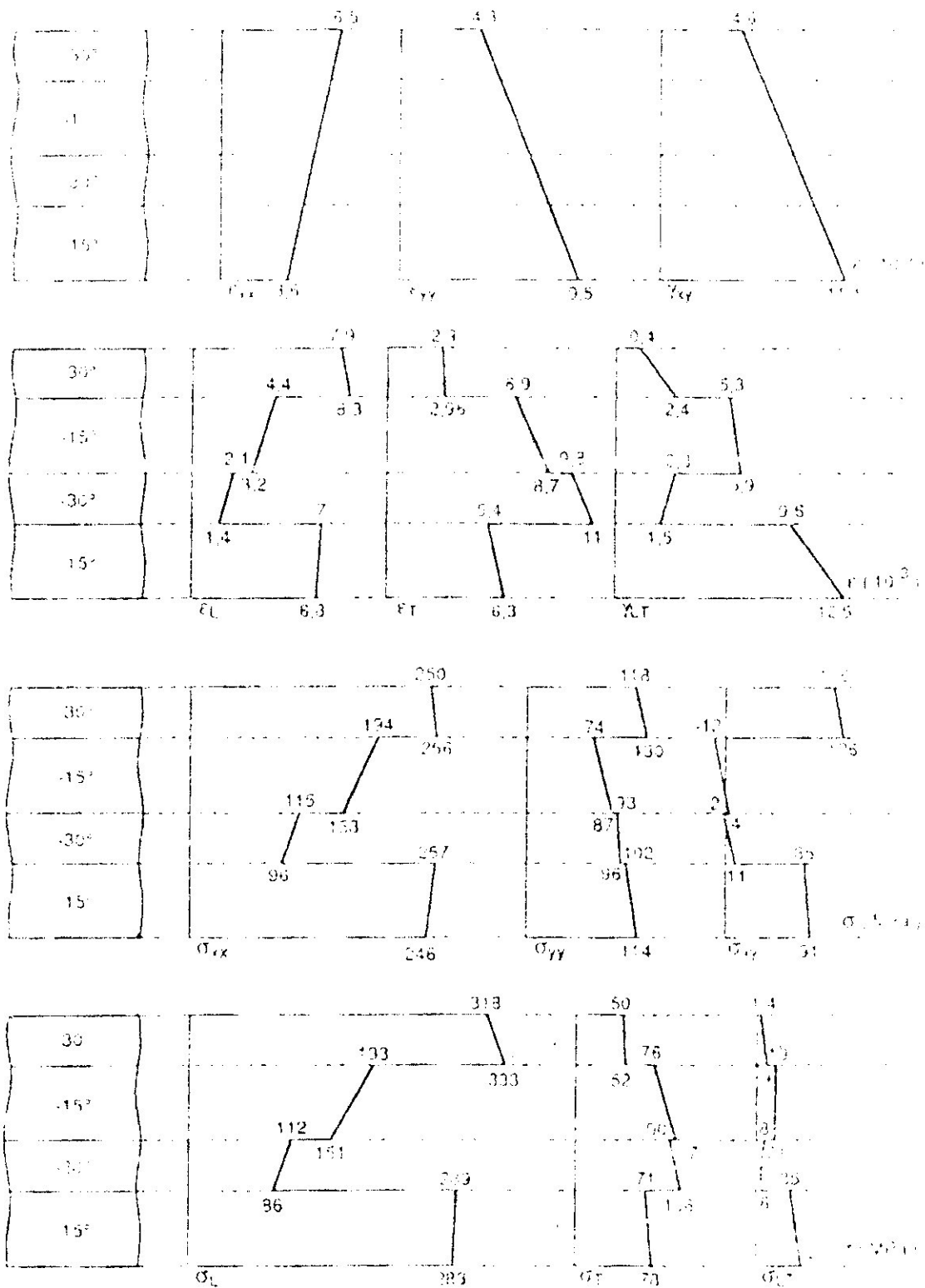


Figure 110. Contraintes et déformations à une épaisseur au triangle

$$\begin{array}{ll}
 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm} & 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm} \\
 \varepsilon_L = 3,227 \cdot 10^{-3} + 0,799 z & \varepsilon_L = 8,914 \cdot 10^{-3} + 0,388 z \\
 \varepsilon_T = 5,733 \cdot 10^{-3} + 1,246 z & \varepsilon_T = 3,046 \cdot 10^{-3} + 0,058 z \\
 \gamma_{LT} = 8,869 \cdot 10^{-3} - 0,330 z & \gamma_{LT} = 5,205 \cdot 10^{-3} - 2,046 z
 \end{array}$$

Les variations de ε_L , ε_T , γ_{LT} dans l'épaisseur du stratifié sont reportées sur la figure 14.6.

3. Contraintes dans les couches

Les contraintes dans chaque couche, rapportées aux axes de référence (x, y), s'écrivent (14.19) ou (14.20) suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = A_{1k} \varepsilon_0 + B_{1k} \kappa_0$$

avec

$$A_{1k} = Q_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad B_{1k} = Q_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

où Q_k sont les matrices de rigidité des couches déterminées dans l'exemple 14.4.3.2. Nous en déduisons :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{1,5 \leq z \leq 2,5} = \begin{bmatrix} 263,564 \\ 147,009 \\ 140,579 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5522,83 \\ 11467,79 \\ 9580,17 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{-1 \leq z \leq 0} = \begin{bmatrix} 115,451 \\ 93,420 \\ 2,284 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19217,67 \\ 2519,78 \\ 13520,26 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad -1 \text{ mm} \leq z \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{-2,5 \leq z \leq -1} = \begin{bmatrix} 263,411 \\ 94,571 \\ 80,758 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6785,75 \\ 7919,24 \\ -3805,83 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{0 \leq z \leq 1,5} = \begin{bmatrix} 157,918 \\ 83,622 \\ 2,981 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24407,03 \\ 6090,45 \\ 10176,80 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm}$$

Les variations des contraintes σ_x , σ_y et σ_{xy} dans l'épaisseur du stratifié sont reportées sur la figure 14.6.

Les contraintes dans chaque couche, rapportées aux axes principaux de la couche considérée, sont ensuite déterminées à partir de la relation (14.48). Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_k = A_{2k} + B_{2k} z$$

avec

$$A_{2k} = T^{-1} A_{1k} \quad B_{2k} = T^{-1} B_{1k}$$

où T est la matrice définie en (14.49). Nous en déduisons :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 112,681 \\ 297,893 \\ 120,759 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1287,61 \\ -18278,22 \\ -2215,84 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad 1,5 \text{ mm} \leq z \leq 2,5 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{-30^\circ} = \begin{bmatrix} 107,970 \\ 100,921 \\ -10,673 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2074,42 \\ 14623,47 \\ -16172,72 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad -1 \text{ mm} \leq z \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{15^\circ} = \begin{bmatrix} 211,722 \\ 146,260 \\ 112,149 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7703,62 \\ -8837,11 \\ 380,30 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad -2,5 \text{ mm} \leq z \leq -1,5 \text{ mm}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_{-15^\circ} = \begin{bmatrix} 154,417 \\ 87,124 \\ -16,018 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17275,69 \\ 1040,89 \\ -16437,74 \end{bmatrix} z \quad (\text{MPa}) \quad 0 \leq z \leq 1,5 \text{ mm}$$

Les variations de σ_L , σ_T et σ_{LT} dans l'épaisseur du stratifié sont reportées sur la figure 14.6.

Annexe "B"

relation (25.17). Les dilatations $(\epsilon_{11}^*, \epsilon_{33}^*)_k$ s'expriment elles mêmes par des relations du type (25.1) et (25.2).

L'équation constitutive (25.20) tenant compte des phénomènes de dilatation diffère de l'équation constitutive (14.29) de la théorie classique initiale, par l'adjonction des résultantes et des moments dus aux phénomènes thermiques, à l'absorption d'agents de gonflement, etc.

Les contraintes de dilatation (thermiques, hygrothermiques, etc.) exprimées dans la relation (25.19) sont induites lorsque les conditions de température, d'hygrométrie, etc. du stratifié diffèrent de l'état où le stratifié est libre de toutes contraintes hygrothermiques. Ces contraintes ne sont pas en fait induites par la seule dilatation (ou la contraction) hygrothermique du stratifié, mais résultent à la fois des phénomènes de dilatation et du fait que le stratifié n'est pas libre de se dilater ou de se contracter. En effet, aucune force ou moment résultant n'est induit dans le stratifié par effet hygrothermique, lorsque celui-ci est totalement libre de se déformer en membrane, en flexion et en torsion. Toutefois, chaque couche du stratifié influence la dilatation ou contraction des couches voisines, du fait de propriétés mécaniques et hygrothermiques différentes. Les couches ne sont alors plus libres de se déformer. Les contraintes hygrothermiques dans chaque couche résultent donc des restrictions imposées à leurs déformations par les couches voisines.

Les contraintes thermiques induites lors du refroidissement des stratifiés, après une mise en œuvre en température, sont pratiquement inévitables. Dans certains cas, ces contraintes, appelées contraintes résiduelles, peuvent être suffisamment élevées pour modifier les caractéristiques à la rupture des stratifiés. Il est alors nécessaire de les prendre en compte lors de la conception des structures en stratifiés. Dans la pratique, la matrice a un coefficient de dilatation thermique supérieur à celui de la fibre, produisant une compression radiale des fibres à l'interface fibre-matrice. Cette compression permet un transfert des charges de la matrice aux fibres par cisaillement, même en l'absence d'une bonne adhérence fibre-matrice.

25.3.2 Exemples

25.3.2.1 Calcul des contraintes d'origine thermique

Nous considérons le cas d'un stratifié croisé symétrique constitué (figure 25.1) de 3 couches unidirectionnelles de 1 mm d'épaisseur, de caractéristiques mécaniques

$$E_f = 45 \text{ GPa} \quad E_m = 10 \text{ GPa} \quad \nu_{f,m} = 0,31 \quad G_{f,m} = 4,5 \text{ GPa} \quad (25.22)$$

et de coefficients de dilatation thermique

$$\alpha_f = 5 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C} \quad \alpha_m = 20 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C} \quad (25.23)$$

La polymérisation du stratifié est effectuée à une température de 120°C. Nous allons nous occuper des contraintes résiduelles à la température d'utilisation de 20°C.

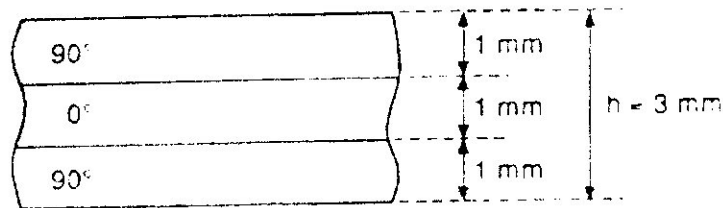


Figure 25.1 Stratifié croisé symétrique

Rapportées aux axes principaux des couches, les constantes de rigidité des couches sont (11.52) :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= 45,982 \text{ GPa} & Q_{12} &= 3,168 \text{ GPa} & Q_{16} &= 0 \\ Q_{22} &= 10,218 \text{ GPa} & Q_{26} &= 0 & Q_{66} &= 4,5 \text{ GPa} \end{aligned}$$

Les matrices de rigidité des couches s'expriment alors suivant :

$$Q_{0^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad Q_{90^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

La relation (25.17) permet d'exprimer les déformations d'origine thermique dans la couche à 0° :

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \end{bmatrix} \Delta T$$

Soit

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_L \Delta T \\ \alpha_T \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.24)$$

De même, pour les couches à 90°

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_T \Delta T \\ \alpha_L \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.25)$$

Les résultantes d'origine thermique, déduites des relations (25.21), s'écrivent :

$$\begin{aligned} N_x^* &= [(Q_{11} + 2Q_{12}) \alpha_L + (2Q_{22} + Q_{12}) \alpha_T] \frac{h}{3} \Delta T \\ N_y^* &= [(Q_{22} + 2Q_{12}) \alpha_T + (2Q_{11} + Q_{12}) \alpha_L] \frac{h}{3} \Delta T \\ N_z^* &= 0 \text{ (dû à } Q_{16} = Q_{26} = 0 \text{ et } \gamma_0^* = 0) \end{aligned} \quad (25.26)$$

Les moments sont nuls du fait de la symétrie du stratifié :

$$M_x^* = M_y^* = M_z^* = 0$$

L'application numérique conduit à :

$$N_x^* = 733,7 \Delta T \quad N_y^* = 806,7 \Delta T$$

Les déformations et courbures sont déterminées en reportant les résultantes et moments dans l'équation constitutive (25.20) qui s'écrit en l'absence d'actions mécaniques exercées sur le stratifié :

$$\begin{bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ N_z^* \\ M_x^* \\ M_y^* \\ M_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_0^0 \\ \epsilon_0^0 \\ \gamma_0^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad (25.27)$$

Soit :

$$\begin{aligned} N_x^* &= A_{11} \epsilon_0^0 + A_{12} \epsilon_0^0 \\ N_y^* &= A_{12} \epsilon_0^0 + A_{22} \epsilon_0^0 \\ \gamma_0^0 &= 0 \\ \kappa_x &= \kappa_y = \kappa_z = 0 \end{aligned} \quad (25.28)$$

Nous en déduisons les déformations du plan moyen :

$$\begin{aligned} \epsilon_0^0 &= A_{11}^{-1} N_x^* + A_{12}^{-1} N_y^* \\ \epsilon_0^0 &= A_{12}^{-1} N_x^* + A_{22}^{-1} N_y^* \end{aligned} \quad (25.29)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{A} & A_{12} &= \frac{A_{12}}{A} \\ A_{22} &= \frac{A_{11}}{A} & A &= A_{11} A_{22} - A_{12}^2 \end{aligned}$$

Les coefficients de rigidité du stratifié s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (Q_{11} + 2Q_{22}) \frac{h}{3} = 66,418 \cdot 10^6 \text{ N/m} \\ A_{12} &= 3Q_{12} \frac{h}{3} = 9,504 \cdot 10^6 \text{ N/m} \\ A_{22} &= (Q_{22} + 2Q_{11}) \frac{h}{3} = 102,18 \cdot 10^6 \text{ N/m} \end{aligned} \quad (25.30)$$

D'où :

$$\begin{aligned} A_{11} &= 15,259 \cdot 10^{12} \text{ N} \\ A_{12} &= 1,4193 \cdot 10^{12} \text{ N} \\ A_{22} &= 0,919 \cdot 10^{12} \text{ N} \end{aligned}$$

Ce qui conduit à :

$$\varepsilon_0^0 = 10,05 \cdot 10^{-6} \Delta T \quad \varepsilon_1^0 = 6,96 \cdot 10^{-6} \Delta T \quad (25.31)$$

Les contraintes dans les couches sont ensuite déterminées à partir de la relation (25.18). Pour la couche à 0° :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0^0 - \alpha_L \Delta T \\ \varepsilon_1^0 - \alpha_T \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}$$

soit

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{11} (\varepsilon_0^0 - \alpha_L \Delta T) + Q_{12} (\varepsilon_1^0 - \alpha_T \Delta T) \\ Q_{12} (\varepsilon_0^0 - \alpha_L \Delta T) + Q_{22} (\varepsilon_1^0 - \alpha_T \Delta T) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.32)$$

soit

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 190,9 \cdot 10^3 \Delta T \\ -117,2 \cdot 10^3 \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.33)$$

et pour les couches à 90°

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} Q_{22} (\varepsilon_1^0 - \alpha_T \Delta T) + Q_{12} (\varepsilon_0^0 - \alpha_L \Delta T) \\ Q_{12} (\varepsilon_1^0 - \alpha_T \Delta T) + Q_{11} (\varepsilon_0^0 - \alpha_L \Delta T) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.34)$$

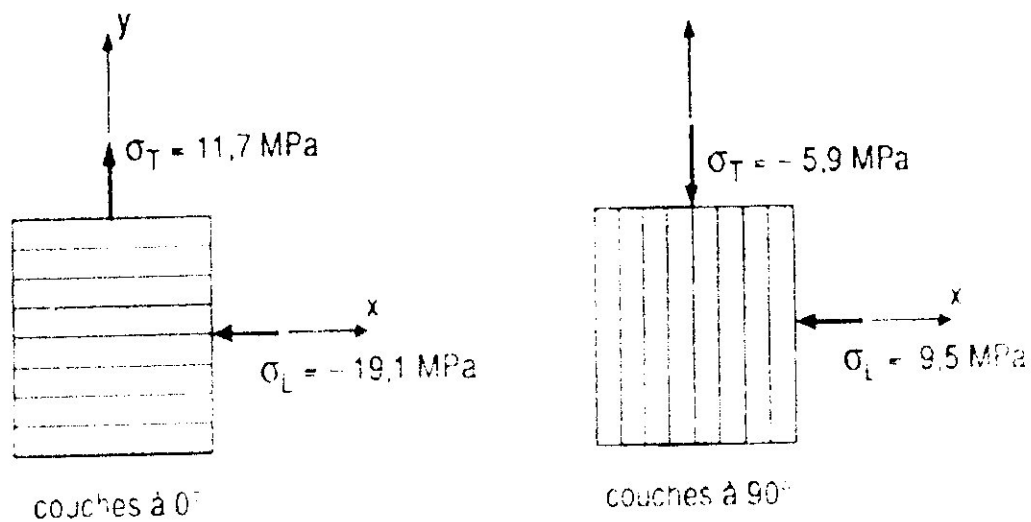


Figure 25.2 Contraintes d'origine thermique dans les couches du stratifié de la figure 25.1

Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -95,5 \cdot 10^3 \Delta T \\ 58,6 \cdot 10^3 \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.35)$$

Pour la variation de température considérée : $\Delta T = -100 \text{ }^\circ\text{C}$, les valeurs des contraintes sont :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19,1 \text{ MPa} \\ 11,7 \text{ MPa} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,6 \text{ MPa} \\ -5,9 \text{ MPa} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25.36)$$

L'état des contraintes d'origine thermique est schématisé sur la figure 25.2. Il est à noter que la contrainte dans la couche à 0° atteint la valeur de 11,7 MPa dans la direction transverse aux fibres, soit de l'ordre du quart au tiers de la contrainte à la rupture dans cette direction. Il apparaît ainsi que les contraintes d'origine thermique, liées au mode de mise en œuvre : polymérisation à une température plus élevée que la température d'utilisation, doivent être prises en compte lors de certains dimensionnements.

Références

Bibliographiques

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1]: **J.R. VINSON, R.L SIERAKOWSKI** « The Behavior of Structures Composed of Composite Materials » Martinus Nijhoff Publishers member of the Kluwer Academic publishers Group Dordrecht / Boston/Lancaster (1986).
- [2] : **J.-M. BERTHELOT**, « Matériaux Composites » (comportement mécanique et analyse des structures) maison Paris Milan Barcelone Bonne (1992).
- [3] : **A.BENKEDDAD, M. GERDIAC & A. VAUTRIN** « Computation of transient hygroscopic stress in laminated Composite Plates » Science des Matériaux et des structures, Département Mécanique et Matériaux, Ecole des Mines de Saint-Étienne, 158 Cours Fau Riel, 42023 Saint-Étienne cedex2, France(1996)
- [4] : **DANIEL GAY** « Matériaux Composites » 4^e édition revue augmentée. Paris : HERMES (1997)
- [5] : **A . TESSLER , M.S. AMMETT, G. GENDRON** , « Composites Structures » (Analytical And Computational Methods Branch ,Nasa , Langley Research Center, Mail Stop 240, Hampton, VA 23681-0001,USA ; Orbital Science Corporation, Germantown, MD, USA ; University of Laval , Sainte-Foy. Canada). 2001.
- [6] : **EL-ABBES ADDA-BEDIA, FAROUK BENLEL BOUKHOLDA ET KOUIDER MADANI** « Influence De L 'angle D 'orientation Des Fibres D 'une Plaque En Matériau Composite Du Type T 300/5208 Sur LE PHENOMENE DE Diffusion De L 'humidité» laboratoire des matériaux et hydrologie faculté des sciences de l'ingénieur Université DJILLAU Liabes de Sidi bel-Abbès B.P.89cité Ben M'HIDI, 22000 Sid bel-Abbes .Algérie(2001).
- [7] : **M. KHALIL, E. BAKHIEL, A. EL-ZOGHBY**, «Optimum Design of Laminated Composites Subjected To Hygrothermal Residual Stresses » Institute of Aviation Engineering and technology, Embaba Aerodrome, Cairo , Egypt (2001).
- [8] : **A. TOUNSI, E. ADDA BEDIA, G. VERCHERY**, «Influence of anisotropy on the transient hygroscopic stresses in polymer matrix composites with cyclic environmental conditions» Laboratoire mécanique et matériaux, université de Sidi Bel abbes, BP89 Cite ben M'hidi, 22000 Sidi Bel Abbès, Algérie, Institut Supérieur de l'Automobile et des transport, BP31,58027 Nevers Cedex, France. (2002)
- [9] : **Y.R. WANG, T.W. CHOU**, «Tree-dimensional transient interlaminar stresses in angle-ply composites» journal of applied mechanics, (2002).
- [10] : **Y.R. WANG, T.W. CHOU**, «Bi-dimensional transient interlaminar stresses in angle-ply composites and comportement hygroscopic» journal of applied mechanics, (2002).
- [11]: **SABINO ORLOSCA** «conception et prédiction des caractéristiques d'électriques des matériaux composites a deux ou trois phases par la modélisation et la variation expérimental » THESE DU DOCTORAT (2003).
- [12] : **J. MOLIMARD**, « Cours de Mécanique des Matériaux Composites » EMSE.(2004).

[13] :V. BELLENGER, J. DECELLE, N. HUET, «Ageing of A carbon Epoxy Composite For Aeronautic Applications » Ecole nationale Supérieure des Arts et Metier LTVP. 151 boulevard de l'hôpital 75013 paris, France (2004).

[14]: ONUR SAYMAN « Elastic Plastic Stress analysis of symmetric aluminium Meta - matrix composite laminated plates under thermal loads varying linearly» Department of Mechanical Engineering, Dokuz Eylul University, Bornoya, izmir, Turkey (2004).

[] : T. PERVEZ, A.C. SEIBI, F.K.S AL-JAHWARI, «Composites structures» Department of Mecanical and Industrial Engineering, Colled of Engineering, Sultan Qaboos University, P.o.Box 33, Al-khod 123, Omen; Department of Mechanical Engineering, Petroeum Inditute, P.o.Box 33, Dhabi, United Arab Emirates.(2005).