



**Université de Blida**

**Institut d'Aéronautique**

# **MEMOIRE DE MAGISTER**

**Spécialité : Aéronautique**

**Option : Aéronautique**

**Présenté par : M<sup>r</sup> Nadir BEKKA**

**APPROCHE NUMERIQUE DES COUCHES**

**LIMITES HYPERSONIQUES**

**Soutenu le 22/06/2000**

**devant la commission d'Examen :**

**MM. S.BOUKRAA, (Maître de Conférences, Université de Blida)**  
**T.REZOUG, (Chargé de Cours, Université de Blida)**  
**Z.YOUBI, (Maître de Conférences, Université de Blida)**  
**A.HADDAD, (Maître de Conférences, Université de Guelma)**  
**M.BOUNDER, (Chargé de Cours, Université de Blida)**  
**M.BENYAMINA, (Chargé de Cours, Université de Blida)**

**Président**  
**Rapporteur**  
**Examinateur**  
**Examinateur**  
**Examinateur**  
**Invité**

32-620-5-2

32-620-5-2



“Il est vrai qu’on ne peut trouver la pierre  
philosophale,  
mais il est bon qu’on la cherche;  
en la cherchant, on trouve de fort beaux secrets  
qu’on ne cherchait pas”

**Bernard Le Bovier de FONTENELLE**

## DEDICACES

*Je dédie ce modeste travail à mes chers et regrettés grands parents*

*À mes très chers parents pour leur soutien moral, ainsi, que pour leurs sacrifices  
consentis, sans lesquels je n'aurais pu faire cette thèse*

*À mes frères et ma sœur*

*À toute ma famille avec une mention spéciale pour M<sup>re</sup> Lucienne (mère de Mustapha)*

*À tous mes amis*

Nadir BEKKA



# REMERCIEMENTS

**Je remercie** Monsieur Tahar REZOUG, le Sous Directeur chargé de la Post-Graduation et de la Recherche Scientifique au sein de l'Institut d'Aéronautique d'avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire, ainsi que pour la confiance qu'il m'a témoigné.

**Je remercie** Monsieur S.BOUKRAA maître de conférences à l'Université de Blida et président du Conseil Scientifique de l'Institut d'Aéronautique de m'avoir fait part de ses remarques concernant mon travail et de me faire l'honneur de présider le jury.

**Je remercie** Monsieur Z.YOUBI maître de conférences et Recteur de l'Université de Blida d'avoir consacré une partie de son temps précieux et malgré ses divers engagements pour me faire l'honneur d'assister à ma soutenance et de m'avoir fait le rapport.

**Je remercie** Monsieur A.HADDAD maître de conférences à l'Université de Guelma d'avoir fait le voyage depuis Guelma pour me faire part de ces remarques et pour assister à ma soutenance.

**Mes remerciements** vont aussi à Messieurs Y.BENKHEDDA, maître de conférences à l'Université de Blida (A mon grand regret, malheureusement, il ne pourra pas assister à ma soutenance vu son état de santé, et je lui souhaite un prompt rétablissement dans les meilleurs délais), M.BOUNDER et M.BENYAMINA chargés de cours à l'Institut d'Aéronautique de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et d'avoir accepté de faire partie du jury ainsi que pour les conseils qu'ils m'ont prodigués.

**Je finirai** en remerciant mes parents et amis et tout le personnel de l'Institut d'Aéronautique qui m'ont toujours aidé.

## Résumé

Comparés aux problèmes d'aérodynamique standard rencontrés par les avions au vol transsonique ou supersonique, les écoulements hypersoniques sont caractérisés par des phénomènes physico-chimiques très complexes et variés, en particulier les chocs forts, la dissociation chimique en aval de l'onde de choc courbe et l'épaississement de la couche limite. La simulation numérique de tels écoulements, exige la résolution des équations aérothermochimiques gouvernant les écoulements hypersoniques.

La méthode de couplage Euler/couche limite pour le calcul des écoulements hypersoniques laminaires visqueux autour d'un corps émoussé en introduisant les effets de gaz réactif à l'équilibre chimique est présentée en détail. Le modèle chimique de l'air est composé de cinq espèces chimiques ( $O_2$ ,  $N_2$ ,  $NO$ ,  $N$  et  $O$ ) et trois réactions d'équilibres indépendantes. L'écoulement est divisé en deux régions, avec les équations de couche limite du 2<sup>ème</sup> ordre sont résolues dans la zone interne (visqueuse), tandis que les équations d'Euler sont réservées à la région externe (non visqueuse).

Le système d'équations d'Euler bidimensionnel et stationnaire est résolu en utilisant conjointement le schéma explicite centré de MacCormack et les termes de viscosité artificielle d'ordre élevé. Cependant, les équations de couche limite sont résolues par un schéma en différences finies complètement implicite.

Les résultats obtenus pour une géométrie arrondie sont confrontés avec d'autres résultats numériques.

**Mots clés** : Hypersonique, Couche limite bidimensionnelle laminaire, Calcul Euler, Méthode de couplage, Méthodes numériques, Equilibre chimique.

## Abstract

Compared with the standard aerodynamic problems on an aircraft in transonic or supersonic flight, hypersonic flows are characterised by many complex phenomena; these include strong shock waves, chemical dissociation behind the bow shock and thick boundary layer. The numerical simulation of such flows requires the resolution of aérothermochemistry equations governing hypersonic flows.

An coupled Euler/ boundary layer approach for computing two dimensional hypersonic flows in chemical equilibrium around a blunt body configuration is presented. Air chemistry is modelled by five species ( $O_2$ ,  $N_2$ ,  $NO$ ,  $N$  and  $O$ ) and three independent equilibrium reactions. The flow is divided into two regions, with the second-order boundary layer equations being applied in the inner (viscous) region and the Euler equations in the outer (inviscid) region. The 2D steady Euler equations are solved using a centred explicit MacCormack scheme augmented by higher artificial dissipation terms, while the boundary layer equations are solved using a fully implicit finite difference technique.

The numerical results obtained for two dimensional blunt body configuration are discussed in comparison with other numerical results.

**Key words** : Hypersonic, Two dimensional laminar boundary layer, Euler computation, Coupled method, Numerical methods, Chemical equilibrium.

# Tables des Matières

<b>Liste des figures</b>	<b>vi</b>
<b>Liste des Tables</b>	<b>ix</b>
<b>Notations principales</b>	<b>x</b>
<b>CHAPITRE I INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>
I.1 Objectifs.....	1
I.2 Motivations .....	2
I.3 Plan du mémoire.....	6
<b>CHAPITRE II ECOULEMENTS HYPERSONIQUES : ASPECTS PHYSIQUES ET MATHEMATIQUES.....</b>	<b>8</b>
II.1 Introduction.....	8
II.2 Caractéristiques des écoulements étudiés .....	8
II.2.1 Régimes d'écoulement .....	8
II.2.2 La trajectoire de rentrée de la navette spatiale.....	10
II.2.3 Echauffement cinétique .....	11
II.2.4 Températures élevées .....	13
II.2.5 Effets de gaz réel aux vitesses hypersoniques.....	14
II.2.6 Effets sur le champ de pression à la paroi .....	15
II.2.7 La forte interaction visqueuse.....	17
II.2.8 Autres caractéristiques .....	18
II.3 Equations aérothermochimiques.....	19
II.3.1 Equations de base.....	20



IV.5	Présentation du code de couche limite hypersonique laminaire "HLBL" .....	80
IV.5.1	Présentation du programme de génération de maillage "ORTHO2D" .....	82
IV.5.2	Présentation du programme de calcul des effets de gaz réel à l'équilibre chimique "ENERG" .....	84
IV.5.3	Présentation du programme "EULER2D" .....	84
IV.5.4	Présentation du programme "CLC2D" .....	85
<b>CHAPITRE V RESULTATS .....</b>		<b>89</b>
V.1	Introduction .....	89
V.2	Propriétés de l'air à l'équilibre chimique .....	89
V.3	Génération du maillage .....	98
V.4	Calcul "Euler" pour un écoulement non visqueux .....	104
V.4.1	Effet du nombre de Mach .....	104
V.4.2	Effet de la viscosité artificielle .....	104
V.4.3	Raffinement de maillage .....	105
V.4.4	Effets de gaz réel .....	105
V.4.5	Validation des résultats .....	107
V.5	Calcul "couche limite" pour le problème interne .....	118
V.5.1	Profils normaux des variables thermodynamiques et chimiques .....	118
V.5.2	Répartition des coefficients pariétaux .....	119
<b>CONCLUSION .....</b>		<b>134</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>		<b>136</b>
<b>APPENDICE A .....</b>		<b>141</b>
<b>APPENDICE B THEORIE DE VAN DYKE .....</b>		<b>143</b>
B.1	Notions de développement asymptotique .....	143
B.1.1	Exemple de problème de petite perturbation .....	143
B.1.2	Développements asymptotiques .....	144

II.3.2	Relations de fermeture.....	21
II.3.2.1	Relations thermodynamiques.....	21
II.3.2.2	Modélisation de l'air en hors équilibre chimique .....	22
II.3.2.3	Termes de diffusion.....	23
II.3.2.4	Coefficients de transport.....	25
<b>CHAPITRE III COUPLAGE : EULER-COUCHE LIMITE .....</b>		<b>26</b>
III.1	Introduction .....	26
III.1.1	Simulation expérimentale.....	26
III.1.2	Simulation numérique .....	26
III.2	Formulation asymptotique de Van Dyke .....	29
III.2.1	Equations de Navier-Stokes .....	29
III.2.1.1	Equations .....	29
III.2.1.2	Adimensionnement .....	30
III.2.1.3	Equations adimensionnées.....	31
III.2.2	Développements.....	34
III.2.3	Equations externes et internes .....	35
III.2.3.1	Zone externe, ordre 1 .....	35
III.2.3.2	Zone externe, ordre 2 .....	36
III.2.3.3	Zone interne, ordre 1 .....	36
III.2.3.4	Zone interne, ordre 2 .....	37
III.2.4	Raccordement .....	38
III.2.4.1	Principe.....	38
III.2.4.2	Conditions de raccordement .....	39
III.2.5	Discussion.....	40
III.3	Equilibre chimique.....	43
III.3.1	Aspects physiques.....	43
III.3.2	Flux thermique dans le cas gaz réel à l'équilibre chimique.....	44

B.1.3	Solution externe .....	145
B.1.4	Solution interne .....	145
B.1.5	Raccordement.....	146

## **APPENDICE C DISCRETISATION DES EQUATIONS DE COUCHE**

	<b>LIMITE.....</b>	<b>151</b>
C.1	Inversion des matrices tridiagonales.....	151
C.2	Discrétisation des équations de couche limite du 2 <sup>ème</sup> ordre.....	152
C.2.1	Discrétisation des équations de quantité de mouvement.....	152
C.2.2	Discrétisation de l'équation d'énergie.....	154
C.2.3	Equation de continuité.....	156

## Liste des Figures

Fig.II.1. Trajectoire de rentrée: Régimes d'écoulement et les zones de différents effets	9
Fig.II.2. Caractéristiques de la trajectoire de rentrée de la Navette Spatiale.....	11
Fig.II.3. Les différents éléments de l'échauffement cinétique autour d'un corps arrondi en régime hypersonique .....	12
Fig.II.4. Plaque plane sous incidence: effets sur le champ de pression à la paroi.....	16
Fig.II.5. Couche d'entropie pour un écoulement hypersonique autour d'un corps arrondi .....	19
Fig.III.1. Raccord couche limite du 1 <sup>er</sup> ordre-fluide parfait .....	28
Fig.III.2. Raccord couche limite déficitaire -fluide parfait .....	28
Fig.III.3. Raccord couche limite du 2 <sup>ème</sup> ordre-fluide parfait.....	28
Fig.III.4. Système de coordonnées curvilignes.....	32
Fig.IV.1. Relations entre les trois types de variables: conservatives U, primitives V et caractéristiques W.....	54
Fig.IV.2. Les lignes caractéristiques dans le cas monodimensionnel.....	56
Fig.IV.3. Cellule d'intégration $C_i$ pour le schéma de MacCormack .....	60
Fig.IV.4. Les différentes méthodes de calcul du choc. ....	62
Fig.IV.5. Conditions aux limites pour un écoulement monodimensionnel non visqueux.....	64
Fig.IV.6. Domaine computationnel pour un écoulement devant un obstacle arrondi ...	65
Fig.IV.7. Surface frontière: Entrée supersonique dans le cas bidimensionnel.....	66
Fig.IV.8. Surface frontière: Sortie supersonique dans le cas bidimensionnel.....	67
Fig.IV.9. Surface frontière : Paroi d'obstacle dans le cas bidimensionnel .....	67
Fig.IV.10. Systèmes de coordonnées cartésiennes et généralisées .....	68

Fig.IV.11.Technique de deux parois .....	79
Fig.IV.12.Organigramme du code "HLBL" .....	81
Fig.IV.13.Organigramme du programme "ORTHO2D" .....	83
Fig.IV.14.Organigramme du programme "ENERG" .....	86
Fig.IV.15.Organigramme du programme "EULER2D" .....	87
Fig.IV.16.Organigramme du programme "CLC2D" .....	88
Fig. V.1. Nombre d'itérations en fonction de W pour le calcul énergétique .....	91
Fig.V.2. Fractions massiques de l'air à l'équilibre chimique.....	94
Fig.V.3. Enthalpie $\frac{h}{R'T}$ (T) de l'air à l'équilibre chimique.....	94
Fig.V.4. Coefficient de compressibilité $Z=\frac{M_b}{M}$ (T) .....	95
Fig.V.5. Chaleurs spécifiques à pression constante de l'air à l'équilibre chimique ....	96
Fig.V.6. Coefficient de viscosité $\mu(T)$ .....	97
Fig.V.7. Coefficient de conductibilité thermique $\lambda(T)$ .....	97
Fig.V.8. Raffinement de maillage autour d'un demi cylindre.....	99
Fig.V.9. L'influence des fonctions de condensation sur la répartition des lignes coordonnées.....	100
Fig.V.10.Génération du maillage autour d'un demi-ellipse.....	101
Fig.V.11.Génération de maillage autour d'un cône .....	102
Fig.V.12.Génération de maillage autour d'un corps émoussé (portion cylindrique suivie d'une plaque plane inclinée) .....	102
Fig.V.13.Génération de maillage autour d'une géométrie complexe (deux demi-ellipse: nez d'une navette spatiale).....	103
Fig.V.14.Effet du nombre de Mach sur la distance entre le choc et la paroi le long de la ligne d'arrêt (shock stand-off distance).....	109
Fig.V.15.L'influence de la viscosité artificielle .....	110
Fig.V.16.Raffinement du maillage .....	111
Fig.V.17.Effets du gaz réel .....	113
Fig.V.18.Effets de l'augmentation du nombre de Mach $M_\infty$ dans le cas d'un gaz réactif .....	116
Fig.V.19.Comparaison des résultats ( calcul Euler à l'équilibre chimique, $M_\infty =15$ )	117

Fig.V.20.Profils normaux à la station $\xi = 0.3$ .....	123
Fig.V.21.Profils normaux à la station $\xi = 1.2$ .....	126
Fig.V.22.Répartition des coefficients pariétaux à l'équilibre chimique ( $M_\infty = 15$ ).....	128
Fig.V.23.Répartition des coefficients pariétaux issus d'un calcul du 2 <sup>ème</sup> ordre à $M_\infty = 15$ ; comparaison entre le cas d'un gaz réel à l'équilibre chimique et le cas d'un gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ).....	130
Fig.V.24.Répartition des coefficients pariétaux à $M_\infty = 5$ .....	132
Fig.V.25. Validation des résultats .....	133

## Liste des Tables

Table II.1. Caractéristiques de la trajectoire de rentrée de la navette spatiale .....	10
Table IV.1. Schémas numériques pour la résolution d'équations d'Euler .....	57
Table.IV.2. Conditions physiques et numériques pour un écoulement monodimensionnel .....	65
Table.V.1. Comparaison de calcul entre le cas d'un gaz inerte et un gaz réactif .....	106
Table.V.2. L'effet de l'augmentation de $M_\infty$ pour un gaz réactif .....	107
Table.V.3. Conditions initiales du calcul de couche limite .....	118



## Alphabet latin (suite)

$D_{IJ}$	coefficient polynaire de diffusion de l'espèce I dans l'espèce J en présence de plusieurs espèces
$D_I^T$	diffusion thermique de l'espèce I (effet de Soret)
$d$	viscosité artificielle de 2 <sup>ème</sup> et de 4 <sup>ème</sup> ordre
$d_j$	deuxième membre du système linéaire tridiagonal résultant de discrétisation des équations de couche limite (algorithme de Thomas)
$e$	énergie interne
$E$	énergie spécifique totale par unité de volume
$F$	flux convectif suivant la direction x
$F^*$	flux numérique (Chapitre IV)
$F^{\text{mod}}$	flux numérique modifié (flux numérique avec la dissipation visqueuse)
$F'$	flux convectif selon $\xi$ dans le système de coordonnées généralisées ( $\xi, \eta$ )
$G$	flux convectif selon la direction y (idem pour $G^*$ , et $G^{\text{mod}}$ ) ou enthalpie libre pour le calcul énergétique
$G'$	flux convectif selon $\eta$ dans le système de coordonnées généralisées ( $\xi, \eta$ )
$h$	enthalpie
$h_i$	enthalpie d'arrêt
$h_l$	enthalpie de l'espèce I
$J$	jacobienne de transformation de système de coordonnées cartésiennes (x, y) au système de coordonnées généralisées ( $\xi, \eta$ )
$k$	curvature longitudinale
$K_{c,i}$	constante d'équilibre de la réaction i basée sur les concentrations massiques
$k_D$	vitesse spécifique de la réaction directe
$K_n$	nombre de Knudsen
$k_D$	vitesse spécifique de la réaction inverse

## Alphabet latin (suite)

L	longueur caractéristique ou matrice de passage entre les variables primitives et caractéristiques
Le	nombre de Lewis
M	masse molaire moyenne du mélange ou matrice de passage entre les variables conservatives et primitives (Chapitre IV) ou le nombre de Mach local
$M_0$	masse molaire de gaz frais (de l'air non dissocié)
$M_\infty$	nombre de Mach à l'infini amont
$M_1$	masse molaire de l'espèce I
n	nombre total de moles par unité de volume
ne	nombre d'éléments chimiques
$n_1$	nombre de moles de l'espèce I par unité de volume
ns	nombre d'espèces chimiques
p	pression statique
$p_1, p_2$	coefficients de développement interne de pression en série suivant les puissances de $\varepsilon$
$P_1, P_2$	coefficients de développement externe de pression
Pr	nombre de Prandtl
P	matrice de passage entre les variables conservatives et caractéristiques
$q_1$	flux de diffusion de l'espèce I
R	constante universelle des gaz parfaits
$R_0$	rayon du nez
$R(\xi)$	rayon de courbure longitudinale
$r(\xi)$	rayon de courbure transversale
$R^*$	constante du gaz frais de l'air non dissocié $\left( R^* = \frac{R}{M_0} \right)$
$R_1$	constante de l'espèce I $\left( R_1 = \frac{R}{M_1} \right)$
$R_1, R_2$	coefficients de développement externe de la masse volumique

## Alphabet latin (suite)

$\Re_c$	nombre de Reynolds
$s$	entropie
$St$	nombre de Stanton
$t$	temps
$T$	température
$T_p$	température à la paroi
$T_0$	température de référence
$T_1, T_2$	coefficients de développement externe de la température
$t_1, t_2$	coefficients de développement interne de la température
$U$	vecteur de quantités conservatives (système d'équations d'Euler) dans le plan physique
$U'$	vecteur de quantités conservatives dans le plan computationnel
$\vec{u}$	vitesse
$\vec{u}_{Dl}$	vitesse de diffusion de l'espèce l
$u$	composante de vitesse $\vec{u}$ selon y
$V_1, V_2$	coefficients de développement externe de vitesse normale
$\bar{v}_1, \bar{v}_2$	coefficients de développement interne de vitesse normale
$W$	vecteur de variables caractéristiques
$x$	abscisse dans le plan physique (x,y)
$y$	ordonnée dans le plan physique (x,y)
$Y_1$	fraction massique de l'espèce l
$Y$	variable de Lees pour le calcul de couche limite au point d'arrêt
$Z$	facteur de compressibilité

## Alphabet grec

$\alpha$	angle entre le plan tangent à la paroi et la vitesse à l'infini amont
$\varepsilon$	paramètre de perturbation ( $\varepsilon = \mathfrak{R}_e^{-1/2}$ )
$\varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(4)}$	coefficients de la viscosité artificielle d'ordre 2 et d'ordre 4
$\varphi$	variable générique (discrétisation des équations de couche limite)
$\varphi_D$	fonction de dissipation (ou $\Phi$ )
$\phi$	flux de chaleur
$\phi_p$	flux de chaleur pariétal
$\gamma$	rapport des chaleurs spécifiques
$\xi$	distance le long de la paroi
$\eta$	distance normale à la paroi
$\bar{\eta}$	distance normale dilatée ( $\bar{\eta} = \frac{\eta}{\varepsilon}$ )
$\lambda$	conductibilité thermique ou valeurs propres (système d'équations d'Euler)
$\lambda_1$	conductibilité thermique de l'espèce 1
$\lambda_1, \lambda_2$	coefficients de développement en série de la conductibilité thermique
$\lambda_\mu$	coefficient de Lamé
$\mu$	viscosité dynamique
$\mu_1, \mu_2$	coefficients de développement en série de la viscosité dynamique
$\rho$	masse volumique
$\rho_1, \rho_2$	coefficients de développement interne de la masse volumique
$\delta$	épaisseur de la couche limite
$\delta_1$	épaisseur de déplacement
$\tau$	tenseur des contraintes
$\zeta$	variable de Lees

## Symboles et indices

$x_e$	valeur à l'extérieur de la couche limite
$x_l$	valeur de $x$ pour l'espèce chimique l
$x_p$	valeur de $x$ à la paroi
$x_\infty$	valeur de $x$ à l'infini amont
$x^*$	valeur dimensionnée de $x$ dans le chapitre III
$\nabla$	opérateur nabla
$\cdot$	produit scalaire
$\rightarrow$	vecteur
$\rightarrow$ $\rightarrow$	tenseur
$\otimes$	produit tensoriel
$\Delta$	opérateur de discrétisation (Chapitre IV)
$\delta^+$	opérateur progressif
$\delta^-$	opérateur régressif

# Chapitre I

## INTRODUCTION

### I.1 Objectifs

Les véhicules aérospatiaux destinés à rentrer dans l'atmosphère à des vitesses hypersoniques ( de l'ordre de plusieurs kilomètres par seconde) possèdent généralement un nez et des bords d'attaques arrondis, en avant desquels se situent des ondes de choc détachées.

Ainsi, lors de la rentrée, une très forte quantité de chaleur est produite par suite de la dégradation du travail accompli par la force de la traînée. Pour cela, la définition de ces engins, tels que une navette ou un avion spatial ou un engin balistique, nécessite non seulement la connaissance de la distribution des forces aérodynamiques (pression, centrage) qu'une approche fluide parfait peut suffire à déterminer, mais aussi la connaissance des flux de chaleur pariétaux ou de la traînée de frottement que seule une approche visqueuse peut permettre de quantifier.

Il est important de connaître avec précision le flux de chaleur pariétal afin de pouvoir dimensionner correctement la protection thermique du véhicule. En effet, le poids de cette dernière a des répercussions sur les performances globales du système. Dans de telles configurations, deux contraintes principales sont à prendre en compte: celle due à la résistance aux efforts et celle due au comportement thermique du matériau utilisé et ce en essayant de minimiser le poids de l'engin.

La définition d'un véhicule de rentrée atmosphérique nécessite la connaissance de particularités de la rentrée atmosphérique soit, par exemple:

- la présence d'une onde de choc fort courbe due à l'émoussement du nez des engins de manière à réduire l'échauffement cinétique, cette onde de choc courbe conduisant à la création d'une couche d'entropie qui interagira avec la couche limite.
- les effets de gaz réel liés aux hautes températures présentes dans l'écoulement, du fait de la transformation quasi complète de l'énergie cinétique en énergie interne à travers l'onde de choc. Ces phénomènes physico-chimiques tels que la dissociation des molécules en atomes modifient profondément les propriétés du fluide et il convient de les représenter correctement pour calculer avec précision non seulement l'échauffement cinétique du matériau mais aussi les caractéristiques de l'écoulement autour du véhicule.

La modélisation numérique à partir des équations complètes de Navier-Stokes est assez complexe, surtout si l'on fait intervenir les phénomènes chimiques de dissociation de l'air. Une autre possibilité réside dans l'utilisation des équations de Navier-Stokes parabolisées (PNS [40]). Toutefois, cette méthode supprime le caractère elliptique des équations et se heurte par conséquent à des difficultés fondamentales dans les zones où l'écoulement est subsonique, ce qui est le cas au voisinage du point d'arrêt.

La théorie classique de couche limite établie par Prandtl ne permet pas de faire intervenir le rotationnel de l'écoulement externe. Van Dyke [53] a étendu cette approche en proposant la théorie de couche limite du deuxième ordre, basée sur l'utilisation de développements asymptotiques raccordés. Cette théorie permet de prendre en compte plusieurs effets, y compris le rotationnel de l'écoulement externe.

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse a consisté à étudier les possibilités et la robustesse de la théorie de Van Dyke et l'appliquer en premier lieu pour un gaz (l'air) calorifiquement parfait, puis à élargir cette approche au cas d'un gaz réel (l'air à l'équilibre chimique).

## 1.2 Motivations

Les hautes vitesses des engins balistiques ou spatiaux posent des problèmes d'aérodynamique classique subsonique, supersonique et hypersonique, ainsi que des problèmes particuliers: problèmes de l'échauffement cinétique des structures.

Les calculs et les expériences ont montré que le nez et les arrêtes aigus s'échauffaient plus que les nez arrondis. En effet, un grand rayon de courbure permet de diminuer le flux thermique global sur l'ensemble du corps. Ainsi, dans le domaine hypersonique, une première catégorie de phénomènes nouveaux est liée à l'augmentation considérable de l'épaisseur de la couche limite avec le nombre de Mach.

Les hautes énergies mise en jeu en vol hypersonique donnent lieu à une autre catégorie de phénomènes, de nature physico-chimique. A cet effet, notre travail entre dans le cadre d'étude des écoulements compressibles visqueux réactifs caractérisés par des grandes valeurs de vitesse, du nombre de Mach et de température autour d'une géométrie arrondie. L'étude des écoulements envisagés implique non seulement la connaissance de l'Aérodynamique mais aussi celle d'éléments de Thermodynamique à haute température et de Chimie. Donc, ce domaine appartient à l'Aérothermochimie.

Depuis le premier vol historique de frères Wright (Orville & Wilbur) en 17 Décembre 1903, le monde de l'aviation a subi durant un siècle une révolution considérable. A travers cette évolution, la mécanique des fluides, et particulièrement les écoulements compressibles ont trouvé leur place durant cette phase de

développement. Cependant, l'étude d'écoulements compressibles n'a pu arriver à attirer une attention majeure qu'après la 2<sup>ème</sup> guerre mondiale.

Durant la période allant de 1945-1960, les aspects fondamentaux des écoulements compressibles ont été essentiellement classiques, généralement caractérisés par:

- l'hypothèse de gaz calorifiquement parfait (i.e des chaleurs spécifiques constantes).
- élaboration des solutions exactes pour les problèmes unidimensionnels, mais usuellement approximent les problèmes en 2D ou 3D (basées sur les équations linéarisées) à l'exception de la méthode des caractéristiques qui est une approche numérique exacte applicable pour certaines classes d'écoulements compressibles.

En ce qui concerne le caractère classique des écoulements compressibles, une bonne classe de travaux a été publiée depuis 1945.

A partir de 1960, le domaine des écoulements compressibles a commencé à vivre sa période moderne qui est caractérisée par:

- la nécessité de prendre en considération les effets de hautes températures, les réactions chimiques des gaz associées aux vols hypersoniques et les moteurs fusée. Ce qui exige d'étendre et modifier largement la littérature classique basée sur l'idée du gaz calorifiquement parfait.
- l'élévation du domaine de simulation en mécanique des fluides avec les deux premières dimensions: l'expérimentation pure et la théorie pure [1].

Pour le régime hypersonique, c'est dans les années 50, avec les premiers projets spatiaux que démarre la recherche dans ce domaine.

De nombreux modèles physiques ont été établis à cette époque, mais leurs complexité et l'insuffisance des méthodes expérimentales rendirent les recherches difficiles, il est en effet, impossible de reproduire en soufflerie une rentrée atmosphérique.

Il faudra attendre les années 70 et le projet de la navette spatiale Américaine pour que redémarrent les recherches en hypersonique. Avec l'apparition d'ordinateurs puissants et le développement parallèle du domaine de simulation numérique en mécanique des fluides comme une discipline distincte rend enfin possible l'utilisation des méthodes numériques comme un outil de plus en plus puissant et indispensable. Les recherches dans ce domaine ne cessent de se développer depuis cette date. C'est ainsi que n'acquièrent de domaines nouveaux tels que « hypervelocity aerodynamics » où l'écoulement est à la fois hypersonique et de grande vitesse.

Comme nous avons signalé précédemment, la simulation moderne des écoulements en introduisant les effets de gaz réel à haute température (dissociation, ionisation, ...etc.) a pour origine le projet de la navette spatiale Américaine dans les années 70, néanmoins, il faut citer les travaux de Fay et Riddell (1958) [9]. Ils ont étudié la solution du point d'arrêt de révolution dans les conditions suivantes: nombre de Prandtl = 0.71, nombre de Lewis = 1, 1.4, 2 pour des paramètres de vol correspondant à une vitesse comprise entre 1.8 et 7  $\text{kms}^{-1}$ , une altitude comprise entre 7.5 et 36 km et une température à la paroi comprise entre 300 K° et 3000K°.

Depuis lors, on peut citer le travail qui a été fait par Li [27] qui a résolu les équations de Navier-Stokes en compressible et à bas nombre de Reynolds autour d'une sphère par une méthode explicite de MacCormack prédictor/correcteur [28] en introduisant six (6) espèces chimiques ( $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ , O, N, NO,  $\text{NO}^+$  et les électrons  $e^-$ ).

En 1975, Rakich *et al.* [42] ont appliqué la méthode des caractéristiques pour résoudre le problème non visqueux en hors équilibre chimique en 2D et 3D. Le modèle de 5 espèces chimiques et 18 réactions a été utilisé par plusieurs auteurs. En particulier, en 1976, Rizzi et Bailey [44] ont appliqué la méthode de volumes finis afin de simuler un écoulement supersonique réactif autour d'un corps tridimensionnel.

En 1981, Ramschaw et Cloutman [43] ont développé un schéma numérique pour simuler un modèle réactif très complexe en traitant les deux modèles chimiques possibles (équilibre et hors équilibre chimique). En 1984, Prabhu et Tannehill [41] ont arrivé à résoudre les équations de Navier Stokes parabolisées autour d'une navette spatiale par la méthode de différences finies type implicite en espace pour un gaz idéal ( $\gamma=1.2$ ), et pour l'air à l'équilibre thermique et chimique.

Une description détaillée d'un modèle chimique très complexe en introduisant 11 espèces chimiques avec la simulation de tous les phénomènes possibles (dissociation, ionisation et l'excitation vibratoire) est celle donnée par Park [39], qui a calculé l'écoulement en hors équilibre chimique dans une tuyère par la méthode de différences finies.

Colella et Glaz [6] sont les premiers qu'ont présenté une solution exacte et efficace du problème de Riemann appliqué au dynamique des gaz pour le calcul du phénomène de réflexion bidimensionnelle d'une onde de choc plane sur une surface oblique. Dans les mêmes hypothèses, Glaister [17] a développé une extension de l'approximation de Roe pour le solveur de Riemann appliqué à un problème test de réflexion d'une onde de choc unidimensionnelle.

Eberhardt et Palmer [14] en 1986 ont abouti à un schéma décentré TVD (Total Variation Diminishing) en utilisant une approximation implicite en temps lors de l'intégration pour le calcul des écoulements bidimensionnels et axisymétriques. Drummond *et al.* [13] ont introduit l'approximation spectrale avec l'intégration en temps à l'aide du schéma de Runge-Kutta afin de résoudre un problème quasi-unidimensionnel avec réactions chimiques mais non visqueux et à bas régime supersonique. Montagné [36] a proposé la décomposition de vecteur de flux appliquée

aux écoulements non visqueux à l'équilibre chimique, aussi, il a présenté des résultats numériques pour le problème du tube de choc et au problème du corps arrondi. Montagné *et al.* [37] ont fait aussi une extension de l'approximation de Roe pour le solveur de Riemann, et la décomposition des flux de Van Leer et Steger-Warming. Ils ont présenté une variété des solutions obtenues par différents schémas numériques (TVD explicite 2<sup>ème</sup> ordre, MUSCL schéma décentré). En basant sur leurs résultats théoriques, ont conclu que toutes les approches numériques donnent des solutions de précisions comparables.

Finalement, et dans ce qui suit on va citer quelques travaux effectués durant ces dernières années:

S.Wüthrich *et al.* [56,57,58] ont élaboré une étude sur les écoulements hypersoniques visqueux en déséquilibre chimique autour d'un hyperboloïde par deux méthodes:

- la couche mince de Navier-Stokes TLNS (Thin Layer Navier-Stokes).
- la résolution par couplage Euler-couche limite en 2<sup>ème</sup> ordre.

Cette étude modélise l'écoulement de l'air (formé de 5 espèces chimiques N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, O, N, NO) à une altitude de 74,95 km pour la trajectoire de la navette américaine STS-2 (Space Transportation System) avec un nombre de Mach 25,5 et une vitesse de 7,2 km/s, aussi la température T<sub>∞</sub> = 198 K° et la température à la paroi = 1050 K°.

Hassan *et al.* [19] ont développé un schéma numérique appliquée aux écoulements compressibles visqueux de grande vitesse. Ce schéma est basé sur la discrétisation par la méthode des éléments finis en utilisant deux types de maillage; maillage structuré au voisinage de la paroi avec la forme implicite, et la forme explicite dans le reste du domaine avec un maillage non structuré. La confrontation avec l'expérience pour deux cas test: interaction d'une onde de choc oblique-couche limite laminaire sur une plaque plane (M<sub>∞</sub> = 2) et l'écoulement autour d'un cône (angle de cône = 15° et M<sub>∞</sub> = 11,68) a montré l'efficacité du schéma numérique utilisé, qui est appliqué aux problèmes stationnaires bidimensionnels et peut être étendu aux configurations 3D.

Dans le cadre d'étude de transition des couches limites supersoniques et hypersoniques, Masad *et al.* [33] ont quantifié les rôles de l'instabilité de 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> mode en utilisant la théorie de la stabilité linéaire et le critère de N facteurs. Macrossan et Pullin [30] ont simulé l'écoulement hypersonique non visqueux autour d'un cône (demi-angle = 30°) en tenant compte que la dissociation de N<sub>2</sub>. He et Walker [20] ont élaboré un modèle asymptotique de deux couches pour modéliser l'effet de la couche limite turbulente dans les deux régimes de vol: supersonique et hypersonique.

### 1.3 Plan du mémoire

Au vu de la présentation de problèmes rencontrés en hypersonique, il serait présomptueux de vouloir traiter le problème global de la rentrée atmosphérique. L'étude présentée se limitera pour les effets de gaz réel à l'équilibre chimique.

La résolution numérique du problème visqueux fera appel à l'approche Euler plus couche limite qui permet une bonne précision en ne nécessitant qu'un faible coût en temps de calcul par rapport à celui de l'approche par résolution des équations de Navier-Stokes.

Les calculs Euler ont été effectués à l'aide d'un schéma numérique en différences finies similaire à celui de MacCormack type explicite. A fin de capter l'onde de choc courbe et les régions de forts gradients, on a introduit le concept de la viscosité artificielle du 2<sup>ème</sup> et du 4<sup>ème</sup> ordre, le choc est capté automatiquement sans recours aux relations de discontinuité de Rankine-Hugoniot; c'est le schéma de « Shock Capturing Method ». Les calculs de couche limite utiliseront aussi un schéma de différences finies mais, de type implicite en espace.

Le maillage est généré à l'aide d'une méthode algébrique, qui nous permet d'obtenir un maillage pseudorthogonal autour des corps arrondis.

L'introduction des fonctions stretching permet aussi, de raffiner le maillage au voisinage du nez et à l'approximité des parois.

Le calcul des caractéristiques physico-chimiques de l'air en dissociation à l'équilibre chimique est effectué à l'aide d'un programme énergétique en résolvant les équations non linéaires données par les lois d'action de masse, conjointement avec les équations de conservation de masse des éléments de base (pour l'air: O et N).

L'objet de cette étude a été, dans un premier temps, la résolution du problème visqueux avec l'hypothèse de l'air calorifiquement parfait ( $\gamma = 1.4$ ) et, dans un second temps, l'extension de notre code au cas d'écoulements de gaz réel à l'équilibre chimique.

Le mémoire est devisé en cinq chapitres. Dans le premier, et comme introduction, nous avons parlé sur les écoulements envisagés et le but de notre travail d'une manière générale alors, que le deuxième présentera les aspects physiques et mathématiques des écoulements hypersoniques.

La résolution numérique du problème visqueux par la méthode de couplage sera développée dans le troisième chapitre.

Le quatrième chapitre sera l'objet de la représentation des schémas numériques tels que la génération de maillage, calcul énergétique, calcul Euler et la couche limite. Enfin, les principaux résultats seront présentés dans le cinquième chapitre.

Finalement, une conclusion sera tirée et les perspectives de recherches ultérieures seront présentés.

## Chapitre II

# ÉCOULEMENTS HYPERSONIQUES : ASPECTS PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

### II.1 Introduction

Le domaine hypersonique est un cas particulier des écoulements supersoniques, assez mal défini en ce sens qu'il n'existe pas de limite inférieure précise pour définir le régime hypersonique.

Pratiquement, on considère que le nombre de Mach doit être supérieur à 7.

Vue la complexité des phénomènes qu'on rencontre dans les écoulements hypersoniques qui sont à l'heure actuelle l'objet d'études intensives, nous avons jugé de présenter dans ce qui suit quelques caractéristiques importantes liées au nouvel caractère physico-chimique des écoulements envisagés.

### II.2 Caractéristiques des écoulements étudiés

#### II.2.1 Régimes d'écoulement

Lors de la rentrée atmosphérique, le véhicule traverse différents milieux selon l'altitude où il se trouve. Ces milieux sont caractérisés à l'aide du nombre de Knudsen qui représente le rapport du libre parcours moyen  $\bar{\lambda}$  des molécules d'air à l'altitude considérée sur une longueur caractéristique du véhicule  $L$ .

$$\text{Nombre de Knudsen: } K_n = \frac{\bar{\lambda}}{L}$$

Une expression intéressante du nombre de Knudsen, est obtenue à partir de la théorie cinétique des gaz, est:

$$K_n = 1.26 \sqrt{\gamma} \frac{M}{\Re_{e_L}}$$

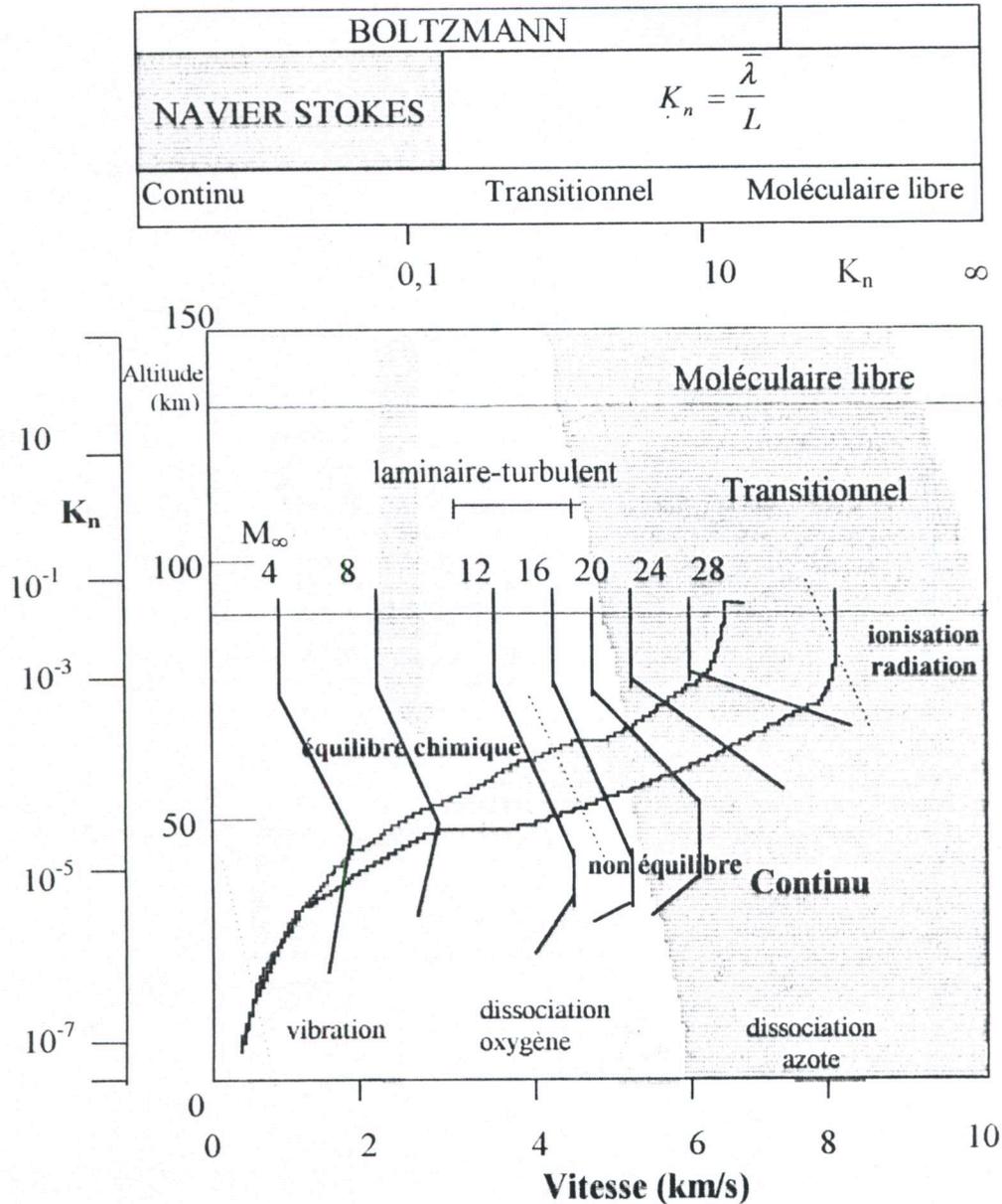
où  $K_n$  et  $\Re_{e_L}$  sont tous deux rapportés à la même longueur caractéristique.

Sur la figure II.1, on peut voir les différents milieux et le domaine de validité des équations. Le régime continu conventionnel de la mécanique des fluides et de la dynamique des gaz, qui est notre domaine d'intérêt, se situe dans la région où le nombre de Knudsen est inférieur à  $10^{-1}$ .

A l'autre extrémité de l'échelle, pour des valeurs de  $K_n$  très grandes, le libre parcours moyen est beaucoup plus grand que  $L$ . On l'appelle régime d'écoulement moléculaire libre dans lequel l'approximation consiste à considérer un gaz comme un milieu continu cesse d'être valable. Pour étudier théoriquement de tels écoulements, on

doit, en toute rigueur, revenir à la théorie cinétique des gaz et résoudre l'équation de Boltzmann, or, cette dernière étant encore beaucoup plus complexe que les équations de Navier-Stokes qui peuvent en être considérées comme un cas particulier. Dans ce régime, on néglige totalement les collisions entre particules, et par suite il n'existe pas de couche limite.

Dans le régime transitionnel le nombre de Knudsen est petit mais non négligeable est appelé régime de glissement. Comme le nom l'implique, dans ce régime les molécules immédiatement adjacentes à la surface n'adhèrent pas à elle mais glissent sur elle avec une vitesse tangentielle définie. Dans ce régime les collisions entre molécules et les collisions entre les molécules et le corps sont d'égale d'importance.



**Fig.II.1.** Trajectoire de rentrée: Régimes d'écoulement et les zones de différents effets

## II.2.2 La trajectoire de rentrée de la navette spatiale

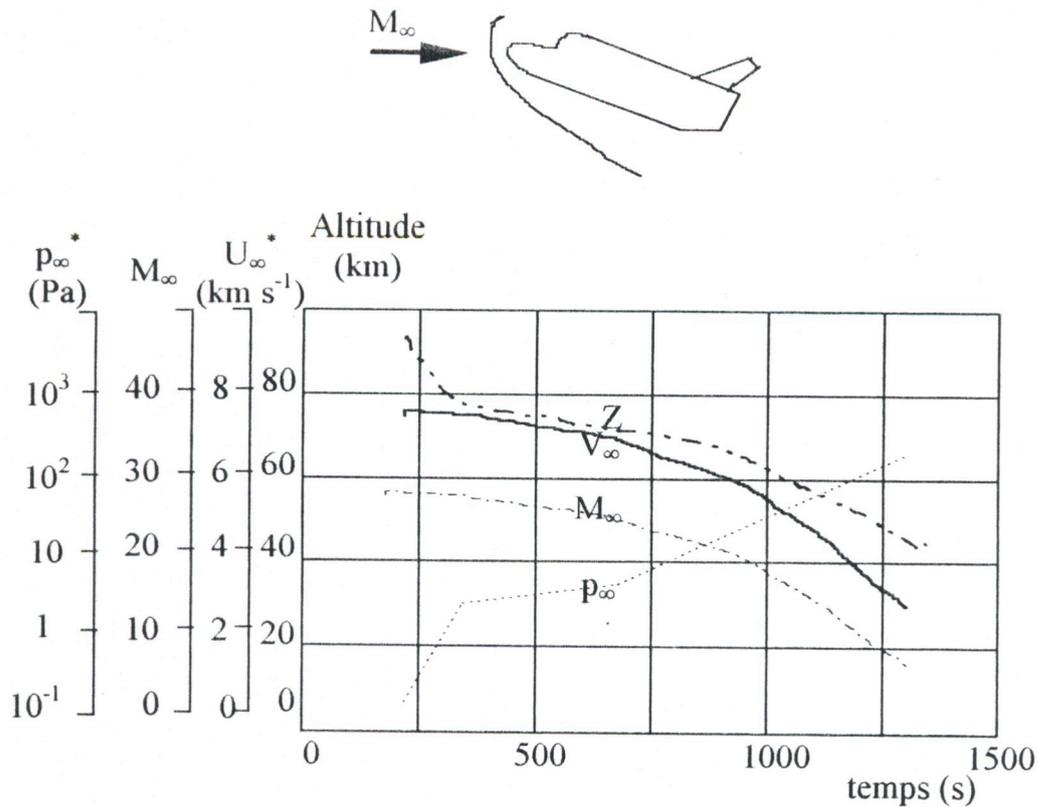
Les caractéristiques données Table II.1 [2, 49] et figure II.2 [9] de la rentrée de la navette spatiale américaine sont celles du vol expérimental STS-2. L'instant initial  $t=0$  est fixé au moment où la navette passe à l'altitude 121.9 km (400 000 ft).

temps (s)	altitude (km)	$U_{\infty}^*$ (kms <sup>-1</sup> )	$\rho_{\infty}^*$ (kgm <sup>-3</sup> )	$p_{\infty}^*$ (Pa)	$T_{\infty}^*$ (K°)	Mach $M_{\infty}$	Angle d'attaque (°)	$\Re_{\infty}/L$ (m <sup>-1</sup> )
200	92.35	7.50	$2.184 \times 10^{-6}$	0.1143	324	27.90	40.4	$6.14 \times 10^2$
250	85.74	7.53	$6.365 \times 10^{-6}$	0.3634	199	26.60	41.0	$3.27 \times 10^3$
330	77.91	7.42	$2.335 \times 10^{-5}$	1.333	199	26.30	40.2	$1.19 \times 10^4$
460	74.98	7.20	$3.815 \times 10^{-5}$	2.170	198	25.50	40.0	$1.88 \times 10^4$
480	74.62	7.16	$4.055 \times 10^{-5}$	2.310	198	25.40	40.3	$2.00 \times 10^4$
540	73.33	7.03	$4.794 \times 10^{-5}$	2.868	200	24.80	40.4	$2.39 \times 10^4$
650	71.29	6.73	$6.824 \times 10^{-5}$	4.017	205	23.40	39.4	$3.07 \times 10^4$
770	68.67	6.31	$9.669 \times 10^{-5}$	6.070	219	21.30	38.5	$3.91 \times 10^4$
830	66.81	6.05	$1.216 \times 10^{-4}$	8.028	230	19.90	41.4	$4.57 \times 10^4$
1000	60.56	4.99	$2.621 \times 10^{-4}$	19.01	253	15.70	42.0	$7.64 \times 10^4$
1120	52.97	3.87	$6.762 \times 10^{-4}$	50.90	262	11.90	38.3	$1.49 \times 10^5$
1215	47.67	2.96	$1.344 \times 10^{-3}$	100.3	260	9.15	34.8	$2.28 \times 10^5$
1270	45.10	2.49	$1.907 \times 10^{-3}$	141.2	258	7.74	32.9	$2.80 \times 10^5$
1295	43.10	2.29	$2.478 \times 10^{-3}$	180.5	253	7.19	30.1	$3.31 \times 10^5$
1320	41.50	2.13	$3.399 \times 10^{-3}$	242.0	248	6.74	28.0	$4.32 \times 10^5$
1360	39.00	1.83	$5.073 \times 10^{-3}$	351.0	241	5.89	24.3	$5.98 \times 10^5$
1400	36.40	1.56	$7.432 \times 10^{-3}$	474.0	222	5.22	21.8	$7.99 \times 10^5$
1440	33.80	1.34	$1.101 \times 10^{-2}$	714.0	226	4.44	19.3	$1.00 \times 10^6$
1480	31.20	1.10	$3.260 \times 10^{-2}$	2134	228	3.63	19.1	$1.10 \times 10^6$

**Table II.1.** Caractéristiques de la trajectoire de rentrée de la navette spatiale (vol STS-2)

Au début de la trajectoire de rentrée, la vitesse est grande, voisine de  $8 \text{ km.s}^{-1}$ , mais la pression est faible de sorte que le nombre de Reynolds reste petit, la couche limite reste laminaire au dessus de l'altitude de 46 km.

Au fur et à mesure du freinage, l'altitude décroît, le nombre de Knudsen diminue; sa signification est déjà signalée dans le paragraphe II.2.1, la pression augmente et le nombre de Reynolds augmente lui aussi; les premiers signes de transition laminaire-turbulent ont été enregistrés au-dessous de l'altitude 45 km.



**Fig.II.2.** Caractéristiques de la trajectoire de rentrée de la Navette Spatiale (vol STS-2) (Ref. [9])

### II.2.3 Echauffement cinétique

Lorsqu'un véhicule spatial s'approche de l'atmosphère d'une planète avant d'atterrir, il dispose d'une grande quantité d'énergie potentielle du fait de sa position au-dessus de la surface de la planète et d'énergie cinétique du fait de sa grande vitesse. Cependant au voisinage de la limite extérieure de l'atmosphère d'une planète l'énergie cinétique prédomine. Un satellite sur une orbite circulaire de 322 km au-dessus de la surface terrestre [24] possède une énergie cinétique d'environ 7228 kcal/kg, alors qu'un véhicule interplanétaire s'approchant de la terre peut avoir jusqu'à deux fois plus d'énergie cinétique.

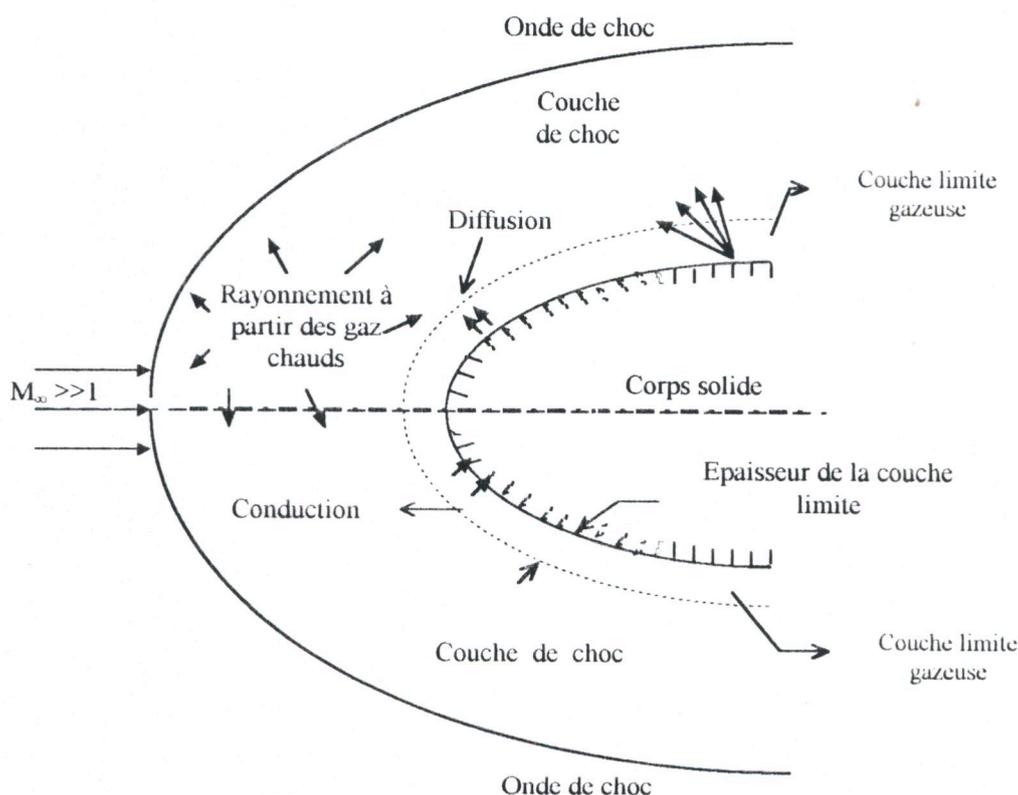
Ainsi, lors de la rentrée, une forte quantité de chaleur est produite suite de la décélération qu'accompagnent l'entrée dans l'atmosphère, c'est-à-dire de la dégradation du travail accompli par la force de la traînée. Une partie de cette chaleur est évacuée par l'air dans lequel baigne le véhicule et une autre partie est transmise au matériau.

L'évaluation de cet échauffement cinétique résulte du calcul des couches limites qui se développent le long de la paroi du véhicule. Les forces de viscosité à l'intérieur

de la couche limite effectuent un travail de cisaillement sur le fluide et élèvent, à grande vitesse, sa température de façon appréciable. Ce processus, souvent appelé échauffement aérodynamique ou « cinétique », augmente également la température de surface des corps placés dans un écoulement fluide à grande vitesse ou des corps se déplaçant à grande vitesse dans un fluide au repos.

L'échauffement de la paroi est déterminé par trois éléments essentiels (Fig.11.3):

- le flux de chaleur échangé entre la paroi et le gaz chaud qui s'écoule autour du véhicule par conduction et convection à travers la couche limite.
- flux de chaleur émis par la paroi par rayonnement.
- flux de chaleur émis par le gaz par rayonnement (celui-ci n'est significatif qu'à des températures extrêmement élevées).



**Fig.11.3.** Les différents éléments de l'échauffement cinétique autour d'un corps arrondi en régime hypersonique

Le problème principal de la rentrée atmosphérique est de convertir cette énergie sous une forme telle qu'elle ne soit pas nuisible pour le véhicule ou son contenu lors de la pénétration dans l'atmosphère et de l'atterrissage.

Si la totalité de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique d'un véhicule spatial entrant dans l'atmosphère d'une planète était convertie en énergie interne, le véhicule se vaporiserait. La minimisation de la quantité de chaleur transmise à la paroi est réalisée en dessinant convenablement le véhicule en lui imposant des conditions de vol adéquates. La formation d'une onde de choc détachée intense assure une grande partie du freinage aérodynamique et par suite une forte élévation de température mais une grande partie de la chaleur est évacuée par l'écoulement qui s'effectue entre l'onde de choc et la paroi (couche de choc); seule une petite quantité de chaleur est transmise à la paroi. Le corps arrondi permet de diminuer la fraction de l'énergie transmise en chaleur à la paroi, ainsi, un système de protection thermique de la surface.

## II.2.4 Températures élevées

La formation d'une onde de choc détachée intense entraîne une diminution importante de la vitesse en aval de choc et par suite, une forte augmentation de température du fait de la compression du gaz à travers l'onde de choc, aussi, dans la couche limite en aval du nez, la dissipation visqueuse est responsable d'une forte élévation de température.

Si, on se place dans un système d'axes lié au véhicule, supposant que le choc au voisinage du point d'arrêt est droit, sachant aussi que à la traversé de l'onde de choc, l'enthalpie d'arrêt se conserve ( $h_i = h + V^2/2$  est constante); on a:

$$h_\infty + \frac{V_\infty^2}{2} = h_e + \frac{V_e^2}{2}$$

où l'indice 'e' signifie l'état d'écoulement juste après le choc.

Quand la vitesse  $V_\infty$  est grande, on peut considérer que  $h_\infty \ll V_\infty^2$ ; si l'onde de choc est très intense (onde droite au nez du véhicule), on a aussi  $V_e \ll V_\infty$ .

D'où:

$$h_e \approx \frac{V_\infty^2}{2}$$

Cette équation montre que l'écoulement est caractérisé, avant tout, par la transformation d'une grande partie de l'énergie mécanique en enthalpie. A travers l'onde de choc, l'écoulement de haute vitesse est transformé en « écoulement hyperenthalpique ».

## II.2.5 Effets de gaz réel aux vitesses hypersoniques

Revenant à une description continue de l'écoulement, on ne peut passer sous silence l'importance considérable des effets de gaz réel aux vitesses hypersoniques: aux températures élevées atteintes en aval des ondes de choc, l'écoulement subit diverses transformations telles que: excitation des degrés internes de liberté, dissociation des molécules, ionisation de l'air. Ces phénomènes sont endothermiques, de sorte que les températures sont très inférieures à celles qu'on calculerait en gaz parfait. Ces effets sont particulièrement importants dans la couche limite, où ils seront repris, et sont calculables numériquement au moyen de puissants ordinateurs. A titre d'exemple, pour un mobile entrant dans l'atmosphère à une vitesse de  $4 \text{ km s}^{-1}$ , l'air est porté à une température de  $5000 \text{ K}^\circ$  environ, alors que, sans effet de gaz réel, cette température serait de  $8000 \text{ K}^\circ$ . Le degré d'ionisation est de l'ordre de  $10^{-5}$ ; il reste faible, mais suffit cependant à perturber les liaisons radio avec missile en cours de rentrée, au point de les supprimer complètement.

Les propriétés de l'air sont notablement modifiées. La composition du mélange n'est pas nécessairement à l'équilibre chimique et l'écoulement est le lieu de réactions chimiques: l'écoulement est dit « relaxé » ou « en hors équilibre chimique ». En outre, la paroi peut participer à ces réactions par le biais du pouvoir catalytique du matériau qui favorise ou non la recombinaison des espèces chimiques.

Ainsi, la structure de l'air est modifiée. L'enchaînement des phénomènes se déroule comme suit: l'oscillation des atomes dans la molécule (c'est l'excitation vibratoire); l'oscillation s'amplifie et les atomes se séparent (dissociation des molécules). Du point de vue global, l'ordre des phénomènes est: vibration de l'oxygène puis de l'azote, dissociation de l'oxygène puis de l'azote. Des réactions chimiques ont lieu avec, en particulier, formation de monoxyde d'azote NO. Aussi, si le nombre de collisions moléculaires augmente il peut y avoir excitation électronique [ 2, 7] (l'électron passe sur une orbite de niveau énergétique plus élevé); si le choc moléculaire est assez fort, l'électron est libéré: c'est l'ionisation de l'espèce.

La dissociation, l'ionisation ont toutes les deux tendance à être très importantes dans un milieu comme la haute atmosphère, les espèces diatomiques présentes,  $\text{O}_2$  et  $\text{N}_2$  réagissent. Il se produit alors les dissociations, des recombinaisons et de l'ionisation qui vont transformer la composition initiale de l'air en un mélange de plusieurs espèces:  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ , NO, O,  $\text{NO}^+$ ,  $\text{O}^+$ ,  $\text{O}^-$ ,  $\text{N}^-$ ,  $\text{e}^-$ , ... dont les fractions massiques ou molaires sont fonctions de la température.

La figure.II.1 permet de situer les zones de prépondérance des différents effets de gaz réels.

## II.2.6 Effets sur le champ de pression à la paroi [9]

Afin d'examiner les effets de hautes températures sur le champ de pression à la paroi, on considère l'écoulement hypersonique non visqueux autour d'une plaque plane avec un angle d'attaque  $\alpha$ .

Dans ce qui suit on va exposer trois cas en considérant que la surface de la paroi placée en face de l'écoulement incident ( Windward Side).

- **Gaz parfait (Fig.II.4.a)**

Dans ce cas, le choc est rectiligne et forme un angle  $\theta_i$  avec la paroi, l'écoulement est uniforme. A la paroi, la pression est constante et égale à celle qui règne dans la couche de choc. La résultante des forces de pression est appliquée exactement au milieu de la paroi.

- **L'équilibre chimique (Fig.II.4.b)**

La composition de gaz en aval de l'onde de choc est différente à celle de l'amont à cause de dissociation partielle ou totale de l'air; la composition locale de gaz est calculée à partir de lois d'équilibre chimique (lois d'action de masse) qui dépend seulement de deux variables thermodynamiques locales (pression et température).

Ce cas est similaire au cas de gaz parfait, à l'exception de composition de gaz qui n'est pas connue a priori.

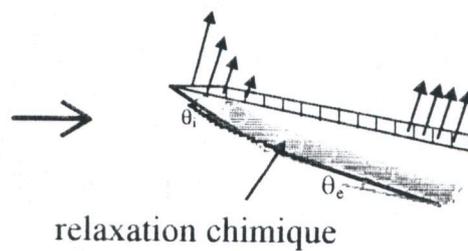
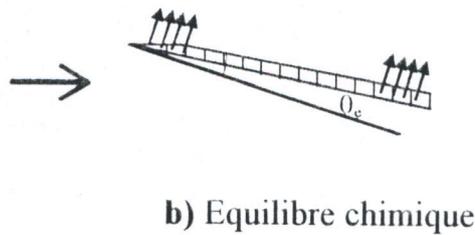
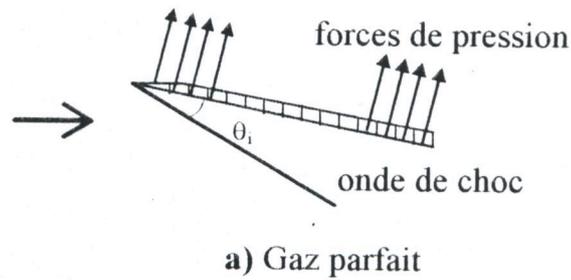
L'onde de choc est rectiligne et forme un angle  $\theta_c < \theta_i$  avec la paroi. L'écoulement dans la couche de choc est uniforme. Ainsi, la pression à la paroi est constante mais inférieure à celle signalée dans le cas précédent.

- **Hors équilibre chimique (Fig.II.4.c)**

Dans ce dernier cas, la composition de gaz varie le long d'une ligne de courant en aval de l'onde de choc; les propriétés de différentes espèces chimiques sont fonction non seulement de la pression et de la température, mais, aussi de toute l'histoire de l'écoulement le long d'une ligne de courant. En aval de l'onde de choc, on trouve une région de la relaxation chimique suivie d'une région d'équilibre chimique.

Au voisinage immédiat du bord d'attaque, la distance entre l'onde de choc et la paroi est petite et l'hypothèse de l'équilibre chimique est loin d'être applicable. Dans ce cas la bonne approximation est celle de l'écoulement figé. Ainsi, au bord d'attaque, l'angle entre l'onde de choc et la paroi est  $\theta_i$  (valeur calculée avec l'hypothèse de gaz parfait).

A une région lointaine du bord d'attaque, l'épaisseur de la relaxation chimique devient petite comparée à celle de la couche de choc et l'angle formé entre l'onde de choc et la paroi tend vers l'angle  $\theta_e$  (valeur calculée avec l'hypothèse d'équilibre chimique). A cet effet, l'écoulement dans la couche de choc est non uniforme et l'onde de choc non rectiligne. A la paroi, la pression est variable de sorte que le point d'application de la résultante des forces de pression se déplace vers le bord d'attaque (la densité maximale des forces de pression est située au voisinage du bord d'attaque).



**Fig.II.4.** Plaque plane sous incidence: effets sur le champ de pression à la paroi

## II.2.7 La forte interaction visqueuse

Dans le domaine hypersonique, une première catégorie de phénomènes nouveaux est liée à l'augmentation considérable de l'épaisseur de la couche limite avec le nombre de Mach. La vitesse importante et la faible densité de l'air lors de la rentrée atmosphérique donnent un écoulement à faible nombre de Reynolds, permettant de restreindre l'étude aux couches limites laminaires. D'autre part, on peut remarquer, que la couche limite sera épaisse du fait de la faible densité de l'air. Pour la plaque plane, en gaz parfait, l'épaisseur de déplacement est donnée par:

$$\delta_1 \approx M_e^2 C^{1/2} \frac{x}{\Re_x^{1/2}} \quad \text{avec} \quad C = \frac{\rho^* \mu^*}{\rho_e \mu_e}$$

où:

$M_e$  est le nombre de Mach à l'extérieur de la couche limite,

$\Re_x$ : le nombre Reynolds rapporté à la longueur  $x$ .

Les indices (\*) et (e) désignent l'état de référence et à la frontière extérieure de la couche limite.

La déviation  $d\alpha$  subie par l'écoulement extérieur est alors:

$$d\alpha = \frac{d\delta_1}{dx} \sim M_e^2 \left( \frac{C}{\Re_x} \right)^{1/2}$$

En admettant une variation de pression donnée par un écoulement par ondes simples, on a:

$$\frac{dp}{p} = \gamma M_e^2 \frac{d\alpha}{\sqrt{M_e^2 - 1}} \approx \gamma M_e d\alpha$$

où  $dp$  représente l'augmentation de pression par rapport à l'écoulement de plaque plane.

On met alors en évidence le paramètre d'interaction visqueuse :  $M_e^3 \left( \frac{C}{\Re_x} \right)^{1/2}$  ;

$$\frac{dp}{p} \approx M_e^3 \left( \frac{C}{\Re_x} \right)^{1/2}$$

Ainsi, à grande nombre de Mach et faible nombre de Reynolds, la couche limite agit sur l'écoulement non visqueux; elle a tendance à repousser le choc de la paroi.

## II.2.8 Autres caractéristiques

- **Vitesses élevées:**

Les écoulements hypersoniques ne sont pas simplement caractérisés par des nombres de Mach élevés, la vitesse joue un rôle tout aussi important car elle détermine, comme on l'a vu (Paragraphe II.2.4), les niveaux de température. A cet effet, les écoulements hypersoniques sont appelés aussi « hypervitesses » (hypervelocity) où les écoulements sont à la fois hypersoniques et grandes valeurs de vitesse.

- **La couche de choc est mince:**

Une théorie hypersonique importante et déjà ancienne, est la théorie de Newton [1]. Cette théorie élémentaire est d'autant plus valable que le nombre de Mach est plus élevé; elle fournit des résultats simples (tels que l'expression du coefficient de pression). Pour un corps donné, à incidence donnée, plus le nombre de Mach est élevé, plus l'onde de choc est couchée sur le corps. Suivant la théorie de Newton, tout se passe comme si l'écoulement était brutalement dévié en heurtant la paroi; si on admet que la quantité de mouvement normale à la paroi lui est intégralement transférée, on en déduit la distribution de pression à la paroi en un point où le plan tangent à l'obstacle fait l'angle  $\theta$  avec la vitesse à l'infini amont:

$$\frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = 2 \sin^2 \theta$$

Pour une géométrie arrondie, la distance entre l'onde de choc détachée et l'obstacle le long de la ligne d'arrêt est d'ordre de un dixième de rayon du nez. Pour un rayon de 1m, cette distance est approximativement 10 cm. En outre, l'inclinaison de l'onde de choc par rapport au corps est très petite. Par exemple, si on considère une géométrie conique et symétrique avec un angle de  $10^\circ$ , assimilant l'air à un gaz parfait, l'angle entre la paroi et l'onde de choc est  $34^\circ$  pour un nombre de Mach 2; cet angle sera  $11^\circ$ , si le nombre de Mach est 10 et tend asymptotiquement vers  $6^\circ$  quand le nombre de Mach tend vers l'infini. Donc, à hauts nombres de Mach, la couche de choc est mince le long de la géométrie considérée.

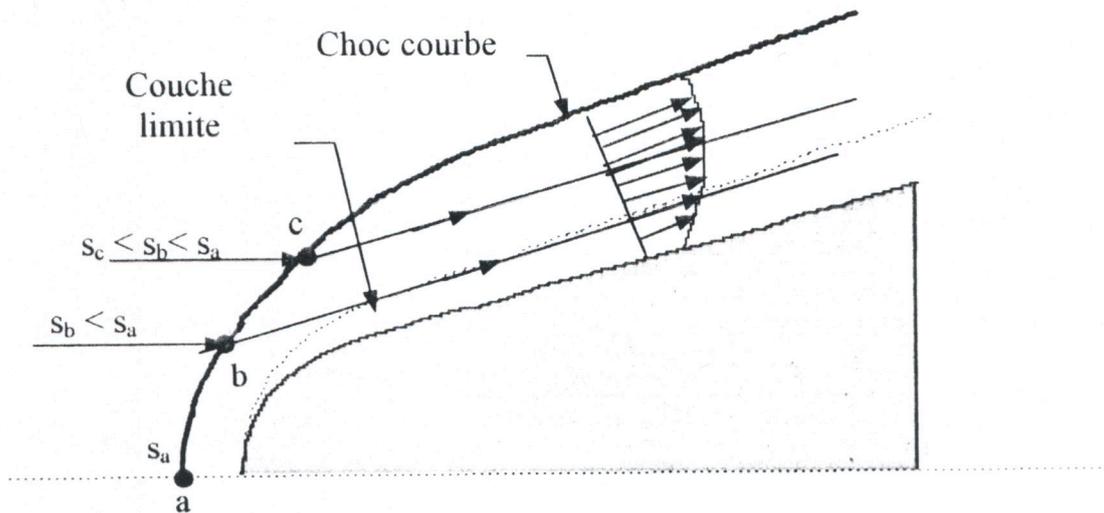
- **Couche d'entropie [8]**

Lors de la rentrée atmosphérique, les véhicules à nez émoussé sont précédés d'une onde de choc courbe détachée. La courbure de l'onde de choc entraîne l'existence d'un gradient d'entropie dans la couche de choc, car les différentes lignes de courant dans la couche de choc qui alimentent la couche limite subissent à travers l'onde de choc courbe des sauts d'entropie différents (Fig.II.5). Ce gradient

d'entropie entraîne la création d'un rotationnel du fluide parfait, comme on peut le déduire de l'équation de Crocco:

$$(\nabla \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} = -\nabla h_i + T\nabla s$$

Il faut remarquer que les gradients d'entropie sont restreints à une zone que l'on appellera « couche d'entropie » car le choc devient rectiligne à une certaine distance du nez.



**Fig.II.5.** Couche d'entropie pour un écoulement hypersonique autour d'un corps arrondi

### II.3 Equations aérothermochimiques

Les caractéristiques principales exposées précédemment des écoulements envisagés implique que une telle étude nécessite non seulement la connaissance de l'Aérodynamique mais aussi celle d'éléments de Thermodynamique à haute température et de Chimie. Suivant plusieurs auteurs [56], ce domaine appartient à l'Aérothermochimie et les équations gouvernant le problème sont des équations aérothermochimiques.

Les équations de base permettant de d'écrire le mouvement d'un écoulement hypersonique visqueux en hors équilibre chimique sont l'équation d'état, les équations de bilan des espèces, les équations de quantité de mouvement et l'équation d'énergie. Ici, par commodité, ces équations seront présentées dans le cas d'écoulement plan bidimensionnel.

### II.3.1 Equations de base

- Equation d'état

On considère un mélange de gaz constitué d'un ensemble d'espèces I. L'état du système en un point est caractérisé par la pression  $p$ , la masse volumique  $\rho$ , l'enthalpie par unité de masse  $h$ , la température  $T$ . On admet que toutes les particules en un point donné ont même température  $T$ . Si on suppose aussi que chaque espèce se comporte comme un gaz parfait, la loi d'état s'applique:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M} T \quad (\text{II.1})$$

avec  $R$  est la constante universelle des gaz ( $R=8.3143 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ )

- Equations de bilan d'espèces

Dans un écoulement du mélange de gaz, on définit les deux composantes de vitesse de diffusion  $u_{DI}$  et  $v_{DI}$  dans le repère cartésien  $(x, y)$  de chaque espèce I en un point comme la moyenne d'ensemble de la vitesse des molécules de cette espèce en ce point. On désigne par  $\dot{\omega}_I$  le taux de production de l'espèce I par unité de volume, c'est-à-dire la masse de l'espèce I formée par unité de temps et par unité de volume par suite de l'ensemble des réactions chimiques où intervient cette espèce I. L'équation de continuité de chaque espèce I s'écrit:

$$\frac{\partial \rho_I}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_I u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_I v)}{\partial y} = - \frac{\partial(\rho_I u_{DI})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho_I v_{DI})}{\partial y} + \dot{\omega}_I \quad (\text{II.2})$$

où  $t$  représente le temps,  $\rho_I$  la densité partielle des espèces I,  $u$  et  $v$  sont les composantes de vitesse du mélange et  $\rho_I u_{DI}$  et  $\rho_I v_{DI}$  sont les composantes de flux de diffusion de masse des espèces I dans le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . On remarque d'ailleurs que la somme des équations (II.2) sur l'ensemble des espèces I donne l'équation de continuité usuelle.

- Equations de quantité de mouvement

Les équations de quantité de mouvement conservent toujours leur forme usuelle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

où  $\rho = \sum \rho_i$  est la densité du mélange,  $p$  est la pression du mélange et  $\tau$  est le tenseur des contraintes visqueuses.

### • Equation d'énergie

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial[u(\rho E + p)]}{\partial x} + \frac{\partial[v(\rho E + p)]}{\partial y} = -\frac{\partial\phi_x}{\partial x} - \frac{\partial\phi_y}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{xx} + v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx} + v\tau_{yy})}{\partial y} \quad (\text{II.4})$$

avec  $E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$  est l'énergie totale,

$e$  : énergie spécifique interne,

$\phi$ : flux de chaleur.

Pour un mélange de  $ns$  espèces, les équations précédentes (II.2)-(II.4) forment un système de  $(ns+3)$  équations pour  $(ns+3)$  inconnus ( $\rho_1, \dots, \rho_{ns}, \rho u, \rho v, \rho E$ ). Le calcul des autres inconnus (pression, flux de diffusion de masse, taux de production des espèces, ... etc) est donné par les relations thermodynamiques, modèles de diffusion et de la chimie qui nous permettent une fermeture adéquate du système du point de vue mathématique.

## II.3.2 Relations de fermeture

### II.3.2.1 Relations thermodynamiques

Considérons, pour l'air, un modèle simplifié dans lequel les espèces en présence sont  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $NO$ ,  $N$ ,  $O$ . Si on admet que chaque espèce se comporte comme un gaz parfait, la pression et l'enthalpie du mélange sont données par:

$$p = \sum_i \rho_i R_i T, \quad h = \sum_i Y_i h_i(T) \quad (\text{II.5})$$

où  $T$  est la température du mélange,  $R_i = R/M_i$ ,

$M_i$  est la masse molaire et  $Y_i = \rho_i / \rho$  est la fraction massique de chaque espèce. Ainsi, on écrit l'enthalpie  $h_i$  de chaque constituant et sa chaleur spécifique à pression constante  $C_{p_i}$  comme étant des polynômes fonctions de la température seulement:

$$C_{p_i} = R_i (a_{1i} + a_{2i} T + a_{3i} T^2 + a_{4i} T^3 + a_{5i} T^4)$$

$$h_i = R_i \left( a_{1i} T + \frac{a_{2i}}{2} T^2 + \frac{a_{3i}}{3} T^3 + \frac{a_{4i}}{4} T^4 + \frac{a_{5i}}{5} T^5 + a_{6i} \right) \quad (\text{II.6})$$

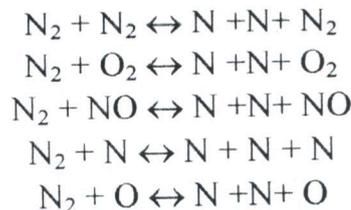
Les coefficients des polynômes sont définis à l'aide de données théoriques (tables de JANAF) tenant en compte la translation des molécules, rotation, excitation électronique, vibration et le couplage rotation-vibration. Ces coefficients (cf. annexe A) sont valables jusqu'à des températures 25000 K° [56, 58].

### II.3.2.2 Modélisation de l'air en hors équilibre chimique

La composition varie beaucoup quand la température augmente. A l'avant d'un corps de rentrée la température peut atteindre, dans une zone très mince, plusieurs dizaines de milliers de degrés Kelvin, c'est alors que N<sub>2</sub> et O<sub>2</sub> réagissent pour donner les espèces suivantes: N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, NO, N, O, NO<sup>+</sup>, O<sup>+</sup>, N<sup>+</sup>, O<sup>-</sup>, N<sup>-</sup>, .... Dans ce qui suit on néglige l'ionisation. Les seules espèces présentes seront donc: N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, NO, N et O. Selon le modèle de Zel'dovich et Park [39], les réactions chimiques étudiées s'écrivent:



où X représente un agent de collision qui peut être n'importe quelle espèce parmi les cinq présentes (X= N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, NO, N, O), par exemple la première réaction peut s'écrire:



Dans le modèle chimique (II.7), les trois premières réactions sont des réactions de dissociation dans le sens direct en présence d'un catalyseur X, ce sont celles que l'on peut utiliser dans un modèle à l'équilibre chimique. Les deux dernières sont des réactions de réarrangement bimoléculaire impliquant NO.

Le calcul de taux de production chimique  $\dot{\omega}_i$  nécessite à la fois les deux vitesses spécifiques des réactions: directe D et inverse R. Les vitesses spécifiques des réactions directes sont données par la loi d'Arrhenius modifiée:

$$k_D = BT^\alpha \exp\left(-\frac{T_A}{T}\right) \tag{II.8}$$

Les constantes B,  $\alpha$  et T<sub>A</sub> pour chaque réaction de (II.7) sont publiées dans les références [39, 56] (cf. Annexe A).

Tandis, que les vitesses spécifiques des réactions inverses sont déduites à partir des constantes d'équilibre par la relation:

$$K_{eq} = k_D/k_R \quad (II.9)$$

La valeur  $K_{eq}$  est calculée à l'aide de l'enthalpie libre (G) pour chaque réaction à l'équilibre chimique [21]. Une autre expression de  $K_{eq}$  est proposée par Park [39], applicable même pour des hautes températures allant jusqu'à 25000 K°, s'écrit:

$$K_{eq}(T) = \exp(A_1 + A_2 Z + A_3 Z^2 + A_4 Z^3 + A_5 Z^4) \quad (II.10)$$

avec:  $Z = 10000/T$

Les coefficients  $A_l$ ,  $l = 1,5$  sont donnés dans l'annexe A.

Pour chaque réaction, la variation de la densité partielle des espèces I est donnée par:

$$\frac{d\rho_I}{dt} = M_I(v_I' - v_I'') \left[ k_R \prod_J \left( \frac{\rho_J}{M_J} \right)^{v_J'} - k_D \prod_J \left( \frac{\rho_J}{M_J} \right)^{v_J''} \right] \quad (II.11)$$

$v_I'$  et  $v_I''$  représentent les coefficients stoechiométriques de l'espèce I, dans les réactions directe et inverse. Le symbole  $\prod_J$  désigne le produit étendu à toutes les espèces J.

Le taux de production global est finalement obtenu en sommant l'équation (II.11) sur toutes les réactions:

$$\dot{\omega}_I = M_I \sum_r (v_{I,r}' - v_{I,r}'') \left[ k_{Rr} \prod_J \left( \frac{\rho_J}{M_J} \right)^{v_{J,r}'} - k_{Dr} \prod_J \left( \frac{\rho_J}{M_J} \right)^{v_{J,r}''} \right] \quad (II.12)$$

### II.3.2.3 Termes de diffusion

- **Nombres de Prandtl, de Lewis et de Schmidt**

Rappelons d'abord la définition de la chaleur spécifique du gaz figé  $C_{p_f}$ :

$$C_{p_f} = \sum_I Y_I C_{p_I} \quad (II.13)$$

Le nombre de Prandtl  $Pr$  joue un rôle important dans les écoulements visqueux où il faut tenir en compte du transfert de chaleur. Ce dernier, mesure la capacité de diffusion de quantité de mouvement du fluide par rapport à sa capacité de conductibilité thermique.

$$\text{Nombre de Prandtl: } Pr = \frac{\mu C p_f}{\lambda} : \frac{\text{Frottement}}{\text{Conduction}} \quad (II.14)$$

Si on exprime le flux de diffusion de masse  $\rho_1 \vec{V}_{D1}$  à l'aide de la loi de Fick, on a:

$$\rho_1 \vec{V}_{D1} = -\rho D \vec{\nabla} Y_1 \quad (II.15)$$

de plus, dans un repère lié à la paroi, on néglige le flux de diffusion le long de la paroi, la relation précédente (II.15) s'écrit:

$$Q_{ly} = \rho Y_1 v_{D1} = -\rho D \frac{\partial Y_1}{\partial y} \quad (II.16)$$

où D est le coefficient de diffusion.

On introduit les nombres de Lewis et de Schmidt:

$$\text{Nombre de Lewis: } Le = \frac{\rho D C p_f}{\lambda} : \frac{\text{Diffusion de masse}}{\text{Conduction}} \quad (II.17)$$

$$\text{Nombre de Schmidt: } Sc = \frac{Pr}{Le} = \frac{\mu}{\rho D} : \frac{\text{Frottement}}{\text{Diffusion de masse}} \quad (II.18)$$

### • Diffusion de masse

Comme, il à été mentionné précédemment, on suppose que le flux de diffusion de masse est exprimé à l'aide de la loi de Fick (l'expression générale sera donnée ultérieurement dans le chapitre III, ainsi de même pour le flux de chaleur):

$$\vec{Q}_l = \rho_1 \vec{V}_{D1} = \frac{\mu Le}{Pr} \vec{\nabla} Y_1 \quad (II.19)$$

avec  $\mu$  et  $\lambda$  désignent la viscosité et la conductibilité thermique respectivement.

A partir des équations précédentes, on constate que le coefficient de diffusion de masse

$$D = \frac{\mu Le}{Pr \rho}$$

### • Tenseur des contraintes visqueuses

Pour un fluide Newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses s'écrit:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (II.20)$$

où  $\delta_{ij}$  est le Kronecker delta;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

### • Flux de chaleur

L'insertion de la loi de Fick dans l'expression du flux de chaleur conduit à l'expression suivante:

## Chapitre III

### COUPLAGE : EULER-COUCHE LIMITE

#### III.1 Introduction

Les caractéristiques extrêmes des écoulements hypersoniques, déjà signalées dans le deuxième chapitre, montrent les difficultés majeures dans la simulation des écoulements envisagés. Ces derniers requièrent un effort à la fois expérimental (car une connaissance expérimentale préalable du problème est toujours indispensable à sa formulation mathématique) et numérique.

##### III.1.1 Simulation expérimentale

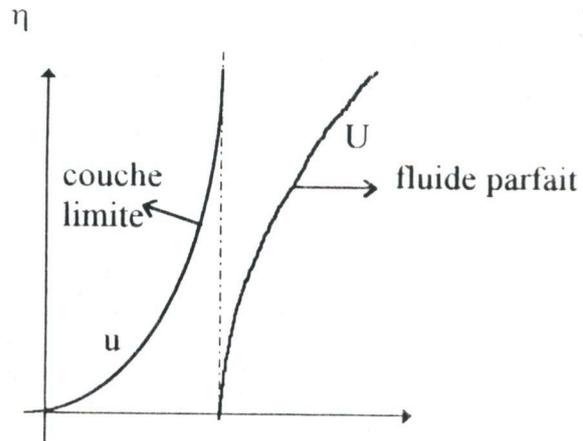
Il ne s'agira pas ici de présenter en détail l'expérimentation et ses dispositifs, d'autres l'ont fait comme par exemple [3, 25, 31, 32, 34, 38], mais d'évoquer les principaux problèmes dans la simulation expérimentale et quelques moyens expérimentaux de laboratoire.

En vol, qui est le stade le plus élevé de l'expérimentation, les données sont difficiles à obtenir. Elles sont peu nombreuses car il y a peu de véhicules civils qui effectuent des rentrées atmosphériques et lorsqu'il s'agit d'engins militaires, elles sont confidentielles.

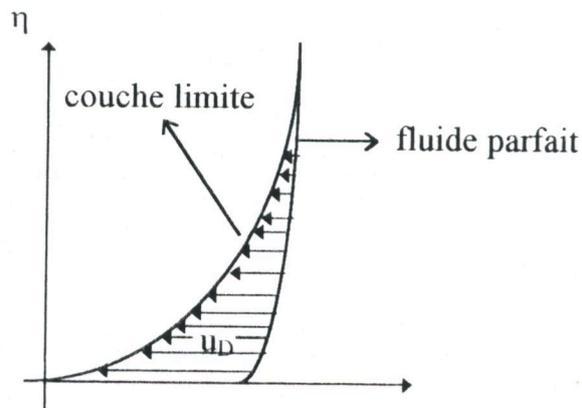
En laboratoire, les expériences se heurtent à des difficultés importantes. Par exemple, il est possible de simuler les hautes valeurs du nombre de Mach, mais les niveaux élevés de température correspondants ne peuvent être simulés simultanément [55]. En effet, pour obtenir une simulation correcte des phénomènes se produisant lors des rentrées atmosphériques, il est nécessaire d'utiliser l'air pour les essais et de restituer les vitesses réelles; d'autres utilisent l'hélium ( $\gamma = 5/3$ ) comme un gaz de travail [34]. Aussi, les niveaux d'énergie nécessaires impliquent des durées d'expérimentation très courtes, limitées également par la tenue mécanique des matériaux à haute température. Pour simuler les effets de gaz réel, deux moyens d'essais sont utilisés: les tubes à choc et les souffleries à arc.

##### III.1.2 Simulation numérique

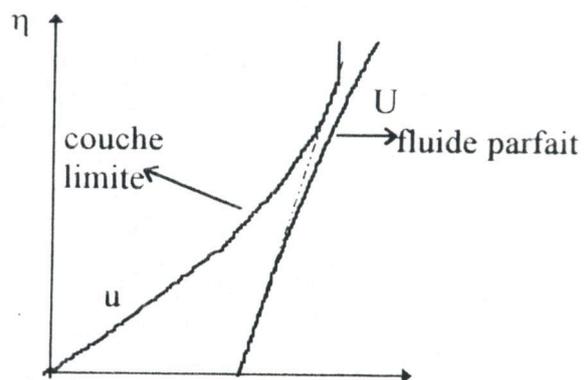
En parallèle aux expériences, il est nécessaire de réaliser des simulations numériques qui permettent d'étudier un plus grand nombre de configurations. Celles-ci, favorisées par le développement extraordinaire des moyens de calcul qui donne aux méthodes numériques le caractère d'un outil de plus en plus puissant et indispensable. Néanmoins, la simulation numérique se heurte à des difficultés variées, qui tiennent aussi bien aux caractéristiques des équations à résoudre (équations aérothermochimiques, cf paragraphe II.3 sont fortement non linéaires et couplées de



**Fig.III.1.** Raccord couche limite du 1<sup>er</sup> ordre-fluide parfait



**Fig.III.2.** Raccord couche limite déficitaire -fluide parfait



**Fig.III.3.** Raccord couche limite du 2<sup>ème</sup> ordre-fluide parfait

## III.2 Formulation asymptotique de Van Dyke

Avant d'aborder la formulation asymptotique, il faut rappeler les équations de Navier-Stokes à partir desquelles les développements asymptotiques seront réalisés. On rappelle que les équations de Navier-Stokes sont déjà des approximations des équations de Boltzmann. Cependant, il semble que la différence n'apparaisse qu'au troisième ordre du développement asymptotique. On peut donc utiliser les équations de Navier-Stokes à condition de limiter le développement à l'ordre 2 [52].

### III.2.1 Equations de Navier-Stokes

#### III.2.1.1 Equations

Nous avons signalé dans le paragraphe II.3 aux équations de Navier-Stokes pour un écoulement plan en hors équilibre chimique. Dans ce qui suit, on rappellera ces dernières pour un écoulement bidimensionnel compressible non réactif instantané, sous forme conservative en négligeant les forces volumiques ainsi que le transfert d'énergie par rayonnement (Voir aussi [33]).

- équation de continuité:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0 \quad (\text{III.1})$$

- équation de quantité de mouvement:

$$\frac{\partial \rho^* \vec{u}^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^* \vec{u}^* \otimes \vec{u}^*) = -\nabla p^* + \nabla \cdot \vec{\tau}^* \quad (\text{III.2})$$

- équation d'énergie:

$$\frac{\partial \rho^* h_i^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^* h_i^* \vec{u}^*) = \nabla \cdot (\vec{\tau}^* \cdot \vec{u}^* - \vec{\phi}^*) + \frac{\partial \dot{q}^*}{\partial t} \quad (\text{III.3})$$

avec, du fait de l'hypothèse de fluide newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses et le vecteur densité de flux de chaleur fonctions linéaires du tenseur des taux de déformation et du gradient de température.

$$\begin{aligned} \vec{\tau}^* &= \mu (\nabla \vec{u}^* + {}^t \nabla \vec{u}^*) + \lambda_\mu \nabla \cdot \vec{u}^* \vec{I} \\ \vec{\phi}^* &= -\lambda \nabla T^* \end{aligned}$$

où  $\lambda_\mu$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  sont fonctions de la température.

L'hypothèse de Stokes permet de relier les deux coefficients de Lamé:

$$3\lambda_\mu + 2\mu = 0$$

Cette hypothèse, qui indique qu'il n'y aura pas de contrainte visqueuse associée à une variation du volume spécifique, n'est pas nécessaire, selon Van Dyke [52], le coefficient  $\lambda_\mu$  n'apparaissant qu'au troisième ordre.

Enfin, pour compléter le jeu d'équations, on utilisera l'équation d'état d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes (gaz idéal) et par conséquent leur rapport  $\gamma=Cp/Cv$  est constant:

$$\begin{aligned} p^* &= \rho^* R^* T^* \\ h^* &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} R^* T^* \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

### III.2.1.2 Adimensionnement

A partir de maintenant, seules les équations stationnaires seront considérées. Les grandeurs physiques sont repérées par un astérisque et rendues sans dimension à l'aide des grandeurs de référence suivantes:

- $U_\infty^*$  vitesse de l'écoulement à l'infini amont
- $R_0^*$  longueur caractéristique, par exemple le rayon de courbure longitudinal du nez s'il s'agit d'un corps émoussé ( $L^*$  pour une plaque plane).
- $\rho_\infty^*$  masse volumique à l'infini amont
- $T_0^* = \frac{U_\infty^{*2}}{Cp}$  température de référence
- $\mu_0^* = \mu^*(T_0^*)$  viscosité de référence

A partir de celles-ci, on définit les grandeurs adimensionnées:

- pression:  $p = \frac{p^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}}$
- masse volumique  $\rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*}$
- vitesse  $\vec{u}(u, v)$ :  $\vec{u} = \frac{\vec{u}^*}{U_\infty^*}$
- température:  $T = \frac{T^*}{T_0^*}$
- viscosité:  $\mu = \frac{\mu^*}{\mu_0^*}$

- enthalpie:  $h = \frac{h^*}{U_\infty^{*2}}$
- enthalpie d'arrêt:  $h_t = \frac{h_t^*}{U_\infty^{*2}}$

On remarque que ces variables restent bornées dans la région du point d'arrêt lorsque le nombre de Mach tend vers l'infini [52].

Pour un gaz idéal, on a alors:

$$h = T$$

### Nota:

Nous avons choisi la notation précédente pour garder la même formulation mathématique publiée dans les références spécialisées (par exemple [33, 52]). Cependant pour la représentation des résultats numériques (voir ultérieurement), on pourra constater des grandeurs dimensionnées et cela à l'aide d'une procédure inverse à celle établie ci-dessus par le dimensionnement des grandeurs adimensionnées en les multipliant par les grandeurs de référence comme une dernière étape au cours de calcul. En outre, selon [52], on peut adimensionner les grandeurs physiques autrement, en posant:

$$R_0^* = U_\infty^* = \rho_\infty^* = Cp^* = 1$$

### III.2.1.3 Equations adimensionnées

Les équations (III.1-III.4) deviennent:

- équation de continuité:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (III.5)$$

- équation de quantité de mouvement:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p + \frac{1}{\Re_e} \nabla \cdot \vec{\tau} \quad (III.6)$$

- équation d'énergie:

$$\nabla \cdot (\rho h_t \vec{u}) = \frac{1}{\Re_e} \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{u}) - \frac{1}{\Re_e \text{Pr}} \nabla \cdot \vec{\phi} \quad (III.7)$$

avec:

$$\vec{\tau} = \mu(\nabla \vec{u} + {}^t \nabla \vec{u}) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \vec{I}$$

$$\vec{\phi} = -\lambda \nabla T$$

$$\Re_e = \frac{\rho_\infty^* U_\infty^* R_0^*}{\mu_0^*} : \text{le nombre de Reynolds}$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu^* Cp^*}{\lambda^*} : \text{le nombre de Prandtl}$$

Dans la suite de l'exposé, les équations seront écrites pour un écoulement bidimensionnel, plan ou axisymétrique dans un système de coordonnées curvilignes lié au corps  $(\xi, \eta)$ , où  $\xi$  est l'abscisse curviligne mesurée le long du corps et  $\eta$  est la distance mesurée sur la normale à la paroi (Fig.III.4). Le système peut donner lieu à des ambiguïtés lorsque la paroi est concave, car les normales se croisent. Aussi, seules seront considérés des cas où la paroi est convexe, ou bien des cas où la paroi est concave mais avec un rayon de courbure très supérieur à l'épaisseur de couche limite. Dans les autres cas, on pourrait refaire l'étude dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales, en introduisant dans les équations les coefficients de métrique adéquats.

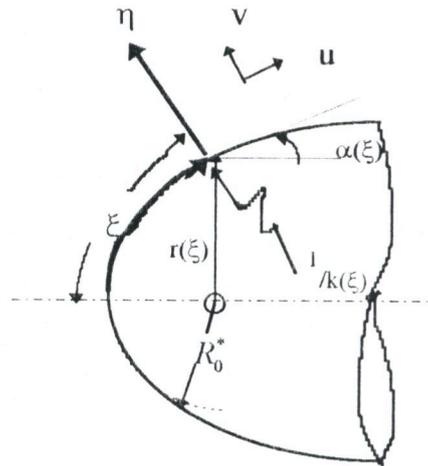


Fig.III.4. Système de coordonnées curvilignes

En utilisant les variables adimensionnées, les équations de Navier-Stokes pour un écoulement bidimensionnel après quelques développements deviennent d'après [52]:

- continuité:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(h_3' \rho u) + \frac{\partial}{\partial \eta}(h_4 h_3' \rho v) = 0 \quad (\text{III.8})$$

$j = 0$  pour un écoulement plan et  $j = 1$  pour un écoulement axisymétrique.

- quantité de mouvement sur  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Re_e} \left[ \rho \left( u \frac{u_\xi}{h_4} + v u_\eta + \frac{k}{h_4} uv \right) + \frac{p_\xi}{h_4} \right] &= \frac{\partial}{\partial \eta} \mu \left( u_\eta + \frac{v_\xi - ku}{h_4} \right) \\ + \frac{2}{h_4} \frac{\partial}{\partial \xi} \mu \frac{u_\xi + kv}{h_4} + \mu \left( \frac{2k}{h_4} + \frac{j \cos \alpha}{h_3} \right) &\left( u_\eta + \frac{v_\xi - ku}{h_4} \right) \\ + \frac{2j\mu}{h_4 h_3} \left[ \frac{u_\xi + kv}{h_4} - \frac{u}{h_4 h_3} (h_3)_\xi \frac{v \cos \alpha}{h_3} \right] &\left( h_3 \right)_\xi + \frac{1}{h_4} \frac{\partial}{\partial \xi} \lambda \left[ \frac{u_\xi + kv}{h_4} + v_\eta \right. \\ + \left. \frac{j}{h_3} \left\{ \frac{u}{h_4} (h_3)_\xi + v \cos \alpha \right\} \right] & \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

- quantité de mouvement sur  $\eta$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mathfrak{R}_e} \left[ \rho \left( u \frac{v_\xi}{h_4} + v v_\eta - \frac{k}{h_4} u^2 \right) + p_\eta \right] = 2(\mu v_\eta)_\eta \\
& + \frac{1}{h_4} \frac{\partial}{\partial \xi} \mu \left( u_\eta + \frac{v_\xi - ku}{h_4} \right) + 2\mu \left( \frac{k}{h_4} + \frac{j \cos \alpha}{h_3} \right) v_\eta \\
& - 2\mu \frac{k}{h_4} \frac{u_\xi + kv}{h_4} - \frac{2j\mu \cos \alpha}{h_3^2} \left[ \frac{u}{h_4} (h_3)_\xi + v \cos \alpha \right] \\
& + \frac{j\mu}{h_4 h_3} \left( u_\eta + \frac{v_\xi - ku}{h_4} \right) (h_3)_\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} \lambda \left[ \frac{u_\xi + kv}{h_4} \right. \\
& \left. + v_\eta + \frac{j}{h_3} \left\{ \frac{u}{h_4} (h_3)_\xi + v \cos \alpha \right\} \right].
\end{aligned} \tag{III.10}$$

- énergie:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mathfrak{R}_e} \left[ \rho \left( u \frac{T_\xi}{h_4} + v T_\eta \right) - \left( u \frac{p_\xi}{h_4} + v p_\eta \right) \right] = \frac{1}{\text{Pr} h_4} \left( \frac{\mu T_\xi}{h_4} \right)_\xi \\
& + \frac{1}{\text{Pr}} (\mu T_\eta)_\eta + \frac{j\mu T_\xi}{\text{Pr} h_4^2 h_3} (h_3)_\xi \\
& + \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{k}{h_4} + \frac{j \cos \alpha}{h_3} \right) \mu T_\eta + \Phi
\end{aligned} \tag{III.11a}$$

où  $\Phi$  est la fonction de dissipation;

$$\begin{aligned}
\Phi = & \mu \left[ 2 \left( \frac{u_\xi + kv}{h_4} \right)^2 + 2v_\eta^2 - \frac{2j}{h_3^2} \left\{ \frac{u}{h_4} (h_3)_\xi + v \cos \alpha \right\}^2 + \left( u_\eta + \frac{v_\xi - ku}{h_4} \right)^2 \right] + \\
& \lambda \left[ \frac{u_\xi + kv}{h_4} + v_\eta + \frac{j}{h_3} \left\{ \frac{u}{h_4} (h_3)_\xi + v \cos \alpha \right\} \right]^2
\end{aligned} \tag{III.11b}$$

- équation d'état:

$$p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho T \tag{III.12}$$

- coefficients de métrique:

$$h_4 = 1 + \frac{\eta}{R(\xi)} = 1 + k\eta \quad h_3 = r + \eta \cos \alpha$$

où  $R(\xi)$  est le rayon de courbure longitudinale de la paroi et  $r(\xi)$  son rayon de courbure transversale;  $\alpha(\xi)$  est l'angle que fait la tangente à la paroi avec l'axe de révolution (Fig.III.4).

Les conditions aux limites sont:

- à l'infini:

$$u = 1 \quad v = 0 \quad \rho = 1 \quad p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2}$$

- à la paroi:

$$u = 0 \quad v = 0 \quad T = T_p$$

où  $T_p$  représente la température de la paroi. Au lieu d'imposer la température de la paroi, on peut aussi bien imposer le flux, ou encore une relation entre le flux et la température.

### III.2.2 Développements

En suivant une démarche similaire à celle de Van Dyke [52], on choisit le petit paramètre:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{R}_e}} = \frac{\sqrt{\mu(T_0)}}{\sqrt{\mu(T_\infty)}} \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{R}_{e_\infty}}}$$

en vertu du principe de moindre dégénérescence. Dans la zone interne, il faut utiliser une coordonnée normale dilatée:

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\varepsilon}$$

On développe ensuite les variables en série suivant les puissances de  $\varepsilon$ . Conformément à l'usage, les développements externes seront notés en lettres majuscules tandis que les minuscules seront réservées aux développements internes. Dans la zone externe, on a:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= U_1(\xi, \eta) + \varepsilon U_2(\xi, \eta) + \dots \\ v(\xi, \eta) &= V_1(\xi, \eta) + \varepsilon V_2(\xi, \eta) + \dots \\ p(\xi, \eta) &= P_1(\xi, \eta) + \varepsilon P_2(\xi, \eta) + \dots \\ \rho(\xi, \eta) &= R_1(\xi, \eta) + \varepsilon R_2(\xi, \eta) + \dots \\ h(\xi, \eta) &= H_1(\xi, \eta) + \varepsilon H_2(\xi, \eta) + \dots \\ T(\xi, \eta) &= T_1(\xi, \eta) + \varepsilon T_2(\xi, \eta) + \dots \end{aligned} \tag{III.13}$$

Tous les coefficients sont supposés d'ordre 1 ainsi que leurs dérivées par rapport à  $\xi$  et  $\eta$ .

Dans la zone interne, on a :

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta) &= u_1(\xi, \bar{\eta}) + \varepsilon u_2(\xi, \bar{\eta}) + \dots \\
 v(\xi, \eta) &= \varepsilon \bar{v}_1(\xi, \bar{\eta}) + \varepsilon^2 \bar{v}_2(\xi, \bar{\eta}) + \dots \\
 p(\xi, \eta) &= p_1(\xi, \bar{\eta}) + \varepsilon p_2(\xi, \bar{\eta}) + \dots \\
 \rho(\xi, \eta) &= \rho_1(\xi, \bar{\eta}) + \varepsilon \rho_2(\xi, \bar{\eta}) + \dots \\
 h(\xi, \eta) &= h_1(\xi, \bar{\eta}) + \varepsilon h_2(\xi, \bar{\eta}) + \dots \\
 T(\xi, \eta) &= t_1(\xi, \bar{\eta}) + \varepsilon t_2(\xi, \bar{\eta}) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{III.14}$$

La loi de viscosité ainsi que celle de la conductibilité thermique peuvent, elles aussi, être développées sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \mu(T) &= \mu_1(T) + \varepsilon \mu_2(T) \\
 \lambda(T) &= \lambda_1(T) + \varepsilon \lambda_2(T)
 \end{aligned}$$

car, on a :

$$\begin{aligned}
 \mu(T) &= \mu(t_1 + \varepsilon t_2) \\
 &= \mu(t_1) + \varepsilon t_2 \frac{d\mu}{dT}(t_1) + \dots \\
 &= \mu_1 + \varepsilon \mu_2 + \dots
 \end{aligned}$$

Les coefficients sont supposés d'ordre 1 ainsi que leurs dérivées par rapport à  $\xi$  et  $\bar{\eta}$ .

### III.2.3 Equations externes et internes

En reportant ces développements dans les équations de Navier-Stokes et en triant les termes suivant leur puissance en  $\varepsilon$ , Van Dyke obtient les équations suivantes :

#### III.2.3.1 Zone externe, ordre 1 :

- continuité :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (r + \eta \cos \alpha)^j R_1 U_1 \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 + k\eta)(r + \eta \cos \alpha)^j R_1 V_1 \right] = 0
 \tag{III.15}$$

- quantité de mouvement suivant  $\xi$  :

$$R_1 U_1 \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + R_1 V_1 \frac{\partial U_1}{\partial \eta} + \frac{k}{1 + k\eta} R_1 U_1 V_1 = - \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial P_1}{\partial \xi}
 \tag{III.16}$$

- quantité de mouvement suivant  $\eta$  :

$$R_1 U_1 \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + R_1 V_1 \frac{\partial V_1}{\partial \eta} - \frac{k}{1 + k\eta} R_1 U_1^2 = - \frac{\partial P_1}{\partial \eta}
 \tag{III.17}$$

- énergie :

$$R_1 U_1 \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + R_1 V_1 \frac{\partial T_1}{\partial \eta} = U_1 \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial P_1}{\partial \xi} + V_1 \frac{\partial P_1}{\partial \eta}
 \tag{III.18}$$

- état:

$$P_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} R_1 T_1 \quad (\text{III.19})$$

Ces équations sont en fait les équations d'Euler. A partir de celles-ci, il est possible de montrer que l'entropie et l'enthalpie totale se conservent le long des lignes de courant en l'absence de discontinuités (onde de choc).

### III.2.3.2 Zone externe, ordre 2:

- continuité:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [(r + \eta \cos \alpha)' (R_1 U_2 + R_2 U_1)] + \frac{\partial}{\partial \eta} [(1 + k\eta)(r + \eta \cos \alpha)' (R_1 V_2 + R_2 V_1)] = 0 \quad (\text{III.20})$$

- quantité de mouvement selon  $\xi$ :

$$\begin{aligned} (R_1 U_2 + R_2 U_1) \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + R_1 U_1 \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial U_2}{\partial \eta} + (R_1 V_2 + R_2 V_1) \frac{\partial U_1}{\partial \eta} + R_1 V_1 \frac{\partial U_2}{\partial \eta} \\ + \frac{k}{1 + k\eta} [(R_1 V_2 + R_2 V_1) U_1 + R_1 V_1 U_2] = - \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial P_2}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

- quantité de mouvement selon  $\eta$ :

$$\begin{aligned} (R_1 U_2 + R_2 U_1) \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + R_1 U_1 \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial V_2}{\partial \eta} + (R_1 V_2 + R_2 V_1) \frac{\partial V_1}{\partial \eta} + R_1 V_1 \frac{\partial V_2}{\partial \eta} \\ - \frac{k}{1 + k\eta} (R_2 U_1^2 + 2R_1 U_1 U_2) = - \frac{\partial P_2}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

- énergie:

$$\begin{aligned} (R_1 U_2 + R_2 U_1) \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + R_1 U_1 \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial T_2}{\partial \eta} + (R_1 V_2 + R_2 V_1) \frac{\partial T_1}{\partial \eta} + R_1 V_1 \frac{\partial T_2}{\partial \eta} \\ = U_1 \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial P_2}{\partial \xi} + U_2 \frac{1}{1 + k\eta} \frac{\partial P_1}{\partial \xi} + V_1 \frac{\partial P_2}{\partial \eta} + V_2 \frac{\partial P_1}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

- état:

$$P_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (R_1 T_2 + R_2 T_1) \quad (\text{III.24})$$

Les équations d'ordre 2 sont les équations d'Euler écrites pour de petites perturbations de l'écoulement du premier ordre. Elles ne contiennent toujours pas de termes de viscosité, ceux-ci étant d'ordre 3.

### III.2.3.3 Zone interne, ordre 1:

- continuité:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (r^j \rho_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial \eta} (r^j \rho_1 \bar{v}_1) = 0 \quad (\text{III.25})$$

- quantité de mouvement suivant  $\xi$ :

$$\rho_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \rho_1 \bar{v}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = -\frac{\partial p_1}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) \quad (\text{III.26})$$

- quantité de mouvement suivant  $\eta$ :

$$0 = \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \quad (\text{III.27})$$

- énergie:

$$\rho_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \rho_1 \bar{v}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = u_1 \frac{\partial p_1}{\partial \xi} + \bar{v}_1 \frac{\partial p_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) + \mu_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right)^2 \quad (\text{III.28})$$

- état:

$$p_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho_1 t_1 \quad (\text{III.29})$$

Ce sont les équations habituelles de couche limite de Prandtl.

### III.2.3.4 Zone interne, ordre 2:

- continuité:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ r^j (\rho_1 u_2 + \rho_2 u_1) + \bar{\eta} j \cos \alpha \rho_1 u_1 \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ r^j (\rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1) + \bar{\eta} (j \cos \alpha + k r^j) \rho_1 \bar{v}_1 \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

- quantité de mouvement sur  $\xi$ :

$$\begin{aligned} & (\rho_1 u_2 + \rho_2 u_1) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \rho_1 u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + (\rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1) \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \rho_1 \bar{v}_1 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \\ & = -\frac{\partial p_2}{\partial \xi} + k \bar{\eta} \frac{\partial p_1}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu_1 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \mu_2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) \\ & + \rho_1 u_1 k \left( \bar{\eta} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \bar{v}_1 \right) - k \frac{\partial}{\partial \eta} (\mu_1 u_1) + \mu_1 \left( j \frac{\cos \alpha}{r} + 2k \right) \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

- quantité de mouvement selon  $\eta$ :

$$\frac{\partial p_2}{\partial \eta} = k \rho_1 u_1^2 \quad (\text{III.32})$$

- énergie:

$$\begin{aligned}
 & (\rho_1 u_2 + \rho_2 u_1) \frac{\partial t_1}{\partial \xi} + \rho_1 u_1 \frac{\partial t_2}{\partial \xi} + (\rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1) \frac{\partial t_1}{\partial \bar{\eta}} + \rho_1 \bar{v}_1 \frac{\partial t_2}{\partial \bar{\eta}} \\
 & = u_1 \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + u_2 \frac{\partial p_1}{\partial \xi} + \bar{v}_1 \frac{\partial p_2}{\partial \bar{\eta}} + \bar{v}_2 \frac{\partial p_1}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left( \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \frac{\partial t_2}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\mu_2}{\text{Pr}} \frac{\partial t_1}{\partial \bar{\eta}} \right) \\
 & + \mu_2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}} \right)^2 + 2 \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial u_2}{\partial \bar{\eta}} + k \bar{\eta} u_1 \left( \rho_1 \frac{\partial t_1}{\partial \xi} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi} \right) \\
 & + \left( j \frac{\cos \alpha}{r} + k \right) \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \frac{\partial t_1}{\partial \bar{\eta}} - 2 k \mu_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}}
 \end{aligned} \tag{III.33}$$

- état:

$$p_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\rho_1 t_2 + \rho_2 t_1) \tag{III.34}$$

Ces équations renferment la forme de petites perturbations des équations du premier ordre, mais aussi des termes supplémentaires liés aux courbures longitudinale et transversale. On notera en particulier la présence d'un gradient normal de pression (Eq.III.32) dû à la courbure longitudinale de la paroi.

## III.2.4 Raccordement

### III.2.4.1 Principe

Dont le but d'expliquer le principe de raccordement [53], dans ce qui suit on limitera notre exposé pour les deux composantes de la vitesse  $u$  et  $v$ .

Le développement externe de  $u$

$$u = U_1(\xi, \eta) + \varepsilon U_2(\xi, \eta) + \dots$$

s'écrit en coordonnées internes:

$$u = U_1(\xi, \varepsilon \bar{\eta}) + \varepsilon U_2(\xi, \varepsilon \bar{\eta}) + \dots$$

On développe les fonctions  $U_1$  et  $U_2$  en série de Taylor pour  $\varepsilon$  petit:

$$u = U_1(\xi, 0) + \varepsilon \bar{\eta} \frac{\partial U_1}{\partial \bar{\eta}}(\xi, 0) + \varepsilon U_2(\xi, 0) + \dots$$

Ce développement interne de la solution externe doit être égal à la limite externe de la solution interne:

$$u_1(\xi, \bar{\eta}) + \varepsilon u_2(\xi, \bar{\eta}) \underset{\bar{\eta} \rightarrow \infty}{\sim} U_1(\xi, 0) + \varepsilon \left( U_2(\xi, 0) + \bar{\eta} \frac{\partial U_1}{\partial \bar{\eta}}(\xi, 0) \right)$$

En identifiant terme à terme, il vient:

$$\begin{cases} u_1(\xi, \bar{\eta}) \underset{\bar{\eta} \rightarrow \infty}{\sim} U_1(\xi, 0) \\ u_2(\xi, \bar{\eta}) \underset{\bar{\eta} \rightarrow \infty}{\sim} U_2(\xi, 0) + \bar{\eta} \frac{\partial U_1}{\partial \eta}(\xi, 0) \end{cases}$$

On peut appliquer le même raisonnement pour la pression, la masse volumique et la température. Cependant, le cas de la composante de vitesse  $v$  est légèrement différent:

$$\varepsilon \bar{v}_1(\xi, \bar{\eta}) + \varepsilon^2 \bar{v}_2(\xi, \bar{\eta}) \underset{\bar{\eta} \rightarrow \infty}{\sim} V_1(\xi, 0) + \varepsilon \left( V_2(\xi, 0) + \bar{\eta} \frac{\partial V_1}{\partial \eta}(\xi, 0) \right)$$

d'où:

$$\begin{cases} 0 = V_1(\xi, 0) \\ \bar{v}_1(\xi, \bar{\eta}) \underset{\bar{\eta} \rightarrow \infty}{\sim} V_2(\xi, 0) + \bar{\eta} \frac{\partial V_1}{\partial \eta}(\xi, 0) \end{cases}$$

ou encore:

$$\begin{cases} V_1(\xi, 0) = 0 \\ V_2(\xi, 0) = \lim_{\bar{\eta} \rightarrow \infty} \left[ \bar{v}_1(\xi, \bar{\eta}) - \bar{\eta} \frac{\partial V_1}{\partial \eta}(\xi, 0) \right] \end{cases}$$

### III.2.4.2 Conditions de raccordement

En appliquant le principe de raccordement énoncé ci-dessus (la représentation interne de la solution externe doit être égale à la représentation externe de la solution interne).

Tenant en compte des conditions aux limites relatives aux équations d'Euler d'une part, et d'autre part aux équations de couche limite du premier et deuxième ordre à l'infini et à la paroi, on obtient:

- ordre 1:

$$\bar{\eta} \rightarrow \infty: \begin{cases} u_1(\xi, \bar{\eta}) \rightarrow U_1(\xi, 0) \\ 0 = V_1(\xi, 0) \\ p_1(\xi, \bar{\eta}) \rightarrow P_1(\xi, 0) \\ \rho_1(\xi, \bar{\eta}) \rightarrow R_1(\xi, 0) \\ t_1(\xi, \bar{\eta}) \rightarrow T_1(\xi, 0) \end{cases}$$

- ordre 2:

$$\bar{\eta} \rightarrow \infty: \begin{cases} u_2(\xi, \bar{\eta}) \sim U_2(\xi, 0) + \bar{\eta} \frac{\partial U_1}{\partial \eta}(\xi, 0) \\ \bar{v}_1(\xi, \bar{\eta}) \sim V_2(\xi, 0) + \bar{\eta} \frac{\partial V_1}{\partial \eta}(\xi, 0) \\ p_2(\xi, \bar{\eta}) \sim P_2(\xi, 0) + \bar{\eta} \frac{\partial P_1}{\partial \eta}(\xi, 0) \\ \rho_2(\xi, \bar{\eta}) \sim R_2(\xi, 0) + \bar{\eta} \frac{\partial R_1}{\partial \eta}(\xi, 0) \\ t_2(\xi, \bar{\eta}) \sim T_2(\xi, 0) + \bar{\eta} \frac{\partial T_1}{\partial \eta}(\xi, 0) \end{cases}$$

Les conditions sur  $\rho$  et  $T$  se déduisent l'une de l'autre par l'équation d'état. Les conditions aux limites imposent:

- à l'infini:

$$\begin{array}{llll} U_1 = 1 & U_2 = 0 & V_1 = 0 & V_2 = 0 \\ R_1 = 1 & R_2 = 0 & P_1 = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} & P_2 = 0 \end{array}$$

- à la paroi: (si l'on néglige les sauts de vitesse et de température)

$$\begin{array}{ll} u_1 = u_2 = 0 & v_1 = v_2 = 0 \\ t_1 = T_p & t_2 = 0 \end{array}$$

Compte tenu de l'équation:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \bar{\eta}} = 0$$

on a  $p_1(\xi, \eta) = P_1(\xi, 0)$ . La condition à la paroi pour l'écoulement externe d'ordre 2 s'écrit:

$$V_2(\xi, 0) = \lim_{\bar{\eta} \rightarrow \infty} \left[ \bar{v}_1(\xi, \bar{\eta}) - \bar{\eta} \frac{\partial V_1}{\partial \bar{\eta}}(\xi, 0) \right]$$

Les figures (III.1) et (III.3) résument les caractéristiques des raccords obtenues à l'ordre 1 et à l'ordre 2 pour la vitesse tangentielle  $u$ . A l'ordre 1, l'asymptote est une droite verticale:

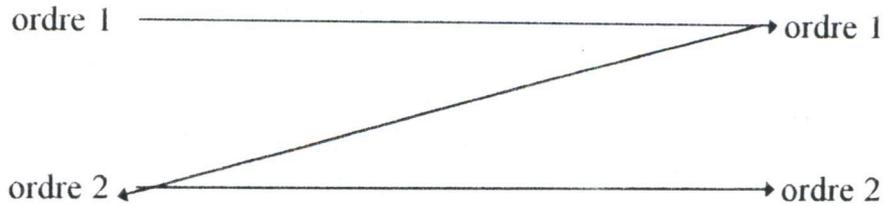
$$u(\eta) = U_1(\xi, 0)$$

tandis qu'à l'ordre 2 c'est une droite oblique:

$$u(\eta) = U_1(\xi, 0) + \varepsilon U_2(\xi, 0) + \eta \frac{\partial U_1}{\partial \eta}(\xi, 0)$$

### III.2.5 Discussion

Compte tenu des conditions aux limites, le calcul de l'écoulement externe d'ordre 1 est indépendant des autres. Sa résolution conditionne la couche limite du premier ordre. Le calcul du fluide parfait d'ordre 2 nécessite la connaissance préalable du fluide parfait d'ordre 1 et de la couche limite d'ordre 1. De même, la couche limite d'ordre 2 suppose connus les écoulements externe d'ordre 1 et 2, ainsi que l'écoulement interne d'ordre 1. Les calculs doivent donc être enchaînés comme suit:

Euler (fluide parfait)couche limite

Il serait théoriquement possible de poursuivre le développement, mais à partir de l'ordre 3 des termes visqueux commencent à apparaître dans les équations externes qui deviennent de ce fait presque aussi complexes que les équations de Navier-Stokes. En pratique, on s'arrête donc à l'ordre 2.

L'effet de la couche limite d'ordre 1, sur le fluide parfait d'ordre 2 se traduit par la vitesse de transpiration à la paroi  $V_2(\xi, 0)$  imposée à ce dernier. Cette vitesse de transpiration peut être reliée à l'épaisseur de déplacement  $\delta_1$  définie par:

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{\rho_1 u_1}{R_1 U_1} \right) d\eta$$

en intégrant l'équation de continuité (couche limite d'ordre 1):

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (r^j \rho_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (r^j \rho_1 \bar{v}_1) = 0$$

$$\bar{v}_1(\xi, \bar{\eta}) \sim -\frac{1}{r^j R_1} \int_0^{\bar{\eta}} \frac{\partial (r^j \rho_1 u_1)}{\partial \xi} d\bar{l}$$

or, quand  $\bar{\eta}$  tend vers l'infini, on a:

$$\bar{v}_1(\xi, \bar{\eta}) = V_2(\xi, 0) + \bar{\eta} \frac{\partial V_1}{\partial \eta}(\xi, 0)$$

donc:

$$V_2(\xi, 0) + \bar{\eta} \frac{\partial V_1}{\partial \eta}(\xi, 0) = -\frac{1}{r^j R_1} \int_0^{\bar{\eta}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( r^j \left( \frac{\rho_1 u_1}{R_1 U_1(\xi, 0)} - 1 \right) R_1 U_1(\xi, 0) \right) + \frac{\partial (R_1 U_1)}{\partial \xi}(\xi, 0) \right] d\bar{l}$$

utilisant l'équation de continuité (Euler d'ordre 1), on obtient:

$$V_2(\xi, 0) - \bar{\eta} \frac{\partial (R_1 U_1)}{\partial \xi}(\xi, 0) \sim \frac{1}{r^j R_1} \int_0^{\bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( 1 - \frac{\rho_1 u_1}{R_1 U_1(\xi, 0)} \right) r^j R_1 U_1(\xi, 0) \right] d\bar{l} - \bar{\eta} \frac{\partial (R_1 U_1)}{\partial \xi}(\xi, 0)$$

En effectuant le changement de variable:

$$\eta = \varepsilon \bar{\eta} \qquad d\bar{l} = \frac{1}{\varepsilon} dl$$

il vient:

$$V_2(\xi, 0) \sim \frac{1}{r^j R_1} \frac{d}{d\xi} \left[ r^j R_1 U_1(\xi, 0) \int_0^{\varepsilon \bar{\eta}} \left( 1 - \frac{\rho_1 u_1}{R_1 U_1(\xi, 0)} \right) \frac{d\ell}{\varepsilon} \right]$$

Finalement, quand  $\bar{\eta}$  tend vers l'infini:

$$\varepsilon V_2(\xi, 0) \sim \frac{1}{r^j R_1} \frac{d}{d\xi} (r^j R_1 U_1 \delta_1)$$

de plus, si on affecte un changement d'indice: 1 par e (extérieur) et pour un écoulement bidimensionnel axisymétrique ( $j = 1$ ), on obtient la même expression de Wüthrich [56]:

$$V_{\text{paroi}} = \frac{1}{r^j \rho_e} \frac{d}{d\xi} (r \rho_e U_e \delta_1)$$

L'effet de la couche limite d'ordre 1 sur le fluide parfait d'ordre 2 représente donc l'effet de déplacement.

La condition de raccord pour  $u_2$  à l'extérieur de la couche limite fait intervenir le terme  $\frac{\partial U_1}{\partial \eta}(\xi, 0)$  qui, vu que  $V_1(\xi, 0) = 0$ , représente la valeur à la paroi du rotationnel de l'écoulement externe du premier ordre:

$$\omega = \frac{\partial U_1}{\partial \eta} - \frac{\partial V_1}{\partial \xi}$$

D'un point de vue pratique, il est intéressant de noter que le fluide parfait d'ordre 2 vérifie les mêmes équations qu'à l'ordre 1: en effet, on constate que les variables reconstituées  $U_1 + \varepsilon U_2$ ,  $V_1 + \varepsilon V_2$ ,  $P_1 + \varepsilon P_2$ ,  $R_1 + \varepsilon R_2$ ,  $T_1 + \varepsilon T_2$  vérifient les équations d'Euler à des termes d'ordre  $\varepsilon^2$  près. Il est donc possible de réutiliser le même programme de résolution à condition de remplacer la condition de glissement à la paroi par la vitesse de transpiration. On obtient alors des grandeurs combinées:

$$\tilde{U}_2 = U_1 + \varepsilon U_2 + O(\varepsilon^2)$$

Toutefois, les variables d'ordre 2 obtenues par des formules du type:

$$U_2 = \frac{\tilde{U}_2 - U_1}{\varepsilon}$$

Aussi, Van Dyke montre en utilisant l'équation de Crocco:

$$(\nabla \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} = -\nabla h_i + T \nabla s$$

où  $h_i$  est l'enthalpie totale et  $s$  l'entropie, que le rotationnel et le gradient de température peuvent être exprimés en fonction du gradient d'enthalpie totale et du gradient d'entropie. Sachant que ces deux grandeurs se conservent le long des lignes

de courant de l'écoulement externe, leurs gradients sont perpendiculaires à ces dernières. Van Dyke identifie donc sept effets du second ordre pour la couche limite compressible:

- courbure longitudinale
- courbure transversale
- déplacement
- gradient d'entropie
- gradient d'enthalpie totale
- saut de température à la paroi
- glissement à la paroi

Du fait de la linéarité des équations du second ordre [52], il est possible de décomposer le problème en plusieurs sous-problèmes correspondant chacun à un effet particulier. La séparation de ces effets est arbitraire et n'a que peu d'intérêt en pratique.

### **III.3 Equilibre chimique**

#### **III.3.1 Aspects physiques**

L'hypothèse de gaz calorifiquement parfait est valable pour des températures comprises entre la température ambiante et 2000 °K. Cette hypothèse n'est plus assurée dans les écoulements hypersoniques où la présence d'un choc fort provoque une augmentation importante de la température. Les molécules du gaz ne peuvent plus être considérées comme rigides et il faut prendre en compte non seulement l'excitation des modes vibratoire et électronique, mais aussi les réactions chimiques qui ont lieu dans le mélange de gaz. Les phénomènes de gaz réel provoquent une augmentation de la valeur des flux thermiques sur le corps.

La prise en compte des ces phénomènes provoque un surcoût de calcul souvent rédhibitoire. Aussi, il est intéressant de considérer des écoulements particuliers. En faisant l'hypothèse supplémentaire du gaz à l'équilibre thermique et chimique, les calculs deviennent beaucoup plus simples et ne présentent guère de différence (en programmation, taille mémoire ou temps CPU) avec les calculs d'écoulements de gaz parfait.

Cette hypothèse est néanmoins utilisée lors du dimensionnement des engins car les flux de chaleur sont maximaux par rapport aux cas d'écoulements en hors équilibre chimique ou thermique [8].

L'hypothèse d'un écoulement de gaz à l'équilibre thermique et chimique sous-entend que le temps caractéristique de la convection est très grand devant celui des réactions chimiques ayant lieu à l'intérieur du mélange de gaz et devant celui nécessaire à la répartition de l'énergie sur tous les niveaux énergétiques en accord avec la mécanique statistique (distribution de Boltzmann). L'équilibre thermique et chimique est déterminé à partir de la donnée de deux grandeurs thermodynamiques indépendantes. En effet, il faut que l'air est une densité suffisante pour que les collisions entre les différents composants nécessaires au retour à l'équilibre soient assez nombreuses. La composition chimique et la répartition de l'énergie s'adaptent alors instantanément au changement des conditions locales.

### III.3.2 Flux thermique dans le cas gaz réel à l'équilibre chimique

Dans le cas d'écoulement de gaz réel à l'équilibre chimique, pour les équations de couche limite, seule l'équation de l'énergie est affectée, les équations de continuité et de quantité de mouvement gardant la même forme que dans le cas d'écoulement de gaz parfait. En effet, l'équation d'état du gaz est modifiée et le flux de chaleur ne peut plus être écrit de la même manière que dans le cas d'un écoulement de gaz parfait. Le tableau ci-après résume les modifications dans les équations entre les deux cas d'écoulement.

GAZ PARFAIT	GAZ REEL
<ul style="list-style-type: none"> <li>état: <math>p = R^* \rho T</math></li> </ul>	$p = ZR^* \rho T$
<ul style="list-style-type: none"> <li>enthalpie: <math>h = C_p T</math></li> </ul>	$\rho h = \sum_i \rho_i h_i$
<ul style="list-style-type: none"> <li>équation de continuité: <math>\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0</math></li> </ul>	idem
<ul style="list-style-type: none"> <li>équation de quantité de mouvement: <math>\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} - p \delta_{ij})</math></li> </ul>	même forme, mais $\mu$ est différent
<ul style="list-style-type: none"> <li>équation d'énergie <math>\rho u_j \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} + \phi_D</math></li> </ul>	idem pour ce qui est de l'écriture formelle de l'équation, mais le terme de flux de chaleur n'a pas la même forme

avec:

$$i = 1, 2$$

$$j = 1, 2$$

Z: coefficient de compressibilité

$$\varphi_D: \text{fonction de dissipation} = \tau_{ij} S_{ij} \quad ; \quad \left( S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

$$\tau_{ij} = 2\mu \left( S_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} S_{ll} \right)$$

Dans les mélanges de gaz à l'équilibre chimique, la conductibilité thermique peut être considérablement plus importante que dans les mélanges non réactifs. Le mécanisme responsable de l'accroissement de la conductibilité des mélanges réactifs est le suivant.

Dans un gaz pur, la conductibilité est due principalement aux collisions moléculaires, et le vecteur flux de chaleur est directement proportionnel au gradient du champ de température.

$$\vec{\phi} = -\lambda \nabla T \quad (\text{III.35})$$

où  $\lambda$  est la conductibilité thermique du gaz.

Dans un mélange de gaz non réactif, la chaleur est aussi transférée par la diffusion thermique, la quantité de chaleur transférée de cette manière n'excédant pas quelques pour-cents de celle transportée par la conductibilité thermique. Dans les applications pratiques, elle est habituellement négligée.

Quand les composants du mélange de gaz réagissent entre eux, il y a un transport de chaleur, dû aux réactions chimiques, lié à l'enthalpie des différentes espèces et aux gradients de concentration dans le mélange.

Le terme de flux de chaleur s'exprime alors:

$$\vec{\phi} = -\lambda \nabla T + \sum_{l=1}^{ns} \rho_l h_l \vec{u}_{Dl} \quad (\text{III.36})$$

ns : nombre d'espèces.

Le premier terme est directement dû aux collisions moléculaires, tandis que le second est lié au transport d'enthalpie chimique des molécules qui diffusent dans le gaz. C'est ce second terme qui provoque la différence entre le cas d'écoulement de gaz réel et le cas d'écoulement de gaz parfait.

Pour retrouver la forme « gaz parfait » de l'équation d'énergie, il faut mettre le terme lié à l'enthalpie des espèces chimiques sous la forme d'un gradient de température.

L'expression générale du flux de chaleur est:

$$\bar{\phi} = -\lambda \nabla T + \sum_{l=1}^{ns} h_l \bar{q}_l + \underbrace{R^* T \sum_I \sum_J \frac{n_J}{n} \frac{1}{M_I} \frac{D_I^T}{D_{IJ}} \left( \frac{\bar{q}_I}{\rho_I} - \frac{\bar{q}_J}{\rho_J} \right)}_{\text{Effet Dufour}} \quad (\text{III.37a})$$

L'effet de diffusion thermique, ou effet Soret (terme  $D_I^T$ ) a été mis en évidence par la théorie et confirmé par l'expérience. Suivant cet effet, les espèces lourdes ont tendance à migrer vers les régions froides et les espèces légères vers les régions chaudes (c'est l'effet de thermodiffusion qui joue un rôle important dans la séparation des isotopes [46]. Généralement, cet effet est mineur.

$$\begin{aligned} \bar{q}_I &= \sum_{j=1} \rho \frac{M_I M_J}{M^2} D_{IJ} \bar{d}_J - D_I^T \frac{\nabla T}{T} \\ \bar{d}_I &= \nabla \frac{n_I}{n} + \left( \frac{n_I}{n} - \frac{\rho_I}{\rho} \right) \frac{1}{p} \nabla p \end{aligned} \quad (\text{III.37b})$$

En faisant l'hypothèse de la diffusion thermique négligée et comme le deuxième terme de l'équation (III.37b) est négligé du fait de l'hypothèse de couche limite, le terme de flux de chaleur s'exprime par:

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \left[ \lambda - \sum_{l=1}^{ns} \sum_{j=1}^{ns} h_l \rho \frac{M_I M_J}{M^2} D_{IJ} \frac{d \frac{n_J}{n}}{dT} \right] \nabla T \\ \bar{\phi} &= -[\lambda - \lambda_R] \nabla T \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

La difficulté de cette approche est liée au calcul de la conductibilité réactive  $\lambda_R$ . Pour ce faire, on utilise l'approche de Wilke [56] citée dans le chapitre II.

## Chapitre IV

# SCHEMAS NUMERIQUES POUR LA RESOLUTION D'EQUATIONS D'EULER ET DE LA COUCHE LIMITE

### IV.1 Introduction

Ce chapitre s'insère dans le cadre du développement de schémas numériques pour la simulation d'écoulements hypersoniques réactifs, visqueux, bidimensionnels et stationnaires à l'équilibre thermique et chimique. Un tel développement est basé sur la technique de couplage: Euler-couche limite citée précédemment. Afin de réaliser un code de calcul interactif entre les différents modules du problème global envisagé (résolution d'équations d'Euler, calcul de couche limite, génération du maillage, calcul d'effets de gaz réel à l'équilibre chimique, ...etc.), il est primordial de procéder par étape.

En premier lieu, on va rappeler les propriétés mathématiques et algébriques du système d'équations d'Euler. Ce rappel nous amènera à exposer un schéma numérique robuste capable de capter les discontinuités (ondes de choc) et les régions de forts gradients pour le cas d'un gaz inerte. En deuxième lieu ce schéma sera étendu au cas d'un gaz réactif à l'équilibre chimique.

Une autre tâche assez difficile, consiste à développer un schéma numérique pour la résolution du système d'équations paraboliques caractérisant le problème de la couche limite.

Finalement, le couplage entre les deux schémas cités ci-dessus se fera numériquement selon les conditions de raccordement étudiées dans le troisième chapitre.

### IV.2 Le modèle d'équations d'Euler

#### IV.2.1 Formulation mathématique du système d'équations d'Euler

Le comportement physique d'un écoulement non visqueux dont le caractère convectif est dominant est décrit complètement par la résolution numérique du système d'équations d'Euler en partant d'une formulation mathématique adéquate.

Selon le choix de variables utilisées (conservatives, primitives ou caractéristiques), diverses formulations peuvent être obtenues. En effet, à l'aide de matrices jacobiniennes et les matrices de passage, la connaissance d'une variante permet d'obtenir d'autres variantes équivalentes.

### IV.2.1.1 Formulation conservative

La forme conservative du système d'équations d'Euler est nécessaire pour un calcul correct des intensités de discontinuités [23]. Pour un écoulement bidimensionnel et dans un système de coordonnées cartésiennes, les équations d'Euler d'un écoulement compressible inerte s'écrivent:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) + \frac{\partial}{\partial y} G(U) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

avec:

$U$  est le vecteur de "quantités conservatives" qui possède quatre composantes, s'écrit sous la forme [23, 26, 45]:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

où:

$\rho$  est la masse volumique;

$u, v$  sont les composantes cartésiennes de la vitesse;

$p$  est la pression;

$E$  est l'énergie spécifique totale par unité de volume.

$$F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad G(U) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho E + p) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

$F(U)$  et  $G(U)$  sont les flux convectifs dans les directions  $x, y$  respectivement. L'énergie interne est reliée à l'énergie totale par:

$$e = E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (\text{IV.4})$$

Dans le cas d'un gaz calorifiquement parfait, on a:

$$p = (\gamma - 1) \rho e = (\gamma - 1) \rho [E - 0.5(u^2 + v^2)] \quad (\text{IV.5})$$

Le système (IV.1) est hyperbolique non linéaire couplé.

### IV.2.1.2 Formulation quasi-linéaire

Afin d'illustrer les propriétés mathématiques pour le système d'équations d'Euler, il convient nécessaire, selon [22] de réécrire ces équations sous la forme quasi-linéaire qui nous permet d'obtenir un système d'équations du premier ordre en terme de vecteur des quantités conservatives  $U$ .

#### IV.2.1.2.1 Les matrices jacobiennes pour les variables conservatives

En introduisant les deux matrices jacobiennes  $A$  et  $B$ , la formulation quasi-linéaire s'écrit:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (IV.6)$$

avec:

$$A = \frac{\partial F}{\partial U} \quad ; \quad B = \frac{\partial G}{\partial U} \quad (IV.7)$$

les matrices  $A$  et  $B$  ont les expressions suivantes [23] :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 + \frac{\gamma-1}{2}v^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 \\ -\gamma uE + (\gamma-1)u\bar{u}^2 & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(v^2+3u^2) & -(\gamma-1)uv & \gamma u \end{bmatrix} \quad (IV.8)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ -\gamma vE + (\gamma-1)v\bar{u}^2 & -(\gamma-1)uv & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(u^2+3v^2) & \gamma v \end{bmatrix} \quad (IV.9)$$

$\bar{u}$  est le vecteur vitesse de composantes  $u$ ,  $v$  dans le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ .

#### IV.2.1.2.2 Les matrices jacobiennes pour les variables primitives

Vue l'importance des valeurs propres dans l'étude numérique du système d'équations d'Euler, il est plus commode d'obtenir ces valeurs en partant d'une formulation non conservative basée sur le vecteur de variables primitives  $V$ . Ce dernier, est généralement imposé par les conditions aux limites physiques.



$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

En l'absence de la conduction et sources de chaleur, de plus, les forces extérieures sont négligées, les équations d'Euler peuvent s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) E + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} p) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

La dernière équation (conservation d'énergie) peut être transformée à une équation pour la pression  $p$ . Afin d'obtenir cette équation, on introduit l'hypothèse "d'écoulement isentropique" à travers les relations:

$$\begin{aligned} e &= e(p, s) \\ \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s &= c^2 \end{aligned}$$

$c$  est la célérité du son.

$$\delta e = \left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s \cdot \delta p$$

la dérivée isentropique  $\left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s$  peut être déduite à partir des relations thermodynamiques

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho} = de + pd \left( \frac{1}{\rho} \right) = 0$$

La condition d'isentropie, conduit à écrire:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_s &= \frac{1}{\rho} \\ \left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s &= \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_s - \frac{1}{\rho} + \frac{p}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{p}{\rho^2 c^2} \end{aligned}$$

et :

$$dp = c^2 d\rho$$

Le système (IV.11) devient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) p + \rho c^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Avec le vecteur de variables primitives  $V$ ,

$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ (\gamma - 1) \rho [E - 0.5(u^2 + v^2)] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

Ainsi, la formulation quasi-linéaire (IV.6) s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \tilde{B} \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.14})$$

les matrices jacobiennes  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  ont des expressions assez simples que celles des matrices  $A$  et  $B$ :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & \cdot & \cdot \\ \cdot & u & \cdot & \frac{1}{\rho} \\ \cdot & \cdot & u & \cdot \\ \cdot & \rho c^2 & \cdot & u \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} v & \cdot & \rho & \cdot \\ \cdot & v & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & v & \frac{1}{\rho} \\ \cdot & \cdot & \rho c^2 & v \end{bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

### IV.2.1.2.3 Les matrices de passage entre les variables conservatives et les variables non conservatives

La matrice jacobienne de passage de variables conservatives aux variables non conservatives est définie par:

$$M = \frac{\partial U}{\partial \mathcal{V}} \quad (\text{IV.17})$$

par suite, on trouve:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ u & \rho & \cdot & \cdot \\ v & \cdot & \rho & \cdot \\ \frac{\bar{u}^2}{2} & \rho u & \rho v & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

Puisque le déterminant de  $M = \frac{\rho}{\gamma-1} \neq 0$  ( $\gamma > 1$ ), il existe une matrice inverse  $M^{-1}$ :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & \cdot & \cdot \\ -\frac{v}{\rho} & \cdot & \frac{1}{\rho} & \cdot \\ \frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2) & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

$$\det M^{-1} = \frac{\gamma-1}{\rho} > 0$$

L'identification entre les deux formulations (IV.6) et (IV.14) (après quelques développements) nous donne:

$$\begin{cases} \tilde{A} = M^{-1}AM \\ \tilde{B} = M^{-1}BM \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} A = M\tilde{A}M^{-1} \\ B = M\tilde{B}M^{-1} \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

Si on considère  $\tilde{A}$  comme un vecteur matrice à pour composantes les matrices jacobienes  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ , aussi même chose pour le vecteur matrice  $\tilde{A}$  de composantes A et B, on peut écrire:

$$\tilde{K} = \tilde{A} \cdot \vec{k} \quad \text{et} \quad K = \tilde{A} \cdot \vec{k}$$

avec  $\vec{k} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$  indique une direction arbitraire de propagation des caractéristiques.

La matrice  $K$  a les mêmes valeurs propres que la matrice  $\tilde{K}$  à travers la relation de similarité suivante:

$$\tilde{K} = M^{-1}KM \quad (\text{IV.21})$$

Pour cela, il est plus pratique d'analyser les valeurs propres du système d'équations d'Euler en utilisant la matrice  $\tilde{K}$  basée sur les variables primitives.

### IV.2.1.3 Formulation caractéristique

Les schémas numériques et leurs propriétés, ainsi que la formulation mathématique des équations sont dominés par le caractère hyperbolique (par rapport au temps) d'équations d'Euler.

Du fait que les phénomènes de base sont de nature convective ou de propagation, les caractéristiques du système d'équations d'Euler et leurs propriétés jouent un rôle essentiel dans la description mathématique et aussi dans plusieurs techniques numériques de discrétisation, en particulier dans l'étude des conditions aux limites physiques et numériques. Cependant une telle analyse nécessite la connaissance des valeurs propres et les vecteurs propres associés. Pour simplifier la présentation, on considère ici le cas monodimensionnel pour lequel les équations d'Euler s'écrivent sous la forme conservative suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.22})$$

Le cas multidimensionnel et particulièrement, le cas bidimensionnel est traité en détail dans la référence [23].

La matrice  $\tilde{K}$  se réduit à la matrice  $\tilde{A}$ .

Si  $\lambda_j$  désigne les valeurs propres de la matrice  $\tilde{A}$  obtenues à partir de:

$$\det|\lambda I - \tilde{A}| = 0 \quad (\text{IV.23})$$

ou

$$\begin{vmatrix} u - \lambda & \rho & 0 \\ 0 & u - \lambda & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{IV.24})$$

Un calcul direct donne:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & . & . \\ . & \lambda_2 & . \\ . & . & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

avec  $\Lambda$  est la matrice diagonale de toutes les valeurs propres:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= u \\ \lambda_2 &= u + c \\ \lambda_3 &= u - c\end{aligned}\tag{IV.26}$$

Du fait du caractère hyperbolique de l'équation (IV.22), les valeurs propres de la matrice  $\tilde{A}$  sont réelles. La matrice  $\tilde{A}$  peut être écrite sous la forme:

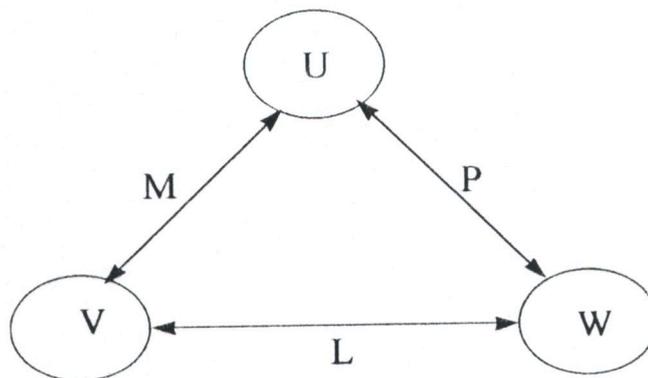
$$\tilde{A} = L\Lambda L^{-1}\tag{IV.27}$$

$L^{-1}$  désigne la matrice de vecteurs propres gauches associés à chaque valeur propre  $\lambda_j$  et qui nous permet de définir une nouvelle ensemble des variables dite "variables caractéristiques  $W$ " en partant de variables conservatives  $U$  ou de variables primitives  $V$  à l'aide des matrices de passage  $P$  et  $L$ :

$$\begin{aligned}\delta W &= L^{-1}\delta V \\ \delta W &= P^{-1}\delta U\end{aligned}\tag{IV.28}$$

où l'indice  $\delta$  indique une variation temporelle  $\frac{\partial}{\partial t}$  ou spatiale  $\frac{\partial}{\partial x}$ .

La figure (IV.1) résume les relations mathématiques entre les trois différents groupes de variables:



**Fig.IV.1.** Relations entre les trois types de variables: conservatives  $U$ , primitives  $V$  et caractéristiques  $W$ .

Ainsi, après développement, on obtient les différentes matrices de passage:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix} \quad (IV.29)$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\rho c}{2} & -\frac{\rho c}{2} \end{bmatrix} \quad (IV.30)$$

Les matrices  $P$  et  $P^{-1}$  en variables conservatives jouent un rôle similaire à celui de  $L$  et  $L^{-1}$  en variables primitives respectivement; elles diagonalisent la matrice  $A$  ( $A = P\Lambda P^{-1}$ ):

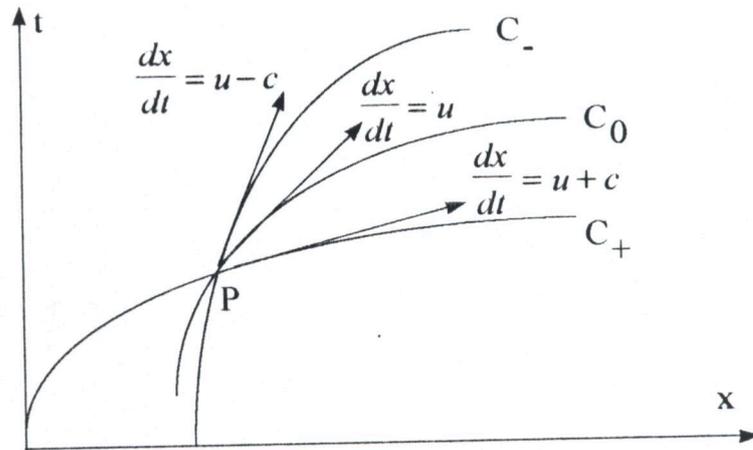
$$P^{-1} = L^{-1}M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u^2}{c^2} & (\gamma-1) \frac{u}{c^2} & -\frac{\gamma-1}{c^2} \\ \left(\frac{\gamma-1}{2} u^2 - uc\right) \frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c} [c - (\gamma-1)u] & \frac{\gamma-1}{\rho c} \\ -\left(\frac{\gamma-1}{2} u^2 + uc\right) \frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c} [c + (\gamma-1)u] & -\frac{\gamma-1}{\rho c} \end{bmatrix} \quad (IV.31)$$

$$P = M.L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ u & \frac{\rho}{2c}(u+c) & -\frac{\rho}{2c}(u-c) \\ \frac{u^2}{2} & \frac{\rho}{2c} \left[ \frac{u^2}{2} + uc + \frac{c^2}{\gamma-1} \right] & -\frac{\rho}{2c} \left[ \frac{u^2}{2} - uc + \frac{c^2}{\gamma-1} \right] \end{bmatrix} \quad (IV.32)$$

le vecteur des variables caractéristiques (ou les variables de Riemann) s'écrit:

$$\delta W = \begin{bmatrix} \delta W_1 \\ \delta W_2 \\ \delta W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \rho - \frac{1}{c^2} \delta p \\ \delta u + \frac{1}{\rho c} \delta p \\ \delta u - \frac{1}{\rho c} \delta p \end{bmatrix} \quad (IV.33)$$

Les trois composants de vecteur  $\delta W$  (en bidimensionnel: quatre (4) composantes) se propagent respectivement le long des caractéristiques  $C_0$ ,  $C_+$  et  $C_-$  avec des vitesses de propagation associées  $u$ ,  $u+c$  et  $u-c$  (sont les valeurs propres du système) (Fig.IV.2).



**Fig.IV.2.** Les lignes caractéristiques dans le cas monodimensionnel

L'intérêt pratique de variables caractéristiques réside essentiellement dans l'étude des conditions aux limites selon le régime d'écoulement: subsonique ou supersonique (le nombre de conditions physiques à imposer à l'entrée ou à la sortie du domaine de calcul [23, 26]).

#### IV.2.2 Algorithme de résolution des équations d'Euler pour un gaz inerte

Le système (IV.1) des équations d'Euler est hyperbolique non linéaire. On s'intéresse aux solutions stationnaires que l'on obtient par intégration en temps à partir d'une condition initiale arbitraire. Cet artifice est utilisé pour le calcul d'écoulements contenant des régions subsoniques ( corps arrondis) ( $M < 1$ ) dans les quelles le système stationnaire est elliptique. L'intégration en temps est donc utilisée pour construire un processus itératif convergeant vers la solution stationnaire. En effet, à l'heure actuelle, on peut citer plusieurs approches numériques. La table (IV.1) tirée de [23] nous donne une classification simplifiée de différents schémas numériques importants et largement utilisés en suivant la chronologie historique.

Discrétisation couplée: espace-temps	Discrétisation découplée espace-intégration en temps
<u>Schémas explicites</u>	<u>Schémas explicites:</u>
Schéma de Lax-Friedrichs (1954) d'ordre 1	Schémas de Runge-Kutta: Jameson, Schmidt et Turkel (1981)
Schéma de Lax-Wendroff (1960) d'ordre 2	
Schémas à deux pas (deux étapes):	
<b>Schémas centrés</b>	Richtmyer et Morton (1967) MacCormack (1969) Lerat et Peyret (1974)
	<u>Schémas implicites:</u> MacCormack (1981); Casier, Deconinck et Hirsch (1983) Lerat (1979, 1983)
	<u>Schémas implicites :</u> Briley et McDonald (1975) Beam et Warming (1976)
	<u>Décomposition des flux</u>
<b>Schémas décentrés</b>	Courant, Isaacson et Reeves (1952)- schéma décentré d'ordre 1 Moretti (1979) -Schémas non conservatifs + méthode d'ajustement du choc (shock fitting) Steger et Warming (1981) Van Leer (1982)
<u>Méthodes de type Godunov-Solveurs de Riemann</u>	
	Solution exacte du problème de Riemann:
	Godunov (1959) - d'ordre 1 Van Leer (1979) - d'ordre 2 Woodward et Colella (1984); Ben-Artzi et Falcovitz (1984)
	Solveurs de Riemann approchés:
	Roe (1981) Engquist et Osher (1980); Osher (1982) Harten, Lax et Van Leer (1983)
<b>Schémas de haute résolution TVD (Schémas non linéaires)</b>	<u>Schémas TVD explicites décentrés</u> Boris et Book (1973); Van Leer (1974,1979) Harten (1983, 1984) Osher (1984); Osher et Chakravarthy (1984)
	<u>Schémas TVD implicites décentrés</u> Yee et Harten (1985)
	Schémas TVD (implicites ou explicites) centrés Davis (1984); Roe (1985); Yee (1985, 1987)

**Table IV.1.** Schémas numériques pour la résolution d'équations d'Euler

### IV.2.2.1 Schéma de MacCormack

Le schéma de MacCormack (1969) est le schéma le plus populaire parmi ceux qui appartiennent à la famille des schémas dite "de Lax-Wendroff à deux pas". Ce schéma aux différences finies a été développé par Robert MacCormack à la NASA et publié en 1969; précis au second ordre en temps et en espace.

Afin d'illustrer les caractéristiques du schéma utilisé, on considère ici le cas monodimensionnel. Le cas bidimensionnel est présenté dans le paragraphe IV.2.2.2.

Le schéma de MacCormack contient deux étapes principales dans la séquence : prédicteur-correcteur.

Les valeurs prédictives sont définies à  $(n+1)$  au point "i" suivies par l'étape de correction où :

le temps:  $t^n = n\Delta t$

et l'abscisse :  $x_i = i\Delta x$

En désignant par  $\bar{U}_i$  le vecteur des variables conservatives lors de prédiction et par  $\bar{\bar{U}}_i$  lors de correction; le système des équations d'Euler (IV.22) s'écrit:

$$\text{Prédicteur :} \quad \bar{U}_i = U_i^n - \tau (F_{i+1}^n - F_i^n) \quad (\text{IV.34a})$$

$$\text{Correcteur :} \quad \bar{\bar{U}}_i = U_i^n - \tau (\bar{F}_i^n - \bar{F}_{i-1}^n) \quad (\text{IV.34b})$$

$$\text{Solution finale :} \quad U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{U}_i + \bar{\bar{U}}_i) \quad (\text{IV.34c})$$

avec :

$$\bar{F}_i = F(\bar{U}_i), \quad \tau = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

L'étape de prédiction est une discrétisation progressive en espace d'ordre 1, instable dans les zones supersoniques (valeurs propres positives de la matrice jacobienne A). Par contre, la deuxième étape (correction) est une discrétisation régressive en espace d'ordre 1, instable dans les zones subsoniques (valeurs propres négatives de la matrice jacobienne A). Cependant, les erreurs de troncature s'annulent à chaque pas de prédiction-corrrection et le schéma global devient stable, précis au second ordre [23].

Le schéma de MacCormack peut être écrit en terme de variation  $\Delta U$  comme suit:

$$\Delta \bar{U}_i = -\tau \cdot \delta^+ F_i^n \quad (\text{IV.35a})$$

$$\Delta \bar{\bar{U}}_i = -\tau \cdot \delta^- \bar{F}_i^n \quad (\text{IV.35b})$$

$$\Delta U_i = \frac{1}{2}(\Delta \bar{U}_i + \Delta \bar{\bar{U}}_i) = -\frac{\tau}{2}[F_{i+1}^n - F_i^n + \bar{F}_i^n - \bar{F}_{i-1}^n] \quad (\text{IV.35c})$$

où :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{U} &= \bar{U} - U^n \text{ (variation prédictive);} \\ \Delta \bar{\bar{U}} &= \bar{\bar{U}} - U^n \text{ (variation corrective);} \\ \Delta U &= U^{n+1} - U^n \text{ (variation totale).} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \delta^+ &= (.)_{i+1} - (.)_i \text{ (opérateur progressif)} \\ \delta^- &= (.)_i - (.)_{i-1} \text{ (opérateur régressif)} \end{aligned}$$

L'équation (IV.35c) peut être écrite en fonction de flux numériques  $F_{i+\frac{1}{2}}^*$  et  $F_{i-\frac{1}{2}}^*$  en posant:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2}(\bar{F}_i^n + F_{i+1}^n) \quad (\text{IV.36})$$

et

$$F_{i-\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2}(\bar{F}_{i-1}^n + F_i^n)$$

ce qui implique:

$$\Delta U_i = -\tau \left( F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_{i-\frac{1}{2}}^* \right) \quad (\text{IV.37})$$

la quantité  $F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_{i-\frac{1}{2}}^*$  définit la différence de flux entrant et sortant sur chaque maille (à la convergence, ce terme tend vers zéro).

#### IV.2.2.2 Extension du schéma de MacCormack au cas 2D bidimensionnel

Les approximations dans le cas bidimensionnel sont obtenues comme extension du cas monodimensionnel (1D). L'approximation spatiale nécessite sept points pour construire une cellule d'intégration  $C_i$  (Fig.IV.3). Du fait que le schéma de MacCormack combine deux versions de discrétisation: directe et inverse lors de prédiction et correction séparément, on peut obtenir quatre schémas différents en combinant les diverses discrétisations possibles sur les deux composantes du flux convectif  $F$  et  $G$  (Fig.IV.3).

Selon la version directe-directe citée dans le paragraphe précédant (Eq.IV.34), le schéma de MacCormack pour le système d'équations d'Euler (2D) (Eq.IV.1) s'écrit:

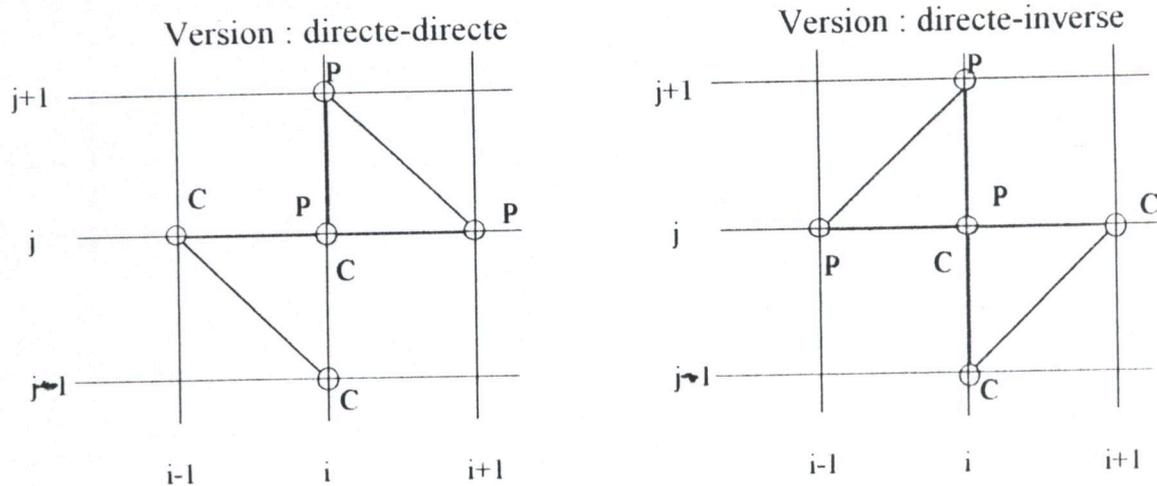
$$\begin{aligned}
 \bar{U}_{ij} &= U_{ij}^n - \tau_x (F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n) - \tau_y (G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n) \\
 \bar{\bar{U}}_{ij} &= U_{ij}^n - \tau_x (\bar{F}_{i,j} - \bar{F}_{i-1,j}) - \tau_y (\bar{G}_{i,j} - \bar{G}_{i,j-1}) \\
 U_{ij}^{n+1} &= \frac{1}{2} (\bar{U}_{ij} + \bar{\bar{U}}_{ij})
 \end{aligned}
 \tag{IV.38}$$

avec :

$$\tau_x = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{et} \quad \tau_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}$$

le système (IV.38) peut être écrit sous la forme (IV.35) comme suit:

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{U}_{ij} &= -\tau_x \cdot \delta^+ F_{ij}^n - \tau_y \cdot \delta^+ G_{ij}^n \\
 \Delta \bar{\bar{U}}_{ij} &= -\tau_x \cdot \delta^- \bar{F}_{ij} - \tau_y \cdot \delta^- \bar{G}_{ij} \\
 \Delta U_{ij} &= \frac{1}{2} (\Delta \bar{U}_{ij} + \Delta \bar{\bar{U}}_{ij})
 \end{aligned}
 \tag{IV.39}$$



P : Points prédictifs  
C : Points correctifs

**Fig.IV.3.** Cellule d'intégration  $C_i$  pour le schéma de MacCormack

### IV.2.2.3 Analyse linéaire de la stabilité du schéma

Selon l'analyse de Von Neumann, la stabilité des schémas explicites est déterminée par le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy, brièvement le nombre C.F.L ou le nombre de Courant.

Le pas du temps de méthodes explicites utilisées en général pour les calculs à Mach élevé est limité par une condition de stabilité de type C.F.L.

$$\Delta t \leq \frac{\alpha \cdot L}{|u| + c} \quad \alpha = O(1)$$

où  $L$  est une longueur caractéristique,  $u$  une vitesse caractéristique de l'écoulement et  $c$  la vitesse du son.

Pour le schéma de MacCormack, l'analyse de la stabilité selon Von Neumann se fait par l'étude d'évolution de perturbation [50] ou bien par l'étude de la matrice

d'amplification [23]  $g = \frac{\bar{g} + \bar{\bar{g}}}{2}$  en posant:

$\bar{U} = \bar{g}U^n$  et  $\bar{\bar{U}} = \bar{\bar{g}}U^n$ , cela conduit à écrire:

$$\begin{aligned}\bar{g} &= 1 - \tau_x A (e^{i\phi_x} - 1) \tau_y B (e^{i\phi_y} - 1) \\ \bar{\bar{g}} &= 1 - \bar{g} \left[ \tau_x A (1 - e^{-i\phi_x}) + \tau_y B (1 - e^{-i\phi_y}) \right]\end{aligned}\quad (IV.40)$$

$$g = 1 - I \left( \tau_x A \sin \phi_x + \tau_y B \sin \phi_y \right) - \left[ \tau_x^2 A^2 (1 - \cos \phi_x) + \tau_y^2 B^2 (1 - \cos \phi_y) + 4 \tau_x \tau_y AB \sin \frac{\phi_x}{2} \sin \frac{\phi_y}{2} \cos \frac{\phi_x - \phi_y}{2} \right]$$

où  $I = \sqrt{-1}$

La complexité de l'expression (IV.40) rend impossible de trouver analytiquement une condition sur la stabilité du schéma. Cependant, il a été trouvé expérimentalement par MacCormack que la condition nécessaire pour la stabilité est définie comme étant une condition de type C.F.L:

$$\left( \tau_x |\lambda(A)|_{\max} + \tau_y |\lambda(B)|_{\max} \right) \leq 1 \quad (IV.41)$$

ou

$$\Delta t \leq \left[ \frac{|\lambda(A)|_{\max}}{\Delta x} + \frac{|\lambda(B)|_{\max}}{\Delta y} \right]^{-1}$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes,  $|\lambda(A)|_{\max} = |u| + c$  et  $|\lambda(B)|_{\max} = |v| + c$ .

Pour le système d'équations d'Euler:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|u| + c}{\Delta x} + \frac{|v| + c}{\Delta y}} < \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{|u| \Delta y + |v| \Delta x + c \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \quad (IV.42)$$

où le membre droit de l'équation (IV.42) est la forme courante de la stabilité qui l'on peut trouver dans la littérature spécialisée.

#### IV.2.2.4 Viscosité artificielle d'ordre élevé

Le calcul des ondes de choc pose un problème difficile, mais essentiel, qui a trouvé une solution tout à fait générale grâce à l'idée de la viscosité artificielle due à Von Neumann et Richtmyer (1950). Cette méthode consiste à modifier les équations du fluide parfait en y introduisant un terme jouant le rôle d'une viscosité artificielle, construite de façon à être négligeable en dehors des ondes de choc, et à donner à celles-ci une structure visqueuse artificielle sur une épaisseur de quelques mailles. Cette approche est très puissante car elle permet une "capture" automatique des chocs, quel que soit leur nombre "Shock Capturing Method". Son inconvénient est d'étaler les discontinuités, ce qui impose d'avoir un maillage assez fin pour limiter l'épaisseur artificielle des chocs. Dans cette méthode, le maillage est généré de telle façon à assurer que le choc est situé entre le corps et la limite extérieure du maillage (Fig.IV.4a).

Il existe une autre approche, dite méthode d'ajustement du choc "Shock Fitting Method", dans laquelle le choc est réellement représenté par une surface de discontinuité qu'on suit dans son mouvement et qui vérifie les relations de Rankine-Hugoniot. Cette méthode est très précise, mais sa mise en œuvre est plus complexe car elle nécessite un maillage en mouvement avec la surface du choc (remaillage à chaque transitoire jusqu'à la convergence).

Dans ce cas, le maillage est généré entre le corps et la surface initiale du choc de telle façon à assurer que le choc réel est situé à l'extérieur de la région maillée (Fig.IV.4b).

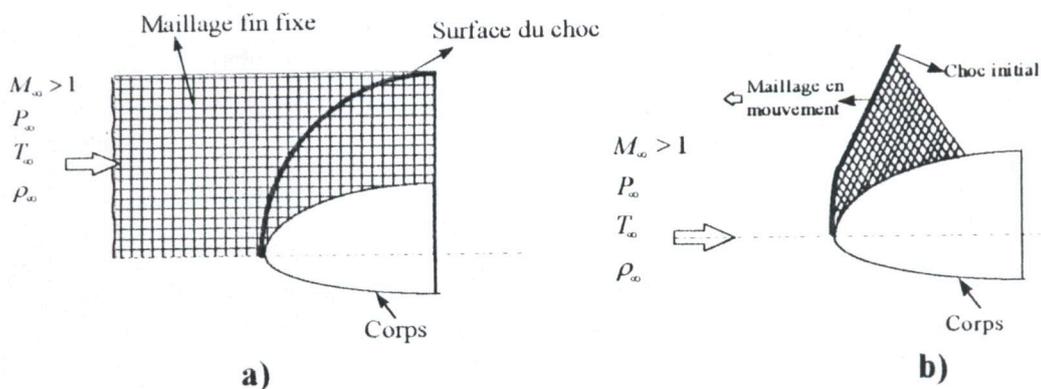


Fig.IV.4. Les différentes méthodes de calcul du choc.

Dans notre étude, nous avons appliqué la première approche dite "Capture automatique" en introduisant des termes d'ordre élevé de la viscosité artificielle : 2<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> ordre. Cet artifice est développé initialement par Jameson et porte aussi le nom de la dissipation artificielle de MacCormack-Baldwin [23]. Ainsi, on peut citer la même formulation dans la référence [59].

Tenant compte de l'équation (IV.36), le flux numérique avec la dissipation visqueuse (flux numérique modifié) s'écrit :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{\text{mod}} = F_{i+\frac{1}{2}}^* - d_{i+1/2} \quad (\text{IV.43})$$

avec  $d$  est la viscosité artificielle de 2<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> ordre, qui a l'expression suivante :

$$d_{i+\frac{1}{2}} = \varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(2)}(U_{i+1} - U_i) - \varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(4)}(U_{i+2} - 3U_{i+1} + 3U_i - U_{i-1}) \quad (\text{IV.44})$$

le coefficient non linéaire  $\varepsilon^{(2)}$  est calculé par :

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\varepsilon_i^{(2)} + \varepsilon_{i+1}^{(2)}) \quad (\text{IV.45})$$

ou :

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} = \max(\varepsilon_i^{(2)}, \varepsilon_{i+1}^{(2)})$$

avec :

$$\varepsilon_i^{(2)} = \alpha^{(2)}(|u| + c)_i \frac{|p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}|}{p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1}} \quad (\text{IV.46})$$

$p$  est la pression.

Le coefficient d'ordre élevé  $\varepsilon^{(4)}$  est défini par :

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(4)} = \max \left[ 0, \left( \alpha^{(4)} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} / (u + c)_{i+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (\text{IV.47})$$

Les valeurs typiques des coefficients  $\alpha^{(2)}$  et  $\alpha^{(4)}$  [23] sont :

$$\alpha^{(2)} \approx \frac{1}{4} \quad \alpha^{(4)} \approx \frac{1}{256} \quad (\text{IV.48})$$

#### IV.2.2.5 Conditions aux limites

Un tel schéma numérique destiné à la résolution d'équations d'Euler, nécessite un traitement spécial des conditions aux limites et de s'avoir adapter convenablement ces dernières au problème posé. La diversité des conditions aux limites à imposer dépend essentiellement de la nature d'écoulement entrant ou sortant à travers les surfaces frontières. Afin de concevoir une idée globale et précise sur l'adaptation des conditions aux limites au l'un de deux cas possibles d'état d'écoulement : subsonique ou supersonique à travers les frontières limitant le domaine de calcul, on considère le cas unidimensionnel schématisé par la figure IV.5.



- Conditions numériques: leur nombre est lié étroitement au nombre total de la première catégorie. A l'entrée du domaine computationnel, ce nombre est déterminé par les valeurs propres négatives (caractéristiques sortantes). Pour cela, l'information se propage de l'intérieur du domaine computationnel vers les surfaces frontières sur lesquelles l'état d'écoulement est déterminé numériquement et considéré comme étant une partie de la solution finale. Cependant à la sortie, le nombre des conditions numériques est égal à celui des valeurs propres positives.

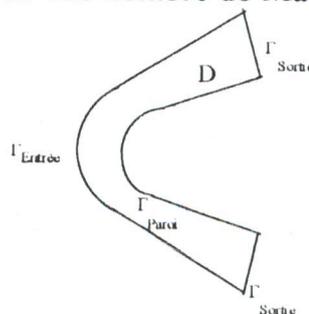
Dans le cas d'écoulement monodimensionnel, le nombre de variables indépendantes égal à trois et par conséquent le nombre des conditions physiques ou numériques se propage entre zéro et trois (quatre dans le cas bidimensionnel). Les différents cas possibles sont résumés dans la table (IV.2)

	Subsonique	Supersonique
Entrée	conditions physiques : $w_1, w_2$	$w_1, w_2, w_3$
	conditions numériques : $w_3$	--
Sortie	conditions physiques : $w_3$	--
	conditions numériques : $w_1, w_2$	$w_1, w_2, w_3$

**Table. IV.2.** Conditions physiques et numériques pour un écoulement monodimensionnel

L'analyse précédente des conditions aux limites dans le cas monodimensionnel reste valable dans le cas bidimensionnel en remplaçant la composante de la vitesse unidimensionnelle  $u$  par la composante normale de la vitesse  $v_n$ . A cet effet, les valeurs propres sont  $v_n$  qui définit la composante normale de la vitesse et les deux valeurs  $v_n \pm c$  associées aux ondes acoustiques.

Du fait que notre étude entre dans le cadre de simulation des écoulements hypersoniques autour d'un corps arrondi, le domaine computationnel et ses frontières sont schématisés sur la figure IV.6. Ainsi, l'écoulement à travers les frontières  $\Gamma_{\text{Entrée}}$  et  $\Gamma_{\text{Sortie}}$  est supersonique du point de vue nombre de Mach supérieur à 1.



**Fig.IV.6.** Domaine computationnel pour un écoulement devant un obstacle arrondi

Tenant en compte de l'analyse précédente (1D), le comportement des lignes caractéristiques et le nombre des conditions physiques à imposer sur chaque frontière (entrée, sortie et paroi) dans le présent cas se traduit comme suit :

- **A l'infini amont ( $\Gamma_{\text{Entrée}}$ ):**

L'écoulement est hypersonique ( $M_\infty \gg 1$ ) (supersonique selon l'aspect des directions caractéristiques) dans la direction normale à la surface frontière  $\Gamma_{\text{Entrée}}$  (Fig.IV.7). Dans ce cas toutes les valeurs propres sont positives ( $v_n, v_n \pm c$ ) et toutes les caractéristiques se dirigent de la frontière vers l'intérieur du domaine D; cela entraîne d'imposer toutes les conditions comme étant des conditions aux limites physiques. Par exemple: les conditions amont  $\rho_\infty, M_\infty, p_\infty$ .

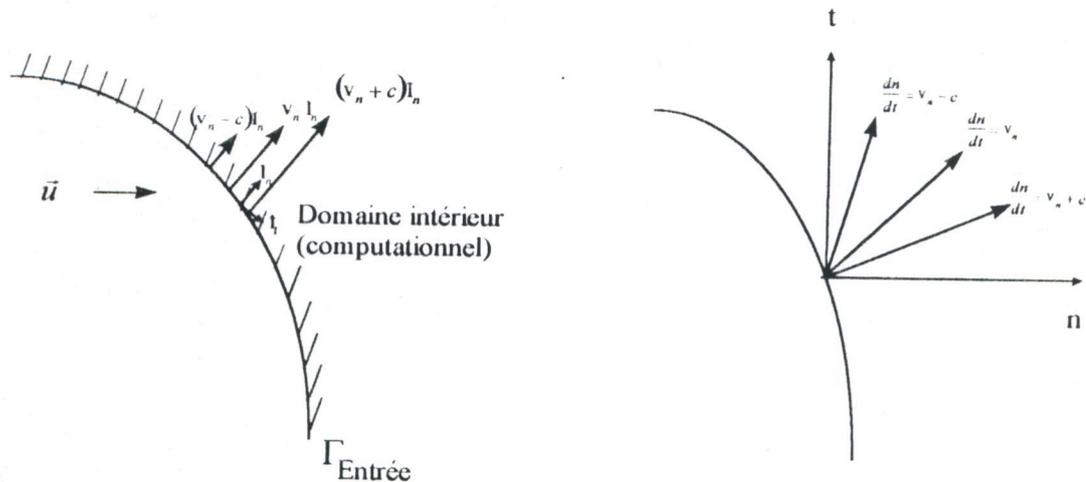


Fig.IV.7. Surface frontière : Entrée supersonique dans le cas bidimensionnel

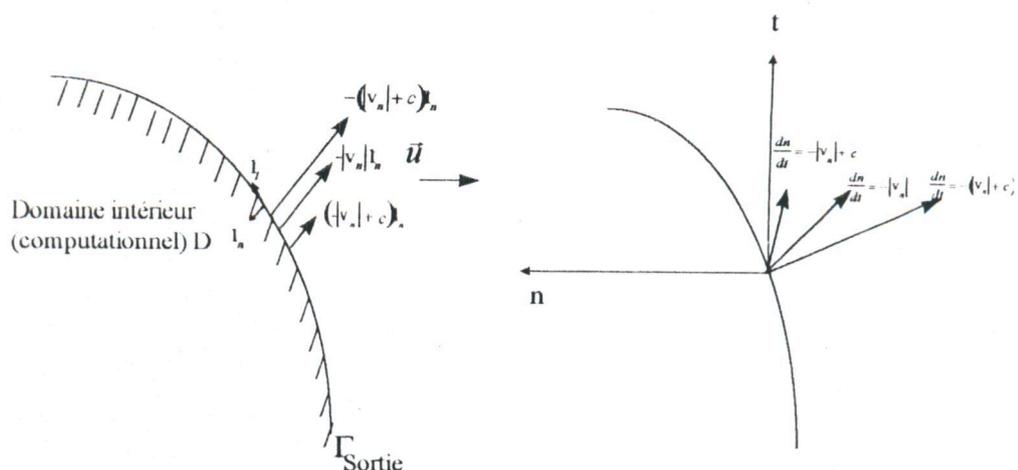
**Remarque :**

$\vec{l}, \vec{n}$ : vecteurs tangentiel et normal à la surface frontière, le vecteur  $\vec{n}$  est dirigé vers l'intérieur du domaine computationnel.

$\vec{l}_t, \vec{l}_n$ : les vecteurs unitaires associés.

- **Sortie supersonique ( $\Gamma_{\text{Sortie}}$ ):**

Dans ce cas, toutes les lignes caractéristiques se dirigent de l'intérieur vers la surface frontière  $\Gamma_{\text{Sortie}}$  (Fig.IV.8). A cet effet, on n'impose aucune condition physique; l'état d'écoulement sur la frontière  $\Gamma_{\text{Sortie}}$  est lié numériquement aux états des mailles internes adjacentes (conditions aux limites numériques).



**Fig.IV.8.** Surface frontière: Sortie supersonique dans le cas bidimensionnel

• **A La paroi ( $\Gamma_{\text{Paroi}}$ ):**

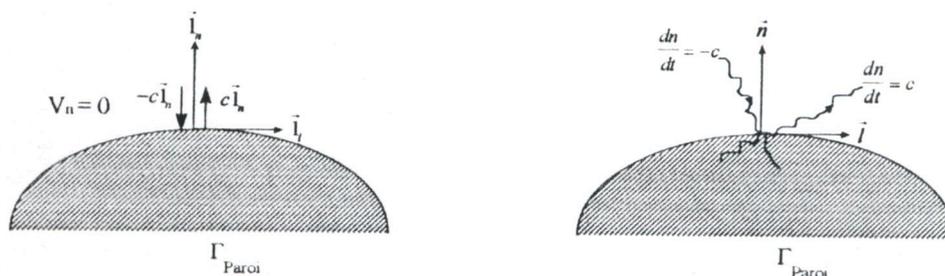
Une seule condition physique à imposer : la vitesse normale à la paroi est nulle ( $v_n = 0$ ). Cette dernière est traduite par une seule ligne caractéristique qui se dirige de la paroi vers l'intérieur du domaine (D) (Fig.IV.9). Les variables manquantes définissant l'état d'écoulement à la paroi, en particulier : la pression et la vitesse tangentielle sont déterminées numériquement en partant de celles de mailles internes adjacentes.

Du fait que la vitesse normale  $v_n$  à la paroi est nulle, toutes les composantes du flux convectif à travers la paroi s'annulent et la composante normale du vecteur flux se réduit à l'expression :

$$\vec{F} \cdot \vec{I}_n = (F \vec{i} + G \vec{j}) \cdot \vec{I}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho n_x \\ \rho n_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

où :  $\vec{F}$  et le vecteur flux, et  $n_x, n_y$  les composantes du vecteur normal unitaire dans un système de coordonnées cartésiennes.

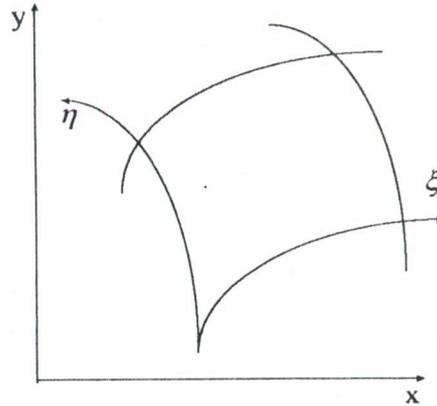
On constate que à la paroi, seule la contribution de la pression est considérée.



**Fig.IV.9.** Surface frontière : Paroi d'obstacle dans le cas bidimensionnel

### IV.2.2.6 Transformation des équations d'Euler en coordonnées généralisées

Souvent, avant d'appliquer les algorithmes de résolution, le système des équations d'Euler doit être transformé du domaine physique de coordonnées  $(x, y)$  vers le domaine computationnel (de calcul) de coordonnées généralisées  $(\xi, \eta)$  (Fig.IV.10). La raison principale de ce changement du domaine est l'adaptation du maillage aux méthodes de différences finies qui se basent dans leur implémentation sur des mailles rectangulaires. Ainsi de transformer des surfaces à géométries complexes à des lignes de coordonnées constantes.



**Fig.IV.10.** Systèmes de coordonnées cartésiennes et généralisées

Dans le cas bidimensionnel, le système d'équations d'Euler (IV.1) écrit dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  peut être transformé à celui de coordonnées généralisées  $(\xi, \eta)$  comme suit : [19, 29]:

$$\frac{\partial U'}{\partial \alpha} + \frac{\partial F'}{\partial \xi} + \frac{\partial G'}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{IV.49})$$

où :

$$F' = \frac{\xi_x F + \xi_y G}{J}$$

$$G' = \frac{\eta_x F + \eta_y G}{J}, \quad U' = \frac{U}{J}$$

avec  $J$  est la jacobienne de la transformation de système de coordonnées  $(x,y)$  au système  $(\xi, \eta)$ .

Les sous indices désignent la dérivation partielle.

Tenant compte des relations :

$$\eta_y = Jx_\xi, \quad \eta_x = -Jy_\xi, \quad \xi_y = -Jx_\eta, \quad \xi_x = Jy_\eta$$

et  $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1}$ , le système (IV.49) est bien défini et similaire à celui de (IV.1). Ainsi, tous les aspects physiques et mathématiques présentés précédemment (conditions aux limites, viscosité artificielle) restent valables.

### IV.2.3 Extension d'algorithme de résolution d'équations d'Euler à un mélange de gaz réactifs à l'équilibre

#### IV.2.3.1 Adaptation à un mélange gazeux

On dispose au départ d'un algorithme capable de résoudre les équations du système d'Euler dans le cas d'un gaz inerte. On commence par adapter cette méthode au cas d'un gaz à composition variable. La technique utilisée est décrite dans [55]. Pour les écoulements hypersoniques à l'équilibre chimique, il a été observé que le schéma numérique dans lequel le "pas chimie" consiste en la résolution algébrique des lois d'action de masse gagne largement en robustesse lorsqu'on résout les équations d'Euler en introduisant la notion de "γ équivalent" qui nous permet de garder la même formulation d'équations d'Euler que pour le cas d'un gaz calorifiquement parfait.

Ainsi, les écoulements réactifs à l'équilibre chimique ne nécessitent aucune résolution d'équation différentielle pour la composition chimique contrairement à ceux en hors équilibre chimique (Eq.II.2).

On rappelle ici, pour un gaz parfait (Eq.IV.5):

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad \text{loi d'état,}$$

où :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

on a alors :

$$c^2 = \frac{\mathcal{P}}{\rho}$$

Dans le cas général,  $p = p(\rho, e)$ , cette vitesse s'exprime par la relation :

$$c^2 = p_\rho + \frac{p}{\rho^2} p_e \quad (\text{IV.50})$$

cette relation nécessite des dérivées partielles de la loi d'état, le calcul de  $c$  par (IV.50) va augmenter sensiblement le temps de calcul de la solution.

Pour éviter cela, on adopte une méthode qu'on peut appeler "pseudo-vitesse du son". Pour un mélange à composition variable, on tire la pression de la loi d'état :

$$p = \rho RT \sum_I \frac{Y_I}{M_I} \quad (\text{IV.51})$$

on peut formellement définir un paramètre  $\tilde{\gamma}$  dit "pseudo- $\gamma$ " ou " $\gamma$ -équivalent" tel que :

$$p = (\tilde{\gamma} - 1) \rho e \quad (\text{IV.52})$$

dans le système d'équations d'Euler, le " $\gamma$ -équivalent"  $\tilde{\gamma}$  est encore noté  $\gamma$ .  
On déduit une pseudo-vitesse du son  $c$  et un pseudo nombre de Mach tels que :

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} \quad \text{et} \quad M = \frac{V}{c}$$

Les effets des gaz réactifs à l'équilibre chimique apparaissent seulement dans la loi d'état (IV.51), laquelle relie la pression aux température, densité et composition chimique. La température est, pour une composition donnée, calculée itérativement à partir de l'énergie interne.

#### IV.2.3.2 Modèle chimique

Le fluide considéré est l'air, qui, dans les conditions normales de température, se compose principalement d'oxygène et d'azote moléculaires.

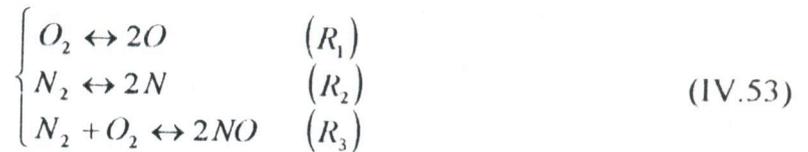
L'équilibre thermique et chimique est déterminé à partir de la donnée de deux grandeurs thermodynamiques indépendantes. Ayant fixé la pression ou la densité et la température, il faut déterminer les fractions massiques  $Y_I$  (molaires  $x_I$ ,  $I = 1, ns$ ) lorsque l'air a atteint l'état d'équilibre. Ces fractions massiques (molaires) déterminées, il suffira de les appliquer dans les différentes formules pour obtenir les propriétés du mélange.

La détermination de ces fractions peut être effectuée de deux manières différentes:

- Si  $ne$  est le nombre d'éléments chimiques et  $ns$  le nombre d'espèces chimiques, on écrit  $ne$  équations de conservation de la masse et  $(ns - ne)$  réactions chimiques indépendantes. Ceci amène à résoudre un système non linéaire de taille  $(ns \times ns)$ .
- Une deuxième méthode consiste à minimiser l'enthalpie libre [21, 60] en respectant les contraintes suivantes :
  - nombre de moles positif.
  - conservation de la masse de chaque élément.

Ceci amène à résoudre un système réduit à  $(ne + 1) \times (ne + 1)$  équations.

Dans notre modèle, nous avons adopté la première méthode en négligeant l'ionisation. Les seules espèces présentes seront donc : O, N, NO, O<sub>2</sub> et N<sub>2</sub> ( $ns = 5, ne = 2$ ). Les réactions chimiques étudiées ( $ns - ne = 3$  réactions) s'écrivent :



La loi d'action de masse donne :

$$\frac{Y_O^2}{Y_{O_2}} = \frac{M_O^2}{M_{O_2}} \frac{K_{c,1}(T)}{\rho}$$

$$\frac{Y_N^2}{Y_{N_2}} = \frac{M_N^2}{M_{N_2}} \frac{K_{c,2}(T)}{\rho} \quad (IV.54)$$

$$\frac{Y_{NO}^2}{Y_{O_2} Y_{N_2}} = \frac{M_{NO}^2}{M_{O_2} M_{N_2}} K_{c,3}(T)$$

Dans ces équations M est la masse molaire, et K<sub>c</sub> la constante d'équilibre basée sur les concentrations massiques.

La création d'espèces à partir de N<sub>2</sub> et O<sub>2</sub> est endothermique, les réactions correspondantes ont donc pour effet de baisser fortement la température. Par définition des fractions massiques, on a :

$$\sum_{I=1}^5 Y_I = 1 \quad (IV.55)$$

la conservation globale des atomes de N et O s'écrit donc :

$$\frac{\left(\frac{Y_{N_2}}{M_N}\right) + \left(\frac{Y_N}{M_N}\right) + \left(\frac{Y_{NO}}{M_{NO}}\right)}{\left(\frac{Y_{O_2}}{M_O}\right) + \left(\frac{Y_O}{M_O}\right) + \left(\frac{Y_{NO}}{M_{NO}}\right)} = \frac{79}{21} \quad (IV.56)$$

car l'air se compose de 79 % d'azote et de 21 % d'oxygène.

Par combinaison de (IV.55) et de (IV.56), on obtient :

$$\begin{cases} Y_{O_2} = \frac{24}{103} - Y_O - \frac{8}{15} Y_{NO} \\ Y_{N_2} = \frac{79}{103} - Y_N - \frac{7}{15} Y_{NO} \end{cases} \quad (IV.57)$$

Le système d'équations formé par la conservation de masse (Eq.IV.57) et la loi d'action de masse (Eq.IV.54) nous permet de déterminer la composition pour une densité (ou pression) et une température quelconque en partant d'un vecteur initial des concentrations massiques. Ainsi, un facteur  $\omega$  de relaxation est introduit pour accélérer la convergence.

Pour les constantes d'équilibre, nous avons appliqué la méthode de GIBBS [55]. Cette dernière utilise l'énergie libre pour déterminer les constantes  $K_c$ . Ainsi, toutes les propriétés thermodynamiques (enthalpie, chaleur spécifique, ...) des cinq espèces sont définies à l'aide de polynômes (cf : paragraphe II.3.2) dont les coefficients sont tabulés (cf. Annexe A) en considérant deux zones de température :

1. 300-5000 K°
2. 5000-25000 K°.

La température est liée à l'énergie interne et la composition chimique par :

$$e = \sum_{i=1}^5 Y_i h_i(T) - p/\rho \quad (\text{IV.58})$$

aussi,  $e = E - \frac{1}{2}V^2$  ( $V^2 = u^2 + v^2$ )

l'enthalpie de chaque espèce  $I$  est fonction de la température (Eq.II.6). Pour une densité et une énergie interne données (obtenues par résolution du système d'équations d'Euler), le système d'équations (IV.51)-(IV.58) peut être résolu itérativement jusqu'à l'obtention de la composition et la température à l'équilibre chimique.

Ce processus est répété à chaque pas  $\Delta t$  et jusqu'au régime stationnaire.

### IV.3 Calcul de la couche limite compressible bidimensionnelle

Les équations de couche limite étant paraboliques (cf. Paragraphe III.2.3.3), il est possible de les résoudre par des méthodes de marche en espace. Aussi, le problème posé est un problème avec condition initiale. La solution des équations au point d'arrêt étant singulière, il faut donc utiliser une procédure spéciale en ce point. Le calcul peut ensuite se poursuivre en avançant pas à pas le long du corps.

#### IV.3.1 Calcul du point d'arrêt

La solution des équations de couche limite au point d'arrêt peut être recherchée par plusieurs méthodes soit sous forme d'un développement en séries de Blasius suivant les puissances entières de l'abscisse curviligne [52], soit on fait appel aux solutions de similitude en utilisant le changement de variables [10, 16].

Dans le cas compressible bidimensionnel, en introduisant le changement de variables de Levy-Lees, les équations de couche limite bidimensionnelle deviennent des équations différentielles ordinaires. Ce dernier possède tous les avantages apportés par les transformations de Mangler, de Howarth, Hlingworth et Stewartson et la transformation de Blasius [16].

Les variables de Lees sont définies par :

$$\zeta = \int_0^{\xi} \rho_p \mu_p u_e r^{2j} d\xi \quad ; \quad Y = \frac{u_e r^j}{(2\zeta)^{1/2}} \int_0^{\eta} \rho d\eta$$

où l'indice "p" est relatif à des valeurs prises à la paroi.

On pose :

$$\frac{u}{u_e} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{X}}; \quad \frac{h_1}{h_e} - 1 = g;$$

et on note :

$$f = \int_0^Y \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{X}} dY; \quad f' = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{X}}; \quad f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}; \quad g' = \frac{\partial g}{\partial Y}; \quad N = \frac{\rho \mu}{\rho_p \mu_p}$$

Les équations de similitude sont identiques à celles de la solution de Fay-Ridell au point d'arrêt [10]. Pour le cas d'un gaz non réactif on obtient :

- équation de quantité de mouvement :

$$(Nf'')' + ff'' + \frac{1}{1+j} \left( \frac{\rho_e}{\rho} - f'^2 \right) = 0 \quad (IV.59)$$

- équation d'énergie :

$$\left( N \frac{1}{Pr} g' \right)' + fg' = 0 \quad (IV.60)$$

avec  $j = 0$  dans le cas bidimensionnel plan.  
Les dérivées sont prises par rapport à  $Y$ .

Les solutions de Fay-Riddell fournissent aussi le flux de chaleur pariétal :

$$\frac{\phi_p}{h_w} = -\frac{1}{\text{Pr}} \left( \rho_p \mu_p \left( \frac{du_e}{d\xi} \right)_0 (1+j) \right)^{1/2} g'(0)$$

la quantité  $\left( \frac{du_e}{d\xi} \right)_0$  représente la dérivée de la vitesse extérieure au point d'arrêt.

### IV.3.2 Discrétisation des équations de couche limite

Une fois obtenue la solution de départ au point d'arrêt, les équations de couche limite sont intégrées le long du corps. Pour réaliser cette intégration, différentes méthodes existent. Pour en avoir une revue complète, il suffit de se reporter aux ouvrages spécialisés [10, 16].

Quasiment toutes les méthodes étant des méthodes de marche en espace. Dans notre étude, nous avons appliqué un schéma aux différences finies implicite. Ce dernier est applicable pour les équations de couche limite du 1<sup>er</sup> ordre (de Prandtl) et aussi pour la couche limite du 2<sup>ème</sup> ordre. Cependant, dans ce qui suit, ce schéma sera exposé pour la couche limite de Prandtl classique et sera la même chose en annexe C pour les équations de couche limite du 2<sup>ème</sup> ordre. Les termes de perturbation supplémentaires sont traités comme des termes sources.

En reprenant les équations de zone interne, ordre 1, décrites dans le paragraphe III.2.3.3. Pour simplifier, on considère que le cas bidimensionnel plan ( $j=0$ ).

#### IV.3.2.1 Discrétisation des équations de quantité de mouvement

Le terme de convection est discrétisé entre le point amont d'indice  $(n,j)$  et le point  $\bar{\eta}_j$  d'indice  $(n+1,j)$ , la station où la vitesse est inconnue.

Avec :

- $n$  : indice suivant l'abscisse curviligne  $\xi$  ;
- $j$  : indice selon  $\bar{\eta}$  (direction normale à la paroi).

Le terme de diffusion est discrétisé simplement sur 3 points entre  $\bar{\eta}_{j-1}$  et  $\bar{\eta}_{j+1}$ , l'indice  $j$  varie de 1 à la paroi ( $\bar{\eta} = 0$ ) à  $j_{\max}$  ( $j_{\max} = J$ ) à l'extérieur de la couche limite. Par la suite, on utilisera les notations :

$$\Delta_j = \frac{\bar{\eta}_{j+1} - \bar{\eta}_{j-1}}{2} \quad \text{et} \quad \Delta_{j+1/2} = \bar{\eta}_{j+1} - \bar{\eta}_j$$

On obtient aussi, pour l'équation de quantité de mouvement suivant  $\xi$  (Eq. III.26) :

$$\rho_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = [\rho_1 u_1]_j \frac{[u_1]_j^{n+1} - [u_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \quad (\text{IV.61a})$$

$$\rho_1 \bar{v}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = [\rho_1 \bar{v}_1]_j \frac{[u_1]_{j+1}^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \quad (\text{IV.61b})$$

à l'extérieur de la couche limite, on a :

$$-\frac{\partial p}{\partial \xi} = \rho_e U_e \frac{dU_e}{d\xi_e}$$

où l'indice "e" est relatif à des valeurs calculées à l'extérieur de la couche limite.

d'où :

$$\rho_e U_e \frac{dU_e}{d\xi_e} = [\rho_e U_e]_j \frac{[u_1]_j^{n+1} - [u_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \quad (\text{IV.61c})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) = \left( [\mu_1]_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{[u_1]_{j+1}^{n+1} - [u_1]_j^{n+1}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} \Delta_j} - [\mu_1]_{j-\frac{1}{2}}^n \frac{[u_1]_j^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{\Delta_{j-\frac{1}{2}} \Delta_j} \right) \quad (\text{IV.61d})$$

En regroupant les inconnues, on obtient le système linéaire tridiagonal :

$$a_j [u_1]_{j-1}^{n+1} + b_j [u_1]_j^{n+1} + c_j [u_1]_{j+1}^{n+1} = d_j \quad (\text{IV.62})$$

avec :

$$a_j = \left( \left[ \rho_1 \frac{\bar{v}_1}{2} \right]_j^n - \frac{[\mu_1]_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta_{j-\frac{1}{2}}} \right) \frac{1}{\Delta_j} \quad (\text{IV.63a})$$

$$c_j = \left( \left[ \rho_1 \frac{\bar{v}_1}{2} \right]_j^n - \frac{[\mu_1]_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta_{j+\frac{1}{2}}} \right) \frac{1}{\Delta_j} \quad (\text{IV.63b})$$

$$b_j = \frac{[\rho_1 u_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} - (a_j + c_j) \quad (\text{IV.63c})$$

$$d_j = [\rho_1 u_1]_j \frac{[u_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} + [\rho_e U_e]_j \frac{[u_1]_j^{n+1} - [u_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \quad (\text{IV.63d})$$

### IV.3.2.2 Discrétisation de l'équation d'énergie

Cette équation écrite pour la température  $t_1$  (Eq.III.28), est discrétisée de façon tout à fait analogue à celle des équations de quantité de mouvement.

$$\rho_1 u_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi} = [\rho_1 u_1]_j^n \frac{[t_1]_j^{n+1} - [t_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \quad (\text{IV.64a})$$

$$\rho_1 \bar{v}_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} = [\rho_1 \bar{v}_1]_j^n \frac{[t_1]_{j+1}^{n+1} - [t_1]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \quad (\text{IV.64b})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} \right) = \left( \left[ \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \right]_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{[t_1]_{j+1}^{n+1} - [t_1]_j^{n+1}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} \Delta_j} - \left[ \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \frac{[t_1]_j^{n+1} - [t_1]_{j-1}^{n+1}}{\Delta_{j-\frac{1}{2}} \Delta_j} \right) \quad (\text{IV.64c})$$

$$\mu_1 \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} \right)^2 = [\mu_1]_j^n \left( \frac{[u_1]_{j+1}^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \right)^2 \quad (\text{IV.64d})$$

En regroupant les inconnues à la station  $n+1$ , on obtient le système linéaire tridiagonal pour les  $J-2$  inconnues :

$$a_j [t_1]_{j-1}^{n+1} + b_j [t_1]_j^{n+1} + c_j [t_1]_{j+1}^{n+1} = d_j \quad (\text{IV.65})$$

avec :

$$a_j = \left( \left[ \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \right]_{j-\frac{1}{2}}^n - \left[ \rho_1 \frac{\bar{v}_1}{2} \right]_j^n \right) \frac{1}{\Delta_j} \quad (\text{IV.66a})$$

$$c_j = \left( \left[ \rho_1 \frac{\bar{v}_1}{2} \right]_j^n - \left[ \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \right]_{j+\frac{1}{2}}^n \right) \frac{1}{\Delta_j} \quad (\text{IV.66b})$$

$$b_j = \frac{[\rho_1 u_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} - (a_j + c_j) \quad (\text{IV.66c})$$

$$d_j = [\rho_1 u_1]_j^n \frac{[t_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} + [\mu_1]_j^n \left( \frac{[u_1]_{j+1}^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \right)^2 - [u_1]_j^n [\rho_e U_e]_j^n \frac{[u_1]_j^{n+1} - [u_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \quad (\text{IV.66d})$$

la forme finale de la discrétisation des équations de quantité de mouvement et d'énergie peut s'écrire :

$$a_j [\varphi]_{j-1}^{n+1} + b_j [\varphi]_j^{n+1} + c_j [\varphi]_{j+1}^{n+1} = d_j$$

avec  $\varphi$  représente  $u_1$  ou  $t_1$ .

Ce qui conduit à résoudre, à l'aide de la méthode de Thomas, un système tridiagonal pour  $(j_{\max}-2)$  inconnues pour chaque équation. La méthode de Thomas pour l'inversion des matrices tridiagonales est présentée en annexe C.

Après avoir calculer la vitesse et la température, pour les écoulements compressibles, l'équation d'état (Eq.III.29) est utilisée pour réévaluer la masse volumique.

#### IV.3.2.3 Equation de continuité

L'intégration de l'équation de continuité venant après celle des équations de quantité de mouvement et d'énergie,  $u_1$  et  $\rho_1$  sont connus à la station  $(n+1, j)$ . Toutes les quantités, y compris  $\bar{v}_1$ , sont connues à la station  $(n+1, j-1)$ . L'équation de continuité III.25 donne :

$$\frac{[\rho_1 u_1]_j^{n+1} - [\rho_1 u_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} + \frac{[\rho_1 \bar{v}_1]_{j+1}^{n+1} - [\rho_1 \bar{v}_1]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} = 0 \quad (\text{IV.67})$$

Les conditions aux limites et les conditions de raccordement avec la zone externe sont déjà signalées précédemment dans le troisième chapitre.

## IV.4 Génération de maillage par des techniques algébriques

Avant de résoudre un tel problème par des méthodes numériques, il faut générer le maillage. En effet, de nombreux développements des techniques de génération de maillage ont été effectués, notamment en ce qui concerne les problèmes à deux dimensions [5, 18, 26] pour des résolutions numériques utilisant, soit les volumes finis ou les différences finies.

Compte tenu de la grande variété des travaux relatifs à la génération de maillage qui existent dans la littérature, nous nous limiterons à ceux qui connaissent une grande application en aérodynamique. Ces travaux [15, 16] utilisent essentiellement les méthodes des différences finies en basant sur la résolution numérique des équations aux dérivées partielles qui se différencient par leur caractère, à savoir : elliptique (les équations de Poisson et les équations de Laplace), hyperbolique ou parabolique, ainsi des techniques algébriques.

Dans notre étude, nous avons utilisé la méthode des techniques algébriques. Cette dernière est présentée en détail dans les références [15, 16]. Néanmoins, ceci n'empêche pas de rappeler dans ce qui suit ses principales caractéristiques :

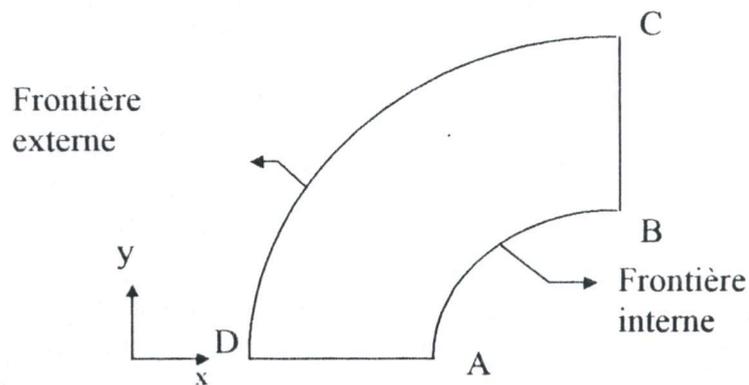
- Maillage orthogonal : Puisque, dans le code de couche limite, les équations sont discrétisées selon la normale à la paroi, les techniques algébriques nous permettent d'obtenir un maillage orthogonal en basant sur une interpolation linéaire explicite entre les frontières et les surfaces intermédiaires afin de générer les points intérieurs.
- Répartition des lignes coordonnées et raffinement de maillage : Un paramètre qui peut jouer un rôle très important dans certains problèmes physiques est la répartition des lignes coordonnées dans le maillage. Une répartition qui prend en compte les régions sensibles du problème physique, c'est le cas notamment des problèmes de couche limite ou l'apparition d'onde de choc. Ce problème est contrôlé souvent par les fonctions de condensation unidimensionnelles "Stretching functions".

En suite, on introduit la technique de deux parois qui est illustrée par un canal bidimensionnel courbe (Fig.IV.11). cette dernière est indispensable afin de générer le maillage initial en introduisant les fonctions de condensation pour contrôler la distribution des points au dessus et au dessous des frontières AB et DC. Puis, des surfaces intermédiaires seront introduites pour renforcer l'orthogonalité.

Dans notre cas nous avons limité leur nombre à quatre (04); c'est-à-dire : les deux surfaces frontières: AB, DC et les deux autres surfaces sont des surfaces intermédiaires

obtenues par interpolation linéaire en partant d'une part de la surface AB pour définir la 2<sup>ème</sup> surface intermédiaire et d'autre part en interpolant à partir de la surface externe (DC) pour obtenir la troisième.

En ce qui concerne la frontière externe, qui délimite le domaine physique est prise de forme C. Cette dernière est bien adaptée aux géométries arrondies et aux écoulements externes.



**Fig.IV.11.** Technique de deux parois

## IV.5 Présentation du code de couche limite hypersonique laminaire "HLBL"

Tenant en compte des caractéristiques du problème posé précédemment et des schémas numériques qu'on a lui approprié pour la résolution, le but principal de notre travail consiste à élaborer un code de calcul permettant d'effectuer les simulations numériques nécessaires du problème considéré.

Le code que nous avons dénommé "HLBL" (Hypersonic Laminar Boundary Layer) est un programme informatique édité en Fortran, nous permet d'effectuer différentes tâches telles que : génération de maillage, calcul énergétique, ainsi que la résolution des équations physiques gouvernant le problème non visqueux et visqueux.

Cette multitâche nous ramène à développer quatre programmes principaux. Le premier sert à générer un maillage orthogonal par des techniques algébriques, tandis que le deuxième permet de résoudre le système d'équations d'Euler bidimensionnel, le troisième résout le problème de couche limite et le quatrième permet de calculer les caractéristiques physico-chimiques de l'air lors de dissociation à l'équilibre thermique et chimique. Ce dernier est appelé par les deux programmes "EULER2D" et de couche limite "CLC2D" dans le cas où on s'intéresse à introduire les effets de gaz réactifs.

Mis à part du programme énergétique que pourra être considéré comme un sous programme dans le cas où ce dernier est appelé par les deux programmes servant à la résolution du système d'équations d'Euler et de couche limite, les autres programmes principaux pouvant être exécutés les uns indépendamment des autres. Cette indépendance nous permet d'améliorer et d'enrichir continûment le code.

Dans ce paragraphe, il ne s'agira pas de présenter en détail tous les modules du code "HLBL" (programmes principaux et leurs sous programmes associés), mais de faire illusion sur les unités essentielles servant à la simulation numérique du problème.

Une illustration du cheminement du code est résumée par l'organigramme présenté ci-dessous.

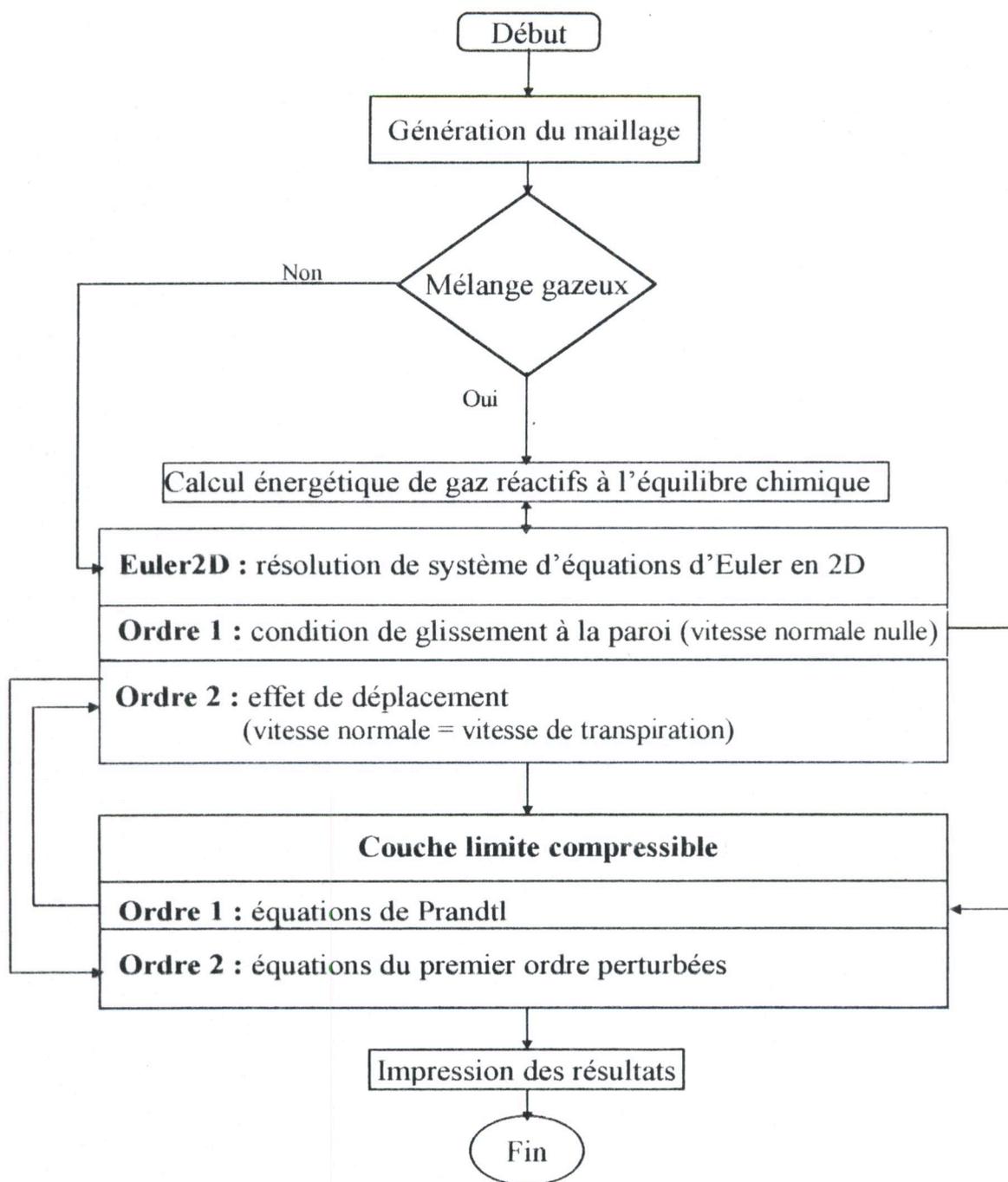


Fig.IV.12. Organigramme du code "HLBL"

### IV.5.1 Présentation du programme de génération de maillage "ORTHO2D"

Le programme "ORTHO2D" permettant de générer un maillage orthogonal avec une configuration de la frontière externe de type en "C" est constitué de deux sous-programmes principaux gérés par un programme principal :

- Sous-programme "STRECH": calcule les fonctions de condensation unidimensionnelles sur les quatre frontières délimitant le domaine physique : AB, BC, CD et AD (Fig.IV.11).
- Sous-programme "SURCH" : en partant des surfaces frontières AB et CD, ce dernier génère les deux surfaces intermédiaires afin d'obtenir un maillage orthogonal par interpolation explicite entre les quatre surfaces résultantes.

On note ici, que les sous-programmes "STRECH" et "SURCH" sont tirés d'un programme de génération de maillage listé dans la référence [16] destiné initialement à la génération de maillage autour du profil NACA 0018. La modification principale qu'on a apporté sur ce programme est le développement d'un programme principal capable de générer des maillages orthogonaux bidimensionnels autour de plusieurs types de géométries arrondies telles que : demi-cylindre, demi-ellipse, deux demi-ellipse, etc. Ainsi, l'avantage majeur qu'on a apporté sur ce programme c'est de le rendre interactif avec les changements brutaux de géométrie qui peuvent être présentés sur quelques configurations d'obstacles, par exemple, le cas de deux demi-ellipse qui approxime le nez de la navette spatiale. Cette interaction est assurée automatiquement par les fonctions de contrôle.

Le déroulement de calcul du programme "ORTHO2D" est résumé par l'organigramme schématisé sur la figure IV.13.

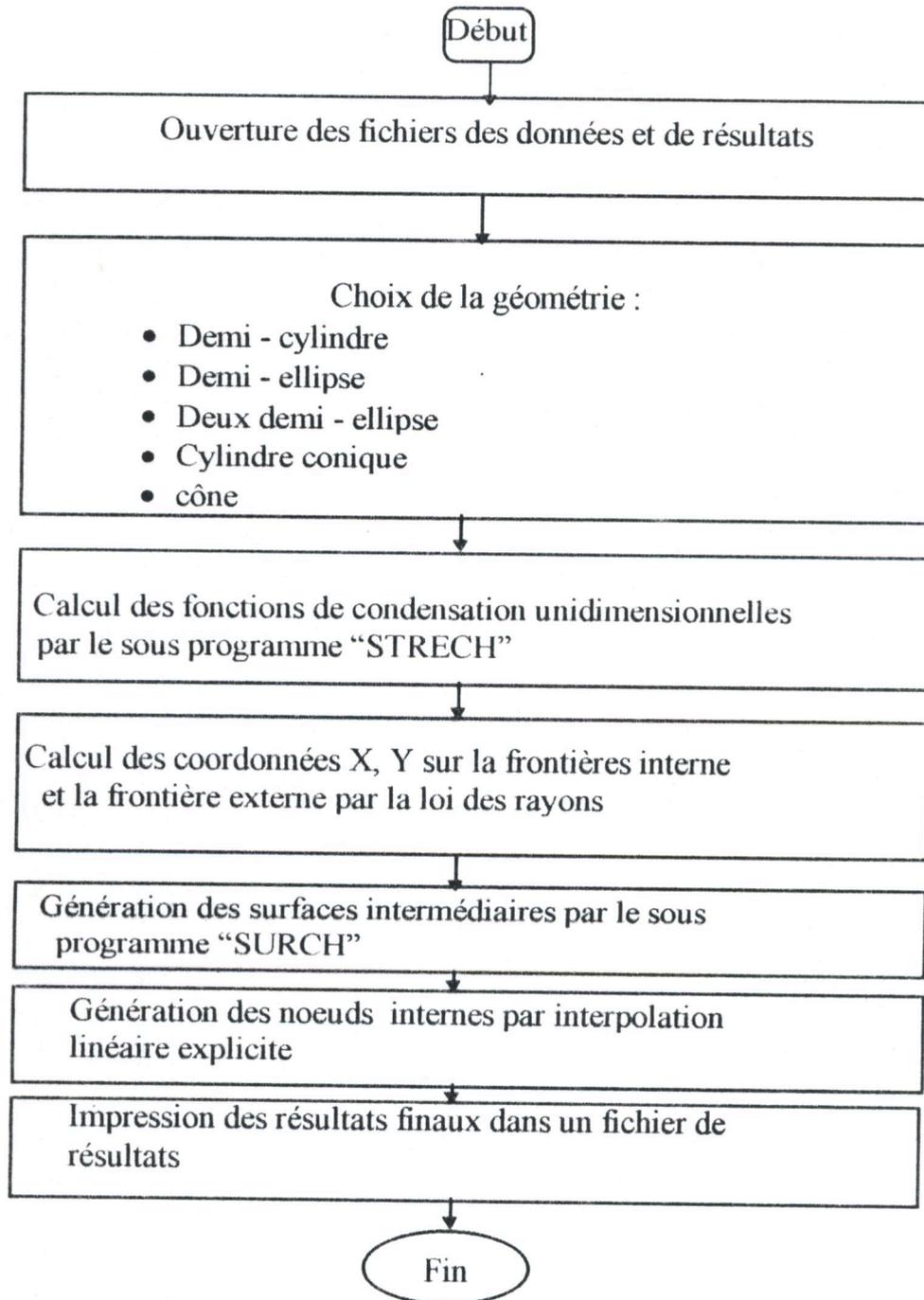


Fig.IV.13. Organigramme du programme "ORTHO2D"

### IV.5.2 Présentation du programme de calcul des effets de gaz réel à l'équilibre chimique "ENERG"

En partant d'une composition initiale de l'air (21 % de  $O_2$  et 79 de  $N_2$ ) et ayant fixé deux grandeurs thermodynamiques, généralement : la pression et la température, le programme "ENERG" nous permet de calculer la composition de l'air à l'équilibre thermique et chimique, ainsi toutes les propriétés du mélange réactif résultant, composé de cinq espèces chimiques ( $O_2$ ,  $N_2$ ,  $NO$ ,  $N$ ,  $O$ ) à savoir : le coefficient de compressibilité, les chaleurs spécifiques du gaz figé et à l'équilibre, l'enthalpie de mélange et les coefficients de transport.

Grâce aux valeurs des coefficients tabulées dans l'annexe A, le programme "ENERG" est capable de calculer les propriétés de l'air à l'équilibre chimique même aux températures élevées. De plus, ce dernier, peut être intégré aisément dans les programmes servant à résoudre le système d'équations d'Euler et de couche limite afin d'évaluer les effets de gaz réels sur les résultats obtenus par ces derniers. La figure IV.14 illustre le déroulement de calcul par un schéma explicatif.

### IV.5.3 Présentation du programme "EULER2D"

Le programme "EULER2D" est considéré comme étant l'un des principaux modules du code "HLBL", car tout calcul ultérieur de couche limite d'ordre 1 et d'ordre 2 sera basé sur la qualité de la solution obtenue par ce dernier.

Ainsi, le programme "EULER2D" a une nature interactive avec les autres modules constituant le code "HLBL". Afin de réaliser une interaction souple, nous avons opté à la construction des interfaces suivantes :

- Interface de maillage : cette dernière, permet de calculer tous les paramètres géométriques et les coefficients métriques en partant d'un fichier de résultats construit par le programme servant à la génération de maillage "ORTHO2D".
- Interface de calcul énergétique : lors de simulation des effets de gaz réactifs, cette interface, permet de démarrer la procédure itérative définie précédemment dans le paragraphe IV.2.3 avec le sous programme "ENERG" pour obtenir la température d'équilibre, la composition chimique et d'autres quantités physiques.
- Interface avec le programme servant à la résolution des équations de couche limite s'il s'agit d'une étude du 2<sup>ème</sup> ordre pour la région externe à travers la vitesse de transpiration (effets de déplacement) résultante de calcul de couche limite du premier ordre.

Le cheminement de calcul et ses principales étapes sont présentés sur la figure IV.15.

#### IV.5.4 Présentation du programme "CLC2D"

Le programme servant à la résolution des équations de couche limite du 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre est dénommé "CLC2D" (Couche Limite Compressible bidimensionnelle).

De même façon que le programme "EULER2D", "CLC2D" est interactif avec les d'autres modules constituant le code "HLBL", particulièrement avec le programme "EULER2D", et le sous programme "ENERG" dans le cas où on s'intéresse au calcul des effets de gaz réel à travers le flux thermique dans l'équation d'énergie.

Mis à part des sous programmes d'interpolation et de raccordement avec l'écoulement externe, le programme "CLC2D" est constitué de cinq sous programmes principaux.

- Sous programme "PROFILINITIAL" : calcule les profils initiaux de couche limite au point d'arrêt en résolvant les équations de similitude. A l'aide de ces profils, le calcul peut ensuite se poursuivre en avançant le long du corps.
- Sous programme "ORDRE1" : nous permet de résoudre les équations de couche limite du premier ordre (de Prandtl).
- Sous programme "ORDRE2" : résout les équations de couche limite du deuxième ordre.
- Sous programme "ENERG" : permet de faire étendre les simulations au cas d'un mélange gazeux visqueux à l'équilibre chimique.
- Sous programme "THOMAS" : utilisé pour résoudre les systèmes tridiagonaux résultant de discrétisation des équations de quantité de mouvement et d'énergie d'ordre 1 ou d'ordre 2.

Le déroulement de calcul est illustré par l'organigramme présenté sur la figure IV.16.

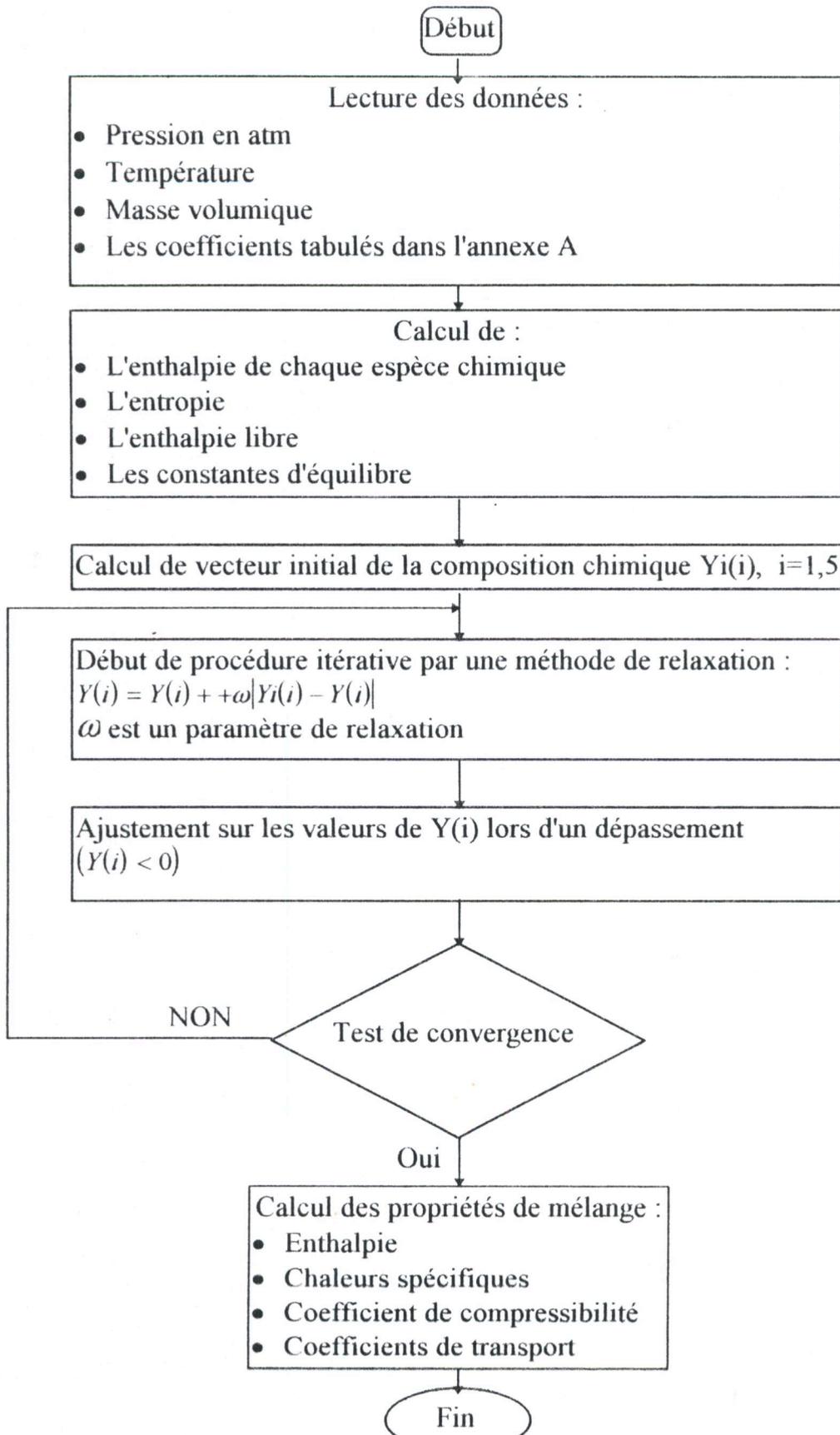


Fig.IV.14. Organigramme du programme "ENERG"

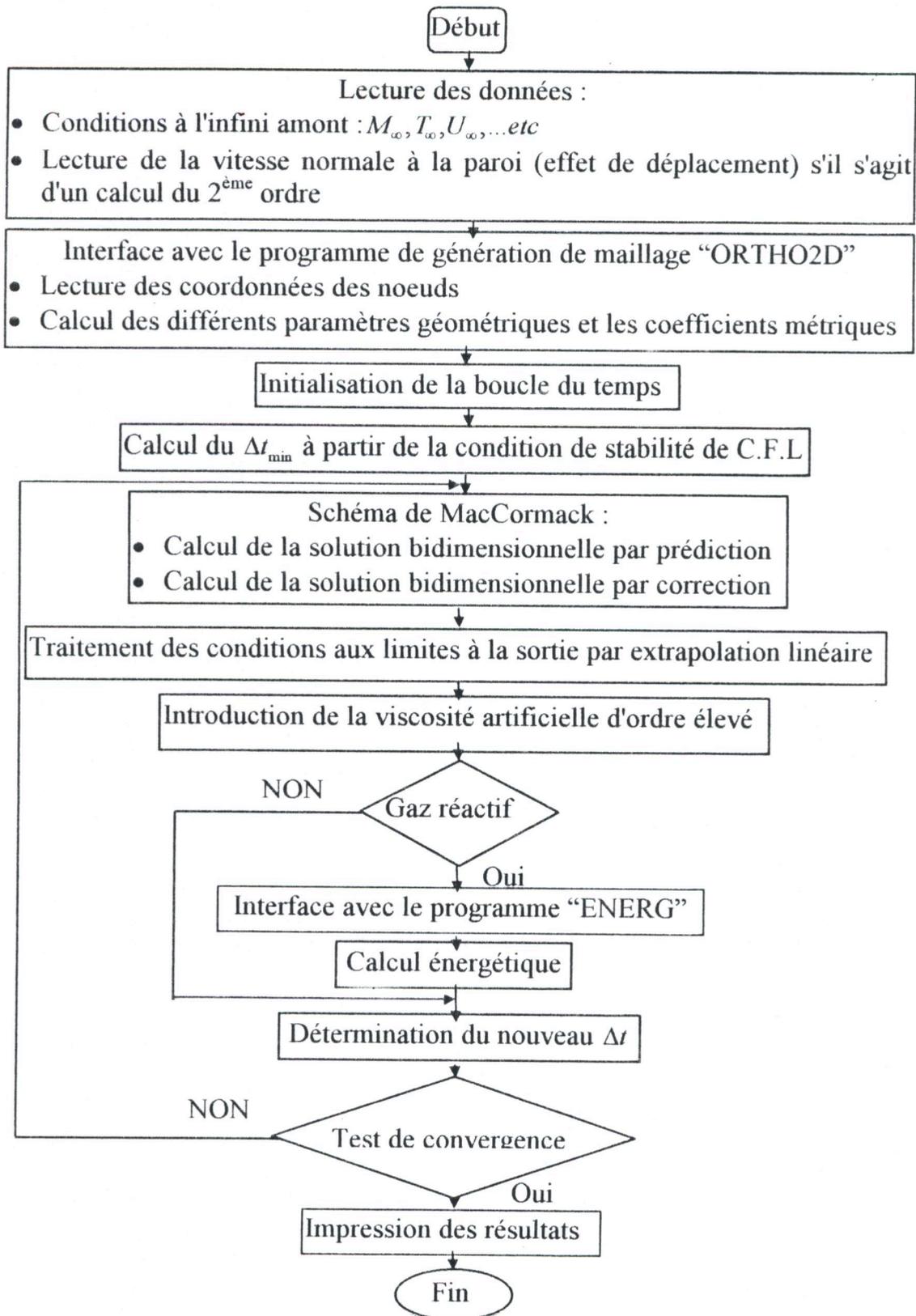


Fig.IV.15. Organigramme du programme "EULER2D"

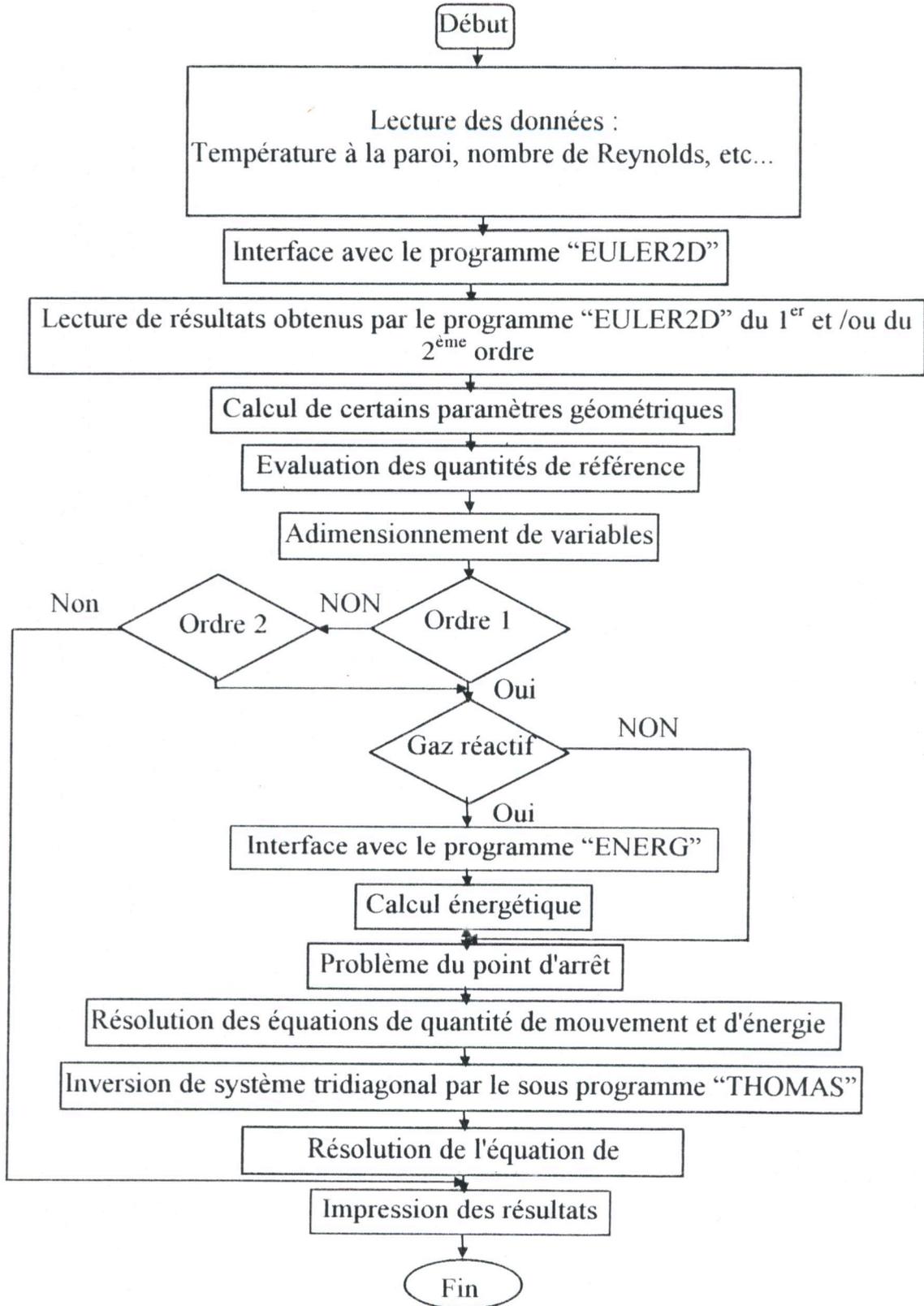


Fig.IV.16. Organigramme du programme "CLC2D"

# Chapitre V

## RESULTATS

### V.1 Introduction

Le code de calcul "HLBL", décrit précédemment a été utilisé pour la simulation numérique du problème de couche limite hypersonique laminaire bidimensionnelle en introduisant les effets de dissociation chimique de l'air autour d'une géométrie arrondie composée d'une portion cylindrique suivie d'un cône (cône arrondi, Fig.V.12). On a choisi ce cas d'application, car ce type de géométrie répond bien aux exigences de la rentrée atmosphérique.

Ainsi, cette configuration a été utilisée dans plusieurs études comme un cas test, ce qui nous permet la confrontation de nos résultats avec ceux publiés dans la littérature spécialisée et cela en fonction de références qui sont à notre disposition.

Avant d'aborder les différents résultats de couche limite obtenus, il convient de mettre en évidence les résultats partiels dus à chaque programme constituant le code global "HLBL" dont le but d'examiner indépendamment l'efficacité et la robustesse du chaque module. A cet effet, nous avons présenté en premier lieu les résultats donnés par le programme "ENERG" afin d'analyser le comportement de l'air à des températures élevées. En deuxième lieu, la robustesse du programme de génération de maillage "ORTHO2D" a été mise en évidence grâce aux divers exemples qu'ont été exécutés.

Par suit, nous avons présenté les résultats obtenus par le programme "EULER2D" qui nous permettent de mettre au point une analyse portant sur la complexité de calcul et l'influence de différents paramètres. Enfin, une mise en valeur des programmes décrits précédemment a été effectuée en exposant les résultats relatifs au problème de couche limite.

### V.2 Propriétés de l'air à l'équilibre chimique

Dont le but de d'écrire les propriétés de l'air à hautes températures, nous avons exécuté le programme "ENERG" indépendamment des autres. Cette exécution permet de calculer la composition, ainsi toutes les propriétés de l'air à l'équilibre chimique pour une pression et une température données.

En effet, le programme "ENERG" utilise une procédure de relaxation itérative, la détermination d'une plage d'exécution optimale est jugée nécessaire. Nous remarquons d'après la figure V.1 qu'un temps de calcul minimum (nombre d'itérations  $\approx 6$ ) est requis pour un facteur de relaxation  $\omega_{opt} = 0.9$ . Cette analyse nous permet de

réduire le temps de calcul global s'il s'agit d'exécution du programme "EULER2D" ou le code "HLBL" en introduisant les effets de dissociation de l'air.

Partant d'une composition donnée de l'air (21 % d'oxygène, 79 % d'azote) et un modèle simplifié dans lequel les espèces en présence sont  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $NO$ ,  $N$  et  $O$ , la figure V.2 donne les fractions massiques des espèces.

On observe que pour une pression donnée et une température croissante, la dissociation de  $O_2$  se produit avec celle de  $N_2$  ; en premier temps, on remarque la dissociation de  $O_2$  puis, après un certain temps on observe la dissociation de  $N_2$ . D'une façon générale, on constate que plus la pression est faible, plus la dissociation est avancée.

La formation des espèces chimiques  $N$  et  $O$  est faite selon une procédure inverse de dissociation de  $N_2$  et de  $O_2$ ; la diminution des fractions massiques de  $N_2$  et  $O_2$  entraîne l'augmentation des fractions massiques de  $N$  et  $O$ .

Lorsque l'oxygène et l'azote sont complètement dissociés, les fractions massiques de  $N$  et de  $O$  prennent les valeurs de la composition initiale de l'air 79 % de  $N$  et 21% de  $O$ . Par contre, le monoxyde d'azote  $NO$  ne se produit que dans une gamme limitée de température; cette gamme devient plus large que la pression est grande avec une concentration de  $NO$  qui reste toujours faible.

Les figures V.3 à V.5 montrent l'évolution de l'enthalpie réduite du mélange à l'équilibre chimique  $\frac{h}{R^*T}$  ( $R^*$  est la constante de l'air inerte;  $R^* = 287.1 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ). La courbe  $\frac{h}{R^*T}$  montre que jusqu'à des températures de l'ordre  $2000 \text{ K}^\circ$ , l'enthalpie n'est fonction que de température (variation linéaire). Ainsi, cette plage de température est caractérisé par un facteur de compressibilité  $Z = 1$ , c'est-à-dire : la masse molaire du mélange reste constante. Ceci dû au fait que les effets de dissociation sont négligeables et l'air se comporte comme un gaz calorifiquement parfait. De plus, ce comportement est confirmé par la figure V.5b où les chaleurs spécifiques sont constantes.

Au delà de la température  $2000 \text{ K}^\circ$ , et à pression donnée on remarque que l'hypothèse de l'air calorifiquement parfait cesse d'être valable. La figure V.5 montre l'évolution rapide des chaleurs spécifiques en fonction de température pour diverses valeurs de pression. Ces dernières possèdent deux pics dans les régions où les fractions massiques de  $O_2$  et  $N_2$  ont une pente maximale comme le montre les figures V.2a et V.2b.

Aussi, on peut dire la même chose pour les courbes d'évolution de facteur de compressibilité où la dissociation complète de  $O_2$ , respectivement de  $N_2$  se traduit par un palier autour de  $Z = 1.2$ , puis un autre autour de  $Z = 2$ . Corrélativement, les courbes présentant l'enthalpie réduite présentent deux paliers.

Afin de montrer l'importance de l'introduction des effets de gaz réel, nous avons comparé les deux courbes présentant les chaleurs spécifiques à pression constante pour

l'air figé et l'air à l'équilibre. La figure V.5c révèle une différence importante entre les deux courbes de telle manière que la valeur de chaleur spécifique de gaz figé peut être négligée devant celle de l'équilibre chimique.

Finalement, en utilisant l'approximation de Wilke présentée dans le deuxième chapitre, les figures V.6 et V.7 donnent l'évolution des coefficients de transport : coefficients de viscosité et de conductibilité thermique de mélange.

On constate que pour des températures allant jusqu'à 4000 K°, ces coefficients ne sont pratiquement fonction que de la température. Au delà de 4000 K°, l'influence de la pression devient alors plus sensible.

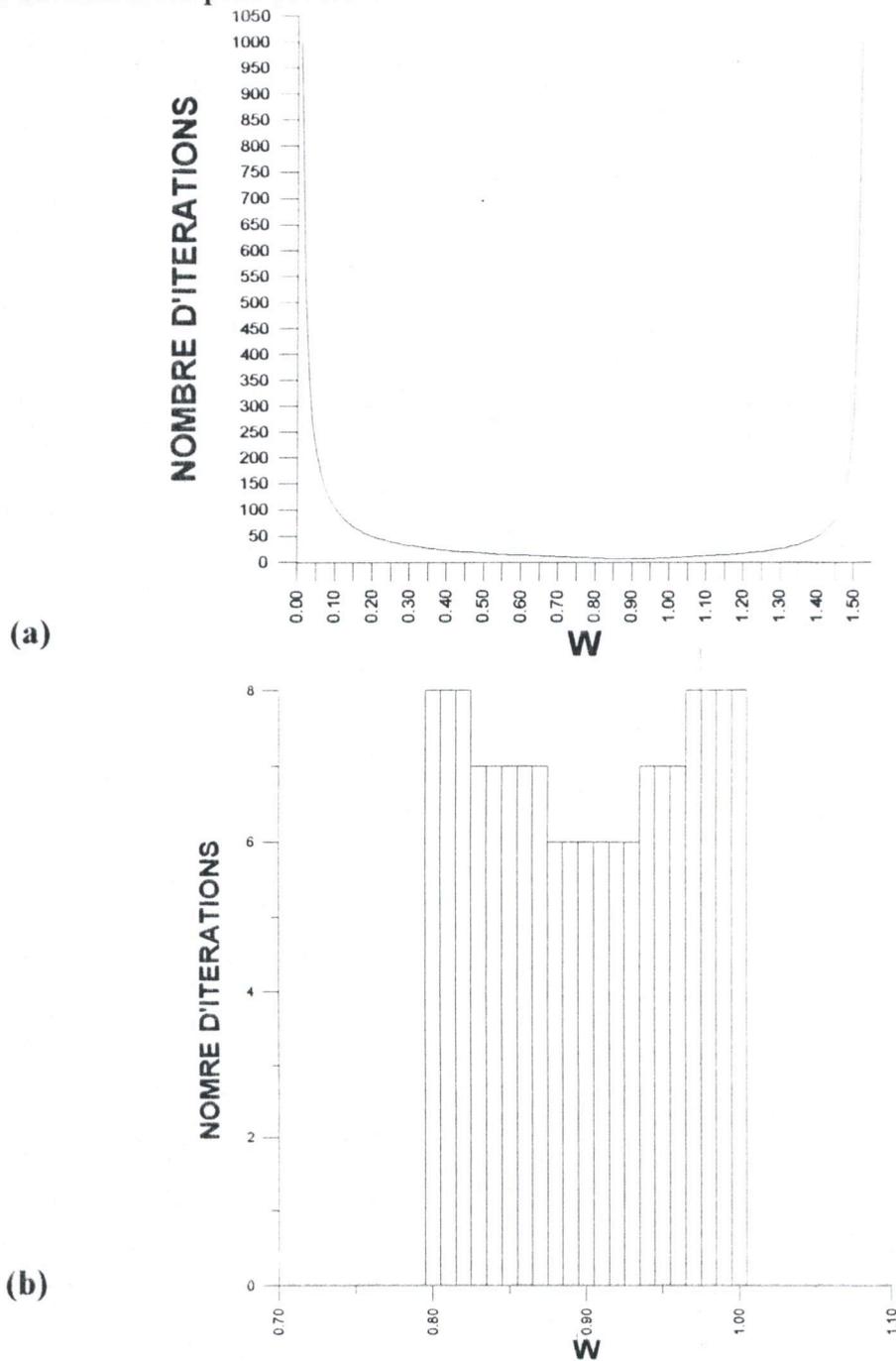
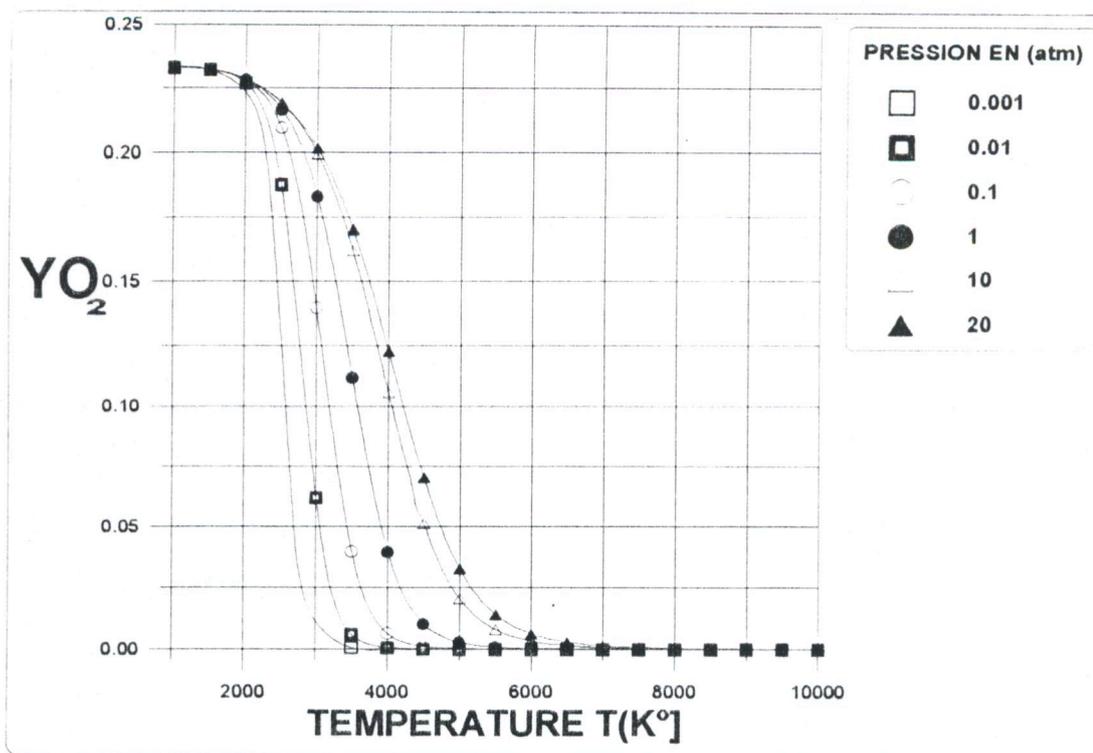
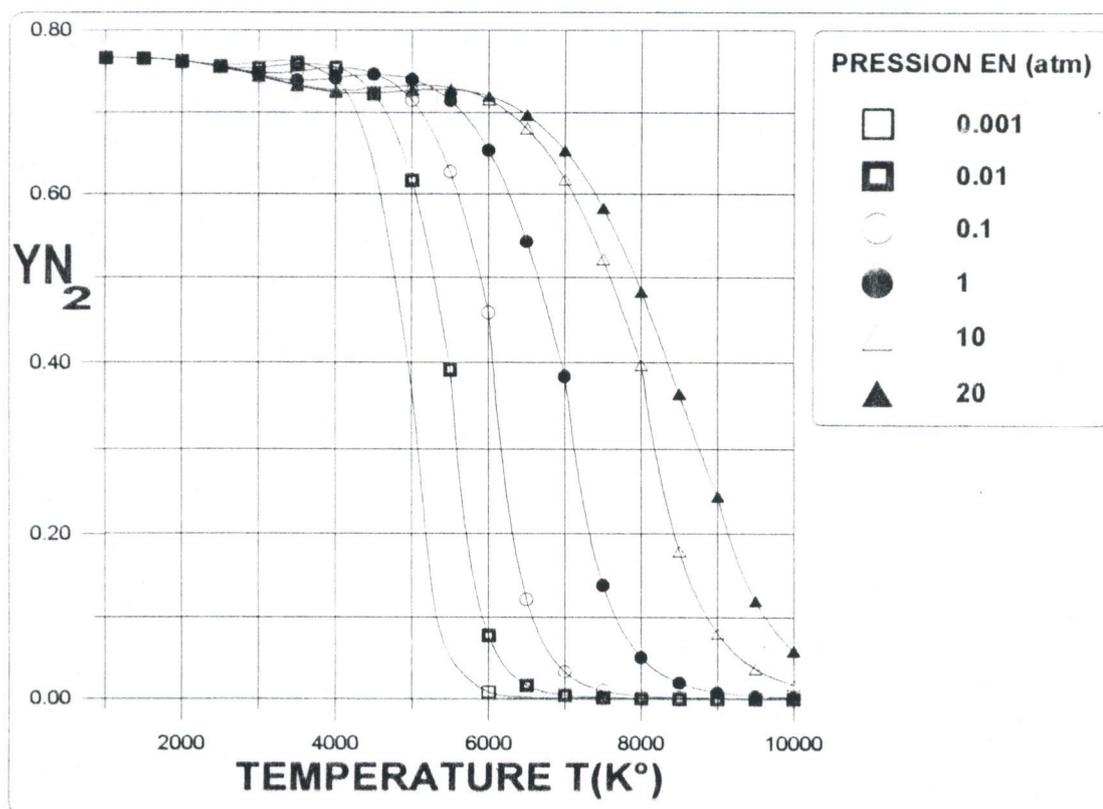


Fig. V.1. Nombre d'itérations en fonction de W pour le calcul énergétique ( $W_{opt}=0.9$ )

Fig.V.2a. Fraction massique de  $O_2$ Fig.V.2b. Fraction massique de  $N_2$

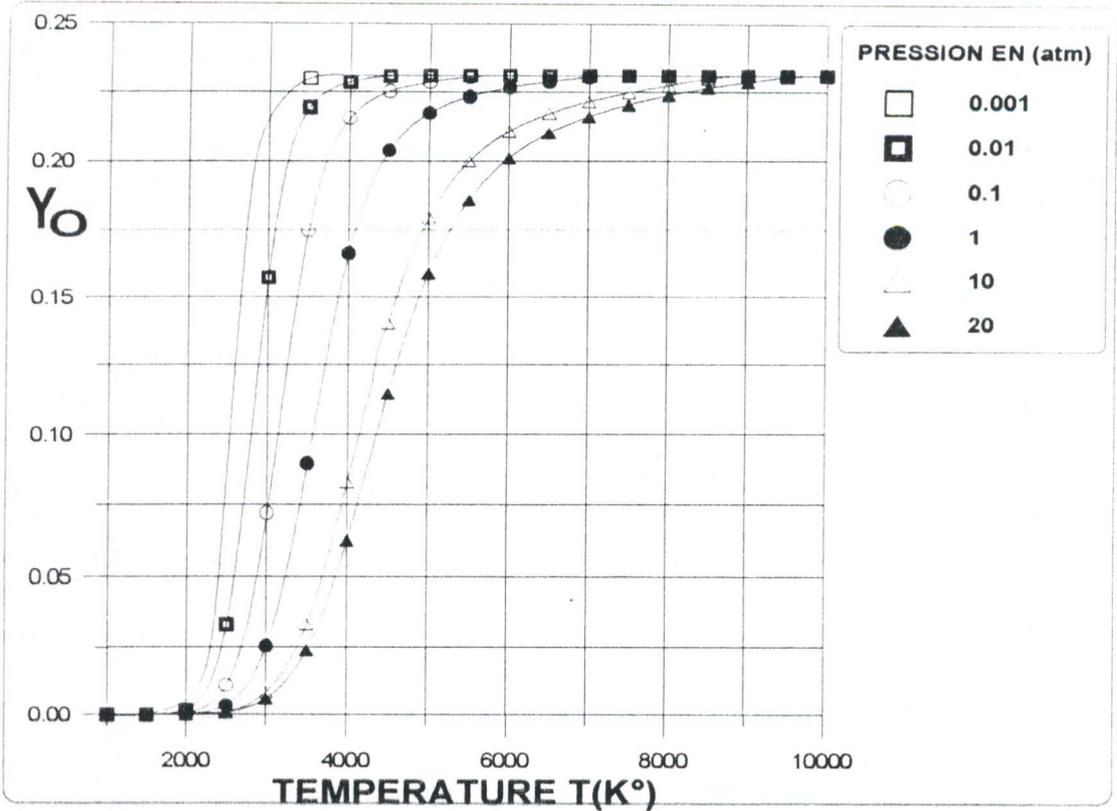


Fig.V.2c. Fraction massique de O

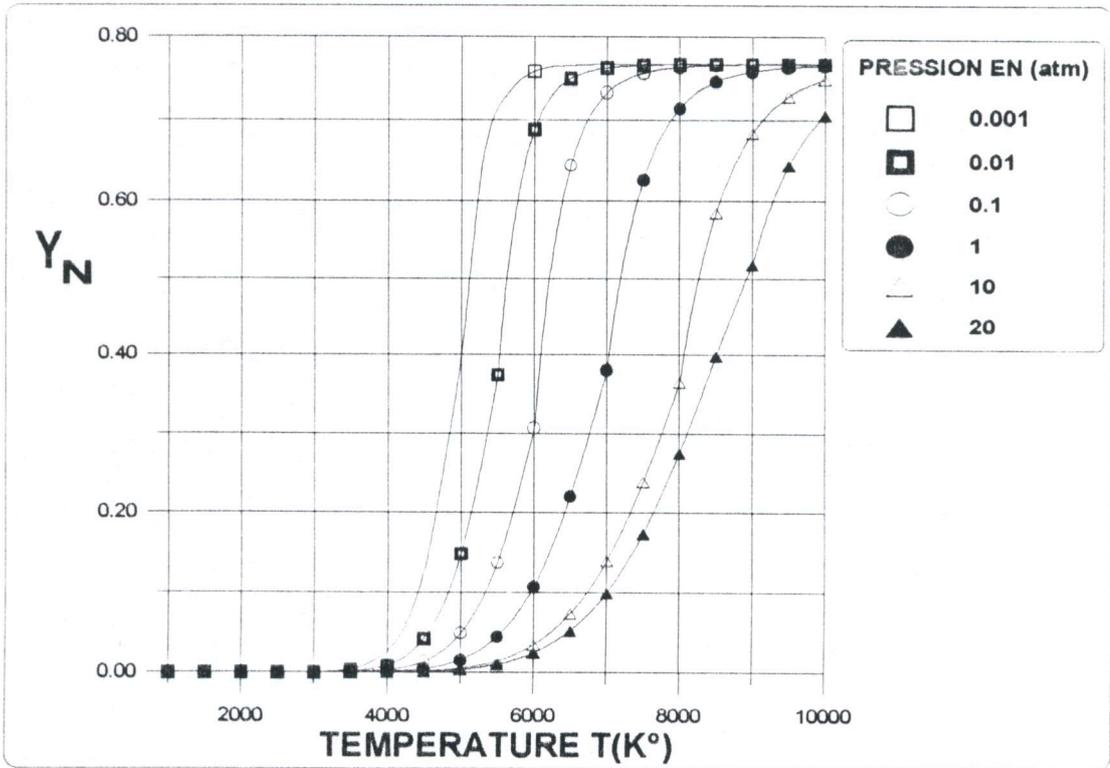


Fig.V.2d. Fraction massique de N

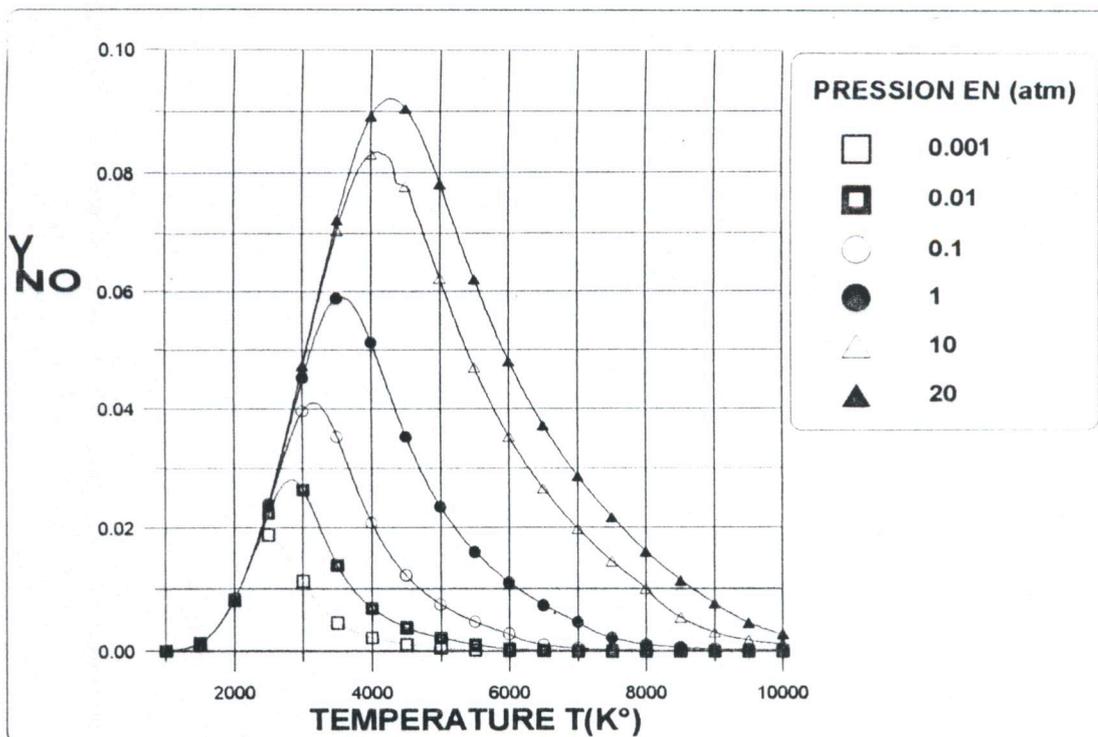
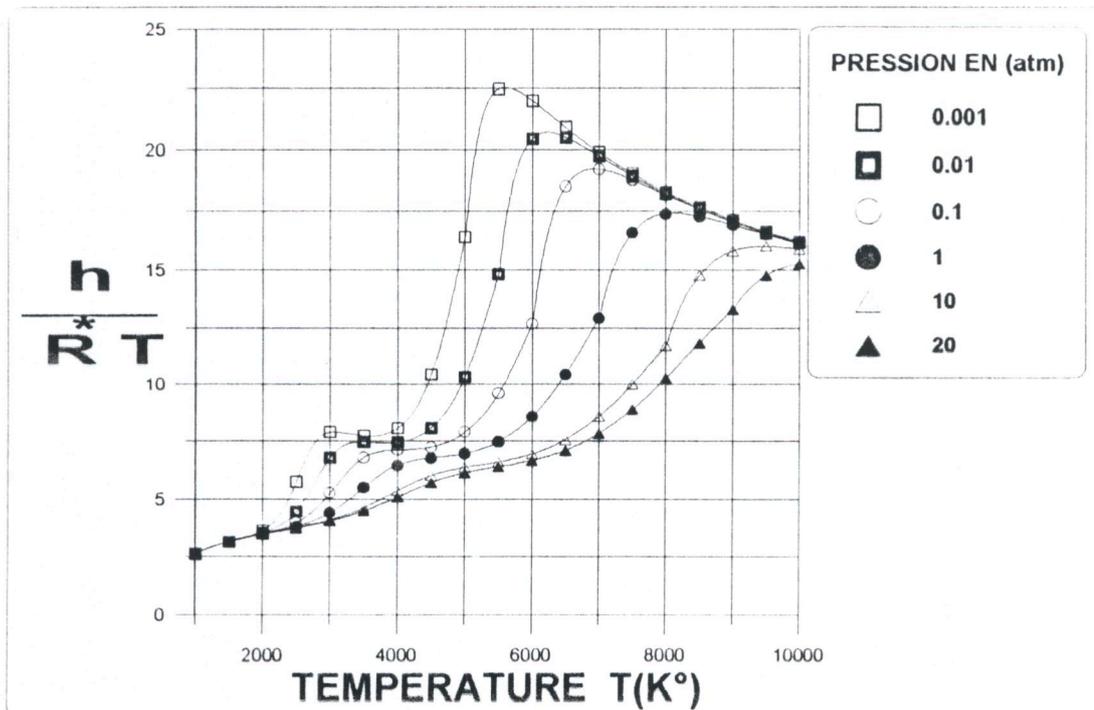


Fig.V.2e. Fraction massique de NO

Fig.V.2. Fractions massiques de l'air à l'équilibre chimique

Fig.V.3. Enthalpie  $\frac{h}{R^*T}(T)$  de l'air à l'équilibre chimique.

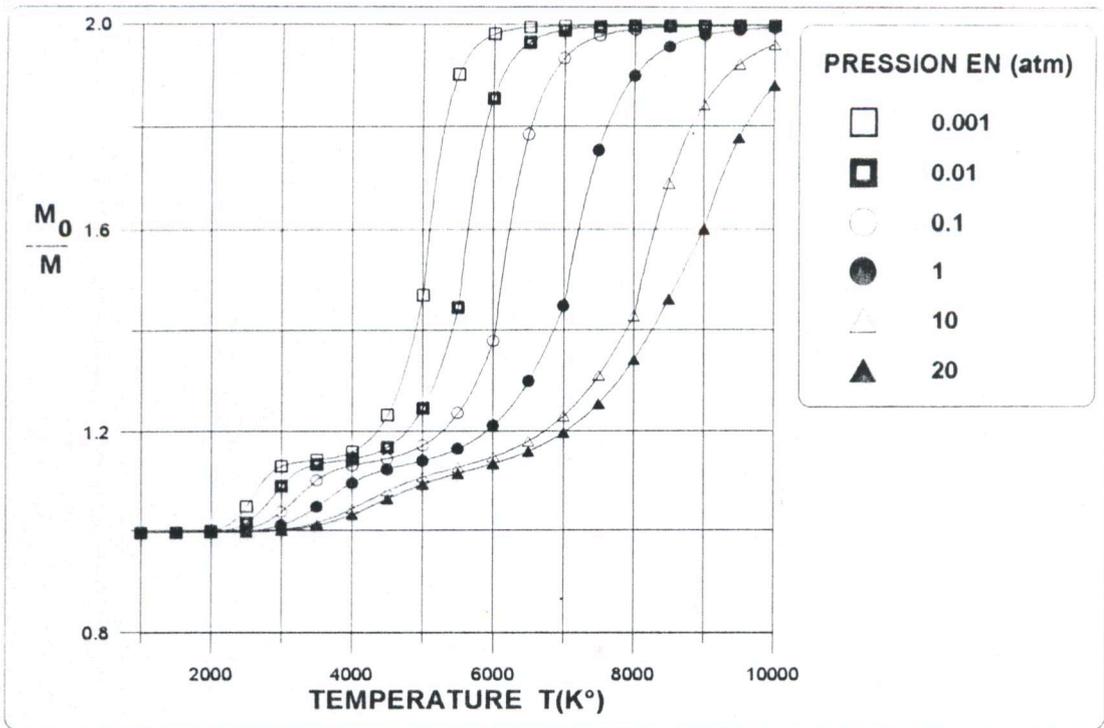


Fig.V.4. Coefficient de compressibilité  $Z = \frac{M_0}{M}(T)$

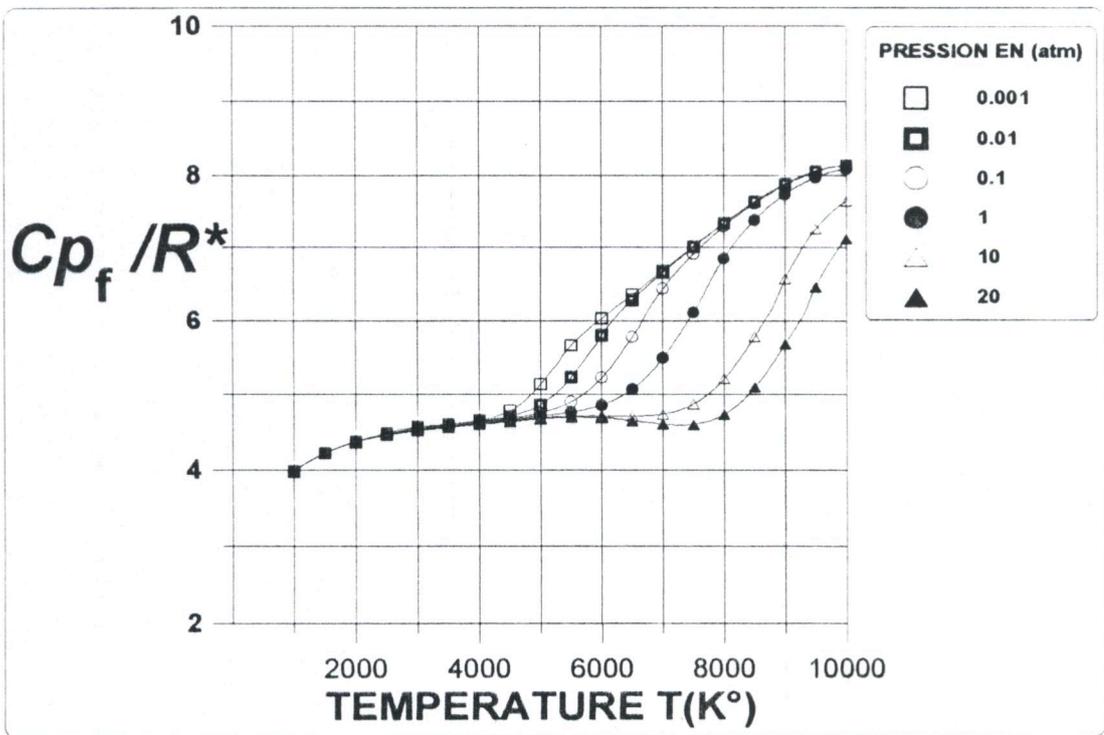
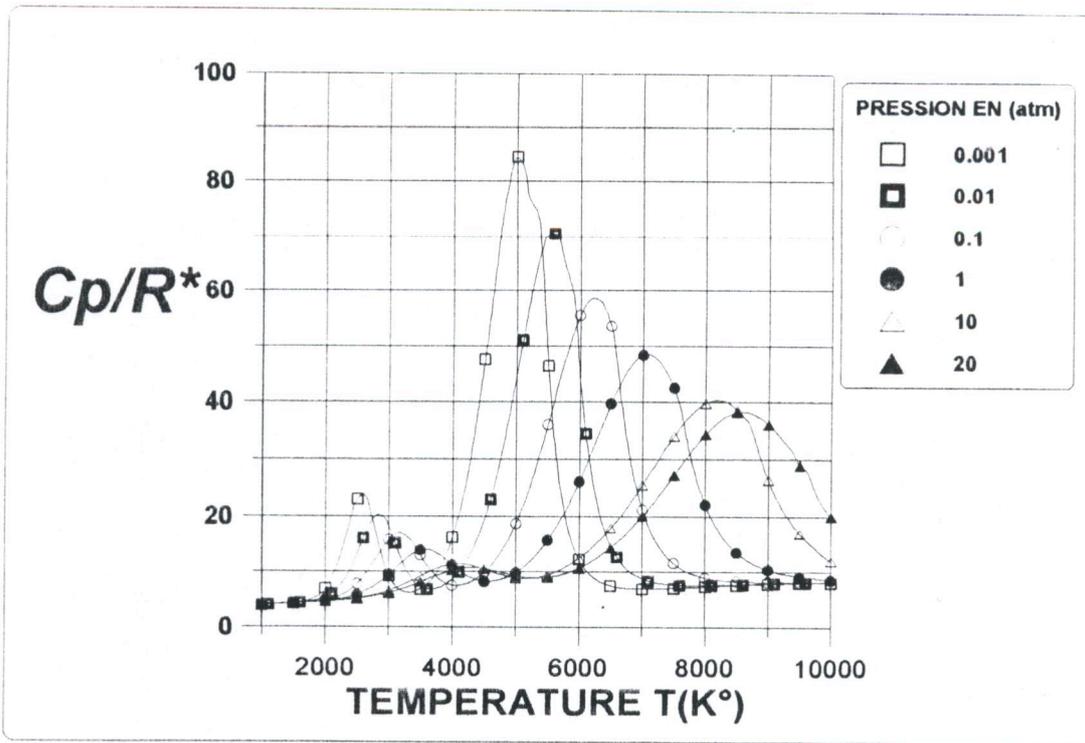
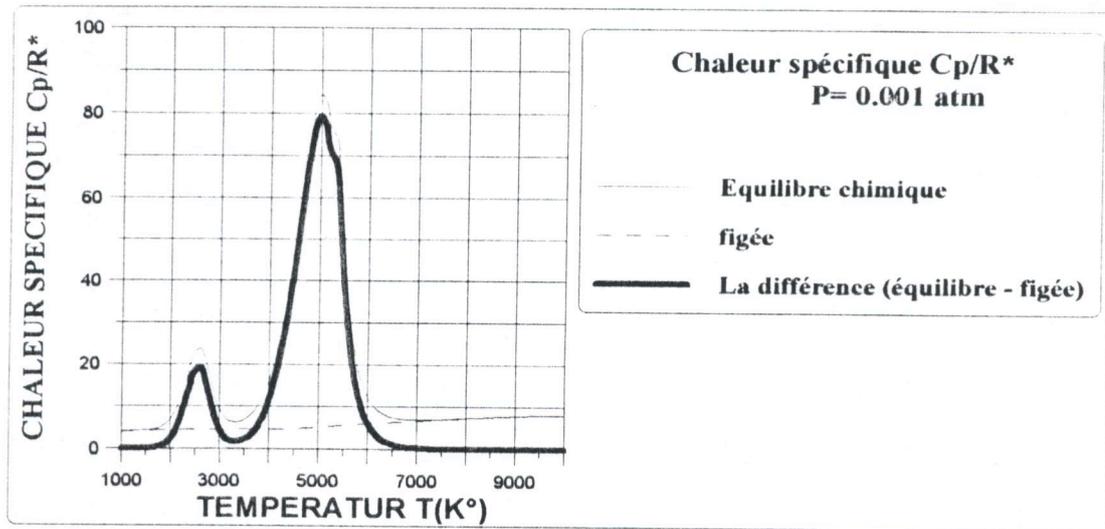


Fig.V.5a. Chaleur spécifique figée à pression constante de l'air  $C_{p_f}/R^*$



**Fig.V.5b.** Chaleur spécifique à l'équilibre chimique et à pression constante de l'air  
Cp/R\*



**Fig.V.5c.** Comparaison entre les différentes chaleurs spécifiques à pression constante (l'air à équilibre chimique et l'air figée).

**Fig.V.5.** Chaleurs spécifiques à pression constante de l'air à l'équilibre chimique

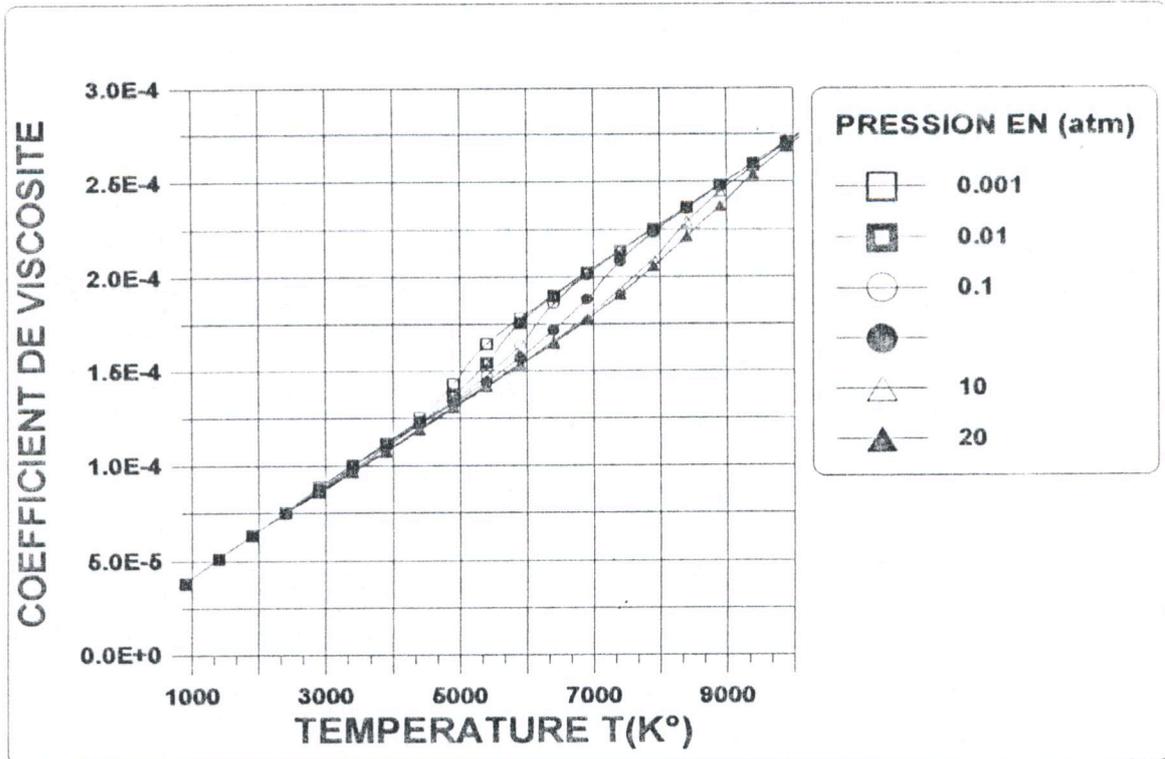


Fig.V.6. Coefficient de viscosité  $\mu(T)$

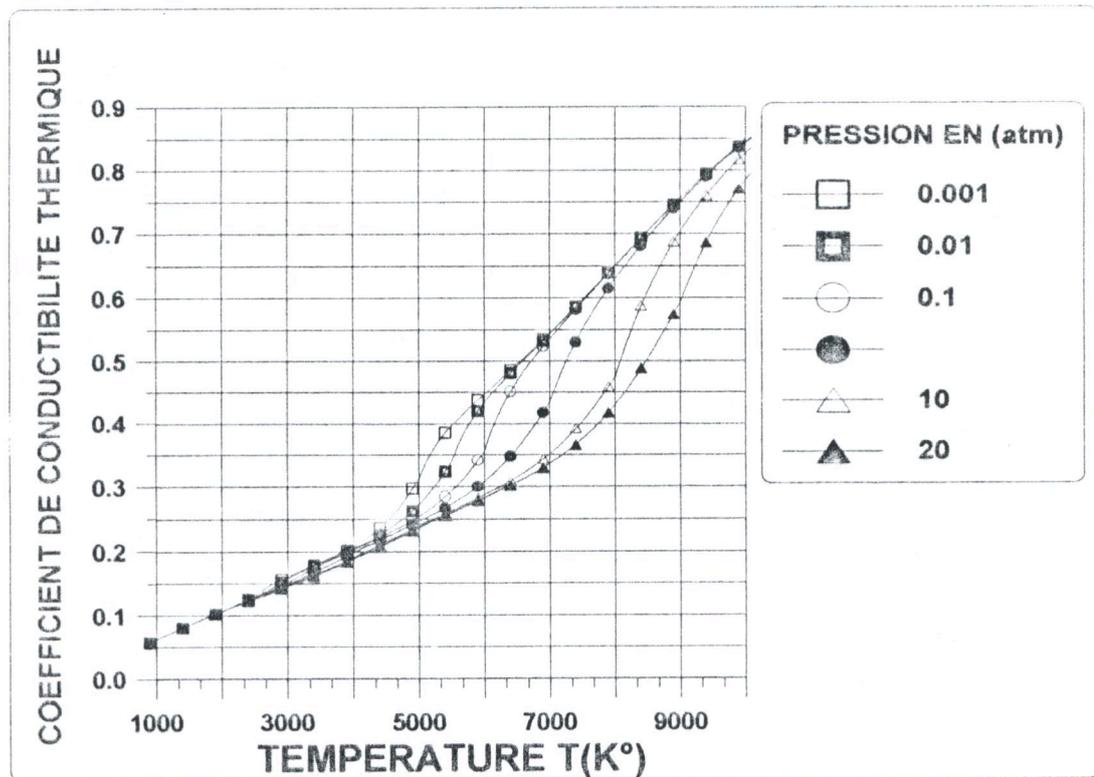


Fig.V.7. Coefficient de conductibilité thermique  $\lambda(T)$

### V.3 Génération du maillage

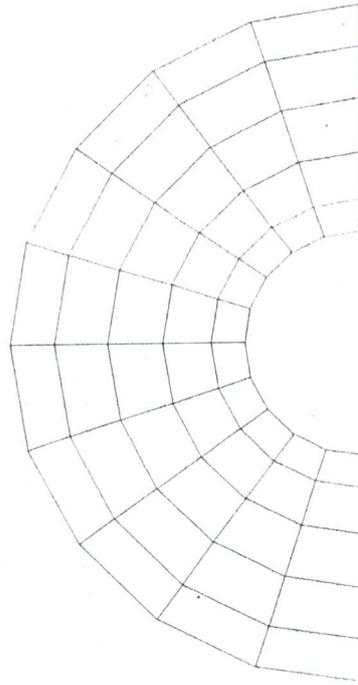
Après avoir établi un programme de génération de maillage, divers exemples ont été exécutés. Pour des raisons de clarté on n'a pas représenté tous les cas possibles qui peuvent être traités par le programme "ORTHO2D" en jouant sur la diversité des paramètres d'entrée, mais de présenter quelques résultats types illustrant les performances du programme qui a servi à l'obtention de maillage.

Les figures V.8 à V.13 révèlent également la possibilité de générer le maillage autour de différents types de géométries en introduisant un maillage en C. La géométrie la plus complexe est celle de la figure V.13 qui approxime le nez d'une navette spatiale.

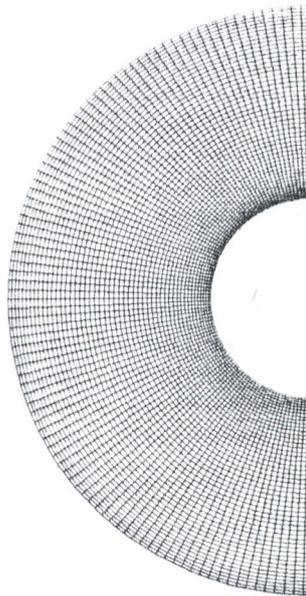
Le raffinement de maillage peut jouer un rôle primordial dans certains problèmes physiques où la précision de calcul est demandée. Ainsi, l'obtention d'un résultat adéquat du problème physique est conditionné par un choix judicieux du raffinement de maillage utilisé. A cet effet, le programme "ORTHO2D" peut générer des maillages avec une très grande discrétisation. Evidemment tout dépend de nos besoins. La figure V.8 montre le raffinement de maillage autour d'un demi-cylindre avec une répartition régulière des lignes coordonnées.

Selon la nature du problème physique à traiter, le maillage peut être rendu sensible aux régions de forts gradients grâce aux fonctions de condensation en faisant varier les paramètres de contrôle. Cette sensibilité est traduite par la répartition des lignes coordonnées qui peuvent être condensées dans des zones bien définies et suivant une direction  $\xi$  ou  $\eta$ . La figure V.9 correspond aux différents problèmes rencontrés dans la simulation de la rentrée atmosphérique, tels que, la couche limite au voisinage de la paroi et la présence d'une région chaude au voisinage du nez. Ces aspects sont aussi bien représentés à travers les figures V.10 à V.13.

Comme, nous avons déjà dit antérieurement, l'amélioration principale apporté par le programme "ORTHO2D" réside dans l'adaptation automatique du maillage selon les changements brutaux de géométrie, cela est montré par la figure V.13.

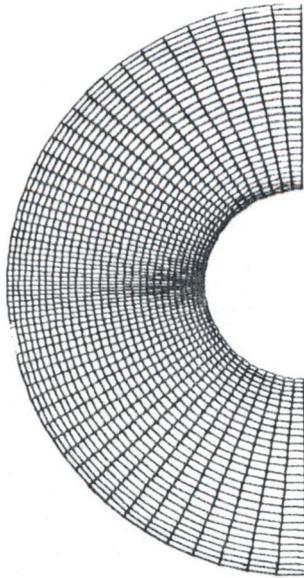


(a) Maillage 11x6

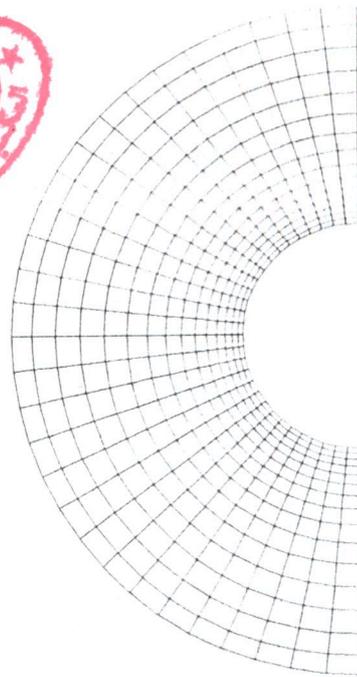
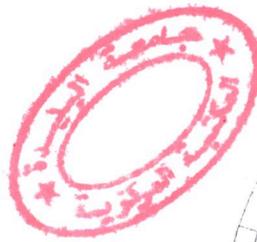


(b) Maillage 99x50

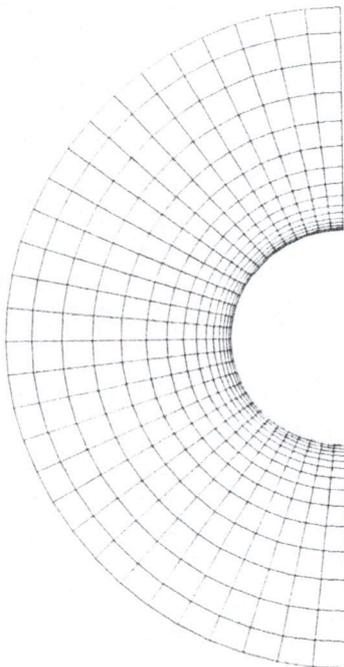
**Fig.V.8.** Raffinement de maillage autour d'un demi cylindre (répartition régulière)  
( $P_{ab}=P_{cd}=P_{ad}=P_{bc}=1$ ).



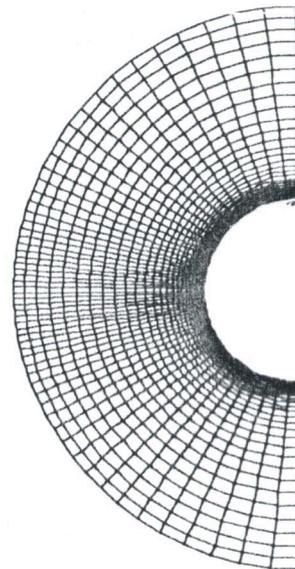
(a) Maillage 59x30  
( $P_{ab}=P_{cd}=0.2$ ,  $P_{ad}=P_{bc}=1$ )



(b) Maillage 31x16  
( $P_{ab}=P_{cd}=1$ ,  $P_{ad}=P_{bc}=0.5$ )

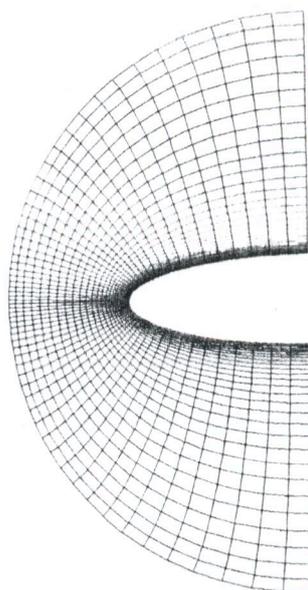


(c) Maillage 31 x 16  
( $P_{ab}=P_{cd}=1$ ,  $P_{ad}=P_{bc}=0.1$ )

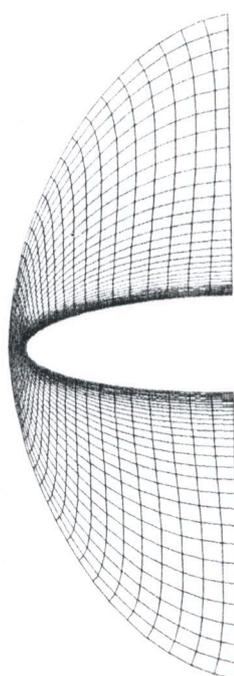


(d) Maillage 59x30  
( $P_{ab}=0.3$ ,  $P_{cd}=0.001$ ,  $P_{ad}=P_{bc}=0.1$ )

**Fig.V.9.** L'influence des fonctions de condensation sur la répartition des lignes coordonnées

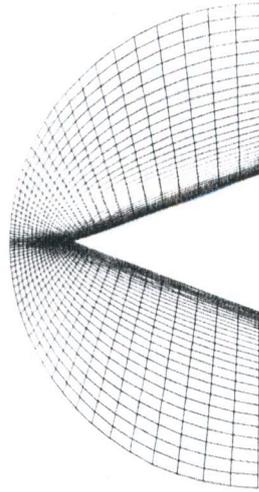


(a) Surface extérieure (cercle de rayon fixe)

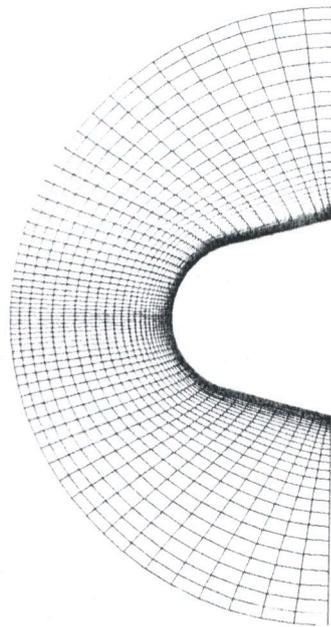


(b) Surface extérieure (cercle de rayon variable)

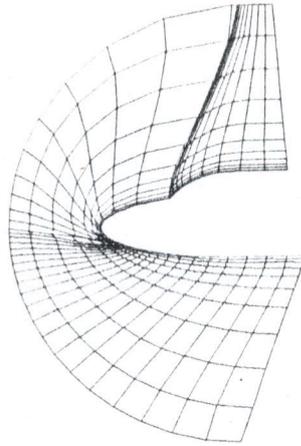
**Fig.V.10.** Génération du maillage autour d'un demi-ellipse ( Maillage 59 x 30).



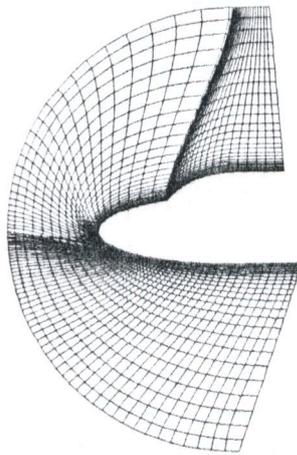
**Fig.V.11.** Génération de maillage autour d'un cône (demi-angle= $30^\circ$ )  
( Maillage 59x30)



**Fig.V.12.** Génération de maillage autour d'un corps émoussé (portion cylindrique  
suivie d'une plaque plane inclinée)  
( Maillage 59x30)



(a) Maillage 42 x 11



(b) Maillage 102 x 26

**Fig.V.13.** Génération de maillage autour d'une géométrie complexe (deux demi-ellipse: nez d'une navette spatiale)

## V.4 Calcul "Euler" pour un écoulement non visqueux

La qualité de l'approximation numérique du problème visqueux est basée essentiellement sur le résultat issu de l'approche Euler. Ainsi, toute amélioration ultérieure qui pourra être apportée sur le code global "HLBL" sera liée étroitement au développement du programme servant à la simulation numérique du modèle d'Euler. Pour cela et vue l'importance considérable de ce dernier, nous avons jugé de présenter dans ce qui suit les résultats obtenus par le programme "EULER2D" en examinant l'influence de chaque paramètre sur la précision de calcul, telles que: l'effet de l'augmentation du nombre de Mach à l'infini amont, l'introduction de termes de la viscosité artificielle, le raffinement de maillage et les effets de gaz réel.

Les graphes illustrés par les figures V.14 à V.19 sont obtenus en effectuant plusieurs tests sur le programme "EULER2D". L'onde de choc se traduit graphiquement par une brusque discontinuité au niveau de la répartition du nombre de Mach, pression, température et masse volumique (Fig. V.14).

### V.4.1 Effet du nombre de Mach

La figure V.14 montre la répartition du nombre de Mach et d'autres quantités physiques (pression, température et masse volumique) le long de la ligne d'arrêt obtenue pour diverses valeurs de  $M_\infty$  et pour un maillage  $99 \times 60$  en assimilant l'air à un gaz parfait ( $\gamma = 1.4$ ).

on remarque que, plus le nombre de Mach à l'infini est élevé, plus la distance entre l'onde de choc détachée et l'obstacle le long de la ligne d'arrêt diminue. Cela, veut dire que la couche de choc devient de plus en plus mince en faisant augmenter le nombre de Mach  $M_\infty$ . De plus, la température d'arrêt augmente considérablement.

### V.4.2 Effet de la viscosité artificielle

L'introduction des termes jouant le rôle d'une viscosité artificielle est une approche très puissante car, elle permet de capter automatiquement les chocs.

Afin d'évaluer la robustesse de la viscosité artificielle, on a présenté sur la figure V.15 la répartition du nombre de Mach le long de la ligne d'arrêt pour deux valeurs de  $M_\infty$  ( $M_\infty = 2$  et  $M_\infty = 1.1$ ).

Pour un calcul sans viscosité artificielle, des grandes fluctuations apparaissent après la formation de l'onde de choc. Cela peut s'expliquer par une répercussion des discontinuités, apparues lors de la formation de l'onde de choc sur le restant des calculs. Ainsi, l'intensité des fluctuations et leur nombre sont liés étroitement au valeur du nombre de Mach  $M_\infty$ ; les fluctuations pour  $M_\infty = 1.1$  sont moins intenses et moins nombreux comparativement à celles présentées pour  $M_\infty = 2$  et toujours dans le cas d'un calcul sans viscosité artificielle. Ce dernier, ne pourra pas être effectué au delà de  $M_\infty = 2$  car, lors de l'exécution du programme "EULER2D" il se produit après quelques itérations un blocage total causé par la divergence du calcul.

Cependant, l'introduction de la viscosité artificielle permet d'annuler totalement les fluctuations pour des valeurs modérées de  $M_\infty$ . Aussi, le saut brusque au niveau de la répartition du nombre de Mach est représenté par une droite beaucoup plus verticale que dans le cas d'un calcul sans viscosité artificielle. C'est-à-dire a pour effet de réduire l'épaisseur artificielle des chocs qui sont mieux capturés.

Pour des nombres de Mach élevés ( $M_\infty = 10, 15, 20$ ) (Fig.V.14), on s'aperçoit que l'efficacité du schéma numérique diminue quand le nombre de Mach augmente, ceci est traduit par l'augmentation de l'intensité des fluctuations au niveau de l'épaisseur artificielle des chocs.

### V.4.3 Raffinement de maillage

La figure V.16 présente la comparaison entre les résultats obtenus à partir des données du maillage grossier et ceux obtenus à l'aide du maillage fin pour l'approche Euler du problème non visqueux et non réactif. Pour un nombre de Mach  $M_\infty = 10$ , et afin d'évaluer l'influence de raffinement de maillage trois cas sont traités en commençant l'opération par un maillage éparsé et en passant à un autre de plus en plus fin.

Le premier essai est effectué avec un maillage grossier  $21 \times 11$ . On remarque que l'épaisseur artificielle des chocs est très grande. Le deuxième essai (maillage  $41 \times 30$ ) révèle une amélioration relative traduite par la diminution de l'épaisseur des chocs. Avec un maillage fin ( $99 \times 60$ ), le saut brusque au niveau de la répartition du nombre de Mach est représenté par une droite beaucoup plus verticale que dans les deux cas précédents. Par conséquent, l'épaisseur artificielle des chocs devient très petite.

Le schéma qu'on a appliqué étant explicite (Schéma de MacCormack), la tolérance de convergence dépend bien du pas de maillage, ainsi que des conditions aux limites appliquées.

Le pas du maillage a une influence directe sur les calculs. L'amélioration de la qualité des résultats par un raffinement du maillage entraîne la diminution de la distance entre deux points consécutifs (diminution du pas de maillage). Cependant, on ne peut malheureusement pas diminuer indéfiniment cette distance car, il faut tenir compte du problème de stabilité et par conséquent de convergence qui est fonction du pas de maillage d'un côté. D'un autre côté, le temps de calcul deviendra infini.

### V.4.4 Effets de gaz réel

Dans cette partie, nous avons gardé le même maillage durant tout le calcul ( $99 \times 60$ ) et les conditions à l'infini amont de pression, de température et de masse volumique sont celles utilisées dans la référence [12] qui correspondent approximativement à l'atmosphère standard à l'altitude 75 km ( $p_\infty = 2.52 \text{ Pa}$ ;  $T_\infty = 205.3 \text{ K}$ ;  $\rho_\infty = 0.43 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$ ) pour le calcul d'un écoulement hypersonique non

visqueux autour d'un corps arrondi. Ce choix, a pour but de permettre une comparaison quantitative et qualitative de nos résultats avec ceux obtenus par Desideri *et al.* [12].

Les résultats illustrés par la figure V.17 correspondent à  $M_\infty = 15$ . Là où le gaz inerte est comparé à celui de l'air réactif. Les répartitions du nombre de Mach, de température, de pression et de masse volumique le long de la ligne d'arrêt et le long de la paroi (Fig.V.17a-d) montrent bien la réduction importante, approximativement supérieure à 69 % de la distance séparant la paroi au choc le long de la ligne d'arrêt (stand-off distance) pour le cas d'un gaz réactif. Ceci est due aux phénomènes de gaz réel (dissociation chimique) qui provoquent la restriction de la couche de choc. Ces phénomènes sont endothermiques, de sorte que les températures sont inférieures à celles calculées en gaz inerte (une réduction de l'ordre supérieure à 52 %). Ainsi, on peut voir une légère chute de la pression et une légère augmentation de la masse volumique dans le cas d'un gaz réactif. On constate aussi, la diminution de paramètre  $\gamma$  causée par les phénomènes de dissociation (Table.V.1).

	$T_0$ (°K)	$p_0$ (Pa)	$\rho_0$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$\gamma_0$	$X_{\text{choc}}$
<b>Gaz inerte</b>	10505.470	760.6140	2.53633E-4	1.400	-0.4576271
<b>Gaz réactif</b>	5019.283	699.2424	4.88026E-4	1.176	-0.1355932

**Table.V.1.** Comparaison de calcul entre le cas d'un gaz inerte et un gaz réactif

$$\begin{aligned}
 M_\infty &= 15 & T_\infty &= 205.3 \text{ °K} \\
 p_\infty &= 2.52 \text{ Pa} & \rho_\infty &= 0.43 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3 \\
 & & & \text{(l'indice "0" correspond au point d'arrêt)}
 \end{aligned}$$

Contrairement à la répartition de la température, de la pression et de la masse volumique, la figure (V.17a) révèle que la répartition du nombre de Mach est moins sensible aux effets de gaz réel. Néanmoins, on peut pas passer sous silence sans citer quelques observations jugées très importantes à savoir : la similarité qui existe entre les deux cas : gaz inerte et gaz réactif. La seule différence réside dans la diminution de  $X_{\text{choc}}$ . Ainsi, dans l'équilibre chimique le choc va se coucher sur la paroi, et par suite la ligne sonique et plus proche du point d'arrêt; ce qui permet à l'écoulement de subir une détente assez avancée par rapport à celle de gaz inerte. Ceci explique la légère augmentation du nombre de Mach à la sortie dans le cas d'un gaz réactif.

Une étude comparative entre les figures (V.14a) et (V.17a), et dans l'aspect de la diminution de la distance séparant le choc à la paroi le long de la ligne d'arrêt, nous a conduit à dire que l'effet de l'augmentation du nombre de Mach  $M_\infty$  est similaire à celui de l'introduction des effets de gaz réel. Cette analyse est démontrée

théoriquement en examinant les conditions de saut de Rankine-Hugoniot à travers un choc normal; la limite  $M_\infty \rightarrow \infty$  a le même effet de la limite  $\gamma \rightarrow 1$ .

Les graphes illustrant la répartition des fractions massiques (Fig.V.17e) indiquent que la dissociation de l'air se développe immédiatement après le choc et varie moins sensiblement avec  $X$ . A cette valeur de Mach ( $M_\infty = 15$ )  $O_2$  est complètement dissocié. NO apparaît instantanément sous forme d'un pic avec une concentration très faible, tandis que la concentration de O prend une valeur constante lors de la dissociation complète de  $O_2$ . Au delà, le schéma réactionnel se réduit à l'échange entre  $N_2$  et N.

La figure V.18 met en évidence l'effet de l'augmentation du nombre de Mach  $M_\infty$  dans le cas d'équilibre chimique. Cet effet reste toujours non significatif dans la répartition du nombre de Mach, mais les répartitions de température, de pression et de masse volumique sont très sensibles à cette augmentation. Par exemple, la température d'arrêt augmente de  $T=2490$  °K à  $T=5019$  °K si  $M_\infty$  augmente de 10 à 15 (Table.V.2).

En ce qui concerne les fractions massiques (Fig.V.18e), on constate que pour  $M_\infty=10$  une dissociation partielle de  $O_2$  et de  $N_2$ , tandis que pour  $M_\infty=5$ , l'air peut être considéré comme un gaz inerte ( $\gamma = 1.4$ ).

Mach: $M_\infty$	$T_0$ (°K)	$p_0$ (Pa)	$\rho_0$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$\gamma_0$	$X_{\text{choc}}$
5	1412.028	89.47491	2.219806E-4	1.400	-0.5423729
10	2490.119	296.5567	4.172002E-4	1.200	-0.2033898
15	5019.283	699.2424	4.88026E-4	1.176	-0.1355932

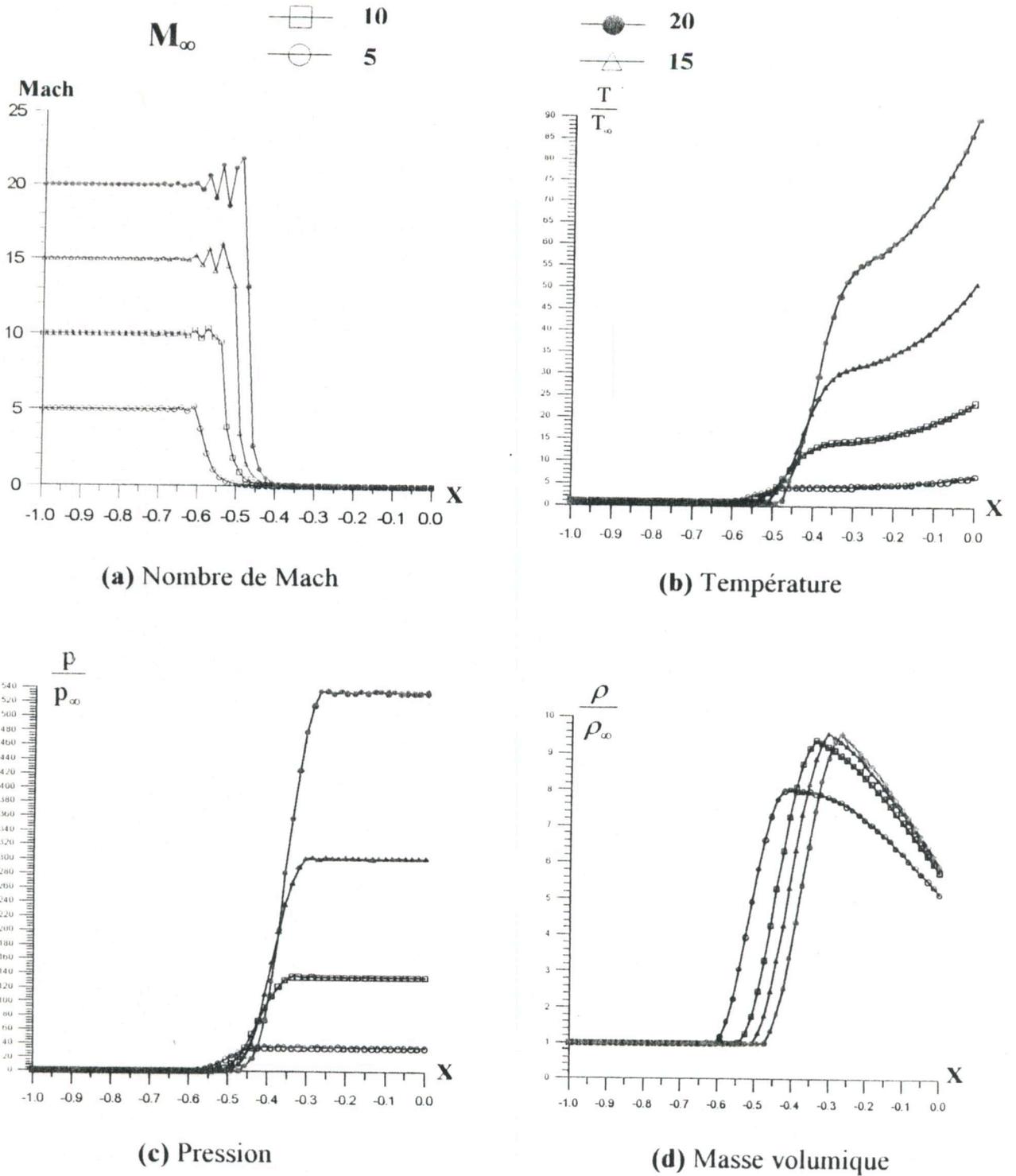
**Table.V.2.** L'effet de l'augmentation de  $M_\infty$  pour un gaz réactif  
( $T_\infty = 205.3$  °K,  $p_\infty = 2.52$  Pa,  $\rho_\infty = 0.43 \cdot 10^{-4}$  kg/m<sup>3</sup>)  
(l'indice "0" correspond au point d'arrêt)

## V.4.5 Validation des résultats

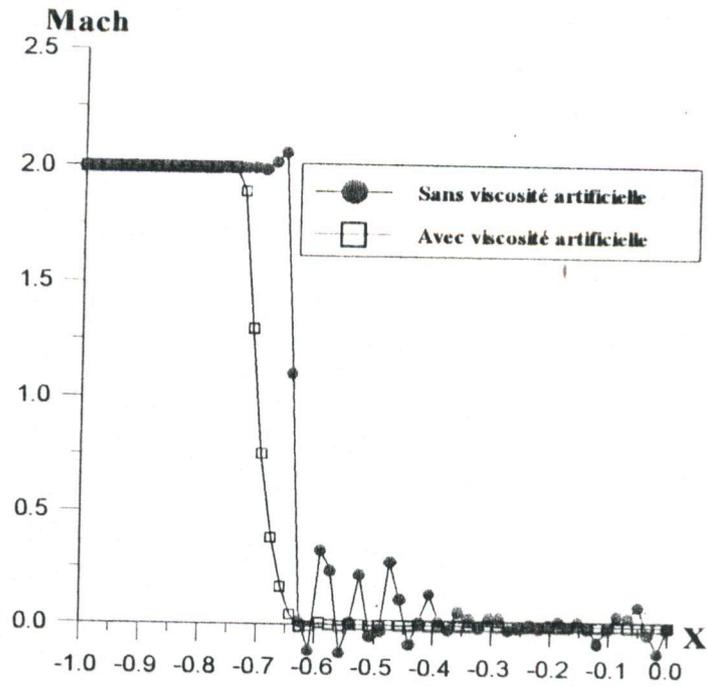
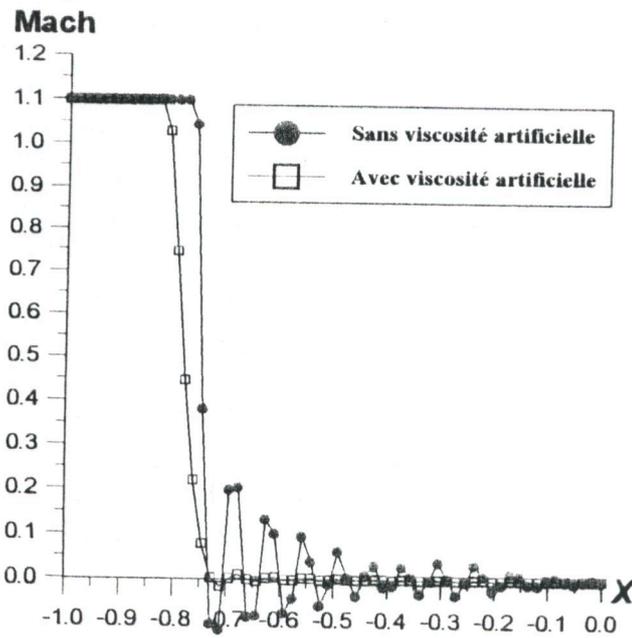
Pour la configuration que nous avons choisi (portion cylindrique suivie par des plaques planes inclinées d'un angle de 15°) nous ne disposons pas de résultats expérimentaux. Il n'y aura donc que des comparaisons entre nos résultats et ceux obtenus par Desideri *et al.* [12]. Dans cette référence les auteurs ont simulé les écoulements hypersoniques réactifs non visqueux pour les deux cas d'un gaz à l'équilibre chimique ou hors équilibre chimique en utilisant des schémas d'approximations décentrés de type Volumes finis/Elément finis explicites basés sur une adaptation de la décomposition de flux de Van Leer.

La figure (V.19a) présentant la répartition du nombre de Mach le long de la ligne d'arrêt et le long du corps pour l'air à l'équilibre chimique et  $M_\infty = 15$ , montre un accord acceptable avec les résultats de la référence [12]. Cependant, on remarque dans nos résultats la présence des parasites (oscillations numériques) qui apparaissent dans la région de discontinuités. Cela est due à la nature dissipative du schéma choisi.

Une deuxième confrontation des résultats est illustrée par la figure (V.19b). On remarque que les deux allures de température sont comparables. Néanmoins, on peut voir un certain écart entre les deux résultats au voisinage du point d'arrêt. Cette différence est due essentiellement à la caractéristique particulière de chaque schéma.



**Fig.V.14.** Effet du nombre de Mach sur la distance entre le choc et la paroi le long de la ligne d'arrêt (shock stand-off distance)  
 (gaz inerte non visqueux)  
 maillage 99x60  
 ( $X = 0$  correspond au point d'arrêt)

a)  $M_\infty = 2$ b)  $M_\infty = 1.1$ 

**Fig.V.15.** L'influence de la viscosité artificielle (gaz parfait non visqueux)  
 Maillage 99x60  
 ( $X = 0$  correspond au point d'arrêt)

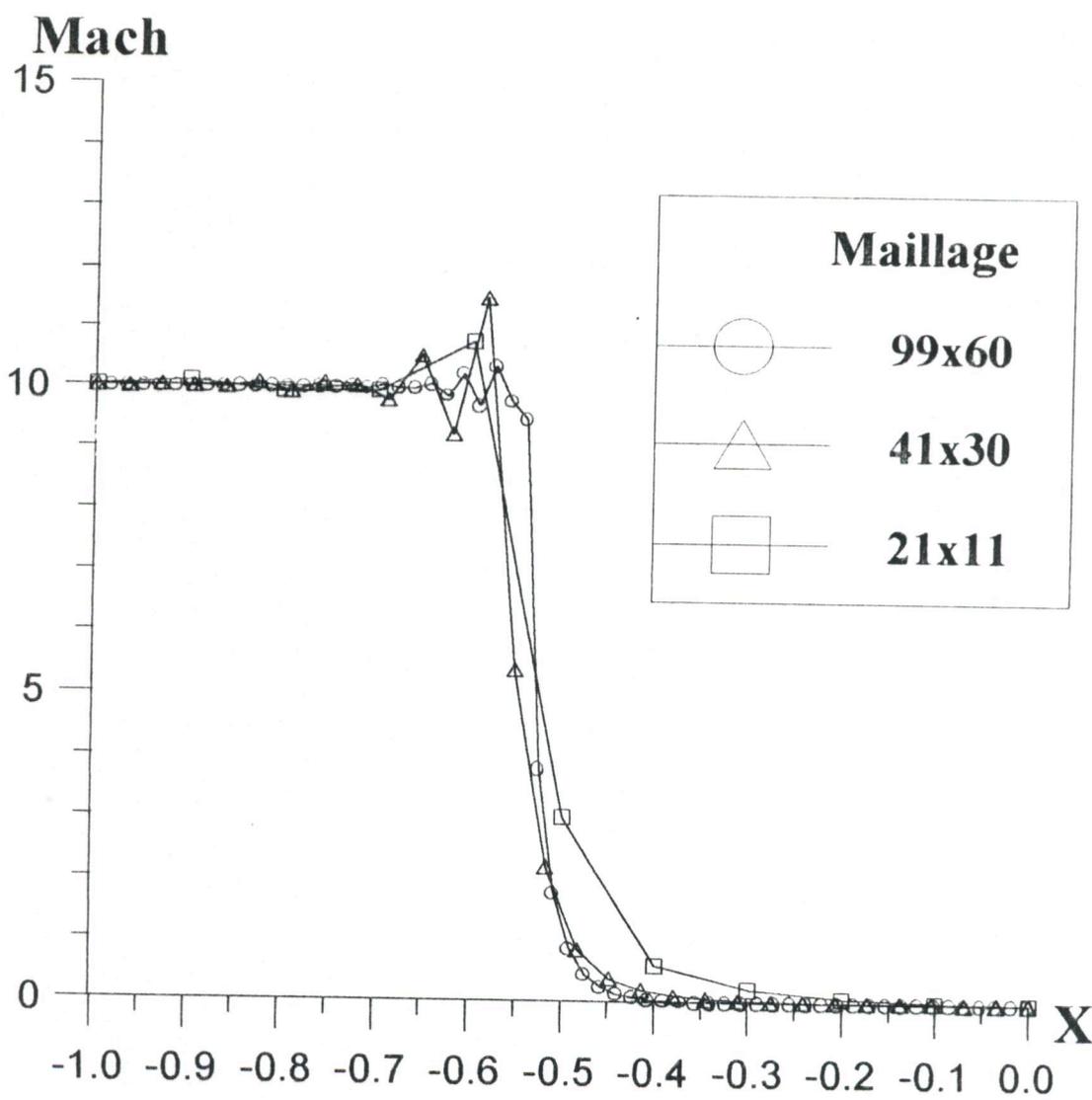


Fig.V.16. Raffinement du maillage

— Gaz réactif à l'équilibre chimique  
 - - - Gaz inerte (gaz idéal)

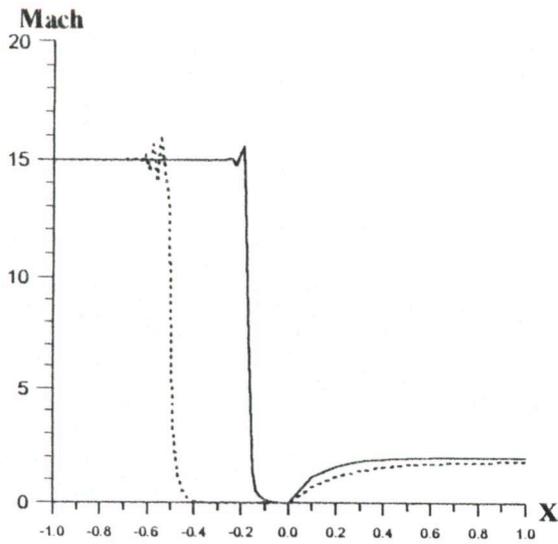


Fig.V.17a. Nombre de Mach

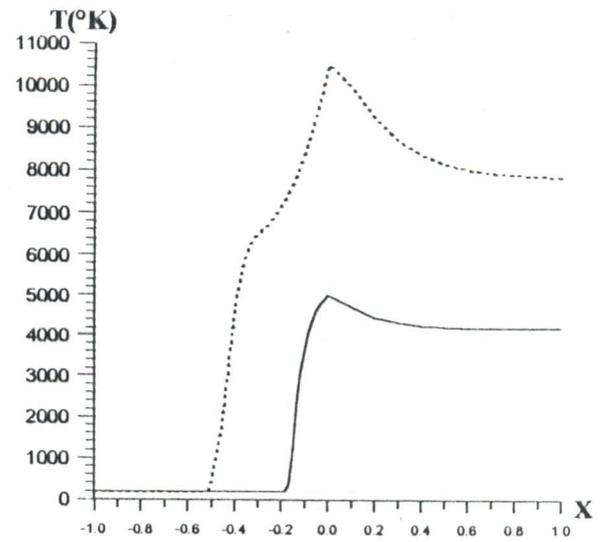


Fig.V.17b. Température

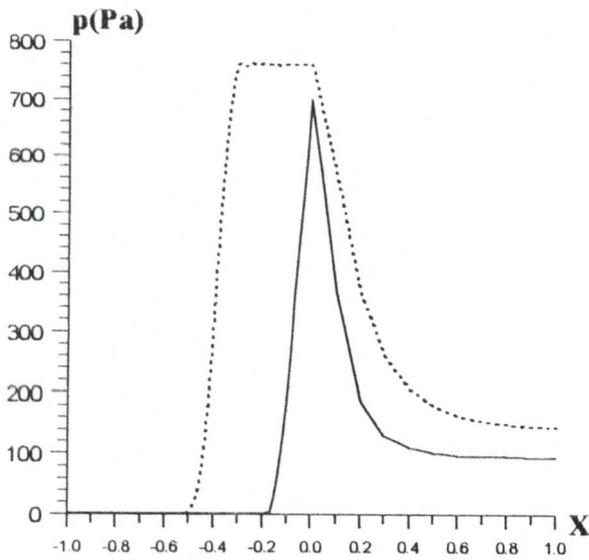


Fig.V.17c. Pression

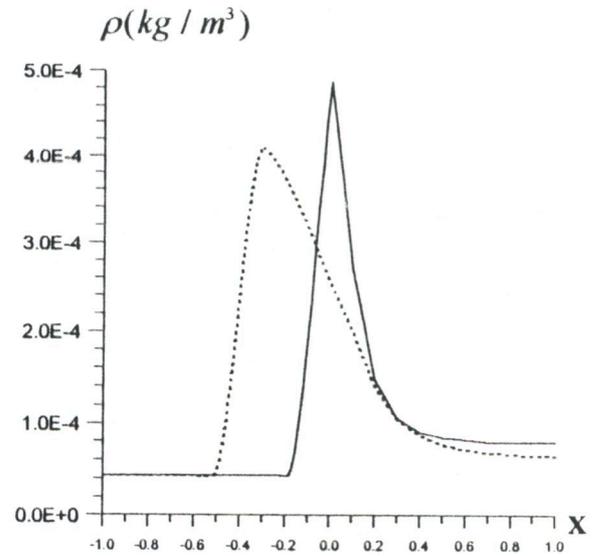


Fig.V.17d. Masse volumique

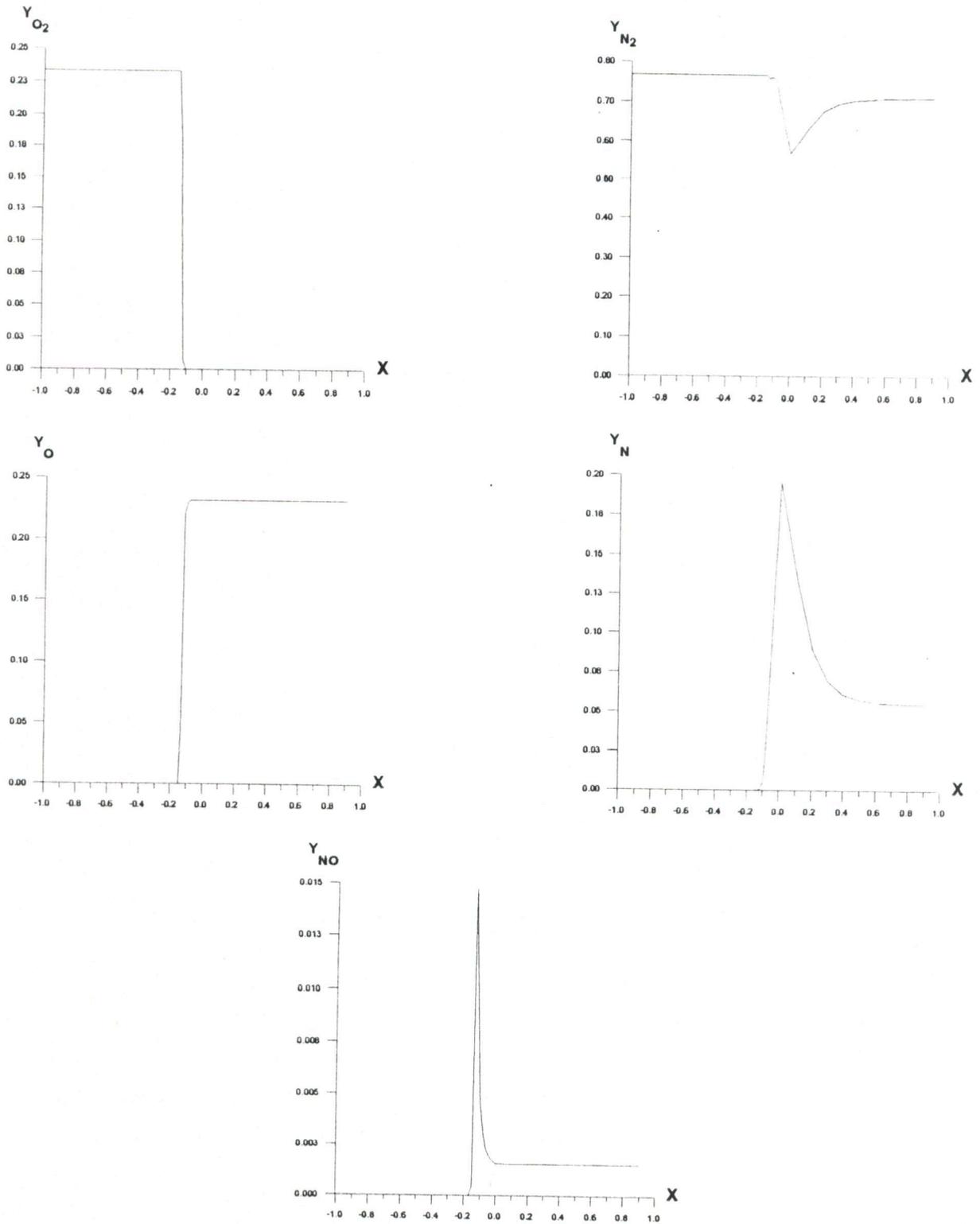


Fig.V.17e. Fractions massiques

Fig.V.17. Effets du gaz réel (maillage 99 x 60)

$$M_\infty = 15$$

$$p_\infty = 2.52 \text{ Pa}$$

$$T_\infty = 205.3 \text{ °K}$$

$$\rho_\infty = 0.43 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3$$

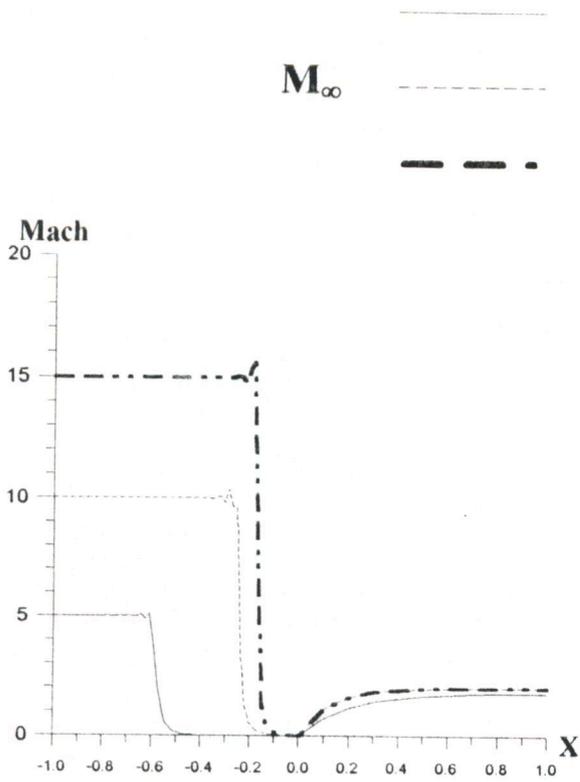


Fig.V.18a. Nombre de Mach

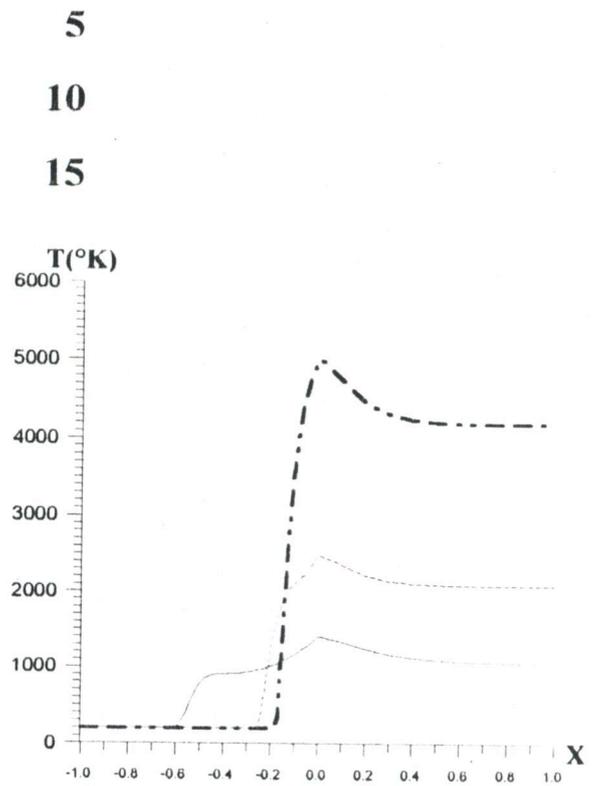


Fig.V.18b. Température

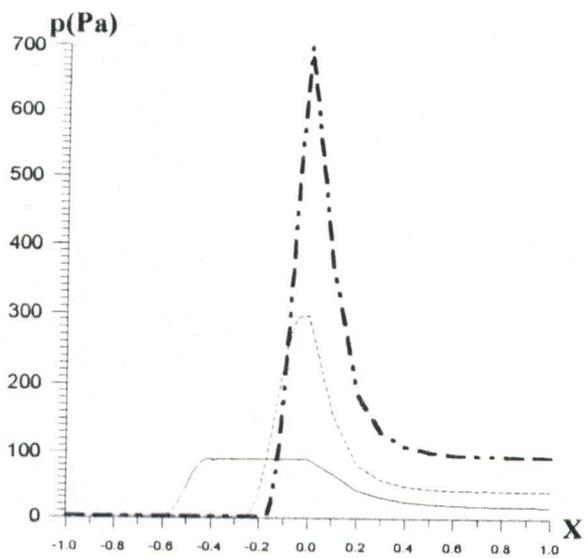


Fig.V.18c. Pression

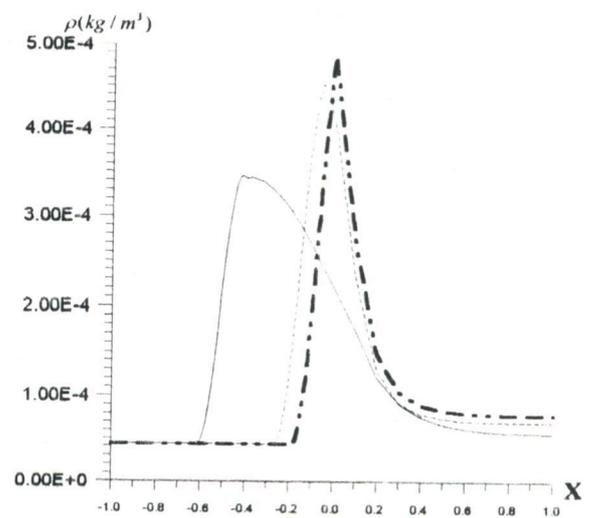
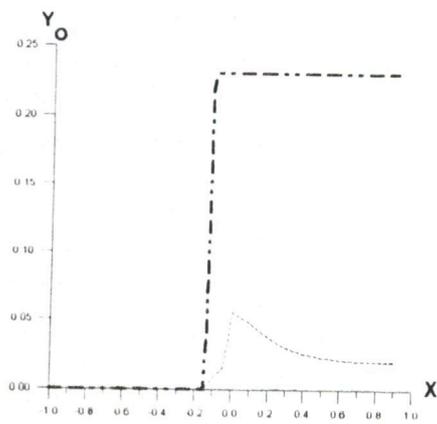
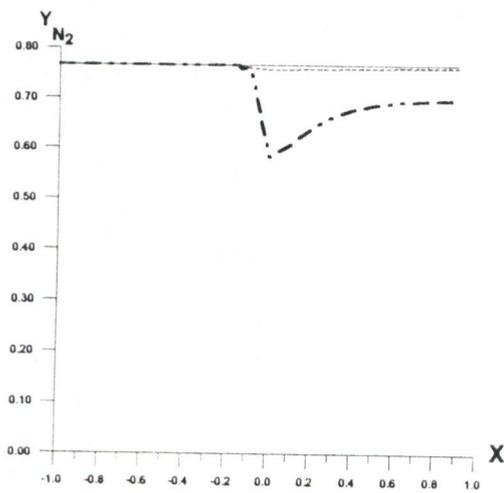
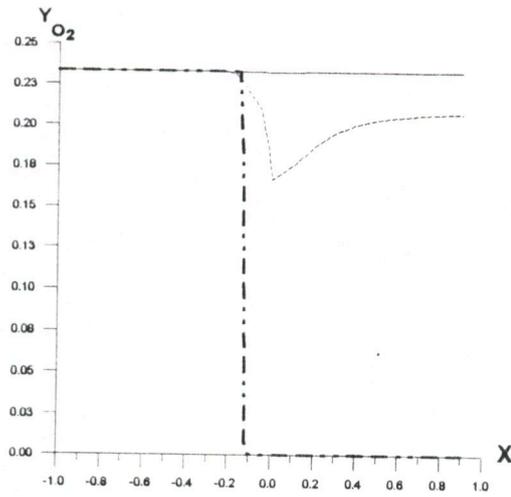
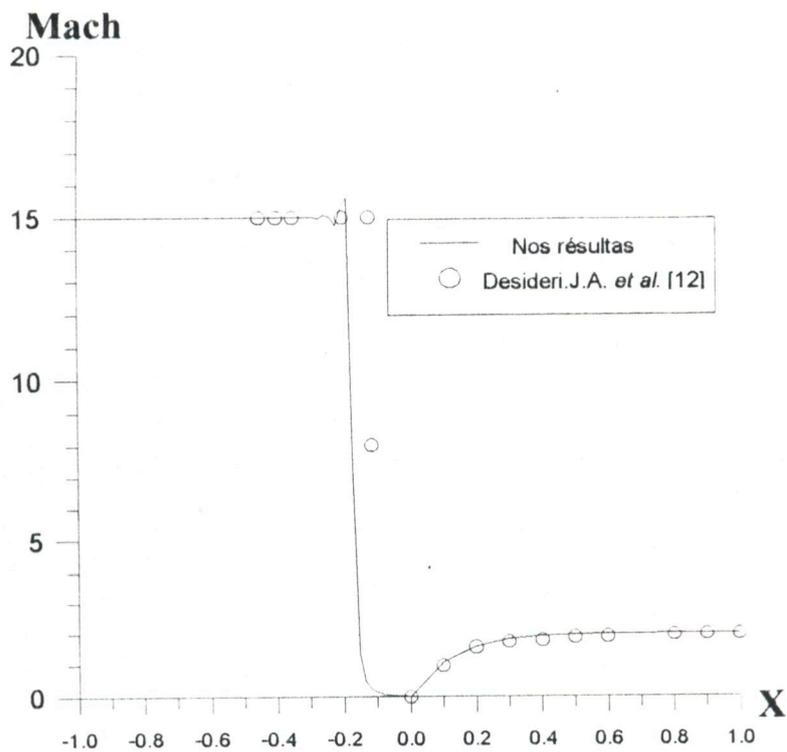


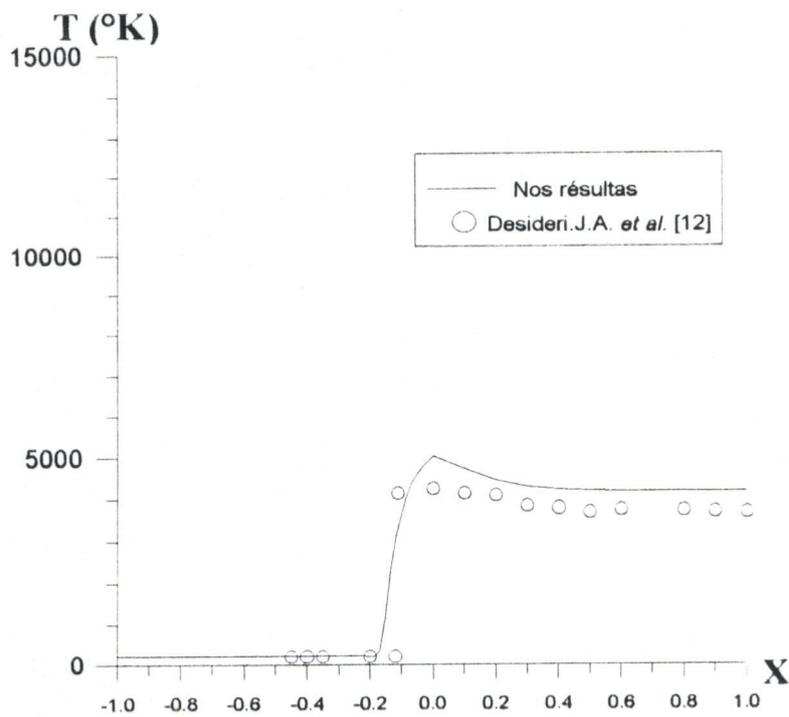
Fig.V.18d. Masse volumique

$M_\infty$  ——— 5  
 - - - - - 10  
 - - - · 15





(a)



(b)

**Fig.V.19.** Comparaison des résultats (l'air à l'équilibre chimique,  $M_\infty = 15$ )  
 (a) répartition du nombre de Mach  
 (b) répartition de la température

## V.5 Calcul "couche limite" pour le problème interne

Dans ce qui précède, nous avons analysé les résultats issus de chaque programme constituant le code global "HLBL". Dans ce qui suit et afin de mettre en évidence la tâche principale effectuée par le code "HLBL", nous avons présenté quelques résultats issus du calcul de couche limite d'ordre 1 et 2 pour un maillage 99x60 avec un raffinement dans la région du nez et au voisinage de la paroi.

Dans tous les cas, la température à la paroi est fixée à 1500 K, les autres données numériques initiales sont énumérées dans la table ci-dessous.

Mach $M_\infty$	15
pression $p_\infty$ (Pa)	2.52
température $T_\infty$ (K)	205.3
masse volumique $\rho_\infty$ (kg/m <sup>3</sup> )	$0.43 \cdot 10^{-4}$
vitesse $U_\infty$ (m/s)	4300
rayon de nez $R_0$ (m)	1
température de référence $T_0$ (K)	18506
nombre de Reynolds $\Re_e = \frac{\rho_\infty U_\infty R_0}{\mu(T_0)}$	937.77
nombre de Reynolds $\Re_{e_\infty} = \frac{\rho_\infty U_\infty R_0}{\mu_\infty}$	13610
petit paramètre $\varepsilon = \Re_e^{-1/2}$	0.032

**Table.V.3.** Conditions initiales du calcul de couche limite

### V.5.1 Profils normaux des variables thermodynamiques et chimiques

Une comparaison entre le calcul du 1<sup>er</sup> ordre et celui du 2<sup>ème</sup> ordre est faite en premier lieu par l'examen des profils normaux des principales variables obtenus pour deux stations spécifiques le long de la paroi. Pour cet objectif, deux abscisses curvilignes sont considérées correspondent à  $\xi_1 = 0.3$  et  $\xi_2 = 1.2$  à partir du point d'arrêt. La première des deux stations correspond à une valeur de courbure longitudinale  $k = 0.17$ . Alors que la deuxième correspond à la portion inclinée de la plaque plane où l'effet de courbure longitudinale est nul ( $k = 0$ ).

Les figures V.20 et V.21 représentent les profils de vitesse longitudinale, température, masse volumique, pression et de fractions massiques suivant la normale à la paroi. De manière générale, on constate que pour des nombres de Reynolds faibles, la couche limite est épaisse, l'introduction des termes du deuxième ordre améliore le raccordement entre les solutions internes et externes. Cette amélioration est associée aux différences plus marquées qui peuvent être observées entre les résultats issus du calcul de couche limite d'ordre 1 et ceux d'ordre 2.

En particulier, au moment où la pression le long de la normale à la paroi est constante dans un calcul de couche limite du 1<sup>er</sup> ordre, la couche limite du 2<sup>ème</sup> ordre nous permet de tenir en compte le gradient normal de la pression dû à la courbure longitudinale à la station  $\xi = 0.3$  (Fig. V.20d).

De plus, l'avantage essentiel apporté par l'approche de couche limite d'ordre 2 est la prise en compte du rotationnel de l'écoulement externe à l'extérieur de la couche limite, contrairement à l'approche classique du 1<sup>er</sup> ordre où l'écoulement est supposé irrotationnel. Ainsi, l'effet de déplacement de la couche limite d'ordre 1 sur le champ de l'écoulement externe d'ordre 2 est traduit par les écarts observés entre les allures des profils externes surtout au voisinage immédiat de la paroi. A mesure qu'on s'éloigne de la paroi, l'effet de déplacement diminue progressivement et le profil externe du 2<sup>ème</sup> ordre tend vers la solution externe d'ordre 1.

## V.5.2 Répartition des coefficients pariétaux

Pour compléter l'interprétation des résultats issus du calcul de couche limite, il a été tracé la répartition du coefficient de pression  $CP$ , de transfert de chaleur  $St$  (le nombre de Stanton) et du coefficient de frottement  $C_f$  le long de la paroi. Ces coefficients pariétaux sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \text{coefficient de pression } CP &= \frac{p_p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2}, \\ \text{nombre de Stanton } St &= \frac{|\phi_p|}{\rho_\infty U_\infty C_{p_\infty} (T_{0_\infty} - T_p)}, \\ \text{coefficient de frottement } C_f &= \frac{\mu_p \left[ \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_p}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2}. \end{aligned}$$

avec  $T_{0_\infty}$  est la température d'arrêt à l'infini amont et l'indice "p" correspond à des valeurs prises à la paroi.

La figure V.22 offre la comparaison pour les coefficients pariétaux entre les deux approches de couche limite d'ordre 1 et 2 à l'équilibre chimique ( $M_\infty=15$ ). On peut voir sur la figure V.22a que le calcul du 2<sup>ème</sup> ordre n'a pas une influence majeure sur le coefficient de pression qui est toutefois resté bornée dans la région où l'effet de la courbure longitudinale est important. Dont le but de valider les résultats, nous avons présenté sur la même figure les répartitions du coefficient de pression issues de la théorie de Newton et la théorie de Newton modifiée [1], les allures obtenues par les différentes approches sont en général en bon accord.

Contrairement au coefficient de pression, les effets du 2<sup>ème</sup> ordre jouent un rôle majeure dans la prédiction du coefficient de frottement et du nombre de Stanton. Les figures V.22b et V.22c montrent que l'approche d'ordre 2 a pour effet d'augmenter sensiblement ces coefficients le long de la paroi. Ces augmentations sont associées

spécialement aux fortes modifications des profils de vitesse tangentielle et de température.

La figure V.23 met en évidence les effets de gaz réactif à l'équilibre chimique sur la répartition des coefficients pariétaux pour un calcul de couche d'ordre 2. On constate une légère augmentation du coefficient de frottement et une faible diminution du coefficient de pression pour le cas du gaz réactif. Tandis que pour le nombre de Stanton, les phénomènes de gaz réactif causent une augmentation majeure, surtout dans la région chaude au voisinage du nez. Cela est dû au flux de chaleur supplémentaire lié à la diffusion des espèces chimiques au voisinage de la paroi.

La figure V.24 correspond à Mach 5 et un nombre de Reynolds  $8 \cdot 10^5$ . le petit paramètre  $\varepsilon$  ne vaut plus que 0.002. la couche limite sera donc mince par rapport à la couche de choc, les différences sont insignifiantes entre les deux approches de couche limite et la précision voulue peut être obtenue dès le calcul du premier ordre.

Dont le but de valider notre code et puisque nous ne disposons pas de résultats expérimentaux pour la configuration choisie, il n'y aura donc que de confronter la répartition du nombre de Stanton issue du "HLBL" et celle obtenue par MacCormack *et al.*[29]. Dans cette référence les auteurs ont utilisé la méthode de relaxation de Gauss-Seidel pour la résolution implicite de la décomposition de flux appliquée aux équations de Navier-Stokes afin de simuler les écoulements hypersoniques en hors équilibre chimique. Les conditions à l'infini amont sont celles relatives à  $M_\infty = 17.94$  et une altitude de 50 km. La figure V.25 présentant la répartition du nombre de Stanton pour un gaz inerte montre un accord acceptable du point de vue allure.

- Euler-ordre 1
- ... Euler-ordre 2
- Couche limite-ordre 1
- Couche limite-ordre 2

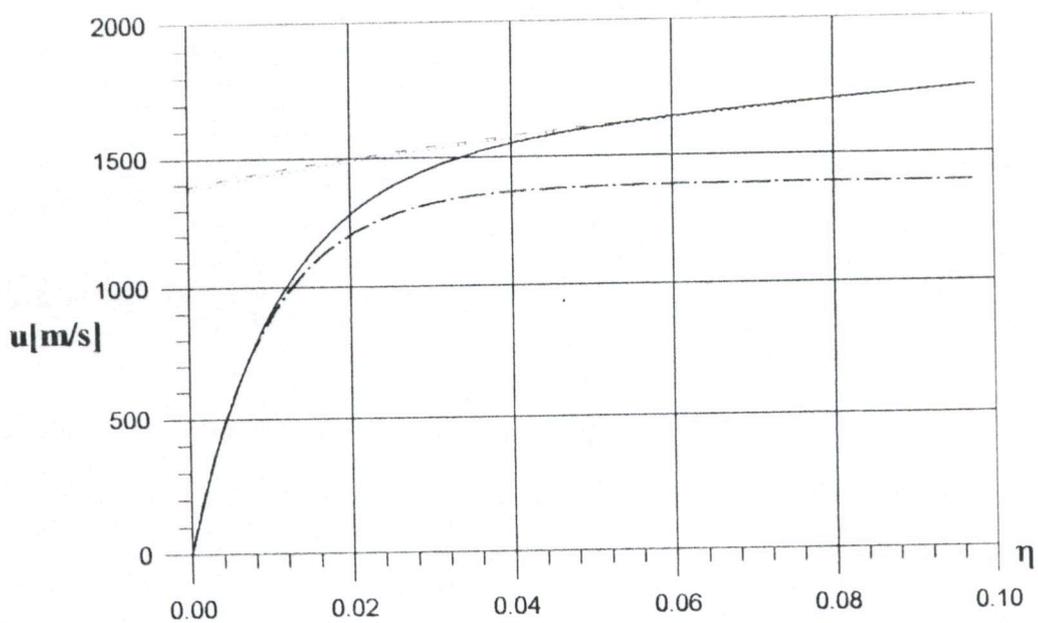


Fig.V.20a. Vitesse longitudinale

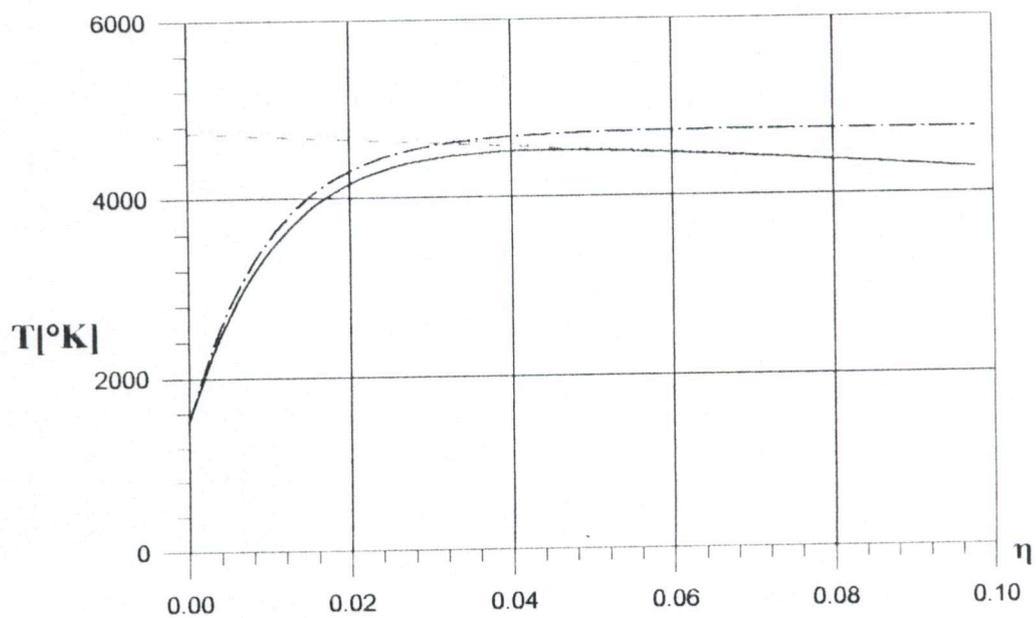


Fig.V.20b. Température

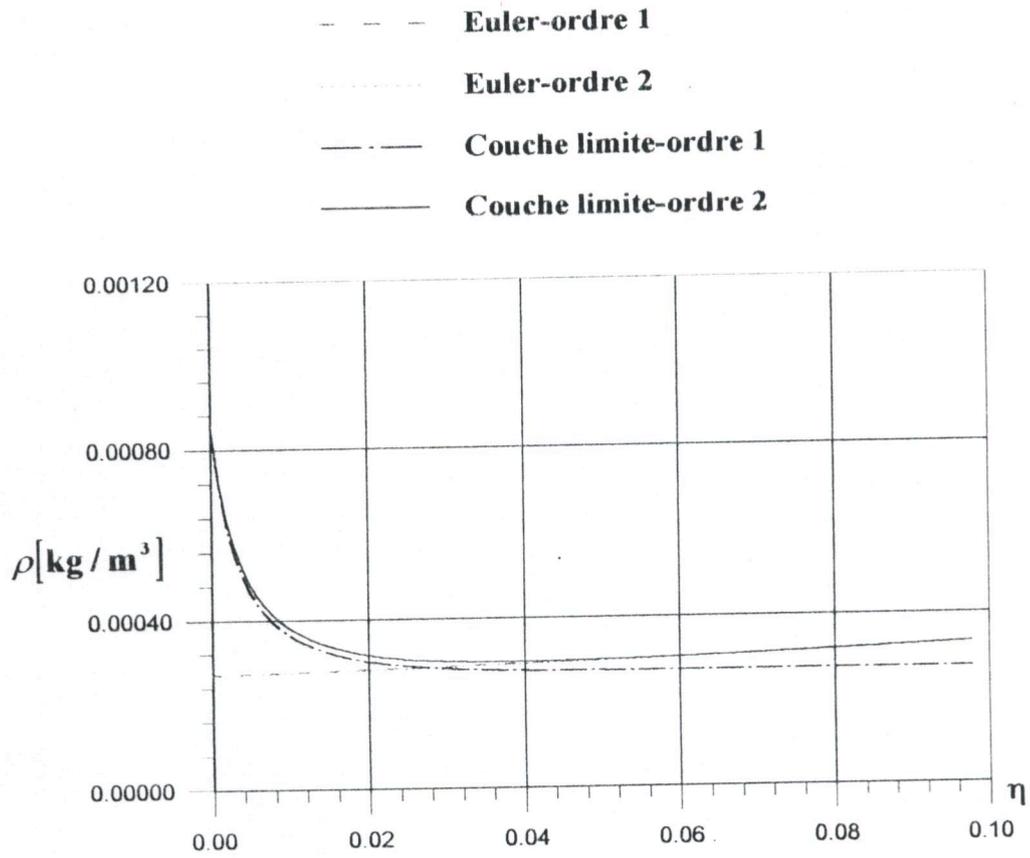


Fig.V.20c. Masse volumique

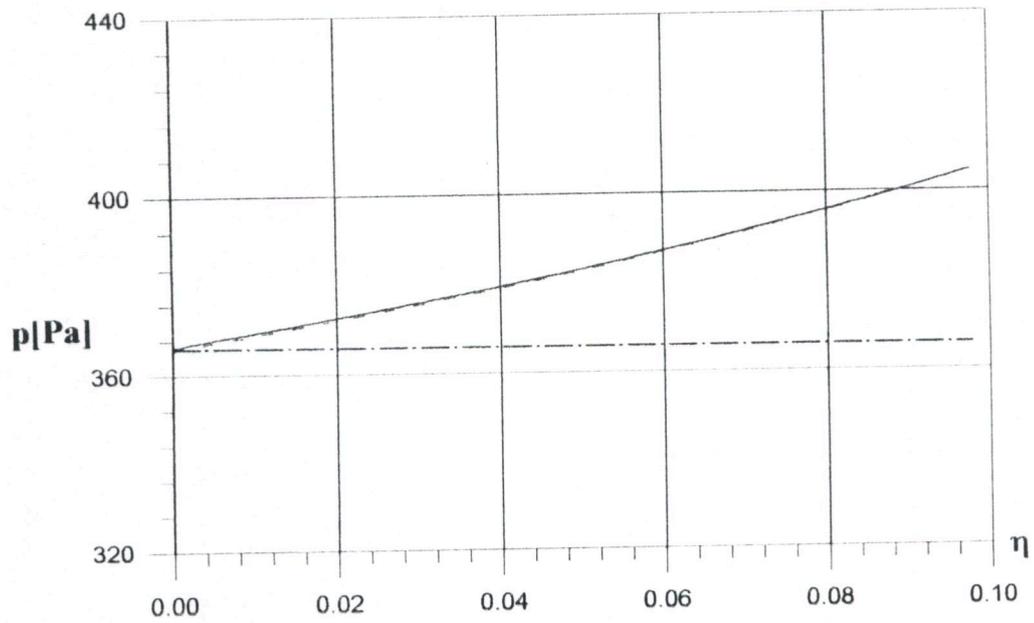
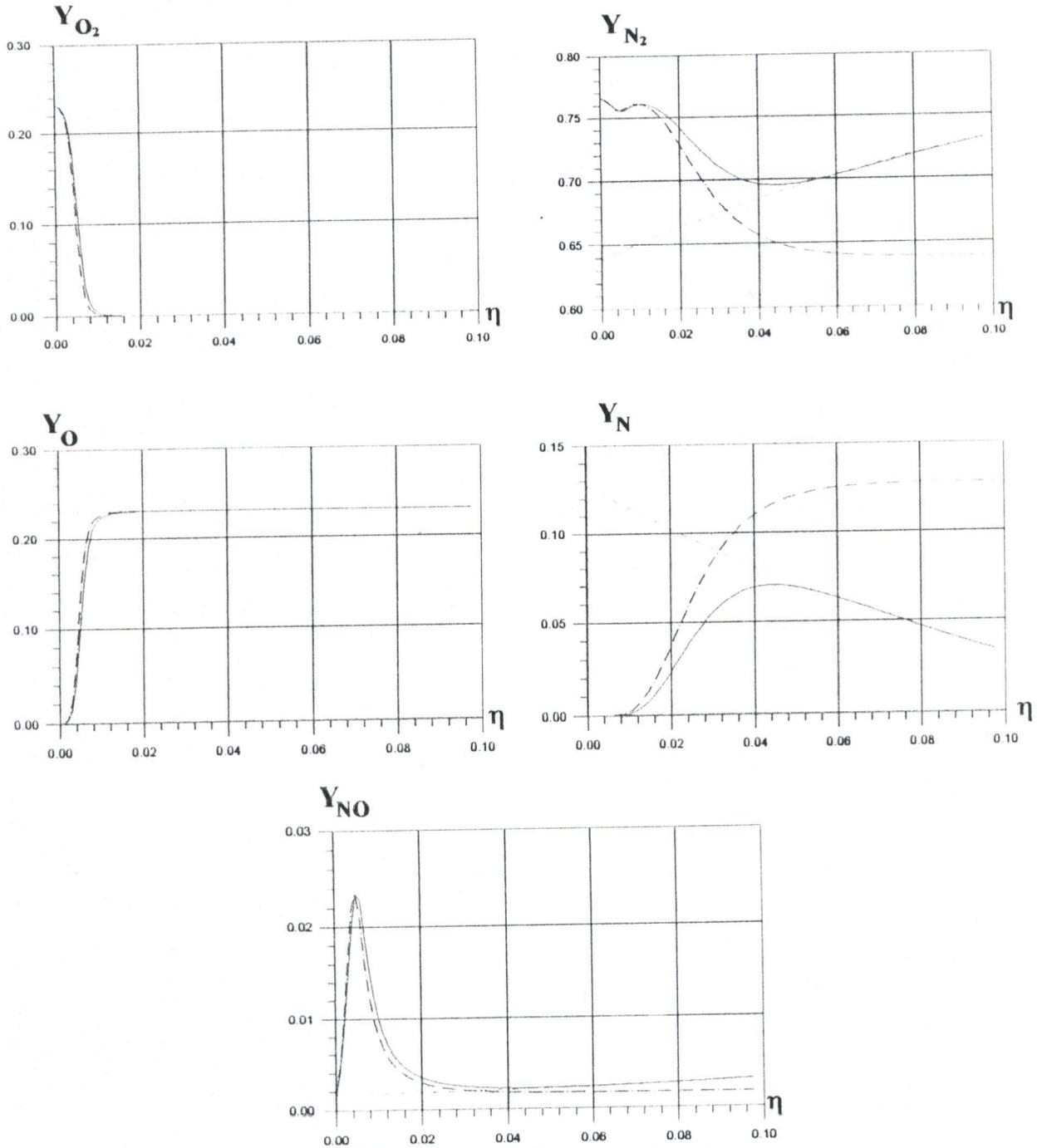


Fig.V.20d. Pression

- Euler-ordre 1
- Euler-ordre 2
- Couche limite-ordre 1
- Couche limite-ordre 2



FigV.20e Fractions massiques

Fig.V.20. Profils normaux à la station  $\xi = 0.3$

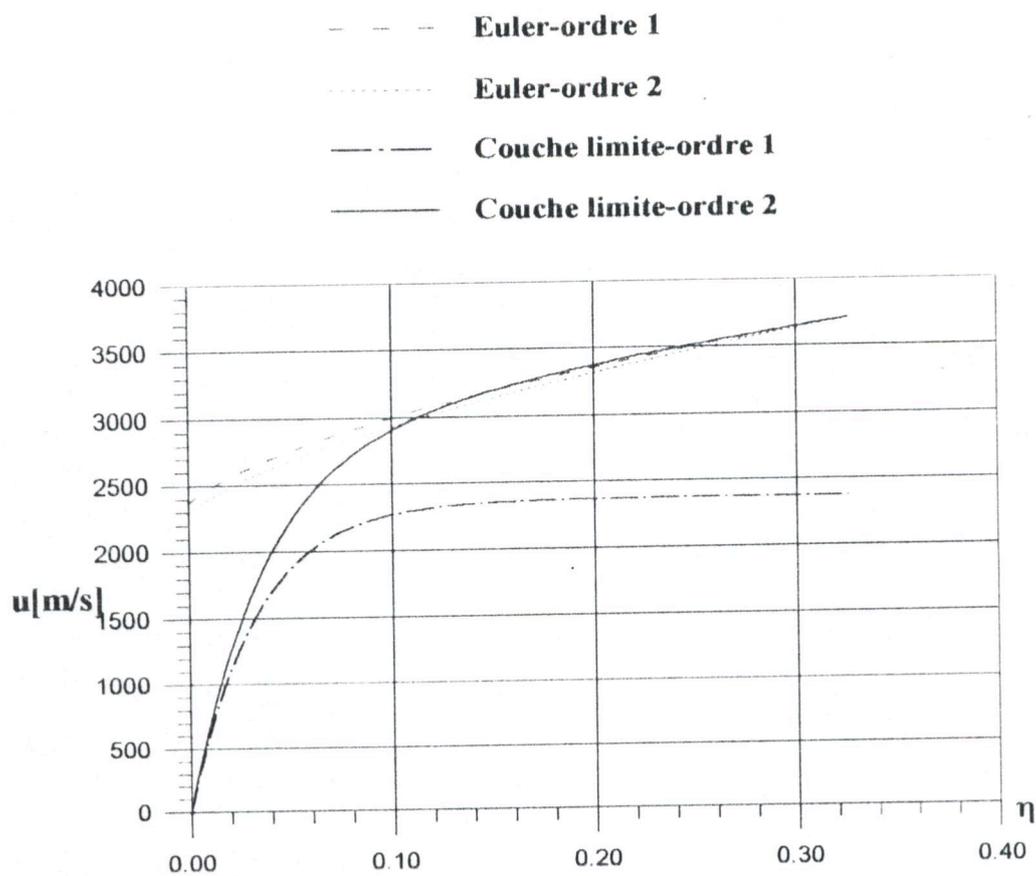


Fig.V.21a. Vitesse longitudinale

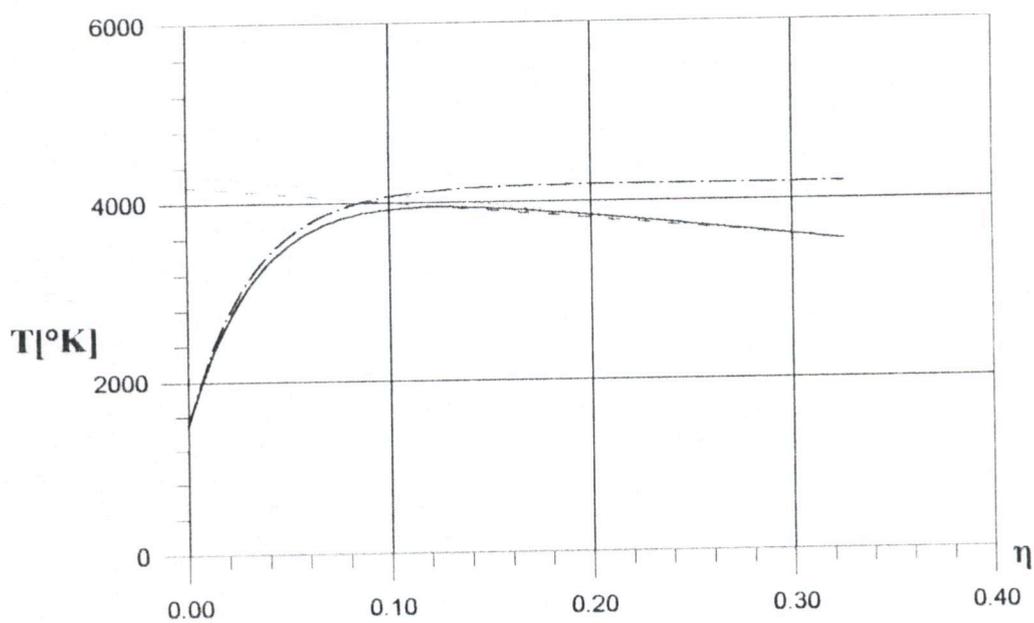


Fig.V.21b. Température

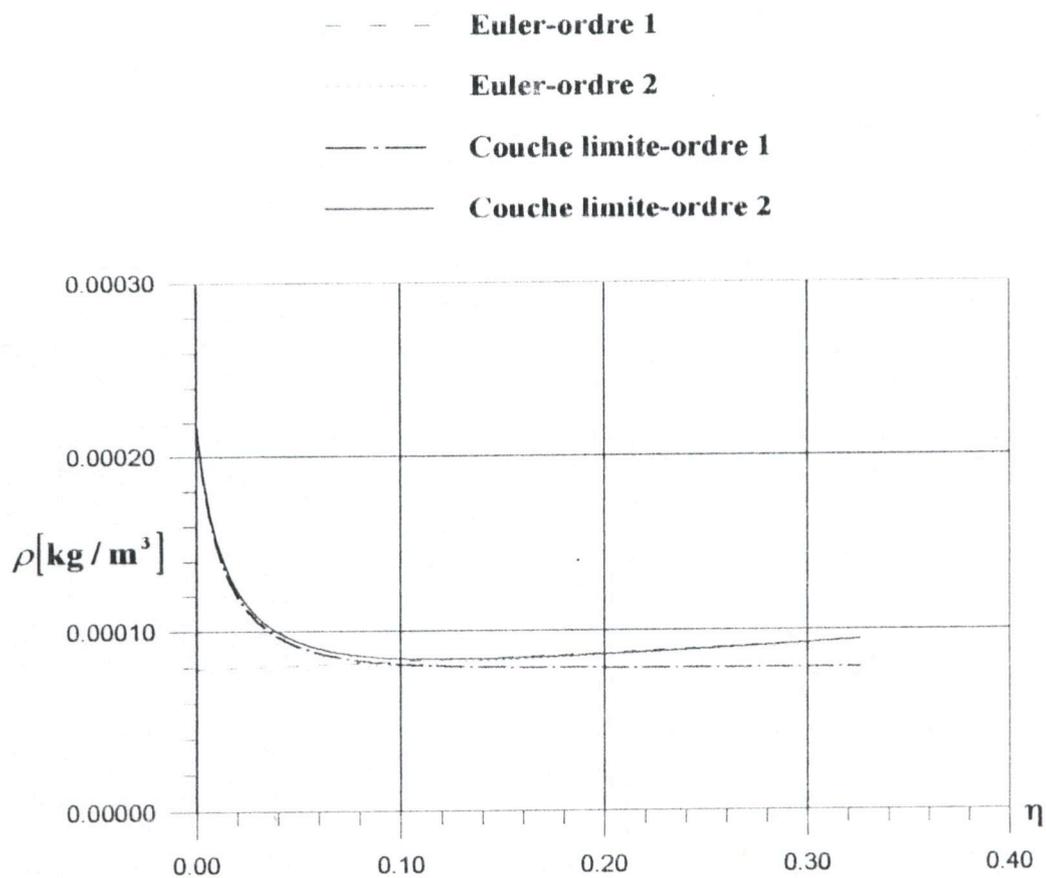


Fig.V.21c. Masse volumique

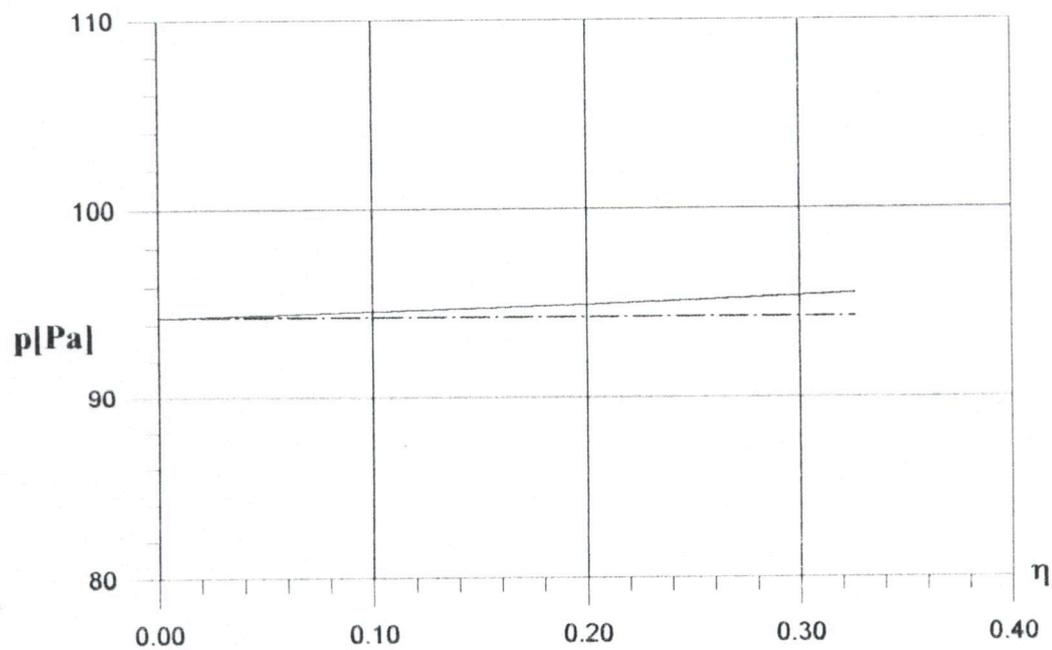
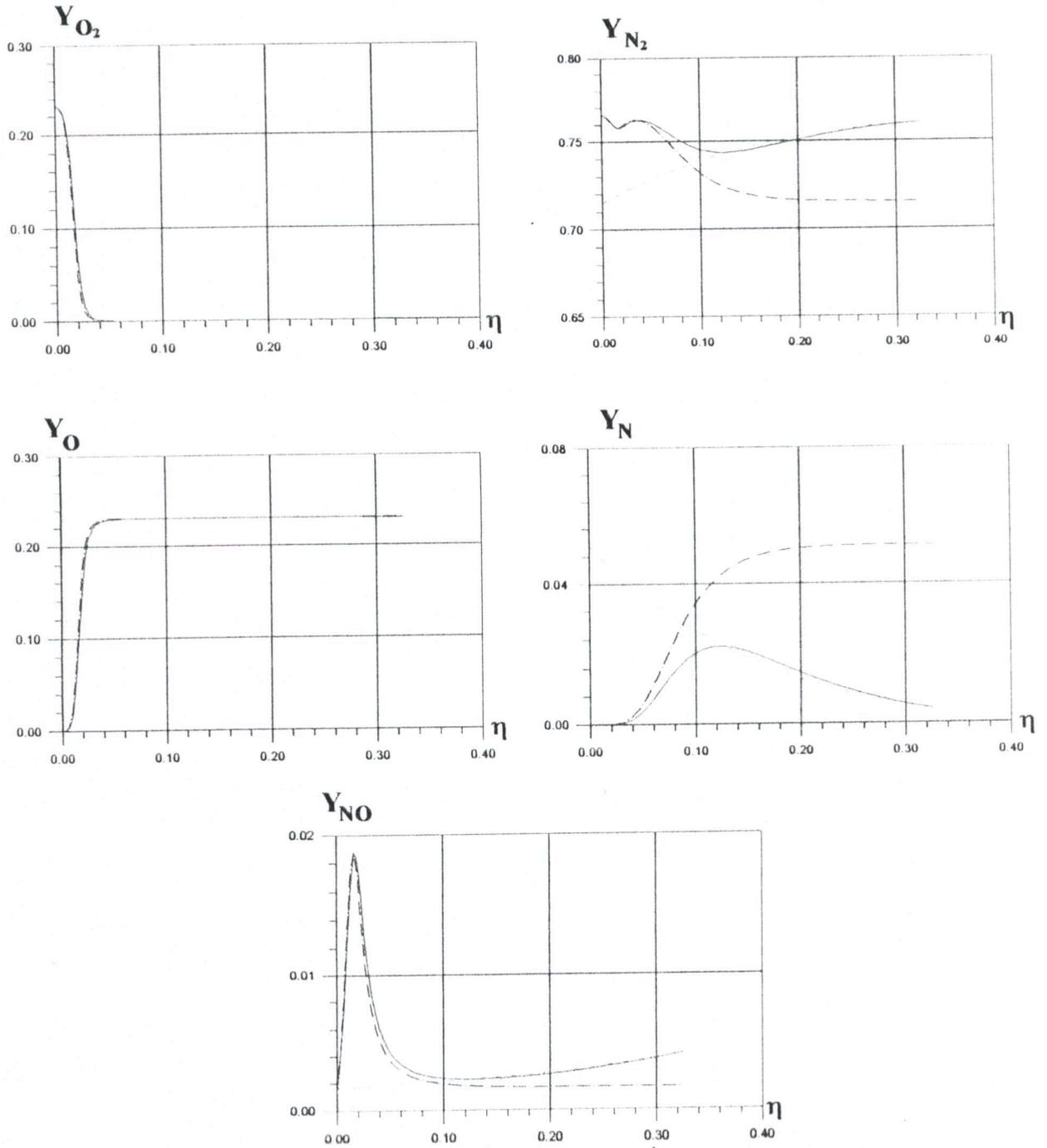


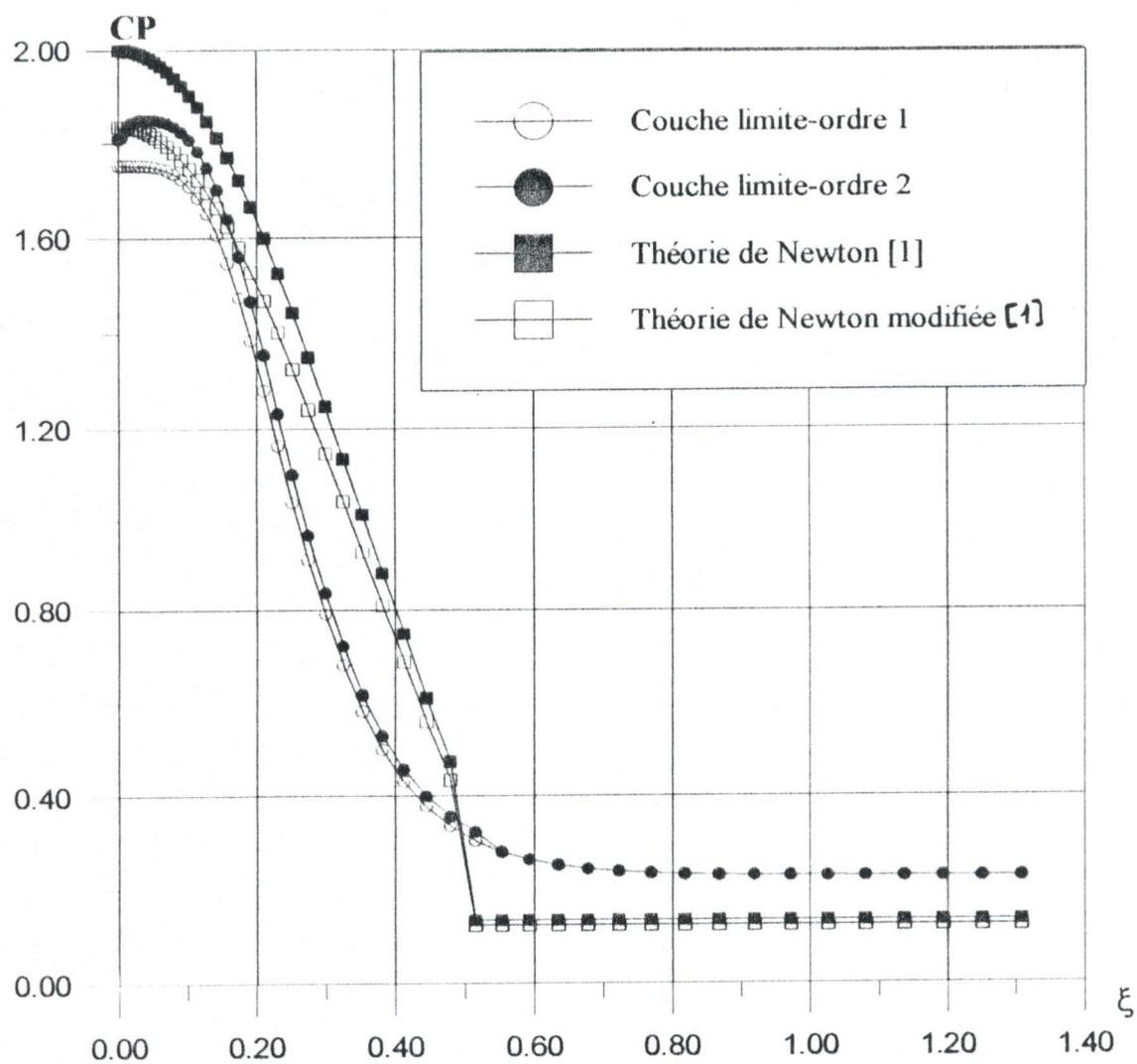
Fig.V.21d. Pression

- Euler-ordre 1
- ..... Euler-ordre 2
- .-.- Couche limite-ordre 1
- Couche limite-ordre 2



FigV.21e Fractions massiques

Fig.V.21. Profils normaux à la station  $\xi = 1.2$



**Fig.V.22a. Coefficient de pression**

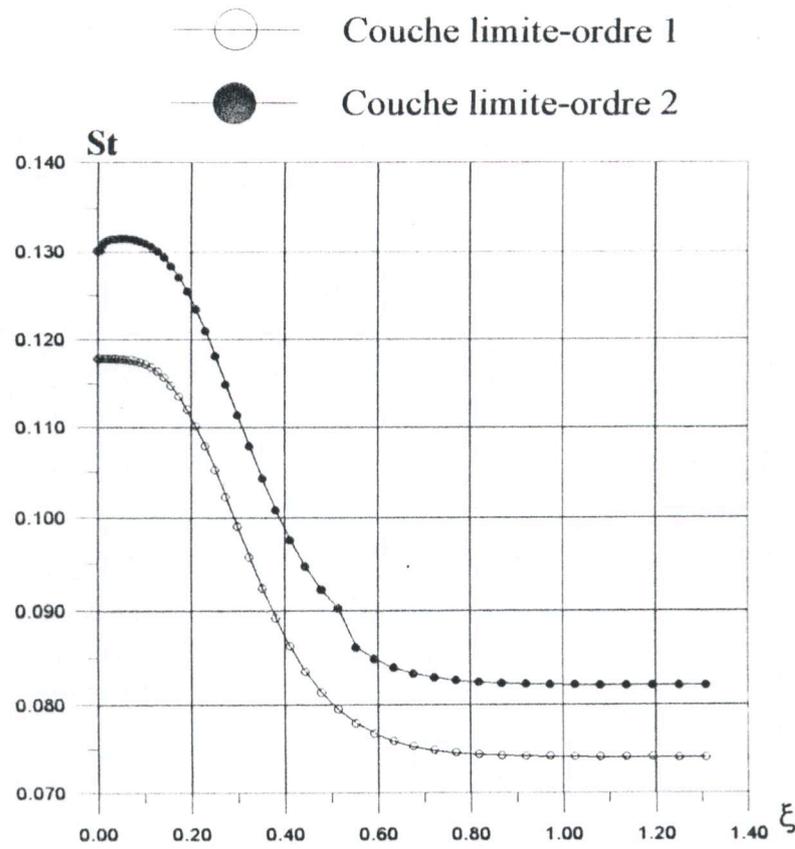


Fig.V.22b. Nombre de Stanton

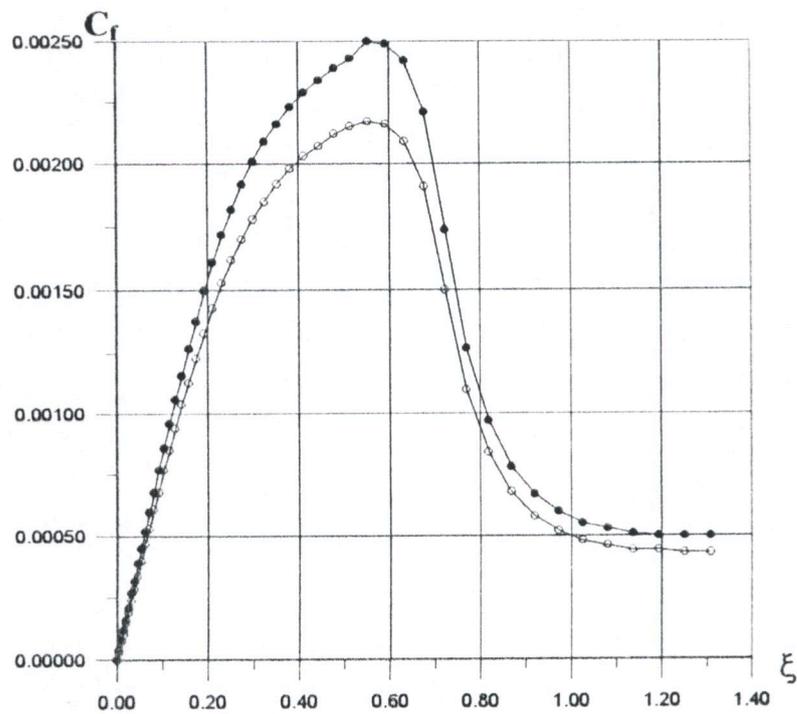


Fig.V.22c. Coefficient de frottement

Fig.V.22. Répartition des coefficients pariétaux issus d'un calcul du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>ème</sup> ordre à  $M_\infty = 15$  (l'air à l'équilibre chimique)

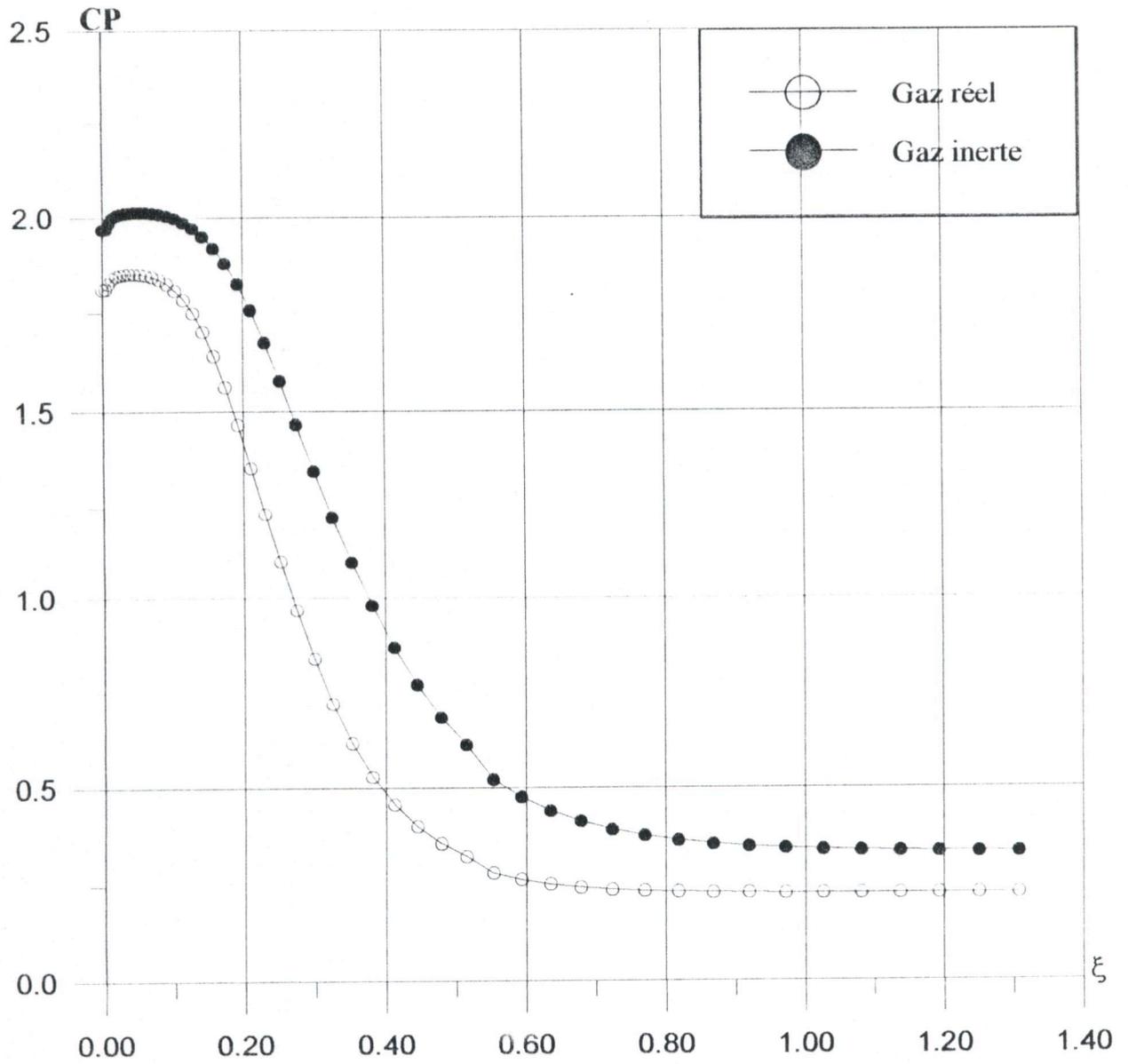


Fig.V.23a. Coefficient de pression

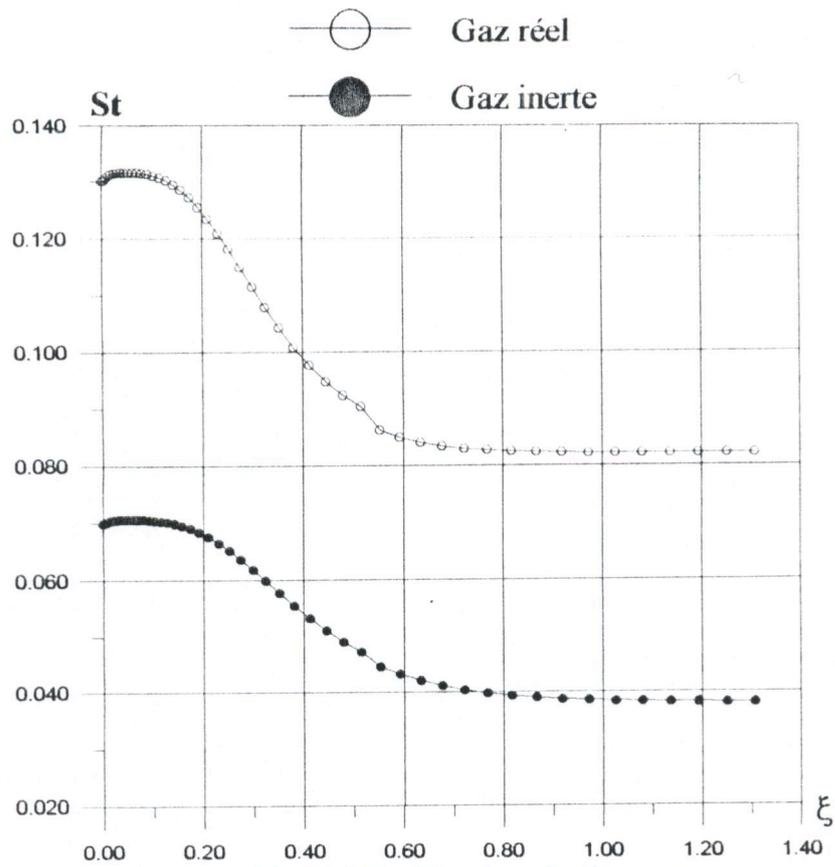


Fig.V.23b. Nombre de Stanton

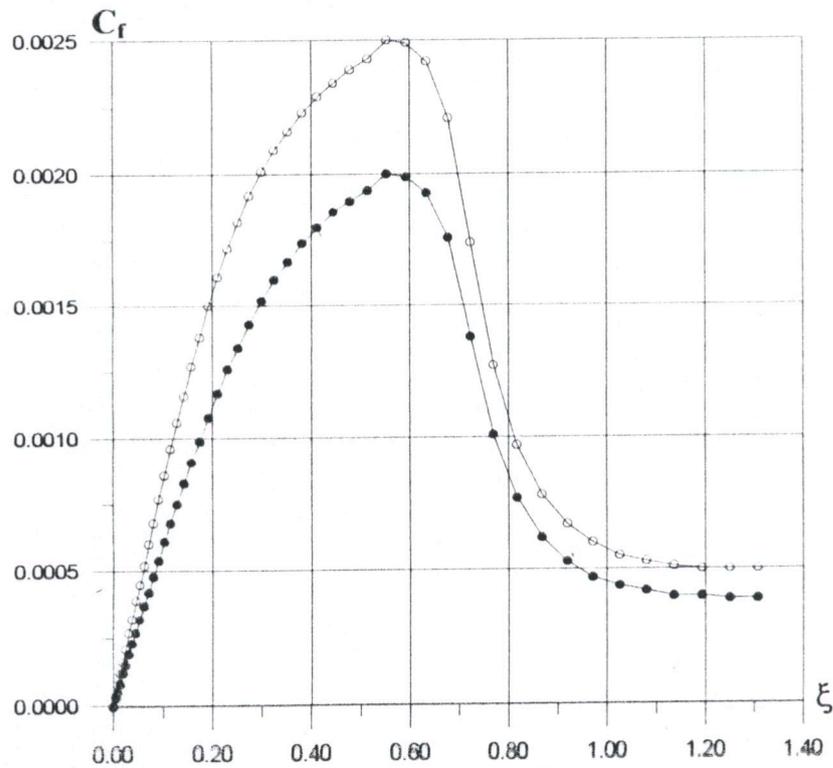


Fig.V.23c. Coefficient de frottement

**Fig. V.23.** Répartition des coefficients pariétaux issus d'un calcul du 2<sup>ème</sup> ordre à  $M_\infty = 15$ ; comparaison entre le cas d'un gaz réel à l'équilibre chimique et le cas d'un gaz inerte

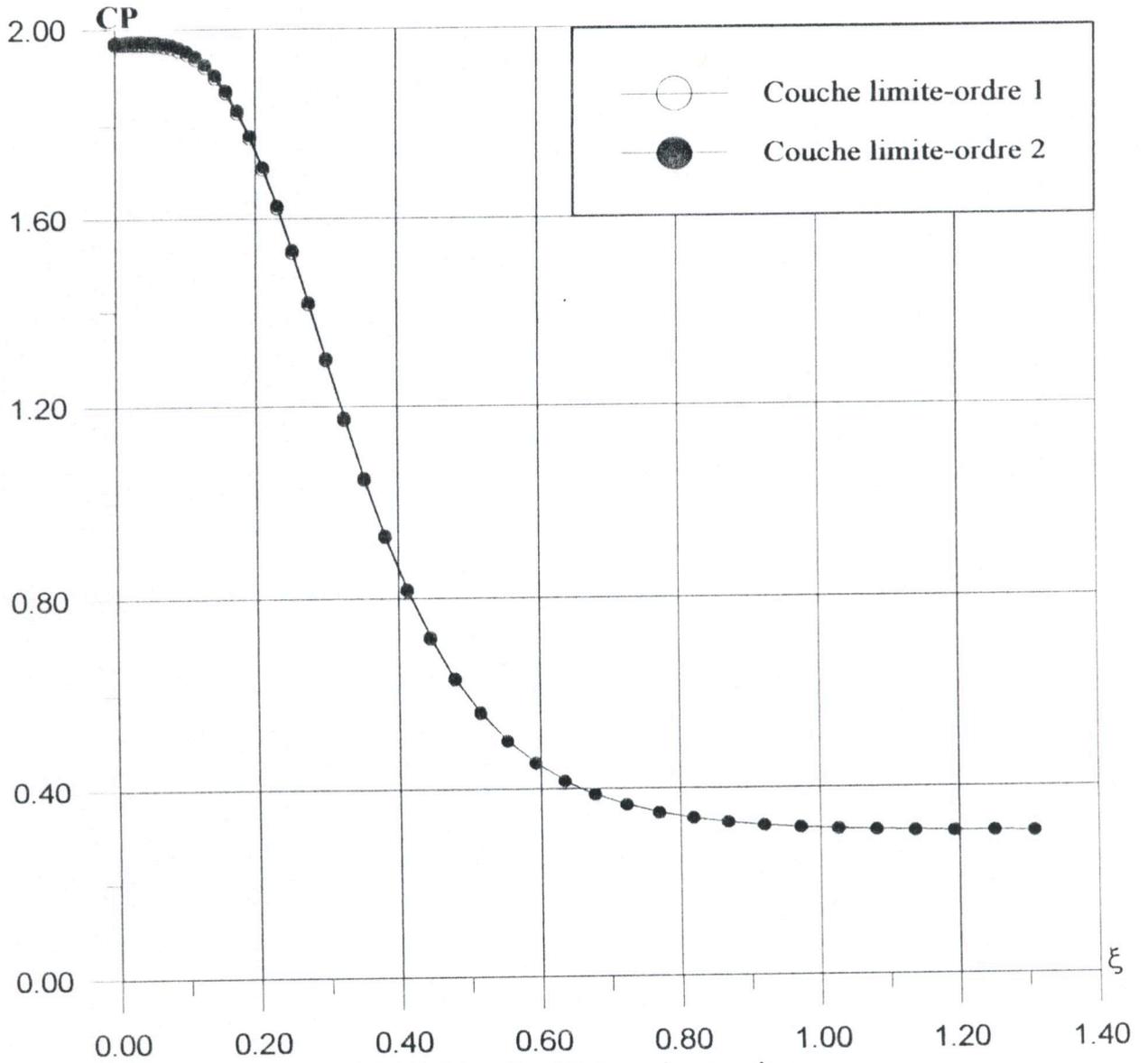


Fig.V.24a. Coefficient de pression

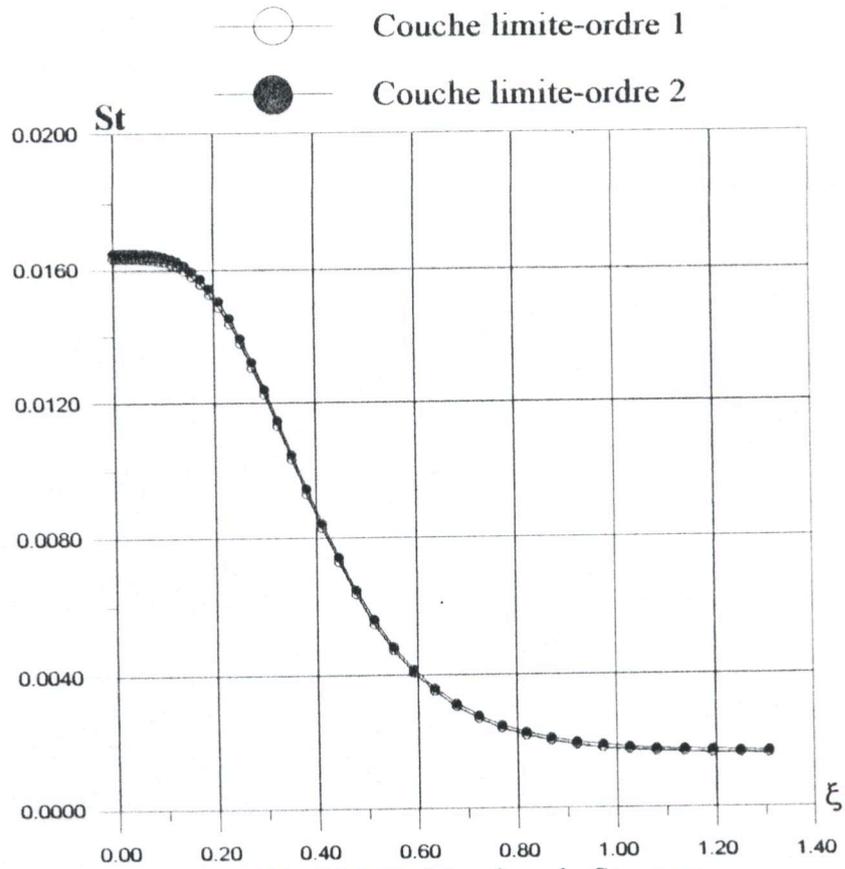


Fig.V.24b. Nombre de Stanton

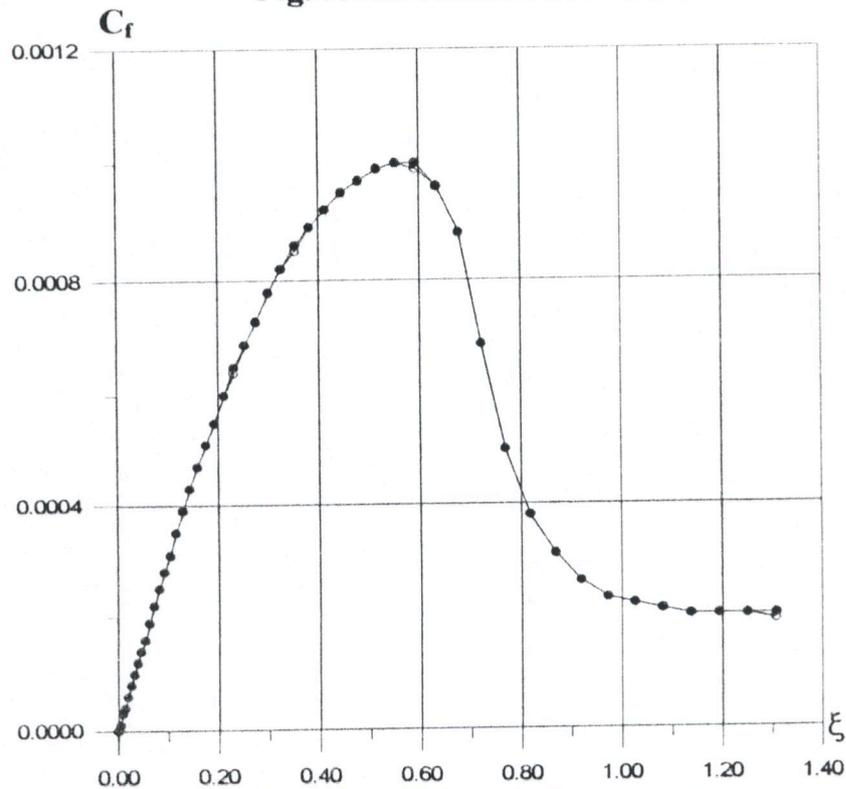
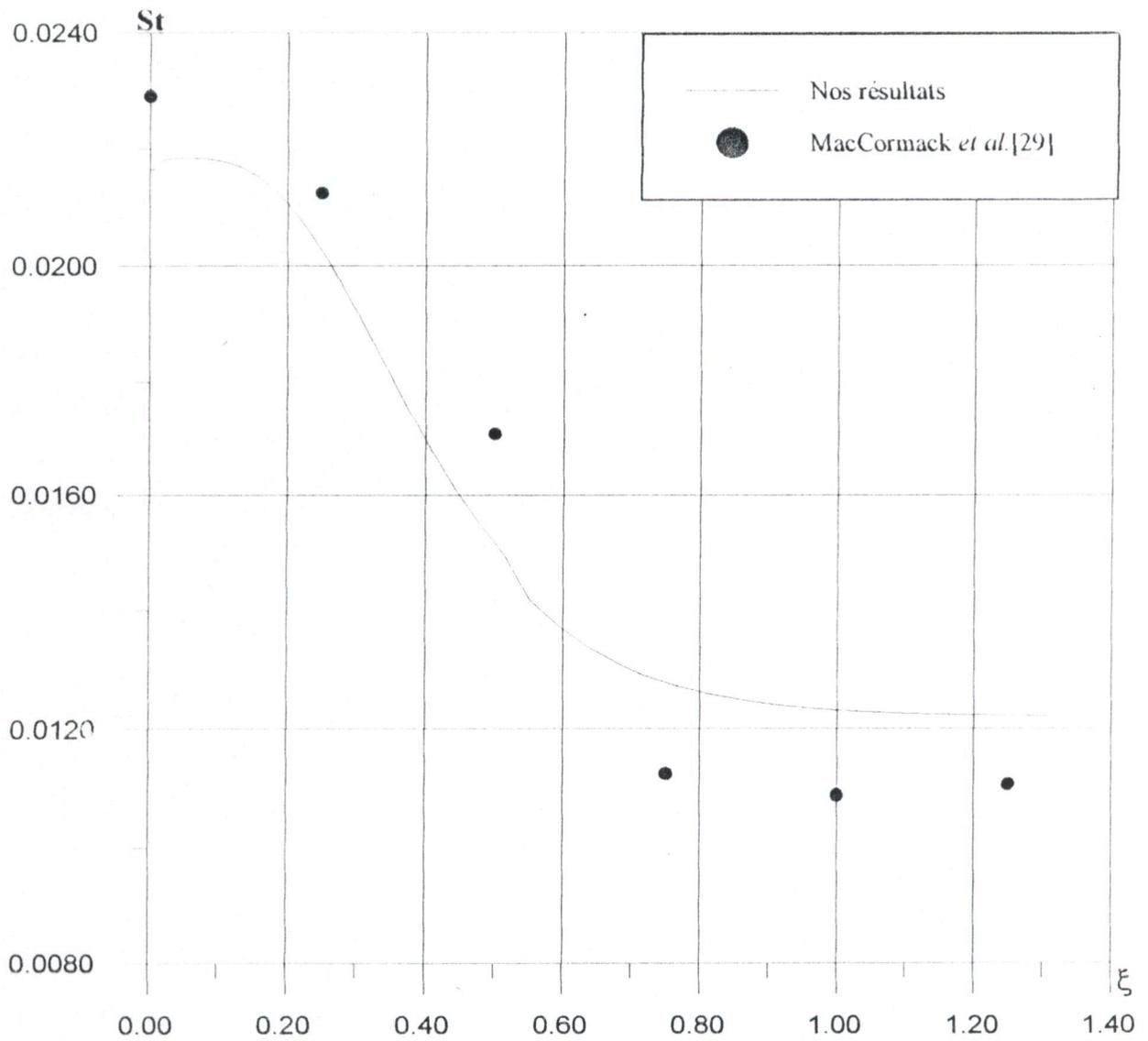


Fig.V.24c. Coefficient de frottement

Fig.V.24. Répartition des coefficients pariétaux issus d'un calcul du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>ème</sup> ordre à  $M_\infty = 5$



**Fig.V.25.** Comparaison des résultats pour le nombre de Stanton  
(gaz inerte,  $M_\infty = 17.94$ )

## Conclusion

Cette étude a permis de mettre en évidence les difficultés majeures rencontrées dans la simulation des écoulements hypersoniques. Cette dernière se heurte au problème de modélisation des phénomènes physiques bien que aux contraintes numériques imposées par la nature des schémas utilisés.

La méthode de couplage Euler/couche limite développée dans le cadre de cette thèse pour la simulation des écoulements stationnaires visqueux, réactifs, laminaires et bidimensionnels autour des géométries arrondies à hautes valeurs de vitesse et du nombre de Mach présente des avantages majeurs par rapport à celle basée sur la résolution complète et même simplifiée des équations de Navier-Stokes. En effet, la méthode de couplage permet de restituer les effets visqueux dans la région interne et les ondes de choc dans la région externe. Ce découplage de phénomènes physiques impose moins de contraintes dans le choix des schémas numériques utilisés, ce qui conduit à résoudre les équations d'Euler et de la couche limite par des techniques numériques robustes. Ainsi, il a été montré dans plusieurs études [9, 57] que les modèles de transition et de turbulence sont faciles à les implanter dans un calcul de couplage Euler/couche limite, contrairement à la résolution des équations complètes de Navier-Stokes.

Les calculs Euler ont été effectués à l'aide d'un schéma en différences finies explicite centré de MacCormack précis au second ordre en temps et en espace. Ce dernier est capable de capter d'une façon automatique l'onde de choc courbe détachée qui il apparaît à l'avant du nez dans le cas de la rentrée atmosphérique en introduisant le concept de la viscosité artificielle d'ordre élevé du 2<sup>ème</sup> et du 4<sup>ème</sup> ordre. Cette dernière permet de minimiser les fluctuations au point de les supprimer complètement pour des valeurs modérées de  $M_\infty$ . Un seul problème est associé à ce schéma, qui est la restriction du pas de temps lié à la condition de stabilité de type C.F.L. En effet, le schéma qu'on a appliqué étant explicite, la stabilité dépend du pas de maillage qui a une influence directe sur les calculs. La diminution de l'épaisseur artificielle des chocs et par conséquent, l'amélioration de la qualité des résultats par un raffinement de maillage entraîne la diminution du pas de maillage. Cependant, on ne peut malheureusement pas de diminuer indéfiniment ce dernier car d'un côté nous sommes limités par la condition de stabilité et d'un autre côté, le temps de calcul deviendra infini.

Le calcul de couche limite pour la région interne est basé sur la théorie de Van Dyke du deuxième ordre. En premier lieu, les équations de couche limite sont découplées de celles régissant l'écoulement externe. En respectant l'ordre établi, il est donc possible de résoudre les deux problèmes séparément. De plus, la structure parabolique des équations de couche limite autorise l'emploi pour les résoudre de méthodes de marche en espace très rapides. Nous avons montré que l'approche de couche limite d'ordre 2 a l'avantage de bien se raccorder à l'écoulement externe et a la

capabilité de tenir en compte l'effet du rotationnel de l'écoulement externe au bord de la couche limite, contrairement à l'approche classique d'ordre 1 (de Prandtl) qui se heurte au phénomène d'épaississement de la couche limite pour des faibles nombres de Reynolds et au phénomène de rotationnalité de l'écoulement externe dû à la présence d'une onde de choc courbe. Elle indique aussi une augmentation importante du coefficient de frottement et du nombre de Stanton par rapport à la solution de couche limite du premier ordre, qui sera corrigée au second ordre par l'effet de déplacement. De manière générale, la correction apportée par la solution d'ordre 2 est trop forte dans le cas d'une couche limite épaisse. Cette correction tend à être négligeable si la couche limite devient de plus en plus mince.

Aussi, il est intéressant d'étendre le code développé aux écoulements de gaz réel pour pouvoir traiter les effets de gaz réactifs. La prise en compte de ces effets a été limitée au cas de l'équilibre chimique car, cette hypothèse permet d'avoir une seule version pour le cas d'écoulement inerte (non réactif). Pour le calcul "Euler", cette extension a été faite en introduisant la notion de " $\gamma$  équivalent". Cependant, pour le calcul de la couche limite, seules l'équation de l'énergie et l'équation d'état du gaz sont affectées. Les effets du gaz réactif sont endothermiques et augmentent sensiblement le coefficient de transfert de chaleur.

Cette étude s'est limitée aux écoulements laminares bidimensionnels, mais l'extension aux écoulements tridimensionnels paraît envisageable. Les équations à traiter sont certes plus complexes, mais ne devraient pas révéler de difficultés fondamentales insurmontables.

En revanche, les perspectives sont nombreuses. Du point de vue physique, il serait intéressant d'introduire les modèles de turbulence et du déséquilibre chimique et thermique, pour pouvoir couvrir toute la rentrée atmosphérique d'une navette spatiale.

## Bibliographie

- [1] ANDERSON Jr.J.D. "Modern compressible flow with historical perspective"  
McGraw Hill, New-York, 1982
- [2] ARMENISE.I. - CAPITELLI.M. - COLONNA.G.- GORSE.C.  
"Nonequilibrium vibrational kinetics in the boundary layer of re-entering  
bodies", J. of thermophysics and heat transfert Vol. 10- No 3- July- September  
1996
- [3] BARINSKY.H and EDWARDS.J.A. "On the incipient separation of a turbulent  
hypersonic boundary layer" Aeronautical Jl. June/July 1996- pp 209-214
- [4] BRAZIER.J.Ph - AUPOIX.B. - COUSTEIX.J. "Investigations on entropy layer  
along hypersonic hyperboloïds using a defect boundary layer", Fifth  
symposium on "Numerical and physics aspects of Aerodynamic flows" 13-15  
Janaury 1992 Long Beach - California
- [5] CHUN.T.C et al. "A boundary -fitted grid model for tidal montions :  
Orthogonal coordinates generation in 2D embodying singapore coastal waters",  
Computrs Fluids Vol. 23-N° 7 pp881-893- 1994
- [6] COLELLA.P and GLAZ.H.M. "Efficient solution algorithms for the Riemann  
problem for real gases", J.Comput Physis 59., 264 -289, 1985
- [7] COLONNA.G. - CAPITELLI.M. "Electron and vibrational kenitics in the  
Boundary layer of hypersonic flows", Journal of thermophysics and heat  
transfert vol.10, N° 2, April-June 1996
- [8] CORJON.A. - AUPOIX.B. "Calcul des couches limites tridimensionnelles  
hypersoniques par une méthode de caracteristiques : Approches classique et  
déficiente", La recherche aérospatiale N° 6, Novembre -Décembre, p 9-26,  
1993
- [9] COUSTEIX.J. - ARNAL.D. - AUPOIX.B. - BRAZIER.J.Ph. and LAFON.A.  
"Shock layers and boundary layers in hypersonic flows", Progress in  
Areospace Sci Vol. 30 - N° 2, 1994
- [10] COUSTEIX.J. "Couches limites laminares", Editions CEPADUES, 1988
- [11] DARROZES.J.S. "Techniques asymptotiques de modélisation en vue de la  
simulation", Cours du DEA de Mécaniques des fluides. Université Pierre et  
Marie-Curie 1987

- [12] DESIDERI.J.A. - GLINSKY.N. and HETTENA.E. "Hypersonic reactive flow computations", *Computers & Fluids*, Vol.18 - N°2, pp 151-182, 1996
- [13] DRUMMOND.J.P. - HUSSAINI.M.Y. and ZANG.T.A. "Spectral methods for modeling supersonic chemically reacting flow fields", *AIAA. J.* 24, 1461-1467, 1986
- [14] EBERHARDT.S - PALMER.G. "A two-dimensional, TVD numerical scheme for inviscid, high Mach number flows in chemical equilibria", *AIAA/ASME 4<sup>th</sup> Joint Thermophysics and Heat -Transfert Conf. Boston, AIAA*, pp N°86-1284, 1986
- [15] ELAICHI.T. "Application des techniques de génération de maillages pour le calcul d'écoulements potentiels transsoniques stationnaires", Thèse de Magister, INES d'Aéronautique de Blida, Mars 1997
- [16] FLETCHER.C.A.J. "Computational techniques for fluid dynamics", Vol. II *Springer-Verlag-Berlin Heidelberg- New-York*, 1988
- [17] GLAISTER.P. "An approximate linearized Riemann solver for the Euler equations for real gases", *J. Comput. Phys.* 74, 382-408, 1988
- [18] GODOUNOV.S - COLL. "Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz", ED. MIR-Moscou 1979
- [19] HASSAN.O - MORGAN and PERAIRE.J. "An implicit/explicit scheme for compressible viscous high speed flows", *Computer Methods in applied Mechanics and Engineering* 76, pp 245-258, North-Holland, 1989
- [20] HE.J. - KAZAKIA.J.Y. and WALKER.J.D.A. "An asymptotic two-layer model for supersonic turbulent boundary layers", *J.Fluid. Mech.* Vol. 295, pp 159-198, Vol. 295, 1995
- [21] HEUZE.O - PRESLES.H.N. - BAUER.P. "Computation of chemical equilibria", *J. Chem.Phys.* 83 (9), 1 November 1985
- [22] HIRSCH.C. "Numerical computation of internal and external flows", Vol I, *John Wiley & Sonc*, 1990
- [23] HIRSCH.C. "Numerical computation of internal and external flows", Vol II, *John Wiley & Sonc*, 1990
- [24] KREITH.F. "Transmission de la chaleur et thermodynamique", Edition Masson et C<sup>ie</sup> Editeurs, 1967
- [25] KUMAR.D - STOLLERY.J.L. "Hypersonic control flap effectiveness", *Aeronautical JI*, June/July, pp 197-208, 1996

- [26] KWON.J.H - JEONG.H.K. "Solution-adaptive grid generation for compressible flow", *Computers & Fluids*, Vol.25 - N°6, pp 551-560,1996
- [27] LI.C.P. "Hypersonic nonequilibrium flow past a sphere at low Reynolds numbers", *AIAA 12<sup>th</sup> Aerospace Sci Meeting*, Washington, D.C, AIAA pp N° 74-173, 1974
- [28] MAcCORMACK.R.W. "Numerical solution to the integration of a shock wave with a laminar boundary layer", *Lecture Notes in Physics*, Vol.8, pp. 151-163, Springer, New-York 1971
- [29] MAcCORMACK.R.W. - CANDLER.G.V. "The solution of the Navier-Stokes equations using Gauss-Seidel line relaxation", *Comput & Fluids*. Vol.17 N° 1, pp. 135-150, 1989
- [30] MACROSSAN.M.N. - PULLIN.D.I. "A computaional investigation of inviscid hypervelocity flow of a dissociating gas past a cone at incidence", *J.Fluid Mech*. Vol. 266, pp. 69-92, 1994
- [31] MALLINSON.S.G. - GAI.S.L. - MUDFORD.N.R. "The boundary layer on a flat plate in hypervelocity flow", *Aeronautical Jl*. pp. 135-141, April 1996
- [32] MALLINSON.S.G. - GAI.S.L. - MUDFORD.N.R. "Hight-enthalpy, hypersonic compression corner flows", *AIAA Jl*. Vol. 34, N°6, pp.1130-1137, June 1996
- [33] MASAD.J.A. - ABID.R. "On transition in supersonic and hypersonic boundary layers", *Int j. Engng Sci*. Vol.33 N°13, pp. 1893-1919, 1995
- [34] MONNERIE.B. "Moyens d'essai et de recherche", *Encyclopédie, Aérodynamique*, p.324-330
- [35] MONNOYER.F. "Calculation of three dimmensional attached viscous flow on general configurations using second-order boundary layer theory", *Z.Flugwiss.Weltraumforsch*. 14 (1990) 95 -108, Springer Verlag, 1990
- [36] MONTAGNE.J.L. "Utilisation d'un schéma décentré pour la simulation d'écoulements non visqueux de gaz réels à l'équilibre", *La Recherche Aérospatiale*, p.433-441, 1986
- [37] MONTAGNE.J.L. - YEE.H.C. - VINOKUR.M. "Comparative study of high resolution shock-capturing schemes for a real gas", *NASA Technical Memorandum 1000074*, 1987

- [38] NISHIO.M. "Methods for visualizing hypersonic shock-wave/boundary layer interaction using electrical discharges", AIAA Jl. Vol. 34, N° 7, , pp.1464-1467, July 1996
- [39] PARK.C. "On the convergence of chemically reacting flows", AIAA pp. 85-0247, 1985
- [40] PRABHU.D.K. - TANNEHILL.J.C. - MARVIN.J.M. "A new PNS code for chemically nonequilibrium flows", AIAA Jl.26 - 808 - 1988
- [41] PRABHU.D.K. - TANNEHILL.J.C. "Numerical solution of space shuttle orbiter flow field including real-gas effects" J. Spacecraft 23, 264-272, 1984
- [42] RAKICH.J.V. - BAILEY.H.E.- PARK.C. "Computation of nonequilibrium threedimensional inviscid flow over blunt-nosed bodies flying at supersonic speeds", AIAA pp. N°75 - 835, 1975
- [43] RAMSHAW.J.D - CLOWTMAN.L.D. "Numerical method for partial equilibrium flow" J. Comput. Phys.39, 405-417, 1981
- [44] RIZZI.A.W. - BAILEY.H.E. "Split space - marching finite-volume method for chemically racting supersonic flow", AIAA J. 14, 621-628, 1976
- [45] ROE.P.L. "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes", Jl of computational Physics 43, 357-372, 1981
- [46] RYHMING, "Dynamique des fluides"
- [47] SAWLEY.M.L. - WÜTHRICH.S. "Non-equilibrium hypersonic flow simulations using the second-order boundary layer equations", Comput.Meth. Appl. Mech-Engng. 89, 1991
- [48] SAWLEY.M.L. - WÜTHRICH.S. "Non-equilibrium hypersonic flow simulations using a coupled Euler/boundary layer method",Proc. 1st Eur. Symp on Aerothermodynamics for space vehicles, ESA - SP 318,p. 387, 1991
- [49] SHINN.J. - MOSS.J.N. - SIMMONDS.A.L. "Viscous shock-layer heating analysis for the shuttle windword symmetry plane with surface finite catalytic recombination rates", AIAA. pp.82-0842 3<sup>rd</sup> AIAA / SAME. Joint thermophysics, fluids, plasma and heat transfer. Conference, St-Louis, Mo-June- 7-11, 1982
- [50] STANISIC.S. - RYAN.J. "Methode numérique de résolution des équations de Navier-Stokes pour un fluide à bas nombre de Mach", Rech-Aérop. N° 4 Juillet-Août p.1-13, 1992

- [51] VAN DYKE.M. "Perturbation methods in fluid mechanics" Parabolic Press, 1975
- [52] VAN DYKE.M. "Second-order compressible boundary - layer theory with application to blunt bodies in hypersonic flow", Hypersonic flow Resarch. Vol.7, p.37, F.R.Riddell Editor, Academic Press, 1962
- [53] VAN DYKE.M. "Higher approximations in boundary layer theory -  
- "Part 1: General analysis", J. of fluid Mech. Vol. 14, pp.161-177, 1962  
  
- "Part 2 : Application to leading edges", J. of fluid Mech. Vol. 14, pp.481-495, 1962  
  
- "Part 3 : Parabola in uniform stream", J. of fluid Mech. Vol. 19, pp.145-159, 1963
- [54] VAN DYKE.M. "Higher approximations in boundary layer theory", A. Rev. Fluid.mech.1, pp.265-292, 1969
- [55] VOS.J.B. - BERGMAN.C.M, "Chemically equilibrium and non-equilibrium inviscid flow simulations using an explicit scheme", Computer physics communications, pp.289-298, 65, 1991
- [56] WÜTHRICH.S. - PERREL.F. - SAWLEY.M.L - LAFON.A. "Hypersonic flow in chemical non-equilibrium : A comparison of thin-layer Navier-Stokes and coupled Euler/boundary layer computations", Computers fluids Vol.23. N°2, pp. 415-432, 1994
- [57] WÜTHRICH.S. - SAWLEY.M.L. - PERRCOUD.G. "The coupled Euler/boundary layer method as a disign tool for hypersonic re-entry vehicles", Z.Flugwiss Weltraumforsh.20, pp.137-144, 1996
- [58] WÜTHRICH.S. - SAWLEY.M.L."Coupled Euler/boundary layer method for non-equilibrium, chemically-reacting hypersonic flows", AIAA Jl. 30. 2836, 1992
- [59] YOON.S. - FIELD.M. - KWAK.D. "Artificial dissipation models for hypersonic external flows", AIAA/ASME/SAE/ASEE 24 th Joint propulsion conference, Boston, Massachusetts, AIAA-88-3277 July 11-13,1988
- [60] YU.S.T - McBRIDE.B.J. - HSIEH.K.C. - SHUEN.J.S. "A chemical equilibrium method for hypersonic flows simulations", Computers Fluids, Vol.23, N° 1, pp.143-155, 1994

## Appendice A

On reproduit ici les constantes utiles pour le calcul du modèle chimique présenté dans le chapitre II.

	N <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	N	O	NO
M <sub>i</sub> (kg)	28.0134E-03	31.9988E-03	14.0067E-03	15.9994E-03	30.0061E-03
a <sub>1</sub>	3.1537 7.7777	3.2670 2.2893	2.4957 1.3388	2.6428 2.3584	3.2374 5.7368
a <sub>2</sub>	9.9452E -04 -1.1912E -03	1.1324E -03 6.7967E -04	2.3583E -05 4.2074E -04	-1.7596E -04 8.8833E -05	1.0949E -03 -4.6021E -04
a <sub>3</sub>	-2.4649E -07 1.2541E -07	-2.7934E -07 -2.3506E -08	-2.3125E -08 -2.9324E -08	6.0750E -08 -9.4390E -09	-3.0406E -07 5.2982E -08
a <sub>4</sub>	2.0863E -11 -3.0949E -12	2.5253E -11 1.1871E -13	6.3101E -12 9.1878E -13	-5.2372E -12 4.5843E -13	2.7880E -11 -1.2892E -12
a <sub>5</sub>	-3.2876E -18 -2.1690E -20	2.0093E -17 -5.3044E -20	1.7852E -19 4.3496E -20	-5.0993E -18 1.7023E -20	5.8089E -18 -1.3044E -20
a <sub>6</sub>	-9.8236E +02 -8.5376E +03	-1.0243E +03 2.8033E +03	5.6165E +04 5.8083E +04	2.9215E +04 2.9356E +04	9.8555E +03 6.4811E +03
a <sub>7</sub>	4.8001 -2.7306E +01	5.7227 1.4166E +01	4.2146 1.2384E +01	4.3691 6.1065	6.5913 -1.0167 E+01

**Table A.1** Les valeurs des coefficients des polynômes a<sub>J</sub> (J= 1,7)(signalés dans le chapitre II)

### Remarque :

Les coefficients présentés tabulés ci-dessus des polynômes donnant les propriétés thermodynamiques de l'air: la ligne supérieure correspond au plage des températures modérées [300-5000 K°] et la ligne inférieure pour des températures élevées [5000-25000 K°].

Réaction	Catalyseur	B	α	T <sub>A</sub>
O <sub>2</sub> ↔ O + O	N, O	8.250E +13	-1.000	59500
	N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , NO	2.750E +13	-1.000	59500
N <sub>2</sub> ↔ N + N	N, O	1.110E +16	-1.600	113200
	N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , NO	3.700E +15	-1.600	113200
NO ↔ N + O	N, O	4.600E +11	-0.500	75500
	N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub> , NO	2.300E +11	-0.500	75500
NO + O ↔ N + O <sub>2</sub>		2.160E +02	1.290	19200
N <sub>2</sub> + O ↔ N + NO		3.180E +07	0.100	37700

**Table A.2** Coefficients pour le calcul de vitesse de réaction directe k<sub>D</sub> en m<sup>3</sup> mol<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>

Réaction	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>
O <sub>2</sub> ↔ O + O	15.151	-4.127	-0616	0.093	-0.005
N <sub>2</sub> ↔ N + N	17.714	-12.611	0.683	-0.118	0.006
NO ↔ N + O	15.365	-7.784	0.228	-0.043	0.002
NO + O ↔ N + O <sub>2</sub>	0.215	-3.657	0.843	-0.136	0.007
N <sub>2</sub> + O ↔ N + NO	2.349	-4.828	0.455	-0.075	0.004

**Table A.3** Coefficients pour le calcul des constantes d'équilibre  $K_{eq}$  :

Espèce	N <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	NO	N	O
$A_i^\mu$	0.0268142	0.0449290	0.0436378	0.0115572	0.0203144
$B_i^\mu$	0.3177838	-0.0826158	-0.0335511	0.6031679	0.4294404
$C_i^\mu$	-11.3155513	-9.2019475	-9.5767430	-12.4327495	-11.6031403

**Table A.4** Constantes utilisées dans le modèle de Blottner et *al.* pour le calcul de la viscosité et de la conductibilité thermique des espèces chimiques.

## Appendice B

### THEORIE DE VAN DYKE

#### B.1 Notions de développement asymptotique

##### B.1.1 Exemple de problème de petite perturbation

La méthode des développements asymptotiques raccordés est une technique permettant de construire des solutions approchées pour des problèmes de petites perturbations. Examinons le cas d'une équation différentielle du deuxième ordre.

Soit l'équation :

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0 \quad y(0) = \alpha \quad y(1) = \beta \quad (\text{B.1})$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre réel arbitrairement petit et  $y$  une fonction de  $x$  définie sur  $[0, 1]$ . Ce problème aux limites admet une solution analytique: cherchons  $y$  sous la forme

$$y = e^{sx}$$

Il vient:

$$\varepsilon s^2 + s + 1 = 0$$

soit:

$$s_1 = -\frac{1}{2\varepsilon} - \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}} \sim -\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{si } \varepsilon \ll 1$$

$$s_2 = -\frac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}} \sim -1$$

La solution générale est de la forme:

$$y = \lambda e^{s_1 x} + \mu e^{s_2 x}$$

Dans le cas où  $x$  est très grand devant  $\varepsilon$ , le deuxième terme est prépondérant:

$$x \gg \varepsilon \Rightarrow e^{-x/\varepsilon} \ll e^{-x} \Rightarrow y \approx \mu e^{-x}$$

Si au contraire  $x$  est de l'ordre de  $\varepsilon$ , on a:

$$x \sim \varepsilon \Rightarrow e^{-x} \sim 1 \Rightarrow y \approx \lambda e^{-x/\varepsilon} + \mu$$

On obtient donc deux approximations de la solution valables dans deux domaines différents.

## B.1.2 Développements asymptotiques

Un développement asymptotique de  $y$  s'écrit sous la forme :

$$y(x; \varepsilon) = \delta_0(\varepsilon)y_0(x) + \delta_1(\varepsilon)y_1(x) + \dots \quad (\text{B.2})$$

avec  $\delta_1 = o(\delta_0)$ . Les fonctions  $\delta_i$  sont appelées fonctions de jauge.

La variable indépendante  $x$  est rapportée à  $\varepsilon$  en introduisant la nouvelle variable:

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon^\nu}$$

L'équation (B.1) devient:

$$\varepsilon^{1-2\nu} y''(\xi) + \varepsilon^{-\nu} y'(\xi) + y(\xi) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Le principe appelé "principe de moindre dégénérescence" stipule que, lors des simplifications successives, le plus grand nombre possible de termes doit être conservé. Dans notre cas, en ne retenant dans l'équation (B.3) que les termes de même ordre de grandeur, deux possibilités se présentent :

- ou bien on suppose que les deuxième et troisième termes sont du même ordre, ce qui impose que  $\nu = 0$  et que le premier terme soit négligé car d'ordre  $\varepsilon$ ,
- ou bien on retient les deux premiers termes en posant  $\nu = 1$  et on néglige le troisième.

On vérifiera aisément que pour toute autre valeur de  $\nu$ , un seul terme subsiste, ce qui est contraire au principe de moindre dégénérescence.

## B.1.3 Solution externe

Examinons tout d'abord le cas où  $\nu = 0$ . On a alors  $\xi = x$ . En reportant le développement (B.2) dans l'équation (B.3), il vient :

$$\varepsilon \delta_0 y_0'' + \varepsilon \delta_1 y_1'' + \delta_0 y_0' + \delta_1 y_1' + \delta_0 y_0 + \delta_1 y_1 = 0$$

Sachant que  $\delta_1 = o(\delta_0)$ , on peut trier les termes suivant leur ordre de grandeur.

En ne retenant que les termes prépondérants, on obtient :

$$\delta_0 y_0' + \delta_0 y_0 = 0$$

soit

$$y_0' + y_0 = 0 \quad (\text{B.4})$$

Les termes d'ordre immédiatement supérieur donnent:

$$\varepsilon \delta_0 y_0'' + \delta_1 y_1' + \delta_1 y_1 = 0$$

Le principe de moindre dégénérescence conduit à adopter une jauge  $\delta_1 = \varepsilon \delta_0$ , soit :

$$y_0'' + y_1' + y_1 = 0 \quad (\text{B.5})$$

Aucune condition ne s'applique à la jauge  $\delta_0$  et on pose donc arbitrairement  $\delta_0 = 1$ .

La solution des équations (B.4) et (B.5) est :

$$\begin{cases} y_0 = k_1 e^{-x} \\ y_1 = (-k_1 x + k_2) e^{-x} \end{cases}$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, les équations (B.4) et (B.5) sont du premier ordre et n'admettent qu'une seule condition à choisir parmi les deux de l'équation de départ (B.1). Puisque nous sommes dans le domaine  $x \approx 1$ , il paraît naturel de retenir la condition en  $x = 1$ , soit :

$$y(1) = y_0(1) + \varepsilon y_1(1) = \beta$$

Donc :

$$y_0(1) = \beta \quad y_1(1) = 0$$

d'où :

$$k_1 = \beta e \quad k_2 = \beta e$$

$$y_0 = \beta e^{1-x} \quad y_1 = \beta(1-x)e^{1-x}$$

Sauf exception, l'autre condition en  $x = 0$  ne pourra pas être satisfaite et ce développement ne sera pas valable au voisinage de  $x=0$ . On l'appelle pour cela "solution externe".

### B.1.4 Solution interne

Le voisinage de l'origine est précisément la zone concernée par le choix  $\nu = 1$  puisque l'on a alors :

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon} \sim 1 \Rightarrow x \sim \varepsilon$$

avec le développement

$$y = \delta_0 \bar{y}_0(\xi) + \delta_1 \bar{y}_1(\xi) + \dots$$

l'équation (B.3) devient :

$$\frac{1}{\varepsilon}(\delta_0 \bar{y}_0'' + \delta_1 \bar{y}_1'') + \frac{1}{\varepsilon}(\delta_0 \bar{y}_0' + \delta_1 \bar{y}_1') + \delta_0 \bar{y}_0 + \delta_1 \bar{y}_1 = 0$$

En ne retenant que les termes d'ordre  $1/\varepsilon$ , il vient :

$$\frac{1}{\varepsilon} \delta_0 \bar{y}_0'' + \frac{1}{\varepsilon} \delta_0 \bar{y}_0' = 0$$

soit :

$$\bar{y}_0'' + \bar{y}_0' = 0 \quad (\text{B.6})$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on pourra choisir  $\delta_0 = 1$ . Au deuxième ordre, on a :

$$\frac{1}{\varepsilon} \delta_1 \bar{y}_1'' + \frac{1}{\varepsilon} \delta_1 \bar{y}_1' + \delta_0 \bar{y}_0 = 0$$

soit, en prenant  $\delta_1 = \varepsilon \delta_0$  :

$$\bar{y}_1'' + \bar{y}_1' + \bar{y}_0 = 0 \quad (\text{B.7})$$

Puisque l'on se trouve au voisinage de zéro, on retiendra la condition en ce point :

$$y(0) = \bar{y}_0(0) + \varepsilon \bar{y}_1(0) = \alpha$$

soit :

$$\bar{y}_0(0) = \alpha \quad \bar{y}_1(0) = 0 \quad (\text{B.8})$$

La solution du problème interne {(B.6), (B.7), (B.8)} est :

$$\begin{cases} \bar{y}_0 = \alpha + c_1(e^{-\xi} - 1) \\ \bar{y}_1 = -\alpha\xi + c_1\xi(e^{-\xi} + 1) + c_2(e^{-\xi} - 1) \end{cases}$$

Les conditions manquantes pour déterminer les constantes  $c_1$  et  $c_2$  de la solution interne vont être établies par raccordement avec la solution externe.

### B.1.5 Raccordement

Le principe de raccordement [51] exprime que "la représentation interne de la solution externe doit être égale à la représentation externe de la solution interne". Dans l'exemple traité, la solution externe

$$y^e = \beta e^{1-x} + \varepsilon(1-x)e^{1-x}$$

devient, en fonction de la variable interne  $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$  :

$$y^e = \beta e^{1-\varepsilon\xi} + \varepsilon\beta(1-\varepsilon\xi)e^{1-\varepsilon\xi}$$

En développant pour  $\varepsilon$  petit, il vient :

$$(y^e)' = \beta e + \varepsilon\beta e(1-\xi) + o(\varepsilon) \quad (\text{B.9})$$

De même, la solution interne :

$$y^i = \alpha + c_1(e^{-\xi} - 1) + \varepsilon[c_1\xi(e^{-\xi} + 1) - \alpha\xi + c_2(e^{-\xi} - 1)]$$

exprimée en fonction de la variable externe  $x = \varepsilon\xi$  :

$$y^i = \alpha + c_1(e^{-x/\varepsilon} - 1) + \varepsilon\left[c_1\frac{x}{\varepsilon}(e^{-x/\varepsilon} + 1) - \alpha\frac{x}{\varepsilon} + c_2(e^{-x/\varepsilon} - 1)\right]$$

et développée pour  $\varepsilon$  tendant vers zéro avec  $x$  fixé, devient :

$$(y^i)^e = (\alpha - c_1)(1-x) - \varepsilon c_2 + \dots \quad (\text{B.10})$$

Cette dernière expression est ensuite égalée au développement (B.9) :

$$\begin{aligned} (\alpha - c_1)(1-x) - \varepsilon c_2 &= \beta e + \varepsilon\beta e\left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &= \beta e(1-x) + \varepsilon\beta e \end{aligned}$$

En développant et en séparant les termes de même ordre en  $\varepsilon$ , on obtient :

$$\begin{cases} \beta e = \alpha - c_1 \\ \beta e = -c_2 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} c_1 = \alpha - \beta e \\ c_2 = -\beta e \end{cases}$$

L'existence d'un raccord correct entre les deux développements justifie a posteriori le choix des fonctions de jauge et de la variable interne. Le choix d'une autre échelle que  $\varepsilon$  pour la zone interne aurait conduit à deux développements ne présentant pas de zone de validité commune et ne pouvant donc pas se raccorder, ou bien à des développements raccordés mais ne couvrant pas la totalité du domaine  $[0, 1]$  ([11]).

La figure B.1 récapitule ce qui vient d'être dit en montrant la solution interne et la solution externe comparées à la solution exacte, dans le cas où  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\alpha = 0$  et

$\beta = 1$ . Les solutions d'ordre 2 sont beaucoup plus proches de la solution exacte que les solutions d'ordre 1.

Une solution composite unique valable sur tout le domaine peut être constituée à partir des deux développements en ajoutant la solution interne à la solution externe et en soustrayant la partie commune :

$$\begin{aligned} y^c &= y^e + y^i - (y^i)^e \\ &= y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \bar{y}_0(\xi) + \varepsilon \bar{y}_1(\xi) - y_0(0) - \varepsilon (y_1(0) + \xi y_0'(0)) \end{aligned}$$

soit pour l'exemple choisi :

$$y^c = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e)(1+x)e^{-x/\varepsilon} + \varepsilon \beta \left[ (1-x)e^{1-x} - e^{1-x/\varepsilon} \right]$$

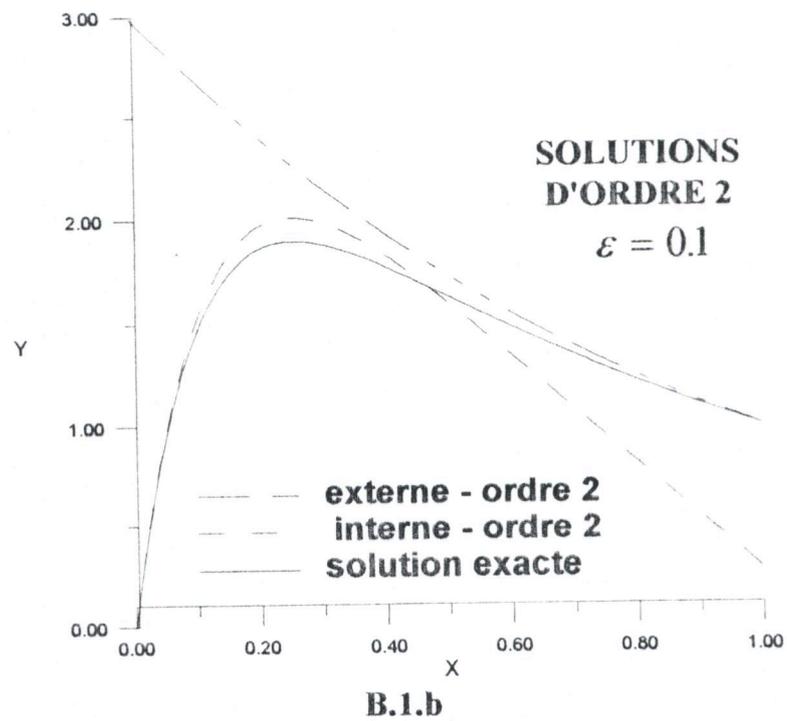
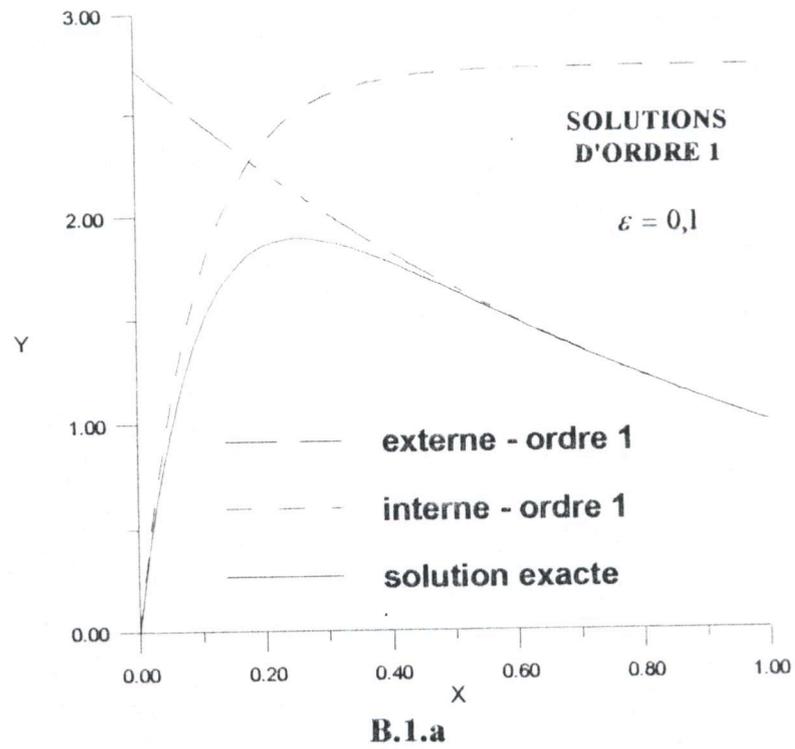
La figure B.2 montre la solution composite comparée à la solution exacte. L'approximation composite est relativement précise. Cependant, des problèmes surgissent lorsqu'on s'intéresse aux dérivées. En effet, la dérivée de la solution composite

$$(y^c)' = y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x) + \frac{1}{\varepsilon} \bar{y}_0'(\xi) + \bar{y}_1'(\xi) - y_0'(0)$$

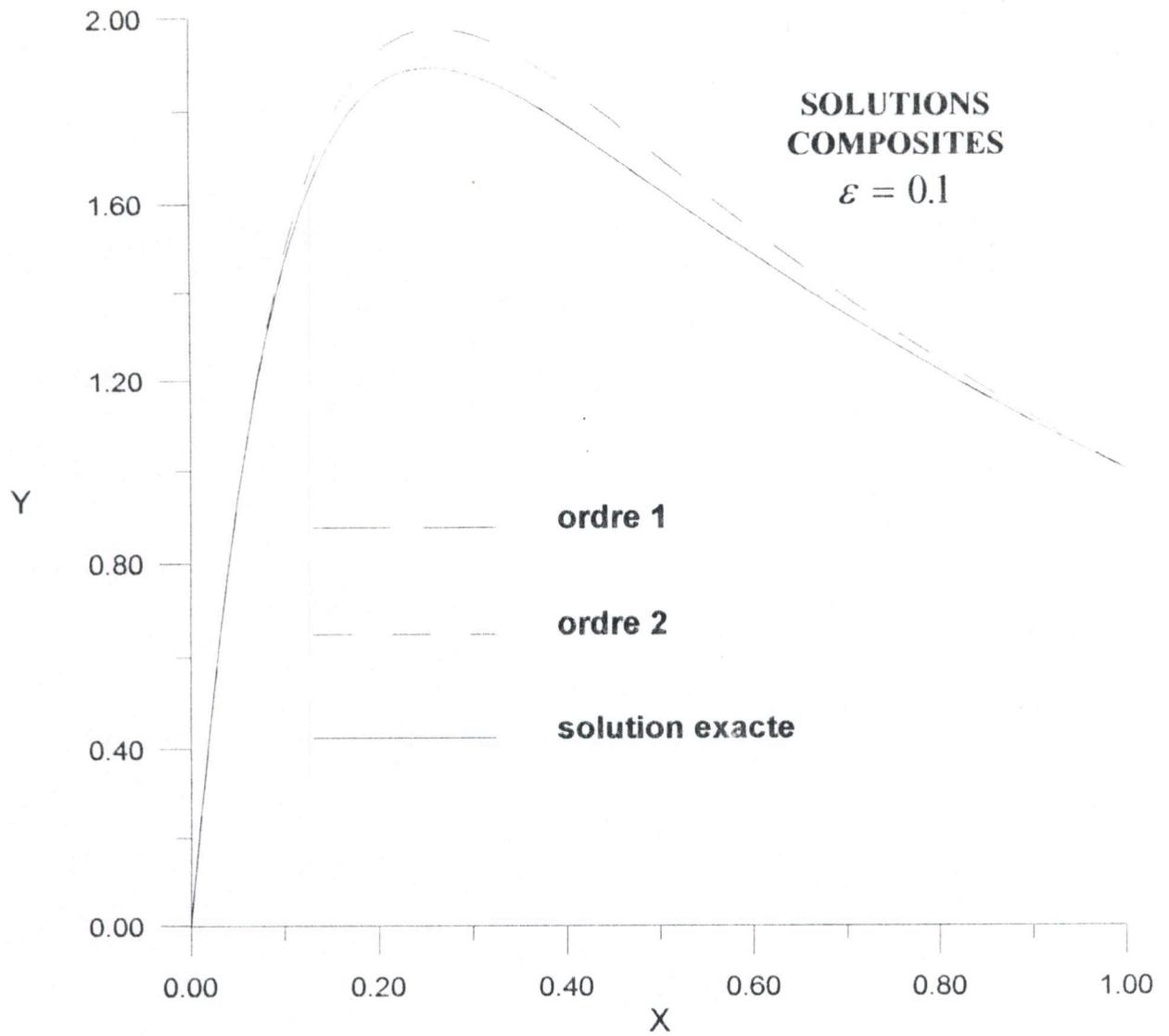
n'est pas strictement égale à la fonction composite formée avec les dérivées des deux développements d'ordre 2 :

$$(y^c)' = \frac{1}{\varepsilon} \bar{y}_0' + [\bar{y}_1' + y_0' - y_0'(0)]$$

C'est pourquoi cette formule au maniement plus délicat est peu utilisée en pratique.



**Fig.B.1.** Exemple de solution asymptotique



**Fig.B.2.** Solutions composites

## Appendice C

### DISCRETISATION DES EQUATIONS DE COUCHE LIMITE

#### C.1 Inversion des matrices tridiagonales

L'inversion des matrices tridiagonales est faite très classiquement en utilisant l'algorithme de Thomas. Pour calculer les  $[u_1]_j$ , solution du système :

$$a_j [u_1]_{j-1}^{n+1} + b_j [u_1]_j^{n+1} + c_j [u_1]_{j+1}^{n+1} = d_j \quad (\text{C.1})$$

avec  $[u_1]_J = U_e$  et  $u_1$  imposé à la paroi, on commence par calculer les coefficients  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  pour  $j$  variant de 2 à  $J$  :

$$\alpha_j = -\frac{c_j}{b_j + a_j \alpha_{j-1}} \quad (\text{C.2a})$$

$$\beta_j = \frac{d_j - a_j \beta_{j-1}}{b_j + a_j \alpha_{j-1}} \quad (\text{C.2b})$$

$[u_1]_j$  s'obtient alors en faisant varier  $j$  de  $J-1$  à 2 dans la relation suivante :

$$[u_1]_j = \alpha_j [u_1]_{j+1} + \beta_j \quad (\text{C.3})$$

Les valeurs de  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  dépendent des conditions limites à la paroi

- équation de quantité de mouvement :

$$u_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \quad \text{et} \quad \beta_1 = 0 \quad (\text{C.4})$$

- équation de l'énergie :

$$t_1 = T_p \text{ imposé} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \quad \text{et} \quad \beta_1 = [t_1]_p = T_p \quad (\text{C.5})$$

## C.2 Discrétisation des équations de couche limite du 2<sup>ème</sup> ordre

Comme il a été dit au paragraphe IV.3.2, les équations de couche limite du 2<sup>ème</sup> ordre sont discrétisées de la même façon que celles des équations du 1<sup>er</sup> ordre. Néanmoins, la différence majeure réside dans l'existence d'un gradient de pression suivant la direction normale à la paroi qui traduit l'effet de la courbure longitudinale de la paroi sur le champ de pression (Eq.III.32).

Dans notre étude nous avons considéré que le cas bidimensionnel plan ( $j=0$ ). Cela nous a conduit de simplifier les équations de couche limite du 2<sup>ème</sup> ordre en négligeant l'effet de la courbure transversale  $\left(j \frac{\cos \alpha}{r}\right)$ . De plus, les dérivées suivant  $\xi$  et  $\bar{\eta}$  des quantités du 1<sup>er</sup> ordre sont déjà connues d'après le calcul effectuée sur la couche limite de Prandtl. Cette dernière, nous informe aussi sur l'interface entre les deux zones externe et interne.

### C.2.1 Discrétisation des équations de quantité de mouvement

- équation de quantité de mouvement suivant  $\xi$  (Eq.III.31)

$$(\rho_1 u_2 + \rho_2 u_1) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = [\rho_1 u_2 + \rho_2 u_1]_j^n \frac{[u_1]_j^{n+1} - [u_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \quad (\text{C.6a})$$

$$(\rho_1 u_1) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} = [\rho_1 u_1]_j^n \frac{[u_2]_j^{n+1} - [u_2]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \quad (\text{C.6b})$$

$$(\rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1) \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}} = [\rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1]_j^n \frac{[u_1]_{j+1}^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \quad (\text{C.6c})$$

$$(\rho_1 \bar{v}_1) \frac{\partial u_2}{\partial \bar{\eta}} = [\rho_1 \bar{v}_1]_j^n \frac{[u_2]_{j+1}^{n+1} - [u_2]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \quad (\text{C.6d})$$

$$-\frac{\partial p_2}{\partial \xi} = -\frac{[p_2]_j^{n+1} - [p_2]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \quad (\text{C.6e})$$

$$k\bar{\eta} \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = k(\xi)_{j\Delta_j} \frac{[p_1]_j^{n+1} - [p_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \quad (\text{C.6f})$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left( \mu_1 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{\eta}} + \mu_2 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}} \right) = \left( \left[ \mu_1 \right]_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{[u_2]_{j+1}^{n+1} - [u_2]_j^{n+1}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} \Delta_j} - \left[ \mu_1 \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \frac{[u_2]_j^{n+1} - [u_2]_{j-1}^{n+1}}{\Delta_{j-\frac{1}{2}} \Delta_j} \right) + \left( \left[ \mu_2 \right]_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{[u_1]_{j+1}^{n+1} - [u_1]_j^{n+1}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} \Delta_j} - \left[ \mu_2 \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \frac{[u_1]_j^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{\Delta_{j-\frac{1}{2}} \Delta_j} \right) \quad (\text{C.6g})$$

$$\rho_1 u_1 k(\xi) \left( \bar{\eta} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \bar{v}_1 \right) = [\rho_1 u_1]_j^n k(\xi) \left( j \Delta_j \frac{[u_1]_j^{n+1} - [u_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} - [\bar{v}_1]_j^n \right) \quad (\text{C.6h})$$

$$-k \frac{\partial (\mu_1 u_1)}{\partial \bar{\eta}} = -k(\xi) \frac{[\mu_1 u_1]_j^{n+1} - [\mu_1 u_1]_{j-1}^{n+1}}{2 \Delta_j} \quad (\text{C.6i})$$

$$2 \mu_1 k \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}} = [\mu_1]_j^n k(\xi) \frac{[u_1]_j^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{\Delta_j} \quad (\text{C.6j})$$

En regroupant les inconnues, on obtient un système linéaire tridiagonal pour  $u_2$  :

$$a_j [u_2]_{j-1}^{n+1} + b_j [u_2]_j^{n+1} + c_j [u_2]_{j+1}^{n+1} = d_j \quad (\text{C.7})$$

avec :  $a_j, b_j, c_j$  prennent exactement les mêmes expressions que celles du 1<sup>er</sup> ordre pour le calcul des vitesses  $[u_1]_j$  citées dans le paragraphe (IV.3.2).

cependant, l'expression de coefficient  $d_j$  devient très complexe et a la forme suivante :

$$\begin{aligned} d_j = & [\rho_1 u_1]_j^n \frac{[u_2]_j^n}{[\Delta \xi]_j} + \left( j \Delta_j k(\xi) [\rho_1 u_1]_j^n - [\rho_1 u_2 + \rho_2 u_1]_j^n \right) \frac{[u_1]_j^{n+1} - [u_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \\ & - [\rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1 - 2 \mu_1 k(\xi)]_j^n \frac{[u_1]_{j+1}^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{2 \Delta_j} - k(\xi) [\rho_1 u_1]_j^n [\bar{v}_1]_j^n \\ & - \frac{[\rho_2]_j^{n+1} - [\rho_2]_j^n}{[\Delta \xi]_j} + j \Delta_j k(\xi) \frac{[\rho_1]_j^{n+1} - [\rho_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} + [\mu_2]_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{[u_1]_{j+1}^{n+1} - [u_1]_j^{n+1}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} \Delta_j} \\ & - [\mu_2]_{j-\frac{1}{2}}^n \frac{[u_1]_j^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{\Delta_{j-\frac{1}{2}} \Delta_j} - k(\xi) \frac{[\mu_1 u_1]_{j+1}^{n+1} - [\mu_1 u_1]_{j-1}^{n+1}}{2 \Delta_j} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

- équation de quantité de mouvement suivant  $\bar{\eta}$  (Eq.III.32)

$$\frac{\partial p_2}{\partial \bar{\eta}} = \frac{[p_2]_{j+1}^{n+1} - [p_2]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} = k(\xi) [\rho_1 u_1^2]_j^{n+1} \quad (\text{C.9})$$

Contrairement au calcul du 1<sup>er</sup> ordre où la pression est constante à travers la couche limite qui est égale à celle de l'écoulement externe à la paroi, le champ de pression du 2<sup>ème</sup> ordre sera évalué à chaque itération à l'aide de l'équation (C.9).

## C.2.2 Discrétisation de l'équation d'énergie

Cette équation écrite pour la température (Eq.III.33) est discrétisée de façon tout à fait analogue à celle des équations de quantité de mouvement, on obtient ainsi :

$$(\rho_1 u_2 + \rho_2 u_1) \frac{\partial t_1}{\partial \xi} = [\rho_1 u_2 + \rho_2 u_1]_j^n \frac{[t_1]_j^{n+1} - [t_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \quad (\text{C.10a})$$

$$(\rho_1 u_1) \frac{\partial t_2}{\partial \xi} = [\rho_1 u_1]_j^n \frac{[t_2]_j^{n+1} - [t_2]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \quad (\text{C.10b})$$

$$(\rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1) \frac{\partial t_1}{\partial \bar{\eta}} = [\rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1]_j^n \frac{[t_1]_{j+1}^{n+1} - [t_1]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \quad (\text{C.10c})$$

$$(\rho_1 \bar{v}_1) \frac{\partial t_2}{\partial \bar{\eta}} = [\rho_1 \bar{v}_1]_j^n \frac{[t_2]_{j+1}^{n+1} - [t_2]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \quad (\text{C.10d})$$

$$u_1 \frac{\partial p_2}{\partial \xi} = [u_1]_j^n \frac{[p_2]_j^{n+1} - [p_2]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \quad (\text{C.10e})$$

$$u_2 \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = [u_2]_j^n \frac{[p_1]_j^{n+1} - [p_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \quad (\text{C.10f})$$

$$\bar{v}_1 \frac{\partial p_2}{\partial \bar{\eta}} = [\bar{v}_1]_j^n \frac{[p_2]_{j+1}^{n+1} - [p_2]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \quad (\text{C.10g})$$

$$\bar{v}_2 \frac{\partial p_1}{\partial \bar{\eta}} = [\bar{v}_2]_j^n \frac{[p_1]_{j+1}^{n+1} - [p_1]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \quad (\text{C.10h})$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left( \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\mu_2}{\text{Pr}} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{\eta}} \right) = \left[ \left[ \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \right]_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{[t_2]_{j+1}^{n+1} - [t_2]_j^{n+1}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} \Delta_j} - \left[ \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \frac{[t_2]_j^{n+1} - [t_2]_{j-1}^{n+1}}{\Delta_{j-\frac{1}{2}} \Delta_j} \right] + \left[ \left[ \frac{\mu_2}{\text{Pr}} \right]_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{[t_1]_{j+1}^{n+1} - [t_1]_j^{n+1}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} \Delta_j} - \left[ \frac{\mu_2}{\text{Pr}} \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \frac{[t_1]_j^{n+1} - [t_1]_{j-1}^{n+1}}{\Delta_{j-\frac{1}{2}} \Delta_j} \right] \quad (\text{C.10i})$$

$$\mu_2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}} \right)^2 = \left[ \mu_2 \right]_j^n \left( \frac{[u_1]_{j+1}^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \right)^2 \quad (\text{C.10j})$$

$$2\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial u_2}{\partial \bar{\eta}} = \left[ \mu_1 \right]_j^n \frac{[u_1]_{j+1}^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{\Delta_j} \cdot \frac{[u_2]_{j+1}^{n+1} - [u_2]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \quad (\text{C.10k})$$

$$k \bar{\eta} u_1 \left( \rho_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right) = k(\xi) j \Delta_j [u_1]_j^n \left[ \left[ \rho_1 \right]_j^n \frac{[t_1]_j^{n+1} - [t_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} - \frac{[p_1]_j^{n+1} - [p_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \right] \quad (\text{C.10l})$$

$$k \left( \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{\eta}} \right) = k(\xi) \left[ \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \right]_j^n \frac{[t_1]_j^{n+1} - [t_1]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \quad (\text{C.10m})$$

$$-2k\mu_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}} = \left[ -2k(\xi) \mu_1 u_1 \right]_j^n \frac{[u_1]_j^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{2\Delta_j} \quad (\text{C.10n})$$

De la même façon, en regroupant les inconnues à la station  $n+1$ , on obtient le système tridiagonal pour les  $J-2$  inconnues  $[t_2]_j$  :

$$a_j [t_2]_{j-1}^{n+1} + b_j [t_2]_j^{n+1} + c_j [t_2]_{j+1}^{n+1} = d_j \quad (\text{C.11})$$

les coefficients  $a_j, b_j$ , et  $c_j$  ont des expressions similaires à celles du 1<sup>er</sup> ordre pour la discrétisation de l'équation d'énergie, tandis que l'expression de coefficient  $d_j$  devient très complexe :

$$\begin{aligned}
d_j = & [\rho_1 u_1]_j^n \frac{[t_2]_j^n}{[\Delta \xi]_j} + (j \Delta_j k(\xi) [\rho_1 u_1]_j^n - [\rho_1 u_2 + \rho_2 u]_j^n) \frac{[t_1]_j^{n+1} - [t_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \\
& - \left[ \rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1 - k(\xi) \frac{\mu_1}{\text{Pr}} \right]_j^n \frac{[t_1]_{j+1}^{n+1} - [t_1]_{j-1}^{n+1}}{2 \Delta_j} + [u_1]_j^n \frac{[p_2]_j^{n+1} - [p_2]_j^n}{[\Delta \xi]_j} \\
& + [u_2 - j \Delta_j k(\xi) u_1]_j^n \frac{[p_1]_j^{n+1} - [p_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} + [\bar{v}_1]_j^n \frac{[p_2]_{j+1}^{n+1} - [p_2]_{j-1}^{n+1}}{2 \Delta_j} \\
& + [\bar{v}_2]_j^n \frac{[p_1]_{j+1}^{n+1} - [p_1]_{j-1}^{n+1}}{2 \Delta_j} + \left[ \frac{\mu_2}{\text{Pr}} \right]_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{[t_1]_{j+1}^{n+1} - [t_1]_j^{n+1}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} \Delta_j} \\
& - \left[ \frac{\mu_2}{\text{Pr}} \right]_{j-\frac{1}{2}}^n \frac{[t_1]_j^{n+1} - [t_1]_{j-1}^{n+1}}{\Delta_{j-\frac{1}{2}} \Delta_j} + [\mu_2]_j^n \left( \frac{[u_1]_{j+1}^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{2 \Delta_j} \right)^2 + -[\mu_1]_j^n - [k(\xi) \mu_1 u_1]_j^n \left( \frac{[u_1]_{j+1}^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{\Delta_j} \right) \\
& + [\mu_1]_j^n \frac{[u_1]_{j+1}^{n+1} - [u_1]_{j-1}^{n+1}}{\Delta_j} \cdot \frac{[u_2]_{j+1}^{n+1} - [u_2]_{j-1}^{n+1}}{2 \Delta_j}
\end{aligned} \tag{C.12}$$

### C.2.3 Equation de continuité

L'équation de continuité est utilisée pour le calcul de la vitesse  $[\bar{v}_2]_{j+1}$ . Ceci est possible, que après l'évaluation de toutes les quantités d'ordre 2 à la station  $(n+1, j)$ , y compris  $\bar{v}_2$  à la station  $(n+1, j-1)$ .

l'équation de continuité III.30 donne :

$$\begin{aligned}
& \frac{[\rho_1 u_2 + \rho_2 u_1]_j^{n+1} - [\rho_1 u_2 + \rho_2 u_1]_j^n}{[\Delta \xi]_j} + \\
& \frac{[\rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1 + j \Delta_j k(\xi) \rho_1 \bar{v}_1]_{j+1}^{n+1} - [\rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1 + j \Delta_j k(\xi) \rho_1 \bar{v}_1]_{j-1}^{n+1}}{2 \Delta_j} = 0
\end{aligned} \tag{C.13}$$

En ce qui concerne les conditions aux limites et les conditions de raccordement pour la couche limite du 2<sup>ème</sup> ordre sont citées dans le troisième chapitre.