

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**

**Institut d'Aéronautique et d'Etude Spatiale**

**THESE DE DOCTORAT**

Spécialité : Aéronautique

**STABILITE D'UN AVION ET REPONSE AU BRAQUAGE DE SES  
PRINCIPALES COMMANDES**

Par

**Ahmed CHEGRANI**

Devant le jury composé de :

M. S. Boukraa, Professeur, U. de Blida

Président

M. S. Hanchi, Professeur, EMP d'Alger

Examineur

M. B. Imine, Professeur, USTO d'Oran

Examineur

M. H. Ouali, Professeur, EMP d'Alger

Examineur

M. T. Rezoug, Professeur, U. de Blida

Examineur

M. Z. YOUNI, Professeur, U. de Blida

Directeur de Thèse

Blida, Septembre 2018

## RESUME

Ce travail propose de déterminer les caractéristiques de la stabilité d'un avion et sa réponse suite aux commandes principales. Les équations fondamentales du mouvement pour un avion supposé rigide sont établies en utilisant les lois de conservations appliquées à la mécanique. Nous avons énuméré également les critères de stabilité statique pour discuter les caractéristiques importantes en état de vol stabilisé. En plus, nous avons traité la stabilité dynamique des avions à travers les équations du mouvement en appliquant la théorie des petites perturbations. Les caractéristiques dynamiques ont été obtenues dans le cas du mouvement longitudinal et latéral-directionnel en boucle ouverte et en tenant compte des systèmes de commande de vol. Deux méthodes sont utilisées pour l'obtention des caractéristiques dynamiques pendant le vol de l'avion: la méthode exacte et la méthode approximative. L'avion présente des modes caractéristiques pour le cas longitudinal tels que le phugoïde et l'oscillation d'angle d'attaque. D'autre part, le cas latérale-directionnelle conduit à trois modes; spirale, roulis et le roulis hollandais. De même, les qualités de vol à travers la réponse longitudinale de l'avion pour une valeur donnée du braquage de la gouverne de profondeur, ainsi que la réponse latérale-directionnelle pour la déflexion des ailerons et de la gouverne de direction ont été aussi abordés dans le cas linéaire et non linéaire.

En fin, des applications sont faites sur quelques modèles d'avions réels et les résultats obtenus par nos programmes en langage FORTRAN et MATLAB tels que la période, le coefficient d'amortissement et les coefficients de l'équation caractéristique de la matrice ainsi que des courbes de réponse sont présentés dans le cas linéaire, non linéaire et comparés avec la littérature scientifique spécialisé.

**Mots clés :** Stabilité, contrôle, réponse avion, statique et dynamique, longitudinale, latérale et directionnelle, facteur d'amortissement, Simulation.

## ABSTRACT

This work proposes to determine the characteristics of the stability of an airplane and the response following the main commands. The fundamental equations of motion for a supposedly rigid airplane are established using the conservation laws applied to mechanics.

We have also listed the stability criteria to discuss the important characteristics of static stability in a stabilized flight state. In addition, we treated the dynamic stability of aircraft through the equations of motion by applying the theory of small perturbations. Dynamic characteristics were obtained in the case of longitudinal and lateral-directional open-loop motion and taking into account flight control systems. Two methods are used to obtain the dynamic characteristics during the flight of the aircraft: the exact method and the approximate method. By applying the exact method, the four eigenvalues of the characteristic system were determined, whereas by the approximate method eigenvalues were determined for each mode. The aircraft exhibits characteristic modes for the longitudinal case such as phugoid and incidence oscillation. On the other hand, the lateral-directional case leads to three modes; spiral, roll and roll Dutch. Similarly, the flying qualities through the longitudinal response of the aircraft for a given value of the deflection of the elevator, as well as the lateral-directional response for the deflection of the ailerons and the rudder were also discussed.

Finally, applications are made on some models of real aircraft and the results obtained by our programs in FORTRAN and MATLAB language such as the period, the damping coefficient and the coefficients of the equation characteristic of the matrix as well as response curves are also presented in linear and nonlinear cases then compared with specialized scientific literature.

**Keywords:** Stability, control, response aircraft. Static and dynamic. Longitudinal and lateral-directional. Damping coefficient. Simulation

## ملخص

يقترح هذا العمل تحديد خصائص استقرار الطائرة والاستجابة للأوامر الرئيسية كما يتم إنشاء المعادلات الأساسية لحركة الطائرة باستخدام قوانين الميكانيكا.

لقد أدرجنا أيضا معايير لمناقشة الخصائص الهامة الاستقرارية السكونية الطولية في حالة طيران. وبالإضافة إلى ذلك، قمنا بدراسة الاستقرار الديناميكي للطائرات من خلال معادلات الحركة بتطبيق نظرية الاضطرابات الصغيرة. لقد تم الحصول على الخصائص الديناميكية في حالة الحركة المفتوحة الطولية والجانبية ذات الاتجاه المفتوح مع مراعاة أنظمة التحكم في الطيران. واستخدمت طريقتان للحصول على الخصائص الديناميكية أثناء رحلة الطائرة: الطريقة الدقيقة و التقريبية. بتطبيق الطريقة الأولى، تم تحديد القيم الذاتية الأربعة للنظام المميز، وفي الطريقة الثانية يتم الحصول على القيم الذاتية لكل وضع. تقدم الطائرة وسائط مميزة للحالة الطولية مثل فيغويد وتذبذب زاوية الهجوم. ومن ناحية أخرى فإن في حالة الاتجاه الجانبي يؤدي إلى ثلاثة أنماط: لولب، لفة ولفة الهولندية. وايضا نوقشت صفات الطيران من خلال الاستجابة الطولية لقيمة معينة من سطح توجيهه رافع فضلا عن الاستجابة في للاتجاه الجانبي للانحراف من الجنيح والدفعة.

وأخيرا، تم إجراء التطبيقات على بعض النماذج من الطائرات الحقيقية والنتائج التي تم الحصول عليها من قبل برامجنا بلغة فورتران وما تلاب مثل الدورة، ومعامل التخميد ومعاملات المصفوفة وكذلك منحنيات الاستجابة في الحالة الخطية وغير الخطية وبمقارنة مع الأعمال العلمية المتخصصة في هذا المجال.

### كلمات المفتاح

الاستقرارية التحكم الاستجابة للأوامر. السكونية و الديناميكية. الطولي الجانبي وللاتجاه. معامل الرخو. المحاكاة.

## REMERCIEMENTS

Premièrement, je remercie mon Dieu, le tout puissant qui m'a donné de la bonne santé et de la patience tout au long de mes études ainsi que dans ma vie quotidienne et professionnelle. Un grand remerciement à mes parents et à ma petite famille, mon épouse et mes enfants.

Je dois ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse, le Professeur Youbi Zine Eddine, pour sa patience, sa compréhension et ses encouragements incessants pendant mes études de graduation et de post-graduation. Sa confiance immuable à mon égard m'a permis de trouver l'enthousiasme et la motivation nécessaire pour finir ce travail. Les discussions entretenues avec Mr Youbi Zine Eddine me seront très utiles que ce soit dans le domaine de recherche ou bien dans ma vie courante.

Je remercie également Mr. S. Boukraa, Professeur à l'institut d'aéronautique et d'étude spatiale de l'Université Saad Dahleb de Blida, pour l'intérêt qui porte à l'institut et en particulier à mon travail et aussi d'avoir accepté de présider le jury.

Mes profonds remerciements s'adressent également au Professeur Samir Hanchi de l'Ecole Militaire Polytechnique d'Alger pour m'avoir permis de découvrir le code FLUENT et pour avoir aussi accepté d'être membre du jury.

Je remercie également Mr. Bachir Imine, Professeur à l'université d'Oran, pour l'intérêt qui porte au domaine aéronautique en organisant plusieurs séminaires aussi à mon travail et qui a consenti d'être l'un des membres du jury.

Mes profonds remerciements s'adressent également au Professeur Hamid Oualli de l'Ecole Militaire Polytechnique d'Alger avoir accepté d'être membre du jury.

Je tiens à remercier également Mr Tahar Rezzoug, Professeur au sein de l'institut d'aéronautique et d'étude spatiale, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, pour

ses remarques avisées, pour son aide précieuse tout au long de ma carrière professionnelle, pour tout le temps qu'il m'a consacré.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au Professeur Amina Benkhedda, la directrice de l'institut d'aéronautique et d'étude spatiale pour tous ses encouragements incessants ce qui m'a donné une impulsion pour achever ce travail.

Je remercie profondément Mr Rachid Renane, pour tout le temps consacré à la lecture de ma thèse et toutes ses critiques constructives et l'aide qui m'a apporté.

Je remercie également Mr Rachid Allouche pour toutes les discussions scientifiques échangées et ses encouragements.

Je remercie également, pour leur aide, leurs sourires et encouragements, tous mes collègues et personnels de l'institut d'aéronautique et d'étude spatiale de l'Université Saad Dahleb de Blida.

Merci à tous les gens et les organismes qui partagent leurs connaissances pour l'avancement de la science.

## TABLE DES MATIERES

<b>RESUME</b> .....	2
ABSTRACT .....	3
ملخص.....	4
REMERCIEMENTS.....	5
TABLE DES MATIERES .....	7
LISTE DES FIGURES .....	9
LISTE DES TABLEAUX .....	12
INTRODUCTION GENERALE .....	14
<b>1. REPERES DE REFERENCES ET EQUATIONS DU MOUVEMENT</b> .....	18
1.1. Introduction.....	18
1.2. Repères de référence .....	18
1.3. Matrices de passage associées aux repères.....	21
1.4. Dérivation des équations du mouvement d'un avion .....	23
1.5. Conclusion.....	29
<b>2. MODELISATION DES FORCES ET DES MOMENTS AERODYNAMIQUES ET DE POUSSE</b> .....	30
2.1. Introduction.....	30
2.2. Forces et moments en vol stabilisé .....	30
2.3. Forces et moments en vol perturbé .....	65
2.4. Conclusion.....	74
<b>3. STABILITE ET CONTROLE EN VOL STABILISE</b> .....	76
3.1. Introduction.....	76
3.2. Critères de la stabilité statique.....	78
3.3. Stabilité statique et contrôle en vol rectiligne stabilisé .....	79
3.4. Stabilité statique et contrôle en manœuvre stabilisé .....	87

3.5. Configuration conventionnelle, canard et trois surfaces .....	95
3.6. Conclusion.....	99
<b>4. STABILITE ET CONTROLE EN VOL PERTURBE .....</b>	<b>100</b>
4.1. Introduction.....	100
4.2. Stabilité dynamique longitudinale et réponse .....	101
4.3. Stabilité dynamique latérale-directionnelle et réponse .....	107
4.4. Conclusion.....	118
<b>5. SIMULATION ET INTERPRETATION DES RESULTATS .....</b>	<b>120</b>
5.1. Introduction.....	120
5.2. Ryan-Navion.....	121
5.3. Avion de transport Boeing 747-200 .....	144
5.4. Avion militaire F4C .....	154
5.5. Avion d'affaire Learjet M24 .....	165
<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>174</b>
<b>REFERENCES.....</b>	<b>178</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>184</b>
<b>A: LISTE DES SYMBOLES ET DES ABBREVIATIONS.....</b>	<b>184</b>
<b>B: DONNEES DES AVIONS .....</b>	<b>195</b>
<b>C: FONCTION DE TRANSFERT .....</b>	<b>198</b>
<b>D: ORGANIGRAMME DE LA STABILITE STATIQUE LONGITUDINALE .....</b>	<b>206</b>
<b>E: ORGANIGRAMME DE LA STABILITE DYNAMIQUE NON LINEAIRE .....</b>	<b>207</b>
<b>F: ALGORITHME DE RUNGE-KUTTA .....</b>	<b>209</b>
<b>G: CONVERSION DES UNITES.....</b>	<b>211</b>
<b>H: PUBLICATION .....</b>	<b>212</b>

## LISTE DES FIGURES

1.1.	Repères de référence utilisés .....	18
1.2.	Repères fixés au centre et à la surface de la terre .....	20
1.3.	Repères avion, stabilité et vent .....	20
2.1.	Avion dans le plan de symétrie, les repères avion et stabilité .....	32
2.2.	Forces, moments aérodynamiques longitudinales et angles.....	39
2.3.	Position du centre aérodynamique du canard et de l'empennage horizontal.....	45
2.4.	Forces et le moment de poussée en vol stabilisé.....	47
2.5.	Forces et des moments aérodynamiques latérales-directionnels .....	49
2.6.	Vitesse normale induite par le dérapage due à l'effet du dièdre géométrique .....	53
2.7.	Moment de roulis induit par le dérapage affecté par la position de l'aile sur le fuselage.....	54
2.8.	Différence de la vitesse normale entre les deux panneaux de l'aile due à l'effet de flèche .....	55
2.9.	Force latérale sur l'empennage vertical due au dérapage .....	57
2.10.	Moment de roulis dû à la déflexion de la gouverne de direction.....	60
2.11.	Illustration des vitesses et des angles en vol perturbé .....	66
3.1.	Stabilité statique stable, instable et neutre d'un avion .....	77
3.2.	Détermination du point neutre à partir d'un test en vol .....	82
3.3.	Virage stabilisé .....	90
3.4.	Vol en ressource symétrique.....	94
3.5.	Aile-empennage pour un avion conventionnel .....	95
3.6.	Avion de configuration aile-canard.....	97
3.7.	Avion de configuration canard-aile-empennage (trois surfaces) .....	98
4.1.	Types de la stabilité dynamique .....	100

4.2.	Influence de la position des pôles dans le plan complexe sur la réponse .....	103
4.3.	Modes phugoïde et période courte .....	104
4.4.	Mode spiral .....	112
4.5.	Mode de roulis .....	113
4.6.	Mode roulis hollandais .....	115
5.1	Avion Ryan Navion et ses trois vues .....	121
5.2.	Coefficient du moment de tangage en fonction de l'angle d'attaque de l'avion Ryan Navion .....	123
5.3.	Lieux des racines du mode longitudinale .....	127
5.4.	Courbe de la réponse à un échelon unitaire .....	130
5.5.	Courbe de la réponse tridimensionnelle .....	130
5.6.	Réponse en mode phugoïde .....	131
5.7.	Réponse en mode période courte .....	131
5.8.	Simulation du modèle longitudinal en boucle ouverte .....	132
5.9.	Courbes de simulation du modèle longitudinal en boucle ouverte .....	132
5.10.	Lieux des racines du mode latéral-directionnel .....	136
5.11.	Réponse en mode latéral-directionnel .....	137
5.12.	Simulation du modèle latéral directionnel en boucle ouverte .....	138
5.13.	Courbe de simulation du modèle latéral directionnel en boucle ouverte en actionnant l'aileron .....	139
5.14.	Courbe de simulation du modèle latéral directionnel en boucle ouverte en actionnant la gouverne de direction .....	139
5.15.	Structure interne du modèle non linéaire .....	140
5.16.	Structure externe du modèle non linéaire (entrées et sorties) .....	141
5.17.	Courbe de simulation du modèle du modèle non linéaire et linéaire ....	143
5.18.	Avion de transport Boeing 747-200 et ses trois vues.....	144
5.19.	Lieux des racines du mode longitudinale .....	147
5.20.	Réponse en mode phugoïde .....	148
5.21.	Réponse en mode période courte .....	148
5.22.	Lieux des racines du mode latéral-directionnel .....	150
5.23.	Réponse du mode latéral-directionnel .....	151

5.24.	Contrôle et réponse de l'avion .....	152
5.25.	Bloque du système de maintien de l'angle de tangage type 0.....	152
5.26.	Bloque du système de maintien de l'angle de tangage type 1.....	152
5.27.	Réponse de $\theta$ pour Boeing 747-200 équipé du système de contrôle type 0 .....	153
5.28.	Réponse de $\theta$ pour Boeing 747-200 équipé du système de contrôle type 1 .....	153
5.29.	Comparaison de la réponse de $\theta$ pour Boeing 747-200 équipé du système de contrôle type 0 et type 1 .....	154
5.30	Avion F-4C et ses trois vues .....	154
5.31.	Lieux des racines du mode longitudinale .....	158
5.32.	Réponse en mode phugoïde .....	159
5.32.	Réponse en mode période courte .....	159
5.34.	Lieux des racines du mode latéral-directionnel .....	161
5.35.	Réponse du mode latéral-directionnel .....	163
5.36.	Contrôle et réponse de l'avion .....	163
5.37.	Bloque du système de maintien de l'angle de tangage type 0.....	164
5.38.	Bloque du système de maintien de l'angle de tangage type 1.....	164
5.39.	Réponse avion F4C équipé du système de contrôle type 0 .....	165
5.40.	Réponse avion F4C équipé du système de contrôle type 1 .....	165
5.41	Avion Learjet M24 et ses trois vues .....	165
5.42.	Lieux des racines des mode longitudinales .....	169
5.43.	Réponse de l'avion en mode longitudinal.....	170
5.44.	Lieux des racines des mode latéraux-directionnels .....	172

## LISTE DES TABLEAUX

1.1. Définitions des vecteurs et ses composantes .....	24
1.2. Variables stabilisés et perturbés .....	26
2.1. Dépendance des forces, moments aérodynamiques avec les variables du mouvement dans le cas du vol stabilisé .....	31
2.2. Dépendance des forces, moments aérodynamiques en fonction des différents variables du vol perturbé .....	67
3.1. Les critères généraux d la stabilité statique des avions .....	78
3.2. Les dix critères de la stabilité statique de l'avion .....	79
4.1. Les dérivées dimensionnelles de la stabilité longitudinale .....	105
4.2. Les dérivées dimensionnelles de la stabilité latérale directionnelles.....	109
5.2. Dimensions géométriques, masse, inerties et condition du vol R-Navion	121
5.2. Les dix critères de la stabilité statique de l'avion Ryan Navion ....	122
5.3. Coefficients dimensionnelles de stabilité longitudinale Ryan Navion	125
5.4. Caractéristiques dynamiques longitudinales de l'avion Ryan Navion .....	126
5.5. Comparaison entre la méthode exacte et approximative dans le cas longitudinale de l'avion Ryan Navion .....	128
5.6. Comparaison entre nos résultats et la référence [11] obtenus avec la méthode exacte pour le cas longitudinale de l'avion Ryan Navion .....	128
5.7. Comparaison de nos résultats avec la référence en utilisant la méthode approximée de l'avion Ryan Navion .....	129
5.8. Variation de la réponse en fonction du facteur d'amortissement .....	129
5.9. Coefficients dimensionnels de la stabilité latéral-directionnel R-Navion	134
5.10. Caractéristiques dynamiques du mouvement latéral directionnel de l'avion Ryan Navion .....	134
5.11. Comparaison entre la méthode exacte et approximative dans le cas Latéral directionnel de l'avion Ryan Navion .....	136
5.12. Comparaison entre nos résultats et la référence [11] obtenus avec la méthode exacte pour l'avion Ryan Navion .....	136
5.13. Dimensions géométriques, masse, inerties et condition du vol Boeing 747 .....	144

5.14. Dix critères de la stabilité statique de l'avion Boeing 747-200 .....	145
5.15. Coefficients dimensionnelles de stabilité longitudinale Boeing 747-200	147
5.16. Paramètres dynamiques du mouvement longitudinale Boeing 747-200	148
5.17. Comparaison entre la méthode exacte et approximative dans le cas longitudinale de l'avion Boeing 747-200 .....	148
5.18. Coefficients dimensionnels de la stabilité latéral-directionnel Boeing 747 .....	150
5.19. Paramètres dynamiques du mouvement latéral directionnel Boeing 747	151
5.20. Paramètres du mouvement latéral directionnel de l'avion Boeing 747	151
5.21. Les dix critères de la stabilité statique de l'avion F-4C.....	155
5.22. Dimensions géométriques, masse, inerties et condition du vol F-4C	155
5.23. Coefficients dimensionnelles de stabilité longitudinale de l'avion F-4C	156
5.24. Paramètres du mouvement longitudinale de l'avion F-4C.....	157
5.25. Comparaison entre la méthode exacte et approximative dans le cas longitudinale de l'avion F-4C .....	158
5.26. Coefficients dimensionnels de la stabilité latéral-directionnel F-4C .....	160
5.27. Paramètres dynamiques du mouvement latéral directionnel F-4C .....	160
5.28. Caractéristiques dynamiques du mouvement latéral directionnel F-4C ..	162
5.29. Comparaison entre nos résultats et la référence [11] obtenus avec la méthode exacte pour l'avion F-4C .....	162
5.30. Dimensions géométriques, masse, inerties et condition du vol de l'avion Learjet M24.....	166
5.31. Les dix critères de la stabilité statique de l'avion Learjet M24.....	166
5.32. Coefficients dimensionnelles de stabilité longitudinale de l'avion Learjet M24.....	167
5.33. Paramètres du mouvement longitudinal de l'avion Learjet M24.....	168
5.34. Caractéristiques dynamiques du mouvement longitudinal Learjet M24	169
5.35. Coefficients dimensionnels de la stabilité latéral-directionnel de l'avion Learjet M24.....	171
5.36. Caractéristiques dynamiques du mouvement latéral directionnel de Learjet M24.....	172
5.37. Comparaison entre la méthode exacte et approximative dans le cas latéral-directionnel de l'avion Learjet M24.....	172

## INTRODUCTION GENERALE

La stabilité et le contrôle de l'avion sont considérés comme des sciences appliquées. Elles ont pris des contributions d'un grand nombre de domaines pour atteindre un certain niveau de maturité et devenir des outils indispensables dans la conception, le développement et la certification des avions. Les domaines qui ont contribué de manière majeure au développement de la stabilité et du contrôle de l'avion sont:

Les mathématiques, la mécanique, l'aérodynamique, les essais en soufflerie, les essais en vol, l'aéroélasticité, les qualités de vol, la théorie du contrôle, la simulation, la conception du système de commande de vol.

La fonction essentielle d'un véhicule aérien volant est qu'il doit d'une part, maintenir son vol selon la trajectoire fixée (stabilité) et d'autre part être capable de se déplacer d'un point d'équilibre à l'autre (manœuvrabilité). Ces deux aspects jouent un rôle prépondérant dans la conception des avions civiles et militaires.

La stabilité de l'avion a été issue à partir des expériences sur des planeurs lancés manuellement, par conséquent pour que le vol se déroule dans les meilleures conditions, l'avion doit avoir une qualité propre ; c'est d'être intrinsèquement stable.

L'ingénieur allemand Otto Lilienthal (1848-1896) a effectué beaucoup de vols planés depuis une colline à proximité de Berlin et il a conçu une première base de données technique et aérodynamique qui deviendra très bénéfique aux passionnés de l'aéronautique par la suite. Les planeurs de Lilienthal étaient statiquement stables mais par contre très peu manœuvrables, car le contrôle du planeur s'effectuait par le déplacement du corps de la même manière qu'en delta-plane; c'est d'ailleurs ce manque de contrôle qui entraîna sa mort en 1896 [45].

Zhukowsky est mieux connu pour ses travaux sur l'aérodynamique, il fut le premier scientifique à élaborer une étude mathématiquement solide sur la stabilité du vol d'un planeur. Ses équations ont montré, en 1891, la nature oscillatoire du mouvement longitudinal et en 1906, il fournit une valeur pour la fréquence phugoïde [56].

L'ingénieur Octave Chanute (1832-1910) a élaboré des planeurs dotés de nombreuses innovations telles que des ailes biplans, ajustables pour maintenir l'équilibre, mais aussi d'une gouverne de direction [45].

Le scientifique Pierpont Langley (1834-1906), a concentré son travail dans la conception d'un avion plus lourd que l'air, motorisé mais non piloté par l'homme. Le 6 mai 1896, son avion sans pilote effectua un vol qui dura une minute et demi en parcourant une distance d'environ 1 km. Il a été par la suite engagé par l'armée américaine pour concevoir un avion contrôlable par l'homme, mais il a échoué [22,45].

Les frères Wright ont réussi à faire le premier vol d'un avion motorisé et piloté par l'homme le 17 décembre 1903 à bord du Wright Flyer. Ils étaient convaincus que le principal obstacle au vol motorisé était le manque de contrôle sur l'appareil à savoir que ce dernier ne devait pas être trop stable, ils ont constaté que si la stabilité de l'avion est mauvaise alors la capacité de contrôler l'appareil devait être forte. Trois hommes ont particulièrement influencé leurs travaux: O.Lilienthal, O. Chanute et S. P. Langley [22,45].

Par la suite et grâce aux travaux du professeur George Hartley Bryan en Angleterre en 1911 [1,22, 45], il avait développé les équations dynamiques longitudinales du mouvement de l'avion avec l'hypothèse du corps rigide à six (6) degrés de liberté. L'importante contribution de Bryan reposait sur les théories fondamentales de Isaac Newton et Leonhard Euler. Après un siècle, ces équations restent la base de l'analyse de la stabilité et du contrôle d'un avion.

Un ouvrage original est publié par Courtland D. Perkins et Robert E. Hage [2] en 1949, il est toujours considéré comme un livre de référence pour l'enseignement de la stabilité et contrôle pour le cycle universitaire. Il regroupe l'ensemble des chapitres indispensables.

L'étude de la stabilité a été historiquement très dominée par les manuels classiques de B.Etkin et L.Reid [3], HOAK.D.E And FINCK.R.D[4], A.W.BABISTER [5], B.Etkin [6], J.Roskam [7], D.Mc.Ruer, I. Ashkenas , D.Graham [8], Mc Cormick [9] , A.W.BABISTER [10]. Les méthodes de la modélisation linéaire contenue dans la base de donnée DATCOM de l'U. S. Air Force élaborée par Hoak et Finck [4]. Ils utilisent l'approche de la décomposition de l'avion en éléments : aile, aile-fuselage et

l'aile-fuselage-empennage. Ces méthodes ont été satisfaisantes pour la plupart de conceptions militaires et civiles des années 1960.

L'intégration des nouveaux appareils qui ont pour conséquences d'importantes interférences aile-fuselage dans les années 1970 ( F-16) et des configurations non conventionnelles dans les années 1980 ( F-117) et 1990 (X-45) rend les méthodes de l'analyse de la stabilité présentées par ses manuels de moins en moins pertinentes [51] . Les configurations plus récentes peuvent posséder de façon significative des caractéristiques différentes qui ont un effet prononcé sur la stabilité et le contrôle, R.Nelson [11], D.McLean [12], Brian L. Stevens and Frank L.Lewis [13], J.B.Russell [14], M.V.Cook [15], M.J.Abzug [16], Bandu N.Pamadu [17] et Louis V.schimdt [18]. Le SR-71 est un exemple d'avion qui possède quelques-uns de ces caractéristiques nouvelles à son époque.

En plus des progrès bien connus dans la dynamique des fluides numériques (CFD), le domaine de l'interaction fluide-structure et en particulier l'aéroélasticité, a connu des avancées importantes. L'amélioration de la capacité d'analyse des problèmes d'aéroélasticité hautement non linéaires, tels que le flottement des ailes d'avion de chasse à haute performance ce qui ouvre la voie à la dynamique de vol, à la stabilité et au contrôle.

Depuis les années 2000, il y a eu une recrudescence des manuels de la dynamique des vols, comme en témoigne la publication des nouveaux livres tels que Brian L. Stevens and Frank L.Lewis [13], Yechout et al. [31], Schmidt [18] et Phillips [25].

Cette thèse est organisée en six chapitres structurés de la manière suivante:

Le Chapitre 1 présente les différents repères utilisés pour étudier la stabilité et le contrôle d'un avion et aussi le modèle mathématique décrivant le mouvement dynamique de l'avion dans l'espace supposé rigide dans le cas du vol stabilisé et perturbé avec l'influence des perturbations atmosphériques. Dans le second chapitre, on a énuméré les outils de base pour la modélisation des forces et des moments aérodynamiques et de poussée agissant sur l'avion dans le plan longitudinal et latérale directionnel. Le troisième chapitre traite le problème d'équilibre (trim) pour

différentes configurations (conventionnelle, canard et à trois surfaces). Les effets de la panne d'un moteur et la vitesse minimale de contrôle sont discutés. Le quatrième chapitre traite la stabilité dynamique de l'avion ; la linéarisation et la symétrie conduisent à un découplage entre, d'une part, la dynamique longitudinale et d'autre part, la dynamique latérale-directionnelle et permettant d'obtenir les modes du mouvement et les caractéristiques dynamiques pour chaque cas. En fin, le dernier chapitre présente les résultats de la simulation linéaire et non linéaire pour quelques modèles d'avions réels : léger, d'affaire, de transport et militaire.

En guise de conclusion, les thèmes abordés, la validité des approches utilisées et les perspectives sont brièvement résumés.

## CHAPITRE1: REPERES ET LES EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN AVION

### 1.1 Introduction

Un repère est un système d'axes orthogonaux à partir duquel on détermine les coordonnées d'un corps en équilibre ou en mouvement. Les trièdres de référence sont liés à la terre, à l'avion ou à la vitesse, ils permettent d'écrire la relation fondamentale de la dynamique ou bien de projeter les forces et les moments agissants sur un avion. Ce chapitre a pour objectif de présenter les différents repères utilisés en dynamique du vol d'un avion [7, 17, 23, 37]. La nécessité de définir plusieurs références provient de deux considérations :

- La première est que la définition d'un vecteur a plus de sens physique pour un référentiel particulier que pour un autre.
- L'autre considération qui consiste à l'utilisation des repères de référence supplémentaires facilitera l'obtention des équations de mouvement.

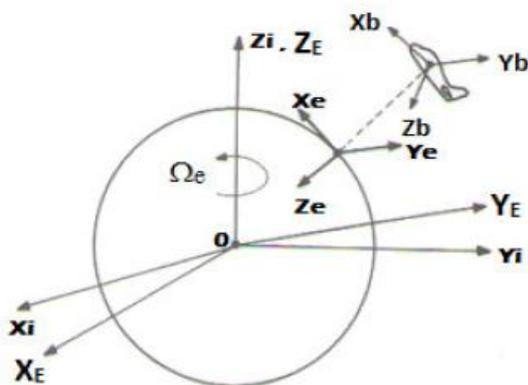


Figure 1.1 : Repères de référence utilisés

### 1.2 Repères de référence

#### 1.2.1 Repère inertiel $R_i(O, X_i, Y_i, Z_i)$

L'accélération d'un corps dans la seconde loi du mouvement de Newton est l'accélération par rapport à un référentiel inertiel, qui est réellement au repos ou à une vitesse constante. Pour la plupart des problèmes de dynamique du vol, un système de référence non rotatif placé au centre de la terre (figure 1.1) est une approximation pour un système de référence inertiel. Le repère inertiel également connu sous le nom de repère inertiel centré à la terre est fixe ou en translation rectiligne uniforme défini par:

- L'origine  $O$  : il est fixé au centre de la terre.
- L'axe  $OZ_i$  est dirigé vers le nord géographique, le long de l'axe de rotation de la terre.
- L'axe  $OX_i$  traverse l'équateur.
- L'axe  $OY_i$  traverse le plan équatorial et perpendiculaire à  $OX_i$  pour compléter le trièdre direct.

### 1.2.2 Repère fixé au centre de la terre $R_E(O, X_E, Y_E, Z_E)$

Un autre repère utilisé en dynamique du vol est appelé repère centré à la terre et fixé à la terre  $OX_E Y_E Z_E$  (figure 1.1) qui est similaire au référentiel inertiel. La différence entre les deux repères est l'orientation des axes  $OX_E, OY_E$  qui traversent le plan équatorial.

- L'origine  $O$  est fixée au centre de la terre.
- L'axe  $OX_E$  traverse le méridien Greenwich tandis que l'axe  $OX_i$  traverse l'équinoxe
- L'axe  $OZ_E$  est dirigé le long de l'axe de rotation de la terre qui est égale à  $OZ_i$
- L'axe  $OY_E$  traverse le plan équatorial perpendiculaire à  $OX_E Z_E$

Comme ce référentiel est fixé à la terre, il tournera autour de son axe  $OZ_E$  avec la vitesse angulaire de la terre contrairement au repère inertiel qui n'a pas de vitesse angulaire.

### 1.2.3 Repère fixé à la surface de la terre $R_e(G, x_e, y_e, z_e)$ :

Ce repère est local et lié à la position initiale de l'avion, il est appelé repère *Nord-Est-Bas* ou (North-East-Dawn) noté (NED) (figure 1.2).

- L'origine de ce repère se trouve à la surface de la terre
- L'axe  $Gx_e$  pointé habituellement vers le nord.
- L'axe  $Gy_e$  se dirige vers l'est.
- L'axe  $Gz_e$  pointe vers le bas.

Il sera utilisé pour le développement des équations de navigation et des équations du mouvement de l'avion.

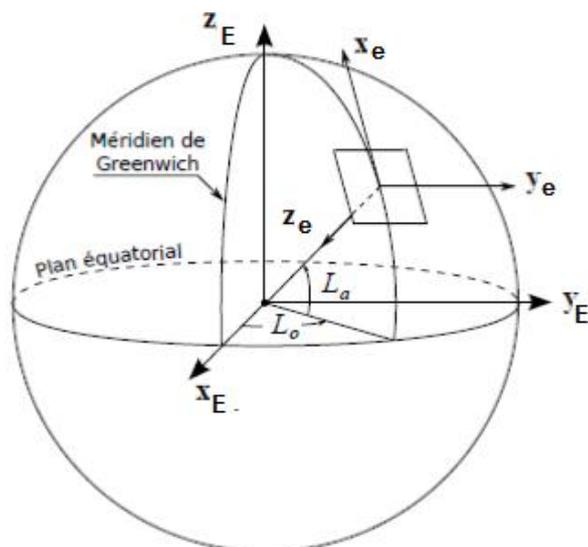


Figure 1.2 : Repères fixés au centre et à la surface de la terre

#### 1.2.4 Repère avion $R_b$ ( $G, x_b, y_b, z_b$ ):

Ce trièdre est lié à l'avion que l'on suppose indéformable et se déplaçant avec lui (figure 1.3). Il est nécessaire pour déterminer les moments et les produits d'inertie ainsi que les forces et les moments agissant sur l'avion.

- Origine  $G$  : il est fixé au centre de gravité de l'avion.
- L'axe  $Gx_b$  : il se situe dans le plan longitudinal et dirigé le long du nez de l'avion.
- L'axe  $Gy_b$  : il est perpendiculaire au plan  $Gx_bz_b$  et pointe vers le côté droit de l'aile.
- L'axe  $Gz_b$  : il se situe dans le plan de symétrie et pointe vers le bas de manière à former un trièdre directe.

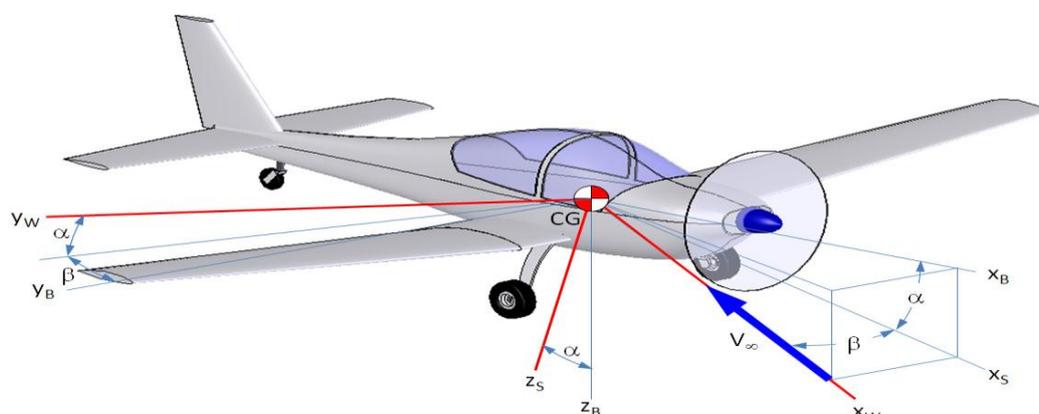


Figure 1.3 : Repères avion, stabilité et vent

#### 1.2.5 Repère de stabilité $R_s$ ( $G, x_s, y_s, z_s$ ):

Ce repère est lié à la projection sur le plan longitudinal du vecteur vitesse de l'avion par rapport à l'air. Il est défini tel que :

- Origine G : il est fixé au centre de gravité de l'avion.
- L'axe  $Gx_s$  : il est considéré comme parallèle au vecteur vitesse dans le plan de symétrie de l'avion.
- L'axe  $Gy_s$  : il est parallèle à  $Gy_b$  au plan  $Ox_s z_s$  et pointe vers le côté droit de l'aile.
- L'axe  $Gz_s$  : il est orienté vers le bas de manière à former un trièdre direct.

L'angle entre  $Gx_b$  et  $Gx_s$ , ou celui entre les axes  $Gz_b$  et  $Gz_s$ , est égal à l'angle d'attaque de l'avion.

### 1.2.6 Repère du vent $R_w (G, x_w, y_w, z_w)$ :

Un autre cas particulier du système des axes de l'avion est le système des axes du vent (figure 1.3).

- Origine G : il est confondu avec le centre de gravité de l'avion.
- L'axe  $Gx_w$  : il est parallèle au vecteur vitesse
- L'axe  $Gy_w$  : il est perpendiculaire à  $Gx_w$  et pointé vers le côté droit de l'avion
- L'axe  $Gz_w$  : il est parallèle et de même sens que  $Gz_s$ .

Les angles localisant le système d'axes du vent par rapport au système d'axes de l'avion sont le dérapage  $\beta$  et l'angle d'attaque  $\alpha$ . Ici, la traînée et la portance sont toujours dirigées respectivement à l'opposé des axes  $Gx_w$  et  $Gz_w$ .

## 1.3 Matrices de passage associées aux repères

### 1.3.1 Position du repère terrestre par rapport au repère avion

La position du repère avion  $R_b (G, x_b, y_b, z_b)$  par rapport au repère situé à la surface de la terre  $R_e (G, x_e, y_e, z_e)$  est repérée par les trois angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ . Si  $\vec{X}_o$  est le vecteur représenté dans le repère terrestre et  $\vec{X}_b$  est exprimé dans le repère avion ; la matrice de passage du repère terrestre au repère avion  $T_{ob}$  est obtenue par la relation suivante :

$$\vec{X}_o = T_{ob} \vec{X}_b \quad (1.1)$$

Avec

$$T_{ob} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot \cos\psi & \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\psi - \sin\psi \cdot \cos\varphi & \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\psi \cdot \sin\varphi \\ \sin\psi \cdot \cos\theta & \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi + \cos\psi \cdot \cos\varphi & \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \sin\psi - \cos\psi \cdot \sin\varphi \\ -\sin\theta & -\sin\theta \cdot \sin\varphi & \cos\theta \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

### 1.3.2 Position du repère stabilité par rapport au repère avion

Le passage du repère avion par rapport au repère stabilité s'effectue par l'intermédiaire d'une rotation d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $y_s$ .

Si  $\vec{X}_b$  est le vecteur  $\vec{X}$  représenté dans le repère avion et  $\vec{X}_s$  est le vecteur  $\vec{X}$  exprimé dans le repère stabilité. La matrice de passage du repère avion au repère stabilité  $T_{bs}$  est obtenue de la relation suivante :

$$\vec{X}_b = T_{bs} \vec{X}_s \quad (1.3)$$

Avec

$$T_{bs} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

### 1.3.3 Position du repère avion par rapport au repère vent

Le passage du repère avion au repère vent nécessite deux rotations ; l'angle d'attaque  $\alpha$  et l'angle de dérapage  $\beta$ .

Si  $\vec{X}_b$  est le vecteur représenté dans le repère avion et  $\vec{X}_w$  est exprimé dans le repère vent. La matrice de passage du repère avion vers le repère vent  $T_{bw}$  est obtenue de la relation suivante :

$$\vec{X}_b = T_{bw} \vec{X}_w \quad (1.5)$$

Avec

$$T_{bw} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta & -\cos\alpha \cdot \sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha \cdot \cos\beta & -\sin\alpha \cdot \sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Inversement, on peut aussi passer du repère vent  $R_w$  au repère avion  $R_b$ , par la matrice inverse  $T_{bw}^{-1}$ .

## 1.4 Dérivation des équations du mouvement d'un avion

Dans cette étape, on s'intéresse à l'établissement du modèle mathématique décrivant le mouvement et la dynamique de l'avion dans l'espace. C'est un modèle basé sur l'application des lois de Newton en translation et en rotation [7, 31].

### 1.4.1 Les équations du mouvement de l'avion rigide

L'obtention des équations du mouvement générale de l'avion commence par l'identification du repère inertiel et le repère lié à l'avion. Il est essentiel de rappeler que la seconde loi de Newton est exprimée par rapport au repère inertiel, qui n'est pas en accélération ou en rotation. L'approche utilisée est basée sur l'application des lois de Newton appliquées pour les particules de masses définissant le corps rigide.

#### -Théorème de la conservation de la quantité de mouvement en translation

L'avion est considéré comme un corps solide qui est soumis aux forces extérieures suivantes: le poids dû à l'attraction terrestre, la force aérodynamique et celle du système de propulsion. L'application du principe fondamental de la mécanique rationnelle pour un solide s'écrit [62, 64, 68, 69, 71, 76, 77]:

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \Sigma f_{ex} \quad (1.7)$$

Qui peut être écrite sous la forme:

$$m \frac{d(\vec{V})}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_T \quad (1.8)$$

L'équation (1.8) représente la première relation vectorielle intermédiaire pour la conservation de la quantité de mouvement. Le vecteur vitesse transformé du repère inertiel considéré comme fixe au repère avion en rotation est:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\delta\vec{V}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{V} \quad (1.9)$$

Ensuite, chacun des vecteurs doit être exprimé par rapport au repère avion  $G X_b Y_b Z_b$  en utilisant les composantes de la vitesse et de sa dérivée. Par conséquent, les équations de conservation de la quantité de mouvement (**ECQM**):

$$m(\dot{U} - VR + WQ) = mg_x + F_{Ax} + F_{Tx} \quad (1.10)$$

$$m(\dot{V} + UR - WP) = mg_y + F_{Ay} + F_{Ty} \quad (1.11)$$

$$m(\dot{W} - UQ + VP) = mg_z + F_{Az} + F_{Tz} \quad (1.12)$$

Tableau 1.1 : Définitions des vecteurs et ses composantes

<b>Variables</b>	<b>Désignations</b>
$\vec{F}_A = F_{Ax}\vec{i} + F_{Ay}\vec{j} + F_{Az}\vec{k}$	<b>Forces aérodynamiques</b>
$\vec{F}_T = F_{Tx}\vec{i} + F_{Ty}\vec{j} + F_{Tz}\vec{k}$	<b>Forces de poussée</b>
$\vec{M}_A = L_A\vec{i} + M_A\vec{j} + N_A\vec{k}$	<b>Moments aérodynamiques</b>
$\vec{M}_T = L_T\vec{i} + M_T\vec{j} + N_T\vec{k}$	<b>Moments de poussée</b>
$\vec{\omega} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$	<b>Composantes de la vitesse angulaire</b>
$\vec{V}_p = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k}$	<b>Composantes de la vitesse linéaire</b>
$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	<b>Vecteur position</b>
$\psi, \quad \Phi \quad \text{et} \quad \theta$	<b>Angles d'Euler</b>

Les équations de conservation de la quantité de mouvement (ECQM) précédentes forment un système d'équations différentielles non linéaires dont les inconnues  $U, V, W$  qui sont les composantes du vecteur vitesse linéaire par rapport au repère avion. Les termes connus de ces équations (c'est-à-dire les entrées du système) sont les forces présentes dans le membre de droite de l'équation (1.8). La solution de ce système d'équations nécessite également la connaissance des composantes du vecteur de vitesse angulaire  $P, Q, R$  par rapport au repère avion.

#### - Théorème de la conservation de la quantité de mouvement en rotation

Le mouvement de rotation de l'avion autour du centre de gravité est exprimé par la variation du moment cinétique qui est égale à la somme de tous les moments appliqués par rapport au centre de gravité :

$$\frac{d(I\dot{\theta})}{dt} = \Sigma M_{flex} \quad (1.13)$$

Comme la plupart des avions sont symétriques par rapport au plan XZ, dans ce cas:

$$I_{xy} = I_{yz} = 0 \quad (1.14)$$

En utilisant la propriété de symétrie des avions, il est possible maintenant de faire la projection de l'équation vectorielle (1.7) pour obtenir le système d'équation différentielle suivante:

$$I_{xx}\dot{P} - I_{xz}\dot{R} - I_{xz}PQ + (I_{zz} - I_{yy})RQ = L_A + L_T \quad (1.15)$$

$$I_{yy}\dot{Q} + (I_{xx} - I_{zz})PR + I_{xz}(P^2 - R^2) = M_A + M_T \quad (1.16)$$

$$I_{zz}\dot{R} - I_{xz}\dot{P} + (I_{yy} - I_{xx})PQ + I_{xz}QR = N_A + N_T \quad (1.17)$$

Les équations (1.10) à (1.12) et celles de (1.15) à (1.17) forment six équations différentielles avec six inconnues: U, V, W, P, Q et R. A ce stade, il n'est pas encore possible de résoudre ces équations différentielles en fonction du temps pour obtenir les paramètres du mouvement U(t) jusqu'à R(t) pour les raisons suivantes:

- 1- Les forces aérodynamiques et de poussées ainsi que les moments correspondants dans les équations (1.8) et (1.13) ne sont pas encore définis en fonction des inconnues du mouvement U, V, W, P, Q et R.
- 2- Les composantes de la force de gravité dans l'équation (1.8) dépend de l'orientation relative de l'avion par rapport au système fixe des coordonnées XYZ.

#### 1.4.1.1 Les équations du mouvement de l'état de vol stabilisé:

L'état du vol stabilisé est défini comme une condition dans laquelle toutes les variables du mouvement restent constantes dans le temps par rapport à un système de coordonnées liés à l'avion. Mathématiquement, l'état de vol stabilisé stipule que:

$$\vec{V}_p = \vec{0}, \quad \vec{\omega} = \vec{0} \quad (1.18)$$

Ces équations montrent que  $\vec{V}_p$  et  $\vec{\omega}$  sont constantes dans le temps par rapport au système de coordonnées lié à l'avion. En considérant un état d'équilibre initial (1),

l'application des conditions de l'état de vol stabilisé est exprimée par les équations (1.10) à (1.12) et celles (1.15) à (1.17) pour obtenir les équations suivantes :

Les équations de forces:

$$m(-V_1 R_1 + W_1 Q_1) = -mg \sin \Theta_1 + F_{A_{x_1}} + F_{T_{x_1}} \quad (1.19)$$

$$m(U_1 R_1 - W_1 P_1) = mg \sin \Phi_1 \cos \Theta_1 + F_{A_{y_1}} + F_{T_{y_1}} \quad (1.20)$$

$$m(-U_1 Q_1 + V_1 P_1) = mg \cos \Phi_1 \cos \Theta_1 + F_{A_{z_1}} + F_{T_{z_1}} \quad (1.21)$$

Les équations de moments:

$$-I_{xz} P_1 Q_1 + (I_{zz} - I_{yy}) R_1 Q_1 = L_{A_1} + L_{T_1} \quad (1.22)$$

$$(I_{xx} - I_{zz}) P_1 R_1 + I_{xz} (P_1^2 - R_1^2) = M_{A_1} + M_{T_1} \quad (1.23)$$

$$(I_{yy} - I_{xx}) P_1 Q_1 + I_{xz} Q_1 R_1 = N_{A_1} + N_{T_1} \quad (1.24)$$

Tableau 1.2 : Variables stabilisés et perturbés

Les variables	Les équations		
	Suivant X	Suivant Y	Suivant Z
La vitesse linéaire	$U = U_1 + u$	$V = V_1 + v$	$W = W_1 + w$
La vitesse angulaire	$P = P_1 + p$	$Q = Q_1 + q$	$R = R_1 + r$
Les angles d'Euler	$\psi = \psi_1 + \psi$	$\theta = \theta_1 + \theta$	$\phi = \phi_1 + \phi$
Les forces aérodynamiques	$F_{A_x} = F_{A_x} + f_{A_x}$	$F_{A_y} = F_{A_y} + f_{A_y}$	$F_{A_z} = F_{A_z} + f_{A_z}$
Les forces de poussée	$F_{T_x} = F_{T_x} + f_{T_x}$	$F_{T_y} = F_{T_y} + f_{T_y}$	$F_{T_z} = F_{T_z} + f_{T_z}$
Les moments aérodynamiques	$L_A = L_{A_1} + l_A$	$M_A = M_{A_1} + m_A$	$N_A = N_{A_1} + n_A$
Les moments de poussée	$L_T = L_{T_1} + l_A$	$M_T = M_{T_1} + m_T$	$N_T = N_{T_1} + n_T$

Ces équations forment un système de six équations différentielles non linéaires. Elles sont du premier degré par rapport aux six inconnues  $U_1$ ,  $V_1$ ,  $W_1$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$  et  $R_1$ , de même, elles contiennent les inconnues  $\theta_1$  et  $\phi_1$ . Ces derniers inconnus sont liés à  $P_1$ ,  $Q_1$  et  $R_1$  au moyen des équations cinématiques :

$$P_1 = \dot{\Phi}_1 - \dot{\Psi}_1 \sin \Theta_1 \quad (1.25)$$

$$Q_1 = \dot{\Theta}_1 \cos \Phi_1 + \dot{\Psi}_1 \cos \Theta_1 \sin \Phi_1 \quad (1.26)$$

$$R_1 = \dot{\Psi}_1 \cos \Theta_1 \cos \Phi_1 - \dot{\Theta}_1 \sin \Phi_1 \quad (1.27)$$

#### 1.4.1.2 Les équations du mouvement de l'état de vol perturbé:

L'état du vol perturbé est défini comme une condition dans laquelle toutes les variables du mouvement sont définies par rapport à l'état du vol stabilisé. Il est décrit mathématiquement en considérant que toutes les variables du mouvement étant comme la somme de celles de l'état de vol stabilisé et les quantités de perturbation.

En effectuant les substitutions des variables de perturbation et en tenant compte des hypothèses suivantes :

- La première est que les variables de perturbation  $\theta_1$  et  $\phi_1$  sont faibles pour approximer les fonctions trigonométriques.
- La seconde est que les perturbations sont suffisamment petites pour que les produits et les dérivées des produits de variables de perturbation puissent être négligés.

De même, la majorité des problèmes de la dynamique d'avion sont concernés par des perturbations par rapport à un état de vol stabilisé pour lequel:

- La vitesse latérale initiale est nulle  $v_1=0$
- L'angle de roulis initial est nul  $\phi_1=0$
- La vitesse angulaire initiale est nulle

Finalement, on obtient les équations suivantes :

$$m(\dot{u} + W_1 q) = -mg\theta \cos \Theta_1 + f_{Ax} + f_{Tx} \quad (1.28)$$

$$m(\dot{v} + U_1 r - W_1 p) = mg\phi \cos \Theta_1 + f_{Ay} + f_{Ty} \quad (1.29)$$

$$m(\dot{w} - U_1 q) = -mg\theta \sin \Theta_1 + f_{Az} + f_{Tz} \quad (1.30)$$

$$I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} = l_A + l_T \quad (1.31)$$

$$I_{yy}\dot{q} = m_A + m_T \quad (1.32)$$

$$I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} = n_A + n_T \quad (1.33)$$

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta_1 \quad (1.34)$$

$$q = \dot{\theta} \quad (1.35)$$

$$r = \dot{\psi} \cos \theta_1 \quad (1.36)$$

Les équations (1.28) à (1.36) forment les outils de base pour la plupart des études de la stabilité dynamique, réponse aux commandes ainsi que le système du pilotage automatique des avions.

#### 1.4.2 Les équations du mouvement de l'avion dans l'atmosphère non uniforme

L'atmosphère est caractérisée par des vents, des rafales et des turbulences. Afin d'étudier l'influence des perturbations atmosphériques sur le mouvement de l'avion, les équations développées précédemment seront modifiées. Les forces et les moments aérodynamiques qui agissent sur l'avion dépendent du mouvement relatif entre l'avion et l'atmosphère. Pour tenir compte des perturbations atmosphériques, les forces et les moments doivent être liés au mouvement relatif par rapport à l'atmosphère. Ceci est accompli en exprimant les équations du mouvement de l'avion en termes de vitesses linéaires et angulaires des rafales et des turbulences.

Les perturbations dans l'atmosphère peuvent être décrites par les variations spatiales et temporelles des composantes de la rafale. Les rafales de rotation  $p_g, q_g, r_g$  proviennent de la variation de  $u_g, v_g$  et  $w_g$ , avec la position et le temps.

Les équations du mouvement sont modifiées pour tenir compte des perturbations atmosphériques et qui peuvent être écrites sous la forme espace d'état:

$$\dot{x} = Ax + Bu + C\xi \quad (1.37)$$

Avec :

$x$  est le vecteur d'état

$u$  est le vecteur commande

$\xi$  est le vecteur perturbation

$A$  est la matrice d'état de l'avion

$B$  est la matrice commande de l'avion

$C$  est la matrice perturbation

## 1.5 Conclusion

Dans la première partie, les équations de mouvement pour un avion rigide sont développées sous la forme vectorielle en utilisant les lois de conservation de la quantité du mouvement et du moment cinétique.

Ces équations sont écrites premièrement dans le référentiel terrestre ( $X_e Y_e Z_e$ ) et dans la seconde partie, elles sont transformées dans le repère lié à l'avion ( $X_b Y_b Z_b$ ).

La position de l'avion en vol est définie par trois angles (angles d'Euler):

- angle de lacet  $\psi$  .
- angle de tangage  $\theta$  .
- angle de roulis  $\phi$  .

Les équations du mouvement d'un avion dans un système de coordonnées liées à l'avion sont développées le long des axes ainsi que les relations cinématiques liant les composantes de la vitesse angulaire aux dérivées des angles d'Euler constituant les systèmes d'équation (1.10) à (1.12) et (1.15) à (1.17). Elles sont appelées les équations générales du mouvement.

Des définitions concernant le vol en état stabilisé et perturbé sont données puis les équations du mouvement spécifiques à chaque type sont présentées. Les plus importants cas pratiques intéressants sont :

- Les équations (1.19) à (1.24) qui décrivent l'état du vol stabilisé rectiligne.
- Les équations (1.28) à (1.36) qui décrivent le vol en état perturbé par rapport au vol rectiligne en état stabilisé.

Finalement, l'influence des perturbations atmosphériques (vents, rafales et turbulences) sur le mouvement de l'avion est modélisé par l'équation (1.37).

## CHAPITRE2: MODELISATION DES FORCES ET DES MOMENTS AERODYNAMIQUES ET DE POUSSEE

### 2.1 Introductions

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir les expressions analytiques et analyser les forces et les moments aérodynamiques et de poussée dans les cas suivants :

- Vol stabilisé
- Vol perturbé

Les forces et les moments aérodynamiques et de poussée agissants sur un avion peuvent être déterminés par quatre méthodes:

- Méthodes analytiques
- Méthodes expérimentales en soufflerie
- Méthodes numériques
- Méthodes des tests en vol

La modélisation est basée sur une compréhension détaillée de la contribution aérodynamique des différents composants de l'avion en régime subsonique. Pendant la phase de conception, un avion conventionnel en régime subsonique est supposé constituer de l'aile, du fuselage, des empennages horizontal et vertical. La mise en œuvre de cette approche de décomposition à une échelle très large pour toutes les configurations d'avions possibles et selon tous les régimes de vol (subsonique, transsonique et supersonique) : elle a mené au développement du logiciel DATCOM. Bien que cette approche n'est pas aussi précise que l'analyse de l'avion en soufflerie, elle fournit un résultat acceptable pour la plupart des coefficients aérodynamiques.

### 2.2 Forces et des moments en vol stabilisé

Les avions diffèrent les uns des autres par la configuration, la forme et les dimensions. A présent, il n'y'a pas de modèle mathématique commun qui s'applique à tous les avions. L'approche adoptée est d'identifier les forces et les moments et également les variables de mouvement correspondants [61, 63, 67, 80, 86, 87].

**Tableau 2.1** : Dépendance des forces, moments aérodynamiques avec les variables du mouvement dans le cas du vol stabilisé.

Variable	$\alpha = \beta =$ $\delta_a = \delta_e =$ $\delta_r = 0$	$\alpha$	$\beta$	$\delta_a$	$\delta_e$	$\delta_r$
$F_{AX1s}$	Trainée à $\alpha = 0$	Trainée induite	négligeable pour $\beta$ faible	négligeable pour $\delta_a$ faible	négligeable pour $\delta_e$ faible	négligeable pour $\delta_r$ faible
$F_{AY1s}$	Zéro	négligeable pour $\alpha$ faible	force latérale due à $\beta$	zéro	zéro	force latérale due à $\delta_r$
$F_{AZ1s}$	Portance à $\alpha = 0$	Portance due à $\alpha$	négligeable pour $\beta$ faible	Négligeable	Portance due à $\delta_e$	négligeable
$L_{A1s}$	Zéro	L'effet indirect de $\alpha$ sur le moment de roulis	Le moment de roulis dû à $\beta$	Le moment de roulis dû à $\delta_a$	zéro	Le moment de roulis dû à $\delta_r$
$M_{A1s}$	Le moment de tangage à $\alpha = 0$	Le moment de tangage dû à $\alpha$	négligeable pour $\beta$ faible	Négligeable	Le moment de tangage dû à $\delta_e$	négligeable
$N_{A1s}$	Zéro	L'effet indirect de $\alpha$ sur le moment de lacet	le moment de lacet due à $\beta$	le moment de lacet dû à $\delta_A$	zéro	Le moment de lacet dû à $\delta_r$

Dans le tableau 2.1, il est supposé que tous les taux des vitesses angulaires de l'état de vol stabilisé sont nuls. En d'autres termes, l'état de vol stabilisé est un vol rectiligne avec  $P_1$ ,  $Q_1$  et  $R_1$  sont nuls. Il contient les forces et les moments aérodynamiques et les trois types de surfaces de contrôles :  $\delta_a$ ,  $\delta_e$  et  $\delta_r$ .

Un repère de référence lié à la vitesse est nécessaire pour modéliser les forces et les moments aérodynamiques agissant sur l'avion ; c'est le repère de stabilité qui est représenté par  $X_s$ ,  $Y_s$  et  $Z_s$ . Il est défini avec la propriété que l'axe  $X_s$  étant aligné à la direction de la vitesse stabilisée. Par conséquent, la composante verticale de la vitesse verticale est nulle. L'angle entre les axes  $X_s$  et  $X$  est l'angle d'attaque stabilisé  $\alpha_1$ . Les axes liés à l'avion et de la stabilité sont représentés au niveau de la figure 3.1 dans le cas de la phase de montée stabilisée avec l'angle de pente  $\gamma_1$  et de tangage  $\theta_1$ .

Dans ces conditions, l'utilisation des équations (1.28) à (1.33) du chapitre 1 s'écrivent :

$$m(\dot{u} + Q_1 w + qW_1 - R_1 v - rV_1) = -mg\theta \cos \theta_1 + (f_{Ax} + f_{Tx}) \quad (2.1)$$

$$m(\dot{v} + U_1 r + uR_1 - wP_1 - pW_1) = -mg\theta \sin \phi_1 \sin \theta_1 + mg\phi \cos \phi_1 \cos \theta_1 + (f_{Ay} + f_{Ty}) \quad (2.2)$$

$$m(\dot{w} + P_1 qv + pV_1 - Q_1 u - qU_1) = -mg\theta \cos \phi_1 \sin \theta_1 - mg\phi \sin \phi_1 \cos \theta_1 + (f_{Az} + f_{Tz}) \quad (2.3)$$

$$I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} - I_{xz}(qP_1 + pQ_1) + (I_{zz} - I_{yy})(qR_1 + rQ_1) = (l_A + l_T) \quad (2.4)$$

$$I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})(rP_1 + pR_1) + I_{xz}(2pP_1 - 2rR_1) = (m_A + m_T) \quad (2.5)$$

$$I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} + (I_{yy} - I_{xx})(qP_1 + pQ_1) + I_{xz}(rQ_1 + qR_1) = (n_A + n_T) \quad (2.6)$$

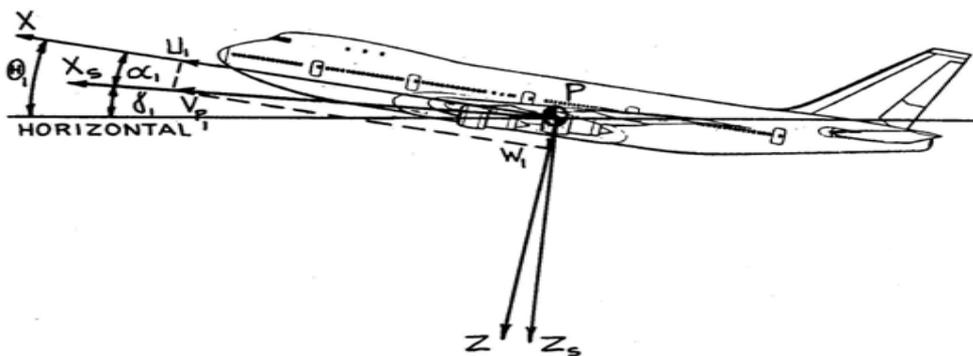


Figure 2.1 Avion dans le plan de symétrie et les repères avion et stabilité

Généralement, les différentes configurations d'avions qui peuvent être utilisées sont:

**Configuration 1** : Le stabilisateur est fixe; la gouverne de profondeur est symétrique et peut être braqué d'un angle  $\delta_e$  , elle est actionnée à la fois pour équilibré et manœuvré. Cette dernière comporte un compensateur facultatif qui est utilisé pour le braquage de sa surface.

**Configuration 2** : La gouverne de profondeur n'existe pas, le stabilisateur horizontal présente une symétrie et peut subir une déflexion  $i_h$  . Il est utilisé à la fois pour équilibré et manœuvré.

**Configuration 3**: Le stabilisateur horizontal est actionné d'un angle de déflexion  $i_h$  pour assurer l'équilibre, la gouverne de profondeur subit une déflexion  $\delta_e$  qui est utilisée pour manœuvré avec la présence du compensateur.

## 2.2.1 Forces et moments aérodynamiques longitudinales

Dans le repère stabilité, les forces et les moments aérodynamiques longitudinales qui s'exercent sur un avion en vol stabilisé sont exprimés par:

$$F_{Ax_{1s}} = -D \quad (2.7)$$

$$F_{Az_{1s}} = -L \quad (2.8)$$

$$M_{A_{1s}} = M_A \quad (2.9)$$

### 2.2.1.1 Force aérodynamiques de traînée

La définition de la traînée de l'avion en termes du coefficient de traînée adimensionnel, de pression dynamique et la surface de référence est donnée par:

$$D = C_D \bar{q} S \quad (2.10)$$

L'utilisation des conditions du vol stabilisé, permet d'obtenir la nouvelle forme suivante:

$$F_{AX_{1s}} = -D_1 \quad (2.11)$$

Avec :

$$D_1 = C_{D1} \bar{q} S \quad (2.12)$$

$C_{D1}$  est le coefficient de traînée adimensionnel de l'avion dans les conditions du vol stabilisé,  $\bar{q}$  est la pression dynamique agissant sur l'avion et S est la surface de référence.

Cependant, la modélisation de la traînée aérodynamique dans les conditions du vol stabilisé se réduit à la modélisation des différents effets du coefficient de traînée  $C_{D1}$ . Pour un nombre de Mach choisi et un nombre de Reynolds donné, le coefficient de traînée peut être exprimé en fonction des variables suivantes :

$$C_{D1} = f(\alpha, \delta_e, i_h) \quad (2.13)$$

L'expression du coefficient de traînée est développée en série de Taylor avec une approximation de premier ordre autour des conditions d'équilibre ce qui conduit à :

$$C_{D1} = C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha + C_{D_{i_h}} i_h + C_{D_{\delta_e}} \delta_e \quad (2.15)$$

Avec :

$C_{D_0} = C_D[\alpha = i_h = \delta_e = 0^\circ]$ , est le coefficient de traînée évalué aux conditions initiales.

$C_{D_\alpha}$ , est la dérivée de stabilité du coefficient de traînée par rapport à l'angle d'attaque.

$C_{D_{\delta_e}}$ , est la dérivée de stabilité du coefficient de traînée par rapport à l'angle de déflexion de la gouverne de profondeur ou élévateur.

$C_{D_{i_h}}$ , est la dérivée de stabilité du coefficient de traînée par rapport à la déflexion du stabilisateur.

Les surfaces longitudinales de contrôle (stabilisateurs et l'élévateur) fournissent des sections limitées qui sont exposées à l'écoulement de l'air, elles sont connues sous le nom des surfaces mouillées, mais, pour certains avions, les dérivées de stabilité  $C_{D_{\delta_e}}$  et  $C_{D_{i_h}}$  peuvent être négligés.

Un cas particulier est l'avion de chasse McDonnell Douglas F4, qui comporte un empennage horizontal important avec un grand angle de dièdre mais négatif, entraînant une surface mouillée non négligeable.

Le coefficient de traînée peut être approximé par:

$$C_{D1} = C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha \quad (2.16)$$

Le coefficient aérodynamique de traînée est défini dans le plan longitudinal pour lequel l'approche de la décomposition décrite précédemment ne fournit pas de résultats précis et fiables. La difficulté de la modélisation de ce coefficient est due à l'interaction de l'aile-fuselage, elle devient plus complexe lorsqu'il tient compte du système de propulsion soit à hélice ou à turboréacteur, ainsi que la traînée associée à la forme aérodynamique des différents objets situés sous l'aile.

Hoak et Roskam fournissent un certain nombre d'outils empiriques pour la modélisation des coefficients  $C_{D_0}$ ,  $C_{D_\alpha}$ . Cependant, l'analyse de soufflerie est toujours la méthode la plus précise et qui est exigée pour une évaluation détaillée du coefficient de traînée.

En général, l'approche conceptuelle alternative pour la modélisation du coefficient de traînée est fournie par la relation de Prandtl suivante :

$$C_{D1} = \bar{C}_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A R e} \quad (2.17)$$

Avec :

$\bar{C}_{D_0}$  est le coefficient de traînée parasite; qui est essentiellement associé à la condition  $C_L = 0$ .

Où :  $\bar{C}_{D_0}$  est la valeur du coefficient de traînée pour une portance nulle.

$A_R$  est l'allongement de l'aile.

$e$  est le facteur d'efficacité d'Oswald.

Le coefficient de traînée induite est définie par :

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi A R e} \quad (2.18)$$

Le coefficient de traînée pour une portance nulle  $\bar{C}_{D_0}$  est souvent exprimé par :

$$\bar{C}_{D_0} = \frac{f}{S} \quad (2.19)$$

$f$  est l'équivalent de la surface parasite de l'avion, qui est lui-même dépend de la surface totale mouillée  $S_{wet}$  et du coefficient de frottement  $C_f$ .

Le coefficient de stabilité  $C_{D_\alpha}$  est déterminé en effectuant la dérivée de l'équation (2.17):

$$C_{D_\alpha} = \left( \frac{2C_{L1}}{\pi A R e} \right) C_{L_\alpha} \quad (2.20)$$

Des chercheurs tels que Hoak et Roskam décrivent des approches empiriques pour l'estimation du coefficient de traînée en utilisant la méthode de décomposition. Cependant, en général, l'analyse en soufflerie est la meilleure approche pour des évaluations précises que ce soit pour  $\bar{C}_{D_0}$  ou bien  $C_{Di}$ .

### 2.2.1.2 Force aérodynamique de portance

La définition de la portance de l'avion en termes du coefficient de portance adimensionnelle, de la pression dynamique et de la surface de référence est exprimée par:

$$L = C_L \bar{q} S \quad (2.21)$$

L'utilisation des conditions du vol stabilisé, permet d'obtenir la nouvelle forme suivante:

$$F_{AZ1s} = -L_1 \quad (2.22)$$

$$L_1 = C_{L1} \bar{q} S \quad (2.23)$$

$C_{L1}$  est le coefficient de portance adimensionnel de l'avion dans les conditions du vol stabilisé qui dépend des facteurs suivants :

- L'angle d'incidence.
- L'angle de braquage de la gouverne.
- Le nombre de Mach.
- Le nombre de Reynolds

La modélisation de la traînée aérodynamique dans les conditions du vol stabilisé se réduit à la modélisation des différents effets du coefficient de portance  $C_{L1}$ . Pour un nombre de Mach donné et un nombre de Reynolds fixé, le coefficient de portance peut être exprimé en fonction des variables suivantes :

$$C_{L1} = f(\alpha, \delta_e, i_h) \quad (2.24)$$

L'expression du coefficient de portance est aussi développée en série de Taylor avec une approximation de premier ordre autour des conditions initiales ce qui conduit à :

$$C_{L1} = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{i_h}} i_h + C_{L_{\delta_e}} \delta_e \quad (2.26)$$

Avec :

$C_{L_0} = C_L[\alpha = i_h = \delta_e = 0^\circ]$ , est le coefficient de portance évalué aux conditions initiales.

$C_{L_\alpha}$ , est la dérivée de stabilité du coefficient de portance par rapport à l'angle d'attaque.

$C_{L_{\delta_e}}$ , est la dérivée de stabilité du coefficient de portance par rapport à l'angle de déflexion de la gouverne de profondeur ou élévateur.

$C_{L_{i_h}}$ , est la dérivée de stabilité du coefficient de portance par rapport à la déflexion du stabilisateur.

De la même manière que précédemment, l'approche de la modélisation consiste à considérer les contributions des différents composants de l'avion en particulier l'aile, le fuselage et l'empennage horizontal. Dans le cas d'une configuration conventionnelle en régime subsonique, la portance totale de l'avion à l'état de vol stabilisé est donnée par :

$$L_1 = L_w + L_f + L_h \quad (2.27)$$

En considérant ensemble la contribution des ailes et du fuselage, alors:

$$L_1 = L_{wf} + L_h \quad (2.28)$$

En remplaçant chaque terme par son expression, elle prend la forme suivante :

$$C_{L1} \bar{q} S = C_{L_{wf}} \bar{q} S + C_{L_h} \bar{q}_h S_h \quad (2.29)$$

Par conséquent, le coefficient de portance totale est :

$$C_{L1} = C_{L_{wf}} + C_{L_h} \eta_h \frac{S_h}{S} \quad (2.30)$$

Le coefficient de portance de l'aile-fuselage peut être exprimé par :

$$C_{L_{wf}} = C_{L_{0_{wf}}} + C_{L_{\alpha_{wf}}} \alpha \quad (2.31)$$

$C_{L_{0wf}}$  est le coefficient de portance aile fuselage dans les conditions initiales ( $\alpha_0 = 0^\circ$ ) et  $C_{L_{\alpha wf}}$  est la dérivée du coefficient de portance de l'avion par rapport à la variation de l'angle d'attaque.

Pour un avion donné et avec un rapport envergure et diamètre (b/d) supérieur à quatre, il est donné par la formule approchée suivante :

$$C_{L_{\alpha wf}} \approx K_{wf} C_{L_{\alpha w}} \quad (2.32)$$

Tel que :

$$K_{wf} = 1 + 0.025 \left( \frac{d}{b} \right) - 0.25 \left( \frac{d}{b} \right)^2 \quad (2.33)$$

Pour la plupart des configurations en régime subsonique, le facteur  $K_{wf}$  est égal à l'unité.

Le développement en série de Taylor du premier ordre du coefficient  $C_{L_h}$  autour de la condition initiale s'écrit :

$$C_{L_h} = C_{L_{0h}} + C_{L_{\alpha h}} \alpha_h + C_{L_{i_h}} i_h + C_{L_{\alpha_e}} \tau_e \delta_e \quad (2.34)$$

Où

$$C_{L_{0h}} = C_{L_h} [\alpha = \delta_e = i_h = 0^\circ]$$

Les profils symétriques sont utilisés pour la conception de l'empennage horizontal; par conséquent,  $C_{L_{0h}} = 0$

$C_{L_{\alpha h}}$  est la dérivée de stabilité de portance de l'empennage horizontal par rapport à l'angle d'attaque et  $\tau_e$  est l'efficacité de l'élévateur.

Dans cette modélisation, l'empennage horizontal est affecté par trois angles différents: l'angle d'attaque aérodynamique de l'empennage horizontal  $\alpha_h$ , l'angle de déflexion de l'élévateur ( $\delta_e$ ) et l'angle de braquage du stabilisateur ( $i_h$ ).

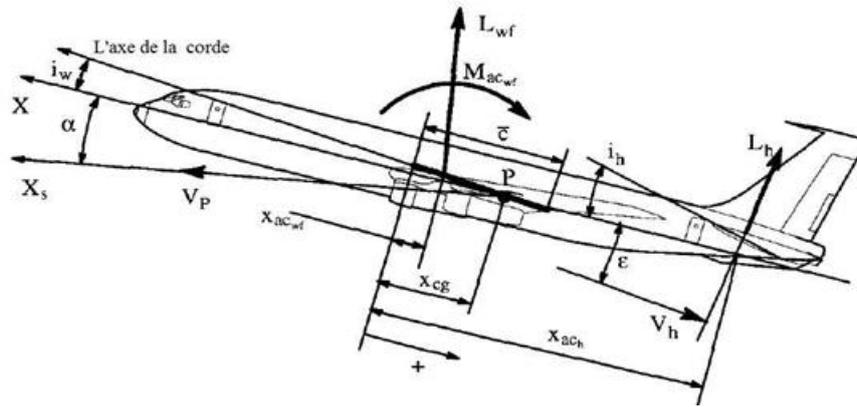


Figure 2.2 : Forces, moments aérodynamiques longitudinales et angles

Compte tenu de la modélisation de l'effet de déviation de l'écoulement vers le bas ou l'angle induit, l'angle d'attaque au niveau de l'empennage horizontale est :

$$\alpha_h = \alpha + i_h - \varepsilon(\alpha) \quad (2.35)$$

$i_h$  : c'est l'angle de calage de l'empennage horizontal.

$\varepsilon$  : c'est l'angle induit par l'aile sur l'empennage

L'utilisation du développement de Taylor du premier ordre concernant de l'effet de l'écoulement dévié vers le bas autour de la condition ( $\alpha_0=0$ ), permet d'écrire :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \alpha \quad (2.36)$$

$\varepsilon_0$  : L'angle induit à un angle d'attaque nul.

$\tau_e$  : L'efficacité de la gouverne.

$\delta_e$  : L'angle de déflexion de la gouverne.

Par conséquent, l'angle d'attaque de l'empennage horizontale est :

$$\alpha_h = \alpha + i_h - \left(\frac{d\varepsilon}{d\alpha} \alpha\right) = \alpha \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) + i_h \quad (2.37)$$

Finalement, le coefficient de portance de l'empennage horizontale s'exprime par :

$$C_{Lh} = C_{L\alpha h} \left[ \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) \alpha + \tau_e \delta_e + i_h \right] \quad (2.38)$$

La substitution des équations (2.37) et (2.38) dans l'équation (2.26), on trouve :

$$C_{L1} = C_{L0_{wf}} + C_{L\alpha_{wf}} \alpha + C_{L\alpha_h} \eta_h \frac{S_h}{S} \left[ \alpha - \left(\varepsilon_0 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \alpha\right) + i_h + \tau_e \delta_e \right] + C_{L0_h} \quad (2.39)$$

La forme pratique de l'équation (2.39) est la suivante :

$$C_{L1} = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta e}\delta_e + C_{Lih}i_h \quad (2.40)$$

Par identification, les expressions générales des dérivées de stabilité et de contrôle concernant le coefficient de portance sont:

$$C_{L0} = C_{L0wf} - C_{L\alpha_h} \eta_h \frac{S_h}{S} \varepsilon_0 + C_{L0h} \quad (2.41)$$

$$C_{L\alpha} = C_{L\alpha wf} + C_{L\alpha_h} \eta_h \frac{S_h}{S} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) \quad (2.42)$$

$$C_{Lih} = C_{L\alpha_h} \eta_h \frac{S_h}{S} \quad (2.43)$$

$$C_{L\delta e} = C_{L\alpha_h} \eta_h \frac{S_h}{S} \tau_e \quad (2.44)$$

Le coefficient de stabilité  $C_{L0}$  dépend de la capacité de l'aile-fuselage à fournir une portance nécessaire à un angle d'attaque nul. Hoak et Roskam décrivent des méthodes empiriques pour estimer ce coefficient. Cependant, une analyse en soufflerie est exigée pour des résultats plus précis. Une plage typique de ce coefficient est comprise dans l'intervalle [ 0.1 - 0.4]

Le coefficient de stabilité  $C_{L\alpha}$  est l'un des coefficients aérodynamiques les plus importants. Sa valeur pour l'avion est principalement en fonction des valeurs correspondantes à l'aile ( $C_{L\alpha_w}$ ) et d'importance moindre concernant l'empennage horizontal ( $C_{L\alpha_h}$ ). Pour des configurations subsoniques, la contribution de l'empennage horizontal à la valeur de  $C_{L\alpha}$  est approximativement de 10 à 15 % de la valeur totale. Les valeurs numériques des dérivées de contrôle  $C_{L\delta e}$  et  $C_{Lih}$  représentent respectivement 10 à 15 % et 5 à 10 % de la valeur de  $C_{L\alpha}$ .

### 2.2.1.3 Moment aérodynamique de tangage

Le moment aérodynamique en régime permanent agissant autour de l'axe de stabilité  $Y_s$  est donné par :

$$M_{A1} = M_1 \quad (2.45)$$

L'expression du moment de tangage total de l'avion est donnée par :

$$M_1 = C_{m1} \bar{q} S \bar{c} \quad (2.46)$$

$C_{m1}$  : C'est le coefficient du moment de tangage total en vol stabilisé de l'avion, il dépend des facteurs suivants :

- L'angle d'attaque.
- Le braquage des gouvernes.
- La pression dynamique.
- Le nombre de Mach.
- Le nombre de Reynolds.
- La position du centre de poussée et le centre de gravité.

Pour un régime de vol choisi en affichant le nombre de Mach correspondant et un nombre de Reynolds donné, le coefficient de moment de tangage peut être exprimé en fonction des variables suivantes:

$$C_{m1} = f(\alpha, \delta_e, i_h) \quad (2.47)$$

Le développement en série de Taylor du premier ordre concernant le coefficient de moment de tangage autour des conditions initiales, ce qui conduit à :

$$C_{m1} = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha + C_{m\delta E} \delta_E + C_{miH} i_H \quad (2.48)$$

$C_{m0} = C_m[\alpha = i_h = \delta_e = 0^\circ]$ , est le coefficient du moment de tangage évalué aux conditions initiales.

$C_{m\alpha}$ , est la dérivée du coefficient du moment de tangage par rapport à l'angle d'attaque.

$C_{m\delta_e}$ , est la dérivée du coefficient du moment de tangage par rapport à l'angle de déflexion de la gouverne de profondeur ou de l'élévateur.

$C_{mi_h}$ , est la dérivée du coefficient du moment de tangage par rapport à la déflexion du stabilisateur.

Pour un avion conventionnel en régime subsonique, On suppose que l'effet de la trainée de l'aile, du fuselage et de l'empennage est négligeable dans l'expression du moment de tangage de l'avion. Ce dernier est exprimé par:

$$M_1 = M_{ac_{wf}} + L_{wf} (x_{cg} - x_{ac_{wf}}) \cos(\alpha + i_w) - L_h (x_{ac_h} - x_{cg}) \cos(\alpha + i_w - \varepsilon) \quad (2.49)$$

L'utilisation des formules d'approximations a permet d'obtenir la forme adimensionnelle du coefficient du moment de tangage suivant:

$$C_m = C_{m_{ac_{wf}}} + C_{L_{wf}} \frac{(x_{cg} - x_{ac_{wf}})}{\bar{c}} - C_{L_h} \eta_h \frac{S_h}{S} \frac{(x_{ac_h} - x_{cg})}{\bar{c}} \quad (2.50)$$

Les équations(2.31), (2.34), (2.35) et (2.36)sont substituées dans l'équation (2.51)et parallèlement, le coefficient du moment de tangage obtenu est:

$$C_m = C_{m_{ac_{wf}}} + (C_{L_{0_{wf}}} + C_{L_{\alpha_{wf}}} \alpha) (\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac_{wf}}) - C_{L_{\alpha_h}} \eta_h \frac{S_h}{S} (\bar{x}_{ac_h} - \bar{x}_{cg}) \left[ \alpha - \left( \varepsilon_0 + \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \alpha \right) + i_h + \tau_e \delta_e \right] \quad (2.51)$$

Dans cette équation, la position du centre aérodynamique aile-fuselage  $\bar{x}_{ac_{wf}}$  est exprime par :

$$\bar{x}_{ac_{wf}} = \bar{x}_{ac_w} + \Delta \bar{x}_{ac_f} \quad (2.52)$$

$\Delta \bar{x}_{ac_f}$  : est la variation du centre aérodynamique induit par la présence du fuselage.

En comparant l'équation (2.50) avec celle de (2.51), il est possible d'obtenir le coefficient du moment de tangage à un angle d'attaque nul par l'expression suivante:

$$C_{m_0} = C_{m_{ac_{wf}}} + C_{L_{0_{wf}}} (\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac_{wf}}) + C_{L_{\alpha_h}} \eta_h \frac{S_h}{S} (\bar{x}_{ac_h} - \bar{x}_{cg}) \varepsilon_0 \quad (2.53)$$

Si  $\varepsilon_0$  est négligeable, cette fois ci, il est donné par:

$$C_{m_0} \approx C_{m_{ac_{wf}}} + C_{L_{0_{wf}}} (\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac_{wf}}) \quad (2.54)$$

$$C_{m_\alpha} = C_{L_{\alpha_{wf}}} (\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac_{wf}}) - C_{L_{\alpha_h}} \eta_h \frac{S_h}{S} (\bar{x}_{ac_h} - \bar{x}_{cg}) \left( 1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) \quad (2.55)$$

$$C_{m_{i_h}} = - C_{L_{\alpha_h}} \eta_h \frac{S_h}{S} (\bar{x}_{ac_h} - \bar{x}_{cg}) = - C_{L_{\alpha_h}} \eta_h \bar{V}_h \quad (2.56)$$

Avec :

$$\bar{V}_h = (S_h/S)(\bar{x}_{ac_h} - \bar{x}_{cg}) \quad (2.57)$$

$\bar{V}_h$  : est le coefficient du volume de l'empennage horizontal.

Ce coefficient de volume est très utilisé dans la conception préliminaire pour le dimensionnement des empennages.

$$C_{m_{\delta_e}} = -C_{L_{\alpha_h}} \eta_h \bar{V}_h \tau_e = C_{m_{i_h}} \tau_e \quad (2.58)$$

Les coefficients  $C_{m_{i_h}}$  et  $C_{m_{\delta_e}}$  sont identifiés comme étant les dérivées de stabilité de control longitudinal. Elles ont une importance majeure dans les considérations de contrôlabilité.

Le coefficient aérodynamique  $C_{m_0}$  dépend de la capacité de l'aile-fuselage à fournir un moment de tangage à l'angle d'attaque nul. Une plage typique de ce coefficient est comprise dans l'intervalle [0.01 – 0.1], la tendance naturelle de l'avion est à cabrer.

La dérivée de stabilité  $C_{m_\alpha}$  est un autre coefficient aérodynamique très critique. Sa valeur est fonction de  $C_{L_{\alpha_{wf}}}$  et  $C_{L_{\alpha_h}}$ . Une plage typique de  $C_{L_{\alpha_w}}$  et  $C_{L_{\alpha_h}}$  est comprise dans l'intervalle [4 – 5.5].

Les plages typiques pour les coefficients  $\eta_h$ ,  $\frac{S_h}{S}$  sont respectivement [0.85 – 0.95] et [0.15 – 0.3].

Le paramètre géométrique  $(\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac_{wf}})$  est faible puisque le centre aérodynamique aile-fuselage est situé près du centre de gravité le long de l'axe longitudinal.

Le paramètre géométrique le plus important est  $(\bar{x}_{ac_h} - \bar{x}_{cg})$ , qui représente le bras de levier adimensionnel de l'empennage horizontal par rapport au centre de gravité de l'avion. Les plages typiques pour les valeurs de  $\bar{x}_{ac_h}$  varient en fonction des classes d'avions; les plages appropriées sont [7]:

[3 – 4] pour les avions légers

[3 – 6] pour l'aviation commerciale et le transport militaire

[2 – 3] pour les avions de combat

En raison de la différence des valeurs de position du centre de gravité de l'avion, le centre aérodynamique aile fuselage et le centre aérodynamique de l'empennage horizontal alors  $C_{m_\alpha}$  est négatif qui aura des implications importants sur la stabilité.

Finalement, les coefficients aérodynamiques  $C_{m_{i_h}}$  et  $C_{m_{\delta_e}}$  sont tous les deux négatifs. Comme le facteur d'efficacité de l'élévateur est situé dans la plage [0.4 – 0.6], on obtient approximativement la condition que  $C_{m_{i_h}}$  est le double de  $C_{m_{\delta_e}}$ .

Le concept associé à la modélisation du moment de tangage est le centre aérodynamique de l'avion (AC).

Le centre aérodynamique de l'avion est défini comme le point situé sur la corde géométrique moyenne de l'aile par rapport auquel le moment de tangage de l'avion ne change pas avec les variations de l'angle d'attaque. Mathématiquement, il se traduit par :

$$C_{m_\alpha} = 0 \quad (2.59)$$

Par conséquent, le centre aérodynamique de l'avion peut être considéré comme la position particulière du centre de gravité de l'avion à laquelle s'applique la relation suivante:

$$\bar{x}_{acA} = \bar{x}_{cg} = 0 \quad (2.60)$$

Par conséquent, en annulant  $C_{m_\alpha}$  dans l'équation(2.55), on obtient :

$$C_{L_{\alpha_{wf}}} (\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac_{wf}}) - C_{L_{\alpha_h}} \eta_h \frac{S_h}{S} (\bar{x}_{acA} - \bar{x}_{cg}) \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right) = 0 \quad (2.61)$$

Ce qui conduit à l'expression du centre aérodynamique de l'avion ou bien le point neutre:

$$\bar{x}_{acA} = \frac{\bar{x}_{ac_{wf}} + \frac{C_{L_{\alpha_h}}}{C_{L_{\alpha_{wf}}}} \eta_h \frac{S_h}{S} \bar{x}_{ac_h} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)}{1 + \frac{C_{L_{\alpha_h}}}{C_{L_{\alpha_{wf}}}} \eta_h \frac{S_h}{S} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)} \quad (2.62)$$

Les équations (2.55) et (2.62) peuvent être combinées pour trouver :

$$C_{m_\alpha} = C_{L_\alpha} (\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{acA}) \quad (2.63)$$

Cette équation s'applique uniquement pour les avions à configuration classique c'est-à-dire à empennage arrière. Par contre, pour les avions canard et à trois surfaces portantes, elle doit être modifiée. Les avions canard n'interfèrent pas de manière significative avec le champ d'écoulement principal de l'aile, il est possible de modifier l'équation (2.62) pour être appliquée à des avions comportant trois surfaces portantes sous forme:

$$\bar{x}_{acA} = \frac{\bar{x}_{acwf} - \frac{C_{L\alpha c} \eta_c S_c}{C_{L\alpha wf}} \bar{x}_{acc} \left(1 + \frac{d\varepsilon_c}{d\alpha}\right) + \frac{C_{L\alpha h} \eta_h S_h}{C_{L\alpha wf}} \bar{x}_{ach} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)}{1 + \frac{C_{L\alpha c} \eta_c S_c}{C_{L\alpha wf}} \left(1 + \frac{d\varepsilon_c}{d\alpha}\right) + \frac{C_{L\alpha h} \eta_h S_h}{C_{L\alpha wf}} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)} \quad (2.64)$$

Pour un avion purement canard, le terme de l'empennage horizontal dans l'équation (2.64) doit être supprimé. La figure 4.16 montre comment  $\bar{x}_{acc}$  est en relation avec  $\bar{x}_{ach}$  pour des avions à trois surfaces. La quantité  $\eta_c$  représente le taux de pression dynamique, au niveau du canard. L'angle  $\varepsilon_c$  est l'angle de déflexion des filets d'air vers le haut induit par l'aile au niveau du canard.

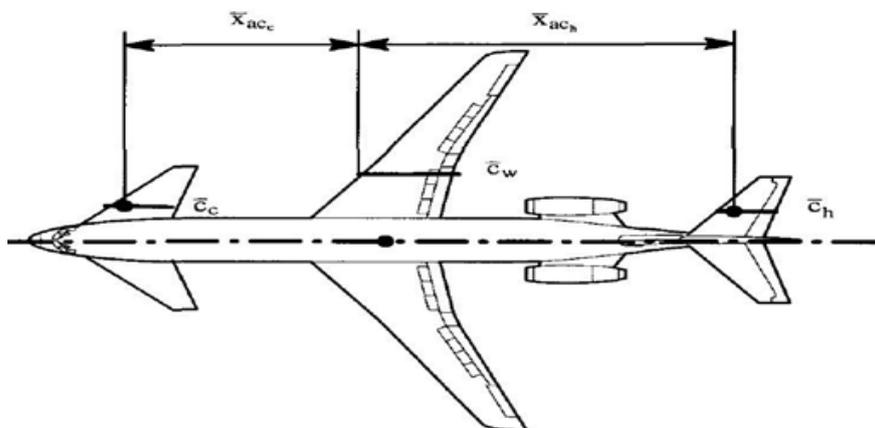


Figure 2.3 Position du centre aérodynamique du canard et de l'empennage horizontal

Les plages typiques pour la valeur de  $\bar{x}_{acA}$  sont :

[0.4 – 0.6] pour les avions légers

[0.35–0.45] pour l'aviation commerciale et le transport militaire

[0.3–0.35] pour les avions de combat

Une fois que  $\bar{x}_{ac_A}$  est connu, la distance entre le centre aérodynamique et le centre de gravité normalisé par rapport à la corde aérodynamique moyenne (MAC) de l'aile est connue, la marge statique (SM) longitudinale est définie par:

$$SM = (\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac_A}) \quad (2.65)$$

Plus le centre de gravité occupe une position avancée, plus la marge statique est élevée. Elle peut être aussi exprimée en termes de dérivées de stabilité :

$$SM = -\frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}} \quad (2.66)$$

La marge statique engendre des implications importantes sur la stabilité statique et dynamique longitudinale de l'avion. En général, les avions de transport civils et militaires ont des valeurs plus élevées de la marge statique, ce qui permet une plus grande flexibilité de chargement et des plages plus larges du centre de gravité de l'avion. Par contre, les avions de combat ont des valeurs plus basses de la marge statique en raison des valeurs faibles de la position du centre aérodynamique  $\bar{x}_{ac_A}$ .

Il convient de signaler que la marge statique réduite pour les avions de combat apporte d'énormes avantages en termes de manœuvrabilité. Cette tendance a conduit dans les années 1970 à la conception et au développement d'avions de combat naturellement "instables" c'est-à-dire avec une marge statique SM positif mais très manœuvrable ; avec la stabilité procurée par l'utilisation de lois de contrôle en boucle fermée activées par le calculateur automatique de vol. Ces avions nécessitent l'utilisation continue d'ordinateurs de bord tout au long du vol. L'avion de chasse F-16 a été le premier équipé de cette conception révolutionnaire.

Les plages des valeurs absolues de la marge statique sont:

[0.15 – 0.25] pour l'aviation commerciale et le transport militaire

[0.05 – 0.15] pour les avions de combat stables en boucle ouverte

## 2.2.2 Forces et moments de poussée longitudinale

Le nombre des moteurs et leurs dispositions sur l'avion dépendent de sa mission. L'effet des forces et des moments de poussée regroupe :

- Effets direct : La poussée fournie par chaque moteur est calculée d'après les données fournies par le constructeur du moteur et en tenant compte des différentes pertes dues à l'installation.
- Effets indirect: Il se produit quand le champ d'écoulement de l'hélice ou l'échappement des réacteurs interfère avec la surface portante.

Le coefficient de poussée est défini par l'expression suivante:

$$C_T = T / \bar{q} S \quad (2.67)$$

L'effet indirect de la poussée sur le coefficient de moment est exprimé par:

$$C_{m_\alpha} = C_{m_{\alpha_{C_T=0}}} + \frac{\partial C_{m_\alpha}}{\partial C_T} C_T \quad (2.68)$$

La contribution de tous les moteurs installés dans le modèle des forces et des moments de poussée longitudinaux est :

$$F_{T_{x_{1s}}} = \left( \sum_{i=1}^{i=n} T_i \cos \phi_{T_i} \cos \psi_{T_i} \right) \cos \alpha_1 + \left( \sum_{i=1}^{i=n} T_i \sin \phi_{T_i} \right) \sin \alpha_1 \quad (2.69)$$

$$F_{T_{z_{1s}}} = \left( \sum_{i=1}^{i=n} T_i \sin \phi_{T_i} \right) \cos \alpha_1 - \left( \sum_{i=1}^{i=n} T_i \cos \phi_{T_i} \cos \psi_{T_i} \right) \sin \alpha_1 \quad (2.70)$$

$$M_{T_{1s}} = \sum_{i=1}^{i=n} T_i \cos \phi_{T_i} \cos \psi_{T_i} Z_{T_i} + \sum_{i=1}^{i=n} T_i \sin \phi_{T_i} X_{T_i} \quad (2.71)$$

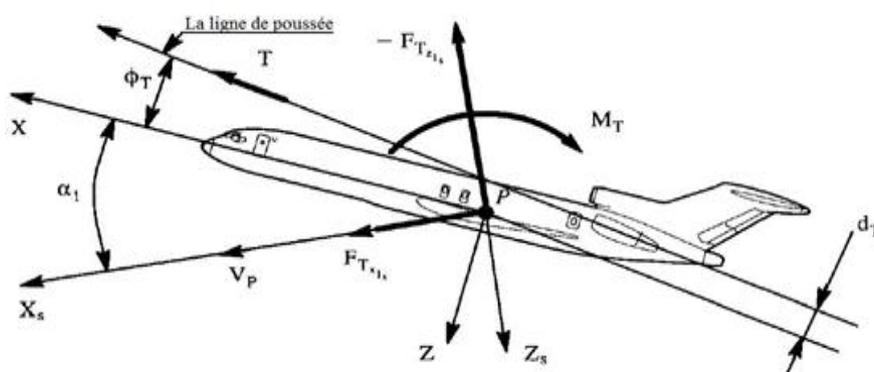


Figure 2.4 Forces et le moment de poussée en vol stabilisé

Les composantes de la poussée totale générée par tous les moteurs dans le cas où  $(\phi_{T_i} = \phi_T, \psi_{T_i} = 0)$  sont:

$$F_{T_{x_{1s}}} = T \cos(\phi_T + \alpha_1) \quad (2.72)$$

$$F_{T_{z_{1s}}} = -T \sin(\phi_T + \alpha_1) \quad (2.73)$$

$$M_{T_{1s}} = M_{T_1} = -T d_T \quad (2.74)$$

### 2.2.3 Assemblage des forces et des moments longitudinaux stabilisés

L'assemblage des forces et des moments aérodynamiques longitudinaux stabilisés sous la forme matricielle est :

$$\begin{Bmatrix} F_{A_{x_{1s}}} \\ F_{A_{z_{1s}}} \\ M_{A_{1s}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -D \\ -L \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -C_D \bar{q} S \\ -C_L \bar{q} S \\ C_m \bar{q} S \bar{c} \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

Les coefficients des forces et des moments aérodynamiques longitudinaux stabilisés sous la forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} C_D \\ C_L \\ C_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{D_0} & C_{D\alpha} & C_{D i_h} & C_{D \delta_e} \\ C_{L_0} & C_{L\alpha} & C_{L i_h} & C_{L \delta_e} \\ C_{m_0} & C_{m\alpha} & C_{m i_h} & C_{m \delta_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \\ i_h \\ \delta_e \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

Les forces et les moments de poussée dans le plan longitudinal sont :

$$\begin{Bmatrix} F_{T_{x_{1s}}} \\ F_{T_{z_{1s}}} \\ M_{T_{1s}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T \cos(\phi_T + \alpha) \\ -T \sin(\phi_T + \alpha) \\ -T d_T \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

### 2.2.4 Forces et moments aérodynamiques latérales-directionnels

Dans le vol en état stabilisé, il y'a apparition de la vitesse latérale et l'avion subira un dérapage. L'angle de dérapage provoque un moment de roulis, une force latérale et un moment de lacet.

L'introduction de l'angle de dérapage  $\beta$ , provoque la déviation de l'écoulement d'air dans le plan horizontal représenté par l'angle  $\sigma$  qui équivaut à l'angle de déflexion  $\varepsilon$  de l'écoulement vers le bas du plan longitudinal.

$$\beta(H, V) = (\beta - \sigma) \quad (2.78)$$

La modélisation de l'angle de déviation latéral  $\sigma$  de l'écoulement est identique à l'angle de déviation  $\varepsilon$  de l'écoulement vers le bas du plan longitudinal. En utilisant le développement en série de Taylor du premier ordre, on trouve :

$$\sigma(\beta) = \sigma|_{\beta=0^\circ} + \frac{d\sigma}{d\beta} \beta \quad (2.79)$$

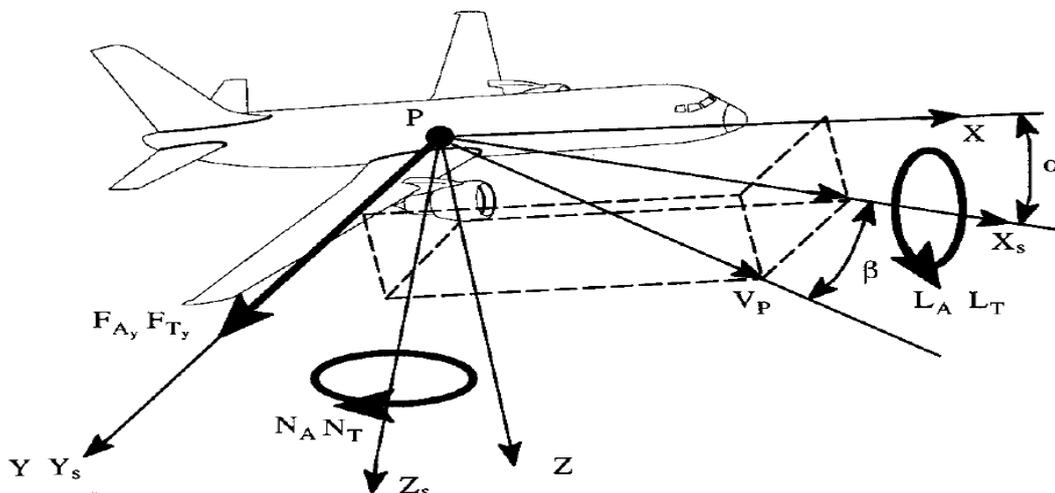


Figure 2.5 : Forces et moments aérodynamiques latérales-directionnels

L'effet de l'angle de déviation latéral est négligeable pour un angle de dérapage nul ( $\sigma|_{\beta=0^\circ} = \sigma_0 = 0$ ), ce qui conduit à :

$$\beta(H, V) = (\beta - \sigma) = \beta - \frac{d\sigma}{d\beta} \beta = \left(1 - \frac{d\sigma}{d\beta}\right) \beta \quad (2.80)$$

### 2.2.4.1 Force aérodynamique latérale

La force latérale totale d'un avion est définie par :

$$F_{AY1} = c_{y1} \bar{q} S \quad (2.81)$$

Où  $C_{y1}$  est le coefficient aérodynamique de la force latérale qui dépend :

- L'angle de dérapage
- L'angle d'attaque
- L'angle de déflexion de l'aileron
- L'angle de déflexion de la gouverne de direction
- Nombre de Mach
- Nombre de Reynolds

Pour un avion équipé de l'aileron et de la gouverne de direction, l'expression du coefficient aérodynamique de la force latérale est donnée par :

$$c_{y1} = c_{y0} + c_{y\beta}\beta + c_{y\delta r}\delta_r + c_{y\delta a}\delta_a \quad (2.82)$$

Avec :

$C_{y0}$  : le coefficient de la force latérale d'avion pour un dérapage et un angle de braquage nul des gouvernes.

$C_{y\beta}$  : c'est la variation du coefficient de la force latérale due au dérapage

$C_{y\delta a}$  : c'est la variation du coefficient de la force latérale due à la déflexion de l'aileron

$C_{y\delta r}$  : c'est la variation du coefficient de la force latérale due à la déflexion de la gouverne de direction

On s'intéresse à la modélisation des coefficients de stabilité  $C_{y\beta}$ ,  $C_{y\delta a}$  et  $C_{y\delta r}$ . En raison de la complexité aérodynamique, la modélisation de ces coefficients est faite séparément.

### La dérivée du coefficient de la force latérale due au dérapage $C_{y\beta}$ :

La dérivée du coefficient de stabilité de la force latérale due principalement à la contribution de tous ses composants, pour un avion de configuration classique :

$$C_{y\beta} = C_{Y\beta_{Wf}} + C_{Y\beta_H} + C_{y\beta_V} \quad (2.83)$$

### La contribution de l'aile $C_{Y\beta_{Wf}}$ et du fuselage $C_{Y\beta_f}$ :

La dérivée du coefficient de stabilité de la force latérale due principalement à l'effet de l'angle du dièdre de l'aile.

La contribution du fuselage dépend de la forme et de la taille du fuselage par rapport à l'aile et du positionnement de l'aile sur le fuselage

### La contribution de l'empennage vertical, $C_{Y\beta_V}$ :

La force latérale due au dérapage sur l'empennage vertical est :

$$F_{AYV} = -c_{Y\beta V}\beta\bar{q}S = -c_{L\alpha V}\left(1 - \frac{d\sigma}{d\beta}\right)\beta\bar{q}_V s_V \quad (2.84)$$

Par identification, la dérivée de stabilité de la force latérale due à l'empennage vertical est :

$$C_{Y\beta V} = -C_{L\alpha V} \left(1 - \frac{d\sigma}{d\beta}\right) \eta_V \frac{S_V}{S} \quad (2.85)$$

#### **Le coefficient de stabilité $C_{y\delta a}$ :**

Ce coefficient est généralement négligeable. Cependant, dans le cas des avions où les moments de contrôle de roulis sont à proximité d'une surface verticale (fuselage ou empennage vertical), une force latérale peut être générée. L'essai en soufflerie est le seul moyen fiable pour obtenir ce coefficient de stabilité.

#### **Le coefficient de stabilité $C_{y\delta r}$ :**

La force latérale due à la dérivée du coefficient  $C_{y\delta r}$  est :

$$F_{AY\delta r} = c_{y\delta r} \delta_r \bar{q} S \quad (2.86)$$

Le coefficient de stabilité due à la déflexion de la gouverne de direction situé sur l'empennage vertical est exprimé par :

$$C_{Y\delta r} = -C_{L\alpha V} \alpha_r \eta_V \frac{S_V}{S} \quad (2.87)$$

La force latérale due à la gouverne de direction dépend d'une manière importante des dimensions de l'empennage vertical par rapport à l'aile et de la pente du coefficient de portance de l'empennage vertical. Ces derniers aussi dépendent de l'allongement et de l'angle de flèche de l'empennage vertical.

Maintenant, en substituant les dérivées de stabilité  $C_{y\beta}$ ,  $C_{y\delta a}$  et  $C_{y\delta r}$  par leurs expressions, le modèle de la force aérodynamique latérale d'un avion dans les conditions du vol stabilisé s'écrit :

$$F_{AY1s} = \left( c_{y\beta} \beta + c_{y\delta a} \delta_a + c_{y\delta r} \delta_r \right) \bar{q} S \quad (2.88)$$

#### **2.2.4.2 Moment aérodynamique de roulis**

Le moment de roulis total d'un avion qui en vol stabilisé est donné par :

$$L_A = c_l \bar{q} s b \quad (2.89)$$

Où  $C_l$  est le coefficient de moment de roulis.

L'expression du coefficient de moment de roulis total est donnée par :

$$c_l = c_{l0} + c_{l\beta} \beta + c_{l\delta_A} \delta_A + c_{l\delta_R} \delta_R \quad (2.90)$$

Avec :

$C_{l0}$  : le coefficient de moment de roulis pour un dérapage et des déflexions nulles.

$C_{l\beta}$  : c'est la variation du coefficient de moment de roulis due au dérapage, également appelée la dérivée de stabilité du moment de roulis due au dérapage ou à l'effet dièdre

$C_{l\delta_A}$  : variation du coefficient de moment de roulis due à la déflexion de l'aileron

$C_{l\delta_R}$  : variation du coefficient de moment de roulis due à la déflexion de la gouverne de direction

### **Modélisation du coefficient de stabilité $C_{l\beta}$ :**

Ce coefficient est connu sous le nom effet de dièdre, il présente des implications importantes sur la stabilité directionnelle latérale des avions. En termes de la contribution des différents composants d'une configuration conventionnelle en régime subsonique, son expression s'écrit :

$$c_{l\beta} = c_{l\beta wf} + c_{l\beta h} + c_{l\beta V} \quad (2.91)$$

Où les indices wf, h et V indiquent respectivement: l'aile-fuselage, l'empennage horizontal et vertical.

### **Contribution aile-fuselage : $C_{l\beta wf}$**

Il y a trois effets aérodynamiques qui contribuent à ce coefficient de stabilité:

- Le dièdre géométrique de l'aile
- La position de l'aile sur le fuselage (haute ou basse)
- L'angle de flèche de l'aile

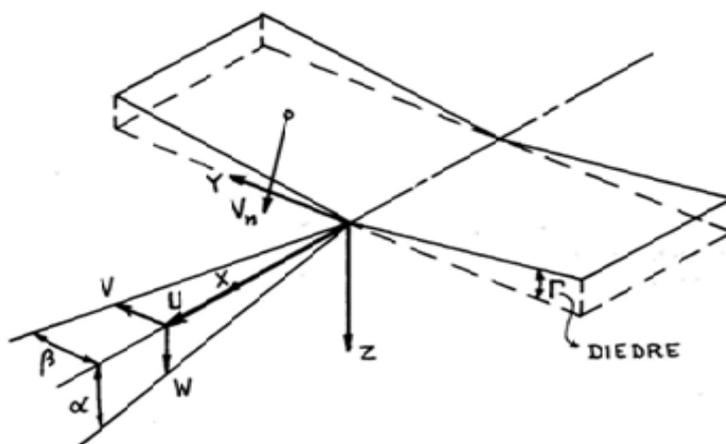
### Dièdre géométrique de l'aile :

La figure 2.6 montre l'effet du dièdre géométrique de l'aile sur la génération du moment de roulis dû au dérapage latérale. C'est la combinaison de l'angle d'incidence et de dérapage que la vitesse  $V_n$  est induite sur le panneau d'aile, son expression est la suivante :

$$V_n = w \cos \Gamma + v \sin \Gamma \approx w + v \Gamma \quad (2.92)$$

En conséquence, pour le dièdre positif ; l'aile droite subira une augmentation de l'angle d'attaque donnée par :

$$\Delta \alpha \approx \frac{V \Gamma}{U} \approx \frac{U \beta \Gamma}{U} \approx \beta \Gamma \quad (2.93)$$



**Figure 2.6 :** Vitesse normale induite par le dérapage due à l'effet du dièdre géométrique

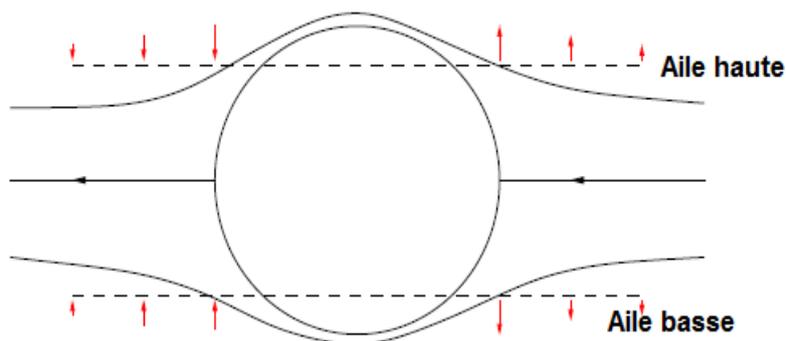
Cette augmentation d'angle d'attaque induit une croissance de portance par conséquent, il résulte un moment de roulis négatif ( $C_{l_{\beta wf}} < 0$ ). Le moment de roulis dû au dérapage est proportionnel à l'angle du dièdre géométrique.

### Position de l'aile sur le fuselage :

Dans la Figure 2.7, le champ d'écoulement à cause du dérapage est divisé en deux composantes: un champ d'écoulement symétrique le long de l'axe X (non représenté) et un champ d'écoulement transversal avec une vitesse U. Cet écoulement

transversal produit des angles d'attaque progressifs près de l'intersection entre l'aile et le fuselage. L'augmentation de l'angle d'attaque produit une portance supplémentaire qui génère en fin de compte des moments de roulis qui sont négatifs pour une aile haute ( $C_{l_{\beta wf}} < 0$ ) et positifs pour une aile basse.

C'est la raison pour laquelle, dans les avions à aile haute, l'aile a nettement moins de dièdre géométrique que dans les avions à aile basse.



**Figure 2.7 :** Moment de roulis induit par le dérapage affecté par la position de l'aile sur le fuselage

### Flèche de l'aile:

La troisième contribution au coefficient de stabilité  $C_{l_{\beta wf}}$  est l'angle de flèche positif de l'aile qui produit un moment de roulis négatif en raison d'une différence de composantes de la vitesse normale au bord d'attaque au niveau des panneaux gauche et droit de l'aile. Sans la présence de l'angle de dérapage, la vitesse normale ( $V_{n\infty}$ ) est donnée par :

$$V_{n\infty} = V_{\infty} \cos(\Lambda_{LE}) \quad (2.94)$$

La figure 2.8 montre en présence d'un angle de dérapage, les vitesses normales sur les deux côtés de l'aile. D'une part, la composante normale de la vitesse sur l'aile gauche :

$$V_{n\infty G} = V_{\infty} \cos(\Lambda_{LE} + \beta) \quad (2.95)$$

D'autre part, celle de l'aile droite est:

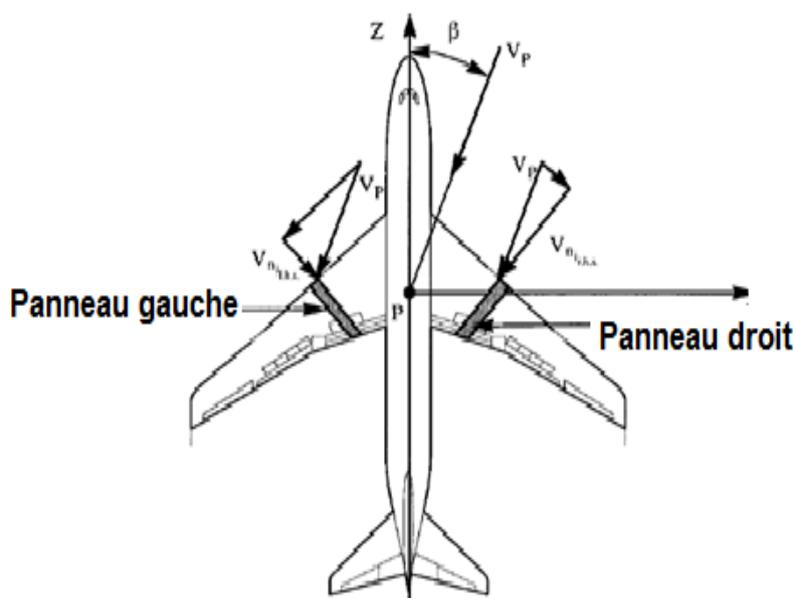
$$V_{n\infty D} = V_{\infty} \cos(\Lambda_{LE} - \beta) \quad (2.96)$$

D'après la figure 2.8, il est clair que la composante de la vitesse normale de l'aile droite est supérieure à celle de l'aile gauche. Cette différence de vitesse entraîne une différence dans les valeurs de la portance sur les deux ailes, en conséquence, la portance de l'aile droite est supérieure à celle de l'aile gauche; c'est ce qui crée un moment de roulis négatif.

$$\Delta L = -y_i c_{Li} \frac{1}{2} \rho s_i V_p^2 \{ \cos^2(\Lambda - \beta) - \cos^2(\Lambda + \beta) \} \quad (2.97)$$

Lorsque l'angle de dérapage est faible, l'équation (2.97) se simplifie en :

$$\Delta L = -y_i c_{Li} \bar{q} S_i 2\beta \sin 2\Lambda \quad (2.98)$$



**Figure 2.8** : Différence de la vitesse normale entre les deux panneaux de l'aile due à l'effet de flèche

Cette équation montre que :

- Le moment de roulis dû au dérapage et à l'angle de flèche positif est négatif.
- Le moment de roulis dû au dérapage et à l'angle de flèche est proportionnel au coefficient de portance.
- Le moment de roulis dû au dérapage est proportionnel au sinus du double de l'angle de flèche.

La contribution de la flèche et du dièdre sur le coefficient de stabilité  $C_{l\beta}$  a des conséquences importantes sur la stabilité des avions.

### Contribution de l'empennage horizontal :

La contribution de l'empennage horizontal peut être expliquée exactement comme celle qui a été fait pour l'aile.

Le moment de roulis de l'empennage horizontal dû au dérapage peut être écrit comme :

$$\Delta L_h = C_{l\beta h} \beta \bar{q}_h s_h b_h \quad (2.99)$$

Alors:

$$C_{l\beta h} = C_{L\beta wf} \Big|_h \left( \frac{\bar{q}_h}{q} \frac{S_h}{S} \frac{b_h}{b} \right) \quad (2.100)$$

$C_{L\beta wf} \Big|_h$  est la dérivée de stabilité  $C_{l\beta wf}$  introduit précédemment évalué avec les paramètres géométriques de l'empennage horizontal.

### Contribution de l'empennage vertical :

La figure 2.9 montre que lorsqu'un avion est en dérapage, l'empennage vertical génère une force latérale qui provoque un moment de roulis. Le signe et l'intensité de ce moment dépendent du bras de levier de l'empennage vertical.

Le coefficient de portance qui agit sur l'empennage vertical s'écrit :

$$c_{LV} = c_{L\alpha V} (\beta - \sigma) = c_{L\alpha V} \left( 1 - \frac{d\sigma}{d\beta} \right) \beta \quad (2.101)$$

Où :

$C_{L\alpha V}$  : représente la pente du coefficient de portance de l'empennage vertical

$\sigma$  : désigne est l'angle de déflexion de l'écoulement latérale

La portance de l'empennage vertical engendre un moment de roulis négatif exprimé par :

$$\Delta L_v = -Z_{Vs} c_{L\alpha V} (\beta - \sigma) \bar{q}_v s_v \quad (2.102)$$

En utilisant la forme adimensionnelle suivante :

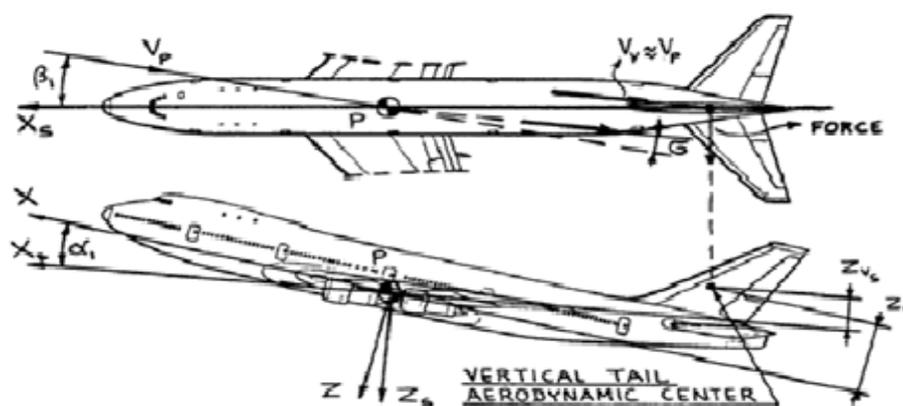
$$\Delta L_V = c_{l\beta V} \bar{\beta} q s b \quad (2.103)$$

On peut déduire :

$$c_{l\beta V} = -c_{L\alpha V} \left( 1 - \frac{d\sigma}{d\beta} \right) n_V \frac{s_v}{s} \frac{z_{Vs}}{b} \quad (2.104)$$

La contribution de l'empennage vertical au moment de roulis due au dérapage dépend des paramètres suivants:

- La géométrie de l'empennage vertical : allongement et son angle de flèche
- La dérivée par rapport au dérapage de l'angle de déviation de l'écoulement latéral.
- Le rapport de pression dynamique
- Le bras de levier de l'empennage vertical
- Le rapport de section entre l'aile principale et l'empennage vertical



**Figure 2.9** : Force latérale sur l'empennage vertical due au dérapage

### Dérivée latérale $C_{l\delta a}$

Le contrôle latéral de l'avion selon l'axe longitudinal de l'avion ou de stabilité peut être accompli avec un certain nombre de dispositifs:

- Ailerons,  $C_{l\delta a}$
- Spoilers,  $C_{l\delta s}$
- Stabilisateur différentiel,  $C_{l\delta h}$

- Flaperons,  $Cl_{\delta a}$
- Combinaisons entre les dispositifs précédents

### **Dérivée du coefficient de moment de roulis d'aileron, $Cl_{\delta a}$ :**

Les ailerons sont les gouvernes asymétriques. Un braquage positif des ailerons implique une déflexion vers le bas de l'aileron gauche et un braquage vers le haut de l'aileron droit.

La dérivée de stabilité  $Cl_{\delta a}$  dépend des facteurs suivants:

- Le rapport de corde aile et aileron
- Angle de flèche aile
- Angle de braquage aileron
- Nombre de Mach
- La distance selon l'envergure de la position de l'aileron interne et externe

L'angle de déflexion des ailerons et du stabilisateur différentiel,  $\delta_A$  est égale à la moyenne des braquages ( $+\delta_A$ ) de l'aile gauche et ( $-\delta_A$ ) de l'aile droite. Dans ce cas :

$$\delta_A = \frac{1}{2}(\delta_{AL} + \delta_{AR}) \quad (2.105)$$

Les ailerons sont utilisés souvent à des faibles vitesses et à basse flèche. Pour des grandes vitesses et aux angles modérés de flèche, il s'avère que les effets aéroélastiques posent des problèmes pour l'utilisation des ailerons. Dans ce cas, les spoilers sont employés.

Aux grands angles de flèche ; les spoilers et les ailerons deviennent également inefficaces (du point de vue aérodynamique). Dans ce cas, les ailerons de bout ou les stabilisateurs différentiels sont souvent utilisés.

### **Moment de roulis dû à la commande directionnelle $Cl_{\delta r}$ :**

Le contrôle directionnel des avions (dérapage) est habituellement obtenue par:

- La gouverne de direction
- L'empennage vertical

Le symbole  $\delta_r$  représente l'angle de déflexion de la gouverne de direction et l'empennage vertical utilise le symbole  $i_v$  pour la commande directionnelle.

L'explication physique du mécanisme aérodynamique par lequel le moment de roulis dû à la commande directionnelle est représenté par la figure 2.11.

Le but de la gouverne de direction est le contrôle en lacet, le moment de roulis dû à la gouverne de direction est considéré comme effet secondaire.

### L'expression de $C_{l_{\delta R}}$ :

La force latérale due à la gouverne de direction sur l'empennage vertical s'écrit :

$$F_{Ay} = C_{Lv} \bar{q}_v S_v \quad (2.106)$$

Avec :

$$C_{Lv} = C_{L\alpha v} \alpha_{\delta r} \delta_r \quad (2.107)$$

$C_{L\alpha v}$  : La pente du coefficient de portance de l'empennage vertical

$\alpha_{\delta r}$  : L'efficacité de l'angle d'attaque de la gouverne de direction

Le moment de roulis dû à cette force par rapport à l'axe de stabilité est :

$$L = F_{Ay} Z_{Vs} \quad (2.108)$$

Le moment de roulis dû à la gouverne de direction est :

$$L = C_{l_{\delta r}} \delta_r \bar{q} S b \quad (2.109)$$

Par conséquent :

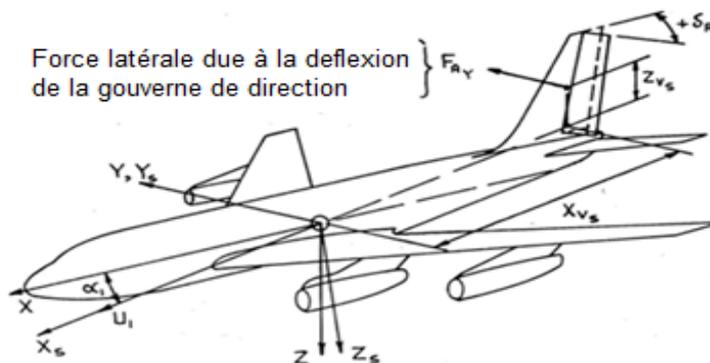
$$C_{l_{\delta r}} = C_{L\alpha v} \alpha_{\delta r} \eta_V \frac{S_v x_{Vs}}{S b} \quad (2.110)$$

Le coefficient de stabilité  $C_{l_{\delta r}}$  peut avoir un signe négatif à cause de  $Z_{Vs}$  (même cas avec  $C_{l_{\beta v}}$ ).

Maintenant, on peut évaluer le moment de roulis par :

$$L_{Als} = L_A = (c_{l_{\beta}} \beta + c_{l_{\delta a}} \delta_a + c_{l_{\delta r}} \delta_r) \bar{q} s b \quad (2.111)$$

Où les dérivées de stabilité  $C_{l_{\beta}}$  et  $C_{l_{\delta r}}$  sont données respectivement par les équations (2.3) et (2.19). Aucune expression explicite simple ne peut être donnée pour  $C_{l_{\delta a}}$ .



**Figure 2.10** : Moment de roulis dû à la déflexion de la gouverne de direction

### 2.2.4.3 Moment aérodynamique de lacet

Le moment de lacet d'un avion est exprimé par :

$$N_A = c_n \bar{q} s b \quad (2.112)$$

Où  $C_n$  est le coefficient de moment de lacet total.

L'expression du coefficient de moment de lacet total est donnée par :

$$c_n = c_{n0} + c_{n\beta} \beta + c_{n\delta r} \delta_r + c_{n\delta a} \delta_a \quad (2.113)$$

Avec :

$C_{n0}$  : le coefficient de moment de lacet pour un dérapage et une déflexion nulle.

$C_{n\beta}$  : variation du coefficient de moment de lacet due au dérapage, également appelée la dérivée de stabilité directionnelle

$C_{n\delta a}$  : variation du coefficient de moment de lacet due à la déflexion de l'aileron

$C_{n\delta r}$  : variation du coefficient de moment de lacet due à la déflexion de la gouverne de direction

### Dérivée de stabilité du moment de lacet dû au dérapage $C_{n\beta}$ :

La dérivée de moment de lacet due au dérapage se compose habituellement de deux éléments :

$$C_{n\beta} = C_{n\beta W} + C_{n\beta f} + C_{n\beta V} \quad (2.114)$$

### Contribution aile-fuselage $C_{n_{\beta Wf}}$ :

La contribution d'aile-fuselage est calculée comme étant la somme de la contribution d'aile et la contribution de fuselage :

La contribution de l'aile est généralement faible sauf pour les grands angles d'attaques.

La contribution de fuselage est généralement importante, il dépend de la forme du fuselage et de la projection de la surface latérale avant et arrière du centre de gravité, Munk [7] a déterminé l'effet négatif du fuselage sur ce coefficient par une procédure assez longue.

### Contribution de l'empennage vertical :

La figure 2.9 montre que la combinaison des angles de dérapage et l'angle induit génère une portance sur l'empennage verticale dont une composante très importante parallèle à l'axe négatif de  $Y_s$ . Ceci résulte un moment de lacet positif dû au dérapage, qui s'appelle fréquemment l'effet de « girouette » de l'empennage vertical. Pour cette raison, la dérivée de stabilité  $C_{n_{\beta}}$  joue un rôle fondamental pour la détermination des caractéristiques de stabilité et de commande de l'avion.

La force de portance sur l'empennage vertical est :

$$F_{AYV} = -c_{LV} \bar{q}_V s_V = -c_{L\alpha V} \left( 1 - \frac{d\sigma}{d\beta} \right) \beta \bar{q}_V s_V \quad (2.115)$$

Le moment de lacet correspondant est :

$$N_V = c_{L\alpha V} \left( 1 - \frac{d\sigma}{d\beta} \right) \beta \bar{q}_V s_V X_{Vs} \quad (2.116)$$

Avec :

$X_{Vs}$  est la distance entre le centre de gravité de l'avion et le centre de pression de l'empennage vertical. Combinant l'équation (2.115) avec les équations (2.110) et (2.111):

$$N_V = c_{n_{\beta V}} \beta \bar{q} s b = c_{L\alpha V} \left( 1 - \frac{d\sigma}{d\beta} \right) \beta \bar{q}_V s_V X_{Vs} \quad (2.117)$$

On déduit que :

$$c_{n\beta V} = c_{L\alpha V} \left( 1 - \frac{d\sigma}{d\beta} \right) n_V \frac{s_V X_{Vs}}{sb} \quad (2.118)$$

$$\bar{V}_V = \frac{s_V X_{Vs}}{sb} \quad (2.119)$$

$\bar{V}_V$  est le coefficient de volume de l'empennage vertical. Ce dernier joue un rôle important dans le processus de dimensionnement de l'empennage vertical lors de la conception de l'avion.

### Dérivée de stabilité du contrôle directionnelle $Cn_{\delta R}$ :

La Figure 2.11 montre comment la force latérale due à la déflexion de la gouverne de direction génère un moment de lacet négatif:

$$N = -F_{Ay} X_{Vs} = c_{n\delta R} \delta_R \bar{q} sb \quad (2.120)$$

En combinant les équations (2.117), (2.104) et (2.105), on trouve :

$$c_{n\delta R} = -c_{L\alpha V} \alpha_{\delta R} n_V \frac{s_V X_{Vs}}{sb} \quad (2.121)$$

Il convient de noter que la dérivée de stabilité du contrôle directionnel,  $Cn_{\delta R}$ , dépend fortement de la surface de l'empennage verticale par rapport à l'aile ainsi que de la pente de la courbe du coefficient de portance de l'empennage verticale. Ce dernier dépend à son tour principalement de l'allongement et de l'angle de flèche. Aussi, on voit que le bras de levier à travers  $X_{Vs}$ , est important pour la puissance de contrôle directionnel.

### Dérivée de stabilité du contrôle latérale $Cn_{\delta A}$ :

Le moment de lacet dû à la commande latérale peut varier considérablement d'une configuration d'avion à l'autre car l'aérodynamique de chacune de ces configurations utilisées dans la commande latérale est largement différente par rapport à l'autre.

L'estimation de  $Cn_{\delta A}$  dans le cas des ailerons, spoilers et le stabilisateur différentiel est très difficile, c'est la raison pour laquelle on utilise les méthodes expérimentales.

### 2.2.5 Forces et moments de poussée latérales-directionnels

Selon la configuration de l'avion, l'état de défaillance du système de propulsion en poussée ou en puissance, il peut y avoir un moment de roulis induit ;  $L_T$  , une force latérale induite  $F_{Ty}$  , un moment de lacet induit par la force latérale ;  $N_T$  , agissant sur l'avion. De plus, on supposera que les valeurs de poussée installées sont connues pour chaque moteur.

Chaque fois que des composants de l'avion sont affectés par le sillage de l'hélice ou par les gaz d'échappement des turboréacteurs, la force aérodynamique latérale et les moments latéraux-directionnels sont tous affectés. Pour la force aérodynamique latérale et les corrections des moments suite aux effets de l'installation du système propulsive qui peut être exprimé par l'équation (2.69).

Par conséquent, la force de poussée latérale et les moments peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$L_{T_{1s}} = L_T = \left[ \sum_{i=1}^{i=n} T_i (-z_{T_i} \cos \phi_{T_i} \sin \psi_{T_i} - y_{T_i} \sin \phi_{T_i}) \right] \cos \alpha_1 \\ + \left[ \sum_{i=1}^{i=n} T_i (x_{T_i} \cos \phi_{T_i} \sin \psi_{T_i} - y_{T_i} \cos \phi_{T_i} \cos \psi_{T_i}) \right] \sin \alpha_1 \quad (2.122)$$

$$F_{Ty1} = F_{Ty} = \sum_{i=1}^{i=n} T_i \cos \phi_{T_i} \sin \psi_{T_i} \quad (2.123)$$

$$N_{T_{1s}} = N_T = \left[ \sum_{i=1}^{i=n} T_i (x_{T_i} \cos \phi_{T_i} \sin \psi_{T_i} - y_{T_i} \cos \phi_{T_i} \cos \psi_{T_i}) \right] \cos \alpha_1 \\ - \left[ \sum_{i=1}^{i=n} T_i (-z_{T_i} \cos \phi_{T_i} \sin \psi_{T_i} - y_{T_i} \sin \phi_{T_i}) \right] \sin \alpha_1 \quad (2.124)$$

Il est à noter que lorsque l'installation du moteur est symétrique par rapport au plan XZ de l'avion et que la poussée de l'installation du moteur est également symétrique par rapport au plan XZ de l'avion, toutes les forces et moments latéraux directionnels sont nuls.

En supposant que dans le cas d'une installation de moteur symétrique, un moteur est en panne, la force latérale et les moments dus au moteur (asymétrique) peuvent s'exprimer comme suit:

$$L_T = [T_i(-z_{T_i} \cos \phi_{T_i} \sin \psi_{T_i} - y_{T_i} \sin \phi_{T_i}) \cos \alpha_1 \\ + T_i(x_{T_i} \cos \phi_{T_i} \sin \psi_{T_i} - y_{T_i} \cos \phi_{T_i} \cos \psi_{T_i})] \sin \alpha_1 \quad (2.125)$$

$$F_{Ty} = T_i \cos \phi_{T_i} \sin \psi_{T_i} \quad (2.126)$$

$$N_T = T_i(x_{T_i} \cos \phi_{T_i} \sin \psi_{T_i} - y_{T_i} \cos \phi_{T_i} \cos \psi_{T_i}) \cos \alpha_1 \\ - (T_i(z_{T_i} \cos \phi_{T_i} \sin \psi_{T_i} - y_{T_i} \sin \phi_{T_i}) \sin \alpha_1 + \Delta N_{Di}) \quad (2.127)$$

Chaque fois qu'un moteur ou une hélice est en panne, un certain type de traînée additionnelle survient sur ce moteur. Cette augmentation de la traînée entraîne une force latérale, un moment de roulis et un moment de lacet supplémentaires induits par cette traînée.

Dans de nombreux cas, seul le moment de lacet induit par la traînée s'avère significatif du point de vue de la stabilité et du contrôle. C'est la raison de l'apparition du terme  $\Delta N_{Di}$ , dans l'équation (2.227).

Les angles directionnel  $\psi_{T_i}$  et d'inclinaison latérale  $\phi_{T_i}$  de la ligne de poussée sont faibles, mais non nuls dans la plupart des avions de transport modernes. La raison de la présence de ces angles est de minimiser la traînée de la nacelle du moteur dans leur champ d'écoulement local. En supposant que l'angle d'attaque est en état stabilisé et les angles sont petits, les équations(2.225), (2.226) et (2.227) se simplifient en :

$$L_T \approx \sum_{i=1}^{i=n} T_i (z_{T_i} \psi_{T_i} - y_{T_i} \phi_{T_i}) - T_i y_{T_i} \alpha_1 \quad (2.128)$$

$$F_{Ty} \approx \sum_{i=1}^{i=n} T_i \psi_{T_i} \quad (2.129)$$

$$N_T \approx \sum_{i=1}^{i=n} T_i (x_{T_i} \psi_{T_i} - y_{T_i}) + \Delta N_{Di} \quad (2.130)$$

## 2.2.6 Assemblage des forces et moments latérales-directionnels stabilisés

Finalement, Il est possible de rassembler toutes les expressions des forces et des moments latéraux-directionnels dans une matrice.

Les forces et les moments aérodynamiques dans le plan latéral-directionnel sont :

$$\begin{Bmatrix} L_A \\ F_{Ay} \\ N_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_l \bar{q} s b \\ c_y \bar{q} s \\ c_n \bar{q} s b \end{Bmatrix} \quad \text{Avec :} \quad \begin{Bmatrix} c_l \\ c_y \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{l\beta} & c_{l\delta a} & c_{l\delta r} \\ c_{y\beta} & c_{y\delta a} & c_{y\delta r} \\ c_{n\beta} & c_{n\delta a} & c_{n\delta r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix} \quad (2.131)$$

Les forces et les moments de poussée dans le plan latéral-directionnel sont :

$$\begin{Bmatrix} L_T \\ F_{Ty} \\ N_T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T \sum_{i=1}^{i=n} T_i (z_{T_i} \psi_{T_i} - y_{T_i} \phi_{T_i}) - T_i y_{T_i} \alpha_1 \\ \sum_{i=1}^{i=n} T_i \psi_{T_i} \\ \sum_{i=1}^{i=n} T_i (x_{T_i} \psi_{T_i} - y_{T_i}) + \Delta N_{Di} \end{Bmatrix} \quad [ \quad ] \quad (2.132)$$

## 2.3 Forces et moments en vol perturbé

### 2.3.1 Forces et moments aérodynamiques longitudinales en vol perturbé:

Les avions diffèrent les uns des autres par la configuration, la forme et la taille. Par conséquent, il n'est pas possible de développer un modèle mathématique des forces et des moments du vol perturbé qui s'applique à tous les avions. L'approche adoptée est d'identifier les forces et les moments à modéliser en premier lieu et ensuite de montrer à travers l'expérience les variables de mouvement qui ont un effet significatif sur ces forces et moments.

Les forces et les moments aérodynamiques dépendent des variables figurants dans le tableau 2.10 :

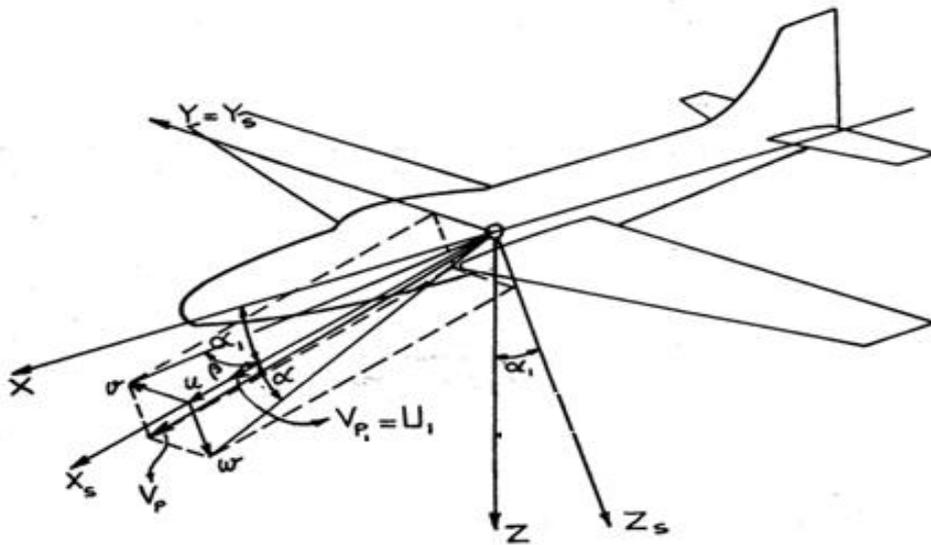


Figure 2-11 Illustration des vitesses et des angles en vol perturbé

La signification des différents variables du vol dans l'état perturbé est illustrée par la figure 2.19 qui supposera que toutes les perturbations sont définies par rapport à un vol en état stabilisé caractérisé par:

$$V_1 = P_1 = R_1 = 0 \quad (2.133)$$

Si les différents vecteurs de poussée qui agissent sur l'avion sont symétriques par rapport au plan XZ, ceci signifie que :

$$F_{Ay_{1s}} = L_{A_{1s}} = N_{A_{1s}} = 0 \quad (2.134)$$

Le vecteur vitesse perturbée s'écrit :

$$\vec{V}_p = \vec{U}_1 + \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \quad (2.135)$$

$\vec{U}_1$  : vitesse en vol stabilisé

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  : Composantes de la vitesse de perturbation

Tableau 2.2 Dépendance des forces et les moments aérodynamique en fonction des différentes variables dans le cas du vol perturbé

variables	Variables directes								Variables dérivées				Variables de contrôle			
	u	v	w	p	q	r	$\dot{v}$	$\dot{w}$	$\beta$	$\alpha$	$\dot{\beta}$	$\dot{\alpha}$	$\delta_a$	$\delta_e$	$\delta_r$	$\delta_f$
$f_{A_x}$	$\frac{\partial f_{A_x}}{\partial u}$		$\frac{\partial f_{A_x}}{\partial w}$		$\frac{\partial f_{A_x}}{\partial q}$			$\frac{\partial f_{A_x}}{\partial \dot{w}}$		$\frac{\partial f_{A_x}}{\partial \alpha}$		$\frac{\partial f_{A_x}}{\partial \dot{\alpha}}$		$\frac{\partial f_{A_x}}{\partial \delta_e}$		$\frac{\partial f_{A_x}}{\partial \delta_f}$
$f_{A_z}$	$\frac{\partial f_{A_z}}{\partial u}$		$\frac{\partial f_{A_z}}{\partial w}$		$\frac{\partial f_{A_z}}{\partial q}$			$\frac{\partial f_{A_z}}{\partial \dot{w}}$		$\frac{\partial f_{A_z}}{\partial \alpha}$		$\frac{\partial f_{A_z}}{\partial \dot{\alpha}}$		$\frac{\partial f_{A_z}}{\partial \delta_e}$		$\frac{\partial f_{A_z}}{\partial \delta_f}$
$m_A$	$\frac{\partial m_A}{\partial u}$		$\frac{\partial m_A}{\partial w}$		$\frac{\partial m_A}{\partial q}$			$\frac{\partial m_A}{\partial \dot{w}}$		$\frac{\partial m_A}{\partial \alpha}$		$\frac{\partial m_A}{\partial \dot{\alpha}}$		$\frac{\partial m_A}{\partial \delta_e}$		$\frac{\partial m_A}{\partial \delta_f}$

La structure de base du tableau 2.2 est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'espace blanc dans le tableau indique qu'une variable particulière n'a aucun effet sur une force ou un moment particulier.
- Les dérivées partielles indiquent la pente d'une force ou un moment affecté par la variable correspondante.

- **Effet de la vitesse de perturbation longitudinal : u**

Cette vitesse de perturbation induit un changement de la pression dynamique et du nombre de Mach. Les forces et les moments longitudinaux seront affectés et qui sont exprimés en termes de premiers dérivées par rapport à  $u$  ;  $\frac{\partial F_{A_x}}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial F_{A_z}}{\partial u}$  et  $\frac{\partial M_A}{\partial u}$

- **Effet de la vitesse de perturbation latérale : v**

Cette vitesse de perturbation latérale affecte l'angle de dérapage à travers :

$$\beta = \frac{V}{U_1} \quad (2.136)$$

La force latérale, le moment de roulis et le moment de lacet dépendent du dérapage. Les variations en fonction de  $\beta$  ou  $v$  sont exprimées en termes des premières

dérivées ;  $\frac{\partial F_{Ay}}{\partial v}$  ou  $\frac{\partial F_{Ay}}{\partial \beta}$ ,  $\frac{\partial L_A}{\partial v}$  ou  $\frac{\partial L_A}{\partial \beta}$ , et  $\frac{\partial N_A}{\partial v}$  ou  $\frac{\partial N_A}{\partial \beta}$

- **Effet de la vitesse de perturbation verticale: w**

La vitesse de perturbation verticale descendante affecte l'angle d'incidence à travers :

$$a = \frac{w}{U_1} \quad (2.137)$$

L'effet de cette vitesse sur la pression dynamique est considéré comme négligeable.

Le changement de l'angle d'attaque provoque la variation des forces et des moments longitudinaux qui sont exprimés à l'aide des dérivées premières par rapport à  $w$  ou  $\alpha$  ;

$$\frac{\partial F_{Ax}}{\partial w}, \frac{\partial F_{Az}}{\partial w} \text{ et } \frac{\partial M_A}{\partial w} \text{ ou bien } \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \alpha}, \frac{\partial F_{Az}}{\partial \alpha} \text{ et } \frac{\partial M_A}{\partial \alpha}$$

- **Effet de la vitesse de perturbation de roulis: p**

La vitesse de perturbation de roulis provoque des changements dissymétriques de l'angle d'attaque local à travers les surfaces de l'aile et l'empennage. L'expérience prouve que l'effet du taux de roulis perturbé sur l'empennage vertical est faible. Les variations de  $F_{Ay}$ ,  $L_A$  et  $N_A$  sont exprimées en termes des dérivées premières par rapport à  $p$ .

- **Effet de la vitesse de perturbation de tangage: q**

La vitesse de perturbation de tangage cause un changement symétrique de l'angle d'attaque local à travers les surfaces portantes ; l'aile, canard, l'empennage horizontal et le fuselage. Cet effet provoque un changement des forces et les

moments aérodynamiques longitudinaux. Ces changements sont exprimés à l'aide des dérivées premières par rapport à  $q$  ;  $\frac{\partial F_{Ax}}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial F_{Az}}{\partial q}$  et  $\frac{\partial M_A}{\partial q}$ .

- **Effet de la vitesse de perturbation de lacet:  $r$**

La vitesse de perturbation de lacet cause un changement dissymétrique des vitesses locales sur l'aile aussi bien qu'un changement dissymétrique de l'angle d'attaque local à travers l'empennage vertical et le fuselage. Ces changements n'ont pas des effets sensibles sur  $F_{Ax}$ ,  $F_{Az}$  et  $M_A$ . Les variations de  $F_{Ay}$ ,  $L_A$  et  $N_A$  sont exprimées en termes des dérivées premières par rapport à  $r$  ;  $\frac{\partial F_{Ay}}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial L_A}{\partial r}$  et  $\frac{\partial N_A}{\partial r}$

- **Effet de variation de l'angle d'attaque de perturbation:  $\dot{\alpha}$**

La variation de l'angle d'attaque de l'avion avec le temps permet à l'aile de générer un champ de tourbillons qui change avec le temps. Ce changement peut avoir un effet significatif sur l'aérodynamique de l'empennage horizontal. Un tel effet est expliqué par la dérivée du taux de l'angle d'attaque qui affecte les forces et le moment aérodynamiques longitudinaux ;  $\frac{\partial F_{Ax}}{\partial \dot{\alpha}}$ ,  $\frac{\partial F_{Az}}{\partial \dot{\alpha}}$  et  $\frac{\partial M_A}{\partial \dot{\alpha}}$

- **Effet de variation de l'angle de dérapage:  $\dot{\beta}$**

Lorsque l'angle de dérapage de l'avion varie avec le temps, la combinaison aile-fuselage génère un champ de tourbillons qui change avec le temps. Ce changement peut avoir un effet significatif sur l'aérodynamique de l'empennage vertical. Un tel effet est expliqué par la dérivée du taux de l'angle de dérapage qui affecte les forces et le moment aérodynamiques latérales-directionnels ;  $\frac{\partial F_{Ay}}{\partial \dot{\beta}}$ ,  $\frac{\partial L_A}{\partial \dot{\beta}}$  et  $\frac{\partial N_A}{\partial \dot{\beta}}$

- **Effet de variation de l'angle de flexion des surfaces de contrôle:  $\delta_a$ ,  $\delta_e$ ,  $\delta_r$  et  $\delta_f$**

Le braquage des gouvernes de contrôle longitudinales affecte seulement les forces et le moment aérodynamiques longitudinaux à travers les expressions:

$$\frac{\partial F_{Ax}}{\partial \delta_e}, \frac{\partial F_{Az}}{\partial \delta_e} \text{ et } \frac{\partial M_A}{\partial \delta_e} \text{ ainsi que les expressions : } \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \delta_f}, \frac{\partial F_{Az}}{\partial \delta_f} \text{ et } \frac{\partial M_A}{\partial \delta_f}$$

D'une manière similaire, la déflexion des surfaces de contrôle latérales-directionnelles  $\delta_\alpha$  et  $\delta_r$  affectent uniquement les forces et moment aérodynamiques latérales-directionnelles :  $\frac{\partial F_{Ay}}{\partial \delta_\alpha}, \frac{\partial L_A}{\partial \delta_\alpha}$  et  $\frac{\partial N_A}{\partial \delta_\alpha}$  ainsi que les expressions :  $\frac{\partial F_{Ay}}{\partial \delta_r}, \frac{\partial L_A}{\partial \delta_r}$  et  $\frac{\partial N_A}{\partial \delta_r}$

Les forces et moments dans le cas du vol perturbé :

### Cas longitudinal :

$$\begin{cases} f_{Ax} = \frac{\partial F_{Ax}}{\partial u} u + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial q} q + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \delta_E} \delta_E + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \delta_F} \delta_F \\ f_{Az} = \frac{\partial F_{Az}}{\partial u} u + \frac{\partial F_{Az}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial F_{Az}}{\partial \dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \frac{\partial F_{Az}}{\partial q} q + \frac{\partial F_{Az}}{\partial \delta_E} \delta_E + \frac{\partial F_{Az}}{\partial \delta_F} \delta_F \\ m_A = \frac{\partial M_A}{\partial u} u + \frac{\partial M_A}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial M_A}{\partial \dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \frac{\partial M_A}{\partial q} q + \frac{\partial M_A}{\partial \delta_E} \delta_E + \frac{\partial M_A}{\partial \delta_F} \delta_F \end{cases} \quad (2.138)$$

### Cas latéral-directionnel :

$$\begin{cases} f_{Ay} = \frac{\partial F_{Ay}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial F_{Ay}}{\partial \dot{\beta}} \dot{\beta} + \frac{\partial F_{Ay}}{\partial p} p + \frac{\partial F_{Ay}}{\partial r} r + \frac{\partial F_{Ay}}{\partial \delta_R} \delta_R + \frac{\partial F_{Ay}}{\partial \delta_A} \delta_A \\ l_A = \frac{\partial L_A}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial L_A}{\partial \dot{\beta}} \dot{\beta} + \frac{\partial L_A}{\partial p} p + \frac{\partial L_A}{\partial r} r + \frac{\partial L_A}{\partial \delta_R} \delta_R + \frac{\partial L_A}{\partial \delta_A} \delta_A \\ n_A = \frac{\partial N_A}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial N_A}{\partial \dot{\beta}} \dot{\beta} + \frac{\partial N_A}{\partial p} p + \frac{\partial N_A}{\partial r} r + \frac{\partial N_A}{\partial \delta_R} \delta_R + \frac{\partial N_A}{\partial \delta_A} \delta_A \end{cases} \quad (2.139)$$

Les équations (2.238) constituent le modèle mathématique utilisé pour représenter les forces et le moment aérodynamiques.

Pour une raison d'uniformité, il est préférable de rendre ces variables sous la forme adimensionnelle en respectant les étapes suivantes :

- Diviser la vitesse de perturbation longitudinale par  $U_1$
- Multiplier les taux de perturbation angulaire longitudinaux par  $\frac{\bar{c}}{2U_1}$
- Multiplier les taux de perturbation angulaire latéraux-directionnels par  $\frac{b}{2U_1}$

Ce qui conduit cette fois-ci vers le modèle présenté par les équations (2.239), c'est le modèle utilisé dans ce qui suit.

Les forces et moments adimensionnels en vol perturbé dans le cas longitudinal sont:

$$f_{Ax} = \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \left(\frac{u}{U_1}\right)} \left(\frac{u}{U_1}\right) + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \left(\frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2U_1}\right)} \left(\frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2U_1}\right) + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \left(\frac{qc}{2U_1}\right)} \left(\frac{qc}{2U_1}\right) + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \delta_E} \delta_E + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \delta_F} \delta_F \quad (2.140)$$

$$f_{Az} = \frac{\partial F_{Az}}{\partial \left(\frac{u}{U_1}\right)} \left(\frac{u}{U_1}\right) + \frac{\partial F_{Az}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial F_{Az}}{\partial \left(\frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2U_1}\right)} \left(\frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2U_1}\right) + \frac{\partial F_{Az}}{\partial \left(\frac{qc}{2U_1}\right)} \left(\frac{qc}{2U_1}\right) + \frac{\partial F_{Az}}{\partial \delta_E} \delta_E + \frac{\partial F_{Az}}{\partial \delta_F} \delta_F$$

$$m_A = \frac{\partial M_A}{\partial \left(\frac{u}{U_1}\right)} \left(\frac{u}{U_1}\right) + \frac{\partial M_A}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial M_A}{\partial \left(\frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2U_1}\right)} \left(\frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2U_1}\right) + \frac{\partial M_A}{\partial \left(\frac{qc}{2U_1}\right)} \left(\frac{qc}{2U_1}\right) + \frac{\partial M_A}{\partial \delta_E} \delta_E + \frac{\partial M_A}{\partial \delta_F} \delta_F$$

### 2.3.2 Les Forces et moments de poussée longitudinaux :

Il est possible de trouver les cas d'existence des forces et des moments de poussée d'un état de vol perturbé comme fonction de toutes les variables de mouvement perturbé. Comme il s'avère, pour la plupart des avions seulement les variables de vitesse linéaire et d'angle d'attaque qui ont un effet significatif sur les forces et les moments de poussée d'un état de vol perturbé.

La conséquence de cette hypothèse est le modèle mathématique donné par les trois équations suivantes :

$$f_{Tx} = \frac{\partial F_{Tx}}{\partial \left(\frac{u}{U_1}\right)} \left(\frac{u}{U_1}\right) + \frac{\partial F_{Tx}}{\partial \alpha} \alpha \quad (2.141)$$

$$f_{Tz} = \frac{\partial F_{Tz}}{\partial \left(\frac{u}{U_1}\right)} \left(\frac{u}{U_1}\right) + \frac{\partial F_{Tz}}{\partial \alpha} \alpha \quad (2.142)$$

$$m_T = \frac{\partial M_T}{\partial \left(\frac{u}{U_1}\right)} \left(\frac{u}{U_1}\right) + \frac{\partial M_T}{\partial \alpha} \alpha \quad (2.143)$$

### 2.3.3 Assemblage des forces et des moments longitudinaux en état du vol perturbé :

Les forces et les moments longitudinaux de l'état de vol perturbé sont assemblés sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{f_{A_x}}{\bar{q}_1 S} \\ \frac{f_{A_z}}{\bar{q}_1 S} \\ \frac{m_A}{\bar{q}_1 S \bar{c}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(C_{D_u} + 2C_{L_1}) & (-C_{D_\alpha} + C_{L_1}) & -C_{D_{\dot{\alpha}}} & -C_{D_q} & -C_{D_{\delta_e}} \\ -(C_{L_u} + 2C_{L_1}) & (-C_{L_\alpha} - C_{D_1}) & -C_{L_{\dot{\alpha}}} & -C_{L_q} & -C_{L_{\delta_e}} \\ (C_{m_u} + 2C_{m_1}) & C_{m_\alpha} & C_{m_{\dot{\alpha}}} & C_{m_q} & C_{m_{\delta_e}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{u}{U_1} \\ \alpha \\ \frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2U_1} \\ \frac{q \bar{c}}{2U_1} \\ \delta_e \end{Bmatrix} \quad (2.144)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{f_{T_x}}{\bar{q}_1 S} \\ \frac{f_{T_z}}{\bar{q}_1 S} \\ \frac{m_T}{\bar{q}_1 S \bar{c}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_{T_{x_u}} + 2C_{T_{x_1}}) & 0 \\ 0 & 0 \\ (C_{m_{T_u}} + 2C_{m_{T_1}}) & C_{m_{T_\alpha}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{u}{U_1} \\ \alpha \end{Bmatrix} \quad (2.145)$$

### 2.3.4 Forces et moments aérodynamiques latéraux-directionnels en vol perturbé:

Les forces et les moments aérodynamiques latéraux-directionnels en vol perturbé sont définis dans le tableau 3.6 et les équations (3.99) sont sous la forme adimensionnelle. Les dérivées partielles des forces et des moments latéraux directionnels par rapport aux variables adimensionnelles de mouvement et de contrôle jouent un rôle important dans l'étude de la stabilité dynamique.

$$\begin{aligned}
f_{Ay} &= \frac{\partial F_{Ay}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \left(\frac{\dot{\beta}b}{2U_1}\right)} \left(\frac{\dot{\beta}b}{2U_1}\right) + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \left(\frac{pb}{2U_1}\right)} \left(\frac{pb}{2U_1}\right) + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \left(\frac{rb}{2U_1}\right)} \left(\frac{rb}{2U_1}\right) + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \delta_R} \delta_R + \frac{\partial F_{Ax}}{\partial \delta_A} \delta_A \\
l_A &= \frac{\partial L_A}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial L_A}{\partial \left(\frac{\dot{\beta}b}{2U_1}\right)} \left(\frac{\dot{\beta}b}{2U_1}\right) + \frac{\partial L_A}{\partial \left(\frac{pb}{2U_1}\right)} \left(\frac{pb}{2U_1}\right) + \frac{\partial L_A}{\partial \left(\frac{rb}{2U_1}\right)} \left(\frac{rb}{2U_1}\right) + \frac{\partial L_A}{\partial \delta_R} \delta_R + \frac{\partial L_A}{\partial \delta_A} \delta_A \\
n_A &= \frac{\partial N_A}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial N_A}{\partial \left(\frac{\dot{\beta}b}{2U_1}\right)} \left(\frac{\dot{\beta}b}{2U_1}\right) + \frac{\partial N_A}{\partial \left(\frac{pb}{2U_1}\right)} \left(\frac{pb}{2U_1}\right) + \frac{\partial N_A}{\partial \left(\frac{rb}{2U_1}\right)} \left(\frac{rb}{2U_1}\right) + \frac{\partial N_A}{\partial \delta_R} \delta_R + \frac{\partial N_A}{\partial \delta_A} \delta_A
\end{aligned} \tag{2.146}$$

### 2.3.5 Forces et moments de poussée latérales-directionnels en vol perturbé:

Les forces et les moments de poussées perturbées longitudinales sont adimensionnels qui se mettent sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \frac{f_{Ty}}{\bar{q}_1 S} \\ \frac{l_T}{\bar{q}_1 S} \\ \frac{n_T}{\bar{q}_1 S \bar{c}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{yT\beta} \\ C_{lT\beta} \\ C_{nT\beta} \end{Bmatrix} \{\beta\} \tag{2.147}$$

### 2.3.6 Assemblage des forces et des moments latéraux-directionnels en état du vol perturbé :

Finalement, il est possible de rassembler toutes les expressions des forces et des moments latéraux-directionnels de l'état de vol perturbé sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{f_{Ay}}{\bar{q}S} \\ \frac{l_A}{\bar{q}Sb} \\ \frac{n_A}{\bar{q}Sb} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{y\beta} & C_{y\dot{\beta}} & C_{yp} & C_{yr} & C_{y\delta A} & C_{y\delta R} \\ C_{l\beta} & C_{l\dot{\beta}} & C_{lp} & C_{lr} & C_{l\delta A} & C_{l\delta R} \\ C_{n\beta} & C_{n\dot{\beta}} & C_{np} & C_{nr} & C_{n\delta A} & C_{n\delta R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \frac{\dot{\beta}b}{2U_1} \\ \frac{pb}{2U_1} \\ \frac{rb}{2U_1} \\ \delta_A \\ \delta_R \end{Bmatrix} \tag{2.148}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{f_{Ty}}{\bar{q}_1 S} \\ \frac{l_T}{\bar{q}_1 S} \\ \frac{n_T}{\bar{q}_1 S c} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{y_{T\beta}} \\ C_{l_{T\beta}} \\ C_{n_{T\beta}} \end{bmatrix} \{\beta\} \quad (2.149)$$

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les outils de base pour la modélisation des forces et des moments aérodynamiques et de poussée agissants sur l'avion dans le plan longitudinal et latérale directionnel. La modélisation est subdivisée en deux cas : les forces et moments en vol stabilisé et en vol perturbé. D'une part, la force aérodynamique est habituellement décomposée en une traînée, force latérale et portance et d'autre part, le moment résultant au centre de gravité est subdivisé en moments de roulis, de tangage et de lacet.

En première approximation, la dépendance des forces aérodynamiques par rapport au mouvement s'établit selon les conditions suivants: l'altitude, la vitesse de vol constante et les gouvernes bloquées, l'angle d'attaque affecte la portance, la trainée et le moment de tangage ; c'est le mouvement longitudinal de l'avion, tandis que le dérapage influe sur la force latérale, le moment de roulis et le moment de lacet; c'est le mouvement latéral-directionnel de l'avion.

Le rôle des gouvernes aérodynamiques (les ailerons, la gouverne de profondeur et de direction) est essentiellement d'appliquer à l'avion des moments de manœuvre en faisant naître localement, du fait de leurs braquages, des forces aérodynamiques relativement faibles mais qui agissent avec un grand bras de levier: le braquage de la gouverne de profondeur détermine l'incidence d'équilibre, la gouverne de direction permet au pilote d'interdire le dérapage plus efficacement que n'y parviendrait le moment stabilisant de lacet et le braquage des ailerons impose la vitesse de roulis. L'effet de la gouverne de profondeur est indépendant par rapport aux autres, mais les ailerons et la gouverne de direction ont des effets réciproques.

La force et le moment sont proportionnels à la pression dynamique qui dépend de la masse volumique de l'air et de la vitesse du vol ainsi qu'à des dimensions caractéristiques de l'avion. Cela conduit à définir les coefficients aérodynamiques adimensionnels ( $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ ,  $C_l$ ,  $C_m$ ,  $C_n$ ), qui sont des facteurs de proportionnalité des composantes de force et du moment par rapport à la pression dynamique, ainsi que les coefficients aérodynamiques et les dérivées de stabilité qui traduisent leur sensibilité à l'angle d'attaque, au dérapage, aux braquages des gouvernes et aux vitesses angulaires (taux de roulis, taux de tangage, taux de lacet).

Au-delà du régime incompressible, les coefficients aérodynamiques et leurs dérivés varient plus ou moins largement en fonction du nombre de Mach. Des expressions sont obtenues pour les coefficients de stabilité en fonction de la géométrie des divers composants de l'avion : L'aile, fuselage, les empennages horizontal et vertical. Dans l'objectif d'estimer les coefficients aérodynamiques et les dérivées de stabilité, la méthode de décomposition est utilisée.

Sur un avion, l'effet propulsif est réalisé en accélérant vers l'arrière un certain débit d'air ambiant. La traction d'une hélice ou la poussée d'un réacteur résulte du bilan des quantités de mouvement amont et aval. La traction par hélice reste réservée aux avions subsoniques en raison des troubles transsoniques qui apparaissent à grande vitesse, en bout de pales. Au-dessous de cette limite, le pas variable maintient constant le rendement de l'hélice. La propulsion par turboréacteur est actuellement la plus répandue; elle est utilisée aussi bien pour le vol subsonique rapide que pour le vol supersonique. Le fonctionnement interne d'un réacteur dépend des conditions génératrices de l'écoulement et, par conséquent, de l'altitude et de la vitesse. Dans tous les cas, à vitesse donnée, la poussée diminue en altitude.

## CHAPITRE 3: STABILITE ET CONTROLE EN VOL STABILISE

### 3.1 Introduction

Un avion est dit stable statiquement, s'il est possible de trouver un point d'équilibre pour une condition de vol. C'est-à-dire qu'il faut ajuster les commandes (ex. stabilisateurs, élévateurs, manette des gaz, etc.) qui assurent le maintien de l'attitude de l'avion en absence de vent lorsque l'altitude, la vitesse et la poussée sont constantes [11, 50]. Sous ces conditions, nous dirons que l'avion est équilibré ou est en condition de trim. Le modèle étant purement non linéaire, il peut exister plusieurs points d'équilibre [24].

Plusieurs publications présentent des méthodes pour trouver ces conditions de trim à partir de la forme analytique des coefficients aérodynamiques. Par exemple, Roskam [7] ou encore Cook [11] présentent dans leurs ouvrages une série d'équations qui permettent de trouver une telle condition.

Les caractéristiques générales exigées des avions pendant le vol sont:

1. Une puissance de commande suffisante pour maintenir un vol en ligne droite en régime stabilisé dans les limites de son enveloppe de vol.
2. Une manœuvre en toute sécurité en passant d'une condition de vol stable à une autre.
3. Les forces de commande du poste de pilotage devraient être dans les limites acceptables et dans toutes les conditions prévues par la courbe de l'enveloppe du vol. Ceci comprend les changements au niveau de la configuration de l'avion tels que: volets entrée/sortie, train d'atterrissage entrée/sortie, lancement d'armes, etc.
4. L'équilibre (trim) doit être assuré dans certaines conditions de vol.

Ces quatre caractéristiques constituent un sous-ensemble des qualités de vol de l'avion. Les exigences relatives aux bonnes qualités de vol des avions sont spécifiées qualitativement et quantitativement dans les manuels de navigabilité: FAR 23, FAR 25 et JAR (pour les avions civils); Mil-F-8785C et Mil-Std-1797A (pour les avions militaires).

Un degré élevé de stabilité statique se traduit par la facilité de piloter un avion mais avec une faible manœuvrabilité (avion d'entraînement). Les conceptions d'avions de chasse incorporeraient de faibles niveaux de stabilité statique, ce qui permettrait d'améliorer les capacités de manœuvre. Cependant, avec l'avènement des systèmes de contrôle de vol électriques qui est intégré dans les avions tels que le F-16 et le X-

29, des niveaux acceptables de stabilité statique et de la manœuvrabilité peuvent être obtenus [62, 65, 72, 78, 85].

Un certain degré d'instabilité statique dans la conception de base de ces avions est volontairement introduit pour améliorer les capacités de manœuvre, tandis que le système de commande de vol électrique fournit des entrées de contrôle automatiques pour obtenir une stabilité statique artificielle.

Les concepts de la stabilité statique constituent une première étape dans l'obtention d'une conception avec des qualités de vol acceptables. Dans cette perspective, notre objectif consiste à :

- 1- Discuter les critères de stabilité statique pour un avion.
- 2- Enumérer les caractéristiques les plus importantes de stabilité et de contrôle des avions dans un état de vol stabilisé.

#### Définitions de la stabilité statique :

- *La stabilité statique est la tendance de l'avion à développer des forces ou des moments qui s'opposent directement à une perturbation instantanée d'un variable de mouvement pour une condition de vol stabilisée.*

Ou bien :

- *La stabilité statique est la tendance initiale de l'avion à retourner à son état d'équilibre après avoir été perturbé.*

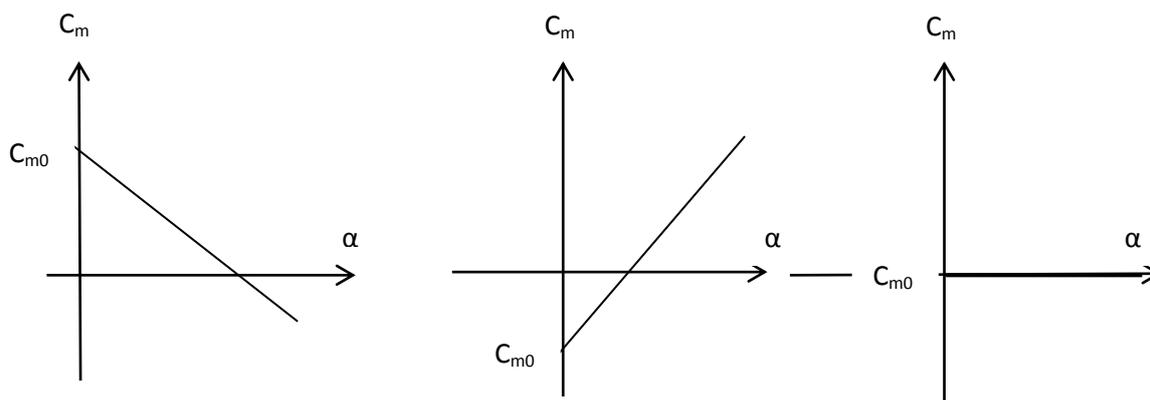


Figure 3.1 : Stabilité statique stable, instable et neutre d'un avion

### 3.2 Critères de stabilité statique :

#### Définition :

Un critère de stabilité statique est défini comme étant une règle générale à partir de laquelle les conditions de vol d'un état de vol stabilisé sont divisées en catégories : stable, instable ou indifférent.

**Tableau 3.1 :** Les critères généraux de la stabilité statique des avions.

Variables perturbés	$u$	$v$	$w$	$\beta = \frac{v}{U_1}$	$\alpha = \frac{w}{U_1}$	$p$	$q$	$r$
$F_{Ax} + F_{Tx}$	$\frac{\partial(F_{Ax} + F_{Tx})}{\partial u} < 0$ $C_{Du} > 0$							
$F_{Ay} + F_{Ty}$		$\frac{\partial(F_{Ay} + F_{Ty})}{\partial v} < 0$ $C_{Y\beta} < 0$						
$F_{Az} + F_{Tz}$			$\frac{\partial(F_{Az} + F_{Tz})}{\partial w} < 0$ $C_{L\alpha} > 0$					
$L_A + L_T$				$\frac{\partial(L_A + L_T)}{\partial \beta} < 0$ $C_{l\beta} < 0$		$\frac{\partial(L_A + L_T)}{\partial p} < 0$ $C_{lp} < 0$		
$M_A + M_T$	$\frac{\partial(M_A + M_T)}{\partial u} > 0$ $C_{mu} > 0$				$\frac{\partial(M_A + M_T)}{\partial \alpha} < 0$ $C_{m\alpha} < 0$		$\frac{\partial(M_A + M_T)}{\partial q} < 0$ $C_{mq} < 0$	
$N_A + N_T$				$\frac{\partial(N_A + N_T)}{\partial \beta} > 0$ $C_{n\beta} > 0$				$\frac{\partial(N_A + N_T)}{\partial r} < 0$ $C_{nr} < 0$

Le mouvement stabilisé d'un avion a été défini précédemment en tant qu'un mouvement pour lequel la vitesse de translation  $\vec{V}_p$  et la vitesse de rotation  $\vec{\omega}$  demeurent constantes avec le temps dans le repère avion. En d'autre terme, l'état du vol stabilisé de l'avion est défini en ayant une vitesse de translation constante, une vitesse de rotation constante et un facteur de charge constant. Ce type de vol est fréquemment rencontré en vol rectiligne, vol en ressource symétrique et en virage stabilisé.

Par conséquent, on déduit les dix critères de stabilité statique qui sont donnés par le tableau 3.2 :

Tableau 3.2 : Les dix (10) critères de la stabilité statique de l'avion [31].

Critères de stabilité statique (CSS)	
CSS1	$(C_{T_{X_u}} - C_{D_u}) < 0$
CSS2	$C_{Y_\beta} < 0$
CSS3	$C_{L_\alpha} > 0$
CSS4	$C_{m_\alpha} < 0$
CSS5	$C_{n_\beta} > 0$
CSS6	$C_{l_p} < 0$
CSS7	$C_{m_q} < 0$
CSS8	$C_{n_r} < 0$
CSS9	$C_{l_\beta} < 0$
CSS10	$C_{m_u} > 0$

### 3. 3 Stabilité statique et contrôle d'un état de vol stabilisé (vol rectiligne) :

Pour maintenir un avion dans les conditions d'un état de vol stabilisé et le manœuvré d'une condition de vol à l'autre, il est nécessaire que:

- L'avion a la puissance suffisante pour le contrôle.
- Il n'exige pas un effort important du pilote.

Notre objectif est d'analyser ces conditions de commande pour qu'elles puissent être employées par le concepteur. Pour effectuer l'analyse des conditions de commande (puissance), les équations appropriées du mouvement doivent être utilisées.

Les équations du mouvement de vol rectiligne ont été développées au chapitre 1.

Maintenant, il est possible de récrire ces équations de la manière suivante :

$$mg \sin\gamma_1 = -(C_{D_o} + C_{D_\alpha} \alpha_1 + C_{D_{i_h}} i_{h_1} + C_{D_{\delta_e}} \delta_{e_1}) \bar{q}_1 S + T_1 \cos(\phi_T + \alpha_1) \quad (3.1)$$

$$-mg \sin\phi_1 \cos\gamma_1 = (C_{y_\beta} \beta_1 + C_{y_{\delta_a}} \delta_{a_1} + C_{y_{\delta_r}} \delta_{r_1}) \bar{q}_1 S + Y_{T_1} \quad (3.2)$$

$$-mg \cos\phi_1 \cos\gamma_1 = -(C_{L_o} + C_{L_\alpha} \alpha_1 + C_{L_{i_h}} i_{Hh_1} + C_{L_{\delta_e}} \delta_{e_1}) \bar{q}_1 S - T_1 \sin(\phi_T + \alpha_1)$$

$$0 = (C_{l_\beta} \beta_1 + C_{l_{\delta_a}} \delta_{a_1} + C_{l_{\delta_r}} \delta_{r_1}) \bar{q}_1 S b + L_{T_1} \quad (3.4)$$

$$0 = (C_{m_o} + C_{m_\alpha} \alpha_1 + C_{m_{i_h}} i_{h_1} + C_{m_{\delta_e}} \delta_{e_1}) \bar{q}_1 S \bar{c} - T_1 d_T \quad (3.5)$$

$$0 = (C_{n_\beta} \beta_1 + C_{n_{\delta_a}} \delta_{a_1} + C_{n_{\delta_r}} \delta_{r_1}) \bar{q}_1 S b + N_{T_1} \quad (3.6)$$

Ces équations sont écrites dans le repère stabilité de sorte que l'angle de tangage stabilisé  $\theta_1$  est égale l'angle de pente stabilisé devienne  $\gamma_1$ . De même, le nombre de Mach, l'altitude et la pression dynamique sont supposés connues :

$$\bar{q} = 1481. \delta. M^2$$

Les six équations (3.1) à (3.6) comportent neuf paramètres inconnus suivants :

$$\gamma_1 \quad \phi_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \delta_{a_1} \quad i_{h_1} \quad \delta_{e_1} \quad \delta_{r_1} \quad T_1$$

Pour résoudre ces équations, il est nécessaire de réduire le nombre d'inconnus à six. Dans la plupart des cas pratiques cela est fait en fixant l'angle d'inclinaison latéral  $\phi_1$ , la poussée  $T_1$  et l'angle de stabilisateur  $i_{h_1}$ .

L'angle  $i_{h_1}$  est choisi de telle façon que le pilote ne doit exercer aucune force de commande dans le vol stabilisé. Les équations peuvent être résolues pour les inconnues  $\gamma, \alpha, \beta, \delta_a, \delta_e$  et  $\delta_r$ .

Dans de nombreuses situations, le pilote fixera la valeur de  $i_h$ , par exemple pour générer la force de commande au poste de pilotage (qui est nécessaire pour maintenir la gouverne de profondeur à une déflexion qui garantit l'équilibre du moment de tangage) à zéro. Après avoir choisis les trois variables, les équations (4.42) peuvent maintenant être utilisées pour résoudre les six autres restantes inconnues. Ce qui se fait généralement en utilisant une méthode matricielle itérative.

### 3.3.1 Stabilité longitudinale et les caractéristiques de contrôle d'un état de vol stabilisé (vol rectiligne) :

Les équations du mouvement élaborées à partir des forces et moments aérodynamiques et du système de propulsion en découplant le cas longitudinal et latéral-directionnel, on obtient :

$$mg \sin\gamma_1 = -(C_{D_o} + C_{D_\alpha} \alpha_1 + C_{D_{i_h}} i_{h_1} + C_{D_{\delta_e}} \delta_{e_1}) \bar{q}_1 S + T_1 \cos(\phi_1 + \alpha_1) \quad (3.7)$$

$$mg \cos\gamma_1 = (C_{L_o} + C_{L_{\alpha_1}} \alpha_1 + C_{L_{i_h}} i_{h_1} + C_{L_{\delta_e}} \delta_{e_1}) \bar{q}_1 S + T_1 \sin(\phi_1 + \alpha_1) \quad (3.8)$$

$$0 = (C_{m_o} + C_{m_\alpha} \alpha_1 + C_{m_{i_h}} i_{h_1} + C_{m_{\delta_e}} \delta_{e_1}) \bar{q}_1 S \bar{c} - T_1 d_T \quad (3.9)$$

On suppose que la pression dynamique est connue, ces trois équations présentent six inconnus suivants :

$$\gamma_1, \phi_1, \alpha_1, i_{h_1}, \delta_{e_1} \text{ et } T_1$$

En sélectionnant  $T_1$  et  $i_{h_1}$  alors les variables  $\alpha_1$ ,  $\gamma_1$  et  $\delta_{e_1}$  peuvent être obtenus par des techniques itératives avec les trois hypothèses suivantes :

- La poussée équilibre la trainée
- La ligne de poussée passe par le centre de gravité ( $d_T = 0$ ).
- Le terme  $T_1 \sin(\phi_1 + \alpha_1)$  est négligeable dans l'équation de sustentation

Pour un avion sans puissance ( $T=0$ ) ou planeur, en tenant compte des hypothèses précédentes, elles peuvent être simplifiées sous la forme suivante :

$$mg \cos \gamma_1 = (C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha_1 + C_{L_{i_h}} i_{h_1} + C_{L_{\delta_e}} \delta_{e_1}) \bar{q}_1 S \quad (3.10)$$

$$0 = (C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha_1 + C_{m_{i_h}} i_{h_1} + C_{m_{\delta_e}} \delta_{e_1}) \bar{q}_1 S \bar{c} \quad (3.11)$$

Qui peuvent être écrites sous la forme matricielle ci-dessous:

$$\begin{bmatrix} C_{L_\alpha} & C_{L_{\delta_e}} \\ C_{m_\alpha} & C_{m_{\delta_e}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \delta_{e_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{L_1} - C_{L_0} - C_{L_{i_h}} i_{h_1} \\ -C_{m_0} - C_{m_{i_h}} i_{h_1} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Avec :

$$C_{L_1} = \frac{mg}{\bar{q}_1 S} \text{ et } \cos \gamma_1 = 1.0,$$

Ce qui est valable pour le cas d'un planeur a faible pente.

Les solutions sont :

$$\alpha_1 = \frac{(C_{L_1} - C_{L_0} - C_{L_{i_h}} i_{h_1}) C_{m_{\delta_e}} + (C_{m_0} + C_{m_{i_h}} i_{h_1}) C_{L_{\delta_e}}}{(C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}})} \quad (3.13)$$

$$\delta_{e_1} = \frac{-C_{L_\alpha} (C_{m_0} + C_{m_{i_h}} i_{h_1}) - C_{m_\alpha} (C_{L_1} - C_{L_0} - C_{L_{i_h}} i_{h_1})}{(C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}})} \quad (3.14)$$

Elles sont structurées de la manière suivante :

$$\alpha_1 = \alpha_{C_{L_1}=0} + \frac{\partial \alpha}{\partial C_L} C_{L_1} \quad (3.15)$$

$$\delta_{e_1} = \delta_{e_{C_{L_1}=0}} + \frac{\partial \delta_e}{\partial C_L} C_{L_1} \quad (3.16)$$

Les termes constants dans l'équation (3.15) et (3.16) ont les significations physiques suivantes :

$\alpha_{C_{L_1}=0}$  est l'angle d'incidence pour lequel l'avion est équilibré avec  $C_{L_1} = 0$

$\delta_{e_{C_{L_1}=0}}$  est l'angle de gouverne pour lequel l'avion est équilibré avec  $C_{L_1} = 0$

$\frac{\partial \alpha}{\partial C_L}$  est la variation de l'angle d'incidence de l'équilibre avec le coefficient de portance.

$\frac{\partial \delta_e}{\partial C_L}$  est la variation d'angle de gouverne d'équilibre avec le coefficient de portance.

De l'équation (3.13) à (3.16), on déduit que :

$$\alpha_{C_{L_1}=0} = \frac{(-C_{L_0} - C_{L_{i_h}} i_{h_1}) C_{m_{\delta_e}} + (C_{m_0} + C_{m_{i_h}} i_{h_1}) C_{L_{\delta_e}}}{(C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}})} \quad (3.17)$$

$$\delta_{e_{C_{L_1}=0}} = \frac{-C_{L_\alpha} (C_{m_0} + C_{m_{i_h}} i_{h_1}) - C_{m_\alpha} (-C_{L_0} - C_{L_{i_h}} i_{h_1})}{(C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}})} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial C_L} = \frac{C_{m_{\delta_e}}}{(C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}})} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \delta_e}{\partial C_L} = \frac{-C_{m_\alpha}}{(C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}})} \quad (3.20)$$

Dans le cas d'un avion où l'angle de gouverne de profondeur est limité entre  $-20^\circ$  et  $+10^\circ$ , on peut déterminer les points d'équilibres ( $C_m = 0$ ) pour chaque déflexion de la gouverne de profondeur.

La variation de la déflexion de la gouverne de profondeur par rapport au coefficient de portance de l'équation (3.20) peut être déterminée en vol (**test en vol**) en fonction de la position du centre de gravité. D'après la figure (3.2), il est possible de déterminer l'emplacement de centre aérodynamique. Ce point est aussi désigné par le point neutre avec manche fixe  $NP_{fix}$ .

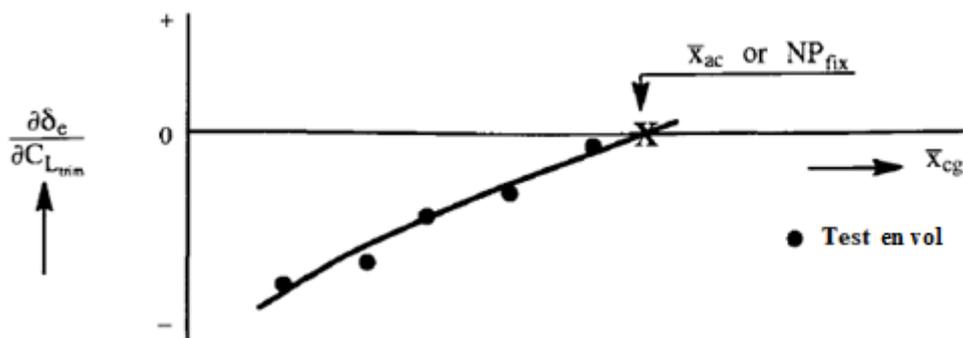


Figure 3.2 Détermination du point neutre à partir d'un test en vol

Le coefficient de portance en vol stabilisé est :

$$C_{L_1} = \frac{mg}{\bar{q}_1 S}$$

Sa dérivée par rapport à la vitesse est donnée par l'équation (3.21) :

$$\frac{\partial C_L}{\partial U_1} = - \frac{4W}{\rho S U_1^3} \quad (3.21)$$

Par conséquent, la variation du braquage de la gouverne par rapport à la vitesse est exprimé par :

$$\frac{\partial \delta_e}{\partial U_1} = \frac{4W}{\rho S U_1^3} \frac{C_{m_\alpha}}{C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} - C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}}} \quad (3.22)$$

De point de vue qualité de vol, il est essentiel que la variation de la gouverne par rapport à la vitesse soit positive :

$$\frac{\partial \delta_e}{\partial U_1} > 0 \quad (3.23)$$

Cela signifie que pour augmenter la vitesse, il est nécessaire (d'abaisser) de déplacer le bord de fuite de la gouverne de profondeur vers le bas (le cas de déflexion positive). de même, pour ralentir il est nécessaire de (relever) déplacer le bord de fuite de la gouverne de profondeur vers le haut. Pour que la condition (3.23) soit satisfaite, on doit vérifier le signe de la dérivée de l'équation (3.22). la pluparts des avions la condition :

$$\left| C_{L_\alpha} C_{m_{\delta_e}} \right| \gg \left| C_{m_\alpha} C_{L_{\delta_e}} \right| \quad (3.24)$$

Puisque la dérivée  $C_{L_\alpha}$  est généralement positive au-dessous de décrochage et comme la dérivée de contrôle de puissance  $C_{m_{\delta_e}}$  est généralement négative, il résulte que la condition (3.24) est assuré lorsque :

$$C_{m_\alpha} < 0 \quad (3.25)$$

Pour qu'un avion soit stable, cette condition est satisfaite tant que le centre de gravité est en avant du centre aérodynamique. la figure 3.2 montre un exemple d'un test de vol pour la variation de la gouverne. On note que comme le centre de gravité déplace en arrière, le gradient de vitesse de gouverne diminue

### 3.3.2 Stabilité latérale-directionnelle et les caractéristiques de commande :

Cette fois ci, on s'intéresse aux équations latéral-directionnelles (3.2), (3.4) et (3.6), qui sont regroupées en :

$$-mg \sin\phi \cos\gamma = (C_{y\beta}\beta + C_{y\delta_A}\delta_A + C_{y\delta_R}\delta_R)\bar{q}S + F_{y_T} \quad (3.26)$$

$$0 = (C_{l\beta}\beta + C_{l\delta_A}\delta_A + C_{l\delta_R}\delta_R)\bar{q}Sb + L_T \quad (3.27)$$

$$0 = (C_{n\beta}\beta + C_{n\delta_A}\delta_A + C_{n\delta_R}\delta_R)\bar{q}Sb + N_T \quad (3.28)$$

Les équations (3.26) à (3.28) s'appliquent pour des configurations à puissance symétrique aussi bien qu'à des configurations de puissance dissymétriques.

En puissance symétrique, les termes de poussée satisferont la condition suivante :

$$F_{y_T} = L_T = N_T = 0 \quad (3.29)$$

Pour la puissance dissymétrique (moteur éteint), ces termes ont des valeurs finies et parfois très grandes selon la position du moteur. Dans la plupart des cas (moteur éteint), l'équation de moment de lacet (3.28) contiendra également un terme très important de traînée  $\Delta N_D$ .

$$N_{T_1} + \Delta N_{D_1} \approx (F_{OEI})N_{T_1} \quad (3.30)$$

Avec:

$F_{OEI}$  facteur supérieur à l'unité

Le moment de lacet dû à la traînée dans les cas des moteurs hors fonctionnement peut être aussi important que  $N_T$  lui-même et peut être engendré par plusieurs facteurs : autorotation et la mise en drapeau et le déversement de l'écoulement ou débordement de l'écoulement à l'entrée.

Supposant que la poussée et la pente sont données, il reste à déterminer les variables inconnues au niveau des équations (3.26) à (3.28) et qui sont :

$$\phi, \quad \beta, \quad \delta_A, \quad \delta_R$$

Par conséquent, il y a quatre variables pour trois équations. La méthode qui doit être adoptée pour résoudre ce dilemme est:

*Selectionner  $\phi$  et résoudre  $\beta, \delta_A, \delta_R$*

*ou de choisir  $\delta_A$  et résoudre  $\beta, \phi, \delta_R$*

*ou de choisir  $\delta_R$  et résoudre  $\beta, \phi, \delta_A$*

Dans ce qui suit, on suppose que la variable  $\phi$  est choisie et on exige qu'un vol rectiligne soit maintenu avec moteur éteint et un angle d'inclinaison latérale ne dépassant pas  $\phi_1 = 5^\circ$ , pour toutes les vitesses plus grandes que  $1.2 V_{S.T.O.}$ .

L'écriture de l'équation (3.26) à (3.28) sous forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_A} & C_{y\delta_R} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_A} & C_{l\delta_R} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_A} & C_{n\delta_R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \delta_A \\ \delta_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left(\frac{mg \sin\phi \cos\gamma + F_{yT1}}{\bar{q}_1 S}\right) \\ \frac{-L_{T1}}{\bar{q}_1 S b} \\ \frac{-N_{T1} - \Delta N_{D1}}{\bar{q}_1 S b} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Les solutions sont obtenues par les expressions (3.31) et qui sont consistantes dans les conditions où  $\delta_A$  et  $\delta_R$  sont comprises dans la marge de braquage mécanique autorisés, ou quand  $\beta$ ,  $\delta_A$  et  $\delta_R$  sont obtenues de telles manière qu'ils ne produisent pas le décollement des filets d'air.

Les solutions pour  $\beta$ ,  $\delta_A$  et  $\delta_R$  pour un état de vol stabilisé (vol rectiligne) sont :

$$\beta_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\left(\frac{mg \sin\phi_1 \cos\gamma_1 + F_{Ty1}}{\bar{q}_1 S}\right) & C_{y\delta_A} & C_{y\delta_R} \\ \frac{-L_{T1}}{\bar{q}_1 S b} & C_{l\delta_A} & C_{l\delta_R} \\ \frac{-N_{T1} - \Delta N_D}{\bar{q}_1 S b} & C_{n\delta_A} & C_{n\delta_R} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.32)$$

$$\delta_{A1} = \frac{\begin{vmatrix} C_{y\beta} & -\left(\frac{mg \sin\phi_1 \cos\gamma_1 + F_{Ty1}}{\bar{q}_1 S}\right) & C_{y\delta_R} \\ C_{l\beta} & \frac{-L_{T1}}{\bar{q}_1 S b} & C_{l\delta_R} \\ C_{n\beta} & \frac{-N_{T1} - \Delta N_D}{\bar{q}_1 S b} & C_{n\delta_R} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.33)$$

$$\delta_{R1} = \frac{\begin{vmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_A} & -\left(\frac{mg \sin\phi_1 \cos\gamma_1 + F_{Ty1}}{\bar{q}_1 S}\right) \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_A} & \frac{-L_{T1}}{\bar{q}_1 S b} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_A} & \frac{-N_{T1} - \Delta N_D}{\bar{q}_1 S b} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.34)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_A} & C_{y\delta_R} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_A} & C_{l\delta_R} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_A} & C_{n\delta_R} \end{vmatrix} \quad (3.35)$$

Les solutions numériques obtenues à partir des équations (3.32) à (3.34) sont considérées comme acceptables dans la mesure où elles sont compatibles avec les conditions d'écoulement attaché. Par exemple, si une solution pour la déflexion de l'aileron ou de la gouverne de direction est de 25 degrés ou plus, cela ne serait probablement pas compatible avec les conditions d'écoulement attaché sur l'aile ou sur l'empennage vertical.

Une autre considération les avions opérationnels est le fait que toutes les surfaces de contrôle ont des plages de déflexion limitées imposées par des butés mécaniques.

Un problème avec les solutions données par les équations (3.32) à (3.34) est qu'elles ne sont pas très explicites pour l'identification des paramètres de conception. Pour déterminer quels aspects de la conception à entreprendre en tenant compte lorsqu'un moteur est en panne, il est commode d'examiner les formes simplifiées de l'équation (3.31).

Dans un premier exemple, considérons l'équilibre des moments autour de l'axe Z uniquement, comme représenté par l'équation (3.28), mais réécrit par l'équation suivante :

$$C_{n_\beta} \beta + C_{n_{\delta_R}} \delta_R + \frac{N_{T1} + \Delta N_{D1}}{\bar{q}_1 S b} = 0 \quad (3.36)$$

Cette équation peut être résolue en fonction de la déflexion nécessaire de la gouverne de direction  $\delta_R$  pour maintenir un angle de dérapage  $\beta$  donné et faire face à une situation du vol avec un moteur en panne:

$$\delta_R = \frac{-C_{n_\beta} \beta - \frac{N_{T1} + \Delta N_{D1}}{\bar{q}_1 S b}}{C_{n_{\delta_R}}} \quad (3.37)$$

On peut tracer la courbe qui montre comment la déflexion de la gouverne de direction varie avec la vitesse et avec le dérapage. Particulièrement à basse vitesse, il est souhaitable de voler aussi près que possible de l'angle de dérapage nul sinon la traînée de l'avion pourrait compromettre la capacité du moteur restant. En supposant que l'angle de dérapage soit négligeable:

$$\delta_R = \frac{-(N_{T1} + \Delta N_{D1})}{C_{n_{\delta_R}} \bar{q}_1 S b} \quad (3.38)$$

On remarque d'après l'équation (3.83) que lorsque la vitesse de l'avion diminue, la déflexion de la gouverne de direction nécessaire pour contrôler la situation de vol avec un moteur en panne devient très importante. La gouverne de direction ne doit pas braquée plus de 25 degrés environ, sinon l'empennage verticale risque de décroché. Si la déflexion maximale de la gouverne de direction disponible est désignée par  $\delta_{R \max}$ , la vitesse minimale de contrôle  $V_{mc}$  avec la condition d'un moteur en panne est:

$$V_{mc} = \sqrt{\frac{2(N_{T1} + \Delta N_{D1})}{\rho C_{n_{\delta_R}} \delta_{r \max} S b}} \quad (3.39)$$

Après une panne de moteur, un certain temps doit s'écouler avant qu'une action de contrôle ne soit prise. La raison est qu'il faut aussi un certain temps avant que le pilote sache quel moteur a échoué, de même, il faut un certain temps pour lancer l'action appropriée. Cette durée est généralement de une à deux secondes. Pendant ce temps, l'avion commencera un mouvement de lacet et, en raison de l'effet de dièdre, il commencera également à faire un mouvement de roulis. En revenant à l'équation (3.36) et en supposant qu'il n'y a pas d'action du pilote, l'angle de dérapage maximal qui sera atteint est:

$$\beta_{max} = \frac{-(N_{T1} + \Delta N_{D1})}{c_{n\beta} \bar{q}_1 S b} \quad (3.40)$$

Ensuite, considérons l'équilibre autour de l'axe X. Pour maintenir les ailes à niveau, la déflexion nécessaire de l'aileron est déterminée à partir des Equations (3.31) et (3.40) comme:

$$\delta_A = \frac{-c_{l\beta} \beta_{max} - \frac{L_T}{\bar{q}_1 S b}}{c_{l\delta_A}} = \left( \frac{\frac{c_{l\beta}}{c_{n\beta}} (N_{T1} + \Delta N_{D1}) - L_{T1}}{c_{l\delta_A} \bar{q}_1 S b} \right) \quad (3.41)$$

Cette déflexion de l'aileron ne doit pas dépasser celle pour laquelle une aile décroche. Typiquement, pas plus de 25 degrés de déflexion d'aileron devraient être exigés.

La déflexion nécessaire de la gouverne de direction pour maintenir une condition de moteur coupé peut être considérablement réduite en permettant à l'avion de s'incliner du côté moteur en fonctionnement. Effectivement, les dimensions de l'empennage vertical devraient avoir un effet important sur ce problème de contrôle.

### 3.4 Caractéristiques de stabilité et contrôle pour un vol de manœuvre stabilisé

En passant d'une condition de vol stable à une autre et en manœuvrant pour changer de trajectoire de vol ou pour éviter le flux important de circulation, un avion doit être capable d'effectuer des manœuvres de virages stabilisés ainsi que des manœuvres de ressources. L'objectif de cette section est de développer des modèles mathématiques pour de telles manœuvres et de discuter de leur application.

### 3.4.1 Caractéristiques de stabilité et contrôle pour un vol en virage stabilisé :

En écrivant les équations générales d'un état de vol stabilisé dans les axes de stabilité :  $W_1 = 0$ . En outre, assumant que le virage stabilisé avec :  $\theta_1 = 0$  et  $\gamma_1 = 0$ , alors :

$$P_1 = 0 \quad (3.42)$$

$$Q_1 = \psi_1^\circ \sin \phi_1 \quad (3.43)$$

$$R_1 = \psi_1^\circ \cos \phi_1 \quad (3.44)$$

Les équations de mouvement s'écrivent :

$$0 = F_{Ax_1} + F_{Tx_1} \quad (3.45)$$

$$mU_1 R_1 = mg \sin \phi_1 + F_{Ay_1} + F_{Ty_1} \quad (3.46)$$

$$-mU_1 Q_1 = mg \cos \phi_1 + F_{Az_1} + F_{Tz_1} \quad (3.47)$$

$$(I_{ZZ} - I_{yy})R_1 Q_1 = L_{A_1} + L_{T_1} \quad (3.48)$$

$$-I_{XZ} R_1^2 = M_{A_1} + M_{T_1} \quad (3.49)$$

$$I_{XZ} Q_1 R_1 = N_{A_1} + N_{T_1} \quad (3.50)$$

S'il n'y a aucune poussée asymétrique et si la ligne de poussée traverse le centre de gravité, alors :

$$M_{T_1} = L_{T_1} = N_{T_1} = F_{Ty_1} = 0 \quad (3.51)$$

En introduisant les expressions des forces et des moments aérodynamiques, il est possible d'écrire les équations (3.45) à (3.50) comme :

$$0 = -(C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha_1 + C_{D_{i_H}} i_{H_1} + C_{D_{\delta_E}} \delta_{E_1}) \bar{q}_1 S + T_1 \cos(\phi_T + \alpha_1) \quad (3.52)$$

$$mU_1 R_1 - mg \sin \phi_1 = \left( C_{y_\beta} \beta_1 + C_{y_r} \frac{R_1 b}{2U_1} + C_{y_{\delta_A}} \delta_{A_1} + C_{y_{\delta_R}} \delta_{R_1} \right) \bar{q}_1 S \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} -mU_1 Q_1 - mg \cos \phi_1 = & -(C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha_1 + C_{y_r} \frac{Q_1 \bar{c}}{2U_1} + C_{L_{i_H}} i_{H_1} + C_{L_{\delta_E}} \delta_{E_1}) \bar{q}_1 S \\ & - T_1 \sin(\phi_T + \alpha_1) \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$(I_{ZZ} - I_{yy})R_1 Q_1 = (C_{l_\beta} \beta_1 + C_{l_r} \frac{R_1 b}{2U_1} + C_{l_{\delta_A}} \delta_{A_1} + C_{l_{\delta_R}} \delta_{R_1}) \bar{q}_1 S b \quad (3.55)$$

$$-I_{XZ} R_1^2 = (C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha_1 + C_{m_q} \frac{Q_1 \bar{c}}{2U_1} + C_{m_{i_H}} i_{H_1} + C_{m_{\delta_E}} \delta_{E_1}) \bar{q}_1 S \bar{c} \quad (3.56)$$

$$I_{XZ} Q_1 R_1 = \left( C_{n_\beta} \beta_1 + C_{n_r} \frac{R_1 b}{2U_1} + C_{n_{\delta_A}} \delta_{A_1} + C_{n_{\delta_R}} \delta_{R_1} \right) \bar{q}_1 S b \quad (3.57)$$

Supposant que la poussée et la pression dynamique sont connues. Il semble qu'il y a trois variables supplémentaires que les équations. Cependant, les équations de  $Q_1$  et  $R_1$  sont liés à  $\psi_1$  et  $\phi_1$  de sorte qu'en réalité, il y a seulement deux variables. Il est utile de considérer une simplification, la plus commune étant le cas où l'angle d'inclinaison latérale  $\phi_1$  et l'angle de stabilisateur  $i_H$  sont choisis.

Les solutions pour  $\beta_1, \alpha_1, \delta_{A_1}, \delta_{E_1}, \delta_{R_1}$  et  $\psi_1^\circ$  ( $Q_1$  et  $R_1$ ) sont maintenant uniques et peut être trouvé à l'aide de la matrice algébrique. Avant de montrer ceci, il est utile d'abord à relier les taux angulaires  $Q_1$  et  $R_1$  au concept de facteur de charge.

La force centrifuge à un niveau de virage stabilisé peut être écrite comme :

$$C.F. = m \psi_1^{\circ 2} R_t \quad (3.58)$$

Il suit facilement que le rayon du virage peut être trouvé à une vitesse de vol et un angle d'inclinaison latérale donné, comme :

$$R_t = \frac{U_1^2}{g \tan \phi_1} \quad (3.59)$$

Le rayon de virage d'un avion est important parce qu'il donne une idée sur sa manœuvrabilité. Le rapport suivant doit être satisfait :

$$L \cos \phi_1 = W \quad (3.60)$$

Il est usuel de définir le rapport entre la portance totale et le poids de l'avion qui est le facteur de charge :

$$L = C_L \bar{q} S = nW \quad (3.61)$$

Où  $n$  s'appelle le facteur de charge. Pour un niveau de vol stabilisé (vol rectiligne), ceci mène évidemment à :

$$n = 1 \quad (3.62)$$

Pour le virage d'un état de vol stabilisé, il est représenté par la figure 3.4, son expression est donnée par la relation suivante :

$$n = \frac{1}{\cos \phi} \quad (3.63)$$

On remarque que dans un virage incliné de  $60^\circ$ , le facteur de charge est égale à deux, indiquant que les ailes et la queue développent ensemble une portance égale deux fois au poids de l'avion, si  $F_{Ay} = 0$  la force centrifuge doit être équilibrée par une composante de portance tels que :

$$m \dot{\psi}_1^2 R_t = L \sin \phi_1 \quad (3.64)$$

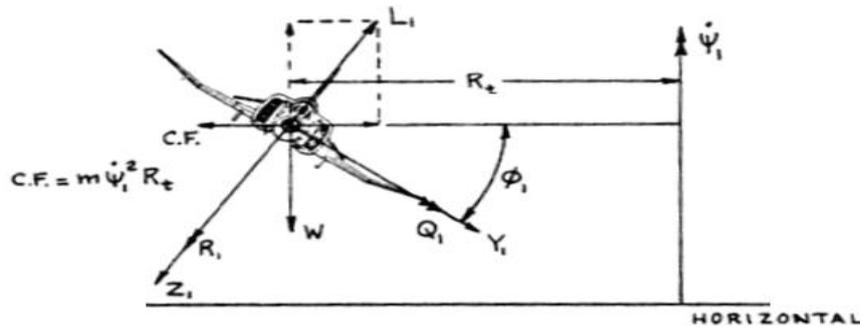


Figure 3.3 : Virage stabilisé

Avec les équations (3.60) et (3.64) :

$$m \dot{\psi}_1^2 \frac{U_1^2}{g \tan \phi_1} = W \tan \phi_1 \quad (3.65)$$

Par conséquent, à un virage stabilisé pour une vitesse  $U_1$  et à un angle d'inclinaison latérale  $\phi_1$ :

$$\dot{\psi}_1 = \frac{g \tan \phi_1}{U_1} \quad (3.66)$$

En utilisant les équations (3.52) à (3.57) et (3.63) avec (3.66), il suit que les expressions des composantes de vitesse de rotation s'écrivent :

$$Q_1 = \frac{g \sin^2 \phi_1}{U_1 \cos \phi_1} = \left\{ \frac{g}{U_1} \left( n - \frac{1}{n} \right) \right\} \quad (3.67)$$

$$R_1 = \frac{g}{U_1} \sin \phi_1 = \frac{g}{n U_1} \sqrt{n^2 - 1} \quad (3.68)$$

Maintenant, se rapportant à l'équation (3.53), on voit que le terme  $m U_1 R_1$  peut être écrit comme :

$$m U_1 R_1 = m g \sin \phi_1 \quad (3.69)$$

Pour des raisons de simplification, on suppose que :

$$F_{A_{y_1}} = 0 \quad (3.70)$$

Effectuer un virage stabilisé est par définition un virage symétrique qui signifie qu'il n'y a aucune composante d'accélération le long de l'axe des Y de l'avion. Dans le cas où  $F_{A_{y_1}} = 0$ , la condition à satisfaire est :

$$C_{y\beta}\beta_1 + C_{y_r}\left(\frac{R_1 b}{2U_1}\right) + C_{y\delta_A}\delta_{A_1} + C_{y\delta_R}\delta_{R_1} = 0 \quad (3.71)$$

Après avoir choisi  $\phi_1$  et également en exigeant  $F_{A_y} = 0$ , ce qui a mené directement aux équations (3.53), (3.55) et (3.57), il est possible de résoudre  $\beta_1$ ,  $\delta_{A_1}$ , et  $\delta_{R_1}$  :

$$\begin{bmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_A} & C_{y\delta_R} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_A} & C_{l\delta_R} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_A} & C_{n\delta_R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \delta_{A_1} \\ \delta_{R_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_{y_r} \frac{bg}{2U_1^2} \sin\phi_1 \\ \frac{I_{ZZ}-I_{YY}}{\bar{q}_1 S b} \frac{g^2}{U_1^2} \frac{\sin^3\phi_1}{\cos\phi_1} - C_{l_r} \frac{bg\sin\phi_1}{2U_1^2} \\ \frac{I_{XZ}}{\bar{q}_1 S b} \frac{g^2}{U_1^2} \frac{\sin^3\phi_1}{\cos\phi_1} - C_{n_r} \frac{bg\sin\phi_1}{2U_1^2} \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

En utilisant les équations (3.52), (3.54) et (3.56), on aboutit à :

$$0 = -(C_{D_0} + C_{D_\alpha}\alpha_1 + C_{D_{i_H}}i_{H_1} + C_{D_{\delta_E}}\delta_{E_1})\bar{q}_1 S + T_1 \cos(\phi_T + \alpha_1) \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} -mg(\cos\phi_1)^{-1} = & -(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha_1 + C_{L_q} \frac{g\bar{c}\sin^2\phi_1}{2U_1^2\cos\phi_1} + C_{L_{i_H}}i_{H_1} + C_{L_{\delta_E}}\delta_{E_1})\bar{q}_1 S \\ & - T_1 \cos(\phi_T + \alpha_1) \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} -I_{XZ} \frac{g^2}{U_1^2} \sin^2\phi_1 = & (C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha_1 + C_{m_q} \frac{g\bar{c}\sin^2\phi_1}{2U_1^2\cos\phi_1} + C_{m_{i_H}}i_{H_1} + C_{m_{\delta_E}}\delta_{E_1})\bar{q}_1 S\bar{c} \\ & - T_1 d_T \end{aligned} \quad (3.75)$$

Les solutions de  $\beta$ ,  $\delta_A$  et  $\delta_R$  pour un virage stabilisé sont :

$$\beta_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & C_{y\delta_A} & C_{y\delta_R} \\ b_{11} & C_{l\delta_A} & C_{l\delta_R} \\ c_{11} & C_{n\delta_A} & C_{n\delta_R} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_A} & C_{y\delta_R} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_A} & C_{l\delta_R} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_A} & C_{n\delta_R} \end{vmatrix}} \quad (3.76)$$

$$\delta_{A_1} = \frac{\begin{vmatrix} C_{y\beta} & a_{11} & C_{y\delta_R} \\ C_{l\beta} & b_{11} & C_{l\delta_R} \\ C_{n\beta} & c_{11} & C_{n\delta_R} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.77)$$

$$\delta_{R_1} = \frac{\begin{vmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_A} & a_{11} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_A} & b_{11} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_A} & c_{11} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.78)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{y\beta} & C_{y\delta_A} & C_{y\delta_R} \\ C_{l\beta} & C_{l\delta_A} & C_{l\delta_R} \\ C_{n\beta} & C_{n\delta_A} & C_{n\delta_R} \end{vmatrix} \quad (3.79)$$

Avec :

$$a_{11} = -C_{y_r} \frac{bg}{2U_1^2} \sin\phi_1$$

$$b_{11} = \frac{I_{zz} - I_{yy}}{\bar{q}_1 S b} \frac{g^2}{U_1^2} \frac{\sin^3\phi_1}{\cos\phi_1} - C_{l_r} \frac{bg \sin\phi_1}{2U_1^2}$$

$$c_{11} = \frac{I_{xz}}{\bar{q}_1 S b} \frac{g^2}{U_1^2} \frac{\sin^3\phi_1}{\cos\phi_1} - C_{n_r} \frac{bg \sin\phi_1}{2U_1^2}$$

Ces solutions sont considérées réalistes à condition que les variables  $\beta_1$ ,  $\delta_{A_1}$  et  $\delta_{R_1}$  sont dans des limites dictées par des considérations mécanique ou la séparation des filets d'air de l'écoulement n'est pas encore produite.

### 3.4.2 Vol en ressources symétriques :

Dans un vol en ressources symétriques, les caractéristiques latéral-directionnelles de l'avion ne sont pas importantes. Il est suffisant de considérer les équations longitudinales suivantes :

$$0 = -(C_{D_o} + C_{D_\alpha} \alpha_1 + C_{D_{i_H}} i_{H_1} + C_{D_{\delta_E}} \delta_{E_1}) \bar{q}_1 S + T_1 \cos(\phi_T + \alpha_1) \quad (3.80)$$

$$-mU_1 Q_1 - mg \cos\gamma_1 = -(C_{L_o} + C_{L_\alpha} \alpha_1 + C_{L_q} \frac{Q_1 \bar{c}}{2U_1} + C_{L_{i_H}} i_{H_1} + C_{L_{\delta_E}} \delta_{E_1}) \bar{q}_1 S - T_1 \sin(\phi_T + \alpha_1) \quad (3.81)$$

$$0 = (C_{m_o} + C_{m_\alpha} \alpha_1 + C_{m_q} \frac{Q_1 \bar{c}}{2U_1} + C_{m_{i_H}} i_{H_1} + C_{m_{\delta_E}} \delta_{E_1}) \bar{q}_1 S \bar{c} - T_1 d_T \quad (3.82)$$

Si on connaît  $\bar{q}_1$ ,  $T_1$  et  $i_{H_1}$ , alors les équations peuvent être résolues pour  $\alpha_1$ ,  $Q_1$  et  $\delta_{E_1}$ . Considérant que la poussée est choisie pour satisfaire l'équation de la traînée. En outre, assumé que  $C_{L_q}$  et l'effet de la poussée sur les équations de la portance et de tangage sont négligeables. Le problème se réduit à :

$$-mU_1Q_1 - mg \cos\gamma_1 = -(C_{L_o} + C_{L_\alpha}\alpha_1 + C_{L_{i_H}}i_{H_1} + C_{L_{\delta_E}}\delta_{E_1})\bar{q}_1S \quad (3.83)$$

$$0 = C_{m_o} + C_{m_\alpha}\alpha_1 + C_{m_q}\frac{Q_1\bar{c}}{2U_1} + C_{m_{i_H}}i_{H_1} + C_{m_{\delta_E}}\delta_{E_1} \quad (3.84)$$

Dans une ressource symétrique stabilisée, l'avion effectue un cercle dans un plan vertical. La géométrie convenable est montrée sur la figure 3.4. L'équilibre entre les forces est donné par la relation suivante :

$$L = W \cos\gamma_1 + mQ_1^2 R_L \quad (3.85)$$

En décrivant la boucle, la portance est donnée par :

$$L = nW = W + mU_1Q_1 \quad (3.86)$$

De sorte que :

$$Q_1 = \frac{g}{U_1}(n - 1) \quad (3.87)$$

On Introduisant l'équation (3.86), il résulte que :

$$n(mg) = (C_{L_o} + C_{L_\alpha}\alpha_1 + C_{L_{i_H}}i_{H_1} + C_{L_{\delta_E}}\delta_{E_1})\bar{q}_1S \quad (3.88)$$

$$0 = C_{m_o} + C_{m_\alpha}\alpha_1 + C_{m_q}\frac{g\bar{c}}{2U_1^2}(n - 1) + C_{m_{i_H}}i_{H_1} + C_{m_{\delta_E}}\delta_{E_1} \quad (3.89)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} C_{L_\alpha} & C_{L_{\delta_E}} \\ C_{m_\alpha} & C_{m_{\delta_E}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \delta_{E_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} nC_{L_{Trim}} - C_{L_o} - C_{L_{i_H}}i_{H_1} \\ -C_{m_o} - C_{m_{i_H}}i_{H_1} - C_{m_q}\frac{g\bar{c}}{2U_1^2}(n - 1) \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

Il s'ensuit que :

$$\alpha_1 = \frac{C_{L_{\delta_E}} \left\{ C_{m_o} + C_{m_{i_H}}i_{H_1} + C_{m_q}\frac{g\bar{c}}{2U_1^2}(n-1) \right\} + C_{m_{\delta_E}}(nC_{L_{Trim}} - C_{L_o} - C_{L_{i_H}}i_{H_1})}{C_{L_\alpha}C_{m_{\delta_E}} - C_{L_{\delta_E}}C_{m_\alpha}} \quad (3.91)$$

$$\delta_{E_1} = \frac{-C_{L_\alpha} \left\{ C_{m_o} + C_{m_{i_H}}i_{H_1} + C_{m_q}\frac{g\bar{c}}{2U_1^2}(n-1) \right\} - C_{m_\alpha}(nC_{L_{Trim}} - C_{L_o} - C_{L_{i_H}}i_{H_1})}{C_{L_\alpha}C_{m_{\delta_E}} - C_{L_{\delta_E}}C_{m_\alpha}} \quad (3.92)$$

Ces équations représentent les solutions  $\alpha_1$  et  $\delta_{E_1}$  pour un facteur de charge donné dans une ressource symétrique. Encore, la variation de la déflexion de la gouverne de profondeur  $\delta_E$ , avec le facteur de charge. Par différentiation de l'équation (3.92), on trouve :

$$\frac{\partial \delta_E}{\partial n} = \frac{-C_{L\alpha} C_{mq} \frac{g\bar{c}}{2U_1^2} - C_{m\alpha} C_{LTrim}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_E} - C_{L\delta_E} C_{m\alpha}} \quad (3.93)$$

On constate que le point de manœuvre dans une ressource symétrique est obtenu par :

$$\bar{X}_{cg} = \bar{X}_{ac} - \frac{C_{mq}}{C_{LTrim}} \frac{g\bar{c}}{2U_1^2} \quad (3.94)$$

Puisque :

$$C_{LTrim} = \frac{2W}{\rho S U_1^2} \quad (3.95)$$

Il est possible d'écrire :

$$M.P. = \bar{X}_{ac} \begin{cases} -\frac{C_{mq} \rho S g \bar{c}}{4W} & \text{pour une ressource symétrique} \\ -\frac{C_{mq} \rho S g \bar{c}}{4W} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) & \text{pour un virage} \end{cases} \quad (3.96)$$

Le point de manœuvre défini par l'équation (3.96) est également mentionné comme  $MP_{Fix}$ .

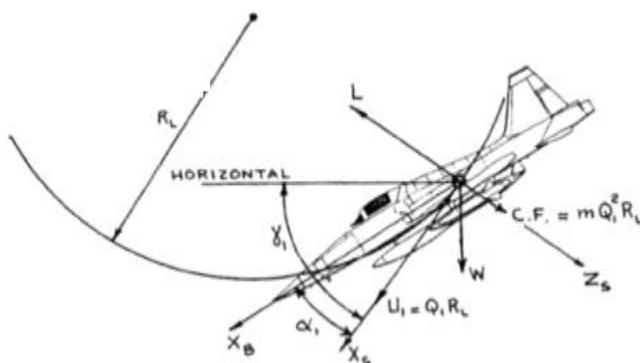


Figure 3.4 : Vol en ressource symétrique

### 3.5 Configuration conventionnelle, canard et trois surfaces

#### 3.5.1 L'équilibre de la configuration conventionnelle

La figure 3.5 montre la disposition des deux surfaces portantes représentées par la combinaison aile-empennage pour un avion conventionnel. L'effet de fuselage est exprimé en plaçant le vecteur portance aile-fuselage au niveau du centre aérodynamique aile-fuselage. Les hypothèses faites sont :

$$C_{m_{ac_{wf}}} < 0 \quad \text{et} \quad C_{m_{ac_h}} \approx 0 \quad (3.97)$$

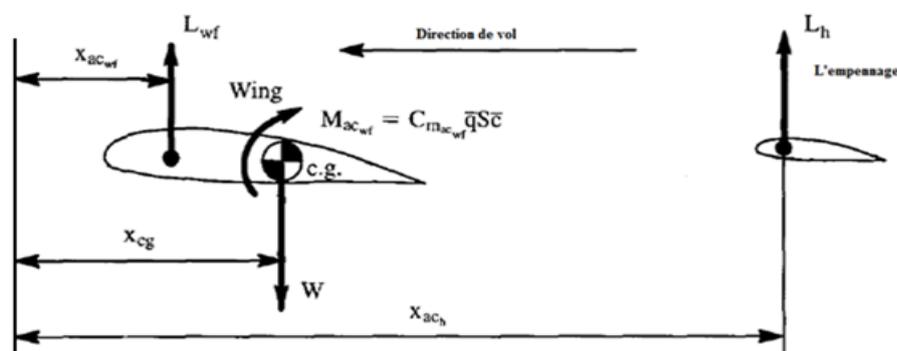


Figure 3.5 Aile-empennage pour un avion conventionnel

Le moment d'équilibre autour le centre de gravité s'écrit :

$$L_{wf}(x_{cg} - x_{ac_{wf}}) + M_{ac_{wf}} - L_h(x_{ac_h} - x_{cg}) = 0 \quad (3.98)$$

A partir de l'équation (3.98), la portance générée par l'empennage pour assurer l'équilibre est :

$$L_h = \frac{L_{wf}(x_{cg} - x_{ac_{wf}}) + M_{ac_{wf}}}{(x_{ac_h} - x_{cg})} \quad (3.99)$$

Pour un avion conventionnel, les inégalités observées sont:

$$(x_{ac_h} - x_{cg}) > 0 \quad M_{ac_{wf}} < 0 \quad L_{wf} > 0 \quad (3.100)$$

Le signe de la portance d'empennage peut être trouvé mais qui dépend de la position du centre de la gravité :

**1<sup>er</sup> cas :**  $x_{cg} > x_{ac_{wf}}$

La combinaison aile-fuselage est instable ce qui conduit à :

$L_h > 0$  Ou  $L_h < 0$  La charge vers le haut ou vers le bas, dépend de  $M_{ac_{wf}}$

**2<sup>ème</sup> cas :**  $x_{cg} = x_{ac_{wf}}$

La combinaison aile-fuselage est neutre ce qui conduit à :

$L_h < 0$  La charge est vers le bas

**3<sup>ème</sup> cas :**  $x_{cg} < x_{ac_{wf}}$

La combinaison aile-fuselage est stable ce qui conduit à :

$L_h < 0$  La charge vers le bas

Finalement, la charge générée par l'empennage pour assurer l'équilibre sera généralement vers le bas, sinon l'aile-fuselage sera instable et satisfait :

$$\left| M_{ac_{wf}} \right| < L_{wf} (x_{cg} - x_{ac_{wf}}) \quad (3.101)$$

### 3.5.2 L'équilibre de la configuration canard

La figure (3.6) montre la combinaison canard-aile pour un avion de type canard. L'effet de fuselage est exprimé en plaçant le vecteur portance aile-fuselage dans le centre aérodynamique aile-fuselage, les hypothèses faites sont:

$$C_{m_{ac_{wf}}} < 0 \quad \text{et} \quad C_{m_{acc}} \approx 0 \quad (3.102)$$

Pour déterminer le moment d'équilibre autour du centre de gravité, la condition qui s'applique est :

$$L_c(x_{cg} - x_{ac_c}) + M_{ac_{wf}} - L_{wf}(x_{ac_{wf}} - x_{cg}) = 0 \quad (3.103)$$

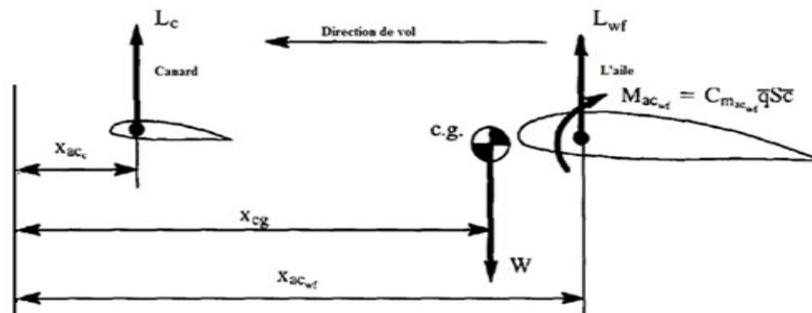


Figure 3.6 Avion de configuration aile-canard

De l'équation(3.103), la charge de canard pour assurer l'équilibre est :

$$L_c = \frac{L_{wf}(x_{ac_{wf}} - x_{cg}) - M_{ac_{wf}}}{(x_{cg} - x_{ac_c})} \quad (3.104)$$

On observe que pour un avion canard ces inégalités sont :

$$(x_{cg} - x_{ac_c}) > 0 \quad , \quad M_{ac_{wf}} < 0 \quad \text{et} \quad L_{wf} > 0 \quad (3.105)$$

Par conséquent, les conclusions suivantes pour le « signe » de la portance de canard (la charge), peuvent être tirées, selon l'emplacement du centre de gravité :

**1<sup>er</sup> cas :**  $x_{cg} > x_{ac_{wf}}$  (combinaison aile-fuselage instable) conduit a :

$$L_c > 0 \quad \text{ou} \quad L_c < 0 \quad \text{La charge vers le haut ou vers le bas,}$$

Dépend de la valeur négative de  $M_{ac_{wf}}$

**2<sup>ème</sup> cas :**  $x_{cg} = x_{ac_{wf}}$  (combinaison aile-fuselage neutre) conduit à :

$$L_c > 0 \quad \text{La charge vers le haut}$$

**3<sup>ème</sup> cas :**  $x_{cg} < x_{ac_{wf}}$  (combinaison aile-fuselage stable) conduit à :

$$L_c > 0 \quad \text{La charge vers le haut}$$

La charge générée par la configuration canard pour assurer l'équilibre sera généralement vers le haut, sinon l'aile-fuselage sera instable et satisfait :

$$|M_{ac_{wf}}| < L_{wf}(x_{cg} - x_{ac_{wf}}) \quad (3.106)$$

### 3.5.3 L'équilibre de la configuration à trois surfaces

La figure 3.7 montre une combinaison canard-aile-empennage pour un avion qui a trois surfaces. L'effet de fuselage est exprimé en plaçant le vecteur de portance aile-fuselage au niveau du centre aérodynamique aile-fuselage. Les hypothèses faites sont exprimées par :

$$C_{mac_{wf}} < 0 \quad , \quad C_{mac_h} \approx 0 \quad \text{et} \quad C_{mac_c} \approx 0 \quad (3.107)$$

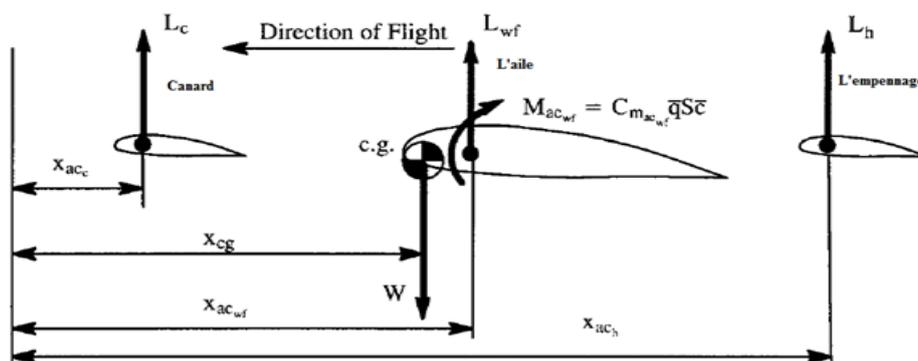


Figure 3.7 Avion de configuration canard-aile-empennage (trois surfaces)

Pour le moment d'équilibre autour du centre de gravité, la condition d'équilibre est :

$$L_c(x_{cg} - x_{ac_c}) - L_{wf}(x_{ac_{wf}} - x_{cg}) + M_{ac_{wf}} - L_h(x_{ac_h} - x_{cg}) = 0 \quad (3.108)$$

Dans le cas d'avion à trois surfaces, les inégalités observées sont :

$$(x_{cg} - x_{ac_c}) > 0 \quad , \quad M_{ac_{wf}} < 0 \quad , \quad L_{wf} > 0 \quad \text{et} \quad (x_{ac_h} - x_{cg}) > 0 \quad (3.109)$$

En plus, pour un avion à trois surfaces, la condition qui est toujours satisfaite est la suivante :

$$x_{ac_{wf}} - x_{cg} > 0 \quad (3.110)$$

Maintenant, nous avons deux charges d'équilibre, une des deux doit être sélectionnée. La résolution de l'équation(3.110), permet de trouver la charge d'équilibre du canard :

$$L_c = \frac{-M_{ac_{wf}} + L_{wf}(x_{ac_{wf}} - x_{cg}) + L_h(x_{ac_h} - x_{cg})}{(x_{cg} - x_{ac_c})} \quad (3.111)$$

D'après l'équation (3.111) on peut conclure que tant que  $L_h$  est positif (vers le haut),  $L_c$  sera également positif (c-à-d vers le haut).

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations de mouvement en état stabilisé d'un avion ont été appliquées et résolues pour assurer une stabilité satisfaisante et des propriétés de contrôle recherchés.

Après avoir revu les équations d'équilibre longitudinal et de leurs solutions générales, des questions impliquant la capacité d'équilibre (trime) pour différentes configurations (conventionnelle, canard et à trois surfaces) ont été soulevées et solutionnées.

Les équations latérales-directionnelles développées sont nécessaire pour résoudre les problèmes de contrôlabilité impliquant la panne d'un moteur. Le problème de la vitesse minimale de contrôle dans cette situation gênante où le moteur est en panne a été discuté.

## CHAPITRE4: STABILITE ET CONTROLE EN VOL PERTURBE

### 4.1 Introduction :

L'objectif fixé est d'analyser la stabilité dynamique et les caractéristiques de la réponse des avions en termes de petites perturbations par rapport aux conditions de vol stabilisé.

#### Définition de la stabilité dynamique :

La stabilité dynamique est définie comme étant la tendance des amplitudes d'un mouvement perturbé de l'avion pour s'annuler ou prendre d'autres valeurs correspondantes à un nouvel état d'équilibre après la disparition de la perturbation.

#### Définition de la réponse de l'avion :

La réponse de l'avion est définie comme étant la variation en fonction du temps des variables du mouvement par rapport aux conditions de vol état stabilisé lorsqu'une perturbation interne ou externe est générée.

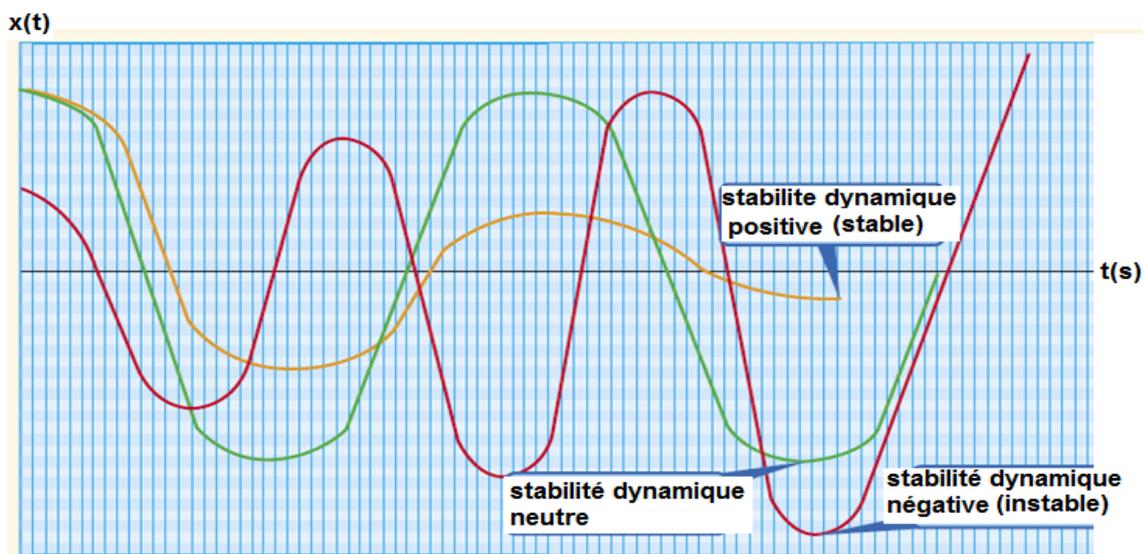


Figure 4.1 Types de la stabilité dynamique

#### Critères de la stabilité dynamique :

*Ils sont définis comme étant les règles avec lesquelles le mouvement perturbé de l'avion est séparé en trois catégories stable, neutre et instable.*

En utilisant la théorie des petites perturbations, les équations de mouvement de l'avion sont obtenues sous la forme de deux ensembles indépendants: les équations longitudinales et les équations latérales-directionnelles [66, 70, 73, 74, 75, 79, 81, 82, 84].

## 4.2 Stabilité dynamique longitudinale et réponse

### 4.2.1 Equations longitudinales

Les trois équations du mouvement du mouvement longitudinal pour les petites perturbations sont les suivantes [7]:

$$m\dot{u} = -mg\theta\cos\theta_1 + \bar{q}_1s \left\{ -(C_{D_u} + 2C_{D_1})\frac{u}{U_1} + (C_{T_{x_u}} + 2C_{T_{x_1}})\frac{u}{U_1} \right\} + \bar{q}_1s \left\{ \frac{C_D}{U_1} - (C_{D_\alpha} - C_{L_1})\alpha - C_{D_{\delta_e}}\delta_e \right\} \quad (4.1)$$

$$m(\dot{w} - U_1q) = -mg\theta\sin\theta_1 + \bar{q}_1s \left\{ -(C_{L_u} + 2C_{L_1})\frac{u}{U_1} - (C_{L_\alpha} + 2C_{D_1})\alpha \right\} + \bar{q}_1s \left\{ -C_{L_{\dot{\alpha}}}\frac{\dot{\alpha}\bar{c}}{2U_1} - C_{L_q}\frac{q\bar{c}}{2U_1} - C_{L_{\delta_e}}\delta_e \right\} \quad (4.2)$$

$$I_{yy}\dot{q} = \bar{q}_1S\bar{c} \left\{ (C_{m_u} + 2C_{m_1})\frac{u}{U_1} + (C_{m_{T_u}} + 2C_{m_{T_1}})\frac{u}{U_1} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_{T_\alpha}}\alpha \right\} + \bar{q}_1S\bar{c} \left\{ C_{m_{\dot{\alpha}}}\frac{\dot{\alpha}\bar{c}}{2U_1} + C_{m_q}\frac{q\bar{c}}{2U_1} + C_{m_{\delta_e}}\delta_e \right\} \quad (4.3)$$

Avec :

$$q = \dot{\theta} \quad \text{et} \quad w = U_1\alpha \quad (4.4)$$

L'utilisation des coefficients adimensionnelles (Table 4.1) , permet de mettre les équations de mouvement sous la forme simplifiée suivante :

$$\dot{u} = -g\theta\cos\theta_1 + X_uu + X_{T_u}u + X_\alpha\alpha + X_{\delta_e}\delta_e \quad (4.5)$$

$$U_1\dot{\alpha} - U_1\dot{\theta} = -g\theta\sin\theta_1 + Z_uu + Z_\alpha\alpha + Z_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + Z_q\dot{\theta} + Z_{\delta_e}\delta_e \quad (4.6)$$

$$\dot{\theta} = M_uu + M_{T_u}u + M_\alpha\alpha + M_{T_\alpha}\alpha + M_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + Z_q\dot{\theta} + M_{\delta_e}\delta_e \quad (4.7)$$

Le mouvement longitudinal est déterminé par la composante de la vitesse longitudinale (u), l'angle d'attaque ( $\alpha$ ), le taux de tangage (q) et l'angle de tangage ( $\theta$ ). Dans ce cas, l'entrée est la déflexion de la gouverne de profondeur ( $\delta_e$ ) et la

commande de la manette des gaz du moteur ( $\delta t$ ). En utilisant le transformé de Laplace, il est possible de passer au domaine fréquentiel:

$$(s - X_u - X_{T_u})u(s) - X_\alpha \alpha(s) + g \cos \theta_1 \theta(s) = X_{\delta_e} \delta_e(s) \quad (4.8)$$

$$-Z_u u(s) + \{s(U_1 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_\alpha\} \alpha(s) + \{-(Z_q + U_1)s + g \sin \theta_1\} \theta(s) = Z_{\delta_e} \delta_e(s) \quad (4.9)$$

$$-(M_u + M_{T_u})u(s) - (M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha + M_{T_\alpha})\alpha(s) + (s^2 - M_q s)\theta(s) = M_{\delta_e} \delta_e(s) \quad (4.10)$$

En écrivant les équations sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} (s - X_u - X_{T_u}) & -X_\alpha & g \cos \theta_1 \\ -Z_u & [s(U_1 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_\alpha] & [-(Z_q + U_1)s + g \sin \theta_1] \\ -(M_u + M_{T_u}) & -(M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha + M_{T_\alpha}) & (s^2 - M_q s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u(s)}{\delta_e(s)} \\ \frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} \\ \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

#### 4.2.2 Fonction de transfert du vol longitudinal

Par conséquent, la fonction de transfert reliant la vitesse à la déflexion de la gouverne de profondeur est exprimée par [23]:

$$\frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_u}{D_1} = \frac{A_u s^3 + B_u s^2 + C_u s + D_u}{A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1} \quad (4.12)$$

En outre, la fonction de transfert de l'angle d'attaque peut s'écrire:

$$\frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_\alpha}{D_1} = \frac{A_\alpha s^3 + B_\alpha s^2 + C_\alpha s + D_\alpha}{A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1} \quad (4.13)$$

La fonction de transfert d'angle de tangage est:

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_\theta}{D_1} = \frac{A_\theta s^2 + B_\theta s + C_\theta}{A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1} \quad (4.14)$$

Comme :

$$q(s) = s \cdot \theta(s) \quad (4.15)$$

En conséquence, la fonction de transfert du taux de tangage est:

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{s\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{A_\theta s^3 + B_\theta s^2 + C_\theta s}{(A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1)} \quad (4.16)$$

### 4.2. 3 Solution de l'équation caractéristique

Toutes les fonctions de transfert ont le même dénominateur  $D_1$ . Il est désigné par l'équation caractéristique suivante :

$$D_1 = As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E \quad (4.17)$$

Les coefficients polynomiales des fonctions de transfert sont déterminés à partir des expressions des coefficients de stabilités dimensionnels présentés dans la table 4.1. La stabilité du mouvement exige que les parties réelles des valeurs propres soient négatives. Il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs propres pour déterminer si certaines ont une partie réelle négative, on peut utiliser à cette fin le critère de Routh-Hurwitz [7] ;

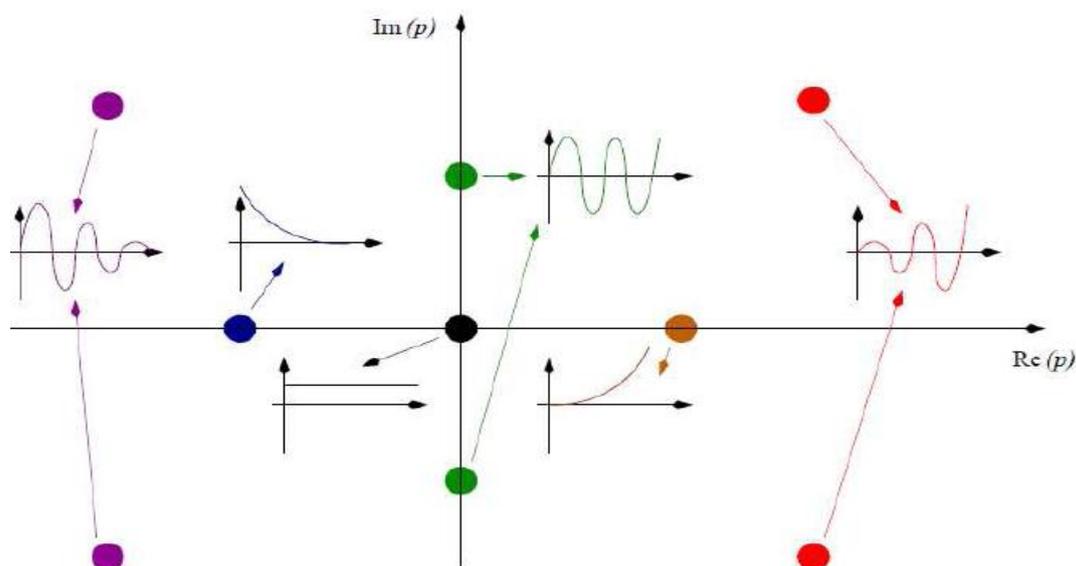


Figure 4.2 Influence de la position des pôles dans le plan complexe sur la réponse

L'étude de la stabilité dynamique dépend entièrement de l'équation caractéristique. Lorsqu'elle est égale à zéro, elle peut se mettre sous la forme suivante:

$$\left(s^2 + 2\xi_{sp}\omega_{n_{sp}}s + \omega_{n_{sp}}^2\right)\left(s^2 + 2\xi_{ph}\omega_{n_{ph}}s + \omega_{n_{ph}}^2\right) = 0 \quad (4.18)$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont:

$$s_{sp} = n_{sp} \pm j\omega_{sp} = \xi_{sp}\omega_{n_{sp}} \pm j\omega_{n_{sp}}\sqrt{1 - \xi_{sp}^2} \quad (4.19)$$

$$s_{ph} = n_{ph} \pm j\omega_{ph} = \xi_{ph}\omega_{n_{ph}} \pm j\omega_{n_{ph}}\sqrt{1 - \xi_{ph}^2} \quad (4.20)$$

Avec :

$$\omega_n = \sqrt{n^2 + w^2} \quad (4.21)$$

$$\xi = -\frac{n}{\sqrt{n^2 + w^2}} \quad (4.22)$$

$\zeta$  : Facteur d'amortissement

$\omega_n$ : Pulsation naturelle

$\omega$ : Pulsation amortie

Cela signifie que la réponse transitoire de l'avion se compose de deux termes, l'un fortement amorti et à haute fréquence appelé mode courte période (sp), et l'autre est très lentement amorti et à basse fréquence appelée mode phugoid (ph) [1].

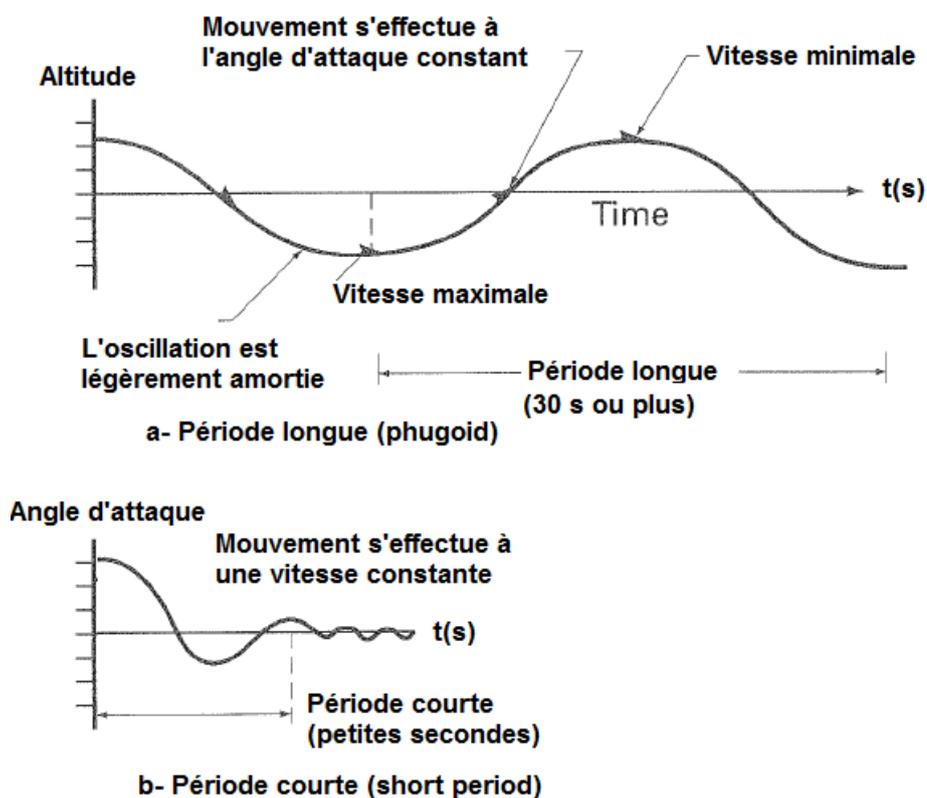


Figure 4.3 Modes phugoide et période courte

#### 4.2.4 Représentation d'état du vol longitudinal

Le système d'équation de (4.1) à (4.3) s'écrit sous la forme d'espace d'état :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (4.23)$$

Le vecteur d'espace état est :

$$X = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Le vecteur commande est donné par :

$$U = \begin{bmatrix} \Delta \delta_e \\ \Delta \delta_T \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

**Tableau 4.1** : Les dérivées dimensionnelles de la stabilité longitudinale [7].

$X_u = \frac{-\bar{q}_1 s (C_{D_u} + 2C_{D_1})}{mU_1}$	$(S^{-1})$	$M_u = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c} (C_{m_u} + 2C_{m_1})}{I_{yy} U_1}$	$\left(\frac{rad/S}{ft}\right)$
$X_{T_u} = \frac{\bar{q}_1 s (C_{T_{x_u}} + 2C_{T_{x_1}})}{mU_1}$	$(S^{-1})$	$M_{T_u} = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c} (C_{m_{T_u}} + 2C_{m_{T_1}})}{I_{yy} U_1}$	$\left(\frac{rad/S}{ft}\right)$
$X_\alpha = \frac{-\bar{q}_1 s (C_{D_\alpha} - C_{L_1})}{m}$	$\left(\frac{ft/S^2}{rad}\right)$	$M_\alpha = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c} C_{m_\alpha}}{I_{yy}}$	$(S^{-2})$
$X_{\delta_e} = \frac{-\bar{q}_1 s C_{D_{\delta_e}}}{m}$	$\left(\frac{ft/S^2}{rad}\right)$	$M_{T_\alpha} = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c} C_{m_{T_\alpha}}}{I_{yy}}$	$(S^{-2})$
$Z_u = \frac{-\bar{q}_1 s (C_{L_u} + 2C_{L_1})}{mU_1}$	$(S^{-1})$	$M_{\dot{\alpha}} = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c}^2 C_{m_{\dot{\alpha}}}}{2I_{yy} U_1}$	$(S^{-1})$
$Z_\alpha = \frac{-\bar{q}_1 s (C_{L_\alpha} + C_{D_1})}{m}$	$\left(\frac{ft/S^2}{rad}\right)$	$M_q = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c}^2 C_{m_q}}{2I_{yy} U_1}$	$(S^{-1})$
$Z_{\dot{\alpha}} = \frac{-\bar{q}_1 s \bar{c} C_{L_{\dot{\alpha}}}}{2mU_1}$	$\left(\frac{ft/S}{rad}\right)$	$M_{\delta_e} = \frac{\bar{q}_1 s \bar{c} C_{m_{\delta_e}}}{I_{yy}}$	$(S^{-2})$
$Z_q = \frac{-\bar{q}_1 s \bar{c} C_{L_q}}{2mU_1}$	$\left(\frac{ft/S}{rad}\right)$		
$Z_{\delta_e} = \frac{-\bar{q}_1 s C_{L_{\delta_e}}}{m}$	$\left(\frac{ft/S^2}{rad}\right)$		

La matrice d'état A [11] :

$$A = \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g \\ Z_u/u_0 & Z_\alpha & 1 & 0 \\ M_u + M_{\dot{w}}Z_u & M_w + M_{\dot{w}}Z_w & M_q + M_{\dot{w}}u_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

La matrice commande B [11]:

$$B = \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_T} \\ M_{\delta_e} + M_{\dot{w}}Z_{\delta_e} & M_{\delta_T} + M_{\dot{w}}Z_{\delta_T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

En utilisant comme variable l'angle d'attaque  $\alpha$  au lieu de la vitesse verticale, la nouvelle équation d'espace d'état est exprimée par :

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{\alpha} \\ \Delta \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & \mathbf{0} & -g \\ Z_u/u_0 & Z_\alpha & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ M_u + M_{\dot{w}}Z_u & M_w + M_{\dot{w}}Z_w & M_q + M_{\dot{w}}u_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \alpha \\ \Delta q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_T} \\ M_{\delta_e} + M_{\dot{w}}Z_{\delta_e} & M_{\delta_T} + M_{\dot{w}}Z_{\delta_T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_e \\ \Delta \delta_T \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Pour comprendre l'influence des paramètres de l'avion sur les caractéristiques dynamiques, on doit examiner analytiquement les fréquences et les amortissements.

#### 4.2.5 Approximation du mode courte période

Pour cette approximation, la variation de la vitesse est supposée négligeable ( $\Delta u = 0$ ) et l'équation longitudinale des forces est nulle, le système sous forme d'espace d'état se réduit à la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_w & U_0 \\ M_w + M_{\dot{w}}Z_w & M_q + M_{\dot{w}}U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta q \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

En s'intéressant à l'angle d'attaque comme variable, par conséquent le système matriciel devient :

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\alpha} \\ \Delta \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_\alpha}{U_0} & \mathbf{1} \\ M_\alpha + M_{\dot{\alpha}} \frac{Z_\alpha}{U_0} & M_q + M_{\dot{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta q \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Les valeurs propres de l'équation d'état sont calculées par :

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{Z_\alpha}{U_0} & -1 \\ -M_\alpha - M_{\dot{\alpha}} \frac{Z_\alpha}{U_0} & \lambda - (M_q + M_{\dot{\alpha}}) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.31)$$

Alors, les expressions de la fréquence et l'amortissement sont données par [11]:

$$w_{nsp} = \left( M_q \frac{Z_\alpha}{U_0} - M_\alpha \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta = \frac{M_q + M_\alpha + \frac{Z_\alpha}{U_0}}{2w_{nsp}} \quad (4.32)$$

#### 4.2.6 Approximation du mode longue période (Phugoïde)

L'approximation pour le mode de période longue est obtenue en négligeant l'angle d'attaque ( $\Delta\alpha = 0$ ) et l'équation du moment de tangage est nulle, le système matriciel d'espace d'état devient :

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{u} \\ \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & -g \\ -\frac{Z_u}{U_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Les valeurs propres de ce système :

$$|\lambda I - A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - X_u & g \\ \frac{Z_u}{U_0} & \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - X_u \lambda - \frac{Z_u g}{U_0} = 0 \quad (4.34)$$

La résolution de cette équation permet de trouver les expressions de la fréquence et de l'amortissement suivantes [11]:

$$w_{np} = \sqrt{\frac{-Z_u g}{U_0}} \quad \text{et} \quad \zeta_p = \frac{-X_u}{2w_{np}} \quad (4.35)$$

### 4.3 Stabilité dynamique latérale-directionnelle et réponse

#### 4.3.1 Equations latérales-directionnelles

Les équations du model latéral- directionnel pour des petites perturbations sont formulés par [7]:

$$m(\dot{v} + U_1 r) = mg\varphi \cos\theta + \bar{q}_1 s (c_{y_\beta} \beta + c_{y_p} \frac{pb}{2U_1} + c_{y_r} \frac{rb}{2U_1} + c_{y_{\delta_A}} \delta_A + c_{y_{\delta_R}} \delta_R) \quad (4.36)$$

$$I_{XX} \dot{p} - I_{XZ} \dot{r} = \bar{q}_1 s b \left( c_{l_\beta} \beta + c_{l_p} \frac{pb}{2U_1} + c_{l_r} \frac{rb}{2U_1} + c_{l_{\delta_A}} \delta_A + c_{l_{\delta_R}} \delta_R \right) \quad (4.37)$$

$$I_{ZZ} \dot{r} - I_{XZ} \dot{p} = \bar{q}_1 s b \left( c_{n_\beta} \beta + c_{n_T} \beta + c_{n_p} \frac{pb}{2U_1} + c_{n_r} \frac{rb}{2U_1} + c_{n_{\delta_A}} \delta_A + c_{n_{\delta_R}} \delta_R \right) \quad (4.38)$$

Les moments d'inertie sont définis dans le repère lié à l'avion, pour cela il faut utiliser la matrice de passage du repère lié à l'avion au repère de stabilité choisi, qui est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} I_{XX_S} \\ I_{ZZ_S} \\ I_{XZ_S} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \sin^2 \alpha_1 & -\sin 2\alpha_1 \\ \sin^2 \alpha_1 & \cos^2 \alpha_1 & \sin 2\alpha_1 \\ \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 & \cos 2\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{XX_B} \\ I_{ZZ_B} \\ I_{XZ_B} \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

Après la transformée de Laplace, les équations de mouvement deviennent :

$$(sU_1 - Y_\beta)\beta(s) - (sY_p + g \cos \theta_1)\phi(s) + s(U_1 - Y_r)\psi(s) = Y_\delta \delta(s) \quad (4.40)$$

$$-L_\beta \beta(s) + (s^2 - L_p s)\phi(s) - (s^2 A_1 + sL_r)\psi(s) = L_\delta \delta(s) \quad (4.41)$$

$$-(N_\beta + N_{T_\beta})\beta(s) - (s^2 B_1 + N_p s)\phi(s) + (s^2 - sN_r)\psi(s) = N_\delta \delta(s) \quad (4.42)$$

La forme matricielle des équations dynamiques est:

$$\begin{bmatrix} (sU_1 - Y_\beta) & -(sY_p + g \cos \theta_1) & s(U_1 - Y_r) \\ -L_\beta & (s^2 - L_p s) & -(s^2 A_1 + sL_r) \\ -(N_\beta + N_{T_\beta}) & -(s^2 B_1 + N_p s) & (s^2 - sN_r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\beta(s)}{\delta(s)} \\ \frac{\phi(s)}{\delta(s)} \\ \frac{\psi(s)}{\delta(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_\delta \\ L_\delta \\ N_\delta \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

L'entrée  $\delta$  présente l'angle de déflexion de la gouverne de direction  $\delta_R$  ou de l'aileron  $\delta_A$ .

#### 4.3.2 Fonction de transfert du vol latéral-directionnel

La fonction de transfert reliant l'angle de dérapage à la déflexion de la gouverne de direction ou bien l'aileron est donnée par [7]:

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)} = \frac{N_\beta}{D_2} = \frac{s(A_\beta s^3 + B_\beta s^2 + C_\beta s + D_\beta)}{s(A_2 s^4 + B_2 s^3 + C_2 s^2 + D_2 s + E_2)} \quad (4.44)$$

Puis le rapport d'angle de roulis  $\frac{\varphi(s)}{\delta(s)}$  est donné par :

$$\frac{\varphi(s)}{\delta(s)} = \frac{N_\varphi}{D_2} = \frac{s(A_\varphi s^2 + B_\varphi s + C_\varphi)}{s(A_2 s^4 + B_2 s^3 + C_2 s^2 + D_2 s + E_2)} \quad (4.45)$$

Finalement, le rapport d'angle de direction  $\frac{\Psi(s)}{\delta(s)}$  est exprimé par :

$$\frac{\Psi(s)}{\delta(s)} = \frac{N\Psi}{\bar{D}_2} = \frac{A\Psi s^3 + B\Psi s^2 + C\Psi s + D\Psi}{s(A_2s^4 + B_2s^3 + C_2s^2 + D_2s + E_2)} \quad (4.46)$$

**Tableau 4.2 :** Les dérivées dimensionnelles de la stabilité latérale-directionnelles [7].

$Y_\beta = \frac{\bar{q}_1 s c_{y_\beta}}{m} \quad (ft \quad sec^{-2})$	$L_{\delta_A} = \frac{\bar{q}_1 s b c_{l_{\delta_A}}}{I_{XX}} \quad (sec^{-2})$
$Y_p = \frac{\bar{q}_1 s b c_{y_p}}{2mU_1} \quad (ft \quad sec^{-1})$	$L_{\delta_R} = \frac{\bar{q}_1 s b c_{l_{\delta_R}}}{I_{XX}} \quad (sec^{-2})$
$Y_r = \frac{\bar{q}_1 s b c_{y_r}}{2mU_1} \quad (ft \quad sec^{-1})$	$N_\beta = \frac{\bar{q}_1 s b c_{n_\beta}}{I_{ZZ}} \quad (sec^{-2})$
$Y_{\delta_A} = \frac{\bar{q}_1 s c_{y_{\delta_A}}}{m} \quad (ft \quad sec^{-2})$	$N_{T_\beta} = \frac{\bar{q}_1 s b c_{n_{T_\beta}}}{I_{ZZ}} \quad (sec^{-2})$
$Y_{\delta_R} = \frac{\bar{q}_1 s c_{y_{\delta_R}}}{m} \quad (ft \quad sec^{-2})$	$N_p = \frac{\bar{q}_1 s b^2 c_{n_p}}{2I_{ZZ}U_1} \quad (sec^{-1})$
$L_\beta = \frac{\bar{q}_1 s b c_{l_\beta}}{I_{XX}} \quad (sec^{-2})$	$N_r = \frac{\bar{q}_1 s b^2 c_{n_r}}{2I_{ZZ}U_1} \quad (sec^{-1})$
$L_p = \frac{\bar{q}_1 s b^2 c_{l_p}}{2I_{XX}U_1} \quad (sec^{-2})$	$N_{\delta_R} = \frac{\bar{q}_1 s b c_{n_{\delta_R}}}{I_{ZZ}} \quad (sec^{-2})$
$L_r = \frac{\bar{q}_1 s b^2 c_{l_r}}{2I_{XX}U_1} \quad (sec^{-2})$	$N_{\delta_A} = \frac{\bar{q}_1 s b c_{n_{\delta_A}}}{I_{ZZ}} \quad (sec^{-2})$

#### 4.3.3 Solution de l'équation caractéristique en vol latéral-directionnel

L'étude de la stabilité dynamique dépend entièrement des racines de l'équation caractéristique pour le cas latéral-directionnel qui est donnée par :

$$As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E = 0 \quad (4.47)$$

Où les coefficients  $A$  à  $E$  sont indiqués par l'équation (4.47).

L'identification des quatre racines de l'équation caractéristique  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$  permet de montrer que dans le cas des mouvements latéral-directionnels, il y a trois modes.

- Deux modes sont réelles ;
- Un mode complexe ;

Il est possible de déterminer le comportement de stabilité de l'avion sans calculer les racines de l'équation caractéristique. Ceci a été fait par l'utilisation du critère de stabilité de *Routh*. Ce critère exige :

$$A, B, C, D, E > 0 \quad \text{et} \quad D(BC - AD) - B^2E > 0 \quad (4.48)$$

Les trois fonctions de transfert précédentes possèdent le même dénominateur qui peut être traité de la même façon, l'application du critère de stabilité de Routh permet de connaître la stabilité du système et le coefficient  $E$  exprimé par la relation suivante :

$$E = g \cos \theta_1 (L_\beta N_r - N_\beta L_r) = 0 \quad (4.49)$$

Quand  $E$  change de signe et lorsqu'il devient négatif, cela signifie qu'une racine réelle passe vers la partie positive et le mouvement de l'avion diverge, ce type de divergence s'appelle 'divergence en spirale'.

Dans le cas pratique, ces racines peuvent être calculées en connaissant les dérivés des coefficients de stabilité, les quantités d'inertie et les conditions de vol. Avec cette information il est possible de trouver les racines de l'équation caractéristique.

En général, dans le cas de la stabilité latérale-directionnelle, la réponse transitoire de l'avion contient les trois termes suivants :

- Terme de convergence lente : mode spiral
- Terme de convergence rapide : mode de roulis
- Terme amortis lentement : mode roulis hollandais.

Le caractère individuel de ces modes peut être d'une grande importance pour le pilote. Pour cette raison, ces trois mouvements caractéristiques seront examinés en détail par la suite.

#### 4.3.4 Représentation d'état du vol longitudinal latéral-directionnel

Le système d'équation s'écrit de la manière suivante [11] :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (4.50)$$

Le vecteur d'état X:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \varphi \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Le vecteur commande est donné par :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Delta \delta_a \\ \Delta \delta_r \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

La matrice d'état A :

$$A = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p & -(u_0 - Y_r) & g \cos \theta_0 \\ L_v & L_p & L_r & 0 \\ N_v & N_p & N_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

La matrice commande B :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & Y_{\delta_r} \\ L_{\delta_a} & L_{\delta_r} \\ N_{\delta_a} & N_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

L'utilisation de l'angle de dérapage  $\beta$  dans l'équation d'état permet d'avoir la nouvelle forme:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\beta} \\ \Delta \dot{p} \\ \Delta \dot{r} \\ \Delta \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_\beta}{u_0} & \frac{Y_p}{u_0} & -\left(1 - \frac{Y_r}{u_0}\right) & \frac{g \cos \theta_0}{u_0} \\ L_\beta & L_p & L_r & 0 \\ N_\beta & N_p & N_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{Y_{\delta_r}}{u_0} \\ L_{\delta_a} & L_{\delta_r} \\ N_{\delta_a} & N_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_a \\ \Delta \delta_r \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

#### 4.3.5 Approximation du mode spiral

Le mode spiral est l'évolution dans le temps de l'angle de roulis de l'avion après que les commandes (ailerons) soient retournées à la position neutre ; on désire que la stabilité du mode spiral soit neutre ou légèrement stable. Cependant, une spirale légèrement instable est possible sur les avions de hautes performances.

Le mode spiral d'un mouvement est dominé par l'angle de roulis et l'angle de cap quand le dérapage est très petit. Ce qui conduit à la simplification suivante des équations de mouvement en deux degrés de liberté :

$$\begin{bmatrix} -L_\beta & -s(sA_1 + L_r) \\ -N_\beta & s(s - N_r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\beta(s)}{\delta(s)} \\ \frac{\dot{\psi}(s)}{\delta(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_\delta \\ N_\delta \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

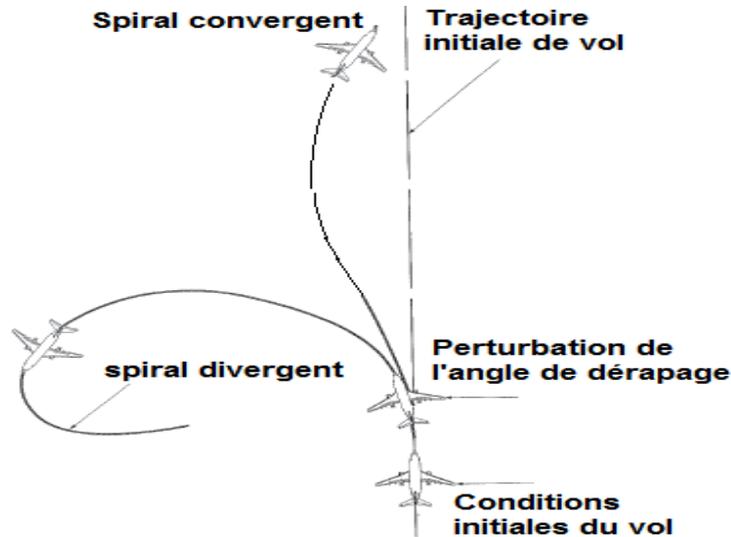


Figure 4. 4 : Mode spiral

La stabilité de l'avion est déterminée en fonction des racines de l'équation caractéristique suivante :

$$-L_\beta(s - N_r) - N_\beta(sA_1 + L_r) = 0 \quad (4.57)$$

On obtient :

$$s = \frac{L_\beta N_r - N_\beta L_r}{L_\beta + N_\beta A_1} \quad (4.58)$$

Pour la plupart des avions, ils vérifient la relation :

$$N_\beta A_1 \ll L_\beta \quad (4.59)$$

Ce qui donne :

$$s \approx \frac{L_\beta N_r - N_\beta L_r}{L_\beta} \quad (4.60)$$

Lorsque  $L_\beta < 0$ , cette racine est négative (stable) puisque :

$$(L_\beta N_r - N_\beta L_r) > 0 \quad (4.61)$$

Un exemple d'un mode spiral vu par un observateur extérieur est montré par la figure 4.4

#### 4.3.6 Approximation du mode roulis

On tentera d'établir des expressions approchées pour les modes transversales. Il existe des approximations pour chaque mode. Il est approximé à un mouvement de roulis caractérisé seulement par l'angle  $\Phi$ . Le mode de roulis qui survient par la suite du braquage asymétrique des ailerons ; l'équation de mouvement devient :

$$(s^2 - L_p s) \frac{\phi(s)}{\delta_A(s)} = L_{\delta_A} \quad (4.62)$$

Et la fonction de transfert :

$$\frac{\phi(s)}{\delta_A(s)} = \frac{L_{\delta_A}}{s(s - L_p)} \quad (4.63)$$

On constate que l'équation caractéristique admet deux racines :  $s=0$  et  $s=L_p$

La première racine indique qu'il existe une instabilité selon l'angle de roulis, alors que la deuxième racine est toujours négative puisque  $L_p < 0$ .

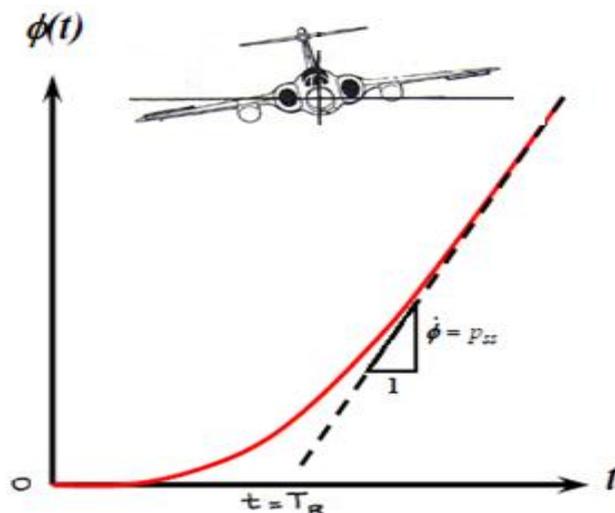


Figure 4. 5 : Mode de roulis

L'équation qui décrit la réponse de l'avion en fonction du temps est obtenue en utilisant la transformée inverse de Laplace ce qui donne :

$$\phi(t) = -\frac{L_{\delta_A} \delta_A}{L_p} t + \frac{L_{\delta_A} \delta_A}{L_p^2} (e^{L_p t} - 1) \quad (4.64)$$

Le taux de roulis est obtenu en dérivant l'équation (4.63), donné par :

$$p(s) = s\phi(s) = \frac{L_{\delta_A} \delta_A}{s(s - L_p)} \quad (4.65)$$

L'utilisation de la transformée inverse de Laplace, permet d'obtenir :

$$p(t) = \dot{\phi}(t) = -\frac{L_{\delta_A} \delta_A}{L_p} (-e^{L_p t} + 1) \quad (4.66)$$

La réponse du taux de roulis pour un incrément donné du braquage d'aileron,  $\delta_A$  est également représentée dans la figure 4.5

Lorsque le temps tend vers l'infini :

$$p(t = \infty) = \underset{\text{stationnaire}}{p} = p_{ss} = -\frac{L_{\delta_A} \delta_A}{L_p} \quad (4.67)$$

Ce qui représente le taux de roulis en état de vol stabilisé. De même, lorsque la constante du temps de roulis  $T_R$  :

$$t = \frac{-1}{L_p} = T_R \quad (4.68)$$

Le taux de roulis est donné par :

$$p(T_R) = -\frac{L_{\delta_A} \delta_A}{L_p} (-e^{-1} + 1) = p_{ss} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.63 p_{ss} \quad (4.69)$$

Un exemple d'un mode de roulis vu par un observateur extérieur est montré par la figure 4.5

### 4.3.7 Approximation du mode roulis hollandais

Le roulis hollandais est un mouvement transversal oscillatoire faiblement amorti avec une courte période à basse vitesse affectant un couplage lacet-roulis et le dérapage. Pour des avions avec un effet dièdre faible, le mode consiste

principalement en dérapage et en lacet. Les équations de mouvement simplifiées sont données par :

$$\begin{bmatrix} (sU_1 - Y_\beta) & s(U_1 - Y_r) \\ -N_\beta & (s^2 - sN_r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\beta(s)}{\delta(s)} \\ \frac{\dot{\psi}(s)}{\delta(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_\delta \\ N_\delta \end{Bmatrix} \quad (4.70)$$

L'équation caractéristique est :

$$(sU_1 - Y_\beta)(s^2 - sN_r) + N_\beta s(U_1 - Y_r) = 0 \quad (4.71)$$

En développant les calculs, elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$s \left\{ s^2 - s \left( N_r + \frac{Y_\beta}{U_1} \right) + \left( \frac{Y_\beta N_r}{U_1} + N_\beta - \frac{N_\beta Y_r}{U_1} \right) \right\} = 0 \quad (4.72)$$

La première racine nulle rend compte de la stabilité neutre de lacet. En comparant le deuxième terme qui consiste à un polynôme du second degré représentant le mode du roulis hollandais, par conséquent :

$$w_{n_d} = \sqrt{\frac{1}{U_1} (Y_\beta N_r + N_\beta U_1 - N_\beta Y_r)} \quad (4.74)$$

Et

$$\zeta_D = \frac{-1}{2\omega_{n_d}} \left( N_r + \frac{Y_\beta}{U_1} \right) \quad (4.75)$$

$$(s^2 + 2\zeta_D w_{n_d} s + w_{n_d}^2) = 0 \quad (4.76)$$

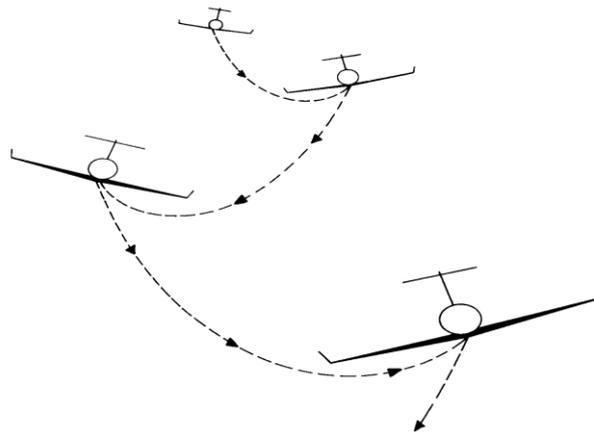


Figure 4. 6 : Mode de roulis hollandais

La plupart des avions de transport modernes présentant des ailes en flèche ont des valeurs très grandes concernant la dérivée du coefficient de moment de roulis  $C_l/\beta$  ainsi que le moment d'inertie  $I_{XZ}$ .

#### 4.3.8 Réponse à une commande:

La réponse de l'avion pour un braquage des ailerons et de la gouverne de direction est déterminée à l'aide des fonctions de transfert sous la forme standard, on obtient :

- **Pour les ailerons :**

$$\frac{\beta(s)}{\delta_A(s)} = K_{\beta\delta_A} \frac{(T_{\beta_{A_1}} s + 1)(T_{\beta_{A_2}} s + 1)}{(T_S s + 1)(T_R s + 1) \left( \frac{s^2}{\omega_{n_D}^2} + \frac{2\zeta_D}{\omega_{n_D}} s + 1 \right)} \quad (4.76)$$

$$\frac{\phi(s)}{\delta_A(s)} = K_{\phi\delta_A} \frac{\left( \frac{s^2}{\omega_{n_{\phi_A}}^2} + \frac{2\zeta_{\phi_A}}{\omega_{n_{\phi_A}}} s + 1 \right)}{(T_S s + 1)(T_R s + 1) \left( \frac{s^2}{\omega_{n_D}^2} + \frac{2\zeta_D}{\omega_{n_D}} s + 1 \right)} \quad (4.77)$$

$$\frac{\psi(s)}{\delta_A(s)} = K_{\psi\delta_A} \frac{(T_{\psi_A} s + 1) \left( \frac{s^2}{\omega_{n_{\psi_A}}^2} + \frac{2\zeta_{\psi_A}}{\omega_{n_{\psi_A}}} s + 1 \right)}{s(T_S + 1)(T_R + 1) \left( \frac{s^2}{\omega_{n_D}^2} + \frac{2\zeta_D}{\omega_{n_D}} s + 1 \right)} \quad (4.78)$$

- **Pour la gouverne de direction :**

$$\frac{\beta(s)}{\delta_R(s)} = K_{\beta\delta_R} \frac{(T_{\beta_{R_1}} s + 1)(T_{\beta_{R_2}} s + 1)(T_{\beta_{R_3}} s + 1)}{(T_S s + 1)(T_R s + 1) \left( \frac{s^2}{\omega_{n_D}^2} + \frac{2\zeta_D}{\omega_{n_D}} s + 1 \right)} \quad (4.79)$$

$$\frac{\phi(s)}{\delta_R(s)} = K_{\phi\delta_R} \frac{(T_{\phi_{R_1}} s + 1)(T_{\phi_{R_2}} s + 1)}{(T_S s + 1)(T_R s + 1) \left( \frac{s^2}{\omega_{n_D}^2} + \frac{2\zeta_D}{\omega_{n_D}} s + 1 \right)} \quad (4.80)$$

$$\frac{\psi(s)}{\delta_R(s)} = K_{\psi\delta_R} \frac{(T_{\psi_R}s+1) \left( \frac{s^2}{\omega_{n_{\psi_R}}^2} + \frac{2\zeta_{\psi_R}}{\omega_{n_{\psi_R}}}s+1 \right)}{s(T_Ss+1)(T_Rs+1) \left( \frac{s^2}{\omega_{n_D}^2} + \frac{2\zeta_D}{\omega_{n_D}}s+1 \right)} \quad (4.81)$$

Pour obtenir les variables du mouvement en fonction du temps, il est nécessaire de passer par la transformée inverse de Laplace et on trouve :

$$\beta(t) = K_{\beta_0} + K_{\beta_1} e^{\lambda_1 t} + K_{\beta_2} e^{\lambda_2 t} + K_{\beta_3} e^{\lambda_3 t} + K_{\beta_4} e^{\lambda_4 t} \quad (4.82)$$

$$\phi(t) = K_{\phi_0} + K_{\phi_1} e^{\lambda_1 t} + K_{\phi_2} e^{\lambda_2 t} + K_{\phi_3} e^{\lambda_3 t} + K_{\phi_4} e^{\lambda_4 t} \quad (4.83)$$

$$\psi(t) = K_{\psi_0} + K_{\psi_1} e^{\lambda_1 t} + K_{\psi_2} e^{\lambda_2 t} + K_{\psi_3} e^{\lambda_3 t} + K_{\psi_4} e^{\lambda_4 t} \quad (4.84)$$

Finalement, la réponse de l'avion est fonction de plusieurs termes ; le premier indépendant du temps correspondant à l'état stabilisé et les autres termes restant correspondent à l'état transitoire.

#### 4.3.9 Analyse de sensibilité du vol latéral-directionnel

Il a été signalé précédemment que la stabilité dynamique de l'avion dépend des racines des équations caractéristiques des fonctions de transfert, Tant dis que le changement de ces racines est lié aux conditions de vol telle que la répartition de la masse d'avion (position du centre de gravité par rapport au centre aérodynamique) ; alors, un changement dans la configuration de l'avion modifie immédiatement la grandeur et même le signe de quelques racines.

Pour bien étudier ces variations, il est nécessaire de tracer les courbes des paramètres de mouvement en fonction de la variation de ces racines pour les coefficients de stabilité jugés importants. Cette technique est appelée l'analyse de sensibilité selon la variation des racines, elle est utilisée pour :

- Déterminer les coefficients de stabilité les plus importants.
- Aide aux ingénieurs de la conception des avions d'obtenir les meilleurs caractéristiques d'amortissements de la stabilité et de contrôle en cas des modifications désirées.

## Conclusion :

L'étude de la stabilité dynamique de l'avion s'appuie sur la théorie linéarisée des petits mouvements autour d'un point d'équilibre. Les six degrés de liberté sont tous considérés, mais la linéarisation et les symétries conduisent à un découplage entre, d'une part, la dynamique longitudinale qui régit le mouvement de tangage, l'angle d'attaque et la vitesse et d'autre part, la dynamique latérale-directionnelle qui concerne les mouvements de roulis, de lacet et de dérapage. Dans les deux cas, l'analyse permet d'établir les fonctions de transfert, qui sont nécessaires à l'étude de la dynamique de l'avion.

La dynamique longitudinale est caractérisée, sur un avion, par deux modes oscillatoires. Le premier est une oscillation d'angle d'attaque à période courte, de l'ordre de la seconde; causée essentiellement par la dérivée de stabilité de moment de tangage  $C_{m\alpha}$ , cette oscillation constitue le mouvement transitoire vers l'angle d'attaque d'équilibre, après un braquage de la gouverne de profondeur. L'amortissement aérodynamique naturel est affecté par les dérivées de stabilité  $C_{mq}$  et  $C_{z\dot{\alpha}}$ . Le second mode est l'oscillation phugoïde à période longue (de l'ordre de la minute), qui affecte surtout le mouvement du centre de gravité et s'établit à l'angle d'attaque fixe; la cause de cette oscillation réside dans l'échange entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de l'avion, au cours des alternances de montée et de descente. Très lente à grande vitesse, cette oscillation est généralement bien contrôlée par le pilote.

La dynamique latérale-directionnelle est caractérisée par deux modes exponentiels et un mode oscillatoire. Le mode de roulis correspond à la mise en vitesse de roulis à la suite d'un braquage d'ailerons; affecté par le coefficient de stabilité  $C_{lp}$ , il est à peine perçu par le pilote car sa constante de temps est très courte (une fraction de seconde).

Le mode spiral, toujours lent, se présente, lorsqu'il est divergent, comme un engagement progressif en virage sans action sur les gouvernes (instabilité spirale); à l'inverse, s'il est convergent, il ramène en vol horizontal l'avion

initialement perturbé; la stabilité du mode spiral dépend des dérivées de stabilité  $C_{l\beta}$ ,  $C_{nr}$ ,  $C_{n\beta}$  et  $C_{lr}$ . L'oscillation de lacet, à laquelle le roulis participe plus ou moins (roulis hollandais), provient du coefficient de la dérivée de stabilité  $C_{n\beta}$ , dont l'effet tend à annuler le dérapage; le couplage complexe entre le lacet et le roulis, résulte de plusieurs causes conjuguées dont le coefficient de la dérivée de stabilité  $C_{l\beta}$  (effet de dièdre) est la principale mais non la seule; l'oscillation de lacet peut, sur certains avions de combat, devenir inacceptable sans l'aide du système automatique de commande, surtout en cas de roulis hollandais prononcé.

## CHAPITRE5: SIMULATION ET INTERPRETATION DES RESULTATS

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'analyse de la stabilité concernant quatre types d'avions de missions différentes suite aux perturbations générées par l'action sur les surfaces de contrôles (gouverne de profondeur, aileron et direction) :

- Ryan Navion
- Boeing 747-200
- Learjet M24
- McDonnell Douglas F-4C

L'analyse de la stabilité de chaque avion est faite individuellement. Dans la première partie, la stabilité statique complète sera examinée à travers les dix critères suggérés par les spécialistes [31] et ensuite la courbe du coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'attaque est tracée à partir du programme conçu en Matlab.

La deuxième partie est consacrée à la stabilité dynamique. D'une part, le cas linéaire sera traité par la théorie matricielle d'espace d'état ; la méthode est dite exacte en tenant compte dans les calculs de tous les éléments de la matrice et elle est approximée en réduisant l'ordre de la matrice afin d'obtenir une solution analytique et aussi pour diminuer le temps de calcul. En plus, une autre approche qui consiste à l'utilisation de l'outil mathématique du transformée de Laplace aboutit à la fonction de transfert permet également d'obtenir toutes les caractéristiques dynamiques du vol et la réponse de l'avion. D'autre part, le cas non linéaire est résolu par deux procédés différents ; le premier est d'utiliser un second programme élaboré en Matlab basé sur l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 qui résout un système de neuf équations différentielles d'ordre 1 et le deuxième est d'exécuter une application développée sous le logiciel Simulink, tous les deux permettent de tracer la réponse de l'avion en actionnant les gouvernes.

La dernière partie est réservée au système de contrôle qui est inspiré de l'approche BlakeLock [41], il est basé sur la fonction de transfert obtenu précédemment utilisé en boucle fermée avec deux boucles, l'une est interne et l'autre est externe pour améliorer les caractéristiques dynamiques [83].

## 5.2 Avion Ryan Navion

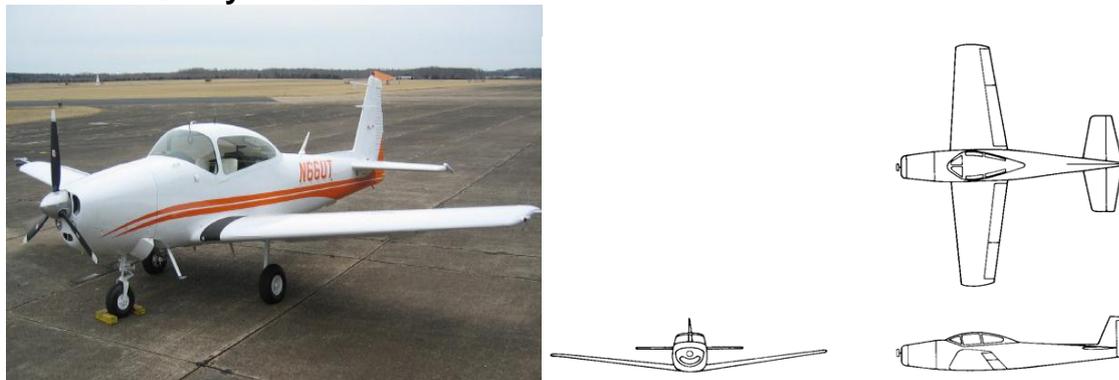


Figure 5.1 Avion Ryan Navion et ses trois vues

C'est est un avion léger américain à quatre places (un pilote et trois passagers) et équipé d'un seul moteur (continental E185), à l'origine conçu et construit par North American Aviation dans les années 1940. Il est construit par Ryan Aeronautical Company et la Tubular Steel Corporation.

### 5.2.1 Critères de stabilité statique

Un avion est classé comme étant statiquement stable ; si sa réponse dynamique satisfait aux critères générales de la stabilité statique du tableau 5.2 .

Tableau 5.1 : Dimensions géométriques, masse, inerties et condition du vol de l'avion Ryan Navion

Condition du vol		Poids et inerties		Géométrie	
Altitude (ft)	0	Poids (lbs)	2750	Surface alaire (ft <sup>2</sup> )	184
Vitesse (ft/s)	176	Inertie $I_{xx_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	1048	Envergure aile (ft)	33.4
Position du centre de gravité (fraction corde moyenne)	0.295	Inertie $I_{yy_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	3000	corde géométrique moyenne (ft)	5.7
Attitude Initial (deg)	2.5	Inertie $I_{zz_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	3530		
		Inertie $I_{xz_B}$	0		

	(slug.ft <sup>2</sup> )			
--	-------------------------	--	--	--

L'analyse du tableau 5.2 montre une stabilité marginale de l'avion Ryan Navion en termes du coefficient de stabilité  $C_{m_u}$ . Cette condition peut être contrôlée par le pilote.

Tableau 5.2 : Les dix critères de la stabilité statique de l'avion Ryan Navion

<b>Critères de stabilité statique (CSS)</b>			
CSS1	$(C_{T_{X_u}} - C_{D_u}) < 0$	$C_{T_{X_u}} = 0.0, C_{D_u} = 0.0$	marginalement stable
CSS2	$C_{Y_\beta} < 0$	$C_{Y_\beta} = -0.564$	Stable
CSS3	$C_{L_\alpha} > 0$	$C_{L_\alpha} = 4.44$	Stable
CSS4	$C_{m_\alpha} < 0$	$C_{m_\alpha} = -0.683$	Stable
CSS5	$C_{n_\beta} > 0$	$C_{n_\beta} = -0.071$	Instable
CSS6	$C_{l_p} < 0$	$C_{l_p} = -0.410$	Stable
CSS7	$C_{m_q} < 0$	$C_{m_q} = -9.96$	Stable
CSS8	$C_{n_r} < 0$	$C_{n_r} = -0.125$	Stable
CSS9	$C_{l_\beta} < 0$	$C_{l_\beta} = -0.074$	Stable
CSS10	$C_{m_u} > 0$	$C_{m_u} = 0.0$	marginalement stable

Dans le même contexte, la figure 5.2 montre les trois contributions au coefficient du moment de tangage de l'avion : la contribution de l'aile, du fuselage et l'empennage horizontal :

- 1- La pente du coefficient de moment de l'aile en fonction de l'angle d'attaque  $\alpha$  est positive et le  $C_{m_0}$  est négatif, ce qui ne vérifie pas le critère de stabilité statique longitudinale par conséquent la contribution de l'aile est déstabilisante.
- 2- Le fuselage présente une pente positive du coefficient de moment de tangage en fonction de l'angle d'attaque  $\alpha$  et un  $C_{m_0}$  négatif, ce qui ne vérifie pas aussi les deux critères de la stabilité statique longitudinale par conséquent le fuselage déstabilise l'avion.
- 3- L'empennage horizontal présente une pente négative du coefficient de moment de tangage et un  $C_{m_{0t}}$  positif. Sa contribution au coefficient de moment de l'avion est positive, elle est accomplie par l'ajustement de l'angle de calage de l'empennage à une valeur négative par rapport à la ligne de référence de fuselage et le choix adéquat du coefficient du volume de l'empennage (VH).

Les deux conditions de stabilité statique du moment longitudinale de cet avion sont :

$$C_{m_0} = 0,057 \text{ et } C_{m_\alpha} = -1,107$$

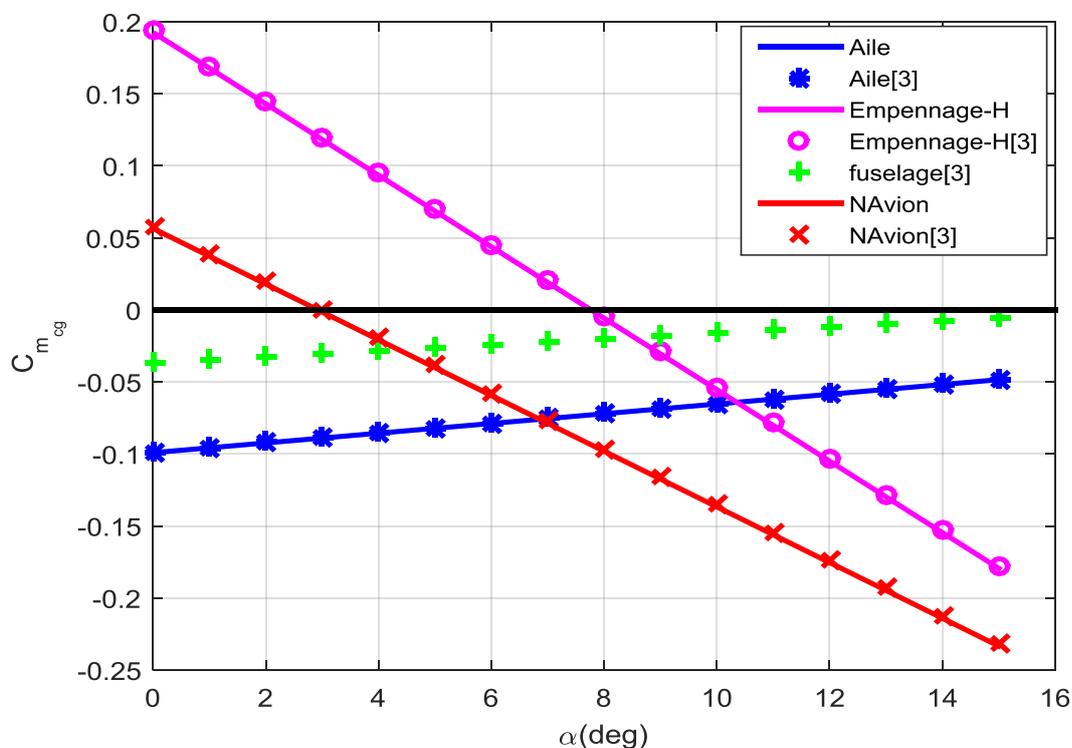


Figure 5.2 Coefficient du moment en fonction de l'angle d'attaque de NAVION

- ✓ Comme le coefficient de moment pour un angle d'attaque nul est positif et la pente du coefficient du moment de tangage est négative alors les deux conditions de la stabilité statique longitudinale sont vérifiées, l'avion présente une stabilité statique longitudinale positive. Le centre de gravité d'un avion varie durant le vol, il est important de savoir les limites du déplacement de centre de gravité. Pour assurer la stabilité statique longitudinale de l'avion, nous voulons savoir à quel point l'avion change l'état de stabilité c'est lorsque  $C_{m_\alpha} = 0$  qui correspond au point neutre. Si le centre de gravité atteint ce point, la stabilité de l'avion sera indifférente. Mais si le centre de gravité dépasse le point neutre l'avion sera instable. Pour cet avion, le point neutre adimensionnel trouvé est de .5923 de signe positif par conséquent la stabilité statique longitudinale est assurée. La valeur donnée par la référence [11] est de 0.55, dans ce cas, l'erreur relative commise est de 7.69%. D'autre part,

la marge de stabilité statique calculée par notre programme est de 15.38% de la corde aérodynamique moyenne, ce qui satisfait les règles de certifications qui exigent des valeurs supérieurs à 5% [11, 25, 59].

## 5.2.2 Modèle linéaire

Un exemple d'analyse concerne l'avion Ryan Navion [11]. Les conditions du vol, masse, inerties et dimensions géométriques sont présentées dans le tableau 5.1 et les coefficients aérodynamiques et de stabilité sont donnés en annexe A

### 5.2.2.1 Vol longitudinal

C'est l'étude du mouvement transitoire dans le plan vertical suite à l'action du pilote sur les commandes longitudinales (manche en tangage et manette des gaz) ou une rafale verticale. Le calcul des dérivées de stabilité dimensionnelles par le programme élaboré et ensuite comparé à celles de la référence [11] ;

La linéarisation des équations conduit à une représentation d'état sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{Lon}x + B_{Lon}u \\ y &= C_{Lon}x + D_{Lon}u \end{aligned} \quad (5.1)$$

$x$ ,  $y$  et  $u$  sont respectivement des vecteurs d'état, de sortie et de commande

$A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont respectivement les matrices d'état, de commande, d'observation et d'application de la commande

Connaissant les conditions de vol de l'avion, sa géométrie, son poids et ses inerties ainsi que les coefficients aérodynamiques et de stabilité, on peut déterminer par les programmes élaborés en langage Fortran et Matlab les valeurs des coefficients dimensionnelles de stabilité et par conséquent tous les éléments de la matrice  $A$  pour étudier le *mouvement longitudinal de l'avion*, on obtient :

$$A_{Lon} = \begin{bmatrix} -0.0451 & 0.0361 & 0.0000 & -32.2 \\ -0.3697 & -2.0243 & 176.00 & 0.0000 \\ 0.0019 & -0.0395 & -2.9858 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Tableau 5.3 : Coefficients dimensionnelles de stabilité longitudinale de l'avion Ryan Navion

Coefficients de stabilité dimensionnels	Unités	Résultats obtenus	Référence [11]	Erreur(%) : $\frac{ (X - X_{[11]}) }{X_{[11]}} \cdot 10$
$X_u$	(s <sup>-1</sup> )	-0.045085	-0.045	0.188889
$X_{Tu}$	(s <sup>-1</sup> )	0.045085	-	-
$X_\alpha$	ft/(rad. s <sup>2</sup> )	6.348018	-	-
$X_w$	(s <sup>-1</sup> )	0.036068	0.036	0.188893
$X_{\dot{w}}$	(s <sup>-2</sup> )	-	0	-
$X_q$	ft/(rad. s)	-	0	-
$Z_u$	(s <sup>-1</sup> )	-0.369700	-0.369	0.189709
$Z_\alpha$	ft/(rad. s <sup>2</sup> )	-356.282534	-	-
$Z_{\dot{\alpha}}$	ft/(rad. s)	0	-	-
$Z_w$	(s <sup>-1</sup> )	-2.024333	-2.02	0.214506
$Z_{\dot{w}}$	(s <sup>-2</sup> )	0	0	0
$Z_q$	ft/(rad. s)	0	0	0
$M_u$	(rad/ft.s)	0	0	0
$M_{Tu}$	(rad/ft.s)	0	-	-
$M_\alpha$	(s <sup>-2</sup> )	-8.794260	-	-
$M_w$	(rad/ft.s)(ra	-0.049967	-0.05	0.066005
$M_{\dot{w}}$	d/ft. s <sup>2</sup> )	-0.005165	-0.0051	1.
$M_{T\alpha}$	(s <sup>-2</sup> )	0	-	274506
$M_{\dot{\alpha}}$	(s <sup>-1</sup> )	-0.909070	-	-
$M_q$	(s <sup>-1</sup> )	-2.076683	-2.05	1.301614
$X_{\delta e}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	0	-	-
$Z_{\delta e}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	-28.169332	-	-
$M_{\delta e}$	(s <sup>-2</sup> )	-11.884484	-	-

Egalement, pour cet avion et avec les mêmes données, la matrice longitudinale obtenue par R.Neylson [11] est :

$$A_{Lon[11]} = \begin{bmatrix} -0.045 & 0.036 & 0.0000 & -32.2 \\ -0.369 & -2.02 & 176.00 & 0.0000 \\ 0.0019 & -0.0396 & -2.948 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

On s'aperçoit que les éléments de la matrice sont presque identiques car une légère différence est observée à une précision de l'ordre de  $10^{-4}$ .

La matrice commande obtenue est :

$$B_{\text{Lon}} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -28.1693 \\ -11.7390 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

La solution exacte de l'équation caractéristique du vol longitudinal aboutit aux *valeurs propres et les caractéristiques dynamiques du tableau 5.4*

Tableau 5.4: Caractéristiques dynamiques longitudinales Ryan Navion

<b>Valeurs propres</b>	<b>Facteur d'amortissement (<math>\xi</math>)</b>	<b>Pulsations propre (<math>\omega_n</math>)</b>	<b>Modes</b>
$-2.5105 \pm 2.5918i$	0.695749	3.608291	Période courte
$-0.0171 \pm 0.2131i$	0.080099	0.213744	Phugoïde

Le calcul des valeurs propres a permis d'obtenir une paire de solutions qui sont complexes et conjugués avec les parties réelles négatives, ce qui signifie que le mouvement longitudinal est dynamiquement stable.

Le mode période longue ou « phugoïde » est celui dans lequel il y a une variation de l'amplitude de la vitesse, d'altitude et de l'angle de tangage. L'angle d'attaque demeure presque constant. Ce mode est un échange lent de l'énergie cinétique et potentielle alors que l'avion tente de rétablir son vol d'état d'équilibre d'où il avait été perturbé [23]. L'amortissement est très faible, la période est lente et le pilote peut généralement lui-même contrôler cette oscillation.

Le mode de période courte ou simplement « Short period » est une oscillation fortement amortie sur une période. Il y a essentiellement une variation de l'angle d'attaque et de l'angle de tangage. Le mouvement est généralement assez rapide pour que la vitesse et l'altitude n'aient le temps de changer, ainsi elles demeurent presque constantes.

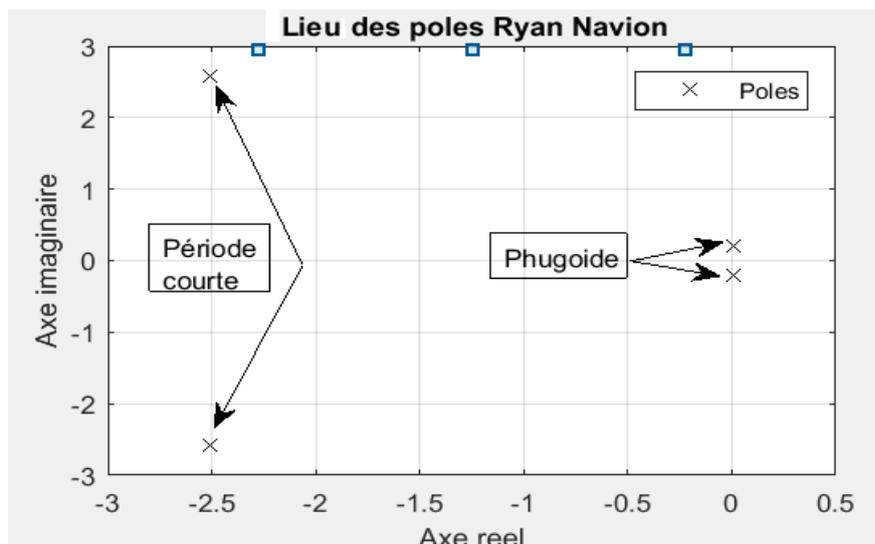


Figure 5.3 Lieux des racines du mode longitudinal

Comme tous les pôles sont localisés dans le plan complexe et présentent des parties réelles négatives par conséquent, ils sont stables. De même, le système est oscillatoire amorti car les pôles ont aussi des parties imaginaires.

L'avion est caractérisé par un comportement différent selon la valeur du facteur d'amortissement et ce dernier dépend des dérivées de stabilité dimensionnelles.

#### - Les fonctions de transfert dans le cas du vol longitudinal

Les rapports des variables  $u(s)$ ,  $w(s)$ ,  $q(s)$  et  $\theta(s)$  sur l'entrée  $\delta_e$  qui représente l'angle de déflexion de la gouverne de profondeur sont appelés les fonctions de transfert dans le plan longitudinal, leurs intérêts est de pouvoir déterminer le spectre des réponses de l'avion. Il suffit juste d'avoir un signal d'entrée qui représente le braquage de la gouverne de profondeur et la fonction de transfert s'occupe de déterminer le signal de sortie.

Dans ce cas, la fonction de transfert de la vitesse longitudinale par rapport à la gouverne de profondeur est :

$$\frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-1.017 s^2 + 300.4 s + 729.3}{s^4 + 5.055 s^3 + 13.24 s^2 + 0.6751 s + 0.5941} \quad (5.2)$$

Celle de la vitesse verticale par rapport à la gouverne de profondeur est :

$$\frac{w(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-28.17 s^3 - 2163 s^2 - 120.2 s - 142.6}{s^4 + 5.055 s^3 + 13.24 s^2 + 0.6751 s + 0.5941} \quad (5.3)$$

Tableau 5.5: Comparaison entre la méthode exacte et approximative dans le cas longitudinale de l'avion Ryan Navion

Mouvement	Période longue (phugoïde)			Période Courte		
	Exacte	Approximée	Erreur Relatif (%)	Exacte	Approximée	Erreur Relatif (%)
Le temps $t_{1/2}$	40,477151	30,74169	24,05	0.2760	0,2766	0,22
La période T	29,490567	24,25053	17,77	2,4243	2,4233	0,04
Le nombre de cycles $N_{1/2}$	1,372546	1,267671	7,64	0.1139	0.1142	0,26

D'une manière similaire, celle de la vitesse de tangage par rapport à la gouverne de profondeur est :

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-11.74 s^3 - 23.18 s^2 - 1.18s}{s^4 + 5.055 s^3 + 13.24 s^2 + 0.6751 s + 0.5941} \quad (5.4)$$

Finalement, la fonction de transfert d'angle de tangage par rapport à la gouverne de profondeur est :

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-11.74 s^2 - 23.18 s - 1.18}{s^4 + 5.055 s^3 + 13.24 s^2 + 0.6751 s + 0.5941} \quad (5.5)$$

Tableau 5.6: Comparaison entre nos résultats et la référence [11] obtenues avec méthode exacte pour le cas longitudinale de l'avion Ryan Navion

Modes	Paramètres	Nos résultats	Référence [11]	Erreur relative (%)
Période Courte	- Pulsation amortie (rad/s)	2.5918	2.59	$0.995 \cdot 10^{-3}$
	- Pulsation propre (rad/s)	3.6083	-	-
	- période T (s)	2.4243	2.42	0.178
	- Facteur d'amortissement	0.6957	-	-
	- temps $t_{1/2}$ (s)	0.2760	0.28	1.43
	- Nombre de cycle $N_{1/2}$	0.1139	0.11	3.54
Phugoïde	- Pulsation amortie (rad/s)	0.2131	0.213	$0.46910^{-3}$
	- Pulsation propre (rad/s)	0.2137	-	-
	- période T (s)	29.4906	29.5	$0.319 \cdot 10^{-3}$
	- Facteur d'amortissement	0.0801	-	-
	- temps $t_{1/2}$ (s)	40.4771	40.3	0.439
	- Nombre de cycle $N_{1/2}$	1.3725	1.37	0.182

Les résultats obtenus avec la méthode exacte et approximative sont inclus dans le tableau 5.5. Dans cette analyse montre que l'approximation du mode période courte est très proche de la solution exacte car l'erreur relative est inférieure à 1% par contre l'approximation du mode phugoïde atteint une erreur relative de 24%.

Tableau 5.7: Comparaison de nos résultats avec la référence [11] en utilisant la méthode approximée cas longitudinale de l'avion Ryan Navion

Modes	Paramètres	Nos résultats	Référence [11]	Erreur relative (%)
Période Courte	- pulsation propre (rad/s)	3.605296	3.6	<b>0.147</b>
	- facteur d'amortissement	0.694823	0.69	<b>0.699</b>
	- période T (s)	2.423265	2.4	<b>0.969</b>
	- temps $t_{1/2}$ (s)	0.276642	0.278	<b>0.488</b>
	- nombre de cycle $N_{1/2}$	0.114161	0.115	<b>0.729</b>
Phugoïde	- pulsation propre (rad/s)	0.260074	0.26	<b>0.285</b> $10^{-3}$
	- facteur d'amortissement	0.086678	0.087	0.370
	- période T (s)	24.25053	24.2	0.209
	- temps $t_{1/2}$ (s)	30.74169	30	2.472
	- nombre de cycle $N_{1/2}$	1.267671	1.24	2.231

Tableau 5.8: Variation de la réponse en fonction du facteur d'amortissement [11]

Facteur d'amortissement	Solution	Réponse
$\xi < -1$	Deux solutions réelles positives distinctes	Mouvement de l'avion croit exponentiellement
$-1 < \xi < 0$	Deux solutions complexes avec parties réelles positives.	Mouvement de l'avion croit exponentiellement et oscillatoire
$\xi = 0$	Solutions complexes avec parties réelles nulles.	Mouvement de l'avion sinusoïdal non amorti, harmonique pure.
$0 < \xi < 1$	Deux solutions complexes avec parties réelles négatives.	Mouvement de l'avion est oscillatoire et décroît exponentiellement.
$\xi = 1$	Deux solutions égales, négatives et réelles	Mouvement de l'avion est amortie et décroissant exponentiel.
$\xi > 1$	Deux solutions distinctes négatives, réelles	Mouvement de l'avion est exponentiel décroissant.

En conséquence, l'approximation de la période courte est la plus précise et recommandé.

Le tableau 5.6 présente les résultats obtenus par notre programme en utilisant la méthode exacte et une comparaison est faite avec la référence [11], il découle de cette analyse que les résultats sont très satisfaisants car l'erreur relative est inférieure à 1% pour l'ensemble des paramètres.

Le tableau 5.7 montre les résultats obtenus par la méthode approximative avec une comparaison faite avec la référence [11], on déduit que les résultats sont très proches en particulier pour le mode période courte où l'erreur relative est inférieure à 1%.

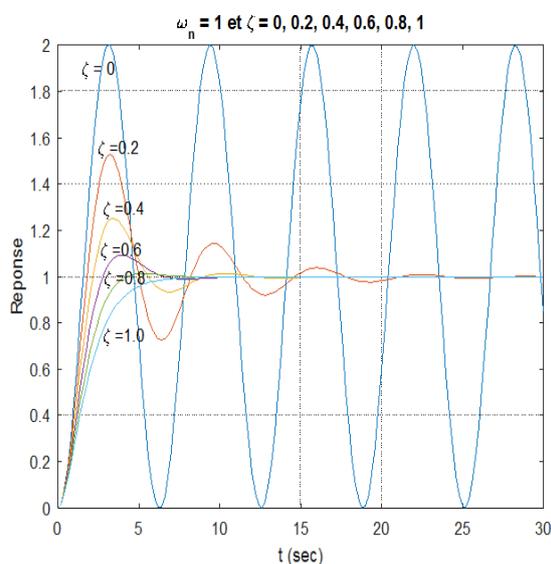


Figure 5.4 Courbe de la réponse à un échelon unitaire

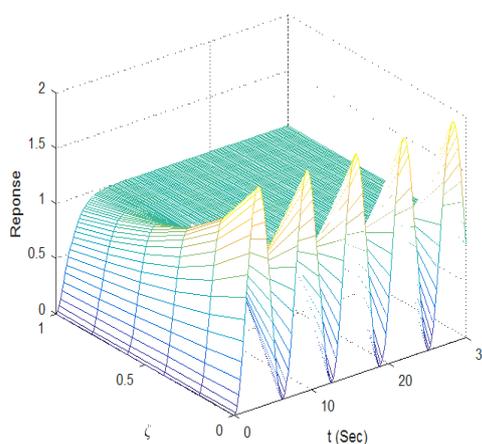


Figure 5.5 Courbe de la réponse tridimensionnelle

La réponse libre de l'avion a été également analysée pour le mouvement longitudinal en actionnant sur la gouverne de profondeur. L'utilisation de la méthode de l'espace d'état ou bien l'intégration des équations différentielles par l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4. La figure 5.6 montre les caractéristiques de la réponse pour les deux modes; phygoïde et période courte avec les conditions initiales suivantes :

$u = 0$  m/s,  $w = 0$  m/s,  $q = 0$  rad / s, et  $\theta = 2.5^\circ$ .

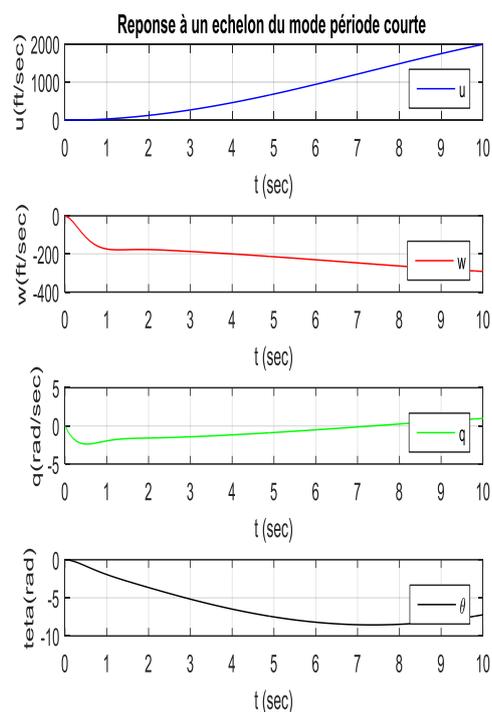
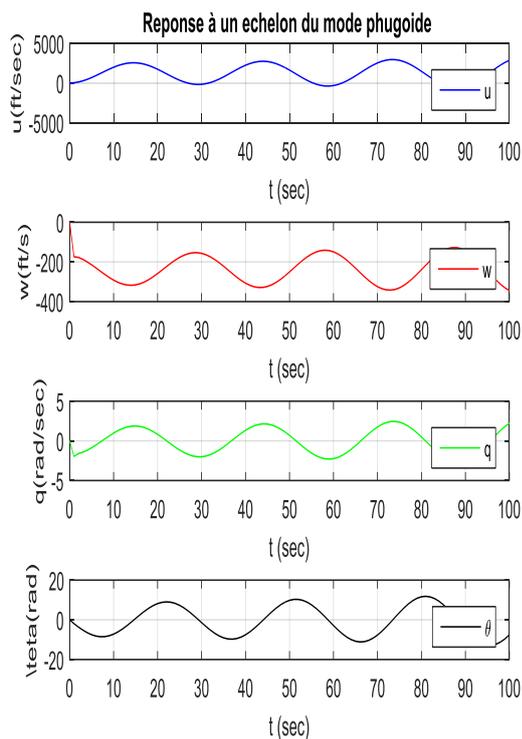


Figure 5.6 Réponse en mode phugoïde

Figure 5.7 Réponse en mode période Courte

Les perturbations de la vitesse verticale et de la vitesse de tangage se dégradent rapidement en 1s ensuite, ils commencent à effectuer des oscillations pour se rapprocher de la position d'équilibre. Les perturbations de la vitesse longitudinale et de l'angle de tangage persistent pendant un certain temps jusqu'à se tendre lentement vers les valeurs d'équilibres. Pendant le mode de la période courte, la perturbation de la vitesse longitudinale croit alors que l'angle de tangage décroît rapidement.

#### - Simulation du modèle longitudinal par Simulink

La boîte à outils Simulink est un complément extrêmement puissant à l'environnement MATLAB, sa contribution est principalement destinée à la simulation dynamique des systèmes c'est le cas de la figure 5.8 qui traite mouvement longitudinal, on peut visualiser la réponse de l'avion à un échelon en boucle ouverte afin de percevoir les différentes variations des paramètres de sortie qui sont donnés par la figure 5.9 .

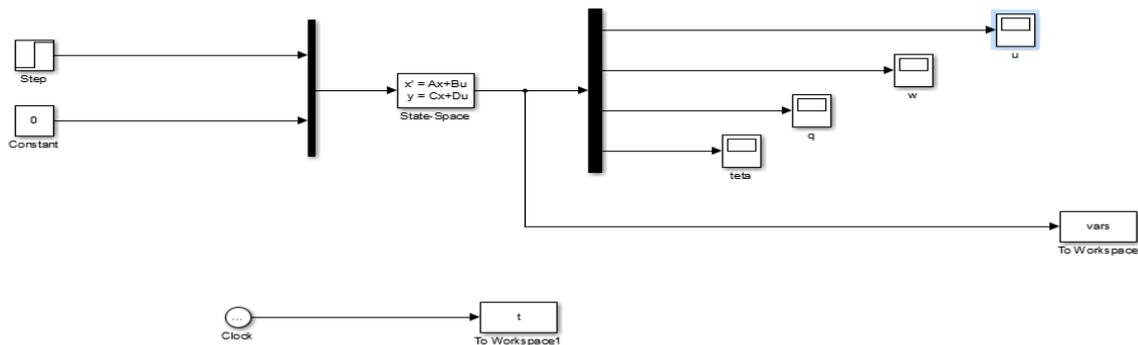


Figure 5.8 Simulation du model longitudinal en boucle ouverte

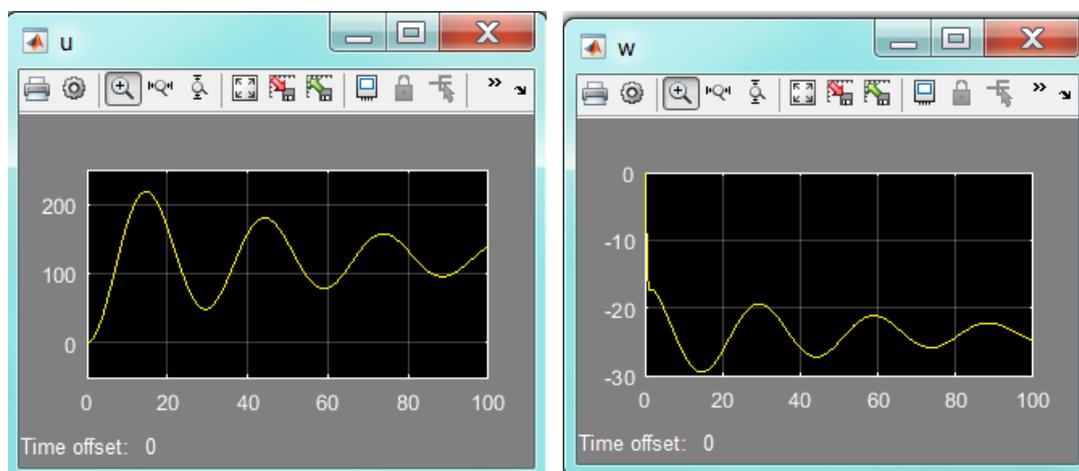
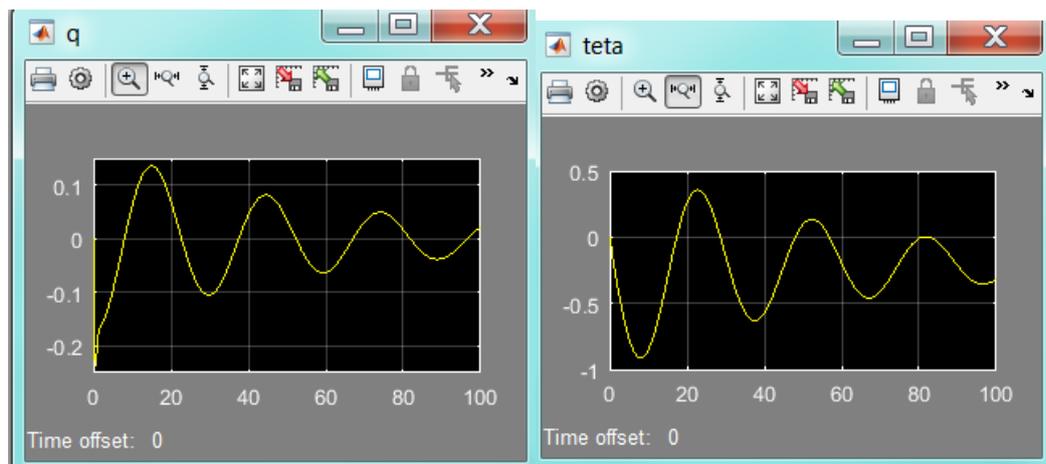
a-Variation de la vitesse linéaire  $u$ (ft/s) b-Variation de la vitesse verticale  $w$ (ft/s)c-Variation du taux de tangage  $q$ (rad/s) d-Variation de l'angle de tangage  $\theta$ (rad)

Figure 5.9 Courbes de la simulation du model longitudinal en boucle ouverte

Les figures 5.9 a, 5.9 b, 5.9 c et 5.9 d montrent respectivement les évolutions de la vitesse longitudinale, la vitesse verticale, le taux de tangage et l'angle de tangage durant le vol longitudinal de l'avion à la suite de la déflexion de la gouverne de profondeur d'un degré  $\Delta\delta_e = 1^\circ$  de type échelon.

La vitesse verticale et le taux de tangage ont une réponse très rapide à la déflexion de la gouverne et que son évolution est dominée par le mode période courte. Au contraire, les autres variables la vitesse longitudinale et l'angle de tangage ont une réponse lente.

### 5.2.2.2 Vol latéral directionnel

C'est l'étude du mouvement transitoire dans le plan latéral directionnel à l'action du pilote sur la commande latérale du manche et le palonnier ou bien aussi à la suite d'une perturbation d'une rafale latérale ou directionnelle. Dans ce cas, le calcul des dérivées dimensionnelles de la stabilité latérale-directionnelle est obtenu par le programme élaboré et ensuite une comparaison est faite avec la référence [11].

La linéarisation des équations conduit à une représentation d'état de la forme :

$$\dot{x} = A_{LD}x + B_{LD}u$$

$x$  est le vecteur d'état et  $u$  est le vecteur commande

A et B les matrices d'état et de commande de l'avion, on remplace les valeurs des coefficients dimensionnelles de stabilité du tableau 5.9 dans la matrice A pour l'étude du *mouvement latéral directionnel de l'avion*, on obtient :

$$A_{LD} = \begin{bmatrix} -0.2543 & 0.00 & -1.00 & 0.1830 \\ -15.9824 & -8.4023 & 2.1928 & 0.00 \\ 4.5526 & -0.3498 & -0.7605 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

La matrice commande :

$$B_{LD} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.0708 \\ -28.9411 & 23.1097 \\ -0.2244 & -4.6167 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

**Tableau 5.9** : Coefficients dimensionnelles de la stabilité latérale-directionnelle de l'avion Ryan Navion

Coefficients de stabilité dimensionnels	Unités	Résultats obtenus	Référence [11]	Erreur(%) : $\frac{ (X - X_{[11]}) }{X_{[11]}} \cdot 10$
$Y_{\beta}$	ft/(s <sup>2</sup> )	-44.75353	-45.72	2.113894
$Y_v$	(s <sup>-1</sup> )	-0.25430	-0.254	0.118106
$Y_p$	ft/(s)	0	0	0
$Y_r$	ft/(s)	0	0	0
$Y_{\delta a}$	ft/(s <sup>2</sup> )	0	-	-
$Y_{\delta r}$	ft/(s <sup>2</sup> )	12.457986	-	-
$L_{\beta}$	(s <sup>-2</sup> )	-15.982397	-16.02	0.234728
$L_v$	(s <sup>-1</sup> )	-0.0908	-0.091	0.2197758
$L_p$	(s <sup>-1</sup> )	-8.402294	-8.4	0.0273160
$L_r$	(s <sup>-1</sup> )	2.192794	2.19	0.1275811
$L_{\delta a}$	(s <sup>-2</sup> )	-28.941097	-	-
$L_{\delta r}$	(s <sup>-2</sup> )	23.109682	-	-
$N_{\beta}$	(s <sup>-2</sup> )	4.552554	4.49	1.393193
$N_v$	(ft.s) <sup>-1</sup>	0.0259	0.025	3.600001
$N_p$	(s <sup>-1</sup> )	-0.349839	-0.35	0.045998
$N_r$	(s <sup>-1</sup> )	-0.760520	-0.76	0.068420
$N_{\delta a}$	(s <sup>-2</sup> )	-0.224422	-	-
$N_{\delta r}$	(s <sup>-2</sup> )	-4.616675	-	-

La solution exacte de l'équation caractéristique du vol latéral-directionnel aboutit aux valeurs propres et les caractéristiques dynamiques du tableau 5.10

Tableau 5.10: Caractéristiques dynamiques du mouvement latéral-directionnel avion Ryan Navion

Valeurs propres	Modes	T (s)	t <sub>1/2</sub> (s)	N <sub>1/2</sub>	$\omega_n$ (rad/s)	$\zeta_n$
-0.4870 ± 2.3472i	Roulis hollandais	2.6768	1.4232	0.5317	2.3972	0.9791
-0.0082	Spiral	-	121.951	-	-	-
-8.4349	Roulis	-	0.11855	-	-	-

C'est le mode de commande employé pour obtenir la vitesse de roulis et l'angle de roulis désirés ; c'est les ailerons qui commandent le taux de roulis. La rapidité avec laquelle le taux de roulis commandé va influencer l'agilité de l'avion.

- **Les fonctions de transfert dans le cas du vol latéral-directionnel**

Les fonctions de transfert calculées et reliant l'angle de dérapage, la vitesse de roulis, la vitesse de lacet et l'angle d'inclinaison latéral suite à la déflexion de l'aileron sont données par :

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta(s)}{\delta a(s)} &= \frac{0.2244s^2 - 13.53s - 4.118}{s^4 + 9.417s^3 + 14.04s^2 + 48.59s + 0.3974} \\
 \frac{p(s)}{\delta a(s)} &= \frac{-28.94s^3 - 58.8s^2 - 170.9s - 141.1}{s^4 + 9.417s^3 + 14.04s^2 + 48.59s + 0.3974} \\
 \frac{r(s)}{\delta a(s)} &= \frac{-0.2244s^3 + 8.181s^2 + 2.095s - 24.77}{s^4 + 9.417s^3 + 14.04s^2 + 48.59s + 0.3974} \\
 \frac{\varphi(s)}{\delta a(s)} &= \frac{-28.94s^2 - 29.86s - 141.1}{s^4 + 9.417s^3 + 14.04s^2 + 48.59s + 0.3974}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Dans le cas de la déflexion de l'aileron, les fonctions de transfert calculées sont :

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta(s)}{\delta r(s)} &= \frac{0.0708s^3 + 5.265s^2 - 170.9s + 1.364}{s^4 + 9.417s^3 + 14.04s^2 + 48.59s + 0.3974} \\
 \frac{p(s)}{\delta r(s)} &= \frac{23.11s^3 + 35.31s^2 + 45.36s + 33.16}{s^4 + 9.417s^3 + 14.04s^2 + 48.59s + 0.3974} \\
 \frac{r(s)}{\delta r(s)} &= \frac{-4.617s^3 - 47.73s^2 - 8.816s + 5.75}{s^4 + 9.417s^3 + 14.04s^2 + 48.59s + 0.3974} \\
 \frac{\varphi(s)}{\delta r(s)} &= \frac{23.11s^2 + 12.2s + 33.16}{s^4 + 9.417s^3 + 14.04s^2 + 48.59s + 0.3974}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

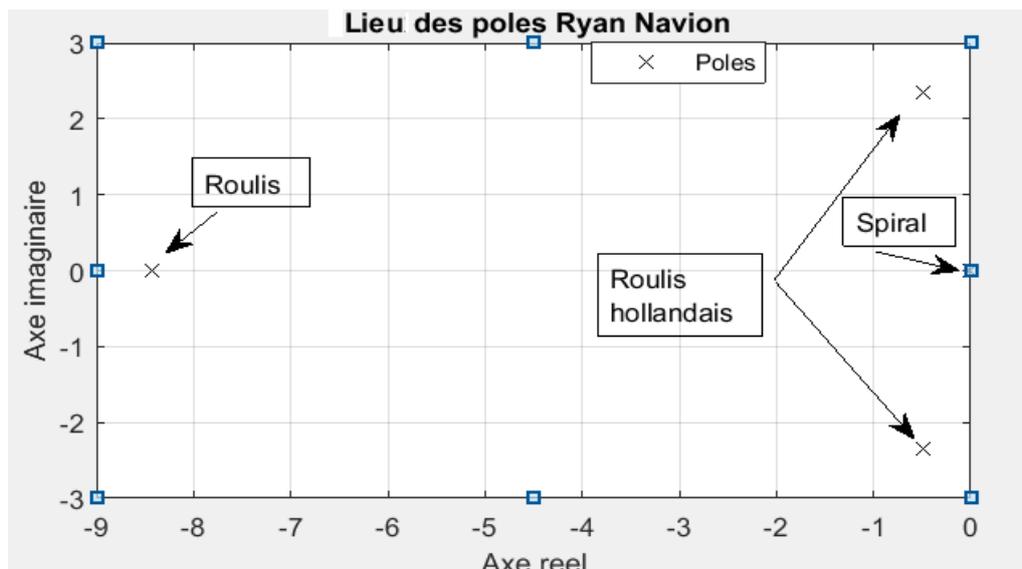


Figure 5.10 Lieux des racines du mode latéral-directionnel

La mesure de cette réponse (taux de roulis) est la constante du temps pour le mode de roulis. Elle représente aussi le temps d'atteindre 63% du taux de roulis en régime permanent commandé par une entrée échelon de l'aileron.

Les résultats de l'analyse par la méthode exacte et approximative sont inclus dans Tableau 5.11. L'approximation du mode roulis hollandais révèle que le paramètre  $t_{1/2}$  est très proche de la solution exacte car l'erreur relative est de l'ordre de 4% alors que les paramètres  $T$  et  $N_{1/2}$  dépassent l'erreur relative de 10%.

Tableau 5.11: Comparaison entre la méthode exacte et approximative dans le cas latéral-directionnel de l'avion Ryan Navion

Mode	Roulis hollandais		
	Exacte	Approximée	Erreur Relatif (%)
Temps $t_{1/2}$	1.4232	1.3658	4.0372
Période $T$	2.6768	2.9657	10.7917
Nombre de cycles $N_{1/2}$	0.5317	1.3725	13.3845

Tableau 5.12: Comparaison entre nos résultats et la référence [11] obtenues avec La méthode exacte pour l'avion Ryan Navion

Modes	Paramètres	Nos résultats	Référence [11]	Erreur relative (%)
Roulis hollandais	- période $T$ (s)	2.6768	2.69	0.49
	- temps $t_{1/2}$ (s)	1.4232	1.42	0.23

Les caractéristiques dynamiques pour le mode roulis hollandais sont déterminées en utilisant la méthode exacte. Pour valider les résultats obtenus, une comparaison est faite avec la référence [11]. L'examen du tableau 5.12 montre que l'erreur relative maximale n'excède pas la valeur de 0.49%, ce qui prouve l'efficacité de la méthode utilisée.

La réponse de l'avion a été également analysée pour le mouvement latéral directionnel en actionnant séparément la gouverne de gauchissement ou aileron et la gouverne de direction. Les équations différentielles ont été intégrées en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. La figure 5.11 montre l'évolution temporel des caractéristiques de réponse pour les deux cas et avec les conditions initiales suivantes :

$\beta = 0 \text{ deg}$ ,  $p = 0 \text{ deg / s}$ ,  $r = 0 \text{ deg / s}$ , et  $\varphi = 0 \text{ deg}$ .

La perturbation de l'angle de dérapage diminue jusqu'à  $-2 \text{ rad}$  en 20 secondes. La perturbation induit des mouvements de roulis et de lacet.

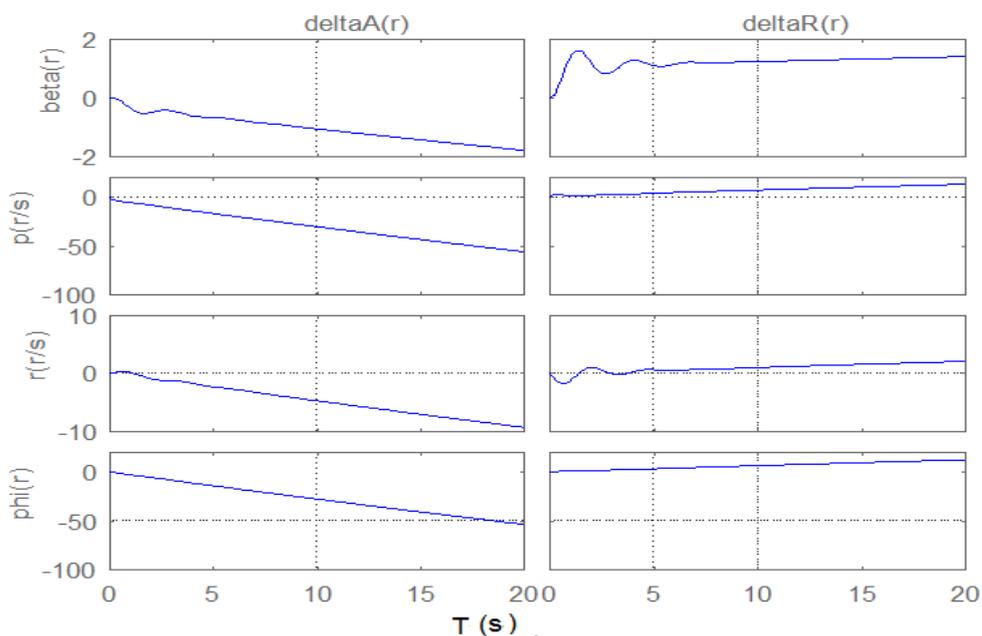


Figure 5.11 Réponse en mode latéral directionnel

#### - Simulation du modèle latéral-directionnel par Simulink

Le modèle de simulation est conçu dans l'environnement Simulink conjointement avec Matlab figure 5.12.

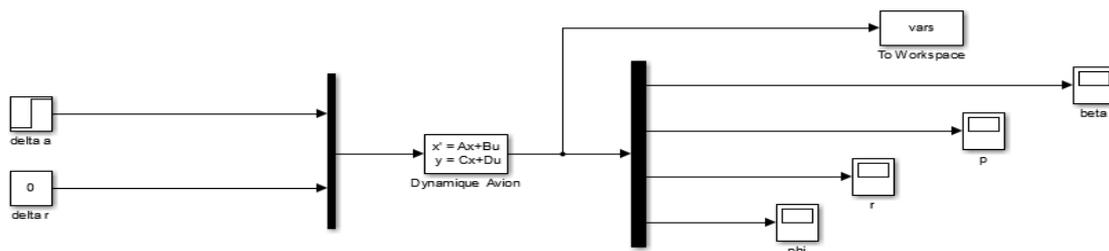
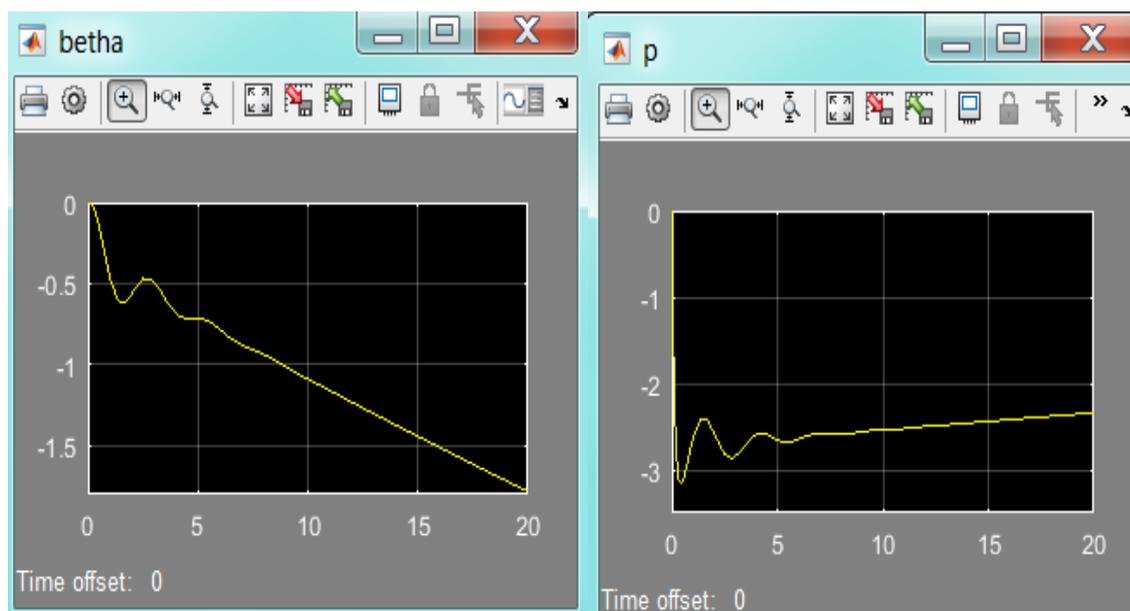
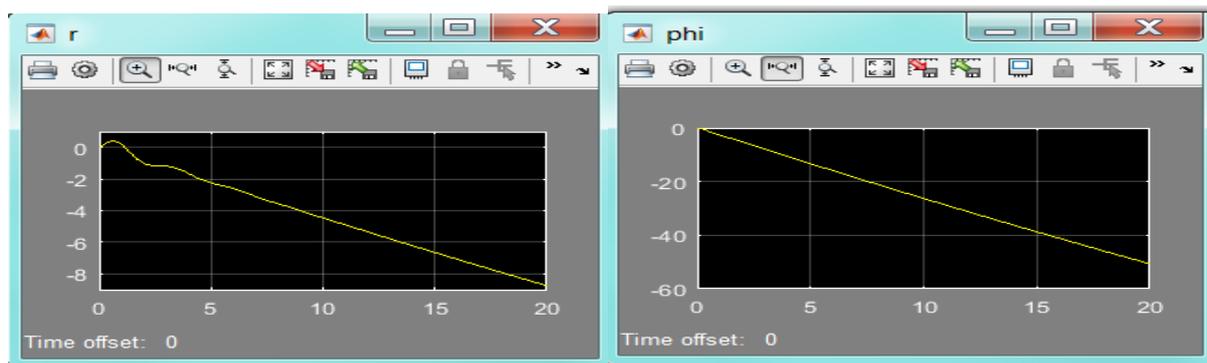


Figure 5.12 Simulation du model latéral-directionnel en boucle ouverte

Dans le cas du mouvement latéral-directionnel, on peut visualiser la réponse de l'avion à un échelon en boucle ouverte afin de connaître les différentes variations des paramètres de sortie. En actionnant d'une part sur l'aileron, on observe les variations des paramètres du mouvement de l'avion. D'autre part, en actionnant sur la gouverne de direction, on note également les variations des divers paramètres mais cette fois-ci d'une manière différente qui sont donnés par la figures 5.12 et 5.13.

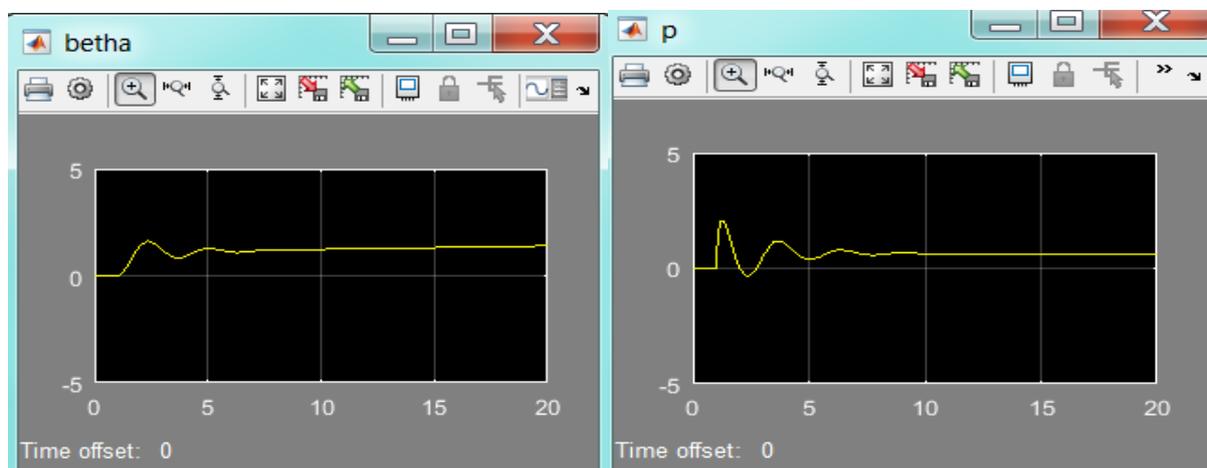


a-Variation de l'angle de dérapage  $\beta$ (rad)    b-Variation du taux de roulis  $p$ (rad/s)

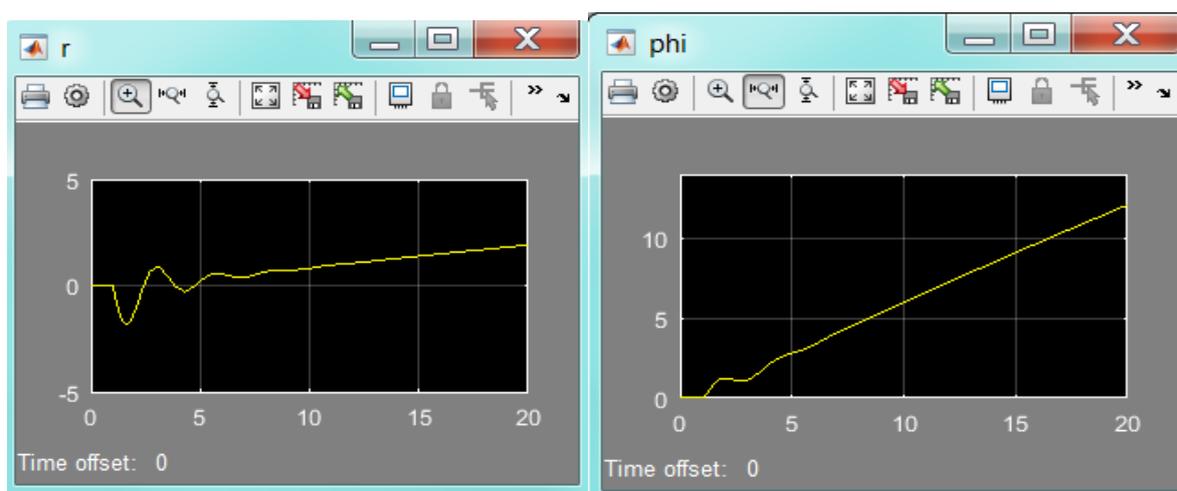


c-Variation du taux de lacet  $r$ (rad/s)      d-Variation de l'angle de roulis  $\phi$ (rad)

Figure 5.13 Courbes de simulation du model latéral-directionnel en boucle ouverte en actionnant l'aileron



a-Variation de l'angle de dérapage  $\beta$ (rad)      b-Variation du taux de roulis  $p$ (rad/s)



c-Variation du taux de lacet  $r$ (rad/s)      d-Variation de l'angle de roulis  $\phi$ (rad)

Figure 5.14 Simulation du model latéral-directionnel en boucle ouverte en actionnant la gouverne de direction

### 5.2.3 Modèle non linéaire

Après avoir traité les deux cas linéaires de vol à savoir le mouvement longitudinal et latéral directionnel, on aborde maintenant le modèle non linéaire. Il est beaucoup plus complexe que les précédents mais il peut être appliqué en même temps pour les deux cas. Ce modèle est même encore valable lorsque le vol n'est pas strictement longitudinal ou latéral, c'est le cas le plus proche de la réalité du vol des avions.

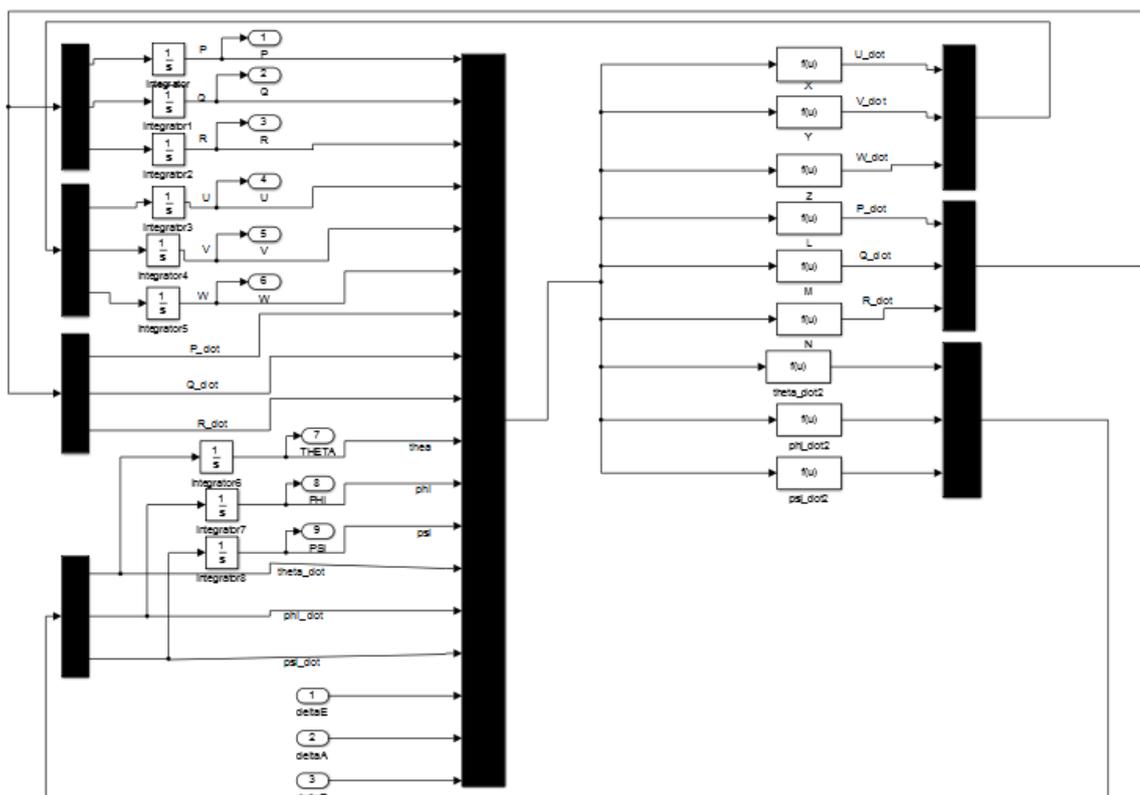


Figure 5.15 Structure interne du modèle non linéaire

#### - Simulation par Matlab/Simulink

Pour être programmé sous Matlab/Simulink, les équations non linéaires du mouvement (1.28) à (1.36) sont écrites sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f_i(x, t), (i = 1, 9)$$

La variable  $x$  représente les neuf paramètres du mouvement de l'avion  $u, v, w, p, q, r, \theta, \varphi$  et  $\psi$

Les neuf équations sont à droite du modèle et toutes les variables nécessaires pour les équations sont à gauche. Le calcul des dérivées des vitesses permet par une intégration d'obtenir la nouvelle valeur de la vitesse sur chaque axe. Ce modèle est mis dans une boîte pour en cacher sa complexité. Mais, contrairement au modèle linéaire, nous pouvons facilement passer d'un vol longitudinal à un autre vol latéral et même combiner les deux, juste en changeant l'entrée alors qu'il est nécessaire d'utiliser deux modèles différents auparavant.

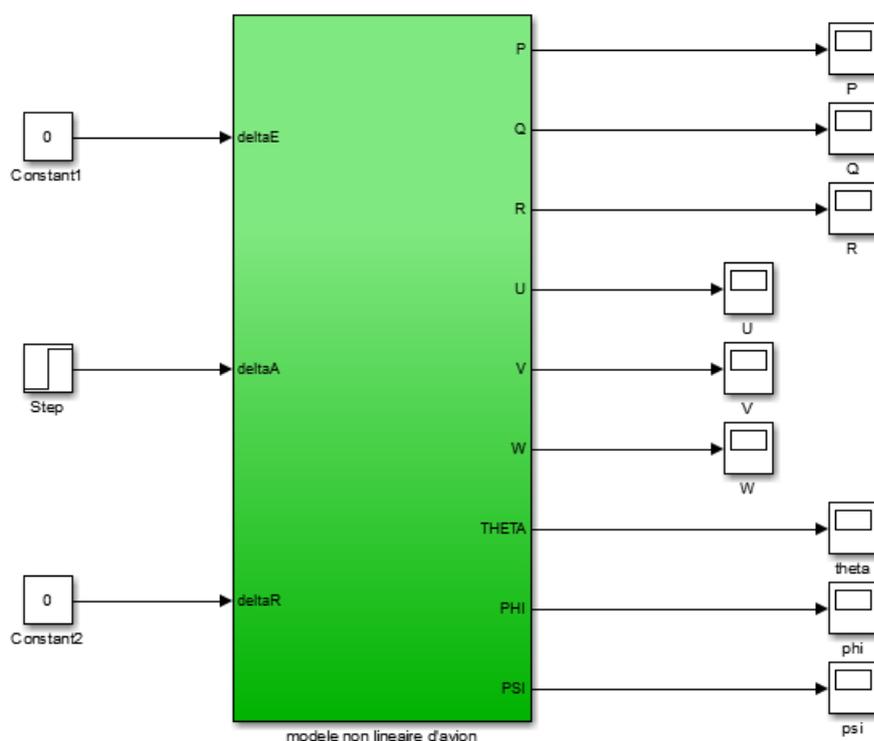
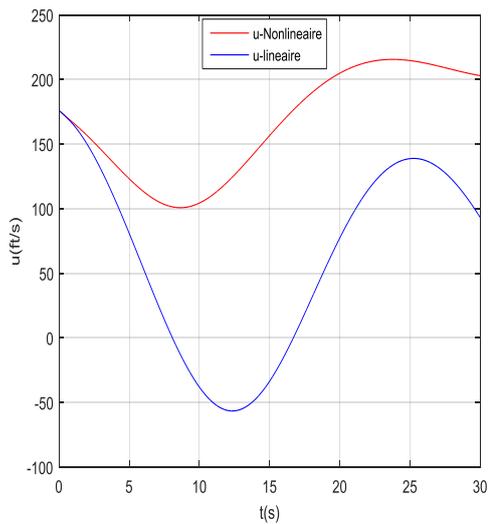
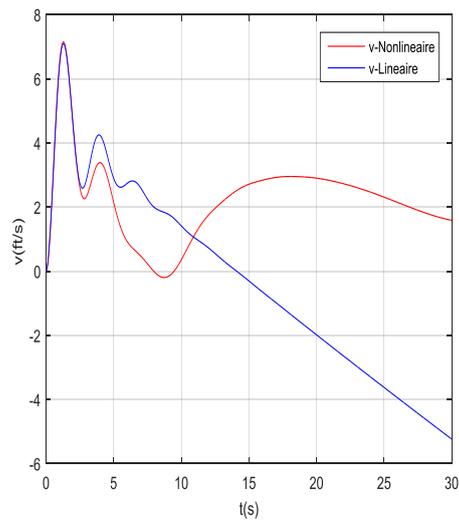
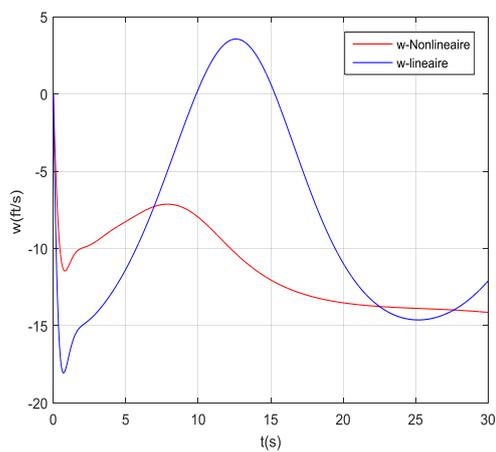
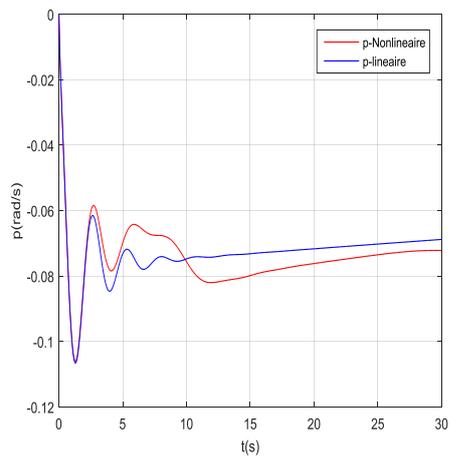
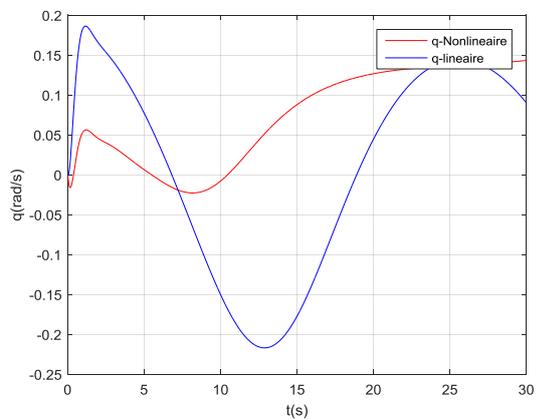
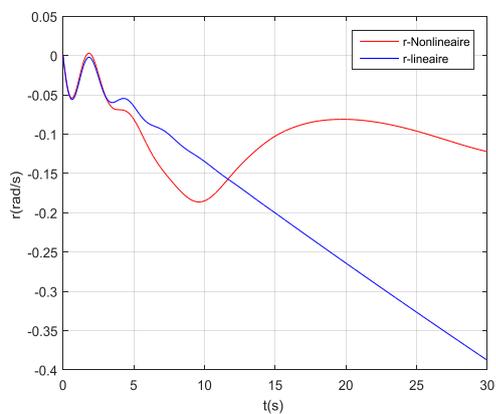


Figure 5.16 Structure externe du model non linéaire (entrées et sorties)

a-Variation de la vitesse  $u$ (ft/s)u(ft/s) b-Variation de la vitesse  $v$ (ft/s)c-Variation de la vitesse  $w$ (ft/s)d-Variation de la vitesse  $p$ (ft/s)e-Variation de la vitesse  $q$ (ft/s)f-Variation de la vitesse  $r$ (ft/s)

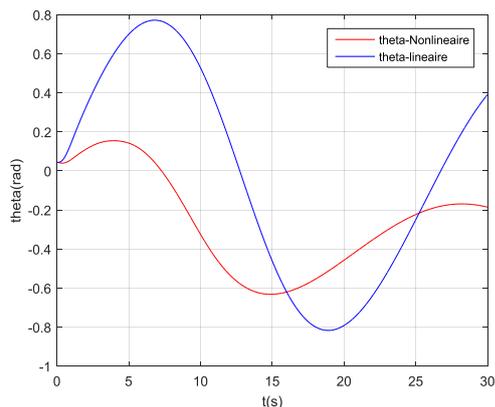
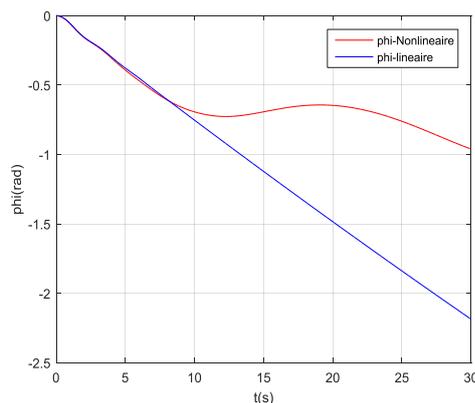
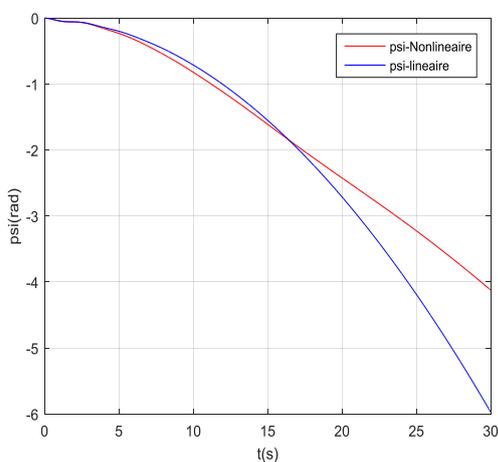
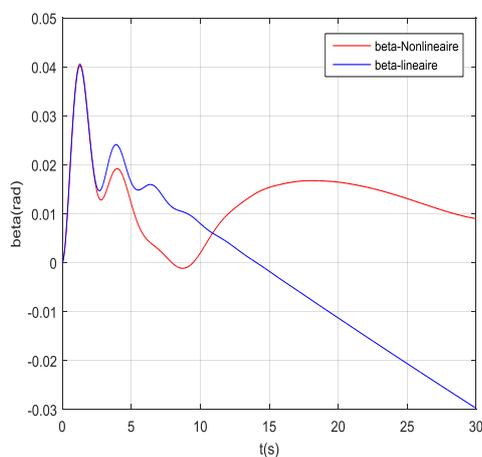
g-Variation de l'angle  $\theta$ (rad)h-Variation de la vitesse  $\varphi$ (rad)i-Variation de l'angle  $\psi$ (rad)j-Variation de la vitesse  $\beta$ (rad)

Figure 5.17 Courbes de la simulation du model non linéaire et linéaire

Les figures 5.17 montrent respectivement les évolutions des vitesses linéaires ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ), des vitesses angulaires ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ ) et les angles ( $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\beta$ ) en fonction du temps pour une durée de 30s à des déflexions de deux degrés de la gouverne de profondeur  $\delta_e = 2^\circ$ , de la gouverne de direction  $\delta_r = 2^\circ$  et de l'aileron  $\delta_a = 2^\circ$ . On observe qu'elles ont les mêmes formes d'évolution temporel mais il existe une différence dans les amplitudes. Cette dernière est due au passage du cas non linéaire vers le linéaire en négligeant un certain nombre de termes.

### 5.3 L'avion de transport Boeing 747-200

C'est un avion équipé de quatre réacteurs et conçu par le constructeur d'avion Boeing. Il est mis en service durant l'année 1972. Selon sa configuration, type et classe, il peut accueillir 200 passagers.



Figure 5.18 Avion de transport Boeing 747-200 et ses trois vues de l'avion

La première étape consistera à utiliser les équations linéaires qui sont faciles à mettre à l'intérieur du modèle, puis nous utiliserons les équations non linéaires, qui devraient être plus proches de la réalité mais beaucoup plus complexes et plus lentes en temps de calcul pour les simulations. Dans la dynamique linéaire, il faut distinguer deux cas de vol: le vol longitudinal, ce qui signifie que le vol de l'avion est rectiligne et peut tourner autour de l'axe Y, de sorte qu'il change l'angle de tangage. L'autre cas est le vol latéral-directionnel qui signifie que l'avion peut tourner autour des axes X et Z, de sorte qu'il peut changer son angle de roulis ou de lacet.

Tableau 5.13: Dimensions géométriques, masse, inerties et condition du vol de l'avion Boeing 747-200

Condition du vol		Poids et inerties		Géométrie	
Altitude (ft)	20000	Poids (lbs)	636636	Surface alaire (ft <sup>2</sup> )	5500
Vitesse (ft/s)	673	Inertie $I_{xx_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	18200000	Envergure aile (ft)	196
Position du centre de gravité (fraction)	0.25	Inertie $I_{yy_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	33100000	corde géométrique moyenne (ft)	27.3
Attitude Initial (deg)	2.5	Inertie $I_{zz_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	49700000		
		Inertie $I_{xz_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	970000		

### 5.3.1 Critères de stabilité statique

Un avion est classé comme étant statiquement stable ; si sa réponse dynamique satisfait aux critères généraux de la stabilité statique du tableau 5.14. L'analyse de ce dernier montre une stabilité marginale de l'avion Boeing 747 à travers la première condition de la stabilité statique qui est généralement contrôlée par le pilote.

Tableau 5.14 : Les dix Critères de la stabilité statique de l'avion Boeing 747-200

<b>Critères de stabilité statique (CSS)</b>			
CSS1	$(C_{T_{Xu}} - C_{D_u}) < 0$	$C_{T_{Xu}} = 0.0, C_{D_u} = 0.0$	marginale stable
CSS2	$C_{Y_\beta} < 0$	$C_{Y_\beta} = -0.9$	Stable
CSS3	$C_{L_\alpha} > 0$	$C_{L_\alpha} = 4.4$	Stable
CSS4	$C_{m_\alpha} < 0$	$C_{m_\alpha} = -1.0$	Stable
CSS5	$C_{n_\beta} > 0$	$C_{n_\beta} = 0.16$	Stable
CSS6	$C_{l_p} < 0$	$C_{l_p} = -0.34$	Stable
CSS7	$C_{m_q} < 0$	$C_{m_q} = -20.5$	Stable
CSS8	$C_{n_r} < 0$	$C_{n_r} = -0.28$	Stable
CSS9	$C_{l_\beta} < 0$	$C_{l_\beta} = -0.16$	Stable
CSS10	$C_{m_u} > 0$	$C_{m_u} = 0.013$	Stable

### 5.3.2 Modèle linéaire

Un exemple d'analyse concerne l'avion de transport commercial Boeing 747-200 [7]. Les conditions du vol, masse, inerties et dimensions géométriques sont présentées dans le tableau 5.13 et les coefficients de stabilité sont donnés en annexe A.

#### 5.3.2.1 Vol longitudinal

La linéarisation des équations conduit à une représentation d'état de la forme :

$$\dot{x} = A_{Lon}x + B_{Lon}u$$

$$y = C_{Lon}x + D_{Lon}u$$

$x$ ,  $y$  et  $u$  sont respectivement des vecteurs d'état, de sortie et de commande

$A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont respectivement les matrices d'état, de commande, d'observation et d'application de la commande.

Connaissant les conditions de vol de l'avion, sa géométrie, son poids et ses inerties ainsi que les coefficients aérodynamiques et de stabilité, on peut déterminer par les

programmes élaborés les valeurs des coefficients dimensionnelles de stabilité présentés par le tableau 5.15 et par conséquent tous les éléments de la matrice  $A$  pour étudier le mouvement longitudinal de cet avion, on obtient :

$$A_{\text{Lon}} = \begin{bmatrix} -0.0059 & 0.0237 & 0.0000 & -32.1740 \\ -0.1103 & -0.5248 & 673.00 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0019 & -0.6473 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

La matrice commande :

$$B_{\text{Lon}} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -25.5412 \\ -1.6894 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

La **solution exacte** de l'équation caractéristique du vol longitudinal aboutit aux *valeurs propres et les caractéristiques dynamiques du tableau 5.14*

Le calcul des valeurs propres a permis d'obtenir une paire de solutions qui sont complexes et conjugués avec les parties réelles négatives ce qui signifie que le mouvement longitudinal est dynamiquement stable.

Le mode période longue ou « phugoïde » est celui dans lequel il y a une variation de l'amplitude de la vitesse, d'altitude, et de l'angle de tangage. L'angle d'attaque demeure presque constant. Ce mode est un échange lent de l'énergie cinétique et potentielle alors que l'avion tente de rétablir son vol d'état d'équilibre d'où il avait été perturbé. L'amortissement est très faible, la période est lente et le pilote peut généralement lui-même contrôler cette oscillation.

Le mode de période courte ou simplement « Short period » est une oscillation fortement amortie sur une période. Il y a essentiellement une variation de l'angle d'attaque et de l'angle de tangage. Le mouvement est généralement assez rapide pour que la vitesse et l'altitude n'aient le temps de changer, ainsi elles demeurent presque constantes.

Tableau 5.15 : Coefficients dimensionnelles de stabilité longitudinale de l'avion Boeing 747-200

Coefficients de stabilité dimensionnels	Unités	Résultats obtenus	Référence[7]	Erreur(%) : $\frac{ (X - X_{[7]}) }{X_{[7]}} \cdot 100$
$X_u$	(s <sup>-1</sup> )	-0.005930	-0.0059	0.5085
$X_{T_u}$	(s <sup>-1</sup> )	0.005930	0.0059	0.5085
$X_\alpha$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	15.963420	15.9634	0.1255 10 <sup>-3</sup>
$Z_u$	(s <sup>-1</sup> )	-0.110297	-0.1103	2.715 10 <sup>-3</sup>
$Z_\alpha$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	-353.190664	-353.1907	0.00864 10 <sup>-3</sup>
$Z_{\dot{\alpha}}$	ft/(rad.s)	-11.332131	-11.3321	0.29455 10 <sup>-3</sup>
$Z_q$	ft/(rad.s)	-10.684580	-10.6846	0.18744 10 <sup>-3</sup>
$M_u$	ft/(rad.s)	0.000025	0.0000	0
$M_{T_u}$	ft/(rad.s)	0	0	0
$M_\alpha$	(s <sup>-2</sup> )	-1.302617	-1.3026	1.29953 10 <sup>-3</sup>
$M_{T_\alpha}$	(s <sup>-2</sup> )	0	0	0
$M_{\dot{\alpha}}$	(s <sup>-1</sup> )	-0.105680	-0.1057	18.9260 10 <sup>-3</sup>
$M_q$	(s <sup>-1</sup> )	-0.541612	-0.5416	2.22307 10 <sup>-3</sup>
$X_{\delta_e}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	0.0	0.0	0
$Z_{\delta_e}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	-25.541472	-25.5415	0.11201 10 <sup>-3</sup>
$M_{\delta_e}$	(s <sup>-2</sup> )	-1.693402	-1.6934	0.11967 10 <sup>-3</sup>

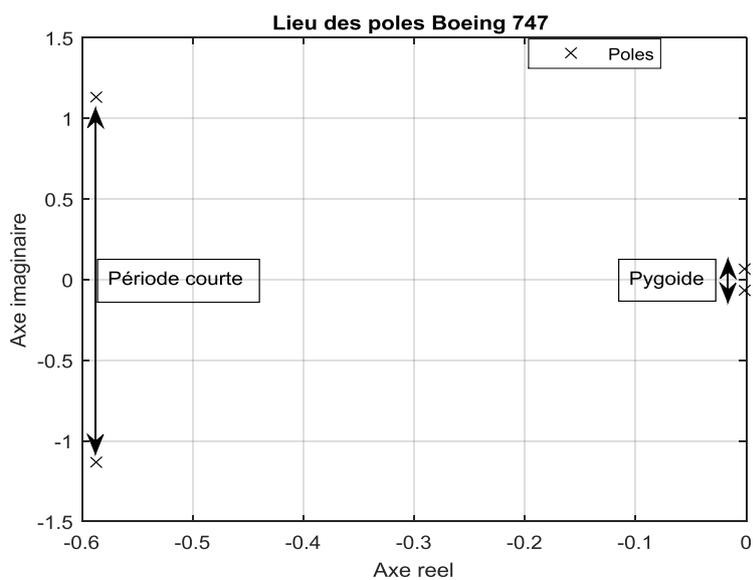


Figure 5.19 Lieux des racines des modes longitudinales

Tableau 5.16: Paramètres dynamiques du mouvement longitudinal avion Boeing 747-200

Valeurs propres	Facteur d'amortissement ( $\xi$ )	Pulsations propre ( $\omega_n$ )	Modes
$-0.587 \pm 1.1147i$	0.465944	1.259799	Période courte
$-0.002 \pm 0.0678i$	0.029729	0.067790	Phugode

Les résultats obtenus avec la méthode exacte et approximative sont inclus dans le tableau 5.17. Dans cette analyse montre que l'approximation du mode période courte est très proche de la solution exacte car l'erreur relative est comprise entre 0.03% et 0.2% par contre l'approximation du mode phugoïde atteint une erreur relative importante. En conséquence, l'approximation de la période courte est la plus précise et aussi recommandé.

Tableau 5.17: Comparaison entre la méthode exacte et approximative dans le cas longitudinale de l'avion Boeing 747-200

Mouvement Méthode	Période longue (phugoïde)			Période Courte		
	Exacte	Approximée	Erreur Relatif (%)	Exacte	Approximée	Erreur Relatif (%)
Le temps $t_{1/2}$	343,8662	233,7289	32,03	1.1806	1,1825	0,16
La période T	92,7268	86,5994	6,61	5,6367	5,6347	0,03
Le nombre de cycles $N_{1/2}$	3,7084	2,6990	27,22	0.2094	0.2099	0,20

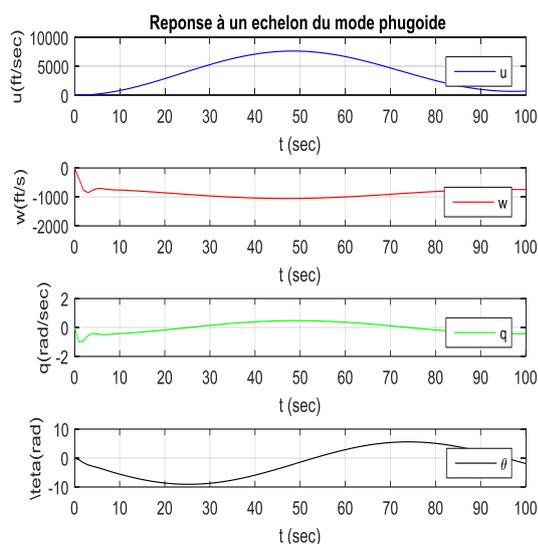


Figure 5.20 Réponse en mode phugoïde

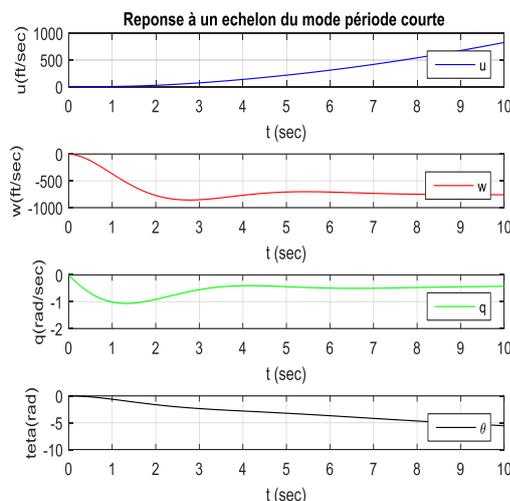


Figure 5.21 Réponse en mode période courte

### 5.3.2.2 Vol latéral directionnel

C'est l'étude du mouvement transitoire dans le plan latéral directionnel suite à l'action du pilote sur la commande latérale sur le manche en roulis et directionnelle sur le palonnier ou bien à la suite d'une rafale latérale ou directionnelle. Dans ce cas, Le calcul des dérivées dimensionnelles de la stabilité latérale-directionnelle est obtenu par le programme élaboré et ensuite une comparaison est faite avec la référence [7].

La linéarisation des équations conduit à une représentation d'état de la forme :

$$\dot{x} = A_{LD}x + B_{LD}u$$

$x$  est le vecteur d'état et  $u$  est le vecteur commande qui sont données par :

$A$  et  $B$  les matrices d'état et de commande de l'avion, on remplace les valeurs des coefficients dimensionnelles de stabilité du tableau 5.18 dans la matrice  $A$  pour l'étude du *mouvement latéral directionnel de l'avion* et on obtient :

$$A_{LD} = \begin{bmatrix} -0.1067 & 0.00 & -1.00 & 0.0478 \\ -2.7251 & -0.8432 & 0.3224 & 0.00 \\ 0.9961 & -0.0236 & -0.2538 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

La matrice commande :

$$B_{LD} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.0142 \\ 0.2214 & 0.1363 \\ 0.0112 & -0.6225 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

La solution exacte de l'équation caractéristique du vol latéral directionnel aboutit aux valeurs propres et les caractéristiques dynamiques du tableau 5.19

C'est le mode de commande employé pour obtenir le taux de roulis et l'angle de roulis désirés ; c'est les ailerons qui commandent le taux de roulis. La rapidité avec laquelle le taux de roulis commandé va influencer sur l'agilité de l'avion. La mesure de cette réponse (taux de roulis) se fait par l'intermédiaire de la constante de temps du mode de roulis. Elle représente aussi le temps d'atteindre 63% du taux de roulis en régime permanent commandé par une entrée échelon de l'aileron.

**Tableau 5.18 :** Coefficients dimensionnelles de la stabilité latérale-directionnelle de l'avion Boeing 747-200

Coefficients de stabilité dimensionnels	Unités	Résultats obtenus	Référence [7]	Erreur(%) : $\left  \frac{X - X_{[7]}}{X_{[7]}} \right  \cdot 100$
$Y_{\beta}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	-71.835389	-71.8354	$0.02124 \cdot 10^{-3}$
$Y_p$	ft/(rad.s)	0.00	0.0	0
$Y_r$	ft/(rad.s)	0.00	0.0	0
$Y_{\delta a}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	0.00	0.0	0
$Y_{\delta r}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	9.578052	9.5858	$8.08342 \cdot 10^{-2}$
$L_{\beta}$	(s <sup>-2</sup> )	-2.725053	-2.7251	$1.72355 \cdot 10^{-3}$
$L_p$	(s <sup>-1</sup> )	-0.843228	-0.8432	$3.31529 \cdot 10^{-3}$
$L_r$	(s <sup>-1</sup> )	0.322411	0.3224	$3.41100 \cdot 10^{-3}$
$L_{\delta a}$	(s <sup>-2</sup> )	0.221411	0.2214	$4.97378 \cdot 10^{-3}$
$L_{\delta r}$	(s <sup>-2</sup> )	0.136253	0.13602	$1.71294 \cdot 10^{-1}$
$N_{\beta}$	(s <sup>-2</sup> )	0.996062	0.9961	$3.81766 \cdot 10^{-3}$
$N_p$	(s <sup>-1</sup> )	-0.023570	-0.023581	$4.66510 \cdot 10^{-2}$
$N_r$	(s <sup>-1</sup> )	-0.253826	-0.2536	$8.91132 \cdot 10^{-2}$
$N_{\delta a}$	(s <sup>-2</sup> )	0.011206	0.0112	$5.35760 \cdot 10^{-2}$
$N_{\delta r}$	(s <sup>-2</sup> )	-0.622539	-0.6222	$5.44795 \cdot 10^{-2}$

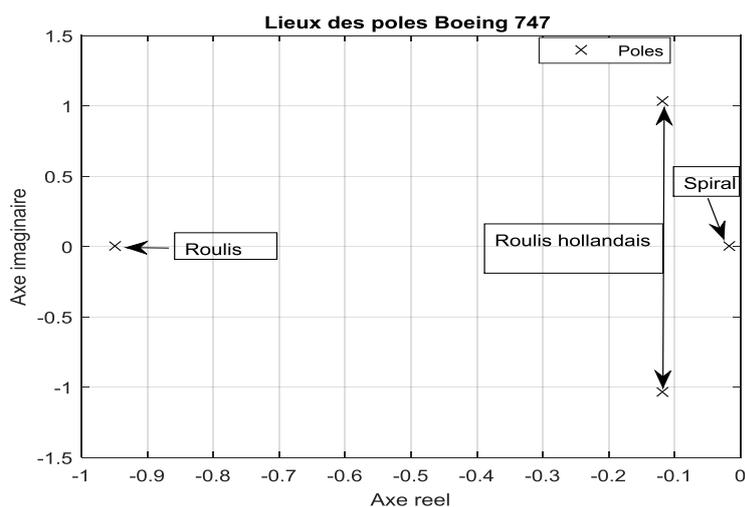


Figure 5.22 Lieux des racines des modes latéraux-directionnels

Tableau 5.19: Paramètres du mouvement latéral-directionnel avion Boeing 747-200

Valeurs propres	Modes	T (s)	$t_{1/2}$ (s)	$N_{1/2}$	$\omega_n$ (rad/s)	$\zeta_n$
$-0.1183 \pm 1.0372i$	Roulis hollandais	6,0578	5,8612	0,9675	1,0439	0,9936
-0.0171	Spiral	-	58,5087	-	-	-
-0.9502	Roulis	-	1,0524	-	-	-

Les résultats de l'analyse par la méthode exacte et approximative sont inclus dans Tableau 5.20. L'approximation du mode roulis hollandais révèle que la période T est très proche de la solution exacte car l'erreur relative est de 6.61% alors que les deux autres paramètres sont très loin de la solution exacte.

Tableau 5.20: Caractéristiques dynamiques latéral directionnel de l'avion Boeing 747-200

Mode	Roulis hollandais		
	Exacte	Approximée	Erreur Relatif (%)
Le temps $t_{1/2}$	343,86	233,72	32,03
La période T	92,7268	86,599	6,61
Le nombre de cycles $N_{1/2}$	3,7084	2,6990	27,22

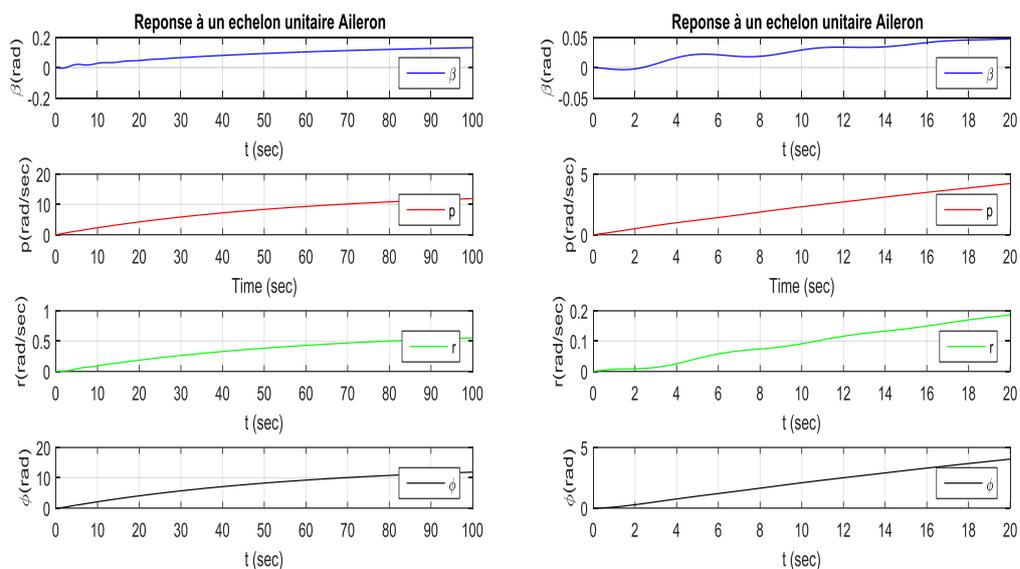


Figure 5.23 Réponse en mode latéral directionnel

### 5.3.3 Contrôle

Le mouvement de tangage de l'avion est contrôlé par un système de maintien de l'angle de tangage. En utilisant l'approche de Blakelock montée par la figure 5.24

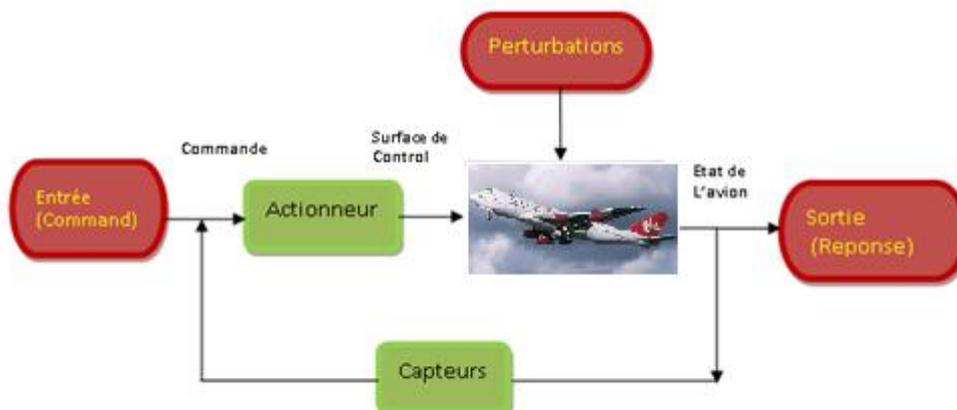


Figure 5.24 Le contrôle et réponse de l'avion

L'avion est initialement en vol rectiligne stabilisé à l'angle de tangage d'équilibre  $\theta_{ref}$ , si le paramètre de sortie  $\theta$  varie de son état de référence, un signal est généré par le gyro vertical ensuite amplifié et se dirige vers le servo commande. Par conséquent, l'action de ce dernier sur la gouverne de profondeur permettra de rétablir l'angle de tangage désiré.

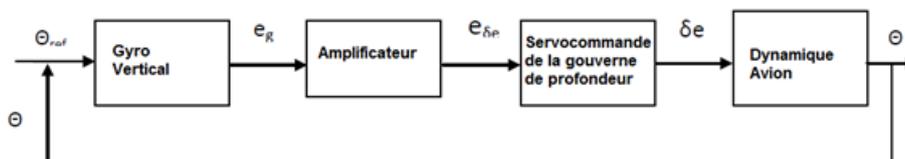


Figure 5.25 Bloque du système de maintien de l'angle de tangage type 0

Si le système n'inclus pas un intégrateur dans le bloque du système de maintien de l'angle de tangage, il est dit du type 0 figure 5.25

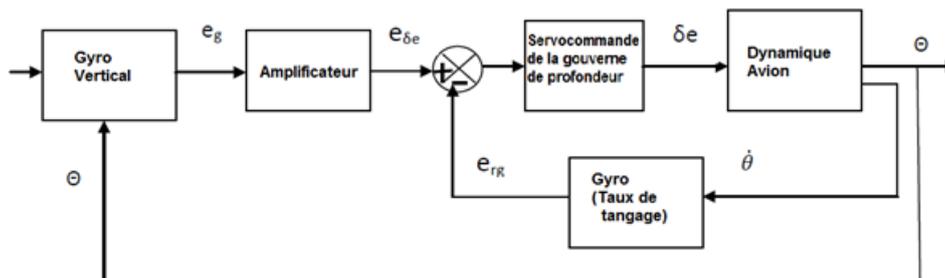


Figure 5.26 Bloque du système de maintien de l'angle de tangage type 1

L'amélioration des caractéristiques dynamiques de l'avion peut être obtenue en ajoutant dans la boucle de retour du système de contrôle de la figure 5.26 au niveau de la boucle de retour un capteur (Gyro) qui mesure le taux de tangage, dans ce cas, il est appelé système de maintien de l'angle de tangage type 1 montré par figure 5.26.

Les résultats de simulations obtenus pour les deux systèmes de contrôles sont présentés par les figures 5.27, 5.28 et 5.29.

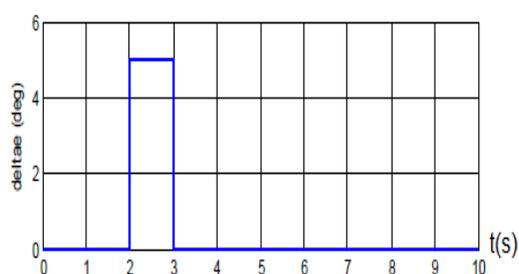
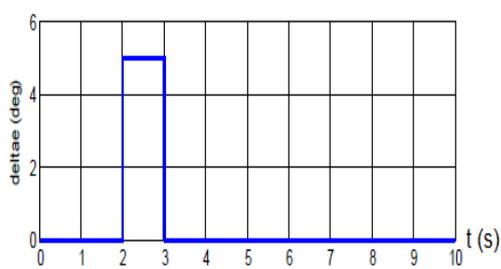
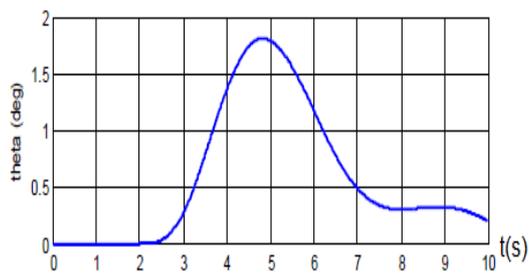
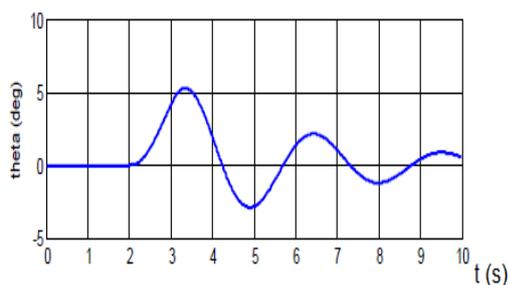


Figure 5.27 Réponse de  $\theta$  pour Boeing 747 équipé du système de contrôle type 0

Figure 5.28 Réponse de  $\theta$  pour Boeing 747 équipé du système de contrôle type 1

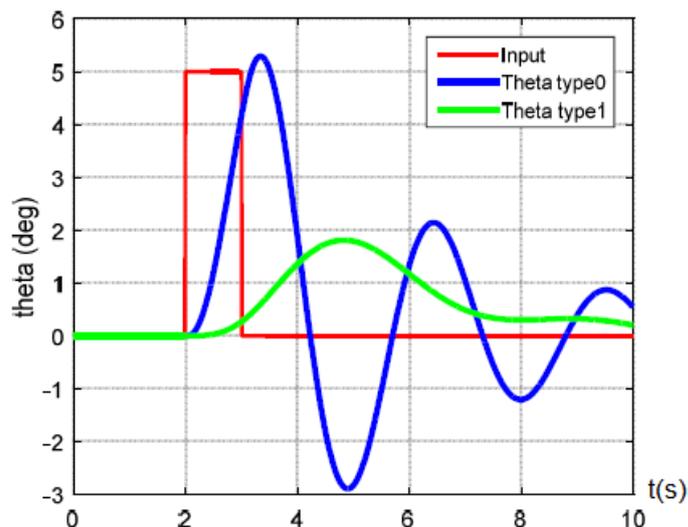


Figure 5.29 Comparaison de la réponse de  $\theta$  pour l'avion Boeing 747 équipé du système de contrôle type 0 et type 1

#### 5.4 L'avion McDonnell Douglas F-4C

L'avion F-4C a été développé par McDonnell Douglas pour la défense de la flotte des États-Unis qui est un avion de chasse supersonique avec deux sièges (pilote et navigateur) et équipé par deux moteurs à réaction de General Electric avec postcombustion.

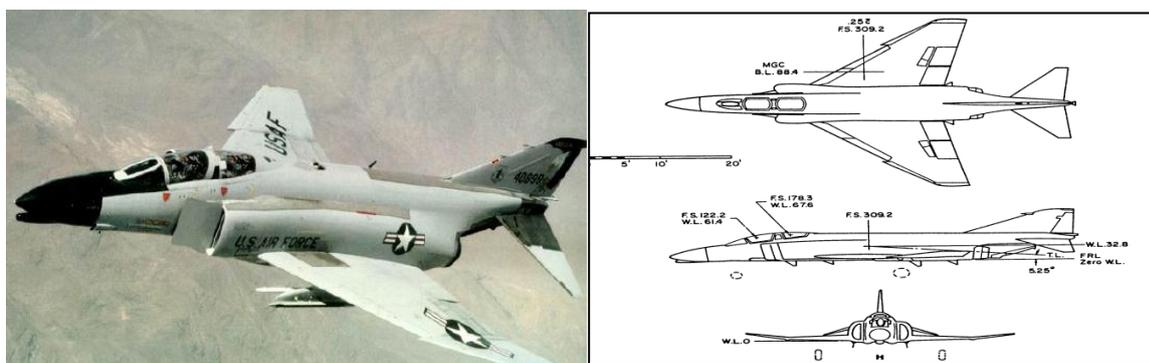


Figure 5.30 Avion F-4C et ses trois vues de l'avion

##### 5.4.1 Critères de stabilité statique

Un avion est classé comme étant statiquement stable ; si sa réponse dynamique satisfait aux critères généraux de la stabilité statique du tableau 5.21. L'analyse de ce dernier montre une instabilité de l'avion F-4C en termes du coefficient de stabilité  $C_{mu}$ . Cette condition est contrôlée par un système d'augmentation de stabilité (SAS).

Tableau 5.21 : Les dix critères de la stabilité statique de l'avion F-4C.

<b>Critères de stabilité statique (CSS)</b>			
CSS1	$(C_{T_{x_u}} - C_{D_u}) < 0$	$C_{T_{x_u}} = 0.0, C_{D_u} = 0.027$	Stable
CSS2	$C_{Y_\beta} < 0$	$C_{Y_\beta} = -0.68$	Stable
CSS3	$C_{L_\alpha} > 0$	$C_{L_\alpha} = 3.75$	Stable
CSS4	$C_{m_\alpha} < 0$	$C_{m_\alpha} = -0.40$	stable
CSS5	$C_{n_\beta} > 0$	$C_{n_\beta} = 0.125$	stable
CSS6	$C_{l_p} < 0$	$C_{l_p} = -0.24$	stable
CSS7	$C_{m_q} < 0$	$C_{m_q} = -2.7$	stable
CSS8	$C_{n_r} < 0$	$C_{n_r} = -0.27$	stable
CSS9	$C_{l_\beta} < 0$	$C_{l_\beta} = -0.08$	stable
CSS10	$C_{m_u} > 0$	$C_{m_u} = -0.117$	instable

### 5.4.2 Modèle linéaire

Un exemple d'analyse concerne l'avion F-4C. Les conditions du vol, masse, inerties et dimensions géométriques sont présentées dans le tableau 5.22 et les coefficients de stabilité sont donnés en annexe.

#### 5.4.2.1 Vol longitudinal

C'est l'étude du mouvement transitoire dans le plan vertical suite à l'action du pilote sur les commandes longitudinales ou une rafale. Le calcul des dérivées de stabilité dimensionnelles par le programme élaboré et ensuite comparé à celles de la référence [7] est donné par tableau 5.23

Tableau 5.22 : Dimensions géométriques, masse, inerties et condition du vol de l'avion F-4C

<b>Condition du vol</b>		<b>Poids et inerties</b>		<b>Géométrie</b>	
Altitude (ft)	35000	Poids (lbs)	39000	Surface alaire (ft <sup>2</sup> )	530
Vitesse (ft/s)	876	Inertie $I_{x_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	25000	Envergure aile (ft)	38.7
Position du centre de gravité (fraction)	0.29	Inertie $I_{y_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	122200	corde géométrique moyenne (ft)	16.0
Attitude Initial (deg)	2.6	Inertie $I_{z_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	139800		
		Inertie $I_{xz_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	2200		

La linéarisation des équations conduit à une représentation d'état de la forme :

$$\dot{x} = A_{Lon}x + B_{Lon}u \quad (5.8)$$

Tableau 5.23 : Coefficients dimensionnelles de stabilité longitudinale de l'avion F-4C

Coefficients de stabilité dimensionnels	Unités	Résultats obtenus	Référence [7]	Erreur(%) :
				$\frac{ (X - X_{[7]}) }{X_{[7]}} \cdot 100$
$X_u$	(s <sup>-1</sup> )	-0.012313	-0.0123	0.105694
$X_{T_u}$	(s <sup>-1</sup> )	0.008492	0.0085	0.0941184
$X_\alpha$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	-4.959055	-4.9591	0.903847 10 <sup>-3</sup>
$Z_u$	(s <sup>-1</sup> )	-0.111805	-0.1118	0.447168 10 <sup>-2</sup>
$Z_\alpha$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	-468.630742	-468.6307	0.006512 10 <sup>-3</sup>
$Z_{\dot{\alpha}}$	ft/(rad.s)	0.0	0.0	0
$Z_q$	ft/(rad.s)	0.0	0.0	0
$M_u$	ft/(rad.s)	-0.002628	-0.0026	1.076922
$M_{T_u}$	ft/(rad.s)	0.0	0.0	0
$M_\alpha$	(s <sup>-2</sup> )	-7.870590	-7.8706	0.127228 10 <sup>-3</sup>
$M_{T_\alpha}$	(s <sup>-2</sup> )	0.0	0.0	0
$M_{\dot{\alpha}}$	(s <sup>-1</sup> )	-0.233602	-0.2336	0.854775 10 <sup>-3</sup>
$M_q$	(s <sup>-1</sup> )	-0.485173	-0.4852	0.556490 10 <sup>-2</sup>
$X_{\delta_e}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	12.397639	12.3976	0.315389 10 <sup>-3</sup>
$Z_{\delta_e}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	-49.590555	-49.5906	0.092309 10 <sup>-3</sup>
$M_{\delta_e}$	(s <sup>-2</sup> )	-11.412356	-11.4124	0.384398 10 <sup>-3</sup>

A et B les matrices d'état et de commande de l'avion, on remplace les valeurs des coefficients dimensionnelles de stabilité du tableau 5.23 dans la matrice A pour l'étude de *mouvement longitudinal de l'avion* et on obtient :

$$A_{Lon} = \begin{bmatrix} -0.0123 & 0.0057 & 0.0000 & -32.1740 \\ -0.1118 & -0.5350 & 876.00 & 0.0000 \\ -0.0026 & -0.0088 & -0.7188 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

La matrice commande :

$$B_{Lon} = \begin{bmatrix} 12.3976 \\ -49.5906 \\ -11.3991 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

Le calcul des valeurs propres a permis d'obtenir deux solutions complexes mais conjuguées qui représentent le mode période courte et deux solutions réelles qui représentent le mode phugoïde qui s'est dégénéré, ce mode est dynamiquement instable car une des solutions réelles est positive.

**- Les fonctions de transfert dans le cas du vol longitudinal**

Les rapports des variables de la vitesse longitudinale  $u(s)$ , de la vitesse verticale  $w(s)$ , de la vitesse de tangage  $q(s)$  et d'angle de tangage  $\theta(s)$  sur l'entrée  $\delta_e$  qui représente l'angle de déflexion de la gouverne de profondeur sont appelés les fonctions de transfert dans le plan longitudinal, Elles sont obtenues en utilisant le programme de calcul :

$$\begin{aligned}\frac{u(s)}{\delta_e(s)} &= \frac{12.4 s^3 + 15.26s^2 + 410 s + 182.2}{s^4 + 1.266 s^3 + 8.109 s^2 + 0.02934 s - 0.0131} \\ \frac{w(s)}{\delta_e(s)} &= \frac{-49.59 s^3 - 1.003 \cdot 10^4 s^2 - 158.3 s - 36.94}{s^4 + 1.266 s^3 + 8.109 s^2 + 0.02934 s - 0.0131} \\ \frac{q(s)}{\delta_e(s)} &= \frac{-11.4 s^3 - 5.835 s^2 - 0.08122 s}{s^4 + 1.266 s^3 + 8.109 s^2 + 0.02934 s - 0.0131} \\ \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} &= \frac{-11.4 s^2 - 5.835 s - 0.08122}{s^4 + 1.266 s^3 + 8.109 s^2 + 0.02934 s - 0.0131}\end{aligned}\tag{5.9}$$

Tableau 5.24: Paramètres du mouvement longitudinal de l'avion F-4C

Valeurs propres	Facteur d'amortissement ( $\xi$ )	Pulsations propre ( $\omega_n$ )	Modes
$-0.6327 \pm 2.7831i$	0.221687	2.854072	Période courte
-0.0401	-	-	
0.0395	-	-	

Les deux autres solutions sont réelles de signes opposés. C'est le mode phugoïde qui s'est dégénéré en allant vers la droite du plan complexe.

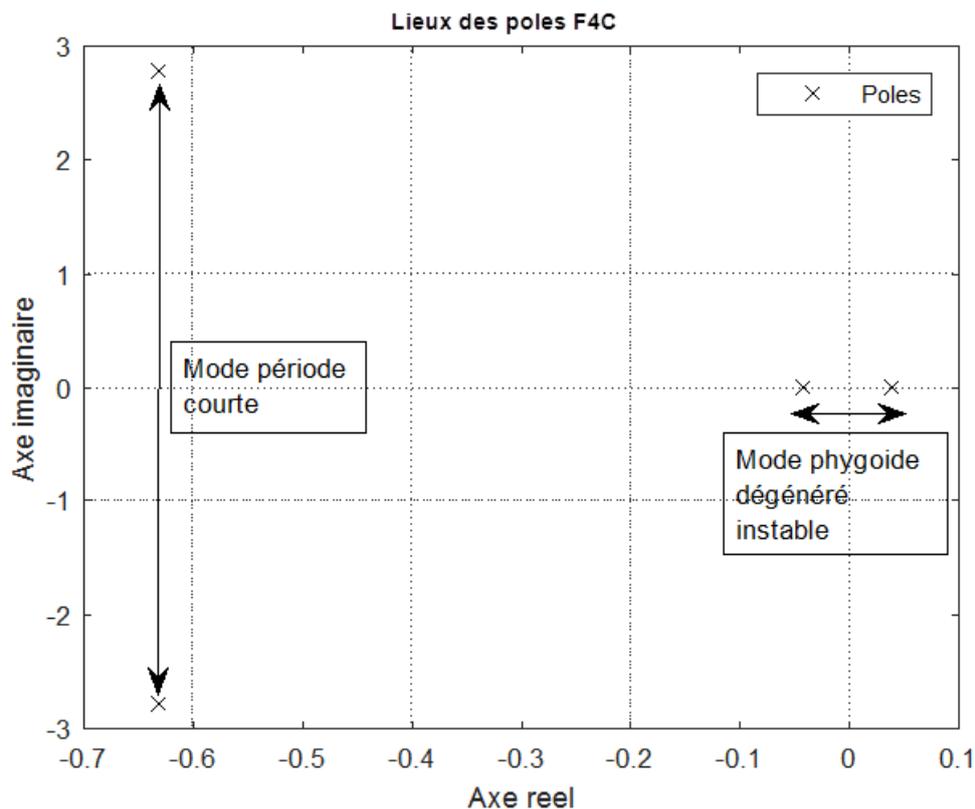


Figure 5.31 Lieux des racines des modes longitudinaux

Tableau 5.25: Comparaison entre la méthode exacte et approximative dans le cas longitudinal de l'avion F-4C

Mouvement	Période Courte		
	Méthode Exacte	Approximée	Erreur Relatif (%)
Le temps $t_{1/2}$	1.095289	1.105491	0.9314
La période $T$	2.257656	2.258857	0.0532
Le nombre de cycles $N_{1/2}$	0.485144	0.4894	0.8778

Les résultats obtenus avec la méthode exacte et approximative sont inclus dans le tableau 5.25. Cette analyse montre que l'approximation du mode période courte est très proche de la solution exacte car l'erreur relative maximale est 0.934%. En conséquence, la forme approximée de la solution du mode période courte suffit largement à étudier les caractéristiques dynamiques de ce mode du mouvement longitudinal.

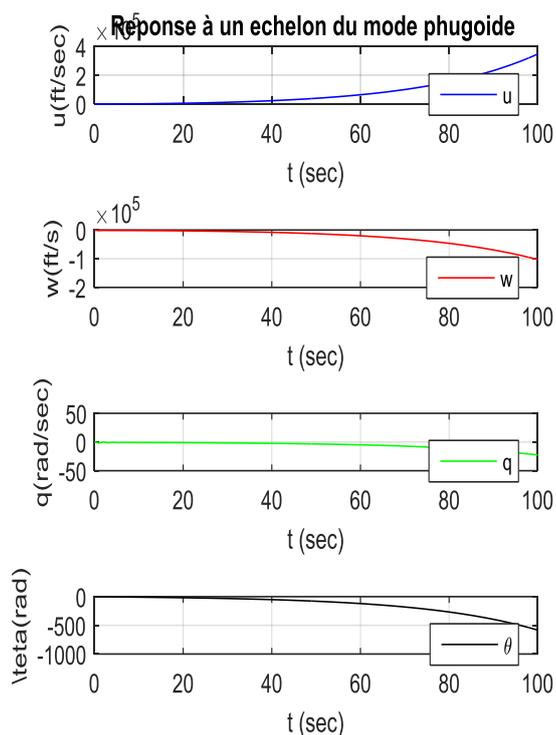
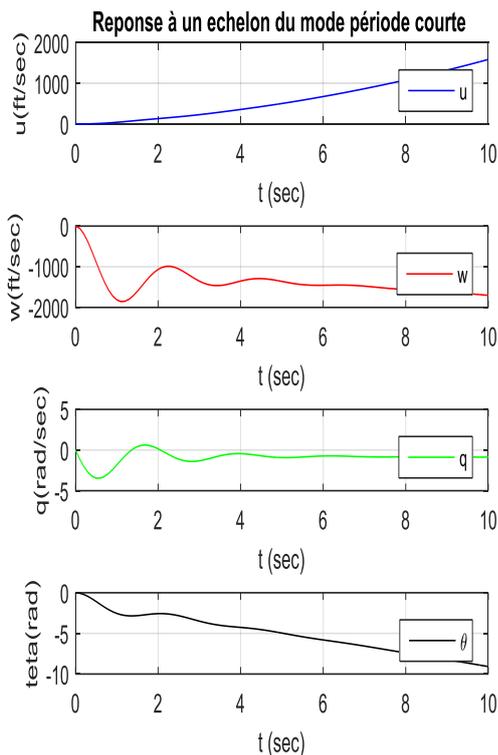


Figure 5.32 Réponse en mode période Courte Figure 5.33 Réponse en mode phugoïde

#### 5.4.2.2 Modèle latéral directionnel

C'est l'étude du mouvement transitoire dans le plan latéral directionnel suite à l'action du pilote sur la commande latérale. Dans ce cas, le calcul des dérivées dimensionnelles de la stabilité latérale-directionnelle est obtenu par le programme réalisé et ensuite une comparaison est faite avec la référence [7] pour valider les résultats qui sont présentés au niveau du tableau 5.26:

La linéarisation des équations conduit à une représentation d'état de la forme :

$$\dot{x} = A_{LD}x + B_{LD}u$$

A et B les matrices d'état et de commande de l'avion, on remplace les valeurs des coefficients dimensionnelles de stabilité du tableau 5.26 dans la matrice A pour l'étude du *mouvement latéral-directionnel de l'avion* et on obtient :

$$A_{LD} = \begin{bmatrix} -0.0962 & 0.00 & -1.0000 & 0.0367 \\ -18.5832 & -1.2315 & 0.3592 & 0.00 \\ 5.2015 & -0.0331 & -0.2482 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

Tableau 5.26 : Coefficients dimensionnelles de la stabilité latérale-directionnelle de l'avion F-4C

Coefficients de stabilité dimensionnels	Unités	Résultats obtenus	Référence [7]	Erreur(%) :
				$\frac{ (X - X_{[7]}) }{X_{[7]}} \cdot 100$
$Y_{\beta}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	-84.303943	-84.3039	$0.045249 \cdot 10^{-3}$
$Y_p$	ft/(rad.s)	0.00	0.00	0
$Y_r$	ft/(rad.s)	0.0	0.0	0
$Y_{\delta a}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	-1.983622	-1.9836	$0.110579 \cdot 10^{-2}$
$Y_{\delta r}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	11.777757	11.7776	$0.132797 \cdot 10^{-2}$
$L_{\beta}$	(s <sup>-2</sup> )	-18.583174	-18.5831	$0.400292 \cdot 10^{-3}$
$L_p$	(s <sup>-1</sup> )	-1.231415	-1.2314	$0.121978 \cdot 10^{-2}$
$L_r$	(s <sup>-1</sup> )	0.359174	0.3592	$0.723486 \cdot 10^{-2}$
$L_{\delta a}$	(s <sup>-2</sup> )	9.756166	9.7561	$0.684261 \cdot 10^{-3}$
$L_{\delta r}$	(s <sup>-2</sup> )	1.393738	1.3937	$0.272855 \cdot 10^{-2}$
$N_{\beta}$	(s <sup>-2</sup> )	5.201478	5.2015	$0.421696 \cdot 10^{-3}$
$N_p$	(s <sup>-1</sup> )	-0.033090	-0.0331	0.030219
$N_r$	(s <sup>-1</sup> )	-0.248175	-0.2482	0.010074
$N_{\delta a}$	(s <sup>-2</sup> )	-0.041612	-0.0416	0.028844
$N_{\delta r}$	(s <sup>-2</sup> )	-2.746381	-2.7456	0.028448

La matrice commande :

$$B_{LD} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0134 \\ 9.7562 & 1.3937 \\ -0.0416 & -2.7464 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Tableau 5.27: Paramètres du mouvement latéral-directionnel avion F-4C

Valeurs propres	Facteur d'amortissement ( $\xi$ )	Pulsation ( $\omega_n$ )	Modes
$-0.0758 \pm 2.3284i$	0,9995	2,3296	<i>Roulis hollandais</i>
-1.4112	-	-	Roulis
-0.0131	-	-	Spiral

C'est le mode de commande employé pour obtenir la vitesse de roulis et l'angle de roulis désirés ; c'est les ailerons qui commandent le taux de roulis

### - Les fonctions de transfert dans le cas du vol latéral-directionnel

Les fonctions de transfert calculées et reliant l'angle de dérapage, la vitesse de roulis, la vitesse de lacet et l'angle d'inclinaison latéral suite à la déflexion de l'aileron sont données par :

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta(s)}{\delta a(s)} &= \frac{0.0416 s^2 + 0.7322 s + 0.08832}{s^4 + 1.576 s^3 + 5.661 s^2 + 7.733 s + 0.1007} \\
 \frac{p(s)}{\delta a(s)} &= \frac{9.756 s^3 + 13.1 s^2 + 53.55 s + 50.21}{s^4 + 1.576 s^3 + 5.661 s^2 + 7.733 s + 0.1007} \\
 \frac{r(s)}{\delta a(s)} &= \frac{-0.0416 s^3 - 0.3782 s^2 - 0.03599 s + 1.834}{s^4 + 1.576 s^3 + 5.661 s^2 + 7.733 s + 0.1007} \\
 \frac{\varphi(s)}{\delta a(s)} &= \frac{9.756 s^2 + 3.345 s + 50.21}{s^4 + 1.576 s^3 + 5.661 s^2 + 7.733 s + 0.1007}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

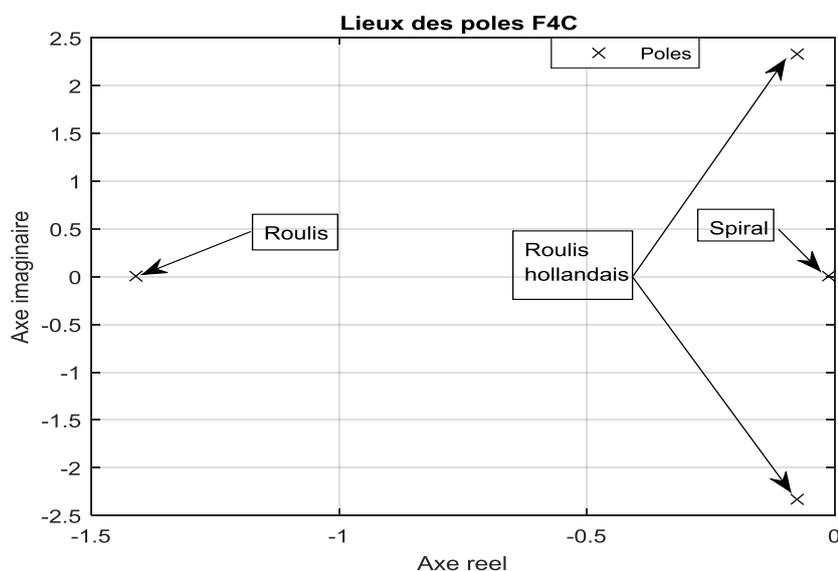


Figure 5.34 Lieux des racines des modes latéraux-directionnels

Dans le cas de la déflexion de la gouverne de direction, les fonctions de transfert calculées et reliant l'angle de dérapage, la vitesse de roulis, la vitesse de lacet et l'angle d'inclinaison latéral sont :

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta(s)}{\delta r(s)} &= \frac{0.0134 s^3 + 2.766 s^2 + 3.484 s - 0.02351}{s^4 + 1.576 s^3 + 5.661 s^2 + 7.733 s + 0.1007} \\
 \frac{p(s)}{\delta r(s)} &= \frac{1.394 s^3 + 0.6382 s^2 - 44.64 s - 43.89}{s^4 + 1.576 s^3 + 5.661 s^2 + 7.733 s + 0.1007} \\
 \frac{r(s)}{\delta r(s)} &= \frac{-2.746 s^3 - 3.623 s^2 - 0.2357 s - 1.607}{s^4 + 1.576 s^3 + 5.661 s^2 + 7.733 s + 0.1007}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\frac{\varphi(s)}{\delta r(s)} = \frac{1.394 s^2 - 0.7555 s - 43.89}{s^4 + 1.576 s^3 + 5.661 s^2 + 7.733 s + 0.1007}$$

Les résultats de l'analyse par la méthode exacte et approximative sont inclus dans Tableau 5.9. L'approximation du mode roulis hollandais révèle que le paramètre  $t_{1/2}$  est très proche de la solution exacte car l'erreur relative est de l'ordre de 4% alors que les paramètres T et  $N_{1/2}$  dépassent l'erreur relative de 10%.

Tableau 5.28: Caractéristiques dynamiques latéral-directionnel avion F-4C

Modes Latéraux	Dénomination	T(s)	$t_{1/2}$ (s)	$N_{1/2}$	$\omega_n$ (rad/s)	$\zeta_n$
Mode 1	Spiral	-	13,1926	-	-	-
Mode 2	Roulis	-	0,4295	-	-	-
Mode 3	Roulis hollandais	2,6985	9,1487	3,3902	2,3296	0,9995

Tableau 5.29: Comparaison entre nos résultats et la référence [7] obtenues avec La méthode exacte pour l'avion F-4C

Modes	Paramètres	Nos résultats	Référence [7]	Erreur relative (%)
Roulis hollandais	- période T (s)	2.6768	2.69	0.49
	- temps $t_{1/2}$ (s)	1.4232	1.42	0.23

Les caractéristiques dynamiques pour le mode roulis hollandais sont déterminées en utilisant la méthode exacte. Pour valider les résultats obtenus, une comparaison est faite avec la référence [7]. L'examen du tableau 5.29 montre que l'erreur relative maximale n'excède pas la valeur de 0.49%, ce qui prouve l'efficacité de la méthode utilisée.

La réponse libre de l'avion a été également analysée pour le mouvement latéral directionnel en actionnant séparément la gouverne de gauchissement ou aileron et la gouverne de direction. Les équations différentielles ont été intégrées en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. La figure 5.35 montre l'évolution temporelle des caractéristiques de réponse pour les deux cas et avec les conditions initiales suivantes :

$$\beta = 0 \text{ deg}, p = 0 \text{ deg / s}, r = 0 \text{ deg / s}, \text{ et } \varphi = 0 \text{ deg}.$$

La perturbation de l'angle de dérapage diminue jusqu'à -2 rad en 20 secondes. La perturbation induit des mouvements de roulis et de lacet.

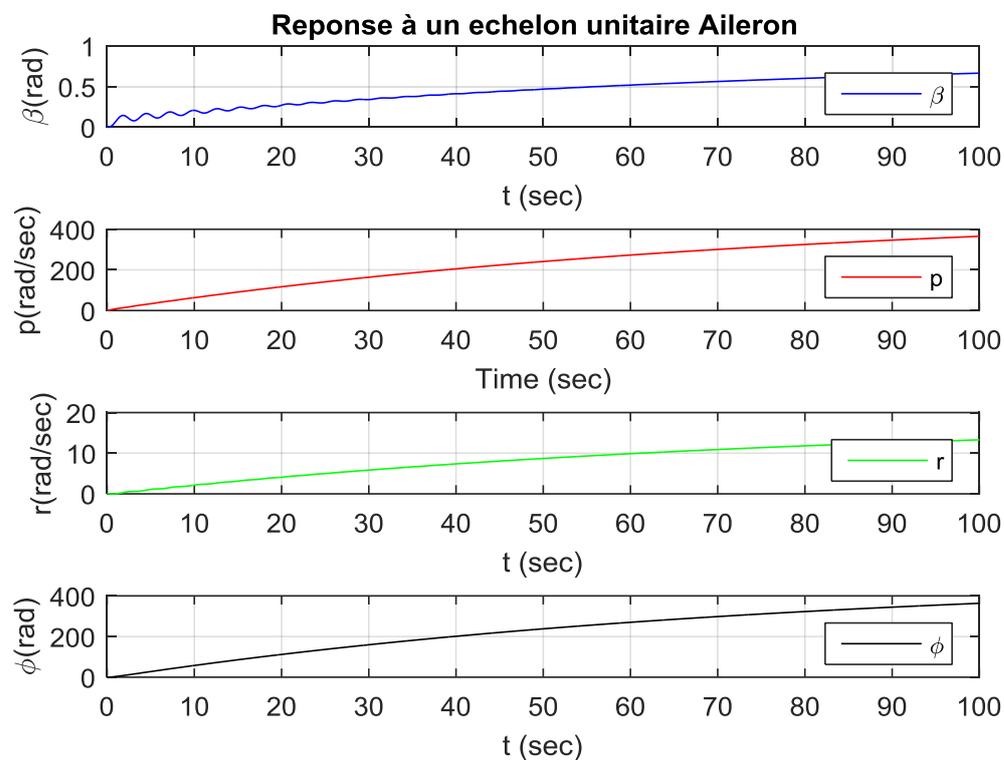


Figure 5.35 Réponse en mode latéral directionnel

### 5.3.4 Contrôle

Le mouvement de tangage de l'avion est contrôlé par un système de maintien de l'angle de tangage figure 5.36. En utilisant l'approche de Blakelock montée par la figure 5.37

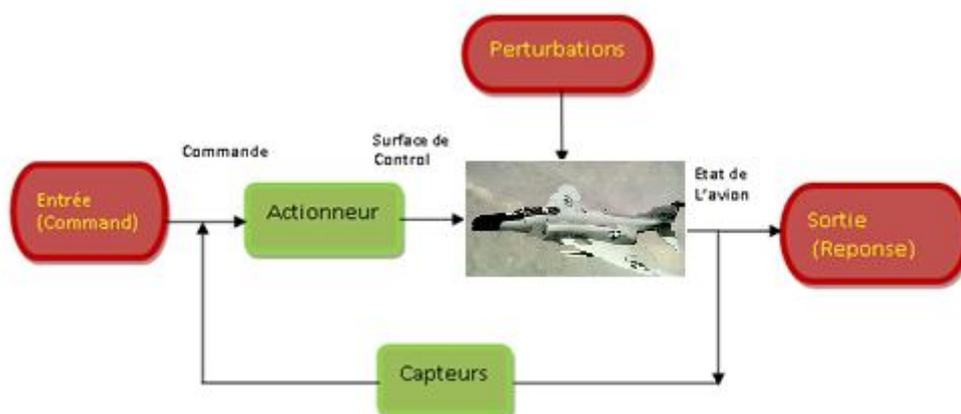


Figure 5.36 Le contrôle et réponse de l'avion

L'avion est initialement en vol rectiligne stabilisé à l'angle de tangage d'équilibre  $\theta_{ref}$ , si le paramètre de sortie  $\theta$  varie de son état de référence, un signal est généré par le gyro vertical ensuite amplifié et se dirige vers le servo commande. Par conséquent, l'action de ce dernier sur la gouverne de profondeur permettra de rétablir l'angle de tangage désiré.

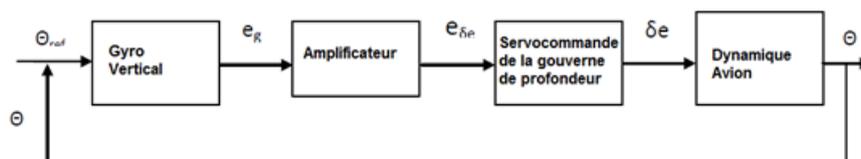


Figure 5.37 Bloc diagram of the pitch angle maintenance system of type 0

If the system does not include an integrator in the pitch angle maintenance system block, it is said to be of type 0, as shown in Figure 5.37.

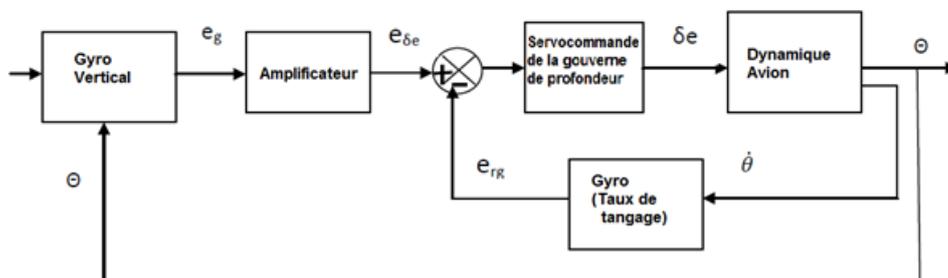


Figure 5.38 Bloc diagram of the pitch angle maintenance system of type 1

The improvement of the dynamic characteristics of the aircraft can be obtained by adding to the feedback loop of the control system of Figure 5.37 a sensor (Gyro) that measures the pitch rate. In this case, it is called a pitch angle maintenance system of type 1, as shown in Figure 5.38.

The simulation results obtained for the two control systems are presented in Figures 5.39 and 5.40.

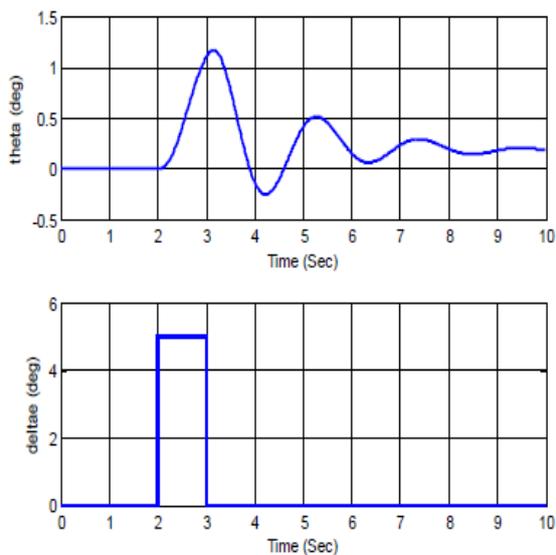


Figure 5.39 Réponse avion F4C équipé système de contrôle type 0

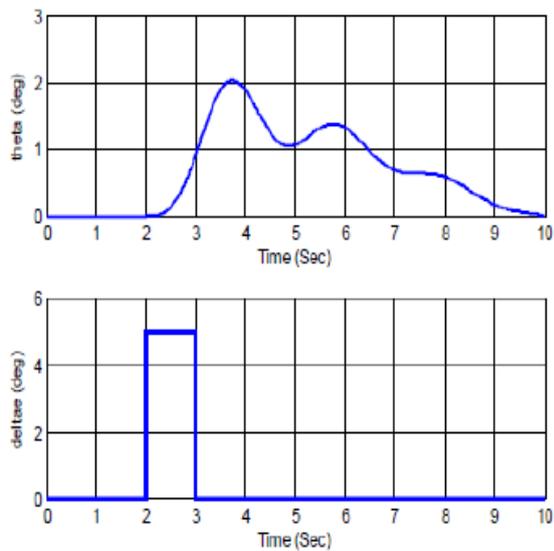


Figure 5.40 Réponse avion du équipé du système de contrôle type 1

### 5.5 L'avion d'affaire Learjet M24

Learjet 24 est un avion d'affaires biréacteur américain développé dans les années 1960 de six à huit places. Cet avion est équipé de deux moteurs à réaction General Electric.

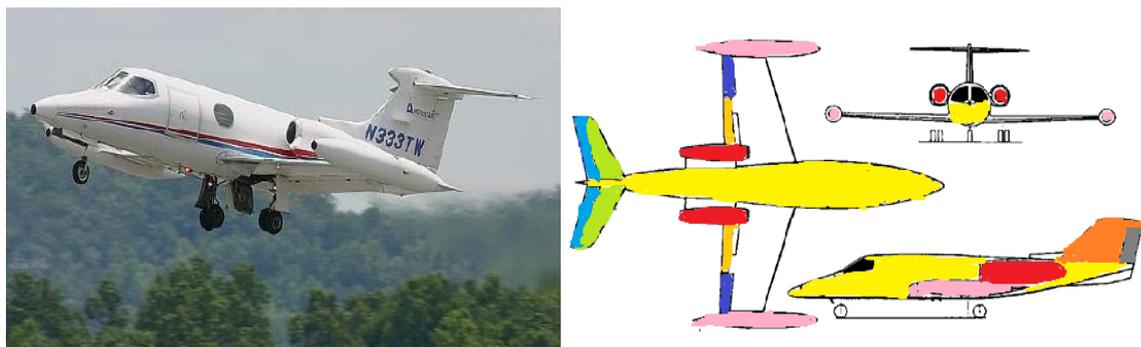


Figure 5.41 Avion Learjet M24 et ses trois vues de l'avion

Tableau 5.30 : Dimensions géométriques, masse, inerties et condition du vol de l'avion Learjet M24

Condition du vol		Poids et inerties		Géométrie	
Altitude (ft)	40000	Poids (lbs)	13000	Surface alaire (ft <sup>2</sup> )	230
Vitesse (ft/s)	673	Inertie $I_{xx_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	28000	Envergure aile (ft)	34
Nombre Mach	0.7	Inertie $I_{yy_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	18800	corde géométrique moyenne (ft)	7
Position du centre de gravité (fraction)	0.32	Inertie $I_{zz_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	47000		
Attitude Initial (deg)	2.7	Inertie $I_{xz_B}$ (slug.ft <sup>2</sup> )	1300		

### 5.5.1 Critères de stabilité statique

Un avion est classé comme étant statiquement stable ; si sa réponse dynamique satisfait aux critères généraux de la stabilité statique du tableau 5.26. L'analyse de ce dernier montre que l'avion Learjet M24 vérifie les dix critères de la stabilité statique.

Tableau 5.31 : Les dix critères de la stabilité statique de l'avion Learjet M24.

Critères de stabilité statique (CSS)			
CSS1	$(C_{T_{x_u}} - C_{D_u}) < 0$	$C_{T_{x_u}} = 0.0, C_{D_u} = 0.104$	stable
CSS2	$C_{Y_\beta} < 0$	$C_{Y_\beta} = -0.73$	stable
CSS3	$C_{L_\alpha} > 0$	$C_{L_\alpha} = 5.84$	stable
CSS4	$C_{m_\alpha} < 0$	$C_{m_\alpha} = -0.64$	Stable
CSS5	$C_{n_\beta} > 0$	$C_{n_\beta} = 0.127$	Stable
CSS6	$C_{l_p} < 0$	$C_{l_p} = -0.45$	Stable
CSS7	$C_{m_q} < 0$	$C_{m_q} = -15.5$	Stable
CSS8	$C_{n_r} < 0$	$C_{n_r} = -0.20$	Stable
CSS9	$C_{l_\beta} < 0$	$C_{l_\beta} = -0.11$	Stable
CSS10	$C_{m_u} > 0$	$C_{m_u} = 0.05$	Stable

### 5.5.2 Modèle linéaire

Un exemple d'analyse concerne l'avion Learjet M24[7]. Les conditions du vol, masse, inerties et dimensions géométriques sont présentées dans le tableau 5.25 et les coefficients de stabilité sont donnés en annexe A.

### 5.5.2.1 Vol longitudinal

La linéarisation des équations conduit à une représentation d'état sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{Lon}x + B_{Lon}u \\ y &= C_{Lon}x + D_{Lon}u \end{aligned} \quad (5.12)$$

$x$ ,  $y$  et  $u$  sont respectivement des vecteurs d'état, de sortie et de commande

$A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont respectivement les matrices d'état, de commande, d'observation et d'application de la commande

Tableau 5.32 : Coefficients dimensionnelles de stabilité longitudinale de l'avion Learjet M24

Coefficients de stabilité dimensionnels	Unités	Résultats obtenus	Référence [7]	Erreur(%) :
				$\frac{ (X - X_{[7]}) }{X_{[7]}} \cdot 100$
$X_u$	(s <sup>-1</sup> )	-0.019374	-0.0194	0.134024
$X_{T_u}$	(s <sup>-1</sup> )	0.007591	0.0076	0.118425
$X_\alpha$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	8.437366	8.4374	0.406906 10 <sup>-3</sup>
$Z_u$	(S <sup>-1</sup> )	-0.138225	-0.1382	0.180927 10 <sup>-3</sup>
$Z_\alpha$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	-450.516999	-450.5170	0
$Z_{\dot{\alpha}}$	ft/(rad.s)	-0.872401	-0.8724	0.116148 10 <sup>-3</sup>
$Z_q$	ft/(rad.s)	-1.863766	-1.8638	0.182927 10 <sup>-2</sup>
$M_u$	ft/(rad.s)	0.000852	0.0009	5.333329
$M_{T_u}$	ft/(rad.s)	-0.000051	-0.0001	49
$M_\alpha$	(s <sup>-2</sup> )	-7.385377	-7.3854	0.309911 10 <sup>-3</sup>
$M_{T_\alpha}$	(s <sup>-2</sup> )	0.0	0.0	0
$M_{\dot{\alpha}}$	(s <sup>-1</sup> )	-0.399712	-0.3997	0.300484 10 <sup>-2</sup>
$M_q$	(s <sup>-1</sup> )	-0.924706	-0.9247	0.644584 10 <sup>-3</sup>
$X_{\delta_e}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	0.0	0.0	0
$Z_{\delta_e}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	-35.283531	-35.2835	0.086492 10 <sup>-3</sup>
$M_{\delta_e}$	(s <sup>-2</sup> )	-14.309168	-14.3092	0.22660 10 <sup>-3</sup>

Connaissant les conditions de vol de l'avion, sa géométrie, son poids et ses inerties ainsi que les coefficients aérodynamiques et de stabilité, on peut déterminer par les programmes élaborés en langage Fortran et Matlab les valeurs des coefficients

dimensionnelles de stabilité tableau 5.32 et par conséquent tous les éléments de la matrice  $A$  pour étudier le *mouvement longitudinal de l'avion*, on obtient :

$$A_{Lon} = \begin{bmatrix} -0.0194 & 0.0125 & 0.0000 & -32.1740 \\ -0.1382 & -0.6655 & 677.00 & 0.0000 \\ 0.0009 & -0.0105 & -1.3244 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

La matrice commande :

$$B_{Lon} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -35.2835 \\ -14.2883 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

La solution exacte de l'équation caractéristique du vol longitudinal aboutit aux *valeurs propres et les caractéristiques dynamiques du tableau 5.33*

Le calcul des valeurs propres a permis d'obtenir une paire de solutions qui sont complexes et conjugués avec les parties réelles négatives, ce qui signifie que le mouvement longitudinal est dynamiquement stable.

Tableau 5.33: Paramètres du mouvement longitudinal avion Learjet M24

<b>Valeurs propres</b>	<b>Facteur d'amortissement (<math>\xi</math>)</b>	<b>Pulsations propre (<math>\omega_n</math>)</b>	<b>Modes</b>
$-0.9944 \pm 2.6464i$	0.351760	2.827036	Période courte
$-0.0102 \pm 0.0908i$	0.111465	0.091397	Phugoïde

Le mode période longue ou « phugoïde » est celui dans lequel il y a une variation de l'amplitude de la vitesse, d'altitude et de l'angle de tangage. L'angle d'attaque demeure presque constant. Ce mode est un échange lent de l'énergie cinétique et potentielle alors que l'avion tente de rétablir son vol d'état d'équilibre d'où il avait été perturbé. L'amortissement est très faible, la période est lente et le pilote peut généralement lui-même contrôler cette oscillation.

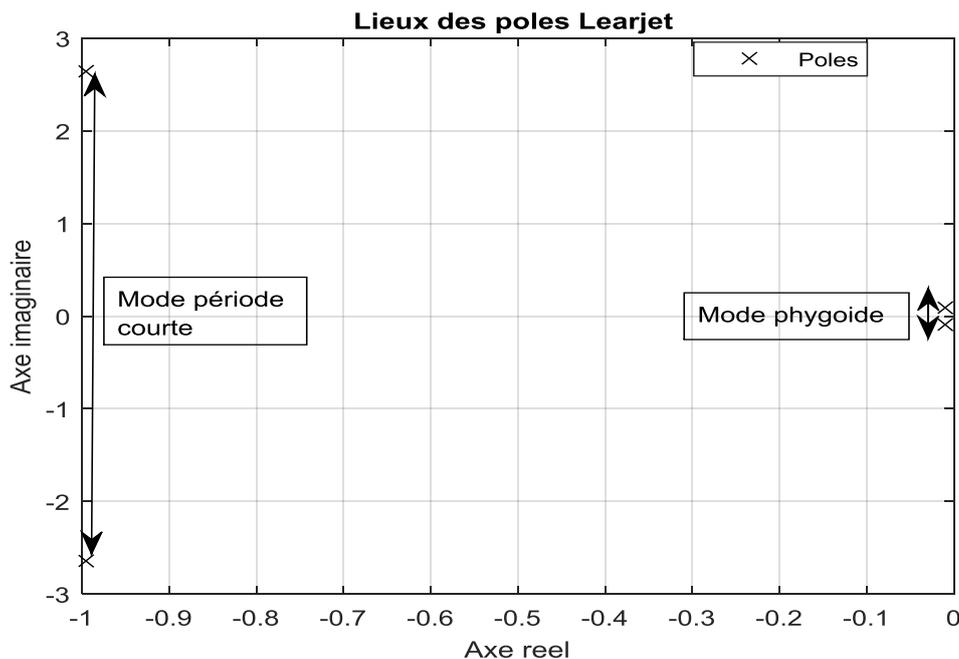


Figure 5.42 Lieux des racines des modes longitudinaux

Le mode de période courte ou simplement « Short period » est une oscillation fortement amortie sur une période. Il y a essentiellement une variation de l'angle d'attaque et de l'angle de tangage. Le mouvement est généralement assez rapide pour que la vitesse et l'altitude n'aient pas le temps de changer, ainsi elles demeurent presque constantes.

Tableau 5.34: Caractéristiques dynamiques longitudinale Learjet M24

Mouvement	Période longue (phugoïde)			Période Courte		
	Exacte	Approximée	Erreur Relatif (%)	Exacte	Approximée	Erreur Relatif (%)
Le temps $t_{1/2}$	68,0238	71,5388	5,17	0,6969	0,6965	0,05
La période T	69,1768	78,0824	12,87	2,3743	2,3730	0,05
Le nombre de cycles $N_{1/2}$	0,9833	0,9162	6,83	0,2935	0,2935	0,004

Les résultats obtenus avec la méthode exacte et approximative sont inclus dans le tableau 5.34. Dans cette analyse montre que l'approximation du mode période courte est très proche de la solution exacte car l'erreur relative est inférieure à 0.05% par contre l'approximation du mode phugoïde atteint une erreur relative de 12.87%. En conséquence, l'approximation de la période courte est la plus précise et recommandé

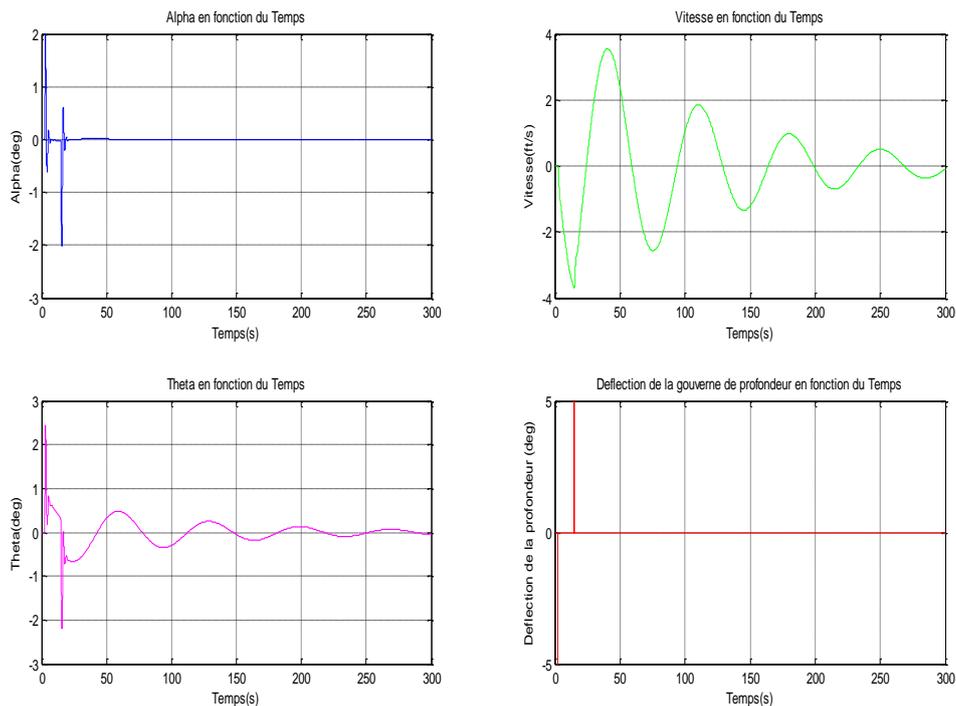


Figure 5.43 Réponse de l'avion en mode longitudinale

### 5.5.2.2 Vol latéral-directionnel

C'est l'étude du mouvement transitoire dans le plan latéral directionnel suite à l'action du pilote sur la commande latérale du manche en roulis et directionnelle sur le palonnier ou bien suite à une rafale latérale ou directionnelle. Dans ce cas, le calcul des dérivées dimensionnelles de la stabilité latérale-directionnelle est obtenu par le programme élaboré et ensuite une comparaison est faite avec la référence [7].

La linéarisation des équations conduit à une représentation d'état de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{LD}x + B_{LD}u \\ y &= C_{LD}x + D_{LD}u \end{aligned} \quad (5.13)$$

Tableau 5.35 : Coefficients dimensionnelles de la stabilité latérale-directionnelle de l'avion Learjet M24

Coefficients de stabilité dimensionnels	Unités	Résultats obtenus	Référence [7]	Erreur(%) : $\frac{ (X - X_{[7]}) }{X_{[7]}} \cdot 100$
$Y_{\beta}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	-55.993430	-55.9934	$0.054502 \cdot 10^{-3}$
$Y_p$	ft/(rad.s)	0.0	0.0	0
$Y_r$	ft/(rad.s)	0.770432	0.7704	$0.415468 \cdot 10^{-2}$
$Y_{\delta a}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	0.0	0.0	0
$Y_{\delta r}$	ft/(rad.s <sup>2</sup> )	10.738466	10.747	0.079403
$L_{\beta}$	(s <sup>-2</sup> )	-4.151562	-4.1516	$0.907364 \cdot 10^{-3}$
$L_p$	(s <sup>-1</sup> )	-0.426473	-0.4265	$0.63308 \cdot 10^{-2}$
$L_r$	(s <sup>-1</sup> )	0.151635	0.1516	0.023089
$L_{\delta a}$	(s <sup>-2</sup> )	6.717981	6.7180	$0.283916 \cdot 10^{-3}$
$L_{\delta r}$	(s <sup>-2</sup> )	0.717088	0.7171	$0.167900 \cdot 10^{-2}$
$N_{\beta}$	(s <sup>-2</sup> )	2.842477	2.8425	$0.805213 \cdot 10^{-3}$
$N_p$	(s <sup>-1</sup> )	-0.004496	-0.0045	0.088889
$N_r$	(s <sup>-1</sup> )	-0.112404	-0.1124	$0.355295 \cdot 10^{-2}$
$N_{\delta a}$	(s <sup>-2</sup> )	-0.447634	-0.4476	$0.759706 \cdot 10^{-2}$
$N_{\delta r}$	(s <sup>-2</sup> )	-1.656247	-1.6561	$0.887537 \cdot 10^{-2}$

$x$  est le vecteur d'état et  $u$  est le vecteur commande qui sont données par :

A et B les matrices d'état et de commande de l'avion, on remplace les valeurs des coefficients dimensionnelles de stabilité du tableau 5.35 dans la matrice A pour l'étude du *mouvement latéral-directionnel de l'avion* et on obtient :

$$A_{LD} = \begin{bmatrix} -0.0827 & 0.00 & -0.9989 & 0.0475 \\ -4.1516 & -0.4265 & 0.1516 & 0.00 \\ 2.8425 & -0.0045 & -0.1124 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

La matrice commande :

$$B_{LD} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.0159 \\ 6.7180 & 0.7171 \\ -0.4476 & -1.6562 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

La solution exacte de l'équation caractéristique du vol latéral-directionnel aboutit aux *valeurs propres et les caractéristiques dynamiques du tableau 5.36*

Tableau 5.36: Caractéristiques dynamiques du mouvement latéral-directionnel avion Learjet M24

Valeurs propres	Modes	T (s)	$t_{1/2}$ (s)	$N_{1/2}$	$\omega_n$ (rad/s)	$\zeta_n$
$-0.0616 \pm 1.6931i$	Roulis hollandais	3.7110	11.2509	3.0317	1.6943	0.9993
-0.4972	Roulis	-	2.01126	-	-	-
-0.0012	Spiral	-	833.333	-	-	-

C'est le mode de commande employé pour obtenir la vitesse de roulis et l'angle de roulis désirés ; c'est les ailerons qui commandent le taux de roulis

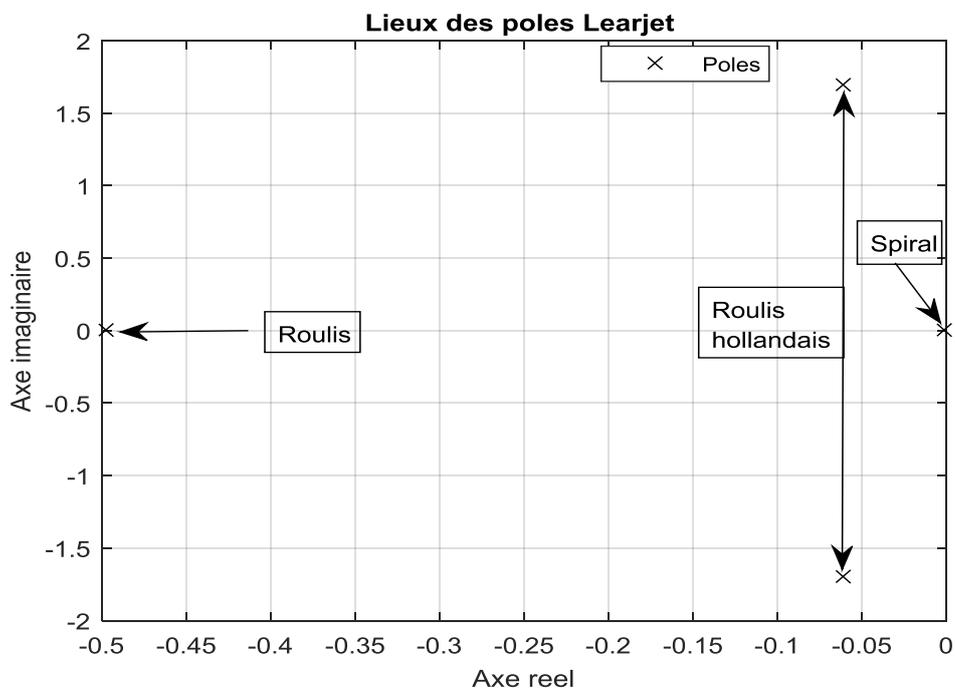


Figure 5.44 Lieu des racines des modes latéraux-directionnels

Tableau 5.37: Comparaison entre la méthode exacte et approximative dans le cas latéral-directionnel de l'avion Learjet M24

Mode	Roulis hollandais		
	Exacte	Approximée	Erreur Relatif (%)
Temps $t_{1/2}$	11.2509	7.1036	36.8618
Période T	3.7110	3.7293	0.4852
Nombre de cycles $N_{1/2}$	3.0317	0.983	37.166

Les résultats de l'analyse par la méthode exacte et approximative sont inclus dans le tableau 5.37. L'approximation du mode roulis hollandais révèle que la période  $T$  est très proche de la solution exacte car l'erreur relative est de l'ordre de 0.485% alors que les autres paramètres  $t_{1/2}$  et  $N_{1/2}$  sont loin car l'erreur relative dépasse 36%.

## CONCLUSION GENERALE

L'objectif global de cette thèse est l'analyse de la stabilité de l'avion et la réponse aux principales commandes. L'étude a débuté par une revue de la littérature pour connaître les travaux déjà effectués et les méthodes disponibles d'analyse de la stabilité. Ensuite, une présentation des concepts de base de la stabilité ainsi que les critères utilisés pour confirmer si un avion est stable ou non.

La méthodologie adoptée consiste à élaborer et adapter un modèle mathématique qui gouverne la dynamique du vol de l'avion, rechercher des techniques de résolution d'une part, dans le cas linéaire en utilisant la méthode classique de la fonction de transfert et la méthode moderne matricielle d'espace d'état, et d'autre part, le cas non linéaire en utilisant la méthode de Runge-Kutta et l'outil de simulation Simulink. Un code de calcul en langage Fortran a été réalisé pour déterminer les coefficients dimensionnels de stabilité longitudinale et latérale directionnelle dont le modèle mathématique est développé par J.Roskam [7] et R.C.Nelson [11], les résultats obtenus sont couplés avec un programme réalisé sous le logiciel Matlab afin de déterminer les caractéristiques dynamiques transitoire suite à des perturbations internes générées par les surfaces de contrôle principales de l'avion, en outre un autre programme sous le logiciel Simulink est développé pour le traitement du cas non linéaire en introduisant le modèle mathématique basé sur le système d'équations différentielles décrivant le comportement cinématique et dynamique de l'avion.

Les paramètres de vol à savoir les vitesses de translation, de rotation et les angles d'Euler sont simulés en fonction du temps suite aux perturbations générées par la commande des surfaces de contrôle.

Cette étude nous a permis de tirer les conclusions suivantes :

- La détermination du point neutre adimensionnel qui représente le point pour lequel la raideur en tangage s'annule ( $Cm_{\alpha}=0$ ), prend un sens particulier car il permet de définir la frontière entre le centrage statique stable et instable, il est de l'ordre de 0.5923 pour le cas de l'avion RYAN NAVION avec une erreur relative de 7.69 % par rapport aux travaux de R.C.Nelson [11]. D'autre part, la marge de stabilité

statique calculée par notre programme est de 15.38% de la corde aérodynamique moyenne, cette dernière satisfait aux règles de certifications imposées par les institutions internationales de l'aviation qui exigent des valeurs supérieures à 5% [11, 25, 59].

- Les critères nécessaires de stabilité statique des avions étudiés dans notre travail ont été déterminés afin d'évaluer la stabilité statique complète. Ces derniers contribuent dans la qualité de vol et le maintien de la trajectoire initiale, ce qui permet un pilotage sécurisé. D'autre part, ils sont considérés comme des conditions nécessaires pour satisfaire la stabilité dynamique. En outre, on note que l'influence du critère  $C_{m\alpha}$  qui est le coefficient de moment de tangage par rapport à l'angle d'attaque ou la raideur en tangage est le plus important dans la stabilité longitudinale.
- Une analyse mathématique sur l'équilibre des forces et des moments aérodynamiques et propulsifs est développée pour les nouvelles configurations (canard et à trois surfaces), le calcul de la vitesse minimale de contrôle dans les situations critiques de vol pour les avions conventionnelles a été déterminé ; ces dernières corroborent avec l'analyse de J.Roskam [7]

La stabilité dynamique traite le comportement de l'avion autour du point d'équilibre à la suite des perturbations dûes aux surfaces de contrôle à savoir la déflexion des gouvernes et les rafales. Le calcul des facteurs influant sur le mouvement de l'avion est primordial pour la prédiction du comportement dynamique. En utilisant notre programme de calcul pour les quatre types d'avions prisent en considération, on peut conclure que :

- Pour l'avion léger (Ryan Navion) :

La période amortie qui caractérise le mouvement longitudinale oscillatoire est de 2.424 s pour le mode période courte alors qu'elle est de 29.491 s pour le mode Phygoide, on remarque une erreur relative de 0.178% pour le 1er mode et de  $0.31910^{-3}$  % pour le 2eme mode comparé à la référence R.C.Nelson [11]. D'autre part, pour le cas latéral directionnel, la pulsation amortie du mode Roulis-Hollandais qui caractérise le mouvement oscillatoire généré par les perturbations de déflexion de l'aileron et de la gouverne de direction est de 2.68 s avec une erreur de 0.49% par rapport à la même référence.

- Pour l'avion de transport Boeing 747 :

Le facteur d'amortissement, par sa nature intrinsèque à cause de son rôle d'atténuateur dans le mouvement oscillatoire pour revenir à la position d'équilibre initiale et aussi qui est considéré comme un critère de la classification des avions en termes de qualité de vol. Ce facteur est calculé pour les trois modes (phygoïde, période courte et Roulis Hollandais), il correspond respectivement à (0.0297, 0.4659, 0.9935). Une bonne concordance est observée avec les travaux de J.Roskam [7].

- Pour l'avion de chasse F4C :

Une instabilité est détecté dans le cas du mouvement longitudinal de l'avion, c'est le mode phygoïde qui s'est dégénéré en un mouvement apériodique avec l'une des deux solutions est divergente. Pour le mode période courte, sa pulsation amortie calculée est de 2.7831 rad/s sachant que la valeur publiée par la référence J.Roskam [7] est 2.783 rad/s par conséquent une différence de 0.01 %.

- Pour l'avion d'affaire Learjet 24:

Les caractéristiques dynamiques en particulier les facteurs d'amortissements obtenus pour les trois modes (phygoïde, période courte et Roulis Hollandais) sont respectivement 0.11146, 0.35176 et 0.9993. Concernant les pulsations amorties calculées également pour les trois modes, elles correspondent aux 0.0908 rad/s, 2.6464 rad/s, et 1.6932 rad/s. Egalement, ce sont des paramètres très proches de ceux qui sont données par la référence J.Roskam [7].

L'analyse de stabilité effectuée sur les quatre avions révèle que la méthode approximée est très efficace pour le mode période courte car l'erreur relative calculée est toujours inférieure à 1% par rapport à la méthode exacte. En conséquence, l'exploitation de l'expression analytique du mode courte période approchée est recommandée.

Les paramètres précédents ( $W_{n_{SP}}$ ,  $W_{n_{PH}}$ ,  $W_{n_{DR}}$ ,  $\xi_{SP}$ ,  $\xi_{PH}$ ,  $\xi_{DR}$  ) sont des objectifs clés dans la phase de conception d'avion pour satisfaire aux exigences de qualités de vol. Les valeurs de ces paramètres dépendent du type d'avion (militaire ou civil), de sa classe et du niveau de vol J.Roskam [47].

En fin, le respect des critères et les caractéristiques de la stabilité nous a permis de répondre aux recommandations spécifiés par les normes internationales dans le domaine aéronautique en terme de :

- Sécurité de l'avion et de ses passagers
- Bonne qualité de vol pour un transport confortable

En outre, le logiciel que nous avons élaboré est utilisé pour le calcul des caractéristiques dynamiques des avions qui peuvent être intégré dans un simulateur de vol pour afficher les performances dynamiques et la visualisation de l'oscillation du mouvement lors des perturbations. D'autre part, dans les projets de conception d'avions, notre logiciel peut être utilisé comme source de données pour développer les systèmes de contrôle automatique de vol.

Comme perspective, cette étude peut être étendue en tenant compte :

- L'effet de la turbulence atmosphérique sur le comportement dynamique de l'avion
- Phénomènes d'aéroélasticité
- Techniques non linéaires de contrôle

## REFERENCES

- [1] George Hartley Bryan , Sc.D, F.R.S. Stability in Aviation, An Introduction to Dynamical Stability as applied to the Motion of Aeroplanes, MACMILLAN, 1911.
- [2] Courtland D.Perkins and Robert E.Hage. Aircraft performance stability and control, J.Wiley Sons Inc, 1949.
- [3] Bernard Etkin et Loyd Duffreid. Dynamics of Flight stability and control, J.Wiley & Sons Inc 1 Ed, 1959.
- [4] R.D.Fick. USAF Stability and control DATCOM, Douglas aircraft division, 1978.
- [5] A.W Babister. Aircraft stability and control, Pergamon press, 1961.
- [6] B.Etkin. Dynamics of Atmospheric flight-DOVER PUBLICATIONS, INC, 1972.
- [7] Jan Roskam. Airplane flight dynamics and automatic flight controls Part I Roskam Aviation and Engineering Corporation 1972.
- [8] D. Mc.Ruer, I. Ashkenas , D.Graham. Aircraft dynamics and automatic control, Princeton university press, 1973.
- [9] W.Mc.Cormick. Aerodynamics, Aeronautics, Flight mechanics, John Wiley & Sons Inc, 1979.
- [10] A.W Babister. Aircraft dynamic stability and response, Pergamon , 1980.
- [11] Robert C.Nelson. Flight stability and automatic control, Mc Graw-Hill 1989.
- [12] Donald Mc Lean. Automatic flight control system, Prentice Hall International,1990.
- [13] Brian L. Stevens and Frank L.Lewis. Aircraft control and simulation John Wiley & Sons Inc, 2<sup>nd</sup> Edition, 1992.
- [14] J.B.Russell. Performance and Stability of Aircraft, Butterworth Heinemann, 1996
- [15] M.V.Cook. Flight dynamics principles: A Linear Systems Approach to Aircraft Stability and Control. Elsevier Aerospace Engineering Series, 2<sup>nd</sup> Edition, 1997.
- [16] M.J.Abzug. Computational Flight Dynamics, AIAA Education Series 1998
- [17] Bandu N.Pamadu. *Performance, Stability, Dynamics and Control of Airplane*, AIAA, Education Series, 1998
- [18] Louis V.schimdt. Introduction to aircraft flight dynamics AIAA Education series 1998.
- [19] R.Pratt. Flight control System. Progress in Astronautics and Aeronautics, 2000
- [20] ASHISH. Modern control design with MATLAB and SIMULINK John Wiley & Sons Inc 2002

- [21] Franklin, James A. Dynamics, Control, and Flying Qualities of V-STOL Aircraft, AIAA, Education Series, 2002
- [22] M.J. Abzug, F.E.Larrabee\_Airplane. Stability Control A History, 2002
- [23] Thomas R Yechout. Introduction to Aircraft Flight Mechanics, performance static Stability, Dynamic stability and Classical feedback Control 2003
- [24] Robert F. Stengel. Flight Dynamics-Princeton University Press, 2004.
- [25] W.F.Phillips. Mechanics of Flight, J.Wiley & Sons Inc, 2004.
- [26] Roy Langton. Stability and Control of Aircraft Systems, Introduction to Classical Feedback Control, 2006.
- [27] P.H.Zipfel. Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics, AIAA, Education Series, 2007.
- [28] Jitendra. Flight Mechanics Modeling and Analysis, CRC Press is an imprint of Taylor & Francis Group, 2008.
- [29] J.R.Raol,J.Singh. Flight Mechanics Modeling and Analysis, 2009
- [30] T.Ashish. Automatic Control of Atmospheric and Space Flight Vehicles MATLAB and Simulink 2011.
- [31] Marcello R. Napolitano. Aircraft Dynamics: From Modelling to simulation,John Wiley & Sons Inc, 2012.
- [32] David K.Schmidt. Modern Flight Dynamics, Mc Graw-Hill 2012.
- [33] W.Durham. Aircraft\_flight\_dynamics\_and\_control, John Wiley & Sons 2013.
- [34] E.Grunn, A.T.Pham. Modeling of Complex Systems: *Application to Aeronautical Dynamics*, John Wiley & Sons, Inc, 2013.
- [35] N.K.Sinha, N.Ananthkrishnan. Elementary flight dynamic with Introduction to bifurcation and Continuation Methods, Taylor & Francis Group 2014.
- [36] R.Vepa. Flight Dynamics, Simulation, and Control for Rigid and Flexible Aircraft,Taylor & Francis Group, 2015.
- [37] N.K.Sinha, N.Ananthkrishnan. Advanced Flight Dynamic With Elements of Flight Control, Taylor & Francis Group, 2017.
- [38] F.Golnaraghi, B.C.Kuo. Automatic Control Systems, John Wiley & Sons 2010
- [39] Ktsuhiko.Ogata. Modern Control Engineering, Prentice Hall International 2002
- [40] R.C. Dorf, Robert H. Bishop. Modern Control Systems, Pearson Prentice Hall 2008
- [41] John H. Blakelock. Automatic control of Aircraft and Missiles Wiley Inter-science Publication, 2nd Ed, 1991
- [42] Bryson Arthur. Control of Spacecraft and Aircraft, Princeton University Press. 1994.

- [43] S.E.Lyshevski. Control Systems Theory with Engineering Application Springer Science Business Media, 2001
- [44] K.Ogata. System Dynamics 4th Ed Pearson Prentice Hall 2003
- [45] J.D.Anderson. Introduction to Flight 3<sup>ed</sup> Mc Graw-Hill 1989
- [46] Jan Roskam. Evolution of Airplane Stability and Control A Designer's Viewpoint J. GUIDANCE MAY-JUNE 1991
- [47] Jan Roskam. Aircraft Design Part VII\_Determination of Stability\_Control and Performance Characteristics, Far and Military Requirements,1982
- [48] Dingyu Xue and Yang Quan Chen. System Simulation Techniques with MATLAB and Simulink 2014
- [49] N.Ananthkrishnan, N.K.Sinha. A Simple, Correct Pedagogical Presentation of Airplane Longitudinal Dynamics, AIAA Atmospheric Flight Mechanics, 2013
- [50] N.Ananthkrishnan, N.K.Sinha. A Simple, Correct Pedagogical Presentation of Airplane Lateral-Directional Dynamics, AIAA Atmospheric Flight Mechanics, 2013
- [51] John Valasek. Book Review, Journal of Guidance, Control, and Dynamics Vol.30, No.6, 2007
- [52] Osamu KOBAYASHI. Definition System and Criteria Related to the Static Stability of Airplanes,1st Report,Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci Vol. 45, No. 148, pp. 116–123, 2002
- [53] Osamu KOBAYASHI. Definition System and Criteria Related to the Static Stability of Airplanes,2nd Report,Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci Vol. 45, No. 148, pp. 124-138, 2002
- [54] Osamu KOBAYASHI. Definition System and Criteria Related to the Static Stability of Airplanes,3rd Report,Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci Vol. 45, No. 148, pp. 132–138, 2002
- [55] Courtland D. Perkins. The Development of Airplane Stability 1969 Von Karman Lecture
- [56] JP Magraner, R Martinez Val. The birth of airplane stability theory Journal of Aerospace Engineering, Vol. 228(9) 1498–1506, 2014
- [57] Montarnal Philippe. Nonlinear Aircraft and PIO -Project- Homburg University of Applied Science 2009
- [58] David Saussie. Thèse Doctorat: Contrôle du vol longitudinal d'un avion civile avec satisfaction de qualités de manœuvrabilité, Université de Toulouse 2010
- [59] Gérard Degrez. Performances et stabilité des avions, Notes de cours, 2001
- [60] David A. Caughey. Introduction to Aircraft Stability and Control Course Notes Sibley School of Mechanical & Aerospace Engineering Cornell University 2011
- [61] Matthew M. Duquette. The Development and Application of *SimpleFlight*, a Variable Fidelity Flight Dynamics Model. AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit. 20 - 23 August 2007.

- [62] Ugur Ozdemir, Mehmet S Kavsaoglu. Linear and Nonlinear Simulation of Aircraft Dynamics Using Body axis System. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal* 80/6. Emerald, 2008.
- [63] Nicoleta Anton, Ruxandra Mihaela Botez, Dumitru Popescu. New Methodologies for Aircraft Stability Derivatives Determination from its Geometrical Data. *AIAA Flight Mechanics Conference* 10-13 August 2009.
- [64] Marcelo Fernandes de Oliveira, Luiz Carlos Sandoval Góes. Parametric Estimation of Stability and Flight Control Derivatives of AT-26 "XAVANTE" Aircraft Using Nonlinear Global Dynamic Model. *Brazilian Symposium on Aerospace Eng. &*
- [65] Mohamed.A.R.Yass, Naseer H. Farhood, Raed Abbas Jessam. Contribution of Wing, Vertical Tail and Fuselage on Airplane Stability with Failed Outboard Engine. *Engineering Technology Journal* Vol 27, No. 9, 2009.
- [66] Bogdan C. Teodorescu. Feedback Design Method for Desired Longitudinal Stability Characteristics . *U.P.B. Sci. Bull., Series D, Vol.72, Iss.2, 2010.*
- [67] Ansar Rauf, Muhammad Amir Zafar, Zeeshan Ashraf, Humza Akhtar. Aerodynamic modeling and State-Space model extraction of a UAV using DATCOM and Simulink. *IEEE* 2011.
- [68] Raed Abbas Jessam. Effect of Moment of Inertia and Aerodynamics Parameters on Aerodynamic Coupling in Roll Mode. *Engineering Technology Journal* Vol 30, No. 7, 2012.
- [69] Davood Asadi, Mahdi Sabzehparvar, Heidar Ali Talebi. Damaged Airplane Flight Envelope and Stability Evaluation. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal* 85/3, 2013.
- [70] Emad N.Abdulwahab, Qasim A.Atiyah, Ali Talib Abd Alzahra. Aircraft Lateral-Directional Stability in Critical Cases via Lyapunov. *Al-Khwarizmi Engineering Journal*, Vol. 9, No.1, 2013
- [71] Hari Muhammad, Fuad Surastyo, Rianto Adhy Sasongko. Simulation, Parameter Identification and Control System Design of an Aircraft Using Unified Mathematical Model. *February, 2013.*
- [72] Bras M, Vale J, Lau F, Suleman A. Flight Dynamics and Control of Vertical Tailless Aircraft, *Journal of Aeronautic Aerospace Engineering*, 2013.
- [73] Zdobyslaw Goraj. Flight Dynamics Models Used in Different National and International Projects. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal* 86/3. Emerald, 2014.
- [74] S.N.Deepa, Sudha G. Longitudinal control of an Aircraft using Artificial Intelligence. *International Journal of Innovative Research in Science Engineering and Technology* Vol.5, No 6, Dec 2013-Jan 2014.
- [75] Norazila Othman, Masahiro Kanazaki. Prediction of Aircraft's Longitudinal Motion Based on Aerodynamic coefficients and Derivatives by Surrogate Model Approach. *Journal of Mechanics Engineering and Automation*, 2014.

- [76] Tarik O.Mohammed, Xiangjin Wu, Daochun Li. Nonlinear Simulation of Aircraft Longitudinal Flight Dynamics. Applied Mechanics and Materials Vols 444-445, 2014.
- [77] F.Guerrero, V.Martinez, O.Garcia, D.L.Martinez. Mini Airplane: Design, Aerodynamic Modeling and Stability. International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, 2014.
- [78] J Jensin Joshua, P Azhaguraja, P Banumathi, P Abirami. Lateral and Longitudinal Analysis of UAV Using XFLR5. International Journal of Mechanical and Industrial Technology, Vol.2, Issue 2, October 2014.
- [79] Song Lei, Yang Hua, Zhang Yang, Zhang Haoyu, Huang Jun. Dihedral influence on lateral directional dynamic stability on large aspect ratio tailless flying wing aircraft. Chinese Journal of Aeronautics 2014.
- [80] Mansoor Ahsan, Hamza Rafique and Waleed Ahmed. Verification of Equilibrium Point Stability for Linearization of an Aircraft Model. IEEE 2014.
- [81] Rizal E.M. Nasir, Wahyu Kuntjoro, Wirachman Wisnoe. Aerodynamic, stability and flying quality evaluation on a small blended wing-body aircraft with canard foreplanes. 2nd International Conference on System-Integrated Intelligence Science Direct, 2014.
- [82] Xin Qi, Shi Zhongke. Bifurcation Analysis and Stability Design for Aircraft Longitudinal Motion with High Angle of Attack. Chinese Journal of Aeronautics 2015.
- [83] Mune Hadji Saleh, Noor Abdul Razzaq Raheem. Reducing the Effect of the Atmospheric Disturbance on Longitudinal Flight Control System Usage PID Controller, International Journal of Computer Applications Vol.127, No 13, October 2015.
- [84] Pritam Ghosh, Lingamgunta Vijay Kumar, Arif Mahammed saaik. Study and Analysis of Control System Response on Aircraft Stability. International Journal of Innovative Research in Science Engineering and Technology Vol.4, Issue 5, May 2015
- [85] Ashraf. M. Kamal, A. M. Bayoumy, A. M. Elshabka. Modeling, Analysis and Validation of a Small Airplane Flight Dynamics. AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference. 5-9 January 2015.
- [86] Andreas Schütte, Kerstin C. Huber, Neal T. Frink, Okko J. Boelens. Stability and Control Investigations of Generic 53 Degree Swept Wing with Control Surfaces. AIAA, JOURNAL OF AIRCRAFT.2016.
- [87] Jirásek Adam, Russell M Cummings, Andreas Schütte, Kerstin Huber. Extended Assessment of Stability and Control Prediction Methods for NATO Air Vehicles: Summary. AIAA, JOURNAL OF AIRCRAFT.2018

## ANNEXES

## A- LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

### A.1. Liste des symboles

$A$  : Allongement

$A_1$  : Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert longitudinale

$A_2$  : Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert latéral-directionnel

$A_\alpha$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert d'angle d'attaque

$A_\beta$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert d'angle de dérapage

$A_u$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de la vitesse

$A_\theta$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de tangage

$A_\phi$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de roulis

$A_\psi$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de lacet

[A] : Matrice d'état A

[B] : Matrice commande B

$b$  : L'envergure

$B_1$  : Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert longitudinale

$B_2$  : Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert latéral-directionnel

$B_\alpha$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert angle d'attaque

$B_u$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de la vitesse

$B_\theta$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de tangage

$B_\phi$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de roulis

$B_\psi$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de lacet

$c$  : Corde

$\bar{c}$  : Corde aérodynamique moyenne

$C_d$  : Coefficient de traînée du profil

$C_1$  : Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert longitudinale

$C_2$  : Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert latéral-directionnel

$C_\alpha$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle d'incidence

$C_\beta$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de dérapage

$C_u$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de la vitesse

$C_\theta$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'assiette longitudinale

$C_\phi$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de roulis

$C_\psi$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de roulis

$C_D$  : Coefficient de traînée (avion)

$C_{D_0}$  : Coefficient de traînée avion à l'angle d'attaque nul

$C_{D_\alpha}$  : Variation de la traînée de l'avion avec l'angle d'attaque

$C_{D_{\dot{\alpha}}}$  : Variation de la traînée de l'avion avec le taux de l'angle d'attaque

$C_{D_{i_h}}$  : Variation de la traînée de l'avion avec l'angle de calage du stabilisateur

$C_{D_{\delta_e}}$  : Variation de la traînée de l'avion avec l'angle de la gouverne de profondeur

$C_{D_q}$  : Variation de la traînée de l'avion avec la taux de tangage

$C_{D_u}$  : Variation de la traînée de l'avion avec la vitesse

$C_l$  : Coefficient de portance du profil

$C_l$  : Coefficient du moment de roulis de l'avion

$C_{l_\alpha}$  : Pente de coefficient de portance du profil

$C_{l_\beta}$  : Variation du coefficient de moment de roulis de l'avion avec l'angle de dérapage

$C_{l_p}$  : Variation du coefficient de moment de roulis de l'avion avec la vitesse de roulis

$C_{l_r}$  : Variation du coefficient de moment de roulis de l'avion avec la vitesse de lacet

- $C_{l_{\delta a}}$  : Variation du coefficient de moment de roulis de l'avion avec l'angle de déflexion de l'aileron
- $C_{l_{\delta r}}$  : Variation du coefficient de moment de roulis de l'avion avec l'angle de déflexion de la gouverne de direction
- $C_{l_{\delta e}}$  : Pente de coefficient de portance du profil de la gouverne de profondeur
- $C_L$  : Coefficient de portance avion
- $C_{L_0}$  : Coefficient de portance avion angle d'attaque nul
- $C_{L_\alpha}$  : Variation de la portance de l'avion avec l'angle d'attaque
- $C_{L_{\dot{\alpha}}}$  : Variation de la portance de l'avion avec le taux de l'angle d'attaque
- $C_{L_{i_h}}$  : Variation de la portance de l'avion avec l'angle de calage du stabilisateur
- $C_{L_{\delta e}}$  : Variation de la portance de l'avion avec l'angle du gouvernail de profondeur
- $C_{L_q}$  : Variation de la portance de l'avion avec le taux de tangage
- $C_{L_u}$  : Variation de la portance de l'avion avec la vitesse
- $C_m$  : Coefficient du moment de tangage
- $C_{m_0}$  : Coefficient du moment de tangage à l'angle d'attaque nul
- $C_{m_\alpha}$  : Variation du moment de tangage avec l'angle d'attaque
- $C_{m_{\dot{\alpha}}}$  : Variation du moment de tangage avec le taux de l'angle d'attaque
- $C_{m_{i_h}}$  : Variation du moment de tangage avec l'angle de calage du stabilisateur
- $C_{m_{\delta e}}$  : Variation du moment de tangage avec l'angle de la gouverne de profondeur
- $C_{m_T}$  : Coefficient du moment de tangage dû à la poussée
- $C_{m_q}$  : Variation du moment de tangage avec le taux de tangage
- $C_{m_u}$  : Variation du moment de tangage avec la vitesse
- $C_{m_{T\alpha}}$  : Variation du coefficient du moment de tangage dû à la poussée avec l'angle d'attaque

$C_{mT_u}$  : Variation du coefficient du moment de tangage dû à la poussée avec la vitesse

$C_T$  : Coefficient de poussée

$C_{T_{x_u}}$  : Variation du coefficient de poussée suivant l'axe X avec la vitesse

$C_{T_{x\alpha}}$  : Variation du coefficient de poussée suivant l'axe X avec l'angle d'attaque

$C_{T_{z_u}}$  : Variation du coefficient de poussée suivant l'axe Z avec la vitesse

$C_{T_{z\alpha}}$  : Variation du coefficient de poussée suivant l'axe Z avec l'angle d'attaque

$C_x$  : Coefficient de la force suivant l'axe X

$C_{x\alpha}$  : Variation du coefficient de la force suivant l'axe X avec l'angle d'attaque

$C_{x_q}$  : Variation du coefficient de la force suivant l'axe X avec le taux de tangage

$C_{x_u}$  : Variation du coefficient de la force suivant l'axe X avec la vitesse

$C_y$  : Coefficient de la force latérale suivant l'axe Y

$C_{y_0}$  : Coefficient de la force latérale pour un angle de dérapage nul

$C_{y_\beta}$  : Variation du coefficient de la force latérale de l'avion avec l'angle de dérapage

$C_{y_{\delta a}}$  : Variation du coefficient de la force latérale de l'avion avec l'angle de déflexion de l'aileron

$C_{y_{\delta r}}$  : Variation du coefficient de la force latérale de l'avion avec l'angle de déflexion de la gouverne de direction

$C_{y_p}$  : Variation du coefficient de la force latérale de l'avion avec vitesse de roulis

$C_{y_r}$  : Variation du coefficient de la force latérale de l'avion avec vitesse de lacet

$C_z$  : Coefficient de la force suivant l'axe Z

$C_{z\alpha}$  : Variation du coefficient de la force suivant l'axe Z avec l'angle d'attaque

$C_{z_q}$  : Variation du coefficient de la force suivant l'axe Z avec le taux de tangage

$C_{z_u}$  : Variation du coefficient de la force suivant l'axe Z avec la vitesse

$D_1$  : Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert longitudinale  
 $D_2$  : Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert latéral-directionnel  
 $D_\alpha$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle d'attaque  
 $D_\beta$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de dérapage  
 $D_u$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de la vitesse  
 $D_\psi$  : Coefficient du numérateur de la fonction de transfert de l'angle de lacet  
 $d_T$  : Distance entre la projection de la ligne de poussée sur le plan symétrique de l'avion et le centre de gravité

$e$  : Facteur d'efficacité d'Oswald

$E_1$  : Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert longitudinale  
 $E_2$  : Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert latéral-directionnel  
 $E_2$  : Coefficient du dénominateur de la fonction de transfert latéral-directionnel

---

$\vec{F}_A$  : Force aérodynamique résultante

$F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}$  : Composantes de la force aérodynamique suivant XYZ

$f_{Ax}, f_{Ay}, f_{Az}$  : Composantes de la force aérodynamique perturbée suivant XYZ

$\vec{F}_T$  : Force de poussée totale

$F_{Tx}, F_{Ty}, F_{Tz}$  : Composantes de la force de poussée suivant XYZ

$f_{Tx}, f_{Ty}, f_{Tz}$  : Composantes de la force de poussée perturbée suivant XYZ

$\vec{g}$  : Accélération gravitationnelle

$g_x, g_y, g_z$  : Composantes de l'accélération gravitationnelle

$G(s)$  : Fonction de transfert de boucle ouverte

$i_c$  : Angle de calage du canard

$i_h$  : Angle de calage de l'empennage horizontal

$i_v$  : Angle de calage de l'empennage vertical

$i, j, k$  : Vecteurs unitaires suivant XYZ

$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  : Moments d'inertie suivant XYZ

$I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$  : Produits d'inertie suivant XYZ

$l_A, m_A, n_A$  : Composantes du moment aérodynamique perturbé suivant XYZ

$l_T, m_T, n_T$  : Composantes du moment de poussée perturbée suivant XYZ

$l_c$  : Distance du centre aérodynamique du canard au centre de gravité

$l_h$  : Distance du centre aérodynamique de l'empennage horizontal au centre de Gravité

$L$  : Portance

$L_A, M_A, N_A$  : Composantes du moment aérodynamique suivant XYZ

$L_T, M_T, N_T$  : Composantes du moment de poussée suivant XYZ

$L_\beta$  : Variation du moment de roulis par rapport à l'angle de dérapage

$L_p$  : Variation du moment de roulis par rapport au taux de roulis

$L_r$  : Variation du moment de roulis par rapport au taux de lacet

$L_{\delta a}$  : Variation du moment de roulis par rapport à la déflexion de l'angle d'aileron

$L_{\delta r}$  : Variation du moment de roulis par rapport à la déflexion de la gouverne de direction

$m$  : masse de l'avion

$M$  : Nombre de Mach

$M_\alpha$  : Variation du moment de tangage par rapport à l'angle d'attaque

$M_{T\alpha}$  : Variation du moment de tangage de poussé par rapport à l'angle d'attaque

$M_{\dot{\alpha}}$  : Variation du moment de tangage par rapport au taux de l'angle d'attaque

$M_q$  : Variation du moment de tangage par rapport au taux de tangage

$M_{\delta e}$  : Variation du moment de tangage par rapport à l'angle de déflexion de la gouverne de profondeur

$M_A$  : Moment aérodynamique

$M_T$  : Moment de poussée

$n$  : Facteur de charge

NP : Point neutre

$N_\alpha$  : Numérateur de la fonction de transfert de l'angle d'attaque

$N_\beta$  : Numérateur de la fonction de transfert de l'angle de dérapage

$N_u$  : Numérateur de la fonction de transfert de la vitesse

$N_\theta$  : Numérateur de la fonction de transfert de l'angle de tangage

$N_\phi$  : Numérateur de la fonction de transfert de l'angle de roulis

$N_\psi$  : Numérateur de la fonction de transfert de l'angle de lacet

$N_\beta$  : Variation du moment de lacet par rapport à l'angle de dérapage

$N_{T\beta}$  : Variation du moment de lacet de poussée par rapport à l'angle de dérapage

$N_p$  : Variation du moment de lacet par rapport au taux de roulis

$N_r$  : Variation du moment de lacet par rapport au taux de lacet

$N_{\delta_a}$  : Variation du moment de lacet par rapport à la déflexion de l'aileron

$N_{\delta_r}$  : Variation du moment de lacet par rapport à la déflexion de la gouverne de direction

$p, q, r$  : Composantes perturbées de la vitesse de rotation  $\omega$

$P, Q, R$  : Composantes de la vitesse de rotation  $\omega$  par rapport à XYZ

$\bar{q}$  : Pression dynamique

$s$  : Variable de Laplace

S : Surface

SM : Marge de stabilité statique

$t$  : Temps

$T$  : Période

$t_{1/2}$  : Temps pour réduire de moitié l'amplitude

$T_S$  ,  $T_r$  : Constantes du temps des modes spiral et roulis

$u$  ,  $v$  ,  $w$  : Composantes perturbées de la vitesse  $V_p$

$U$  ,  $V$  ,  $W$  : Composantes de la vitesse  $V_p$  par rapport à XYZ

$V_v$  : Coefficient du volume de l'empennage vertical

$V_h$  : Coefficient du volume de l'empennage horizontal

$W$  : Poids de l'avion

$x$  ,  $y$  ,  $z$  : Composantes du vecteur position  $r$  par rapport à XYZ

$x_{ac}$  : Position du centre aérodynamique par rapport à la corde

$\overline{x_{ac}}$  : Position du centre aérodynamique en fraction de la corde

$\overline{x_{cp}}$  : Position du centre de pression en fraction de la corde

$\overline{x_{cg}}$  : Position du centre de gravité en fraction de la corde

$X_\alpha$  : Variation de la force longitudinale par rapport à l'angle d'attaque

$X_u$  : Variation de la force longitudinale par rapport à la vitesse le long de X

$X_{Tu}$  : Variation de la force de poussée longitudinale par rapport à la vitesse le long de X

$X_{\delta e}$  : Variation de la force longitudinale par rapport à la déflection de la gouverne de profondeur

$Y_\beta$  : Variation de la force latérale par rapport à l'angle de dérapage

$Y_p$  : Variation de la force latérale par rapport au taux de roulis

$Y_r$  : Variation de la force latérale par rapport au taux de lacet

$Y_{\delta a}$  : Variation de la force latérale par rapport à la déflexion de l'aile

$Y_{\delta r}$  : Variation de la force latérale par rapport à la déflexion de la gouverne de direction

$Z_{\alpha}$  : Variation de la force verticale par rapport à l'angle d'attaque

$Z_u$  : Variation de la force verticale par rapport à la vitesse le long de X

$Z_q$  : Variation de la force verticale par rapport au taux de tangage

$Z_{\dot{\alpha}}$  : Variation de la force verticale par rapport au taux de l'angle d'attaque

$Z_{\delta e}$  : Variation de la force verticale par rapport à la déflexion de la gouverne de profondeur

## A.2. Symboles grecs

$\alpha$  : Angle d'attaque

$\dot{\alpha}$  : Variation de l'angle d'attaque par rapport au temps

$\alpha_0$  : Angle d'attaque du profil correspond à la portance nulle

$\alpha_{0L}$  : Angle d'attaque de l'avion correspond à la portance nulle

$\alpha_{\delta}$  : Dérivée de l'angle d'attaque par rapport à la déflexion de la gouverne

$\beta$  : Angle de dérapage

$\gamma$  : Angle de pente

$\delta$  : Angle de déflexion de la gouverne

$\varepsilon$  : Angle de déviation de l'écoulement dans le plan vertical

$\eta_h, \eta_v, \eta_c$  : Rapport de pression dynamique empennage horizontal, vertical et canard

$\Theta$  : Angle de tangage

$\theta$  : Angle perturbé de tangage

$\lambda$  : Effilement

$\lambda$  : Solution de l'équation caractéristique

$\Lambda$  : Angle de flèche

$\xi$  : Facteur d'amortissement

$\rho$  : Masse volumique de l'air

$\sigma$  : Angle de déviation de l'écoulement dans le plan horizontal

$\Phi$  : Angle d'inclinaison latéral

$\psi$  : Angle de cap

$\omega$  : Vitesse de rotation de l'avion

$\omega_n$  : Pulsation propre

### **A.3. Indices**

1 : Quantité en vol stabilisé

a : Aileron

ac : Centre aérodynamique

A : Aérodynamique

B : Avion

c : Canard

cp : Centre de pression

DR : Roulis hollandais

e : Gouverne de profondeur

f : Fuselage

h : Empennage horizontal

$i_h$  : Angle de calage empennage horizontal

L: Gauche

LE : Bord d'attaque

PH : Phugoïde

r : Gouverne de direction

R : Roulis

R : Droit

t : Extrémité

trim : Equilibre

T : Poussée

s : Spiral

s : Stabilité

SP : Courte période

v: Vertical

w : Aile

wf : Aile-fusela

## B : DONNEES DES AVIONS

**Tableau B1: Dimensions géométriques, masse, inerties et condition du vol**

Paramètre	Ryan Navion	Gates Learjet M24	Boeing 747	McDonnell Douglas F4C
<u>Conditions du vol:</u>				
- Altitude h(ft)	0	40000	20000	35000
- Masse volumique air $\rho_0$ (slugs/ft <sup>3</sup> )	0.002378	0.000588	0.001268	0.000739
- Rapport centre de gravité	0.295	0.32	0.25	0.29
- Capacité (places)	4	6 à 18	366 à 524	2
- Vitesse (ft/s)	176	677	673	876
- Angle tangage initial (°)	0	2.7	2.5	2.6
<u>Géométrie et moments d'inerties:</u>				
- Surface alaire (ft <sup>2</sup> )	184	230	5500	530
- Envergure (ft)	33.4	34	196	38.7
- Corde moyenne (ft)	5.7	7	27.3	16
- Poids (lbs)	2750	13000	636636	39000
- Ixx (slug ft <sup>2</sup> )	1048	28000	18.2 10 <sup>6</sup>	25000
- Iyy (slug ft <sup>2</sup> )	3000	18800	33.1 10 <sup>6</sup>	122200
- Izz (slug ft <sup>2</sup> )	3530	47000	49.7 10 <sup>6</sup>	139800
- Ixz (slug ft <sup>2</sup> )	0	1300	0.97 10 <sup>6</sup>	2200
<u>Coefficients aérodynamiques vol stabilisé:</u>				
- $C_{L_1}$	0.410	0.410	0.400	0.260
- $C_{D_1}$	0.050	0.0335	0.025	0.030
- $C_{T_{X_1}}$	0.050	0.0335	0.025	0.030
- $C_{m_1}$	0.000	0.000	0.000	0.000
- $C_{m_{T_1}}$	0.000	0.000	0.000	0.000

**Tableau B2: Coefficients adimensionnels longitudinales des avions**

Paramètre	Ryan Navion [11]	Gates Learjet M24[7]	Boeing 747 [7]	McDonnell Douglas F4C [7]
<u>Dérivées adimensionnelles longitudinales:</u>				
- $C_{D_u}$	0.00	0.104	0.000	0.027
- $C_{D_\alpha}$	0.33	0.30	0.200	0.300
- $C_{D_{\dot{\alpha}}}$	0.00	0.00	0.000	0.000
- $C_{D_{\delta E}} (* C_{D_{iH}})$	0.00	0.00	0.000	*-0.100
- $C_{T_{Xu}}$	0.00	0.00	0.000	0.000
- $C_{L_u}$	0.00	0.40	0.13	0.270
- $C_{L_\alpha}$	4.44	5.84	4.400	3.750
- $C_{L_{\dot{\alpha}}}$	0.00	2.20	7.000	0.000
- $C_{L_q}$	3.80	4.70	6.600	0.000
- $C_{L_{\delta e}} (* C_{L_{iH}})$	0.355	0.46	0.32	*0.40
- $C_{m_u}$	0.00	0.05	0.013	-0.117
- $C_{m_\alpha}$	-0.683	-0.64	-1.000	-0.400
- $C_{m_{\dot{\alpha}}}$	-4.36	-6.70	-4.000	-1.300
- $C_{m_q}$	-9.96	-15.50	-20.500	-2.700
- $C_{m_{\delta e}} (* C_{m_{iH}})$	-0.923	-1.24	-1.300	*-0.580
- $C_{m_{T_u}}$	0.00	-0.003	0.000	0.000
- $C_{m_{T_\alpha}}$	0.00	0.00	0.000	0.000

**Tableau B3: Coefficients adimensionnels laterales-directionales des avions**

Paramètre	Ryan Navion [11]	Gates Learjet M24[7]	Boeing 747 [7]	McDonnell Douglas F4C [7]
<u>Dérivées adimensionnelles laterales:</u>				
- $C_{l\beta}$	-0.074	-0.110	-0.160	-0.080
- $C_{lp}$	-0.410	-0.450	-0.340	-0.240
- $C_{lr}$	0.107	0.160	0.130	0.070
- $C_{l\delta a}$	-0.134	0.178	0.013	0.042
- $C_{l\delta r}$	0.107	0.019	0.008	0.006
- $C_{n\beta}$	0.071	0.127	0.160	0.125
- $C_{np}$	-0.0575	-0.008	-0.026	-0.036
- $C_{nr}$	-0.125	-0.200	-0.280	-0.270
- $C_{n\delta a}$	-0.0035	-0.020	0.0018	-0.001
- $C_{n\delta r}$	-0.072	-0.074	-0.100	-0.066
- $C_{y\beta}$	-0.564	-0.730	-0.900	-0.680
- $C_{yp}$	0.000	0.000	0.000	0.000
- $C_{yr}$	0.000	0.400	0.000	0.000
- $C_{y\delta a}$	0.000	0.000	0.000	-0.016
- $C_{y\delta r}$	0.157	0.140	0.120	0.095

## C: FONCTION DE TRANSFERT

### C-1 Fonction de transfert longitudinale:

L'établissement du modèle mathématique nécessite l'application des lois fondamentales de la mécanique pour obtenir les équations du mouvement pour un avion supposé rigide dans un système référentiel choisi.

L'utilisation de la théorie des petites perturbations permet de simplifier les équations du vol de l'avion en deux cas découlés et simples :

#### 1- Vol longitudinal de l'avion

Le mouvement de l'avion s'effectue dans le plan XZ, il est soumis aux forces selon l'axe X, Z et le moment de tangage M par rapport à l'axe Y, par conséquent, les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -g\theta\cos\theta_0 + X_u u + X_{T_u} u + X_\alpha \alpha + X_{\delta_e} \delta_e \\ U_0 \dot{\alpha} - U_0 \dot{\theta} &= -g\theta\sin\theta_0 + Z_u u + Z_\alpha \alpha + Z_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + Z_q \dot{\theta} + Z_{\delta_e} \delta_e \\ \ddot{\theta} &= M_u u + M_{T_u} u + M_\alpha \alpha + M_{T_\alpha} \alpha + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_q \dot{\theta} + M_{\delta_e} \delta_e \end{aligned} \quad (C.1)$$

En appliquant le transformé de Laplace, par conséquent nous obtenons :

$$\begin{aligned} (s - X_u - X_{T_u}) u(s) - X_\alpha \alpha(s) + g\cos\theta_0 \theta(s) &= X_{\delta_e} \delta_e(s) \\ -Z_u u(s) + \{s(U_0 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_\alpha\} \alpha(s) + \{-(Z_q + U_0)s + g\sin\theta_0\} \theta(s) &= Z_{\delta_e} \delta_e(s) \\ -(M_u + M_{T_u}) u(s) - \{M_{\dot{\alpha}} s + M_\alpha + M_{T_\alpha}\} \alpha(s) + (s^2 - M_q s) \theta(s) &= M_{\delta_e} \delta_e(s) \end{aligned} \quad (C.2)$$

L'écriture des équations sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} (s - X_u - X_{T_u}) & -X_\alpha & g\cos\theta_0 \\ -Z_u & \{s(U_0 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_\alpha\} & -(Z_q + U_0)s + g\sin\theta_0 \\ -(M_u + M_{T_u}) & -\{M_{\dot{\alpha}} s + M_\alpha + M_{T_\alpha}\} & (s^2 - M_q s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{u(s)}{\delta_e(s)} \\ \frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} \\ \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \end{Bmatrix} \quad (C.3)$$

Les rapports des variables  $u(s)$ ,  $\alpha(s)$  et  $\theta(s)$  avec l'entrée  $\delta_e$  qui présentent l'angle de braquage de la gouverne de profondeur et on les appelle les fonctions de transfert dans le plan longitudinal de l'avion :

$$\frac{u(s)}{\delta_e(s)}, \frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)}, \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)}$$

L'intérêt d'avoir une fonction de transfert est de pouvoir déterminer le spectre des réponses de l'avion. Il suffit juste d'avoir un signal d'entrée, la fonction de transfert s'occupe de déterminer le signal de sortie.

La vitesse par rapport à la gouverne de profondeur  $\frac{u(s)}{\delta_e(s)}$  du système d'équations (C.3) peut être écrite comme une fraction polynomiale avec la variable de Laplace

$$\frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\begin{vmatrix} X_{\delta_e} & -X_\alpha & g\cos\theta_0 \\ Z_{\delta_e} & \{s(U_0 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_\alpha\} & \{-(Z_q + U_0)s + g\sin\theta_0\} \\ M_{\delta_e} & -\{M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha + M_{T_\alpha}\} & (s^2 - M_q s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s - X_u - X_{T_u}) & -X_\alpha & g\cos\theta_0 \\ -Z_u & \{s(U_0 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_\alpha\} & -(Z_q + U_0)s + g\sin\theta_0 \\ -(M_u + M_{T_u}) & -\{M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha + M_{T_\alpha}\} & (s^2 - M_q s) \end{vmatrix}} \quad (\text{C.4})$$

Qui peut se mettre sous la forme suivante

$$\frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_u}{D_1} = \frac{A_u s^3 + B_u s^2 + C_u s + D_u}{A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1} \quad (\text{C.5})$$

Avec:

$$N_u = A_u s^3 + B_u s^2 + C_u s + D_u \quad (\text{C.6})$$

Les coefficients du polynôme sont définis par:

$$\begin{aligned} A_u &= X_{\delta_e}(U_0 - Z_{\dot{\alpha}}) \\ B_u &= -X_{\delta_e}\{(U_0 - Z_{\dot{\alpha}})M_q + Z_\alpha + M_{\dot{\alpha}}(U_0 + Z_q) + Z_{\delta_e}X_\alpha\} \\ C_u &= X_{\delta_e}\{M_q Z_\alpha + M_{\dot{\alpha}}g\sin\theta_0 - (M_\alpha + M_{T_\alpha})(U_0 + Z_q)\} + Z_{\delta_e}\{-M_{\dot{\alpha}}g\cos\theta_0 - X_\alpha M_q\} \\ &\quad + M_{\delta_e}\{X_\alpha(U_0 + Z_q) - (U_0 - Z_{\dot{\alpha}})g\cos\theta_0\} \\ D_u &= X_{\delta_e}(M_\alpha + M_{T_\alpha})g\sin\theta_0 - Z_{\delta_e}M_\alpha g\cos\theta_0 + M_{\delta_e}(Z_\alpha g\cos\theta_0 - X_\alpha g\sin\theta_0) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

De même la fonction de transfert de l'angle d'attaque par rapport à la gouverne de profondeur est :

$$\frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\begin{vmatrix} (s - X_u - X_{T_u}) & X_{\delta_e} & g\cos\theta_0 \\ -Z_u & Z_{\delta_e} & \{-(Z_q + U_0)s + g\sin\theta_0\} \\ -(M_u + M_{T_u}) & M_{\delta_e} & (s^2 - M_q s) \end{vmatrix}}{D_1} \quad (\text{C.8})$$

Qui peut se mettre sous la forme fractionnelle suivante

$$\frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_\alpha}{D_1} = \frac{A_\alpha s^3 + B_\alpha s^2 + C_\alpha s + D_\alpha}{A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1} \quad (\text{C.9})$$

Avec:

$$N_\alpha = A_\alpha s^3 + B_\alpha s^2 + C_\alpha s + D_\alpha \quad (\text{C.10})$$

Les coefficients sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} A_\alpha &= Z_{\delta_e} \\ B_\alpha &= X_{\delta_e} Z_u + Z_{\delta_e} \{-M_q - (X_u + X_{T_u})\} + M_{\delta_e} M_q (U_0 + Z_q) \\ C_\alpha &= X_{\delta_e} \{(U_0 + Z_q)(M_u + M_{T_u}) - M_q Z_u\} + Z_{\delta_e} M_q (X_u + X_{T_u}) \\ &\quad + M_{\delta_e} \{-g \sin \theta_0 - (U_0 + Z_q)(X_u + X_{T_u})\} \\ D_\alpha &= -X_{\delta_e} (M_u + M_{T_u}) g \sin \theta_0 + Z_{\delta_e} (M_u + M_{T_u}) g \cos \theta_0 + \\ &\quad + M_{\delta_e} \{(X_u + X_{T_u}) g \sin \theta_0 - Z_u g \cos \theta_0\} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Finalement la fonction de transfert d'angle de tangage par rapport à la gouverne de profondeur est :

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\begin{vmatrix} (s - X_u - X_{T_u}) & -X_\alpha & X_{\delta_e} \\ -Z_u & \{s(U_0 - Z_\alpha) - Z_\alpha\} & Z_{\delta_e} \\ -(M_u + M_{T_u}) & -\{M_\alpha s + M_\alpha + M_{T_\alpha}\} & M_{\delta_e} \end{vmatrix}}{D_1} \quad (\text{C.12})$$

Qui peut se mettre sous la forme fractionnelle suivante

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_\theta}{D_1} = \frac{A_\theta s^2 + B_\theta s + C_\theta}{A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1} \quad (\text{C.13})$$

Avec:

$$N_\theta = A_\theta s^2 + B_\theta s + C_\theta \quad (\text{C.14})$$

Les coefficients sont donnés par:

$$\begin{aligned}
 A_\theta &= Z_{\delta_e} M_{\dot{\alpha}} + M_{\delta_e} (U_0 - Z_{\dot{\alpha}}) \\
 B_\theta &= X_{\delta_e} \{Z_u M_{\dot{\alpha}} + (U_0 - Z_{\dot{\alpha}})(M_u + M_{T_u})\} + Z_{\delta_e} \{(M_\alpha + M_{T_\alpha}) - M_{\dot{\alpha}}(X_u + X_{T_u})\} + \\
 &\quad + M_{\delta_e} \{-Z_\alpha - (U_0 - Z_{\dot{\alpha}})(X_u + X_{T_u})\} \\
 C_\theta &= X_{\delta_e} \{(M_\alpha + M_{T_\alpha})Z_u - Z_\alpha(M_u + M_{T_u})\} + \\
 &\quad + Z_{\delta_e} \{-(M_\alpha + M_{T_\alpha})(X_u + X_{T_u}) + X_\alpha(M_u + M_{T_u})\} + M_{\delta_e} \{Z_\alpha(X_u + X_{T_u}) - X_\alpha Z_u\}
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

La stabilité dynamique longitudinale d'un avion dépend strictement de l'équation caractéristique qui est obtenue par la mise des polynômes du dénominateur des fonctions  $u(s)$ ,  $\alpha(s)$  et  $\theta(s)$  égal à zéro.

Les équations (C.4), (C.8) et (C.12) possèdent le même dénominateur  $D_1$ .

$$D_1 = As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E \tag{C.16}$$

Les coefficients de  $A$  jusqu'à  $E$  sont définis de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
 A &= U_0 - Z_{\dot{\alpha}} \\
 B &= -(U_0 - Z_{\dot{\alpha}})(X_u + X_{T_u} + M_q) - Z_\alpha - M_{\dot{\alpha}}(U_0 + Z_q) \\
 C &= (X_u + X_{T_u})\{M_q(U_0 - Z_{\dot{\alpha}}) + Z_\alpha + M_{\dot{\alpha}}(U_0 + Z_q)\} + M_q Z_\alpha - Z_u X_\alpha + M_{\dot{\alpha}} g \sin \theta_0 \\
 &\quad - (M_u + M_{T_u})(U_0 + Z_q) \\
 D &= g \sin \theta_0 \{M_\alpha + M_{T_\alpha} - M_{\dot{\alpha}}(X_u + X_{T_u})\} + g \cos \theta_0 \{Z_u M_{\dot{\alpha}} + (M_u + M_{T_u})(U_0 - Z_{\dot{\alpha}})\} + \\
 &\quad (M_u + M_{T_u})\{-X_\alpha(U_0 + Z_q)\} + Z_u X_\alpha M_q + (X_u + X_{T_u})\{(M_\alpha + M_{T_\alpha})(U_0 + Z_q) - M_q Z_\alpha\} \\
 E &= g \cos \theta_0 \{(M_\alpha + M_{T_\alpha})Z_u - Z_\alpha(M_u + M_{T_u})\} \\
 &\quad + g \sin \theta_0 \{(M_u + M_{T_u})X_\alpha - (X_u + X_{T_u})(M_\alpha + M_{T_\alpha})\}
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

L'étude de la stabilité dynamique dépend entièrement des racines de la fonction caractéristique  $D_1 = 0$ . Cette dernière possède quatre racines et après la détermination des valeurs numériques de ces racines on peut étudier la stabilité de l'avion à travers les critères de stabilité.

## C-2 FONCTION DE TRANSFERT LATERAL-DIRECTIONNELLE:

L'utilisation de la théorie des petites perturbations permet de simplifier les équations du vol de l'avion en deux cas simples, pour le cas latéral-directionnel, le mouvement de l'avion s'effectue dans les plans XY et YZ, il est soumis aux forces selon l'axe Y, au moment de roulis L par rapport à l'axe X et le moment de lacet N par rapport à l'axe Z, par conséquent, les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned}
m(\dot{v} + U_1 r) &= mg\phi \cos \theta_1 + \bar{q}_1 s (c_{y_\beta} \beta + c_{y_p} \frac{pb}{2U_1} + c_{y_r} \frac{rb}{2U_1} + c_{y_{\delta_A}} \delta_A + c_{y_{\delta_R}} \delta_R) \\
I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} &= \bar{q}_1 s b (c_{l_\beta} \beta + c_{l_p} \frac{pb}{2U_1} + c_{l_r} \frac{rb}{2U_1} + c_{l_{\delta_A}} \delta_A + c_{l_{\delta_R}} \delta_R) \\
I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} &= \bar{q}_1 s b (c_{n_\beta} \beta + c_{n_r} \frac{rb}{2U_1} + c_{n_p} \frac{pb}{2U_1} + c_{n_{\delta_A}} \delta_A + c_{n_{\delta_R}} \delta_R)
\end{aligned} \tag{C.18}$$

Avec :

$$p = \dot{\Phi}, r = \dot{\Psi} \text{ et } v = U_1 \beta \tag{C.19}$$

En appliquant le transformé de Laplace, les équations de mouvement deviennent :

$$\begin{aligned}
(sU_1 - Y_\beta)\beta(s) - (sY_p + g \cos \theta_1)\phi(s) + s(U_1 - Y_r)\psi(s) &= Y_\delta \delta(s) \\
-L_\beta \beta(s) + (s^2 - L_p s)\phi(s) - (s^2 A_{11} + sL_r)\psi(s) &= L_\delta \delta(s) \\
-(N_\beta + N_{T_\beta})\beta(s) - (s^2 B_{11} + N_p s)\phi(s) + (s^2 - sN_r)\psi(s) &= N_\delta \delta(s)
\end{aligned} \tag{C.20}$$

L'écriture des équations sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} (sU_1 - Y_\beta) & -(sY_p + g \cos \theta_1) & s(U_1 - Y_r) \\ -L_\beta & (s^2 - L_p s) & -(s^2 A_{11} + sL_r) \\ -(N_\beta + N_{T_\beta}) & -(s^2 B_{11} + N_p s) & (s^2 - sN_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\beta(s)}{\delta(s)} \\ \frac{\phi(s)}{\delta(s)} \\ \frac{\psi(s)}{\delta(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_\delta \\ L_\delta \\ N_\delta \end{bmatrix} \tag{C.21}$$

Les rapports des variables  $\beta(s)$ ,  $\Phi(s)$  et  $\psi(s)$  avec l'entrée  $\delta$  qui présentent l'angle de braquage de l'aileron ou bien de la gouverne de profondeur et ils sont appelés les fonctions de transfert dans le plan latéral-directionnel de l'avion :  $\frac{\beta(s)}{\delta(s)}$ ,  $\frac{\phi(s)}{\delta(s)}$ ,  $\frac{\psi(s)}{\delta(s)}$

L'intérêt d'avoir une fonction de transfert est de pouvoir déterminer le spectre des réponses de l'avion.

L'angle de dérapage par rapport à la déflexion de l'aileron ou la gouverne de direction  $\frac{\beta(s)}{\delta(s)}$  du système d'équations (C.18) peut être écrit comme une fraction polynomiale avec la variable de Laplace  $s$

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)} = \frac{\begin{vmatrix} Y_\delta & -(sY_p + g\cos\theta_1) & s(U_1 - Y_r) \\ L_\delta & (s^2 - L_p s) & -(s^2 A_{11} + sL_r) \\ N_\delta & -(s^2 B_{11} + sN_p) & (s^2 - sN_r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (sU_1 - Y_\beta) & -(sY_p + g\cos\theta_1) & s(U_1 - Y_r) \\ -L_\beta & (s^2 - L_p s) & -(s^2 A_{11} + sL_r) \\ -(N_\beta + N_{T_\beta}) & -(s^2 B_{11} + sN_p) & (s^2 - sN_r) \end{vmatrix}} \quad (\text{C.27})$$

Qui peut se mettre sous la forme suivante

$$\frac{\beta(s)}{\delta(s)} = \frac{N_\beta}{D_2} = \frac{s(A_\beta s^3 + B_\beta s^2 + C_\beta s + D_\beta)}{s(A_2 s^4 + B_2 s^3 + C_2 s^2 + D_2 s + E_2)} \quad (\text{C.22})$$

Avec:

$$N_\beta = s(A_\beta s^3 + B_\beta s^2 + C_\beta s + D_\beta) \quad (\text{C.23})$$

Les coefficients du polynôme sont définis par:

$$\begin{aligned} A_\beta &= Y_\delta(1 - A_{11}B_{11}) \\ B_\beta &= -Y_\delta(N_r + L_p + A_{11}N_p + B_{11}L_r) + Y_p(L_\delta + A_{11}N_\delta) + Y_r(L_\delta B_{11} + N_\delta) - U_1(L_\delta B_{11} + N_\delta) \\ C_\beta &= Y_\delta(L_p N_r - N_p L_r) + Y_p(N_\delta L_r - L_\delta N_r) + g\cos\theta_1(L_\delta + N_\delta A_{11}) + Y_r(L_\delta N_p - N_\delta L_p) - U_1(L_\delta N_p - N_\delta L_p) \\ D_\beta &= g\cos\theta_1(N_\delta L_r - L_\delta N_r) \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

$$A_{11} = \frac{I_{XZ}}{I_{XX}} \quad \text{et} \quad B_{11} = \frac{I_{XZ}}{I_{ZZ}} \quad (\text{C.25})$$

De même la fonction de transfert de l'angle d'inclinaison latéral par rapport à la déflexion de l'aileron ou la gouverne de direction est :

$$\frac{\Phi(s)}{\delta(s)} = \frac{\begin{vmatrix} (sU_1 - Y_\beta) & Y_\delta & s(U_1 - Y_r) \\ -L_\beta & L_\delta & -(s^2 A_{11} + sL_r) \\ -(N_\beta + N_{T_\beta}) & N_\delta & (s^2 - sN_r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (sU_1 - Y_\beta) & -(sY_p + g\cos\theta_1) & s(U_1 - Y_r) \\ -L_\beta & (s^2 - L_p s) & -(s^2 A_{11} + sL_r) \\ -(N_\beta + N_{T_\beta}) & -(s^2 B_{11} + sN_p) & (s^2 - sN_r) \end{vmatrix}} \quad (\text{C.26})$$

Qui peut se mettre sous la forme fractionnelle suivante

$$\frac{\Phi(s)}{\delta(s)} = \frac{N_\Phi}{D_2} = \frac{s(A_\Phi s^2 + B_\Phi s + C_\Phi)}{s(A_2 s^4 + B_2 s^3 + C_2 s^2 + D_2 s + E_2)} \quad (\text{C.27})$$

Avec:

$$N_\phi = s(A_\phi s^2 + B_\phi s + C_\phi) \quad (\text{C.28})$$

Les coefficients sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} A_\phi &= U_1(L_\delta + N_\delta A_{11}) \\ B_\phi &= U_1(N_\delta L_r - L_\delta N_r) - Y_\beta(L_\delta + A_{11}N_\delta) + Y_\delta(L_\beta + A_{11}N_\beta + N_{T_\beta}A_{11}) \\ C_\phi &= -Y_\beta(N_\delta L_r - L_\delta N_r) + Y_\delta(L_r N_\beta + L_r N_{T_\beta} - N_r L_\beta) + \\ &\quad (U_1 - Y_r)(N_\beta L_\delta + N_{T_\beta}L_\delta - L_\beta N_\delta) \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Finalement la fonction de transfert d'angle du cap par rapport à la déflexion de l'aileron ou la gouverne de direction est :

$$\frac{\psi(s)}{\delta(s)} = \frac{\begin{vmatrix} (sU_1 - Y_\beta) & -(sY_p + g \cos \theta_0) & Y_\delta \\ -L_\beta & (s^2 - L_p s) & L_\delta \\ -(N_\beta + N_{T_\beta}) & -(s^2 B_{11} + sN_p) & N_\delta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (sU_1 - Y_\beta) & -(sY_p + g \cos \theta_1) & s(U_1 - Y_r) \\ -L_\beta & (s^2 - L_p s) & -(s^2 A_{11} + sL_r) \\ -(N_\beta + N_{T_\beta}) & -(s^2 B_{11} + sN_p) & (s^2 - sN_r) \end{vmatrix}} \quad (\text{C.30})$$

Qui peut se mettre sous la forme fractionnelle suivante

$$\frac{\psi(s)}{\delta(s)} = \frac{N_\psi}{D_2} = \frac{(A_\psi s^3 + B_\psi s^2 + C_\psi s + D_\psi)}{s(A_2 s^4 + B_2 s^3 + C_2 s^2 + D_2 s + E_2)} \quad (\text{C.31})$$

Avec:

$$N_\psi = (A_\psi s^3 + B_\psi s^2 + C_\psi s + D_\psi) \quad (\text{C.32})$$

Les coefficients sont donnés par:

$$\begin{aligned} A_\psi &= U_1(N_\delta + L_\delta B_{11}) \\ B_\psi &= U_1(L_\delta N_p - N_\delta L_p) - Y_p(N_\beta + A_{11}N_\delta) + Y_\delta(L_\beta + A_{11}N_\beta + N_{T_\beta}A_{11}) \\ C_\psi &= U_1(L_\delta N_p - N_\delta L_p) - Y_p(N_\delta + L_\delta B_{11}) + Y_\delta(L_\beta B_{11} + N_\beta + N_{T_\beta}) \\ D_\psi &= -Y_\beta(L_\delta N_p - N_\delta L_p) + Y_p(N_\beta + A_{11}N_\delta) + Y_p(N_\beta L_\beta + N_{T_\beta}L_\delta) \\ &\quad + Y_\delta(L_\beta N_p - N_\beta L_p - N_{T_\beta}N_\delta) \\ E_\psi &= g \cos \theta_1 (N_\beta L_\delta + N_{T_\beta}L_\delta - L_\beta N_\delta) \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

La stabilité dynamique longitudinale d'un avion dépend strictement de l'équation caractéristique qui est obtenue par la mise des polynômes du dénominateur des fonctions  $\beta(s)$ ,  $\Phi(s)$  et  $\psi(s)$  égal à zéro.

Les équations (C.22), (C.27) et (C.31) possèdent le même dénominateur  $D_2$ .

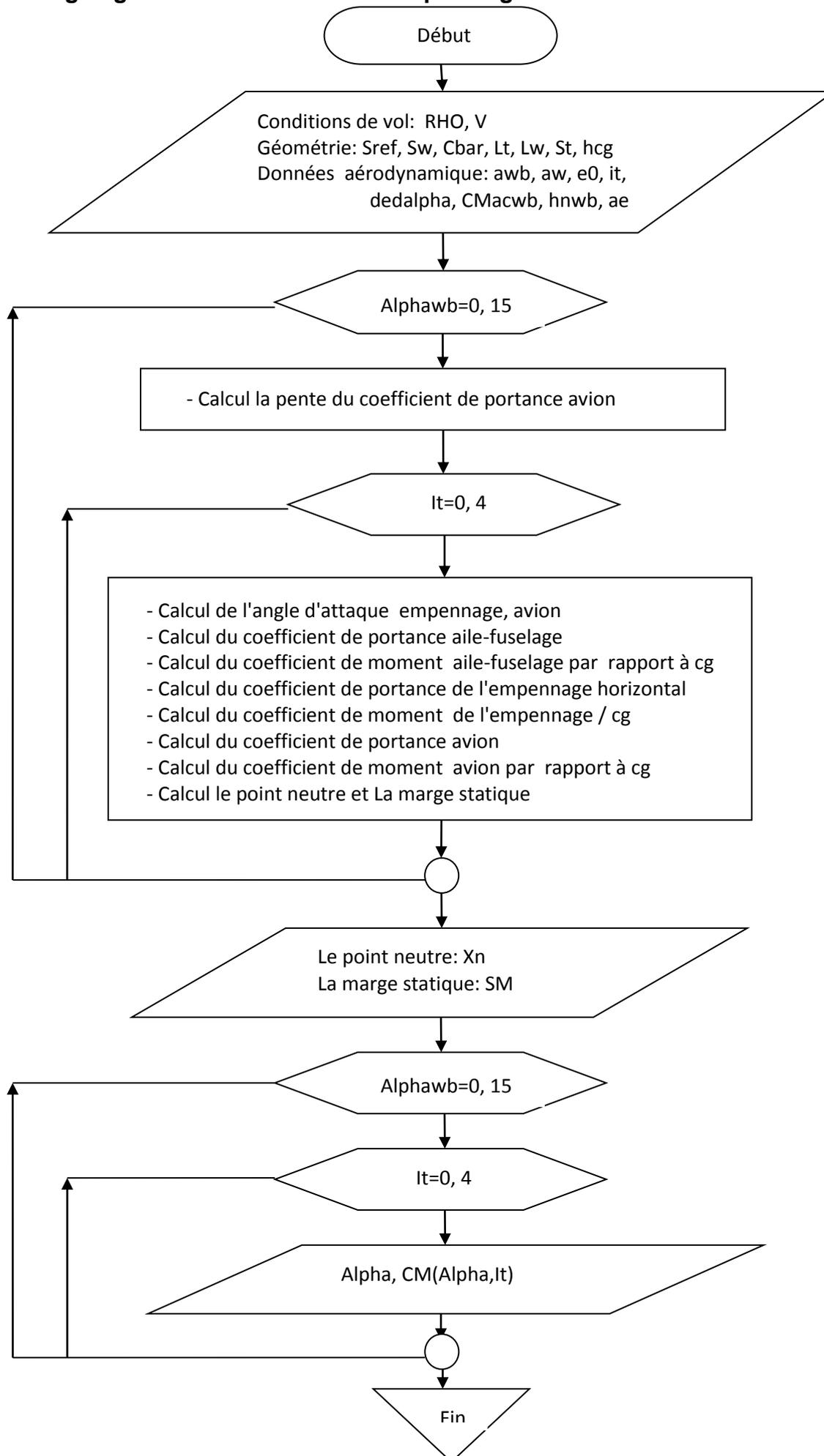
$$D_2 = s(A_2s^4 + B_2s^3 + C_2s^2 + D_2s + E_2) \quad (\text{C.34})$$

Les coefficients de  $A_2$  jusqu'à  $E_2$  sont définis de la manière suivante:

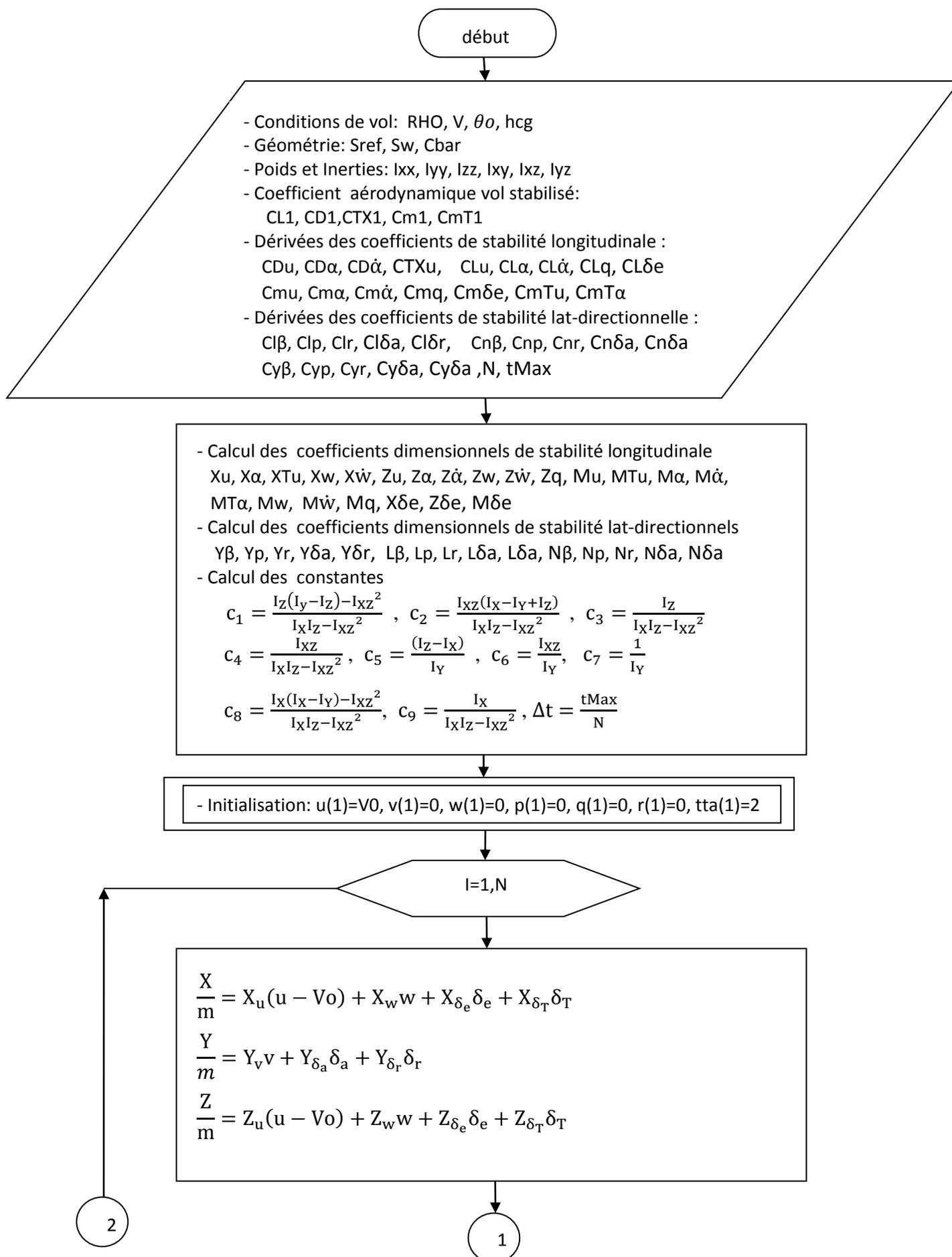
$$\begin{aligned} A_2 &= U_1(1 - A_{11}B_{11}) \\ B_2 &= -Y_\beta(1 - A_{11}B_{11}) - U_1(L_p + N_r + A_{11}N_p + B_{11}L_r) \\ C_2 &= U_1(L_pN_r - L_rN_p) + Y_\beta(L_p + N_r + A_{11}N_p + B_{11}L_r) - Y_p(L_\beta + A_{11}N_\beta + A_{11}N_{T_\beta}) + \\ &U_1(L_\beta B_{11} + N_\beta + N_{T_\beta}) - Y_r(L_\beta B_{11} + N_\beta + N_{T_\beta}) \\ D_2 &= -Y_\beta(L_pN_r - L_rN_p) + Y_p(L_\beta N_r - N_\beta L_r - N_{T_\beta}L_r) - g\cos\theta_1(L_\beta + A_{11}N_\beta + A_{11}N_{T_\beta}) \\ &+ U_1(L_\beta N_p - N_\beta L_p - N_{T_\beta}L_p) - Y_r(L_\beta N_p - N_\beta L_p - N_{T_\beta}L_p) \\ E_2 &= g\cos\theta_1(L_\beta N_r - N_\beta L_r - N_{T_\beta}L_r) \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

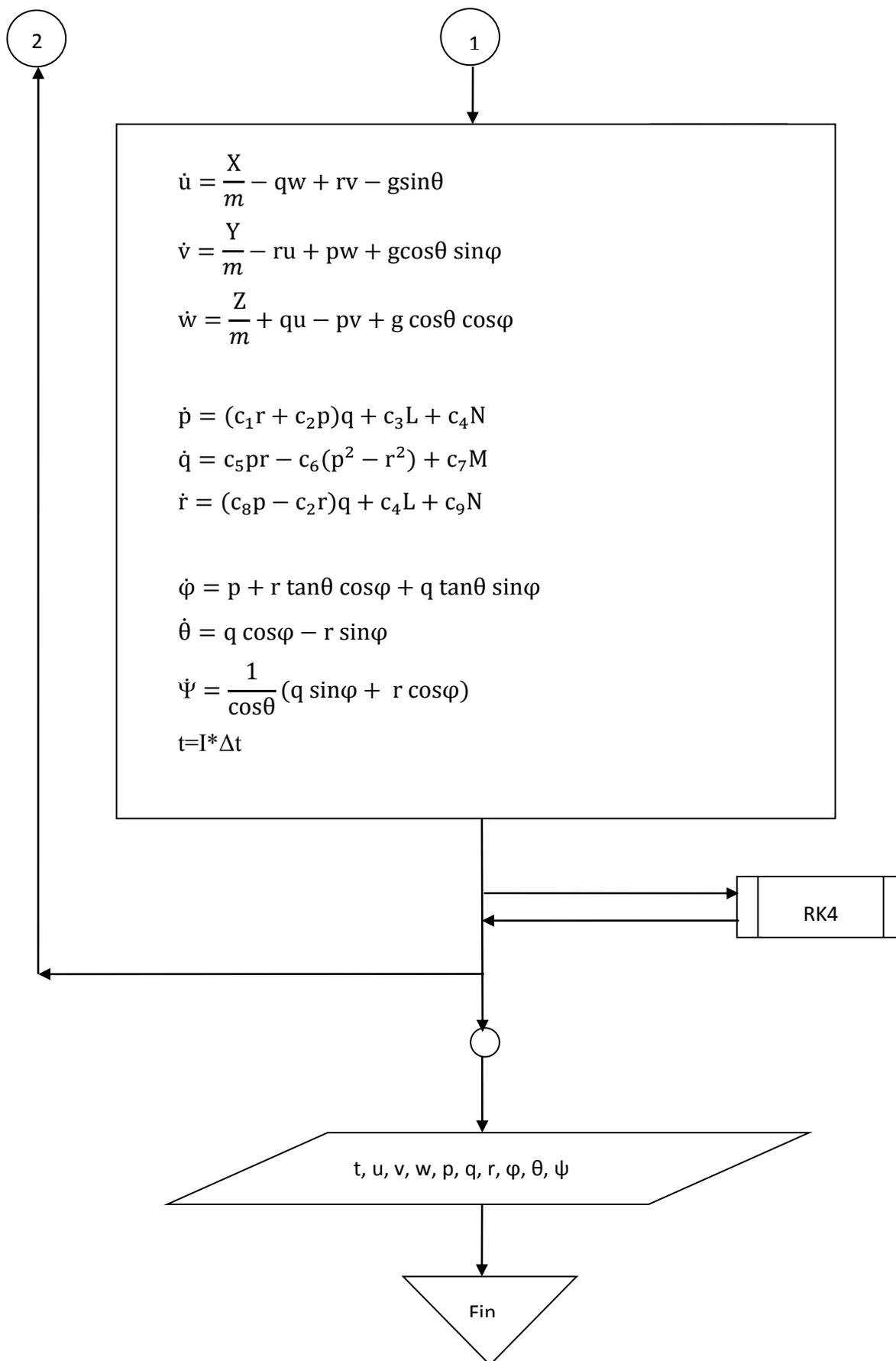
L'étude de la stabilité dynamique dépend entièrement des racines de la fonction caractéristique  $D_2 = 0$ . Cette dernière possède trois racines et après la détermination des valeurs numériques de ces racines on peut étudier la stabilité de l'avion à travers les critères de stabilité.

### D- Organigramme de la stabilité statique longitudinale avion



## E- Organigramme de la stabilité non linéaire dynamique





## F- ALGORITHME DE RUNGE-KUTTA

### F1- méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre appliquée à un système d'équations différentielles

Les équations différentielles permettant d'avoir des solutions analytiques sont relativement faibles ; par conséquent les méthodes numériques sont d'un grand intérêt pratique. A cet égard, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est couramment utilisée pour la résolution des équations différentielles ordinaires. C'est une méthode à pas unique, elle a l'avantage d'être simple à programmer et d'être assez stable.

Soit un système couplé d'équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, z), \quad y(a) = y_0 = \alpha$$

$$\frac{dz}{dt} = g(t, y, z), \quad z(a) = z_0 = \beta \quad (\text{F.1})$$

$a \leq t \leq b$ ,  $a$  et  $b$  des constantes données.

L'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 s'écrit:

Données :  $a, b, \alpha, \beta$

Choisir un entier  $N$

1-  $h = (b-a)/N$

$t_0 = a$

$y_0 = \alpha$

$z_0 = \beta$

2-  $i = 0$

3-  $ky_1 = h \cdot f(t_i, y_i, z_i)$

$kz_1 = h \cdot g(t_i, y_i, z_i)$

$ky_2 = h \cdot f(t_i + h/2, y_i + ky_1/2, z_i + kz_1/2)$

$kz_2 = h \cdot g(t_i + h/2, y_i + ky_1/2, z_i + kz_1/2)$

$ky_3 = h \cdot f(t_i + h/2, y_i + ky_2/2, z_i + kz_2/2)$

$kz_3 = h \cdot g(t_i + h/2, y_i + ky_2/2, z_i + kz_2/2)$

$ky_4 = h \cdot f(t_i + h, y_i + ky_3, z_i + kz_3)$

$kz_4 = h \cdot g(t_i + h, y_i + ky_3, z_i + kz_3)$

$y_{i+1} = y_i + 1/6 \cdot (ky_1 + 2 \cdot ky_2 + 2 \cdot ky_3 + ky_4)$

$z_{i+1} = z_i + 1/6 \cdot (kz_1 + 2 \cdot kz_2 + 2 \cdot kz_3 + kz_4)$

$$t_{i+1} = t_i + (i+1)h$$

- 4- Si  $i=N-1$  Aller à l'étape 6
- 5-  $i=i+1$  aller à l'étape 3
- 6- Procédure est terminée ( $y_i$ ,  $z_i$  approximent respectivement les solutions  $y$  et  $z$ )

## G: CONVERSION DES UNITES

En dynamique, il y a habituellement quatre dimensions: masse, longueur, temps et force. Comme l'indique le Tableau G.1, le système international d'unités (SI) désigne la masse en kilogrammes (kg), la longueur en mètres (m), le temps en secondes (s) et la force en newtons (N).

Le Tableau G.2 qui représente système Anglais (BG), la masse est mesurée en slug, la longueur en pieds (ft), le temps en secondes (s), et la force en pounds ou livres (lbf). Des quatre dimensions mentionnées, la masse, la longueur et le temps sont considérés comme dimensions primaires et la force comme une dimension secondaire. La force peut être exprimée en termes de masse, de longueur et de temps comme suit:

$$1\text{N} = 1\text{Kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2 \quad \text{et} \quad 1\text{lbf} = 1\text{slug}\cdot\text{ft}/\text{s}^2$$

**Tableau G1 : Système International (SI)**

Dimensions	Système International (SI)	Facteur de conversion
Masse, M	Kilogramme, Kg	0.06852 slug
Longueur, L	Mètre, m	3.28084 ft
Temps, T	Seconde, s	1 s
Force, F	Newton, N	0.2248 lb

**Tableau G2 : Système Anglais (GB)**

Dimensions	Système Anglais (GB)	Facteur de conversion
Masse, M	Slug	14.5938 Kg
Longueur, L	Foot, ft	0.3048 m
Temps, T	Second, s	1s
Force, F	Pound, lb	4.4482 N

**Tableau G3 : Constante g dans les systèmes International (SI) et Anglais (GB)**

Constante	Système International (SI)	Système Anglais (GB)
Accélération terrestre : g	9.80665 m.s <sup>-2</sup>	32.1740 ft. s <sup>-2</sup>

**H: PUBLICATION**

# Analysis of stability and control of the longitudinal flight under the influence of longitudinal modes of flight, frequencies and damping coefficients

Ahmed Chegrani\*, Zineddine.Youbi, Rachid Renane

Laboratory of Aeronautical sciences IAES University of Blida1 Algeria

B.P.270, Road of soumaa, 09000 Blida, Algeria

**Abstract:** In this work a comparative study was conducted on the longitudinal dynamics and flight control for four types of aircraft (General aircraft, business aircraft, fighter aircraft and commercial aircraft). We have established the fundamental equations of motion for a rigid aircraft using the laws of mechanical and aerodynamic models. Therefore, an analysis of stability and control is made for every case to determine different dynamic characteristics (longitudinal modes of flight, frequencies and damping coefficients). Also, two kinds of automatic control systems have been designed for four types of aircraft. At the end, some applications are carried on real aircraft models (Cessna 172, M24Learjet, F4C and Boeing 747) and simulation results are presented for each type of aircraft.

**Key words:** Aircraft, Flight dynamic, Flight control, Stability, Simulation, Modes, Frequency, Damping

## 1. Introduction

Each type of aircraft is intended to perform a very specific task. Therefore, requirements in terms of stability and maneuverability are different. This is an inverse relationship between these two flying qualities [1]. Stability is most important in the case of a transport aircraft because it does not require rapid maneuvers while the maneuverability is vital to a fighter jet. This work deals with the longitudinal dynamics and control of various kinds of aircraft.

## 2. Dynamic Model

The establishment of the mathematical model requires the application of Newton's second law to get the equations of motion for a rigid aircraft. Resultant forces acting on aircraft are gravitational, aerodynamic and thrust of propulsion system and similarly, the moments due to these forces about the center of gravity of the aircraft can be expressed in set

of equations, as presented by Stevens and Lewis [2] and referenced to the aircraft body frame:

$$\dot{U} = V_R - W_Q - g \cdot \sin\theta + \frac{(F_{Ax} + F_{Tx})}{m} \quad (1)$$

$$\dot{V} = -U_R + W_P + g \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta + \frac{(F_{Ay} + F_{Ty})}{m} \quad (2)$$

$$\dot{W} = U_Q - V_P + g \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta + \frac{(F_{Az} + F_{Tz})}{m} \quad (3)$$

$$\dot{P} = \frac{I_{xz}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})P_Q - (I_{zz}(I_{zz} - I_{yy}) + I_{xz}^2)Q_R + I_{zz}L + I_{xz}N}{(I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2)} \quad (4)$$

$$\dot{Q} = ((I_{zz} - I_{xx})P_R - I_{xz}(P^2 - R^2) + M) / I_{yy} \quad (5)$$

$$\dot{R} = \frac{(I_{xx}(I_{xx} - I_{yy}) + I_{xz}^2)P_Q + I_{xz}(I_{yy} - I_{xx} - I_{zz})Q_R + I_{xz}L + I_{xx}N}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \quad (6)$$

Where:

u, v, w: Linear velocity components (forward, side and downward velocity respectively)

p, q, r: Angular velocity components (roll, pitch and yaw rate respectively)

F<sub>AX</sub>, F<sub>AY</sub>, F<sub>AZ</sub> : Aerodynamic force components (drag, side force and lift respectively)

F<sub>TX</sub>, F<sub>TY</sub>, F<sub>TZ</sub> : Thrust force components

LA, MA, NA : Aerodynamic moment components (rolling, pitching and yawing moment )

L<sub>T</sub>, M<sub>T</sub>, N<sub>T</sub> : Thrust moment components (rolling, pitching and yawing moment respectively)

There are three more equations which define the Euler angles:

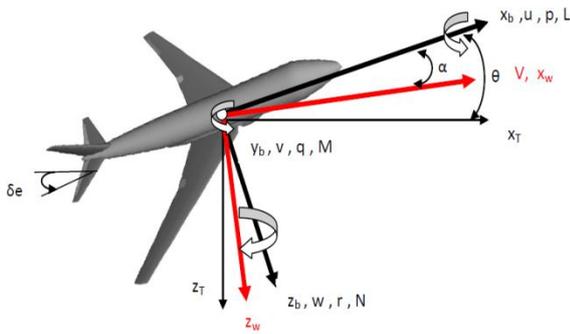
$$\dot{\phi} = P + \tan \theta (Q \cdot \sin \phi + R \cdot \cos \phi) \quad (7)$$

$$\dot{\theta} = Q \cdot \cos \phi + R \cdot \sin \phi \quad (8)$$

$$\dot{\psi} = (Q \cdot \sin \phi + R \cdot \cos \phi) \sec \theta \quad (9)$$

Where:

$\phi, \theta, \psi$ : Roll, pitch, and yaw components of the Euler angles, respectively



**Figure 1. The definition of the axes and variables of an airplane.**

After simplification, the linearized equations of longitudinal motion are obtained as [3]:

$$\dot{u} = -g\theta \cos \theta_0 + X_u u + X_{T_u} u + X_\alpha \alpha + X_{\delta_e} \delta_e \quad (10)$$

$$U_0 \dot{\alpha} - U_0 \dot{\theta} = -g\theta \sin \theta_0 + Z_u u + Z_\alpha \alpha + Z_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + Z_q \dot{\theta} + Z_{\delta_e} \delta_e \quad (11)$$

$$\ddot{\theta} = M_u u + M_{T_u} u + M_\alpha \alpha + M_{T_\alpha} \alpha + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_q \dot{\theta} + M_{\delta_e} \delta_e \quad (12)$$

The longitudinal motion states are determined by velocity deviation (u), change in angle of attack ( $\alpha$ ), pitch rate (q), and change pitch angle ( $\theta$ ). In this case, the input is the elevator deflection ( $\delta_e$ ). Using the Laplace transform, it is possible to convert a system's time into a frequency domain

$$(s - X_u - X_{T_u})u(s) - X_\alpha \alpha(s) + g \cdot \cos \theta_1 \cdot \theta(s) = X_{\delta_e} \delta_e(s) \quad (13)$$

$$-Z_u u(s) + [s(U_1 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_\alpha] \alpha(s) + [- (Z_q + U_1) s + g \cdot \sin \theta_1] \theta(s) = Z_{\delta_e} \delta_e(s) \quad (14)$$

$$-(M_u + M_{T_u})u(s) - (M_{\dot{\alpha}} s + M_\alpha + M_{T_\alpha}) \alpha(s) + (s^2 - M_q s) \theta(s) = M_{\delta_e} \delta_e(s) \quad (15)$$

Writing equations in matrix form [3]:

$$\begin{bmatrix} (s - X_u - X_{T_u}) & -X_\alpha & g \cdot \cos \theta_1 \\ -Z_u & [s(U_1 - Z_{\dot{\alpha}}) - Z_\alpha] & [- (Z_q + U_1) s + g \cdot \sin \theta_1] \\ -(M_u + M_{T_u}) & -(M_{\dot{\alpha}} s + M_\alpha + M_{T_\alpha}) & (s^2 - M_q s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ \alpha(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e(s) \quad (16)$$

The speed to elevator transfer function can be expressed by:

$$\frac{u(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_u}{D_1} = \frac{A_u s^3 + B_u s^2 + C_u s + D_u}{A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1} \quad (17)$$

Also, the angle of attack transfer function can be written as:

$$\frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_\alpha}{D_1} = \frac{A_\alpha s^3 + B_\alpha s^2 + C_\alpha s + D_\alpha}{A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1} \quad (18)$$

The pitch rate transfer function is:

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{N_q}{D_1} = \frac{A_q s^2 + B_q s + C_q}{A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1} \quad (19)$$

As:

$$q(s) = s \cdot \theta(s) \quad (20)$$

Consequently, the pitch angle transfer function is:

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{1}{s} \frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{1}{s} \frac{A_q s^2 + B_q s + C_q}{(A_1 s^4 + B_1 s^3 + C_1 s^2 + D_1 s + E_1)} \quad (21)$$

All transfer functions have the same denominator D1.

It is designated by the characteristic equation:

$$D_1 = A.s^4 + B.S^3 + C .s^2 + D.s + E \quad (22)$$

The coefficients of the polynomial transfer functions are determined from expressions of dimensional coefficients [4] based on the data of table1. The study of the dynamic stability depends entirely of the characteristic equation. When it is equal to zero, it can be put in the following form:

$$(s^2 + 2\xi_{sp} \omega_{n_{sp}} s + \omega_{n_{sp}}^2)(s^2 + 2\xi_{ph} \omega_{n_{ph}} s + \omega_{n_{ph}}^2) = 0 \quad (23)$$

Roots of characteristic equation are:

$$S_{sp} = n_{sp} \pm j\omega_{sp} = \xi_{sp} \omega_{n_{sp}} \pm j\omega_{n_{sp}} \sqrt{1 - \xi_{sp}^2} \quad (24)$$

$$S_{ph} = n_{ph} \pm j\omega_{ph} = \xi_{ph} \omega_{n_{ph}} \pm j\omega_{n_{ph}} \sqrt{1 - \xi_{sp}^2} \quad (25)$$

Where:

$\zeta$  : Damping ratio

$\omega_n$ : Undamped natural frequency

$\omega$ : Damped frequency

This means that the transient response of the aircraft consists of two terms, one highly damped and with high frequency called short period mode (sp), and the other is very slowly damped and with low frequency oscillation called phugoid mod (ph) [5].

For a small time, the short period mode dominates the dynamic behavior of the flight of an aircraft, it is the immediate response to the deflection of the elevator and that is the reason we are interested in this mode. The simplified transfer function of the pitch angle is given by:

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\left( M_{\delta_e} + \frac{M_{\dot{\alpha}} Z_{\delta_e}}{U_1} \right) s + \left( \frac{M_{\alpha} Z_{\delta_e}}{U_1} - \frac{Z_{\alpha} M_{\delta_e}}{U_1} \right)}{s \left[ s^2 - \left( M_q + M_{\dot{\alpha}} + \frac{Z_{\alpha}}{U_1} \right) s + \left( \frac{Z_{\alpha} M_q}{U_1} - M_{\alpha} \right) \right]} \quad (26)$$

### 3. Airplane control

The aircraft pitch motion can be controlled by pitch attitude hold mode system.

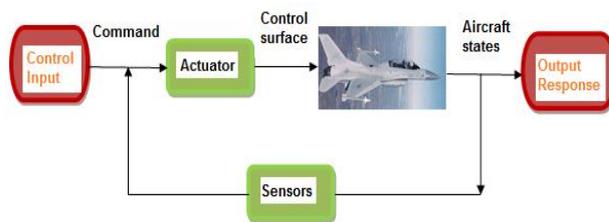


Figure2. The Aircraft control and response

Using Blacklock’s approach as shown in the figure 2 and figure 3, the aircraft is initially trimmed to straight and level flight at pitch angle  $\theta_{ref}$ , if the output parameter  $\theta$  varies from the state reference, a signal is generated from the vertical gyro, amplified and directed to the elevator servo. This will actuate the elevator allowing a pitch moment of the aircraft to return to the desired pitch angle. It is a system that does not include an integrator; it is called Type0 fig2 [6].

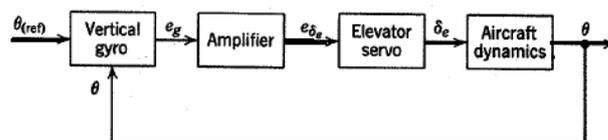


Figure 3.1. The Block-diagram of the Pitch Attitude Hold mode Type0

The improvement of dynamic characteristics of an airplane can be obtained by adding to the previous control system (fig3.1) an inner loop contains a sensor measuring the pitch rate. In this case, the control system is called Type1 (fig3.2).

Table 1. Airplanes Data [4]

Data	Type of Airplane			
	Boeing 747	Learjet M24	Cessna 172	F4C
Flight conditions				
Altitude H(ft)	20000	40000	5000	35000
Air density: $\rho$ slugs/ft <sup>3</sup> )	0.001268	0.000588	0.00205	0.000739

Speed:	673	677	219	876
U1(ft/sec)				
Initial attitude(rad)	0.0436	0.0471	0.0	0.0454
Geometry And inertias				
Wing Area: S	5500 ft <sup>2</sup> )	230 (ft <sup>2</sup> )	174 (ft <sup>2</sup> )	530 (ft <sup>2</sup> )
Wing chord: c	27.3 ft	7 ft	4.9 ft	16 ft
Wing Span: b	196 ft	34 ft	35.8 ft	38.7 ft
Weight: lbs	564000	13000	2645	39000
Ixx(slug.ft <sup>2</sup> )	13.7e+6	28000	948	250000
Iyy(slug.ft <sup>2</sup> )	30.5e+6	18800	1346	122200
Izz(slug.ft <sup>2</sup> )	43.1e+6	47000	19670	139800
Ixz(slug.ft <sup>2</sup> )	8.3e+6	1300	0	2200
Steady state coefficients				
C <sub>L1</sub>	1.76	0.41	0.31	0.26
C <sub>D1</sub>	0.263	0.0335	0.031	0.03
C <sub>Tx1</sub>	0.263	0.0335	0.031	0.03

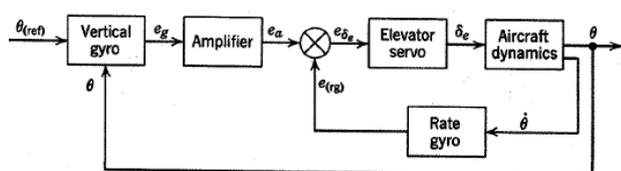
Transfer function: $\theta(s)/\delta e(s)$	$\frac{(1.689s + 0.8393)}{s(s^2 + 1.172s + 1.587)}$	$\frac{(14.29s + 9.137)}{s(s^2 + 1.99s + 8.001)}$
Airplane	Cessna 172	F4C
Transfer function: $\theta(s)/\delta e(s)$	$\frac{(39.49s + 82.04)}{s(s^2 + 8.331s + 37.22)}$	$\frac{(11.4s + 5.66)}{s(s^2 + 1.254s + 8.13)}$

**Table 3. Dynamics characteristics of short period mode**

Airplanes	Undamped natural frequency $\omega_n$	Damping ratio $\zeta$	Time to half/double_amplitude
Boeing 747	1.26	0.466	1.18
Learjet M24	2.83	0.352	0.697
Cessna 172	6.1	0.683	0.166
F4C	2.85	0.22	/

**Table 4. Dynamics characteristics of phugoid mode**

Airplanes	Undamped_natural frequency $\omega_n$	Damping ratio $\zeta$	Time to half/Double_amplitude
Boeing 747	0.0678	0.0297	343.86
Learjet M24	0.0914	0.111	68.03
Learjet M24	0.179	0.076	50.84



**Figure 3.2 The block-diagram of the Pitch Attitude Hold mode with pitch rate feedback Type1**

**Table 2 Transfer function of the pitch angle for a short period mode**

Airplane	Boeing 747	Learjet M24
----------	------------	-------------

#### 4. Simulation and Result

The Simulation of the dynamic response regarding longitudinal motion of aircraft will be analyzed for four types of airplanes when encountering a small disturbance generated by the deflection of the

elevator. The physical data and the aerodynamic coefficients of stabilized flight are presented in table1.

Table 2 shows the transfer functions calculated of short period mode for different types of aircraft used in this study. Also, their dynamic characteristics are calculated for the two modes of motion; short period and Phugoid. They are summarized respectively in Table 3 and Table 4.

#### 4.1 General Aviation Airplane: Cessna 172

Cessna 172 is a small personal transport aircraft with four seats, high wing and single piston engine. For this type of aircraft, simulation results are plotted as curves.. From Figure 4 and figure 5, all the poles are in the left half of the complex plane which means that the aircraft is stable. If the gain exceeds 3.4 then the system becomes unstable. When the design is the type 1, the stability analysis is carried out by plotting the Bode diagram [7], the gain margin as well as increased the phase margin. On the figure 6 and figure 7, the control actuated with a value  $+ 5$  (deg) for a time  $t = 2$  to 3 sec.

#### IV.2. Business airplane: Gates Learjet M24

It is a Gates Learjet business jet aircraft from six to eight seats. This aircraft is equipped with two General Electric jet engines. If the adopted design is made according to the type 1 block, the poles are located on the left side of the complex plane but their location is very close to the origin and the system is stable. When the gain value is increased beyond the value of 3.4, they move to the right, which means that the system becomes unstable. Stability is also analyzed using the Bode diagram, the margins of gain and phase margins (9.85 GM and PM is 41.8 degrees)

are satisfactory from the viewpoint of stability. The simulation results for the system type 1 are shown in

Figure 8 and type0 is shown in Figure 9. For the type of system 1, the response time to achieve the desired command (5deg) is about 4 seconds.

#### 4.3. Fighter airplane: McDonnell Douglas F4C

The aircraft F-4C was developed by McDonnell Douglas for U.S. Navy fleet defense which is a supersonic military aircraft with two seats (pilot and navigator) and equipped by twin jet engines of General Electric with afterburner. A fighter aircraft must be high performance especially for maneuverability and response should be fast. The poles are located on the right half of the complex plane, but their position is very close to the origin. The gain value up to 3.5 systems becomes unstable. In type 1 system, the response is oscillatory and the response time is very slow. So this design is not appropriate for fighters because they require a faster response than other aircraft.

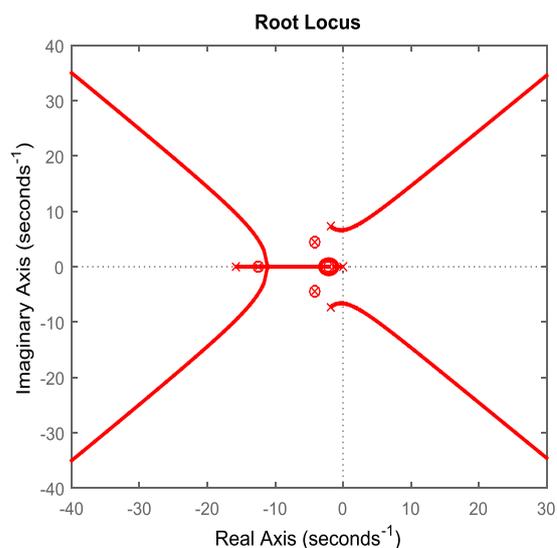


Figure 4. Root Locus for Cessna 172 type 1

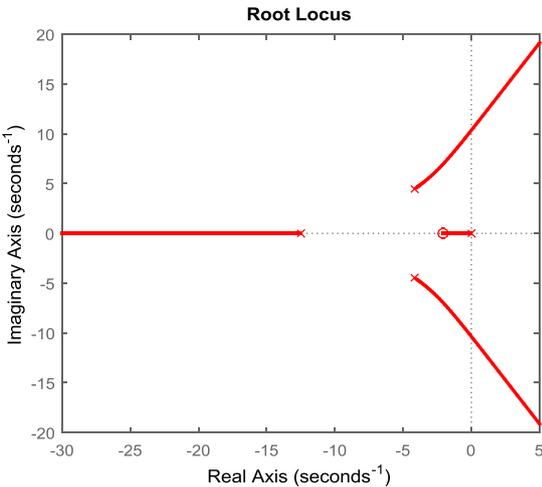


Figure 5. Root Locus for Cessna 172 type 0

4.4. Commercial transport airplane: Boeing 747

Boeing 747 is a four jet engine airliner designed by the American manufacturer Boeing starting from 1965. Depending on the configuration and type of classes, it can accommodate 366-524 passengers. In this case, the poles are located on the left half of the complex plane. This shows that the aircraft is stable. This stability is also analyzed by plotting the Bode plot either for the control system type1. The simulation results of the two types of control system are shown in figure 14.

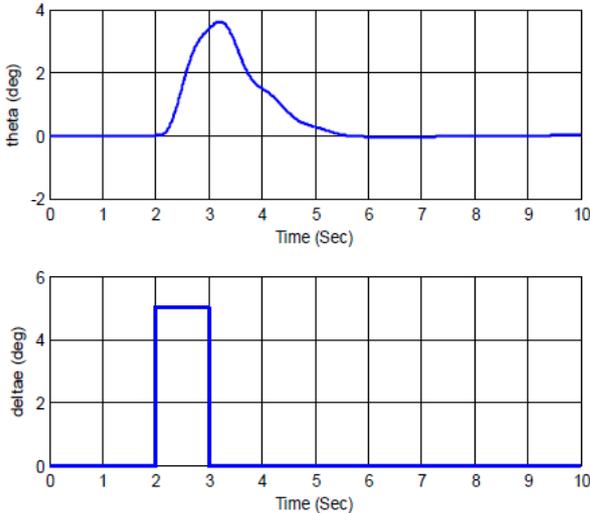


Figure 6. Pitch angle and elevator command for

Cessna 172 type 1

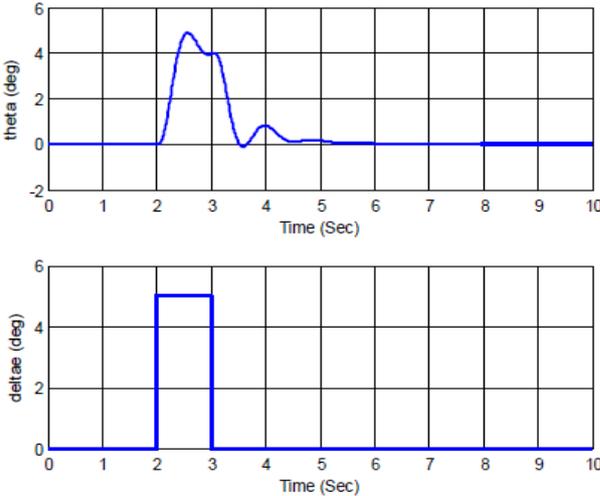
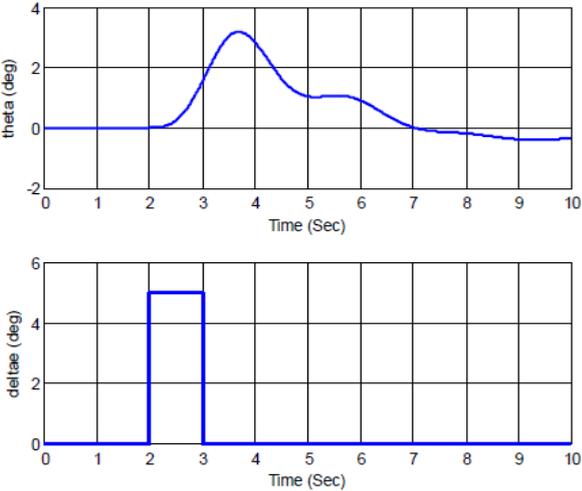
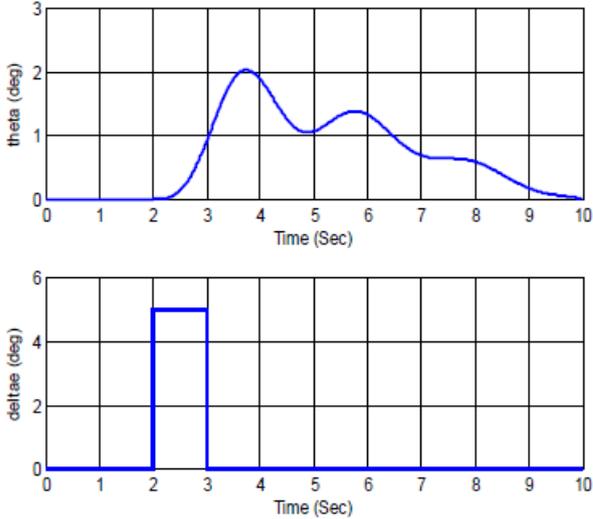


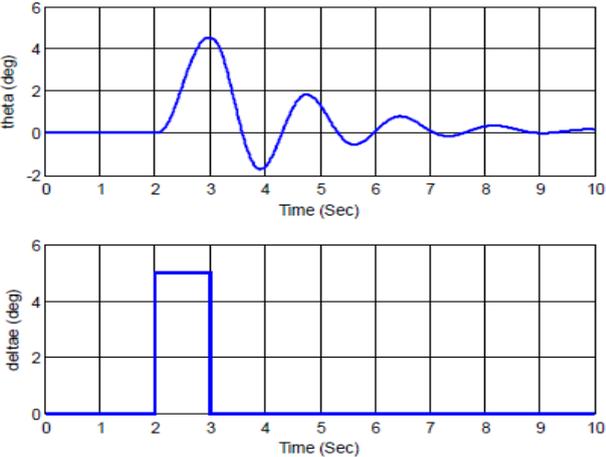
Figure 7. Pitch angle and elevator command for Cessna 172 type 0



**Figure 8. Pitch angle and elevator command for Gates Learjet M24 type 1**



**Figure 10. Pitch angle and elevator command for fighter aircraft F4C type1.**



**Figure 9. Pitch angle and elevator command for Gates Learjet M24 type 0**

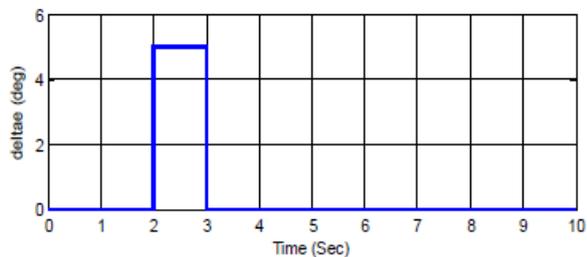
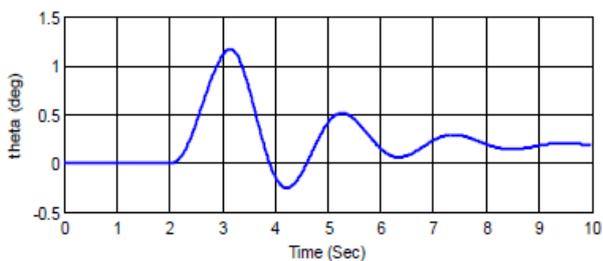


Figure 11. Pitch angle and elevator command for fighter

aircraft F4C type0

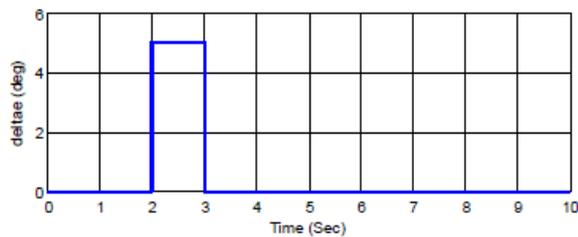
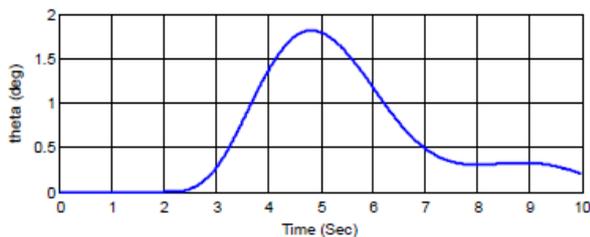


Figure 12. Pitch angle and elevator command for Boeing 747 type1

### 5. Conclusion

The dynamic characteristics: frequencies, damping factor and the time to reduce by half the amplitude are determined for general aircraft(Cessna172), business aircraft (LearjetM24), fighter aircraft(F4C

and commercial aircraft(Boeing 747), without any control system. To improve the dynamic characteristics of the flight, two kinds of automatic control systems have been designed according to the Blacklock’s approach.

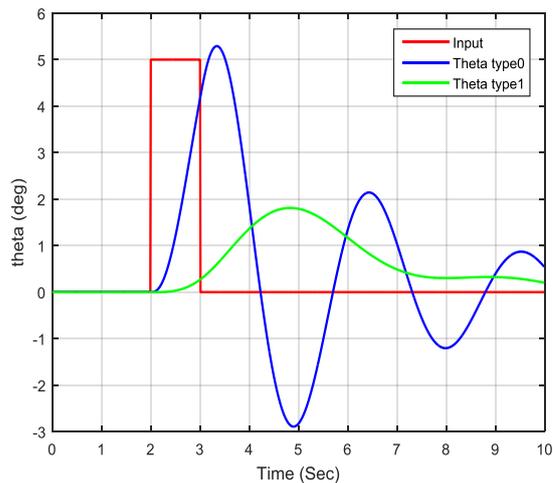


Figure 13. Pitch angle and elevator command for Boeing 747

type 0 and type 1

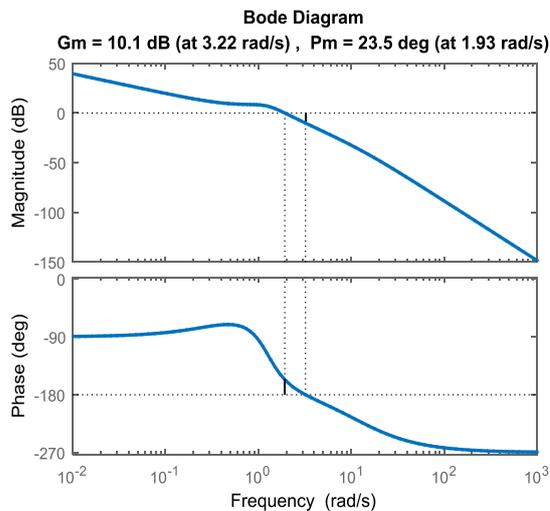


Figure 14. Bode plot for Boeing 747 Type1

The response to the same input control as a pulse has

been studied using the same flight automatic control system. For fighter aircraft, the response is oscillatory ,with longer rise time but the response must be faster. The stability of an aircraft depends on its own derivatives stability, its geometrical dimensions, mass and inertial characteristics. Therefore, control system should be done by designing a suitable automatic control which can't be used for all types of aircrafts. Finally, every aircraft must have its own flight automatic control.

### References

- [1] Robert C.Nelson, Flight stability and automatic control, Mc Graw-Hill book company, 1989
- [2] Brian L. Stevens and Frank L.Lewis. Aircraft control and simulation John Wiley & Sons Inc, 2<sup>nd</sup> Ed, 2003.
- [3] Marcello R. Napolitano. Aircraft Dynamics: From Modelling to simulation John Wiley & Sons Inc, 2012.
- [4] Jan Roskam, Airplane flight dynamics and automatic flight controls Part I Roskam Aviation and Engineering Corporation 2001.
- [5] M.V.Cook, Flight dynamics principles. Elsevier Aerospace Engineering Series, 2<sup>nd</sup> Edition, 2007.
- [6] John H. Blakelock. Automatic control of Aircraft and Missiles Wiley Inter-science Publication, 2<sup>nd</sup> Ed, 1990.
- [7] David K. Schmidt. Modern Flight Dynamics Mc Graw Hill, 2012.