

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



MINISTERE AUX UNIVERSITES ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA  
INSTITUT D'AERONAUTIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER  
SPECIALITE : AERONAUTIQUE  
OPTION : AERONAUTIQUE

PRESENTE PAR : M<sup>ELLE</sup> KHELIFA YAMINA

THEME :

**COMMANDES AUTO – AJUSTABLES  
DU VOL LATERAL ET LONGITUDINAL  
D'UN AVION DE TYPE AIR BUS A300**

présenté devant le jury constitué de :

M. Z. YOUBI : M.C- UNIVERSITE DE BLIDA	PRESIDENT
M. A.GUESSOUM : PROFESSEUR- UNIVERSITE DE BLIDA	EXAMINATEUR
M. H.SALHI : M.C- UNIVERSITE DE BLIDA	EXAMINATEUR
M. B.BOUZOUIA : M. DE RECHERCHE (C.D.T.A ALGER )	EXAMINATEUR
M. M.BOUNDER: C.C- UNIVERSITE DE BLIDA	EXAMINATEUR
M. H. BENCHOUBANE : M.C- UNIVERSITE DE BLIDA	RAPPORTEUR
M <sup>ELLE</sup> F. DOUDOU M.A - UNIVERSITE DE BLIDA	CO-PROMOTEUR

Blida – Algérie

Octobre, 2000

32-620-7-1

32-620-7-1

*Voler est une pratique naturelle... elle requiert néanmoins un apprentissage*

*Franck WATEL*

## **Remerciements**

*Pour toute la confiance qu'il m'a accordé en me proposant ce sujet, ainsi que son aide et ses précieux conseils, qui m'étaient indispensables pour l'aboutissement de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à Monsieur H.BENCHOUBANE, mon directeur de thèse. Je tiens à le remercier aussi, de m'avoir communiqué sa façon d'analyser les faits de manière critique et de prendre goût pour le domaine du contrôle.*

*Je ne saurais remercier Melle F.DOUDOU et Monsieur M.RAHIM pour toute l'aide qu'ils me l'ont offerte tout le long de ce projet, ainsi que pour la documentation qu'ils l'ont mis à ma disposition.*

*Tous mes remerciements s'adressent également aux responsables de l'institut d'Aéronautique (I.A.B), pour leur soutien et leur compréhension, et que tous ceux et celles, à titres divers m'ont apporté leur amitié tout au long de ces années d'études, trouvent ici l'expression de mes sentiments.*

## **RESUME :**

Un système de contrôle du mouvement latéral et longitudinal d'un avion de transport, du type AIR-BUS A300, a été conçu pour satisfaire les qualités d'un vol stable. Cet objectif est achevé, en appliquant deux classes de commandes, linéaires classiques et non-linéaires adaptatives. Les commandes linéaires multivariables par retour d'état et par retour d'état avec action intégrale, ainsi que les commandes adaptatives auto-ajustables (GMV, GPC, LQG) seront testées en vue d'obtenir des résultats qui prouveront leurs robustesses, lorsqu'elles sont appliquées à notre avion, dans un environnement déterministique et stochastique. Telles qu'une perturbation interne comme une diminution de la masse de l'avion ou une variation de la vitesse du vol, et une perturbation externe, pouvant être atmosphérique comme une rafale de vent ou un mauvais positionnement des surfaces de contrôle.

Mots clés : Commande adaptative, Contrôle de vol, Aéronautique.

## **ABSTRACT:**

A control system of the lateral and the longitudinal movement for an aircraft AIR-BUS A300 type, has been conceived to satisfy a stable flight qualities. This objective is finished while applying tow controllers classes's, classical linear and adaptive non-linear like GMV, GPC and LQG for a MIMO system, in different cases of disturbances, internals as an reduction of the aircraft mass or a variation of flight velocity, and externals, as an atmospheric disturbances 'Gust' or a bad positioning of controls surfaces.

Keywords: Adaptive control, flight control, Aeronautic.

## SOMMAIRE

Notre travail consiste à faire la synthèse et étudier la robustesse de deux classes de commandes de vol d'un avion de transport, vis à vis des différentes perturbations. On commencera par présenter le model de l'avion de façon détaillée, en décrivant par la suite son mouvement sous forme de système d'équations d'états.

La seconde partie, sera consacrée à l'étude de la synthèse et la robustesse de quelques commandes linéaires multivariables, lorsqu'elles sont appliquées à notre système. Telles que:

- la commande par retour d'état
- La commande par retour d'état avec action intégrale.

La synthèse et l'analyse des commandes adaptatives multivariables auto-ajustable, feront l'objet de la troisième partie de notre travail, telles que :

- la GMV (la commande à minimum variance généralisée)
- la GPC ( la commande prédictive généralisée )
- la LQG ( la commande linéaire quadratique gaussienne )

Ces commandes seront étudiées et testées, en vue d'obtenir des résultats qui prouveront leur fiabilité et robustesse, lorsqu'elles sont appliquées à notre système physique (avion) . Un intérêt particulier, sera accordé à l'effet des perturbations sur les performances de vol. Ces perturbations peuvent en effet, provenir des sources externes ou internes au système.

A la fin, nous conclurons par une comparaison sur l'avantage et l'inconvénient de chaque commande ; Ceci du point de vue stabilité, erreur en régime permanent et le taux d'énergie nécessaire fournie.

---

# **INTRODUCTION**

## INTRODUCTION

L'histoire de l'automatique théorique peut être partagée en trois périodes. La première période, se situe avant la première guerre mondiale, et était marquée par la résolution de problèmes de régulation en particulier ou de contrôle au moyen du calcul différentiel. Puis, au cours de la seconde guerre mondiale, se réalise une première unification de la théorie harmonique des systèmes asservis linéaires, avec le développement des systèmes de commandes. La troisième période s'est caractérisée par le développement de la théorie des variables d'état. Cette théorie fournit une description très générale des systèmes multidimensionnels, et c'est pour la première fois, que la description des propriétés dynamiques des systèmes de commande dans l'espace d'état, a permis d'établir une théorie générale de la commande qui englobe dans une même représentation, toutes les formes de systèmes multidimensionnels d'ordre quelconque.

Un peu plus tard, les commandes adaptatives sont venues palier aux carences des commandes linéaires faces aux systèmes physiques non-linéaires et variants dans le temps, pour lesquels la commande linéaire pourrait aboutir à des résultats imprévisibles. En effet, il est montré pratiquement, que la commande adaptative est très robuste et fiable lorsqu'il s'agit de commander un système sujet à des contraintes sévères et à des perturbations de types externes et internes qui tendent à le déstabiliser.

Les commandes adaptatives auto-ajustables, forment une classe importante de commandes basées sur l'étude d'un système linéaire qui n'est autre que le modèle de représentation du procédé, apportent à plusieurs points de vue des solutions très robustes au problème de la commande. Leur schéma a été originalement proposé par Kalman en 1958. Les premières applications de ces techniques remontent au début des années 70. Ce sont des techniques de commandes discrètes, utilisant l'approche de la fonction de transfert; les paramètres de ces fonctions de transfert sont estimés par des méthodes d'identifications connues, et sont utilisés lors des étapes de synthèse de la commande explicite ou implicite.

Bien que ces commandes étaient initialement destinées aux systèmes mono variables, furent étendues au début des années 80 aux commandes multivariables. Nous allons maintenant tenter de montrer que ces commandes sont capables de fournir d'excellents résultats lorsqu'elles sont appliquées sur des systèmes complexes tel qu'un avion de transport. [1]

## A. POSITION DU PROBLEME:

L'avion constitue l'un des moyens de transport les plus performants en matière de rapidité et confort, et qu'il est typiquement un système semi-automatique, de telle sorte que l'homme et des automatismes se partagent la tâche du pilotage. L'exploitant souhaite tenir ses horaires avec une dépense globale minimale, les aléas du trafic et de météorologie ont conduit les aviateurs à automatiser certaines phases de vol. Il est montré qu'actuellement un vol est en fait, une succession de phases automatiques enclenchées par le pilote. Déjà sur certains avions modernes l'enclenchement des phases peut être fait automatiquement par un calculateur de bord. Des systèmes de transmissions automatiques de données entre les contrôleurs sol et l'avion vont être prochainement mis en service ( radar mode-s, satellite de communication). Dès lors, il est possible qu'aux environs de l'an 2010 l'avion soit entièrement piloté automatiquement par un système mixte sol-bord depuis le lâché des freins jusqu'à la phase de freinage après le touché des roues. Mais il y aura toujours un commandant de bord ! ... A ce propos, nous allons donner un bref aperçu sur quelques travaux rencontrés lors de la recherche bibliographique avant d'entamer les différentes parties de ce mémoire. [2]

## B. TRAVAUX EFFECTUES DANS LE CONTROLE DE VOL:

Depuis des dizaines d'années, et jusqu'à nos jours, plusieurs travaux ont été publiés quotidiennement, dans le domaine du contrôle de vol. Pour cela, nous allons évoquer quelques travaux entrepris dans ce vaste et immense domaine. Ceci dit, il ne faut en aucun cas, diminuer de l'intérêt des autres travaux non cités.

K. So Bel, H. Kaufman & L. Mabiou (1982) [3] ont développé deux algorithmes de contrôle adaptatif à base de modèle de référence des systèmes multivariables. Ces deux algorithmes ne demandent pas des conditions parfaites du modèle de poursuite ou de l'identification explicite des paramètres. Le premier algorithme assure la stabilité asymptotique de l'erreur de la sortie à condition que la matrice de transfert soit strictement positive. Le deuxième algorithme garanti une erreur bornée sous conditions moins restreintes. Ces deux algorithmes ont été appliqués à l'axe latéral d'un avion de type F-8.

A.L. Gonzalez Blazquez (1990) [8]: Un modèle est présenté pour l'analyse du mouvement non linéaire de l'avion pour de grands angles d'attaque et de dérapage. La partie la plus difficile de la formulation mathématique et du principe de l'obtention du mouvement hautement non linéaire, est le comportement aérodynamique de l'avion. Pour comprendre ceci, le phénomène



de base de l'avion delta est examiné, en dérivant les aspects principaux qui affectent la dynamique du mouvement. Les données aérodynamiques sont obtenues à partir d'un test en soufflerie. Ils ont été analysés pour obtenir la modélisation de la force et du moment. Une formulation générale des équations dynamiques valide pour les grands angles d'attaque et de dérapage est présentée. Le modèle mathématique peut être utilisé pour une analyse dynamique globale ou une identification des paramètres du système.

W.L.Garrard, D.F.Enns & S.A.Snell (1992) [9] : Cette publication décrit l'application du régulateur quadratique non-linéaire (NLQR), pour la conception des lois de contrôle pour un avion typique de grandes performances. Ceci est réalisé, en utilisant la théorie du contrôle optimal de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. La performance du contrôleur NLQR est comparée avec celle d'un contrôleur du gain scheduled P+I, conçue par une application des techniques standard de la réponse fréquentielle aux équations du mouvement de l'avion linéarisées à différents angles d'attaque. Les résultats des deux techniques dans la loi de contrôle ont des structures très similaires les uns aux autres, et conduisent à des performances semblables.

L.A.Pineiro & D.J.Biezad (1993) [7]: Utilisent les lois de contrôle de poursuite d'un modèle, qui donnent des résultats de simulation de vol satisfaisants. Ces lois se basent sur la connaissance exacte des dérivées de la stabilité d'un avion très rapide. Les résultats de simulations se dégradent, lorsque l'on s'éloigne des valeurs imposées par la stabilité. La méthode du "gain scheduling" a été employée pour compenser les variations des paramètres du système physique, mais cette forme de compensation en boucle ouverte requiert généralement un grand test de vol pour un réglage précis. Une loi de contrôle adaptative d'échantillonnage rapide est décrite, pour compenser la variation des paramètres de l'avion. La réponse à l'échelon requise pour l'implémentation, est identifiée récursivement en utilisant une technique qui n'a pas besoin, d'un signal de 'test' spécial et qui remet automatiquement les anciennes données dépendantes de l'excitation de l'entrée détectée. La fidélité de la poursuite est maintenue en dépit de la variation brusque ou lente des paramètres, ainsi la position des actionneurs et de la limitation du taux de commande sont discutées. La performance des résultats du système est excellente et montre l'avantage des commandes adaptatives pour la simulation de vol.

A.M.Wahdan & A.Y.Tawfik (1994) [4], ont appliqué un algorithme de contrôle adaptatif à base de modèle de référence variable sur un système réel, le schéma proposé introduit le

concept de la remise à l'état initial périodique du mécanisme adaptatif (PRAM). L'algorithme développé est appliqué pour résoudre le contrôle d'un avion de combat à grande vitesse. Les résultats de simulation prouvent que la technique proposée est capable d'alléger le problème de la stabilité des algorithmes (MRAC) standards en présence de dynamiques non-modélisées et de perturbations sinusoïdales.

L.R.Pujura & M.Shabbarhussien (1994) [6]: Un système de contrôle longitudinal préliminaire pour l'avion YF-16 CCV a été conçu pour satisfaire les qualités de vol. Cet objectif est achevé en appliquant la technique des égalités fréquentielles multivariées des systèmes de contrôle développée récemment par l'auteur. Cette technique est l'esprit de la stratégie de 'poursuite du model' portée en dehors du domaine fréquentiel.

J.E.Groszkiewicz & M. Bodson (1995) [5], ont résolu le problème de contrôle de vol par les algorithmes de commandes adaptatives à modèle de référence en utilisant la méthode des moindres carrés comme méthode d'identification. Les résultats montrent la capacité de ces algorithmes de maintenir le niveau de vol après un échec, qui restaure du trac des commandes de vol, en dépit de la perte d'efficacité des actionneurs, et coordonne l'usage des surfaces de contrôle pour garantir le découplage entre les axes de rotation. L'application de l'algorithme de l'identification par (RLS) récemment proposé, ainsi que ces avantages sont aussi démontrés.

S.G.Breslin & M.J.Grimbel [10]: le contrôle d'un décollage court d'avion avancé. Le problème est particulièrement difficile à basses vitesses dans la transition à vol du jet-porté à aile-porté. Dans ces conditions de vol, l'avion est instable dans l'axe longitudinal et il y a un faible découplage entre les commandes du pilote et la réponse de l'avion. Cela conduit à de faibles qualités de manipulation et un très grand travail de la part du pilote. La théorie du contrôle multivariable fournit une structure idéale pour résoudre ce problème. Le problème considéré est la conception d'un vol robuste à base d'un système de contrôle électronique adapté pour un tel avion, utilisant la théorie du contrôle  $H_{\infty}$ . Une grande partie de ce travail est consacrée à la conception de cette approche, suivie par les résultats trouvés.

B.A.White & A.R.Daniels [11] : ont étudié la conception d'un système de contrôle à structure variable pour l'autopilote du roulis d'un véhicule aérien. La structure VSCS est comparée avec un système de contrôle à gain fixe désigné, pour achever la même performance dynamique à la vitesse de croisière nominale. La structure VSCS montre sa capacité à réduire

la sensibilité de la variation des paramètres quand le véhicule balaye toute la gamme de sa vitesse, et réduit l'erreur de l'attitude du roulis en régime permanent

### **C. RESUME DE NOTRE TRAVAIL.**

Cependant, notre travail consiste à concevoir un système de contrôle pour satisfaire les qualités d'un vol stable. Cet objectif est achevé, en appliquant à notre système physique deux types de classes de commandes ( linéaire et non-linéaire). A cet effet, le premier chapitre de ce mémoire traitera le modèle mathématique représentant notre système d'avion sous forme d'équation d'état. Cette représentation étant nécessaire aux phases de simulations du comportement du système, face aux commandes linéaires multivariables, qui feront l'objet du deuxième chapitre. L'identification est discutée le long du troisième chapitre avec une intention particulière à l'algorithme des moindres carrés récursives. Les commandes auto-ajustables du type implicite, tel que la commande à minimum variance généralisée(GMV) et la commande prédictive généralisée (GPC), feront l'objet du quatrième chapitre. Enfin, les commandes auto-ajustables du type explicite, tel que la commande LQG (linear quadratic gaussien) sera traitée dans le cinquième chapitre. Une application de chacune de ces commandes est faite sur un avion du type AIR-BUS A300, en analysant et en testant son comportement et ses performances dans un environnement déterministique et stochastique. En soumettant notre système, à des perturbations externes sévères (turbulence atmosphérique) ou constantes, et des perturbations internes sur la vitesse du vol et la masse de l'avion afin de tester la robustesse et les performances de la commande.

A la fin, une étude comparative et une conclusion générale discuteront les avantages ainsi que les inconvénients des deux classes de commandes, lorsqu'elles sont appliquées à un système d'avion, en citant à la fin quelques situations futures désirées en aéronautique, concernant le contrôle de vol, en particulier d'un avion quelconque, comme perspective.

## NOMENCLATURE

$a$	$[ms^{-1}]$	Vitesse du son
$a_{x,k}$	$[g]$	Accélération cinématique suivant $X_B$
$a_{y,k}$	$[g]$	Accélération cinématique suivant $Y_B$
$a_{z,k}$	$[g]$	Accélération cinématique suivant $Z_B$
$A_x$	$[g]$	Force spécifique au c.g suivant $X_B$
$A_y$	$[g]$	Force spécifique au c.g suivant $Y_B$
$A_z$	$[g]$	Force spécifique au c.g suivant $Z_B$
$b$	$[m]$	Envergure
$\bar{c}$	$[m]$	Corde moyenne
$C_l$	$[-]$	Coefficient de moment autour de $X_B$
$C_m$	$[-]$	Coefficient de moment autour de $Y_B$
$C_n$	$[-]$	Coefficient de moment autour de $Z_B$
$C_X$	$[-]$	Coefficient de force suivant $X_B$
$C_Y$	$[-]$	Coefficient de force suivant $Y_B$
$C_Z$	$[-]$	Coefficient de force suivant $Z_B$
$\bar{D}$	$[N]$	Traînée
$F_x$	$[N]$	Force totale suivant $X_B$
$F_y$	$[N]$	Force totale suivant $Y_B$
$F_z$	$[N]$	Force totale suivant $Z_B$
$g$	$[ms^{-2}]$	Force de gravité
$h$	$[m]$	Altitude pression
$H$	$[m]$	Altitude
$I_i$	$[kgm^2]$	Paramètres d'inertie
$I_x$	$[kgm^2]$	Moment d'inertie suivant $X_B$
$I_y$	$[kgm^2]$	Moment d'inertie suivant $Y_B$
$I_z$	$[kgm^2]$	Moment d'inertie suivant $Z_B$
$J_{xy}$	$[kgm^2]$	Produit d'inertie dans le plan $X_B Y_B$
$J_{xz}$	$[kgm^2]$	Produit d'inertie dans le plan $X_B Z_B$
$J_{yz}$	$[kgm^2]$	Produit d'inertie dans le plan $Y_B Z_B$
$L$	$[Nm]$	Moment de roulis total.
$\bar{L}$	$[N]$	Portance aérodynamique totale.
$m$	$[kg]$	Masse totale de l'avion.
$\chi$	$[-]$	Nombre de Mach.
$M$	$[Nm]$	Moment de tangage total.
$M_a$	$[kgkmol^{-1}]$	Masse moléculaire de l'air.
$M_0$	$[kgkmol^{-1}]$	Masse moléculaire de l'air au niveau de la mer.

$N$ [Nm]	Moment de lacet total.
$p$ [rads <sup>-1</sup> ]	Vitesse angulaire de lacet.
$q$ [rads <sup>-1</sup> ]	Vitesse angulaire de tangage.
$r$ [rads <sup>-1</sup> ]	Vitesse de roulis.
$R$ [JK <sup>-1</sup> kg <sup>-1</sup> ]	Constante spécifique de l'air.
$S$ [m <sup>2</sup> ]	Surface de référence (surface des ailes).
$T$ [K]	Température ambiante.
$T_t$ [K]	Température totale.
$u$ [ms <sup>-1</sup> ]	Composante de vitesse suivant l'axe $X_B$ .
$v$ [ms <sup>-1</sup> ]	Composante de vitesse suivant l'axe $Y_B$ .
$V$ [ms <sup>-1</sup> ]	Vitesse vraie.
$W$ [N]	Poids de l'avion.
$X_a$ [N]	Force aérodynamique suivant l'axe $X_B$ .
$X_p$ [N]	Force propulsive suivant l'axe $X_B$ .
$Y_a$ [N]	Force aérodynamique suivant l'axe $Y_B$ .
$Y_p$ [N]	Force propulsive suivant l'axe $Y_B$ .
$Z_a$ [N]	Force aérodynamique suivant l'axe $Z_B$ .
$Z_p$ [N]	Force propulsive suivant l'axe $Z_B$ .
$\alpha$ [rad]	Angle d'incidence.
$\beta$ [rad]	Angle de dérapage.
$\gamma$ [rad]	La pente.
$\delta_a$ [rad]	Déflexion de la gouverne de gauchissement.
$\delta_e$ [rad]	Déflexion de la gouverne de profondeur.
$\delta_f$ [rad]	Déflexion des volets.
$\delta_r$ [rad]	Déflexion de la gouverne de direction.
$\theta$ [rad]	L'assiette (angle de tangage)
$\lambda$ [Km <sup>-1</sup> ]	Gradient de température.
$\mu$ [kgm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	Viscosité dynamique.
$\rho$ [kgm <sup>-3</sup> ]	Densité de l'air.
$\varphi$ [rad]	Angle de roulis.
$\psi$ [rad]	Angle de lacet (cap)
$\omega$ [rads <sup>-1</sup> ]	Fréquence angulaire.
$\omega_n$ [rads <sup>-1</sup> ]	Fréquence propre.
$\Omega$ [rads <sup>-1</sup> ]	Fréquence spatiale.
$A$	Matrice d'état du système linéaire.
$B$	Matrice d'action des commandes du système linéaire.
$C$	Matrice d'état de sortie du système linéaire.
$D$	Matrice de commande de sortie du système linéaire.

# **CHAPITRE I**

---

# **LA MODELISATION**

---

## LA MODELISATION

### I.1 INTRODUCTION

Le 17 décembre 1903, fut la date du 1<sup>er</sup> vol réussi des frères WRIGHT. Quatre ans plutôt, l'essai de vol qu'ils ont effectué s'est terminé par un accident «crash», qui a sévèrement endommagé leur appareil. Cet accident a eu lieu suite à un coup de rafale qui a complètement déstabilisé l'avion. C'est cette catastrophe qui a incité les frères WRIGHT à étudier et à analyser le comportement d'un avion en présence de perturbations en vue d'assurer une stabilité minimale.

En effet, il leur a fallu quatre années de durs travaux et de recherche pour tester leur modèle en soufflerie et aboutir à des résultats satisfaisants ; Ce fut le succès du 17. 12. 1903. Depuis lors, apparaissait l'importance des études de stabilité et de contrôle dans le domaine aéronautique. De ce fait, la conception aura pour critère essentiel de donner à l'aéronef une tendance inhérente qui lui permettra de s'opposer ou de diminuer les déviations de mouvements dues à des perturbations. Cette qualité inhérente à résister à ces déviations dans le vol désiré peut être obtenue par sélection d'une configuration à travers des analyses de stabilité.

La marche adoptée pour l'analyse d'un tel problème consiste en premier lieu à la formulation mathématique d'un avion en vol, avec les efforts aérodynamiques estimés selon les conditions de vol et les caractéristiques géométriques de la configuration volante. Ce modèle sera représenté par un système mathématique complexe non-linéaire. Jusqu'aux années 1970, la seule théorie utilisée pour résoudre le problème est celle basée sur l'hypothèse des petites perturbations ; Par conséquent la formulation du problème se réduit à des équations linéaires dont les coefficients constituant le système dépendent des coefficients aérodynamiques et leurs dérivées et les conditions de vol. [12,13,14,15]

### I.2 LE MODELE MATHEMATIQUE DE VOL D'UN AVION RIGIDE

#### I.2.1 TRIEDRES DE REFERENCE :

##### I.2.1.1 DEFINITIONS :

Trois trièdres de références sont utilisés pour déterminer le mouvement le plus général de l'avion.

A – Un trièdre lié à la terre (supposée plate et immobile) :  $O'X'Y'Z'$

- L'origine  $O'$  est fixe par rapport à la terre.
- $O'Z'$  est orienté suivant la verticale descendante
- $O'X'$  et  $O'Y'$  sont deux directions rectangulaires arbitrairement choisies dans le plan horizontal

Ce trièdre est appelé trièdre normal terrestre.

b- Un trièdre lié à l'avion supposé indéformable  $OXYZ$ .

- L'origine  $O$  de ce trièdre est un point fixe de l'avion souvent supposé être le centre de gravité.
- Les axes  $OX$  et  $OZ$  sont deux directions rectangulaires arbitrairement choisies dans le plan de symétrie de l'avion, en notant que l'axe  $Ox$  est en voisinage de l'axe de fuselage et orienté de l'arrière à l'avant de l'avion avec  $OZ$  normal à  $OX$ .
- L'axe  $OY$  complète le trièdre, il est donc orienté positivement vers la droite du pilote.

c- Un trièdre lié à la vitesse, dit trièdre aérodynamique  $O X_a Y_a Z_a$

- L'origine est un point fixe de l'avion généralement le même que l'origine du trièdre avion.
- L'axe  $O X_a$  est porté par la vitesse et orienté positivement dans le sens de la vitesse.
- L'axe  $O Z_a$  est perpendiculaire à  $O X_a$ , situé dans le plan de symétrie
- L'axe  $O Y_a$  complète le trièdre.

### I.2.1.2 POSITION RELATIVE DES DIVERS TRIEDRES :

#### a. position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre avion :

Il faut en général trois angles pour définir la position d'un trièdre par rapport à un autre. Dans ce cas deux angles suffisent puisque  $O Z_a$  est situé dans le plan de symétrie

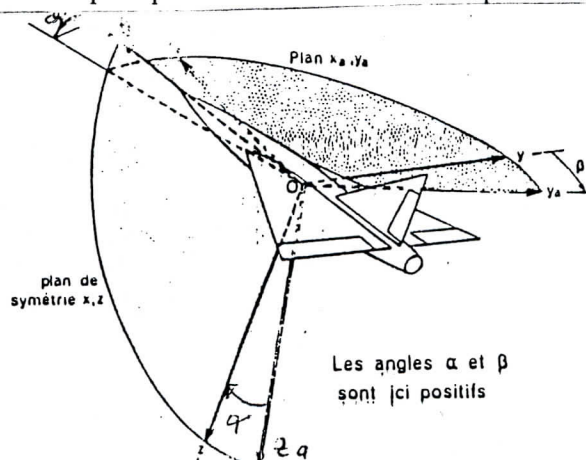


figure 1.1(position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre d'avion )



Matrice de passage du trièdre aérodynamique au trièdre avion :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix}$$

b. position du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre :

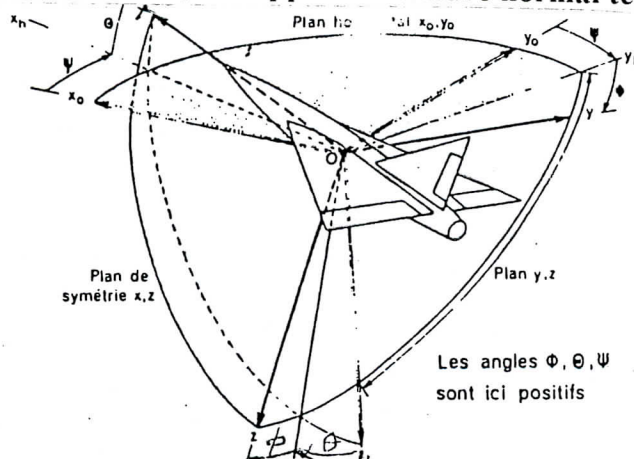


figure 1.2 (position du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre)

Matrice de passage du trièdre normal terrestre au trièdre avion :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [R] * \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$$

avec

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \Psi \cos \theta & \sin \Psi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \Psi \cos \Phi + \cos \Psi \sin \theta \sin \Phi & \cos \Psi \cos \Phi + \sin \Psi \sin \theta \sin \Phi & \cos \theta \sin \Phi \\ \sin \Psi \sin \Phi + \cos \Psi \sin \theta \cos \Phi & -\cos \Psi \sin \Phi + \sin \Psi \sin \theta \cos \Phi & \cos \theta \cos \Phi \end{bmatrix}$$

c) position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre normal terrestre :

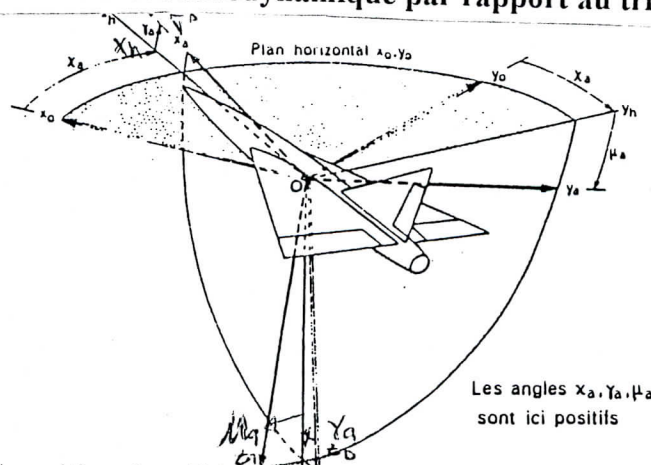


figure 1.2 (position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre normal terrestre)

Matrice de passage du trièdre normal terrestre au trièdre aérodynamique :

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = [R']^* \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$$

avec

$$[R'] = \begin{bmatrix} \cos \chi_a \cos \gamma_a & \sin \chi_a \cos \gamma_a & -\sin \gamma_a \\ -\sin \chi_a \cos \gamma_a + \cos \chi_a \sin \gamma_a \sin \mu_a & \cos \chi_a \cos \mu_a + \sin \chi_a \sin \gamma_a \sin \mu_a & \cos \gamma_a \sin \mu_a \\ \sin \chi_a \sin \gamma_a + \cos \chi_a \sin \gamma_a \cos \mu_a & -\cos \chi_a \sin \mu_a + \sin \chi_a \sin \gamma_a \cos \mu_a & \cos \gamma_a \cos \mu_a \end{bmatrix}$$

### I.2.2 EQUATION DU MOUVEMENT RELATIVE A UN SYSTEME D'AXE LIE A L'AVION (OXYZ) :

Nous allons définir les différentes grandeurs utilisées dans la dérivation des équations du mouvement, en les représentant dans le tableau suivant :

Axes	X	Y	Z
Vitesse linéaire le long de l'axe	U	V	Z
Vitesse angulaire autour de l'axe	P "roulis"	q "tangage"	r "lacet"
Somme des moments autour de l'axes	$\Sigma L$	$\Sigma M$	$\Sigma N$
Rotation autour de l'axe	$\Phi$	$\Theta$	$\Psi$
Somme des forces suivant l'axes	$\Sigma F_x$	$\Sigma F_y$	$\Sigma F_z$
Moment cinétique suivant l'axe	$H_x$	$h_y$	$h_z$
Moment d'inertie	$I_{xx}$	$I_{yy}$	$I_{zz}$

Tableau ( 1. 1) Direction des axes liés à l'avion et la nomenclature utilisée pour l'application de la loi de Newton

### I.2.2.1 EQUATION CINEMATIQUE :

La vitesse d'un point situé dans un repère mobile par rapport à un repère fixe est donnée par la relation suivante.

$$(1.1) \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \Omega \wedge \overrightarrow{PM}$$

Sachant que la position relative du trièdre avion par rapport au repère fixe terrestre est définie par les trois angles de rotation  $\Phi$ ,  $\Theta$  et  $\Psi$  autour de OX OY et OZ respectivement.

Par conséquent :

$$(1.2) \quad \vec{\Omega} = p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k}$$

$$(1.3) \quad \vec{\Omega} = \vec{\dot{\Phi}} + \vec{\dot{\Theta}} + \vec{\dot{\Psi}}$$

avec

$$(1.4) \quad \vec{\dot{\Psi}} = \dot{\Psi} \vec{k}_1 = \dot{\Psi} \vec{k}_2$$

$$(1.5) \quad \vec{\dot{\Theta}} = \dot{\Theta} \vec{j}_2 = \dot{\Theta} \vec{j}_3$$

$$(1.6) \quad \vec{\dot{\Phi}} = \dot{\Phi} \vec{i}_3 = \dot{\Phi} \vec{i}$$

on obtient donc

$$(1.7) \quad \vec{\Omega} = \dot{\Phi} \vec{i} + \dot{\Theta} \vec{j}_3 + \dot{\Psi} \vec{k}_2$$

avec

$$(1.8) \quad \vec{k}_2 = -\vec{i}_3 \sin \Theta + \vec{k}_3 \cos \Theta$$

d'où

$$(1.9) \quad \vec{k}_2 = -\vec{i} \sin \Theta + \cos \Theta (\vec{j} \sin \Phi + \vec{k} \cos \Phi)$$

(voire annexe I)

de même on trouve

$$(1.10) \quad \vec{j}_3 = \vec{j} \cos \Phi - \vec{k} \sin \Phi$$

en substituant ces équations dans l'équation de  $\vec{\Omega}$ , on aura:

$$(1.11) \quad \vec{\Omega} = [-\vec{i} \sin \Theta + \cos(\vec{j} \sin \Theta + \vec{k} \cos \Phi)] \dot{\Psi} + (\vec{j} \cos \Phi - \vec{k} \sin \Phi) \dot{\Theta} + \vec{i} \dot{\Phi}$$

$$(1.12) \quad = (-\dot{\Psi} \sin \Theta + \dot{\Phi}) \vec{i} + (\dot{\Psi} \cos \Theta \sin \Phi + \dot{\Theta} \cos \Phi) \vec{j} + (\dot{\Psi} \cos \Theta \cos \Phi - \dot{\Theta} \sin \Phi) \vec{k}$$

sachant que:

$$\vec{\Omega} = p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k}$$

par identification on aura:

$$\begin{aligned}
 p &= \dot{\Phi} + \dot{\Psi} \sin \Theta \\
 (1.13) \quad q &= \dot{\Theta} \cos \Phi + \dot{\Psi} \cos \Theta \sin \Phi \\
 r &= \dot{\Psi} \cos \Theta \cos \Phi + \dot{\Theta} \sin \Phi
 \end{aligned}$$

où l'on peut écrire sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}$$

d'où inversement:

$$(1.14) \quad \dot{\Psi} = \frac{q \sin \phi + r \cos \phi}{\cos \theta}$$

$$(1.15) \quad \dot{\Theta} = q \cos \phi - r \sin \phi$$

$$(1.16) \quad \dot{\Phi} = p + \tan \theta (q \sin \phi + r \cos \phi)$$

### 1.2.2.2 EQUATION DYNAMIQUE

Nous allons imposer les trois premières hypothèses spécifiant la nature du corps à étudier et le milieu où il est placé

- **Hypothese1:**

L'avion est assimilé à un corps rigide; ainsi, la distance entre deux points quelconques de ce corps est invariante

- **Hypothese2 :**

La terre est supposée fixe dans l'espace, et l'atmosphère terrestre est supposée fixée à la terre.

- **Hypothese3 :**

La masse de l'avion est supposée constante durant notre étude

La seconde loi de Newton montre que la variation de quantité de mouvement d'un corps est proportionnelle à la résultante des forces auxquelles il est soumis, et la variation du moment cinétique de ce corps est proportionnelle au moment résultant appliqué.

les équations générales du mouvement s'écrivent:

$$\left\{ m \frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma F_e \right.$$

$$\left. \frac{d\vec{h}}{dt} = \Sigma M_e \right.$$

Où  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  représente l'accélération du centre de gravité de l'avion par rapport à un système de référence galiléen.  $\vec{h}$  représente le moment cinétique de l'avion autour du centre de gravité,  $\Sigma F_e$  la résultante des forces extérieures agissant sur l'avion ( force de pesanteur, forces aérodynamiques, force de propulsion ),  $\Sigma M_e$  le moment résultant des différentes forces agissant sur l'avion ( moment des forces aérodynamiques et moments des forces de propulsion).

#### Calcul de l'accélération et de la dérivée du moment cinétique :

La matrice de transformation T permet d'écrire immédiatement u, v, w de la vitesse V dans le trièdre avion sachant que les composantes de la vitesse sont (V, 0, 0) dans le trièdre aérodynamique par définition

$$u = V \cos\beta \cos\alpha$$

$$(1.17) \quad v = V \sin\beta$$

$$w = V \cos\beta \sin\alpha$$

Soit encore

$$\Sigma F_x = \frac{d}{dt} (mu) \qquad \Sigma L = dh_x/dt$$

$$(1.18) \quad \Sigma F_y = \frac{d}{dt} (mv) \qquad \text{et} \qquad \Sigma M = dh_y/dt$$

$$\Sigma F_z = \frac{d}{dt} (mw) \qquad \Sigma N = dh_z/dt$$

les moments cinétiques représentés dans l'équation (1.18) peuvent être développer en utilisant un élément de masse dm qui tourne avec une vitesse angulaire  $\Omega$

$$\text{tel que} \quad \vec{\Omega} = p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k}$$

le moment de quantité de mouvement élémentaire de l'élément dm est donné par

$$(1.19) \quad d\vec{h} = \vec{R} \wedge dm \vec{v}$$

la vitesse de cet élément est donnée par

$$(1.20) \quad \vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\Omega} \wedge \vec{R}$$

Où  $\vec{R}$  est le rayon vecteur issu du centre de gravité de l'avion pour situer la position de cet élément de masse  $dm$  et  $v_c$  est la vitesse du centre de gravité de l'avion.

par suite on a:

$$(1.21) \quad d\vec{h} = \vec{R} \wedge dm \vec{v}_c + \vec{R} \wedge dm (\vec{\Omega} \wedge \vec{R})$$

Donc le moment cinétique résultant de tout l'avion est obtenu en intégrant l'équation (1.21) sur toute la masse de l'avion.

$$(1.22) \quad \vec{h} = \int_m \vec{R} \wedge dm \vec{v}_c + \int_m \vec{R} \wedge dm (\vec{\Omega} \wedge \vec{R})$$

Du fait que la vitesse du centre de gravité est indépendante du signe somme, le premier terme de l'équation (1.22) s'écrit

$$(1.23) \quad \int_m \vec{R} \wedge dm \vec{v}_c = \left( \int_m dm \vec{R} \right) \wedge \vec{v}_c$$

puisque c est le centre de gravité de l'avion on obtient:

$$\int_m dm \vec{R} = \vec{0}$$

Ainsi l'équation (D.22) devient :

$$(1.24) \quad \vec{h} = \int_m [\vec{R} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{R})] dm = \int_m [\Omega R^2 - \vec{R}(\vec{R} \wedge \vec{\Omega})] dm$$

la composante suivant l'axe x est donnée par:

$$(1.25) \quad x = h_i = \int [p(x^2 + y^2 + z^2) - x(px + qy + rz)] dm \\ = \int [p(y^2 + z^2)] dm C - \int [qxy] dm C - \int [rxz] dm$$

P, q et r étant indépendant de la masse d'où l'on peut écrire:

$$(1.26) \quad x = p \int [y^2 + z^2] dm - q \int [xy] dm - r \int [xz] dm$$

de la même manière on obtient y et  $H_z$  :

$$(1.27) \quad h_y = q \int [x^2 + z^2] dm - p \int [xy] dm - r \int [yz] dm$$

$$(1.28) \quad h_z = r \int [y^2 + z^2] dm - p \int [xz] dm - q \int [yz] dm$$

par ailleurs si A, B, C sont les moments d'inertie ( $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$ ) et D, E, F les produits d'inertie de l'avion  $I_{yz}$ ,  $I_{xz}$ ,  $I_{xy}$  respectivement par rapport aux axes avion OXYZ, le moment cinétique h est donné (à partir des équations (1.26), (1.27) et (1.28)) par :

$$\text{sur :} \quad \text{OX} \quad \text{Ap} - \text{Fq} - \text{Er}$$

$$(1.29) \quad \begin{array}{l} \text{OY} \\ \text{OZ} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Bq} - \text{Dr} - \text{Fp} \\ \text{Cr} - \text{Dq} - \text{Ep} \end{array}$$

En tenant compte du fait que le système d'axes qu'on a choisi est lié à l'avion et compte tenu des hypothèses précédentes les équations du mouvement s'écrivent:

$$(1.30) \quad \begin{array}{l} \Sigma F_x = m \frac{du}{dt} \\ \Sigma F_y = m \frac{dv}{dt} \\ \Sigma F_z = m \frac{dw}{dt} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \Sigma L = dh_x / dt = A \dot{p} - F \dot{q} - E \dot{r} \\ \Sigma M = dh_y / dt = B \dot{q} - D \dot{r} - F \dot{p} \\ \Sigma N = dh_z / dt = C \dot{r} - D \dot{q} - E \dot{p} \end{array}$$

Du fait que le système d'axes, adopté pour déterminer les équations du mouvement est fixé à l'avion et est en mouvement avec lui-même, la position et l'orientation de l'avion ne peuvent être décrites par ce système d'axes. Ainsi on est amené à introduire un système d'axes fixes.

### 1.2.3 DEVELOPPEMENT DES EQUATIONS DU MOUVEMENT SUIVANT UN SYSTEME D'AXE FIXE

L'accélération mesurée dans un système d'axe fixe est donnée par :

$$(1.31) \quad \vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_{x'y'z'} = \frac{d}{dt} \vec{V}_c \Big|_{xyz} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}$$

$$\text{ou:} \quad \vec{\Omega} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

Si  $u, v, w$  sont les composantes de  $\vec{V}_c$  et  $p, q, r$  celles de  $\vec{\Omega}$ , on aura :

$$(1.32) \quad \begin{array}{l} a_{x'} = \dot{u} + qw - rv \\ a_{y'} = \dot{v} + ru - pw \\ a_{z'} = \dot{w} + pv - qu \end{array}$$

D'une manière similaire la variation du moment cinétique en fonction du temps s'écrit :

$$(1.33) \quad \frac{dh}{dt} \Big|_{x'y'z'} = \frac{dh}{dt} \Big|_{xyz} + \vec{\Omega} \wedge \vec{h}$$

$$\text{où:} \quad \vec{\Omega} \wedge \vec{h} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}$$

$\vec{h}$  et  $\frac{d\vec{h}}{dt}$  étant déjà calculée dans le repère lié à l'avion

Ainsi:

$$\Sigma L = x/\text{et} = A \dot{p} - F \dot{q} - E \dot{r} + (C - B) q r + p (F r - E q) + D (r^2 - q^2)$$

$$(1.34) \quad \Sigma M = dh_y/dt = B \dot{q} - D \dot{r} - F \dot{p} + (A - C) r p + q (D p - F r) + E (p^2 - r^2)$$

$$\Sigma N = dh_z/dt = C \dot{r} - D \dot{q} - E \dot{p} + (B - A) p q + r (E q - D p) + F (q^2 - p^2)$$

En écrivant que les dérivées des coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $H$  (où  $H = -z_g$ ) du centre de gravité sont égales à  $u_g$ ,  $v_g$ , et  $-w_g$  où  $u_g$ ,  $v_g$  et  $w_g$  sont les coordonnées du vecteur vitesse sur le trièdre terrestre (en utilisant la matrice de passage R) il vient :

$$(1.35) \quad \dot{x} = u_g = u \cos \Psi \cos \Theta + v(-\sin \Psi \cos \Phi + \cos \Psi \sin \Theta \sin \Phi) \\ + w(\sin \Psi \sin \Phi + \cos \Psi \sin \Theta \cos \Phi)$$

$$(1.36) \quad \dot{y} = v_g = u \sin \Psi \cos \Theta + v(\cos \Psi \cos \Phi + \sin \Psi \sin \Theta \sin \Phi) \\ + w(-\cos \Psi \sin \Phi + \sin \Psi \sin \Theta \cos \Phi)$$

$$(1.37) \quad \dot{H} = -w_g = u \sin \Theta - v \cos \Theta \sin \Phi - w \cos \Theta \cos \Phi$$

#### 1.2.4 ETUDE DES FORCES ET DES MOMENTS EXTERIEURS

Nous venons de voir l'expression des premiers membres de l'équation NEWTON

Etudions maintenant les seconds membres. (forces et moments extérieurs)

##### A / la force de pesanteur $mg$ :

Elle est portée par l'axe  $O'Z'$ . D'après R les composantes du poids  $mg$  dans le repère avion

OXYZ sont :

$$OX \quad - mg \sin \theta$$

$$OY \quad mg \sin \theta \cos \phi$$

$$OZ \quad mg \cos \theta \sin \phi$$

##### B/ la force aérodynamique:

a pour composantes par définitions des coefficients  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$

$$OX \quad \frac{1}{2} \rho S V C_x$$

$$OY \quad \frac{1}{2} \rho S V C_y$$

$$OZ \quad \frac{1}{2} \rho S V C_z$$



**C/ les forces de propulsions:**

Ont pour composantes  $F_x, 0, F_z$  ( nous supposons que les forces de propulsion n'ont pas de composante perpendiculaire au plan de symétrie).

**d/ le moment des forces aérodynamique:**

a pour composantes par définitions des coefficients  $C_l, C_m, C_n$

$$O_X \quad \frac{1}{2} \rho S V^2 C_l$$

$$O_Y \quad \frac{1}{2} \rho S V^2 C_m$$

$$O_Z \quad \frac{1}{2} \rho S V^2 C_n$$

**Remarque:**

Les forces aérodynamiques et les forces de propulsion dépendent entre autres de la masse volumique de l'air  $\rho$ . La loi de Laplace d'équilibre de l'atmosphère et la loi de Mariotte-Gay Lussac (l'air est supposé gaz parfait) donne.

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dH} = -\frac{1}{T} \left( \frac{g}{R} + \frac{dT}{dH} \right)$$

$$\frac{g}{R} = 0.0341632 \quad , \quad \frac{dT}{dH} = -0.0065 \quad (\text{pour l'atmosphère standard au-dessous de 11000m})$$

$$= 0 \quad (\text{pour l'atmosphère standard au-dessus de 11000m})$$

seules les variables,  $\Theta, H, u, v, w, p, q, r$

Figurent aux seconds membres des équations du mouvement. Une fois connues, ces neuf fonctions du temps, les trois variables  $x, y,$  et  $\Psi$  s'en déduisent par simple intégration de  $\dot{x}, \dot{y},$  et  $\dot{\Psi}$ .

Le mouvement est donc entièrement déterminé par la connaissance des neuf variables.

$$\Phi, \Theta, H, u, v, w, p, q, r$$

Liées par les neuf relations:

équations cinématique (1.15), (1.16) et (1.37)

$$\dot{\Theta} = q \cos \Phi - r \sin \Phi,$$

$$\dot{\Phi} = p + \operatorname{tg} \Theta (q \sin \Phi + r \cos \Phi)$$

$$\dot{H} = u \sin \Theta - v \cos \Theta \sin \Phi - w \cos \Theta \cos \Phi$$

équations de force (I.32)

équations de moment (1.34)

### Variables auxiliaires

Les caractéristiques aérodynamiques du planeur sont en général mesurées en soufflerie en fonction de l'incidence  $\alpha$ , du dérapage  $\beta$  et du module  $V$  du vecteur vitesse. Ces trois variables auxiliaires sont liées à  $u$ ,  $v$ ,  $w$  par

$$(1.38) \quad u = V \cos \beta \cos \alpha$$

$$(1.39) \quad v = V \sin \beta$$

$$(1.40) \quad w = V \cos \beta \sin \alpha$$

$$V = u \cos \alpha \cos \beta + v \sin \beta + w \sin \alpha \cos \beta = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

$$(1.41) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{w}{u}$$

$$(1.42) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + w^2}}$$

## I.2.5 DETERMINATION DES CONDITIONS DE VOL PERMANENTES

Nous appellerons conditions de vol permanentes tout mouvement pour lequel les paramètres suivants

$$\Phi, \Theta, H, u, v, w, p, q, r$$

Sont constants. Les quatre fonctions  $x, y, H$  et  $\Psi$  du temps déterminent alors la trajectoire dite trajectoire permanente.

Les paramètres  $\Phi, \Theta, p, q, r$  sont alors liés par les deux relations cinématique :

$$(1.43) \quad \dot{\Theta} = q_0 \cos \Phi_0 - r_0 \sin \Phi_0 = 0$$

$$(1.44) \quad \dot{\Phi} = p_0 + tg\Theta_0(q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0) = 0$$

et le système de force conduisant à ce mouvement permanent est donné par :

$$(1.45) \quad X_0 = m(q_0 w_0 - p_0 v_0) + mg \sin \Theta_0$$

$$(1.46) \quad Y_0 = m(r_0 u_0 - p_0 w_0) - mg \cos \Theta_0 \sin \Phi_0$$

$$(1.47) \quad Z_0 = m(p_0 v_0 - q_0 u_0) - mg \cos \Theta_0 \cos \Phi_0$$

$$(1.48) \quad L_0 = (C - B)q_0 r_0 + p_0 (Fr_0 - Eq_0) + D(r_0^2 - q_0^2)$$

$$(1.49) \quad M_0 = (A - C)r_0 p_0 + p_0 (Dp_0 - Fr_0) + E(p_0^2 - r_0^2)$$

$$(1.50) \quad N_0 = (B - A)p_0 q_0 + r_0 (Eq_0 - Dp_0) + F(q_0^2 - p_0^2)$$

Par conséquent une trajectoire permanente est définie par six paramètres indépendants.

La trajectoire est alors déterminée par :

$$\dot{\Psi} = \frac{q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0}{\cos \Theta_0} = \dot{\Psi}_0$$

$$\text{soit : } \Psi = \dot{\Psi}_0(t - t_0)$$

$$\text{et } \begin{aligned} \dot{x} = & (u_0 \cos \Theta_0 + v_0 \sin \Theta_0 \sin \Phi_0 + w_0 \sin \Theta_0 \cos \Phi_0) \cos \Psi \\ & + (w_0 \sin \Phi_0 - v_0 \cos \Phi_0) \sin \Psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = & (v_0 \cos \Phi_0 - w_0 \sin \Phi_0) \cos \Psi \\ & + (u_0 \cos \Theta_0 + v_0 \sin \Theta_0 \sin \Phi_0 + w_0 \sin \Theta_0 \cos \Phi_0) \sin \Psi \end{aligned}$$

$$\dot{H} = u_0 \sin \Theta_0 - v_0 \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 - w_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 = \dot{H}_0$$

En posant

$$A \cos \omega = u_0 \cos \Theta_0 + v_0 \sin \Theta_0 \sin \Phi_0 + w_0 \sin \Theta_0 \cos \Phi_0$$

$$A \sin \omega = w_0 \sin \Phi_0 - v_0 \cos \Phi_0$$

Il vient :  $\dot{x} = A \cos(\Psi - \omega)$  et  $\dot{y} = A \sin(\Psi - \omega)$

et en intégrant avec  $\Psi = \dot{\Psi}_0 (t - t_0)$

$$\begin{cases} x - x_0 = \frac{A}{\dot{\Psi}_0} \sin(\dot{\Psi}_0 (t - t_0) - \omega) \\ y - y_0 = \frac{A}{\dot{\Psi}_0} \cos(\dot{\Psi}_0 (t - t_0) - \omega) \\ H = \dot{H}_0 t + H_0 \end{cases}$$

### 1.2.5.1 DEFINITION DE STABILITE

Nous venons de définir le mouvement permanent le plus général d'un corps quelconque et de déterminer le système de forces correspondant. Etudier la stabilité de ce mouvement consiste à voir si un écart de l'un ou de plusieurs des huit paramètres  $\Phi, \Theta, u, v, w, p, q, r$ , par rapport aux valeurs  $\Phi_0, \Theta_0, u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0$ , conduit le système de force  $X, Y, Z, L, M, N$  évolue avec les écarts  $\bar{\Phi}, \bar{\Theta}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$  des huit paramètres  $\Phi, \Theta, u, v, w, p, q, r$  par rapport aux valeurs  $\Phi_0, \Theta_0, u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0$  correspondant, à l'état permanent.

### 1.2.5.2 MOUVEMENTS PERMANENTS ET STABILITE DE L'AVION

Le système des forces aérodynamiques dépend

- du module de la vitesse aérodynamique (V)
  - Des angles d'incidence et de dérapage ( $\alpha$  et  $\beta$ ).
  - Du nombre de Mach ( $\chi$ ).
  - De l'altitude (H) (par l'intermédiaire de  $\rho$ )
  - Des vitesses de rotation ( $p, q, r$ )
  - De la position des différentes gouvernes ( $\delta_i, \delta_m, \delta_n$ )

Le système des forces de propulsion dépend

- Du nombre de Mach  $\chi$

- De l'altitude par l'intermédiaire de la pression  $\underline{p}$  et de la température  $T$
- De la position de la masse des gaz ( $\delta_x$ )

Dans un mouvement permanent les angles d'incidence et de dérapage sont constants ainsi que le module de la vitesse (relations (1.40), (1.41) et (1.42) ) puisque  $u, v, w$  sont constants. A positions de gouvernes données, le système de force aérodynamique ne dépend donc que de l'altitude par l'intermédiaire de  $\rho$  et de  $\chi$  ( à  $V$  donné,  $\chi$  varie avec la vitesse du son  $a = \sqrt{\gamma \mathfrak{R} T}$  donc avec l'altitude). De même le système de force de propulsion à piston de manette à gaz donnée dépend de l'altitude ( par  $\underline{p}, T$  et  $\chi$ ).

On peut donc pour un avion, parler de mouvement permanent à positions fixes des gouvernes lorsque ce mouvement s'effectue à altitude non constante.

Le seul mouvement permanent réalisable à position de gouvernes fixes est donc le virage uniforme en palier, avec comme cas particulier le vol rectiligne uniforme en palier.

Aux équations (1.43) et (1.44) soit

$$(1.43) \quad q_0 \cos \Phi_0 - r_0 \sin \Phi_0 = 0$$

$$(1.44) \quad p_0 + tg\Theta(q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Theta_0) = 0$$

nous ajouterons donc la condition

$$(1.51) \quad \dot{H} = u_0 \sin \Theta_0 - v_0 \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 - w_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 = 0$$

Nous allons étudier la stabilité autour de ces mouvements permanents en restreignant encore la notion de mouvement permanent aux cas particuliers du vol à dérapage nul.

Nous ne considérons donc que le cas du vol permanent en virage horizontal à dérapage nul ( Avec le vol rectiligne comme cas particulier ).

Si  $\beta=0$ , alors  $v=0$  d'après la relation (1.38)

Par ailleurs l'avion étant géométriquement symétrique la force latérale  $Y$  est nulle.

$$Y=0$$

Nous allons déterminer les conditions de vol permanent en virage horizontal à dérapage nul.

Un certain nombre de calculs préliminaire sont à effectuer avant d'atteindre ce résultat.

### a). relation assiette de tangage, angle de gîte, incidence dans le cas du virage horizontal.

Dans le trièdre avion, le vecteur vitesse (ou sa projection sur le plan de symétrie lorsqu'il y a dérapage) est dans le plan de symétrie; ce vecteur a pour coordonnées dans  $x, y, z$  :

$$\cos \alpha$$

$$0$$

$$\sin \alpha$$

la composante suivant  $O'z'$  d'un vecteur  $x, y, z$  est

$$-x \sin \Theta + y \cos \Theta \sin \Phi + z \cos \Theta \cos \Phi$$

pour le vecteur  $(\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$  cette composante est nulle, lorsque la vitesse est horizontale.

$$-\sin \Theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \Theta \cos \Phi = 0$$

(1.52)

$$\boxed{\operatorname{tg} \Theta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \Phi}$$

### b) définition de l'assiette latérale $\Phi_1$

C'est l'angle de l'axe avion  $Oy$  avec le plan horizontal. (à ne pas confondre avec l'angle de gîte  $\Phi$ )

Le vecteur unitaire de  $Oy$  a pour composante  $(0,1,0)$  dans le trièdre avion. Sa composante suivant  $Oz_g$  soit  $\sin \Phi_1$  est donc,  $\cos \Theta \sin \Phi$ . Par suite

(1.53)

$$\boxed{\sin \Phi_1 = \cos \Theta \sin \Phi}$$

L'élimination de  $\Phi$  entre ((1.52) et (1.53) donne

(1.54)

$$\boxed{\sin \Theta = \sin \alpha \cos \Phi_1}$$

c) les deux conditions :

$$\dot{\Phi} = 0, \quad \dot{\Theta} = 0$$

Soit :

$$(1.43) \quad q_0 \cos \Phi_0 - r_0 \sin \Phi_0 = 0$$

$$(1.44) \quad p_0 + \operatorname{tg} \Theta_0 (q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0) = 0$$

imposons un vecteur vitesse instantané de rotation verticale, comme on peut le vérifier en calculant  $p_g$  et  $q_g$ .

$$p_g = p \cos \Psi \cos \Theta + q(-\sin \Psi \cos \Theta + \cos \Psi \sin \Theta \sin \Phi) \\ + r(\sin \Psi \sin \Phi + \cos \Psi \sin \Theta \cos \Phi)$$

$$q_g = p \sin \Psi \cos \Theta + q(\cos \Psi \cos \Theta + \sin \Psi \sin \Theta \sin \Phi) \\ + r(-\cos \Psi \sin \Phi + \sin \Psi \sin \Theta \cos \Phi)$$

$$r_g = -p \sin \Theta + q \cos \Theta \sin \Phi + r \cos \Theta \cos \Phi$$

autrement dit

$$p_g = \cos \Psi (p \cos \Theta + q \sin \Theta \sin \Phi + r \sin \Theta \cos \Phi) \\ + \sin \Psi (-q \cos \Phi + r \sin \Phi) \equiv 0$$

$$q_g = \cos \Psi (q \cos \Theta - r \sin \Phi) \\ + \sin \Psi (p \cos \Theta + q \sin \Theta \sin \Phi + r \sin \Theta \cos \Phi) \equiv 0$$

$$r_g = \cos \Theta (q \sin \Phi + r \cos \Phi) + \frac{\sin^2 \Theta}{\cos \Theta} (q \sin \Phi + r \cos \Phi) \\ = \frac{q \sin \Phi + r \cos \Phi}{\cos \Theta} = \dot{\Psi}$$

posons  $\dot{\Psi} = \Omega_0$  compte tenu des relations ((1.43) et (1.44)), il vient :

$$\begin{cases} q_0 = \Omega_0 \sin \Phi_0 \cos \Theta_0 = \Omega_0 \sin \Phi_1^0 \\ r_0 = \frac{\Omega_0 \sin \Phi_1^0}{\lg \Phi_0} \\ p_0 = -\Omega_0 \cos \Theta_0 \end{cases}$$

d) Soit  $V_0$  le module du vecteur vitesse. La trajectoire étant horizontale et le dérapage nul ( $v_0 = 0$  relation (1.39)), la relation (1.45) donne

$$u_0 \sin \Theta_0 - w_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 = 0$$

par ailleurs

$$u_0^2 + w_0^2 = V_0^2$$

$$u_0 = V_0 \frac{\cos \Theta_0 \cos \Phi_0}{\cos \Phi_1}$$

$$w_0 = V_0 \frac{\sin \Theta_0}{\cos \Phi_1}$$

e) le dérapage étant nul et l'avion symétrique,  $Y_0=0$ .

La relation (1.46) donne alors

$$r_0 u_0 - p_0 w_0 = g \cos \Theta_0 \sin \Phi_0$$

en tenant compte de

$$r_0 = q_0 \frac{\cos \Phi_0}{\sin \Phi_0}, \quad p_0 = -q_0 \frac{\sin \Theta_0}{\cos \Theta_0 \sin \Phi_0}$$

$$u_0 = V_0 \frac{\cos \Theta_0 \cos \Phi_0}{\cos \Phi_1^0}, \quad w_0 = r_0 \frac{\sin \Theta_0}{\cos \Phi_1^0} C$$

il vient



$$q_0 = \frac{g \sin^2 \Theta_1}{V_0 \cos \Phi_1^0} \quad \text{et} \quad \Omega_0 = \frac{g}{V_0} \operatorname{tg} \Phi_1^0$$

f) **détermination de  $X_0, Z_0$ .** les deux équations de force (1.45) et (1.47) s'écrivent:

$$mq_0 w_0 + mg \sin \Theta_0 = X_0$$

$$-mq_0 u_0 - mg \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 = Z_0$$

ce qui s'écrit encore

$$X_0 = mg \sin \Theta_0 \left[ 1 + \frac{q_0 V}{g \cos \Phi_1^0} \right] = mg \sin \Theta_0 \cdot \frac{1}{\cos^2 \Phi_1^0}$$

$$Z_0 = -mg \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 \left[ 1 + \frac{q_0 V}{g \cos \Phi_1^0} \right] = -mg \cos \Theta_0 \cdot \frac{\cos \Phi_0}{\cos^2 \Phi_1^0}$$

Posons

$$n = \frac{1}{\cos \Phi_1^0}$$

$$X_0 = n^2 mg \sin \Theta_0$$

$$Z_0 = -n^2 mg \cos \Theta_0 \cos \Phi_0$$

$X_0, Z_0$ , sont les composantes des forces de propulsion et des forces aérodynamiques sur les axes avion OX et OZ,

$$X_0 = F_0 \cos \omega + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_X^0$$

$$Z_0 = -F_0 \sin \omega + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_Z^0$$

exprimons  $C_X, C_Y, C_Z$ , coefficients aérodynamiques dans le trièdre avion, en fonction de  $C_{Xa}, C_{Ya}, C_{Za}$ , coefficients aérodynamiques dans le trièdre aérodynamique (matrice T)

$$C_X = \cos \alpha \cos \beta \quad C_{Xa} - \cos \alpha \sin \beta C_{Ya} - \sin \alpha \quad C_{Za}$$

$$C_Y = \sin \beta \quad C_{Xa} - \cos \beta C_{Ya}$$

$$C_Z = \sin \alpha \cos \beta \quad C_{Xa} - \sin \alpha \sin \beta C_{Ya} + \cos \alpha \quad C_{Za}$$

Dans notre cas particulier ( $\beta = 0, C_{Ya} = 0$ )

$$C_X^0 = \cos \alpha_0 C_{Xa}^0 - \sin \alpha_0 C_{Za}^0$$

$$C_Y^0 = 0$$

$$C_Z^0 = \sin \alpha_0 C_{Xa}^0 + \cos \alpha_0 C_{Za}^0$$

en utilisant les coefficients de traînée et de portance  $C_X, C_Z$



$$C_X = -C_{Xa}$$

$$C_Z = -C_{Za}$$

Dans notre cas particulier ( $\beta = 0, C_{Ya} = 0$ )

$$C_X^0 = \cos \alpha_0 C_{Xa}^0 - \sin \alpha_0 C_{Za}^0$$

$$C_Y^0 = 0$$

$$C_Z^0 = \sin \alpha_0 C_{Xa}^0 + \cos \alpha_0 C_{Za}^0$$

en utilisant les coefficients de traînée et de portance  $C_X, C_Z$

$$C_X = -C_{Xa}$$

$$C_Z = -C_{Za}$$

il vient :

$$C_X^0 = -\cos \alpha_0 C_{Xa}^0 - \sin \alpha_0 C_{Za}^0$$

$$C_Z^0 = -\sin \alpha_0 C_{Xa}^0 - \cos \alpha_0 C_{Za}^0$$

les deux équations de force s'écrivent alors :

$$\begin{cases} n^2 \cdot mg \cdot \sin \Theta_0 = F \cos \omega + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 (-\cos \alpha_0 C_X^0 + \sin \alpha_0 C_Z^0) \\ -n^2 \cdot mg \cdot \cos \Theta_0 \cdot \cos \Phi_0 = -F \sin \omega + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 (-\sin \alpha_0 C_X^0 - \cos \alpha_0 C_Z^0) \end{cases}$$

en éliminant  $C_Z$  :

$$n^2 \cdot mg \cdot [\sin \Theta_0 \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0] = F \cos(\alpha + \omega) - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_X^0$$

la relation (1.52) entre  $\Theta, \alpha$  et  $\Phi$  donne:

$$\sin \Theta_0 \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 = 0$$

$$\text{d'où } F \cos(\alpha + \omega) = \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_X^0$$

en éliminant  $C_X$

$$n^2 \cdot mg \cdot (\sin \Theta_0 \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0) = F \cos(\alpha + \omega) + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_Z^0$$

$$\text{or: } \sin \Theta_0 \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 = \sin \Theta_0 \sin \alpha_0 + \cos \Theta_0 \frac{\sin \Theta_0 \cos \alpha_0}{\cos \Theta_0 \sin \alpha_0} \cos \alpha_0$$

$$= \sin \Theta_0 \sin \alpha_0 + \sin \Theta_0 \frac{\cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\sin \Theta_0}{\sin \alpha_0} = \cos \Phi_1$$

$$\text{or: } \sin \Theta_0 \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 = \sin \Theta_0 \sin \alpha_0 + \cos \Theta_0 \frac{\sin \Theta_0 \cos \alpha_0}{\cos \Theta_0 \sin \alpha_0} \cos \alpha_0$$

$$= \sin \Theta_0 \sin \alpha_0 + \sin \Theta_0 \frac{\cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\sin \Theta_0}{\sin \alpha_0} = \cos \Phi_1$$

donc:  $n^2.mg.(\sin \Theta_0 \sin \alpha_0 + \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 \cos \alpha_0) = n.mg$

$$F \sin(\alpha + \omega) - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_z^0 = n.mg$$

on retrouve évidemment les équations de force projetées sur les axes aérodynamiques (n est le facteur de charge). nous pouvons dès lors, déterminer les caractéristiques du vol en virage permanent horizontal à dérapage nul.

Données :

module de la vitesse  $V_0$

vitesse instantanée de rotation  $\Omega_0$ .

altitude de vol  $H_0$  (masse volumique  $\rho_0$ )

masse avion  $m$ , surface  $S$ , polaire  $C_z = C_z(\alpha)$ ,  $C_x = C_x(\alpha)$ .

$$\tan \Phi_1 = \frac{V_0 \Omega_0}{g} \longrightarrow \Phi_1^0 \quad n = \frac{1}{\cos \Phi_1^0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F \sin(\alpha + \omega) + \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_z^0 = n.mg \\ F \cos(\alpha + \omega) - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_x^0 = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 \\ F_0 \end{array} \right.$$

$$\sin \Theta_0 = \sin \alpha_0 \cos \Phi_1^0 \rightarrow \Theta_0$$

$$\sin \Phi_0 = \frac{\sin \Phi_1^0}{\cos \Theta_0} \rightarrow \Phi_0$$

$$u_0 = V_0 \frac{\cos \Theta_0 \cos \Phi_0}{\cos \Phi_1^0} \rightarrow u_0$$

$$w_0 = V_0 \frac{\sin \Theta_0}{\cos \Phi_1^0} \rightarrow w_0$$

$$p_0 = -\Omega_0 \cos \Theta_0 \rightarrow p_0$$

$$q_0 = \Omega_0 \sin \Phi_0 \rightarrow q_0$$

$$r_0 = \Omega_0 \frac{\sin \Phi_1^0}{\tan \Phi_0} \rightarrow r_0$$

les équations de moment (1.48 à 1.50) donnent  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , qui joints à la connaissance de  $F$  déterminent les positions de gouverne et la position de la manette des gaz. ( $L$ ,  $M$ ,  $N$  et  $F$  dépendent de  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $V$  et de  $\delta x$ ,  $\delta l$ ,  $\delta m$ ,  $\delta n$ ).

### I.2.6 EQUATIONS GENERALES DES PETITES PERTURBATIONS

Le mouvement de l'avion peut être considéré comme le résultat d'une perturbation à partir des conditions de vol permanent. De ceci, chaque paramètre instantané des équations du mouvement de l'avion peut être écrit comme la somme du paramètre durant le vol stationnaire et le changement causé par la perturbation.

Soustrayant des équations générales du mouvements régissant  $\Phi, \Theta, u, v, w, p, q, r, H$  soient:

$$\dot{\Theta} = q \cos \Phi - r \sin \Phi$$

$$\dot{\Phi} = p + tg \Theta (q \sin \Phi + r \cos \Phi)$$

$$\dot{H} = u \sin \Theta - v \cos \Theta \sin \Phi - w \cos \Theta \cos \Phi$$

$$m(\dot{u} + qw - rv) = X - mg \sin \Theta$$

$$m(\dot{v} + ru - pw) = Y + mg \cos \Theta \sin \Phi$$

$$m(\dot{w} + pv - qu) = Z + mg \cos \Theta \cos \Phi$$

$$A\dot{p} - F\dot{q} - E\dot{r} + (C - B)qr + p(Fr - Eq) + D(r^2 - q^2) = L$$

$$B\dot{q} - D\dot{r} - F\dot{p} + (A - C)rp + q(Dp - Fr) + E(p^2 - r^2) = M$$

$$C\dot{r} - E\dot{p} - D\dot{q} + (B - A)pq + r(Eq - Dp) + F(q^2 - p^2) = N$$

Les équations d'équilibre soient:

$$0 = p_0 + tg \Theta_0 (q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0)$$

$$V_0 \sin \gamma_0 = u_0 \sin \Theta_0 - v_0 \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 - w_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0$$

$$m(q_0 w_0 - r_0 v_0) = X_0 - mg \sin \Theta_0$$

$$m(r_0 u_0 - p_0 w_0) = Y_0 + mg \cos \Theta_0 \sin \Phi_0$$

$$m(q_0 w_0 - r_0 v_0) = X_0 - mg \sin \Theta_0$$

$$(C - B)q_0 r_0 + p(Fr_0 - Fq_0) + D(r_0^2 - q_0^2) = L_0$$

$$(A - C)r_0 p_0 + q_0(Dp_0 - Fr_0) + E(p_0^2 - r_0^2) = M_0$$

$$(B - A)p_0 q_0 + r_0(Eq_0 - Dp_0) + F(q_0^2 - p_0^2) = N_0$$

et en considérant les variables:

$$\bar{\Theta} = \Theta - \Theta_0$$

$$\bar{\Phi} = \Phi - \Phi_0$$

$$\bar{u} = u - u_0$$

$$\bar{v} = v - v_0$$

$$\bar{w} = w - w_0$$

$$\bar{H} = H - H_0$$

$$\bar{p} = p - p_0$$

$$\bar{q} = q - q_0$$

$$\bar{r} = r - r_0$$

comme du premier ordre par rapport aux valeurs de  $\Theta_0, \Phi_0, p_0, q_0, r_0, u_0, v_0, w_0$ , les équations régissant les variables  $\bar{\Theta}, \bar{\Phi}, \bar{H}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  s'écrivent (en tenant compte de ce que  $v_0$  est nul)

$$\dot{\bar{\Theta}} = -\bar{\Phi}(q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \sin \Phi_0) + \bar{q} \cos \Phi_0 - \bar{r} \sin \Phi_0$$

$$\dot{\bar{\Phi}} = \bar{\Theta} \frac{q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0}{\cos^2 \Phi_0} + t g \Theta_0 (q_0 \cos \Phi_0 - r_0 \sin \Phi_0) \bar{\Phi} + \bar{p} + \sin \Phi_0 t g \Theta_0 \bar{q} + \cos \Phi_0 t g \Theta_0 \bar{r}$$

$$\dot{\bar{u}} = \frac{X - X_0}{m} - g \cos \Theta_0 \bar{\Theta} + r_0 \bar{v} - q_0 \bar{w} - w_0 \bar{q}$$

$$\dot{\bar{v}} = \frac{Y - Y_0}{m} - g \sin \Phi_0 \sin \Theta_0 \bar{\Theta} + g \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 \bar{\Phi} - r_0 \bar{u} + p_0 \bar{w} + w_0 \bar{p} - u_0 \bar{r}$$

$$\dot{\bar{w}} = \frac{Z - Z_0}{m} - g \cos \Phi_0 \sin \Theta_0 \bar{\Theta} - g \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 \bar{\Phi} + q_0 \bar{u} - p_0 \bar{v} + u_0 \bar{q}$$

$$A\dot{\bar{p}} - F\dot{\bar{q}} - E\dot{\bar{r}} = L - L_0 + \bar{p}(Eq_0 - Fr_0) + \bar{q}((B-C)r_0 + Ep_0 + 2Dq_0) + \bar{r}((B-C)q_0 - Fp_0 - 2Dr_0)$$

$$B\dot{\bar{q}} - D\dot{\bar{r}} - F\dot{\bar{p}} = M - M_0 + \bar{q}(Fr_0 - Dp_0) + \bar{r}((C-A)p_0 + Fq_0 + 2Er_0) + \bar{p}((C-A)r_0 - Dq_0 - 2Ep_0)$$

$$C\dot{\bar{r}} - E\dot{\bar{p}} - D\dot{\bar{q}} = N - N_0 + \bar{r}(Dp_0 - Eq_0) + \bar{p}((A-B)q_0 + Dr_0 + 2Fp_0) + \bar{q}((A-B)p_0 - Er_0 - 2Fq_0)$$

$$\dot{\bar{H}} - V_0 \sin \gamma_0 = \bar{\Theta}(v_0 \cos \Phi_0 \sin \Theta_0 + u_0 \cos \Theta_0) + w_0 \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 + u_0 \sin \Theta_0 - v_0 \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 - w_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0$$

par ailleurs les variables auxiliaires  $v, \alpha$ , et  $\beta$  sont liées à  $\bar{u}, \bar{v}$  et  $\bar{w}$  par

$$\bar{u} = \bar{V} \cos \alpha_0 - V_0 \sin \alpha_0 \bar{\alpha}$$

$$\bar{V} = \cos \alpha_0 \bar{u} + \sin \alpha_0 \bar{w}$$

$$\bar{v} = V_0 \bar{\beta}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\cos \alpha_0 \bar{w} - \sin \alpha_0 \bar{u}}{V_0}$$

$$\bar{w} = \bar{V} \sin \alpha_0 + V_0 \cos \alpha_0 \cdot \bar{\alpha}$$

$$\bar{\beta} = \frac{\bar{v}}{V_0}$$

Il est enfin utile de faire intervenir les variations du nombre de Mach

$$\bar{\chi} = \chi - \chi_0 (\chi_0 = V_0 / a_0)$$

$$\frac{\bar{\chi}}{\chi_0} = \frac{\bar{V}}{V_0} - \frac{\bar{a}}{a_0}$$

comme  $a = \sqrt{\gamma \mathcal{R}T}$  et  $T = T_0 - kH$  ( avec en atmosphère standard  $T_0 = 288.15$  et  $k = 6,5 \cdot 10^{-3}$  au-dessous de 11000m et  $T_0 = 216.65$  et  $k = 0$  entre 11000 et 20000m)

il vient :

$$\bar{\chi} = \bar{V} \frac{\chi_0}{V_0} + \frac{k \chi_0}{2 T_0} \bar{H} = \frac{\chi_0}{V_0} (\cos \alpha_0 \cdot \bar{u} + \sin \alpha_0 \cdot \bar{w}) + \frac{k \chi_0}{2 T_0} \bar{H}$$

calculons maintenant les variations des six composantes du système de forces

a) forces:

$$X - X_0 = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_x^0 + (F - F_0) \cos \omega$$

$$Y - Y_0 = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_y - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_y^0$$

$$Z - Z_0 = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_z - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_z^0 + (F - F_0) \sin \omega$$

$$\frac{1}{2} \rho S V^2 C_i - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_i^0 = \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 \left[ 2 C_i^0 \frac{\bar{V}}{V_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dH} C_i^0 \bar{H} + \bar{C}_i \right]$$

$$F - F_0 = \frac{\partial F}{\partial V} \bar{V} + \frac{\partial F}{\partial H} \bar{H} + \frac{\partial F}{\partial \delta_x} \bar{\delta}_x$$

Or (rappelons que  $C_x = -C_{x_a}$ ,  $C_y = +C_{y_a}$ ,  $C_z = -C_{z_a}$ )

$$C_x = -\cos \alpha \cos \beta \cdot C_x - \cos \alpha \sin \beta C_y + \sin \alpha \cdot C_z$$

$$C_y = -\sin \beta \cdot C_x + \cos \beta C_y$$

$$C_z = -\sin \alpha \cos \beta \cdot C_x - \sin \alpha \sin \beta C_y - \cos \alpha \cdot C_z$$

d'ou:

$$\begin{cases} C_x^0 = -\cos \alpha_0 \cdot C_x^0 + \sin \alpha_0 \cdot C_z^0 \\ C_y^0 = 0 \\ C_z^0 = -\sin \alpha_0 \cdot C_x^0 - \cos \alpha_0 \cdot C_z^0 \end{cases}$$

$$\bar{C}_X = C_{X_u} \frac{\bar{u}}{V_0} + C_{X_v} \frac{\bar{v}}{V_0} + C_{X_w} \frac{\bar{w}}{V_0} + C_{X_p} \frac{\bar{p}l}{V_0} + C_{X_q} \frac{\bar{q}l}{V_0} + C_{X_r} \frac{\bar{r}l}{V_0} + C_{X_H} \bar{H} + C_{X\delta_l} \bar{\delta}_l + C_{X\delta_m} \bar{\delta}_m + C_{X\delta_n} \bar{\delta}_n$$

$$\bar{C}_Y = C_{Y_u} \frac{\bar{u}}{V_0} + C_{Y_v} \frac{\bar{v}}{V_0} + C_{Y_w} \frac{\bar{w}}{V_0} + C_{Y_p} \frac{\bar{p}l}{V_0} + C_{Y_q} \frac{\bar{q}l}{V_0} + C_{Y_r} \frac{\bar{r}l}{V_0} + C_{Y_H} \bar{H} + C_{Y\delta_l} \bar{\delta}_l + C_{Y\delta_m} \bar{\delta}_m + C_{Y\delta_n} \bar{\delta}_n$$

$$\bar{C}_Z = C_{Z_u} \frac{\bar{u}}{V_0} + C_{Z_v} \frac{\bar{v}}{V_0} + C_{Z_w} \frac{\bar{w}}{V_0} + C_{Z_p} \frac{\bar{p}l}{V_0} + C_{Z_q} \frac{\bar{q}l}{V_0} + C_{Z_r} \frac{\bar{r}l}{V_0} + C_{Z_H} \bar{H} + C_{Z\delta_l} \bar{\delta}_l + C_{Z\delta_m} \bar{\delta}_m + C_{Z\delta_n} \bar{\delta}_n$$

Nous supposons ici que les coefficients aérodynamiques ne dépendent pas de  $\dot{\alpha}$  et de  $\dot{\beta}$

Autrement dit nous négligeons les phénomènes d'aérodynamique instationnaire (les forces aérodynamiques ne dépendent que du champ de vitesse instantané et non pas de sa variation instantanée).

$$C_{X_u} = -\sin \alpha_0 \cdot C_{X\alpha}^0 + \chi_0 \cos \alpha_0 \cdot C_X^0 \cdot \chi$$

$$C_{Y_u} = -\sin \alpha_0 \cdot C_{Y\alpha}^0 + \chi_0 \cos \alpha_0 \cdot C_Y^0 \cdot \chi$$

$$C_{Z_u} = -\sin \alpha_0 \cdot C_{Z\alpha}^0 + \chi_0 \cos \alpha_0 \cdot C_Z^0 \cdot \chi$$

$$C_{X_v} = C_{X\beta}^0$$

$$C_{Y_v} = C_{Y\beta}^0$$

$$C_{Z_v} = C_{Z\beta}^0$$

$$C_{X_w} = \cos \alpha_0 \cdot C_{X\alpha}^0 + \chi_0 \sin \alpha_0 \cdot C_X^0 \cdot \chi$$

$$C_{Y_w} = \cos \alpha_0 \cdot C_{Y\alpha}^0 + \chi_0 \sin \alpha_0 \cdot C_Y^0 \cdot \chi$$

$$C_{Z_w} = \cos \alpha_0 \cdot C_{Z\alpha}^0 + \chi_0 \sin \alpha_0 \cdot C_Z^0 \cdot \chi$$

$$C_{X_H} = \frac{k}{2} \frac{\chi_0}{T_0} C_X^0 \cdot \chi$$

$$C_{Y_H} = \frac{k}{2} \frac{\chi_0}{T_0} C_Y^0 \cdot \chi$$

$$C_{Z_H} = \frac{k}{2} \frac{\chi_0}{T_0} C_Z^0 \cdot \chi$$

$$C_{X\alpha}^0 = \sin \alpha_0 (C_x^0 + C_{z\alpha}^0) + \cos \alpha_0 (C_z^0 - C_{x\alpha}^0)$$

$$C_{X\beta}^0 = \sin \alpha_0 C_{z\beta}^0 - \cos \alpha_0 C_{x\beta}^0$$

$$C_{Y\alpha}^0 = C_{y\alpha}^0$$

$$C_{Y\beta}^0 = C_{y\beta}^0 - C_x^0$$

$$C_{Z\alpha}^0 = \sin \alpha_0 (C_z^0 - C_{x\alpha}^0) - \cos \alpha_0 (C_{z\alpha}^0 + C_x^0)$$

$$C_{Z\beta}^0 = -\sin \alpha_0 C_{x\beta}^0 - \cos \alpha_0 C_{z\beta}^0$$

$$C_{Xz}^0 = -\cos\alpha_0 \cdot C_x^0 \cdot \chi + \sin\alpha_0 \cdot C_z^0 \cdot \chi$$

$$C_{Yz}^0 = C_y^0 \cdot \chi$$

$$C_{Zz}^0 = -\cos\alpha_0 \cdot C_z^0 \cdot \chi - \sin\alpha_0 \cdot C_x^0 \cdot \chi$$

$$C_{Xt} = -\cos\alpha_0 \cdot C_{xt}^0 + \sin\alpha_0 \cdot C_{zt}^0$$

$$C_{Yt} = C_{yt}^0$$

$$C_{Zt} = -\cos\alpha_0 \cdot C_{zt}^0 - \sin\alpha_0 \cdot C_{xt}^0$$

avec

$$C_{xt}^0 = \frac{\partial C_x}{\partial \frac{tl}{V_0}} \quad \text{et} \quad C_{zt}^0 = \frac{\partial C_z}{\partial \frac{tl}{V_0}} \quad t = p, q, r$$

$$C_{X\delta i} = -\cos\alpha_0 \cdot C_{x\delta i}^0 + \sin\alpha_0 \cdot C_{z\delta i}^0$$

$$C_{Y\delta i} = C_{y\delta i}^0$$

$$i = l, m, n$$

$$C_{Z\delta i} = -\cos\alpha_0 \cdot C_{z\delta i}^0 - \sin\alpha_0 \cdot C_{x\delta i}^0$$

b) moments

la variation de l'une des trois composantes L, M, N peut s'écrire: ( $R_F$  est la composante du moment de la poussée sur le même axe)

$$\begin{aligned} \bar{R} &= R - R_0 = \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0^2 C_R - \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0^2 C_R^0 + R_F - R_{F_0} \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0^2 C_R \left[ 2C_R^0 \frac{\bar{V}}{V_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dH} C_R^0 \bar{H} + \bar{C}_R \right] + \frac{\partial R_F}{\partial V} \bar{V} + \frac{\partial R_F}{\partial H} \bar{H} + \frac{\partial R_F}{\partial \delta_x} \bar{\delta}_x \end{aligned}$$

$$\bar{C}_R = C_{R\alpha}^0 \bar{\alpha} + C_{R\beta}^0 \bar{\beta} + C_{Rp}^0 \frac{\bar{pl}}{V_0} + C_{Rq}^0 \frac{\bar{ql}}{V_0} + C_{Rr}^0 \frac{\bar{rl}}{V_0} + C_{Rz}^0 \bar{\chi} + C_{R\delta l}^0 \bar{\delta}_l + C_{R\delta m}^0 \bar{\delta}_m + C_{R\delta n}^0 \bar{\delta}_n$$

en exprimant  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  et  $\bar{v}$  en fonction de  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  il vient:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \left[ \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0 (-C_{R\alpha}^0 \sin\alpha_0 + C_{Rz}^0 \chi_0 \cos\alpha_0 + 2C_R^0 \cos\alpha_0) + \frac{\partial R_F}{\partial V} \cos\alpha_0 \right] \bar{u} + \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0 C_{R\beta}^0 \bar{v} \\ &+ \left[ \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0 (C_{R\alpha}^0 \cos\alpha_0 + C_{Rz}^0 \chi_0 \sin\alpha_0 + 2C_R^0 \sin\alpha_0) + \frac{\partial R_F}{\partial V} \sin\alpha_0 \right] \bar{w} \\ &+ \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0 C_{Rp}^0 \bar{p} + \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0 C_{Rq}^0 \bar{q} + \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0 C_{Rr}^0 \bar{r} \\ &+ \left( +\frac{1}{2} \rho_0 SIV_0 \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dH} C_R^0 + \frac{k \chi_0}{2 T_0} C_{Rz}^0 + \frac{\partial R_F}{\partial H} \right) \bar{H} \\ &+ \frac{\partial R_F}{\partial \delta_x} \bar{\delta}_x + \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0^2 C_{R\delta l}^0 \bar{\delta}_l + \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0^2 C_{R\delta m}^0 \bar{\delta}_m + \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0^2 C_{R\delta n}^0 \bar{\delta}_n \end{aligned}$$

avec:

$$C_R^0 = \frac{R_0}{\frac{1}{2} \rho_0 SIV_0^2}$$

$$R_0 = L_0 - L_{F_0}; M_0 - M_{F_0}; N_0 - N_{F_0}$$

les trois équations de moment s'écrivent alors:

$$A\dot{\bar{p}} - F\dot{\bar{q}} - E\dot{\bar{r}} = L_u \bar{u} + L_v \bar{v} + L_w \bar{w} + L_p \bar{p} + L_q \bar{q} + L_r \bar{r} + L_H \bar{H} + L_{\alpha x} \bar{\delta}_x + L_{\delta l} \bar{\delta}_l + L_{\delta m} \bar{\delta}_m + L_{\delta n} \bar{\delta}_n$$

$$B\dot{\bar{q}} - D\dot{\bar{r}} - F\dot{\bar{p}} = M_u \bar{u} + M_v \bar{v} + M_w \bar{w} + M_p \bar{p} + M_q \bar{q} + M_r \bar{r} + M_H \bar{H} + M_{\alpha x} \bar{\delta}_x + M_{\delta l} \bar{\delta}_l + M_{\delta m} \bar{\delta}_m + M_{\delta n} \bar{\delta}_n$$

$$C\dot{\bar{r}} - E\dot{\bar{p}} - D\dot{\bar{q}} = N_u \bar{u} + N_v \bar{v} + N_w \bar{w} + N_p \bar{p} + N_q \bar{q} + N_r \bar{r} + N_H \bar{H} + N_{\alpha x} \bar{\delta}_x + N_{\delta l} \bar{\delta}_l + N_{\delta m} \bar{\delta}_m + N_{\delta n} \bar{\delta}_n$$

avec:

$$R_u = \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0^2 (-C_{R\alpha} \sin \alpha_0 + C_{R\chi} \chi_0 \cos \alpha_0 + 2C_R^0 \cos \alpha_0) + \frac{\partial R_F}{\partial V} \cos \alpha_0$$

$$R_v = \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0^2 C_{R\beta}$$

$$R_w = \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0^2 (C_{R\alpha} \cos \alpha_0 + C_{R\chi} \chi_0 \sin \alpha_0 + 2C_R^0 \sin \alpha_0) + \frac{\partial R_F}{\partial V} \sin \alpha_0$$

$$R_H = \frac{1}{2} \rho_0 SIV_0^2 \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dH} C_R + \frac{k}{2} \frac{\chi_0}{T_0} C_{R\chi} + \frac{\partial R_F}{\partial H}$$

$$L_p = \frac{1}{2} \rho_0 SI^2 V_0^2 C_{Lp}^0 + Eq_0 - Fr_0$$

$$L_q = \frac{1}{2} \rho_0 SI^2 V_0^2 C_{Lq}^0 + (B-C)r_0 + Ep_0 + 2Dq_0$$

$$L_r = \frac{1}{2} \rho_0 SI^2 V_0^2 C_{Lr}^0 + (B-C)q_0 - Fp_0 - 2Dr_0$$

$$M_p = \frac{1}{2} \rho_0 SI^2 V_0^2 C_{Mp}^0 + (C-A)r_0 - Dq_0 - 2Ep_0$$

$$M_q = \frac{1}{2} \rho_0 SI^2 V_0^2 C_{Mq}^0 + Fr_0 - Dp_0$$

$$M_r = \frac{1}{2} \rho_0 SI^2 V_0^2 C_{Mr}^0 + (C-A)p_0 + Fq_0 + 2Er_0$$



$$N_p = \frac{1}{2} \rho_0 S l^2 V_0 C_{Np}^0 + (A-B)q_0 + Dr_0 + 2Fp_0$$

$$N_q = \frac{1}{2} \rho_0 S l^2 V_0 C_{Nq}^0 + (A-B)p_0 - Er_0 - 2Fq_0$$

$$N_r = \frac{1}{2} \rho_0 S l^2 V_0 C_{Nr}^0 + Dp_0 - Eq_0$$

ces trois équations se mettent sous la forme:

$$\dot{\bar{p}} = \lambda_u \bar{u} + \lambda_v \bar{v} + \lambda_w \bar{w} + \lambda_p \bar{p} + \lambda_q \bar{q} + \lambda_r \bar{r} + \lambda_H \bar{H} + \lambda_{\delta_x} \bar{\delta}_x + \lambda_{\delta_l} \bar{\delta}_l + \lambda_{\delta_m} \bar{\delta}_m + \lambda_{\delta_n} \bar{\delta}_n$$

$$\dot{\bar{q}} = \mu_u \bar{u} + \mu_v \bar{v} + \mu_w \bar{w} + \mu_p \bar{p} + \mu_q \bar{q} + \mu_r \bar{r} + \mu_H \bar{H} + \mu_{\delta_x} \bar{\delta}_x + \mu_{\delta_l} \bar{\delta}_l + \mu_{\delta_m} \bar{\delta}_m + \mu_{\delta_n} \bar{\delta}_n$$

$$\dot{\bar{r}} = \nu_u \bar{u} + \nu_v \bar{v} + \nu_w \bar{w} + \nu_p \bar{p} + \nu_q \bar{q} + \nu_r \bar{r} + \nu_H \bar{H} + \nu_{\delta_x} \bar{\delta}_x + \nu_{\delta_l} \bar{\delta}_l + \nu_{\delta_m} \bar{\delta}_m + \nu_{\delta_n} \bar{\delta}_n$$

Les  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$  sont liés aux coefficients  $L_i, M_i, N_i$  par

$$\lambda_i = [L_i (BC - D^2) + M_i (CF + DE) + N_i (FD + BE)] / \Delta$$

$$\mu_i = [M_i (CA - E^2) + N_i (AD + EF) + L_i (DE + CF)] / \Delta$$

$$\nu_i = [N_i (AB - F^2) + L_i (BE + FD) + M_i (EF + AD)] / \Delta$$

avec:  $\Delta = ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 - 2DEF$  et  $i = u, v, w, p, q, r, H, \delta_x, \delta_l, \delta_m, \delta_n$ ,

Le mouvement de l'avion est régi par les neuf variables  $\bar{\Phi}, \bar{\Theta}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$  et  $\bar{H}$  qui sont données, par un système de neuf équations que l'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\Theta} \\ \ddot{\Phi} \\ \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \\ \ddot{p} \\ \ddot{q} \\ \ddot{r} \\ \ddot{H}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{17} & A_{18} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 & A_{27} & A_{28} & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & A_{38} & A_{39} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} & A_{48} & A_{49} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & A_{58} & A_{59} \\ 0 & 0 & \lambda_u & \lambda_v & \lambda_w & \lambda_p & \lambda_q & \lambda_r & \lambda_H \\ 0 & 0 & \mu_u & \mu_v & \mu_w & \mu_p & \mu_q & \mu_r & \mu_H \\ 0 & 0 & \nu_u & \nu_v & \nu_w & \nu_p & \nu_q & \nu_r & \nu_H \\ A_{91} & A_{92} & A_{93} & A_{94} & A_{95} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\Theta} \\ \ddot{\Phi} \\ \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \\ \ddot{p} \\ \ddot{q} \\ \ddot{r} \\ \ddot{H}^* \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} \\ \lambda_{\delta l} & \lambda_{\delta m} & \lambda_{\delta n} & \lambda_{\delta x} \\ \mu_{\delta l} & \mu_{\delta m} & \mu_{\delta n} & \mu_{\delta x} \\ \nu_{\delta l} & \nu_{\delta m} & \nu_{\delta n} & \nu_{\delta x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l \\ \delta m \\ \delta n \\ \delta x \end{bmatrix}$$

avec  $\ddot{H}^* = \ddot{H} - V_0 \sin \gamma_0$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{12} = -q_0 \sin \Phi_0 - r_0 \cos \Phi_0 \\ A_{17} = \cos \Phi_0 \\ A_{18} = -\sin \Phi_0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{21} = \frac{q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0}{\cos^2 \Theta_0} \\ A_{22} = \operatorname{tg} \Theta_0 (q_0 \cos \Phi_0 - r_0 \sin \Phi_0) \\ A_{27} = \sin \Phi_0 \operatorname{tg} \Theta_0 \\ A_{28} = \cos \Phi_0 \operatorname{tg} \Theta_0 \end{array} \right.$$

et avec  $Q = \frac{1}{2} \rho S V_0^2 / m$

$$A_{31} = -g \cos \Theta_0$$

$$A_{33} = \frac{Q}{V_0} [2C_{X\alpha}^0 \cos \alpha_0 - C_{X\alpha}^0 \sin \alpha_0 + C_{X\chi}^0 \chi_0 \cos \alpha_0] + \frac{1}{m} \cos \alpha_0 \cos \omega \cdot \frac{\partial F}{\partial V}$$

$$A_{34} = \frac{Q}{V_0} C_{X\beta}^0 + r_0$$

$$A_{35} = \frac{Q}{V_0} [2C_{X\alpha}^0 \sin \alpha_0 - C_{X\alpha}^0 \cos \alpha_0 + C_{X\chi}^0 \chi_0 \sin \alpha_0] + \frac{1}{m} \sin \alpha_0 \cos \omega \cdot \frac{\partial F}{\partial V} - q_0$$

$$A_{36} = \frac{Q_l}{V_0} C_{Xp}^0$$

$$A_{37} = \frac{Q_l}{V_0} C_{Xq}^0 - w_0$$

$$A_{38} = \frac{Q_l}{V_0} C_{Xr}^0$$

$$A_{39} = Q \left[ \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dH} C_{X\alpha}^0 + C_{X\chi}^0 \frac{k}{2} \frac{\chi_0}{T_0} \right] + \frac{1}{m} \cos \omega \cdot \frac{\partial F}{\partial H}$$

$$A_{41} = -g \sin \Phi_0 \sin \Theta_0$$

$$A_{42} = g \cos \Phi_0 \cos \Theta_0$$

$$A_{43} = \frac{Q}{V_0} [-C_{Y\alpha}^0 \sin \alpha_0 + C_{Y\chi}^0 \chi_0 \cos \alpha_0] - r_0$$

$$A_{44} = \frac{Q}{V_0} C_{Y\beta}^0$$

$$A_{45} = \frac{Q}{V_0} [-C_{Y\alpha}^0 \cos \alpha_0 + C_{Y\chi}^0 \chi_0 \sin \alpha_0] + p_0$$

$$A_{46} = \frac{Q_l}{V_0} C_{Yp}^0 + w_0$$

$$A_{47} = \frac{Q_l}{V_0} C_{Yq}^0$$

$$A_{48} = \frac{Q_l}{V_0} C_{Yr}^0 - u_0$$

$$A_{49} = QC_{Y\chi}^0 \frac{k}{2} \frac{\chi_0}{T_0}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & A_{51} = -g \sin \Phi_0 \sin \Theta_0 \\
 & A_{52} = g \sin \Phi_0 \cos \Theta_0 \\
 & A_{53} = \frac{Q}{V_0} \left[ -C_{Z\alpha}^0 \cos \alpha_0 - C_{Z\alpha}^0 \sin \alpha_0 + C_{Z\chi}^0 \chi_0 \cos \alpha_0 \right] + \frac{1}{m} \cos \alpha_0 \sin \omega \frac{\partial F}{\partial V} + q_0 \\
 & A_{54} = \frac{Q}{V_0} C_{Z\beta}^0 - p_0 \\
 & A_{55} = \frac{Q}{V_0} \left[ 2C_{Z\alpha}^0 \sin \alpha_0 + C_{Z\alpha}^0 \cos \alpha_0 + C_{Z\chi}^0 \chi_0 \sin \alpha_0 \right] + \frac{1}{m} \sin \alpha_0 \sin \omega \frac{\partial F}{\partial V} \\
 & A_{56} = \frac{Q_l}{V_0} C_{Zp}^0 \\
 & A_{57} = \frac{Q_l}{V_0} C_{Zq}^0 + u_0 \\
 & A_{58} = \frac{Q_l}{V_0} C_{Zr}^0 \\
 & A_{59} = Q \left[ \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dH} C_{Z\alpha}^0 + C_{Z\chi}^0 \frac{k \chi_0}{2 T_0} \right] + \frac{1}{m} \sin \omega \frac{\partial F}{\partial V}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & A_{91} = w_0 \cos \Phi_0 \sin \Theta_0 + u_0 \cos \Theta_0 \\
 & A_{92} = w_0 \sin \Phi_0 \cos \Theta_0 \\
 & A_{93} = \sin \Theta_0 \\
 & A_{94} = -\sin \Phi_0 \cos \Theta_0 \\
 & A_{95} = -\cos \Phi_0 \cos \Theta_0
 \end{aligned} \right\}$$

On rappelle enfin que les  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$ , sont liés aux  $L_i, M_i, N_i$  par

$$\begin{bmatrix} \lambda_i \\ \mu_i \\ \nu_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} BC - D^2 & CF + DE & BE + FD \\ CF + DE & CA - E^2 & AD + EF \\ BE + FD & AD + EF & AB - F^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{bmatrix}$$

Avec  $\Delta = ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 - 2DEF$

Et où l'indice  $i$  représente  $u, v, w, p, q, r, H, \delta_x, \delta_l, \delta_m, \delta_n$ . par ailleurs les coefficients  $b$  de la matrice d'action des gouvernes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 B_{31} &= QC_{x\delta l} & B_{41} &= QC_{y\delta l} & B_{51} &= QC_{z\delta l} \\
 B_{32} &= QC_{x\delta m} & B_{42} &= QC_{y\delta m} & B_{52} &= QC_{z\delta m} \\
 B_{33} &= QC_{x\delta n} & B_{43} &= QC_{y\delta n} & B_{53} &= QC_{z\delta n} \\
 B_{34} &= \frac{\cos \varpi}{m} \frac{\partial F}{\partial \delta_x} & & & B_{54} &= \frac{\sin \varpi}{m} \frac{\partial F}{\partial \delta_x}
 \end{aligned}$$

faisons maintenant les hypothèses suivantes :

a) condition d'équilibre

vol symétrique en ressource dans le plan vertical

$$p_0 = r_0 = 0, \quad \Phi_0 = 0$$

b) les coefficients aérodynamiques longitudinaux ne dépendent pas du dérapage  $\beta$  et des vitesses de roulis  $p$  et de lacet  $r$

$$C_{x\beta} = C_{z\beta} = C_{xp} = C_{xr} = C_{zp} = C_{zr} = 0$$

$$C_{m\beta} = C_{mp} = C_{mr} = 0$$

b) les coefficients aérodynamiques latéraux ne dépendent pas de l'incidence  $\alpha$ , ni de la vitesse de tangage  $q$  ni du nombre de mach  $\chi$

$$C_{y\alpha} = C_{y\chi} = 0$$

$$C_{l\alpha} = C_{l\chi} = C_{lq} = 0$$

$$C_{n\alpha} = C_{n\chi} = C_{nq} = 0$$

d) l'avion est non seulement géométriquement mais aussi massivement symétrique. ainsi

$$D=E=0$$

Et les moments d'équilibrage latéraux  $L_0$  et  $N_0$  sont nuls.

Dans ces conditions, il est facile de voir que le système des neuf équations du mouvement libre se sépare en deux sous systèmes indépendants :

Le système longitudinal qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -g \cos \Theta_0 & A_{33} & A_{35} & A_{37} A_{39} & \\ -g \sin \Theta_0 & A_{53} & A_{55} & A_{57} A_{59} & \\ 0 & \chi_u & \chi_w & \chi_q \chi_H & \\ A_{91} & \sin \Theta_0 & -\cos \Theta_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ u \\ w \\ q \\ H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{32} & B_{34} \\ B_{52} & B_{54} \\ \mu_{\delta m} & \mu_{\delta n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_l \\ \delta_n \end{bmatrix}$$

et le système latéral :

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\Phi}} \\ \dot{\bar{v}} \\ \dot{\bar{p}} \\ \dot{\bar{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \text{tg} \Theta_0 & 0 & 1 & \text{tg} \Theta_0 \\ g \cos \Theta_0 A_{44} & A_{46} & A_{47} & \\ 0 & \lambda_v & \lambda_p & \lambda_r \\ 0 & \nu_v & \nu_p & \nu_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Phi} \\ \bar{v} \\ \bar{p} \\ \bar{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{41} & B_{43} \\ \lambda_{\delta l} & \lambda_{\delta n} \\ \nu_{\delta l} & \nu_{\delta n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_l \\ \delta_n \end{bmatrix}$$

Ces remarques justifient donc, la séparation des deux mouvements dans le cas du vol équilibré rectiligne ou en évolution dans le plan vertical (au voisinage de la pente nulle) et précisent les hypothèses complémentaires nécessaires.

En ce qui concerne le mouvement forcé (action des gouvernes), les deux mouvements se séparent dans la mesure où la poussée des moteurs et la gouverne de tangage n'induisent pas de moments latéraux autour de  $O_x$  ou  $O_z$ , ainsi que les forces latérales et où les gouvernes de lacet et de roulis n'induisent pas de moment longitudinal autour de  $O_y$ .

Dans le cas général du vol de stabilité en virage, le système des neuf équations ne peut se séparer en sous systèmes et le mouvement libre est géré par une équation caractéristique du 9<sup>ème</sup> ordre, dont les racines pour les faibles taux de virage sont voisines des racines des deux équations caractéristiques, du 5<sup>ème</sup> ordre pour le longitudinal, du 4<sup>ème</sup> ordre pour le latéral. Dans certains cas, l'augmentation du taux de virage peut conduire à une profonde modification des racines, certaines racines imaginaires conjuguées pouvant se transformer en deux racines réelles, ce qui modifie complètement le comportement de l'avion. Une telle étude ne peut être menée que dans des cas particuliers et sort du cadre de ce travail. [12,13,14,15]

## 1.2.7 APPLICATION SUR UN AVION DE TRANSPORT DU TYPE AIR-BUS A300

### 1.2.7.1 CARACTERISTIQUES D'UN AIR-BUS A300

**-Géométrie - Masse - Inerties :**

$$S = 260 \text{ m}^2, L = 6.61 \text{ m}$$

$$m = 120000 \text{ kg}$$

$$A = 5.55 \cdot 10^6 \text{ kg.m}^2, B = 9.72 \cdot 10^6 \text{ kg.m}^2, C = 14.51 \cdot 10^6 \text{ kg.m}^2$$

$$D = 0, E = -3.3 \cdot 10^4 \text{ kg.m}^2, F = 0$$

**- Moteurs :**

Bimoteur dont la poussée un moteur au pont fixe au sol  $F_0 = 120000 \text{ N}$

Coefficient  $\lambda = 0$ , Coefficient  $\mu = 1$ , Calage =  $1^\circ$

Distance de l'axe moteur au plan de symétrie XZ = 8m

- **Aérodynamique :**

a. **Longitudinale**

Polaire  $100 C_x = 1.75 + 6 C_z$

$C_z = \alpha / 11.5$  ( $\alpha$  en degré),  $C_{z\alpha} = 4.982 \text{ rad}^{-1}$ ,  $C_{z\delta m} = 0.435 \text{ rad}^{-1}$ ,  $C_{m\alpha} = -5$

$C_{zq} = -0.7$ ,  $C_{z\dot{\alpha}} = -0.3$ ,  $C_{m0} = -0.1$ ,  $C_{m\alpha} = -1.46$ ,  $C_{mq} = -15$ ,  $C_{m\delta m} = -1.46$

b. **Latéral**

	$\beta$	P	R	$\delta_l$	$\delta_n$
Cy	-1.5			0.05	0.3
Cl	-1.3	-1.3	2.9	-0.33	0.25
Cn	1.75	-1.5	-7.5	-0.125	-1.0

- **Condition de vol :**

L'altitude  $H = 30000 \text{ ft}$ , Densité d'air  $\rho = 0.458312 \text{ kg/m}^3$

L'angle d'attaque initial  $\alpha_0 = 3^\circ,825$

Nombre de Mach  $\chi = 0.8$ , La vitesse du vol  $V_0 = 242.54 \text{ m/s}$

En faisant cette application nous obtiendrons les matrices d'état suivante :

**Pour le mouvement latéral :**

(Compte tenu de ce que  $\bar{V} = V_0 \bar{\beta}$  on retrouve le système latéral suivant).

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.18063 & -0.9978 & 0.668 & 0.0404 \\ 2.8056 & -0.3269 & -0.06187 & 0 \\ -5.4416 & 0.33165 & -1.4776 & 0 \\ 0 & 0.668 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0060211 & 0.036127 \\ -0.19639 & -1.5985 \\ -1.3759 & 1.0528 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_l \\ \delta_n \end{bmatrix}$$

Dont les racines de l'équation caractéristique sont :

$\lambda_1 = -4.5900 \text{ e}(-3)$  (caractérise le mode spiral.) (voir annexe 1)

$\lambda_2 = -1.4830$  (caractérise le mode de roulis)

$\lambda_{3,4} = -0.24882 \pm 1.7844 i$ ; Se sont deux pôles conjugués dont la pulsation propre  $\omega_n = 1.8017$  et la fréquence  $\xi = 0.138$  avec un temps de réponse  $T_s = 3.52 \text{ s}$  qui caractérisent le mode de roulis hollandais (oscillation de dérapage). [12,13,14,15]

**Pour le mouvement longitudinal :**

Comme on vient de voir ; le mouvement longitudinal est gouverné par les deux commandes  $\delta m$  et  $\delta x$ , cependant, nous allons procéder notre contrôle avec manette à gaz fixée, donc la poussée sera en fonction de la vitesse, de la température, de l'altitude et des conditions de vol, et contenu de ce que  $\omega = V_0 \alpha$  on trouve le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{u} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9.7881 & -0.0058 & 19.3961 & -17.5435 & 0 \\ -0.0027 & -0.0002 & -0.0453 & 1.0819 & 0 \\ 0 & -0.0027 & -9.3654 & -2.6043 & 0 \\ 242.54 & 0.0667 & -241.997 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ u \\ \alpha \\ q \\ H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8476 \\ -0.0523 \\ -9.3011 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_m$$

dont les racines de l'équation caractéristiques sont :

$\lambda_1 = -0.00148$  (caractérise le mode apériodique.) (voir annexe 1)

$\lambda_{2,3} = -0.00394 \pm 0.04214 i$ ; se sont deux pôles conjugués dont la pulsation propre  $\omega_n = 0.04$  et la fréquence  $\xi = 0.09$  qui caractérisent le mode oscillation phagoïde faiblement amortie

$\lambda_{4,5} = -1.32 \pm 2.91 i$ ; Se sont deux pôles conjugués dont la pulsation propre  $\omega_n = 3.19$  et la fréquence  $\xi = 0.414$  qui caractérisent le mode oscillation d'incidence fortement amortie.

[12,13,14,15].

### SIMULATION EN BOUCLE OUVERTE :

Dans ce qui suit, des simulations du mouvement de l'avion en boucle ouverte seront présentées, en lui appliquant un échelon et une impulsion comme signaux d'entrées.

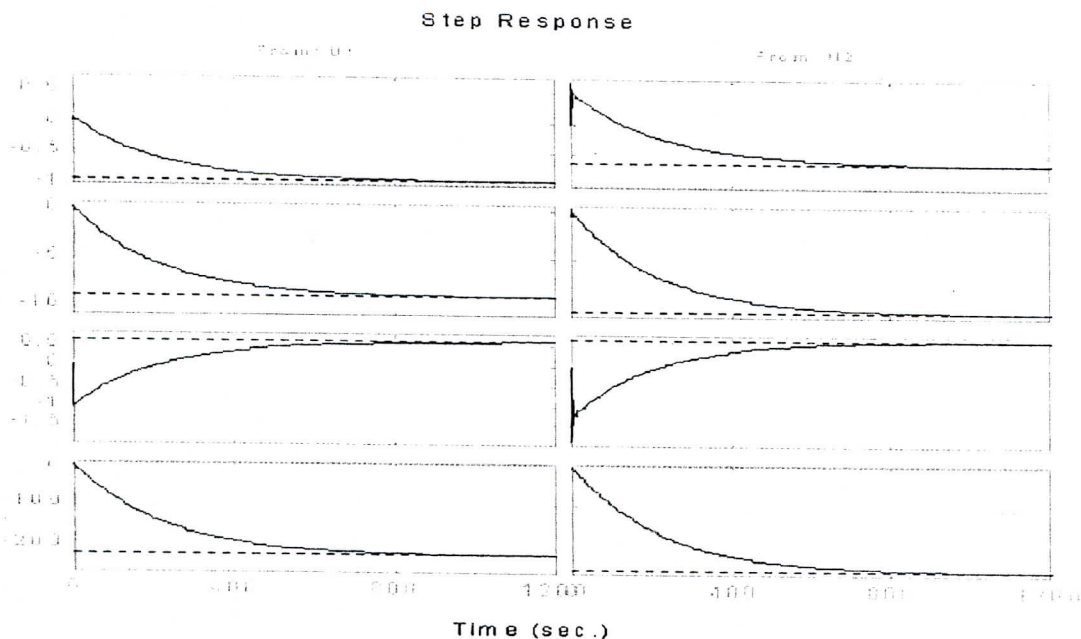


fig.(1.1) la réponse du système latéral à un échelon



Impulse Response

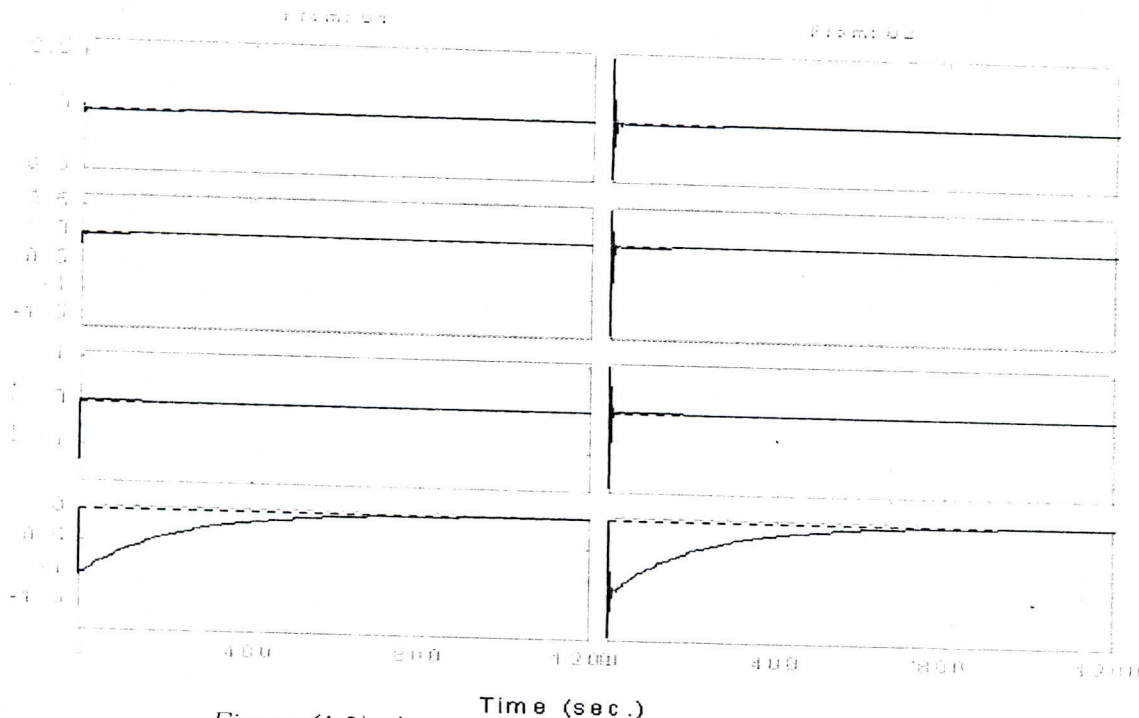


Figure (1.2) réponse du système latéral à une impulsion

Step Response

Impulse Response

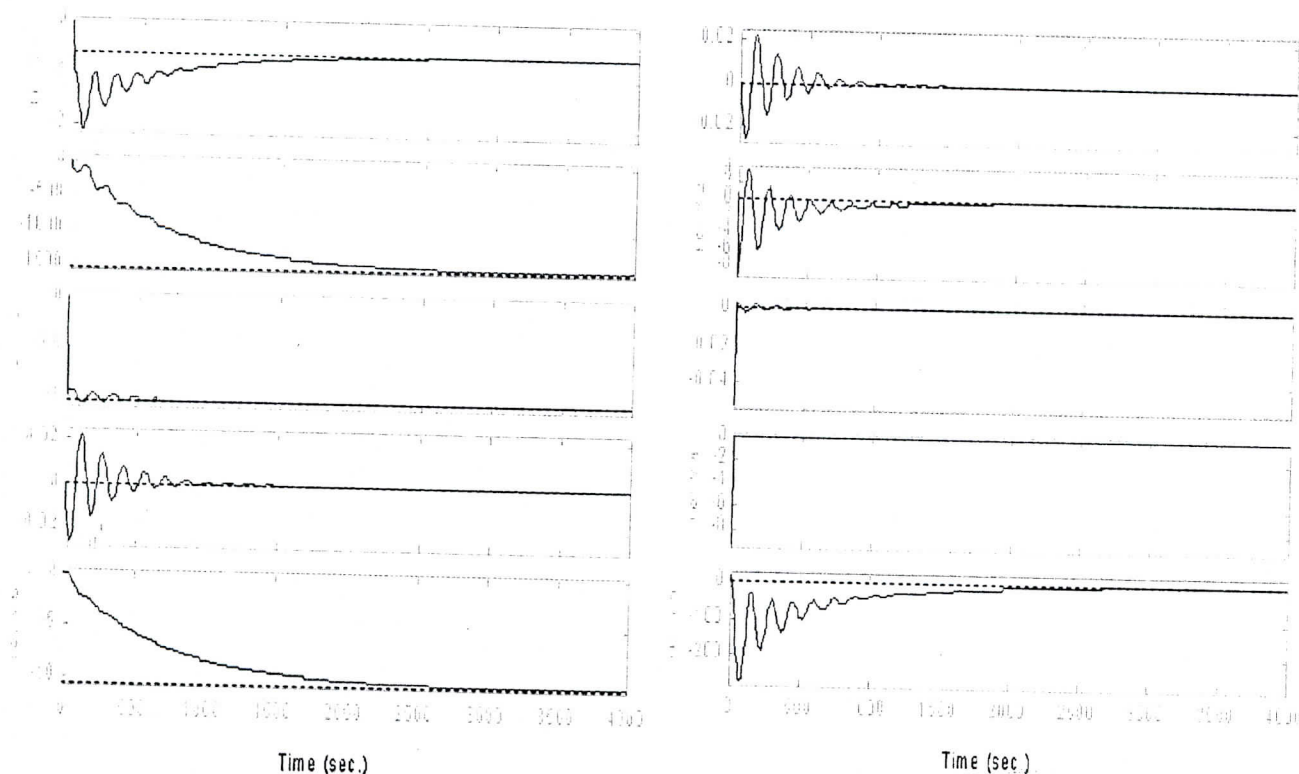


Figure (1.3) réponse du syst longitudinal à un échelon

Figure (1.3) réponse du syst longitudinal à une impulsion

fig.(1.2) la réponse du système latéral à une impulsion

## CONCLUSION

Nous avons ainsi tester la stabilité des deux systèmes obtenus, en boucle ouverte. En leurs appliquant un échelon puis une impulsion comme signaux d'entrées. Concernant le premier type de signal, on remarque que la stabilité théorique est acquise, car les deux systèmes possèdent des pôles ayant des parties réelles négatives; seulement que les résultats obtenus sont inacceptables en pratiques, ceci est dû à la présence de pôles très proches de l'axe imaginaire, et qui conduisent rapidement l'avion vers le problème de décrochage. Pour cette raison, nous allons faire appel au contrôle de vol, afin de stabiliser notre système en boucle fermée, et par conséquent éviter ce problème. Dans le cas de l'impulsion, le système ne présente aucune instabilité.

## SIGNAUX ET OUTILS UTILISES :

### A. SIGNAUX DE REFERENCES :

Tout au long de notre travail, on impose à notre système d'avion les signaux de références suivants :

**a.1. Cas du mouvement latéral :** Nous allons contrôler les deux angles latéraux, dérapage ( $\beta$ ) et gîte ( $\Phi$ ), en leur imposant un échelon de  $10^\circ$  comme signal de référence, pour les simulations sans perturbation. Car nous avons remarqué lors de la simulation en boucle ouverte, que l'échelon était un signal défavorable pour le mouvement. Par contre pour la simulation du mouvement, en présence de perturbations, nous allons leur appliquer un signal de référence formé d'un créneau + échelon de  $10^\circ$  d'amplitude. Ce choix est fait par la raison que ce signal présente une variation brusque d'amplitude, et si la commande utilisée arrive à rejeter les différentes sortes de perturbations pour ce genre de mouvement, on peut dire qu'elle est robuste et donnera de meilleurs résultats si on choisi des mouvements plus simples.

**a.2. Cas du mouvement longitudinal :** On commencera par contrôler la perturbation de la vitesse linéaire  $u$ , car elle est sensible à l'action de la commande de profondeur ( $\delta_m$ ). Dans ce cas aussi, on appliquera un échelon de 40 m/s comme signal de référence pour les simulations avec et sans perturbation. En effet, dans ce cas, la variation brusque de la référence ne pressente aucun intérêt pratique.

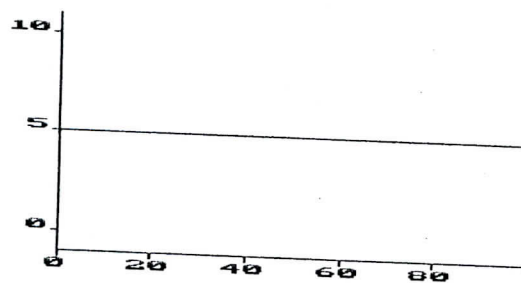
Puis on contrôlera l'angle de tangage  $\Theta$  en lui imposant une fonction linéaire comme signal de référence de la forme  $f(t) = a * t$ ; avec  $a=1$  % / s pour les simulations perturbées et non perturbées.

## B. SIGNAUX DE PERTURBATIONS :

Les perturbations considérées le long de ce travail, sont prises d'un aspect pratique et se partagent en deux catégories :

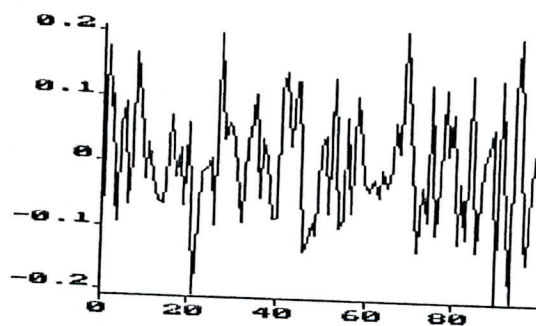
**B.1 LES PERTURBATIONS EXTERNES** : ces perturbations influent directement sur les surfaces de contrôle. (c.-à-d.) la gouverne de gauchissement, de profondeur et de direction (voire anexe1).

En premier lieu, nous appliquerons une perturbation externe constante, qui interprète un mauvais positionnement des gouvernes, dû au mauvais fonctionnement des actionneurs. La simulation sera faite pour plusieurs valeurs d'amplitude du signal perturbateur.



Perturbation constante

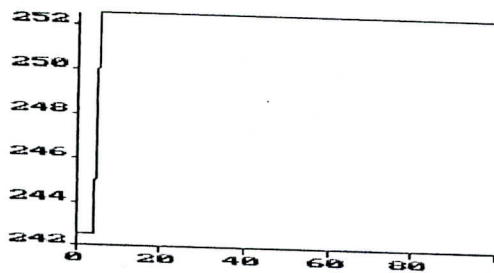
En deuxième lieu, nous soumettons notre système d'avion à une perturbation causée par une turbulence atmosphérique, telle qu'une rafale de vent, caractérisée par un bruit blanc très riche en fréquence, en faisant varier sa moyenne.



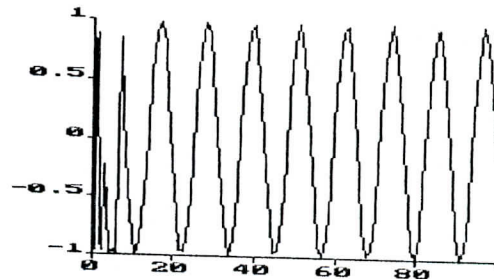
Perturbation atmosphérique

**B.2 LES PERTURBATIONS INTERNES** : Ces perturbations sont dues au changement des paramètres internes du système, et qui sont très divers. Seulement que, dans notre cas, nous n'allons nous intéresser qu'à la variation de la masse et de la vitesse de vol.

la perturbation due à la variation de la vitesse de vol est causée une fois, par une accélération brusque du mouvement, interpréter par un signal constant et une autre fois, par un mauvais rendement du groupe turboréacteur, interpréter par un signal sinusoïdal

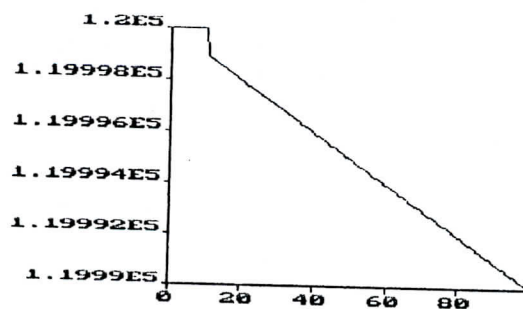


Perturbation constante de la vitesse



Perturbation sinusoïdale de la vitesse

la perturbation due à la variation de la masse de l'avion est causée par une diminution lente de la masse (fuite de carburant), interpréter par un signal de la forme  $f(t)=a.t$  avec  $t$  : temps en seconde en jouant sur la valeur de  $a$  lors de la simulation.



Diminution linéaire de la masse

### C. CONTRAINTES IMPOSEES SUR LE SYSTEME

L'objectif de notre travail, consiste à faire changer la trajectoire et l'attitude de l'avion, à partir d'un vol stationnaire, pour une période inférieure à 15 secondes. Cela doit être accompli sans un dépassement exagéré des sorties, de telle sorte à rester dans les normes des petites perturbations, afin de respecter les hypothèses imposées lors de la linéarisation des équations du mouvement. Les commandes appliquées doivent maintenir les sorties autour des points désirés en dépit des perturbations, en respectant les bornes imposées sur l'entrée car le braquage des gouvernes ne doit pas dépasser  $30^\circ$ .

**NB** : Deux logiciels de simulation pour le contrôle latérale et longitudinal de l'Air-Bus A300, ont été utilisés, le Simnon et le Matlab.

## **CHAPITRE II**

---

# **COMMANDES LINEAIRES DES SYSTEMES MULTIVARIABLES**

---

$$\dot{x} = (A+\delta A)x + (B+\delta B)u$$

$$y = Cx$$

D'où la dynamique en boucle fermée est donnée par:

$$\dot{x} = \{(A+\delta A) - (B+\delta B)K_r\}x + (B+\delta B)K_r r$$

Soit encore :  $\dot{x} = \{(A+\delta A) - (B+\delta B)K\}x + B K_r r + \delta B K_r r$

Posons:  $\delta B K_r r = D$ , nous aurons donc :

$$\dot{x} = \{(A+\delta A) - (B+\delta B)K\}x + B K_r r + D$$

avec D borné si la perturbation  $\delta B$  est bornée

**NB :** La stabilité en boucle fermée de notre système, en présence de perturbation interne est acquise, dans la mesure où l'erreur de sortie est bornée tant que le terme D reste borné.

### II.1.1 SIMULATION ET INTERPRETATIONS:

Après l'obtention des lois de la commande, et par le biais du logiciel SIMNON; on va simuler la réponse du système, en faisant varier à chaque fois son coefficient d'amortissement  $\xi$ , en imposant un temps de réponse spécifié au modèle d'avion étudié, sans modifier sa pulsation propre  $\omega$ , pour ne pas changer la qualité de vol. Nous soumettons notre système par la suite, aux différentes perturbations externes et internes citées dans le chapitre précédent.

#### Figures(2.1.1)

Représente, la simulation de la commande par retour d'état sans perturbation, en imposant un coefficient d'amortissement  $\xi = 0.2$ , un temps de réponse  $t_s = 3.6s$ , en gardant la pulsation propre du système  $\omega = 1.8$ , ceci va nous donner un vecteur de pôles, qui nous permettra de calculer les matrices de gains K et  $K_r$  de la commande, en utilisant la commande PLACE.

$$K = \begin{bmatrix} -1.7866 & 2.1991 & -1.3978 & -2.1255 \\ -2.5789 & -0.3041 & -0.5201 & -0.6857 \end{bmatrix} \text{ et } K_r = \begin{bmatrix} -2.0259 & -4.4664 \\ -0.7052 & -0.7418 \end{bmatrix}$$

On remarque que les signaux de sorties  $y_1$  et  $y_2$  poursuivent les références  $r_2$  et  $r_1$  respectivement après une phase transitoire. La première oscillation atteint les  $12^\circ$  et ne s'atténue qu'après 15 secondes, puis se stabilise à  $9^\circ$ . On constate la présence d'une erreur statique, ceci est interprété par le fait que l'amortissement n'est pas parfait. Mais comme les signaux de sorties ( $y_1$  et  $y_2$ ) et de commandes ( $u_1$  et  $u_2$ ) restent bornés en régime permanent, alors le système est stable.

**Figures(2.1.2) :**

Cette figure représente la même simulation que la précédente, seulement qu'on a fait augmenter  $\xi$  de 0.2 à 0.3, on aura par la suite les gains suivants :

$$K = \begin{bmatrix} 1.9605 & 1.0871 & -2.6102 & -4.7755 \\ -1.8646 & 0.2670 & -1.1489 & -2.3498 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_r = \begin{bmatrix} -4.7192 & -0.5957 \\ -2.3448 & 0.1690 \end{bmatrix}$$

On remarque là aussi, que les deux signaux de sorties  $y_1$  et  $y_2$  possèdent une phase oscillatoire mais plus amortie, dont la première atteint  $11^\circ$  pour  $y_2$  et  $12^\circ$  pour  $y_1$ . L'erreur statique est annulée. On constate un meilleur amortissement que le premier cas.

**Figures(2.1.3):**

Pour voir plus clairement l'effet de  $\xi$ , nous allons l'augmenter à 0.6, nous aurons alors, les gains suivants:

$$K = \begin{bmatrix} 0.1797 & 0.8457 & -0.5648 & -1.1323 \\ -0.8792 & -1.4995 & -0.2007 & -0.2299 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_r = \begin{bmatrix} -1.0911 & -2.3311 \\ -0.2982 & 1.3738 \end{bmatrix}$$

On constate que le système est mieux amorti. Les commandes sont toujours bornées, la stabilité du système est maintenue.

**Figures(2.1.4) :**

Une dernière simulation est faite avec un coefficient d'amortissement égale à 0.7, dans ce cas les gains deviennent :

$$K = \begin{bmatrix} 3.4552 & -1.3882 & 0.7482 & 0.3499 \\ -1.1074 & -1.1135 & 2.0156 & 2.1256 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_r = \begin{bmatrix} 0.2982 & 1.2227 \\ 2.0668 & 1.1171 \end{bmatrix}$$

On remarque que les signaux de sortie  $\square$  et  $\square$  suivent parfaitement les signaux de références, avec un petit dépassement de  $1^\circ$  au niveau de  $\square$ . Dans ce cas, le système est le mieux amortie en gardant toujours sa stabilité.

**Figures(2.1.5 - 2.1.6):**

Ces deux figures représentent le cas d'un mouvement complètement découplé, sachant la première donne un mouvement de lacet et la seconde, le mouvement de roulis. Dans ces deux cas, les commandes sont bornées et les sorties suivent parfaitement les signaux de références après une phase transitoire. Le système est toujours stable.

**Figures(2.1.7 - 2.1.10):**

Représente le cas où l'avion subit une perturbation externe constante, pour quatre valeurs d'amplitude: ( $1^\circ$ ,  $-1^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $-10^\circ$ ). Son influence se caractérise par une augmentation

d'amplitude du signal de sortie, en causant la création d'une erreur statique. On remarque que  $\beta$  est plus atteint par la perturbation que  $\phi$ . Ceci montre la sensibilité de l'angle de dérapage face à ces perturbations. On note que les commandes nécessaires pour ce cas, sont supérieures à celles des cas non perturbés mais tout de même, elles restent bornées.

**Figures(2.1.11 - 2.1.13) :**

Dans ce cas, nous appliquons à notre système une perturbation externe sévère (bruit blanc) pour trois valeurs de niveau (0.1, 1, 10). On remarque que les signaux de commandes deviennent de plus en plus excités, à chaque fois qu'on fait augmenter le niveau du bruit. Dans tous les cas, nous avons une bonne poursuite des signaux de sorties vers les références et delà, nous pouvons dire que la commande est robuste.

**Figures(2.1.14 - 2.1.16) :**

Ces figures représentent le cas d'une perturbation interne constante sur la vitesse de vol ( $V_0$ ) pour trois valeurs d'amplitudes: (1m/s, 10m/s, 100m/s). Le système poursuit la référence en gardant toujours une erreur statique de plus en plus importante à chaque fois qu'on fait augmenter la perturbation. On note aussi que les signaux de commandes sont différents des cas précédents, en présentant des piques à chaque fois que l'avion doit changer d'orientation, ce qui n'est pas pratique; seulement qu'ils restent toujours bornés.

**Figures(2.1.17 - 2.1.18) :**

On applique au système une perturbation interne lente (sinusoïdale) sur la vitesse de vol, soit de: (1m/s et 10m/s). Dans ce cas, la commande ne peut résister à ces perturbations à cause des non-linéarités. Ce qui explique, la divergence des signaux de sorties et de commandes.

**Figures(2.1.19 - 2.1.20) :**

C'est le cas de présence d'une perturbation interne lente (linéaire) sur la masse de l'avion, pour deux valeurs différentes: (0.01 kg/s et 0.1 kg/s). Le système poursuit la référence et les signaux de commandes sont bornés, on peut dire donc que la commande a ignoré l'effet causé par les non-linéarité des deux matrices A et B. car la variation est assez faible, par contre, on voit des piques au niveau des commandes, à chaque fois que l'avion doit changer d'orientation ; ceci n'est pas pratique, mais le système est toujours stable.



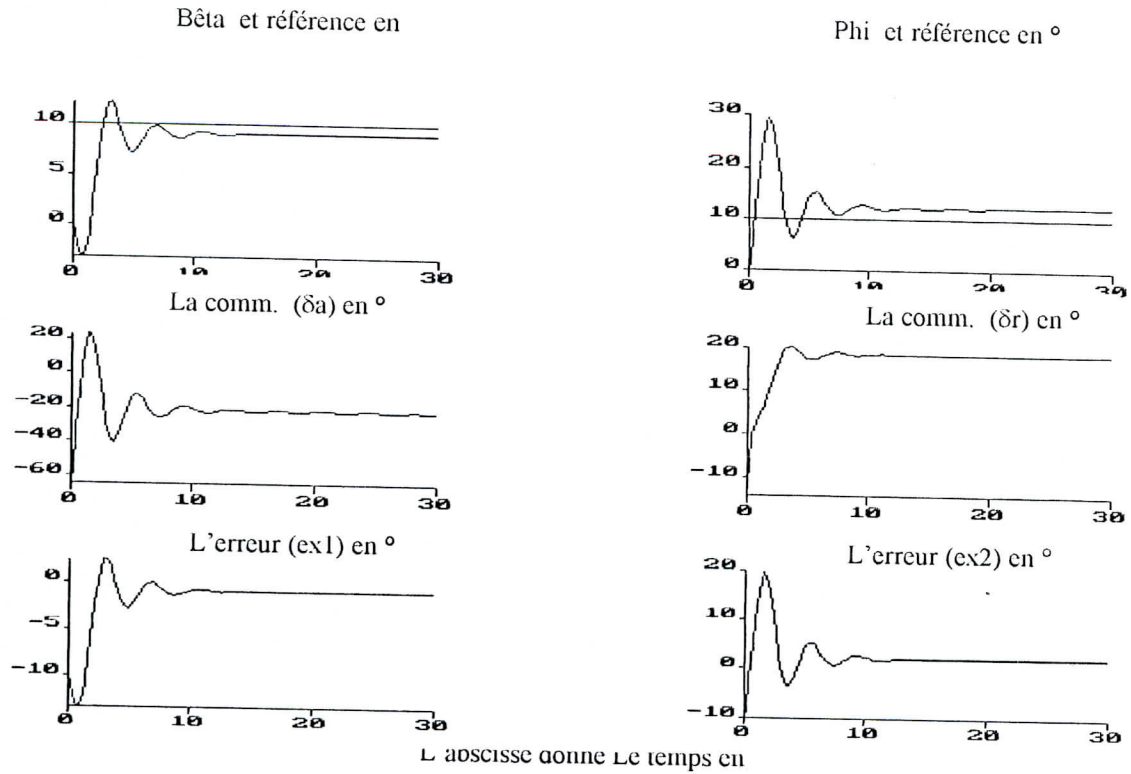


Fig.(2.1.1) Commande par retour d'état sans perturbation avec  $\xi = 0.2$

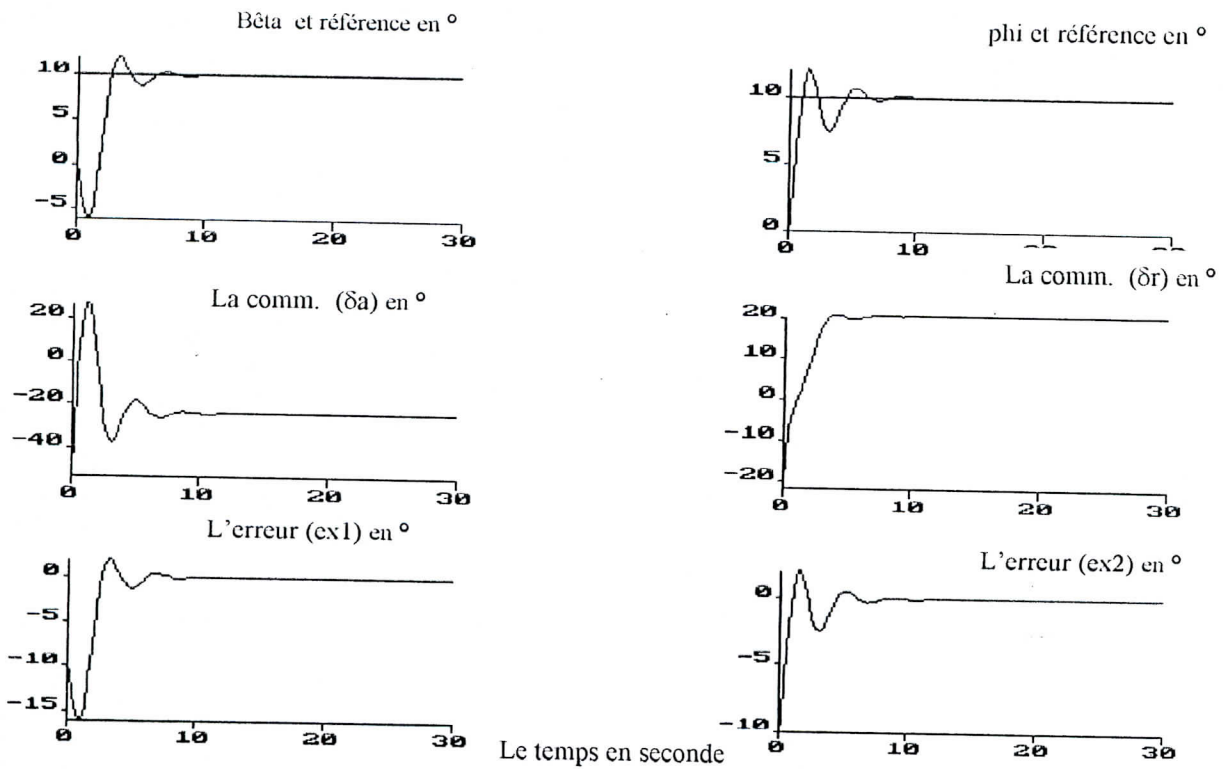


Fig.(2.1.2) Commande par retour d'état sans perturbation avec  $\xi = 0.3$

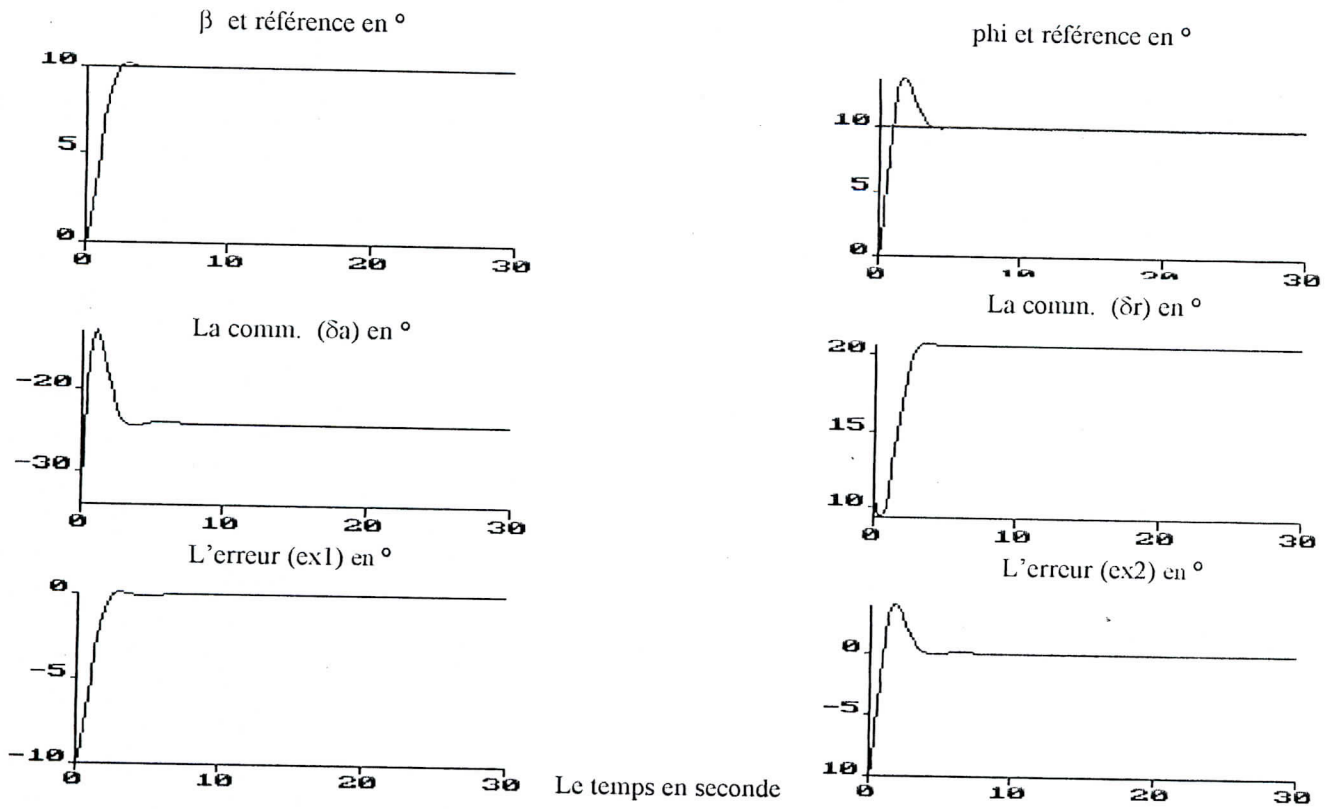


Fig.(2.1.3) : Commande par retour d'état sans perturbation avec  $\xi = 0.6$

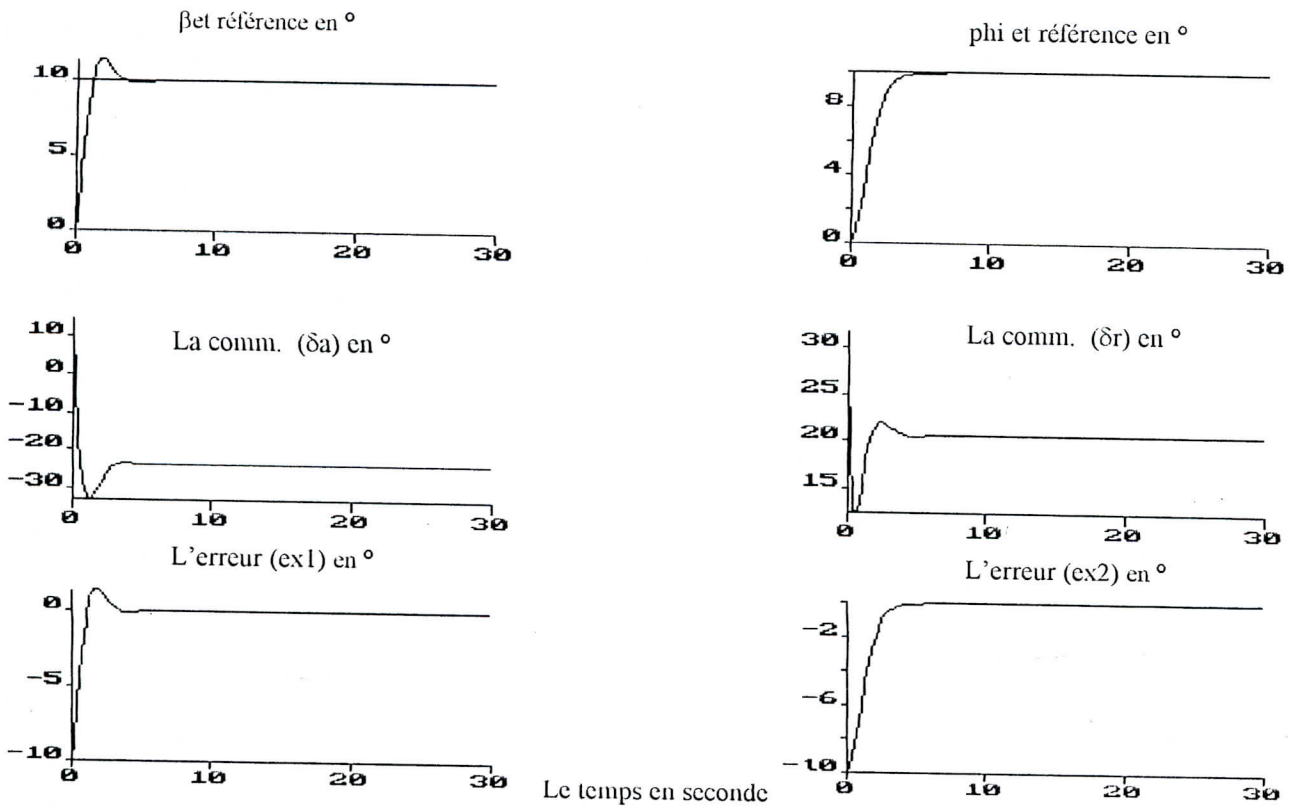


Fig.(2.1.4) : Commande par retour d'état sans perturbation avec  $\xi = 0.7$

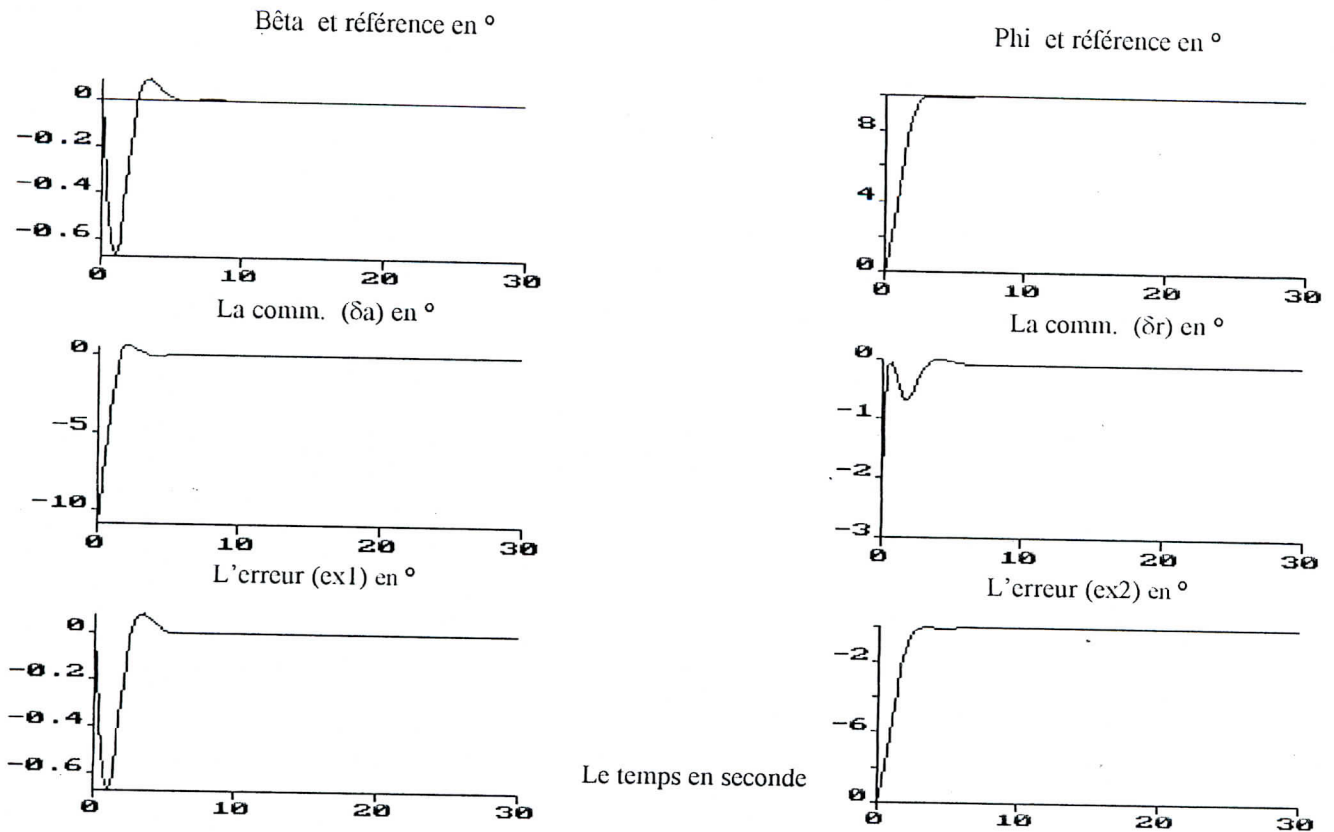


Fig.(2.1.5) : mouvement de roulis Commandé par retour d'état sans perturbation

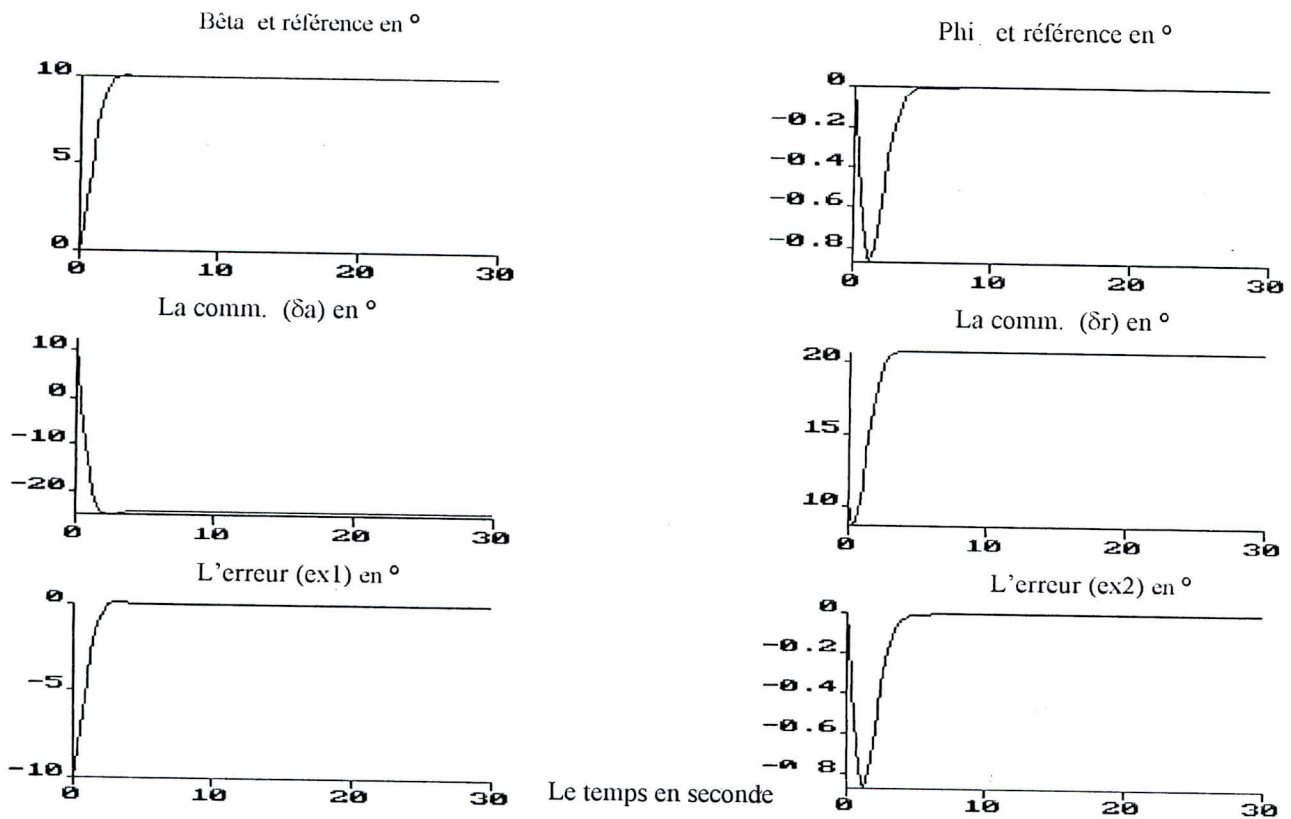


Fig.(2.1.6) : mouvement de lacet Commandé par retour d'état sans perturbation

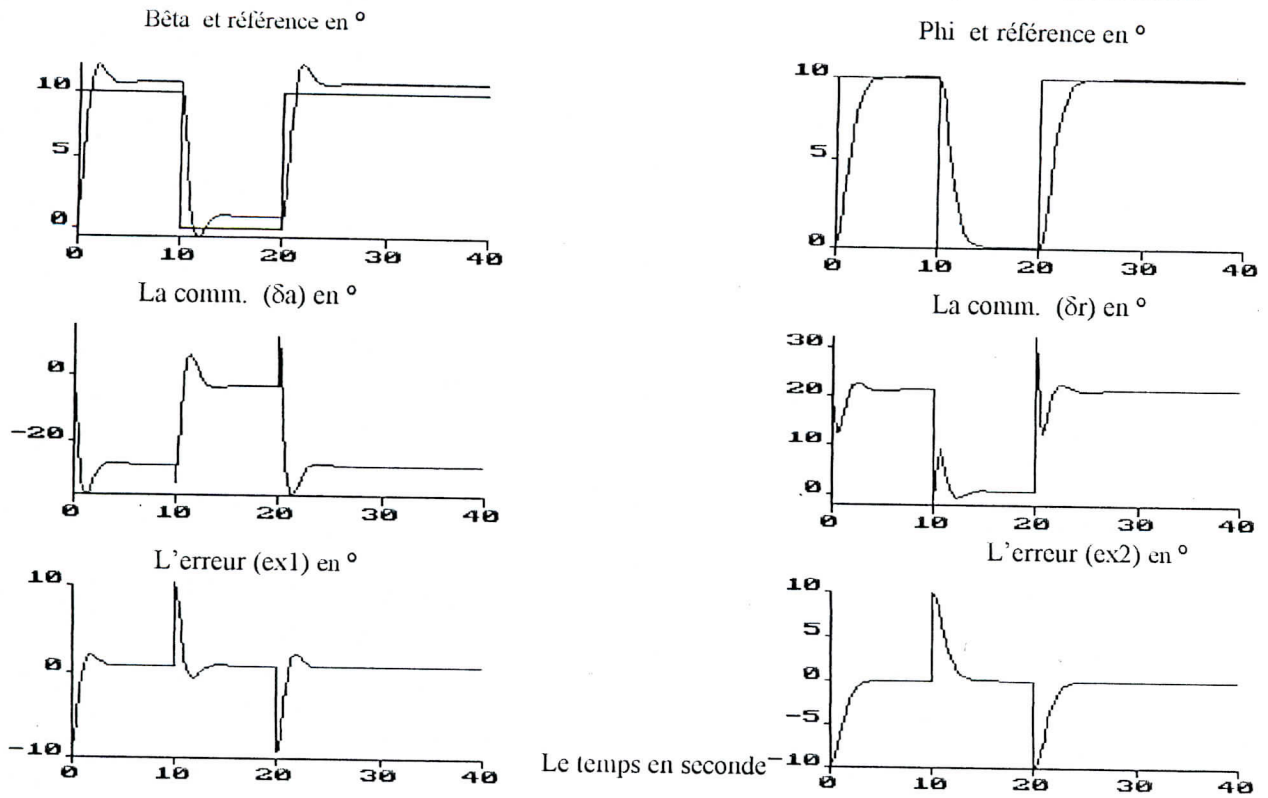


Fig. (2.1.7) Commande par retour d'état avec perturbation externe constante amplitude  $a=1^\circ$

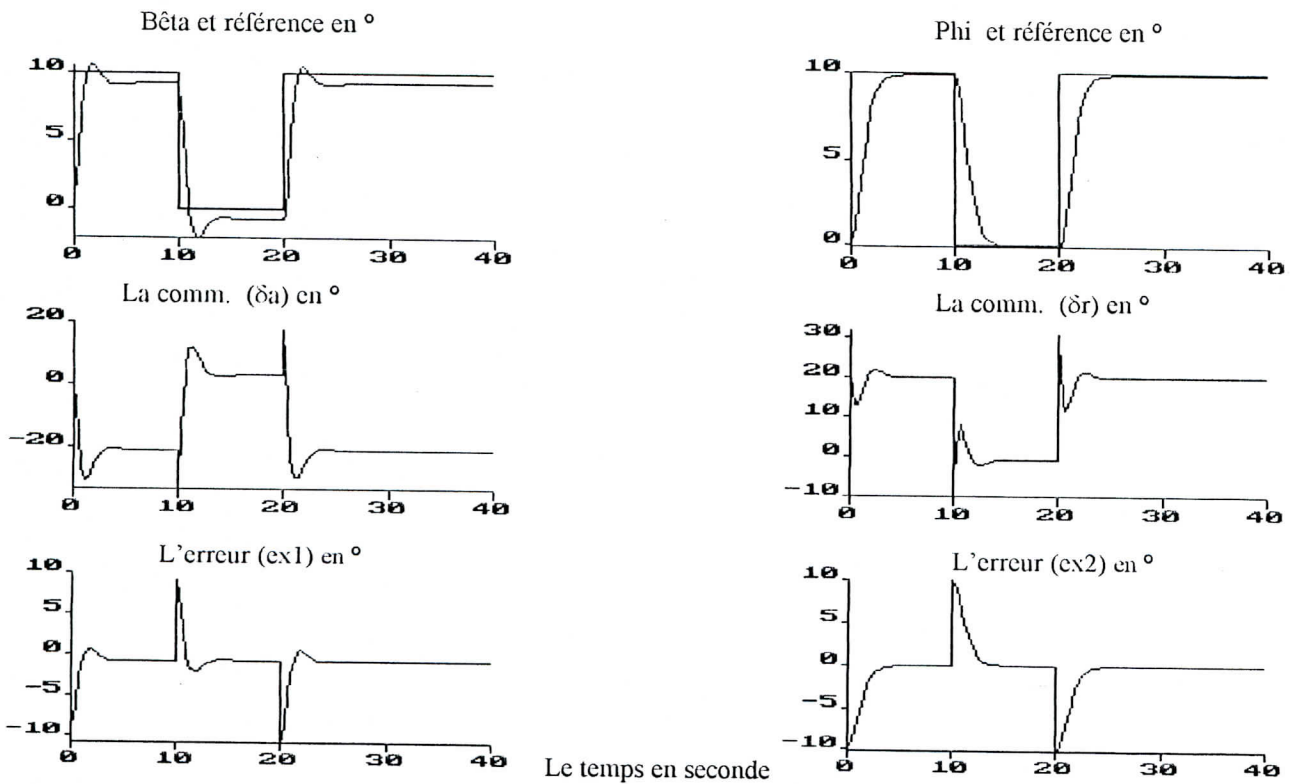


Fig. (2.1.8) Commande par retour d'état avec perturbation externe constante d'amplitude  $a = -1^\circ$

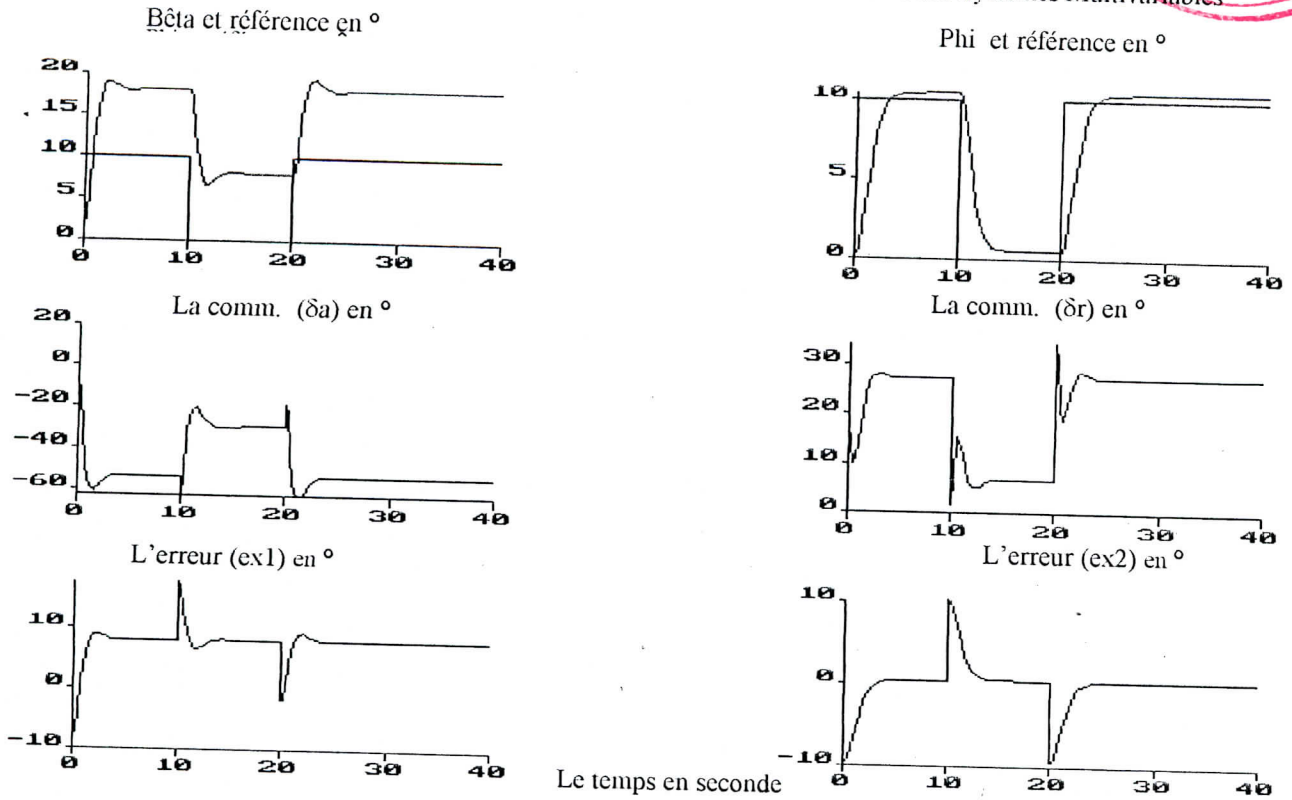


Fig.(2.1.9) Commande par retour d'état avec perturbation externe constante d'amplitude  $a = 10^\circ$

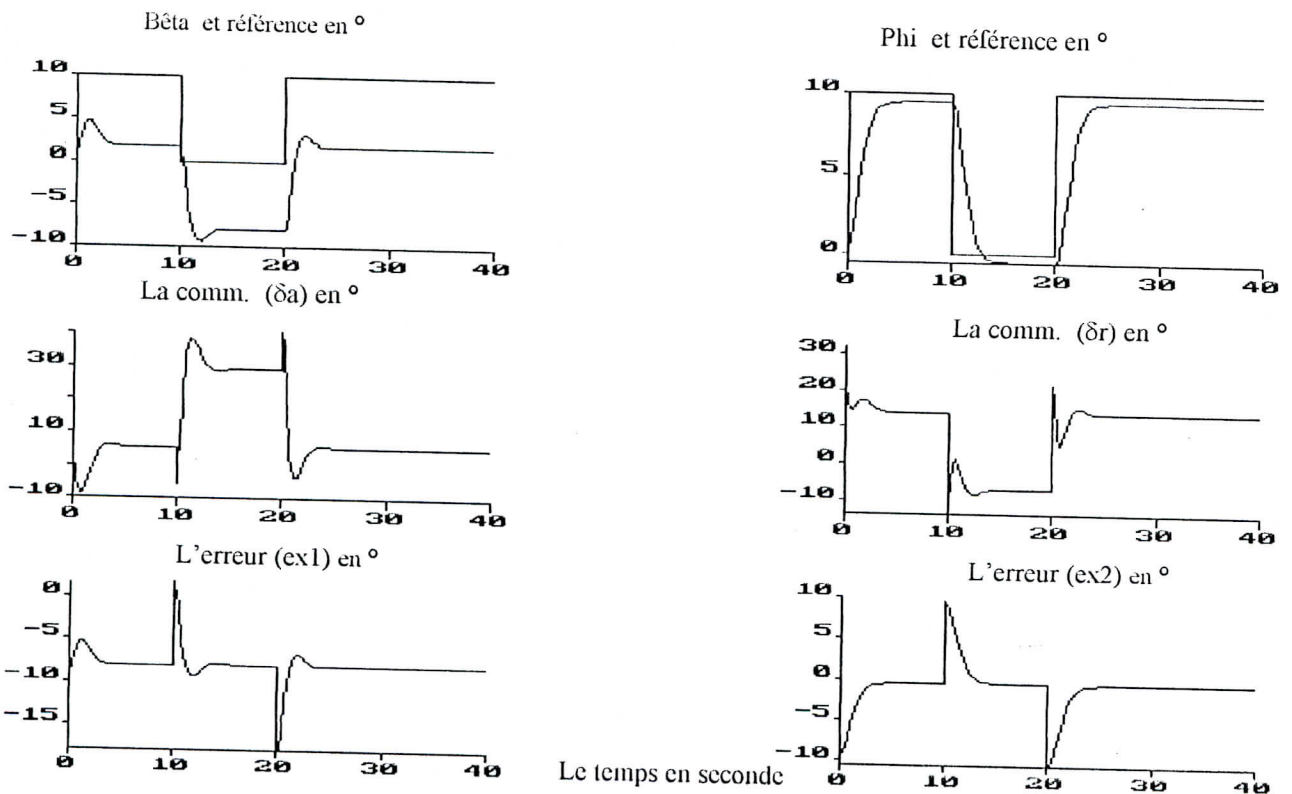


Fig.(2.1.10) Commande par retour d'état avec perturbation externe constante d'amplitude  $a = -10^\circ$

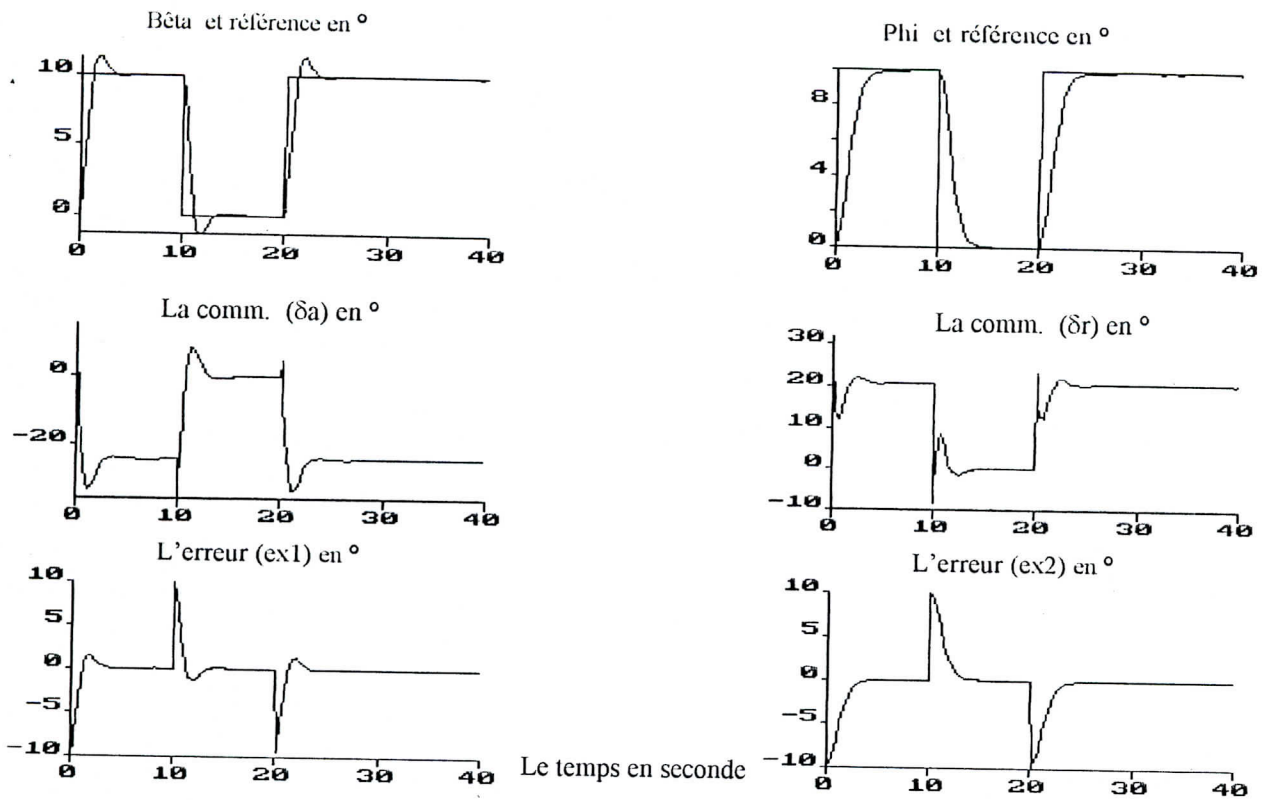


Fig.(2.1.11) commande par retour d'état avec perturbation externe sévère de niveau  $am=0.1^\circ$  et de fréquence  $fm=100\text{hz}$

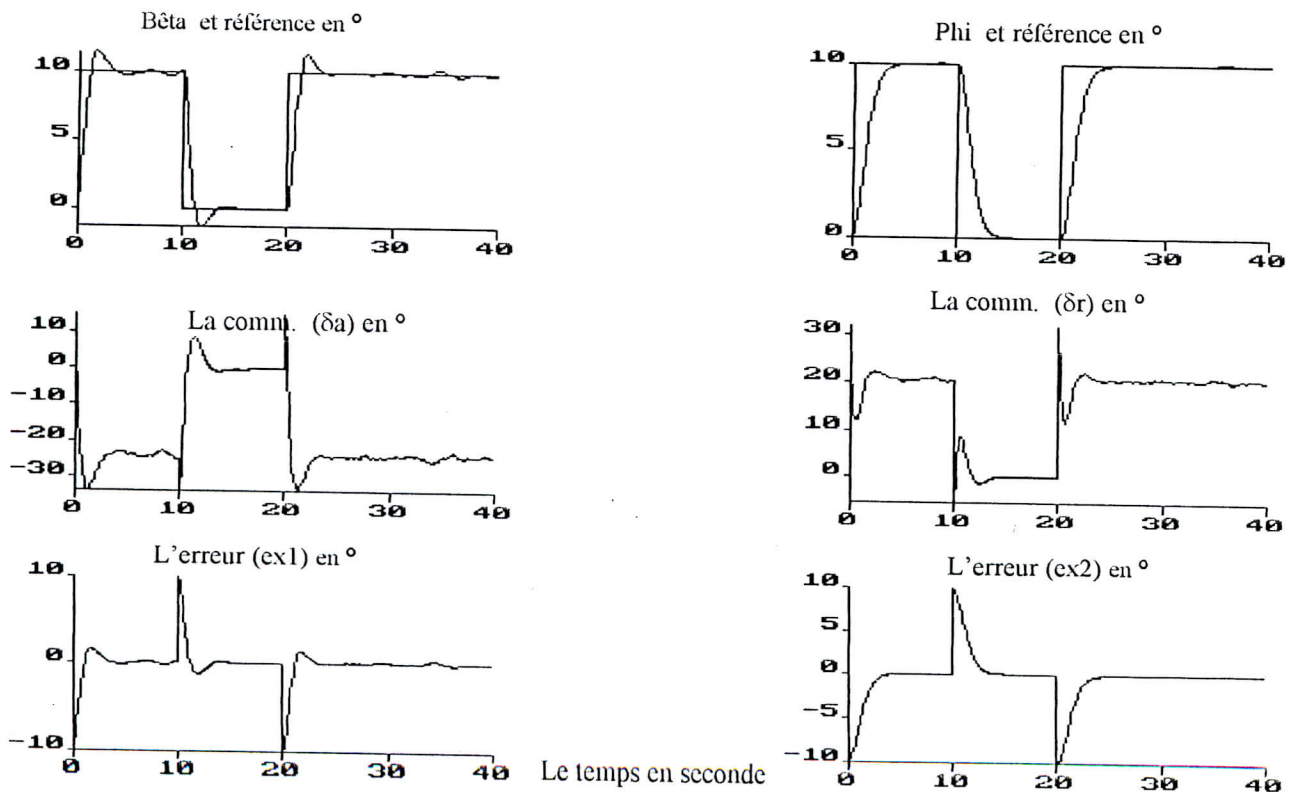


Fig.(2.1.12) Commande par retour d'état avec perturbation externe sévère d'amplitude  $am = 1^\circ$  et de fréquence  $fm=100\text{hz}$

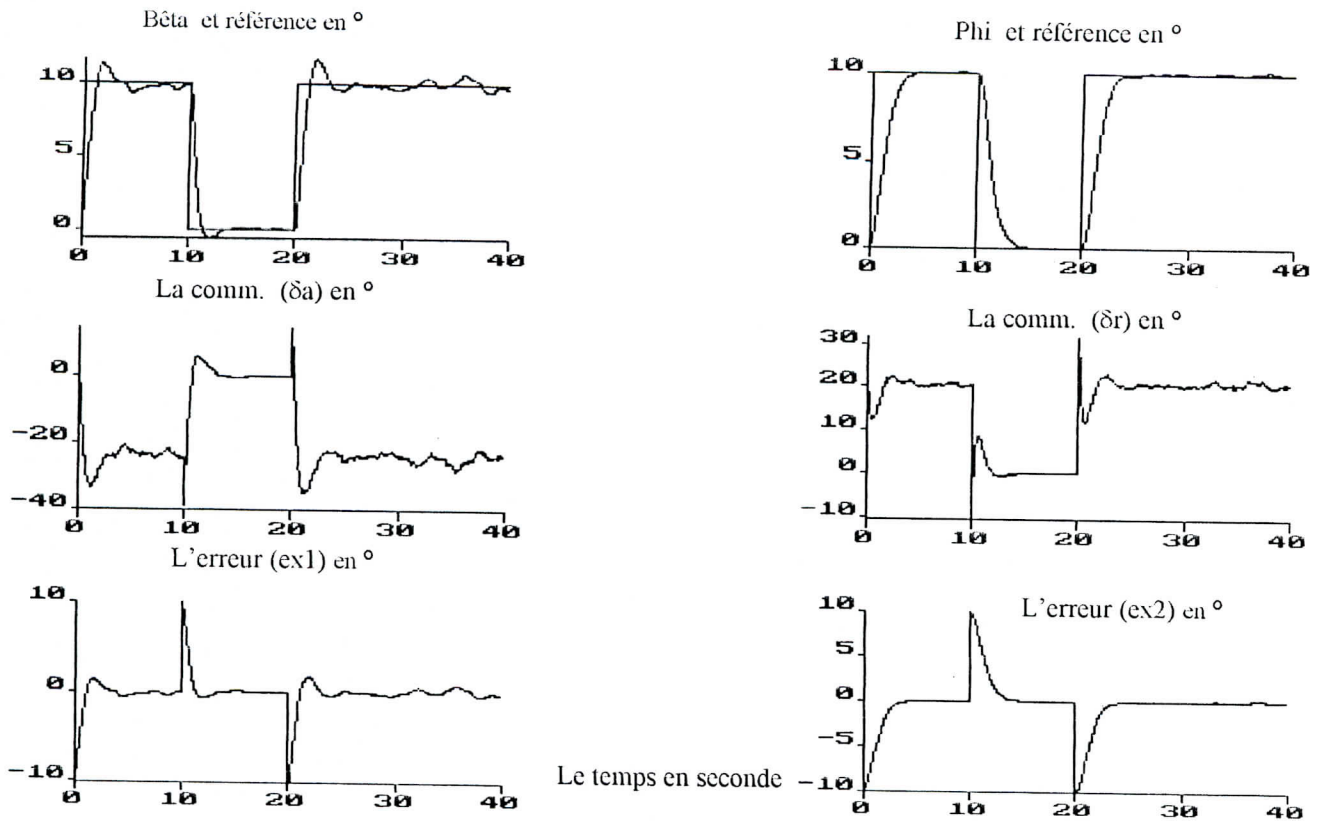


Fig.(2.1.13) Commande par retour d'état avec perturbation externe sévère de niveau  $am = 10^\circ$  et de fréquence  $fm=100$  hz

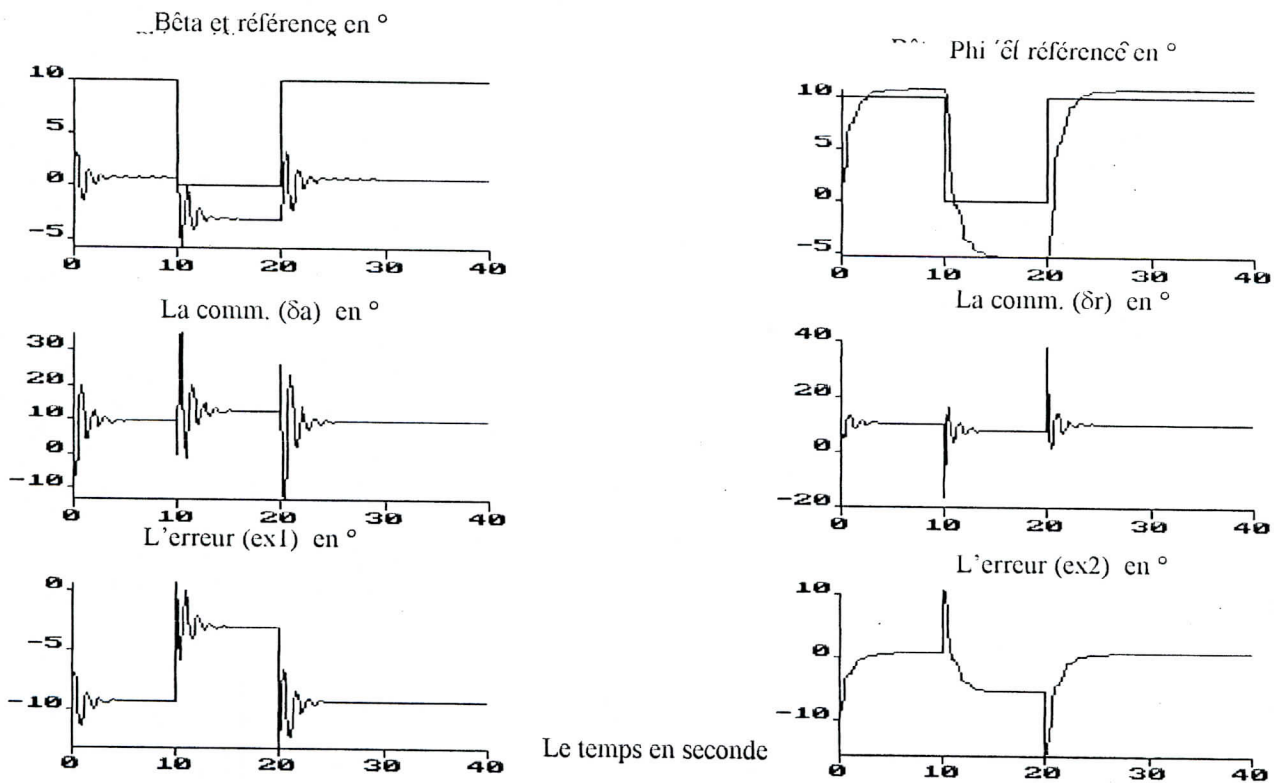
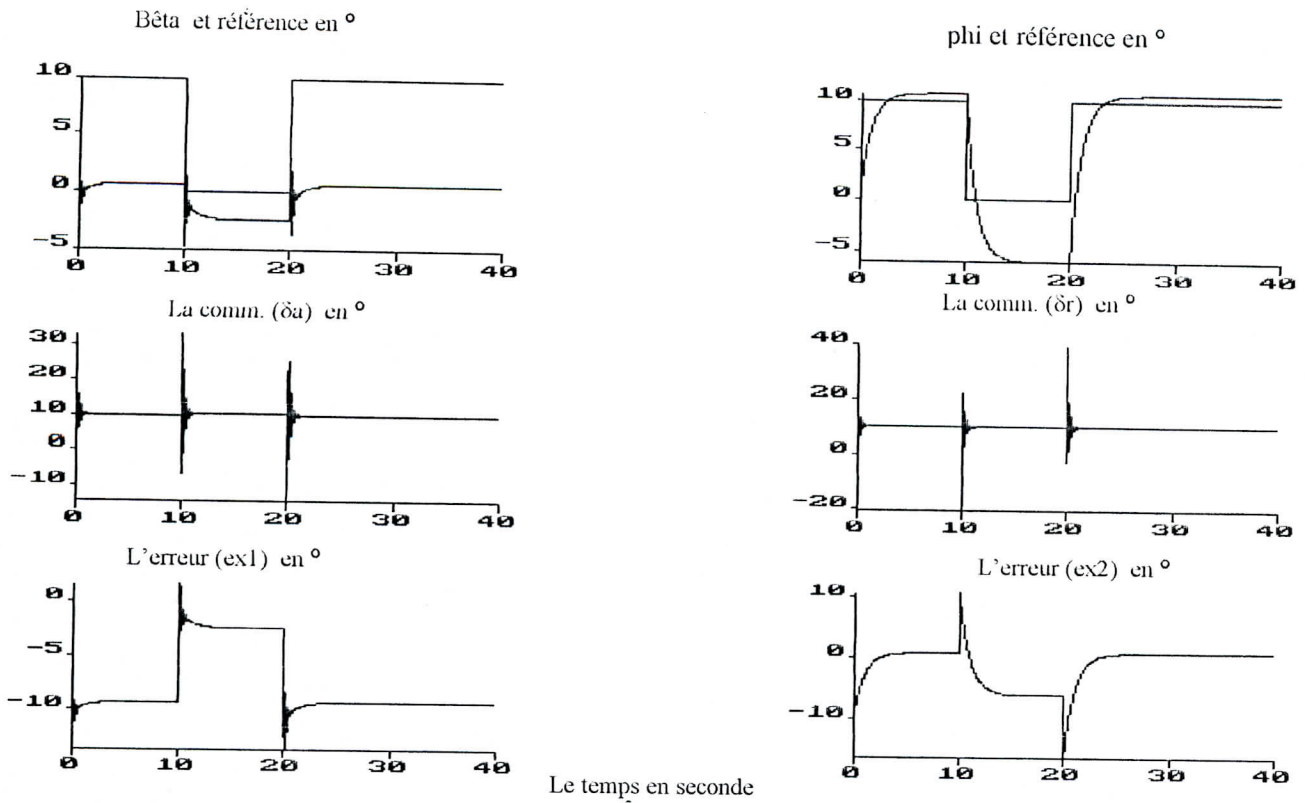
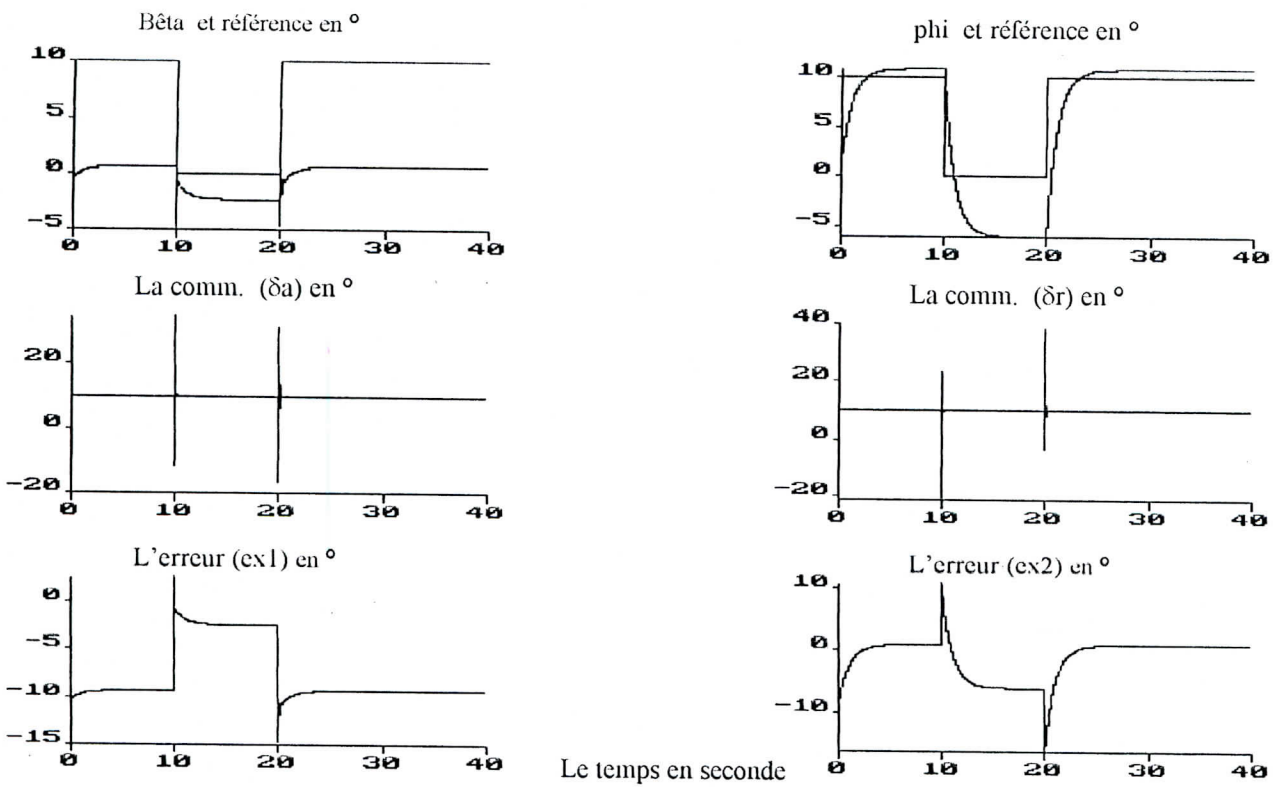


Fig.(2.1.14) Commande par retour d'état avec perturbation interne constante sur la vitesse de vol d'amplitude  $am = 1$  m/s



*Fig.(2.1.15) Commande par retour d'état avec perturbation interne constante sur la vitesse de vol d'amplitude  $a_m = 10 \text{ m/s}$*



*Fig.(2.1.16) Commande par retour d'état avec perturbation interne constante sur la vitesse de vol d'amplitude  $a_m = 100 \text{ m/s}$*



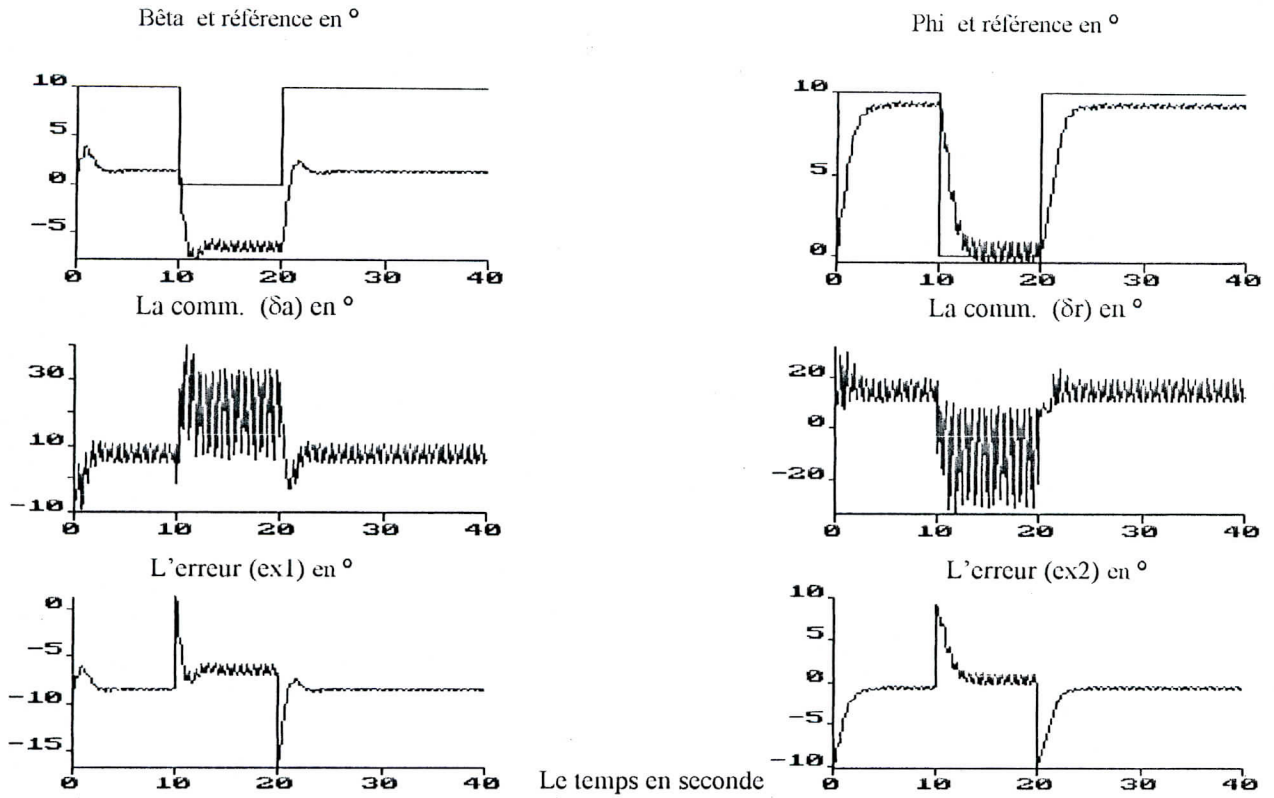


Fig.(2.1.17) Commande par retour d'état avec perturbation interne lente (sinusoïdale) sur la vitesse de vol d'amplitude  $a_m = 1 \text{ m/s}$

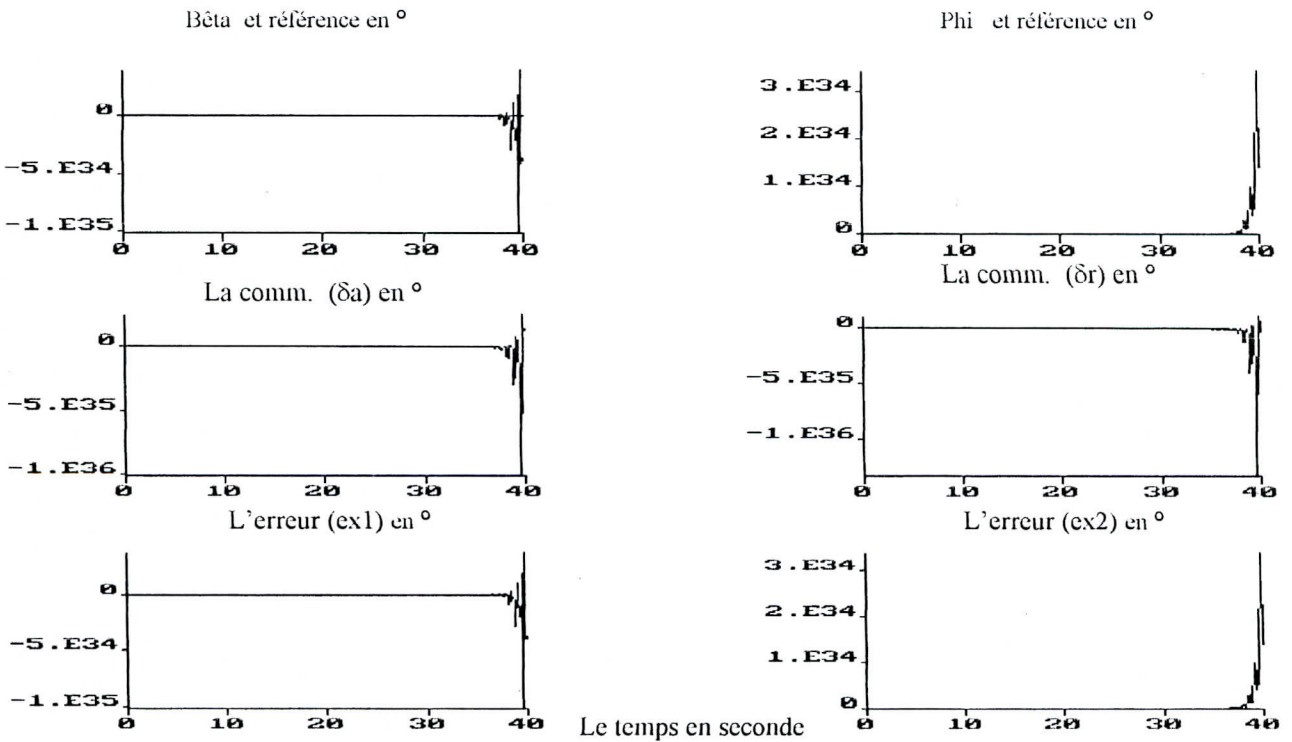
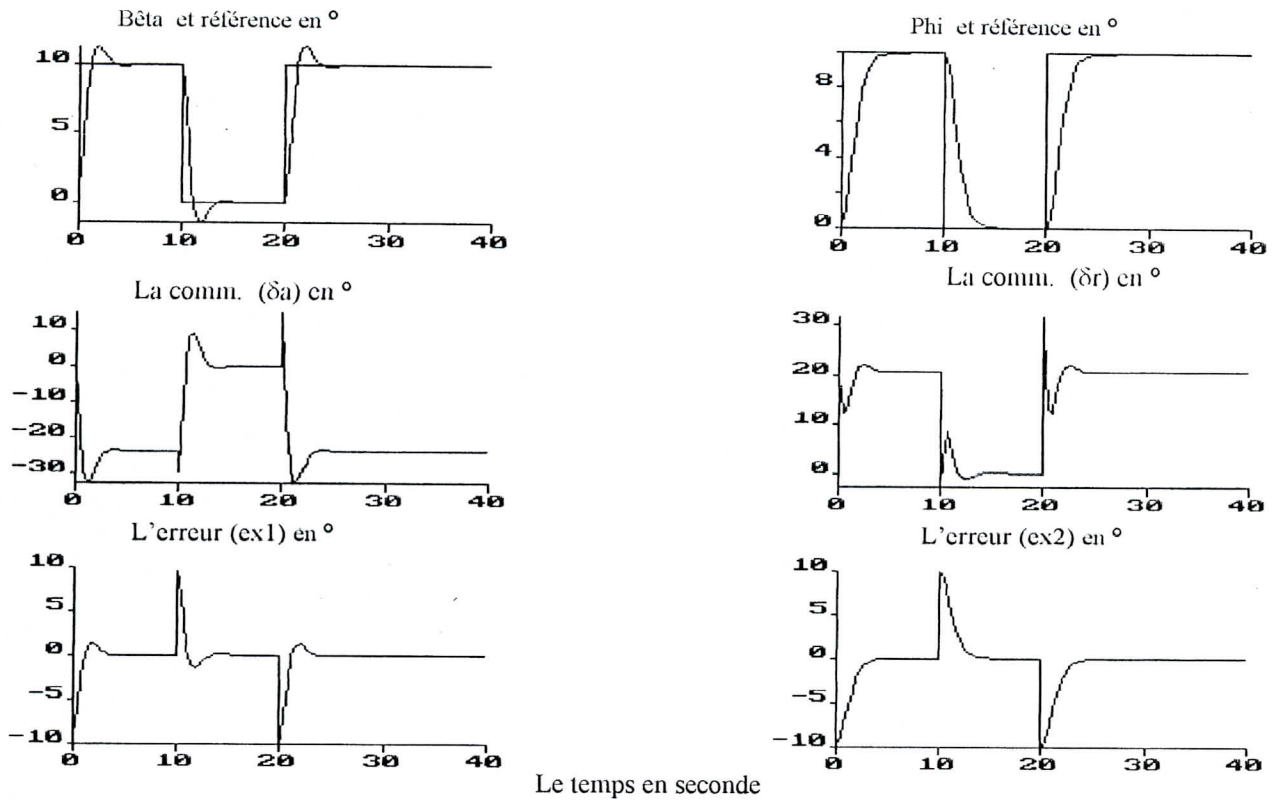
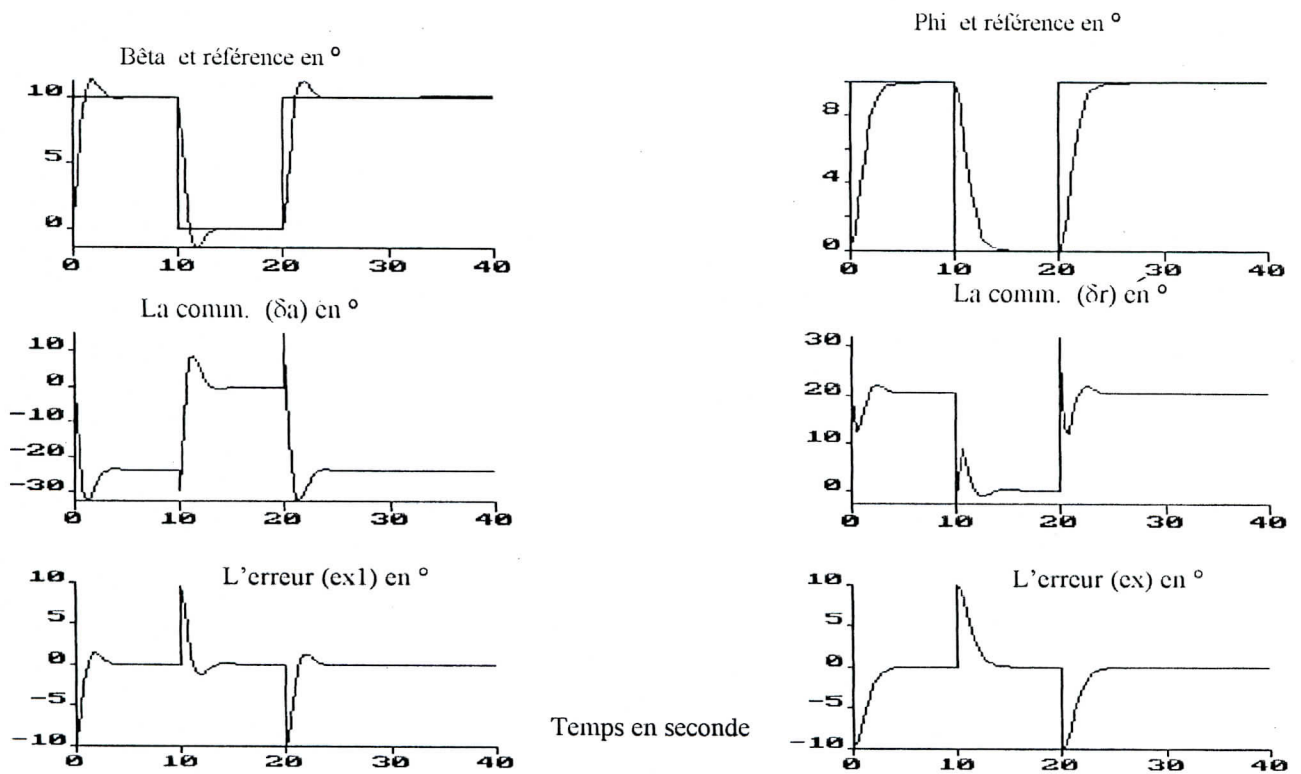


Fig.(2.1.18) Commande par retour d'état avec perturbation interne lente sur la vitesse de vol d'amplitude  $a_m = 10 \text{ m/s}$



*Fig.(2.1.19) Commande par retour d'état avec perturbation interne linéaire sur la masse de l'avion de (0.01kg/s)*

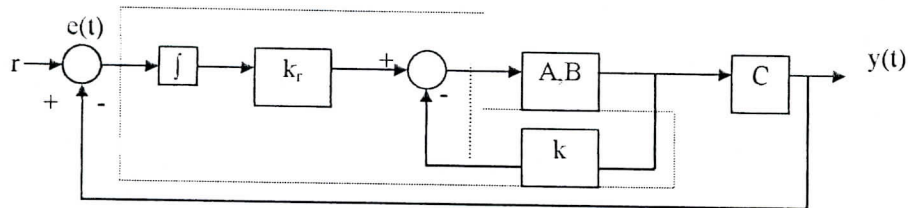


*Fig.(2.1.20) Commande par retour d'état avec perturbation interne linéaire sur la masse de l'avion de (0.1kg/s)*

## II.2. COMMANDE LINEAIRE PAR RETOUR D'ETAT AVEC ACTION INTEGRALE

Le problème avec la commande avec retour d'état est que les erreurs (au repos) peuvent avoir lieu, ceci est dû aux variations des paramètres de A et B (c.à.d du système). Pour cela, on combine une action intégrale pour résoudre ce problème. Le terme de l'action intégrale n'est autre que l'intégrale de l'erreur définie par [16] :

$$(2.11) \quad e = r - y = r - Cx$$



- Schéma synoptique de la commande par retour d'état avec action intégrale -

$$(2.12) \quad x_i = \int_0^t e(\tau) d\tau$$

$$(2.13) \quad \dot{x}_i = r - Cx$$

La commande est :

$$(2.14) \quad u = -Kx + K_i x_i$$

Où  $K_i$  : matrice des gains intégrales

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A-BK)x + BK_i x_i \\ \dot{x}_i &= r - Cx \end{aligned}$$

On définit un nouveau vecteur d'état augmenté

$$(2.16) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BK & BK_i \\ -C & 0_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{n,m} \\ I_m \end{pmatrix} r$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} -0.18063 & -0.9978 & 0.668 & 0.0404 \\ 2.8056 & -0.3269 & -0.06187 & 0.00 \\ -5.4416 & 0.33165 & -1.4776 & 0.00 \\ 0 & 0.668 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.0060211 & 0.036127 \\ -0.19639 & -1.5985 \\ -1.3759 & 1.0528 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donc il est de la forme :

$$(2.17) \quad \dot{z} = A^* z + B^* u + D$$

avec  $u(t) = -K^* z$  où  $K^* = [K \quad -K_i]$

**Stabilité en boucle fermée**

Le choix de K et de K<sub>i</sub> est dicté par le choix des valeurs propres de A\* (qui doivent être à partie réelle négative) les mêmes commentaires sur la commande avec retour d'état sont valables dans ce cas aussi ( $\bar{y} = \bar{r}$ ). Pour éliminer l'erreur finale :

$$\bar{y} = \bar{r} \Rightarrow \bar{x}_i \equiv \text{constante} \Rightarrow x_i = 0$$

On procède toujours par la fonction PLACE de MATLAB après avoir bien sûr vérifié la contrôlabilité de notre système augmenté(\*) avec un vecteur de valeur propre p\* pour calculer k\* puis on déduit K et K<sub>i</sub> [16].

**La dynamique en présence de perturbations :**

**1. Cas de perturbations externes :**

La dynamique est toujours présentée par les équations (2.1) et (2.2) avec la présence du terme d(t) qui représentent les perturbations externes. Sachant que La commande est :  $u = -K x + K_i x_i$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK) x + BK_i r + d(t) \\ \dot{x}_i &= r - C x \end{aligned}$$

nous aurons donc, le système augmenté suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - Bk & Bk_i \\ -C & 0_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{n,m} \\ I_m \end{pmatrix} r + d(t)$$

**N.B :** la stabilité en boucle fermée du procédé, en présence de perturbations externes d(t) est acquise dans la mesure où l'erreur de sortie est bornée tant

**2. Cas de perturbations internes:**

Interprétées par une variation des deux matrices A et B dû aux variations de la masse m par le terme δm ou la variation de la vitesse V0 par le terme δ. A cet effet A devient A+δA et B devient B+δB, ainsi, le système augmenté devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A + \delta A) - (B + \delta B)k & (B + \delta B)k_i \\ -C & 0_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{n,m} \\ I_m \end{pmatrix} r$$

### II.2.1 SIMULATION ET INTERPRETATIONS :

Comme pour le cas de la commande par retour d'état, on choisit un échelon comme signal de référence, pour les simulations sans la présence de perturbations, et un (créneau + échelon) pour les simulations avec perturbations.

#### Figures(2.2.1) :

Représente, le résultat de simulation d'une commande par retour d'état avec action intégral sans perturbation. En imposant un coefficient d'amortissement  $\xi = 0.2$ , un temps de réponse  $t_s = 3.6s$  avec la pulsation propre du système  $\omega = 1.8$ , ceci donne un vecteur de pôles désirés et nous génère les matrices gains de la commande  $K$  et  $K_i$  tels que :

$$K = \begin{bmatrix} 27.1814 & -5.9506 & -2.5979 & -4.6246 \\ 3.8164 & -3.6086 & 0.4908 & 0.7484 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_i = \begin{bmatrix} -9.7532 & 23.8008 \\ 1.2061 & 2.7003 \end{bmatrix}$$

On remarque que le signal de sortie  $\Phi$  et  $\beta$  suivent les références  $r_2$  et  $r_1$  respectivement, sans erreur statique, après une phase oscillatoire. Effectivement, la présence de l'action intégrale a permis d'éliminer l'erreur statique entre signal de sortie et référence ; reste à jouer sur l'amortissement pour éliminer la phase oscillatoire. Remarquons que les signaux de sorties ( $y_1$  et  $y_2$ ) et de commandes ( $u_1$  et  $u_2$ ) restent bornés en régime permanent, et la stabilité du système est maintenue.

#### Figures(2.2.2) :

Cette figure représente la même simulation que précédemment seulement qu'on fait augmenter  $\xi$  de 0.2 à 0.3, ce qui va donner les gains suivants :

$$K = \begin{bmatrix} 3.1838 & -2.5002 & -3.0498 & -6.0921 \\ 5.7230 & -3.8798 & 0.5461 & 0.7509 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_i = \begin{bmatrix} -11.7228 & -1.0944 \\ 0.3029 & 4.7257 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, seule la sortie  $\Phi$  possède une phase oscillatoire, mais elle est plus amortie. Le système reste toujours stable mais mieux amorti que le premier cas.

#### Figures(2.2.3) :

Pour voir plus clairement l'effet de  $\xi$  nous allons l'augmenter à 0.6, les gains deviennent :

$$K = \begin{bmatrix} 5.8834 & -2.9581 & -3.7471 & -9.6109 \\ 5.8310 & -3.8659 & 0.5327 & 0.7559 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_i = \begin{bmatrix} -11.1846 & 1.1697 \\ 0.6890 & 4.8514 \end{bmatrix}$$

On constate que le système est mieux amorti en mentionnant un petit dépassement de 1° au niveau de bêta; en ayant des commandes toujours bornées.

**Figures(2.2.4) :**

Une dernière simulation est faite avec un coefficient d'amortissement égale à 0.7, les gains de commandes sont dans ce cas :

$$K = \begin{bmatrix} 3.3788 & -2.6252 & -4.5990 & -13.2683 \\ 6.0766 & -3.9595 & -0.2670 & -4.4590 \end{bmatrix} \text{ et } K_i = \begin{bmatrix} -8.8383 & -0.7063 \\ -5.3752 & -5.8026 \end{bmatrix}$$

On remarque que les signaux de sortie  $\beta$  et  $\Phi$  poursuivent parfaitement les signaux de référence. Dans ce cas le système est le mieux amortie.

**Figures(2.2.5), (2.2.6), (2.2.7) et (2.2.8) :**

Ces figures représentent le cas où l'avion subit une perturbation externe constante, pour quartes valeurs d'amplitudes du signal perturbateur. Son influence se caractérise par une augmentation ou une diminution des signaux de commandes par rapport aux cas précédents ; dépendant de la perturbation utilisée. On note aussi, qu'il y a une parfaite poursuite des signaux de sortie aux signaux de références. On déduit alors, que la commande est robuste face à ces perturbations et maintient le système stable, avec des commandes bornées.

**Figures(2.2.9), (2.2.10) et (2.2.11):**

On applique à notre système une perturbation sévère (rafale de vent) pour trois valeurs (0. 1, 1, 10). On remarque, que les signaux de commandes deviennent de plus en plus importants a chaque fois qu'on augmente le niveau du bruit, mais restent toujours bornés avec une bonne poursuite des signaux de sorties aux références. Donc le système reste stable mais la commande n'est pas réalisable en pratique.

**Figures(2.2.12), (2.2.13) et (2.2.14):**

C'est le cas d'une perturbation interne constante de vitesse de vol pour trois valeurs d'amplitude du signal de perturbation(1m/s, 10m/s et 100m/s). On constate que les signaux de sortie poursuivent parfaitement les références et que, les signaux de commandes restent toujours bornés en présentant des zones très excitées; ainsi que leurs bornitudes est différentes à celle des cas non perturbés. Le système est stables mais les commandes ne sont pas pratique.

**Figures(2.2.15) et (2.2.16):**

Ces deux figures montrent le résultat de simulation, en présence d'une perturbation interne lente de la vitesse de vol pour deux valeurs d'amplitude du signal perturbateur. On constate

que la commande n'est pas robuste face à cette perturbation à cause des non-linéarités présents dans A et B, et rend le système complètement instable dans le deuxième cas.

**Figures(2.1.17) et (2.1.18) :**

Ces figures représente le cas d'une perturbation interne lente sur la masse de l'avion pour deux valeurs différentes d'amplitude du signal perturbateur (0.01 kg/s et 0.1 kg/s). On remarque que le système poursuit la référence avec une erreur statique nulle. On note aussi que les signaux de commandes sont bornés, et ne présentent pas de piques comme dans le cas de la commande par retour d'état ; ainsi la commande a ignoré l'effet causé par la non-linéarité des deux matrices A et B, dû à la perturbation assez faible des paramètres.

graphes de simulation du mouvement latéral pour le contrôle de  $\beta$  et  $\Phi$

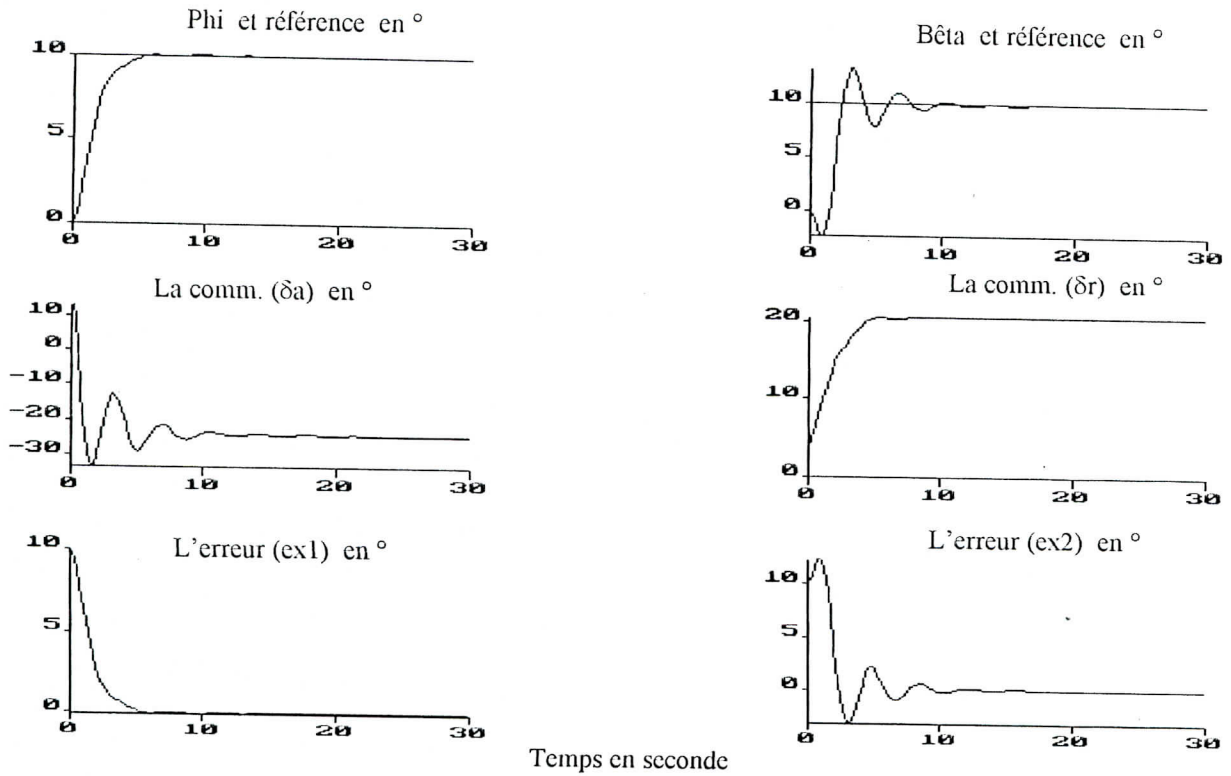


Fig. (2.2.1) : Commande par retour d'état avec action intégrale sans perturbation pour  $\xi = 0.2$

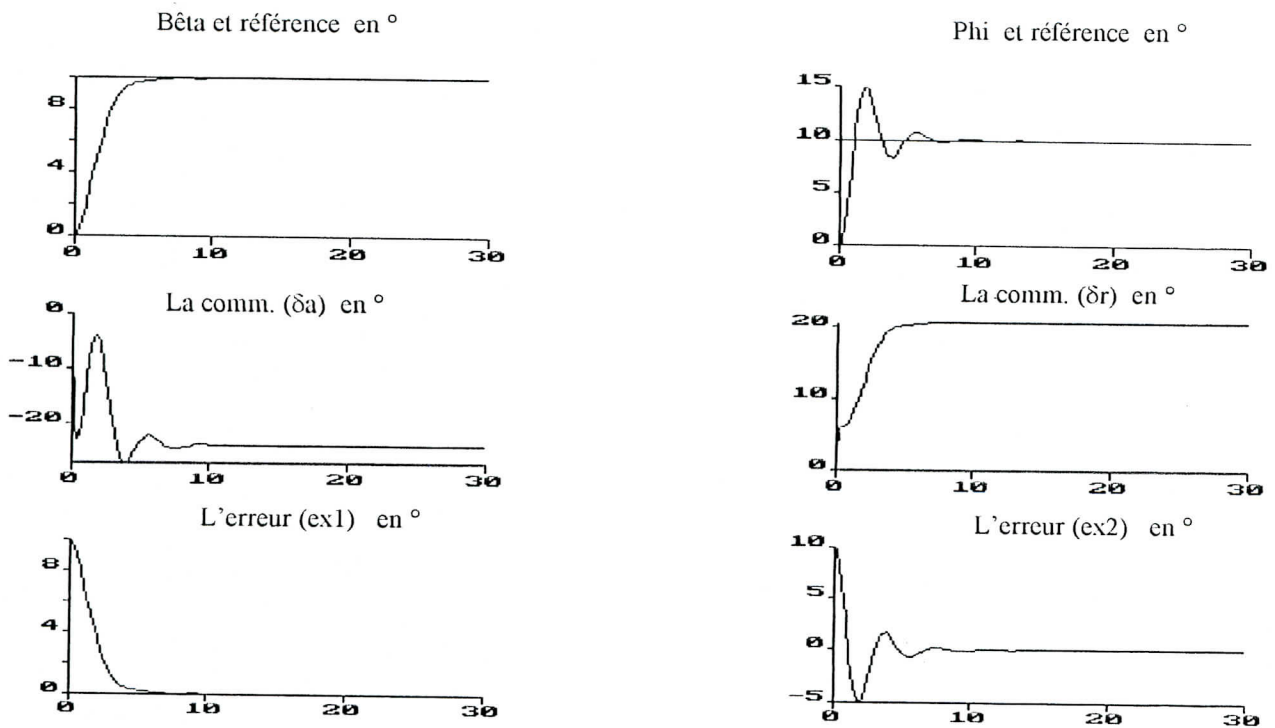


Fig. (2.2.2) : Commande par retour d'état avec action intégrale sans perturbation pour  $\xi = 0.3$



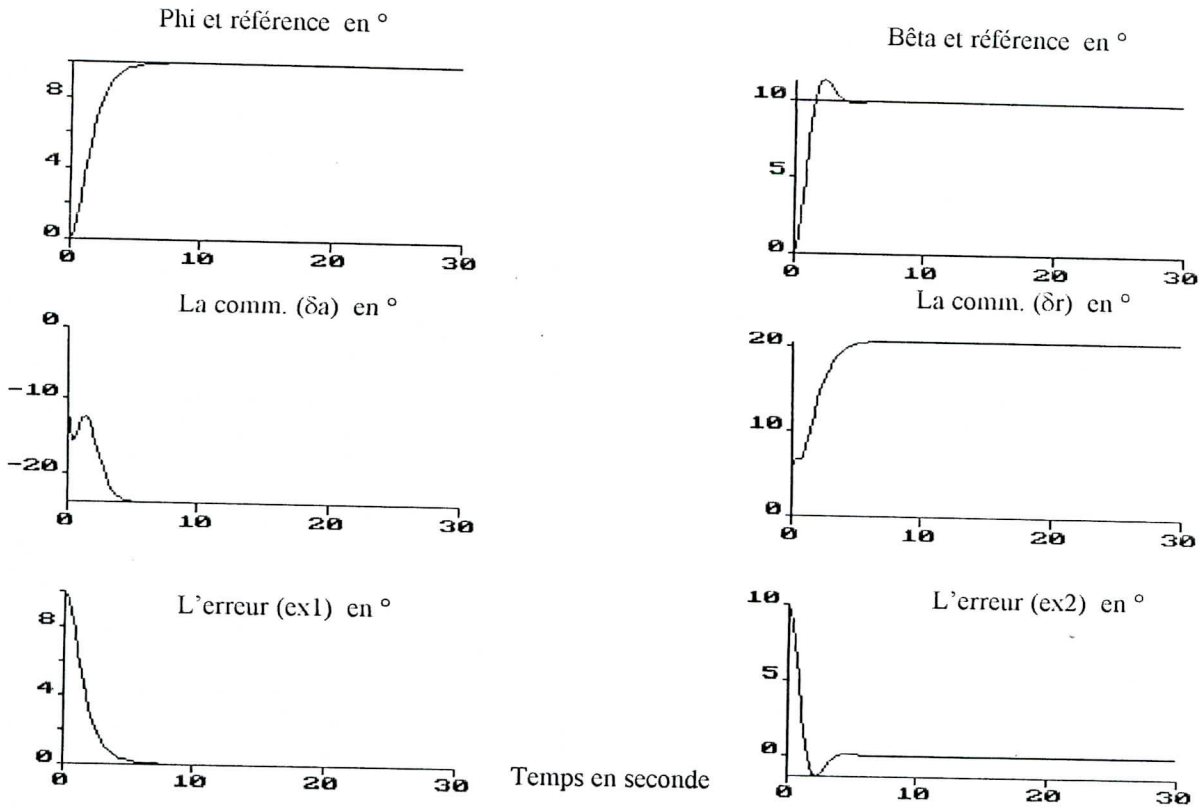


Fig.(2.2.3) : Commande par retour d'état avec action intégrale sans perturbation pour  $\xi = 0.6$

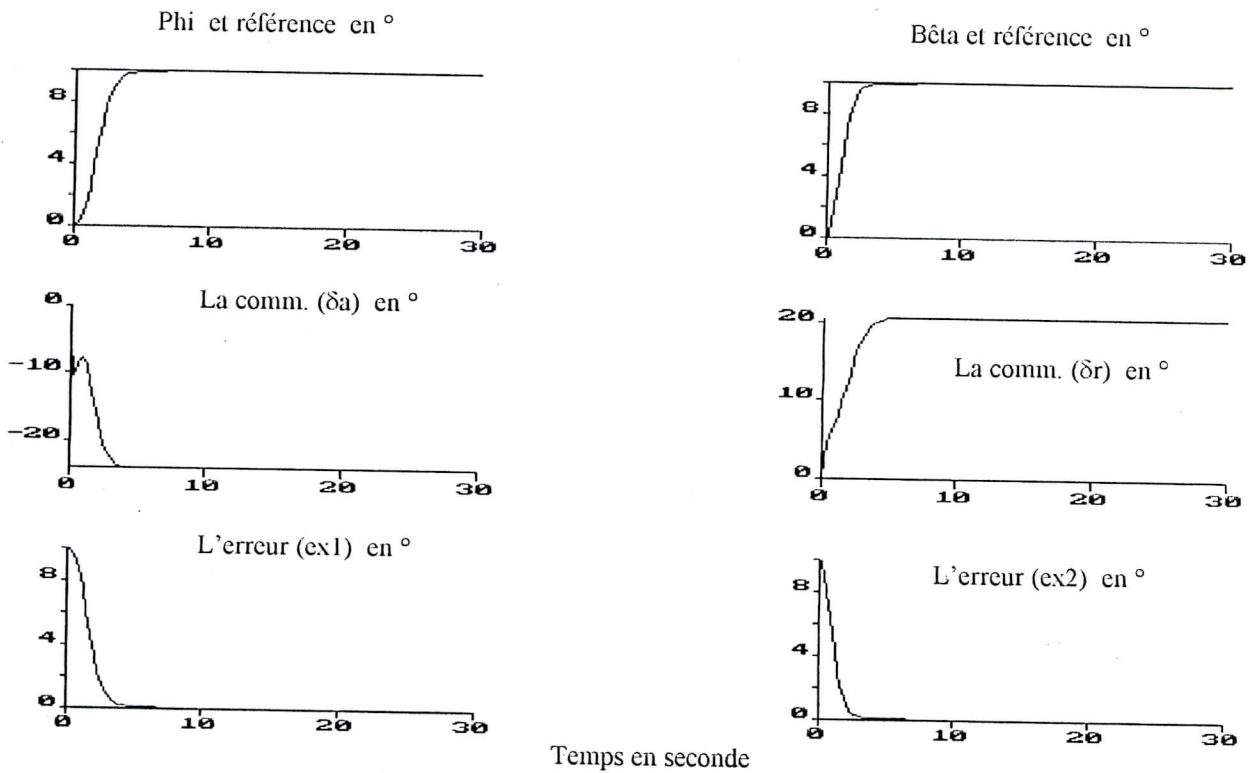


Fig.(2.2.4) : Commande par retour d'état avec action intégrale sans perturbation pour  $\xi = 0.7$

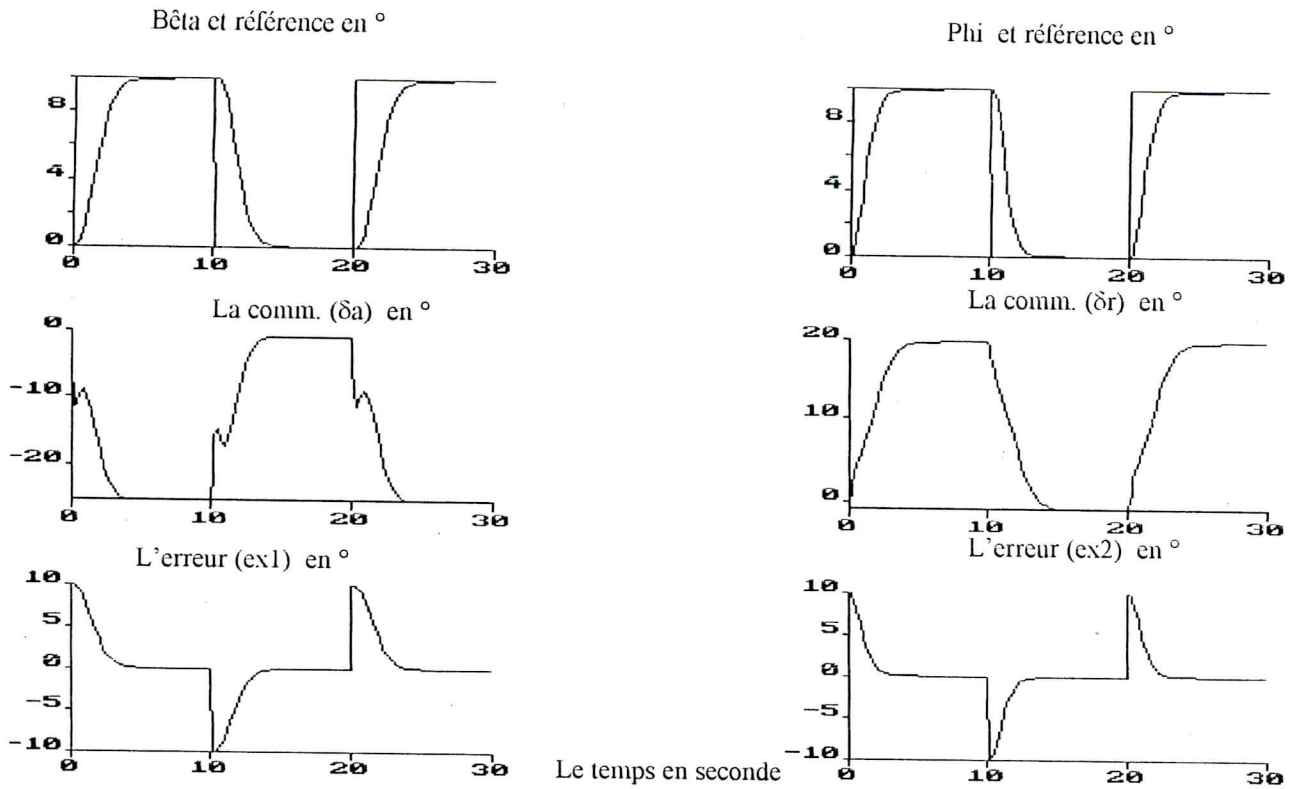


Fig. (2.2.5) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation externe constante d'amplitude  $a = 1^\circ$

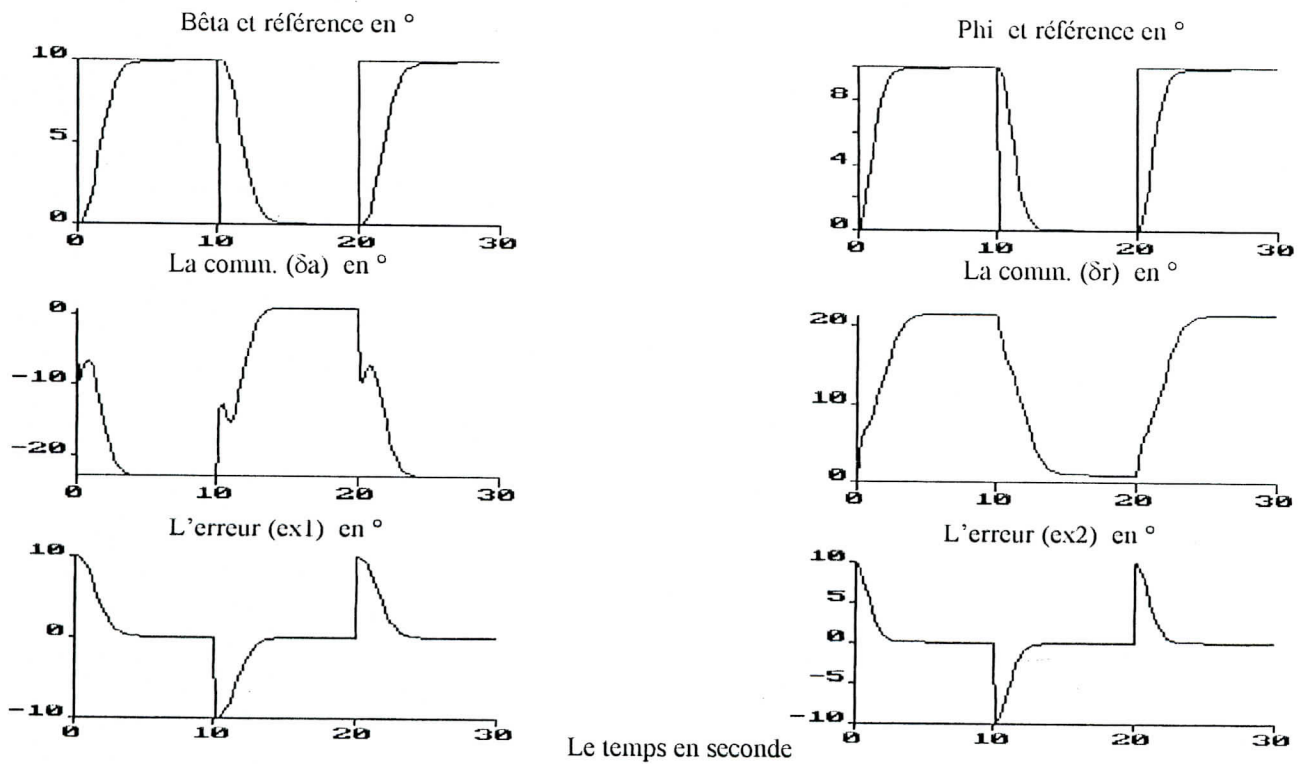


Fig. (2.2.6) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation externe constante d'amplitude  $a = -1^\circ$

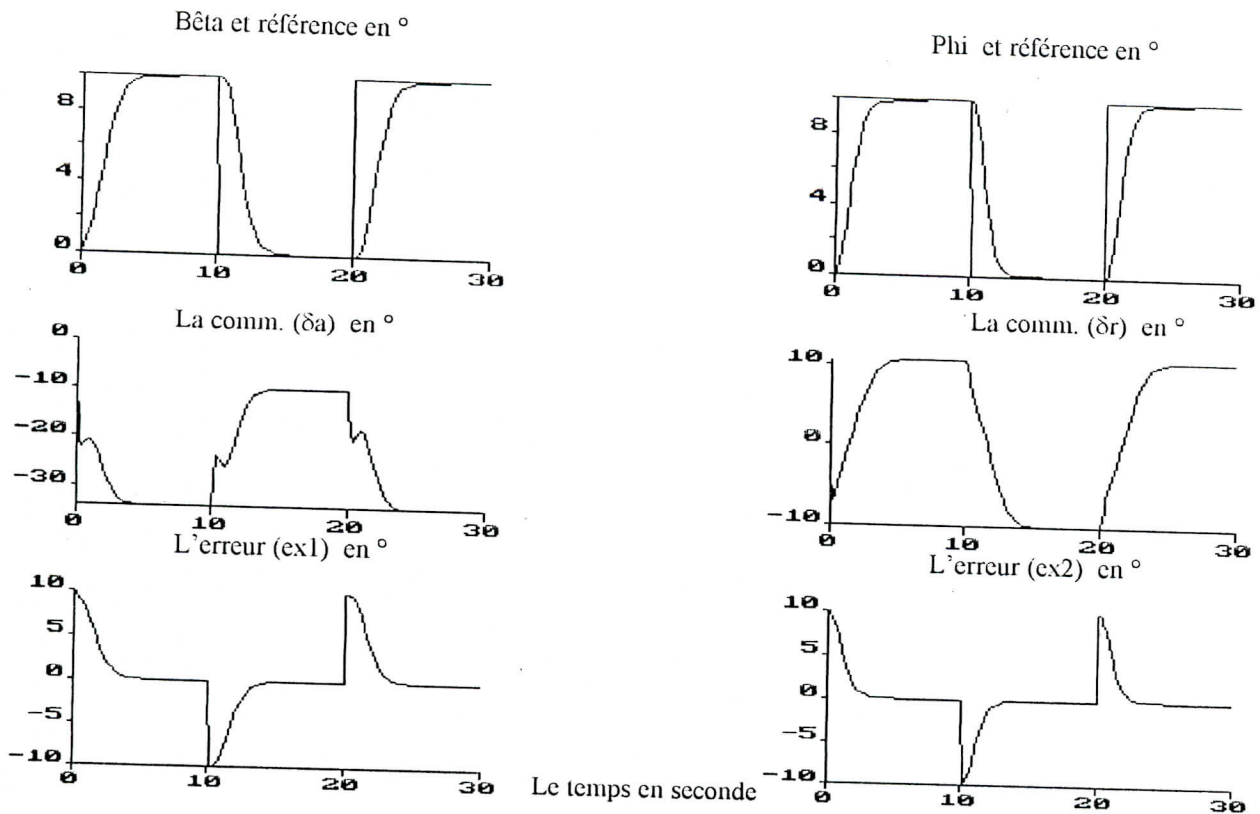


Fig. (2.2.7) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation externe constante d'amplitude  $a = 10^\circ$

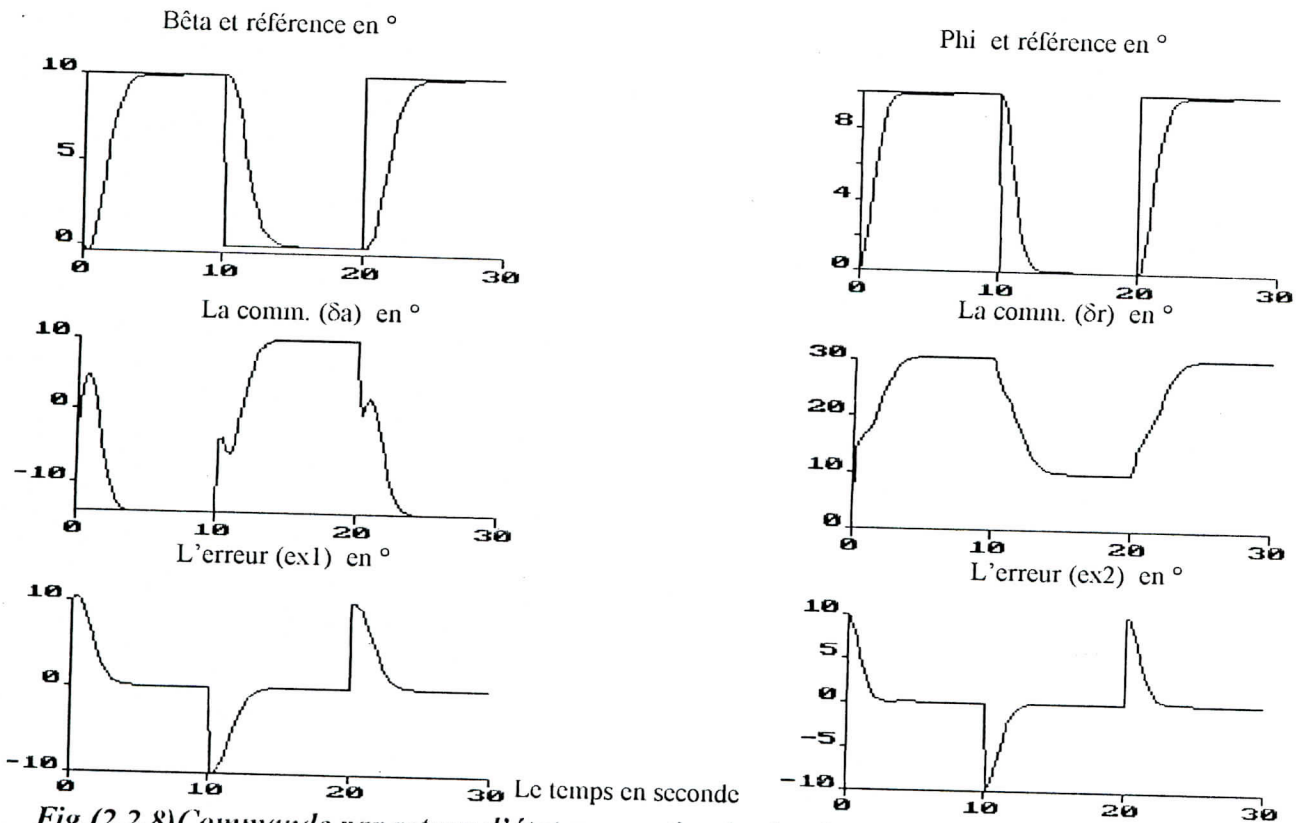


Fig. (2.2.8) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation externe constante d'amplitude  $a = -10^\circ$

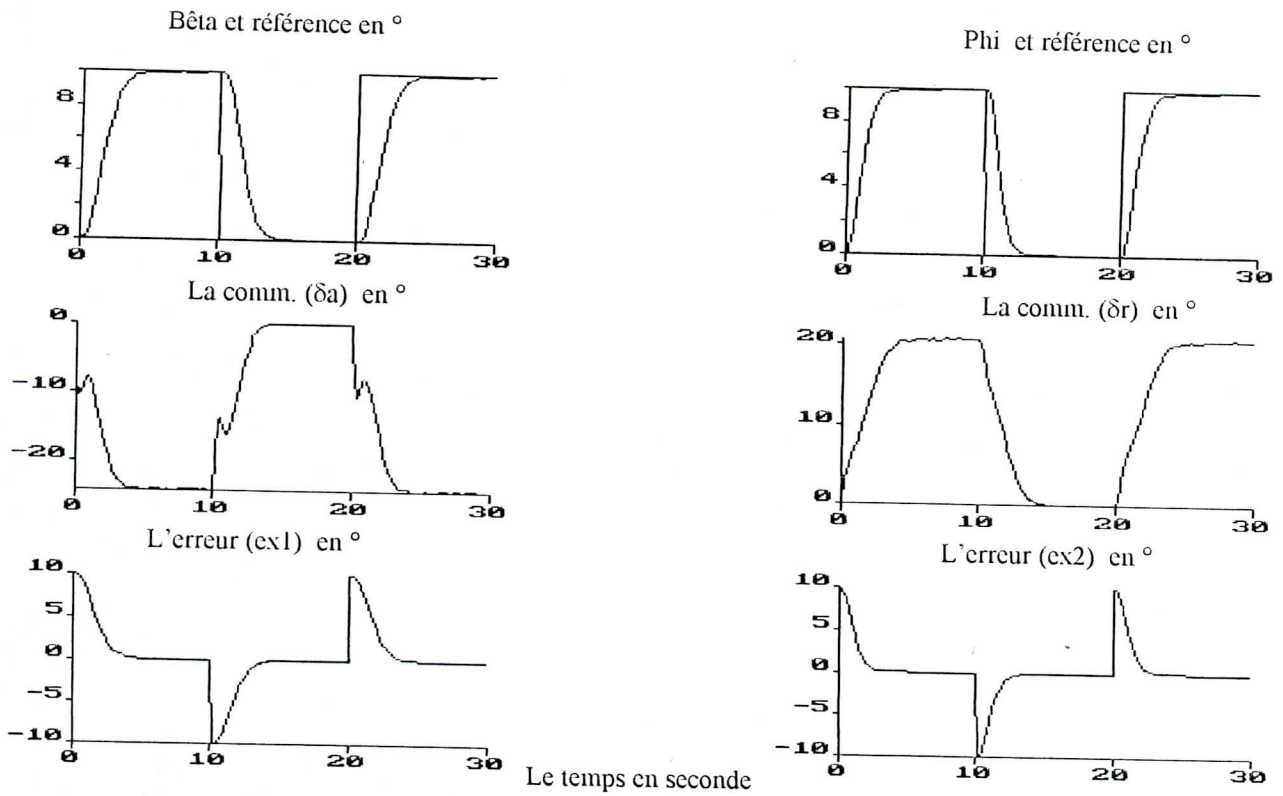


Fig. (2.2.9) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation externe sévère de niveau  $a_m = 0.1^\circ$

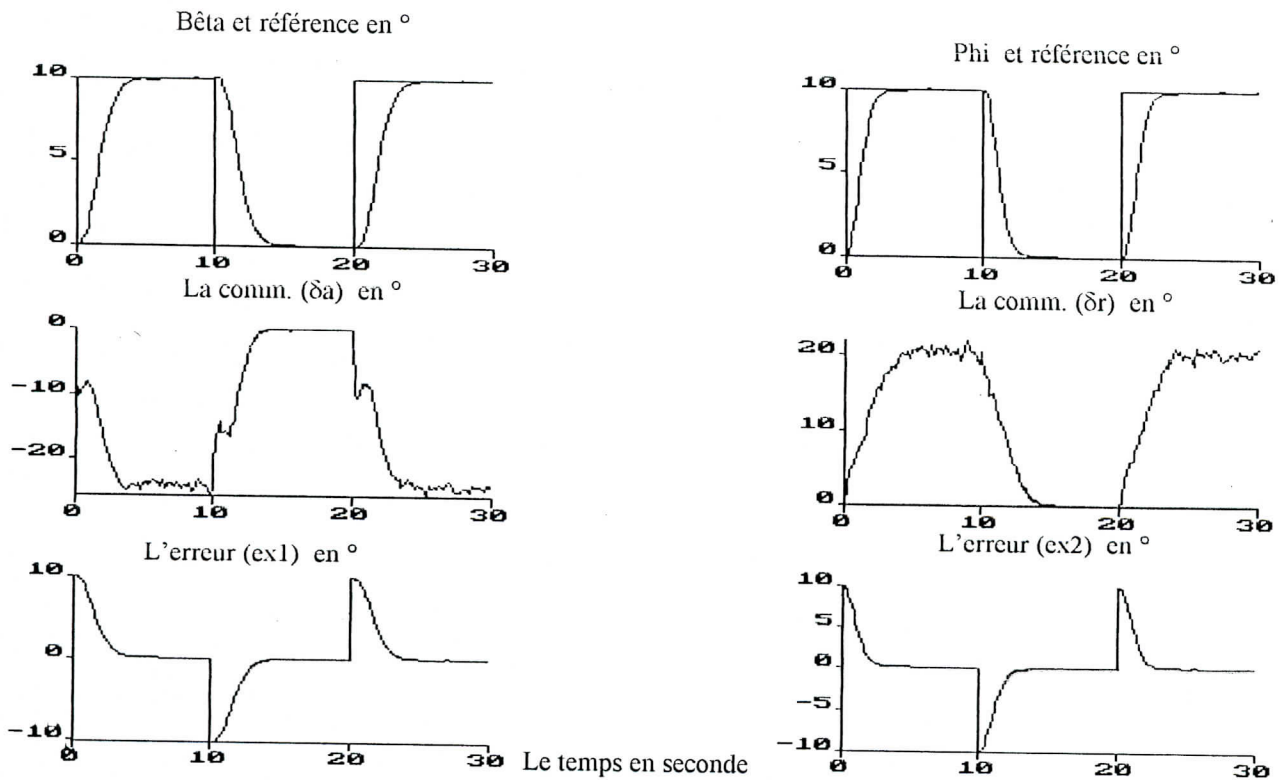


Fig. (2.2.10) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation externe sévère de niveau  $a_m = 1^\circ$

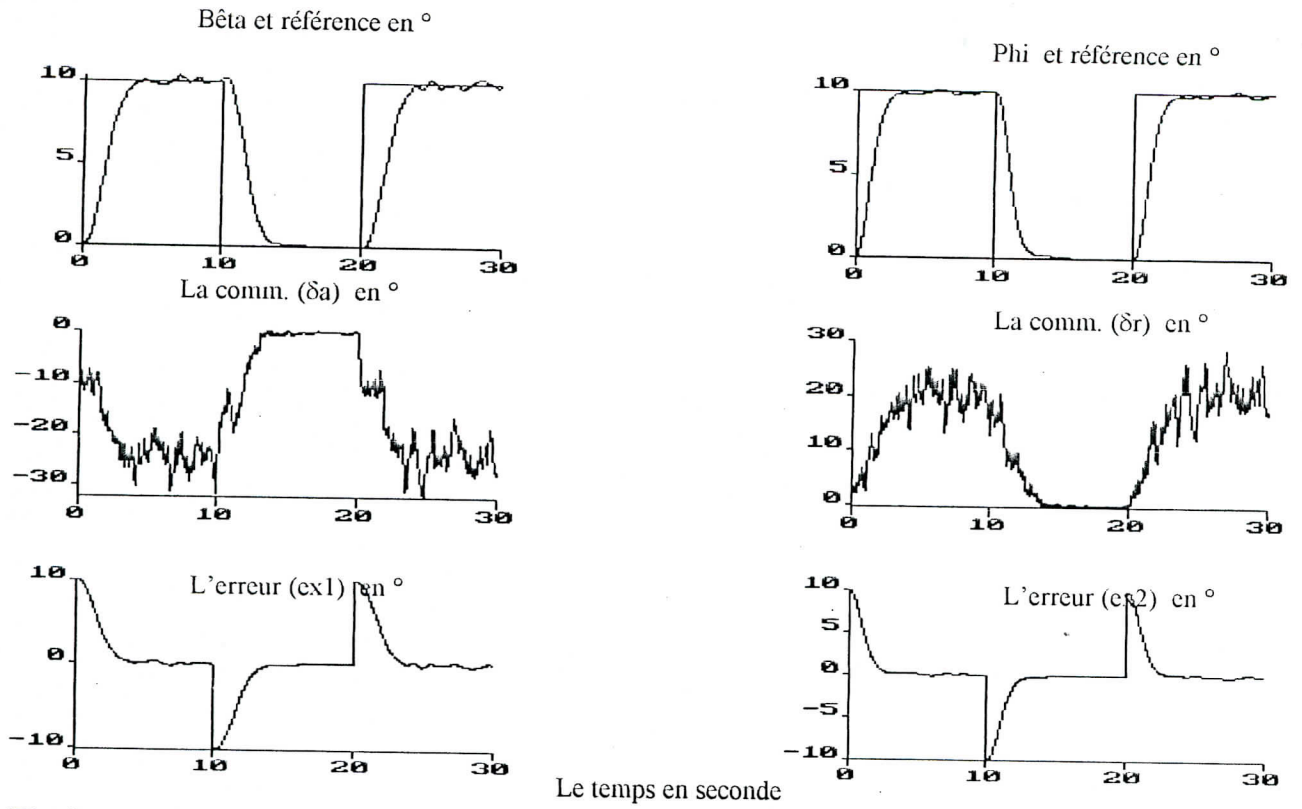


Fig. (2.2.11) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation externe sévère de niveau  $a_m = 10^\circ$

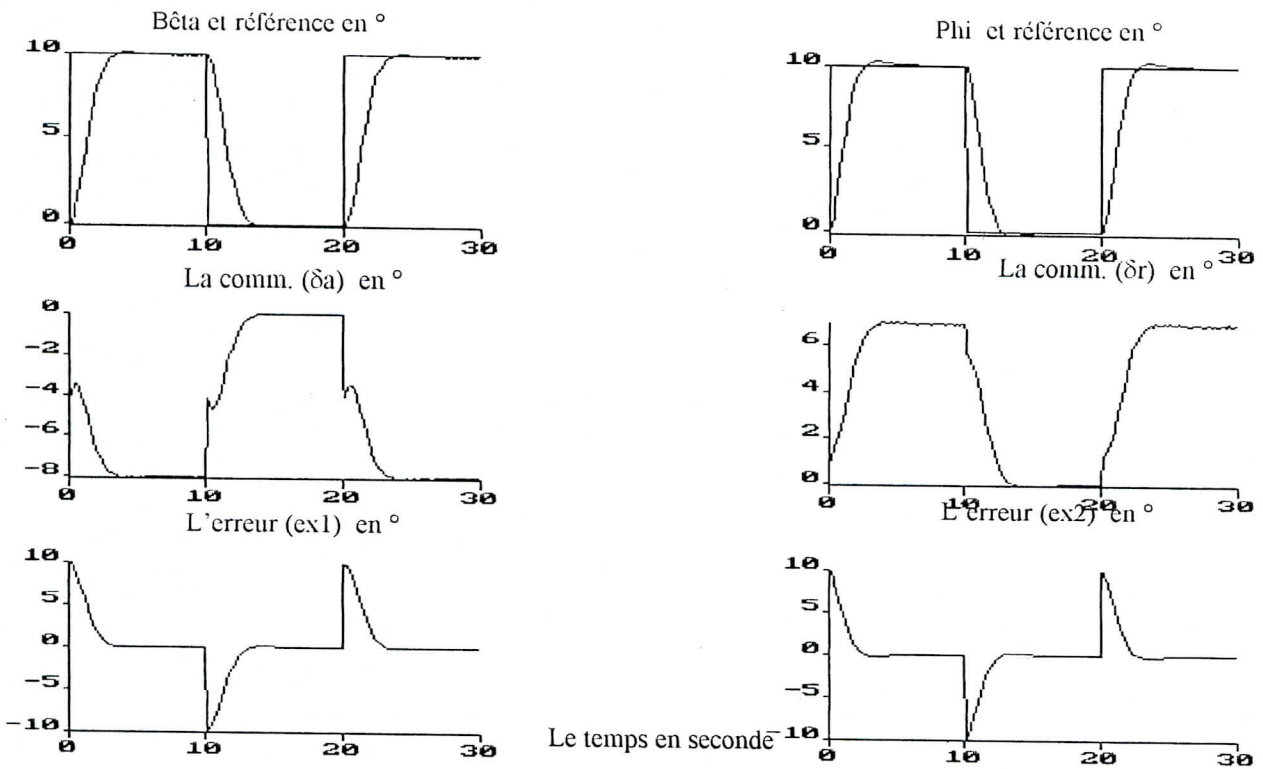


Fig. (2.2.12) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation interne constante sur la vitesse ( $V_0$ ) d'amplitude  $a_m = 1 \text{ m/s}$

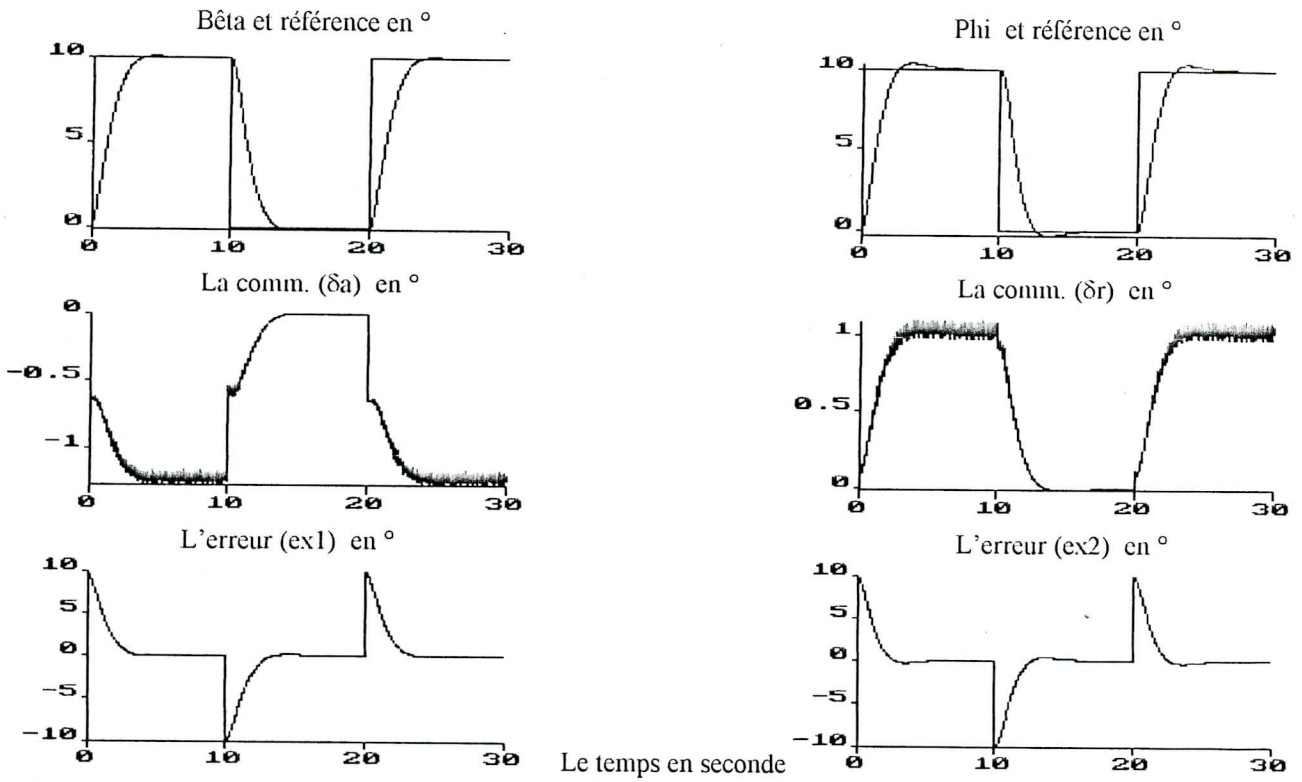


Fig. (2.2.13) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation interne constante sur la vitesse ( $V_0$ ) d'amplitude  $a_m = 10$  m/s

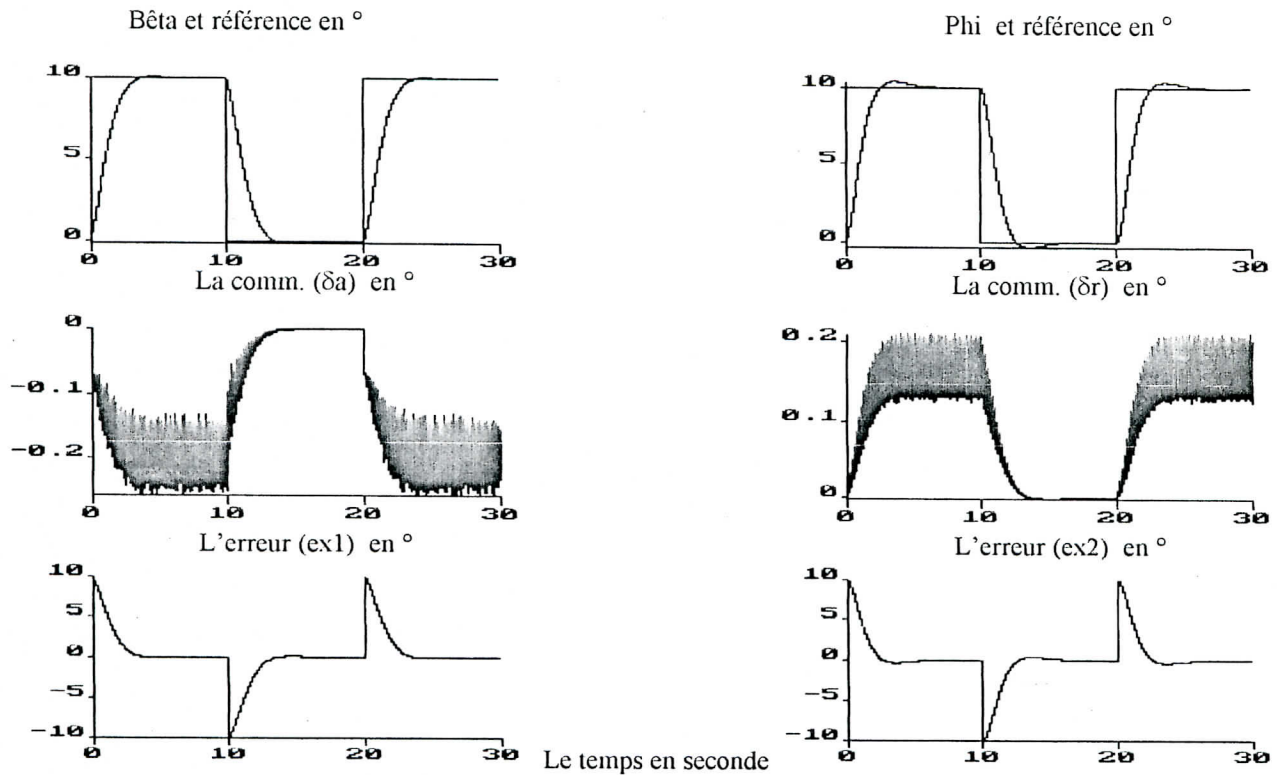


Fig. (2.2.14) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation interne constante sur la vitesse ( $V_0$ ) d'amplitude  $a_m = 100$  m/s

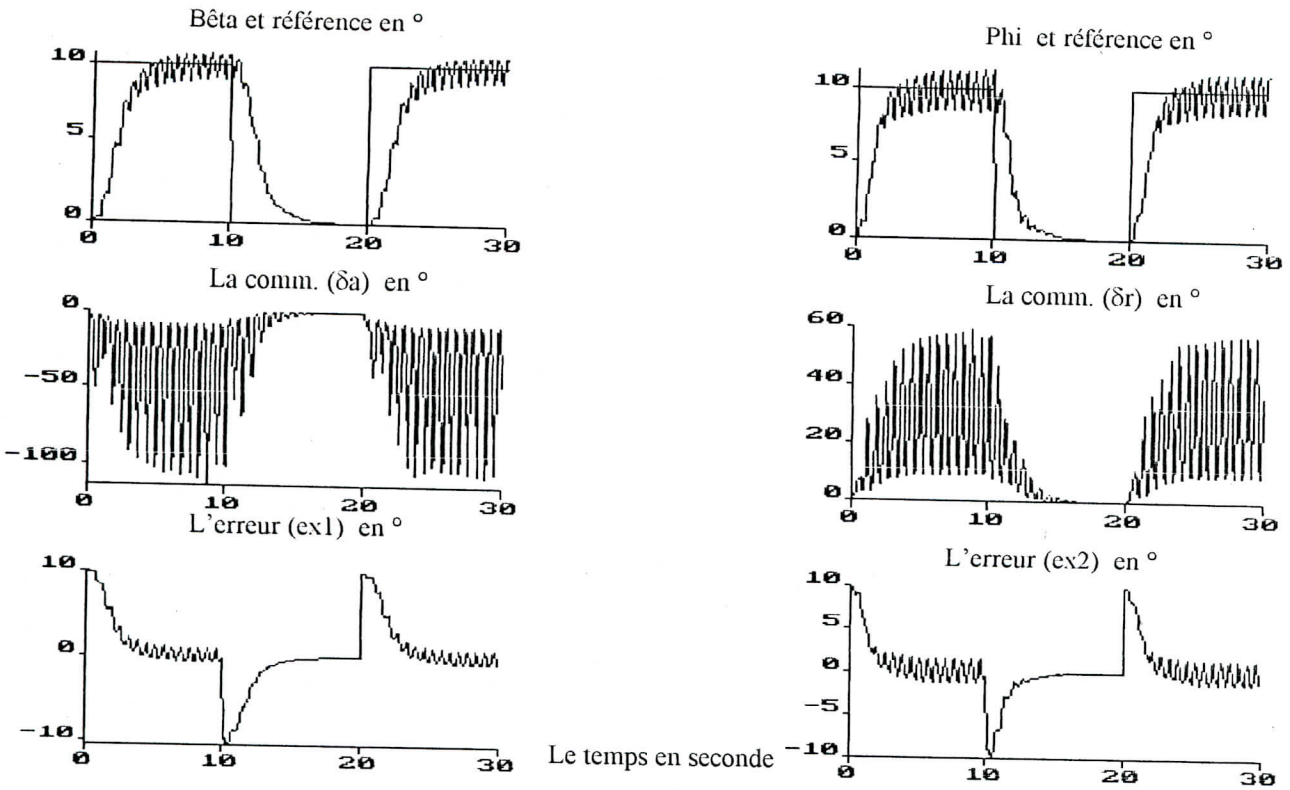


Fig.(2.2.15) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation interne lente (sinusoïdale) sur la vitesse ( $V_0$ ) d'amplitude  $a_m = 1$  m/s

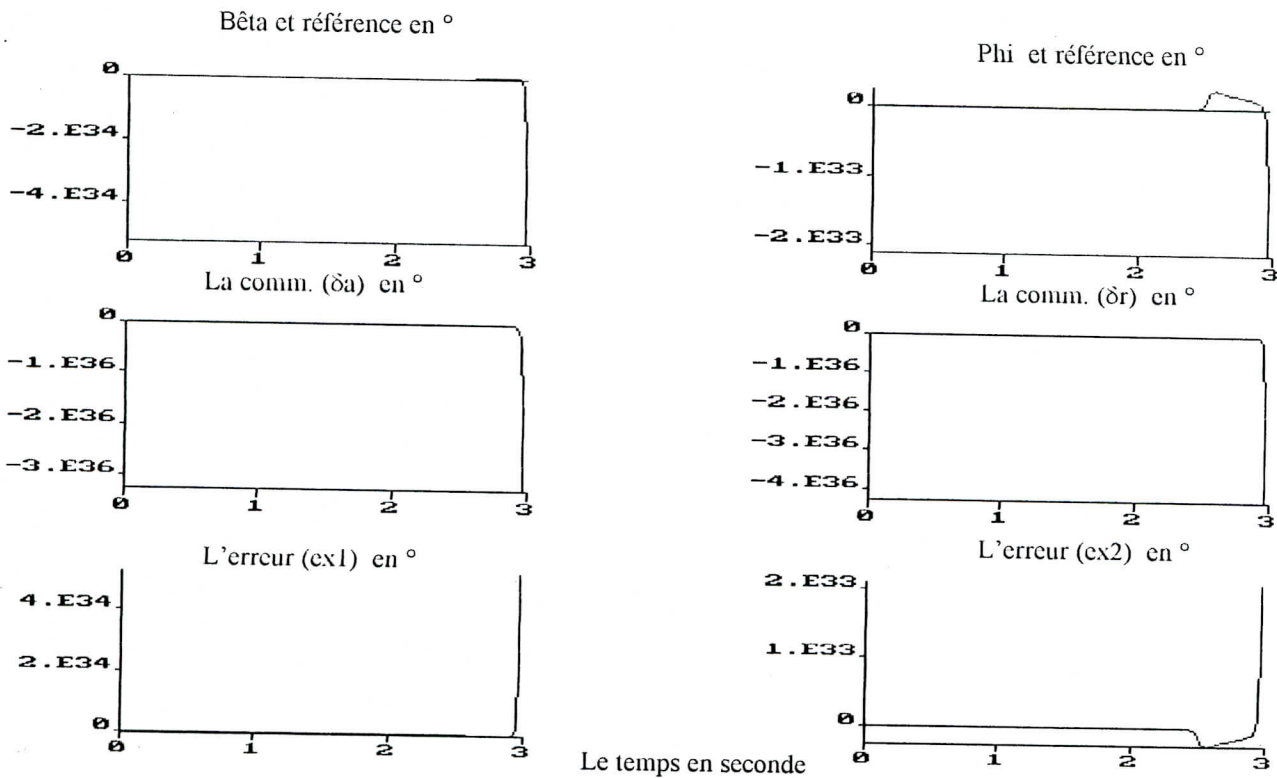


Fig.(2.2.16) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation interne lente (sinusoïdale) sur la vitesse ( $V_0$ ) d'amplitude  $a_m = 10$  m/s

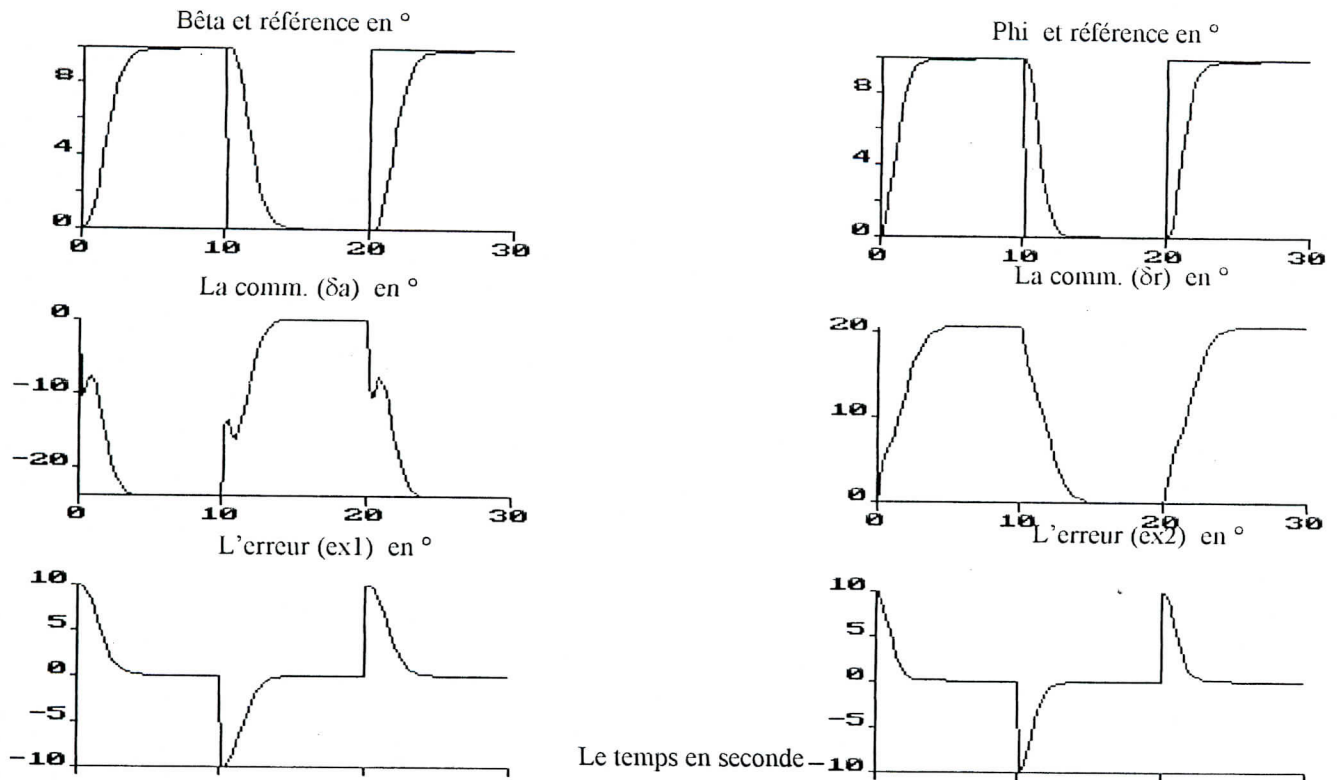


Fig. (2.2.17) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation interne de la masse de (0.01kg/s)

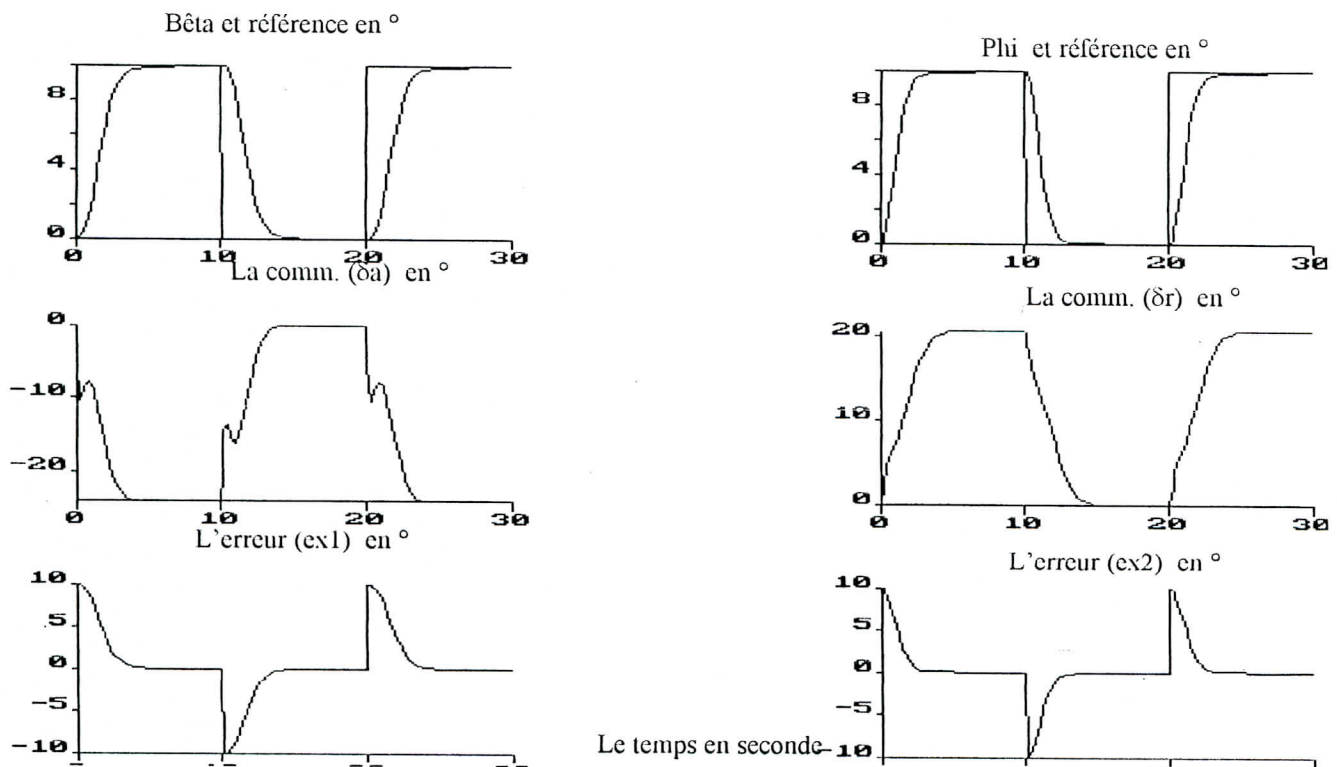


Fig. (2.2.18) Commande par retour d'état avec action intégral avec perturbation interne (linéaire) de la masse de (0.1kg/s)



## CONCLUSION

Dans cette partie, nous avons étudié la synthèse et la robustesse des deux commandes classiques lorsqu'elles sont appliquées à un système linéaire soumis à différentes perturbations externes et internes.

A partir des résultats obtenus par simulation, on constate que la commande par retour d'état avec action intégral est plus robuste que celle par retour d'état, et ceci par l'annulation de l'erreur statique causée par les différentes perturbations. Seulement que l'implémentation de ces commandes présente quelques inconvénients. En effet, les paramètres du système doivent être connus et supposé constants tout au long du domaine d'opération de la commande, autrement dit une variation de ces paramètres entraînera notre système à l'instabilité sans aucune possibilité de compenser de tels effets. D'où la nécessité de faire appel à des lois de commandes non-linéaire plus avancées qui permettront une meilleure adaptation de la commande au système et par conséquent une meilleure poursuite du signal de sortie par rapport au signal de référence choisi.

**CHAPITRE III**

**IDENTIFICATION**

### III IDENTIFICATION

#### III.1 INTRODUCTION

L'une des phases primordiales de toute commande auto-ajustable est la phase de l'identification. Cette phase permet d'estimer les paramètres du modèle de représentation identifié, car bien qu'il soit vrai qu'un système, même non linéaire peut être linéarisé autour d'un point de fonctionnement, alors ce système admet forcément, autour de ce point, un modèle linéaire. La commande auto-ajustable est conçue en commençant avec un système connu. L'algorithme de contrôle est développé en introduisant une estimation récursive des paramètres. Puis les vrais paramètres sont remplacés par leurs valeurs estimées pour déterminer la loi de commande. Plusieurs schémas d'estimation des paramètres récursives peuvent être utilisés, tels que l'approximation stochastique, les moindres carrés, maximum de vraisemblance, etc. [17,18]

#### III.2 DESCRIPTION DU SYSTEME

Assumant que le modèle complet du système physique est représenté par la forme discrète suivante. [9] (obtenue par la technique de la transformée en z et incluant un bloqueur d'ordre (zéro) représenté sous forme de modèle ARMA

$$(3.1) \quad y(t) = z^{-k} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \eta(t) + DC$$

où :  $y(t)$  est la sortie à contrôlé

$u(t)$  est l'entrée ou la commande

$\eta(t)$  est une séquence indépendante de variables de distribution Gaussienne

Avec une valeur moyenne et une variance de  $\sigma^2$

$k$  est le temps de retard entier

$DC$  représente l'offset

$$(3.2) \quad \begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na} \\ B(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb} \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{nc} z^{-nc} \end{aligned}$$

Où  $z^{-1}$  est un opérateur de retard tel que :  $z^{-1} y(t) = y(t-1)$

Le modèle (3.1) décrit la dynamique, reliant entre les signaux d'entrée et de sortie, cela peut s'exprimer en termes de vecteurs de paramètres

$$(3.3) \quad \theta^T = [ a_1 \dots a_{na} \quad b_1 \dots b_{nb} \quad c_1 \dots c_{nc} \quad 1 ]$$

$$(3.4) \quad \varphi^T(t) = [ -y(t-1) \dots y(t - na) \quad u(t-1) \dots u(t - nb) \quad \eta(t) \dots \eta(t - nc) ]$$

Alors (3.1) peut s'écrire comme :

$$(3.5) \quad y(t) = \theta^T \varphi(t) + v(t)$$

Ce modèle décrit la variable observable  $y(t)$  comme une combinaison linéaire inconnue des composantes du vecteur observable  $\varphi(t)$ , plus le bruit. Un tel modèle est appelé une régression linéaire et les composantes de  $\varphi(t)$  sont appelées les variables de régression. [18,19]

### III.3 ALGORITHME DES MOINDRES CARRÉES RÉCURSIVE - RLS

Appelé aussi, estimation par moindres carrés récursive [17,18], qui est l'une des méthodes la plus utilisée, c'est une méthode robuste et facile à implémenter. Dans ce cas, le polynôme  $C(z^{-1}) = 1$  par suite les deux vecteurs de données et de paramètres se réduisent à

$$\theta^T = [ a_1 \dots a_{na} \quad b_1 \dots b_{nb} \quad 1 ]$$

et

$$\varphi^T(t) = [ -y(t-1) \dots y(t - na) \quad u(t-1) \dots u(t - nb) \quad \eta(t) ]$$

ainsi :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + L(t)[ y(t) - \hat{\theta}^T(t-1)\varphi(t) ]$$

$$(3.6a - 3.6b - 3.6c) \quad L(t) = \frac{P(t-1)\varphi(t)}{1 + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)}$$

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{1 + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)}$$

### III.4 PERIODE D'ECHANTILLONNAGE

La période d'échantillonnage pour le contrôleur a été fixée à 0.2s. Cette valeur doit être dans la gamme recommandée par Iserman, pour produire une bonne estimation des paramètres du processus et le calcul de la commande. Iserman suggère pour achever en général un bon contrôle, que l'intervalle d'échantillonnage doit être entre 7% - 25% de 95% du temps de réponse du processus. qui est égale dans notre cas à 3.5 s.

Pour achever une bonne estimation, la période d'échantillonnage du contrôleur doit être cinq fois celle de l'estimateur pour permettre aux paramètres une bonne convergence, qui serviront par la suite au calcul de la loi de commande. [19]

### III.5 CONDITIONS INITIALES

Chaque algorithme récursif requiert quelques conditions initiales pour commencer ou s'initialiser. Dans l'algorithme précédent nous avons besoin de  $\hat{\theta}(0)$  et  $P(0)$ , au temps  $t=0s$ . Tel que le vecteur des paramètres sera initialisé à zéro à part le premier élément du polynôme  $B(z^{-1})$  qui sera initialisé à 1, et en ce qui concerne la matrice de covariance  $P(t)$  elle sera initialisé telle que  $P(0) = 100 I$ , où  $I$  désigne la matrice identité. Dans notre cas  $I$  est une matrice du deuxième ordre pour le mouvement latéral et 1 pour le mouvement longitudinal. [18]

### III.6 FACTORISATION UDU

La célèbre factorisation connue sous le nom de U-D factorisation permet à la matrice de covariance  $P(t)$  de garder l'aspect de positive définie, ceci peut être décrit comme une décomposition de Cholesky normalisée [10] (appelée square root free Cholesky decomposition). Pour cela  $P(t)$  s'écrit comme

$$(3.7) \quad P(t) = U(t) D(t) U^T(t)$$

Où  $U(t)$  est une matrice triangulaire supérieure, avec tous les éléments diagonaux égaux à 1 et  $D(t)$  est une matrice diagonale.

En utilisant la factorisation pour calculer  $P(t)$  garantie que celle ci reste toujours positive définie, des expériences étendues dans le cas du filtre de Kalman ont montré que cette factorisation possède une bonne stabilité numérique et l'erreur arrondie n'affecte pas la solution de façon significative. [18]

#### Algorithme de Bierman U-D Factorisation

Initialiser  $U(0)$  et  $D(0)$  au temps  $t = 0$ ,  $U(0) D(0) U(0) = P(0)$ .

Au temps  $t$  calculer  $L(t)$  et adapter  $U(t-1)$  et  $D(t-1)$  en formant les étapes suivantes

1. Calculer  $f = U^T(t-1)\psi(t)$ ,  $g = D(t-1)f$ ,  $\beta_0 = \lambda(t)$
2. Pour  $j = 1, \dots, d$  faire les étapes de 3-5.
3. Calculer

$$\beta_j = \beta_{j-1} + f_j g_j$$

$$D(t)_{jj} = \beta_{j-1} D(t-1)_{jj} / \beta_j \lambda(t)$$

$$v_j = g_j$$

$$\mu_j = -f_j / \beta_{j-1}$$

4. Pour  $i = 1 \dots j-1$  faire l'étape 5 . ( si  $j = 1$  sauter l'étape 5 )

5. Calculer

$$U(t)_{ij} = U(t-1)_{ij} + v_i \mu_j$$

$$v_i = v_i + U(t-1)_{ij} v_j$$

(3.8)

$$6. \bar{L}(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$$

$$L(t) = \bar{L}(t) / \beta_d$$

### III.7 LE FACTEUR D'OUBLIE VARIABLE

Du fait des variations des paramètres du système au cours du temps, et du fait de l'existence de considérables perturbations déterministiques et stochastiques agissant sur ce système, il devient nécessaire d'introduire un facteur d'oubli variable ; en utilisant la technique de normalisation de données. Ce qui prévient le phénomène de l'éclatement de la matrice  $P(t)$ . Le facteur d'oubli est choisi tel que  $\text{trace } P(t) = \text{trace } P_0$  et ceci à tout temps  $t$ . La data normalisation est un facteur essentiel pour l'obtention des propriétés de la convergence. [19]

$$(3.9) \quad P(t) = \frac{1}{\beta(t)} \left[ P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t-1)\varphi^T(t-1)P(t-1)}{1 + \varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1)} \right]$$

$$0 < \beta(t) \leq 1 \quad \text{et} \quad P_0 = P_0^T > 0$$

A partir de (3.9) on pourra dire que la trace  $P(t) = \text{trace } P_0$  à tout temps  $t$ , si  $\beta(t)$  est choisit à satisfaire :

$$(3.10) \quad \beta(t) = 1 - \frac{1}{tr P_0} \cdot \frac{\varphi^T(t-1)P^2(t-1)\varphi(t-1)}{1 + \varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1)}$$

### III.8 EXCITATION PERSISTANTE

Les paramètres d'un modèle ne peuvent être déterminer sans que certaines conditions ne soient imposées sur les signaux d'entrées de commande. L'une d'elles, est la condition d'excitation persistante. En effet, pour obtenir ces paramètres et par la suite ceux du signal de contrôle, le

signal d'entrée peut être choisi initialement comme une séquence binaire pseudo-aleatoire d'amplitude limitée durant la période initiale de l'identification. Dans le cas de simulation, nous utiliserons un signal PRBS suffisamment excité, riche en fréquence pour bien exciter toute la dynamique du système et obtenir une convergence rapide des paramètres. [19]

### III.9 EXTENSION AUX SYSTEMES MULTIVARIABLES :

Les systèmes d'identifications cités dans les paragraphes précédents, et qui étaient initialement destinés aux systèmes monovariés (SISO) ; peuvent être étendus au cas multivariable.

L'équation du modèle multivariable peut se réécrire de la manière suivante :

$$y^i(t) = \varphi(t)^T \cdot \theta^i(t) + \varepsilon^i(t)$$

où :  $y^i(t)$  est le ième composant du vecteur des sorties  $y(t)$

$\varepsilon^i(t)$  est le ième composant du vecteur des résidus  $\varepsilon(t)$

$\varphi(t)$  est le vecteur des données :

$$\varphi(t) = [y^1(t-1) \dots y^1(t-n) \dots y^p(t-1) \dots y^p(t-n) u^1(t-1) \dots u^1(t-n) \dots u^q(t-1) \dots u^q(t-n)]^T$$

$\theta^i(t)$  est le vecteur des paramètres associés

**NB** : Notons que l'équation pour le renouvellement des paramètres se répète  $p$  fois. Dans notre cas  $p=2$ , concernant le mouvement latéral, car nous avons un système de deux entrées ( $\delta_a$  et  $\delta_r$ ) et deux sorties ( $\beta$  et  $\phi$ ).

**CHAPITRE IV**

---

**COMMANDES**

---

**AUTO-AJUSTABLES IMPLICITES**

---



## LES COMMANDES AUTO - AJUSTABLES

### INTRODUCTION

Les commandes auto-ajustables ou “ Self - tuning controllers : STC”, représentent une classe importante de commandes adaptatives, elles sont faciles à implémenter et applicables à des procédures complexes, avec de larges variétés de caractéristiques résolvant des paramètres inconnus, la présence de temps de retard, avec des dynamiques de processus variables au cours du temps, et des perturbations stochastiques.

La procédure de base de l’auto-ajustable, est de choisir une approche pour un système de paramètres connus, et les appliquer au système inconnu, en utilisant de manière récursive les valeurs estimées de ces paramètres. La commande auto-ajustable, est une approche au problème de l’ajustement automatique. [17]

La commande auto-ajustable a trois éléments principaux :

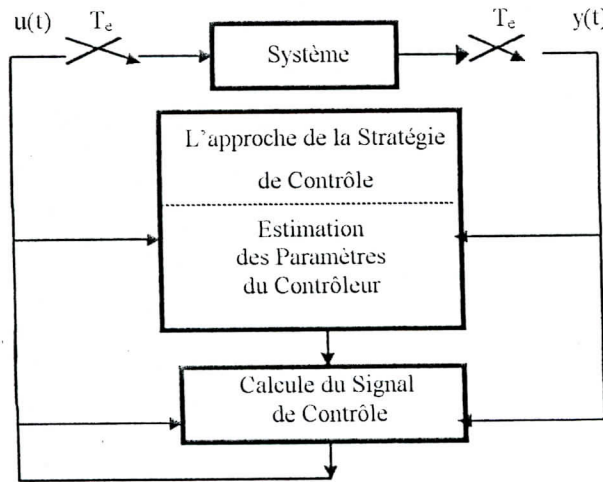
- Une loi de commande de la chaîne de retour, sous forme de différentes équations, ayant une action sur un ensemble de valeurs, tels que la sortie mesurée, les signaux de la chaîne directe, le point désiré, générant la nouvelle commande.
- Une estimation récursive des paramètres conduit par l’entrée et la sortie du système et calcule une estimée de la dynamique du système en termes d’un ensemble de paramètres dans une structure de modèle prescrit.
- Les paramètres estimés sont retournés dans l’algorithme de l’approche de la stratégie de contrôle, lesquels donneront un nouvel ensemble de coefficients pour la loi de commande de la chaîne de retour.

On peut distinguer deux catégories de commandes auto-ajustables : implicites et explicites. Les commandes auto-ajustables à minimum variance sont appelées les STC implicites, car elles sont basées sur une estimation de modèle de processus implicite. Dans les algorithmes implicites, les paramètres sont directement adaptés. De telles commandes, sont développées en se basant sur la théorie du contrôle prédictif et requièrent la connaissance du temps de retard du système physique. Pour éviter cela, les commandes explicites, ont été développées et dans lesquelles le temps de retard peut être estimé comme une partie de la dynamique du processus. Cependant, de telles méthodes demandent plus de temps de calcul. Dans ce cas, l’identification des paramètres est suivie par un bloc séparé pour le calcul de la loi de commande. [ 20 ].

#### IV. LES COMMANDES AUTO-AJUSTABLES IMPLICITES

Dans cette première approche, une solution pour le problème du contrôle adaptatif est que les paramètres du système sont estimés en on-line et les paramètres du contrôleur sont ajustés en se basant sur ces estimés. Une telle procédure se réfère à une identification explicite. [17]

##### A. Le cycle d'algorithme des commandes auto-ajustable



#### IV.1 LA COMMANDE A MINIMUM VARIANCE GENERALISEE

Cette commande permet à la fois de minimiser la variation de la commande et la variance de la sortie contrôlée [17,19,20]. Nous considérons toujours notre système représenté par (3.1) et soit la fonction coût donnée par :

$$(4.1.1) \quad J = E[\phi^2(t+k)|t]$$

où l'extension à ( t+k ) est conditionnée sur toute donnée d'entrée /sortie acquise jusqu'à ce temps t.

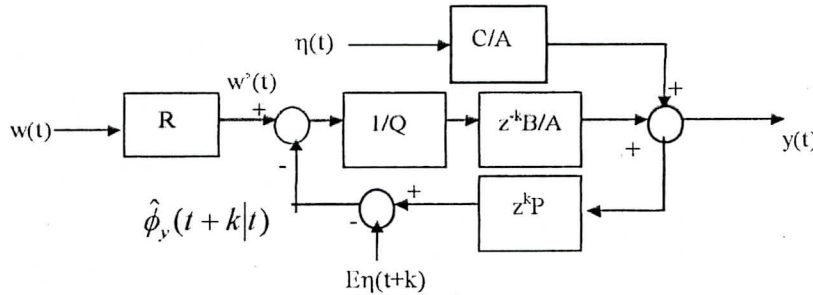
Dans (4.1.2) on note que la commande minimise la variance de la sortie auxiliaire  $\phi(t+k.)$  ( et non la sortie actuelle du système ), qui est donnée par :

$$(4.1.2) \quad \phi(t+k) = P(z^{-1}) y(t+k) + Q(z^{-1}) u(t) - R(z^{-1}) W(t)$$

Où  $P(z^{-1})=P_N(z^{-1}) / P_D(z^{-1})$ ,  $W(t)$  est connu comme étant le signal de référence au temps t, et les fonctions de transferts P, Q et R peuvent être librement choisies dépendant de la réponse caractéristique requise (pouvant être des intégrateurs) pour minimiser l'effet des perturbations. Le critère coût du contrôleur minimum variance généralisé minimise la sortie du système ainsi que son entrée. [19,21,22,23]

**Remarque:** Dans ce qui va précéder “algorithme à un pas de prédiction”, les polynômes P et R vont être pris égaux à 1. Donc, cet algorithme n’est qu’un cas particulier de l’algorithme du minimum de variance généralisé étendu.

**fig4.1 : le système du contrôleur à variance minimale généralisée[17]**



Dans l’équation (4.1.2), les signaux  $Qu(t)$  et  $Rw(t)$  sont connus à  $(t+k)$ . Ainsi le problème de prédiction de  $\phi(t+k)$  devient un problème de prédiction des moindres carrés du premier terme de (4.1.1), qui a la forme [19] :

$$(4.1.3) \quad \phi_y(t) = P(z^{-1}) y_p(t)$$

Cette équation peut se réécrire comme

$$(4.1.4) \quad A(z^{-1}) P_D(z^{-1}) \phi_y(t) = P_N(z^{-1}) B(z^{-1}) Z^k u(t) + P_N(z^{-1}) C(z^{-1}) e(t)$$

Introduisons l’identité suivante

$$(4.1.5) \quad \frac{C(z^{-1}) P_N(z^{-1})}{A(z^{-1}) P_D(z^{-1})} = F'(z^{-1}) + \frac{z^{-1} G'(z^{-1})}{A(z^{-1}) P_D(z^{-1})}$$

où  $F'$  reste d’ordre  $(k-1)$ , et  $G'$  d’ordre  $(n_a - 1 + \text{degré de } P_D)$

A partir de (4.1.4) et (4.1.5), on a :

$$(4.1.6) \quad \phi_y(t+k) = F'(z^{-1}) \eta(t+k) + \frac{P(z^{-1}) B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + \frac{G'(z^{-1})}{A(z^{-1}) P_D(z^{-1})} \eta(t)$$

Sachant de (3.1) que :

$$(4.1.7) \quad \eta(t) = \frac{A(z^{-1})(y(t) - PC) - z^{-k} B(z^{-1}) u(t)}{C(z^{-1})}$$

En substituant l’équation (4.1.7) dans (4.1.6) et en utilisant l’identité (4.1.5)

$$(4.1.8) \quad \phi_y(t+k) = F'(z^{-1}) \eta(t+k) + \frac{F'(z^{-1}) B(z^{-1})}{C(z^{-1})} u(t) + \frac{G'(z^{-1})}{C(z^{-1}) P_D(z^{-1})} (y(t) - PC)$$

Le prédicteur à minimum variance généralisée devient alors :

$$(4.1.9) \quad \hat{\phi}_y(t+k|t) = \frac{F'(z^{-1}) B(z^{-1})}{C(z^{-1})} u(t) + \frac{G'(z^{-1})}{C(z^{-1}) P_D(z^{-1})} (y(t) - PC)$$

Et l’erreur de prédiction est donnée par:

$$(4.1.10) \quad \varepsilon(t+k|t) = \phi_y(t+k) - \hat{\phi}_y(t+k|t) = F'(z^{-1})\eta(t+k)$$

Pour dériver la loi de contrôle, la prédiction à minimum variance généralisé de  $\phi$  est exigée

$$(4.1.11) \quad \phi(t+k|t) = \phi_y(t+k|t) + Q(z^{-1})u(t) - R(z^{-1})w(t)$$

La loi de contrôle est dérivée à partir d'un principe de base, à savoir que la commande à minimum variance au temps  $t$ , est choisie en mettant la prédiction minimum variance généralisée de la sortie auxiliaire à zéro. Le signal optimal de contrôle doit pour cela mettre  $\hat{\phi}(t+k|t)$  à zéro. Alors, à partir de (4.1.1) et (4.1.10) on a :

$$(4.1.12) \quad \begin{aligned} C(z^{-1})\hat{\phi}(t+k|t) &= \frac{G'(z^{-1})}{P_D(z^{-1})}y(t) + [F'(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})C(z^{-1})]u(t) \\ &\quad - R(z^{-1})C(z^{-1})w(t) = 0 \end{aligned}$$

et à partir de (4.1.10):

$$(4.1.13) \quad \phi_y(t+k) = \hat{\phi}_y(t+k|t) + \varepsilon(t+k|t)$$

Les équations (4.1.12) et (4.1.13) déterminent la loi de contrôle optimale. On peut obtenir une expression pour la commande optimale  $u(t)$  à partir des équations (4.1.11) et (4.1.12)

$$(4.1.14 - 4.1.15) \quad \begin{aligned} u(t) &= \frac{Rw(t) - \hat{\phi}_y(t+k|t)}{Q} \\ &= \frac{CRw(t) - G'y(t) / P_D}{F'B + QC} \end{aligned}$$

### Algorithme de Clarke-Gawthrop

$$1. \hat{X}(t) = [u(t), u(t-1), \dots, \frac{y_P(t)}{P_D}, \frac{y_P(t-1)}{P_D}, \dots, \hat{\phi}_y(t+k-1|t-1), \dots]$$

$$2. \phi_y(t) = P(z^{-1})y_P(t)$$

$$3. \hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K_p(t)[\phi_y(t) - \hat{X}(t-K)\hat{\theta}(t-1)]$$

où

$K_p(t)$  repré sentele gain de Kalman

$$4. \hat{\phi}_y(t+k|t) = \hat{X}(t)\hat{\theta}(t)$$

$$5. u(t) = [Rw(t) - \hat{\phi}_y(t+k|t)] / Q$$

Repé terles é tapesde 1 à 5 à chaque pé rioded' é chantillonnage

Il est noté que les paramètres du modèle de prédiction sont utilisés directement pour calculer la commande. Cette procédure évite la nécessité de la solution de l'équation de diophantine usuellement résolue dans le calcul de la commande.

#### IV.1.1 SIMULATION ET INTERPRETATIONS :

Nous appliquons à notre système, la commande à minimum variance généralisée (GMV) auto-ajustable sans perturbation, puis nous soumettons notre système physique à des perturbations externes de type constantes et sévères ou des perturbations internes provenant d'une variation de la vitesse de vol ou de la masse de l'avion. Dans le but de tester la robustesse d'une telle commande, on impose au système les signaux de références déjà cités dans le premier chapitre. On choisit  $P = R = \text{diag}[1]$  pour le mouvement latéral, et 1 pour le mouvement longitudinal. La matrice  $Q$  est définie comme un filtre PI, contenant un facteur proportionnel  $\lambda$  et un facteur intégrateur  $\varepsilon$ ,  $F$  et  $G$  sont tels que  $F=I-a_1$  et  $G=I$ .

#### Figures (3a.1.1) à (3a.1.3), (3b.1.1) à (3b.1.3) et (3c.1.1) à (3c.1.3):

Ces figures présentent la simulation sans perturbation pour trois valeurs de  $\lambda$  et de  $\varepsilon$ . Nous observons une très bonne poursuite du système physique au signal de référence, avec des commandes pondérées de façon à satisfaire les exigences en termes de temps de réponse, et de dépassement des sorties correspondantes, l'erreur statique disparaît au fur et à mesure de la convergence des paramètres durant le processus de l'identification. Les figures présentant les paramètres estimés montrent bien qu'on obtienne les formes de réponse optimales, en terme de variances minimales; l'erreur statique, qui s'annule à la convergence des paramètres du modèle. En augmentant le facteur  $\lambda$ , les oscillations deviennent plus faibles, le dépassement est plus amorti en régime transitoire et la commande devient plus lisse. En faisant augmenter  $\varepsilon$ , la convergence de la réponse devient plus rapide.

#### Figures (3a.1.4), (3b.1.4) et (3c.1.4) :

Dans ce cas, nous appliquons à notre système d'avion une perturbation externe constante de  $10^\circ$  d'amplitude pour le mouvement latéral et de  $5^\circ$  d'amplitude pour le mouvement longitudinal. On remarque une réponse stable dans le sens de bornitude des signaux de commandes et de sortie, en contre partie, une amplification du dépassement (augmentation ou diminution) des signaux de sortie à la phase initiale du processus qui s'annule à fur et à mesure, qui est en grande partie dû à la phase d'identification qui était infecter par la perturbation.

**Figures (3a.1.5), (3b.1.5) et (3c.1.5) :**

L'avion est soumis à une perturbation atmosphérique modélisée par un bruit blanc, dont son niveau est de  $10^\circ$  à une fréquence de 100hz pour le mouvement latéral et de  $1^\circ$  à une fréquence de 100hz pour le mouvement longitudinal. Il est clair que, dans cette partie le signal de perturbation est bien plus contraignant vu qu'il est toujours présent avec une amplitude variable avec le temps, cependant notre système reste stable. Comme il apparaît clairement qu'en dessus d'une certaine valeur de perturbation, l'effort de la commande, devient plus important en point de vue amplitude et fréquence.

**Figures (3a.1.6), (3b.1.6) et (3c.1.6):**

Dans ce cas, la commande vient de prouver sa capacité face à une perturbation interne qui est due à une diminution linéaire de la masse de l'avion au cours du vol, car on remarque que les signaux de sorties ont une très bonne poursuite par rapport aux références. Les commandes sont toujours bornées avec une convergence des paramètres devenant rapide.

**Figures (3a.1.7) :**

Dans ce cas l'avion subit une perturbation interne constante due à la variation de la vitesse de vol et ceci pour une valeur de 10 m/s d'amplitude du signal perturbateur ; nous observons une excellente réponse du système avec une erreur statique négligeable et des signaux de commandes optimaux, cette bonne réponse est encore due à la convergence très rapide de l'identification. La perturbation étant interne, elle est complètement prise en compte à l'intérieur du modèle, son effet est éliminé par l'effet du facteur d'oubli variable.

**Figures (3a.1.8) :**

Une perturbation interne lente (sinusoïdale) de la vitesse du vol est simulée dans ce cas, pour une valeur  $10^\circ$  d'amplitudes du signal sinusoïdal. On remarque une fois encore, que la capacité de cette commande à éliminer l'effet des perturbations internes avec un minimum d'effort de la commande par rapport aux cas précédents. Un changement plus important dans les paramètres identifiés a permis la prise en compte de la perturbation à l'intérieur du modèle.

Graphes de simulation du mouvement latéral pour le contrôle de  $\beta$  et  $\Phi$

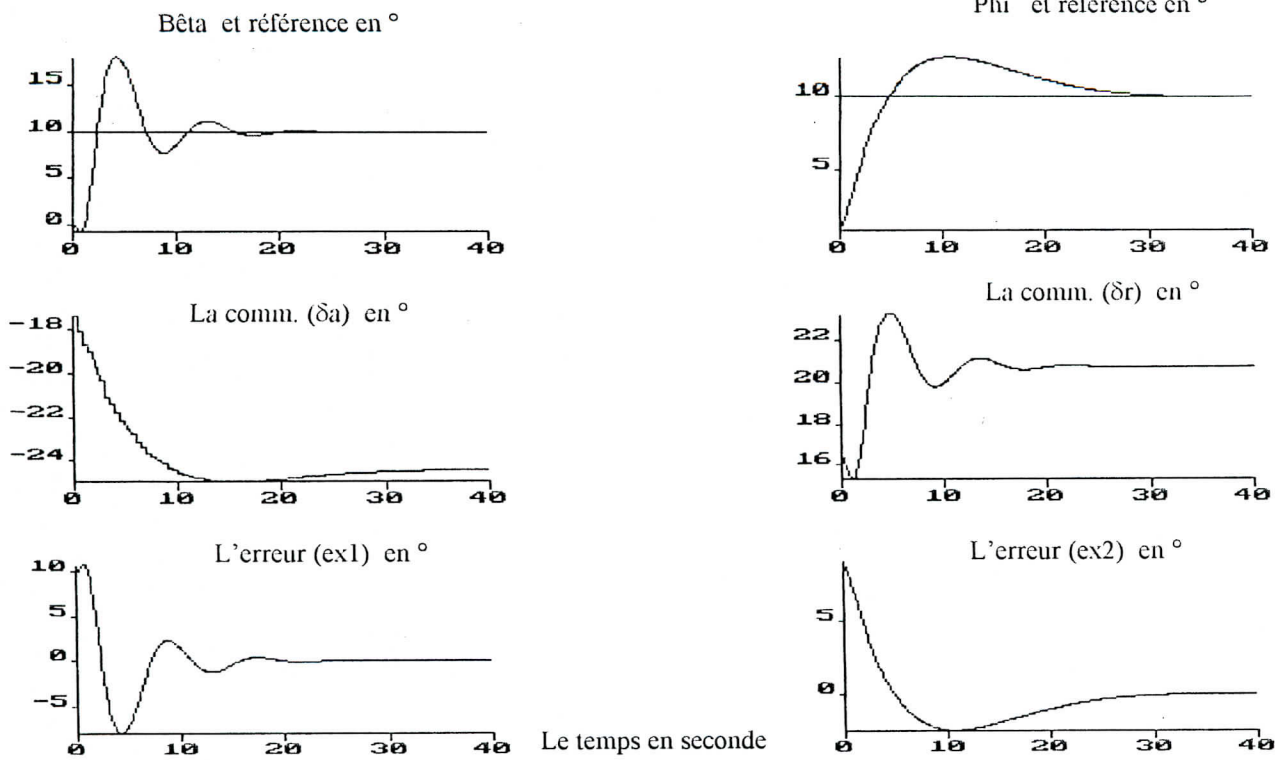


Fig.(3a.1) Commande GMV multivariable sans perturbation avec  $\lambda = \text{diag} [1.2]$  et  $\varepsilon = \text{diag} [0.05]$

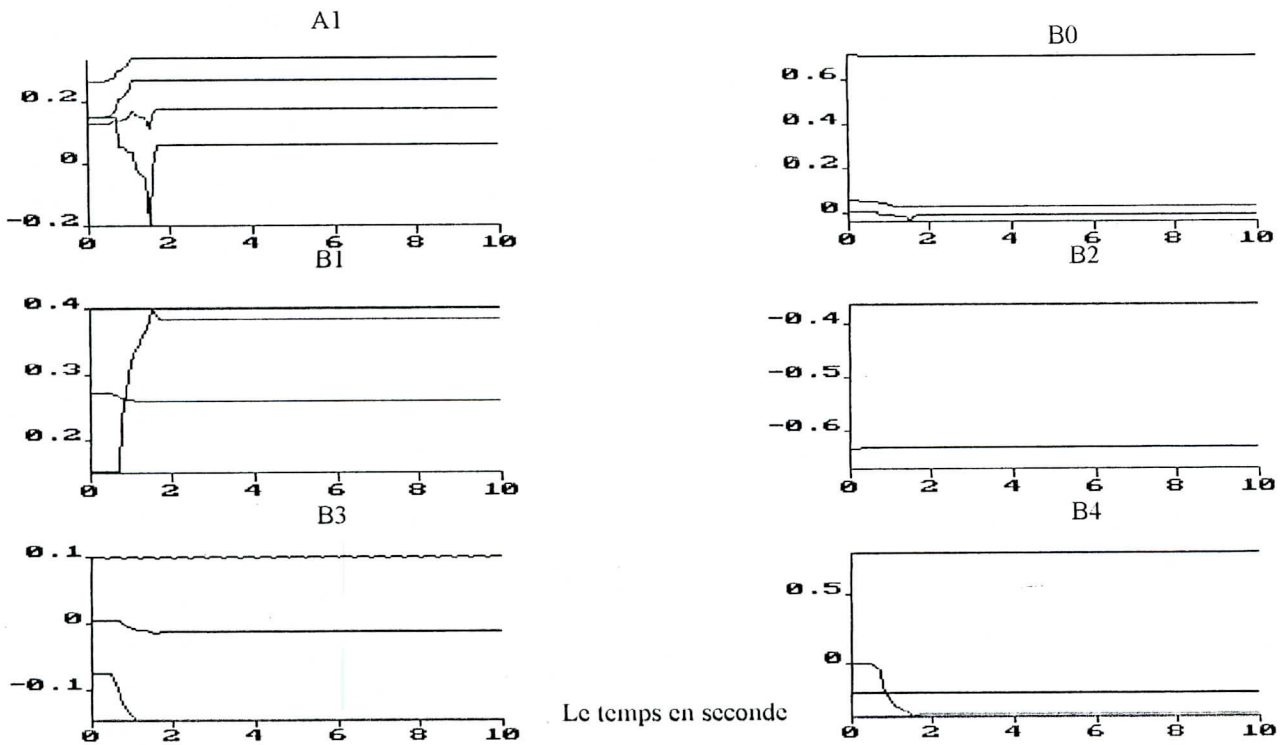


Fig.(3à.1) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)





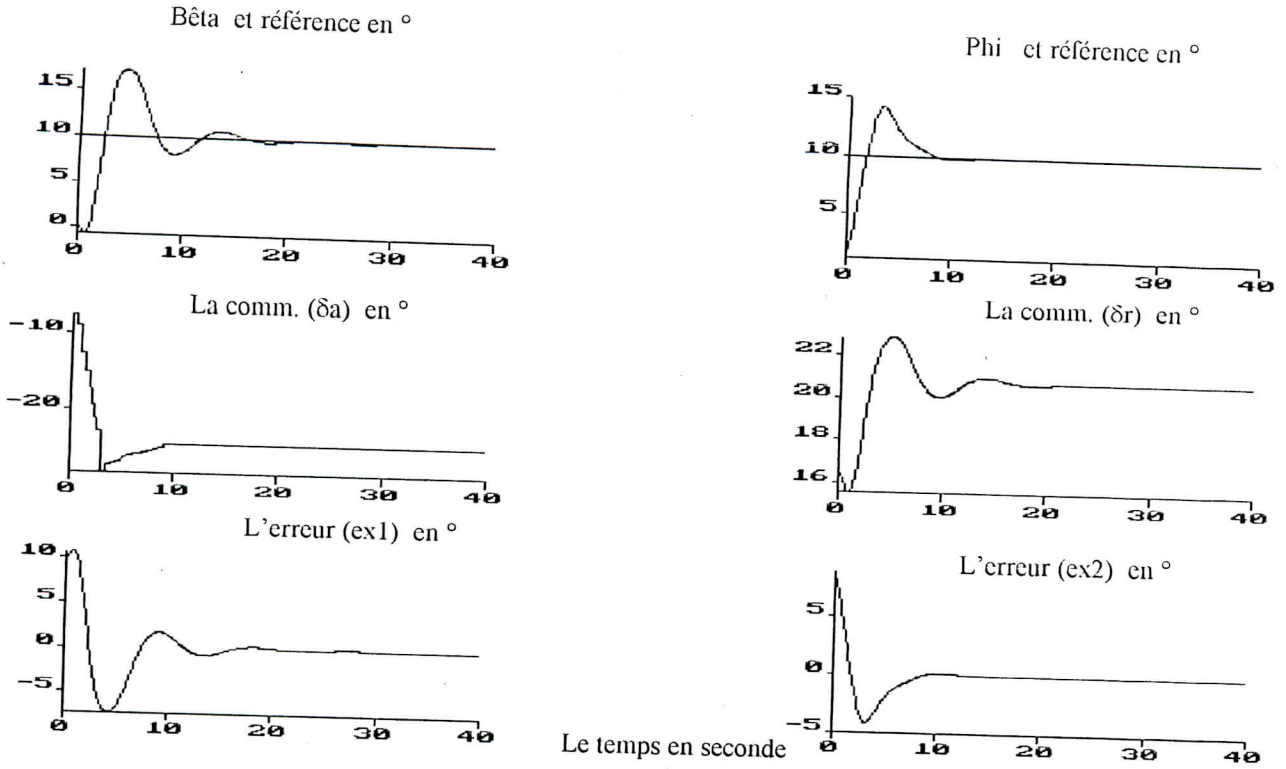


Fig.(3a .3) Commande GMV multivariable sans perturbation avec  $\lambda = \text{diag} [1.6]$  et  $\varepsilon = \text{diag} [0.5]$

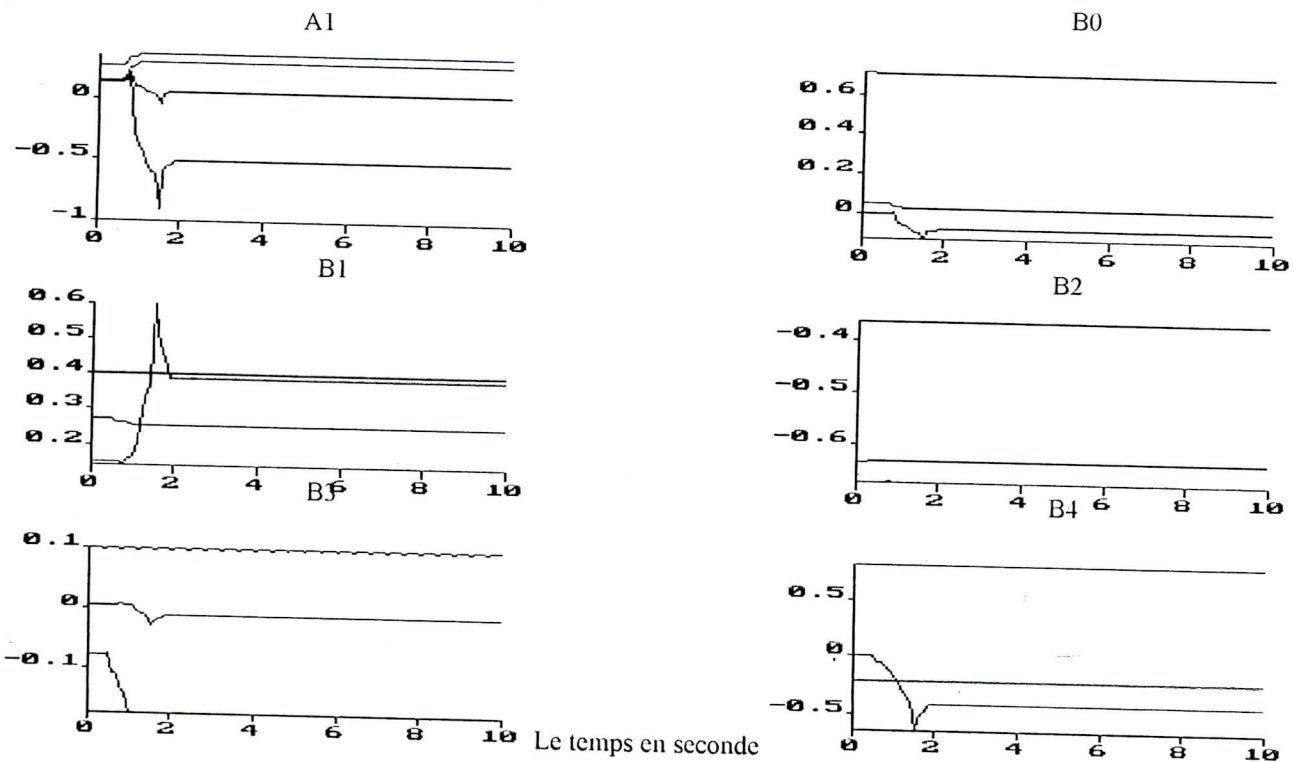


Fig.(3à .3) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

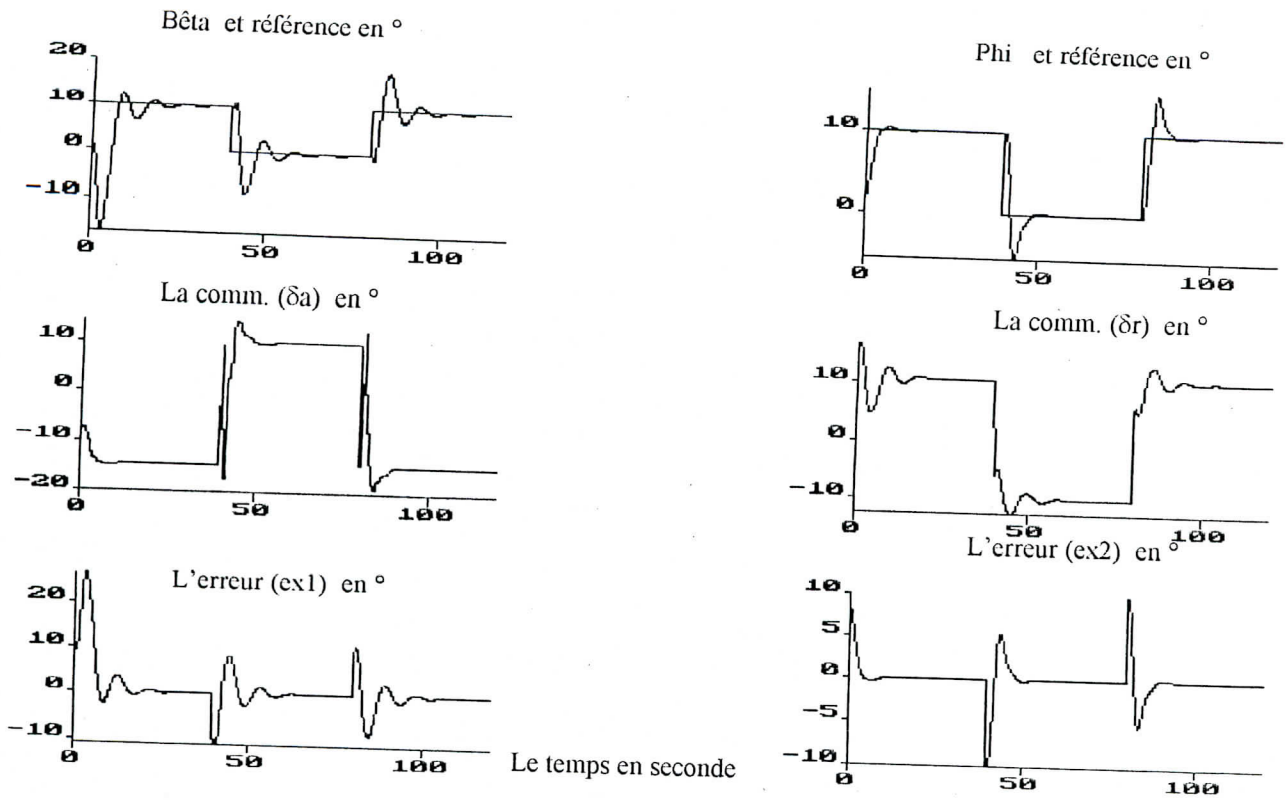


Fig.(3a.4) Commande GMV multivariable avec perturbation externe constante d'amplitude  $a = 10^\circ$

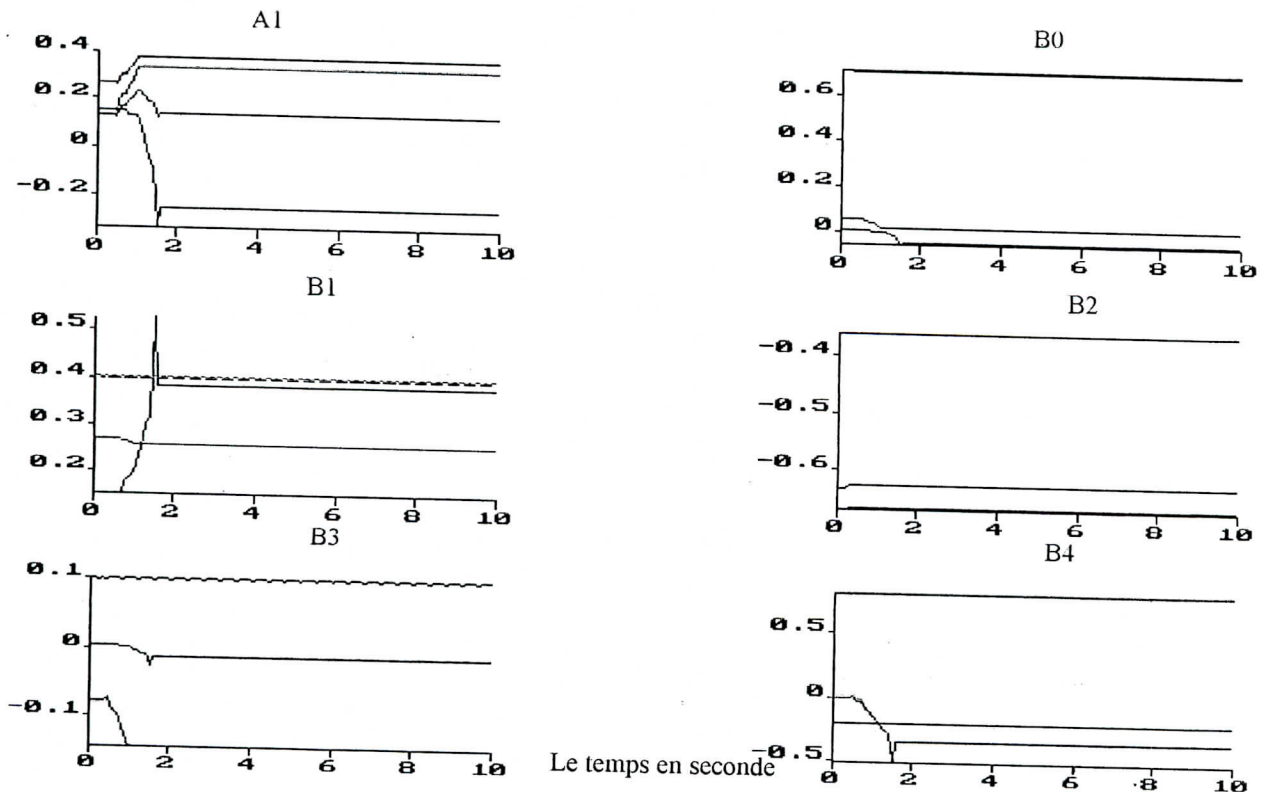


Fig.(4â.6) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

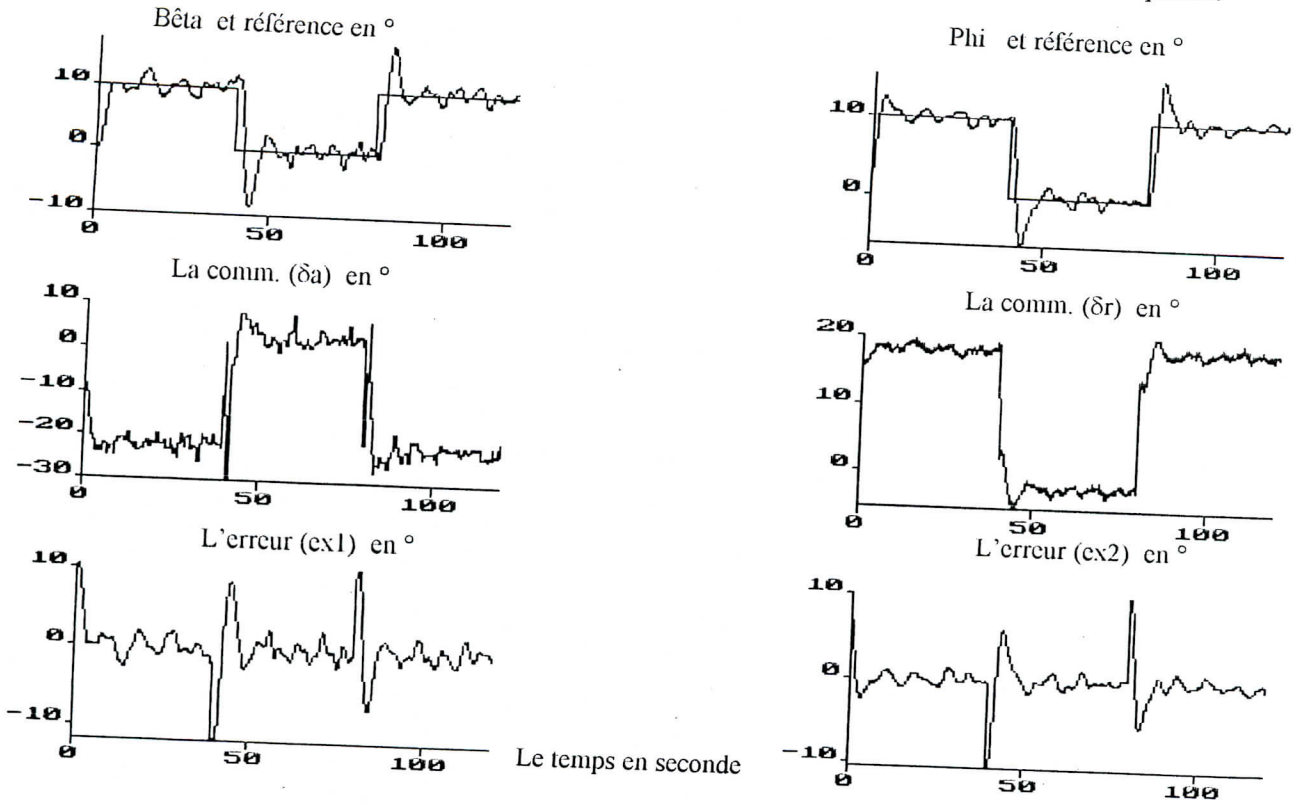


Fig. (5a .10) Commande GMV multivariable avec perturbation externe sévère de fréquence  $f_m = 100$  hz, de niveau  $a_m = 10^\circ$

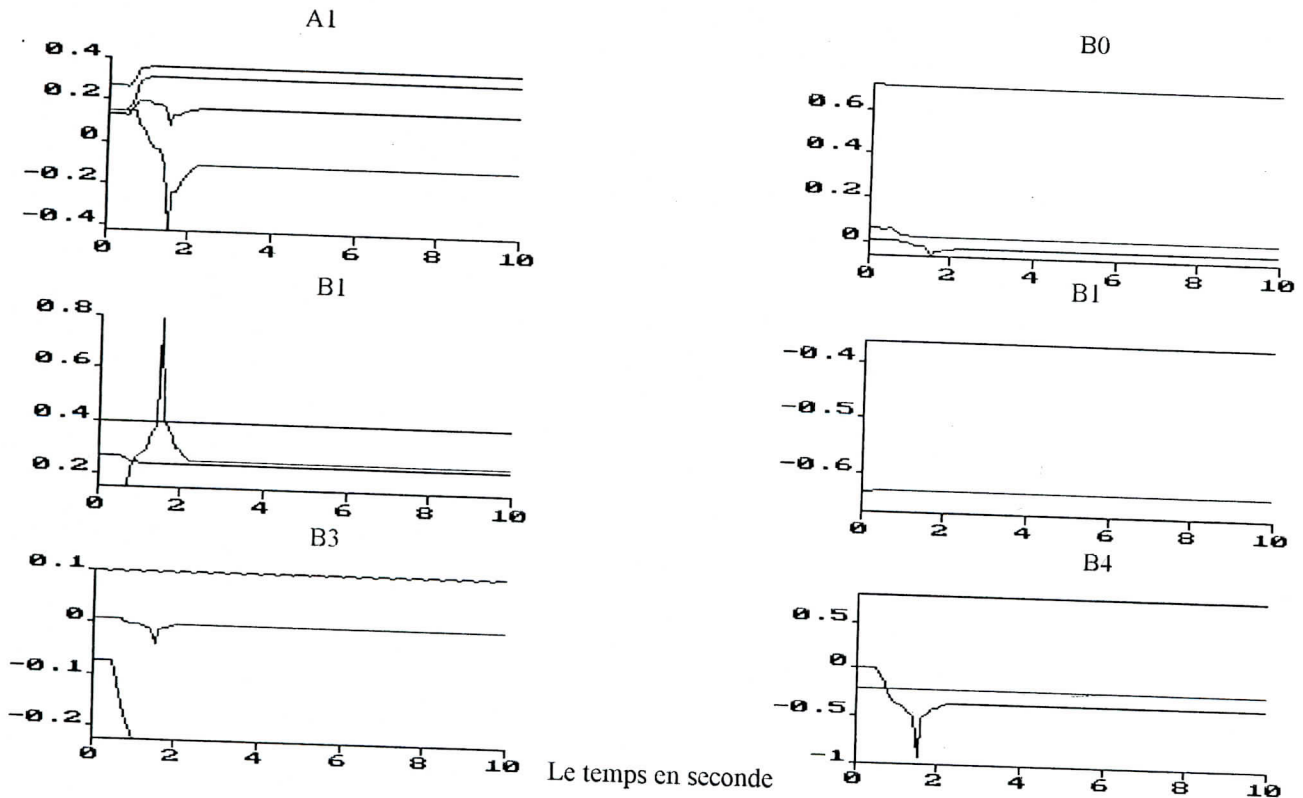


Fig. (5â .10) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

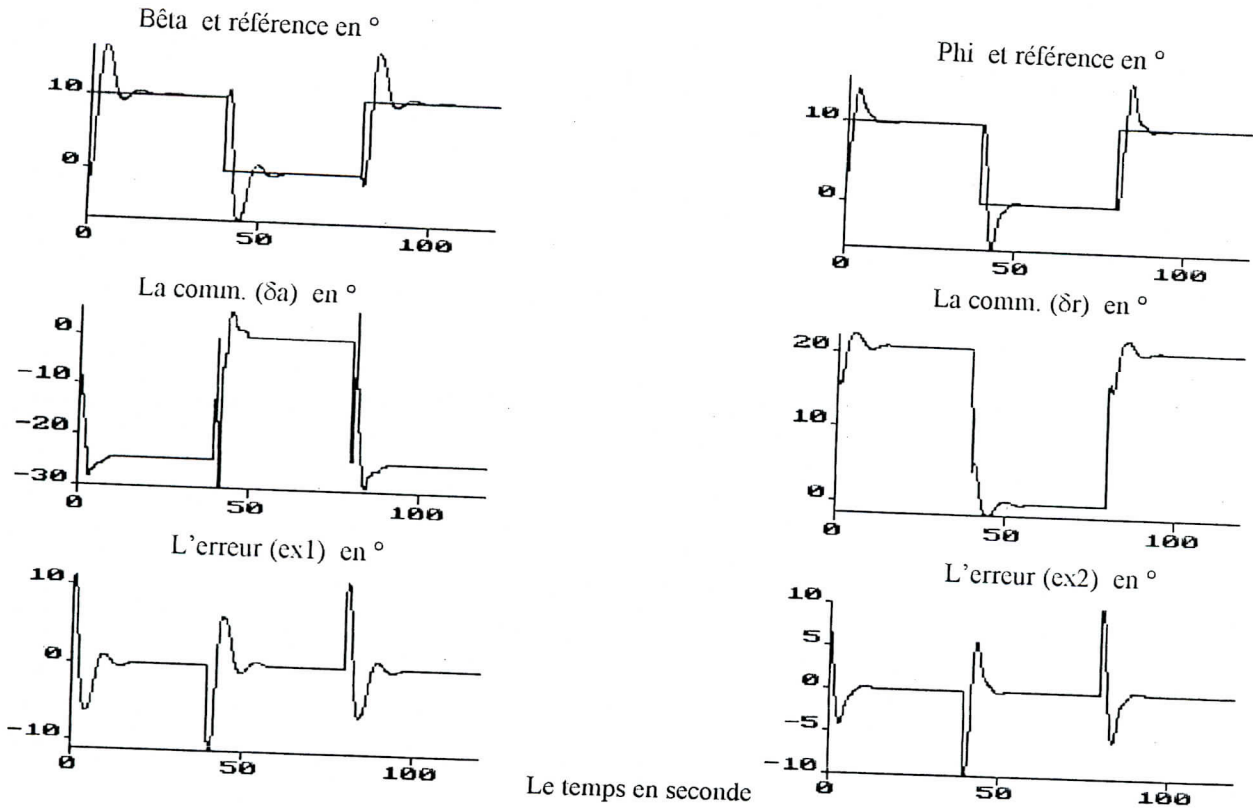


Fig.(3a .6) Commande GMV multivariable avec perturbation interne linéaire sur la masse de l'avion de (0.1 kg/s)

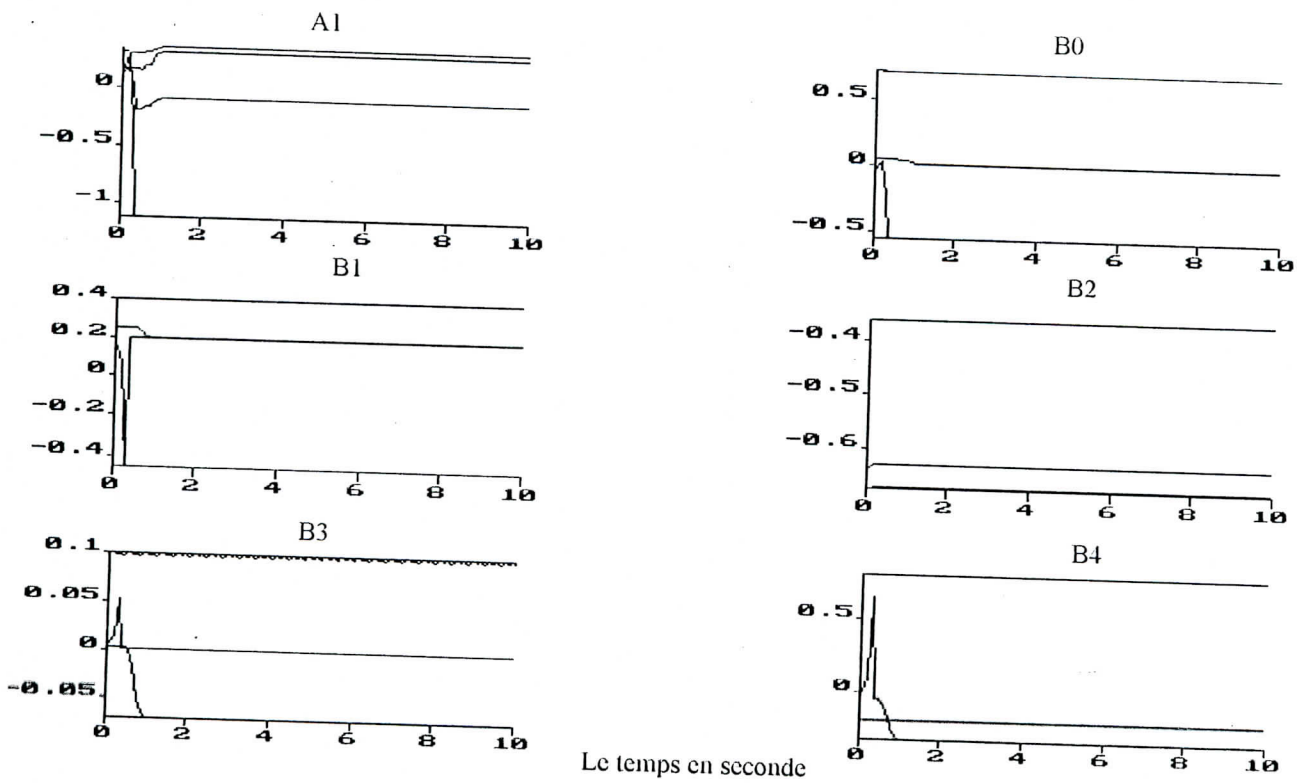


Fig.(6â .12) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

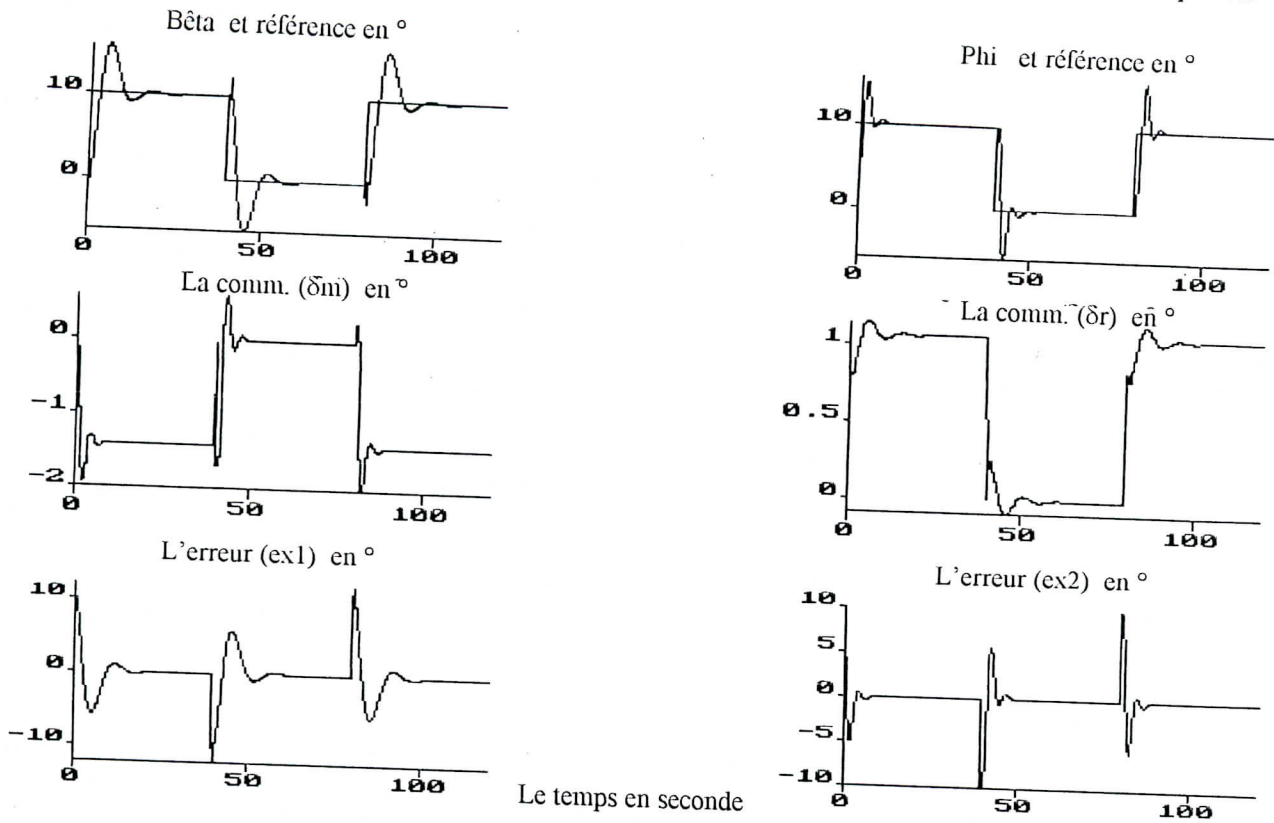


Fig.(3a.7) Commande GMV multivariable avec perturbation interne constante sur la vitesse de vol ( $V_0$ ) d'amplitude  $a_m = 10$  m/s

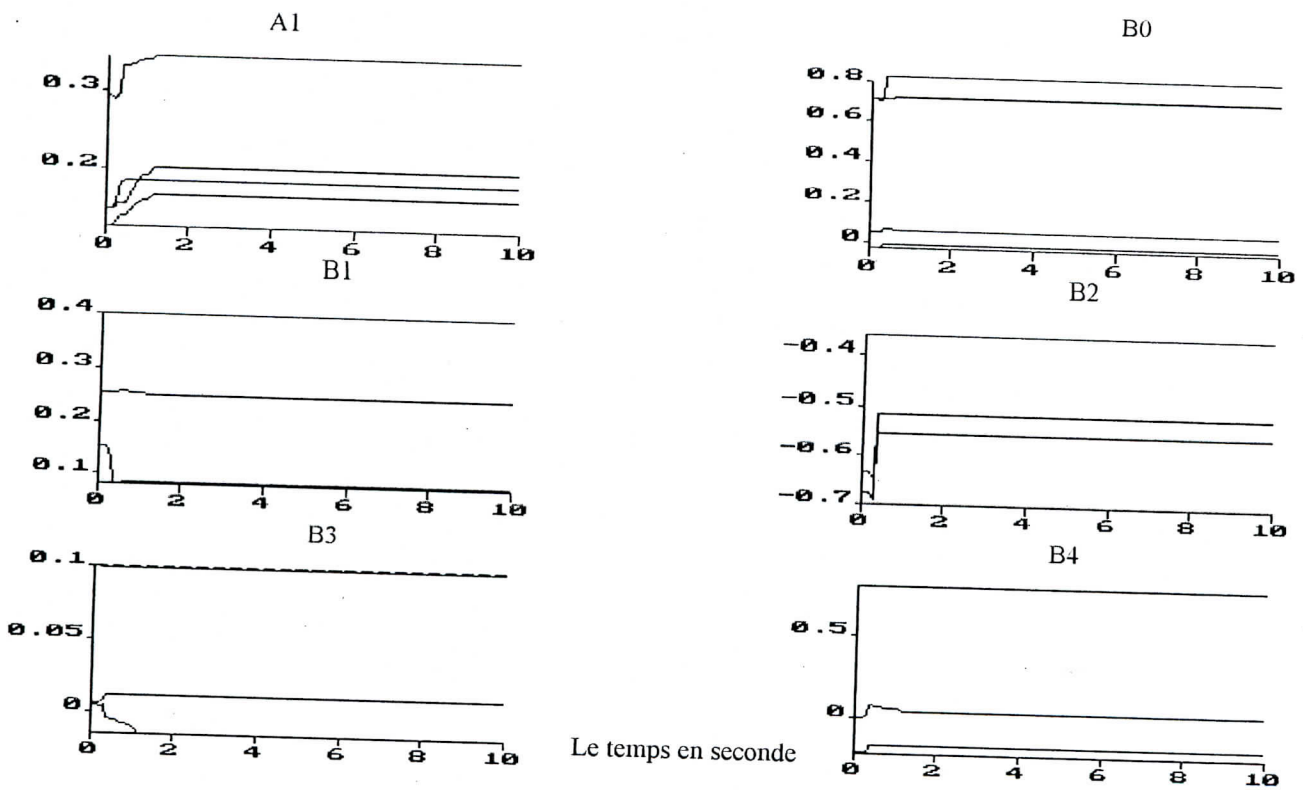


Fig.(3â.7) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

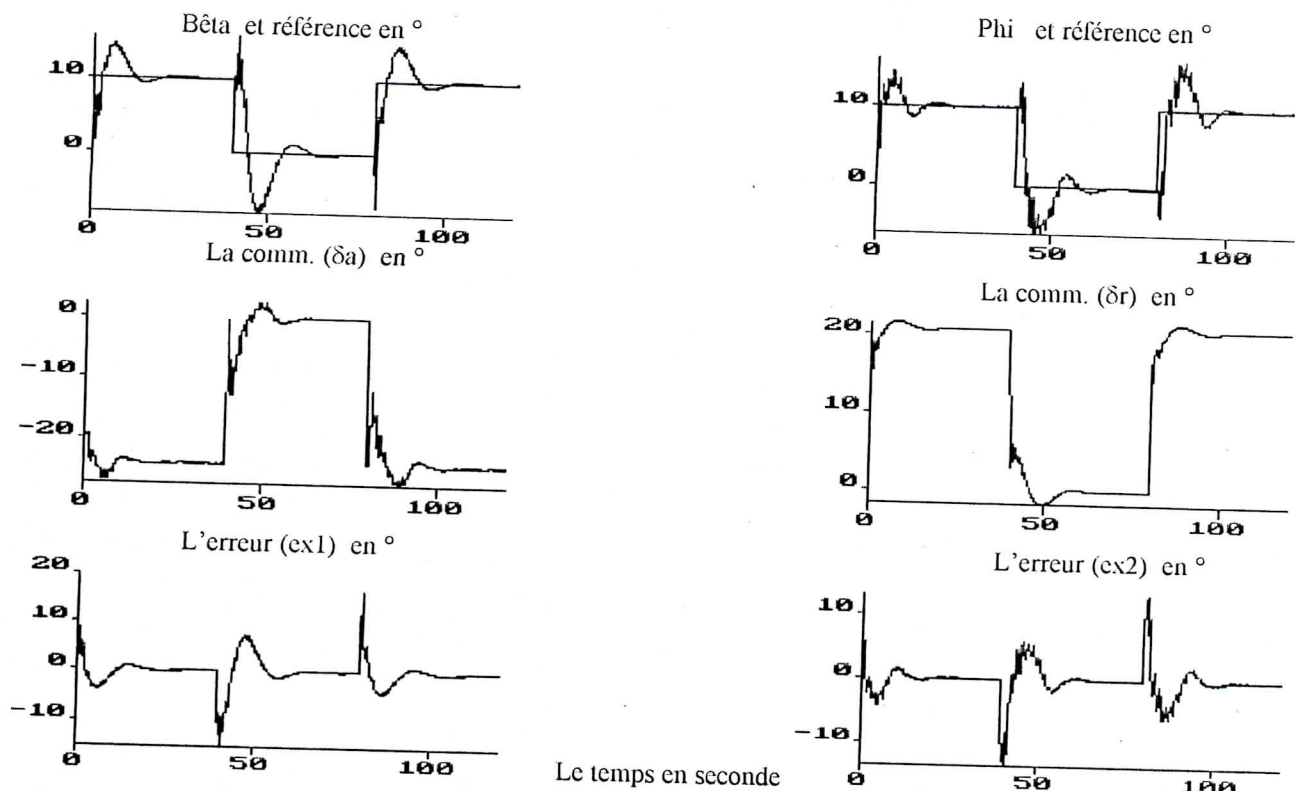


Fig.(3a.8) Commande GMV multivariable avec perturbation interne lente sur la vitesse de vol ( $V_0$ ) d'amplitude  $a_m = 10 \text{ m/s}$  et

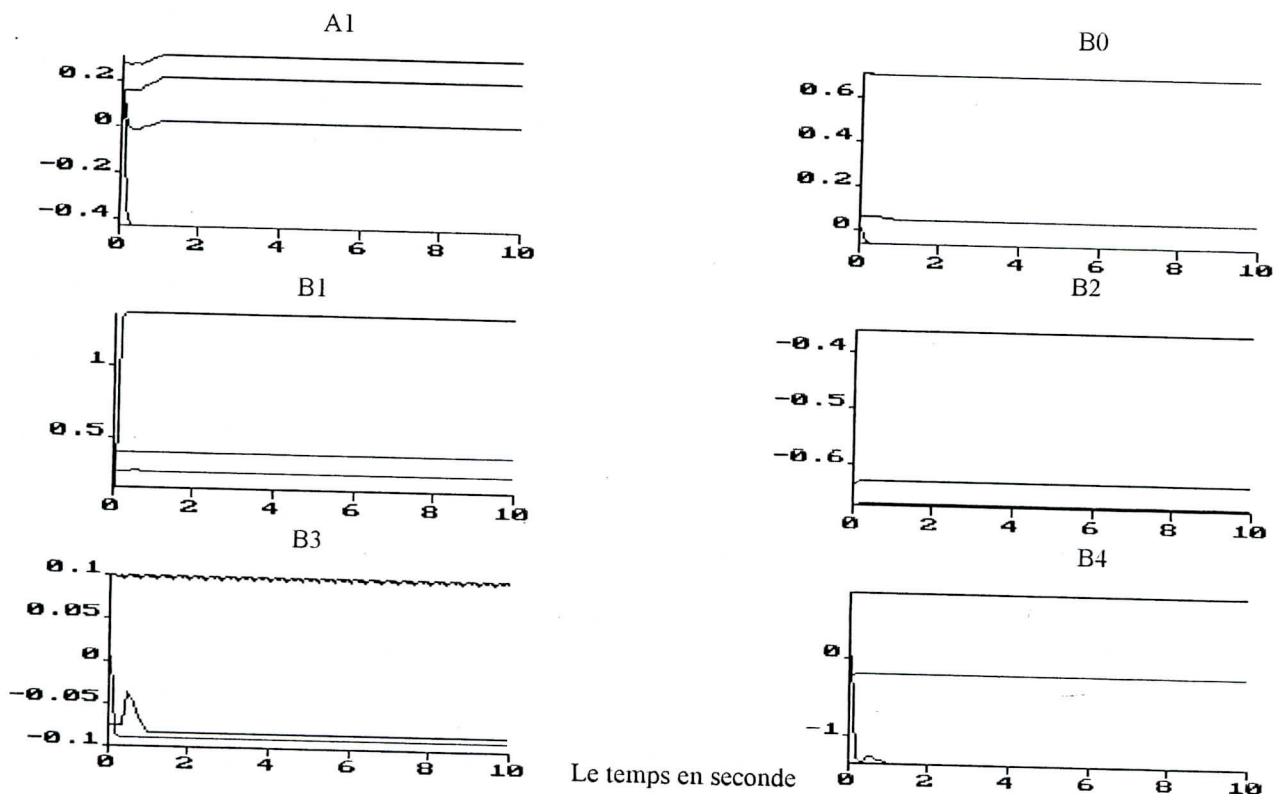


Fig.(3â.8) estimation des paramètres ( $A_1, B_0, B_1, B_2, B_3$  et  $B_4$ )

Graphes de simulation du mouvement longitudinal pour le contrôle de  $u$

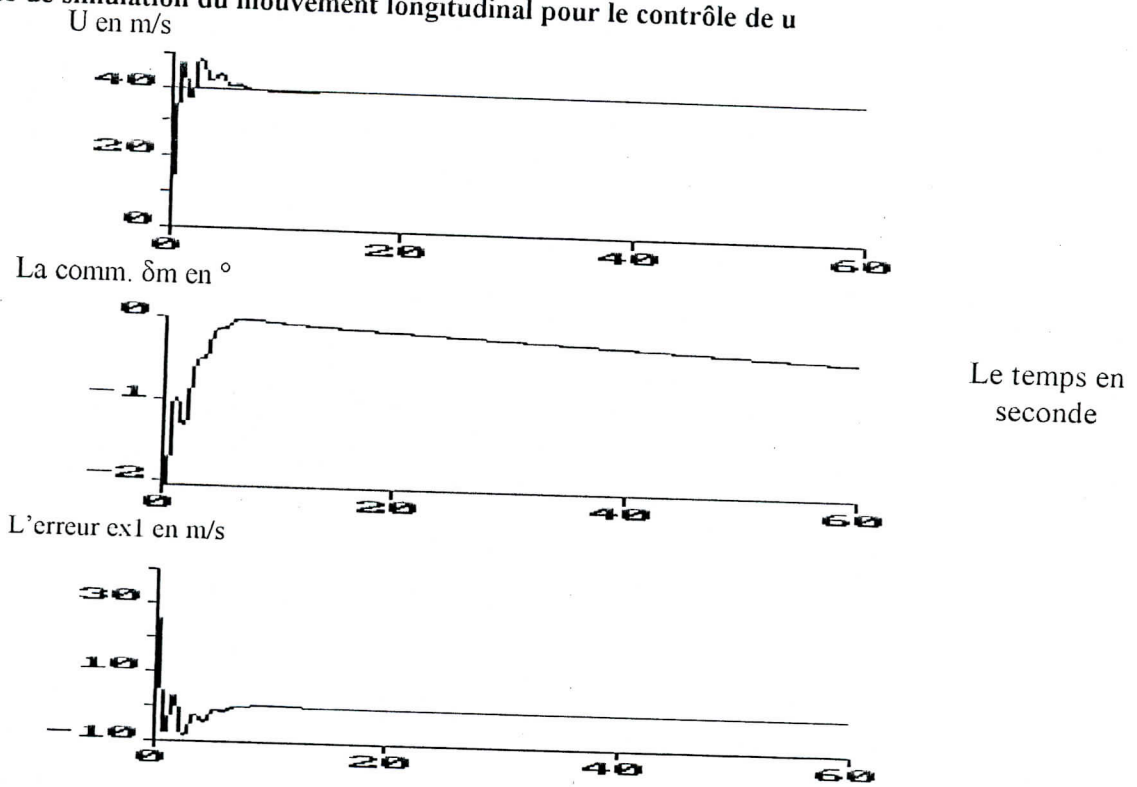


Fig.(3b.1) la commande GMV sans perturbations avec  $\lambda=2.5$  et  $\varepsilon=0.01$

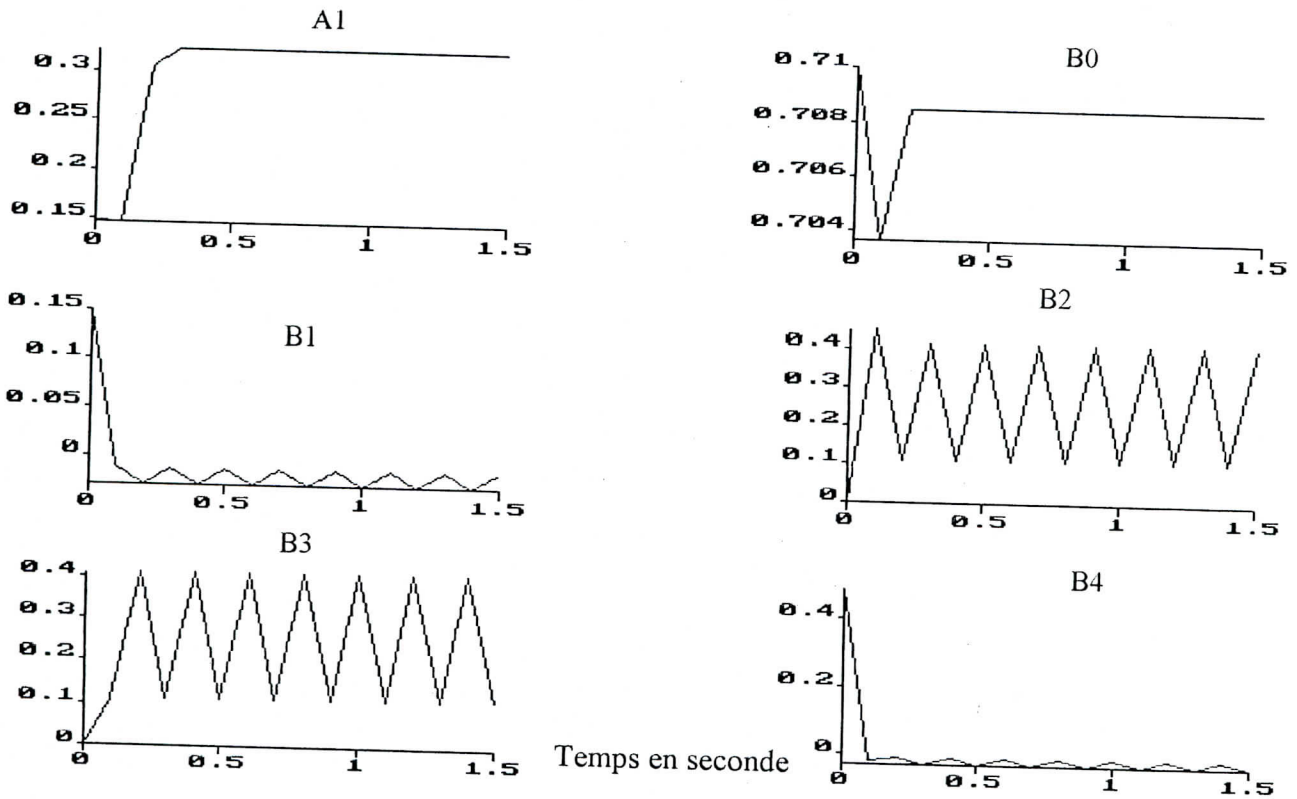


Fig.(3b'.1) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

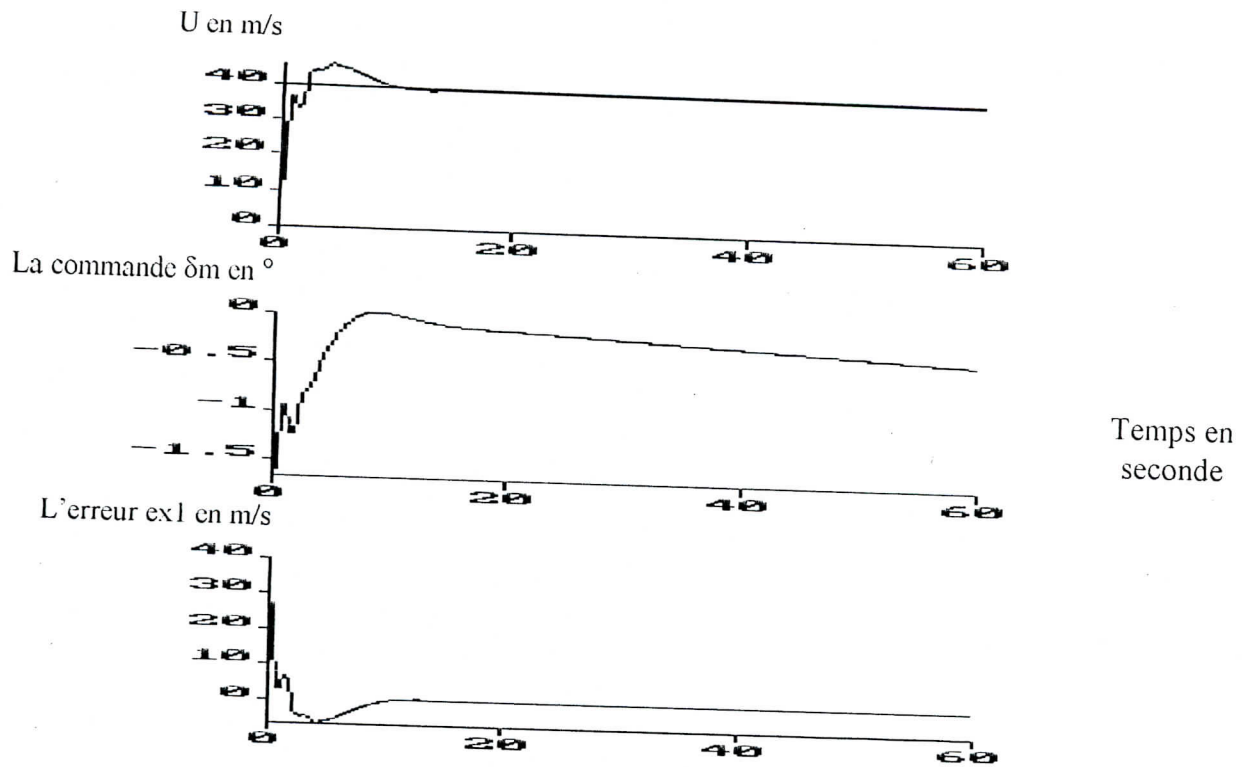


Fig.(3b.2) Commande GMV sans perturbation avec  $\lambda=2.6$  et  $\varepsilon=0.01$

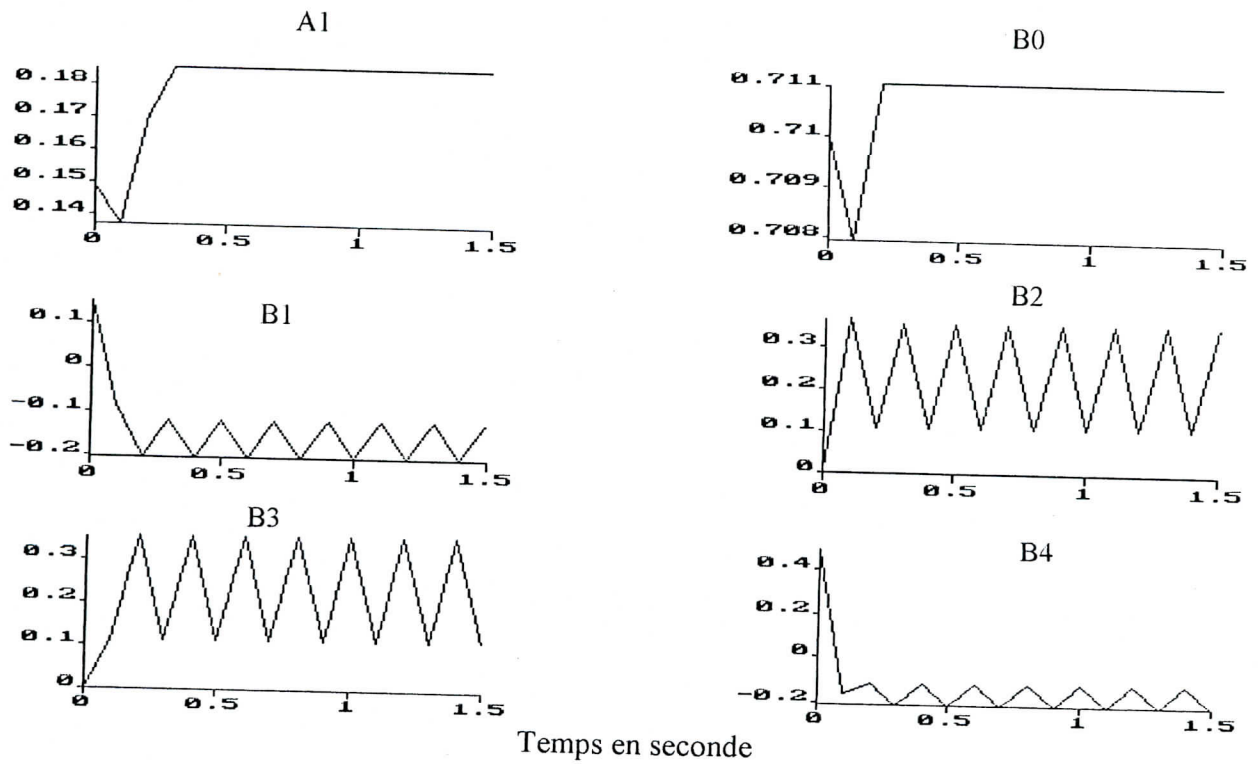


Fig.(3b'.2) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)



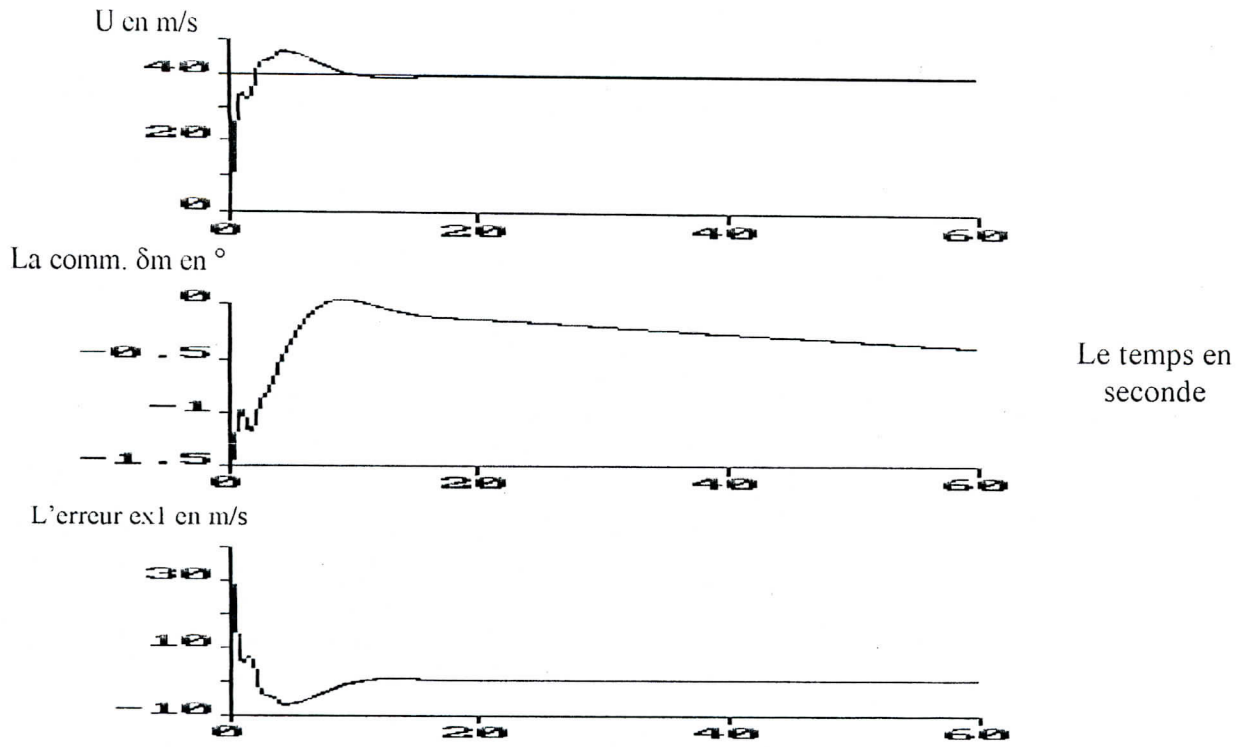


Fig.(3b.3) la commande GMV sans perturbations avec  $\lambda=3$  et  $\varepsilon=0.05$

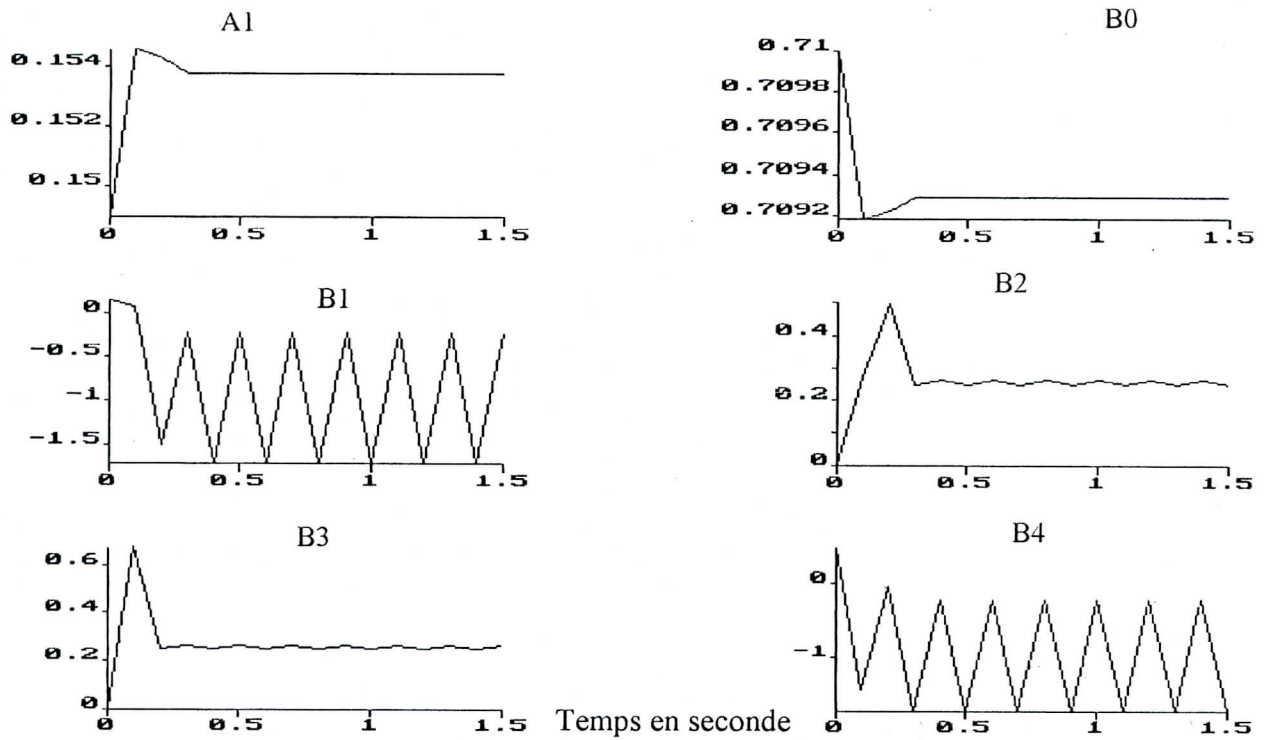


Fig.(3b'.3) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

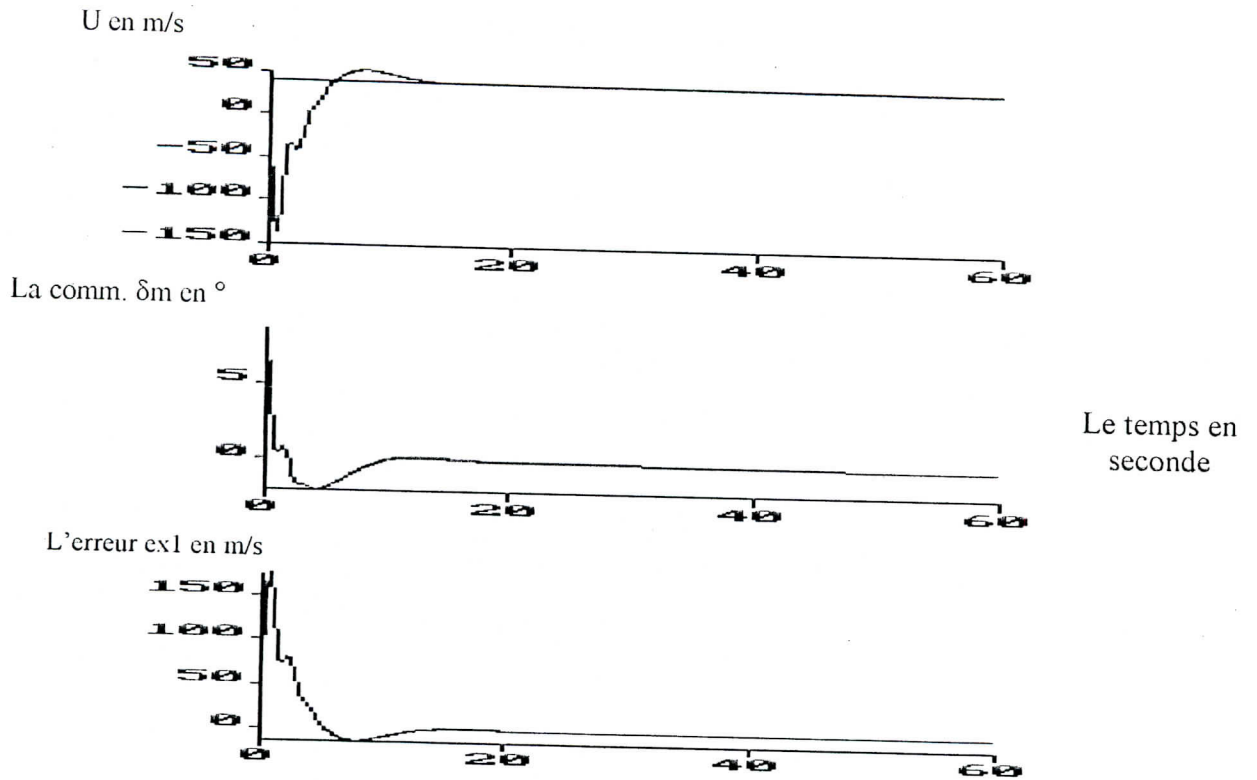


Fig.(3b. 4) la commande GMV avec perturbations externes constantes d'amplitude  $\alpha=5^\circ$

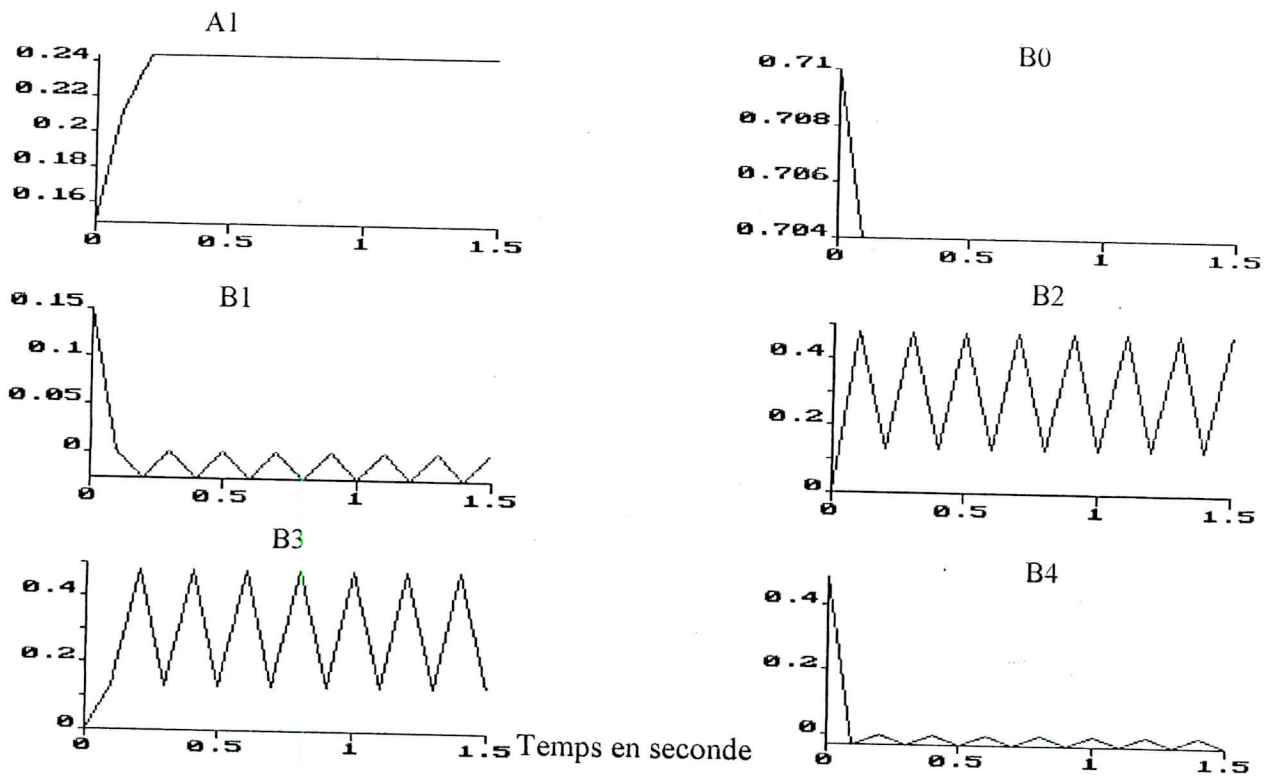


Fig.(3b'. 4) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

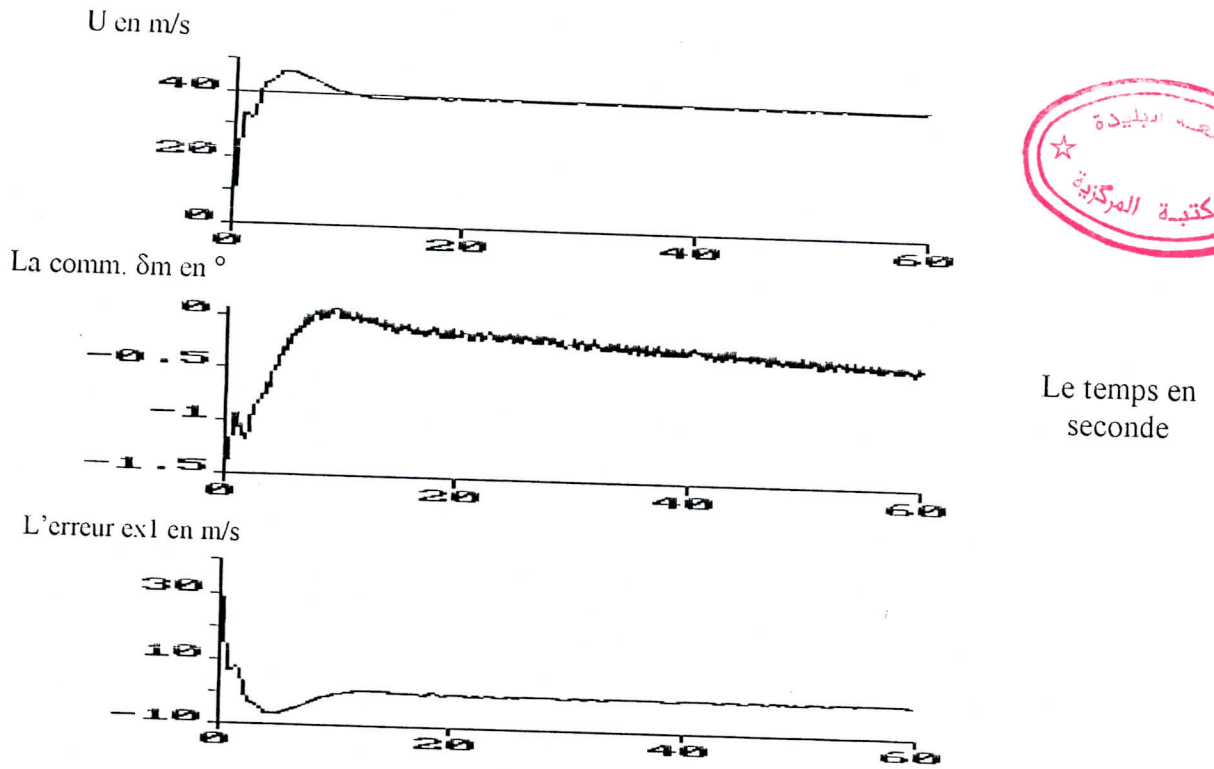


Fig.(3b. 5) la commande GMV avec perturbations externes sévères de niveau =  $1^\circ$  et de fréquence  $f_m = 100$  hz

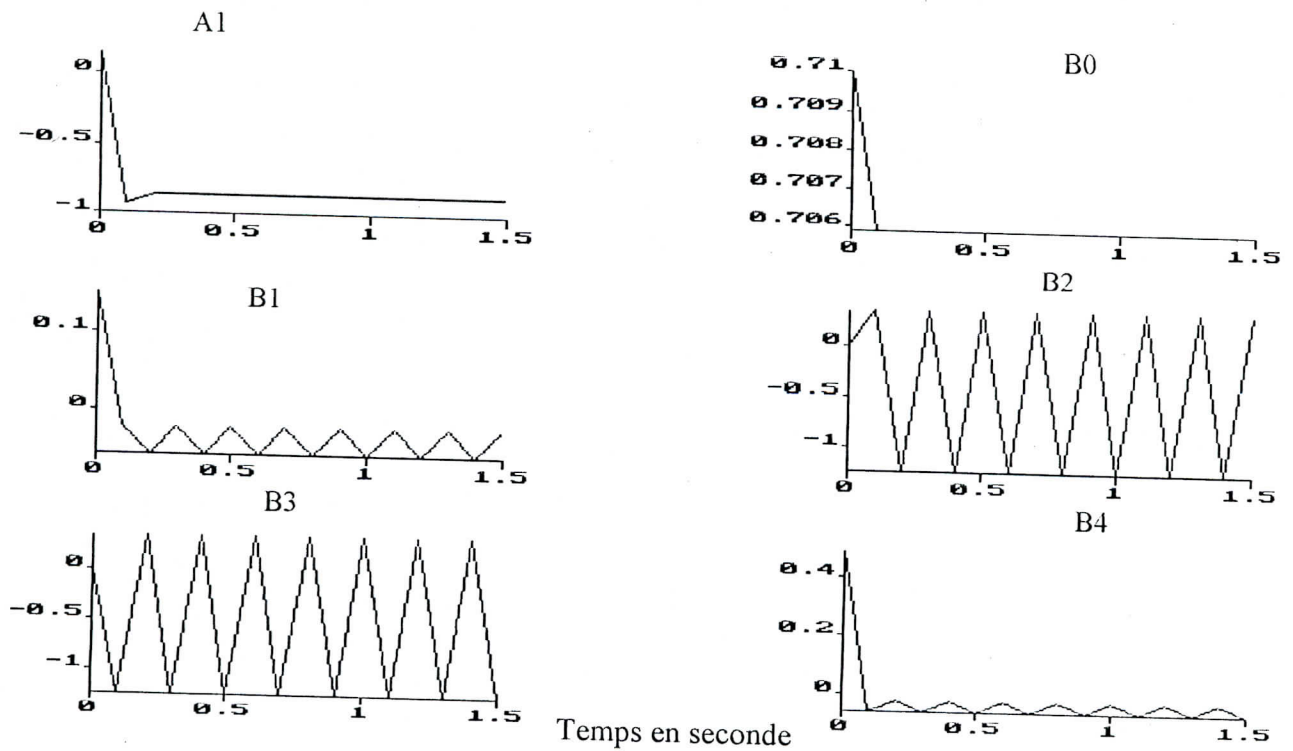


Fig.(3b'. 5) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

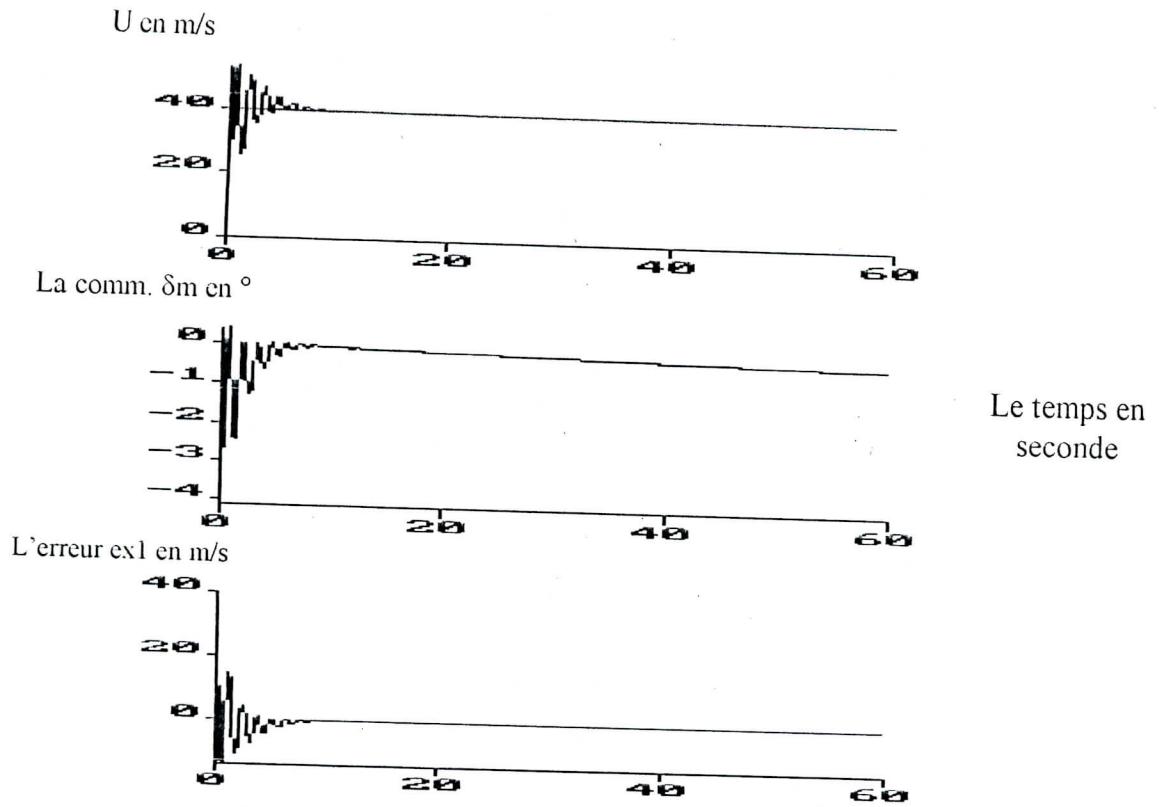


Fig.(3b. 6) la commande GMV avec perturbations interne linéaire de la masse d'amplitude  $a_m=0.1$  kg/s

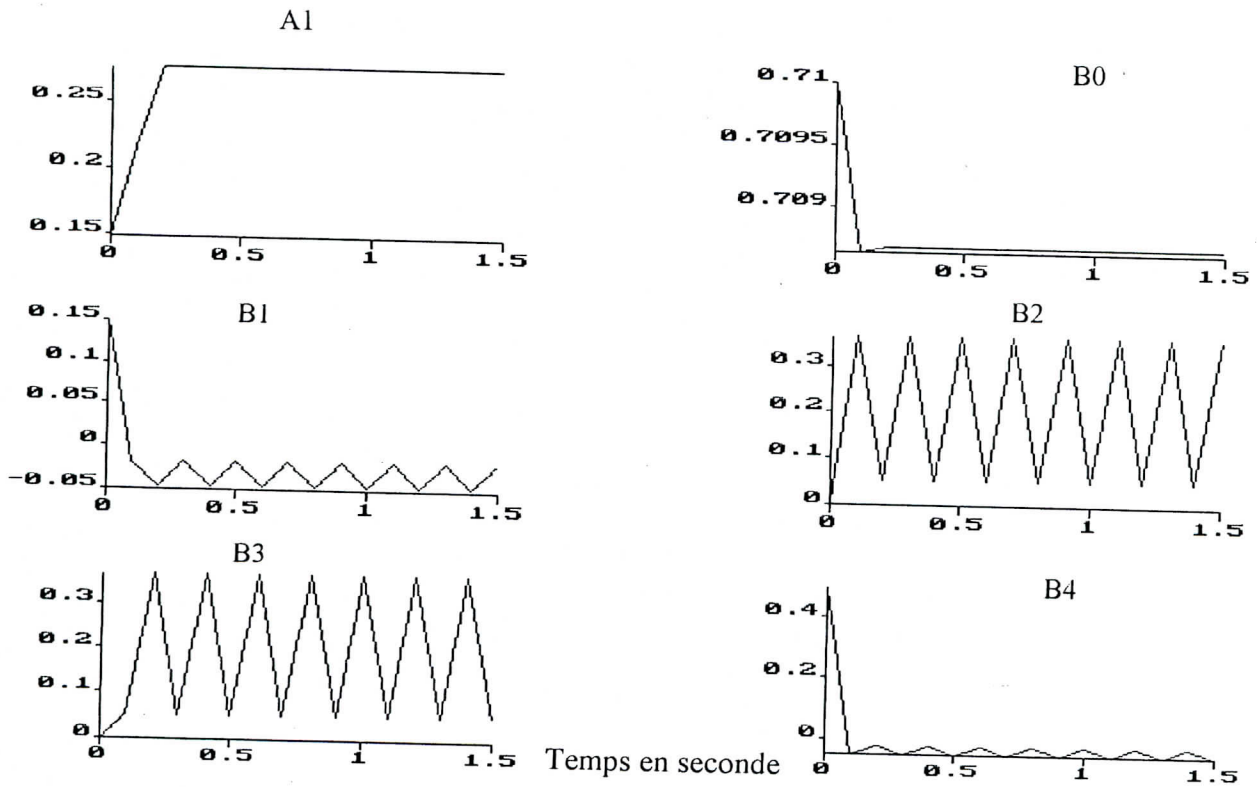


Fig.(3b'. 6) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

Graphes de simulation du mouvement longitudinal pour le contrôle de  $\Theta$

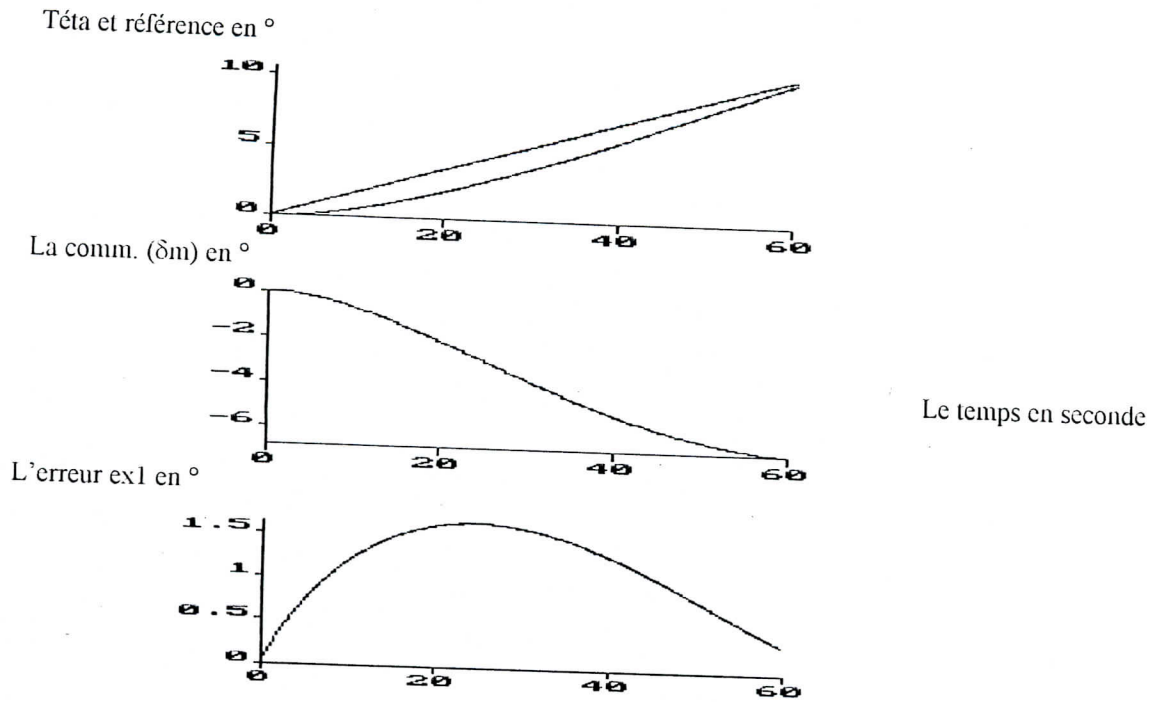


Fig.(3c. 1) Commande GMV sans perturbation avec  $\lambda = 1.2$  et  $\varepsilon = 0.9$

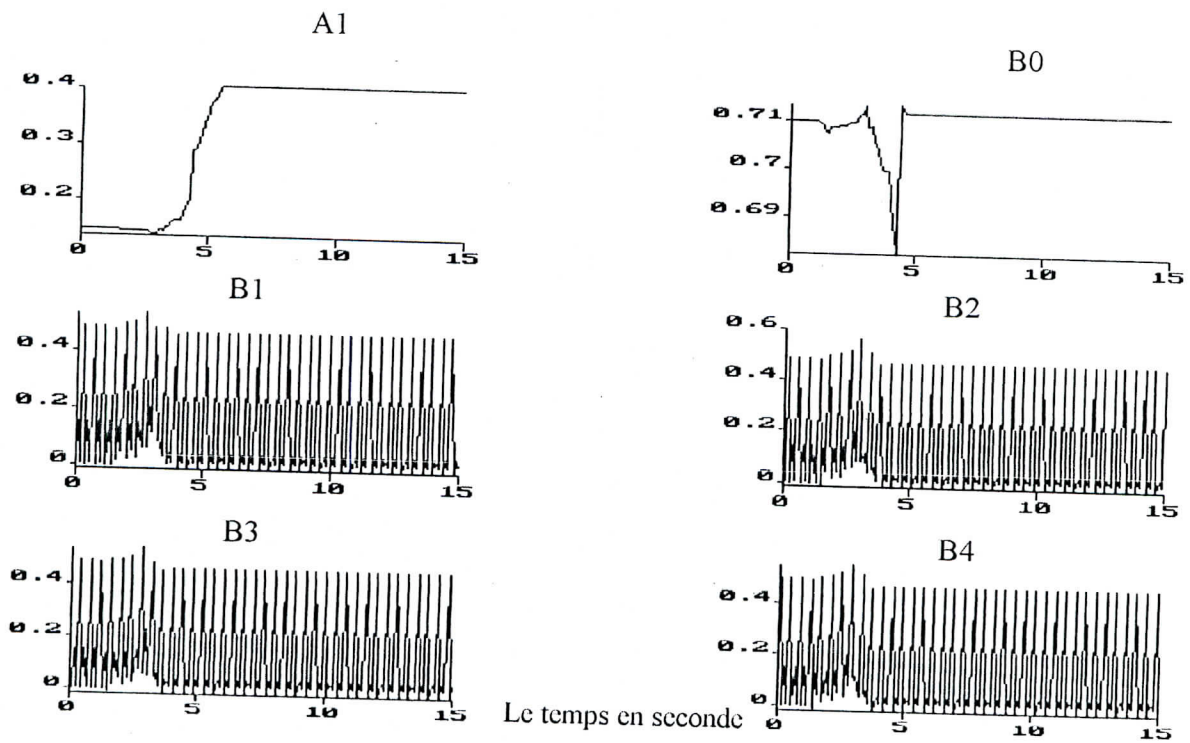


Fig.(3c'. 1) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

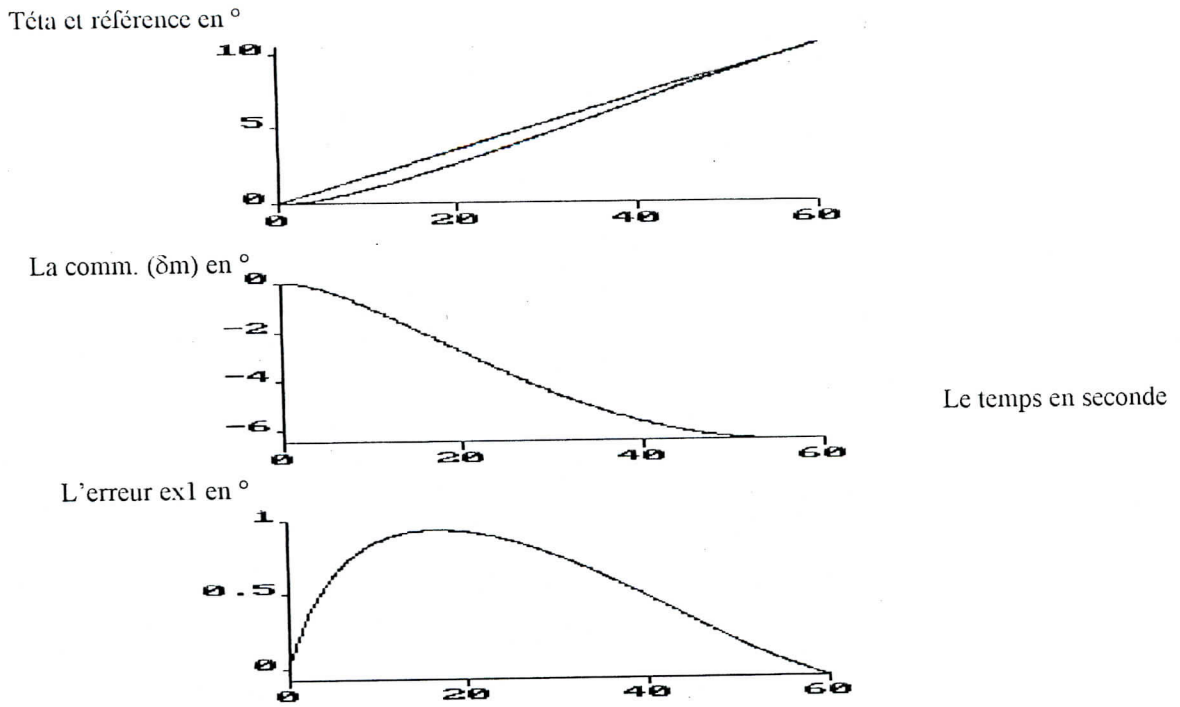


Fig.(3c. 2) Commande GMV sans perturbation avec  $\lambda = 1.2$  et  $\varepsilon = 1.2$

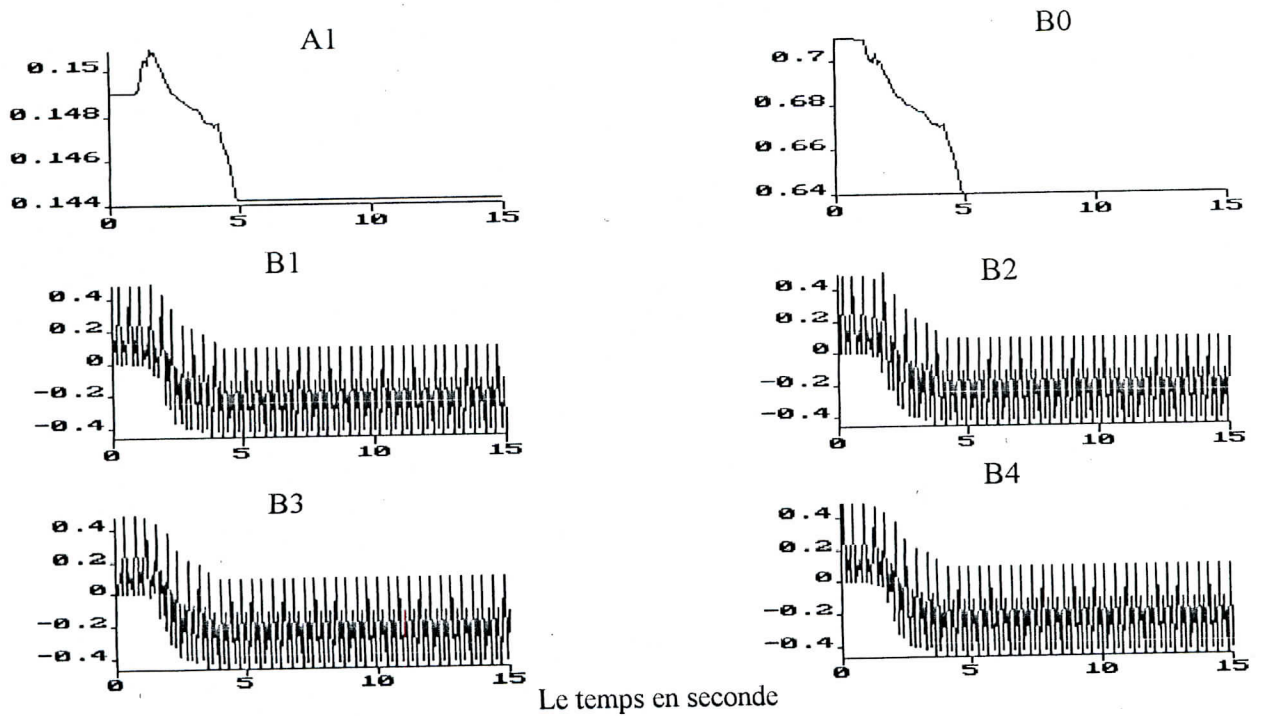


Fig.(3c'. 2) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

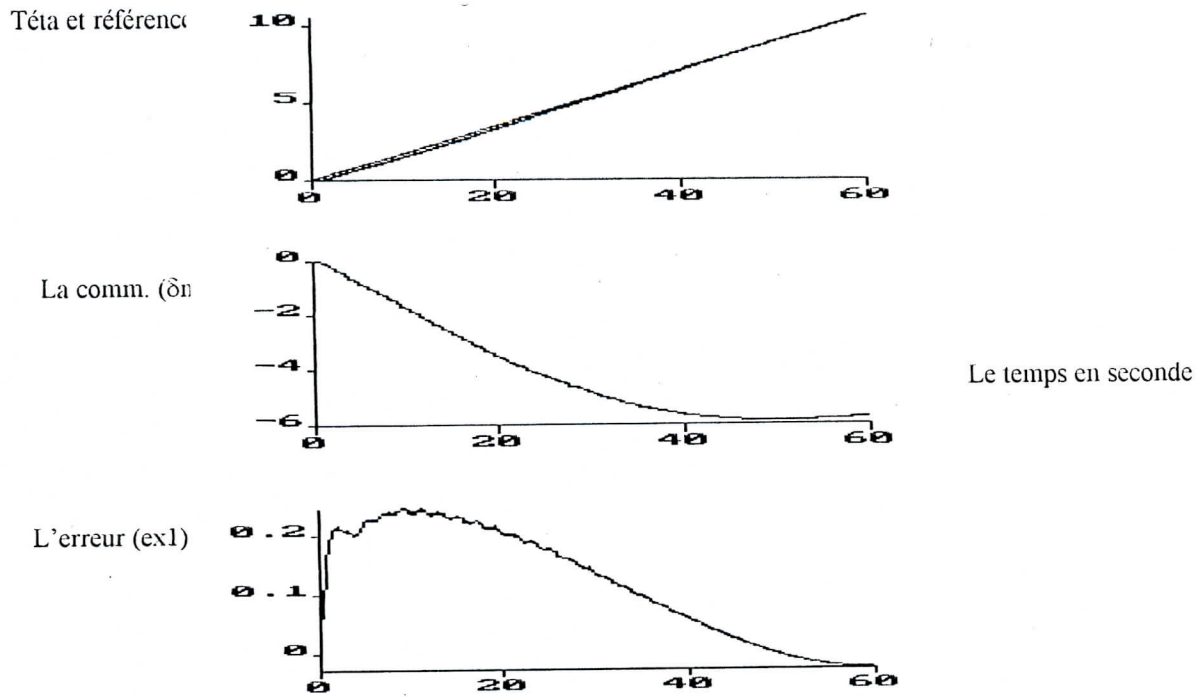


Figure (3c. 3) commande GMV sans perturbation avec  $\lambda=1.2$  et  $\varepsilon=1.5$

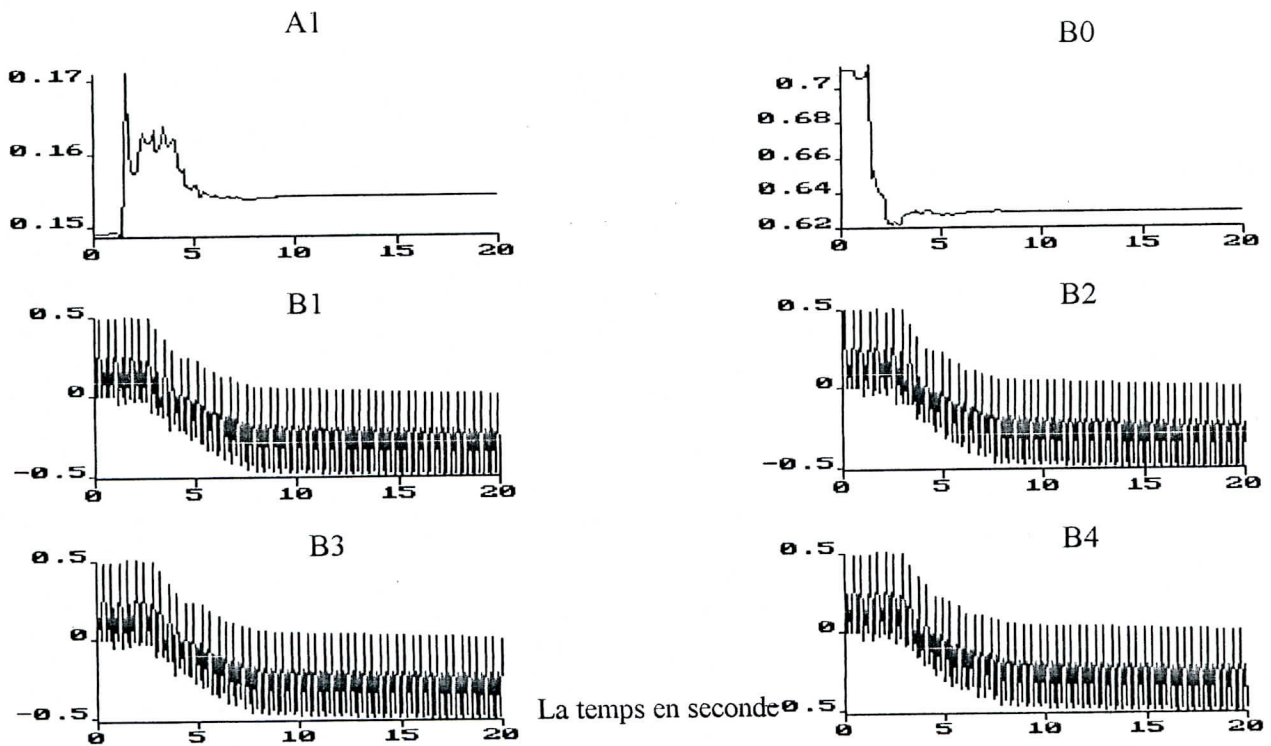


Fig.(3c'. 3) L'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

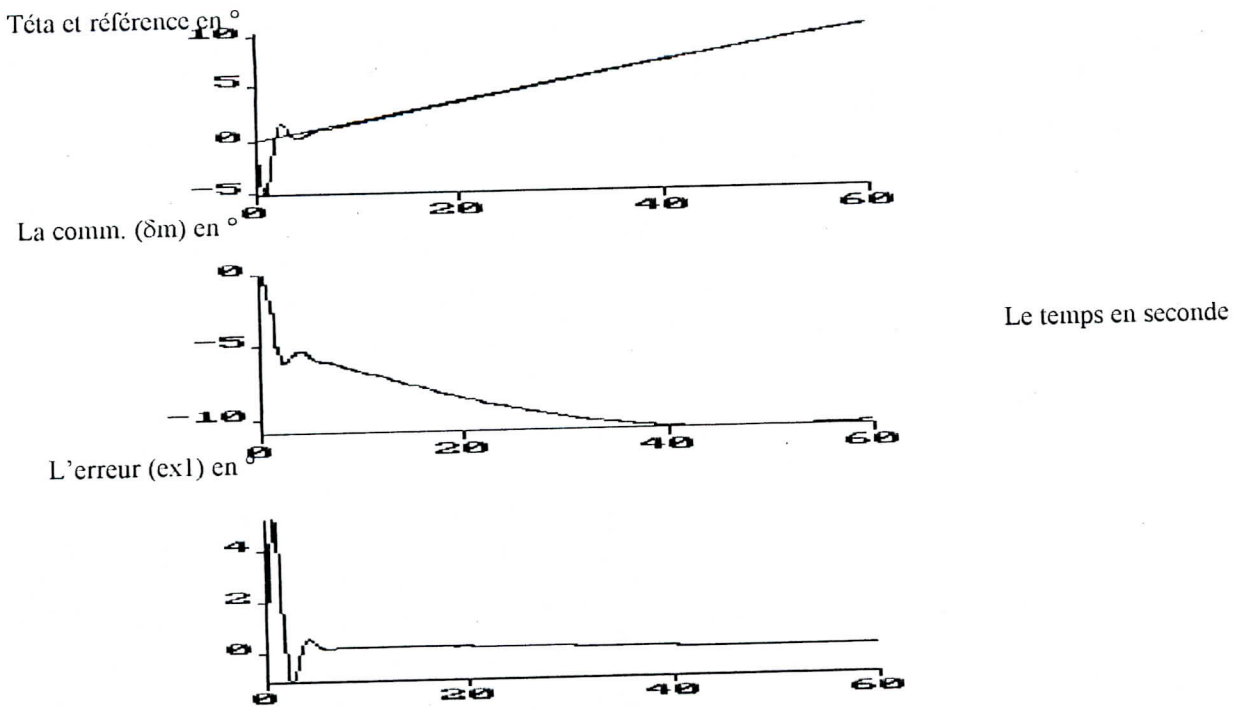


Figure (3c.4) commande GMV avec perturbation externe constante d'amplitude  $a=5^\circ$

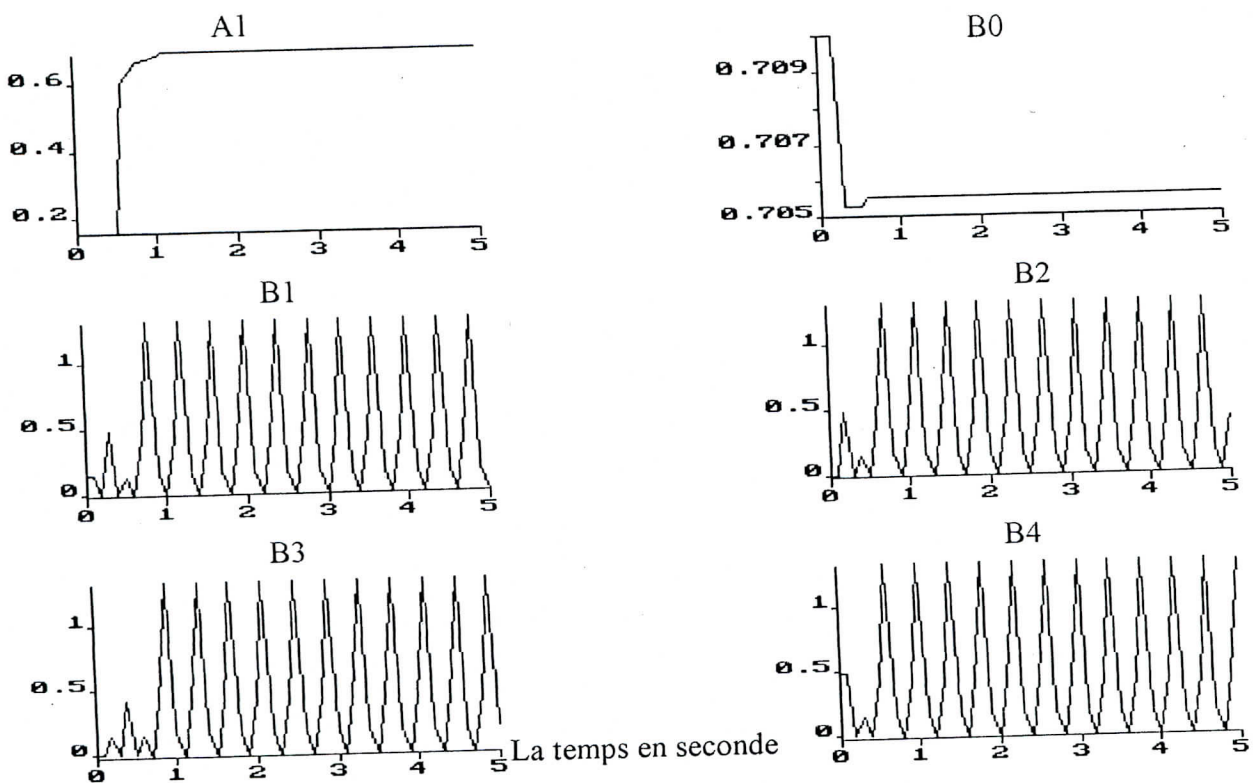


Figure (3c'. 4) L'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)



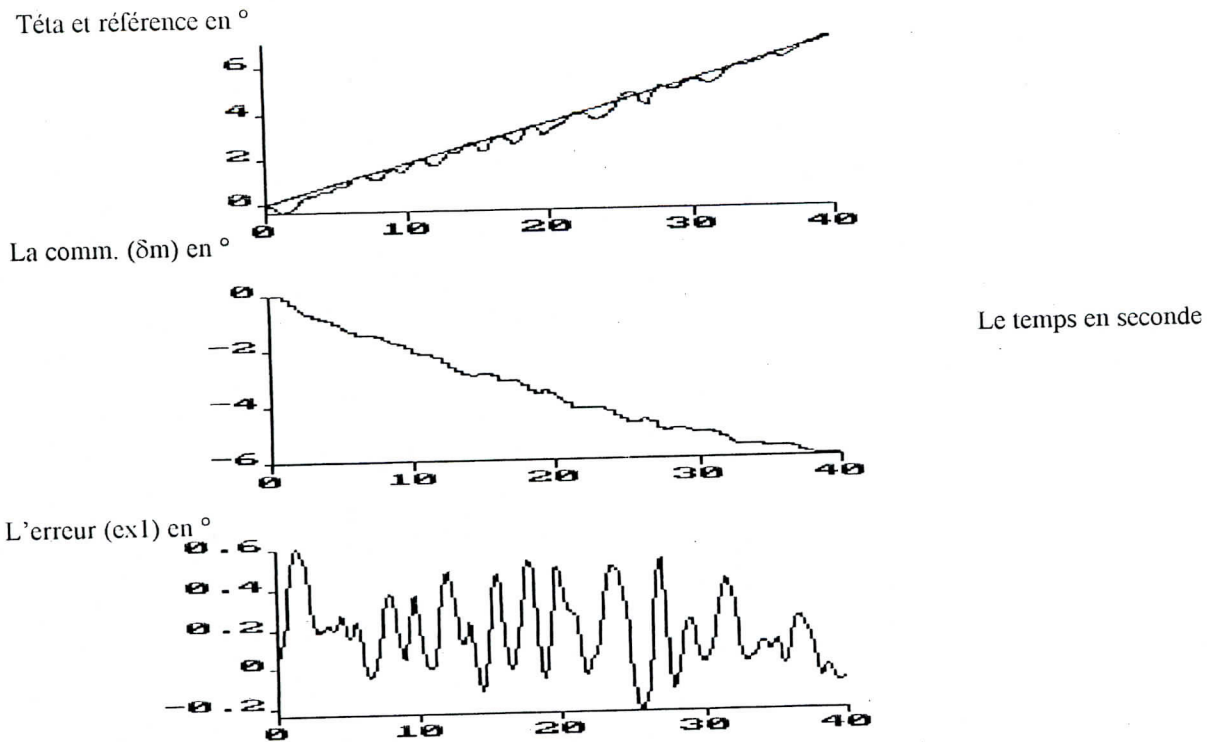


Fig. (3c.5) commande GMV avec perturbation externe sévère de niveau  $a=1^{\circ}$  et de fréquence  $f_m = 100$  hz

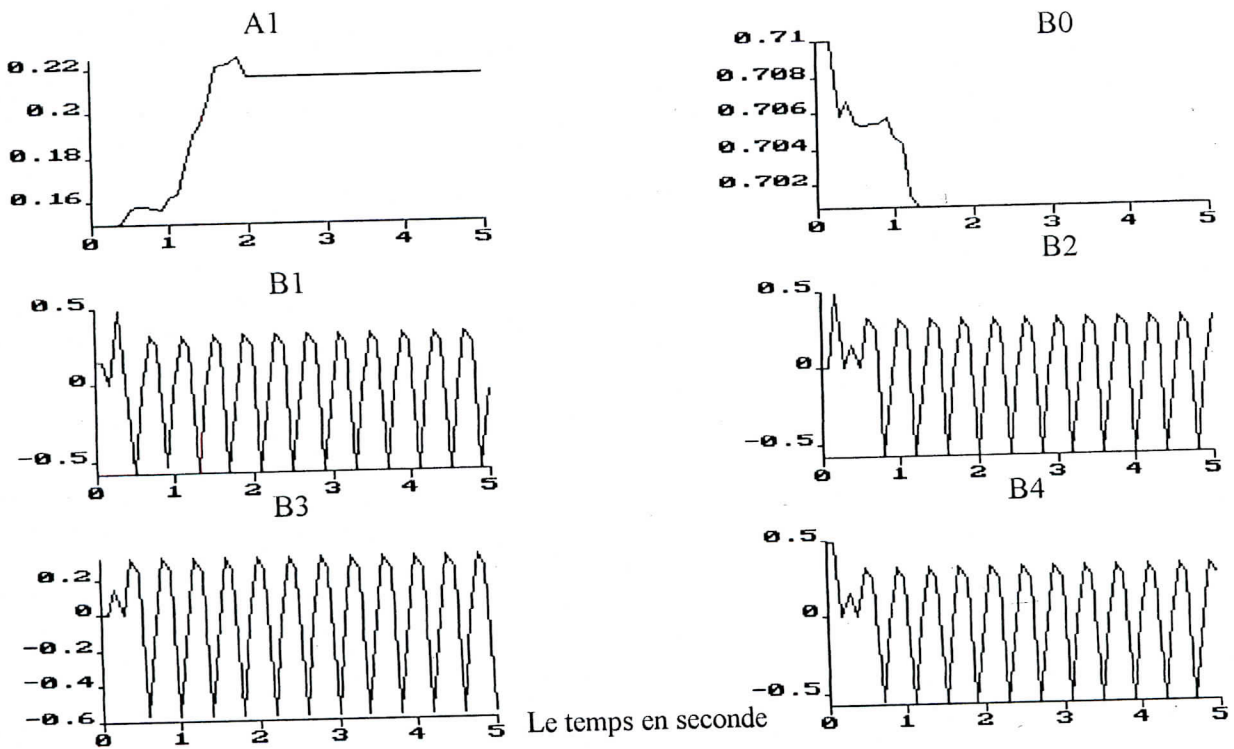


Fig. (3c'. 5) L'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

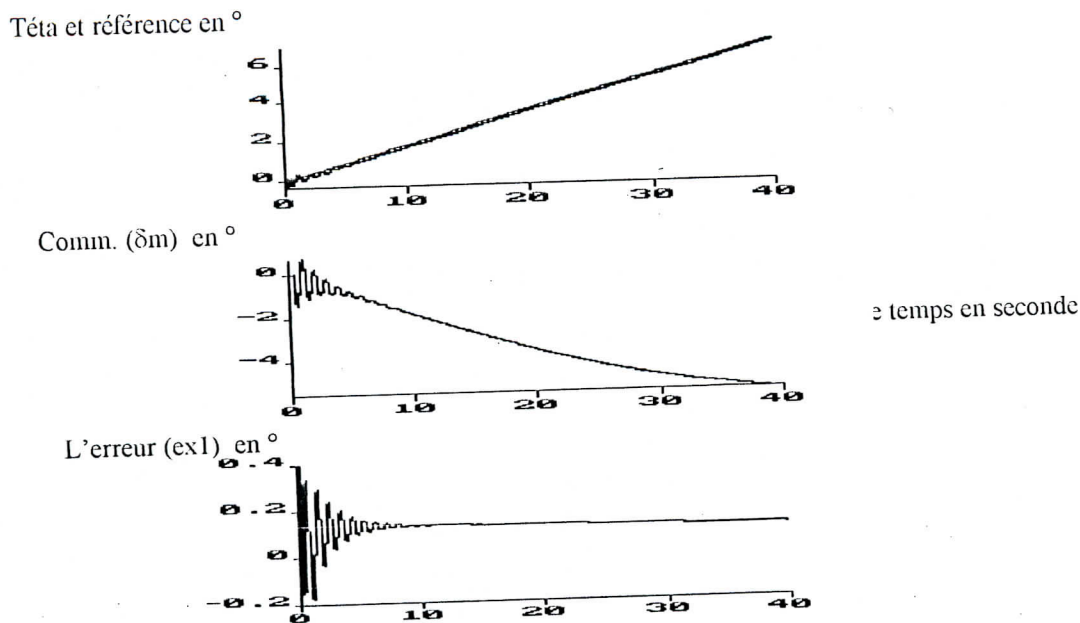


Fig. (3c.6) commande GMV avec perturbation interne de la masse de l'avion d'amplitude  $a = 0.1\text{kg/s}$

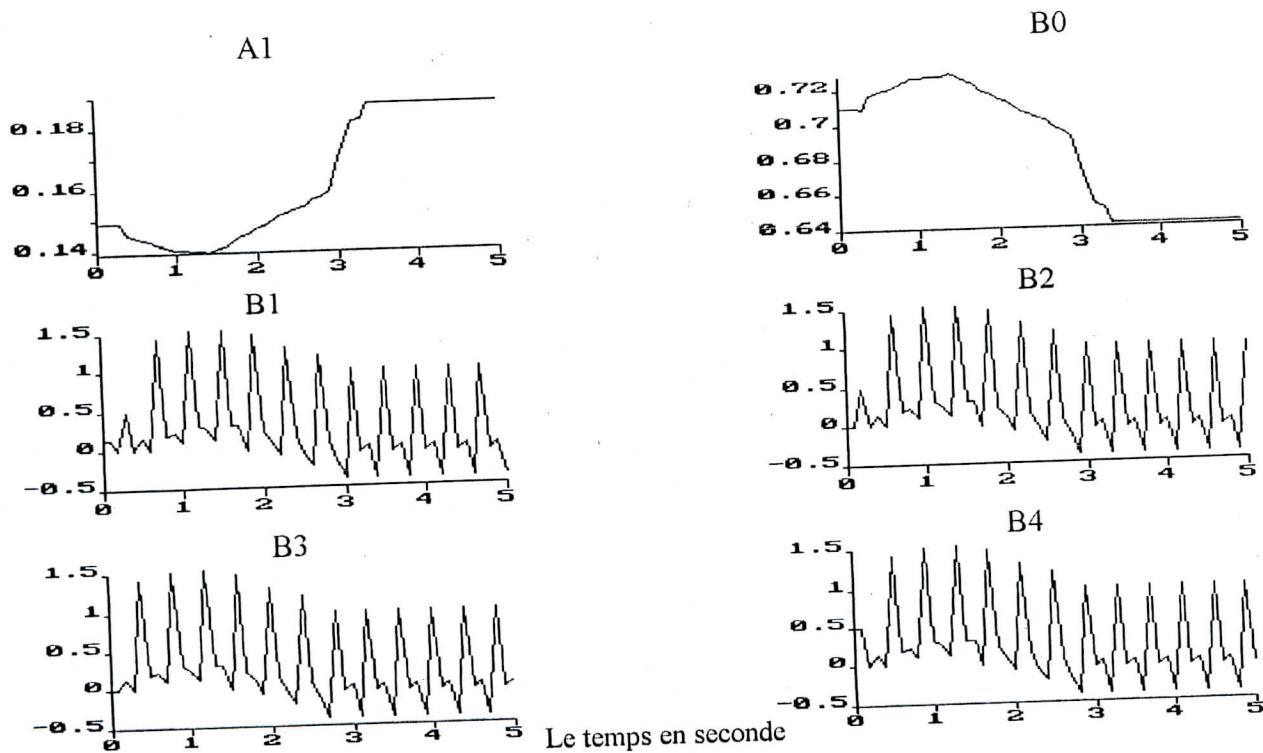


Fig. (3c'. 6) L'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

## IV.2 LA COMMANDE PRÉDICTIVE GÉNÉRALISÉE ( GPC )

### IV.2.1 INTRODUCTION

La commande adaptative GPC fait partie de la classe des commandes auto-ajustables et a été développée par [25,26] voir aussi [22,23]. Cette commande possède les avantages de certaines commandes tels que la GMV ou la P.A (placement de pôle) et elle est capable de dépasser les inconvénients rencontrés par ces commandes. Cette méthode de descente d'horizon dépend sur la prédiction de la sortie du système sur plusieurs pas, basés sur l'assomption des actions de contrôle futures. Une assomption est qu'il y a un « horizon de contrôle » au-delà duquel tous les contrôles incréments deviennent nuls. Il montre alors qu'il est bénéfique en terme de robustesse et fournit un calcul simplifié. Toutes les méthodes de contrôle ne peuvent être appliquées à n'importe quel type de système ou en même temps comme à :

- un système à phase non minimale
- un système instable en boucle ouverte ou à pôles amortis de façon mauvaise
- un système possédant des paramètres variables au cours du temps
- Un système à temps de retard variable ou inconnu sans qu'on ait à l'identifier, qui est un inconvénient dans le cas du contrôleur minimum variance qui nécessite l'utilisation de l'une des méthodes de Kurz et Goedecke 1981 ou Kurz 1979 pour pouvoir identifier le temps de retard.
- Un système possédant un ordre inconnu, que les contrôleurs LQG et le P.A ne peuvent dépasser.

La méthode qui sera décrite ici, apparaît capable de dépasser tous ces problèmes décrits ci-dessus. L'approche du GPC est basée sur une formulation explicite du système, peut bien traiter le cas du temps de retard variable comme le cas du contrôleur par placement de pôle mais qui ne peut surmonter le problème de surparamétrisation dont le GPC ne trouve aucun problème.

### IV.2.2 LE MODELE DU SYSTEME CARIMA ET LA SORTIE PREDICTIVE

Pour assurer une erreur nulle en régime permanent, on fait diminuer de un degré le modèle reliant les différents mouvements de l'avion aux différents braquages de gouvernes donné par (3.1) qui a été diminué de un degré et devient alors comme suit :

$$(4.2.1) \quad y(t) = z^{-k} \frac{B(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})} \delta u(t) + \frac{\Delta C(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})} \eta(t)$$

Où les polynômes  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont déjà définis dans (3.1) et  $\Delta$  est un opérateur de différentiation égale à  $(1-z^{-1})$ . Pour dériver le  $j^{\text{ème}}$  pas de prédiction de  $y(t+j)$  basé sur (4.2.1) en assumant que  $C(z^{-1})=1$  pour simplifier le calcul, et considérant l'identité suivante :

$$(4.2.2) \quad 1 = E_j(z^{-1})A\Delta + z^{-1}F_j(z^{-1})$$

où  $E_j$  et  $F_j$  sont des polynômes définis uniquement en donnant  $A(z^{-1})$  et l'intervalle de prédiction  $j$ . Si (4.2.1) est multipliée par  $E_j \Delta z^j$  on a :

$$(4.2.3) \quad E_j A \Delta y(t+j) = E_j B \Delta U(t+j-1) + E_j \eta(t+j)$$

Et substituant  $E_j A \Delta$  de (4.2.2) donne :

$$(4.2.4) \quad y(t+j) = E_j B \Delta U(t+j-1) + F_j y(t) + E_j \eta(t+j)$$

comme  $E_j$  est de degré  $j-1$ , la composante du bruit est entièrement dans le future ainsi que le prédicteur optimale, donne les sorties de données mesurées au temps  $t$  et tout  $u(t+i)$  pour  $i > 1$ , il est claire que :

$$(4.2.5) \quad \hat{y}(t+j|t) = G_j \Delta u(t+j-1) + F_j y(t)$$

où  $G_j(z^{-1}) = E_j B$

Notez que  $G_j(z^{-1}) = B(z^{-1})[1 - z^{-j}F_j(z^{-1})] / A(z^{-1})\Delta$  d'après (4.2.2).

Dans le développement du contrôleur GMV seule la prédiction  $\hat{y}(t+k|t)$  est utilisée, où  $k$  est assumé comme étant le temps de retard du système physique. Ici, on considère l'ensemble entier de prédictions pour lequel  $j$  se calcule du minimum jusqu'à une large valeur et il est noté par « minimum et maximum horizon de prédiction ». Pour  $j < k$  la prédiction du processus  $\hat{y}(t+j|t)$  dépend entièrement des données valables, mais pour  $j \geq k$  les assumptions ont besoin d'être faites sur le futur contrôle. Ces assumptions sont l'approche angulaire du GPC.

Supposant pour clarifier la notation, que  $E=E_j$ ,  $R=E_{j+1}$ ,  $F=F_j$ ,  $S=F_{j+1}$  et considérant les équations de Diophantine avec  $\tilde{A}$  définie comme  $A\Delta$  :

$$(4.2.6)-(4.2.7) \quad 1 = E\tilde{A} + z^{-j}F$$

$$1 = R\tilde{A} + z^{-(j+1)}S$$

En soustrayant (4.2.6) de (4.2.7) donne :

$$0 = \tilde{A}(R-E) + z^{-j}(z^{-1}S-F)$$

le polynôme  $R-E$  est de degré  $j$  et peut être divisé en deux parties

$$R - E = \tilde{R} + r_j z^{-j}$$

Ainsi

$$\tilde{A}\tilde{R} + z^{-j}(z^{-1}S - F + \tilde{A}r_j) = 0$$

Il est clair que  $\tilde{R}=0$  et S est donné par  $Sz(F - \tilde{A}r_j)$ .

Comme  $\tilde{A}$  a un premier élément nous avons

$$r_j = f_0$$

$$s_i = f_{i+1} - \tilde{a}_{i+1}r_j$$

Pour  $i = 0$  au degré de  $S(z^{-1})$ ;

(4.2.8a)-(4.2.8b)-(4.2.9)-(4.2.10)

$$\text{et } R(z^{-1}) = E(z^{-1}) + z^{-1}r_j$$

$$G_{j+1} = B(z^{-1})R(z^{-1})$$

Etant donné les polynômes du système  $A(z^{-1})$  et  $B(z^{-1})$  et une solution  $E_j(z^{-1})$  et  $F_j(z^{-1})$  alors (4.2.8) peuvent être utilisées pour obtenir  $F_{j+1}(z^{-1})$  et (4.2.9) donnera  $E_{j+1}(z^{-1})$ .

Pour initialiser le calcul, noter que pour  $j=1$

$$1 = E_1 \tilde{A} + z^{-1} F_1$$

et comme le premier élément de  $\tilde{A}$  est 1 alors

$$E_1 = 1, \quad F_1 = z(1 - \tilde{A})$$

La méthode de calcul résultante est directe et plus simple que celle requise quand on utilise une prédiction séparée pour chaque horizon de sortie.

### IV.2.3. LA LOI DE PREDICTION

Supposant que la future séquence de référence  $[w(t+j); j=1,2,\dots]$  est disponible. Dans la plus part des cas  $w(t+j)$  sera une constante  $w$  égale au point courant désiré  $w(t)$ , si non, les variations futures dans  $w(t+j)$  doivent être connues. Le GPC peut être appliqué à une référence constante ou variable.

L'objectif de la loi de contrôle de prédiction est de conduire les futures sorties du système  $y(t+j)$  à  $w(t+j)$ . Ceci est fait en utilisant l'approche par l'horizon de descente, qui à toute période d'échantillonnage  $t$  :

1. la future séquence de référence  $w(t+j)$  est calculée

2. le modèle de prédiction de (4.2.5) est utilisé pour générer un ensemble de sorties prédites  $\hat{y}(t+j|t)$  avec les erreurs prédites correspondantes  $e(t+j) = w(t+j) - \hat{y}(t+j|t)$ , notant que  $\hat{y}(t+j|t)$ , pour  $j > k$  dépend d'une part des signaux de contrôle  $u(t+i)$  qui seront déterminés.
3. une fonction quadratique appropriée des erreurs futures et de la commande est minimisée, assumant qu'après un « horizon de contrôle » d'avantages incréments dans le contrôle sont nuls, pour fournir des séquences futures de contrôle  $u(t+i)$  suggérées.
4. le premier élément  $u(t)$  de la séquence est imposé et les vecteurs de données appropriés sont déplacés ainsi le calcul peut être répété au prochain instant d'échantillonnage.

Considérant la fonction coût de la forme :

$$(4.2.11) \quad J(N_1, N_2) = E \left\{ \sum_{N_1}^{N_2} [y(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \right\}$$

où :

$N_1$  est le minimum horizon de sortie

$N_2$  est le maximum horizon de sortie

$\lambda(j)$  est le facteur de pesée de la séquence de contrôle

La prédiction dans (4.2.11) est conditionnée sur les données au temps  $t$  assumant que les futures mesures ne sont pas disponibles. Comme il est mentionné auparavant le premier contrôle est appliqué et la minimisation est répétée au prochain échantillon. Résultant en une loi de contrôle connue sous contrôle de boucle ouverte chaîne de retour de contrôle optimal (Bertsekas 1976).

Pour le choix de  $N_2$  de façon générale il est choisi de telle sorte de balayer toute la réponse qui est affectée de façon significative par le contrôle courant,  $N_2$  doit être plus grand que le degré de  $B(z^{-1})$  tel que, tous les états contribuent au coût (Kailath 1980).  $N_1$  peut être prise égale à 1; si le temps de retard du système est connu a priori,  $N_1$  peut être choisi égale à  $k$  ou plus pour minimiser du temps de calcul.

Pour des raisons de simplicité  $\lambda(j)$  sera prise comme une constante  $\lambda$ ,  $N_1$  à 1 et  $N_2$  à  $N$  « horizon de la sortie ».

Les modèles des sorties futures de (4.2.3)

$$y(t+1) = G_1 \Delta u(t) + F_1 y(t) + E_1 \eta(t+1)$$

$$y(t+2) = G_2 \Delta u(t+1) + F_2 y(t) + E_2 \eta(t+2)$$

$$y(t+N) = G_N \Delta u(t+N-1) + F_N y(t) + E_N \eta(t+N)$$

Considérant  $y(t+j)$ , il est constitué de trois termes, dont un dépendant des actions de contrôle futures qui vont être déterminées, l'autre dépendant du contrôle passé connu, les deux avec des variables mesurées filtrées et indépendant des signaux de bruits futurs. L'assumption que les contrôles sont fournis en boucle ouverte est équivalent pour ignorer toutes les séquences du bruit futur  $\{\eta(t+j)\}$  dans le calcul des prédictions. Soit  $f(t+j)$  une composante de  $y(t+j)$  composée de signaux qui sont connus au temps  $t$ , par exemple.

$$(4.2.11a) \quad \begin{aligned} f(t+1) &= [G_1(z^{-1}) - g_{10}] \Delta u(t) + F_1 y(t) \quad \text{et} \\ f(t+2) &= z[G_2(z^{-1}) - z^{-1}g_{21} - g_{20}] \Delta u(t) + F_2 y(t), \quad \text{etc} \\ \text{où } G_i(z^{-1}) &= g_{i0} + g_{i1}z^{-1} + \dots \end{aligned}$$

Alors les équations ci-dessus peuvent être réécrites sous forme de vecteur

$$\hat{y} = G \tilde{u} + f$$

où les vecteurs sont tous  $N^*1$

$$\begin{aligned} \hat{y} &= [\hat{y}(t+1), \hat{y}(t+2), \dots, \hat{y}(t+N)]^T \\ \hat{u} &= [\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+N-1)]^T \\ f &= [f(t+1), f(t+2), \dots, f(t+N)]^T \end{aligned}$$

Comme il est indiqué ci dessus, les  $j$  premiers termes en  $G_j(z^{-1})$  sont les paramètres de la réponse unitaire et pour cela  $g_{ij} = g_j$  pour  $j = 0, 1, 2, \dots < i$  indépendant de la particularité du polynôme  $G$ .

La matrice  $G$  est alors triangulaire inférieure de dimension  $N^*N$

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{N-1} & g_{N-2} & g_0 \end{bmatrix}$$

Il est noté que si le temps de retard  $k > 1$ , les premiers  $k-1$  lignes de  $G$  sont nuls, mais si  $N_1$  est assumé égale à  $k$ , le premier élément est différent de zéro. Cependant, comme  $k$  n'est pas généralement connu, dans le cas des auto-ajustables, une caractéristique de l'approche du GPC est qu'une solution stable est possible chaque fois si les premiers éléments de la ligne de  $G$  sont nuls.

A partir de la définition des vecteurs donnés ci dessus et avec

$$w = [w(t+1), w(t+1), \dots, w(t+N)]^T$$

La prédiction de la fonction coût de (4.2.11) peut être réécrite

$$(4.2.12) \quad \begin{aligned} J_1 &= E \{J(1, N)\} \\ &= E \left\{ (y-w)^T (y-w) + \lambda \tilde{u}^T \tilde{u} \right\} \end{aligned}$$

i.e 
$$J_1 = \{(G\tilde{u} + f - w)^T (G\tilde{u} + f - w) + \lambda \tilde{u}^T \tilde{u}\}$$

la minimisation de  $J_1$  en assumant que les contrôles futurs sont sans contraintes résulte dans la projection du vecteur de contrôle incrément

$$(4.2.13) \quad \tilde{u} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (w - f)$$

Noter que le premier élément de  $\hat{u}$  est  $\Delta u(t)$  ainsi le contrôle courant  $u(t)$  est donné par

$$(4.2.14) \quad u(t) = u(t-1) + \bar{g}^T (w - f)$$

Où  $\bar{g}^T$  est la première ligne de  $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$ . Ainsi, il est inclus dans le contrôle un intégrateur qui produisant un offset nul résulte pour une référence constante  $W(t+j) = w$ .

Maintenant l'équation de Diophantine (4.2.3) pour  $z=1$  donne

$$1 = E_j(1)A(1)\Delta(1) + F_j(1)$$

Et comme  $\Delta(1)=0$  alors  $F_j(1)=1$  tel que  $f(t+j)=F_j y(t)$  est un signal dont la valeur moyenne est égale à celle de  $y(t)$ . De plus, définissant  $F_j(z^{-1})$  comme étant  $E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1})$  ce qui donne

$$\begin{aligned} F_j(z^{-1})y(t) &= (1 - F_j'(z^{-1})\Delta)y(t) \\ &= y(t) - F_j'\Delta y(t) \end{aligned}$$

Ce qui montre que si  $y(t)$  est la constante  $\tilde{y}$ , telle que  $\Delta y(t)=0$ , alors la composante  $F_j y(t)$  se réduit à  $\tilde{y}(t)$ . Ceci, ensemble avec la commande donnée par (4.2.14) assurent l'élimination de l'offset par une action intégrale. [22,25,26]



#### IV.2.4. CHOIX DE L'HORIZON DE LA SORTIE ET DU CONTROLE [18,20]

Des travaux de simulations concernant une variété de systèmes stables, instables et à nonminimum-phase avec un temps de retard variable, ont montré que la robustesse de cette méthode de contrôle est sur le bon choix de l'horizon de sortie et de contrôle ( $N_1$ ,  $N_2$  et  $NU$ )

**A. Choix de  $N_1$  (l'horizon minimum de la sortie) :** Si le temps de retard  $k$  est connu exactement, il n'y a pas de point à prendre  $N_1$  inférieur à  $k$ , il peut avoir lieu à un calcul superflus, dans lequel les sorties correspondantes peuvent ne pas être affectées par la première action de contrôle  $u(t)$ . Si  $k$  n'est pas connu ou variable, alors  $N_1$  peut être prit égale à 1, sans pour cela perdre la stabilité.

**B. Choix de  $N_2$  (l'horizon de sortie maximum):** L'une des méthodes est, qu'en temps discret  $N_2$  doit dépasser le degré de  $B(z^{-1})$ , si le système est à phase non minimum.

**C. Choix de  $NU$  (l'horizon de contrôle) :** C'est un paramètre très important. Pour un système simple (stable en boucle ouverte pouvant avoir un temps de retard et une phase non minimum) la valeur de  $NU$  peut être égale à 1 est donne généralement un contrôle acceptable. En augmentant  $NU$ , la commande et la réponse de la sortie correspondante, deviennent plus actives. D'une manière générale,  $NU$  doit être égale au nombre de pôles à proximité de la borne de la stabilité.

Dans le cas où un amortissement de la commande devrait avoir lieu, la valeur de  $\lambda$  peut être augmentée à partir de zéro. Noter en particulier, contrairement au GMV, que le GPC peut être appliqué à un système à non minimum de phase avec  $\lambda$  nul [25, 26].

#### IV.2.5. APPLICATION AUX SYSTEMES MULTIVARIABLES :

Nous allons supposer un modèle multivariable à découplage total exprimant le comportement entrées / sorties du système. Ceci, peut être fait, en appliquant l'une des méthodes de découplage, connu en contrôle. Par la suite, Nous obtenant un ensemble de sous système (siso), d'où à chacun desquels, nous pouvant lui appliquer la commande GPC pour la génération du vecteur de commande du système.

Soit le sous système siso:  $[ y_i(t), u_i(t) ]$

avec ses éléments de transfert  $[ A_i(q^{-1}), B_i(q^{-1}) ]$

Nous allons calculer la commande  $\Delta u_i(t)$  en appliquant les étapes de calcul de la commande GPC déjà citées.

#### IV.2.6 SIMULATION ET INTERPRETATIONS :

La commande prédictive généralisée est appliquée au système d'avion en premier temps dans un milieu non perturbé. Puis on soumit notre système à des perturbations de type externe et interne afin de pouvoir tester la robustesse et les performances d'une telle commande.

Dans ce cas aussi nous avons appliqué une identification de type RLS avec un facteur d'oubli variable et un pas d'échantillonnage  $dt=0.2s$  avec  $N_1=1$  et  $NU=1$

##### **Figures (4a,1) à (4a,3), (4b,1) à (4b,3) et (4c,1) à (4c,3) :**

Ces figures représentent le cas où la commande prédictive généralisée est appliquée à notre système d'avion sans perturbation en faisant varier  $\lambda$  et  $N_2$ . On observe une excellente poursuite des signaux de références, avec des signaux de commandes offrant un minimum d'énergie ; la phase de l'identification étant primordiale pour la commande, on observe sur les figures représentant les estimations des paramètres, une très faible erreur d'identification. Le caractère prédictif de cette commande est clairement mis en évidence sur les sorties du système. L'amortissement de la commande est constaté effectivement en augmentant le facteur de pesée  $\lambda$ . L'augmentation de  $N_2$  accélère la convergence.

##### **Figures (4a,4), (4b,4) et (4c,4) :**

Dans ces figures nous allons voir les résultats de simulation pour le cas où la commande prédictive généralisée serait appliquée à notre système d'avion dans la présence d'une perturbation constante, pour une amplitude de  $10^\circ$  pour le mouvement latéral et une amplitude de  $5^\circ$  du signal perturbateur, pour le mouvement longitudinal. On observe que la commande GPC garantis la stabilité du système, cependant, l'effet des paramètres de l'estimateur des sorties qui présentent une erreur élevée influence en mal les termes prédictifs de cette commande.

##### **Figures (4a,5), (4b,5) et (4c,5) :**

En appliquant au système d'avion une perturbation externe sévère (turbulence atmosphérique caractérisée par un bruit blanc très riche en fréquence). On observe que la commande permet de maintenir la stabilité et la poursuite ; mais là encore le caractère de perturbation externe à identifier et l'erreur d'identification influant énormément sur la qualité de prédiction.

**Figures (4a,6), (4b,6) et (4c,6) :**

Dans ce cas, on soumis notre avion à une perturbation interne linéaire sur masse de l'avion (une diminution linéaire de la masse), pour une valeur de 0.1kg/s d'amplitude du signal perturbateur. On remarque encore une fois que, la commande arrive à faire face à ces perturbations internes, ceci en ayant des erreurs d'identification très faibles et un très bon comportement en phase d'identification qui a permis l'obtention d'une excellente poursuite avec des commandes pas plus importantes qu'en milieu non perturbé.

**Figures (4a,7):**

En appliquant au mouvement latéral de l'avion une perturbation interne constante sur la vitesse du vol, pour une valeur de 10m/s d'amplitude du signal perturbateur. On remarque qu'on arrive à une erreur d'identification très faible; l'effet de cette phase d'identification sur la qualité excellente de la commande, impose la poursuite exacte des signaux de références, et ne laisse aucun doute de sa robustesse.

**Figures (4a,8):**

En appliquant au mouvement latéral de l'avion une perturbation interne lente (signal sinusoïdal) sur la vitesse de vol, pour une valeur de 10m/s d'amplitude du signal perturbateur. On remarque là aussi que la commande arrive à des erreurs d'identification très faibles et un très bon comportement en phase d'identification, ceci a permis d'avoir une excellente poursuite avec des commandes pas plus importantes qu'en milieu non perturbé.

graphes de simulation du mouvement latéral pour le contrôle de  $\beta$  et  $\Phi$

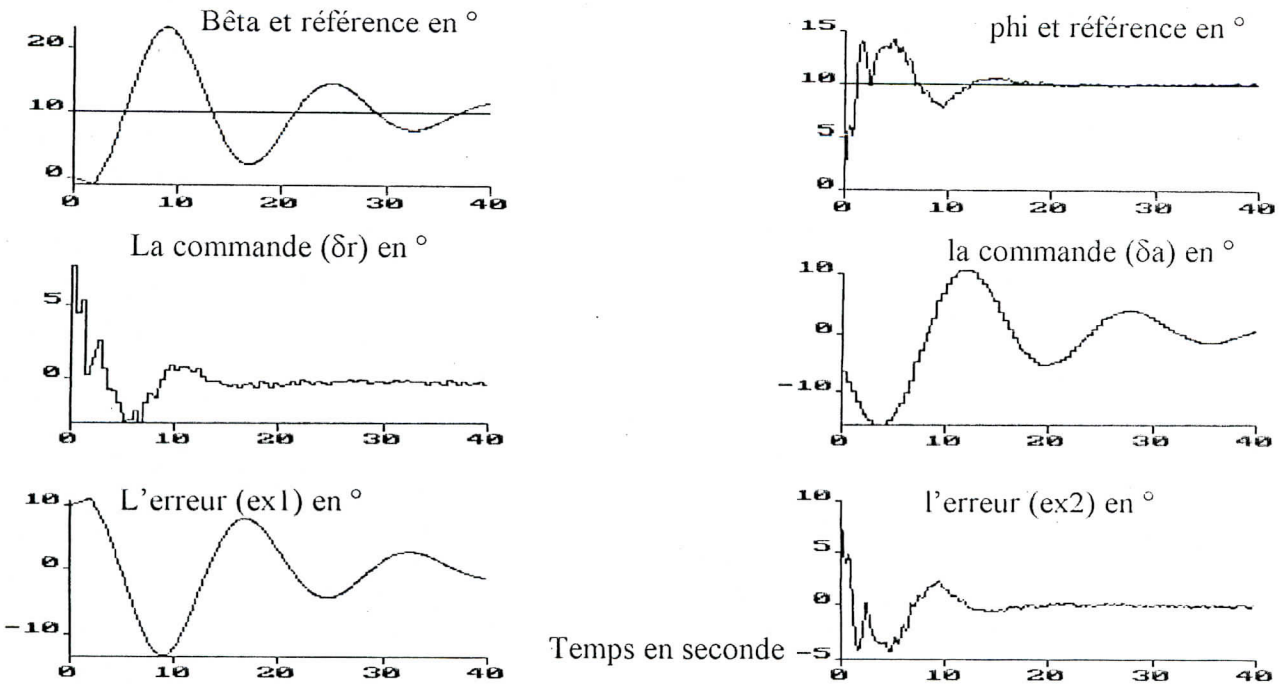


Fig.(4a. 1) Commande GPC sans perturbation avec  $\lambda_1=0.2$  et  $\lambda_2=0.1$  et  $N_2=9$

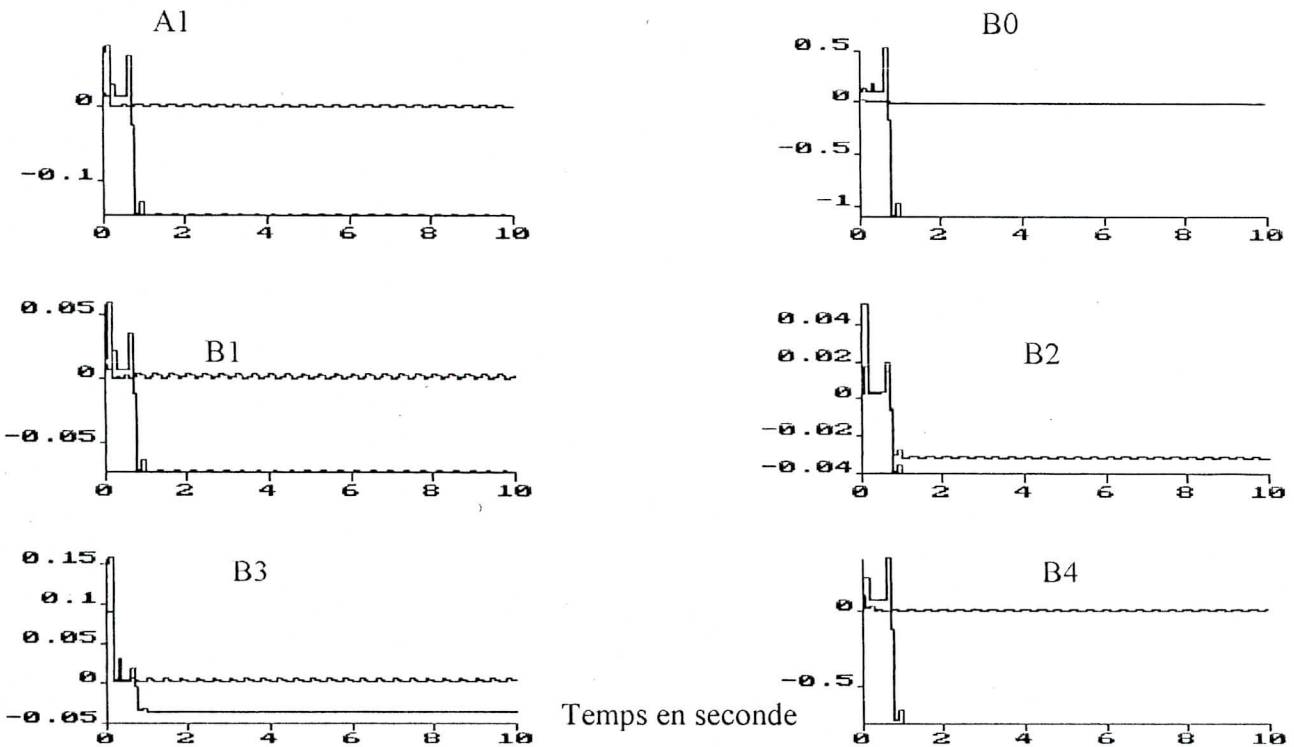


Fig.(4a'. 1) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

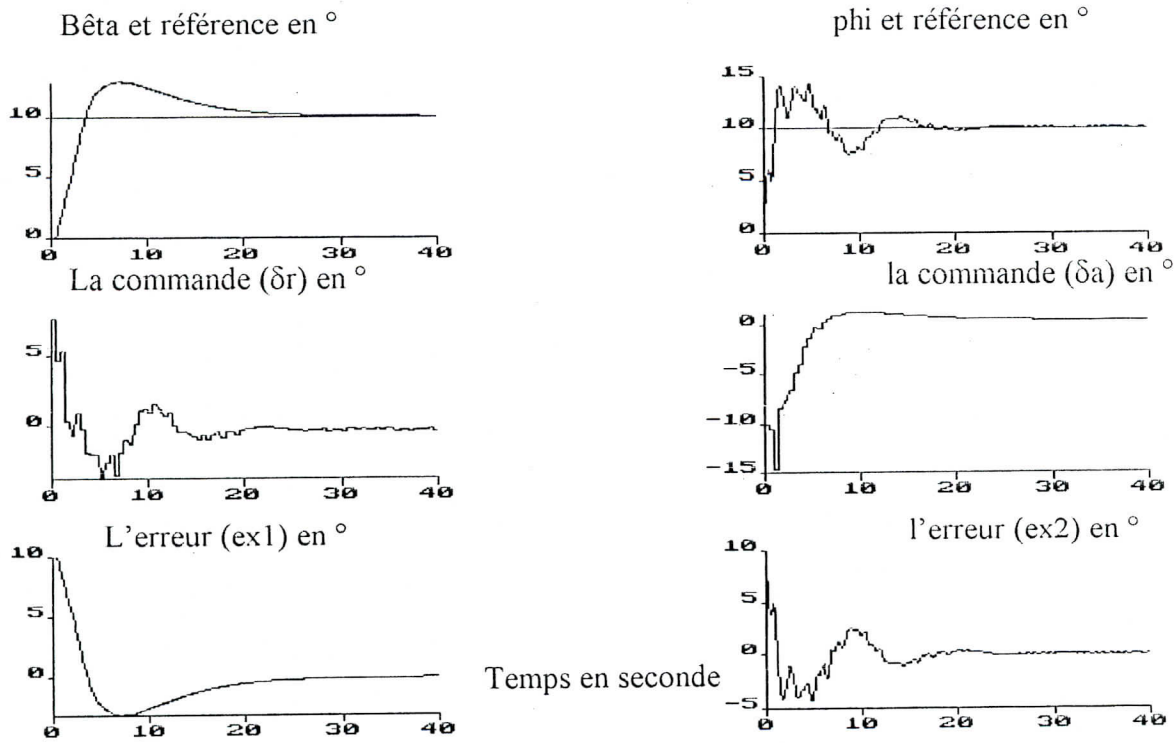


Fig.(4a. 2) Commande GPC sans perturbation avec  $\lambda_1=0.8$  et  $\lambda_2=0.1$  et  $N_2=10$

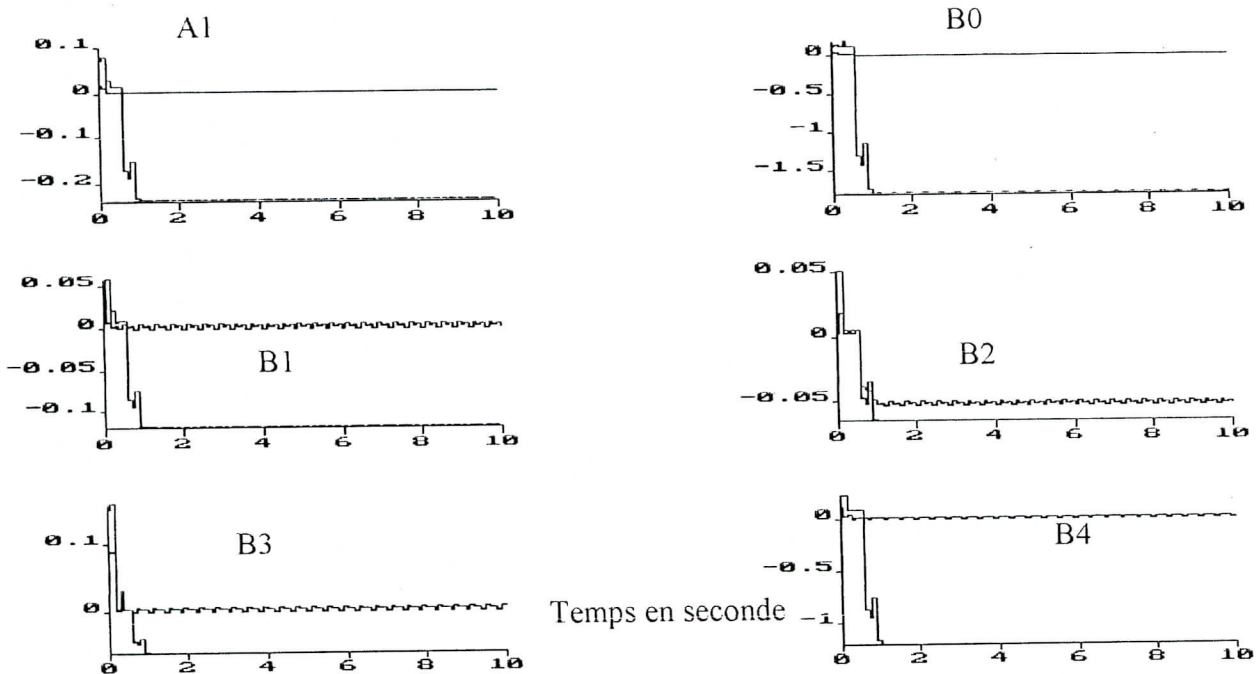


Fig.(4a'. 2) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

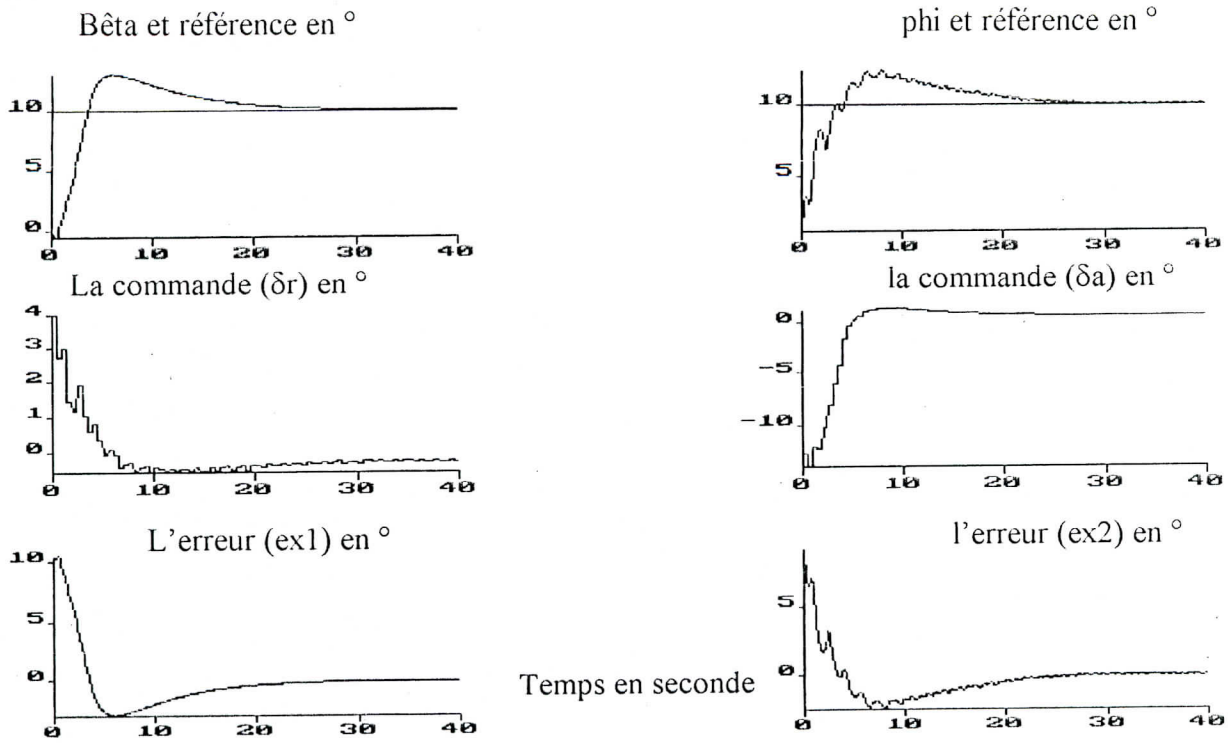


Fig.(4a.3) Commande GPC sans perturbation avec  $\lambda_1=0.8$  et  $\lambda_2=0.5$  et  $N_2=10$

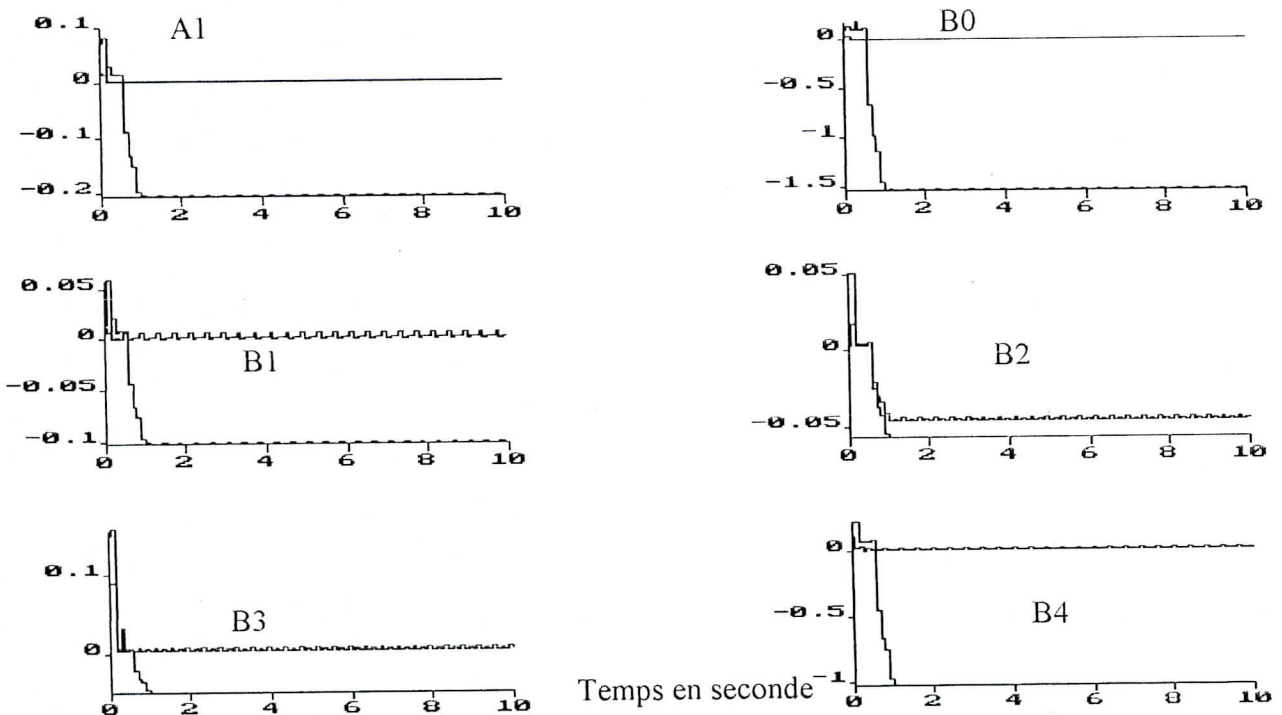


Fig.(4a'. 3) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

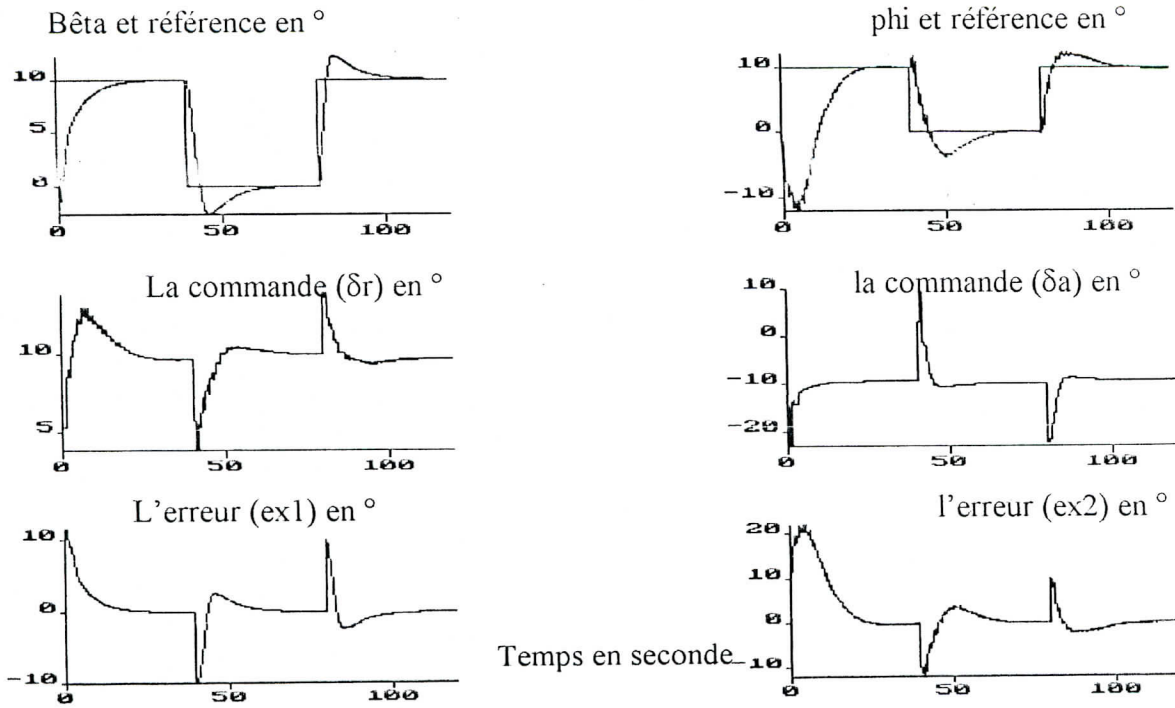


Fig. (4a.4) Commande GPC avec perturbation externe constante d'amplitude  $a=10^\circ$

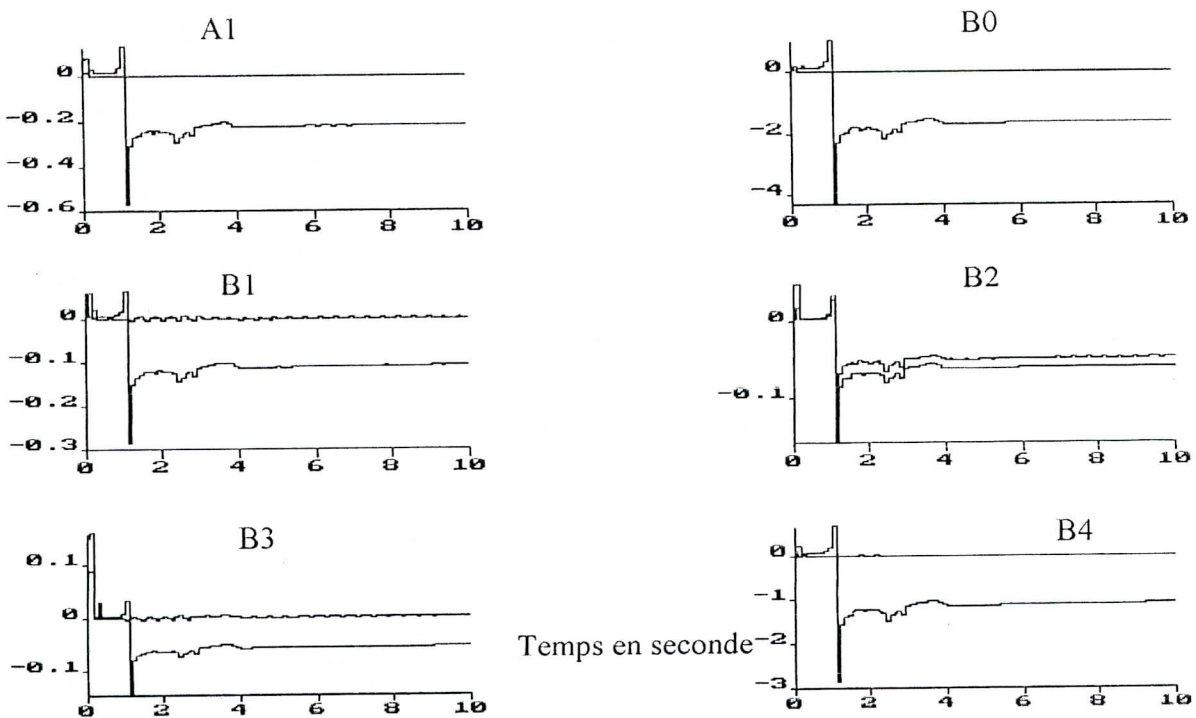


Fig. (4a'. 4) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

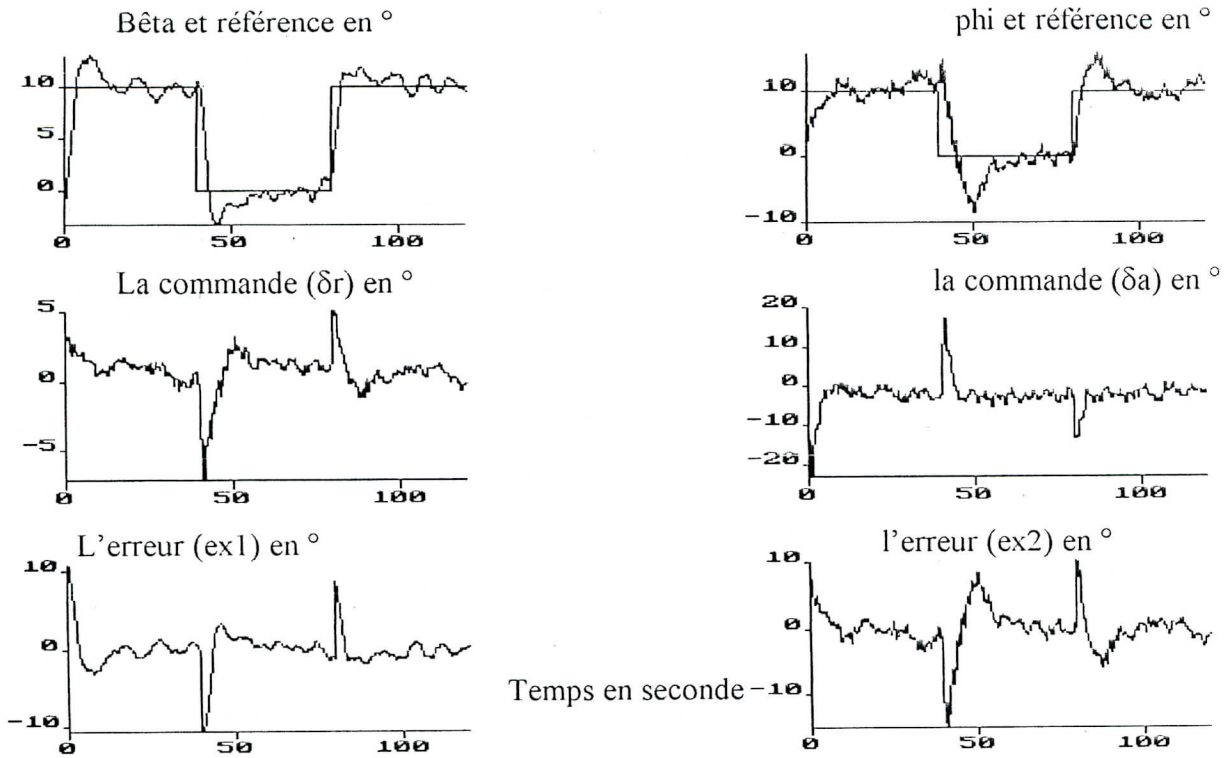


Fig. (4a.5) Commande GPC avec perturbation externe sévère d'amplitude  $\alpha=10^\circ$

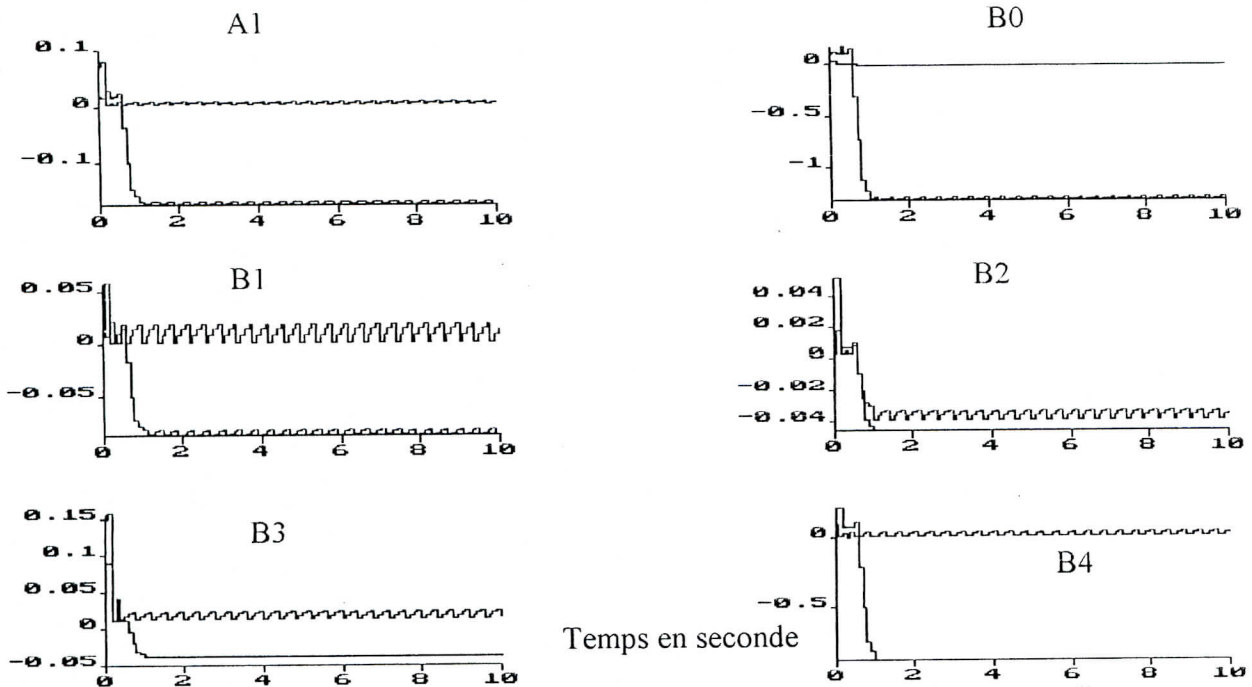


Fig. (4a'. 5) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)



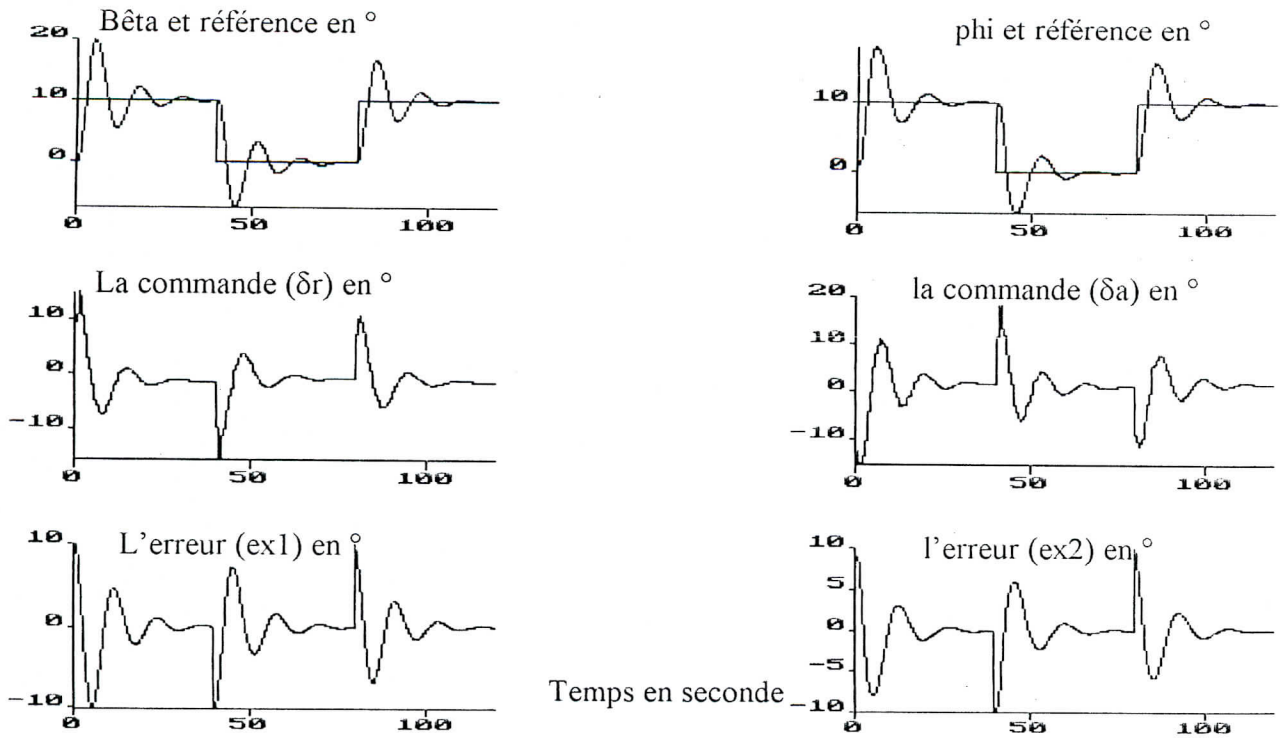


Fig.(4a. 6) Commande GPC avec perturbation interne linéaire de la masse de l'avion de 0.1kg/s

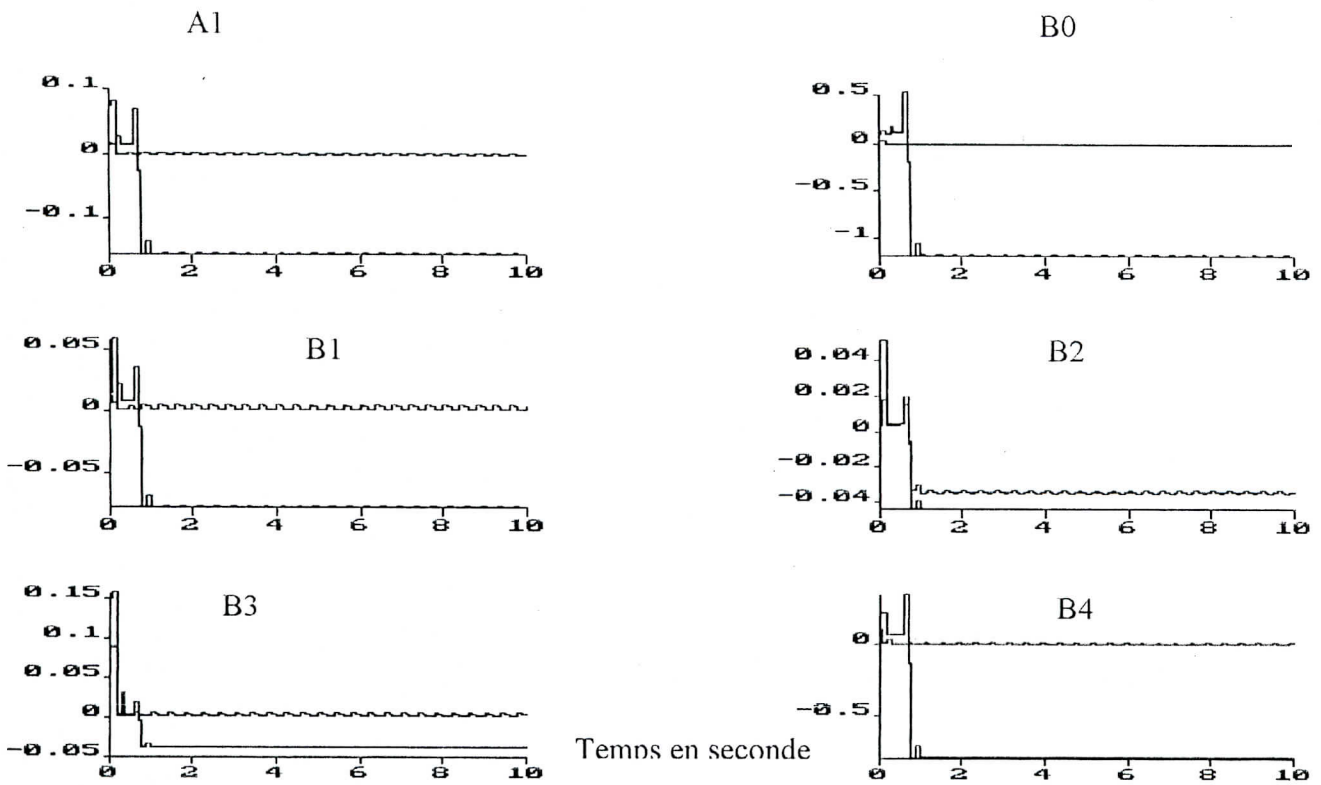


Fig.(4a'. 6) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

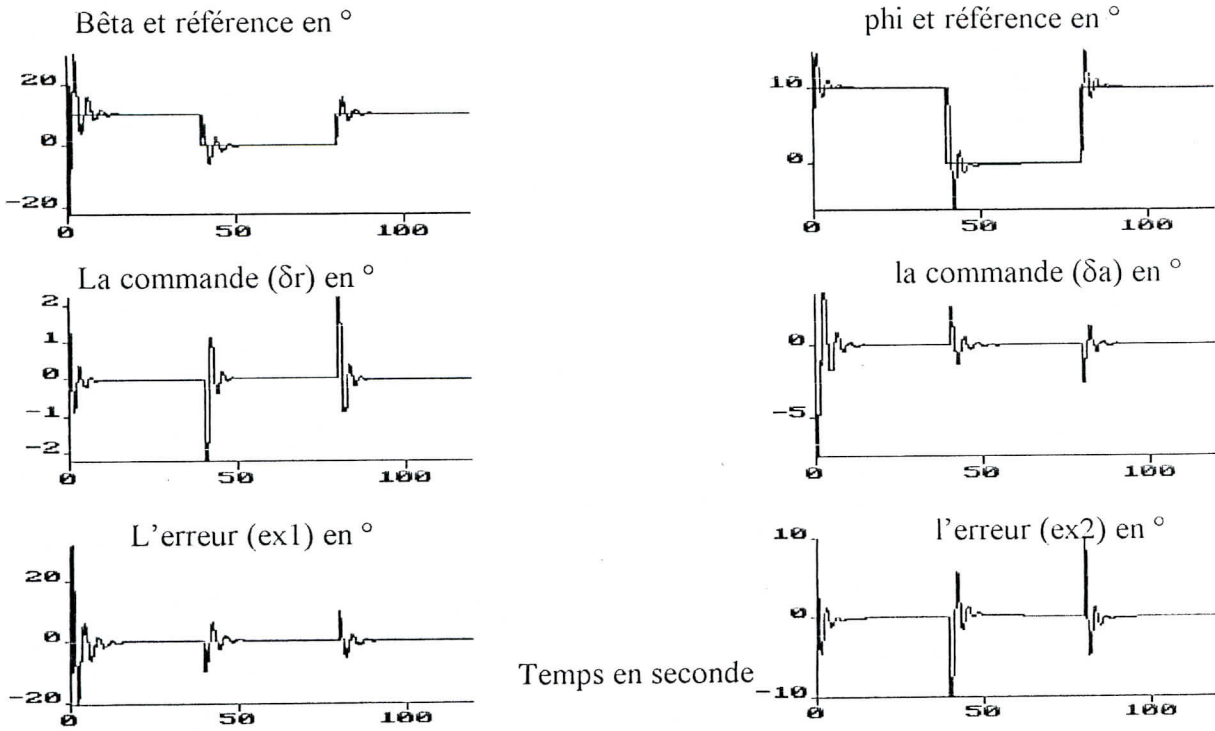


Fig.(4a. 7) Commande GPC avec perturbation interne constante de la vitesse de vol d'amplitude  $a=10m/s$

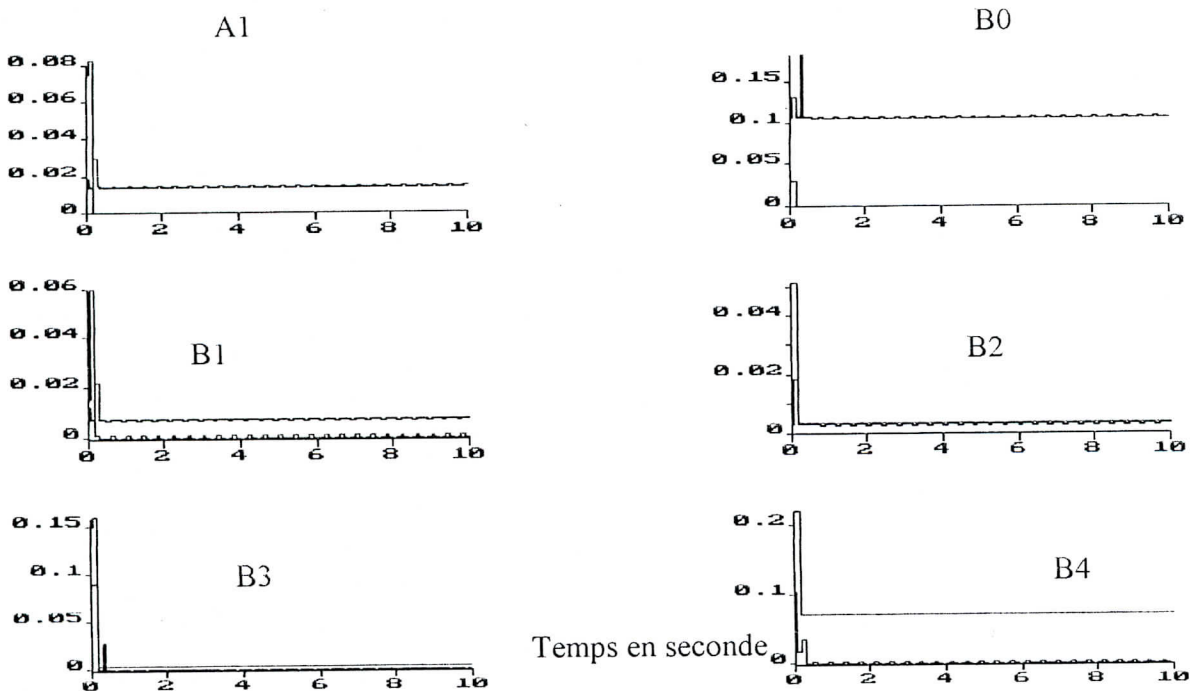


Fig.(4a'. 7) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

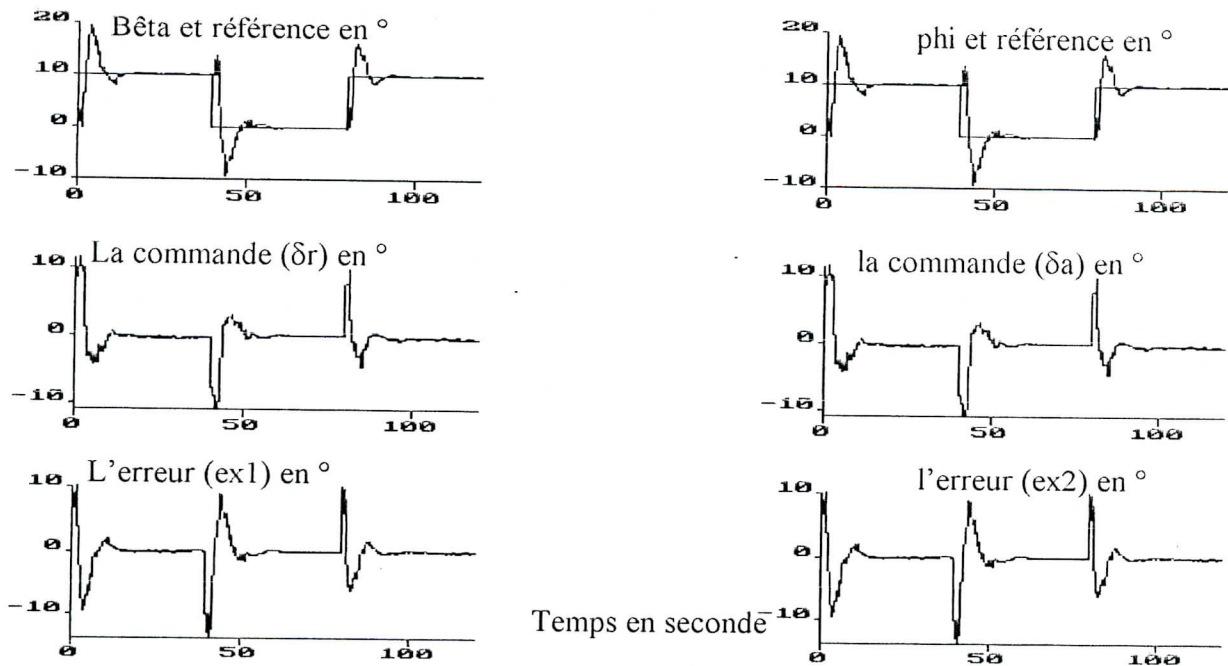


Fig.(4a. 8) Commande GPC avec perturbation interne lente (sinusoïdale) de la vitesse du vol d'amplitude 10m/s

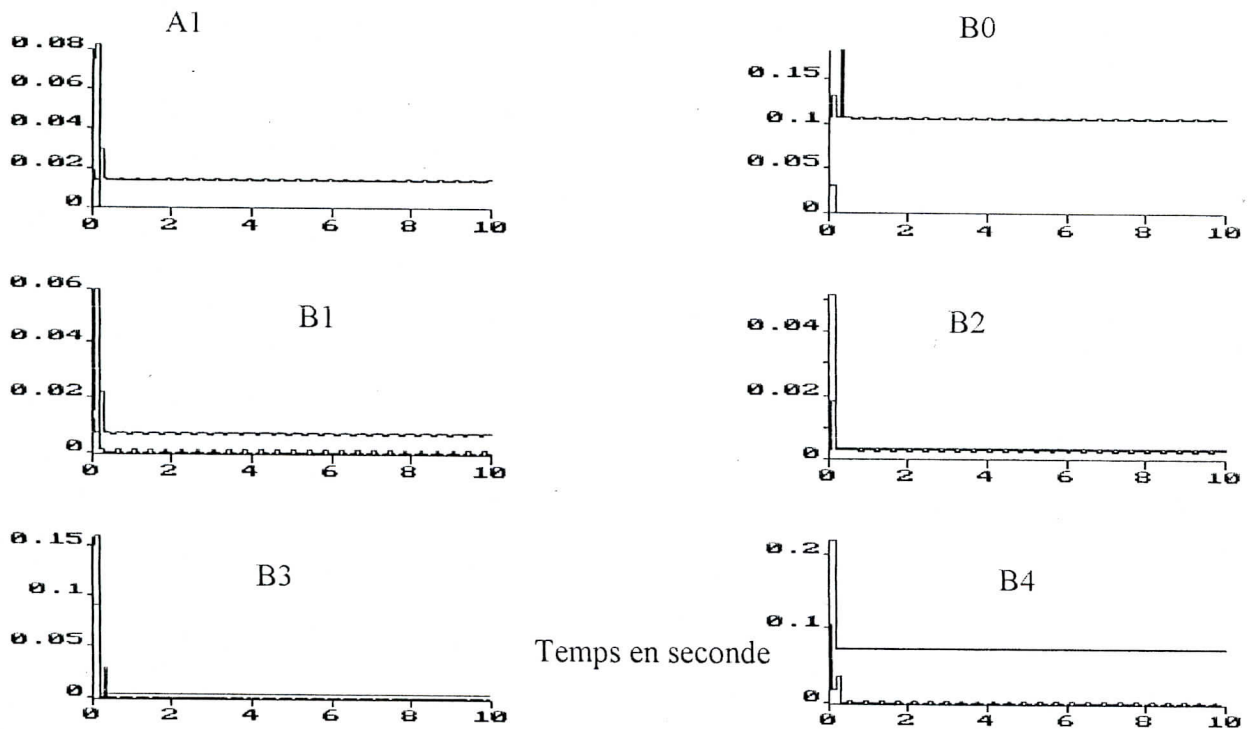


Fig.(4a'. 8) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

Graphes de simulation du mouvement longitudinal pour le contrôle de u

U et référence en m/s

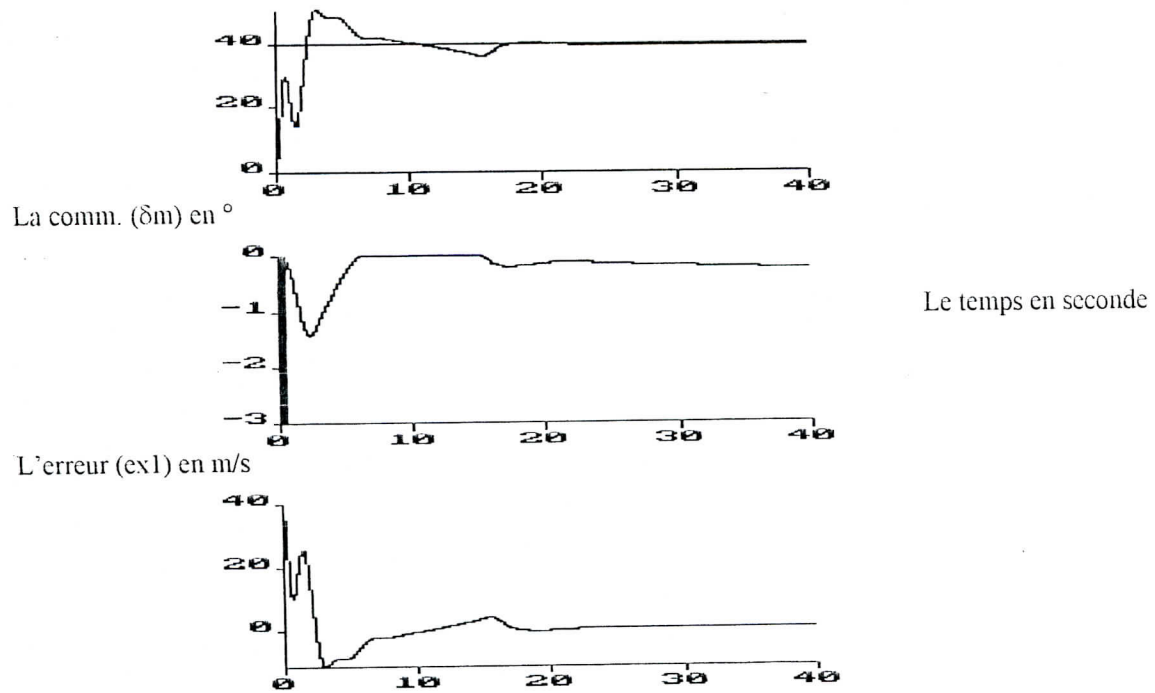


Fig. (4b. 1) la commande GPC sans perturbation avec  $\lambda = 0.95$  et  $N2 = 9$

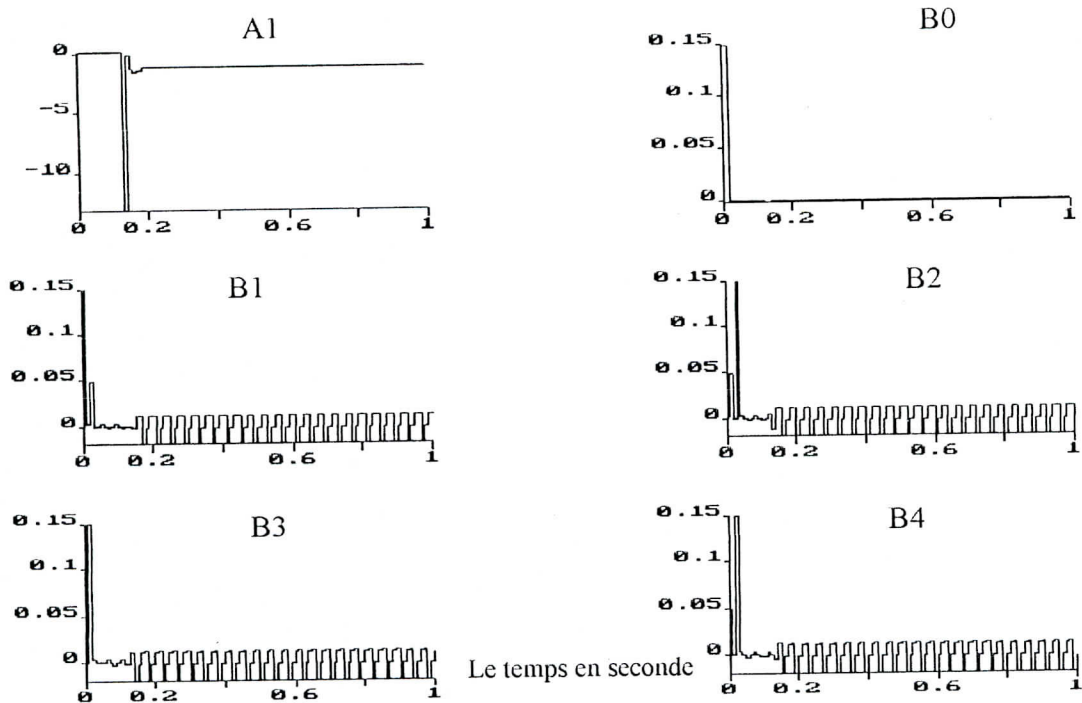
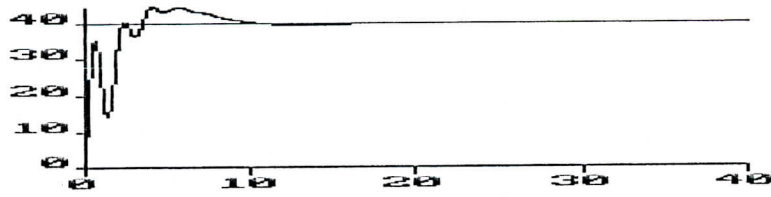
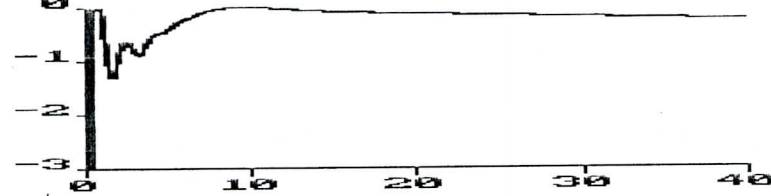


Fig. (4b'. 1) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

U et référence en m/s



La comm. ( $\delta m$ ) en  $^\circ$



Le temps en seconde

L'erreur (ex1) en m/s

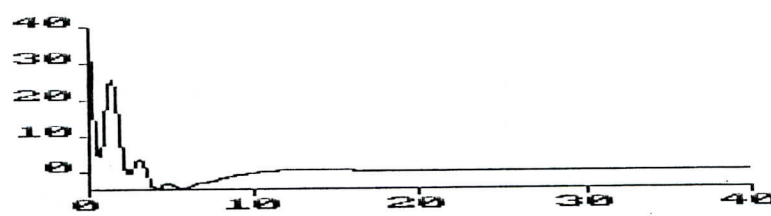
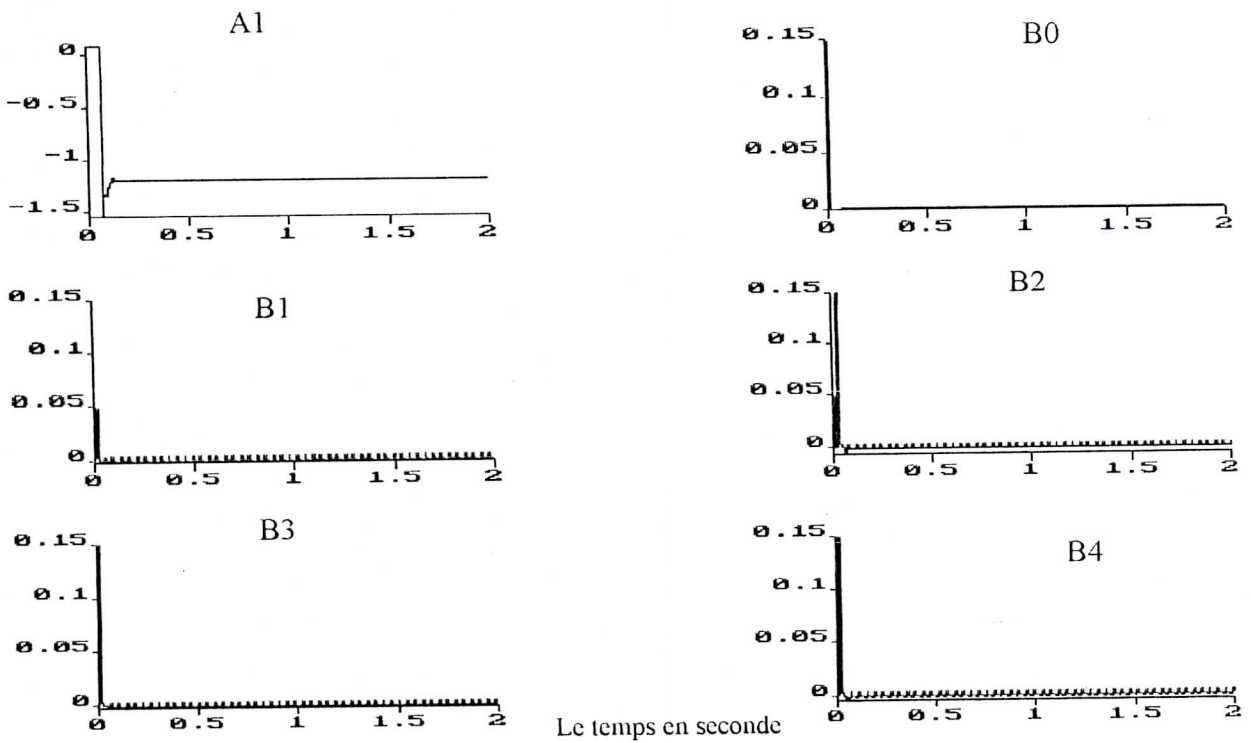


Fig. (4b. 2) la commande GPC sans perturbation avec  $\lambda = 0.95$  et  $N2 = 11$



Le temps en seconde

Fig. (4b'. 2) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

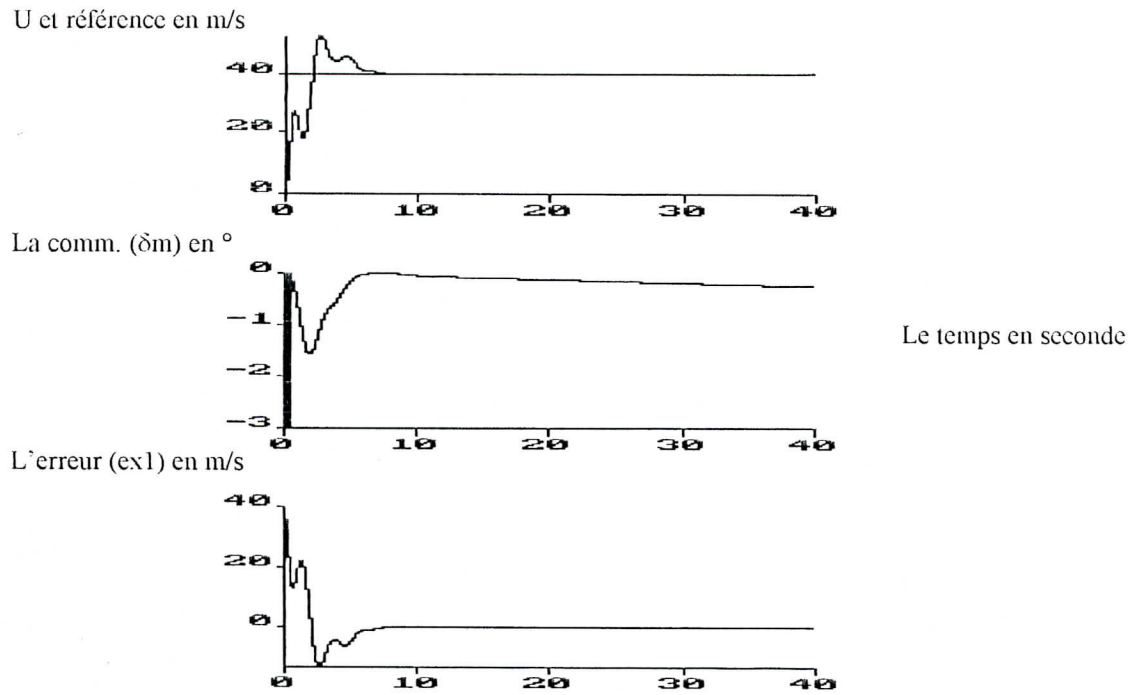


Fig. (4b. 3) la commande GPC sans perturbation avec  $\lambda = 1.22$  et  $N_2 = 11$

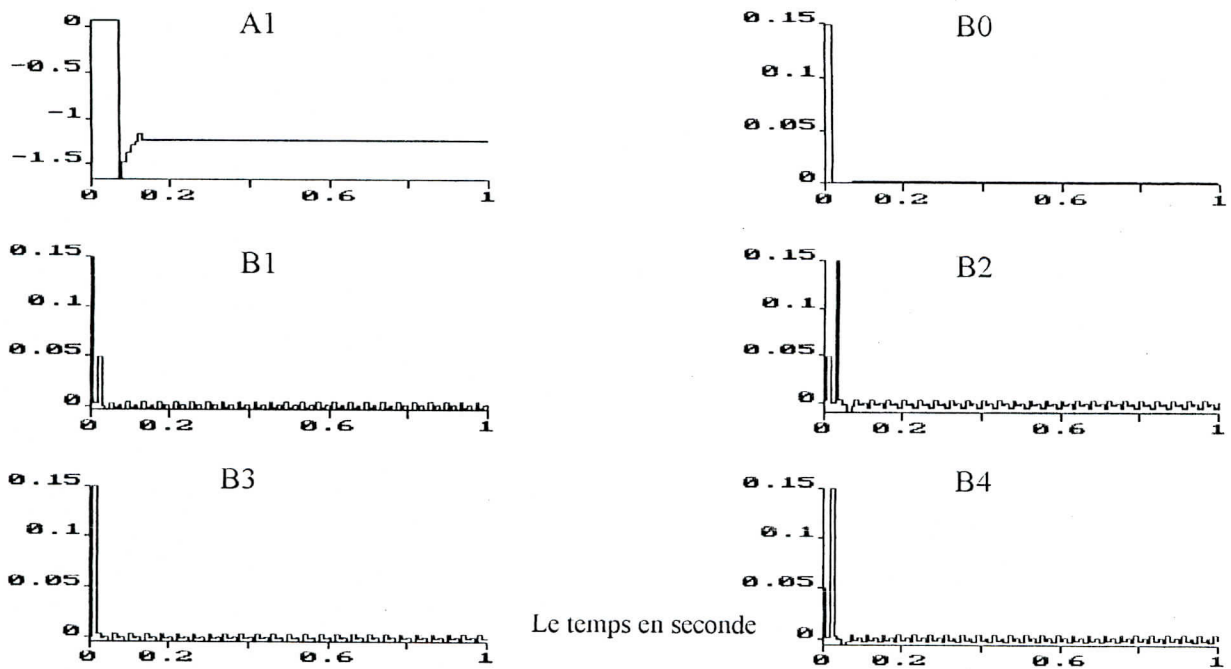


Fig. (4b'. 3) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)2

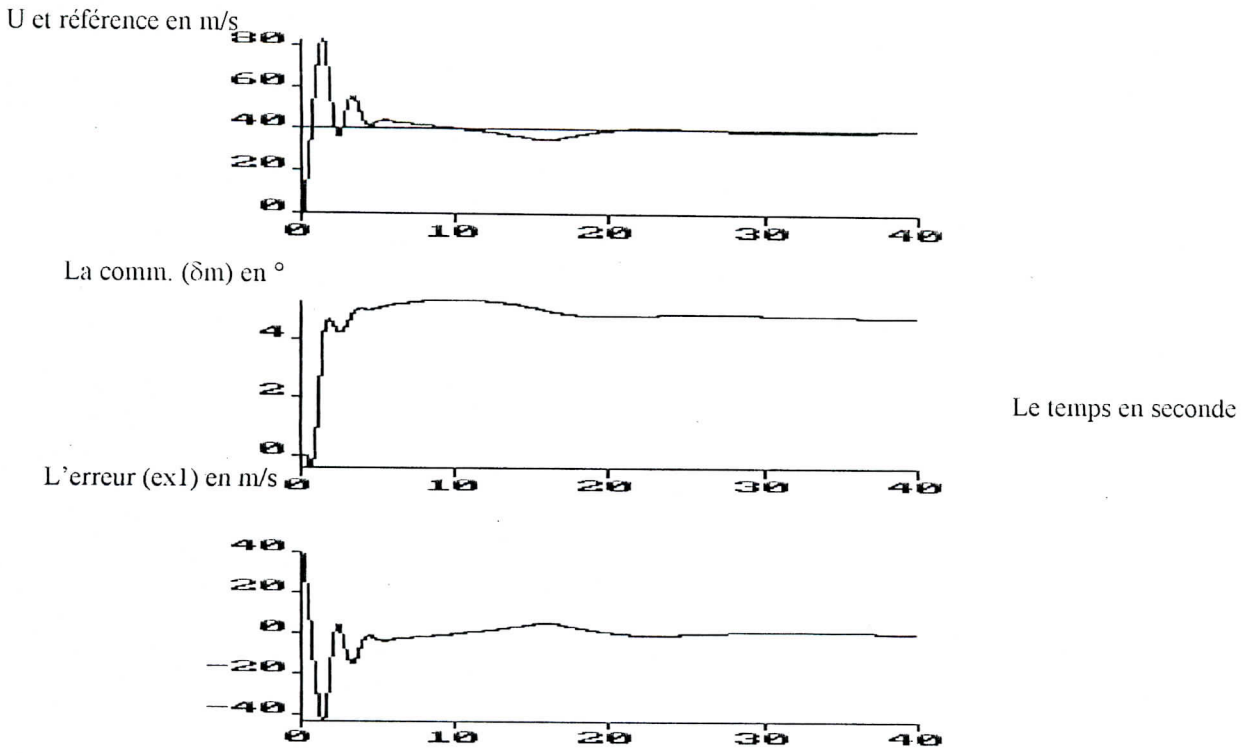
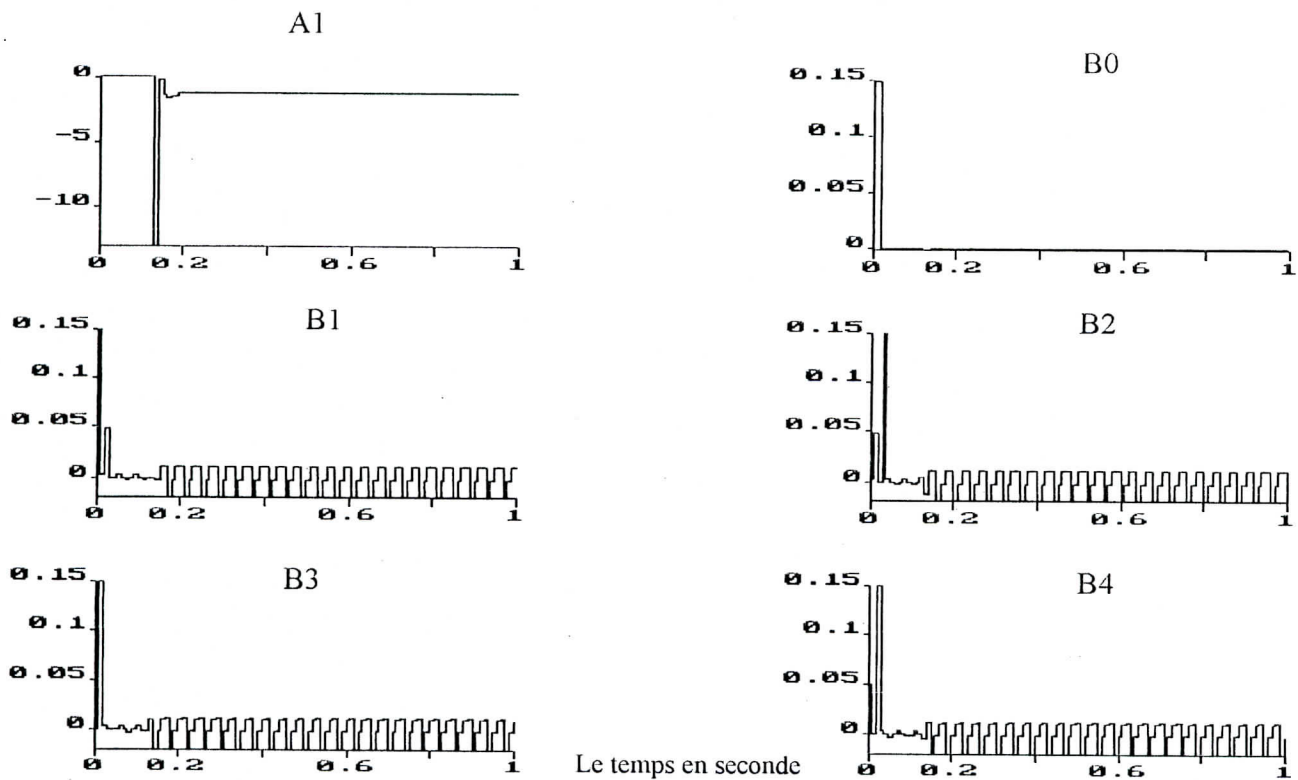


Fig. (4b.4) la commande GPC avec perturbation externe constante d'amplitude  $\alpha = -5^\circ$



Figure(4b'. 4) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

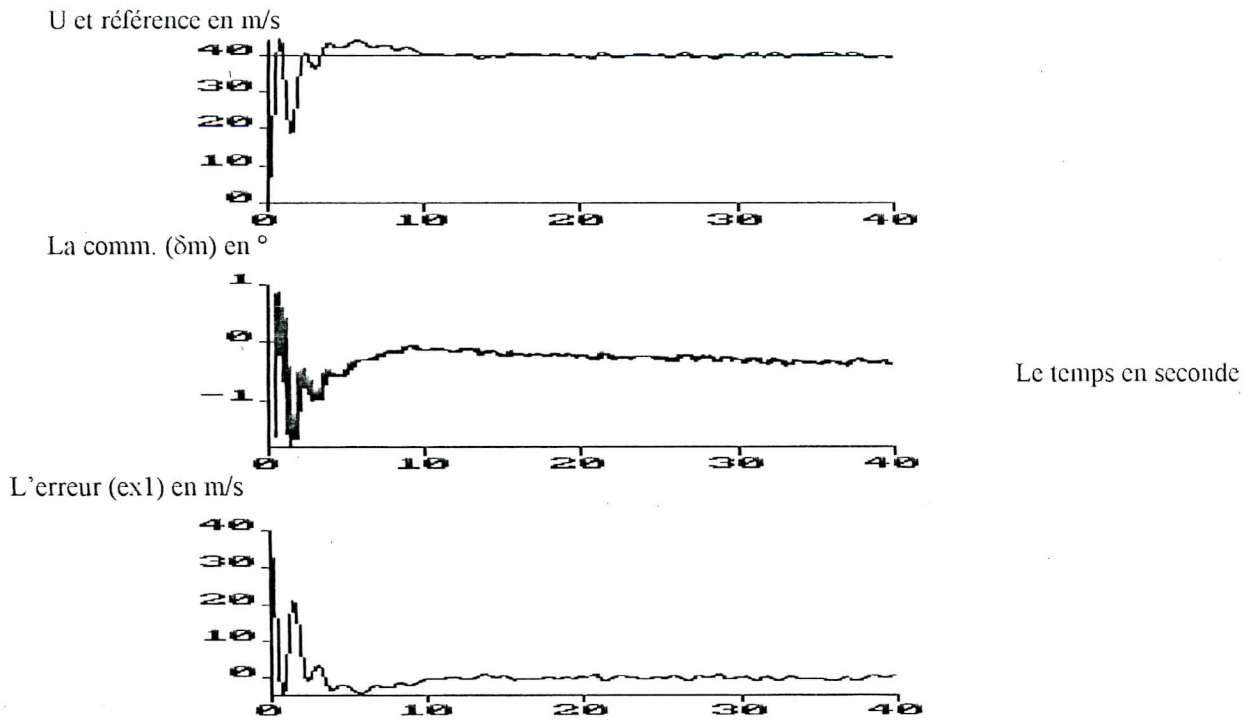


Fig. (4b'. 5) la commande GPC avec perturbation externe sévère de fréquence  $f_m=100\text{hz}$  et de niveau  $a_m = 1^\circ$

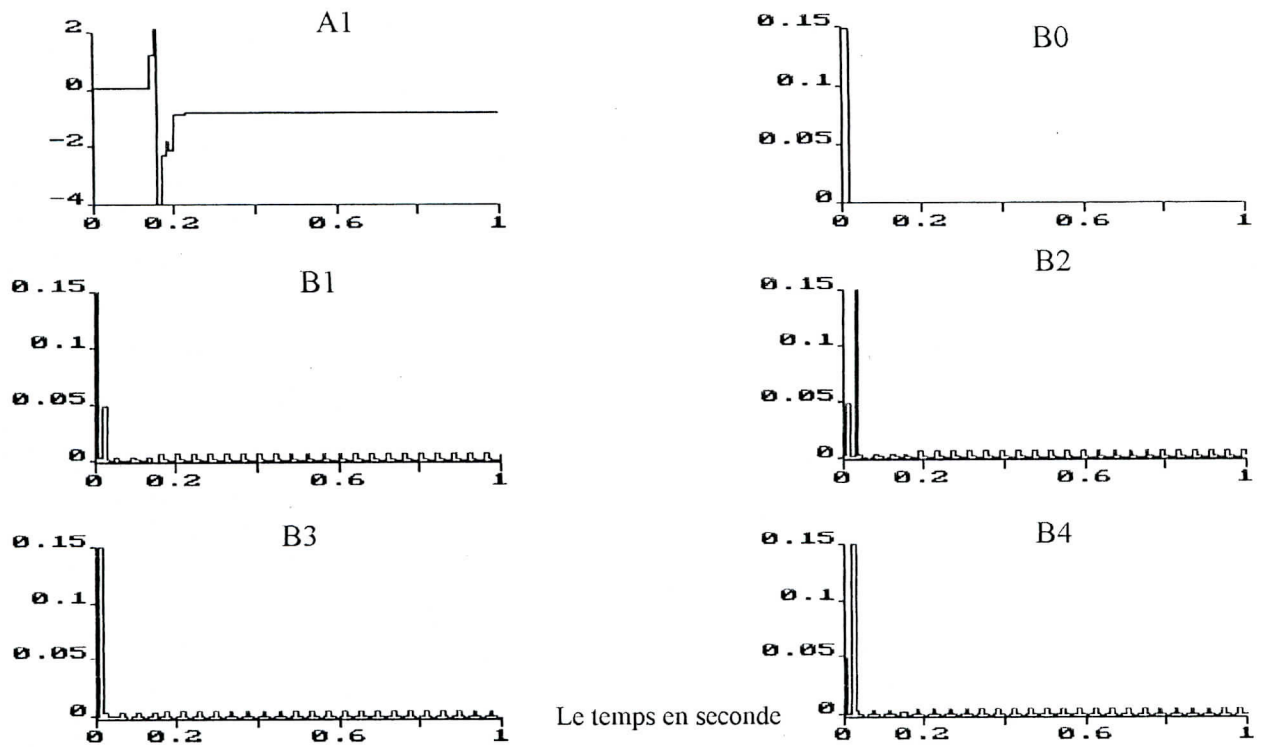
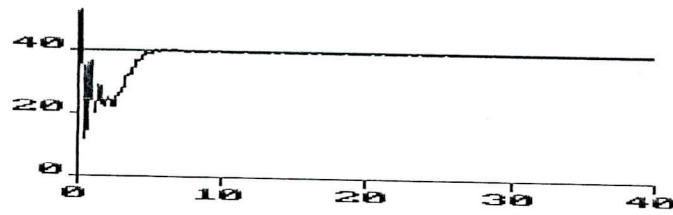


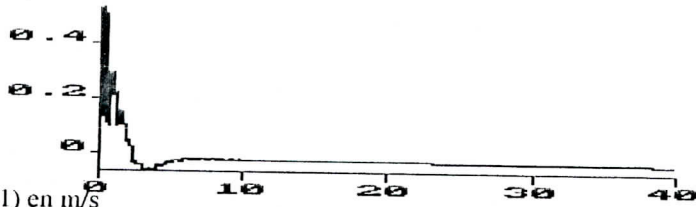
Fig. (4b'. 5) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)



U et référence en m/s



La comm. ( $\delta m$ ) en  $^\circ$



Le temps en seconde

L'erreur (ex1) en m/s

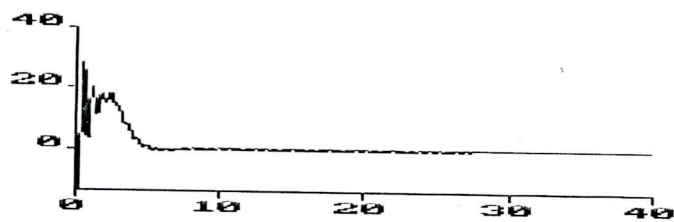
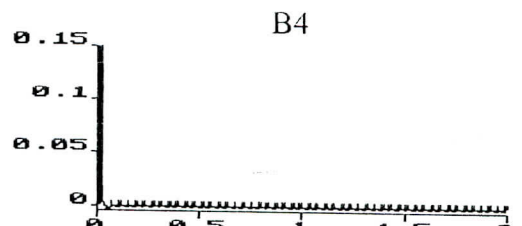
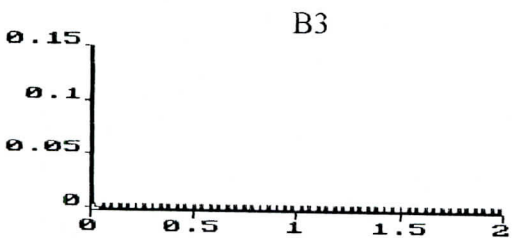
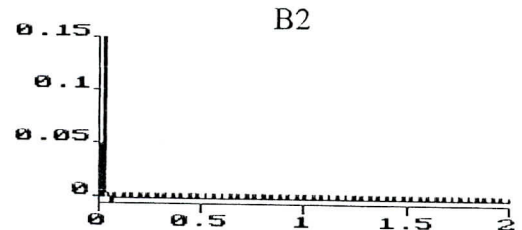
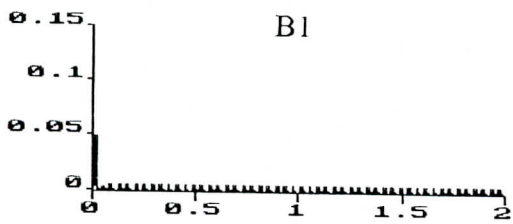
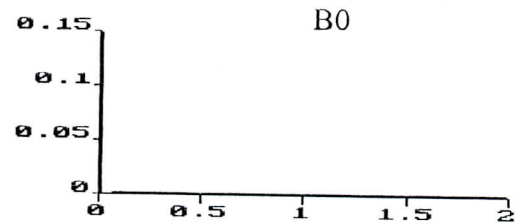
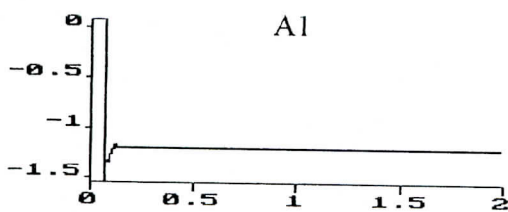


Fig. (4b. 6) la commande GPC avec perturbation interne lent sur la masse de l'avion de (0.1kg/s)



Le temps en seconde

Fig. (4b'. 12) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

Graphes de simulation du mouvement longitudinal pour le contrôle de  $\Theta$

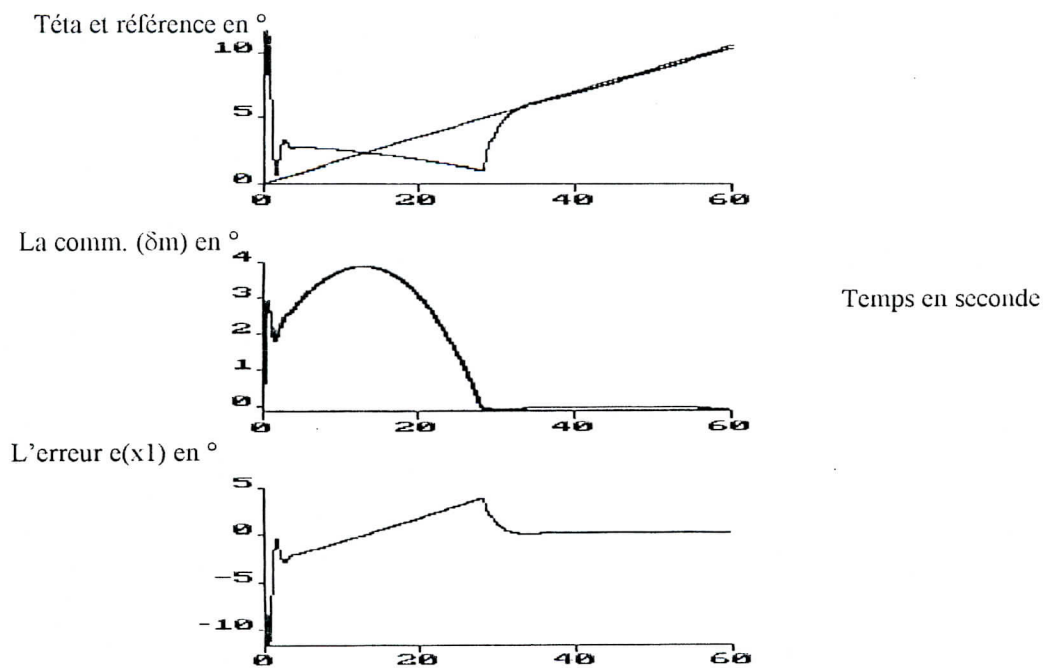


Fig.(4c. 1) Commande GPC sans perturbation avec  $\lambda = 0.8$  et  $N2 = 9$

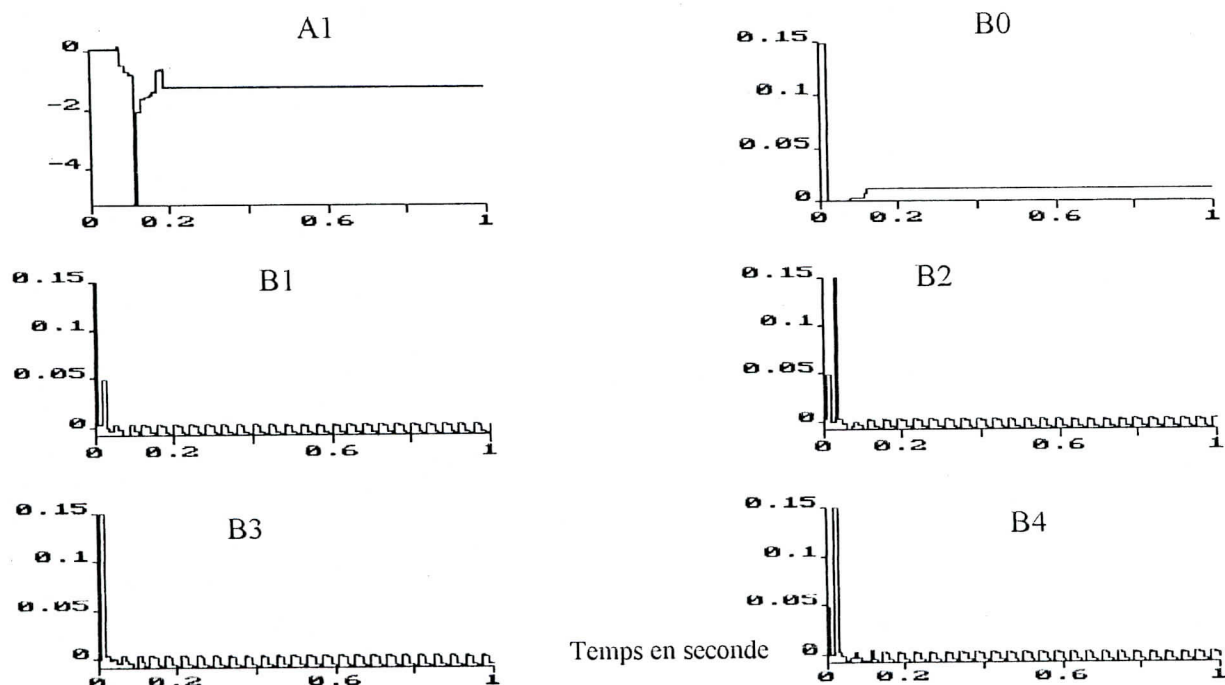


Fig.(4c'. 1) estimation des paramètres (A1 , B1, B2, B3, B4)

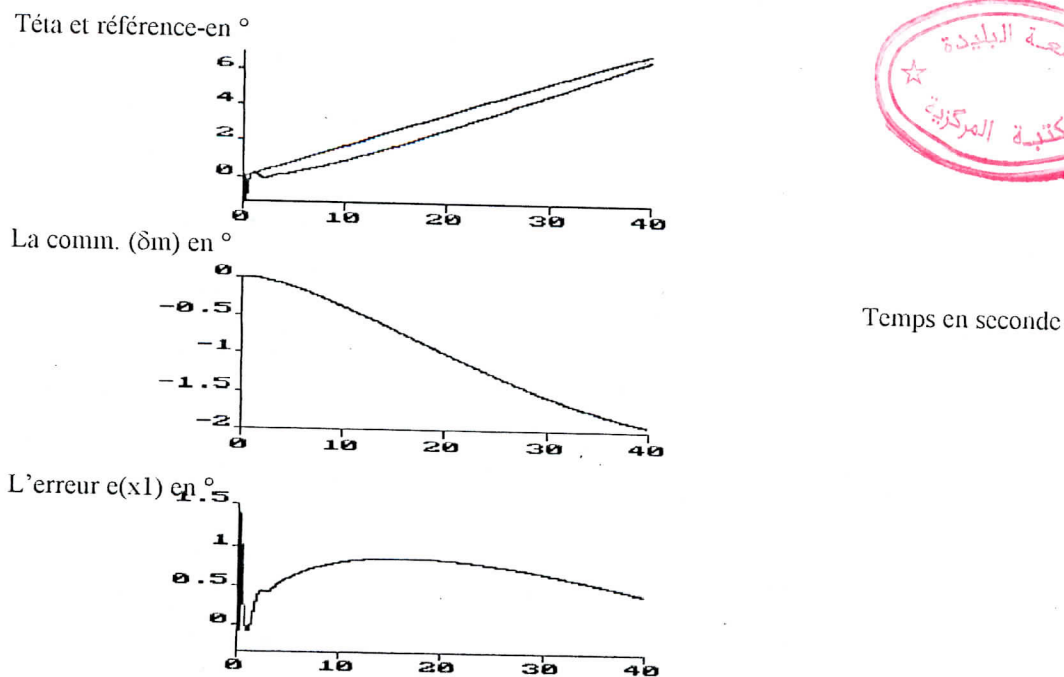


Fig.(4c.2) commande GPC sans perturbation pour  $\lambda = 0.8$  et  $N2 = 11$

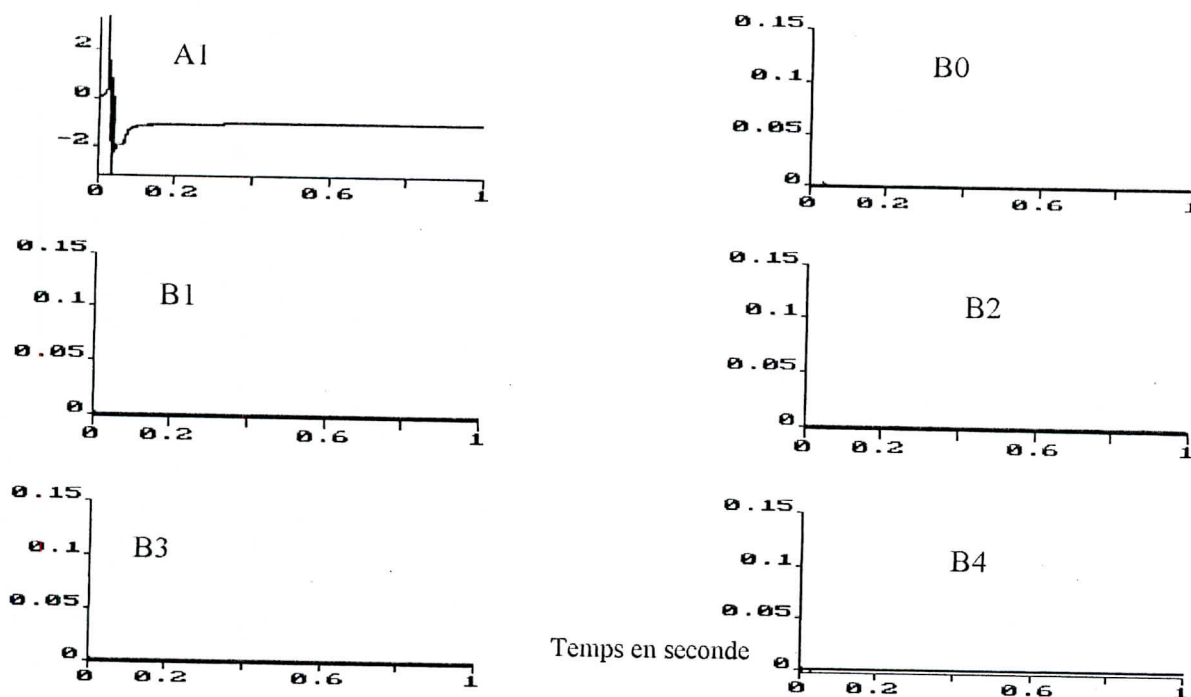


Fig.(4c'. 2) estimation des paramètres (A1 , B1, B2, B3, B4)

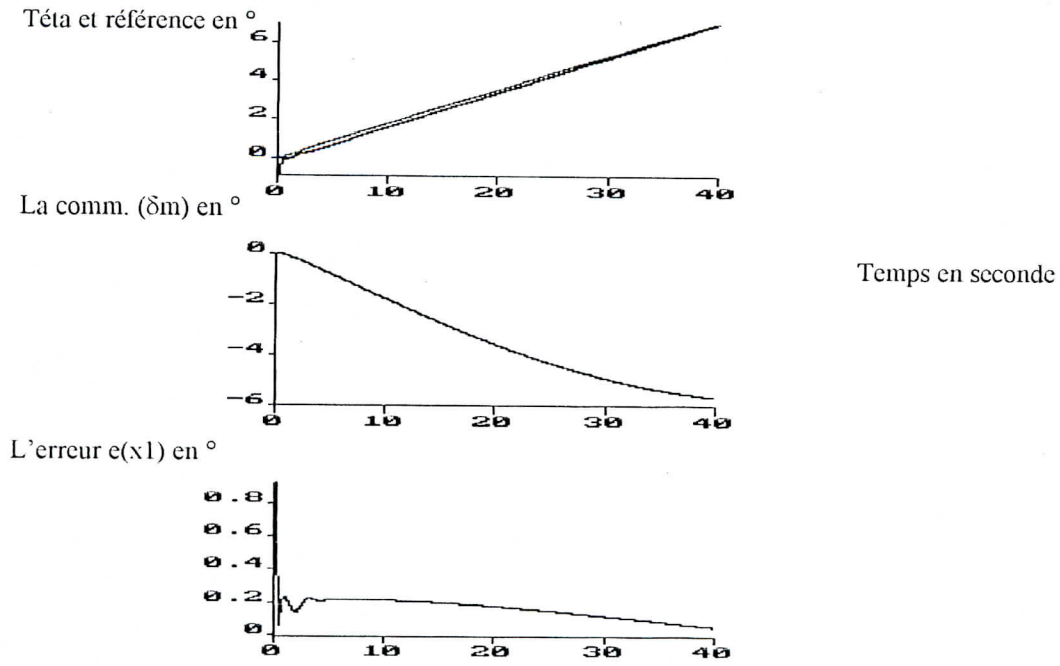


Fig. (4c. 3) Commande GPC sans perturbation avec  $\lambda=1.8$  et  $N2 = 11$

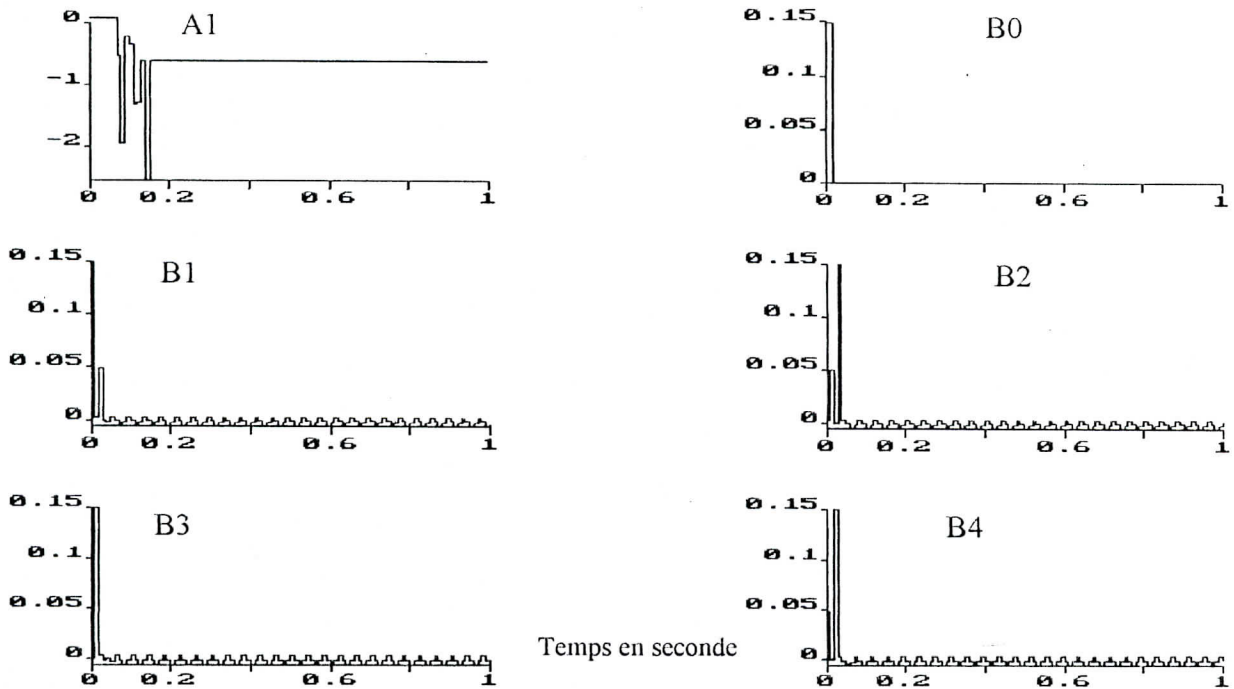


Fig. (4c'. 3) estimation des paramètres (A1 , B1, B2, B3, B4)

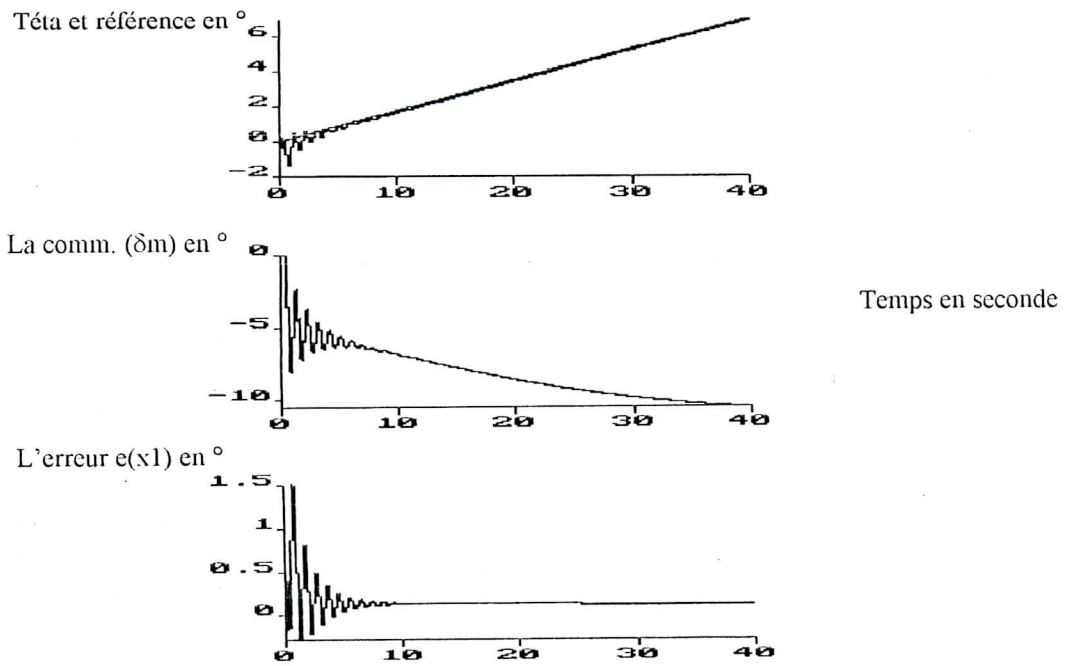


Fig. (4c.4) Commande GPC avec perturbation externe constante d'amplitude  $a = 5^{\circ}$

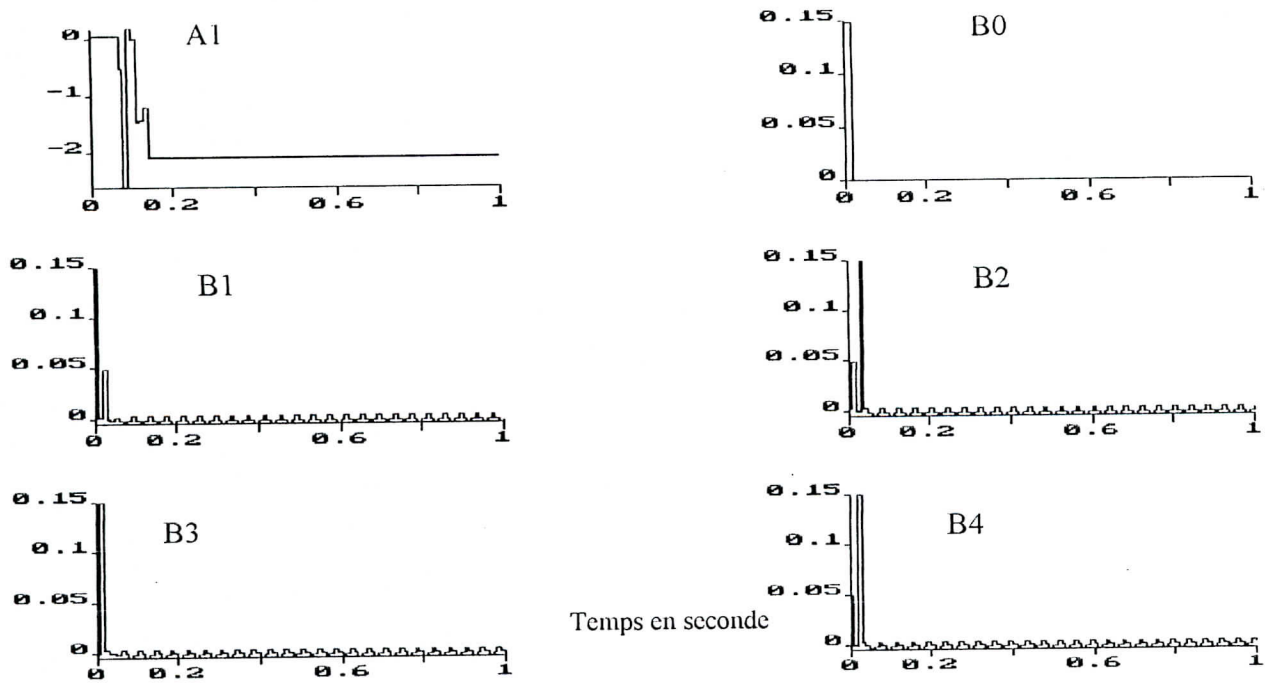


Fig. (4c'. 4) estimation des paramètres (A1, B1, B2, B3, B4)

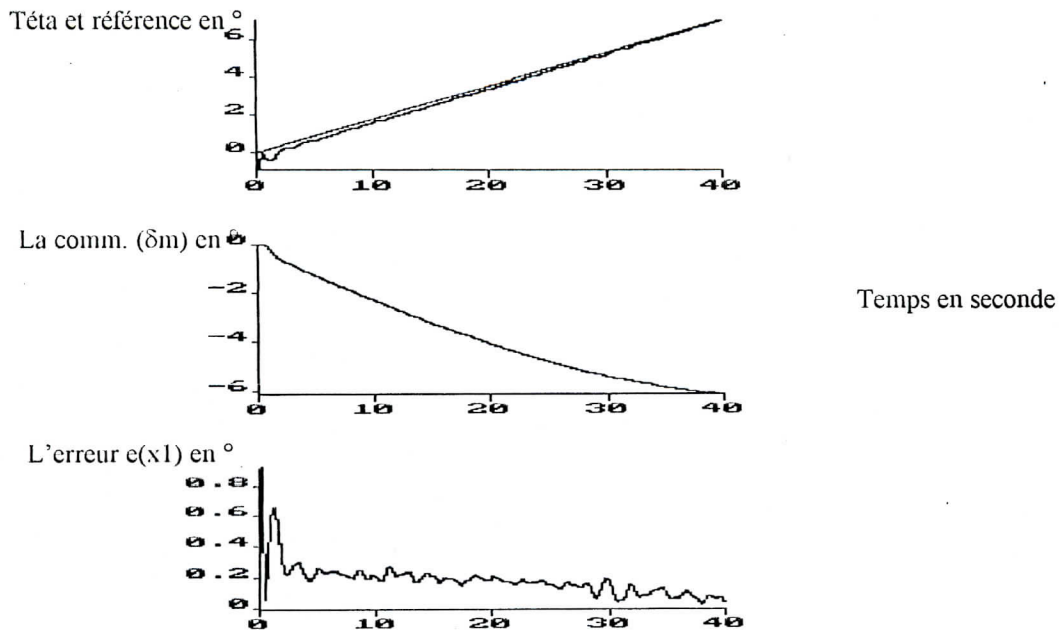


Fig.(4c. 5) Commande GPC avec perturbation externe sévère de niveau avec  $am=1^{\circ}$

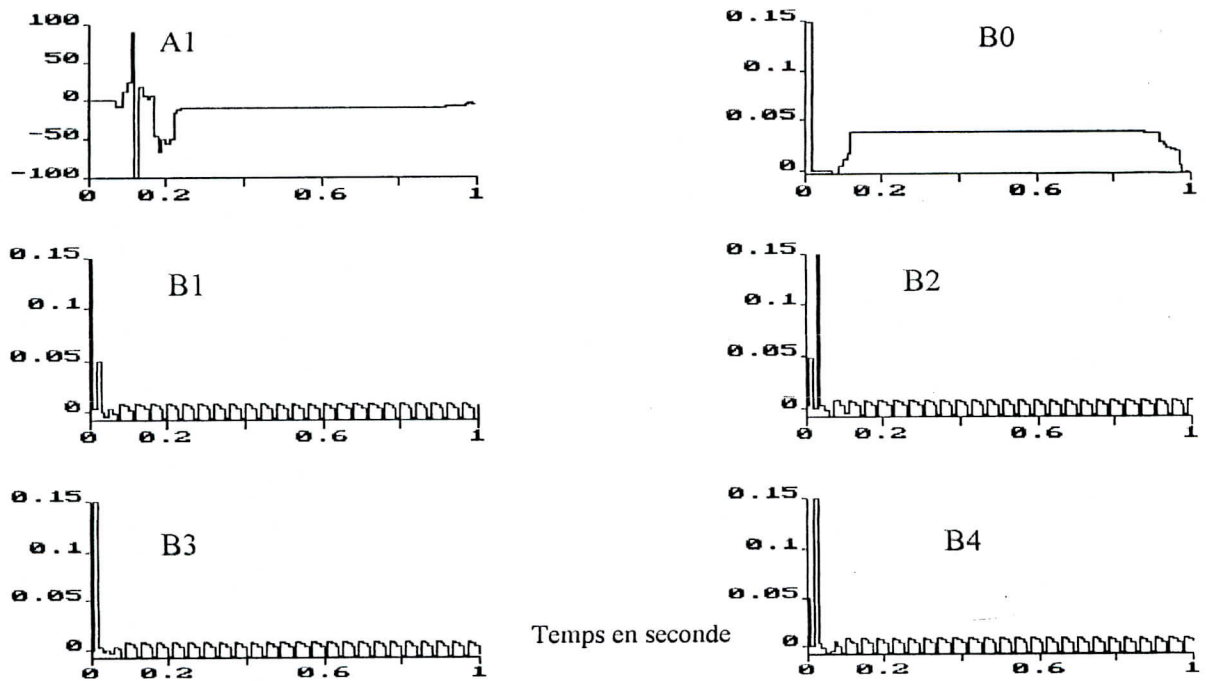


Fig.(4c'. 5) estimation des paramètres (A1 , B1, B2, B3, B4)

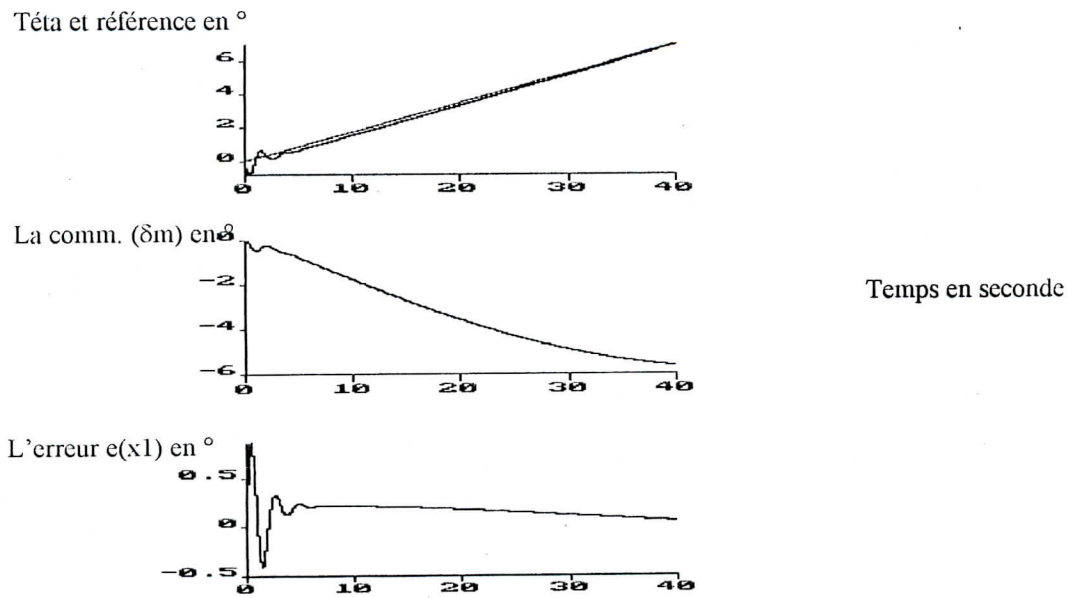


Fig.(4c. 6) Commande GPC avec perturbation interne linéaire de la masse d'amplitude  $a=0.1\text{kg/s}$

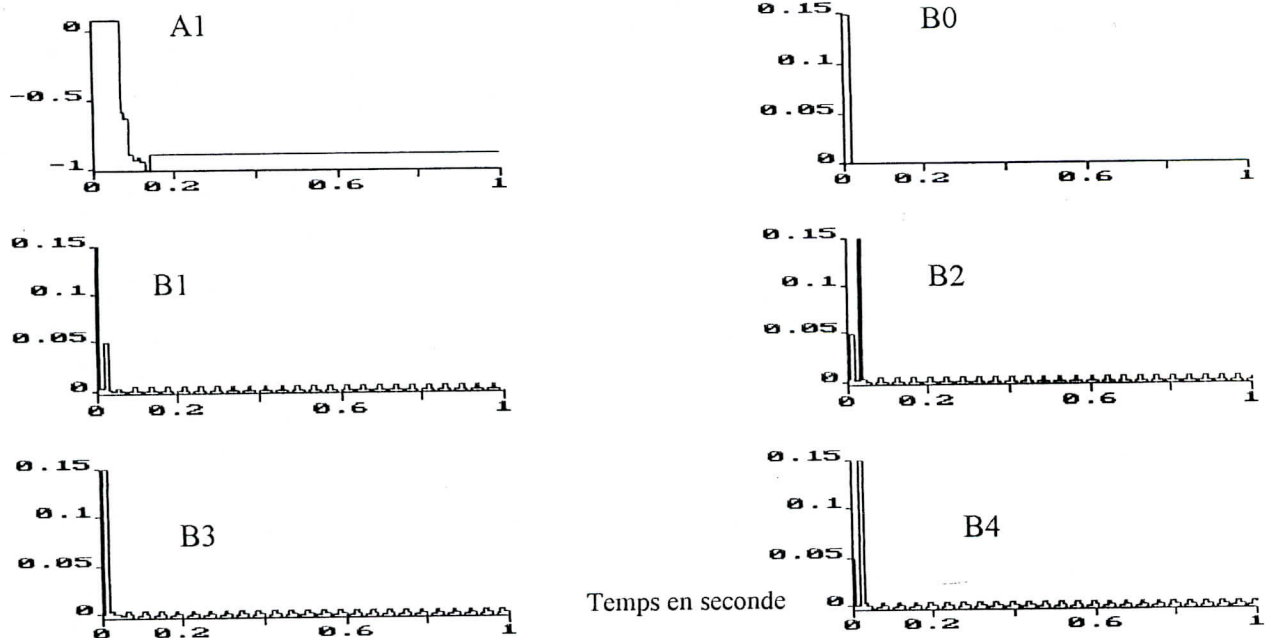


Fig.(4c'. 6) estimation des paramètres (A1 , B1, B2, B3, B4)

**CONCLUSION :**

Les commandes auto-ajustables implicites ont été présentées dans ce chapitre et appliquées à un système physique représentant le mouvement d'un avion. Il est clair maintenant et après de longues étapes de tests, que cette classe de commandes est efficace et tout à fait capable d'excellentes performances. Et ça montre aussi que ces commandes arrivent à prendre parfaitement en charge, des systèmes non-linéaires, rapides, dont aucun modèle de connaissance n'est supposé connu à priori ; et c'est le cas notamment de l'avion, qui est un système rapide et typiquement non-linéaire, en prenant les modèles de perturbation internes. Il est encore vérifié, que le but de ce type de commande est atteint, à savoir qu'on obtient de très bonnes performances en poursuite avec un minimum d'effort ; les énergies des signaux de commandes sont bien optimales.

D'une part, les commandes à minimum variance généralisée (GMV) ont été très concluantes en fournissant une plus grande flexibilité et d'autre part la commande prédictive généralisée; en notant qu'elle est l'une des commandes, qui part d'un sens pratique très astucieusement formulé, et c'est bien ce qui explique sa nette supériorité en performances, comparée à toutes les autres commandes, qui se basent, pour la plus part sur l'horizon de prédiction égale au temps de retard du système, elle est connue dans le domaine mono-variables par sa capacité à faire face à des contraintes très variées (indiqué dans l'introduction), ainsi que sa robustesse élevée vis à vis des perturbations internes des systèmes. Ce sont là autant de raisons sérieuses qui nous ont amenés à proposer une extension de la commande GPC aux systèmes multivariables et appliquer cette solution à notre système d'avion. La commande ainsi formulée nous a donné pleine satisfaction en fournissant d'excellentes performances en poursuite.

Il reste à noter que les perturbations internes dues à des variations des paramètres du système sont très bien supportées par les deux commandes, car ces perturbations sont prises en compte à l'intérieur du modèle identifié, par contre les perturbations externes testées ne sont pas entièrement prises en compte à l'intérieur du modèle provoquant des erreurs d'identification qui affectent naturellement les performances de la commande auto-ajustable bien que la stabilité reste garantie.

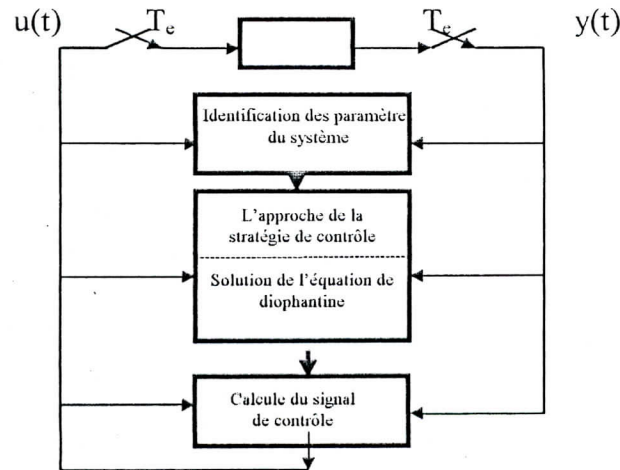


**CHAPITRE V**  
**COMMANDES**  
**AUTO-AJUSTABLES EXPLICITES**

## V. LES COMMANDES AUTO- AJUSTABLES EXPLICITES

La commande auto-ajustable explicite est basée sur un placement de pôle et ne requière pas la connaissance du temps de retard. Le modèle physique standard décrit par l'équation (3.1) est estimé. Une gamme de temps de retard peut être considérée par une surparamétrisation du polynôme B. Cependant, cela conduit à un calcul additionnel, concernant la résolution de l'équation de Diophantine. [17]

### A. Le cycle d'algorithmes des commandes auto-ajustables explicites



### V.1 RESOLUTION DE L'EQUATION DE DIOPHANTINE

Dans l'approche de contrôle des auto-ajustables, une subroutine est insérée entre la phase d'estimation des paramètres et celle de la génération de la commande de contrôle [17]. Par exemple l'équation de Diophantine suivante :

$$(5.1) \quad A'(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-k} B'(z^{-1}) G(z^{-1}) = T(z^{-1})$$

Où F et G représentent deux polynômes de degré spécifié par l'approche de la commande utilisée. Il est noté que le polynôme C est omis. Les polynômes F et G doivent être déterminés à chaque période d'échantillonnage, en utilisant A et B et le polynôme caractéristique spécifié de la boucle fermée. Les algorithmes pour résoudre de telles équations sont donnés dans Kucera (1979). Une possibilité décrite dans Edmunds (1976) est de définir :

$$(5.2) \quad \phi(t) = T(z^{-1})\eta(t), \quad \psi_1(t) = \hat{A}'(z^{-1})\eta(t) \quad \text{et} \quad \psi_2(t) = \hat{B}'(z^{-1})\eta(t-k)$$

Où  $\eta(t)$  est une séquence aléatoire, tel que (5.2) devient une relation de régression

$$(5.3) \quad \phi(t) = F(z^{-1})\psi_1(t) + G(z^{-1})\psi_2(t) + \text{erreur}$$

L'erreur ici est simplement due à l'ajustement des erreurs des paramètres, et l'algorithme RLS peut être utilisé pour estimer les polynômes  $\hat{F}$  et  $\hat{G}$ , en utilisant la même base de routine que lors de l'estimation de  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ . Dans ce qui a précédé, le polynôme  $C(z^{-1})$  a été omis, et donc égale à l'identité, lorsqu'il sera introduit, le seul changement dans le calcul sera introduit au niveau de polynôme  $T(z^{-1})$ , qui sera tout simplement multiplié par  $C(z^{-1})$  et l'identification des polynômes  $\hat{F}$  et  $\hat{G}$  sera faite par l'une des méthodes, RELS.

### V.2. LA COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE GAUSSIEN (LQG)

La procédure de l'approche du quadratique linéaire [17] peut aussi être utilisée comme une méthode d'approche dans la classe des commandes auto-ajustables. La commande LQG auto-ajustable est plus appropriée pour les systèmes complexes, sujets à des entrées bruitées. La commande LQG peut aussi être utilisée dans le cas des systèmes instables en boucle ouverte ou à phase non minimale, de même pour les systèmes multivariables avec différents retards dans différentes boucles.

Une action intégrale est introduite par un choix approprié de la fonction coût. Le temps de retard n'entre par explicitement dans le calcul de la commande, ainsi la magnitude du temps de retard n'a pas besoin d'être connue a priori. La commande possède une robustesse et des caractéristiques de stabilité.

Soit toujours le système décrit par (3.1)

$$y(t) = z^{-k} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \eta(t) + PC$$

Où A, B et C représentent des polynômes déjà définis.

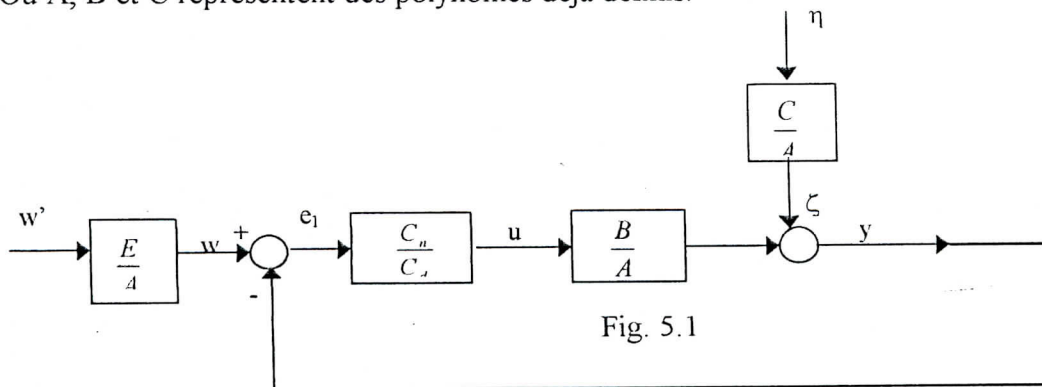


Fig. 5.1

La structure du système est montrée dans la fig.5.1. On assume que la référence est  $w$ , d'où  $\frac{E}{A}$  est sa fonction de transfert ; dans notre étude, nous allons supposer dans notre cas, que  $E=A$  pour que  $w'=w=r$ , fixé par l'utilisateur. La sortie bruitée  $y$  est contrôlée en utilisant le contrôleur  $I_0 = \frac{C_n}{C_d}$ . On assume que le signal de perturbation  $\eta$  est stationnaire, de variables aléatoires de moyenne nulle

On applique la factorisation spectrale généralisée introduite par Shaked (1976) pour l'analyse. Soit l'erreur du critère de performance et la fonction de contrôle de pesée dénotée respectivement par  $Q_1$  et  $R_1$  et soit  $Q_2$  et  $Q_3$ , les variances de  $\eta$  et  $w'$  respectivement. Alors la factorisation spectrale généralisée doit satisfaire

$$\begin{aligned} Y\bar{Y} &= (EQ_3\bar{E} + CQ_2\bar{C}) / (A\bar{A}) \\ \bar{Y}_1Y &= (\bar{B}Q_1B + \bar{A}R_1A) / (\bar{A}A) \end{aligned}$$

Les polynômes  $C$  et  $P_1$  sont stables ( plus correctement  $1/C$  et  $1/P_1$  sont stables) et satisfait

$$(5.4) \quad \begin{aligned} Y\bar{Y} &= C\bar{C} / A\bar{A} \rightarrow Y = C / A \\ \bar{Y}_1Y &= \bar{P}_1P_1 / \bar{A}A \rightarrow Y_1 = P_1 / A \end{aligned}$$

où le polynôme  $C$  est déjà défini et

$$\begin{aligned} \bar{C} &= 1 + c_1 z^1 + \dots + c_{n_c} z^{n_c} \\ \tilde{C} &= z^{-n_c} \bar{C} = c_{n_c} + c_{n_c-1} z^{-1} + \dots + z^{-n_c} \end{aligned}$$

L'erreur de poursuite pour la commande est comme suit

$$e = r - y$$

et 
$$e_1 = (C/A)\zeta(t) - (B/A)u + PC$$

Soit la fonction coût à minimisée définie par

$$(5.5) \quad J = E\{Q_1 e^2(t) + R_1 u^2(t)\}$$

### Théorème 1

Considérant la fonction coût et le système décrit par (3.1), la commande optimale devient :

$$I_0 = G_0 / H_0$$

L'équation de diophantine couplée suivante, en termes de polynômes inconnus  $G$ ,  $H$  et  $F$  donnera l'unique solution  $G_0$  et  $H_0$  avec un degré minimum en ce qui concerne  $F$ .

$$\begin{aligned}\bar{P}_1 z^{-g} G + FA &= \bar{B} z^{-g} QC \\ \bar{P} z^{-2} H - FB &= \bar{A} z^{-g} R_1 C\end{aligned}$$

Où  $g \hat{=} \max(n_{p1}, n_b, n_a)$ .

Ces équations peuvent être combinées pour donner l'équation suivante :

$$(5. 6) \quad AH + BG = P_1 C$$

et le polynôme caractéristique en boucle fermée  $\rho_c = P_1 C$  ( voir Grimble 1984)

### CALCUL DE LA COMMANDE

On assume que

1. A, B, et  $\tilde{P}_1$  sont premiers entre eux
2. L'ordre des polynômes satisfait

$$n_a > n_c - k \quad \text{et} \quad n_b > n_c$$

Le degré minimum de la solution en ce qui concerne F des deux premières équations de diophantine ont  $n_f < g$  et l'ordre de H et G devient  $n_h < n_b$  et  $n_g < n_a$ , respectivement. La solution de l'équation résultante (5. 6) est unique.

Nous voyons alors que la commande  $(H_0, G_0)$  peut être calculée à partir de la solution d'une seule équation de diophantine (5. 6).

Le facteur spectral  $P_1$  conduit à deux types de lois de commande, dépendant de la manière dont il est défini

1. Critère fixé: On assume que  $Q_1$  et  $R_1$  sont fixés. Pour calculer  $P_1$ , on requiert un algorithme de factorisation spectrale on-line. Car  $P_1$  n'a pas besoin d'être calculé à chaque instant de période d'échantillonnage, le calcul devient long.
2. Spectrum fixé: On assume que  $P_1$  est spécifié, tel que le contrôle du système sera fixé [17].

La stratégie du LQG l'auto-ajustable explicite est basée sur le principe de l'équivalence certaine. Une fois les paramètres du système physique sont identifiés, ils seront utilisés pour la détermination de la loi de contrôle.

L'algorithme est basé sur le théorème 1. La version du critère fixé est donnée. En omettant l'étape '2' de la factorisation spectrale et en pré spécifiant un  $P_1$  fixé, on obtient la version du spectrum fixé, qui simplifiera le calcul et conduit aussi à un contrôle robuste.

### Algorithme de la commande LQG auto-ajustable explicite à critère fixé

Donnée : Choisir les polynômes de pesée de la fonction coût

Etape 1: Estimer les paramètres A, B, C, utilisant la méthode RELS ... et le modèle

$$e_1 = \frac{C}{A} \varepsilon_1 - \frac{B}{A} u$$

Etape 2: Calculer le facteur spectral stable  $P_1$  à partir de

$$\bar{P}_1 P_1 = \bar{B} B Q_1 + \bar{A} A R_1$$

Etape 3: Calculer le contrôleur  $G_0/H_0$  à partir de

$$A H_0 + B G_0 = P_1 C$$

Où :  $n_{H_0} = n_b - 1$  et  $n_{G_0} = n_a - 1$

Répéter les étapes de 1 à 3.

### V.3 SIMULATION ET INTERPRETATIONS :

Nous allons appliquer la commande LQG auto-ajustable, multivariable explicite, au système d'avion sans la présence de perturbations, puis en soumettant le système à des perturbations de type externe et interne, afin de pouvoir tester les performances de cette commande. Dans ce cas aussi, nous avons appliqué une identification de type RLS, avec un facteur d'oubli variable, et une période d'échantillonnage  $\Delta t = 0.2$ , avec la contrainte :  $n_a > n_c - k$  et  $n_b > n_c$  dans notre cas :  $n_a = 1$  est l'ordre de  $\Delta A(z^{-1})$ ,  $n_c = 0$ ,  $n_b = 5$  et  $k = 1$ ,  $n_H = n_b - 1$  et  $n_G = n_a - 1$ .

#### Figures (5a,1) à (5a,3), (4b,1) à (5b,3) et (5c,1) à (5c,3) :

Ces figures représentent le cas où la commande LQG est appliquée à notre système d'avion, sans aucune perturbation, pour trois valeurs  $Q_1$  et  $R_1$ . On observe une bonne poursuite des signaux de références, sans aucune erreur statique, avec un signal de commande à énergie minimale. Les paramètres du modèle convergent moins rapidement que les cas précédents, avec une très faible erreur d'identification.

#### Figures (5a,4), (5b,4) et (5c,4):

Dans ces figures, nous allons voir les résultats de simulation pour le cas où la commande LQG est appliquée à notre système d'avion, dans la présence d'une perturbation constante, pour une

valeur de  $10^\circ$  d'amplitude du signal perturbateur pour le mouvement latéral et de  $5^\circ$  pour le mouvement longitudinal. On observe que la commande LQG garanti la stabilité du système, en préservant toujours la bonne poursuite avec la présence d'un dépassement au début du contrôle, dû à l'effet des paramètres de l'estimateur qui présentent une erreur sous l'effet des perturbations, influant en mal la sortie dans le régime transitoire.

**Figures (5a,5), (5b,5) et (5c,5) :**

En appliquant au système d'avion une perturbation externe sévère (turbulence atmosphérique) caractérisé par un bruit blanc, très riche en fréquence. On observe que la commande permet de maintenir la stabilité et la poursuite ; mais là encore le caractère de perturbation externe à identifier et l'erreur d'identification influant énormément sur la qualité des signaux de sortie et de commandes,

**Figures (5a,6), (5b,6) et (5c,6) :**

Dans ce cas, on soumis le système d'avion à une perturbation interne linéaire dû à la diminution linéaire de la masse de 0.1kg/s. On remarque encore une fois, que la commande arrive à faire face à cette perturbation interne et ceci en ayant des erreurs d'identification très faibles et un très bon comportement en phase d'identification qui a permis l'obtention d'une bonne poursuite avec des commandes pas plus importantes qu'en milieu non perturbé.

**Figures (4a, 7):**

En appliquant au mouvement latéral de l'avion une perturbation interne constante sur la vitesse du vol de 10m/s d'amplitude du signal perturbateur. On remarque qu'on arrive à une erreur d'identification très faible ; l'effet de cette phase d'identification sur la qualité excellente de la commande, impose une bonne poursuite des signaux de références, et ne laisse aucun doute de sa robustesse.

**Figures (4a, 8):**

En appliquant au mouvement latéral de l'avion une perturbation interne lente (sinusoïdal) sur la vitesse de vol pour une valeur de  $10^\circ$  d'amplitude du signal perturbateur. On remarque là aussi que la commande arrive à des erreurs d'identification très faibles, et un très bon comportement en phase d'identification, en ayant une excellente poursuite avec des commandes pas plus importantes qu'en milieu non perturbé.

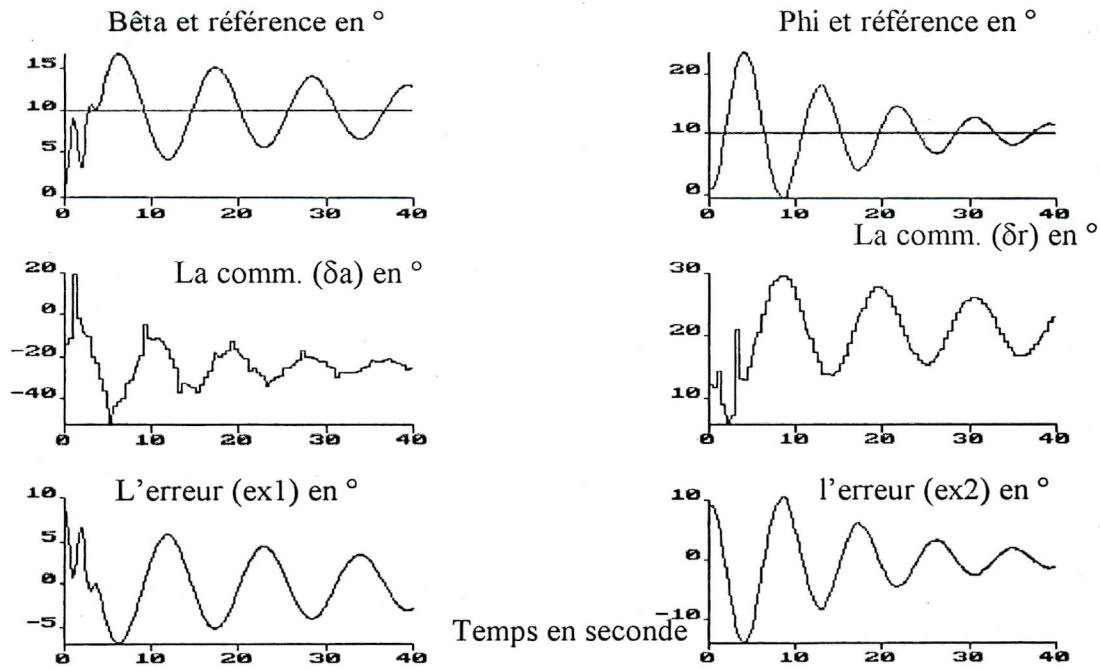


Fig. (5a.1) la commande LQG sans perturbation avec  $R1=[0.235 \ 0 ; 0 \ 0.139]$  et  $Q1=[0.35 \ 0 ; 0 \ 0.35]$

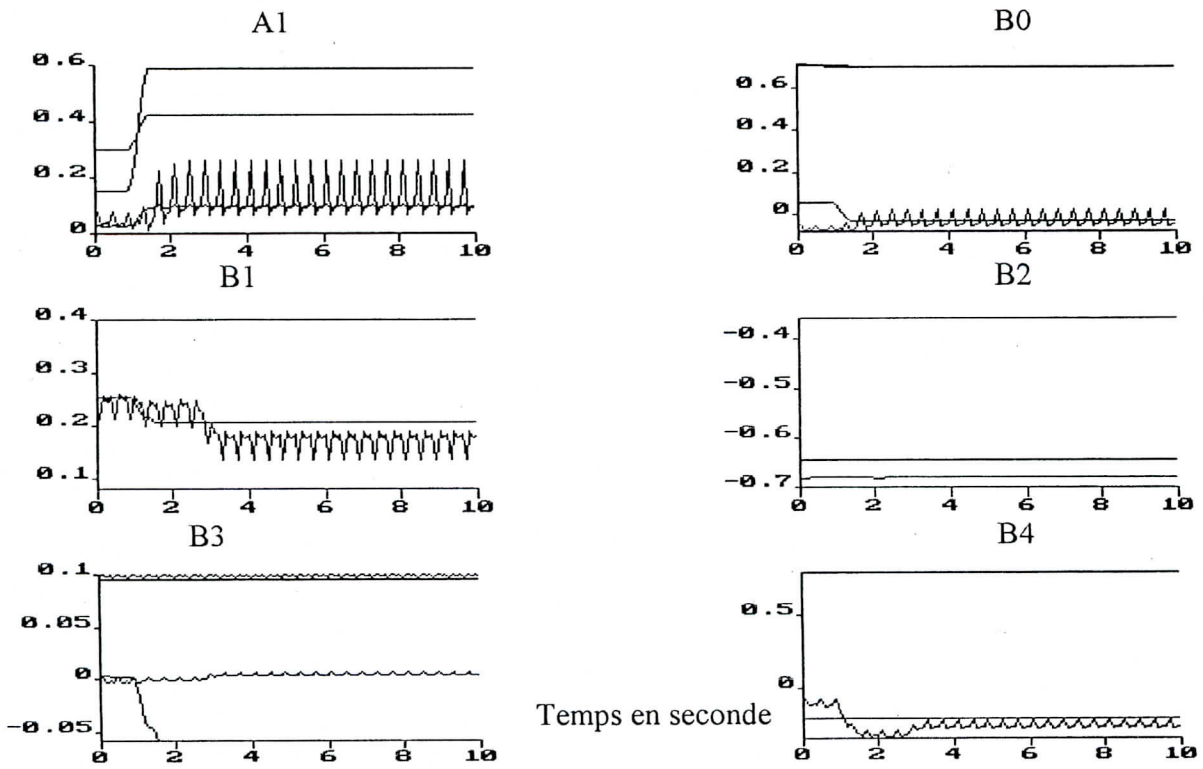


Fig. (5a'.1) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)



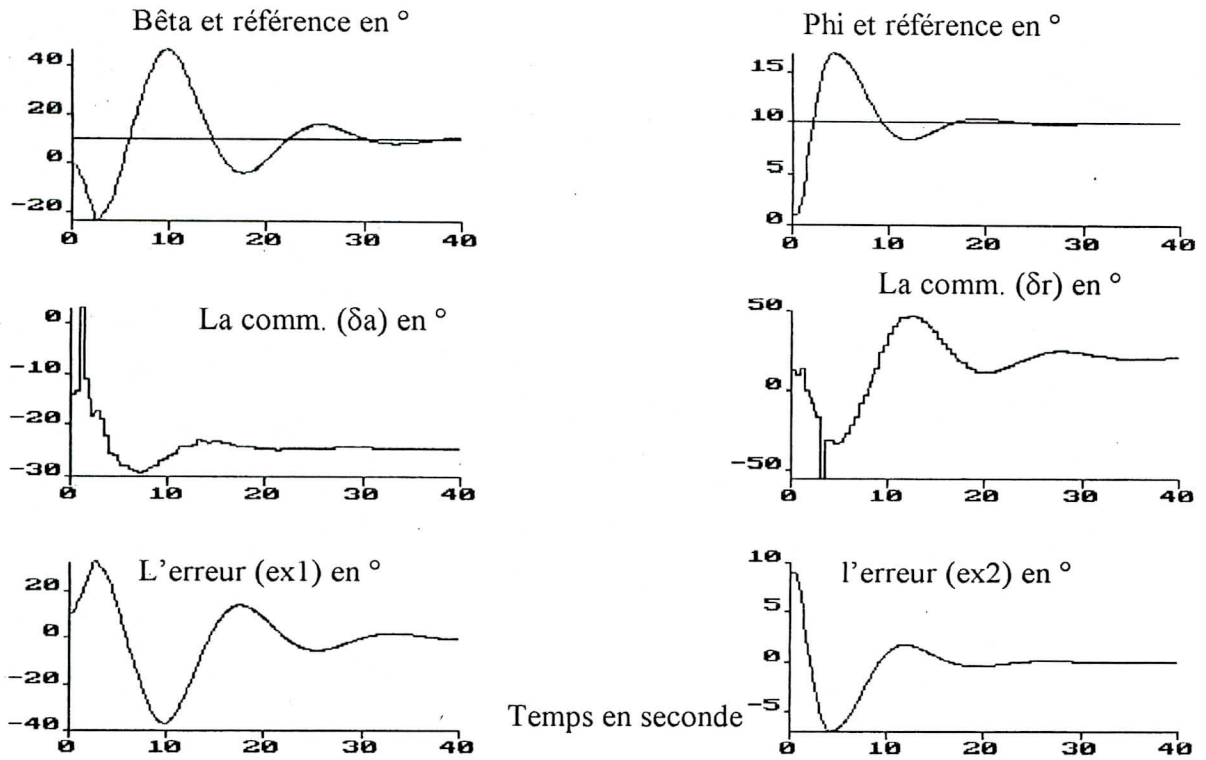


Fig. (5a.2) la commande LQG sans perturbation avec  $R1=[0.135 \ 0 ; 0 \ 0.099]$  et  $Q1=[0.55 \ 0 ; 0 \ 0.55]$

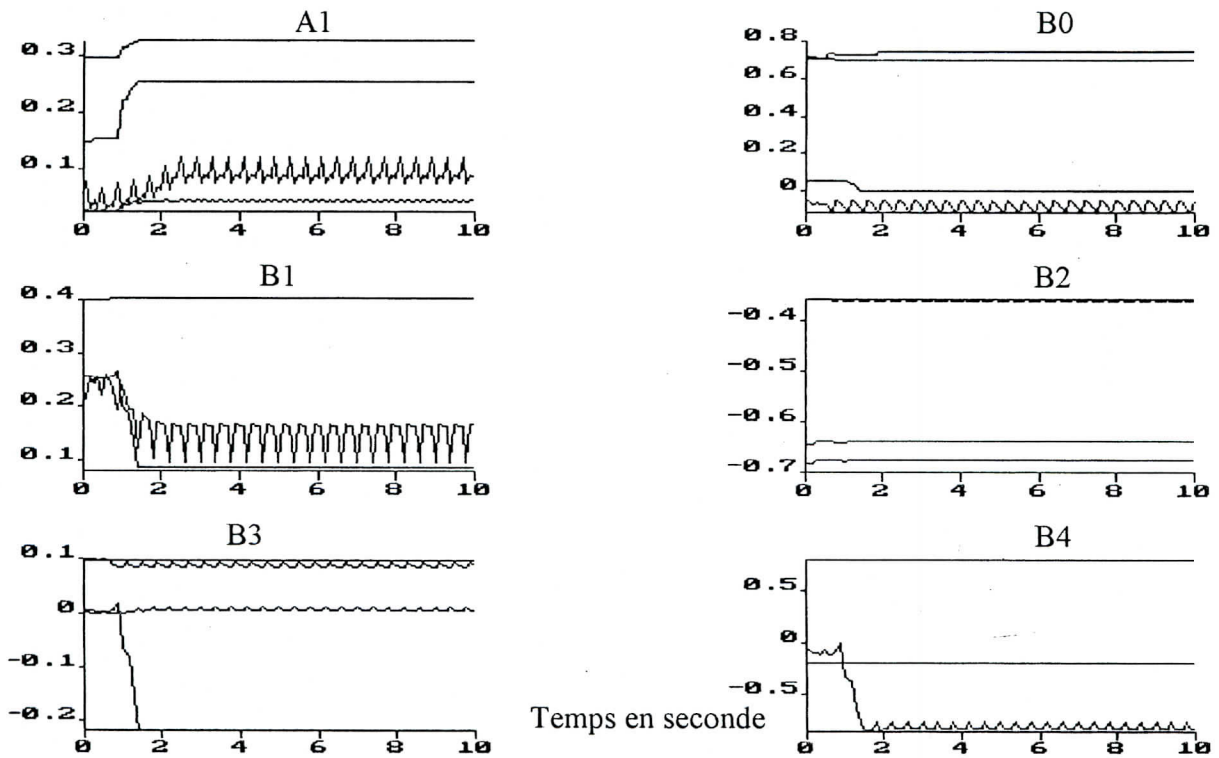


Fig. (5a'.2) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

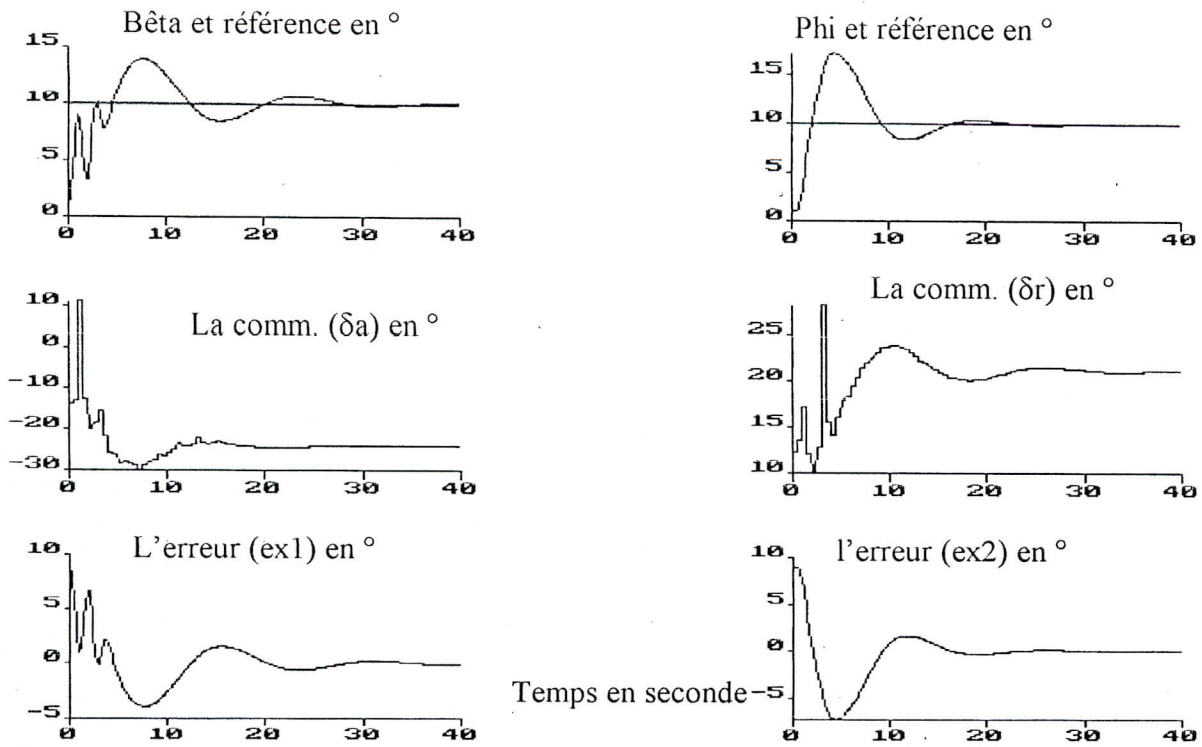


Fig. (5a.3) la commande LQG sans perturbation avec  $R1=[0.08 \ 0; \ 0 \ 0.08]$  et  $Q1=[0.6 \ 0; \ 0 \ 0.6]$

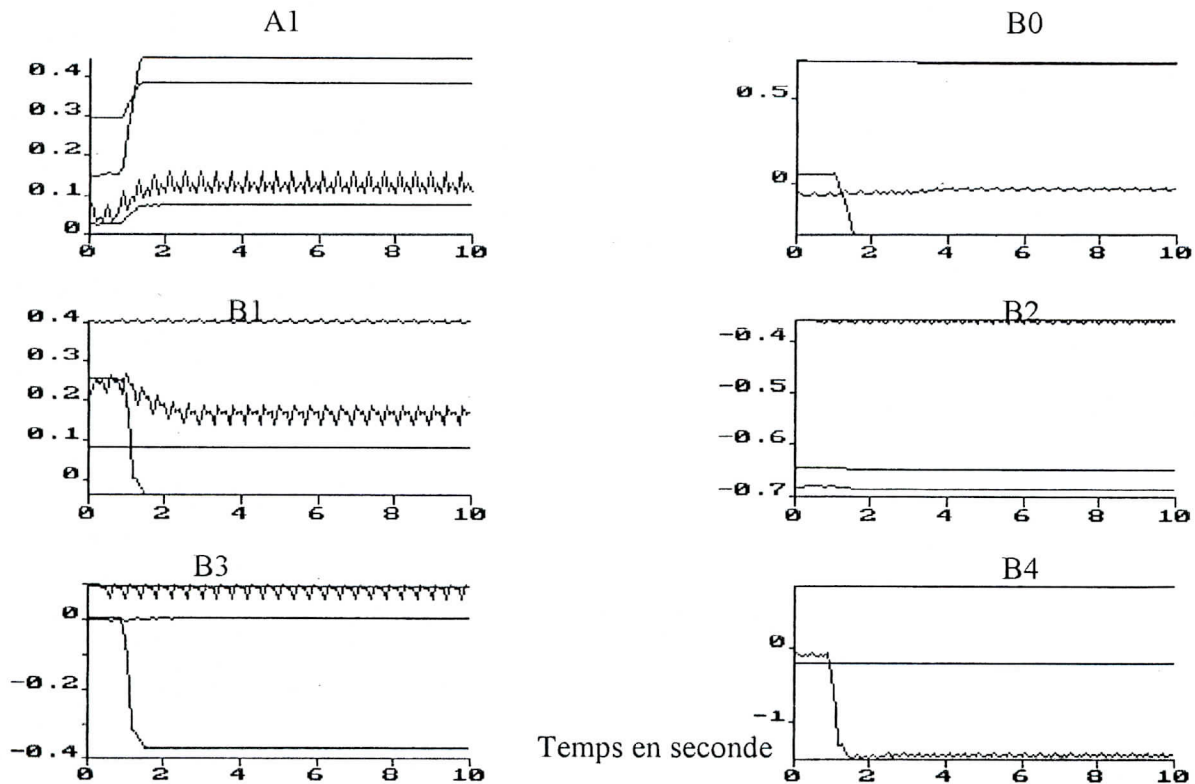


Fig. (5a'.3) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

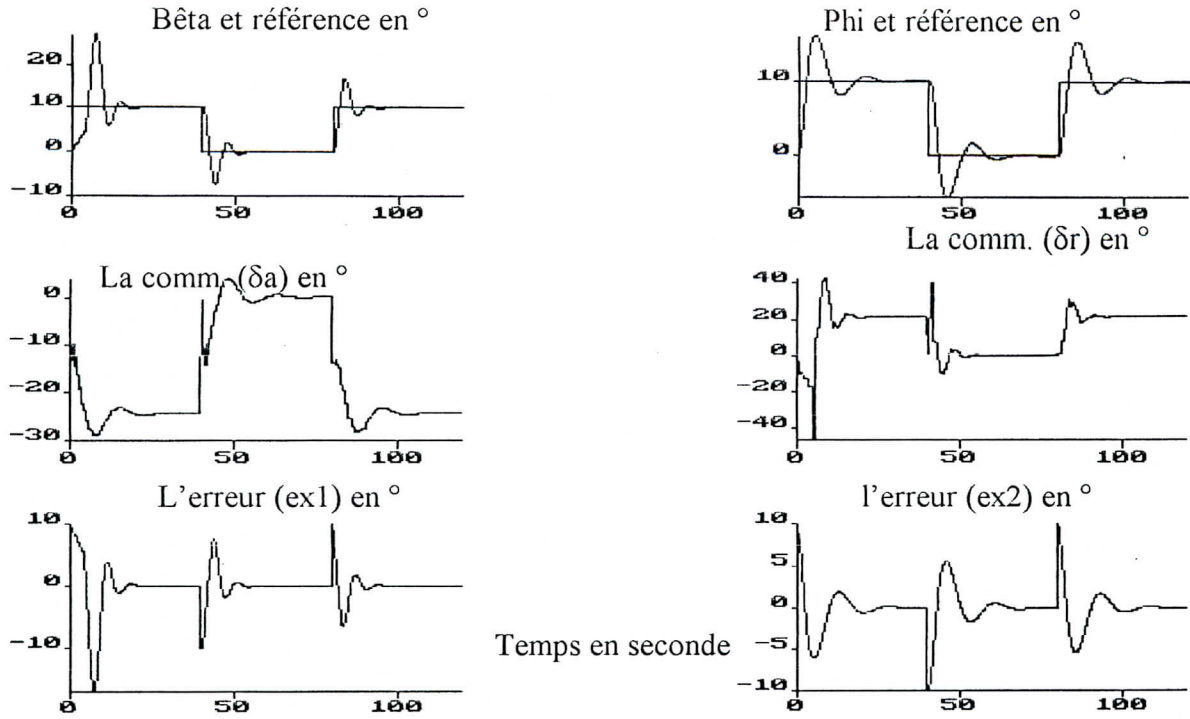


Fig. (5a.4) la commande LQG avec perturbation externe constante d'amplitude  $am=10^\circ$

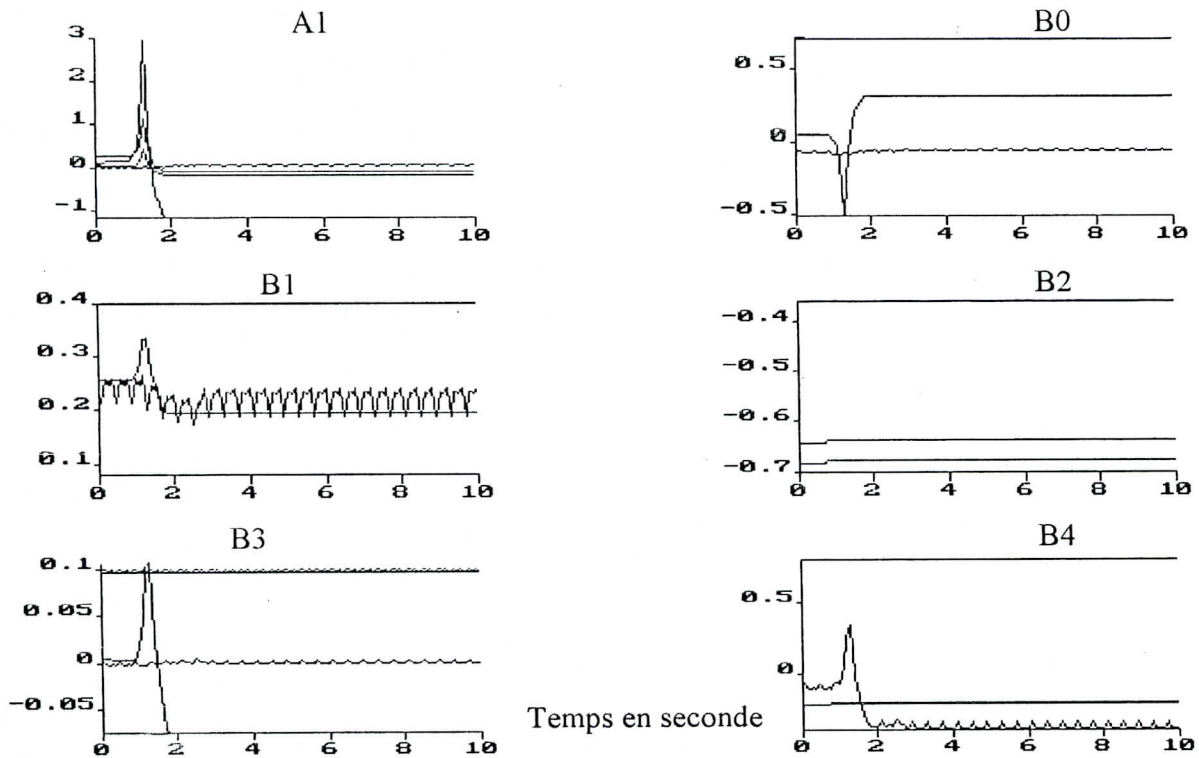


Fig. (5a'.4) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

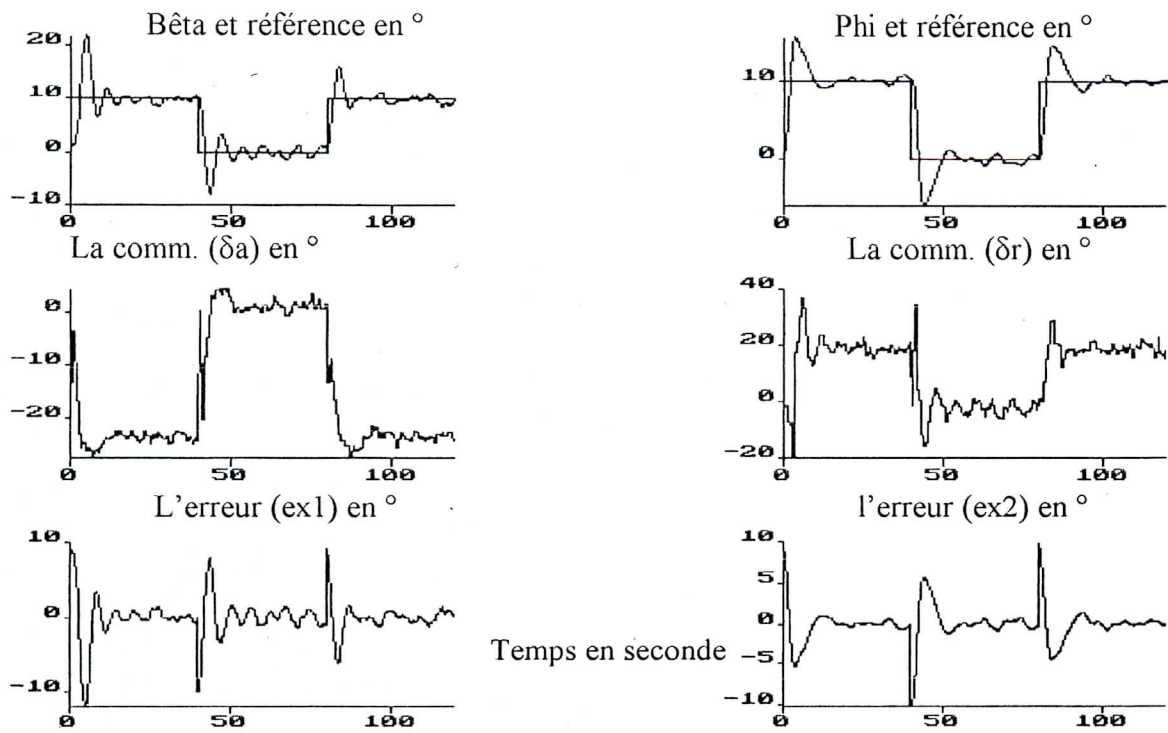


Fig. (5a.5) la commande LQG avec perturbation externe sévère de niveau  $am=10^\circ$

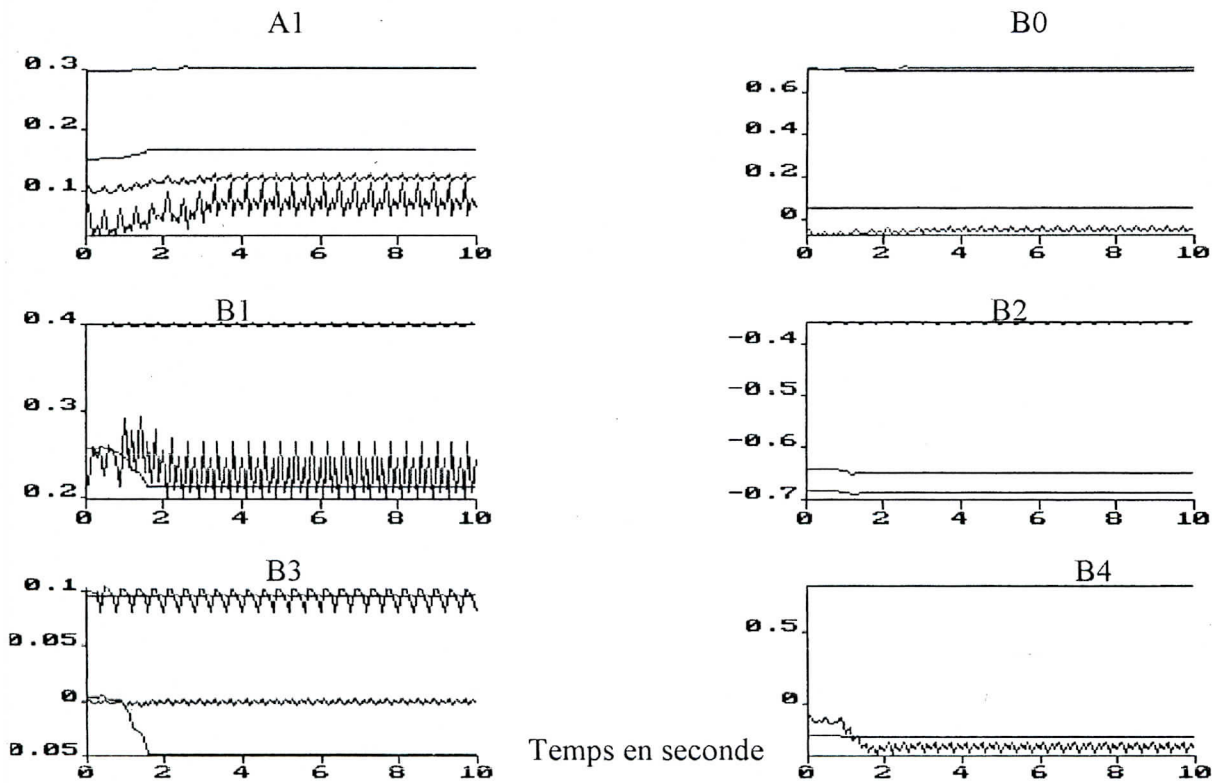


Fig. (5a'.5) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

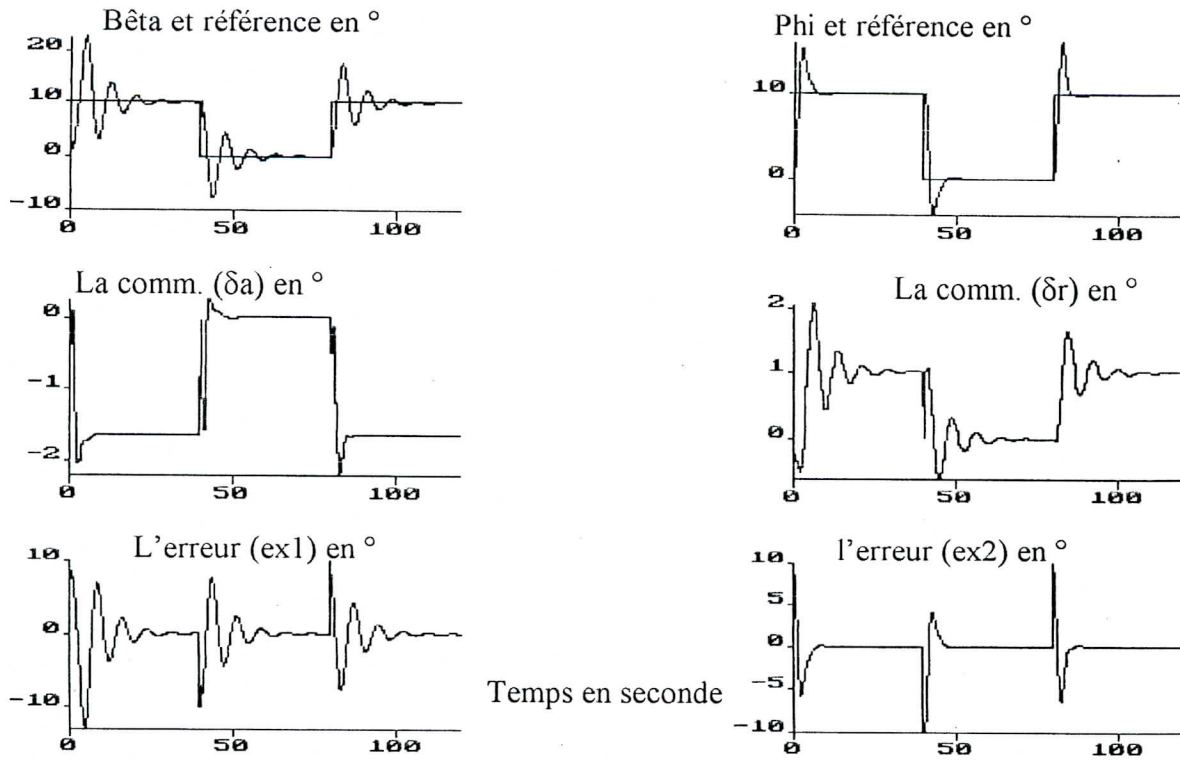


Fig. (5a.6) la commande LQG avec perturbation interne dû à la diminution de la masse de 0.1kg/s

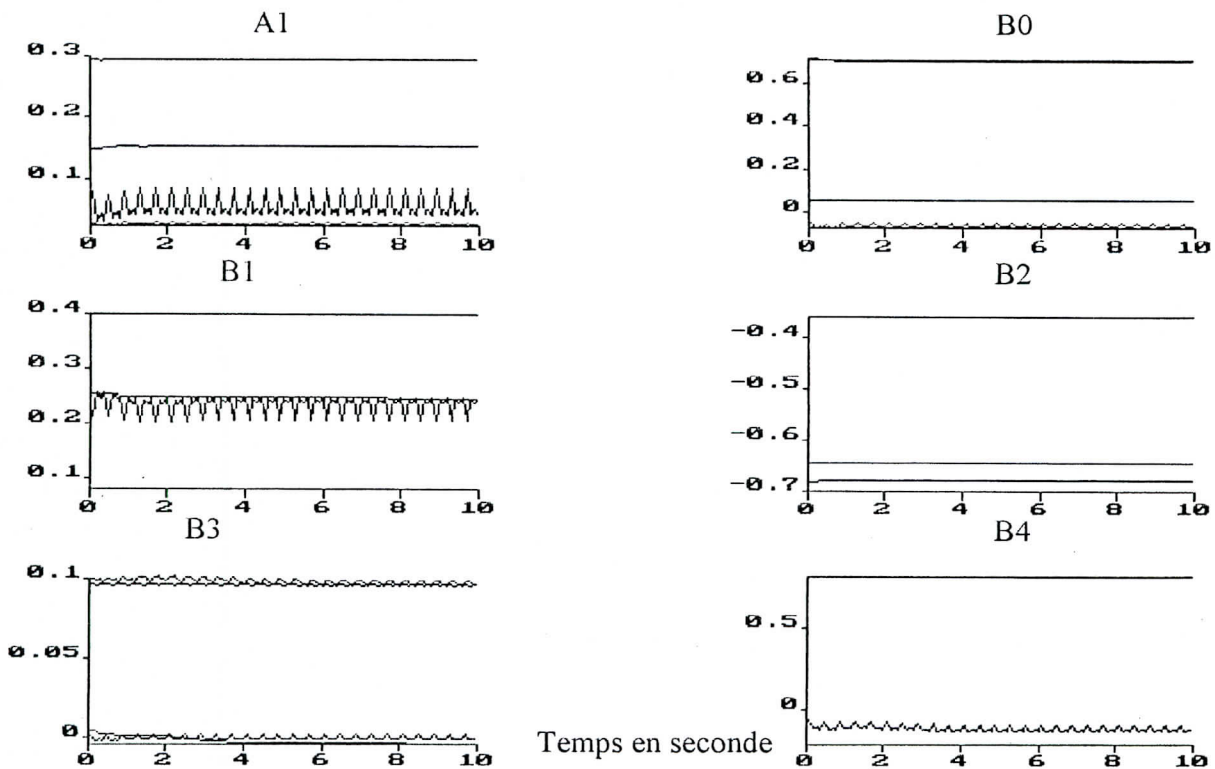


Fig. (5a'.6) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

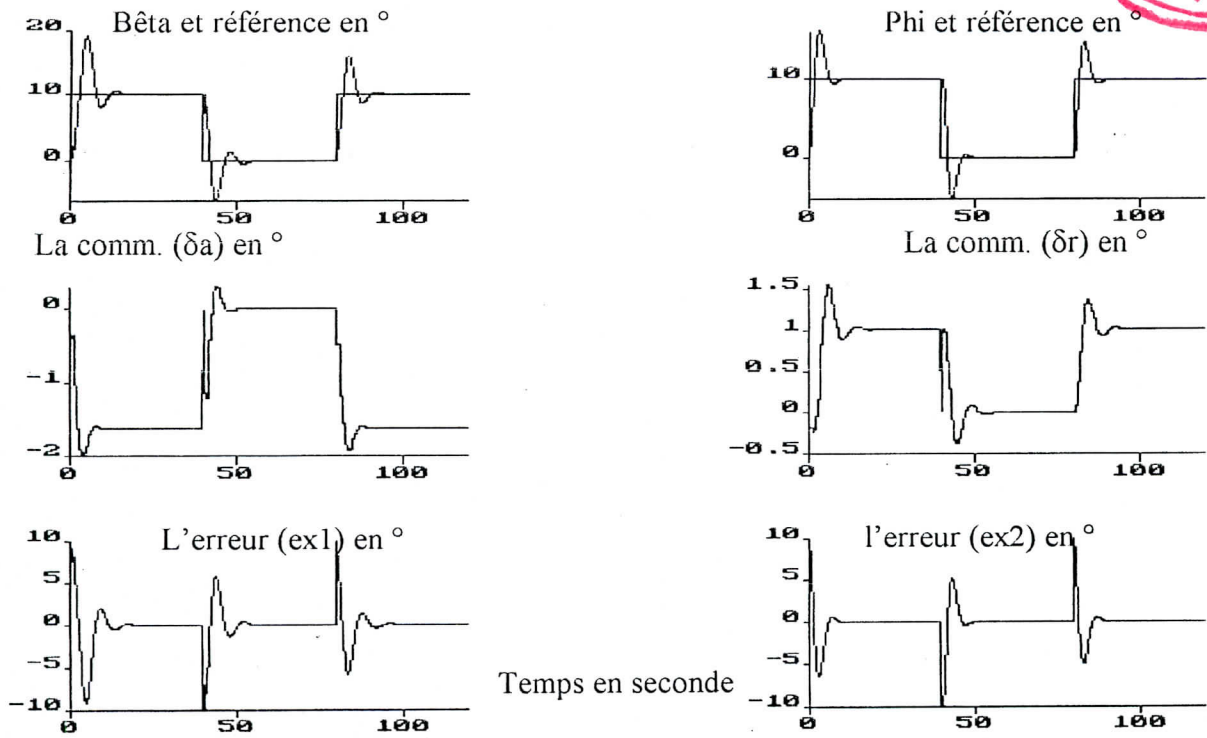


Fig. (5a.7) la commande LQG avec perturbation interne constante de la vitesse d'amplitude  $a_m=10m/s$

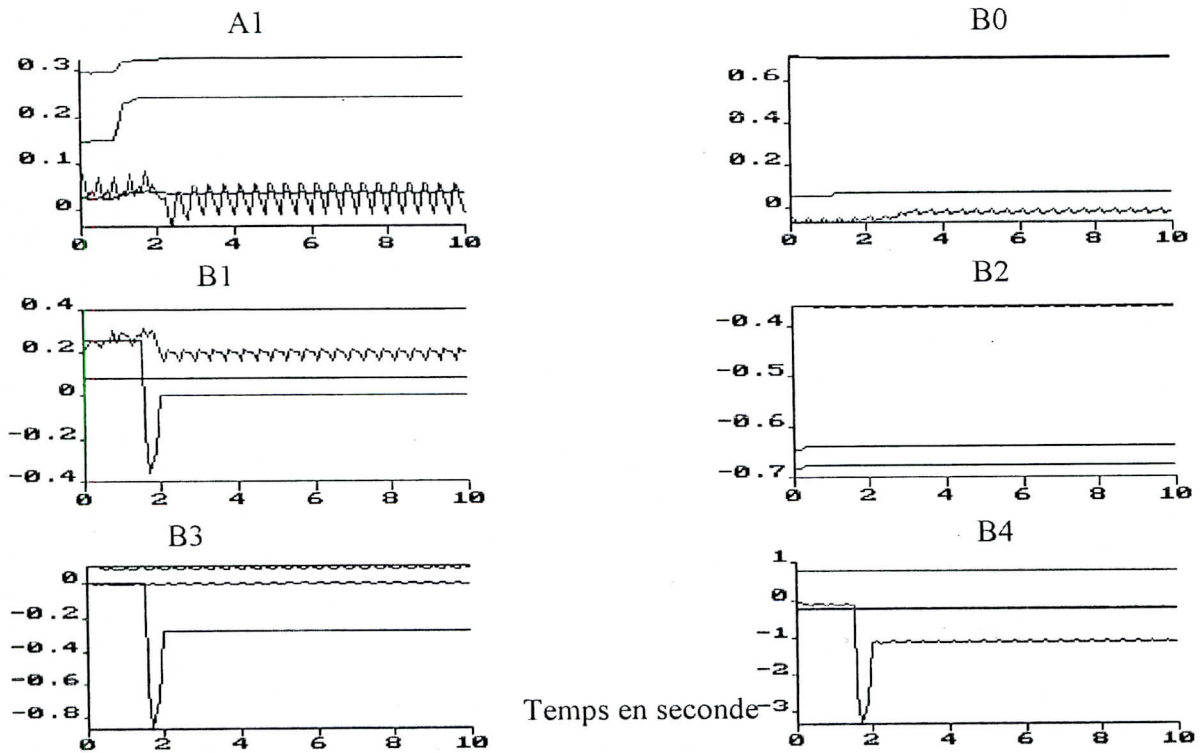


Fig. (5a'.7) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

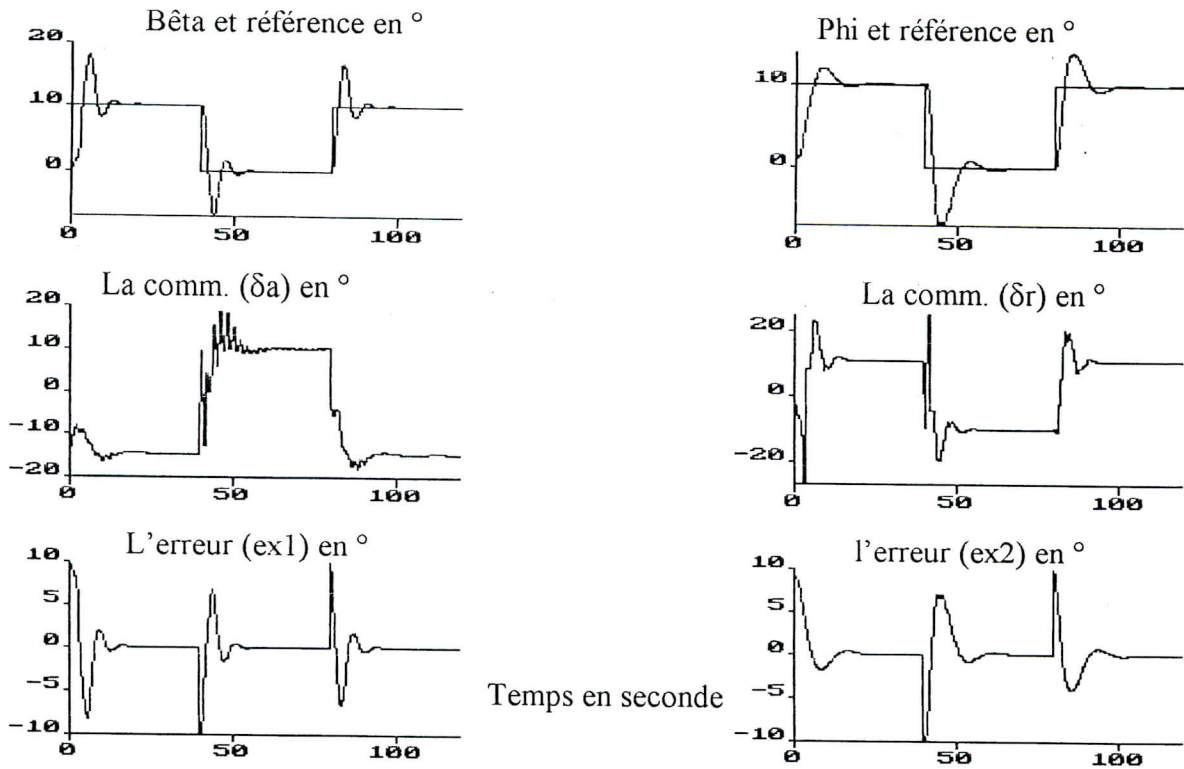


Fig. (5a.8) la commande LQG avec perturbation interne lente (sinusoïdale) de la vitesse d'amplitude  $a_m=10m/s$

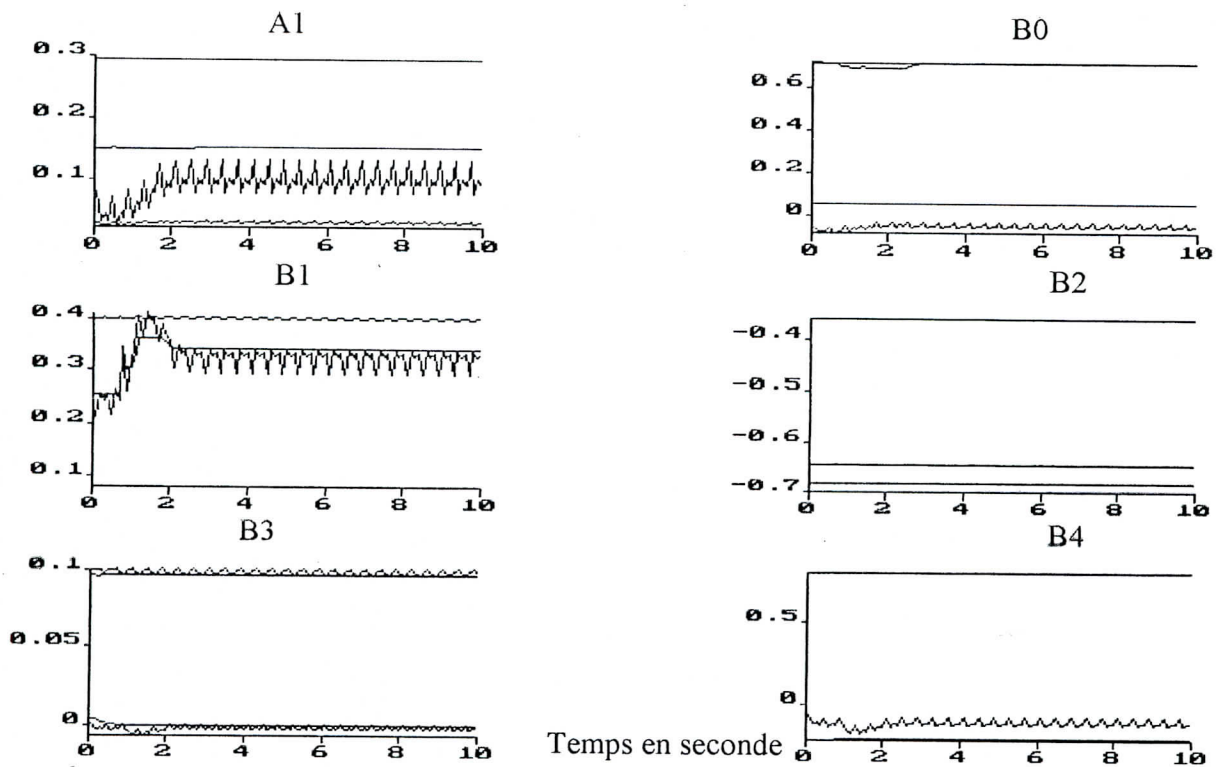


Fig. (5a'.8) l'estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

Graphes de simulation du mouvement longitudinal pour le contrôle de u

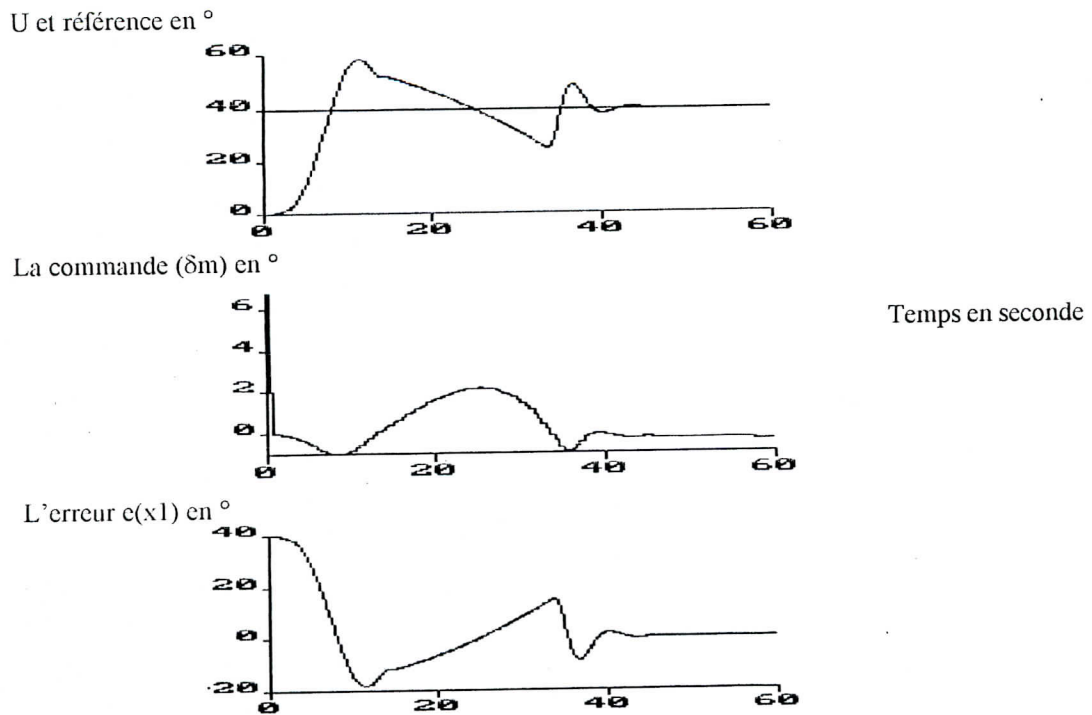


Fig.(5b.1) Commande LQG sans perturbation avec  $Q1=0.2$  et  $R1=0.08$

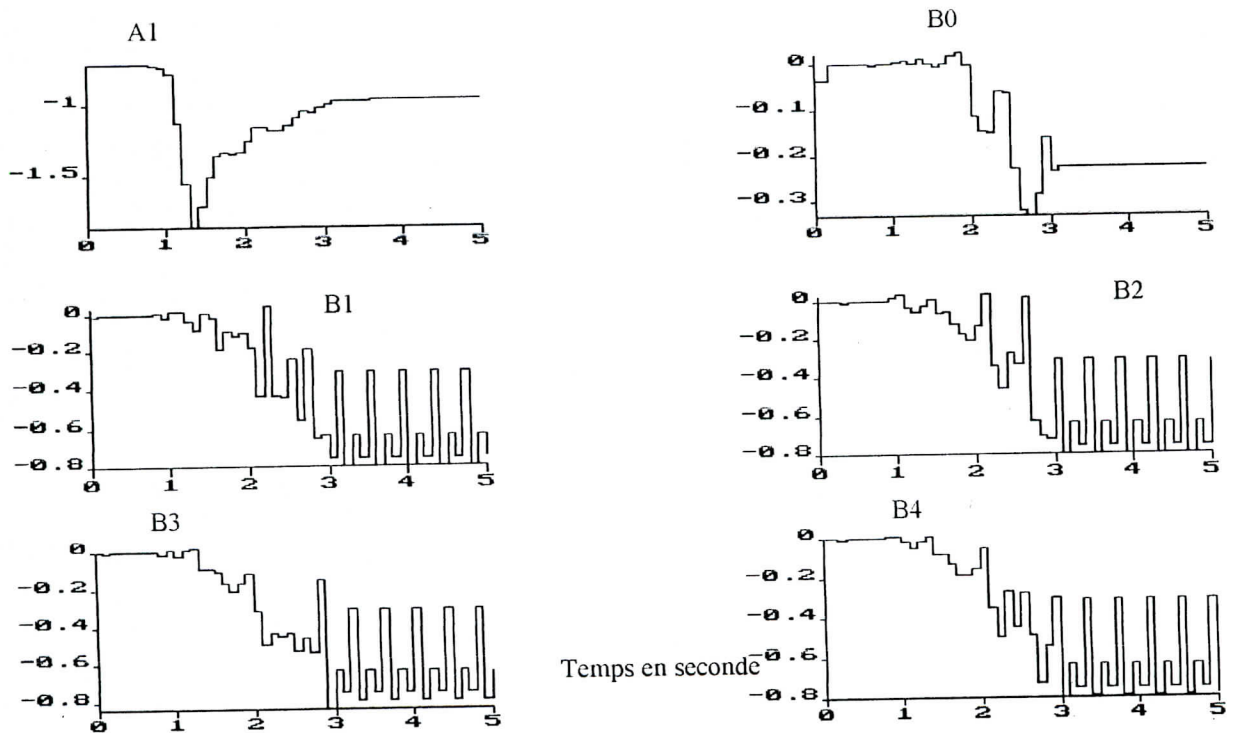


Fig.(5b'.1) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)



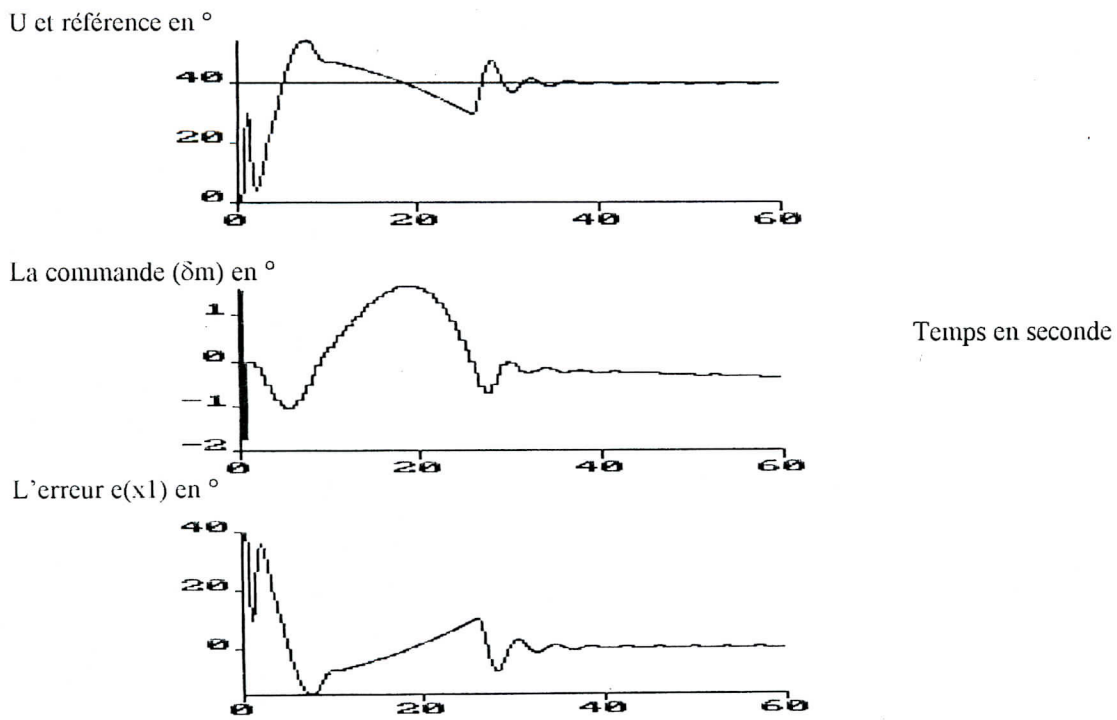


Fig.(5b.2) Commande LQG sans perturbation avec  $Q1=0.2$  et  $R1=0.2$

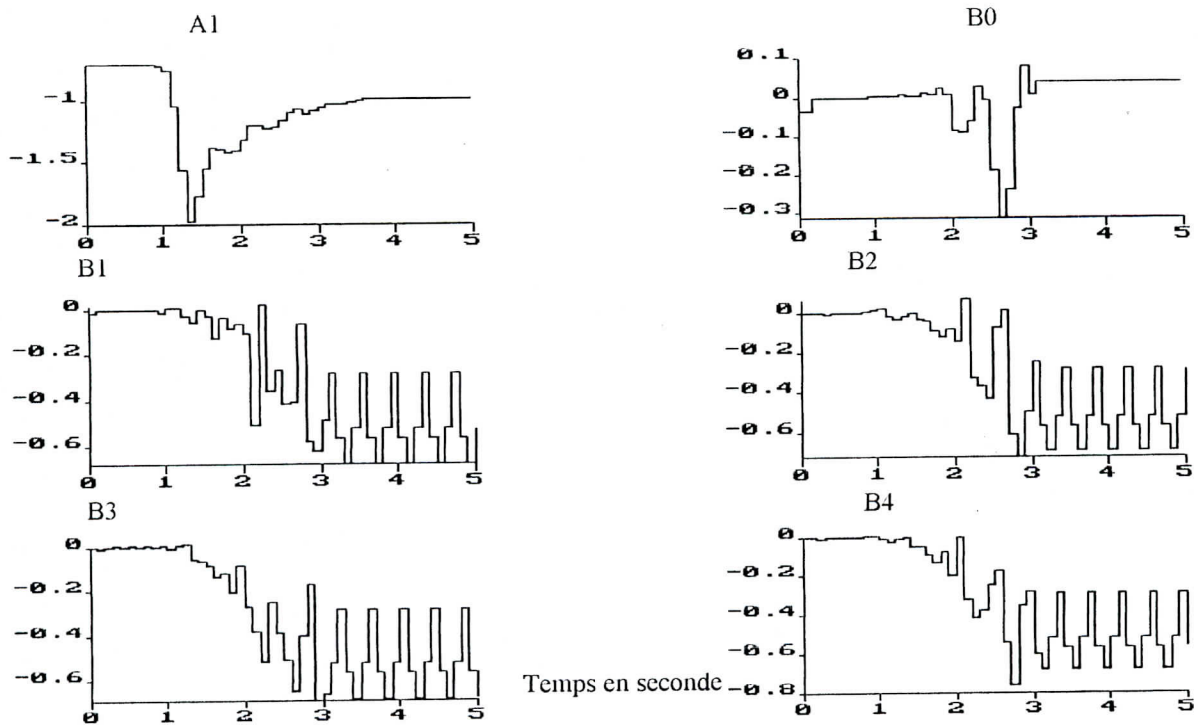


Fig.(5b'.2) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

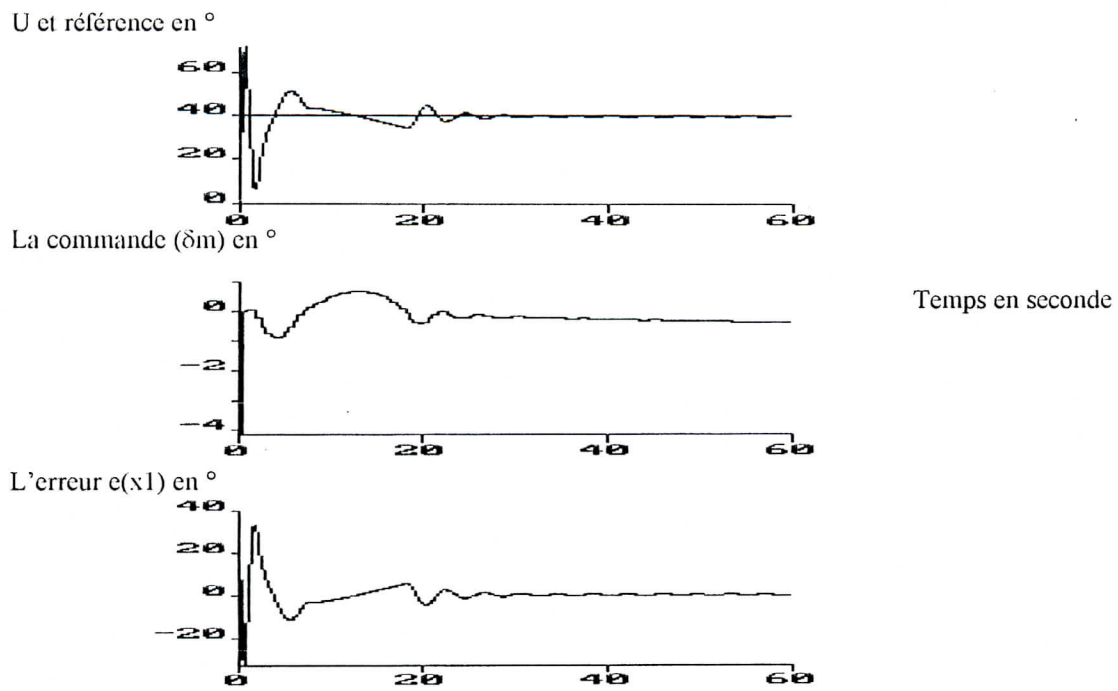


Fig.(5b.3) Commande LQG sans perturbation avec  $Q1=0.3$  et  $R1=0.25$

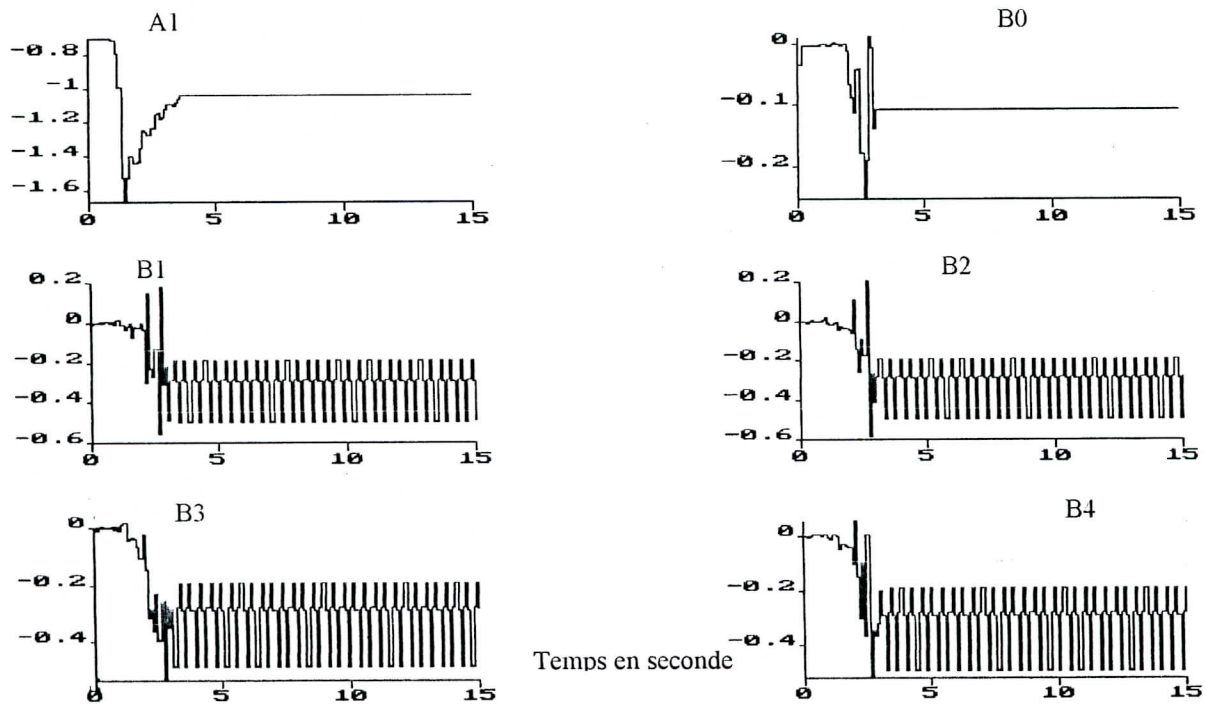


Fig.(5b'.3) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

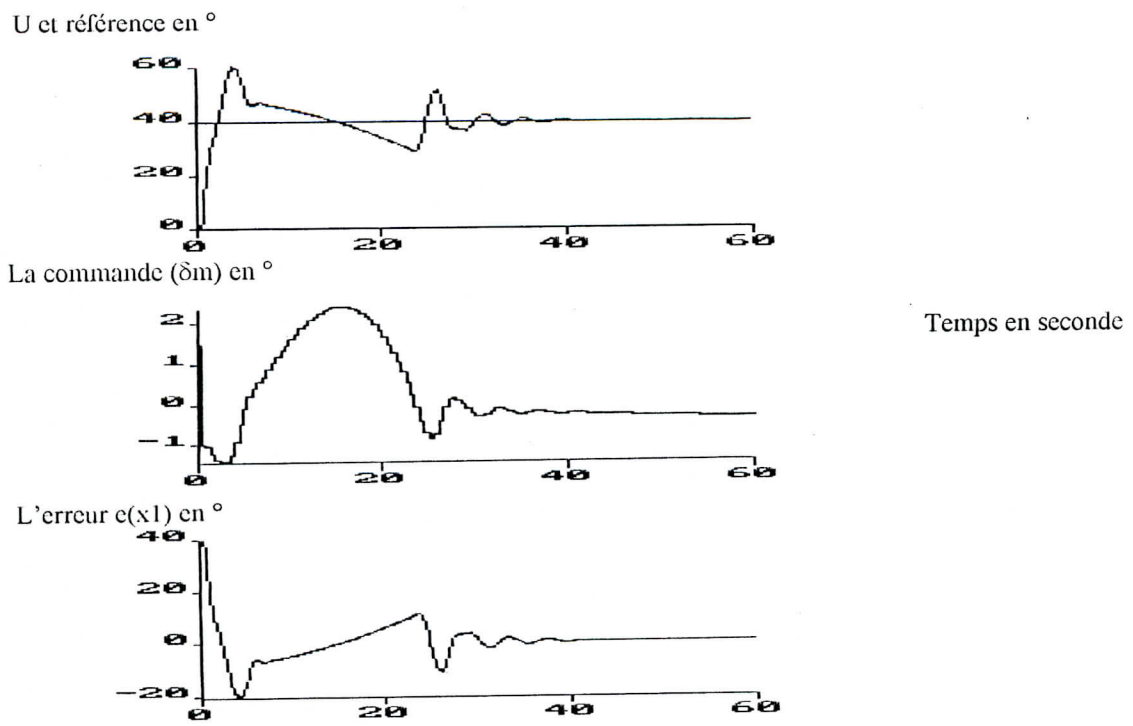


Fig.(5b.4) Commande LQG avec perturbation externe constante d'amplitude  $a=5^\circ$

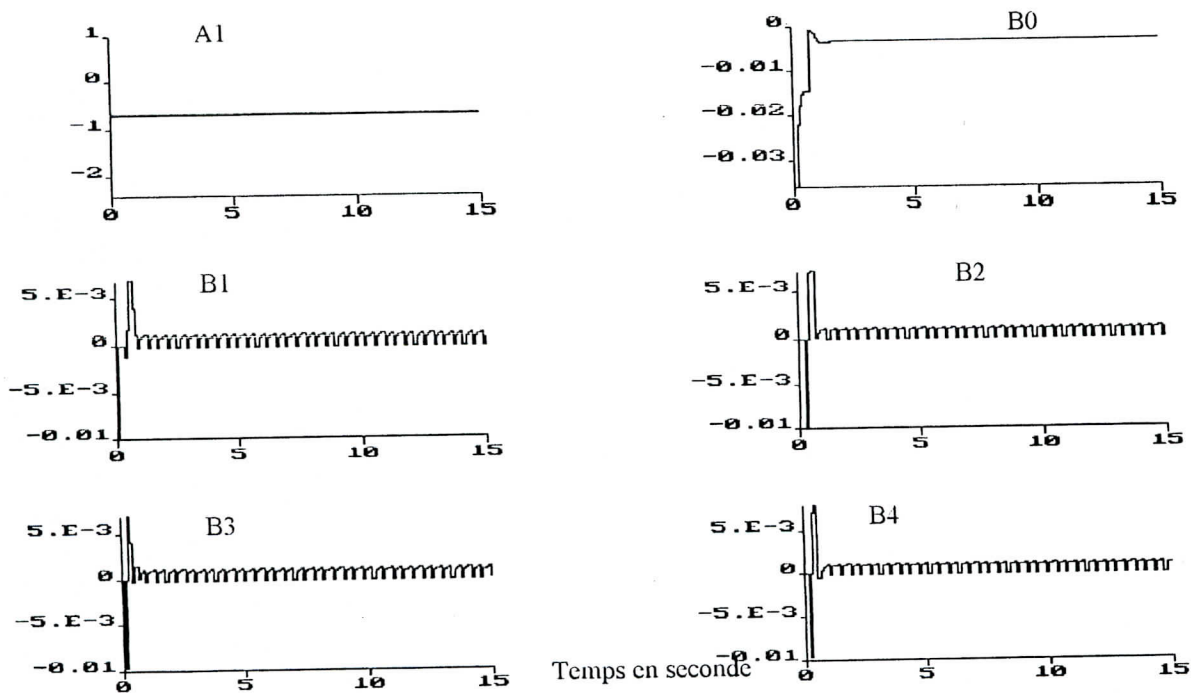


Fig.(5b'.4) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

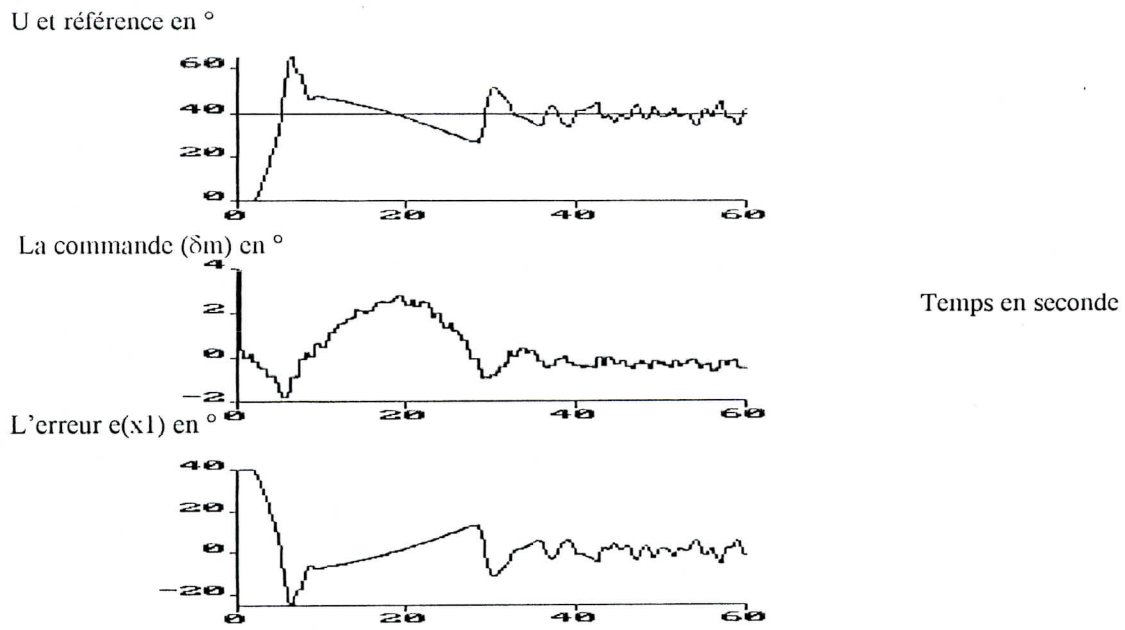


Fig.(5b.5) Commande LQG avec perturbation externe sévère de niveau  $am = 1^\circ$

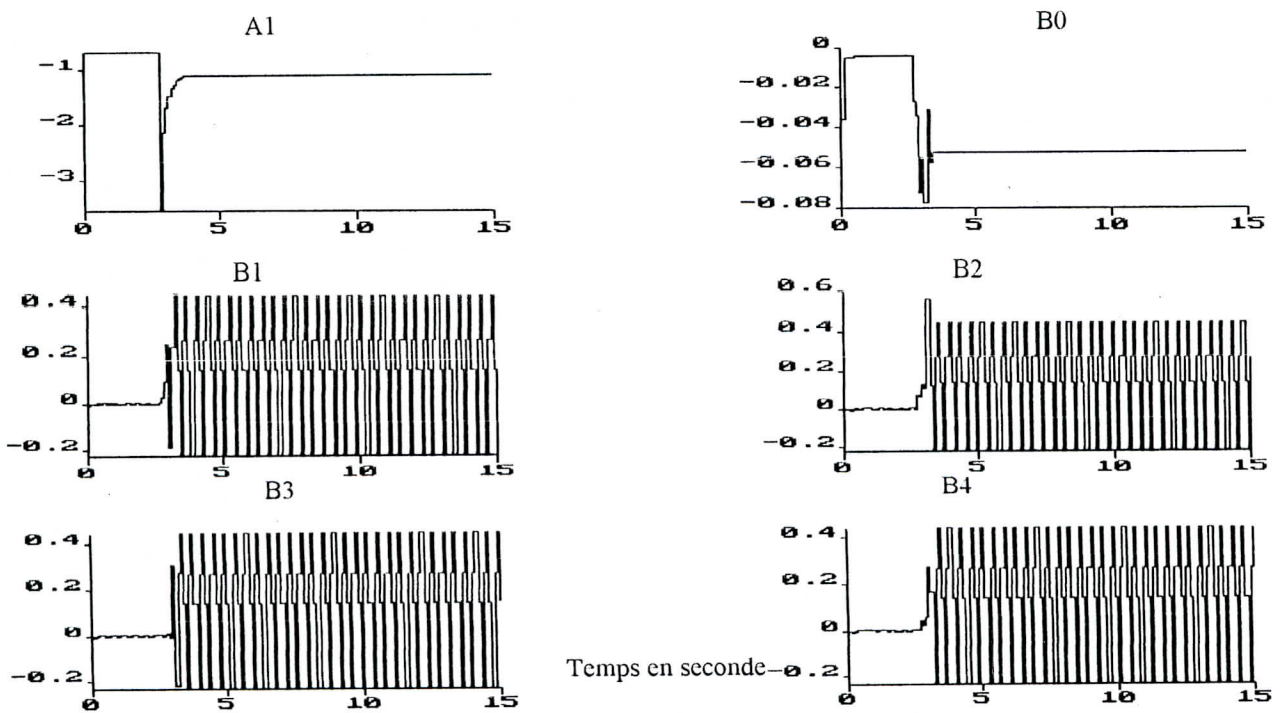


Fig.(5b'.5) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

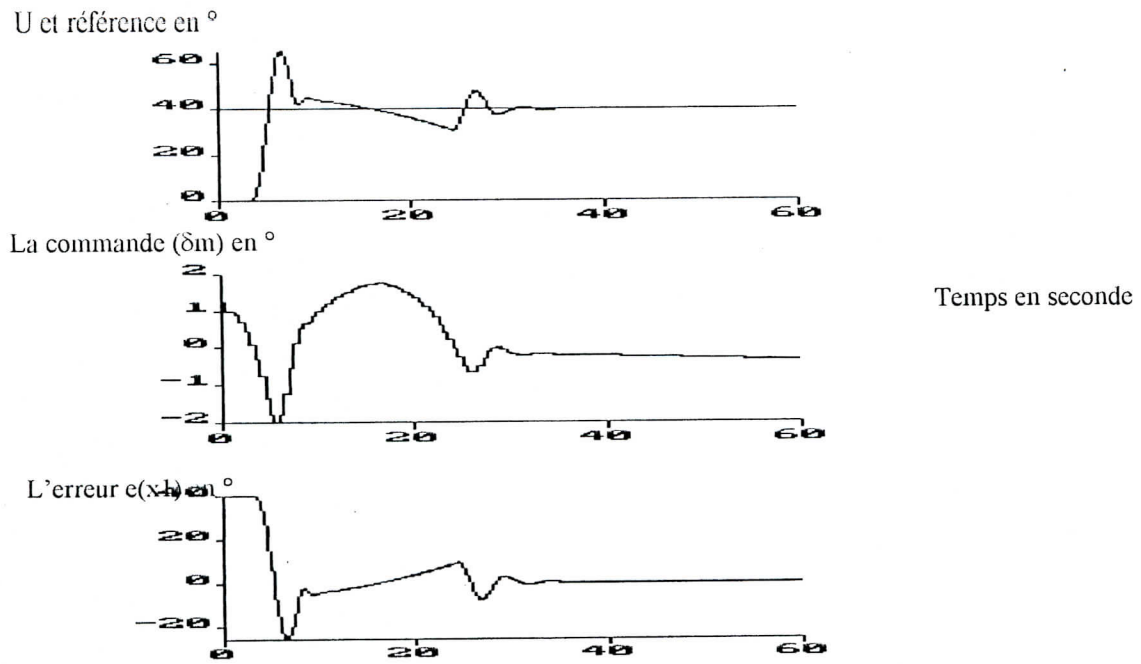


Fig. (5b.6) Commande LQG avec perturbation interne linéaire sur la masse de 0.1kg/s

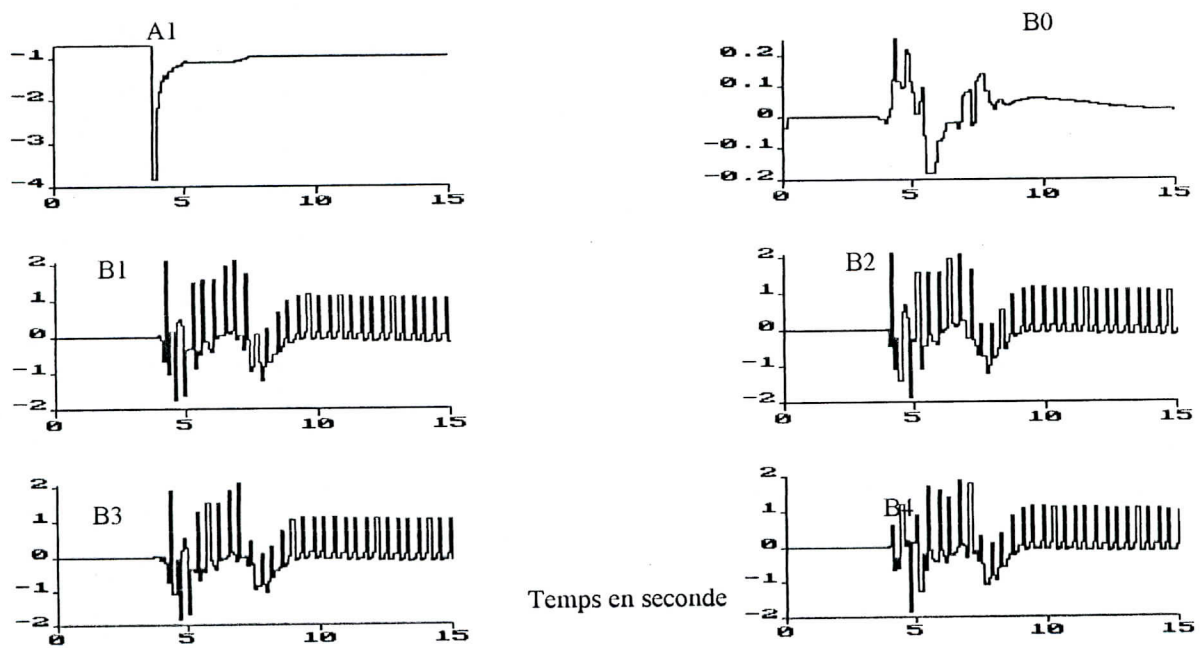
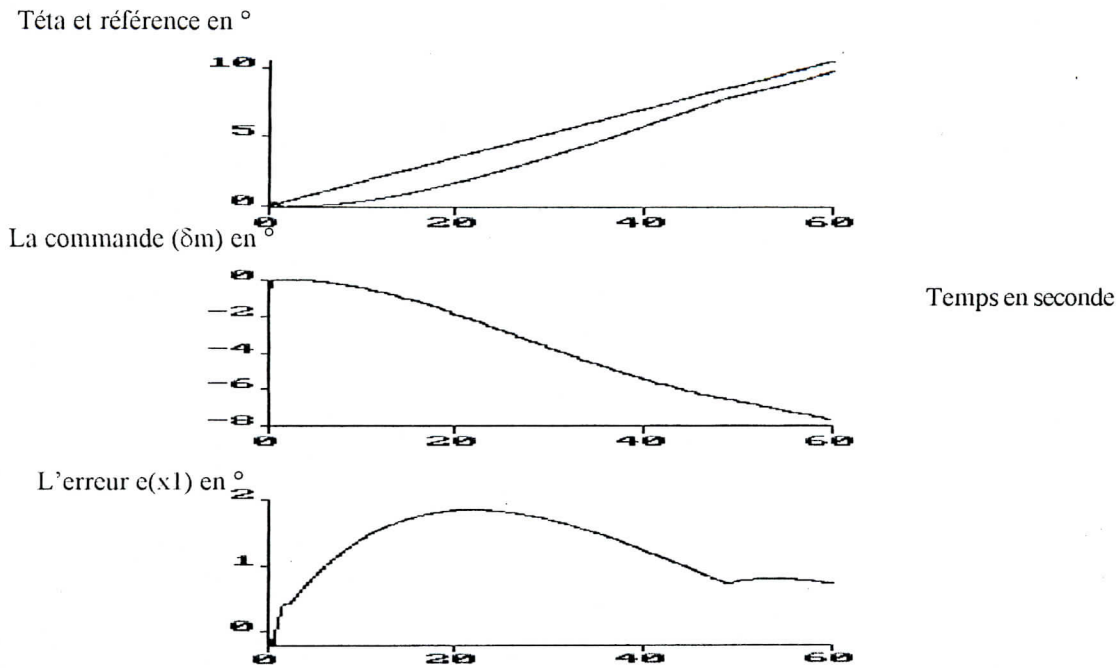
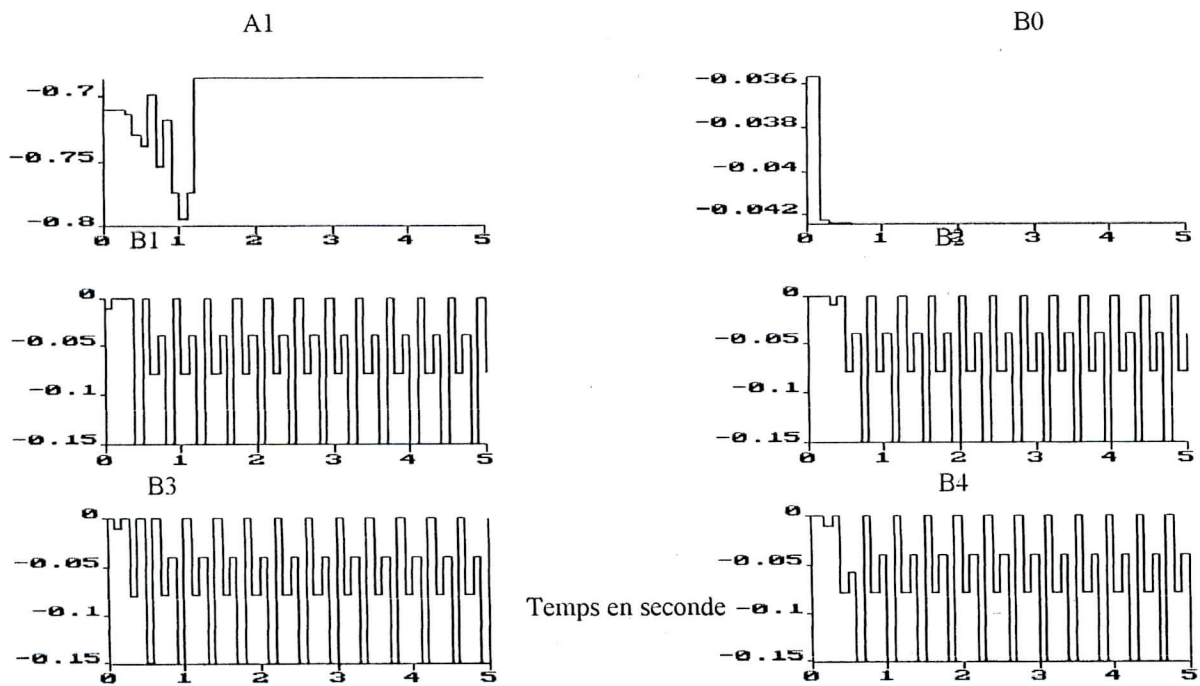


Fig. (5b'.6) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

**Graphes de simulation du mouvement longitudinal pour le contrôle de  $\Theta$**

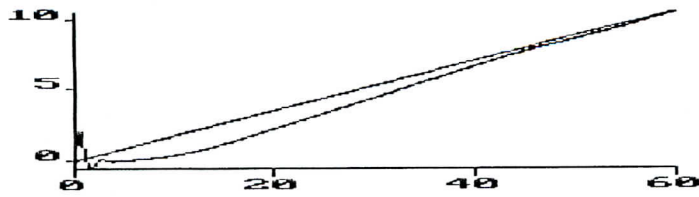


*Fig.(5c. 1) Commande LQG sans perturbation avec  $Q1=0.07$  et  $R1=0.0235$*

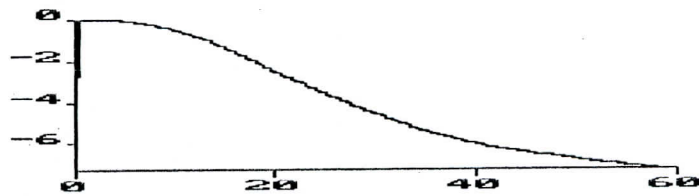


*Fig.(5b'.1) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)*

Tétra et référence en °



La commande ( $\delta m$ ) en °



Temps en seconde

L'erreur  $e(x1)$  en °

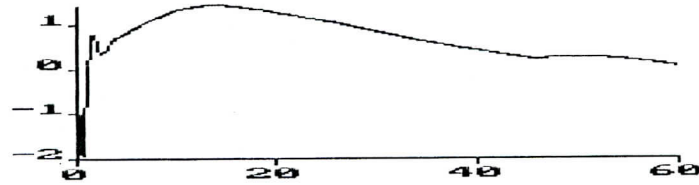


Fig.(5c. 2) Commande LQG sans perturbation avec  $Q1=0.07$  et  $R1=0.054$

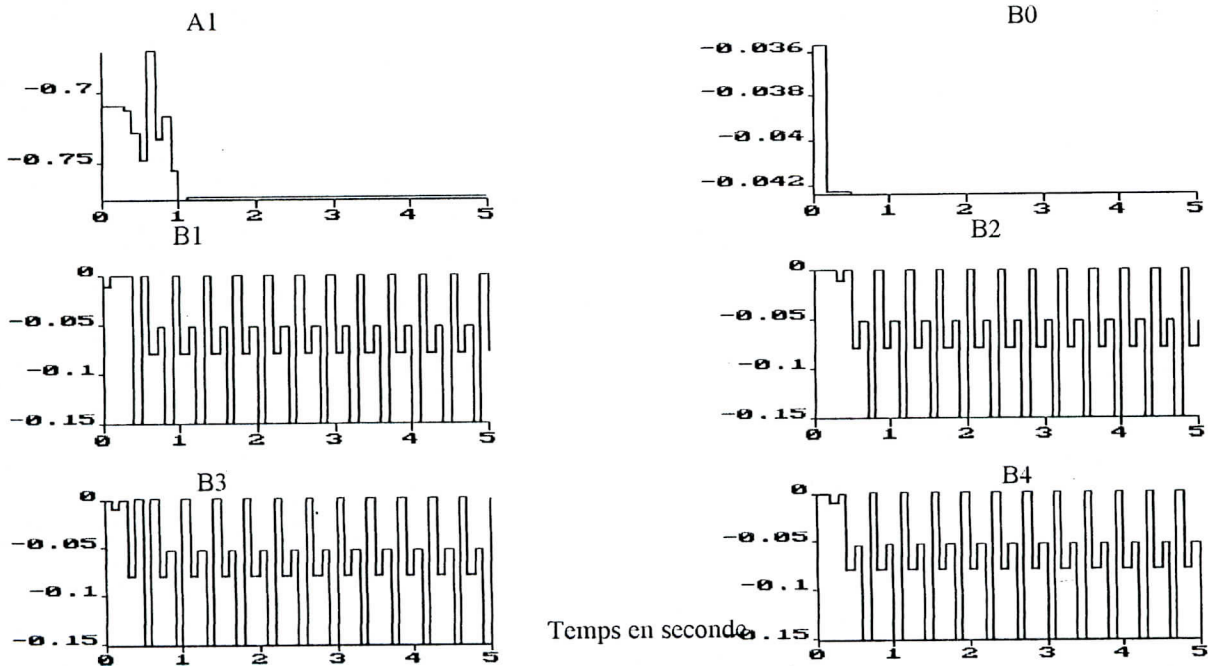


Fig.(5b'.2) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

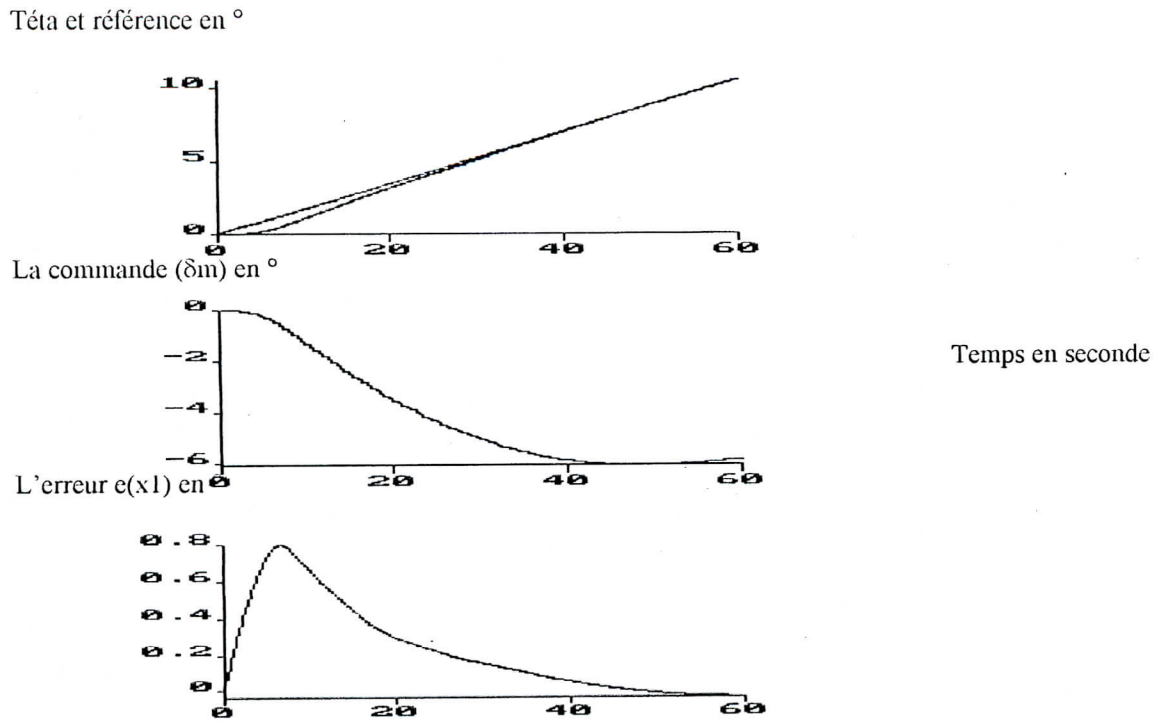


Fig.(5c. 3) Commande LQG sans perturbation avec  $Q1=0.1$  et  $R1=0.08$

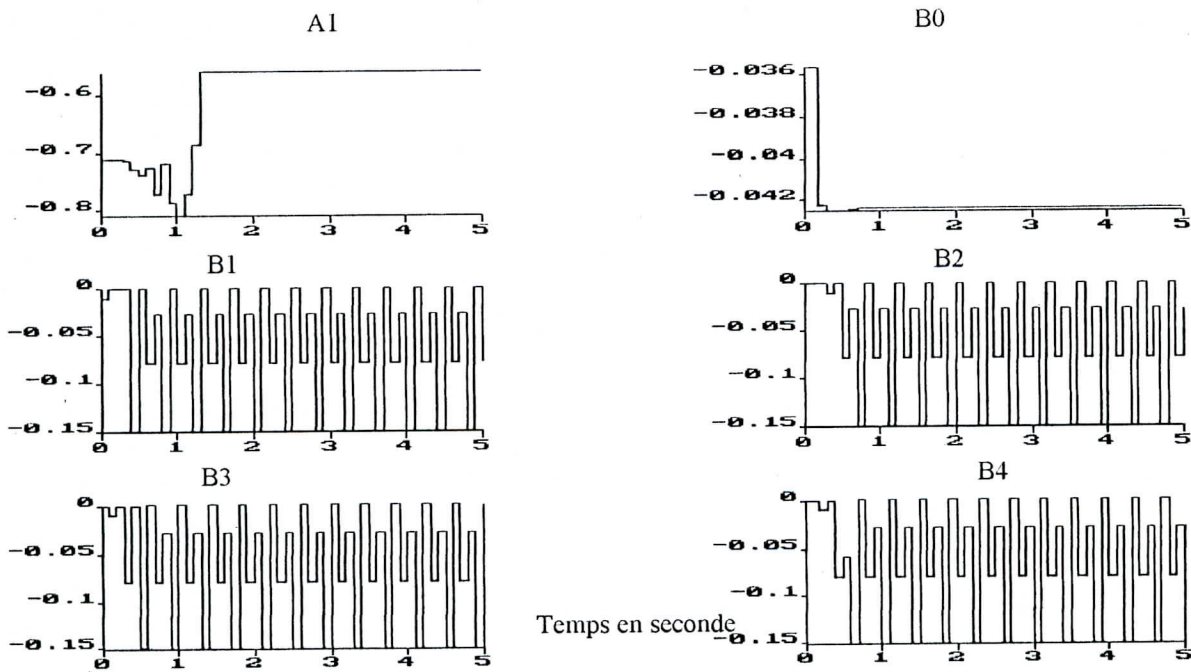


Fig.(5b'.3) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)



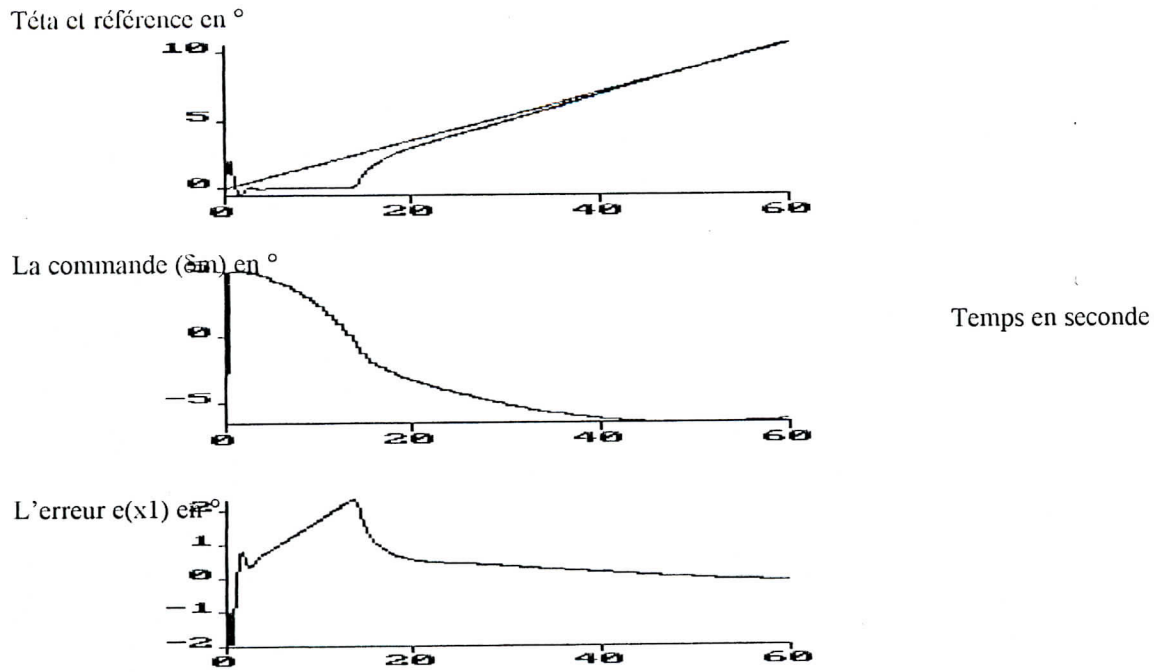


Fig. (5c. 4) Commande LQG avec perturbation externe constante de 5° d'amplitude

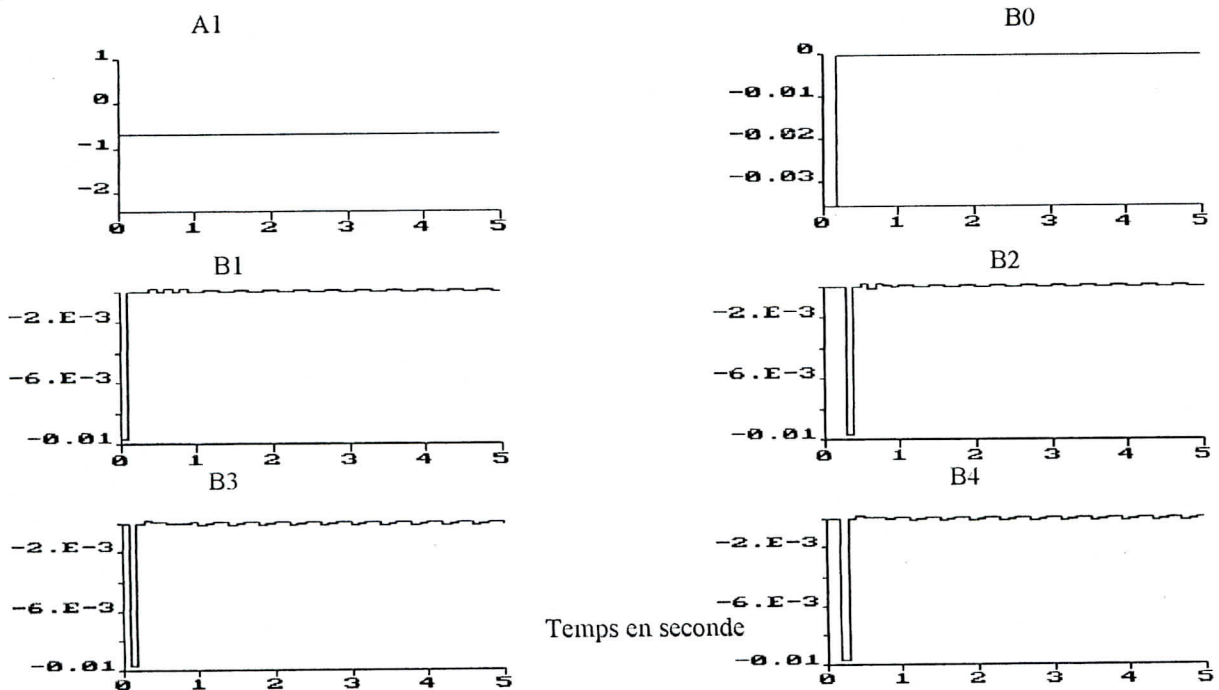


Fig. (5b'.4) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

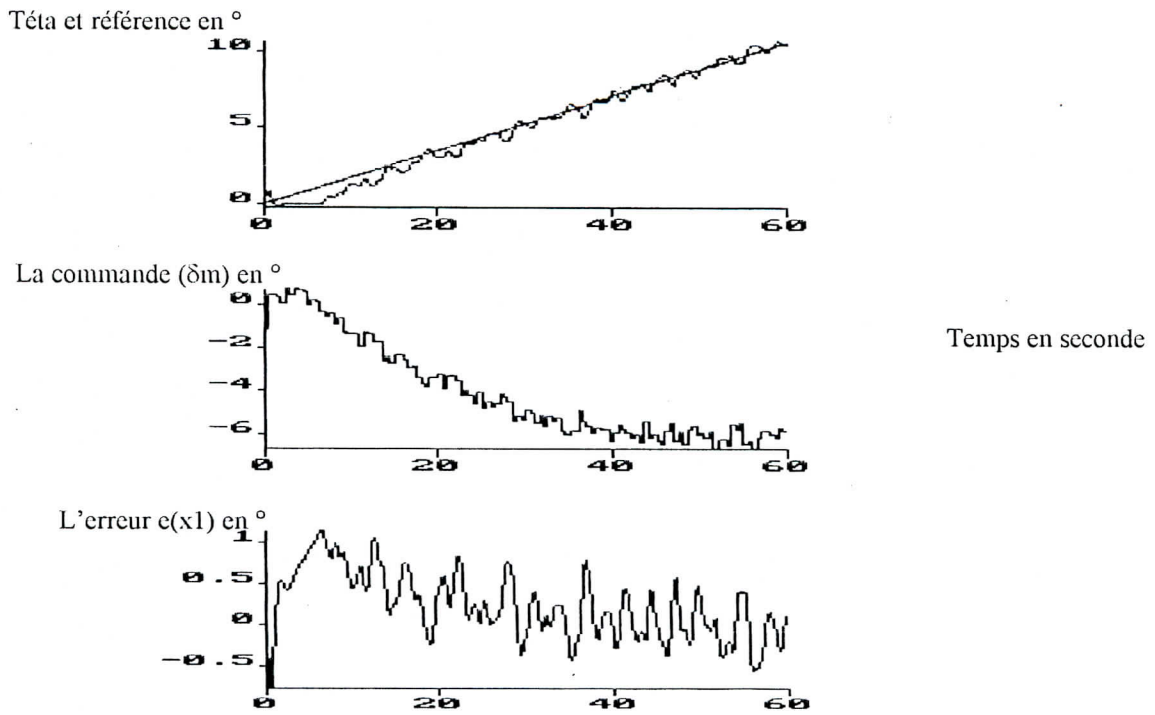


Fig.(5c. 5) Commande LQG avec perturbation externe sévère de niveau  $\sigma_m=1^\circ$

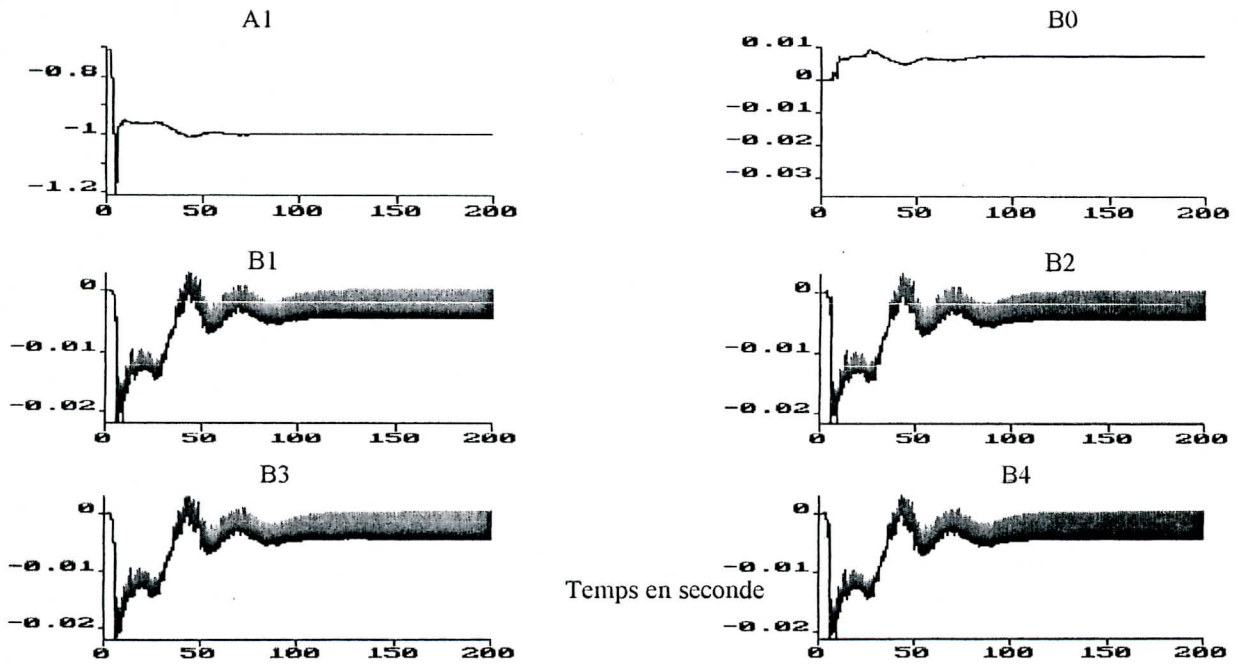


Fig.(5b'.5) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

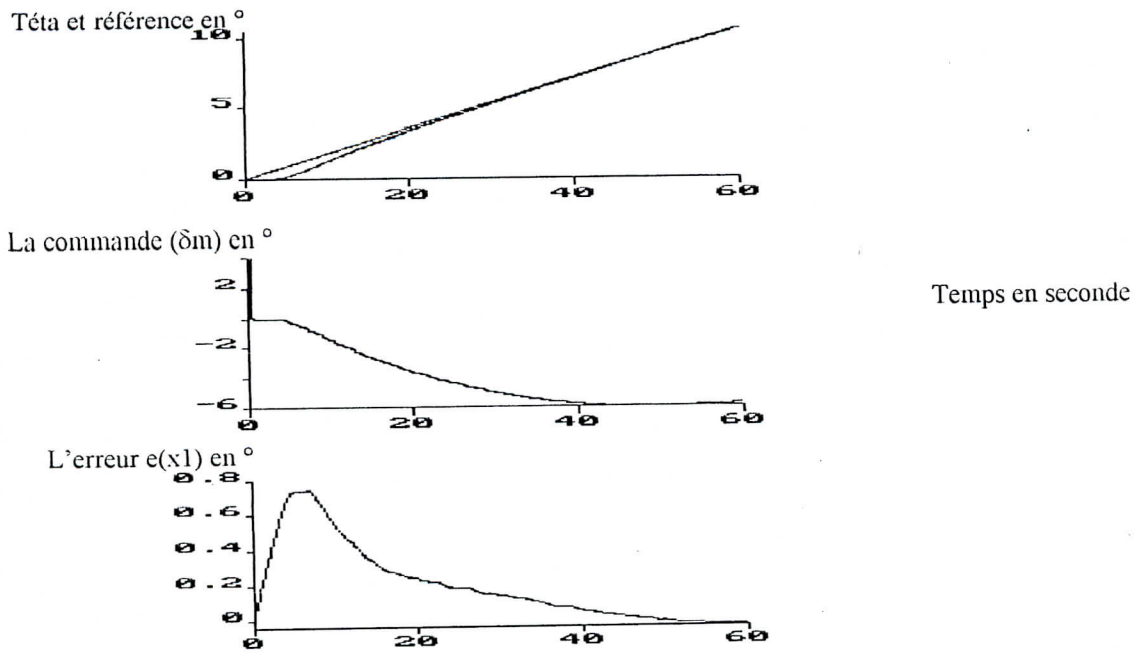


Fig.(5c. 6) Commande LQG avec perturbation interne linéaire de la masse de l'avion de 0.1kg/s

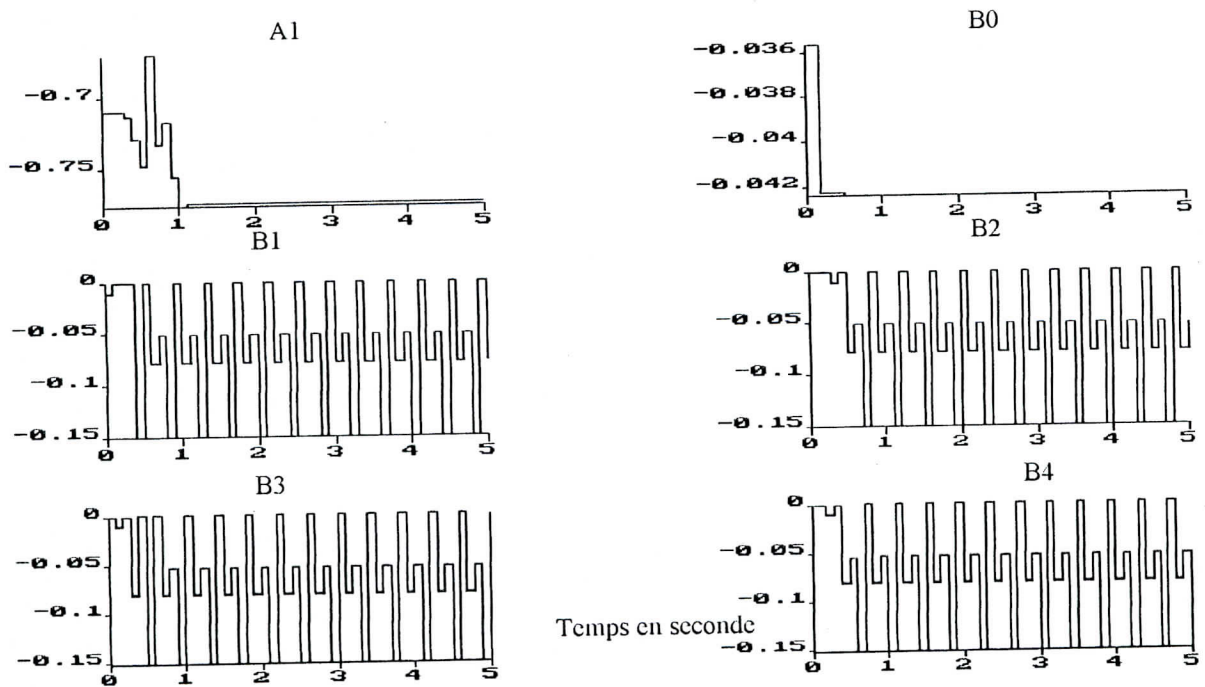


Fig.(5b'.6) estimation des paramètres (A1, B0, B1, B2, B3 et B4)

## CONCLUSION:

La commande auto-ajustable LQG, à critère quadratique, multivariable, a fait l'objet du présent chapitre. La synthèse et l'analyse de la commande à été suivie par son application à un système d'avion.

Cette commande est connue comme une commande très robuste, vérifiée d'ailleurs au cours des tests applicatifs. Cependant, le comportement dynamique, ou transitoire du système lorsqu'on lui applique ce type de commande, n'est pas connu à l'avance ; Seulement que, le critère de cette commande est très robuste, et stable vis-à-vis des perturbations de toute nature. Cela se voit particulièrement lorsque le système subit des perturbations d'origines externes. Il est encore à noter que le comportement dynamique ou transitoire de cette commande n'est pas connu à l'avance ; seulement, le critère de performance assure les meilleurs compromis entre la réponse transitoire et le temps de réponse d'une part, et entre le régime permanent et l'erreur de poursuite d'autre part. Ceci étant fait que sa fonction coût permet de minimiser l'énergie en entrée et en sortie, qui nous a évité quelques instabilités, notamment lors de la présence d'une perturbation du type turbulence atmosphérique.

La commande LQG nécessite un grand effort de calcul comparé aux autres types de commandes. Dû à l'implémentation de la phase de détermination des paramètres de la commande à partir des paramètres du système estimé, et ceci en résolvant l'équation de Diophantine.

**COMPARAISONS**

---

---

**CONCLUSION**

---

---

**PERSPECTIVES**

---

---

## INTERPRETATIONS GENERALES DES RESULTAS OBTENUS:

Notre étude à été entreprise, dans le but d'introduire la notion de robustesse, dans la synthèse de commandes de vol, d'un avion rigide, représenté par un système linéarisé par la théorie des petites perturbations. Les résultats obtenus par simulation sont regroupés dans les tableaux recapitulatifs, donnés dans les pages suivantes ; et qui ont permis de mettre en évidence les points suivants :

- L'implémentation des algorithmes des commandes linéaires pour notre système, dans le cas où il serait soumis à des perturbations qui le rende non-linéaire, n'est pas souhaitable. La détermination des coefficients de la commande limite la marge de tolérance du système, vis à vis ces différentes perturbations. Au-delà de cette limite, notre système devient soit instable, soit il présente des erreurs de sorties, et des commandes très grandes, soit il ne suit pas la référence choisie.
- Le choix de l'amplitude de la référence influe sur l'erreur de sortie du système.
- Le type de perturbation joue un rôle sur l'erreur de sortie. L'influence d'une perturbation sévère est plus importante que celle d'une perturbation constante, qui apparaît clairement au niveau des erreurs de sortie et la forme des commandes.
- L'amplitude du signal perturbateur joue un rôle important sur la robustesse de la commande.
- La commande GMV présente une excellente poursuite de la référence dans la présence des perturbations internes et externes. L'erreur de sortie s'annule toujours après une phase transitoire qui diffère d'un cas à un autre. L'augmentation des deux paramètres  $\lambda$  et  $\varepsilon$  réduit l'erreur de sortie du système et accélère la convergence respectivement.
- La commande GPC est nettement plus robuste, en permettant une convergence plus rapide. Seulement que dans ce cas, on voit nettement que le découplage permet l'obtention des commandes moins grandes que les cas précédents. Les paramètres estimés présentent des erreurs d'identification négligeables par rapport à ceux obtenues par la commande GMV. L'effet du paramètre  $\lambda$  apparaît sur la diminution des oscillations du signal de sortie, par contre l'augmentation du paramètre  $N_2$  rend la commande plus active, c'est à dire, il accélère la convergence.
- La commande LQG fournit d'excellents résultats. La commande reste toujours robuste lorsque le système est soumis aux différentes perturbations. L'erreur de sortie est

négligeable, et nécessite des commandes très rapides et très oscillatoires ainsi qu'une connaissance préliminaire des bornes des paramètres du système physique.

### COMPARAISONS :

Commandes	Sans perturbations
Par retour d'état	<u>Appliquée dans le cas latéral</u> . La poursuite du signal de référence est parfaite, avec une présence d'un dépassement d'amplitude non considérable. L'absence d'une erreur statique, en régime permanent, sauf pour le cas ou $\xi=0.2$
Par retour d'état avec action intégrale	<u>Appliquée dans le cas latéral</u> . Robustesse, avec une convergence rapide, sans dépassement et sans erreur statique à mentionner en régime permanent.
GMV avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u>: cette commande est robuste, la convergence est assez rapide, avec la présence d'un dépassement au niveau de <math>\Phi</math> et de <math>\beta</math>. Les paramètres estimés présentent une erreur d'identification négligeable en régime permanent.</li> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement longitudinal</u>: la stabilité est assurée, la convergence est rapide avec un léger dépassement. Les paramètres estimés présentent une erreur considérable</li> </ul>
GPC avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u>: cette commande est très robuste, la convergence est très rapide, avec la présence d'un léger dépassement au niveau de <math>\Phi</math> et de <math>\beta</math>. Les paramètres estimés convergent très rapidement vers les valeurs désirées, et l'erreur d'identification est négligeable.</li> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement longitudinal</u>: la stabilité est assurée la convergence est rapide du système physique ainsi que les paramètres estimés avec une commande excitée en régime transitoire.</li> </ul>
LQG explicite avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u>: robustesse, convergence rapide, avec la présence d'un léger dépassement au niveau des deux sorties. Les paramètres estimés convergent vers les valeurs désirées, avec une faible erreur d'identification.</li> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement longitudinal</u>: la stabilité est assurée, avec une poursuite parfaite du signal de référence, et les paramètres estimés présentent une erreur d'identification négligeable.</li> </ul>

Commandes	Avec perturbations externes constantes
Par retour d'état	<u>Appliquée dans le cas latéral</u> . La poursuite du signal de référence est assurée, avec la présence d'une erreur statique, de plus en plus importante, à chaque fois que la perturbation est plus importante; nécessitant des commandes supérieures à celles obtenues dans le cas sans perturbations
Par retour d'état avec action intégrale	<u>Appliquée dans le cas latéral</u> . La poursuite du signal de référence est parfaite, sans la présence d'une erreur statique, même en augmentant à chaque fois l'amplitude de la perturbation. Les commandes deviennent plus importantes, quant la perturbation augmente
GMV avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u>: cette commande est robuste, avec une convergence assez rapide. Le dépassement (ou diminution) est assez considérable au début du contrôle, causé par l'erreur d'identification, dû à l'application de perturbations. Ce dépassement est plus important, quand la perturbation augmente. Les paramètres estimés présentent une erreur d'identification négligeable, en régime permanent.</li> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement longitudinal</u>: la stabilité est assurée, la convergence est rapide, avec un dépassement considérable au début du contrôle. Les paramètres estimés présentent une erreur.</li> </ul>
GPC avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u>: cette commande est très robuste, vis à vis ces perturbations. La convergence est très rapide, avec la présence d'un dépassement, dû aux perturbations. Les paramètres estimés convergent très rapidement vers les valeurs désirées, et l'erreur d'identification est négligeable.</li> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement longitudinal</u>: la stabilité est assurée, la convergence est rapide du système physique ainsi que les paramètres estimés avec une commande toujours excitée en régime transitoire. Le dépassement devient de plus en plus considérable à chaque fois que les perturbations augmentent</li> </ul>
LQG explicite avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u>: robustesse, convergence rapide avec la présence d'un léger dépassement des signaux de sorties, présentant des oscillations. Les paramètres estimés convergent vers les valeurs désirées, avec une faible erreur d'identification.</li> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement longitudinal</u>: la stabilité est assurée avec une poursuite parfaite du signal de référence et les paramètres estimés présentent une erreur d'identification négligeable.</li> </ul>



Commandes	Avec perturbations externes sévères
Par retour d'état	Appliquée dans le cas latéral. La poursuite du signal de référence avec la présence d'une erreur statique de plus en plus importante à chaque fois que la perturbation est plus importante nécessitant des commandes riches en fréquences, et supérieures à celles obtenues dans le cas sans perturbations
Par retour d'état avec action intégrale	Appliquée dans le cas latéral. La poursuite du signal de référence est parfaite sans la présence d'une erreur statique même en augmentant à chaque fois l'amplitude de la perturbation. Les commandes sont plus excitées que le cas précédant, cette excitation qui devient plus important quant la perturbation augmente
GMV avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u> : cette commande est robuste avec une convergence assez rapide. Les commandes présentent une richesse en fréquence à chaque fois que les perturbations augmentent.</li> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement longitudinal</u> : la stabilité est assurée la convergence est rapide. Les paramètres estimés présentent une erreur moins considérable. Le signal de commande est riche en fréquence pour des niveaux de perturbations élevés</li> </ul>
GPC avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u> : cette commande est très robuste, la convergence est très rapide avec la présence d'un dépassement dû aux perturbations Les paramètres estimés convergent très rapidement vers les valeurs désirées, et l'erreur d'identification est négligeable.</li> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement longitudinal</u> : la stabilité est assurée la convergence est rapide du système physique ainsi que les paramètres estimés avec une commande riche en fréquence.</li> </ul>
LQG explicite avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u> : robustesse, convergence rapide avec la présence d'un léger dépassement. Les paramètres estimés convergent vers les valeurs désirées, avec une faible erreur d'identification. Le signal de commande, comme dans tous les cas précédents.</li> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement longitudinal</u> : la stabilité est assurée avec une poursuite parfaite du signal de référence et les paramètres estimés présentent une erreur d'identification négligeable. Le signal de commande, comme dans tous les cas précédents.</li> </ul>

Commandes	Avec perturbations internes causée par la diminution de la masse
Par retour d'état	<u>Appliquée dans le cas latéral.</u> Robustesse et poursuite du signal de référence. Les commandes présentent des piques.
Par retour d'état avec action intégrale	<u>Appliquée dans le cas latéral.</u> Robustesse et poursuite du signal de référence, avec des commandes lisses.
GMV avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u> : cette commande est robuste avec une convergence assez rapide. Les paramètres estimés présentent une erreur d'identifications négligeable en régime permanent. la perturbation est prise à l'intérieur du système</li> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement longitudinal</u> : la stabilité est assurée la convergence est rapide. Les paramètres estimés présentent une erreur moins considérable</li> </ul>
GPC avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u> : cette commande est très robuste, la convergence est très rapide. Les paramètres estimés convergent très rapidement vers les valeurs désirées, et l'erreur d'identification est négligeable.</li> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement longitudinal</u> : la stabilité est assurée la convergence est rapide du système physique ainsi que les paramètres estimés avec une commande toujours excitée en régime transitoire. Le dépassement devient de plus en plus considérable à chaque fois que la perturbation augmente</li> </ul>
LQG avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u> : cette commande est très robuste, la convergence est très rapide. Les paramètres estimés convergent très rapidement vers les valeurs désirées, et l'erreur d'identification est négligeable.</li> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement longitudinal</u> : la stabilité est assurée la convergence est rapide du système physique ainsi que les paramètres estimés avec une commande toujours excitée en régime transitoire.</li> </ul>

Commandes	Avec perturbations internes de la vitesse ( constantes)
Par retour d'état	Appliquée dans le cas latéral. La poursuite du signal de référence avec la présence d'une erreur statique de plus en plus importante à chaque fois que la perturbation est plus importante nécessitant des commandes inférieures à celles obtenues dans le cas sans perturbations qui représentent des piques de plus en plus importants
Par retour d'état avec action intégrale	Appliquée dans le cas latéral. La poursuite du signal de référence est parfaite sans la présence d'une erreur statique même en augmentant à chaque fois l'amplitude de la perturbation. Les commandes deviennent plus importantes et plus excitées quant la perturbation augmente
GMV avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pour le contrôle du mouvement latéral : cette commande est robuste avec une convergence assez rapide. La perturbation est entièrement prise à l'intérieur du modèle. Les commandes deviennent moins importantes que celles obtenues dans les cas non perturbés</li> </ul>
GPC avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pour le contrôle du mouvement latéral : cette commande est très robuste, la convergence est très rapide. Les paramètres estimés convergent très rapidement vers les valeurs désirées, et l'erreur d'identification est négligeable.</li> </ul>
LQG explicite avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pour le contrôle du mouvement latéral : robustesse, convergence rapide. Les paramètres estimés convergent vers les valeurs désirées, avec une faible erreur d'identification.</li> </ul>
Commandes	Avec perturbations interne de la vitesse ( sinusoïdale)
Par retour d'état	Instabilité (en présence de cette perturbation le système devient non-linéaire, ainsi ce type de commande ne peut lui faire face)
Par retour d'état avec action intégrale	Instabilité (pour la même raison que la commande linéaire par retour d'état)
GMV avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pour le contrôle du mouvement latéral : cette commande est robuste avec une convergence assez rapide. La perturbation est entièrement prise à l'intérieur du système. Les paramètres estimés présentent une erreur d'identifications négligeable en régime permanent.</li> </ul>

GPC avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u>: cette commande est très robuste, la convergence est très rapide. Les paramètres convergent très rapidement vers les valeurs désirées, et l'erreur d'identification est négligeable.</li> </ul>
LQG explicite avec identification RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Pour le contrôle du mouvement latéral</u> : robustesse, convergence rapide avec la présence d'un léger dépassement. Les paramètres estimés convergent vers les valeurs désirées, avec une faible erreur d'identification.</li> </ul>

### CONCLUSION :

Deux classes de commandes ont été désignées et appliquées en simulation, la classe des commandes linéaires et celles des auto-ajustables, pour le contrôle de vol d'un avion rigide du type AIR-BUS A300. Plusieurs simulations ont été testées, pour voir l'efficacité de ces commandes.

L'application de ces commandes a montré une grande stabilité, une très bonne poursuite des séquences de références et une robustesse élevée. Nous avons simulé les deux modèles, latérale et longitudinal sans perturbation, par la suite nous avons introduit les différentes perturbations externes, telle qu'une rafale de vent ou un mauvais positionnement des gouvernes, et des perturbations internes, telle qu'une diminution de la masse de l'avion ou une perturbation de la vitesse du vol, tout en respectant les contraintes imposées sur l'entrée et sur la sortie.

Enfin, nous pouvons conclure que malgré la robustesse des commandes linéaires, appliquées à un système linéaire, notamment la commande linéaire multivariable par retour d'état avec action intégrale, du fait, qu'elle résiste aux perturbations externes, les commandes actives restent plus robustes, notamment le GPC. En effet, elle permet à la fois de faire face, à un système à phase non minimale, au problème de surparamétrisation, à la variation du temps de retard, aux perturbations externes et internes, aux non-linéarités. On remarque aussi que le facteur de pondération de la commande GPC est plus faible. Sans oublier de dire, qu'elle est capable de minimiser l'énergie en sortie et en entrée, ce qui n'est pas le cas de la commande LQG, malgré qu'elle offre une bonne stabilité face à toutes variations internes ou perturbations externes, avec un temps de réponse plus court. Mais la commande GPC reste en

particulier très robuste vue qu'elle est capable de surmonter tout genre de problème rencontré par les autres commandes, avec un facteur de pondération fixe et très faible.

### **PERSPECTIVES :**

Cette étude nous a permis d'enrichir nos connaissances sur le domaine vaste du contrôle, et en particulier sur le contrôle de vol, sachant que le transport aérien fut l'un des moyens les plus utilisés à nos jours. Pour des raisons de sécurité, ce travail peut être étendu en contrôlant la dynamique complète de l'avion avec les deux mouvements latéral et longitudinal couplés représentés par un système non-linéaire. On aura, alors affaire à un système MIMO non-linéaire sous forme d'équations différentielles  $\{\dot{x} = f(x, t)\}$  avec neuf états à contrôler (les vitesses angulaires, les vitesses linéaire et les positions angulaires). On peut aussi introduire la flexibilité de la structure dans la modélisation, ainsi que la variation de la masse et de la structure, pour pouvoir contrôler un avion souple de grande performance. Pour améliorer le contrôle des commandes actives, on pourra ajouter le contrôle par rapport à un modèle de référence, afin de diminuer le plus possible de l'erreur de sortie ou appliquer directement la commande GPC étendue, en prenant en considération les contraintes imposées sur le système, et inclure un dispositif de supervision qui peut entrer en action lorsque les limites de ces contraintes ne sont plus respectées, ceci concernant les limites imposées sur l'entrée, la sortie et les dépassements. Concernant le test de robustesse des commandes, nous pouvons appliquer à notre système, d'autres types de perturbations externes ou exciter d'autres paramètres internes, tel que la présence d'ondes acoustiques dans le domaine de vol, qui peuvent affecter tout le processus aérodynamique et par conséquent, perturber tous les paramètres de coefficients de stabilité.

## **A. DESCRIPTION DES COMMANDES ET GOUVERNES :**

Les commandes qui sont à la disposition du pilote sont :

### **a) La commande de profondeur qui déplace la gouverne de profondeur:**

Volet situé généralement à l'arrière de l'avion ; le braquage de cette commande crée un couple de tangage, tendant à faire cabrer ou piquer l'avion.

### **b) La commande de gauchissement qui déplace les ailerons:**

Volets situés au bord de fuite, extrémité de la voilure et qui ont pour rôle de détruire partiellement la portance sur l'une ou l'autre des demi-voilures ; le braquage de ces gouvernes crée un couple de roulis, tendant à faire incliner l'avion à droite ou à gauche

ces deux commandes sont regroupées sur le manche :

- En poussant ou en tirant le manche on crée un couple de tangage piqueur ou cabreur.
- En déplaçant le manche à gauche ou à droite on crée un couple de roulis faisant baisser l'aile gauche ou droite (l'avion tend à rester perpendiculaire au manche).

### **c) la commande de direction qui déplace la gouverne de direction:**

Volet placé au bord de fuite de la dérive. En appuyant avec le pied droit on crée un couple de lacet déplaçant le nez de l'avion vers la droite.

Cependant, ces trois commandes permettent au pilote d'être maître de l'attitude instantanée de l'avion. A l'aide de la profondeur il modifiera l'incidence, avec la direction il modifiera le dérapage et a l'aide du gauchissement, il fera tourner l'avion autour du vecteur vitesse.

## **B. DEFINITIONS DES MODES ASSOCIES AU MOUVEMENT LATERAL ET LONGITUDINALE**

L'étude de la dynamique de l'avion, correspondant aux mouvements de l'avion lorsqu'il est perturbé et avant qu'il ne rejoigne un état d'équilibre introduit la notion de modes associés à cette dynamique. Ces modes seront cités comme suit:

### **B.1 LE MOUVEMENT LONGITUDINAL :**

Nous avons trouvé que l'équation caractéristique du mouvement longitudinal est du cinquième ordre :  $d = (s - s_1) (s^2 + 2\xi_1\omega_{n1} + \omega_{n1}^2) (s^2 + 2\xi_2\omega_{n2} + \omega_{n2}^2)$ .

Où autrement,  $d = (s - s_1) [(s - a)^2 + b^2] [(s - p)^2 + q^2]$ , avec  $s_1$ , la valeur propre réelle,  $a \pm ib$  et  $p \pm iq$  les valeurs propres imaginaires conjuguées deux à deux de cette équation caractéristique. Nous voyons donc clairement que le mouvement longitudinal possède trois modes et qui sont:

**B.1.1. Le mode d'oscillation d'incidence (fortement amortie):** Ce mode est déterminant pour les qualités de vol longitudinal. En effet il se situe dans une plage de fréquences très élevée par rapport aux fréquences de pilotage, dont la limite supérieure voisine le Hertz. Il est donc difficile à maîtriser, de plus avec un mauvais réglage de l'avion, il peut devenir instable. La fréquence et la pulsation de ce mode sont obtenus à partir des racines correspondantes aux états  $\alpha$  et  $q$ , qui sont conjugués.

**B.1.2. Le mode d'oscillation phagoïde (faiblement amortie):** Ce mode présente un intérêt important puisqu'il peut s'analyser directement «à la main». Il ne crée pas de difficultés majeures pour le réglage des qualités de vol puisqu'il est lent et quasiment toujours stable bien que mal amorti. C'est donc un mode facilement pilotable autant par le pilote que par le pilote automatique. C'est aussi le premier mode découvert expérimentalement et ensuite analysé par LANCHESTER à la fin du siècle dernier. Les caractéristiques de ce mode sont obtenues à partir des pôles des deux états  $u$  et  $\gamma$  qui sont aussi conjugués

**B.1.3. Le mode de rappel de propulsion (apériodique):** ce mode apériodique et très lent est lié à l'étude du vol équilibré en montée ou autrement dit à l'altitude (H).

## B.2 LE MOUVEMENT LATERAL:

Nous avons trouvé que l'équation caractéristique du mouvement latéral est du quatrième ordre :  $d = (s - s_1) (s - s_2) (s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2)$ , où autrement,  $d = (s - s_1) (s - s_2) [(s - a)^2 + b^2]$ , avec  $s_1$  et  $s_2$ , deux valeurs propres réelles et  $a \pm ib$  la valeur propre imaginaire conjuguée de cette équation caractéristique. Nous voyons donc clairement que le mouvement latéral possède trois modes et qui sont:

**B.2.1. Le mode d'oscillation de dérapage:** Ce mode est souvent désigné par l'appellation roulis hollandais. En effet, il s'agit fondamentalement d'une oscillation entre le dérapage  $\beta$  et la vitesse de roulis  $r$ , de telle sorte que cette oscillation provoque un mouvement de roulis très sensible pendant le vol.

**B.2.2. Le mode spiral:** ce mode apériodique est associée à l'équation cinématique  $\Phi$  et par la suite il engage l'angle d'azimut  $\Psi$  avec  $\beta \approx 0$ ; c'est un mouvement très lent caractérisé par une racine prédit que, le mode spiral serait stable, il n'est pas pourtant le cas en pratique, car cette racine, même qu'elle soit négative mais très proche de l'axes imaginaire, d'où en peut avoir un spiral divergent, comme en peut avoir un spiral convergent. .

**B.2.3. Le mode de roulis:** ce mouvement engage fondamentalement l'angle de roulis  $\Phi$  avec  $\Psi = \beta = 0$ .

**C. ORIENTATION DE L'AVION :**

Pour décrire l'orientation de l'avion par rapport à la terre, il suffit de décrire le système d'axes  $Oxyz$  liés à l'avion par rapport au système d'axes liés à la terre.

Pour cela on considère que le système d'axes  $Oxyz$  est translaté parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son origine coïncide avec le centre de gravité de l'avion  $C$ .

L'orientation de l'avion est donnée par une série de trois rotations consécutives, dont l'ordre est important parce que, ces angles ne sont pas orthogonaux, ils sont appelés les angles d'EULER, et le système d'axes est appelé système d'axes d'EULER.

l'avion est initialement supposé orienté de manière tel que ces axes  $Oxyz$  seraient parallèles au système d'axes terrestre, puis il sera soumis aux trois rotations suivantes :

- 1- une rotation d'angle positif  $\Psi$  autour de  $Oz$ , amenant les axes à  $Ox_1y_1z_1$ , ce mouvement est le mouvement de lacet:

d'où :

$$x_1 = \cos\Psi x + \sin\Psi y$$

$$y_1 = -\sin\Psi x + \cos\Psi y$$

$$z_1 = z$$

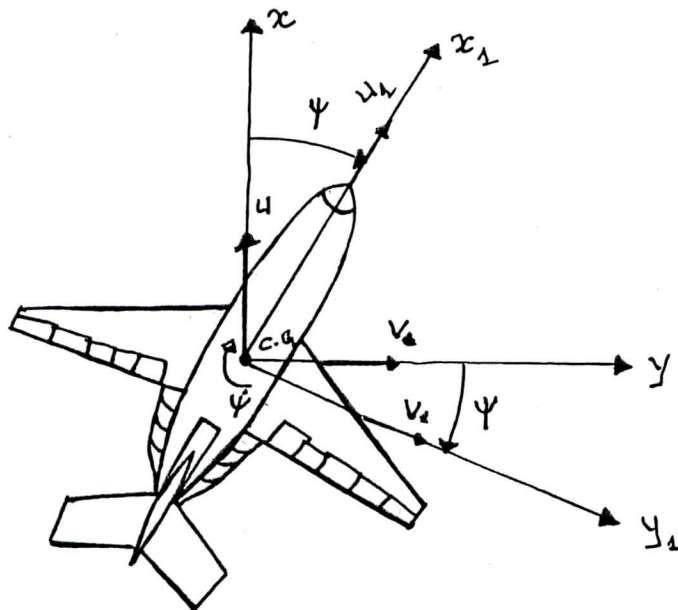


FIG. 1



2- Une rotation d'angle positif  $\Theta$  autour de  $Oy_1$ , amenant les axes à  $Ox_2y_1z_2$ , ce mouvement est le mouvement de tangage.

d'où:

$$x_2 = \cos\Theta x_1 - \sin\Theta z_1$$

$$y_2 = y_1$$

$$z_2 = \sin\Theta x_1 + \cos\Theta z_1$$

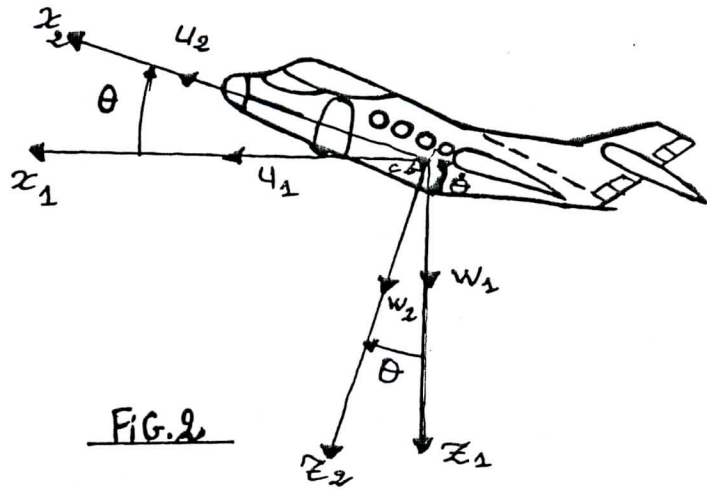


FIG. 2

3- Une rotation d'angle positif  $\Phi$  autour de  $Ox_2$ , amenant les axes à  $Ox_2y_3z_3$ . ce mouvement est le mouvement de roulis

d'où :

$$x_3 = x_2$$

$$y_3 = \cos\Phi y_2 + \sin\Phi z_2$$

$$z_3 = -\sin\Phi y_2 + \cos\Phi z_2$$

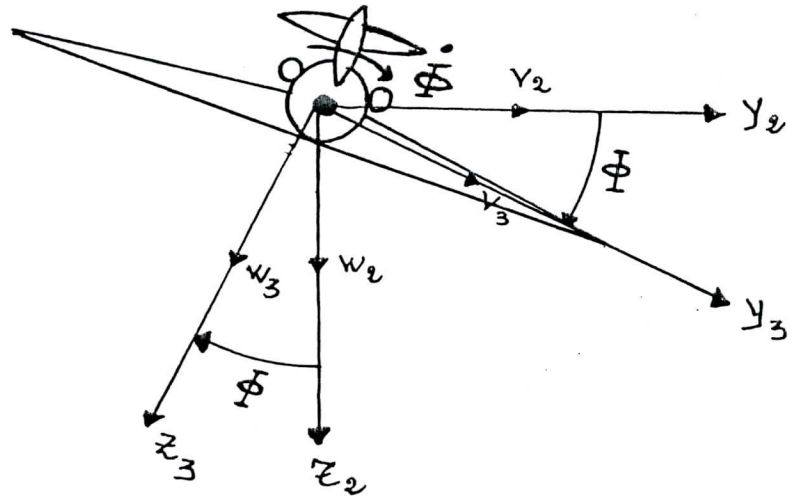


FIG. 3

**D. PREUVE DE STABILITE EN PRESENCE DE PERTURBATION:**

Considérons notre système d'avion dans le cas de présence de perturbations extérieures décrit par l'équation d'état suivante:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + d(t)$$

avec:

**- pour le mouvement latéral**

$$\dim(x) = 4 \times 1 ; \dim(u) = 2 \times 1 ; \dim(A) = 4 \times 4 ; \dim(B) = 4 \times 2 ; \dim(d) = 4 \times 1$$

**-pour le mouvement longitudinal**

$$\dim(x) = 5 \times 1 ; \dim(u) = 1 \times 1 ; \dim(A) = 5 \times 5 ; \dim(B) = 5 \times 1 ; \dim(d) = 5 \times 1$$

Le terme  $d(t)$  représente un vecteur qui englobe les perturbations extérieures appliquées au système.

Une étude de stabilité a été développée par LYAPUNOVE, assure que pour un système stable en boucle ouverte de telle sorte que les valeurs propres de  $A$  sont à parties réelles négatives, soumis à des perturbations externes bornées et si l'erreur statique est limitée (bornée), le système est donc stable en boucle fermée ( pour plus de détail, voire [53]).

**Théorème de LYAPUNOVE :**

La perturbation  $d(t)$  est bornée et l'erreur  $e = r - y$  est bornée  $\Rightarrow$  le système est stable en présence de cette perturbation.

**REFERENCES**

**BIBLIOGRAPHIQUES**

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **I.D. LANDAU.** Commande adaptative : aspect théorique et pratique ( édition Masson 1986 )
- [2]. **MARC PELEGRIN.** Vers un pilotage complètement automatique. (Europ journal mech. Eng. M, vol.42, No.1, 1997.
- [3] **K.SOBEL, H. KAUFMAN & L. MABIUS.** Implicite adaptive control for a class of mimo syst. ( IEEE trans on aerospace and electronic systems vol.aes.18,No.5 1982 )
- [4] **A.M.WAHDAN & A.Y.TAWFIK.** Periodic resetting-mrac in control of a high ( speed aircraft. Department of computers systems engineering. Ain Shams University. ( Cairo, Egypt, IEEE 1994)
- [5] **M. BODSON & JE GROSZKIEWTCZ.** Multivariable adaptive algorithms for reconfigurable flight control ( IEEE trans. Contr. Syst .Tech vol.5, no.2, pp.217-229, 1997)
- [6] **L.R.PUJARA & MUKHTAR SHABBARHUSSEIN.** A preliminary longitudinal aircraft control design by applying the multivariable frequency matching technique. Dep of Elec Eng. ( Dayton, USA, IEEE 1994)
- [7] **LUIS A. PINEIRO & DANIEL J. BIEZAD.** Real-time parameter identification applied to flight simulation. ( IEEE Trans. Aerospace and Elect Syst. vol.29,N° 2,2/4/1993 ).
- [8] **A.L. GONZALEZ. BLAZQUEZ.** Mathematical modelling for analysis of nonlinear aircraft dynamics.
- [9]**W.L. GARRARD. D.F. ENNS & S.A.SNELLS.** Non linear feedback control of highly manoeuvrable aircraft. Int. J. Control, 1992, vol. 56, N)4, 799-812.
- [10] **S.G.BRESLIN & M.J. GRIMBLE.** The control of an astovl ( advanced short take-off and vertical landing) aircraft using h methods. IEE. UK. 1994.
- [11] **B.A. WHITE & A. R. DANIELS.** Application of variable structure control to an unmanned aircraft. School Elect. Eng. & science. Bath univ. UK.
- [12] **J. ROSKAM.** Airplane flight and automatique flight contrôle tome I (1979)
- [13] **J. ROSKAM.** Airplane flight and automatique flight contrôle tome II (1979)
- [14] **J L .BOIFFIER.** Notes de cours de dynamique du vol
- [15] **J.C. MANNER.** Dynamique du vol et pilotage des avions ( département véhicules aérospatiales )
- [16] **H. BENCHOUBANE.** Cours PGRS. Partie sur les commandes linéaires. 1995

- [32] **D.J. BENDER & A.J. LAUB.** The linear- quadratic optimal regulator for descriptor systems : discrete-time case ( automatica. Vol.23 no.1 pp.71-85 . 1987 )
- [33 ] **A.TZES & K.LE. P.Y. PENG.** Adaptive performance for robust control design for discret system . ( IEE. Proc. Control. Theory. App. Vol 144. N°1. 1/1997).
- [34] **JOSEF E GROSZKIEWICZ & MARC BODSON.** Flight control reconfiguration using adaptive methods. ( new orleans, iee 1995 )
- [35] **WILLIAM L.GARRARD, DALE F. ENNS & S.ANTONY SNELL.** Nonlinear feedback control of highly manoeuvrable aircraft. (int.j.control, 1992,vol.56,NO.4,799-812).
- [36] **S.N.GHAWGHAWE & D.GHOSE.** Pure proportional navigation against time-varying target maneuvers. (iee transactions on aerospace and electronic systems vol.32,No.4,10/1996).
- [37] **B.A.WHITE, S.N.GITTENS & A.R.DANIELS.** Application of variable structure control to unmanned aircraft.
- [38] **SERGEY LYASHEVSKIY.** Robust nonlinear control of uncertain systems with state and control constraints. ( new orleans iee 12/1995 )
- [39] **KENNETH M.SOBEL & ELIEZER Y.SHAPIRO.** Eigensructure assignement for design of multimode flight control systems. ( california iee 1985)
- [40] **A.L.GONZALEZ BLAZQUEZ.** Mathematical modelling for analysis of nonlinear aircraft dynamics ( computers & structures vol.37,No.2,pp.193-197,1990 ).
- [41] **CLAIRE TOMLIN, JOHN LYGEROS, LUCA BENVENUTI & SHANKAR SASTRY.** Output tracking for a non-minimum phase dynamic ctol aircraft model. ( new orleans iee 1995 )
- [42] **S.G.BRESLIN & M.J.GRIMBLE.** The control of an astovl ( advenced short take-off & vertical landing) aircraft using H. methods. ( iee.savoy place . london wc2r obl.uk )
- [43] **D. STEINBACH.** Calculation of the lateral coefficients corrections for an aircraft model with rear sting support in subsonic windtunnel flow. ( aerospace science & tecnology, 1997,No.1, 27-36 ).
- [44] **R. ASEP & F.MORA-CANTNO.** Commande prédictive multidimensionnelle. application au suivi de trajectoire avion.( th-doct / toulouse .1996 )
- [45] **W. EVERSMAN & ID ROY.** Active flutter suppression using multi-input/multi-output adaptive lest mean square control. (journal of aircraft vol.34, no.2, pp.244-250 , 1997).
- [46] **P.LOURTI; J.R. AZINHEIRA & J.P. RENTE.** Analysis and simulation of the longitudinal control of unmanned aerial vehicule. (iee colloquium 'control and guidance of remotely operated vehicules' « digest no.1995/124 » ).

- [47] **D.W LANE & P.S MAYBECK.** Multiple model adaptative estimation applied to the L'ARMDA URV for failure detection and identification. (proceedings of the 33<sup>rd</sup> ieee conference on decision and control « cal-no.94ch3460-3 » ).
- [48] **I.R PUJARA.** A robustly stable preliminary control systems design for the YF-16.CCV aircraft. (iee transactions on aerospace and electronic systems vol.31 tss.1 p.479-86 )
- [49] **D. MCLEAN & E. DRIAN.** Integrated flight control system for landing with minimal energy. ( iee colloquium on multivariable methods for flight control application « digest. No-1994/132 » p.9/1-3 ).
- [50] **R.R. HORNISH.** 777 autopilot. Flight. Director system. ( aiaa/iee digital avionics systems conference-13 th dasc « cal-no-94ch3573-0 » p.151-6 ).
- [51] **W.L. BAKER & P.J. MILLINGTON.** Design and evaluation of a learning augmented longitudinal flight control system. ( proceedings of the 32<sup>nd</sup> ieee conference on decision and control « cal-no-93ch3307-6 » p.759-64 vol.1)
- [52] **S.G. BRESLIN & M.J. GRIMBLE.** A robust control design for the longitudinal control of a high performance combat aircraft. ( iee colloquium on advances in the application of robust controllers « digest.no-1993/220 » p.8/1-3 ).
- [53] thèse de magister « étude de commandes de position d'un bras manipulateur classe 1 » par Amina CHENTIR, institut d'électronique, université de Blida (1993 . 06 )