



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE SAAD DAHLEB DE BLIDA
INSTITUT D'AERONAUTIQUE

THESE DE MAGISTER

**MODELISATION BIDIMENSIONNELLE
DES ECOULEMENTS TURBULENTS
COMPRESSIBLES DANS UNE TUYERE**

Présentée par **MOHAMED YACINE BOUZID**

Février 2002

Composition du jury

Président	M. Z. YOUBI	Maitre de conférence	U.S.T.S.D
Examinateur	M. E.K. SLAHMED	Professeur	U.S.T.H.B
Examinateur	M. S. BOUKRAA	Maitre de conférence	U.S.T.S.D
Examinateur	M. R. HAOUI	Charge de cours	U.S.T.H.B
Rapporteur	M. DIZENE	Maitre de conférence	U.S.T.H.B

RESUME

L'objectif assigné à ce travail est essentiellement l'étude des phénomènes de turbulence touchant au domaine de l'aérodynamique interne.

Cette étude traite l'examen par simulation numérique des écoulements bidimensionnels, turbulents de gaz compressibles dans les tuyères supersoniques convergentes-divergentes et cela en utilisant quatre modèles de fermeture du système ouvert des équations de Navier-Stokes celles-ci traitées par la méthode statistique de Favre.

Le traitement des conditions aux limites ce fait par l'utilisation des équations caractéristiques.

La motivation principale de ce travail est de comprendre le phénomène de la turbulence qui dans les conditions d'exploitation des tuyères supersoniques fonctionnent en grande partie en régime turbulent.

Mots-clefs : *Aérodynamique des tuyères supersoniques, écoulements compressibles turbulents, modèles de turbulence à échelles multiples, simulation numérique.*

ABSTRACT

The objective assigned to this work is essentially the survey of turbulence phenomena touch to the domain of the internal aerodynamics.

This survey treated the exam by numeric simulation of out-flows bidimensionnels, turbulent of compressible gas in the convergent-divergent supersonic nozzles and it while using four models of closings of the open system of equations of Navier-Stokes this one treated by the statistical method of Favre.

The treatment of boundary conditions, this fact by the characteristic equation utilisation.

The main incentive of this work is to understand the phenomenon of the turbulence that functions in large part in turbulent regime in conditions of supersonic nozzle exploitation.

Key-words : *Aerodynamics of supersonics nozzles, compressible turbulent flow, turbulent models, numerical simulation.*

ملخص

الهدف الرئيسي لهذا العمل هو دراسة ظاهرة الإضطراب الذي يمس مجل الحركية الهوائية الداخلية. هذا العمل يدرس بالتظهر الحسابي الإنسيابات المضطربة ثنائية الإحداثيات للغازات قابلة للضغط عبر الأبواق المافوق صوتية و ذلك بتطبيق أربعة نماذج لخلق جملة المعادلات المفتوحة نافي-ستوكس بالطريقة الإحصائية و تجرى دراسة الشروط النهائية بالمعادلات المميزة. ماأحتنا لإجراء هذا العمل، هو فهم ظاهرة الإضطراب التي في شروط عمل الأبواق المافوق صوتية، تكون في أغلب المجال في نظام مضطرب.

REMERCIEMENTS

A Dieu par lequel ce travail a pu voir le jour.
Je tiens à remercier Monsieur Z.Youbi d'avoir accepté de présider le jury constitué pour l'évaluation de ce travail.
Monsieur R.Dizene pour ses orientations et ses précieux conseils tout au long de ces années pour la réalisation de ce travail.
Messieurs E.K.Si-Ahmed, S.Boukraa et R.Haoui, pour avoir accepté de donner un peu de leur temps pour juger de ce travail.
Monsieur S.Bergheul Directeur de l'institut d'aéronautique pour ses encouragements et sa disponibilité.
Mes collègues de l'institut d'aéronautique de Blida pour les discussions scientifiques fructueuses.
Mes Parents, vraiment exceptionnels.
Ma femme pour sa patience et son soutien tout au long de mes préparations.
Ma sœur et mes frères pour leur patience et leurs encouragements incessants
Mes grands-parents maternels que Dieu ait leur âme.
Mes grands-parents paternels qui m'ont toujours encouragé pour la science
A toutes mes tantes, à tous mes oncles et en particulier Salah, Mehdi et Khider toujours là pour m'encourager.
Monsieur Hamid Sadsaoud chef du laboratoire Astronomie, pour ses conseils judicieux.
Les membres du département Astronomie du C.R.A.A.G à leur tête le Directeur de cette institution Monsieur Yelles-Chaouch.
Monsieur Rachid Berkani, ainsi que Farid pour leur soutien logistique.

NOMENCLATURE

Alphabet latin

A : Section de sortie.

A^+ : Constante du modèle de turbulence égale 26.

C : Célérité du son.

C_{cp} : Constante de turbulence égale 1.6

C_{wk} : Constante de turbulence égale 0.25.

e : Energie interne.

E : Energie totale.

h : enthalpie massique.

K : Coefficient de conductivité thermique.

K : Energie cinétique turbulente.

L : Echelle de longueur turbulente.

Pr : Nombre de Prandtl laminaire égale 0.73.

Pr_t : Nombre de Prandtl turbulent égale 0.90.

P : Pression statique.

q : Le flux de chaleur.

R : constante des gaz parfait.

Re : Nombre de Reynolds.

T : Température statique.

t : temps .

u : Composante longitudinale de la vitesse.

v : Composante radiale de la vitesse.

X : coordonnée suivant l'axe de symétrie dans le plan physique.

R : coordonnée radiale.

Alphabet grec

α : Constante du modèle de turbulence égale 0.0168.

γ : Rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constant.

ν : Viscosité cinématique.

μ : Viscosité dynamique .

μ_T : Viscosité turbulente.

ρ : Masse volumique.

τ : temps dans le domaine de calcul.

τ_{ij} : Tenseur des contraintes.

θ : Coordonnée azimuthale.

ϕ : Fonction de dissipation.

ω : Vorticité.

λ :

η : Viscosité volumique.

η : Direction radiale dans le maillage.

ε : Coefficient de dissipation

ξ : Direction longitudinale dans le maillage.

-Indices

t : valeurs turbulentes.
c : conditions critiques (au col) .
r : conditions réservoir.
w : valeurs pariétales.

Exposants

\bar{X} : Valeur moyenne.
 \bar{X}^{N+1} : Valeur prédite.
 \tilde{X} : Valeur moyenne pondérée par la masse.
 X', X'' : Valeurs fluctuantes.

SOMMAIRE

RESUME	<i>i</i>
ABSTRACT	<i>i</i>
REMERCIEMENTS	<i>ii</i>
NOMENCLATURE	<i>iii</i>
INTRODUCTION GENERALE	<i>1</i>
CHAPITRE I -GENERALITES	<i>4</i>
I-1- LA TURBULENCE	<i>4</i>
I-1-1-Définition.....	<i>4</i>
I-1-2-Caractéristiques de la turbulence	<i>6</i>
I-2-GENERALITES SUR LES TUYERES	<i>8</i>
I-2-1-Rappels sur les tuyères.....	<i>8</i>
I-2-2-Principaux paramètres de performance.....	<i>10</i>
CHAPITRE II -ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE	<i>12</i>
II-1- Introduction	<i>12</i>
II-2-Modèle de turbulence à échelle unique	<i>13</i>
II-2-1 Modèle algébrique	<i>13</i>
II-2-2 Modèle à une équation de transport.....	<i>13</i>
II-2-3 Modèle à deux équations de transport.....	<i>14</i>
II-3-Modele de turbulence a échelles multiples	<i>18</i>
II-3-1- Concept et idée de base	<i>18</i>
II-3-2-Modèle à deux échelles	<i>19</i>
II-3-3 Modèle multi-échelles aux tensions de Reynolds (RSM multi-échelles).....	<i>20</i>
II-4 Modèle aux équations des tensions de Reynolds	<i>23</i>
II-5 Exemples d'application	<i>26</i>
II-6 Conclusion:	<i>28</i>
CHAPITRE III-FORMULATION MATHEMATIQUE	<i>30</i>
III-1 Les équations générales	<i>30</i>
III-1-1 Equation de conservation de la masse.....	<i>30</i>
III-1-2 Equation du bilan de la quantité de mouvement.....	<i>30</i>
III-1-3 Equation de bilan d'énergie totale.....	<i>32</i>
III-1-4 Equation des gaz parfait	<i>33</i>
III-2 Méthodes statistiques	<i>33</i>
III-2-1 La décomposition de REYNOLDS	<i>34</i>
III-2-2 La méthode de la moyenne pondérée par la masse.....	<i>35</i>
III-3 Méthodologie pour la fermeture en un point	<i>37</i>
III-3-1 Modèles à zéro équation de transport.....	<i>40</i>
III-3-2 Modèle à deux équations de transport.....	<i>44</i>
CHAPITRE IV- METHODE NUMERIQUE	<i>48</i>
IV-1-Le maillage	<i>48</i>
IV-1-1-Transformation du domaine physique en domaine mathématique.....	<i>48</i>
IV-1-2-Transformation des équations fondamentales.....	<i>52</i>
IV-2-Schema numérique :	<i>54</i>
IV-2-1 Traitement des nœuds internes :.....	<i>56</i>
IV-2-2-Traitement des nœuds frontières :	<i>59</i>
IV-3 Critere de stabilité	<i>68</i>
IV-4 Description du code de calcul :	<i>69</i>

Chapitre V- RESULTATS ET DISCUSSION.....	70
V-1-Introduction	70
V-2 Modélisation et validation numérique.....	70
V-3 Description générale de l'écoulement :	70
V-4 Evolution du champ de vitesse.....	71
V-5 Evolution de la viscosité turbulente :	72
V-6 Evolution de la contrainte de frottement à la paroi	73
V-7 Evaluation des iso valeurs :	74
V-7 Comparaison avec le cas ZEITOUN :	74
Conclusion générale	100
REFERENCES.....	102
ANNEXES.....	I
ANNEXE A	II
ANNEXE B	X

INTRODUCTION GENERALE

Le sujet étudié ici présente une première étape d'un programme de projet de recherche initié dans le cadre d'une proposition d'accord programme avec l'équipe gazodynamique du laboratoire système énergétique et transfert thermique de l'université de Marseille.

La finalité du thème proposé se traduit par les possibilités d'utilisation des radiations laser pour accélérer un gaz.

Le dispositif utilisé est un accélérateur de plasma, ce type d'accélérateur possède la forme d'une tuyère type convergente divergente de Laval, illustrée par la figure (1).

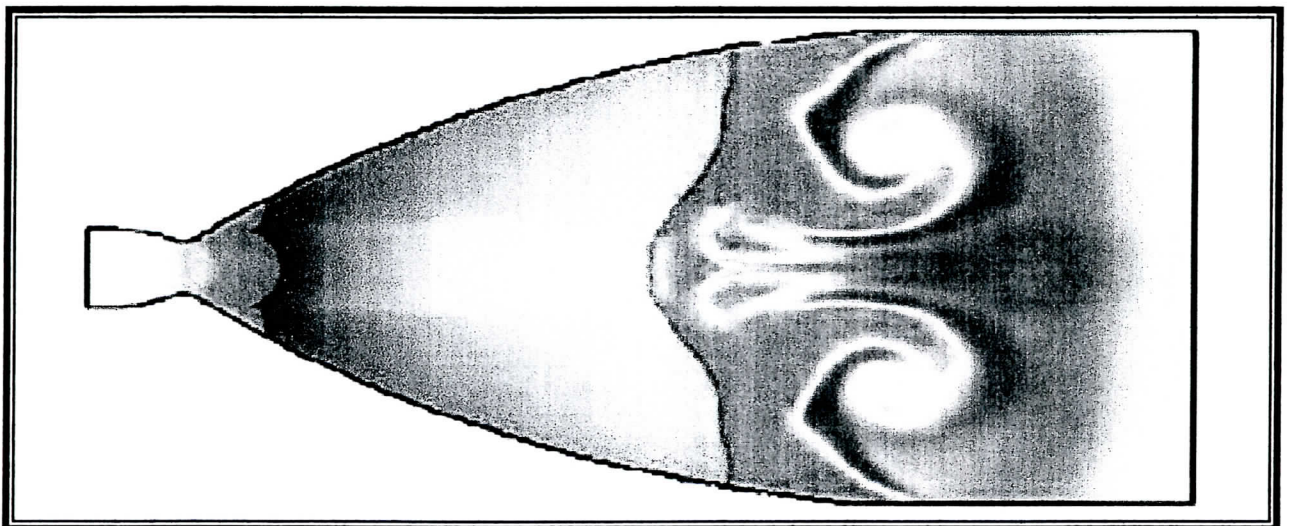


fig.1 représentation du champ de température de la tuyère Vulcain^[43].

Dans les conditions d'accélération du plasma, la présence d'une région fortement non homogène dans la partie convergente de la tuyère, représente la particularité fondamentale de ce cas, elle absorbe les radiations laser et interagit au passage du gaz de refroidissement qui contourne cette région.

Avec les problèmes classiques et traditionnels de la théorie de la tuyère de Laval, la présence de ces perturbations relevées dans la structure du champ dynamique du gaz va être le problème à résoudre pour une préparation optimale de l'écoulement du gaz par rapport aux sections d'entrée, de sortie et du col de la tuyère.

De cette analyse l'étude des processus gazodynamiques par rayonnement dans les tuyères convergentes divergentes seront donc l'objet d'une vaste étude à l'aide de méthodes par simulation numérique.

La présente étude représente donc la première étape du programme tracé dans le cadre du projet de recherche sur la modélisation numérique des écoulements turbulents dans les tuyères.

L'écoulement turbulent d'un gaz peut être décrit par un traitement statistique des équations de Navier-Stokes, cependant ce traitement conduit à l'existence d'un nombre d'inconnues supérieur au nombre d'équations et constitue donc un système ouvert, dont la fermeture est complétée par l'utilisation d'un modèle de turbulence.

Le choix du modèle de turbulence dépend essentiellement du phénomène physique pris en considération. Ainsi et par précaution, il serait juste de limiter le choix des modèles parmi ceux qui tiennent compte ou qui comportent le moins de considérations empiriques.

Notre travail concerne donc une étude numérique d'un écoulement turbulent bidimensionnel de gaz compressible, à travers une tuyère de très faibles dimensions, telle que celles qu'on utilise dans le domaine de la chimie ou des lasers gazodynamiques, ainsi que pour le cas des accélérateurs de plasma.

La méthode que l'on va développer ici est basée sur la théorie classique d'une tuyère de Laval et se limite à l'utilisation de quatre modèles de turbulence pour la détermination des distributions des quantités moyennes telles que la température, la pression ainsi que les quantités fluctuantes traduites par la distribution de la viscosité turbulente.

L'analyse de toutes ces quantités permettra d'établir les points forts et les faiblesses de chaque modèle et donc de choisir parmi ces quatre, celui qui va être utilisé dans l'étude des prochaines étapes.

On peut citer à titre d'information l'investigation des effets du transfert de chaleur par rayonnement sur la structure de l'écoulement du gaz.

Parmi les modèles algébriques de turbulence utilisés dans les écoulements transsonique et supersonique, on utilise dans notre présente étude deux modèles à deux échelles utilisant le concept de longueur de mélange. Le premier étant le modèle de Cebeci-Smith qui utilise deux viscosités turbulentes, l'une traduisant une couche interne alors que l'autre traduit une couche externe, la seconde échelle utilisée pour le calcul de la viscosité externe constitue une limite à l'utilisation de ce modèle dans l'écoulement sain couplé à un calcul de couche limite.

Le deuxième modèle utilisé est celui de Baldwin et Lomax^[1], considéré comme une modification de celui de Cebeci-Smith^[2], en utilisant une expression de la viscosité externe différente de la première. Ce modèle a été utilisé dans l'étude des jets supersoniques (Berman et al, 1983)^[3], (Deiwert, 1984)^[4] dans l'étude d'écoulements transsoniques et supersonique autour de corps profilés (Degani et Schiff, 1986)^[5], (Jubaraj Sahu, Damberg, 1986)^[6], ainsi que dans l'étude d'interaction entre ondes de chocs et couche limite (Visbal et Knight, 1984)^[7].

La principale difficulté de nature dans l'utilisation de ce modèle réside dans la détermination de la deuxième échelle qui a trait à la viscosité externe, d'où l'utilisation du modèle de Baldwin et Lomax modifié ou modèle de Degani et Schiff qui présente quelques modifications par rapport au modèle Baldwin et Lomax originel.

Enfin le dernier modèle est le modèle de K- ϵ de Johns-Launder^[8] résumé par ces deux équations de transport.

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres.

Le premier Chapitre est consacré aux généralités concernant la turbulence et ses caractéristiques ainsi que les tuyères et leurs différents régimes de travail.

Le second Chapitre décrit le problème physique, un accent particulier est porté aux différents modèles de turbulence trouvés dans la littérature en mettant en évidence leur points forts ainsi que leurs faiblesses.

Le troisième Chapitre est consacré au développement des modèles physiques et mathématiques de la mécanique des fluides à travers un rappel des équations de Navier-Stokes compressibles instantanées puis moyennées. Au terme de ce chapitre, les modèles de turbulence utilisés sont présentés.

Au quatrième Chapitre nous avons brossé un tableau de toutes les méthodes qui ont trait au côté numérique du travail à commencer par la procédure de maillage et la méthode de discrétisation ainsi que le schéma numérique utilisé et enfin la méthode de traitement des nœuds frontières du domaine.

Le Chapitre cinq quant à lui, porte sur les résultats obtenus et mis en évidence par des courbes (iso) représentant l'évolution de l'écoulement dans la tuyère ainsi que des courbes comparatives des modèles de turbulences à travers l'évolution de la composante \bar{u} de la vitesse moyenne et du coefficient de viscosité turbulent à différentes stations le long de la tuyère, ainsi qu'à travers d'autres courbes comparatives des caractéristiques de l'écoulement au niveau de la paroi et de l'axe de la tuyère, tout cela suivi d'une discussion et d'une conclusion générale.

CHAPITRE I -GENERALITES

I-1- LA TURBULENCE

I-1-1-Définition

En observant les mouvements d'un fluide, on distingue les écoulements turbulents et les écoulements non turbulents. Ces deux types d'écoulements peuvent coexister dans l'espace, certaines zones seulement étant le siège de turbulence comme les couches limites, les jets, les sillages, ils peuvent aussi se succéder dans le temps d'une façon intermittente.

Les écoulements non turbulents sont dits laminaires dans les zones où les frottements dus à la viscosité sont dominants.

Dans les mouvements turbulents peuvent aussi exister des zones où les tensions dues à la viscosité sont prépondérantes, l'écoulement est alors dit visqueux, il en est ainsi dans la sous couche visqueuse voisine d'une paroi.

On peut aisément se faire une idée de ce qu'est la turbulence d'après le sillage d'un navire ou le cours d'un torrent, qui sont animés de mouvements tourbillonnaires très irrégulièrement distribués à la fois dans l'espace et dans le temps. De même dans l'atmosphère, la présence de condensation, fumée et particules diverses révèlent le plus souvent des mouvements d'agitation très complexes qui correspondent à la turbulence, celle-ci existe notamment dans la couche voisine du sol, dans les cumulus, dans les jets voisins de la tropopause (jet-streams) dans certaines couches atmosphériques instables.

Le phénomène de la turbulence est observé aussi à l'échelle cosmique dans la photosphère solaire et dans les nébuleuses gazeuses. Il est si répandu dans la nature que l'on peut le considérer comme étant le cas habituel de l'écoulement des fluides.

La turbulence existe aussi dans la plupart des écoulements de fluides utilisés dans les applications concernant par exemple les avions, les navires, les véhicules divers, les conduites, les moteurs, les brûleurs, les mélangeurs chimiques et les tuyères. Ils sont même conçus pour tenir compte du fait ou pour exploiter le fait que les écoulements qui les traversent ou dans lesquels ils baignent sont turbulents.

L'étude de la turbulence est le partage de plusieurs disciplines : la mécanique des fluides, la thermodynamique, la géophysique, l'astrophysique, et la biophysique.

Ses applications concernent des domaines variés, comme ceux de l'aéronautique, de l'astronomie, de l'hydraulique, des industries thermiques, atomiques, chimiques, de



l'agriculture, de la médecine. Elles concernent aussi la prévision météorologique, océanologique et la prévention de la pollution.

Il existe deux sortes d'écoulements :

- Les écoulements en « similitude propre » ou appelés en « auto-similitude ». Cette classe d'écoulements comprend en particulier les écoulements simples définis comme étant statistiquement stationnaires macroscopiquement bidimensionnel, quasi-parallèles et peu accélérés ou retardés.

- Les écoulements soumis à une détente ou à une compression intense et qui sont en non-similitude ou en hors équilibre.

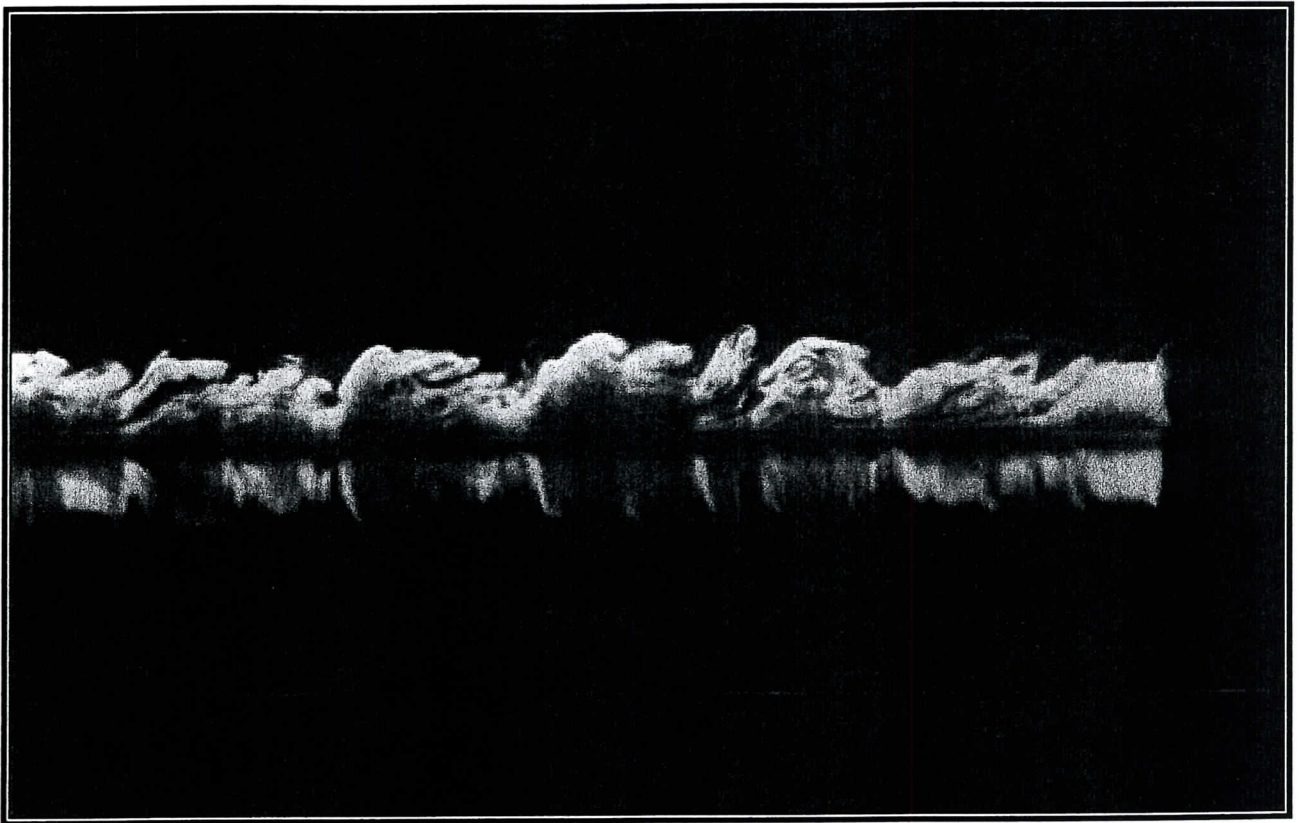


Schéma-I-1 Cette image est une vue de côté des grands remous dans une couche limite turbulente. La fluorescence Laser-induite est employée pour capturer les structures cohérentes quasi-périodiques. L'écoulement est de gauche à droite [9].

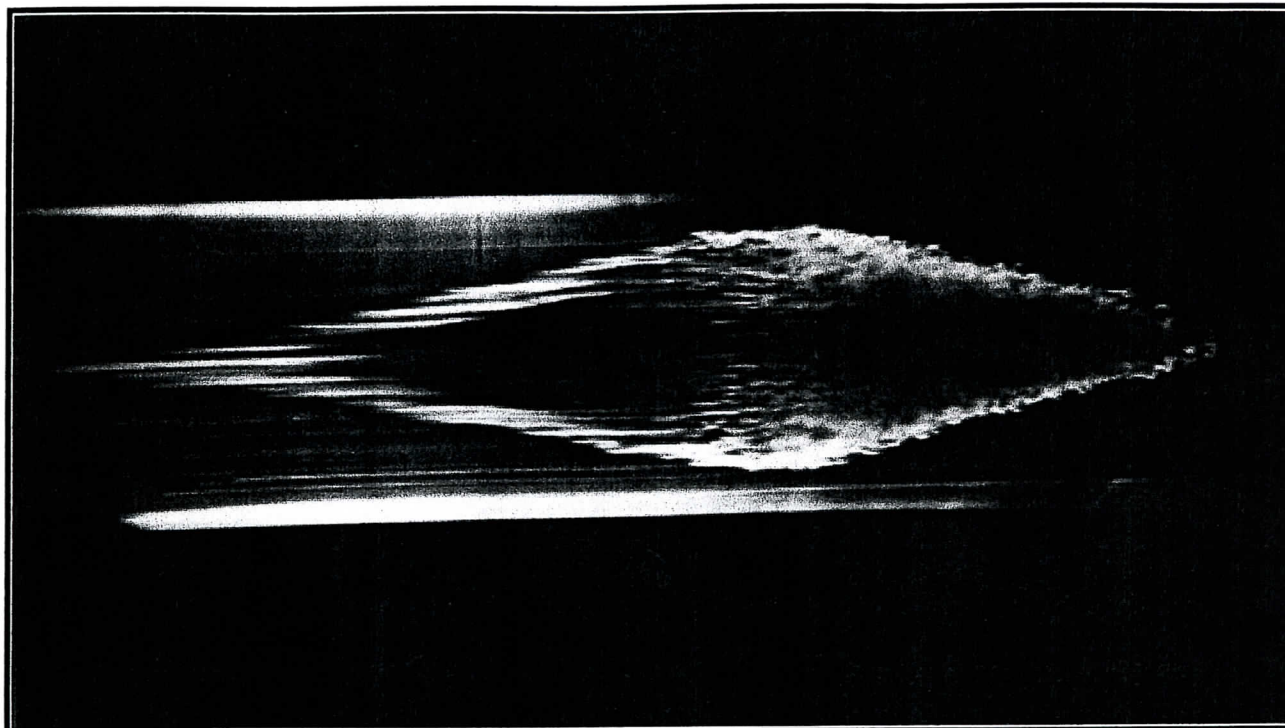


Schéma I-2-Cette image dépeint une vue supérieure d'une tache turbulente croissante déstabilisant l'écoulement laminaire environnant. L'écoulement est de gauche à droite. Cette image était la première à apparaître dans une publication (journal de mécanique des fluides, vol. 110, p. 73, 1981) montrant l'utilité de la visualisation d'écoulement par l'intermédiaire de la fluorescence laser-induite (LIF), une technique maintenant largement répandue dans le monde pour détailler l'anatomie des champs tridimensionnels d'écoulement [9].

I-1-2-Caractéristiques de la turbulence

La turbulence est une propriété des écoulements du fluide et non du fluide lui-même. La définition générale et précise de ce phénomène n'a pas été donnée, mais on peut indiquer les caractéristiques observables que présentent les écoulements du fluide que l'on convient d'appeler turbulent.

I-1-2-a Signal irrégulier dans l'espace

Les grandeurs physiques telles que vitesse et pression varient de façon apparemment aléatoire.

Remarquons que les fluctuations organisées ou périodiques ne font pas partie de l'agitation turbulente, comme c'est le cas des écoulements pulsés dans lesquels on devra retrancher la composante périodique pour obtenir le signal turbulent proprement dit.

I-1-2-b Écoulement rotationnel

Le mouvement turbulent présente des fluctuations du rotationnel de vitesse.

Remarque : un champ acoustique même aléatoire n'est pas pour autant turbulent car il est irrotationnel.

I-1-2-c Diffusivité élevée

Un champ turbulent diffuse fortement toute quantité transportable comme la température ou un colorant, mais aussi la quantité de mouvement.

En réalité la diffusion turbulente est due aux termes de convection au niveau des fluctuations.

Comme résultats, les différentes vitesses sont lissées plus efficacement dans le cas turbulent relativement au cas laminaire, et le profil de vitesse moyenné dans le temps d'un écoulement turbulent est beaucoup plus uniforme que dans un écoulement laminaire.

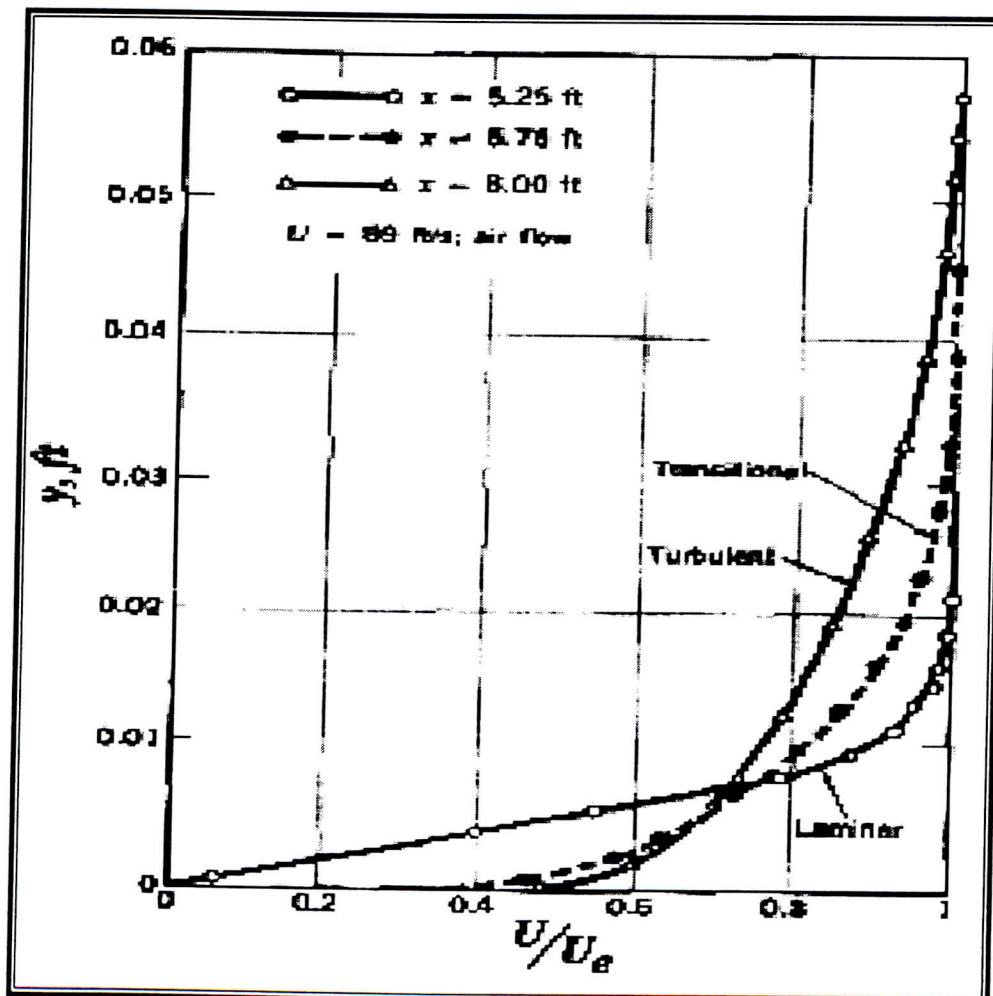


Schéma-I-3 Profil de la couche limite pour un écoulement laminaire et turbulent

I-2-GENERALITES SUR LES TUYERES

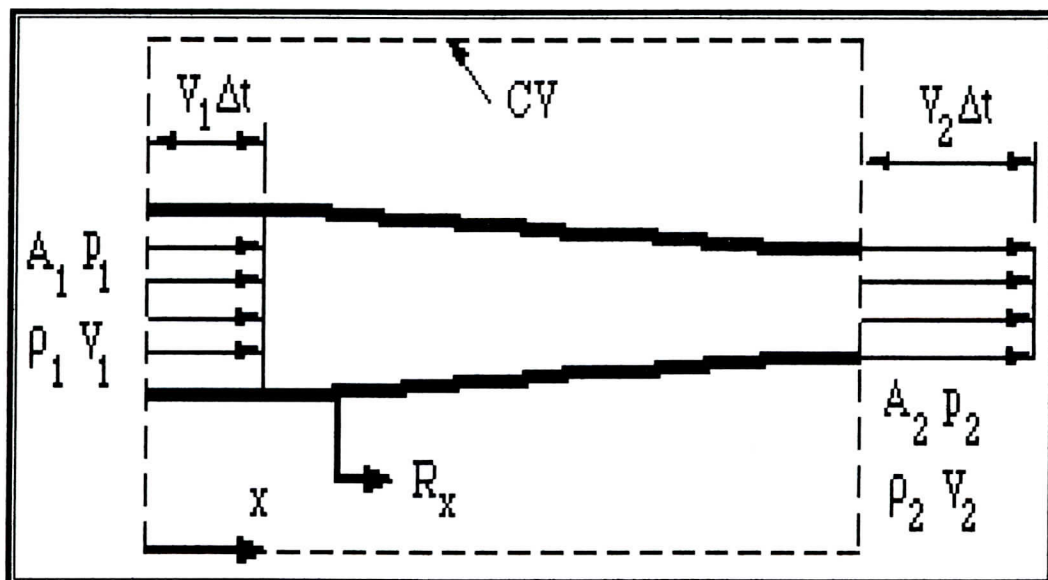
I-2-1-Rappels sur les tuyères

Nous rappelons à travers ces quelques lignes les principales caractéristiques et équations régissant les écoulements monodimensionnel adiabatiques à travers une tuyère, ces équations sont utilisées dans le programme de calcul, subroutine ONEDIM pour obtenir la solution monodimensionnelle représentant la surface des solutions initiales .

Nous prenons une tuyère de type convergente-divergente. Supposons que l'écoulement à l'intérieur de celle-ci soit compressible, mono dimensionnel (la vitesse étant représentée par v), stationnaire, adiabatique(pas d'échange de chaleur avec l'extérieur)et isentropique.

Il est clair qu'il s'agit là d'un écoulement fictif mais ces hypothèses permettent d'obtenir des relations analytiques simples fournissant des résultats avec une bonne approximation.

L'équation de continuité, de quantité de mouvement et celle de conservation de l'énergie conduisent en l'absence de frottement à la paroi aux relations suivantes :



-Schéma I-4 Volume de contrôle d'une conduite unidimensionnelle

Le volume en $A_1 = A_1 V_1 \Delta t$

Le volume en $A_2 = A_2 V_2 \Delta t$

La masse entrante en $A = \rho A_1 V_1 \Delta t$

La masse sortante en $A = \rho A_2 V_2 \Delta t$

Ce qui revient à dire que :

$$\rho v A = cste \quad (\text{I-1})$$

$$A(P + \rho v^2) = cste \quad (\text{I-2})$$

$$h + \frac{v^2}{2} = cste \quad (\text{I-3})$$

Où A désigne l'aire à une abscisse donnée.

La relation (I-1) traduit la conservation du débit massique à l'intérieur de la tuyère.

La relation (I-3) montre que dans le cadre des hypothèses faites ci-dessus, l'énergie totale se conserve. Ainsi lorsque $v=0$, toute l'énergie est sous forme d'enthalpie dite enthalpie d'arrêt,

$$\text{égale à: } h_0 = h + \frac{v^2}{2} \quad (\text{I-4})$$

Inversement, on peut supposer que l'écoulement soit accéléré de façon à atteindre un état fictif où toute l'énergie serait sous forme cinétique ceci correspondrait alors à une vitesse maximale " v_{\max} " telle que:

$$\frac{v_{\max}^2}{2} = h + \frac{v^2}{2} = h_0 \quad (\text{I-5})$$

La relation (I-5) montre que la vitesse de l'écoulement à l'intérieur d'une tuyère admet toujours une limite.

En différenciant les relations (I-1) et (I-3), on aboutit à l'équation d'Hugoniot^[10]:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dv}{v} [M^2 - 1] = -\frac{d\rho}{\rho} \left[\frac{M^2 - 1}{M^2} \right] = -\frac{dP}{\rho v^2} [M^2 - 1] \quad (\text{I-6})$$

où (v/a) désigne le nombre de mach (a étant la célérité du son)

La relation (I-6) permet de préciser les variations de la vitesse (de la pression et de la masse volumique) selon que le gaz s'écoule dans le convergent ou dans le divergent en subsonique ou en supersonique (voir tableau).

	Écoulement subsonique ($M < 1$)	Écoulement supersonique ($M > 1$)
Convergent	$dv > 0$ $dP < 0$ $d\rho < 0$	$dv < 0$ $dP > 0$ $d\rho > 0$
Divergent	$dv < 0$ $dP > 0$ $d\rho > 0$	$dv > 0$ $dP < 0$ $d\rho < 0$

TABLEAU : Variation de vitesse, pression et masse volumique dans la tuyère en régime subsonique ou supersonique

Elle montre également que lorsque l'écoulement est sonique ($M=1$) on a $dA/A=0$, si on écarte les solutions $A=cste$ et, on en déduit que si $M=1$ dans l'écoulement, cela se produit où l'aire est minimale, c'est à dire au col, remarquons que la réciproque n'est pas forcément vraie.

Une autre relation intéressante est celle donnant le nombre de mach dans une section de la tuyère

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (I-7)$$

ou A^* est l'aire au col. Cette relation montre que le nombre de mach dépend uniquement du rapport d'aire A/A^* et de γ et par conséquent est indépendant des grandeurs réservoir.

Les Variations de P , T et ρ peuvent être obtenues à partir des équations :

$$\frac{P}{P_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (I-8)$$

$$\frac{T}{T_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-1} \quad (I-9)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}} \quad (I-10)$$

Quantitativement les relations ci-dessus ne sont évidemment pas applicables au cas d'un écoulement dissipatif axisymétrique, mais permettent de déduire des résultats qualitatifs, tels que la conservation du débit.

I-2-2-Principaux paramètres de performance

I-2-2-a-La poussée

La poussée délivrée par une tuyère est fonction de la vitesse d'éjection des gaz de combustion et de la différence entre la pression à la section de sortie et de la pression ambiante. L'application de l'équation de conservation de la quantité de mouvements permet d'exprimer la poussée infinitésimale développée à travers une section annulaire de rayon dy :

$$dF = \left[\rho V_s^2 + (P_s - P_a) \right] 2 \pi y dy \quad (I-11)$$

La poussée totale est déterminée par intégration sur la section de sortie de la tuyère de l'équation précédente. Ce qui nous donne:

$$F = \pi \sum \left[\rho V_{si}^2 + (P_{si} - P_a) \right] \left[Y_{si+1}^2 - Y_{si}^2 \right] \quad (\text{I-12})$$

I-2-2-b-Le coefficient de poussée

Ce paramètre sans dimension s'exprime de la manière suivante:

$$C_F = \frac{F}{P_t A_c} \quad (\text{I-13})$$

Le dénominateur de l'équation (I-10) est composé du produit de P_t (pression totale à la sortie de la chambre de combustion) et de A_c (aire de la section au col). Ces deux paramètres représentent la chambre de combustion et l'écoulement supersonique respectivement.

Ce rapport peut donc être considéré comme représentatif de la performance du contour de la section divergente supersonique.

I-2-2-c Le coefficient de décharge

Les performances réelles d'une tuyère sont généralement légèrement différentes de celles déterminées sur la base de l'hypothèse d'un écoulement isentropique idéal et cela est du principalement aux effets de la viscosité.

Le coefficient de décharge exprime cette différence et s'écrit:

$$C_d = \frac{\text{actuel}}{\text{isentropique}} \quad (\text{I-14})$$

I-2-2-d-La vitesse effective

La vitesse effective V_{eff} est la vitesse de sortie de la tuyère adaptée. Elle est définie comme le rapport de la poussée au débit massique:

$$V_{eff} = \frac{F}{\dot{m}} \quad (\text{I-15})$$

C'est un paramètre qui tient compte de la correction atmosphérique.

I-2-2-e- L'impulsion spécifique

L'impulsion spécifique notée I_s est définie comme le rapport de la poussée au produit du débit massique et de l'accélération de la pesanteur:

$$I_s = \frac{F}{\dot{m}g} \quad (\text{I-16})$$

C'est un paramètre généralement utilisé pour comparer les performances des propergols utilisés pour la propulsion.

CHAPITRE II -ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

II-1- INTRODUCTION

Il est important de prendre en compte les effets de la turbulence dans la résolution des équations de Navier-Stokes car dans leurs conditions d'exploitation, les tuyères supersoniques fonctionnent en grande partie en régime turbulent.

En industrie le nombre de Reynolds est souvent très grand et la simulation directe de ces écoulements turbulents utilisant les équations instantanées de Navier-Stokes est généralement impossible car cela demande des ressources informatiques trop grandes, au lieu de cela l'ensemble ramené à une moyenne des équations de Navier-Stokes est souvent suffisant et pratique pour décrire les mouvements turbulents impliqués dans les problèmes physiques et technologiques, car ce que l'ingénieur veut connaître c'est l'effet moyen des quantités turbulentes et pas tellement les quantités instantanées de fluctuation. Cependant en prenant une moyenne d'équations pour un écoulement turbulent qui est instable aléatoire irrégulier et rotationnel fait perdre des informations concernant le mouvement du fluide et des termes additionnels connus sous le nom de contrainte de Reynolds apparaissent dans l'équation de Navier-Stokes moyenne. Afin de récupérer les informations perdues lors du processus de moyennement de l'équation de Navier-Stokes un modèle de turbulence des contraintes de Reynolds doit être introduit pour résoudre le problème.

En 1895, Reynolds a introduit la moyenne temporelle des équations de Navier-Stokes. Depuis ce temps, les chercheurs et scientifiques ont essayé de créer un modèle de turbulence des contraintes de Reynolds pour récupérer les informations du mouvement turbulent perdu en faisant la moyenne des équations de Navier-Stokes.

Actuellement, plusieurs modèles de turbulence sont disponibles. Néanmoins, il n'y a pas un modèle unique pouvant prédire d'une façon satisfaisante tous les écoulements turbulents. Sans modèle unifié de turbulence capable de prévoir les écoulements turbulents ramenés à une moyenne, notre compréhension des phénomènes de turbulence demeurera inachevée et ceci entravera les applications en engineering.

Les modèles de turbulences se scindent en deux groupes les modèles de turbulences à échelle unique et ceux à échelles multiples.

II-2-MODELE DE TURBULENCE A ECHELLE UNIQUE

La modélisation des contraintes de Reynolds $\overline{\rho u'v'}$ par un concept de viscosité turbulente nécessite la connaissance préalable de μ_T .

Grâce à une analyse dimensionnelle on peut écrire que $\mu_T \propto \rho UL$

L étant une échelle de longueur caractéristique des tourbillons se développant dans les zones turbulentes ou la vitesse d'écoulement est caractérisée par U.

II-2-1 Modèle algébrique

Au début du vingtième siècle, la modélisation de la turbulence était simple et intuitive et cela vu le manque de moyens informatiques. Ces modèles sont limités dans le sens où le modèle ne peut être appliqué qu'à un problème particulier ou un problème d'une géométrie similaire donc inapproprié à un autre type d'écoulement ou de géométrie. Ces modèles simples ont une faible possibilité de prédiction, cependant ils ont l'avantage de la simplicité et sont faciles à implémenter dans les codes de résolution des équations de Navier-Stokes.

Un exemple de ce genre de modèle est celui de la longueur de mélange proposée par Prandtl en 1925 qui est une analogie avec le libre parcours moyen d'un gaz.

II-2-2 Modèle à une équation de transport

Dans ce cas la dissipation ε peut être déterminée par une expression explicite du type :

$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{l}$ où l est une échelle donnée en chaque point de l'écoulement et cela sans avoir à résoudre une équation de transport pour ε .

Ces modèles ne comportent qu'une équation de transport pour l'échelle de vitesse de la turbulence à résoudre (k par exemple).

On distingue essentiellement deux types de modèles à une équation^[11]:

-Le premier est basé sur le concept de viscosité de la turbulence : Prandtl L(1945) ; Nee et Kavaszny (1969)

-Le deuxième est basé sur le modèle de Bradshaw P et al 1967.

II-2-3 Modèle à deux équations de transport

Kolmogorov est le premier en 1942^[12] à avoir introduit le concept de l'échelle "auto déterminante" en déterminant la vitesse turbulente et les échelles de longueur caractéristique à partir de deux équations différentielles indépendantes.

Depuis, plusieurs variantes de modèles de fermeture à deux équations de transports ont été proposées, en général ces modèles tentent de modéliser l'énergie cinétique de turbulence k , et une autre variable turbulente avec une équation différentielle, la dernière variable en général est liée à l'échelle de longueur mais n'est pas nécessairement l'échelle de longueur elle-même.

Des modèles de turbulence avec multiples combinaisons ont été proposés nous citerons

$$\text{comme exemples : } \left\{ \begin{array}{l} \text{Kolmogorov(1948)} \rightarrow \left[k - \frac{k^{3/2}}{l} \right] \\ \text{Spalding(1982)} \rightarrow \left[k - \frac{k}{l^2} \right]^{[13]} \\ \text{Ng \& Spalding(1972)} \rightarrow [k - kl]^{[14]} \\ \text{Launder \& Spalding(1974)} \rightarrow [k - \varepsilon]^{[15]} \end{array} \right.$$

Aucun modèle de turbulence unifié n'est disponible à l'heure actuelle bien qu'un certain degré de pouvoir de prédiction ai été réalisé.

II-2-3-a Modèle de $k-\varepsilon$:

Le modèle de $k-\varepsilon$ basé sur le concept de Boussinesq (1877)^[16] est une analogie au gradient de diffusion moléculaire ou :

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k$$

U_i : vitesse moyenne

X_i : Coordonnée spatiale.

La distribution de K et ε est déterminée à partir des équations :

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial X_i} \left[C_k \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial X_i} + \nu \frac{\partial k}{\partial X_i} \right] - \overline{u_i u_i} \frac{\partial U_i}{\partial X_i} - \varepsilon$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial X_i} \left[C_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_i} + \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_i} \right] - C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_i} \frac{\partial U_i}{\partial X_i} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} - C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial}{\partial X_i} \left[C_k \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial X_i} \right]$$

Les coefficients du modèle de turbulence sont déterminés à partir de résultats de certaines expériences et d'optimisation numérique ((Hanjalic, 1970)^[17] ; (Launder et al, 1972)^[18] ; Jaw, 1991^[19]) et plus récemment de l'analyse de renormalisation comme (Yakhot et Orszag, 1986)^[20] ou d'analyse statistique (Yoshizawa, 1987^[21]; Takemitsu, 1990^[22]).

La comparaison des coefficients de turbulence proposés par différents auteurs nous donne le tableau suivant^[23] :

Auteurs	C_D	C_K	C_ϵ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$C_{\epsilon 3}$
Hanjalic (1970)	0.07	0.07	0.064	1.45	2.0	0
Jones et Launder (1972)	0.09	0.09	0.069	1.55	2.0	0
Launder et al (1972)	0.09	0.09	0.069	1.44	1.92	0
Yakhot et Orszag (1986)	0.084	0.117	0.117	1.063	1.722	0
Jaw(1991) at Hwang et Peng (1995)	0.09	0.103	0.11	1.23	1.92	1.67

En général le modèle à deux équations de transport ne prévoit pas correctement le retour à l'isotropie après le déplacement de la contrainte (Reynolds 1974)^[24].

Speziale(1991)^[25] a pu répertorier les principales déficiences du modèle et qui sont :

- a- Une incapacité d'expliquer correctement les contraintes aérodynamiques de la courbure, les contraintes de rotation et tout autre effet des forces appliquées à l'objet.
- b- La négligence des effets non locaux et historiques de la contrainte de Reynolds.

Tandis que certaines des déficiences peuvent être partiellement surmontées en employant les modèles à deux équations avec une correction algébrique non-linéaire de la viscosité turbulente (Barton et Al 1991)^[26] des améliorations plus importantes peuvent être réalisées au moyen de fermetures d'ordre supérieur. A cet égard, on ne devrait pas prévoir que les modèles à deux équations de transport soient très généraux, bien qu'ils puissent donner de bons résultats dans des cas bien précis, avec des coefficients spécifiques.

II-2-3-a-1 Le traitement de la région proche paroi :

C'est un fait bien connu que l'intégration du modèle de K- ϵ dans la région proche paroi avec l'application de la condition de non-glissement donne des résultats insuffisants.

Une manière de surmonter cette insuffisance est d'introduire des effets d'atténuation ayant comme résultats des modèles à faible nombre de Reynolds.

les deux effets en même temps et cela sur des constantes et fonctions empiriques dans les équations de transport de la turbulence conçues à l'origine pour le nombre de Reynolds élevé, écoulements entièrement turbulents éloignés du mur.

Une variété de modèle K-ε à bas nombre de Reynolds impliquant différentes fonctions et termes additionnels ont été proposés et qui en général peuvent être écrit sous la forme :

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial X_i} \left[C_k f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial X_i} + \nu \frac{\partial k}{\partial X_i} \right] - P - \varepsilon$$

$$\frac{D\bar{\varepsilon}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial X_i} \left[C_\varepsilon \frac{k^2}{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial X_i} + \nu \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial X_i} \right] + C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\bar{\varepsilon}}{k} P - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \bar{\varepsilon} + E$$

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + D$$

$$\nu_t = C_D f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Auteurs	D	$\bar{\varepsilon}_w - B$	C	C _k	C _ε	C _ε ₁	C _ε ₂	f _μ	f ₁	f ₂	E
Lam et Bremhorst (1981)	0	$\frac{\partial^2 k}{\nu \partial y^2}$	0.09	0.09	0.07	1.44	1.92	$\{1 - \exp(-0.0165R_y)\}^2$	$1 + \left(\frac{0.05}{f_\mu}\right)^3$	$1 - \exp(-R_f^2)$	0
Launder et Shima(1989)	$2\nu \left(\frac{\partial k^2}{\partial y}\right)$	0	0.09	0.09	0.07	1.44	1.92	$\exp\left[\frac{-3.4}{\left(1 + R_\tau/50\right)^2}\right]$	1.0	$1 - 0.3 \exp(-R_f^2)$	$2\nu \nu_\tau \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2$
Chien 1982)	$2\nu \frac{k}{y^2}$	0	0.09	0.09	0.07	1.35	1.8	$1 - \exp(-0.0115y^+)$	1.0	$1 - 0.22 \exp\left[-\left(\frac{R_\tau}{6}\right)^2\right]$	$-2\nu \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{y^2}\right) \exp(-0.5y^+)$

-Tableau :représentant les modèles de turbulence à bas nombre de Reynolds^[22]-

D'autres ont essayé l'idée d'un modèle à deux couches en résolvant la viscosité affectée dans la couche proche paroi en utilisant un modèle algébrique plus simple et numériquement plus stable.

II-3-MODELE DE TURBULENCE A ECHELLES MULTIPLES

II-3-1- Concept et idée de base

La modélisation multi-échelles permet de mieux prendre en compte les mécanismes de transfert énergétique entre les différentes structures de la turbulence qui existent au sein du spectre de l'énergie.

Les modèles à échelles-multiples s'appuient sur le découpage du spectre d'énergie(E) en zones distinctes. Ces zones sont les lieux privilégiés de processus physiques différents.

L'équation spectrale de E(k) s'écrit de manière simplifiée^[11]:

$$\frac{dE(k)}{dt} = P(k) + T(k) - 2\nu k^2 E(k)$$

$\frac{dE(k)}{dt}$: représente la variation temporelle du spectre de l'énergie.

P(k) : La production de l'énergie.

T(k) : représente Le transfert de l'énergie.

$2\nu k^2 E(k)$:représente la dissipation de l'énergie.

L'allure du spectre et les contributions de ces différents termes, sont représentées par le schéma(II-1) dans le cas d'une turbulence homogène isotrope.

Il consiste à introduire un découpage du spectre moyen en trois zones : zone de production, zone de transfert et celle de dissipation.

On supposera que la production n'est appréciable que dans la première zone et que la dissipation n'est importante que dans la troisième et la deuxième zone est le siège du transfert uniquement.

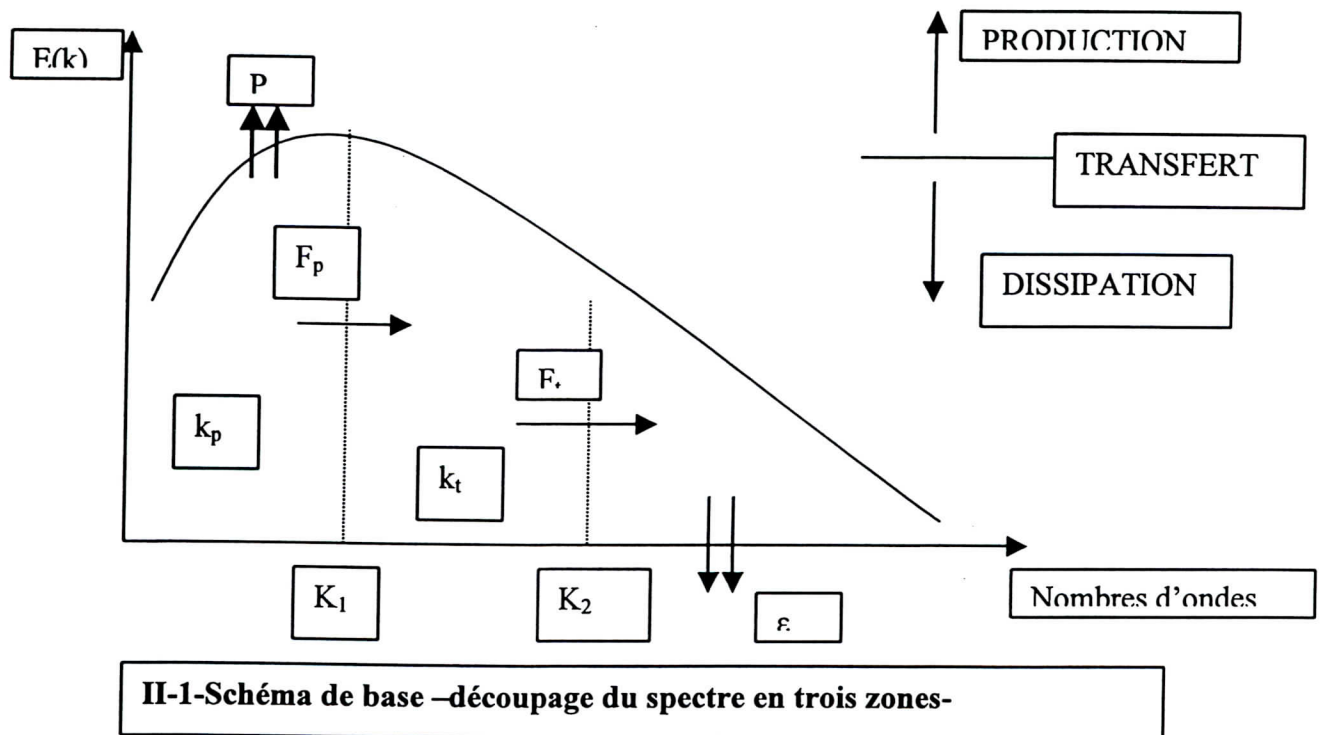
Zone de production : $\frac{dE(k)}{dt} = P(k) + T(k)$

Zone de transfert : $\frac{dE(k)}{dt} = T(k)$ et Zone de dissipation : $\frac{dE(k)}{dt} = -2\nu k^2 E(k)$

On définit des grandeurs partielles, telles l'énergie cinétique k_p , la dissipation, la production P ou le flux de transfert spectral ϵ_t et ϵ_p .

II-3-2-Modèle à deux échelles ^[11].

Dans ce cas là, le spectre d'énergie est divisé en trois régions dans les zones de production, de transfert et de dissipation sont bornées par les nombres d'ondes de coupures k_1 et k_2 .



Où :

K_p : énergie de la turbulence des grandes échelles.

K_t : Energie de turbulence des petites échelles.

Le transfert d'énergie des grandes échelles vers les petites se fait par l'intermédiaire de ϵ_p la dissipation est égale à ϵ_t .

Les deux échelles énergétiques sont alors k_p et k_t .

Nous allons détailler dans ce qui suit l'un des modèles à deux échelles proposé dans la littérature.

II-3-2-a Modèle de Kim et Chen ^[27] :

Après modélisation Kim et Chen proposent le système d'équations suivant :

1/Equation de transport de l'énergie de la turbulence des grandes échelles :

$$\frac{\partial \rho k_p}{\partial t} + \frac{\partial \rho k_p U_i}{\partial x_i} = P_k - \rho \epsilon_p + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k_p}} \right) \frac{\partial k_p}{\partial x_i} \right)$$

2/Equation de transport de l'énergie de la turbulence des petites échelles :

3/Equation de transport du transfert spectral de l'énergie turbulente des grandes structures vers les petites structures :

$$\frac{\partial \rho \varepsilon_p}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varepsilon_p U_i}{\partial x_i} = C_{p1} \rho \frac{P_k^2}{k_p} + C_{p2} \rho \frac{P_k \varepsilon_p}{k_p} - C_{p3} \rho \frac{\varepsilon_p^2}{k_p} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{sp}} \right) \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x_i} \right)$$

4/Equation de transport de la dissipation :

$$\frac{\partial \rho \varepsilon_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varepsilon_t U_i}{\partial x_i} = C_{t1} \rho \frac{\varepsilon_p^2}{k_t} + C_{t2} \rho \frac{\varepsilon_p \varepsilon_t}{k_t} - C_{t3} \rho \frac{\varepsilon_t^2}{k_t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x_i} \right)$$

$$\text{avec : } P_k = -\bar{\rho} \tilde{u}''^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{\rho} \tilde{u}'' \tilde{v}'' \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \bar{\rho} \tilde{v}''^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$$

Après comparaison avec les résultats expérimentaux et une optimisation numérique, Kim et Chen proposent les valeurs suivantes :

$$\sigma_{kp} = \sigma_{ke} = 0.75 \quad , \quad \sigma_{sp} = \sigma_{\varepsilon\varepsilon} = 1.15$$

$$C_{p1} = 0.21 \quad , \quad C_{p2} = 1.24 \quad , \quad C_{p3} = 1.84$$

$$C_{t1} = 0.29 \quad , \quad C_{t2} = 1.28 \quad , \quad C_{t3} = 1.66$$

L'un des intérêts de ce modèle est la définition de la viscosité turbulente : $\mu_T = C_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon_p}$

$$\text{Ou } k = k_p + k_t$$

L'originalité de ce modèle est dans la prise en compte du terme de transfert d'énergie des grandes échelles vers les petites, plutôt que le terme de dissipation ainsi si l'on écrit μ_T de

$$\text{manière différente, on a : } \mu_T = C_\mu \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_p} \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon_t} = F(\varepsilon_t, \varepsilon_p) \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon_t}$$

Lorsque la turbulence est en état d'équilibre, la fonction F est égale à C_μ . On est alors dans le cadre d'un formalisme identique au mono-échelle. Dans le cas d'une turbulence hors équilibre, exemple lorsque le transfert d'énergie des grandes structures vers les petites structures est plus important que la dissipation, alors μ_T diminue, ce qui se traduit par une diminution de la production de la turbulence. Cette décomposition spectrale consiste en fait à créer un C_μ qui varie dans un sens tel que la turbulence sera ramenée à un état d'équilibre.

II-3-3 Modèle multi-échelles aux tensions de Reynolds (RSM multi-échelles)

Pour les écoulements cisailés et fortement compressibles, une fermeture au second ordre permet une description plus fine de la turbulence.

Ces modèles sont basés sur la résolution des équations d'évolution du tenseur de Reynolds et du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Le premier modèle de ce type a été introduit par Launder, Reece et Rodi en 1975.

Il est fondé sur les équations de Navier et Stokes dans le cas incompressible, et utilise la moyenne de Reynolds pour toutes les variables.

Wilcox et Rubesin ont proposé une nouvelle formulation au second ordre en remplaçant l'équation de transport de la dissipation ε par une équation du rotationnel ω^2 tout en conservant la même fermeture des contraintes.

Leur modèle a montré quelques améliorations notamment pour des géométries d'écoulements à fortes courbures.

Wilcox^[28] a proposé un modèle au second ordre avec un formalisme multi-échelles.

Cette approche consiste à modéliser deux différentes zones de l'écoulement et qui sont :

- Les grandes structures contenant une grande partie de l'énergie et transportant les contraintes de Reynolds.
- Les petites structures contenant très peu d'énergie et qui présentent un caractère dissipatif et un comportement isotrope.

Une fois modélisée, l'équation de transport des contraintes de Reynolds, pour le modèle multi_échelle s'écrira :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho u_i'' u_j''} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\rho U_k u_i'' u_j''} = \underbrace{-\overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - \overline{\rho u_j'' u_k''} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}}_I + \underbrace{\alpha \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) + \beta \left(Q_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) + \gamma \rho k \left(S_{i,j} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right)}_{II}$$

$$\underbrace{-\beta^* C_1 \omega \left(\overline{\rho u_i'' u_k''} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right)}_{III} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_1' \frac{k}{\varepsilon} u_k'' u_l'' \frac{\partial}{\partial x_l} u_i'' u_l'' \right)}_{IV} - \underbrace{\frac{2}{3} \beta^* \rho \omega k \delta_{ij}}_V$$

I : Terme traduisant la production P_{ij} .

II : Terme de redistribution linéaire.

III : Terme de redistribution quadratique.

IV : Terme de diffusion turbulente.

V : Terme de destruction.

A ce système s'ajoutent trois équations supplémentaires :

Equation de transport de l'énergie cinétique turbulente totale k :

$$\frac{D(\rho k)}{Dt} = P_{ij} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma^* \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right]$$

Equation de transport de l'énergie cinétique des grandes structures k_p :

$$\frac{D(\rho k_p)}{Dt} = (1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta}) P - \beta^* \rho \omega k \left(\frac{k_p}{k} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Equation de transport du taux de dissipation : turbulente ω

$$\frac{D(\rho \omega)}{Dt} = \gamma \frac{\omega}{k} P_{ij} - \beta^* \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma^* \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right]$$

Les tenseurs P_{ij} et Q_{ij} sont donnés par :

$$\begin{cases} P_{ij} = -\bar{\rho} u_i \widetilde{u_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} - \bar{\rho} u_j \widetilde{u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \\ Q_{ij} = -\bar{\rho} u_i \widetilde{u_k} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} - \bar{\rho} u_j \widetilde{u_k} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_i} \end{cases}$$

Les neuf coefficients qui apparaissent dans le modèle complet sont :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 42/55 & \hat{\beta} &= 6/55 & \hat{\gamma} &= 1/4 \\ \beta &= 3/40 & \gamma &= 4/5 & \sigma &= 1/2 \\ \beta^* &= 9/100 & \sigma^* &= 1/2 & C_1 &= 1 + 4 \left(\frac{k_p}{k} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Pour un écoulement à deux dimensions le modèle contient six équations de transport plus les quatre équations du champ moyen ce qui porte à dix équations à résoudre.

Des fonctions d'amortissement sont introduites dans les différents coefficients et cela pour tenir compte des effets proche paroi.

Les effets de la compressibilité du fluide sont prise en compte dans l'équation de transport de ω .

II-4 MODELE AUX EQUATIONS DES TENSIONS DE REYNOLDS

Afin d'expliquer correctement le retour à l'isotropie après le déplacement de la contrainte et prévoir également avec plus de précision chaque effort individuel, l'équation exacte de transport de $\overline{u_i u_j}$ s'écrit:

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial X_l} \left[-\overline{u_i u_j u_l} - \frac{P}{\rho} (\delta_{jl} \overline{u_i} + \delta_{il} \overline{u_j}) + \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_l} \right] - \left(\overline{u_i u_l} \frac{\partial U_j}{\partial X_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial U_i}{\partial X_l} \right) - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial X_l} \frac{\partial u_j}{\partial X_l} + \frac{P}{\rho} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right]$$

où $\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = [D_{ij}^t + \Phi_{ij,p} + D_{ij}^v] + P_{ij} - \epsilon_{ij} + [\Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2}]$

a été prise en considération dans la modélisation du tenseur de Reynolds.

Beaucoup de tentatives ont été faites pour modéliser les termes, hormis celui de production P le tableau^[22] ci dessous compare certains modèles de ces termes.

Auteurs	Modélisation du terme $D_{ij}^t + \Phi_{ij,p}$
Daly et Harlow (1970)	$\frac{\partial}{\partial X_k} \left[C_k \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_l} \right], C_k=0.25$
Hanjalic et Launder (1972)	$\frac{\partial}{\partial X_k} \left[C_k \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{u_i u_l} \frac{\partial u_j u_k}{\partial X_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial u_k u_i}{\partial X_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial u_i u_j}{\partial X_l} \right) \right], C_k=0.11$
Chen et Rodi (1980)	$\frac{\partial}{\partial X_k} \left[C_k \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial X_k} \right], C_k=0.09$

Auteurs	Modelisation du terme de dissipation ϵ_{ij}
Rotta (1951)	$\frac{\overline{u_i u_j}}{k} \epsilon$
Hanjalic et Launder (1972)	$\frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon$
Launder (1989)	$\epsilon_{ij} = \frac{\epsilon}{k} \frac{\left(\overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_k n_k n_j} + \overline{u_j u_k n_k n_i} + \delta_{ij} \overline{u_k u_l n_k n_l} \right)}{\left[1 + \frac{5}{2} \frac{\overline{u_p u_q n_p n_q}}{k} \right]}$
Fu et al (1987)	$f_\epsilon \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon + (1 - f_\epsilon) \epsilon_{ij}^w, \quad f_\epsilon = A^{\frac{1}{2}}$ $A = 1 - \frac{9}{8} (a_{ij} a_{ij} - a_{ij} a_{jk} a_{ki}), \quad a_{ij} = \left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right)$

Une alternative à cette méthode est l'utilisation de la fonction de paroi pour modéliser la région proche paroi. La fonction de paroi emploie des lois empiriques pour éviter l'incapacité du modèle K- ϵ à prévoir un profil logarithmique de vitesse près de la paroi; Avec cette loi il est possible de prédire la vitesse moyenne parallèle à la paroi et les quantités turbulentes en dehors de la sous couche visqueuse en terme de distance à la paroi et les conditions à la paroi tels que les contraintes pariétales, les gradients de pression et de transfert de chaleur.

Par conséquent, les fonctions de paroi peuvent être utilisées pour fournir les conditions proches paroi des équations de conservation et des quantités turbulentes. La méthode de la fonction de paroi peut être résumée comme suit :

L'écoulement est modélisé comme un écoulement régulier de Couette. L'analyse expérimentale et dimensionnelle prouve que la contrainte de cisaillement à la paroi est liée à la vitesse moyenne parallèle au mur par la loi logarithmique de paroi.

Il y a un certain nombre d'exemples dans lesquels l'approche de la fonction de paroi n'est pas proportionnée. Par conséquent, on doit abandonner l'approche de la fonction de paroi dans la prédiction par exemple des couches limites turbulentes avec un nombre de Reynolds faible ou transitoire et les écoulements instables.

II-2-3-a-2 influence d'une frontière rigide:

Une frontière rigide a différents effets sur la turbulence. Les plus importants sont les suivants :

1/ elle réduit l'échelle de longueur de la fluctuation, et augmente ainsi le taux de dissipation;

2/ elle réfléchit des fluctuations de pression, empêchant de ce fait le transfert de l'énergie de turbulence dans des fluctuations normales au mur;

3/ elle renforce la condition de non-glissement, et de ce fait assure que dans la sous couche proche paroi, les efforts turbulents sont négligeables et les effets visqueux sur les processus de transport prennent une importance essentielle.

En conséquence, l'extension des modèles de fermeture à haut nombre de Reynolds à la région proche paroi comporte toutes des modifications de la dissipation de diffusion et de la redistribution visqueuse de pression.

Beaucoup de substitutions à l'approche de fonctions de paroi ont été également faites.

Quelques chercheurs ont essayé de développer le modèle à bas nombre de Reynolds en incorporant un effet d'atténuation à la paroi ou un effet direct de la viscosité moléculaire ou

Les termes $\Phi_{ij,1}$ et $\Phi_{ij,2}$ sont les composantes du terme de la contrainte de pression Φ_{ij} dont le premier représente la partie lente de retour au terme isotrope qui ne contient que les fluctuations du mouvement et le second, la partie rapide de retour aux termes isotrope qui, elle, contient le gradient de vitesse moyenne.

Auteurs	Modèle de $\Phi_{ij,1}$
Rotta (1951)	$\Phi_{ij,1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right)$
Lumley et Khajeh Nouri (1973)	$\Phi_{ij,1} = -(C_1 + C_1'' a_{ij} a_{ij}) \varepsilon a_{ij} - C_1' \varepsilon \left(a_{im} a_{jm} - \frac{1}{3} \delta_{ij} a_{ij} a_{ij} \right)$

Auteurs	C_1	C_1'	C_1''	$\Phi_{ij,2}$ existe il ?
Rotta (1951)	1.4	-	-	Oui
Rotta (1962)	3.0	-	-	Oui
Daly et Harlow (1970)	$1.5 + \frac{P}{\varepsilon}$	-	-	Non
Hanjalic et Launder (1972)	2.8	-	-	Oui
Donaldson (1972)	5.0	-	-	Non
Launder et al (1975)	1.5	-	-	Oui
Lumley et Khajeh Nouri (1974)	4.0	-	-	Non
Lumley et Khajeh Nouri (1973)	1.6	0.	3.0	Oui
Reynolds (1974)	2.5	0	-	Oui

Auteurs	Modélisation du terme $\Phi_{ij,2}$
Hanjalic et Launder (1972)	$\Phi_{ij,2} = a_{ij}^{ml} \left(\frac{\partial U_m}{\partial X_l} + \frac{\partial U_l}{\partial X_m} \right),$ $a_{ij}^{ml} = \overline{\alpha u_m u_l} \delta_{ij} + \beta \left(\overline{u_m u_l} \delta_{ij} + \overline{u_m u_j} \delta_{il} + \overline{u_i u_j} \delta_{ml} + \overline{u_i u_l} \delta_{mj} \right) + \left(\gamma \delta_{mi} \delta_{lj} + \sigma \left[\delta_{ml} \delta_{ij} + \delta_{mj} \delta_{il} \right] \right) k + C_2 \frac{\overline{u_m u_l u_i u_j}}{k}$ $+ \nu \frac{\overline{u_m u_j u_i u_l} + \overline{u_m u_l u_i u_j}}{k}$ $\alpha = \frac{(10-6C_2)}{11}, \beta = \frac{-(2-6C_2)}{11}, \nu = -C_2, \gamma = \frac{-(4-12C_2)}{55}, \sigma = \frac{(6-18C_2)}{55}, C_2 = 0.45$
Launder et al (1975)	$\Phi_{ij,2} = -\frac{C_2 + 8}{11} \left(p_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} p \right) - \frac{30C_2 - 2}{55} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) - \frac{8C_2 - 2}{11} \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} p \right)$ $p_{ij} = \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial X_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \right); p = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial X_j}, D_{ij} = \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \right), \text{ avec } C_2 = 0.4$
Gibson et Launder (1978)	$\Phi_{ij,2} = -\xi \left(p_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} p \right), p_{ij} = \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial X_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \right), p = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \text{ avec } \xi = 0.6$
Fu et al (1987)	$\Phi_{ij,2} = -0.6 \left(p_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} p \right) + 0.3 \varepsilon a_{ij} \left(\frac{p}{2\varepsilon} \right) - 0.2 \left\{ \frac{\overline{u_k u_j u_l u_i}}{k} \left[\frac{\partial U_k}{\partial X_l} + \frac{\partial U_l}{\partial X_k} \right] - \frac{\overline{u_l u_k}}{k} \left[\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial X_l} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_l} \right] \right\}$ $- 0.6 \left[A_2 (p_{ij} - D_{ij}) + 3 a_{mi} a_{nj} (p_{mn} - D_{mn}) \right]$ $\text{avec } A_2 = a_{ij} a_{ji} \text{ et } a_{ij} = \left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right)$

Différentes combinaisons des modèles indiqués dans le tableau ont été utilisées dans la littérature (Amano et Goel (1984)^[29] ; Brankovic et Syed (1991)^[30].

En général, l'application de ces modèles a comme conséquence un retour beaucoup plus lent à l'isotropie comparé à celle indiquée par les expériences.

Cependant, les différents composants retournent à l'isotropie à différents taux. Il peut être conclu que les modèles courants de contraintes n'exécutent pas très bien le retour à l'isotropie. Ils peuvent, par contre, bien fonctionner dans les écoulements dominés par d'autres effets.

La plupart des travaux qui ont employé le modèle de l'équation différentielle des contraintes de Reynolds ont tendu à adopter la version plus simple du modèle (Gibson et Launder (1978) pour son rapide retour à l'isotropie^[22].

supprimer la singularité dans l'équation de dissipation à la paroi, le deuxième inconvénient est que les constantes des modèles sont différentes de celles contenues dans le modèle de base, ce qui rend le modèle de proximité de paroi incapable de capter les écoulements des deux modèles de turbulence à grand nombre et bas nombre de Reynolds qui reste quand même le plus pratique et le plus souvent utilisé dans les applications industrielles.

Alors que le critère primordial de l'application du modèle de turbulence à bas nombre de Reynolds est d'être capable de prédire les écoulements turbulents cisailés (Patel et al ,1985) . Le troisième inconvénient de ce modèle se traduit par les difficultés rencontrées dans les écoulements décollés; En effet le nombre de Reynolds y^+ , utilisé pour l'amortissement de la fonction f_μ de la viscosité turbulente, implique la vitesse u_τ de frottement qui est nulle aux points de décollement ou de recollement.

Les deux autres modèles cités plus haut différents l'un de l'autre dans la formulation de C_μ l'un utilise la constante standard alors que l'autre utilise une nouvelle formulation basée sur deux caractéristiques essentielles qui sont (a) l'inégalité entre les quantités fluctuantes ,(b)le facteur d'effet du taux moyen de déformation.

Lushchik et Yakubenko (1998) ont mené une étude comparative de modèles de turbulence utilisés au problème d'un écoulement de fluide incompressible pleinement développé mais appliqué dans trois régions : la sous couche laminaire, la couche logarithmique et enfin l'écoulement de milieu. Ainsi, une comparaison de cette analyse a été faite au problème test qui est celui d'un calcul de couche limite turbulente de tuyère à l'aide du modèle LRE (Low Reynolds Number). Les calculs réalisés à l'aide du modèle LRE dans le cas de couches limites compressibles d'écoulements subsoniques et supersoniques montrent que , dans le cas d'une paroi adiabatique, les résultats numériques coïncident avec ceux des autres modèles . Cependant pour évaluer quantitativement ces modèles, d'autres paramètres plus critiques que le LRE ont été utilisés comme par exemple le coefficient de frottement à la sortie de la tuyère ou encore le flux thermique de paroi Q_w dans la section du col ont été utilisés. Parmi les résultats trouvés, on peut citer qu'à l'issue de la comparaison entre le LRE et le modèle de Cebeci Smith, un écart de 8 à 9% est enregistré dans le calcul, cependant un écart de 30 à 40% est enregistré avec des modèles basés sur le modèle standard K- ϵ

Dudek et Yader (1996) ont examiné dans leur étude numérique de calcul d'écoulement turbulents subsoniques dans les diffuseurs le comportement et les caractéristiques de quatre modèles de turbulence implémentés dans leur code de calcul: Le modèle algébrique de Baldwin et Lomax, le modèle à une équation de Baldwin Barth, le modèle K- ϵ de Chien et finalement le modèle de K-w à deux équations de Wilcox . Il est à noter que lors de l'étude

antérieure, on a montré que les modèles de Baldwin et Lomax et dérivés, généralement sous estiment les contraintes de frottement dans le cas des écoulements subsoniques et supersoniques dans les diffuseurs alors que les modèles de K- ϵ tendent à surestimer ces contraintes de paroi dans le cas d'écoulements décollés, ces résultats se traduisent par l'appariation très tôt de décollement à l'aide des modèles algébriques et une apparition tardive du décollement à l'aide du modèle K- ϵ . Alors que le modèle K-w, semblable au modèle K- ϵ , sauf que la deuxième quantité w n'est autre que la dissipation ϵ divisée par l'énergie cinétique de turbulence, a montré sa puissance et son efficacité à prédire les écoulements à gradient de pression avec ou sans décollements.

Autre problème concerné par l'étude des performances des modèles de turbulence, l'écoulement autour et à l'intérieur d'un canal rotatif de turbomachine (Dutta et Khan, 1999), Ils comparent deux différents modèles de turbulence à deux équations chacun dans l'approche numérique des écoulements pleinement développés non chauffés dans un canal de roue mobile de turbine. Dutta avait montré auparavant, dans une étude antérieure (1995) que ces deux modèles ne sont pas fiables dans d'autres écoulements turbulents, comme les écoulements décollés .

Les améliorations apportées à ces deux modèles dans cette étude sont traduites par l'établissement de la constante C_μ de la viscosité turbulente comme constante fonctionnelle.

Les résultats obtenus montrent une surestimation et une sous estimation de la part des deux modèles dans la zone du centre du canal.

II-6 CONCLUSION:

De la description numérique relativement générale de plusieurs cas d'écoulements faite à partir de l'analyse bibliographique, on retient essentiellement que l'efficacité des modèles de turbulence développés et utilisés jusqu'à présent reste relativement imparfaite et qui peut même dévier complètement des résultats expérimentaux dans des cas d'écoulements qui ne leur sont pas adaptés.

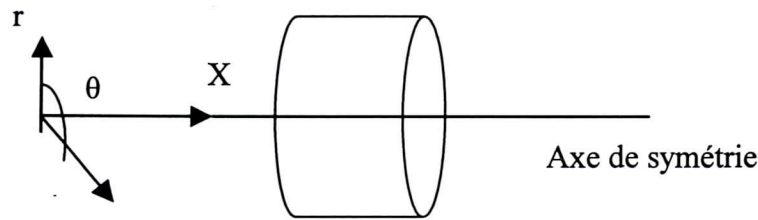
On s'est attardé au cas des écoulements dans les tuyères, étudié en détail par Zeitoun et dont certains résultats ont été étudiés et seront d'un apport considérable dans la comparaison avec ceux de la présente étude, concernant les deux modèles algébriques de Cebeci Smith et Baldwin et Lomax . Par contre le cas du modèle de turbulence à deux équations, standard ou modifié, a été revu de façon plus approfondie, en particulier à travers les travaux cités plus haut mais réalisés généralement en incompressible.

Parmi les résultats essentiels de cette recherche bibliographique, les fonctions F_μ et C_μ traduisant la viscosité turbulente respectivement dans les modèles algébriques et différentiels sont des paramètres très influençant. Comme le cas de notre étude concerne les écoulements compressibles, on s'est intéressé à l'étude comparative de la performance de quatre modèles dont celui de Baldwin et Lomax modifié et K- ϵ standard, et dont l'analyse de chacun est le but essentiel de ce travail.

CHAPITRE III-FORMULATION MATHÉMATIQUE

III-1 LES EQUATIONS GENERALES

Nous pouvons représenter les équations de Navier et Stocks dans notre cas par le schéma suivant :



-Schéma -III-1- Géométrie axisymétrique -

ou 'x' représente la distance suivant l'axe de symétrie (composante axiale) et 'r' représente la distance radiale.

La géométrie étant de révolution, les termes en $\frac{\partial}{\partial \theta}$ seront nuls dans les équations, ce qui ramène à décrire toutes les équations en coordonnées (x,r) dans un plan méridien $\theta = \text{Constante}$.

III-1-1 Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{ou } U_j \text{ est la } j^{\text{ème}} \text{ composante du vecteur vitesse.}$$

Après développement nous obtenons sous forme conservative l'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{1}{r} \rho v = 0. \quad (\text{III-1})$$

$$\text{Et sous forme non conservative nous obtenons : } \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right] = 0 \quad (\text{III-2})$$

III-1-2 Equation du bilan de la quantité de mouvement

$$\text{La forme tensorielle de la quantité de mouvement est : } \frac{\partial \rho U_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}) = 0.. \quad (\text{III-3})$$

Où τ_{ij} est le tenseur des contraintes dû à l'application de forces intérieures sur un élément de surface dS et représentant l'échange de quantité de mouvement dans le gaz il s'écrit :

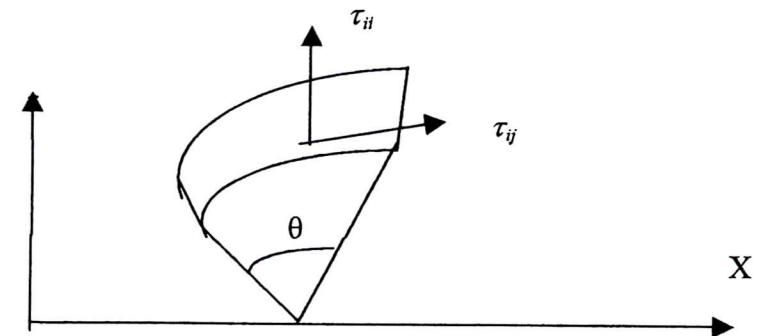
$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \delta_{ij} \quad (\text{III-4})$$

ou δ_{ij} est le tenseur de Kronecker

τ_{ij} Désigne la contrainte exercée sur la surface dS perpendiculaire à l'axe (ox) et parallèle à l'axe (oy).

τ_{ii} Désigne la force normale à dS.

$\tau_{ij}(i \neq j)$ force tangentielle à dS



-Schéma-III-2-representation des contraintes-

μ : Viscosité dynamique qui caractérise les frottements visqueux de cisaillement

$$\text{et } \lambda = \eta - \frac{2}{3}\mu \quad (\text{III-5})$$

ou η : viscosité volumique correspond aux résistances visqueuses qu'oppose le fluide au mouvement de compression ou de dilatation. Ce coefficient dans le cadre de notre étude sera nul conformément à l'hypothèse de stocks.

$$\text{On aura donc : } \lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (\text{III-6})$$

Après développement nous obtenons sous forme conservative les équations :

Conservation de la quantité de mouvement suivant X :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + P - \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho uv - \tau_{xr})}{\partial r} + \frac{1}{r} (\rho uv - \tau_{xr}) = 0 \quad (\text{III-7})$$

Conservation de la quantité de mouvement suivant r :

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (\rho uv - \tau_{xr})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + P - \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} (\rho v^2 - (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta})) = 0 \dots \quad (\text{III-8})$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial r} + \lambda \frac{v}{r} \\
\tau_{rr} &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial r} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{v}{r} \\
\tau_{xr} = \tau_{rx} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\
\tau_{\theta\theta} &= (2\mu + \lambda) \frac{v}{r} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)
\end{aligned}
\tag{III-9}$$

Et λ et μ sont les coefficient de viscosité.

En ce qui concerne la viscosité dynamique, celle-ci est donnée, pour la gamme de température étudiée, par la loi de Sutherland:

$$\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \left(\frac{1 + \frac{S}{T_0}}{1 + \frac{S}{T}} \right)
\tag{III-10}$$

ou $\mu_0 = 1.711 \cdot 10^{-3} \text{Pl}$ est la viscosité du fluide à la température de référence $T_0 = 273.15^\circ\text{K}$ et S est une constante fixée pour l'air à 110.4 K.

Et sous forme non conservative les équations deviennent :

Pour la direction x et r respectivement :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{\rho r} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right] \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial r} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{\rho r} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \right]
\end{aligned}
\tag{III-11}$$

III-1-3 Equation de bilan d'énergie totale

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ U_j (\rho E + p) \} = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} U_i - \frac{\partial}{\partial x_j} q_j
\tag{III-12}$$

$$\text{où } E = e + \frac{1}{2} U_k U_k$$

Selon la loi de conductivité thermique de Fourier, le flux de chaleur de composante q_j s'exprime en fonction de la température comme $q_j = K \frac{\partial T}{\partial x_j}$

(III-13)

Après développement nous obtenons sous forme conservative l'équation

$$\rho \frac{de}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} K \frac{\partial T}{\partial r} + \mu \phi \quad (\text{III-14})$$

$$\text{où, } \phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right)^2 \quad (\text{III-15})$$

$$\text{et : } q_r = K \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{III-16})$$

$$\text{et } q_x = K \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{III-17})$$

K est le coefficient de conductivité.

$$\text{Sachant que : } P = \rho(\gamma - 1)e \quad (\text{III-18})$$

$$\text{et } a^2 = \frac{\gamma P}{\rho} \quad (\text{III-19})$$

Et en utilisant l'équation de continuité nous obtenons:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = (\gamma - 1) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} K \frac{\partial T}{\partial r} + \mu \phi \right] \quad (\text{III-20})$$

III-1-4 Equation des gaz parfait

Une loi d'état est indispensable dans ces cas pour prendre en compte les variations de masse volumique et de pression liées aux variations de température.

En considérant l'air comme un gaz parfait on a :

$$P = \rho r T = \rho(\gamma - 1)e \quad (\text{III-21})$$

Ou r est relié aux chaleurs spécifiques par la relation de Meyer : $r = C_p - C_v$.

III-2 METHODES STATISTIQUES

Pour la résolution des problèmes de turbulence nous adoptons la méthode statistique^[11].

Une solution turbulente est toujours une solution compliquée non stationnaire des équations du mouvement, présentant des fluctuations irrégulières dans l'espace et dans le temps.

Devant cet aspect désordonné des évolutions turbulentes et cette apparente complexité du phénomène l'attitude naturelle la plus utilisée a été d'introduire des méthodes statistiques.

Le hasard apparent des évolutions turbulentes a son origine dans les irrégularités des conditions initiales et des conditions aux limites mal déterminées dans leur détail et pour lesquelles une très petite variation bouleverse totalement la structure détaillée de l'écoulement. La méthode

statistique n'est donc pas justifiée par l'absence de causes mais par l'ignorance des causes surabondantes et difficilement accessibles.

La décomposition d'une grandeur caractéristique instantanée de l'écoulement turbulent se fait en une partie macroscopique et une partie turbulente aléatoire ce qui fait apparaître dans les équations de Navier-Stokes des termes inconnus supplémentaires qui sont interprétés comme des tensions turbulentes ou tensions de Reynolds après application de décomposition de Reynolds ce qui est du à la non-linéarité des équations de Navier-Stokes.

La moyenne utilisée est la moyenne statistique ou moyenne d'ensemble (Moyenne sur un ensemble de réalisations).

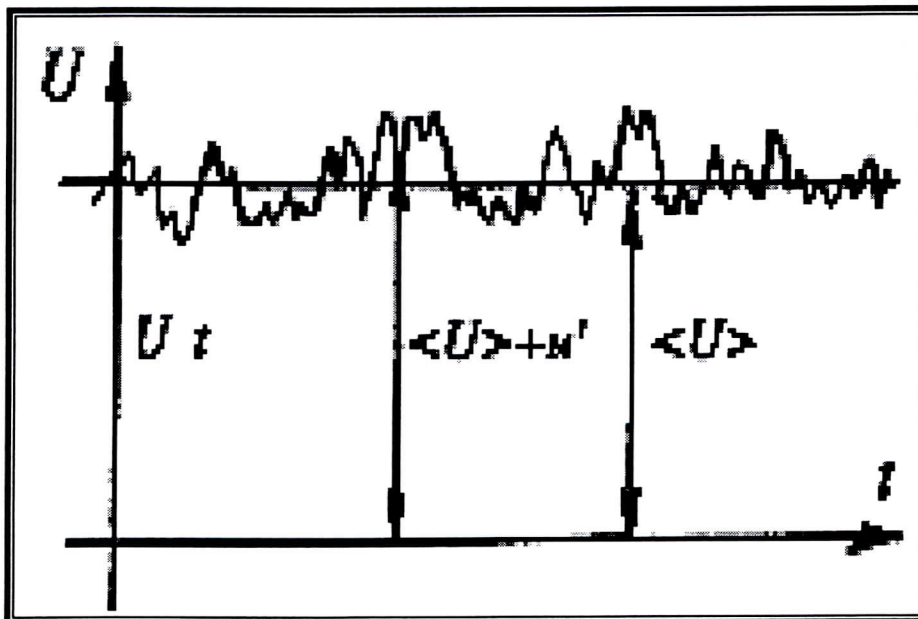
Deux méthodes pour la décomposition des caractéristiques des écoulements turbulents sont utilisées dans la modélisation numérique des écoulements turbulents :

III-2-1 La décomposition de REYNOLDS

Elle consiste à représenter chaque variable par la somme d'une valeur moyenne et d'une fluctuation : $\phi = \bar{\phi} + \phi'$

La moyenne des fluctuations ϕ' a une valeur nulle en effet : $\overline{\phi'} = 0$

Calcul du produit : $a\bar{\phi} = a.\bar{\phi}$, a est une constante.



-Schéma III-3-representation de la vitesse fluctuante-

III-2-2 La méthode de la moyenne pondérée par la masse

Elle a été employée pour établir les équations appliquées à l'atmosphère par HESSELBERG (1926), VAN MIGHEM (1948,1949), BLACKADAR(1950), ces équations ont été complétées et leur domaine d'application a été étendu aux écoulements turbulents des gaz jusqu'aux grandes vitesses par FAVRE(1958,1969,1972,1975).

En un point M, on définit la moyenne temporelle d'une grandeur ϕ par:

$$\bar{\phi}(M,t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \phi(M,t) dt \quad (\text{III-22})$$

Nous remarquons qu'il s'agit en fait d'une moyenne effectuée sur un intervalle de temps à la fois suffisamment grand comparé aux échelles turbulentes, toutefois petit devant la durée des variations macroscopiques de ϕ .

Le formalisme des moyennes pondérées par la masse introduit par FAVRE appliqué à une quantité turbulente quelconque autre que ρ et p donne

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \bar{\phi} - \bar{\phi}'' \\ \bar{\phi}'' &= -\frac{\bar{\rho}'\phi}{\bar{\rho}} \end{aligned}$$

On mentionnera les propriétés utiles des moyennes de FAVRE :

En posant $\tilde{\phi} = \phi - \phi''$ on arrive aux égalités suivantes:

$$\overline{\rho\phi''} = 0, \quad \tilde{\phi}'' = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\rho\tilde{\phi}''} = -\overline{\rho\phi''}$$

Ce schéma ne s'applique pas à p et ρ , pour lesquels on aura dans tous les cas :

$$p = \bar{p} + p' \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'$$

On obtient ainsi pour l'équation de conservation de la masse : $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \tilde{U}_j = 0$

Pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement nous obtenons :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{U}_i \tilde{U}_j + \bar{\rho} \tilde{u}''_i \tilde{u}''_j + \bar{p} \delta_{ij} - \bar{\tau}_{ij}) = 0 \quad (\text{III-23})$$

Quant à l'équation de conservation de l'énergie elle devient:

$$\frac{\partial \rho \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \bar{U}_j (\rho \tilde{E} + \bar{p}) + \frac{1}{2} u''_j \widetilde{u''_k u''_k} + \frac{1}{2} \bar{\rho} u''_j u''_k \bar{U}_k + \bar{\rho} u''_j h'' - \bar{\tau}_{ij} \bar{U}_i - \bar{q}_j \right\} = 0 \quad (\text{III-24})$$

Même en négligeons la corrélation d'ordre trois, des hypothèses restent nécessaires afin de modéliser les corrélations $-\bar{\rho} u''_k u''_k$ (qui constituent les contraintes de Reynolds (flux turbulents de la quantité de mouvement)) et $\bar{\rho} u''_j h''$ (assimilée à des flux turbulents de chaleur).

III-2-3-Equation de transport des contraintes de Reynolds

L'équation de bilan des contraintes de Reynolds s'écrit^[42]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} u''_i u''_j + \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{\rho} \bar{U}_k u''_i u''_j = & \underbrace{-\bar{\rho} u''_i u''_k \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} - \bar{\rho} u''_j u''_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k}}_I \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} u''_i u''_j u''_k)}_{II_a} \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (-\bar{p}' u''_i \delta_{jk} - \bar{p}' u''_j \delta_{ik})}_{II_b} \underbrace{\bar{u}_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \bar{u}_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}_{III} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ik} u''_j + \tau_{jk} u''_i)}_{II_c} \\ & + \underbrace{\bar{p}' \left(\frac{\partial u''_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u''_j}{\partial x_i} \right)}_{IV} - \underbrace{\left(\tau_{ij} \frac{\partial u''_j}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial u''_i}{\partial x_k} \right)}_V \end{aligned} \quad (\text{III-25})$$

Le membre de gauche est la somme de l'évolution temporelle et de la convection par le mouvement moyen des contraintes de Reynolds.

Le membre de droite nous donne terme à terme :

I-Terme de production due au couplage du champ moyen et du champ fluctuant.

II- Terme de diffusion dont une contribution due aux mouvements turbulents(II_a), une autre due aux fluctuations de pression(II_b), et une due aux mouvements moléculaires(II_c)

III-Ce terme traduit l'interaction entre le champ de pression moyenne et les fluctuations de masse volumique et sera par suite négligé.

IV- Terme de pression-dilatation responsable de la redistribution de l'énergie de turbulence sur les trois directions normales.

V-Terme de destruction de l'énergie de turbulence par l'effet de la viscosité correspondant aux processus dissipatifs dus au frottement moléculaire.

Pour le caractériser on définit sous forme tensorielle le taux de dissipation par unité de masse ϵ_{ij} de sorte que :

$$\overline{\rho \varepsilon_{ij}} = \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_j''}}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial \overline{u_i''}}{\partial x_k} \quad (\text{III-26})$$

Finalement en introduisant les formes condensées L'équation de transport des contraintes de Reynolds se met sous la forme:
$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho u_i'' \widetilde{u''}_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\rho \widetilde{U}_k u_i'' \widetilde{u''}_j} = D_{ij} + P_{ij} + \phi_{ij} - \overline{\rho \varepsilon_{ij}} \quad (\text{III-27})$$

Où D_{ij} , P_{ij} , ϕ_{ij} et $\overline{\rho \varepsilon_{ij}}$ désignent respectivement les tenseurs de diffusion, de production, de redistribution et de destruction du moment $\overline{\rho u_i'' \widetilde{u''}_j}$

III-3 METHODOLOGIE POUR LA FERMETURE EN UN POINT

La méthodologie pour la fermeture en un point a été systématisée par LUMLEY qui a introduit un ensemble de principes et d'hypothèses qui permettent d'engendrer systématiquement des approximations cohérentes des corrélations inconnues.

LUMLEY montre que les modèles en un point usuel sont basés sur des hypothèses fortes telles que la quasi-homogénéité et la faible anisotropie.

Malgré tout cela plusieurs réserves sont levées car ce formalisme ne traduit pas toujours fidèlement l'essence physique des phénomènes en jeu.

Les modèles aux tensions de REYNOLDS représentent probablement le niveau optimal de fermeture pour les applications pratiques car ils semblent posséder potentiellement une universalité suffisante pour s'appliquer à une large gamme d'écoulements cisailés turbulents; Cependant ils n'ont pas été encore suffisamment testés, leur développement n'est pas achevé et de plus ils sont parfois lourds à traiter numériquement.

Pour toutes ces raisons les fermetures simplifiées sont intéressantes pour les applications industrielles dans lesquelles le détail du champ turbulent n'est pas recherché.

Les fermetures simplifiées sont si nombreuses que nous nous contenterons à travers notre travail d'en étudier trois algébriques : Cebeci-Smith, Baldwin et Lomax, Degani et Schiff, et un modèle de fermeture à deux équations de transports : K-ε de Johns Launder .

La modélisation s'effectue à partir du concept de viscosité tourbillonnaire dû à Boussinesq, elle repose de manière générale sur une hypothèse de transport par gradient du type

$$-\bar{\rho}u''_i \widetilde{\phi''} = \frac{\mu_T}{\sigma_\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} \quad (\text{III-28})$$

En généralisant cette relation, la relation sous forme tensorielle correcte pour les contraintes de Reynolds est :

$$-\bar{\rho}u''_i u''_j = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_l} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\rho}k \quad (\text{III-29})$$

Le terme $-\frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\rho}k$ assure la cohérence physique de l'égalité tensorielle, il est assimilé à une pression turbulente due aux mouvements d'agitation dans le cas des modèles de fermeture algébriques ce terme ne subsiste pas ce qui ramène la relation traduisant les contraintes de Reynolds à la forme suivante:

$$-\bar{\rho}u''_i u''_j = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_l} \right) \quad (\text{III-30})$$

Pour le flux de chaleur nous aurons:

$$-\bar{\rho}u''_i \widetilde{h''} = \frac{\mu_T}{Pr_t} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_i} = K_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (\text{III-31})$$

où $\bar{h} = c_p \bar{T}$ et donc $k_t = \frac{c_p \mu_T}{Pr_t}$

Pr_t est le nombre de Prandtl turbulent fixé à 0.9.

A ce stade la détermination des flux turbulents passe par l'évaluation préalable du seul coefficient μ_T .

Les équations régissant l'écoulement s'écrivent et cela après avoir introduit les termes du tenseur de Reynolds, de la manière suivante.

Equation traduisant la conservation de la masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0 \quad (\text{III-32})$$

Equations traduisant la conservation de la quantité de mouvement:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \\ + \frac{1}{\rho r} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{III-33})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial r} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \\ + \frac{1}{\rho r} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \right] - \frac{1}{\rho} \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial r} \end{aligned} \quad (\text{III-34})$$

ces équations sont valables dans le cas du modèle de fermeture à deux équations, pour ce qui est des modèles de fermetures algébriques les termes $\frac{1}{\rho} \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial x}$, $\frac{1}{\rho} \frac{2}{3} \frac{\partial \rho k}{\partial r}$ n'apparaissent pas.

Equations traduisant le bilan de l'énergie totale

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial r} - a_2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = (\gamma - 1) \left\{ \begin{aligned} & \left[(\lambda_M + 2\mu_M) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right] + \mu_M \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + 2\lambda_M \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial r} + 2\mu_M \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{r} \left[(\lambda_M + 2\mu_M) \frac{v^2}{r} + 2\lambda_M v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) + k \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \rho \varepsilon \end{aligned} \right. \quad (\text{III-35}) \end{aligned}$$

$$\text{où } \begin{cases} \mu = \mu_M + \mu_T \\ \lambda = \lambda_M + \lambda_T \\ K = K_M + K_T \end{cases} \quad (\text{III-36})$$

μ_M ; λ_M ; sont les coefficients de viscosité moléculaire ;

μ_T ; λ_T sont les coefficients de viscosité turbulents.

K_M : coefficient de conductivité moléculaire et K_T coefficient de conductivité turbulent

Cette équation est valable pour le modèle de fermeture à deux équations, dans le cas du modèle de fermeture algébrique l'équation devient:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial r} - a_2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = (\gamma - 1) \left[\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right] \\ & + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ & + \frac{1}{r} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{v^2}{r} + 2\lambda v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) + k \frac{\partial T}{\partial r} \right] \end{aligned} \right] \quad (\text{III-37})$$

III-3-1 Modèles à zéro équation de transport

Ces modèles sont aussi connus sous le nom de modèle de viscosité de la turbulence qui n'est pas une propriété du fluide mais une propriété du mouvement turbulent lui-même, ce qui nous montre que le choix de cette viscosité différera d'un cas d'écoulement à un autre.

Dans les modèles à zéro équation de transport, aucune équation de transport n'est résolue pour calculer les quantités turbulentes, les tensions de REYNOLDS étant directement rattachées aux valeurs moyennes, d'ailleurs ces modèles négligent l'aspect mémoire.

Malgré leurs limitations théoriques, ces schémas demeurent encore utiles à l'approche industrielle de l'ingénieur, les contributions les plus remarquables ont été faites par BOUSSINESQ (1877), PRANDTL (1925, 1942), CLAUSER (1956), ESCUDIER (1966).

Parmi ces modèles nous citerons le modèle de longueur de mélange

III-3-1-a Concept de longueur de mélange

Les théories de longueur de mélange, ont été initialement proposées par TAYLOR (1925-1932) et PRANDTL (1925) et devinrent couramment utilisées, car elles donnent une assez bonne distribution des vitesses moyennes de l'écoulement et des tensions.

A partir du raisonnement dimensionnel, on peut considérer les formes suivantes sachant que :

$$\begin{aligned} \nu_T &= V.L \\ &= L^2 T^{-1} \\ &= V^2 T \end{aligned}$$

On remarque que $\left| \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right| = T^{-1}$ alors PRANDTL en 1925 proposa la forme $\nu_T = l^2 \left| \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right|$ cette

formule introduit une longueur de mélange l .

La distribution de l doit être prescrite avec l'aide d'information purement empirique des formules de longueur de mélange étant disponibles pour les écoulements standards.

Dans notre cas l'expression de la viscosité turbulente prend la forme :

$$\mu_T = \rho l^2 \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III-38})$$

$$\text{où } \lambda_T = \frac{\lambda \mu_T}{\mu} \quad (\text{III-39})$$

$$\text{et } K_T = \gamma R \mu_T / (\gamma - 1) Pr_T \quad (\text{III-40})$$

pour le traitement de la couche limite, il est fait appel à une autre modélisation .

III-3-1-b Modèle de CEBECI-SMITH :

La couche limite turbulente est considérée comme étant formée de deux régions, interne et externe, donc l'expression de la viscosité diffère d'une région à une autre comme suit :

- Pour la région interne le modèle algébrique a été trouvé par une expression semi-empirique en usant de la théorie de la longueur de mélange tel que :

$$\nu_T^{[i]} = l^2 |\nabla \otimes \bar{v}| \quad (\text{III-41})$$

La longueur de mélange est donnée par sa représentation classique de PRANDTL $l = ky$ corrigée par VAN-DRIEST (1956) :

$$l = ky \left(1 - e^{-\left(\frac{y_+}{A} \right)} \right) \quad (\text{III-42})$$

Le facteur $\left(1 - e^{-\left(\frac{y_+}{A} \right)} \right)$ est le facteur d'amortissement de VAN-DRIEST.

Où $k = 0.41$ est la constante de VON-KARMAN

Le paramètre $A = 26$ a été calibré à l'aide des résultats obtenus par l'expérience pour une couche limite.

$$y_+ \text{ est défini par } y_+ = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$



Où τ_0 représente la contrainte de cisaillement à la paroi

et y : la distance à la paroi.

Concernant la région externe nous aurons :

$$v_T^{(o)} = 0.00168 u_e \delta^* F \quad (\text{III-43})$$

u_e : est la vitesse externe à la frontière de la couche limite.

δ^* : est l'épaisseur de déplacement de la couche limite.

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{v}{v_e}\right) dy \quad (\text{III-44})$$

F : représente l'influence de l'intermittence à la frontière de la couche limite elle est donnée par la loi empirique :

$$F = \frac{1}{1 + 5.5 \left(\frac{y}{\delta}\right)^6} \quad (\text{III-45})$$

δ : épaisseur de la couche limite.

Le passage de la formulation de la viscosité pour la couche interne à sa formulation pour la couche externe se fait lorsque la viscosité turbulente de la couche interne est plus grande que sa valeur pour la couche externe.

L'inconvénient par cette méthode, c'est l'obligation de passer par le calcul de la vitesse à la frontière de la couche limite ; Aussi pour parer à cette difficulté, une nouvelle méthode a été introduite par BALDWIN et LOMAX.

III-3-1-c Modèle de BALDWIN et LOMAX :

Dans ce cas la viscosité turbulente est représentée par un modèle à deux couches ; Ainsi selon BALDWIN et LOMAX^[1], la viscosité turbulente est donnée par :

$$\mu_T = \min(\mu_{T,inner}, \mu_{T,outer}) \quad (\text{III-46})$$

$$\mu_{Tinner} = \rho l^2 |\omega| \quad (\text{III-47})$$

$$\mu_{Touter} = \alpha C_{cp} \rho F_{wake} F_{kleb}(y) \quad (\text{III-48})$$

$$F_{wake} = \min(y_{MAX} F_{MAX}, C_{wake} y_{MAX} \frac{U_{dif}^2}{F_{MAX}}) \quad (\text{III-49})$$

L'expression de F_{max} et y_{max} sont déterminés à partir de la fonction :

$$F(y) = y|\omega| \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}}\right) \quad (\text{III-50})$$

Où y_{MAX} est la distance à la paroi où la fonction $F(y)$ atteint sa valeur maximale F_{MAX} .

La fonction F_{kleb} représente le facteur d'intermittence de KLEBANOF qui s'écrit sous la forme :

$$F_{kleb} = \left(1 + 5.5 \left(C_{Kleb} \frac{y}{y_{MAX}}\right)\right)^{-1} \quad (\text{III-51})$$

La quantité U_{dif} , est la différence entre le MAX et le MIN de la vitesse dans un profil.

Tel que : $U_{dif}^2 = MAX(u^2 + v^2) - MIN(u^2 + v^2)$.

Les constantes utilisées sont : $K=0.4$, $C_{ccp} = 1.6$; $C_{KLEB} = 0.3$; $C_{wake} = 0.25$; $\alpha=0.0168$.

La méthode de BALDWIN et LOMAX consiste à ce que, à chaque position de la surface du maillage, une recherche externe est exécutée le long de la normale de la ligne de maillage correspondante pour la valeur maximale du moment de vorticité F_{MAX} et de la distance à la paroi y_{MAX} ou elle se présente.

Le calcul de μ_T le long de la normale à la ligne de maillage est l'étape finale.

La difficulté de la méthode de BALDWIN et LOMAX est de déterminer y_{MAX} pour les différentes valeurs de x nous avons différentes allures de $F(y)$ dont certaines comportent plusieurs maxima dans le modèle originel, la maxima absolu était utilisé pour le calcul de y_{MAX} mais il c'est avéré que certains résultats donnés des valeurs d'écoulement non physique dans certaines régions de l'écoulement.

DEGANI et SCHIFF(1986)^[5] ont trouvé les même difficultés en utilisant le modèle originel où, pour y remédier, ils ont proposé une modification dans le choix de F_{MAX} , eux proposent de prendre le F_{MAX} le plus proche de la paroi.

VISBAL et KNIGHT (1984)^[7] ont utilisé trois différents modèles de BALDWIN et LOMAX lors de leur étude de l'interaction onde de choc –couche limite.

- Le premier modèle est l'originel.
- Le deuxième modèle prend en compte le F_{MAX} le plus éloigné de la paroi, mais pour déterminer le facteur d'amortissement de VAN DRIEST, ils ont remplacé le facteur de contrainte de cisaillement à la paroi τ_w par le facteur de contrainte de cisaillement local défini par la vitesse parallèle à la paroi.

- Le troisième modèle introduit la technique de relaxation de SHANG et HANLAY et cela pour prendre en compte la mémoire de la turbulence, ils ont trouvé que C_{CP} et C_{KLEB} dépendent du nombre de Mach.

III-3-2 Modèle à deux équations de transport

Ces modèles utilisent deux équations de transport^[11] pour évaluer la viscosité tourbillonnaire, une pour déterminer l'échelle de vitesse(K) et la deuxième pour déterminer l'échelle de longueur(L).

Ces équations assurent la convection, la diffusion et la dissipation de l'énergie cinétique de turbulence K et sa dissipation ε de la façon suivante :

$$\frac{D}{DT} = \text{Diffusion (visqueuse et turbulente)} + \text{production} + \text{dissipation}.$$

Le modèle le plus utilisé est le modèle K- ε .

ν_T est obtenue par la formule de Prandtl-Kolmogoroff : $\nu_T = C_\mu l \sqrt{K}$ où \sqrt{K} et l sont respectivement l'échelle de vitesse et l'échelle de longueur de la turbulence.

ν_T La dissipation a été modulée par Jones Launder (1972) comme étant $\varepsilon = \frac{K^{3/2}}{l}$ et

$$\nu_T = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}$$

La structure des équations régissant l'écoulement a la forme d'une équation de transport tel que dans notre cas:

$$\frac{D\rho k}{Dt} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial X_j} \right) + G_K - \rho \varepsilon + W_K \quad \text{(III-52)}$$

$$\frac{D\rho \varepsilon}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_j} \right)}_{\text{diffusion}} + \underbrace{C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} G_K}_{\text{production}} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} f_e \rho \frac{\varepsilon^2}{K}}_{\text{dissipation}} + W_\varepsilon \quad \text{(III-53)}$$

Le terme évanescent dans l'équation de dissipation requière quelques modifications avant d'être valide dans le cas proche paroi.

La corrélation ε prend une valeur non nulle à la paroi pendant que k s'annule, ainsi donc la quantité $\frac{\varepsilon^2}{K}$ tendant vers l'infini est évidemment inacceptable ; Résultat la difficulté est

contournée par le remplacement de ε^2 par $\varepsilon\tilde{\varepsilon}$ où la quantité $\tilde{\varepsilon}$ est définie comme^[39]

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{\frac{1}{2}}}{\partial x_i} \right)^2 \tag{III-54}$$

En effet si l'on se place près d'une paroi les fluctuations de vitesse peuvent être représentées par un développement en fonction de la distance à la paroi :

$$\begin{cases} u_1 = a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots \\ u_2 = b_2 x_2^2 + \dots \\ u_3 = c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \dots \end{cases} \Rightarrow k = \underbrace{\frac{1}{2}(\bar{a}_1^2 + \bar{c}_1^2)}_a x_2^2 + \underbrace{(a_1 a_2 + c_1 c_2)}_b x_2^3 + O(x_2^4)$$

Les coefficients $a_1 a_2 b_2 c_1 c_2 \dots$ sont des fonctions de $x_1 x_3$ et t .

On peut alors évaluer :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_2} \right)^2 = a + 2bx_2 + O(x_2^2) \\ \frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 2a + 2bx_2 + O(x_2^2) \end{cases}$$

On voit que $\tilde{\varepsilon}$ varie comme x_2^2 à la paroi, k et $\tilde{\varepsilon}$ se comportent tous deux en x_2^2 ce qui revient à dire que $\frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{k}$ tend vers une constante.

Où le terme $\frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{k}$ tend vers une valeur finie au voisinage de la paroi.

Le terme G_K de production s'écrit :

$$G_K = (2\mu_T + \lambda_T) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right] + \mu_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + 2\mu_T \frac{v^2}{r^2} + 2\mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \lambda_T \left(\frac{v}{r} \right)^2 + 2\lambda_T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) + 2\lambda \frac{v}{r} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] \tag{III-55}$$

Les fonctions de parois sont :

$$W_K = -2\mu \left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial r_n} \right)^2 \tag{III-56}$$

$$W_e = 2\nu\mu_T \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r_n^2} \right)^2 \tag{III-57}$$

Les équations de transport de k et ε deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\lambda_T + 2\mu_T}{\rho} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{\mu_T}{\rho} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{2\lambda_T}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2\mu_T}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] - \varepsilon - \frac{2\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x} + \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon}{r} \left[\frac{\lambda_T + 2\mu_T}{\rho} \frac{v^2}{r} + \frac{2\lambda_T v}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] \right] \end{aligned}$$

(III-58)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{C_{\varepsilon 1} \varepsilon}{k} \left\{ \frac{\lambda_T + 2\mu_T}{\rho} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{\mu_T}{\rho} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{2\lambda_T}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2\mu_T}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} \right\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] - \frac{C_{\varepsilon 2} \varepsilon}{k} \left[\varepsilon - \frac{2\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x} + \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial r} \right) \right] + \frac{2\mu_M \mu_T}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right)^2 \right] \\ + \frac{\varepsilon}{r} \left\{ \frac{C_{\varepsilon 1} \varepsilon}{k} \left[\frac{\lambda_T + 2\mu_T}{\rho} \frac{v^2}{r} + \frac{2\lambda_T v}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] \right] + \frac{2r\mu_M \mu_T}{\rho^2} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right\} \end{aligned}$$

(III-59)

A partir des équations précédentes et des quantités moyennes, l'analyse dimensionnelle nous

$$\text{amène à poser : } \mu_T = C_\mu f_\mu \bar{\rho} \frac{K^2}{\varepsilon}$$

(III-60)

Les fonctions d'amortissement sont :

$C_{\varepsilon 1} = 1.44$ (Le choix de $C_{\varepsilon 1}$ a été fixé par optimisation numérique sur divers écoulements turbulents classiques sur paroi plane dans la zone de cisaillement constant (partie logarithmique du profil de vitesse) et la valeur a été préconisée par Launder B.E, Reece G.J et Rodi.W) 1975

$$C_{\varepsilon 2} = C_2 f_\varepsilon$$

Les expériences de Batchelor G.K et Townsend A.A (1948)^[11] ont suggéré la formule

$$\text{empirique : } f_\varepsilon = \left(1 - 0.22 \exp \left(- \left(\frac{R_T}{6} \right)^2 \right) \right)$$

$$C_\mu = 0.09$$

(III-61)

$$f_{\mu} = \exp \left[\frac{-3.4}{(1+0.02R_T)^2} \right]$$

La valeur de C_2 est déterminée par référence à l'expérience de décroissance d'une turbulence isotrope derrière grille aux grands nombres de Reynolds (période initiale de la décroissance) :

$$C_2 = 1.94$$

$$\sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = 1.3 \quad R_T = \frac{\bar{\rho} K^2}{\mu \varepsilon} \quad (III-62)$$

Pour ce qui est du traitement des conditions aux limites concernant les termes de turbulence ils sont comme suit :

A l'entrée de la tuyère :

Les conditions aux limites du modèle de turbulence est la spécification de K et ε pour le modèle à deux équations de transport celle ci est faite en suivant la procédure de (B.E Launder, A.Morse, W.Rodi et D.B.Spalding (1972))^[41] suivante :

La valeur de K est calculée par l'équation : $k = \frac{\mu_T \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|}{0.3 \rho}$

Où $\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$ et ρ sont déterminés à partir du profil de vitesse interne

Et μ_T est déterminé par le modèle de longueur de mélange.

La valeur de la viscosité turbulente, est calculée en utilisant l'équation (III 60) sauf que dans ce

cas le Reynolds est très grand ce qui réduit l'équation à : $\mu_T = \frac{C_{\mu} \rho k^2}{\varepsilon}$

Les conditions à la paroi :

Les conditions à la paroi pour le modèle à deux équations sont l'annulation de k et du gradient de ε , $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0$ (Jones-launders).

La sortie de la tuyère :

Dans ce cas nous utilisons l'extrapolation de k et ε pour le modèle à deux équations.

CHAPITRE IV- METHODE NUMERIQUE

IV-1-LE MAILLAGE

IV-1-1-Transformation du domaine physique en domaine mathématique

Les systèmes physiques continus tels que les écoulements de fluides autour d'un avion ou dans une tuyère et d'autres problèmes physiques sont généralement modélisés par des équations différentielles partielles. Pour que la simulation soit exécutable sur un ordinateur, les équations doivent être discrétisées par un nombre fini de points dans l'espace et dans le temps pour chaque variable tels que la vitesse, la densité.

Les méthodes de discrétisations tels que les éléments finis, les volumes finis, les différences finis utilisent les points voisins pour calculer les dérivées, pour cela le concept de maillage est introduit.

Le maillage que nous utiliserons dans notre cas d'étude est un maillage simple.

Le passage d'un domaine physique à un domaine mathématique pour la tuyère se fait en deux étapes :

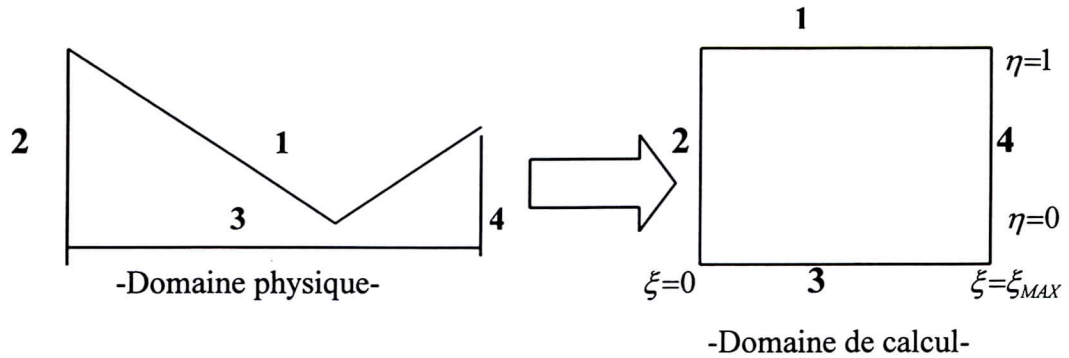
Tout d'abords, nous passerons des coordonnées (x, y, t) à un domaine $((\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\tau}))$

Par la transformation de la géométrie du cas étudié en une géométrie rectangulaire

En appliquant les transformations qui suivent:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = x \\ \bar{\eta} = \frac{r}{r_w} \\ \bar{\tau} = t \end{cases}$$

(IV-1)



-Schéma-IV-1-Représentation du passage du domaine physique au domaine de calcul-

- 1 :Paroi
- 2: Entrée de la tuyère.
- 3 : Axe de la tuyère.
- 4 : Sortie de la tuyère.

r_w : Valeur de r au niveau des parois de la tuyère qui est fonction de x.

Après cela nous passons de ce système de coordonnées $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{\tau})$ à un autre système de

Coordonnées (ξ, η, τ) et cela pour respecter l'uniformité du maillage :

$$\begin{cases} \xi = \xi(\bar{x}) \\ \eta = \eta(\bar{r}) \\ \tau = \bar{\tau} \end{cases} \tag{IV-2}$$

En utilisant la définition de la dérivée de la fonction à plusieurs variables :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \omega \frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial r} = \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial}{\partial \eta} \end{cases}$$

(IV-3)

Nous recherchons les valeurs des paramètres $\alpha, \beta, \omega, \delta$.

$$(IV-4) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (IV-5)$$

avec $\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} = 1$ et $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} = -\frac{r}{r_w^2} \frac{\partial r_w}{\partial x}$

On trouve $\left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\xi}} \\ \alpha = \left(-\frac{r}{r_w^2} \frac{\partial r_w}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\eta}} \end{array} \right.$ on aura: $\frac{\partial}{\partial x} = \omega \frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial}{\partial \eta}$ (IV-6)

Dans notre cas $\frac{\partial \xi}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\eta}} = 1$ cas où l'espacement est constant dans tout le domaine.

Dans le cas de r, nous avons:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (IV-7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\eta}} \frac{1}{r_w} \frac{\partial}{\partial \eta} \Rightarrow \beta = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\eta}} \frac{1}{r_w}$$

Le paramètre α peut s'écrire sous la forme : $\alpha = -\beta \bar{\eta} \frac{\partial r_w}{\partial x}$

Dans le cas t : $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta}$ (IV-8)

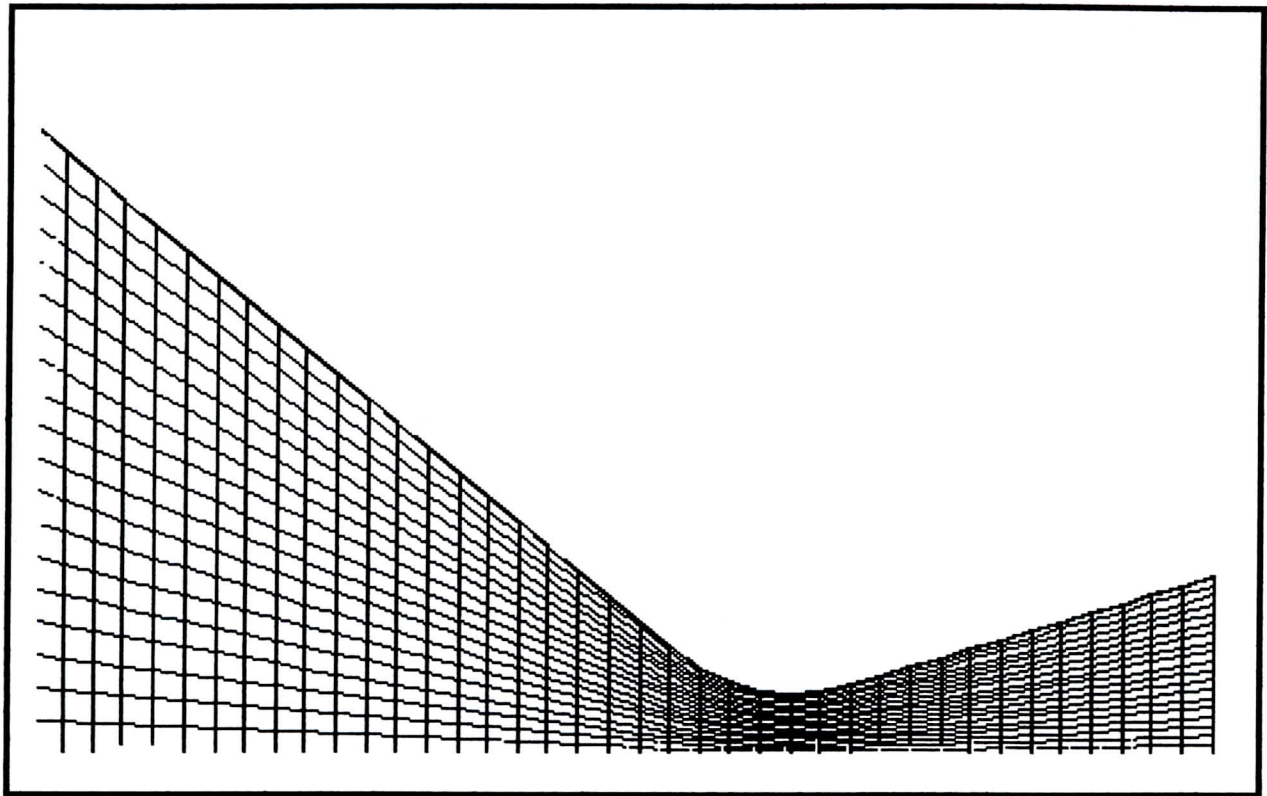
Avec $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} = 1 \\ \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\tau}} = 1 \end{array} \right.$ (IV-9)

Et comme $r_w = f(x, t)$ alors $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{r}{r_w} \right)$ (IV-10)

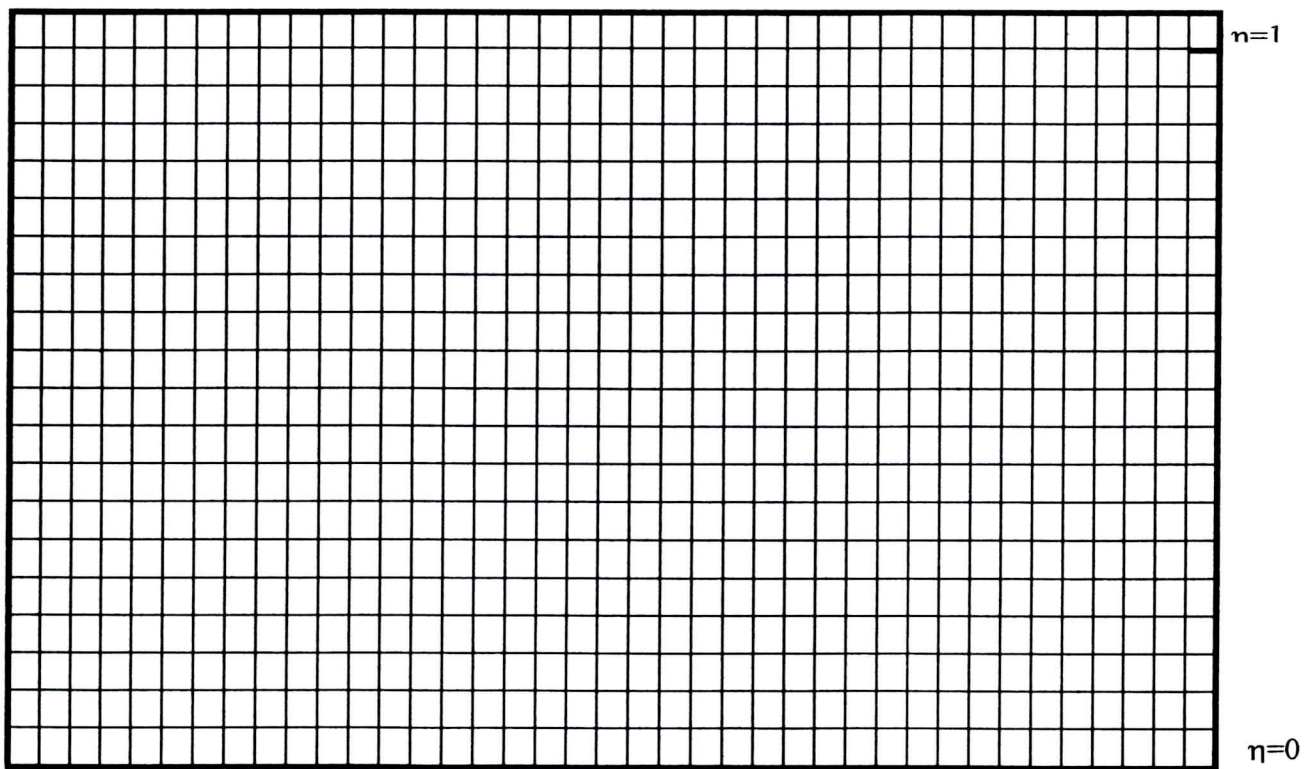
Dans notre cas r_w ne dépend pas du temps alors $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \delta = 0$

Nous déduisons que $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$

Le maillage de la tuyère de notre cas d'étude en 40x20 nœuds nous donne:



Schema-IV-2-Domaine physique



$\xi=0$

Schema-IV-3-Domaine mathématique-

$\xi=\xi_{MAX}$

IV-1-2-Transformation des équations fondamentales

En introduisant le changement de variables dans les équations nous Obtenons après avoir

$$\text{posé : } \begin{cases} \bar{V} = \alpha u + \beta v \\ r = \bar{\eta} r_w \end{cases} :$$

IV-1-2-a-Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + u \omega \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \bar{V} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho \left[\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right] = 0 \quad (\text{IV-11})$$

IV-1-2-b-Equation de conservation de la quantité de mouvements suivant ξ

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \omega u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \left(\omega \frac{\partial p}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) &= \frac{1}{\rho} \omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \lambda \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \\ &+ \frac{1}{\rho} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \lambda \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \\ &+ \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\rho R} \left[(\lambda + \mu) \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \mu \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \\ &- \frac{1}{\rho} \frac{2}{3} \left(\omega \frac{\partial \rho k}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial \rho k}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

(IV -12)

IV-1-2-c-Equation de conservation de la quantité de mouvement suivant η

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \omega u \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} &= \frac{1}{\rho} \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\lambda + 2\mu) \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \omega \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \lambda \frac{u}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{\rho} \omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\mu \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] \\ &+ \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\rho R} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{v}{R} \right) \right] \\ &- \frac{2}{3\rho} \beta \frac{\partial \rho k}{\partial \eta} \end{aligned}$$

(IV-13)



IV-1-2-d-Equation de bilan de l'énergie totale:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + u\omega \frac{\partial p}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial p}{\partial \eta} - a^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + u\omega \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right] = (\gamma - 1) \left\{ \begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left[\left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\ & \mu \left[\left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \right] + 2\lambda \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left(\beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \\ & + 2\mu \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \left(\omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k \left(\omega \frac{\partial T}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right) \right) \\ & + \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \left(\omega \frac{\partial T}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right) + \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{R} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{v^2}{R} \right] \\ & + \frac{1}{R} \left[2\lambda v \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + k \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \rho \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-14})$$

IV-1-2-e-Equation de l'énergie cinétique de turbulence du modèle K-ε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \tau} + u\omega \left(\frac{\partial k}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) + \bar{v} \left(\beta \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) &= \frac{\lambda_T + 2\mu_T}{\rho} \left[\left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\mu_T}{\rho} \left[\left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{2\lambda_T}{\rho} \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left(\beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{2\mu_T}{\rho} \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \\ &\frac{1}{\rho} \left[\omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \left(\omega \frac{\partial k}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right] + \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \left(\omega \frac{\partial k}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right] \right] \\ &+ \frac{1}{\rho} \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \beta \frac{\partial k}{\partial \eta} \right] - \varepsilon - \frac{2\mu}{\rho} \left(\omega \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial \eta} \right) \\ &+ \frac{\varepsilon}{r} \left[\frac{\lambda_T + 2\mu_T}{\rho} \frac{v^2}{r} + \frac{2\lambda_T v}{\rho} \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\rho} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \beta \frac{\partial k}{\partial \eta} \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{IV-15})$$

IV-1-2-f-Equation de la dissipation de l'énergie cinétique de turbulence du modèle K-ε:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + u \omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} + v \beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} = \frac{C_{\varepsilon 1} \varepsilon}{k} & \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\lambda_T + 2\mu_T}{\rho} \left[\left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\mu_T}{\rho} \left[\left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \right] \right] \\ & + \frac{2\lambda_T}{\rho} \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left(\beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{2\mu_T}{\rho} \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{1}{\rho} \omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \left(\omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \left(\omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{\rho} \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right] - \frac{C_{\varepsilon 2} \varepsilon}{k} \left[\varepsilon - \frac{2\mu}{\rho} \left(\omega \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial \eta} \right) \right] \\
 & + \frac{2\mu_M \mu_T}{\rho^2} \left[\left(\omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\omega \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)^2 + \left(\omega^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\omega \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right)^2 + \left(\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)^2 + \left(\beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] \\
 & + \frac{\varepsilon}{r} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{C_{\varepsilon 1} \varepsilon}{k} \left[\frac{\lambda_T + 2\mu_T}{\rho} \frac{v^2}{r} + \frac{2\lambda_T v}{\rho} \left(\left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\rho} \left[\left(\mu_M + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \left(\beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) \right] \right] \right] \\ & + \frac{2r\mu_M \mu_T}{\rho^2} \left[\left(\frac{1}{r} \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{2}{r} \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left(\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \right] \\ & + \frac{2}{r} \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \left(\beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{IV-16}$$

IV-2-SCHEMA NUMÉRIQUE :

Il existe plusieurs méthodes numériques qui permettent de résoudre le système formé par les équations aux dérivées partielles, elles reposent sur des schémas :

- Aux différences finies.
- Aux volumes finis.
- Aux éléments finis.

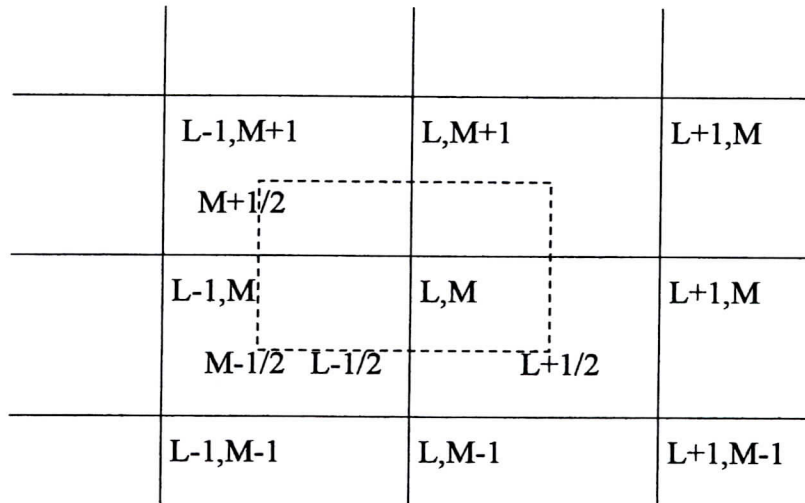
C'est le schéma aux différences finies qui est le plus couramment utilisé, surtout pour l'étude des écoulements compressibles. R.W.MacCormack conçoit en 1969 un schéma explicite du second ordre en temps et en espace utilisant la technique prédicteur-correcteur. Le caractère explicite de la méthode conduit à utiliser un pas d'intégration temporel vérifiant un critère de stabilité de type C.F.L (Courant, Friedrich, Lewis). Cette méthode est l'une des composantes de la famille des méthodes de LAX-WENDROFF.

Le schéma utilisé de Mac Cormack explicite aux différences prédicteur-correcteur permet, connaissant la solution U_{ij}^n à l'instant t , de calculer U_{ij}^{n+1} à l'instant $t+1$ et cela par deux méthodes :

D'une part en utilisant un opérateur aux différences unique ce qui revient à la Méthode originelle de Mac Cormack (1969). D'autre part, en considérant une séquence d'opérateur aux différences mono dimensionnels Mac Cormack et BALDWIN^[47](1975) ce qui est une reprise du schéma de 1969 en y appliquant la technique des directions alternées qui transforme l'approche multidimensionnelle en une succession d'approches unidimensionnelles R.M.BEAM et R.F.WARMIN conçoivent en 1976 une méthode implicite utilisant la méthode A.D.I Ce schéma est précis à l'ordre deux en temps et deux ou quatre en espace. J.L STEGER et R.F.WARMING en 1981 reprennent ce schéma en y introduisant la technique de décomposition des deux flux qui prend en compte les directions caractéristiques de propagation de l'information.

En 1985 R.W.MacCormack conçoit un schéma totalement implicite reprenant la Technique de décomposition des flux Eulerien. Ce schéma inconditionnellement Stable, permet théoriquement de s'affranchir du critère de stabilité C.F.L, il est décomposé en deux étapes, l'une correspondant au schéma explicite de 1969 à deux pas prédicteur-correcteur, l'autre implicite se ramène à la résolution d'un système linéaire à matrice pentadiagonale par blocs. Ces schémas sont précis à l'ordre deux dans l'espace et dans le temps et ils ne peuvent s'appliquer qu'aux points intérieurs du domaine, les frontières nécessitent un traitement particulier.

-Le schéma pour lequel on a opté dans notre cas est le schéma explicite prédicteur-correcteur utilisant un opérateur aux différences, ce schéma est décentré appliquant les différences régressives au prédicteur et progressives au correcteur et pour les termes visqueux, il a été utilisé les différences centrées pour l'étape du prédicteur et gardé comme tel à l'étape du correcteur ce qui rend le schéma précis au second ordre en espace mais précis au premier ordre en temps. Le domaine de calcul est discrétisé suivant un maillage rectangulaire comportant un nombre fini de points (L, M) et peut être représenté par le schéma suivant:



Schema-IV-4-Détail du maillage pour un point (L,M)

Un point quelconque de ce maillage étant noté (L, M), le temps étant le paramètre itératif, notons Δt le pas en temps. Supposons alors qu'à l'instant $(n)\Delta t$ on connaisse toutes les variables dans le domaine de calcul, et déterminons les à l'instant $(n+1)\Delta t$.

Soit L: indice suivant ξ

M: indice suivant η

N: indice suivant τ

IV-2-1 Traitement des nœuds internes :

IV-2-1-a Calcul de la densité :

Pour cela nous passerons par deux étapes :

Etape prédicteur :

Dans cette étape nous utiliserons les différences régressives et les différences centrés pour les termes visqueux.

$$\bar{\rho}_{L,M}^{N+1} = \rho_{L,M}^N - \Delta \tau \left[\begin{aligned} & u_{L,M}^N \omega_{L,M} \left(\frac{\rho_{L,M}^N - \rho_{L-1,M}^N}{\Delta \xi} \right) + \bar{V} \left(\frac{\rho_{L,M}^N - \rho_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} \right) \\ & + \rho_{L,M}^N \left(\omega_{L,M} \left(\frac{u_{L,M}^N - u_{L-1,M}^N}{\Delta \xi} \right) + \alpha_{L,M} \left(\frac{u_{L,M}^N - u_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} \right) + \beta_{L,M} \left(\frac{v_{L,M}^N - v_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} \right) + \frac{v_{L,M}^N}{r} \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{IV-17})$$

Etape correcteur :

Dans cette étape nous utiliserons les différences régressives et les termes visqueux sont gardés comme tels.

$$\rho_{L,M}^{N+1} = \frac{1}{2} \left(\rho_{L,M}^N + \bar{\rho}_{L,M}^N - \Delta \tau \left[\begin{aligned} & \bar{u}_{L,M}^{N+1} \omega_{L,M} \left(\frac{\bar{\rho}_{L+1,M}^{N+1} - \bar{\rho}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \xi} \right) + \bar{\rho}_{L,M}^{N+1} \left(\omega_{L,M} \frac{\bar{u}_{L+1,M}^{N+1} - \bar{u}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \xi} + \alpha_{L,M} \left(\frac{\bar{u}_{L,M+1}^{N+1} - \bar{u}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \eta} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta_{L,M} \left(\frac{\bar{v}_{L,M+1}^{N+1} - \bar{v}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \eta} \right) + \bar{V} \left(\frac{\bar{\rho}_{L,M+1}^{N+1} - \bar{\rho}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \eta} \right) + \frac{\bar{v}_{L,M}^{N+1}}{r} \right) \right] \right) \end{aligned} \right) \quad (\text{IV 18})$$

IV-2-1-b-Calcul de la vitesse u :

Même procédure suivie dans le cas du calcul de la densité:

$$\begin{aligned}
 & \left[\bar{v} \left(\frac{u_{L,M}^N - u_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} \right) + \omega_{L,M} u_{L,M}^N \left(\frac{u_{L,M}^N - u_{L-1,M}^N}{\Delta \xi} \right) + \frac{1}{\rho_{L,M}^N} \left(\omega_{L,M} \left(\frac{p_{L,M}^N - p_{L-1,M}^N}{\Delta \xi} \right) + \alpha_{L,M} \left(\frac{p_{L,M}^N - p_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} \right) \right) \right. \\
 & + \frac{1}{\rho_{L,M}^N} \omega_{L,M} \frac{1}{\Delta \xi} \left[(\lambda + 2\mu)_{L+\frac{1}{2},M} \omega_{L,M} \left(\frac{u_{L+1,M}^N - u_{L,M}^N}{\Delta \xi} \right) - (\lambda + 2\mu)_{L-\frac{1}{2},M} \omega_{L,M} \left(\frac{u_{L,M}^N - u_{L-1,M}^N}{\Delta \xi} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{\rho_{L,M}^N} \omega_{L,M} \frac{1}{\Delta \xi} \left[\left(\lambda_{L+\frac{1}{2},M} \beta_{L,M} \left(\frac{v_{L+1,M+1}^N + v_{L,M+1}^N - v_{L+1,M-1}^N - v_{L,M-1}^N}{4\Delta \eta} \right) \right) \right. \\
 & \left. \left[-\lambda_{L-\frac{1}{2},M} \beta_{L,M} \left(\frac{v_{L,M+1}^N + v_{L-1,M+1}^N - v_{L,M-1}^N - v_{L-1,M-1}^N}{4\Delta \eta} \right) \right] \right] \\
 & + \frac{\alpha_{L,M}}{\rho_{L,M}^N} \frac{1}{\Delta \eta} \left[(\lambda + 2\mu)_{L,M+\frac{1}{2}} \omega_{L,M} \left(\frac{u_{L+1,M+1}^N + u_{L+1,M}^N - u_{L-1,M+1}^N - u_{L-1,M}^N}{4\Delta \xi} \right) \right. \\
 & \left. - (\lambda + 2\mu)_{L,M-\frac{1}{2}} \omega_{L,M} \left(\frac{u_{L+1,M}^N + u_{L+1,M-1}^N - u_{L-1,M}^N - u_{L-1,M-1}^N}{4\Delta \xi} \right) \right] \\
 & + \frac{\alpha_{L,M}}{\rho_{L,M}^N} \frac{1}{\Delta \eta} \left[(\lambda + 2\mu)_{L,M+\frac{1}{2}} \alpha_{L,M} \left(\frac{u_{L,M+1}^N - u_{L,M}^N}{\Delta \eta} \right) - (\lambda + 2\mu)_{L,M-\frac{1}{2}} \alpha_{L,M} \left(\frac{u_{L,M}^N - u_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} \right) \right] \\
 & + \frac{\alpha_{L,M}}{\rho_{L,M}^N} \frac{1}{\Delta \eta} \left[(\lambda)_{L,M+\frac{1}{2}} \beta_{L,M} \left(\frac{v_{L,M+1}^N - v_{L,M}^N}{\Delta \eta} \right) - (\lambda)_{L,M-\frac{1}{2}} \beta_{L,M} \left(\frac{v_{L,M}^N - v_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} \right) \right] \\
 & + \frac{\beta_{L,M}}{\rho_{L,M}^N} \frac{1}{\Delta \eta} \left[(\mu)_{L,M+\frac{1}{2}} \beta_{L,M} \left(\frac{u_{L,M+1}^N - u_{L,M}^N}{\Delta \eta} \right) - (\mu)_{L,M-\frac{1}{2}} \beta_{L,M} \left(\frac{u_{L,M}^N - u_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{\rho_{L,M}^N} \frac{1}{\Delta \eta} \left[(\mu)_{L,M+\frac{1}{2}} \omega_{L,M} \left(\frac{v_{L+1,M+1}^N + v_{L+1,M}^N - v_{L-1,M+1}^N - v_{L-1,M}^N}{4\Delta \xi} \right) \right. \\
 & \left. - (\mu)_{L,M-\frac{1}{2}} \omega_{L,M} \left(\frac{v_{L+1,M}^N + v_{L+1,M-1}^N - v_{L-1,M}^N - v_{L-1,M-1}^N}{4\Delta \xi} \right) \right] \\
 & + \frac{\beta_{L,M}}{\rho_{L,M}^N} \frac{1}{\Delta \eta} \left[(\mu)_{L,M+\frac{1}{2}} \alpha_{L,M} \left(\frac{v_{L,M+1}^N - v_{L,M}^N}{\Delta \eta} \right) - (\mu)_{L,M-\frac{1}{2}} \alpha_{L,M} \left(\frac{v_{L,M}^N - v_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} \right) \right] \\
 & + \frac{(\lambda + \mu)_{L,M}}{\rho_{L,M}^N r} \omega_{L,M} \left(\frac{v_{L+\frac{1}{2},M}^N - v_{L-\frac{1}{2},M}^N}{\Delta \xi} \right) + \frac{(\lambda + \mu)_{L,M}}{\rho_{L,M}^N r} \alpha_{L,M} \left(\frac{v_{L,M+\frac{1}{2}}^N - v_{L,M-\frac{1}{2}}^N}{\Delta \eta} \right) + \frac{\mu_{L,M}}{\rho_{L,M}^N r} \left(\frac{u_{L,M+\frac{1}{2}}^N - u_{L,M-\frac{1}{2}}^N}{\Delta \eta} \right) \\
 & \left. - \frac{1}{\rho_{L,M}^N} \frac{2}{3} \left[\omega_{L,M} \left(\frac{(\rho k)_{L+\frac{1}{2},M} - (\rho k)_{L-\frac{1}{2},M}}{\Delta \xi} \right) + \alpha_{L,M} \left(\frac{(\rho k)_{L,M+\frac{1}{2}} - (\rho k)_{L,M-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} \right) \right] \right]
 \end{aligned}$$

Etape correcteur :

$$u_{L,M}^{N+1} = \frac{1}{2} \left[u_{L,M}^N + \bar{u}_{L,M}^{N+1} - \Delta \tau \left[\bar{V} \left(\frac{\bar{u}_{L,M+1}^{N+1} - \bar{u}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \eta} \right) + \omega \bar{u}_{L,M}^{N+1} \left(\frac{\bar{u}_{L+1,M}^{N+1} - \bar{u}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \xi} \right) + \frac{1}{\bar{\rho}_{L,M}^{N+1}} \left(\omega \left(\frac{\bar{p}_{L+1,M}^{N+1} - \bar{p}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \xi} \right) + \alpha \left(\frac{\bar{p}_{L+1,M}^{N+1} - \bar{p}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \xi} \right) \right) \right] + Q \right]$$

(IV-20)

IV-2-2-Traitement des nœuds frontières :

Le présent travail concerne le traitement numérique des conditions aux limites pour un système d'équation hyperbolique.

L'étude repose sur l'utilisation des équations caractéristiques^[42,43,44,45,46] au lieu des méthodes classiques comme l'extrapolation de quelques variables ou l'utilisation partielle des invariants de Riemann.

Nous utiliserons la méthode des caractéristiques au niveau de l'entrée de la tuyère la sortie et les parois.

La résolution numérique des équations de Navier et Stokes nécessite un contrôle précis des ondes numériques réfléchies à l'intérieur du domaine de calcul.

Certains codes de calcul utilisent une approche artificielle traduite par une dissipation numérique supplémentaire aux voisinages des frontières du domaine de calcul afin d'amortir l'amplitude de ces ondes réfléchies.

Dans notre cas nous utilisons une autre technique numérique basée sur des mécanismes physiques de propagation d'ondes le long des lignes caractéristiques.

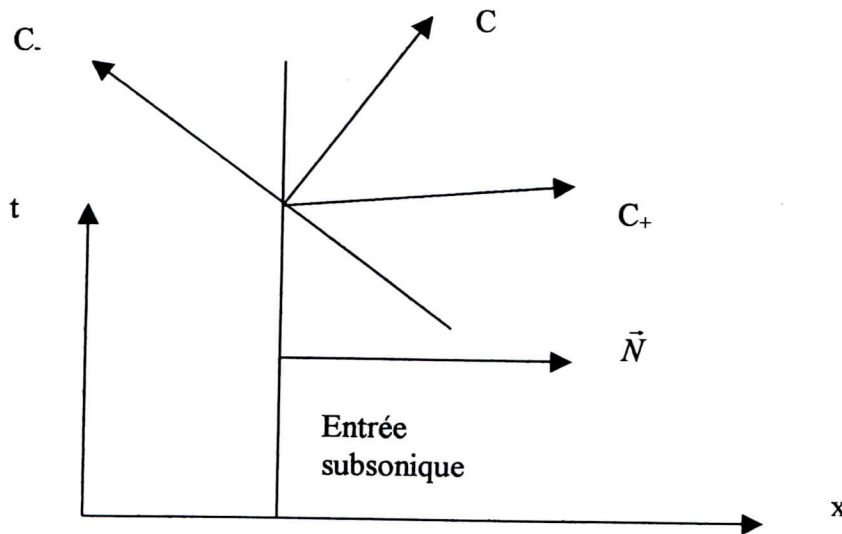
La méthode consiste à résoudre le système d'équations sur les frontières du domaine en formulation caractéristique car la propagation des informations se fait le long des lignes caractéristiques $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ avec des vitesses associées (C_+, C, C_-) qui sont respectivement :

$(u+c, c, u-c)$.

IV-2-2-a-Entrée subsonique:

Le nombre de conditions aux limites à imposer dépend de la direction de la caractéristique transportant l'information par rapport à la normale à la frontière.

Dans les cas d'une entrée subsonique les vitesses C_+ , C_- sont positives ce qui revient à dire que leurs caractéristiques associées sont porteuses d'informations extérieures au domaine de calcul pour ce qui est de C_- elle est négative donc la caractéristique associée est porteuse d'une information venant de l'intérieur du domaine qui est une extension de la frontière le long de la caractéristique associée à C_- qu'il est permis de fixer arbitrairement.



-Schéma-IV-5-interaction des lignes caractéristiques avec l'entrée subsonique de la tuyère-

Les grandeurs physiques du plan d'entrée sont liées aux conditions réservoir par les relations

$$\text{isentropiques : } \frac{P_T}{P} = \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{IV-21})$$

$$\frac{T_T}{T} = \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right] \quad (\text{IV-22})$$

Pour déterminé complètement le champ au plan d'entrée du domaine de calcul, nous procédons de la manière suivante :

1/Poser un nombre de Mach initial.

$$2/\text{Calcul de P et T par : } \frac{P_T}{P_{1,M}^N} = \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{IV-23})$$

$$\frac{T_T}{T_{1,M}^N} = \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right] \quad (\text{IV-24})$$

$$3/\text{Calcul de } \rho : \quad \rho_{1,M}^N = \frac{P_{1,M}^N}{T_{1,M}^N R} \quad (\text{IV-25})$$

4/La vitesse u est calculée en intégrant l'équation de caractéristique et celle de compatibilité suivante : $dp - \rho a du = (\Psi_4 + a^2 \Psi_1 - \rho a \Psi_2) d\tau$ (IV-26)

$$d\xi = \alpha(u-a)d\tau \quad (\text{IV-27})$$

5/La vitesse v est calculée à partir de l'angle d'entrée du fluide tel que :

$$\tan \theta = \frac{v_{1,M}^N}{u_{1,M}^N} \Rightarrow v_{1,M}^N = u_{1,M}^N \tan \theta \quad (\text{IV-28})$$

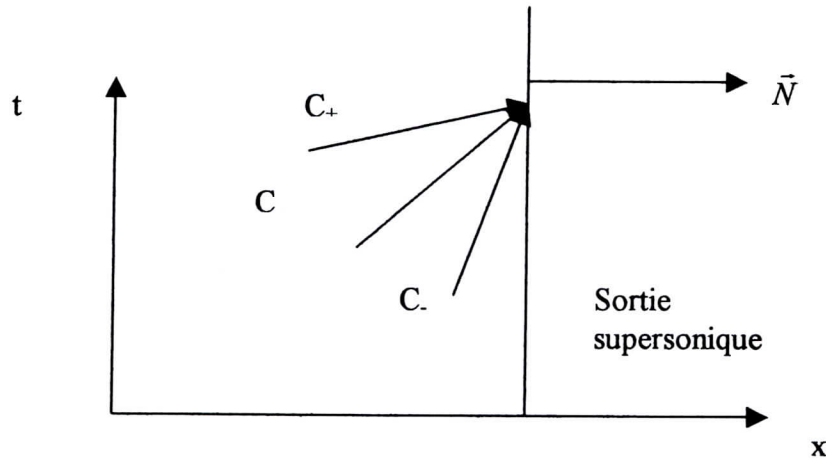
6/On calcul à présent le nombre de Mach à partir des valeurs de u , v , p et ρ en utilisant la

$$\text{relation : } M = \frac{\left(u_{1,M}^N{}^2 + v_{1,M}^N{}^2 \right)}{\left(\frac{\gamma P_{1,M}^N}{\rho_{1,M}^N} \right)} \quad (\text{IV-29})$$

7/Nous itérons la procédure de 2 \rightarrow 7 jusqu'à ce que $|M_{i+1} - M_i| \leq \text{precision} = 10^{-3}$ dans notre cas.

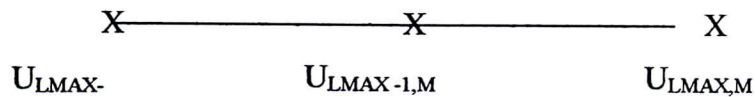
IV-2-2-b-Sortie supersonique :

Dans ce cas le traitement des conditions aux limites est plus simple vu que toutes les caractéristiques sont du même signe, l'information se propage de l'amont vers l'aval.



-Schéma –IV-6-interaction des lignes de caractéristique avec la sortie supersonique de la tuyère-

Comme les conditions externes n'influent pas sur l'écoulement interne de la tuyère, nous utilisons l'extrapolation pour le calcul des conditions aux limites à la sortie :



$$u_{LMAX-1,M}^N = \frac{u_{LMAX,M}^N + u_{LMAX-2,M}^N}{2} \Rightarrow u_{LMAX,M}^N = u_{LMAX-1,M}^N + (u_{LMAX-1,M}^N - u_{LMAX-2,M}^N) \quad (IV-30)$$

Et donc nous trouvons le même résultat pour :

$$v_{LMAX,M}^N = v_{LMAX-1,M}^N + (v_{LMAX-1,M}^N - v_{LMAX-2,M}^N) \quad (IV-31)$$

$$p_{LMAX,M}^N = p_{LMAX-1,M}^N + (p_{LMAX-1,M}^N - p_{LMAX-2,M}^N) \quad (IV-32)$$

$$\rho_{LMAX,M}^N = \rho_{LMAX-1,M}^N + (\rho_{LMAX-1,M}^N - \rho_{LMAX-2,M}^N) \quad (IV-33)$$

IV-2-2-c-Traitement des nœuds sur l'axe de la tuyère :

L'axe de la tuyère est considéré dans notre cas d'étude comme un axe de symétrie ce qui revient à traiter les nœuds de l'axe comme des nœuds internes tout en leur appliquant les conditions de symétrie et qui sont :

1/ $v=0$ (On force l'écoulement à être parallèle à l'axe de la tuyère)

$$2/ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

$$3/ \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = 0$$

$$4/ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v}{r} = \frac{\partial v}{\partial r} \text{ règle de l'hôpital.}$$

Calcul de la densité :

Etape prédicteur :

$$\bar{\rho}_{L,M}^{N+1} = \rho_{L,M}^N - \Delta \tau \left[\begin{aligned} & u_{L,M}^N \omega_{L,M} \left(\frac{\rho_{L,M}^N - \rho_{L-1,M}^N}{\Delta \xi} \right) + \bar{V} \left(\frac{\rho_{L,M}^N - \rho_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} \right) \\ & + \rho_{L,M}^N \left(\omega_{L,M} \left(\frac{u_{L,M}^N - u_{L-1,M}^N}{\Delta \xi} \right) + \alpha_{L,M} \left(\frac{u_{L,M}^N - u_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} \right) + \beta_{L,M} \left(\frac{v_{L,M}^N - v_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} \right) + \frac{v_{L,M}^N}{r} \right) \end{aligned} \right] \quad (\text{IV-34})$$

Comme : $v_{L,M}^N = 0$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{\rho_{L,M}^N - \rho_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} = 0 \quad (\text{IV-35})$$

$$\text{et comme } \beta \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial r} \Rightarrow \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{r} = 2 \frac{v}{r} = 2\beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (\text{IV-36})$$

L'équation devient :

$$\bar{\rho}_{L,M}^{N+1} = \rho_{L,M}^N - \Delta \tau \left[u_{L,M}^N \omega_{L,M} \left(\frac{\rho_{L,M}^N - \rho_{L-1,M}^N}{\Delta \xi} \right) + \rho_{L,M}^N \left(\omega_{L,M} \left(\frac{u_{L,M}^N - u_{L-1,M}^N}{\Delta \xi} \right) + \frac{2v_{L,M}^N}{r} \right) \right] \quad (\text{IV-37})$$

Etape correcteur :

$$\rho_{L,M}^{N+1} = \frac{1}{2} \left[\rho_{L,M}^N + \bar{\rho}_{L,M}^{N+1} - \Delta \tau \left[\bar{u}_{L,M}^{N+1} \omega_{L,M} \left(\frac{\bar{\rho}_{L+1,M}^{N+1} - \bar{\rho}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \xi} \right) + \bar{\rho}_{L,M}^{N+1} \left(\omega_{L,M} \frac{\bar{u}_{L+1,M}^{N+1} - \bar{u}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \xi} + \alpha_{L,M} \left(\frac{\bar{u}_{L,M+1}^{N+1} - \bar{u}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \eta} \right) + \beta_{L,M} \left(\frac{\bar{v}_{L,M+1}^{N+1} - \bar{v}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \eta} \right) + \bar{v} \left(\frac{\bar{\rho}_{L,M+1}^{N+1} - \bar{\rho}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \eta} \right) + \frac{\bar{v}_{L,M}^{N+1}}{r} \right) \right] \right] \quad (IV-38)$$

devient :

$$\rho_{L,M}^{N+1} = \frac{1}{2} \left(\rho_{L,M}^N + \bar{\rho}_{L,M}^{N+1} - \Delta \tau \left[\bar{u}_{L,M}^{N+1} \omega_{L,M} \left(\frac{\bar{\rho}_{L+1,M}^{N+1} - \bar{\rho}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \xi} \right) + \bar{\rho}_{L,M}^{N+1} \left(\omega_{L,M} \frac{\bar{u}_{L+1,M}^{N+1} - \bar{u}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \xi} + 2 \frac{\bar{v}_{L,M}^{N+1}}{r} \right) \right] \right) \quad (IV-39)$$

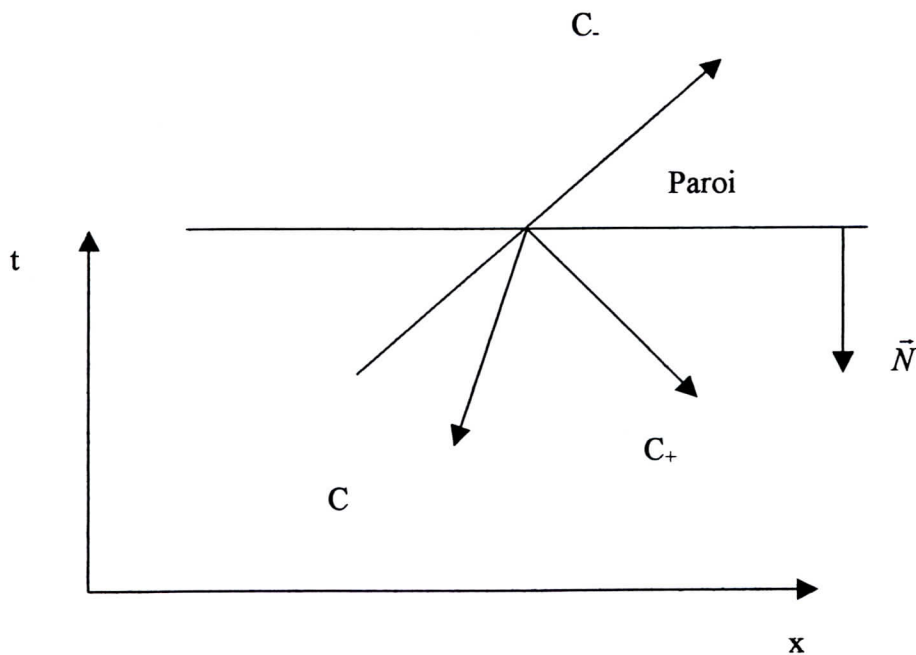
Calcul de la vitesse u :

Etape prédicteur :

$$\bar{u}_{L,M}^{N+1} = u_{L,M}^N - \Delta \tau \left[\omega_{L,M} u_{L,M}^N \left(\frac{u_{L,M}^N - u_{L-1,M}^N}{\Delta \xi} \right) + \frac{1}{\rho_{L,M}^N} \left(\omega_{L,M} \left(\frac{p_{L,M}^N - p_{L-1,M}^N}{\Delta \xi} + \alpha_{L,M} \left(\frac{p_{L,M}^N - p_{L,M-1}^N}{\Delta \eta} \right) \right) \right) + \frac{1}{\rho_{L,M}^N} \omega_{L,M} \frac{1}{\Delta \xi} \left[(\lambda + 2\mu)_{L+\frac{1}{2},M} \omega_{L,M} \left(\frac{u_{L+1,M}^N - u_{L,M}^N}{\Delta \xi} \right) - (\lambda + 2\mu)_{L-\frac{1}{2},M} \omega_{L,M} \left(\frac{u_{L,M}^N - u_{L-1,M}^N}{\Delta \xi} \right) \right] + \frac{(\lambda + \mu)_{L,M}}{\rho_{L,M}^N r} \omega_{L,M} \left(\frac{v_{L+\frac{1}{2},M}^N - v_{L-\frac{1}{2},M}^N}{\Delta \xi} \right) + \frac{1}{\rho_{L,M}^N} \frac{2}{3} \left[\omega_{L,M} \left(\frac{(\rho k)_{L+\frac{1}{2},M} - (\rho k)_{L-\frac{1}{2},M}}{\Delta \xi} \right) \right] \right] \quad (IV-40)$$

Etape correcteur :

$$u_{L,M}^{N+1} = \frac{1}{2} \left[u_{L,M}^N + \bar{u}_{L,M}^{N+1} - \Delta \tau \left[\omega_{L,M} \bar{u}_{L,M}^{N+1} \left(\frac{\bar{u}_{L+1,M}^{N+1} - \bar{u}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \xi} \right) + \frac{1}{\bar{\rho}_{L,M}^{N+1}} \left(\omega_{L,M} \left(\frac{\bar{p}_{L+1,M}^{N+1} - \bar{p}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \xi} \right) + \alpha_{L,M} \left(\frac{\bar{p}_{L+1,M}^{N+1} - \bar{p}_{L,M}^{N+1}}{\Delta \xi} \right) \right) \right] + Q \right] \quad (IV-41)$$

IV-2-2-d-Traitement des nœuds à la paroi :

**-Schéma –IV-7-interaction des lignes de caractéristique
avec la paroi de la tuyère-**

Pour ce cas la une seule caractéristique est dirigée vers l'extérieure du domaine et donc deux conditions physiques doivent être imposées et ce sera l'annulation des composantes normale et tangentielle de la vitesse le long de la paroi ce qui traduit la condition de la viscosité du fluide.

Les autres variables sont déterminées à partir des données à l'intérieur du domaine de calcul ils peuvent être obtenus par extrapolation à partir des points adjacents à la paroi mais dans notre cas c'est la méthode d'intégration des équations aux caractéristiques qui est appliquée.

Le plan de référence correspondant est $\xi = \text{Constante}$, les dérivées partielles en ξ sont calculées en fonction des valeurs initiales et de la solution à la surface.

Nous appliquons le schéma numérique de Mac Cormack aux différences finies décentrées le terme de convection est traité comme terme source comme détaillé dans annexeB et le gradient de température normale à la paroi est nul (paroi adiabatique) la température à la paroi est calculée à partir de l'équation d'état.

Les équations à intégrer sont :

Le long de la caractéristique :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = v^* \\ dP - a^2 d\rho = \Psi_4 d\tau \\ \beta du - \alpha dv = (\beta \Psi_2 - \alpha \Psi_1) d\tau \end{cases} \quad (\text{IV-42})$$

Le long de la ligne de Mach :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = (v^* + a \alpha^*) \\ dP + \rho \alpha a \frac{du}{\alpha^*} + \rho \beta a \frac{dv}{\alpha^*} = \left(\Psi_4 + a^2 \Psi_1 + \frac{\rho \alpha a}{\alpha^*} \Psi_2 + \frac{\rho a \beta}{\alpha^*} \Psi_3 \right) d\tau \end{cases} \quad (\text{IV-43})$$

L'intégration des équations citées est détaillée dans ce qui suit :

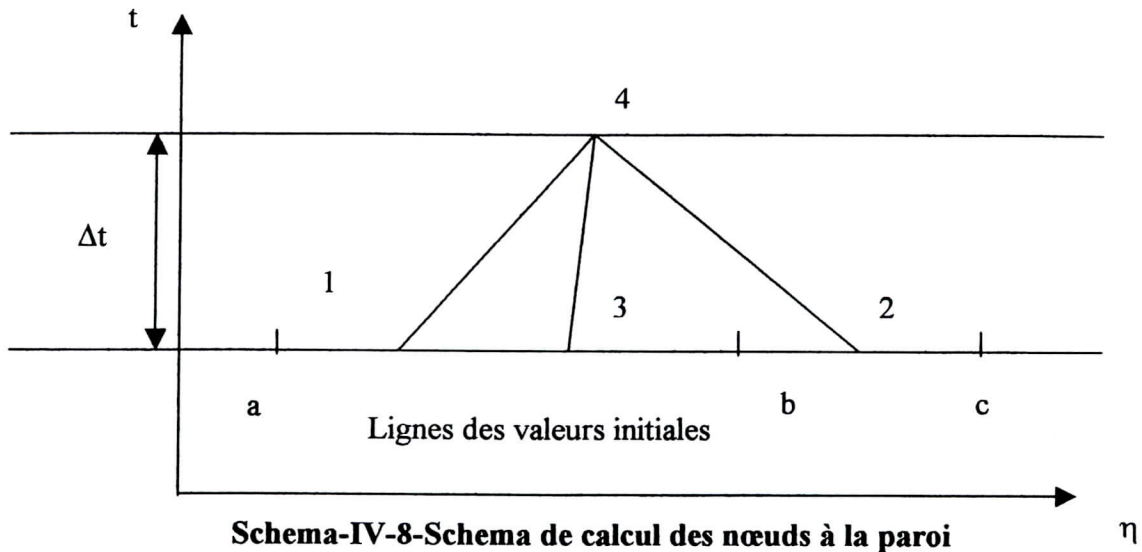
Pour l'intégration des équations de compatibilité et des caractéristiques, nous appliquons la méthode de Mac Cormack prédictor – correcteur.

Dans ce cas les deux types de marches logiques sont possibles :

1/Méthode de la marche directe (Direct marching method) : Dans ce cas les caractéristiques sont projetées en avant par rapport au temps et cela pour déterminer la localisation du point solution.

2/méthode de la marche indirecte ou inverse (Inverse marching method) cette fois-ci les caractéristiques sont projetées en arrière par rapport au temps et les points solutions sont spécifiés de différentes manières.

La deuxième est celle utilisée dans notre cas d'étude.



Le Δt est choisi

, a, b, c : points de données initiales

4: point de solution pré spécifié

3-4 : Trajectoire (Pathline)

1-4 : Ligne de Mach (+a)C₊

2-4 : Ligne de Mach(-a)C₋

Nous donnons dans ce qui suit un exemple d'intégration des équations caractéristiques et de compatibilité :

L'intégration de l'équation de la courbe de caractéristique du système d'équation (IV-43) se fera entre les deux points 1 et 4 comme suit :

$$d\eta = (v^* + a\alpha^*)d\tau \Rightarrow \eta_4 - \eta_1 = (\bar{v}^* + \bar{a}\alpha^*)\Delta t \quad (\text{IV-44})$$

L'étape prédictive :

η_1 est déterminé à partir de l'équation (IV-44), et les valeurs correspondantes v_1^* et a_1 sont calculées par interpolation, et on réitère jusqu'à aboutir à la solution η_1 , et l'on calcule les paramètres (p, ρ, u, v et $\Psi_{1,2,3,4}$) en ce point.

Étape correctrice :

Par le même processus décrit précédemment nous calculons le nouveau η_1 et cela en utilisant les valeurs prédites dans l'étape précédente ainsi que tous les autres paramètres.

Calcul de la pression :

L'équation de compatibilité correspondante est utilisée pour calculer P_4 et cela comme suit :

$$P_4 - P_1 + \frac{\bar{\rho}_{41}\bar{a}_{41}}{\alpha^*}[\alpha(u_4 - u_1)] + \frac{\rho_{41}}{\alpha^*}[\beta\bar{a}_{41}(v_4 - v_1)] = \left(\bar{\Psi}_4 + \bar{a}_{41}^2\bar{\Psi}_1 + \frac{\bar{\rho}_{41}\bar{a}_{41}\alpha}{\alpha^*}\bar{\Psi}_2 + \frac{\bar{\rho}_{41}\bar{a}_{41}\beta}{\alpha^*}\bar{\Psi}_3 \right) \Delta t \quad (\text{IV-45})$$

Et comme $u_4 = v_4 = 0$ nous obtenons. :

$$P_4 - P_1 - \frac{\bar{\rho}_{41}\bar{a}_{41}}{\alpha^*}[\alpha u_1] - \frac{\rho_{41}}{\alpha^*}[\beta a_1 v_1] = \left(\bar{\Psi}_4 + a_1^2\bar{\Psi}_1 + \frac{\bar{\rho}_{41}a_1\alpha}{\alpha^*}\bar{\Psi}_2 + \frac{\bar{\rho}_{41}a_1\beta}{\alpha^*}\bar{\Psi}_3 \right) \Delta t$$

Calcul de la densité :

Pour ce qui est de la densité nous intégrons l'équation : $dP - a^2 d\rho = \Psi_4 d\tau$

IV-3 CRITERE DE STABILITE

Afin d'éviter toute instabilité due à l'amplification des erreurs d'arrondies au cours du processus itératif de calcul, il faut vérifier la condition de stabilité de type C.F.L (Courant-Freiderich-Lewy) qui se traduit par une dimension temporelle d'étape Δt .

$\Delta t = \min(\Delta t_x, \Delta t_r)$ ou :

$$\Delta t_x = \frac{A}{\left[\frac{(|u|+a)}{\Delta x} + \frac{\mu}{A_1 \rho \Delta x^2} \right]} \quad \Delta t_r = \frac{A}{\left[\frac{(|v|+a)}{\Delta r} + \frac{\mu}{A_1 \rho \Delta r^2} \right]} \quad (\text{IV-46})$$

Où A et A_1 sont des constantes qui prennent les valeurs : $\begin{cases} A = 0.9 \\ A_1 = 0.25 \end{cases} \quad (\text{IV-47})$

IV-4 DESCRIPTION DU CODE DE CALCUL :

Le programme VNAP2 est un code de calcul des écoulements turbulent, laminaire non visqueux, régulier et instable.

VNAP2 résolvent les équations de Navier-Stokes bidimensionnelle dans le cas compressible et dépendant du temps. Les nœuds internes sont calculés en utilisant le schéma de Mac Cormack.

Les nœuds frontières sont calculés en utilisant le schéma des plans de référence caractéristique en traitant les termes visqueux comme des fonctions sources.

Une viscosité artificielle explicite est utilisée pour le calcul des ondes de choc.

Le programme VNAP2 lance une application en lisant les données d'entrée puis fait un calcul de la géométrie en faisant appel au subroutine (GEOM, GEOMCB, GEOMLU) puis fait le calcul de la surface initial des valeurs unidimensionnelles en faisant appel à la subroutine ONEDIM.

Le programme calcul chaque partie de l'écoulement dans une subroutine spécifique ainsi pour les nœuds interne, il fait appel à la subroutine INTER, pour l'entrée la subroutine INLET, pour la sortie la subroutine EXITT pour les nœuds à la paroi la subroutine WALL ,pour ce qui est des termes visqueux comme la viscosité artificielle pour les ondes de choc, la viscosité turbulente et moléculaire pour le cas visqueux et turbulent, ils sont calculés dans la subroutine VISCOUS et les conditions aux limites des variables turbulentes sont calculées dans la subroutine TURBC.

déduites pour les évolutions de la pression et de la température : Les conditions amont de la génération de l'écoulement sont reproduites dans la partie convergente. Une diminution brusque et brutale est constatée dans le col de la tuyère et est prévue par tous les modèles. L'évolution globale donnée par tous les modèles est conforme à la variation de ces paramètres dans un convergent-divergent supersonique.

Pour compléter la description générale de l'écoulement, on présente sur les figures V-5-2-a et V-5-2-b respectivement les évolutions de la pression pariétale et de la température pariétale le long de la tuyère. Les quatre modèles donnent les mêmes courbes de pression et de température qui se superposent en une seule courbe dans la partie convergente de la tuyère. La variation observée sur les grandeurs de l'écoulement est confirmée ici par une diminution brutale dans la zone située de part et d'autre du col. Des écarts sensibles sont cependant observés à l'aval du col et dans la partie divergente sur les courbes de la température pariétale. L'analyse des autres résultats permettrait de conclure sur ces évolutions.

V-4 Evolution du champ de vitesse

Les profils de la composante longitudinale de la vitesse moyenne réduite sont représentés sur la figure V-6 dans dix positions longitudinales différentes et qui sont :

$x=0.0115\text{cm}, 0.0302\text{cm}, 0.0433\text{cm}, 0.0471\text{cm}, 0.049\text{cm}, 0.0583\text{cm}, 0.0621\text{cm}, 0.0677\text{cm}, 0.0714\text{cm}, 0.0733\text{cm}.$

Tout cela avec les quatre modèles de turbulence (figures V-6-a à V-6-j). L'évolution est présentée aussi dans le plan de calcul en fonction de l'ordonnée η et les résultats de calcul pour six positions ($x=0.0115\text{cm} ; 0.0302\text{cm} ; 0.0433\text{cm} ; 0.0490\text{cm} ; 0.0677\text{cm} ; 0.0733\text{cm}$) sont superposés et cela pour chaque modèle (figures V-7-a à V-7-d). Nous observons sur les présentations une évolution similaire pour tous les modèles qui est une variation classique dans une tuyère convergente-divergente c'est à dire augmentation de la vitesse, du col jusqu'en sortie du divergent supersonique. Cette variation est visible sur les isovaleurs du nombre de Mach où on enregistre jusqu'à 3.43 pour ce dernier. Ce résultat montre bien l'absence de toute onde de choc le long du divergent.

Nous observons sur les figures présentant les résultats, deux régions que l'on peut dire distinctes aussi bien dans la partie convergente que dans la partie divergente. Ces deux zones sont la zone d'écoulement sain et la zone d'écoulement de proche paroi. Dans la région d'écoulement sain et en dehors d'un faible écart enregistré dans les deux premières sections, tous les modèles convergent vers la même valeur pour chaque section de calcul. Le phénomène d'accélération lente de l'écoulement est observé sur tous les modèles dans cette partie où le régime est subsonique. Dans la zone de proche paroi, on observe une région de

survitesse visible de $x=0.0433\text{cm}$ (en amont du col) à $x=0.049\text{cm}$ (section du col), cette valeur de survitesse n'est enregistrée que sur les profils de Degani-Schiff et de K- ϵ où la grandeur est la même pour les deux modèles. Ce résultat renseigne sur l'incapacité des modèles de Cebeci Smith et de Baldwin et Lomax de capter ce type d'information près de la paroi. Le modèle K- ϵ a montré qu'il reste un modèle qui s'adapte à toute géométrie dans la zone d'écoulement sain et donne une appréciation satisfaisante au niveau de l'écoulement proche paroi. Grâce à la modification apportée au modèle de Baldwin et Lomax sur le moment de vorticité F_{\max} , le modèle de Degani et Schiff ou le Baldwin et Lomax modifié devient capable d'estimer des phénomènes qui ont lieu au niveau de la paroi. La survitesse observée au dessus de la paroi résulterait de la déviation des lignes de courant de l'écoulement extérieur par les parois convergentes, elle disparaît en aval du col, les parois deviennent divergentes. Dans cette partie de la tuyère, les profils de la vitesse montrent un déficit de plus en plus progressif au dessus de la paroi qui témoigne de l'apparition de la couche limite qui s'épaissit progressivement vers l'aval et dont la trace est visualisée en proche paroi sur les profils des isomachs. Ce mécanisme de l'épaississement de la couche limite est plus marqué par le modèle de Cebeci Smith et de Baldwin et Lomax que par ceux de Degani Schiff et K- ϵ . La encore, il pourrait y avoir une surestimation de l'épaisseur de la couche limite.

Les profils de la vitesse longitudinale sont également présentés sur la figure V-7 dans le plan de calcul (ξ, η) pour les mêmes sections. Ils sont quasiment indépendants des modèles de turbulence utilisés dans la zone saine. L  encore on pourrait relever une surestimation au niveau de la couche limite pour les modèles de Cebeci Smith et de Baldwin et Lomax, ces profils traduisent dans cette partie divergente de la tuyère, le comportement de la couche limite turbulente et ressemblent beaucoup à ceux obtenus par Visbal et Knight (1984) en écoulement compressible dans leur étude de l'interaction bidimensionnelle onde de choc couche limite. La comparaison avec les profils obtenus par Zeitoun (1989) sera discutée plus loin dans ce chapitre.

V-5 Evolution de la viscosité turbulente :

L'évolution des profils de la viscosité turbulente adimensionnelle $\frac{\mu_T}{\mu}$ est présentée sur la figure V-8 en fonction de η pour chaque modèle séparé sur différentes sections

La figure V-9 présente l'évolution de la viscosité turbulente adimensionnée, par section mais cette fois-ci pour mettre en comparaison les quatre modèles. Sur la figure V-8 et dans la zone extérieure à la couche limite, le rapport $\frac{\mu_T}{\mu}$ est nul pour les modèles K- ϵ et Degani-Schiff ;

Alors qu'il est de l'ordre de 10 pour le modèle de Cebeci Smith et de Baldwin et Lomax dans les sections qui se trouvent dans la partie convergente de la tuyère. Dans cette région un phénomène de laminarisation est observé à travers la décroissance des valeurs de la viscosité turbulente, cette laminarisation serait due à la forme de la tuyère qui produit une accélération de l'écoulement et empêche donc la transition, la région de laminarisation est plus petite dans le cas du modèle de Degani-Schiff. D'autre part, il est à noter que, la viscosité turbulente adimensionnelle augmente avec η près de la paroi mais diminue rapidement dans le reste de l'écoulement. Ce phénomène est semblable à celui de l'épaisseur de la couche limite.

Par ailleurs et dans le but de bien comprendre ce qui est observé sur la figure V-8, on présente sur la figure V-9 une répartition comparative en fonction de η du rapport $\frac{\mu_T}{\mu}$ obtenu pour chaque modèle et pour les mêmes sections de calcul, excepté pour le modèle K- ϵ , tous les autres modèles prévoient le même résultat à savoir une valeur maximale du rapport $\frac{\mu_T}{\mu}$ près de la paroi pour diminuer rapidement vers le centre de la tuyère avec η . Ce résultat pourrait montrer que le modèle à deux équations de transport K- ϵ n'est pas adapté à ce type de configuration où les modèles algébriques s'avèreraient plus efficace. En effet le phénomène physique observé est celui de la régénération de la turbulence juste après la section du col de la tuyère, dans la région proche de la paroi, cette croissance de la viscosité turbulente dans le divergent mise en évidence par la figure V-8, est due aux valeurs élevées de τ_w dans cette région comme on le verra dans le prochain sous-chapitre, la tendance de nos résultats obtenus ici s'accordent d'une manière satisfaisante avec ceux de Zeitoun, comme on le verra plus loin.

L'observation des résultats obtenus sur la figure V-8 et V-9 montrent des valeurs élevées de la viscosité turbulente dans le cas du modèle de Baldwin et Lomax originel, ce phénomène a été constaté par PANARAS^[48](1997) dans son étude de l'interaction onde de choc couche limite ainsi que par JOHNSON^[49](1992) dans l'étude d'un écoulement bidimensionnel transsonique qui a trouvé une surestimation des valeurs de la viscosité turbulente dans le cas du modèle de Baldwin et Lomax comparé aux résultats expérimentaux

V-6 Evolution de la contrainte de frottement à la paroi

L'évolution de la contrainte de frottement à la paroi adimensionnée par $(\frac{1}{2}\rho_e U_e^2)$ est présentée sur la figure V-13 en fonction de l'abscisse longitudinale x/L de la tuyère. L'allure obtenue pour chaque modèle est une forme de courbe de Gausse, centrée au niveau du col de la tuyère. Cette position est celle du domaine où les grandeurs de l'écoulement possèdent des pics de gradient, alors que dans la région du convergent de la tuyère, τ_w est nulle. Ceci s'explique par

le fait que dans cette région, la vitesse d'écoulement est relativement faible ce qui est confirmé par les profils de la vitesse moyenne figure V-6 où l'on observe une progression très lente dans la partie convergente. D'autre part, cette évolution de τ_w va promettre un régime d'écoulement à forte intensité de turbulence dans la partie divergente et ce à cause des valeurs élevées de τ_w dans cette région.

V-7 Evaluation des iso valeurs :

Les courbes iso valeurs du nombre de Mach, de la pression et de la température obtenues à partir des modèles de K- ϵ , Cebecci Smith, Baldwin et Lomax et Degani-Schiff sont représentées respectivement : Les courbes isomachs sont représentées sur les figures V-10-a à V-13-a, elles sont les mêmes et présentent les mêmes allures dans la région située juste après le col et cela pour tous les modèles. Cependant, elles diffèrent quelque peu dans la deuxième partie du divergent, d'un modèle à l'autre. Ces courbes donnent une visualisation du développement de la couche limite turbulente dans la partie divergente de la tuyère. La différence la plus frappante entre les modèles est l'épaississement de la couche limite visible grâce aux isomachs : Les modèles de Cebeci Smith et de Baldwin et Lomax montrent une couche plus épaisse que celle visualisée par Dégani-Schiff et encore plus que celle obtenue par le modèle K- ϵ . Quant aux valeurs elles mêmes du nombre de Mach, elles sont égales pour tous les modèles où l'on note une évolution de $M=0.29$ à $x=0.040\text{cm}$ jusqu'à $M=3.6$ à $x=0.079\text{cm}$.

Les isobares sont représentées sur les figures V-10-b à V-13-b,. Elles sont les mêmes pour tous les modèles. Les courbes isothermes sont montrées par les figures V-10-c à V-13-c comme pour le nombre de Mach, l'allure de ces courbes diffère d'un modèle à l'autre. On note quand même une grande similarité entre les modèles de Degani-Schiff et K- ϵ et à un degré moindre avec le modèle de Baldwin et Lomax surtout dans la zone avale proche du col.

V-7 Comparaison avec le cas ZEITOUN :

L'un des objectifs de ce travail est l'étude des performances de plusieurs modèles de turbulence appliqués à la même configuration géométrique de la tuyère utilisée par Zeitoun^[47] (1989) et dont certains résultats seront comparés. On présente la comparaison des profils de vitesse et des grandeurs caractéristiques de la couche limite à savoir l'épaisseur de déplacement δ^* et la contrainte de frottement à la paroi τ_p .

La modélisation de Zeitoun a été réalisée en début de son programme de simulation numérique des écoulements en tuyère et autour de corps. Parmi les modèles algébriques utilisés en écoulement supersonique et subsonique, le choix c'est porté sur l'utilisation de modèles à deux échelles dérivées du modèle de Cebeci-Smith .

La première échelle utilisée dans ce modèle est déduite de la définition de Prandtl-Van Driest pour le calcul de la viscosité turbulente interne, la deuxième échelle, prise égale à l'épaisseur de déplacement de la couche limite, est utilisée pour la détermination de la viscosité turbulente externe. L'évaluation de δ^* pendant la résolution numérique des équations de Navier-Stokes constitue la difficulté qui limite l'utilisation du modèle de Cebeci-Smith, cette difficulté a été levée par le modèle de Baldwin et Lomax en utilisant une expression de la viscosité turbulente externe différente de celle de Cebeci-Smith. Ainsi surgit une autre difficulté principale qui est la détermination de la seconde échelle reliée à la viscosité externe. Les résultats présentés ici pour servir de comparaison, sont obtenus de l'utilisation par Zeitoun des deux modèles algébriques suivants : Baldwin-Lomax originel et Baldwin-Lomax modifié ou modèle de Degani-Schiff, dans le calcul numérique de l'écoulement turbulent établi, dans les mêmes conditions et dans la même tuyère .

Les profils de vitesse réduite U/U_c des deux calculs sont présentés séparément sur la figure V-14 les valeurs de la vitesse sont très proches les unes des autres dans la partie convergente de la tuyère et leurs allures et semblable. Près de la paroi, la comparaison des profils montre une illustration des gradients de vitesse quelque peu différents entre les deux calculs, ces différences pourraient provenir des hypothèses différentes dans la procédure de calcul. En effet, une hypothèse d'axisymétrie de l'écoulement est supposée alors que dans l'étude de Zeitoun, l'étude est bidimensionnelle. En dehors de la zone proche de la paroi et à l'extérieur de la couche limite, la similitude des résultats est frappante. Les différences observées sont en fait dues au décalage entre la section longitudinale considérée dans les deux cas de calcul : la valeur maximale enregistrée chez ZEITOUN est de $1.50U_c$ alors que dans la présente étude, elle est de $2.0U_c$ et cela pour la même section

Les grandeurs caractéristiques δ^* et τ_w de la couche limite sont comparées sur la figure V-15. Dans la figure V-15-a, nous montrons l'épaisseur de déplacement de la couche limite pendant son déplacement le long du col de la tuyère pour le cas ZEITOUN. On observe une évolution avortée pour peu que le choix du contour soit respecté selon les résultats obtenus, qui réduit fort heureusement la tendance à une transition prématurée, avant le col. Ce résultat renseigne sur la nature de l'écoulement supersonique dont l'uniformité est garantie dans la partie supersonique de la tuyère .

L'évolution de la contrainte de frottement à la paroi est visible sur la figure V-16-a et V-16-b, respectivement pour le cas de ZEITOUN et la présente étude. Outre la même allure observée pour tous les modèles utilisés, la forme gaussienne est obtenues dans la présente étude comme c'est le cas chez ZEITOUN : L'évolution est la même du convergent où τ_w redevient faible, en passant par un maximum.

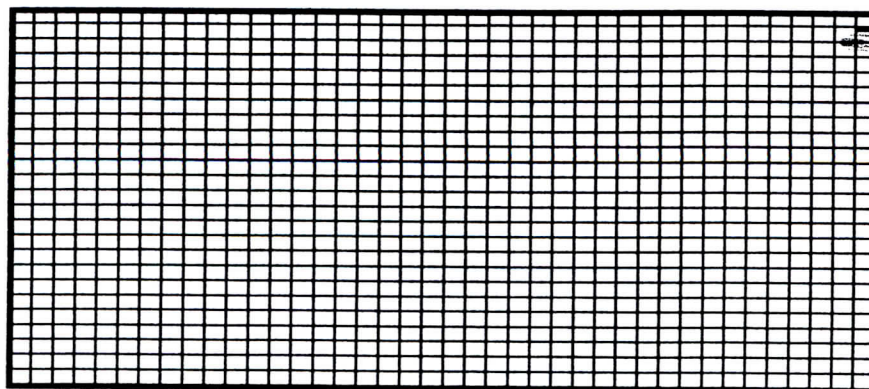
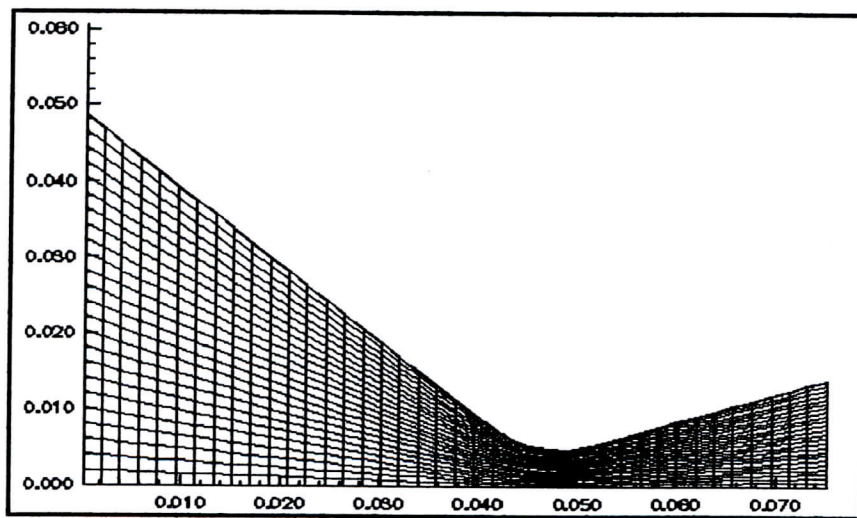
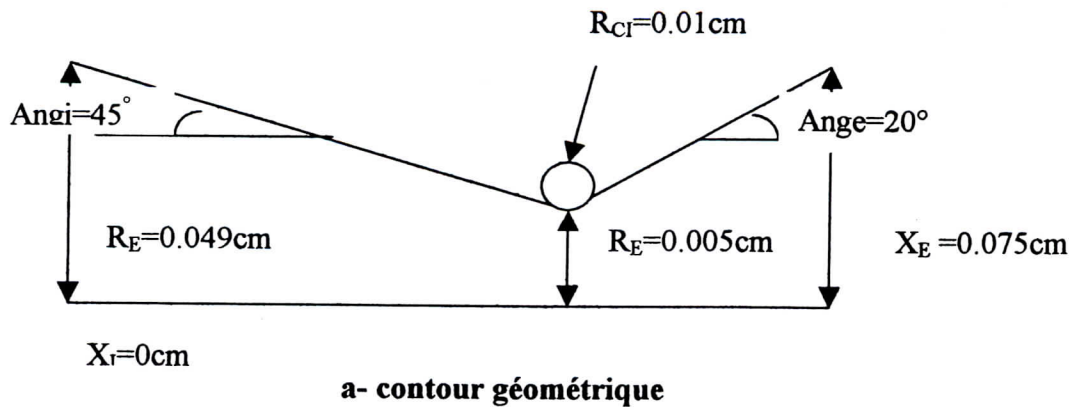
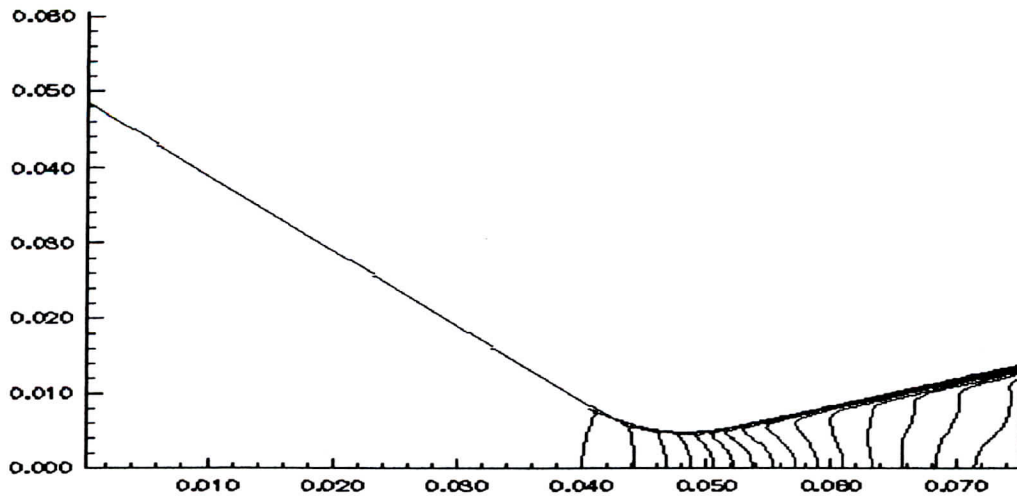
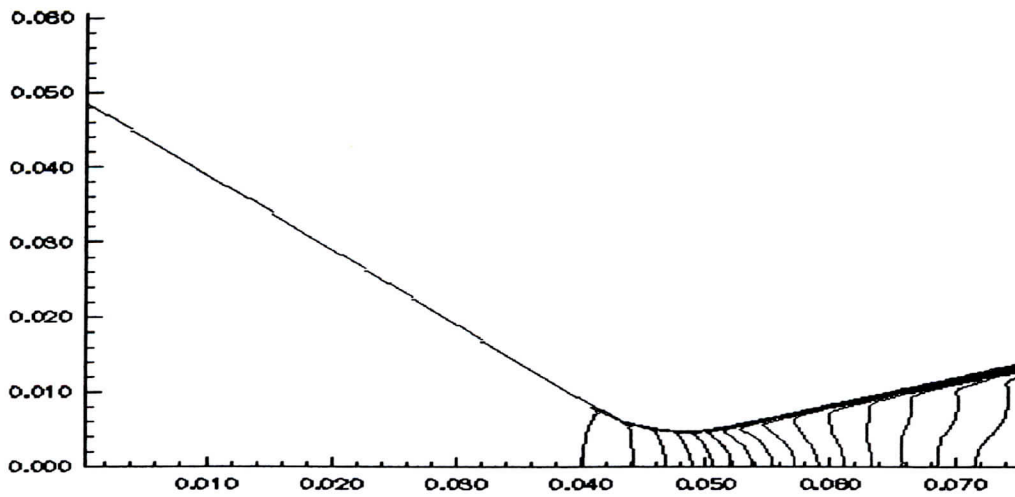


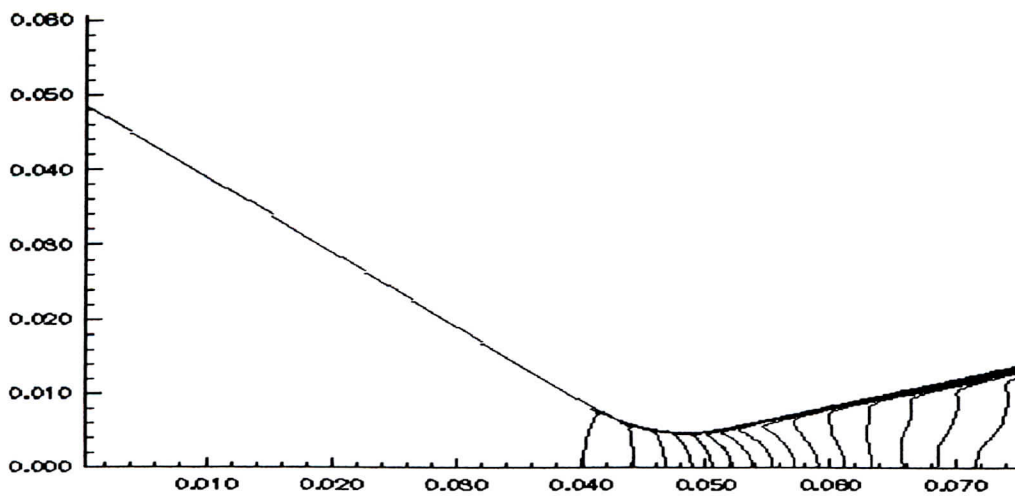
Figure V-1 – Contours Géométriques de la tuyère – domaine physique et domaine de calcul



a- maillage 40x20

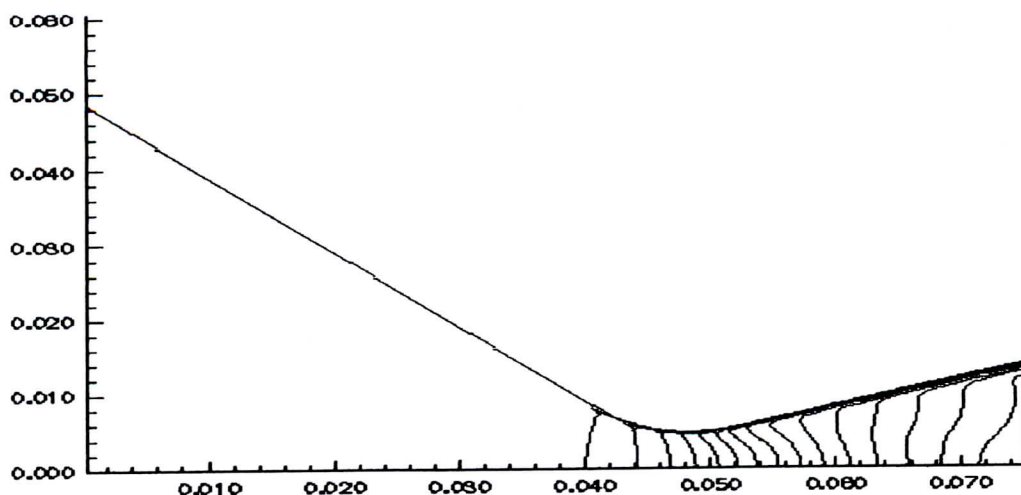


b- maillage 41x23

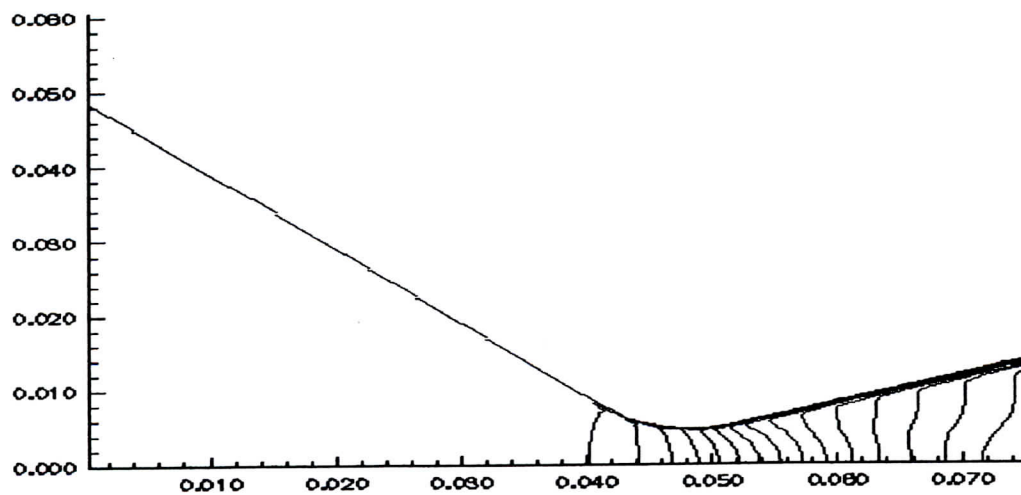


c- maillage 41x25

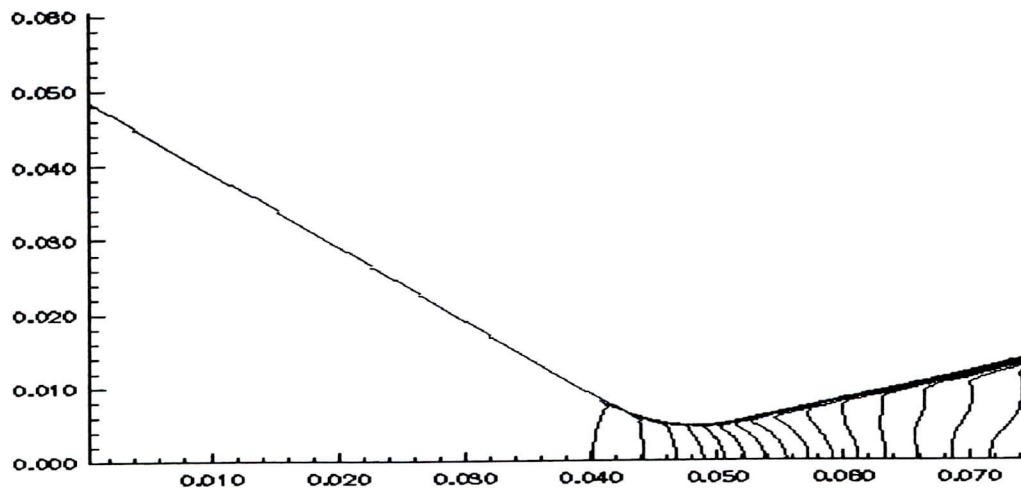
Figure V-3 représentation de la sensibilité au maillage pour le modèle Degani et Schiff



a- maillage 40x20

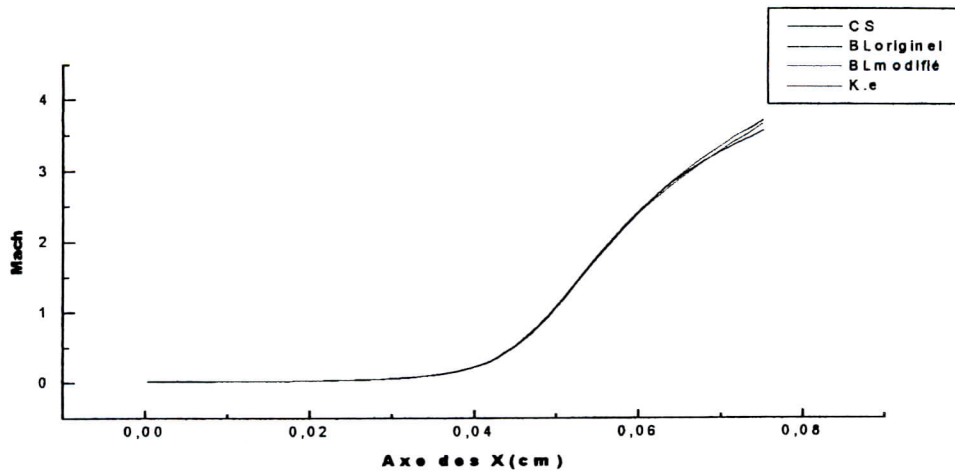


b- maillage 41x23

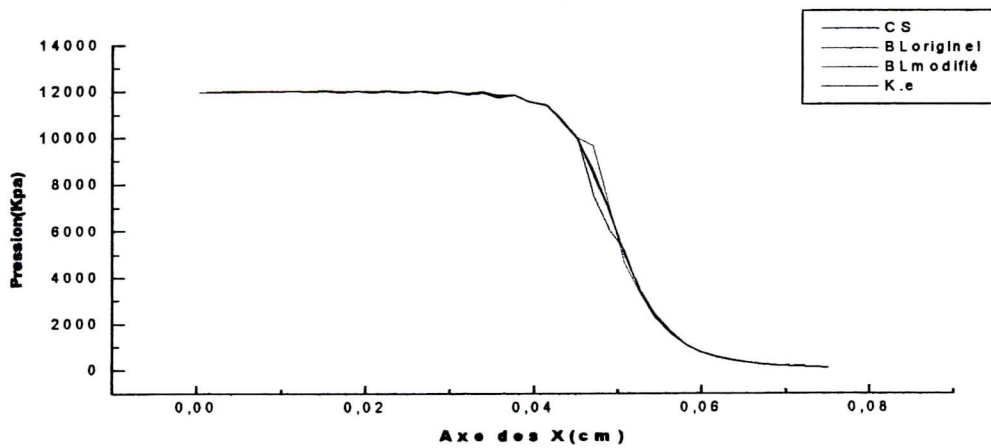


c- maillage 41x25

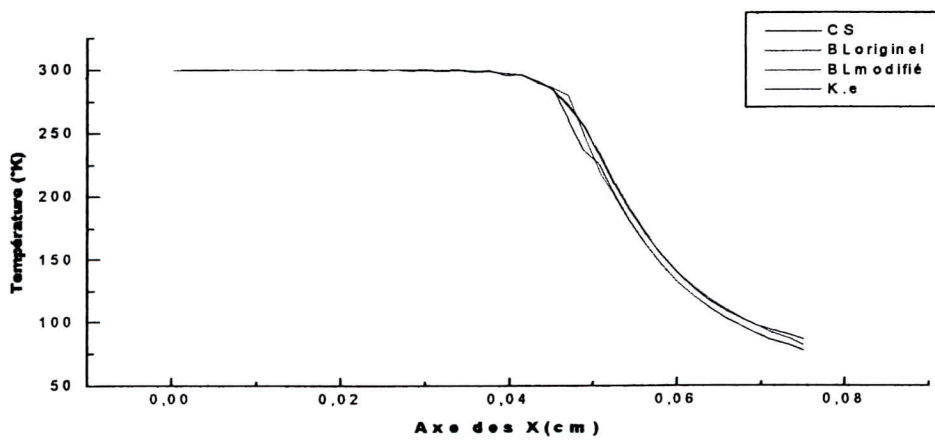
Figure V-4 - représentation de la sensibilité au maillage pour le modèle K-ε



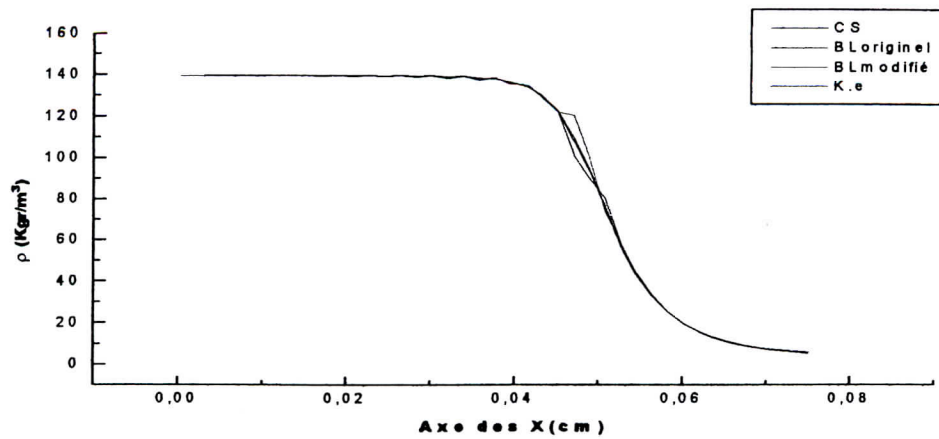
a-Comparaison de l'allure de l'évolution du mach axial :



b-Comparaisons des pressions axiales des différents modèles

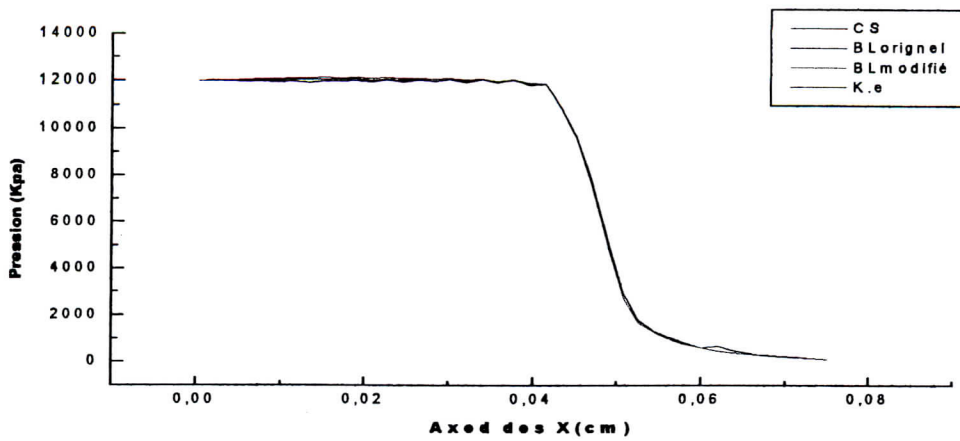


c-Comparaison des températures axiales des différents modèles

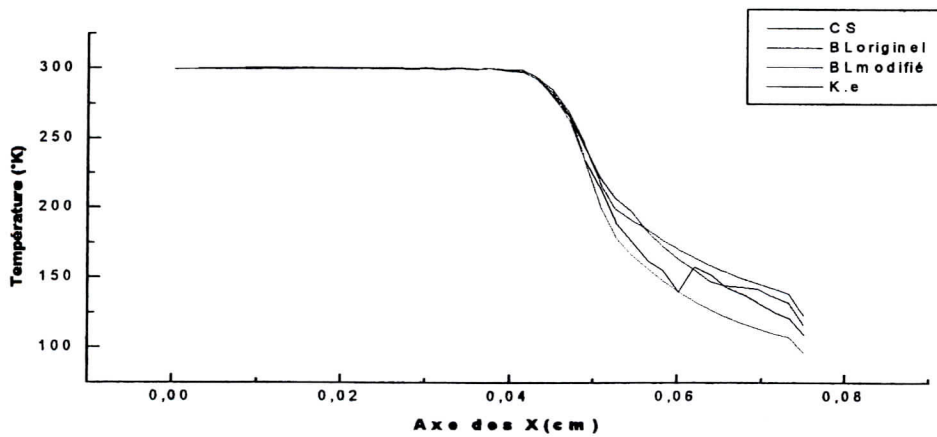


d-Comparaison de la densité volumique axiale des différents modèles

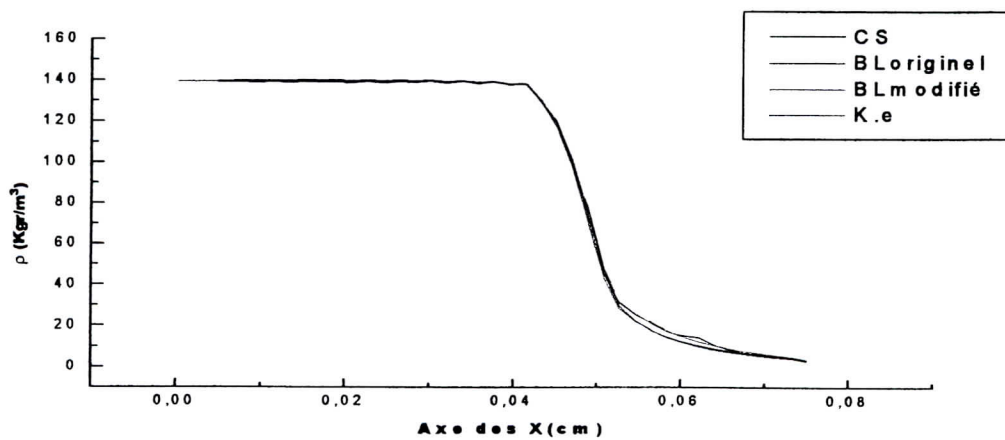
Figure V-5-1 Evolution comparative des grandeurs axiales de l'écoulement le long de la tuyère



a--Comparaison des pressions pariétales

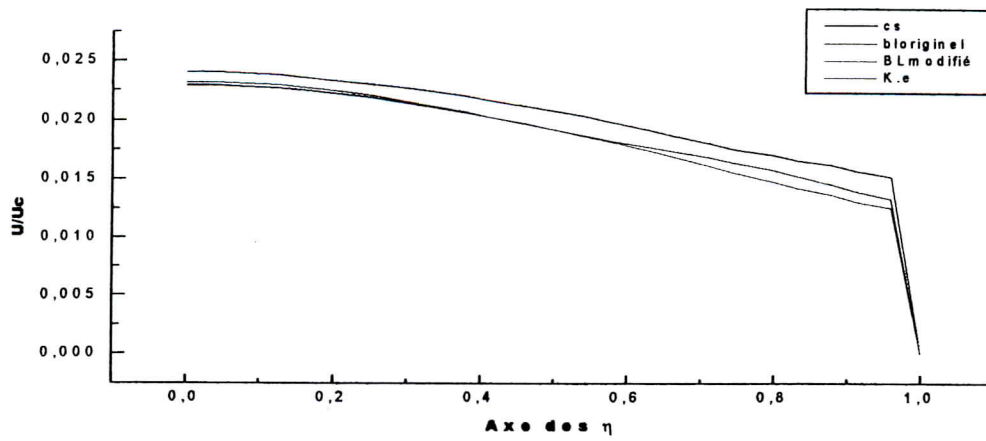


b-Comparaison des températures pariétales

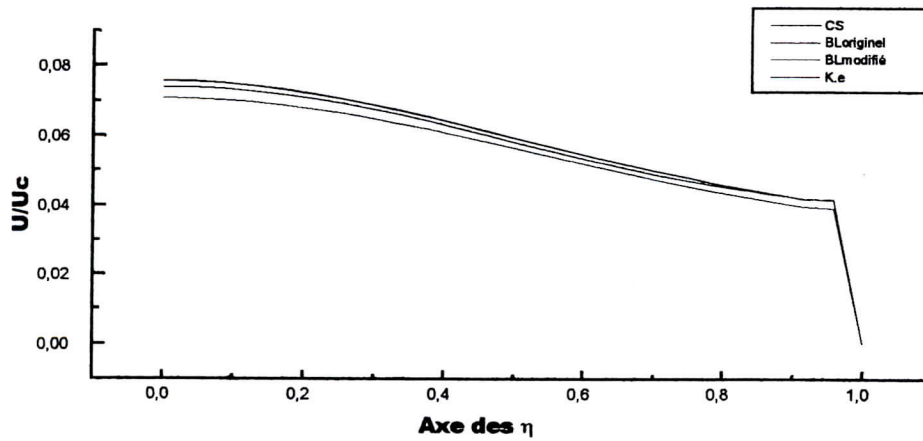


c-Comparaison de la densité volumique pariétale

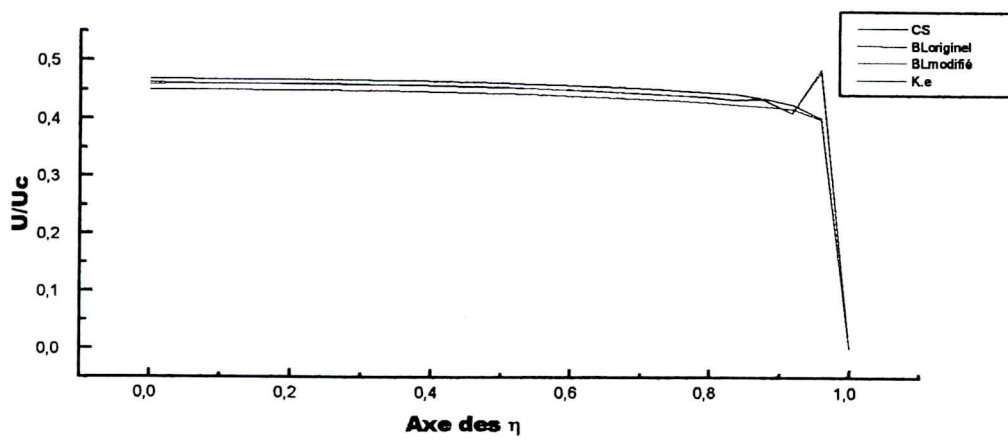
Figure V-5-2 Evolution comparative des grandeurs pariétales de l'écoulement le long de la tuyère



a- $x=0.0115\text{cm}$

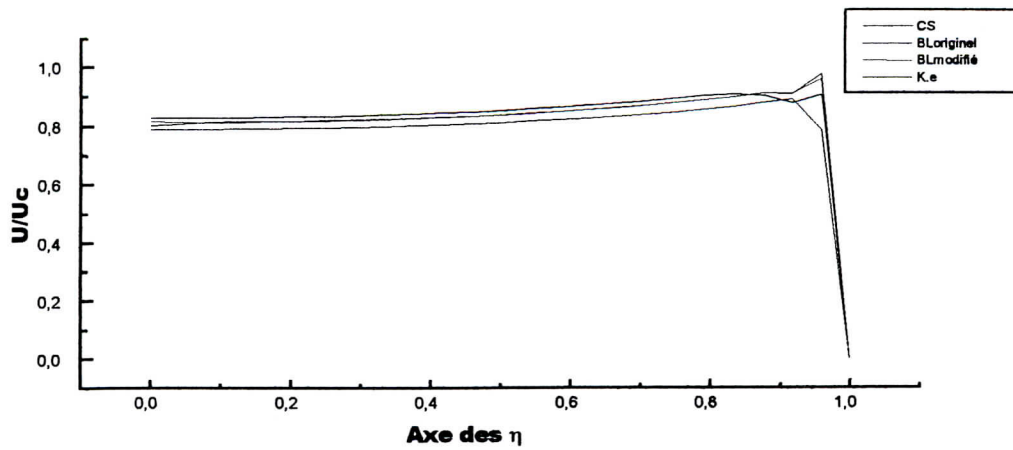


b- $x=0.0302\text{cm}$

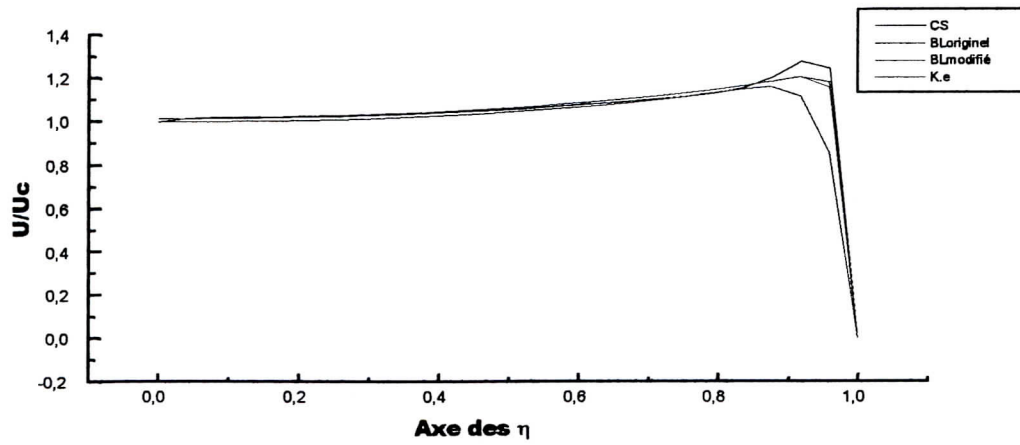


c- $x=0.0433\text{cm}$

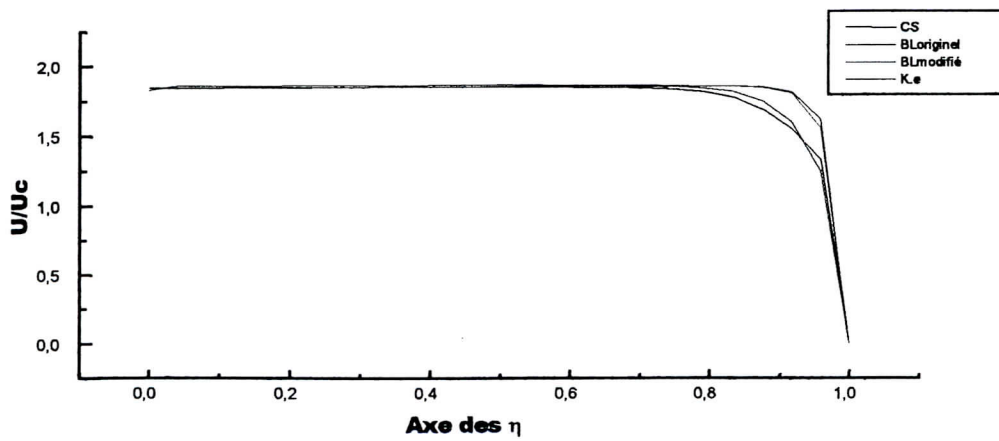
Figure V-6 Evolution comparative de la vitesse moyenne longitudinale



d- $x=0.0471\text{cm}$

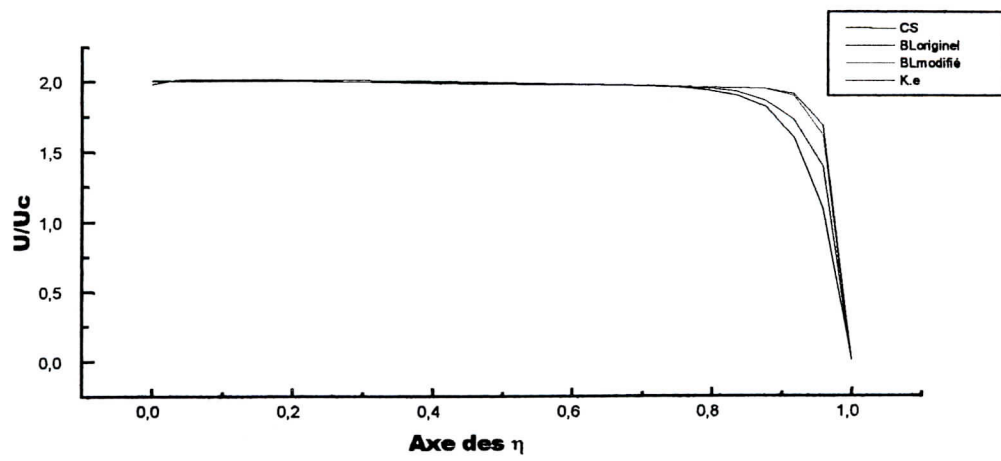


e- $x=0.049\text{cm}$

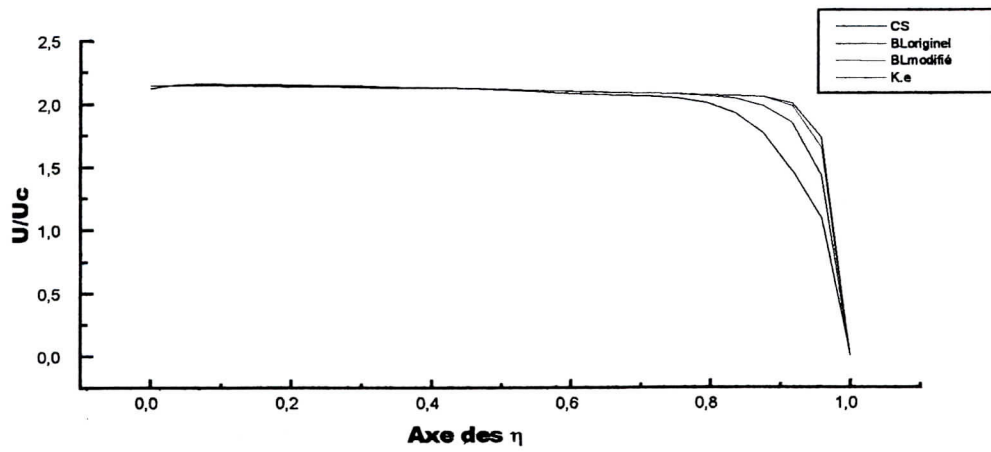


f- $x=0.0583\text{cm}$

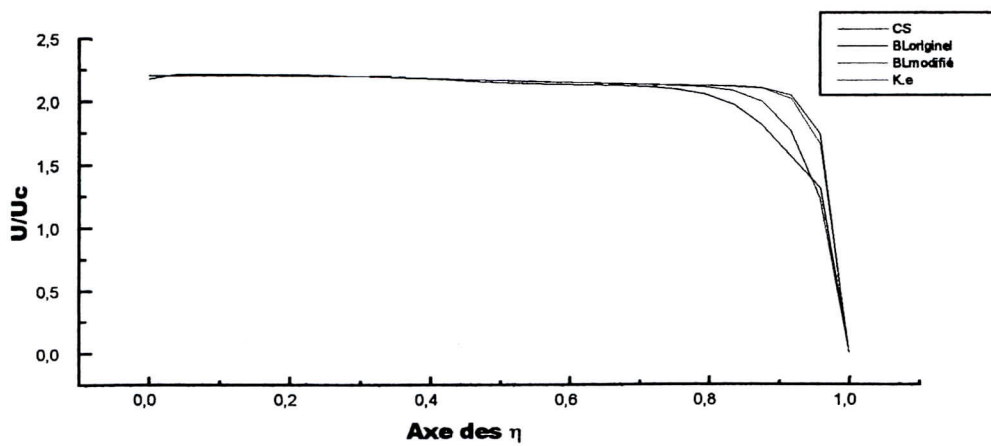
Figure V-6 (Suite)



g- $x = 0.0621\text{cm}$

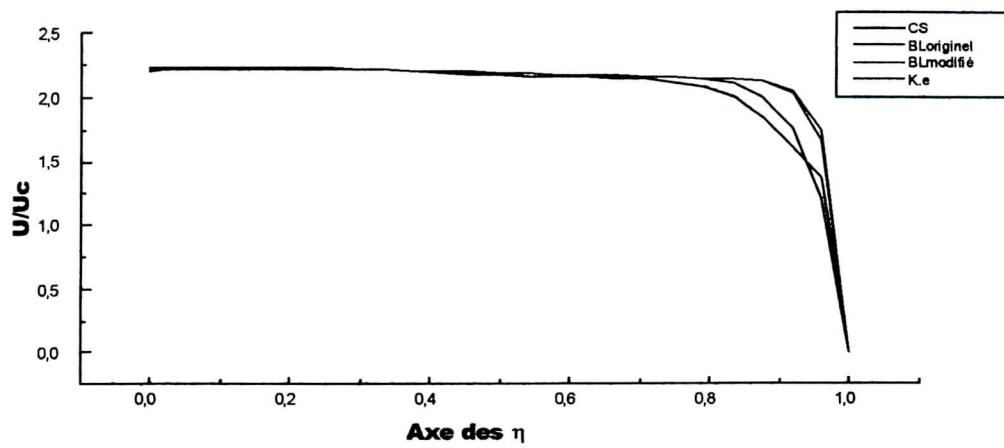


h- $x = 0.0677\text{cm}$



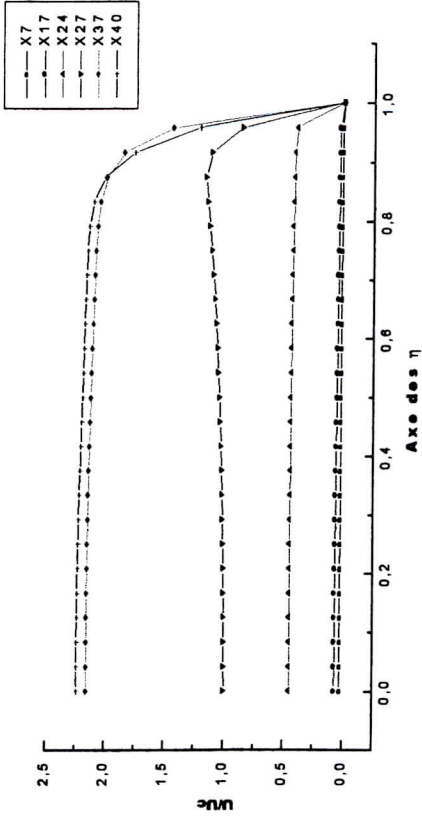
i- $x = 0.0714\text{cm}$

FigureV-6 (Suite)

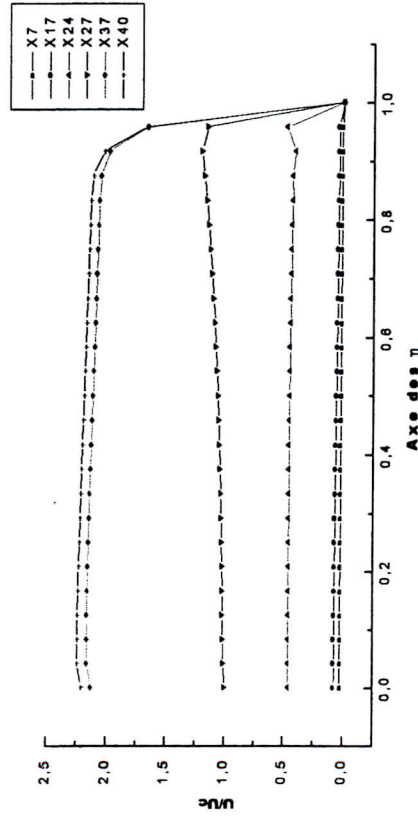


j- $x=0.0733\text{cm}$

Figure V-6(Suite et fin)



a modèle de Cebeci Smith



b- modèle de Baldwin et Lomax

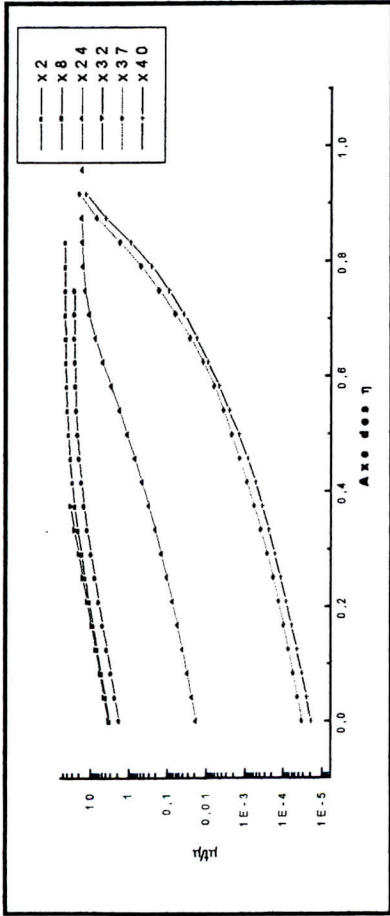
c- modèle de Degani et Schiff

d- modèle de K-ε.

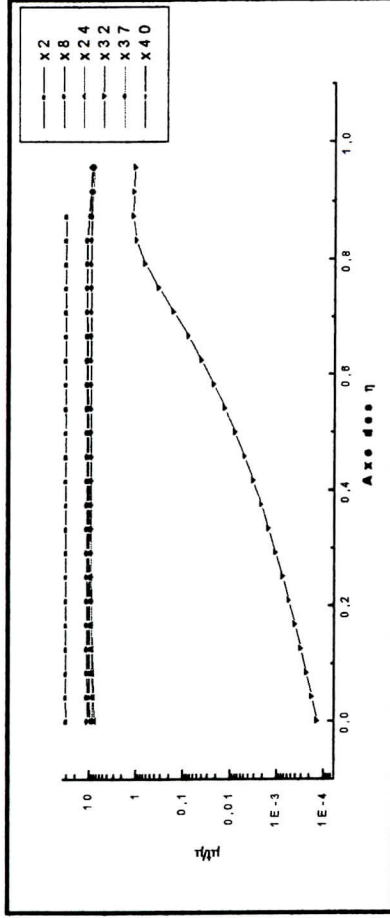
X7=0.0115cm ;
 X24=0.0433cm ;
 X37=0.0677cm ;

X17=0.0302cm ;
 X27=0.0490cm ;
 X40=0.0733cm ;

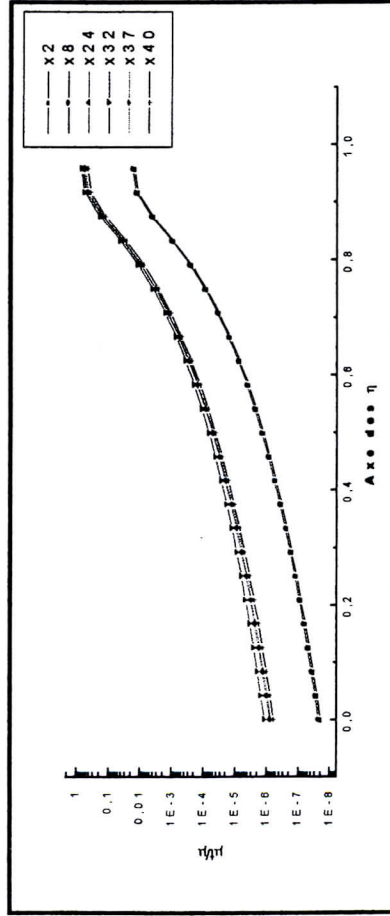
Figure V-7 - Evolution de la vitesse moyenne en fonction de η le long de la tuyère



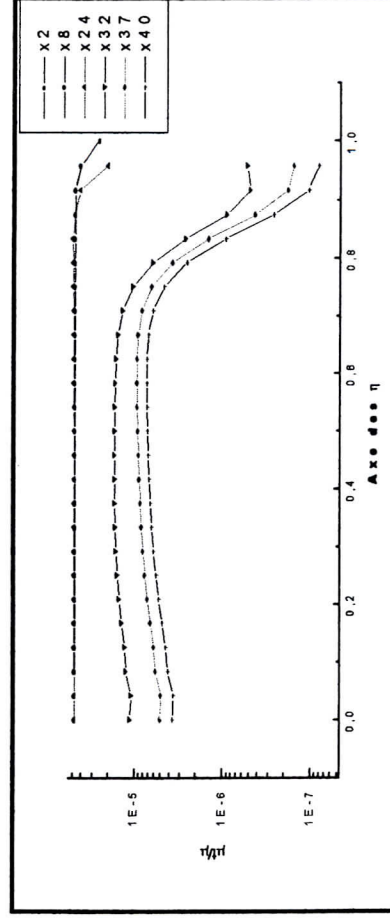
a- modèle de Cebeci et Smith



b- modèle de Baldwin et Lomax



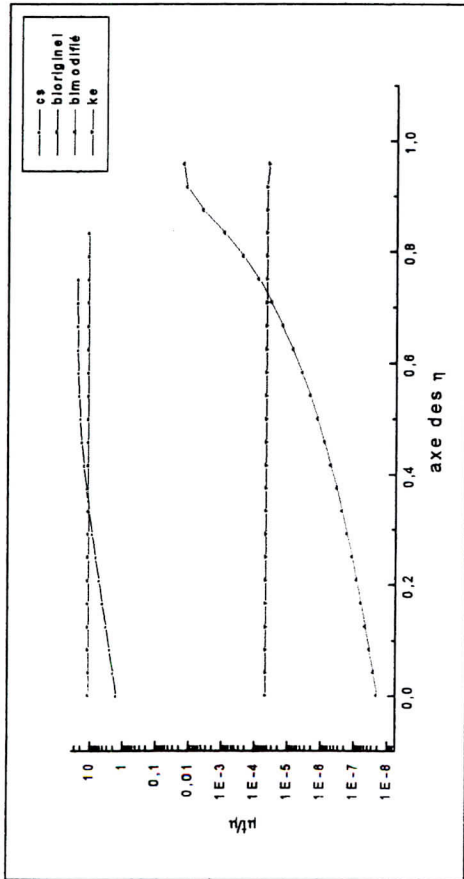
c- modèle de Degani et schiff



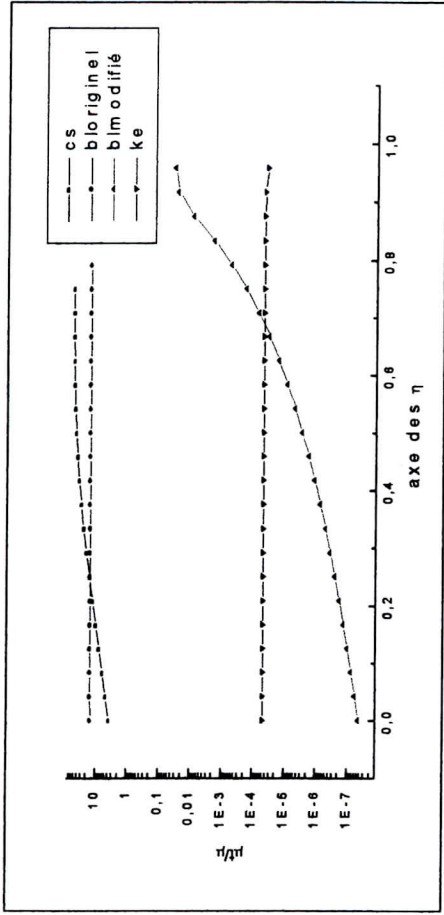
d- modèle de K-ε

$X2 = 0.0021 \text{ cm}$
 $X24 = 0.0433 \text{ cm}$
 $X37 = 0.0677 \text{ cm}$
 $X8 = 0.0134 \text{ cm}$
 $X32 = 0.0583 \text{ cm}$
 $X40 = 0.0733 \text{ cm}$

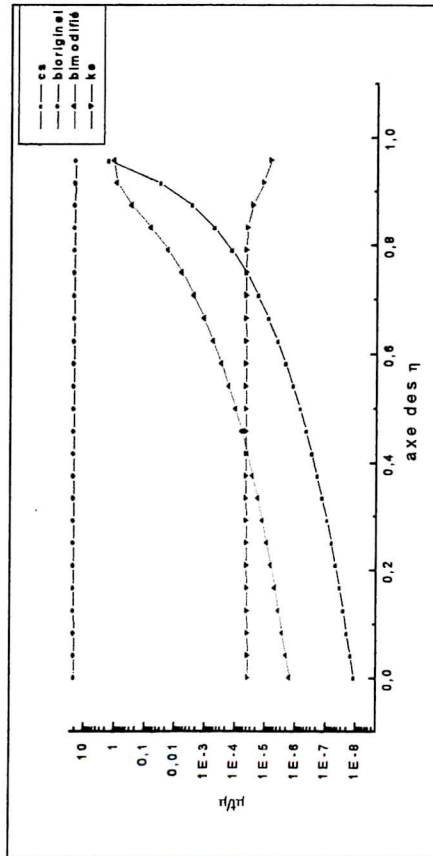
Figure V-8 -Evolution longitudinale de la viscosité turbulente



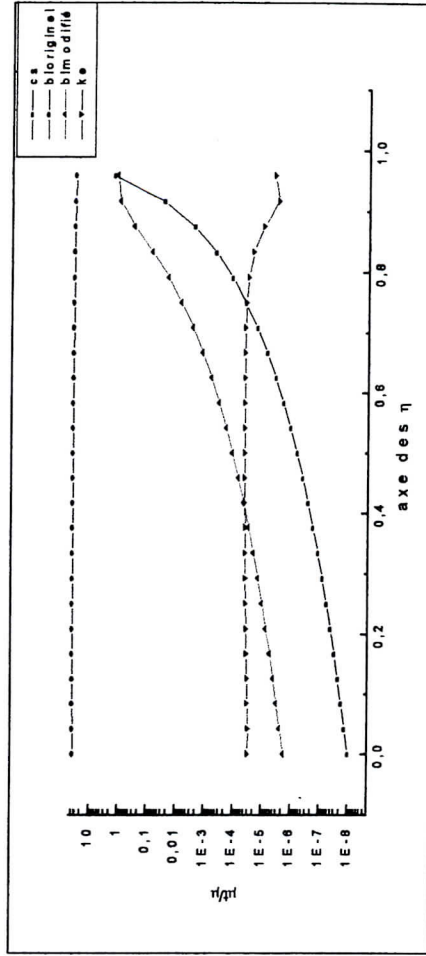
a- X=0.0115cm



b- X=0.0302cm

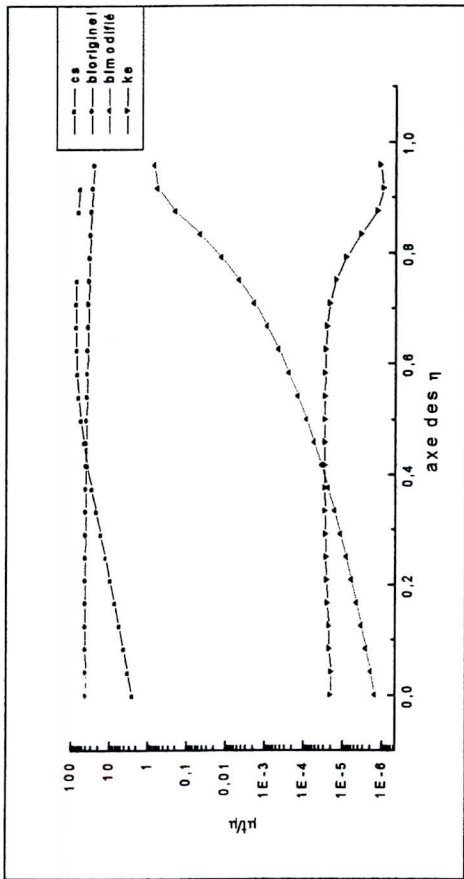


c- X=0.0471cm

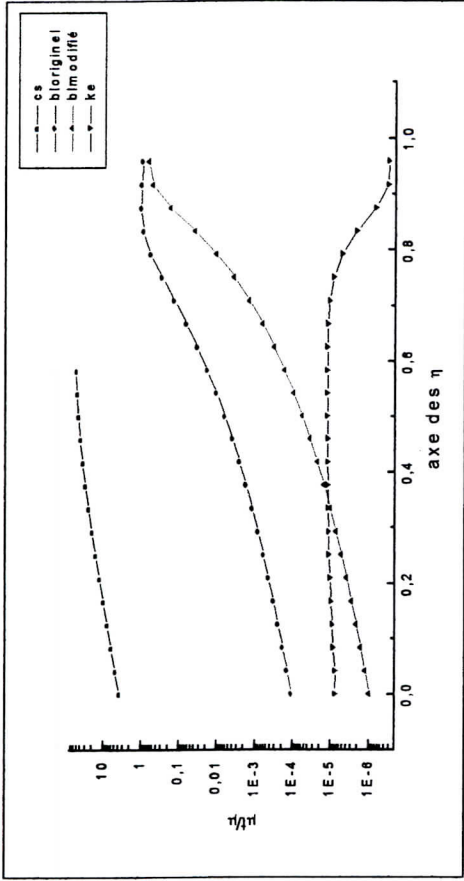


d- X=0.0490cm

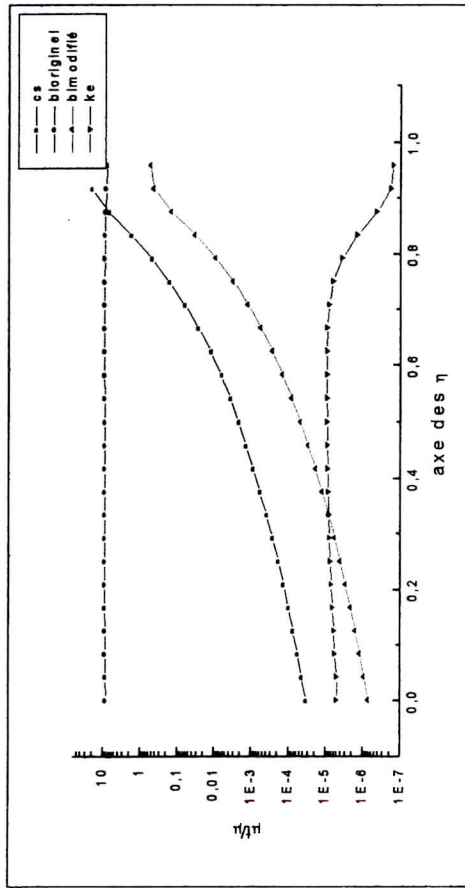
Figure V-9-Evolution comparative de la viscosité turbulente par section-



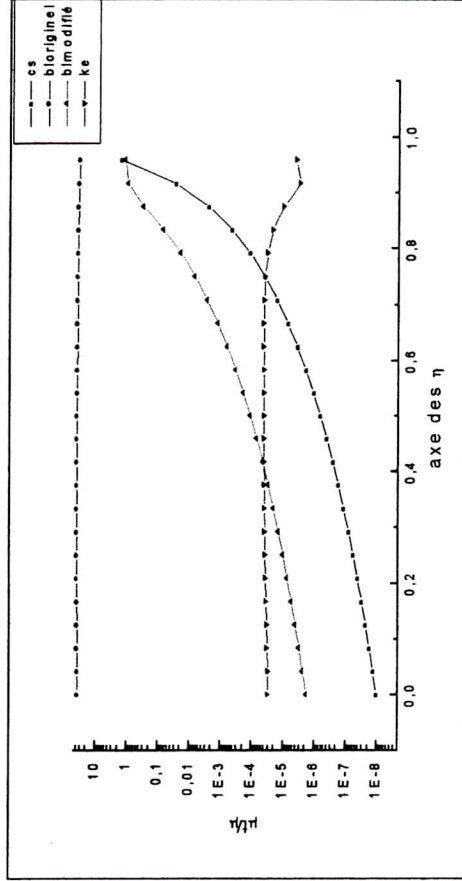
e- $X=0.0527\text{cm}$



f- $X=0.0621\text{cm}$



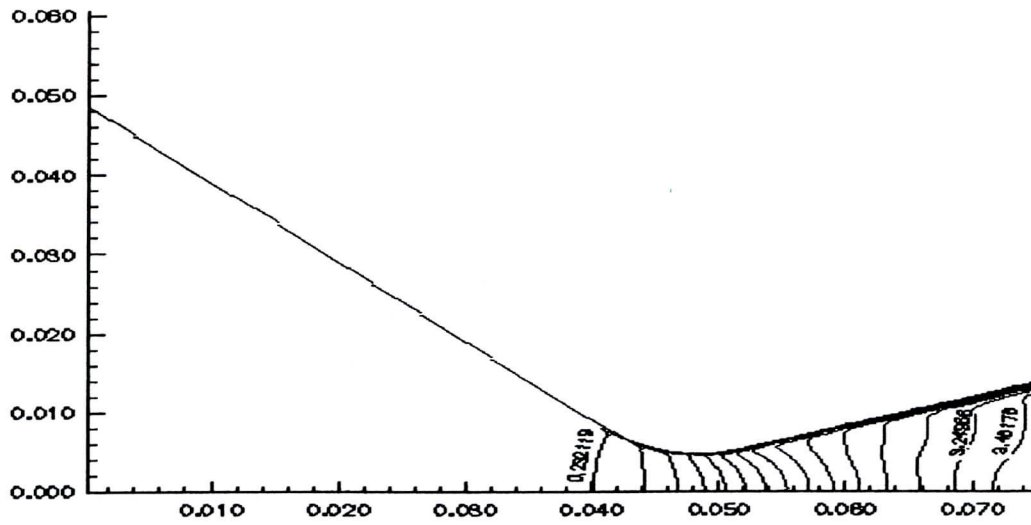
g- $x=0.0677\text{cm}$



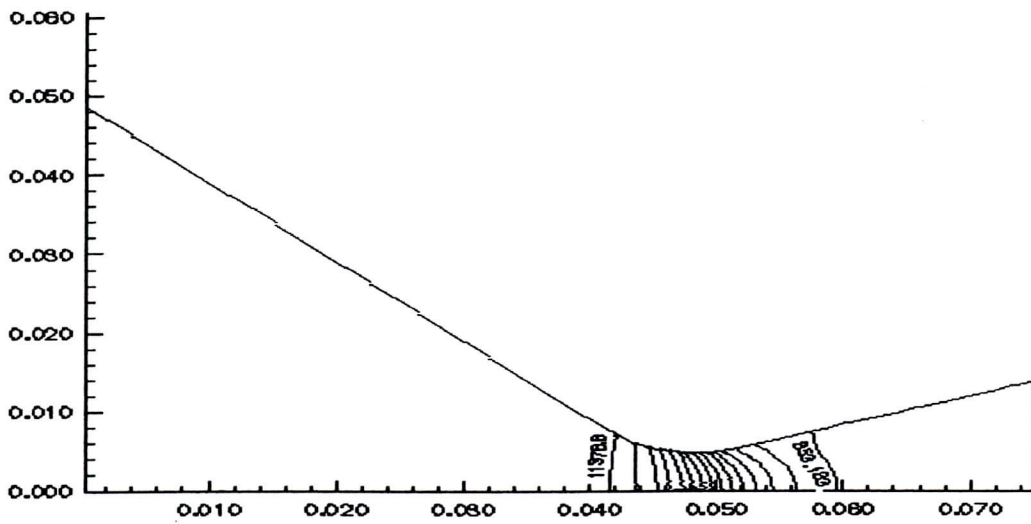
h- $X=0.0733\text{cm}$

-Figure V-9-(suite et fin)-

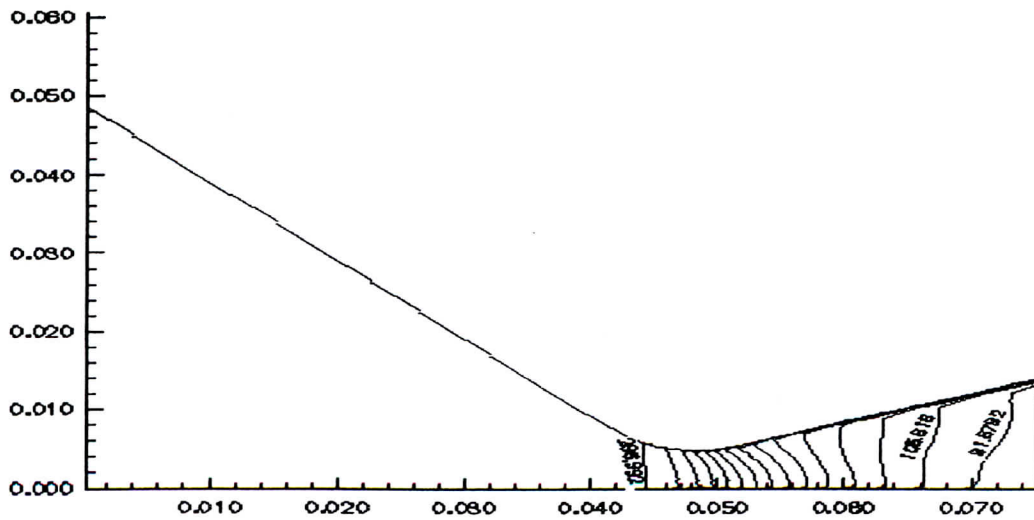
MODELE K-ε



-Figure V-10-a - évolution des isomachs -



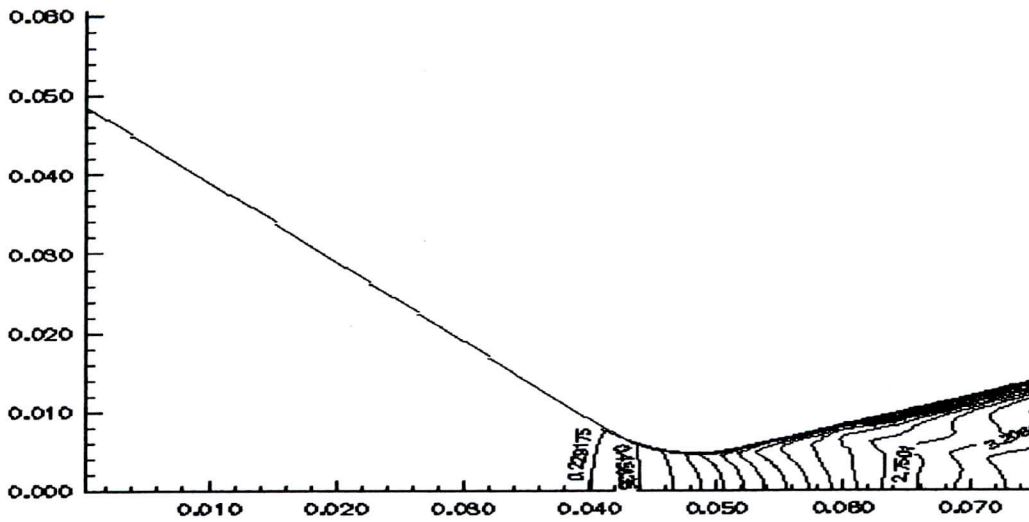
-Figure V-10-b- évolution des isobares -



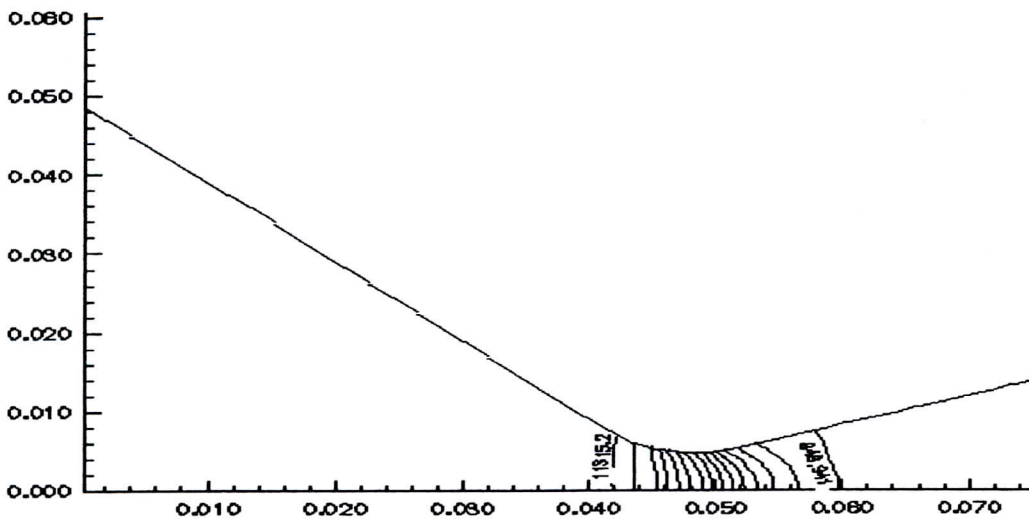
-Figure V-10-c évolution des isothermes -



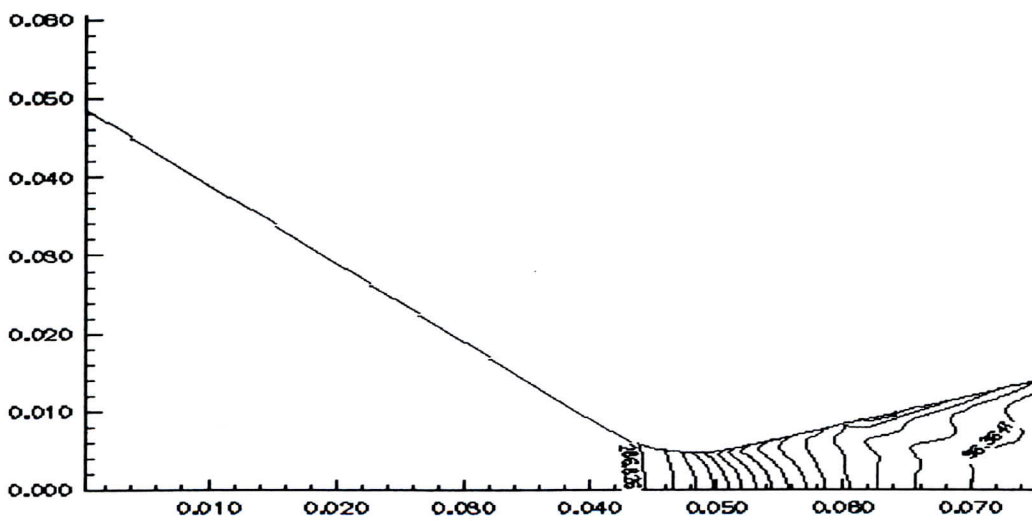
MODELE DE CEBECI - SMITH



-Figure V-11-a- évolution des isomachs-

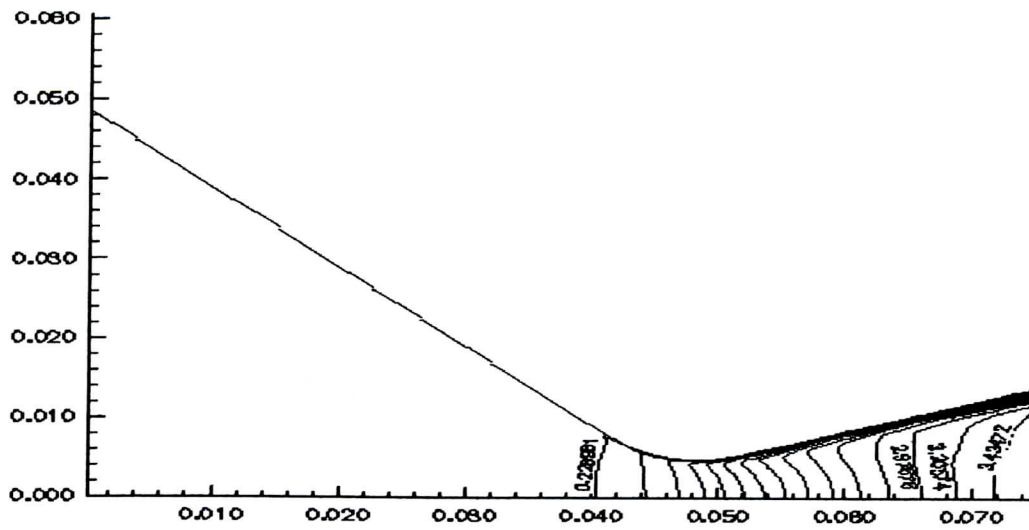


-Figure V-11-b- évolution des isobares-

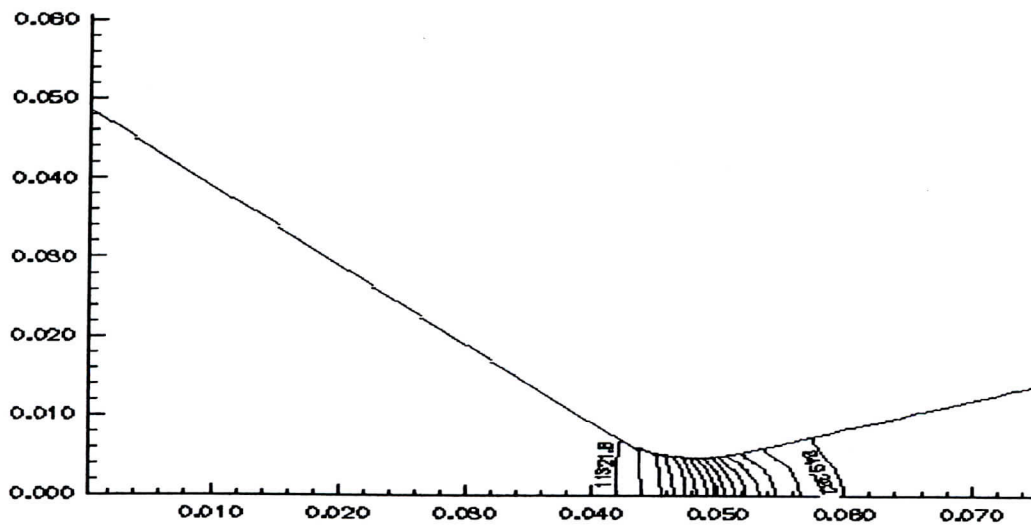


-Figure V-11-c évolution des isothermes-

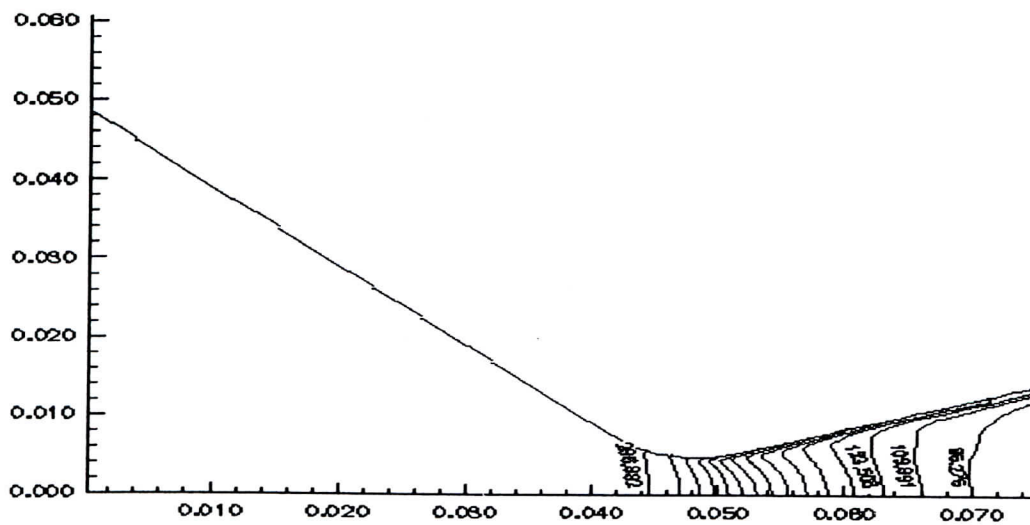
MODELE DE BALDWIN ET LOMAX



-Figure V-12-a évolution des isomachs-

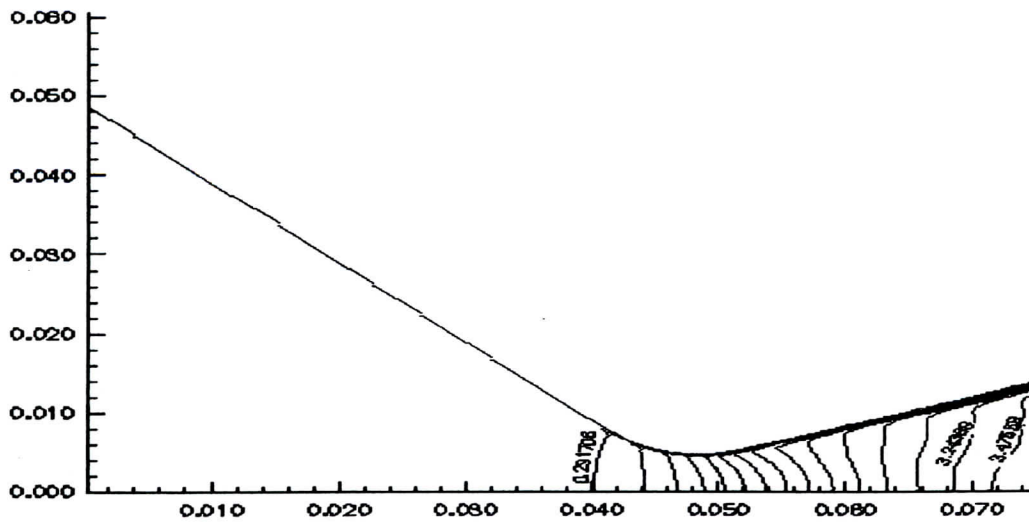


-figure V-12-b évolution des isobares-

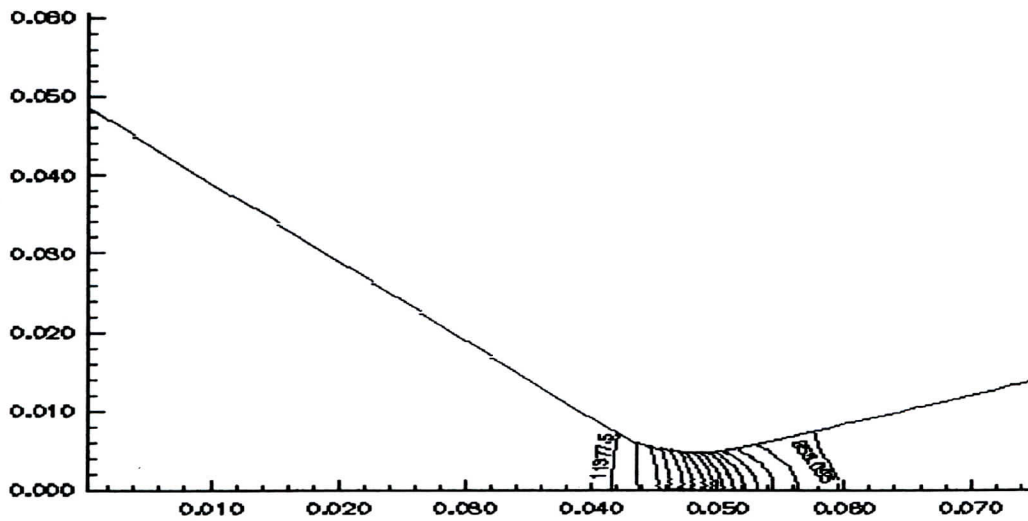


-figure V-12-c évolution des isothermes-

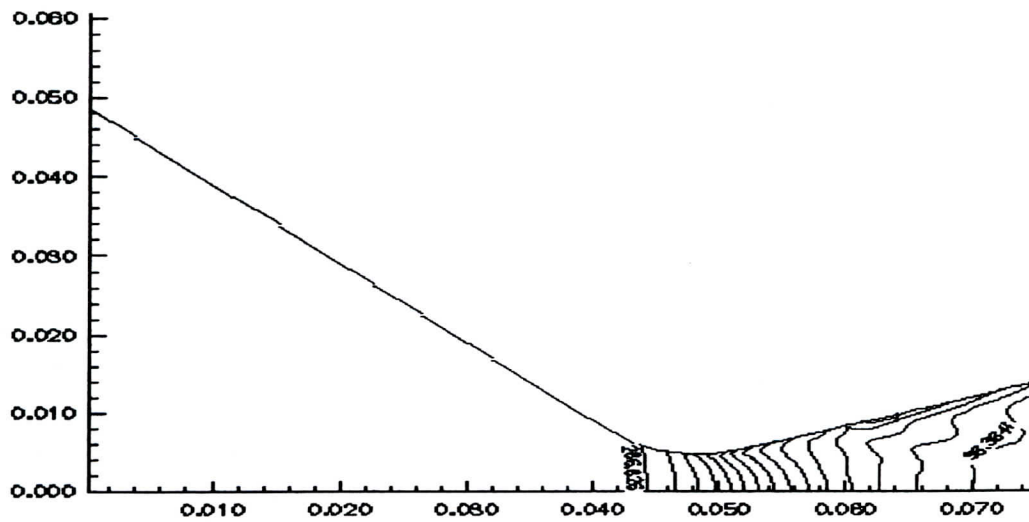
MODELE DE DEGANI ET SCHIFF



-figure V-13-a évolution des isomachs-



-figure V-13-b évolution des isobares-



-figure V-13-c évolution des isothermes-

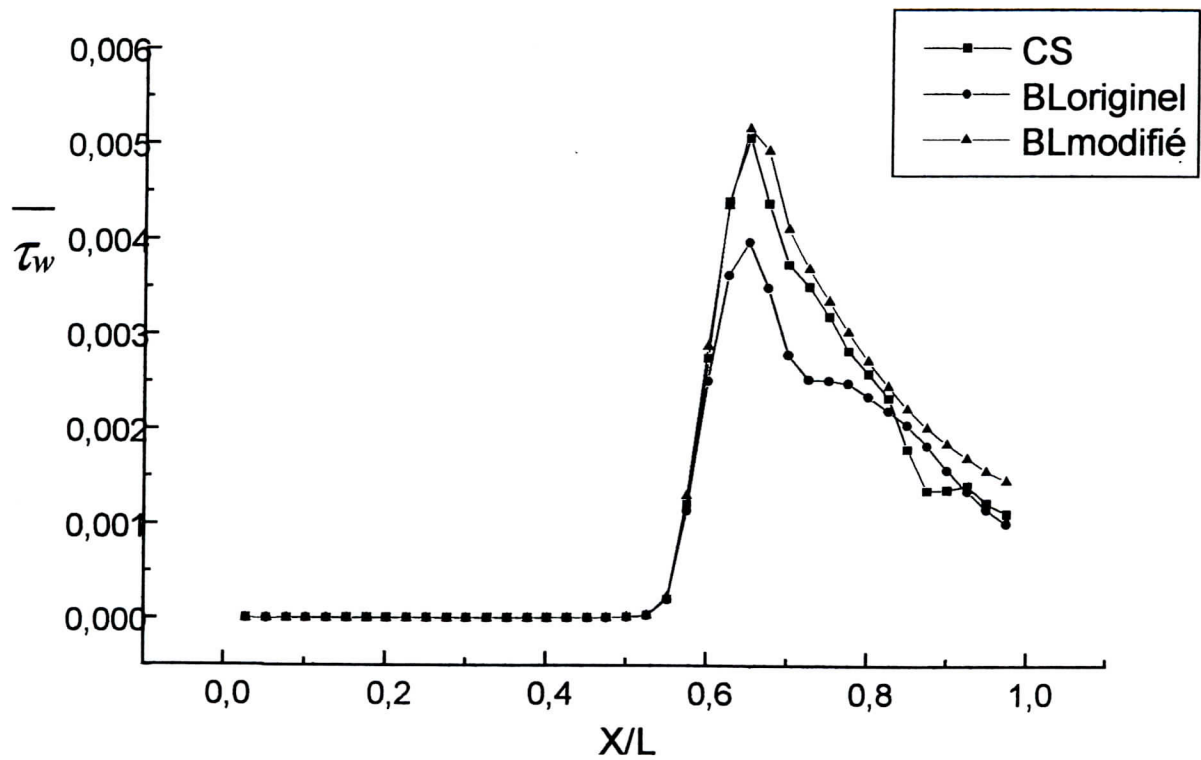
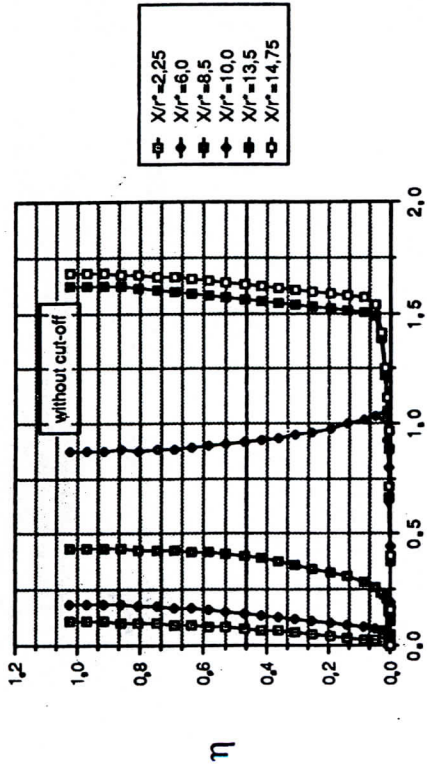
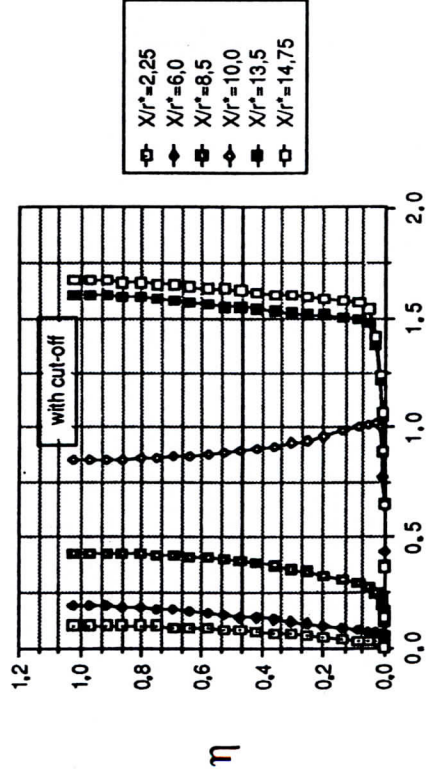


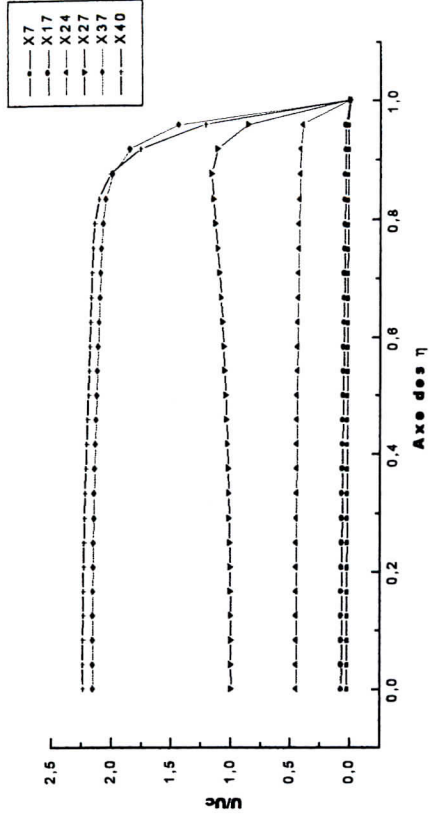
Figure V-13-bis- Comparaison de l'évolution du tenseur des contraintes à la paroi suivant les trois modèles algébriques



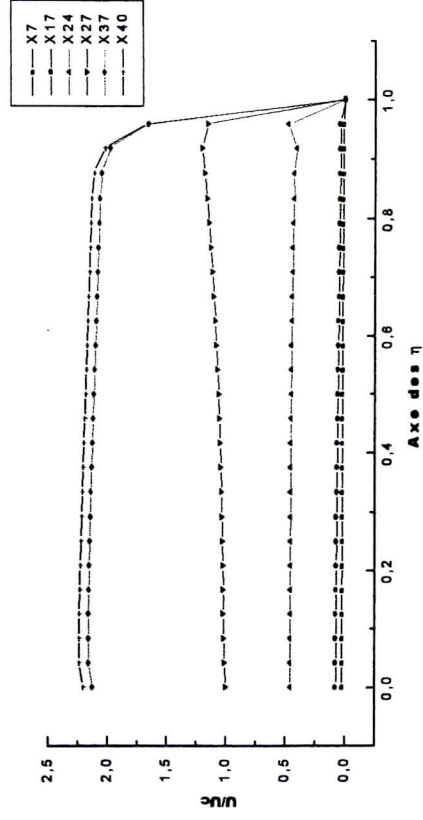
b- modèle de Baldwin et Lomax



c- modèle de Degani et Schiff



b- modèle de Baldwin et Lomax



c- modèle de Degani et Schiff

X7=0.0115cm	;	X17=0.0302cm
X24=0.0433cm	;	X27=0.0490cm
X37=0.0677cm	;	X40=0.0733cm

Figure V.14 Comparaison de l'évolution de la vitesse moyenne en fonction de η le long de la tuyère dans le cas de notre étude et celle de ZEITOUN

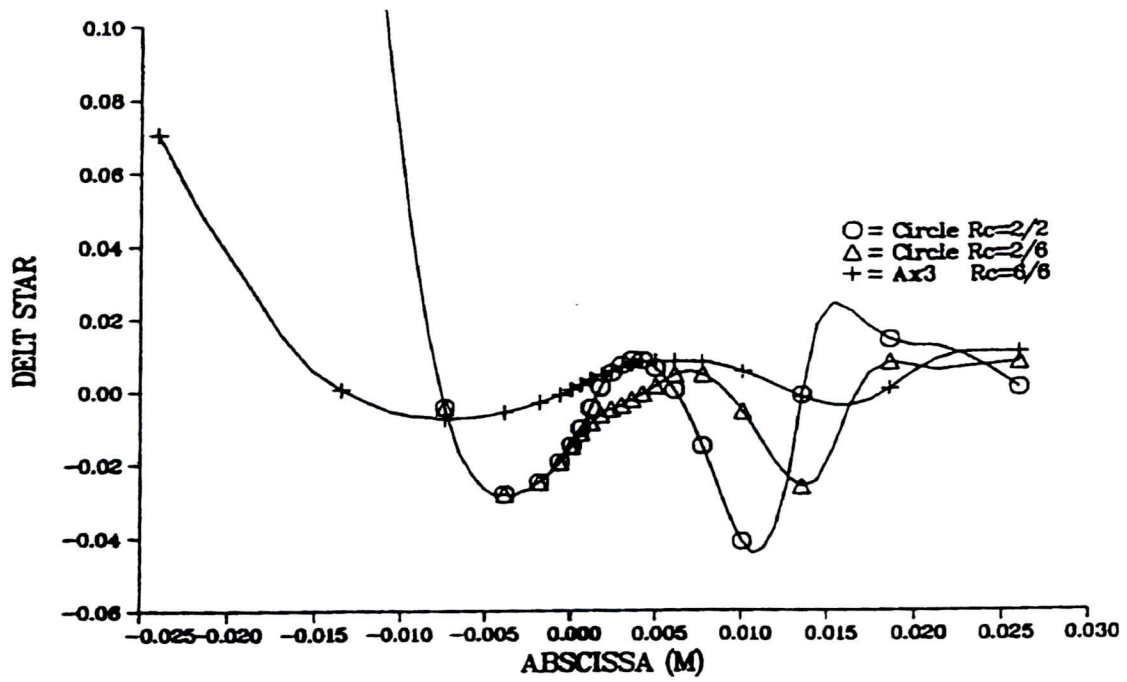


Figure V-15-a Epaisseur de la couche limite dans pour le cas ZEITOUN

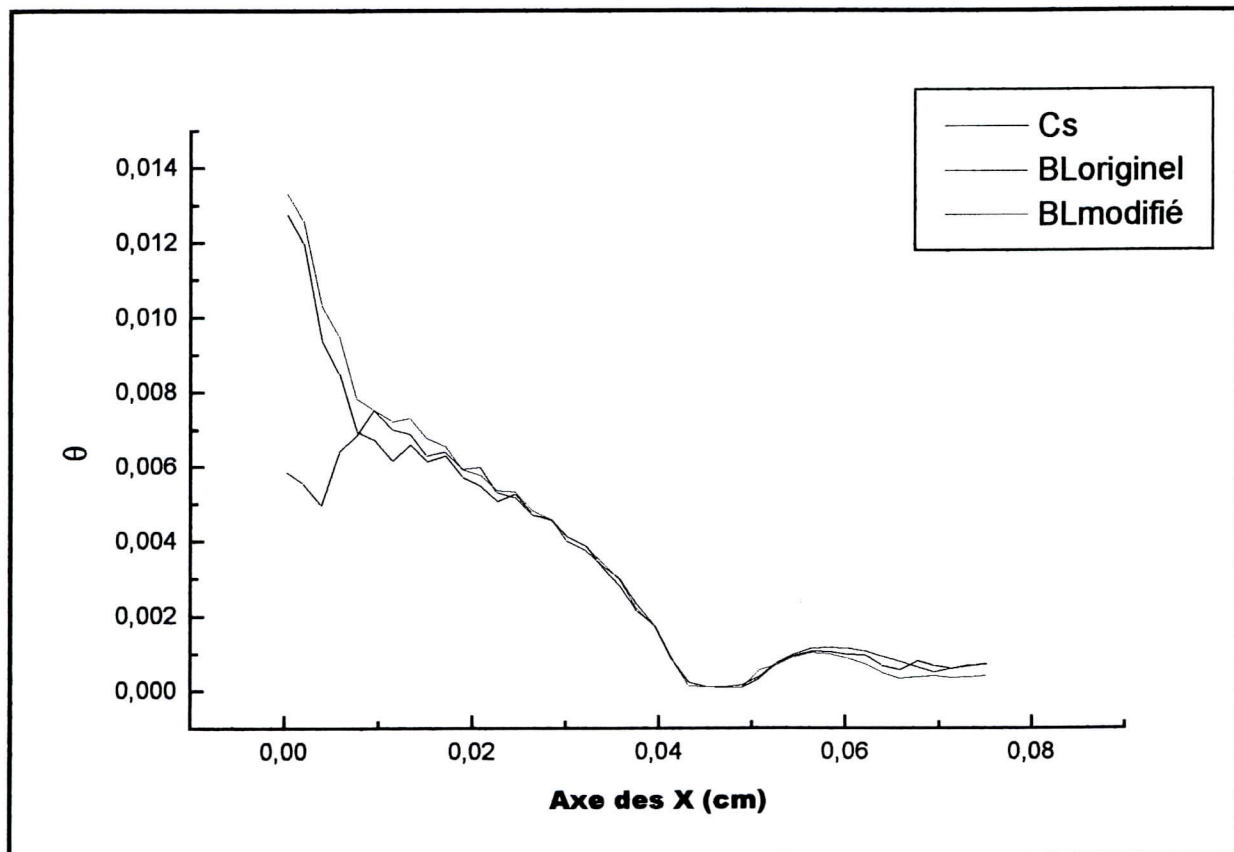


Figure V-15-b Epaisseur de la couche limite dans notre cas d'étude

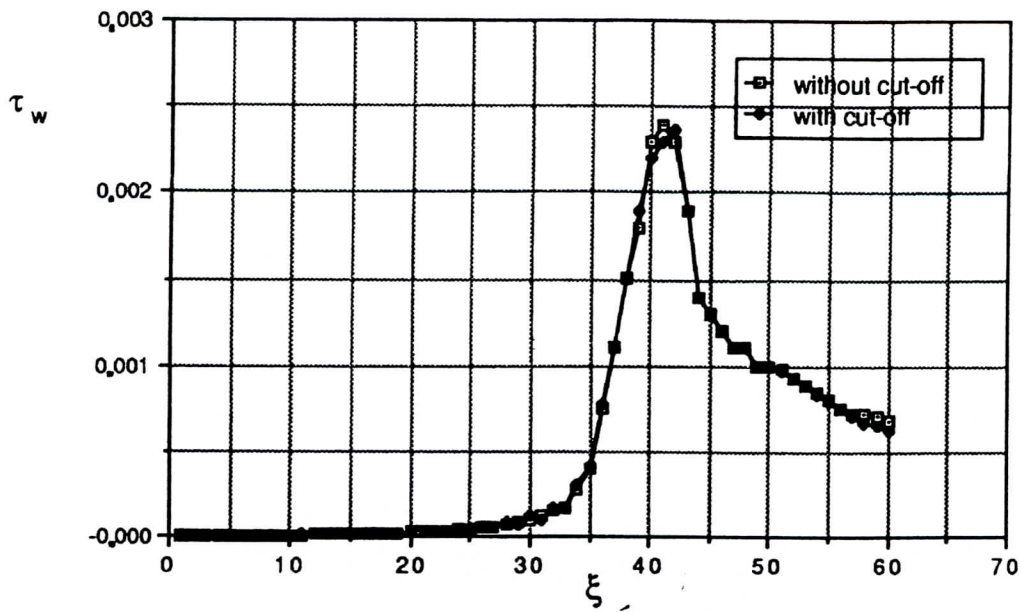


Figure V-16-a Comparaison de l'évolution du tenseur des contraintes à la paroi suivant les modèles algébriques de Baldwin et Lomax(whitout cut-off) et celui de Degani et Schiff (with cut-off) suivant l'étude de ZEITOUN.

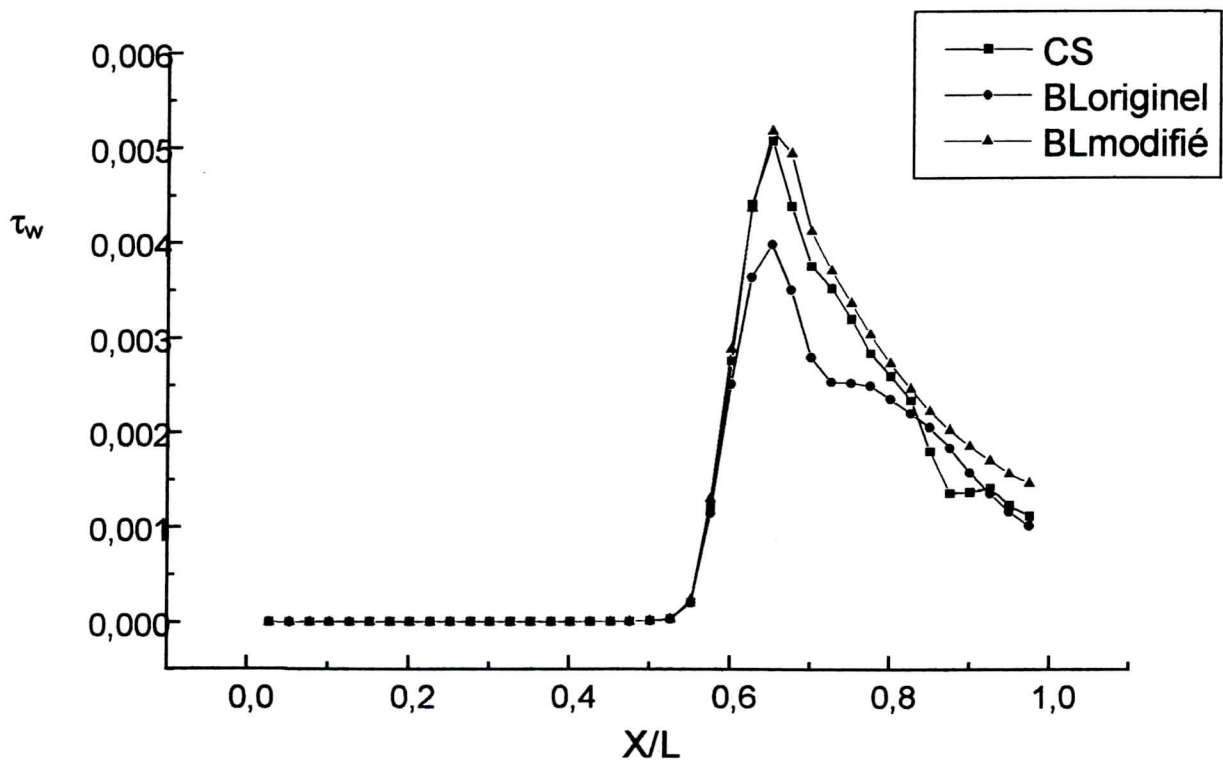


Figure V-16-b Comparaison de l'évolution du tenseur des contraintes à la paroi suivant les modèles algébriques de Baldwin et Lomax, celui de Degani et Schiff et Cebeci Smith suivant notre étude.

Conclusion générale

Nous avons réalisé l'étude numérique d'un écoulement turbulent compressible dans une tuyère convergente-divergente de même dimensions que celle étudiée par ZEITOUN (1989 et 1996). Ce travail a été initié dans l'objectif d'un projet d'accord programme qui, malheureusement n'a pas aboutit entre les deux parties à cause des lenteurs administratives et des objectifs tracés à long terme par la commission mixte. Néanmoins, ce travail représente une première étape permettant une compréhension de l'écoulement turbulent d'un gaz compressible. A cet effet, l'étude réalisée consiste au calcul bidimensionnel de l'écoulement turbulent de fluide compressible en utilisant des modèles de fermeture algébrique et différentiel. Ainsi, quatre modèles ont été utilisés dont trois modèles algébriques à savoir : Le modèle de Cebeci-Smith, le modèle de Baldwin et Lomax originel, le modèle de Baldwin et Lomax modifié et enfin le modèle différentiel à deux équations K- ϵ . On a pu donner ainsi une description des phénomènes, basé sur le calcul du champ dynamique moyen et comparer aussi les résultats obtenus pour évaluer les performances de chaque modèle de fermeture.

Les résultats obtenus avec les quatre modèles montrent qu'il existe un effet de laminarisation de la couche limite dans la partie convergent conduisant à une diminution importante de l'intensité de turbulence. Les profils de vitesse longitudinale réduite sont les mêmes pour les quatre modèles, de l'entrée à la sortie de la tuyère. La seule différence enregistrée est visible dans la région de proche paroi où, l'on note des zones de survitesse juste au dessus de la paroi, montrées par les modèles de Degani-Schiff et K- ϵ . En revanche les gradients de vitesse sont plus modérés sur le profil des modèles de Cebeci-Smith et de Baldwin et Lomax originel. Ce phénomène est bien mis en évidence par ces deux modèles sur les courbes isomach. La contrainte de frottement à la paroi est estimée de la même manière par les trois modèles algébriques. Parmi les résultats obtenus dans cette étude, on rassemble les profils de vitesse longitudinale et les grandeurs caractéristiques de la couche limite dont la comparaison qualitative avec les résultats de Zeitoun a permis de juger, en l'absence de résultats expérimentaux, de la tendance de nos résultats. Ainsi, on peut dire d'ores et déjà que des phénomènes d'accélération au niveau de la couche limite ne sont pas détectés par les modèles algébriques de base, ce qui représente un inconvénient pour ces modèles, dans le cas de simulation numérique d'écoulement de couches de mélanges transsoniques et supersoniques. Le modèle K- ϵ standard et le modèle de Degani-Schiff sous estiment le développement de la couche limite dans la partie divergente de la tuyère, ce qui représente aussi un inconvénient

majeur pour le modèle K- ϵ standard, dont l'utilisation dans le cas de couche limite de plaque plane a montré ses limites.

En gardant l'objectif d'analyser une configuration expérimentale pour utiliser les résultats à la construction et à l'étalonnage de ces modèles de fermeture dans ce genre de géométrie, le présent travail conduit aux idées suivantes pour les futurs travaux :

- Etudier l'influence de la structure du maillage et celle des schémas numériques utilisés sur les résultats.
- Approfondir la description de l'écoulement surtout dans la région proche de la paroi, en prenant en compte l'aspect tridimensionnel du champ de vitesse dans cette zone.
- Analyser la turbulence dans la partie divergente de la tuyère afin de lever certains doutes sur la sous estimation ou la surestimation des différents modèles utilisés.

REFERENCES

1. Baldwin B.S and Lomax H "Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows" AIAA paper 78-257, Jan 1978.
2. Cebeci, T and Smith, A ,analyse of turbulent boundary layers ,academic ,New-York ,1974.
3. Berman H.A., Anderson Jr, J.D., Drummond J.P., **Supersonic flow over a rearward facing step with transverse non reacting hydrogen injection**, AIAA J.,21;1707-1713,1983.
4. Deiwert G.S., **Supersonic axisymmetric flow over bot tails containing a centered propulsive jet**, AIAA J.,22, 1358-1365, 1984.
5. Degani D and Schiff L.B "Computation of turbulent supersonic flows around pointed bodies having crossflow separation" Journal of computational physics Vol 66 ,1986 ,pp 173-196.
6. Jubaraj Sahu,Damberg J.E.,Navier et Stokes computations of transonic flows with a two-equation turbulence model, AIAA J.,24,1744-1751,1986.
7. Visbal M.,Knight D.,**The Baldwin-Lomax turbulence model for two dimensional shock-wave/boundary layer interaction**, AIAA J.,22, 921-628, 1984.
8. Jones W.P.and B.E.Launder (1972) **The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence**. International Journal of heat and Mass Transfer, 15,301-314.
9. <http://www.efluids.com/efluids/pages/gallery.htm>
10. Shapiro A.H (1953) **The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow** New-York Ronalds press.
11. Roland Schiestel « **Modélisation et simulation des écoulements turbulents** »; Edition Hermés, Paris, 1993.
12. Kolmogorov, A.N. '1942) **Equation of turbulent motion of an incompressible fluid**. IZV Akad.Nauk.USSR .Ser.Phys.,Vol6,pp.56-58.(Translated into English by D.B.Spalding, as Imperial college, Mechanical Engineering Department Report ON/6, 1968, London, U.K)
13. Spalding D.B.(1982) **The vorticity-fluctuations (kw) Model of turbulence**. Imperial college CFDW Report CFD 82/17, Imperial college, London, U.K.

14. Ng, N.H and D.B.Spalding (1972) **Some application of a model of turbulence to boundary layers near walls** . *Physics of fluids*, 15, 20-35.
15. Launder, B.E. and D.B.Spalding (1974) **The numerical computation of turbulent flows**. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,3, 269-289.
16. Boussinesq,J.(1877) **Essai sur la théorie des eaux courantes(Essay of the theory of water flow)**.*Mémoires académie de science (Paris)*,23(1), 601-680.
17. Hanjalic, K.and B.E.Launder (1970) **Two Dimensional Asymmetrical Turbulent Flow in Ducts.Ph.D** . *Dissertation*.University of London, London, U.K.
18. Launder, B.E.,A.Morse, W.Rodi ,and D.B.Spalding (1972) **A comparison of performance of six turbulence models**. *Proceeding of NASA Conference on free Shear Flows*,Langley, VA ,U.S.A.
19. Jaw,S.Y.(1991) **Development of an anisotropic turbulence model for prediction of complex flows** .*Ph.D. Dissertation*.Dept.of Mechanical Engineering, the university of Iowa City, IA, U.S.A.
20. Yakhot.V .and S.A.Orszag (1986) **Renormalization group analysis of turbulence:I.Basic theory**.*J.of Scientific Computing*, 1(1),3-51.
21. Yoshizawa,A.(1987) **Statistical modelling of a transport equation for the kinetic energy dissipation rate**. *Physics of fluid*, 30(3), 628-631.
22. Robert R.Hwang and Shenq-Yuh Jaw :**Second-order closure turbulence models :their achievements and limitations**.*Proc.Natl. Sci. Counc. ROC(A)*;Vol.22,N°6,1998.pp.703-722.
23. Takemitsu, N.(1990) **An analytical study of the standard k- ϵ model**. *J.of Fluid Engineering*, 112, 192-198.
24. Reynolds, W.C (1974) **Computation of turbulent flows**, *AIAA paper* ,74 ,556-567.
25. Speziale, C.G.(1991) **Analytic methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence**. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23, 107-157.
26. Barton, J.M.,R.Rubinstein , and K.R.Kirtly (1991) **Non-linear Reynolds stress model for turbulent shear flows**. *AIAA 91-0609*, 29th Aerospace sciences meeting, Reno, NE, U.S.A.
27. Chen and S.W.Kim, **Computation of turbulent flows with a multiple-time-scale turbulence model**, *NASA TM 102499*, 1990.
28. D.Wilcox, **Multiscale model for turbulent flows**, *AIAA Journal VOL.26*, N°11, 1988.
29. Amano, R.S. and P.Goel (1984) **A numerical study of a separating and reattachment flow using Reynolds-stress turbulence closure** . *Numerical Heat Transfer*,7, 343-357.

30. Brankovic, A and S.A.Syed (1991) **Validation of Reynolds stress turbulence model in generalized coordinates.** AIAA 22nd fluid Dynamics, Plasmadynamics and lasers conference, Honolulu, HI, U.S.A.
31. Rodrick V.Chima (1996) **A k-w Turbulence model for quasi-three-dimensional turbomachinery flows;** NASA Technical memorandum 107051; 14p.
32. Jeppe Johansen (April 1996); **implementation of Johnson-King Trurbulence model** .Tech.rep.,Ris-National Laboratory, Roskilde, Denmark -R-886(EN).
33. J.Zhu and T.H.Shih ; **A turbulence module for the NPARC Code,** NASA Contractor Report 198358 ICOMP-95-12;CMOT-95-1 AIAA-95-2612.
34. V.G.Lushchik and A.E.Yakubenko; **Comparative analysis of turbulence models for calculating a near-wall boundary layer;** Fluid dynamics, Vol 33, N°1, 1998; Translated from Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk, Mekhanika Zhidkosti I Gaza, N°1, pp44-58, January-February, 1998.
35. J.C.Dudek, N.J.Georgiadis and D.A.Yoder; **Calculation of turbulent subsonic diffuser flows using the NPARC Navier-Stokes Code;** NASA Technical memorandum 107177; AIAA-96-0497.
36. S.Dutta and J.A.Khan; **Numerical prediction of fully developed channel flow with functionalised two-equation turbulence models;** Journal of mechanical engineering research and developments, Vol21-22, pp53-70,1999.
37. John D.Anderson,J.R; **Modern compressible flow with historical perspective;** Mc Graw Hill book company copyright 1982.
38. John D.Anderson,J.R; **Fundamentals of aerodynamics** Mc Graw Hill book company copyright 1985.
39. K.Hanjalic and B.E.Launder; **Contribution towards a Reynolds-Stress closure for low-Reynolds-number turbulence.** J.Fluid Mech (1976), vol, 74 ,part 4, pp.593-610.
40. C.A.J.fletcher; **Computational techniques for fluid dynamics;** Vol I,II.
41. B.E.Launder,a.Morse,W.Rodi and D.B.Spalding; **The prediction of free shear flows-A comparaisn of the performance of six turbulence models.** Proc-NASA Langley Research Center, Hampton, July 1972 (NASA SP-321,1973)Vol.I,pp361-426.
42. M.C.Cline, **VNAP2:A computer program for computation of two-Dimensional, time dependent compressible, turbulent flow.** Los Alamos Scientific Laboratory report A-8872, New mexico (August 1981).
43. Abdellah Hadjadj; **Analyse physique et simulation numérique des écoulements compressibles-Application aux tuyères de propulseurs.** Thèse de Doctorat Université de Rouen année :1997, code :076190.

44. N.E.K.Khelalfa ; *Application d'une procédure numérique et génération de maillage adaptée pour des écoulements supersoniques internes*. Mémoire de Magister, Université de Blida (1993).
45. C.Hirsh, *Numerical computation of internal external flows*. Vol I. II.
46. Zucrow,M.J, and Hoffman.J.D., *Gas dynamic*. Vol II, John Wiley, New-York, 1977.
47. a.Nebbache, D.Zeitoun, M.Imbert, R.Brun and C.Beguier, *Numerical study of turbulence model in a supersonic nozzle*. *Eur.J.Mech.,B/Fluids*,8,n°2,143-161, 1989.
48. Argyris G.Panaras, *Algebraic turbulence modelling for swept shock-wave/turbulent boundary-layer interactions*. *AIAA Journal* vol.35,N°3, March 1997.
49. D.A.Johnson, *Nonequilibrium algebraic turbulence modelling considerations for transonic airfoils and wing*. *AIAA Paper* 92-0026, Jan.1992.

ANNEXES



ANNEXE A

Schéma aux caractéristiques appliqué à l'entrée de la tuyère

Soit le système d'équations :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho \omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + u \omega \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = -\bar{V} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \rho \left[\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right] \quad (\text{A-1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \omega u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \left(\omega \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) = & -\bar{V} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \lambda \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \\ & + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{1}{\rho R} \left[(\lambda + \mu) \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \mu \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{2}{3} \left(\omega \frac{\partial \rho k}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial \rho k}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \omega u \frac{\partial v}{\partial \xi} = & -\bar{V} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\lambda + 2\mu) \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \alpha \lambda \frac{u}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{\rho} \omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\mu \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right] \\ & + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\rho R} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{v}{R} \right) \right] - \frac{2}{3\rho} \beta \frac{\partial \rho k}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tau} + u \omega \frac{\partial p}{\partial \xi} - a^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + u \omega \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right] = & -\bar{V} \frac{\partial p}{\partial \eta} - a^2 \bar{V} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + (\gamma - 1) \left\{ \begin{aligned} & \left[(\lambda + 2\mu) \left[\left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. \mu \left[\left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \right] + 2\lambda \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left(\beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] \\ & + 2\mu \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \left(\omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k \left(\omega \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right) \right) \\ & + \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right) + \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{R} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{v^2}{R} \right] \\ & + \frac{1}{R} \left[2\lambda \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + k \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \rho \varepsilon \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

On pose :

$$\Psi_1 = -\bar{V} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \rho \left[\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right] \quad (\text{A-5})$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & -\bar{V} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \lambda \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \\ & + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{1}{\rho R} \left[(\lambda + \mu) \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \mu \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{2}{3} \left(\omega \frac{\partial \rho k}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial \rho k}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

$$\begin{aligned} \Psi_3 = & -\bar{V} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\lambda + 2\mu) \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \alpha \lambda \frac{u}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{\rho} \omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\mu \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right] \\ & + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\rho R} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{v}{R} \right) \right] - \frac{2}{3\rho} \beta \frac{\partial \rho k}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

$$\Psi_4 = -\bar{V} \frac{\partial p}{\partial \eta} - a^2 \bar{V} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + (\gamma - 1) \left\{ \begin{aligned} & + 2\mu \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \left(\omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k \left(\omega \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right) \right) \\ & + \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right) + \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{R} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{v^2}{R} \right] \\ & + \frac{1}{R} \left[2\lambda \nu \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + k \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \rho \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-8})$$

Le système d'équation s'écrit à présent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho \omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + u \omega \frac{\partial u}{\partial \xi} = \Psi_1 \quad (\text{A-9})$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \omega \frac{\partial p}{\partial \xi} = \Psi_2 \quad (\text{A-10})$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \omega \frac{\partial v}{\partial \xi} = \Psi_3 \quad (\text{A-11})$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + u \omega \frac{\partial p}{\partial \xi} - a^2 u \omega \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \Psi_4 \quad (\text{A-12})$$

LES COURBES DES CARACTERISTIQUES

$$(A-9)X I_1 + (A-10) X I_2 + (A-11) X I_3 + (A-12) X I_4 = 0$$

En remplaçant on obtient :

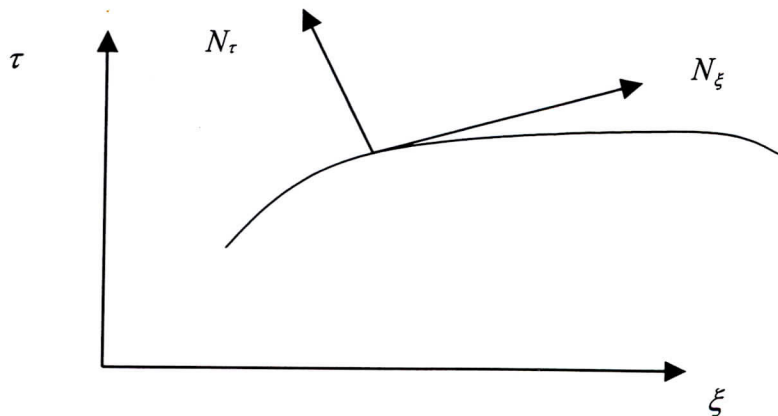
$$I_1 \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho \omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + u \omega \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \Psi_1 \right] + I_2 \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \omega \frac{\partial p}{\partial \xi} - \Psi_2 \right] + I_3 \left[\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \omega \frac{\partial v}{\partial \xi} - \Psi_3 \right] \\ + I_4 \left[\frac{\partial p}{\partial \tau} + u \omega \frac{\partial p}{\partial \xi} - a^2 u \omega \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \tau} - \Psi_4 \right] = 0$$

En regroupant les termes semblables on obtient ;

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} (I_1 - a^2 I_4) + \frac{\partial \rho}{\partial \xi} (u \omega I_1 - a^2 u \omega I_4) \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} (I_2) + \frac{\partial u}{\partial \xi} (\rho \omega I_1 + u \omega I_2) \right] + \left[\frac{\partial v}{\partial \tau} I_3 + \frac{\partial v}{\partial \xi} (u \omega I_3) \right] \\ + \left[\frac{\partial p}{\partial \tau} (I_4) + \frac{\partial p}{\partial \xi} \left(\frac{\omega}{\rho} I_2 + u \omega I_4 \right) \right] = \Psi_1 I_1 + \Psi_2 I_2 + \Psi_3 I_3 + \Psi_4 I_4 \quad (A-13)$$

Posons les vecteurs :

$$\bar{W}_1 = \begin{pmatrix} u \omega I_1 - a^2 u \omega I_4 \\ I_1 - a^2 I_4 \end{pmatrix} ; \quad \bar{W}_2 = (\rho \omega I_1 + u \omega I_2) ; \quad \bar{W}_3 = (u \omega I_3) ; \quad \bar{W}_4 = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{\rho} I_2 + u \omega I_4 \\ I_4 \end{pmatrix}$$



$$\nabla \rho \bar{W}_1 + \nabla u \bar{W}_2 + \nabla v \bar{W}_3 + \nabla p \bar{W}_4 = 0 \quad \text{avec} \quad \nabla = \left[\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \tau} \right]$$

Les vecteurs \bar{N} et \bar{W}_i sont toujours perpendiculaires tel que \bar{N} est la normale à la ligne caractéristique et \bar{W}_i est tangent à celle-ci.

$$\bar{N}_i \bar{W}_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{N} \cdot \bar{W}_1 = 0 \\ \bar{N} \cdot \bar{W}_2 = 0 \\ \bar{N} \cdot \bar{W}_3 = 0 \\ \bar{N} \cdot \bar{W}_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_\xi (u\omega I_1 - a^2 u\omega I_4) + N_\tau (I_1 - a^2 I_4) = 0 \\ N_\xi (\rho\omega I_1 + u\omega I_2) + N_\tau (I_2) = 0 \\ N_\xi (u\omega I_3) + N_\tau (I_3) = 0 \\ N_\xi \left(\frac{\omega}{\rho} I_2 + u\omega I_4 \right) + N_\tau (I_4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 (N_\xi u\omega + N_\tau) - a^2 I_4 (N_\xi u\omega + N_\tau) = 0 \\ I_1 (N_\xi \rho\omega) + I_2 (N_\xi u\omega + N_\tau) = 0 \\ I_3 (N_\xi u\omega + N_\tau) = 0 \\ I_2 \left(N_\xi \frac{\omega}{\rho} \right) + I_4 (N_\xi u\omega + N_\tau) = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$[A]I=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} N_\xi u\omega + N_\tau & 0 & 0 & -a^2(N_\xi u\omega + N_\tau) \\ N_\xi \rho\omega & N_\xi u\omega + N_\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_\xi u\omega + N_\tau & 0 \\ 0 & N_\xi \frac{\omega}{\rho} & 0 & N_\xi u\omega + N_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = 0$$

Il existe deux solutions:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 0 \text{ [Triviale]}$$

$$\det[A] = 0$$

$$\det[A] = (N_\xi u\omega + N_\tau)^4 - a^2 (N_\xi u\omega + N_\tau) (N_\xi^2 \omega^2 (N_\xi u\omega + N_\tau))$$

$$(N_\xi u\omega + N_\tau)^2 \left[(N_\xi u\omega + N_\tau)^2 - a^2 N_\xi^2 \omega^2 \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} N_\xi u\omega + N_\tau = 0 \dots \dots \dots (\alpha) \\ N_\xi u\omega + N_\tau = \pm a N_\xi \omega \dots \dots \dots (\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_\xi u\omega + N_\tau = 0 \rightarrow \frac{N_\tau}{N_\xi} = -\omega u \\ \frac{d\xi}{d\tau} = -\frac{N_\tau}{N_\xi} \Rightarrow \frac{d\xi}{d\tau} = \omega u \text{ équation de la caractéristique le long de la Pathline.} \end{cases}$$

les équations caractéristiques le long de la Machline sont .

$$N_{\xi}u\omega + N_{\tau} = \pm a N_{\xi}\omega \rightarrow -\frac{N_{\tau}}{N_{\xi}} = \frac{d\xi}{d\tau} = \omega u \pm a\omega \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = \omega u - a\omega \\ \frac{d\xi}{d\tau} = \omega u + a\omega \end{cases}$$

Calcul des I_1, I_2, I_3, I_4 :

Pour le cas (α) : $\frac{d\xi}{d\tau} = \omega u \rightarrow N_{\xi}\omega u + N_{\tau} = 0$

On remplace dans la matrice [A] et on obtient :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{\xi}\rho\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{\xi}\frac{\omega}{\rho} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} I_1 N_{\xi}\rho\omega = 0 \Rightarrow I_1 = 0 \\ I_2 N_{\xi}\frac{\omega}{\rho} = 0 \Rightarrow I_2 = 0 \end{cases} \quad I_3 \text{ et } I_4 \text{ sont des variables libres.}$$

On choisit : $\begin{cases} I_1 = 0 \\ I_2 = 0 \\ I_3 = 1 \\ I_4 = 1 \end{cases}$

L'équation (A-13) devient : $-a^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \omega u \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right] + \left[\frac{\partial v}{\partial \tau} + \omega u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] + \left[\frac{\partial p}{\partial \tau} + \omega u \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] = \Psi_3 + \Psi_4 \quad (\text{A-14})$

En développant l'équation obtenue (A-14) :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \right) I_4 + \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{d\xi}{d\tau} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) I_3 - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) I_4 = \Psi_3 I_3 + \Psi_4 I_4$$

En utilisant la définition de la dérivé particulaire $\left(\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial x} \right)$ nous obtenons :

$$\frac{dp}{d\tau} + \frac{dv}{d\tau} - a^2 \frac{d\rho}{d\tau} = \Psi_3 + \Psi_4$$

On obtient : $-a^2 d\rho I_4 + dV + dp = (\Psi_3 I_3 + \Psi_4 I_4) d\tau \Leftrightarrow [dp - a^2 d\rho] I_4 + dv I_3 = (\Psi_3 I_3 + \Psi_4 I_4) d\tau$

Donc $\rightarrow \begin{cases} dv = \Psi_3 d\tau \\ dp \cdot a^2 \cdot d\rho = \Psi_4 d\tau \end{cases}$ équation de compatibilités le long de la pathline.

Pour (β) nous avons :

1 cas : $\frac{d\xi}{d\tau} = \omega u + a\omega \Rightarrow -\frac{N_\tau}{N_\xi} = \omega u + a\omega \Rightarrow N_\tau + (\omega u + a\omega)N_\xi = 0 \Rightarrow N_\tau \omega u + N_\tau = -a\omega N_\xi$

[A] devient :
$$\begin{bmatrix} -aN_\xi\omega & 0 & 0 & a^2(aN_\xi\omega) \\ N_\xi\rho\omega & -aN_\xi\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -aN_\xi\omega & 0 \\ 0 & N_\xi\frac{\omega}{\rho} & 0 & -aN_\xi\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = 0$$

On obtient :

$$\begin{cases} -aN_\xi\omega I_1 + a^3N_\xi\omega I_4 = 0 \\ N_\xi\rho\omega I_1 - \omega N_\xi\omega I_2 = 0 \\ aN_\xi\omega I_3 = 0 \\ N_\xi\frac{\omega}{\rho}I_2 - a\omega N_\xi I_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = a^2 I_4 \\ I_2 = \frac{\rho}{a} I_2 \\ I_3 = 0 \end{cases}$$

On déduit que I_4 est une variable libre, on choisit la valeur $I_4=1$ est déduit les autres

valeurs :
$$\begin{cases} I_1 = a^2 \\ I_2 = \rho a \\ I_3 = 0 \\ I_4 = 1 \end{cases}$$

L'équation (A-13)

devient :
$$\frac{\partial u}{\partial \tau} \rho a + \frac{\partial u}{\partial \xi} (\rho \omega a^2) + \frac{\partial u}{\partial \xi} (\rho a u \omega) + \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial \xi} (\omega a) + \frac{\partial p}{\partial \xi} (\omega a) + \frac{\partial p}{\partial \xi} (\omega u) = a^2 \Psi_1 + \rho a \Psi_2 + \Psi_4$$

$$\rho a \frac{du}{d\tau} + \frac{dp}{d\tau} = \Psi_1 a^2 + \rho a \Psi_2 + \Psi_4$$

L'équation de compatibilité le long de la machline devient :
$$\begin{cases} d\xi = (\omega u + \omega a) d\tau \\ dp + \rho a du = (a^2 \Psi_1 + \rho a \Psi_2 + \Psi_4) d\tau \end{cases}$$

ANNEXE B

$$\begin{aligned}
\Psi_2 = & -\omega u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho} \left(\omega \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\rho} \omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \lambda \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \\
& + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{1}{\rho R} \left[(\lambda + \mu) \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \mu \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \\
& - \frac{1}{\rho} \frac{2}{3} \left(\omega \frac{\partial \rho k}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial \rho k}{\partial \eta} \right)
\end{aligned} \tag{B-6}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_3 = & -\omega u \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\lambda + 2\mu) \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \alpha \lambda \frac{u}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{\rho} \omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\mu \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right] \\
& + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\rho R} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{v}{R} \right) \right] - \frac{2}{3\rho} \beta \frac{\partial \rho k}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{B-7}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_4 = & -a^2 u \omega \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + (\gamma - 1) \left\{ \begin{aligned} & + 2\mu \left(\omega \frac{\partial v}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \left(\omega \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k \left(\omega \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right) \right) \\ & + \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right) + \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{R} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{v^2}{R} \right] \\ & + \frac{1}{R} \left[2\lambda v \left(\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + k \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \rho \varepsilon \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{B-8}$$

Le système d'équations s'écrit à présent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho \left[\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] = \Psi_1 \tag{B-9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \Psi_2 \tag{B-10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \Psi_3 \tag{B-11}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial p}{\partial \eta} - a^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right] = \Psi_4 \tag{B-12}$$

LES COURBES DES CARACTERISTIQUES:

$$(B-9)X I_1 + (B-10) X I_2 + (B-11) X I_3 + (B-12) X I_4 = 0$$

En remplaçant on obtient :

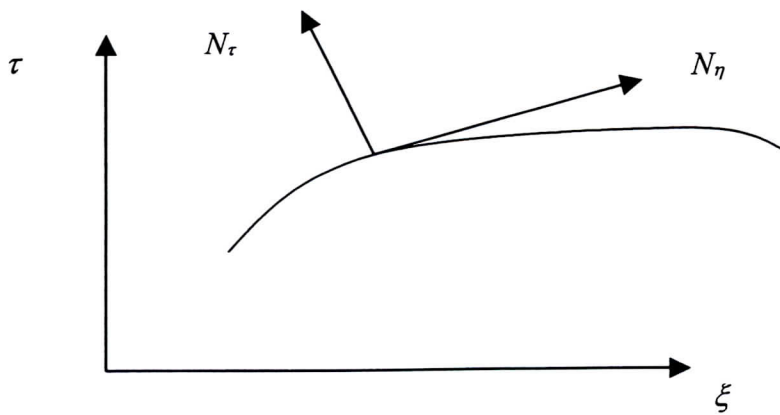
$$I_1 \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} - \Psi_1 \right) \right] + I_2 \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} - \Psi_2 \right] + I_3 \left[\frac{\partial v}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} - \Psi_3 \right] \\ + I_4 \left[\frac{\partial p}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial p}{\partial \eta} - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) - \Psi_4 \right] = 0$$

En regroupant les termes semblables nous obtenons :

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} (I_1 - a^2 I_4) + \frac{\partial \rho}{\partial \eta} (\bar{V} I_1 - a^2 \bar{V} I_4) \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} (I_2) + \frac{\partial u}{\partial \eta} (\rho \alpha I_1 + \bar{V} I_2) \right] + \left[\frac{\partial v}{\partial \tau} (I_3) + \frac{\partial v}{\partial \eta} (\rho \beta I_1 + \bar{V} I_3) \right] \\ + \left[\frac{\partial p}{\partial \tau} (I_4) + \frac{\partial p}{\partial \eta} \left(\frac{\alpha}{\rho} I_2 + \frac{\beta}{\rho} I_3 + \bar{V} I_4 \right) \right] = \Psi_1 I_1 + \Psi_2 I_2 + \Psi_3 I_3 + \Psi_4 I_4 \quad (B-13)$$

Soit les vecteurs

$$\vec{W}_1 = \begin{pmatrix} \bar{V} I_1 - a^2 \bar{V} I_4 \\ I_1 - a^2 I_4 \end{pmatrix}; \quad \vec{W}_2 = \begin{pmatrix} \rho \alpha I_1 + \bar{V} I_2 \\ I_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{W}_3 = \begin{pmatrix} \rho \beta I_1 + \bar{V} I_3 \\ I_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{W}_4 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\rho} I_2 + \frac{\beta}{\rho} I_3 + \bar{V} I_4 \\ I_4 \end{pmatrix}$$



$$\nabla \rho \bar{W}_1 + \nabla u \bar{W}_2 + \nabla v \bar{W}_3 + \nabla p \bar{W}_4 = 0 \quad \text{avec} \quad \nabla = \left[\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \tau} \right]$$

Les vecteurs \bar{N} et \bar{W}_i sont toujours perpendiculaires tel que \bar{N} est la normale à la ligne caractéristique et \bar{W}_i est tangent à celle ci .

$$\bar{N}_i \bar{W}_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{N} \cdot \bar{W}_1 = 0 \\ \bar{N} \cdot \bar{W}_2 = 0 \\ \bar{N} \cdot \bar{W}_3 = 0 \\ \bar{N} \cdot \bar{W}_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_\eta (\bar{V} I_1 - a^2 \bar{V} I_4) + N_\tau (I_1 - a^2 I_4) = 0 \\ N_\eta (\rho \alpha I_1 + \bar{V} I_2) + N_\tau (I_2) = 0 \\ N_\eta (\rho \beta I_1) + N_\tau (I_3) = 0 \\ N_\eta \left(\frac{\alpha}{\rho} I_2 + \bar{V} I_4 + \frac{\beta}{\rho} I_3 \right) + N_\tau (I_4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 (N_\eta \bar{V} + N_\tau) - I_4 a^2 (N_\eta \bar{V} + N_\tau) = 0 \\ I_1 (N_\eta \rho \alpha) + I_2 (N_\eta \bar{V} + N_\tau) = 0 \\ I_1 (N_\eta \rho \beta) + I_3 (N_\eta \bar{V} + N_\tau) = 0 \\ I_2 \left(N_\eta \frac{\alpha}{\rho} \right) + I_3 \left(N_\eta \frac{\beta}{\rho} \right) + I_4 (N_\eta \bar{V} + N_\tau) = 0 \end{cases}$$

la forme matricielle nous donne

$$[A].I=0 \begin{bmatrix} N_\eta \bar{V} + N_\tau & 0 & 0 & -a^2 (N_\eta \bar{V} + N_\tau) \\ N_\eta \rho \alpha & N_\eta \bar{V} + N_\tau & 0 & 0 \\ N_\eta \rho \beta & 0 & N_\eta \bar{V} + N_\tau & 0 \\ 0 & N_\eta \frac{\alpha}{\rho} & N_\eta \frac{\beta}{\rho} & N_\eta \bar{V} + N_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = 0$$

Les solutions sont :

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 0 \text{ [Triviale]}$$

$$\det[A] = 0$$

$$\begin{aligned} \det[A] &= (N_\eta \bar{V} + N_\tau)^4 - a^2 (N_\eta \bar{V} + N_\tau) \left[N_\eta \rho \alpha (N_\eta \bar{V} + N_\tau) N_\eta \frac{\alpha}{\rho} + (N_\eta \bar{V} + N_\tau) N_\eta \rho \beta N_\eta \frac{\beta}{\rho} \right] \\ &= (N_\eta \bar{V} + N_\tau)^2 \left[(N_\eta \bar{V} + N_\tau)^2 - a^2 (N_\eta^2 (\alpha^2 + \beta^2)) \right] \end{aligned}$$

$$\det[A] = 0 \Rightarrow \begin{cases} N_\eta \bar{V} + N_\tau = 0 \dots\dots\dots (a) \\ N_\eta \bar{V} + N_\tau = \pm a N_\eta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \dots\dots\dots (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_\eta \bar{V} + N_\tau = 0 \rightarrow \frac{N_\tau}{N_\eta} = -\bar{V} \\ \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{N_\tau}{N_\eta} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\tau} = \bar{V} \text{ équation de la caractéristique le long de la Pathline.}$$

les équations caractéristiques le long de la Mach line sont .

$$N_\eta \bar{V} + N_\tau = \pm a N_\tau \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} \rightarrow \frac{N_\tau}{N_\eta} = \frac{d\eta}{d\tau} = \bar{V} \pm a \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\eta}{d\tau} = \bar{V} - a \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} \\ \frac{d\eta}{d\tau} = \bar{V} + a \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} \end{cases}$$

calcul des I_1, I_2, I_3, I_4 :

Pour le cas (a) nous avons : $\frac{d\eta}{d\tau} = \bar{V} \rightarrow N_\eta \bar{V} + N_\tau = 0$

$$[A] \text{ devient : } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_\eta \rho \alpha & 0 & 0 & 0 \\ N_\eta \rho \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_\mu \frac{\alpha}{\rho} & N_\eta \frac{\beta}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} I_1 N_\eta \rho \alpha = 0 \rightarrow I_1 = 0 \\ I_1 N_\eta \rho \beta = 0 \rightarrow I_1 = 0 \\ I_2 N_\eta \frac{\alpha}{\rho} + I_3 N_\eta \frac{\beta}{\rho} \rightarrow I_2 = -\frac{\beta}{\rho} I_3 \end{cases}$$

$$\text{Les variables } I_3 \text{ et } I_4 \text{ sont des variables libres} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 0 \\ I_2 = -\frac{\beta}{\rho} \\ I_3 = 1 \text{ (choisie)} \\ I_4 = 1 \text{ (choisi)} \end{cases}$$

L'équation devient :

$$-a^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right] - \frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \left[\frac{\partial v}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \left[\frac{\partial p}{\partial \tau} + \bar{V} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] = -\frac{\beta}{\alpha} \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4$$

$$-a^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{d\eta}{d\tau} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right] - \frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{d\eta}{d\tau} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \left[\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{d\eta}{d\tau} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \left[\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{d\eta}{d\tau} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] = -\frac{\beta}{\alpha} \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4$$

$$-a \frac{d\rho}{d\tau} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{du}{d\tau} + \frac{dv}{d\tau} + \frac{dp}{d\tau} = \left[-\frac{\beta}{\alpha} \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 \right]$$

$$\text{Les équations de compatibilités le long de la path line sont : } \begin{cases} \beta du - \alpha dv = (\beta \Psi_2 - \alpha \Psi_1) d\tau \\ dp - a^2 d\rho = \Psi_4 d\tau \end{cases}$$

Pour le cas (b₁) :
$$\begin{cases} \frac{d\eta}{d\tau} = \bar{V} + a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} \\ \alpha^* = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\tau} = \bar{V} + a\alpha^* \rightarrow -\frac{N_\tau}{N_\eta} = \bar{V} + a\alpha^* \rightarrow N_\tau + (\bar{V} + a\alpha^*)N_\eta = 0$$

[A] devient :
$$\begin{bmatrix} aN_\eta\alpha^* & 0 & 0 & a^2(aN_\eta\alpha^*) \\ N_\eta\rho\alpha & -aN_\eta\alpha^* & 0 & 0 \\ N_\eta\rho\beta & 0 & -aN_\eta\alpha^* & 0 \\ 0 & N_\eta\frac{\alpha}{\rho} & N_\eta\frac{\beta}{\rho} & -aN_\eta\alpha^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = 0$$

On obtient :

$$\begin{cases} aN_\eta\alpha^*I_1 - a^3N_\eta\alpha^*I_4 = 0 \\ N_\eta\rho\alpha I_1 - aN_\eta\alpha^*I_2 = 0 \\ N_\eta\rho\beta I_1 - aN_\eta\alpha^*I_3 = 0 \\ N_\eta\frac{\alpha}{\rho}I_2 + N_\eta\frac{\beta}{\rho}I_3 - aN_\eta\alpha^*I_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = a^2I_4 \\ I_2 = \frac{\rho\alpha}{a\alpha^*}I_1 \\ I_3 = \frac{\rho\beta}{a\alpha^*}I_1 \\ I_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = a^2 \\ I_2 = \frac{\rho\alpha a}{\alpha^*} \\ I_3 = \frac{\rho\beta a}{\alpha^*} \\ I_4 = 1 \end{cases}$$

I_4 est une variable libre choisie comme étant =1.

L'équation (B-13) devient:

$$\frac{\rho\alpha a}{\alpha^*} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} + (a\alpha^* + \bar{V}) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \frac{\rho\beta a}{\alpha^*} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau} + (a\alpha^* + \bar{V}) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial p}{\partial \tau} + (a\alpha^* + \bar{V}) \frac{\partial p}{\partial \tau} = \left[a^2\Psi_1 + \frac{\rho\alpha a}{\alpha^*}\Psi_2 + \frac{\rho\beta a}{\alpha^*}\Psi_3 + \Psi_4 \right]$$

$$\frac{\rho\alpha a}{\alpha^*} \frac{du}{d\tau} + \frac{\rho\beta a}{\alpha^*} dv + dp = \left(a^2\Psi_1 + \frac{\rho\alpha a}{\alpha^*}\Psi_2 + \frac{\rho\beta a}{\alpha^*}\Psi_3 + \Psi_4 \right)$$

Donc l'équation de compatibilité le long de la mach line est :

$$\begin{cases} d\eta = (\bar{V} + a\alpha^*)d\tau \\ \frac{\rho\alpha a}{\alpha^*} du + \frac{\rho\beta a}{\alpha^*} dv + dp = \left(a^2\Psi_1 + \frac{\rho\beta a}{\alpha^*}\Psi_2 + \frac{\rho\beta a}{\alpha^*}\Psi_3 + \Psi_4 \right) \end{cases}$$

Pour le (b₂), nous avons :
$$\frac{d\eta}{d\tau} = \bar{V} - a\alpha^* \rightarrow -\frac{N_\tau}{N_\eta} = \bar{V} - a\alpha^* \Rightarrow N_\tau + N_\eta(\bar{V} - a\alpha^*) = 0$$

La Matrice A devient :
$$\begin{bmatrix} aN_\eta\alpha^* & 0 & 0 & -a^2(aN_\eta\alpha^*) \\ N_\eta\rho\alpha & aN_\eta\alpha^* & 0 & 0 \\ N_\eta\rho\beta & 0 & aN_\eta\alpha^* & 0 \\ 0 & N_\eta\frac{\alpha}{\rho} & N_\eta\frac{\beta}{\rho} & aN_\eta\alpha^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} aN_{\eta}\alpha^*I_1 - a^3N_{\eta}\alpha^*I_4 = 0 \\ N_{\eta}\rho\alpha aI_1 + aN_{\eta}\alpha^*I_2 = 0 \\ N_{\eta}\rho\beta I_1 + aN_{\eta}\alpha^*I_3 = 0 \\ N_{\eta}\frac{\alpha}{\rho}I_2 + N_{\eta}\frac{\beta}{\rho}I_3 + aN_{\eta}\alpha^*I_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = a^2I_4 \\ I_2 = -\frac{\rho\alpha}{a\alpha^*}I_1 \\ I_3 = -\frac{\rho\beta}{a\alpha^*}I_1 \\ I_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = a^2 \\ I_2 = -\frac{\rho\alpha a}{\alpha^*} \\ I_3 = -\frac{\rho\beta a}{\alpha^*} \\ I_4 = 1 \end{cases}$$

L'équation (B-13)

devient :

$$-\frac{\rho\alpha a}{\alpha^*} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} + (a\alpha^* + \bar{V}) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] - \frac{\rho\beta a}{\alpha^*} \left[\frac{\partial v}{\partial \tau} + (a\alpha^* + \bar{V}) \frac{\partial v}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial p}{\partial \tau} + (a\alpha^* + \bar{V}) \frac{\partial p}{\partial \tau} = \left[a^2\Psi_1 - \frac{\rho\alpha a}{\alpha^*}\Psi_2 - \frac{\rho\beta a}{\alpha^*}\Psi_3 + \Psi_4 \right]$$

$$\frac{dp}{d\tau} - \frac{\rho\alpha a}{\alpha^*} \frac{du}{d\tau} - \frac{\rho\beta a}{\alpha^*} \frac{dv}{d\tau} = \left(\Psi_4 + a^2\Psi_1 - \frac{\rho\alpha a}{\alpha^*}\Psi_2 - \frac{\rho\beta a}{\alpha^*}\Psi_3 \right)$$

Donc l'équation de compatibilité le long de la machline

$$\text{est : } \begin{cases} d\eta = (\bar{V} - a\alpha^*)d\tau \\ dp - \frac{\rho\alpha a}{\alpha^*}du - \frac{\rho\beta a}{\alpha^*}dv = \left(\Psi_4 + a^2\Psi_1 - \frac{\rho\alpha a}{\alpha^*}\Psi_2 - \frac{\rho\beta a}{\alpha^*}\Psi_3 \right) d\tau \end{cases}$$