

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ SAAD DAHLEB DE BLIDA

INSTITUT D'AÉRONAUTIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER
EN
AÉRONAUTIQUE

Soutenu par:

KALI El-Hadi

Titre

***COMPARAISON DES PERFORMANCES DE
TUYERES SUPERSONIQUES DE PROPULSION
DETERMINEES PAR LA METHODE DES
CARACTERISTIQUES ET DES DIFFERENCES FINIES***

DEVANT LE JURY D'EXAMEN:

| | | |
|---------------|--|-------------------------------|
| Président : | Mr S. BOUKRAA, M/Conférences | U. de Blida |
| Rapporteurs : | Mr A. HADDAD, Professeur Mr Z. YOUBI, M/Conférences | C.U. de Guelma U. de Blida |
| Examineurs: | Mr L. Amtout, C/Cours Mr M. Bouneder, C/Cours | U. de Blida U. de Blida |

RESUME

La méthode numérique développée dans cette thèse a savoir, la méthode des différences finies est utilisée pour le calcul des écoulements supersoniques rencontrés dans les parties divergentes des tuyères de propulsion.

Le système d'équations d'Euler est pris comme modèle mathématique de l'écoulement. La formulation de la méthode est rappelée. On expose le principe du schéma de MacCormack pour le cas unidimensionnel, l'extension au cas bidimensionnel est exposé en détail.

Les comparaisons avec la méthode des caractéristiques, d'une utilisation courante pour ce type d' applications, a permis de valider les résultats obtenus.

MOTS CLES:

Tuyère convergente-divergente, Méthode des différences finies, Méthode des caractéristiques, schéma de MacCormack, équations d'Euler, propulsion.

Remerciements

Je remercie tout d'abord Dieu tout puissant de m'avoir donné la force pour mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer mes remerciements à monsieur Salah Boukraa, Maître de conférences à l'université de Blida pour m'avoir donné l'occasion de continuer et finaliser ce travail et pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury d'examination.

Je tiens aussi à remercier messieurs Amtout et Bouneder pour avoir bien voulu faire partie du jury.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Zine-eddine Youbi, maître de conférences et recteur de l'université Saad dahleb de Blida pour avoir voulu, malgré ces nombreuses obligations, de suivre et diriger ce travail.

Je remercie aussi Monsieur Abdelkarim Haddad, Professeur, centre universitaire de Guelma d'avoir consacré une partie de son temps précieux en acceptant de diriger ce travail malgré ses divers engagements, ainsi que pour la confiance qu'il m'a témoigné.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Said Bergheul, directeur de l'institut d'Aéronautique pour son aide et conseils qu'ils m'a prodigués.

Je témoigne mon amitié sincère à tous ceux et celles qui m'ont soutenu et encouragé durant toutes ces années.

SOMMAIRE

| | |
|---|----------|
| Résumé | i |
| Remerciements | ii |
| Sommaire | iii |
| Nomenclature | vii |
| Recherche Bibliographique | viii |
| | |
| INTRODUCTION GENERALE | 1 |
| | |
| Chapitre 1: GENERALITES SUR LES TUYERES SUPERSONIQUES ET LEURS CARACTERISTIQUES DE PERFORMANCE | 3 |
| | |
| 1.1: INTRODUCTION | 4 |
| | |
| 1.2: FORMES GEOMETRIQUES D'UNE TUYERE SUPERSONIQUE | 4 |
| 1.3: ECOULEMENT DANS UNE TUYERE | 6 |
| 1.4: DIFFERENTS TYPES DE TUYERES SUPERSONIQUE | 7 |
| 1.4.1: LA TUYERE CONIQUE | 7 |
| 1.4.2: LA TUYERE CONTOURE PROFILEE | 8 |
| 1.4.3: LA TUYERE ANNULAIRE | 8 |
| 1.4.4: LES TUYERES ATOU-ADJUSTABLES | 9 |
| 1.4.4.1: LA TUYERE TYPE BOUCHON | 9 |
| 1.4.4.2: LA TUYERE TYPE DETENTE DEVIATION | 10 |
| 1.5: PRINCIPAUX PARAMETRES DE PERFORMANCE | 10 |
| | |
| 1.5.1: LA POUSSEE | 10 |
| 1.5.2: LE COEFFICIENT DE POUSSEE | 10 |
| 1.5.3: LE COEFFICIENT DE DECHARGE | 11 |
| 1.5.4: LA VITESSE EFFECTIVE | 11 |
| 1.5.5: L'IMPULSION SPECIFIQUE | 12 |

| | |
|--|-----------|
| Chapitre 2: FORMULATION ET MODELISATION DE L'ECOULEMENT AU SEIN D'UNE TUYERE SUPERSONIQUE | 12 |
| 2.1: INTRODUCTION | 13 |
| 2.2: HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES | 14 |
| 2.3: LE SYSTEME D'EQUATIONS D'Euler | 15 |
| 2.3.1: LE SYSTEME D'EQUATIONS D'Euler | 15 |
| 2.3.1.1: FORMULATION CONSERVATIVE | 15 |
| 2.3.1.2: FORMULATION QUASI LINEAIRE | |
| 2.3.1.2.1: MATRICE JACOBIENNE DES VARIABLES CONSERVATIVES | 16 |
| 2.3.1.2.2: MATRICE JACOBIENNE DES VARIABLES CONSERVATIVES | 16 |
| 2.3.1.2.3: MATRICE DE PASSAGE ENTRE LES VARIABLES PRIMITIVES ET CONSERVATIVES | 18 20 |
| 2.3.1.2.4: FORMULATION CARACTERISTIQUE | |
| 2.4: CONDITIONS AUX LIMITES | 26 |
| 2.5: TRANSFORMATION DES EQUATIONS EN COORDONNEES GENERALISEES | 29 |
| 2.6: CALCULE DES PARAMETRES DE L'ECOULEMENT LE LONG DE LA LIGNE SONIQUE | 32 |
| 2.6.1: METHODE DE KLIEGEL LEVINE | 32 |
| 2.6.2: PRINCIPE DE LA METHODE | 32 |
| 2.6.3: EQUATION DE LA LIGNE SONIQUE | 34 |
| Chapitre 3: DIFFERENTS APPROCHES DE RESOLUTION NUMERIQUE | 35 |
| 3.1: INTRODUCTION | 35 |
| 3.2: TECHNIQUE DE MACCORMACK | 35 |
| 3.3: EXTENTION DU SCHEMA DE MACCORMACK AU CAS BIDIMENSIONNEL | 36 |
| 3.4: ANALYSE LINEAIRE DE LA STABILITE DU SCHEMA | 37 |
| 3.5: TRAITEMENT DES NŒUDS INTERNES | 39 |

| | |
|---|-----------|
| 4.5 : TROISIEMME CAS D'ETUDE : <i>TUYERE ERENICE</i> | 62 |
| 4.5.1 : DONNEES THERMODYNAMIQUES ET GEOMETRIQUES | 62 |
| 4.5.2 : RESULTAS | 62 |
| 4.5.2.1 : MAILLAGE | 62 |
| 4.5.2.2 : REPARTITION DU NOMBRE DE Mach ET DE LA PRESSION SUR L'AXE DE SYMETRIE | 64 |
| 4.5.2.3 : REPARTITION DU NOMBRE DE Mach ET DE LA PRESSION SUR LA PAROI | 64 |
| 4.5.2.4 : GRAPHIQUES ISO-Mach ET ISO- PRESSION | 66 |
| CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES | 69 |
| ANNEXE A : SCHEMA AUX CARACTERISTIQUES APPLIQUE SUR LA APROI | |
| ANNEXE B : ORGANIGRAMME DU PROGRAMME DE CALCUL | |
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES | |

NOMENCLATURE

1- Système de coordonnées :

- x : coordonnée axiale
 y : coordonnée radiale
 r, z : coordonnées cylindriques adimensionnées
 ξ, η : coordonnées généralisées

2- Lettres latines :

- \bar{A} : Vecteur Matrice jacobienne des variables conservatives
 A, B : Composantes de la matrice vecteur \bar{A}
 \tilde{A} : Vecteur Matrice jacobienne des variables primitives
 \tilde{A}, \tilde{B} : Composantes de la matrice vecteur \tilde{A}
 A, A^* : Section circulaire, section critique
 A_c : Section au col de la tuyère
 c : Célérité du son
 C_+, C_-, C_0 : Caractéristique montante, descendante, ligne de courant
 C_D : Coefficient de décharge
 C_F : Coefficient de poussée
 c_p, c_v : Chaleurs spécifiques a pression et a volume constants
 E : Energie interne totale par unité de masse
 F : La poussée
 \bar{F} : Vecteur flux
 f, g : composantes du vecteur \bar{F}
 g : Accélération de la pesanteur
 I : Matrice unité
 I_s : Impulsion spécifique
 K : Matrice jacobienne des variables conservatives
 \tilde{K} : Matrice jacobienne des variables primitives

- $\bar{\kappa}$: Normale à la surface caractéristique
 κ_x, κ_y : Composantes du vecteur $\bar{\kappa}$
 L : Matrice de passage des variables primitives aux variables caractéristiques
 L^{-1} : Matrice inverse de L
 \bar{l} : La tangente
 M : Nombre de Mach
 M : Matrice de passage des variables conservatives aux variables primitives
 M^{-1} : Matrice inverse de M
 \dot{m} : Débit massique
 \bar{n} : Normale dirigé à l'intérieur du domaine de calcul
 P : Pression statique
 P_a : Pression ambiante
 P : Matrice de passage des variables conservatives aux variables caractéristiques
 P^{-1} : Matrice inverse de P
 P_t : Pression totale
 \bar{Q} : Vecteur regroupant les sources extérieures
 r : Constante du gaz parfait
 r_{AB}, r_{DC} : Abscisses curvilignes
 R_{tu} : Rayon de l'arc de cercle amont du col
 R_{td} : Rayon de l'arc de cercle aval du col
 RT : Rayon de courbure du col (Y_t/R_{tu})
 S : Fonction de condensation
 T : température statique
 t : Temps
 u : Composante axiale de la vitesse
 v : Composante radiale de la vitesse
 U : Ensemble des variables conservatives
 V : Ensemble des variables primitives
 \bar{V} : Vecteur vitesse
 u^c, v^c : Composantes contra variantes de la vitesse

- V_n : Vitesse normale
 V_{eff} : Vitesse effective
 W : Ensemble des variable caractéristiques
 Y_e : Rayon de la section de sortie de la tuyère
 Y_t : Rayon du col de la tuyère
 Y_w : Polynôme définissant la paroi de la tuyère

3- Lettres grecques :

α, β, ω : Paramètres métriques de la transformation du domaine physique

Γ : Frontière du domaine de calcul

λ : Valeurs propres

Λ : Matrice diagonale des valeurs propres

4- Indices :

a : Ambient

t : Totale

s : sortie

i, j : indices d'un nœud du maillage

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

Depuis plusieurs années la résolution numérique ou analytique des problèmes aérodynamiques tel que les écoulements des fluides dans les tuyères convergentes-divergentes, est devenue possible grâce aux travaux réalisés par plusieurs chercheurs dans le domaine.

Les tuyères supersoniques dont le but essentiel est d'assurer l'accélération des gaz de combustion à des vitesses supersoniques, interviennent dans beaucoup de structures telles que les moteurs fusées, les moteurs d'avions et dans la fabrication des souffleries supersoniques pour une étude expérimentale des écoulements réels.

Les tuyères de propulsion ont été considérées à cause de leur simplicité comme un organe annexe. Son rôle consistait à assurer le bon fonctionnement du turbocompresseur à un régime donné.

Par conséquent, la conception de tuyères convergentes-divergentes reçoit une attention particulière et fait l'objet d'intenses et nombreuses recherches¹³.

L'optimisation du choix d'une tuyère supersonique doit tenir compte en plus des calculs de la dynamique des gaz, les divers paramètres tel que le matériau utilisé, le mode de fabrication, les exigences de refroidissement et les limites admissibles de dimensionnement⁶.

En 1958, Rao⁶ a développé une méthode de base pour la conception de tuyères supersoniques. Elle permet la conception de tuyères performantes dont le contour est déterminé grâce à des calculs variationnels. Une autre approche directe pour la conception du contour de la tuyère a été proposée par Guderley et Hantch en 1955.

Le problème de calcul de la section de sortie et du contour pouvant fournir une poussée optimale a été proposé en spécifiant uniquement la longueur et la pression ambiante.

Un calcul variationnel permettant de résoudre le problème du champ d'écoulement à la sortie, nécessaire à atteindre. La dernière étape consiste en l'application de la

méthode des caractéristiques, présentée dans différents ouvrages pour déterminer le contour supersonique de la tuyère.

Afin d'atteindre un écoulement uniforme à la sortie par conséquent des poussées maximales, les travaux de⁷⁻⁸⁻¹²⁻¹⁸ utilisent des tuyères convergentes-divergentes en forme de cloche dont la section divergente est simulée par un polynôme du second degré. Cette simulation conduit à des tuyères dont les performances se comparaient à celles de Rao⁶. Dans un premier temps, ils se sont intéressés aux calculs de l'écoulement transsonique se produisant au voisinage du col, celui-ci a été simulé grâce à plusieurs approches tels que²⁻³. Pour le calcul de l'écoulement supersonique se tenant au sein de la tuyère, ils utilisent la méthode des caractéristiques.

En effet, la méthode des caractéristiques¹⁷ est une résolution numérique des équations de conservation où le maillage et les calculs sont effectués le long des lignes (surfaces dans le cas tridimensionnel) particulières dites lignes caractéristiques. En suivant ces lignes caractéristiques est quelques fois un inconvénient du fait qu'aux régimes d'écoulements ayant un nombre de Mach élevé, les lignes caractéristiques peuvent devenir distordues en causant ainsi des erreurs numériques inordinaires dans les calculs.

Contrairement, aux autres approches numériques de résolution des équations générales de conservation tel que la méthode des différences finies qui est le but de notre étude, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis sont inhérentement plus directes que la méthode des caractéristiques et ont un avantage majeur d'utiliser un maillage de calcul arbitraire¹⁷.

Le principe de ces méthodes est essentiellement basé sur la transformation des équations différentielles régissant le problème considéré en équations algébriques et leur application en certains nombre de domaines dont la somme constitue le milieu auquel on s'intéresse. La caractéristique de ces domaines discrets est qu'ils doivent être assez petits pour pouvoir considérer les diverses variables dépendantes comme constantes en leur sein.

La méthode des différences finies utilisée dans cette étude comme il a été mentionné ultérieurement, permet l'obtention des équations exprimées en différences

finies et la procédure usuelle de cette méthode consiste à approximer les dérivées partielles par les séries de Taylor.

Finalement, dans ce qui suit on va citer quelques travaux effectués par différents chercheurs durant ces dernières années, pour le calcul de l'écoulement supersonique se produisant au sein d'une tuyère supersonique.

MICHAEL, C. Cline¹⁰ développa dans les années soixante dix un code de calcul résolvant les équations de Navier-Stokes in stationnaires en bidimensionnel simulant l'écoulement au sein d'une tuyère supersonique convergente divergente considérée plane ou axisymétrique. Dans cette méthode le facteur temps est introduit dans les équations de façon à donner un caractère hyperbolique (par rapport au temps) permettant ainsi de traiter l'écoulement par le même algorithme pour les trois régions de la tuyère à savoir le convergent où l'écoulement est subsonique et les équations sont de type elliptique, le col où le régime est sonique impliquant ainsi le caractère parabolique des équations et finalement l'écoulement est supersonique dans la partie divergente, les équations sont de nature hyperbolique. Michael, C.Cline¹⁰ a utilisé la méthode des différences finies pour la discrétisation des équations. Le schéma explicite de MacCormack¹¹ est aussi utilisé pour le calcul qui se déroule en deux étapes, la première est une étape de prédiction suivie d'une étape de correction. Le fait remarquable dans la méthode de Michael, C.Cline est le traitement particulier des conditions aux limites. Dans ce cas le schéma des caractéristiques du second ordre est utilisé dans un plan de référence pour chaque frontière du domaine de calcul.

En 1972, RAYMOND, A.Serra⁴ a développé une méthode numérique semblable à celle utilisée par Michael, C.Cline est connue sous le nom " *time marching method* " pour le calcul des écoulements interne non visqueux mais avec la présence d'onde de choc. La méthode des différences finies est utilisée pour la discrétisation alors que le calcul se déroule par l'application du schéma numérique de Lax-Wendroff¹¹, le traitement des conditions aux limites est semblable avec¹⁰.

En 1988, une autre approche a été développée par Chau-Lyan⁹, dans ce cas les équations de Navier-stokes avec l'hypothèse de la couche mince sont prises comme un modèle de l'écoulement supersonique au sein de la tuyère, la discrétisation des équations est faite par utilisation de la méthode des différences finies, le schéma *ADI*

“ *Alternating Direction Implicit Method* ” à été utilisé pour le calcul de ces écoulements.

Actuellement, beaucoup d’efforts sont déployés pour appliquer ces méthodes et il y a beaucoup de codes de calcul utilisant la méthode des différences finies pour le calcul de tel écoulement.

A travers ce tour d’horizon dans le domaine de calcul des écoulements supersoniques dans les tuyères, on a constaté que ses auteurs ont donné la solution du problème et on a remarqué que le point commun de tout ses travaux qui est l’utilisation d’un principe unique pour le critère de la stabilité du processus numérique à savoir le nombre de Courant Friedrich Lewy soit brièvement le nombre de C.F.L. qui est le critère de stabilité utilisé dans notre mémoire.

INTRODUCTION GENERALE

Les progrès rapides observés durant ces dernières années dans le domaine de la propulsion en général, et plus spécialement de la propulsion aérothermique sont étroitement associés aux efforts effectués pour rendre toujours plus précise l'analyse des phénomènes aérothermodynamique dans le circuit moteur. Cette remarque s'applique particulièrement à l'étude de l'écoulement dans les tuyères et à leur sortie. Pendant longtemps la tuyère a été considérée, principalement à cause de sa simplicité, comme un organe annexe dont le rôle consistait essentiellement à assurer le fonctionnement du moteur à un régime donné grâce à une adaptation convenable de sa forme géométrique. Au fur du temps, les méthodes de calcul avaient évolué permettant actuellement de répondre à cette condition avec une précision satisfaisante.

L'avènement du vol supersonique ajouté à d'autres demandes a provoqué un changement d'attitude conséquent chez les constructeurs dont l'introduction de formes de tuyères assurant des détente supersoniques des gaz de combustion (forme convergente-divergente dite De-Laval) contrairement aux débuts des vols supersoniques où l'emploi d'une section divergente était pratiquement proscrit à cause des régimes de sur-détente qu'il provoque aux vitesses modérées. Il est clair que ces vitesses supersoniques sont nécessaires pour pouvoir atteindre des poussées importantes. Celles-ci sont directement liées au processus de détente des gaz de combustion dans la partie divergente de la tuyère. C'est l'une des raisons pour lesquelles au cours des dernières années, la partie divergente de la tuyère a reçu une attention considérable.

Le présent travail est consacré à l'étude de l'écoulement dans une tuyère supersonique. Il est initié grâce à une présentation de la théorie, des applications et

des paramètres de performance inhérents à ce genre de géométrie qui est intégrée au chapitre premier.

Le second chapitre est consacré à la modélisation des écoulements transsonique et supersonique qui se tiennent au col et dans la partie divergente de la tuyère respectivement.

L'obtention du modèle mathématique nous amène à la résolution des équations qui décrivent l'écoulement. La détente des gaz de combustion au sein d'une tuyère De-Laval se réalise en trois étapes: la première en régime subsonique, la seconde en régime sonique et la dernière en régime supersonique. Une solution directe générale pour les trois types d'écoulement est difficile à atteindre du fait de leur comportement qui diffère d'un type à l'autre, ce dernier étant directement lié à la nature des modèles mathématiques ainsi que des schémas numériques capables de les résoudre. Une solution intéressante pour ce type de problème consisterait en l'introduction du facteur temps dans les équations leur permettant de prendre une forme hyperbolique. Cette manière de procéder entraîne certaines restrictions d'ordre numérique tel que le choix du pas du temps dont dépend la stabilité du processus numérique. Un autre désavantage de cette approche est représenté par l'obtention de la convergence vers l'état stationnaire généralement obtenue après un important nombre d'itérations entraînant une augmentation des temps de calcul et nécessitant malgré ça un choix judicieux du vecteur initial. Le développement de cette procédure ainsi que son application sont présentés au chapitre 3.

Une autre approche consisterait à se baser sur les conditions de stagnation décrivant l'état des gaz au sein de la chambre de combustion pour déterminer l'écoulement transsonique. Ceci peut être réalisé en résolvant l'équation des petites perturbations en termes des composantes axiales et radiales de la vitesse¹ relativement au rayon de courbure au col normalisé ou en utilisant des développements en série des composantes de la vitesse² en termes des puissances inverses de ce paramètre ajouté à

l'unité³. Les résultats obtenus au col sont utilisés comme conditions d'initialisation de la méthode des caractéristiques qui est appliquée afin de décrire l'écoulement supersonique se tenant au sein de la section divergente. Les différentes étapes de l'application des méthodes de résolution des écoulements transsonique et supersonique sont résumées en chapitre 2.

Le quatrième chapitre s'intéressera à l'application des deux approches explicitées aux chapitres 2 et 3 à trois cas de tuyères dont l'une est de forme conique et les deux autres de forme cocotier, ces dernières équipant les moteurs des engins de recherche de l'Office National des Etudes et Recherches Aérospatiales (ONERA-France).

Le mémoire est clôturé par une présentation des conclusions tirées de cette étude ainsi que des recommandations pour d'éventuels travaux futurs.

l'unité³. Les résultats obtenus au col sont utilisés comme conditions d'initialisation de la méthode des caractéristiques qui est appliquée afin de décrire l'écoulement supersonique se tenant au sein de la section divergente. Les différentes étapes de l'application des méthodes de résolution des écoulements transsonique et supersonique sont résumées en chapitre 2.

Le quatrième chapitre s'intéressera à l'application des deux approches explicitées aux chapitres 2 et 3 à trois cas de tuyères dont l'une est de forme conique et les deux autres de forme cocotier, ces dernières équipant les moteurs des engins de recherche de l'Office National des Etudes et Recherches Aérospatiales (ONERA-France).

Le mémoire est clôturé par une présentation des conclusions tirées de cette étude ainsi que des recommandations pour d'éventuels travaux futurs.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LES TUYERES SUPERSONIQUES ET LEURS CARACTERISTIQUES DE PERFORMANCE

1.1- INTRODUCTION

La poussée d'un moteur à réaction dépend essentiellement de la quantité de mouvement impartie aux produits de combustion par leur décharge à travers une tuyère d'éjection. Durant leur passage à travers cette dernière, les gaz sont continûment accélérés à partir de vitesses faiblement subsoniques à des vitesses fortement supersoniques. Le débit massique traversant la tuyère est déterminé par l'aire de la section au col et les conditions de fonctionnement de la chambre de combustion. La vitesse sonique atteinte par les gaz est fixée par les conditions de la chambre de combustion. Elle peut être davantage augmentée par la détente des gaz dans la partie divergente supersonique de la tuyère. Cette vitesse additionnelle, et par conséquent le taux d'augmentation de la poussée dépendent uniquement de la configuration de la partie divergente de la tuyère.

1.2- FORMES GEOMETRIQUES D'UNE TUYERE SUPERSONIQUE

Considérons l'écoulement au sein d'un conduit ayant une variation de la section telle qu'on peut assimiler que la vitesse n'a qu'une composante axiale (c.f. Figure 1.1). Cet écoulement est appelé écoulement quasi-unidimensionnel. L'application des équations de conservation à l'élément de volume de ce conduit représenté en figure 1.2 permet d'aboutir à la relation suivante :

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \quad (1.1)$$

L'équation 1.1 reliant les variations de la section ' dA ' et de la vitesse ' du ' est appelée la relation aire-vitesse. Elle nous informe que :

- a- Pour $0 \leq M \leq 1$ correspondant à un régime subsonique, toute diminution de la vitesse résulte en une augmentation de la section et vis versa. Il en résulte donc que pour un écoulement subsonique, l'augmentation de la vitesse est assujettie à l'utilisation d'un convergent.
- b- Pour $M = 1$ correspondant à un régime sonique, L'équation 1.1 montre que $dA = 0$ pour du finie. Mathématiquement, $dA = 0$ correspond à un extremum représenté dans ce cas par la section minimale.
- c- Pour $M > 1$ correspondant à un régime supersonique, une augmentation de la vitesse entraîne une augmentation de la section et réciproquement. Il en résulte que l'accélération d'un écoulement supersonique est inhérente à l'utilisation d'un divergent et sa décélération à un convergent.

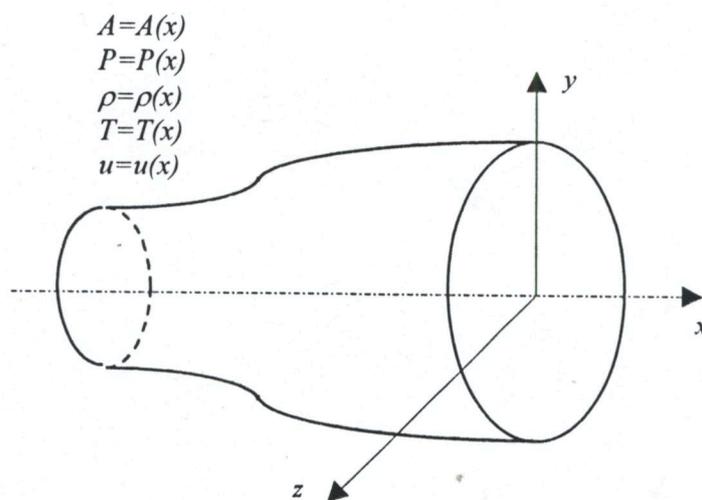


Figure 1.1: Ecoulement quasi-dimensionnel

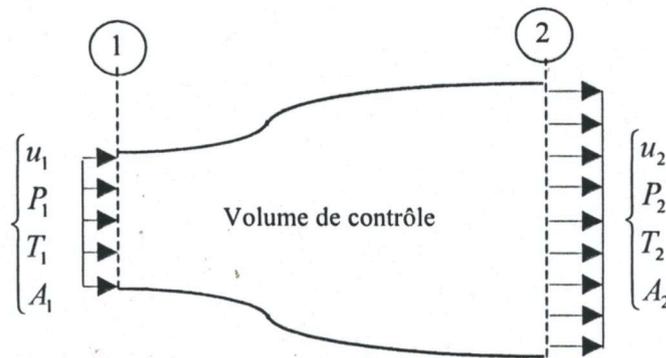


Figure 1.2: Volume de contrôle pour un écoulement quasi-dimensionnel

Finalement, les remarques précédentes nous amènent à conclure que la forme géométrique d'une tuyère conçue pour détendre un gaz d'un régime subsonique à des régimes supersoniques possède obligatoirement une géométrie convergente-divergente telle que celle représentée en figure 1.3.

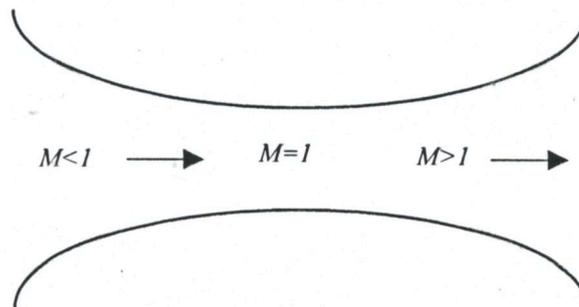


Figure 1.3: Contour d'une tuyère supersonique

1.3- ECOULEMENT DANS UNE TUYERE

Dans la théorie mono-dimensionnelle, le nombre de Mach en chaque station d'une tuyère dépend uniquement du rapport des sections A/A^* comme montré par la relation suivante:

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tag{1.2}$$

Notons que pour une valeur donnée du rapport des sections (A/A^*), la valeur subsonique ou supersonique du nombre de Mach est dictée par les conditions aux limites.

1.4- DIFFERENTS TYPES DE TUYERES SUPERSONIQUES

Le choix approprié d'une configuration d'une tuyère pour un moteur dépend essentiellement des méthodes de fabrication de ses parois, des limites dimensionnelles, de son poids et de l'influence de ce dernier sur les performances globales du moteur etc. Afin d'avoir une idée sur les différentes géométries de tuyères, les plus utilisées sont présentées.

1.4.1- La tuyère conique

D'un point de vue construction, ce type de tuyère est le plus simple. Il est représenté en figure 1.4. Etant donné que l'obtention d'une poussée maximale est conditionnée par un écoulement axial à la section de sortie, la tuyère conique ne peut répondre à cette condition. Des pertes de poussée dues à la divergence de l'écoulement à la sortie sont toujours présentes. Elles sont plus importantes si l'angle du divergent est important.

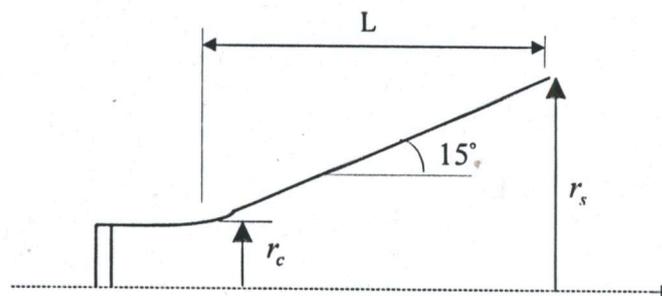


figure 1.4: Tuyère conique

1.4.4- Les tuyères auto-adjustables

Dans tous les cas de tuyères cités, le paramètre pression ambiante n'a pas d'influence directe sur le processus de détente des gaz. Dans le cas des tuyères auto-adjustables, le processus de détente est régulé par la pression ambiante. Ce type de tuyères est généralement classé en deux catégories: les tuyères appelées 'type bouchon' et celles appelées 'type détente-déviation'.

1.4.4.1- La tuyère type bouchon

Le col de ce type de tuyère possède la forme d'un anneau localisé au diamètre extérieur (Fig.1.7). L'écoulement est contrôlé par des ondes de détente provoquées par la déviation du bouchon dont la surface constitue le principal paramètre qui l'influence. Les gaz d'échappement subissent une détente de la pression de la chambre de combustion jusqu'à la pression ambiante.

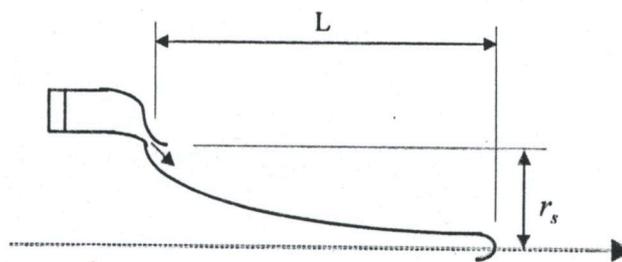


figure 1.7: Tuyère type bouchon

1.4.4.2- La tuyère type détente déviation

Ce type de tuyère est caractérisé par la présence d'un obstacle situé près du col et obligeant l'écoulement des gaz de combustion qui sont en train de se détendre à des vitesses supersoniques à dévier sa direction vers l'extérieur (c.f. figure 1.8).

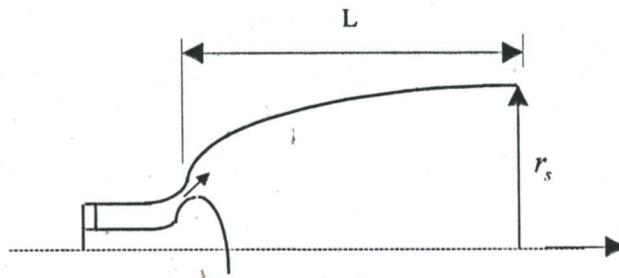


Figure 1.8: Tuyère type détente-déviat

1.5- PRINCIPAUX PARAMETRES DE PERFORMANCE

1.5.1- La poussée

La poussée délivrée par une tuyère est fonction non seulement de la vitesse d'éjection des gaz de combustion mais aussi de la différence entre la pression à la section de sortie et celle ambiante. L'application de l'équation de conservation de la quantité de mouvement permet d'exprimer la poussée infinitésimale développée à travers une section annulaire de rayon dy :

$$dF = [\rho V_s + (P_s - P_a)] 2 \pi y dy \quad (1.3)$$

La poussée totale est déterminée par intégration de l'équation précédente sur la section de sortie de la tuyère. Il en résulte:

$$F = \pi \sum_i [\rho V_{si} + (P_{si} - P_a)] [Y_{si+1} - Y_{si}]^2 \quad (1.4)$$

1.5.2- Le coefficient de poussée

Ce paramètre sans dimensions s'exprime:

$$C_F = \frac{F}{P_t A_c} \quad (1.5)$$

Le dénominateur de l'équation (1.5) est composé par le produit de P_t qui est la pression totale à la sortie de la chambre de combustion et de A_c qui est l'aire de la section au col. Ces deux paramètres représentent respectivement la chambre de combustion et l'écoulement supersonique. Ce rapport peut donc être considéré comme représentatif de la performance du contour de la section divergente supersonique.

1.5.3- Le coefficient de décharge

A cause principalement des effets de viscosité, les performances réelles d'une tuyère sont généralement légèrement différentes de celles déterminées sur la base de l'hypothèse d'un écoulement isentropique idéal. Le coefficient de décharge exprime cette différence et s'écrit:

$$C_d = \frac{\text{débit actuel réel}}{\text{Débit isentropique}} \quad (1.6)$$

1.5.4- La vitesse effective

La vitesse effective V_{eff} est la vitesse de sortie de la tuyère adaptée. Elle est définie comme le rapport de la poussée au débit massique:

$$V_{eff} = \frac{F}{\dot{m}} \quad (1.7)$$

C'est un paramètre qui tient compte de la correction atmosphérique.

1.5.5- L'impulsion spécifique

L'impulsion spécifique notée I_s , est définie comme le rapport de la poussée au produit du débit massique et de l'accélération de la pesanteur:

$$I_s = \frac{F}{\dot{m}g} \quad (1.8)$$

C'est un paramètre généralement utilisé pour comparer les performances des propergols utilisés pour la propulsion.

CHAPITRE 2

FORMULATION ET MODELISATION DE L'ÉCOULEMENT AU SEIN D'UNE TUYÈRE SUPERSONIQUE

2.1- INTRODUCTION

Les modèles mathématiques des différentes approximations de l'écoulement d'un fluide peuvent être classés en deux catégories : les systèmes dits de 1^{er} ordre et ceux dits du 2^{ème} ordre. Les propriétés mathématiques de ces systèmes sont directement liées à celles physiques de l'écoulement. Cependant, il est généralement considéré que chaque configuration est le résultat d'un bilan entre les flux convectifs et diffusifs ainsi que les sources internes et externes, une approximation de l'écoulement n'étant qu'une estimation réalisée a priori relativement aux effets de ces différents flux et sources. D'un point de vue mathématique, les termes diffusifs sont représentés par des dérivées seconde conséquence de la loi générale de diffusion établie par Fick. Les termes convectifs apparaissent comme des dérivées premières exprimant le transport des propriétés de l'écoulement. Chacune des propriétés intrinsèques d'un écoulement influence sur la nature mathématique des équations (elliptique, parabolique ou hyperbolique).

Afin de réaliser une comparaison judicieuse entre les termes convectifs et diffusifs, des nombres sans dimensions tels que ceux de Reynolds, Mach, Prandtl etc. sont introduits à travers la normalisation des variables dépendantes contenues dans les équations.

Considérons l'équation suivante:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) u = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \quad (2.1)$$

Après normalisation, elle prend la forme suivante :

$$\frac{VT}{L} \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \Delta u \quad (2.2)$$

Pour un Reynolds très faible, les termes convectifs peuvent être négligés devant les termes diffusifs et l'équation est dite de type elliptique.

Pour un Reynolds important, la situation inverse est rencontrée. Le type d'équation est hyperbolique tel que celles décrivant l'écoulement supersonique au sein d'une tuyère.

Cette distinction est capitale car la discrétisation et la résolution numérique doivent tenir compte de cette différence.

2.2- HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

Compte tenu de la complexité des écoulements étudiés, il n'est pas possible de tenir compte de tous les phénomènes physiques en présence. Certaines hypothèses sont donc nécessaires. Elles peuvent être résumées comme suit :

- * Ecoulement bidimensionnel,
- * Ecoulement stationnaire,
- * L'écoulement est sans chocs (tuyère adaptée),
- * Le fluide est supposé comme un gaz parfait,
- * Le fluide est supposé non visqueux,
- * Le transfert de la chaleur est négligé,
- * Les forces à distance sont négligées,
- * Les gaz d'éjection sont à très haute température de l'ordre de 2000K et on peut donc assumer qu'il n'y aura pas de réactions chimiques ou dissociation de molécules (équilibre thermodynamique).

D'après ces hypothèses, l'écoulement peut être représenté par le système d'équations d'Euler.

2.3- LE SYSTEME D'EQUATIONS D'EULER

Le comportement physique d'un écoulement de fluide parfait dont le caractère convectif est dominant peut être décrit complètement par la résolution du système d'équations d'Euler en partant d'une formulation mathématique adéquate.

Dans ce qui suit, les propriétés mathématiques du système d'équations d'Euler sont décrites relativement à une géométrie de type tuyère.

2.3.1- Système d'équations d'Euler

Ce système est composé d'équations de premier ordre non linéaires couplées qui peuvent être écrites sous diverses formes. En effet, la base physique de ce système est l'expression des lois universelles (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie). Plusieurs formulations algébriques peuvent être obtenues selon le choix des variables dépendantes.

Le vecteur des variables formé par la densité, la quantité de mouvement et l'énergie totale définit *la forme conservative* des équations, et ces paramètres sont par conséquent appelés *les variables conservatives*. Les variables telles que densité, la vitesse et la pression sont appelées *primitives*. Elles sont contrôlées expérimentalement et sont généralement imposées comme conditions aux limites physiques. En plus, sachant que le système d'équations d'Euler possède une nature hyperbolique par rapport au temps, des quantités se propageant le long des caractéristiques peuvent être définies. Le système d'équations peut ainsi être transformé en une forme dite *caractéristique*.

2.3.1.1- Formulation conservative

C'est la forme naturelle des équations satisfaisant les lois de conservations. Elle s'expriment:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \bar{Q} \quad (2.3)$$

- U est le vecteur regroupant les variables conservatives. Dans le cas bi-dimensionnel, il s'exprime:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

- \vec{F} est le vecteur flux. Dans le cas bi-dimensionnel, ses composantes f et g s'écrivent

$$f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{bmatrix} ; \quad g = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

- \vec{Q} étant le vecteur source.

2.3.1.2- Formulation quasi-linéaire

Afin d'illustrer les propriétés mathématiques du système d'équations d'Euler, il convient de réécrire ces équations sous la forme quasi-linéaire permettant d'aboutir à un système d'équations de premier ordre en termes du vecteur des variables conservatives \vec{U} [6].

2.3.1.2.1- Matrice Jacobienne des variables conservatives

La formulation quasi-linéaire du système d'équations (2.3) peut se mettre sous la forme:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial U} \right) \cdot \vec{\nabla} U = \vec{Q} \quad (2.6)$$

ou :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} U = \bar{Q} \quad (2.7)$$

Explicitement, on obtient:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = Q \quad (2.8)$$

avec :

$$A = \frac{\partial f}{\partial U} \quad \text{et} \quad B = \frac{\partial g}{\partial U} \quad (2.9)$$

A et B étant les matrices Jacobiennes relativement aux variables conservatives.

Dans le cas bi-dimensionnel, Elles s'expriment:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 + \frac{\gamma-1}{2}v^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 \\ -\gamma v E + (\gamma-1)u\vec{V} & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(v^2 + 3u^2) & -(\gamma-1)uv & \gamma u \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ -\gamma v E + (\gamma-1)v\vec{V} & -(\gamma-1)uv & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + 3v^2) & \gamma v \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

2.3.1.2.2- Matrices Jacobiennes des variables primitives

Au vu de l'importance des valeurs propres dans l'étude numérique du système d'équations d'Euler, il est généralement plus commode d'obtenir ces valeurs en partant d'une formulation non-conservative basée sur les variables primitives.

Désignant par V le vecteur des variables primitives, il vient:

$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Sous la forme primitive, le système d'équations d'Euler s'écrit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{v}{y} \right] = 0 \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.13b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.13c)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \rho c^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \delta \frac{v}{y} \right] = 0 \quad (2.13d)$$

L'équation de l'énergie prend la forme:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} - c^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.13e)$$

Si c représente la célérité du son d'un fluide calorifiquement parfait, elle s'exprimera:

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (2.14)$$

γ étant le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

et 'δ' un switch qui prend les valeurs suivantes:

- $\delta = 0$: pour un écoulement plan
- $\delta = 1$: pour un écoulement axisymétrique

Ainsi la formulation quasi-linéaire (2.8) s'écrit:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\tilde{A} \cdot \nabla \right) V = \tilde{Q} \quad (2.14a)$$

Explicitement, on aura:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \tilde{B} \frac{\partial V}{\partial y} = \tilde{Q} \quad (2.14b)$$

Les matrices Jacobiennes \tilde{A} et \tilde{B} possèdent des expressions plus simples que celles

des matrices A et B précédemment présentées:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} u \cdot \kappa_x & \rho \cdot \kappa_x & 0 & 0 \\ 0 & u \cdot \kappa_x & 0 & \frac{\kappa_x}{\rho} \\ 0 & 0 & u \cdot \kappa_x & 0 \\ 0 & \rho c^2 \cdot \kappa_x & 0 & u \cdot \kappa_x \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} v \cdot \kappa_y & 0 & \rho \cdot \kappa_y & 0 \\ 0 & v \cdot \kappa_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v \cdot \kappa_y & \frac{\kappa_y}{\rho} \\ 0 & 0 & \rho c^2 \cdot \kappa_y & v \cdot \kappa_y \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

2.3.1.2.3- Matrices de passage entre les variables primitives et conservatives

La matrice Jacobienne de passage des variables conservatives à celles non conservatives est définie par:

$$M = \frac{\partial U}{\partial V} \quad (2.17)$$

Par suite, on peut déduire:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ u & \rho & \cdot & \cdot \\ v & \cdot & \rho & \cdot \\ \frac{\bar{V}^2}{2} & \rho u & \rho v & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Puisque le déterminant de $M = \frac{\rho}{\gamma-1} \neq 0$, il existe une matrice inverse M^{-1} telle que:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{-u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & \cdot & \cdot \\ \frac{-v}{\rho} & \cdot & \frac{1}{\rho} & \cdot \\ \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2) & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

L'identification entre les deux formulations (2.8) et (2.14) nous donne après développement:

$$\begin{cases} \tilde{A} = M^{-1}AM \\ \tilde{B} = M^{-1}BM \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} A = M\tilde{A}M^{-1} \\ B = M\tilde{B}M^{-1} \end{cases} \quad (2.20)$$

Si on considère \tilde{A} et \tilde{B} comme des vecteurs matrice ayant pour composantes les matrices Jacobiennes $(\tilde{A}; \tilde{B})$ et (A, B) respectivement, on peut écrire:

$$\tilde{K} = \tilde{A} \cdot \tilde{\kappa} \quad \text{et} \quad K = \tilde{A} \cdot \tilde{\kappa}$$

avec:

$$\tilde{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \end{pmatrix} \text{ indiquant une direction arbitraire de propagation des caractéristiques.}$$

La matrice K a les mêmes valeurs propres que la matrice \tilde{K} à travers la relation de similitude suivante:

$$\tilde{K} = M^{-1}KM \quad (2.21)$$

Pour cela, il est plus pratique d'analyser les valeurs propres du système d'équations d'Euler en utilisant la matrice \tilde{K} basée sur les variables primitives.

2.3.1.2.4- Formulation caractéristique

Les schémas numériques et leurs propriétés ainsi que la formulation mathématique des équations sont dominées par le caractère hyperbolique (par rapport au temps) du système d'équations d'Euler. Du fait que les phénomènes de base sont de nature convective ou de propagation, les caractéristiques du système d'équations d'Euler et leurs propriétés jouent un rôle essentiel dans la description mathématique ainsi que dans plusieurs techniques numériques de discrétisation. Une telle analyse nécessite cependant la connaissance des valeurs propres et des vecteurs propres associés. Aux fins de simplification, le développement est réalisé dans le cas unidimensionnel (le cas tri-dimensionnel ainsi que celui bi-dimensionnel sont traités en détail en référence [6]).

Pour le cas uni-dimensionnel, les équations d'Euler s'écrivent sous la forme conservative suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

La matrice \tilde{K} se réduit à la matrice \tilde{A} précédemment exprimée.

Si λ_j désignent les valeurs propres de la matrice \tilde{A} obtenues à partir de:

$$\det |\tilde{A} - \lambda.I| = 0 \quad (2.23)$$

ou:

$$\begin{vmatrix} u - \lambda & \rho & 0 \\ 0 & u - \lambda & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

un calcul directe donne:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & . & . \\ . & \lambda_2 & . \\ . & . & \lambda_3 \end{vmatrix} \quad (2.24)$$

Λ étant la matrice diagonale de toutes les valeurs propres, il vient:

$$\begin{cases} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = u + c \\ \lambda_3 = u - c \end{cases} \quad (2.25)$$

Du fait du caractère hyperbolique de l'équation (2.22), les valeurs propres de la matrice \tilde{A} sont réelles. La matrice \tilde{A} peut donc être écrite sous la forme:

$$\tilde{A} = L \tilde{\Lambda} L^{-1} \quad (2.26)$$

L^{-1} désigne la matrice des vecteurs propres gauches associés à chaque valeur propres λ_j . Ceci permet de définir un nouvel ensemble de variables dites «variables

caractéristiques W » en partant des variables conservatives U ou celles primitives V en utilisant les matrices de passage P et L :

$$\begin{cases} \delta W = L^{-1} \cdot \delta V \\ \delta W = P^{-1} \cdot \delta U \end{cases} \quad (2-27)$$

où le symbole δ indique une variation temporelle $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ ou spatiale $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right)$.

La figure (2.1) résume les relations mathématiques entre les trois différents groupes de variables.

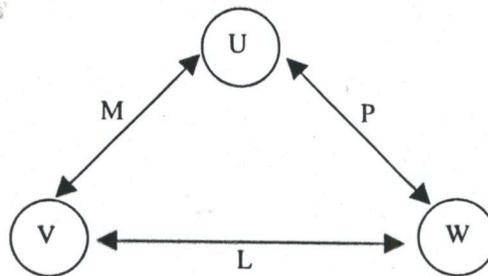


Figure 2.1: Relations entre les trois types de variables: conservatives U , primitives V et caractéristiques W

Ainsi après développement, on obtient les différentes matrices de passage:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & 1 & 1/\rho c \\ 0 & 1 & -1/\rho c \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \rho/2c & -\rho/2c \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \rho c/2 & -\rho c/2 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Les matrices ' P ' et ' P^{-1} ', en variables conservatives jouent un rôle similaire à celui respectivement de ' L ' et ' L^{-1} ', en variables primitives. Elles 'diagonalisent' la matrice $[A (A=PALP^{-1})]$:

$$P^{-1}=L^{-1}M^{-1}=\begin{bmatrix} 1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{u^2}{c^2} & (\gamma-1)\frac{u}{c^2} & -\frac{\gamma-1}{c^2} \\ \left(\frac{\gamma-1}{2}u^2-uc\right)\frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c}[c-(\gamma-1)u] & \frac{\gamma-1}{\rho c} \\ -\left(\frac{\gamma-1}{2}u^2+uc\right)\frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c}[c+(\gamma-1)u] & -\frac{\gamma-1}{\rho c} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$P=ML=\begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ u & \frac{\rho}{2c}[u+c] & -\frac{\rho}{2c}(u-c) \\ \frac{u^2}{2} & \frac{\rho}{2c}\left[\frac{u^2}{2}+uc+\frac{c^2}{\gamma-1}\right] & -\frac{\rho}{2c}\left[\frac{u^2}{2}-uc+\frac{c^2}{\gamma-1}\right] \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Le vecteur des variables caractéristiques (ou variables de Riemann) s'écrit:

$$\delta W = \begin{bmatrix} \delta W_1 \\ \delta W_2 \\ \delta W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\rho - \frac{1}{c^2} \\ \delta u + \frac{1}{\rho c} \delta p \\ \delta u - \frac{1}{\rho c} \delta p \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Les trois composantes du vecteur ' δW ' se propagent respectivement le long des caractéristiques ' C_0 ', ' C_+ ' et ' C_- ' avec les vitesses de propagation u , $(u+c)$ et $(u-c)$ qui représentent les valeurs propres du système (c.f. Figure 2.2).

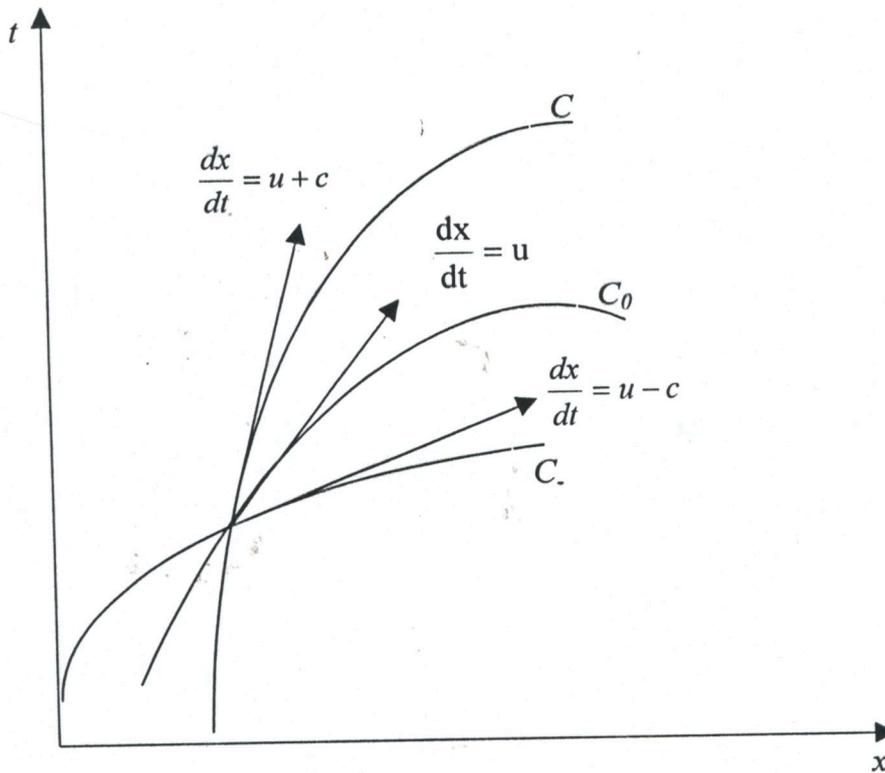


Figure 2.2: Représentation des lignes caractéristiques dans le cas uni-dimensionnel

L'intérêt pratique des variables caractéristiques réside essentiellement dans l'étude des conditions aux limites selon le régime d'écoulement (subsonique ou supersonique).

Remarque:

Pour le cas bi-dimensionnel, les valeurs propres du système d'équations d'Euler en formulation primitive (2.14) peuvent être déterminées comme suit:

$$\det |\tilde{K} - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\vec{V} \cdot \vec{\kappa} - \lambda \cdot \kappa)^2 \left[(\vec{V} \cdot \vec{\kappa} - \lambda \cdot \kappa)^2 - c^2 \cdot \kappa^2 \right] = 0 \quad (2.33)$$

Les valeurs propres s'exprimeront:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \vec{V} \cdot \vec{\kappa} \\ \lambda_3 = \vec{V} \cdot \vec{\kappa} + c \cdot \kappa \\ \lambda_4 = \vec{V} \cdot \vec{\kappa} - c \cdot \kappa \end{cases} \quad (2.34)$$

2.4- CONDITIONS AUX LIMITES

Le nombre de conditions aux limites à imposer dépend de l'interaction entre l'information transportée par les caractéristiques et les frontières du domaine physique considéré. Dans le présent travail, ce domaine est représenté par la section divergente d'une tuyère De-Laval. D'après la figure 2.3, il peut être remarqué que ce dernier est limité par quatre frontières auxquelles on fait correspondre quatre types de conditions aux limites.

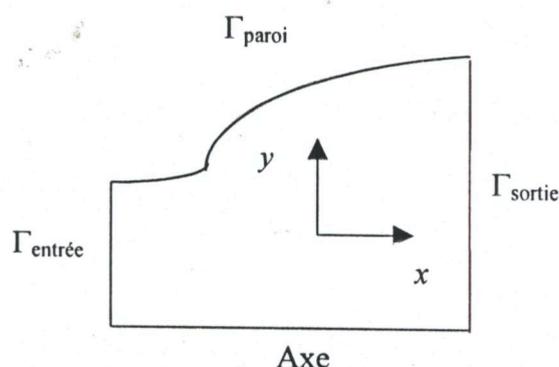


Figure 2.3: Représentation du domaine de calcul

A L'infini amont ($\Gamma_{\text{entrée}}$):

L'écoulement est supersonique dans la direction normale à la surface d'entrée $\Gamma_{\text{entrée}}$ (Figure 2.4). Dans ce cas, toutes les valeurs propres sont positives et toutes les caractéristiques se dirigent de la surface d'entrée vers l'intérieur du domaine entraînant l'imposition de toutes les conditions aux limites comme étant des conditions aux limites physiques. Dans la présente étude, ces paramètres sont représentées par l'ensemble des variables primitives ρ, \vec{V} et P . Elles sont calculées grâce à l'application de la méthode de Kliegel & Levine développée dans le paragraphe 2.6.

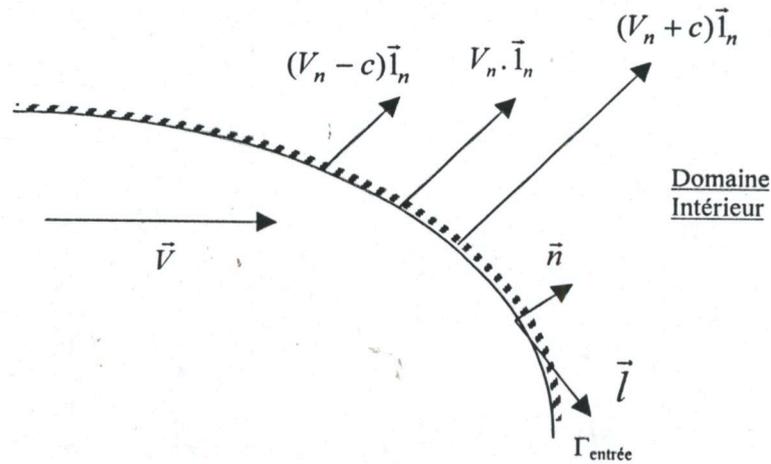


Figure 2.4: surface frontière: Entrée supersonique dans le cas bi-dimensionnel

Remarque:

\vec{l} et \vec{n} sont les vecteurs tangentiel et normal à la frontière, le vecteur \vec{n} est dirigé vers l'intérieur du domaine de calcul.

Axe de la tuyère:

L'axe de la tuyère est considéré comme un axe de symétrie auxquelles seront associées les conditions de symétrie de l'écoulement.

Sortie supersonique (Γ_{sortie}):

Dans ce cas, toutes les lignes caractéristiques se dirigent de l'intérieur vers la surface frontière Γ_{sortie} (Figure 2.5). A cet effet, on n'impose aucune condition physique. L'état de l'écoulement sur la surface de sortie est lié numériquement aux états des mailles internes adjacentes (conditions aux limites numériques).

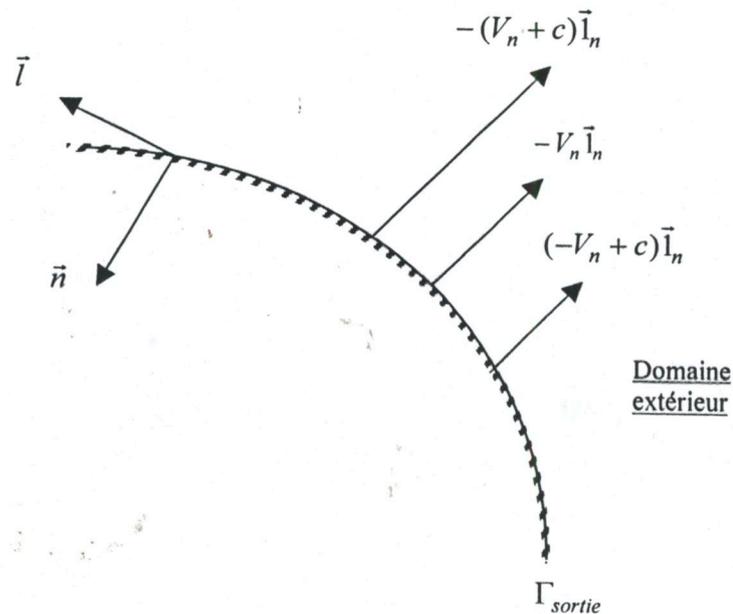


Figure 2.5: Surface frontière: Sortie supersonique dans le cas bi-dimensionnel

A la paroi (Γ_{paroi}):

Une seule condition physique est à imposer à la paroi. Elle est représentée par la composante normale de la vitesse à cette position qui doit être nulle ($V_n=0$, fluide Parfait). Cette dernière est traduite par une seule ligne caractéristique qui se dirige de la paroi vers l'intérieur du domaine. Les paramètres manquants définissant l'état d'écoulement à la paroi particulièrement la pression et la vitesse tangentielle sont déterminées numériquement en partant de celles des mailles internes adjacentes.

Cependant d'après l'analyse présentée précédemment, l'état de l'écoulement sur cette frontière est influencé par l'écoulement interne, et la détermination des paramètres manquants (conditions aux limites numériques) est obtenue grâce à la résolution des équations liant l'écoulement interne à la paroi. Ces dernières sont représentées par les équations caractéristiques et de compatibilité discutées au paragraphe 2.3.1.2.4 dans le cas uni-dimensionnel. L'extension au cas bi-

dimensionnel en coordonnées cartésiennes est traité en détail par Rao [6]. En coordonnées généralisées ξ et η , les équations de compatibilité reliant l'écoulement interne à la paroi sont développées dans l'annexe A. Le résultat obtenu se présente comme suit:

$$\left. \begin{aligned} \beta du - \alpha dv &= (\beta \psi_2 - \alpha \psi_3) dt \\ dp - c^2 d\rho &= \psi_4 dt \end{aligned} \right\} \text{pour : } d\eta = V^c dt \quad (2.35)$$

et:

$$\left\{ \begin{aligned} d\eta &= (V^c + \alpha^* c) dt \\ dp + \frac{\rho c}{\alpha^*} (\alpha du + \beta dv) &= \left[\psi_4 + c^2 \psi_1 + \frac{\rho c}{\alpha^*} (\alpha \psi_2 + \beta \psi_3) \right] dt \end{aligned} \right. \quad (2.36)$$

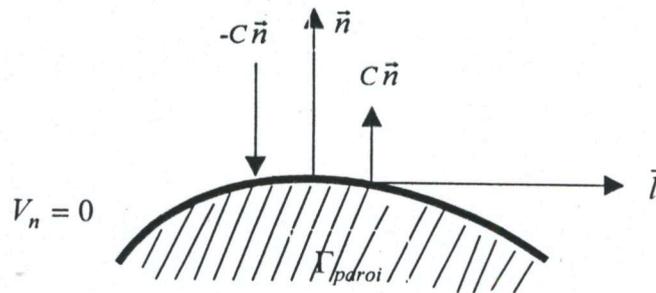


Fig.2.6: Surface Frontière: Paroi d'obstacle dans le cas bi-dimensionnel

2.6-TRANSFORMATION DES EQUATIONS EN COORDONNEES GENERALISEES

Afin de simplifier l'application des algorithmes de résolution, les équations générales sont généralement exprimées en termes des coordonnées généralisées (ξ, η). L'une des raisons de ce changement de domaine est la transformation des surfaces géométriques complexes du problème étudié en des lignes de coordonnées constantes. Ainsi, l'application des conditions aux limites peut être acquise sans difficulté. La réalisation de cette opération nous amène à poser:

$$\xi(x, y) = x \quad \text{et} \quad \eta(x, y) = \frac{y}{Y_w} \quad (2.37)$$

avec:

- $Y_w = Y(x)$: Polynôme définissant la paroi de la tuyère,
- $0 < \eta < 1$.

Après ce changement de coordonnées, le domaine de calcul devient:

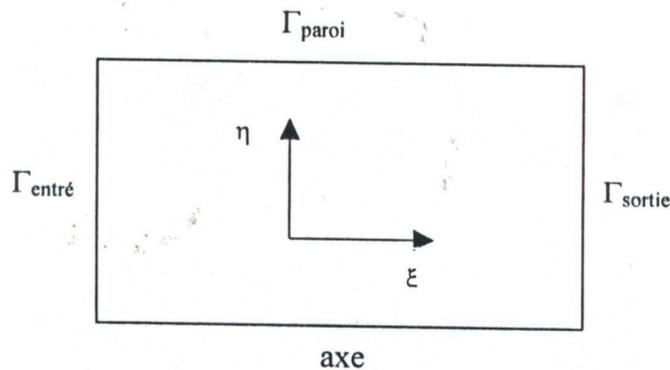


Figure 2.6: Domaine de calcul

La transformation des dérivées premières par rapport à x et y est donnée par les relations suivantes:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \omega \frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} = \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \end{cases} \quad (2.38)$$

avec:

$$\begin{cases} \omega = \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 \\ \alpha = \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{Y_w} \frac{dY_w}{dx} \\ \beta = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{Y_w} \end{cases} \quad (2.39)$$

Finalement, les équations d'Euler peuvent être réécrites en termes des nouvelles coordonnées:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \omega \rho \frac{\partial u}{\partial \xi} + v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \delta \frac{v}{\eta Y_w} \right) = 0 \quad (2.40a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^c \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + v^c \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad (2.40b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u^c \frac{\partial v}{\partial \xi} + v^c \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad (2.40c)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u^c \frac{\partial p}{\partial \xi} - u c^2 \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + v^c \frac{\partial p}{\partial \eta} - c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (2.40d)$$

u^c et v^c étant les composantes contravariantes de la vitesse:

$$\begin{cases} u^c = \omega u \\ v^c = \alpha u + \beta v \end{cases} \quad (2.41)$$

Comme il a été démontré dans les paragraphes précédents, les équations régissant l'écoulement supersonique qui se tient au sein de la section divergente d'une tuyère De-Laval sont de nature hyperbolique. Pour ce type d'écoulement, les perturbations ne peuvent pas propager vers l'arrière donc l'aval ne possède aucune influence sur l'écoulement en un point considéré. Les méthodes de calcul dites de 'pas à pas' peuvent donc être utilisées et les paramètres régissant l'écoulement en entier peuvent être déterminées à condition d'en connaître les valeurs en une ligne initiale généralement dénommée 'ligne de départ'. Dans le cas d'une tuyère, c'est la ligne sonique. Ses caractéristiques sont déterminées par l'application d'une approche spécifique car les équations appliquées en cette ligne ne sont pas de nature hyperbolique. L'une des méthodes est celle qui a été développée par Kliegel & Levine pour le calcul des écoulements transsoniques. Elle est décrite ci-dessous.

2.6- CALCUL DES PARAMETRES DE L'ECOULEMENT LE LONG DE LA LIGNE SONIQUE

2.6.1- METHODE DE KLIEGEL & Levine

Cette méthode consiste en un développement en série des composantes axiale et radiale du vecteur vitesse. Le paramètre en termes duquel est réalisé le développement est le rayon de courbure au col normalisé noté R_T :

$$R_T = \frac{Rtu}{Yt} \quad (2.42)$$

où:

Rtu : est le rayon de l'arc du cercle en amont au col,

Yt : est le rayon du col.

2.6.2- Principe de la méthode

Cette méthode utilise un développement en séries du paramètre $\left(\frac{1}{R_T + 1}\right)$ qui est toujours inférieure à l'unité entraînant une convergence du processus de calcul quelque soit la valeur du rayon au col. Le développement de cette méthode a permis d'exprimer les composantes de la vitesse le long de la ligne de départ [2] :

$$u = 1 + \frac{u_1(r, z)}{R_T + 1} + \frac{1}{(R_T + 1)^2} [u_1(r, z) + u_2(r, z)] + \frac{1}{(R_T + 1)^3} [u_1(r, z) + 2u_2(r, z) + 3u_3(r, z)] + \dots \quad (2.43)$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2(R_T + 1)}} \left\{ \frac{v_1(r, z)}{R_T + 1} + \frac{1}{(R_T + 1)^2} \left[\frac{3}{2} v_1(r, z) + v_2(r, z) \right] + \frac{1}{(R_T + 1)^3} \left[\frac{15}{8} v_1(r, z) + \frac{5}{2} v_2(r, z) + v_3(r, z) \right] + \dots \right\} \quad (2.44)$$

r et z étant les coordonnées cylindriques addimensionnées s'exprimant:

$$r = \frac{y}{Yt} \quad \text{et} \quad z = \left[\frac{2R_T}{\gamma + 1} \right]^{1/2} \frac{x}{Yt}$$

Les expressions de la composante axiale de la vitesse sur l'axe et sur la paroi sont données respectivement par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 - \frac{1}{4(R_T + 1)} + \frac{10\gamma - 15}{288(R_T + 1)^2} - \frac{2708\gamma^2 + 2079\gamma + 2115}{82944(R_T + 1)^3} \\ u_w = 1 + \frac{1}{4(R_T + 1)} - \frac{14\gamma - 57}{288(R_T + 1)^2} + \frac{2364\gamma^2 - 3915\gamma + 14337}{82944(R_T + 1)^3} \end{cases} \quad (2.45)$$

Les développements (2.43) et (2.44) sont donnés à l'ordre trois. Les différents termes de la vitesse apparaissant dans ces équations sont [2]:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4} + z \\ v_1 = \frac{1}{4}r^3 - \frac{1}{4}r + rz \\ u_2 = \frac{2\gamma + 9}{29}r^4 - \frac{4\gamma + 15}{24}r^2 + \frac{10\gamma + 57}{288} + z\left(r^2 - \frac{5}{8}\right) - \frac{2\gamma - 3}{6}z^2 \\ v_2 = \frac{\gamma + 3}{9}r^5 - \frac{20\gamma + 63}{96}r^3 + \frac{28\gamma + 93}{288}r + z\left(\frac{2\gamma + 9}{6}r^3 - \frac{4\gamma + 15}{12}r\right) + rz^2 \\ u_3 = \frac{556\gamma^2 + 1737\gamma + 3069}{10368}r^6 - \frac{388\gamma^2 + 1161\gamma + 1881}{2304}r^4 + \frac{304\gamma^2 + 831\gamma + 1242}{1728}r^2 \\ - \frac{2708\gamma^2 + 7839\gamma + 14211}{82944} + z\left[\frac{52\gamma^2 + 51\gamma + 327}{384}r^4 - \frac{52\gamma^2 + 75\gamma + 279}{192}r^2 \right. \\ \left. + \frac{92\gamma^2 + 180\gamma + 639}{1152}\right] + z^2\left[-\frac{7\gamma - 3}{8}r^2 + \frac{13\gamma - 27}{48}\right] + \frac{4\gamma^2 - 57\gamma + 27}{144}z^3 \\ v_3 = \frac{6839\gamma^2 + 2303\gamma + 30627}{82944}r^6 - \frac{3380\gamma^2 + 11391\gamma + 15291}{13824}r^5 \\ + \frac{3424\gamma^2 + 1127\gamma + 15228}{13824}r^6 + \frac{7100\gamma^2 + 22311\gamma + 30249}{82944}r \\ + z\left[\frac{556\gamma^2 + 1737\gamma + 3069}{1728}r^5 - \frac{388\gamma^2 + 1161\gamma + 1181}{576}r^3 + \frac{304\gamma^2 + 831\gamma + 1}{864}\right] \\ + z^2\left[\frac{52\gamma^2 + 51\gamma + 327}{192}r^3 - \frac{52\gamma^2 + 75\gamma + 279}{192}r\right] - z^3\left[\frac{7\gamma - 3}{12}r\right] \end{cases}$$

2.6.3- Equation de la ligne sonique

Une forme parabolique de cette ligne a été proposée par Allman & Hoffman [8] :

$$x = -\frac{(\gamma + 1)\alpha}{2(3 + \delta)} y^2$$

avec:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + \delta}{(\gamma + 1)(R_T + 1)}} \frac{1}{Yt}$$

où:

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{pour un écoulement plan} \\ 1 & \text{pour un écoulement axisymétrique} \end{cases}$$

CHAPITRE 3

DIFFERENTES APPROCHES DE RESOLUTION NUMERIQUE

3.1- INTRODUCTION

La résolution du système d'équations d'Euler régissant un écoulement supersonique par utilisation de la méthode des différences finies consiste principalement à remplacer les équations aux dérivées partielles par des équations algébriques aux différences finies. Historiquement, les techniques de résolution numérique de ce système sont apparues dans les années cinquante avec le développement de méthodes de premier ordre [7-8]. L'une des contributions majeures de ces schémas est due aux travaux de Lax et Wendroff [9-10-11]. Une variante de cette approche ayant reçu beaucoup de succès est celle dite de Mac-Cormack [12]. Elle utilise deux étapes distinctes: le Prédicteur et le correcteur. Cette approche est utilisée pour la résolution du système d'équations d'Euler présenté au Chapitre 2.

3.2- TECHNIQUE DE MAC-CORMACK

Le schéma de Mac-Cormack est l'un des plus populaires parmi ceux qui font partie de la famille des schémas de Lax-Wendroff à deux étapes. Sa précision est de second ordre en temps et en espace. Afin d'en illustrer les caractéristiques, considérons dans un premier temps un cas uni-dimensionnel dont les deux étapes sont:

Première étape: C'est l'étape Prédicteur. Dans ce cas, les équations du mouvement sont discrétisées en utilisant la différence directe pour les dérivées partielles.

Si on note: i : l'indice suivant ξ , j : l'indice suivant η et n : l'indice suivant t ,

Et si: $(\bar{\quad})$: indique la valeur calculée lors de l'étape de prédiction,

$(\bar{\quad})$: indique la valeur calculée lors de l'étape de correction.

Alors: Pour cette étape prédicteur, la différence progressive appliquée à la relation suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

permettra d'obtenir:

$$\bar{U}_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n - F_i^n) \quad (3.2a)$$

Notons que tous les paramètres figurant au second membre de cette équation sont supposés connus.

Deuxième étape: C'est l'étape Correcteur au cours de laquelle les équations du mouvement sont discrétisées en utilisant la différence inverse pour les dérivées partielles.

$$\bar{\bar{U}}_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_i^{n+1} - \bar{F}_{i-1}^{n+1}) \quad (3.2b)$$

et la solution est donnée par:

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{U}_i^{n+1} + \bar{\bar{U}}_i^{n+1}) \quad (3.3)$$

3.3- EXTENSION DU SCHEMA DE MACCORMACK AU CAS BI-DIMENSIONNEL (2-D)

Dans ce cas, les approximations sont obtenues comme une extension du cas uni-dimensionnel. L'approximation spatiale nécessite l'existence de sept points pour construire une cellule d'intégration C_i (Figure 3.1). Du fait que le schéma de MacCormack combine deux versions de discrétisation (directe et inverse), on peut obtenir quatre schémas différents en combinant les diverses discrétisations.

Selon la version directe-inverse citée dans le paragraphe précédant (Equation 3.2), ce schéma appliqué à un système 2-D d'équations (2.3) s'écrit:

$$\begin{cases} \bar{U}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \tau_x (F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n) - \tau_y (G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n) \\ \bar{\bar{U}}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \tau_x (\bar{F}_{i,j}^{n+1} - \bar{F}_{i-1,j}^{n+1}) - \tau_y (\bar{G}_{i,j}^{n+1} - \bar{G}_{i,j-1}^{n+1}) \\ U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{U}_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{U}}_{i,j}^{n+1}) \end{cases} \quad (3.4)$$

avec:

$$\tau_x = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{et} \quad \tau_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}$$

Version: Directe- Inverse avec: $\begin{cases} P : \text{Points prédits} \\ C : \text{Points corrigés} \end{cases}$

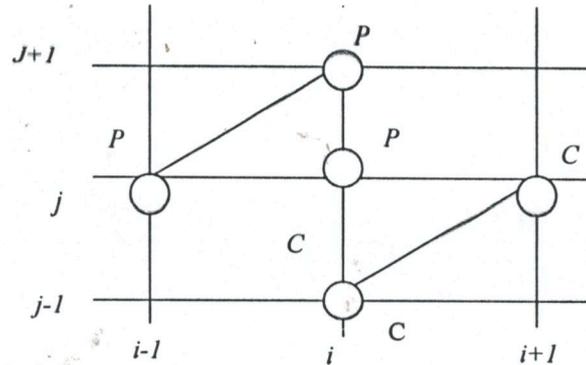


Figure 3.1: Cellule d'intégration C_i pour le schéma de Mac-Cormack

3.4- ANALYSE LINEAIRE DE LA STABILITE DU SCHEMA

Selon l'analyse de von Neumann [13], la stabilité des schémas explicites est déterminée par le nombre de courant-Friedrichs-Lewy [14]., brièvement le nombre C.F.L ou le nombre de Courant.

Le pas du temps des méthodes explicites utilisé en général pour les calculs d'écoulements supersoniques est limité par une conditions de stabilité de type C.F.L. Dans le cas monodimensionnel (Problème Hyperbolique) on a :

$$\Delta t \leq \frac{\alpha \Delta x}{|u| + c} \quad \alpha = O(1)$$

où Δx est le pas du maillage, u est la vitesse de l'écoulement et c la célérité du son.

Pour le schéma de MacCormack, l'analyse de la stabilité selon Von Neumann se fait par l'étude d'évolution de la perturbation [6] ou bien par l'étude de la matrice

d'amplification [6] $g = \frac{\bar{g} + \bar{\bar{g}}}{2}$ en posant :

$\bar{U} = \bar{g}U^n$ et $\bar{\bar{U}} = \bar{\bar{g}}U^n$, cela conduit à écrire :

$$\begin{aligned}
\bar{g} &= 1 - \tau_x A (e^{I\phi_x} - 1) - \tau_y B (e^{I\phi_y} - 1) \\
\bar{g} &= 1 - \bar{g} \left[\tau_x A (e^{I\phi_x} - 1) + \tau_y B (e^{I\phi_y} - 1) \right] \\
g &= 1 - I (\tau_x A \sin \phi_x + \tau_y B \sin \phi_y) - \\
&\left[\tau_x^2 A^2 (1 - \cos \phi_x) + \tau_y^2 B^2 (1 - \cos \phi_y) + 4\tau_x \tau_y AB \sin \frac{\phi_x}{2} \sin \frac{\phi_y}{2} \cos \frac{\phi_x - \phi_y}{2} \right]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

où $I = \sqrt{-1}$

La complexité de l'expression 3.5 rend très difficile de trouver analytiquement une condition sur la stabilité du schéma. Cependant, il a été trouvé expérimentalement par MacCormack que la condition nécessaire pour la stabilité est définie comme étant une condition de type C.F.L :

$$\begin{aligned}
(\tau_x |\lambda(A)_{\max}| + \tau_y |\lambda(B)_{\max}|) &\leq 1 \\
\text{ou } \Delta t &\leq \left[\frac{|\lambda(A)_{\max}|}{\Delta x} + \frac{|\lambda(B)_{\max}|}{\Delta y} \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$\lambda(A)_{\max}$ et $\lambda(B)_{\max}$ sont les rayons spectraux des matrices jacobiennes A et B.

Dans un système de coordonnées cartésiennes (x,y),

$$|\lambda(A)_{\max}| = |u| + c \quad \text{et} \quad |\lambda(B)_{\max}| = |v| + c.$$

Pour le système d'équation d'Euler :

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|u| + c}{\Delta x} + \frac{|v| + c}{\Delta y}} < \frac{\Delta x \Delta y}{|u| \Delta y + |v| \Delta x + c \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \tag{3.7}$$

où le membre droit de l'équation 3.7 est la forme courante de la stabilité qui l'on peut trouver dans la littérature spécialisé.

3.5- TRAITEMENT DES NOEUDS INTERNES

Le calcul se fait comme on l'a déjà précisé antérieurement en deux étapes :

- Méthode par prédiction
- Méthode par correction

Avant d'appliquer le schéma numérique de MacCormack, les équations d'Euler (Eqs.2.40) sont réécrites de la manière suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \rho \frac{\partial u}{\partial \xi} - v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \rho \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \delta \frac{\rho v}{\eta Y_w} \quad (3-8a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u^c \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} - v^c \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (3-8b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u^c \frac{\partial v}{\partial \xi} - v^c \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (3-8c)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -u^c \frac{\partial p}{\partial \xi} - \rho c^2 \omega \frac{\partial u}{\partial \xi} - v^c \frac{\partial p}{\partial \eta} - \rho c^2 \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \delta \frac{\gamma p v}{\eta Y_w} \quad (3-8d)$$

3.5.1- METHODE PAR PREDICTION

3.5.1.1- Calcul de la densité

Soit l'équation de continuité 3.8a, Sous forme discrétisée on a

$$\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^{c,n} \left(\frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) + \rho_{i,j}^n \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) + v_{i,j}^{c,n} \left(\frac{\rho_{i,j+1}^n - \rho_{i,j}^n}{\Delta \eta} \right) + \rho_{i,j}^n \left(\alpha_{i,j} \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \eta} + \beta_{i,j} \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n}{\Delta \eta} \right) + \delta \left(\frac{\rho v}{\eta Y_w} \right)_{i,j}^n \right] \quad (3-9)$$

3.5.1.2- Calcul de la composante axiale de la vitesse

Considérons l'équation 3.8b de quantité de mouvement axiale. Après discrétisation on trouve

$$\bar{u}_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^{c,n} \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \xi} + \frac{\omega}{\rho_{i,j}^n} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \xi} + v_{i,j}^{c,n} \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \eta} + \frac{\alpha_{i,j}}{\rho_{i,j}^n} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \eta} \right] \quad (3-10)$$

3.5.1.3- Calcul de la composante radiale de la vitesse

Dans ce cas on discrétise l'équation 3.8c c.-à-d.:

$$\bar{v}_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^{c,n} \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i,j}^n}{\Delta \xi} + v_{i,j}^{c,n} \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n}{\Delta \eta} + \frac{\beta_{i,j}}{\rho_{i,j}^n} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \eta} \right] \quad (3-11)$$

3.5.1.4- Calcul de la pression

Le calcul de la pression se fait par discrétisation de l'équation de l'énergie 3.8d

$$\begin{aligned} \bar{p}_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^{c,n} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \xi} + (\rho c^2 \omega)_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \xi} + v_{i,j}^{c,n} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \eta} + \right. \\ \left. (\rho c^2)_{i,j}^n \left(\alpha_{i,j} \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \eta} + \beta_{i,j} \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n}{\Delta \eta} \right) + \delta \gamma \left(\frac{p v}{\eta Y_w} \right)_{i,j}^n \right] \end{aligned} \quad (3-12)$$

3.4.2- METHODE PAR CORRECTION

Dans cette dernière étape, les valeurs prédites auparavant seront corrigées.

Cependant les paramètres ρ, u, v et p de l'écoulement sont calculés respectivement par :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j}^{c,n+1} \left(\frac{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} - \bar{\rho}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) + \bar{\rho}_{i,j}^{n+1} \left(\frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) + \bar{v}_{i,j}^{c,n+1} \left(\frac{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} - \bar{\rho}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} \right) + \right. \\ \left. \bar{\rho}_{i,j}^{n+1} \left(\alpha_{i,j} \frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} + \beta_{i,j} \frac{\bar{v}_{i,j}^{n+1} - \bar{v}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} \right) + \delta \left(\frac{\bar{\rho} \bar{v}}{\eta Y_w} \right)_{i,j}^{n+1} \right] \\ \bar{u}_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j}^{c,n+1} \frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} + \frac{\omega}{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1}} \frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} + \bar{v}_{i,j}^{c,n+1} \frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} + \frac{\alpha_{i,j}}{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1}} \frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} \right] \end{aligned} \quad (3-14)$$

$$\bar{v}_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j}^{c,n+1} \frac{\bar{v}_{i,j}^{n+1} - \bar{v}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} + \bar{v}_{i,j}^{c,n+1} \frac{\bar{v}_{i,j}^{n+1} - \bar{v}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} + \frac{\beta_{i,j}}{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1}} \frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} \right] \quad (3-15)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j}^{c,n+1} \frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} + (\bar{\rho} \bar{c}^2 \omega)_{i,j}^{n+1} \frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} + \bar{v}_{i,j}^{c,n+1} \frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} + \right. \\ \left. (\bar{\rho} \bar{c}^2)_{i,j}^{n+1} \left(\alpha_{i,j} \frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} + \beta_{i,j} \frac{\bar{v}_{i,j}^{n+1} - \bar{v}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \eta} \right) + \delta \gamma \left(\frac{\bar{p} \bar{v}}{\eta Y_w} \right)_{i,j}^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (3-16)$$

Finalement, les valeurs des variables dépendantes ρ, u, v et p au niveau du temps $n+1$, $i, e(t + \Delta t)$ au nœud interne (i, j) sont calculées respectivement comme suit:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} [\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{\rho}}_{i,j}^{n+1}] \quad (3.17.a)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} [\bar{u}_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{u}}_{i,j}^{n+1}] \quad (3.17.b)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} [\bar{v}_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{v}}_{i,j}^{n+1}] \quad (3.17.c)$$

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} [\bar{p}_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{p}}_{i,j}^{n+1}] \quad (3.17.d)$$

3.6- TRAITEMENT DES NOEUDS FRONTIERES

Le schéma numérique précédant n'étant applicable qu'aux calculs à l'intérieur du domaine. La détermination des paramètres de l'écoulement aux frontières nécessite alors un traitement particulier.

3.6.1- Entrée de la tuyère

On a démontré dans le chapitre précédent (**Fig.2.4**) que toutes les caractéristiques à cette frontière se dirigent vers l'intérieur du domaine de calcul, ceci entraîne d'imposer tous les paramètres de l'écoulement dans la surface d'entrée comme étant des conditions aux limites physiques. Ces paramètres sont calculés par utilisation de la méthode de Kliegel & Levin.

3.6.2- Axe de la tuyère

L'axe est considéré comme un axe de symétrie, les conditions associées sont alors :

- $v = 0$ (on force l'écoulement à être parallèle à l'axe de la tuyère)
- $\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0$ (pour raison de symétrie)
- $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{v}{y} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (règle de l'hôpital)

L'introduction de ces équations dans le système 3.8 permet l'écriture de ce dernier sur l'axe de symétrie sous la forme suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -u^c \frac{\partial p}{\partial \xi} - \rho \left[\omega \frac{\partial u}{\partial \xi} + (1 + \delta) \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \quad (3.18.a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u^c \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad (3.18.b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -u^c \frac{\partial p}{\partial \xi} + c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) \quad (3.18.c)$$

Etape Prédicteur:

$$\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^{c,n} \frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i,j}^n}{\Delta \xi} + \rho_{i,j}^n \left(\omega \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \xi} + (1 + \delta) \beta \frac{4.v_{i,2}^n - v_{i,3}^n}{2.\Delta \eta} \right) \right] \quad (3.19)$$

$$\bar{u}_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t \left(u_{i,j}^{c,n} \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta \xi} + \frac{\omega}{\rho_{i,j}^n} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) \quad (3.20)$$

$$\bar{p}_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n - \Delta t \left[u_{i,j}^{c,n} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta \xi} + c_{i,j}^{2n} \left(\frac{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^{c,n} \frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i,j}^n}{\Delta \xi} \right) \right] \quad (3.21)$$

Etape Correcteur:

$$\bar{\bar{\rho}}_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j}^{c,n+1} \frac{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} - \bar{\rho}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} + \bar{\rho}_{i,j}^{n+1} \left(\omega \frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} + (1 + \delta) \beta \frac{4.\bar{v}_{i,2}^{n+1} - \bar{v}_{i,3}^{n+1}}{2.\Delta \eta} \right) \right] \quad (3.22)$$

$$\bar{\bar{u}}_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t \left(\bar{u}_{i,j}^{c,n+1} \frac{\bar{u}_{i,j}^{n+1} - \bar{u}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} + \frac{\omega}{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1}} \frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) \quad (3.23)$$

$$\bar{\bar{p}}_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n - \Delta t \left[\bar{u}_{i,j}^{c,n+1} \frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} + \bar{c}_{i,j}^{2n+1} \left(\frac{\bar{\bar{\rho}}_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{\Delta \xi} + \bar{u}_{i,j}^{c,n+1} \frac{\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} - \bar{\rho}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \xi} \right) \right] \quad (3.24)$$

Finalement, les paramètres de l'écoulement sur l'axe de symétrie de la tuyère sont :

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} [\bar{\rho}_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{\rho}}_{i,j}^{n+1}] \quad (3.25.a)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} [\bar{u}_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{u}}_{i,j}^{n+1}] \quad (3.25.b)$$

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} [\bar{p}_{i,j}^{n+1} + \bar{\bar{p}}_{i,j}^{n+1}] \quad (3.25.c)$$

3.6.3- Paroi de la tuyère

Une seule caractéristique est dirigée vers l'intérieur du domaine (**Fig.2.6**) et une seule condition physique est à imposer. Cette condition est exprimée par l'annulation de la composante normale de la vitesse ($v_n = 0$) qui signifie la condition de glissement (Fluide Parfait).

Les variables autres que la vitesse normale, en particulier la vitesse tangentielle, la pression et les autres paramètres thermodynamique sont déterminés alors à partir de l'écoulement à l'intérieur de la tuyère (*conditions aux limites numériques*).

Ces paramètres manquants peuvent être extrapolés directement à partir de leurs valeurs aux points adjacents à la paroi ou encore les équations de l'écoulement sont discrétisées inversement pour les points pariétaux.

En effet, dans le présent travail, le calcul des paramètres de l'écoulement aux points pariétaux est réalisé par résolution des équations caractéristiques développées dans le chapitre précédent (**Eqs. 2. 35 & 2. 36**). La résolution de ces équations est comme suit :

Considérons la figure (**3.2**) dans laquelle le nœud **4** représente le point solution (point pariétal), à partir de ce dernier les lignes caractéristiques sont projetées en arrière pour déterminer les points de données initiales (points **1,2** et **3**). Dans ce qui suit on présente les étapes de résolution pour la première équation caractéristique (**Eq.2. 36**) car on a les mêmes étapes pour la deuxième équation.

Soit donc l'équation de la courbe caractéristique (**Eq.2. 36**) :

$$\frac{d\eta}{dt} = V^c + c\alpha^* \quad (3.26)$$

L'équation caractéristique ou de compatibilité associée est (**Eq.2. 36**) :

$$dp + \frac{\rho c}{\alpha^*} (\alpha du + \beta dv) = \left[\psi_4 + c^2 \psi_1 + \frac{\rho c}{\alpha^*} (\alpha \psi_2 + \beta \psi_3) \right] dt \quad (3.27)$$

L'intégration de (26) se fera entre les points **4** et **1** :

$$(26) \Rightarrow d\eta = (V^c + c\alpha^*) dt$$

$$\eta_4 - \eta_1 = (\bar{V}^c + \bar{c}\alpha^*) \Delta t \quad (3.28)$$

\bar{V}^c et \bar{c} sont les valeurs moyennes prises entre les points **1** et **4**.

Etape Prédicteur:

Des valeurs moyennes \bar{V}^c et \bar{c} , η_1 est déterminé à partir de 3.28, V^c_1 et c_1 sont calculés alors par interpolation. On itère jusqu'à aboutir à la solution (η_1). Cependant toutes les paramètres (p, ρ, u, v, c et $\psi_{1,2,3,4}$) sont calculés à ce point.

Etape Correcteur:

Les valeurs prédites dans la première étape sont réutilisées pour déterminer avec le même processus précédent le nouveau (η_1) et ainsi toutes les paramètres restants. Finalement et après avoir résolu 2.35 par la même méthode pour calculer ρ_4 , u_4 et v_4 l'équation 3.27 est résolue pour déterminer p_4 comme suit :

$$p_4 - p_1 + \frac{\bar{\rho}_{41} \bar{c}_{41}}{\alpha^*} [\alpha(u_4 - u_1) + \beta(v_4 - v_1)] = \left[\bar{\psi}_{41} + \bar{c}_{41}^2 \bar{\psi}_{14} + \frac{\bar{\rho}_{41} \bar{c}_{41}}{\alpha^*} (\alpha \bar{\psi}_{24} + \beta \bar{\psi}_{34}) \right] \Delta t \quad (3-29)$$

où la barre, signifiée que ces termes sont moyennés entre les points 1 et 4.

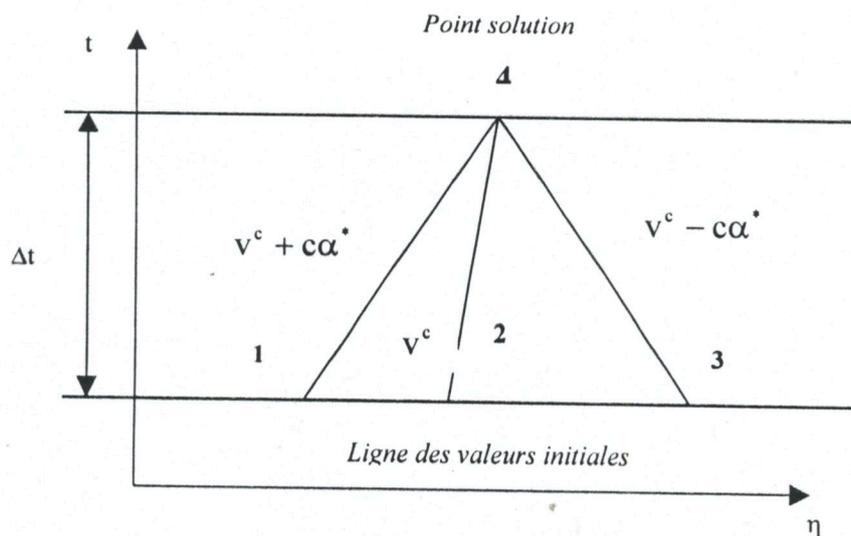


Fig.3.2 : Grille des différence finies pour les points frontières

3.6.4- Section de sortie de la tuyère

Etant donné qu'à la sortie l'écoulement est supersonique, l'analyse faite au **Chap 2** montre que toutes les caractéristiques se dirigent de l'intérieur du domaine vers la surface de sortie (**Fig.2.4**). Cependant aucune conditions physiques est imposée à la sortie et les paramètres de l'écoulement dans la surface de sortie sont déterminés par extrapolation linéaire.

3.7- GENERATION DU MAILLAGE

La discrétisation des équations par la méthode des différences finies nécessite en premiers lieux le maillage du domaine de résolution (Partie divergente de la tuyère) pour le calcul.

La méthode utilisée pour la génération du maillage est la technique des deux parois [7]. Cette technique est avantageuse dans le cas des écoulements internes et elle fait partie des techniques algébriques.

3.7.1- Technique des deux parois

Considérons la figure ci-dessous,

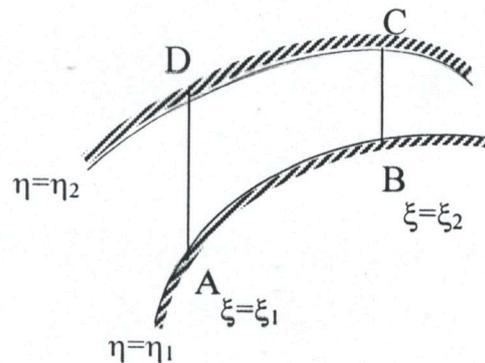


Fig. 3.3 : Canal bidimensionnel courbé

On commence par la distribution des nœuds sur les frontières du domaine, i e AB, BC, CD et DA. Cette distribution des nœuds est contrôlée par l'utilisation des fonctions de condensation (STREATCHING FUNCTIONS). La forme proposée par [7] de ces fonctions est donnée par :

$$S = P\eta^* + (1 - P) \left[1 - \frac{\tanh\{Q(1 - \eta^*)\}}{\tanh Q} \right] \quad P, Q \text{ paramètres de control}$$

$$\eta^* = \frac{\eta - \eta_{AB}}{\eta_{DC} - \eta_{AB}} \Rightarrow 0 \leq \eta^* \leq 1$$

Une fois ces nœuds sont localisés aux frontières du domaine, les nœuds intérieurs sont déterminés par la technique des deux parois, soit donc

$$x(\xi, \eta) = (1 - S)x_{AB}(r_{AB}) + Sx_{DC}(r_{DC}) \quad (3.30.a)$$

$$y(\xi, \eta) = (1 - S)y_{AB}(r_{AB}) + Sy_{DC}(r_{DC}) \quad (3.30.b)$$

CHAPITRE 4

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

4.1 INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats obtenus par le programme de calcul. Ce programme est élaboré pour résoudre les équations d'Euler qui gouvernent l'écoulement supersonique au sein de la partie divergente de la tuyère qui sont développées dans le deuxième chapitre. La méthode de résolution de ce système d'équations est réalisée comme il a été décrit ultérieurement par la technique de MacCormack utilisant la méthode des différences finies (c.f. Chap 3).

Trois cas d'étude sont illustrés dans ce chapitre et qui représentent les parties divergentes de trois tuyères ayant des géométries différentes. La première est la tuyère conique, les deux autres équipent respectivement le premier étage du moteur SEPR-7341 de l'engin de recherche ANTARES et la deuxième le premier étage du moteur SEPR-739P de l'engin de recherche BERENICE. Ces engins appartiennent à l'Office National d'Etudes et Recherches Aérospatiale (O.N.E.R.A. France).

Nous nous sommes intéressé aux variations le long de l'axe de symétrie et la paroi des paramètres suivant :

- La pression,
- Le nombre de Mach

Ainsi de la présentation des courbes iso-valeur de ces paramètres, en effet ces paramètres sont en général les plus significatifs pour la caractérisation de l'écoulement. D'autres parts, les principaux paramètres de performance décrits dans le premier chapitre sont à leurs tours aussi présentés.

Finalement, tous nos résultats sont validés en les comparant avec ceux obtenus par la méthode des caractéristiques en exécutant le code de calcul *TUYERE* [11].

4.2- DONNEES DU PROGRAMME DE CALCUL

Les caractéristiques thermodynamiques et géométriques de la tuyère, nécessaires au lancement des calculs sont données par:

- La pression totale ou de stagnation (sortie de la chambre de combustion) P_t ,
- La température totale ou de stagnation (sortie de la chambre de combustion) T_t ,
- Le rapport des chaleurs spécifiques γ ,
- La constante des gaz parfaits r ,
- Le rayon au col R_t ,
- Les rayons de cambrure en amont et en aval du col R_{tu} et R_{td} ,
- L'angle de divergence au point d'attache A_a ,
- L'angle à la sortie A_e ,
- Le rayon à la sortie Y_e .

La géométrie choisie des cas d'étude cités précédemment est celle dite profilée (en forme de cloche) possédant un col constitué de deux arcs de cercles. Celui en aval du col est joint au point d'attache à un contour polynomial. Ce type de géométrie concerne notamment les deux tuyères équipant les engins de recherche ANTARES et BERENICE (c.f. figure 4.1). Contrairement au cas de la tuyère conique où une droite est jointe à l'arc de cercle (c.f. figure 1.4 au chapitre 1).

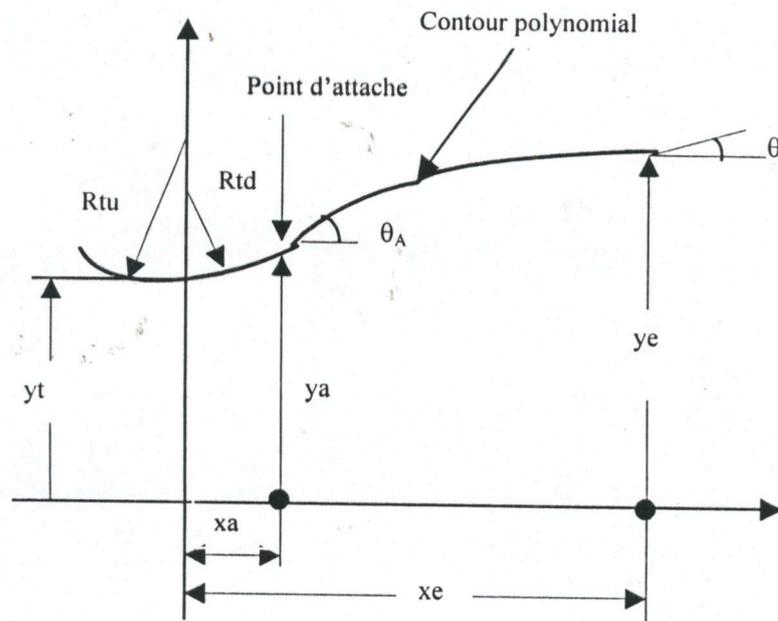


Figure 4.1 : Profil de la tuyère

4.3- PREMIER CAS D'ETUDE : TUYERE CONIQUE

Le premier cas d'étude faisant l'objet de ce paragraphe est représenté par la section divergente d'une tuyère conique [3]. L'écoulement qui y prend place est calculé par application des approches de Kliegel et Levin [2] pour celui se tenant près du col et la méthode des différences finies pour l'écoulement supersonique se tenant au sein du divergent.

4.3.1- DONNEES THERMODYNAMIQUES ET GEOMETRIQUES

Les données nécessaires au lancement du programme de calcul sont représentées par les valeurs des paramètres thermodynamiques de la chambre de combustion et ceux géométriques de la tuyère :

$$\begin{aligned} Pa &= 1.013 \text{ bars} ; Yt = 0.02032 \text{ m} ; \theta_w = 15^\circ \\ Pt &= 4.82 \text{ bars} ; Rtu = 0.0127 \text{ m} ; Xe = 0.1201 \text{ m} \\ Tt &= 300^\circ K ; Rtd = 0.0127 \text{ m} ; Ye = 0.0542 \text{ m} \end{aligned}$$

avec

$$\gamma = 1.4 \quad \text{et} \quad r = 287.053 \text{ J/kg} \cdot ^\circ K$$

4.3.2 - RESULTATS

4.3.2.1.-Maillage

La figure (4.1) représente le maillage calculé par le programme, ce calcul est effectué par l'application d'une technique algébrique de génération de maillage qui est la technique des deux parois discutée dans le chapitre précédent. Ce maillage est caractérisé par le pas constant dans les deux directions. Cependant, il est connu que la région du col de la tuyère est une zone de forts gradients notamment dans la direction axiale, dans ce cas il est préférable de rétrécir le maillage dans cet endroit et la figure (4.2) montrent un maillage raffiné au voisinage du col.

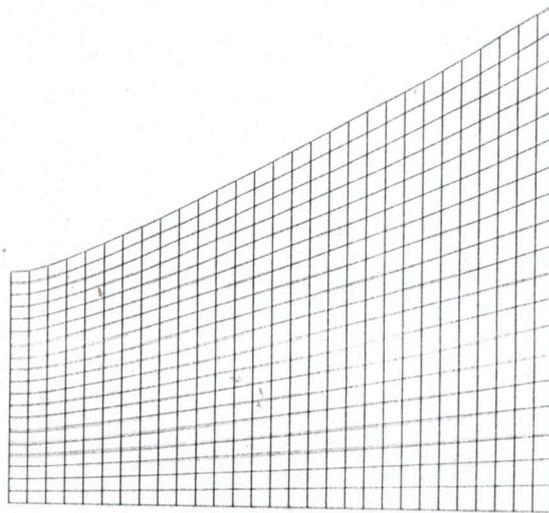


Figure 4.1. Maillage simple du divergent conique avec :
 $N=30$ et $V=20$

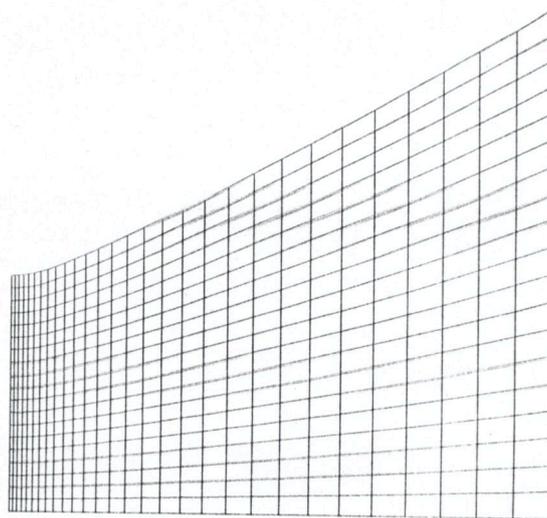


Figure 4.2. Maillage raffiné au col du divergent conique avec :
 $N=30$ et $M=20$

4.3.2.2.-Répartition du nombre de Mach et de la pression sur l'axe de symétrie

Les figures (4.3) et (4.5) représentent respectivement les variations du nombre de Mach et de la pression le long de l'axe de symétrie de la tuyère. On remarque que le nombre de Mach augmente du col jusqu'à la sortie, ceci est naturel car il s'agit d'une détente. Cette dernière se réalise d'une manière rapide jusqu'au point d'attache, ensuite la détente continue d'une manière progressive jusqu'à la section de sortie de la tuyère.

On remarque la même chose pour la courbe (4.5) représentative de la variation de la pression statique le long de l'axe de symétrie de la tuyère.

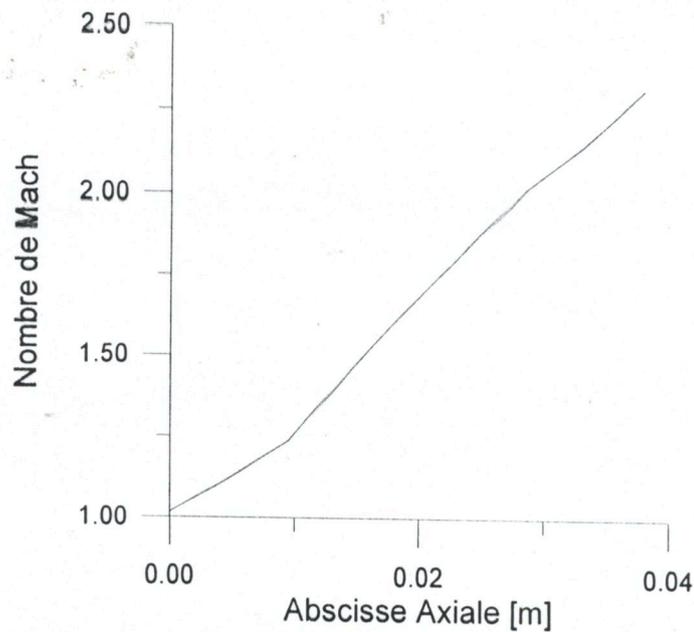


Figure 4.3 : Distribution du nombre de Mach le long de l'axe de symétrie

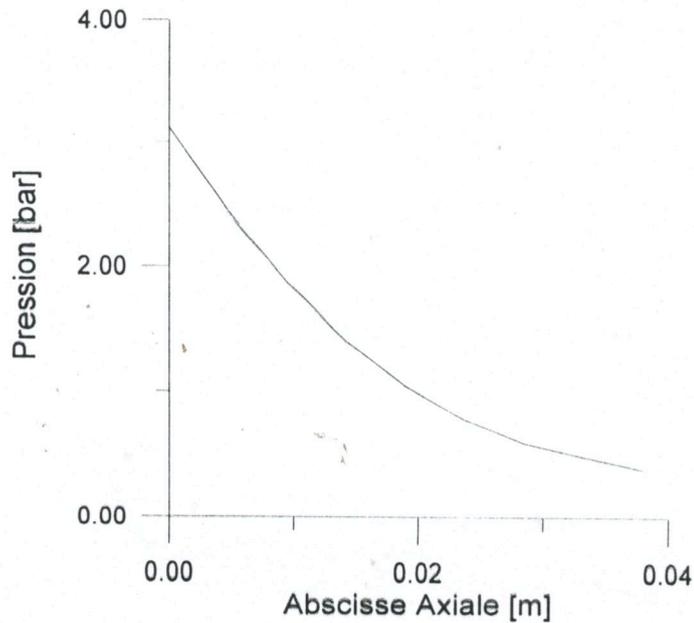


Figure 4.5. Distribution de la pression le long de l'axe de symétrie

4.3.2.3.- Répartition du nombre de Mach et de la pression sur la paroi

Les figures (4.4) et (4.6) représentent respectivement les répartitions du nombre de Mach et la pression le long de la paroi de la tuyère. On observe dans ces graphes l'importance des pentes des courbes notamment au voisinage du col jusqu'au point d'attache, après ce point l'accélération de l'écoulement est moins forte qu'à la première phase.

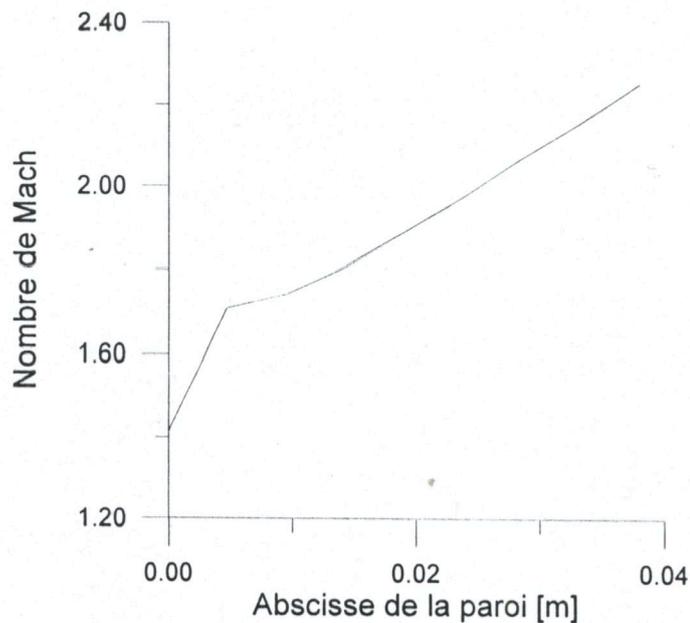


Figure 4.4. Distribution du nombre de Mach le long de la paroi

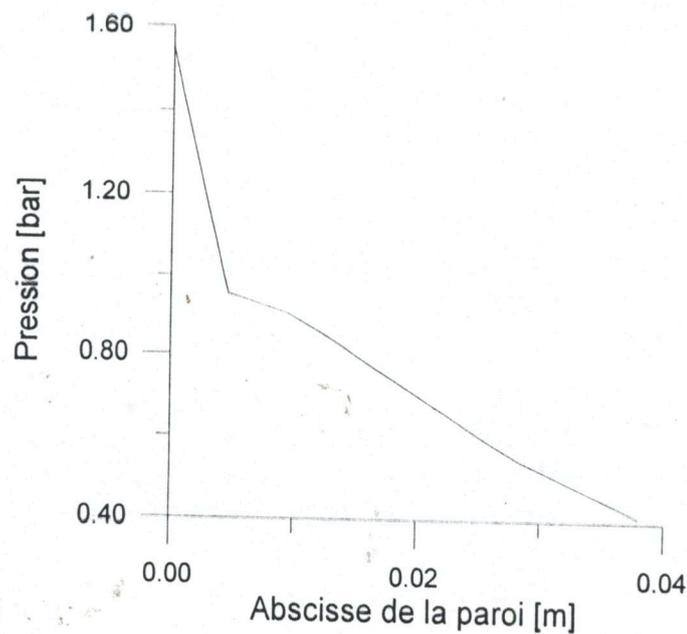


Figure 4.6. Distribution de la pression le long de la paroi

4.3.2.4.-Graphique des iso-Mach et iso-pression

En fin les caractéristiques de l'écoulement dans la tuyère entière, on été présenté dans les figures (4.7) et (4.8) qui montre respectivement les courbes iso valeurs du nombre de Mach et de la pression. On remarque l'allure concave de ces courbes, cette dernière est dirigée vers l'origine au voisinage du col de la tuyère. Confirme ce qui que la détente sur la paroi près du col est plus importante qu'à l'axe de la tuyère. dans cette région. En aval du point d'attache on retrouve la situation inverse.

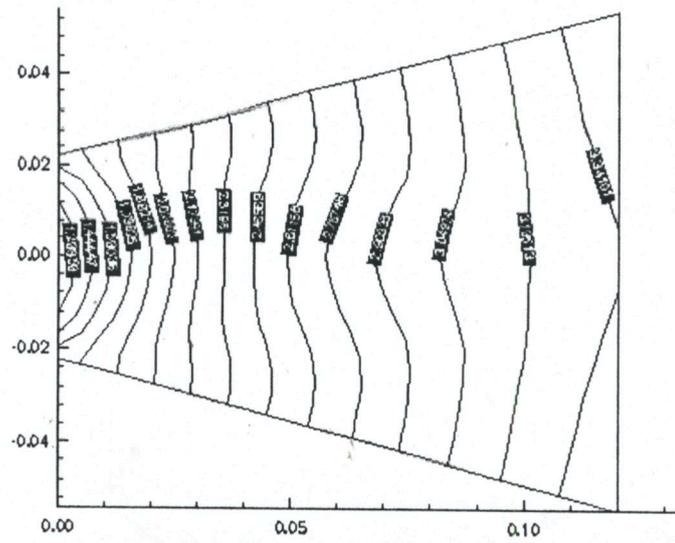


Figure 4.7. Graphique des iso-Mach du divergent conique

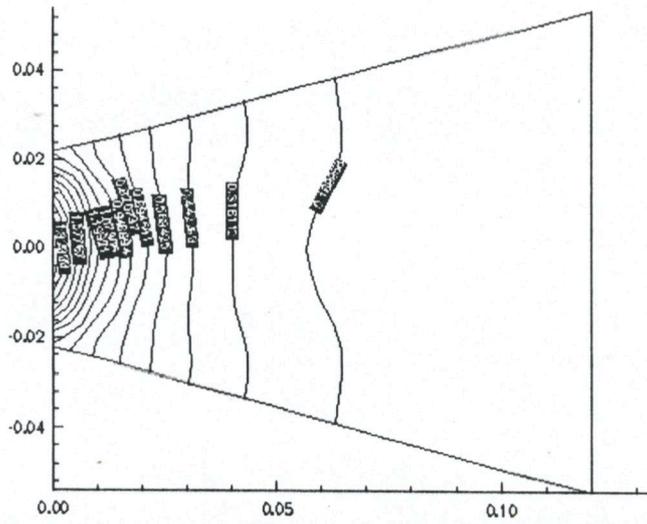


Figure 4.8. Graphique des iso-Pression du divergent conique

4.4 DEUXIEME CAS D'ETUDE : TUYERE ANTARES

Le deuxième cas d'étude faisant l'objet de ce paragraphe est représenté par la section divergente de la tuyère équipant l'engin de recherche ANTARES [11] (ONERA- France). L'écoulement qui y prend place est calculé par application des approches de Kliegel-Levine [2] pour celui se tenant près du col et la méthode des différences finies pour l'écoulement supersonique se tenant au sein du divergent.

4.4.1 DONNEES THERMODYNAMIQUES ET GEOMETRIQUES

Les données nécessaires au lancement du programme de calcul sont représentées par les valeurs des paramètres thermodynamiques de la chambre de combustion et ceux géométriques de la tuyère :

$$\begin{aligned} P_a &= 1.013 \text{ bars} ; Y_t = 0.088 \text{ m} ; \theta_a = 20^\circ \\ P_t &= 54 \text{ bars} ; R_{tu} = 0.176 \text{ m} ; \theta_e = 5^\circ \\ T_t &= 2500^\circ \text{K} ; R_{td} = 0.044 \text{ m} ; Y_e = 0.197 \text{ m} \end{aligned}$$

avec

$$\gamma = 1.2 \quad \text{et} \quad r = 320 \text{ J/kg} \cdot ^\circ \text{K}$$

4.4.2 RESULTATS

4.4.2.1.-Maillage

La figure (4.9) montre le maillage généré par le programme de calcul en utilisant la technique des deux parois. Ce maillage est caractérisé par l'utilisation d'un pas constant que se soit dans la direction axiale (Axe des X) ou la direction radiale (Axe des Y). Cependant, il est connu que ce type de tuyères possède un angle important au point d'attache ce qui implique une détente très rapide des gaz de combustion en aval du col jusqu'à ce point. Il est donc indispensable de condenser le maillage dans cette région afin de contrôler les forts gradient des différents paramètres de l'écoulement.

La figure (4.10) représente le maillage raffiné près du col de la tuyère.

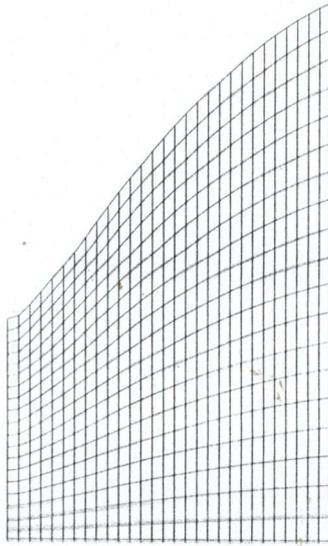


Figure 4.9. Maillage simple du divergent de la tuyère *ANTARES* avec :
N=30 et M=20

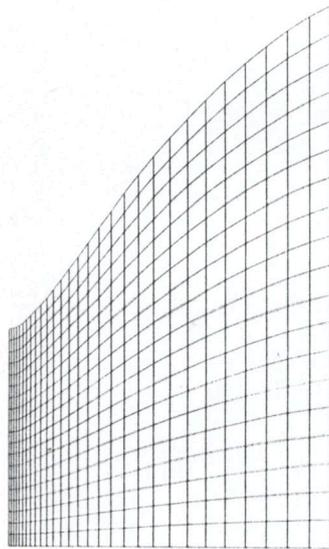


Figure 4.10. Maillage raffiné du divergent de la tuyère *ANTARES* avec :
N=30 et M=20

4.4.2.2.-Répartition du nombre de Mach et de la pression sur l'axe de symétrie

Les figures (4.11) et (4.13) montrent respectivement les variations du nombre de Mach et de la pression le long de l'axe de symétrie de la tuyère *ANTARES*. La détente des gaz de combustion se réalise d'une manière très rapide le long de l'arc circulaire aval du col jusqu'au point d'attache. Au-delà de ce dernier, elle continue d'une manière progressive jusqu'à la sortie. Ceci est principalement dû on l'a déjà expliqué précédemment à l'angle d'attache important choisi afin d'imposer que la détente se fasse presque entièrement le long de l'arc circulaire aval du col. La partie restante (contour polynomial) ne sert essentiellement qu'à redresser l'écoulement afin de le rendre axial et obtenir ainsi une valeur maximale pour la poussée.

On note aussi la concordance de nos résultats avec ceux obtenus par la méthode des caractéristiques [11].

Le même raisonnement pour ce qui concerne la courbe représentant la variation du nombre de Mach le long de l'axe de symétrie.

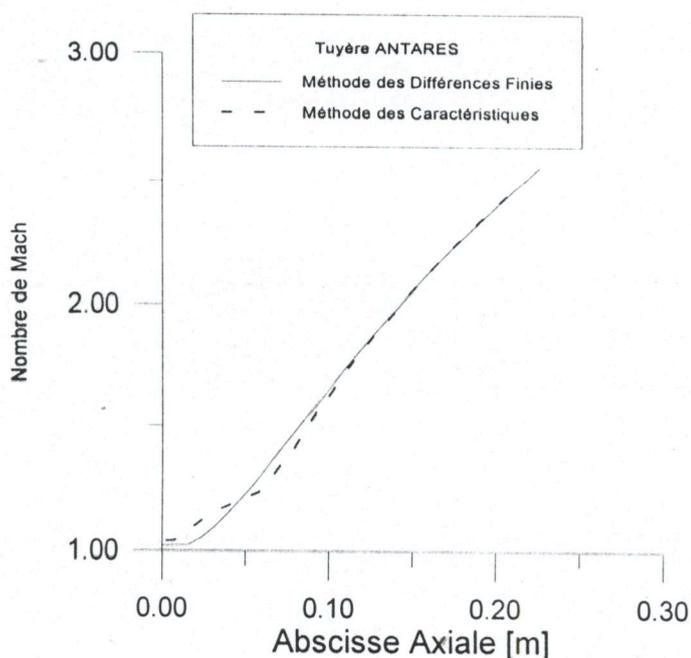


Figure 4.11 . Répartition du nombre de Mach le long de l'axe de symétrie

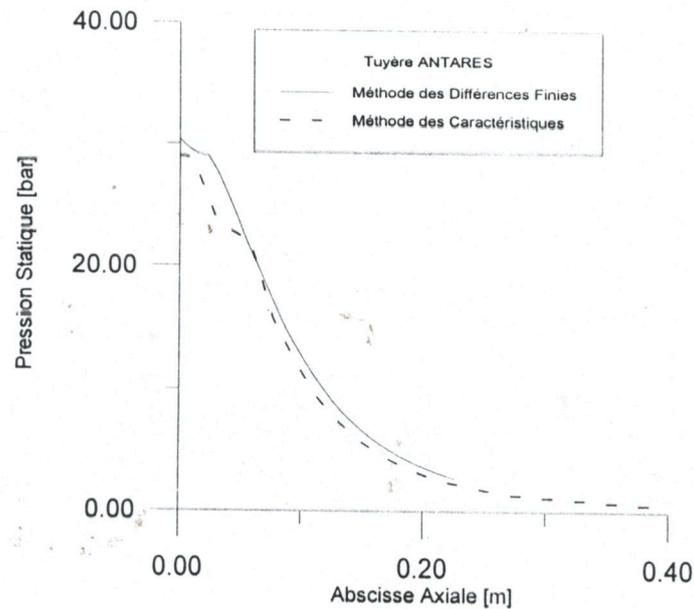


Figure 4.13. Répartition de la pression le long de l'axe de symétrie

4.4.2.3.-Répartition du nombre de Mach et de la pression sur la paroi

Les figures (4.12) et (4.14) représentent respectivement les variations du nombre de Mach et de la pression le long de la paroi de la tuyère. On remarque l'importance des pentes des courbes particulièrement près du col jusqu'à atteindre le point d'attache. Au-delà de ce point, la détente des gaz de combustion se fera plus lentement. C'est une caractéristique des tuyères profilées dont l'angle du divergent est important afin de permettre comme on l'a mentionné précédemment la presque totalité de la détente des gaz de combustion de se faire près du col. Le reste de la section divergente ne sert qu'à redresser l'écoulement vers la direction axiale et atteindre ainsi des valeurs importantes pour la poussée.

4.4.2.4.-Graphique des iso-Mach et iso-pression

Comme dans le cas de la tuyère conique, les figures (4.15) et (4.16) représentent les courbes iso-valeurs du nombre de Mach et de la pression.

La concavité de ces courbes est dirigée vers l'origine dans la région du col jusqu'au point d'attache, ceci a été prévisible car dans cette région de la tuyère la détente des gaz est rapide sur la paroi contrairement à l'axe de symétrie. Par la suite, en suivant le contour après le point d'attache, cette concavité diminue au fur et à mesure qu'on s'approche de la section de sortie de la tuyère où on retrouve la situation inverse.

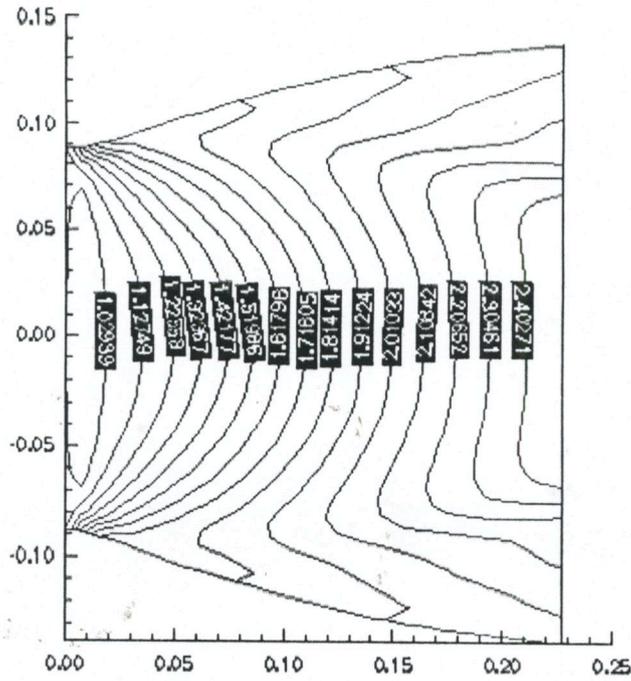


Figure 4.15. Graphique des iso-Mach pour la tuyère ANTARES

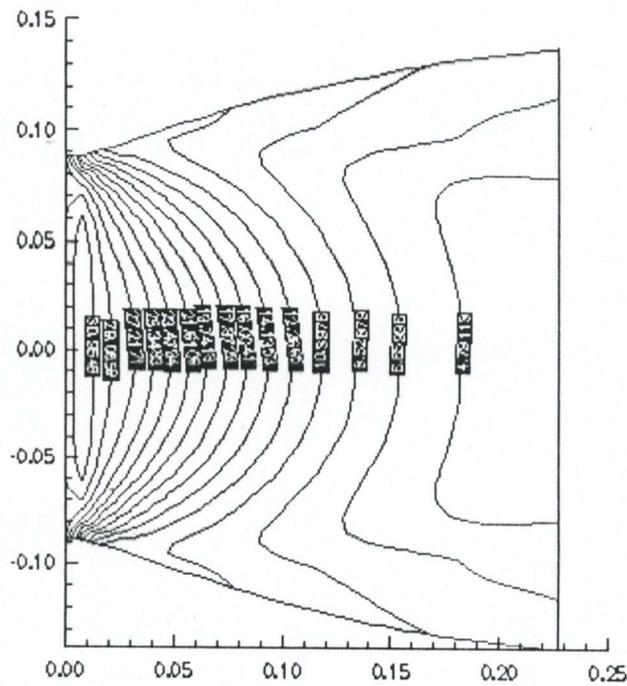


Figure 4.16. Graphique des iso-Bar pour la tuyère ANTARES

4.5 TROISIEMME CAS D'ETUDE : TUYERE BERENICE

Le troisième exemple traité dans ce paragraphe est la partie divergente de la tuyère équipant l'engin de recherche BERENICE (ONERA- France) [11]. L'écoulement qui y prend place est calculé par application des approches de Kliegel-Levine [2] pour l'écoulement se tenant près du col et la méthode des différences finies pour l'écoulement supersonique se tenant au sein du divergent.

4.5.1 -DONNEES THERMODYNAMIQUES ET GEOMETRIQUES

Les données nécessaires au lancement du programme de calcul sont représentées par les valeurs des paramètres thermodynamiques de la chambre de combustion et ceux géométriques de la tuyère :

$$Pa = 1.013 \text{ bars} ; Yt = 0.069 \text{ m} ; \theta_a = 20^\circ$$

$$Pt = 69 \text{ bars} ; Rtu = 0.138 \text{ m} ; \theta_e = 5^\circ$$

$$Tt = 2800^\circ K ; Rtd = 0.0345 \text{ m} ; Ye = 0.223 \text{ m}$$

avec

$$\gamma = 1.2 \quad \text{et} \quad r = 320 \text{ J/kg}^\circ K$$

4.5.2 -RESULTATS

4.5.2.1.-Maillage

Le calcul de l'écoulement supersonique dans cette tuyère est réalisé par la résolution des équations gouvernantes dans un maillage. Ce dernier est montré dans les figures (4.17) et (4.18) où le second montre un maillage rétréci près du col de la tuyère pour contrôler les fortes variations des paramètres de l'écoulement dans cette région de la tuyère.

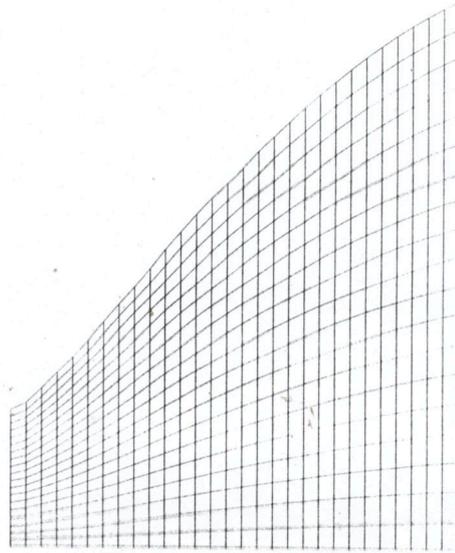


Figure 4.17. Maillage simple du divergent de la tuyère *BERENICE* avec :
N=30 et M=20

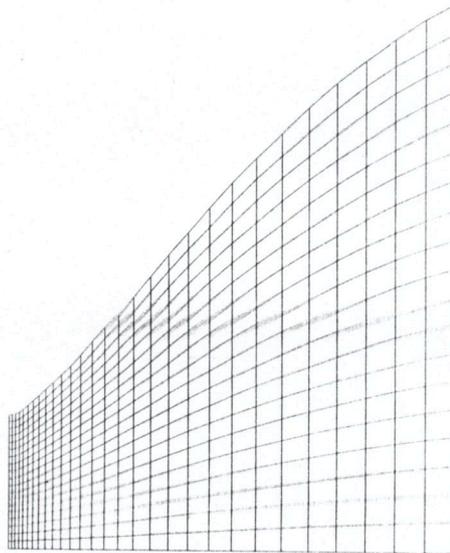


Figure 4.18. Maillage raffiné du divergent de la tuyère *BERENICE* avec :
N=30 et M=20

4.5.2.3.-Répartition du nombre de Mach et de la pression sur l'axe et la paroi

Les commentaires mentionnés dans l'exemple précédent pour l'allure des courbes représentatives de la distribution du nombre de Mach et de la pression le long de l'axe de symétrie et la paroi sont valables dans ce cas.

En effet, la détente importante des gaz de combustion est remarquée dans région du col jusqu'au point d'attache. Ceci est montré par la croissance rapide de la courbe de la figure (4.19) représentant la distribution du nombre de Mach sur l'axe et inversement pour la courbe de la figure (4.21) concernant la distribution de la pression sur le même axe.

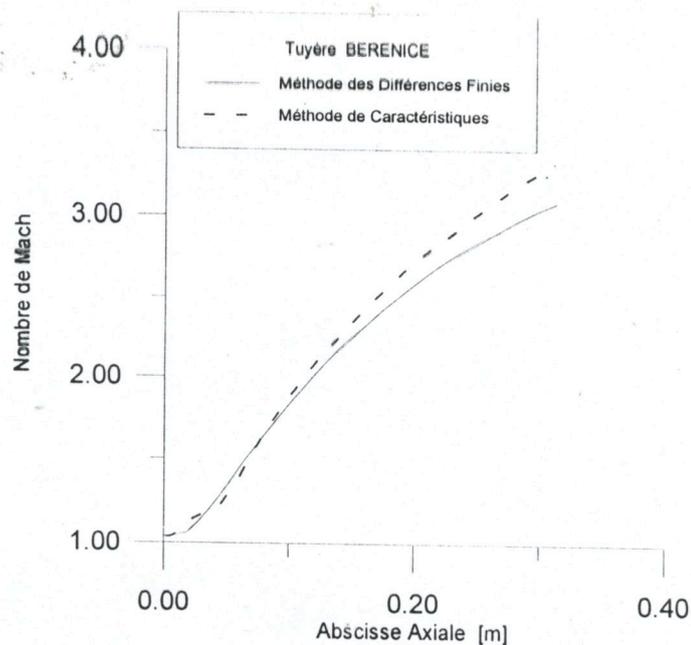


Figure 4.19. Répartition du nombre de Mach le long de l'axe de symétrie

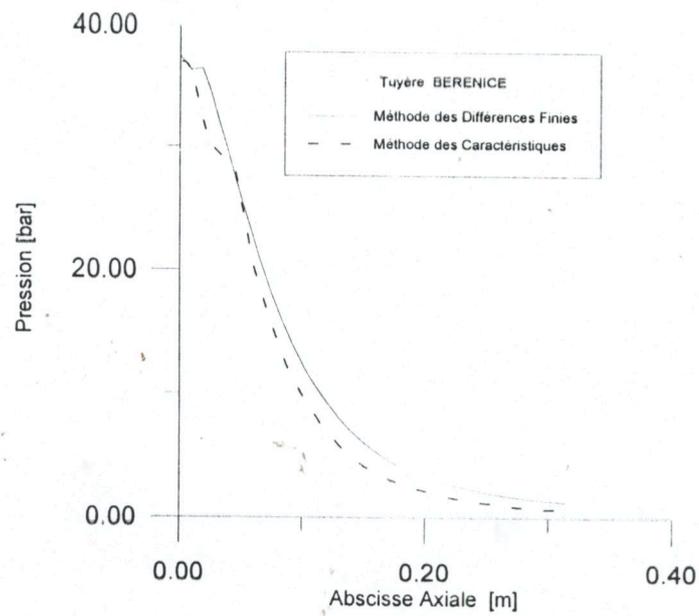


Figure 4.21. Répartition de la pression le long de l'axe de symétrie

idem pour les figures (4.20) et (4.22) représentant respectivement la distribution du nombre de Mach et la pression sur la paroi.

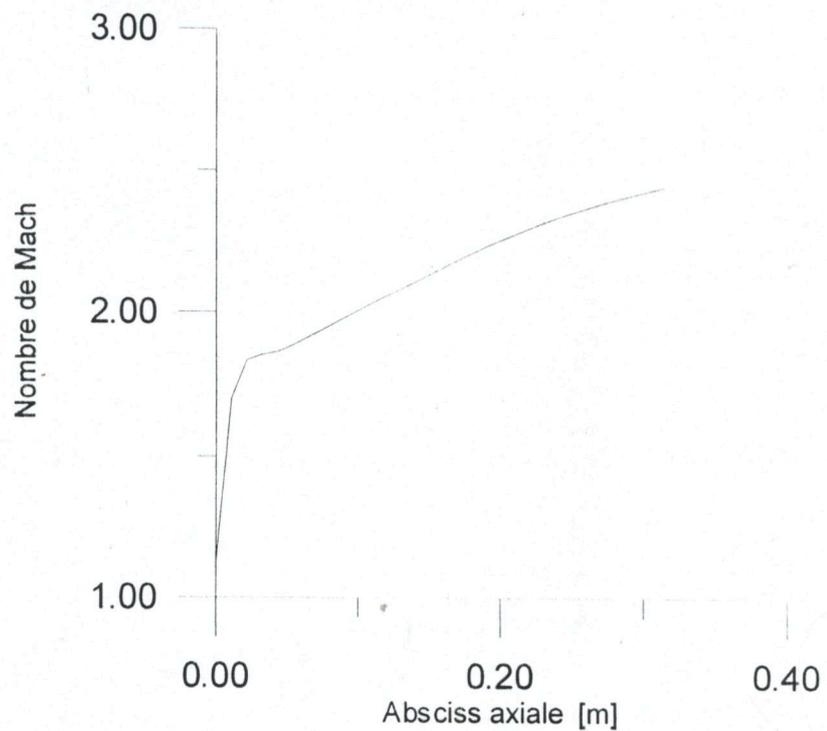


Figure 4.20. Répartition du nombre de Mach le long de la paroi

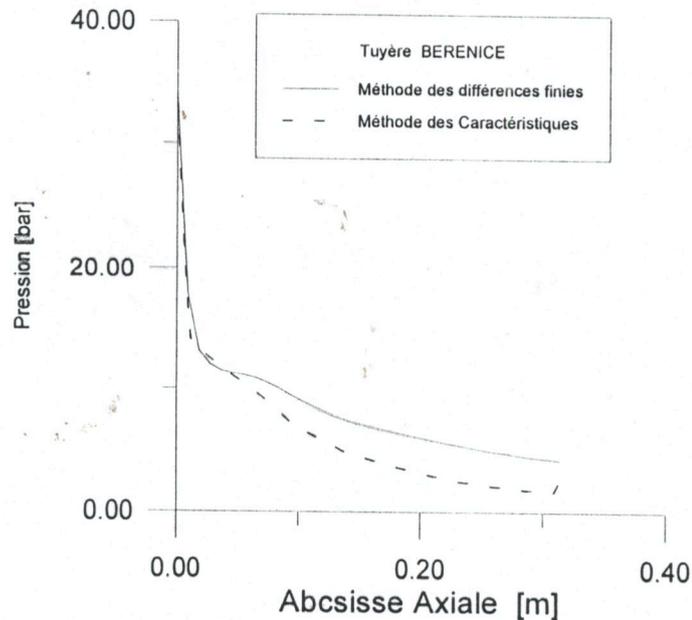


Figure 4.22. Répartition de la pression le long de la paroi

4.5.2.3.-Graphique des iso-Mach et iso-pression

Les mêmes commentaires mentionnés dans le cas de la tuyère *ANTARES* pour la distribution des iso-Mach et les iso-bar sont valables pour les figures (4.23) et (4.24) en sachant que dans le cas présent les iso-bar et iso-Mach présentent une concavité plus grande et ceci est dû en fait à la longueur des deux tuyères qui est plus grande que pour la tuyère *BERENICE*.

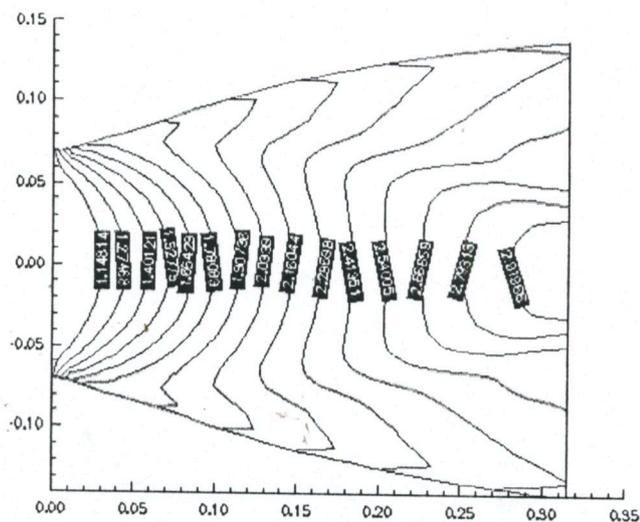


Figure 4.23. Graphique des iso-Mach pour la tuyère BERENICE

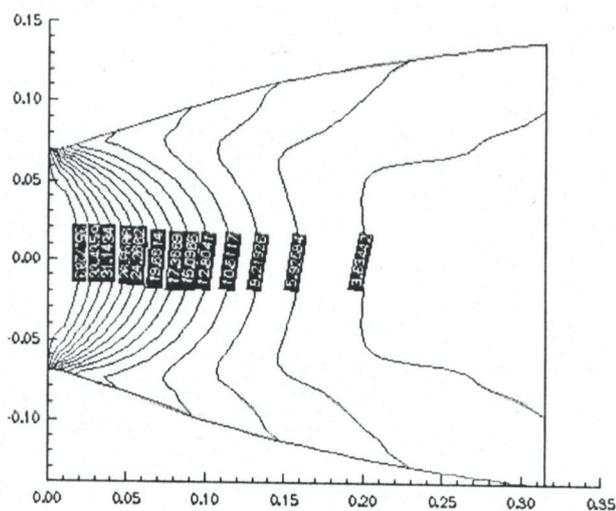


Figure 4.24. Graphique des iso-Bar pour la tuyère BERENICE

| Paramètre de Performance | Tuyère <i>CONIQUE</i> | | Tuyère <i>ANTARES</i> | | Tuyère <i>BERENICE</i> | |
|--------------------------|-----------------------|-----------|-----------------------|-----------|------------------------|-----------|
| | M. des DF | M. CARACT | M. des DF | M. CARACT | M. des DF | M. CARACT |
| Debit [kg/s] | 1.354 | 1.362 | 95.004 | 96.185 | 70.522 | 71.398 |
| Coef décharge | 0.939 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 0.9967 |
| La poussée [N] | 618.8 | 622.9064 | 160435.7 | 165082.2 | 126455.3 | 146572.8 |
| Coef de poussée | 0.9884 | 0.9946 | 1.20 | 1.24 | 1.2 | 1.4 |
| Vit effective m/s | 460.0743 | 426.0403 | 1688.72 | 1716.3 | 1793.133 | 2052.896 |
| Mach de sortie | 2.58 | 2.31 | 2.49 | 2.49 | 2.97 | 2.92 |
| Imp spécifique l/s | 46.8985 | 43.4291 | 172.143 | 174.954 | 182.786 | 209.265 |

Tableau 1. Comparaison des principaux paramètres de performance des trois tuyères déterminées par les deux méthodes

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

CONCLUSION

Le but primordial de ce travail était de procéder à la simulation numérique de l'écoulement dans la partie divergente des tuyères de forme Convergentes-Divergentes. Le système d'équations d'Euler est pris comme un modèle mathématique de cet écoulement, sa résolution numérique est réalisée par l'utilisation de la méthode des différences finies et le schéma de MacCormack^{11,15} est choisi pour les calculs dans le processus numérique.

Bien que ce schéma n'est qu'une variante de la famille des schémas numériques développés par Lax-Wendroff¹¹ qui sont caractérisés à leurs tours par l'utilisation de deux étapes pour le calcul, l'algorithme de MacCormack lui aussi possède plusieurs formulations. Dans ce mémoire, la version explicite Directe-Inverse est utilisée respectivement dans les étapes du Prédicteur et du Correcteur induisant ainsi un schéma de précision d'ordre deux (2) dans le temps et dans l'espace.

En effet, le schéma de MacCormack est le plus populaire des variantes de ceux obtenus du schéma de base développé par Lax-Wendroff, il est aussi le plus utilisé dans le domaine de calcul des écoulements supersoniques malgré le choix strict du pas de calcul pour stabiliser le processus numérique. Cependant, on a montré dans le *Chapitre 3* que l'étude de la stabilité de cet algorithme en se basant sur l'analyse établit par Von Neumann est effectuée par l'étude de l'évolution de la matrice d'amplification de l'erreur, sous entendait que cette matrice est obtenue après avoir transformé le système d'équations d'Euler en formulation quasi-linéaire, ceci à été fait dans le *deuxième chapitre*. Cette étude à conduit à l'obtention d'une équation très compliquée rendant ainsi très difficile de trouver analytiquement le critère de la stabilité. Dans ce cas, la solution était l'utilisation du critère de Courant-friedrich-Lewy.

Le programme de calcul élaboré dans cette étude à permet le traitement de trois cas de tuyères ayant des géométries différentes, la première est de forme conique et les deux autres sont de formes profilées équipant respectivement les moteurs SEPR-7341 et SEPR-739P des engins de recherche ANTARES ET BERENICE qui appartiennent à l'Office National d'Etudes et Recherche Aérospatiales (ONERA. France). Ces tuyères possèdent une forme en cloche car elles sont caractérisées par la présence de deux arcs de cercles en amont et en aval du col, celui en aval est joint au point d'attache par un contour polynomial dans le cas des tuyères ANTARES et BERENICE.

Les résultats obtenus par notre programme de calcul concordent avec ceux obtenus par la méthode des caractéristiques qui est d'une utilisation courante pour ce type d'applications.

En effet, ces résultats sont présentés en terme de courbes représentant les distributions de la pression et du nombre de Mach le long des lignes centrales et des parois des différentes configurations de tuyères étudiées. Ils montrent une détente des gaz de combustion se faisant normalement pour tous les cas. Celle-ci se réalise d'une manière rapide le long de l'arc circulaire en aval du col jusqu'au point d'attache. Au delà de ce dernier, elle continue d'une manière progressive jusqu'à la sortie. Ceci est en fait une caractéristique intrinsèque des tuyères profilées principalement dû à l'angle d'attache important choisi afin d'imposer que cette détente se fasse presque entièrement le long de l'arc circulaire aval du col, la partie restante servant essentiellement à redresser l'écoulement afin de le rendre axial et obtenir ainsi une valeur maximale pour la poussée.

Les résultats sont aussi représentés sous forme de tableaux incluant les principaux paramètres de performance discuter dans le *premier Chapitre*.

RECOMMANDATIONS POUR D'EVENTUELS TRAVAUX FUTURS

L'actuel étude pourrait recevoir d'intéressantes développement. Nous en recommandons particulièrement celui lié à l'expérimentation de telles tuyères qui pourraient valider d'une manière décisive une telle approche.

Une intégration de routines d'évaluation de la couche limite se développant près de la paroi, bien que celle-ci est généralement très faible pour les écoulements supersoniques, ainsi que l'étude de son influence sur les performance développées par les tuyères pourrait être intéressante.

L'actuel programme de calcul ne peut que constater la formation d'une onde de choc, il ne contient pas de routines permettant son évaluation. Le développement d'une telle facilité le rendrait plus généralement applicable.

Toutes fois, nous espérons que ce travail puisse servir de base pour un développement ultérieur progressif dans le domaine des écoulements supersoniques dans les tuyères de propulsion.

SCHEMA AUX CARACTERISTIQUES APPLIQUE SUR LA PAROI

($\xi=Cte$) PLAN DE REFERENCE

1. EQUATIONS D'Euler :

Le plan de référence pour la paroi de la tuyère est $\xi=Cte$.

Réécrivons alors le système (2.8) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = -\frac{\omega}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \xi} - u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \rho \omega \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v^c \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = -u^c \frac{\partial u}{\partial \xi} - u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v^c \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = -u^c \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v^c \frac{\partial p}{\partial \eta} - c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) = -u^c \frac{\partial p}{\partial \xi} + c^2 u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi}$$

On pose :

$$\psi_1 = -\frac{\omega}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \xi} - u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \rho \omega \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\psi_2 = -u^c \frac{\partial u}{\partial \xi} - u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi}$$

$$\psi_3 = -u^c \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

$$\psi_4 = -u^c \frac{\partial p}{\partial \xi} + c^2 u^c \frac{\partial \rho}{\partial \xi}$$

Le système d'équations s'écrira alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \rho \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \psi_1 \quad (A-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v^c \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \psi_2 \quad (A-2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v^c \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \psi_3 \quad (A-3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v^c \frac{\partial p}{\partial \eta} - c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) = \psi_4 \quad (A-4)$$

2. DETERMINATION DES COURBES CARACTERISTIQUES :

Soit la combinaison linéaire suivante :

$$(A-1)*l_1 + (A-2)*l_2 + (A-3)*l_3 + (A-4)*l_4 = 0$$

en remplaçant et on regroupe les mêmes termes, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[(l_1 - c^2 l_4) \frac{\partial p}{\partial t} + (v^c l_1 - c^2 v^c l_4) \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] + \\ & \left[l_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha \rho l_1 + v^c l_2) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \\ & \left[l_3 \frac{\partial v}{\partial t} + (\beta \rho l_1 + v^c l_3) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \\ & \left[l_4 \frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\alpha}{\rho} l_2 + \frac{\beta}{\rho} l_3 + v^c l_4 \right) \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] = \psi_1 l_1 + \psi_2 l_2 + \psi_3 l_3 + \psi_4 l_4 \end{aligned} \quad (A-5)$$

soit les vecteurs w_i tel que leurs composantes sont :

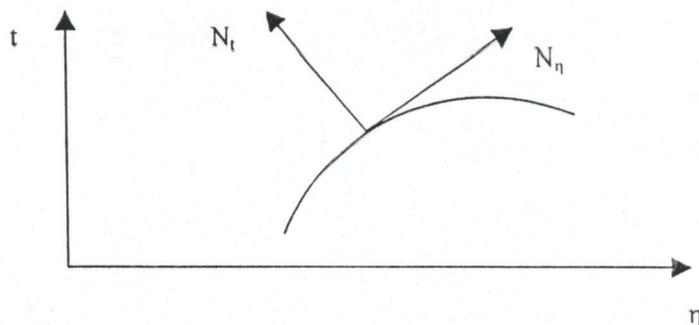
$$w_1 = (v^c l_1 - c^2 v^c l_4, l_1 - c^2 l_4)$$

$$w_2 = (\rho \alpha l_1 + v^c l_2, l_2)$$

$$w_3 = (\rho \beta l_1 + v^c l_3, l_3)$$

$$w_4 = \left(\frac{\alpha}{\rho} l_2 + \frac{\beta}{\rho} l_3 + v^c l_4, l_4 \right)$$

Ses vecteurs sont tangents à la courbe caractéristique et perpendiculaires au vecteur normal $N(N_\eta, N_t)$.



Remarquons aussi que $\frac{N_\eta}{N_t} = -\frac{d\eta}{dt}$ (A-6)

L'équation (A-5) est réécrite sous la forme suivante :

$$\nabla p \cdot w_1 + \nabla u \cdot w_2 + \nabla v \cdot w_3 + \nabla p \cdot w_4 = 0 \quad (A-7)$$

avec $\nabla = (\partial/\partial\eta, \partial/\partial t)$

Soit $\frac{d\rho}{w_1}$: dérivée de ρ dans la direction de w_1 . On peut écrire

l'équation (A-7) sous la forme suivante :

$$\frac{d\rho}{w_1} + \frac{du}{w_2} + \frac{dv}{w_3} + \frac{dp}{w_4} = 0 \quad (\text{A-8})$$

Les vecteurs N et w_i sont perpendiculaires,

$$(N \cdot w_i = 0) : \begin{cases} N \cdot w_1 = 0 \\ N \cdot w_2 = 0 \\ N \cdot w_3 = 0 \\ N \cdot w_4 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant N et les w_i par leurs valeurs respectives on aura :

$$N_\eta(v^c l_1 - c^2 v^c l_4) + N_t(l_1 - c^2 l_4) = 0$$

$$N_\eta(\rho \alpha l_1 + v^c l_2) + N_t(l_2) = 0$$

$$N_\eta(\rho \beta l_1 + v^c l_3) + N_t(l_3) = 0$$

$$N_\eta(\alpha/\rho l_2 + v^c l_4 + \beta/\rho l_3) + N_t(l_4) = 0$$

En regroupant les mêmes termes, on obtient les équations suivantes :

$$l_1(N_\eta + N_t) - c^2 l_4(N_\eta v^c + N_t) = 0$$

$$l_1(N_\eta \rho \alpha) + l_2(N_\eta v^c + N_t) = 0$$

$$l_1(N_\eta \rho \beta) + l_3(N_\eta v^c + N_t) = 0$$

$$l_2(N_\eta \alpha/\rho) + l_3(N_\eta \beta/\rho) + l_4(N_\eta v^c + N_t) = 0$$

La forme matricielle nous donnera : $[A] \cdot l = 0$

$$\begin{bmatrix} N_\eta v^c + N_t & 0 & 0 & -c^2(N_\eta v^c + N_t) \\ N_\eta \rho \alpha & N_\eta v^c + N_t & 0 & 0 \\ N_\eta \rho \beta & 0 & c & 0 \\ 0 & N_\eta \frac{\alpha}{\rho} & N_\eta \frac{\beta}{\rho} & N_\eta v^c + N_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = 0$$

Il existe deux solutions à ce problème :

* $l_1=l_2=l_3=l_4=0$ (solution triviale)

* $\text{Det } [A]=0$

$$\text{Det } [A]=(N_\eta+N_t)^4-c^2(N_\eta v^c+N_t)[N_\eta \rho \alpha (N_\eta v^c+N_t)^* N_\eta^\alpha / \rho + N_\eta \rho \beta (N_\eta v^c+N_t) N_\eta^\beta / \rho]$$

$$\Leftrightarrow [(N_\eta v^c+N_t)^2-c^2 N_\eta^2(\alpha^2+\beta^2)](N_\eta v^c+N_t)^2=0$$

les solutions de cette dernière équation sont:

$$\begin{cases} N_\eta v^c + N_t = 0 & (A-9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_\eta v^c + N_t = \pm c N_\eta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & (A-10) \end{cases}$$

la première équation donne $\frac{N_t}{N_\eta} = -v^c$ or $-\frac{N_t}{N_\eta} = \frac{d\eta}{dt}$

On en déduit alors la première équation de la courbe caractéristique.

$$\frac{d\eta}{dt} = v^c \quad (A-11)$$

Les deux équations des deux courbes caractéristiques restantes sont déduites à partir de (A-10),

$$\frac{d\eta}{dt} = v^c - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (A-12)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = v^c + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (A-13)$$

3. DETERMINATION DES EQUATIONS DE COMPATIBILITE :

1^{er} Cas : $\frac{d\eta}{dt} = v^c$

$$\frac{d\eta}{dt} = v^c \Leftrightarrow N_\eta v^c + N_t = 0$$

En remplaçant dans le système matricielle, on aura :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_\eta \rho \alpha & 0 & 0 & 0 \\ N_\eta \rho \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_\eta \frac{\alpha}{\rho} & N_\eta \frac{\beta}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = 0$$

La résolution directe de ce système donne :

$$l_1=0$$

$$l_2 N_\eta^\alpha / \rho + l_3 N_\eta^\beta / \rho = 0 \Rightarrow l_2 = -\beta / \alpha l_3$$

l_3 et l_4 sont des variables libres, on choisit alors :

$$l_1=0 ; l_2=-\beta / \alpha ; l_3=l_4=1$$

L'équation (A-5) devient :

$$\begin{aligned} -c^2 \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v^c \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) - \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v^c \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v^c \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \\ + \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v^c \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = -\frac{\beta}{\alpha} \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 \end{aligned}$$

On aura :

$$-c^2 dp - \frac{\beta}{\alpha} du + dv + dp = \left(-\frac{\beta}{\alpha} \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 \right) dt$$

Finalement, les équations de compatibilité le long de la courbe caractéristique (A-11) qui n'est autre qu'une ligne de courant sont :

$$-\frac{\beta}{\alpha} du + dv = \left(-\frac{\beta}{\alpha} \psi_2 + \psi_3 \right) dt \quad (A-14)$$

$$dp - c^2 d\rho = \psi_4 dt \quad (A-15)$$

2ème et 3ème cas : $\frac{d\eta}{dt} = v^c \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

on pose $\alpha^* = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Le système matriciel devient alors :

$$\begin{bmatrix} \pm c N_\eta \alpha^* & 0 & 0 & -c^2 (\pm c N_\eta \alpha^*) \\ N_\eta \rho \alpha & \pm c N_\eta \alpha^* & 0 & 0 \\ N_\eta \rho \beta & 0 & \pm c N_\eta \alpha^* & 0 \\ 0 & N_\eta \frac{\alpha}{\rho} & N_\eta \frac{\beta}{\rho} & \pm c N_\eta \alpha^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = 0$$

On obtient ainsi le système d'équations suivant :

$$\pm c N_{\eta} \alpha^* l_1 \pm c^3 N_{\eta} \alpha^* l_4 = 0 \quad (A-16-a)$$

$$N_{\eta} \rho \alpha l_1 \pm c N_{\eta} \alpha^* l_2 = 0 \quad (A-16-b)$$

$$N_{\eta} \rho \beta l_1 \pm c N_{\eta} \alpha^* l_3 = 0 \quad (A-16-c)$$

$$N_{\eta} \frac{\alpha}{\rho} l_2 + N_{\eta} \frac{\alpha}{\rho} l_3 \pm c N_{\eta} \alpha^* l_4 = 0 \quad (A-16-d)$$

$$(A-16-a) \Rightarrow l_1 = c^2 l_4$$

$$(A-16-b) \Rightarrow l_2 = \pm \rho \alpha / c \alpha^* l_1$$

$$(A-16-d) \Rightarrow l_3 = \pm \rho \beta / c \alpha^* l_1$$

On en déduit que l_4 est une variable libre, on choisit alors la valeur de $l_4=1$, on tire ainsi les valeurs suivantes des l_i :

$$l_1 = c^2$$

$$l_2 = \pm \rho \alpha c / \alpha^*$$

$$l_3 = \pm \rho \beta c / \alpha^*$$

$$l_4 = 1$$

Ces dernières valeurs sont injectées dans l'équation (A-5) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \pm \frac{\rho \alpha c}{\alpha^*} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (v^c \pm c \alpha^*) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \pm \frac{\rho \beta c}{\alpha^*} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v^c \pm c \alpha^*) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + \\ + \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (v^c \pm c \alpha^*) \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] = c^2 \psi_1 \pm \frac{\rho \alpha c}{\alpha^*} \psi_2 \pm \frac{\rho \beta c}{\alpha^*} \psi_3 + \psi_4 \end{aligned}$$

En regroupant les mêmes termes ensemble, pour avoir :

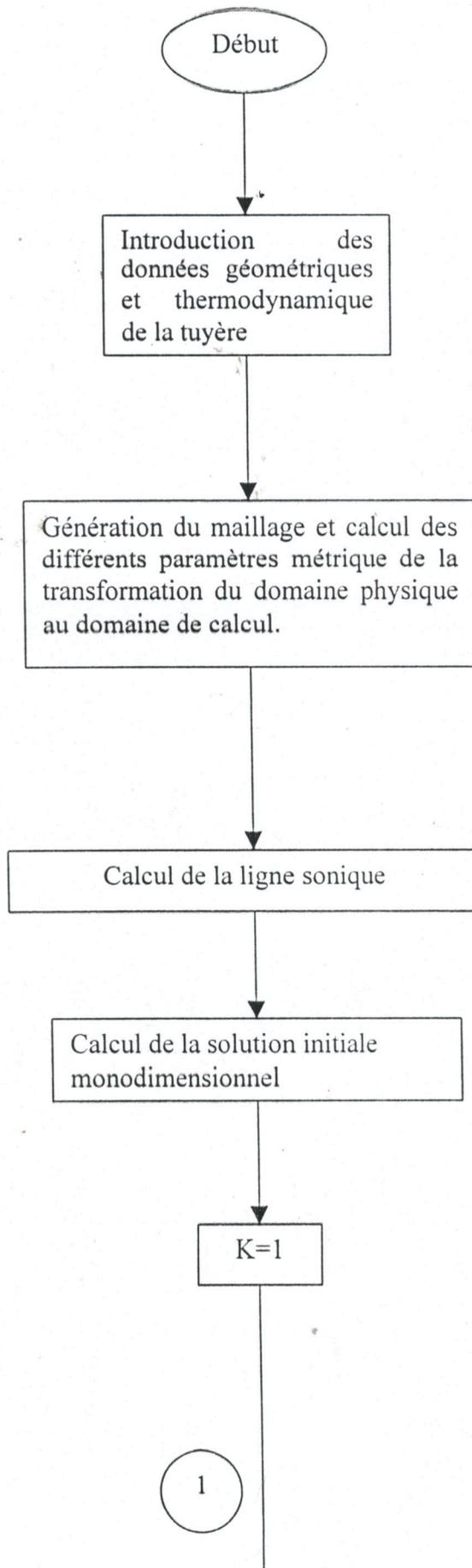
$$\pm \frac{\rho \alpha c}{\alpha^*} du \pm \frac{\rho \beta c}{\alpha^*} dv + dp = \left(c^2 \psi_1 \pm \frac{\rho \alpha c}{\alpha^*} \psi_2 \pm \frac{\rho \beta c}{\alpha^*} \psi_3 + \psi_4 \right) dt$$

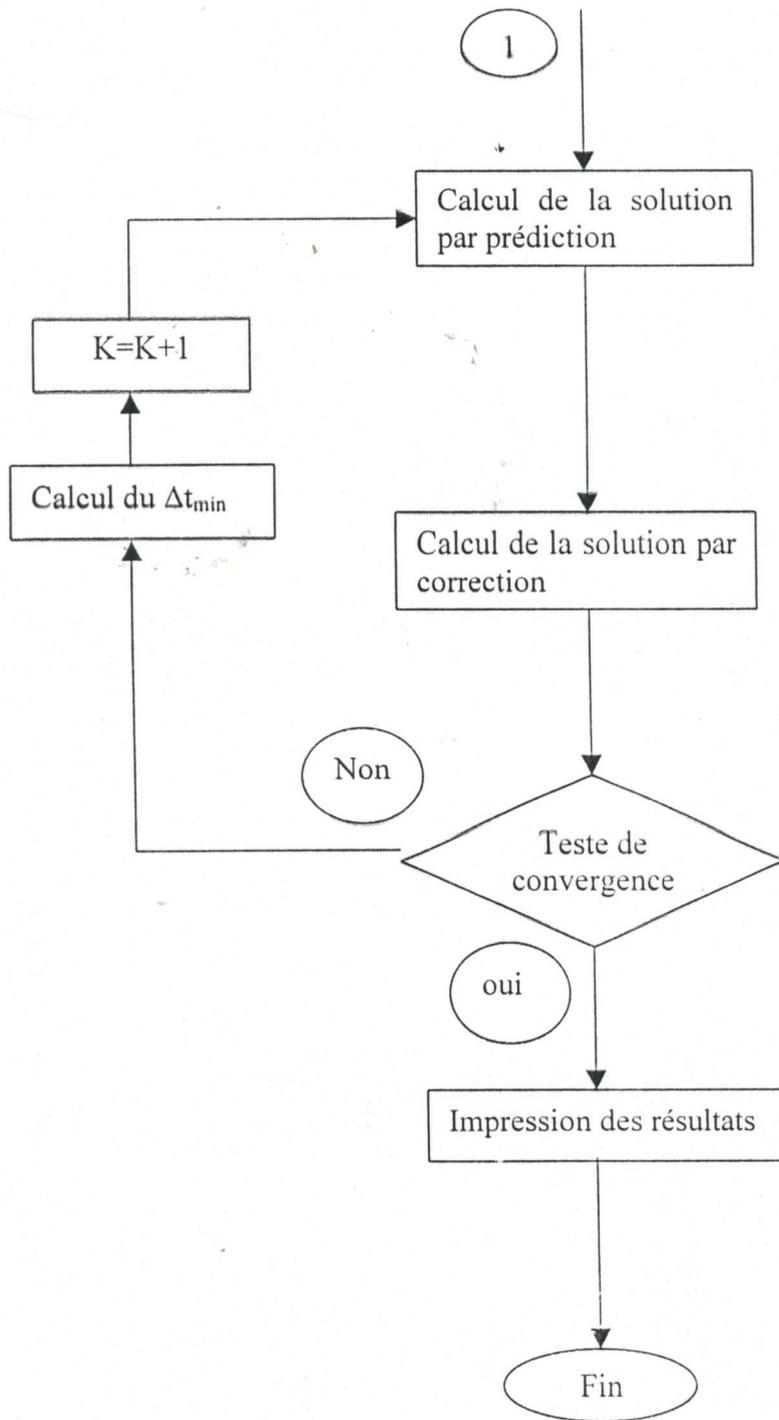
En définitif, les équations de compatibilité le long des courbes caractéristiques (lignes de Mach) $\frac{d\eta}{dt} = v^c \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ sont respectivement :

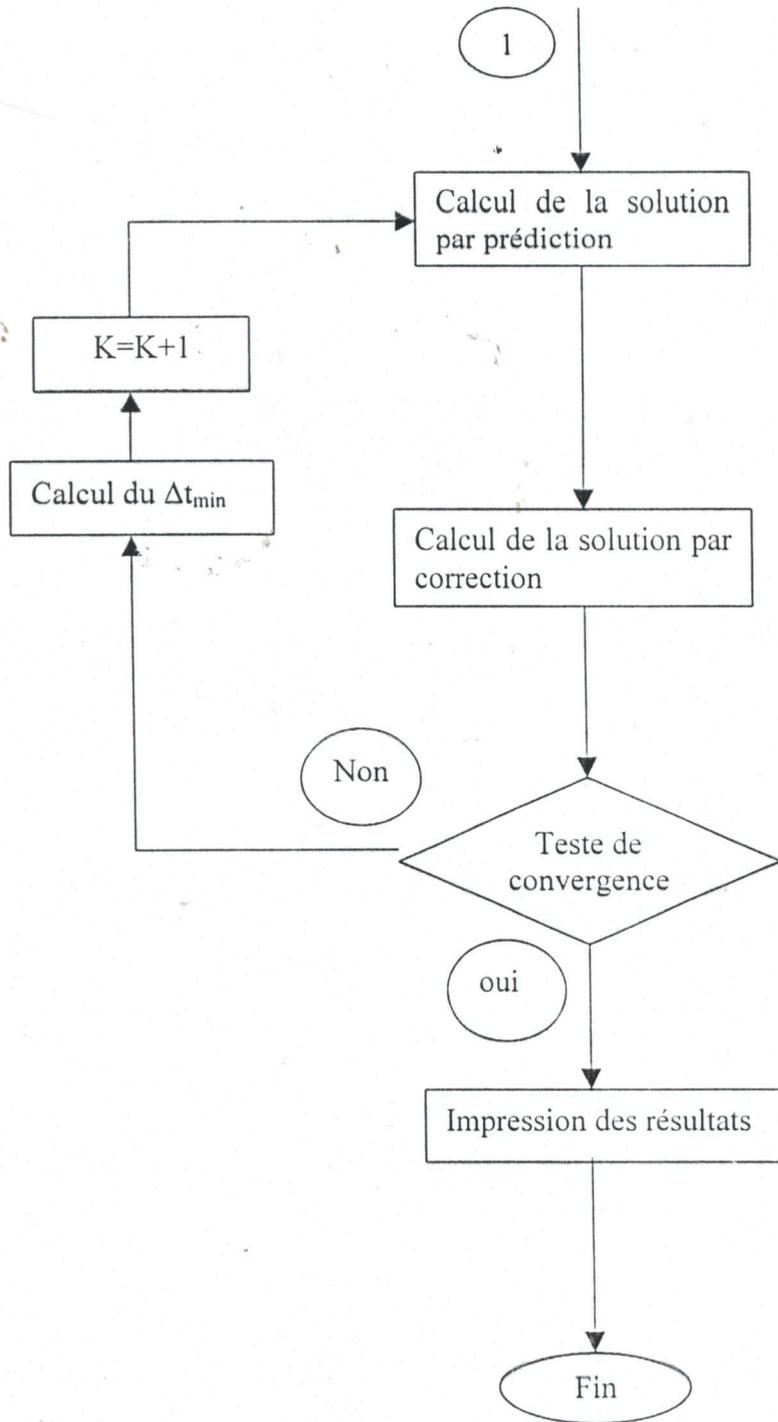
$$dp - \frac{\rho \alpha c}{\alpha} du - \frac{\rho \beta c dv}{\alpha} = \left(c^2 \psi_1 - \frac{\rho \alpha c}{\alpha} \psi_2 - \frac{\rho \beta c}{\alpha} \psi_3 + \psi_4 \right) dt \quad (\text{A-17})$$

$$dp + \frac{\rho \alpha c}{\alpha} du + \frac{\rho \beta c dv}{\alpha} = \left(c^2 \psi_1 + \frac{\rho \alpha c}{\alpha} \psi_2 + \frac{\rho \beta c}{\alpha} \psi_3 + \psi_4 \right) dt \quad (\text{A-18})$$

ANNEXE B: ORGANIGRAMME DU PROGRAMME DE CALCUL







Références Bibliographiques

- [1] **G. V. R. RAO**
"Recent developments in Rocket Nozzle Configurations"
ARS Journal, Vol. NO 81, November 1961
- [2] **J. R. KLIEGEL & LEVINE**
"Transonic Flow in Small Throat Radius of Curvature Nozzles"
AIAA Journal, VOL No. 7, JULY 1969
- [3] **R. Sauer**
"General characteristics of the flow through nozzles at near critical speeds"
NACA TM-1147, 1947
- [4] **RAYMOND A. SERRA**
"Determination of Internal Gas Flows by a Transient Numerical Technique"
AIAA Journal, VOL No. 10, MAY 1972
- [5] **Ingolf TEIPEL & Alexander WIEDERMANN**
"A Comparaison of Different Calculation Methods for Axisymmetric Fields in Convergent-Divergent Nozzles"
Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 9 (1985), Heft 1.
- [6] **J.V.R. Rao**
"Exhaust nozzle contour for optimum thrust"
Jet propulsion, VOL.28.No 6, pp.377-382, 1958
- [7] **J.G. Allman & J.D. Hoffman**
"Design of maximum thrust nozzle contours by direct optimization methods"
AIAA JOURNAL, VOL.19, No.4, pp.750-751, Juin 1981
- [8] **J.G. Allman & J.D. Hoffman**
"Propulsion nozzle studies"
VOL II: *"Design of maximum thrust nozzle base boattail contours"*
Wright-Patterson AFB, Ohio, AFAPL-TR-77-1, Mars 1977
- [9] **Chau-Lyan, Yigal Kronzon & Charls L. Merkle.**
"Time-Iterative Solutions of Viscous Supersonic Flows"
AIAA JOURNAL, VOL.26, No.10, pp. 1208-1215. October 1988

- [10] Michael C. Cline
VNAP2: "A Computer Program for Computation of Two-Dimensional, Time-Dependent, Compressible, Tubulent Flow"
Los Alamos National Laboratory, New Mexico 87545
- [11] C. HIRSH
"Numerical Computation of Internal & External Flows"
VOL I & II
- [12] A. Haddad & A. Rayasse
"Etude et optimisation systématique de configurations de tuyères supersoniques de propulsion"
2^{ème} Rencontre maghrébine sur la mécanique, 4-6 Décembre 1995
- [13] P. Carriere
"Aérodynamique interne" Deuxième Partie: "Tuyères et Jets"
Ecole National Supérieur de L'Aviation Civile (France)
- [14] C. A. J. FLETCHER
"Computational Techniques for fluid Dynamics"
VOL I & II
- [15] PATRICKE J. ROACHE
"Coputational Fluid Dynamics"
- [16] JOHN D. ANDERSON, JR.
"FUNDAMENTALS OF AERODYNAMICS"
McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS. Copyright 1985
- [17] JOHN D. ANDERSON, JR.
"MODERN COMPRESSIBLE FLOW, With Historical Perspective"
McGraw-Hill Book Company. Copyright 1982
- [18] A. Haddad
"Application de la méthode des caractéristiques à la conception de Tuyères supersoniques de propulsion"
Chaire de M.D.F. Ecole Nationale d'Ingénieurs, Alger 1990.
- [19] A. Haddad
"Calcul et Conception de Tuyères Supersoniques de Propulsion par Application de la Méthode des Caractéristiques" Cours De POST-Graduation en Aéronautique : Année Théorique 1997/1998.

- [20] **L. Amtout**
Cours d'Analyse Numériques
Année Théorique de la Post-Graduation en Aéronautique 1997-1998
- [21] **Nawal EL Kahina Khelalfa**
"Application d'une Procédure Numérique et Génération de Maillage adaptée pour des Ecoulements Supersoniques Internes"
Thèse de Magister, Institut de Mécanique Université de Blida 1993.
- [22] **MECHIGHEL, Farid**
"Développement d'une méthode de conception de tuyères supersoniques de propulsion"
Thèse de Magister, Institut d'Aéronautique. Université de Blida, Décembre 1997
- [23] **BEKKA, Nadir**
"Approche numérique des couches limites hypersoniques"
Thèse de Magister, Institut d'Aéronautique. Université de Blida, Juin 2000.