

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

INSTITUT D'AERONAUTIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER

OPTION AERONAUTIQUE

Présentée par :

M^{elle} BENKHEDDA AMINA

**ETUDE HYGROTHERMOMECHANIQUE
DES MATERIAUX COMPOSITES A
MATRICE POLYMERE**

Soutenu devant le Jury :

Monsieur Necib.B	Professeur	Université de Constantine	Président
Monsieur Adda.B.E	Professeur	Université de Sidi Belabes	Examineur
Monsieur Youbi.Z	Maître de conférences	Université de Blida	Rapporteur
Monsieur Boukraa	Maître de conférences	Université de Blida	Examineur
Monsieur Ferdjouni	Chargé de cours	Université de Blida	Examineur

-Année universitaire 2000/2001-

AVANT PROPOS

" C'est avec la Mécanique Générale qu'est née notre connaissance des phénomènes physiques, et c'est elle qui est à la base de l'élaboration et du fonctionnement des machines qui peuplent désormais notre Univers".

Cette citation d'André Lichnerowicz, indique le sens global recherché à donner à la Mécanique et à ses fondements solides, qui défient le temps et qui devrait conduire à apporter une contribution importante à l'accomplissement du progrès, tout en ne perdant jamais de vue le réel, qui constitue le but principal à atteindre.

Toutes les sciences qui ont pris naissance ne sont que des perfectionnements successifs intermédiaires. Avec l'avènement des matériaux composites, qui ne sont qu'une discipline scientifique se trouvant à l'intersection des formes les plus réalistes des Mathématiques, et des aspects les plus rigoureux de la Physique des matériaux, la science des matériaux nouveaux est à la grandeur de ces succès

Les recherches et développements autour de ces nouveaux matériaux ne cessent d'augmenter, allant de la rive expérimentale à la rive théorique, essayant de rechercher des formalismes mathématiques en tentant d'habiller les lois expérimentales. Les scientifiques ont fait preuve de l'acquisition d'un esprit de synthèse entre rigueur et réalisme, en focalisant et en adaptant leurs recherches aux réalités, auxquelles ces matériaux seront constamment confrontés durant leur utilisation, selon un point de vue qui porte davantage sur le fond que sur la forme, avec beaucoup de dextérité.

En raison des hautes performances qu'offrent ces matériaux dans la construction aérospatiale, qui fait que leur utilisation reste un domaine très prometteur pour les technologies du future, cette recherche se veut donc une sorte d'initiation et d'introduction du domaine des composites, au sein de l'institut d'Aéronautique ; Afin de susciter un développement fécond de cette discipline, et de promouvoir éventuellement un axe de recherche efficient, en matière de recherche et de développement.

REMERCIEMENTS

Le travail accompli, ne s'est concrétisé, que grâce à des scientifiques dont l'apport intellectuel a été considérablement déterminant dans l'aboutissement de cette recherche, puissent ils augurer les prémices de l'avenir du progrès humanitaire.

Je tiens en occurrence, à témoigner ma profonde gratitude au Docteur Z. Youbi Maître de Conférence à l'institut d'Aéronautique et Recteur de l'université de Blida pour l'honneur qu'il me fait en dirigeant ce mémoire. Il a suivi avec un intérêt considérable et une grande disponibilité l'évolution de ce travail. Ses conseils éclairés et sa large expérience scientifique ont permis l'aboutissement de cette recherche. Pour son attention et pour le soutien qu'il m'a accordé je le remercie.

J'adresse mes vifs remerciements au Docteur Adda de l'université de Sidi Belabbes, pour son évaluation scientifique et pour ses conseils

Je voue ma profonde gratitude au Docteur Masoud Rais El Rohani, Maître de conférence au département de l'aérospatiale à l'université du Mississippi, pour les documents et l'apport précieux qu'il m'a prodigué.

J'exprime mes vifs remerciements, au Professeur G. Springer de l'université de Stanford, pour les références bibliographiques dont il m'a fait part, en particulier celles qui m'ont orientée pour la modélisation de la diffusion et le transfert de masse.

Je témoigne ma profonde reconnaissance au Professeur Vinson de l'université de Delaware, pour la riche documentation qui 'il m'a attribué.

Je n'oublie pas d'exprimer mes remerciements à Monsieur Bergheul, Directeur de l'institut d'Aéronautique, ainsi qu'à Monsieur Rezzoug, Directeur de la post graduation et de la recherche scientifique à l'institut d'Aéronautique de l'université de Blida, pour les nombreuses conversations enrichissantes que nous avons eues quant à la dimension applicative de nos recherches, et pour leur soutien moral.

Je suis sensible à l'intérêt que Monsieur Necib, Professeur à l'université de Constantine a apporté à ce travail, en me faisant l'honneur de présider le jury de soutenance.

J'exprime également mes remerciements, au Docteur Boukraa Maître de Conférence à l'institut d'Aéronautique, au Docteur Adda Maître de Conférence à l'université de Sidi Belabbes, ainsi qu'à Monsieur Ferdjouni chargé de cours à l'institut d'Aéronautique, pour avoir accepté de faire partie du jury de soutenance.

Qu'il me soit enfin de parcours permis, de témoigner ma profonde reconnaissance à tous mes collègues du laboratoire de la post graduation, avec qui j'ai partagé d'agréables moments, ainsi qu'à tous ceux qui ont contribué au bon déroulement de ce mémoire.

SOMMAIRE

AVANT PROPOS

INTRODUCTION.....	1
-------------------	---

ETAT DE L'ART.....	4
--------------------	---

CHAPITRE I Mécanique des matériaux composites

I.1 Définitions.....	16
-----------------------------	-----------

I.1.1 Matrice et renfort.....	16
-------------------------------	----

I.1.2 Pli et stratifié.....	17
-----------------------------	----

I.1.3 Repères principaux.....	18
-------------------------------	----

I.1.4 Repère du stratifié.....	18
--------------------------------	----

I.2 Microanalyse.....	19
------------------------------	-----------

I.2.1 Matériau composite unidirectionnel.....	19
---	----

I.2.1 a) Module d'élasticité longitudinal.....	19
--	----

I.2.1 b) Module d'élasticité transversal.....	19
---	----

I.2.1 c) Module de cisaillement.....	20
--------------------------------------	----

I.2.1 d) coefficient de Poisson.....	20
--------------------------------------	----

I.2.1 e) Coefficient de dilatation thermique longitudinal.....	20
--	----

I.2.1 f) Coefficient de dilatation thermique transversal.....	20
---	----

I.2.1 g) Coefficient d'expansion hygroscopique longitudinal.....	21
--	----

I.2.1 h) Coefficient d'expansion thermique transversale.....	21
--	----

I.2.1 i) Conductivité thermique longitudinale.....	21
--	----

I.2.1 j) Conductivité thermique transversale.....	21
---	----

I.2.2 Matériau composite orthotrope.....	22
--	----

I.2.1 f) Module d'élasticité E_{γ}	22
---	----

I.2.1 g) Module de cisaillement $G_{LT'}$	22
---	----

I.2.1 h) Module de cisaillement $G_{T\gamma'}$	22
--	----

I.2.1 i) Coefficient de Poisson $\nu_{LT'}$	23
---	----

I.2.1 j) Coefficient de Poisson $\nu_{T\gamma'}$	23
--	----

I.2.1 k) Coefficient de Poisson $\nu_{\gamma L}$	23
--	----

I.2.1 l) Coefficient d'expansion thermique transversale α_{γ}	23
---	----

I.2.1 m) Conductivité thermique K_{γ}	23
--	----

I.3 Loi de comportement.....	28
-------------------------------------	-----------

I.3.1 Matrice de rigidité.....	28
--------------------------------	----

I.3.2 Matrice de flexibilité.....	28
-----------------------------------	----

I.4 Matériau composite unidirectionnel.....	28
--	-----------

I.4.1 Relation d'élasticité dans le repère (LT).....	28
--	----

I.4.2 Constantes de rigidité dans le repère (LT).....	29
---	----

I.4.3 Constantes de souplesse.....	29
------------------------------------	----

I.4.4 Relation d'élasticité dans le repère (XY).....	29
--	----

I.4.5	Constantes de rigidité dans le repère (XY).....	30
I.4.6	Constantes de souplesse dans le repère (XY).....	31
I.5	Matériau composite orthotrope.....	31
I.5.1	Relation d'élasticité dans le repère (LT)	31
I.5.2	Constantes de rigidité dans le repère (LT).....	32
I.5.3	Constantes de souplesse dans le repère (LT).....	32
I.5.4	Relation d'élasticité dans le repère (XY).....	33
I.5.5	Constantes de rigidité dans le repère (XY).....	33
I.5.6	Constantes de souplesse dans le repère (XY).....	33
I.6	Contraintes planes	34
I.6.1	état de contraintes planes.....	34
I.6.2	Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux.....	34
I.6.3	Matrice de rigidité réduite hors des axes principaux.....	35
I.7	Conclusion	36

CHAPITRE II Phénomènes hygrothermiques

II.1	Phénomènes.....	37
II.2	absorption et désorption dans les matériaux composites.....	38
II.2.1	Concentration	38
II.2.2	Concentration maximale.....	39
II.2.3	Temps pour concentration maximale.....	39
II.2.4	Analyse unidimensionnelle.....	40
II.2.5	Diffusivité.....	41
II.3	Effets hygrothermiques.....	42
II.3.1	Effets sur les propriétés mécaniques.....	42
II.3.2	Effets hygrothermoélastiques.....	42
II.3.3	Effet hygrothermiques sur le comportement mécanique.....	42
II.3.4	Effet de la température.....	42
II.3.5	Effet de l'humidité.....	49
II.4	Expériences de vieillissements hygrothermiques	
II.4.1	Expérience de Nairn	52
II.4.1 a)	Introduction.....	52
II.4.1 b)	Expérience.....	53
II.4.1 c)	Résultats.....	53
II.4.1 d)	Conclusion.....	57
II.4.2	Diffusion d'humidité dans les systèmes Epoxy.....	58
II.4.2 a)	Résultats et discussion.....	58
II.4.2.b)	Conclusion.....	59
II.5	Effet d'une mission supersonique sur le processus de diffusion.....	60
II.6	cycles de mission d'avion.....	62
II.7	Conclusion	63

CHAPITRE III Modélisation hygrothermomécanique

III.1 Généralités	64
III.2 Théorie classique des stratifiés	66
III.2.1 Hypothèses de la théorie classique des stratifiés.....	66
III.2.2 Expression du champ des déformations.....	67
III.2.3 Champ des contraintes.....	70
III.2.3 a) Forme du champ des contraintes.....	70
III.2.3 b) Expression des contraintes.....	70
III.3 Expressions des résultantes et moments	71
III.3.1 Résultantes en membrane.....	71
III.3.2 Moments de flexion et de torsion.....	72
III.4 Equation du comportement mécanique d'un stratifié	73
III.4.1 Equation constitutive.....	73
III.4.2 Matrice de rigidité.....	74
III.5 Détermination des déformations et contraintes	75
III.5.1 Déformations en membrane et courbures.....	75
III.5.2 Champs des déformations	76
III.5.3 Champ des contraintes.....	76
III.6 Equations du comportement des stratifiés tenant compte des phénomènes de Dilatation	79
III.6.1 Coefficients d'expansion thermiques et hygroscopiques pour les unidirectionnels	80
III.6.2 Déformations hygrothermiques dans les stratifiés unidirectionnels.....	82
III.6.3 Relations hygrothermiques : contraintes et déformations.....	82
III.6.4 Signification physique des forces hygrothermiques.....	85
III.6.5 Contraintes résiduelles.....	86
III.6.6 Analyse des stratifiés multidirectionnels	88
III.7 Analyse hygrothermique en transitoire	91
III.7.1 Formulation du problème.....	91
III.7.2 Champ de température et d'humidité.....	91
III.7.3 Résultantes et moments hygrothermiques.....	92
III.7.3.1 Résultantes thermiques.....	92
III.7.3.2 Moments thermiques.....	92
III.7.3.3 Résultante hygroscopique.....	92
III.7.3.4 Moment hygroscopique.....	92
III.8 Absorption symétrique	93
III.8.1 Effort hygroscopique.....	93
III.8.2 Moment hygroscopique.....	94
III.9 Désorption symétrique	94
III.9.1 Résultante hygroscopique	94
III.9.2 Moment hygroscopique.....	94

III.10 Absorption à une seule face	95
III.10.1 Effort hygroscopique.....	95
III.10.2 Moment hygroscopique.....	95
III.11 Résolution numérique de l'équation de diffusion	96
III.12 Contraintes résiduelles en transitoire	96
III.13 Conclusion	97
CHAPITRE IV Code et Résultats	98
CHAPITRE V Conclusion	129

LISTES DES FIGURES

Figure 1.1 Composite SiC/vitro-céramique.....	17
Figure 1.2 Exemples de renfort de fibres.....	17
Figure 1.3 Pli et stratifié ...	18
Figure 1.4 Repère principal (LTT') d'une couche et repère du stratifié (X,Y, Z).....	18
Figure 1.5 Comparaison des modèles micromécaniques Pour E_L en fonction du volume des fibres V_f	25
Figure 1.6 Comparaison des modèles micromécaniques Pour E_T en fonction du volume des fibres V_f	25
Figure 1.7 Comparaison des modèles es micromécaniques pour G_{LT} en fonction des Volumes des fibres.....	26
Figure 1.8 Comparaison des modèles es micromécaniques pour ν_{LT} en fonction des Volumes des fibres.....	26
Figure 1.9 Comparaison des modèles micromécaniques pour α_L en fonction des volumes des fibres.....	27
Figure 1.10 Comparaison des modèles micromécaniques pour α_T en fonction des volumes des fibres.....	27
Figure 2.1 Contraintes- déformations en tension transversale pour le composite carbon/epoxy AS4/3501-6 à température variable et à air sec.....	44
Figure 2.2 Contraintes-déformations en cisaillement plan pour l'unidirectionnel AS4/3501-6 à températures variables.....	44
Figure 2.3 Contraites-déformations en traction transversale pour l'unidirectionnel silicium carbide/aluminium (SCS-2/6061A1) à températures variables.....	45
Figure 2.4 Contraintes -déformations en cisaillement plan pour l'unidirectionnel silicium/aluminium (SCS-2/6061A1) à température variable.....	45
Figure 2.5 Rupture des spécimens PPS à 31.1 degré Celsius	46
Figure 2.6 Rupture des spécimens PPS à 229 degré Celsius	46
Figure 2.7 Rupture du specimens vinylester interface fibre-matrice polurethane à 33.4 °C.....	47
Figure 2.8 Rupture du spécimen vinylester avec interface matice fibre polyurethane à 149.7°C.....	47
Figure 2.9 Rupture du specimen vinylester avec interface fibre matrice polyurethane à -184.4 °C ...	48
Figure 2.10 Rupture du specimen vinylester avec interface fibre matrice epoxy à 35° C.....	48
Figure 2.11 Rupture du specimens vinylester avec interface fibre matrice à 140°C	49
Figure 2.12 Déformations-contraintes en cisaillement plan pour l'unidirectionnel AS4/3501-6 carbon/epoxy, effet de température et de concentration en humidité.....	51
Figure 2.13 Dégradation de la rigidité en torsion du composite carbon/epoxy sous chargement cyclique à des conditions hygrothermiques variables.....	51
Figure 2.14 Densité de microfissuration en fonction de la charge appliquée pour l'Avimid K après immersion dans l'eau à 80°C pour différents instants	54
Figure 2.15 Energie à la rupture G_{mc} en fonction du temps pour l'Avimid K vieilli à 80°C, immergé dans l'eau (100%) exposé aux taux 76%, 50%, 26% d'humidité relative	55
Figure 2.16 G_{mc} en fonction du temps pour du vieillissement pour le stratifié PET15 à une température d'immersion dans l'eau de 80°C.....	55
Figure 2.17 Energies à la rupture G_{mc} en fonction du temps pour l'avimid K immergé dans l'eau et vieilli à 80°C, 60°C, et 43°C	56

Figure 2.18 absorption d'humidité environnement 1-T=20°C, 75% HR	58
Figure 2.19 absorption d'humidité environnement 2-T=20°C, 85% HR Absorption non Fickienne	59
Figure 2.20 absorption d'humidité environnement 3-T=50°C, 85% HR absorption Fickienne pour les spécimens 100-50, 100-60	59
Figure 2.21 Absorption d'humidité environnement 3-T=50°C, 85% HR absorption Fickienne pour les spécimens 100-50, 100-60, 100-70	60
Figure 2.22 Comportement de réabsorption des spécimens ayant subis un pic thermique et un séchage	61
Figure 2.23 Relations des niveaux d'équilibre d'humidité avec l'humidité relative, avec et sans choc Supersonique	62
Figure 2.24 Température de vol d'avion en fonction du temps réduit $\tau=t/6$	62
Figure 2.25 Humidité relative du vol en en fonction du temps réduit $\tau=t/6$	62
Figure 2.26 Profile de vol supersonique	63
Figure 2.27 Température de la structure d'avion Concorde en vol	63
Figure 3.1 Schéma d'un stratifié	65
Figure 3.2 Schématisation des déformations dans la théorie classiques des stratifiés	78
Figure 3.3 Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément du stratifié, et des moments de flexion et de torsion	78
Figure 3.4 Coefficients d'expansions thermiques et hygroscopiques d'un stratifié unidirectionnel	81
Figure 3.5 Illustration de la signification physique des forces thermiques	86
Figure 3.6 Absorption symétrique	97
Figure 3.7 Désorption symétrique	97
Figure 3.8 Absorption à une seule face	97
Figure 4-1 algorithme du ANSCE	103
Figure 4-2 Procédure numérique pour l'analyse hygrothermoélastique des stratifiés multidirectionnels	104
Figure 4-3 Algorithme de résolution des contraintes résiduelles en transitoire	105
Figure 4.4 Variations des différents modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel à fibres de verre et matrice époxyde en fonction de la fraction volumique des fibres	107
Figure 4.5 Déformations rapportées aux axes du stratifié	108
Figure 4.6 Déformations rapportées aux axes principaux	108
Figure 4.7 contraintes rapportées aux axes du stratifié	108
Figure 4.8 Contraintes rapportées aux axes principaux Contraintes et déformations dans l'épaisseur du stratifié [15/-30/-15/30] (effet mécanique)	108
Figure 4-9 Déformations mécaniques dans les repères XY et LT du [30/-15/-30/15], graphite époxyde	110
Figure 4-10 Contraintes mécaniques dans les repères XY et LT du [30/-15/-30/15], graphite /époxyde	111
Figure 4-11 - Contraintes thermomécaniques du [30/-15/-30/15] graphite/carbone $\Delta T=-180^\circ\text{C}$	113
Figure 4-12 - Contraintes résiduelles thermiques pour les stratifiés [30/-15/-30/15], [45/-45/-45/45]	114
Figure 4-13 - Contraintes hygromécaniques du [30/-15/-30/15] graphite/époxyde $\Delta C=0.36\%$ AHYMES	115
Figure 4-14 - Contraintes résiduelles hygroscopiques pour les stratifiés [30/-15/-30/15], [45/-45/-45/45], $\Delta C=0.36\%$ ATHYCS	116
Figure 4.15 Contraintes hygrothermiques [30/-15/-30/15] AHYTHMES	117
Figure 4-16 Contraintes hygrothermomécaniques du [30/-15/-30/15] graphite/époxyde à $\Delta T=-180^\circ\text{C}$ et $\Delta C=0.36\%$ AHYTHMES	118
Figure 4-17 - Déformations hygrothermomécaniques du [30/-15/-30/15] graphite/époxyde, à $\Delta T=-180^\circ\text{C}$ et $\Delta C=0.36\%$	119
Figure 4.18 Distributions de concentration, face supérieure en absorption [0.45.-45] ₂	120
Figure 4.19 Distributions de concentration Absorption symétrique	121
Figure 4.20 Désorption	121

Figure 4.21 : Distributions de σ_x résiduelles en absorption.....	122
Figure 4.22 : Distributions de σ_y résiduelles en absorption.....	122
Figure 4.23 Distribution de τ_{xy} résiduelles en absorption.....	123
Figure 4.24 Réponse hygrothermomécanique du $[0/45/-45]_2$, graphite époxyde $M_0=1\%$, $T=66^\circ\text{C}$, $P=-0.014\text{MPa}$	125
Figure 4.25 Algorithm d'un environnement cyclique.....	126
Figure 4.26 σ_y^r en absorption pour une période de 6 jours $[20/-20]$	127
Figure 4.27 σ_y^r en absorption pour une période de 6 jours $[+45/-45]$	127
Figure 4.28 contraintes résiduelles dans les couches $[\pm\theta]$ carbone/époxyde $\Delta T=110^\circ\text{C}$	128

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Effet de la température sur les propriétés élastiques et les propriétés à la rupture pour le

50

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Effet de la température sur les propriétés élastiques et les propriétés à la rupture pour le composite Carbone /époxyde.....	50
Tableau 2.2 Accroissement d'eau dans le stratifié polymère Avimid K et taux de dégradation dans la durabilité.....	57
Tableau 3.1 Coefficients d'expansions thermiques de composites unidirectionnels	81
Tableau 4.1 Conditions de chargement.....	108
Tableau 4-2 Propriétés du matériau	108
Tableau 4-3 Conditions d'environnement et caractéristiques de diffusion d'humidité.....	108
Tableau 4-4 Résistances du matériau.....	108
Tableau 4-5 Conditions d'environnement et caractéristiques de diffusion d'humidité.....	126

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Effet de la température sur les propriétés élastiques et les propriétés à la rupture pour le composite Carbone /époxyde.....	50
Tableau 2.2 Accroissement d'eau dans le stratifié polymère Avimid K et taux de dégradation dans la durabilité.....	57
Tableau 3.1 Coefficients d'expansions thermiques de composites unidirectionnels	81
Tableau 4.1 Conditions de chargement.....	108
Tableau 4-2 Propriétés du matériau	108
Tableau 4-3 Conditions d'environnement et caractéristiques de diffusion d'humidité.....	108
Tableau 4-4 Résistances du matériau.....	108
Tableau 4-5 Conditions d'environnement et caractéristiques de diffusion d'humidité.....	126

NOMENCLATURE

LETTRES LATINES

(LTT') , (1,2,3) : Repère local du stratifié.

$(X Y Z)$: Repère global du stratifié.

E_L, E_l : Module d'élasticité longitudinal

E_T, E_2 : Module d'élasticité transversal

$E_{T'}$, E_3 : Module d'élasticité suivant T'

K_L : Conductivité thermique longitudinale

K_T : Conductivité thermique transversale

$G_{LT'}$: Module de cisaillement

$G_{TT'}$: Module de cisaillement

G_{LT} : Module de cisaillement

n : numéro du pli.

k : numéro du pli.

r : numéro du pli.

z : cote du k^{ième} pli par rapport au plan moyen.

h : épaisseur du stratifié.

h_k : épaisseur du pli d'ordre k.

z_k : cote du pli d'ordre k.

M : point matériel appartenant au plan moyen.

U_0 : déplacement du point M suivant l'axe x .

V_0 : déplacement du point M suivant l'axe y.

W_0 : déplacement du point M suivant l'axe z.

c : cosinus θ .

s : sinus θ .

[T] : matrice de transition qui relie les contraintes dans le repère local avec celles du repère global.

[T'] : matrice de transition qui relie les déformations dans le repère local avec celles du repère global.

Q_{ij} : constantes de rigidité dans le repère LT

Q'_{ij} : constantes de rigidité dans le repère XY.

[C] : matrice de rigidité.

[S] : matrice de souplesse.

[A] : matrice de rigidité en membrane.

[B] : matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

[C] : matrice de rigidité en flexion.

N_x, N_y : efforts résultant respectivement dans la direction x et dans la direction y.

M_x, M_y : moments fléchissant respectivement suivant la direction x et la direction y.

ΔT : variation de température.

ΔC : variation d'humidité.

$C(z, t)$: concentration dans le temps suivant z

C_0 : concentration initiale

M_i : Contenu de l'humidité initiale du matériau

M_m : Contenu maximal de la concentration.

G : Paramètre de temps indépendant

M : Contenu de l'humidité à un instant t donné.

a : constante liée au matériau.

b : constante liée au matériau.

t_m : Temps nécessaire pour atteindre la concentration maximale.

D_z : Coefficient de diffusion suivant z

D_{11} : Diffusivité dans la direction parallèle aux fibres

D_{22} : Diffusivité dans la direction perpendiculaire des fibres

D_m : Diffusivité de la matrice.

T_i : Température initiale

C_i : Concentration initiale

T_a : Température aux limites

C_a : Concentration aux limites

T : Température

$K_z/\rho C_p$: Diffusivité thermique.

A : Energie d'activation.

R : Constantes des gazs

LETTRES GRECS

θ : angle de rotation de l'axe X par rapport à l'axe L

α_L : Coefficient de dilatation thermique longitudinal

α_T : Coefficient de dilatation thermique transversal

β_L :: Coefficient d'expansion hygroscopique longitudinale

β_T : Coefficient d'expansion hygroscopique transversal

ν_{LT} : Coefficients de Poisson

$\nu_{L'T'}$: Coefficient de Poisson

$\nu_{T'T'}$: Coefficient de Poisson

ν_{TL} : Coefficient de Poisson

$\sigma(M)$: tenseur des contraintes

$\varepsilon(M)$: tenseur des déformations

$\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0$: déformations en membrane

K_x, K_y, K_{xy} : déformations en courbures

$\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT}$: contraintes normales, suivant L, T, et le plan LT

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$: contraintes normales respectivement suivant les axes ox, oy, et le plan xy

$\varepsilon_L, \varepsilon_T, \varepsilon_{LT}$: déformations linéaires respectivement suivant les axes L, T et le plan LT.

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$: déformations linéaires respectivement suivant les axes x, y et le plan xy

γ : déformation en cisaillement.

α_x, α_y : coefficients de dilatation thermique respectivement suivant x, y et le plan x y

β_x, β_y : coefficients d'expansion hygroscopique respectivement suivant x, y et le plan xy

ϕ : Humidité relative.

INTRODUCTION

Les Composites à Matrice polymère (CMP) sont de plus en plus diffusés en construction aéronautique particulièrement dans les applications militaires et aérospatiales. Il se trouve que la durabilité de ce type de matériau, constitue un axe essentiel de recherche autour duquel, la communauté d'engineering persévère afin d'aboutir au meilleur. D'après Chin [53], durant l'assemblée des agences fédérales, qui s'est tenue en juin 1996, les performances de ces matériaux ont été très concernées; l'intérêt porta spécialement sur leur durabilité à long terme lorsque les structures, sont soumises à des températures et humidité cycliques, à des radiations ultraviolets, à des immersions salines et alcalines, et aux chargements statiques et dynamiques. Toutefois, l'intérêt industriel et le souci de produire des matériaux toujours plus fiables et plus performants; fait qu'il est nécessaire de mener des recherches sur leurs propriétés et mécanismes d'endommagement, ainsi que sur leur durabilité sous différentes conditions d'environnement, en se situant à diverses échelles d'observations.

Les structures aérospatiales en composites, changent en température et en humidité durant leur usage structurale. Le changement de température engendre deux effets; en premier le matériau se dilate lorsqu'il est chauffé et se contracte lorsqu'il est refroidi; en second, la chaleur cause la réduction de la température de transition; d'où : une sévère dégradation de la rigidité, le matériau devient plus ductile et plus fragile.

Un autre phénomène physique associé au composite à matrice polymère reconnu important, et ayant un effet détériorant sur les performances structurales; c'est la combinaison d'une température élevée et d'un haut niveau d'humidité. L'absorption de l'humidité par la matrice polymère, induit un gonflement dont le résultat est gênant; des contraintes résiduelles apparaissent dans le stratifié anisotrope: cet effet peut être beaucoup plus prononcé, lorsque la distribution de la concentration à l'intérieur du stratifié qui est due au changement de l'humidité relative de l'environnement, est non uniforme. Généralement, les polymères non humides, ont de bonnes propriétés avant que la température de transition ne soit atteinte; après quoi, la rigidité et la résistance se dégradent rapidement, ce qui peut engendrer un endommagement et une réduction de la durée de vie de la structure.

Dans les industries aéronautiques et spatiales, la conception des structures, qu'il s'agisse d'aéronefs, de lanceurs, de véhicules spatiaux, doit se conformer à des conditions de légèreté et de parfaite sécurité. la possibilité d'une rupture étant totalement exclue et la

structure optimale, doit répondre à des exigences rigoureuses, qui s'appuient essentiellement sur la prévision du comportement des structures sous divers chargements; c'est-à-dire l'évaluation des contraintes, des déformations, des déplacements, des efforts de liaison, et des propriétés mécaniques des matériaux ainsi que leur optimisation. Dans la science de l'ingénieur, le principal avantage des matériaux composites, réside dans leur excellente résistance, permettant un allègement des éléments des structures. Cependant dans leurs applications actuelles, les matériaux composites sont souvent soumis à des états de contraintes complexes dues à l'environnement, domaine dans lequel, leur comportement mécanique est mal connu. Afin de ne pas perdre l'avantage principal de ces matériaux par un surdimensionnement des structures, et pour les besoins de la technologie moderne, il est nécessaire de disposer de modèles capables de prévoir correctement leur comportement dans le temps sous contraintes complexes.

Les difficultés spécifiques aux matériaux composites proviennent de leur composition bi-ou multiphasique, pouvant se détériorer suivant l'orientation et l'intensité des sollicitations d'une part et de la forte anisotropie de leur comportement mécanique d'autre part. Il est nécessaire de comprendre les mécanismes gouvernant la dégradation des polymères, non seulement pour être en mesure de cerner les prédictions durant la vie de service mais pour aussi développer des outils théoriques et des moyens expérimentaux polyvalents.

L'étude présentée, est conduite sur les effet combinés de la température, de l'humidité et du chargement mécanique. L'esprit dans lequel s'inscrit cette recherche, doit tenir compte en premier lieu, du comportement micromécanique des constituants élémentaires des fibres et matrice, en faisant appel à des moyens physico-chimiques et hygrothermiques; il s'agira d'établir par la suite, de quelles manières les phénomènes qui se produisent à l'échelle microscopique se répercutent sur le comportement global des stratifiés. La relation entre le comportement macroscopique de ces matériaux et les sollicitations thermiques, hygroscopiques, et hygrothermomécanique permettra de modéliser le problème

ORGANISATION DU TRAVAIL

Nous abordons le travail, par un parcours bibliographique diversifié, afin de faire le point sur l'état de l'art en matières des phénomènes hygrothermiques et des stratifiés composites à matrice polymères.

Chapitre I : Pour aborder la modélisation hygrothermomécanique des structures en composites à matrice polymère, il est indispensable, de posséder les éléments nécessaires à cette tentative. Le comportement hygrothermomécanique à l'échelle macroscopique des plaques, dépend directement des propriétés des constituants de bases (matrice et renfort). C'est ainsi que ce chapitre, introduit la mécanique des matériaux composites; les modules à l'échelle microscopique sont données, les schémas élastiques pour les stratifiés unidirectionnels et orthotropes sont cités, l'analyse du comportement local et global du stratifié, est aussi présentée.

Le chapitre II : Ce chapitre, est une description des effets hygrothermiques, effet de l'humidité et de la température. Quelques expériences de vieillissements sont citées, pour permettre une description du phénomène. Le processus de diffusion dans les composites est aussi décrit.

Chapitre III : Ce chapitre, aborde la modélisation hygrothermomécanique et, développe les aspects fondamentaux relatifs à la théorie des plaques stratifiées. la résolution numérique de l'équation de diffusion et de conduction pour un environnement cyclique et non cyclique en transitoire, est abordée. Le calcul des contraintes résiduelles, et hygrothermomécaniques est donné.

Chapitre IV : Ce chapitre, décrit les différents algorithmes de résolution et présente le code de calcul élaboré; le ANCE 1, destiné à l'analyse des composites sous environnement divers. Les résultats engendrés, sont exposés.

Chapitre V : Chapitre de fin de parcours, se terminant par une conclusion et un travail futur.

ETAT DE L'ART

Les matériaux composites à matrice polymère, sont des candidats de la construction future pour les structures hypersoniques et les avions de transport civil à hautes vitesses. Dans l'avion Boeing prévu pour l'année 2007, qui est un avion supersonique Mach 2.2 (1998) [55] destiné au transport civil, et volant à une altitude de 50 000 pieds, le fuselage et l'empennage, sont des stratifiés composites à matrice polymère (epoxy, polyimide, bismaleimide, et thermoplastique) et à fibres de carbone. Notre recherche bibliographique, nous a permis de constater que les efforts menés par Le Langley Research center (Larc) de la NASA en collaboration avec différentes équipes de recherche américaines en aérospatial [42], [20], [54], [55], sont concentrés sur l'étude de l'effet de l'environnement (température de vol, humidité ..) et sur la durabilité de ces matériaux. L'équipe du professeur Hyerm de l'université de Virginie, travaille sur l'influence de la température et du chargement thermiques sur les panneaux cylindriques. L'activité de l'équipe du professeur Talreja de La Georgia institute of Technology porte aussi sur la durabilité de ce type de matériaux, sous différentes conditions d'environnement.

Les structures aéronautiques opèrent dans des conditions d'environnement variables en termes d'altitudes, de vitesses, de températures et d'humidité. Or, un composite à matrice polymère est donc tout comme sa matrice, sensible aux paramètres d'environnement tels que la température, l'humidité ou le rayonnement ultraviolet (Hull, 1981 ; Kurz et col.1987). En effet, dans la plus part des applications structurales, les matériaux sont soumis à des histoires de sollicitations, caractérisées par l'évolution dans le temps d'un ensemble de paramètres mécaniques et physico-chimiques, traduisant les transferts de chaleur ou de masse. La réponse des matériaux est donc une combinaison complexe des réponses de nature purement mécanique, physico-chimique ou thermique.

La prévision du comportement à moyen et long terme de structures soumises à des efforts hygro-thermo-mécaniques, en général variables dans le temps, exige la caractérisation des mécanismes et de leurs couplages, ainsi que l'étude de leur influence sur le comportement mécanique.

La méconnaissance des mécanismes fondamentaux dus aux actions de l'environnement, et a fortiori des couplages entre ces mécanismes, notamment lors de régime transitoire, fait qu'il existe une indisponibilité à l'heure actuelle de modèles permettant de prévoir

raisonnablement le comportement dans le temps de structures en composites à matrice polymère (Springer, 1981& 1987b). L'un des freins les plus importants à l'exploitation totale des composites, est le déficit en données base concernant leur comportement hygrothermomécanique en régime quasi-statique ou dynamique [9].

Dans le domaine de l'aviation, des tests expérimentaux [49], ont montré que les conditions de vol, ont une influence sur le processus d'absorption de l'humidité par les composites. Il n'est pas raisonnable de dissocier l'influence de la température et de l'humidité à la fois sur le plan des phénomènes physiques et mécaniques; le couplage entre les diffusions thermiques, hygroscopiques et l'état de contraintes internes reste des plus rudimentaires.

Au fait l'étude des effets de l'humidité et de la température sur la réponse mécanique des structures composites aéronautiques, est fondamentalement pluridisciplinaire; c'est un des thèmes fédérateurs privilégiés où devraient se rencontrer physiciens, chimistes et aéromécaniciens. On ne peut discuter décemment de tous ces phénomènes, si l'on ne dispose pas d'une synthèse d'outils bibliographiques et de résultats expérimentaux du moins élémentaires, qui dépassent la compréhension intuitive et l'étendement immédiat.

Le thème fut traité par plusieurs investigations, chacune apportant un plus et permettant de mieux éclaircir les phénomènes hygrothermiques. Nous exposons succinctement ci-dessous les principales observations constatées lors du périple bibliographique.

1 ENONCE DU PROBLEME

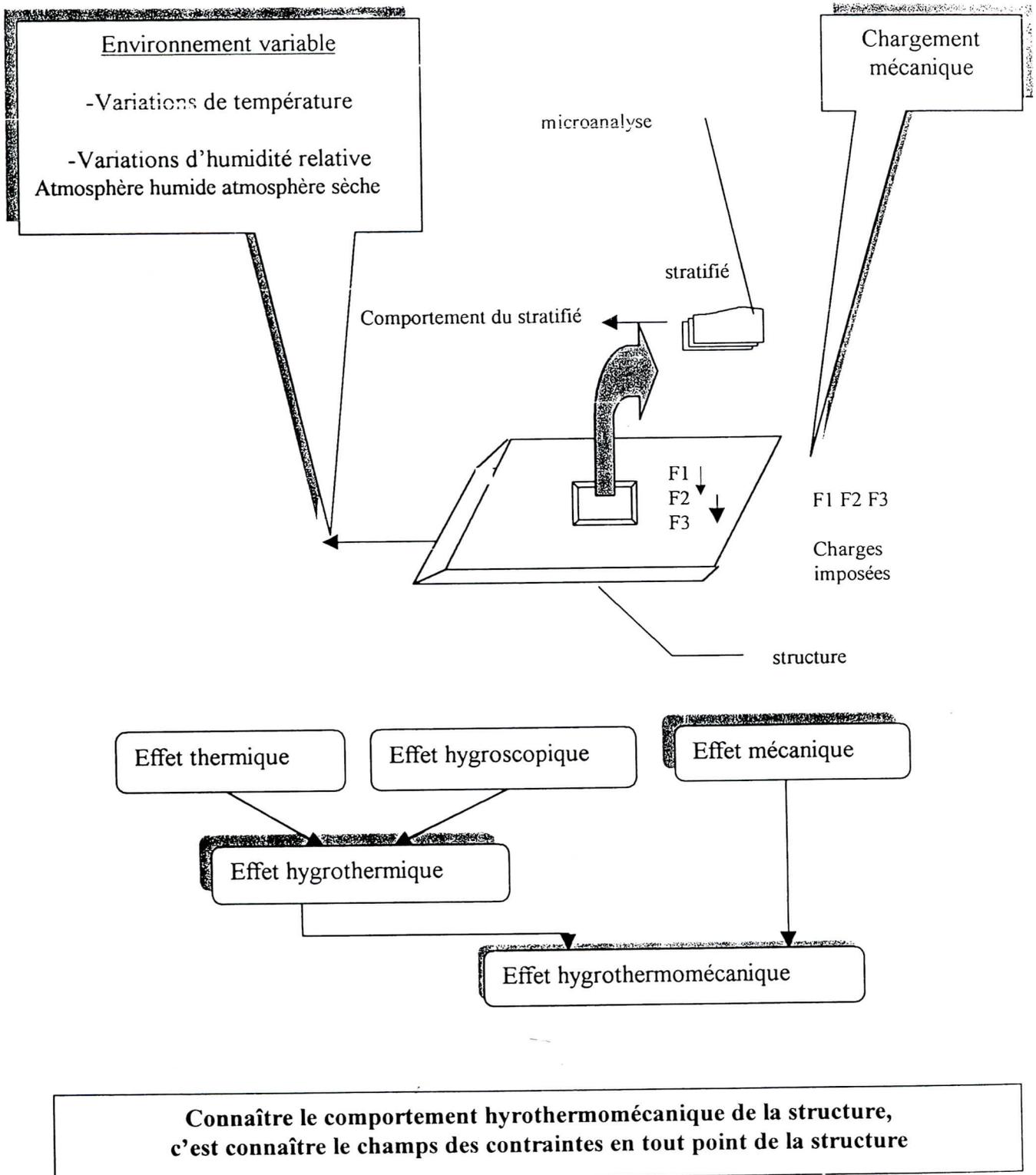


Figure 1 Enoncé du problème

2 PRINCIPALES INVESTIGATIONS

2-1 CYCLES DE VIEILLISSEMENTS

En pratique, l'étude du couplage, température- humidité- état de contraintes, est abordée empiriquement, via la réalisation de cycles dits de vieillissements. Ces cycles, accélèrent les effets de certaines conditions de service extrême sur un élément représentatif de la structure réelle. Parmi de nombreux cycles réalisés [23], [20], [31], [47], [43], [41], [40], [19],[24], [30], [39], [42], [45], [49], [52], on en retient les suivants :

L'expérience faite par Craig 1997 [43], consiste en un vieillissement thermique sur des matériaux destinés aux véhicules hypersoniques et supersoniques dont les conditions d'opération, dépassent une température de 1811°K. Les propriétés thermophysiques de différents matériaux composites avec différents type de renfort, sont déterminées dans des chambres de températures atteignant 1922°K.

V.Lietard (1998)[30], examina les effets du vieillissement hydrothermique sur le processus de rupture du composite verre/epoxy avec chargement mécanique et sans chargement mécanique. les résultats, montrent que l'eau absorbée par la résine, induit différents modes de rupture: rupture avec déchaussement des fibres, rupture par délaminage avec séparation des couches, rupture partielle en flexion avec délaminage et rupture franche.

L'expérience de diffusion dans les systèmes epoxy effectuée par VanLandingham (1999) [41], montre que l'accroissement du niveau d'humidité, entraîne une augmentation dans le niveau de saturation, celui-ci cause un gonflement proportionnel au contenu de l'humidité. l'augmentation de la température, engendre un comportement non Fickien avec une réduction de la température de transition et une dégradation des propriétés mécaniques.

J. Nairn (1999) [20] a soumis, deux stratifiés composites à matrice polymère à une expérience de vieillissement, dont la température varie de 35°C à 95°C. Ces deux matériaux stratifiés en [0/90₂] sont destinés à une construction supersonique par Boeing, et sont le Dupont Avimid K3B polymer/IM7 à fibres de carbone et le PETI5/IM7 à fibres de carbone. L'augmentation d'eau dans les matériaux, a un comportement obéissant à la loi de Fick [10], [48], après saturation, un comportement non Fickien est observé. Cette augmentation, est due à l'apparition des microfissurations dans les plis à 90° en l'absence de tout chargement mécanique. L'eau absorbée, induit des microfissurations au bout de 1000 heures sous une température de 80°C. On note une dégradation dans la durabilité (résistance à la rupture).

T Gates [23] (1999) développa des cycles de vieillissements, afin de prédire les performances des matériaux utilisés dans les avions sous différents types d'environnement. Les résultats prouvent que le chargement thermomécanique croissant, cause une accélération du processus de vieillissement, une réduction de la température de transition et une dégradation de la rigidité et de la durabilité.

Scott (1999) [47] examina par un vieillissement hygrothermique, l'effet combiné de la température et de l'humidité sur la durabilité des systèmes composite graphite/epoxy à renfort tissus, le AS4/PR 500. Les conditions de vieillissement et d'environnement imposées, sont représentatives des conditions de service pour les moteurs d'avions supersoniques modernes. A partir d'un profil de mission (Figure 2), les valeurs du cycle sont exploitées. les résultats engendrés, mettent en cause l'effet significatif de l'environnement sur la fatigue. Les mécanismes d'endommagement et mode de rupture sont déterminés; la distribution des contraintes fibres-matrice, et l'effet exact de telles conditions, reste inconnu en particulier pour les renforts tissus.

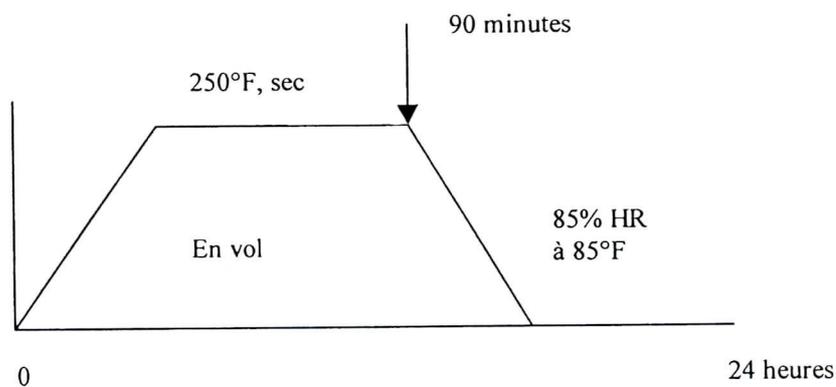


Figure 2 Profil hygrothermique d'un cycle mission

Un effet du vieillissement thermomécanique fut expérimenté par Seale et Madras (1999) [42] sur deux matériaux composite à renfort fibres de graphite; l'un à matrice polyimide le IM7/K3B et l'autre, à matrice bismaleimide le IM7/5260, les échantillons sont soumis à une température allant de -54°C à 344°C . Cette température, représente les conditions de vol d'un avion supersonique, volant à hautes altitudes et à grandes vitesses Mach 2.4, assujetti à une large variation de température et à chargement variable. L'effet du

vieillessement, est examiné en relevant les différents coefficients de la matrice de rigidité par une méthode d'ondes ultrasonores.

Ces cycles de vieillissement, même s'ils peuvent conduire à une appréciation des dommages causés par l'environnement, ne fournissent cependant aucune information sur les mécanismes mis en jeu. Une grande partie des travaux, est consacrée à la caractérisation des propriétés résiduelles statiques ou des performances en fatigue après vieillissement en atmosphère humide ou immersion (Harris et al., 1982)

2-2 INVESTIGATIONS EXPERIMENTALES

L'investigation expérimentale, permet de rendre compte des phénomènes observés en assujettissant des structures composites qui ont été soumises à certaines conditions d'environnement à des essais mécaniques ainsi qu'à des essais de rupture.

Kim (1976) [52] examina l'effet de température et d'humidité sur un système graphite/epoxy, le Thornel 300/Narmco 5208. L'expérience est faite sur les trois stratifiés suivants : $[0_2/\pm 45]_{2S}$, $[90/\pm 45]_{2S}$, et $[0/\pm 45/90]_{2S}$. Les résultats, révélèrent que La rigidité à des essais humides, et à une température de 260°F, est 40% plus faible qu'à des essais à la même température mais à sec. L'effet combiné d'humidité et de température a une influence sur la dégradation de la rigidité dans les stratifiés.

Springer (1976) [48] détermina le contenu de l'humidité en fonction du temps lorsque le matériau, est exposé à une atmosphère humide ou submergé d'eau à température constante (taux d'humidité variant de 0 à 100%). Une description du coefficient de diffusion en fonction des propriétés des fibres et de la matrice, est donnée.

Castelli (1990), Schubbe et Mall (1991) [42] ont établi des cycles de température maximale-chargement maximale et température maximale-chargement minimal. Les deux auteurs, conclurent que le mécanisme d'endommagement et la durée de vie, dépendent des paramètres de test et des niveaux de contraintes. Kim (1994)[24] et Scott (1996) [37], considèrent l'effet de température sur la propagation des fissures dans les polymères. Brady (1998) [33] a établi des modèles de rupture à l'échelle microscopique pour les matériaux composites à matrice polymères unidirectionnels à fibres de carbone, soumis à une variation de température élevée. Nairn (1997) [31], [19] (1999), examina expérimentalement l'effet de la température et l'effet des contraintes résiduelles qui induisent la rupture. L'évolution de

l'endommagement jusqu'à la rupture pour un composite à renfort fibres sous l'influence de la température, a été abordé par Barbero (1999) [32].

2-3 INVESTIGATIONS THERMOELASTIQUES

Les déformations et les contraintes induites par une variation de température, engendrent des contraintes résiduelles. La théorie thermoélastique pour les plaques anisotropes hétérogènes établie par Stavsky, montre l'apparition de termes de couplage. Les déformations et les contraintes thermiques pour les plaques composites symétriques et antisymétriques furent abordées par Wu et Tauchert (1980) [2], [3] [14]. La méthode de Levy et la série double de Fourier, ont été utilisées pour obtenir des solutions. Les problèmes couplés, membrane-courbures des plaques composites soumises aux champs thermiques et sollicitations mécaniques, sont traités par Weinstein. Des méthodes théoriques combinant l'effet thermique intense au chargement mécanique, ont été abordées par Chen (1985) et Griffis (1986)[12]. Chen (1990) [12] analysa les contraintes et les déformations par la méthode des éléments finis; où la matrice de raideur est dérivée en se basant sur le principe de l'énergie potentielle minimale. l'expression de déplacement en dehors de la surface moyenne de l'élément plaque, est le produit d'un polynôme d'Hermite du 1^{er} ordre. Une large étude par les éléments finis, est présentée par Batoz (1990) [11]. Reddy (1994) [16] présenta des modèles numériques pour la résolution des stratifiés orthotropes, par la méthode des éléments finis. Eduljee (1999) [34] et Gillespie (1999) [35], développent actuellement, une étude thermoélastique, en générant un code pour la résolution numérique des stratifiés.

2-4 INVESTIGATIONS HYGROSCOPIQUES

La diffusion de l'humidité dans les stratifiés à travers l'épaisseur, est régie par l'équation différentielle de diffusion classique de Fick[48]. la solution à cette équation, est donnée par Jost (1975) [48]. Pipes, Vinson, Chou (1976) [10] développèrent une analyse hygroscopique générale à partir de cette solution, pour le calcul des contraintes résiduelles dans les stratifiés anisotropes à matrice polymère, en absorption et en désorption symétrique et non symétrique.

L'hétérogénéité du milieu, est un facteur aggravant dans la mesure où les dilatations hygroscopiques contrariées de la matrice, et du pli, sont la cause de contraintes internes,

appelées contraintes résiduelles, qui s'ajoutent aux contraintes internes d'origine thermique, et peuvent engendrer des microfissurations. Shirrel et Haplin (1977), Whitney et Browing (1978). Hahn et Kim (1978), discutèrent la distribution des contraintes hygroscopiques résiduelles pour différents empilements de couches.

En pratique, tous les auteurs utilisent systématiquement la solution unidimensionnelle à partir de l'équation différentielle de Fick avec différents effets de bord, pour décrire l'absorption ou la désorption d'échantillon type plaque, Whitney et Browing (1978), Shen et Springer (1981). Il convient, de souligner que le champ de concentration en transitoire, n'est pas uniforme ce qui est à l'origine par la suite, d'un champ de contraintes internes non uniformes. Les conséquences d'absorption d'humidité, furent examinées par Adamson (1989) et Springer (1981).

Vautrin (1990) [9] a présenté les principaux mécanismes d'absorption de l'eau par les polymères et les composites à matrice polymère, et a fait une description macroscopique de la diffusion par la loi de Fick en donnant les principaux écarts à ce modèle. La brève revue des principales anomalies présentées par la diffusion de l'eau dans les matrices polymère, met en relief le rôle essentiel, joué par l'état de contraintes internes qui résulte de toute l'histoire du matériau .

2-5 INVESTIGATIONS HYGROTHERMIQUES

La concentration d'humidité absorbée non uniforme, et la variation de température, engendrent des contraintes résiduelles non uniformes dans les plis, qui doivent être prises en considération lors de l'analyse mécanique. La résolution des équations de diffusion et de conduction en transitoire, permet de déterminer respectivement les distributions de concentrations et de températures ainsi que les contraintes hygroscopiques et les contraintes thermiques.

Plusieurs investigations ont été entreprises dans le but de résoudre les équations différentielles modélisant chaque environnement, incluant les effets des microconstituants, de la matrice et des fibres. L'équation différentielle de la conduction thermique dans les solides anisotropes, avec un coefficient de conductivité thermique constant, sans source interne, fut donnée par Ozisiki (1980) [13].

Pipes, Vinson et Chou [10] (1976), ainsi que Springer [48] (1976), formulèrent la distribution de la concentration d'humidité à travers l'épaisseur, pour les structures plaques et

coques minces en donnant une résolution de l'équation de diffusion classique, avec le coefficient de diffusion D constant.

Les distributions de températures et de concentrations, sont décrites respectivement par les équations, de Fick et de Fourier [48] :

$$C \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x^2} \quad (2)$$

Springer (1976) [48], démontra que La température approche l'équilibre, 10^6 fois plus vite que la concentration. La température à l'intérieur du matériau, peut être prise la même que la température ambiante. Les plaques stratifiées, sont souvent considérées, comme des structures complexes assujetties à des distributions de températures uniformes, mais à des concentrations non uniformes .

Les résultats expérimentaux obtenus par Barrier 1937, Loos et Springer 1979, Shen et Springer 1976, Whitney et Browing 1978, Delasi Whiteside 1978 et Shirell 1977, révélèrent que le coefficient de diffusion des composites, est fonction de la température (1994) [15]. L'analyse des contraintes hygrothermiques engendrées par les conditions d'environnement cycliques, où le coefficient de diffusion D est fonction de T fut abordé par Springer 1981, Tsai 1988.

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{A}{RT}\right) \quad (3)$$

Vautrin (1995) [51] a établi le calcul des contraintes planes hygrothermiques transitoires dans les plaques stratifiées en résolvant, l'équation de diffusion à coefficient D constant par la méthode des différences finies.

Tounsi(2000) [50] utilisa des conditions d'environnement cycliques de température et d'humidité relative en fonction du temps, d'un avion en service, pour le calcul des contraintes résiduelles hygrothermiques.

Théorie non linéaire : Le problème posé par la théorie non linéaire [15] (1994), montre qu'il existe physiquement, un effet de couplage entre la température et l'humidité. Cet

effet, prend des dimensions significatives, lorsque le rapport de la conductivité thermique à la diffusivité de l'humidité, approche l'unité. Shirell (1978) et Springer (1984) considèrent les effets d'environnement en terme de température et d'humidité, ainsi que leurs effets interactifs sur les composites, et obtiennent des données par expérimentation (coefficients d'effet couplage). Harrtrantft et Sih (1980), ainsi que Sin et Ogawa (1982), utilisèrent les données expérimentales trouvées par Springer et Shirell, pour analyser les contraintes hygrothermiques par la théorie la chaleur et de l'humidité couplées dans les plaques. Le problème est mathématiquement difficile à résoudre. La technique des éléments finis, fut adoptée par Prevost et Tao, (1983). La solution peut être évaluée, pas par pas, à partir des valeurs initiales. Huges et Liu (1978), établirent un algorithme pour assurer la stabilité numérique et la convergence. Chen (1992), utilisèrent une procédure numérique efficace, en combinant la méthode des éléments finis et la technique de la transformée inverse de Laplace, pour analyser le problème couplé linéaire unidimensionnel température- humidité. Chen et Hwang (1994), étendirent cette méthode pour les problèmes non linéaire couplés température-humidité, à géométrie irrégulière et à conditions hygrothermiques dépendant du temps. Les équations sont formulées par la technique des éléments finis dans le domaine transformé de Laplace. La solution du domaine transformé, est obtenue directement par l'itération Raphson Newton.

$$\nabla \cdot (L \nabla T) - \frac{\partial}{\partial t} (T - \gamma C) = 0 \quad (4)$$

$$\nabla \cdot (D(T) \nabla C) - \frac{\partial}{\partial t} (C - \lambda T) = 0 \quad (5)$$

Mckague (1974) [49] examina, l'effet de température de vol supersonique sur le processus d'absorption. Un cycle d'environnement, représentant la durée réelle et la fréquence d'exposition aux températures de vol, fut développé. Le test est fait par Hamstead AFB Florida, sur un avion en vol réel.

2-6 INVESTIGATION HYGROTHERMOMECHANIQUE

L'analyse de l'état de contraintes hygrothermomécanique des stratifiés, dues au gonflement et à la dilatation contrarié des plis élémentaires, a été effectuée dans le cadre de la théorie classique des plaques stratifiées, par Pipes (1976), Hahn et Kim (1978) en régime transitoire.

Des méthodes d'analyse pour les plaques stratifiées assujetties à une pression latérale et un chargement hygrothermique, ont été développées par Sloan et Vinson (1978)[25], Wetherhold et Vinson [26]. Wu et Vinson, Whitney et Chou, ainsi que Flaggs [25], ont montré l'importance des déformations du cisaillement transverse, particulièrement pour les matériaux fortement anisotropes. Cet effet, permet d'évaluer l'importance de l'expansion de la matrice polymérique à travers l'épaisseur. Whitney et Leissa, considèrent l'expansion thermique et hygrométrique séparément et négligèrent l'effet du cisaillement transversal. Hsu, Herakovich, Pagano, et Rybicki, incluent l'effet de la tension normale transverse, pour examiner les effets de la contrainte normale près du bord libre du stratifié.

La modélisation hygro-thermo-mécanique des plaques composites, est généralement basée sur la théorie classique des stratifiés qui utilise un schéma de déformations du premier ordre [1], [4], [5], [38], [18], [28], [29], [16]. Le développement de méthodes numériques, s'impose par la suite, afin de permettre une résolution rationnelle du problème. Saarella (1994) [1] génère, un programme pour une analyse hygrothermomécanique des composites à matrice polymère. Barbero Francis et Taylor (1999) [22] développèrent, un code de calcul le Cadec, (computer aided design environment for composite). Lindell développa le Laminator [27] (1997), Scott et Reifsnider, établissent le Mrlife11 (1998) [36].

2-7 THEORIE

Tsai et Hahn (1980) [5], Tsai (1988) [38], Vinson et Sierakowski (1986) [28], Gay (1989) [4], Berthelot (1992) [18], Daniel et Ishai (1994)[29] ainsi que Barbero (1998) [21], ont présenté une littérature extensive, sur la mécanique des matériaux composites, allant des propriétés micromécaniques aux propriétés macromécaniques.

2-8 CONCLUSION DE LA RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

En limitant notre propos au comportement hygrothermomécanique, on en déduit:

1. La caractérisation du comportement hygromécanique des polymères et des composites à matrice polymère n'a donné lieu qu'à un faible nombre d'études comparativement aux nombreuses publications traitant de l'aspect thermomécanique. Plusieurs auteurs ont utilisé un principe d'équivalence temps –humidité-température pour rendre compte, des actions

combinées de l'humidité et de la température sur le comportement différé de stratifiés (Douglas et Weitsman, 1980, Crossman , 1978)

2. Alors que les phénomènes de conduction et de diffusion sont intrinsèquement couplés, La cinétique de diffusion dépend de la température. Peu de travaux, portent spécifiquement sur la caractérisation des effets conjoints de la température, de l'humidité et de l'état de contraintes sur le comportement mécanique (Gilet et Broutman 1978, Lifshitz, 1982, Mulheron 1986). La méthodologie de ce type d'investigation, reste à définir de toute évidence.
3. La question épineuse de l'évaluation de l'état de contraintes internes: somme des contraintes résiduelles d'élaboration, d'origine hygrothermique et des contraintes mécaniques; doit être examinée avec rigueur, en raison du couplage éventuel entre la diffusion de l'eau et l'endommagement (Shirrel et Halpin 1977, Crossman et Wang 1978, Hahn et kim 1978, Blikstad 1984).
4. Le cas du chargement hygrothermique en l'absence de chargement extérieur revête d'un intérêt particulier ; les variation de température et d'humidité (dont les effets sont explicitées au chapitre III), engendrent la création de contrainte résiduelles larges pouvant amener à la ruine de la structure.
5. Les variables, températures, concentrations, temps, sont des paramètres extrêmement actifs.

3 METHODE CHOISIE

Notre analyse, se fera simultanément par l'investigation analytique et numérique. Le problème est d'abord modélisé, par la théorie classique des stratifiés, appliquée aux plaques minces, l'effet du cisaillement transverse étant négligé. Nous effectuerons par la suite, le calcul de la température et de la concentration pour un environnement cyclique et un environnement non cyclique, en transitoire; La résolution de l'équation de diffusion se fera par la méthodes des différences finies, une comparaison entre la résolution analytique, la méthode des différences finies et l'équation de Springer sera établie. Nous abordons enfin; l'étude hygrothermomécanique pour différents chargements d'environnement. Le résultat de cette recherche, est l'élaboration d'un code de calcul ; le **ANCE1 "analyse des composites pour environnement divers"**.

CHAPITRE I

MECANIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES

Les matériaux composites sont caractérisés, par une forte hétérogénéité sur le plan microscopique et une anisotropie prononcée de leurs propriétés mécaniques sur le plan macroscopique. Une utilisation rationnelle de ces matériaux, de quelle nature soit- elle, exige une bonne compréhension et une modélisation réaliste de leurs propriétés directionnelles.

L'objectif de ce chapitre, est d'exposer les éléments de base essentiels qui sont indispensables à toute tentative de modélisation dans le domaine des composites.

La première partie, résume des définitions fondamentales liées aux composites. Nous présentons ensuite, succinctement la microanalyse avec différents modèles, puis à la fin, nous exposons les lois de comportements élastiques pour les matériaux unidirectionnels et orthotropes.

I.1 DEFINITIONS

I.1.1 Matrice et renfort

Un matériau composite, est un matériau formé de plusieurs constituants (phases) de natures différentes. Très souvent, le nombre de ces phases se réduit à deux, le renfort et la matrice. Le renfort rigide et souvent sous forme de fibres, apporte au matériau ses performances mécaniques élevées. La matrice relativement ductile, maintient les fibres du renfort dans des positions relatives choisies, protège ces fibres physiquement et chimiquement, assure la liaison mécanique entre les éléments du renfort et, permet en plus de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres.

La matrice est souvent constituée de résine qui peut être de nature polyesterique insaturée, époxyde, phénolique, polyimide ou polyamide-imide, etc....

Le renfort, peut être constitué par des fibres métalliques, des fibres naturelles organiques ou inorganiques, etc..... Ces fibres peuvent être courtes, longues de l'ordre du centimètre

(figure1.1), on distingue ainsi le renfort à mat, le renfort tissus, et le renfort unidirectionnel (figure1.2).

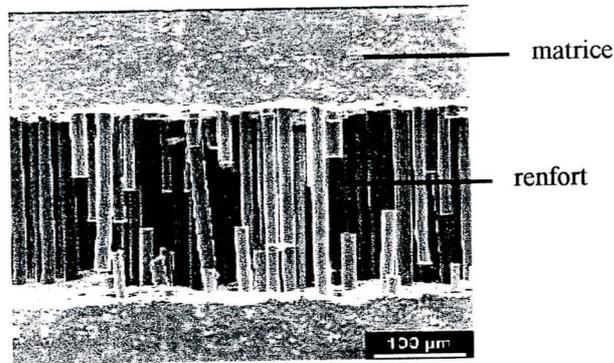
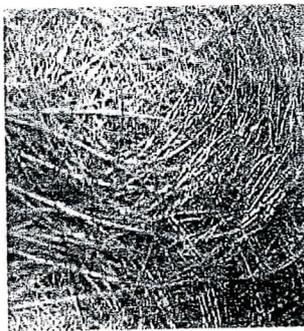
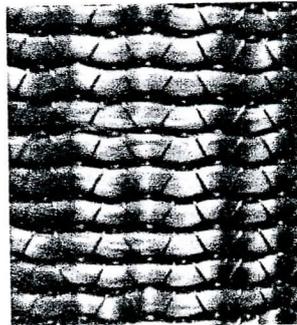


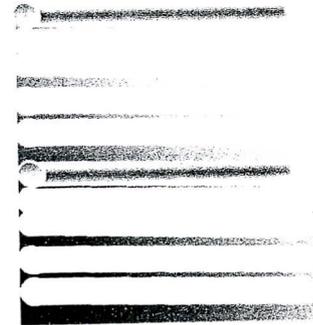
Figure1-1 Composite SiC/vitro-céramique



Fibres courtes sans orientation mat
renfort mat



Fibres longues (rowing) 2D
renfort tissu



fibres longues
renfort unidirectionnel

Figure 1-2 Exemples de renfort de fibres

I.1.2 Pli et stratifié

Le pli est le produit matrice + renfort, qui peut être un unidirectionnel + matrice, tissus (2D) + matrice, mat + matrice. L'empilement de plusieurs plis orientés dans des directions différentes l'une par rapport à l'autre, est défini comme un stratifié.

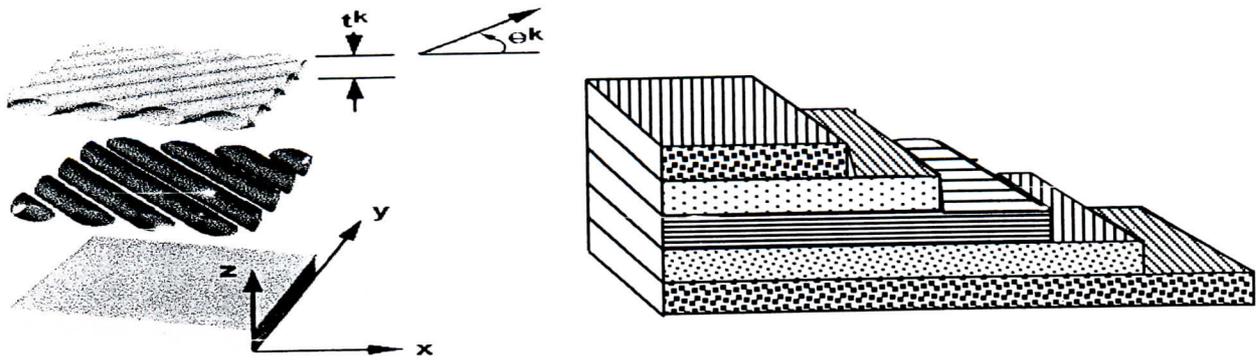


Figure 1-3 Pli et stratifié

I.1.3 Repère principaux

On définit le repère principal, le repère (LT) lié à une couche. La direction L parallèle aux fibres, est notée direction longitudinale. La direction normale aux fibres T est appelée direction transversale.

I.1.4 Repère du stratifié

Les stratifiés étant élaborés par couches successives, dont la direction des fibres ou trame (tissu) est décalée d'une couche à une autre d'un angle θ . Il est nécessaire, de rapporter le comportement élastique de chaque couche à un système d'axes noté (x y z), appelé repère du stratifié.

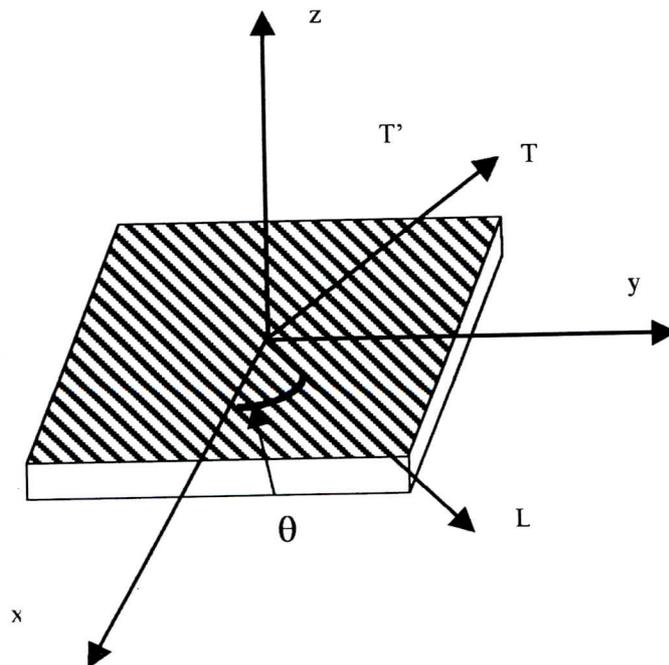


Figure 1-4 repère principal (LTT') d'une couche et repère du stratifié (X,Y, Z)

I.2 MICROANALYSE

L'analyse des matériaux composites à l'échelle microscopique, met en cause les caractéristiques élémentaires des constituants (fibres et matrice). Le problème de la détermination des modules d'élasticité (en fonction des modules et des fractions volumiques de fibres et de matrice) assez complexe, fut un état de recherche exhaustive de plusieurs auteurs Shapery (1968), Jones (1975), Christenson (1979), Chamis (1975), Gibson(1994), qui ont établi différents modèles.

Nous présentons ici les différents modèles pour différents modules d'élasticité, pour un matériau composite à fibres continues, unidirectionnel puis orthotrope.[28], [29], [36], [38].

I.2.1 Matériau composite unidirectionnel

I.2.1 a) Module d'élasticité longitudinal E_L

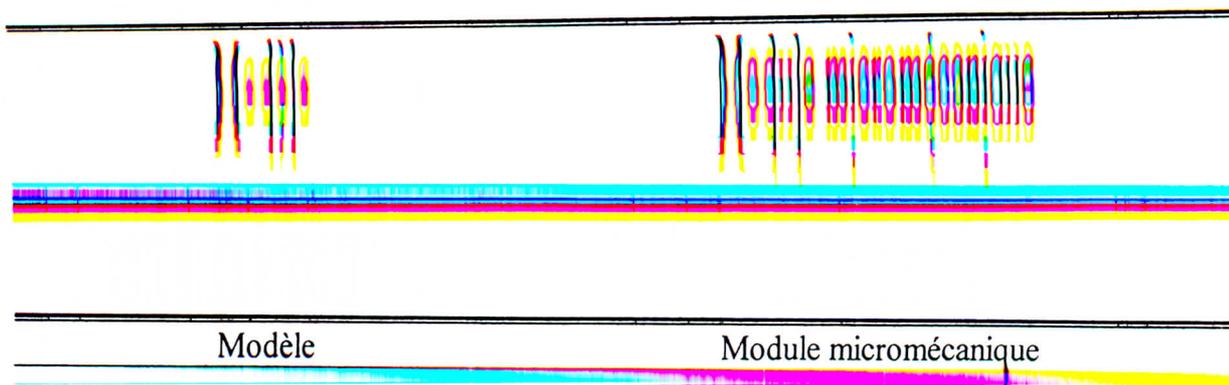
Modèle	Module micromécanique
Loi de mélange (Jones, 1975), Chamis (1984)	$E_L = V_f E_{Lf} + (1 - V_f) E_{Lm}$ (1.1)

I.2.1 b) Module d'élasticité transversal E_T

Modèle	Module micromécanique
Chamis (1983)	$E_T = \frac{E_{Tf} E_{Tm}}{E_{Tf} - \sqrt{V_f} (E_{Tf} - E_{Tm})}$ (1.2)
Gibson (1994)	$E_T = E_{Tm} \left[(1 - \sqrt{V_f}) + \frac{\sqrt{V_f}}{1 - \sqrt{V_f} (1 - \frac{E_{Tm}}{E_{Tf}})} \right]$ (1.3)
Equation d'Halpin-Tsai pour $\xi=2$	$E_T = E_m \left[\frac{E_{Tf} (1 + 2V_f) + 2E_{Tm} (1 - V_f)}{E_{Tf} (1 - V_f) + E_{Tm} (2 + V_f)} \right]$ (1.4)
Gibson modifié	$\frac{1}{E_T} = \frac{1 - \sqrt{V_f}}{E_{Tm}} + \frac{\sqrt{V_f}}{E_{Tf} \sqrt{V_f} + (1 - \sqrt{V_f}) E_{Tm}}$ (1.5)

CHAPITRE I Mécanique des matériaux composites

I.2.1 c) Module de cisaillement G_{LT}



I.2.1 c) Module de cisaillement G_{LT}

Modèle	Module micromécanique
Chamis (1983)	$G_{LT} = \frac{G_{LTf} G_{LTm}}{G_{LTf} - \sqrt{V_f} (G_{LTf} - G_{LTm})} \quad (1.6)$
Christensen (1979)	$G_{LT} = G_{LTm} \left[\frac{(1+V_f)G_{LTf} + (1-V_f)G_{LTm}}{(1-V_f)G_{LTf} + (1+V_f)G_{LTm}} \right] \quad (1.7)$
Equation d'Halpin Tsai , $\xi=1$	$G_{LT} = G_{LTm} \left[\frac{(1+V_f)G_{LTf} + (1-V_f)G_{LTm}}{(1-V_f)G_{LTf} + (1+V_f)G_{LTm}} \right] \quad (1.8)$
Gibson (1994)	$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1 - \sqrt{V_f}}{G_{LTm}} + \frac{\sqrt{V_f}}{G_{LTf} \sqrt{V_f} + (1 - \sqrt{V_f})G_{LTm}} \quad (1.9)$

I.2.1 d) Coefficients de Poisson ν_{LT}

Modèle	Modèle Micromécanique
Lois des mélanges (Jones, 1975), Chamis (1984)	$\nu_{LT} = \nu_{LTf} V_f + \nu_{LTm} (1 - V_f) \quad (1.10)$

I.2.1 e) Coefficient de dilatation thermique longitudinal α_L

Modèle	Modèle Micromécanique
Modèle de mécanique des matériaux	$\alpha_L = \frac{V_f \alpha_{Lf} E_{Lf} + (1 - V_f) \alpha_{Lm} E_{Lm}}{V_f E_{Lf} + (1 - V_f) E_{Lm}} \quad (1.11)$

I.2.1 f) Coefficient de dilatation thermique transversal α_T

Modèle	Modèle micromécanique
Modèle de Schapery (1968)	$\alpha_T = V_f (\alpha_{Tf} + \nu_{LTf} \alpha_{Lf}) + V_m \alpha_m (1 + \nu_m) - (V_f \nu_{LTf} + V_m \nu_m) \alpha_L \quad (1.12)$
Modèle de Gibson (1994)	$\alpha_T = \alpha_{Tf} \sqrt{V_f} + (1 - \sqrt{V_f}) \left(1 + V_f \nu_{LTm} \frac{E_{Tf}}{V_f E_{Lf} + (1 - V_f) E_{Lm}} \right) \quad (1.13)$

I.2.2 Matériau composite orthotrope

Dans quelques applications, comme le carbone et l'aramide, les fibres sont orthotropes et possèdent des propriétés différentes dans les directions longitudinales et transversales. Certains coefficients, restent inchangés par rapport aux coefficients unidirectionnels, soit :

a)	E_L	Identique à l'expression (1.1)
b)	E_T	Identique aux expressions (1.2),(1.3),(1.4),(1.5)
c)	G_{LT}	Identique aux expressions (1.6),(1.7),(1.8),(1.9)
d)	ν_{LT}	Identique à l'expression (1.10)
e)	α_L	Identique à l'expression (1.11)
f)	β_L	Identique à l'expression (1.14)
g)	K_L	Identique à l'expression (1.17)
h)	K_T	Identique à l'expression (1.18)

I.2.2 f) Module d'élasticité E_T

Modèle	Module micromécanique
Chamis (1984)	$E_{T'} = E_T$ (1.19)

I.2.2 g) Module de cisaillement $G_{LT'}$

Modèle	Module micromécanique
Chamis (1984)	$G_{LT'} = G_{LT}$ (1.20)

I.2.2 h) Module de cisaillement $G_{TT'}$

Modèle	Module micromécanique
Chamis (1984)	$G_{TT'} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{G_m}{G_{fTT'}}\right)}$ (1.21)

Afin d'établir une analyse des différents modèles présentés ci dessous, on a choisi de les comparer à un modèle idéal établi par Averill et Carman (1991). Ce modèle considéré comme une solution exacte, représente une distribution de fibres hexagonales. Les variations des modules d'élasticité en fonction du volume des fibres, pour l'unidirectionnel graphite/époxyde, sont représentées par les figures 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 et 1.10. Les résultats pour les différents modèles sont identiques au modèle idéal à l'exception du coefficient de dilatation transversal α_T .

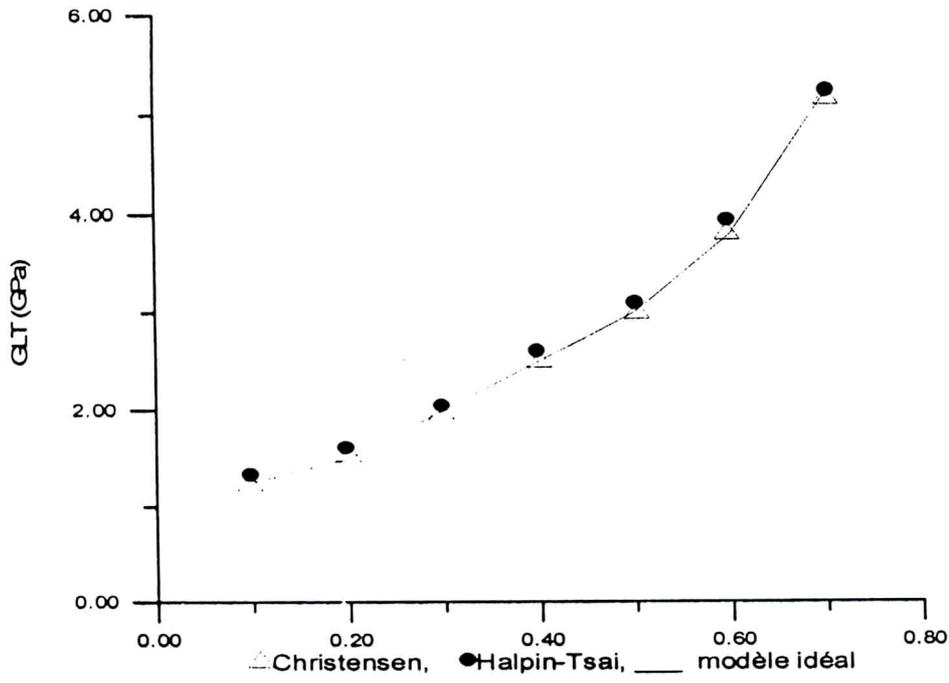


Figure 1-7 Comparaison des modèles es micromécaniques pour G_{LT} en fonction des Volumes des fibres [36]

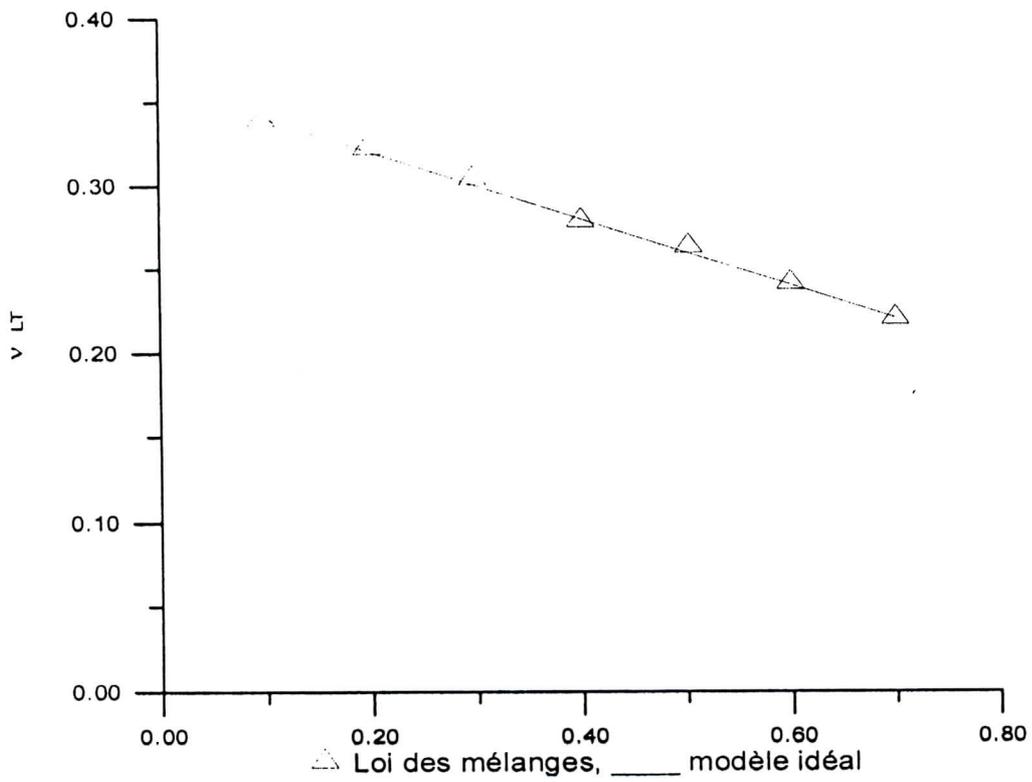


Figure 1-8 Comparaison des modèles es micromécaniques pour ν_{LT} en fonction des Volumes des fibres [36]

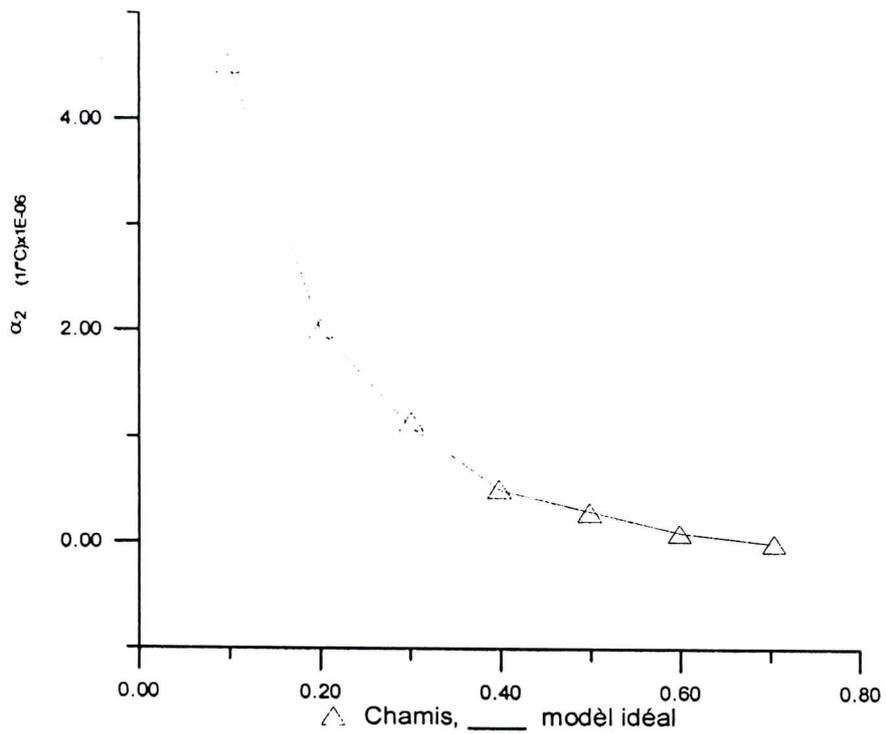


Figure 1-9 Comparaison des modèles micromécaniques pour α_l en fonction des volumes des fibres [36]

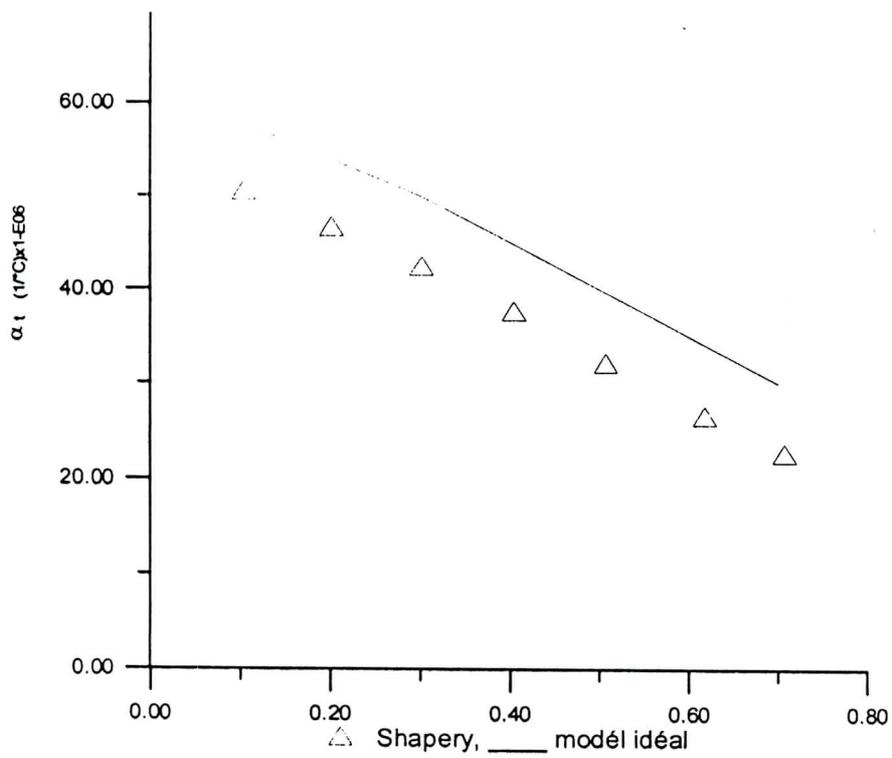


Figure 1-10 Comparaison des modèles micromécaniques pour α_T en fonction des volumes des fibres [36]

I.3 LOI DE COMPORTEMENT

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu, sont liés par des lois de comportement caractérisant l'élasticité linéaire du milieu. Ces lois, permettent de rendre compte aux mieux des phénomènes observés, et sont connues sous l'appellation, « loi de Hook généralisée ». [4], [5], [18], [28], [29], [34], [35],

I.3.1 Matrice de rigidité

La loi de Hook généralisée, introduit la matrice de rigidité C qui est généralement symétrique et décrite par 21 coefficients indépendants soient 21 constantes de rigidité.

La relation d'élasticité linéaire s'écrit sous la forme matricielle,

$$[\sigma_{ij}] = [C_{ij}] \varepsilon_i \quad i, j = \overline{1,6} \quad (1.27)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdot & \cdot & C_{16} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{16} & \cdot & \cdot & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

I.3.2 Matrice de flexibilité

La relation d'élasticité (1.27), peut être écrite, sous la forme inverse suivante, où S est la matrice de souplesse telle que $[S_{ij}] = [C_{ij}]^{-1}$:

$$[\varepsilon_i] = [S_{ij}] \sigma_j \quad i, j = \overline{1,6} \quad (1.29)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdot & \cdot & S_{16} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{61} & \cdot & \cdot & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_{16} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

I.4 MATERIAU COMPOSITE UNIDIRECTIONNEL

I.4.1 Relation d'élasticité dans le repère (LT)

La relation d'élasticité s'exprime par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

où,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

I.4.2 Constantes de rigidité dans le repère (LT)

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_L + 4\nu_{LT}^2 K_L & C_{12} &= 2K_L \nu_{LT} & C_{22} &= G_{TT'} + K_L \\ C_{23} &= -G_{TT'} + K_L & C_{66} &= G_{LT} & \text{avec } K_L &= \frac{1}{2(S_{22} + S_{23} - 2\frac{S_{12}^2}{S_{11}})} \end{aligned} \quad (1.33)$$

I.4.3 Constantes de souplesse

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_L} & S_{12} &= -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & S_{22} &= \frac{1}{E_T} \\ S_{23} &= -\frac{\nu_{TT'}}{E_T} & S_{66} &= \frac{1}{G_{LT}} \end{aligned} \quad (1.34)$$

I.4.4 Relation d'élasticité dans le repère (XY)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx1} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

où,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

I.4.5 Constantes de rigidité dans le repère (XY)

Les constantes de rigidité d'un matériau composite unidirectionnel, dont la direction L fait un angle θ avec la direction x de référence (figure1-4) sont :

$$\begin{aligned} C'_{11} &= C_{11} c^4 + C_{22} s^4 + 2(C_{12} + 2C_{66}) s^2 c^2 \\ C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) s^2 c^2 + C_{12} (s^4 + c^4) \\ C'_{13} &= C_{12} c^2 + C_{23} s^2 \\ C'_{14} &= 0 \quad C'_{15} = 0 \\ C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) s c^3 + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) s^3 c \\ C'_{22} &= C_{11} s^4 + 2(C_{12} + 2C_{66}) s^2 c^2 + C_{22} c^4 \\ C'_{23} &= C_{12} s^2 + C_{23} c^2 \quad C'_{24} = 0 \quad C'_{25} = 0 \\ C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) s^3 c + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) s c^3 \\ C'_{33} &= C_{22} \quad C'_{34} = 0 \quad C'_{35} = 0 \\ C'_{36} &= (C_{12} - C_{23}) s c \\ C'_{44} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2} c^2 + C_{66} s^2 \\ C'_{45} &= (C_{66} - \frac{C_{22} - C_{23}}{2}) s c \quad C'_{46} = 0 \\ C'_{55} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2} s^2 + C_{66} c^2 \quad C'_{56} = 0 \\ C'_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] s^2 c^2 + C_{66} (s^4 + c^4) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Avec

$$\begin{aligned} c &= \cos \theta \\ s &= \sin \theta \end{aligned} \quad (1.38)$$

I.4.6 Constantes de souplesse dans le repère (XY)

Les constantes de souplesse d'un matériau composite unidirectionnel, hors de ses axes principaux sont :

$$\begin{aligned}
 S'_{11} &= S_{11} c^4 + S_{22} s^4 + (2S_{12} + S_{66}) s^2 c^2 \\
 S'_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) s^2 c^2 + S_{12} (s^4 + c^4) \\
 S'_{13} &= S_{12} c^2 + S_{23} s^2 \\
 S'_{14} &= 0 \quad S'_{15} = 0 \\
 S'_{16} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] s c^3 + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] s^3 c \\
 S'_{22} &= S_{11} s^4 + (2S_{12} + S_{66}) s^2 c^2 + S_{22} c^4 \\
 S'_{23} &= S_{12} s^2 + S_{23} c^2 \quad S'_{24} = 0 \quad S'_{25} = 0 \\
 S'_{26} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] s^3 c + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] s c^3 \\
 S'_{33} &= S_{22} \quad S'_{34} = 0 \quad S'_{35} = 0 \\
 S'_{36} &= 2(S_{12} - S_{23}) s c \\
 S'_{44} &= 2(S_{22} - S_{23}) c^2 + S_{66} s^2 \\
 S'_{45} &= [S_{66} - 2(S_{22} - S_{23})] s c \quad S'_{46} = 0 \\
 S'_{55} &= 2(S_{22} - S_{23}) s^2 + S_{66} c^2 \quad S'_{56} = 0 \\
 S'_{66} &= 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66}] s^2 c^2 + S_{66} (s^4 + c^4)
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

I.5 MATERIAU COMPOSITE ORTHOTROPE

Un matériau orthotrope, possède trois plans de symétrie perpendiculaires deux à deux. Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope, peut être décrit par les 9 modules indépendants suivant:

- 3 modules de Young, EL, ET, ET'.
- 3 coefficients de Poisson.
- 3 modules de cisaillement GLT, GLT', GTT'.

I.5.1 Relation d'élasticité dans le repère (LT)

La relation d'élasticité pour un matériau composite orthotrope dans le repère principal (LT), a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

où,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

I.5.2 Constantes de rigidité dans le repère (LT)

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{12} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{13} &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{23} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{44} &= G_{23} & C_{55} &= G_{13} & C_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (1.42)$$

avec $\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$

I.5.3 Constantes de souplesse dans le repère (LT)

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (1.43)$$

I.5.4 Relation d'élasticité dans le repère (XY)

La relation d'élasticité d'un matériau orthotrope, en dehors de ses axes principaux (XY), a la même forme que celle décrite pour un unidirectionnel (1.35) et (1.36).

I.5.5 Constantes de rigidité dans le repère (XY)

Les constantes de rigidité d'un matériau orthotrope, dont la direction L fait un angle θ avec la direction x de référence (figure 1.4), sont :

$$\begin{aligned}
 C'_{11} &= C_{11} c^4 + C_{22} s^4 + 2(C_{12} + 2C_{66}) s^2 c^2 \\
 C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) s^2 c^2 + C_{12} (s^4 + c^4) \\
 C'_{13} &= C_{13} c^2 + C_{23} s^2 \\
 C'_{14} &= 0 \quad C'_{15} = 0 \\
 C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) s c^3 + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) s^3 c \\
 C'_{22} &= C_{11} s^4 + 2(C_{12} + 2C_{66}) s^2 c^2 + C_{22} c^4 \\
 C'_{23} &= C_{13} s^2 + C_{23} c^2 \quad C'_{24} = 0 \quad C'_{25} = 0 \\
 C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) s^3 c + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) s c^3 \\
 C'_{33} &= C_{33} \quad C'_{34} = 0 \quad C'_{35} = 0 \\
 C'_{36} &= (C_{13} - C_{23}) s c \\
 C'_{44} &= C_{44} c^2 + C_{55} s^2 \\
 C'_{45} &= (C_{55} - C_{44}) s c \quad C'_{46} = 0 \\
 C'_{55} &= C_{44} s^2 + C_{55} c^2 \quad C'_{56} = 0 \\
 C'_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})] s^2 c^2 + C_{66} (s^4 + c^4)
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

I.5.6 Constantes de souplesse dans le repère (XY)

Les constantes de souplesse d'un matériau orthotrope, hors de ses axes principaux sont :

$$\begin{aligned}
 S'_{11} &= S_{11} c^4 + S_{22} s^4 + (2S_{12} + S_{66}) s^2 c^2 \\
 S'_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) s^2 c^2 + S_{12} (s^4 + c^4) \\
 S'_{13} &= S_{13} c^2 + S_{23} s^2 \\
 S'_{14} &= 0 \quad S'_{15} = 0 \\
 S'_{16} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] s c^3 + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] s^3 c \\
 S'_{22} &= S_{11} s^4 + (2S_{12} + S_{66}) s^2 c^2 + S_{22} c^4 \\
 S'_{23} &= S_{13} s^2 + S_{23} c^2 \quad S'_{24} = 0 \quad S'_{25} = 0 \\
 S'_{26} &= [2(S_{11} - S_{12}) - S_{66}] s^3 c + [2(S_{12} - S_{22}) + S_{66}] s c^3 \\
 S'_{33} &= S_{33} \quad S'_{34} = 0 \quad S'_{35} = 0 \\
 S'_{36} &= 2(S_{13} - S_{23}) s c \\
 S'_{44} &= S_{44} c^2 + S_{55} s^2 \\
 S'_{45} &= (S_{55} - S_{44}) s c \quad S'_{46} = 0 \\
 S'_{55} &= S_{44} s^2 + S_{55} c^2 \quad S'_{56} = 0 \\
 S'_{66} &= 2[2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66}] s^2 c^2 + S_{66} (s^4 + c^4)
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

I.6 CONTRAINTES PLANES

Les éléments développés précédemment, sont applicables pour la résolution d'un problème quelconque d'élasticité d'un matériau composite. Nous étudions dans ce paragraphe, le problème d'un état de contraintes planes, dont les résultats sont nécessaires à la modélisation du problème étudié (chapitre III).

I.6.1 état de contraintes planes

Un état de contraintes planes, est un état de contraintes à deux dimensions, dont la direction z, est la direction principale. Le tenseur est caractérisé par :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

I.6.2 Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux

Rapportées aux axes principaux, les relations d'élasticité se mettent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_T \\ \epsilon_{LT} \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

où

$$\begin{bmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_T \\ \epsilon_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

Les constantes de rigidité réduites s'expriment par :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L}\nu_{LT}^2} \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E_L}\nu_{LT}^2} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22} \\ Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (1.49)$$

I.6.3 Matrice de rigidité réduite hors des axes principaux

Les relations d'élasticité peuvent s'écrire sous l'une des deux formes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

où

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

sachant que les expressions de constantes de rigidité réduites s'expriment ;

$$\begin{aligned}
 Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\
 Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
 Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 Q'_{66} &= [(Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)]
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

I.7 CONCLUSION

L'analyse des constantes de rigidité à l'échelle microscopique, a révélé la forte prépondérance des propriétés élémentaires des fibres et de la matrice. Le volume des fibres, est un paramètre déterminant quant au comportement élastique. Le calcul de la matrice de rigidité est un outil essentiel et nécessaire avant toute tentative de modélisation, quel que soit le type d'étude entamée liée aux composites unidirectionnels ou orthotropes. Evidemment, l'outil informatique s'impose.

La microanalyse est générée par le sous programme MICAN, le calcul des matrices de rigidité est généré par le ANPLI, et Le calcul d'état de contraintes planes est généré par le RGID. Ces sous programme seront explicités au chapitre V.

CHAPITRE II

PHENOMENES HYGROTHERMIQUES

Notre étude s'inscrit résolument dans l'esprit des phénomènes hygrothermiques. Dans ce chapitre, nous essayons de gagner un domaine intéressant de la physique expérimentale qui nous permettra, d'acquérir une profonde compréhension sur les mécanismes se produisant à l'échelle microscopique. Le processus d'absorption et de désorption dans les matériaux composites anisotropes est abordé, suivi d'une synthèse des effets de la température et de l'humidité sur le comportement des composites à matrice polymère. Seront ensuite exposés, des cycles de vieillissements déjà réalisés par certains chercheurs, afin de rendre compte de l'effet de chaque environnement.

II.1 PHENOMENES

Les polymères et composites à matrice polymère, absorbent l'eau quand ils sont immergés ou placés dans une atmosphère humide. L'absorption de l'eau, dépend essentiellement de la nature du polymère, de la température T , et du degré hygrométrique HR ou humidité relative, (par définition, HR est le rapport de la pression de vapeur d'eau à la pression de la vapeur saturante à la même température T). Elle s'effectue essentiellement à travers :

1. **La matrice polymère** : Diffusion et adsorption physique de l'eau moléculaire.
2. **Les microfissures** : transport d'eau liquide par condensation capillaire.
3. **L'interface fibre/matrice** : Diffusion, adsorption et condensation capillaire.

Parmi les fibres industriellement utilisées comme renfort, seules les fibres aramides, semblent absorber une quantité significative d'eau (Verpoest et Springer, 1988).

La molécule d'eau étant une molécule de petites dimensions (rayon atomique 0.096nm), peut donc aisément, se déplacer à travers le réseau moléculaire du polymère sous l'influence d'un gradient de concentration ; c'est le phénomène de **diffusion** et les molécules d'eau sont dites diffusantes ou non liées. La molécule d'eau étant polarisée, elle peut se fixer



aux groupements hydroxyles ; c'est le phénomène d' **adsorption physique** et les molécules d'eau , sont dites liées ou piégées.

La fixation des molécules d'eau sur les chaînes moléculaires a deux conséquences majeures : La diminution de la température de transition vitreuse, et le gonflement du polymère (Adamson, 1980 ; Springer, 1981).

L'absorption des molécules d'eau par liaison hydrogène, affaiblit la cohésion intermoléculaire et entraîne une réduction des propriétés mécaniques, traduite par une diminution de la température de transition vitreuses (Browing et.,, 1977). En moyenne, chaque pour-cent du taux d'humidité, provoque une chute d'environ 20°C de la température de transition vitreuse.

Les interfaces, c'est à dire les zones matérielles de transition entre les propriétés de la fibre et celles de la matrice, constituent des domaines dont les caractéristiques de diffusion et d'adsorption sont différents de celles de la matrice , en raison Damota [6] :

1. de la nature physicochimique spécifique de ces régions,
2. des gradients de contraintes locales élevées.

Ces gradients peuvent en outre, créer une distension du réseau moléculaire au voisinage des fibres, causant une accélération de la diffusion ou même une absorption d'eau sous forme liquide par condensation capillaire. Cette absorption, se manifeste par un accroissement notable de la cinétique de diffusion apparente.

Enfin, le gonflement contrarié de la résine, est à l'origine de sur-contraintes locales susceptibles d'initier la microfissuration de l'interface ou de la résine, créant ainsi, de nouvelles voies de pénétration d'eau, Vautrin [9]

II.2 ABSORPTION ET DESORPTION DANS LES MATERIAUX COMPOSITES

II.2.1 Concentration

Lorsqu'un matériau composite est placé dans un environnement humide, il absorbe ou désorbe (cède) de l'humidité. Le contenu de l'humidité M(% de gain) du matériau en fonction du temps est [48]:

$$M(t) = \frac{\text{Poids du matériau humide} - \text{poids matériau sec}}{\text{Poids du matériau sec}} \times 100 \quad (2.1)$$

Lorsque les températures et les concentrations initiales sont uniformes, Le contenu de l'humidité du matériau durant l'absorption et la désorption est :

$$M = G(M_m - M_i) + M_i \quad (2.2)$$

M_i : Contenu de l'humidité initiale du matériau

M_m : Contenu maximal de la concentration.

G : Paramètre de temps indépendant approximé par Springer [48]

$$G = 1 - \exp\left[-7.3\left(\frac{D_z t}{s^2}\right)^{0.75}\right] \quad (2.3)$$

II.2.2 Concentration maximale

La concentration maximale est insensible à la température mais, dépend du contenu de l'humidité de l'environnement, (M_m dépend de l'humidité relative ϕ) :

$$M_m = a\phi^b \quad (2.4)$$

a et b sont propres à chaque matériau, et sont déterminés expérimentalement.

Les résines époxydes , utilisées comme matrice, peuvent atteindre des taux d'humidité à saturation de l'ordre de 6% (DeIasi et Whiteside, 1978). Le taux d'humidité, est le rapport de l'accroissement de masse de l'échantillon à la masse anhydre exprimée en pour-cent .

II.2.3 Temps pour concentration maximale

Le temps nécessaire pour atteindre la concentration maximale qui est de 99.99% du contenu de l'humidité, est indépendant de l'humidité relative mais dépend de la température T à travers D_x :

$$t_m = \frac{0.67s^2}{D_z} \quad (2.5)$$

Pour le graphite T300/1034 :

$$\text{à air humide} \quad M_m = 0.00014(\varphi)^2$$

$$\text{dans l'eau} \quad M_m = 1.8\%$$

II.2.4 Analyse unidimensionnelle

Soit une plaque d'épaisseur h , exposée à la même humidité sur ses six faces. Les directions suivant x et y sont infinies. Le contenu de l'humidité et la température dans la plaque varie suivant z . La température T_i et la concentration C_i à l'instant initial, sont uniformes. la plaque est soudain soumise à une température T_a et une concentration C_a

La distribution de température et de concentration sont respectivement décrites par les équations de Fourier et de Fick. :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial C}{\partial z^2} \quad (2.7)$$

Les conditions initiales et les conditions aux limites sont :

$$T=T_i \quad (2.8a)$$

$$C=C_i \quad 0 < z < h \quad t \leq 0 \quad (2.8b)$$

$$T=T_a \quad z = 0 ; z = h \quad t > 0 \quad (2.8c)$$

$$C=C_a \quad (2.8d)$$

La concentration à la surface du matériau C_m est reliée au contenu de l'humidité de l'environnement.

Springer [48] démontra que dans la plupart des matériaux, le rapport $(K_x / \rho C) / D_x$ est de l'ordre de 10^6 . La température approche l'équilibre 10^6 fois plus vite que la concentration d'humidité. Par exemple, pour une plaque composite d'épaisseur 12.7mm, type graphite fibirite T-300/1034, exposée à 90% d'air humide et à une température de 350°K, la température à travers la plaque devient uniforme au bout de 15 secondes ; cependant la concentration atteint l'équilibre au bout de 13 ans. C'est ainsi que dans plusieurs

applications, la température à l'intérieur du matériau peut être prise comme étant, la température ambiante.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (2.9)$$

$$C=C_i \quad 0 < z < h \quad t \leq 0 \quad (2.10a)$$

$$C=C_a \quad z=0 ; z=h \quad t > 0 \quad (2.10b)$$

La solution de l'équation différentielle est donnée par Jost [48], selon l'équation ci-dessous ;

$$\frac{C - C_i}{C_m - C_i} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \sin \frac{(2j+1)\pi x}{h} \exp \left[- \frac{(2j+1)^2 \pi^2 D_x t}{h^2} \right] \quad (2.11)$$

II.2.5 Diffusivité

L'absorption de l'eau par les composites, dépend de la fraction volumique, de l'arrangement des fibres, et de la nature des interfaces, fibres/matrice. Il est clair que la présence de fibres orientées, a pour conséquence directe une anisotropie de la diffusion. Généralement, la diffusivité des fibres est très faible devant celle de la matrice, elle s'exprime en fonction des propriétés de la matrice et du volume des fibres par :

$$D_z = D_{11} \cos^2 \alpha + D_{22} \sin^2 \alpha \quad (2.12)$$

avec $D_{11} = (1 - V_f) D_m \quad (2.13)$

$$D_{22} = (1 - 2\sqrt{V_f/\Pi}) D_r \quad (2.14)$$

La diffusivité ne change pas avec l'humidité, elle dépend plutôt de la température. La relation d'Arrhenius permet d'écrire, [5], [15], [24], [41] :

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{A}{RT}\right) \quad (2.15)$$

Cette relation est aussi valable pour les environnements cycliques.

II.3 EFFETS HYGROTHERMIQUES

II.3.1 Effets sur les propriétés mécaniques

Les propriétés élastiques et viscoélastiques, peuvent varier avec la température et la concentration d'humidité. Les caractéristiques de rupture, spécialement celles reliées à l'interface et à la matrice, peuvent varier avec la température et le contenu d'humidité. Les effets de température sont résumés dans le tableau 2.1, Issac [29].

II.3.2 Effets hygrothermoélastiques

Les matériaux composites, subissent des déformations réversibles reliées aux coefficients d'expansion thermique α et hygroscopique β . Les contraintes interlaminaires et sont développées, comme étant le résultat d'anisotropie et d'inhomogénéité thermoélastique et hygroélastique [29].

II.3.3 Effet hygrothermiques sur le comportement mécanique

Les variations des conditions d'environnement, affectent le comportement contraintes-déformations des matériaux composites comme suit : les propriétés des constituants, varient avec la température et la concentration d'humidité, et les contraintes résiduelles de fabrication sont altérées par l'état hygrothermique. Les effets hygrothermiques affectent d'avantage les propriétés de la matrice en terme de tension transverse, compression transverse et cisaillement plan.[29]

II.3.4 Effet de la température

Sneha [47] fait une large synthèse bibliographique, des effets de température sur les composites epoxy /carbone. On en retient les points suivants :

1. L'augmentation de température cause la dégradation de la rigidité et une réduction des propriétés de la résistance à la rupture de l'époxy (voir tableau 2.1),
2. Une réduction de la température de transition T_g , donc passage rapide de l'état vitreux à l'état caoutchoutique.
3. Le dégagement de la vapeur d'eau, peut engendrer la formation de micro ou de macrofissurations au sein de la résine.

4. Plusieurs composites sont sous l'influence de contraintes résiduelles internes, à cause du processus de cuisson qui est du à la différence des coefficients d'expansion thermique entre les fibres et la matrice.

Parmi Les effets de la température sur la durée de vie et la rupture des systèmes graphite/epoxy, on constate:

1. La dégradation de l'interface et du cisaillement de la matrice avec l'augmentation de température qui cause une perte dans la résistance et l'effet de fatigue.
2. Soumettre le matériau à une température de 527°F moins de 5mn, ne cause pas une considérable dégradation dans les propriétés de la matrice, par contre le maintien du matériau à une température d'environ de 300°F et plus, et pour une durée de plus de 60 minutes, cause une large réduction dans la résistance, suite à la dégradation de la matrice sous l'effet de la température.
3. D'après Miyano[37], [47], les données expérimentales, montrent que le comportement en fatigue et la rupture statique sont affectées par la température .
4. Reifsnider [33] montre que la température élevée, réduit la rigidité de la matrice.

L'effet de la température sur le comportement contraintes déformations pour des composites types, est illustré par les figures 2.1 à 2.4. La figure 2.1, montre le comportement contraintes-déformations transversale du composite carbone/epoxy (AS4/35016) à différentes températures ; le module transversal décroît avec l'augmentation de la température. La figure 2.2, montre également la relation contraintes déformations pour un chargement en cisaillement plan ; le module de cisaillement plan et la rigidité, chutent avec l'augmentation de la température. La figure 2.3, montre l'effet de la température sur le comportement contraintes déformations transversales, du composite unidirectionnel silicon carbide/aluminium (SiC/Al ; SCS-2/6061 A1) ; le module initial n'est pas affecté, les déformations augmentent avec l'augmentation de la température. Le même comportement est observé en figure 2.4, sous chargement en cisaillement plan.

L'effet expérimental de la température sur les composites à matrice polymère étudié par Walter 1998 [33], est représenté par les figures suivantes: Les figures 2.5 et 2.6 montrent des modes de rupture plastique du composite à matrice vinylester et à fibres de carbone (PPS) sous l'effet de températures différentes, (les fibres se détachent de la matrice). Les figures 2.7 et 2.8 montrent des modes de rupture du système vinylester avec l'interface fibres matrice polyurethane . Les figures 2.9, 2.10 et 2.11 montrent d'autres modes de rupture à d'autres températures.

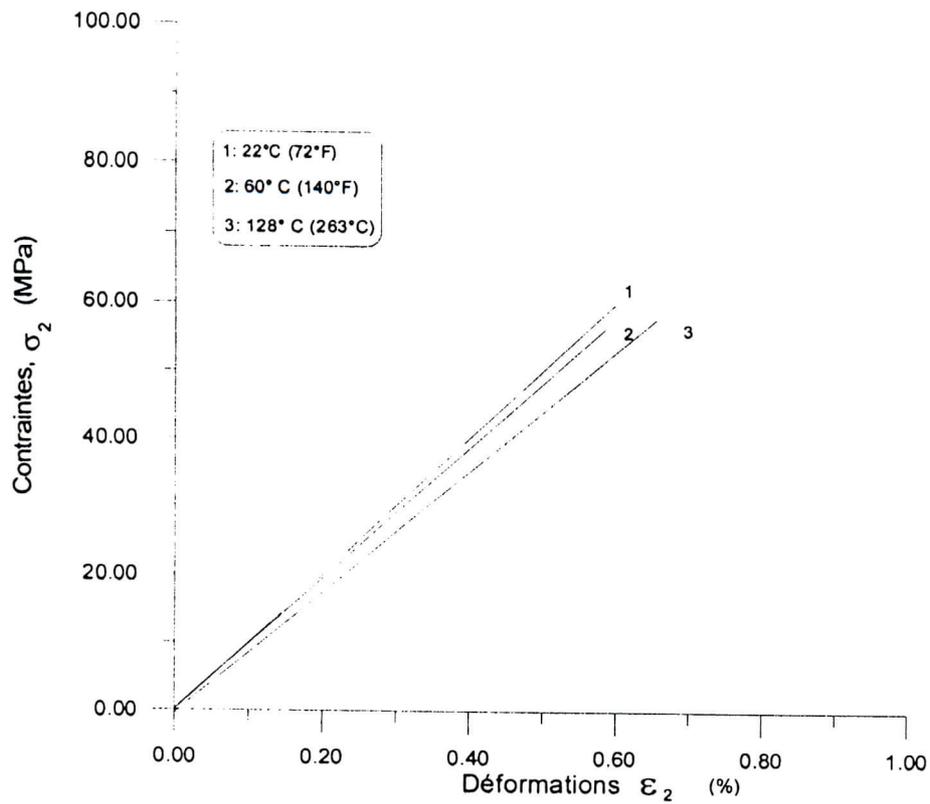


Figure 2.1 Contraintes-déformations en tension transversale pour le composite carbon/epoxy AS4/3501-6 à température variable et à air sec[29]

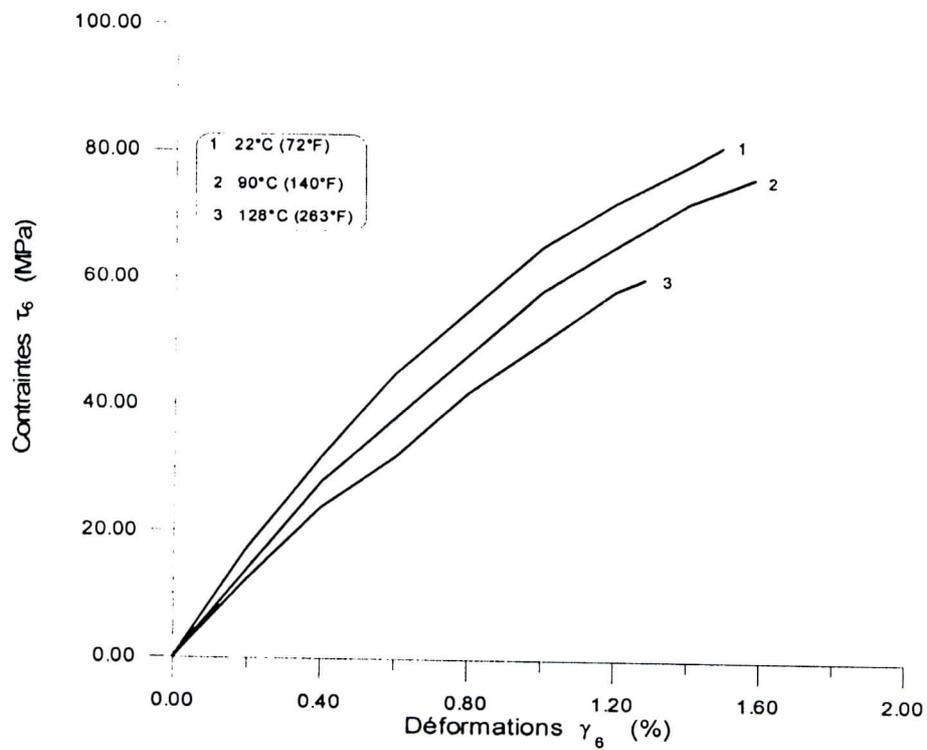


Figure 2.2 Contraintes-déformations en cisaillement plan pour l'unidirectionnel AS4/3501-6 à températures variables[29]

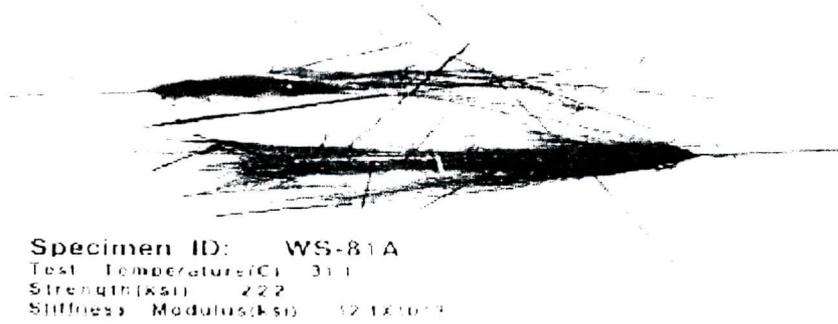


Figure 2.5 rupture des spécimens PPS à 31.1 °C [33]

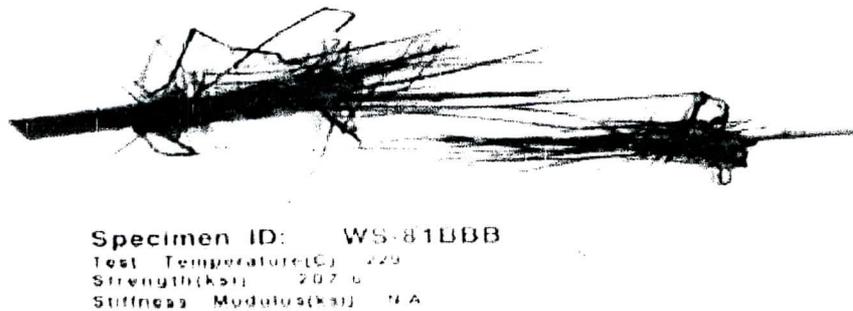
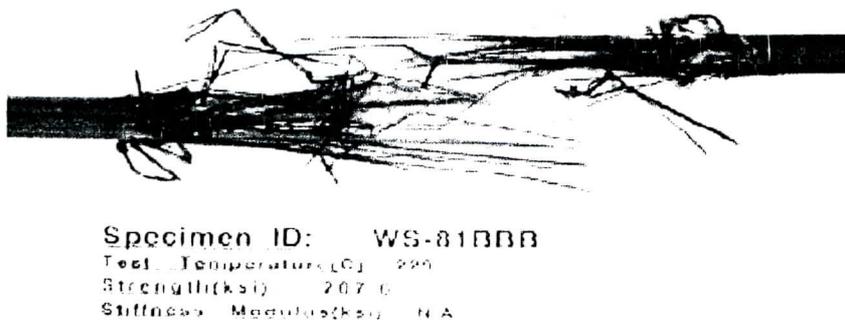


Figure 2.6 rupture des spécimens PPS à 229 °C [33]



Specimen ID: VE-PUJ
Test Temperature(C) 184.4
Strength(ksi) 156.7
Stiffness Modulus(ksi) 1.8X10⁵



Specimen ID: VE-PUJ
Test Temperature(C) 184.4
Strength(ksi) 160.5
Stiffness Modulus(ksi) 1.8X10⁵

Figure 2.9 Rupture du spécimen vinylester avec interface fibre matrice polyuréthane à 184.4 °C [33]



Specimen ID: VE-ZTECF
Test Temperature(C) 35
Strength(ksi) 116.1
Stiffness Modulus(ksi) 1.62X10⁵



Specimen ID: VE-ZTECF
Test Temperature(C) 35
Strength(ksi) 116.1
Stiffness Modulus(ksi) 1.62X10⁵

Figure 2.10 Rupture du spécimen vinylester avec interface fibre matrice époxyde à 35° C [33]

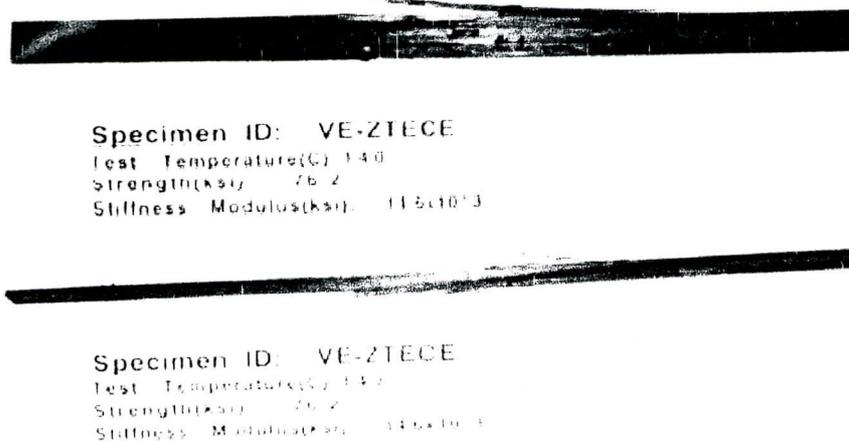


Figure 2.11 Rupture du spécimens vinylester avec interface fibre matrice époxyde à 140°C [33]

III.3.5 Effet de l'humidité

Il est bien connu que l'humidité, provoque une dégradation des propriétés mécaniques des composites à matrice polymère ; le phénomène est plus accentué à haute température. Les conclusions les plus importantes des effets hygrothermiques sur les composites fibreux , sont résumés par Weitsman [47]:

1. Le niveau de saturation dépend principalement de l'humidité relative et moins de la température,
2. La diffusivité dépend essentiellement de la température,
3. L'humidité induit un gonflement qui peut induire des contraintes internes,
4. L'humidité réduit la température de transition des MCP, et peut affecter le comportement des composites dans des environnements humides et chauds.
5. L'humidité cause la dégradation des propriétés de cisaillement et de compression, cette dégradation dépend du système de matériaux, des conditions de vieillissement et du temps mis en jeux.

L'influence de la concentration d'humidité est similaire à celle de la température sur les composites à matrice polymère; cependant l'effet est plus prononcé à haute température. La figure 2.12 montre, que 1% de concentration d'humidité, produit une légère différence dans le comportement contraintes déformations transversales, cependant l'effet est plus prononcé à haute température 90°C (195°F). L'effet le plus détériorant sur la rigidité et la rupture, est la combinaison température élevée- grande concentration en humidité. Cet effet,

est illustré par figure 2.12, où on voit nettement que la rigidité en torsion sous chargement cyclique est d'avantage dégradée à haute température et à concentration d'humidité élevée.

Le tableau 2.1, illustre la dégradation quantitative dans la rigidité et dans la résistance à la rupture en fonction de la température pour l'unidirectionnel carbone/époxyde. Le module longitudinal et la rupture en tension, chutent approximativement de 5% et 10% à 121°C (250°F) et 177°C (350°F) respectivement. Les propriétés dominantes de la matrice telles que le cisaillement longitudinal, module transversal et leurs résistances correspondantes, se dégradent de 50% à 177°C (350°F). La résistance en compression longitudinale et transversale, décroissent de 40% à 60% à partir de la température de référence 177°C

L'effet hygrothermique à long terme sur les propriétés, dépend de la composition et du type de la résine de la matrice, [25].

Température normalisée	Température, T°C, (°F)		
	24 (75)	121 (250)	177 (350)
Module longitudinal $E_1(T)/E_1(T_0)$	1	0.95	0.93
Module transversal $E_2(T)/E_2(T_0)$	1	0.87	0.50
Module de cisaillement plan $G_{12}(T)/G_{12}(T_0)$	1	0.87	0.50
Rupture tension longitudinale $F_{1t}(T)/F_{1t}(T_0)$	1	0.96	0.90
Rupture traction transversale $F_{2t}(T)/F_{2t}(T_0)$	1	0.82	0.45
Rupture compression longitudinale $F_{1c}(T)/F_{1c}(T_0)$	1	0.78	0.40
Rupture compression transversale $F_{2c}(T)/F_{2c}(T_0)$	1	0.87	0.60
Rupture cisaillement plan $F_6(T)/F_6(T_0)$	1	0.70	0.40

Tableau 2.1 Effet de la température sur les propriétés élastiques et les propriétés à la rupture pour le composite Carbone /époxyde [29]

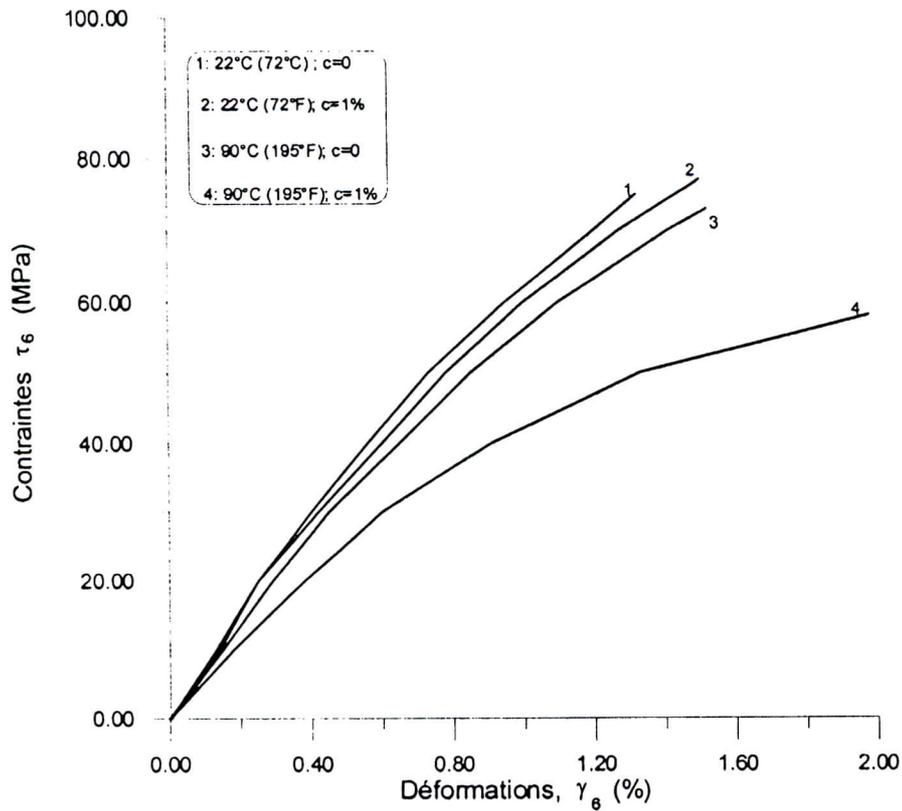


Figure 2.12 Déformations-contraintes en cisaillement plan pour l'unidirectionnel AS4/3501-6 carbon/epoxy, effet de température et de concentration en humidité [29]

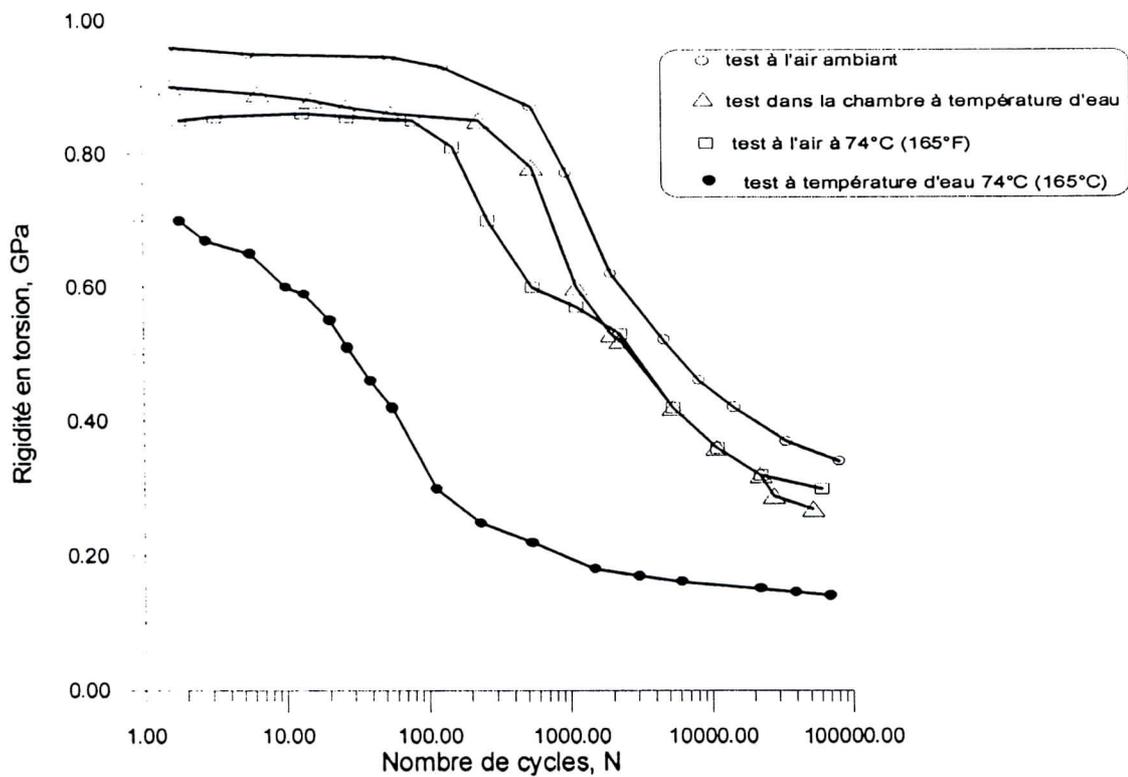


Figure 2.13 Dégradation de la rigidité en torsion du composite carbon/epoxy sous chargement cyclique à des conditions hygrothermiques variables [29]

II.4 EXPERIENCE DE VIEILLISSEMENT HYGROTHERMIQUE

II.4.1 Expérience de Nairn

II.4.1 a) Introduction

Deux résines à haute performance, appelées PETI-5 et Avimid K3B développées par la Nasa, sont sélectionnées pour faire partie de la construction d'un avion ligne commerciale supersonique qui sera construit la prochaine décennie. Les métaux disponibles aujourd'hui, sont soit trop lourds, ou ne peuvent pas résister aux températures élevées provenant d'extrêmes grandes vitesses. L'avion volera à 2.4 fois la vitesse du son, ce qui diminuera la durée de vol entre la Californie et le Japon qui est de 10 heures à environ 4 heures. Bien que l'avion volera à une altitude de 21000 mètres, où les températures sont inférieures et où l'atmosphère est moins dense, le frottement causé par l'air chauffera certaines des principales pièces du fuselage et des ailes de l'avion à une température d'environ 177°C.

Nairn [20], [53], réalisa une expérience de vieillissement sur deux variétés de matériaux composites stratifiés qui sont destinés à cette construction au profit de la compagnie Boeing. Les deux matériaux considérées, sont : le Dupont Avimid K3B polymère/IM7 à fibres de carbone et le PETI5/IM7 à fibres de carbone. L'objectif de cette expérience, est d'examiner l'effet d'environnement en terme de température et d'humidité ; sur le comportement mécaniques de ces matériaux, la stratification est établie en [0/90₂].

Lorsque des stratifiés sont exposés à des environnements chauds et humides, il y a apparition de microfissurations spontanées. Par exemple, lorsque le stratifié à matrice polymère Avimid K est immergé dans l'eau à température variant de 35°C à 95°C, l'augmentation de l'eau a un comportement obéissant à la loi de Fick, mais après que le niveau d'équilibre soit atteint pour l'eau saturée, un comportement non fickien est observé. L'analyse microscopique, révèle que l'augmentation est due à la formation de microfissures dans les plis à 90° en l'absence de tout chargement externe, le temps d'apparition de microfissurations induites par l'eau absorbée est t_m (en minutes),

$$\text{Log}t_m = \frac{3423}{T} + 1.35 \quad (2.16)$$

II.4.1 b) Expérience

Le vieillissement hygrothermique, est effectué sur une série de stratifiés de 12.7mm de largeur, 150mm de longueur, et 0.76mm d'épaisseur. Les échantillons, sont séchés à 120°C afin d'enlever toute trace d'humidité, et sont ensuite placés dans des tubes immergés dans l'eau ou des solutions, afin d'avoir une humidité relative d'environnement constante. Pendant le vieillissement, le contenu de l'humidité est périodiquement enregistré. Après que le temps de vieillissement serait écoulé, les échantillons sont séchés à 120°C et sont ensuite assujettis à des expériences de microfissurations pour mesurer la durabilité en fonction du temps de vieillissement. Pour l'avimid K3B polymere/IM7, l'expérience est faite sur des échantillons à 80°C immergés à 76%, 50%, 26% d'humidité relative. D'autres expériences, sont faites sur des échantillons à 60°C et 43°C. Pour le PETI5/IM7, L'expérience est faite pour les échantillons immergés à 80°C, afin de comparer les deux matrice.

Pour déterminer la durabilité en fonction du temps de vieillissement, la densité de microfissurations, est enregistrée en fonction de la charge appliquée. La charge est de 25KN à une vitesse de 0.01mm/s. Le chargement est interrompu périodiquement et les échantillons sont analysés, afin d'enregistrer la densité des microfissurations dans les plis. Les résultats sont analysés, en utilisant les méthodes décrites en [31], afin de déterminer la dureté de microfissurations à la rupture notée G_{mc} . Cette analyse, prévoit la formation de la prochaine microfissure, lorsque l'énergie réalisée par la fissure excède le taux d'énergie critique ou la durabilité G_{mc} du matériau. A la fin du temps de vieillissement, plusieurs stratifiés présentent des microfissurations spontanées. Ces ruptures sont causées par les contraintes résiduelles.

II.4.1 c) Résultats

La densité des microfissurations en fonction des charges appliquées après immersion dans l'eau à 80°C à différents instants ; est portée sur la figure 2.14. Après 200 heures de vieillissement il y a formation de microfissurations .

Les spécimens après 500, 800, et 1000 sont presque saturés en microfissures avant les tests mécaniques, le chargement ajoute quelques microfissures supplémentaires.

Le stratifié non vieilli, a une durabilité de $G_{mc} = 960J/m^2$, la durabilité décroît rapidement avec le temps de vieillissement. Les échantillons avec un temps de vieillissement supérieur à 500 heures, n'est pas une ligne régulière. Il est difficile de trouver G_{mc} , mais on

peut dire que la durabilité doit être très ($< 50 \text{ J/m}^2$). La durabilité des stratifiés saturés est assumée nulle.

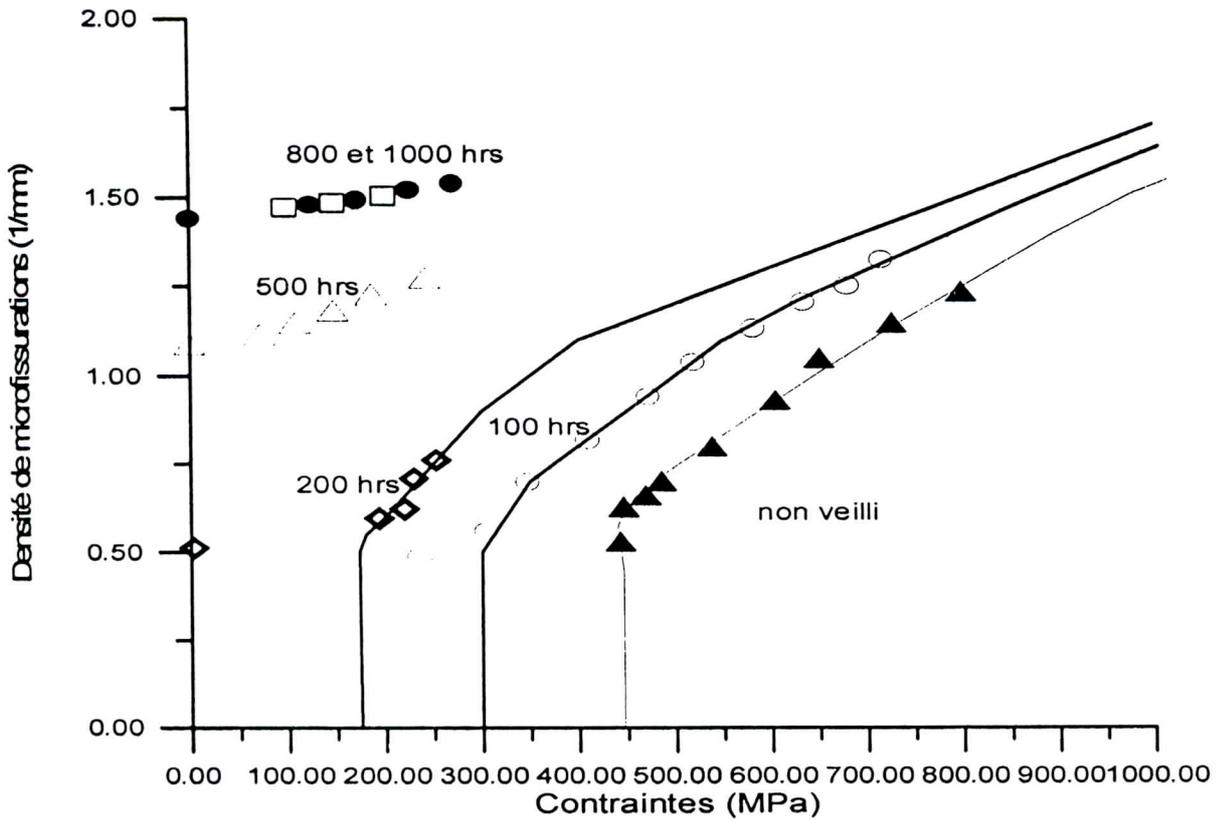


Figure 2.14 Densité de microfissuration en fonction de la charge appliquée pour l'Avimid K après immersion dans l'eau à 80°C pour différents instants [20]

La figure 2.15, représente G_{mc} en fonction du temps de vieillissement, des résultats de la figure 1 (immersion dans l'eau), lorsque les stratifiés sont exposés à des niveaux variables d'humidité relative, et à $T=80^\circ\text{C}$. La chute dans la durabilité est faible lorsque l'humidité est faible. Pour la plus faible humidité relative, soit de 26%, il n'y a pas de variation de durabilité durant les 1000 premières heures.

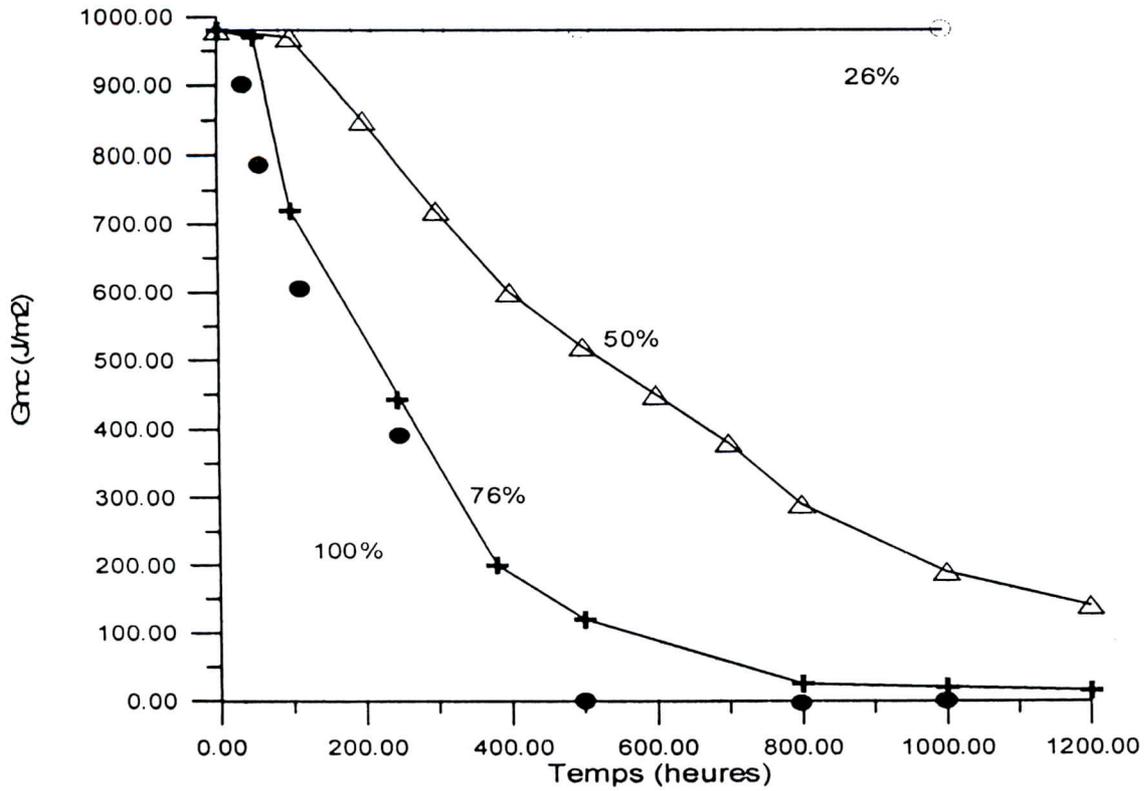


Figure 2.15 Energie à la rupture G_{mc} en fonction du temps pour l'Avimid K vieilli à 80°C, immergé dans l'eau (100%) exposé aux taux 76%, 50%, 26% d'humidité relative [20]

La figure 2.16 représente G_{mc} , la résistance à la rupture en fonction du temps de vieillissement dans l'eau à une température de 80°C pour le PETI5. La durabilité reste inchangée pendant 2000 heures, à 3500 heures et on note une chute de 30%.

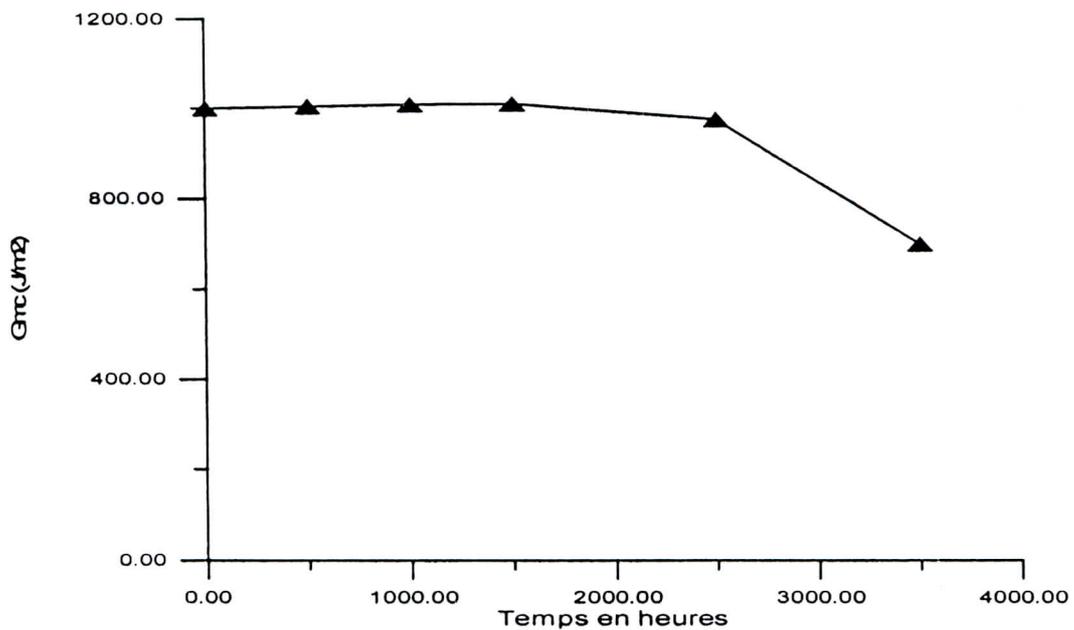


Figure 2.16 G_{mc} en fonction du temps pour du vieillissement pour le stratifié PETI5 à une température d'immersion dans l'eau de 80°C [20].

La figure 2.17, représente G_{mc} en fonction du temps de vieillissement pour l'avimid K, mais à des températures variables. On remarque que le taux de dégradation est faible, à faible température.

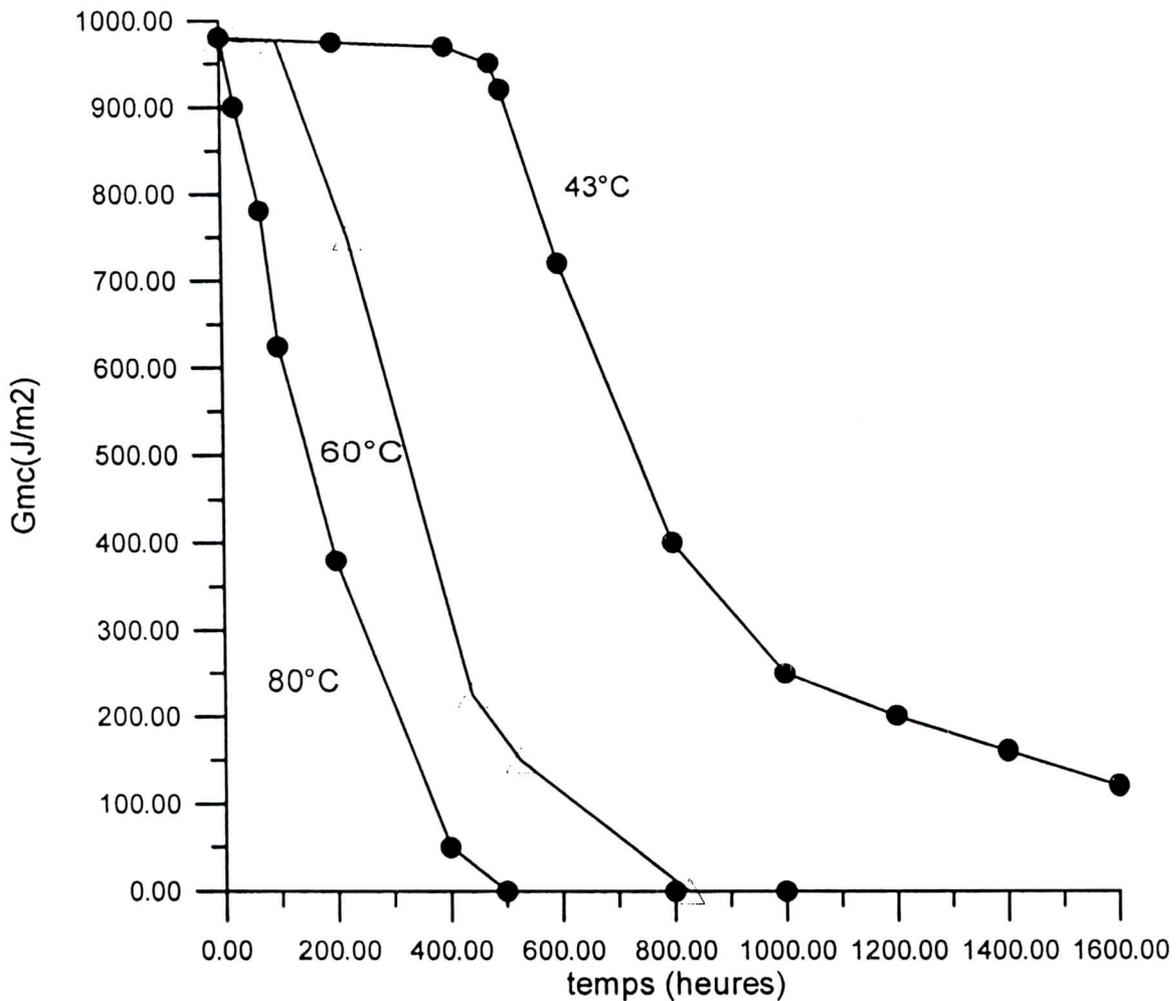


Figure 2.17 énergies à la rupture G_{mc} en fonction du temps pour l'avimid K immergé dans l'eau et vieilli à 80°C, 60°C, et 43°C [20]

Durant le temps de vieillissement sous différentes conditions, une prise de poids des spécimens et l'augmentation du taux de l'eau sont enregistrées. De telles données, peuvent être utilisées dans le calcul des caractéristiques de diffusion dans les stratifiés. Le tableau 2.3, présente des résultats en terme de prise de poids et du temps pour atteindre 90% du niveau de saturation.



Conditions	Gain (poids)	Humidité relative effective HR (%)	Heures pour un gain de 90%	Heures à 90% Dégradation de G_{mc}
80°C, Immergé	0.432	100	40	390
80°C, 76% RH	0.376	87	40	550
80°C, 50% RH	0.280	74	40	>1200
80°C, 26% RH	0.121	28	40	>>1200
60°C, Immergé	0.440	100	80	600
43°C, Immergé	0.420	100	170	>1400

Tableau 2.3 Accroissement d'eau dans le stratifié polymère Avimid K et taux de dégradation dans la durabilité

II.4.1 d) Conclusion

Les composites à matrice polyimide montrent, une dégradation dans la durabilité lorsqu'ils sont exposés à un milieu humide et à une température élevée. Le gain total en poids lors de l'immersion, est presque indépendant de la température. D'après les résultats, on voit bien que le niveau de saturation, dépend de l'humidité relative, ce qui est en accord avec les conclusions de Weitsman [47]. La nature de la matrice a un effet important sur le processus de dégradation.

II 4.2 Diffusion d'humidité dans les systèmes époxydes

L'étude expérimentale effectuée par VanLandingham [41], consiste à examiner l'effet de température et d'humidité sur deux systèmes de résines : L'EPON 328 epoxy (oligomeric prepolymer diglycidylether of bisphenol) fabriquée par Shell Corporation, et le PACM 20 (para-amino cyclohexyl) méthane, fabriquée par Air products. Les spécimens sont placés dans des environnements différents en température et en humidité, et sont pesés toutes les 10 à 15 minutes :

Environnement 1 20°C et 75% HR

Environnement 2 20°C et 85% HR

Environnement 3 50°C et 85% HR

II.4.2 a) Résultats et discussion

Pour plusieurs échantillons, l'absorption de l'humidité par les systèmes, présente un comportement Fickien durant l'état initial de la diffusion; le gain en poids $M(t)$ augmente

proportionnellement à $t^{1/2}$ avant la saturation.

Les échantillons (100-14 , 100-28) ont un comportement Fickien durant les 3000 premières heures, avant que le niveau de saturation ne soit atteint Figure 2.18 .

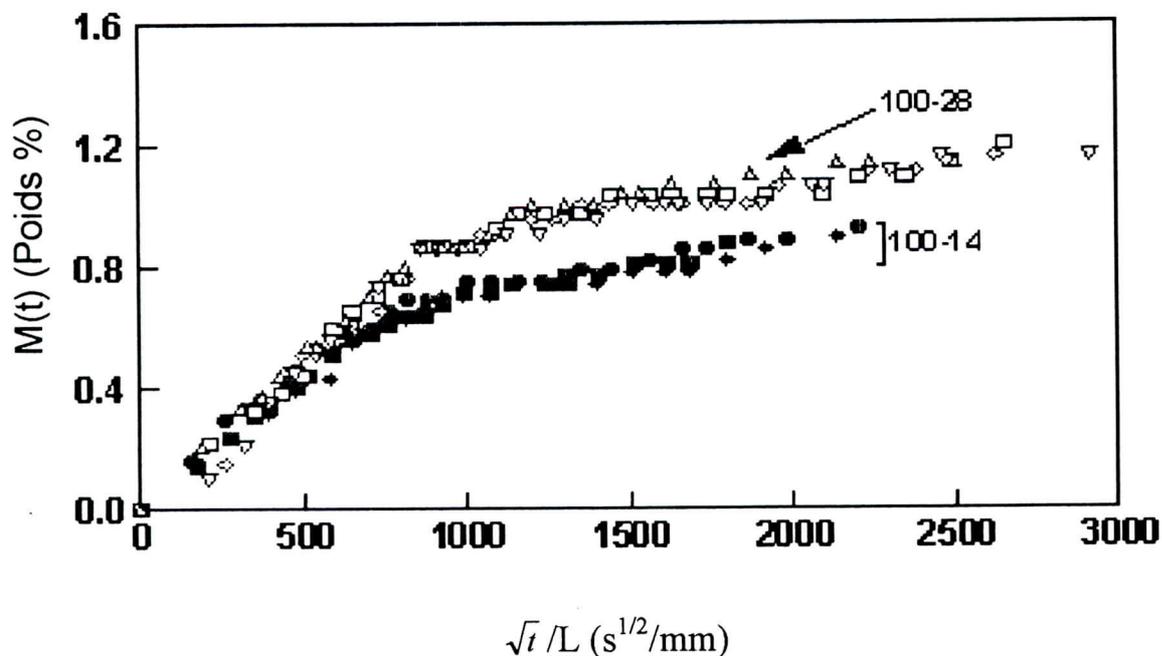


Figure 2.18 absorption d'humidité environnement 1-T=20°C, 75% HR [41]

Les figures 2.18 et 2.19, montrent que le niveau de saturation dépend de l'humidité relative HR de l'environnement. Pour une température $T=20^{\circ}\text{C}$, le niveau d'humidité à 85% est approximativement 15 à 20% plus élevé que celui à 75% HR; la température n'a pas un effet sur l'absorption Fickienne. Cependant la température augmente le taux de diffusion et accélère la diffusion causant des anomalies non Fickiennes plus prononcées à 50°C qu'à 20°C . La figure 2.20, montre que le niveau d'humidité pour les échantillons à 50°C et 85% HR excèdent celui des mêmes échantillons à 20°C et 85% HR ; cette augmentation dans le niveau de saturation avec la température s'explique par la réduction de l'interface lorsque la température est autour de T_g . les échantillons 100-60 et 100-40 sont les seuls à présenter la déviation significative; cette déviation est due à la formation de microfissurations ou d'un endommagement. La figure 2.21 montre que les échantillons 100-50, 100-70, 100-60 conditionnés à 50°C et 85% HR, atteignent le niveau de saturation après 200 25000 heures ; ce qui explique l'anomalie non Fickienne dont la saturation est atteinte après un temps de 3000 à 4000 heures.

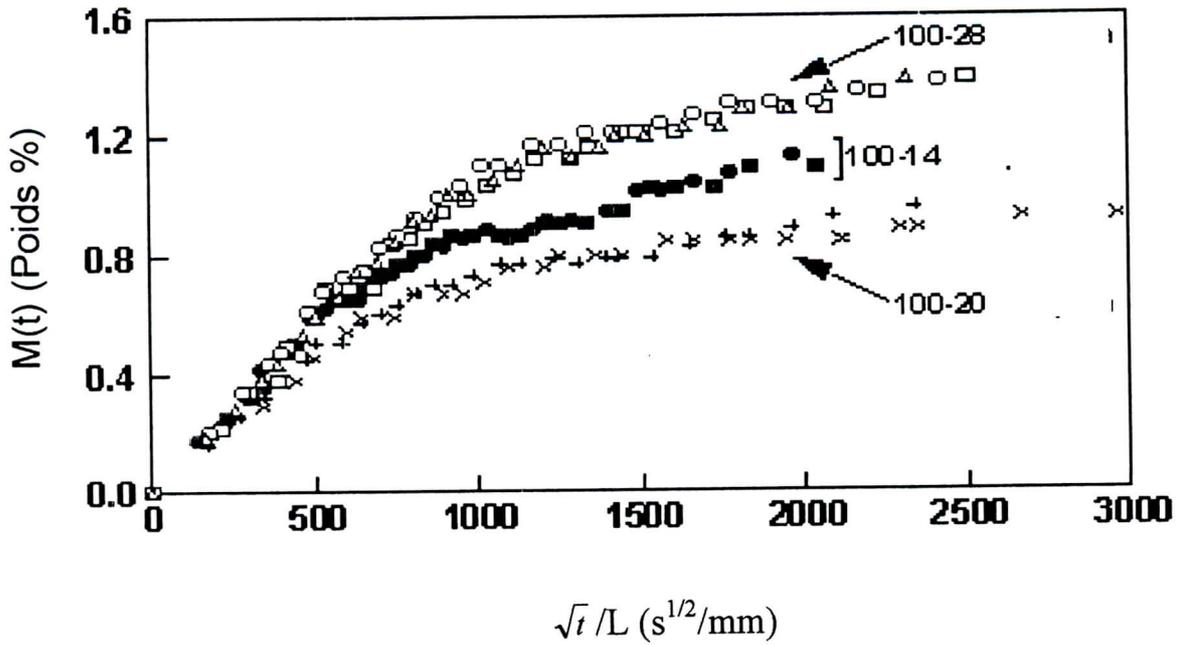


Figure 2.19 absorption d'humidité environnement 2-T=20°C, 85% HR [41]
Absorption non Fickienne

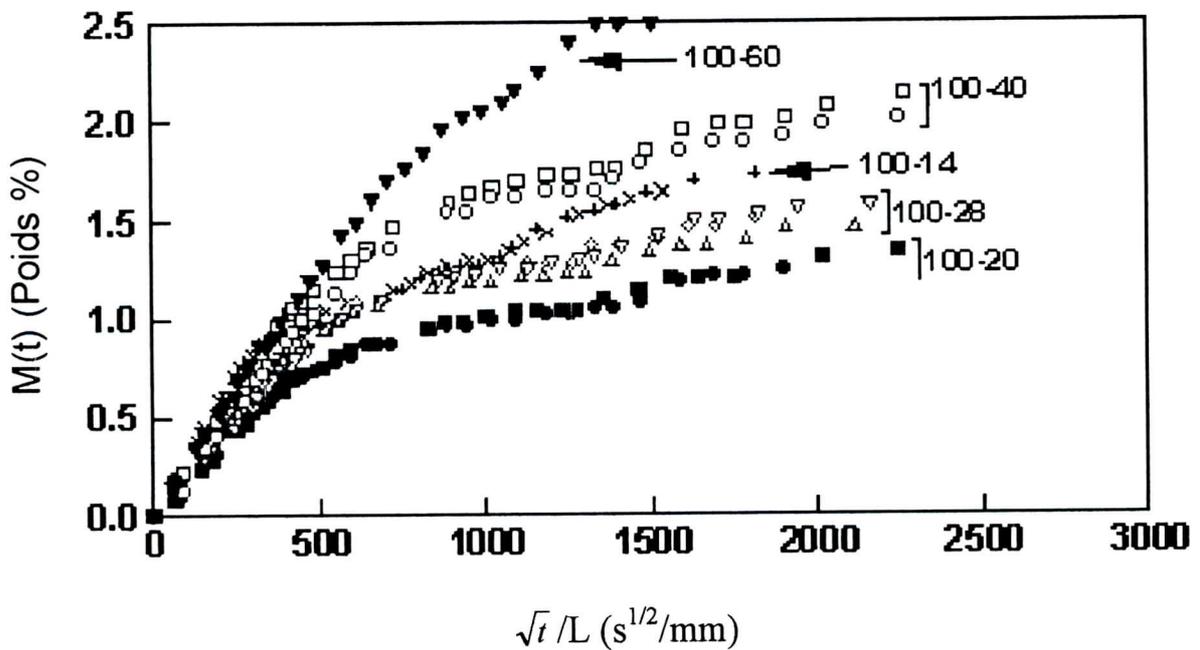


Figure 2.20 absorption d'humidité environnement 3-T=50°C, 85% HR [41]
absorption non Fickienne

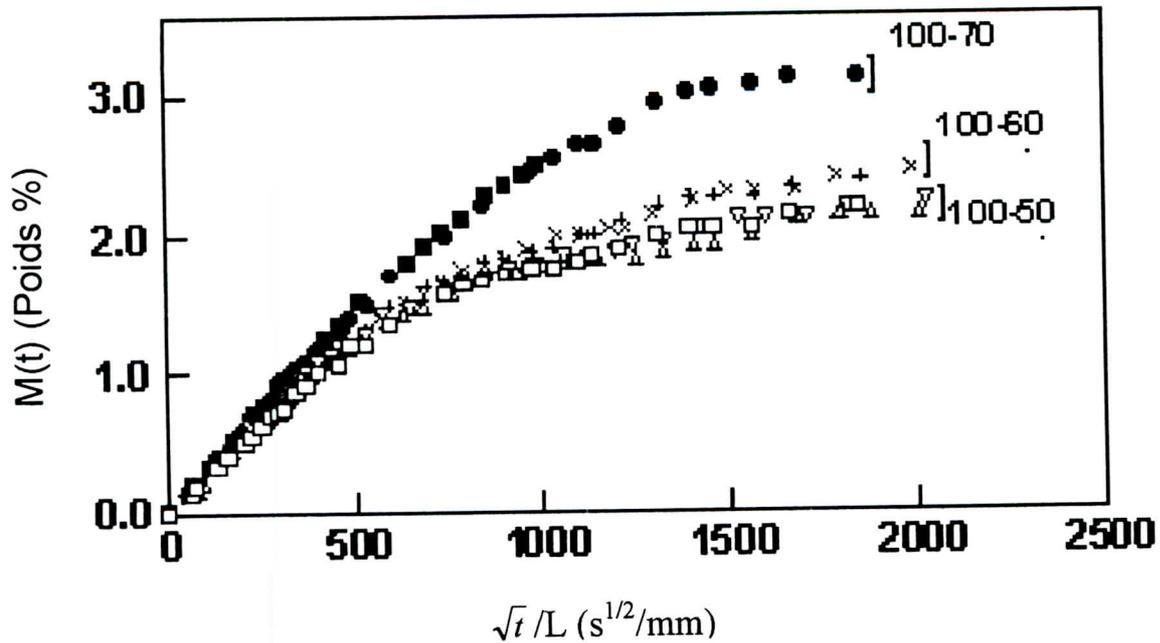


Figure 2.21 absorption d'humidité environnement 3-T=50°C, 85% HR [41]
absorption Fickienne pour les spécimens 100-50, 100-60, 100-70

II.4.2.b) Conclusion

Les résultats montrent que l'augmentation du niveau d'humidité, entraîne bien une augmentation dans le niveau de saturation ; cependant, l'augmentation de la température cause un comportement non Fickien prononcé. Le gonflement peut causer un changement significatif dans les contraintes internes, et dans les interfaces. Cette détérioration fragilise l'adhésion fibre matrice et cause la rupture de l'interface fibre matrice qui peut engendrer, la formation et la propagation des microfissures ainsi que d'autres endommagements qui réduisent les performances du composite.

II.5 EFFECT D'UNE MISSION SUPERSONIQUE SUR LE PROCESSUS DE DIFFUSION.

Les tests conduit par Mckague [49] sur un avion en vol (Homstead, Florida), ont pour but de montrer que les conditions de vol ont un impact sur le processus d'absorption d'humidité dans les composites graphite-epoxy. Les températures de vol sont celles correspondantes à une mission subsonique, -65°F (-54°C), pendant 90mn, suivi d' un choc

supersonique. Le choc entraîne un échauffement rapide à un pic de (300°F) à (149°C), suivi d' un refroidissement rapide.

La figure 2.22 représente les spécimens ayant subi le pic thermique, et qui sont séchés par la suite par une circulation d'air à une température de 180°F, afin d'enlever toutes traces d'humidité. Une fois replacés dans l'environnement humide, le processus de réabsorption redémarre, les spécimens ayant subi le pic thermique, présentent un comportement en absorption considérable.

La figure 2.23 montre la simulation avec et sans choc supersonique pour les spécimens. Sans le pic thermique le niveau d'équilibre de l'humidité est linéaire en fonction de l'humidité relative durant toute l'exposition, ceux-ci prouvent que le pic permanent augmente la durée du coefficient de diffusion.

Le service supersonique peut causer un changement permanent dans le comportement de diffusion des composites époxydes à renfort fibres. Une exposition périodique au pic thermique, qui est due au choc supersonique, cause une augmentation du coefficient de diffusion, qui peut doubler de valeur, le processus d'absorption est en changement permanent durant le vol.

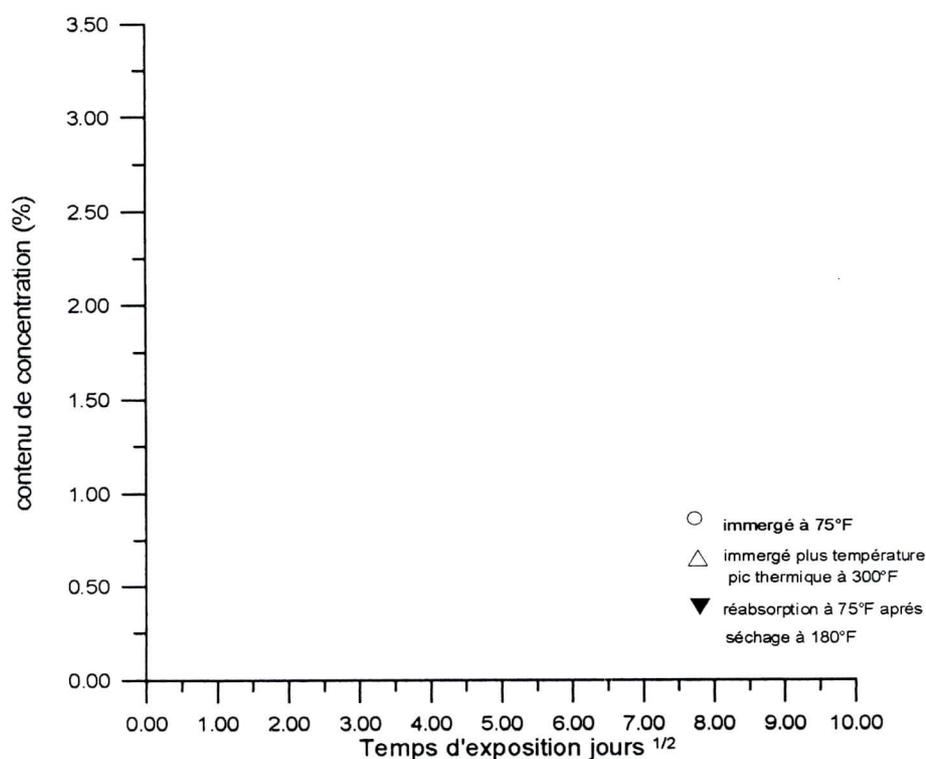


Figure 2.22 Comportement en absorption des spécimens ayant subi un pic thermique suivi d'un séchage [49]

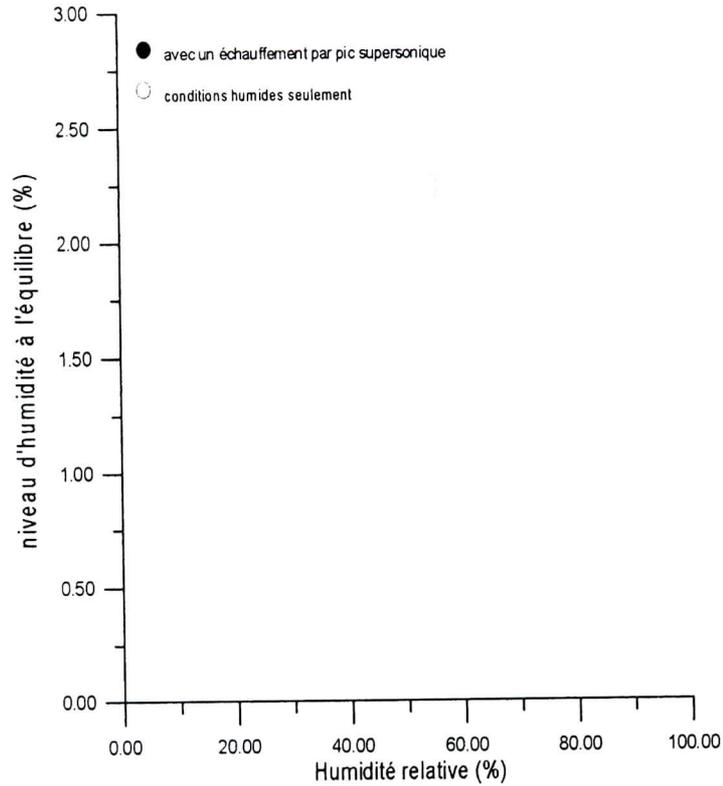


Figure 2.23 Relations du niveau d'équilibre d'humidité avec l'humidité relative, avec et sans choc supersonique

III.6 CYCLE DE MISSION D'AVION

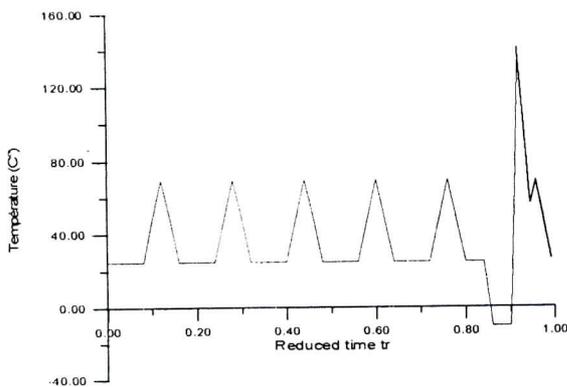


Figure 2.24 Température ambiante d'un avion en service, en fonction du temps réduit $tr=T/6$ réduit, 6heures, 6jours, 6 semaines [50]

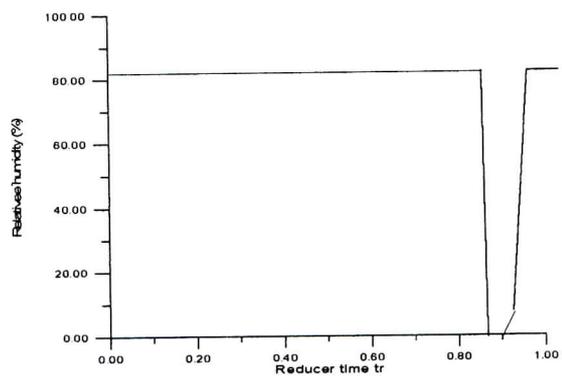


Figure 2.25 Cycle d'humidité relative d'un d'avion en fonction du temps $tr=T/6$, 6heures, 6jours, 6semaines [50]

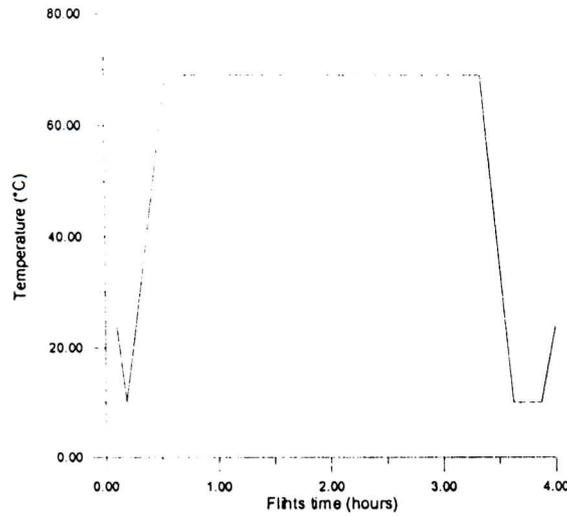


Figure 2.26 Profil de température en vol supersonique[42]

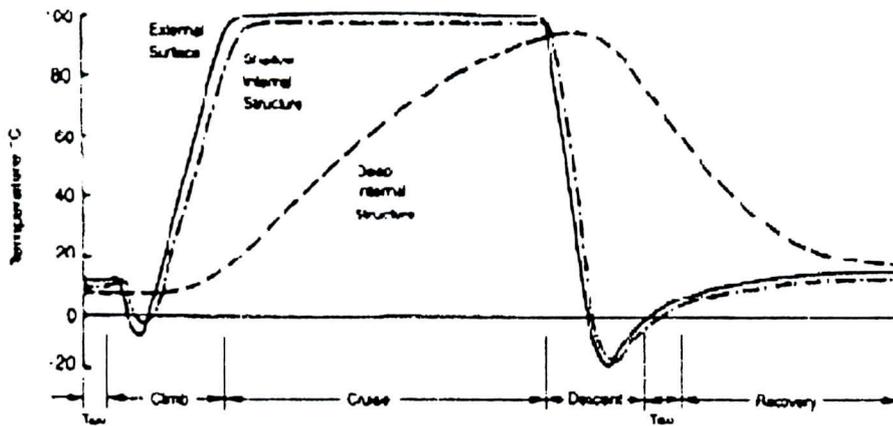


Figure 2.27 Température sur la structure pour l'avion Concorde [55]

II 7 CONCLUSION

Ce parcours, nous a permis de nous rendre compte des phénomènes hygrothermiques, qui se produisent à l'échelle microscopique dans certaines conditions d'environnement, et leurs effets sur les composites à matrice polymère. Il apparaît clairement que les processus de diffusion et de dégradation, sont fonction du facteur température-d'humidité combiné. Ce qui nous amène à conclure, que la prise en compte des effets d'environnement en terme de température et d'humidité, est incontestable lors de toute étude de modélisation mécanique des stratifiés composites; ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE III

MODELISATION HYGROTHERMOMECHANIQUE

Nous établissons dans ce chapitre, d'une façon progressive, les équations de comportement mécanique d'un stratifié. Nous examinons par la suite, de quelles manières sont modifiées ces équations, dans le cas où l'on tient compte des phénomènes de dilatations, et les conséquences induites, sur le comportement mécanique des structures composites considérées. La rédaction de ce chapitre est principalement inspiré des références, Berthelot [18], Vinson [28], et Sierakowski [29].

III.1 GENERALITES

Une plaque est un solide, défini par une surface de référence plane (plan xy), et par une épaisseur notée $h(x, y)$, petite par rapport aux autres dimensions (fig.3.1). Une plaque composite est constituée d'un empilement de différentes couches. La théorie des plaques considérée est basée sur :

1. L'hypothèse dite des sections droites (ou planes) : Les points matériels, situés sur une normale à la surface moyenne non déformée, restent sur une droite dans la configuration déformée. Les déplacements u et v suivant x et y d'un point quelconque $M(x, y, z)$, varient alors linéairement en fonction de z , et le déplacement transversal w suivant z , n'est fonction que de x et y . Cette hypothèse a été proposée par plusieurs auteurs, dont les plus connus sont : Reissner , Hencky , Bollé, Mindlin [11]. Elle a été initialement proposée pour les plaques isotropes, mais a ensuite été appliquée aux plaques orthotropes et multicouches [11].
2. L'hypothèse d'une déformation transversale, ε_z nulle (pas de variation d'épaisseur).
3. L'hypothèse des contraintes planes : dans les relations de comportement, la contrainte σ_z est négligeable par rapport aux autres composantes, du tenseur de contraintes.
4. L'hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche, dans le cas d'une plaque composite (l'axe z est l'axe d'orthotropie de toutes les couches) [11].

Le stratifié est constitué de n couches, numérotées de la face inférieure à la face supérieure. La Surface moyenne, est choisie comme plan de référence (Oxy), et l'axe Oz est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches. Chaque couche k , est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure (h_{k-1}), et de sa face supérieure (h_k).

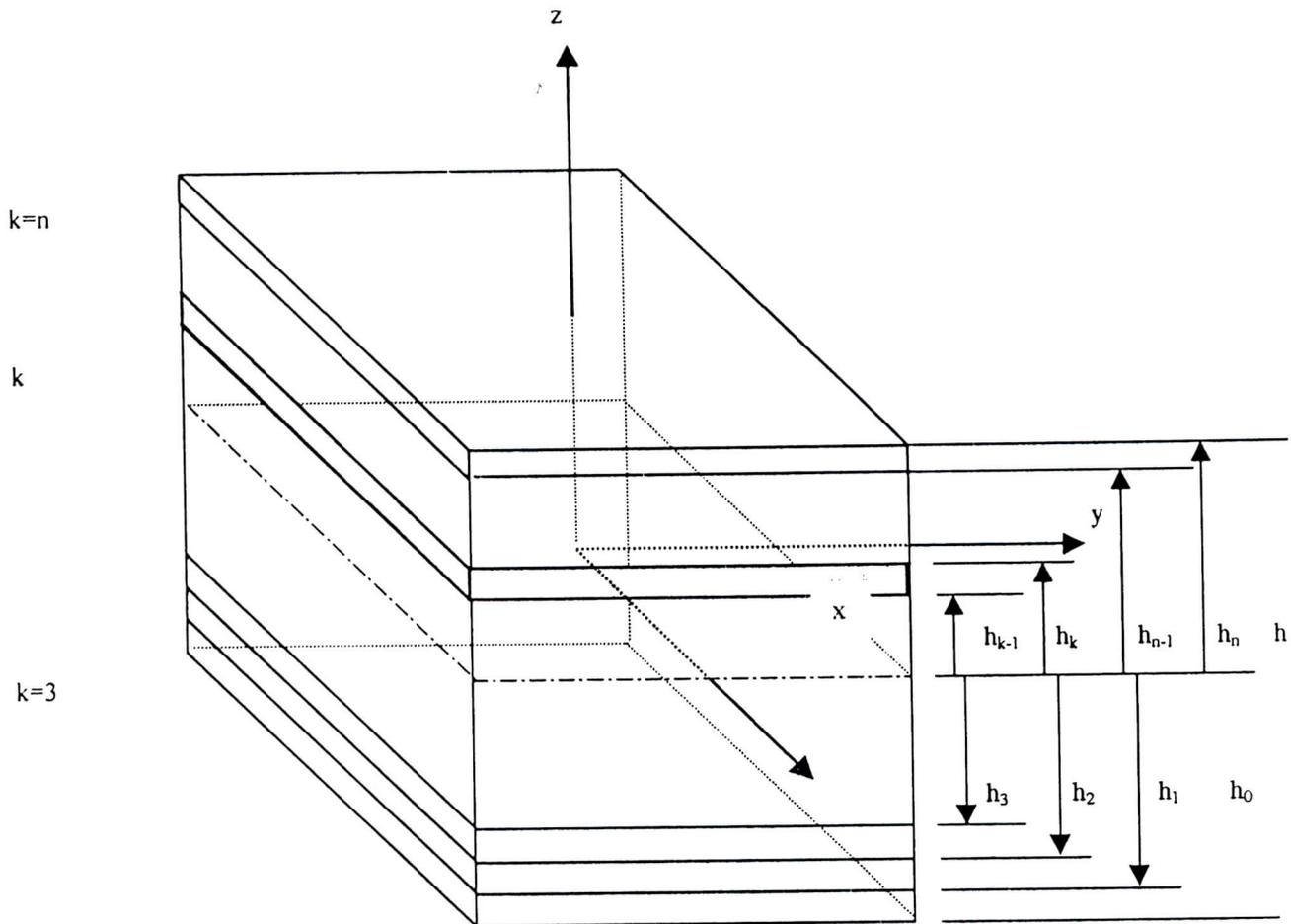


Figure 3.1 Schéma d'un stratifié

III.2 THEORIE CLASSIQUE DES STRATIFIES

III.2.1 Hypothèses de la théorie classique des stratifiés

La théorie classique des stratifiés utilise un schéma de déplacements, appelé schéma de Kirchhoff du premier degré, qui est développé à partir du point de référence $M_0(x, y, 0)$ (équation 3.1), elle utilise également un schéma du premier degré pour les déformations (équation 3.2), et fait ensuite une hypothèse supplémentaire, qui consiste à négliger le cisaillement transverse. Dans ce schéma, les déformations en cisaillement transverse sont nulles (équation 3.3), Soit [18]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\gamma_{xz}=0 \text{ et } \gamma_{yz}=0 \quad (3.3)$$

Cette hypothèse implique d'après (l'équation 3.2) :

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le champ des déplacements, s'écrit alors, d'après (l'équation 3.1)

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) \quad (3.5)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

La déformée de la normale au plan moyen (Oxy), est alors un segment de droite normale à la déformée du plan moyen, l'ensemble des notations est schématisé sur la figure 3.2 .

III.2.2 Expression du champ des déformations

Le champ des déformations s'écrit d'après (l'équation 3.2), et en tenant compte de (l'équation 3.4) :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{zz} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (3.6)$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La matrice de déformations, se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Finalement le champ des déformations est la superposition :

-des déformations en membrane :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

s'exprimant exclusivement, en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (oxy) des points de ce plan :

- et des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon^f_{xx} \\ \varepsilon^f_{yy} \\ \gamma^f_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

S'exprimant, en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen, et de la cote z du point M . Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y) \quad (3.11)$$

Avec :

$$K(x, y) = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La matrice $K(x, y)$ est appelée matrice de courbures de la plaque sollicitée en flexion.

III.2.3 Champ des contraintes

III.2.3 a) Forme du champ des contraintes

Le champ des contraintes, est obtenu à partir de la relation (1.50). Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons, pour la couche k :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= Q'_{11}\varepsilon_{xx} + Q'_{12}\varepsilon_{yy} + Q'_{16}\gamma_{xy} \\
 \sigma_{yy} &= Q'_{12}\varepsilon_{xx} + Q'_{22}\varepsilon_{yy} + Q'_{26}\gamma_{xy} \\
 \sigma_{xy} &= Q'_{16}\varepsilon_{xx} + Q'_{26}\varepsilon_{yy} + Q'_{66}\gamma_{xy} \\
 \sigma_{yz} &= 0 \\
 \sigma_{xz} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Le tenseur des contraintes en M, est donc de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

Le champ des contraintes, se réduit aux seuls contraintes en membrane : $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$

III.2.3 b) Expression des contraintes

Les relations (3.19), montrent que les contraintes dans la couche k, s'expriment par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_K = Q'_K \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

avec :

$$Q'_K = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_K$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_K = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_K \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_K \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Soit :

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k k(x, y) \quad (3.23)$$

$\sigma_k(M)$, représente la matrice des contraintes dans la couche $k: h_{k-1} \leq z \leq h_k$. La matrice de rigidité réduite Q'_k , varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

III.3 EXPRESSION DES RESULTANTES ET MOMENTS

III.3.1 Résultantes en membrane

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x, y)$, est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz \quad (3.24)$$

Soit dans le stratifié :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (3.25)$$

L'expression (3.25) associé à la relation (3.22) ou (3.23), conduit à l'expression des résultantes en membrane, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k k(x, y)] dz \\ N(x, y) &= \sum_{k=1}^n \left[Q'_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[Q'_k k(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \\ N(x, y) &= \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_{kk} \right] k(x, y) \end{aligned}$$

Soit en définitive :

$$N(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + B k(x, y) \quad (3.26)$$

En introduisant les matrices :

$$A = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k$$

$$A = [A_{ij}], \text{ avec } A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1})(Q'_{ij})_k \quad (3.27)$$

$$B = [B_{ij}], \text{ avec } B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \quad (3.28)$$

L'expression développée des résultantes, s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Ces équations montrent, que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane (N_x, N_y, N_{xy}), ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane, mais sont également fonctions, des courbures en flexion et en torsion.

III.3.2 Moments de flexion et de torsion

Les moments de flexion et de torsion, sont définis par :

$$M_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (3.30)$$

M_x et M_y sont les moments de flexion, et M_{xy} les moments de torsion, ils sont schématisés en figure 3.3. Le champ des moments, s'explique en introduisant l'expression (3.2) des contraintes dans l'expression (3.30), soit :

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 Q'_k k(x, y)] dz$$

où

$$M_f(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \right] k(x, y)$$

Soit :

$$M_f(x,y) = B\varepsilon_m(x,y) + Dk(x,y) \quad (3.31)$$

En introduisant la nouvelle matrice :

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k$$

$$D = [D_{ij}] \text{ avec } D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k \quad (3.32)$$

L'expression développée des moments, s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Les moments de flexion et de torsion, sont donc des fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonctions des déformations en membrane.

III.4 EQUATION DU COMPORTEMENT MECANIQUE D'UN STRATIFIE

III.4.1 Equation constitutive

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée, exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions (3.29) et (3.33), suivant une seule écriture matricielle sous la forme [18], [28], [29] :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Soit, sous forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ - \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ - & - & - \\ B & | & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ - \\ k \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Les termes des matrices introduites, sont donnés par les expressions (3.27), (3.28) et (3.32). Ils peuvent être également exprimés en introduisant; l'épaisseur e_k , et la cote z_k du centre de la couche k , sous la forme :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k \quad (3.36)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k z_k \quad (3.37)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k (e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12}) \quad (3.38)$$

Les coefficients A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} de l'équation constitutive (3.34) d'un stratifié, s'expriment donc à partir des constantes de rigidité réduites des couches, obtenues pour chaque couche en fonction des relations (1.49), et des expressions (1.52).

III.4.2 Matrice de rigidité

La matrice intervenant dans l'expression (3.34), est la matrice de rigidité du stratifié, décrivant le comportement élastique macroscopique du stratifié au point $M_0(x,y)=M(x,y,0)$. La matrice A est la matrice de rigidité en membrane, D est la matrice de rigidité en flexion, et B la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

Divers couplages peuvent être observés . Le couplage traction-cisaillement provient des termes A_{16} et A_{26} . Le couplage Membrane-flexion résulte des termes B_{11} , B_{12} , et B_{22} , alors que le couplage membrane-torsion résulte des termes B_{16} et B_{26} . Enfin, le couplage flexion-torsion résulte des coefficients D_{16} et D_{26} .

III.5 DETERMINATION DES DEFORMATION ET CONTRAINTES

Les stratifiés multidirectionnels, étant caractérisés par une discontinuité de contraintes dans les plis, il est préférable de travailler avec les déformations, qui sont continues à travers l'épaisseur. L'inversion de l'équation, (3.34) permet d'exprimer les déformations en membrane et en courbures.

III.5.1 Déformations en membrane et courbures

L'expression des déformations en fonction des caractéristiques du stratifié, et des efforts et moments extérieurs est,

$$\begin{bmatrix} \epsilon^0_{xx} \\ \epsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \\ - \\ k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & | & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} & | & b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & | & b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ - & - & - & | & - & - & - \\ c_{11} & c_{12} & c_{16} & | & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{26} & | & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} & | & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ - \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

où

$$\begin{bmatrix} \epsilon^0 \\ - \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & | & b \\ - & | & - \\ c & | & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ - \\ M \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

avec les matrices de compliances, définies comme suit :

$$\begin{aligned} a &= A^{-1} - B^* D^{*-1} C^* \\ b &= B^* D^{*-1} \\ c &= -D^{*-1} C^* \\ d &= D^{*-1} \end{aligned} \quad (3.41)$$

sachant que :

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \text{matrice inverse de } A \\
 B^* &= -A^{-1}B \\
 C^* &= BA^{-1} \\
 D^* &= D - BA^{-1}B
 \end{aligned}
 \tag{3.42}$$

III.5.2 Champ des déformations

Le champ des déformations au point (x,y,z), à l'aide de l'expression (3.16) s'exprime :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

On remarque une variation linéaire suivant l'épaisseur .

Les déformations, exprimées dans les axes principaux de la couche d'orientation θ (figure 1.4), s'expriment :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix}_k = T \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}
 \tag{3.43}$$

Avec T,

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}
 \tag{3.44}$$

III.5.3 Champ des contraintes

Le champ des contraintes dans le repère XYZ, est donnée par l'équation (1.50) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Le champs des contraintes dans le repère LT :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_k = T' \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k \quad (3.45)$$

Avec :

$$T' = [T(-\theta)] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Soit finalement,

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{LT} \end{bmatrix}_k \quad (3.47)$$

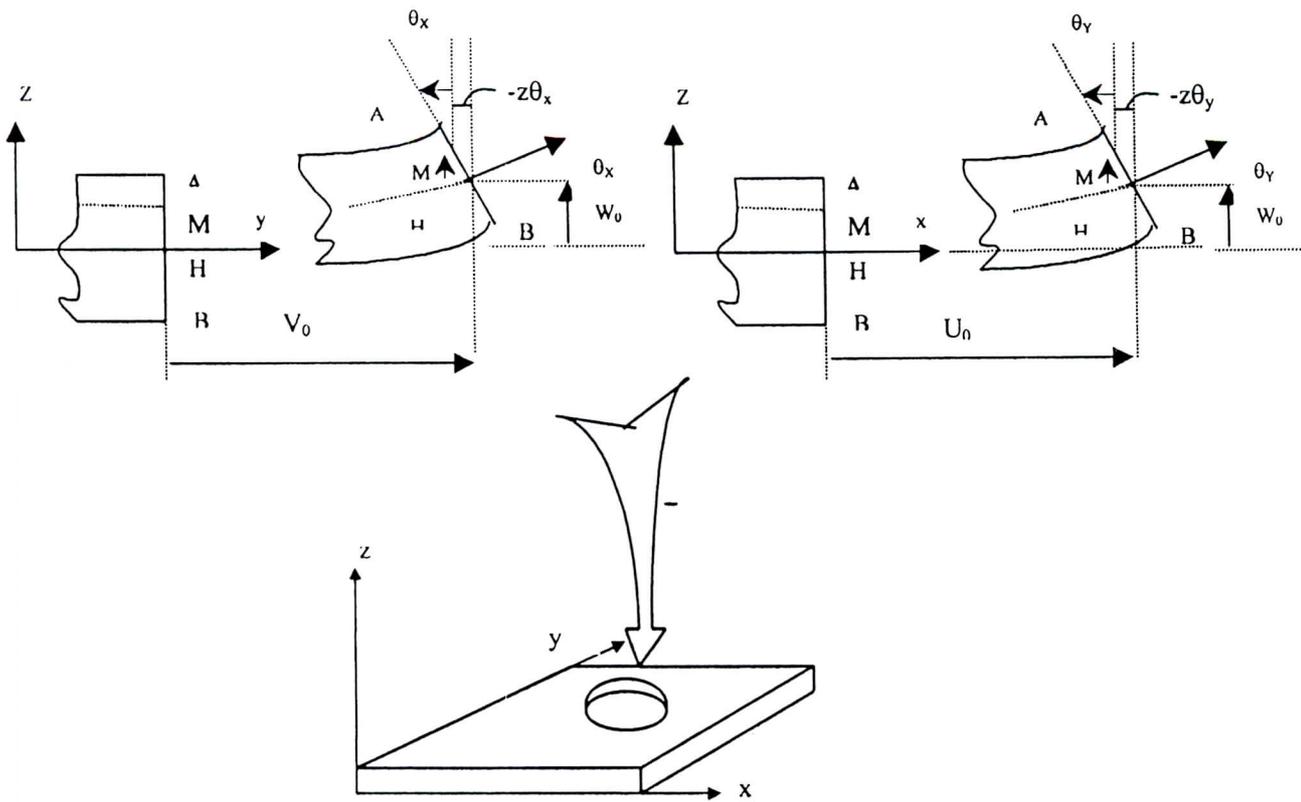


Figure 3.2 Schématisation des déformations dans la théorie classiques des stratifiés

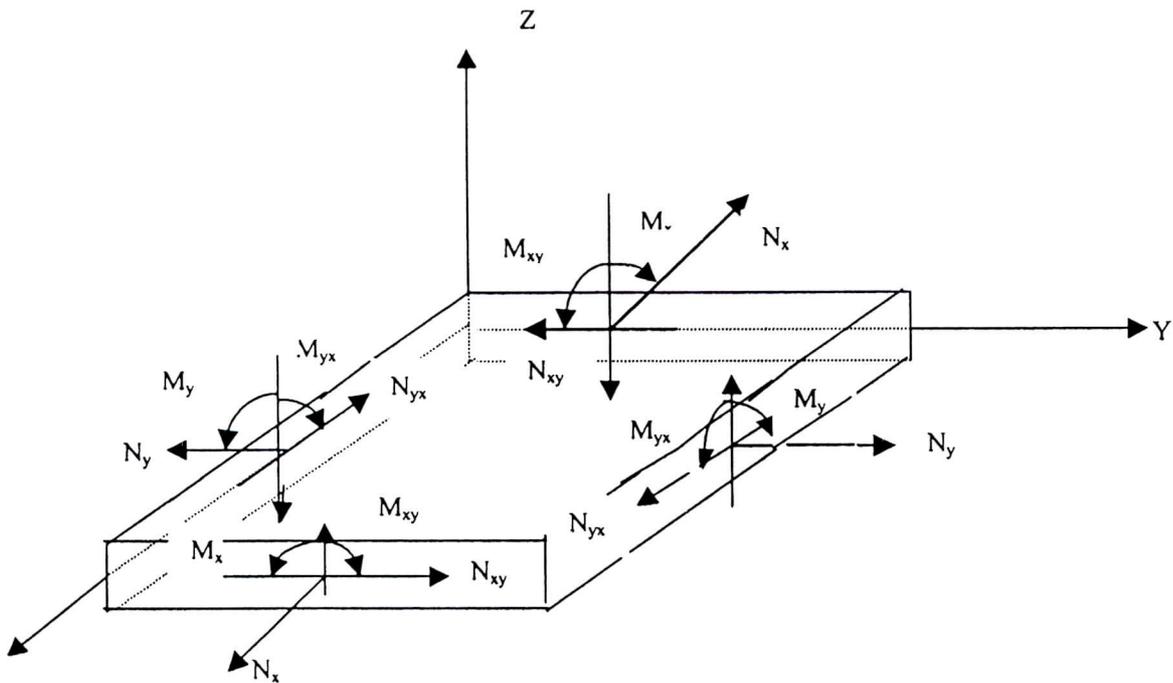


Figure 3.3 Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément du stratifié, et des moments de flexion et de torsion

III.6 EQUATIONS DU COMPORTEMENT DES STRATIFIES TENANT COMPTE DES PHENOMENES DE DILATATION

La variation de la température, produit une dilatation thermique (extension ou contraction) du matériau. Les phénomènes de dilatation thermique, peuvent être décrits en écrivant les déformations en un point (x, y, z) , et à l'instant t sous la forme [18] :

$$e^*_{i(\text{thermique})} = \alpha \Delta T(x, y, z, t) \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.48)$$

où α_i sont les coefficients de dilatation thermique, et ΔT est la variation de température à partir d'une température de référence, pour laquelle les déformations thermiques sont considérées comme étant égales à zéro. La répartition des températures dans la structure et au cours du temps, est déterminée à partir des phénomènes de transfert de chaleur tels, la loi de Fourier.

Les phénomènes de dilatation par absorption ou désorption d'humidité, conduisent à des effets analogues aux effets thermiques. Les déformations qui en résultent peuvent se mettre sous la forme :

$$e^*_{i(\text{gonflement})} = \beta \Delta C(x, y, z, t) \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.49)$$

où β_i sont les coefficients de gonflement, appelés coefficients d'expansion hygroscopique, et ΔC est la variation de la concentration de l'agent de gonflement, à partir d'un état où les déformations de gonflement sont nulles. La répartition des concentrations est déterminée à partir de concepts physico-chimiques tels la loi de Fick.

De manière à inclure les effets des phénomènes de dilatation, les lois d'élasticité (1.29) et (1.27), écrites dans un état de référence où les déformations dues aux phénomènes de dilatation sont nulles, doivent être modifiées et écrites respectivement sous la forme :

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^6 S_{ij} \sigma_j + e^*_i \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.50)$$

$$\sigma_i = \sum C_{ij} (\varepsilon_j - e^*_j) \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.51)$$

$$e^*_i = e^*_{i(\text{thermique})} + e^*_{i(\text{gonflement})} \quad (3.52)$$

III.6.1 Coefficients d'expansion thermique et hygroscopique pour Les unidirectionnels

Le comportement hygrothermique des stratifiés unidirectionnels est caractérisé par : Deux coefficients d'expansion thermique α_L et α_T , et deux coefficients d'expansion hygroscopique β_L et β_T figure (3.4), qui sont reliés aux propriétés des constituants, (voir équations 1.12 à 1.16) [29], [39], [40].

Les coefficients d'expansion hygrothermique, sont obtenus par mesure des déformations en fonction de la température. Les coefficients α_L et α_T ne sont pas constants, et varient avec la température. Certains coefficients pour quelques matériaux sont listés au tableau 3.1, il apparaît que le verre S est le seul matériau ayant des coefficients positifs devant les systèmes à carbone et à kevlar, qui présentent des coefficients d'expansions longitudinaux négatifs. On voit que le système à kevlar est le matériau le plus anisotrope du côté thermique,

Dans le repère (x y) ;

- les coefficients de dilatation thermique s'expriment :

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \alpha_L m^2 + \alpha_T n^2 \\ \alpha_y &= \alpha_L n^2 + \alpha_T m^2 \\ \alpha_{xy} &= 2(\alpha_L - \alpha_T)mn\end{aligned}\tag{3.53}$$

- et les coefficients d'expansion hygroscopique sont:

$$\begin{aligned}\beta_x &= \beta_L m^2 + \beta_T n^2 \\ \beta_y &= \beta_L n^2 + \beta_T m^2 \\ \beta_{xy} &= 2(\beta_L - \beta_T)mn\end{aligned}\tag{3.54}$$

Avec : $m = \cos\theta$ et $n = \sin\theta$ (3.55)

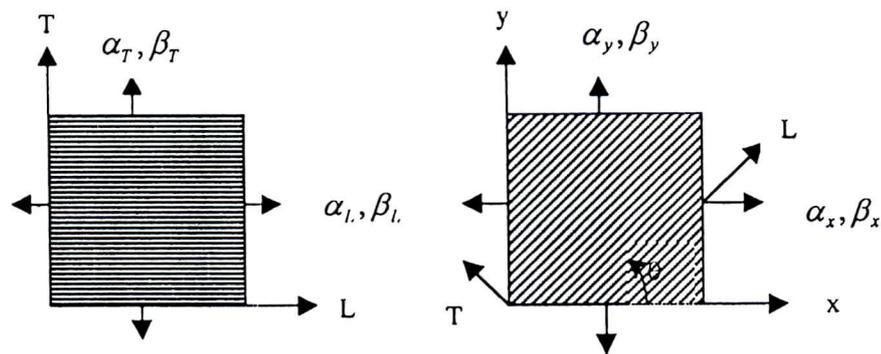


Figure 3.4 Coefficients d'expansions thermiques et hygroscopiques d'un stratifié unidirectionnel

Matériaux	Coefficient d'expansion thermique longitudinal α_L 10^{-6} ($10^{-6}/^{\circ}\text{F}$)				Coefficient d'expansion thermique transversal α_T $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ (10^{-6})			
	24°C	75°F	177°C	350°F	24°C	75°F	177°C	350°F
	Boron/epoxy (boron/AVCO 5505)	6.1	3.4	6.1	3.4	30.3	16.9	37.8
Boron/polymide (boron/WRD 9371)	4.9	2.7	4.9	2.7	28.4	15.8	28.4	15.8
Carbon/epoxy (AS4/3501-6)	-0.9	-0.5	-0.9	-0.5	27.0	15	34.2	19
Carbon/polyimide (modmor I/WRD 9371)	-0.4	-0.2	-0.4	-0.2	25.3	14.1	25.3	14.1
S-glass/epoxy (Scotchply 1009-26-5901)	3.8	2.1	3.8	2.1	16.7	9.3	54.9	30.5
S-glass/epoxy S-glass/ERLA 4617)	6.6	3.7	14.1	7.9	19.7	10.9	26.5	14.7
Kevlar/epoxy (Kevlar 49/ERLA 4617)	-4.0	-2.2	-5.7	-3.2	57.6	32	82.8	46

Tableau 3.1 Coefficients d'expansions thermiques de composites unidirectionnels [29]

III.6.2 Déformations hygrothermiques dans les stratifiés unidirectionnels

Lorsque le stratifié est soumis à un changement de température et d'humidité dans un environnement quelconque, alors $\Delta T = T - T_0$ et $\Delta C = C - C_0$, où T_0 et C_0 sont les conditions de l'état de référence hygrothermique. [1],[2], [16]

Les déformations hygrothermiques, dans les axes principaux du stratifié sont :

$$\begin{aligned} e_L &= \varepsilon_L^{ht} = \alpha_L \Delta T + \beta_L \Delta C \\ e_T &= \varepsilon_T^{ht} = \alpha_T \Delta T + \beta_T \Delta C \\ e_{LT} &= \varepsilon_{LT}^{ht} = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Les déformations hygrothermiques, dans les axes du stratifié sont définis par :

$$\begin{aligned} e_x &= \varepsilon_x^{ht} = \alpha_x \Delta T + \beta_x \Delta C \\ e_y &= \varepsilon_y^{ht} = \alpha_y \Delta T + \beta_y \Delta C \\ e_s &= \varepsilon_s^{ht} = \alpha_{xy} \Delta T + \beta_{xy} \Delta C \end{aligned} \quad (3.57)$$

III.6.3 Relations hygrothermoélastiques: contraintes et déformations

Lorsque un stratifié multidirectionnel, est assujéti à des chargements mécaniques [N] et [M], et hygrothermiques (ΔT et ΔC), l'état principal hygrothermoélastique $[\varepsilon]_k^{xy}$ dans le stratifié, est égale à la somme des déformations produites par les contraintes dans le stratifié.

L'équation (3.50) donne :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{sx} & S_{sy} & S_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{bmatrix}_k \quad (3.58)$$

L'équation (3.51) donne :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{61} \\ Q'_{61} & Q'_{62} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - e_x \\ \varepsilon_{yy} - e_y \\ \gamma_{xy} - e_s \end{bmatrix}_k \quad (3.59)$$

En introduisant l'équation (3.16) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{61} \\ Q'_{61} & Q'_{62} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + zk_x - e_x \\ \varepsilon_y^0 + zk_y - e_y \\ \gamma_s^0 + zk_s - e_s \end{bmatrix}_k \quad (3.60)$$

Soit finalement :

$$[\sigma]_{x,y}^k = [Q]_{x,y}^k [\varepsilon^0]_{x,y} + [Q]_{x,y}^k [k]_{x,y} z - [Q]_{x,y}^k [e]_{x,y}^k \quad (3.61)$$

L'intégration des contraintes à partir de l'équation (3.60), à travers l'expression de chaque couche, donne la résultante en force :

$$\begin{aligned} [N]_{x,y} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\sigma]_{x,y}^k dz \\ &= \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \left\{ [\varepsilon^0]_{x,y} + z[k]_{x,y} - [e]_{x,y}^k \right\} dz \end{aligned} \quad (3.62)$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{61} \\ Q'_{61} & Q'_{62} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{bmatrix}_k \right\} dz \quad (3.63)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_s^{HT} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

[A] et [B], sont les matrices de rigidité définies en (3.27) et (3.28). $[N^{HT}]_{x,y}$ représentent les résultantes des forces hygrothermiques :

$$\begin{bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_s^{HT} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{bmatrix}_k t_k \quad (3.65)$$

$t_k = h_k - h_{k-1}$, est l'épaisseur de la couche k.

Les moment résultants à travers les plis du stratifié sont dérivés à partir de l'équation (3.60),

$$\begin{aligned} [M]_{x,y} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\sigma]_{x,y}^k z dz \\ &= \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \{ [\varepsilon^0]_{x,y} + z[k]_{x,y} - [e]_{x,y}^k \} z dz \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_s^{HT} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

[B] et [D] sont les matrices de rigidité définies en [3.28] et [3.32]. $[M^{HT}]_{x,y}$ sont les moments hygrothermiques définis comme suit :

$$\begin{bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_s^{HT} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_s \end{bmatrix}_k z_k t_k \quad (3.68)$$

Les équations (3.64) et (3.67) sont réécrites sous la forme,

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_s^{HT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}_x \\ \bar{N}_y \\ \bar{N}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_s^{HT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \\ \bar{M}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Finalement en bref,

$$[\bar{N}]_{x,y} = [N]_{x,y} + [N^{HT}]_{x,y} = [A] \varepsilon^0_{x,y} + [B][k]_{x,y} \quad (3.71)$$

$$[\bar{M}]_{x,y} = [M]_{x,y} + [M^{HT}]_{x,y} = [B] \varepsilon^0_{x,y} + [D][k]_{x,y} \quad (3.72)$$

$[\bar{N}]$ et $[\bar{M}]$ sont respectivement, les résultantes en forces et en moments, égales respectivement à la somme des composantes mécaniques et hygrothermiques.

L'équation (3.71) se met sous la forme contractée :

$$\begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Les relations forces déformations et contraintes déformations, sont identiques à ceux dérivées pour le chargement mécanique (3.35), à la seule différence ; c'est que les forces et moments hygrothermiques, sont ajoutées aux forces et moments mécaniques appliquées.

III.6.4 Signification physique des forces hygrothermiques

Le concept des forces hygrothermiques tel qu'il est défini dans l'équation (3.65), n'est pas une abstraction mathématique mais peut être simulé à un terme physique. Par exemple considérons la force hygrothermique N_x^{HT} donné par [29] :

$$N_x^{HT} = \sum_{k=1}^n [Q'_{11} e_x + Q'_{12} e_y + Q'_{16} e_s]_k t_k \quad (3.74)$$

La quantité entre parenthèse représente la contrainte σ_{xx} , nécessaire pour produire une déformation égale à une déformation hygrothermique libre (e_x, e_y, e_s) dans la couche k. Cette quantité multipliée par l'épaisseur t_k de la couche k, donne la force nécessaire pour déformer la couche k, de la même manière que si elle est déformée par des déformations hygrothermiques libres. Finalement la somme de ces forces dans chaque couche donne les forces hygrothermiques total N_x^{HT} .

Considérons en exemple figure (3.5) un stratifié assujéti à un chargement de température $\Delta T = \Delta T_0$, cette température induit une déformation $\epsilon = \epsilon_0$ sans forces extérieures, $N = 0$.

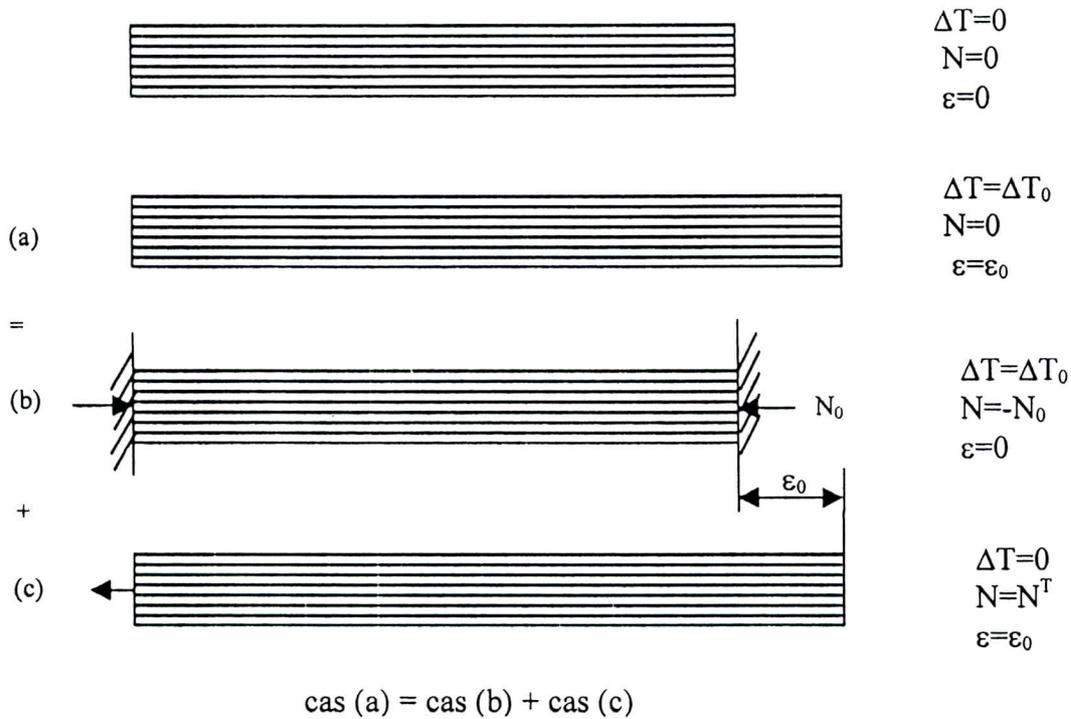


Figure 3.5 Illustration de la signification physique des forces thermiques

III.6.5 Contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles, sont introduites dans les stratifiés multidirectionnels durant la fabrication. Sur le plan microscopique, les contraintes résiduelles sont introduites dans les couches unidirectionnelles autour des fibres, à cause des imperfections dans les propriétés

thermiques des constituants. Des contraintes résiduelles sont aussi développées dans les couches à cause de l'anisotropie sur le plan macroscopique.

Ces contraintes sont similaires aux contraintes hygrothermiques.

En l'absence de forces externes appliquées, $[N]=0$ et $[M]=0$, les relations hygrothermoélastiques (3.69) et (3.70) se réduisent à :

$$\begin{bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_s^{HT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$\begin{bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_s^{HT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

L'inversion de ces relations, donne les déformations en membrane $[\varepsilon^0]$ et courbures $[k]$, produits par un changement hygrothermiques seulement. Dans ce cas ces déformations sont aussi appelées, les déformations non mécaniques. Benkkeddad[51].

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_s^{HT} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{26} \\ b_{61} & b_{62} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_s^{HT} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{26} \\ c_{61} & c_{62} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_s^{HT} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{26} \\ d_{61} & d_{62} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_s^{HT} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Les déformations hygrothermiques de la couche d'ordre k sont obtenues par l'équation (3.16) :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{.xx} \\ \epsilon_{.yy} \\ \gamma_{.xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon^0_{.xx} \\ \epsilon^0_{.yy} \\ \gamma^0_{.xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

Les déformations résiduelles dans chaque couche k sont données par :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{.xe} \\ \epsilon_{.ye} \\ \gamma_{.se} \end{bmatrix}_{k \text{ résiduelles}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{.xx} \\ \epsilon_{.yy} \\ \gamma_{.xy} \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} e_e \\ e_y \\ e_s \end{bmatrix}_k \quad (3.79)$$

Les contraintes résiduelles dans chaque couche k sont données par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{.xx} \\ \sigma_{.yy} \\ \sigma_{.xy} \end{bmatrix}_{k \text{ résiduelles}} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{.xe} \\ \epsilon_{.ye} \\ \gamma_{.se} \end{bmatrix}_{k \text{ résiduelles}} \quad (3.80)$$

III.6.6 Analyse des stratifiés multidirectionnels

L'équation constitutive hygrothermomécanique (3.73) peut être explicitée comme suit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x^{HT} \\ N_y^{HT} \\ N_{xy}^{HT} \\ M_x^{HT} \\ M_y^{HT} \\ M_{xy}^{HT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^0_{.xx} \\ \epsilon^0_{.yy} \\ \gamma^0_{.xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Pour un chargement hygrothermomécanique, les déformations en membrane et courbures, sont obtenues à partir de l'équation suivante, Sloan [25], Wrtherhold [26], Vinson [28]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ - \\ k_x \\ k_y \\ k_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \\ - & - & - \\ c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} \\ - & - & - \\ d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{N}_x \\ \overline{N}_y \\ \overline{N}_s \\ - \\ \overline{M}_x \\ \overline{M}_y \\ \overline{M}_s \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Soit sous forme contractée :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ - \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & | & b \\ - & | & - \\ c & | & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{N} \\ - \\ \overline{M} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Les effets hygrothermiques représentent la superposition de l'effet de température et de l'humidité.

Les effort hygrothermiques sont définis par :

$$\begin{aligned} N_x^{HT} &= N_x^H + N_x^T \\ N_y^{HT} &= N_y^H + N_y^T \\ N_{xy}^{HT} &= N_{xy}^H + N_{xy}^T \end{aligned} \quad (3.84)$$

Les moments hygrothermiques sont définis :

$$\begin{aligned} M_x^{HT} &= M_x^H + M_x^T \\ M_y^{HT} &= M_y^H + M_y^T \\ M_{xy}^{HT} &= M_{xy}^H + M_{xy}^T \end{aligned} \quad (3.85)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 N_x^{HT} &= \sum_{k=1}^n (Q'_{11}\alpha_x + Q'_{12}\alpha_y + Q'_{16}\alpha_{xy}) \Delta T t_k + (Q'_{11}\beta_x + Q'_{12}\beta_y + Q'_{16}\beta_{xy}) \Delta C t_k \\
 N_y^{HT} &= \sum_{k=1}^n (Q'_{12}\alpha_x + Q'_{22}\alpha_y + Q'_{26}\alpha_{xy}) \Delta T t_k + (Q'_{12}\beta_x + Q'_{22}\beta_y + Q'_{26}\beta_{xy}) \Delta C t_k \\
 N_{xy}^{HT} &= \sum_{k=1}^n (Q'_{16}\alpha_x + Q'_{26}\alpha_y + Q'_{66}\alpha_{xy}) \Delta T t_k + (Q'_{16}\beta_x + Q'_{26}\beta_y + Q'_{66}\beta_{xy}) \Delta C t_k \\
 M_x^{HT} &= \sum_{k=1}^n (Q'_{11}\alpha_x + Q'_{12}\alpha_y + Q'_{16}\alpha_{xy}) \Delta T t_k z_k + (Q'_{11}\beta_x + Q'_{12}\beta_y + Q'_{16}\beta_{xy}) \Delta C t_k z_k \quad (3.86) \\
 M_y^{HT} &= \sum_{k=1}^n (Q'_{12}\alpha_x + Q'_{22}\alpha_y + Q'_{26}\alpha_{xy}) \Delta T t_k z_k + (Q'_{12}\beta_x + Q'_{22}\beta_y + Q'_{26}\beta_{xy}) \Delta C t_k z_k \\
 M_{xy}^{HT} &= \sum_{k=1}^n (Q'_{16}\alpha_x + Q'_{26}\alpha_y + Q'_{66}\alpha_{xy}) \Delta T t_k z_k + (Q'_{16}\beta_x + Q'_{26}\beta_y + Q'_{66}\beta_{xy}) \Delta C t_k z_k
 \end{aligned}$$

Les équations (3.81) et (3.82), peut prendre plusieurs formes pour différents environnements :

1. **Environnement à chargement Mécanique**, est représenté les équations (3.81) et (3.82), avec $\Delta T = 0$ et $\Delta C = 0$
2. **Environnement à chargement Thermomécanique**, est représenté par les équations (3.81) et (3.82), avec $\Delta C = 0$
3. **Environnement à chargement Hygromécanique**, est représenté par les équations (3.81) et (3.82), avec $\Delta T = 0$
4. **Environnement à chargement Hygrothermique**, est représenté par les équations (3.81) et (3.82), avec $N = 0$ et $M = 0$
5. **Environnement à chargement Thermique**, est représenté par les équations (3.81) et (3.82), avec $N = M = 0$ et $\Delta C = 0$
6. **Environnement à chargement Hygroscopique**, est représenté par les équations (3.81) et (3.82), avec $N = M = 0$ et $\Delta T = 0$
7. **Environnement à chargement Hygrothermomécanique**, est représenté par les équations (3.81) et (3.82), avec $N \neq 0, M \neq 0, \Delta C \neq 0, \Delta T \neq 0$.

III.7 ANALYSE HYGROTHERMIQUE EN TRANSITOIRE

La variation de la température et de la concentration d'humidité absorbée non uniforme dans le temps, engendrent des contraintes résiduelles non uniforme dans les plis. Leurs prises en considération lors de l'analyse mécanique du stratifié est nécessaire. La résolution de l'équation de diffusion en transitoire permet de déterminer les contraintes hygroscopiques. Nous abordons une analyse des contraintes résiduelles thermiques et hygroscopiques.

III.7.1 Formulation du problème

La relation constitutive d'un milieu anisotrope dans lequel le stratifié est assujetti à des conditions d'environnement variable dans le temps en température et en humidité est donnée par Pipes [10],[25], [28] :

$$\sigma'_i(z,t) = Q'_{ij} \left[\epsilon'_j - \alpha_j T(x,y,z,t) - \beta_j M(x,y,z,t) \right] \quad (i, j = 1,2,6,) \quad (3.87)$$

Le stratifié étant une plaque rectangulaire d'épaisseur h, la résultante des forces est:

$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_i dz = \int_{-h/2}^{h/2} Q'_{ij} \left[\epsilon'_j - \alpha_j T(x,y,z,t) - \beta_j M(x,y,z,t) \right] dz \quad (i, j = 1,2,6,) \quad (3.88)$$

La résultante en moments est :

$$M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_i z dz = \int_{-h/2}^{h/2} Q'_{ij} \left[\epsilon'_j - \alpha_j T(x,y,z,t) - \beta_j M(x,y,z,t) \right] z dz \quad (i, j = 1,2,6,) \quad (3.89)$$

III.7.2 Champ de température et d'humidité

Les propos tenus au paragraphe II.2.4 (chapitreII), en plus des hypothèse de Springer [48] , nous permettent d'écrire que : $T(x, y, z, t)=T_a$, et $C(x, y, z, t)=C(z, t)$.

III.7.3 Résultantes et moments hygrothermiques

III.7.3.1 Résultantes thermiques

$$N_i^t = \int_{h/2}^{-h/2} Q'_{ij} \alpha_j T dz = \int_{h/2}^{-h/2} Q'_{ij} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} T dz \quad (3.90)$$

III.7.3.2 Moments thermiques

$$M_i^t = \int_{h/2}^{-h/2} Q'_{ij} \alpha_j T z dz = \int_{h/2}^{-h/2} Q'_{ij} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} T z dz \quad (3.91)$$

III.7.3.3 Résultante hygroscopique

$$N_i^h = \int_{h/2}^{-h/2} Q'_{ij} \beta_j^k C(x, y, z, t) dz = \int_{h/2}^{-h/2} Q'_{ij} \begin{bmatrix} \beta_{xx} \\ \beta_{yy} \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}^k C(z, t) dz \quad (3.92)$$

Soit
$$m(z, t) = \int^z C(\xi, t) d\xi \quad (3.93)$$

$$N_i^h = \sum_{k=1}^r Q'_{ij} \beta_j^k [m(h_k, t) - m(h_{k-1}, t)] \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$N_i^h = \sum_{k=1}^r Q'_{ij} \begin{bmatrix} \beta_{xx} \\ \beta_{yy} \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}^k [m(h_k, t) - m(h_{k-1}, t)] \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (3.94)$$

III.7.3.4 Moment hygroscopique

$$M_i^h = \int_{h/2}^{-h/2} Q'_{ij} \beta_j M(x, y, z, t) z dz = \int_{h/2}^{-h/2} Q'_{ij} \begin{bmatrix} \beta_{xx} \\ \beta_{yy} \\ \beta_{xy} \end{bmatrix} M(z, t) z dz \quad (3.95)$$

Soit
$$n(z, t) = \int^z m(\xi, t) \quad (3.96)$$

$$M_i^h = \sum_{k=1}^r Q_{ij}^k \beta_j^k \left[h_k (m(h_k, t) - h_{k-1} m(h_{k-1}, t) - n(h_k, t) + n(h_{k-1}, t)) \right]$$

$$M_i^h = \sum_{K=1}^r Q_{ij}^k \begin{bmatrix} \beta_{xx} \\ \beta_{yy} \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}^k \left[h_k (m(h_k, t) - h_{k-1} m(h_{k-1}, t) - n(h_k, t) + n(h_{k-1}, t)) \right] \quad (3.97)$$

III.8 ABSORPTION SYMETRIQUE

Dans le cas d'une plaque en absorption, soumises à ces deux faces $z=\pm h/2$ à une concentration C_0 , la concentration dans le stratifié à une position z et à un temps t est solution analytique de l'équation différentielle pour l'absorption symétrique est donnée par [10] :

$$C(z, t) = C_0 \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} m_n \sin a_n z \right] \quad (3.98)$$

$$a_n = (2n + 1)\Pi / h \quad (3.99a)$$

$$m_n = 4/\Pi \left[\frac{1}{2n+1} \exp[-a_n^2 Dt] \right] \quad (3.99b)$$

$$m(z, t) = C_0 \left[z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n} \cos a_n z \right] \quad (3.100)$$

$$n(z, t) = C_0 \left[\frac{z^2}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n^2} \sin a_n z \right] \quad (3.101)$$

III.8.1 Effort hygroscopique

$$N_i^h = \sum_{k=1}^r Q_{ij}^k \beta_j^k C_0 \left\{ h_k - h_{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n} \cos a_n h_k - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n} \cos a_n h_{k-1} \right\} \quad (ij=1,2,6) \quad (3.102)$$

III.8.2 Moment hygroscopique

$$M_i^h = \sum_{k=1}^r Q'_{ij} \beta^k_j C_0 \left(\frac{h_k^2}{2} - \frac{h_{k-1}^2}{2} + h_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n} \cos a_n h_k - h_{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n} \cos a_n h_{k-1} \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n^2} \sin a_n h_k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n^2} \sin a_n h_{k-1} \right) \quad (3.103)$$

III.9 DESCRIPTION SYMETRIQUE

Soit un stratifié contenant une distribution uniforme M_0 , Les deux faces $z=\pm h/2$, sont exposées à un environnement de concentration libre.

La solution analytique à partir de l'équation différentielle correspondant à ce type de conditions aux limites [10] :

$$\frac{C(z,t)}{C_0} = \sum_0^{\infty} m_n \sin a_n z \quad (3.104)$$

$$m(z,t) = -\frac{m_n}{a_n} \cos a_n \quad (3.105)$$

$$n(z,t) = -\frac{m_n}{a_n^2} \sin a_n z \quad (3.106)$$

III.9.1 Résultante hygroscopique

$$N_i^h = \sum_{k=1}^r Q'_{ij} \beta^k_j C_0 \left\{ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n} \cos a_n h_k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n} \cos a_n h_{k-1} \right\} \quad (3.107)$$

III.9.2 Moment hygroscopique

$$M_i^h = \sum_{k=1}^r Q'_{ij} \beta^k_j C_0 \left(-h_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n} \cos a_n h_k + h_{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n} \cos a_n h_{k-1} \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n^2} \sin a_n h_k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{a_n^2} \sin a_n h_{k-1} \right) \quad (3.108)$$

III.10 ABSORPTION A UNE SEULE FACE

La solution dans le cas ou une seule face est en absorption $0 < z < H/2$, et est soumise à une concentration M_0 , est donnée par [10] :

$$C(z,t) = C_0 \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \sin q_n \left(z + \frac{h}{2} \right) \right) \quad (3.109)$$

$$q_n = (2n+1) \frac{\Pi}{2h} \quad (3.110a)$$

$$p_n = \frac{4}{\Pi 2n+1} \exp(-q_n^2 Dt) \quad (3.110b)$$

$$m(z,t) = C_0 \left(z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} \cos q_n \left(z + \frac{h}{2} \right) \right) \quad (3.111)$$

$$n(z,t) = C_0 \left(\frac{z^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{q_n^2} \sin q_n \left(z + \frac{h}{2} \right) \right) \quad (3.112)$$

III.10.1 Résultante hygroscopique

$$N^h_i = \sum_{k=1}^r Q'_{ij} \beta^k_j C_0 \left(h_k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} \cos q_n \left(h_k + \frac{h}{2} \right) - h_{k-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} \cos q_n \left(h_{k-1} + \frac{h}{2} \right) \right) \quad (3.113)$$

III.10.2 Moment hygroscopique

$$M^h_i = \sum_{k=1}^r Q'_{ij} \beta^k_j C_0 \left(\frac{h^2_k}{2} + h_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} \cos q_n \left(h_k + \frac{h}{2} \right) - \frac{h^2_{k-1}}{2} - h_{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} \cos q_n \left(h_{k-1} + \frac{h}{2} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{q_n^2} \sin q_n \left(\frac{h_k}{2} + \frac{h}{2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{q_n^2} \sin q_n \left(\frac{h_{k-1}}{2} + \frac{h}{2} \right) \right) \quad (3.114)$$

III.11 RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE DIFFUSION

Le calcul de la concentration de l'humidité est nécessaire pour l'évaluation des contraintes résiduelles et des contraintes hygrothermiques. Dans le régime transitoire le processus d'absorption est fonction du temps, il est donc nécessaire de résoudre l'équation différentielle de Fick (2.9) [51].

Notre choix a porté sur, le schéma explicite par la méthode des différences finis pour la résolution de l'équation de Fick.

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

$$C^{n+1}_j = sC^n_{j-1} + (1 - 2s)C^n_j + sC^n_{j+1} \quad (3.115)$$

$$s = D\Delta t / \Delta x^2 \leq 0$$

L'équation est appliquée pour les nœuds internes $j=2, \dots, J-1$,

h = épaisseur du stratifié

Le sous programme traitant cette résolution est inclus dans le code, c'est diffusion.

III.12 CONTRAINTES RESIDUELLES EN TRANSITOIRE

1. Détermination des effort et moment hygroscopiques à partir des équations 3.94 et 3.97, selon le type de problème [51] .
2. Calcul de la concentration C_k , dans chaque pli k à un temps t connu.
3. Déterminations des expansions libres pour chaque pli :

$$e_x^{(k)} = \alpha_x T(x_k, y_k, z_k, t) + \beta_x C(x_k, y_k, z_k, t)$$

$$e_y^{(k)} = \alpha_y T(x_k, y_k, z_k, t) + \beta_y C(x_k, y_k, z_k, t) \quad (3.116)$$

$$e_z^{(k)} = 0$$

4. Détermination des déformations non mécaniques, à partir des équations 3.77 et 3.78
5. Détermination des déformations résiduelles , à partir de l'équation 3.79
6. Détermination des contraintes résiduelles, à partir de l'équation 3.80

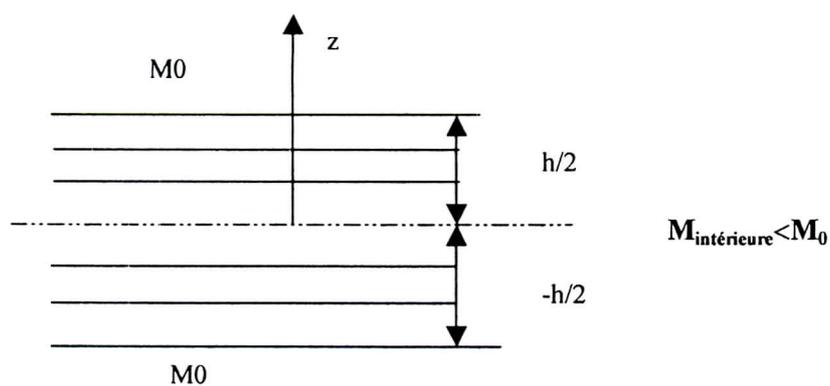


Figure 3.6 Absorption symétrique

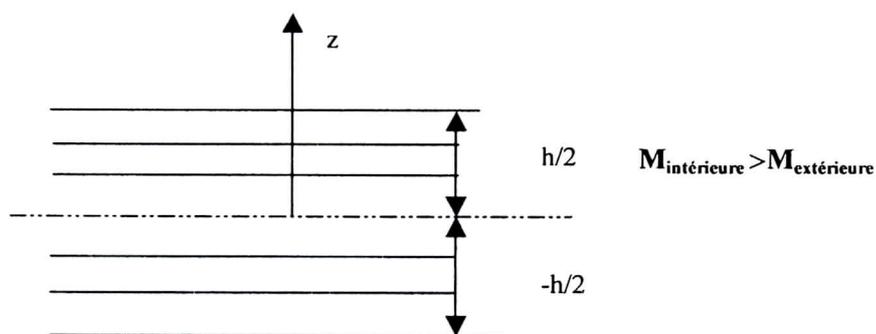


Figure 3.7 Désorption symétrique

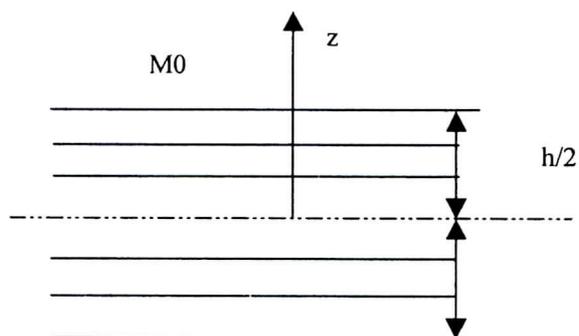


Figure 3.8 Absorption à une seule face

III.13 CONCLUSION

Les principaux résultats liés à chaque partie de ce chapitre, sont donnés par les différents sous programmes du code, et seront exposés dans le chapitre suivant.