

**UNIVERSITE DE BLIDA1**

**Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales**

**MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité: Aéronautique

**EFFET DE LA PRESSION GENERATRICE SUR LA FONCTION  
DE PRANDTL MEYER. APPLICATION POUR L'AIR**

Par

**MEHALEM Abderrahmane**

Devant le jury composé de :

T. REZOUG	Professeur, U. de Blida1	Président
T. ZEBBICHE	Professeur, U. de Blida1	Rapporteur
B. SALAH	Professeur, E.N.S.H., Blida	Examineur
A. ALLALI	Maitre de conférences, U. de Blida 1	Examineur

Blida, 2014

## التصميم

. عندما يزيد الضغط المولد, يتوقف الغاز عن التصرف كغاز

مثالي ، آثار حجم الجزيئات وقوات الجذب بينها لتصحيح  
من أجل درجة حرارة مولدة معينة، سلوك اهتزاز الجزيئات يلعب دورا قيما ، الحرارة النوعية و  
الخصائص الحرارية الأخرى للغاز الحقيقي  
خصوصا ، المعادلة العامة للغاز المثالي لم تصبح غير صالحة و الغاز في هذه الحالة يصبح بمثابة غاز  
غير مثالي حراريا ونوعيا

الهدف من هذا العمل هو العثور على ال ( لنموذج الغاز الحقيقي) لعدة خصائص حرارية  
:الحرارة النوعية المحددة بحجم ثابت و كذا بضغط ثابت ، درجة الحرارة، الكثافة و الضغط  
الأسرع من الصوت ، معادلة الحركة، و المعاملات هندسية ومعاملات الأداء، وخاصة لتحديد  
ماير التي تلعب دورا هاما جدا في التصميم ل

أجل هذا تستخدم طرق حل المعادلات و التكامل العددي ويتم مقارنة الغاز الحقيقي بالغاز المثالي و

**الكلمات المفاتيح :** ديناميكية وهندسية، غاز حقيقي،

معادلة برتولو، غاز غير مثالي حراريا ونوعيا طريقة نيوتن طريقة سيمبسون العددية  
ماير،

## RESUME

Les conditions de conception pour les écoulements supersoniques dépendent directement des paramètres générateurs  $(P_0, T_0, \dots_0)$  de la chambre de combustion. Lorsque la pression génératrice  $P_0$  augmente le gaz cesse à se comporter comme un gaz parfait, les effets de covolume et des forces d'attraction intermoléculaires interviennent pour la correction de l'équation d'état d'un gaz parfait. Ainsi pour certaine température génératrice le comportement vibratoire des molécules va jouer un rôle précieux, les chaleurs spécifiques et d'autres propriétés thermodynamiques d'un gaz réel deviennent des fonctions à la fois de la température et de la densité, et surtout, l'équation d'état des gaz parfaits n'est plus valide. Le gaz dans ce cas se comporte comme un gaz thermiquement et calorifiquement imparfait.

Le but de ce travail est de trouver la forme générale ( pour un modèle de gaz réel) pour plusieurs paramètres thermodynamiques tel que : les chaleurs spécifiques à pression et à volume constante  $C_p(T, \dots)$  et  $C_v(T, \dots)$ , les rapports de pression, température et masse volumique, le nombre de Mach, l'équation d'énergie, les paramètres géométriques et de performances, et surtout de déterminer la forme générale de la fonction de Prandtl Meyer qui joue un rôle très important dans la conception supersonique. Des méthodes de résolution des équations ainsi d'intégration numérique sont utilisées. Une comparaison avec le modèle des gaz parfaits et le modèle des gaz parfaits à haute température sera faite.

**Mot clés :** Ecoulement Supersonique, gaz réel, équation d'état de Berthelot, Rapports Thermodynamiques et Géométrique, Gaz Calorifiquement et thermiquement Imparfait, méthode de Newton, Quadrature de Simpson, Prandtl Meyer, Erreur relative.

## ABSTRACT

The conditions of design for the supersonic flows depend directly on the generating parameters of the combustion chamber. When the pressure of stagnation increases gas ceases to behave like a perfect gas, the effects of the molecular volume and attractive forces intervene for the correction of the equation of state, thus for certain temperature stagnation, the vibratory behavior of the molecules plays an invaluable part, the specific heats and other thermodynamic properties of a real gas become functions at the same time of the temperature and density, and especially, the equation of state of perfect gases is not available any more. The gas in this case behaves like a gas thermically and calorifically imperfect.

The objectives of this work is to find the general forms ( for a real gas model ) of these properties thermodynamic such as: ,ratios of pressure, temperature and density, the Mach number, the equation of motion, geometrical and performance parameters , and especially to determinate the general form of Prandtl Meyer function which plays a very important role in the supersonic design. Methods of resolution of the equations thus of numerical integration are used. A comparison between our model and the model of perfect gas and high temperature model will be made.

**Key words:** Supersonic flow, real gas, equation of state of Berthelot, Thermodynamic and Geometric ratios, Gas Calorifically and thermically Imperfect, Newton method, Simpson quadrature, Prandtl Meyer, Relative error.

## REMERCIEMENTS

J'exprime ma très sincère reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur T.Zebbich, Professeur de l'université de Blida1, pour avoir assuré la direction de ce travail, et pour m'avoir apporté la rigueur scientifique nécessaire à son bon déroulement.

Je remercie vivement Monsieur Marouane Salhi, Doctorant Chercheur, qui a co-encadré ce travail, et qui m'a toujours accordé sa confiance pendant le temps de travail. Je tiens également à le remercier pour sa disponibilité et son total dévouement de tous les jours.

A monsieur le professeur T.Rezzoug, directeur de laboratoire des sciences aéronautiques, j'exprime ma gratitude pour leur apports scientifiques qu'il m'a transmis au long de mon cursus et pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

C'est un grand honneur pour moi de remercier monsieur B.Salah, professeur de l'école nationale supérieure de l'hydraulique, d'avoir accepté de juger ce travail et d'y apporter sa touche particulière.

Pour m'avoir accompagné et conseillé, je suis particulièrement reconnaissant à monsieur A.Allali, maitre de conférences de l'université Blida 1 et directeur de laboratoire des aéronefs, je tiens à lui remercier pour avoir fait partie de ce jury.

Je ne peux conclure ses remerciements avant d'avoir une pensée pour tous les amis plus particulièrement Grada, Zarai Abderrahmane, et Hicham qui m'ont aidé durant ce travail. Pour finir je ne pourrais oublier ma famille, mes frères, mes sœurs et surtout ma mère qui m'a continuellement soutenu avant qu'elle m'a quittée au vaste paradis du dieu insha'allah.

Abderrahmane MEHALEM

## TABLE DES MATIERES

RESUME	1
REMERCIEMENTS	4
TABLE DES MATIERES	5
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	9
INTRODUCTION	12
1. MODELISATION DES EQUATIONS D'ETAT	14
1.1. Les gaz parfaits	14
1.1.1. L'équation d'état d'un gaz parfait	15
1.1.2. Limitation de l'équation d'état d'un gaz parfait	15
1.2. Les gaz réels	16
1.2.1. Le covolume	16
1.2.2. Les forces d'attraction intermoléculaires	17
1.3. Les équations d'état	18
1.3.1. Equation d'état de Van Der Waals	18
1.3.2. Equation de BERTHELOT	19
1.3.3. Equation de CLAUSIUS	19
1.3.4. Equation de BEATTIE- BRIDGEMAN	20
1.3.5. Equation de BENEDICT-WEBB-RUBIN	20
1.3.6. Equation de VIRIEL	21
1.3.7. Equation de REDLICH-KWONG (1949)	22
1.4. Choix de l'équation d'état	24
1.5. Validation du choix de l'équation de Berthelot	24
1.6. Coordonnées du point critique et équations réduites	25
1.6.1. Application sur l'équation de Berthelot	27
1.7. Calcul des grandeurs thermodynamiques	28
1.7.1. L'énergie interne	28
1.7.2. L'entropie	28

1.8.	Application physique	28
1.8.1.	Calcul de l'énergie interne pour l'équation de Berthelot	30
1.8.2.	Calcul de l'entropie pour l'équation de Berthelot	31
1.8.3.	Calcul de l'enthalpie pour l'équation de Berthelot	31
1.8.4.	Facteur de compressibilité pour l'équation de Berthelot	33
2.	PARAMETRES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE POUR UN GAZ REEL	34
2.1.	Hypothèses de base	34
2.2.	Configuration des équations	35
2.2.1.	L'équation de la conservation d'énergie (forme différentielle)	35
2.2.2.	L'état générateur	37
2.2.3.	La forme intégrale de l'équation d'énergie pour l'équation de Berthelot	38
2.3.	Détermination du nombre de Mach	39
2.3.1.	Equation de la vitesse de l'écoulement	39
2.3.2.	Calcul de la vitesse	39
2.3.3.	Détermination de la célérité du son	40
2.3.4.	Le nombre de Mach	41
2.4.	La chaleur spécifique à volume constante	41
2.5.	La chaleur spécifique à pression constante	42
2.6.	Rapport des chaleurs spécifiques	43
2.7.	Calcul numérique des rapports thermodynamiques	44
2.7.1.	La méthode de Newton	45
2.7.2.	Algorithme de la méthode de Newton appliquée aux systèmes	47
2.7.3.	Le choix de la solution initial	47
2.8.	Détermination des paramètres critiques	48
2.9.	Détermination de rapport des sections d'un écoulement	48
2.10.	Détermination de l'expression du débit massique critique	48
2.11.	La Poussée	49

	2.11.1. Le coefficient de poussée	50
3.	FONCTION DE PRANDTL MEYER POUR UN GAZ REEL	52
	3.1. Détente de Prandtl-Meyer	52
	3.1.1. Définition	52
	3.2. Détermination de la fonction de Prandtl Meyer pour un GR	53
	3.2.1. Formulations mathématiques	53
	3.2.2. La différentielle de la pression en fonction de $d$	55
	3.2.3. Développement de la relation entre La différentielle de l'enthalpie $dH$ et la différentielle la pression $dP$	55
	3.3. Comparaison de la fonction de Prandtl Meyer de notre modèle avec le modèle GP et le modèle HT	58
	3.3.1. Le modèle HT (caloriquement imparfait et thermiquement parfait)	58
	3.3.2. Le modèle GP (caloriquement et thermiquement parfait)	59
	3.4. Méthodes d'intégration numérique de la fonction de Prandtl Meyer	63
	3.5. Procédure de calcul par la méthode Simpson à pas variable	63
4.	RESULTATS ET COMMENTAIRES	67
	4.1. Résultats pour les paramètres thermodynamiques	68
	4.1.1. La masse volumique génératrice	68
	4.1.2. Facteur de compressibilité	70
	4.1.3. Les chaleurs spécifiques	71
	4.2. Résultats pour les paramètres critiques (au col)	75
	4.2.1. Rapports des températures critiques	75
	4.2.2. Rapport des masses volumiques critiques	76
	4.2.3. Rapport des pressions critiques	77
	4.2.4. Rapport des célérités du son critiques	78
	4.2.5. Le débit massique critique	79
	4.3. Résultats pour les paramètres supersoniques	80
	4.3.1. La célérité du son	80
	4.3.2. Rapport des températures	81
	4.3.3. Rapport des masses volumiques	83

4.3.4.	Rapport des pressions	85
4.3.5.	Rapport de la célérité du son	87
4.3.6.	Rapports des sections	89
4.3.7.	Le coefficient de poussée	91
4.4.	Résultats sur l'erreur du modèle des gaz parfaits pour les paramètres supersoniques	93
4.4.1.	Erreur sur les rapports des températures	93
4.4.2.	Erreur sur les rapports des masses volumiques	95
4.4.3.	Erreur sur les rapports des pressions	97
4.4.4.	Erreur sur les rapports de célérité du son	99
4.4.5.	Erreur sur le rapport des sections	101
4.4.6.	Erreur sur le coefficient de poussée	103
4.5.	Résultats sur la fonction de Prandtl Meyer	105
4.5.1.	Résultats sur l'erreur du modèle des gaz parfaits pour la fonction de Prandtl Meyer	108
4.5.2.	Résultats sur l'erreur du modèle à haute température pour la fonction de Prandtl Meyer	110
4.6.	Correction du Nombre de Mach	112
CONCLUSION		116
APPENDICE		118
A.	Liste des symboles	118
B.	Organigramme de Programmation	120
C.	Création du Logiciel PGR	123
REFERENCE		126

## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Configuration des molécules dans un gaz parfait	15
Figure 1.2	Représentation de l'effet de covolume	17
Figure 1.3	Représentation des forces intermoléculaires	17
Figure 1.4	Le volume soustrait autour de chaque sphère dure	19
Figure 1.5	Diagramme ( $PvT$ ) pour détermination des Coordonnées du point critique	26
Figure 2.1	Représentation de la force résultante de la poussée	50
Figure 3.1	Schéma de la détente de Prandtl-Meyer	53
Figure 3.2	Variation de la fonction $F_T(T, \gamma)$ dans $[T_S, T^*]$	63
Figure 3.3	Variation de la fonction $F(T, \gamma)$ dans $[T_S, T^*]$ .	64
Figure 3.4	Présentation de la condensation des nœuds	65
Figure 3.5	Condensation des nœuds vers les deux extrémités de l'intervalle $[T_S, T^*]$	66
Figure 4.1	Variation de la masse volumique $\rho_0$ en fonction de $T_0$	69
Figure 4.2	Variation de l'erreur relative pour $\rho_0$ en fonction de $T_0$	70
Figure 4.3	Variation de facteur de compressibilité en fonction de $T_0$ pour quelque valeur de pression $P_0$	71
Figure 4.4	Variation de la chaleur spécifique $C_p$ en fonction de $T_0$ pour différentes pressions génératrices $P_0$	72
Figure 4.5	Variation du rapport des chaleurs spécifiques $\gamma$ en fonction de $T_0$ pour quelques valeurs de la pression $P_0$	73
Figure 4.6	Variation du coefficient $C_T$ en fonction de $T_0$ pour quelque valeur de $P_0$	74
Figure 4.7	Rapport des températures critiques en fonction de $T_0$ pour quelques valeurs de la pression $P_0$	75
Figure 4.8	Rapport des masses volumiques critiques en fonction de $T_0$	76
Figure 4.9	Rapport des vitesses du son critiques en fonction de $T_0$ pour	78

	quelques valeurs de la pression $P_0$	
Figure 4.10	Rapport de débit massique critique en fonction de $T_0$ pour quelques valeurs de la pression $P_0$	79
Figure 4.11	La célérité du son on fonction de la température génératrice $T_0$ pour quelques valeurs de pression $P_0$	80
Figure 4.12	Variation de rapport des températures en fonction du nombre de Mach	82
Figure 4.13	Variation de rapport des densités en fonction du nombre de Mach	84
Figure 4.14	Variation de rapport des pressions en fonction du nombre de Mach	86
Figure 4.15	Variation de rapport de célérité du son en fonction du nombre de Mach	88
Figure 4.16	Variation de rapport des sections en fonction du nombre de Mach	90
Figure 4.17	Variation de coefficient de poussée en fonction du nombre de Mach pour quelques valeurs des températures génératrices	92
Figure 4.18	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des températures en fonction de nombre de Mach	94
Figure 4.19	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des masses volumiques en fonction de nombre de Mach	96
Figure 4.20	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des pressions en fonction de nombre de Mach	98
Figure 4.21	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des célérités du son en fonction de nombre de Mach	100
Figure 4.22	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des sections en fonction de nombre de Mach	102
Figure 4.23	Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des sections en fonction de nombre de Mach	104
Figure 4.24	Variation de la fonction de Prandtl Meyer en fonction de Nombre de Mach pour quelques valeurs de la pression génératrice	106
Figure 4.25	Variation de la fonction de Prandtl Meyer en fonction de la	107

	température génératrice pour quelques valeurs de pression	
Figure 4.26	Variation de l'erreur relative de la fonction de Prandtl Meyer entre les modèles GP et GR en fonction du nombre de Mach	109
Figure 4.27	Variation de l'erreur relative de la fonction de Prandtl Meyer entre les modèles HT et GR en fonction du nombre de Mach	111
Figure 4.28	Correction de nombre de Mach du modèle GP par rapport au modèle GR	115
Tableau1.1	Les équations d'état basées sur la modification la pression attractive	23
Tableau1.2	Valeurs numériques de la masse volumique par le modèle de Berthelot pour des différentes pressions	25
Tableau1.3	Valeurs expérimentales de la masse volumique pour des différentes pressions et températures	25

## INTRODUCTION

Une large variété des problèmes dans l'écoulement compressible a été résolue sur l'hypothèse que l'air se comporte comme un gaz idéal diatomique. Cette supposition est justifiée, si la pression et la température fournies sont proches aux conditions atmosphériques ambiantes. C'est un fait expérimental, cependant, quand l'air est soumis à de grands changements d'état ( de pression et de température ) , loin de ces conditions , il cesse de se conformer à la loi simple d'un gaz parfait et il présente d'autres propriétés et caractéristiques.

Afin de calculer les propriétés d'un écoulement supersonique , la théorie d'un gaz réel devient très importante. Étant donné que les conditions de l'écoulement dépendent essentiellement de l'état générateur du gaz dans la chambre de combustion, ainsi que les hypothèses du procédé d'expansion, donc il est nécessaire de modéliser correctement le comportement du gaz réel. Pour des larges plages de pression et de température l'effet des forces d'attraction intermoléculaire et l'effet de covolume est décisif.

Lorsque la pression génératrice de la chambre de combustion augmente, les chaleurs spécifiques et d'autres propriétés thermodynamiques d'un gaz réel deviennent des fonctions à la fois de la température et de la densité, et surtout, l'équation d'état des gaz parfaits n'est plus valide. Le gaz dans ce cas se comporte comme un gaz thermiquement et calorifiquement imparfait. Le travail présenté est divisé en quatre parties :

La première partie consiste à démontrer les limitations de l'équation d'état des gaz parfaits et de discuter les différences entre cette dernière et les autres équations d'état caractérisent le comportement réel des gaz en intervenant les notions de covolume et les forces d'attraction intermoléculaires. Ainsi de comparer les équations d'état des gaz réels afin de choisir un modèle approprié aux objectifs de notre étude, nous postulons l'équation d'état de Berthelot.

La deuxième partie consiste à développer les relations thermodynamiques avec l'hypothèse de l'expansion supersonique isentropique adiabatique quasi 1D tenant en compte le comportement vibratoire des molécules, dans une large plage de pression et de température afin de trouver la forme générale des plusieurs paramètres tel que,  $C_p$ ,  $C_v$ ,  $M$ ,  $a$ , celle de l'énergie et Les rapports thermodynamiques qui sont présentés par la résolution numérique des équations, où la solution exacte n'existe pas. On va aussi déterminer des nouvelles formes des rapports des sections géométriques et du débit massique caractérisant un écoulement supersonique sans oublier de déterminer le coefficient de poussé qui joue un rôle très important en propulsion aéronautique parce qu'il nous donne une idée auquel point notre modèle est performant, d'une façon précieuse. La méthode de dichotomie pour résoudre les équations simples, et l'algorithme de Newton pour la résolution des équations non linéaires seront utilisé. Des critères correcteurs sont applicables vu que le système d'équation à résoudre a des points de singularité.

La troisième partie a pour but de déterminer la forme générale de la fonction de Prandtl Meyer pour un gaz réel suivant le modèle de Berthelot. Les formes de cette fonction pour les modèles gaz parfaits et des gaz parfaits à haute température (dite calorifiquement imparfait) seront des cas particuliers de la forme générale. Lorsqu'en introduisant l'effet de la pression génératrice sur cette fonction qui sera trouvé sous une forme de deux intégrales, ça va nécessiter l'intégration numérique à cause de sa complexité qui mise la solution analytique impossible. On utilise plusieurs méthodes d'intégration numériques et on opte sur la méthode appropriée qui est celle du Simpson à pas variable.

Le quatrième chapitre présente divers résultats obtenus sous forme des graphes et tableaux des trois chapitres précédents, notamment l'analyse de ces résultats, et le calcul de l'erreur donnée en comparant les paramètres de l'écoulement supersonique pour l'air sous l'hypothèse du modèle de gaz parfait et le modèle de gaz parfait à haute température par rapport à notre modèle des gaz réels suivant l'équation d'état de Berthelot.

Enfin on présente une conclusion générale sur le travail élaboré suivi par la proposition de quelques travaux de futur.

# CHAPITRE 1

## MODELISATION DES EQUATIONS D'ETAT

### Introduction

Ce chapitre fournit un aperçu sur le développement des équations d'état pour le calcul des propriétés thermodynamiques des gaz. En commençant par l'équation d'état des gaz parfaits, ses applications et ces limites puis les premières modélisations des équations d'état semi-empirique des gaz réels datant du 19ème siècle et leurs développement pendant le 20ème siècle, le lecteur est invité à suivre les grandes lignes du développement de ces équations en insistant sur les changements des approches moléculaires (notion de covolume et des forces d'attraction intermoléculaires ) entre le modèle des gaz parfaits, et les modèles des gaz réels. Ainsi que l'impact sur le calcul des fonctions thermodynamiques tel que l'énergie interne, l'entropie et l'enthalpie. On procédera aussi dans ce chapitre spécifiquement à l'étude (détermination des coefficients de covolume et de l'attraction moléculaire à partir du point critique) et l'application du modèle de Berthelot pour les gaz réels.

### 1.1. Les gaz parfaits

Le gaz parfait est le modèle le plus simple que l'on puisse imaginer pour représenter le comportement d'un gaz. Selon ce modèle, les molécules se comportent comme des sphères rebondissant les unes contre les autres. On peut imaginer un grand nombre de très petites boules de billard en mouvement chaotique, qui se percutent et rebondissent les unes contre les autres sans jamais s'attirer ni dissiper leur énergie par frottement [1] et [7].

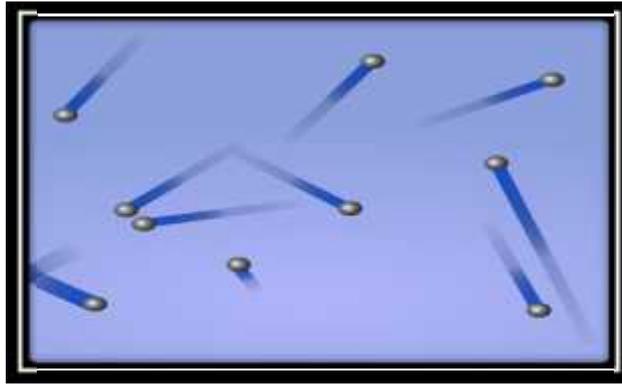


Figure 1.1 : Configuration des molécules dans un gaz parfait

### 1.1.1. L'équation d'état d'un gaz parfait

Nous appellerons gaz parfait un fluide à l'état gazeux dont le multiple de la pression et du volume,  $Pv$ , reste proportionnel à sa température. La constante de proportionnalité est nommée constante du gaz, et notée  $R$  ; elle dépend de la nature du gaz[1] et [12].

$$Pv = RT \quad (1.1)$$

Cette équation qui est explicité pour une mole de gaz et peut être exprimée en fonction de la masse :

$$Pv = mRT \quad (1.2)$$

Ou encore s'exprime en fonction de la masse volumique comme suite :

$$P = \dots RT \quad (1.3)$$

### 1.1.2. Limitation de l'équation d'état d'un gaz parfait

Il a fallu 150 ans pour que cette équation d'état dite des gaz parfaits prenne sa forme définitive, telle qu'énoncée par Clapeyron en 1834[17]. Mais il ne faudra pas longtemps pour trouver les limites de l'équation des gaz parfait, qui indique qu'une masse non-nulle de gaz parfait occupe un volume nul à température nulle. Strictement parlant, le gaz parfait ne peut exister, le modèle mathématique ci-haut perd son sens à très basse température puisqu'il ne tient pas compte du volume des molécules lui-même. Leur influence est d'autant plus importante quand les molécules sont structurellement complexes et lentes[19].

Le comportement réel des molécules lorsqu'elles sont proches les unes des autres est en réalité très complexe, ainsi, pas seulement le volume des molécules qui a une influence mais aussi les forces d'attraction entre ces molécules y jouent

un rôle déterminant. Ces conditions permettent de s'assurer que les forces d'attraction entre les molécules gardent un rôle précieux dans le comportement global du gaz. Elles doivent être respectées pour l'air dans la grande majorité de ses applications spécialement en régime supersonique[18].

Pour cela l'équation (1.1) est satisfaisante pour des gaz à basse pression (en pratique jusqu'à quelques atmosphères), mais reste en général inadéquate pour la représentation des systèmes à moyennes et hautes pressions[1].

Plusieurs autres équations d'état peuvent être utilisées pour correspondre aux gaz réels sur une plus grande plage de propriétés. Ces équations prennent en compte l'interaction moléculaire et l'effet de covolume ignoré par le modèle des gaz parfaits.

## 1.2. Les gaz réels

La différence entre un gaz réel et un gaz parfait c'est l'aptitude du gaz réel à se comprimer, ce phénomène de compressibilité est dû à l'effet des forces d'attraction intermoléculaire et à l'effet de covolume[3].

### 1.2.1. Le covolume

Si on se réfère à l'équation des gaz parfaits on remarquera que pour une température constante le volume tend vers zéro si la pression tend vers l'infini.

$$T = cte \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} v = 0$$

Mais la répulsion entre les molécules d'un gaz impose un volume minimal appelé le covolume. Prenant compte ainsi de l'impossibilité de réduire à zéro le volume réellement occupé par la matière.

Pour étudier le volume réellement disponible d'un récipient contenant un gaz réel on doit apporter à l'équation (1.1) la correction suivante  $(v-b)$ ,  $b$  étant le volume réel des molécules, ce que l'on nomme aussi le covolume.

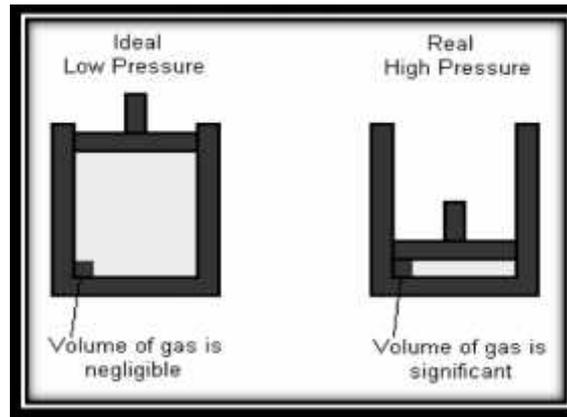


Figure 1.2 : Représentation de l'effet de covolume

### 1.2.2. Les forces d'attraction intermoléculaires

Dans un fluide non parfait les interactions entre molécules ne sont pas nulles. Au sein du fluide, une molécule est soumise à une force résultante nulle puisqu'elle est entourée de façon isotrope par les molécules voisines; ceci n'est plus vrai quand la molécule s'approche de la paroi car les molécules voisines n'occupent plus que le demi-espace interne et la molécule est freinée. La pression résultante, conséquence des chocs contre la paroi, en est diminuée[1].

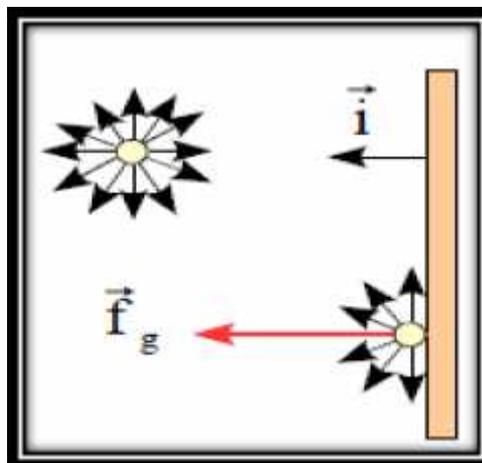


Figure 1.3 : Représentation des forces intermoléculaires

Si une molécule est loin de la paroi, la distribution de ces forces d'attraction est isotrope et leur résultante est nulle. Si une molécule est contre la paroi, la résultante,  $\vec{f}_g$  de ces forces est orientée vers l'intérieur du gaz pour maintenir les molécules. Ce qui cause une diminution de la pression au voisinage des parois.

Un terme correctif représentant la pression interne dû à l'attraction mutuelle des molécules à courte distance et ajout à la pression dans l'équation (1.1), qui devient  $(P+f)$ . Alors, l'équation d'état des gaz parfaits va prendre la forme suivant [21]:

$$(P+f)(V-b) = RT \quad (1.4)$$

Cette équation est l'équation caractéristique des gaz réels proposée par HIRN 1867[21]. Plusieurs équations semi-empiriques sont basées sur des corrélations pour déterminer  $a$  et  $b$  existent.

### 1.3. Les équations d'état

Les équations d'état jouent un rôle très important dans les études des fluides purs, parce qu'elles peuvent être employées pour la représentation d'état des différentes phases des fluides vapeur, liquide, ou gaz sans ne rencontrer aucune difficulté conceptuelle. L'avantage des équations d'état est son applicabilité sur les différentes gammes de température et de pression[31].

L'équation d'état de VAN DER WAALS est le premier modèle proposé pour la description du comportement réel des gaz. Dizaines de modèles-avec une base empirique, semi-empirique ou théorique-sont proposés pour améliorer l'exactitude de l'équation de VAN DER WAALS. On va par la suite citer quelque modèle de ces équations en respectant leurs applications et ces importances[21].

#### 1.3.1. Equation d'état de Van Der Waals

En 1873 Johannes Van Der Waals démontre que la pression interne  $P$  est inversement proportionnelle au carré du volume molaire :

$$\left( p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT \quad (1.5)$$

On peut l'exprimer aussi comme :  $P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} = P_{repulsion} + P_{attraction}$

$$a = 3P_c v_c^2 \quad ; \quad b = \frac{v_c}{3}$$

Dans cette équation  $a$  et  $b$  sont des constantes caractéristiques du corps

$a$ : Est le paramètre d'attraction est une mesure de l'intensité d'attraction entre les molécules. On l'appelle également pression de liaison.

$b$  : Est le covolume défini auparavant.

$(v-b)$  : est appelé volume effectif dans la contribution de répulsion[1].

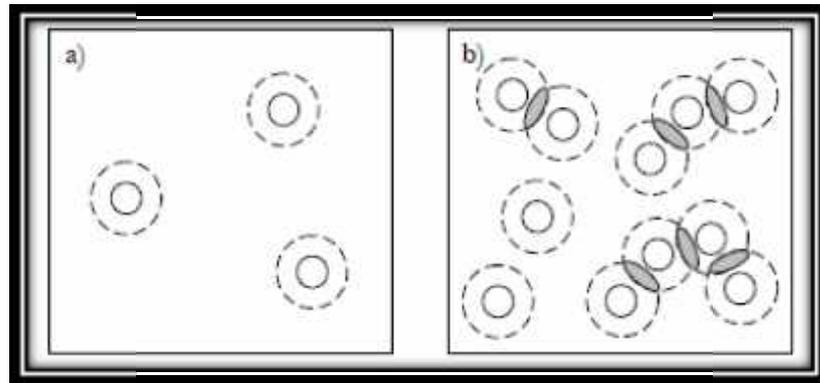


Figure 1.4 : Le volume soustrait autour de chaque sphère dure

a) basses densités, b) hautes densités

### 1.3.2. Equation de BERTHELOT

Daniel Berthelot a fait la recherche fondamentale sur la conductivité des solutions d'électrolyte, de la thermodynamique, de pyrométrie, et photochimie. En thermodynamique il a montré que la limite de la densité des gaz peut être employée pour déterminer leurs masses atomiques et moléculaires[1] et [31].

Il a amélioré l'équation d'état de Van Der Waals par la mise de terme d'attraction intermoléculaire  $a$  en fonction de la température et il a développé une nouvelle équation d'état qui peut être considérée la base de plusieurs autres équations d'état. Donc l'équation de Berthelot est notée :

$$\left( p + \frac{a}{Tv^2} \right) (v-b) = RT \quad (1.6)$$

### 1.3.3. Equation de CLAUSIUS

S'exprime par :

$$(v-b) \left[ p + \frac{a}{T(v+c)^2} \right] = RT \quad (1.7)$$

$$\text{Avec: } \begin{cases} a = \frac{27R^2T_c^3}{64p_c} \\ b = \frac{3RT_c}{8p_c} - v_c \\ c = v_c - \frac{RT_c}{4p_c} \end{cases}$$

$P_c$ ,  $T_c$  et  $v_c$  : sont respectivement pression critique, température critique et volume critique.

Cette équation constitue une amélioration de l'équation de VAN-DER WAALS. Elle donne une approximation assez bonne dans le domaine correspondant à :  $v > 1 v_c$  ;  $P < 4P_c$  ;  $T < 2T_c$ [4].

Mais elle donne une mauvaise approximation dans le domaine des gaz à pression et température élevées et dans le domaine des liquides.

#### 1.3.4. Equation de BEATTIE- BRIDGEMAN

$$P = \frac{RT}{v^2} + \left(1 - \frac{C}{vT^3}\right) \left[ v - B_0 \left(1 - \frac{b}{v}\right) \right] - \frac{A_0}{v^2} \left(1 - \frac{a}{v}\right) \quad (1.8)$$

Les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $C$ ,  $A_0$  et  $B_0$  sont déterminées empiriquement à partir des données expérimentales  $P$ ,  $v$ ,  $T$ .

- En général, elle peut être appliquée pour  $v > 2v_c$  et  $T > 1.5 T_c$ [4].

- Elle est meilleure que les équations de VAN DER WAALS et CLAUSIUS.

-Inapplicable dans la région située au voisinage du point critique.

#### 1.3.5. Equation de BENEDICT-WEBB-RUBIN

$$p = \frac{RT}{v} + \left( B_0 r T - A_0 - \frac{C_0}{T^2} \right) \frac{1}{v^2} + (b r T - a) \frac{1}{v^3} + \frac{a r}{v^6} + c \frac{\left( 1 + \frac{x}{v^2} \right)}{T^2} \frac{1}{v^3} e^{-\frac{x}{v^2}} \quad (1.9)$$

Les huit constantes  $a, b, c, A_0, B_0, C_0, r$  et  $x$  sont déterminées empiriquement à partir des données expérimentales ( $P$ ,  $v$ ,  $T$ ).

-Destinée à être utilisée pour les hydrocarbures[4].

-Valable pour les volumes massiques  $v > 0.56 v_c$

Cette équation nommée BWR a des inconvénients importants : D'abord, la détermination des huit constantes, la rend difficile, ainsi, sa complexité analytique a comme conséquence une durée de calcul relativement longue.

### 1.3.6. Equation de VIRIEL

L'équation d'état de Viriel est un développement polynomial infini en pression ou en densité (Inverse de volume). Cette équation a été proposée en premier par Thiesen en 1885 sur des bases empiriques [1] et [21], et représente le comportement volumétrique d'un fluide réel peu dense, à partir de la référence gaz parfait. L'équation d'état relative à une mole de gaz réel peut être représentée par un développement du produit  $Pv / RT$ . Soit en fonction du volume  $v$  du gaz :

$$\frac{pv}{RT} = 1 + \frac{A}{v} + \frac{B}{v^2} + \frac{C}{v^3} + \dots \quad (1.10)$$

Où les coefficients  $A, B, C, \dots$ ect, sont appelés respectivement premier, second, troisième, ...ect, coefficient du Viriel et sont associés respectivement aux interactions entre particules élémentaires deux à deux, trois à trois, .... Pour un fluide pur, les coefficients du Viriel ne dépendent que de la température.

L'équation de Viriel peut s'exprimer aussi en fonction de la pression du gaz :

$$\frac{pv}{RT} = 1 + \bar{A}p + \bar{B}p^2 + \bar{C}p^3 + \dots \quad (1.11)$$

Il est à noter que les coefficients  $A, \bar{A}, B, \bar{B}, C$  et  $\bar{C}$  sont fonction de la température. Généralement on se limitera aux trois premiers termes du développement. Ce qui fait que, pour les pressions élevées, les résultats obtenus par cette méthode s'éloignent de la réalité. De plus, l'équation du Viriel ne peut pas être facilement appliquée à des mélanges gazeux en raison des difficultés pour établir les forces d'interactions entre les différents types de molécules.

L'équation de Viriel va nous mener aussi à parler d'une définition très importante qui distingue les gaz réels, c'est bien le facteur de compressibilité [4].

#### 1.3.6.1. Facteur de compressibilité

L'équation d'état des gaz réels peut également être utilisée sous la forme très générale :

$$Pv = ZRT \quad (1.12)$$

$Z$  : est appelé coefficient ou facteur de compressibilité.

Ce coefficient représente l'écart du comportement d'un gaz réel par rapport à la loi des gaz parfaits.

### 1.3.7. Equation de REDLICH-KWONG (1949)

$$p = \frac{RT}{(v-b)} - \left( \frac{a}{T^{0.5}v(v+b)} \right) \quad (1.13)$$

$$\text{Avec: } \begin{cases} a = 0.42748 \frac{R^2 T_c^{2.5}}{p_c} \\ b = 0.08664 \frac{RT_c}{p_c} \end{cases}$$

Elle est basée sur des considérations théoriques et pratiques. Fournit une bonne approximation pour la température  $T > T_c$ . Dans les domaines des liquides et du gaz à masse volumique élevée, les résultats quoique moins bons mais elles sont satisfaisants.

A partir de l'équation de Redlich-kwong plusieurs modèles sont développés par modification du terme de pression attractive. Le tableau suivant les résume :

Tableau1.1 : les équations d'état basées sur la modification la pression attractive

Equation	L'année	La pression attractive
Redlich-Kwong	1949	$\frac{a}{T^{0.5}v(v+b)}$
Soave	1972	$\frac{a(T)}{v(v+b)}$
Peng Robinson	1976	$\frac{a(T)}{v(v+b)+b(v-b)}$
Fuller	1976	$\frac{a(T)}{v(v+cb)}$
Heyen	1980 (Sandler, 1994)	$\frac{a(T)}{v^2+(b(T)+c)v-b(T)c}$
Schmidt-Wenzel	1980	$\frac{a(T)}{v^2+ubv-wb^2}$
Harmens-Knapp	1980	$\frac{a(T)}{v^2+vcb-(c-1)b^2}$
Kubic	1982	$\frac{a(T)}{(v+c)^2}$
Patel-Teja	1982	$\frac{a(T)}{v(v+b)+c(v-b)}$
Adachi et al.	1983	$\frac{a(T)}{(v-b_2)(v+b_3)}$
Stryjek-Vera	1986	$\frac{a(T)}{(v^2+2bv-b^2)}$
Yu and Lu	1987	$\frac{a(T)}{v(v+c)+b(3v+c)}$
Trebble and Bishnoi	1987	$\frac{a(T)}{v^2+(b+c)v-(bc+d^2)}$
Schwartzentruber and Renon	1989	$\frac{a(T)}{(v+c)(v+2c+b)}$

#### 1.4. Choix de l'équation d'état

Les différentes lois d'état ont été exposées. Il convient maintenant de choisir laquelle nous allons utiliser dans notre modèle.

L'équation du Viriel, tronquée au deuxième ou troisième coefficient, ne traduit pas suffisamment les effets observés à haute pression, elle n'est donc pas adaptée à notre étude[1].

Les équations empiriques et semi-empiriques dites non analytiques sont généralement plus précises mais nécessitent de connaître un grand nombre de constantes qui peuvent être difficiles à obtenir dans la littérature.

Ainsi, notre choix se porte sur l'équation d'état analytique de Berthelot requière un nombre de paramètres limité et peuvent être résolue de manière analytique tout en conduisant à une bonne estimation du comportement des gaz. L'équation d'état de Berthelot ne nécessite que deux coefficients,  $a$  et  $b$ , disponibles dans la littérature. [34].

#### 1.5. Validation du choix de l'équation de Berthelot

Nous venons de choisir la loi d'état de Berthelot pour son faible nombre de coefficient et sa simplicité. Il convient donc de s'assurer de la validité des résultats que donne cette loi, et aussi de vérifier les différences par rapport à la loi des gaz parfaits pour le gaz retenu pour cette validation qui est dans notre étude l'air. On compare, sur le Tableau 1.2, la masse volumique de l'air calculée avec la loi des gaz parfaits et la loi de Berthelot, aux valeurs expérimentales d'une base de données [17], sur le Tableau 1.3. On remarque que pour ces températures et ces pressions, les gaz ne se comportent pas du tout comme des gaz parfait, et que la loi de Berthelot donne des valeurs plus correctes de la masse volumique, l'analyse de ces résultats sera bien détailler dans le quatrième chapitre. La loi de Berthelot est donc utilisable et justifiée.

Tableau 1.2 : Valeurs numériques de la masse volumique par le modèle de Berthelot pour des différentes pressions.

T(K)	P=1 (atm)			P=10 (atm)			P=100 (atm)		
	(g/m <sup>3</sup> ) GP	(g/m <sup>3</sup> ) Berthelot	Erreur %	(g/m <sup>3</sup> ) GP	(g/m <sup>3</sup> ) Berthelot	Erreur %	(g/m <sup>3</sup> ) GP	(g/m <sup>3</sup> ) Berthelot	Erreur %
298.15	1.18413	1.18262	0.127	11.84131	11.69331	1.250	118.41314	105.10024	11.243
500	0.70609	0.70554	0.078	7.06097	7.00792	0.751	70.60975	65.64144	7.036
1000	0.35304	0.35291	0.039	3.53048	3.51714	0.378	35.30487	34.01631	3.650
1500	0.23536	0.23530	0.025	2.35365	2.34772	0.252	23.53658	22.95672	2.464
2000	0.17652	0.17644	0.042	1.76524	1.76190	0.189	17.65243	17.32422	1.859
2500	0.14121	0.14114	0.049	1.41219	1.41004	0.152	14.12195	13.91110	1.493
3000	0.11768	0.11764	0.028	1.17682	1.17532	0.128	11.76829	11.62150	1.247

Tableau 1.3 : Valeurs expérimentales de la masse volumique pour des différentes pressions et températures

La pression P (bar)	La température T (K)	masse volumique (g/m <sup>3</sup> )
1	500	0.696
1	1000	0.348
10	200	17.835
10	300	11.643
10	500	6.944
10	1000	3.471
100	200	213.950
100	300	116.945
100	500	66.934
100	1000	33.613

### 1.6. Coordonnées du point critique et équations réduites

L'analyse de la courbe des phases représentée dans la Figure 1.5 nous permet de dire :

Pour les températures supérieures à la température critique ( $T > T_c$ ), la pression  $P$  diminue quand le volume  $v$  augmente. Pour une valeur de  $P$ ,

correspond une seule valeur de  $v$  qui est le volume réellement occupé par le gaz à cette température et à cette pression[4].

Pour ( $T < T_c$ ), les isothermes présentent un minimum E et un maximum F.

A une valeur de  $P$ , peuvent correspondre 3 valeurs de volumes (3 racines). A mesure de l'accroissement de la température, les 3 racines se confondent fournissant un point d'inflexion sur l'isotherme correspondante où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Ce point est caractérisé par une pression critique  $P_c$ , une température critique  $T_c$  et un volume critique  $v_c$  [4].

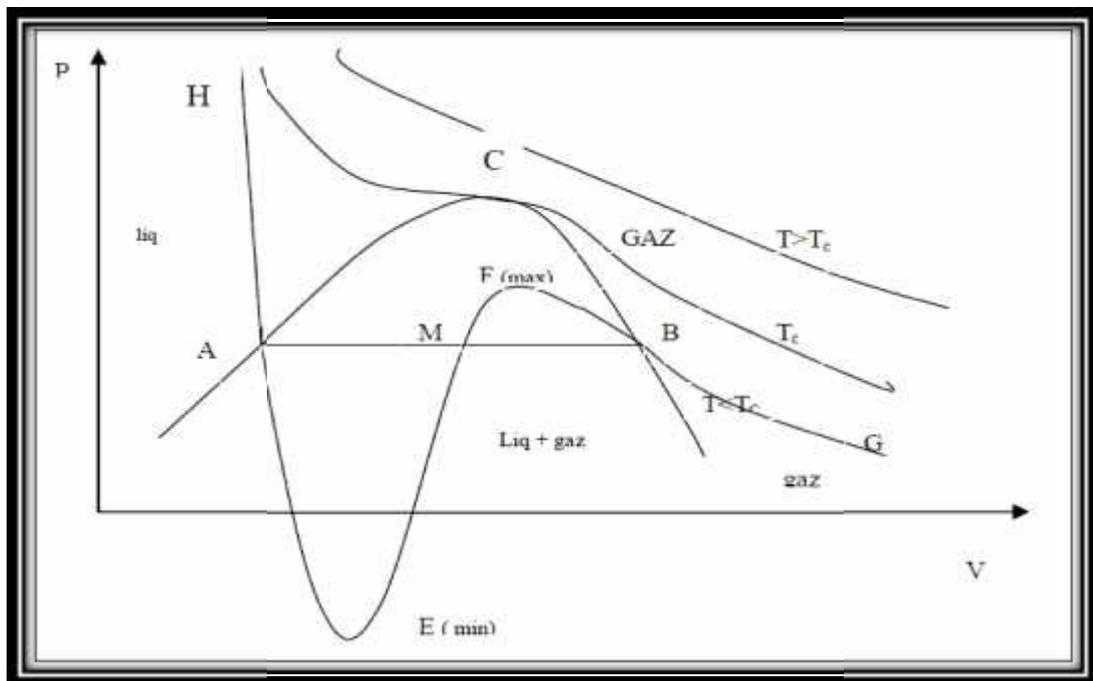


Figure1.5 : Diagramme ( $PvT$ ) pour détermination des Coordonnées du point critique

Le calcul des coordonnées ( $P_c, v_c, T_c$ ) des point critique "C" en fonction des coefficients de force d'interaction moléculaire  $a$ , le covolume  $b$ , et la constante des gaz  $R$ , nécessite trois équations [4] et [17]:

1. L'équation d'état.

2. tangente horizontale en point "C" :  $\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{T_c} = 0$

3. point d'inflexion en point "C" :  $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right)_{T_c} = 0$

### 1.6.1. Application sur l'équation de Berthelot

On peut calculer  $\hat{a}$ ,  $b$  et  $R$  ; en fonction de  $(P_c, v_c, T_c)$  :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{T_c} = 0 \Rightarrow -RT_c(v_c - b)^{-2} + 2\frac{\hat{a}}{T_c}v_c^{-3} = 0 \quad (1.14)$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right)_{T_c} = 0 \Rightarrow 2RT_c(v_c - b)^{-3} - 6\frac{\hat{a}}{T_c}v_c^{-4} = 0 \quad (1.15)$$

$$\left(p_c + \frac{\hat{a}}{T_c v_c^2}\right)(v_c - b) = RT_c \quad (1.16)$$

La résolution de système composé par les équations (1.14), (1.15) et (1.16) nous donne :

$$\begin{aligned} b &= \frac{v_c}{3} \\ \hat{a} &= aT_c = 3p_c v_c^2 T_c \\ R &= \frac{8}{3} \frac{p_c v_c}{T_c} \end{aligned}$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (1.6) de Berthelot On obtient :

$$\left(p + \frac{3p_c v_c^2 T_c}{T v^2}\right)\left(v - \frac{v_c}{3}\right) = \frac{8}{3} p_c v_c \frac{T}{T_c} \quad (1.17)$$

La division de l'équation (1.17) par  $P_c v_c$  nous donne :

$$\left(\frac{p}{p_c} + 3\frac{v_c^2 T_c}{v^2 T}\right)\left(\frac{v}{v_c} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} \frac{T}{T_c} \quad (1.18)$$

L'équation (1.18) peut s'exprimer encore par :

$$\left(\frac{p}{p_c} + 3\frac{1}{\left\{\frac{v}{v_c}\right\}^2 \frac{T}{T_c}}\right)\left(\left\{\frac{v}{v_c}\right\} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} \frac{T}{T_c} \quad (1.19)$$

L'équation (1.19) est appelée l'équation réduite de Berthelot[1].

Il est à rappeler que l'équation de Berthelot, à l'encontre de celle de Van Der Waals, n'est pas applicable au point critique et en son voisinage. Par ailleurs, l'équation réduite de Berthelot est plus précise que celle de Van Der Waals. Elles servira en particulier pour les calculs des corrections à apporter aux grandeurs thermodynamiques des gaz parfaits.

## 1.7. Calcul des grandeurs thermodynamiques

### 1.7.1. L'énergie interne

La différentielle de l'énergie interne d'un système s'écrit sous la forme :

$$du = u_w + u_Q = \sum_{i=1}^n A_i dx_i + A_2 dx_2 + \dots \quad (1.20)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots \quad (1.21)$$

Par l'identification des équations (1.20) et (1.21) on obtient :

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad ; \quad A_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \quad (1.22)$$

### 1.7.2. L'entropie

La différentielle de l'entropie s'écrit sous la forme :

$$dS = \frac{\partial Q}{T} = B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + \dots \quad (1.23)$$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial S}{\partial x_2} dx_2 + \dots \quad (1.24)$$

Par l'identification des équations (1.23) et (1.24) on obtient :

$$B_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1} \quad ; \quad B_2 = \frac{\partial S}{\partial x_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial B_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial B_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial x_2 \partial x_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial B_1}{\partial x_2} = \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \quad (1.25)$$

## 1.8. Application physique

L'utilisation des équations exprimant l'énergie interne et l'entropie nous donne :

$$\left. \begin{array}{l} du = dw + dQ \\ dw = -Pdv \\ dQ = C_v dT + ldv \end{array} \right\}$$

Donc :

$$\left. \begin{aligned} du &= C_v dT + (l - P) dv \\ du &= \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_v dv \end{aligned} \right\}$$

Delà, la chaleur spécifique à volume constante sera :

$$\begin{aligned} C_v &= \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v (l - P) = \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T \Rightarrow \left( \frac{\partial C_v}{\partial v} \right)_T = \left( \frac{\partial (l - P)}{\partial T} \right)_v \\ \left( \frac{\partial C_v}{\partial v} \right)_T &= \left( \frac{\partial l}{\partial T} \right)_v - \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \end{aligned} \quad (1.26)$$

L'équation (1.26) représente la différentielle de la chaleur spécifique à volume constante qui est un paramètre thermodynamique important dans la suite de notre étude, alors on cherche encore à l'exprimer sous forme plus utilisable.

Revenant à la fonction de l'entropie :

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dQ}{T} = \frac{C_v}{T} dT + \frac{l}{T} dv \\ dS &= \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial S}{\partial v} \right)_v dv \end{aligned} \left\{ \Rightarrow \frac{C_v}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_v \right\} \Rightarrow \left[ \frac{\partial \left( \frac{C_v}{T} \right)}{\partial v} \right]_T = \left[ \frac{\partial \left( \frac{l}{T} \right)}{\partial T} \right]_v \Rightarrow$$

$$\frac{l}{T} \left( \frac{\partial C_v}{\partial v} \right)_T = \frac{\left( \frac{\partial l}{\partial T} \right)_v T - l}{T^2} = \left( \frac{\partial l}{\partial T} \right)_v \frac{l}{T} - \frac{l}{T^2} \quad (1.27)$$

En divisant l'équation (1.27) par  $\frac{l}{T}$ , on obtient :

$$\left( \frac{\partial C_v}{\partial v} \right)_T = \left( \frac{\partial l}{\partial T} \right)_v - \frac{l}{T} \quad (1.28)$$

Par l'identification des équations (1.26) et (1.28) on trouve :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{l}{T} \quad \text{ou} \quad l = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \quad (1.29)$$

Cette relation (1.29) est appelé la relation de Clapyron.

Or on a :

$$h = l \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad (1.30)$$

Substituant l'équation (1.29) dans l'équation (1.30), ça nous donne :

$$h = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad (1.31)$$

Mais :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = -\frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p} = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

Alors :

$$h = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \quad (1.32)$$

Ces relations expriment les coefficients calorimétriques et les dérivées partielles des capacités thermiques en fonction des variables d'états. Elles seront très utiles dans la suite de cette étude.

### 1.8.1. Calcul de l'énergie interne pour l'équation de Berthelot

En rappelant l'équation (1.6) de Berthelot :  $\left(p + \frac{\dot{a}}{Tv^2}\right)(v - b) = RT$

Or elle s'écrit en terme de pression par :

$$P = \frac{RT}{(v - b)} - \frac{\dot{a}}{Tv^2} \quad (1.33)$$

La relation (1.29) de Clapeyron donne :

$$l = T \left(\frac{R}{v - b} + \frac{\dot{a}}{T^2 v^2}\right) = \frac{RT}{v - b} + \frac{\dot{a}}{Tv^2} \quad (1.34)$$

$$du = C_v dT + (l - p)dv \quad (1.35)$$

Par substitution de l'équation (1.34) dans l'équation (1.35) on trouve :

$$du = C_v dT + \underbrace{\left(\frac{RT}{v - b} - p + \frac{\dot{a}}{Tv^2}\right)}_{\frac{\dot{a}}{Tv^2}} dv = C_v dT + 2 \frac{\dot{a}}{Tv^2} dv \quad (1.36)$$

Si on considère le cas des gaz calorifiquement parfaits (la chaleur spécifique à volume constante  $c_v$  est constante), l'intégration de l'équation (1.36) va nous donner :

$$u = C_v T - \frac{2\dot{a}}{Tv} + cte \quad (1.37)$$

Cette dernière équation représente l'énergie interne pour un gaz calorifiquement parfait suivant l'équation d'état de Berthelot.

### 1.8.2. Calcul de l'entropie pour l'équation de Berthelot

L'entropie en générale est donnée par la formule suivante :

$$dS = \frac{dQ}{T} = C_v \frac{dT}{T} + \left( \frac{dp}{dT} \right)_v dv \quad (1.38)$$

Pour un fluide homogène on a :

$$dQ = C_v dT + l dv = C_v + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv \quad (1.39)$$

L'utilisation de l'équation (1.33) de Berthelot permet d'écrire :

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{(v-b)} + \frac{\dot{a}}{T^2 v^2} \quad (1.40)$$

Remplaçant les équations (1.39) et (1.40) dans l'équation (1.38) :

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{v-b} dv + \frac{\dot{a}}{T^2} \frac{dv}{v^2} \quad (1.41)$$

Si on considère le cas des gaz calorifiquement parfaits (la chaleur spécifique à volume constante  $c_v$  est constante), l'intégration de l'équation (1.41) va nous donner :

$$S = C_v \ln T + R \ln(v-b) - \frac{\dot{a}}{T^2 v} + cte \quad (1.42)$$

Dans le cas d'une évolution isentropique l'entropie est constante, donc on aura :

$$S = cte \Rightarrow c_v \ln T + R \ln(v-b) - \frac{\dot{a}}{T^2 v} = cte$$

Cette relation peut être aussi s'écrit comme suite :

$$\begin{aligned} \ln T^{c_v} + \ln(v-b)^R + \ln e^{\frac{-\dot{a}}{T^2 v}} &= \ln T^{c_v} (v-b)^R e^{\frac{-\dot{a}}{T^2 v}} = cte \\ T^{c_v} (v-b)^R e^{\frac{-\dot{a}}{T^2 v}} &= cte \end{aligned} \quad (1.43)$$

On peut dire que pour une chaleur spécifique constante, toute évolution isentropique satisfera la relation (1.43) pour une équation de Berthelot.

### 1.8.3. Calcul de l'enthalpie pour l'équation de Berthelot

L'enthalpie par définition est donnée par :

$$dH = \partial W_T + \partial Q = v dp + C_p dT + h dp = C_p dT + (h + v) dp \quad (1.44)$$

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp \Rightarrow \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = h + v \quad (1.45)$$

$$\text{Or} \quad h = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \Rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \quad (1.46)$$

De l'équation (1.33) de Berthelot on peut écrire :

$$v - b = \frac{RT}{p + \frac{\dot{a}}{Tv^2}} \Rightarrow v = \frac{RT}{p + \frac{\dot{a}}{Tv^2}} + b = \frac{RT}{p \left(1 + \frac{\dot{a}}{pTv^2}\right)} + b = \frac{RT}{p} \frac{1}{\left(1 + \frac{\dot{a}}{pTv^2}\right)} + b$$

Or d'après la relation d'approximation  $\frac{1}{1+v} \approx 1-v$  si  $v$  est petit.

$$\text{D'où} : \quad v = \frac{RT}{p} \left(1 - \frac{\dot{a}}{pTv^2}\right) + b \quad \text{or,} \quad \frac{\dot{a}}{pTv^2} = \frac{\dot{a}P}{Tp^2v^2}$$

Si on applique une autre approximation pour des faibles pressions on aura :

$$p^2v^2 \approx R^2T^2$$

$$\text{Alors on écrit} : v = \frac{RT}{p} \left(1 - \frac{\dot{a}P}{R^2T^3}\right) + b = \frac{RT}{p} - \frac{aRTp}{R^2pT^2} + b$$

$$v = \frac{RT}{p} - \frac{a}{RT^2} + b \quad (1.47)$$

La dérivation de l'équation (1.47) nous donne :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p} + \frac{\dot{a}}{RT^3} \quad (1.48)$$

La substitution des équations (1.46), (1.47) et (1.48) dans l'équation (1.45) donne :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{RT}{p} - \frac{\dot{a}}{RT^2} + b - T \frac{R}{p} - 2 \frac{\dot{a}}{RT^2}$$

Alors on écrit :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = b - \frac{3\dot{a}}{RT^2} \quad (1.49)$$

Remplaçant l'équation (1.49) dans l'équation (1.44) on obtient :

$$dH = c_p dT + \left(b - \frac{3\dot{a}}{RT^2}\right) dp \Rightarrow H = \int dH = \int c_p dT + \int \left(b - \frac{3\dot{a}}{RT^2}\right) dp + cte$$

$$\Delta H = \int_1^2 dH = \int_1^2 c_p dT + \int_1^2 \left(b - \frac{3\dot{a}}{RT^2}\right) dP \quad (1.50)$$

Cette relation représente la différence de l'enthalpie entre deux positions thermodynamiques, il est noté que cette quantité est constante lors d'une détente isenthalpique[6].

#### 1.8.4. Facteur de compressibilité pour l'équation de Berthelot

Pour calculer le facteur de compressibilité pour un gaz de Berthelot il faut réécrire leur équation de façon adéquate à l'équation (1.12) exprimant ce facteur.

Rappelant l'équation (1.6) de Berthelot :  $\left(P + \frac{\dot{a}}{T v^2}\right)(v-b) = RT$

$$\left(P + \frac{\dot{a}}{T v^2}\right)(v-b) = RT \Rightarrow P v - P b + \frac{\dot{a}}{T v} - \frac{\dot{a} b}{T v^2} = RT$$

$$\frac{P v}{RT} - \frac{P b}{RT} + \frac{\dot{a}}{RT^2 v} - \frac{\dot{a} b}{RT^2 v^2} = 1$$

$$\frac{P v}{RT} = 1 + \frac{P b}{RT} - \frac{\dot{a}}{RT^2 v} + \frac{\dot{a} b}{RT^2 v^2} \quad (1.51)$$

L'identification de l'équation (1.12) avec (1.51) donne finalement :

$$Z = 1 + \frac{P b}{RT} - \frac{\dot{a}}{RT^2 v} + \frac{\dot{a} b}{RT^2 v^2} \quad (1.52)$$

C'est le facteur de compressibilité pour l'équation d'état de Berthelot.

## CHAPITRE 2

### PARAMETRES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE POUR UN GAZ REEL

#### Introduction

Dans le but de développer les relations des rapports thermodynamiques et géométriques nécessaires, et d'étudier l'écoulement supersonique isentropique pour un gaz diatomique réel (cas de l'air), il faut citer des suppositions et des hypothèses de base. Ce fait est nécessaire afin d'avoir quelque simplifications permettent de réaliser notre analyse théorique d'une façon plus facile et compacte.

#### 2.1. Hypothèses de base

- l'air se comporte comme un gaz diatomique qui a :
  - une constante universelle du gaz  $R=8.3145 \text{ J/(mol.K)}$ .
  - une température caractéristique de vibration  $\theta_v=3056 \text{ K}$ .
  - une masse molaire  $m=28.96 \text{ g/mol}$ .
- Les paramètres de stagnation (pression et température génératrices) obéissent à la loi des gaz réels, en exploitant l'équation de Berthelot qui introduit les effets de taille moléculaire (covolume) et de la force intermoléculaire.
- La combustion et l'écoulement des gaz dans les différentes stations sont adiabatiques, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte de chaleur due à l'environnement.
- Les conditions d'un état stable existent au cours des opérations thermiques. Ceci veut dire que les conditions ou procédés qui surviennent ne changent pas avec le temps (pour des conditions géométriques données) durant la combustion (régime stationnaire).
- L'expansion (la détente) de l'air a lieu de manière uniforme sans choc ni discontinuités.
- L'écoulement à travers la tuyère est unidimensionnel et isentropique.

- La vitesse, la pression, la température et la densité de l'écoulement est uniforme à travers n'importe quel coupe perpendiculaire à l'axe de la tuyère.
- La force de frottement dû à l'écoulement des produits d'échappement est négligeable mais la force d'attraction intermoléculaire de Berthelot existe.
- Les effets de transfert thermique par conduction, convection ou rayonnement sont négligeables.

Toute hypothèse supplémentaire sera dictée -si c'est nécessaire-durant les prochaines analyses. Bien qu'il semble avoir eu beaucoup de suppositions simplificatrices, celles-ci sont toutes raisonnables et on peut s'attendre qu'elles reflètent le véritable comportement de notre domaine d'étude assez précisément.

## 2.2. Configuration des équations

L'équation de Berthelot en terme de masse volumique est donnée par :

$$p = \frac{...RT}{1-b...} - \frac{\dot{a}...^2}{T} \quad (2.1)$$

Avec : ( $b$ ) est la constante de taille moléculaire (covolume).

( $\dot{a}$ ) est la constante des forces d'attraction intermoléculaires.

### 2.2.1. L'équation de la conservation d'énergie (forme différentielle)

L'écoulement isentropique d'un gaz caractérisé par l'équation de Berthelot peut être étudié à l'aide de la différentielle de l'équation d'expansion isentropique :

$$du + dw = \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T d\left( \frac{1}{...} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + pd\left( \frac{1}{...} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Avec :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = C_v \quad (2.3)$$

L'effet de Joule-Thomson est donné par [3] :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{...} - P = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{...} - \frac{...RT}{1-b...} + \frac{\dot{a}...^2}{T} \quad (2.4)$$

La différentielle de la pression est calculée à partir de l'équation (2.1) :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{...} = \frac{...R}{(1-b...)} + \frac{\dot{a}...^2}{T^2} \quad (2.5)$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_... - p = \frac{2\dot{a}...^2}{T} \quad (2.6)$$

Avec :

$$v = \frac{1}{...} \Rightarrow dv = d\left(\frac{1}{...}\right) = -\frac{1}{...^2} d... \quad (2.7)$$

Combinant les équations (2.3), (2.6) et (2.7) et substituant la valeur de  $P$  de l'équation (2.1) dans l'équation (2.2), on trouve :

$$C_v dT - \frac{\dot{a}}{T} d... - \frac{RT}{... (1-b...)} d\rho = 0 \quad (2.8)$$

Maintenant l'expression de la différentielle de  $c_v$  est donnée par :

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_... \quad (2.9)$$

La deuxième dérivée de la pression par rapport à la température à masse volumique constante est calculée en exploitant l'équation (2.1) donc :

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_... = -2 \frac{\dot{a}...^2}{T^3}$$

Donc :

$$T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_... = -2 \frac{\dot{a}...^2}{T^2}$$

Alors l'équation (2.9) s'écrit :

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T = -2 \frac{\dot{a}...^2}{T^2} \quad (2.10)$$

L'intégration de l'équation (2.10) nous donne :

$$\int \left(\frac{\partial C_v}{\partial v}\right)_T = \int -\frac{2\dot{a}}{T^2 v^2}$$

$$C_v = \int \left(-\frac{2\dot{a}}{T^2 v^2}\right) dv \quad (2.11)$$

Substituant l'équation (2.7) dans l'équation (2.11) :

$$C_v = \int -\frac{2\dot{a}...^2}{T^2} \left(-\frac{1}{...^2} d...\right) = \int \frac{2\dot{a}}{T^2} d...$$

$$C_v(T, ...) = \frac{2\dot{a}...}{T^2} + C_v^0(T) \quad (2.12)$$

Où  $C_v^0(T)$  est la fonction qui décrit la variation de  $C_v$  en fonction de la température, et le premier terme représente l'effet de l'imperfection du gaz sur  $C_v$ .

La fonction choisie pour  $C_v^0(T)$  est déterminée sous la considération de la structure moléculaire et la gamme de température où l'effet sur  $C_v$  existe.

Pour un gaz diatomique la gamme de température est important à partir de la température de liquéfaction jusqu'à quelque milles de degré Kelvin, dans ce cas (gaz diatomique) le nombre de degré de liberté translationnel et rotationnel est constant alors que  $C_v^0(T)$  est varié seulement en fonction de la température vibrationnelle. Pour ce fait la fonction de  $C_v^0(T)$  peut-être s'écrit comme suite [36] et [37] :

$$C_v^0(T) = C_{v(gp)} \left\{ 1 + (x_{(gp)} - 1) \left( \frac{n}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{n}{T}}}{\left( 1 - e^{\frac{n}{T}} \right)^2} \right\} \quad (2.13)$$

Le deuxième terme dans les parenthèses, essentiellement le terme de Planck, explique la contribution vibratoire de la chaleur spécifique à volume constante [37].

La supposition est que les molécules du gaz se comportent comme les oscillateurs harmoniques linéaires pour autant que les degrés de liberté vibrationnels soient concernés.

### 2.2.2. L'état générateur

Ça représente l'état dans la chambre de combustion où la vitesse de l'écoulement est considérée comme étant nulle [13] et [14] ( $V_0 = 0 \Rightarrow M = 0$ ), et les propriétés de stagnation ( $T_0, \dots_0, P_0$ ) sont des paramètres générateurs. En d'autres mots,  $T_0$  est la température de combustion,  $P_0$  est la pression de la chambre et  $\dots_0$  est la densité de combustion sous les conditions de la chambre.

$T_0$  et  $P_0$  sont des paramètres liés à la conception de la chambre de combustion. la détermination de  $\dots_0$  sera obtenue par l'application de la méthode de dichotomie [9] sur l'équation de Berthelot.

### 2.2.3. La forme intégrale de l'équation d'énergie pour l'équation de Berthelot

Si on divise l'équation (2.8) par,  $T$ , on obtient :

$$c_v(T, \dots) \frac{dT}{T} - \frac{\dot{a}}{T^2} d\dots - \frac{R}{\dots(1-b\dots)} d\dots = 0 \quad (2.14)$$

On intègre l'équation (2.14) de l'état génératrice à un état donné on obtient:

$$\int_{T_0}^T c_v(T, \dots) \frac{dT}{T} - \int_{\dots_0}^{\dots} \frac{\dot{a}}{T^2} d\dots - \int_{\dots_0}^{\dots} \frac{R}{\dots(1-b\dots)} d\dots = 0 \quad (2.15)$$

Une expression qui gouverne l'expansion isentropique d'un gaz réel diatomique peut s'obtenir maintenant par la substitution des équations (2.12) et (2.13) dans l'équation (2.15):

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T c_v(T, \dots) \frac{dT}{T} &= \int_{T_0}^T \left( c_{v(gp)} \left\{ 1 + (x_{(gp)} - 1) \left( \frac{n}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\dot{a}}{T}}}{\left( 1 - e^{\frac{\dot{a}}{T}} \right)^2} \right\} + \frac{2\dot{a}\dots}{T^2} \right) \frac{dT}{T} \\ &= \int_{T_0}^T \left( c_{v(gp)} \right) \frac{dT}{T} + \int_{T_0}^T \left\{ (x_{(gp)} - 1) \left( \frac{n}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\dot{a}}{T}}}{\left( 1 - e^{\frac{\dot{a}}{T}} \right)^2} \right\} \frac{dT}{T} + \int_{T_0}^T \left( \frac{2\dot{a}\dots}{T^2} \right) \frac{dT}{T} \\ &= c_{v(gp)} \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + R \ln \left( \frac{e^{\frac{\dot{a}}{T_0}} - 1}{e^{\frac{\dot{a}}{T}} - 1} \right) + R \left( \frac{n}{T} \frac{e^{\frac{\dot{a}}{T}}}{e^{\frac{\dot{a}}{T}} - 1} - \frac{n}{T_0} \frac{e^{\frac{\dot{a}}{T_0}}}{e^{\frac{\dot{a}}{T_0}} - 1} \right) - \dot{a} \left( \frac{\dots}{T^2} - \frac{\dots_0}{T_0^2} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Maintenant :

$$- \int_{\dots_0}^{\dots} \frac{\dot{a}}{T^2} d\dots = -\dot{a} \left( \frac{\dots}{T^2} - \frac{\dots_0}{T_0^2} \right) \quad (2.17)$$

Et :

$$- \int_{\dots_0}^{\dots} \frac{R}{\dots(1-b\dots)} d\dots = R \ln \frac{\dots_0(1-b\dots)}{\dots(1-b\dots_0)} \quad (2.18)$$

La substitution des équations (2.16), (2.17) et (2.18) dans l'équation (2.15) nous permettons d'obtenir l'équation importante suivante :

$$c_{v(gp)} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - 2\hat{a}\left(\frac{\dots}{T^2} - \frac{\dots_0}{T_0^2}\right) + R \left( \ln \frac{\dots_0(1-b\dots)}{\dots(1-b\dots_0)} + \ln \frac{\left(e^{\frac{\dots}{T_0}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{\dots}{T}} - 1\right)} + \left( \frac{\dots}{T} \frac{e^{\frac{\dots}{T}}}{e^{\frac{\dots}{T}} - 1} - \frac{\dots}{T_0} \frac{e^{\frac{\dots}{T_0}}}{e^{\frac{\dots}{T_0}} - 1} \right) \right) = 0 \quad (2.19)$$

La relation (2.19) représente la forme intégrale de l'équation d'énergie d'une détente isentropique caractérisé par l'équation de Berthelot on prend en considération le comportement vibratoire des molécules.

### 2.3. Détermination du nombre de Mach

Dans le but de déterminer la fonction du nombre de Mach il est nécessaire de trouver la vitesse de l'écoulement ainsi la célérité du son. Ces deux quantités peuvent être trouvées en utilisant l'équation d'énergie pour un écoulement adiabatique[16] :

$$du + d(pv) + VdV = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T d\left(\frac{1}{\dots}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V dT + d\left(\frac{P}{\dots}\right) + VdV = 0 \quad (2.20)$$

#### 2.3.1. Equation de la vitesse de l'écoulement

L'équation (2.20) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$VdV = -\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T d\left(\frac{1}{\dots}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V dT - d\left(\frac{P}{\dots}\right) \quad (2.21)$$

#### 2.3.2. Calcul de la vitesse

On intègre (2.21) de l'état générateur caractérisé par  $(P_0, T_0, \dots_0, V_0 = 0)$  à un état donné caractérisé par  $(P, T, \dots, V)$  on trouve:

$$\int_{V_0}^V VdV = \int_{\dots_0, T_0}^{\dots, T} \frac{2\hat{a}}{T} d\dots - \int_{\dots_0, T_0}^{\dots, T} c_v(T, \dots) dT - \int_{p_0, T_0}^{p, T} d\left(\frac{P}{\dots}\right) \quad (2.22)$$

Substituant l'équation (2.1), (2.6), (2.12) et (2.13) dans l'équation (2.22) :

$$\frac{V^2}{2} = \int_{\dots_0, T_0}^{\dots, T} \frac{2\hat{a}}{T} d\dots - \int_{\dots_0, T_0}^{\dots, T} (c_{v(gp)} + R \left(\frac{\dots}{T}\right)^2 \frac{e^{\frac{\dots}{T}}}{(1 - e^{\frac{\dots}{T}})^2}) dT - \int_{p_0, T_0}^{p, T} d\left(\frac{P}{\dots}\right) \quad (2.23)$$

Finalement la fonction de vitesse sera :

$$V^2 = 2 \left\{ c_{v(gp)} (T_0 - T) + R_u \left( \frac{1}{\left(1 - e^{\frac{\cdot}{T}}\right)} - \frac{1}{\left(1 - e^{\frac{\cdot}{T_0}}\right)} \right) + 4\dot{\lambda} \left( \frac{\dots}{T} - \frac{\dots_0}{T_0} \right) + \left( \frac{P_0}{\dots_0} - \frac{P}{\dots} \right) \right\} \quad (2.24)$$

### 2.3.3. Détermination de la célérité du son

La célérité du son par définition est donnée par [11] et [12] :

$$a^2 = d \left( \frac{p}{\dots} \right) = \left( \frac{\partial p}{\partial \dots} \right)_T + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\dots} \frac{dT}{d \dots} \quad (2.25)$$

En introduisant l'équation (2.1) pour calculer les termes de l'équation (2.25) :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \dots} \right)_T = \frac{RT}{(1-b \dots)^2} - \frac{2\dot{\lambda} \dots}{T} \quad (2.26)$$

Pour calculer la différentielle de la température par rapport à la masse volumique  $\frac{dT}{d \dots}$  il suffit de diviser l'équation (2.8) par le terme  $c_v d \dots$  on obtient :

$$\frac{dT}{d \dots} = \frac{1}{c_v(T, \dots)} \left( \frac{\dot{\lambda}}{T} + \frac{RT}{\dots(1-b \dots)} \right) \quad (2.27)$$

En substituant les équations (2.22.1), (2.22.2) et (2.5), alors (2.22) devient :

$$a^2 = \frac{RT}{(1-b \dots)^2} - \frac{2\dot{\lambda} \dots}{T} + \left( \frac{\dots R}{(1-b \dots)} + \frac{\dot{\lambda} \dots^2}{T^2} \right) \left( \frac{1}{c_v(T, \dots)} \left( \frac{\dot{\lambda}}{T} + \frac{RT}{\dots(1-b \dots)} \right) \right) \quad (2.28)$$

Donc La célérité du son correspondante est déterminée par la substitution des équations (2.12) et (2.13) dans l'équation (2.28) :

$$a^2 = \frac{RT}{(1-b \dots)^2} - \frac{2\dot{\lambda} \dots}{T} + \frac{\dots^2 T \left( \frac{\dot{\lambda}}{T^2} + \frac{R}{\dots(1-b \dots)} \right)^2}{c_{v(gp)} \left\{ 1 + (X_{(gp)} - 1) \left( \frac{\dots}{T^2} \right) \frac{e^{\frac{\cdot}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\cdot}{T}}\right)^2} + \frac{2\dot{\lambda} \dots}{RT^2} \right\}} \quad (2.29)$$

### 2.3.4. Le nombre de Mach

Combinant (2.24) et (2.29) on trouve l'équation du nombre du Mach suivante :

$$M^2 = 2 \left[ \frac{\frac{1}{(x_{(gp)} - 1)} \left( \frac{T_0}{T} - 1 \right) + \left( \frac{n}{T} \right) \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{n}{T}}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{n}{T_0}}} \right) + \frac{1}{RT} \left( 4\hat{a} \left( \frac{\dots}{T} - \frac{\dots_0}{T_0} \right) + \left( \frac{P_0}{\dots_0} - \frac{P}{\dots} \right) \right)}{\frac{(x_{(gp)} - 1) \left( \frac{1}{1 - b_{\dots}} + \frac{\hat{a}_{\dots}}{RT^2} \right)^2}{\left( 1 + (x_{(gp)} - 1) \left( \frac{n}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{n}{T}}}{\left( 1 - e^{\frac{n}{T}}} \right)^2} + \frac{2\hat{a}_{\dots}}{RT^2} \right)}} + \frac{1}{(1 - b_{\dots})^2} - \frac{2\hat{a}_{\dots}}{RT^2} \right] \quad (2.30)$$

Si on considère que  $n$ ,  $b$ , et  $\hat{a}$  sont nuls ; on obtient l'équation suivante :

$$M^2 = 2 \left( \left( \frac{T_0}{T} - 1 \right) \left( \frac{1}{x_{gp} - 1} \right) \right)$$

Cette relation est l'équation qui caractérise le nombre de mach (cas de détente) pour un gaz parfait [13] et [15].

Donc l'équation (2.30) pour un gaz réel, représente la forme générale du nombre de Mach (caloriquement et thermiquement imparfait)

### 2.4. La chaleur spécifique à volume constante $c_v(T, \dots)$

La chaleur spécifique à volume constante est obtenue en substituant les équations (2.13) dans l'équation (2.12), pour qu'on trouve la relation suivante :

$$c_v(T, \dots) = c_{v(gp)} \left\{ 1 + (x_{(gp)} - 1) \left( \frac{n}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{n}{T}}}{\left( 1 - e^{\frac{n}{T}} \right)^2} \right\} + \frac{2\hat{a}_{\dots}}{T^2} \quad (2.31)$$

On remarque clairement que la chaleur spécifique à volume constante est indépendante de l'effet de covolume  $b$ , et que les paramètres qui l'influent sont seulement les forces d'attraction intermoléculaires et le comportement vibratoire.

Si c'est deux paramètres sont nulles il est aussi clair qu'en revenant à l'état d'un gaz thermiquement et calorifiquement parfait c'est-à-dire

$$c_v(T, \dots) = c_{v(gp)}$$

Si les forces d'attraction intermoléculaires sont nulles ( $\dot{a}=0$ ) ça va nous revenir au cas d'un gaz thermiquement parfait mais calorifiquement imparfait où la chaleur spécifique à volume constante ne dépend que de la température et le paramètre de comportement vibratoire  $n$  [36] et [37] (ce qu'on appelle le modèle HT ou bien gaz parfait à haute température) :

$$c_v(T, \dots) = c_{v(gp)} \left\{ 1 + (X_{(gp)} - 1) \left( \frac{n}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{n}{T}}}{\left( 1 - e^{\frac{n}{T}} \right)^2} \right\}$$

### 2.5. La chaleur spécifique à pression constante $c_p(T, \dots)$

La chaleur spécifique à pression constante est par définition donnée par la relation suivante [8]:

$$c_p(T, \dots) = c_v(T, \dots) - \frac{\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)^2}{\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T} \quad (2.32)$$

On rappelle l'équation de Berthelot en terme de volume :

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{\dot{a}}{Tv^2}$$

D'où :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2\dot{a}}{Tv^3} = -\frac{RT\dots^2}{(1-b\dots)^2} + \frac{2\dot{a}\dots^3}{T} \quad (2.33)$$

L'expression résultante de  $c_p(T, \dots)$  sera donc obtenue en substituant les équations (2.31), (2.33) et (2.5) dans l'équation (2.32)

$$c_p(T, \dots) = c_{p(gp)} \left[ 1 + \frac{X_{(gp)} - 1}{X_{(gp)}} \left\{ \left( \frac{n}{T^2} \right) \frac{e^{\frac{n}{T}}}{\left( 1 - e^{\frac{n}{T}} \right)^2} + \frac{2\dot{a}\dots}{RT^2} \left[ 1 + \frac{\left( \frac{2-b\dots}{1-b\dots} + \frac{\dot{a}\dots}{2RT^2} \right)}{\frac{1}{(1-b\dots)^2} - \frac{2\dot{a}\dots}{RT^2}} \right] \right\} \right] \quad (2.34)$$

Si on considère que  $\mu$ ,  $b$ , et  $\dot{a}$  sont nuls ; en revenant à l'état d'un gaz thermiquement et calorifiquement parfait :

$$c_p(T, \dots) = c_{p(gp)}$$

Si on néglige l'effet de l'imperfection des gaz réel ( $b$  et  $\dot{a}$  nuls) on obtient une relation qui représente le cas d'un gaz thermiquement parfait mais calorifiquement imparfait:

$$c_p(T, \dots) = c_{p(gp)} \left( 1 + \frac{\chi_{(gp)} - 1}{\chi_{(gp)}} \left( \left( \frac{\mu}{T^2} \right) \frac{e^{\frac{\mu}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\mu}{T}}\right)^2} \right) \right)$$

Où la chaleur spécifique à pression constante ne dépend que de la température et le paramètre de comportement vibratoire  $\mu$  [36](modèle gaz parfait à haute température).

## 2.6. Rapport des chaleurs spécifiques $\chi$

Notre domaine d'étude est limité dans le régime supersonique pour un nombre de Mach  $M \in [1.0, 6.0]$ . Le rapport des chaleurs spécifiques donne la relation suivante:

$$\chi(T, \dots) = \frac{c_p(T, \dots)}{c_v(T, \dots)} \quad (2.35)$$

Ce rapport des chaleurs spécifique est obtenu en divisant l'équation (2.34) par l'équation (2.31) :

$$\chi(T, \dots) = \chi_{(gp)} \left[ \frac{\left\{ 1 + \frac{\chi_{(gp)} - 1}{\chi_{(gp)}} \left\{ \left( \frac{\mu}{T^2} \right) \frac{e^{\frac{\mu}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\mu}{T}}\right)^2} + \frac{2\dot{a}\dots}{RT^2} \left[ 1 + \frac{\left( \frac{2 - b\dots}{1 - b\dots} + \frac{\dot{a}\dots}{2RT^2} \right) \right] \right\} \right\}}{1 + (\chi_{(gp)} - 1) \left( \frac{\mu}{T^2} \right) \frac{e^{\frac{\mu}{T}}}{\left(1 - e^{\frac{\mu}{T}}\right)^2} + \frac{2\dot{a}\dots}{RT^2}} \right] \quad (2.36)$$

## 2.7. Calcul numérique des rapports thermodynamiques

Pour calculer les rapports il faut d'abord trouver les paramètres thermodynamiques d'état dans une section donnée  $(T, P, \dots)$ , et les diviser par les paramètres générateurs  $(T_0, \dots, P_0)$  respectivement. La détermination des paramètres  $(T, P, \dots)$  sera possible en résolvant le système d'équation algébrique non linéaire formé par les équations (2.1), (2.19) et (2.30) :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{V_i} \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + R \ln \frac{\dots_0 (1 - b_{\dots})}{\dots (1 - b_{\dots_0})} - 2\dot{a} \left( \frac{\dots}{T^2} - \frac{\dots_0}{T_0^2} \right) + R \ln \left( \frac{e^{\frac{\dots}{T_0}} - 1}{e^{\frac{\dots}{T}} - 1} \right) + R \left( \frac{\dots}{T} \frac{e^{\frac{\dots}{T}}}{e^{\frac{\dots}{T}} - 1} - \frac{\dots}{T_0} \frac{e^{\frac{\dots}{T_0}}}{e^{\frac{\dots}{T_0}} - 1} \right) = 0 \\ \\ M^2 = 2 \frac{\left( \frac{1}{(x_{gp} - 1)} \left( \frac{T_0}{T} - 1 \right) + \left( \frac{\dots}{T} \right) \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{\dots}{T}}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{\dots}{T_0}}} \right) + \frac{1}{RT} \left( 4\dot{a} \left( \frac{\dots}{T} - \frac{\dots_0}{T_0} \right) + \left( \frac{P_0}{\dots_0} - \frac{P}{\dots} \right) \right) \right)}{\left( x_{gp} - 1 \right) \left( \frac{1}{1 - b_{\dots}} + \frac{\dot{a}_{\dots}}{RT^2} \right)^2} + \frac{1}{(1 - b_{\dots})^2} - \frac{2\dot{a}_{\dots}}{RT^2} \\ \\ p = \frac{\dots RT}{(1 - b_{\dots})} - \frac{\dot{a}_{\dots}^2}{T} \end{array} \right.$$

Ces trois équations composent un système d'équation fortement non linéaire où la solution analytique est impossible à trouver. Les phénomènes non linéaires sont extrêmement courants en pratique. Ils sont sans doute plus fréquents que les phénomènes linéaires. Dans ce cas, nous examinons les systèmes non linéaires et nous montrons comment les résoudre à l'aide d'une suite de problèmes linéaires, auxquels on peut appliquer diverses techniques.

Le problème consiste à trouver le vecteur  $[T, \dots, P]$  vérifiant les 3 équations non linéaires suivantes:

$$\begin{cases} f_E(T, \dots, P) = 0 \\ f_M(T, \dots, P) = 0 \dots\dots\dots(I) \\ f_B(T, \dots, P) = 0 \end{cases}$$

Où  $f_E$ ,  $f_M$  et  $f_B$  sont des fonctions de 3 variables que nous supposons différentiables et réfèrent respectivement aux équations (2.19) et (2.30), (2.1).

Contrairement aux systèmes linéaires, il n'y a pas de condition simple associée aux systèmes non linéaires qui permette d'assurer l'existence et l'unicité de la solution. Le plus souvent, il existe plusieurs solutions possibles et seul le contexte indique laquelle est la bonne[9].

Les méthodes de résolution des systèmes non linéaires sont nombreuses. Notamment, nous ne présentons que la méthode la plus importante et la plus utilisée en pratique, soit la méthode de Newton[9] et [35].

### 2.7.1. La méthode de Newton

L'application de cette méthode à un système de deux équations non linéaires est suffisante pour illustrer le cas général[35].

Considérons donc le système:

$$\begin{cases} f_E(T, \dots) = 0 \\ f_M(T, \dots) = 0 \end{cases}$$

Soit  $[T_i, \dots_i]$ , une approximation initiale de la solution de ce système.

Cette approximation initiale, est cruciale et doit toujours être choisie avec soin. Le but de ce qui suit est de déterminer les pas  $[dT, d\dots]$  à  $[T_i, \dots_i]$  de telle

sorte que:

$$\begin{cases} f_E(T_i + dT, \dots_i + d\dots) = 0 \\ f_M(T_i + dT, \dots_i + d\dots) = 0 \end{cases}$$

Pour déterminer  $[dT, d\dots]$  il suffit maintenant de faire un développement de Taylor en deux variables pour chacune des deux fonctions [35]:

$$\begin{cases} 0 = f_E(T_i, \dots_i) + \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \dots_i)dT + \frac{\partial f_E}{\partial \dots}(T_i, \dots_i)d\dots + \dots \\ 0 = f_M(T_i, \dots_i) + \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \dots_i)dT + \frac{\partial f_M}{\partial \dots}(T_i, \dots_i)d\dots + \dots \end{cases}$$

Dans les relations précédentes, les pointillés désignent des termes d'ordre supérieur ou égal à deux et faisant intervenir les dérivées partielles d'ordre correspondant. Pour déterminer  $[dT, d\dots]$  il suffit de négliger les termes d'ordre supérieur et d'écrire:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \dots_i)dT + \frac{\partial f_E}{\partial \dots}(T_i, \dots_i)d\dots = -f_E(T_i, \dots_i) \\ \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \dots_i)dT + \frac{\partial f_M}{\partial \dots}(T_i, \dots_i)d\dots = -f_M(T_i, \dots_i) \end{cases}$$

Où encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_E}{\partial T}(T_i, \dots_i) & \frac{\partial f_E}{\partial \dots}(T_i, \dots_i) \\ \frac{\partial f_M}{\partial T}(T_i, \dots_i) & \frac{\partial f_M}{\partial \dots}(T_i, \dots_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dT \\ d\dots \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_E(T_i, \dots_i) \\ f_M(T_i, \dots_i) \end{pmatrix}$$

Ce système linéaire s'écrit, également sous une forme plus compacte[9] et [35]:

$$J(T_i, \dots_i)\Delta\vec{k} = -\vec{R}(T_i, \dots_i)$$

Où  $J(T_i, \dots_i)$  désigne la matrice des dérivées partielles ou matrice jacobienne évaluée au point  $(T_i, \dots_i)$ , où  $\Delta\vec{k}$  est le vecteur des corrections relatives à chaque variable ( $\Delta\vec{k} = [\Delta T, \Delta\dots]$ ) et où  $-\vec{R}(T_i, \dots_i)$  est le vecteur résidu évalué en  $(T_i, \dots_i)$ . Le déterminant de la matrice jacobienne est appelé le jacobien.

Le jacobien doit bien entendu être différent de 0 pour que la matrice jacobienne soit inversible. On pose ensuite:

$$\begin{cases} T_{i+1} = T_i + \Delta T \\ \dots_{i+1} = \dots_i + \Delta\dots \end{cases}$$

Qui est la nouvelle approximation de la solution du système non linéaire. On cherchera par la suite à corriger  $(T_{i+1}, \dots_{i+1})$  d'une nouvelle quantité  $\Delta\vec{k}$ , et ce jusqu'à la convergence. Pour en arriver à l'algorithme général suivant :

### 2.7.2. Algorithme de la méthode de Newton appliquée aux systèmes

1. Étant donné  $v$ , un critère d'arrêt.
2. Étant donné  $N$ , le nombre maximal d'itérations.
3. Étant donné  $\vec{k} = [T_i, \dots, \dots_i]$  une approximation initiale de la solution du système

4. Résoudre le système linéaire:  $J(T_i, \dots, \dots_i) \Delta \vec{k} = -\vec{R}[T_i, \dots, \dots_i]$  et poser:

$$\begin{cases} T_{i+1} = T_i + \Delta T \\ \dots_{i+1} = \dots_i + \Delta \dots \end{cases}$$

5. Si  $\|T_i - T_{i+1}\| + \|\dots_i - \dots_{i+1}\| < v$  et  $\|\vec{R}[T_i, \dots, \dots_i]\| \leq v$

- convergence atteinte
- écrire la solution
- arrêt

6.  $i$  reçois  $i+1$  et retour à l'étape 4

7. Si le nombre maximal d'itérations  $N$  est atteint:

- convergence non atteinte en  $N$  itérations.
- arrêt.

### 2.7.3. Le choix de la solution initial

La convergence de la méthode de Newton dépend directement de l'approximation initial  $(T_i, \dots, \dots_i)$  de la solution [35], un mauvais choix de  $(T_i, \dots, \dots_i)$  causera une divergence, pour cela on va initialiser la solution en utilisant les paramètres thermodynamiques d'un gaz parfait par la suite on verra si ce choix est justifié.

Notre étude est focalisé sur la détente isentropique unidimensionnelle, l'écoulement dans ce cas est considéré comme supersonique ( $1 < M < 6$ ). On va varier le nombre de mach définie dans l'équation  $f_M$  dans ce domaine est pour chaque valeur de  $M$  on calcule les paramètres initiaux (celles du gaz parfait) on appliquant les lois suivantes [13] et [25]:

$$\frac{T_i}{T_0} = \left[ 1 + \frac{\chi_{gp} - 1}{2} M^2 \right]^{-1}, \frac{\dots_i}{\dots_0} = \left[ 1 + \frac{\chi_{gp} - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{-1}{\chi_{gp} - 1}}, \frac{P_i}{P_0} = \left[ 1 + \frac{\chi_{gp} - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{-\chi_{gp}}{\chi_{gp} - 1}} \quad (2.37)$$



Finalement :

$$\frac{\dot{m}}{A_{*..._0} a_0} = \left( \frac{\frac{RT_{*..._*}}{(1-b_{*..._*})^2} - \frac{2\dot{a}_{*..._*}^2}{T_*} + \frac{{}_{*..._*}^3 T_* \left( \frac{\dot{a}}{T_*^2} + \frac{R}{(1-b_{*..._*})} \right)^2}{c_{v_{gp}} \left\{ 1 + (\chi_{gp} - 1) \left( \frac{n}{T_*^2} \right) \frac{e^{\frac{n}{T_*}}}{\left( 1 - e^{\frac{n}{T_*}} \right)^2} + \frac{2\dot{a}_{*..._*}}{RT_*^2} \right\}}}{\frac{RT_{0..._0}}{(1-b_{0..._0})^2} - \frac{2\dot{a}_{0..._0}^2}{T_0} + \frac{{}_{0..._0}^3 T_0 \left( \frac{\dot{a}}{T_0^2} + \frac{R}{(1-b_{0..._0})} \right)^2}{c_{v_{gp}} \left\{ 1 + (\chi_{gp} - 1) \left( \frac{n}{T_0^2} \right) \frac{e^{\frac{n}{T_0}}}{\left( 1 - e^{\frac{n}{T_0}} \right)^2} + \frac{2\dot{a}_{0..._0}}{RT_0^2} \right\}}} \right) \quad (2.42)$$

### 2.11. La Poussée

La poussée est l'élément fondamental de performance qui caractérise un moteur aéronautique et aérospatiale.

Sans aucun doute, ce paramètre est le plus important pour n'importe quel designer de machine. La poussée, étant la force qu'exerce un moteur, est ce qui propulse un appareil.

La poussée est créée par l'expulsion de masse (échappement) traversant la tuyère à haute vitesse. L'expression pour la poussée est donnée par[2] :

$$F = \int PdA = \dot{m} \times V_s + (P_s - P_a) A_s \quad (2.43)$$

Où le terme à droite de l'équation (2.43) représente l'addition des forces de pression (résultante) agissant sur la chambre et la tuyère, perpendiculairement sur une normale à l'axe de symétrie de la tuyère, comme le montre la figure 3.1.

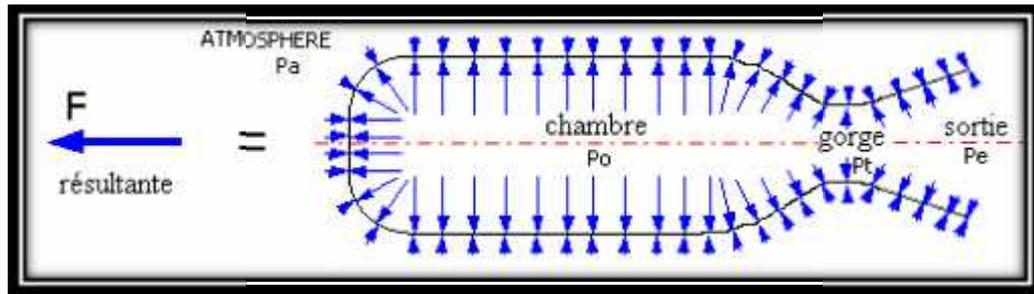


Figure 2.1 : Représentation de la force résultante de la poussée

La pression interne est à son maximum à l'intérieur de la chambre et diminue graduellement dans la tuyère à la sortie. La pression externe (atmosphérique) est uniforme sur les surfaces extérieures.

Dans le premier terme du côté droit de l'équation (2.43),  $\dot{m}$  est le débit de masse des produits d'échappement et  $V_s$  est la vitesse d'échappement. Le deuxième terme du côté droit est la pression de poussée, qui est égale à zéro pour une tuyère avec un rapport d'expansion optimal ( $P_s = P_a$ ) ;  $A_s$  est l'aire de la sortie de la tuyère[28] et [30].

En considérant la continuité (conservation de masse) à la gorge de la tuyère et que ( $P_s = P_a$ ), l'équation précédente (2.43) peut être réécrite comme suite :

$$F = \dots A_* V_* \times V \quad (2.44)$$

Mais :  $v_* = a_*$   
 $v = M \times a$

Donc l'expression de la poussée sera :

$$F = \dots A_* a_* M \times a \quad (2.45)$$

### 2.11.1. Le coefficient de poussée

Le degré auquel la poussée est amplifiée par la tuyère est quantifié par le coefficient de poussée  $C_f$ , et est définie en termes de la pression de la chambre et de l'aire du col[2].

D'après l'équation (2.42) débit massique, au col on a :

$$\frac{\dot{m}}{A_* \dots_0 a_0} = \left( \begin{array}{c} \dots_* \\ \dots_0 \end{array} \right) \left( \frac{a_*}{a_0} \right) \Rightarrow \dot{m} = A_* \dots_0 a_0 \left( \begin{array}{c} \dots_* \\ \dots_0 \end{array} \right) \left( \frac{a_*}{a_0} \right) \quad (2.46)$$

Remplaçons l'équation (2.46) dans l'équation de poussée (2.45) on obtient:

$$F = A_* \dots_0 a_0 \begin{pmatrix} \dots_* \\ \dots_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_* \\ a_0 \end{pmatrix} M_s a_s \quad (2.47)$$

Le coefficient de poussée est donné par la relation [2]:

$$C_f = \frac{F}{A_* P_0} \quad (2.48)$$

Remplaçons l'équation (2.47) dans l'équation (2.48) on obtient:

$$C_f = \frac{F}{P_0 A_*} = \frac{A_* \dots_0 a_0 \begin{pmatrix} \dots_* \\ \dots_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_* \\ a_0 \end{pmatrix} M_s a_s}{P_0 A_*} = M_s \begin{pmatrix} \dots_* \\ \dots_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_* \\ a_0 \end{pmatrix} \frac{\dots_0}{P_0} a_0 a_s$$

Finalement :

$$C_f = M_s(T, \dots) \cdot \begin{pmatrix} \dots_* \\ \dots_0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\dots_0}{P_0} a_*(T_*, \dots_*) \cdot a_s(T, \dots) \quad (2.49)$$

## CHAPITRE 3

### FONCTION DE PRANDTL MEYER POUR UN GAZ REEL

Dans ce chapitre on va développer un modèle mathématique basé sur l'équation de Berthelot pour la fonction de Prandtl Meyer. La nouvelle fonction de Prandtl Meyer sera présentée sous la forme de deux intégrales. L'un est basé sur quelques fonctions complexes tel que la nouvelle équation de la chaleur spécifique à pression constante  $C_p(T, \dots)$ , la fonction du nombre de Mach  $M(T, \dots)$  et celle de la célérité de son. Le deuxième intégral est basé sur une nouvelle définition d'une fonction  $C_T(T, \dots)$  qui est considéré comme un paramètre thermodynamique à température constante caractérise l'imperfection des gaz.

Contrairement au cas des gaz parfait où la résolution de la fonction de Prandtl Meyer est faite analytiquement par L. Prandtl et Th. Meyer au début du 20ème siècle [15], le cas des gaz réels nécessite des méthodes d'intégration numérique qui donnent des solutions approchées parce que la procédure analytique est impossible. Alors on présente aussi dans ce chapitre ces méthodes d'intégration et les compare afin de trouver celle qui nous convienne.

#### 3.1. Détente de Prandtl-Meyer

##### 3.1.1. Définition

La détente de Prandtl-Meyer est un écoulement supersonique d'un fluide (l'air pour notre cas) sur une plaque plane terminée par une rampe déviée vers le bas comme l'indique la figure 3.1 [7].

La déviation de cet écoulement génère des ondes de détentes (lignes de Mach) qui ont pour effet l'augmentation du nombre de Mach et la diminution des caractéristiques du fluide (masse volumique, pression et température).

Dans le cas où la déviation de la rampe est vers le haut les ondes générées sont des ondes de compression et les effets obtenus sont contraires à ceux

mentionnés précédemment [7]. L'importance de ces écoulements apparait dans l'étude aérodynamique autour des profils.

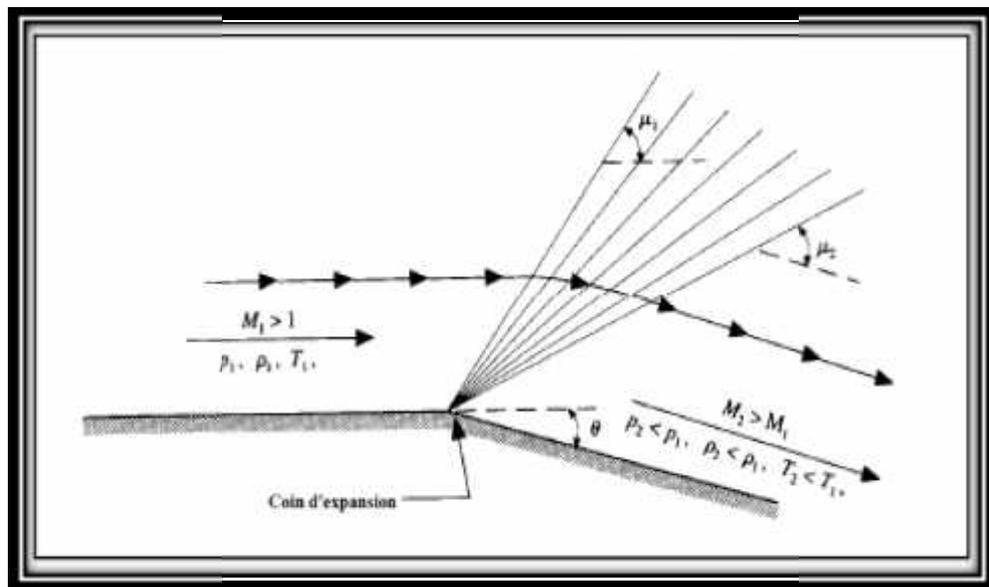


Figure3.1 :Schéma de la détente de Prandtl-Meyer

### 3.2. Détermination de la fonction de Prandtl Meyer pour un GR

La fonction de Prandtl Meyer joue un rôle très important dans le calcul et le dimensionnement au cours des écoulements supersoniques [25]. On cherche à trouver une expression générale pour cette fonction en exploitant l'équation d'état de Berthelot qui porte des corrections importantes par l'intervention des termes de covolume et la force d'attraction intermoléculaire sans oublier l'effet de vibration qui rend le gaz calorifiquement imparfait.

La nouvelle forme de la fonction de Prandtl Meyer sera le cas général et les autres expressions de cette fonction pour le modèle de gaz parfait (GP) et le modèle des gaz parfait à haute température (HT) deviennent des cas particuliers de notre modèle (GR).

#### 3.2.1. Formulations mathématiques

La déviation d'un écoulement supersonique peut engendrer une expansion ou une compression. Lorsque l'intensité du choc  $P/P$  tend vers zéro, fournissent l'outil nécessaire à l'étude de ce phénomène [7]. En effet, l'onde de choc oblique devient une onde de Mach. La vitesse normale à l'onde est la vitesse du son. Une

petite déviation d'écoulement ( $d\hat{\alpha}$ ) en aval de l'onde est liée à une différence de vitesse ( $dV$ ) par la relation suivante [2], [13] et [25] on a :

$$d\hat{\alpha} = -\cot \mu \frac{dV}{V} \quad (3.1)$$

$\mu$  : Représente l'angle de mach

$d\hat{\alpha}$  : Représente une déflexion élémentaire [7].

Notons que l'angle  $d\hat{\alpha}$  est considéré positif quand l'écoulement s'éloigne de la direction normale à l'onde (onde de compression) et négatif quand l'écoulement rapproche de la direction normale à l'onde (onde de détente) selon les conventions de la dynamique des fluides.

En insérant la relation entre l'angle de Mach  $\mu$  et le nombre de Mach  $M$  [25] dans l'équation (3.1), on obtient:

$$d\hat{\alpha} = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (3.2)$$

Tel que  $\hat{\alpha}$  est définie comme étant la fonction de Prandtl Meyer.

Pour traiter le cas d'un angle fini  $\hat{\alpha}$ , il faut intégrer la relation ci-dessus, ce qui suppose que l'on puisse exprimer  $\frac{dV}{V}$  en fonction de  $dM$  et de  $M$ .

La différence de pression  $\Delta P$  de part et d'autre de l'onde est fournie par l'équation de Bernoulli. Puisque l'écoulement est isentropique le long des processus thermodynamique, par conséquent:

$$VdV + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad VdV + \frac{dp}{\rho} \left( \frac{d...}{...} \right) = 0 \quad (3.3)$$

L'intervention de la définition de la célérité du son nous permet d'écrire:

$$a^2 = \left( \frac{dp}{d...} \right) \quad \text{d'ou} \quad VdV + a^2 \left( \frac{d...}{...} \right) = 0$$

Devisant par  $V^2$  on obtient :

$$\frac{dV}{V} = -\frac{a^2}{V^2} \left( \frac{d \dots}{\dots} \right) = -\frac{1}{M^2} \left( \frac{d \dots}{\dots} \right) \quad (3.4)$$

Substituant l'équation (3.4) dans l'équation (3.2) on obtient alors :

$$d\hat{r} = -\frac{1}{M^2} \sqrt{M^2 - 1} \left( \frac{d \dots}{\dots} \right) \quad (3.5)$$

### 3.2.2. La différentielle de la pression $dP$ en fonction de $d$

Dans le but d'apporter l'effet de l'équation de Berthelot sur la fonction de Prandtl Meyer, il faut d'abord exprimer le terme  $\frac{d \dots}{\dots}$  de l'équation (3.5) d'une façon convenable. Cela est réalisable en écrivant la différentielle de la pression ( $dP$ ) en fonction de ( $d \dots$ ).

A température constante ( $T = cste$ ) On a :

$$dP = d \left( \frac{\dots RT}{(1-b\dots)} - \frac{\dot{a}\dots^2}{T} \right)_T = \frac{\partial}{\partial \dots} \left( \frac{\dots RT}{(1-b\dots)} - \frac{\dot{a}\dots^2}{T} \right)_T d \dots \quad (3.6)$$

Alors :

$$dP = \left( \frac{RT(1-b\dots) + b\dots RT}{(1-b\dots)^2} - \frac{2\dot{a}\dots}{T} \right)_T d \dots = \left( \frac{RT}{(1-b\dots)^2} - \frac{2\dot{a}\dots}{T} \right)_T d \dots$$

$$dP = \left( \frac{RT^2 - 2\dot{a}\dots(1-b\dots)^2}{T(1-b\dots)^2} \right)_T d \dots \quad (3.7)$$

### 3.2.3. Développement de la relation entre La différentielle de l'enthalpie $dH$ et la différentielle de la pression $dP$

Sous forme différentielle, l'enthalpie est défini comme suite :

$$dH = C_p dT + (h + v) dP \quad (3.8)$$

On la réécrit par :

$$dH = C_p dT + C_1 dP$$

Avec : 
$$C_1 = (h + v)$$

A température constante le premier terme de l'équation (3.8) est nul, d'où :

$$C_1 = (h + v) = \left( \frac{dH}{dP} \right)_T$$

Mais par définition : 
$$h = -T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P$$

Alors :

$$C_1 = v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \quad (3.9)$$

Calculant  $\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P$  en utilisant l'équation d'état de Berthelot en terme de

volume on obtient :

$$\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = - \frac{RT^2 v^3 (v-b) + \dot{a}v (v-b)^2}{2\dot{a}T (v-b)^2 - RT^3 v^3} \quad (3.10)$$

La substitution de l'équation (3.10) dans l'équation (3.9) donne :

$$C_1 = v + \frac{RT^3 v^3 (v-b) + c\dot{a}T (v-b)^2}{2\dot{a}T (v-b)^2 - RT^3 v^3}$$

Donc : 
$$C_1 = v \left( \frac{3\dot{a}(v-b)^2 + RT^2 v^2 b}{2\dot{a}(v-b)^2 - RT^2 v^3} \right) \quad \text{Avec :} \quad v = \frac{1}{\dots}$$

Finalement le coefficient  $C_1$  sera s'exprimer en terme de masse volumique par:

$$C_1 = \left( \frac{3\dot{a}b^2 \dots^2 - 6\dot{a}b\dots - RT^2 b + 3\dot{a}}{2\dot{a}b^2 \dots^3 - 4\dot{a}b\dots^2 + 2\dot{a}\dots - RT^2} \right) \quad (3.11)$$

Remplaçant l'équation (3.11) dans l'équation (3.8) on trouve :

$$dH = C_p dT + C_1 dP = C_p dT + \left( \underbrace{C_1 \times \left( \frac{RT^2 - 2\dot{a}\dots (1-b\dots)^2}{T(1-b\dots)^2} \right)}_{C_T} d\dots \right)$$

$$C_T = \left( \frac{RT^2 - 2\dot{a}\dots (1-b\dots)^2}{T(1-b\dots)^2} \right) \times \left( \frac{3\dot{a}b^2 \dots^2 - 6\dot{a}b\dots - RT^2 b + 3\dot{a}}{2\dot{a}b^2 \dots^3 - 4\dot{a}b\dots^2 + 2\dot{a}\dots - RT^2} \right)$$

La simplification de ce coefficient  $C_T$  donne :

$$C_T = \left( \frac{3ab^2 \dots^2 - 6ab \dots - RT^2 b + 3a}{2 \dots bT - b^2 \dots^2 T - T} \right) \quad (3.12)$$

On remarque que ce paramètre thermodynamique est exprimé purement par les facteurs qui caractérisent l'imperfection des gaz (le covolume  $b$  et les forces d'attraction intermoléculaire) en fonction de la masse volumique  $\dots$  et la température  $T$  qui doit être constante. Donc la nouvelle expression de l'équation (3.8) sera :

$$dH = C_p dT + (h + v) dP = C_p dT + C_T d \dots \quad (3.13)$$

Mais aussi, l'enthalpie peut s'exprimer en fonction de la vitesse par la relation suivante :

$$V dV = -dH = -C_p dT - C_T d \dots \quad (3.14)$$

Substituant l'équation (3.14) dans l'équation (3.4) :

$$V dV + a^2 \left( \frac{d \dots}{\dots} \right) = (-C_p dT - C_T d \dots) + a^2 \left( \frac{d \dots}{\dots} \right) = 0$$

D'où :

$$\left( \frac{d \dots}{\dots} \right) = \frac{(C_p dT + C_T d \dots)}{a^2} \quad (3.15)$$

Remplaçant cette équation (3.15) dans l'équation (3.5), on obtient:

$$d \hat{\dots} = -\frac{1}{M^2} \sqrt{M^2 - 1} \frac{(C_p dT + C_T d \dots)}{a^2} \quad (3.16)$$

On peut encore écrire :

$$d \hat{\dots} = -\frac{C_p dT \sqrt{M^2 - 1}}{V^2} - \frac{C_T d \dots \sqrt{M^2 - 1}}{V^2} \quad (3.17)$$

La fonction  $\hat{\dots}$  est définie purement dans le régime supersonique entre un angle de déviation nulle ( $\hat{\dots} = 0$ ) correspondant à un nombre de Mach sonique au niveau du col ( $M=1$ ) et l'angle  $\hat{\dots}$  associé à un état supersonique, correspondant à un nombre de mach ( $M>1$ ) [7] et [25].

Donc il faut intégrer la fonction de Prandtl Meyer entre l'état des paramètres critiques au col ( $T_*, \dots_*, P_*, M_* = 1, \hat{\dots}_* = 0$ ) et l'état des paramètres supersonique

$(T, \dots, P, M, \hat{\cdot})$  en substituant les résultats trouvés précédemment par le modèle de Berthelot, on trouve :

$$\int_{\hat{\cdot}_*}^{\hat{\cdot}} d\hat{\cdot} = \hat{\cdot} - \hat{\cdot}_* = \hat{\cdot}$$

Alors la fonction de Prandtl Meyer sera :

$$\hat{\cdot} = \int_{T_*}^{T_s} - \left( \frac{C_p(T, \dots) \sqrt{M(T, \dots)^2 - 1}}{V(T, \dots)^2} \right)_{\dots = \dots_s} dT - \int_{\dots_*}^{\dots_s} \left( \frac{C_T(T, \dots) \sqrt{M(T, \dots)^2 - 1}}{V(T, \dots)^2} \right)_{T=T_s} d\dots \quad (3.18)$$

On remarque clairement que la fonction de Prandtl-Meyer est reliée directement avec la température et la masse volumique.

Aussi il faut noter que cette fonction de Prandtl Meyer est strictement positive parce que notre étude est consacrée spécialement à une détente supersonique où les paramètres supersoniques  $(T, \dots)$  sont toujours inférieurs aux paramètres critiques du col  $(T_*, \dots_*)$ .

Donc le changement de bornes d'intégration est souhaitable afin d'éliminer le signe moins (-) et de décrire la fonction de Prandtl Meyer  $\hat{\cdot}(T, \dots)$  d'une façon plus adéquate comme suite :

$$\hat{\cdot}(T, \dots) = \int_{T_s}^{T_*} \left( \frac{C_p(T, \dots) \sqrt{M(T, \dots)^2 - 1}}{V(T, \dots)^2} \right)_{\dots = \dots_s} dT + \int_{\dots_s}^{\dots_*} \left( \frac{C_T(T, \dots) \sqrt{M(T, \dots)^2 - 1}}{V(T, \dots)^2} \right)_{T=T_s} d\dots \quad (3.19)$$

### 3.3. Comparaison de la fonction de Prandtl Meyer de notre modèle avec le modèle GP et le modèle HT

#### 3.3.1. Le modèle HT (caloriquement imparfait et thermiquement parfait)

Le modèle des gaz parfait à haute température (dite HT) est concentré sur une hypothèse qui dite que lorsque la température génératrice  $T_0$  de la chambre de combustion, d'un gaz parfait augmente, la chaleur spécifique  $C_p$  et le rapport ne restent plus constants et commencent à varier avec la température  $T_0$ . Le gaz reste parfait, sauf qu'il sera nommé en plus gaz caloriquement imparfait [25].

La fonction de Prandtl Meyer pour ce modèle est donné par [25]:

$$\hat{\omega} = \int_{T_s}^{T_s} \left( \frac{C_p(T)}{2G(T)} \sqrt{2G(T)/a^2(T) - 1} \right) dT \quad (3.20)$$

Avec :

$$2G(T) = V^2 \quad (3.21)$$

Donc la substitution de l'équation (3.21) dans l'équation (3.20) donne :

$$\hat{\omega} = \int_{T_s}^{T_s} \left( \frac{C_p(T)}{V^2} \sqrt{V^2/a^2(T) - 1} \right) dT \quad (3.22)$$

Mais :

$$V^2/a^2(T) = M^2$$

Alors la fonction de Prandtl Meyer pour le modèle HT est définie comme :

$$\hat{\omega} = \int_{T_s}^{T_s} \frac{C_p(T)}{V^2} \sqrt{M^2 - 1} \quad (3.23)$$

Si on cherche à comparer cette équation (3.23) avec l'équation (3.19) qui exprime la fonction de Prandtl Meyer avec notre modèle, il faut juste remplacer les valeurs qui caractérisent l'imperfection du gaz (le covolume et les forces d'attraction intermoléculaires) par des valeurs nulles dans les termes constituant l'équation (3.19) tel que l'équation (2.30) du nombre de Mach, l'équation (2.24) de la vitesse, l'équation (2.34) de  $C_p(T, \dots)$  et l'équation (3.12) qui exprime le  $C_T(T, \dots)$ , cela nous donne :

$$\hat{\omega} = \int_{T_s}^{T_s} \frac{C_p(T, \dots)}{V^2} \sqrt{M^2 - 1} \quad (3.24)$$

Cette équation (3.24) est identique avec l'équation (3.23) ce qui permet de conclure que la fonction de Prandtl Meyer déterminée par le modèle HT est un cas particulier de l'équation trouvée dans notre modèle GR.

### 3.3.2. Le modèle GP (caloriquement et thermiquement parfait)

Les résultats obtenus d'un écoulement supersoniques d'un gaz parfait présentés dans les références [7] et [25] sont valables sous la base de l'hypothèse d'un gaz caloriquement et thermiquement parfait, c'est à dire, les chaleurs spécifiques  $C_p$  et  $C_v$  sont constantes et ne dépendent pas de la température, qui n'est pas valable dans le cas réel lorsque la température et la pression croient.

Pour faire une comparaison entre les cas GRet GP, on rappelle la fonction de PrandtlMeyer donnée par la théorie d'un gaz parfait [7] et [25]:

$$\hat{\nu}(M) = \sqrt{\frac{\chi+1}{\chi-1}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\chi+1}{\chi-1} (M^2-1) \right]^{\frac{1}{2}} - \operatorname{arctg} (M^2-1)^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

La fonction de Prandtl-Meyer (3.25) est reliée explicitement avec le nombre Mach, qui est la variable principale pour le gaz parfait, au contraire pour le modèle *HT*, où la variable principale est la température  $T$  et notre modèle GR, où on a deux variables principales qui sont la température  $T$  et la masse volumique ... .

Dans le but de déterminer et confirmer que la relation de Prandtl Meyer pour un gaz parfait donnée par l'équation (3.25), est un cas particulier de l'équation (3.19) qu'on a trouvée en exploitant notre modèle, il faut éliminer les paramètres d'imperfection thermique de gaz ( $b$  et  $\hat{a}$ ) dans l'équation d'état de Berthelot, ainsi le paramètre d'imperfection calorifique qui est la température caractérise le comportement vibratoire des molécules ( $\nu$ ).

Pour montrer que l'équation (3.25) est identique avec l'équation (3.19) si on remplace les paramètres ( $b$ ,  $\hat{a}$  et  $\nu$ ) par des zéros, il est mieux de comparer ces deux équation en forme différentielle afin de simplifier un peu les calculs.

L'équation (3.25) sous forme différentielle s'écrit [25]:

$$d\hat{\nu} = \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\chi-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (3.26)$$

Le nombre de Mach est défini comme étant le rapport de la vitesse par rapport à la célérité du son :

$$M = \frac{V}{a} \quad (3.27)$$

La dérivée logarithmique de l'équation (3.27) nous donne :

$$\frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} - \frac{da}{a} \quad (3.28)$$

On souhaite maintenant d'exprimer  $\frac{da}{a}$  en fonction de  $dM$  et  $M$  :

On utilise la relation qui donne la célérité du son pour un gaz parfait [7] :

$$a = \sqrt{\chi RT} \quad (3.29)$$

Tant que  $R$  et  $\chi$  sont considérés constantes dans le cas d'un gaz parfait, alors on peut utiliser la célérité du son génératrice et écrire :

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \frac{\chi RT}{\chi RT_0} = \frac{T}{T_0} \quad (3.30)$$

En exprimant le rapport de température en fonction de nombre de Mach pour un gaz parfait [25] on trouve :

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\chi - 1}{2} M^2\right)^{-1} \quad (3.31)$$

Posons pour simplifier la démarche :

$$f(M) = \left(1 + \frac{\chi - 1}{2} M^2\right)$$

Alors l'équation (3.31) s'écrit :

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \frac{1}{f(M)} \quad (3.32)$$

La dérivée logarithmique de l'équation (3.32) nous permet d'écrire :

$$\frac{da}{a} = -\frac{1}{2} \frac{f'(M)}{f(M)} dM \quad (3.33)$$

Remplaçant  $f(M)$  et ça dérivée par ces valeurs on obtient :

$$\frac{da}{a} = -\frac{1}{2} \frac{(\chi - 1)M}{\left(1 + \frac{\chi - 1}{2} M^2\right)} dM \quad (3.34)$$

La substitution de l'équation (3.34) dans l'équation (3.28) donne :

$$\frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} + \frac{1}{2} \frac{(\chi - 1)M}{\left(1 + \frac{\chi - 1}{2} M^2\right)} dM \quad (3.35)$$

On peut encore écrire :

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} - \frac{(\chi - 1)M^2}{2\left(1 + \frac{\chi - 1}{2} M^2\right)} \frac{dM}{M}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} \left( \frac{2\left(1 + \frac{\chi - 1}{2} M^2\right) - (\chi - 1)M^2}{2\left(1 + \frac{\chi - 1}{2} M^2\right)} \right) = \frac{dM}{M} \frac{1}{\left(1 + \frac{\chi - 1}{2} M^2\right)} \quad (3.36)$$

Si on remplace l'équation (3.35) et l'équation (3.36) dans l'équation (3.26) on trouve :

$$d^{\wedge} = \left( \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right) \left( \frac{dV}{V} + \frac{(\gamma - 1) M^2}{2} \frac{dV}{V} \right) \quad (3.37)$$

Si on prend  $\frac{dV}{V}$  comme facteur commun et simplifie encore l'équation (3.37):

$$d^{\wedge} = \left( \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right) \left( 1 + \frac{(\gamma - 1) M^2}{2} \right) \frac{dV}{V} = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (3.38)$$

L'équation de conservation de l'énergie sous forme différentielle [7] et [25] s'écrit:

$$C_p dT + V dV = 0$$

Alors :

$$\frac{dV}{V} = - \frac{C_p dT}{V^2} \quad (3.39)$$

Substituant l'équation (3.39) dans l'équation (3.38), ça donne :

$$d^{\wedge} = - \frac{C_p dT}{V^2} \sqrt{M^2 - 1}$$

$$\hat{\wedge} = \int_{T_s}^{T_s} \frac{C_p dT}{V^2} \sqrt{M^2 - 1} \quad (3.40)$$

Cette équation représente la fonction de Prandtl Meyer pour un gaz parfait. Il est très visible qu'elle est identique à l'équation (3.19) qui indique l'équation de notre modèle en considérant que ( $\dot{a} = b = \dots = 0$ ), de là on peut assurer que l'équation de Prandtl Meyer donnée pour le modèle gaz parfait est un cas particulier de la fonction trouvée par l'exploitation de l'équation d'état de Berthelot qui garantit l'imperfection thermique des gaz d'une part, et l'existence de l'effet vibratoire des molécules de l'autre part.

#### 3.4. Méthodes d'intégration numérique de la fonction de Prandtl Meyer

La fonction de Prandtl Meyer pour un gaz réel présentée dans l'équation (3.19) est formée par deux intégrales l'un considère la température  $T$  comme variable principale et l'autre examine la masse volumique ... comme variable principale. L'équation (3.19) peut s'exprimer par :

$$\hat{\chi}_s = \int_{T_s}^{T_*} F_{\tau}(T, \dots) + \int_{\dots_s}^{\dots_*} F_{\dots}(T, \dots)$$

### 3.4.1. Procédure de calcul par la méthode de Simpson à pas variable

La détermination de la valeur de  $\hat{\chi}_s$  correspondant au nombre de Mach supersonique  $M_s (T = T_s, \dots = \dots_s)$  demande les intégrations numériques des fonctions  $F_{\tau}(T, \dots)$  et  $F_{\dots}(T, \dots)$  dans les intervalles  $[T_s, T_*]$  et  $[\dots_s, \dots_*]$ . Notons ici que les intégrations dépendent des paramètres  $T_0$  et  $P_0$ .

Dans les deux figures 3.2 et 3.3, on a présenté la variation de ces fonctions pour voir une idée sur la forme exacte avant de prendre décision sur le choix de la quadrature d'intégration. On peut conclure que les quadratures d'intégrations à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision vu la variation très rapide de la fonction  $F_{\tau}(T, \dots)$  aux extrémités de l'intervalle. Le traçage des fonctions est choisi pour  $T_0 = 2000 \text{ K}$  et  $M_s = 6.00$  (extrême supersonique) pour une bonne présentation aux extrémités [9][35].

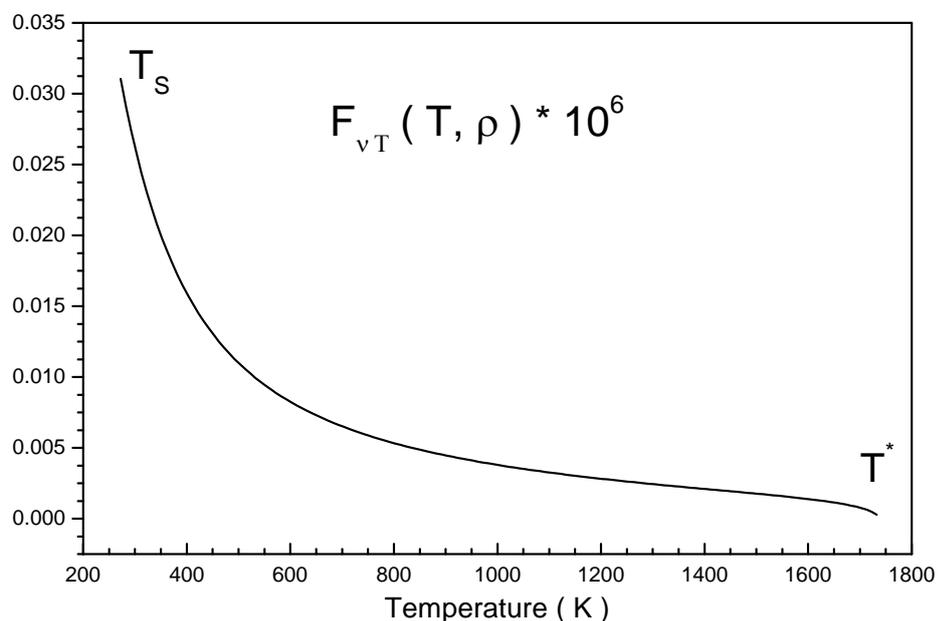


Figure 3.2 : Variation de la fonction  $F_{\tau}(T, \dots)$  dans  $[T_s, T^*]$

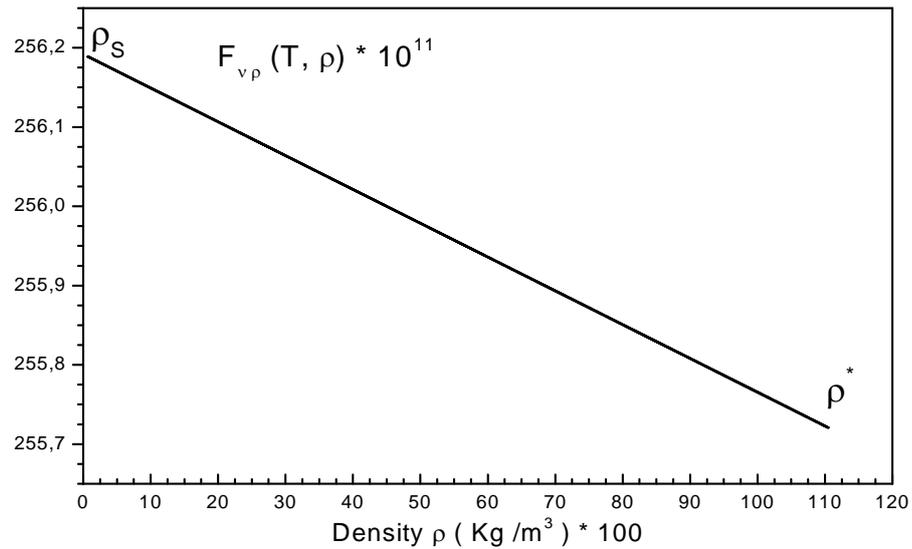


Figure 3.3 : Variation de la fonction  $F_{vp}(T, \rho)$  dans  $[s, *]$ .

La fonction  $F_{vp}(T, \dots)$  présente une dérivée très grande au voisinage de la température  $T_*$  et infini à  $T = T_*$  et moins au voisinage de  $T_s$ .

Pour la deuxième fonction  $F_{vp}(T, \dots)$  une simple intégration avec pas constant comme Trapèze ou Simpson à pas constant donne un meilleur résultat.

Une condensation des nœuds est alors indispensable et nécessaire aux voisinages des températures  $T_*$  et  $T_s$ . Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature. La quadrature d'intégration choisie est celle de Simpson [9] pour le calcul numérique de l'intégrale de la fonction  $F_{vp}(T, \dots)$ . La forme de condensation optée dans notre calcul est celle de ROBERT modifiée par EISEMAN [25] qui est présentée par la relation (3.26). Après avoir obtenu  $s$ , on peut facilement déterminer la distribution des valeurs de  $T$  par:

$$S_i = b_1 \cdot z_i + (1 - b_1) \cdot \left[ 1 - \frac{\tanh[b_2 \cdot (1 - z_i)]}{\tanh(b_2)} \right] \quad (3.41)$$

Avec:

$$z_i = \frac{i-1}{N-1} \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.42)$$

$$\frac{T - T_s}{T_* - T_s} = f(s) \quad (3.43)$$

La fonction  $f(s)$  de la relation (3.43) est arbitraire. Pour notre calcul, on opte la forme  $f(s)=s$ . Alors, la distribution des nœuds se fait de la manière suivante:

$$T_i = S_i \cdot (T_* - T_S) + T_S \quad (3.44)$$

Le choix des paramètres de contrôle de distribution des nœuds est très important pour le calcul des intégrales de la fonction  $F_T(T, \dots)$  par la méthode de Simpson. Citons quelques exemples des choix de  $b_1$  et  $b_2$  qui sont comme suit :

Si on prend des valeurs de  $b_1$  proche de zéro (exemple  $b_1=0.1$ ) et  $b_2=2.0$ , on peut condenser les nœuds vers l'extrémité gauche  $T_S$  de l'intervalle. Pour des valeurs de  $b_1$  proche de 2.0 (exemple  $b_1=1.9$ ) et  $b_2=2.0$ , on peut condenser les nœuds vers l'extrémité droite  $T_*$ . La fonction de condensation (3.41) permet uniquement de condenser les nœuds vers une seule extrémité gauche ou droite.

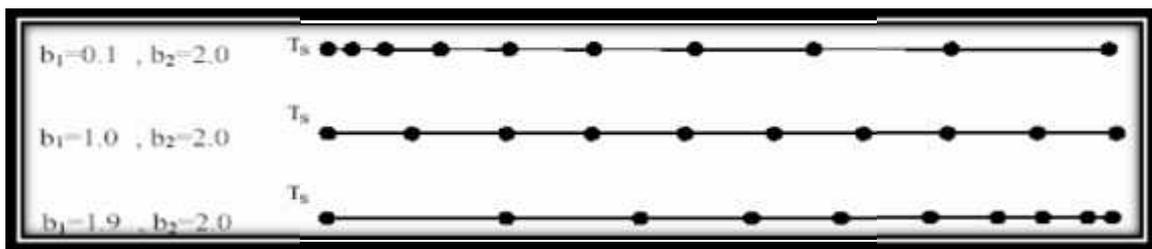


Figure 3.4. Présentation de la condensation des nœuds

Comme notre fonction présente une variation très rapide aux deux extrémités, il est nécessaire de condenser les nœuds vers les deux aux mêmes temps. Il est alors nécessaire de diviser l'intervalle d'intégration  $[T_S, T_*]$  en deux parties, (égales par exemple)  $[T_S, T_M]$  et  $[T_M, T_*]$  telle que:

$$T_M = \frac{T_* - T_S}{2} \quad (3.45)$$

Pour l'intervalle  $[T_S, T_M]$  gauche, on prend  $b_1$  proche de zéro (exemple  $b_1=0,1$ ) et  $b_2=2.00$  et pour l'intervalle  $[T_M, T_*]$  de droite, on doit prendre des valeurs de  $b_1$  proche de 2.00 (exemple  $b_1=1.9$ ) et  $b_2=2.00$  pour condenser respectivement les nœuds vers l'extrémité gauche  $T_S$  et droite  $T_*$  pour chaque

intervalle. On divise encore le nombre  $N$  en deux parties. Alors, la subdivision de l'intervalle  $[T_S, T_*]$  possède la forme présentée sur la figure 3.5.

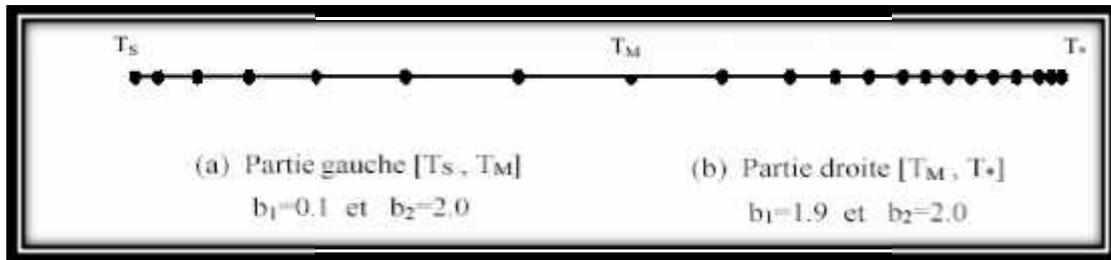


Figure 3.5 : Condensation des nœuds vers les deux extrémités de l'intervalle  $[T_S, T_*]$ .

Après la détermination de la fonction de condensations, on peut déterminer la distribution des températures et des masses volumiques par :

$$T_i = S_i \cdot (T_D - T_G) + T_G \quad (3.46)$$

$$\dots_i = S_i \cdot (\dots_D - \dots_G) + \dots_G \quad (3.47)$$

La valeur de  $\hat{s}_s$  correspondant au  $T_S$  et  $\dots_s$  peut être obtenue par la sommation d'intégration de la fonction  $F_{-T}(T, \dots)$  dans l'intervalle  $[T_S, T_*]$  et d'intégration de la fonction  $F_{\dots}(T, \dots)$  dans l'intervalle  $[\dots_S, \dots_*]$ , en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers les deux extrémités.

Enfin si on veut déterminer l'influence des paramètres générateurs, spécialement la pression génératrice, sur la fonction de Prandtl Meyer, pour l'air en exploitant l'équation d'état de Berthelot il suffit de tracer cette fonction pour différentes valeurs des paramètres générateurs et de la comparer avec les modèles de gaz parfait et haute température afin de les corriger par notre modèle qui est le plus proche d'un cas d'écoulement supersonique réel.

## CHAPITRE 4

### RESULTATS ET COMMENTAIRES

#### Introduction

Dans ce chapitre, on procède à la présentation des divers résultats obtenus par un programme de calcul élaboré (l'organigramme est incluse dans l'appendice B), en exploitant les différentes équations trouvées par notre modèle dans les chapitres précédents (une application pour ce modèle est créée dans l'appendice C par le langage Delphi), ainsi de les comparer avec les résultats obtenus par le modèle du gaz parfait et le modèle haute température. Nos résultats sont exposés sous forme de courbes divisées en trois parties. La première partie sert à la présentation des résultats des paramètres critique et supersonique de l'écoulement pour les trois modèles GR, GP et HT. La deuxième partie comporte la fonction de Prandtl Meyer pour un gaz réel caractérisé par l'équation d'état de Berthelot dans un régime supersonique au seuil de la dissociation moléculaire (le comportement vibratoire des molécules est incluse) en insistant sur l'effet de la pression génératrice et son influence sur la fonction de Prandtl Meyer. La troisième partie assiste à donner une illustration sur les différences et les écarts entre les modèles GR, GP et HT avec une précision de  $10^{-5}$  afin de bien suivre les changements qui deviennent. Ainsi d'avoir les corrections qui peuvent être porté pour les modèles du gaz thermiquement et caloriquement parfait et même pour le modèle thermiquement parfait mais caloriquement imparfait en intervenant les effets de covolume ( $b$ ) et les forces d'attraction intermoléculaires ( $a$ ), sans oublier l'effet de la température caractéristique de vibration moléculaire ( $\theta_v$ ).

On a préféré la présentation des figures pour tous les régimes générateurs possible, c'est à dire pour les quatre cas suivant:

- basse température et basse pression.
- basse température et haute pression.
- Haute température et haute pression.

- Température et pression modérées.

La gamme de température choisie est de 200 K (au-dessus de la température de liquéfaction) jusqu'à 3500 K (au-dessous du seuil de dissociation moléculaire), et la gamme de pression sélectionnée est de 1 Bar jusqu'à 100 bar pour tous les résultats sauf la fonction de Prandtl Meyer où on augmente la pression jusqu'au 500 bar afin de bien établir l'effet de la pression génératrice sur cette fonction.

Les résultats présentés concernant le modèle GP et le modèle HT sont obtenus par notre calcul mais aussi peuvent être trouvés dans les références indiquées dans chaque chapitre.

#### 4.1. Résultats pour les paramètres thermodynamiques

##### 4.1.1. La masse volumique génératrice

La figure 4.1 représente la variation de la masse volumique génératrice ...<sub>0</sub> calculée numériquement par la méthode de dichotomie en fonction de la température génératrice  $T_0$ . Pour quelques valeurs de la pression génératrice  $P_0$ , avec une précision de  $10^{-5}$ . On remarque une diminution de la masse volumique lorsque  $T_0$  augmente, pour des faibles valeurs de  $T_0$ , nous remarquons que les résultats obtenus par le modèle gaz réel s'éloignent de ceux obtenus par le modèle gaz parfait et s'approche pour des grandes valeurs de  $T_0$ , on remarque aussi que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une augmentation très marquée de la masse volumique, par exemple si la température génératrice est de 500 K à une pression génératrice égale à 1 Bar, le résultat obtenu pour la masse volumique est de  $0.70554 \text{ g/cm}^3$  par le modèle des gaz réels, et de  $0.70609 \text{ g/cm}^3$  par le modèle GP. Pour la même température  $T_0=500 \text{ K}$  mais à une pression génératrice de 10 Bar on trouve que la masse volumique est égale à  $7.00792 \text{ g/cm}^3$  par le modèle GR, et de  $7.06097 \text{ g/cm}^3$  par le modèle GP. Donc elle augmente presque dix (10) fois pour les deux modèles, mais avec variation qui montre les effets de taille moléculaire dite covolume ( $b$ ) et de la force d'attraction intermoléculaire ( $a$ ) liées par l'équation de Berthelot. Mais en bref on peut le dire que les deux modèles GP et GR suivent la même allure de décroissance.

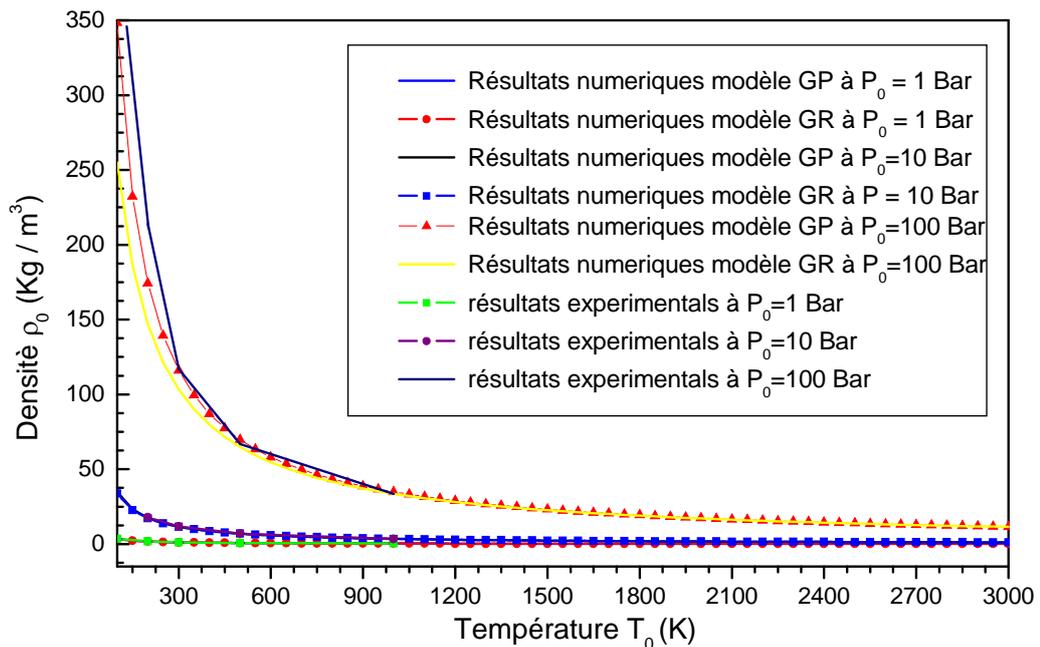


Figure 4.1 : Variation de la masse volumique génératrice  $\rho_0$

La figure 4.2 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage donnée par la masse volumique génératrice  $\rho_0$  du modèle gaz réel au modèle gaz parfait en fonction de la température génératrice  $T_0$ , Pour quelques valeurs de la pression génératrice  $P_0$ .

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à 5 %, le modèle GP peut être utilisé, si  $P_0$  soit inférieure à 4 Bar pour n'importe quelle valeur de la température génératrice  $T_0$ , ou jusqu'à  $T_0 = 1000$  K pour n'importe quelle valeur de  $P_0$  n'exécède pas 100 Bar. Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de  $P_0$  et  $T_0$  modéré.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $T_0$  et  $P_0$  et elle augmente si  $P_0$  augmente ce qui monte les effets de taille moléculaire  $b$  et de la force intermoléculaire ( $\lambda$ ) dans l'équation de Berthelot. Par exemple si  $T_0 = 250$  K, l'utilisation du modèle GP va nous donner une erreur relative égale à  $\epsilon = 12.298$  % pour  $P_0 = 100$  Bar, qui donne une différence de  $16.20$  Kg/m<sup>3</sup> entre les valeurs des masses volumiques des deux modèles,  $\epsilon = 1.36$  % pour  $P_0 = 10$  Bar,  $\epsilon = 0.14$  % pour  $P_0 = 1$  Bar.

On peut remarquer qu'à haute pression et basse température, l'erreur est grande. Cette position est interprétée par l'impossibilité d'utilisation du modèle GP jusqu'à  $T_0=1000\text{ K}$  pour les applications aéronautiques, même si on accepte une erreur inférieure à 5%. Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur diminue au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle GP indépendamment de la pression  $P_0$ , si la température est grande.

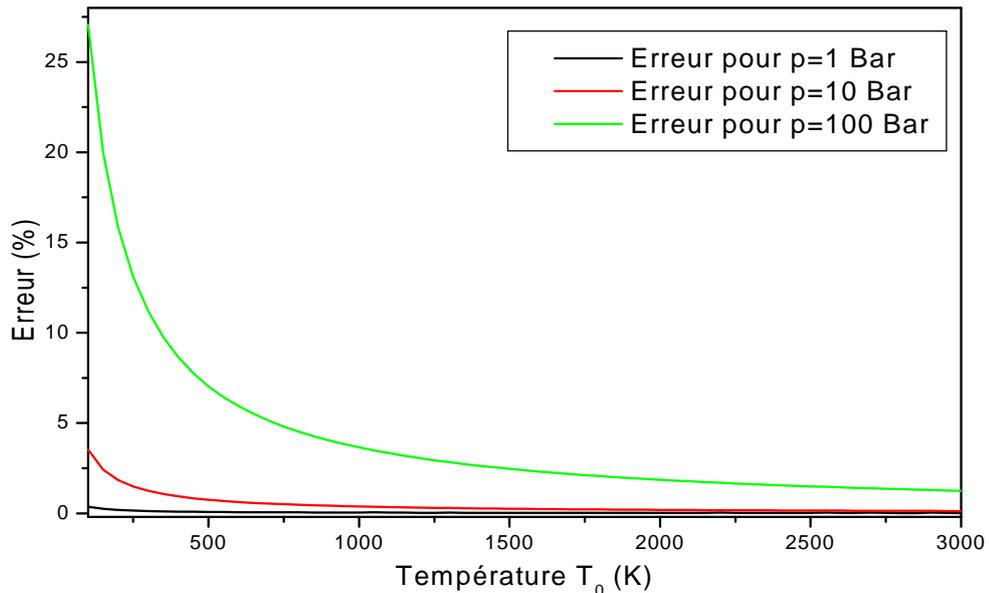


Figure 4.2 : Variation de l'erreur relative pour  $\rho$  en fonction de  $T_0$

#### 4.1.2. Facteur de compressibilité

La figure 4.3 représente la variation du facteur de compressibilité  $Z$  calculé numériquement à partir de l'équation (1.52) du modèle gaz réel (modèle de Berthelot) en fonction de la température génératrice  $T_0$ . Pour quelques valeurs de la pression génératrice  $P_0$ .

On remarque que l'augmentation de la pression  $P_0$  pour une température  $T_0$  donnée entraîne une augmentation du facteur de compressibilité  $Z$ , on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour une pression  $P$  donnée entraîne une diminution du facteur de compressibilité  $Z$ .

Finalement, on peut conclure que notre modèle (modèle de Berthelot), soit proche au modèle du gaz parfait ( $Z=1$ ) lorsque la pression est très faible, ou bien à haute température même si la pression est élevée. Et l'écart entre les deux

modèles devient important pour le cas haute pression basse température. Dans ce cas on peut voir la différence entre les deux modèles. Dans tous les cas, le facteur de compressibilité ne peut jamais être égale à un ( $Z=1$ ) pour le modèle GR ce qui implique les limites de l'équation d'état des gaz parfaits

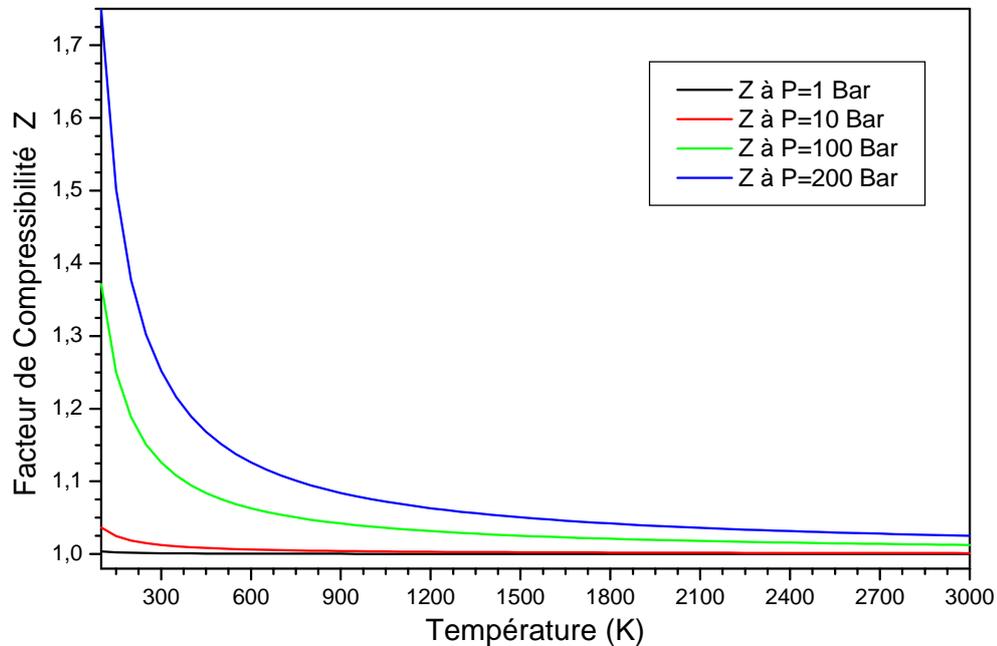


Figure 4.3 : variation de facteur de compressibilité en fonction de  $T_0$  pour quelque valeur de la pression  $P_0$

#### 4.1.3. Les chaleurs spécifiques

La figure 4.4 représente la variation des chaleurs spécifiques  $C_P(T)$  et  $C_P(T, )$  en fonction de la température jusqu'à 3000 K, pour quelques valeurs de la pression  $P_0$ , et pour les modèles HT, GP et GR. Le graphique à Haute Température est présenté en utilisant le polynôme d'interpolation. A basse température on remarque que les deux modèles HT et GP suivent la même allure, sauf notre modèle GR où la variation dépend à la pression  $P_0$ , par exemple à  $T_0=100$  K, on trouve  $C_p=1001.289$  J/Kg k pour le modèle GP,  $C_p=1001.159$  J/Kg k pour le modèle HT,  $C_p=1001.536$ ,  $1003.602$ ,  $1014.94$  J/Kg k pour le modèle GR qui correspondent les pressions  $P_0=1,10$  et  $100$  Bar, dans ce cas on peut dire que les deux modèles GP et HT être considérées comme calorifiquement parfait.

Mais lorsque la température  $T_0$  augmente, on remarque que les deux modèles HT et GR augmentent et prennent la même allure jusqu'à 1300 K, dans ce cas on peut dire que les deux modèles HT et GR sont calorifiquement imparfaits. On remarque aussi que le  $C_p$  reste presque constante pour le modèle GR pour n'apporte qu'elle valeurs de la pression  $P_0$  et donne des valeurs toujours inférieures par rapport au modèle HT. Mais si la température  $T_0$  devient supérieure à 1300 K, on peut voir la différence entre les deux modèles HT et GR, ce qui montre les effets de taille moléculaire  $b$ , de la force intermoléculaire  $\lambda$ , et la température caractéristique de vibration, cette variation va influencer sur le comportement thermodynamique de l'écoulement, et dans ce cas on peut dire que notre modèle est thermiquement et calorifiquement imparfait.

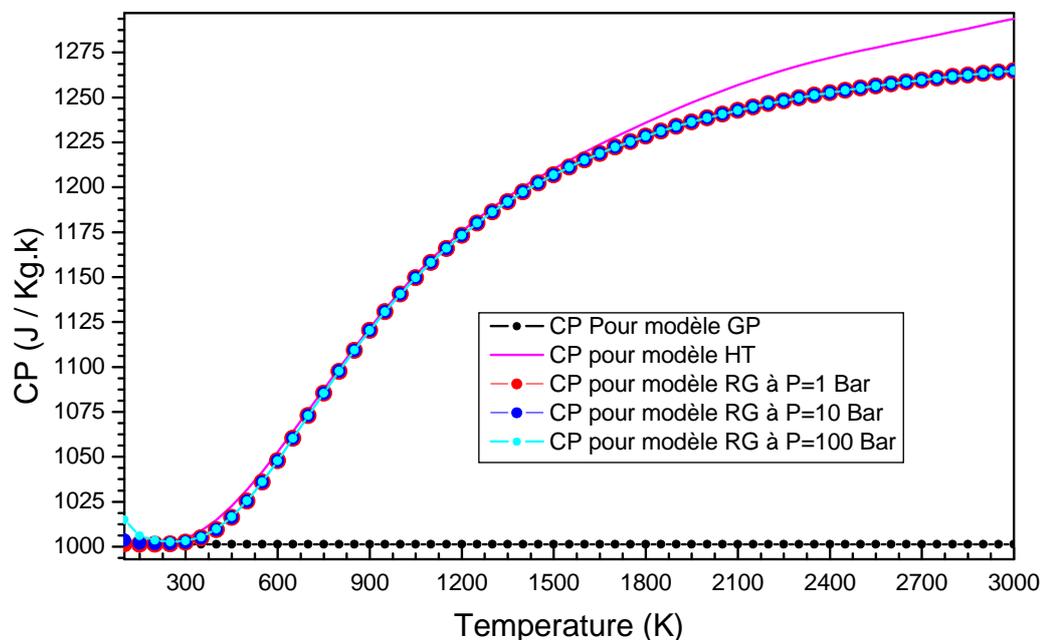


Figure 4.4 : variation de la chaleur spécifique  $C_p$  en fonction de  $T_0$  pour différentes pressions génératrices  $P_0$

La figure 4.5 représente la variation du rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$  en fonction de la température jusqu'à 3000 K, pour quelques valeurs de la pression  $P_0$ , et pour les modèles HT, GP et GR. Le graphe à Haute Température est présenté en utilisant le polynôme d'interpolation. A basse température on remarque que les deux modèles HT et GP suivent la même allure, sauf notre modèle GR qui varie avec la pression  $P_0$ , par exemple à  $T_0=100$  K, on trouve

$\gamma = 1.402$  pour le modèle GP,  $\gamma = 1.40188$  pour le modèle HT,  $\gamma = 1.40218, 1.40367, 1.4092$  pour le modèle GR qui correspondent les pressions  $P_0 = 1, 10$  et  $100$  Bar, mais lorsque la température  $T_0$  augmente, on remarque que les deux modèles HT et GR diminuent et prennent la même allure jusqu'à  $1300$  K.

Mais si la température  $T_0$  augmente à valeur supérieure à  $1300$  K, on peut voir la différence entre les deux modèles HT et GR, ce qui montre les effets de taille moléculaire  $b$ , de la force intermoléculaire  $\tilde{a}$ , et la température caractéristique de vibration, cette variation va influencer sur le comportement thermodynamique de l'écoulement, on remarque aussi que le rapport  $\gamma$  reste constante pour le modèle GR pour n'apporte qu'elle valeurs de la pression  $P_0$  et donne des valeurs toujours supérieur par rapport au modèle HT.

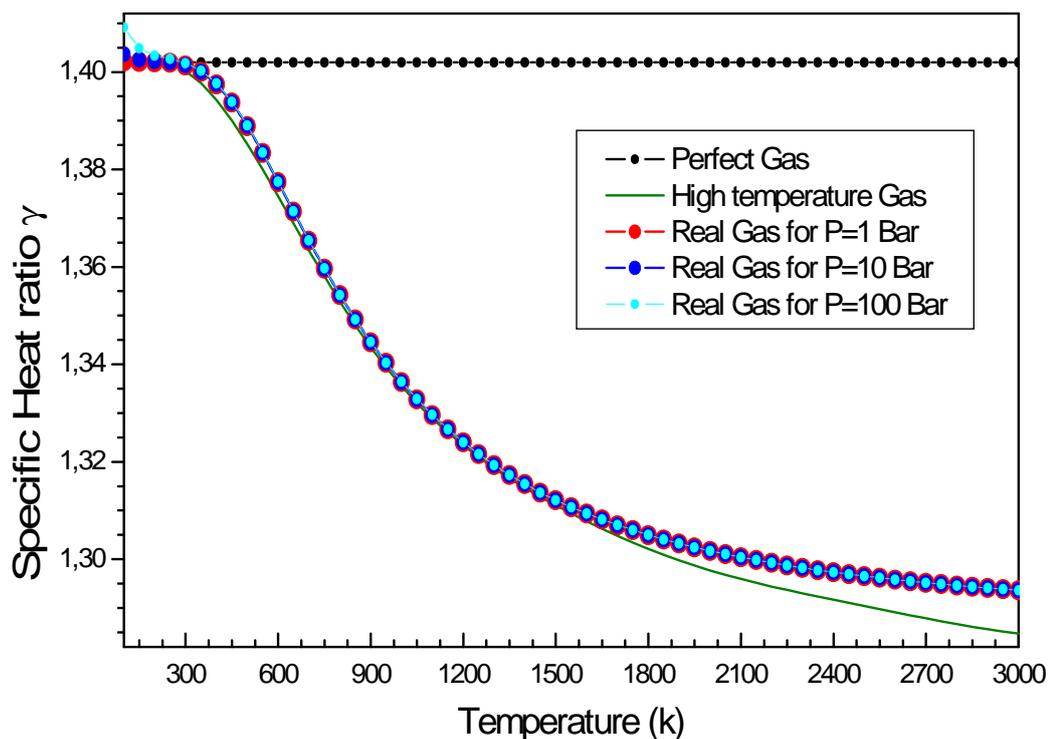


Figure 4.5 : variation de rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$  en fonction de  $T_0$  pour quelques valeurs de la pression  $P_0$

La figure 4.6 représente la variation du coefficient  $C_T$  dépend seulement de notre modèle GR en fonction de la température  $T_0$  jusqu'à 3000 K, pour quelques valeurs de la pression  $P_0$ . Pour voir une idée sur la variation de ce paramètre, il faut l'analyser précieusement. On remarque que le coefficient  $C_T$  croît linéairement avec la température  $T_0$ . On remarque aussi que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une augmentation du coefficient  $C_T$ , par exemple à  $T_0=1500$  K, on trouve  $C_T=462.23, 464.33, 473.74, 485.64$  ( J/Kg K ) respectivement pour les pressions génératrices  $p_0 = 1$  Bar, 10 Bar, 50 Bar et 100 Bar, cette figure montre que le coefficient  $C_T$  dépend à la pression et la température génératrices.

Donc pour l'équation d'état de Berthelot on a développé un nouveau paramètre thermodynamique dépend essentiellement de la taille moléculaire (le covolume  $b$ ) et les forces d'attraction intermoléculaire ( $\hat{a}$ ). Ce paramètre est nul pour les modèles des gaz colorifiquement et thermiquement parfait (gaz parfait) et le modèle calorifiquement imparfait et thermiquement parfait (gaz parfait à haute température)

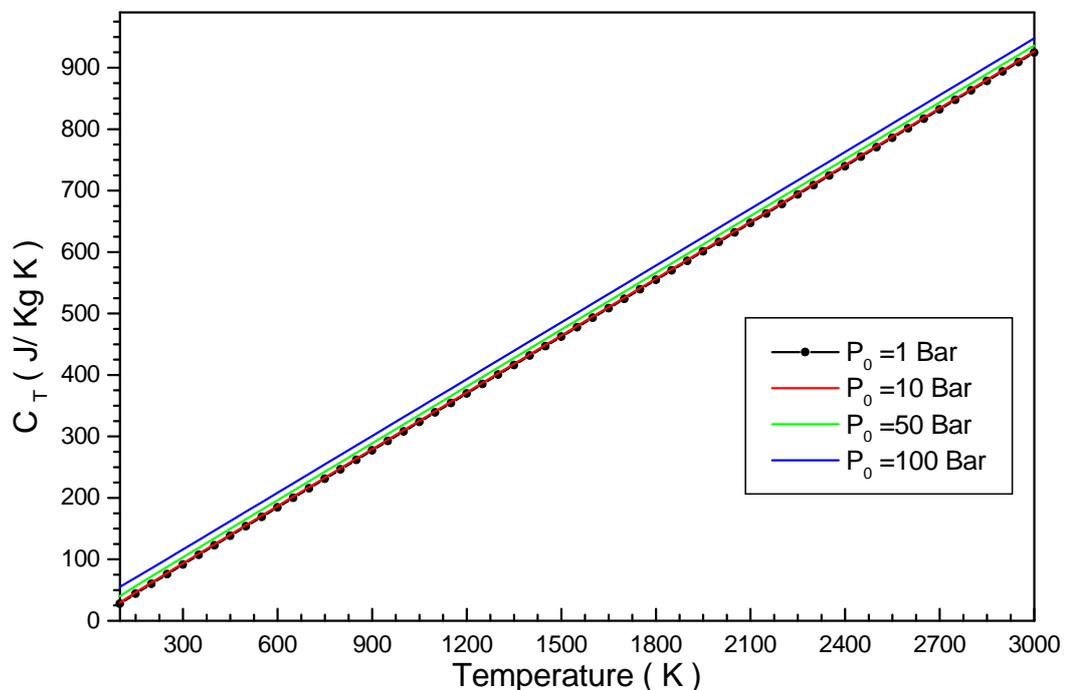


Figure 4.6 : Variation du coefficient  $C_T$  en fonction de  $T_0$  pour quelques valeurs de  $P_0$

## 4.2. Résultats pour les paramètres critiques (au col)

### 4.2.1. Rapports des températures critiques

La figure 4.7 représente la variation du rapport des températures critiques  $T^*/T_0$  en fonction de la température génératrice  $T_0$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *GR*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $100 \text{ Bar}$ , on remarque que l'augmentation de la température génératrice  $T_0$  pour différents modèles entraîne une augmentation des rapports de température critiques, cette augmentation devient considérable lorsque la valeur de  $T_0$  est élevée, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, on remarque aussi que les rapports de température critiques obtenus par notre modèle *GR* sont toujours inférieurs de ceux obtenus par le modèle *HT*, ce qui implique que la température au col pour notre modèle est inférieure à celle du modèle *HT*. L'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une diminution des rapports de température critiques, mais si la température génératrice  $T_0$  supérieure à  $2000 \text{ K}$ , on remarque que les trois courbes de notre modèle *GR* s'approchent, et s'éloignent lorsque la valeur de la température génératrice  $T_0$  diminue, cet éloignement devient considérable lorsque la température génératrice  $T_0$  est inférieure à  $1000 \text{ K}$ , et d'autant remarquables à une pression génératrice supérieure à  $50 \text{ Bar}$ , ce qui montre l'effet de la pression génératrice sur les paramètres critiques de l'écoulement.

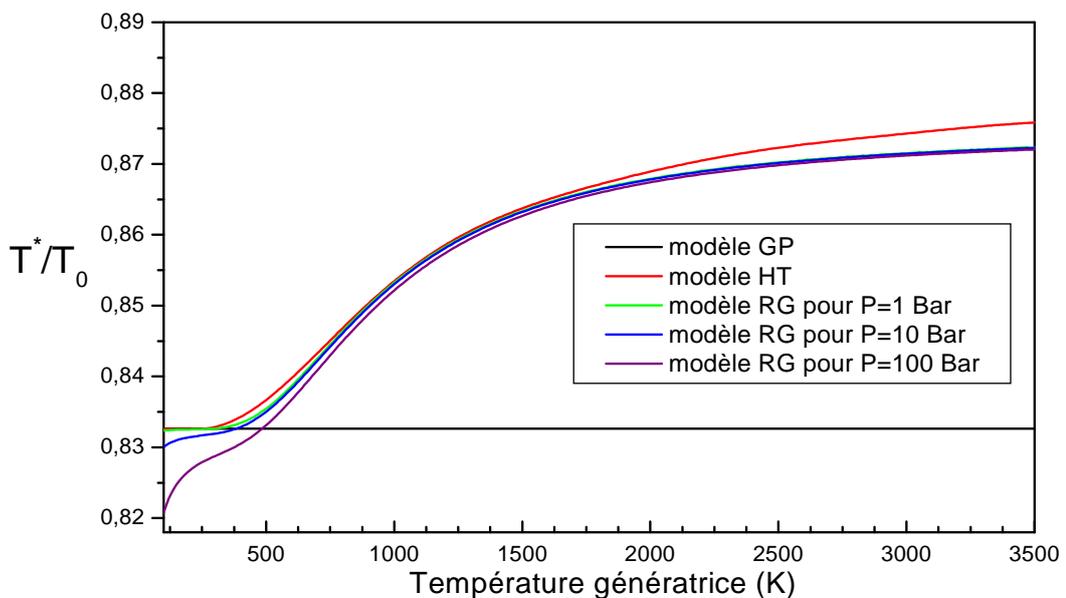


Figure 4.7 : Rapport des températures critiques en fonction de  $T_0$  pour quelques valeurs de la pression  $P_0$

#### 4.2.2. Rapport des masses volumiques critiques

La figure 4.8 représente la variation des rapports de la masse volumique critiques  $\rho^* / \rho_0$  en fonction de la température génératrice  $T_0$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *GR*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $100 \text{ Bar}$ , on remarque que l'augmentation de la température génératrice  $T_0$  pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de la masse volumique critiques  $\rho^* / \rho_0$ , cette diminution devient considérable lorsque la valeur de  $T_0$  est inférieure à  $1400 \text{ K}$ , ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, on remarque aussi que les rapports de la masse volumique critiques obtenus par notre modèle *GR* sont toujours supérieurs de ceux obtenus par le modèle *HT* et que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une augmentation des rapports de la masse volumique critiques.

Mais si la température génératrice  $T_0$  supérieure à  $2000 \text{ K}$ , on remarque que les trois courbes de notre modèle *GR* s'approchent, et s'éloignent lorsque la valeur de la température génératrice  $T_0$  diminue, cet éloignement devient considérable lorsque la température génératrice  $T_0$  est inférieure à  $1000 \text{ K}$ , et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure à  $50 \text{ Bar}$ , ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur les paramètres critiques de l'écoulement.

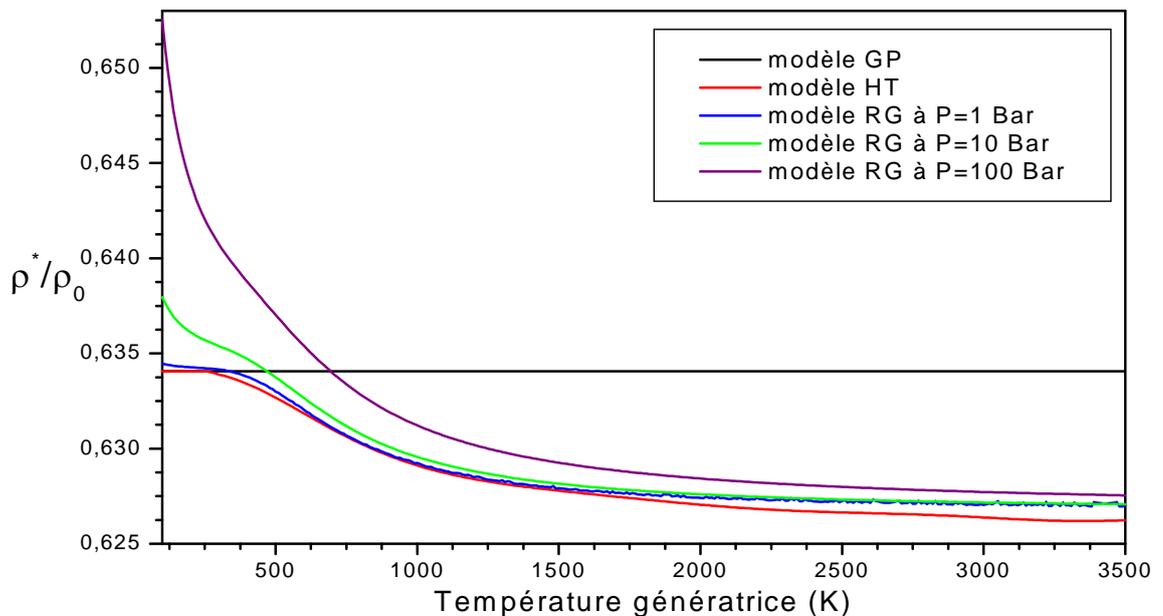


Figure 4.8 : Rapport des masses volumiques critiques en fonction de  $T_0$  pour quelques valeurs de la pression  $P_0$

#### 4.2.3. Rapport des pressions critiques

La figure 4.9 représente la variation des rapports de la pression critique  $P^*/P_0$  en fonction de la température génératrice  $T_0$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *GR*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0=1$  Bar, 10 Bar, 50 Bar, on remarque que l'augmentation de la température génératrice  $T_0$  pour différents modèles entraîne une augmentation des rapports de la pression critiques. Cette augmentation devient considérable lorsque la valeur de  $T_0$  est élevée, ce n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, on remarque aussi que les rapports de pression critique obtenu par notre modèle *GR* est toujours inférieure de ceux obtenu par le modèle *HT*.

L'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une diminution des rapports de la pression critique  $P^*/P_0$ , mais si la température génératrice  $T_0$  supérieure à 2000 K, on remarque que les trois courbes de notre modèle *GR* s'approchent, et s'éloignent lorsque la valeur de la température génératrice  $T_0$  diminue, cet éloignement devient considérable lorsque la température génératrice  $T_0$  est inférieure à 1000 K, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure ou égale à 50 Bar, ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur les paramètres critiques de l'écoulement.

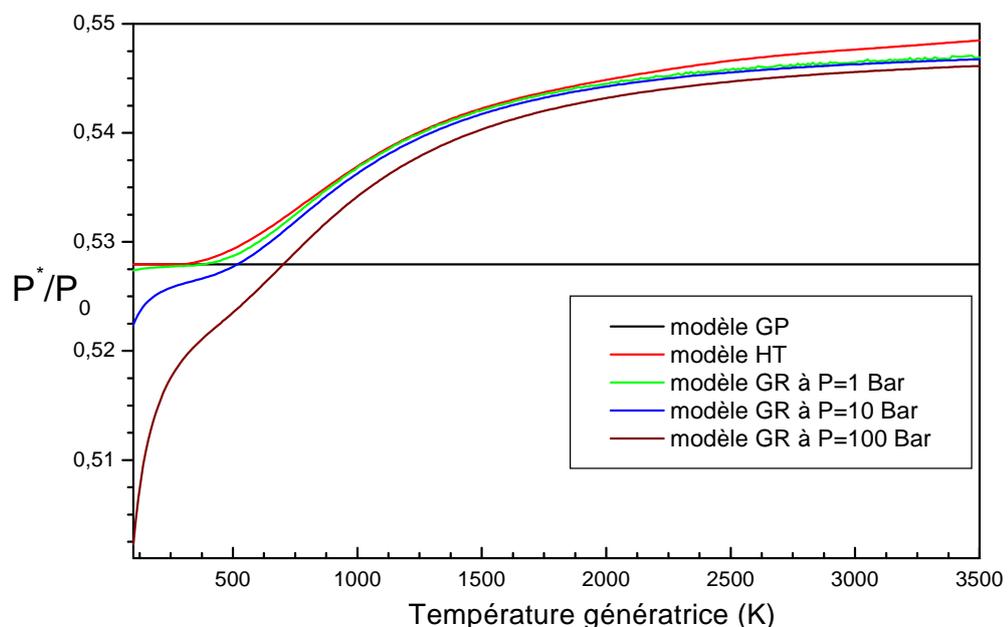


Figure 4.9 : Rapport des pressions critiques en fonction de  $T_0$  pour quelques valeurs de la pression  $P_0$

#### 4.2.4. Rapport des célérités du son critiques

La figure 4.10 représente la variation des rapports de la vitesse du son critiques  $a^*/a_0$  en fonction de la température génératrice  $T_0$ , pour les modèles *HT, GP* et *GR*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1 \text{ Bar}, 10 \text{ Bar}, 100 \text{ Bar}$ , on remarque que l'augmentation de la température génératrice  $T_0$  pour différents modèles entraîne une augmentation des rapports de la vitesse du son critiques  $a^*/a_0$ , cette augmentation devient considérable lorsque la valeur de  $T_0$  est élevée, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, on remarque aussi que les rapports de célérité du son critiques obtenus par notre modèle *GR* sont toujours inférieure de ceux obtenus par le modèle *HT* et que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une diminution des rapports de la vitesse du son critiques  $a^*/a_0$ .

mais si la température génératrice  $T_0$  supérieure à 2000 K, on remarque que les trois courbes de notre modèle *GR* s'approchent, et s'éloignent lorsque la valeur de la température génératrice  $T_0$  diminue, cet éloignement devient considérable lorsque la température génératrice  $T_0$  est inférieure à 1000 K, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure ou égale à 50 Bar, ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur les paramètres critiques de l'écoulement.

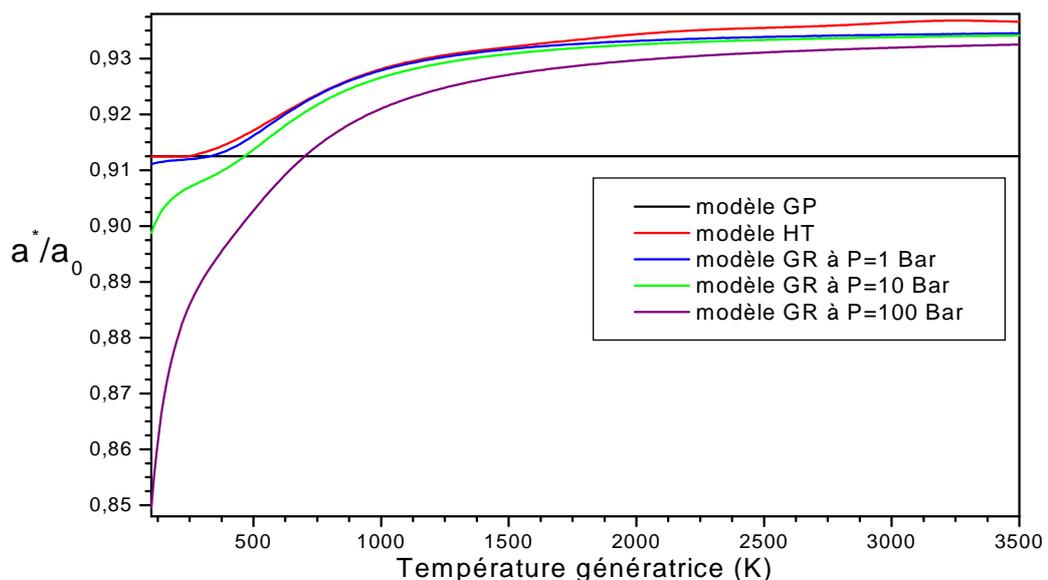


Figure 4.10 : Rapport des vitesses du son critiques en fonction de  $T_0$  pour quelques valeurs de la pression  $P_0$

#### 4.2.5. Le débit massique critique

La figure 4.11 représente la variation du débit massique critique en fonction de la température génératrice  $T_0$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *GR*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ , 10, et 100 Bar.

on remarque que l'augmentation de la température génératrice  $T_0$  pour différents modèles entraîne une augmentation du débit massique critique devient considérable lorsque la valeur de  $T_0$  est élevée, ce qui n'est pas le cas pour le modèle *GP*, on remarque aussi que les débits massiques critiques obtenus par notre modèle *GR* sont toujours inférieure de ceux obtenus par le modèle *HT* et que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une diminution des rapports du débit massique critiques. mais si la température génératrice  $T_0$  supérieure à 2000 K, on remarque que les trois courbes de notre modèle *GR* s'approchent, et s'éloignent lorsque la valeur de la température génératrice  $T_0$  diminue, l'éloignement devient considérable lorsque la température génératrice  $T_0$  est inférieure à 1000 K, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure ou égale à 50 Bar, ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur les paramètres critiques de l'écoulement, cette variation entre les trois modèles *GP*, *HT* et *GR* va influencer sur la valeur de la force de poussée, surtout si la pression  $P_0$  est grande ce qui influe sur la durée de consommation du carburant

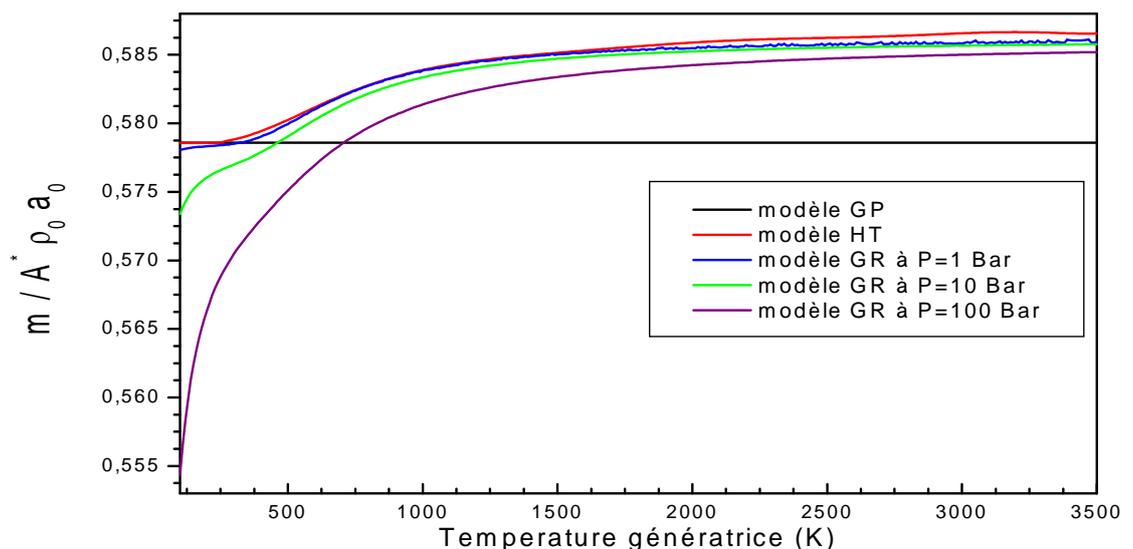


Figure 4.11 : Rapport de débit massique critique en fonction de  $T_0$  pour quelques valeurs de la pression  $P_0$

### 4.3. Résultats pour les paramètres supersoniques

#### 4.3.1. La célérité du son

La figure 4.12 représente la variation de la célérité du son  $a$  en fonction de la température jusqu'à  $3000\text{ K}$ , pour quelques valeurs de la pression  $P_0$ , et pour les modèles  $HT, GP$  et  $GR$ .

On remarque que l'augmentation de la température  $T_0$ , pour toutes les modèles entraîne une augmentation de la vitesse du son  $a$ . A basse température on remarque que les deux modèles  $HT$  et  $GP$  prennent presque la même allure, sauf notre modèle  $GR$ , il dépend à la pression  $P_0$ , d'autant important pour  $P_0 = 100\text{ Bar}$ , par exemple à  $T_0 = 700\text{ K}$ , on trouve  $a = 530.81\text{ ms}^{-1}$  pour le modèle  $GP$ ,  $a = 523.45\text{ ms}^{-1}$  pour le modèle  $HT$ ,  $a = 524.12, 526.67, 552.17\text{ ms}^{-1}$  pour le modèle  $GR$  qui correspondent les pressions  $P_0 = 1, 10$  et  $100\text{ Bar}$ . Lorsque la température  $T_0$  augmente, on peut voir la différence entre les trois modèles  $GP, HT$  et  $GR$ , par exemple à  $T_0 = 2000\text{ K}$ , on trouve  $a = 897.23\text{ ms}^{-1}$  pour le modèle  $GP$ ,  $a = 863.22\text{ ms}^{-1}$  pour le modèle  $HT$ ,  $a = 864.72, 866.19, 880.93\text{ ms}^{-1}$  pour le modèle  $GR$  qui correspondent les pressions  $P_0 = 1, 10$  et  $100\text{ Bar}$ , cette variation va influencer sur le comportement thermodynamique de l'écoulement, ce qui montre les effets de taille moléculaire  $b$ , de la force intermoléculaire  $\tilde{a}$ , et la température caractéristique .

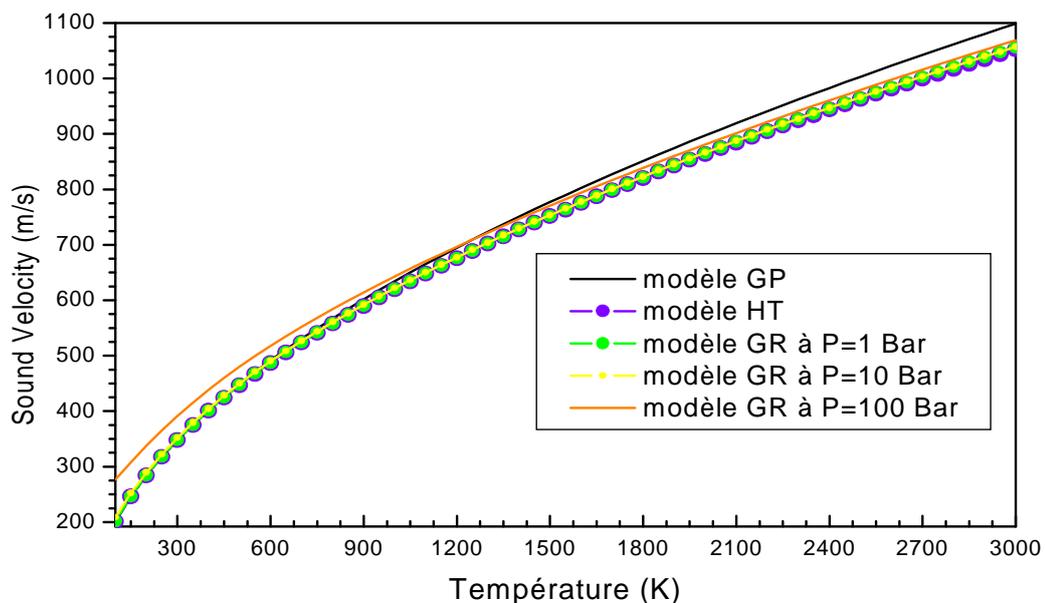
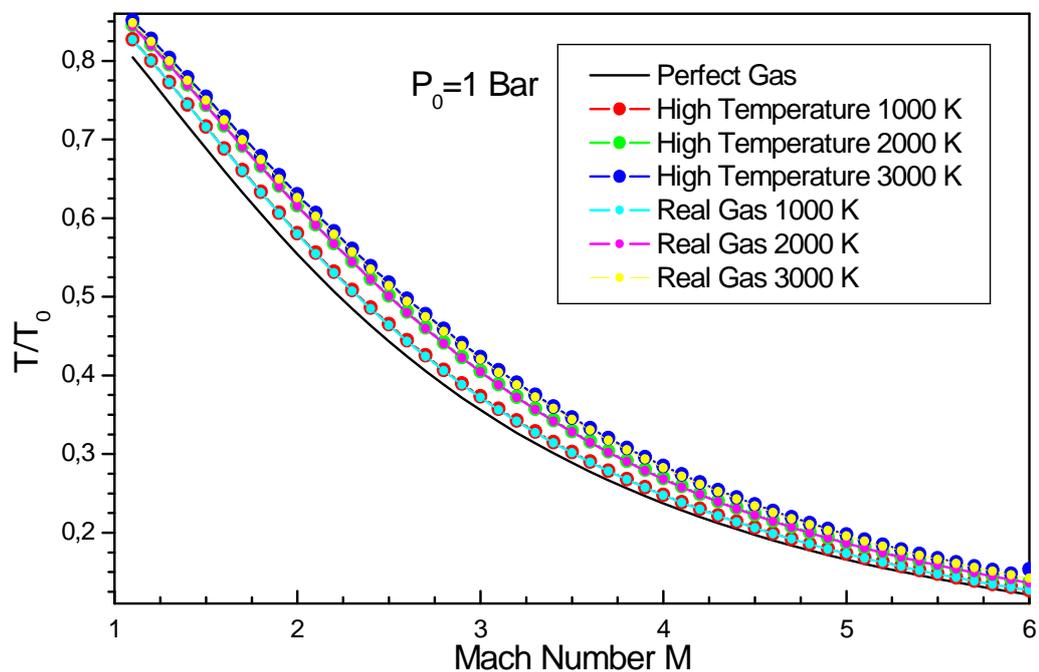


Figure 4.12 : La célérité du son on fonction de la température génératrice  $T_0$  pour quelques valeurs de la pression  $P_0$

### 4.3.2. Rapport des températures

Les figures 4.13 (a, b, c) représentent respectivement la variation du rapport de température  $T/T_0$  en fonction du nombre de Mach, pour les modèles *HT*, *GP* et *GR*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $100 \text{ Bar}$ .

On remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de température, on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs  $T_0 = 1000 \text{ K}$ ,  $2000 \text{ K}$ ,  $3000 \text{ K}$ , influe sur le rapport de température, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, par exemple à  $M=3.0$  et  $T_0=2000 \text{ K}$ ,  $T/T_0 = 0.35599$  pour le modèle *GP*,  $T/T_0 = 0.40569$  pour le modèle *HT*,  $T/T_0 = 0.40467, 0.40479, 0.40533$  pour le modèle *GR* qui correspond les pressions  $1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $100 \text{ Bar}$ , avec des erreurs relatives entre le modèle *HT* et notre modèle *GR* égale à  $\approx 0.25 \%$  pour  $P_0=1 \text{ Bar}$ ,  $\approx 0.22 \%$  pour  $P_0=10 \text{ Bar}$ , et  $\approx 0.09 \%$  pour  $P_0=100 \text{ Bar}$ . Sur notre figure la courbe du modèle *GP* indique que le gaz parfait va refroidir l'écoulement par rapport au comportement thermodynamique réel du gaz.



(a)

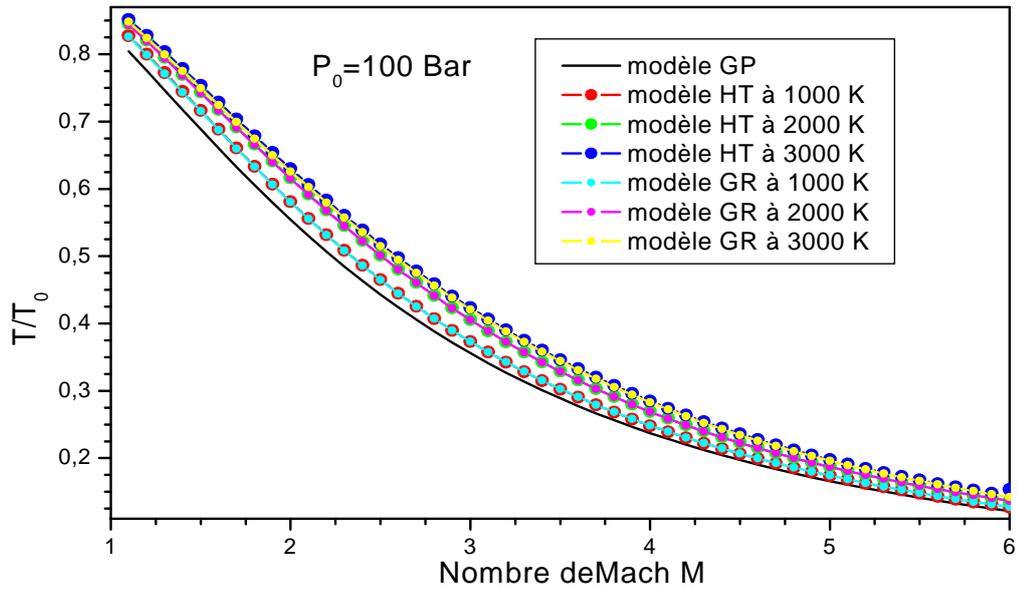
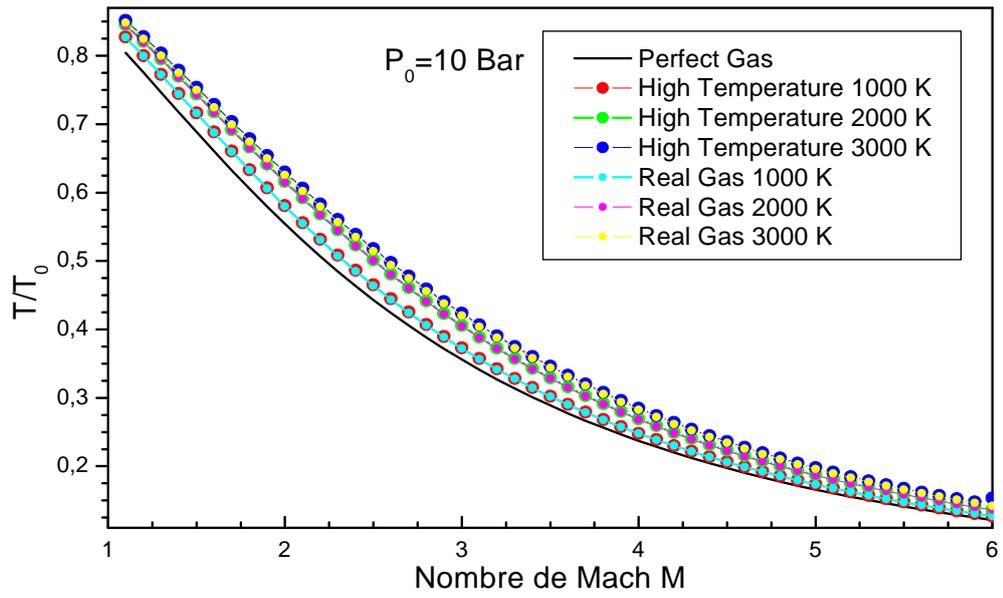


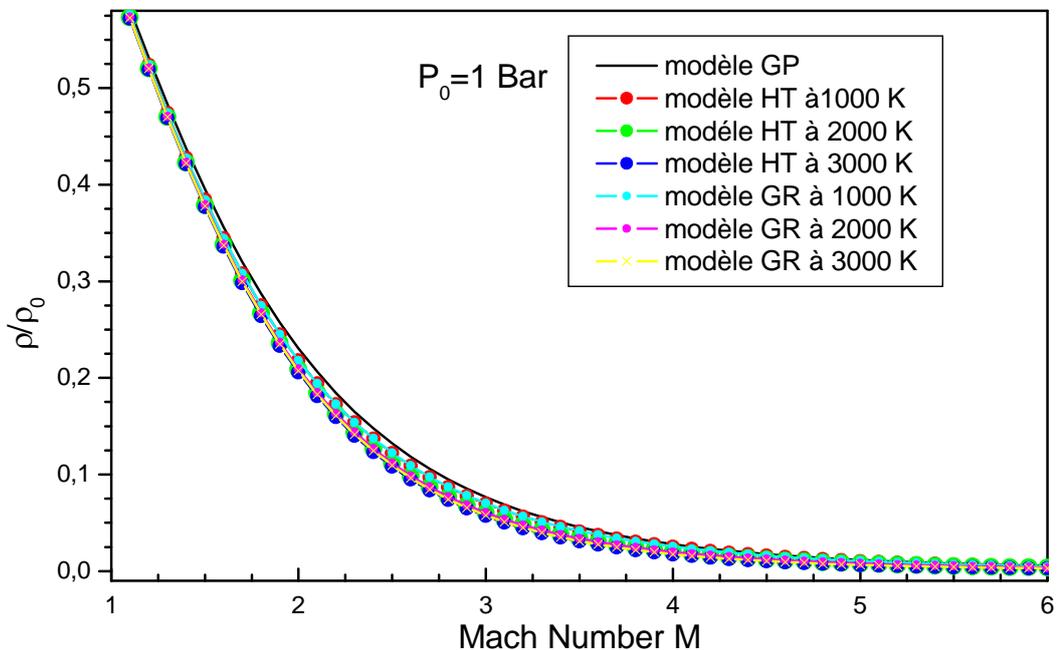
Figure 4.13 : Variation de rapport des températures en fonction du nombre de Mach

(a) : basse pression (b) : pression modérée (c) : haute pression.

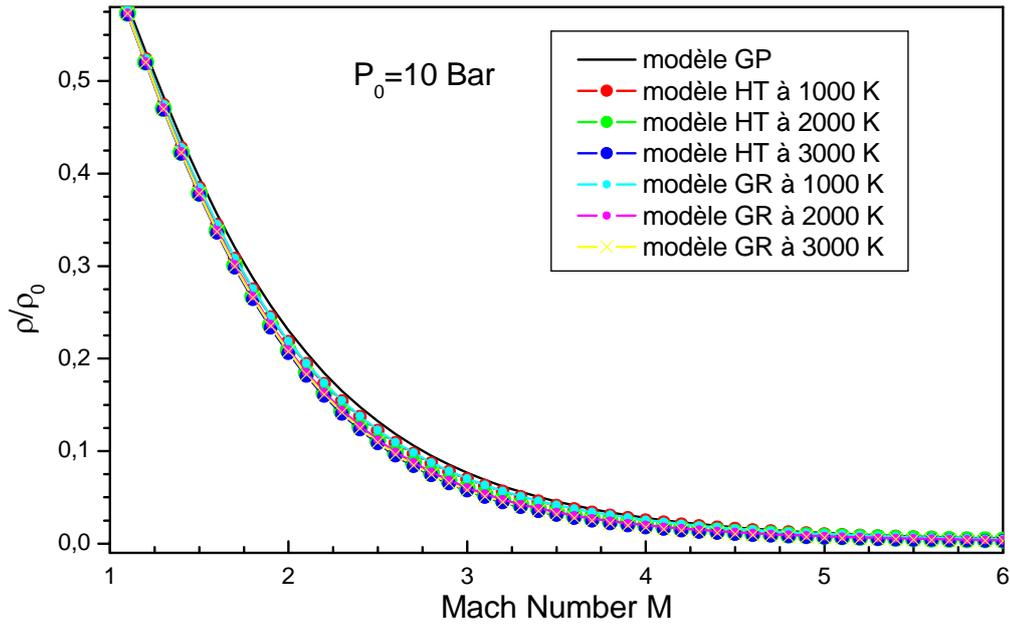
### 4.3.3. Rapport des masses volumiques

Les figures 4.14 (a, b, c)représentent respectivement la variation du rapport de la masse volumique  $\rho/\rho_0$  en fonction du nombre de Mach, pour les modèles *HT*, *GP* et *GR*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0= 1\text{Bar}$ ,  $10\text{ Bar}$ ,  $100\text{ Bar}$ .

On remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de la masse volumique, on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs  $T_0 = 1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$ ,  $3000\text{K}$ , influe sur le rapport de la masse volumique, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, par exemple à  $M=2.5$  et  $T_0=2000\text{K}$ ,  $\rho/\rho_0= 0.1321$  pour le modèle *GP*,  $\rho/\rho_0= 0.11149$  pour le modèle *HT*,  $\rho/\rho_0= 0.11188, 0.11212, 0.11317$  pour le modèle *GR* qui correspond les pressions  $1\text{ Bar}$ ,  $10\text{ Bar}$ ,  $100\text{ Bar}$ , avec des erreurs relatives entre le modèle *HT* et notre modèle *GR* égale à  $\epsilon = 0.348\%$  pour  $P_0=1\text{ Bar}$ ,  $\epsilon = 0.562\%$  pour  $P_0=10\text{ Bar}$ , et  $\epsilon = 1.485\%$  pour  $P_0=100\text{ Bar}$ . Les valeurs numériques présentées sont déterminées avec une précision meilleure à  $\epsilon = 10^{-5}$ .



(a)



(b)

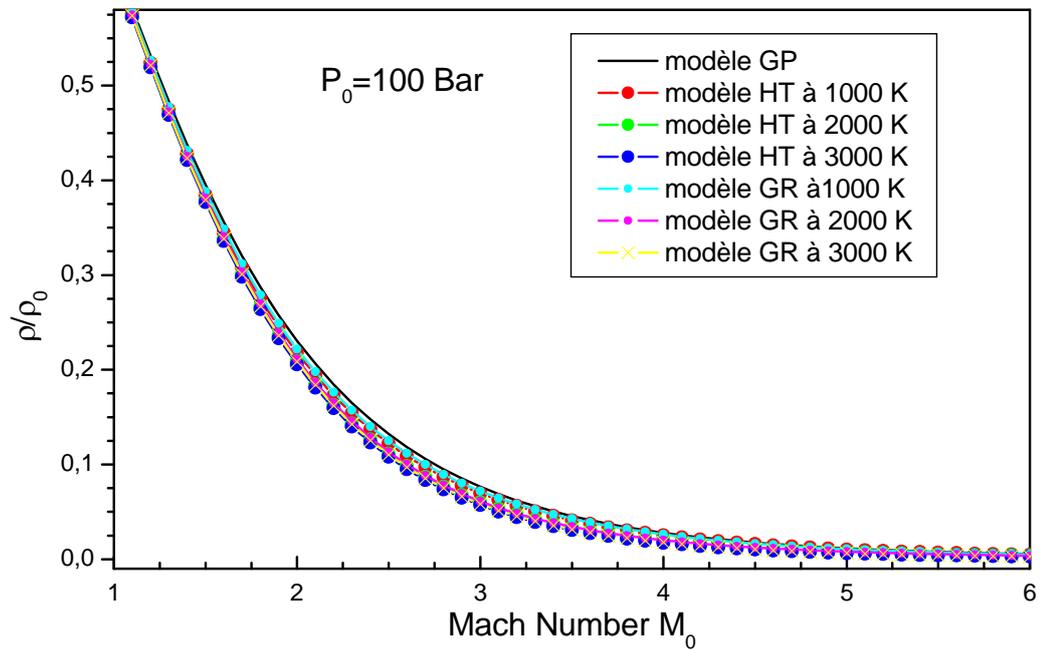
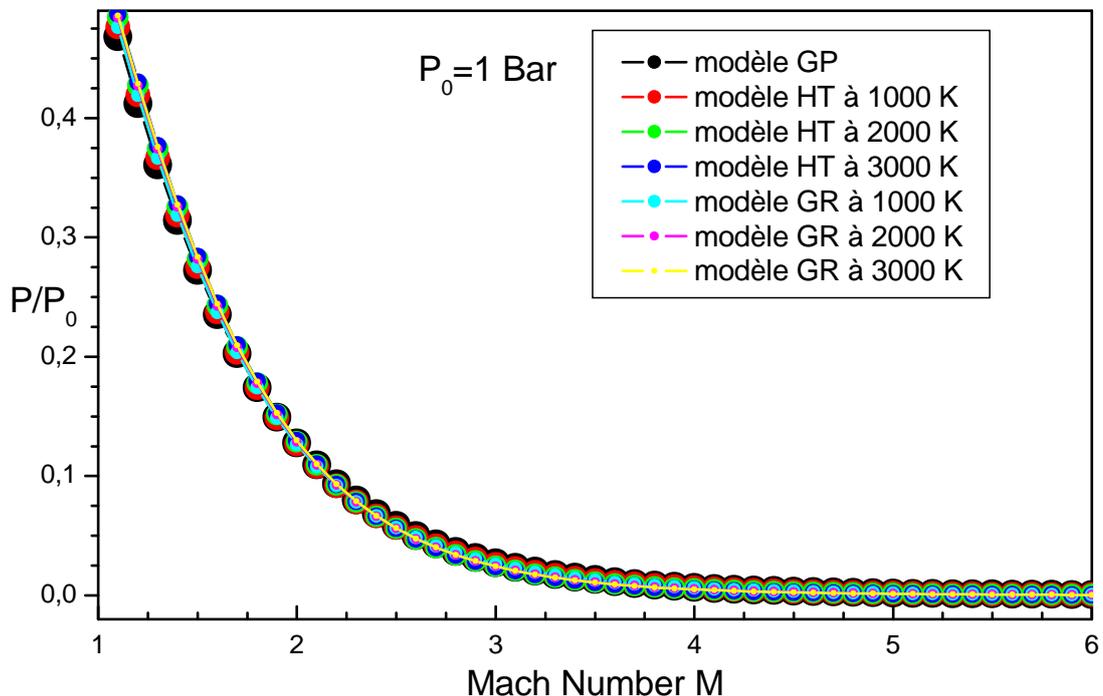


Figure 4.14 : Variation de rapport des densités en fonction du nombre de Mach  
 (a) : basse pression (b) : pression modérée (c) : haute pression.

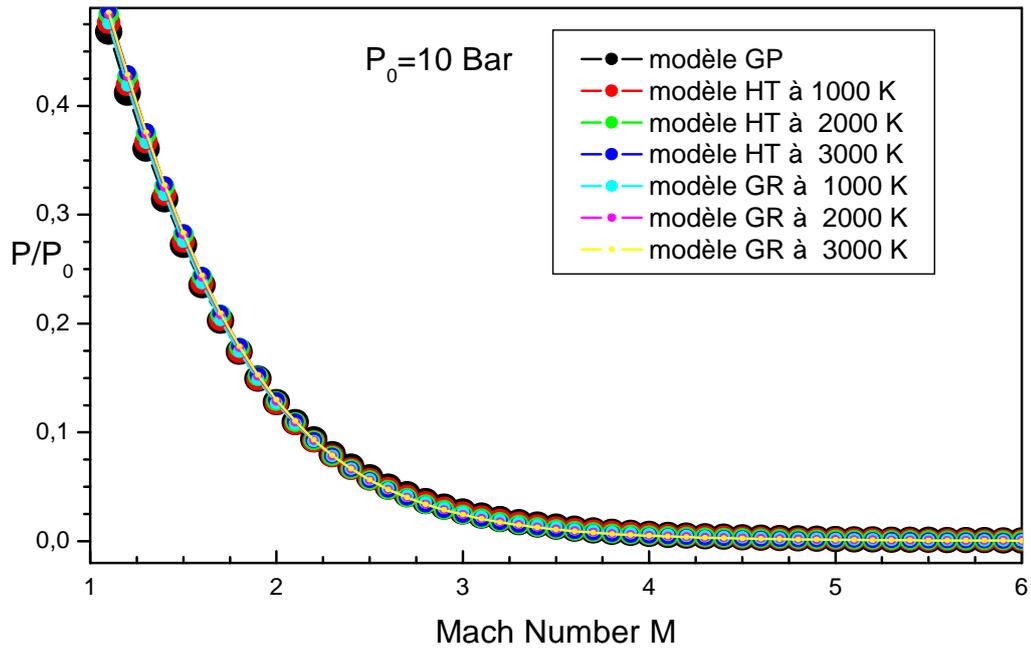
#### 4.3.4. Rapport des pressions

Les figures 4.15 (a, b, c) représentent respectivement la variation du rapport de la pression  $P/P_0$  en fonction du nombre de Mach, pour les modèles *HT, GP* et *GR*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $100 \text{ Bar}$ .

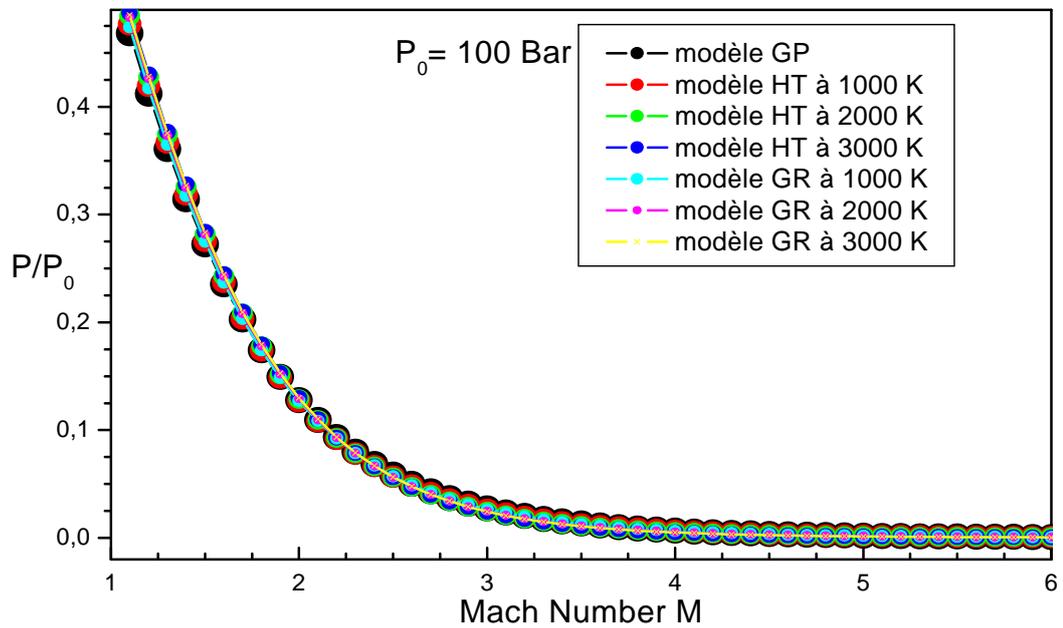
On remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de la pression, on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs  $T_0 = 1000 \text{ K}$ ,  $2000 \text{ K}$ ,  $3000 \text{ K}$ , influe sur le rapport de la pression, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, par exemple à  $M=2.0$  et  $T_0=2000 \text{ K}$ ,  $P/P_0=0.12775$  pour le modèle *GP*,  $P/P_0=0.12872$  pour le modèle *HT*,  $P/P_0=0.12874, 0.12878, 0.12897$  pour le modèle *GR* qui correspond les pressions  $1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $100 \text{ Bar}$ , avec des erreurs relatives entre le modèle *HT* et notre modèle *GR* égale à  $= 0.015 \%$  pour  $P_0=1 \text{ Bar}$ ,  $= 0.047 \%$  pour  $P_0=10 \text{ Bar}$ , et  $= 0.194 \%$  pour  $P_0=100 \text{ Bar}$ . Les valeurs numériques présentées sont déterminées avec une précision meilleure à  $= 10^{-5}$ .



(a)



(b)



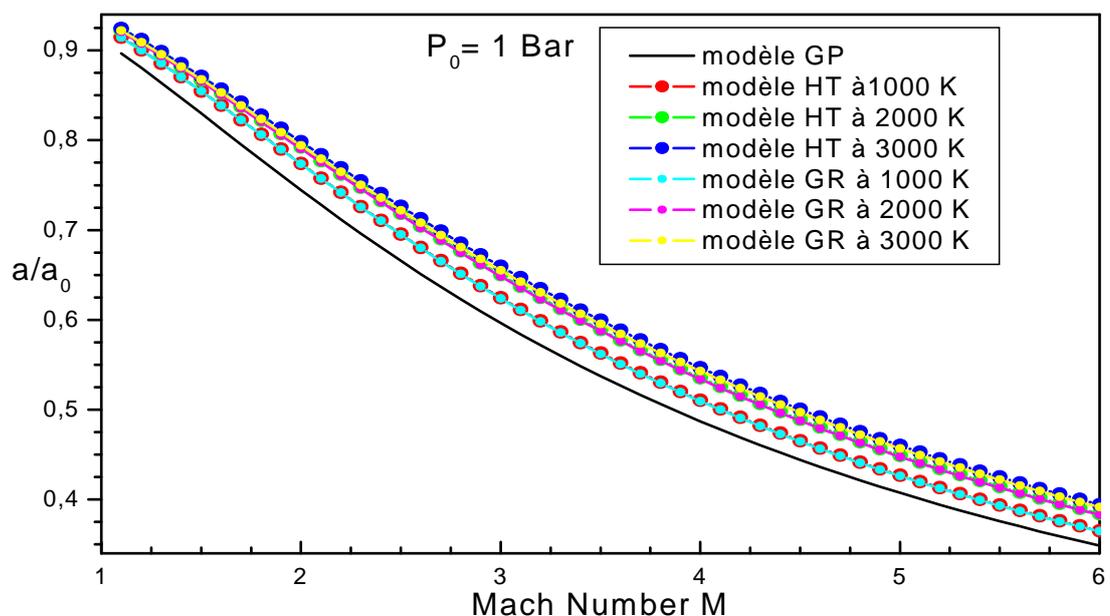
(c)

Figure 4.15 : Variation de rapport des pressions en fonction du nombre de Mach  
 (a) : basse pression (b) : pression modérée (c) : haute pression.

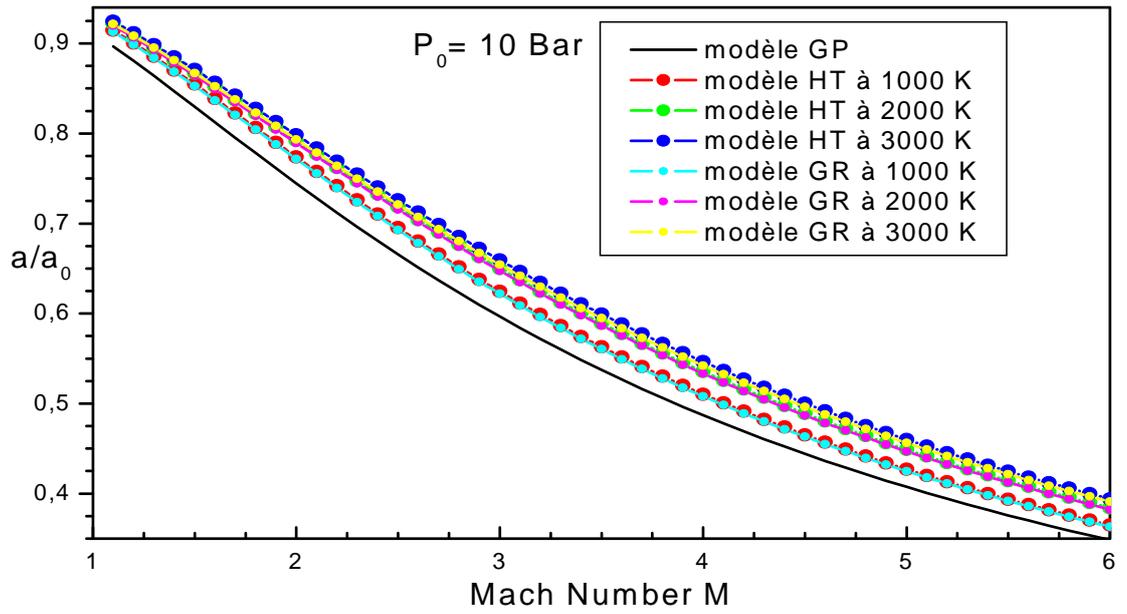
#### 4.3.5. Rapport de la célérité du son

Les figures 4.16 (a, b, c) représentent la variation du rapport de la vitesse du son  $a/a_0$  en fonction du nombre de Mach, pour les modèles *HT*, *GP* et *GR*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $100 \text{ Bar}$ .

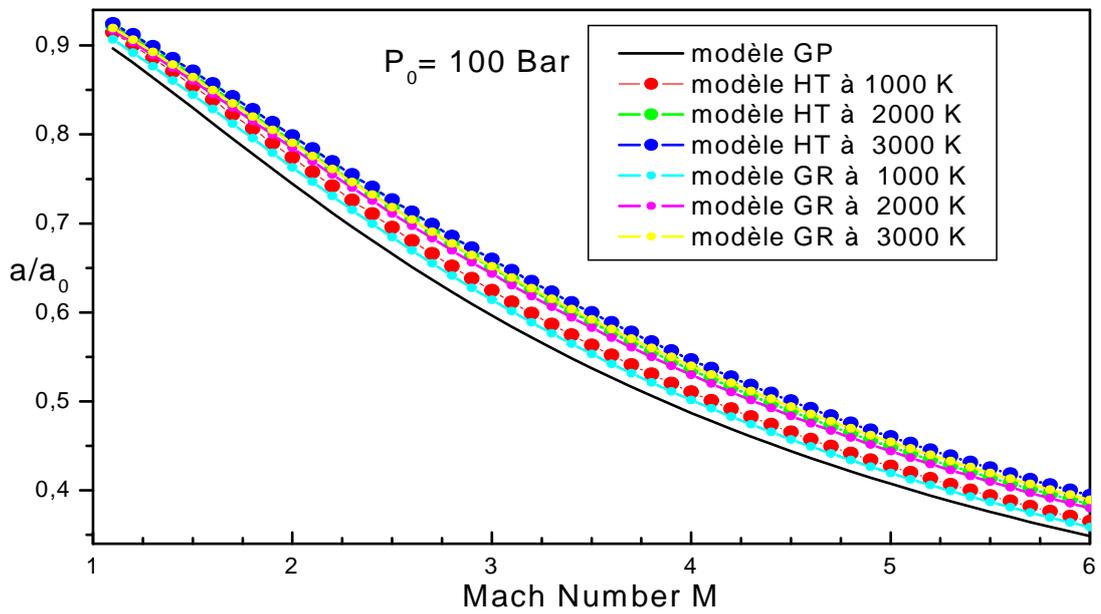
On remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une diminution des rapports de la vitesse du son, on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs  $T_0 = 1000 \text{ K}$ ,  $2000 \text{ K}$ ,  $3000 \text{ K}$ , influe sur le rapport de la vitesse du son, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, par exemple à  $M = 3.0$  et  $T_0 = 3000 \text{ K}$ ,  $a/a_0 = 0.59666$  pour le modèle *GP*,  $a/a_0 = 0.6594$  pour le modèle *HT*,  $a/a_0 = 0.65507, 0.65443, 0.6516$  pour le modèle *GR* qui correspondent les pressions  $1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $100 \text{ Bar}$ , avec des erreurs relatives entre le modèle *HT* et notre modèle *GR* égale à  $\approx 0.66 \%$  pour  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $\approx 0.76 \%$  pour  $P_0 = 10 \text{ Bar}$ , et  $\approx 1.20 \%$  pour  $P_0 = 50 \text{ Bar}$ . On remarque que lorsque la pression génératrice  $P_0$  augmente les rapports de la vitesse du son obtenus par le modèle *GR* s'éloignent de ceux obtenus par le modèle *HT*, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure ou égale à  $50 \text{ Bar}$ , ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$ . Les valeurs numériques présentées sont déterminées avec une précision meilleure à  $\approx 10^{-5}$ .



(a)



(b)



(c)

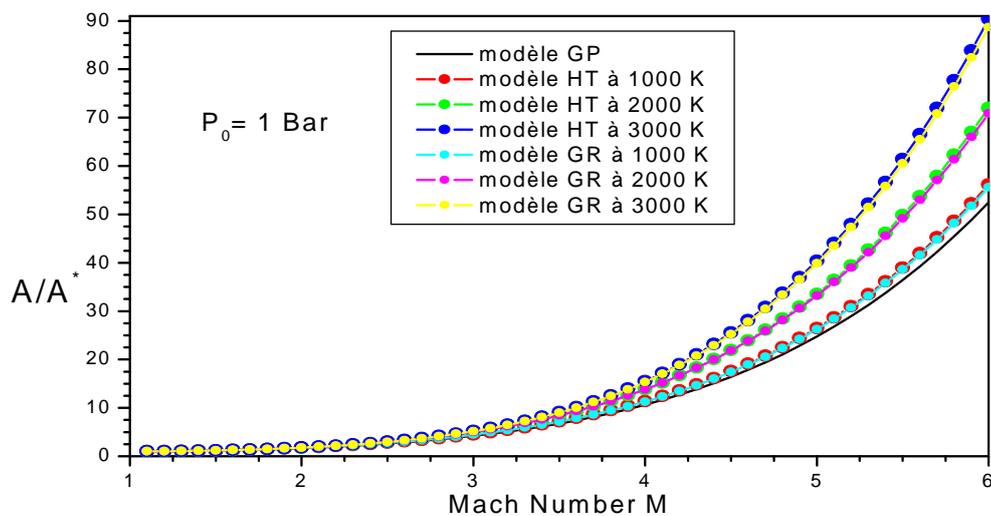
Figure 4.16 : Variation de rapport de célérité du son en fonction du nombre de Mach

(a) : basse pression (b) : pression modérée (c) : haute pression.

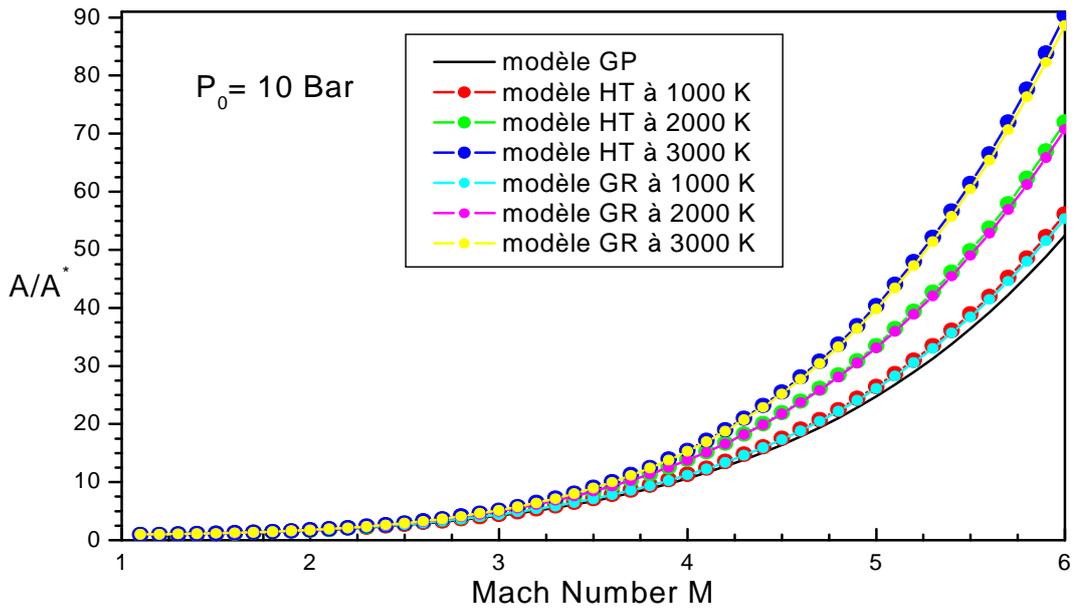
#### 4.3.6. Rapports des sections

Les figures 4.17 (a, b, c) représentent la variation des rapports des sections  $A/A^*$  en fonction du nombre de Mach, et pour les modèles *HT*, *GP* et *GR*, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $100 \text{ Bar}$ .

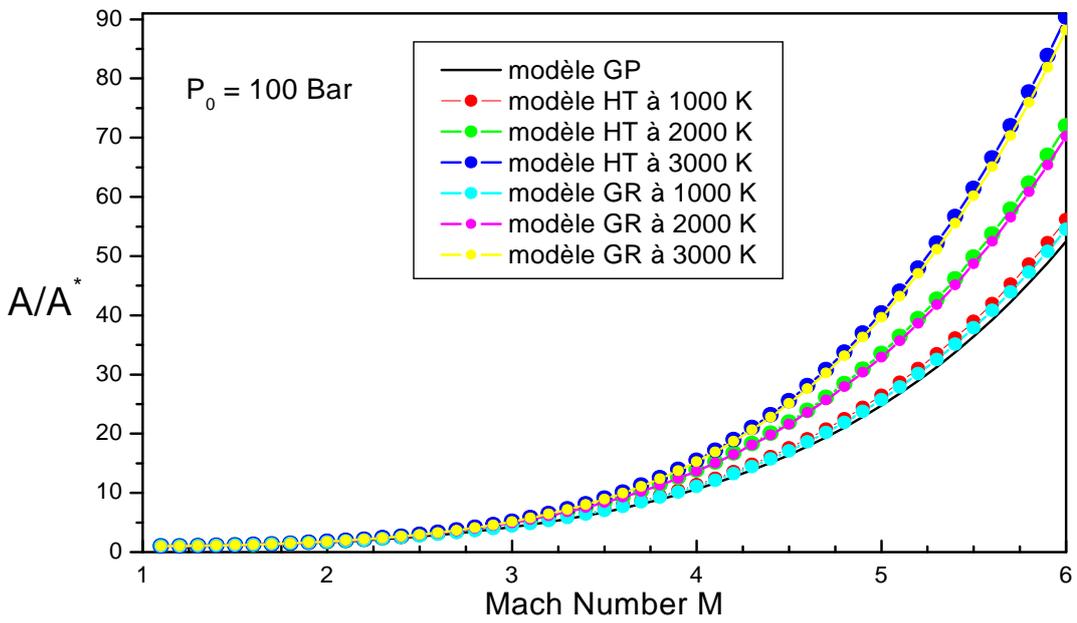
on remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une augmentation des rapports critiques des sections  $A/A^*$ , on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs  $T_0 = 1000 \text{ K}$ ,  $2000 \text{ K}$ ,  $3000 \text{ K}$ , influe sur les rapports critiques des sections  $A/A^*$ , les rapports critiques des sections  $A/A^*$  augmente lorsque  $T_0$  augmente, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, mais si le nombre de Mach inférieur à  $M_S = 2.0$ , on remarque que les trois modèles *GP*, *HT*, et *GR* sont confondus, et s'éloignent lorsque le nombre de Mach augmente, par exemple à  $M = 5.0$  et  $T_0 = 3000 \text{ K}$ ,  $A/A^* = 24.74917$  pour le modèle *GP*,  $A/A^* = 40.38428$  pour le modèle *HT*,  $A/A^* = 39.87358, 39.82898, 39.63156$  pour le modèle *GR* qui correspond les pressions  $1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $100 \text{ Bar}$ , avec des erreurs relatives entre le modèle *HT* et notre modèle *GR* égale à  $\epsilon = 1.28 \%$  pour  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $\epsilon = 1.40 \%$  pour  $P_0 = 10 \text{ Bar}$ , et  $\epsilon = 1.90 \%$  pour  $P_0 = 100 \text{ Bar}$ . On remarque que lorsque la pression génératrice  $P_0$  augmente les des rapports critiques des sections  $A/A^*$  obtenues par le modèle *GR* s'éloignent de ceux obtenus par le modèle *HT*, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure ou égale à  $100 \text{ Bar}$ , ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$ .



(a)



(b)



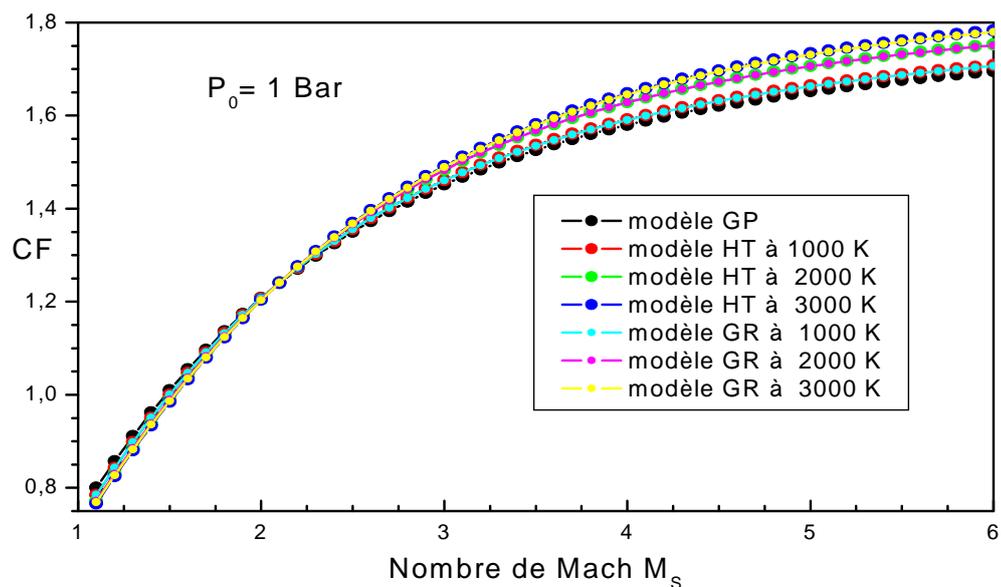
(c)

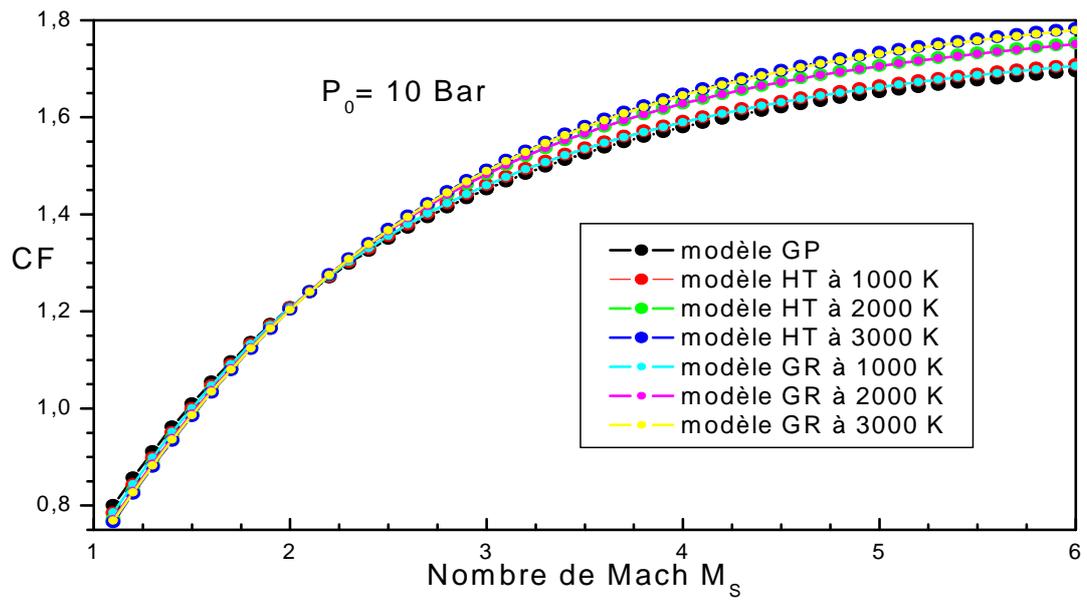
Figure 4.17 : Variation de rapport des sections en fonction du nombre de Mach  
 (a) : basse pression (b) : pression modérée (c) : haute pression.

#### 4.3.7. Le coefficient de poussée

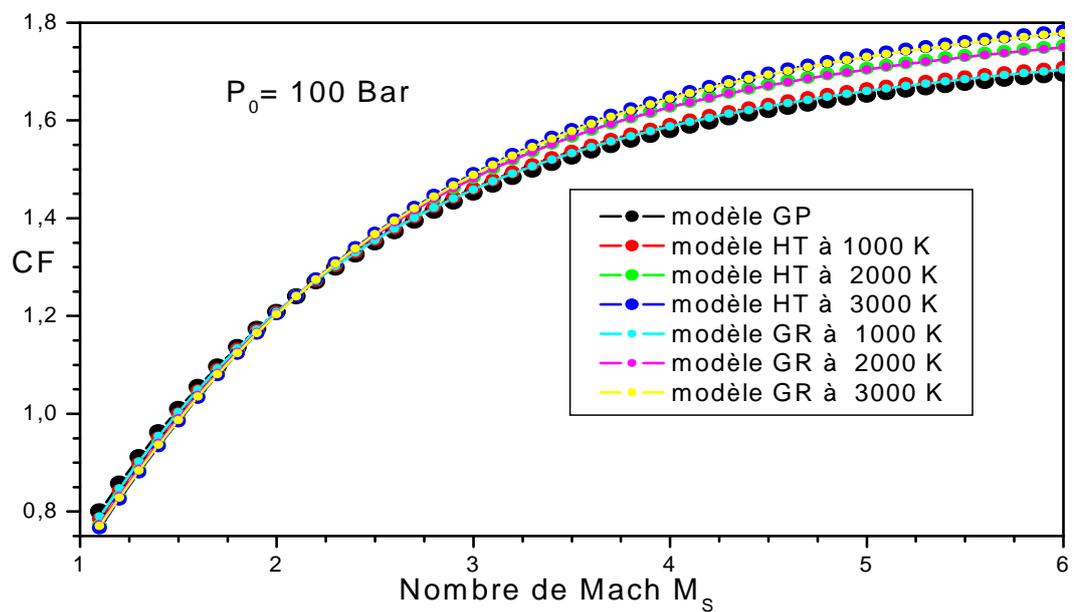
Les figures 4.18 (a, b, c) représentent la variation du coefficient de poussée  $C_f$  en fonction du nombre de Mach de sortie, pour les modèles HT, GP et GR, et pour quelques valeurs de la pression  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $100 \text{ Bar}$ .

on remarque que l'augmentation du nombre de Mach pour différents modèles entraîne une augmentation des coefficients de poussée, on remarque aussi que la variation de la température génératrice pour les valeurs  $T_0 = 1000 \text{ K}$ ,  $2000 \text{ K}$ ,  $3000 \text{ K}$ , influe sur le  $C_f$ , le coefficient  $C_f$  augmente lorsque  $T_0$  augmente, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, mais si le nombre de Mach de sortie inférieur à  $M_s = 2.0$ , on remarque que les trois modèles GP, HT, et GR sont confondus, et s'éloignent lorsque  $M_s$  augmente, par exemple à  $M = 5.0$  et  $T_0 = 3000 \text{ K}$ ,  $C_f = 1.65234$  pour le modèle GP,  $C_f = 1.73381$  pour le modèle HT,  $C_f = 1.73114, 1.73094, 1.73004$  pour le modèle GR qui correspondent les pressions 1, 10, 100 Bar, avec des erreurs relatives entre le modèle HT et notre modèle GR égale à  $\approx 0.15 \%$  pour  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $\approx 0.165 \%$  pour  $P_0 = 10 \text{ Bar}$ , et  $\approx 1.22 \%$  pour  $P_0 = 100 \text{ Bar}$ . On remarque que lorsque la pression génératrice  $P_0$  augmente le coefficient de poussée  $C_f$  obtenus par le modèle GR s'éloignent de ceux obtenus par le modèle HT, et d'autant remarquables pour une pression génératrice supérieure ou égale à  $50 \text{ Bar}$ , ce qui montre l'effet de la pression génératrice  $P_0$ .





(b)



(c)

Figure 4.18 : Variation de coefficient de poussée en fonction du nombre de Mach pour quelques valeurs des températures génératrices

(a) : basse pression (b) : pression modérée (c) : haute pression.

#### 4.4. Résultats sur l'erreur du modèle des gaz parfaits pour les paramètres supersoniques

La fonction utilisée pour le calcul des erreurs est :

$$V_{Param\grave{e}tre}(\%) = \left| 1 - \frac{Param\grave{e}tre_{GP}(P_0, T_0, M)}{Param\grave{e}tre_{GR}(P_0, T_0, M)} \right| \times 100$$

##### 4.4.1. Erreur sur les rapports des températures

Les figures 4.19 (a, b, c, d, e, f) représentent respectivement la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de température  $T/T_0$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000K$ ,  $2000 K$ , et  $3000 K$  et les pressions génératrices  $P_0= 1 Bar$ ,  $10 Bar$ , et  $100 Bar$ , en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle GR.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M_S$  et elle augmente si  $T_0$  et  $P_0$  augmentent. Par exemple si  $T_0=2000 K^\circ$  et  $M=3.00$ , l'utilisation du modèle GP va nous donner une erreur relative égale à  $=12.028 \%$  pour une pression génératrice  $P_0= 1 Bar$ ,  $=12.054\%$  pour une pression génératrice  $P_0= 10 Bar$ , et  $=12.17\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 100 Bar$ , qui donne une différence de  $97.36 K$ ,  $97.6 K$ ,  $98.68 K$  entre les valeurs des températures des deux modèles.

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieur à  $5 \%$ , le modèle GP peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure à  $1000 K$  et la pression  $P_0$  soit inférieure à  $90 Bar$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de  $P_0M$  et  $T_0$  modéré.

On peut remarquer qu'à faible valeur de  $M, T_0$  et  $P_0$ , l'erreur est faible. Sur ces figures, la figure 4.19.a se trouve au-dessous de l'erreur  $5\%$ . Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle GP jusqu'à  $T_0=1000 K^\circ$  pour les applications aéronautiques, mais a pression génératrice bien modéré et ne dépasse pas  $90 Bar$ , si on accepte une erreur inférieur à  $5\%$ . Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle GP indépendamment à la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=2.00$  avec une erreur de  $12\%$  environ.

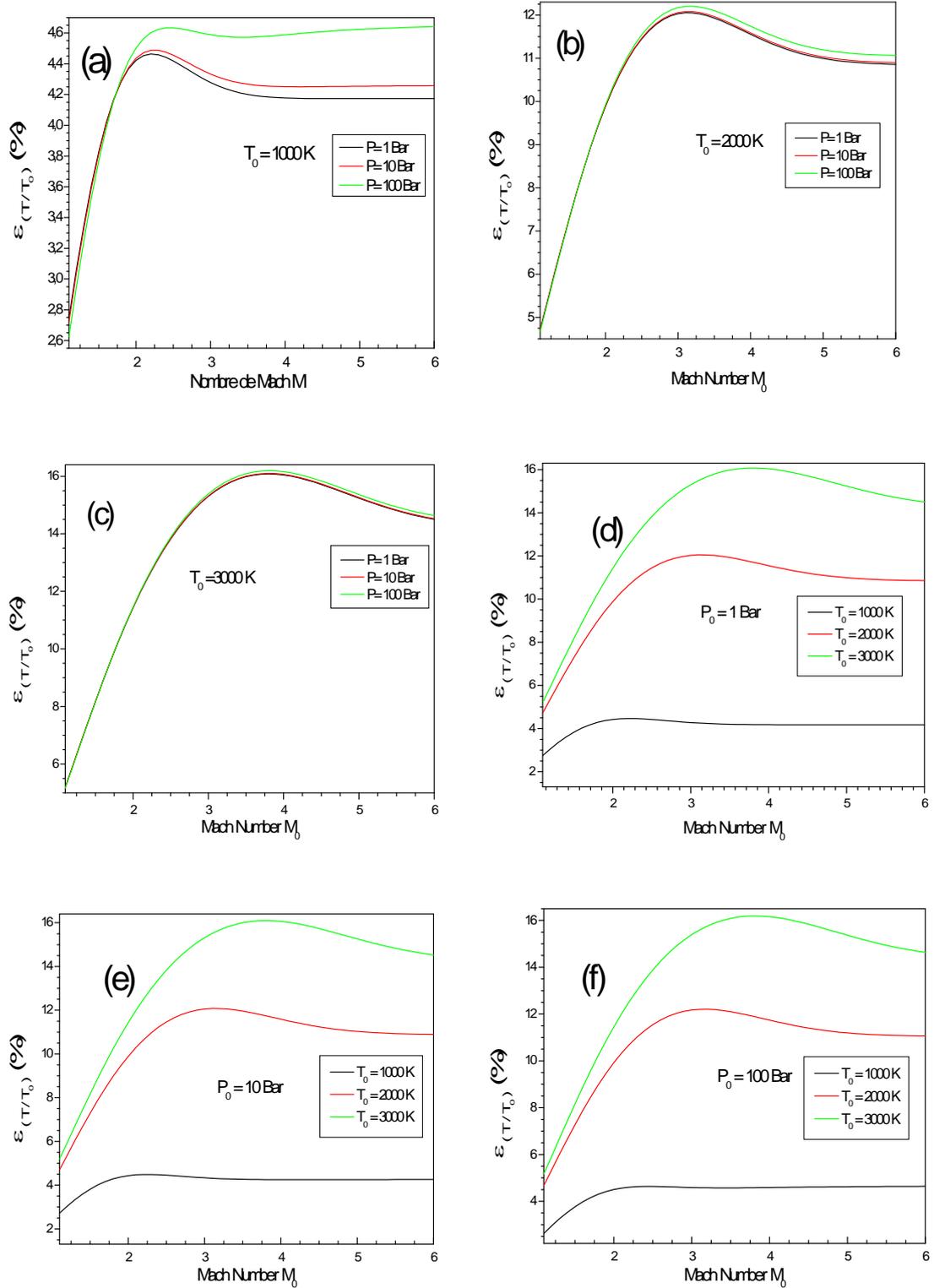


Figure 4.11 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des températures en fonction de nombre de Mach

(a) : basse température ;(b) : température modérée ;(c) : haute température

(d) : basse pression ;(e) : pression modérée ;(f) : haute pression

#### 4.4.2. Erreur sur les rapports des masses volumiques

Les figures 4.20 (a, b, c, d, e, f) représentent respectivement la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de masse volumique  $\rho / \rho_0$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{ K}$ , et  $3000\text{ K}$  et les pressions génératrices  $P_0= 1\text{ Bar}$ ,  $10\text{ Bar}$ , et  $100\text{ Bar}$ , en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle GR.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M$  et elle augmente si  $T_0$  augmente. Mais elle diminue lorsque  $P_0$  augmente, Par exemple si  $T_0=2000\text{ K}$  et  $M=3.00$ , l'utilisation du modèle GP va nous donner une erreur relative égale à  $\approx 26.86\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 1\text{ Bar}$ ,  $\approx 26.55\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 10\text{ Bar}$ , et  $\approx 25.19\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 100\text{ Bar}$ , qui donne une différence de  $0.0029\text{ Kg/m}^3$ ,  $0.029\text{ Kg/m}^3$ ,  $0.134\text{ Kg/m}^3$  entre les valeurs des masses volumiques des deux modèles.

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à  $5\%$ , le modèle GP peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure à  $1000\text{ K}$  et la pression  $P_0$  soit supérieure à  $50\text{ Bar}$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de  $P_0, M$  et  $T_0$  modéré.

On peut conclure qu'à faible valeur de  $M, T_0$ , l'erreur est faible et se trouve au-dessous de l'erreur  $5\%$ . Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation du modèle GP jusqu'à  $T_0=1000\text{ K}$  pour les applications aéronautiques, à pression génératrice modérée. Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle GP indépendamment à la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=2.00$  sinon l'erreur va excéder  $12\%$  environ.

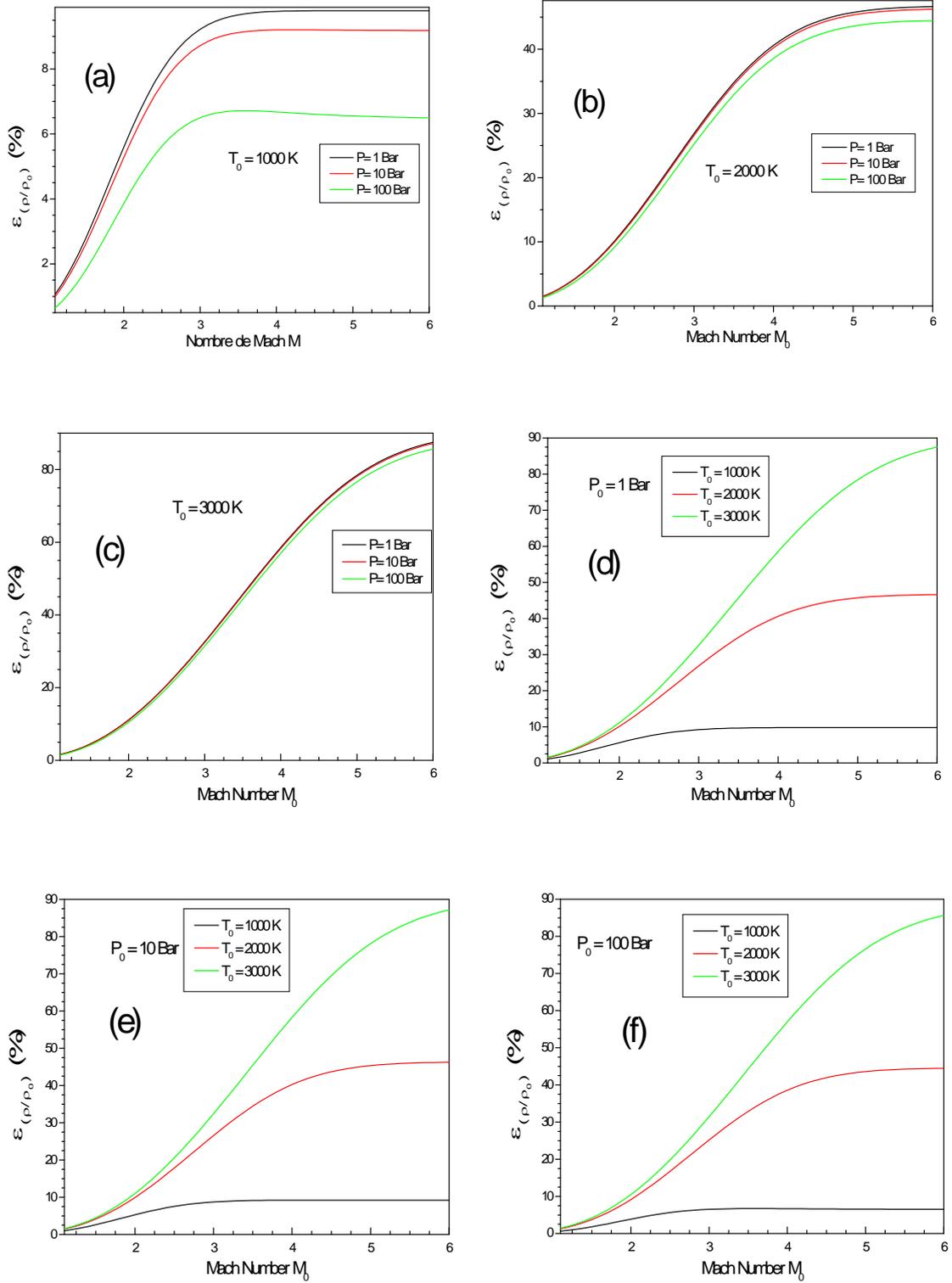


Figure 4.20 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des masses volumiques en fonction de nombre de Mach

Température génératrice: (a) :  $T_0=1000\text{ K}$ ; (b) :  $T_0=2000\text{ K}$  ;(c) :  $T_0=3000\text{ K}$   
 (d) : basse pression ;(e) : pression modérée ;(f) : haute pression

#### 4.4.3. Erreur sur les rapports des pressions

Les figures 4.21 (a, b, c, d, e, f) représentent respectivement la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de pression  $P/P_0$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$ , et  $3000\text{K}$  et les pressions génératrices  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $10\text{Bar}$ , et  $100\text{Bar}$ , en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle GR.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M_S$  et elle augmente si  $T_0$  et  $P_0$  augmentent. Par exemple si  $T_0=2000\text{K}$  et  $M=4.00$ , l'utilisation du modèle GP va nous donner une erreur relative égale à  $\approx 24.39\%$  pour une pression génératrice  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $\approx 24.22\%$  pour une pression génératrice  $P_0=10\text{Bar}$ , et  $\approx 23.44\%$  pour une pression génératrice  $P_0=100\text{Bar}$ , qui donne une différence de  $0.0013\text{Bar}$ ,  $0.013\text{Bar}$ , et  $0.065\text{Bar}$  entre les valeurs des pressions des deux modèles, on remarque que l'erreur  $\approx 0.001\%$  si le nombre de Mach  $M=1.8$ ,  $T_0=1000\text{K}$ ,  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $\approx 0.1\%$  à  $M=2.1$ ,  $T_0=2000\text{K}$ ,  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $\approx 0.3\%$  à  $M=2.2$ ,  $T_0=3000\text{K}$ ,  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $\approx 0.005\%$  à  $M=1.8$ ,  $T_0=1000\text{K}$ ,  $P_0=10\text{Bar}$ ,  $\approx 0.05\%$  à  $M=2.1$ ,  $T_0=2000\text{K}$ ,  $P_0=10\text{Bar}$ ,  $\approx 0.27\%$  à  $M=2.2$ ,  $T_0=3000\text{K}$ ,  $P_0=10\text{Bar}$ ,  $\approx 0.08\%$  à  $M=1.8$ ,  $T_0=1000\text{K}$ ,  $P_0=50\text{Bar}$ ,  $\approx 0.13\%$  à  $M=2.1$ ,  $T_0=2000\text{K}$ ,  $P_0=50\text{Bar}$ ,  $\approx 0.11\%$  à  $M=2.2$ ,  $T_0=3000\text{K}$ ,  $P_0=50\text{Bar}$ .

On conclut qu'on peut diminuer l'erreur de la pression à  $< 1.0\%$ , si on prend un intervalle de nombre de Mach entre  $M=1.8$  et  $M=2.2$ , dans cet intervalle on peut dire que les erreurs instantanées indépendantes de  $P_0$  et  $T_0$ .

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à  $5\%$ , le modèle GP peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure à  $1000\text{K}$  et la pression  $P_0$  soit un peu supérieure à  $1\text{Bar}$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de  $P_0M$  et  $T_0$  modéré. Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle GP indépendamment à la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=3.0$  avec une erreur de  $12\%$  environ.

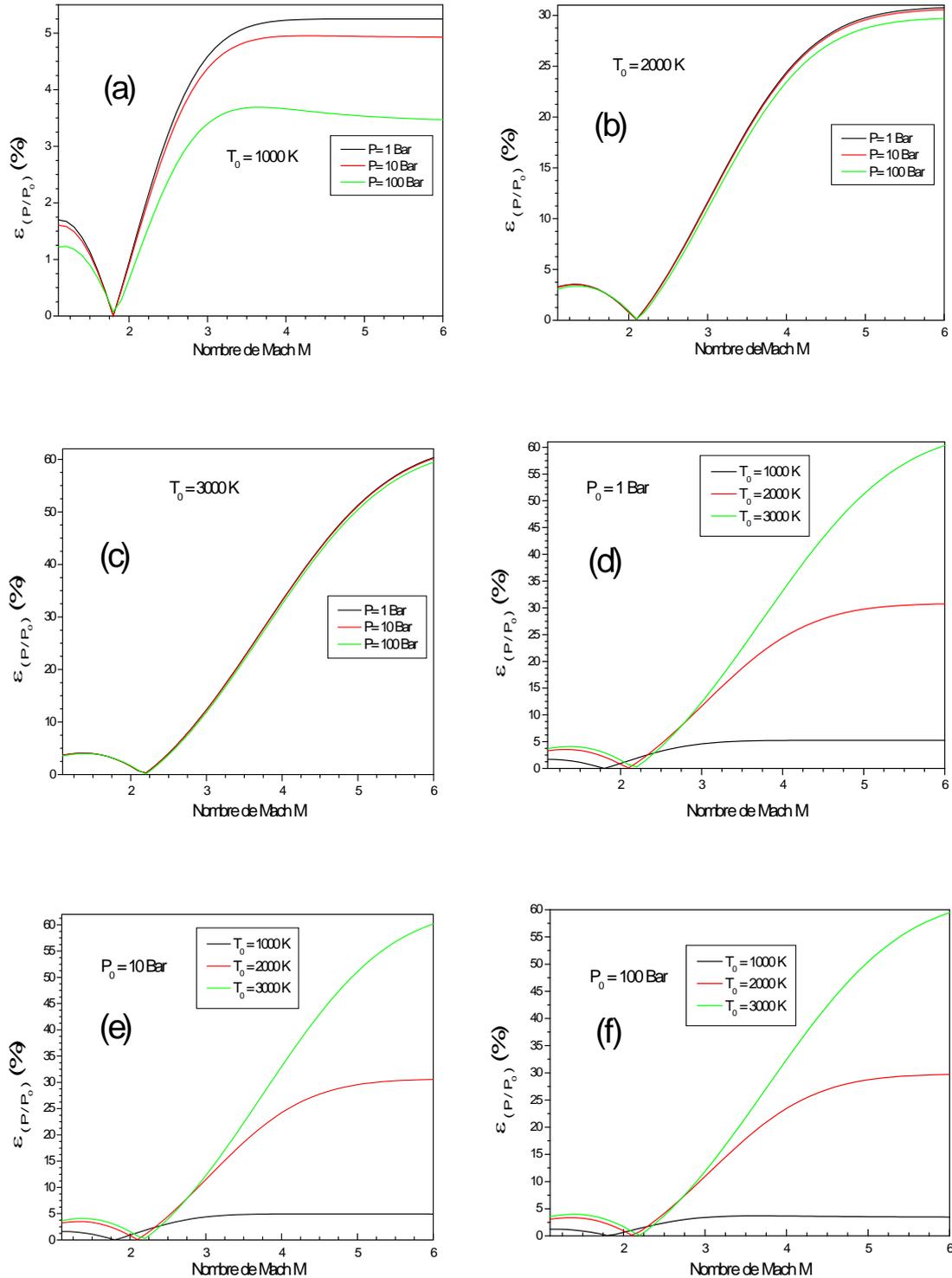


Figure 4.21 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des pressions en fonction de nombre de Mach

Température génératrice: (a) :  $T_0=1000$  K; (b) :  $T_0=2000$  K ;(c) :  $T_0=3000$  K  
 (d) : basse pression ;(e) : pression modérée ;(f) : haute pression

#### 4.4.4. Erreur sur les rapports de célérité du son

Les figures 4.22 (a, b, c, d, e, f) représentent respectivement la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports de vitesse du son  $a/a_0$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$ , et  $3000\text{K}$  et les pressions génératrices  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $10\text{Bar}$ , et  $100\text{Bar}$ , en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle GR.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M_S$  et elle augmente si  $T_0$  augmente. Mais elle diminue lorsque  $P_0$  augmente, Par exemple si  $T_0=2000\text{K}$  et  $M=3.00$ , l'utilisation du modèle GP va nous donner une erreur relative égale à  $\approx 8.00\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 1\text{Bar}$ ,  $\approx 7.86\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 10\text{Bar}$ , et  $\approx 7.26\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 100\text{Bar}$ .

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à  $5\%$ , le modèle GP peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure ou égale à  $1000\text{K}$  et la pression  $P_0$  soit supérieure ou égale à  $1\text{Bar}$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de  $P_0, M$  et  $T_0$  modéré.

On conclut qu'à faible valeur de  $M, T_0$ , l'erreur est faible. Se trouve au-dessous de l'erreur  $5\%$ . Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle GP jusqu'à  $T_0=1000\text{K}$  pour les applications aéronautiques, mais a pression génératrice bien modéré, si on accepte une erreur inférieure à  $5\%$ . Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle GP indépendamment à la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=6.00$  avec une erreur de  $11\%$  environ.

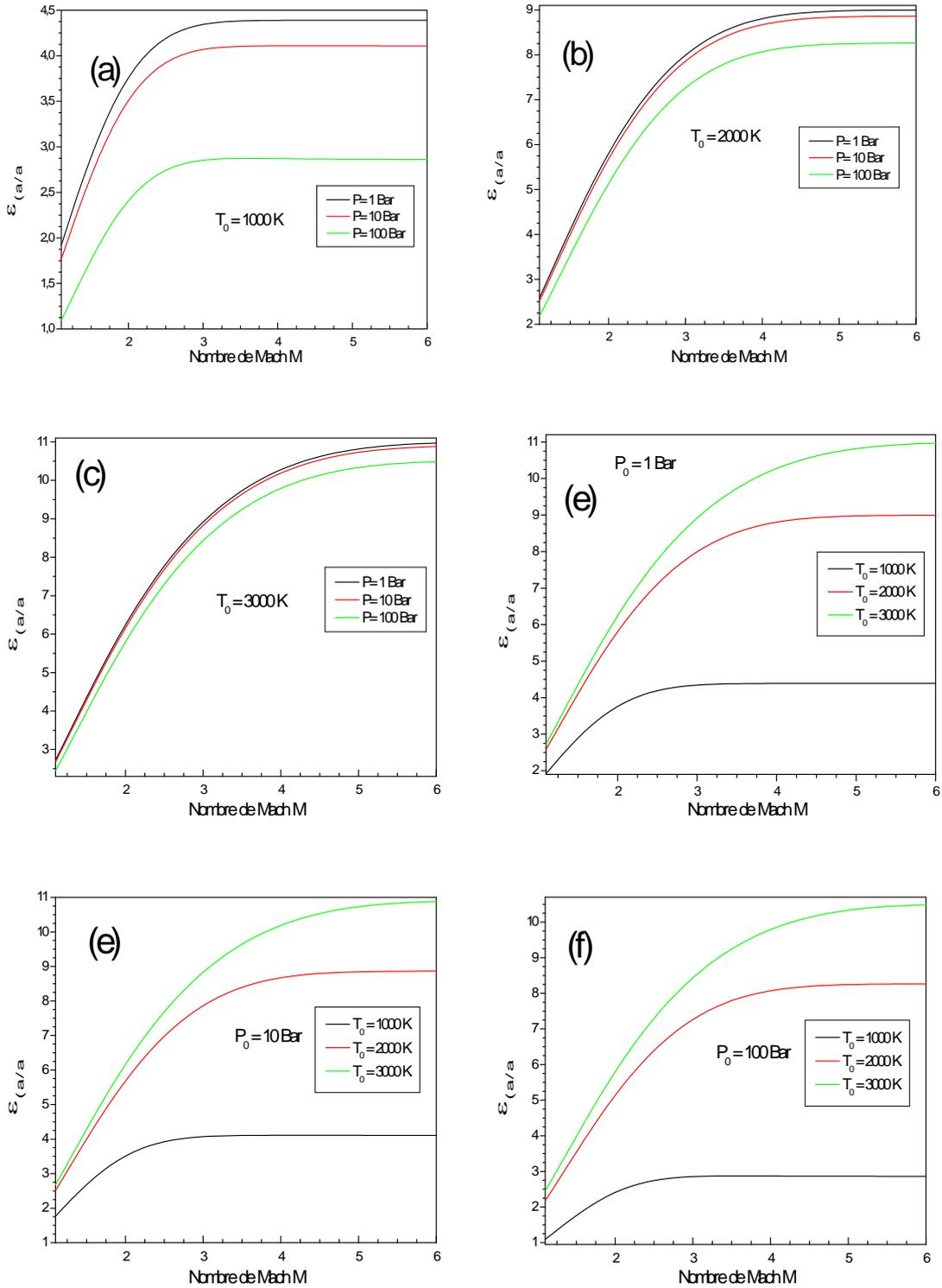


Figure 4.22 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des célérités du son en fonction de nombre de Mach

Température génératrice: (a) :  $T_0=1000\text{ K}$ ; (b) :  $T_0=2000\text{ K}$  ;(c) :  $T_0=3000\text{ K}$   
 (d) : basse pression ;(e) : pression modérée ;(f) : haute pression

#### 4.4.5. Erreur sur le rapport des sections

Les figures 4.23 (a, b, c, d, e, f) représentent respectivement la variation de l'erreur relative en pourcentage des rapports critiques des sections  $A/A^*$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$ , et  $3000\text{K}$  et les pressions génératrices  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $10\text{Bar}$ , et  $100\text{Bar}$ , en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle GR.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M_S$  et elle augmente si  $T_0$  augmente. Mais elle diminue lorsque  $P_0$  augmente, Par exemple si  $T_0=2000\text{K}$  et  $M=3.00$ , l'utilisation du modèle GP va nous donner une erreur relative égale à  $\approx 15.33\%$  pour une pression génératrice  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $\approx 15.21\%$  pour une pression génératrice  $P_0=10\text{Bar}$ , et  $\approx 14.70\%$  pour une pression génératrice  $P_0=50\text{Bar}$ .

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à  $5\%$ , le modèle GP peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure à  $1000\text{K}$  et la pression  $P_0$  soit supérieure à  $1\text{Bar}$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de  $P_0, M$  et  $T_0$  modéré.

On peut conclure qu'à faible valeur de  $M, T_0$ , l'erreur est faible. Se trouve au-dessous de l'erreur  $5\%$ . Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle GP jusqu'à  $T_0=1000\text{K}$  pour les applications aéronautiques, avec une pression génératrice bien modéré et supérieure à  $1\text{Bar}$ , si on accepte une erreur inférieure à  $5\%$ . Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle GP indépendamment à la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=2.50$  avec une erreur de  $11\%$  environ.

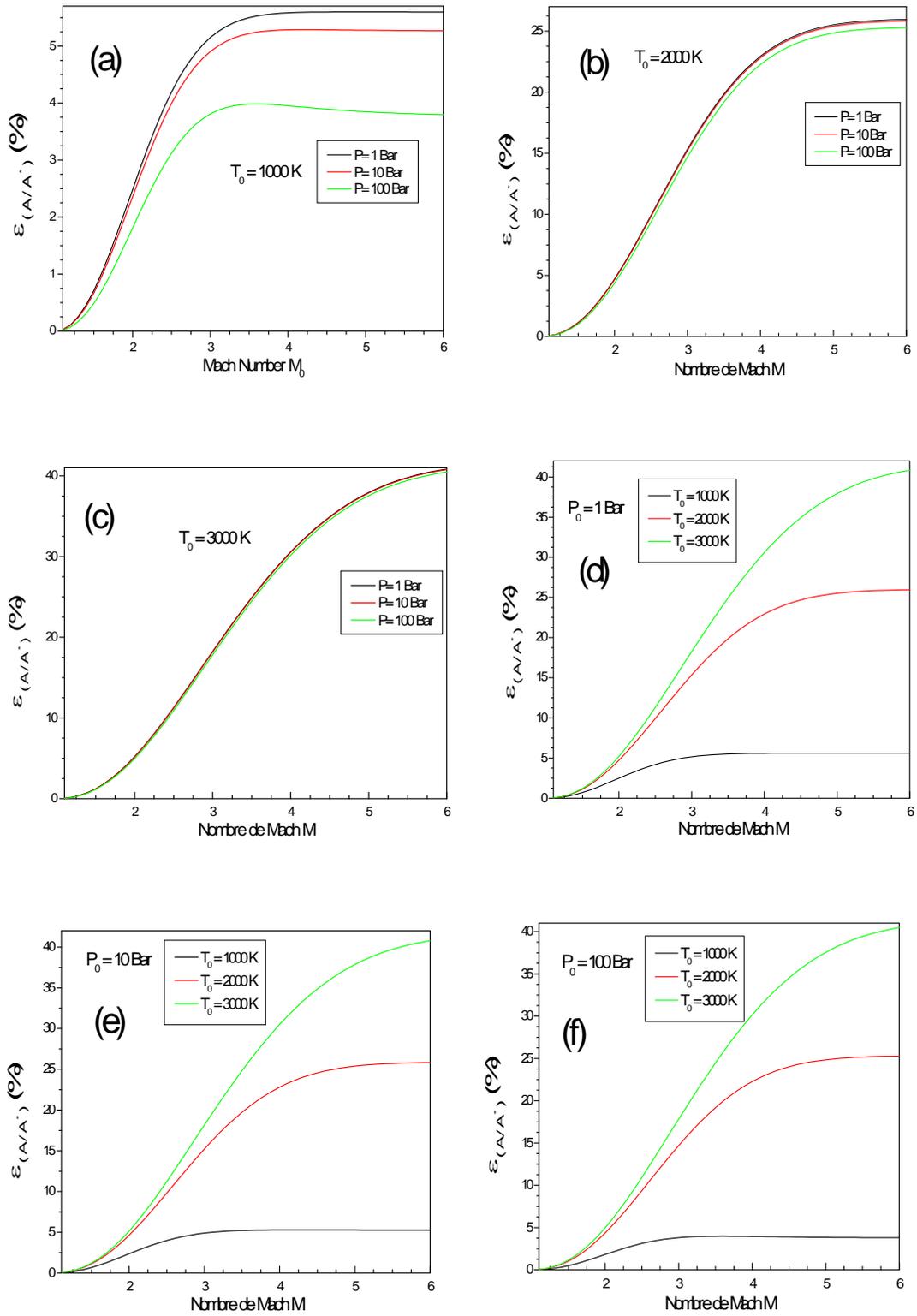


Figure 4.23 : Variation de l'erreur relative donnée par le rapport des sections en fonction de nombre de Mach

Température génératrice: (a) :  $T_0=1000\text{ K}$ ; (b) :  $T_0=2000\text{ K}$ ; (c) :  $T_0=3000\text{ K}$

(d) : basse pression ;(e) : pression modérée ;(f) : haute pression

#### 4.4.6 Erreur sur le coefficient de poussée

Les figures 4.24 (a, b, c, d, e, f) représentent respectivement la variation de l'erreur relative en pourcentage des coefficients de poussée  $C_f$  données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$ , et  $3000\text{K}$  et les pressions génératrices  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $10\text{Bar}$ , et  $100\text{Bar}$ , en fonction du nombre de Mach de sortie, du modèle GP comparé au modèle GR.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M_S$  et elle augmente si  $T_0$  et  $P_0$  augmentent. Par exemple si  $T_0=2000\text{K}$  et  $M=4.00$ , l'utilisation du modèle GP va nous donner une erreur relative égale à  $\approx 2.95\%$  pour une pression génératrice  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $\approx 2.94\%$  pour une pression génératrice  $P_0=10\text{Bar}$ , et  $\approx 2.87\%$  pour une pression génératrice  $P_0=100\text{Bar}$ , qui donne une différence de  $0.0461$ ,  $0.0479$ ,  $0.04428$ , entre les valeurs de  $C_f$  des deux modèles, on remarque que l'erreur  $\approx 0.024\%$  si le nombre de Mach  $M=2.0$ ,  $T_0=1000\text{K}$ ,  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $\approx 0.075\%$  à  $M=2.1$ ,  $T_0=2000\text{K}$ ,  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $\approx 0.0142\%$  à  $M=2.1$ ,  $T_0=3000\text{K}$ ,  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $\approx 0.0192\%$  à  $M=2.0$ ,  $T_0=1000\text{K}$ ,  $P_0=10\text{Bar}$ ,  $\approx 0.0732\%$  à  $M=2.1$ ,  $T_0=2000\text{K}$ ,  $P_0=10\text{Bar}$ ,  $\approx 0.0127\%$  à  $M=2.1$ ,  $T_0=3000\text{K}$ ,  $P_0=10\text{Bar}$ ,  $\approx 0.0042\%$  à  $M=2.0$ ,  $T_0=1000\text{K}$ ,  $P_0=50\text{Bar}$ ,  $\approx 0.065\%$  à  $M=2.1$ ,  $T_0=2000\text{K}$ ,  $P_0=50\text{Bar}$ ,  $\approx 0.0062\%$  à  $M=2.1$ ,  $T_0=3000\text{K}$ ,  $P_0=50\text{Bar}$ .

On conclut qu'on peut diminuer l'erreur de la pression à  $< 1.0\%$ , si on prend un intervalle de nombre de Mach entre  $M=2.0$  et  $M=2.1$ , dans cet intervalle on peut dire que les erreurs instantanées indépendantes de  $P_0$  et  $T_0$ .

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à  $5\%$ , le modèle GP peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure à  $3000\text{K}$  et quel que soit la valeur de la pression  $P_0$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de  $P_0M$  et  $T_0$  modéré, Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle GP jusqu'à  $T_0=3000\text{K}$  pour les applications aéronautiques.

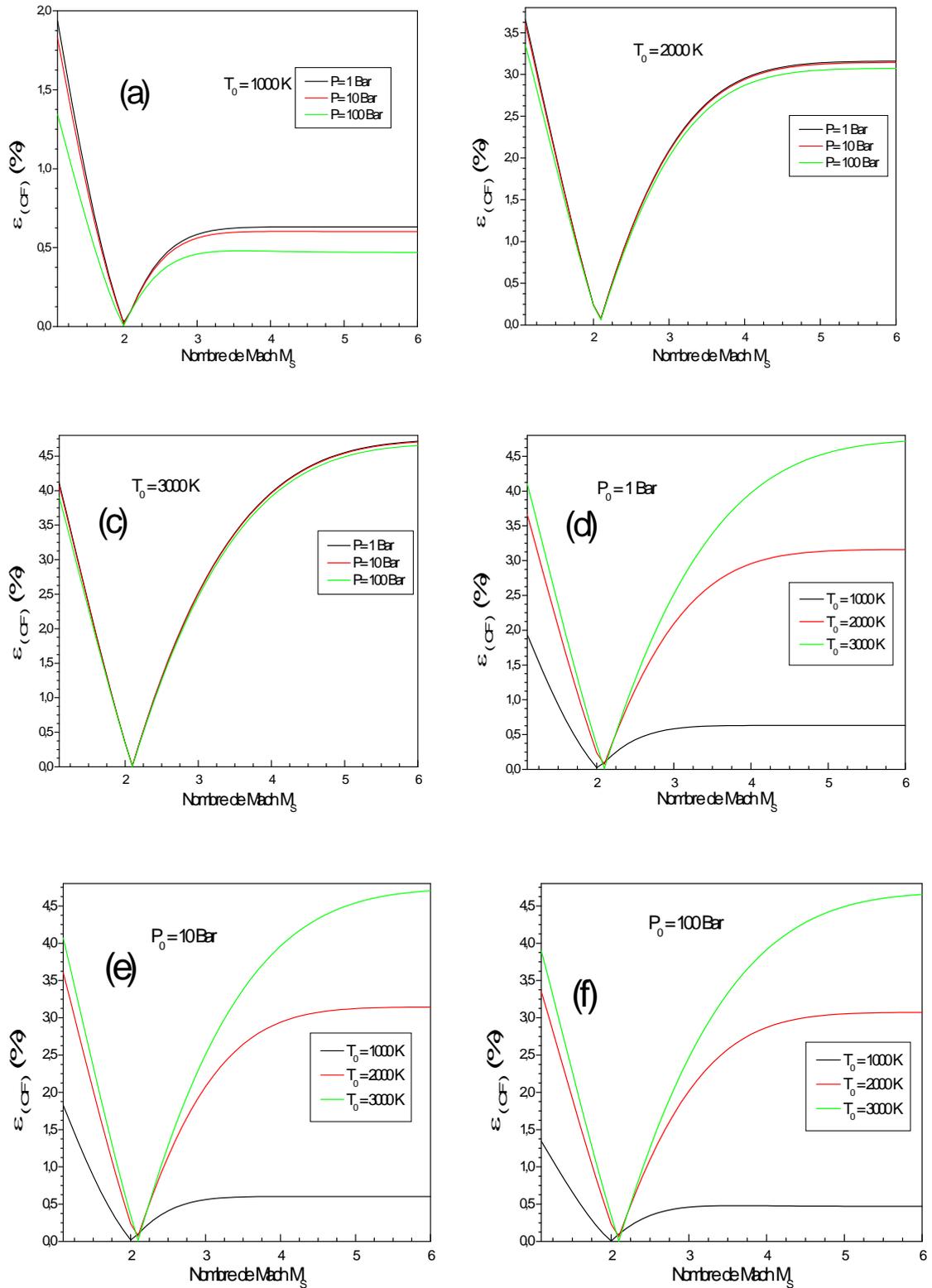


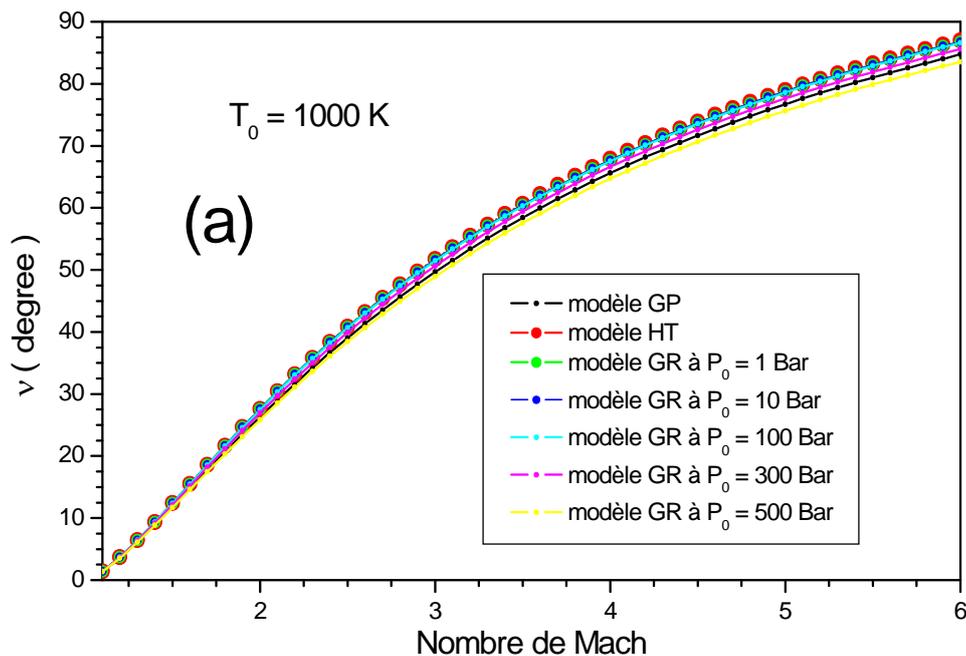
Figure 4.24 : Variation de l'erreur relative donnée par le coefficient de poussée en fonction de nombre de Mach

Température génératrice: (a) :  $T_0 = 1000\text{ K}$ ; (b) :  $T_0 = 2000\text{ K}$ ; (c) :  $T_0 = 3000\text{ K}$   
 (d) : basse pression ;(e) : pression modérée ;(f) : haute pression

#### 4.5. Résultats sur la fonction de Prandtl Meyer

Les figures 4.25(a, b, c) représentent respectivement la variation de la fonction de Prandtl Meyer donnée respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{K}$ , et  $3000\text{K}$  et les pressions génératrices  $P_0=1\text{Bar}$ ,  $10\text{Bar}$ ,  $100\text{Bar}$ ,  $300\text{Bar}$  et  $500\text{Bar}$ , en fonction du nombre de Mach jusqu'à  $M=6.0$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *GR*.

On remarque clairement que si on prend en considération l'imperfection thermique et calorifique, la pression génératrice  $P_0$  influe sur la grandeur de cette fonction, on remarque aussi que les trois modèles *HT*, *GP* et *GR* suivent la même allure, surtout à faible nombre de Mach, les trois modèles s'approchent et s'éloignent lorsque le nombre de Mach augmente, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, on remarque encore que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$ , pour notre modèle *GR*, entraîne une diminution de la valeur de  $\hat{\nu}$ , et d'autant importante à basse température (voir figure 4.25.a), dans ce cas la valeur de  $\hat{\nu}$  varie considérablement et s'éloigne des modèles *GP* et *HT*, d'où, la nécessité d'utiliser le modèle *GR* pour corriger les résultats. Cette variation montre les effets de taille moléculaire  $b$ , de la force intermoléculaire  $\hat{a}$ , et la température caractéristique de vibration  $\theta_v$ , et on peut dire que notre modèle est thermiquement et calorifiquement imparfait.



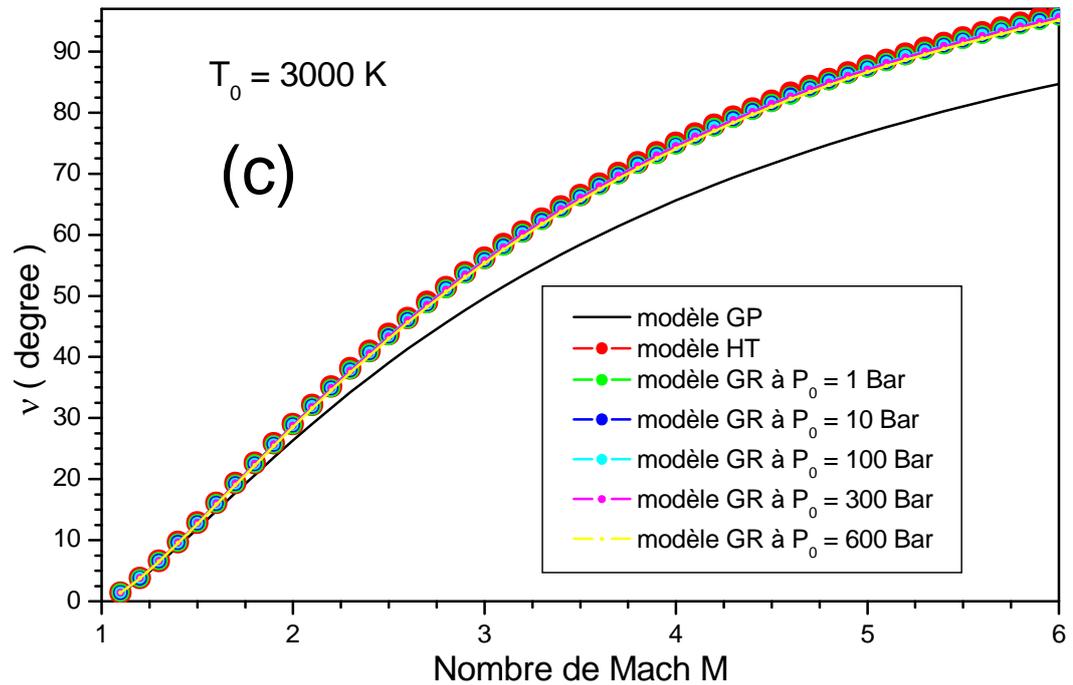
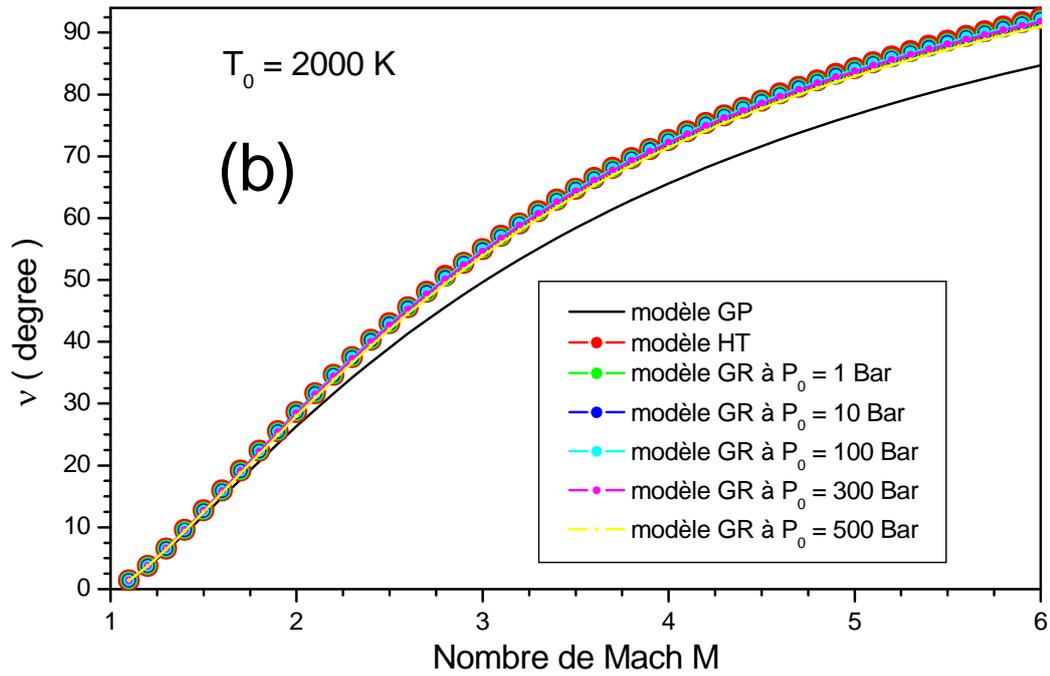


Figure 4.25 : Variation de la fonction de Prandtl Meyer en fonction de nombre de Mach pour quelques valeurs de la pression génératrice  $P_0$

Température génératrice: (a) :  $T_0=1000 \text{ K}$ ; (b) :  $T_0=2000 \text{ K}$  ; (c) :  $T_0=3000 \text{ K}$

La figure 4.26 représente la variation de la fonction de Prandtl Meyer  $\hat{\nu}$  donnée respectivement par les pressions génératrices  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $100 \text{ Bar}$ ,  $300 \text{ Bar}$  et  $500 \text{ Bar}$  lorsque le nombre de Mach  $M = 4.0$ , en fonction de la température génératrice  $T_0$ , pour les modèles *HT*, *GP* et *GR*.

On remarque que l'augmentation de la température génératrice  $T_0$  pour différents modèles entraîne une augmentation de la valeur de  $\hat{\nu}$ , cette augmentation devient considérable lorsque la valeur de  $T_0$  est élevée, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait, mais dans le cas basse température basse pression, le gaz peut être considéré comme caloriquement et thermiquement parfait et cela jusqu'à environ  $240 \text{ K}$ , on remarque aussi que les valeurs de  $\hat{\nu}$  obtenues par notre modèle *GR* sont toujours inférieures de ceux obtenus par le modèle *HT*, et que l'augmentation de la pression génératrice  $P_0$  entraîne une diminution de la valeur de  $\hat{\nu}$ , mais à haute température génératrice  $T_0$ , on remarque que les deux modèles *HT* et *GR* s'approchent, et s'éloignent à basse température génératrice  $T_0$ , cet éloignement d'autant important lorsque la pression génératrice  $P_0$  est élevée, d'où, la nécessité d'utiliser le modèle *GR* pour corriger les résultats, et pour montrer l'effet de la pression génératrice  $P_0$  sur la fonction de Prandtl Meyer.

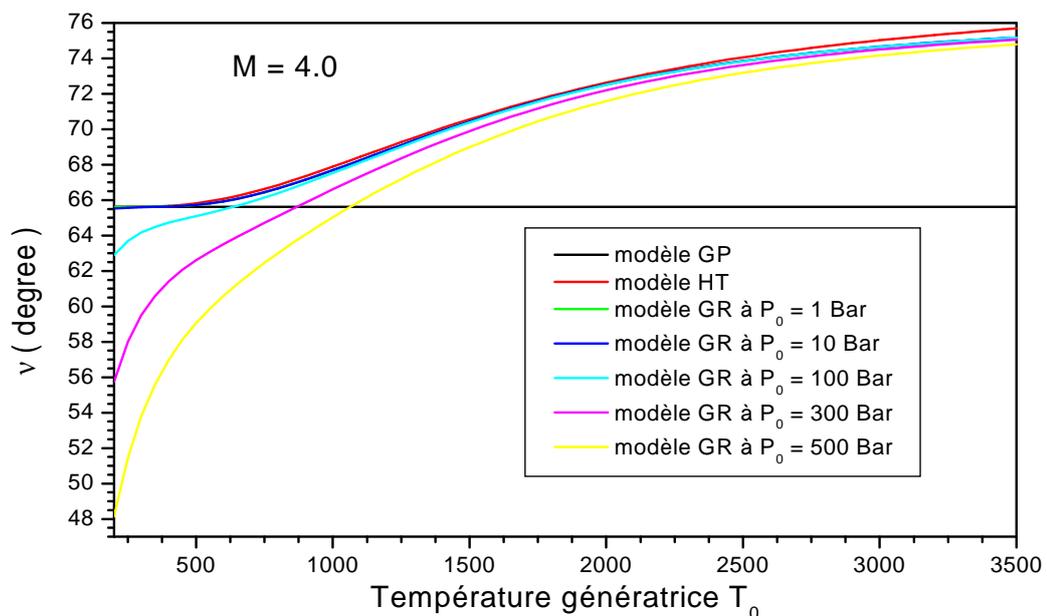


Figure 4.26 : Variation de la fonction de Prandtl Meyer en fonction de la température génératrice pour quelques valeurs de pression génératrice  $P_0$

#### 4.5.1. Résultats sur l'erreur du modèle des gaz parfaits pour la fonction de Prandtl Meyer

Les figures 4.27 (a, b, c) représentent la variation de l'erreur relative en pourcentage de la fonction de Prandtl Meyer données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{ K}$ , et  $3000\text{ K}$  et les pressions génératrices  $P_0= 1\text{ Bar}$ ,  $10\text{ Bar}$ ,  $100\text{ Bar}$ ,  $300\text{ Bar}$  et  $500\text{ Bar}$ , en fonction du nombre de Mach, du modèle GP comparé au modèle GR.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M$ , elle augmente si  $T_0$  augmentent, et diminue si  $P_0$  augmente, Par exemple si  $T_0=3000\text{ K}$  et  $M=4.00$ , l'utilisation du modèle GP va nous donner une erreur relative égale à  $=12.10\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 1\text{ Bar}$ ,  $=12.10\%$  pour une pression génératrice  $P_0= 10\text{ Bar}$ ,  $=12.09\%$  pour une pression génératrice  $P_0= 100\text{ Bar}$ ,  $=11.91\%$  pour une pression génératrice  $P_0= 300\text{ Bar}$ ,  $=11.41\%$  pour une pression génératrice  $P_0= 500\text{ Bar}$ , qui donne une différence de  $9.034^\circ$ ,  $9.039^\circ$ ,  $9.032^\circ$ ,  $8.876^\circ$ ,  $8.457^\circ$  entre les valeurs de  $\hat{\gamma}$  pour les deux modèles.

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieur à  $5\%$ , le modèle GP peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure au égale à  $1000\text{ K}$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle GP dans un intervalle de  $P_0M$  et  $T_0$  modéré.

On peut remarquer qu'à faible valeur de  $M$ , et  $T_0$ , l'erreur est faible. Sur ces figures, la figure 4.27.a se trouve au-dessous de l'erreur  $5\%$ . Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle GP jusqu'à  $T_0=1000\text{ K}$  pour les applications aéronautiques, surtout à haute pression génératrice  $P_0$ , si on accepte une erreur inférieur à  $5\%$ . Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle GP indépendamment à la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=2.00$  avec une erreur de  $8.80\%$  environ.

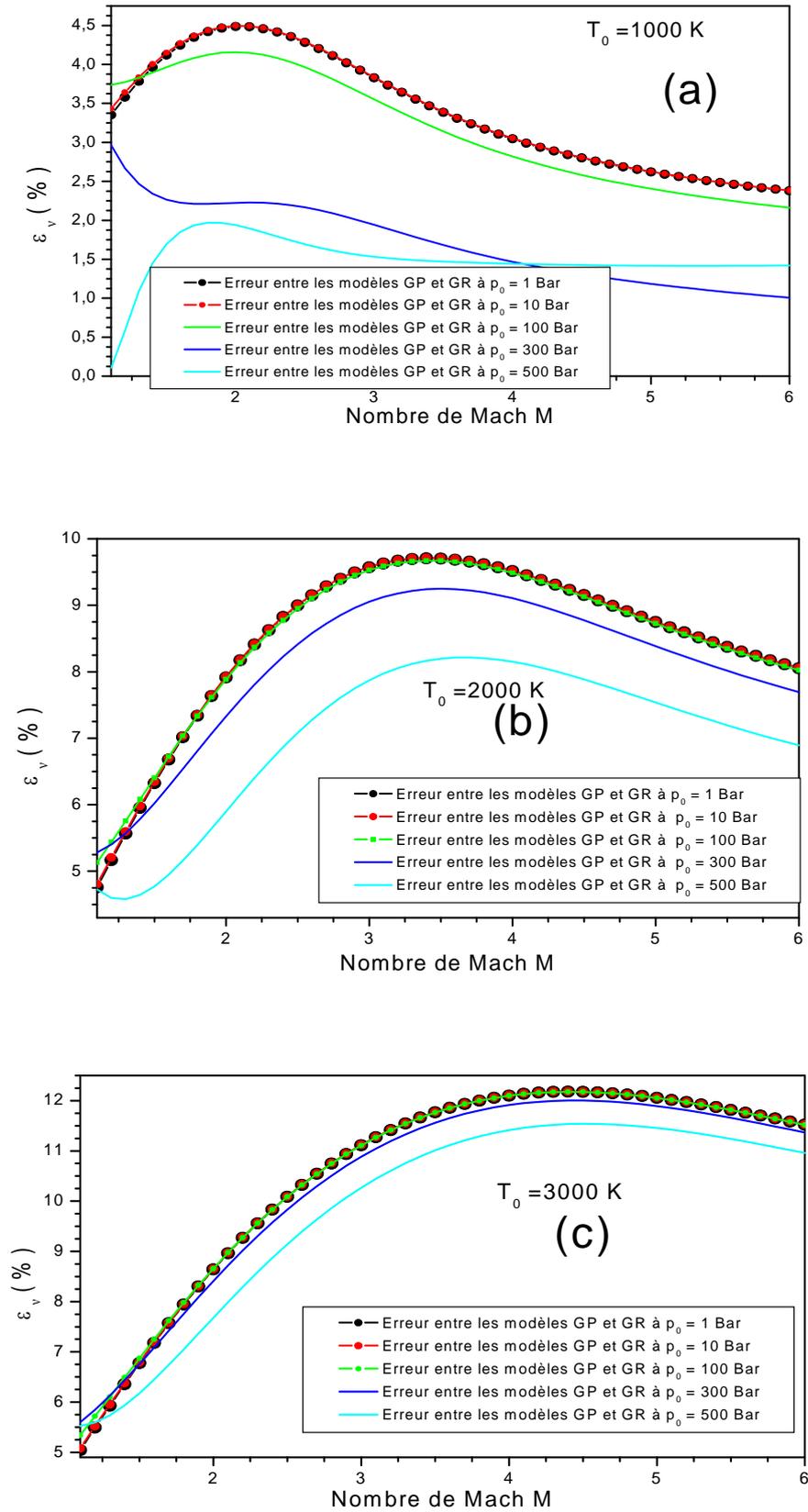


Figure 4.27 : Variation de l'erreur relative de la fonction de Prandtl Meyer entre les modèles GP et GR en fonction du nombre de Mach.

#### 4.5.2. Résultats sur l'erreur du modèle à haute température pour la fonction de Prandtl Meyer

Les figures 4.28(a, b, c) représentent la variation de l'erreur relative en pourcentage de la fonction de Prandtl Meyer données respectivement par les températures génératrices  $T_0=1000\text{K}$ ,  $2000\text{ K}$ , et  $3000\text{ K}$  et les pressions génératrices  $P_0= 1\text{ Bar}$ ,  $10\text{ Bar}$ ,  $100\text{ Bar}$ ,  $300\text{ Bar}$  et  $500\text{ Bar}$ , en fonction du nombre de Mach, du modèle HT comparé au modèle GR.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $P_0$ ,  $T_0$  et  $M$ , elle augmente si  $P_0$  augmentent, et diminue si  $T_0$  augmente, Par exemple si  $T_0=1000\text{ K}$  et  $M=2.00$ , l'utilisation du modèle *HT* va nous donner une erreur relative égale à  $\approx 0.012\%$  pour une pression génératrice  $P_0 = 1\text{ Bar}$ ,  $\approx 0.012\%$  pour une pression génératrice  $P_0= 10\text{ Bar}$ ,  $\approx 0.354\%$  pour une pression génératrice  $P_0= 100\text{ Bar}$ ,  $\approx 2.38\%$  pour une pression génératrice  $P_0= 300\text{ Bar}$ ,  $\approx 6.74\%$  pour une pression génératrice  $P_0= 500\text{ Bar}$ , qui donne une différence de  $0.003^\circ$ ,  $0.003^\circ$ ,  $0.097^\circ$ ,  $0.641^\circ$ ,  $1.741^\circ$  entre les valeurs des  $\hat{\gamma}$  pour les deux modèles.

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieur à  $5\%$ , le modèle *HT* peut être utilisé, si  $T_0$  soit supérieure à  $1000\text{ K}$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach. Si un auteur accepte une erreur supérieure à  $5\%$ , il peut utiliser le modèle *HT* dans des intervalles de  $P_0$ ,  $M$  et  $T_0$  bien modérées.

On peut remarquer qu'à faible valeur de  $P_0$ , l'erreur est faible. Sur ces figures, les figures 4.28.b et 4.28.c se trouve au-dessous de l'erreur  $5\%$ . Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle *HT* pour les applications aéronautiques, surtout à haute Température  $T_0$ , si on accepte une erreur inférieur à  $5\%$ . Mais à basse température  $T_0$ , l'erreur augmente au fur et à mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle *HT* indépendamment à la pression  $P_0$ .

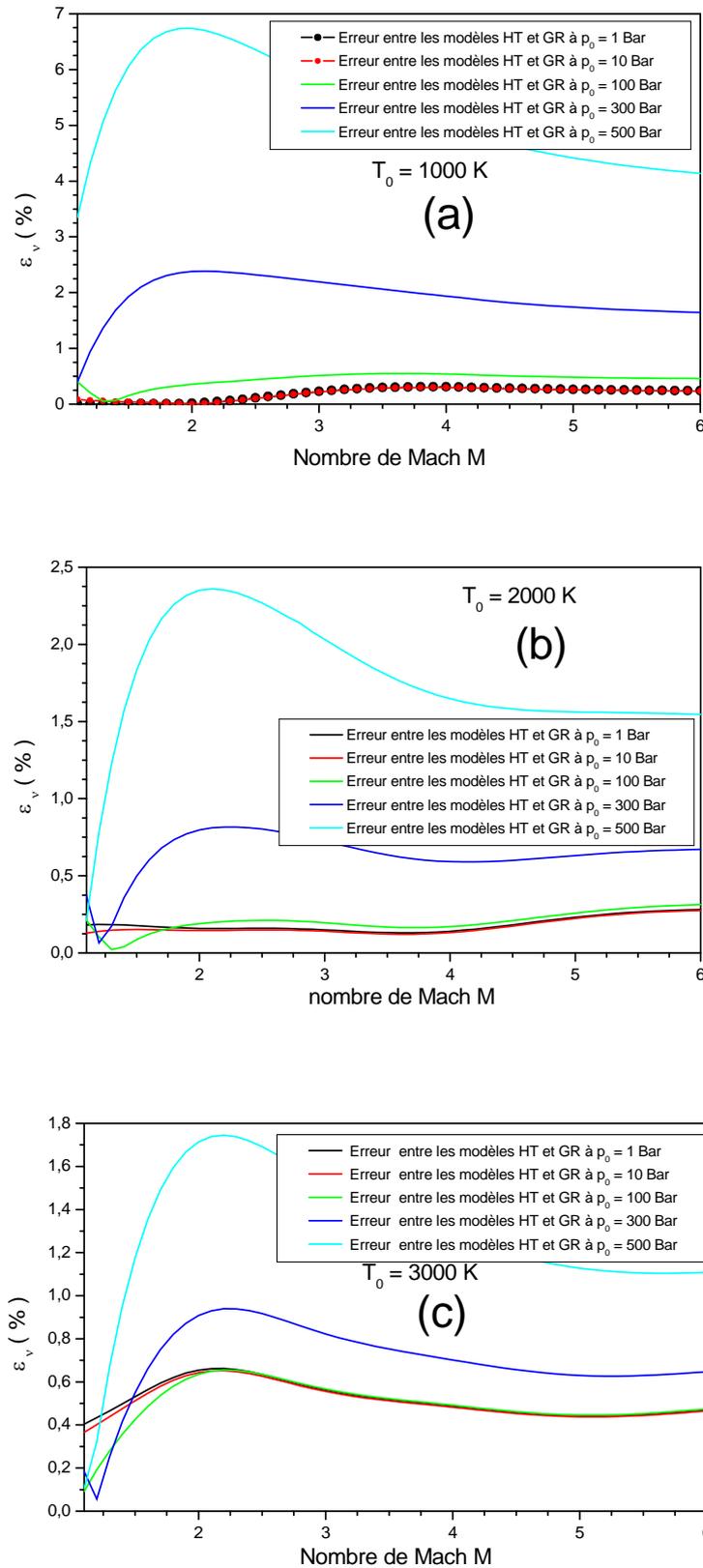


Figure 4.27 : Variation de l'erreur relative de la fonction de Prandtl Meyer entre les modèles HT et GR en fonction du nombre de Mach.

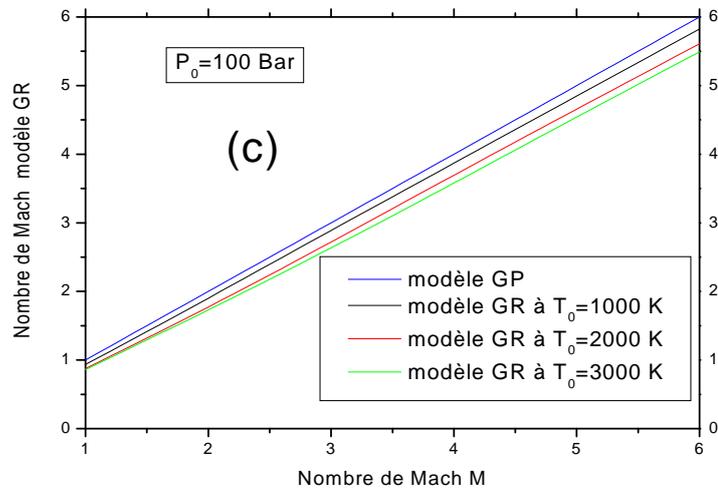
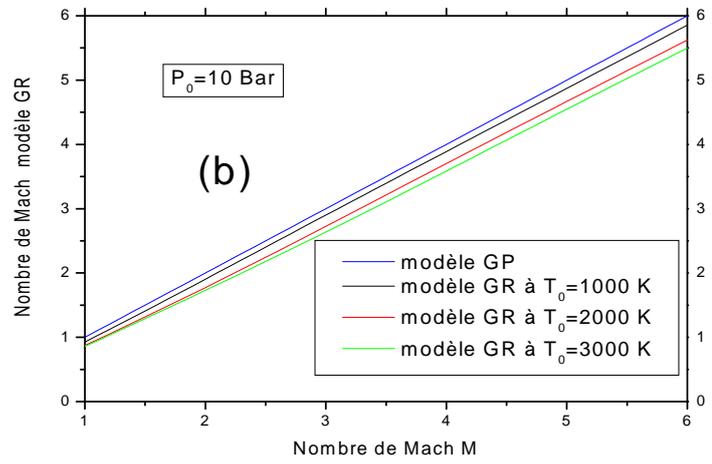
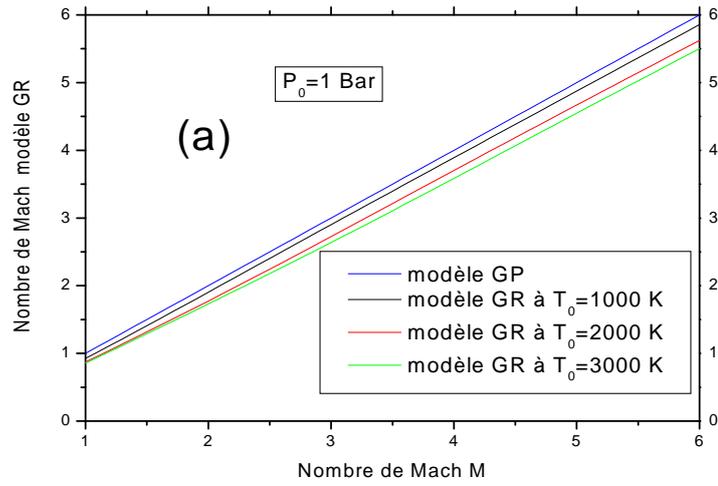
#### 4.6. Correction du Nombre de Mach

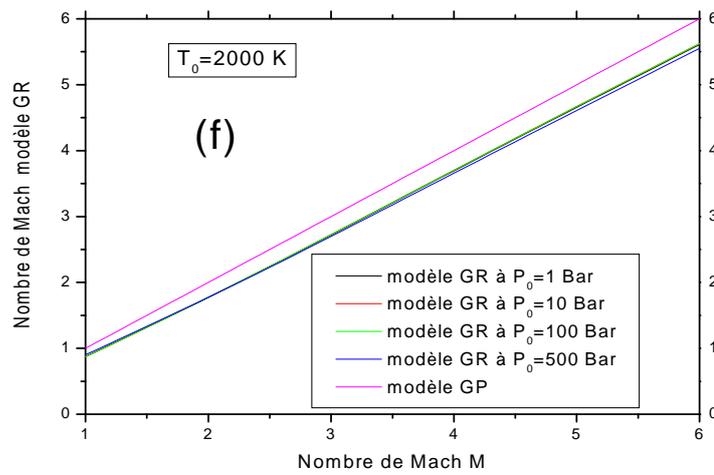
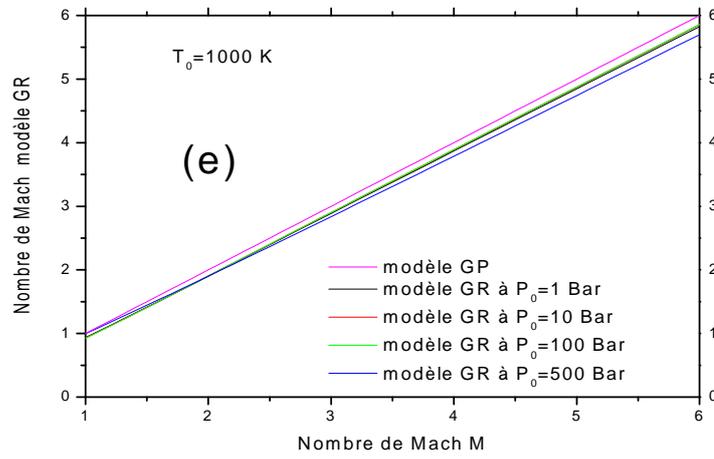
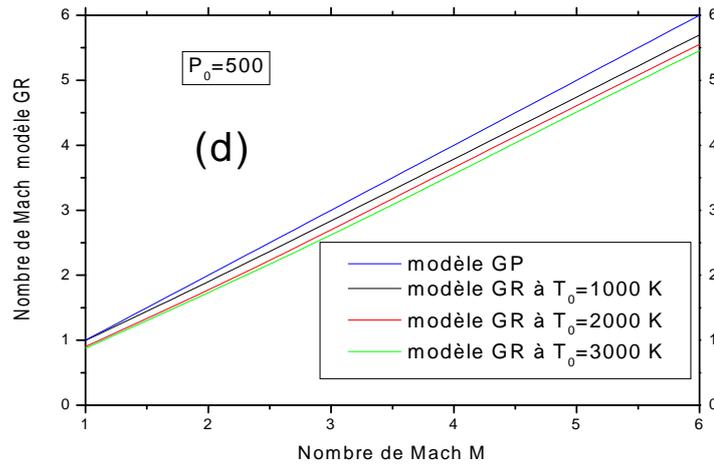
Les figures 4.28 (a, b, c, d, e, f, g) représentent respectivement la correction du nombre de Mach du modèle du gaz parfait GP par le nombre de Mach du modèle des gaz réels, données respectivement par les pressions génératrices  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ ,  $10 \text{ Bar}$ ,  $100 \text{ Bar}$  et  $500 \text{ Bar}$ , et les températures génératrices  $T_0 = 1000 \text{ K}$ ,  $2000 \text{ K}$ , et  $3000 \text{ K}$  en fonction du nombre de Mach de sortie, du modèle GP comparé au modèle GR.

On remarque clairement que la variation du nombre de Mach dépend de  $P_0$ ,  $T_0$ . Si  $T_0$  et  $P_0$  augmentent, le nombre de Mach du modèle des gaz réels diminue. Par exemple si  $T_0 = 2000 \text{ K}^\circ$  à une pression génératrice de  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ , lorsque le nombre de Mach délivré par le modèle GP est  $M_{GP} = 6.00$ , le nombre de Mach délivré par le modèle GR est de  $M_{GR} = 5.623$ . Pour la même température génératrice  $T_0 = 2000 \text{ K}^\circ$  mais à une pression de  $500 \text{ Bar}$ , le nombre de Mach délivré par le modèle GP est de  $M_{GP} = 6.00$ , le nombre de Mach délivré par le modèle GR est de  $M_{GR} = 5.551$ .

Maintenant si on fixe la pression génératrice à  $P_0 = 1 \text{ Bar}$ , si la température génératrice est de  $T_0 = 1000 \text{ K}^\circ$ , si le nombre de Mach délivré par le modèle GP est  $M_{GP} = 6.00$ , le nombre de Mach délivré par le modèle GR est de  $M_{GR} = 5.856$ . Pour ces mêmes valeurs de pression génératrice et  $M_{GP} = 6.00$  si  $T_0 = 1000 \text{ K}^\circ$ , le nombre de Mach délivré par le modèle GR est de  $M_{GR} = 5.500$ .

D'après ces résultats on tire que le nombre de Mach pour un gaz réel ne peut jamais atteindre le nombre de Mach du gaz parfait sous n'importe quelles conditions. La diminution du nombre de Mach en augmentant la pression et la température génératrices est tout à fait normale, parce que l'augmentation de ces paramètres engendre une croissance de la célérité du son qui est inversement proportionnelle au nombre du Mach.





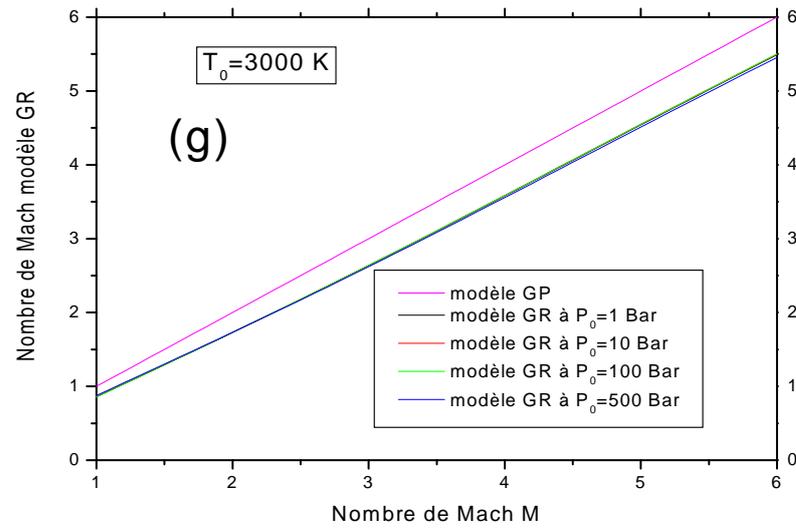


Figure 4.2 : Correction de nombre de Mach du modèle GP par rapport au modèle GR

Température génératrice: (a) :  $T_0 = 1000 \text{ K}$ ; (b) :  $T_0 = 2000 \text{ K}$ ; (c) :  $T_0 = 3000 \text{ K}$   
 (d) : basse pression ;(e): pression modérée  
 (f): haute pression ;(g): très haute pression

## CONCLUSION

A partir de cette étude, on peut citer les points suivants :

Si on accepte une erreur inférieure à 5 %, ce qui est le cas généralement pour les applications aérodynamiques, on peut étudier un écoulement supersonique en utilisant les relations d'un gaz parfait, si la température génératrice  $T_0$  est inférieure à 1000 K pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach, avec une pression génératrice faible ne dépasse pas 5 Bar.

Le modèle GP est représenté par des relations explicites et simples et ne demande pas un temps de calcul élevé, ce qui n'est pas le cas pour notre modèle GR, où il est présenté par la résolution d'une équation algébrique non linéaire, résolution d'un système d'équation algébrique non linéaire formé par trois équations, et dérivation et intégration des fonctions analytiques complexes nécessitent un temps de calcul élevé et programmation numérique.

Les variables principales pour notre modèle GR sont la température et la masse volumique, seulement la température pour le modèle HT, et le nombre de Mach pour le modèle GP à cause d'une équation implicite non linéaire reliant  $T$ ,  $\rho$ , et  $M$ .

On peut choisir d'autre substance au lieu de l'air. Les relations restent valables. Il faut juste déterminer les constantes de force intermoléculaire ( $a$ ) et de taille moléculaire ( $b$ ), ainsi que la température caractéristique de vibration ( $\theta$ ).

Le rapport des sections présenté peut être utilisé comme une source de comparaison pour la validation des résultats numériques du dimensionnement des diverses tuyères supersoniques donnant un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie par la méthode des caractéristiques et la fonction de Prandtl Meyer. Les rapports thermodynamiques peuvent être utilisés pour déterminer les

paramètres de conception des diverses formes de tuyères sous la base du modèle GR.

On peut obtenir les relations d'un gaz parfait à partir des relations du modèle GR en annulant toutes les constantes des forces intermoléculaire ( $\lambda$ ) et de taille moléculaire ( $b$ ), ainsi que la température caractéristique de vibration ( $\theta$ ). Dans ce cas, le modèle GP devient un cas particulier de notre modèle GR.

On peut, aussi obtenir les relations d'un gaz parfait à haute température HT à partir des relations du modèle GR en annulant toutes les constantes des forces intermoléculaire ( $c$ ) et de taille moléculaire ( $b$ ). Dans ce cas, le modèle HT devient un cas particulier de notre modèle GR.

A faibles pression, température et nombre de Mach, l'écart en résultats entre les trois modèles est petit, ce qui donne la possibilité d'étudier un écoulement GR en utilisant les relations GP. Par contre, lorsque  $T_0$  et  $P_0$  augmentent, la théorie GP commence à donner des résultats qui s'éloignent de fur et à mesure du cas réel, d'où la nécessité d'utilisation du modèle GR.

Notre modèle GR est valable pour n'importe quel domaine, surtout dans le domaine haute pression et basse température ou bien pour une pression très élevé soit supérieure à 100 bar et pour n'importe quelle valeur de la température, dans ces cas on trouve que l'écart en résultats entre notre modèle GR et les autres modèles HT et GP est grand, d'où la nécessité d'utilisation le modèle GR.

La pression génératrice à une grande influence sur la fonction de Prandtl Meyer, surtout lorsqu'elle augmente vers le régime très haute pression où la fonction de Prandtl Meyer diminue considérablement.

La fonction de Prandtl Meyer présentée pour le modèle GR peut être utilisé comme étant une source de comparaison pour la validation des résultats numériques du dimensionnement des diverses tuyères supersoniques donnant un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie par la méthode des caractéristiques.

**APPENDICE A**  
**LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS**

$A$	: Aire d'une section
$C_f$	: Coefficient de poussée
$C_p$	: Chaleur spécifique à pression constante
$C_T$	: Chaleur spécifique à température constante
$C_v$	: Chaleur spécifique à volume constante
$F$	: La force de poussée
$H$	: Enthalpie
$J$	: La matrice Jacobienne
$M$	: Nombre de Mach
$N$	: Nombre d'itération
$V$	: Vitesse de l'écoulement
$P$	: Pression
$T$	: Température
$R$	: Constante thermodynamique de l'air
$\bar{R}$	: Vecteur résidu
$S$	: Entropie
$V$	: Vitesse de l'écoulement
$Z$	: Facteur de compressibilité
$a$	: La célérité du son
$b$	: Le covolume de Berthelot
$\hat{a}$	: La force d'attraction intermoléculaire de Berthelot
$\bar{k}$	: Vecteur des corrections relatives
$l$	: Terme de Clapeyron
$m$	: Masse molaire de l'air
$\dot{m}$	: Débit massique critique

- $n$  : Nombre de mole  
 $u$  : Energie interne  
 $v$  : Volume occupé par l'air  
 $r$  : L'angle que fait le vecteur de vitesse avec la normale à la section  $A$   
 $x$  : Rapport des chaleurs spécifiques  
 $v$  : Tolérance de calcul  
... : La masse volumique  
 $\mu$  : Température caractéristique vibrationnelle  
 $\hat{\phantom{x}}$  : Fonction de Prandtl Meyer

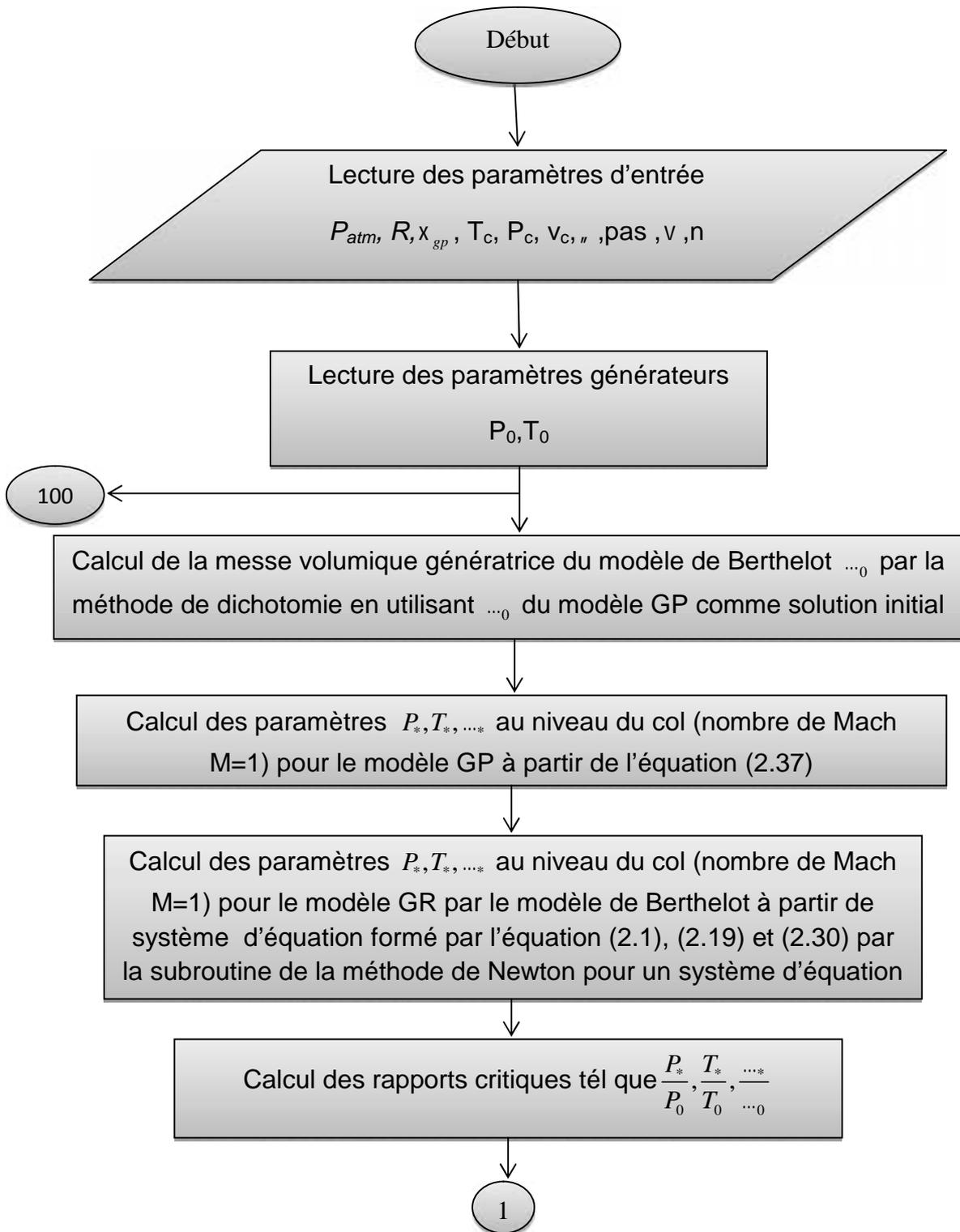
### Abréviations

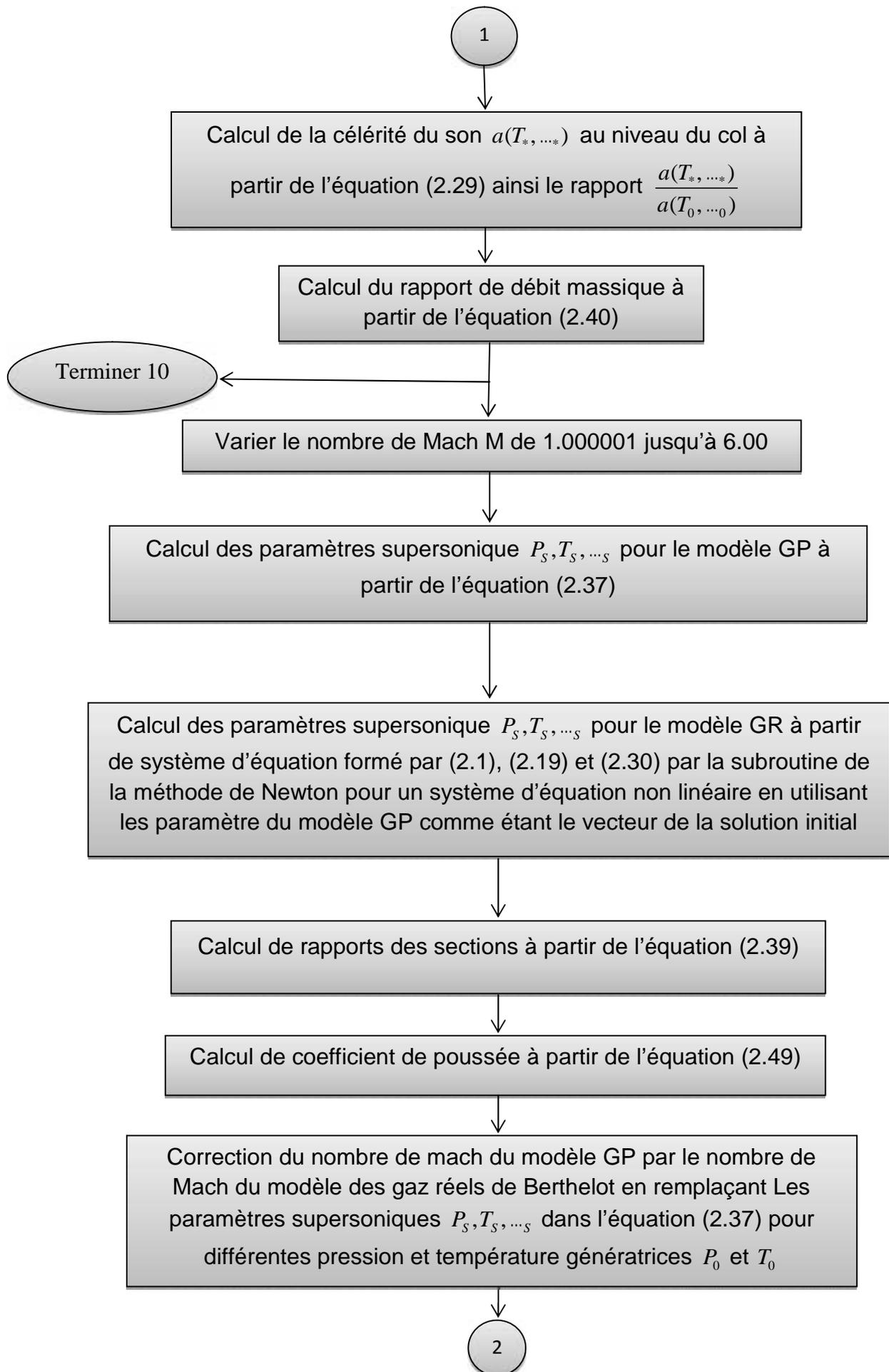
- GP : Gaz parfait  
GR : Gaz réel  
HT : Haute température

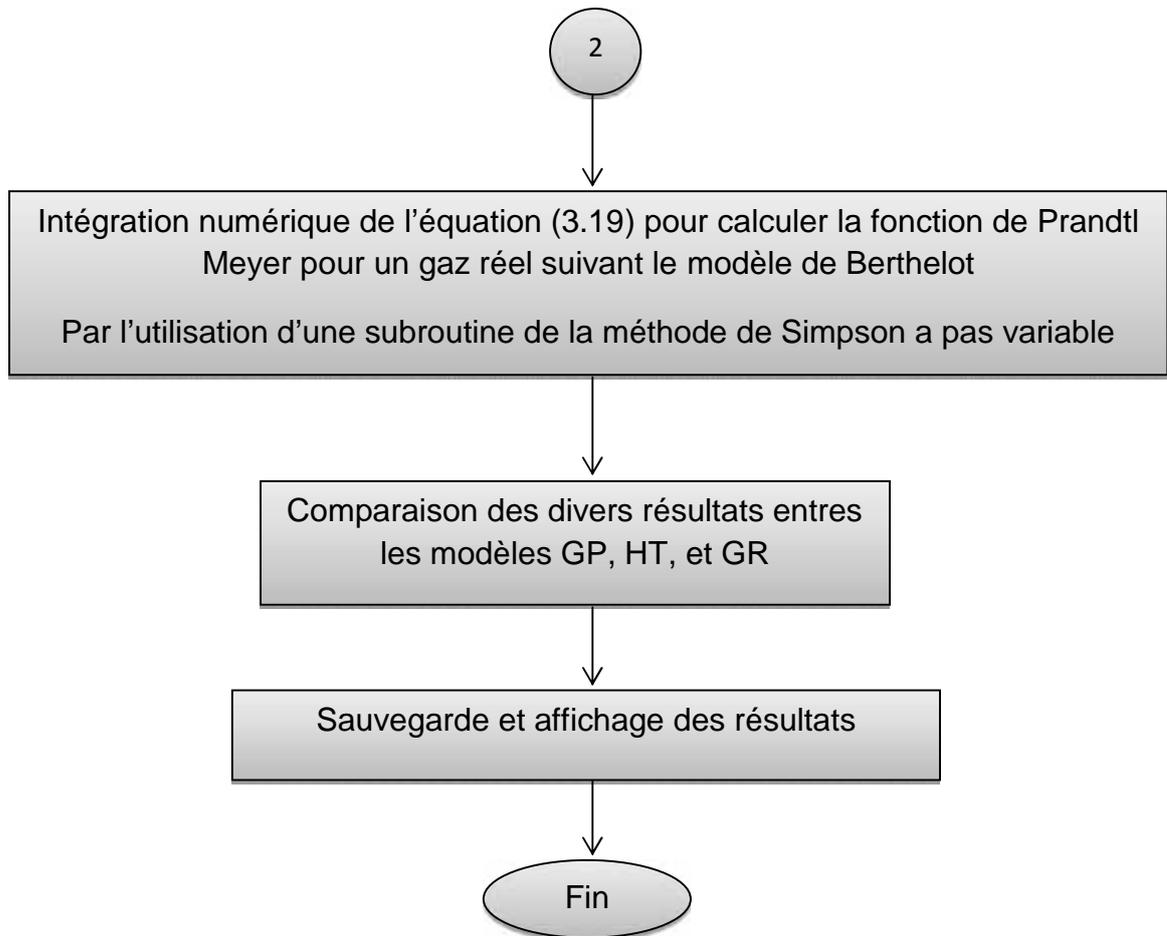
### Indices

- 0 : Condition d'arrêt (Etat générateur) (chambre de combustion)  
\* : Condition au niveau du col  
c : Condition critique  
s : Condition à la sortie

## APPENDICE B ORGANIGRAMME







## APPENDICE C

### CREATION DU LOGICIEL PGR

Dans le but de bien étaler nos résultats trouvés, le logiciel PGR (Propriétés des Gaz Réels) est développé par le langage Borland Delphi 7 qui est un bon outil de visualisation. PGR est un logiciel créé pour déterminer les propriétés de l'air considéré comme un gaz réel suivant le modèle de Berthelot qui exige des corrections sur l'équation d'état des gaz parfaits en terme de volume et de force d'attraction intermoléculaire, sous l'hypothèse d'une détente isentropique et adiabatique, pour une température qui ne dépasse pas la température d'équilibre vibrationnelle. Ce logiciel demande deux paramètres principaux comme étant des paramètres d'entrées, ce sont la pression génératrice et la température génératrice.

Plusieurs résultats seront trouvés sous forme des graphes soit en fonction de température génératrice, c'est le cas de rapports des pressions critiques  $\frac{P_*}{P_0}$ , rapports des températures critiques  $\frac{T_*}{T_0}$ , rapports des masses volumiques critiques  $\frac{\rho_*}{\rho_0}$ , rapports des célérités du son critiques  $\frac{a_*}{a_0}$ , rapports des débits massiques critiques  $\frac{\dot{m}}{A_* \rho_* a_*}$ , la chaleur spécifique à pression constante  $C_p(T, \dots)$ , et le rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma(T, \dots)$ , soit en fonction de nombre de Mach  $M$  dans un écoulement supersonique  $M \in [1.00, 6.00]$ , c'est le cas de rapports des pressions  $\frac{P}{P_0}$ , rapports températures  $\frac{T}{T_0}$ , rapports des masses volumiques  $\frac{\rho}{\rho_0}$ , rapports des célérités du son  $\frac{a}{a_0}$ , rapports des sections  $\frac{A}{A_*}$ , le coefficient de poussée  $C_f$  et la

fonction de Prandtl Meyer  $\hat{T}(\dots)$ , suivant nos besoins. Les figures suivantes illustrent l'interface du logiciel GPR.

The screenshot shows a software window titled "Form1". It contains a section for "Paramètres génératrices:" with three input fields and their units: "Pression génératrice:" (101325 Pascal), "Température génératrice:" (1000 °K), and "Pression atmosphérique:" (101325 Pascal). Below these is a "Calcul" button. A "GroupBox2" contains the number "853".

Paramètre	Valeur	Unité
Pression génératrice	101325	Pascal
Température génératrice	1000	°K
Pression atmosphérique	101325	Pascal

Calcul

GroupBox2

853

Figure 1 : paramètres d'entrée pour PGR



Figure 2 : rapport des pressions critiques en fonction de température génératrice tracé par PGR

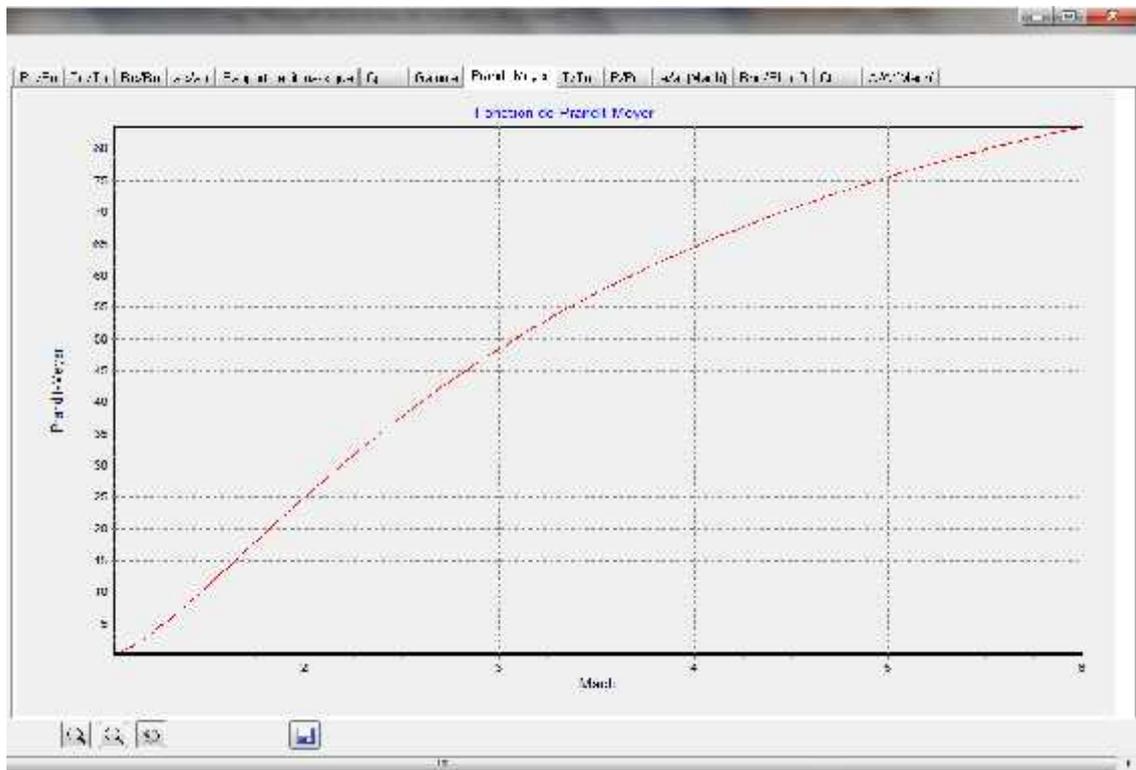


Figure 3 : La fonction de Prandtl Meyer en fonction de nombre de Mach tracé par PGR

## REFERENCES

1. Belkadi, A., "Modélisation de la matière avec l'équation pour la prédiction des propriétés thermodynamiques des fluides complexes à travers simulisthermodynamics", Doctorat de l'Université de Toulouse, France, 30 Septembre 2008.
2. Richard, N., "Theory of rockets motors", Journal of aeronautics, 2008.
3. Brian, R.Hollis., "Real gas flow properties for NASA Langley research center aerothermodynamic facilities complex wind tunnels", NASA contractor report 4755, North Carolina state university, Septembre 1996.
4. Plackov, D., Mainwaring, D. E., and Sadus, R.J., "Prediction of One-Component Vapor-Liquid Equilibria From the Triple Point to the Critical Point Using a Simplified Perturbed Hard-Chain Theory Equation of State". Fluid Phase Equilib,(1995), 109, 171-182.
5. Anderson, J.D. Jr., "Fundamentals of aerodynamics", second edition 1998, McGraw-Hill Book, Company, New York, USA.
6. Anderson, J.D., "Modern Compressible Flow With Historical Perspective", Second edition, 1992, McGraw-Hill Book, Company, New York, USA.
7. Rhyning, I.L., "Dynamique des fluides", Press polytechnique Romandes, 1984 Lauanne, Suisse.
8. Shapiro, A.H., "The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow", vol. 1, John Wiley and Sons. Inc 1953.
9. Demidovitch, B., et I. Maron., "Eléments de calcul numérique", 1987, Edition MIR, Moscou, Russia.

10. Zebbiche, T., and Youbi, Z., "Effect of Stagnation Temperature on Supersonic Flow Parameters. Application for Air in Nozzles", The Aeronautical Journal, Vol. 111, N° 1115, Jan. 2007, PP. 31-40.
11. Comolet, R., "Mécanique Expérimentale des Fluides. Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux", Tome 1, 3<sup>ème</sup> Edition, Masson, 1979.
12. Peterson, C. R., and Hill, P. G., "Mechanics and Thermodynamics of Propulsion", Addison-Wesley Publishing Company Inc. New York. 1965.
13. Zebbiche, T., and Youbi, Z., "Supersonic Flow Parameters at High Temperature. Application for Air in Nozzles," DGLR 2005-256, German Aerospace Congress 2005, 26-29 Sep. 2005, Friedrichshafen, Germany.
14. Zebbiche, T., Salhi, M., and Boun-jad, M., "Numerical computational of supersonic flow around a pointed airfoil," Journal of computational methods in sciences and engineering 12 (2012) papers 213-233.
15. Oosthuisen, P. H., and Carscallen, W. E., "Compressible Fluid Flow," McGraw-Hill, New York, 1997.
16. Fletcher, C. A. J., "Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories," Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
17. CRC., "handbook of chemistry and physics", 75<sup>th</sup> A ready reference book of chemical and physical data, Oxford University 1995.
18. PICARD, Ch., "THERMOCHIMIE", 2<sup>ème</sup> Edition, Bruxelles, Belgium 1996.
19. Nag, P. K., "Engineering Thermodynamics," 4<sup>th</sup> Edition, McGraw-Hill, New Delhi, INDIA, 2008.
20. Singh, O., "Applied Thermodynamics," new age international limited publishers, New Delhi, India.

21. Annamalai, K., Ishwar, K. P., And Milind, A. J Advanced., "Thermodynamics engineering", 2<sup>nd</sup> edition, CRC press, Taylor and Francis Group, USA, 2011.
22. Zebbiche, T., "Stagnation Temperature effect on the Prandtl Meyer Function," AIAA Journal, Vol. 45, N° 4, PP. 952-954, April 2007.
23. Zebbiche, T., "New Generalized Form of the Prandtl Meyer Function. Application for Air at High Temperature", AIAA 2006-3674, 25th Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, California, 5-8 Jun 2006.
24. Zebbiche, T., et Youbi, Z., "Fonction de Prandtl Meyer A Haute Température," Conférence Internationale de la Mécanique Avancée, CIMA'04, Boumerdès (Algérie), 30 Nov., 02 Déc. 2004.
25. Zebbiche, T., "Conception et Dimensionnement des tuyères supersoniques de Propulsion," Thèse de Doctorat, Département d'Aéronautique, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université SAAD Dahleb de Blida, 2006, Algeria.
26. Bertin, J. J., and Michael, L. S., "Aerodynamics of engineers", Second edition Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1984.
27. Moran, J., "Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics", John Wiley & Sons, 1984.
28. Reese, I., "Notes on the Theoretical characteristics of Two-Dimensional Supersonic Airfoils," "NASA TN-1179, 1947.
29. Ferri, A., "Elements of Aerodynamics of Supersonic Flow," Phoenix ed., Dover Publication, 2005.
30. Ashley, H., and Landahl, M., "Aerodynamics of Wing and Bodies," 2<sup>nd</sup> Edition, Dover Publication, 1985.
31. Comolet, R., "Mécanique Expérimentale des Fluides, Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux," Tome 1, 3<sup>ième</sup> Edition, Masson, 1979.

32. Abbott, I. H., and VonDoenhoff, A. E., "Theory of wing sections including summary of airfoil" Dover Publication, Inc., New York, 1959
33. Barnes, W., and Cormick, M., "Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics", John Wiley & Sons, 1995.
34. Sébastien, THOMAS., "Modélisation numérique de comportement thermoaerodynamique des garnitures d'étanchéité pour gaz réels hautes pressions", Doct oral de l'université de Poitiers, 21 juin 2006.
35. André, Fortin., "Analyse numérique pour ingénieurs", édition de l'école polytechnique de Montréal, 1992.
36. Anderson, J.D., "Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics". McGraw-Hill, 1989.
37. André, P., "Etude de la composition et des propriétés thermodynamiques des plasmas thermiques à l'équilibre et hors équilibre thermodynamique", Thèse Doctorat de l'Université Blaise Pascal, le 19-12-2005.