

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département d'Aéronautique

MEMOIRE DE MAGISTER

en Aéronautique

Spécialité : Aéronautique

**ETUDE D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE
DANS UNE TUYERE : APPLICATION POUR LE DIMENSIONNEMENT D'UNE
TUYERE A CORPS CENTRAL TYPE A BOUCHON "PLUG NOZZLE"**

Par

Ahmed ABDALLAH EL-HIRTSI

devant le jury composé de :

S. BOUKRAA	Professeur, U. de Blida	Président
L. AMTOUT	Chargé de Cours, U. de Blida	Examineur
R. HAOUI	Maître de Conférences, U.S.T.H.B., Alger	Examineur
Z. YOUNI	Professeur, U. de Blida	Rapporteur
T. ZEBBICHE	Chargé de Cours, U. de Blida	Co-Rapporteur
B. BENAOUA-ZOUAOUI	Maître de Conférences, U. de Blida	Invité
T. REZZOUG	Maître de Conférences, U. de Blida	Invité

Blida, Juin 2004

RESUMÉ

Lorsque la température génératrice T_0 d'un gaz parfait augmente, les chaleurs spécifiques C_p et C_v ainsi que leur rapport γ ne restent plus constants et commencent à varier avec la température génératrice T_0 de la chambre de combustion. Le gaz reste parfait, c'est-à-dire, son équation d'état reste toujours valable, sauf, il sera nommé, en plus, gaz calorifiquement imparfait.

Le but de ce travail est de développer, dans ce contexte, les relations thermodynamiques et géométriques nécessaires et d'étudier l'écoulement supersonique isentropique à haute température, inférieur au seuil de dissociation. Une comparaison sera faite avec le cas d'un gaz calorifiquement parfait.

Notre étude est faite en trois parties principales pour un écoulement supersonique à Haute Température:

- Ecoulement supersonique unidirectionnel à haute température ;
- Equation de Prandtl-Meyer à haute température ;
- Ecoulement supersonique à haute température dans une tuyère à corps central.

L'application sera faite pour l'étude d'un écoulement d'air dans une tuyère supersonique. Les résultats seront présentés sous formes de graphes (figures) et de valeurs numériques (tableaux) obtenus par l'exécution du programme réalisé.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

- *La mémoire de mon père*
- *Ma mère*
- *Ma femme et mon fils*
- *Mes frères et sœurs.*

Ahmed

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur S. BOUKRAA, Professeur au département d'Aéronautique de l'Université de Blida, de m'avoir fait part de ses remarques concernant mon travail et d'avoir accepté de présider le Jury.

Je remercie Monsieur Z. YOUBI, Professeur, et Monsieur T. ZEBBICHE, Chargé des Cours au département d'Aéronautique de l'Université de Blida, qui ont assumé consciencieusement la lourde tâche de rapporteurs.

Je remercie Monsieur T. REZOUG, Maître de conférences au département d'Aéronautique de l'Université de Blida, qui m'a activement soutenu et encouragé pendant la réalisation de ce travail.

Je remercie Monsieur B. BENAOUA-ZOUAOUI, Maître de conférences au département d'Aéronautique de l'Université de Blida, pour ses conseils et perspectives concernant mon travail.

Je remercie Monsieur L. AMTOUT, Chargé des Cours au département d'Aéronautique de l'Université de Blida, de l'intérêt qu'il a porté à mon travail en acceptant de faire partie du Jury.

Je remercie Monsieur R. HAOUI, Maître de conférences à l'Université Houari Boumediene de Bab-Ezouar (Alger), pour ses conseils et perspectives concernant mon travail.

Je tiens aussi à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur S. BERGHEUL, Directeur du département d'Aéronautique de l'Université de Blida, qui m'a soutenu pour la préparation et l'avancement de ce travail

Je remercie enfin tout le personnel du département d'aéronautique de l'université de Blida, Enseignants, techniciens supérieurs, ingénieurs, secrétaires et travailleurs, ainsi que tous mes amis, pour l'aide amical qu'ils m'ont apporté à des titres divers.

TABLE DES MATIERES

RESUME	2
REMERCIEMENTS	3
TABLE DES MATIERES	4
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	8
INTRODUCTION	12
1. GENERALITES SUR LES TUYERES SUPERSONIQUES	16
1.1 Principaux paramètres de performances	17
1.1.1 La poussée	17
1.1.2 Coefficient de poussée	17
1.1.3 Coefficient de décharge	18
1.1.4 Vitesse caractéristique	18
1.1.5 Vitesse effective	18
1.1.6 Impulsion spécifique	18
1.1.7 Impulsion totale	19
1.2 Différentes configurations de tuyères supersoniques	19
1.2.1 Tuyère conique	19
1.2.2 Tuyère profilée	20
1.2.3 Tuyère annulaire	21
1.2.4 Tuyère à corps central	22
1.3 Approches numériques de résolution des équations générales de conservation	23
1.3.1 Approche par différences finies	25
1.3.2 Approche par éléments finis	28
1.3.3 Approche par volumes finis	30
1.3.4 Propriétés des équations de type hyperboliques	31
2. RELATIONS THERMODYNAMIQUES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE	32
2.1. Formulation du problème	33
2.1.1. Equation adiabatique	33
2.1.2. Equation de la vitesse du son	34
2.1.3. Relation entre la vitesse et la température	35
2.1.4. Relation entre le nombre de Mach et la température	36
2.1.5. Relation entre la masse volumique et la température	37
2.1.6. Relation entre la pression et la température	38
2.1.7. Relation entre la section et la température	39
2.1.8. Débit massique critique	40
2.1.9. Relations thermodynamiques pour un gaz parfait	41

2.2.	Procédure de calcul	42
2.2.1.	Polynômes d'interpolation de $C_p(T)$ et $\gamma(T)$	42
2.2.2.	Intégration de la chaleur spécifique $C_p(T)$	44
2.2.3.	Calcul numérique des rapports thermodynamiques	45
2.3	Détermination des paramètres critiques au col correspondant à T_0	48
2.3.1	Rapport critique des températures $\frac{T^*}{T_0}$	48
2.3.2	Rapport critique des masses volumiques $\frac{\rho^*}{\rho_0}$	49
2.3.3	Rapport critique des pressions $\frac{P^*}{P_0}$	49
2.3.4	Rapport critique des vitesses du son $\frac{a^*}{a_0}$	50
2.3.5	Débit massique critique	50
2.4	Détermination des paramètres à une section quelconque du divergent	50
2.4.1	Rapport des températures $\frac{T_S}{T_0}$	50
2.4.2	Rapport des masses volumiques $\frac{\rho_S}{\rho_0}$	51
2.4.3	Rapport des pressions $\frac{P_S}{P_0}$	51
2.4.4	Rapport des vitesses du son $\frac{a_S}{a_0}$	52
2.4.5	Rapport des sections $\frac{A_S}{A^*}$	52
3.	FONCTION DE PRANDTL MEYER A HAUTE TEMPERATURE	53
3.1	Formulation mathématique	53
3.2	Procédure de calcul	54
3.2.1	Calcul de la température critique T^*	57
3.2.2	Calcul de la température T_s à un nombre de Mach M_s	57
3.2.3	Calcul de la valeur de v_s correspondant à un nombre de Mach M_s	57
3.2.4	Problème inverse	57
3.3.	Applications	58
3.3.1.	Détente supersonique autour d'un dièdre	58
3.3.2.	Centre de détente au col d'une tuyère supersonique	59

4. DIMENSIONNEMENT D'UNE TUYERE A CORPS CENTRAL A HAUTE TEMPERATURE	61
4.1. Introduction	61
4.2. Hypothèses fondamentales	65
4.3. Présentation de la méthode	66
4.1.1. Discrétisation	69
4.1.2. Procédure de calcul	74
4.1.3. Paramètres thermodynamiques	79
4.4. Longueur et masse de la tuyère	82
4.5. Force de pression exercée sur le corps central	85
4.6. Masse du gaz dans le divergent	87
5. RESULTATS ET COMMENTAIRES	89
5.1. Introduction	89
5.2. Résultats de l'écoulement supersonique à Haute Température	90
5.3. Résultats de la fonction de Prandtl-Meyer à Haute Température	102
5.4. Résultats de la tuyère à corps central à Haute Température	105
5.4.1. Effet de la discrétisation sur la convergence du problème	105
5.4.2. Variation du nombre de Mach de sortie M_S pour T_0 fixe	107
5.4.3. Variation de la température génératrice T_0 pour M_S fixe	122
5.5. Variation des paramètres le long de la paroi de la tuyère pour M_S fixe	128
5.5.1. Variation du rapport des pressions $\frac{P}{P_0}$	128
5.5.2. Variation du rapport des températures $\frac{T}{T_0}$	129
5.5.3. Variation du rapport des masses volumiques $\frac{\rho}{\rho_0}$	130
5.5.4. Variation du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère	132
5.5.5. Variation de l'inclinaison de la paroi du corps central	133
5.6. Variation des paramètres du dimensionnement	134
5.6.1. Variation de la longueur du corps central en fonction du nombre de Mach M_S	134
5.6.2. Variation de la masse de la structure du corps central en fonction de M_S	135
5.6.3. Variation de l'angle d'inclinaison Ψ de la carène en fonction de M_S	135
5.6.4. Variation de l'angle de déviation θ^* au col en fonction de M_S	136
5.6.5. Variation de la force de pression en fonction de M_S	137
5.6.6. Variation de la masse du gaz du divergent en fonction de M_S	138
CONCLUSION	144
APPENDICE	146
A. Liste des symboles	146
REFERENCES	148

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure (1.1) : Tuyère conique	20
Figure (1.2) : Tuyère profilée ou contour	20
Figure (1.3) : Tuyère annulaire	22
Figure (1.4) : Tuyère type à bouchon	23
Figure (1.5) : Tuyère type « détente-déviatiion »	23
Figure (1.6) : Domaine de calcul discrétisé	24
Figure (1.7) : Maillage rectangulaire	25
Figure (1.8) : Discrétisation par éléments finis triangulaires	28
Figure (1.9) : Représentation typique d'un volume fini	31
Figure (2.1) : Variation de la fonction $F_p(T)$ dans $[T_S, T_0]$	47
Figure (2.2) : Variation de la fonction $F_A(T)$ dans $[T_S, T^*]$	47
Figure (2.3) : Présentation de la condensation des nœuds	47
Figure (3.1) : Variation de la fonction $F_v(T)$ dans $[T_S, T^*]$	55
Figure (3.2) : Condensation des nœuds vers les deux extrémités	56
Figure (3.3) : Présentation d'un écoulement autour d'un dièdre	59
Figure (3.4) : Centre de détente d'une tuyère supersonique	60
Figure (4.1) : Etat de l'écoulement au col et à la sortie de la tuyère	64
Figure (4.2) : Aperçue sur la géométrie de la tuyère à corps central	64
Figure (4.3) : Présentation de l'angle de déviation Ψ de « Lip »	65
Figure (4.4) : Présentation des angles de Mach du col et de la section de sortie	67
Figure (4.5) : Naissance des ondes de détente divergentes du point A du « Lip »	67
Figure (4.6) : Présentation des propriétés d'une ligne de Mach intermédiaire	68
Figure (4.7) : Discrétisation de la zone de détente	70
Figure (4.8) : Présentation de deux lignes de Mach adjacentes	71
Figure (4.9) : Calcul sur un triangle	71
Figure (4.10) : Relation entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires	73

Figure (4.11) : L'arc de la partie inférieure du corps central	84
Figure (4.12) : Segment (i) du corps central	84
Figure (4.13) : Force vde pression exercée sur le panneau (i)	85
Figure (4.14) : Force de pression exercée perpendiculairement sur le panneau (i)	86
Figure (5.1) : Variation de la chaleur spécifique $C_p(T)$ pour l'air	90
Figure (5.2) : Variation du rapport $\gamma(T)$ pour l'air	91
Figure (5.3) : Variation du rapport $\frac{T_*}{T_0}$ en fonction de T_0	91
Figure (5.4) : Variation du rapport $\frac{P_*}{P_0}$ en fonction de T_0	91
Figure (5.5) : Variation du rapport $\frac{\rho_*}{\rho_0}$ en fonction de T_0	92
Figure (5.6) : Variation du débit massique en fonction de T_0	92
Figure (5.7) : Variation du rapport $\frac{a_*}{a_0}$ en fonction de T_0	92
Figure (5.8) : Variation du rapport $\frac{T}{T_0}$ en fonction de M	94
Figure (5.9) : Variation du rapport $\frac{\rho}{\rho_0}$ en fonction de M	95
Figure (5.10) : Variation du rapport $\frac{P}{P_0}$ en fonction de M	95
Figure (5.11) : Variation du rapport $\frac{A}{A_*}$ en fonction de M	95
Figure (5.12) : Variation du rapport $\frac{a}{a_0}$ en fonction de M	96
Figure (5.13) : Relation adiabatique isentropique à Haute Température	96
Figure (5.14) : Variation de la fonction de Prandtl-Meyer $v(M)$ à Haute Température	103
Figure (5.15) : Variation de la fonction de Prandtl-Meyer v en fonction de T_0 pour $M=3$	103
Figure (5.16) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 500$ °K	108
Figure (5.17) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 1000$ °K	110
Figure (5.18) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 1500$ °K	112
Figure (5.19) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 2000$ °K	114
Figure (5.20) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 2500$ °K	116

Figure (5.21) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 3000$ °K	118
Figure (5.22) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 3500$ °K	120
Figure (5.23) : Forme du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 1.50$	122
Figure (5.24) : Forme du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 2.00$	123
Figure (5.25) : Forme du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 2.50$	124
Figure (5.26) : Forme du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 3.00$	125
Figure (5.27) : Forme du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 3.50$	125
Figure (5.28) : Forme du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 4.00$	126
Figure (5.29) : Forme du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 4.50$	127
Figure (5.30) : Forme du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 5.00$	127
Figure (5.31) : Variation du rapport $\frac{P}{P_0}$ le long de la paroi du corps central d'une tuyère pour différentes valeurs de températures lorsque $M_S = 3.0$	128
Figure (5.32) : Variation du rapport $\frac{T}{T_0}$ le long de la paroi du corps central d'une tuyère pour différentes valeurs de températures lorsque $M_S = 3.0$	132
Figure (5.33) : Variation du rapport $\frac{\rho}{\rho_0}$ le long de la paroi du corps central d'une tuyère pour différentes valeurs de températures lorsque $M_S = 3.0$	131
Figure (5.34) : Variation du nombre de Mach le long de la paroi du corps central d'une tuyère pour différentes valeurs de températures lorsque $M_S = 3.0$	132
Figure (5.35) : Variation de l'inclinaison de la paroi du corps central d'une tuyère pour différentes valeurs de températures lorsque $M_S = 3.0$	133

Figure (5.36) : Variation de la longueur du corps central en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes températures T_0	134
Figure (5.37) : Variation de la masse du corps central en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes températures T_0	135
Figure (5.38) : Variation de l'angle de déviation ψ de la carène en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes températures T_0	136
Figure (5.39) : Variation de l'angle de déviation θ^* de la paroi du corps central en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes températures T_0	137
Figure (5.40) : Variation de la force de pression exercée sur la paroi du corps central en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes températures T_0	138
Figure (5.41) : Variation de la masse du gaz du divergent en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes températures T_0	139
Tableau (2.1) : Table de variation de $C_p(T)$ et $\gamma(T)$ pour l'air	42
Tableau (2.2) : Coefficients des polynômes $C_p(T)$ et $\gamma(T)$	43
Tableau (5.1) : Valeurs numériques des paramètres critiques	93
Tableau (5.2) : Résultats numériques de variation du rapport $\frac{T}{T_0}$ en fonction de M à Haute Température	97
Tableau (5.3) : Résultats numériques de variation du rapport $\frac{\rho}{\rho_0}$ en fonction de M à Haute Température	98
Tableau (5.4) : Résultats numériques de variation du rapport $\frac{P}{P_0}$ en fonction de M à Haute Température	99
Tableau (5.5) : Résultats numériques de variation du rapport $\frac{a}{a_0}$ en fonction de M à Haute Température	100
Tableau (5.6) : Résultats numériques de variation du rapport $\frac{A}{A_*}$ en fonction de M à Haute Température	101
Tableau (5.7) : Résultats numériques de variation de la fonction de Prandtl-Meyer à Haute Température	104
Tableau (5.8) : Paramètres ne dépendant pas de la discrétisation N_P	105
Tableau (5.9) : Paramètres de conception de l'exemple proposé	106
Tableau (5.10) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 500$ °K	109
Tableau (5.11) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 1000$ °K	111

Tableau (5.12) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 1500$ °K	113
Tableau (5.13) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 2000$ °K	115
Tableau (5.14) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 2500$ °K	117
Tableau (5.15) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 3000$ °K	119
Tableau (5.16) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S pour $T_0 = 3500$ °K	121
Tableau (5.17) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 lorsque $M_S = 1.5$	122
Tableau (5.18) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 lorsque $M_S = 2.0$	123
Tableau (5.19) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 lorsque $M_S = 2.5$	124
Tableau (5.20) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 lorsque $M_S = 3.0$	124
Tableau (5.21) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 lorsque $M_S = 3.5$	125
Tableau (5.22) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 lorsque $M_S = 4.0$	126
Tableau (5.23) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 lorsque $M_S = 4.5$	126
Tableau (5.24) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 lorsque $M_S = 5.0$	127
Tableau (5.25) : Rapport des pressions à Haute Température au col et à la sortie	129
Tableau (5.26) : Rapport des températures à Haute Température au col et à la sortie	130
Tableau (5.27) : Rapport des masses volumiques à haute température au col et à la sortie	131
Tableau (5.28) : Valeurs de l'angle de l'inclinaison de la paroi du corps central	133
Tableau (5.29) : Résultats numériques de dimensionnement d'une tuyère plane à corps central type à bouchon à Haute Température lorsque $T_0 = 1000$ °K	140
Tableau (5.30) : Résultats numériques de dimensionnement d'une tuyère plane à corps central type à bouchon à Haute Température lorsque $T_0 = 2000$ °K	141
Tableau (5.31) : Résultats numériques de dimensionnement d'une tuyère plane à corps central type à bouchon à Haute Température lorsque $T_0 = 3000$ °K	142
Tableau (5.32) : Résultats numériques de dimensionnement d'une tuyère à corps central type à bouchon à haute température pour un gaz parfait ($\gamma = 1.402$)	143

INTRODUCTION

L'étude du problème de l'aérodynamique par voie numérique (l'aérodynamique numérique) est un domaine de recherche relativement récent. Les aérodynamiciens soulèvent la question de savoir si ce domaine de recherche devrait être considéré comme théorique ou bien expérimental. Ils estiment toute-fois que, l'aérodynamique numérique constitue en fait une discipline spécifique, mais qui présente des points communs avec l'aérodynamique théorique, en raison des nombreux essais numériques nécessaires pour palier aux insuffisances de la connaissance des méthodes de calcul.

Depuis une vingtaine d'années, nous pouvons dire que l'aérodynamique numérique a perdu beaucoup de son caractère empirique grâce aux efforts convergents des mathématiciens pour résoudre les problèmes mathématiques liés aux méthodes de calcul en aérodynamique et les aérodynamiciens pour mieux analyser les algorithmes qu'ils mettent en œuvre. Nous pouvons partager l'aérodynamique en deux branches essentielles : externe et interne. La première branche est consacrée à l'étude de l'écoulement en présence de l'air libre, tels que les écoulements autour des profils d'ailes. L'autre branche est spécialisée dans l'étude des écoulements internes de fluides, tels que les moteurs fusées, les moteurs d'avions et les tuyères.

Les tuyères supersoniques interviennent dans beaucoup de structures tels que les missiles, les moteurs d'avions, et dans la fabrication des souffleries supersoniques pour la modélisation et la réalisation expérimentale des écoulements supersoniques réels.

Les tuyères supersoniques planes et axisymétriques générant un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie sont d'un grand intérêt dans les applications aéronautiques. Si on veut réaliser expérimentalement un écoulement supersonique autour d'un profil d'aile, pour le cas de l'aérodynamique externe, on doit modéliser l'écoulement aux frontières. L'écoulement doit être uniforme et en particulier en amont du profil. Pour le cas de l'aérodynamique interne, un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie est désiré.

Dans les moteurs fusées, la tuyère constitue la partie essentielle, car elle permet d'accélérer les gaz à la sortie de la chambre de combustion jusqu'à une certaine vitesse pour obtenir une force de poussée comme une résultante de cette accélération.

Dans le cas d'un écoulement parallèle à la section de sortie de la tuyère, les pertes de poussée sont nulles. Par conséquent, la poussée délivrée par le moteur est complètement utilisée pour la propulsion. Si l'écoulement est uniforme à la section de sortie, les paramètres de l'écoulement sont constants et la variation de la quantité de mouvement est égale à $m_S V_S$. Pour ces deux applications essentielles, la tuyère doit fonctionner en régime adapté.

Le projet de recherche proposé consiste, en premier lieu, en la détermination des relations de la thermodynamique d'un écoulement supersonique, tels que les rapports des pressions, des températures, des masses volumiques et le rapport des sections, ainsi que la relation de Prandtl-Meyer, sur l'hypothèse d'un gaz calorifiquement imparfait, et en deuxième lieu, en l'application pour la génération des tables aérothermodynamiques pour différentes températures génératrices T_0 et l'extension pour l'étude de l'écoulement supersonique à haute température dans une tuyère, présenté par les conditions critiques au col, des conditions à une section donnée en fonction du nombre de Mach et du rapport des sections A_S/A^* en fonction de la température génératrice T_0 de la chambre de combustion.

La théorie de la tuyère, généralement présentée dans la littérature, est basée sur l'hypothèse d'un gaz calorifiquement parfait, c'est-à-dire que les chaleurs spécifiques C_P et C_V ainsi que leur rapport γ sont constants et ne dépendent pas de la température. Pour notre modèle, γ et C_P varient en fonction de la température, donc il faut retrouver toutes les formules nécessaires sur la base de cette hypothèse fondamentale. L'étude de la fonction de Prandtl-Meyer sur la base de notre hypothèse sera faite et l'écoulement supersonique externe à haute température autour d'un dièdre peut être étudié en utilisant la nouvelle forme de cette fonction. Des graphes et des tableaux, des différents rapports des paramètres de l'écoulement à haute température, à la section critique et à une section donnée pour le régime supersonique, seront présentés dans la première partie des résultats en comparaison avec le modèle d'un gaz calorifiquement parfait.

La deuxième partie de notre projet consiste en l'utilisation de ces nouvelles relations pour le dimensionnement d'une tuyère supersonique plane à corps central type à bouchon "Plug Nozzle" donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle. Ce dimensionnement est basé sur l'utilisation de la relation de Prandtl-Meyer pour calculer les propriétés des ondes de détente issues de la paroi du col de la tuyère qui sera incliné d'un certain angle Ψ en fonction du nombre de Mach de sortie " M_S " de la tuyère.

Donc, le problème posé est de dimensionner ce type de tuyères pour présenter une solution au problème de poids lors de la conception des engins aérospatiaux. Pour arriver à notre but, nous avons réalisé ce travail, composé de cinq chapitres essentiels, dont la séquence trace l'objectif assigné.

Le premier chapitre est consacré à l'étude d'un écoulement dans une tuyère d'une manière générale accompagné d'un bref historique sur le développement du domaine des tuyères ainsi que la présentation de quelques notions fondamentales indispensables pour l'étude et la conception d'une tuyère dans le domaine supersonique.

Le deuxième chapitre est consacré à la détermination des équations de la thermodynamique d'un écoulement supersonique à haute température ainsi qu'à la détermination des conditions critiques au col et à la sortie supersonique.

Dans le troisième chapitre, nous avons préféré présenter la méthode développée théoriquement qui est basée sur la détente de Prandtl-Meyer ainsi que le procédé numérique de calcul sous la considération de quelques hypothèses de base pour le dimensionnement d'une tuyère à corps central à haute température.

Le quatrième chapitre présente la méthode de dimensionnement de ce type de tuyères à haute température où les paramètres thermodynamiques et physiques ont été déterminés.

Le cinquième chapitre consiste en la description du programme global réalisé, suivi par la présentation des résultats numériques obtenus par ce programme et la comparaison avec la théorie, et la démonstration par les graphes pour montrer l'efficacité et la réponse de ce type de tuyères par rapport aux tuyères conventionnelles du point de vue masse, longueur et force de poussée délivrée.

La validation des résultats est basée sur la convergence du rapport des sections (A_S/A^*), calculé numériquement par le programme élaboré en fonction de la discrétisation, vers le rapport exact (A_S/A^*) donné par la théorie d'un écoulement unidimensionnel (1D) dans une tuyère (ce rapport sera retrouvé pour notre modèle), puisque au col et à la section de sortie de la tuyère, l'écoulement est unidimensionnel.

Enfin, une conclusion générale et des recommandations concluent le travail présenté. Nous espérons que ce travail sera suivi par des travaux futurs comme poursuite de cet axe de recherche dans le domaine de l'aérodynamique interne ou la propulsion.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LES TUYERES SUPERSONIQUES

La poussée d'un moteur dépend principalement de la vitesse des produits de combustion à travers la section de sortie de la tuyère qui le propulse. Durant leur passage à travers une tuyère, les gaz d'échappement sont accélérés de vitesses subsoniques à des vitesses supersoniques. Le passage de l'écoulement par ces différentes vitesses permet de diviser une tuyère convergente-divergente en trois sections : le *convergent* subsonique où l'écoulement passe d'une vitesse presque nulle à celle du son (au col) pour enfin se détendre au sein du *divergent* supersonique. Cette division est appropriée car, d'une part elle permet la détermination de la poussée totale développée, et d'autre part parce que, différentes méthodes d'analyse sont utilisées pour déterminer le champ d'écoulement dans chaque région.

La vitesse sonique atteinte au col par les gaz d'échappement est fixée par les conditions prévalant au sein de la chambre de combustion. Si cette vitesse est atteinte, la tuyère est dite adaptée et une future détente dans le divergent l'augmente encore pour atteindre des valeurs supersoniques. Cette vitesse additionnelle dépend uniquement de la configuration de la paroi du divergent et de l'aire de la section de sortie. Depuis plusieurs années, la conception de la portion divergente supersonique reçoit une attention particulière et fait l'objet d'intenses et de nombreuses recherches afin d'atteindre des vitesses de sortie et des poussées de plus en plus importantes.

L'optimisation du choix d'une tuyère de propulsion doit tenir compte en plus des calculs de dynamique des gaz qui nous intéressent, de divers paramètres tels que le matériau utilisé, le mode de fabrication de la paroi, les exigences de refroidissement, les limites admissibles de dimensionnement, etc.

1.1. Principaux paramètres de performances

1.1.1. La poussée

La poussée délivrée par une tuyère est fonction non seulement de la vitesse d'éjection des gaz de combustion mais aussi de la différence entre les pressions de sortie et ambiante.

L'application de l'équation de conservation de la quantité de mouvement permet d'exprimer la poussée infinitésimale développée à travers une section annulaire d'épaisseur dy par :

$$dF = 2 \pi [\rho V_s + (P_s - P_a)] y dy \quad (1.1)$$

La poussée totale peut être déterminée par l'intégration de l'équation précédente (1.1) sur la section de sortie de la tuyère. Le résultat de cette intégration est :

$$F = \pi \sum_i [\rho V_{S_i}^2 + (P_{S_i} - P_a)] (y_S^{i+1} - y_S^i)^2 \quad (1.2)$$

1.1.2 Coefficient de poussée

Le coefficient de poussée est un paramètre sans dimension défini comme le rapport de la poussée F au produit de la pression dans la chambre de combustion ou pression totale P_t par l'aire de la section au col A^* :

$$C_F = \frac{F}{P_t A^*} \quad (1.3)$$

C'est un coefficient caractéristique de la détente des gaz dans la section divergente de la tuyère. Il peut donc être considéré comme particulièrement caractéristique de la performance du contour de la section divergente supersonique.

1.1.3. Coefficient de décharge

A cause principalement des effets de frottement, les performances réelles d'une tuyère sont généralement légèrement différentes de celle déterminées sur la base de l'hypothèse d'un écoulement isentropique. Le coefficient de décharge noté C_d est défini comme étant le rapport du débit actuel réel à celui déterminé à partir des relations isentropiques :

$$C_d = \frac{\text{Débit actuel réel}}{\text{Débit isentropique}} \quad (1.4)$$

1.1.4. Vitesse caractéristique

La vitesse caractéristique, notée C^* , d'une réaction est définie comme le rapport du produit de la pression totale par la section au col ($P_t A^*$) au débit massique \dot{m} :

$$C^* = \frac{P_t A^*}{\dot{m}} \quad (1.5)$$

C'est un paramètre qui n'est fonction que de la nature du mélange gazeux et de la température de combustion.

1.1.5. Vitesse effective

La vitesse effective notée V_{eff} est la vitesse de sortie de la tuyère adaptée. Elle est définie par le rapport de la poussée au débit massique :

$$V_{\text{eff}} = \frac{F}{\dot{m}} \quad (1.6)$$

C'est un paramètre qui tient compte de la correction atmosphérique.

1.1.6. Impulsion spécifique

L'impulsion spécifique, notée I_s , est définie comme le rapport de la poussée au produit du débit massique par l'accélération de la pesanteur :

$$I_s = \frac{F}{\dot{m} g} \quad (1.7)$$

C'est un paramètre généralement utilisé pour comparer les performances des propergols utilisés pour la propulsion.

1.1.7. Impulsion Totale

L'impulsion totale, notée I , est définie comme l'intégrale de la poussée durant la totalité du temps de fonctionnement :

$$I = \int_0^t F dt \quad (1.8)$$

1.2. Différentes configurations de tuyères supersoniques

Le maximum de poussée pour une tuyère est obtenu lorsque l'écoulement à la sortie est uniforme (c'est-à-dire lorsque la direction est axiale) et possède une pression égale à celle ambiante. L'écoulement étant assumé non visqueux, il ne peut y avoir de fluide traversant une ligne de courant. Par conséquent, le profil de la paroi solide peut être assumé comme confondu avec une ligne de courant. Tenant compte de ces deux principes de base et essayant de développer un maximum de poussée, plusieurs configurations de tuyères ont été proposées dont les plus fréquemment utilisées sont présentées dans le présent paragraphe.

1.2.1. Tuyère conique

La forme géométrique la plus simple d'une tuyère est un cône comme le montre la figure (1.1). Bien que la vitesse de sortie des gaz de combustion d'une tuyère conique est essentiellement égale à sa valeur unidimensionnelle correspondant à un rapport de section donné, la direction de l'écoulement à la sortie n'est pas axiale. Par conséquent, une diminution de poussée due à la divergence de l'écoulement est engendrée. Cette perte est prise en compte grâce à un facteur dépendant principalement de l'angle de divergence et il est défini par MALINA [8] :

$$\lambda = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \quad (1.9)$$

Dans le cas de petits moteurs propulsifs, il est généralement plus pratique d'utiliser des tuyères coniques à cause particulièrement de leur simplicité de fabrication. Habituellement, le demi-angle du cône est pris égal à 15° . La longueur de ce type de tuyères est petite relativement à celle de la tuyère idéale (dont l'écoulement est uniforme à la sortie). Le coefficient de poussée qu'elle développe est inférieur d'approximativement 1,7 % de celui du cas idéal. Cette configuration est souvent utilisée comme base de comparaison en terme de poussée et de longueur.

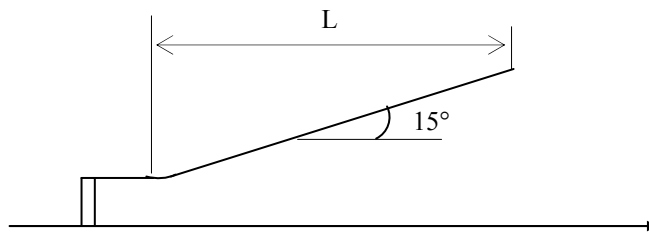


Figure (1.1) : Tuyère conique

1.2.2. Tuyère profilée

Les pertes de performance, notamment en termes de poussée de la configuration conique dues à la divergence de l'écoulement à la sortie, augmentent avec l'angle α que fait la paroi avec la direction axiale. Une méthode permettant d'éviter cet inconvénient consiste à "tourner" la section divergente vers l'intérieur comme indiqué par la figure (1.2). Dans ce cas, on pourra donner une valeur relativement importante à l'angle de divergence situé près du col permettant la réalisation d'une importante détente sans gêner l'axialité de l'écoulement à la sortie. En effet, la seconde partie du divergent de par sa forme courbe tendra à faire suivre à ce dernier la direction axiale limitant ainsi les pertes de poussée dues à la divergence rencontrée avec la tuyère conique.

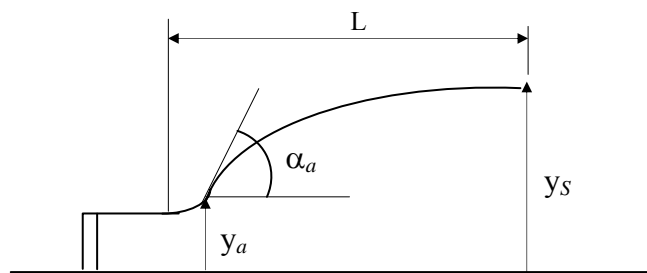


Figure (I.2) : Tuyère profilée ou contour

Une approche directe pour la conception du contour d'une tuyère a été proposée par GUDERLEY et HANTSH [9] en 1955. Le problème du calcul de la section de sortie et du contour pouvant fournir une poussée optimale a été posé en spécifiant uniquement la longueur et la pression ambiante, un calcul variationnel permettant de résoudre le problème du champ d'écoulement à la sortie nécessaire pour l'atteindre. La dernière étape consiste en l'application de la méthode des caractéristiques pour développer le contour supersonique de la tuyère. Ce dernier étant obtenu de cette manière devrait représenter le profil donnant une poussée optimale pour des valeurs particulières de la section de sortie et de la longueur.

Néanmoins à cause de la nature complexe de la solution présentée, les contours donnant une poussée optimale pour les tuyères de propulsion ont été négligés jusqu'en 1958 date à laquelle RAO [10] réussit à développer une approche simple basée sur le fait de considérer la longueur de la tuyère ainsi que la pression ambiante et les conditions d'écoulement au voisinage du col comme conditions sous lesquelles la poussée pourrait être maximisée. En assumant l'écoulement isentropique et en utilisant la méthode des caractéristiques, le contour optimal est ainsi construit.

En général, la tuyère profilée possède des angles allant de 20° à 30° au col et de 5° à 14° à la sortie de la tuyère.

1.2.3 Tuyère annulaire

Dans les tuyères conventionnelles, le col et la section de sortie sont généralement formés par des sections circulaires normales à l'axe de la tuyère. Un autre type de tuyère largement utilisé en turbomachine et appelé tuyère annulaire possède des sections au col en forme d'anneau formé par un 'bouchon' central et une paroi externe. En aval du col, les gaz d'échappement subissent une détente dans l'anneau divergent formé par le contour convergent du bouchon central et la section divergente de la tuyère (voir Figure (1.3)). Si le contour est conique, la poussée est réduite d'un facteur λ qui s'exprime par :

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{(\sin\alpha + \sin\beta)^2}{(\alpha + \beta)\sin\beta + \cos\beta - \cos\alpha} \quad (1.10)$$

où α et β sont des angles formés par l'axe de la tuyère et la paroi extérieure, et l'axe de la tuyère et la paroi intérieure du bouchon respectivement.

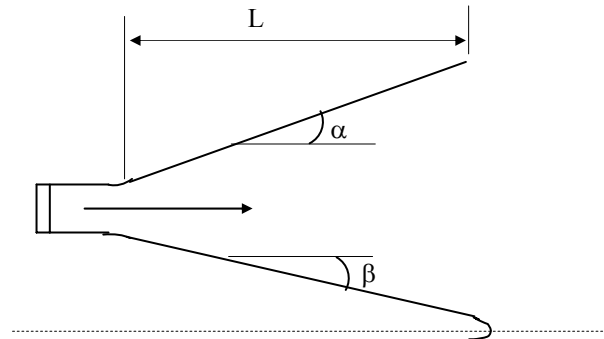


Figure (1.3) : Tuyère annulaire

1.2.4. Tuyères à corps central

Contrairement aux configurations précédemment présentées où le processus de détente des gaz est principalement influencé par le contour de la paroi de la section divergente de la tuyère, le processus de détente de ces gaz dans ce cas est directement ou indirectement régulé par la pression ambiante [11]. L'écoulement des gaz dans ce cas s'ajuste donc de lui-même pour être conforme aux conditions extérieures. Ces tuyères sont classées en deux catégories :

- Tuyère type à bouchon (Plug Nozzle type),
- Tuyère type "détente-déviation" (Expansion-Deflection Nozzle).

1.2.4.1. Tuyère type à bouchon (Plug Nozzle)

Le col de ce type de tuyères possède la forme d'un anneau localisé au diamètre extérieur comme le montre la figure (1.4). L'écoulement est contrôlé par des ondes de détente provoquées par la déviation du bouchon dont la surface constitue le principal paramètre qui l'influence. Les gaz d'échappement subissent une détente de la pression de la chambre de combustion P_t jusqu'à la pression ambiante P_a . La poussée de ce type de tuyères est identique à celle de la tuyère convergente-divergente. Le but de notre travail est limité pour la conception de ce type de tuyère sous la base de l'hypothèse à haute température.

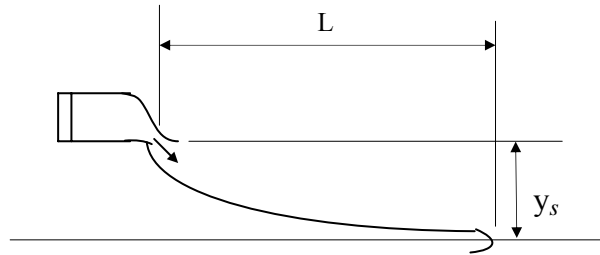


Figure (1.4) : Tuyère type à bouchon

1.2.4.2. Tuyère type "détente-déviat

En ajoutant un obstacle tel que celui décrit en figure (1.5) qui permet, outre la détente, de dévier l'écoulement des gaz de combustion vers l'extérieur, nous obtenons une tuyère "détente-déviat". Cette configuration permet l'obtention de bonnes performances même dans des conditions au-dessous de celles pour lesquelles elle a été initialement conçue. Les travaux expérimentaux sur de telles tuyères [11]-[12] ont montré qu'une utilisation d'angles de déviation d'une valeur aussi importante que 40° pour des rapports de détente bas n'entraînent que des pertes minimales de poussée (une perte de 1% a été enregistrée pour un angle de 30°).

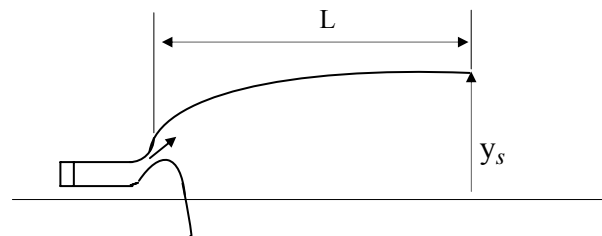


Figure (1.5) : Tuyère type "détente-déviat"

1.3. Approches numériques de résolution des équations générales de conservation

La résolution numérique des divers problèmes qui peuvent se poser et qui ne peuvent être traités analytiquement à cause principalement de leur complexité est réalisée grâce à l'application des lois mathématiques décrivant leur comportement physique. Ces lois dans les cas qui nous concernent s'expriment, généralement, par des équations différentielles aux dérivées partielles.

Afin de relater la réalité le plus précisément possible, les approches numériques doivent tenir compte aussi bien des considérations mathématiques que physiques. Le principe d'une approche numérique est essentiellement basé sur la transformation des équations différentielles régissant le problème considéré en équations algébriques et leurs applications en un certain nombre de domaines dont la somme constitue le milieu auquel on s'intéresse. La caractéristique de ces domaines discrets est qu'ils doivent être assez petits pour pouvoir considérer les diverses variables dépendantes comme constantes en leur sein. Une discrétisation de ce genre est représentée en figure (1.6). En assumant que le problème consiste à chercher la solution $\Phi(u, v, \dots)$, celle-ci peut être représentée par les valeurs de Φ aux différents domaines discrets constituant le milieu.

Le principe de discrétisation consiste donc à remplacer l'information continue et contenue dans la solution exacte du problème par des valeurs discrètes, les équations algébriques ou "équations de discrétisation" fournissant les valeurs inconnues de Φ aux points choisis du maillage doivent être obtenues à partir de l'équation différentielle ayant pour variable Φ . Cette discrétisation de l'espace et des variables dépendantes fait qu'il est possible de remplacer les équations différentielles par des équations algébriques dont la résolution est plus simple.

Une équation de discrétisation est donc une relation algébrique connectant les valeurs de Φ pour un groupe de nœuds de maillage. Le nombre de nœuds étant fini a pour principale conséquence la nature du profil "par morceaux" de Φ , la valeur de cette dernière en un nœud particulier n'ayant d'influence sur sa distribution qu'au voisinage immédiat de ce nœud. Un large nombre de nœuds entraîne une meilleure approche de la solution exacte. Il peut entraîner aussi un long temps de calcul pour l'approcher. Un compromis est donc à trouver entre les paramètres temps de calcul et précision.

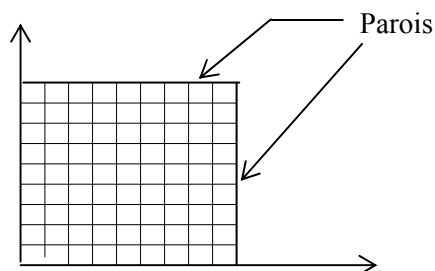


Figure (1.6) : Domaine de calcul discrétisé

Pour une équation différentielle donnée, différentes méthodes de discrétisation sont possibles. Le choix du profil de la variable dépendante ainsi que le mode d'obtention des équations de discrétisation nous dirigent vers trois approches largement utilisées : par différences finies, par éléments finis et enfin par volumes finis.

1.3.1. Approche par différences finies

La procédure usuelle d'obtention des équations exprimées en différences finies consiste à approximer les dérivées partielles par des séries de Taylor. L'approche par différences finies a l'avantage de l'utilisation d'un maillage arbitraire en général rectangulaire comme illustré par la figure (1.7).

En considérant les nœuds de la figure (1.7) et en développant en série de Taylor autour du nœud (i, j) , nous obtenons :

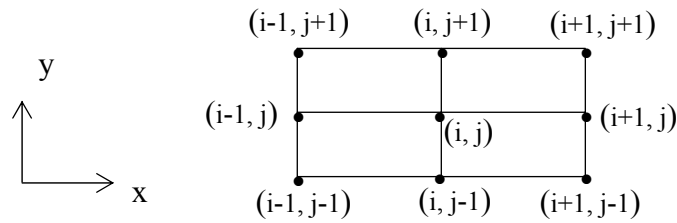


Figure (1.7) : Maillage rectangulaire

$$\Phi_{i-1,j} = \Phi_{i,j} - \Delta x \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_{i,j} + \dots \quad (1.11)$$

$$\Phi_{i+1,j} = \Phi_{i,j} + \Delta x \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_{i,j} + \dots \quad (1.12)$$

La même procédure est appliquée à la variable indépendante y .

En ne tenant compte que des trois premiers termes de la série, l'opération (1.11)-(1.12) permet d'aboutir à :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2 \Delta x} \quad (1.13)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} - 2 \Phi_{i,j}}{(\Delta x)^2} \quad (1.14)$$

La substitution des expressions précédentes dans les équations différentielles conduit à des équations exprimées en termes de différences finies algébriques souvent appelées équations de discrétisation. Cette méthode assume que Φ varie peu lorsqu'on passe du point (i, j) aux points voisins. Cette variation est souvent simulée par un polynôme en x .

Les formes de différences utilisées pour remplacer les dérivées partielles peuvent être classées en différence directe, différence inverse et différence centrale. Ces différentes versions sont choisies en tenant compte notamment de la précision désirée, de la convergence ainsi que de la stabilité de l'approche. La même démarche s'applique pour la dérivée $(\partial\Phi/\partial y)$ et on obtient les différences suivantes :

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\Delta y} \quad \text{Différence directe} \quad (1.15)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}}{\Delta y} \quad \text{Différence inverse} \quad (1.16)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1}}{2 \Delta y} \quad \text{Différence centrale} \quad (1.17)$$

Elles peuvent aussi être classées suivant l'approche de développement des inconnues. Ainsi deux schémas se présentent : l'un est dit "explicite" et l'autre "implicite".

1.3.1.1. Schéma explicite

Considérons un champ d'écoulement bidimensionnel tel que représenté par la figure (1.7) et supposons la direction de l'écoulement vers la droite. En plus, assumons que les propriétés de l'écoulement sont inconnues en tout point du maillage situé le long de la ligne verticale passant par le point (i, j) . Nous désirons déterminer la valeur de la composante radiale de la vitesse, notée v , sur tous les points du maillage situés le long de la ligne verticale passant par le point $(i+1, j)$.

Pour cela, commençons par remplacer la condition d'irrotationalité par une différence directe au point (i, j) . Nous obtiendrons :

$$\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta x} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} \quad (1.18)$$

Ceci implique que :

$$v_{i+1,j} = v_{i,j} + \frac{\Delta x}{\Delta y} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) \quad (1.19)$$

L'équation (1.19) nous permet de calculer v au point $(i+1, j)$ explicitement c'est-à-dire des valeurs de u et de v le long de la ligne verticale passant par (i, j) . Ce type d'approche est appelé *schéma explicite*.

1.3.1.2. Schéma implicite

Dans ce cas, essayons de construire une approche où nous supposons que $(\partial u / \partial y)$ dans la condition d'irrotationalité est la moyenne entre deux lignes verticales passant par les points (i, j) et $(i+1, j)$ de la figure (1.7). Il vient :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i+1,j}}{\Delta y} \right) \quad (1.20)$$

Substituons l'équation (1.20) dans la condition d'irrotationalité et utilisons une différence directe pour la dérivée $(\partial v / \partial x)$. Nous obtenons :

$$v_{i+1,j} = v_{i,j} + \frac{\Delta x}{2\Delta y} (u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} - u_{i,j} - u_{i+1,j}) \quad (1.21)$$

Le second membre de l'équation (1.21) contient des valeurs inconnues $(u_{i+1, j+1}, u_{i+1, j})$. Si l'équation (1.21) est appliquée en chaque point de la ligne verticale passant par (i, j) , un système d'équations de discrétisation simultanée pour $v_{i+1, j}, u_{i+1, j}, u_{i+1, j+1}$, etc... le long de la ligne verticale passant par $(i+1, j)$ est obtenu. Ce type d'approche est dit *schéma implicite*.

Remarque :

L'avantage du schéma explicite est sa simplicité. Néanmoins, pour des raisons de stabilité, les pas Δx et Δy utilisés sont limités. L'avantage du schéma implicite est représenté par sa stabilité qui peut être maintenue sans sévères restrictions sur Δx et Δy .

1.3.2. Approche par éléments finis

La méthode des éléments finis est généralement la plus utilisée lorsque nous sommes en présence de problèmes décrits par des équations de type elliptique. Son principe de base est le même que celui des différences finies présenté auparavant. Une subdivision du domaine de travail en éléments finis est réalisée. La Figure (1.8) montre une subdivision en éléments triangulaires. Les équations de la discrétisation sont habituellement obtenues par l'utilisation du principe variationnel ou par la méthode de Galerkin, cette dernière étant un cas particulier de la méthode des résidus chargés. Au cours de la procédure d'obtention des équations de discrétisation, une fonction test (*Shape function*) est utilisée pour décrire la variation de la variable dépendante Φ sur un élément.

La puissance de la méthode des éléments finis est principalement liée à sa capacité d'utilisation de maillages irréguliers. Les grilles triangulaires présentées en figure (1.8), par exemple, permettent de produire une grande flexibilité de simulation des domaines irréguliers pour trouver le maillage approprié.

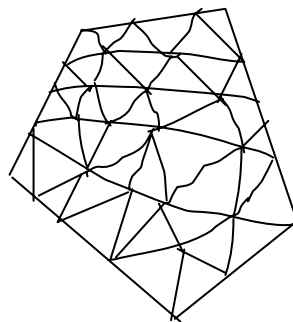


Figure (1.8) : Discrétisation par éléments finis triangulaires

Si nous notons par P_i les sommets, ces derniers seront situés soit sur le bord du domaine soit en son intérieur. Ces sommets sont également appelés nœuds de discrétisation. Le problème consiste à rechercher une approximation de la solution Φ des équations différentielles non seulement aux points P_i mais partout dans le domaine.

1.3.2.1. Formulation variationnelle

C'est une approche intéressante pour l'obtention des équations de discrétisation. Elle est basée sur les calculs des variations. Ces derniers montrent que la résolution de certaines équations différentielles équivaut à minimiser une quantité apparente appelée la fonctionnelle. Cette équivalence est connue sous le nom de "principe variationnel". Si la fonctionnelle est minimisée en respectant les valeurs de la variable dépendante Φ aux nœuds de maillage, les conditions résultantes donnent les équations de discrétisation requises. Le principal inconvénient de cette approche est son application limitée.

1.3.2.2. Méthode des résidus chargés

Le principe de base d'une telle approche est simple. Essayons de le montrer en représentant une équation différentielle par :

$$L(\Phi) = 0 \quad (1.22)$$

En plus, assumons une solution approximative Φ qui est une fonction d'un certain nombre de paramètres inconnus telle que :

$$\bar{\Phi} = \sum_i N_i(x, y) \Phi_i \quad (1.23)$$

N_i représentant les fonctions test exprimées en fonction des variables indépendantes (x, y) .

Les " Φ_i " sont les paramètres inconnus. La substitution de $\bar{\Phi}$ dans l'équation différentielle donne un résiduel R défini par :

$$R = L(\bar{\Phi}) \quad (1.24)$$

Nous désirons que R soit aussi petit que possible. Proposons-le tel que :

$$\int W R \, dn \, dy = 0 \quad (1.25)$$

où W est une fonction charge. L'intégration sera réalisée dans le domaine d'intérêt ou de calcul. Par le choix d'une succession de fonctions charges, nous pouvons ainsi obtenir le nombre d'équations nécessaires pour l'évaluation des paramètres " Φ_i ". Ces équations algébriques, où les paramètres " Φ_i " sont les inconnues, sont résolues pour obtenir la solution approximée $\bar{\Phi}$ de l'équation différentielle considérée.

Remarques :

- La méthode dite de *GALERKIN* est dérivée en posant simplement $W_j = N_j$ avec N_j une autre fonction test. La fonction charge la plus simple est $W=1$. Un certain nombre d'équations en termes de résidu chargé peut être donc engendré par la subdivision du domaine de calcul en sous domaines (ou volumes finis).
- Si la solution approximée $\bar{\Phi}$, au lieu d'être représentée par une simple expression algébrique applicable sur tout le domaine telle l'équation (1.23) pour l'approche par éléments finis, est construite grâce à un profil "par morceaux" avec les valeurs de Φ aux points de maillage comme inconnues : nous retrouverons la forme de l'approche par différences finies présentée en paragraphe (1.4.2).

1.3.3. Approche par volumes finis

La méthode dite *des volumes finis* pourrait être considérée comme une version spéciale de la méthode des résidus chargés. Le domaine de calcul dans ce cas est divisé en un nombre de volumes finis tels que chacun d'eux entoure un point du maillage (voir figure (1.9)). Les équations différentielles sont intégrées sur chaque volume fini. Les profils "par morceaux" exprimant la variation de Φ entre les points de maillage sont utilisés pour évaluer les intégrales des équations différentielles sur chaque volume fini. Le résultat est représenté par les équations de discrétisation contenant les valeurs de Φ pour un groupe de points de maillage. Une équation de discrétisation obtenue de cette manière exprime le principe de conservation pour Φ pour un volume fini juste comme une équation différentielle exprimant ce principe pour un volume de contrôle infinitésimal.

La caractéristique essentielle de l'approche par volumes finis est que la solution résultante doit impliquer la conservation intégrale des quantités telles que la masse, la quantité de mouvement et l'énergie sur n'importe quel groupe de volumes finis et, bien sûr, sur tout le domaine de calcul.

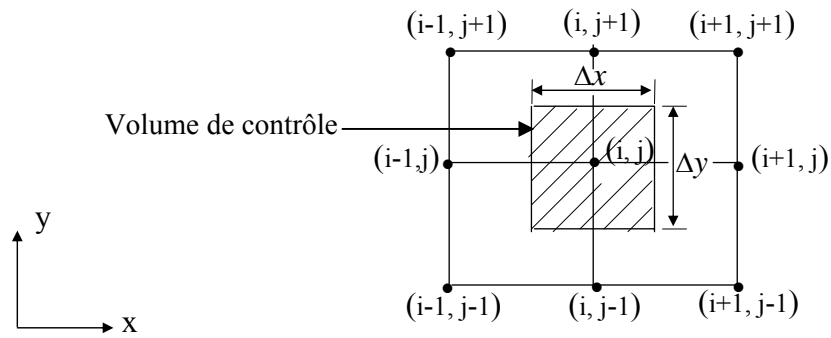


Figure (1.9) : Représentation typique d'un volume fini

Une fois les équations de discrétisation obtenues, les suppositions sur le profil peuvent être émises. Cette démarche permet un large spectre de choix. Une fois ces équations résolues, il restera à déterminer les valeurs prises par la variable dépendante aux points de maillage. Pour l'approche par volumes finis comme d'ailleurs pour les autres méthodes présentées auparavant, la solution est recherchée sous la forme des valeurs aux points du maillage. Les formules d'interpolation (ou les profils) doivent être regardées comme étant des relations auxiliaires nécessaires pour évaluer les intégrales demandées dans la méthode.

1.3.4. Propriétés des équations de type hyperbolique

Une équation est dite de type hyperbolique si une certaine relation est satisfaite par les coefficients des dérivées du plus grand ordre, dans ce cas nous avons :

$$M^2 = \left(\frac{u^2 + v^2}{a^2} \right) > 1 \quad (1.25)$$

Les équations de cette forme se distinguent par le fait qu'il existe des directions caractéristiques dans le plan (x, y) le long desquelles la dérivée normale des variables dépendantes (dans notre cas u et v) peut être discontinue mais la vitesse elle-même doit être continue. En plus, le long de ces caractéristiques, les variables dépendantes doivent satisfaire une certaine relation appelée "équation de compatibilité". Cette dernière constitue la clef de la méthode des caractéristiques. [13]

CHAPITRE 2

RELATIONS THERMODYNAMIQUES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE

Les résultats obtenus pour l'écoulement d'un gaz parfait ne sont valables que sous la base de quelques hypothèses connues dans pas mal de références [1]. Parmi ces hypothèses, citons le cas où le gaz doit être considéré comme calorifiquement parfait, c'est-à-dire, que les chaleurs spécifiques C_p et C_v sont constantes et donc ne dépendant pas de la température quelque soit sa valeur, ce qui n'est pas le cas réellement lorsque la température croît. Dans ce cas, la question que nous devons poser est la suivante : les relations thermodynamiques restent-elles toujours valables lorsque cette hypothèse ne sera plus valable ? Le but de ce chapitre est de répondre à cette question par le développement de ces relations, en ajoutant l'effet de variation de C_p et de C_v , et la détermination des résultats nécessaires pour ce gaz qui sera nommé gaz calorifiquement imparfait. Notre application sera pour l'écoulement d'air dans une tuyère. Les résultats à déterminer sont les rapports thermodynamiques et géométriques ainsi que d'autres résultats intéressants. Le développement mathématique d'un tel écoulement est basé sur l'utilisation des équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement, de l'énergie et en ajoutant l'équation d'état du gaz parfait [2]. Pour le cas d'un écoulement d'air soumis à une pression élevée, nous avons pu trouver une table contenant quelques valeurs de C_p et de γ en fonction de la température dans un intervalle compris entre 55 K et 3550 K [2].

Afin de trouver une forme analytique pour les fonctions $C_p(T)$ et $\gamma(T)$, nous avons fait des interpolations polynomiales aux valeurs de la table. Les relations mathématiques présentées sont valables, dans le cas général, indépendamment de la forme de l'interpolation et de la substance, mais nos résultats seront présentés par le choix des interpolations sous forme d'un polynôme de 9^{ème} degré pour la fonction $C_p(T)$ et d'un polynôme de 10^{ème} degré pour la fonction $\gamma(T)$. La substance choisie est l'air. Une comparaison sera faite avec le modèle d'un gaz calorifiquement parfait, elle a pour but de déterminer la limite d'application de ce modèle.

2.1. Formulation du problème

Le développement des relations thermodynamiques est basé sur l'utilisation des équations de conservation sous forme différentielle. Nous rappelons que l'équation d'état d'un gaz parfait reste valable. Elle est donnée par :

$$P = \rho r T \quad (2.1)$$

Avec, r : constante de l'air ; $r = 287.1029 \text{ J}/(\text{Kg} \cdot ^\circ\text{K})$.

2.1.1. Equation adiabatique

D'après les relations de la thermodynamique [3], nous pouvons écrire :

$$dq = C_v dT + l dV = 0 \quad (2.2)$$

Avec [5] :

$$l = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{r T}{V} \quad (2.3)$$

et

$$V = \frac{1}{\rho}$$

D'où :

$$dV = -\frac{d\rho}{\rho^2} \quad (2.4)$$

Notre domaine d'étude est limité dans le régime supersonique pour un nombre de Mach $M \in [1.0, 5.0]$.

Le rapport des chaleurs spécifiques est donné par la relation suivante :

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma$$

Alors :

$$C_v = \frac{C_p}{\gamma} \quad (2.5)$$

Remplaçons les relations (2.3), (2.4) et (2.5) dans l'expression (2.2), nous obtenons :

$$\frac{dT}{dT} = \frac{\gamma r T}{C_p \rho} \quad (2.5.1)$$

Nous pouvons vérifier, à partir des résultats de la table (2.1) qui seront présentées plus tard, que C_p , C_v et γ vérifient entre eux la relation (2.5) et celle de Meyer pour un gaz parfait. La relation (2.5.1) devient :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{[\gamma(T)-1]} \frac{dT}{T} \quad (2.6)$$

Alors, l'intégration de la relation (2.6) donne la relation adiabatique pour le gaz parfait à haute température.

2.1.2. Equation de la vitesse du son

La vitesse du son est, par définition, donnée par [5]:

$$a^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{S=\text{constante}} \quad (2.7)$$

La différentielle de l'équation d'état du gaz parfait (2.1) donne :

$$\frac{dP}{d\rho} = \rho r \frac{dT}{d\rho} + r T \quad (2.8)$$

Remplaçons la relation (2.6) dans (2.8) et après réarrangement, nous aurons :

$$a^2(T) = \gamma(T) r T \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) prouve l'invariance de la relation de la vitesse du son qui reste toujours valable pour le modèle à haute température, sauf, qu'il faut tenir compte de la variation du rapport $\gamma(T)$.

Prenons le Logarithme de la relation (2.9), nous aurons :

$$\text{Log}(a^2) = \text{Log}(\gamma(T).r.T)$$

Alors :

$$2 \text{Log}(a) = \text{Log}[\gamma(T)] + \text{Log}(r) + \text{Log}(T) \quad (2.10)$$

Prenons la différentielle de l'équation (2.10), sachant que r est une constante, nous obtenons :

$$\frac{da}{a} = \frac{1}{2} \left[\frac{d[\gamma(T)]}{\gamma(T)} + \frac{dT}{T} \right] \quad (2.11)$$

Cette relation présente la différentielle de la vitesse du son en fonction de la température pour un gaz à Haute Température.

2.1.3. Relation entre la vitesse et la température

L'équation de conservation de l'énergie sous forme différentielle [5] s'écrit :

$$C_p dT + V dV = 0 \quad (2.12)$$

D'où

$$V dV = -C_p dT \quad (2.13)$$

Intégrons la relation (2.13), entre l'état générateur donné par ($V_0 \approx 0$, T_0) et un état quelconque donné par (V , T). Nous pouvons écrire :

$$\int_{V_0}^V V dV = - \int_{T_0}^T C_p(T) dT \quad (2.14)$$

A la sortie de la chambre de combustion nous avons : $V_0 \approx 0$ et T_0 donnée, nous pouvons donc trouver la vitesse à partir de la formule suivante :

$$V^2 = -2 \int_{T_0}^T C_p(T) dT \quad (2.15)$$

Posons :

$$H(T) = \int_T^{T_0} C_p(T) dT \quad (2.16)$$

Donc :

$$V^2 = 2 H(T) \quad (2.17)$$

Divisons la relation (2.12) par V^2 et remplaçons (2.17) dans le résultat obtenu, nous aurons :

$$\frac{dV}{V} = - \frac{C_p(T)}{2 H(T)} dT \quad (2.18)$$

L'expression (2.18) présente la forme différentielle de la vitesse de l'écoulement en fonction de la température.

2.1.4. Relation entre le nombre de Mach et la température

Par définition, le nombre de Mach est donné par [5] :

$$M = \frac{V}{a} \quad (2.19)$$

Remplaçons l'expression (2.9) dans (2.19) et élevons la relation au carré, nous obtiendrons :

$$M^2 = \frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2}{\gamma(T) \cdot r \cdot T} \quad (2.20)$$

Remplaçons la relation (II.17) dans (II.20), nous obtiendrons la relation suivante :

$$M(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{a(T)} \quad (2.21)$$

La relation (2.21) montre la variation du nombre de Mach en fonction de la température pour un gaz calorifiquement imparfait.

Prenons le Logarithme de la relation (2.20), nous aurons :

$$\text{Log}(M^2) = \text{Log}(V^2) - \text{Log}[\gamma(T)] - \text{Log}(r) - \text{Log}(T)$$

ou bien:

$$2 \text{Log}(M) = 2 \text{Log} V - \text{Log}(\gamma(T)) - \text{Log}(r) - \text{Log}(T) \quad (2.22)$$

Prenons la différentielle de l'équation (2.22), sachant que r est une constante, nous aurons :

$$\frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} - \frac{1}{2} \frac{d(\gamma(T))}{\gamma(T)} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \quad (2.23)$$

Remplaçons $\frac{dV}{V}$ par l'expression (2.18), nous aurons :

$$\frac{dM}{M} = \frac{1}{2} \left[\frac{-C_p(T)}{H(T)} - \frac{d(\gamma(T))}{\gamma(T)} - \frac{dT}{T} \right] \quad (2.24)$$

2.1.5. Relation entre la masse volumique et la température

L'équation de conservation de quantité de mouvement connue par l'équation de Bernoulli sous forme différentielle [5] s'écrit :

$$V dV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.25)$$

Multiplions et divisons le deuxième terme du premier membre de la relation (II.25) par $d\rho$, nous pouvons écrire :

$$V dV + \frac{d\rho}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.26)$$

Remplaçons la relation (2.17) dans la relation (2.26), nous aurons :

$$V dV + a^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.27)$$

Divisons cette dernière équation par V^2 , nous obtiendrons :

$$V \frac{dV}{V^2} + \frac{a^2}{V^2} \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

D'où :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{V^2}{a^2} \frac{V dV}{V^2} \quad (2.28)$$

Figurons le nombre de Mach, en remplaçant la relation (2.19) dans la relation (2.28) et en simplifiant par V , nous aurons l'expression suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (2.29)$$

Remplaçons les relations (2.20) et (2.18) dans la relation (2.29), nous aurons :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\left\{ \frac{2 H(T)}{\gamma(T).r.T} \right\} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{C_p(T)}{H(T)} dT \right\} \quad (2.30)$$

Simplifions cette relation, nous obtenons :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_p(T)}{\gamma(T).r.T} dT \quad (2.31)$$

Posons :

$$F_p(T) = \frac{C_p(T)}{a^2(T)} \quad (2.32)$$

La relation (2.31) sera écrite sous la forme suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = F_p(T) dT \quad (2.33)$$

Le rapport des masses volumiques correspondant à la température T_0 peut être obtenu en intégrant l'équation (2.33) entre l'état générateur (ρ_0, T_0) et l'état concerné donné par (ρ, T), nous obtenons :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\int_T^{T_0} F_p(T) dT} \quad (2.34)$$

2.1.6. Relation entre la pression et la température

Le rapport des pressions est donné, en utilisant la relation (2.1), par :

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{T}{T_0} \quad (2.35)$$

Si nous prenons la différentielle de l'équation d'état des gaz parfait (2.1), nous pouvons écrire :

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (2.36)$$

Remplaçons l'expression (2.31) dans (2.36), nous aurons :

$$\frac{dP}{P} = \left\{ \frac{C_p(T)}{\gamma(T) \cdot T} + \frac{1}{T} \right\} dT \quad (2.37)$$

Cette relation présente la différentielle de la pression en fonction de la température pour un gaz à haute température.

2.1.7. Relation entre la section et la température

L'équation de conservation de la masse s'écrit [5] :

$$\rho V A = \text{constante} \quad (2.38)$$

Si nous prenons le Logarithme de la relation (2.38), la différentielle du résultat trouvé nous donne :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (2.39)$$

Alors :

$$\frac{dA}{A} = - \left\{ \frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} \right\} \quad (2.40)$$

Remplaçons $\frac{dV}{V}$ et $\frac{d\rho}{\rho}$ par les expressions (2.18) et (2.36) respectivement, nous obtenons :

$$\frac{dA}{A} = \left\{ \frac{C_p(T)}{\gamma(T) \cdot r \cdot T} dT - \frac{1}{2} \frac{C_p(T)}{H(T)} \right\} dT \quad (2.41)$$

La relation (2.41) présente la différentielle de la section de l'écoulement en fonction de la température.

Posons :

$$F_A(T) = \frac{C_p(T)}{a^2(T) - 2 H(T)} \quad (2.42)$$

La relation (2.41) aura donc la forme suivante :

$$\frac{dA}{A} = - F_A(T) dT \quad (2.43)$$

L'intégration de l'équation (2.43), entre l'état du col (A_* , T_*) et un état quelconque (A , T) du divergent, détermine le rapport des sections supersonique qui sera donné par :

$$\frac{A}{A_*} = e^{\int_T^{T_*} F_A(T) dT} \quad (2.44)$$

Notons que pour calculer les paramètres ρ et A , nous avons besoin de calculer l'intégrale d'une certaine fonction où la procédure analytique est impossible vu la complexité de la fonction à intégrer. Donc, notre intérêt s'oriente vers le calcul numérique. Les paramètres M , ρ et A sont tous fonctions de la température.

2.1.8. Débit massique critique

Le débit massique traversant une section A est donné par [5]:

$$\dot{m} = \int_A \rho V \cos \theta dA \quad (2.45)$$

Avec :

θ : angle que fait le vecteur vitesse avec la normale à la section A .

Si nous divisons la relation (2.45) par la quantité $A_* \rho_0 a_0$, nous aurons :

$$\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0} = \int_A \frac{\rho}{\rho_0} \frac{a}{a_0} M \cos \theta \frac{dA}{A_*} \quad (2.46)$$

Sachant que le débit critique est constant, donc nous pouvons le calculer au niveau du col de la tuyère, puisque tous les paramètres sont constants au niveau de cette section.

Alors, nous aurons au col :

$$\rho = \rho_*$$

$$A = A_*$$

$$a = a_*$$

$$M = 1 \quad (\text{écoulement sonique})$$

$$\theta = 0 \quad (\text{écoulement horizontal})$$

Donc, la relation (2.46) se réduit à une relation plus simple :

$$\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0} = \frac{\rho_* a_*}{\rho_0 a_0} \quad (2.47)$$

La détermination du rapport des vitesses du son, à une température T, se fait par l'utilisation de la relation (2.9). Nous obtenons :

$$\frac{a}{a_0} = \frac{a(T)}{a(T_0)} = \sqrt{\frac{\gamma(T)}{\gamma(T_0)} \cdot \frac{T}{T_0}} \quad (2.48)$$

La relation (2.48) montre qu'il faut tenir compte de la variation du rapport $\gamma(T)$ pour la détermination du rapport des vitesses du son, ce qui n'est pas le cas pour un gaz parfait où le rapport des chaleurs spécifiques est considéré comme constant et la relation (2.48) contient uniquement le rapport des températures.

2.1.9. Relations thermodynamiques d'un gaz parfait

Pour faire une comparaison entre le cas à Haute Température et le cas d'un gaz parfait, nous rappelons les relations thermodynamiques données par la théorie d'un gaz parfait [5] :

$$\frac{T}{T_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-1} \quad (2.49)$$

$$\frac{P}{P_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.50)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.51)$$

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (2.52)$$

$$\frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0} = \left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (2.53)$$

Les relations (2.49), (2.50), (2.51) et (2.52), donnant les paramètres T, P, ρ et A, sont reliées explicitement avec le nombre de Mach " M " qui est la variable principale pour

un gaz parfait. Pour notre modèle, la variable principale est la température T à cause de l'équation (2.21), reliant M et T , dont nous ne pouvons déterminer l'expression analytique de son inverse.

2.2. Procédure de calcul

Nous présentons en premier lieu, la table de variation de la chaleur spécifique C_P et le rapport γ , pour l'air à une pression élevée [3]. Les valeurs de γ et de C_P sont données en fonction de la température par le tableau (2.1).

T (°K)	$C_P(T) \left(\frac{J}{Kg \cdot ^\circ K} \right)$	$\gamma(T)$	T (°K)	$C_P(T) \left(\frac{J}{Kg \cdot ^\circ K} \right)$	$\gamma(T)$
55.538	1001.104	1.402	1222.205	1178.509	1.322
222.205	1001.104	1.402	1277.761	1186.893	1.319
277.761	1002.885	1.401	1333.316	1192.570	1.317
305.538	1004.675	1.400	1444.427	1204.142	1.313
333.316	1006.473	1.399	1555.538	1216.014	1.309
361.094	1008.281	1.398	1666.650	1225.121	1.306
388.872	1011.923	1.396	1777.761	1234.409	1.303
416.650	1015.603	1.394	1888.872	1243.883	1.300
444.427	1019.320	1.392	1999.983	1250.305	1.298
499.983	1028.781	1.387	2111.094	1256.813	1.296
555.538	1054.563	1.374	2222.205	1263.410	1.294
611.094	1054.563	1.370	2333.316	1270.097	1.292
666.650	1067.077	1.368	2444.427	1273.476	1.291
722.205	1080.005	1.362	2555.538	1276.877	1.290
777.761	1093.370	1.356	2666.650	1283.751	1.288
833.316	1107.192	1.350	2777.761	1287.224	1.287
888.872	1119.078	1.345	2888.872	1290.721	1.286
944.427	1131.314	1.340	2999.983	1294.242	1.285
999.983	1141.365	1.336	3111.094	1297.789	1.284
1055.538	1151.658	1.332	3222.205	1301.360	1.283
1111.094	1162.202	1.328	3333.316	1304.957	1.282
1166.650	1170.280	1.325	3444.427	1304.957	1.282
			3555.538	1308.580	1.281

Tableau (2.1) : Table de variation de $C_P(T)$ et $\gamma(T)$ pour l'air.

2.2.1. Polynômes d'interpolation de $C_P(T)$ et $\gamma(T)$

Les interpolations des valeurs de C_P et de γ , en fonction de la température, sont respectivement choisies par des polynômes de 9^{ème} et de 10^{ème} degré. La raison de ce choix est de minimiser les opérations mathématiques de calcul. En outre, nous avons opté, pour l'écriture des fonctions $C_P(T)$ et $\gamma(T)$ pour le schéma de *HORNER*. Alors :

$$C_p(T) = a_1 + T(a_2 + T(a_3 + T(a_4 + T(a_5 + T(a_6 + T(a_7 + T(a_8 + T(a_9 + T(a_{10})))))))))) \quad (2.54)$$

$$\gamma(T) = b_1 + T(b_2 + T(b_3 + T(b_4 + T(b_5 + T(b_6 + T(b_7 + T(b_8 + T(b_9 + T(b_{10} + T(b_{11})))))))))) \quad (2.55)$$

Les coefficients a_i ($i=1, 2, \dots, 10$) et b_i ($i = 1, 2, \dots, 11$) sont donnés par le tableau (2.2) suivant :

i	a_i	b_i
1	1001.1058	1.4030049
2	0.040661289	$-4.8380251 \cdot 10^{-5}$
3	-0.00063376997	$5.7713164 \cdot 10^{-7}$
4	$2.7474759 \cdot 10^{-6}$	$-2.4333247 \cdot 10^{-9}$
5	$-4.0338459 \cdot 10^{-9}$	$4.1173757 \cdot 10^{-12}$
6	$3.0697736 \cdot 10^{-12}$	$-3.8217601 \cdot 10^{-15}$
7	$-1.3509355 \cdot 10^{-15}$	$2.1579012 \cdot 10^{-18}$
8	$3.472262 \cdot 10^{-19}$	$-7.6237753 \cdot 10^{-22}$
9	$-4.8467531 \cdot 10^{-23}$	$1.6491564 \cdot 10^{-25}$
10	$2.8411878 \cdot 10^{-27}$	$-1.999789 \cdot 10^{-29}$
11	/	$1.0420059 \cdot 10^{-33}$

Tableau (2.2) : Coefficients des polynômes $C_p(T)$ et $\gamma(T)$.

Un problème se pose durant l'interpolation des formules (2.54) et (2.55). Après présentation graphique des polynômes de $C_p(T)$ et de $\gamma(T)$ et après comparaison avec les valeurs données par le tableau (2.1), nous remarquons, qu'au lieu d'avoir une fonction constante à basse température jusqu'à environ 240 K, il y a une variation ondulée dans cette portion. A cet effet, une correction est faite pour rapprocher les fonctions aux valeurs de la table. Donc, si

$$T = \bar{T} = 240 \text{ K}$$

Les fonctions (2.54) et (2.55) donnent les valeurs suivantes :

$$\bar{C}_p = C_p(\bar{T}) = 1001.15868 \text{ J/(Kg. K)}$$

$$\bar{\gamma} = \gamma(\bar{T}) = 1.40199$$

Nous aurons donc deux cas de figures pour la correction des fonctions $C_p(T)$ et $\gamma(T)$:

- Si $T \leq \bar{T}$, nous optons pour la correction suivante :

$$\begin{cases} C_p(T) = \bar{C}_p \\ \gamma(T) = \bar{\gamma} \end{cases}$$

- Si $T > \bar{T}$, nous utilisons les relations (2.54) et (2.55).

Pour la détermination de la forme analytique des fonctions $C_p(T)$ et $\gamma(T)$, nous pouvons avoir plusieurs formes de polynômes en utilisant plusieurs procédures et méthodes. Dans notre cas, pour prendre une décision sur le choix de la bonne forme d'interpolation, il faut faire une étude sur les erreurs entre les valeurs de la table (2.1) et les valeurs données par la substitution dans l'équation analytique du polynôme d'interpolation. Un problème qui nécessiterait la consécration de toute une étude.

2.2.2. Intégration de la chaleur spécifique $C_p(T)$

Une fois l'interpolation faite par la détermination des coefficients de chaque polynôme interpolé, nous déterminons la fonction $H(T)$, donnée par la relation (2.16), par intégration de la fonction $C_p(T)$ dans l'intervalle $[T, T_0]$. $H(T)$ est alors une fonction à un paramètre T_0 . Elle restera définie tant que $T \leq T_0$.

Si nous remplaçons la relation (2.54) dans (2.16) et nous écrivons le résultat obtenu sous la forme du schéma de *HORNER*, nous aurons :

$$H(T) = H_0 \left[c_1 + T(c_2 + T(c_3 + T(c_4 + T(c_5 + T(c_6 + T(c_7 + T(c_8 + T(c_9 + T(c_{10})))))))) \right] \quad (2.56)$$

Avec :

$$H_0 = c_1 + T_0(c_2 + T_0(c_3 + T_0(c_4 + T_0(c_5 + T_0(c_6 + T_0(c_7 + T_0(c_8 + T_0(c_9 + T_0(c_{10})))))))) \quad (2.57)$$

et

$$c_i = \frac{a_i}{i} \quad (i=1, 2, 3, \dots, 10)$$

Comme la fonction $H(T)$ est obtenue en intégrant la fonction $C_p(T)$ et comme cette dernière présente un problème lorsque $T \leq T_0$, il est nécessaire de corriger ce problème pour la fonction $H(T)$:

- Si $T_0 < \bar{T}$, alors : $H(T) = \bar{C}_p(T_0 - T)$
- Si $T_0 > \bar{T}$, deux cas se présentent :
 1. Si $T > \bar{T}$, nous utilisons la formule (2.56) pour calculer $H(T)$.
 2. Si $T \leq \bar{T}$, nous utilisons la formule suivante :

$$H(T) = \bar{C}_p(\bar{T} - T) + H(\bar{T})$$

2.2.3. Calcul numérique des rapports thermodynamiques

La détermination des rapports des masses volumiques et des sections, donnés respectivement par les formules (2.34) et (2.44), demande l'intégration numérique des fonctions $F_p(T)$ et $F_A(T)$ dans les intervalles respectifs $[T, T_0]$ et $[T, T^*]$. Notons que la fonction $F_A(T)$ dépend du paramètre T_0 .

Pour avoir une idée sur la variation de chacune des deux fonctions précédentes, avant de prendre une décision sur le choix de la quadrature d'intégration, nous avons tracé ses courbes de variations. Elles sont respectivement illustrées par les figures (2.1) et (2.2).

Nous pouvons conclure que les quadratures d'intégration à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision vue la variation très rapide aux extrémités gauches de chaque intervalle. Pour une bonne présentation à ces extrémités, le traçage des fonctions est choisi pour la température $T_0=500$ K (basse température) et $M_S=6.0$ (extrême supersonique). Nous remarquons que chaque fonction présente une dérivée très grande au voisinage de la température T_S . Cette variation devient très importante lorsque T_S est très petite. Une condensation des nœuds est alors nécessaire au voisinage de la température T_S pour les deux fonctions. Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision très élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature.

La quadrature d'intégration choisie est celle de SIMPSON [6], pour le calcul numérique des intégrales données par les formules (2.34) et (2.44). La fonction de condensation utilisée pour nos calculs est celle de ROBERT modifiée par EISEMAN [7]. Cette fonction est donnée par :

$$s_i = b_1 z_i + (1 - b_1) \left[1 - \frac{\tanh[b_2(1 - z_i)]}{\tanh(b_2)} \right] \quad (2.58)$$

Avec :

$$z_i = \frac{i-1}{N_p - 1}, \quad 1 \leq i \leq N_p \quad (2.59)$$

b_1 et b_2 sont des paramètres de contrôle de distribution des nœuds,

N_p est le nombre de points pour la quadrature de SIMPSON.

Après la détermination de la fonction de condensation (s), nous pouvons déterminer la distribution des abscisses " T " par :

$$\frac{T - T_{\text{Gauche}}}{T_{\text{Droite}} - T_{\text{Gauche}}} = f(s) \quad (2.60)$$

Avec :

$$T_{\text{Droite}} = \begin{cases} T_0 & \text{pour la fonction } F_p(T) \\ T_* & \text{pour la fonction } F_A(T) \end{cases} \quad (2.61)$$

et

$$T_{\text{Gauche}} = \begin{cases} T_* & \text{pour le paramètre critique} \\ T_S & \text{pour les paramètres à une section donnée.} \end{cases} \quad (2.62)$$

La fonction $f(s)$ de la relation (2.40) est arbitraire. Pour les calculs, nous optons pour la forme suivante :

$$f(s) = s$$

et la distribution des nœuds se fait de la manière suivante :

$$T_i = s_i (T_{\text{Droite}} - T_{\text{Gauche}}) + T_{\text{Gauche}} \quad (2.63)$$

Si nous prenons pour b_1 des valeurs proches de zéro (par exemple $b_1=0.1$) et $b_2=2.0$, nous pouvons condenser les nœuds vers l'extrémité gauche T_S de l'intervalle. Si nous prenons des valeurs de b_1 proche de 2 (par exemple $b_1=1.9$), nous pouvons condenser les nœuds vers l'extrémité droite. Si nous voulons des sous intervalles de même longueur, nous pouvons prendre $b_1=1.0$. La figure (2.3) suivante présente la distribution des nœuds suivant la valeur de b_1 . Il faut noter que notre intérêt est de condenser les nœuds vers l'extrémité gauche T_S vu la variation des fonctions $F_p(T)$ et $F_A(T)$.

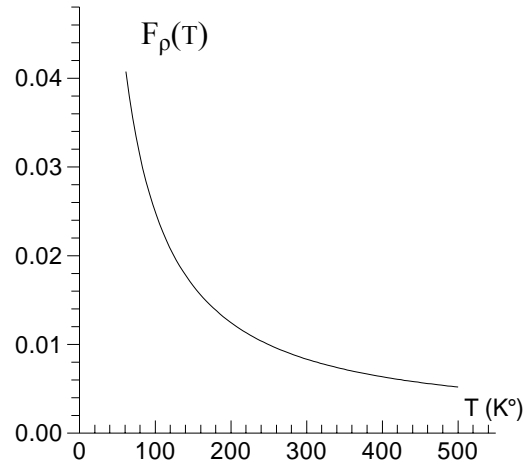


Figure (2.1) : Variation de la fonction $F_\rho(T)$ dans $[T_S, T_0]$.

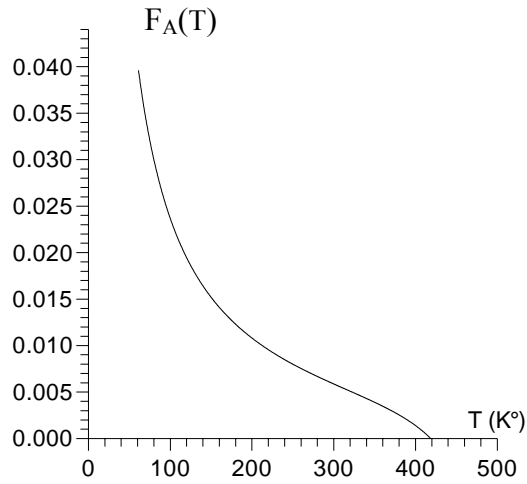


Figure (2.2) : Variation de la fonction $F_A(T)$ dans $[T_S, T^*]$.

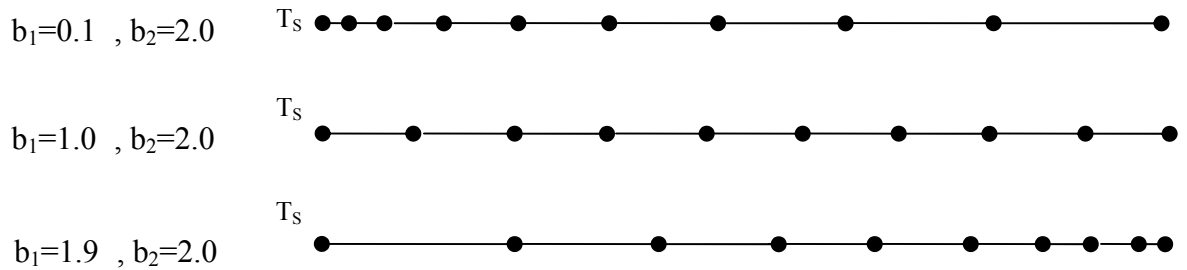


Figure (2.3) : Présentation de la condensation des nœuds

2.3. Détermination des paramètres critiques au col correspondants à T_0

L'état générateur est donné par le nombre de Mach nul ($M = 0$). Les paramètres critiques correspondant à la température T_0 et au nombre de Mach $M=1$ (cas au col de la tuyère) peuvent alors être déterminés.

Les données du problème de l'écoulement à Haute température se résument comme suit :

- T_0 : Température génératrice de la chambre de combustion.
- r : Constante du gaz (l'air dans notre cas).
- M_S : Nombre de Mach à une section donnée de la tuyère.
- La table donnant les valeurs de C_p et de γ en fonction de la température pour la substance choisie.
- N_P : Nombre de points pour la quadrature de SIMPSON [6].
- b_1, b_2 : Paramètres de contrôle de la distribution des nœuds.
- ε : Précision voulue pour résoudre une équation algébrique par l'algorithme de dichotomie [6].

2.3.1. Rapport critique des températures $\frac{T_*}{T_0}$

Si nous remplaçons, dans la relation (2.21), les paramètres M et T par les conditions critiques du col, nous obtenons :

$$M_*^2 = \frac{2 H(T_*)}{\gamma(T_*) \cdot r \cdot T_*} \quad (2.64)$$

Comme $M_* = 1$, la relation (2.64) devient alors :

$$F(T_*) = 2 H(T_*) - a^2(T_*) = 0 \quad (2.65)$$

La détermination de la racine T_* de l'équation (2.65) se fait en utilisant l'algorithme de dichotomie [6]. L'algorithme de cette méthode est illustré dans l'annexe B. Sachant que $T_* < T_0$, nous pouvons choisir facilement un intervalle $[T_1, T_2]$ contenant la température T_* qui doit vérifier la condition $F(T_1) \cdot F(T_2) \leq 0$. Nous pouvons prendre $T_1 = 0$ K et $T_2 = T_0$.

Une fois cet intervalle déterminé, nous pouvons calculer T_1 , avec une précision ε , et par suite calculer le rapport $\frac{T_*}{T_0}$ correspondant à la température T_0 . La valeur T_* obtenue dépend de la précision ε . Le nombre de subdivisions K de l'intervalle $[T_1, T_2]$, correspondant à la précision ε nécessaire pour déterminer la température, est donné par [6]:

$$K = 1.4426 \operatorname{Log} \left(\frac{T_2 - T_1}{\varepsilon} \right) + 1 \quad (2.66)$$

Si $\varepsilon = 10^{-16}$, le nombre de subdivisions K ne peut excéder 66.

2.3.2. Rapport critique des masses volumiques $\frac{\rho_*}{\rho_0}$

Si nous remplaçons $T=T_*$ dans la relation (2.34) et si nous intégrons la fonction, dans l'intervalle $[T_*, T_0]$ en utilisant la quadrature de *SIMPSON* avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche, nous obtenons le rapport critique suivant des masses volumiques :

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = e^{-\int_{T_*}^{T_0} F_P(T) dT} \quad (2.67)$$

2.3.3. Rapport critique des pressions $\frac{P_*}{P_0}$

Le rapport critique des pressions peut être déterminé en remplaçant les rapports critiques des températures et des masses volumiques dans la relation (2.35), nous aurons :

$$\frac{P_*}{P_0} = \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right) \cdot \left(\frac{T_*}{T_0} \right) \quad (2.68)$$

2.3.4. Rapport critique des vitesses du son $\frac{a_*}{a_0}$

Le rapport des vitesses critiques du son peut être obtenu en substituant la valeur T_* dans la relation (2.48), nous obtenons :

$$\frac{a_*}{a_0} = \frac{a(T_*)}{a(T_0)} = \sqrt{\frac{\gamma(T_*)}{\gamma(T_0)} \cdot \frac{T_*}{T_0}} \quad (2.69)$$

2.3.5. Débit massique critique

Pour trouver la valeur adimensionnelle du débit massique critique, il suffit tout simplement de remplacer l'expression du rapport critique des masses volumiques (2.67), et celle des vitesses du son, donnée par la relation (2.69), dans l'expression (2.47).

2.4. Détermination des paramètres à une section quelconque du divergent

Nous procédons maintenant à la détermination des rapports thermodynamiques et géométriques à une section quelconque du divergent de la tuyère correspondant à un nombre de Mach supersonique M_S . Cette section est encore caractérisée par :

$$\rho = \rho_S$$

$$P = P_S$$

$$A = A_S$$

$$T = T_S.$$

2.4.1. Rapport des températures $\frac{T_S}{T_0}$

Remplaçons $T = T_S$ et $M = M_S$ dans la relation (2.18), nous obtenons :

$$M_S^2 = \frac{2 H(T_S)}{\gamma(T_S) \cdot r \cdot T_S}$$

Sous une autre forme, nous obtenons :

$$F(T_S) = 2H(T_S) - M_S^2 a^2(T_S) = 0 \quad (2.70)$$

La détermination de la racine T_S de l'équation (2.70), se fait de la même manière que celle de T^* et avec la même démarche, par l'algorithme de dichotomie. Sauf qu'ici, nous avons $T_S < T^*$. Une fois l'intervalle $[T_1, T_2]$ déterminé, nous pouvons déterminer T_S , avec une précision ε , et par suite le rapport $\frac{T_S}{T_0}$ correspondant à la température T_0 . Nous pouvons prendre dans ce cas $T_1 = 0$ K et $T_2 = T^*$. La valeur obtenue de T^* dépend de la précision ε .

2.4.2. Rapport des masses volumiques $\frac{\rho_S}{\rho_0}$

Remplaçons $T = T_S$ dans la relation (2.33) et intégrons la fonction dans $[T_S, T_0]$, en utilisant la quadrature de SIMPSON avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche, nous obtenons le rapport critique des masses volumiques.

$$\frac{\rho_S}{\rho_0} = e^{-\int_{T_S}^{T_0} F_\rho(T) dT} \quad (2.71)$$

2.4.3. Rapport des pressions $\frac{P_S}{P_0}$

Le rapport des pressions peut être déterminé en remplaçant les rapports des températures et des masses volumiques obtenus, qui sont donnés par les formules (2.70) et (2.71), dans la relation (2.35), nous aurons :

$$\frac{P_S}{P_0} = \left(\frac{\rho_S}{\rho_0} \right) \cdot \left(\frac{T_S}{T_0} \right) \quad (2.72)$$

2.4.4. Rapport des vitesses du son $\frac{a_S}{a_0}$

Le rapport des vitesses du son peut être obtenu en remplaçant T par T_S dans la relation (2.48), nous obtenons :

$$\frac{a_S}{a_0} = \frac{a(T_S)}{a(T_0)} = \sqrt{\frac{\gamma(T_S) \cdot T_S}{\gamma(T_0) \cdot T_0}} \quad (2.73)$$

2.4.5. Rapport des sections $\frac{A_S}{A_*}$

L'obtention du rapport géométrique des sections se fait par la substitution de T par T_S , dans la relation (2.44), ensuite l'intégration de la relation obtenue dans l'intervalle $[T_S, T_0]$ en utilisant la quadrature de SIMPSON avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche T_S , nous obtenons :

$$\frac{A_S}{A_0} = e^{\int_{T_S}^{T_0} F_A(T) dT} \quad (2.74)$$

Remarque :

A titre d'information, nous pouvons calculer le débit critique dans cette section en introduisant les paramètres nécessaires dans la relation (2.46) puis en intégrant le résultat obtenu, nous aurons :

$$\frac{\dot{m}}{A_*} = \frac{\rho_S}{\rho_0} \frac{a_S}{a_0} M_S \frac{A_S}{A_*} \quad (2.75)$$

Puisque le débit est constant à travers la tuyère, les relations (2.47) et (2.75) donnent le même résultat.

La précision du résultat de l'intégration de (2.67), (2.71) et (2.74) dépend essentiellement des valeurs de N_P , b_1 et b_2 .

CHAPITRE 3

FONCTION DE PRANDTL-MEYER A HAUTE TEMPERATURE

Dans ce chapitre nous allons présenter l'effet de la variation des chaleurs spécifiques $C_p(T)$ et $\gamma(T)$ sur l'expression de la fonction de Prandtl-Meyer, avec la même démarche présentée dans le chapitre (2) pour l'étude de l'écoulement supersonique à haute température. La relation obtenue de la fonction de PRANDTL-MEYER est une généralisation du cas d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes.

La fonction de PRANDTL-MEYER est très importante pour faire l'étude de l'écoulement supersonique dans une tuyère.

3.1. Formulation mathématique

Pour un choc oblique infinitésimal, la relation entre la déviation de l'écoulement en un point et la variation de la vitesse de part et d'autre de l'onde de Mach est connue par la relation de PRANDTL-MEYER. Elle est donnée sous forme différentielle par [5] :

$$dv = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (3.1)$$

La relation (3.1) est très importante pour faire l'étude de l'écoulement supersonique isentropique externe ou interne.

Remplaçons les relations (2.18) et (2.21) dans la relation (3.1), nous obtiendrons la relation suivante :

$$dv = -F_v(T) dT \quad (3.2)$$

Avec :

$$F_v(T) = \frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{\frac{2H(T)}{a^2(T)} - 1} \quad (3.3)$$

La fonction v est définie purement dans le régime supersonique. Lorsque $M=1.0$, nous prenons $v=0.0$. Alors, la valeur de v pour $M>1.0$ ($T<T_*$) est donnée par :

$$v(T)=\int_T^{T_*} F_v(T) dT \quad (3.4)$$

Notons que le calcul de la valeur de v a besoin d'intégrer la fonction $F_v(T)$. La procédure analytique est impossible à faire vu la complexité de cette fonction à intégrer. Notre intérêt s'oriente donc vers le calcul numérique. Les paramètres M et v sont reliés avec la température T de l'écoulement. A une température $T=T_S$ on prend $v=v_S$.

Pour faire une comparaison entre le cas à Haute Température et le cas d'un gaz parfait, nous rappelons La fonction de PRANDTL-MEYER donnée par la théorie d'un gaz parfait [5] :

$$v(M)=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctg\left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}(M^2-1)\right]-\arctg\left[\sqrt{M^2-1}\right] \quad (3.5)$$

La fonction de PRANDTL-MEYER (3.5) est reliée explicitement avec le nombre Mach, qui est la variable principale pour le cas d'un gaz parfait, contrairement au cas de notre modèle où la variable principale est la température et ceci à cause de l'équation (2.21), présentée dans le chapitre (2), qui relie M et T et que nous ne pouvons pas déterminer une expression analytique de son inverse.

3.2. Procédure de calcul

La détermination de la valeur de v_S de la relation (3.4) demande l'intégration numérique de la fonction $F_v(T)$ dans l'intervalle $[T_S, T_*]$. Notons qu'elle dépend du paramètre T_0 . Nous avons présenté dans la figure (3.1) la variation de cette fonction pour avoir une idée sur la forme exacte avant de prendre une décision sur le choix de la quadrature d'intégration.

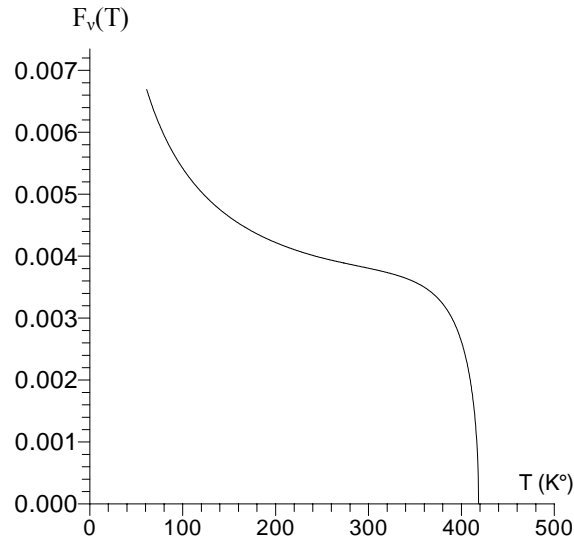


Figure (3.1) : Variation de la fonction $F_v(T)$ dans l'intervalle $[T_S, T^*]$

Nous pouvons conclure que les quadratures d'intégration à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision vue la variation très rapide de $F_v(T)$ aux extrémités de l'intervalle considéré. Le traçage de la fonction est choisi pour $T_0=500$ K (basse température) et $M_S=6$ (extrême supersonique) pour une bonne présentation aux extrémités. La fonction présente une dérivée très grande au voisinage de la température T^* et moindre au voisinage de T_S . Plus la variation devient importante plus T_S devient petite. Une condensation des nœuds est alors nécessaire au voisinage des températures T^* et T_S . Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature.

La quadrature d'intégration choisie est celle de SIMPSON [6] pour le calcul numérique de l'intégrale donnée par la relation (3.4). La forme de condensation prise dans nos calculs est présentée dans le chapitre (2) par la relation (2.58).

Après avoir obtenu "s", nous pouvons facilement déterminer la distribution des abscisses T à partir de la relation (3.6) suivante :

$$\frac{T-T_S}{T^*-T_S} = f(s) \quad (3.6)$$

La fonction $f(s)$ de la relation (3.6) est arbitraire. Pour nos calculs, nous optons pour la forme suivante :

$$f(s) = s$$

Alors, la distribution des nœuds se fait de la manière suivante :

$$T_i = s_i (T^* - T_S) + T_S \quad (3.7)$$

Si nous prenons des valeurs de b_1 proche de zéro (exemple $b_1=0.1$) et $b_2=2.0$, nous pouvons condenser les nœuds vers l'extrémité gauche T_S de l'intervalle. Pour des valeurs de b_1 proche de 2 (exemple $b_1=1.9$) et $b_2=2.0$, nous pouvons condenser les nœuds vers l'extrémité droite T^* .

Comme notre fonction présente une variation très rapide aux deux extrémités, il est nécessaire de condenser les nœuds vers les deux en même temps. La relation (2.58) permet de condenser les nœuds uniquement vers une extrémité, il est alors nécessaire de diviser l'intervalle $[T_S, T^*]$ en deux parties, par exemple $[T_S, T_M]$ et $[T_M, T^*]$, telle que :

$$T_M = \frac{T_S + T^*}{2}$$

Nous pouvons prendre alors, pour l'intervalle $[T_S, T_M]$ gauche, b_1 proche de zéro (exemple $b_1=0.1$) et $b_2=2.0$, et pour l'intervalle $[T_M, T^*]$ droite, b_1 proche de 2.0 (exemple $b_1=1.9$) et $b_2=2.0$ pour condenser respectivement les nœuds vers les extrémités gauche T_S et droite T^* . Nous divisons encore N_p en deux parties. Vu la forme de la fonction $F_v(T)$ dans l'intervalle de droite, il est nécessaire de donner un nombre de points assez grand pour converger rapidement l'intégrale (3.4). Alors, la subdivision de l'intervalle $[T_S, T_M]$ possède la forme suivante :

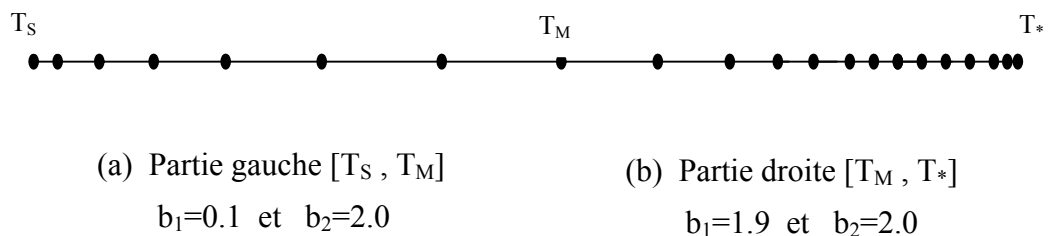


Figure (3.2) : Condensation des nœuds vers les deux extrémités en même temps

La procédure de calcul se résume dans les étapes suivantes :

3.2.1 Calcul de la température critique T^*

La température critique T^* est obtenue par la résolution de l'équation (2.65), illustrée dans le paragraphe 2.3.1) du chapitre (2) précédent.

3.2.2 Calcul de la température T_S à un nombre de Mach M_S

Le calcul de la température T_S est obtenu par la résolution de l'équation (2.70), illustrée dans le paragraphe (2.4.1) du chapitre (2) précédent.

3.2.3 Calcul de la valeur de v_S correspondant à un nombre de Mach M_S

La valeur de v_S pour la température T_S correspondant à T_0 peut être obtenue par intégration de la fonction $F_v(T)$ dans l'intervalle $[T_S, T^*]$ en utilisant la quadrature de SIMPSON avec condensation des nœuds vers les deux extrémités.

3.2.4 Problème inverse

Un quatrième problème, appelé problème inverse et figurant dans les applications pour les calculs des écoulements supersoniques externes et internes, est représenté par la détermination de la température T lorsque la valeur de la fonction de PRANDTL-MEYER v de cette température est connue. Nous supposons qu'à la température $T=T_S$, lorsque $M=M_S$, nous avons $v=v_S$. Le problème se pose pour la détermination de T_S en connaissant v_S .

A partir de la relation (3.4), nous pouvons écrire :

$$F(T_S) = v_S - \int_{T_S}^{T^*} F_v(T) \cdot dT = 0 \quad (3.8)$$

Nous avons $T_S < T^*$. La fonction v est toujours positive dans le régime supersonique. Pour déterminer T_S , racine de l'équation (3.8), nous utilisons l'algorithme de dichotomie combiné avec la quadrature de SIMPSON pour évaluer à chaque fois l'intégrale de la relation (3.8). En premier lieu, nous définissons un intervalle fermé $[T_1, T_2]$ contenant la température T_S qui vérifie la condition

$$F(T_1) \cdot F(T_2) \leq 0.$$

Nous pouvons prendre $T_2=T^*$ et $T_1=0$. En raccourcissant $[T_1, T_2]$, nous avons besoin à chaque fois du calcul de la valeur $F(T_3)$ avec T_3 milieu de $]T_1, T_2[$. Dans ce cas nous sommes obligés de calculer $v=v_3$, résultat de l'intégrale de (3.4) lorsque $T=T_3$.

3.3. Applications

Nous allons présenter deux applications, l'une concernant un écoulement externe et l'autre pour l'aérodynamique interne.

3.3.1. Détente supersonique autour d'un dièdre

L'application présentée concerne la détente supersonique autour d'un dièdre. Elle est très importante pour le calcul d'un écoulement supersonique lors d'une déviation supersonique ouverte et en particulier pour le cas de calcul d'un écoulement supersonique autour d'un profil d'aile pointu et ceci afin de déterminer les caractéristiques aérodynamiques comme, le coefficient de traînée d'onde C_x . Dans ce cas nous allons résoudre le problème de base dans les applications supersoniques externes en déterminant l'influence de la température génératrice (air libre) T_0 sur les résultats après la détente et, en particulier, le nombre de Mach M_2 en aval. Le schéma représentatif est illustré dans la figure (3.3). Sur cette figure, nous avons deux parois inclinées par rapport à l'horizontale avec des angles θ_1 et θ_2 respectivement. L'écoulement en amont est entièrement connu par les paramètres T_0, M_1, P_1, T_1 et ρ_1 . Le problème consiste à présenter le modèle mathématique et à déterminer les résultats juste après la détente par M_2, T_2, P_2 et ρ_2 . Notre intérêt se porte beaucoup plus sur le nombre de Mach M_2 . Les autres paramètres peuvent être déterminés en appliquant les relations données dans la référence [5] en posant $M=M_2$. Notons qu'après la détente, la température génératrice T_0 ne change pas.

D'après les références [1], [4] et [5], nous pouvons écrire :

$$v_2 = v_1 + \theta_1 - \theta_2 \quad (3.9)$$

Notons ici que $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 < 0$. La valeur v_1 est donnée par la relation (3.9) pour un gaz à haute température en posant $T=T_1$. Pour le cas d'un gaz parfait, elle est donnée par la relation (3.4) en posant $M = M_1$. Comme la différence $\theta_1 - \theta_2$ est positive, la valeur de v_2 est supérieure à celle de v_1 , ce qui donne :

$$M_2 > M_1 \text{ et } T_2 < T_1.$$

Le problème consiste à déterminer T_2 et M_2 correspondant à $v = v_2$. Il faut donc déterminer la racine de l'équation $F(T_2) = 0.0$ de la relation (3.8). Il faut ensuite substituer $T=T_2$ dans la relation (2.21) pour obtenir la valeur de M_2 .

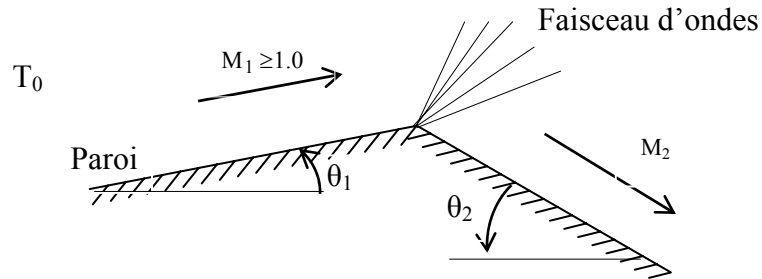


Figure (3.3) : Présentation d'un écoulement autour d'un dièdre.

3.3.2. Centre de détente au col d'une tuyère supersonique

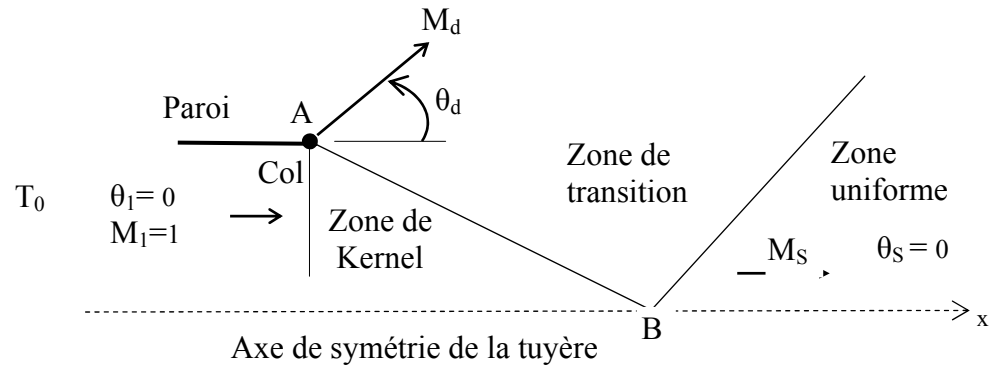
Ce problème est rencontré par exemple au col d'une tuyère supersonique, possédant une détente brusque et instantanée, lors de son dimensionnement. Si nous voulons obtenir une tuyère supersonique possédant une sortie uniforme, parallèle et horizontale ($M=M_S$ et $\theta=\theta_S=0.0$), il est nécessaire de dévier la tuyère d'un angle θ_d au col, d'une quantité donnée par [1] :

$$\theta_d = \frac{v_s}{2} \quad (3.10)$$

Avec $v = v_s$, v_s étant la valeur de la fonction de Prandtl-Meyer pour $M = M_S$. Elle est déterminée par la relation (3.4) pour un gaz à haute température en posant $T=T_S$ et elle est donnée par la relation (3.5) pour le cas d'un gaz parfait en posant $M = M_S$. La relation (3.10) est valable uniquement pour le cas d'une tuyère plane. Elle n'est plus valable pour le cas axisymétrique.

Le nombre de Mach M_d peut être déterminé par la suite. Il correspond à la fonction de PRANDTL-MEYER lorsque $v = v_d = \theta_d$. Nous avons besoin alors, pour le cas d'un gaz à haute température, de déterminer la température T_d , racine de l'équation $F(T_d) = 0$ de la relation (3.8). Il faut ensuite remplacer $T=T_d$ dans l'équation (2.15) pour déterminer M_d . Pour le cas d'un gaz parfait, il faut déterminer la racine de l'équation $\theta_d - v(M_d) = 0$, avec $v(M)$ donnée par la relation (3.5).

Nous pouvons considérer le problème de la détermination du nombre de Mach M_d comme le cas inverse du problème d'une détente supersonique autour d'un dièdre en posant $\theta_1=0$, $M_1=1$, $M_2=M_d$ et $\theta_2=\theta_d$, en connaissant la valeur de θ_2 et en déterminant la valeur de M_2 .



- AB : Dernière caractéristique descendante de la zone de Kernel.
- : Centre de détente au col de la tuyère.
- M_d : Nombre de Mach juste après la détente.
- θ_d : Déviation de l'écoulement juste après la détente.

Figure (3.4) : Centre de détente d'une tuyère supersonique.

CHAPITRE 4

DIMENSIONNEMENT D'UNE TUYERE A CORPS CENTRAL A HAUTE TEMPERATURE

4.1. Introduction

Les tuyères supersoniques jouent un rôle très important pour la conception des engins aérospatiaux. Les concepteurs aéronauticiens ont débuté les applications en 1935 par les tuyères coniques. A cette époque, toutes les études étaient basées sur les expériences. Le développement par ordinateur n'avait pas encore commencé.

Après quelques années, et en parallèle avec les développements expérimentaux et numériques, les concepteurs ont pensé à améliorer les performances des tuyères de propulsion. Ils ont remarqué que les tuyères coniques délivraient certes une certaine poussée mais avec une perte considérable, vu l'inclinaison de la portion supersonique comprise entre des angles allant de 15° à 30° . Si l'inclinaison de la tuyère à la sortie est nulle, la poussée sera donc maximale. Ce problème sera réglé par la recherche d'une forme d'une tuyère donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle. Afin de résoudre ce problème, les numériciens ont alors développé une méthode, appelée méthode des caractéristiques. Ils ont pu trouver plusieurs formes, parmi lesquelles citons deux formes les plus importantes, celle des tuyères à détente centrée et celle à zone de détente.

Depuis plusieurs années, les applications sont basées sur l'utilisation de ces deux formes de tuyères, surtout celle à détente centrée puisqu'elle pèse moins par rapport à la tuyère à zone d'expansion (détente).

Jusqu'à maintenant, trois formes de tuyères répondant à la conception ont été trouvées, chacune a ses avantages et ses inconvénients. Notons que les trois types de tuyères n'ont pas forcément la même masse si elles sont utilisées pour la même délivrance de poussée. Une question basée sur la masse peut maintenant être posée : peut-on trouver une forme plus performante pesant moins par rapport aux autres formes et qui délivrera les

mêmes performances thermodynamiques ? Nous pouvons dire que cette question est très intéressante pour les concepteurs des missiles et des avions supersoniques. A titre d'information, concernant les missiles, une chambre propulsive est constituée par deux parties : la tuyère et la chambre de combustion. L'organe tuyère constitue environ 70% de la masse de la structure. Cet organe est formé par deux tranches, une partie convergente et une autre divergente. La partie convergente est indispensable et sert à faire la liaison entre la chambre de combustion et la partie divergente de la tuyère afin de donner un écoulement sonique au col de la tuyère. Les concepteurs des souffleries n'ont pas ce problème, puisque pour eux, l'essentiel est que la tuyère donne un écoulement uniforme et parallèle. Le plus important est que le gaz sortant soit le plus possible froid. Nous pouvons dire dans ce cas, que le gaz utilisé influe sur la forme de la tuyère à conceptionnée et, par conséquent sur la masse de la tuyère. Avant de répondre à la question posée, nous pouvons dire que l'écoulement à l'entrée du col et à la sortie de la tuyère est horizontal pour toutes les formes mentionnées connues par les concepteurs.

L'expérience dans une soufflerie utilisant une tuyère supersonique adaptée, déterminée sur la base de l'hypothèse d'un gaz parfait, montre l'existence de dissipations internes visualisées par la naissance d'une onde de choc. Tant que la température génératrice de la chambre de combustion augmente, il y aura naissance d'ondes de choc, malgré le fait que la tuyère ait été conceptionnée pour avoir un écoulement isentropique. Le seul domaine de démonstration est alors que le gaz ne se comporte pas réellement comme un gaz parfait.

La forme structurale utilisée n'ayant pas changée. Le problème réside donc au niveau des hypothèses de calcul que le problème physique réel ne les accepte pas.

Comme conclusion, nous allons tenir compte de la variation de la chaleur spécifique $C_p(T)$ et du rapport des chaleurs spécifiques $\gamma(T)$ afin de voir ce qui se passe dans la forme de la tuyère.

La réponse préliminaire est que nous allons voir une augmentation du volume de la tuyère pour que le gaz se détende à l'aise pour avoir réellement un écoulement isentropique. La tuyère adaptée pour le cas d'un gaz parfait sera incluse dans le modèle des tuyères adaptées pour le cas à haute température.

La théorie unidimensionnelle reste toujours valable pour vérifier le rapport des sections entre la sortie et le col afin de comparer le calcul numérique par la méthode des caractéristiques. Le problème de calcul de l'écoulement à l'intérieur de la tuyère est assez délicat puisque la forme de la tuyère est à priori inconnue. Autrement dit, il faut trouver en même temps, le calcul de l'écoulement et la forme de la tuyère. Concernant la tuyère convergente, il n'y a pas de forme meilleure par rapport à d'autres, l'essentiel est que cette partie aie pour rôle de donner un écoulement critique au col et la forme divergente aie pour rôle d'accélérer l'écoulement de $M=1$ au col jusqu'à $M=M_S$ à la sortie. Il faut qu'il y ait une certaine détente dans la tuyère pour accélérer l'écoulement, et comme l'écoulement est horizontal au col et à la sortie, il faut une déviation de la paroi jusqu'à un certain angle maximal, que l'on appelle zone de détente ou d'expansion, il faut ensuite un redressement pour donner un angle $\theta = 0$ à la sortie, que l'on appelle zone de redressement. La longueur de la tuyère supersonique (partie divergente) dépend essentiellement de la longueur de la tuyère dans la zone d'expansion. Si nous faisons une inclinaison de l'écoulement au col au lieu d'être horizontal, il sera incliné d'un certain angle tout en gardant l'uniformité de l'écoulement pour que la théorie unidimensionnelle reste toujours valable, nous obtiendrons une nouvelle forme qui répond bien à la question posée auparavant. Ce type de tuyères est appelé tuyère à corps central. Il constitue le but de notre travail.

La forme de ce type de tuyères est illustrée dans la figure (4.2). Les concepteurs ont trouvé deux formes dans ce contexte ;

- La tuyère à corps central type à bouchon "Plug nozzle" qui est le but de ce travail.
- La tuyère à corps central de type "Expansion-deflexion nozzle".

La figure (4.1) présente l'historique du développement des tuyères basé sur la considération de l'écoulement au col et à la sortie. La forme (c) est conçue pour une tuyère à corps central. C'est la forme la plus récente.

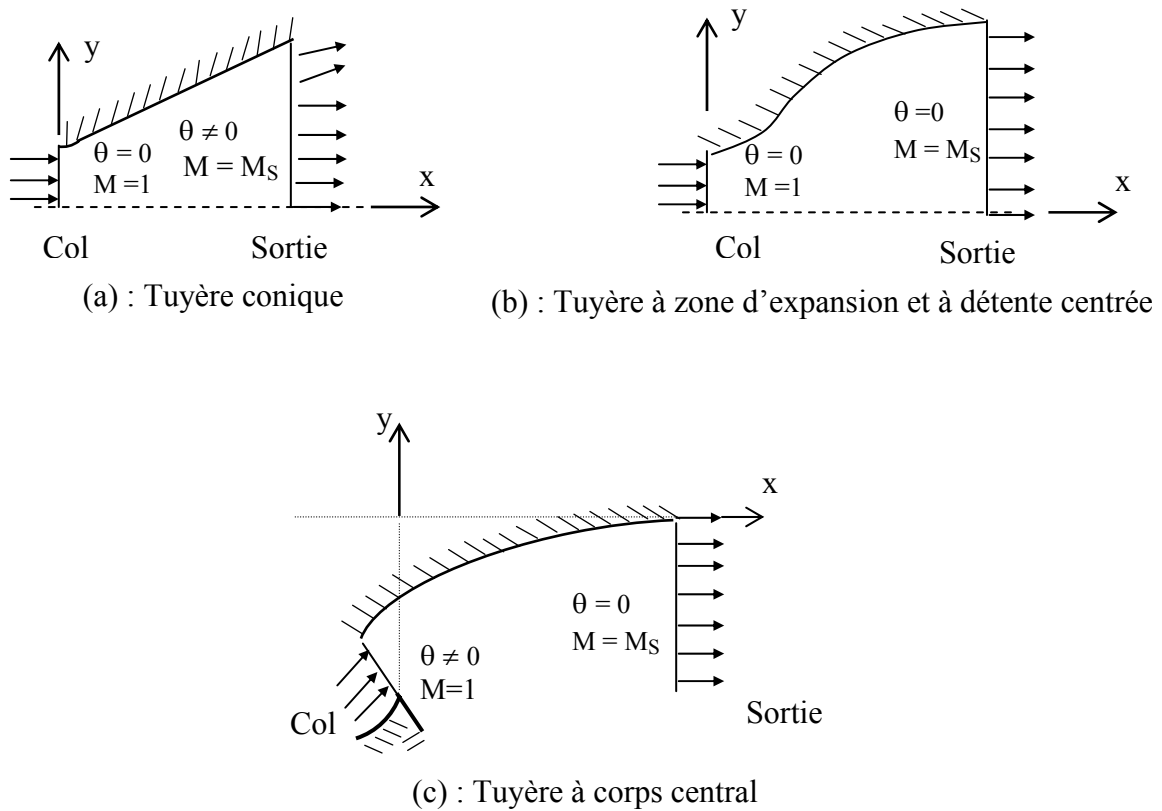


Figure (4.1) : Etat de l'écoulement au col et à la sortie de la tuyère

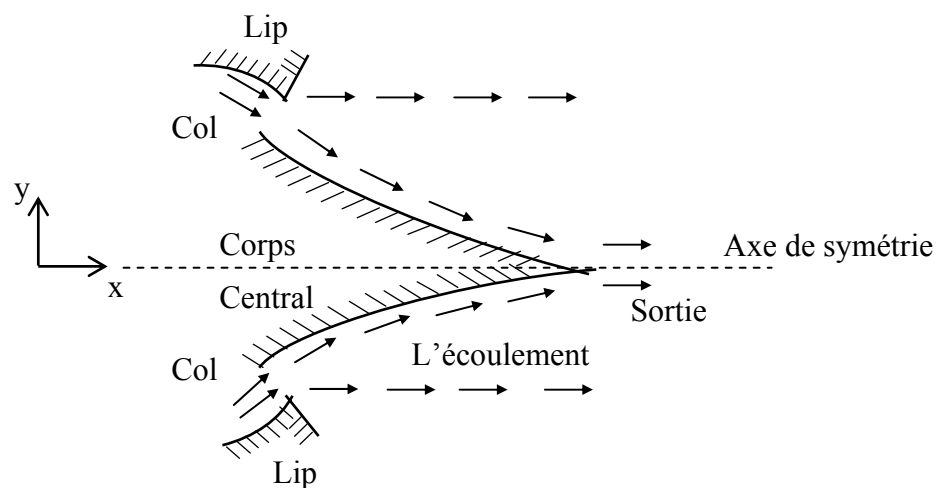


Figure (4.2) : Aperçu sur la géométrie de la tuyère à corps central

L'écoulement à travers la paroi se redresse uniquement de l'angle $\theta = \theta^*$ au col jusqu'à l'horizontal « $\theta = 0$ » à la sortie. Ici la zone d'expansion est absente. Autrement dit, elle est contractée en un point. Nous pouvons donc dire maintenant, que nous avons une possibilité de gagner une masse de la tuyère. Dans le chapitre 5, nous allons présenter les divers résultats obtenus sur la forme de la tuyère étudiée et la comparaison avec les anciennes formes du point de vue masse, longueur et performance. La forme de l'écoulement à l'entrée et à la sortie, des anciennes et de la nouvelle forme sont présentées dans la figure (4.1).

Pour arriver à dévier l'écoulement au col, on introduit un 'Lip' avec une inclinaison Ψ considérée par rapport à la verticale et l'écoulement se trouve à l'extérieur comme le montre la figure suivante (4.3). Donc le 'Lip' sera incliné d'un angle Ψ comme l'indique la figure suivante :

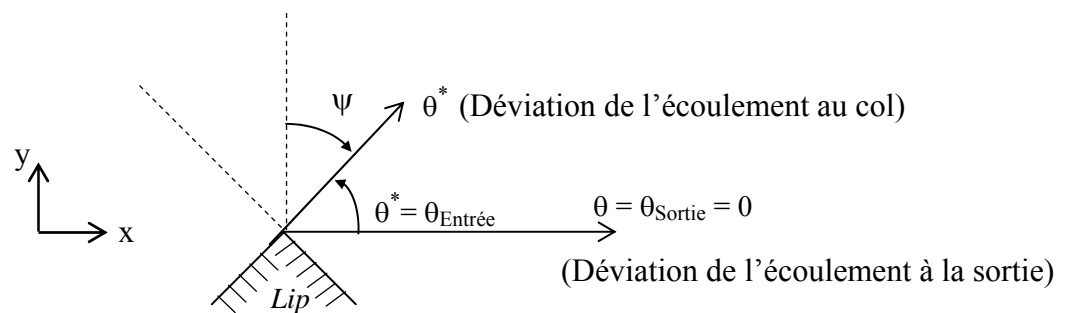


Figure (4.3) : Présentation de l'angle Ψ de déviation de 'Lip'

Pour arriver maintenant à calculer l'écoulement et à déterminer la forme de la tuyère, nous allons présenter et récapituler les diverses hypothèses considérées.

4.2. Hypothèses fondamentales

Les hypothèses fondamentales introduites pour présenter le modèle mathématique de calcul sont les suivantes :

- Le gaz utilisé est considéré comme parfait. La loi $P = \rho r T$ reste valable. C'est-à-dire que le volume occupé par les molécules (le co-volume) est nul.
- Le gaz est considéré comme thermiquement parfait. Le seuil de dissociation des molécules n'est pas encore atteint, c'est-à-dire que nous travaillons toujours avec des molécules et non pas avec des atomes.

- Le gaz est considéré comme calorifiquement imparfait. Les valeurs de γ et de C_p varient explicitement avec la température. Cette variation est donnée par le tableau (4.1).
- L'écoulement est permanent : la variation des paramètres avec le temps est nulle.
- L'écoulement est irrotationnel, c'est-à-dire qu'il y a absence de dissipations causées par l'onde de choc.
- L'écoulement est bidimensionnel.

4.3. Présentation de la méthode

En premier lieu, le calcul de l'écoulement et la détermination du contour de la tuyère à haute température sont basés, essentiellement, sur la détente de PRANDTL MEYER présentée par la relation (3.4) du chapitre (3), récapitulée par :

$$v(T) = \int_T^{T^*} F_v(T) dT \quad (4.1)$$

Avec :

$$F_v(T) = \frac{C_p(T)}{2 H(T)} \sqrt{\frac{2 H(T)}{a^2(T)} - 1}$$

Nous savons que (voir chapitre (2)) :

$$a^2(T) = \gamma(T) r T \quad (4.2)$$

$$V^2 = 2 H(T) \quad (4.3)$$

$$M(T) = \frac{\sqrt{2 H(T)}}{a(T)} \quad (4.4)$$

$$H(T) = \int_T^{T_0} C_p(T) dT \quad (4.5)$$

Sur la figure (4.4), les lignes AE et AS représentent, respectivement, les ondes de Mach du col et de la section de sortie. Par conséquent, les angles de Mach μ_E et μ_S sont calculés par la formule suivante, mesurée par rapport à la déviation du vecteur vitesse de l'écoulement :

$$\mu_E = \arcsin\left(\frac{1}{M}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1}\right) = 90^\circ$$

et

$$\mu_S = \arcsin\left(\frac{1}{M_S}\right)$$

Comme $M_S > 1.0$ alors $\mu_S < \mu_E$

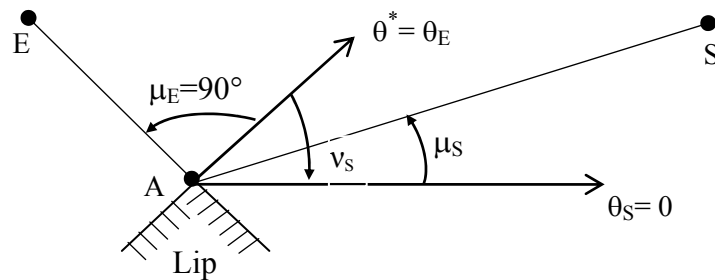


Figure (4.4) : Présentation des angles de Mach du col et de la section de sortie

Entre les lignes de Mach AE et AS, il y a une infinité d'ondes de Mach centrées, divergentes et qui seront issues du point A de la carène (ou Lip) de la tuyère comme le montre la figure (4.5). Chaque ligne donne un vecteur vitesse V . A partir de ce vecteur nous pouvons facilement déduire un point du contour du corps central. Comme le gaz est parfait, le vecteur vitesse est toujours tangent à une ligne de courant qui sera considérée comme étant le contour de la paroi de la tuyère à rechercher. Par conséquent, le point A est un point de discontinuité en paramètres et en particulier en M , T et θ .

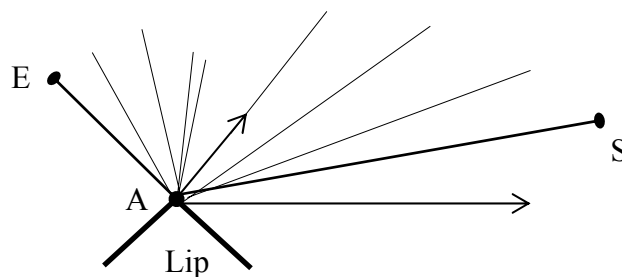


Figure (4.5) : Naissance des ondes de détente divergentes du point A du 'Lip'

Les propriétés de l'écoulement, telles que le nombre de Mach, la déviation de l'écoulement et les rapports des pressions $\frac{P}{P_0}$, des températures $\frac{T}{T_0}$ et des masses volumiques $\frac{\rho}{\rho_0}$ sont constants le long de chaque ligne de Mach issue du point A. Cette

propriété nous donne l'avantage de déterminer rapidement et explicitement la position du point de la paroi.

Chaque ligne de Mach issue du point A sera absorbée par la paroi de la tuyère si la tuyère est plane. Dans la réalité, il y a réflexion de cette onde sur la paroi, mais si la tuyère est plane, nous pouvons démontrer qu'elle sera absorbée par la paroi qui donne, après calcul, la position du point de la paroi de la tuyère à rechercher. Si la tuyère est de type axisymétrique, le calcul sera très délicat, vu la réflexion des ondes de Mach sur la paroi et la naissance des zones de l'écoulement où le calcul sur la base des ondes de Mach est impossible. Dans ce cas, il faut faire appel à la méthode des caractéristiques [2], [5], [10]. Notre travail est consacré pour la forme plane.

La figure (4.6) suivante présente les paramètres d'une ligne de Mach intermédiaire AP_i absorbée par la paroi. L'angle θ_E n'est pas connu a priori. Si le dimensionnement se fait sur la base du nombre de Mach de sortie M_S , pour avoir un écoulement uniforme et parallèle à la sortie, nous pouvons calculer l'angle θ_E par la relation suivante :

$$\theta_E = v_S = \int_{T_S}^{T_*} F_V(T) dT \quad (4.6)$$

Notons que la température T_S , correspondant au nombre de Mach M_S , sera déterminée par la résolution de l'équation (4.4) en substituant $T=T_S$ et $M=M_S$.

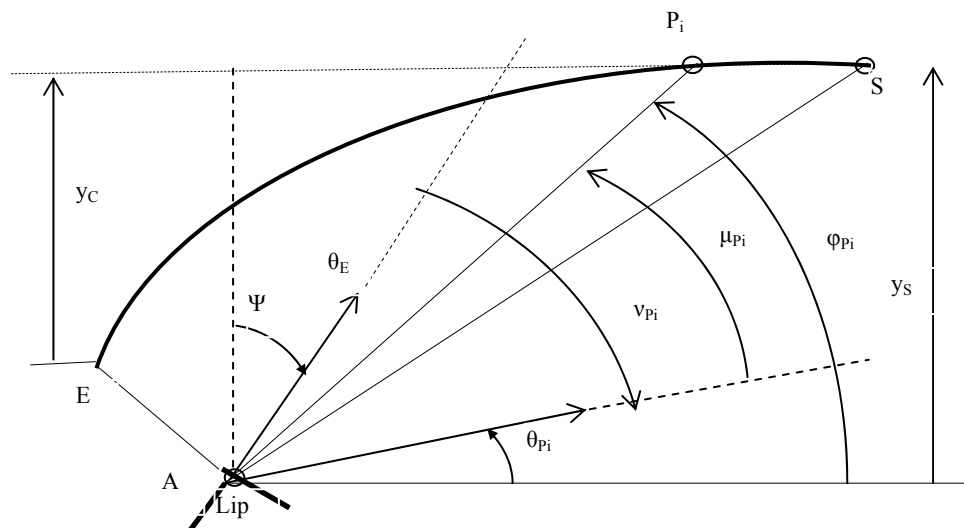


Figure (4.6) : Présentation des propriétés d'une ligne de Mach intermédiaire

Une fois l'angle θ_E déterminé, nous pouvons facilement déterminer l'inclinaison de la carène (Lip) par rapport à la verticale, grâce à la relation suivante :

$$\psi = 90^\circ - \nu_s \quad (4.7)$$

Une fois ces paramètres déterminés, nous pouvons passer à la détermination du profil du corps central. Comme il y a une infinité d'ondes de Mach qui seront issues du point A et comme le calcul est purement numérique, il faut discrétiser la paroi en un nombre fini assez grand. Le profil de la tuyère sera déterminé avec une exactitude élevée si le nombre des ondes de Mach choisi est élevé.

Nous allons maintenant procéder à la présentation des résultats sur une onde de Mach quelconque entre les ondes de Mach AE et AS.

4.3.1. Discrétisation

Partageons la zone de détente entre AE et AS en N_p ondes de Mach y compris les extrémités et numérotions ces ondes de gauche à droite, nous obtenons la figure (4.7) suivante. Le repère de calcul est placé au point A.

Nous voyons clairement que plus le nombre N_p des ondes de Mach est grand, plus nous allons avoir une très bonne représentation de l'allure du corps central. Nous avons à faire un choix sur le point de commencement de calcul. Soit du point S de sortie vers le col et dans ce cas il faut connaître le rayon de la section de sortie, soit du point E du col vers la sortie S et dans ce cas, il faut connaître le rayon AE du col. Nous avons préféré dans notre travail commencer du col vers la sortie, c'est-à-dire de gauche à droite.

La détermination des points de la paroi se fait d'une façon explicite, c'est-à-dire que si nous connaissons la position et les propriétés d'un point sur la paroi, nous pouvons facilement déterminer celles du point adjacent à droite et vis vers ça jusqu'à ce que nous arrivons à la section de sortie. Notons ici que les lignes de Mach sont des lignes droites qui nous facilitent la tâche par connaissance de l'équation mathématique.

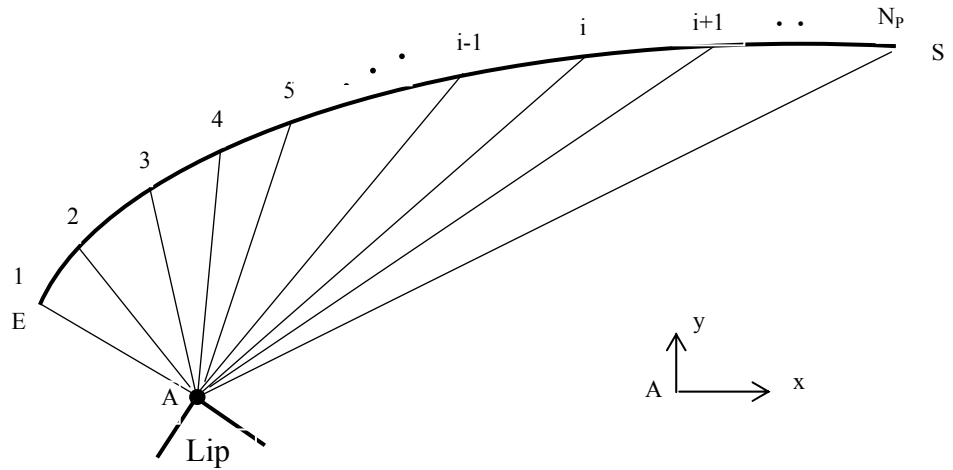


Figure (4.7) : Discrétisation de la zone de détente.

Le schéma du modèle sous la présence d'une ligne de Mach est présenté dans la figure (4.6). La température T_{P_i} au point P_i est connue. Alors, nous pouvons écrire :

$$\mu_{P_i} = \arcsin\left(\frac{1}{M_{P_i}}\right) \quad (4.8)$$

$$v_{P_i} = \int_{T_{P_i}}^{T^*} F_v(T) dT \quad (4.9)$$

$$\varphi_{P_i} = 90 - \Psi - v_{P_i} + \mu_{P_i} \quad (4.10)$$

$$\theta_{P_i} = \varphi_{P_i} - \mu_{P_i} \quad (4.11)$$

Avec :

$$a(T_{P_i}) = \sqrt{\gamma(T_{P_i}) r T_{P_i}} \quad (4.12)$$

$$M_{P_i} = \frac{\sqrt{2 H(T_{P_i})}}{a(T_{P_i})} \quad (4.13)$$

Pour déterminer les propriétés physiques et thermodynamiques au point P_{i+1} suivant le point P_i de la paroi, considérons le schéma suivant à deux lignes de Mach adjacentes, présenté sur la figure (4.8).

Sur la figure (4.8), toutes les propriétés au point P_i sont connues, c'est-à-dire que M_{P_i} , ϕ_{P_i} , θ_{P_i} , v_{P_i} , T_{P_i} , x_{P_i} , y_{P_i} et les autres paramètres sont connus. Le problème consiste en la détermination des propriétés au point P_{i+1} adjacent à droite.

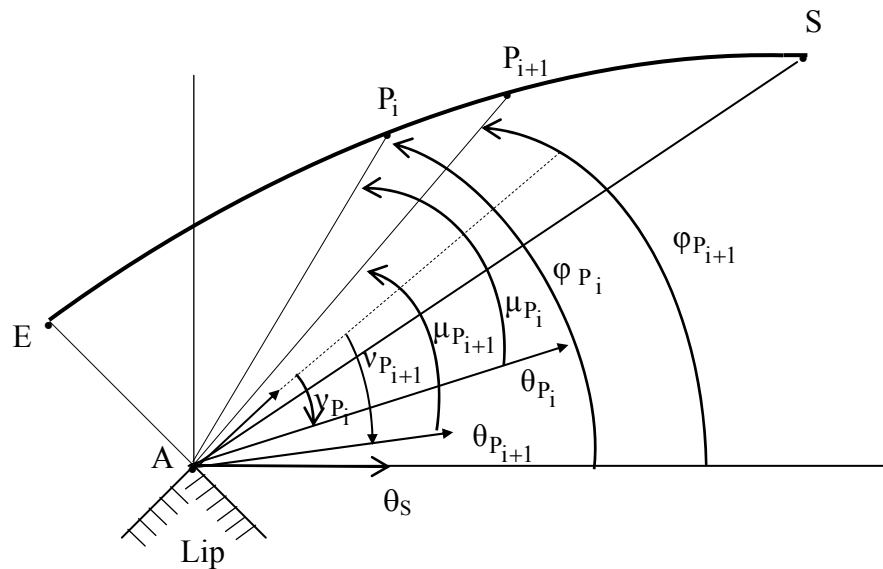


Figure (4.8) : Présentation de deux lignes de Mach adjacentes

Considérons le triangle AP_iP_{i+1} sur la figure (4.9). Ici les points P_i et P_{i+1} sont reliés par une ligne de droite avec le point A.

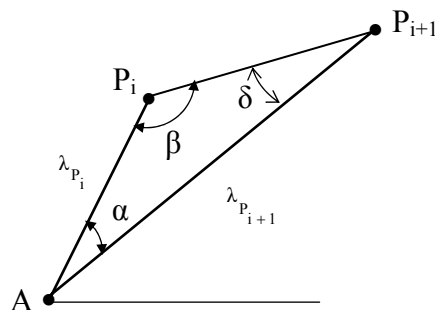


Figure (4.9) : Calcul sur un triangle

Soient :

α : angle au sommet A.

β : angle au sommet P_i

δ : angle au sommet P_{i+1} .

λ_{P_i} : Rayon polaire AP_i

$\lambda_{P_{i+1}}$: Rayon polaire AP_{i+1} .

x_{P_i}, y_{P_i} : coordonnées cartésiennes du point P_i .

$x_{P_{i+1}}, y_{P_{i+1}}$: coordonnées cartésiennes du point P_{i+1}

Alors :

$$\alpha = \varphi_{P_i} - \varphi_{P_{i+1}} \quad (4.14)$$

$$\beta = \pi - \varphi_{P_i} + v_S - v_{P_i} \quad (4.15)$$

$$\delta = \varphi_{P_{i+1}} - v_S + v_{P_i} \quad (4.16)$$

$$\frac{\sin(\delta)}{\lambda_{P_i}} = \frac{\sin(\beta)}{\lambda_{P_{i+1}}} \quad (4.17)$$

ce qui donne

$$\lambda_{P_{i+1}} = \lambda_{P_i} \frac{\sin(\beta)}{\sin(\delta)} \quad (4.18)$$

Par analogie avec la relation (4.10), nous pouvons écrire :

$$\varphi_{P_{i+1}} = 90 - \Psi - v_{P_{i+1}} + \mu_{P_{i+1}} \quad (4.19)$$

Avec :

$$\mu_{P_{i+1}} = \arcsin\left(\frac{1}{M_{P_{i+1}}}\right) \quad (4.20)$$

$$\theta_{P_{i+1}} = \varphi_{P_{i+1}} - \mu_{P_{i+1}} \quad (4.21)$$

$$v_{P_{i+1}} = \int_{T_{P_{i+1}}}^{T_*} F_v(T) dT \quad (4.22)$$

et

$$M_{P_{i+1}} = \frac{\sqrt{2 H(T_{P_{i+1}})}}{a(T_{P_{i+1}})} \quad (4.23)$$

$$a(T_{P_{i+1}}) = \sqrt{\gamma(T_{P_{i+1}}) r T_{P_{i+1}}} \quad (4.24)$$

Au point P_{i+1} , la température $T_{P_{i+1}}$ est connue.

Les coordonnées du point P_{i+1} peuvent être déterminées, comme l'indique la figure (4.10), par :

$$x_{P_{i+1}} = \lambda_{P_{i+1}} \cos(\varphi_{P_{i+1}}) \quad (4.25)$$

$$y_{P_{i+1}} = \lambda_{P_{i+1}} \sin(\varphi_{P_{i+1}}) \quad (4.26)$$

Chaque point P_i sur la paroi possède sa propre température différente des températures des autres points. Tous sont reliés au point A par une ligne de Mach. Au point A, il y a alors une infinité de valeurs de T et par conséquent, il est un point de discontinuité des propriétés T, M, θ , ... etc.

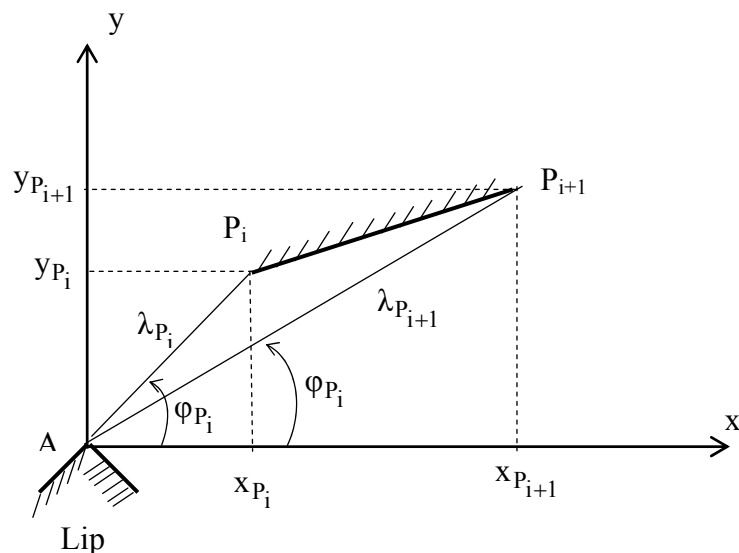


Figure (4.10) : Relation entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires

Pour arriver à concevoir la tuyère, nous avons choisi la discrétisation de la zone de variation de la température $T \in [T_s, T_*]$ en N_p valeurs y compris les valeurs des extrémités pour que les calculs soient rapides.

A titre d'information, nous pouvons concevoir la tuyère sur la base de discrétisation de :

- La zone de variation du nombre de Mach M sur la paroi qui est $M \in [1, M_s]$ en N_p valeurs y compris les valeurs des extrémités.
- La zone de variation de la déviation de l'angle d'écoulement θ et par conséquent de la paroi qui est $\theta \in [\theta_E, 0]$ en N_p valeurs y compris les valeurs des extrémités.
- La zone de variation de l'angle de Prandtl Meyer $\nu \in [0, \nu_s]$ en N_p valeurs y compris les valeurs des extrémités.

4.3.2. Procédé de calcul

En premier lieu, les données nécessaires pour concevoir la tuyère se résument comme suit :

- La valeur de M_s (le dimensionnement se fait sur cette base).
- La température génératrice T_0 .
- Le rayon polaire λ_{AE} . Ici, nous avons pris $\lambda_{AE} = 1$.
- Le nombre N_p de discrétisation de la paroi.
- La table de variation de $C_p(T)$ et $\gamma(T)$.
- La constante du gaz (r) ; le gaz considéré est de l'air.

La première étape consiste à déterminer quelques résultats nécessaires pour la conception, qui sont :

1. Les rapports thermodynamiques critiques au col de la tuyère :

Les procédés de détermination de la température T_* et les rapports thermodynamiques critiques $\frac{T_*}{T_0}$, $\frac{\rho_*}{\rho_0}$, $\frac{P_*}{P_0}$, $\frac{a_*}{a_0}$ et les autres paramètres au col sont présentés dans le chapitre (2).

2. Les rapports thermodynamiques à la section de sortie :

Les procédés de détermination de la température T_S et des rapports thermodynamiques $\frac{T_S}{T_0}$, $\frac{\rho_S}{\rho_0}$, $\frac{P_S}{P_0}$, $\frac{a_S}{a_0}$ et les autres paramètres à la section de sortie correspondant au nombre de Mach, M_S sont présentés dans le chapitre (2).

3. Le rapport unidimensionnel des sections $\frac{A_S}{A_*}$:

Le rapport des sections entre celle de sortie et celle du col est donnée dans le chapitre (2), récapitulé par :

$$\frac{A_S}{A_*} = e^{\int_{T_S}^{T_*} F_A(T) dT} \quad (4.27)$$

Avec

$$F_A(T) = \frac{C_p(T)}{a^2(T) - 2H(T)} \quad (4.28)$$

Ce rapport nous servira plus tard comme source de comparaison et de validation de nos calculs numériques. Autrement dit, durant le procédé, nous calculons le rapport $\frac{A_S}{A_*}$ donné par la méthode développée en fonction de N_p pour voir la convergence.

La valeur T_S représente la température à la section de sortie. La procédure numérique de calcul de la relation (4.27) est illustrée dans la référence []. Ce rapport nous servira comme source de comparaison et de validation des calculs numériques.

4. Détermination de v_S correspondant à M_S et T_0 :

La valeur de la fonction de PRANDTL-MEYER v_S peut être calculée en remplaçant T par T_S dans la relation (4.1). L'algorithme de calcul de l'intégrale (4.1) est présenté dans le chapitre (2).

5. La déviation Ψ de la carène (Lip) par rapport à la verticale sera calculée en utilisant la relation (4.7).

Comme le procédé de calcul présenté par les relations (4.18), (4.19), ..., (4.26) est en fonction de deux points successifs (c'est une forme de suite), il faut donner les résultats au point de départ. Le point de départ choisi est le point E ou la première ligne de Mach AE. Sur cette ligne, nous avons :

- Le nombre de Mach : $M_E = 1.0$ (Entrée sonique).
- L'angle de Mach : $\mu_E = 90^\circ$.
- La valeur de la fonction de Prandtl-Meyer : $v_E = 0$.
- L'angle polaire : $\varphi_E = 90 - \Psi - v_E + \mu_E$.
- Le rayon polaire : $\lambda_E = 1$ (parmi les données).
- La position du premier point de la paroi :

$$x_E = \lambda_E \cos(\varphi_E) \quad (4.29)$$

$$y_E = \lambda_E \sin(\varphi_E) \quad (4.30)$$

- L'angle de déviation de l'écoulement :

$$\theta_* = \theta_E = \varphi_E - \mu_E \quad (4.31)$$

- La section critique du col : $A_* = A_E = 2 \lambda_E$.

Nous pouvons calculer maintenant :

- Le rayon (distance verticale) de la section de sortie en utilisant la relation (4.27) et en tenant compte du fait que la section est plane. Nous avons alors :

$$y_S = \lambda_E \left(\frac{A_S}{A_*} \right) \quad (4.32)$$

Cette distance est calculée en utilisant le rapport des sections 1D. La même valeur sera recalculée en utilisant le calcul numérique par la relation (4.39).

- Le rayon (distance verticale) entre l'axe de symétrie et le point E est donné par :

$$y_C = y_S - y_E \quad (4.33)$$

La deuxième étape consiste à affecter les résultats obtenus au point E dans le point P_1 pour $i=1$. Ici, la température au point E est égale à T_* .

Pour chaque ligne de Mach, il faut connaître la température au centre de détente A qui représente aussi la température sur la paroi.

Comme le nombre de points choisi est égal à N_p , alors, nous obtenons N_p-1 panneaux, la température au point P_i est donc donnée par :

$$T_{P_i} = T_* - (i-1)\Delta T \quad (4.34)$$

Avec : $i = 1, 2, 3, \dots, N_p$

et

$$\Delta T = \frac{T_* - T_S}{N_p - 1}$$

La relation (4.34) nous conduit à distribuer les températures d'une façon uniforme. Afin de déterminer l'allure du corps central avec un nombre de points N_p le plus petit possible et dans un temps réduit pour une précision donnée, il est possible de faire l'extension de la formule (4.34) en ajoutant l'effet de condensation des points afin de distribuer les points d'une façon non uniforme. La procédure de condensation choisie est celle de ROBERT [7], présentée par :

$$s_i = b_1 z_i + (1-b_1) \cdot \left[1 - \frac{\tanh[b_2 \cdot (1-z_i)]}{\tanh(b_2)} \right] \quad (4.35)$$

avec :

$$z_i = \frac{i-1}{N_p-1} \quad 1 \leq i \leq N_p \quad (4.36)$$

b_1, b_2 : Paramètres de contrôle de distribution des noeuds.

N_p : Nombre de points choisis sur la paroi du corps central.

Après avoir obtenu "s", nous pouvons facilement déterminer la distribution des températures T, à partir de la relation suivante :

$$T_{P_i} = T_* - s_i(T_* - T_S) \quad (4.37)$$

La relation (4.34) est un cas particulier de la relation (4.37). Elle est obtenue lorsque nous prenons $b_1 = 1.0$.

En incrémentant le compteur de $i=2$ jusqu'à N_p , nous allons déterminer les propriétés thermodynamiques et physiques le long de toutes les lignes de Mach sélectionnées au départ et par conséquent, la forme du corps central sera obtenue.

Pour accélérer le processus du calcul de l'intégrale (4.22), nous pouvons considérer cette intégrale sous la forme suivante :

$$v_{P_{i+1}} = v_{P_i} + \int_{T_{P_{i+1}}}^{T_{P_i}} F_v(T) dT \quad (4.38)$$

Alors, l'obtention de la valeur $v_{P_{i+1}}$ (du point (i+1)) se fait en ajoutant à la valeur de la fonction de PRANDTL-MEYER v_{P_i} (du point (i)), l'intégrale entre les températures successives $T_{P_{i+1}}$ et T_{P_i} qui sont généralement très proches. La différence de calcul entre (4.22) et (4.38) est que, plus on se rapproche du le point S de la section de sortie, l'intervalle dans l'intégrale (4.22) devient très grand par rapport à l'intervalle de l'intégrale de (4.38). Si le nombre N_p est grand, l'intervalle de l'intégrale de (4.38) devient très petit. Alors, dans la relation (4.38), nous pouvons évaluer le résultat, en utilisant l'algorithme de SIMPSON, avec un nombre de panneaux très réduit. Pour les applications numériques, si N_p est grand, nous pouvons choisir environ 5 à 7 points intermédiaires pour l'évaluation de l'intégrale de (4.38).

A partir des résultats du dernier point lorsque $i=N_p$ (point de la section de sortie), nous pouvons fixer par la suite quelques résultats :

- La position du point S de sortie de la tuyère est donnée par :

$$x_S = x_{N_p} \quad ; \quad y_S = y_{N_p} \quad (4.39)$$

- L'angle et le rayon polaire du point S :

$$\lambda_S = \lambda_{N_P} \quad ; \quad \varphi_S = \varphi_{N_P} \quad (4.40)$$

- La distance entre la section de sortie et le coin de la carène (point A), notée par X_{Plug} , est donnée par :

$$X_{\text{Plug}} = x_S \quad (4.41)$$

- La section de sortie A_S par unité de profondeur (puisque nous avons une tuyère plane) est donnée par :

$$A_S = 2y_S \quad (4.42)$$

- Le rapport des sections correspondant à la discrétisation de N_P points est donné par :

$$\frac{A_S}{A_*} (\text{Calculé}) = \frac{y_S}{\lambda_E} \quad (4.43)$$

4.3.3. Paramètres thermodynamiques

Une fois le contour de la tuyère connu, nous pouvons déterminer les rapports thermodynamiques. Dans cette étape, en chaque point P_i , les paramètres thermodynamiques (en particulier la température T_{P_i}) du point E jusqu'au point S sont connus.

- Le rapport des températures au point P_i de la paroi ($i=1, 2, \dots, N_P$) est donné par :

$$\left(\frac{T}{T_0} \right)_{P_i} = \frac{T_{P_i}}{T_0} \quad (4.44)$$

Ce rapport nous servira pour faire le choix convenable du matériau de construction du corps central résistant à cette température.

- Le rapport des masses volumiques au point P_i ($i=1, 2, \dots, N_P$) de la paroi ainsi que le procédé de calcul numérique sont présentés dans le chapitre 2. Nous avons alors :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_{P_i} = e^{-\int_{T_{P_i}}^{T_0} F_\rho(T) dT} \quad (4.45)$$

Avec :

$$F_\rho(T) = \frac{C_P(T)}{a^2(T)} \quad (4.46)$$

La même remarque mentionnée pour le calcul de la valeur de $v_{P_{i+1}}$ par les relations (4.38) et (4.22) concernant l'intervalle d'intégration reste valable pour calculer le rapport des masses volumiques par la relation (4.45).

Nous pouvons alors écrire la relation (4.45) sous la forme suivante :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_{P_i} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_{P_{i-1}} e^{-\int_{T_{P_{i-1}}}^{T_{P_i}} F_\rho(T) dT} \quad (4.47)$$

Avec : $i = 2, 3, \dots, N_P$.

Notons que si $i = 1$, le point P_1 devient le point E critique.

- Le rapport des pressions au point P_i de la paroi peut être calculé par la relation suivante :

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)_{P_i} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_{P_i} \left(\frac{T}{T_0}\right)_{P_i} \quad (4.48)$$

Ce rapport nous servira pour la détermination de la force de pression exercée sur la paroi du corps central.

Nous pouvons calculer ces rapports lors de la détermination des points du contour du corps central.

Remarque :

A titre d'information, les rapports thermodynamiques sont donnés par les expressions suivantes :

- Le rapport des pressions $\frac{P}{P_0}$ au point P_i de la paroi ayant un nombre de Mach $M=M_{P_i}$ peut être calculé par :

$$\left[\frac{P}{P_0} \right]_{P_i} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{P_i}^2 \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.49)$$

Aux points E et S nous avons, respectivement :

$$\left[\frac{P}{P_0} \right]_E = \left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\left[\frac{P}{P_0} \right]_S = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_S^2 \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

- Le rapport des températures $\frac{T}{T_0}$ au point P_i de la paroi ayant un nombre $M=M_{P_i}$ peut être calculé par la relation suivante :

$$\left[\frac{T}{T_0} \right]_{P_i} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{P_i}^2 \right]^{-1} \quad (4.50)$$

Aux point E et S, ce rapport est égal à :

$$\left[\frac{T}{T_0} \right]_E = \left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{-1}$$

$$\left[\frac{T}{T_0} \right]_S = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_S^2 \right]^{-1}$$

- Le rapport des masses volumiques $\frac{\rho}{\rho_0}$ au point P_i de la paroi ayant un nombre de Mach $M=M_{P_i}$ peut être calculé d'après la relation suivante :

$$\left[\frac{\rho}{\rho_0} \right]_{P_i} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{P_i}^2 \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}} \quad (4.51)$$

Aux points E et S, la relation (4.51) s'écrit, respectivement :

$$\left[\frac{\rho}{\rho_0} \right]_E = \left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\left[\frac{\rho}{\rho_0} \right]_S = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_S^2 \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

4.4. Longueur et masse de la tuyère

Arrivé à cette étape, nous avons pu déterminer la position des points de la paroi du corps central. Le problème qui se pose maintenant est la détermination de la longueur totale de la tuyère ainsi que la masse du corps central trouvé.

Pour arriver à la détermination de la longueur et de la masse, il faut considérer quelques suppositions :

- La forme de la paroi du corps central entre deux points successifs est approximée par une ligne droite. Cette supposition donne un bon résultat si le nombre de points de la conception est très élevé afin que les points soient rapprochés les uns des autres. Nous pouvons assimiler la courbure de la paroi par une ligne droite.
- Le corps central est constitué du même matériau, d'une épaisseur t_M et d'une masse volumique ρ_m constante.

Remarque :

Nous pouvons utiliser une méthode d'interpolation pour déterminer une équation analytique de la paroi ; nous pouvons ensuite utiliser une technique (par l'une des formules d'interpolations connues) pour arriver au calcul de la masse du corps central.

Dans notre travail, nous avons utilisé l'interpolation linéaire entre deux points successifs.

La longueur totale de la tuyère, mesurée entre le point E et le point S, est prise comme étant la distance axiale. Elle est donnée par :

$$L = x_S - x_E$$

Comme notre calcul est adimensionnel, nous avons choisi d'addimensionnaliser les résultats par rapport au rayon λ_E du col. Nous avons alors :

$$\frac{L}{\lambda_E} = \left[\frac{x_S}{\lambda_E} - \frac{x_E}{\lambda_E} \right] \quad (4.52)$$

Concernant le calcul de la masse, nous pouvons dire qu'il est lié au calcul de la longueur de l'arc de la paroi de la tuyère. Nous nous intéressons donc au calcul de l'arc de la paroi. Auparavant, nous allons déterminer la relation entre la masse et l'arc de la paroi.

Sachant que :

$$\text{Masse} = \rho_m \cdot \text{Volume} \quad (4.53)$$

Avec :

$$\text{volume} = t \cdot 2 L_{\text{arc}} \cdot l$$

où :

- ρ_m : Masse volumique du matériau
- Volume : Volume occupé par le matériau
- t : Epaisseur du matériau (supposée constante)
- L_{arc} : Longueur de l'arc de la tuyère [voir figure (4.11)]
- l : Unité de frondeur (puisque la tuyère est plane)

Comme il y a une symétrie de la tuyère et que cette dernière est plane, nous allons considérer uniquement le calcul sur les deux parties de la tuyère en multipliant le résultat par 2.

Si la paroi de la tuyère contient N_p points, y compris les deux points d'extrémités, nous obtenons, par conséquent, $(N_p - 1)$ segments de droite.

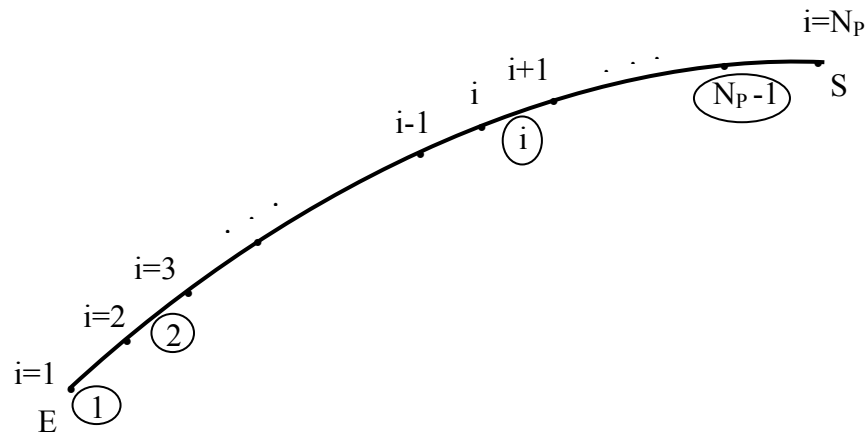


Figure (4.11) : Arc de la partie inférieure du corps central

Alors :

$$L_{\text{arc}} = \sum_{i=1}^{i=N_p-1} \Delta L_{\text{seg}}(i)$$

Avec :

$\Delta L_{\text{seg}}(i)$: longueur du segment numéro i .

Isolons le segment numéro i , nous aurons alors la figure (4.12) suivante :

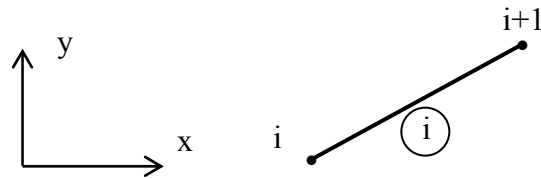


Figure (4.12) : Segment (i) du corps central

Donc :

$$\Delta L_{\text{seg}}(i) = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

Par conséquent, la longueur totale de l'arc de la paroi du corps central est donnée par :

$$L_{\text{arc}} = \sum_{i=1}^{i=N_p-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

La masse totale de la structure de la paroi du corps central est donnée par :

$$\text{Masse} = 2 t \rho_m \sum_{i=1}^{i=N_P-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

Comme nos calculs sont tous adimensionnels, nous avons préféré la présentation du résultat par la formule suivante :

$$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l} = 2 \sum_{ij=1}^{i=N_P-1} \sqrt{\left[\frac{x_{P_{i+1}} - x_{P_i}}{\lambda_E} \right]^2 + \left[\frac{y_{P_{i+1}} - y_{P_i}}{\lambda_E} \right]^2} \quad (4.54)$$

4.5. Force de pression exercée sur le corps central

Pour arriver au calcul de la force de pression exercée sur la paroi du corps central, il faut supposer quelques considérations :

Nous supposons qu'entre deux points de la paroi, la forme de la courbe est une ligne droite. Cette supposition donne un bon résultat si le nombre de points de la conception est très élevé afin que les points soient très proches les uns des autres et nous pouvons assimiler la courbure de la paroi à une ligne droite comme l'indique la figure (4.13).

La pression exercée sur chaque tronçon est supposée égale à la pression statique calculée soit au nœud gauche soit au nœud droit.

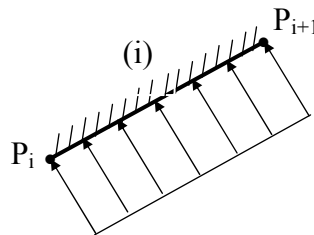


Figure (4.13) : Force de pression exercée sur le panneau (i)

Donc, si nous considérons le nœud gauche, la pression exercée sur le segment (i) est donnée par :

$$P_{(i)} = P_{P_i}$$

et si nous considérons le nœud droit, la pression exercée sur le segment (i) est donnée par :

$$P_{(i)} = P_{P_{i+1}}$$

Nous pouvons considérer aussi que la pression exercée sur chaque panneau est égale à la moyenne des pressions calculées entre les nœuds gauche et droit, c'est-à-dire :

$$P_{(i)} = \frac{P_{P_i} + P_{P_{i+1}}}{2}$$

Nous pouvons considérer également que la pression $P_{(i)}$ est linéaire sur un même tronçon entre les pressions P_{P_i} et $P_{P_{i+1}}$.

Si nous avons N_p nœuds sur la paroi, et sachant que la force de pression est exercée perpendiculairement sur cette dernière comme l'indique la figure (4.14), nous aurons, par conséquent, $(N_p - 1)$ tronçons.

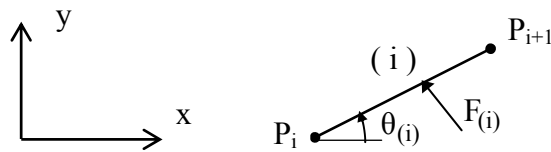


Figure (4.14) : Force de pression exercée perpendiculairement sur le panneau (i)

Chaque tronçon de la paroi du corps central est supposé incliné d'un angle $\theta_{(i)}$ de l'écoulement du nœud gauche du panneau. Pour le tronçon numéro (i), nous avons :

$$\theta_{(i)} = \varphi_{P_i} - \mu_{P_i} \quad (4.55)$$

Alors, la force de pression de composante horizontale par unité de longueur exercée sur le tronçon numéro (i) peut être calculée par la formule suivante :

$$F_{(i)} = P_{(i)} L_{(i)} \sin(\theta_{(i)})$$

avec :

$L_{(i)}$: longueur du tronçon (i) donnée par :

$$L_{(i)} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (4.56)$$

D'où, la force de pression exercée sur la paroi complète d'une demi tuyère est calculée par :

$$F = \sum_{i=1}^{i=N_p-1} P_{(i)} L_{(i)} \sin(\theta_{(i)})$$

Comme la tuyère est symétrique, alors elle contient deux parois identiques. Il faut ajouter l'effet de la deuxième paroi, nous obtenons par conséquent :

$$F = 2 \sum_{i=1}^{i=N_p-1} P_{(i)} L_{(i)} \sin(\theta_{(i)}) \quad (4.57)$$

Remplaçons, l'expression (4.56) dans celle (4.57) on obtient :

$$F = 2 \sum_{i=1}^{i=N_p-1} P_{(i)} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \cdot \sin(\theta_{(i)})$$

Puisque le calcul est adimensionnel, il serait meilleur de trouver le résultat comme suit :

$$\frac{F}{P_0 \lambda_E} = 2 \sum_{i=1}^{i=N_p-1} \left[\frac{P_{(i)}}{P_0} \right] \cdot \sqrt{\left[\frac{x_{i+1} - x_i}{\lambda_E} \right]^2 + \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{\lambda_E} \right]^2} \cdot \sin(\theta_{(i)})$$

4.6. Masse du gaz dans le divergent

La masse du gaz existant dans la partie divergente du corps central entre les lignes de Mach AE et AS peut être évaluée, ceci pour avoir une idée sur la capacité de la tuyère et de l'écoulement supersonique. Nous pouvons considérer l'espace de la tuyère comme l'union des triangles placés l'un adjacent de l'autre comme le montre la figure (4.7), y compris la zone uniforme entre la ligne de Mach AS et l'horizontale. Le nombre total des triangles est égal à N_p-1 en ajoutant le triangle de la zone uniforme. La masse de l'écoulement, par unité de profondeur, qui se trouve dans l'espace compris entre deux lignes de Mach successives AP_i et AP_{i+1} comme le montre la figure (4.8), est approximée par :

$$\text{Masse}_{\text{Gaz}(i)} = \rho_{\text{Moy}(i)} A_{(i)} \quad (4.58)$$

Avec :

$$\rho_{\text{Moy}(i)} = \frac{\rho_{P_i} + \rho_{P_{i+1}}}{2} \quad (4.59)$$

$$A_{(i)} = \frac{1}{2} \left[x_{P_{i+1}} y_{P_i} - x_{P_i} y_{P_{i+1}} \right] \quad (4.60)$$

et $i = 1, 2, 3, \dots, N_p - 1$.

Il est à noter qu'au point A du triangle AP_iP_{i+1} de la carène, il y a deux valeurs de la masse volumique, l'une égale à celle du point P_i et l'autre égale à celle du point P_{i+1} . Pour cette raison, nous avons considéré la valeur moyenne de la masse volumique entre les deux points de la paroi du corps central. La position du point A ne figure pas dans la relation (4.49), puisque $x_A = y_A = 0$.

Dans la zone uniforme, la masse du gaz, par unité de profondeur, est donnée par :

$$\text{Masse}_{\text{Gaz(Uniforme)}} = \rho_S \left[\frac{x_S y_S}{2} \right] \quad (4.61)$$

La masse totale du gaz dans le divergent, y compris la symétrie du corps central, par unité de longueur, sera donc donnée, sous forme adimensionnelle, par la relation suivante :

$$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l} = \left[\frac{\rho_S}{\rho_0} \right] \left[\frac{x_S}{\lambda_E} \frac{y_S}{\lambda_E} \right] + \sum_{i=1}^{i=N_p-1} \left[\frac{\rho_{P_i}}{\rho_0} \right] \left[\frac{x_{P_{i+1}}}{\lambda_E} \frac{y_{P_i}}{\lambda_E} - \frac{x_{P_i}}{\lambda_E} \frac{y_{P_{i+1}}}{\lambda_E} \right] \quad (4.62)$$

CHAPITRE 5

RESULTATS ET COMMENTAIRES

5.1. Introduction

Nous avons présenté dans les chapitres précédents les diverses étapes nécessaires pour la détermination des paramètres de dimensionnement d'une tuyère à corps central type à bouchon donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle. Ces paramètres sont :

- Les rapports critiques à Haute Température au col de la tuyère.
- Les rapports thermodynamiques à Haute Température dans une section données dans le divergent.
- La valeur de la fonction de PRANDTL-MEYER à Haute Température pour n'importe quel nombre de Mach dans le régime supersonique.
- La forme de la tuyère supersonique à corps central.
- La longueur de la tuyère.
- La déviation de la carène par rapport à la verticale correspondant à M_S et T_0 .
- La masse de la structure du corps central de la tuyère.
- La variation des paramètres thermodynamiques le long de la paroi du corps central.
- La force de pression exercée sur la paroi du corps central.
- La distance entre la carène et la section de sortie.
- Le rapport $\frac{A_S}{A_*}$ des sections calculé en fonction de la discrétisation.
- La masse du gaz existante à chaque instant dans le divergent de la tuyère.

Les données que nous avons pris sont résumées par :

- La table de variation des chaleurs spécifiques $C_p(T)$ et le rapport $\gamma(T)$ en fonction de la température.
- La forme de l'interpolation choisie pour les valeurs tabulées. Nous avons choisi une interpolation polynomiale.
- Le nombre de Mach M_S à la section de sortie de la tuyère.
- Le rayon polaire au col de la tuyère.

- La discrétisation du corps central donnée par le nombre de points N_P (problème de convergence).

L'objectif principal de ce chapitre est la mise en application sur ordinateur de la méthode développée. Les résultats trouvés seront présentés sous forme de courbes (des figures) et sous formes numériques (des tableaux).

Notre programme a été réalisé en double précision avec résolution dans la mémoire centrale d'un micro-ordinateur Pentium IV (1.6 MHz, 32 Méga de RAM). Le temps de calcul effectué varie suivant la discrétisation choisie et le type de résultats.

5.2. Résultats de l'écoulement supersonique à Haute Température

Dans cette première partie, nous allons présenter les divers résultats nécessaires et intéressants concernant l'écoulement supersonique à Haute Température dans une tuyère en utilisant la formulation mathématique développée dans le chapitre (2).

Les figures (5.1) et (5.2) représentent, respectivement, la variation de la chaleur spécifique $C_P(T)$ et le rapport $\gamma(T)$ de l'air dans l'intervalle [0 °K , 3550 °K] pour le modèle à haute température et pour un gaz parfait. Nous pouvons dire qu'à basse température, le gaz peut être considéré comme étant calorifiquement parfait, à cause de l'invariance de la chaleur spécifique $C_P(T)$ et le rapport $\gamma(T)$. Cet intervalle de température est considéré entre 0 °K et environ 240 °K. Notons ici, que les courbes dans cet intervalle sont confondues puisque nous avons pris les données à $\gamma = 1.402$ pour un gaz parfait.

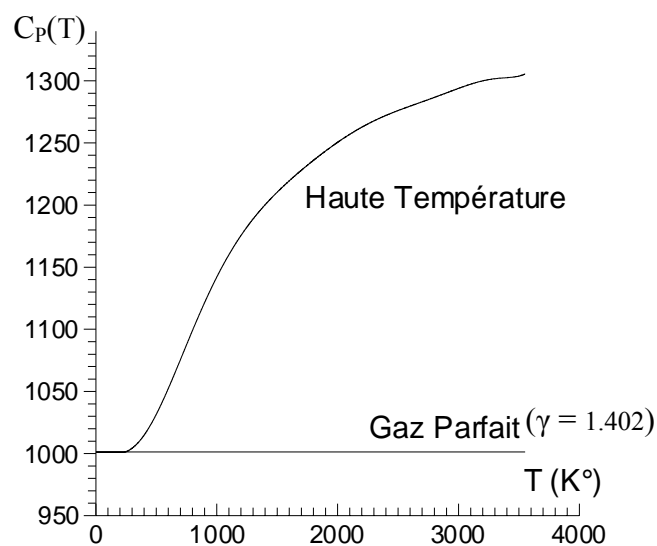


Figure (5.1) : Variation de la chaleur spécifique $C_P(T)$ pour l'air.

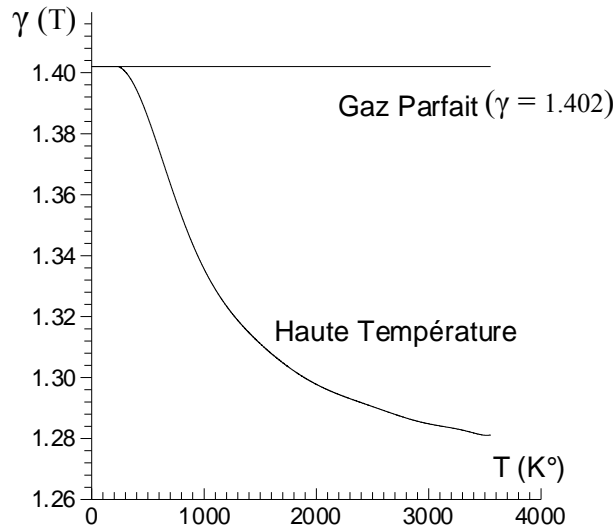


Figure (5.2) : Variation du rapport $\gamma(T)$ pour l'air.

Les figures (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) et (5.7) représentent la variation des paramètres critiques en fonction de la température génératrice T_0 . Nous constatons que, lorsque la température T_0 augmente, les valeurs critiques à haute température varient considérablement et cela à partir d'environ 240 °K. Pour le cas d'un gaz parfait, ces paramètres sont considérés comme étant des valeurs constantes, donc ils ne dépendent pas de la température T_0 . Les valeurs numériques des paramètres critiques, trouvées pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 , sont présentées dans le tableau (5.1). Notons que nous avons pris $\varepsilon=10^{-6}$ pour la détermination de la température critique T^* et de la température T_S correspondant au nombre de Mach M_S .

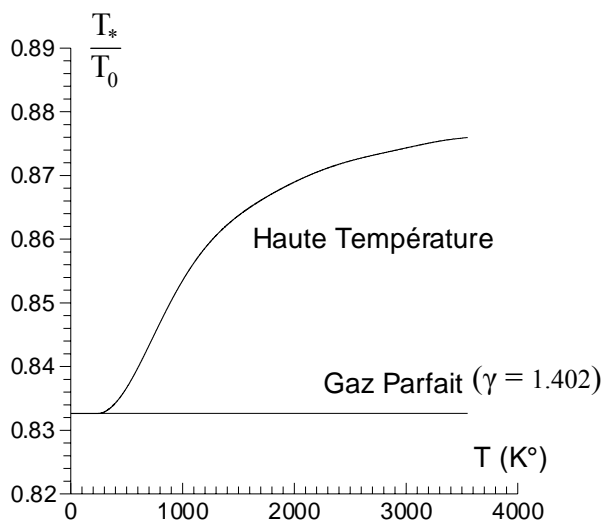


Figure (5.3) : Variation du rapport $\frac{T^*}{T_0}$ en fonction de T_0 .

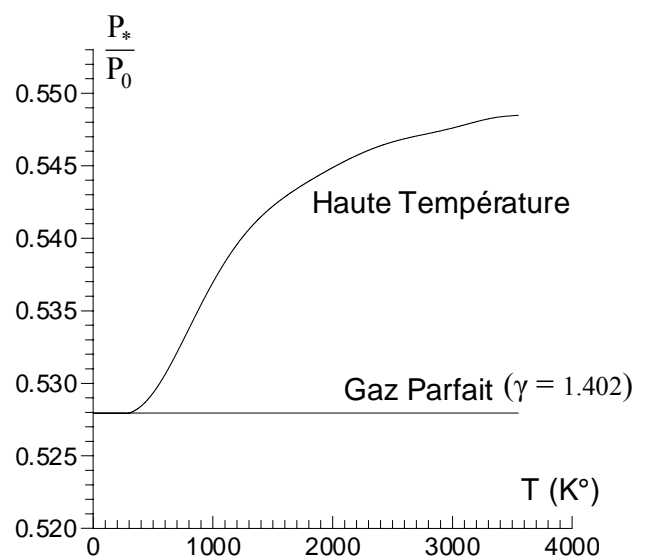


Figure (V.4) : Variation du rapport $\frac{P^*}{P_0}$ en fonction de T_0 .

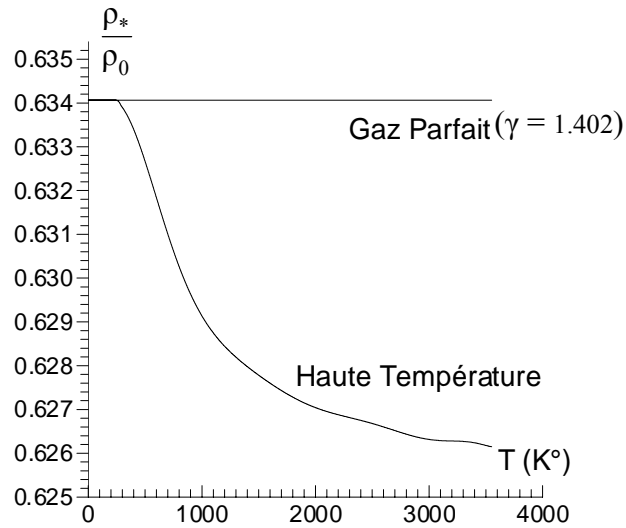


Figure (5.5) : Variation du rapport $\frac{\rho^*}{\rho_0}$ en fonction de T_0 .

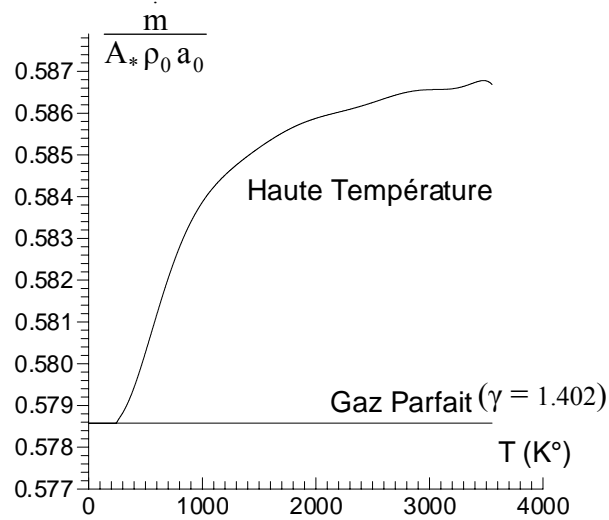


Figure (5.6) : Variation du débit massique en fonction de T_0 .

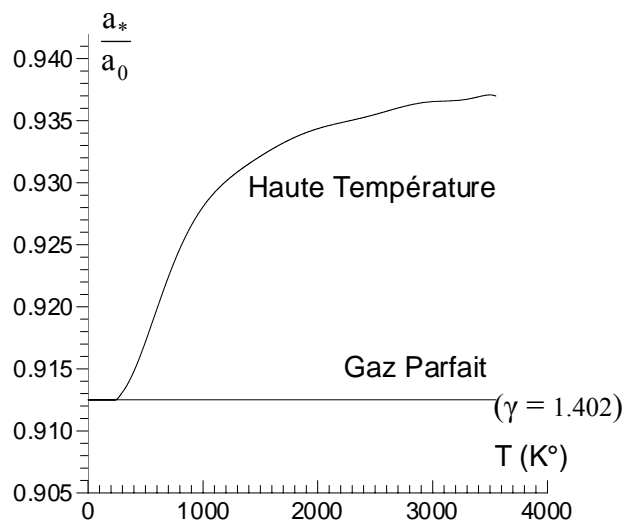


Figure (5.7) : Variation du rapport $\frac{a^*}{a_0}$ en fonction de T_0 .

T_0 (K°)	$\frac{T_*}{T_0}$	$\frac{P_*}{P_0}$	$\frac{\rho_*}{\rho_0}$	$\frac{a_*}{a_0}$	$\frac{\dot{m}}{A_* a_0 \rho_0}$
500	0.83670	0.52934	0.63266	0.91720	0.58028
600	0.83982	0.53062	0.63183	0.91985	0.58119
700	0.84334	0.53215	0.63100	0.92243	0.58205
750	0.84515	0.53296	0.63061	0.92361	0.58244
800	0.84694	0.53379	0.63025	0.92470	0.58280
850	0.84869	0.53461	0.62993	0.92569	0.58312
900	0.85038	0.53543	0.62963	0.92657	0.58340
950	0.85199	0.53621	0.62937	0.92736	0.58365
1000	0.85351	0.53697	0.62913	0.92805	0.58387
1050	0.85493	0.53769	0.62893	0.92866	0.58406
1100	0.85625	0.53836	0.62875	0.92920	0.58423
1150	0.85747	0.53899	0.62858	0.92968	0.58438
1200	0.85859	0.53957	0.62844	0.93011	0.58452
1250	0.85963	0.54011	0.62831	0.93050	0.58464
1300	0.86058	0.54061	0.62819	0.93086	0.58476
1350	0.86145	0.54106	0.62808	0.93120	0.58487
1400	0.86226	0.54148	0.62797	0.93152	0.58497
1450	0.86301	0.54186	0.62787	0.93183	0.58507
1500	0.86370	0.54221	0.627778	0.93213	0.58517
1550	0.86435	0.54254	0.62769	0.93241	0.58526
1600	0.86496	0.54285	0.62760	0.93269	0.58535
1650	0.86554	0.54314	0.62751	0.93295	0.58544
1700	0.86609	0.54341	0.62743	0.93320	0.58552
1750	0.86661	0.54367	0.62735	0.93343	0.58559
1800	0.86712	0.54393	0.62728	0.93365	0.58566
1850	0.86760	0.54417	0.62721	0.93385	0.58572
1900	0.86807	0.54441	0.62715	0.93404	0.58578
1950	0.86852	0.54464	0.62709	0.93420	0.58583
2000	0.86896	0.54487	0.62704	0.93435	0.58587
2050	0.86937	0.54509	0.62699	0.93448	0.58591
2100	0.86977	0.54530	0.62695	0.93461	0.58595
2150	0.87015	0.54551	0.62691	0.93472	0.58599
2200	0.87051	0.54570	0.62688	0.93483	0.58602
2250	0.87085	0.54589	0.62684	0.93493	0.58606
2300	0.87117	0.54606	0.62681	0.93503	0.58609
2350	0.87148	0.54622	0.62678	0.93514	0.58613
2400	0.87176	0.54637	0.62675	0.93525	0.58617
2450	0.87203	0.54651	0.62671	0.93537	0.58621
2500	0.87228	0.54664	0.62668	0.93549	0.58625
2550	0.87251	0.54675	0.62664	0.93562	0.58630
2600	0.87273	0.54685	0.62660	0.93576	0.58634
2650	0.87295	0.54695	0.62656	0.93589	0.58639
2700	0.87315	0.54704	0.62651	0.93602	0.58643
2750	0.87335	0.54713	0.62647	0.93614	0.58647
2800	0.87354	0.54722	0.62643	0.93625	0.58650
2850	0.87374	0.54730	0.62640	0.93635	0.58652
2900	0.87393	0.54740	0.62636	0.93642	0.58654
2950	0.87412	0.54749	0.62634	0.93648	0.58655
3000	0.87431	0.54759	0.62631	0.93653	0.58656
3050	0.87450	0.54770	0.62630	0.93655	0.58656
3100	0.87469	0.54781	0.62629	0.93657	0.58656
3150	0.87488	0.54792	0.62628	0.93659	0.58657
3200	0.87506	0.54803	0.62628	0.93661	0.58658
3250	0.87523	0.54813	0.62627	0.93666	0.58660
3300	0.87539	0.54823	0.62627	0.93672	0.58664
3350	0.87553	0.54830	0.62626	0.93681	0.58668
3400	0.87565	0.54836	0.62624	0.93692	0.58673
3450	0.87576	0.54841	0.62621	0.93702	0.58677
3500	0.87586	0.54844	0.62618	0.93707	0.58677
3550	0.87595	0.54847	0.62615	0.93698	0.58668
GP ($\gamma=1.402$)	0.83264	0.52795	0.63406	0.91249	0.57858

Tableau (5.1) : Valeurs numériques des paramètres critiques.

Les figures (5.8), (5.9), (5.10), (5.11) et (5.12) représentent la variation des paramètres thermodynamiques de l'écoulement en fonction du nombre de Mach dans le domaine supersonique pour quelques valeurs de la température génératrice y compris le cas d'un gaz parfait. Nous remarquons clairement que si nous prenons en considération la variation de $C_p(T)$ et de $\gamma(T)$, la température génératrice T_0 influe sur les grandeurs des paramètres thermodynamiques et géométriques de l'écoulement. A titre d'information, les valeurs numériques trouvées de chaque paramètre pour quelques valeurs du nombre de Mach et de T_0 , y compris le cas d'un gaz parfait, sont présentées dans les tableaux (5.2), (5.3), (5.4) et (5.5).

Remarquons que le rapport des sections (figure (5.11)) est égal à l'unité lorsque $M=1$.

Le calcul des paramètres thermodynamiques et géométriques d'un écoulement, en utilisant les relations du modèle d'un gaz parfait, est très simple et rapide par rapport à l'utilisation des relations du modèle à haute température mais avec un certain écart entre eux. Cet écart varie avec T_0 et M_S . Nous remarquons qu'à basse température et à un faible nombre de Mach, l'écart en résultats entre les deux modèles est petit. Donc, à basse température nous pouvons étudier un écoulement à haute température en utilisant les relations du modèle d'un gaz parfait. Par conséquent, lorsque la température T_0 augmente, la théorie d'un gaz parfait commence à donner des résultats qui s'éloignent du cas réel, d'où la nécessité d'utiliser le modèle à haute température. Sur la figure (5.13), nous avons présenté la courbe adiabatique isentropique pour le cas à haute température et celui d'un gaz parfait.

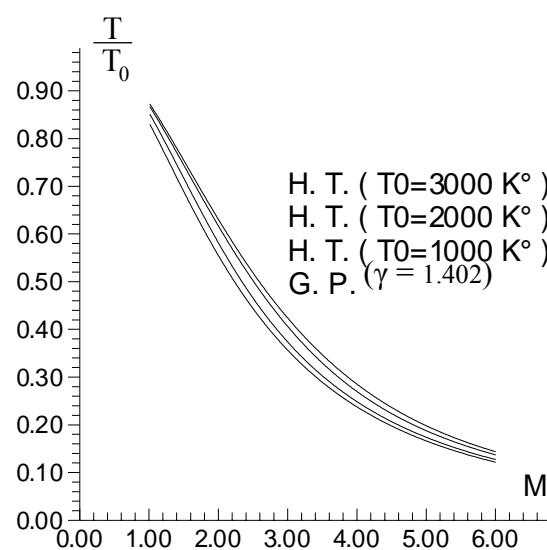


Figure (5.8) : Variation du rapport $\frac{T}{T_0}$ en fonction de M .

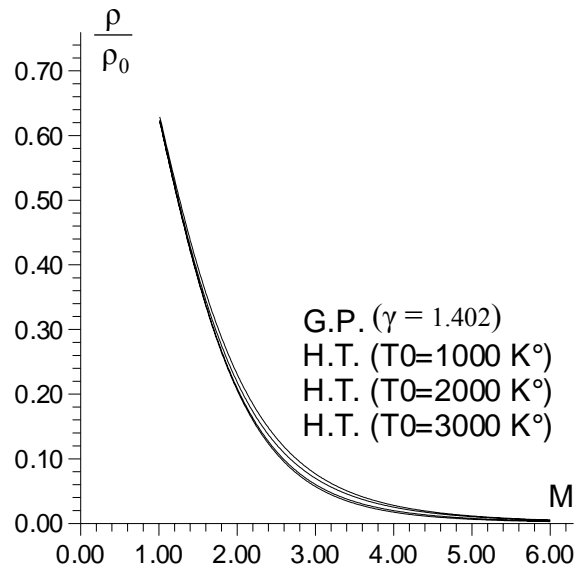


Figure (5.9) : Variation du rapport $\frac{\rho}{\rho_0}$ en fonction de M .

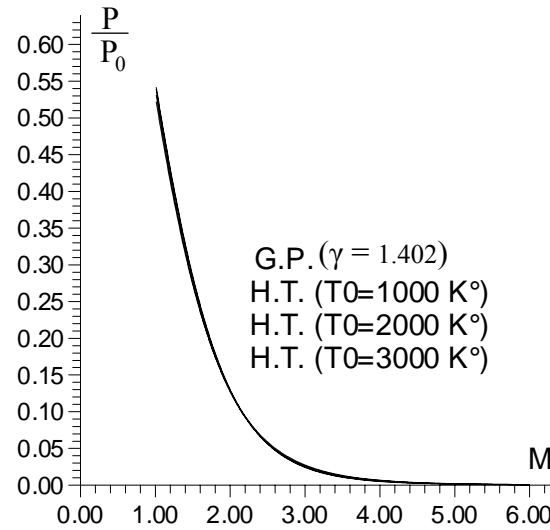


Figure (5.10) : Variation du rapport $\frac{P}{P_0}$ en fonction de M .

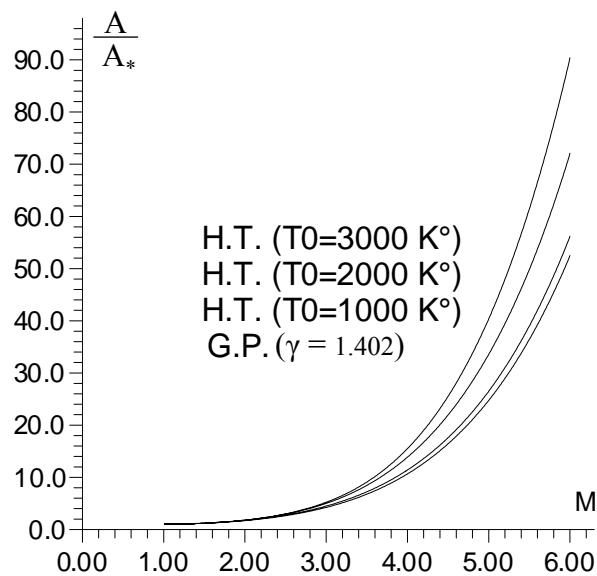


Figure (5.11) : Variation du rapport $\frac{A}{A_*}$ en fonction de M .

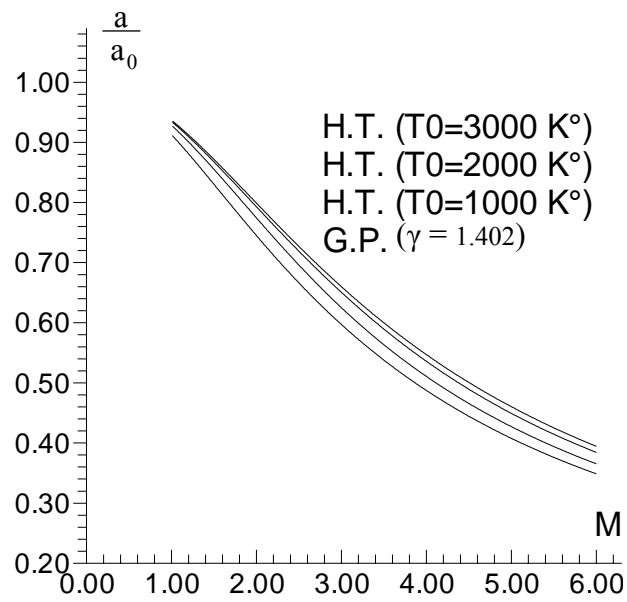


Figure (5.12) : Variation du rapport $\frac{a}{a_0}$ en fonction de M .

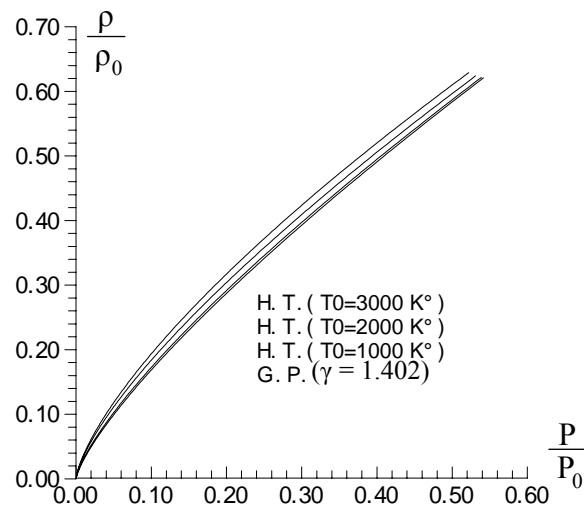


Figure (5.13) : Relation adiabatique isentropique à H.T.

Nous avons prouvé à partir de cette étude que, si nous acceptons une erreur de 5% au maximum, nous pouvons étudier un écoulement supersonique à haute température en utilisant les résultats du modèle d'un gaz parfait lorsque la température génératrice T_0 ne dépasse pas 1000°K et le nombre de Mach ne peut excéder 2.0.

Rapport des Températures $\frac{T}{T_0}$								
M	GP ($\gamma=1.402$)	$T_0=500^\circ\text{K}$	$T_0=1000^\circ\text{K}$	$T_0=1500^\circ\text{K}$	$T_0=2000^\circ\text{K}$	$T_0=2500^\circ\text{K}$	$T_0=3000^\circ\text{K}$	$T_0=3500^\circ\text{K}$
1.0	0.83264	0.83670	0.85351	0.86370	0.86896	0.87228	0.87431	0.87586
1.1	0.80437	0.80866	0.82742	0.83926	0.84536	0.84926	0.85163	0.85346
1.2	0.77553	0.77995	0.80040	0.81389	0.82083	0.82532	0.82803	0.83014
1.3	0.74644	0.75091	0.77275	0.78783	0.79561	0.80067	0.80375	0.80611
1.4	0.71738	0.72183	0.74473	0.76131	0.76993	0.77554	0.77900	0.78158
1.5	0.68859	0.69295	0.71660	0.73456	0.74399	0.75013	0.75398	0.75676
1.6	0.66026	0.66449	0.68857	0.70776	0.71799	0.72462	0.72886	0.73184
1.7	0.63256	0.63662	0.66085	0.68109	0.69208	0.69916	0.70380	0.70698
1.8	0.60561	0.60948	0.63360	0.65470	0.66643	0.67392	0.67892	0.68232
1.9	0.57951	0.58319	0.60697	0.62872	0.64114	0.64901	0.65434	0.65798
2.0	0.55432	0.55781	0.58108	0.60326	0.61632	0.62454	0.63017	0.63406
2.1	0.53011	0.53340	0.55602	0.57843	0.59206	0.60061	0.60649	0.61062
2.2	0.50688	0.50999	0.53186	0.55429	0.56842	0.57728	0.58337	0.58773
2.3	0.48466	0.48760	0.50864	0.53092	0.54545	0.55460	0.56088	0.56544
2.4	0.46344	0.46623	0.48639	0.50837	0.52319	0.53263	0.53905	0.54378
2.5	0.44321	0.44588	0.46513	0.48666	0.50168	0.51137	0.51793	0.52280
2.6	0.42395	0.42650	0.44485	0.46582	0.48094	0.49086	0.49754	0.50251
2.7	0.40563	0.40807	0.42553	0.44586	0.46098	0.47109	0.47789	0.48293
2.8	0.38822	0.39056	0.40717	0.42679	0.44180	0.45206	0.45898	0.46408
2.9	0.37169	0.37392	0.38972	0.40860	0.42341	0.43378	0.44080	0.44595
3.0	0.35600	0.35814	0.37316	0.39128	0.40581	0.41623	0.42335	0.42854
3.1	0.34111	0.34316	0.35745	0.37479	0.38898	0.39941	0.40662	0.41184
3.2	0.32699	0.32895	0.34256	0.35913	0.37292	0.38330	0.39057	0.39584
3.3	0.31359	0.31547	0.32844	0.34425	0.35761	0.36788	0.37520	0.38050
3.4	0.30088	0.30269	0.31505	0.33014	0.34302	0.35315	0.36049	0.36583
3.5	0.28883	0.29056	0.30236	0.31674	0.32914	0.33907	0.34641	0.35178
3.6	0.27740	0.27906	0.29034	0.30404	0.31594	0.32564	0.33294	0.33834
3.7	0.26655	0.26814	0.27893	0.29200	0.30340	0.31283	0.32007	0.32548
3.8	0.25625	0.25779	0.26811	0.28057	0.29148	0.30063	0.30777	0.31318
3.9	0.24647	0.24795	0.25785	0.26974	0.28016	0.28900	0.29603	0.30142
4.0	0.23719	0.23861	0.24811	0.25946	0.26941	0.27793	0.28481	0.29017
4.1	0.22837	0.22974	0.23886	0.24970	0.25920	0.26740	0.27411	0.27942
4.2	0.21999	0.22131	0.23010	0.24044	0.24951	0.25738	0.26391	0.26915
4.3	0.21202	0.21329	0.22176	0.23165	0.24030	0.24784	0.25418	0.25933
4.4	0.20444	0.20567	0.21383	0.22329	0.23155	0.23878	0.24490	0.24996
4.5	0.19723	0.19841	0.20629	0.21535	0.22324	0.23015	0.23606	0.24100
4.6	0.19036	0.19150	0.19911	0.20780	0.21533	0.22194	0.22763	0.23245
4.7	0.18382	0.18492	0.19226	0.20061	0.20781	0.21413	0.21960	0.22428
4.8	0.17759	0.17865	0.18574	0.19376	0.20066	0.20670	0.21195	0.21648
4.9	0.17164	0.17267	0.17953	0.18724	0.19385	0.19962	0.20465	0.20904
5.0	0.16598	0.16697	0.17360	0.18103	0.18736	0.19288	0.19790	0.20194

Tableau (5.2) : Résultats numériques de variation à Haute Température du rapport des températures ($\frac{T}{T_0}$) en fonction du nombre de Mach (M).

Rapport des Masses Volumiques $\frac{\rho}{\rho_0}$								
M	GP ($\gamma=1.402$)	T ₀ =500 °K	T ₀ =1000°K	T ₀ =1500°K	T ₀ =2000°K	T ₀ =2500°K	T ₀ =3000°K	T ₀ =3500°K
1.0	0.63406	0.63266	0.62913	0.62778	0.62704	0.62668	0.62631	0.62618
1.1	0.58185	0.58016	0.57564	0.57384	0.57287	0.57239	0.57192	0.57175
1.2	0.53134	0.52939	0.52382	0.52154	0.52031	0.51970	0.51912	0.51889
1.3	0.48313	0.48097	0.47439	0.47157	0.47009	0.46932	0.46865	0.46831
1.4	0.43769	0.43538	0.42784	0.42446	0.42271	0.42178	0.42103	0.42057
1.5	0.39529	0.39288	0.38450	0.38055	0.37855	0.37744	0.37662	0.37603
1.6	0.35606	0.35362	0.34454	0.34003	0.33779	0.33651	0.33562	0.33492
1.7	0.32005	0.31763	0.30800	0.30296	0.30050	0.29905	0.29810	0.29731
1.8	0.28720	0.28484	0.27485	0.26930	0.26665	0.26504	0.26403	0.26318
1.9	0.25739	0.25513	0.24494	0.23895	0.23612	0.23438	0.23330	0.23242
2.0	0.23046	0.22833	0.21810	0.21174	0.20875	0.20690	0.20575	0.20486
2.1	0.20622	0.20423	0.19411	0.18746	0.18433	0.18240	0.18117	0.18028
2.2	0.18448	0.18264	0.17274	0.16588	0.16263	0.16064	0.15935	0.15846
2.3	0.16501	0.16333	0.15376	0.14677	0.14342	0.14139	0.14006	0.13915
2.4	0.14762	0.14610	0.13693	0.12989	0.12645	0.12441	0.12304	0.12212
2.5	0.13211	0.13075	0.12202	0.11502	0.11151	0.10947	0.10809	0.10715
2.6	0.11828	0.11707	0.10883	0.10193	0.09838	0.09635	0.09496	0.09401
2.7	0.10598	0.10489	0.09717	0.09043	0.08686	0.08484	0.08346	0.08251
2.8	0.09502	0.09405	0.08685	0.08032	0.07676	0.07475	0.07340	0.07245
2.9	0.08527	0.08440	0.07773	0.07145	0.06791	0.06592	0.06460	0.06366
3.0	0.07659	0.07581	0.06965	0.06365	0.06016	0.05820	0.05691	0.05599
3.1	0.06887	0.06817	0.06249	0.05679	0.05337	0.05144	0.05019	0.04929
3.2	0.06200	0.06136	0.05615	0.05076	0.04743	0.04553	0.04432	0.04344
3.3	0.05587	0.05530	0.05053	0.04545	0.04223	0.04036	0.03918	0.03834
3.4	0.05041	0.04989	0.04553	0.04077	0.03766	0.03584	0.03469	0.03388
3.5	0.04553	0.04507	0.04108	0.03663	0.03365	0.03187	0.03076	0.02998
3.6	0.04118	0.04076	0.03712	0.03297	0.03012	0.02840	0.02732	0.02658
3.7	0.03729	0.03691	0.03359	0.02973	0.02702	0.02535	0.02431	0.02359
3.8	0.03381	0.03346	0.03043	0.02685	0.02429	0.02268	0.02167	0.02098
3.9	0.03069	0.03038	0.02761	0.02429	0.02187	0.02032	0.01934	0.01868
4.0	0.02789	0.02761	0.02509	0.02201	0.01973	0.01825	0.01730	0.01667
4.1	0.02539	0.02513	0.02283	0.01998	0.01784	0.01642	0.01551	0.01490
4.2	0.02313	0.02290	0.02080	0.01817	0.01615	0.01480	0.01393	0.01334
4.3	0.02110	0.02089	0.01898	0.01654	0.01466	0.01337	0.01253	0.01196
4.4	0.01928	0.01908	0.01733	0.01508	0.01332	0.01211	0.01130	0.01075
4.5	0.01763	0.01745	0.01585	0.01377	0.01213	0.01098	0.01020	0.00968
4.6	0.01614	0.01598	0.01452	0.01260	0.01106	0.00997	0.00924	0.00873
4.7	0.01480	0.01465	0.01331	0.01154	0.01010	0.00908	0.00837	0.00789
4.8	0.01358	0.01344	0.01221	0.01058	0.00924	0.00828	0.00761	0.00715
4.9	0.01248	0.01235	0.01122	0.00971	0.00847	0.00756	0.00693	0.00648
5.0	0.01148	0.01136	0.01032	0.00893	0.00777	0.00692	0.00631	0.00589

Tableau (5.3) : Résultats numériques de variation à Haute Température du rapport des masses volumiques ($\frac{\rho}{\rho_0}$) en fonction du nombre de Mach (M).

Rapport des Pressions $\frac{P}{P_0}$								
M	GP ($\gamma=1.402$)	T ₀ =500°K	T ₀ =1000°K	T ₀ =1500°K	T ₀ =2000°K	T ₀ =2500°K	T ₀ =3000°K	T ₀ =3500°K
1.0	0.52794	0.52934	0.53697	0.54221	0.54487	0.54663	0.54759	0.54844
1.1	0.46803	0.46915	0.47629	0.48160	0.48428	0.48611	0.48706	0.48796
1.2	0.41207	0.41290	0.41927	0.42447	0.42709	0.42892	0.42985	0.43075
1.3	0.36063	0.36117	0.36659	0.37152	0.37401	0.37577	0.37667	0.37751
1.4	0.31399	0.31427	0.31863	0.32315	0.32546	0.32711	0.32798	0.32871
1.5	0.27219	0.27224	0.27553	0.27954	0.28164	0.28313	0.28396	0.28457
1.6	0.23509	0.23498	0.23724	0.24066	0.24253	0.24384	0.24462	0.24511
1.7	0.20245	0.20221	0.20354	0.20634	0.20797	0.20908	0.20980	0.21019
1.8	0.17393	0.17361	0.17414	0.17631	0.17770	0.17862	0.17925	0.17958
1.9	0.14916	0.14879	0.14867	0.15023	0.15139	0.15211	0.15266	0.15293
2.0	0.12775	0.12736	0.12673	0.12773	0.12866	0.12922	0.12965	0.12989
2.1	0.10932	0.10894	0.10793	0.10843	0.10913	0.10955	0.10988	0.11008
2.2	0.09351	0.09314	0.09188	0.09195	0.09244	0.09273	0.09296	0.09313
2.3	0.07997	0.07964	0.07821	0.07792	0.07823	0.07842	0.07855	0.07868
2.4	0.06841	0.06812	0.06660	0.06603	0.06616	0.06627	0.06633	0.06641
2.5	0.05855	0.05830	0.05676	0.05598	0.05594	0.05598	0.05598	0.05602
2.6	0.05015	0.04993	0.04841	0.04748	0.04732	0.04729	0.04725	0.04724
2.7	0.04299	0.04280	0.04135	0.04032	0.04004	0.03996	0.03989	0.03985
2.8	0.03689	0.03673	0.03536	0.03428	0.03391	0.03379	0.03369	0.03362
2.9	0.03169	0.03156	0.03029	0.02919	0.02875	0.02860	0.02848	0.02839
3.0	0.02727	0.02715	0.02599	0.02490	0.02441	0.02422	0.02409	0.02399
3.1	0.02349	0.02339	0.02234	0.02129	0.02076	0.02055	0.02041	0.02030
3.2	0.02027	0.02019	0.01924	0.01823	0.01769	0.01745	0.01731	0.01720
3.3	0.01752	0.01745	0.01659	0.01565	0.01510	0.01485	0.01470	0.01459
3.4	0.01517	0.01510	0.01434	0.01346	0.01292	0.01266	0.01251	0.01239
3.5	0.01315	0.01310	0.01242	0.01160	0.01108	0.01081	0.01066	0.01055
3.6	0.01142	0.01137	0.01078	0.01002	0.00952	0.00925	0.00910	0.00899
3.7	0.00994	0.00990	0.00937	0.00868	0.00820	0.00793	0.00778	0.00768
3.8	0.00866	0.00863	0.00816	0.00753	0.00708	0.00682	0.00667	0.00657
3.9	0.00756	0.00753	0.00712	0.00655	0.00613	0.00587	0.00573	0.00563
4.0	0.00662	0.00659	0.00623	0.00571	0.00532	0.00507	0.00493	0.00484
4.1	0.00580	0.00577	0.00545	0.00499	0.00462	0.00439	0.00425	0.00416
4.2	0.00509	0.00507	0.00479	0.00437	0.00403	0.00381	0.00368	0.00359
4.3	0.00447	0.00446	0.00421	0.00383	0.00352	0.00331	0.00319	0.00310
4.4	0.00394	0.00392	0.00371	0.00337	0.00308	0.00289	0.00277	0.00269
4.5	0.00348	0.00346	0.00327	0.00297	0.00271	0.00253	0.00241	0.00233
4.6	0.00307	0.00306	0.00289	0.00262	0.00238	0.00221	0.00210	0.00203
4.7	0.00272	0.00271	0.00256	0.00231	0.00210	0.00194	0.00184	0.00177
4.8	0.00241	0.00240	0.00227	0.00205	0.00185	0.00171	0.00161	0.00155
4.9	0.00214	0.00213	0.00201	0.00182	0.00164	0.00151	0.00142	0.00135
5.0	0.00190	0.00190	0.00179	0.00162	0.00146	0.00133	0.00125	0.00119

Tableau (5.4) : Résultats numériques de variation à Haute Température du rapport des pressions ($\frac{P}{P_0}$) en fonction du nombre de Mach (M).

Rapport des Vitesses du Son $\frac{a}{a_0}$								
M	GP ($\gamma=1.402$)	T ₀ =500 °K	T ₀ =1000°K	T ₀ =1500°K	T ₀ =2000°K	T ₀ =2500°K	T ₀ =3000°K	T ₀ =3500°K
1.0	0.95460	0.91720	0.92805	0.93213	0.93435	0.93549	0.93653	0.93707
1.1	0.93825	0.90207	0.91459	0.91942	0.92204	0.92338	0.92461	0.92521
1.2	0.92128	0.88626	0.90042	0.90603	0.90906	0.91062	0.91203	0.91273
1.3	0.90384	0.86993	0.88565	0.89207	0.89552	0.89731	0.89889	0.89972
1.4	0.88607	0.85321	0.87039	0.87764	0.88150	0.88355	0.88527	0.88627
1.5	0.86810	0.83623	0.85473	0.86284	0.86711	0.86942	0.87127	0.87245
1.6	0.85006	0.81911	0.83879	0.84775	0.85242	0.85500	0.85699	0.85834
1.7	0.83203	0.80196	0.82266	0.83247	0.83752	0.84038	0.84250	0.84400
1.8	0.81412	0.78486	0.80641	0.81706	0.82249	0.82563	0.82788	0.82951
1.9	0.79638	0.76789	0.79014	0.80159	0.80740	0.81080	0.81320	0.81493
2.0	0.77889	0.75111	0.77392	0.78613	0.79230	0.79595	0.79852	0.80033
2.1	0.76168	0.73459	0.75780	0.77073	0.77726	0.78114	0.78387	0.78577
2.2	0.74481	0.71837	0.74184	0.75543	0.76232	0.76642	0.76931	0.77130
2.3	0.72830	0.70246	0.72610	0.74027	0.74752	0.75182	0.75488	0.75695
2.4	0.71218	0.68694	0.71062	0.72530	0.73289	0.73739	0.74060	0.74277
2.5	0.69646	0.67178	0.69543	0.71055	0.71848	0.72315	0.72650	0.72877
2.6	0.68116	0.65702	0.68055	0.69603	0.70429	0.70913	0.71261	0.71498
2.7	0.66628	0.64266	0.66602	0.68179	0.69035	0.69536	0.69895	0.70143
2.8	0.65183	0.62872	0.65184	0.66782	0.67667	0.68184	0.68554	0.68811
2.9	0.63780	0.61519	0.63802	0.65416	0.66327	0.66860	0.67239	0.67505
3.0	0.62419	0.60206	0.62458	0.64081	0.65015	0.65564	0.65952	0.66225
3.1	0.61100	0.58934	0.61152	0.62779	0.63733	0.64297	0.64693	0.64973
3.2	0.59821	0.57701	0.59884	0.61509	0.62480	0.63058	0.63462	0.63749
3.3	0.58583	0.56506	0.58653	0.60273	0.61258	0.61849	0.62261	0.62553
3.4	0.57384	0.55349	0.57459	0.59070	0.60066	0.60670	0.61089	0.61386
3.5	0.56223	0.54230	0.56301	0.57901	0.58904	0.59520	0.59946	0.60247
3.6	0.55099	0.53145	0.55180	0.56765	0.57773	0.58399	0.58832	0.59138
3.7	0.54011	0.52096	0.54093	0.55662	0.56672	0.57307	0.57746	0.58056
3.8	0.52957	0.51079	0.53040	0.54591	0.55601	0.56243	0.56689	0.57003
3.9	0.51937	0.50096	0.52020	0.53552	0.54560	0.55208	0.55660	0.55977
4.0	0.50950	0.49143	0.51032	0.52543	0.53548	0.54200	0.54657	0.54978
4.1	0.49994	0.48221	0.50075	0.51565	0.52565	0.53220	0.53681	0.54006
4.2	0.49068	0.47328	0.49148	0.50617	0.51609	0.52266	0.52732	0.53060
4.3	0.48171	0.46463	0.48249	0.49697	0.50681	0.51339	0.51808	0.52139
4.4	0.47302	0.45624	0.47379	0.48805	0.49780	0.50437	0.50908	0.51242
4.5	0.46460	0.44812	0.46536	0.47940	0.48905	0.49561	0.50034	0.50370
4.6	0.45644	0.44025	0.45718	0.47101	0.48056	0.48708	0.49182	0.49521
4.7	0.44853	0.43262	0.44926	0.46287	0.47230	0.47880	0.48354	0.48695
4.8	0.44086	0.42522	0.44157	0.45497	0.46429	0.47075	0.47549	0.47891
4.9	0.43342	0.41805	0.43412	0.44730	0.45651	0.46292	0.46765	0.47108
5.0	0.42620	0.41109	0.42689	0.43987	0.44896	0.45531	0.46003	0.46346

Tableau (5.5) : Résultats numériques de variation à Haute Température du rapport des vitesses du son ($\frac{a}{a_0}$) en fonction du nombre de Mach (M).

Rapport des Sections $\frac{A}{A_*}$								
M	GP ($\gamma=1.402$)	T ₀ =500 °K	T ₀ =1000°K	T ₀ =1500°K	T ₀ =2000°K	T ₀ =2500°K	T ₀ =3000°K	T ₀ =3500°K
1.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1.1	1.00792	1.00798	1.00820	1.00829	1.00834	1.00836	1.00839	1.00839
1.2	1.03041	1.03067	1.03157	1.03198	1.03220	1.03231	1.03241	1.03246
1.3	1.06623	1.06680	1.06898	1.07002	1.07055	1.07084	1.07107	1.07122
1.4	1.11478	1.11579	1.11993	1.12201	1.12307	1.12366	1.12408	1.12443
1.5	1.17592	1.17749	1.18439	1.18809	1.18992	1.19100	1.19169	1.19235
1.6	1.24985	1.25208	1.26271	1.26876	1.27170	1.27352	1.27459	1.27569
1.7	1.33703	1.34003	1.35546	1.36486	1.36935	1.37221	1.37383	1.37550
1.8	1.43817	1.44202	1.46349	1.47747	1.48409	1.48840	1.49081	1.49318
1.9	1.55413	1.55892	1.58779	1.60792	1.61742	1.62368	1.62724	1.63046
2.0	1.68598	1.69178	1.72956	1.75775	1.77114	1.77995	1.78512	1.78941
2.1	1.83494	1.84181	1.89013	1.92868	1.94725	1.95938	1.96678	1.97243
2.2	2.00237	2.01036	2.07098	2.12263	2.14805	2.16443	2.17481	2.18229
2.3	2.18978	2.19895	2.27375	2.34166	2.37606	2.39783	2.41214	2.42208
2.4	2.39886	2.40902	2.50019	2.58799	2.63403	2.66265	2.68198	2.69527
2.5	2.63140	2.64253	2.75223	2.86400	2.92496	2.96223	2.98791	3.00565
2.6	2.88937	2.90157	3.03193	3.17220	3.25204	3.30025	3.33383	3.35740
2.7	3.17488	3.18826	3.34149	3.51525	3.61870	3.68072	3.72403	3.75507
2.8	3.49018	3.50487	3.68330	3.89594	4.02853	4.10792	4.16320	4.20360
2.9	3.83771	3.85383	4.05987	4.31724	4.48532	4.58647	4.65640	4.70837
3.0	4.22003	4.23772	4.47390	4.78224	4.99302	5.12129	5.20916	5.27522
3.1	4.63989	4.65930	4.92828	5.29420	5.55578	5.71754	5.82737	5.91048
3.2	5.10020	5.12150	5.42604	5.85658	6.17786	6.38066	6.51738	6.62097
3.3	5.60404	5.62740	5.97042	6.47298	6.86372	7.11633	7.28593	7.41406
3.4	6.15467	6.18027	6.56485	7.14722	7.61798	7.93044	8.14012	8.29766
3.5	6.75553	6.78258	7.21294	7.88332	8.44542	8.82910	9.08744	9.28021
3.6	7.41025	7.44095	7.91852	8.68550	9.35102	9.81859	10.13568	10.37067
3.7	8.12265	8.15623	8.68563	9.55821	10.33996	10.90539	11.29296	11.57852
3.8	8.89674	8.93345	9.51850	10.50613	11.41762	12.09616	12.56766	12.91371
3.9	9.73674	9.77683	10.42160	11.53417	12.58962	13.39775	13.96841	14.38662
4.0	10.64707	10.69081	11.39961	12.64751	13.86181	14.81722	15.50404	16.00805
4.1	11.63237	11.68006	12.45713	13.85158	15.24031	16.36183	17.18365	17.78914
4.2	12.69748	12.74943	13.59764	15.15205	16.73152	18.03907	19.01649	19.74137
4.3	13.84748	13.90401	14.82904	16.55489	18.34211	19.85670	21.01206	21.87649
4.4	15.08766	15.14913	16.15699	18.06634	20.07907	21.82274	23.18007	24.20653
4.5	16.42356	16.49033	17.58742	19.69293	21.94968	23.94551	25.53043	26.74374
4.6	17.86094	17.93340	19.12650	21.44146	23.96156	26.23362	28.07335	29.50062
4.7	19.40581	19.48437	20.78066	23.31906	26.12266	28.69605	30.81928	32.48989
4.8	21.06443	21.14952	22.55659	25.33315	28.44129	31.34212	33.77900	35.72452
4.9	22.84330	22.93538	24.46126	27.49145	30.92609	34.18152	36.96359	39.21771
5.0	24.74919	24.84874	26.50119	29.80202	33.58607	37.22432	40.38452	42.98295

Tableau (5.6) : Résultats numériques de variation à Haute Température du rapport des sections ($\frac{A}{A_*}$) en fonction du nombre de Mach (M).

V.3 Résultats de la fonction de Prandtl-Meyer à Haute Température

Dans cette deuxième partie, nous allons présenter les résultats de la fonction de PRANDTL-MEYER lorsque la température génératrice T_0 augmente, ce que nous l'appelons modèle d'un gaz parfait à Haute Température dans le régime supersonique. Les relations nécessaires du modèle mathématique sont données dans le chapitre (3).

La figure (5.14) représente la variation de la fonction de PRANDTL-MEYER en fonction du nombre de Mach dans le domaine supersonique pour quelques valeurs de la température génératrice T_0 y compris le cas d'un gaz parfait. Nous remarquons clairement que si nous prenons en considération la variation de $C_p(T)$ et de $\gamma(T)$, la température génératrice T_0 influe sur la grandeur de cette fonction. A titre d'information, les valeurs numériques trouvées pour quelques valeurs du nombre de Mach et de T_0 sont présentées dans le tableau (5.7). Les résultats numériques démontrent qu'il y a une différence en valeurs entre les deux modèles qui augmente avec l'augmentation du nombre de Mach.

La figure (5.15) représente un exemple de variation de la valeur de la fonction de Prandtl-Meyer à haute température pour un nombre de Mach $M_S=3.0$. Nous remarquons clairement qu'à basse température, le gaz peut être considéré comme calorifiquement parfait et cela jusqu'à environ 240 °K. Plus T_0 augmente, la valeur de v augmente considérablement et s'éloigne du modèle d'un gaz parfait, d'où, la nécessité d'utiliser le modèle à haute température pour corriger les résultats, puisque, réellement les valeurs de C_p et de γ varient avec la température.

Le calcul de la valeur de PRANDTL-MEYER d'un écoulement en utilisant la relation (3.5) du modèle d'un gaz parfait est très simple et rapide par rapport à l'utilisation de la relation du modèle à haute température mais avec un certain écart entre eux qui varie avec T_0 et M_S . Nous remarquons qu'à basse température et à un nombre de Mach inférieur à 2, l'écart en résultats entre les deux modèles est petit. Donc, dans cet intervalle, nous pouvons étudier l'écoulement à haute température en utilisant la relation du modèle d'un gaz parfait. Par conséquent, lorsque la température T_0 augmente, la théorie d'un gaz parfait commence à donner des résultats qui s'éloignent au fur et à mesure du cas réel, d'où la nécessité d'utiliser le modèle à Haute Température.

Nous avons prouvé à partir de cette étude que, si nous acceptons une erreur d'environ 5 %, nous pouvons étudier un écoulement supersonique en utilisant la fonction de PRANDTL-MEYER (3.5) du modèle d'un gaz parfait lorsque la température génératrice T_0 ne dépasse pas 1000 °K et le nombre de Mach ne peut excéder 2.0.

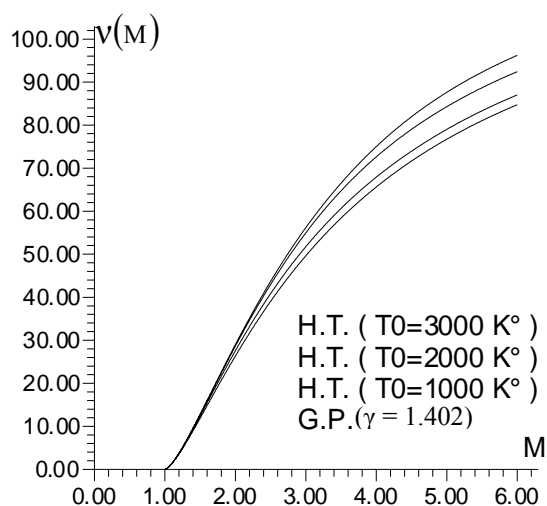


Figure (5.14) : Variation de la fonction $v(M)$ à Haute température.

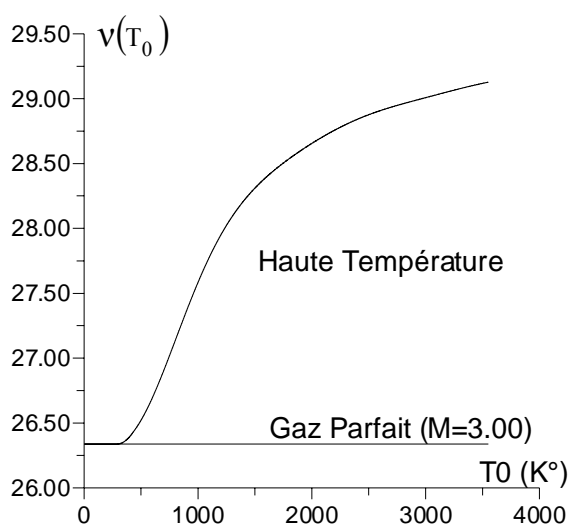


Figure (5.15) : Variatio de v en fonction de T_0 pour $M=3.0$.

Fonction de PRANDTL-MEYER (v)								
M	GP($\gamma=1.402$)	T ₀ =500 °K	T ₀ =1000°K	T ₀ =1500°K	T ₀ =2000°K	T ₀ =2500°K	T ₀ =3000°K	T ₀ =3500°K
1.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1.1	1.33500	1.34588	1.38121	1.39649	1.40469	1.40875	1.41263	1.41394
1.2	3.55471	3.58424	3.68644	3.73243	3.75673	3.76916	3.78010	3.78522
1.3	6.16365	6.21526	6.40574	6.49530	6.54176	6.56651	6.58631	6.59855
1.4	8.97963	9.05155	9.34687	9.49248	9.56655	9.60772	9.63763	9.66046
1.5	11.89050	11.98851	12.40111	12.61517	12.72191	12.78376	12.82495	12.86116
1.6	14.84086	14.96069	15.49922	15.79396	15.93822	16.02496	16.07891	16.13010
1.7	17.78523	17.92490	18.59442	18.98167	19.16825	19.28385	19.35265	19.41915
1.8	20.69486	20.85199	21.65424	22.14509	22.37892	22.52691	22.61328	22.69468
1.9	23.55013	23.72213	24.65591	25.26036	25.54662	25.72998	25.83719	25.93294
2.0	26.33773	26.52200	27.58360	28.31018	28.65439	28.87557	29.00711	29.11717
2.1	29.04886	29.24289	30.42656	31.28206	31.69006	31.95110	32.11035	32.23556
2.2	31.67796	31.87946	33.17790	34.16711	34.64501	34.94769	35.13761	35.27975
2.3	34.22186	34.42877	35.83362	36.95923	37.51323	37.85930	38.08224	38.24380
2.4	36.67915	36.88741	38.39194	39.65455	40.29068	40.68208	40.93971	41.12355
2.5	39.04972	39.25782	40.85276	42.25096	42.97487	43.41382	43.70721	43.91612
2.6	41.33441	41.54234	43.21722	44.74780	45.56445	46.05357	46.38337	46.61974
2.7	43.53475	43.74252	45.48737	47.14557	48.05902	48.60130	48.96793	49.23355
2.8	45.65279	45.86040	47.66594	49.44573	50.45894	51.05763	51.46154	51.75754
2.9	47.69090	47.89835	49.75605	51.65046	52.76518	53.42370	53.86551	54.19243
3.0	49.65171	49.85900	51.76116	53.76255	54.97927	55.70097	56.18160	56.53958
3.1	51.53798	51.74511	53.68482	55.78518	57.10317	57.89119	58.41190	58.80085
3.2	53.35253	53.55951	55.53067	57.72186	59.13922	59.99628	60.55868	60.97848
3.3	55.09825	55.30508	57.30234	59.57625	61.09009	62.01835	62.62430	63.07495
3.4	56.77798	56.98466	59.00338	61.35214	62.95870	63.95964	64.61116	65.09291
3.5	58.39453	58.60107	60.63725	63.05331	64.74818	65.82253	66.52166	67.03503
3.6	59.95066	60.15705	62.20726	64.68352	66.46176	67.60951	68.35816	68.90397
3.7	61.44903	61.65529	63.71663	66.24644	68.10280	69.32317	70.12304	70.70234
3.8	62.89223	63.09835	65.16838	67.74562	69.67465	70.96619	71.81863	72.43265
3.9	64.28275	64.48874	66.56540	69.18446	71.18067	72.54133	73.44728	74.09733
4.0	65.62298	65.82884	67.91043	70.56620	72.62418	74.05138	75.01131	75.69869
4.1	66.91520	67.12094	69.20569	71.89394	74.00840	75.49918	76.51307	77.23898
4.2	68.16161	68.36723	70.45198	73.17059	75.33647	76.88755	77.95492	78.72037
4.3	69.36430	69.56979	71.65454	74.39889	76.61137	78.21929	79.33921	80.14497
4.4	70.52524	70.73062	72.81537	75.58142	77.88600	79.49714	80.66829	81.51484
4.5	71.64634	71.85160	73.93635	76.72062	79.01307	80.72382	81.94453	82.83203
4.6	72.72939	72.93454	75.01929	77.81875	80.14517	81.90192	83.17024	84.09855
4.7	73.77611	73.98115	76.06590	78.87794	81.23475	83.03396	84.34773	85.31640
4.8	74.78812	74.99306	77.07781	79.90019	82.28410	84.12236	85.47927	86.48753
4.9	75.76695	75.97179	78.05654	80.88735	83.29538	85.16943	86.56705	87.61392
5.0	76.71409	76.91883	79.00358	81.84118	84.27061	86.17735	87.61322	88.69746

Tableau (5.7) : Résultats numériques de variation de la fonction de Prandtl-Meyer.

5.4. Résultats de la tuyère à corps central à Haute Température

Dans cette troisième partie de notre travail, nous allons présenter les résultats concernant la forme du corps central de la tuyère étudiée. Parmi les résultats à trouver, pour déterminer l'allure de la tuyère lorsque la température génératrice T_0 augmente, nous nous intéressons à la variation des paramètres M , θ , $\frac{P}{P_0}$, $\frac{T}{T_0}$ et $\frac{\rho}{\rho_0}$ le long de la paroi du corps central pour des raisons mécaniques et physiques.

Il faut noter que, pour la présentation des profils des tuyères, les repères doivent être orthonormés pour avoir la forme exacte à une échelle donnée. La validation des résultats obtenus est faite par la comparaison des deux rapports des sections $\frac{A}{A_*}$ (théorique) et $\frac{A}{A_*}$ (calculé). Le rapport $\frac{A}{A_*}$ (théorique) est donné par le calcul d'un écoulement supersonique dans une tuyère présenté dans le chapitre (2). Cette dernière reste toujours valable pour notre cas, puisque, au col et à la section de sortie de la tuyère, l'écoulement est unidirectionnel. Le rapport $\frac{A}{A_*}$ (calculé) est donné numériquement par le programme de calcul. Les valeurs des résultats de dimensionnement sont obtenues dès qu'il y aura convergence, avec une précision voulue, de la valeur du rapport des sections calculée numériquement avec celle du rapport théorique.

5.4.1. Effet de la discrétisation sur la convergence du problème

Le but de ce paragraphe est de varier le nombre N_p de points choisis sur le contour du corps central et de calculer les paramètres caractérisant la conception de la tuyère. Nous prenons le cas pour $M_S=2.5$, $\lambda_E=1.0$ et $T_0=1000$ °K. Le rapport théorique des sections de référence, d'un écoulement unidimensionnel, est donné dans ce cas par []:

$$\frac{A_S}{A_*}(\text{Uniforme})=2.752229$$

Les résultats présentés dans le tableau (5.8) suivants ne dépendent pas de la valeur de N_p .

Ψ (degré)	φ_S (degré)	φ_E (degré)	$\frac{x_E}{\lambda_E}$	$\frac{y_E}{\lambda_E}$	θ_* (degré)
49.14726	23.57817	130.85273	-0.65411	0.756393	40.85273

Tableau (5.8) : Paramètres ne dépendant pas de N_p .

Le tableau (5.9) donne les différents résultats obtenus des paramètres de dimensionnement de l'exemple proposé. Nous disons que le problème converge, avec une certaine précision ε donnée, si le rapport des sections calculé pour la discrétisation donnée est égal ou juste inférieur au rapport des sections donné par le calcul unidirectionnel. Dans ce cas, les paramètres convergent aussi vers la solution précise.

Nous pouvons considérer la convergence par une autre définition : si tous les paramètres de conception, entre deux discrétisations successives, conservent tous les chiffres décimaux. Pour notre étude, nous nous intéressons uniquement de la convergence du rapport des sections.

N_P	$\frac{A_S}{A_*}$ (Calculé)	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$
10	3.43806	8.18408	17.58716	0.52100	5.82601
100	2.80051	7.06253	15.06443	0.55477	5.19212
500	2.76142	6.98059	14.88359	0.55784	5.15049
1000	2.75678	6.97043	14.86126	0.55822	5.14540
2000	2.75449	6.96535	14.85012	0.55841	5.14287
5000	2.75313	6.96230	14.84344	0.55853	5.14136
10000	2.75268	6.96129	14.84121	0.55857	5.14085
20000	2.75245	6.96078	14.84009	0.55859	5.14060
50000	2.75232	6.96047	14.83943	0.55860	5.14045
100000	2.75227	6.96037	14.83920	0.55860	5.14040
200000	2.75225	6.96032	14.83909	0.55860	5.14038
500000	2.75224	6.96029	14.83903	0.55860	5.14036
800000	2.75224	6.96028	14.83901	0.55860	5.14036
850000	2.75224	6.96028	14.83901	0.55860	5.14036

Tableau (5.9) : Paramètres de conception de l'exemple proposé.

Les autres paramètres ne sont pas mentionnés dans ce tableau. Alors, sur la base de notre considération de convergence, si nous prenons, par exemple, $\varepsilon = 10^{-5}$, il nous faut environ 870000 points ($N_P = 870000$) pour avoir la convergence voulue. Nous remarquons que si N_P augmente, le rapport des sections convergent d'une manière décroissante. Les autres rapports, mentionnés dans le tableau (5.9), convergent vers la solution précise avant la convergence du rapport des sections, ce qui est un avantage, afin de contrôler la convergence du rapport des sections uniquement. Nous pouvons dire que le nombre N_P nécessaire (le plus petit possible), pour avoir la convergence, dépend des paramètres suivants :

$$N_P = f(\varepsilon, M_S, T_0) \quad (5.1)$$

Le nombre N_P dépend encore du nombre de points nécessaires pour l'évaluation des intégrales (2.74) et (3.4) par la méthode de *Simpson*.

Nous remarquons, également, que la longueur de la tuyère, la masse de la structure et la masse du gaz convergent d'une manière décroissante, tandis que, la force de pression exercée sur le corps central converge d'une manière croissante.

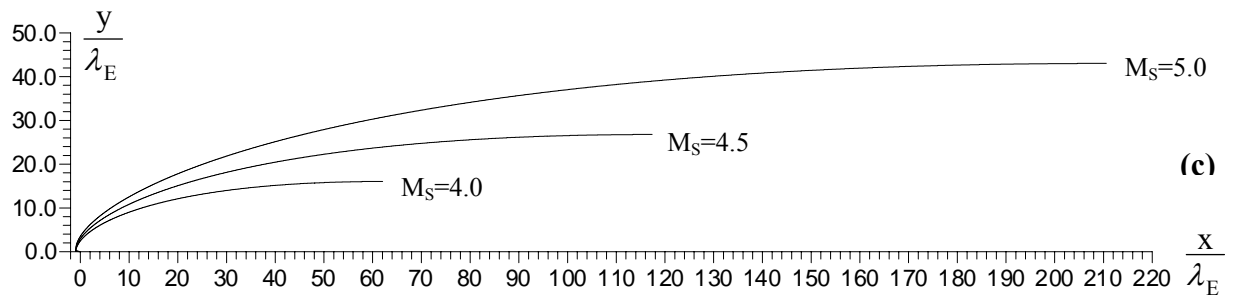
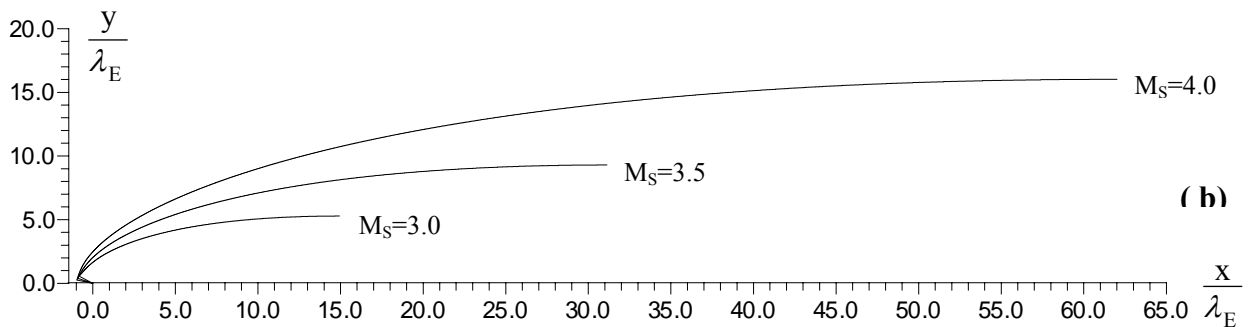
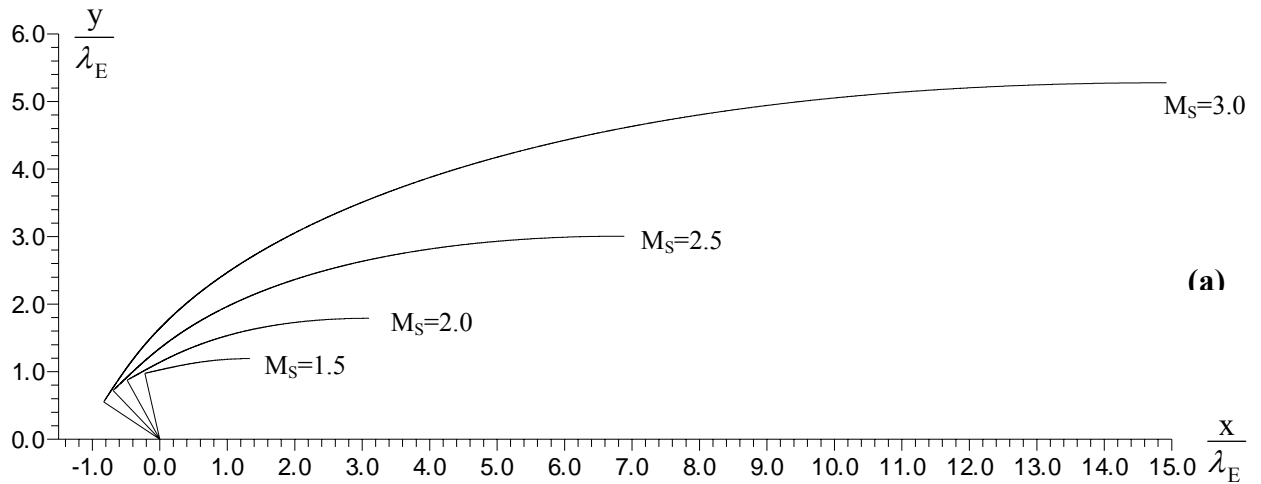
Après plusieurs calculs, en balayant tout le domaine de variation du nombre de Mach et de la température, nous estimons que lorsque $b_1=1.45$, le calcul converge avec un nombre N_P optimal.

En réalité, le nombre b_1 est fonction de M_S , T_0 , ε et le nombre de points de la quadrature de *Simpson*. Cette valeur de b_1 est choisie surtout lorsque $M_S=5.0$ et $T_0=3550$ °K. Ce choix est justifié par le gain en nombre de points de discrétisation N_P pour avoir la convergence dans un temps réduit. Par exemple, si nous choisissons $M_S=5.0$, $T_0=3000$ °K et $\varepsilon=10^{-3}$, avec intégration par 3 points en utilisant la méthode de *Simpson*, il nous faut que $N_P=557282$ points si nous utilisons la relation (4.34) et environ 495000 points si nous utilisons la relation (4.37) et $b_1=1.45$. Ici, nous avons gagné d'environ 12000 points. Mais si nous prenons $M_S=2.0$, $T_0=1000$ °K et $\varepsilon =10^{-3}$, avec intégration de 3 points par la méthode de *Simpson*, il faut que $N_P=1148$ points si nous utilisons la relation (4.34) et $N_P=1194$ si nous utilisons la relation (4.37). Toute une discussion sur le nombre N_P de points de la discrétisation et les paramètres M_S , T_0 , ε et la quadrature de *Simpson* pour une convergence optimale dans un temps réduit.

Nous représentons les allures de la paroi du corps central lorsque $M_S=1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5$ et 5.0 avec différentes valeurs de température $T_0=500$ °K, 1000 °K, 1500 °K, 2000 °K, 2500 °K, 3000 °K et 3500 °K. Nous représentons, également, l'allure du corps central pour le cas d'un gaz calorifiquement parfait lorsque $\gamma=1.402$.

5.4.2 Variation du nombre de Mach de sortie M_S pour T_0 fixé

Le but de ce paragraphe c'est de voir la forme du corps central en variant le nombre de Mach M_S de la section de sortie en fixant la température génératrice T_0 .



- (a) Forme du corps central pour $M_S = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$
 (b) Forme du corps central pour $M_S = 3.0, 3.5, 4.0$
 (c) Forme du corps central pour $M_S = 4.0, 4.5, 5.0$

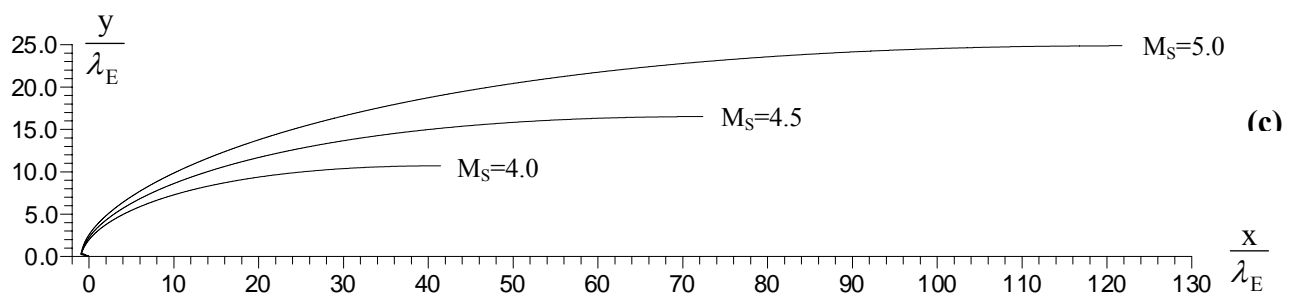
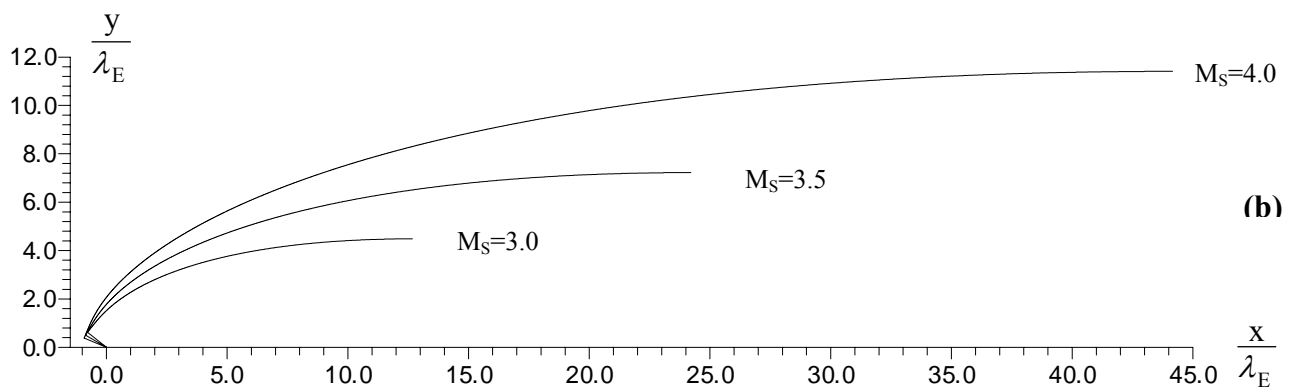
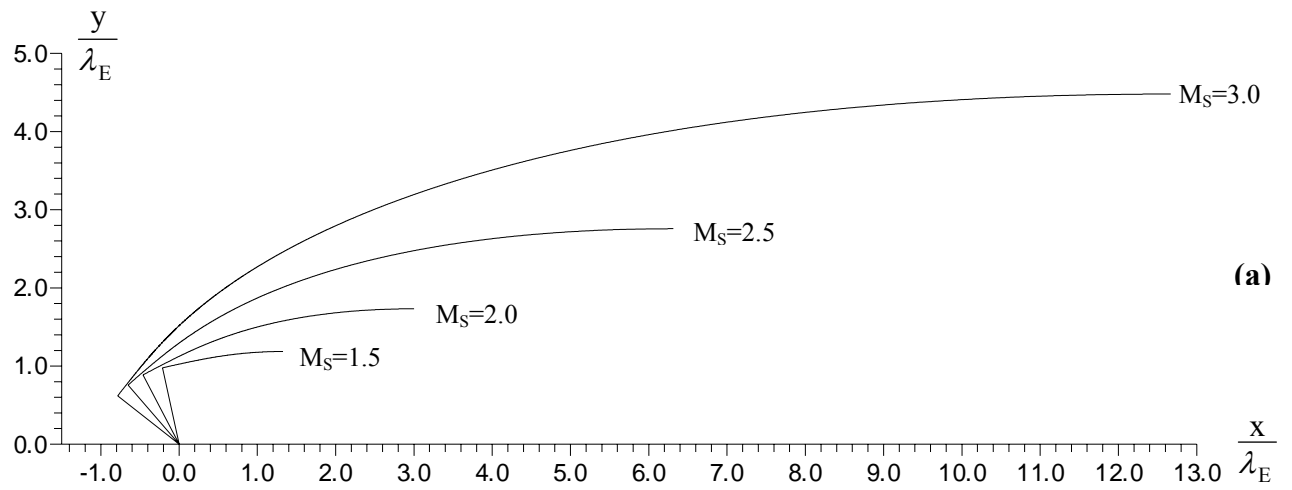
Figure (5.16) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach M_S de sortie lorsque $T_0 = 500 \text{ °K}$.

Sur la figure (5.16), nous avons représenté l'allure du corps central pour différentes valeurs du nombre de Mach de sortie lorsque $T_0 = 500 \text{ °K}$. Pour obtenir une bonne présentation de la tuyère, l'échelle est prise orthonormée. Au niveau du col de la tuyère, nous avons ajouté une ligne droite entre le début du corps central (point E) et la carène (point A) pour visualiser

et différentier entre les autres courbes et même pour présenter le col de chaque tuyère. Nous ne pouvons pas tracer toutes les formes dans un seul repère vue la différence entre les dimensions des tuyères. Nous avons préféré les tracer séparément pour avoir une bonne présentation. Les résultats de dimensionnement des tuyères de la figure (5.16) sont présentés dans le tableau (5.10). La précision des résultats numériques trouvés est choisie pour $\epsilon=10^{-5}$. Le nombre de points de discrétisation N_p du corps central, pour obtenir la précision ϵ indiquée, varie avec le nombre de Mach M_S et aussi, en général, avec la température T_0 .

$T_0 = 500 \text{ °K}$								
M_S	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
Ψ (Degré)	78.01151	63.47803	50.74220	40.14101	31.39894	24.17117	18.14840	13.08117
Φ_S (Degré)	41.81031	30.00000	23.57817	19.47122	16.60154	14.47751	12.83958	11.53695
Φ_E (Degré)	101.98848	116.52196	129.25779	139.85898	148.60105	155.82882	161.85159	166.91882
$\frac{\lambda_S}{\lambda_E}$	1.76623	3.38357	6.60631	12.71316	23.74249	42.76323	74.20643	124.24363
$\frac{R_S}{\lambda_E}$	1.17749	1.69178	2.64252	4.23772	6.78357	10.69080	16.49031	24.84872
$\frac{R_E}{\lambda_E}$	0.19930	0.79702	1.86821	3.59305	6.26257	10.28134	16.17883	24.62239
$\frac{x_E}{\lambda_E}$	-0.20771	-0.44654	-0.63281	-0.76446	-0.85356	-0.91232	-0.95025	-0.97405
$\frac{y_E}{\lambda_E}$	0.97818	0.89476	0.77430	0.64467	0.52099	0.40946	0.31147	0.22633
$\frac{L}{\lambda_E}$	1.52418	3.37679	6.68759	12.75054	23.60634	42.31764	73.30122	122.70744
$\frac{x_{\text{Plug}}}{\lambda_E}$	1.31647	2.93025	6.05478	11.98608	22.75278	41.40532	72.35097	121.73339
$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	3.08133	7.01965	14.20678	27.30900	50.48270	89.94315	154.63515	256.99210
$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	0.08987	0.28970	0.52332	0.75039	0.95465	1.13193	1.28356	1.41270
$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	1.45168	2.79474	5.05560	8.98451	15.70788	26.88751	44.89624	73.01430
θ^* (Degré)	11.98848	26.52196	39.25779	49.85898	58.60105	65.82882	71.85159	76.91882
$\frac{A_S}{A^*}$ (Calculé)	1.17748	1.69178	2.64252	4.23772	6.78357	10.69080	16.49031	24.84872
$\frac{A_S}{A^*}$ (Exacte)	1.17748	1.69178	2.64252	4.23771	6.78356	10.69080	16.49031	24.84872

Tableau (5.10) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S à la température $T_0=500 \text{ °K}$.

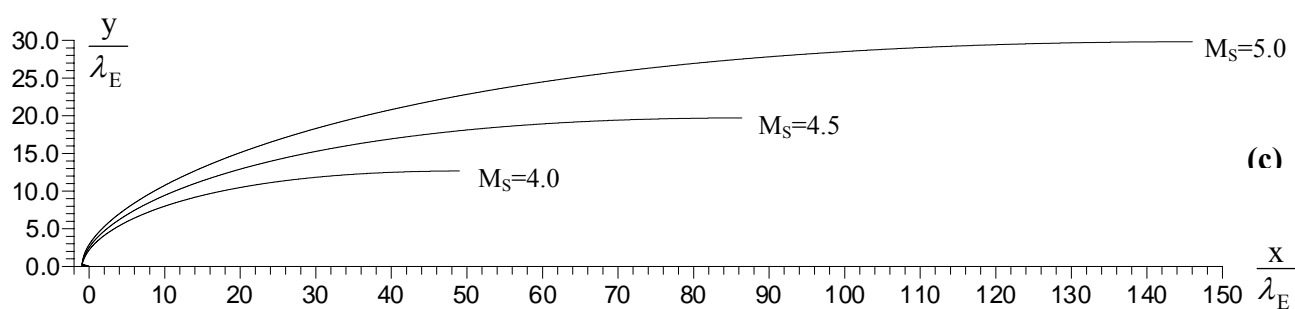
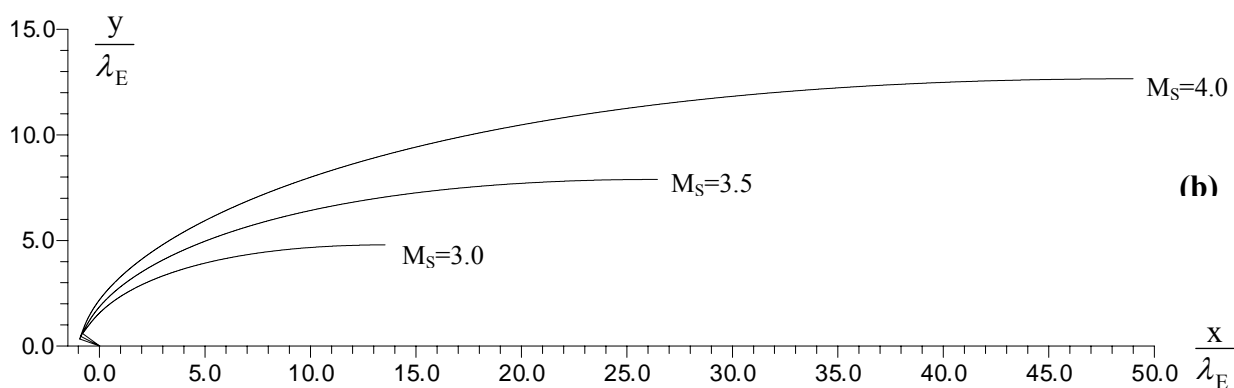
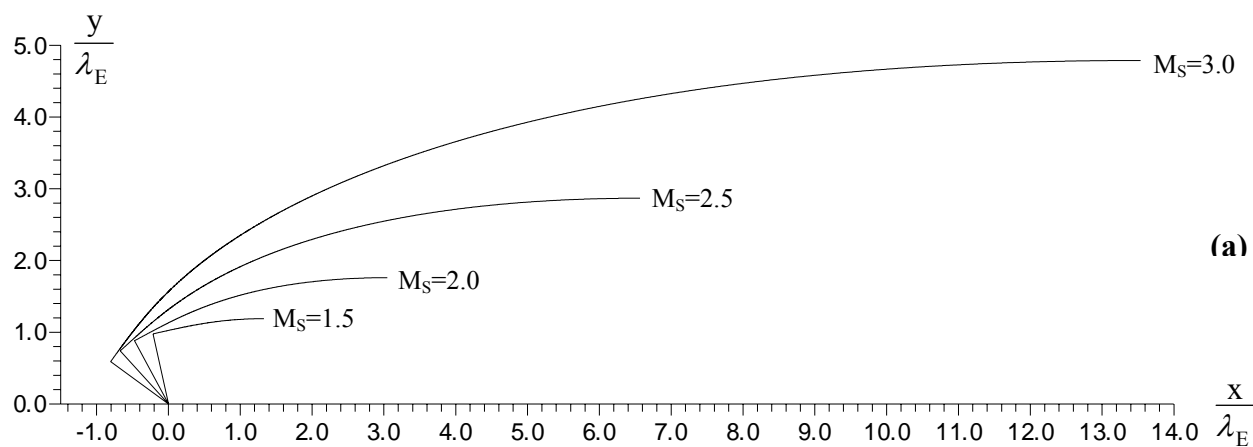


- (a) Forme du corps central pour $M_S = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$
 (b) Forme du corps central pour $M_S = 3.0, 3.5, 4.0$
 (c) Forme du corps central pour $M_S = 4.0, 4.5, 5.0$

Figure (5.17) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach M_S de sortie lorsque $T_0 = 1000 \text{ }^\circ\text{K}$.

T₀=1000 °K								
M_S	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
Ψ (Degré)	7759891	62.41643	49.14726	38.23886	29.36276	22.08958	16.06365	10.99643
Φ _S (Degré)	41.81031	30.00000	23.57817	19.47122	16.60155	14.47751	12.83958	11.53695
Φ _E (Degré)	102.40108	117.58357	130.85273	141.76113	150.63723	157.91041	163.93634	169.00357
$\frac{\lambda_S}{\lambda_E}$	1.776596	3.45913	6.88058	13.42171	25.24527	45.59841	79.14335	132.50950
$\frac{R_S}{\lambda_E}$	1.18439	1.72956	2.75223	4.47390	7.21293	11.39960	17.58741	26.50190
$\frac{R_E}{\lambda_E}$	0.20772	0.84323	1.99583	3.85496	6.72259	11.02354	17.31070	26.31115
$\frac{x_E}{\lambda_E}$	-0.21475	-0.46304	-0.65411	-0.78543	-0.87153	-0.92659	-0.96095	-0.98163
$\frac{y_E}{\lambda_E}$	0.97666	0.88633	0.75639	0.61894	0.49033	0.37605	0.27670	0.19074
$\frac{L}{\lambda_E}$	1.53895	3.45873	6.96027	13.43955	25.06445	45.07706	78.12540	130.81390
$\frac{x_{Plug}}{\lambda_E}$	1.32419	2.99569	6.30615	12.65411	24.19292	44.15047	77.16445	129.83226
$\frac{Masse}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	3.11339	7.20928	14.83899	28.87284	53.71533	95.94005	164.95629	274.12302
$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	0.09495	0.30898	0.55860	0.79740	1.00833	1.18895	1.34193	1.47174
$\frac{Masse_{Gaz}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	1.44555	2.80809	5.14035	9.22189	16.20719	27.79849	46.41406	75.47111
θ* (Degré)	12.40108	27.58357	40.85273	51.76113	60.63723	67.91041	73.93634	79.000357
$\frac{A_S}{A^*}$ (Calculé)	1.18439	1.72956	2.75223	4.47390	7.21293	11.39960	17.58741	26.50190
$\frac{A_S}{A^*}$ (Exacte)	1.18439	1.72956	2.75223	4.47390	7.21293	11.39960	17.58740	26.50189

Tableau (5.11) : Résultats numériques de dimensionnement d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S à la température T₀=1000 °K.

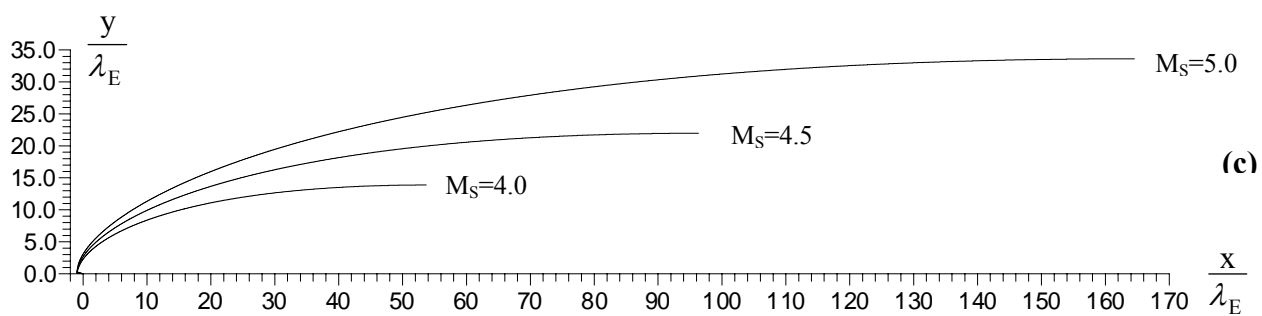
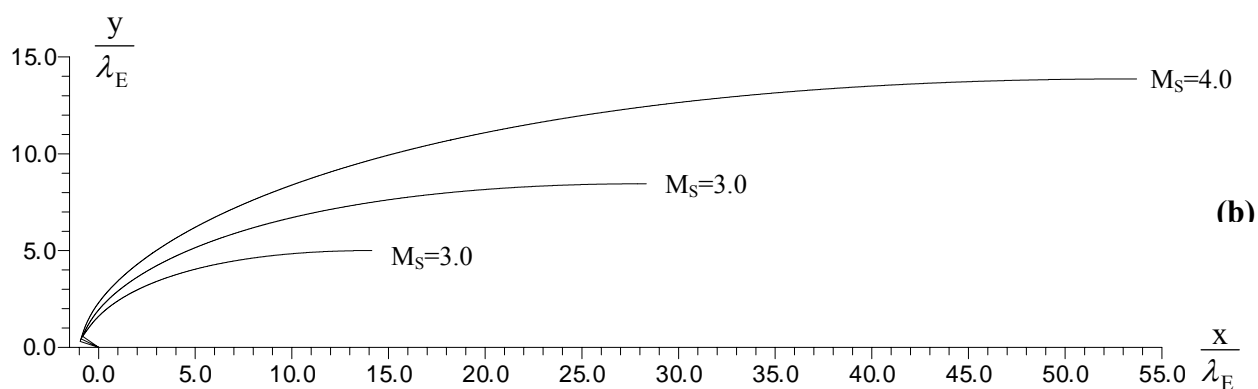
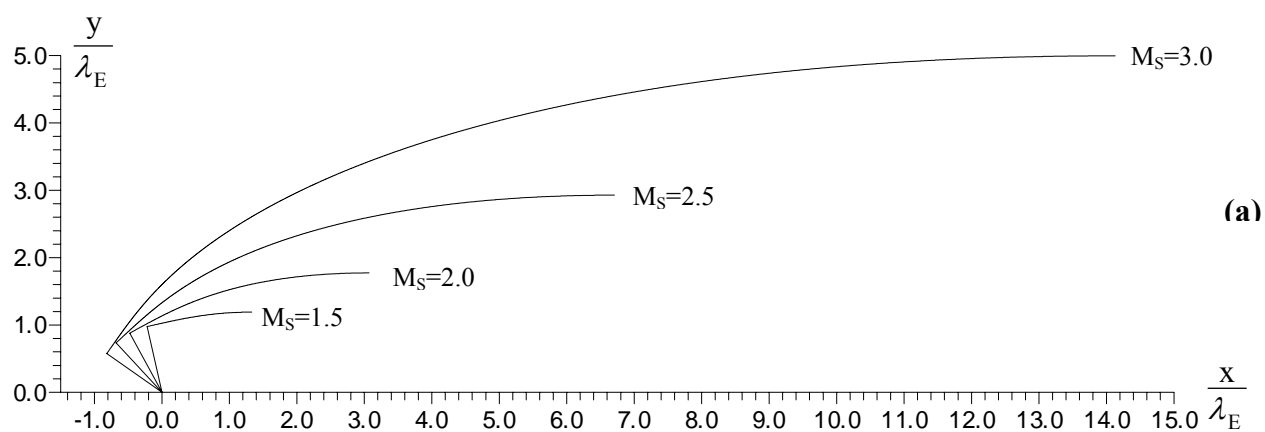


- (a) Forme du corps central pour $M_S = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$
 (b) Forme du corps central pour $M_S = 3.0, 3.5, 4.0$
 (c) Forme du corps central pour $M_S = 4.0, 4.5, 5.0$

Figure (5.18) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach M_S de sortie lorsque $T_0 = 1500$ °K.

T₀=1500 °K								
M_S	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
Ψ (Degré)	77.38486	61.68985	47.74907	36.23747	26.94670	19.43381	13.27939	8.15883
Φ _S (Degré)	41.81032	30.00000	23.57818	19.47122	16.60155	14.47751	12.83959	11.53696
Φ _E (Degré)	102.61514	118.31015	132.25093	143.76253	153.05329	160.56619	166.72061	171.84117
$\frac{\lambda_S}{\lambda_E}$	1.78214	3.51550	7.16001	14.34670	27.59161	50.59002	88.61812	149.00999
$\frac{R_S}{\lambda_E}$	1.18809	1.75775	2.86400	4.78223	7.88332	12.64751	19.69291	29.80200
$\frac{R_E}{\lambda_E}$	0.21224	0.87735	2.12380	4.19110	7.43015	12.31479	19.46322	29.66008
$\frac{x_E}{\lambda_E}$	-0.21840	-0.47424	-0.67238	-0.80657	-0.89143	-0.94303	-0.97326	-0.98988
$\frac{y_E}{\lambda_E}$	0.97586	0.88039	0.74021	0.59113	0.45316	0.33272	0.22970	0.14192
$\frac{L}{\lambda_E}$	1.54673	3.51875	7.23463	14.34670	27.59161	50.59002	88.61820	149.00999
$\frac{x_{Plug}}{\lambda_E}$	1.32833	3.04451	6.56226	13.52620	26.44145	48.98358	86.40231	145.99938
$\frac{Masse}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	3.13034	7.34852	15.47437	30.89234	58.72071	106.43315	18467314	30821192
$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	0.09805	0.32380	0.59251	0.85087	1.07662	1.26657	1.42492	1.55731
$\frac{Masse_{Gaz}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	1.44383	2.82750	5.26381	9.64452	17.27085	30.02082	50.55213	82.53622
θ* (Degré)	12.61514	28.31015	42.25093	53.76253	63.05329	70.56619	76.72061	81.84117
$\frac{A_S}{A^*}$ (Calculé)	1.18809	1.75775	2.86400	4.78223	7.88331	12.64751	19.69291	29.80200
$\frac{A_S}{A^*}$ (Exacte)	1.18809	1.75774	2.86400	4.78223	7.88331	12.64751	19.69291	29.80200

Tableau (5.12) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S à la température T₀ = 1500 °K.

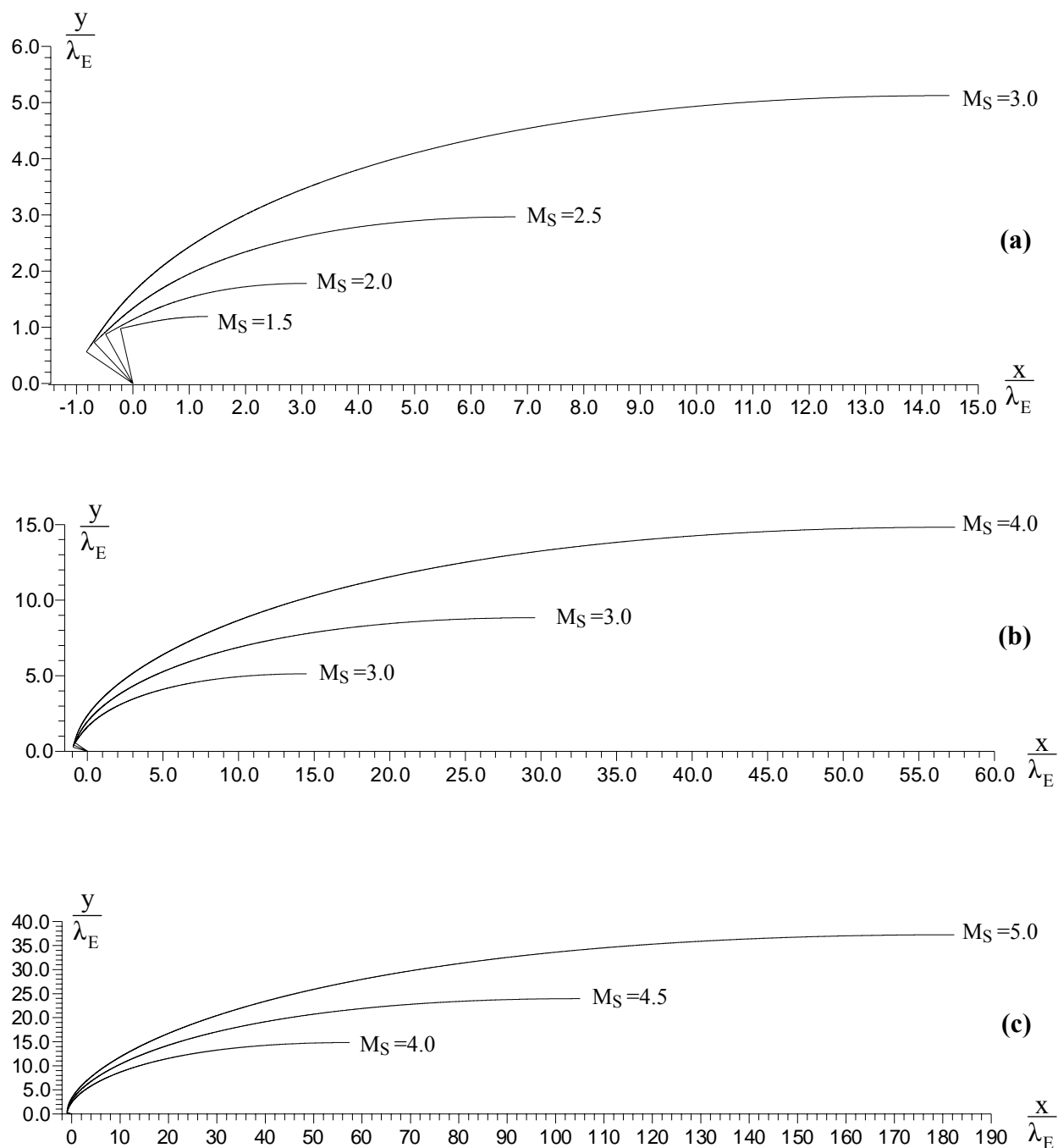


- (a) Forme du corps central pour $M_S = 1.5, 2.0, 2.0, 3.0$
 (b) Forme du corps central pour $M_S = 3.0, 3.0, 4.0$
 (c) Forme du corps central pour $M_S = 4.0, 4.0, 5.0$

Figure (5.19) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach M_S de sortie lorsque $T_0 = 2000$ °K.

T₀ = 2000 °K								
M_S	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
Ψ (Degré)	77.27812	61.34564	47.02516	35.02075	25.25184	17.34583	10.98694	5.72940
Φ _S (Degré)	41.81032	30.00000	23.57818	19.47122	16.60155	14.47751	12.83959	11.53696
Φ _E (Degré)	102.72188	118.65436	132.97484	144.97925	154.74816	162.62417	169.01306	174.27059
$\frac{\lambda_S}{\lambda_E}$	1.78489	3.54228	7.31239	14.97907	29.55895	55.44719	98.77347	167.93022
$\frac{R_S}{\lambda_E}$	1.18992	1.77114	2.92496	4.99302	8.44541	13.86180	21.94966	33.58604
$\frac{R_E}{\lambda_E}$	0.21447	0.89361	2.19330	4.41915	8.01881	13.56316	21.75907	33.48621
$\frac{x_E}{\lambda_E}$	-0.22022	-0.47952	-0.68168	-0.81894	-0.90444	-0.95436	-0.98167	-0.99500
$\frac{y_E}{\lambda_E}$	0.97545	0.87753	0.73165	0.57387	0.42660	0.29864	0.19058	0.09983
$\frac{L}{\lambda_E}$	1.55059	3.54722	7.38360	14.94135	29.23122	54.64087	97.28541	165.53235
$\frac{x_{Plug}}{\lambda_E}$	1.33037	3.06770	6.70192	14.12240	28.32678	53.68651	97.28541	165.53235
$\frac{Masse}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	3.13876	7.41476	15.81970	32.26615	62.89824	116.60512	205.74533	347.21355
$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	0.09960	0.33112	0.61085	0.88448	1.12557	1.32742	1.49354	1.63044
$\frac{Masse_{Gaz}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	1.44274	2.83579	5.33109	9.94335	18.20650	32.30752	55.26615	91.19436
θ* (Degré)	12.72188	28.65435	42.97484	54.97924	64.74816	72.62417	79.01306	84.27059
$\frac{A_S}{A^*}$ (Calculé)	1.18992	1.77113	2.92496	4.99302	8.44541	13.86179	21.94966	33.58604
$\frac{A_S}{A^*}$ (Exacte)	1.18992	1.77113	2.92496	4.99302	8.44541	13.86179	21.94966	33.58604

Tableau (5.13) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S à la température T₀ = 2000 °K.

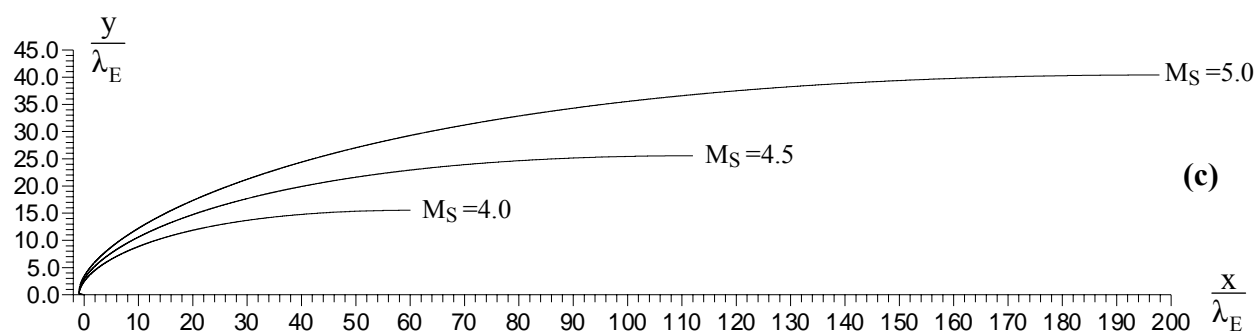
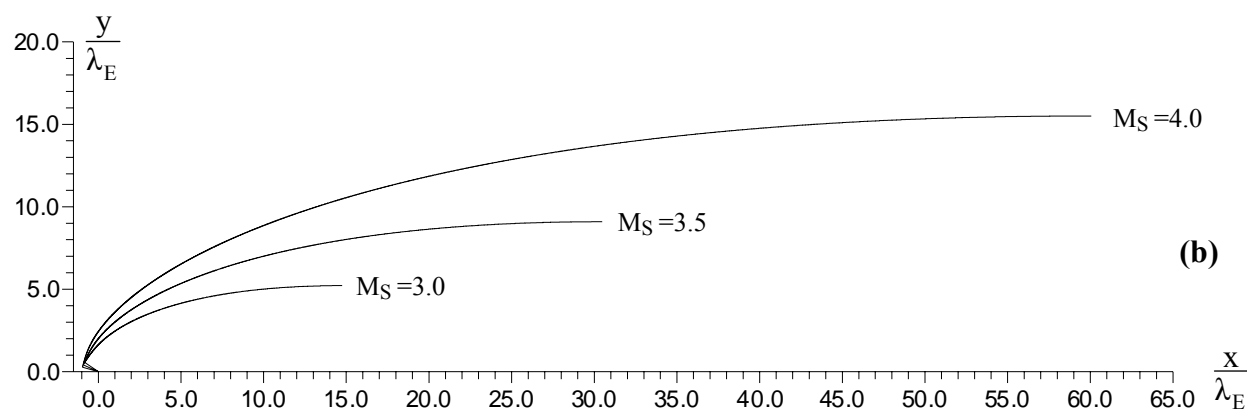
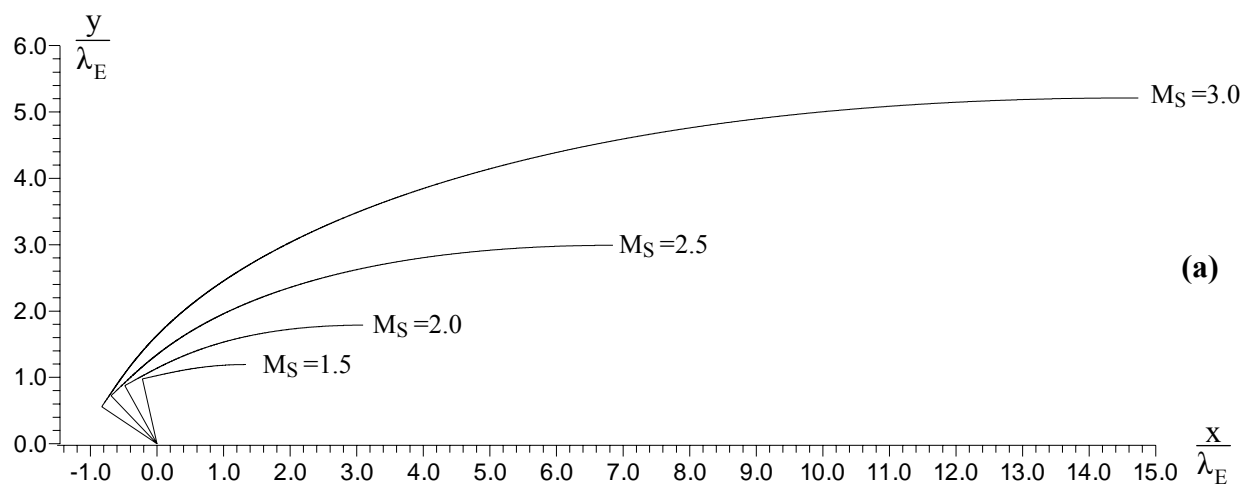


- (a) Forme du corps central pour $M_S = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$
 (b) Forme du corps central pour $M_S = 3.0, 3.5, 4.0$
 (c) Forme du corps central pour $M_S = 4.0, 4.5, 5.0$

Figure (5.20) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S lorsque $T_0 = 2500$ °K.

T₀ = 2500 °K								
M_S	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
Ψ (Degré)	77.21627	61.12446	46.58620	34.29905	24.17748	15.94863	9.27619	3.82266
Φ _S (Degré)	41.81032	30.00000	23.57818	19.47122	16.60155	14.47751	12.83959	11.53696
Φ _E (Degré)	102.78372	118.87554	133.41379	145.70095	155.82251	164.05137	170.72380	176.17734
$\frac{\lambda_S}{\lambda_E}$	1.78651	3.55991	7.40557	15.36385	30.90183	59.26883	107.75469	186.12145
$\frac{R_S}{\lambda_E}$	1.19101	1.77995	2.96223	5.12128	8.82909	14.81720	23.94548	37.22429
$\frac{R_E}{\lambda_E}$	0.21579	0.90428	2.23582	4.55777	8.41953	14.54243	23.78429	37.15762
$\frac{x_E}{\lambda_E}$	-0.22127	-0.48291	-0.68726	-0.82611	-0.91228	-0.96151	-0.98692	-0.99777
$\frac{y_E}{\lambda_E}$	0.97521	0.87567	0.72641	0.56351	0.40956	0.27477	0.16119	0.06667
$\frac{L}{\lambda_E}$	1.55286	3.56588	7.47458	15.31129	30.52596	58.34830	106.04732	183.35881
$\frac{x_{Plug}}{\lambda_E}$	1.33159	3.08297	6.78731	14.48518	29.61368	57.38679	105.06040	182.36103
$\frac{Masse}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	3.14371	7.45822	16.03107	33.10222	65.74602	124.59399	224.34865	384.65643
$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	0.10058	0.33600	0.62244	0.90531	1.15776	1.37076	1.54567	1.68847
$\frac{Masse_{Gaz}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	1.44235	2.842219	5.37262	10.12376	18.84570	34.12273	59.49403	99.66626
θ* (Degré)	12.78373	28.87554	43.41379	55.70095	65.82251	74.05137	80.72380	86.17734
$\frac{A_S}{A^*}$ (Calculé)	1.19101	1.77995	2.96223	5.12128	8.82909	14.81720	23.94548	37.22429
$\frac{A_S}{A^*}$ (Exacte)	1.19100	1.77996	2.96223	5.12128	8.82909	14.81720	23.94548	37.22429

Tableau (5.14) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S à la température T₀ = 2500 °K.

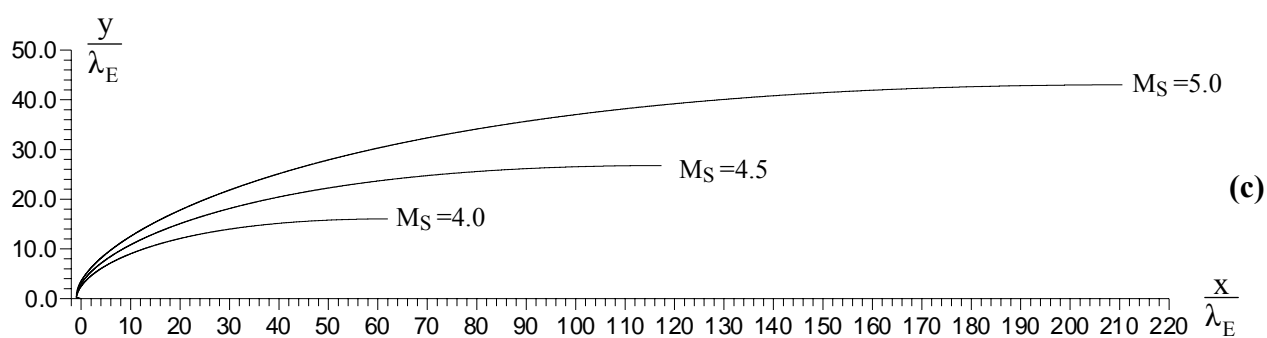
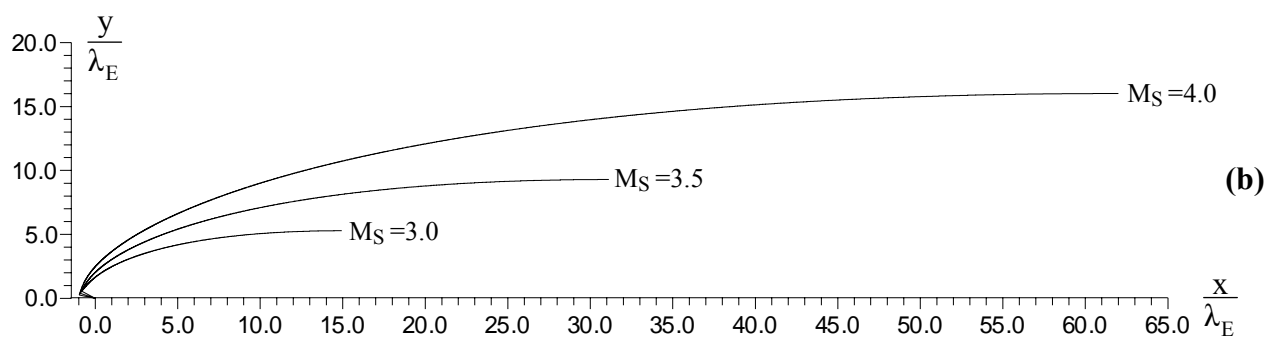
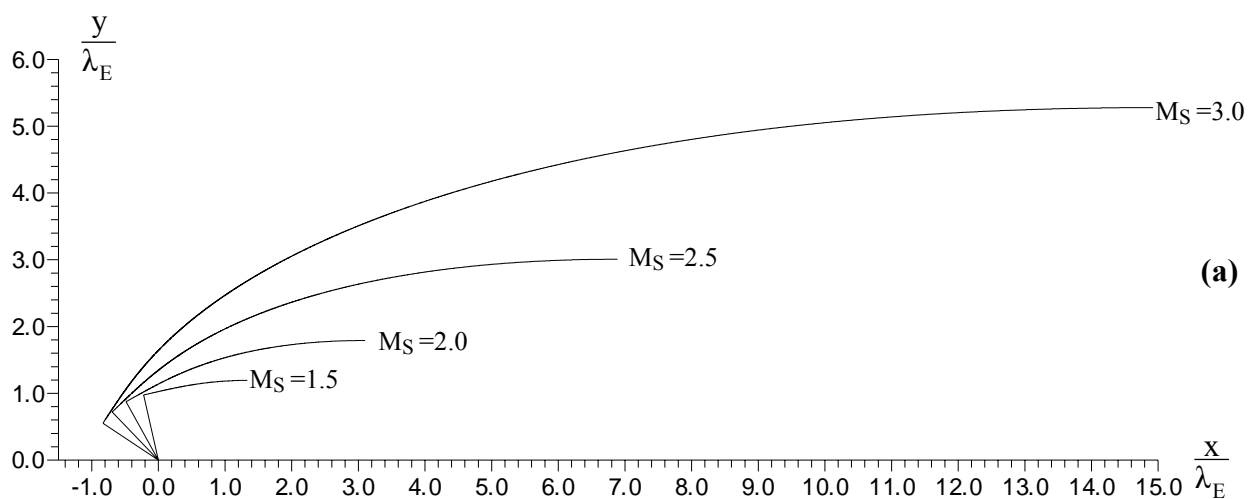


- (d) Forme du corps central pour $M_S = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$
 (e) Forme du corps central pour $M_S = 3.0, 3.5, 4.0$
 (f) Forme du corps central pour $M_S = 4.0, 4.5, 5.0$

Figure (5.21) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S lorsque $T_0 = 3000 \text{ °K}$.

T₀ = 3000 °K								
M_S	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
Ψ (Degré)	77.17508	60.99292	46.29282	33.81842	23.47836	14.98870	8.05549	2.38679
Φ _S (Degré)	41.81032	30.00000	23.57818	19.47122	16.60155	14.47751	12.83959	11.53696
Φ _E (Degré)	102.82491	119.00708	133.70718	146.18157	156.52164	165.01129	171.94451	177.61321
$\frac{\lambda_S}{\lambda_E}$	1.78754	3.57025	7.46976	15.62746	31.80600	62.01612	114.88685	201.92242
$\frac{R_S}{\lambda_E}$	1.19169	1.78513	2.28791	5.20916	9.08743	15.50403	25.53041	40.38448
$\frac{R_E}{\lambda_E}$	0.21664	0.91057	2.26502	4.65259	8.68902	15.24540	25.39028	40.34284
$\frac{x_E}{\lambda_E}$	-0.22197	-0.48492	-0.69097	-0.83081	-0.91721	-0.96598	-0.99013	-0.99913
$\frac{y_E}{\lambda_E}$	0.97505	0.87456	0.72288	0.55656	0.39840	0.25863	0.14013	0.04164
$\frac{L}{\lambda_E}$	1.55433	3.57685	7.53712	15.56452	31.39737	61.01283	113.00435	198.84189
$\frac{x_{Plug}}{\lambda_E}$	1.33236	3.09193	6.84615	14.73371	30.48016	60.04685	112.01422	197.84276
$\frac{Masse}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	3.14691	7.48378	16.17629	33.67473	67.66342	130.33371	239.10842	417.14813
$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	0.10117	0.33883	0.63000	0.91901	1.17867	1.39990	1.58268	1.73171
$\frac{Masse_{Gaz}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	1.44166	2.84487	5.40023	10.24464	19.26727	35.41126	62.83246	107.01647
θ* (Degré)	12.82491	29.00708	43.70718	56.18158	66.52164	75.01129	81.94451	87.61321
$\frac{A_S}{A^*}$ (Calculé)	1.19169	1.78513	2.28791	5.20916	9.08743	15.50403	25.53041	40.38448
$\frac{A_S}{A^*}$ (Exacte)	1.19169	1.78512	2.28790	5.20915	9.08743	15.50403	25.53041	40.38448

Tableau (5.15) : Résultats numériques de conception de tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S à la température T₀ = 3000 °K.



(g) Forme du corps central pour $M_S = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$

(h) Forme du corps central pour $M_S = 3.0, 3.5, 4.0$

(i) Forme du corps central pour $M_S = 4.0, 4.5, 5.0$

Figure (5.22) : Forme du corps central d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S lorsque $T_0 = 3500$ °K.

$T_0 = 3500 \text{ °K}$								
M_S	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
Ψ (Degré)	77.13886	60.88285	46.08390	33.46044	22.96499	14.30132	7.16798	1.30254
Φ_S (Degré)	41.81031	30.00000	23.57817	19.47122	16.60155	14.47751	12.83958	11.53695
Φ_E (Degré)	102.86113	119.11714	133.91609	146.53955	157.03500	165.69867	172.83202	178.69745
$\frac{\lambda_S}{\lambda_E}$	1.78853	3.57881	7.51412	15.82565	32.48070	64.03214	120.34672	214.91459
$\frac{R_S}{\lambda_E}$	1.19235	1.78940	3.00565	5.27521	9.28020	16.00803	26.74371	42.98291
$\frac{R_E}{\lambda_E}$	0.21744	0.91578	2.28529	4.72385	8.89003	15.76101	26.61893	42.96018
$\frac{x_E}{\lambda_E}$	-0.22258	-0.48659	-0.69360	-0.83426	-0.92074	-0.96901	-0.99218	-0.99974
$\frac{y_E}{\lambda_E}$	0.97491	0.87362	0.72035	0.55136	0.39016	0.24702	0.12477	0.02273
$\frac{L}{\lambda_E}$	1.55568	3.58594	7.58041	15.75483	32.04748	62.96786	118.32976	211.57217
$\frac{x_{\text{Plug}}}{\lambda_E}$	1.33309	3.09934	6.88681	14.92057	31.12673	61.99885	117.33757	210.57243
$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	3.14987	7.50503	16.27705	34.10505	69.09430	134.54617	250.40480	443.85113
$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	0.10171	0.34120	0.63550	0.92934	1.19423	1.42110	1.60998	1.76467
$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	1.44172	2.84802	5.41973	10.33719	19.58312	36.35289	65.37798	113.04991
θ^* (Degré)	12.86113	29.11714	43.91609	56.53955	67.03500	75.69867	82.83202	88.69745
$\frac{A_S}{A^*}$ (Calculé)	1.19235	1.78940	3.00565	5.27521	9.28020	16.00803	26.74371	42.98291
$\frac{A_S}{A^*}$ (Exacte)	1.19235	1.78940	3.00564	5.27521	9.28019	16.00803	26.74371	42.98291

Tableau (5.16) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différents nombres de Mach de sortie M_S à la température $T_0 = 3500 \text{ °K}$.

5.4.3. Variation de la température génératrice T_0 pour M_S fixe

Nous allons présenter pour un nombre de Mach de sortie donné, dans un repère orthonormé, les formes du corps central pour différentes valeurs de la température génératrice T_0 .

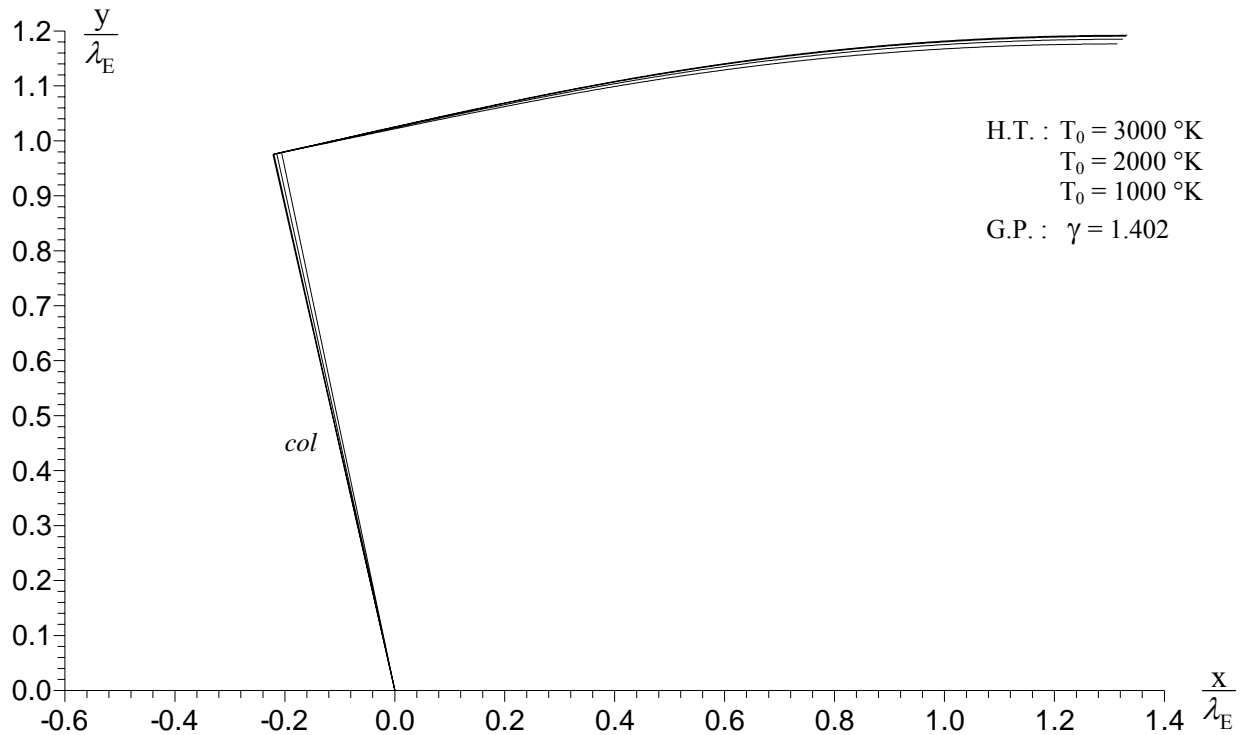


Figure (5.23) : Formes du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 1.5$.

$M_S = 1.5$							
	Ψ (Degré)	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{x_{\text{Plug}}}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	θ^* (Degré)
$\gamma=1.402$	78.10952	1.52076	1.31472	3.07391	0.08883	1.45475	11.89048
$T_0=1000 \text{ °K}$	77.59892	1.53895	1.32420	3.11340	0.09496	1.44555	12.40108
$T_0=2000 \text{ °K}$	77.27812	1.55059	1.33038	3.13876	0.09961	1.44274	12.72188
$T_0=3000 \text{ °K}$	77.17509	1.55433	1.33236	3.14691	0.10117	1.44166	12.82491

Tableau (5.17) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de température génératrice T_0 lorsque $M_S = 1.5$.

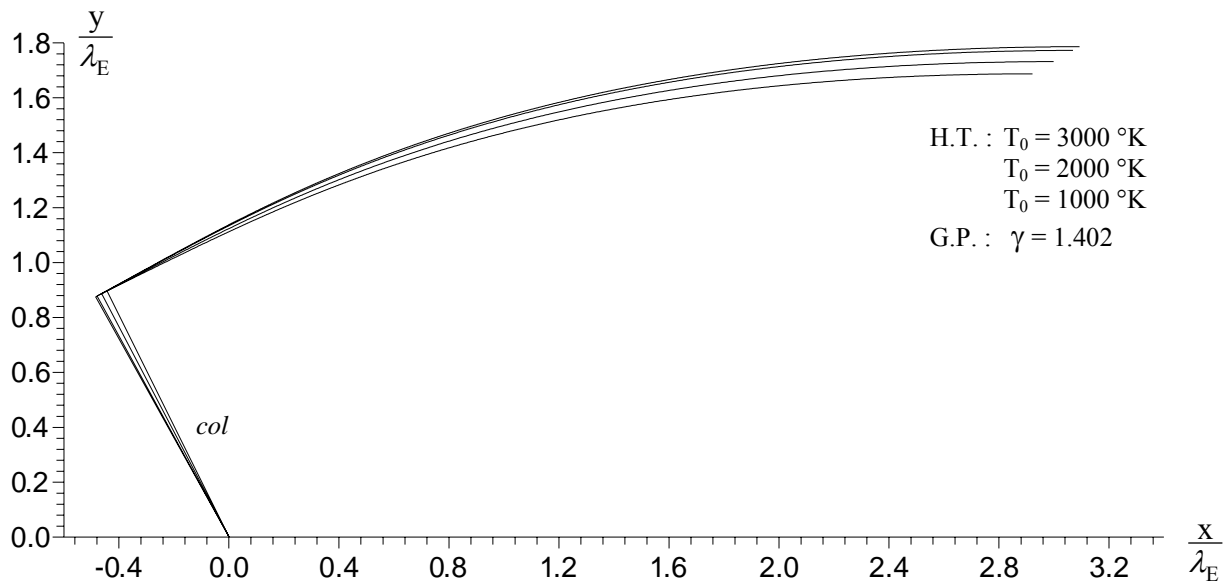


Figure (5.24) : Formes du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 2.0$.

$M_S = 2.0$							
	Ψ (Degré)	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{x_{\text{Plug}}}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	θ^* (Degré)
$\gamma=1.402$	63.66229	3.36387	2.92021	6.98976	0.286677	2.79825	26.33771
$T_0=1000 \text{ °K}$	62.41643	3.45874	2.99570	7.20929	0.30899	2.80810	27.58357
$T_0=2000 \text{ °K}$	61.34564	3.54723	3.06770	7.41477	0.33112	2.83579	28.65436
$T_0=3000 \text{ °K}$	60.99292	3.57685	3.09193	7.48378	0.33883	2.84487	29.00708

Tableau (5.18) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de température génératrice T_0 lorsque $M_S = 2.0$.

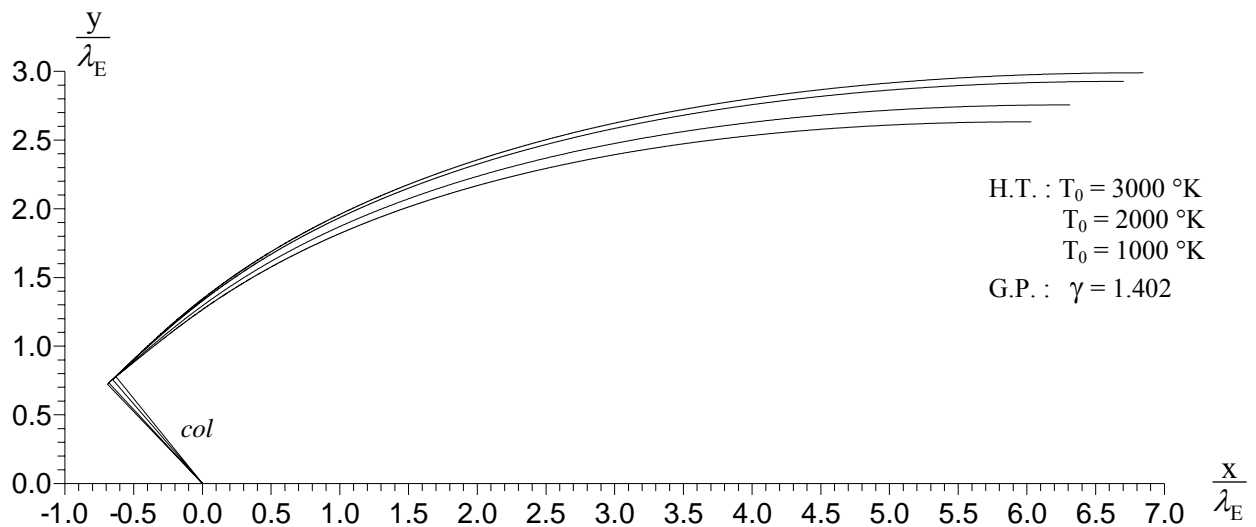


Figure (5.25) : Formes du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 2.5$.

$M_S = 2.5$							
	Ψ (Degré)	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{x_{\text{plug}}}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	θ^* (Degré)
$\gamma=1.402$	50.95030	6.65929	6.02930	14.14065	0.51931	5.06152	29.04970
$T_0=1000 \text{ °K}$	49.14726	6.96027	6.30616	14.83899	0.55861	5.14035	40.85273
$T_0=2000 \text{ °K}$	47.02516	7.38360	6.70192	15.81971	0.61085	5.33109	42.97484
$T_0=3000 \text{ °K}$	46.29282	7.53712	6.84615	16.17629	0.63000	5.40023	43.70718

Tableau (5.19) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de température génératrice T_0 lorsque $M_S = 2.5$.

$M_S = 3.0$							
	Ψ (Degré)	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{x_{\text{plug}}}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	θ^* (Degré)
$\gamma=1.402$	40.34831	12.69817	11.93605	27.18867	0.74600	8.99807	49.65169
$T_0=1000 \text{ °K}$	38.23886	13.43955	12.65412	28.87284	0.79740	9.22189	51.76114
$T_0=2000 \text{ °K}$	35.02075	14.94135	14.12240	32.26615	0.88448	9.94336	54.97925
$T_0=3000 \text{ °K}$	33.81842	15.56452	14.73371	33.67473	0.91901	10.24464	56.18158

Tableau (5.20) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de température génératrice T_0 lorsque $M_S = 3.0$.

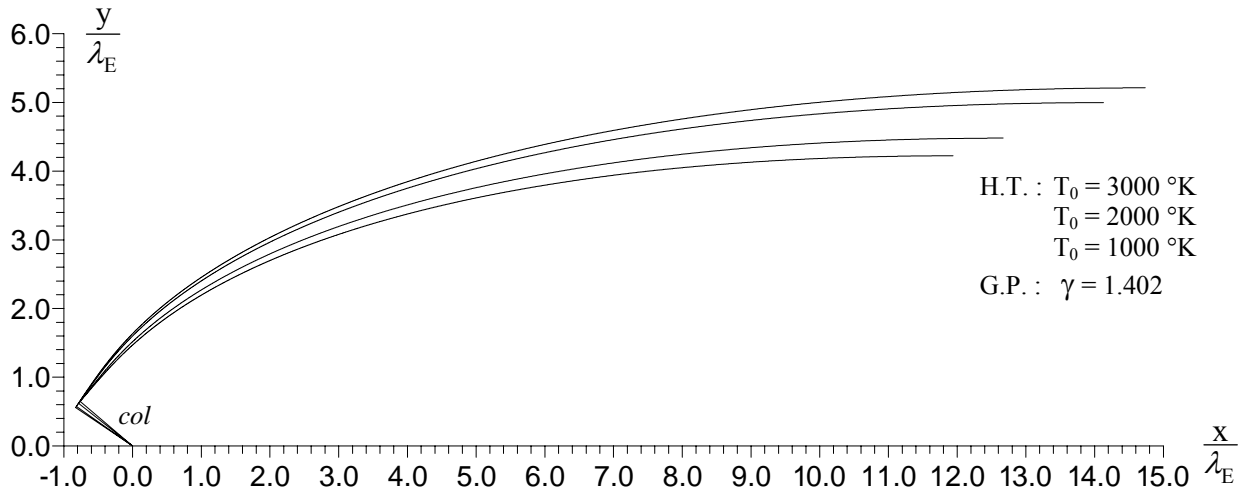


Figure (5.26) : Formes du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 3.0$.

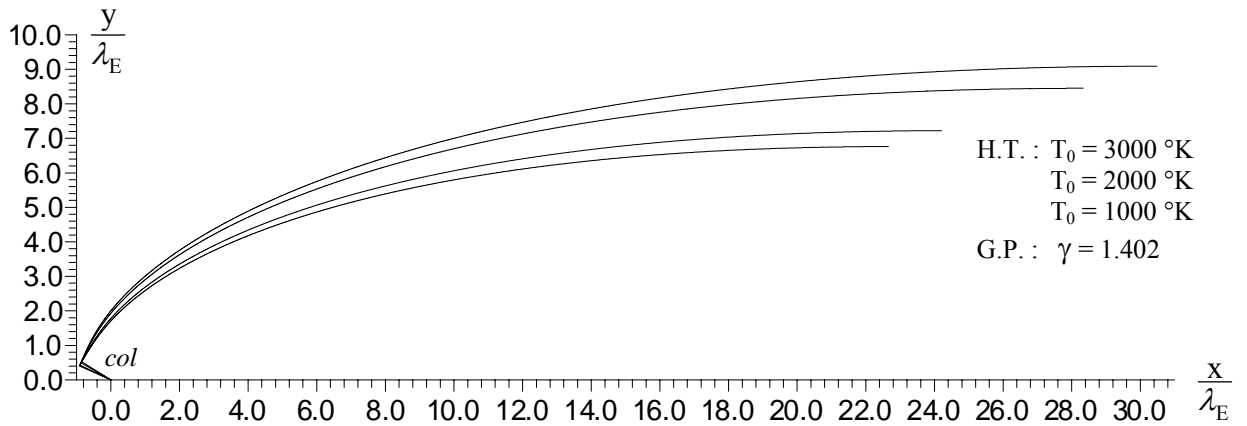


Figure (5.27) : Formes du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 3.5$.

$M_S = 3.5$							
	Ψ (Degré)	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{x_{Plug}}{\lambda_E}$	$\frac{Masse}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{Masse_{Gaz}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	θ^* (Degré)
$\gamma=1.402$	31.60548	23.51040	22.65873	50.26765	0.95006	15.73480	58.39452
$T_0=1000 \text{ °K}$	29.36277	25.06445	24.19292	53.71533	1.00834	16.20719	60.63723
$T_0=2000 \text{ °K}$	25.25184	29.23122	28.32678	62.89824	1.12557	18.20650	64.74816
$T_0=3000 \text{ °K}$	23.47836	31.39737	30.48016	67.66342	1.17867	19.26727	66.52164

Tableau (5.21) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de température génératrice T_0 lorsque $M_S = 3.5$.

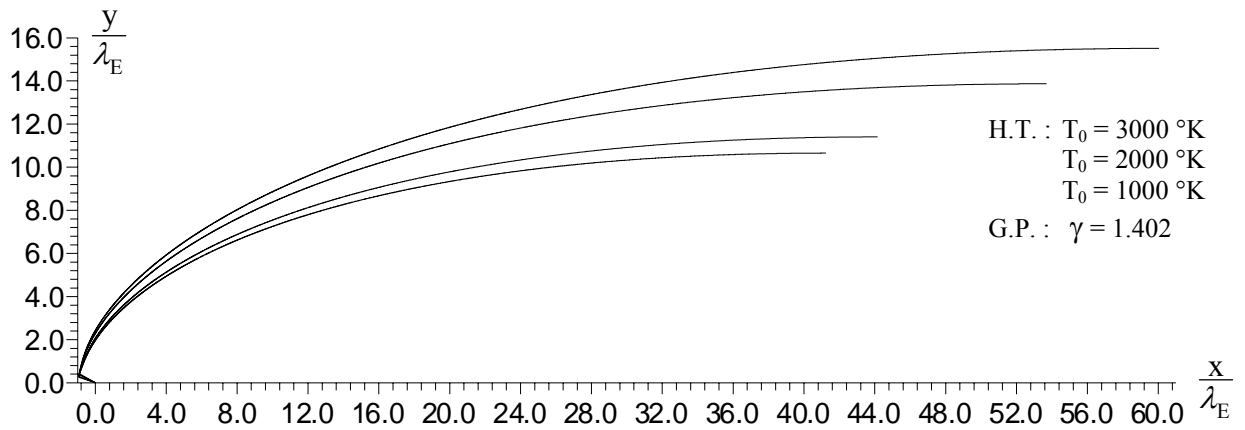


Figure (5.28) : Formes du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 4.0$.

$M_S = 4.0$							
	Ψ (Degré)	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{x_{\text{Plug}}}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	θ^* (Degré)
$\gamma=1.402$	24.37703	42.14675	41.23590	89.56872	1.12726	26.93716	65.62296
$T_0=1000 \text{ °K}$	22.08958	45.07707	44.15047	95.94005	1.18895	27.79849	67.91042
$T_0=2000 \text{ °K}$	17.37583	54.64087	53.68651	116.60513	1.32742	32.30752	72.62417
$T_0=3000 \text{ °K}$	14.98870	61.01283	60.04685	130.33371	1.39990	35.41126	75.01129

Tableau (5.22) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de température génératrice T_0 lorsque $M_S = 4.0$.

$M_S = 4.5$							
	Ψ (Degré)	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{x_{\text{Plug}}}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	θ^* (Degré)
$\gamma=1.402$	18.35367	73.00716	72.05803	154.00256	1.27887	44.98334	71.64632
$T_0=1000 \text{ °K}$	16.06365	78.12540	77.16445	164.95629	1.34193	46.41406	73.93634
$T_0=2000 \text{ °K}$	10.98694	97.28541	96.30374	205.74533	1.49354	55.26615	79.01305
$T_0=3000 \text{ °K}$	8.05548	113.00435	112.01422	239.10841	1.58268	62.83245	81.94451

Tableau (5.23) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de température génératrice T_0 lorsque $M_S = 4.5$.

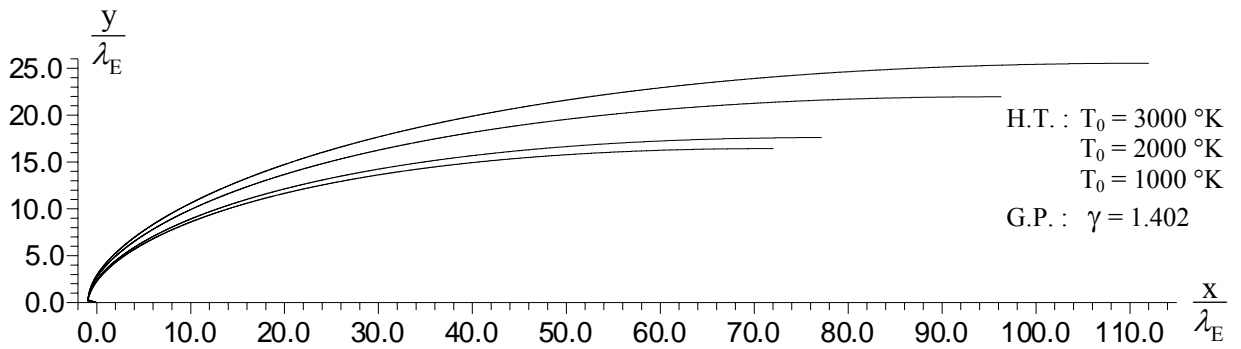


Figure (5.29) : Formes du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 4.5$.

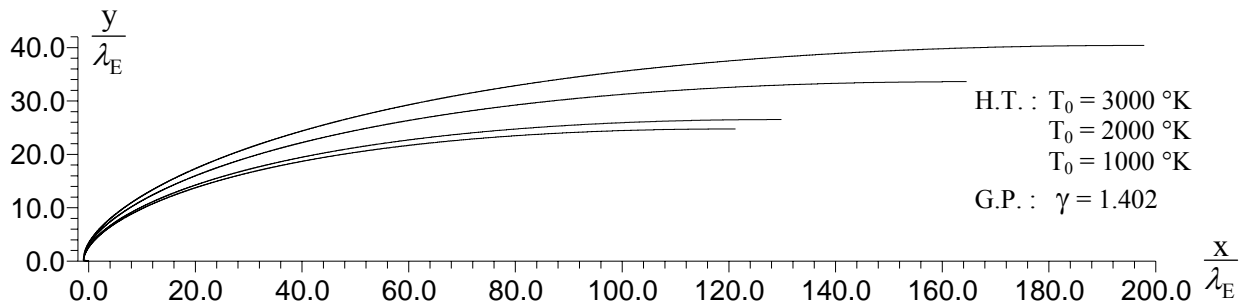


Figure (5.30) : Formes du corps central d'une tuyère pour différentes températures génératrices T_0 lorsque $M_S = 5.0$.

$M_S = 5.0$							
	Ψ (Degré)	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{x_{\text{plug}}}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	θ^* (Degré)
$\gamma=1.402$	13.28592	122.21891	121.24568	255.95587	1.40806	73.16115	76.71408
$T_0=1000 \text{ °K}$	10.99643	130.81390	129.83226	274.12302	1.47175	75.47111	79.00357
$T_0=2000 \text{ °K}$	5.72940	165.53234	164.53734	347.21355	1.63044	91.19435	84.27059
$T_0=3000 \text{ °K}$	2.38678	198.84188	197.84275	417.14812	1.73171	107.01647	87.61321

Tableau (5.24) : Résultats numériques de conception d'une tuyère pour différentes valeurs de température génératrice T_0 lorsque $M_S = 5.0$.

5.5. Variation des paramètres le long de la paroi de la tuyère pour M_S Fixé

Le but de ce paragraphe est de voir la variation des paramètres thermodynamiques et physique le long de la paroi du corps central du col jusqu'à la section de sortie de la tuyère.

5.5.1. Variation du rapport des pressions $\frac{P}{P_0}$

La figure (5.31) représente la variation du rapport des pressions $\frac{P}{P_0}$ le long de la paroi du corps central pour un gaz parfait à haute température lorsque $T_0 = 1000$ °K, $T_0 = 2000$ °K et $T_0 = 3000$ °K y compris l'allure du gaz parfait pour $\gamma = 1.402$. Nous remarquons que ce rapport diminue du col vers la sortie de la tuyère, ce qui donne une diminution de la pression et par conséquent, une augmentation du nombre de Mach et explique qu'il y a une détente rapide à dans le divergent (le corps central).

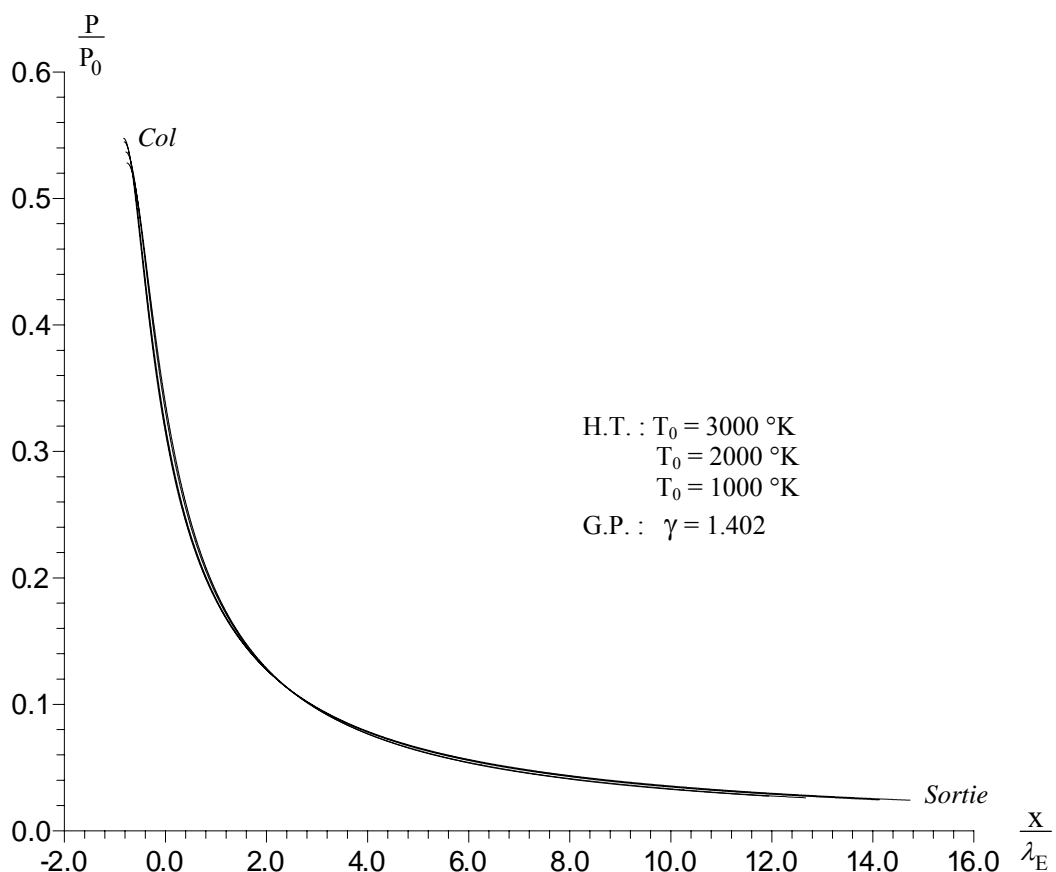


Figure (5.31) : Variation du rapport des pressions $\frac{P}{P_0}$ le long de la paroi du corps central d'une tuyère pour différentes températures lorsque $M_S = 3.0$.

Au col et à la section de sortie, le rapport des pressions donne les valeurs suivantes, présentées dans le tableau (5.25) :

$M_s = 3.0$				
	$\gamma = 1.402$	$T_0 = 1000 \text{ °K}$	$T_0 = 2000 \text{ °K}$	$T_0 = 3000 \text{ °K}$
Col	0.52794	0.53697	0.54487	0.54759
Sortie	0.02727	0.02599	0.02441	0.02409

Tableau (5.25) : Rapport des pressions à haute température au col et à la section de sortie.

5.5.2. Variation du rapport des températures $\frac{T}{T_0}$

La figure (5.32) montre la variation du rapport des températures $\frac{T}{T_0}$ le long de la paroi du corps central pour un gaz parfait à haute température lorsque $T_0 = 1000 \text{ °K}$, $T_0 = 2000 \text{ °K}$ et $T_0 = 3000 \text{ °K}$ y compris l'allure du gaz parfait pour $\gamma = 1.402$ pour la tuyère conçue à $M_s = 3.0$. Nous remarquons qu'il y a diminution de la température le long de la paroi de la tuyère et que la température à la sortie est inférieure à celle au col. Cette variation nous permet de faire un bon choix du matériau qui résiste à la température calculée. En comparant le modèle à Haute Température et celui d'un gaz parfait ($\gamma = 1.402$), nous constatons que le second modèle (gaz parfait) détermine la température sur la paroi inférieure à la température réelle nécessaire, ce qui donne un problème au niveau du choix exact du matériau résistant à la température.

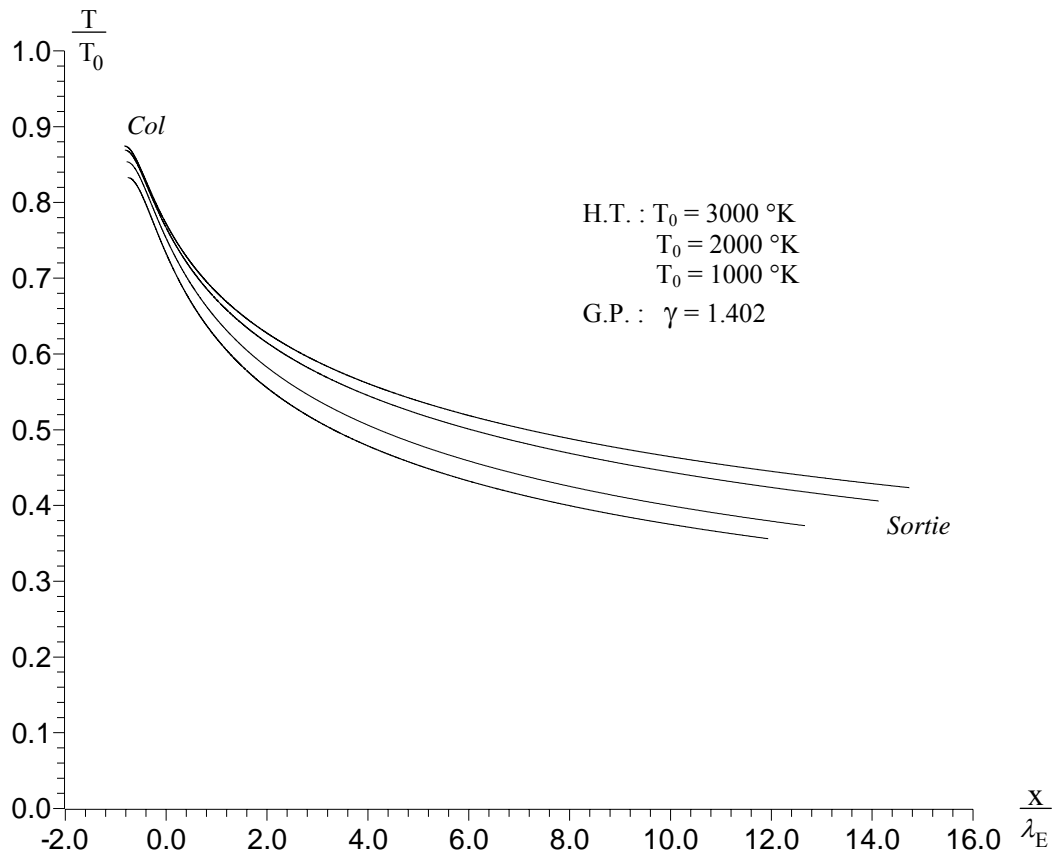


Figure (5.32) : Variation du rapport des températures $\frac{T}{T_0}$ le long de la paroi du corps central d'une tuyère pour différentes températures lorsque $M_S = 3.0$.

Au col et à la section de sortie, le rapport des températures donne les valeurs suivantes, présentées dans le tableau (5.26) :

$M_S = 3.0$				
	$\gamma=1.402$	$T_0=1000 \text{ °K}$	$T_0=2000 \text{ °K}$	$T_0=3000 \text{ °K}$
Col	0.83264	0.85351	0.86896	0.87431
Sortie	0.35600	0.37316	0.40581	0.42335

Tableau (5.26) : Rapport des températures à haute température au col et à la section de sortie.

5.5.3. Variation du rapport des masses volumiques $\frac{\rho}{\rho_0}$

La figure (5.33) montre la variation du rapport des masses volumiques $\frac{\rho}{\rho_0}$ le long de la paroi du corps central pour un gaz parfait et à haute température lorsque $T_0 = 1000 \text{ °K}$, $T_0=2000 \text{ °K}$ et $T_0=3000 \text{ °K}$ y compris l'allure du gaz parfait pour $\gamma=1.402$ lorsque le nombre de Mach $M_S=3.00$.

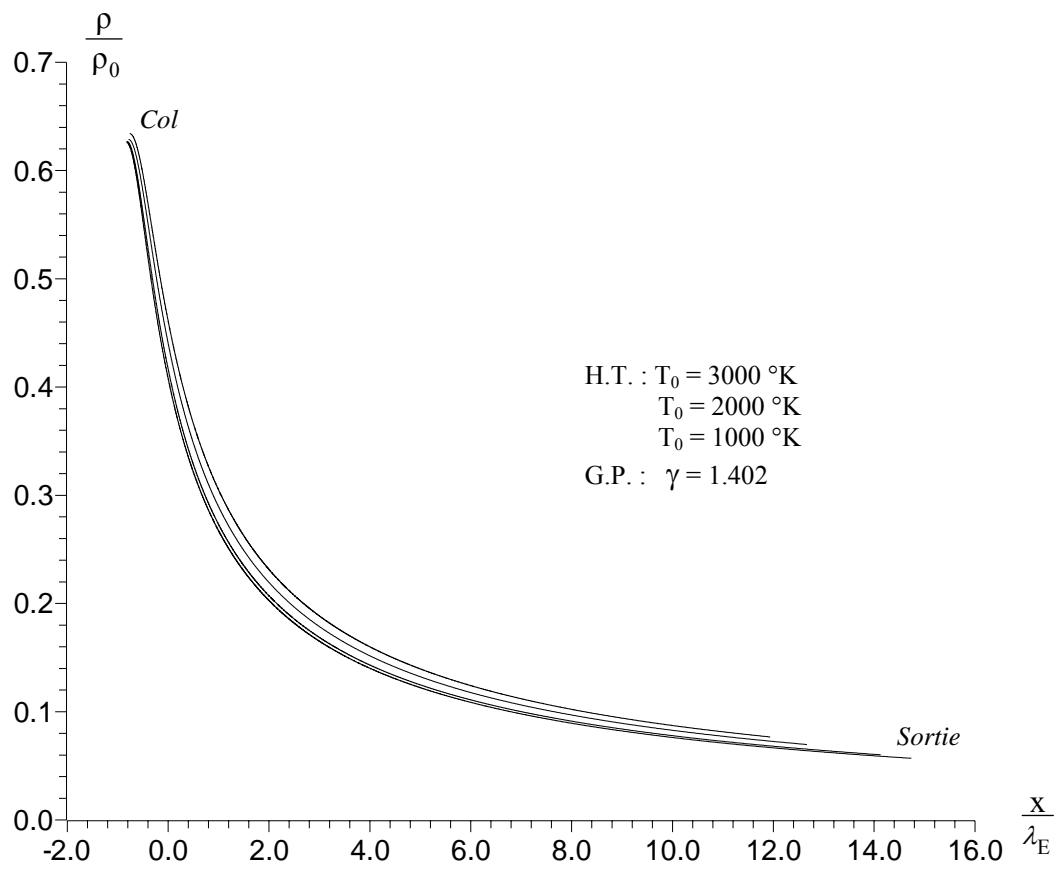


Figure (5.33) : Variation du rapport des masses volumiques $\frac{\rho}{\rho_0}$ le long de la paroi du corps central d'une tuyère pour différentes températures pour $M_S=3.00$.

Au col et à la section de sortie, le rapport des masses volumiques donne les valeurs suivantes, présentées dans le tableau (5.27) :

Rapport des masses volumiques lorsque $M_S = 3.0$				
	$\gamma=1.402$	$T_0=1000 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_0=2000 \text{ }^\circ\text{K}$	$T_0=3000 \text{ }^\circ\text{K}$
Col	0.52794	0.53696	0.54485	0.54759
Sortie	0.02726	0.02599	0.02441	0.02409

Tableau (5.27) : Rapport des masses volumiques à haute température au col et à la section de sortie.

5.5.4. Variation du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère

La figure (5.34) montre la variation du nombre de Mach le long de la paroi du corps central d'un gaz à haute température (lorsque $T_0=1000\text{ °K}$, $T_0=2000\text{ °K}$ et $T_0=3000\text{ °K}$) ainsi que l'allure d'un gaz parfait ($\gamma=1.402$) lorsque le nombre de Mach de sortie de la tuyère est $M_S=3.0$.

Nous remarquons clairement que le nombre de Mach augmente le long de la paroi du corps central. Ce nombre est égal à l'unité, au col, et à M_S , à la sortie.

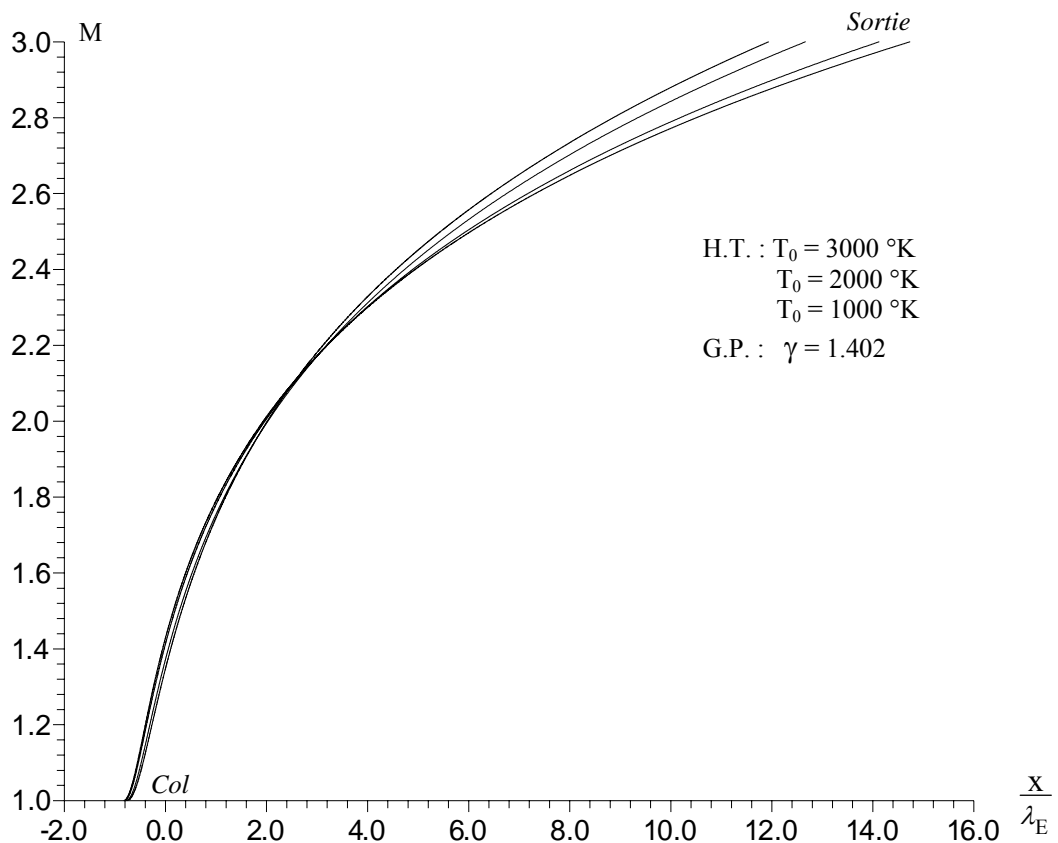


Figure (5.34) : Variation du nombre de Mach le long de la paroi du corps central d'une tuyère pour différentes températures pour $M_S = 3.0$.

5.5.5. Variation de l'inclinaison de la paroi du corps central

La figure (5.35) montre la variation de l'inclinaison de la paroi du corps central d'un gaz à haute température (lorsque $T_0=1000$ °K, $T_0=2000$ °K et $T_0=3000$ °K) ainsi que l'allure d'un gaz parfait ($\gamma=1.402$) lorsque le nombre de Mach de sortie de la tuyère est $M_S=3.0$.

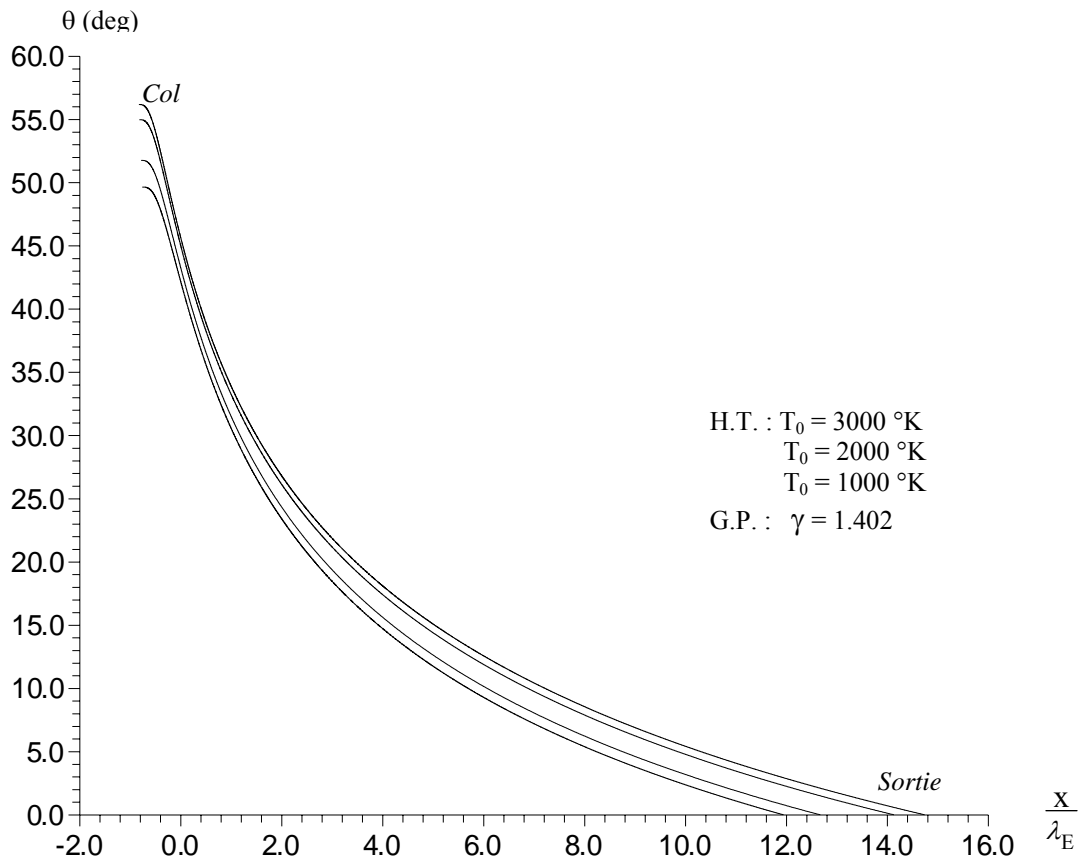


Figure (5.35) : Variation de l'angle d'inclinaison de la paroi du corps central d'une tuyère pour différentes températures pour $M_S=3.0$.

Au col et la section de sortie, le rapport des masses volumiques donne les valeurs suivantes, présentées dans le tableau (5.28) :

Inclinaison de la paroi lorsque $M_S=3.0$				
	$\gamma=1.402$	$T_0=1000$ °K	$T_0=2000$ °K	$T_0=3000$ °K
Col	49.65196	51.76114	54.97925	56.18158
Sortie	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Tableau (5.28) : Valeurs de l'angle d'inclinaison de la paroi du corps central au col et la section de sortie.

5.6. Variation des paramètres du dimensionnement

Le but de ce paragraphe est de déterminer la variation des paramètres de dimensionnement en fonction du nombre de Mach de sortie de la tuyère.

5.6.1. Variation de la longueur du corps central en fonction du nombre de Mach M_S

La figure (5.36) représente la variation de la longueur $\frac{L}{\lambda_E}$ en fonction du nombre de Mach de sortie M_S d'un gaz à haute température pour les températures génératrices $T_0=1000^\circ\text{K}$, $T_0=2000^\circ\text{K}$ et $T_0=3000^\circ\text{K}$, y compris le cas d'un gaz parfait lorsque $\gamma=1.402$. Il est clair que la longueur du corps central de la tuyère augmente si cette dernière est conçue pour un nombre de Mach élevé. Nous pouvons voir sur le graphe, que si le nombre de Mach M_S est inférieur à 2.0 environ. C'est-à-dire que si $M_S < 2.0$, nous pouvons déterminer la longueur de la tuyère ainsi que la forme du corps central en utilisant la théorie d'un gaz parfait sans considérer l'influence de la température T_0 de la chambre de combustion. Si M_S commence à augmenter au delà de 2.0, la température T_0 commence à influencer sur les performances de la tuyère et en particulier sur sa longueur.

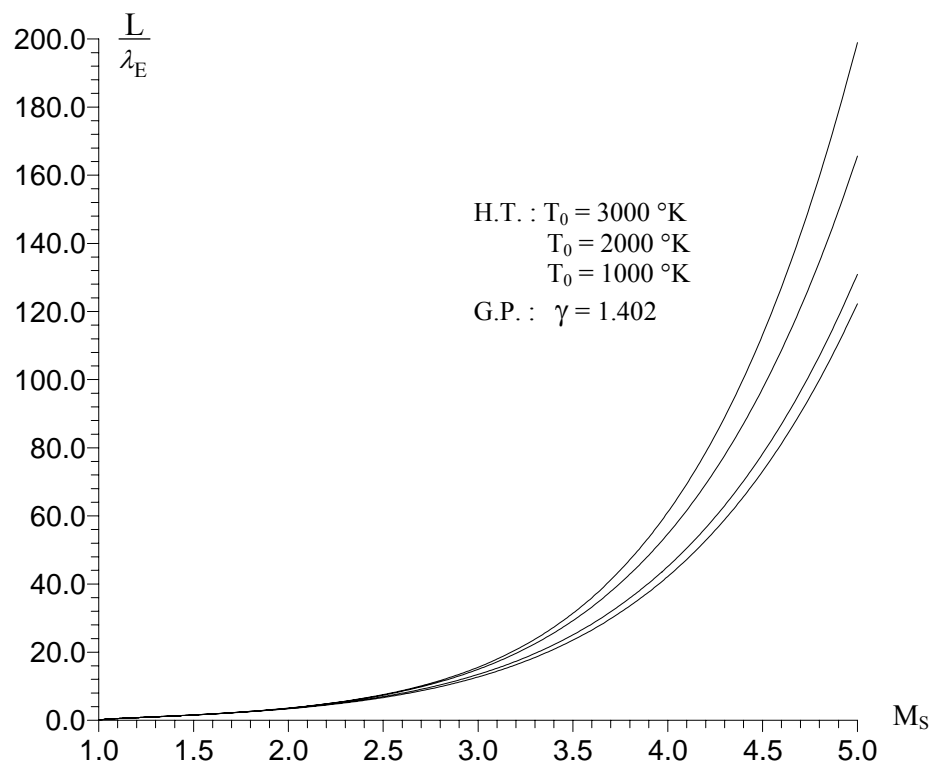


Figure (5.36) : Variation de la longueur de corps central en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes températures T_0 .

5.6.2. Variation de la Masse de la structure du corps central en fonction de M_S

La figure (5.37) montre la variation de la masse de la structure en fonction du nombre de Mach de sortie M_S d'un gaz à haute température pour les températures génératrices $T_0=1000^\circ\text{K}$, $T_0=2000^\circ\text{K}$ et $T_0=3000^\circ\text{K}$, y compris le cas d'un gaz parfait lorsque $\gamma=1.402$. Mêmes remarques et commentaires sur la masse de la structure de matériau de construction du corps central avec la variation de la longueur de la tuyère.

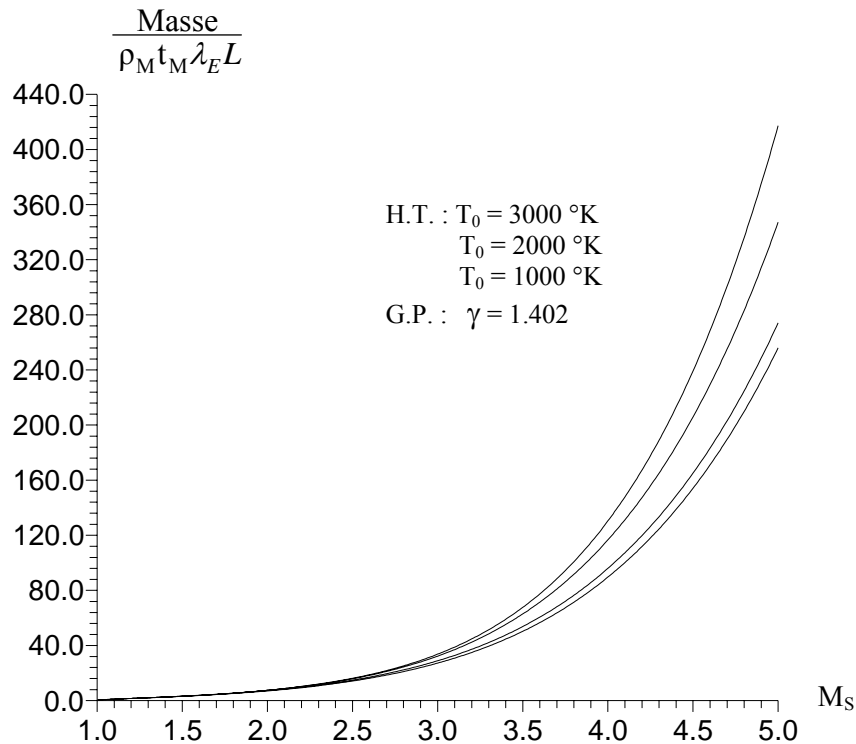


Figure (5.37) : Variation de la masse de la structure du corps central en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes températures T_0 .

5.6.3. Variation de l'angle d'inclinaison Ψ de la carène en fonction de M_S

La figure (5.38) montre la variation de l'angle de déviation de la carène Ψ 'Lip' du corps central en fonction du nombre de Mach de sortie M_S d'un gaz à haute température pour les températures génératrices $T_0=1000^\circ\text{K}$, $T_0=2000^\circ\text{K}$ et $T_0=3000^\circ\text{K}$, y compris le cas d'un gaz parfait lorsque $\gamma=1.402$.

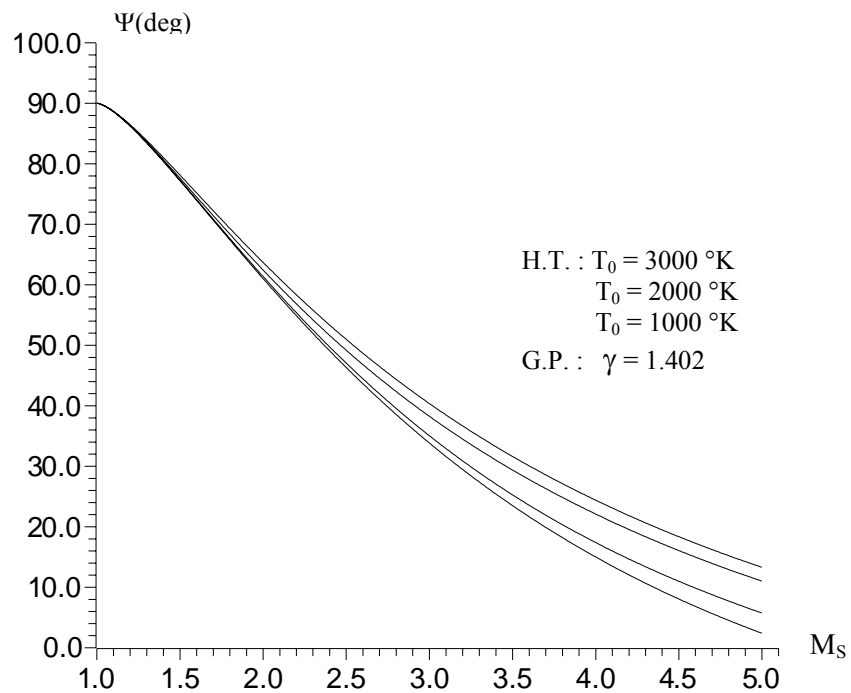


Figure (5.38) : Variation de l'angle de déviation Ψ de la carène en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes températures T_0 .

5.6.4. Variation de l'angle de déviation θ^* au col en fonction de M_S

La figure (5.39) montre la variation de l'angle de déviation θ^* du col de la paroi du corps central en fonction du nombre de Mach de sortie M_S d'un gaz à haute température pour les température génératrices $T_0=1000\text{°K}$, $T_0=2000 \text{ °K}$ et $T_0=3000 \text{ °K}$, y compris le cas d'un gaz parfait lorsque $\gamma=1.402$. Nous voyons clairement que plus la tuyère est dimensionnée pour un nombre de Mach M_S élevé, plus la carène sera déviée vers la verticale.

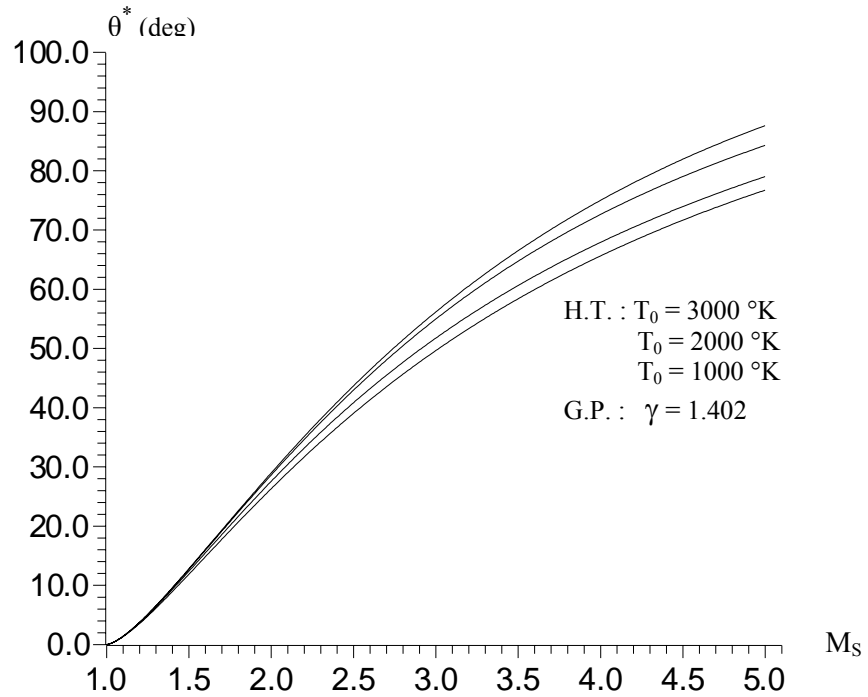


Figure (5.39) : Variation de l'angle de déviation θ^* de la paroi du corps central au col en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes températures T_0 .

5.6.5. Variation de la force de pression en fonction de M_S

La figure (5.40) montre la variation de la force de pression exercée sur la paroi du corps central en fonction du nombre de Mach de sortie M_S d'un gaz à haute température pour les températures génératrices $T_0=1000^\circ\text{K}$, $T_0=2000 \text{ }^\circ\text{K}$ et $T_0=3000 \text{ }^\circ\text{K}$, y compris le cas d'un gaz parfait lorsque $\gamma=1.402$.

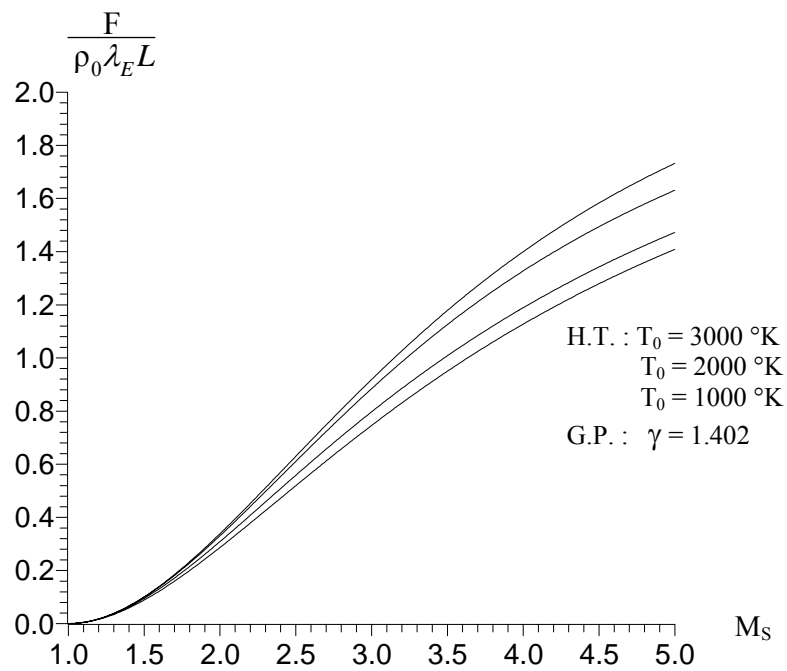


Figure (5.40) : Variation de la force de pression exercée sur la paroi du corps central en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes températures T_0 .

5.6.6. Variation de la masse du gaz du divergent en fonction de M_S

La figure (5.41) montre la variation de la masse du gaz $\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 L}$ dans le divergent en fonction du nombre de Mach de sortie M_S d'un gaz parfait à haute température pour les températures génératrices $T_0=1000^\circ\text{K}$, $T_0=2000 \text{ }^\circ\text{K}$ et $T_0=3000 \text{ }^\circ\text{K}$, y compris le cas d'un gaz parfait lorsque $\gamma=1.402$.

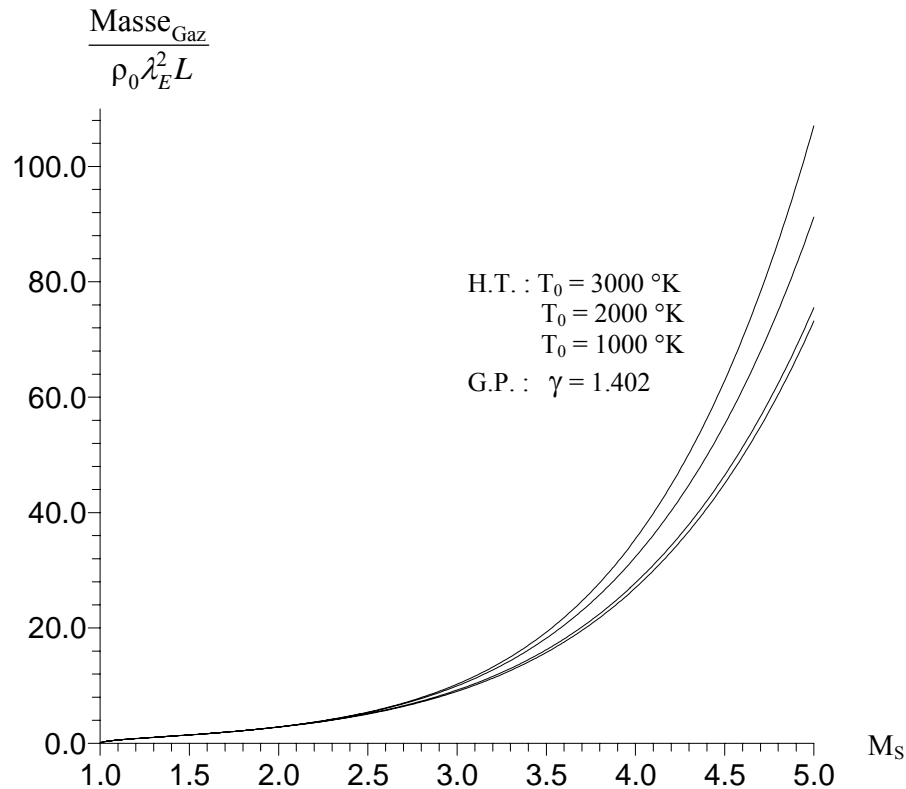


Figure (5.41) : Variation de la masse du gaz du divergent en fonction du nombre de Mach de sortie M_S pour différentes températures T_0 .

Les courbes (5.36), (5.37), (5.38), (5.39), (5.40) et (5.41) démontrent que la théorie d'un gaz parfait donne de bons résultats si la tuyère est conçue pour un nombre de Mach M_S inférieur ou égal à 2.0, indépendamment de l'influence de la température génératrice T_0 de la chambre de combustion.

Dans les tableaux (5.29), (5.30), (5.31) et (5.32), nous avons présenté les résultats numériques obtenus par le programme élaboré respectivement pour les températures génératrices $T_0=1000 \text{ °K}$, $T_0=2000 \text{ °K}$ et $T_0=3000 \text{ °K}$ et pour le cas d'un gaz parfait lorsque $\gamma=1.402$ dans le domaine supersonique M_S inférieur ou égal à 5.0. Les résultats présentés sont choisis avec 5 chiffres décimaux exactes. Pour chaque nombre de Mach M_S et température, il y a une propre discrétisation du corps central minimale que nous pouvons avoir pour déterminer les résultats avec les chiffres décimaux choisis.

Haute Température $T_0 = 1000 \text{ °K}$						
M_s	Ψ (Degré)	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	θ^* (Degré)
1.0	90.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1.1	88.61881	0.48612	0.97241	0.00443	0.56526	1.38119
1.2	86.31358	0.74856	1.49892	0.01707	0.81433	3.68641
1.3	83.59428	0.99953	2.00593	0.03695	1.02750	6.40572
1.4	80.65316	1.25971	2.53688	0.06320	1.23375	9.34684
1.5	77.59891	1.53895	3.11339	0.09496	1.44556	12.40108
1.6	74.50081	1.84434	3.75144	0.13140	1.67055	15.49919
1.7	71.40561	2.18232	4.46541	0.17173	1.91443	18.59439
1.8	68.34579	2.55936	5.26959	0.21522	2.18217	21.65421
1.9	65.34411	2.98233	6.17890	0.26118	2.47848	24.65588
2.0	62.41643	3.45874	7.20929	0.30899	2.80810	27.58357
2.1	59.57346	3.99679	8.37801	0.35809	3.17596	30.42654
2.2	56.82212	4.60553	9.70386	0.40800	3.58728	33.17788
2.3	54.16640	5.29489	11.20736	0.45828	4.04768	35.83360
2.4	51.60808	6.07581	12.91091	0.50858	4.56319	38.39192
2.5	49.14726	6.96027	14.83900	0.55860	5.14036	40.85274
2.6	46.78280	7.96140	17.01836	0.60810	5.78628	43.21719
2.7	44.51265	9.09352	19.47819	0.65686	6.50867	45.48735
2.8	42.33408	10.37230	22.25029	0.70474	7.31589	47.66591
2.9	40.24396	11.81480	25.36929	0.75162	8.21702	49.75603
3.0	38.23886	13.43955	28.87284	0.79740	9.22189	51.76114
3.1	36.31520	15.26672	32.80184	0.84203	10.34117	53.68480
3.2	34.46934	17.31815	37.20061	0.88545	11.58639	55.53065
3.3	32.69767	19.61752	42.11718	0.92765	12.96999	57.30233
3.4	30.99663	22.19041	47.60341	0.96861	14.50543	59.00337
3.5	29.36277	25.06446	53.71533	1.00834	16.20719	60.63723
3.6	27.79275	28.26944	60.51332	1.04683	18.09086	62.20725
3.7	26.28338	31.83744	68.06236	1.08412	20.17319	63.71661
3.8	24.83164	35.80292	76.43229	1.12022	22.47216	65.16836
3.9	23.43461	40.20290	85.69808	1.15515	25.00706	66.56538
4.0	22.08958	45.07707	95.94005	1.18895	27.79849	67.91042
4.1	20.794324	50.46660	107.24145	1.22164	30.86780	69.20568
4.2	19.54803	56.41004	119.67959	1.25320	34.23465	70.45196
4.3	18.34547	62.96573	133.37351	1.28375	37.92976	71.65453
4.4	17.18464	70.18572	148.42841	1.31332	41.98003	72.81536
4.5	16.06366	78.12540	164.95629	1.34193	46.41406	73.93634
4.6	14.98071	86.84372	183.07622	1.36962	51.26226	75.01928
4.7	13.93410	96.40328	202.91465	1.39642	56.55686	76.06589
4.8	12.92220	106.87051	224.60576	1.42235	62.33205	77.07780
4.9	11.94346	118.31586	248.29171	1.44745	68.62403	78.05653
5.0	10.99643	130.81391	274.12302	1.47174	75.47111	79.00357

Tableau (5.29) : Résultats numériques de dimensionnement d'une tuyère plane à corps central type à bouchon 'Plug Nozzle' à Haute Température lorsque $T_0 = 1000 \text{ °K}$.

Haute Température $T_0 = 2000 \text{ °K}$						
M_s	Ψ (Degré)	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	θ^* (Degré)
1.0	90.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1.1	88.59533	0.48659	0.97336	0.00458	0.56320	1.40467
1.2	86.24330	0.75020	1.50228	0.01770	0.81133	3.75670
1.3	83.45826	1.00320	2.01358	0.03846	1.02397	6.54174
1.4	80.43348	1.26657	2.55150	0.06603	1.23020	9.56652
1.5	77.27812	1.55059	3.13876	0.09960	1.44275	12.72188
1.6	74.06181	1.86296	3.79278	0.13840	1.66953	15.93819
1.7	70.83178	2.21089	4.52989	0.18165	1.91672	19.16822
1.8	67.62111	2.60191	5.36687	0.22863	2.18982	22.37889
1.9	64.45341	3.04428	6.32185	0.27867	2.49429	25.54659
2.0	61.34564	3.54723	7.41477	0.33112	2.83579	28.65436
2.1	58.30997	4.12116	8.66779	0.38539	3.22037	31.69003
2.2	55.35502	4.77780	10.10567	0.44096	3.65462	34.64498
2.3	52.48680	5.53031	11.75598	0.49734	4.14575	37.51320
2.4	49.70934	6.39344	13.64934	0.55410	4.70168	40.29066
2.5	47.02516	7.38360	15.81971	0.61085	5.33109	42.97484
2.6	44.43557	8.51894	18.30448	0.66727	6.04348	45.56442
2.7	41.94100	9.81948	21.14471	0.72306	6.84919	48.05900
2.8	39.54109	11.30713	24.38523	0.77799	7.75946	50.45891
2.9	37.23484	13.00578	28.07478	0.83185	8.78648	52.76516
3.0	35.02075	14.94135	32.26615	0.88448	9.94336	54.97925
3.1	32.89685	17.14185	37.01627	0.93573	11.24421	57.10314
3.2	30.86080	19.63747	42.38643	0.98553	12.70417	59.13920
3.3	28.90993	22.46065	48.44237	1.03379	14.33947	61.09007
3.4	27.04131	25.64616	55.25453	1.08048	16.16741	62.95868
3.5	25.25184	29.23122	62.89824	1.12557	18.20650	64.74816
3.6	23.53825	33.25563	71.45401	1.16906	20.47648	66.46175
3.7	21.89722	37.76190	81.00778	1.21095	22.99840	68.10278
3.8	20.32537	42.79539	91.65127	1.25129	25.79468	69.67463
3.9	18.81934	48.40452	103.48230	1.29010	28.88924	71.18066
4.0	17.37583	54.64088	116.60513	1.32742	32.30752	72.62417
4.1	15.99161	61.55946	131.13084	1.36330	36.07662	74.00839
4.2	14.66355	69.21886	147.17776	1.39780	40.22539	75.33645
4.3	13.38864	77.68140	164.87180	1.43097	44.78450	76.61136
4.4	12.16401	87.01341	184.34687	1.46287	49.78654	77.83600
4.5	10.98694	97.28541	205.74533	1.49354	55.26615	79.01306
4.6	9.85484	108.57229	229.21837	1.52304	61.26008	80.14516
4.7	8.76526	120.95356	254.92644	1.55143	67.80732	81.23474
4.8	7.71591	134.51354	283.03971	1.57876	74.94919	82.28409
4.9	6.70463	149.34159	313.73846	1.60508	82.72944	83.29537
5.0	5.72940	165.53235	347.21356	1.63044	91.19436	84.27059

Tableau (5.30) : Résultats numériques de dimensionnement d'une tuyère plane à corps central type à bouchon 'Plug Nozzle' à Haute Température lorsque $T_0 = 2000 \text{ °K}$.

Haute Température $T_0 = 3000 \text{ °K}$						
M_s	Ψ (Degré)	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	θ^* (Degré)
1.0	90.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1.1	88.58739	0.48675	0.97369	0.00463	0.56249	1.41261
1.2	86.21993	0.75075	1.50339	0.01791	0.81029	3.78007
1.3	83.41372	1.00439	2.01608	0.03897	1.02273	6.58628
1.4	80.36240	1.26878	2.55623	0.06699	1.22893	9.63760
1.5	77.17509	1.55432	3.14690	0.10117	1.44167	12.82491
1.6	73.92112	1.86892	3.80605	0.14076	1.66899	16.07888
1.7	70.64738	2.22009	4.55071	0.18501	1.91721	19.35261
1.8	67.38675	2.61575	5.39862	0.23321	2.19206	22.61325
1.9	64.16284	3.06470	6.36914	0.28470	2.49928	25.83716
2.0	60.99292	3.57685	7.48378	0.33883	2.84487	29.00708
2.1	57.88968	4.16344	8.76664	0.39501	3.23532	32.11032
2.2	54.86242	4.83728	10.24488	0.45269	3.67777	35.13758
2.3	51.91779	5.61288	11.94899	0.51137	4.18008	38.08221
2.4	49.06032	6.50665	13.91328	0.57061	4.75099	40.93968
2.5	46.29282	7.53712	16.17629	0.63000	5.40023	43.70718
2.6	43.61666	8.72515	18.78121	0.68921	6.13860	46.38334
2.7	41.03209	10.09416	21.77640	0.74794	6.97814	48.96790
2.8	38.53848	11.67035	25.21587	0.80595	7.93220	51.46152
2.9	36.13452	13.48297	29.15974	0.86303	9.01559	53.86548
3.0	33.81842	15.56452	33.67473	0.91901	10.24464	56.18158
3.1	31.58812	17.95097	38.83458	0.97377	11.63737	58.41188
3.2	29.44134	20.68198	44.72046	1.02718	13.21351	60.55866
3.3	27.37571	23.80105	51.42126	1.07918	14.99462	62.62428
3.4	25.38885	27.35566	59.03388	1.12969	17.00410	64.61114
3.5	23.47836	31.39737	67.66342	1.17867	19.26727	66.52164
3.6	21.64185	35.98194	77.42335	1.22609	21.81139	68.35815
3.7	19.87698	41.16935	88.43557	1.27192	24.66567	70.12302
3.8	18.18138	47.02385	100.83055	1.31616	27.86129	71.81862
3.9	16.55274	53.61403	114.74734	1.35882	31.43143	73.44726
4.0	14.98870	61.01283	130.33371	1.39990	35.41126	75.01129
4.1	13.48694	69.29762	147.74623	1.43943	39.83801	76.51306
4.2	12.04509	78.55029	167.15044	1.47743	44.75097	77.95491
4.3	10.66081	88.85732	188.72109	1.51395	50.19157	79.33919
4.4	9.33172	100.30995	212.64239	1.54902	56.20342	80.66828
4.5	8.05549	113.00435	239.10841	1.58268	62.83246	81.94451
4.6	6.82977	127.04182	268.32347	1.61499	70.12697	83.17023
4.7	5.65228	142.52904	300.50265	1.64600	78.13778	84.34772
4.8	4.52074	159.57828	335.87229	1.67575	86.91834	85.27926
4.9	3.43296	178.30776	374.67056	1.70430	96.52486	86.56704
5.0	2.38679	198.84189	417.14813	1.73171	107.01647	87.61321

Tableau (5.31) : Résultats numériques de dimensionnement d'une tuyère plane à corps central type à bouchon 'Plug Nozzle' à Haute Température lorsque $T_0 = 3000 \text{ °K}$.

Gaz Parfait $\gamma = 1.402$						
M_s	Ψ (Degré)	$\frac{L}{\lambda_E}$	$\frac{\text{Masse}}{\rho_M t_M \lambda_E l}$	$\frac{F}{P_0 \lambda_E l}$	$\frac{\text{Masse}_{\text{Gaz}}}{\rho_0 \lambda_E^2 l}$	θ^* (Degré)
1.0	90.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1.1	88.66502	0.48518	0.97053	0.00421	0.57004	1.33498
1.2	86.44532	0.74550	1.49266	0.01613	0.82133	3.55468
1.3	83.83637	0.99304	1.99242	0.03479	1.03600	6.16362
1.4	81.02340	1.24829	2.51258	0.05930	1.24300	8.97660
1.5	78.10952	1.52076	3.07391	0.08883	1.45474	11.89048
1.6	75.15917	1.81720	3.69139	0.12260	1.67867	14.84083
1.7	72.21480	2.14357	4.37833	0.15991	1.92031	17.78520
1.8	69.30517	2.50585	5.14779	0.20009	2.18445	20.69483
1.9	66.44990	2.91033	6.01341	0.24256	2.47559	23.55010
2.0	63.66229	3.36387	6.98976	0.28677	2.79825	26.33771
2.1	60.95116	3.87399	8.09262	0.33224	3.15715	29.04884
2.2	58.32206	4.44896	9.33929	0.37858	3.55731	31.67794
2.3	55.77816	5.09795	10.74868	0.42540	4.00412	34.22184
2.4	53.32087	5.83102	12.34154	0.47240	4.50341	36.67913
2.5	50.95030	6.65929	14.14065	0.51931	5.06152	39.04970
2.6	48.66561	7.59494	16.17094	0.56592	5.68535	41.33439
2.7	46.46527	8.65135	18.45970	0.61203	6.38241	43.53473
2.8	44.34723	9.84313	21.03675	0.65749	7.16084	45.65277
2.9	42.30912	11.18627	23.93460	0.70218	8.02952	47.69088
3.0	40.34831	12.69817	27.18867	0.74600	8.99807	49.65169
3.1	38.46204	14.39776	30.83742	0.78888	10.07690	51.53796
3.2	36.64748	16.30558	34.92262	0.83076	11.27731	53.35252
3.3	34.90177	18.44392	39.48948	0.87160	12.61149	55.09823
3.4	33.22204	20.83685	44.58690	0.91137	14.09259	56.77796
3.5	31.60548	23.51040	50.26765	0.95006	15.73480	58.39452
3.6	30.04936	26.49262	56.58863	0.98765	17.55336	59.95064
3.7	28.55098	29.81371	63.61104	1.02416	19.56466	61.44901
3.8	27.10778	33.50612	71.40064	1.05959	21.78629	62.89222
3.9	25.71726	37.60469	80.02801	1.09395	24.23707	64.28274
4.0	24.37703	42.14675	89.56872	1.12726	26.93716	65.62297
4.1	23.08481	47.17227	100.10367	1.15954	29.90811	66.91519
4.2	21.83840	52.72396	111.71925	1.19082	33.17290	68.16160
4.3	20.63571	58.84741	124.50769	1.22112	36.75603	69.36428
4.4	19.47477	65.59122	138.56725	1.25046	40.68360	70.52523
4.5	18.35367	73.00716	154.00256	1.27888	44.98334	71.64633
4.6	17.27062	81.15029	170.92483	1.30639	49.68474	72.72938
4.7	16.22390	90.07908	189.45220	1.33304	54.81908	73.77610
4.8	15.21189	99.85560	209.70998	1.35885	60.41951	74.78810
4.9	14.23305	110.54565	231.83101	1.38385	66.52115	75.76694
5.0	13.28592	122.21892	255.95587	1.40806	73.16115	76.71408

Tableau (5.32) : Résultats numériques de dimensionnement d'une tuyère plane à corps central type à bouchon 'Plug Nozzle' pour un Gaz Parfait ($\gamma = 1.402$).

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons établi un programme qui permet de déterminer les formes des profils des tuyères supersoniques planes de type à corps central 'Plug nozzle' à Haute température donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle sur l'hypothèse d'un gaz parfait et d'un gaz calorifiquement et thermiquement imparfait.

Nous avons obtenu et démontré par le programme les résultats suivants :

1. L'existence d'une infinité de profils possédant le même nombre de Mach de sortie, dont l'un est de type à détente centrée et de type à corps central et les autres sont tous de type à zone d'expansion.
2. La plus petite longueur de tuyères est obtenue dans le cas d'une tuyère à corps central.
3. Les tuyères donnant à la sortie le même nombre de Mach utilisant le même gaz de propulsion délivrent la même force de poussée indépendamment de la forme et de la géométrie.
4. Le gaz utilisé dans la propulsion influe considérablement sur la forme de la tuyère de propulsion dimensionnée. Si le gaz possède un rapport des chaleurs spécifiques γ grand, nous aurons une longueur et une masse de tuyère petites par rapport à une autre tuyère utilisant un gaz possédant une valeur de γ petite par rapport à la première tuyère.
5. Concernant les applications pour les moteurs de fusées, de missiles et d'avions supersoniques ainsi que pour les navettes spatiales, nous recommandons d'utiliser des gaz de propulsion connus par le nom de 'gaz chaud' afin d'obtenir des masses de la structure faibles.
6. Pour les fabrications de souffleries, nous recommandons d'utiliser des gaz de propulsion connus par le nom de 'gaz froid' afin d'avoir des températures de gaz d'échappement faibles, surtout si le circuit du gaz est ouvert.

7. Nous recommandons également de perfectionner les anciens missiles, qui ont été fabriqués sur la base de tuyères à détente centrée, par l'utilisation de la nouvelle forme étudiée dans ce travail, connu par la tuyère à corps central, afin d'améliorer les performances en augmentant soit la portée du missile soit le temps de mission de vol. Nous estimons que nous pouvons gagner environ 20 % de performance.

Il est utile, pour rendre l'étude détaillée dans ce domaine, de s'attaquer à des problèmes constituant des sujets de recherche intéressants. Nous citons ici quelques thèmes que nous proposerons comme travaux futurs.

- 1° Faire la conception de même type de tuyères mais de géométrie axisymétrique avec les deux hypothèses d'un gaz parfait et d'un gaz calorifiquement et thermiquement imparfait.
- 2° Essayer de développer le modèle tridimensionnel des tuyères de sections carrées ou elliptiques, toujours pour la forme à corps central.
- 3° Essayer de considérer le 'Lip' comme une région de courbure et voir son influence sur la forme obtenue de la tuyère.

En fin, notre grand souhait est que ce travail puisse être un outil de base pour des recherches futurs dans le domaine de la conception de nouvelles formes de tuyères supersoniques.

APPENDICE A
LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

1. Système de coordonnées

x	:	Coordonnée axiale
y	:	Coordonnée radiale

2. Lettres latines

A	:	Aire d'une section de la tuyère
C	:	Coefficient
F	:	La poussée
I	:	Impulsion
g	:	Accélération de la pesanteur
L	:	Longueur de la tuyère
M	:	Nombre de Mach
N	:	Fonction test
N _p	:	Nombre de discrétisation
P	:	Pression
R	:	Rayon d'une section de la tuyère
r	:	Constante thermodynamique des gaz
T	:	Température
t	:	Epaisseur du matériau utilisé
u	:	Composante axiale du vecteur vitesse
v	:	Composante radiale du vecteur vitesse
V	:	Vitesse des gaz
W	:	Fonction charge
(i, j)	:	Nœud ou point (i, j)

3. Lettres grecques

α	:	Angle formé par l'axe de la tuyère et la paroi extérieure du bouchon
β	:	Angle formé par l'axe de la tuyère et la paroi intérieure du bouchon

γ	:	Rapport des chaleurs spécifiques
θ	:	Angle de déviation du vecteur vitesse de l'écoulement
ρ	:	Masse volumique
Φ	:	Angle polaire d'un point de la paroi par rapport au 'Lip'
Φ	:	Solution approximée de l'équation différentielle considérée
ψ	:	Inclinaison du 'Lip' par rapport à la verticale
μ	:	Angle de Mach
v	:	Fonction de Prandtl-Meyer

4. Indices

arc	:	Arc du corps central
c	:	Condition au col
*	:	Condition critique
eff	:	Effective
E	:	Entrée du col
m	:	Concernant le matériau
PLUG	:	Concernant le corps central
s	:	Section de sortie
t	:	Total
d	:	Décharge

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] John D. Anderson, Jr., 'Fundamentals of Aerodynamics', Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1988.
- [2] J. D. Anderson, Jr., 'Modern Compressible Flow : With Historical Perspective', Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1982.
- [3] Inge L. Ryhming, 'Dynamique des fluides', Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, Suisse, 1984.
- [4] H. P. G., Peterson C. R., 'Mechanics and Thermodynamics of Propulsion', Addition-Wesley Publishing Company Inc., 1965.
- [5] Shapiro, A. H., 'The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow,' Vol. 1, The Ronald Press Company, New York, 1953.
- [6] B. Démidovitch, I. Maron, 'Eléments de calcul numérique', Editions MIR, Moscou, 1987.
- [7] C. A. J. Fletcher, 'Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories,' Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [8] F. J. Malina, 'Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect gases', J. Franklin Inst., Vol. 230, pp. 433-450, 1940.
- [9] G. Guderley et E. Hantsch, 'Beste Formen Fur Achsensymmetrische Uber-Schallschubdusen', Z. Flugwiss. 3, 305, 1955.
- [10] G.V.R. Rao, 'Contoured Rocket Nozzles', Proc. 9th Int. Astro-Fed. Congress, Amsterdam, 1958.
- [11] G.V.R. Rao, 'Recent development in Rocket Nozzle Configuration', ARS Journal, pp. 1488-1494, 1961.
- [12] I.M. Hall, 'Transonic Flow in Two-dimensional-symmetric Nozzle', Quaterly J. of Mechanics & Applied Mechanics, Vol. XV, Pt 4, pp. 487-508, 1962.
- [13] F. Mechighel, 'Développement d'une méthode de Conception de Tuyères Supersoniques de Propulsion ', Mémoire de Magister, Institut d'Aéronautique, Université de Blida, 1997.

Lecture supplémentaire

- (i) Benjamin Crowell, 'Conservation Laws', Book 2 in the Light and Matter series of introductory physics textbooks, www.Lightandmatter.com
Fullerton, California, © 1998 by Benjamin Crowell, Edition 2.0, rev.2001-04-17,
ISBN 0-9704670-2-8.
- (ii) Professor John W. Norbury, 'Elementary Mechanics & Thermodynamics',
Physics Department, University of Wisconsin-Milwaukee, P.O.Box 413, Milwaukee,
WI 53210 November 20, 2000.