

**UNIVERSITE SAAD DAHLAD DE BLIDA**

**Faculté des Sciences**  
Département de Physique

# **MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité : Physique Théorique

## **LES ETATS LIMITES D'UNE CLASSE DE POTENTIELS P-T VIA LA THEORIE DES GROUPES**

Par

**HATTOU Souad**

Devant le jury composé de

M <sup>r</sup> . BELAL Rachid	Professeur, U.S.D. Blida	Président
M <sup>r</sup> . BOUKRAA Salah	Professeur, U.S.D. Blida	Examineur
M <sup>me</sup> . F.MEKIDECHE.CHAFA	Professeur, U.S.T.H.B. Alger	Examinatrice
M <sup>r</sup> . BENTAIBA Mustapha	Professeur. U S D Blida	Rapporteur

Blida, Mai 2007.

## RESUME

Les états de diffusions et les états liés de certains potentiels sont caractérisés par des représentations algébriques. Ces dernières sont décrites par des représentations unitaires de certains groupes. Plusieurs potentiels d'intérêt pratiques, tels que les potentiels de Morse et de Pöschl-Teller y sont inclus. Le présent travail donne un traitement systématique et unifié relatif aux deux classes de potentiels de Morse et de Pöschl-Teller en liant leurs équations de Schrödinger respectives via le groupe de Lie compact  $SU(2)$ , où nous trouvons les termes de leurs classes de potentiels par la supersymétrie de la mécanique quantique. Nous avons trouvé que les équations de Schrödinger sont équivalentes uniquement si leurs classes de potentiels ainsi que leurs fonctions d'onde, respectivement, sont liées par la transformée de Fourier.

## ABSTRACT

We show that both bound and scattering states of certain class of potentials are related to the unitary representations of certain groups. In this class, several potentials of practical interest. Such as the Morse and Pöschl-Teller potentials, are included. We present a systematic and unified treatment to connecting the Schrödinger equation(s) of the generalized Morse and Pöschl-Teller potentials within the framework of  $SU(2)$  Lie compact group and supersymmetric quantum mechanics. It is found that the Schrödinger equation(s) are equivalent solely if their classes of potentials and wave functions, respectively, are linked by the Fourier transforms.

## ملخص

ان دراسة الحالات المرتبطة او الحالات المنتشرة لبعض الكمون يكون عن طريق نظرية المجموعات و الزمر، حيث ان كل كمون ينتمي الى مجموعة وتتم دراسته و ايجاد مجالات الطاقة الخاصة به عن طريق استعمال مؤشرات بوزونية. من أهم الكمونات التي تطبق عليها هذه الطريقة هناك كمون "مورس" و كمون "بوشل تيلر" ان الهدف من هذه الدراسة هي المعالجة الموحدة لكلا من الكمونيين مورس و بوشل-تيلر لغرض توحيد معادلة شرودنغر المكافئة لهما وهذا تحت سياق النظريتين الزمر و نظرية التناظر الفائق للميكانيكا الكمومي . فقد وجد نظريا أن المعادلتين متكافئتين بشرط أن يكون الكمونيين و كذلك دالة الموجة المقابلة لهما مرتبطتين بتحويل فوريي.

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au **Laboratoire de Physique Théorique et Interaction Rayonnement - Matière**. (LPThIRM) du département de physique, faculté des Sciences de l'université Saàd DAHLAB de Blida, sous la direction de monsieur Mustapha BENTAIBA, professeur, directeur du laboratoire et chef de département, à qui j'exprime ma reconnaissance et ma gratitude. Il a dirigé mon travail avec compétence et efficacité et m'a constamment guidée au cours de sa réalisation par ses précieux conseils, ses critiques et ses remarques, qui m'ont beaucoup aidée pour mener à terme ce travail.

Je remercie également monsieur BELAL Rachid Professeur à l'université de Blida pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury de soutenance.

Je tiens à remercier monsieur BOUKRAA Salah Professeur à l'université de Blida d'avoir bien voulu accepter de participer et d'honorer le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier également madame Faiza MEKIDECHE-CHAFA professeur à l'U.S.T.H.B d'avoir bien voulu accepter de participer et d'honorer le jury de cette thèse.

Je remercie aussi le personnel du laboratoire de Physique Théorique, enseignant et étudiant, pour leurs sympathies en particulier YAHYAOUI Sid Ahmed pour ses conseils et son encouragement.

Mes plus grands remerciements et mes sincères grâces pour mes parents, pour leur constant soutien et d'avoir été toujours à mes côtés pour m'encourager, me remonter le moral avant et pendant la réalisation de ce travail.

J'adresse également mes vifs remerciements aux membres de ma famille : Ma grande sœur Hassiba, son mari et ses enfants. Ma sœur Houria, son mari et ses enfants. Ma sœur Fatima et sa fille Safaa. Ma sœur Hayat, son mari et son adorable fille Nada Sawsan. Mon frère Ilyés et sa femme Samia. Je remercie Abdelkader, sans oublier mes amies et les membres de ma promo : Othmane, Mounira, Sanaa et Samira. Je ne saurais bien sûr oublier de très nombreux amis.

## TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION. ....	07
1. THEORIE DES GROUPES .....	11
1.1 Introduction .....	11
1.2 Notion de base de la théorie des groupes .....	11
1.3 Structure générale des groupes de Lie .....	12
1.3.1 Opérateurs invariants – Opérateur(s) de Casimir- .....	14
1.3.2 L'algèbre de Lie .....	15
1.3.2.1 Réalisation de $SU(2)$ et $SU(1.1)$ par des opérateurs bosoniques .	16
▪ Algèbre de Lie de $SU(2)$ .....	16
▪ Algèbre de Lie de $SU(1.1)$ .....	19
2. LA SUPERSYMETRIE DE LA MECANIQUE QUANTIQUE .....	22
2.1 Introduction .....	22
2.2 L'oscillateur harmonique supersymétrique .....	22
2.3 Mécanique quantique spersymétrique .....	28
3. LES CLASSES DE POTENTIELS DE MORSE ET DE PÖSCHL-TELLER ...	35
3.1 Classe de potentiels de Morse .....	35
3.2 Classe de potentiels de Pöschl-Teller .....	39
4. LES POTENTIELS DE MORSE ET DE PÖSCHL-TELLER GENERALISES .	43
4.1 Introduction .....	43
4.2 Structures algébriques et leur réalisation avec l'équation de Schrödinger .....	45
4.3 Potentiel de Pöschl-Teller .....	48
4.4 La connexion entre les deux classes de potentiels .....	52

4.5 Le lien entre les spectres d'énergie . . . . .	58
4.6 Le lien entre les fonctions d'onde. . . . .	59
CONCLUSION . . . . .	62
APPENDICE	
REFERENCES	

## INTRODUCTION

La symétrie joue un rôle fondamental dans notre conception des lois de la nature. Elle apparaît sous forme de régularités dans les structures et propriétés des systèmes physiques et d'invariances dans les équations qui les régissent. L'un des plus grands exploits de la notion de symétrie est, sans doute, en physique des particules élémentaires. L'utilisation de la théorie des groupes, qui est le langage mathématique de la symétrie, a permis de classer les particules élémentaires, de décrire leurs propriétés les plus fondamentales et de construire les équations qui déterminent leur évolution dans l'espace-temps avec ou sans interactions. Le lien entre la théorie des groupes et la physique est réalisé par les représentations des groupes, particulièrement, celles qui font apparaître les propriétés des particules telles que la masse, le spin, la charge, l'isospin, l'hypercharge..., où on décrit ces propriétés en termes de nombres quantiques. Ce type de représentations est appelé représentation irréductible.

D'autre part, la théorie des groupes nous permet d'utiliser des techniques algébriques puissantes et efficaces à la fois, en particulier, dans la détermination des expressions analytiques des spectres d'énergie pour des systèmes physiques. L'un des aspects fondamentaux de la théorie des groupes de Lie est la construction de l'hamiltonien d'un système quantique à partir de l'opérateur(s) de Casimir lié(s) à la structure algébrique du groupe en question. Cette procédure de construction est principalement fondée sur deux opérations successives, la première consiste à introduire, sous forme de générateurs, un ensemble d'opérateurs de création et d'annihilation [1-3], tandis que, la seconde opération consiste à leur donner une forme différentielle bidimensionnelle [1-3].

Parallèlement à la théorie des groupes, la supersymétrie de la mécanique quantique est une autre approche mathématique, aussi puissante que la première, qui permet de déduire les expressions analytiques des spectres d'énergie relatives aux différentes classes de potentiels. Elle est le résultat d'une généralisation de la

méthode de factorisation de Schrödinger [4], fondée sur les opérateurs de création et d'annihilation donnant ainsi deux hamiltoniens *iso spectraux*, c'est-à-dire des hamiltoniens ayant le même spectre d'énergie excepté pour l'état fondamental [4,5]. Ces opérateurs s'appellent souvent les opérateurs bosoniques et fermioniques du système supersymétrique.

Nous nous intéressons dans ce travail aux potentiels unidimensionnels de Morse [6] et de Pöschl-Teller [7]. Le premier joue un rôle important en physique moléculaire [6] et qui est aussi utilisé dans plusieurs branches de la physique et de la chimie [7], tandis que le deuxième est appliqué dans des divers domaines de la physique [8] tels que la solution de l'équation de Korteweg-de Vries pour les solitons [9] et la limite non relativiste de l'équation de Sine Gordon [10]. En tenant compte, que les spectres d'énergies des deux potentiels sont liés à la même représentation des algèbres de Lie  $su(2)$  [11,12] qui caractérise les états liés.

En mécanique quantique, où le nombre de particules est fini, un état lié est un état dans l'espace de Hilbert qui correspond à deux ou plusieurs particules dont l'énergie d'interaction est négative, et donc ces particules ne peuvent pas être séparées. Le spectre d'énergie d'un état lié est discret.

Les représentations algébriques qui caractérisent les états liés et les états de diffusion de certains potentiels sont décrites par des représentations unitaires de certains groupes. Récemment, les algèbres liées aux groupes ont été utilisées pour trouver les spectres d'énergies pour les états liés [1], alors que, les matrices de représentation du groupe pourraient être utilisées pour calculer des niveaux d'excitation dépendant du temps [13,14]. Cependant, plusieurs de ces systèmes ont des spectres discrets et continus. A notre connaissance, un problème a été analysé avec la théorie des groupes, c'est le problème de Coulomb [15], où l'on a utilisé les groupes  $SO(4)$  et  $SO(3,1)$  afin de décrire la dégénérescence pour les états liés [16,17] et les états de diffusion [18,19]. Ces deux groupes sont inclus dans le groupe dynamique  $SO(4,2)$ . Il est important de noter que le problème de Coulomb est particulier, car il a un nombre infini d'états liés, où son groupe dynamique est non compact, où la plupart des applications en physique [2,20] ont un nombre fini d'états liés et ainsi, elles sont représentées par des groupes dynamiques compacts.

Pour les potentiels dont les solutions d'états liés sont présentées par un groupe  $G$  compact, les solutions d'états de diffusion sont simplement obtenues par une suite analytique dans le plan complexe de certains nombres quantiques caractérisant les états liés dans  $G$ . En même temps, le groupe compact  $G$  est analytiquement continu dans un groupe non compact  $G^*$ , où les états de diffusion sont liés à la représentation unitaire du  $G^*$  [21].

Le présent travail traitera l'équation de Schrödinger correspondante aux potentiels de Morse [6] et Pöschl-Teller [8]. Le premier des deux peut être réalisé dans le cadre du groupe  $SU(2)$  dans un espace à deux dimensions tandis que le second potentiel est généré dans le groupe  $SU(2)$  sur une sphère (3-dimensions). Il a été démontré [1] que les spectres d'énergies des deux potentiels sont relatifs à la même représentation de l'algèbre de Lie  $su(2) \approx so(3)$ . Ainsi, l'algèbre de Lie  $su(2)$  génère la représentation unitaire du groupe de Lie  $SU(2)$ .

La relation entre les potentiels de Morse et de Pöschl-Teller via l'équation de Schrödinger a été établie par Alhassid et al. [1]. Cette étude nous permet de faire une extension au cas des classes de potentiels par un traitement algébrique similaire, par le groupe de Lie  $SU(2)$ , ceci revient à trouver les transformations mathématiques qui permettent le passage d'une équation de Schrödinger à une autre par le biais du groupe  $SU(2)$ . Par conséquent, l'algèbre associée à un tel traitement permet d'établir le lien existant entre leurs spectres respectifs.

Le plan de ce manuscrit est le suivant : Au premier chapitre, nous donnerons un aperçu sur la théorie des groupes. Nous introduirons sous une forme générale les notions de base de cette théorie et plus particulièrement pour ce travail : les groupes de Lie, nous présenterons aussi les propriétés des algèbres de Lie :  $su(2)$  et  $su(1,1)$ , en présentant leurs réalisations bosoniques où l'écriture en minuscule  $su(2)$  et  $su(1,1)$  représente les algèbres et l'écriture en majuscule  $SU(2)$ ,  $SU(1,1)$  représente les groupes.

Le deuxième chapitre sera consacré à la supersymétrie de la mécanique quantique (SUSY-QM). Nous commencerons par l'oscillateur harmonique supersymétrique, où nous exposerons une introduction sommaire sur les théories

supersymétriques, ensuite nous parlerons de la supersymétrie de la mécanique quantique d'une façon générale.

Dans le troisième chapitre, nous utiliserons les notions introduites dans le deuxième chapitre. En présentant les opérateurs de création et d'annihilation pour les potentiels de Morse et de Pöschl-Teller, nous déterminerons leurs classes de potentiels, où dans le cas du potentiel de Morse les résultats sont déjà établis par E.Drigo-Fihlo [22]. Tandis que, nous calculons la classe hyperbolique correspondante au potentiel de Pöschl-Teller afin de la relier au potentiel de Morse, sachant que le potentiel trigonométrique de Pöschl-Teller a été déjà traité [23].

Dans le quatrième chapitre, nous développerons la transformation qui relie les deux classes de potentiels du formalisme de Schrödinger, nous discuterons les détails mathématiques, basés sur la méthode de Hylleraas [24] et la transformée de Fourier en utilisant les représentations algébriques, pour les états liés, introduites dans le premier chapitre. Finalement, nous déduisons les relations reliant leurs spectres d'énergie et leurs fonctions d'onde.

Nous terminerons ce travail par une conclusion dans laquelle, nous résumerons l'essentiel de notre travail tout en discutant les résultats.

## CHAPITRE 01 THEORIE DES GROUPES

### 1.1 Introduction :

L'ensemble des transformations subies par un système physique a, en général, une structure mathématique de groupe, ce qui permet de traiter les problèmes physiques liés à la symétrie par la théorie des groupes. La large utilisation de cette dernière, non seulement en physique mais aussi dans les divers domaines de la science, est due à son formalisme abstrait et général. Pour cette raison, nous avons préféré présenter ses axiomes et notions sous une forme générale et abstraite, en vue de les appliquer pour le cas particulier des groupes de Lie compacts et non compacts.

### 1.2 Notion de base de la théorie des groupes :

Un groupe, et par définition, un ensemble d'éléments abstraits vérifiant certains axiomes. Ces éléments peuvent prendre des formes différentes en fonction de l'espace sur lequel le groupe agit et qui peut être vectoriel, fonctionnel, tensoriel ... C'est ce qui nous permettra d'associer plusieurs représentations sur le même groupe.

Un groupe est discret si ses éléments sont dénombrables, l'ordre d'un groupe discret est le nombre de ses éléments, il peut être fini ou infini.

Un groupe est continu si ses éléments sont des fonctions d'un ensemble de variables continues

$$G = \{g_1(\alpha^1, \dots, \alpha^n), g_2(\alpha^1, \dots, \alpha^n), \dots\}, \quad (1.1)$$

les variables  $\alpha^i$  sont appelées paramètres du groupe. Un groupe continu est forcément infini [25].

Un homomorphisme d'un groupe  $(G, \bullet)$  dans un groupe  $(D, *)$  est une application  $f$  qui préserve la loi de multiplication du groupe. Autrement dit, elle vérifie la condition

$$f(g_1 \bullet g_2) = f(g_1) * f(g_2), \quad (1.2)$$

pour tout couple d'élément de  $G$ . Si de plus cette application est bijective, alors il y a correspondance entre les éléments de  $G$  et de  $D$ , on parle d'un isomorphisme.

Deux groupes  $\{a, b, \dots\}$  et  $\{a', b', \dots\}$  sont dits isomorphes s'il existe une transformation bijective entre les éléments des deux groupes soit :

$$a \rightarrow b, \quad a' \rightarrow b' \Rightarrow ab \rightarrow a'b'$$

Les éléments produits du premier groupe sont donc associés de façon unique avec les éléments produits du second et réciproquement.

Un groupe  $G$  est dit simple s'il ne contient pas un sous-groupe invariant. Si  $G$  contient un sous-groupe invariant non abélien, on dit qu'il est semi simple.

### 1.3 Structure générale des groupes de Lie :

Les groupes de Lie sont un cas particulier très important des groupes qu'on utilise fréquemment en physique. Ce sont des groupes munis d'une structure de variété différentiable<sup>1</sup>. Cela signifie qu'ils sont des groupes continus dont les éléments  $g(\alpha^1, \dots, \alpha^m)$  sont des fonctions indéfiniment différentiables de leurs  $m$  paramètres. Ces paramètres  $\alpha^i$  représentent les coordonnées des points dans un espace appelé la variété du groupe, il y a une correspondance directe entre les éléments du groupe et les points de cette espace. On fait correspondre à l'origine de la variété l'élément neutre du groupe  $g(0, \dots, 0) = e$ .

Les groupes de Lie sont les composantes connexes des groupes continus dont les éléments sont continûment liés à la transformation identité [26]. On dit qu'un groupe est connexe si, pour tout couple de points de sa variété, il existe un ou plusieurs chemins continus appartenant à la variété qui les relie; sinon il est non connexe. Si tous les chemins qui relient deux éléments du groupe peuvent être transformés les uns aux autres de façon continue, le groupe est simplement

---

<sup>1</sup> La notion de variété différentiable est une tentative de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur  $\mathbb{R}^n$  à des espaces qui ne ressemblent à  $\mathbb{R}^n$  que localement ( tels que la sphère, le tore , le cylindre, ...)

connexe. S'il y a un nombre  $n$  de chemins distincts<sup>1</sup> qui relient deux éléments, le groupe est  $n - fois$  connexe ou multiplement connexe [27].

Un groupe de Lie est compact si tous ses paramètres prennent des valeurs continues dans des domaines compacts (fermés et bornés) c'est-à-dire tous ces éléments peuvent être spécifiés par des points à l'intérieur d'une région finie. Sinon on parlera de groupe non compact [25] (cette région n'est pas finie). L'algèbre de Lie correspondante est appelée compacte ou non compacte respectivement. Toute algèbre de Lie compacte est semi simple, c'est-à-dire chaque élément du groupe est défini de façon unique par les paramètres.

Un élément du groupe de Lie peut être écrit au voisinage de l'identité sous la forme<sup>2</sup> :

$$g(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m) = 1 - i\varepsilon^i J_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.3)$$

où :

$$J_i = i \left( \frac{\partial g(\alpha^1, \dots, \alpha^m)}{\partial \alpha^i} \right)_{\alpha^j=0}, \quad (1.4)$$

les générateurs  $J_i$  sont au nombre des paramètres du groupe et forment la base d'une algèbre de commutateurs fermée appelée algèbre de Lie.

$$[J_i, J_j] = J_i J_j - J_j J_i = C_{ij}^k J_k, \quad (1.5)$$

les coefficients  $C_{ij}^k$  détiennent toutes les informations concernant l'algèbre de Lie d'où vient leurs nom de constantes de structure. L'algèbre de Lie nous renseigne sur les propriétés locales du groupe, ce genre d'informations est généralement suffisant pour décrire la majorité des propriétés du groupe associé. Il est possible que plusieurs groupes partagent la même algèbre de Lie.

### 1.3.1. Opérateurs invariants - opérateur(s) de Casimir- :

Les harmoniques sphériques  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  sont caractérisées par les nombres quantiques  $l$  et  $m$ . Plus précisément, les  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  sont des fonctions simultanées

<sup>1</sup> Qu'on ne peut pas transformer continûment les uns aux autres.

<sup>2</sup> On somme sur les indices répétés selon la convention d'Einstein.

des deux opérateurs de moment angulaire orbital  $\hat{L}^2$  et  $\hat{L}_3$ , qui sont reliés aux générateurs  $\hat{J}_i$  du groupe de rotation sans spin, ainsi :

$$\hat{L}^2 = \sum_i \hat{J}_i^2 = \hat{J}^2 . \quad \hat{L}_3 = \hat{J}_3 , \quad (1.6)$$

$\hat{L}^2$  (et aussi  $\hat{J}^2$ ) n'est pas un générateur du groupe, mais c'est une fonction bilinéaire de tous les générateurs.  $\hat{L}^2$  a la propriété particulière de commuter avec tous les générateurs, soit :

$$[\hat{L}^2, \hat{J}_i] = 0 , \quad (1.7)$$

par conséquent nous avons :

$$[\hat{L}^2, \hat{U}_R(\phi)] = 0 , \quad (1.8)$$

où,  $\hat{U}_R(\phi)$  représente les opérateurs d'un groupe de symétrie :

$$\hat{U}_R(\phi) = \exp(-i\phi_i \hat{J}_i) = \exp(-i\phi \cdot \hat{J}) . \quad (\text{avec } \hbar = 1) .$$

Egalement,  $\hat{J}^2$  commute aussi avec tous les opérateurs  $\hat{U}_R(\phi)$  du groupe. Par conséquent,  $\hat{J}^2$  est appelé un opérateur invariant du groupe ou opérateur de Casimir. L'importance de ces opérateurs réside dans le fait que leurs vecteurs propres, dégénérés  $(2j+1)$  fois, représentent exactement les multiplets du groupe de rotation.  $j = 0$  est un singlet,  $j = \frac{1}{2}$  est un doublet,  $j = 1$  un triplet, etc. Cette propriété n'est pas une propriété particulière du groupe de rotation mais une caractéristique générale des groupes de Lie sous une forme généralisée<sup>1</sup>.

Le rang de l'algèbre est le nombre maximal des générateurs qui commutent entre eux. Ces derniers forment une algèbre appelée sous-algèbre de Cartan et engendrent un sous-groupe abélien. S'il n'y a pas de générateurs qui commutent entre eux, alors l'algèbre est de rang un. Pour un groupe semi-simple de rang  $r$ , il existe  $r$  opérateurs de Casimir indépendants<sup>2</sup>[27], ce sont des fonctions  $\hat{C}_\lambda(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_n)$  ( $\lambda = 1, \dots, r$ ) des générateurs  $\hat{L}_i$ , qui commutent avec chaque opérateur et donc entre eux également :  $[\hat{C}_\lambda, \hat{C}'_\lambda] = 0$ , les valeurs propres de  $\hat{C}_\lambda$  caractérisent les multiplets du groupe d'une façon unique. Ces opérateurs ont

<sup>1-2</sup> C'est le théorème de Racah [27].

une grande importance en physique : *lorsqu'un système physique est invariant par rapport à un groupe de symétrie donné, les opérateurs de Casimir de ce groupe représentent des grandeurs physiques invariantes, et par conséquent fondamentales, par lesquelles le système physique sera désigné.*

En général, il n'existe pas de méthode pour construire les opérateurs de Casimir pour des groupes semi-simples quelconques. Chaque groupe doit être étudié en particulier. C'est seulement dans le cas des groupes  $SU(n)$ , c'est-à-dire le groupe des matrices  $n \times n$  unitaires unimodulaires, que Biedenharn [28] fut capable de montrer que les opérateurs de Casimir sont nécessairement des formes polynomiales des générateurs.

$$\hat{C}_\lambda = \sum_{ij\dots} a_{ij}^k \dots \hat{L}_i \hat{L}_j \dots \quad (\lambda \text{ facteurs}), \quad (1.9)$$

où les  $a_{ij}^k$  sont des fonctions bien définies des constantes de structure. Le plus simple opérateur de Casimir  $\hat{C}_1$  est une fonction quadratique des générateurs.

Pour le groupe  $SU(2)$ , par exemple, c'est l'opérateur  $\hat{J}^2 = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+) + \hat{J}_3^2$ .  $\hat{C}_2$  est de degré trois par rapport à  $\hat{L}_i$ , etc,....

### 1.3 .2. L'algèbre de Lie :

On utilise généralement les groupes de symétries pour décrire les états liés et les états de diffusion de certains potentiels. Ces groupes sont représentés par des opérateurs bosoniques et d'autres fermioniques

L'une des méthodes utilisée pour construire analytiquement le spectre d'énergie sous-jacent à une algèbre pour des systèmes quantiques à nombre fini d'états liés, est d'introduire un ensemble d'opérateurs bosoniques de création et d'annihilation. Le nombre d'opérateurs bosoniques,  $n$  indépendant, qui permet de construire une telle algèbre, est lié à la dimension de l'espace  $d$  par la relation suivante [2, 3, 20] :

$$n = d + 1. \quad (1.10)$$

Ainsi pour des systèmes à une dimension ( $d=1$ ), on doit introduire deux opérateurs bosoniques  $a$  et  $b$ , et qui sont liés par les relations de commutation suivantes :

$$\begin{cases} [a, a^+] = [b, b^+] = 1 \\ [a, b^+] = [b, a^+] = [a, b] = [a^+, b^+] = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

### 1.3.2.1. Réalisation de $su(2)$ et $su(1,1)$ par des opérateurs bosoniques :

Dans cette section, nous introduisons quelques réalisations de  $su(2)$  et  $su(1,1)$ . Le groupe qui décrit les états liés est le groupe  $SU(2)$ , et celui qui décrit les états de diffusion est  $SU(1,1)$ .

- Algèbre de Lie de  $su(2)$  :

Les produits bilinéaires  $a^+a$ ,  $a^+b$ ,  $b^+a$  et  $b^+b$  génèrent le groupe compact  $U(2)$  (groupe unitaire à deux dimensions). Il est possible de regrouper ces quatre générateurs en une famille de générateurs en introduisant le groupe  $SU(2)$  caractérisé par :

$$\begin{aligned} J_+ &= a^+a \\ J_- &= b^+a \\ J_0 &= \frac{1}{2}(a^+a - b^+b) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Les générateurs de l'équation (1.12) sont dits représentations de Schwinger [29] de  $SU(2)$ ,

avec :

$$J_i = A^+ \frac{\sigma_i}{2} A \quad , \quad i = x, y, z \quad (1.13)$$

où  $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est le spineur dans la représentation  $SU(2)$  et  $\sigma_i$  sont les matrices de

Pauli. Les générateurs précédents satisfont les relations de commutation suivantes :

$$[J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad ; \quad [J_+, J_-] = 2J_0 \quad (1.14)$$

Un quatrième opérateur vient compléter la structure algébrique du groupe connu sous le nom de l'opérateur du nombre bosonique, il est donné par :

$$\hat{N} = a^+ a + b^+ b. \quad (1.15)$$

L'opérateur de Casimir quadratique invariant de  $SU(2)$  est donné par la relation suivante :

$$\hat{C} = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, \quad (1.16)$$

où on peut aussi l'écrire en fonction de  $\hat{N}$  :

$$\hat{C} = \frac{1}{4} \hat{N}(\hat{N} + 2), \quad (1.17)$$

les valeurs propres de  $\hat{C}$  sont données par :

$$\langle \hat{C} \rangle = j(j+1). \quad (1.18)$$

Il est évident que les états propres des opérateurs  $\hat{C}$  et  $J_0$  servent comme une base à la représentation irréductible de l'algèbre  $su(2)$  et les représentations irréductibles  $D_j$  de  $SU(2)$ , peuvent être caractérisées par l'opérateur du nombre bosonique,  $N = 2j$ , l'application de la réalisation (1.12) sur un ensemble de  $2j+1$  d'états mène à la représentation irréductible unitaire dimensionnelle qui se dégrade  $(2j+1)$  fois.

Si la base étant  $|j, m\rangle$ , avec  $(m = j, j-1, \dots, -j)$ , alors l'action de l'opérateur sur les états de base est donnée par :

$$\begin{aligned} J_0 |j, m\rangle &= m |j, m\rangle \\ J_{\pm} |j, m\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle, \\ \hat{C} |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle \end{aligned} \quad (1.19)$$

en outre, les réalisations bosoniques de l'algèbre  $su(2)$  peuvent être construites en définissant ces trois opérateurs:

$$\begin{aligned} J'_+ &= \sqrt{2j - \hat{N}'} a \\ J'_- &= a^+ \sqrt{2j - 1} \\ J'_0 &= j - \hat{N}' \end{aligned} \quad (1.20)$$

avec :

$$\hat{N}' = a^+ a, \quad (1.21)$$

où ces opérateurs satisfont également les relations de commutation de l'algèbre  $su(2)$ .

On va considérer dans ce travail, que notre système est caractérisé par un hamiltonien  $\hat{H}$  quadratique en ces générateurs, sa forme générale est :

$$\hat{H} = a_x J_x^2 + a_y J_y^2 + a_z J_z^2, \quad (1.22)$$

cet hamiltonien  $\hat{H}$  commute avec  $\hat{N}$ ,

$$[\hat{H}, \hat{N}] = 0, \quad (1.23)$$

où,  $\hat{H}$  peut être diagonalisé dans la représentation  $\{\hat{N}\}$ , quand il ne peut pas être calculé sous une forme exacte, ceci se produit seulement quand on écrit  $\hat{H}$  en terme de l'opérateur de Casimir invariant dans une chaîne des groupes complète [2, 3] et pour le groupe réductible  $U(2)$ , il existe deux chaînes possibles :

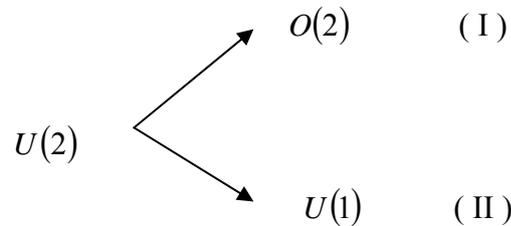


Figure (1-1)

Où, l'algèbre de ces deux groupes  $O(2), U(1)$  est isomorphe. Les deux groupes sont irréductibles.

Ces deux chaînes sont essentiellement identiques, c'est contrairement aux problèmes dans des dimensions élevées ( $r=3, r=5$ ) [2, 3]. Un exemple de la symétrie dynamique correspond à la chaîne des groupes  $U(2) \supset O(2)$  est donné par l'hamiltonien :

$$\hat{H}^{(1)} = -a_y J_y^2 \quad a_y > 0. \quad (1.24)$$

Les vecteurs propres qui correspondent à cet hamiltonien sont représentés dans l'état propre  $|N, m_y\rangle$ , où,

$$\hat{N}|N, m_y\rangle = N|N, m_y\rangle. \quad (1.25)$$

$$J_y|N, m_y\rangle = m_y|N, m_y\rangle, \quad -\frac{N}{2} \leq m_y \leq \frac{N}{2}. \quad (1.26)$$

Les valeurs propres correspondantes peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$E_{m_y} = -a_y m_y^2 . \quad (1.27)$$

L'hamiltonien  $\hat{H}^{(1)}$  a un nombre fini d'états liés ( $2j+1=2N$ ) et un spectre quadratique dans ces générateurs. Les états propres  $|N, m_y\rangle$  peuvent être facilement écrits en utilisant l'opérateur bosonique, en agissant sur l'état du vide  $|0\rangle$ , ou sur l'état propre de  $J_z$  [29] :

$$|N, m_z\rangle = C_{N, m_z} (a^+)^{\frac{N+m_z}{2}} (b^+)^{\frac{N-m_z}{2}} |0\rangle , \quad (1.28)$$

$$C_{n, m_z} = \left[ \left( \frac{N}{2} + m_z \right)! \left( \frac{N}{2} - m_z \right)! \right]^{-\frac{1}{2}} . \quad (1.29)$$

En effectuant une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  autour de l'axe des  $x$ , le résultat final est

$$|N, m_y\rangle = C_{N, m_y} \left( \frac{a^+ + ib^+}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{N+m_y}{2}} \left( \frac{ia^+ + b^+}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{N-m_y}{2}} |0\rangle , \quad (1.30)$$

où :

$$C_{n, m_y} = \left[ \left( \frac{N}{2} + m_y \right)! \left( \frac{N}{2} - m_y \right)! \right]^{-\frac{1}{2}} . \quad (1.31)$$

- Algèbre de Lie de  $su(1,1)$  :

L'algèbre de Lie de  $su(1,1)$  est plus adéquate pour résoudre de nombreux problèmes physiques. En utilisant l'ensemble d'opérateurs bosoniques donné par l'équation [30] :

$$\begin{aligned} a^+ &= \frac{l}{2}(x+iy) - \frac{1}{2l}(\partial_x + i\partial_y) \\ a &= \frac{l}{2}(x-iy) + \frac{1}{2l}(\partial_x - i\partial_y) \\ b^+ &= \frac{l}{2}(x-iy) - \frac{1}{2l}(\partial_x - i\partial_y) \\ b &= \frac{l}{2}(x+iy) + \frac{1}{2l}(\partial_x + i\partial_y) \end{aligned} , \quad (1.32)$$

où  $l = \frac{\sqrt{m\omega}}{\hbar}$  est un paramètre de longueur.

Nous introduisons les trois opérateurs [30] :

$$\begin{aligned}
K_+ &= a^+ b^+ \\
K_- &= ab \\
K_0 &= \frac{1}{2}(a^+ a + b^+ b + 1)
\end{aligned} \tag{1.33}$$

On peut facilement remarquer que les opérateurs  $K_s$  vérifient les relations de commutation de  $su(1,1)$  suivantes :

$$\begin{aligned}
[K_0, K_{\pm}] &= \pm K_{\pm} \\
[K_+, K_-] &= -2K_0
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Dans  $su(2)$  l'opérateur  $\hat{N}$  est la somme des opérateurs bosonique, dans notre cas l'opérateur de nombre est donné comme suit :

$$\hat{M} = a^+ a - b^+ b. \tag{1.35}$$

L'opérateur de Casimir invariant de  $su(1,1)$  est lié à  $\hat{M}$  par la relation suivante :

$$\hat{C} = \frac{1}{4}(1 + \hat{M})(1 - \hat{M}), \tag{1.36}$$

alors si la valeur propre de l'opérateur  $\hat{C}$  est  $k(1-k)$ , nous trouvons que  $\hat{M} = (1-2k)$  [30], par conséquent, l'action de la réalisation (1.33) sur les états ;  $|k, n\rangle$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) mène à la représentation irréductible unitaire infinie, la prétendue représentation positive  $D^+(k)$  [30] qui correspond à  $k = 1/2, 1, 2/3, \dots$

$$\begin{aligned}
K_0 |k, n\rangle &= (k+n) |k, n\rangle, \\
K_+ |k, n\rangle &= \sqrt{(2k+n)(n+1)} |k, n+1\rangle, \\
K_- |k, n\rangle &= \sqrt{(2k+n-1)n} |k, n-1\rangle, \\
\hat{C} |k, n\rangle &= k(1-k) |k, n\rangle.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Nous finissons cette section en présentant deux réalisations différentes de boson unitaire de l'algèbre  $su(1,1)$ . L'une d'entre elles peut être construite par les opérateurs

$$\begin{aligned}
L_+ &= \frac{1}{2} a^{+2}, \\
L_- &= \frac{1}{2} a^2, \\
L_0 &= \frac{1}{2} \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right).
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Pour les représentations unitaires, la réalisation bosonique de  $su(1,1)$  exige ici que le paramètre de Bargmann  $k$  soit égal à  $1/4$  ou  $3/4$ , il divise l'espace de Hilbert en deux sous-espaces bosoniques indépendants.

L'autre réalisation est

$$\begin{aligned} S_+ &= a^+ \sqrt{M' + 2k}, \\ S_- &= \sqrt{M' + 2k} a, \\ S_0 &= M' + k, \end{aligned} \tag{1.39}$$

où  $M' = a^+ a$

Les réalisations (1.33) et (1.39) jouent un rôle important dans la déduction des spectres d'énergie des hamiltoniens traités.

## CHAPITRE 2 LA SUPERSYMETRIE DE LA MECANIQUE QUANTIQUE

### 2.1 Introduction

La supersymétrie est une symétrie qui décrit les transformations entre bosons et fermions. Elle est apparue en premier dans les études de la théorie des champs. La dégénérescence du spectre d'énergie de différents systèmes en mécanique quantique est interprétée à l'aide de la fonction d'onde de l'état fondamental d'un potentiel à une dimension de la mécanique classique non relativiste, elle nous permet de construire d'autres potentiels de mêmes spectres d'énergie, excepté l'énergie de l'état fondamental [31,32]. La supersymétrie de la mécanique quantique est aussi une reformulation de la méthode de factorisation de Schrödinger [33-35].

Nous allons exposer une introduction sommaire aux théories supersymétriques actuellement développées en physique des particules, en partant d'un exemple simple [36] : celui d'un oscillateur harmonique de masse  $m$  et de spin  $\frac{1}{2}$ .

### 2.2 L'oscillateur harmonique supersymétrique :

Les états propres  $|n\rangle$ , états de bosons, sont obtenus à partir des opérateurs de créations  $b^+$  et d'annihilations  $b$  agissant sur un état du vide  $|0\rangle$ . On rappelle les définitions introduites pour un oscillateur harmonique de masse  $m$  dans un potentiel  $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  (on pose :  $\hbar = 1$ ) :

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} \left( \frac{d}{dx} + m\omega x \right), \\ b^+ &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} \left( -\frac{d}{dx} + m\omega x \right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

et

$$\hat{H}_B = \omega \left( b^+ b + 1_G \frac{1}{2} \right), \quad (2.2)$$

où  $1_G$  est l'élément unité pour matrice correspondant au groupe  $G$ .

Les opérateurs bosoniques vérifient les relations de commutation :

$$\begin{aligned} [b, b] &= [b^+, b^+] = 0, \\ [b, b^+] &= 1, \\ [\hat{H}_B, b^+] &= \omega b^+. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A partir de l'état fondamental  $|0\rangle$  d'énergie  $\frac{1}{2}\omega$ , on construit les états excités, ou en langage d'états occupés propres à la seconde quantification, on construit l'état à  $n$  bosons à partir de l'état du vide de bosons :

$$\begin{aligned} b|0\rangle &= |0\rangle, \\ b^+|0\rangle &= |1\rangle, \\ b|1\rangle &= |0\rangle, \\ b^+|1\rangle &= \sqrt{2}|2\rangle = \sqrt{2}(b^+)^2|0\rangle, \\ b|2\rangle &= \sqrt{2}|1\rangle, \\ (b^+)^n|0\rangle &= \sqrt{n!}|n\rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les états propres de  $\hat{H}_B$  sont définis à partir de l'opérateur  $\hat{N}_B = b^+ b$  définissant par sa valeur propre le nombre de bosons :

$$\begin{aligned} \hat{H}_B &= \omega(\hat{N}_B + 1/2), \\ \hat{H}_B|n\rangle &= E_n|n\rangle, \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec les états et valeurs propres :

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^+)^n|0\rangle, \\ E_n &= \omega(n + 1/2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Considérons maintenant les états de spin  $\left| \frac{1}{2}, \sigma \right\rangle$  de cette particule. Ils peuvent être obtenus à partir des opérateurs de Pauli :

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= 1/2(\sigma_x + i\sigma_y), \\ \sigma_- &= (\sigma_+)^+ = 1/2(\sigma_x - i\sigma_y), \end{aligned} \quad (2.7)$$

qui vérifient les équations fondamentales :

$$\begin{aligned}
\sigma_+ |1/2, 1/2\rangle &= 0, \\
\sigma_- |1/2, -1/2\rangle &= 0, \\
\sigma_+ |1/2, -1/2\rangle &= |1/2, 1/2\rangle, \\
\sigma_- |1/2, 1/2\rangle &= |1/2, -1/2\rangle.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

A partir des relations d'anticommutation vérifiées par les matrices de Pauli on obtient :

$$\begin{aligned}
\{\sigma_+, \sigma_+\} &= \{\sigma_-, \sigma_-\} = 0, \\
(\sigma_+)^2 &= (\sigma_-)^2 = 0, \\
\{\sigma_-, \sigma_+\} &= 1.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Une représentation de ces opérateurs de Pauli peut être obtenue dans l'espace des matrices  $2 \times 2$  en posant :

$$\begin{aligned}
|1/2, -1/2\rangle \equiv |0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{et} & |1/2, 1/2\rangle \equiv |1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
f^+ = \sigma_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{et} & f = \sigma_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

En seconde quantification, l'état  $|1/2, -1/2\rangle \equiv |0\rangle$  devient un état du vide de fermions, tandis que l'état  $|1/2, 1/2\rangle \equiv |1\rangle$  devient un état occupé par un fermion. Le principe d'exclusion de Pauli caractéristique des systèmes de fermions est alors traduit par le fait que :

$$f^2 = (f^+)^2 = 0. \tag{2.11}$$

Si on attribue l'énergie  $-1/2\omega$ , à l'état  $|1/2, -1/2\rangle$ , c'est-à-dire à l'état du vide de fermion<sup>1</sup>, on peut écrire l'hamiltonien de fermions :

$$\hat{H}_F = \omega(f^+ f - 1_G \cdot 1/2) \quad \text{et} \quad \hat{H}_F |0\rangle = -1/2\omega |0\rangle. \tag{2.12}$$

Les relations de commutations (2.3) des opérateurs bosoniques, trouvent leur équivalent dans l'espace fermionique, avec la retranscription de (2.9) en termes d'opérateurs de création et d'annihilation de fermions :

$$\begin{aligned}
\{f, f\} &= \{f^+, f^+\} = 0 \\
\{f, f^+\} &= 1_G
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Il est possible de condenser les règles de commutation et d'anticommutation des opérateurs bosoniques  $b$  et fermionique  $f$ , en introduisant le commutateur

---

<sup>1</sup> C'est une convention d'attribuer cette énergie de référence à l'état de référence qu'on a appelé vide.

gradu e  $\{\dots, \dots\}$  qui représente un commutateur, sauf si les deux opérateurs concern es sont des opérateurs fermioniques.

Si  $a = b, f$  on obtient ainsi :

$$[a, a^+] = 1_G \quad , \quad [a, a] = [a^+, a^+] = 0, \quad (2.14)$$

tandis que les opérateurs  $b$  et  $f$  commutent entre eux

$$[b, f] = [b, f^+] = [b^+, f] = [b^+, f^+] = 0. \quad (2.15)$$

Les  tats occup es ou les  tats du vide de fermions sont définis à partir du vide  $|0\rangle$ ,

avec les relations :

$$\begin{aligned} f|0\rangle &= 0 \quad , \quad f^+|0\rangle = |1\rangle \\ f|1\rangle &= |0\rangle \quad , \quad f^+|1\rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

La représentation matricielle (2.10) des opérateurs et  tats de fermions, permet de vérifier directement ces relations.

Faisons la somme des hamiltoniens  $\hat{H}_B$  et  $\hat{H}_F$  pour décrire la particule de masse  $m$  et de spin  $1/2$  dans le puits harmonique  $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ . L'énergie du vide bosonique compense l'énergie du vide fermionique, et l'énergie de l'état fondamental  $|0,0\rangle = |0\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  du hamiltonien total :

$$\hat{H} = \hat{H}_B + \hat{H}_F = \omega(b^+b + f^+f), \quad (2.17)$$

devient nulle par construction

$$\hat{H}|0,0\rangle = 0, \quad (2.18)$$

$$b|0,0\rangle = f|0,0\rangle = 0. \quad (2.19)$$

Un  tat propre de  $\hat{H}$  est le produit tensoriel des  tats  $|n\rangle$  de bosons donn es par (2.6), et des  tats  $|m\rangle$  de fermions donn es par (2.16) :

$$|n, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^+)^n (f^+)^m |0,0\rangle \quad n = 0,1,2,\dots \quad m = 0,1. \quad (2.20)$$

En ajoutant et retranchant le terme  $b^+b f^+f$  dans  $\hat{H}$  c'est-à-dire dans (2.17) on obtient :

$$\hat{H} = \omega(b^+b(1_G - f^+f) + (b^+b + 1_G)f^+f). \quad (2.21)$$

L'utilisation des relations de commutation (2.3) et d'anticommutation (2.13) associées au fait que les opérateurs  $f$  et  $b$  commutent entre eux, conduit à une forme différente de l'hamiltonien :

$$\hat{H} = \omega(bf^+fb^+ + fb^+bf^+). \quad (2.22)$$

Introduisons les opérateurs de supercharge  $Q$  et  $Q^+$ , en utilisant les représentations matricielles (2.10) de  $f$  et  $f^+$  :

$$\begin{aligned} Q &= bf^+ = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ Q^+ &= fb^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b^+ & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Cela donne la forme d'un anticommutateur à l'hamiltonien total  $\hat{H}$  :

$$\hat{H} = \omega\{Q, Q^+\} = \omega \begin{pmatrix} bb^+ & 0 \\ 0 & b^+b \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Les opérateurs matriciels des opérateurs  $\hat{H}, Q$  et  $Q^+$ , conduisent aux relations de commutation :

$$\{\hat{H}, Q\} = \{\hat{H}, Q^+\} = 0. \quad (2.25)$$

Cela montre que si  $|n, m\rangle$  est un état propre de  $\hat{H}$  correspondant à la valeur propre non nulle  $E$  de l'énergie,  $Q|n, m\rangle$  et  $Q^+|n, m\rangle$  sont également états propres de  $\hat{H}$  correspondant à la même énergie. On peut écrire en effet en utilisant (2.25) :

$$\hat{H}|n, m\rangle = E|n, m\rangle \text{ pour } E \neq 0$$

$$\begin{aligned} \hat{H}Q|n, m\rangle &= Q\hat{H}|n, m\rangle = E(Q|n, m\rangle), \\ \hat{H}Q^+|n, m\rangle &= Q^+\hat{H}|n, m\rangle = E(Q^+|n, m\rangle) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Les opérateurs de supercharge  $Q$  et  $Q^+$  génèrent donc une symétrie nouvelle ; la supersymétrie. Ils font passer d'un état bosonique à un état fermionique puisque :

$$Q|n, 0\rangle = \sqrt{\omega n}|n-1, 1\rangle, \quad (2.27)$$

ou d'un état fermionique à un état bosonique :

$$Q^+|n, 1\rangle = \sqrt{\omega(n+1)}|n+1, 0\rangle. \quad (2.28)$$

C'est ici une question de langage : l'opérateur  $Q$  fait passer de l'état d'énergie  $E_n$  de l'oscillateur de composante de spin  $|1/2, -1/2\rangle$  au même état d'énergie mais

de composante de spin  $|1/2, 1/2\rangle$ . Les états d'énergie  $E_n$  de l'oscillateur harmonique constituent un doublet.

L'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  dans lequel est défini l'opérateur  $\hat{H}$  peut être séparé en deux sous espaces  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  complémentaires, dans lesquels agissent des opérateurs  $\hat{N}_0$  et  $\hat{N}_1$  tels que :

$$\begin{aligned} \hat{N}_0 + \hat{N}_1 &= 1_G \\ \hat{N}_0 - \hat{N}_1 &= \hat{K} \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'opérateur  $\hat{K}$  est appelé opérateur de Klein ou opérateur d'involution. Une représentation de  $\hat{N}_0, \hat{N}_1$  et  $\hat{K}$  dans l'espace des matrices  $2 \times 2$  peut s'écrire :

$$\hat{N}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

On notera à partir de ces représentations les propriétés suivantes :

1- L'opérateur  $\hat{K}$  qui a pour valeurs propres  $\pm 1$ , comme on peut le voir sur la première diagonale, vérifie la condition :

$$\hat{K}^2 = 1_G. \quad (2.31)$$

2 -L'opérateur  $\hat{N}_0$  représente le nombre de fermion, car appliqué aux états fermioniques  $|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  il restitue les équations aux valeurs propres :

$$\hat{N}_0|0\rangle = 0 \quad \hat{N}_0|1\rangle = |1\rangle. \quad (2.32)$$

3 -Tout opérateur de la forme  $\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ f_2 & 0 \end{pmatrix}$  anticommute avec  $\hat{K}$ , où  $f_1$  et  $f_2$

sont des opérateurs :

$$\{\hat{K}, \hat{F}\} = 0. \quad (2.33)$$

L'opérateur  $\hat{F}$  est dit de type fermionique ou impair ou de graduation 1.

4 - Tout opérateur de la forme  $\hat{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$  commute avec  $\hat{K}$ , où  $b_1$  et  $b_2$  sont

des opérateurs :

$$[\hat{K}, \hat{B}] = 0. \quad (2.34)$$

L'opérateur  $\hat{B}$  est dit de type bosonique ou pair ou de graduation zéro.

5-La forme (2.23) des opérateurs  $Q$  et  $Q^+$  montre qu'il s'agit d'opérateurs impairs tandis que  $\hat{H}$  est un opérateur pair d'après son expression (2.24), ce qui donne avec (2.33) et (2.34) les relations :

$$\begin{aligned} [\hat{K}, \hat{H}] &= 0 \\ \{\hat{K}, Q\} &= \{\hat{K}, Q^+\} = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

6-Les opérateurs  $b$  et  $f$  (ou  $b^+$  et  $f^+$ ) commutent entre eux, la définition (2.21) des opérateurs de supercharge conduit aux relations :

$$\begin{aligned} [Q, b^+] &= f^+ \quad , \quad [Q, b] = 0 \\ \{Q, f\} &= b \quad , \quad \{Q, f^+\} = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Cela traduit le fait que  $Q$  est un opérateur impair, tandis que  $b$  est un opérateur pair et  $f$  un opérateur impair.

### 2.3 Mécanique quantique supersymétrique :

La théorie de la supersymétrie décrit les bosons et les fermions d'une manière unifiée, fait intervenir les commutateurs et les anticommutateurs. L'algèbre de la supersymétrie de la mécanique quantique contient  $\hat{N}$  opérateurs d'anticharges  $Q_i$ .

L'hamiltonien supersymétrique  $\hat{H}$  vérifie l'algèbre  $S(N)$  [37]

$$\begin{aligned} \{Q_i, Q_j\} &= \delta_{ij} \hat{H} \\ \{Q_i, \hat{H}\} &= 0 \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.37)$$

Les résultats les plus importants de la supersymétrie de la mécanique quantique sont obtenus à partir de l'algèbre de  $S(2)$ .

Nous introduisons de nouveaux opérateurs de charge dans l'algèbre  $S(2)$ .

$$Q = (Q_1 + iQ_2)/\sqrt{2} \quad \text{et} \quad Q^+ = (Q_1 - iQ_2)/\sqrt{2}, \quad (2.38)$$

nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \{Q, Q^+\} &= \hat{H}, \quad Q^2 = (Q^+)^2 = 0 \\ [Q, \hat{H}] &= [Q^+, \hat{H}] = 0 \end{aligned}$$

Les opérateurs de charge commutent avec l'hamiltonien  $\hat{H}$

Nous considérons deux matrices des opérateurs de charge comme suit :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

où  $A$  et  $A^+$  deux opérateurs que nous définissons par la suite. L'hamiltonien supersymétrique  $\hat{H}$  est par conséquent

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} A^+A & 0 \\ 0 & AA^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{H}_+ & 0 \\ 0 & \hat{H}_- \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Les deux matrices (2.39) et l'hamiltonien (2.40) représentent la réalisation de l'algèbre  $S(2)$  dans l'équation (2.38), connue aussi comme étant la superalgèbre de Lie  $SI(1/1)$ .

L'hamiltonien supersymétrique  $\hat{H}$  donné par (2.40) peut être interprété comme étant la composition de deux hamiltoniens scalaires  $\hat{H}_-$  et  $\hat{H}_+$ . Ces deux opérateurs agissent respectivement dans les secteurs bosoniques et fermioniques sur les deux états de base. Ces deux secteurs sont reliés par :

$$Q \begin{pmatrix} \psi_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\psi_B \end{pmatrix}, \quad Q^+ \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^+\psi_F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

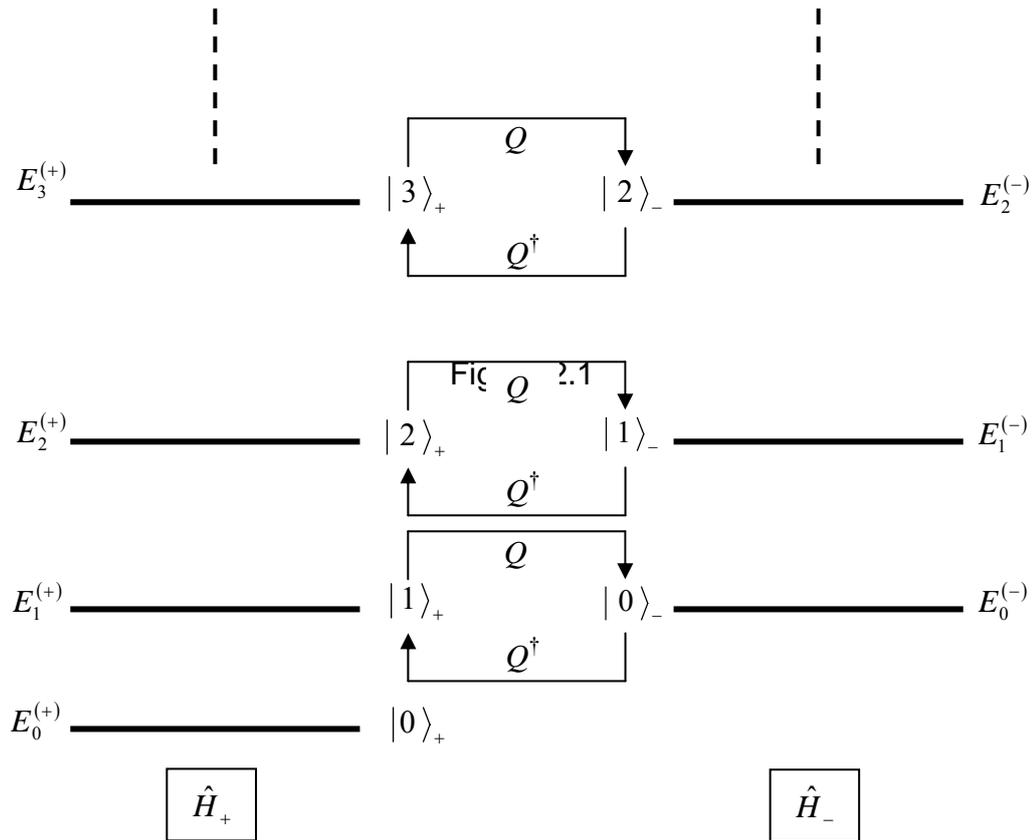
Où  $\psi_B$  et  $\psi_F$  contiennent les états propres de l'hamiltonien bosonique  $\hat{H}_+ = A^+A$  et l'hamiltonien fermionique  $\hat{H}_- = AA^+$ ,  $\hat{H}_+$ ,  $\hat{H}_-$  sont appelés des hamiltoniens partenaires supersymétriques.

L'illustration ci-dessous schématise le spectre supersymétrique de l'hamiltonien :

$$\hat{H}_{SUSY} = \begin{pmatrix} \hat{H}_+ & 0 \\ 0 & \hat{H}_- \end{pmatrix}.$$

Elle représente le lien entre les relations :

$$\begin{aligned} Q|N\rangle_- &= \sqrt{E_N^{(-)}}|N-1\rangle_+ \\ Q^+|N\rangle_+ &= \sqrt{E_N^{(+)}}|N+1\rangle_- \end{aligned} \quad (2.42)$$



L'existence de la superalgèbre (2.38) et en particulier, la relation de commutation entre les charges supersymétriques et l'hamiltonien supersymétrique a des conséquences importantes concernant le spectre d'énergie de  $\hat{H}_-$  et  $\hat{H}_+$  [32,37]. Premièrement, de leur construction les valeurs propres de  $\hat{H}_+ = A^+A$  et  $\hat{H}_- = AA^+$  ne sont pas négatives.

Nous considérons maintenant que les fonctions  $\psi^{(-)}$  et  $\psi^{(+)}$  sont des fonctions propres normalisées de  $\hat{H}_-$  et  $\hat{H}_+$  dont les valeurs propres sont  $E^{(-)}$  et  $E^{(+)}$ . Nous écrivons:

$$\begin{aligned}\hat{H}_-\psi^{(-)} &= E^{(-)}\psi^{(-)} \\ \hat{H}_+\psi^{(+)} &= E^{(+)}\psi^{(+)},\end{aligned}\tag{2.43}$$

l'équation :

$$\hat{H}_-(A\psi^{(+)}) = AA^+(A\psi^{(+)}) = A\hat{H}_+\psi^{(+)} = E^{(+)}(A\psi^{(+)}),\tag{2.44}$$

montre que  $E^{(+)}$  est aussi valeur propre de  $\hat{H}_-$  et la fonction propre normalisée associée à  $\hat{H}_-$  est ;

$$\psi^{(-)} = (E^{(+)})^{-1/2} A\psi^{(+)}, \quad (2.45)$$

Sauf si  $A\psi^{(+)} = 0$ .

Nous écrivons aussi l'équation :

$$\hat{H}_+(A^+\psi^{(-)}) = A^+A(A^+\psi^{(-)}) = A^+\hat{H}_-\psi^{(-)} = E^{(-)}A^+\psi^{(-)}, \quad (2.46)$$

et qui montre que  $E^{(-)}$  est aussi valeur propre de  $\hat{H}_-$  et la fonction propre normalisée associée à  $\hat{H}_-$  est ;

$$\psi^{(+)} = (E^{(-)})^{-1/2} A^+\psi^{(-)},$$

Sauf si  $A^+\psi^{(-)} = 0$ .

Ces relations entre les hamiltoniens partenaires supersymétriques conduisent à trois modèles possibles relatifs à leurs spectres d'énergie. (Figures ci-dessous)

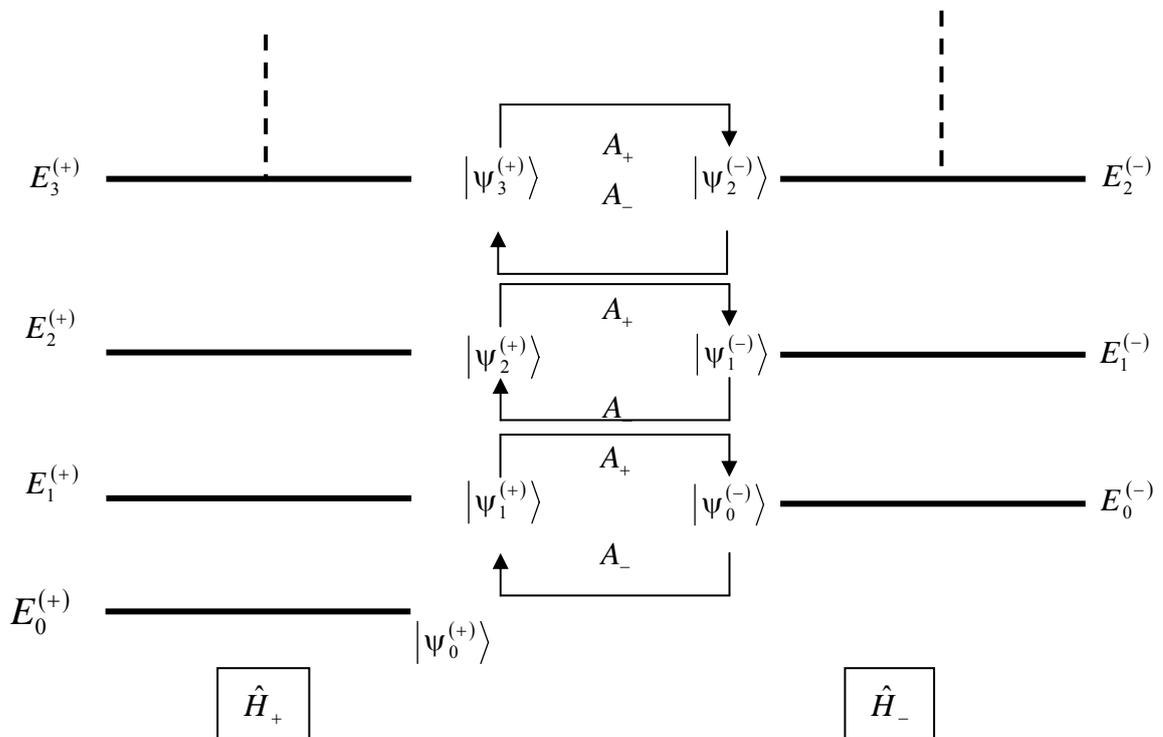


Figure2.2.a : L'illustration schématique des valeurs propres de l'hamiltonien

$\hat{H}_\pm = A_\pm A_\mp$ , elle caractérise les liens supersymétriques entre les relation:

$$A_+ |\psi_{N+1}^{(-)}\rangle = \sqrt{E_{N+1}^{(-)}} |\psi_N^{(+)}\rangle$$

$$A_- |\psi_N^{(+)}\rangle = \sqrt{E_N^{(+)}} |\psi_{N+1}^{(-)}\rangle$$

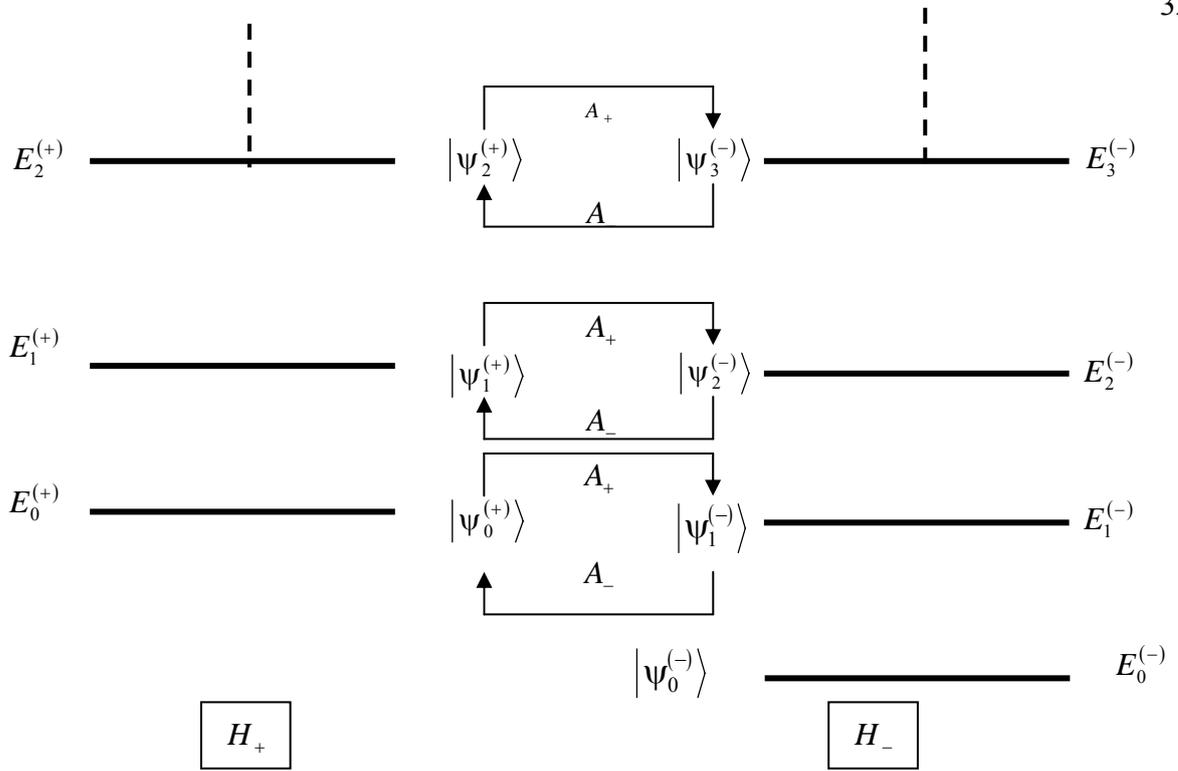


Figure 2.2.b

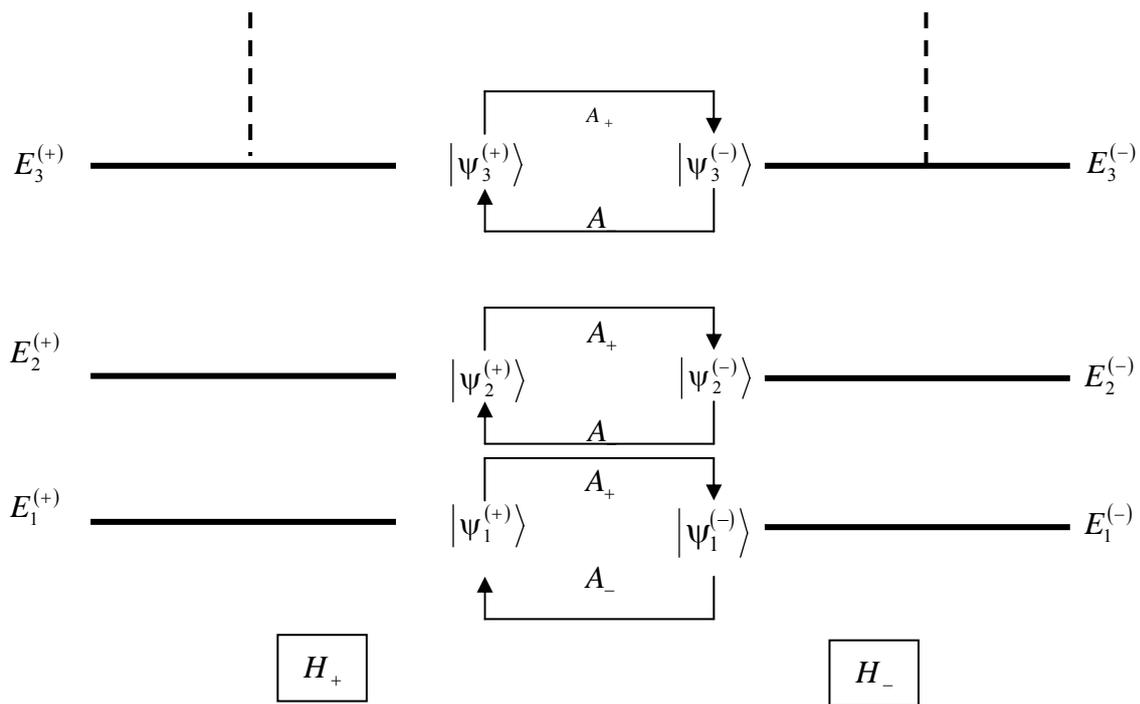


Figure 2.2.c

Figures 2.2.a, 2.2.b, 2.2.c : Schémas d'arrangements possibles des spectres d'énergies relatifs à  $\hat{H}_-$  et  $\hat{H}_+$ .

**2.2.a)** A chaque fois que  $A\psi_0^{(-)} = 0$  est un état propre normalisable de  $\hat{H}_-$ , alors  $\hat{H}_-\psi_0^{(-)} = A^+A\psi_0^{(-)} = 0$ , implique que cet état propre est un état fondamental de  $\hat{H}_-$  avec  $E_0^{(-)} = 0$  comme énergie propre. Inversement, si

$0 = E_0^{(-)} = \langle \psi_0^{(-)} | A_+ A | \psi_0^{(-)} \rangle = |A | \psi_0^{(-)} \rangle|^2$  conduit à  $A\psi_0^{(-)} = 0$ . Dans ce cas  $\hat{H}_+$  a un état propre non normalisable et une énergie nulle, nous obtenons la situation décrite dans la figure (2.2.a) où :

$$E_{n+1}^{(-)} = E_n^{(+)}, \quad n=0,1,2,\dots, \quad \text{où } E_0^{(-)}=0 \quad (2.47)$$

Les états propres de  $\hat{H}_-$  et  $\hat{H}_+$  ayant les mêmes spectres d'énergie sont reliés les uns au autres comme suit :

$$\psi_n^{(+)} = (E_{n+1}^{(-)})^{-1/2} A \psi_{n+1}^{(-)} \quad \text{et} \quad \psi_{n+1}^{(-)} = (E_n^{(+)})^{-1/2} A^+ \psi_n^{+}, \quad (2.48)$$

**2.2.b)** Le même raisonnement est fait au cas où les rôles de  $\hat{H}_-$  et  $\hat{H}_+$  sont échangés et les spectres d'énergie sont ceux de la figure (2.2. b)

**2.2.c)** Si maintenant  $\hat{H}_-$  et  $\hat{H}_+$  n'ont pas d'états propres normalisables avec une énergie fondamentale nulle, les spectres d'énergie de  $\hat{H}_-$  et  $\hat{H}_+$  deviennent identiques comme le montre la figure (2.2.c). Ce cas correspond à la supersymétrie brisée.

Nous allons nous intéresser dans tout ce qui suit seulement au cas de la Figure (2.2. a)  
Nous avons considéré jusqu'à présent, les opérateurs comme des quantités mathématiques abstraites satisfaisantes à des relations prescrites, sans les avoir spécifié en détail. Nous allons commencer par considérer une réalisation différentielle spécifique des opérateurs  $A$  et  $A^+$  pour laquelle l'équation de Schrödinger à une dimension peut se mettre sous la forme suivante :

$$\hat{H}_\pm \psi^{(\pm)}(x) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_\pm(x) \right) \psi^{(\pm)}(x) = E^{(\pm)} \psi^{(\pm)}(x). \quad (2.49)$$

Pour pouvoir factoriser cette équation, un choix possible pour les opérateurs  $A$  et  $A^+$  est

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\hbar}{\sqrt{2M}} \frac{d}{dx} + W(x) \\
 A^+ &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2M}} \frac{d}{dx} + W(x)
 \end{aligned}
 \tag{2.50}$$

et qui vérifient l'équation (2.49), où les potentiels s'écrivent comme suit :

$$V_{\pm}(x) = W^2(x) \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2M}} \frac{d}{dx} W(x) ,
 \tag{2.51}$$

$W(x)$  est reliée uniquement à l'état fondamental de la fonction d'onde de  $\hat{H}_-$  via

$$A \psi_0^{(-)} = 0 :$$

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2M}} \frac{d}{dx} \text{Ln}(\psi_0^{(-)}(x)) ,
 \tag{2.52}$$

où,

$$\psi_0^{(-)}(x) \cong \exp\left(-\frac{\sqrt{2M}}{\hbar} \int^x w(y) dy\right) .
 \tag{2.53}$$

Une conséquence immédiate de ces résultats est : dès que les solutions relatives au potentiel  $V_-(x)$  sont connues, les solutions relatives au potentiel partenaire supersymétrique :

$$V_+(x) = V_-(x) - \frac{\hbar^2}{M} \frac{d}{dx} \text{Ln}(\psi_0^{(-)}(x)) ,
 \tag{2.54}$$

sont ainsi directement obtenues en outre les énergies des états fondamentaux des deux potentiels sont reliées par l'équation (2.47). Cette procédure peut s'appliquer pour n'importe quel potentiel (après un simple changement possible dans l'échelle des énergies, en posant  $E_0^{(n)} = 0$ ), en plus, elle peut être appliquée aux potentiels qui peuvent être résolus soit analytiquement ou numériquement.

Un aspect remarquable de la supersymétrie de la mécanique quantique, est que des séries entières de potentiels de mêmes spectres d'énergie solvables peuvent être construites par l'application consécutive de cette procédure.

### CHAPITRE 3 LES CLASSES DE POTENTIELS DE MORSE ET DE PÖSCHL-TELLER

Dans le présent chapitre, nous allons déduire les classes de potentiels de Morse et de Pöschl-Teller en utilisant la supersymétrie de la mécanique quantique qui nous permet d'obtenir de nouveaux potentiels solvables.

#### 3.1 Classe de potentiels de Morse :

La classe de potentiels de Morse est définie grâce aux opérateurs bosoniques généralisés. Nous définissons les supercharges comme suit

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

où,  $a$  et  $a^+$  sont les opérateurs de création et d'annihilation.

L'hamiltonien supersymétrique s'écrit comme suit :

$$\hat{\mathcal{H}}_{ss} = QQ^+ + Q^+Q = \begin{pmatrix} \hat{H}_+ & 0 \\ 0 & \hat{H}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^+a & 0 \\ 0 & aa^+ \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

où  $\hat{H}_+$  et  $\hat{H}_-$  sont des opérateurs hamiltoniens supersymétriques. Excepté l'énergie de l'état fondamental, les spectres de  $\hat{H}_+$  et  $\hat{H}_-$  sont identiques.

Nous considérons l'hamiltonien factorisé comme suit :

$$\hat{H}_+ = a^+a, \quad (3.3)$$

où

$$\begin{cases} a = \frac{d}{dy} + \lambda(1 - e^{-y}) - 1/2, \\ a^+ = -\frac{d}{dy} + \lambda(1 - e^{-y}) - 1/2, \end{cases} \quad (3.4)$$

$\lambda$ , un paramètre qui caractérise le potentiel de Morse [38], est défini comme suit :

$$V_M(y) = \lambda^2(1 - e^{-y})^2 - \lambda + 1/4, \quad (3.5)$$

où, le terme constant  $-\lambda + 1/4$  est utilisé exclusivement pour déplacer le spectre d'énergie, de telle manière que l'énergie de l'état fondamental devient nulle.

L'hamiltonien correspondant au potentiel de Morse s'écrit sous cette forme :

$$\hat{H}_+ = -\frac{d^2}{dy^2} + \lambda^2(1 - e^{-y})^2 - \lambda + 1/4. \quad (3.6)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation  $a$  et  $a^+$  sont définis par les relations de l'équation (3.4), évidemment, ces deux opérateurs ne sont pas les opérateurs de création et d'annihilation habituels.

La relation de commutation entre les opérateurs  $a$  et  $a^+$  :

$$[a^+, a] = -2\lambda e^{-y}, \quad (3.7)$$

nous permet de définir l'hamiltonien supersymétrique  $\hat{H}_-$  partenaire de l'hamiltonien supersymétrique  $\hat{H}_+$ , en suivant la relation (3.2) :

$$\hat{H}_- = aa^+ = a^+a + 2\lambda e^{-y}, \quad (3.8)$$

nous obtenons:

$$\hat{H}_- = -\frac{d^2}{dy^2} + \lambda^2(1 - e^{-y})^2 - \lambda + \frac{1}{4} + 2\lambda e^{-y}, \quad (3.9)$$

le potentiel correspondant est donné par :

$$V_-(y) = \lambda^2(1 - e^{-y})^2 - \lambda + \frac{1}{4} + 2\lambda e^{-y}. \quad (3.10)$$

Les deux opérateurs hamiltoniens  $\hat{H}_+$  et  $\hat{H}_-$  partenaires supersymétriques ont le même spectre d'énergie.

Nous appelons  $\psi_{+,n}$  la fonction propre de  $\hat{H}_+$  :

$$\hat{H}_+\psi_{+,n} = \varepsilon_n\psi_{+,n}, \quad (3.11)$$

Remplaçons  $\hat{H}_+$  par sa valeur, ensuite multiplions l'équation par  $a$ , nous obtenons :

$$a(a^+a)\psi_{+,n} = a\varepsilon_n\psi_{+,n}. \quad (3.12)$$

Faisons sortir  $\varepsilon_n$  et remplaçons le produit  $aa^+$  par  $\hat{H}_-$ , l'équation (3.12) devient :

$$\hat{H}_-a\psi_{+,n} = \varepsilon_na\psi_{+,n}, \quad (3.13)$$

soit  $\psi_{-,n}$ , la fonction propre de  $\hat{H}_-$ , elle est reliée à la fonction propre de  $\hat{H}_+$  par :

$$\psi_{-,n} = a\psi_{+,n}. \quad (3.14)$$

En substituant l'équation (3.14) dans l'équation (3.15), nous obtenons :

$$\hat{H}_- \psi_{-,n} = \varepsilon_n \psi_{-,n}. \quad (3.15)$$

Ainsi,  $\hat{H}_+$  et  $\hat{H}_-$  ont le même spectre d'énergie.

Un nouvel opérateur hamiltonien

$$\hat{\mathcal{H}}_+ = A^+ A, \quad (3.16)$$

avec un potentiel correspondant  $V_+$  est défini à travers les relations suivantes :

$$\begin{cases} A = \frac{d}{dy} + F_M, \\ A^+ = -\frac{d}{dy} + F_M. \end{cases} \quad (3.17)$$

où,  $F_M$  est une fonction réelle que nous devons calculer.

Nous imposons à  $\hat{H}_-$  la condition suivante :

$$\hat{H}_- = AA^+. \quad (3.18)$$

Nous obtenons :

$$AA^+ = \left( \frac{d}{dy} + F_M \right) \left( -\frac{d}{dy} + F_M \right). \quad (3.19)$$

Développons et simplifions le produit, nous obtenons :

$$AA^+ = -\frac{d^2}{dy^2} + \frac{d}{dy} F_M + F_M^2, \quad (3.20)$$

nous obtenons l'équation différentielle de Riccati :

$$\lambda^2 (1 - e^{-y})^2 + 2\lambda e^{-y} - \lambda + \frac{1}{4} = \frac{d}{dy} F_M(y) + F_M^2(y). \quad (3.21)$$

Cherchons maintenant la solution de cette équation différentielle.

$$F_M^2(y) + F_M'(y) = \lambda^2 (1 - e^{-y})^2 + 2\lambda e^{-y} - \lambda + \frac{1}{4}. \quad (3.22)$$

La solution particulière de cette équation est :

$$K(y) = \lambda(1 - e^{-y}) - 1/2, \quad (3.23)$$

Dont la solution est obtenue après un calcul simple mais long :

$$F_M(y) = \lambda(1 - e^{-y}) - \frac{1}{2} + \frac{\exp(-y(2\lambda - 1) - 2\lambda e^{-y})}{\Gamma + \int_0^y \exp(-\tilde{y}(2\lambda - 1) - 2\lambda e^{-\tilde{y}}) d\tilde{y}}. \quad (3.24)$$

où  $\Gamma$  est une constante d'intégration choisie positive pour éviter les éventuelles singularités des potentiels.

La relation de commutation entre les opérateurs  $A$  et  $A^+$  est la suivante :

$$\begin{aligned} [A^+, A] &= A^+A - AA^+ \\ &= \left(-\frac{d}{dy} + F_M(y)\right) \left(\frac{d}{dy} + F_M(y)\right) - \left(\frac{d}{dy} + F_M(y)\right) \left(-\frac{d}{dy} + F_M(y)\right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Nous obtenons la relation de commutation en développant le produit entre les opérateurs :

$$[A^+, A] = -2 \frac{d}{dy} F_M(y). \quad (3.26)$$

Le nouvel hamiltonien prend la forme suivante :

$$\hat{\mathcal{H}}_+ = AA^+ + [A^+, A] = \hat{H}_- - 2 \frac{d}{dy} F_M(y). \quad (3.27)$$

En remplaçant  $\hat{H}_-$  par sa valeur et en dérivant la fonction  $F_M(y)$ , nous obtenons :

$$\hat{\mathcal{H}}_+ = -\frac{d^2}{dy^2} + \lambda^2(1 - e^{-y})^2 - \lambda + \frac{1}{4} + 2\lambda e^{-y} - 2\lambda e^{-y} - 2 \frac{d}{dy} \Phi_M(y), \quad (3.28)$$

où,

$$\Phi_M = \left( \frac{\exp(-y(2\lambda - 1) - 2\lambda e^{-y})}{\Gamma + \int_0^y \exp(-\tilde{y}(2\lambda - 1) - 2\lambda e^{-\tilde{y}}) d\tilde{y}} \right), \quad (3.29)$$

finalement, nous arrivons à l'expression de  $\hat{\mathcal{H}}_+$  :

$$\hat{\mathcal{H}}_+ = -\frac{d^2}{dy^2} + \lambda^2(1 - e^{-y})^2 - \lambda + \frac{1}{4} - 2 \frac{d}{dy} \left( \frac{\exp(-y(2\lambda - 1) - 2\lambda e^{-y})}{\Gamma + \int_0^y \exp(-\tilde{y}(2\lambda - 1) - 2\lambda e^{-\tilde{y}}) d\tilde{y}} \right). \quad (3.30)$$

Le potentiel correspondant est :

$$V_+ = \lambda^2(1 - e^{-y})^2 - \lambda + \frac{1}{4} - 2 \frac{d}{dy} \left( \frac{\exp(-y(2\lambda - 1) - 2\lambda e^{-y})}{\Gamma + \int_0^y \exp(-\tilde{y}(2\lambda - 1) - 2\lambda e^{-\tilde{y}}) d\tilde{y}} \right). \quad (3.31)$$

Cette équation représente la classe de potentiels de Morse.

A partir de la supersymétrie de la mécanique quantique, nous savons que le spectre d'énergie de  $\hat{\mathcal{H}}_+$  est le même que celui de  $\hat{H}_-$  sauf l'énergie de l'état fondamental.

Les fonctions propres  $\Psi_{+,n}$  de  $\hat{\mathcal{H}}_+$  sont reliées aux fonctions propres  $\psi_{-,n}$  de  $\hat{H}_-$  par la relation suivante :

$$\Psi_{+,n} = A^+ \psi_{-,n} \quad , \quad (3.32)$$

et  $A\Psi_{+0} = 0$ . Pour l'état fondamental, nous avons donc

$$\Psi_{+,0} = const \times \exp\left(-y(\lambda - 1/2)\exp(\lambda e^{-y}) \times \exp\left(-\int_0^y \Phi_M(\tilde{y})d\tilde{y}\right)\right). \quad (3.33)$$

Les nouvelles fonctions  $\Psi_{+,n}$  sont déterminées à partir des fonctions propres  $\psi_{+,n}$  du potentiel de Morse original de l'équation (3.5) comme suit :

$$\Psi_{+,n} = A^+ a \psi_{+,n} \quad (3.34)$$

### 3.2 Classe de potentiels de Pöschl-Teller :

Nous allons suivre les mêmes démarches pour trouver la classe de potentiels de Pöschl-Teller, dont le potentiel de Pöschl-Teller est donné comme suit :

$$V_{P-T}(y) = -\frac{\mu(\mu+1)}{\cosh^2 y} \quad . \quad (3.35)$$

Les supercharges sont données comme suit :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b^+ & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Q^+ = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

où  $b$  et  $b^+$  sont des opérateurs de création et d'annihilation, l'hamiltonien s'écrit :

$$\hat{\mathcal{H}}_{ss} = QQ^+ + Q^+Q = \begin{bmatrix} \hat{H}_+ & 0 \\ 0 & \hat{H}_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^+b & 0 \\ 0 & bb^+ \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Où  $\hat{H}_+$  et  $\hat{H}_-$  sont des hamiltoniens supersymétriques.

Nous considérons l'hamiltonien factorisé comme suit :

$$\hat{H}_+ = b^+b \quad (3.38)$$

Où ces opérateurs sont donnés comme suit :

$$\begin{cases} b = \frac{d}{dy} + \mu \tanh y \\ b^+ = -\frac{d}{dy} + \mu \tanh y \end{cases} . \quad (3.39)$$

L'hamiltonien de Pöschl-Teller est le suivant :

$$\hat{H}_+ = -\frac{d^2}{dy^2} - \frac{\mu(\mu+1)}{\cosh^2 y} + \mu^2, \quad (3.40)$$

où, le terme constant  $\mu^2$  est utilisé pour déplacer le spectre d'énergie.

La relation de commutation entre les paramètres  $b$  et  $b^+$

$$[b^+, b] = -2 \frac{\mu}{\cosh^2 y} . \quad (3.41)$$

Les opérations  $b$  et  $b^+$  sont définis par la relation (3.39).

La relation de commutation (3.41), nous permet d'écrire l'hamiltonien supersymétrique  $\hat{H}_-$  partenaire de l'hamiltonien supersymétrique  $\hat{H}_+$  de la relation (3.40) sous cette forme :

$$\hat{H}_- = bb^+ = b^+b - [b^+, b] \quad (3.42)$$

Après avoir remplacé chaque membre par sa valeur, nous obtenons :

$$\hat{H}_- = -\frac{d^2}{dy^2} - \frac{\mu(\mu+1)}{\cosh^2 y} + \mu^2 + \frac{2\mu}{\cosh^2 y} . \quad (3.43)$$

Nous pouvons maintenant déduire le potentiel correspondant, il s'écrit comme suit :

$$V_-(y) = -\frac{\mu(\mu+1)}{\cosh^2 y} + \mu^2 + \frac{2\mu}{\cosh^2 y} . \quad (3.44)$$

Les deux opérateurs hamiltoniens  $\hat{H}_+$  et  $\hat{H}_-$  ont le même spectre d'énergie. La relation entre  $\psi_{+,n}$  et  $\psi_{-,n}$  fonctions propres de  $\hat{H}_+$  et  $\hat{H}_-$  respectivement, est la suivante :

$$\psi_{-,n} = b \psi_{+,n} . \quad (3.45)$$

Le nouvel opérateur hamiltonien

$$\hat{\mathcal{H}}_+ = B^+ B, \quad (3.46)$$

avec un potentiel correspondant  $V_+$  qui est défini à travers les opérateurs suivants :

$$\begin{cases} B = \frac{d}{dy} + F_{P-T}(y) \\ B^+ = -\frac{d}{dy} + F_{P-T}(y) \end{cases}, \quad (3.47)$$

où  $F_{P-T}$  est une fonction réelle qu'on doit calculer.

Nous imposons à  $\hat{H}_-$  la condition suivante :

$$\hat{H}_- = BB^+. \quad (3.48)$$

Remplaçons  $B$  et  $B^+$  par leurs valeurs, l'équation précédente devient :

$$\hat{H}_- = \left( \frac{d}{dy} + F_{P-T}(y) \right) \left( -\frac{d}{dy} + F_{P-T}(y) \right). \quad (3.49)$$

En développant le produit, nous obtenons :

$$\hat{H}_- = -\frac{d^2}{dy^2} + \frac{d}{dy} F_{P-T}(y) + F_{P-T}^2(y). \quad (3.50)$$

Remplaçons  $\hat{H}_-$  par sa valeur, l'équation précédente après simplification devient :

$$F'_{P-T}(y) + F_{P-T}^2(y) = -\frac{\mu(\mu+1)}{\cosh^2 y} + \frac{2\mu}{\cosh^2 y} + \mu^2. \quad (3.52)$$

C'est l'équation différentielle de Riccati, la solution particulière de cette équation différentielle est donnée comme suit :

$$J(y) = \mu \tanh y. \quad (3.53)$$

La solution de l'équation de Riccati est la suivante :

$$F_{P-T}(y) = \mu \tanh y + \frac{\cosh^{-2\mu} y}{\Gamma' + \int_0^y \cosh^{-2\mu} \tilde{y} d\tilde{y}}. \quad (3.54)$$

où  $\Gamma'$  est une constante d'intégration choisie positive de telle façon à éviter les singularités des potentiels.

La relation de commutation entre les nouvelles variables, a la forme suivante :

$$[B^+, B] = -2 \frac{d}{dy} F_{P-T}(y). \quad (3.55)$$

Cette équation nous permet d'obtenir le nouvel hamiltonien, qui va prendre la forme suivante :

$$\hat{\mathcal{H}}_+ = B^+ B = BB^+ + [B^+, B]. \quad (3.56)$$

Remplaçons chaque terme par sa valeur, nous obtenons l'équation :

$$\hat{\mathfrak{H}}_+ = -\frac{d^2}{dy^2} - \frac{\mu(\mu+1)}{\cosh^2 y} + \mu^2 + \frac{2\mu}{\cosh^2 y} - 2\frac{d}{dy}F_{P-T}(y). \quad (3.57)$$

Dérivons à présent la fonction  $F_{P-T}(y)$ , l'hamiltonien de l'équation précédente s'écrit comme suit :

$$\hat{\mathfrak{H}}_+ = -\frac{d^2}{dy^2} - \frac{\mu(\mu+1)}{\cosh^2 y} + \mu^2 - 2\frac{d}{dy}\Phi_{P-T}(y), \quad (3.58)$$

où :

$$\Phi_{P-T}(y) = \frac{\cosh^{-2\mu} y}{\Gamma' + \int_0^y \cosh^{-2\mu} \tilde{y} d\tilde{y}} \quad (3.59)$$

On peut maintenant déduire le potentiel correspondant à cet hamiltonien, il a la forme suivante :

$$V_{P-T}(y) = -\frac{\mu(\mu+1)}{\cosh^2 y} + \mu^2 - 2\frac{d}{dy}\Phi_{P-T}(y) \quad (3.60)$$

Ce potentiel représente la classe de potentiels de Pöschl-Teller

A partir de la supersymétrie de la mécanique quantique, nous savons que le spectre d'énergie de  $\hat{\mathfrak{H}}_+$  est le même que celui de  $\hat{H}_-$  sauf l'énergie de l'état fondamental.

En procédant de la même manière utilisée pour obtenir le potentiel de Morse, nous arrivons à la relation entre les fonctions d'onde  $\Psi_{+,n}$  de  $\hat{\mathfrak{H}}_+$  et  $\psi_{-,n}$  de  $\hat{H}_-$  qui est donnée par :

$$\Psi_{+,n} = B^+ \psi_{-,n}. \quad (3.61)$$

## CHAPITRE 4 LES POTENTIELS DE MORSE ET DE PÖSCHL-TELLER GENERALISES

### 4.1 Introduction

Les états liés et les états de diffusions de certains potentiels sont décrits par des représentations unitaires de certains groupes [1], en particulier les potentiels de Morse et de Pöschl-Teller.

Nous nous intéressons à ces derniers potentiels ainsi qu'à leurs classes de potentiels. Il est à noter que chaque classe de potentiels véhicule en elle une représentation de groupe ayant une symétrie dynamique.

L'objectif essentiel de cette étude théorique est double :

- Sachant que les potentiels de Morse et de Pöschl-Teller appartiennent à la même représentation de groupe  $SU(2)$ , il est donc possible, par l'utilisation de l'équation de Schrödinger correspondante à chaque cas, de trouver une relation entre leurs classes de potentiels, en utilisant la transformée de Fourier [1].
- Une fois le lien établi, il est possible d'en déduire le spectre d'énergie de l'un, par exemple : Pöschl-Teller en connaissant le spectre de l'autre c'est-à-dire celui relatif au potentiel de Morse, aussi on peut déduire la fonction d'onde de l'un à partir de l'autre.

Le groupe  $SU(2)$  qui caractérise les états liés des potentiels peut être réalisé sur un espace bidimensionnel de l'oscillateur harmonique et sur une sphère (3dimensions). Nous montrons à cela que la première réalisation est reliée au potentiel de Morse qui joue un rôle important dans la physique moléculaire [6] et qu'il a été le sujet de plusieurs travaux de recherches [7]. Ce potentiel s'écrit comme suit :

$$V_M(y) = \lambda^2 (1 - e^{-y})^2 - \lambda + 1/4, \quad (4.1)$$

où, le terme  $(-\lambda + 1/4)$  a été ajouté pour déplacer le spectre d'énergie et permet aussi d'attribuer une valeur nulle à l'état fondamental  $E_{+,0} = 0$ .

Le terme de la classe de potentiels de Morse associé au potentiel (4.1) est donné par :

$$\Phi_M(y) = \frac{\exp[-y(2\lambda - 1) - 2\lambda e^{-y}]}{\Gamma + \int_0^y d\tilde{y} \exp[-\tilde{y}(2\lambda - 1) - 2\lambda e^{-\tilde{y}}]} . \quad (4.2)$$

La deuxième réalisation est reliée au potentiel de Pöschl-Teller. Ce potentiel apparaît dans une variété de problèmes dans la physique [8]. Comme les solutions de l'équation de Korteweg-de Vries de solitons [9]. L'équation du champ moyen de Hartree-Fock d'un système à plusieurs corps [39], la limite non relativiste de l'équation de Sine Gordon [10] et dans la liaison avec les systèmes unidimensionnels de plusieurs corps complètement intégrables [40], en plus de ces deux potentiels, une plus grande classe des potentiels unidimensionnels peut être liée aux groupes  $SU(2)$  et  $SU(1,1)$  [1].

Le potentiel de Pöschl-Teller est donné par :

$$V_{P-T}(y) = \frac{\mu(\mu + 1)}{\cosh^2 y} + \mu^2 , \quad (4.3)$$

où, le dernier terme a le même rôle que dans le cas du potentiel de Morse, c'est pour déplacer le spectre d'énergie au niveau zéro.

Le terme de la classe de potentiels correspondant au potentiel de Pöschl-Teller est donné par :

$$\Phi_{P-T}(y) = \frac{\cosh^{-2\mu} y}{\Gamma + \int_0^y d\tilde{y} \cosh^{-2\mu} \tilde{y}} . \quad (4.4)$$

Nous avons présenté dans le premier chapitre les propriétés des groupes  $SU(2)$  et  $SU(1,1)$  qui décrivent les états liés et les états de diffusion des potentiels de Morse et de Pöschl-Teller respectivement, ces deux groupes peuvent être inclus dans un autre groupe. C'est le groupe  $SP(4, R)$ , où  $R$  veut dire réelle. Ce groupe contient aussi un troisième sous-groupe, c'est le groupe potentiel  $SU_p(1,1)$ . L'importance de  $SP(4, R)$  est qu'il fournit une unification des diverses approches aux problèmes unidimensionnels des potentiels.

#### 4. 2 Structures algébriques et leur relation avec l'équation de Schrödinger :

Les propriétés algébriques utilisées dans le premier chapitre vont nous conduire à la solution exacte de l'équation de Schrödinger relative aux potentiels de Morse et de Pöschl-Teller.

Comme le groupe  $SU(2)$  est un groupe de Lie compact donc les algèbres de Lie peuvent être identifiées dans les états liés par la représentation irréductible unitaire discrète.

L'approche algébrique fondée sur les expressions (1.12) et (1.17) peut conduire à l'équation de Schrödinger associée au potentiel de Morse dans un espace harmonique bidimensionnelle en introduisant la réalisation différentielle sur les opérateurs.

$$\begin{cases} a = (x' + ip_{x'})/\sqrt{2} = \left(x' + \frac{d}{dx'}\right)/\sqrt{2} , \\ a^+ = (x' - ip_{x'})/\sqrt{2} = \left(x' - \frac{d}{dx'}\right)/\sqrt{2} , \\ b = (x'' + ip_{x''})/\sqrt{2} = \left(x'' + \frac{d}{dx''}\right)/\sqrt{2} , \\ b^+ = (x'' - ip_{x''})/\sqrt{2} = \left(x'' - \frac{d}{dx''}\right)/\sqrt{2} . \end{cases} \quad (4.5)$$

Dans la représentation des  $\{x\}$  en termes de  $x', x''$  les deux opérateurs  $\hat{N}$  et  $J_y$  des équations (1.13) et (1.15) respectivement prennent les formes suivantes :

$$\hat{N} = \frac{1}{2} \left( x'^2 + x''^2 - \frac{d^2}{dx'^2} - \frac{d^2}{dx''^2} - 2 \right), \quad (4.6)$$

$$J_y = -\frac{i}{2} \left( x' \frac{d}{dx''} - x'' \frac{d}{dx'} \right). \quad (4.7)$$

On passe maintenant des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, en utilisant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x' = r \cos \phi \\ x'' = r \sin \phi \end{cases} \quad 0 \leq r \leq \infty , \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi . \quad (4.8)$$

En insérant l'équation (4.8) dans l'équation (4.6) et dans l'équation (4.7), nous obtenons :

$$\hat{N} = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + r^2 \right) - 1. \quad (4.9)$$

$$J_y = -\frac{i}{2} \frac{d}{d\phi}, \quad (4.10)$$

où la valeur propre est donnée par :

$$\hat{N}\psi_{N,m_y}(r,\phi) = N\psi_{N,m_y}(r,\phi). \quad (4.11)$$

En substituant (4.9) dans (4.11), nous obtenons :

$$\left( \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + r^2 \right) - 1 \right) \psi_{N,m_y}(r,\phi) = N\psi_{N,m_y}(r,\phi), \quad (4.12)$$

donc :

$$\left( \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + r^2 \right) \right) \psi_{N,m_y}(r,\phi) = (N+1)\psi_{N,m_y}(r,\phi). \quad (4.13)$$

La fonction d'onde  $\psi_{N,m_y}(r,\phi)$  est donnée comme suit :

$$\psi_{N,m_y}(r,\phi) = R_{N,m_y}(r) \exp(2im_y\phi), \quad (4.14)$$

où  $m_y$  est un nombre entier et  $\psi$  est périodique en  $\phi$  sa période est de  $2\pi$ .

Insérons l'équation (4.14) dans l'équation (4.13), nous obtenons l'équation suivante :

$$\left( \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + r^2 \right) \right) R_{N,m_y}(r) \exp(2im_y\phi) = (N+1)R_{N,m_y}(r) \exp(2im_y\phi). \quad (4.15)$$

On remarque que :

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} R_{N,m_y}(r) \exp(2im_y\phi) = \frac{4m_y^2}{r^2} R_{N,m_y}(r). \quad (4.16)$$

En insérant l'équation (4.16) dans l'équation (4.15) et en divisant le résultat par  $\exp(2im_y\phi)$ , nous obtenons :

$$\left( \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + r^2 \right) \right) R_{N,m_y}(r) = (N+1)R_{N,m_y}(r). \quad (4.17)$$

Faisons ce changement de variable :

$$\begin{cases} r^2 = (N+1)\exp(-y) \\ 2rdr = (N+1)e^{-y} dy \Rightarrow \frac{dy}{dr} = -2r, \\ \frac{d}{dr} = \frac{dy}{dr} \frac{d}{dy} = \frac{-2}{r} \frac{d}{dy} \end{cases} \quad (4.18)$$

En substituant l'équation (4.18) dans l'équation (4.17) nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{-4}{(N+1)e^{-y}} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{4m_y^2}{(N+1)e^{-y}} + (N+1)e^{-y} \right) R_{N,m_y}(y) = (N+1)R_{N,m_y}(y). \quad (4.19)$$

Pour alléger l'écriture on fait sortir comme facteur commun  $\frac{4}{(N+1)e^{-y}}$ , nous aboutissons à l'équation :

$$\frac{2}{(N+1)e^{-y}} \left( -\frac{d^2}{dy^2} + m_y^2 + \frac{(N+1)^2}{4} e^{-2y} \right) R_{N,m_y}(y) = (N+1)R_{N,m_y}(y). \quad (4.20)$$

Multiplions l'équation (4.20) par  $\frac{(N+1)e^{-y}}{2}$ , ensuite transposons  $\frac{(N+1)^2}{2} e^{-y}$  à gauche de l'équation et  $m_y^2$  à droite de l'équation, nous obtenons :

$$\left( -\frac{d^2}{dy^2} + \frac{(N+1)^2}{4} e^{-2y} - \frac{(N+1)^2}{2} e^{-y} \right) R_{N,m_y}(y) = -m_y^2 R_{N,m_y}(y). \quad (4.21)$$

A présent, faisons sortir  $\left(\frac{N+1}{2}\right)^2$  comme facteur commun pour le deuxième et le troisième terme nous obtenons l'équation :

$$\left( -\frac{d^2}{dy^2} + \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 (e^{-2y} - 2e^{-y}) \right) R_{N,m_y}(y) = -m_y^2 R_{N,m_y}(y). \quad (4.22)$$

L'équation (4.22) n'est d'autre que l'équation de Schrödinger relative au potentiel de Morse à une dimension [6] où on peut encore la simplifier et l'écrire comme suit :

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \left( e^{-2(x-x_0)/d} - 2e^{-(x-x_0)/d} \right) \right) R(x) = \frac{-\hbar^2}{2\mu d^2} m_y^2 R(x), \quad (4.23)$$

où  $d$  et  $\lambda$  sont deux constantes qui dépendent du potentiel de Morse, où :

$$N+1 = \sqrt{\frac{8\mu d^2 \lambda^2}{\hbar^2}}. \quad (4.24)$$

La solution des états liés du potentiel unidimensionnel de Morse est reliée aux représentations du groupe  $SU(2)$  qui est isomorphe au groupe  $SO(3)$  [41]. La quantité (4.24) s'appelle "l'anharmonicité réduite".

En conclusion, en incluant le problème unidimensionnel original dans un espace bidimensionnel, nous avons pu relier les fonctions propres des états liés de l'équation de Schrödinger pour le potentiel de Morse dans les représentations  $D_j$  ( $j = N/2$ ) de  $SU(2)$ .

Les valeurs propres d'énergie sont alors données par les valeurs propres de l'hamiltonien (1.22).

Pour donner la transformation liée aux équations de Schrödinger dans leurs classes de potentiels, nous substituons le potentiel qui apparaît dans l'équation (4.23) par celui de l'équation (3.31), donc l'équation de Schrödinger correspondante au potentiel de Morse généralisé est :

$$\left[ -\partial_y^2 + \lambda^2(1 - e^{-y})^2 - \lambda + 1/4 - 2\partial_y \left( \frac{\exp[-y(2\lambda - 1) - 2\lambda e^{-y}]}{\Gamma + \int_0^y d\tilde{y} \exp[-\tilde{y}(2\lambda - 1) - 2\lambda e^{-\tilde{y}}]} \right) \right] R(y) = E_M R(y), \quad (4.25)$$

où nous avons utilisé l'abréviation  $\partial_y$  pour désigner  $\frac{d}{dy}$ .

### 4.3 Potentiel de Pöschl-Teller :

Une réalisation de l'algèbre  $su(2)$  sur un espace bidimensionnel d'un oscillateur harmonique a mené à une connexion entre cette algèbre et la solution de l'équation de Schrödinger correspondante à la classe de potentiels de Morse pour les états liés. Dans cette section, nous parlerons d'une autre réalisation de la même algèbre, qui mène à la classe de potentiels de Pöschl-Teller [8].

Ce potentiel a un nombre fini d'états liés et un nombre continu d'états de diffusion. Les états liés du potentiel de Pöschl-Teller sont obtenus en réalisant l'algèbre  $su(2)$  sur une sphère (3 dimensions) [42]. Cette réalisation conduit à lier l'algèbre en question avec l'équation de Schrödinger correspondante au potentiel de Pöschl-Teller. Les opérateurs sont exprimés par :

$$\begin{aligned}
I_z &= -i \frac{\partial}{\partial \phi}, \\
I_{\pm} &= e^{\pm i\phi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \phi} + i \cot \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\
I^2 &= - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

où, nous avons utilisé  $I_z, I_{\pm}, I^2$  au lieu de  $J_z, J_{\pm}, \hat{N}$  afin de distinguer ce cas du précédent. En identifiant avec Figure (1-1), nous cherchons des symétries dynamiques caractérisées par la chaîne de groupe  $U(2) \supset O(2)$ . Plutôt que l'opérateur  $J_y$ , il est important ici de diagonaliser l'opérateur  $I_z$ . Nous recherchons ainsi des fonctions propres simultanées de  $I^2$  et  $I_z$ ,

$$\begin{aligned}
I^2 \chi_j^m &= j(j+1) \chi_j^m \\
I_z \chi_j^m &= m \chi_j^m
\end{aligned} \tag{4.27}$$

En comparant à (1.25) et (1.26), la solution de l'équation (4.26) s'écrit sous cette forme :

$$\chi_j^m(\theta, \phi) = u_j^m(\theta) e^{im\phi}, \tag{4.28}$$

où,  $u_j^m$  vérifie l'équation suivante :

$$\left[ -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] u_j^m(\theta) = j(j+1) u_j^m(\theta). \tag{4.29}$$

Les solutions de (4.29) sont les fonctions associées de Legendre  $P_j^m(\cos \theta)$ , et les fonctions  $\chi_j^m(\theta, \phi)$  sont les fonctions d'onde sphériques  $Y_{j,m}(\theta, \phi)$

En substituant le changement de variable suivant :

$$\cos \theta = \tanh y, \quad -\infty < y < +\infty,$$

l'équation (4.29) s'écrit sous la forme suivante :

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{j(j+1)}{\cosh^2 y} \right] u_j^m(y) = -m^2 u_j^m(y). \tag{4.30}$$

C'est l'équation de Schrödinger correspondante au potentiel de Pöschl-Teller.

En outre, le spectre est donné par

$$E_m = -am^2. \tag{4.31}$$

Nous remarquons que les fonctions

$P_j^m(\cos \theta)$  vérifient les relations d'orthogonalité :

$$\int_0^\pi P_j^m(\cos \theta) P_{j'}^{m'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{(j+m)!}{(j-m)!} \frac{1}{\left(j + \frac{1}{2}\right)} \delta_{mm'} , \quad (4.32)$$

de sorte que, les fonctions propres normales soient :

$$u_j^m(y) = \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!} \left(j + \frac{1}{2}\right)} P_j^m(\tanh y), \quad (4.33)$$

ces fonctions satisfont les conditions aux limites appropriées :

$$u_j^m(y \rightarrow \pm\infty) = 0, \quad m \neq 0. \quad (4.34)$$

Nous obtenons l'équation de Schrödinger pour la classe de potentiels de Pöschl-Teller en substituant le potentiel qui apparaît dans l'équation (4.30) par celui de l'équation (3.60), où nous posons  $j = \mu$ .

$$\left[ -\partial_y^2 - \frac{\mu(\mu+1)}{\cosh^2 y} + \mu^2 - 2\partial_y \left( \frac{\cosh^{-2\mu} y}{\Gamma + \int_0^y d\tilde{y} \cosh^{-2\mu} \tilde{y}} \right) \right] u(y) = E_{P-T} u(y). \quad (4.35)$$

Suivons le changement de variables successifs suivants :

$$\zeta = \sinh y ,$$

$$\cot \xi = \zeta ,$$

$$t = \tan \xi / 2 .$$

En appliquant le premier changement de variable dans l'équation (4.35), nous obtenons :

$$\begin{cases} \zeta = \sinh y \\ d\zeta = \cosh y dy = (\zeta^2 + 1) dy \end{cases} \quad (4.36)$$

En substituant l'équation (4.36) dans l'équation (4.35), nous obtenons :

$$\left( (\zeta^2 + 1)^{1/2} \frac{d}{d\zeta} (\zeta^2 + 1)^{1/2} \frac{d}{d\zeta} - \frac{\mu(\mu+1)}{\zeta^2 + 1} + \mu^2 - 2(\zeta^2 + 1)^{1/2} \frac{d}{d\zeta} \Phi_{P-T}(\zeta) \right) u(\zeta) = E_{P-T} u(\zeta) \quad (4.37)$$

où

$$\Phi_{P-T}(\zeta) = \left[ \frac{(\zeta^2 + 1)^{-\mu}}{\Gamma + \int_0^{\operatorname{Arg} \sinh \zeta} (\tilde{\zeta}^2 + 1)^{-\mu - \frac{1}{2}} d\tilde{\zeta}} \right].$$

Appliquons le deuxième changement de variable :

$$\begin{cases} \zeta = \cot \xi \\ d\zeta = -\frac{d\xi}{\sin^2 \xi} \end{cases}, \quad (4.38)$$

l'équation (4.37) après le changement de variable et quelques simplifications devient :

$$\left( -\sin \xi \frac{d}{d\xi} \sin \xi \frac{d}{d\xi} - \frac{\mu(\mu+1)}{\sin^2 \xi} + \mu^2 + 2 \sin \xi \frac{d}{d\xi} \left( \frac{(\sin \xi)^{2\mu}}{\Gamma + \int_0^{\operatorname{arg} \sinh(\cot \xi)} (\sin \tilde{\xi})^{2\mu} d\tilde{\xi}} \right) \right) u(\xi) = E_{P-T} u(\xi). \quad (4.39)$$

Le dernier changement de variable

$$\begin{cases} t = \tan \xi / 2 \\ dt = \frac{d\xi}{2 \cos^2 \xi / 2} \end{cases}$$

nous conduit à l'équation suivante:

$$\left[ -t \partial_t t \partial_t - 4\mu(\mu+1) \frac{t^2}{(1+t^2)^2} + \mu^2 + 2t \partial_t q_{\mu}^{(PT)}(t) \right] u(t) = E_{PT} u(t), \quad (4.40)$$

où

$$q_{\mu,\gamma}^{(PT)}(t) = \frac{\left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^{2\mu}}{\Gamma + \int_0^{-\ln t} d\tilde{t} \left( \frac{-2}{1+\tilde{t}^2} \right) \left( \frac{2t}{1+\tilde{t}^2} \right)^{2\mu-1}}. \quad (4.41)$$

En divisant toute l'équation (4.40) par  $t^2$ , on obtient :

$$\left[ -\frac{1}{t} \partial_t t \partial_t - \frac{E_{PT} - \mu^2}{t^2} + \frac{2}{t} \partial_t q_{\mu}^{(PT)}(t) \right] u(t) = \frac{\mu(\mu+1)}{(1+t^2)^2} u(t) \quad (4.42)$$

#### 4.4 La connexion entre les deux classes de potentiels :

D'une part, puisque le potentiel de Morse ainsi que sa classe de potentiels ont le même spectre d'énergie à exception de l'état fondamental ( pareil pour le potentiel de Pöschl-Teller), d'autre part, les potentiels sont décrits par la même représentation du groupe  $SU(2)$ , il est évident qu'il devrait exister une transformation permettant de passer de l'équation de Schrödinger associée à la classe de potentiels de Morse à celle associée à la classe de potentiels de Pöschl-Teller. En effet, pour trouver l'équation de Schrodinger relative à la classe de potentiels de Morse, on utilise le changement de variable  $r^2 = (N + 1)\exp(-y)$  dans l'équation (4.25). Nous obtenons

$$\left[ -\frac{r}{4}\partial_r(r\partial_r) + \frac{r^4}{4} - \lambda r^2 + \lambda^2 - \lambda + 1/4 + r\partial_r \left( \frac{\left(\frac{r^2}{2\lambda}\right)^{2\lambda-1} e^{-r^2}}{\Gamma + \int_0^{-\ln r^2/2\lambda} d\tilde{r} \left(\frac{-2}{\tilde{r}}\right) \left(\frac{\tilde{r}^2}{2\lambda}\right)^{2\lambda-1} e^{-\tilde{r}^2}} \right) \right] R(r) = E_M R(r) \quad (4.43)$$

Introduisons, pour simplifier davantage les calculs, le paramètre suivant :

$$a = \lambda - 1/2, \quad (4.44)$$

l'expression (4.43) devient :

$$\left[ -\frac{r}{4}\partial_r(r\partial_r) + \frac{r^4}{4} - (a + 1/2)r^2 + a^2 + r\partial_r \left( \frac{\left(\frac{r^2}{2a+1}\right)^{2a} e^{-r^2}}{\Gamma + \int_0^{-\ln r^2/(2a+1)} d\tilde{r} \left(\frac{-2}{\tilde{r}}\right) \left(\frac{\tilde{r}^2}{2a+1}\right)^{2a} e^{-\tilde{r}^2}} \right) \right] R(r) = E_M R(r) \quad (4.45)$$

Dans le but d'alléger l'écriture, nous proposons d'écrire le quatrième terme du membre de gauche de l'équation (4.45) sous une forme simple de  $q_{a,\Gamma}^{(M)}(r)$ .

$$\left[ -\frac{r}{4}\partial_r(r\partial_r) + \frac{r^4}{4} - (a + 1/2)r^2 + a^2 + r\partial_r q_{a,\Gamma}^{(M)}(r) \right] R(r) = E_M R(r) \quad (4.46)$$

où :

$$q_{a,\Gamma}^{(M)}(r) = \frac{\left(\frac{r^2}{2a+1}\right)^{2a} e^{-r^2}}{\Gamma + \int_0^{-\ln r^2/(2a+1)} d\tilde{r} \left(\frac{-2}{\tilde{r}}\right) \left(\frac{\tilde{r}^2}{2a+1}\right)^{2a} e^{-\tilde{r}^2}}. \quad (4.47)$$

Multiplions l'équation (4.46) par  $\frac{4}{r^2}$ , nous obtenons :

$$\left\{ -\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) + r^2 - (4a+2) + \frac{4a^2}{r^2} + \frac{4}{r} \partial_r q_{a,\Gamma}^{(M)}(r) \right\} R(r) = \frac{4}{r^2} E_M R(r) \quad (4.48)$$

Transposons le membre de droite à gauche de l'équation (4.48) et le facteur  $(4a+2)$  à droite de cette équation, l'équation différentielle devient donc :

$$\left[ -\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) + r^2 + \frac{4(a^2 - E_M)}{r^2} + \frac{4}{r} \partial_r q_{a,\Gamma}^{(M)}(r) \right] R(r) = (4a+2)R(r), \quad (4.49)$$

où  $R(r)$  est la solution radiale explicite.

Faisons apparaître la coordonnée polaire  $\phi$  dans cette équation et cela par l'intermédiaire de la fonction d'onde  $\psi(r, \phi)$ , qui est exprimée en fonction de la solution radiale explicite par :

$$R(r) = e^{-2im\phi} \psi(r, \phi). \quad (4.50)$$

Sachant que  $\psi(r, \phi)$ , est périodique en  $\phi$  avec une période  $2\pi$ , où  $m$  est un entier. En calculant sa seconde dérivée par rapport à  $\phi$ , nous obtenons :

$$\partial_\phi^2 \psi = -4m^2 \psi,$$

et en l'identifiant au troisième terme de (4.49), par la formule,

$$\partial_\phi^2 = -4m^2 \equiv -4(a^2 - E_M),$$

on obtient finalement l'équation différentielle suivante :

$$\left[ -\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) + r^2 - \frac{1}{r^2} \partial_\phi^2 + \frac{4}{r} \partial_r q_{a,\Gamma}^{(M)}(r) \right] \psi(r, \phi) = (4a+2) \psi(r, \phi) \quad (4.51)$$

L'objectif de cette section est de réécrire l'équation (4.51) sous une forme mathématique adaptée à l'équation (4.42). Ce lien va nous permettre de déduire la relation entre l'équation de Schrödinger des deux classes de potentiels.

Faisons intervenir la nouvelle variable vectorielle  $\vec{t} \equiv (t_x, t_y)$  et dont les composantes sont données par :

$$\begin{aligned} t_x &= t \cos \phi & ; & & t_y &= t \sin \phi \\ t &= r^2/2 & ; & & \Phi &= 2\phi \end{aligned} \quad (4.52)$$

Pour la dérivée première on a

$$\begin{cases} dt = r dr & d\Phi = 2d\phi \\ \frac{d}{dr} = \frac{dt}{dr} \frac{d}{dt} = r \frac{d}{dt} & \frac{d}{d\Phi} = 2 \frac{d}{d\phi} \end{cases} \quad (4.53)$$

En appliquant les dérivées première et seconde sur  $r$  et  $\phi$ , l'expression (4.50) devient :

$$\left[ -\partial_t(t\partial_t) + t - \frac{1}{t}\partial_\Phi^2 + 2t\partial_t q_{a,\Gamma}^{(M)}(t) \right] \psi(t, \Phi) = (2a+1)\psi(t, \Phi), \quad (4.54)$$

où :

$$q_{a,\Gamma}^{(M)}(t) = \frac{\left(\frac{t}{a+1/2}\right)^a \exp(-2t)}{\Gamma + \int_0^{-\ln t/a+1/2} d\tilde{t} \left(\frac{\tilde{t}}{a+1/2}\right)^a \frac{\exp(-2\tilde{t})}{\tilde{t}} d\tilde{t}}$$

En faisant sortir la variable  $t$  comme facteur commun de l'équation (4.45), nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\left[ t \left( -\frac{1}{t}\partial_t(t\partial_t) - \frac{1}{t^2}\partial_\Phi^2 + \frac{2}{t}\partial_t q_{a,\Gamma}^{(M)}(t) + 1 \right) \right] \psi(t, \Phi) = (2a+1)\psi(t, \Phi). \quad (4.55)$$

Parallèlement au vecteur  $\vec{t}$ , introduisons le vecteur  $\vec{\tau} \equiv (\tau_x, \tau_y)$  de telle manière que l'équation (4.55) s'écrit :

$$t(1 + \tau^2)\psi = (2a+1)\psi, \quad (4.56)$$

où, par identification avec (4.55), l'expression de  $\tau^2$  sera exprimée par :

$$\tau^2 \equiv -\frac{1}{t}\partial_t(t\partial_t) - \frac{1}{t^2}\partial_\Phi^2 + \frac{2}{t}\partial_t q_{a,\Gamma}^{(M)}(t). \quad (4.57)$$

Cherchons la valeur propre de l'opérateur  $:t(1 + \tau^2)t(1 + \tau^2)$  en utilisant la méthode de Hylleraas [24]

$$t(\tau^2 + 1)t(\tau^2 + 1)\psi = (t^2 + t\tau^2 t)(1 + \tau^2)\psi \quad (4.58)$$

On sait que  $\vec{\tau}$  est le conjugué canonique de  $\vec{t}$  alors nous avons :

$$\vec{\tau} = -i \frac{d}{dt}, \quad (4.59)$$

le commutateur du module de  $t$  et son conjugué canonique  $\tau^2$  vérifie la relation :

$$\begin{aligned}
[t, \tau^2] &= 2i\bar{\tau} \bullet \bar{t} \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \\
\Rightarrow \tau^2 t &= t\tau^2 - 2i\bar{\tau} \bullet \bar{t} \frac{1}{t} + \frac{1}{t}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

En substituant cette dernière dans l'équation (4.55) nous obtenons

$$\begin{aligned}
t(1+\tau^2)t(1+\tau^2)\psi &= \left( t^2 + t \left( t\tau^2 - 2i\bar{\tau}\bar{t} \frac{1}{t} + \frac{1}{t} \right) \right) \psi \Rightarrow \\
t(1+\tau^2)t(1+\tau^2)\psi &= (t^2 + t^2\tau^2 - 2i\bar{\tau}\bar{t} + 1)\psi
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Utilisons maintenant la relation de commutation suivante :

$$[t, \bar{\tau} \bullet \bar{t}] = it.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
t\bar{\tau}\bar{t} - \bar{\tau}\bar{t}t &= it \\
\Rightarrow t\bar{\tau}\bar{t} &= \bar{\tau}\bar{t}t + it
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Insérons cette dernière dans l'équation (4.61) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
t(1+\tau^2)t(1+\tau^2)\psi &= \left( t^2 + t^2\tau^2 - 2i(\bar{\tau}\bar{t}t + it) \frac{1}{t} + 1 \right) (1+\tau^2)\psi, \\
&= (t^2 + t^2\tau^2 - 2i\bar{\tau}\bar{t} + 3)(1+\tau^2)\psi, \\
&= (t^2(1+\tau^2)^2 - 2i\bar{\tau}\bar{t}(1+\tau^2) + 3(1+\tau^2))\psi,
\end{aligned} \tag{4.63}$$

et, par conséquent :

$$(t^2(1+\tau^2)^2 - 2i\bar{\tau}\bar{t}(1+\tau^2) + 3(1+\tau^2))\psi = (2a+1)^2\psi \tag{4.64}$$

Introduisons maintenant la transformation qui nous permet de passer de l'espace des positions à l'espace des impulsions et inversement, cette transformation est fondée sur la matrice de passage  $\hat{T}$  par :

$$\begin{cases} \bar{t}' = \bar{\tau} \\ \bar{\tau}' = -\bar{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{t}' \\ \bar{\tau}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

Remarquons que :

$$\begin{cases} \bar{t}' = \bar{\tau} \Rightarrow \bar{t}' \bullet \bar{t}' = \bar{t}' \bullet \bar{\tau} = \bar{\tau} \bullet \bar{\tau} \longrightarrow t'^2 = \tau^2 \\ \bar{\tau}' = -\bar{t} \Rightarrow \bar{\tau}' \bullet \bar{\tau}' = -\bar{\tau}' \bullet \bar{t} = \bar{t} \bullet \bar{t} \longrightarrow \tau'^2 = t^2 \end{cases} \tag{4.66}$$

et

$$\bar{\tau} \bullet \bar{t} = -\bar{t}' \bullet \bar{\tau}'. \tag{4.67}$$

Nous avons, en tenant compte de (4.56) et (4.64), l'expression :

$$[\tau'^2(1+t'^2) - 2i\bar{t}' \bullet \bar{\tau}'(1+t'^2) + 3(1+t'^2)]\psi' = (2a+1)^2\psi'. \tag{4.68}$$

où  $\psi'$  est prise, sous les transformations (4.66), pour la transformée de Fourier de  $\psi$ .

Comme :

$$\tau^2 \equiv -\frac{1}{t} \partial_t (t \partial_t) - \frac{1}{t^2} \partial_\Phi^2 + \frac{2}{t} \partial_t q_{a,\Gamma}^{(M)}(t), \quad (4.69)$$

il est donc évident que les relations de commutation citées ci-dessus se vérifient aussi pour le couple  $t$  et  $\tau^2$  donné par (4.69), du fait que le terme  $\partial_t q_{a,\Gamma}^{(M)}(t)$  n'est qu'une fonction ordinaire dépendante du paramètre  $t$ .

En appliquant la transformée de Fourier sur les variables  $t$  et  $\Phi$ , on obtient l'identité suivante :

$$\tau'^2 \equiv -\frac{1}{t'} \partial_{t'} (t' \partial_{t'}) - \frac{1}{t'^2} \partial_{\Phi'}^2 + \frac{2}{t'} \partial_{t'} Q_{a,\Gamma}^{(M)}(t'), \quad (4.70)$$

où, comme la fonction d'onde,  $\frac{1}{t'} \partial_{t'} Q_{a,\Gamma}^{(M)}(t')$  est la transformée de Fourier de  $\frac{1}{t} \partial_t q_a^{(M)}(t)$  (voir l'appendice).

Insérons l'équation (4.70) dans l'équation (4.68), en prenant en considération l'équation (4.59), nous obtenons :

$$\left( \left( -\frac{1}{t'} \frac{d}{dt'} t' \frac{d}{dt'} - \frac{1}{t'^2} \frac{d^2}{d\phi'^2} + \frac{2}{t'} \frac{d}{dt'} Q_{a,\Gamma}^{(M)}(t') \right) (1+t'^2)^2 + 2t' \frac{d}{dt'} (1+t'^2) + 3(1+t'^2) \right) \psi' = (2a+1)^2 \psi' \quad (4.71)$$

Introduisons maintenant la nouvelle fonction d'onde :

$$\chi(t', \Phi') = (1+t'^2)^{3/2} \psi'(t', \Phi'). \quad (4.72)$$

En substituant cette fonction d'onde dans l'équation (4.71) nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left( \left( -\frac{1}{t'} \frac{d}{dt'} t' \frac{d}{dt'} - \frac{1}{t'^2} \frac{d^2}{d\Phi'^2} + \frac{2}{t'} \frac{d}{dt'} Q_{a,\Gamma}^{(M)}(t') \right) (1+t'^2)^2 + 2t' \frac{d}{dt'} (1+t'^2) + 3(1+t'^2) \right) (1+t'^2)^{-3/2} \chi \\ & = \frac{(2a+1)^2}{(1+t'^2)^{3/2}} \chi. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Simplifions cette dernière :

$$\begin{aligned} & \left( \left( -\frac{1}{t'} \frac{d}{dt'} t' \frac{d}{dt'} - \frac{1}{t'^2} \frac{d^2}{d\Phi'^2} + \frac{2}{t'} \frac{d}{dt'} Q_{a,\Gamma}^{(M)}(t') \right) (1+t'^2)^{1/2} + 2t' \frac{d}{dt'} (1+t'^2)^{-1/2} + 3(1+t'^2)^{-1/2} \right) \chi \\ & = \frac{(2a+1)^2}{(1+t'^2)^{3/2}} \chi \end{aligned} \quad (4.74)$$

on a :

$$\begin{aligned} & \left( \left( -\frac{1}{t'} \frac{d}{dt'} t' \frac{d}{dt'} \right) (1+t'^2)^{1/2} \right) \chi = (1+t'^2)^{1/2} \left( -\frac{1}{t'} \frac{d}{dt'} t' \frac{d}{dt'} \right) \chi + \left( -\frac{1}{t'} \frac{d}{dt'} t' \frac{d}{dt'} \right) (1+t'^2) \chi \\ & = (1+t'^2)^{1/2} \left( -\frac{1}{t'} \frac{d}{dt'} t' \frac{d}{dt'} \right) \chi + \left( t'^2 (1+t'^2)^{-3/2} - 2(1+t'^2)^{-1/2} \right) \chi \end{aligned} \quad (4.75)$$

En substituant cette dernière dans l'équation (4.75) l'équation devient :

$$\begin{aligned} & \left( (1+t'^2)^{1/2} \left( -\frac{1}{t'} \frac{d}{dt'} t' \frac{d}{dt'} \right) - \frac{(1+t'^2)^{1/2}}{t'^2} \frac{d^2}{d\Phi'^2} - 2(1+t'^2)^{-1/2} + t'^2 (1+t'^2)^{-3/2} \right. \\ & \left. - 2t'^2 (1+t'^2)^{-3/2} + \frac{2(1+t'^2)^{1/2}}{t'} \frac{d}{dt'} Q_{a,\Gamma}^{(M)}(t') \right) \chi = \frac{(2a+1)^2}{(1+t'^2)^{3/2}} \chi \end{aligned} \quad (4.76)$$

Simplifions cette équation :

$$\begin{aligned} & \left( (1+t'^2)^{1/2} \left( -\frac{1}{t'} \frac{d}{dt'} t' \frac{d}{dt'} \right) - \frac{(1+t'^2)^{1/2}}{t'^2} \frac{d^2}{d\Phi'^2} + (1+t'^2)^{-3/2} + \frac{2(1+t'^2)^{1/2}}{t'} \frac{d}{dt'} Q_{a,\Gamma}^{(M)}(t') \right) \chi \\ & = \frac{(2a+1)^2}{(1+t'^2)^{3/2}} \chi \end{aligned} \quad (7.77)$$

Transposons  $\frac{1}{(1+t'^2)^{3/2}}$ , le troisième terme dans l'équation (4.77) à droite et

faisons sortir  $(1+t'^2)^{1/2}$  comme facteur commun, ensuite transposons-le à droite, l'équation (4.77) devient :

$$\left( \left( -\frac{1}{t'} \frac{d}{dt'} t' \frac{d}{dt'} \right) - \frac{1}{t'^2} \frac{d^2}{d\Phi'^2} + \frac{2}{t'} \frac{d}{dt'} Q_{a,\Gamma}^{(M)}(t') \right) \chi = \frac{4a(a+1)}{(1+t'^2)^2} \chi \quad (4.78)$$

Il est préférable de ré-exprimer le second terme dans le membre de gauche de (4.78) par le terme d'énergie comme c'est le cas dans l'expression (4.47), i.e.

$\partial_{\Phi'}^2 \equiv E_M - a^2$  et qui mène à l'expression :

$$\left[ -\frac{1}{t'} \partial_{t'} t' \partial_{t'} - \frac{E_M - a^2}{t'^2} + \frac{2}{t'} \partial_{t'} Q_a^{(M)}(t') \right] u(t') = \frac{4a(a+1)}{(1+t'^2)^2} u(t') \quad (4.79)$$

où, encore une fois, nous avons supposé que la fonction d'onde  $\chi(t', \Phi')$  s'écrit :

$$\chi(t', \Phi') = u(t') e^{im\Phi'} . \quad (4.80)$$

Puisque la connexion entre les solutions radiales,  $u(t')$  et  $R(t)$ , sont liées par l'intermédiaire de la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}[\psi(t, \Phi)] \equiv \psi'(t', \Phi'), \quad (4.81)$$

alors, il est évident que les classes de potentiels de Morse et de Pöschl-Teller sont liées par la même transformée de Fourier.

$$\mathcal{F} \left[ \frac{1}{t} \partial_t q_a^{(M)}(t) \right] = \frac{1}{t'} \partial_{t'} Q_a^{(M)}(t') \equiv \frac{1}{t'} \partial_{t'} q_\mu^{(PT)}(t') \quad (4.82)$$

et

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{t'} \partial_{t'} q_\mu^{(PT)}(t') \right] \equiv \frac{1}{t} \partial_t q_a^{(M)}(t), \quad (4.83)$$

où  $\mathcal{F}, [\mathcal{F}^{-1}]$  sont, respectivement, la transformée de Fourier et sa transformée inverse ( Voir l'Appendice ).

En résumé, il est donc essentiel de signaler que l'expression (4.79) est l'aboutissement final de l'équation de Schrödinger pour la classe de potentiels de Pöschl-Teller à partir de celle de Morse via la transformée de Fourier alors que l'expression (4.42) est celle déduite, directement, par la réalisation de la théorie des groupes. Par conséquent, l'identification entre les expressions (4.42) et (4.79) passe impérativement par la condition spécifiant que la transformée de Fourier de la classe de potentiels de Morse est celle de Pöschl-Teller, et inversement (Voir Appendice).

#### 4.5 Le lien entre les spectres d'énergie :

Le second terme dans (4.79) peut-être écrit conformément au cas de la classe de potentiel de Morse. En d'autre terme, il convient de l'écrire sous la forme :

$$m^2 = (\mu^2 - E_{P-T}) \equiv -\frac{1}{4} \partial_\phi^2 = -\partial_\Phi^2 .$$

Par identification entre (4.42) et (4.79), on obtient :

$$E_M - a^2 = E_{P-T} - \mu^2 , \quad (4.84)$$

et sachant que  $a = \lambda - \frac{1}{2}$ , l'expression (4.84) devient :

$$E_{P-T} = E_M + \mu^2 - \lambda^2 + \lambda - \frac{1}{4}. \quad (4.85)$$

D'autre part, en comparant les deux membres de droite de (4.42) et (4.79) :

$$a(a+1) = \mu(\mu+1) \Rightarrow \lambda^2 - \frac{1}{4} = \mu(\mu+1). \Rightarrow \mu^2 - \lambda^2 = -\left(\mu + \frac{1}{4}\right).$$

En substituant cette dernière dans (4.85), on obtient :

$$E_{P-T} = E_M + \lambda - \mu - \frac{1}{2}. \quad (4.86)$$

On constate que le spectre d'énergie de Pöschl-Teller est décalé par rapport à celui de Morse par un facteur constant  $\left(\lambda + \mu - \frac{1}{2}\right)$

#### 4.6 Le lien entre les fonctions d'onde :

Le lien entre l'équation de Schrödinger correspondante au potentiel de Morse et celle correspondante au potentiel de Pöschl-Teller nous permet de trouver le lien entre leurs fonctions d'onde.

La fonction d'onde correspondante au potentiel de Pöschl-Teller est donnée par l'équation (4.28) :

$$\chi_j^m(\theta, \phi) = u_j^m(\theta) e^{im\theta}.$$

La fonction d'onde correspondante au potentiel de Morse est donnée par l'équation (4.14) :

$$\psi_{N,m_y}(r, \phi) = R_{N,m_y}(r) \exp(2im_y \phi)$$

Dans la section précédente nous avons déduit que la fonction  $\psi$  est la transformée de Fourier de la fonction  $\psi'$  :

$$\psi'(t', \Phi') = \mathcal{F}(\psi(t, \Phi')) \quad (4.87)$$

où la transformée de Fourier pour une fonction à deux variables s'écrit :

$$\psi'(t_u, t_v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_x dt_y \psi(t_x, t_y) \exp[-i(t_x t_u + t_y t_v)]. \quad (4.88)$$

En effectuant le changement de variable utilisé en (4.52), nous simplifions l'équation davantage :

$$\begin{cases} t_x = t \cos \Phi \\ t_y = t \sin \Phi \end{cases} \Rightarrow dt_x dt_y = J dt d\Phi = t dt d\Phi, \quad (4.89)$$

où  $J$  est le jacobien

La transformée de Fourier de la fonction représentée par l'équation (4.88) devient :

$$\begin{aligned} \psi(t', \Phi') &= \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\infty} t dt \psi(t, \Phi) \exp(-i(t \cos \Phi t' \cos \Phi' + t \sin \Phi t' \sin \Phi' - it t' \cos(\Phi - \Phi'))) \\ &= \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\infty} t dt \psi(t, \Phi) e^{-it t' \cos(\Phi - \Phi')} \end{aligned} \quad (4.90)$$

En insérant l'équation (4.37) qui donne la relation entre  $\chi_j^m$  et  $\psi'$  dans l'équation (4.90) nous obtenons :

$$\chi(t', \Phi') = (1 + t'^2)^{3/2} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\infty} t dt \exp[-i(t t' \cos(\Phi' - \Phi))] \psi(t, \Phi) \quad (4.91)$$

Calculons maintenant l'intégrale en  $\Phi$ . La meilleure approche utilisée est celle de la représentation intégrale des fonctions cylindriques de Bessel :

$$J_m(x) = \frac{1}{2i\pi} \oint z^{-1-m} \exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) dz, \quad (4.92)$$

le contour étant un cercle donc on prend  $z = e^{i\Phi}$ . En utilisant cette propriété dans la fonction de Bessel et le changement de variable suivant  $x = t t'$ , nous obtenons :

$$J_m(t t') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi \exp(it t' \sin \Phi - im\Phi) \quad (4.93)$$

En effectuant ce changement de variable :

$$\Phi \rightarrow \Phi - \Phi' - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \Phi \rightarrow -\cos(\Phi - \Phi'), \quad (4.94)$$

ainsi :

$$J_m(t t') = \frac{1}{2\pi} \int_{\Phi' + \frac{\pi}{2}}^{\Phi' + \frac{\pi}{2} + 2\pi} d\Phi \exp\left(-it t' \cos(\Phi - \Phi') - im\left(\Phi - \Phi' - \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad (4.95)$$

Simplifions davantage cette dernière

$$J_m(t t') = \frac{1}{2\pi} e^{im\Phi'} (i)^m \int_0^{2\pi} d\Phi \exp(-it t' \cos(\Phi - \Phi') - im\Phi) \quad (4.96)$$

Pour retrouver l'exposant dans l'équation (4.91) il suffit d'effectuer la substitution  $m \rightarrow -m$  et d'appliquer l'identité de Bessel suivante :

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) , \quad (4.97)$$

insérons l'équation (4.97) dans la fonction de Bessel

$$J_{-m}(tt') = (-1)^m J_m(tt') = \frac{1}{2\pi} e^{-im\Phi'} (-i)^m \int_0^{2\pi} d\Phi e^{-itt' \cos(\Phi - \Phi') + im\Phi} , \quad (4.98)$$

donc, nous obtenons :

$$\int_0^{2\pi} d\Phi e^{-itt' \cos(\Phi - \Phi') + im\Phi} = 2\pi (-i)^m e^{-im\Phi'} J_m(tt') . \quad (4.99)$$

En substituant le résultat (4.99) dans l'équation (4.95), nous obtenons

$$\chi(t', \Phi') = (1 + t'^2)^{3/2} \int_0^\infty t dt R(t) J_m(tt') (2\pi (-i)^m e^{-im\Phi'}) , \quad (4.100)$$

avec  $\chi(t', \Phi') = e^{im\Phi} u(t')$  , donc :

$$u(t') = (1 + t'^2)^{3/2} 2\pi (-i)^m \int_0^\infty t dt R(t) J_m(tt') , \quad (4.101)$$

L'équation (4.101) est la relation entre les fonctions d'onde correspondantes aux potentiels étudiés.

## CONCLUSION

Notre travail s'est articulé essentiellement autour de deux parties, où nous avons appliqué la théorie des groupes et aussi la supersymétrie de la mécanique quantique.

En premier lieu nous avons utilisé la supersymétrie de la mécanique quantique pour trouver la classe de potentiels relative au potentiel de Morse et aussi celle relative au potentiel de Pöschl-Teller, pour écrire l'équation de Schrödinger correspondante à chaque classe de potentiels.

Baser sur le fait que les potentiels de Morse et de Pöschl-Teller appartiennent à la même représentation du groupe de Lie compact  $SU(2)$ , la deuxième partie de notre travail est une extension au cas des classes de potentiels associées aux potentiels cités ci-dessus via le même groupe par l'équation de Schrödinger. Nous avons trouvé que les équations de Schrödinger correspondantes sont équivalentes seulement si :

- (i)- On identifie la classe de potentiel de Morse comme étant la transformée de Fourier de celle de Pöschl-Teller.
- (ii)- On identifie la fonction d'onde de Morse à la transformée de Fourier de celle de Pöschl-Teller.

Par conséquent, l'expression analytique liant les spectres d'énergie correspondants est directement déduite en comparant les deux équations de Schrödinger, donnant :

$$E_{PT} = E_M + \lambda - \mu - 1/2 .$$

Il est donc tout à fait possible de déduire un spectre d'énergie d'un potentiel donné par exemple celle de Pöschl-Teller (resp. de Morse) en connaissant l'expression analytique de l'autre.

D'autre part, la relation liant leurs fonctions d'onde :

$$u(t') = (1 + t'^2)^{3/2} 2\pi(-i)^m \int_0^\infty t dt R(t) J_m(tt').$$

Il est très intéressant d'effectuer la même analyse en liant les deux classes de potentiels par le formalisme des intégrales de chemins (Path-Integral).

## APPENDICE

Dans cet appendice, nous ajoutons les détails mathématiques concernant le quatrième chapitre, démontrons ainsi que les deux classes de potentiels sont effectivement liées par la transformée de Fourier. En comparant les équations (4.42) et (4.79), on peut facilement écrire :

$$\begin{aligned}\partial_{t'} q_{a,\Gamma}^M(t') \chi(t', \Phi') &= (1+t'^2)^{3/2} \partial_{t'} q_{a,\Gamma}^M(t') \psi'(t', \Phi') \\ &= (1+t'^2)^{3/2} \mathfrak{F}(\partial_t Q_{\mu,\Gamma}^{P-T}(t) \psi(t, \Phi'))\end{aligned}\tag{A.1}$$

les fonctions d'onde sont données comme suit :

$$\begin{aligned}\chi(t', \Phi') &= (1+t'^2)^{3/2} \psi'(t', \Phi') \\ &= (1+t'^2)^{3/2} \mathfrak{F}(\psi(t, \Phi'))\end{aligned}\tag{A.2}$$

La transformée de Fourier de la fonction représentée par l'équation (A.2) s'écrit :

$$\psi(t', \Phi') = \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\infty} t dt \psi(t, \Phi) e^{-itt' \cos(\Phi - \Phi')}\tag{A.3}$$

ainsi l'équation (A.1) devient :

$$\partial_{t'} q_{a,\Gamma}^M(t') \chi(t', \Phi') = (1+t'^2)^{3/2} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\infty} t dt \partial_t Q_{\mu,\Gamma}^{P-T} \psi(t, \Phi) e^{-itt' \cos(\Phi - \Phi')}\tag{A.4}$$

La fonction d'onde  $\psi(t, \Phi)$  s'écrit :

$$\psi(t, \Phi) = R(t) e^{im\Phi},\tag{A.5}$$

Insérons cette dernière dans l'équation (A.4), nous obtenons

$$\partial_{t'} q_{a,\Gamma}^M(t') \chi(t', \Phi') = (1+t'^2)^{3/2} \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\infty} t dt \partial_t Q_{\mu,\Gamma}^{P-T} R(t) e^{-itt' \cos(\Phi - \Phi') + im\Phi}\tag{A.6}$$

Utilisant la propriété trouvée dans la dernière section du quatrième chapitre

$$\int_0^{2\pi} d\Phi e^{-itt' \cos(\Phi - \Phi') + im\Phi} = 2\pi (-i)^m e^{-im\Phi'} J_m(tt')\tag{A.7}$$

Substituons le résultat (A.7) dans l'équation (A.4), nous obtenons :

$$\partial_{t'} q_{a,\Gamma}^M(t') \chi(t', \Phi') = (1+t'^2)^{3/2} \int_0^\infty t dt \partial_t Q_{\mu,\Gamma}^{P-T} R(t) J_m(tt') (2\pi(-i)^m e^{-im\Phi'}) , \quad (\text{A.8})$$

avec  $\chi(t', \Phi') = e^{im\Phi} u(t')$  , donc

$$\partial_{t'} q_{a,\Gamma}^M(t') u(t') = (1+t'^2)^{3/2} 2\pi(-i)^m \int_0^\infty t dt \partial_t Q_{\mu,\Gamma}^{P-T} R(t) J_m(tt') , \quad (\text{A.9})$$

où :

$$u(t') = (1+t'^2)^{3/2} 2\pi(-i)^m \int_0^\infty t dt R(t) J_m(tt') , \quad (\text{A.10})$$

en substituant cette dernière dans l'équation (A.9) ,après simplification on obtient :

$$\partial_{t'} q_{a,\Gamma}^M(t') \int_0^\infty t dt R(t) J_m(tt') = \int_0^\infty t dt \partial_t Q_{\mu,\Gamma}^{P-T} u(t) J_m(tt') . \quad (\text{A.11})$$

Intégrons par rapport à  $t'$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt' \partial_{t'} q_{a,\Gamma}^M(t') \int_0^\infty t dt R(t) J_m(tt') &= \int_0^\infty dt' \int_0^\infty t dt \partial_t Q_{\mu,\Gamma}^{P-T} R(t) J_m(tt') \Rightarrow \\ \int_0^\infty t dt R(t) \int_0^\infty dt' \partial_{t'} q_{a,\Gamma}^M(t') J_m(tt') &= \int_0^\infty t dt \partial_t Q_{\mu,\Gamma}^{P-T} R(t) \int_0^\infty dt' J_m(tt') \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

La fonction de Bessel avec le paramètre  $\alpha$  est donnée comme suit :

$$\int_0^\infty dt J_m(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} , \quad (\text{A.13})$$

insérons cette dernière dans l'équation (A.12) , nous obtenons :

$$\int_0^\infty t dt R(t) \int_0^\infty dt' \partial_{t'} q_{a,\Gamma}^M(t') J_m(tt') = \int_0^\infty t dt \frac{1}{t} \partial_t Q_{\mu,\Gamma}^{P-T} R(t) . \quad (\text{A.14})$$

Par identification :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \partial_t Q_{\mu,\Gamma}^{P-T} &= \int_0^\infty t' dt' \partial_{t'} q_{a,\Gamma}^M(t') J_m(tt') \frac{1}{t'} \\ &= \mathfrak{F}^{-1} \left[ \frac{1}{t'} \partial_{t'} q_{a,\Gamma}^M(t') \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Donc, on a montré que la classe de potentiels de Pöschl-Teller est la transformée de Fourier de la classe de potentiels de Morse en utilisant l'intégrale de Fourier Bessel (transformation de Hankel) qui est une autre représentation d'intégral

analogue à l'intégral de Fourier mais au lieu de fonction trigonométrique on utilise les fonction de Bessel.

## REFERENCES

- 1 . Y. Alhassid, F. Gursev, F. Iachello, Ann. Phys. 148 (1983) 346.
- 2 . A. Arima, F. Iachello, Ann. Phys. (N. Y) 99 (1976) 253.
- 3 . A. Arima, F. Iachello, Ann. Phys. (N. Y) 11 (1978) 201.
- 4 . N. A. Alves, E. Drigo-Filho, J. Phys. A; Math. Gen. 21 (1988) 3215.
- 5 . N. Nag, R. Roychoudhury, J. Phys. A : Math. Gen. 28 (1995) 1.
- 6 . P. M. Morse, Phys. Rev. 34 (1929) 57.
- 7 . P. M. Morse, J. B. Fisk and L. I. Schiff, Phys, Rev.50 (1936) 748.
- 8 . G. Pöschl, E. Teller, Z. Physik 83 (1933) 143.
- 9 . P. Lax, Commu. Pure Appl. Math. 27 (1967) 97.
- 10 . A. B. Zamolodchikov, Ann. Phys. (N. Y) 120 (1979) 253.
- 11 . I. L. Cooper, I. Phys. A: Math. Gen. 26 (1993) 1601.
- 12 . J. Wu, Y. Alhassid, J. Math. Gen. 26 (1990) 557.
- 13 . Y. Alhassid and R. D. Levine. Phys. Rev. A18 (1978) 89.
- 14 . Y. Alhassid and S. E. Koonin. Phys. Rev. C23 (1981) 1590.
- 15 . M. J. Engelfield. "Group theory and the Coulomb problem"  
Wiley. New York. 1972.
- 16 . W. Pauli, Z. Physik 36 (1926) 336.
- 17 . V. Barcmann, Z. Physik 99 (1936) 576.
- 18 . D. Z Wanzinger, J. Math. Phys. 8 (1967) 1885.
- 19 . A. M Perelomov and V. S. Popov, Sov. Phys. J E P T 27 (1968) 967.
- 20 . F. Iachello. Chem.. Phys. Lett 78 (1981) 581, F. Iachello and R. D Levine. J.  
Chem. Phys. 77 (1982) 3046, O. S. Van. Roosmalen; A. E. L Deiperink, and.  
F. Iachello. Chem . Phys. Lett. 85 (1982) 32.
- 21 . B. G Wybourne " Classical groups for physicists" Wiley New York.1974.
- 22 . E. Drigho-Filho, J. Phys. A: Math. Gev. 21 (1988) L 1025.
- 23 . E. Drigho-Filho, Preprint. Univ. Sao Paulo, I F T (1988) 43.
- 24 . E. Hylleraas, Z. Phys. 74 (1932) 216.

- 25 . W. Greiner, B. Muler: "mécanique quantique-Symétrie" Springer Berlin (1999).
- 26 . Y. S. Kim & M. E. Noz: "Theory and application of poincaré group" Riedel. Publishing company. Dordrecht (1986).
- 27 . A. M. Joshi:" Elements of group theory of physicists." 2ed, Wileyeastern limited. New delhi (1977).
28. L. C. Biedenharn: J: Math. Phys. 4, 436 (1963).
- 29 . J. Schwinger, in "Quantum theory of angular momentum" ( L. Beidenharn and E. Van Dam. Eds-), p p 229-279, Academic press New York, 1965.
- 30 . Ramazan koc, Hayriye Tüwncüler, Mehmet koca, Eser Olgar, Annl. Phys 319 (2005) 333-347.
- 31 . A. A. Andrianov, N. V. Borisov and M. V. Loffe, Phys. Lett. 105 A (1984) 19.
- 32 . C. V. Sukumar, J. Phys. A 18 (1985) 2917.
- 33 . E. Schrödinger, Proc. R. Irish. Acad. 46 (1940) 9.
- 34 . E. Schrödinger, Proc. R. Irish. Acad. 46 (1946) 183.
- 35 . L. Infeld and T. D. Hull, Rev. Mod. Phys. 23 (1951) 21.
- 36 . H. Gosse, Supersymétric Quantum Mechnics, Brasov int. school, 1989.
- 37 . E. Witten, Nucl. Phys. B 188 (1981) 531.
- 38 . M. M Nieto and L. M. Simmonds, Phys. Rev. A 19 (1979) 438.
- 39 . F. Calogero and A. Degasperis, Phys. Rev, A 11 (1975), 265; B. Yoon and J. W.Negele, Phys. Rev . A 16 (1977) 1451.
- 40 . F. Calogero, Lett. Nuovo Cim. 13 (1975) 411.
- 41 . R. D. Levine and C. E Wulfman, Chem, Phys Lett. 60 (1979), 372.
- 42 . A. Messiah, "Quantum Mechanics", Vol ,II, North Holland, Amsterdam. 1962.