

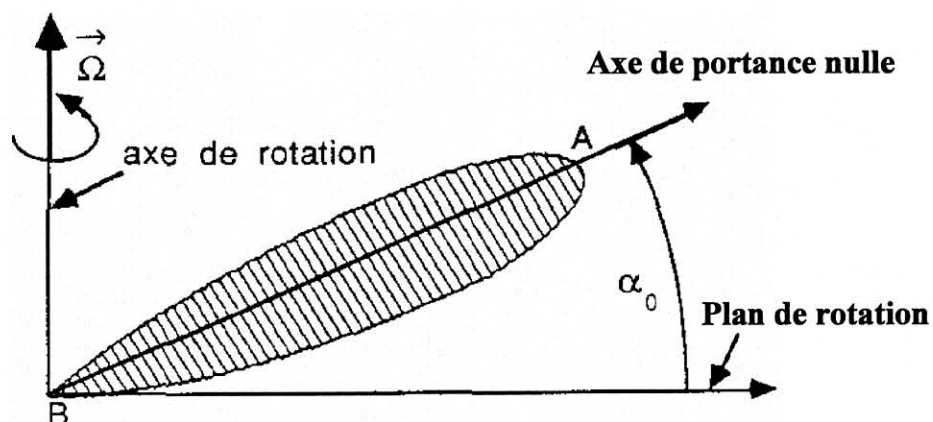
APPENDICE B DEFINITIONS

Hélice aérienne : C'est un ensemble formé d'un moyeu comportant b pales réparties symétriquement autour d'un axe, appelé axe de rotation (ou axe de l'hélice).

Axe de pas : C'est l'axe autour duquel est affiché le calage de pale de l'hélice.

Section droite de pale : C'est la section par un plan normal à l'axe de pas (voir schéma ci-contre); elle est définie par :

- ✓ le profil de pale
- ✓ l'axe de portance nulle (AB)
- ✓ l'angle α_0 que fait cet axe avec le plan de rotation



calage de pale : C'est le pas général du profil de pale à la section $0.R_1$.

Vrillage : C'est l'angle de torsion donné à la pale et formé par l'axe de portance nulle du profil situé à $0.R_1$, et l'axe local. On dira qu'un vrillage est non linéaire quand l'angle de torsion n'est pas proportionnel au rayon.

Lanière tourbillonnaire : C'est une courbe de l'espace, constituée d'éléments tourbillonnaires.



UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département d'Aéronautique

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Aéronautique

**APPROCHE NUMERIQUE DES ECOULEMENTS AUTOUR
DES HELICES RAPIDES**

Par

Mouloud DRIOUCHE



devant le jury composé de :

S. BOUKRAA	Professeur, U. de Blida	Président
T. REZOUG	Maître de Conférence, U. de Blida	Rapporteur
R. HAUI	Maître de Conférence, U.S.T.H.B	Examineur
M. BOUNEDER	Chargé de cours, U. de Blida	Examineur

Blida, Octobre 2004

REME

Notre sujet consiste à étudier l'écoulement autour des hélices rapides, ces dernières sont utilisées pour économiser de l'énergie (réduction des consommations en carburant, amélioration du rendement propulsif). Cet écoulement est complexe et est régi par les équations de Navier Stokes.

Pour étudier cet écoulement nous avons proposés un modèle numérique qui est basé sur la présentation de la pale par une ligne portante rectiligne (L.P.R) et qui effectue une mise en équilibre complète du sillage.

Pour donner une crédibilité à notre modèle numérique proposé, nous avons confrontés nos résultats avec ceux de l'expérience.

Mots Clés : Hélice rapide – Ligne portante rectiligne – Mise en équilibre du sillage – Aérodynamique – Méthodes numériques

ملخص

إن موضوع دراستي يتمحور حول دراسة جريان الهواء حول مروحة سريعة . هذه المروحة تستعمل في الاقتصاد من الطاقة وذلك في التقليل من استهلاك الوقود وتحسين مردودية الدفع. إن جريان الهواء مركب ومسير بواسطة معادلات Navier Stokes.

ولدراسة جريان الهواء وانسيابه اقترحت نمطا رقميا الذي يتركز على تمثيل شفرة المروحة عن طريق خط حامل مستقيم (L.P.R) والذي يقوم بعملية توازن كاملة لأثر السيلان.

ولإعطاء مصداقية للنمط الرقمي المقترح ، قمت بمقارنة النتائج التي توصلت إليها مع تلك التي توصلوا إليها عن طريق التجربة.

REMERCIEMENTS

Je tiens à témoigner ma profonde gratitude envers mon directeur de mémoire Monsieur REZOUG Tahar, Maître de Conférence au niveau du Département d'Aéronautique de la Faculté de Sciences de l'Ingénieur de l'Université Saâd Dahleb de Blida, pour toute sa confiance qu'il m'a témoigné en me proposant ce sujet. Ses conseils et sa grande expérience scientifique ont permis l'aboutissement de ce travail.

J'exprime mes vifs remerciements, à Monsieur S. BOUKRAA Professeur au niveau du Département d'Aéronautique de la Faculté de Sciences de l'Ingénieur de l'Université Saâd Dahleb de Blida, en me faisant l'honneur de présider le jury de soutenance.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur R. HAOUI Maître de Conférences à l'USTHB, Monsieur M. BOUNEDER chargé de cours au niveau du Département d'Aéronautique de la Faculté de Sciences de l'Ingénieur de l'Université Saâd Dahleb de Blida pour avoir accepté de faire partie du jury de ma soutenance.

Je remercie très vivement Monsieur S. BERGHEUL, Chef Département d'Aéronautique de la Faculté de Sciences de l'Ingénieur de l'Université Saâd Dahleb de Blida, ainsi qu'à Monsieur M. BOUNEDER, Chef de Département Adjoint de la Poste Graduation et de la Recherche Scientifique pour leur soutien moral et leur encouragements.

En fin, que tous ceux ou celles qui m'ont apporté leur soutien et leur amitié tout au long de ce travail ; trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus sincères.

TABLE DES MATIERES

RESUME	1
REMERCIEMENTS	2
TABLE DES MATIERES	3
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX.....	6
INTRODUCTION	8
1. ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE DES TRAVAUX ANTERIEURS	
1.1. Etudes théoriques et semi-théoriques	10
1.2. Etudes expérimentales	13
2. APPROCHE THEORIQUE	
2.1. Equations générales des écoulements tourbillonnaires	17
2.2. Détermination du champ des vitesses en fluide parfait incompressible	18
2.3. Loi de Biot et Savart et vitesses induites	19
2.4. Représentation d'une surface de discontinuité de vitesses par une nappe tourbillonnaire	21
2.5. Equations de la nappe tourbillonnaire en équilibre, générée par le fonctionnement de l'hélice	22
2.6. Modélisation de la nappe tourbillonnaire engendrée par la rotation des pales .	24
2.6.1. lois d'évolution du tourbillon marginal	24
2.6.2. Détermination théorique de la surface tourbillonnaire interne	27
2.7. Méthode intégrale et ligne portante	31
2.7.1. Expressions du champ de vitesses en tout point de l'espace et de la pale	31
2.7.2. Equation fondamentale du fonctionnement aérodynamique de l'hélice	32
2.7.3. Calcul des performances de l'hélice	33

3. RESOLUTION NUMERIQUE

3.1. Détermination de la distribution de circulation sur la pale	36
3.1.1. Développement de la circulation en série de Fourier	36
3.1.2. Résolution de l'équation du fonctionnement aérodynamique	37
3.1.3. Détermination de la matrice d'influence	39
3.1.4. Organigramme de calcul de la circulation	42
3.2. Traitement des instabilités numériques au voisinage d'une singularité	44
3.2.1. Position du problème	44
3.2.2. Concept de rayon visqueux	45
3.2.3. Approximation linéaire du module de la vitesse au voisinage d'une singularité	46
3.3. Modélisation du sillage lointain	47
3.3.1. Position du problème	47
3.3.2. Modélisation par des cylindres tourbillonnaires semi-infinis	49
3.3.2.1. Influence d'un anneau tourbillonnaire	50
3.3.2.2. Influence totale d'un cylindre tourbillonnaire	51
3.4. Calcul des vitesses induites	53
3.4.1. Influence des tourbillons liés	53
3.4.2. Influence des tourbillons libres	54
3.4.3. Expressions discrétisées des vitesses induites	58
3.5. Organigramme de la procédure de mise en équilibre	60

4. RESULTATS ET CONFRONTATION CALCUL/EXPERIENCE

4.1. Données du calcul et données de comparaison	62
4.1.1. Hélice maquette	62
4.1.2. Données de comparaison - Résultats expérimentaux disponibles	68
4.2. Universalité du paramètre de fonctionnement vis-à-vis du champ aérodynamique de l'hélice opérant à iso-calage	73
4.3. Résultats relatifs aux nappes tourbillonnaires	75
4.4. Résultats relatifs aux performances globales de l'hélice	83
4.5. Résultats relatifs aux distributions de circulation sur la pale	88
4.6. Résultats relatifs aux champs de vitesses dans le sillage	95
4.6.1. Champs moyens	95

	5
4.6.2. Champs instantanés	98
CONCLUSION	115
APPENDICE	
A. Liste des symboles	117
B. Définitions	119
C. Approximation des fonctions par des polynômes orthogonaux	121
REFERENCES	124

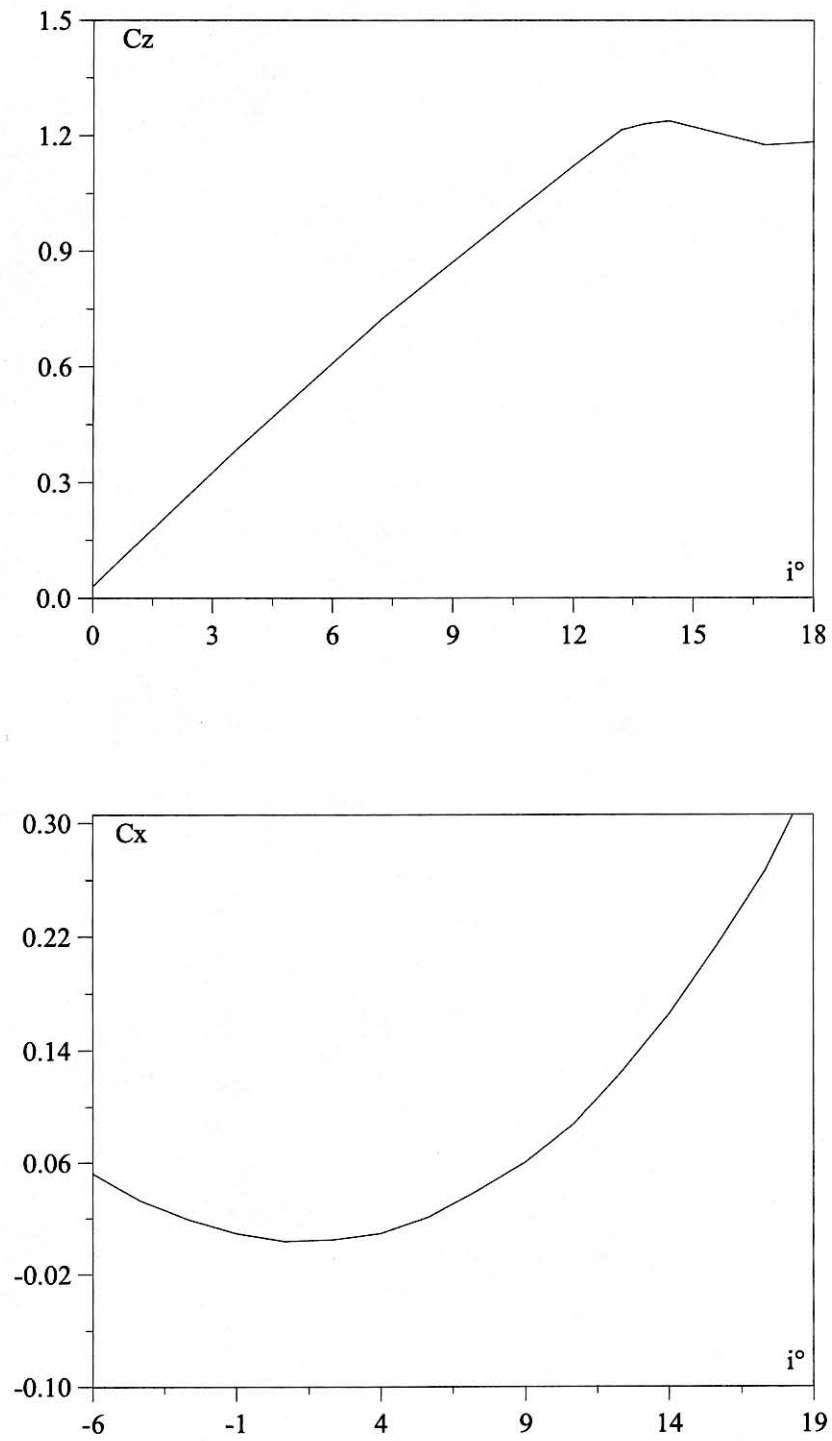


Figure 4.4 : Coefficient de portance et de traînée

LISTE DES ILLUSTRATIONS

RAPPORT ET TABLEAU

Figure 2.1	Ligne tourbillonnaire	19
Figure 2.2	Surface de discontinuité	21
Figure 2.3	Contraction finale (Sillage lointain)	25
Figure 2.4	Exposant de contraction	26
Figure 2.5	Translation – Sillage proche	26
Figure 2.6	Translation – Sillage lointain	27
Figure 2.7	Position des lanières à $\psi=0$ et $\pi/2$	27
Figure 2.8	Forces Aérodynamiques appliquées sur un profil	34
Figure 3.1	Organigramme de calcul de la circulation	43
Figure 3.2	Composante axiale de la vitesse	44
Figure 3.3	Approximation linéaire du module de la vitesse	46
Figure 3.4	Sillage	49
Figure 3.5	Procédure de mise en équilibre	61
Figure 4.1	Profils de la pale à $\xi=0.45$ et $\xi=0.7$	64
Figure 4.2	Définition du calage, loi de vrillage de la pale	65
Figure 4.3	Pale de l'hélice	66
Figure 4.4	Coefficient de portance et de traînée	67
Figure 4.5	Montage hélice et système d'exploration, Banc hélice de l'IMFM	70
Figure 4.6	Coefficient de traction expérimental à iso-calage	71
Figure 4.7	Définition du système d'axes de mesures	72
Figure 4.8	Evolution du pas $H(x,0)$ le long de pale d'hélice $\alpha_0 = 27^\circ$; $\gamma=0.71$	78
Figure 4.9	Evolution du pas $H(x,\pi/2)$ le long de pale d'hélice $\alpha_0 = 27^\circ$; $\gamma=0.63$	78
Figure 4.10	Evolution du pas $H(x,0)$ de nappes en fonction γ à $\xi=0.7$	79
Figure 4.11	Evolution du pas $H(x,\pi/2)$ de nappes en fonction γ à $\xi=0.7$	79
Figure 4.12	Nappe tourbillonnaire ($\alpha_0 = 32.5^\circ$; $\gamma = 0.89$; $\tau = 0.16$)	80
Figure 4.13	Nappe tourbillonnaire ($\alpha_0 = 27^\circ$; $\gamma = 0.63$; $\tau = 0.16$)	81
Figure 4.14	Nappe tourbillonnaire ($\alpha_0 = 23^\circ$; $\gamma = 0.44$; $\tau = 0.16$)	82
Figure 4.15	Coefficient de traction en fonction de γ à $\alpha_0 = 32.5^\circ$	85

Figure 4.16	Coefficient de traction en fonction de γ à $\alpha_0 = 27^\circ$	85
Figure 4.17	Coefficient de traction en fonction de γ à $\alpha_0 = 23^\circ$	85
Figure 4.18	Coefficient de puissance en fonction de γ à $\alpha_0 = 32.5$	86
Figure 4.19	Coefficient de puissance en fonction de γ à $\alpha_0 = 27^\circ$	86
Figure 4.20	Coefficient de puissance en fonction de γ à $\alpha_0 = 23^\circ$	86
Figure 4.21	Rendement en fonction de γ à $\alpha_0 = 32.5^\circ$	87
Figure 4.22	Rendement en fonction de γ à $\alpha_0 = 27^\circ$	87
Figure 4.23	Rendement en fonction de γ à $\alpha_0 = 23^\circ$	87
Figure 4.24	Influence de γ sur la distribution de circulation de la pale $\alpha_0=32.5^\circ$; $n=22.7$	90
Figure 4.25	Influence de γ sur la distribution de circulation de la pale $\alpha_0=27^\circ$; $n=35.7$	91
Figure 4.26	Influence de γ sur la distribution de circulation de la pale $\alpha_0=23^\circ$; $n=35.7$	92
Figure 4.27	Evolution de la circulation sur la pale à coefficient de traction constant $\tau=0.16$	93
Figure 4.28	Influence de n et de γ sur la distribution de circulation de la pale $\alpha_0=32.5^\circ$; $\gamma=V_\infty/n.D$	94
Figure 4.29	Vitesse axiale moyenne dans un plan aval proche du plan de rotation à $\tau=0.16$	96
Figure 4.30	Vitesse tangentielle moyenne dans un plan aval proche du plan de rotation à $\tau=0.16$	97
Figure 4.31 à 4.45	Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$	100
Tableau 4.1	Caractéristiques des profils en fonction du rayon réduit	63
Tableau 4.2	Pas des lanières tourbillonnaires en fonction de γ	73
Tableau 4.3	Performances de l'hélice en fonction de γ	74
Tableau 4.4	Paramètres de calcul du champs de vitesses	98

INTRODUCTION

Le présent mémoire concerne l'étude numérique du champ aérodynamique d'une hélice aérienne opérant de manière isolée.

Le regain d'intérêt dont bénéficie la propulsion par hélices, trouve son origine dans le contexte général des économies d'énergie (réduction des consommations en carburant, amélioration du rendement énergétique) à réaliser sur des avions de transports courts et moyens courriers. C'est ainsi qu'un certain nombre d'organismes et de laboratoires de recherches français et étrangers (Aérospatiale, ONERA(Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales), LMSI (Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur), Société Berlin et IMFM (Institut de Mécanique des Fluides de Marseille) en France, Hamilton Standard et NASA aux USA), ont entrepris des études fondamentales sur la conception d'hélices rapides permettant d'atteindre un rendement propulsif de l'ordre de 0.8 pour des régimes de Mach élevés (environ 0.8).

Cependant, pour les hélices transsoniques comme pour les hélices classiques, la conception et la réalisation pratique de ces propulseurs passent par l'élaboration de méthodes de calcul capables de permettre le choix fiable des paramètres de définition, et de prédire correctement les performances globales ainsi que les caractéristiques aérodynamiques locales de l'écoulement dans le champ proche et lointain du sillage.

En outre l'utilisation de ces propulseurs à des vitesses élevées engendre des effets secondaires susceptibles de limiter leurs performances (accroissement des traînées induites sur l'environnement aérodynamique, augmentation des niveaux acoustiques et vibratoires).

Dans cette optique, la présente étude a été entreprise sur le plan numérique, pour développer un modèle de calcul des performances et du champ aérodynamique associés à l'hélice isolée opérant en régime subsonique et suivant une large gamme de paramètres de fonctionnement.

Le modèle numérique proposé est basé sur une représentation de la pale par une ligne portante rectiligne (L.P.R), et qui effectue une mise en équilibre complète du sillage (tourbillon marginal et nappe tourbillonnaire), et conduit à la prévision des charges aérodynamiques globales (traction, couple, rendement), et du champ aérodynamique local (vitesses induites instantanées, circulation,...) développé à l'aval de l'hélice en translation axiale.

Le premier chapitre du présent mémoire, est consacré à une analyse bibliographique des travaux antérieurs, théoriques et expérimentaux, menés sur l'aérodynamique des hélices, l'accent sera plus particulièrement mis sur les méthodes de calcul utilisant des modèles de sillages analytiques ou prescrits par l'expérience, et qui effectuent une mise en équilibre de ce sillage (partielle ou complète). Sur le plan expérimental, l'analyse portera sur les études qui ont conduit à synthétiser par des formulations empiriques la géométrie de sillage associé à un fonctionnement donné des pales. Ces formulations empiriques étant alors utilisées comme base de validation et/ou de modélisation dans les codes de calcul fondés sur la mise en équilibre.

Dans le deuxième et le troisième chapitres, sont établies les équations de base pour la construction du modèle numérique relatif à la configuration d'hélice isolée. Après avoir déterminé la distribution de circulation le long de la pale, par résolution numérique de l'équation du fonctionnement aérodynamique, un modèle linéaire basé sur le concept de viscosité "artificielle" a été proposé pour le traitement des instabilités numériques au voisinage des singularités (tourbillons ponctuels, segments tourbillonnaires). La connaissance de la loi de circulation a permis ensuite de calculer le champ aérodynamique induit en superposant l'influence du sillage lointain modélisé par des cylindres tourbillonnaires coaxiaux et semi-infinis; l'influence du sillage proche (tourbillons libres); et celle des tourbillons liés aux b pales de l'hélice.

Enfin, le dernier chapitre présente les résultats numériques obtenus et les confrontations calcul-expérience, ces derniers sont envisagés à différents niveaux (performances globales, champ de vitesses, ...). Les résultats de ces différents niveaux de comparaison permettent d'analyser l'efficacité de la méthode à prédire les grandeurs globales et locales caractéristiques du fonctionnement de l'hélice en translation axiale.

ou éloigné du plan de rotation, ou bien d'un azimut proche ou éloigné de l'intersection de la lanière tourbillonnaire marginale avec le plan $z/R_1 = \text{Cste}$ considéré.

Remarquons également que le modèle linéaire proposé pour la modélisation des vitesses dans le noyau tourbillonnaire (chapitre 3), permet de bien corréler les profils expérimentaux au voisinage du tourbillon marginal.

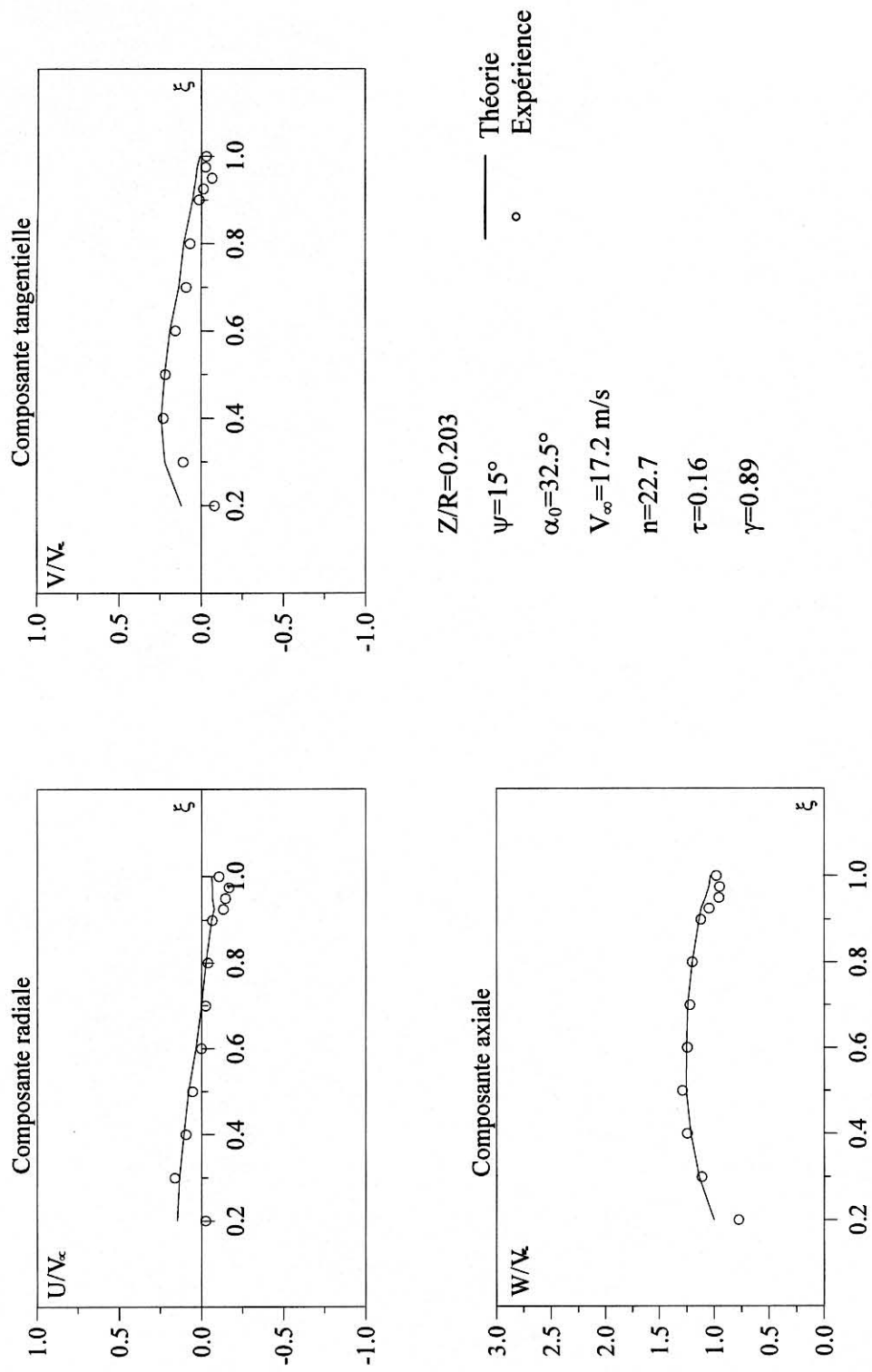


Figure 4.31 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$

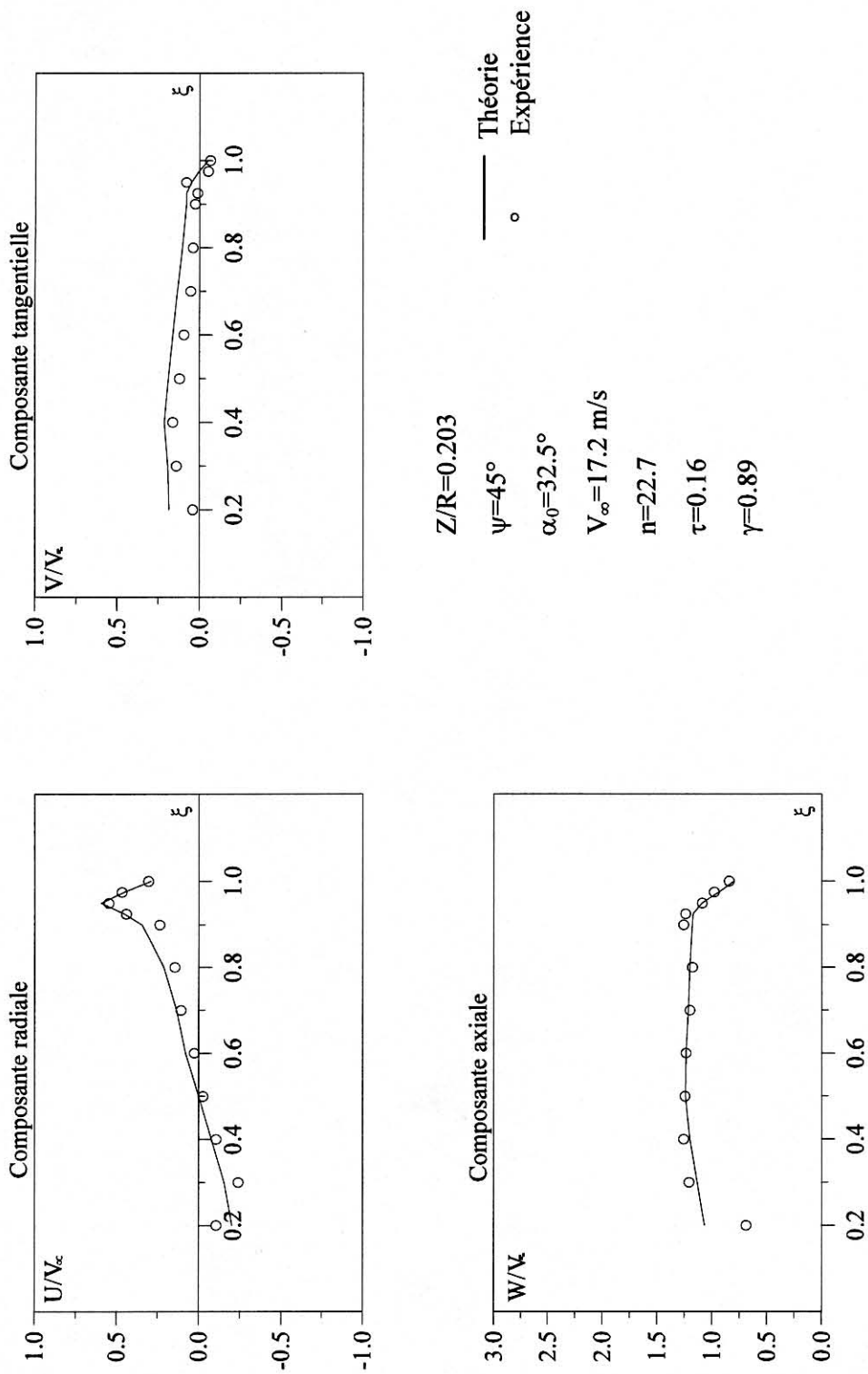
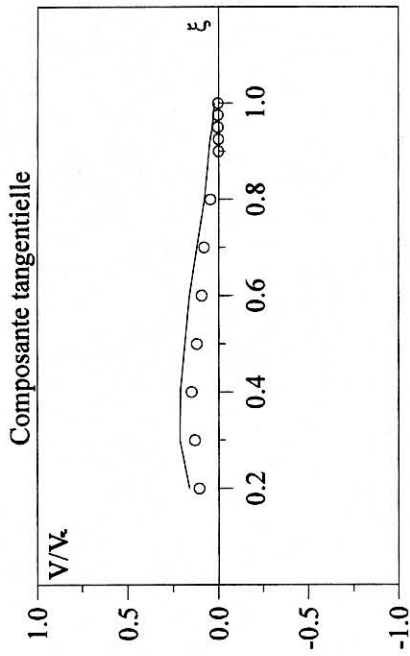


Figure 4.32 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$



$Z/R=0.203$

$\psi=75^\circ$

$\alpha_0=32.5^\circ$

$V_\infty=17.2 \text{ m/s}$

$n=22.7$

$\tau=0.16$

$\gamma=0.89$

— Théorie
○ Expérience

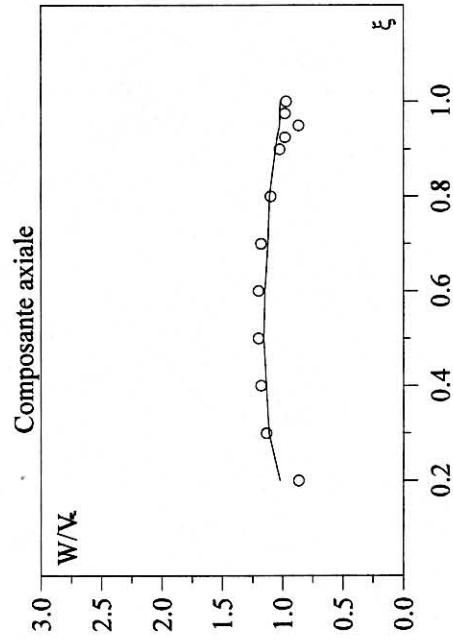
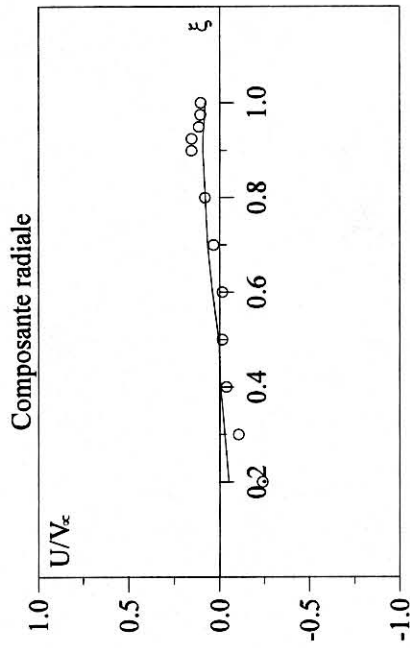
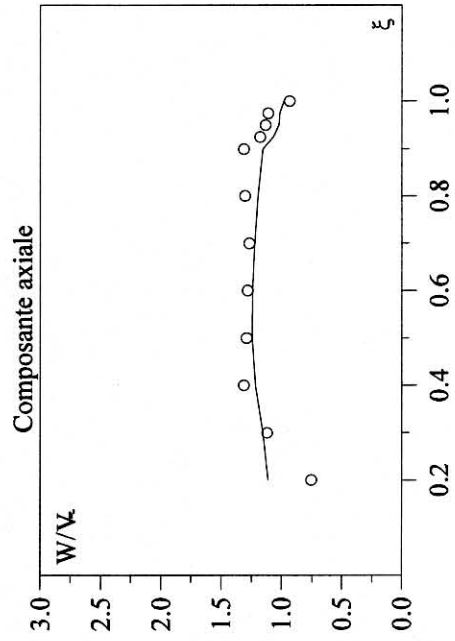
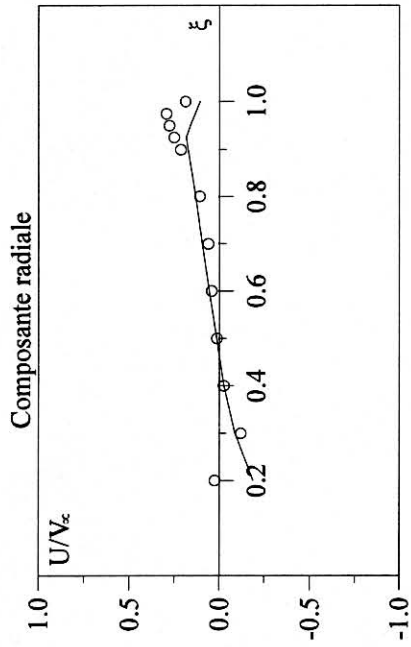
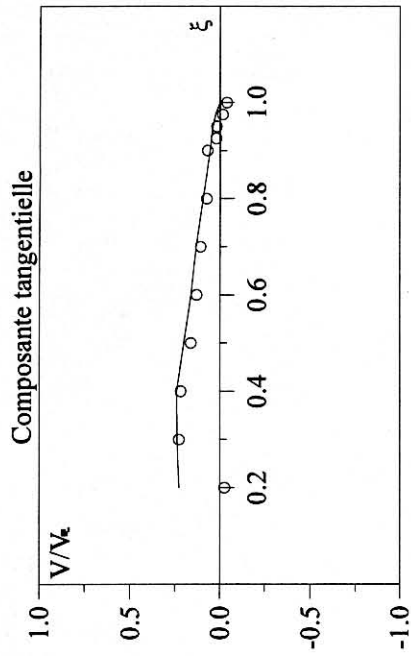


Figure 4.33 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$



$Z/R=0.4938$
 $\psi=15^\circ$
 $\alpha_0=32.5^\circ$
 $V_\infty=17.2 \text{ m/s}$
 $n=22.7$
 $\tau=0.16$
 $\gamma=0.89$

——— Théorie
 o Expérience

Figure 4.34 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$

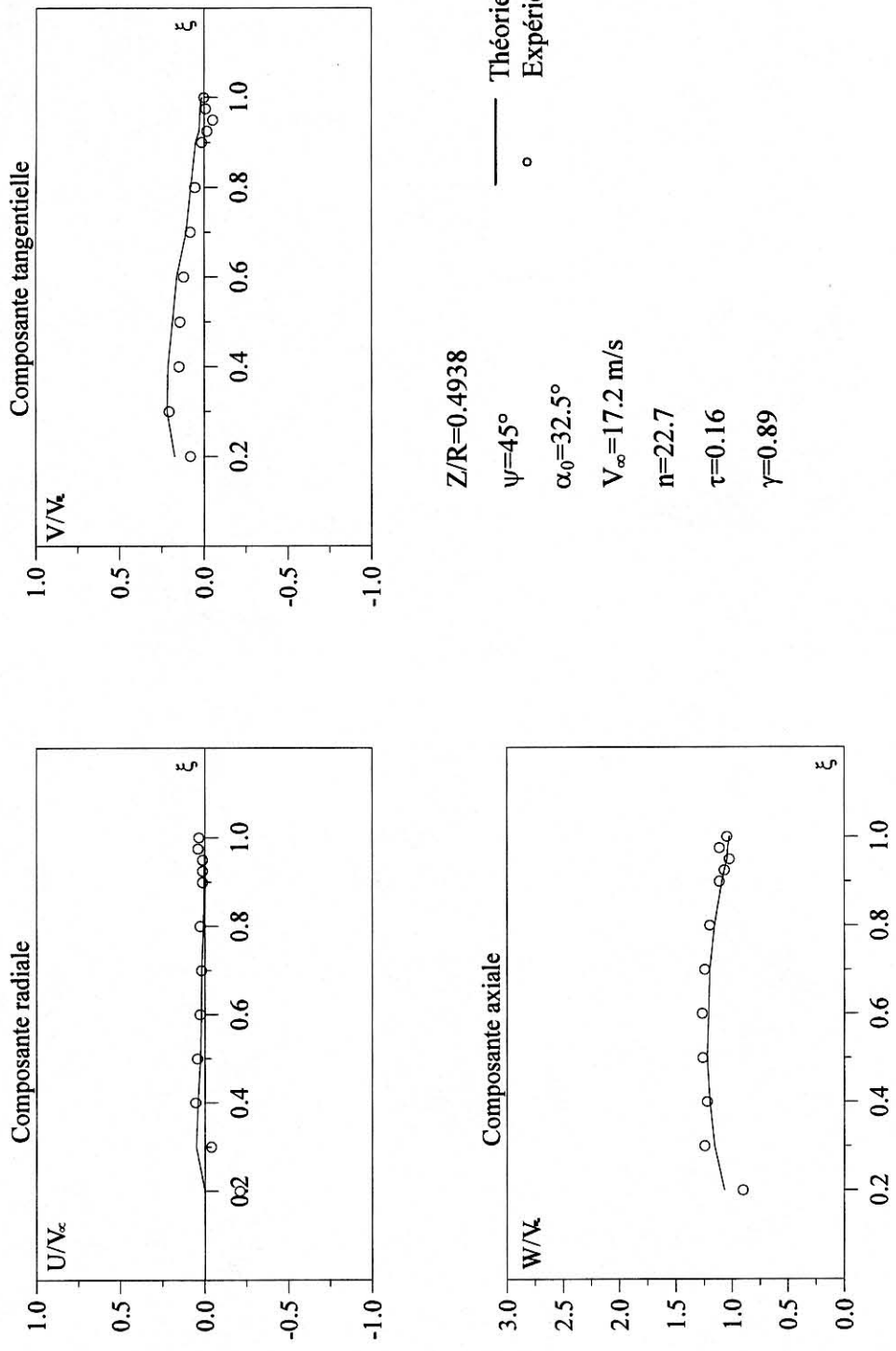
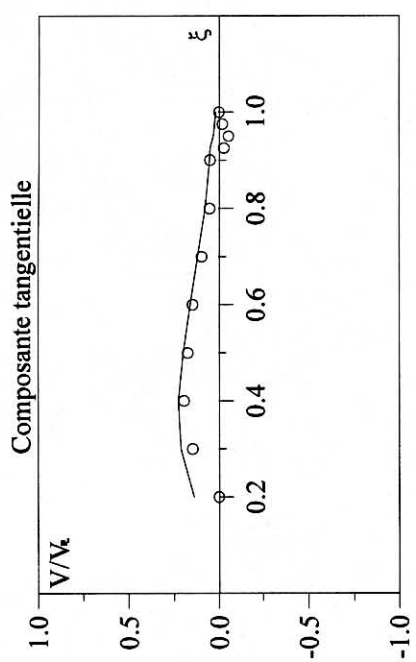


Figure 4.35 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$



$Z/R=0.4938$
 $\psi=60^\circ$
 $\alpha_0=32.5^\circ$
 $V_\infty=17.2 \text{ m/s}$
 $n=22.7$
 $\tau=0.16$
 $\gamma=0.89$

— Théorie
 ○ Expérience

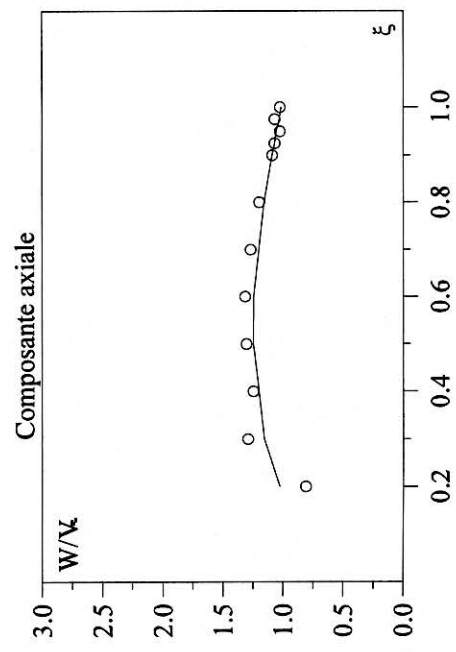
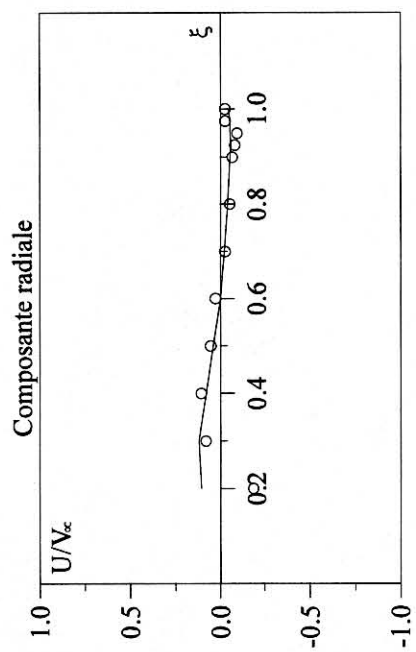


Figure 4.36 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$

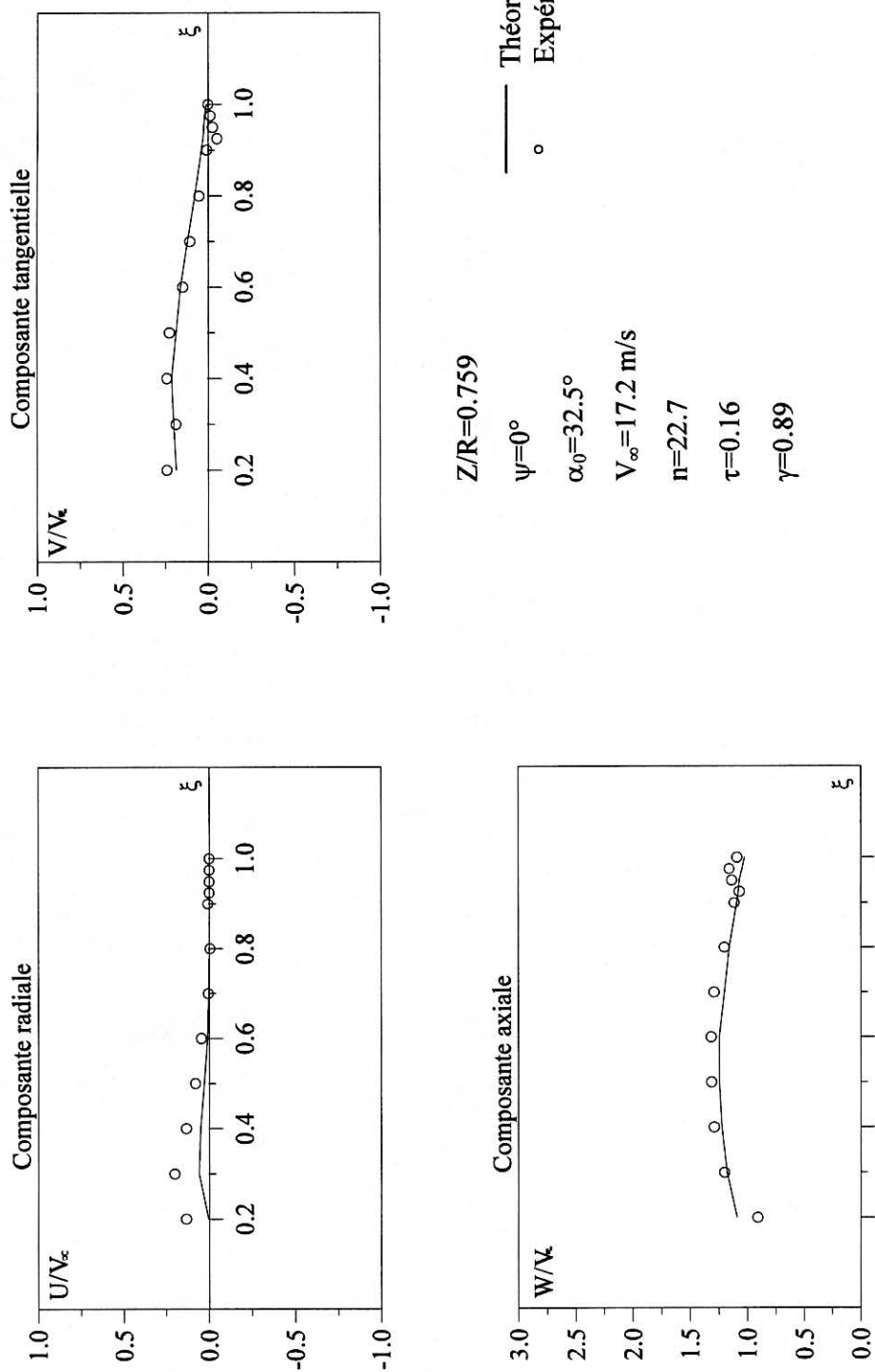


Figure 4.37 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$

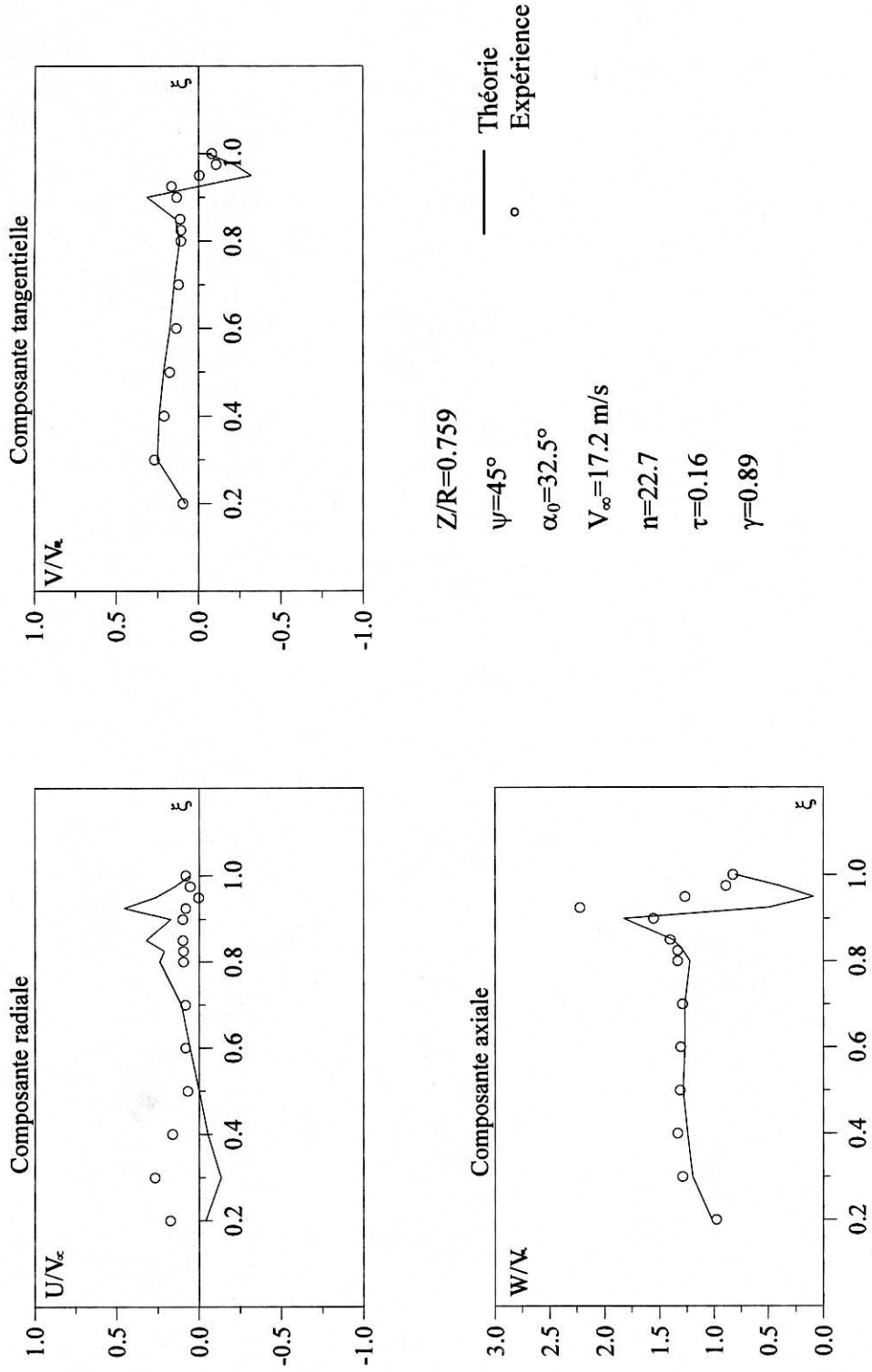


Figure 4.38 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$

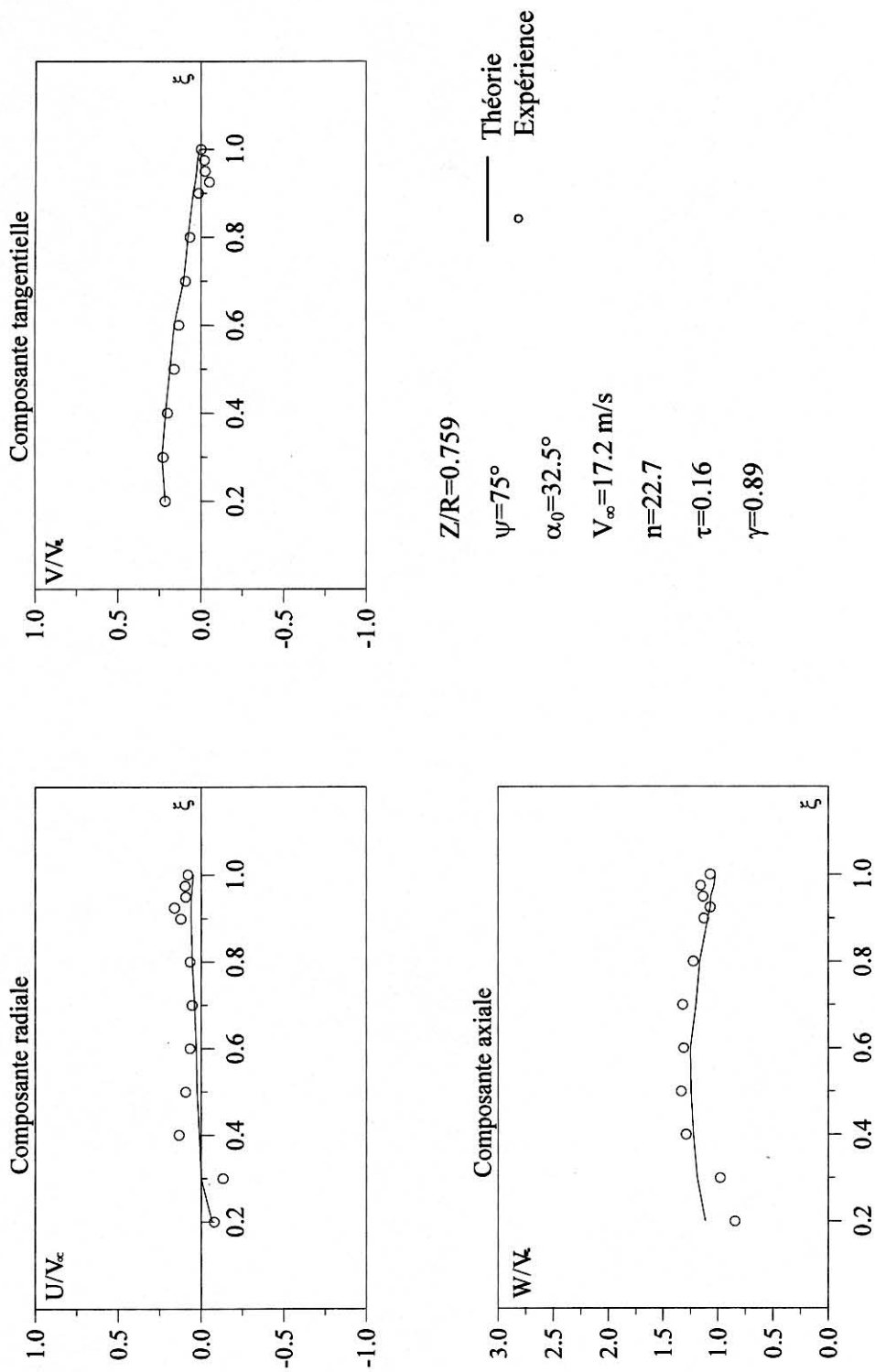


Figure 4.39 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$

CHAPITRE 1

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

DES TRAVAUX ANTERIEURS

La prévision des charges aérodynamiques et l'amélioration des performances de voilures tournantes au sens large (hélices aériennes, rotors d'hélicoptères, éoliennes, etc ...) constituent l'une des préoccupations majeures de nombreuses recherches développées tant sur le plan théorique qu'expérimental.

Sous l'aspect théorique, les méthodes de calcul proposées vont de modèles simples destinés à l'avant projet et à la conception des voilures, à des méthodes numériques sophistiquées et plus spécifiquement appropriées à la prévision fine des performances et de l'écoulement autour des pales, ainsi que de leur optimisation.

Sous l'aspect expérimental, l'objectif poursuivi est d'une part de servir de base de comparaison aux méthodes proposées, et d'autre part de fournir les données utiles à la construction et à l'amélioration de ces modèles.

Les travaux menés dans le domaine de voilures tournantes, sont analysés dans ce qui suit suivant chacun des volets théorique et expérimental.

1.1. Etudes théoriques et semi – théoriques

Initialement les méthodes les plus simples ont été basées sur la théorie de quantité de mouvement unidimensionnelle due à RANKINE et FROUD [1]. Dans ce schéma théorique on considère la voilure tournante comme un disque portant, infiniment mince, à nombre de pales infini, et communiquant une variation de pression Δp à chaque particule qui traverse le disque balayé par les pales. L'hypothèse restrictive du concept de disque sustentateur a pour conséquence directe de sous estimer la puissance réelle fournie à la voilure, en négligeant les variations radiales et non uniformes des vitesses induites.

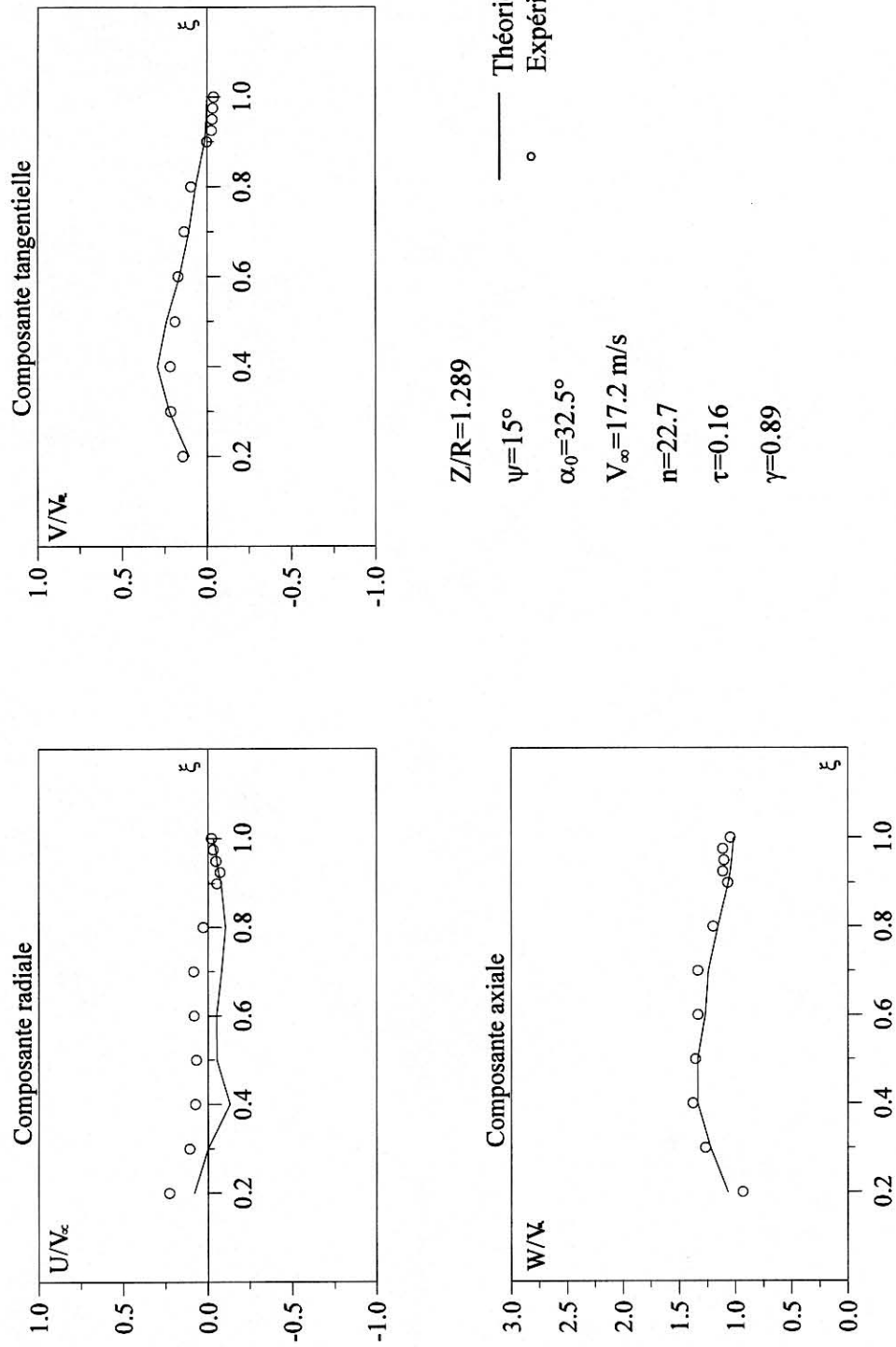


Figure 4.40 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$

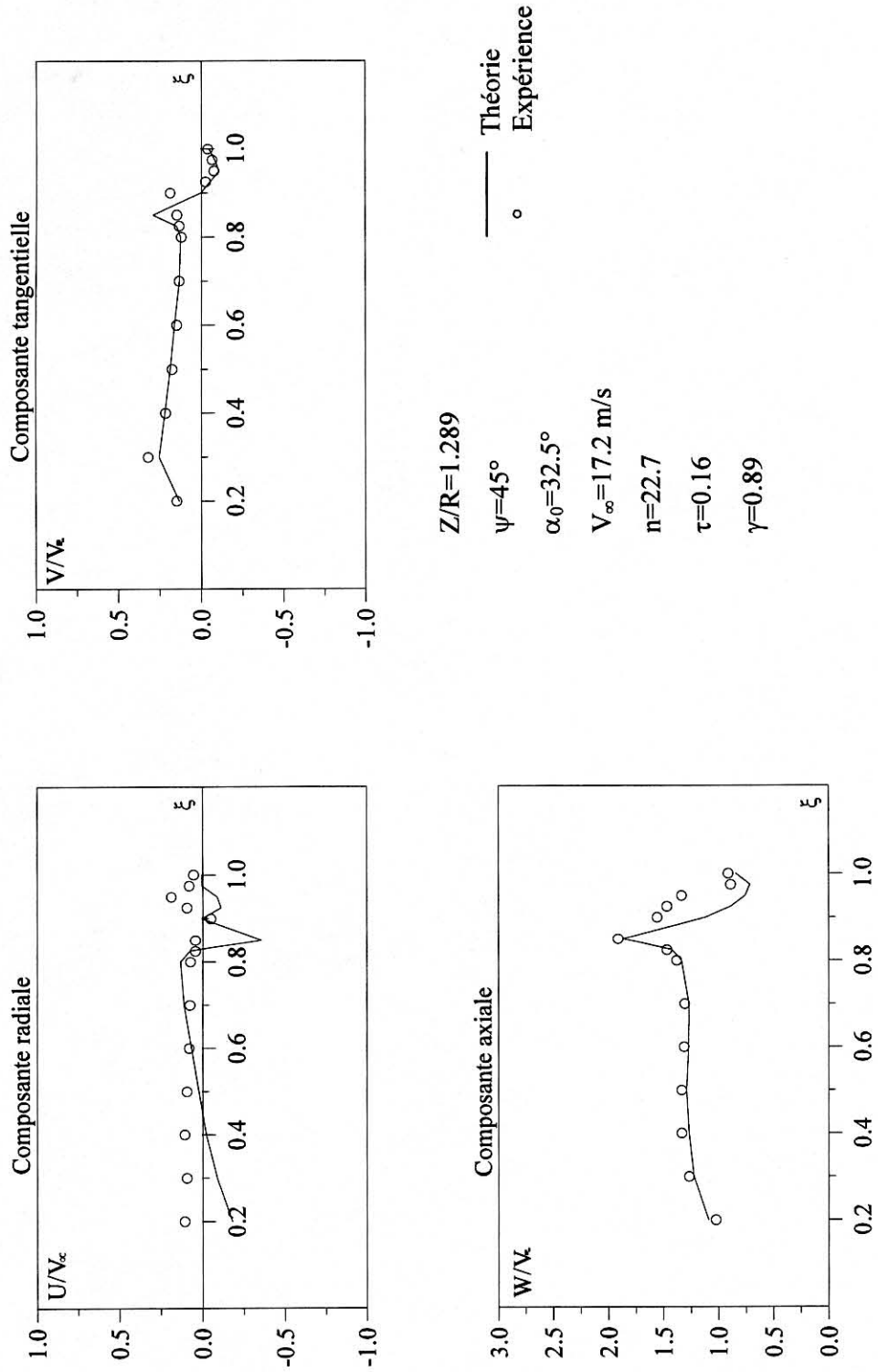
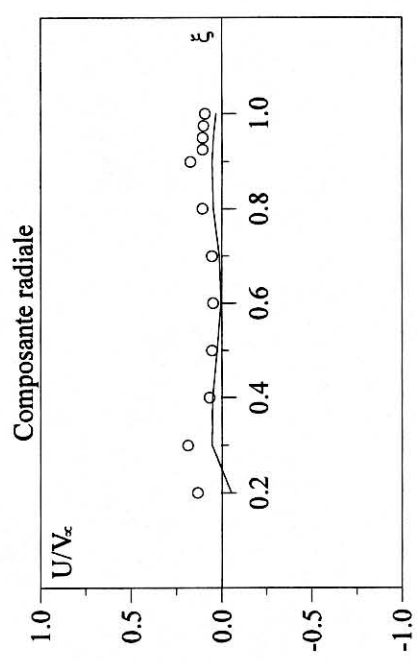
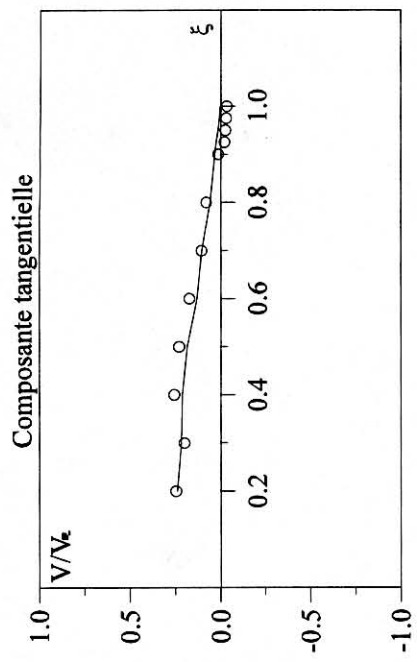


Figure 4.41 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$



$Z/R=1.289$
 $\psi=75^\circ$
 $\alpha_0=32.5^\circ$
 $V_\infty=17.2 \text{ m/s}$
 $n=22.7$
 $\tau=0.16$
 $\gamma=0.89$

— Théorie
 o Expérience

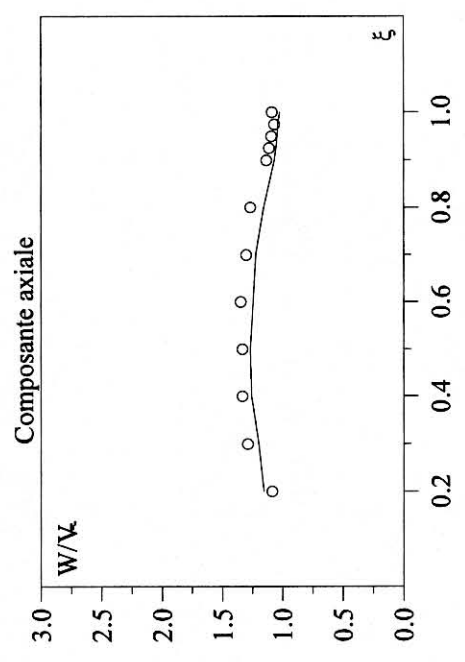
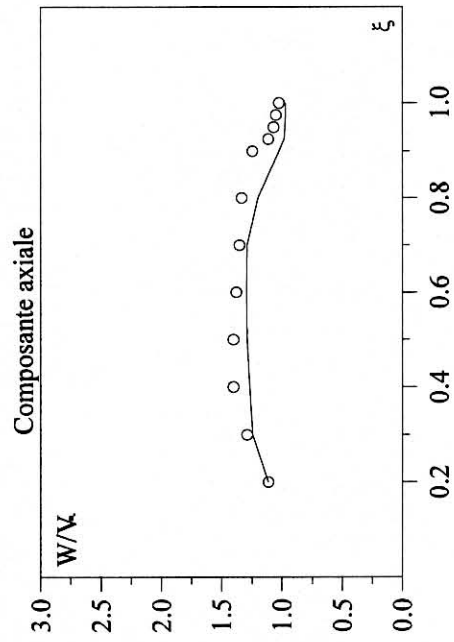
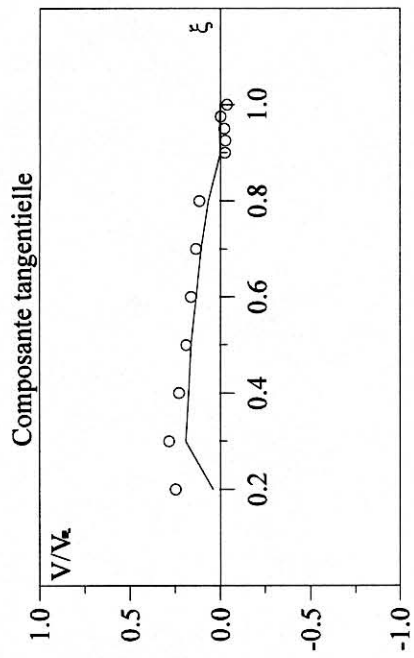
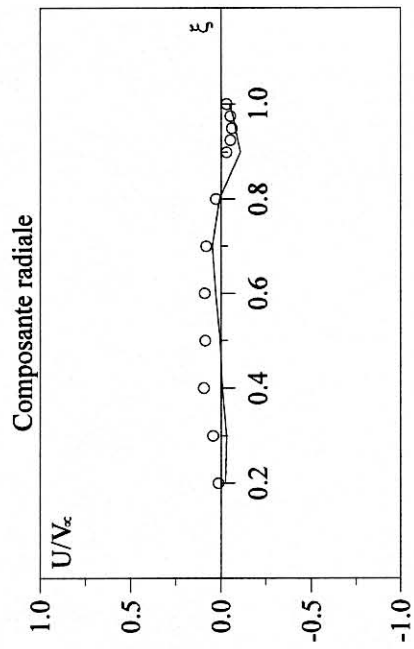


Figure 4.42 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$



$Z/R=1.819$

$\psi=30^\circ$

$\alpha_0=32.5^\circ$

$V_\infty=17.2 \text{ m/s}$

$n=22.7$

$\tau=0.16$

$\gamma=0.89$

— Théorie
○ Expérience

Figure 4.43 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$

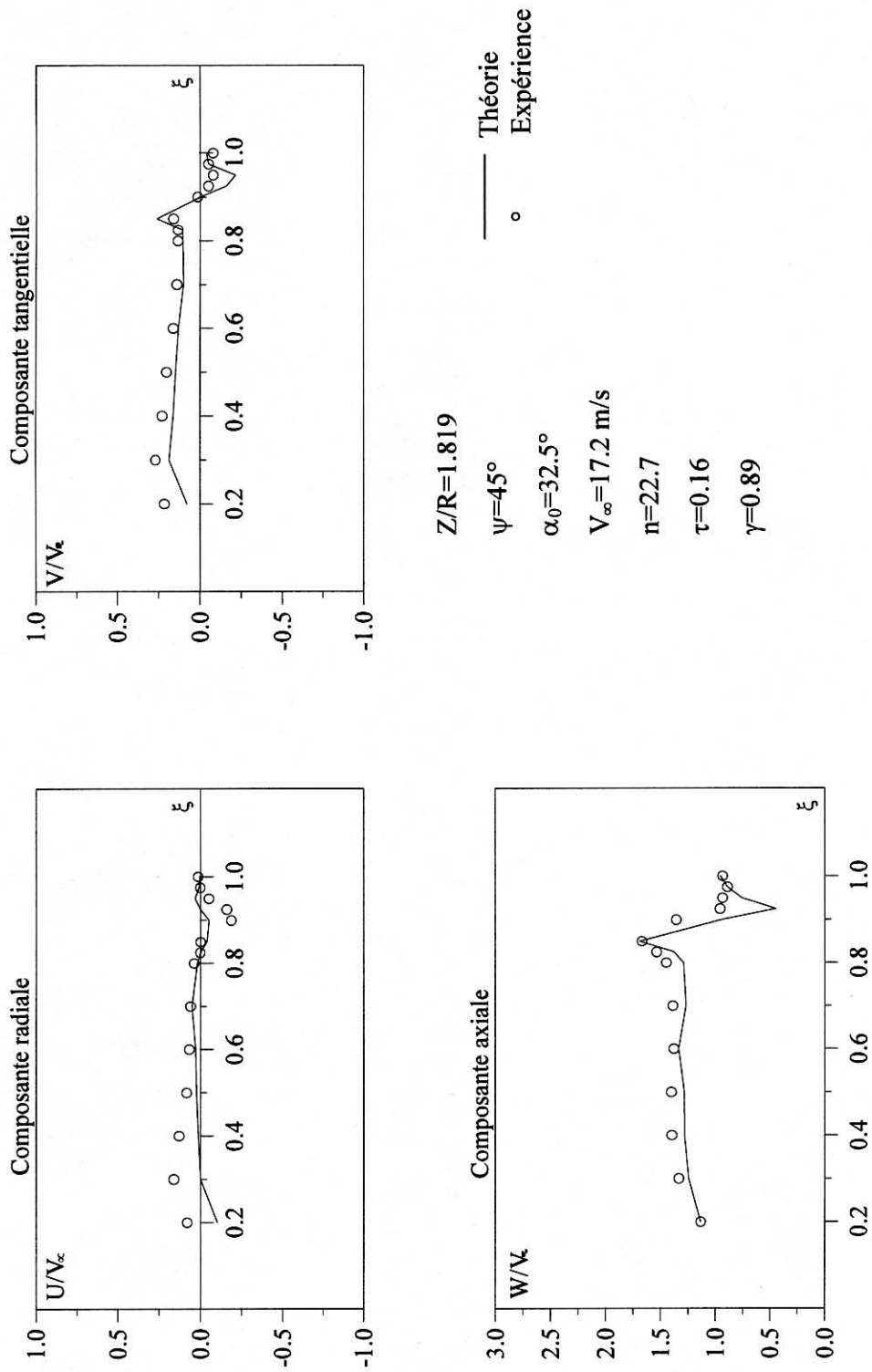
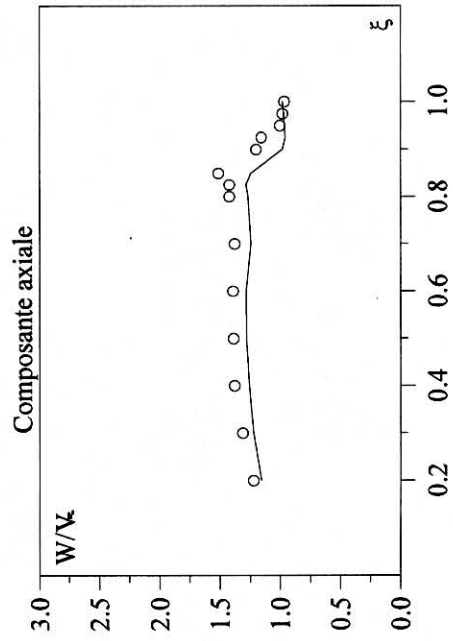
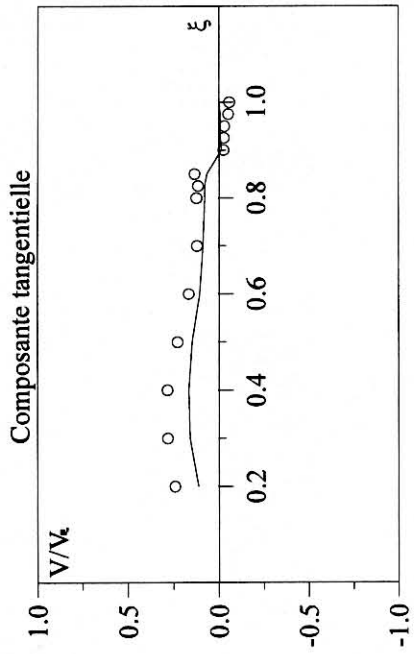
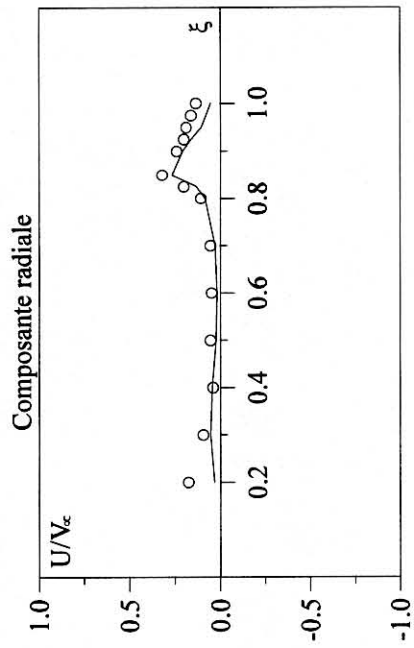


Figure 4.44 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$



$Z/R=1.819$

$\psi=60^\circ$

$\alpha_0=32.5^\circ$

$V_\infty=17.2 \text{ m/s}$

$n=22.7$

$\tau=0.16$

$\gamma=0.89$

— Théorie
○ Expérience

Figure 4.45 : Champ de vitesses instantané correspondant au régime de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$ et $\gamma=0.89$

CONCLUSION

Le champ aérodynamique associé à une hélice aérienne opérant de façon isolée, a été étudié numériquement dans le cadre du présent mémoire.

La configuration étudiée a donné lieu à l'élaboration d'un modèle de calcul, dont la validation a été effectuée par comparaison aux résultats expérimentaux.

Le modèle proposé est basé sur la représentation de la pale par une ligne portante rectiligne (L.P.R) et effectue une mise en équilibre complète du sillage associé à un point de fonctionnement donné de l'hélice.

Les nombreuses confrontations calcul-expérience établies dans cette étude ont montré une bonne efficacité du modèle à prédire : d'une part les performances globales de l'hélice (traction, couple, rendement) dans une large gamme de paramètres de fonctionnement (α_0 , γ) ; et d'autre part les caractéristiques locales du champ aérodynamique, notamment les champs de vitesses 3D (moyens et instantanés) en différentes sections aval du sillage.

L'ensemble de ces comparaisons calcul/expérience a cependant fait apparaître la nécessité d'une meilleure modélisation du champ des vitesses dans la région du pied de pale (voisinage du moyeu). De même, la zone des fortes tractions voisines du décrochage requiert un effort de modélisation du sillage, notamment sur les lois d'évolution de la lanière tourbillonnaire marginale.

Sur le plan des perspectives, l'amélioration du modèle présent pourrait être envisagée par une procédure de double mise en équilibre. La première Consistant à calculer par itérations successives la trajectoire tourbillonnaire marginale de façon à converger sur une configuration du sillage similaire à celle actuellement prescrite par les

lois de synthèse expérimentales (convergence sur la conservation du débit par exemple). La seconde procédure de mise en équilibre de la nappe interne restant la même que celle proposée dans cette étude.

APPENDICE A

Liste des symboles

C_x	Coefficient de traînée
C_z	Coefficient de portance
D	Diamètre de l'hélice ($D=0,8h$)
D₀	Diamètre du moyeu ($D_0=0,14h$)
H	Pas l'hélice
MP	Nombre de pales
N	Nombre de tour par seconde de l'hélice
O_{x'y'z}	Référentiel absolu
O_{xyz}	Référentiel relatif
P	Puissance
R₀	Rayon du moyeu $R_0=D_0/2$
R₁	Rayon de l'hélice $R_1=D/2$
T	Traction
V	Vitesse absolue
V_∞, V₀	Vitesse à l'infini amont (m/s)
W	Vitesse relative
X	(x, y, z) point de l'espace
b	Nombre de pales
c	Corde
c_b	Cambrure
e/c	Épaisseur relative des profils de la pale
i°	Incidence relative du profil (deg)
l	Corde du profil
n	Nombre de tours par seconde de l'hélice
 r 	Norme du vecteur r
p	Champ de pression
t	Temps (s)
Γ	Circulation (m ² /s)

Ω	Vitesse de rotation de l'hélice (rad/s)
α_0	Calage moyen des pales à $r = 0.R_1$; $\alpha_0 = \alpha_B + \alpha_c$ (deg)
α_B	Angle d'incidence relatif à la bi-tangente intrados (deg)
α_c	Angle d'incidence relatif au bord d'attaque du profil (deg)
γ	Paramètre de fonctionnement ; $\gamma = V_\infty / N.D$
η	Rendement de l'hélice ($\eta = \gamma . \tau / \chi$)
ν	Viscosité cinématique
ρ	Masse volumique de l'air (kg/m^3)
θ_v	Loi de vrillage de la pale de l'hélice
τ	Coefficient de traction ($\tau = T / \rho N^2 . D^4$)
ω	Facteur tourbillon ; $\omega = (1/2) . \text{rot}(V)$
ξ	Rayon réduit ($\xi = r / R_1$)
χ	Coefficient de puissance ($\chi = P / \rho N^3 . D^5$)
$\psi = \Omega . t$	Amplitude de déplacement de la pale par rapport à la position de référence (deg)

Par la suite, et dans le but de prendre en compte le fonctionnement aérodynamique local des sections de pales (pour pouvoir analyser l'influence d'un certain nombre de paramètres caractérisant la voilure), la théorie précédente a été étendue aux éléments de pale [2], [3]. Cette nouvelle théorie, consiste à assimiler le disque rotor à une série de couronnes concentriques circulaires. Un élément de pale situé à un rayon r , et placé au calage α_r , est attaqué par l'écoulement suivant un angle d'incidence variable θ_r , il est donc possible d'introduire la puissance élémentaire fournie à chaque élément de pale et d'en déduire la puissance totale en tenant compte de la vitesse périphérique de rotation, du nombre fini de pales, de leur forme en plan, et de leur loi de vrillage.

Toutefois dans ces deux classes de méthodes, la notion de sillage est généralement omise, la perte de puissance demeure ainsi mal optimisée, en particulier aux extrémités de pales où l'influence des tourbillons marginaux est dominante. Pour pallier cet inconvénient, la notion de nappe tourbillonnaire a été introduite pour prendre en compte l'influence du sillage développé dans le champ proche où éloigné des pales. La définition de ces nappes repose sur le concept de Poincaré qui utilise la notion de vitesse induite associée à la loi de BIOT et SAVART. Cette théorie générale des nappes tourbillonnaire a par exemple été développée en 1982 par MURDY [4] dans le cas de profils 2D ou 3D.

Chronologiquement, l'utilisation de ces nappes a débuté par des développements purement théoriques en écoulement incompressible, parmi lesquels on peut citer la théorie de la ligne portante de Prandtl et la théorie de la surface portante. Puis une tendance nouvelle, basée sur des modèles numériques est apparue grâce au développement de la puissance des ordinateurs. Leur domaine d'application a ainsi pu être étendu à celui de l'aérodynamique compressible.

Des hélices classiques pour avions subsoniques aux hélices transsoniques pour avions rapides, en passant par les rotors d'hélicoptères opérant suivant différentes configurations de vol, les méthodes de calcul qui reposent sur la notion de nappes tourbillonnaires diffèrent principalement les unes des autres par la manière dont est modélisé le sillage tourbillonnaire généré par le fonctionnement aérodynamique des pales.

Nappe tourbillonnaire : C'est une surface continue, constituée de lanières tourbillonnaires.

sillage en équilibre : Un sillage est en équilibre si le champ de vitesse est tangent en chacun de ses points.

Référentiels : (voir schéma ci-dessous)

Référentiel absolu $Oxyz$:

Oz : Axe de rotation, dirigé vers l'aval de l'hélice.

Ox : Axe passant par le rayon de la pale, et dont le sens est défini de l'extrémité de pale vers le moyeu.

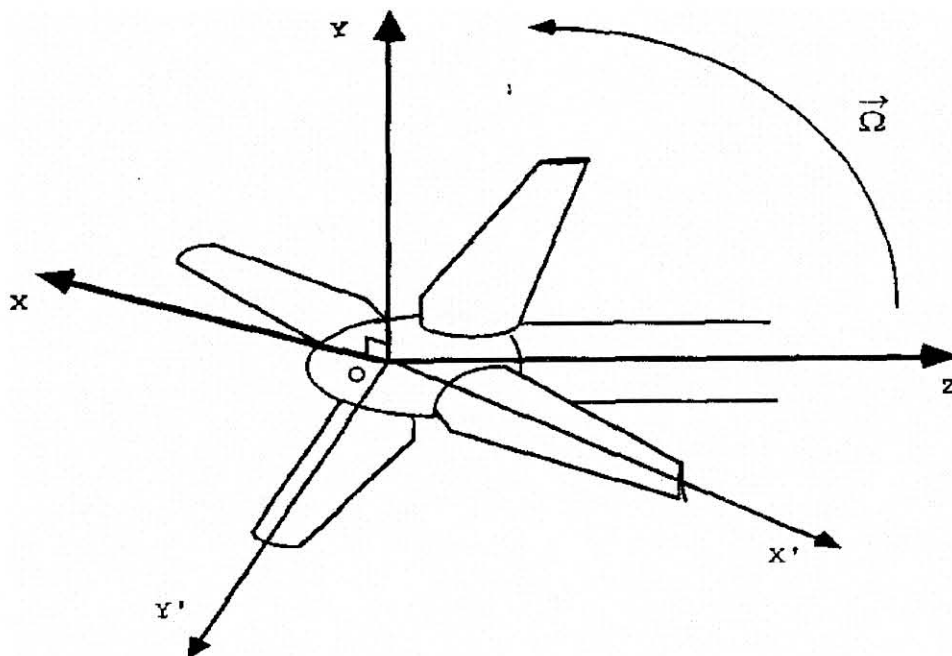
Oy : Axe ascendant complétant le trièdre direct.

Référentiel relatif $Ox'y'z$:

Oz : Axe identique à celui défini dans le référentiel absolu.

Ox' : Axe porté par l'une des pales de l'hélice et dont le sens est défini du moyeu vers l'extrémité.

Oy' : Axe complétant le trièdre direct.



APPENDICE C

Approximation des fonctions par les polynômes orthogonaux Approximation intégrales . Points de discrétisation

Soit I un intervalle fermé de \mathbb{R} et p une fonction continue de I dans \mathbb{R}^*_+ , et soit E l'ensemble défini par :

$$E = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ continue sur } I; \int_I f^2 \cdot p < +\infty \right\}$$

Remarque : Si I n'est pas borné, on suppose de plus que p est à décroissance exponentielle, c'est à dire $\exists \alpha > 0; \exists M > 0; \forall x; x \in I \text{ et } |x| > M \Rightarrow p(x) \leq e^{-\alpha|x|}$

On muni E du produit scalaire $\langle f/g \rangle = \left(\int_I f \cdot g^* \cdot p \right)^{1/2}$; où g^* est la fonction conjuguée de g ; donc de la norme définie par : $|f| = \left(\int_I f^2 \cdot p \right)^{1/2}$, et on note $\underline{L}_2(I, p)$ le complété topologique de E pour cette norme.

Notons par P l'ensemble des polynômes. On montre que l'adhérence de P est égale à $\underline{L}_2(I, p)$. Soit donc un élément f de $\underline{L}_2(I, p)$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Parmi les polynômes H de degré inférieur ou égal à n , il en existe un et un seul rendant $|f - H|$ minimum, c'est la projection orthogonale de f sur le sous espace vectoriel engendré par la famille $(1, x, \dots, x^n)$. La famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déduite de la famille $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt s'appelle famille de polynômes orthonormés sur I associé au poids p . Cette nouvelle famille constitue une base hilbertienne de $\underline{L}_2(I, p)$ et on a alors :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} C_k \cdot H_k \quad (\text{sommation au sens de la norme } |\cdot|)$$

$$C_k = \int_I f \cdot H_k^* \cdot p$$

Le polynôme de degré inférieur ou égal à n approchant au mieux f au sens de la norme $|\cdot|$ est :

$$H = \sum_{0 \leq k \leq n} C_k \cdot H_k$$

1. Polynômes de Legendre Points et méthode d'intégration de Gauss :

On peut toujours se ramener à l'intervalle $[-1, +1]$ par la transformation suivante, chaque fois qu'il s'agit d'effectuer des sommations sur $[a, b]$:

$$x = \frac{y - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}; y \in [a, b]$$

Les points de Gauss sur $[-1, +1]$ sont obtenus en calculant les racines du polynôme de Legendre $P_n(x)$ associé au poids $p(x)=1$, la méthode itérative de Newton permet d'atteindre cet objectif, et la formule d'intégration de Gauss s'écrit alors:

$$\int_{-1,+1] f(x).dx = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i \cdot f(x_i)$$

où : $\omega_i = \frac{2}{(1-x_i^2)(P_n'(x_i))^2}$

x_i : racine de :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

2 Polynômes de Jacobi Points de Lobatto :

De la même manière que précédemment on obtient les points de Lobatto qui sont les racines du polynôme Q_n de Jacobi, associé au poids $p(x)=(1+x) \cdot (1-x)$, et donné par :

$$P_n(x) = \left(\frac{-1^n}{2^n \cdot n!}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-x^2}\right) \cdot \left(\frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}\right)$$

3 Polynômes de Legendre Points et méthode d'intégration de Gauss-Legendre :

Ce type d'approximation est utilisé chaque fois qu'il s'agit d'un domaine non borné tel que : $[a, +\infty[$. Avec la transformation $x = y - a$ où $y \in [a, +\infty[$, on peut toujours se ramener à l'intervalle $[0, +\infty[$.

Les polynômes de Laguerre sont associés au poids $p(x) = e^{-x}$. Les points de Gauss-Laguerre s'obtiennent de la même manière que précédemment en résolvant dans $[0, +\infty[$, par la méthode itérative de Newton, l'équation :

$$P_n(x) = 0 \quad \text{où : } P_n(x) = e^x \frac{d^n(x^n \cdot e^{-x})}{dx^n}$$

La formule de Gauss-Laguerre s'écrit alors :

$$\int_{0, +\infty[} e^{-x} \cdot f(x) \cdot dx = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i \cdot f(x_i)$$

où x_i est une racine de $P_n(x)$, et ω_i le poids de la formule d'intégration tel que :

$$\omega_i = \int_{0, +\infty[} \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) dx$$

Ce sont ces trois types de points et de formules d'intégrations qui ont été utilisés.

Actuellement on distingue deux grands types de modèles de sillage, de nature théorique ou semi-théorique, que l'on peut associer au fonctionnement de la pale (elle même représentée par une ligne ou une surface portante mince ou épaisse).

Pour les modèles de sillages purement analytiques, la théorie tourbillonnaire, telle qu'elle résulte en particulier des travaux de JOUKOWSKY et de PRANDLT, a pu être développée grâce aux travaux de GOLDSTEIN [5] et de LOCK [6]. GOLDSTEIN a partiellement appliqué aux hélices ses travaux sur le champ des vitesses qui sont induites par des surfaces hélicoïdales rigides se déplaçant dans un fluide parfait. Parmi les travaux qui adoptent également un sillage analytique de type hélicoïdal, on peut également citer les modèles proposés par SIESTRUNC [7], HIRSCH et LUU [8].

D'autres auteurs [3], [9] ont également proposé de représenter le disque portant et le souffle moyen de l'hélice par l'intermédiaire d'anneaux tourbillonnaires qui, en s'échappant dans le sillage, suivent des lois de contractions prescrites (par l'expérience ou par la conservation du débit théorique déduit des relations de Froude).

Notons enfin dans cette classe de modèles de sillage théoriques, le développement d'une nouvelle génération de modèles, basés sur la méthode des singularités [10], [11], [12], [13], et qui consiste à calculer la géométrie du sillage selon un procédé itératif. Ce procédé permet de suivre l'évolution du sillage généré à l'aval des pales depuis un instant initial où le fluide est généralement au repos jusqu'à un état stationnaire (périodique ou établi). Cependant, un certain nombre de problèmes restent encore largement ouverts (convergence de la procédure, temps de calcul important, etc ...) dans ce type de méthodes.

Le second type de modèles, le plus souvent utilisé à l'heure actuelle [14], [15], repose sur la mise en équilibre du sillage à partir d'une configuration géométrique initiale généralement prescrite par l'expérience, Ce modèle de sillage est ensuite déformé progressivement sous l'influence du champ des vitesses induites, et le processus itératif s'arrête dès que le vecteur vitesse est tangent à la nappe tourbillonnaire en chacun de ses points de contrôles (réalisant ainsi une condition d'équilibre).

Il est à noter que cette condition d'équilibre n'est généralement réalisée que sur la lanière tourbillonnaire marginale. La procédure de mise en équilibre qui est proposée au

chapitre 2 pour l'hélice isolée, conduira à effectuer une mise en équilibre complète du sillage (à la fois sur la lanière marginale et sur les lanières émises le long de l'envergure de pale pour former la nappe tourbillonnaire interne).

Dans cette approche d'inspiration semi-théorique, on peut citer les contributions de LANDGREBE [16], COURGARET [17], MARESCA, FAVIER, NSI MBA [18], ETTAOUIL [19], pour des études où la pale est représentée par une ligne portante rectiligne et la géométrie initiale du sillage a été prescrite par l'expérience. De même on peut citer les travaux de BOUSQUET [20], SCULLY [21], KOCUREK et TANGLER [22], qui ont pris en compte pour des besoins du vol à grande vitesse, la géométrie de pales fortement vrillées ou à extrémités évolutives,

Enfin dans le cas des hélices aériennes l'effort de recherche s'est orienté vers l'élaboration de codes de calculs capables de définir le plus finement possible des géométries de pales pour avions rapides qui, sur le plan des économies d'énergie, permettent de concurrencer les avions à propulsion par turboréacteur. On peut citer en particulier les travaux de BOUSQUET [23] à [26] à l'ONERA orientés principalement vers le développement d'hélices destinées au régime transsonique et à géométries de pales complexes.

1.2. Etudes expérimentales

L'analyse précédemment menée sur les travaux théoriques montre que la plupart des méthodes de calcul se fondent sur la conception d'une configuration tourbillonnaire géométrique bien définie dans le sillage aval.

C'est en effet à partir de cette configuration des systèmes tourbillonnaires qu'est calculé le champ des vitesses induites permettant de déterminer le comportement aérodynamique local des sections de pales, et par suite les performances globales de la voilure tournante (traction, puissance, rendement).

Dans ces conditions, le rôle de l'analyse expérimentale consiste à caractériser le champ aérodynamique proche et éloigné de la voilure tournante, et à en déduire des

configurations d'écoulement suffisamment modélisées, pour être introduites dans les méthodes de calcul précédemment mentionnées.

Comme l'indique le recensement des travaux expérimentaux effectué ci-dessous, des synthétisations empiriques (loi de contraction radiale du sillage, vitesse de convection axiale des tourbillons, etc ...) sont à l'heure actuelle disponibles pour décrire le champ aérodynamique associé à des rotors d'hélicoptères ou à des hélices aériennes opérant de manière isolée dans différentes conditions de vol.

De nombreuses études ont été conduites essentiellement sur des rotors en vol stationnaire ou d'avancement, ainsi que sur des hélices en vol de translation axiale, les méthodes de mesures mises en oeuvre sont principalement basées soit sur des techniques de visualisation, soit sur des méthodes anémométriques de type fils chauds ou Doppler à laser.

Les méthodes de visualisation utilisant des émissions de fumée pour les souffleries à air [27], ou des émissions de liquides colorés [28] pour les souffleries à eau, ont connu des améliorations techniques appréciables, notamment au niveau des procédés d'enregistrement et d'acquisition de données (caméra vidéo, magnétoscope, traitement d'image, ...) et sont largement utilisées dans les études expérimentales actuelles.

Cette technique, permettant de matérialiser les systèmes tourbillonnaires s'échappant du bord de fuite et des extrémités de pales, a été mise à profit notamment par LANDGREBE [16], pour modéliser les trajectoires tourbillonnaires dans le champ proche de rotors en vol stationnaire, et ceci dans une large gamme de conditions de fonctionnement (traction, calage, nombre de pales, vrillage, ...). Des lois empiriques d'évolution des coordonnées axiales et radiales du tourbillon marginal, en fonction de l'azimut de rotation, ont ainsi pu être établies par Landgrebe sous la forme suivante:

- Coordonnée axiale :

$$\begin{aligned} z/R &= k_1 \cdot \psi & ; 0 \leq \psi \leq 2\pi/b \\ z/R &= k_1 \cdot (2\pi/b) + k_2 \cdot (\psi - 2\pi/b) & ; \psi \geq 2\pi/b \end{aligned}$$

- Coordonnée radiale :

$$r/R = A + (1-A) \cdot e^{-B \cdot \psi}$$

expressions dans lesquelles b représente le nombre de pales, et où les coefficients A , B , k_1 et k_2 ne dépendent que du calage et du coefficient de traction.

Ces lois d'évolution du tourbillon d'extrémité, jointes à celles de la nappe tourbillonnaire interne constituent actuellement la base de modélisation géométrique du sillage figé sur laquelle sont construites la plupart des méthodes de calcul (par mise en équilibre) des performances du rotor en vol stationnaire. Cette formulation est actuellement en voie de généralisation pour des configurations de rotors en vol d'avancement [16]. Toutefois, il faut souligner que ces techniques de visualisations restent limitées à l'analyse du sillage proche des pales, et ne permettent pas l'exploration du sillage lointain en raison de la diffusion rapide des filets de fumées révélant l'écoulement. A cet égard, la technique au fil chaud permet d'atteindre cette information [29], [30], et de déterminer la position spatiale et azimutale du sillage lointain jusqu'à plus de 1 diamètre environ en aval du plan de rotation. Par exemple les études menées à l'IMFM [30] ont permis d'établir une modélisation du sillage associé au fonctionnement d'une hélice quadripale suivant la formulation de synthèse qui sera décrite au paragraphe (2.6.1).

Cette formulation montre en particulier qu'avec une vitesse amont V_∞ , les lois d'évolution du tourbillon marginal sont similaires à celles du rotor en vol stationnaire, mais que les coefficients A , B , k_1 et k_2 dépendant du calage et du coefficient de traction, sont également fonction des conditions du fonctionnement amont par l'intermédiaire du paramètre $\gamma = V_\infty / n \cdot D$.

Les méthodes d'exploration les plus performantes à l'heure actuelle, et qui permettent une analyse 3D du sillage proche et lointain sont les méthodes anémométriques à fils chauds et à laser. D'une façon générale, ces méthodes conduisent à établir des champs 3D de vitesses induites en différentes sections à l'aval du plan de rotation, et permettent de définir de façon précise et complète la géométrie du sillage associé à un fonctionnement donné.

En outre, les techniques de vélocimétrie laser ont pu être récemment mises au point et développées [31], pour la détermination de la distribution de circulation, le long de l'envergure de pale dans le cas de rotors en vol stationnaire. Les travaux menés dans le domaine à l'IMFM [31], ont notamment permis d'aboutir à l'établissement de formulation de synthèse sur la distribution de circulation, cette quantité représentant un paramètre important pour la validation des méthodes précédemment citées.

CHAPITRE 2

APPROCHE THEORIQUE

2.1. Equations générales des écoulements tourbillonnaires

L'écoulement instationnaire d'un fluide incompressible visqueux est régi par les équations de Navier Stokes sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \text{grad}(p) / \rho = \nu \cdot \Delta(\vec{V}) \quad (1)$$

$$\text{div}(\vec{V}) = 0$$

où \vec{V} est le champ de vitesse, ρ la densité constante du fluide, p le champ de pression, ν le coefficient de viscosité cinématique du fluide, et $\vec{\nabla}$ l'opérateur vectoriel défini dans le référentiel Oxyz par : $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$.

Au système (1) doivent être rajoutées les conditions aux limites et initiales. En prenant le rotationnel de la première équation du système (1), on obtient l'équation du vecteur rotationnel $\vec{\omega}$, et l'on peut remplacer le système (1) par le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} &= (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \nu \cdot \Delta(\vec{\omega}) \\ \vec{\omega} &= \frac{1}{2} \cdot \text{rot}(\vec{v}) \\ \text{div}(\vec{V}) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

2.2. Détermination du champ des vitesses en fluide parfait incompressible

Si le fluide est parfait, le système (2) se réduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} &= (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \\ \vec{\omega} &= \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v}) \\ \text{div}(\vec{V}) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

La condition d'incompressibilité, sera remplie si l'on pose :

$$\vec{V} = \text{rot}(\vec{\Psi}) \quad (4)$$

où $\vec{\Psi}$ est un potentiel vecteur dépendant des coordonnées de l'espace. Il est clair que le champ des vitesses ne se trouve pas modifié si on remplace le vecteur $\vec{\Psi}$ par un vecteur $\vec{\Psi}'$, différent du premier par la valeur du vecteur gradient d'une fonction scalaire. C'est à dire si l'on pose :

$$\vec{\Psi}' = \vec{\Psi} + \text{grad}(\varphi)$$

où φ est une fonction scalaire arbitraire.

Ainsi donc, le potentiel vecteur dans l'équation (4) ne se définit pas de façon unique. On impose alors au vecteur $\vec{\Psi}$ de satisfaire à la condition supplémentaire :

$$\text{div}(\vec{\Psi}) = 0 \quad (5)$$

et compte tenu de cette condition, on déduit de (4) l'équation vectorielle de Poisson pour le vecteur $\vec{\Psi}$:

$$\Delta(\vec{\Psi}) = -2.\vec{\omega} \quad (6)$$

qui est équivalente à trois équations de Poisson scalaires. De l'équation (6), on déduit la

solution du problème, qui consiste à déterminer le champ vectoriel d'après la distribution des tourbillons $\vec{\omega}$. Elle est donnée sous la forme [32] :

$$\vec{V} = \frac{1}{2} \pi \cdot \iiint \left(\frac{\vec{\omega} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) d\tau \quad (7)$$

où \vec{r} est le vecteur défini par $\vec{r} = X - X_0$ avec $X=(x, y, z)$ est le point d'observation, et $X_0 = (\xi, \eta, \zeta)$ est la variable d'intégration,

2.3. Loi de Biot et Savart et vitesses induites

Supposons maintenant que dans un domaine illimité de fluide parfait et incompressible, soit donné un tube tourbillonnaire (T) isoler infiniment délié que l'on peut considérer, à la limite, comme une ligne tourbillonnaire (voir schéma ci-contre).

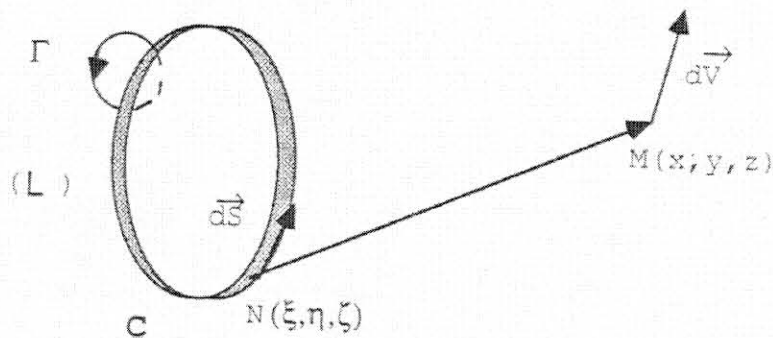


Figure 2.1 : Ligne tourbillonnaire

On peut écrire à partir de la formule (7) :

$$\vec{V} = \frac{1}{2} \pi \cdot \iiint \left(\frac{\vec{\omega} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) d\tau \quad (8)$$

L'intégrale étant étendue au domaine (T) occupé par le tube tourbillon. Or d'après les hypothèses faites sur ce tube on a :

$$\vec{\omega} \cdot d\tau = \vec{\omega} \cdot \vec{ds} \cdot d\sigma = \vec{ds} \cdot \vec{\omega} \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot \vec{ds}$$

où \vec{ds} est un élément de la ligne (C), et Γ la circulation de la vitesse le long de tout contour (L), entourant une fois le tube tourbillonnaire.

La valeur constante de cette circulation Γ , représente la caractéristique cinématique principale du tube tourbillonnaire (théorème de Kelvin). En passant à la limite dans (8) lorsque $d\sigma$ tend vers zéro et $|\vec{\omega}|$ tend vers l'infini, et en posant que la circulation est égale à une valeur finie ($|\Gamma| = 2 \cdot |\vec{\omega}| \cdot d\sigma$), on obtient :

$$\vec{V} = \frac{1}{4} \pi \Gamma \cdot \int_C \frac{\vec{ds} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (9)$$

On peut donner à la formule (9) la forme équivalente :

$$\vec{V} = \int_C d\vec{V}$$

avec;

$$d\vec{V} = \frac{1}{4} \pi \Gamma \cdot \frac{\vec{ds} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (10)$$

le vecteur élémentaire $d\vec{V}$ peut être interprété comme la vitesse élémentaire induite par un élément \vec{ds} de la ligne tourbillonnaire en un point donné $M(x, y, z)$ (voir schéma ci-dessus). L'égalité vectorielle (10) représente la loi de Biot et Savart (par analogie avec l'électromagnétisme).

D'après (10), il est évident que lorsque la circulation Γ est finie, il n'y a que la ligne tourbillonnaire (C) qui est une ligne singulière dans le champ des vitesses. En se rapprochant des points du contour (C) l'intégrale définie par (9) diverge, tandis que la vitesse $|\vec{V}|$ tend vers l'infini. Ce problème sera plus étudié en détail au paragraphe (3.2).

A l'aide de la loi de Biot et Savart, On parvient ainsi à ramener le problème de l'écoulement engendré par le mouvement des pales de l'hélice dans un fluide parfait incompressible, à celui du système de tourbillons induisant le champ de vitesse cherché. Bien que, d'après le théorème de Lagrange, les tourbillons ne peuvent être créés spontanément dans un fluide parfait initialement au repos, la formation d'une surface de discontinuité de vitesse tangentielle au bord de fuite de l'aile reste néanmoins cohérente. Une telle surface de discontinuité peut être considérée comme modélisation équivalente

à une surface tourbillonnaire.

2.4. Représentation d'une surface de discontinuité de vitesses par une nappe tourbillonnaire

La surface de discontinuité des vitesses notée (Σ) est, au point de vue du calcul, équivalente [33] à une surface de tourbillon, en effet :

Soit $\vec{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ la normale orientée à la surface (Σ) en M, et soient M_1 et M_2 deux points infiniment voisins du point M situés de part et d'autre de (Σ) , $\vec{V}_1(u_1, v_1, w_1)$ et $\vec{V}_2(u_2, v_2, w_2)$ les limites respectives du vecteur vitesse $\vec{V}(u, v, w)$ en M_1 et M_2 , et soient $\alpha.x + \beta.y + \gamma.z = h$ et $\alpha.x + \beta.y + \gamma.z = h + \delta$ les équations respectives des plans passant par M_1 et M_2 , parallèles au plan tangent à (Σ) en M (voir schéma ci-contre)

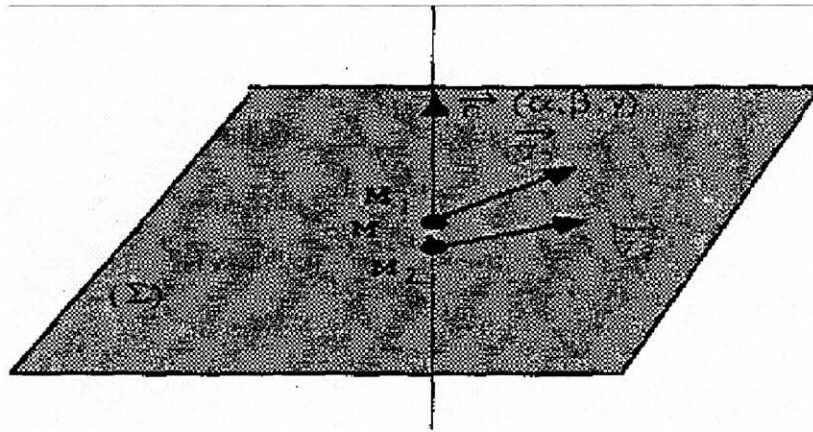


Figure 2.2 : Surface de discontinuité

Posons :

$$\begin{aligned} u &= u_2 + (u_1 - u_2) \cdot (1 - (\alpha.x + \beta.y + \gamma.z - h) / \delta) \\ v &= v_2 + (v_1 - v_2) \cdot (1 - (\alpha.x + \beta.y + \gamma.z - h) / \delta) \\ w &= w_2 + (w_1 - w_2) \cdot (1 - (\alpha.x + \beta.y + \gamma.z - h) / \delta) \end{aligned} \quad (11)$$

Cette distribution des vitesses correspond bien aux conditions de discontinuité des vitesses cherchées sur (Σ) on a en M_1 : $\vec{V} = \vec{V}_1$ et en M_2 : $\vec{V} = \vec{V}_2$, le tourbillon $\vec{\omega}$ a pour composantes :

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2\delta} (\gamma \cdot (v_1 - v_2) - \beta \cdot (w_1 - w_2)) \\
\eta &= \frac{1}{2\delta} (\alpha \cdot (w_1 - w_2) - \gamma \cdot (u_1 - u_2)) \\
\zeta &= \frac{1}{2\delta} (\beta \cdot (u_1 - u_2) - \alpha \cdot (v_1 - v_2))
\end{aligned} \tag{12}$$

il est clair que le tourbillon $\vec{\omega}$ est tangent à la surface (Σ) puisque $\vec{n} \cdot \vec{\omega} = 0$. De même, on peut montrer facilement que l'existence de cette nappe de tourbillons libres est bien compatible avec les équations d'Euler.

2.5. Equations de la nappe tourbillonnaire en équilibre, générée par le fonctionnement de l'hélice

Notons \vec{W} la vitesse relative d'une particule fluide dans le référentiel $Ox'y'z$, \vec{V} sa vitesse absolue dans le système d'axes fixes $Oxyz$, $\vec{V}_e = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ sa vitesse d'entraînement, où $\vec{\Omega}$ est la vitesse de rotation de l'hélice, et r la première coordonnée cylindrique du point définissant la position de cette particule dans $Ox'y'z$. On a la composition des vitesses suivante :

$$\vec{W} = \vec{V} - \vec{V}_e$$

En remarquant que $div(\vec{V}_e) = 0$ et $rot(\vec{V}_e) = 2\vec{\Omega}$, et en écrivant le système (1) dans le référentiel relatif $Ox'y'z$ pour un fluide parfait, on aboutit au système suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (rot(\vec{W}) + 2\vec{\Omega}) \wedge \vec{W} &= -grad(E) \\
E &= \frac{P}{\rho} - \Omega^2 \cdot \frac{r^2}{2} + \frac{W^2}{2} \\
\frac{1}{2} rot(\vec{W}) + \Omega &= \frac{1}{2} rot(\vec{V}) = \vec{\omega} \\
div(\vec{W}) &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\text{où : } \Omega = |\vec{\Omega}|, \quad r = |\vec{r}| \quad \text{et} \quad W = |\vec{W}|$$

Physiquement, les nombreuses visualisations effectuées [27], [29], [34], [35] sur l'écoulement à la traversée et dans le sillage de l'hélice en fonctionnement, ont permis de dégager les deux points suivants :

- Le sillage d'une hélice propulsive est constitué d'une nappe tourbillonnaire de forme pseudo hélicoïdale.
- Les deux bords de la nappe tourbillonnaire sont enroulés d'une part à l'extrémité de la pale et d'autre part au voisinage du moyeu.

Bien que le sillage semble affecter une forme stationnaire pseudo hélicoïdale dans le référentiel relatif, la configuration des lignes de courants relatives par rapport à l'hélice est plus compliquée. En particulier au voisinage du tourbillon marginal, les lignes de courants relatives s'enroulent autour du noyau du tourbillon, elles sont donc non stationnaires dans le référentiel relatif. Cependant si l'hélice est sans incidence par rapport à l'écoulement uniforme, que sa vitesse de rotation est constante, on peut admettre en première approximation que ces lignes de courants sont stationnaires par rapport aux pales de l'hélice.

La géométrie du système tourbillonnaire peut être ainsi déterminée à partir du système (13) par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= 0 \\
 (\text{rot}(\vec{W}) + 2\vec{\Omega}) \wedge \vec{V} &= 0 \\
 \frac{1}{2}\text{rot}(\vec{W}) + \vec{\Omega} &= \frac{1}{2}\text{rot}(\vec{V}) = \vec{\omega} \\
 \text{div}(\vec{W}) &= 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

La première équation du système (14) exprime le caractère permanent du sillage dans le repère relatif Ox'y'z, tandis que la deuxième exprime l'équilibre dynamique de la nappe tourbillonnaire et indique que le sillage (zone à rotationnel de l'écoulement absolu) émis par les pales coïncide avec les lignes de courants relatives.

Généralement, le problème posé par l'écoulement généré en aval de voilures tournantes (hélices aériennes, rotors d'hélicoptères...), exige que soit donné à priori la répartition des systèmes de tourbillons libres dans l'espace, ou bien que cette caractéristique soit déterminée à partir d'équations auxiliaires (système (14) dans notre cas). Ainsi, en s'appuyant sur la théorie tourbillonnaire, la majorité des méthodes de calcul modélise le sillage par une portion d'hélicoïde de géométrie figée, à pas axial constant, sans contraction radiale, et néglige l'enroulement des nappes autour des échappements tourbillonnaire marginaux et la diffusion des tourbillons. Dans ce qui suit on va tenter de s'affranchir de certaines de ces hypothèses restrictives.

2.6. Modélisation de la nappe tourbillonnaire engendrée par la rotation des pales

2.6.1. Lois d'évolution du tourbillon marginal

Les études expérimentales menées à l'IMFM sur le sillage 3D proche et lointain d'une hélice aérienne (quadripale de type Marquis), opérant à différents paramètres de fonctionnement et suivant différents calages ont conduit à synthétiser les lois d'évolution du tourbillon marginal de la manière suivante [30], [35] :

Notons $(r_t(\psi), \psi, z_t(\psi))$ les coordonnées cylindriques d'un point courant M de la lanière tourbillonnaire marginale dans le référentiel relatif $Ox'y'z$. La contraction radiale r_t/R a été synthétisée par la relation :

$$\frac{r_t(\psi)}{R_1} = A(\alpha_0, \gamma) + (1 - A(\alpha_0, \gamma)) \cdot e^{(-1/B(\alpha_0, \gamma)) \cdot \psi} \quad (15)$$

où $0 \leq \psi \leq \psi_s$; tandis que la loi de synthèse pour la translation axial s'écrit :

$$\begin{aligned} z_t(\psi) / R_1 &= k_1(\alpha_0, \gamma) \cdot (\psi / \psi_b) && ; 0 \leq \psi \leq \psi_b \\ \text{et} &&& (16) \\ z_t(\psi) / R_1 &= k_1(\alpha_0, \gamma) + k_2(\alpha_0, \gamma) \cdot ((\psi / \psi_b) - 1) && ; \psi_b \leq \psi \leq \psi_s \end{aligned}$$

On peut remarquer que la forme des expressions (15) et (16) est parfaitement similaire à celles préconisées par LANDGREBE, KOCUREK et TANGLER pour des sillage de rotors en vol stationnaire [22], mais que les paramètres A, B, k_1 et k_2 , dépendent

ici des conditions du fonctionnement amont ($V_\infty \neq 0$) par l'intermédiaire des paramètres α_0 et γ .

Le paramètre ψ_s qui définit le domaine de validité en azimuth de ces lois, représente l'azimuth correspondant au début de la zone du sillage lointain, où la lanière tourbillonnaire perd sa permanence de forme pseudo hélicoïdale, et devient spatialement instable en raison de la diffusion et de l'interaction tourbillonnaire. Ce paramètre ψ_s a également pu être exprimé par la relation de synthèse suivante :

$$(\psi_s - \psi_b) / b.\psi_b = \frac{1}{4} \cdot \left(8.5 - \frac{\alpha_0}{10} - \gamma \cdot (\gamma + 2) \right)$$

avec $b.\psi_b = 360^\circ$

Les valeurs des coefficients intervenants dans les expressions (15), (16) :

$A(\alpha_0, \gamma), B(\alpha_0, \gamma), k_1(\alpha_0, \gamma), k_2(\alpha_0, \gamma)$ qui sont représentés par des fonctions polynomiales en fonction du paramètre de fonctionnement γ et du calage α_0 de la pale, sont données dans les références [30] et [35]. Les quatre figures suivantes représentent respectivement les variations des coefficients A, B, k_1 , k_2 en fonction du paramètre γ pour trois calages différents $\alpha_0 = 23^\circ; 27^\circ$ et 32.5° .

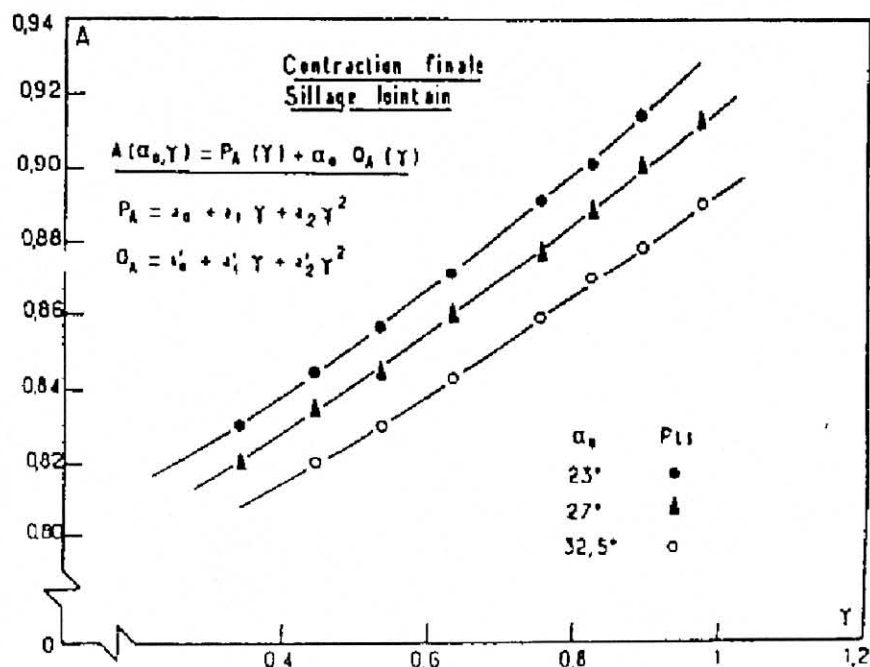


Figure 2.3 : Contraction finale (Sillage lointain)

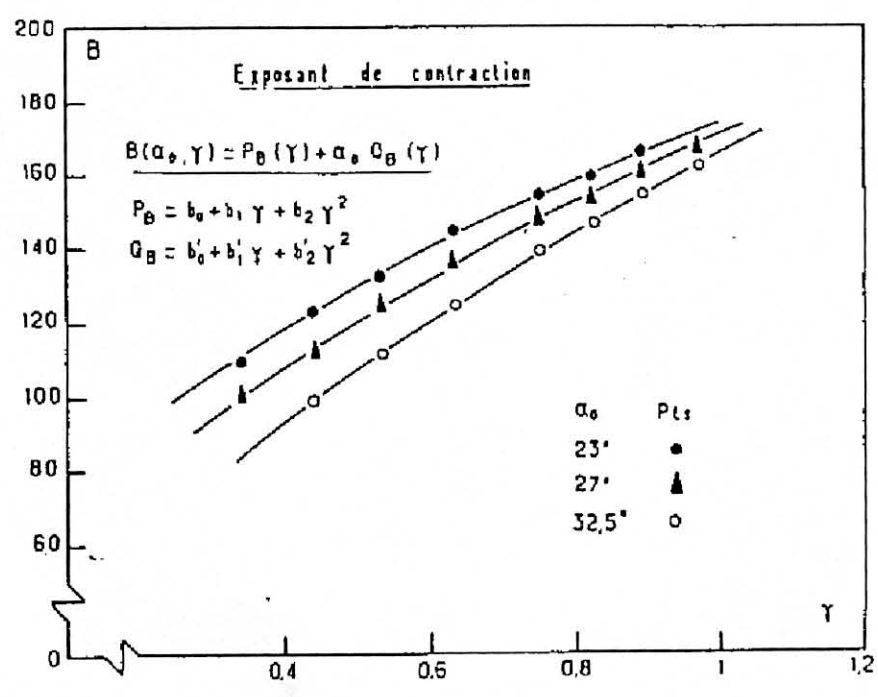


Figure 2.4 : Exposant de contraction

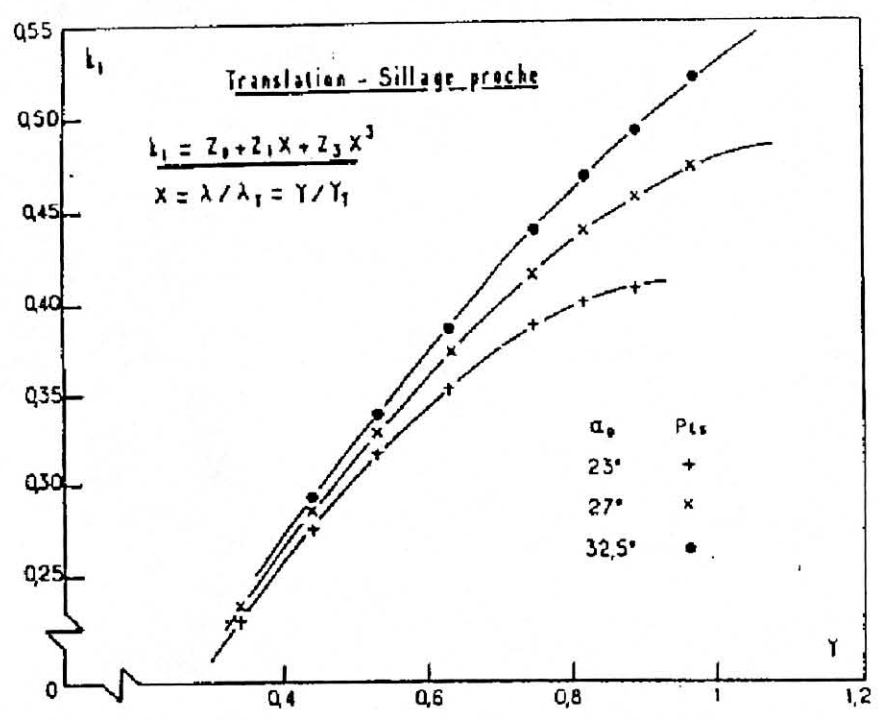


Figure 2.5 : Translation – Sillage proche

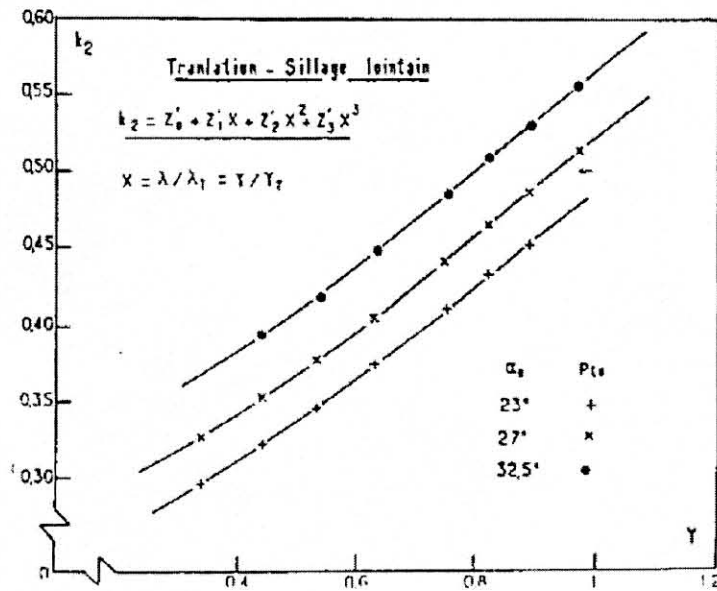
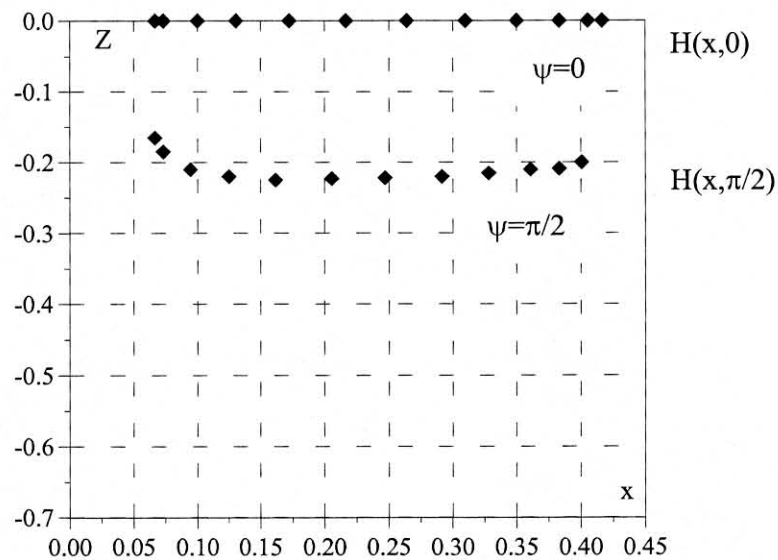


Figure 2.6 : Translation – Sillage lointain

2.6.2. Détermination théorique de la surface tourbillonnaire interne

On a vu au paragraphe précédent, que le sillage d'une hélice propulsive peut être représenté par une nappe tourbillonnaire de forme pseudo-hélicoïdale et stationnaire dans le référentiel relatif $Ox'y'z$. Pour compléter le sillage, on doit donc adjoindre aux lois d'évolutions du tourbillon marginal précédentes, une loi d'évolution pour la nappe tourbillonnaire interne.

Figure 2.7 : Position des lanières à $\psi=0$ et $\pi/2$

Soit $P(x, 0, 0)$ un point de l'axe porté par la pale de l'hélice, tel que $x \in [R_0, R_1[$, soit $M(r(x, \psi), \psi, z(x, \psi))$ un point de la lanière tourbillonnaire, issue du point P, dans le système d'axe relatif $Ox'y'z$. La contraction radiale $r(x, \psi)/R_1$ est alors supposée suivre une évolution homothétique de la contraction $r_1(\psi)/R_1$ du tourbillon marginal, elle se mettra donc sous la forme :

$$r(x, \psi)/R_1 = (x/R_1).(r_1(\psi)/R_1) \quad ; \quad 0 \leq \psi \leq \psi_s \quad (18)$$

où la contraction $r_1(\psi)$ est celle donnée par l'expression (15).

Le pas de la nappe tourbillonnaire est fonction de la distance r à l'axe de rotation, et de la distance z au plan de rotation. Dans ce qui suit, on se propose de le déterminer en effectuant la mise en équilibre du sillage.

En s'inspirant des lois d'évolution de la translation axiale du tourbillon d'extrémité, la coordonnée axiale d'une lanière tourbillonnaire issue du point $P(x, 0, 0)$ sera déterminée à partir des expressions suivantes :

$$z(x, \psi) = R_1.H(x, 0).\psi \quad ; \quad 0 \leq \psi \leq \psi_b \quad (19a)$$

$$z(x, \psi) = R_1.H(x, 0).\psi_b + R_1.H(x, \psi_b).(\psi - \psi_b) \quad ; \quad \psi_b \leq \psi \leq \psi_s$$

Expressions dans lesquelles $H(x, 0)$ et $H(x, \psi_b)$ sont des fonctions qui dépendent des coordonnées des points de départ des lanières tourbillonnaires sur la pale, ainsi que des positions de ces mêmes lanières à l'azimut $\psi = \psi_b$ dans le sillage (voir schéma ci-dessus).

On a ainsi :

$$\overrightarrow{OM} = r(x, \psi).\cos(\psi).\vec{i}' + r(x, \psi).\sin(\psi).\vec{j}' + z(x, \psi).\vec{k}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \psi} &= \left(\frac{\partial r(x, \psi)}{\partial \psi} \cdot \cos(\psi) - r(x, \psi) \cdot \sin(\psi) \right) \cdot \vec{i}' \\
&+ \left(\frac{\partial r(x, \psi)}{\partial \psi} \cdot \sin(\psi) + r(x, \psi) \cdot \cos(\psi) \right) \cdot \vec{j}' \\
&+ \frac{\partial z(x, \psi)}{\partial \psi} \cdot \vec{k}
\end{aligned} \tag{19b}$$

Notons (v, w, u) les coordonnées de la vitesse induite dans la base relative $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k})$ du point M. La vitesse relative de la particule fluide en M, dans cette même base, est donnée par l'expression suivante :

$$\overrightarrow{W} = (v - \Omega r(x, \psi) \cdot \sin(\psi)) \cdot \vec{i}' + (w + \Omega r(x, \psi) \cdot \cos(\psi)) \cdot \vec{j}' + (u + v_0) \cdot \vec{k} \tag{19c}$$

La deuxième équation du système (14), qui exprime l'équilibre dynamique de la nappe tourbillonnaire impose la dépendance linéaire des vecteurs \overrightarrow{W} et $\partial \overrightarrow{OM} / \partial \psi$, donc l'existence d'un nombre réel λ tel que :

$$\overrightarrow{W} = \lambda \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \psi} \tag{19d}$$

A partir des relations (19b), (19c), (19d) on aboutit aux relations suivantes :

$$\frac{(v - \Omega r(x, \psi) \cdot \sin(\psi))}{\left(\frac{\partial r(x, \psi)}{\partial \psi} \cdot \cos(\psi) - r(x, \psi) \cdot \sin(\psi) \right)} = \frac{(w + \Omega r(x, \psi) \cdot \cos(\psi))}{\left(\frac{\partial r(x, \psi)}{\partial \psi} \cdot \sin(\psi) + r(x, \psi) \cdot \cos(\psi) \right)} \tag{20}$$

$$\frac{(w + \Omega r(x, \psi) \cdot \cos(\psi))}{\left(\frac{\partial r(x, \psi)}{\partial \psi} \cdot \sin(\psi) + r(x, \psi) \cdot \cos(\psi) \right)} = \frac{(u + v_0)}{\frac{\partial z(x, \psi)}{\partial \psi}} \tag{21}$$

De la relation (20), on déduit l'expression de $\partial r(x, \psi) / \partial \psi$ par :

$$\frac{\partial r(x, \psi)}{\partial \psi} = \frac{(v \cdot \cos(\psi) + w \cdot \sin(\psi))}{\Omega + \frac{w \cdot \cos(\psi) - v \cdot \sin(\psi)}{r(x, \psi)}} \tag{22}$$

Des relations (21) et (22) on déduit de même l'expression de $\partial z(x, \psi) / \partial \psi$:

$$\frac{\partial z(x, \psi)}{\partial \psi} = \frac{u + v_0}{\Omega + \frac{w \cdot \cos(\psi) - v \cdot \sin(\psi)}{r(x, \psi)}} \quad (23)$$

or d'après les relations (19a) on a :

$$\frac{\partial z(x, \psi)}{\partial \psi} = \frac{180}{\pi} \cdot R_1 \cdot H(x, 0) \quad ; 0 \leq \psi \leq \psi_b \quad (24)$$

$$\frac{\partial z(x, \psi)}{\partial \psi} = \frac{180}{\pi} \cdot R_1 \cdot H(x, \psi_b) \quad ; \psi_b \leq \psi \leq \psi_s$$

A partir des relations (23) et (24) on peut tirer les valeurs des fonctions $H(x, 0)$ et $H(x, \psi_b)$ sous la forme :

$$H(x, 0) = \frac{\pi}{180 \cdot R_1} \cdot K(v, w, u, x, 0) \quad (25)$$

$$H(x, \psi_b) = \frac{\pi}{180 \cdot R_1} \cdot K(v, w, u, x, \psi_b)$$

$$\text{avec : } K(v, w, u, x, \psi) = \frac{u + v_0}{\Omega + \frac{w \cdot \cos(\psi) - v \cdot \sin(\psi)}{r(x, \psi)}}$$

D'après les relations (25), on observe que la détermination des fonctions $H(x, 0)$ et $H(x, \psi_b)$, suppose la connaissance préalable des composantes de la vitesse induite v, w, u dans la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ aux points de contrôle sur la pale et dans le sillage. La détermination de ces vitesses sera traitée ultérieurement au paragraphe (3.4).

Connaissant la répartition du système tourbillonnaire engendré par le fonctionnement de l'hélice, on peut alors déterminer les performances de l'hélice et son

champ aérodynamique par les méthodes intégrales (dont fait partie notamment la méthode représentant la pale par une ligne portante).

2.7. Méthode intégrale et ligne portante

Dans cette méthode qui s'inspire de celle de Prandtl pour l'aile d'envergure finie, chaque pale est assimilée à un tourbillon lié, dirigé suivant l'axe de celle-ci. Cette représentation a pour conséquence directe l'échappement d'une nappe de tourbillons libre, qui peut être décrite et modélisée suivant les lois de synthèse du paragraphe précédent.

La difficulté de prendre en compte une condition limite sur la pale de l'hélice, ainsi assimilée à une ligne (glissement relatif à appliquer en un point du profil), conduit en général à choisir une relation de fermeture liée au fonctionnement bidimensionnel du profil. Une équation analogue à celle de Prandtl est ainsi obtenue en reliant pour chaque section de pale, la circulation, la vitesse relative et l'incidence de cette vitesse relativement à l'axe de portance nulle.

2.7.1. Expressions du champ de vitesses en tout point de l'espace et de la pale

Si au point P (x, 0, 0) de la pale le tourbillon lié a une intensité $\Gamma(x)$, alors l'intensité de la lanière tourbillonnaire s'échappant du point P aura pour intensité $\gamma(x) = -\frac{d\Gamma(x)}{dx} \cdot dx$. La vitesse induite en un point de l'espace I, par l'ensemble du système tourbillonnaire (Nappe libre + tourbillon lié), se calcule à partir de la formule (9) de Biot et Savart par la relation :

$$\vec{V} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{[R0, R1]} \Gamma(x) \cdot \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{[R0, R1]} \left[-\frac{d\Gamma(x)}{dx} \cdot \int_{L(x)} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right] \cdot dx \quad (26)$$

où $\vec{r} = MI$, M est un point courant de l'ensemble (nappe libre + tourbillon lié), L(x) la lanière tourbillonnaire issue du point P de la pale et \vec{dl} le vecteur élémentaire tangent en M soit au tourbillon lié, soit à la lanière L(x).

Si I est situé sur la pale (assimilée à une ligne rectiligne) alors $\vec{dl} \wedge \vec{r} = 0$ et la formule (26) est ramenée à :

$$\vec{V} = \frac{1}{4.\pi} \cdot \int_{[R0, R1]} \left[-\frac{d\Gamma(x)}{dx} \cdot \int_{L(x)} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right] . dx \quad (27)$$

Remarquons que les formules (26) et (27) écrites à l'aide de produits vectoriels, peuvent être intégrées dans n'importe quelle base directe, en prenant toutefois la précaution de s'assurer que le sens de progression du tourbillon (direction \vec{dl}) est le même que le sens de rotation positive de la circulation de ce tourbillon. Ces expressions seront ainsi intégrées dans la base directe relative $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k})$

2.7.2. Equation fondamentale du fonctionnement aérodynamique de l'hélice

Comme cela est généralement fait pour les ailes, on admet l'hypothèse de Prandtl qui suppose que le coefficient de portance C_z de chacune des sections constituant la pale, est le même que le coefficient C_z du même profil, supposé isolé, mais attaqué avec l'incidence effective.

La composante de la vitesse relative dans le plan contenant une section de pale située au point P(x, 0, 0), sera alors déduite de la formule (19c), et son expression est :

$$\vec{W}' = (w + \Omega.x) . \vec{j}' + (u + v_0) . \vec{k} \quad (28a)$$

Son module est donné par ;

$$W' = \left((w + \Omega.x)^2 + (u + v_0)^2 \right)^{1/2} \quad (28b)$$

Son calage avec le plan de rotation est :

$$\varphi = \text{Arctg} \frac{u + v_0}{w + \Omega \cdot x} \quad (29)$$

Dans le plan de la section de la pale considérée, le calage de l'axe de portance nulle du profil est défini par :

$$\varphi' = \theta_v + \alpha_0 \quad (30)$$

où θ_v désigne le vrillage géométrique de la pale, et α_0 le calage de ce même profil par rapport au plan de rotation.

L'incidence définie par l'angle compris entre l'axe de portance nulle du profil situé au point $P(x, 0, 0)$ et le vecteur vitesse \vec{W}' , s'exprime alors à partir de (29) et (30) par :

$$i(x) = \varphi' - \varphi \quad (31)$$

Le théorème de Kutta Joukowski permet de donner l'expression de la circulation Γ du tourbillon lié, représentant la pale, en fonction du coefficient de portance C_z du profil bidimensionnel par :

$$\forall x \in [R_0, R_1]; \quad \Gamma(x) = \frac{1}{2} I(x) \cdot W'(x) \cdot C_z(i(x)) \quad (32)$$

2.7.3. Calcul des performances de l'hélice

Connaissant les coefficients aérodynamiques stationnaires bidimensionnels (C_z , C_x) des profils de la pale, on peut déterminer les performances de l'hélice de la façon suivante : Chaque profil situé au point $P(x, 0, 0)$ est soumis à une résultante aérodynamique, notée $d\vec{R}(x)$, et composée d'une force de portance $d\vec{R}_z(x)$ perpendiculaire à la vitesse \vec{W}' (formule 28a), et d'une force de traînée $d\vec{R}_x(x)$ parallèle à \vec{W}' . En projetant respectivement sur les axes Oz et Oy' , $d\vec{R}(x)$ se décompose en une force de traction notée $d\vec{T}(x)$, et une force tangentielle $d\vec{R}_t(x)$ (voir schéma ci dessous). On a donc :

$$d\vec{T}(x) = (-dR_z(x) \cdot \cos(\varphi) + dR_x(x) \cdot \sin(\varphi)) \cdot \vec{k} \quad (33)$$

$$dR_T(x) = (dR_z(x) \cdot \sin(\varphi) + dR_x(x) \cdot \cos(\varphi)) \cdot \vec{j}' \quad (34)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\Omega \cdot x + w'}{W'}; \quad \sin(\varphi) = \frac{v_0 + u}{W'} \quad (35)$$

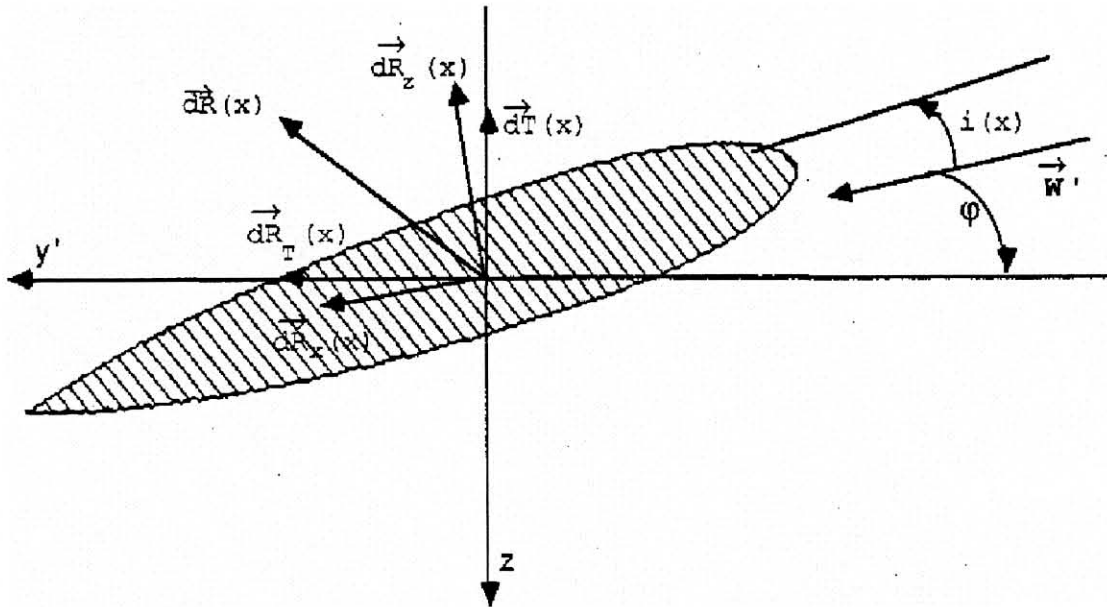


Figure 2.8 : Forces Aérodynamiques appliquées sur un profil

En utilisant la définition des coefficients de portance et de traînée :

$$dR_z(x) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot l(x) \cdot W'^2 \cdot C_z(i(x)) \cdot dx$$

$$dR_x(x) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot l(x) \cdot W'^2 \cdot C_x(i(x)) \cdot dx$$

On peut déduire des formules (33), (34), (35) les expressions de la traction \vec{T} et de la puissance P s'exerçant sur les pales, qui sont données par :

$$\vec{T} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\rho \cdot b \cdot \int_{R0, R1} l(x) \cdot W' \cdot (\Omega \cdot x + w) \cdot C_z(i(x)) \cdot dx \right) \vec{k} + \frac{1}{2} \cdot \left(\rho \cdot b \cdot \int_{R0, R1} l(x) \cdot W' \cdot (v_0 + u) \cdot C_x(i(x)) \cdot dx \right) \vec{k}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot b \cdot \Omega \cdot \int_{R0, R1} l(x) \cdot W' \cdot x \cdot (v_0 + u) \cdot C_z(i(x)) \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot b \cdot \Omega \cdot \int_{R0, R1} l(x) \cdot W' \cdot x \cdot (\Omega \cdot x + w) \cdot C_x(i(x)) \cdot dx$$

A partir de la traction $\vec{T} = -T \vec{k}$ et de la puissance P on peut définir les coefficients adimensionnels caractéristiques du fonctionnement de l'hélice, qui sont le coefficient de traction τ , le coefficient de puissance χ , et le rendement propulsif η par :

$$\tau = \frac{T}{\rho \cdot n^2 \cdot D^4} ; \quad \chi = \frac{P}{\rho \cdot n^3 \cdot D^5} ; \quad \eta = \gamma \cdot \frac{\tau}{\chi}$$

CHAPITRE 3

RESOLUTION NUMERIQUE

3.1. Détermination de la distribution de circulation sur la pale

D'après la loi de Biot et Savart, le champ de vitesse induit dans l'espace ne peut être déterminé que si l'on connaît au préalable la répartition tourbillonnaire dans l'espace (c'est à dire la position et l'intensité de chaque tourbillon dans le domaine fluide).

En ce qui concerne la géométrie de la nappe tourbillonnaire, ce point a été traité au paragraphe (2.6). Dans ce qui suit on se propose de déterminer l'intensité de chaque lanière tourbillonnaire s'échappant de la pale, c'est à dire de calculer la répartition de circulation s'établissant en tout point de l'envergure de la pale, où est localisé un élément tourbillonnaire.

3.1.1. Développement de la circulation en série de Fourier

La loi de circulation du tourbillon lié à la pale de l'hélice sera représentée par une fonction réelle, définie et continue sur l'intervalle $[R_0, R_1]$, et vérifiant $\Gamma(R_0) = \Gamma(R_1) = 0$ moyennant le changement de variable suivant : $x = x(\varphi)$; où x est une fonction continue, bijective, définie par :

$$x : [0, \pi] \rightarrow [R_0, R_1]$$

$$\varphi \rightarrow \frac{1}{2} \cdot ((R_1 + R_0) - (R_1 - R_0) \cdot \cos(\varphi))$$

alors la fonction composée $\Gamma \circ x$ définie et continue sur l'intervalle $[0, \pi]$ et vérifiant $\Gamma \circ x(0) = \Gamma \circ x(\pi) = 0$ peut être considérée comme la restriction d'une fonction réelle, continue, impaire et périodique de période 2π , notée Γ^* .

Cette fonction peut être alors représentée sous la forme d'une série de Fourier par :

$$\Gamma^*(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \alpha_k \cdot \sin(k \cdot \varphi)$$

De plus, comme le terme général de la série tend vers 0 quand k tend vers l'infini, il est possible (à l'erreur de troncature près qui restera inférieure à un nombre réel petit ε , donné) d'approximer la fonction Γ^* par cette même série mais limitée à NP termes. On déduit alors :

$$\forall \varphi \in [0, \pi] ; \Gamma_{ox}(\varphi) = \sum_{1 \leq k \leq NP} \alpha_k \cdot \sin(k \cdot \varphi) \quad (36)$$

Il est clair que la condition $\Gamma_{ox}(0) = \Gamma_{ox}(\pi) = 0$ est implicitement vérifiée. Cette approximation de la loi de circulation est semblable à celle utilisée dans la théorie de Prandtl pour les ailes d'envergure finie [33].

3.1.2. Résolution de l'équation du fonctionnement aérodynamique

La détermination des coefficients du développement en série de la circulation est basée sur la résolution de l'équation non linéaire en $(\alpha_k) k=1, \dots, NP$, déduite de la relation de Joukowski, elle s'écrit :

$$\forall \varphi \in [0, \pi]$$

$$\sum_k \alpha_k \cdot \sin(k \cdot \varphi) = \frac{1}{2} \cdot l_{ox}(\varphi) \cdot W'_{ox}(\varphi) \cdot C_{z_{oiox}}(\varphi)$$

En fait Le nombre de coefficients $(\alpha_k) k=1, \dots, NP$ étant fini, pour résoudre cette équation il suffit d'écrire qu'elle est vérifiée pour NP valeurs particulières $(\varphi_j) j=1, \dots, NP$ de φ . Posons alors pour tout $j \in \{1, \dots, NP\}$ et pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{NP}) \in \mathbb{R}^{NP}$

$$F_j(\alpha) = \sum_k \alpha_k \cdot \sin(k \cdot \varphi) - \frac{1}{2} l_{ox}(\varphi) \cdot W'_{ox}(\varphi) \cdot C_{z_{oiox}}(\varphi) \quad (37)$$

Avec cette notation on aboutit à un système d'équations non linéaires formé de NP équations à NP inconnues :

$$F_j(\alpha) = 0 ; j \in \{1, \dots, NP\} \quad (38)$$

Notons $\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_{NP}^*)$ le vecteur solution du système (38), on peut montrer que chaque fonction $F_j (j \in \{1, \dots, NP\})$ est continuellement dérivable, alors par développement en série de Taylor au voisinage d'un estimé $\alpha(n)$, proche du vecteur solution α^* (obtenu à la n ème itération), on obtient pour tout entier $j \in \{1, \dots, NP\}$:

$$\begin{aligned} F_j(\alpha^*) &= F_j(\alpha(n) + (\alpha^* - \alpha(n))) \\ &= F_j(\alpha(n)) + \sum_k \frac{\partial F_j(\alpha(n))}{\partial \alpha_k} \cdot (\alpha_k^* - \alpha_k(n)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot (\dots) + \dots = 0 \\ &\quad \text{termes d'ordre } > 1 \end{aligned} \quad (39)$$

Dans ces conditions, l'approximation de Newton consiste à négliger les termes d'ordre supérieur à 1, d'où (39) donne :

$$\sum_{k \leq NP} \frac{\partial F_j(\alpha(n))}{\partial \alpha_k} \cdot (\alpha_k^* - \alpha_k(n)) = -F_j(\alpha(n)) \quad (40)$$

Définissons ainsi la matrice $E(n)$ des dérivées premières des fonctions F_j par rapport aux éléments du vecteur α par son élément générateur $E_{j,k}(n)$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, \dots, NP\}; \forall k \in \{1, \dots, NP\}; \\ E_{j,k}(n) = \frac{\partial F_j(\alpha(n))}{\partial \alpha_k} \end{aligned}$$

De même définissons le vecteur erreur $\Delta\alpha(n)$ par :

$$\Delta\alpha(n) = \alpha^* - \alpha(n)$$

Puis le vecteur second membre $B(n)$ du système (40) par :

$$B_j(n) = -F_j(\alpha(n))$$

Alors la relation matricielle (40) peut être écrite sous la forme réduite :

$$E(n).\Delta\alpha(n) = B(n) \quad (41)$$

Dans l'équation (41), toutes les quantités sont connues sauf le vecteur $\Delta\alpha(n)$. En outre cette équation est un système linéaire, les méthodes de résolution habituelles sont donc applicables. De plus $\Delta\alpha(n)$ est un estimé de l'erreur commise en approximant α^* par le vecteur $\alpha(n)$. On peut donc obtenir un meilleur estimé $\alpha(n+1)$ de α^* par :

$$\alpha(n+1) = \alpha(n) + \Delta\alpha(n) \quad (42)$$

Pour que ce procédé itératif soit complet, on doit rajouter la donnée d'un estimé initial pour la première itération. Après plusieurs essais numériques il s'est avéré que la distribution de circulation obtenue sur la pale, en supposant que l'air traverse le disque hélice sans aucune perturbation, constitue une meilleure donnée initiale de ce procédé itératif. Le nombre d'itérations nécessaires pour l'obtention d'une convergence, est généralement fonction de la charge des pales de l'hélice. A titre d'exemple, pour un calage de pale $\alpha_0 = 32.5^\circ$, il a fallu 4 itérations pour un paramètre de fonctionnement $\gamma = 0.9$ (hélice moyennement chargée), tandis que à $\gamma = 0.3$ (hélice fortement chargée) la convergence a été obtenue après 10 itérations.

3.1.3. Détermination de la matrice d'influence

On a vu au paragraphe (2.7.1), que la vitesse en un point $P(x, 0, 0)$ de la pale, exprimée dans la base relative $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k})$ peut être écrite sous la forme :

$$\vec{V}(P) = \frac{1}{4.\pi} \cdot \int_{[R0, R1]} \left[-\frac{d\Gamma(r)}{dr} \cdot \int_{L(r)} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right] . dr$$

Si on note $(v(x), w(x), u(x))$ les coordonnées de $V(P)$ dans la base relative $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, on peut écrire compte tenu de l'expression de la circulation développée en série de Fourier à NP termes, et du changement de variable précédent $r = x(\varphi)$:

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_k \alpha_k \cdot v_k(x) \\ w(x) &= \sum_k \alpha_k \cdot w_k(x) \\ u(x) &= \sum_k \alpha_k \cdot u_k(x) \end{aligned} \quad (43)$$

où les fonctions $v_k(x), w_k(x), u_k(x)$ sont des fonctions qui ne dépendent que de la géométrie du sillage tourbillonnaire associé au point de fonctionnement (α_0, γ) de l'hélice, et du point $P(x, 0, 0)$ sur la pale. Leur expression est donnée par :

$$\begin{bmatrix} v_k(x) \\ w_k(x) \\ u_k(x) \end{bmatrix} = - \int_{[0, \pi]} k \cdot \cos(k \cdot \varphi) \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{L(r)} \frac{\overline{dl} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) \cdot d\varphi$$

Grâce à la formulation (43), les expressions du paragraphe (2.7.2), donnant respectivement le module de la vitesse résultante normale à l'envergure de la pale au point $P(x, 0, 0)$, et l'incidence en ce même point, deviennent :

$$W^1 = \left((\Omega \cdot x + \sum_k \alpha_k \cdot w_k(x))^2 + (v_0 + \sum_k \alpha_k \cdot u_k(x))^2 \right)^{1/2} \quad (44)$$

$$i(x) = \theta_v(x) + \alpha_0 - \text{Arctg} \frac{v_0 + \sum_k \alpha_k \cdot u_k(x)}{\Omega \cdot x + \sum_k \alpha_k \cdot w_k(x)} \quad (45)$$

L'élément générateur de la matrice $E(n)$ peut se calculer ainsi à partir de la formule (37) :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_j(\alpha)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=\alpha(n)} &= \sin(k \cdot \varphi_j) - \frac{1}{2} \cdot \text{Iox}(\varphi_j) \cdot W^1 \text{ox}(\varphi_j) \cdot \left. \frac{\partial C_z \text{oi ox}(\varphi_j)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=\alpha(n)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \text{Iox}(\varphi_j) \cdot \left. \frac{\partial W^1 \text{ox}(\varphi_j)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=\alpha(n)} \cdot C_z \text{oi ox}(\varphi_j) \Big|_{\alpha=\alpha(n)} \end{aligned}$$

Si l'on pose :

$$P_j = \frac{1}{W'ox(\varphi_j)}$$

Alors ;

$$\left. \frac{\partial W'ox(\varphi_j)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=\alpha(n)} = P_j \cdot (v_0 + uox(\varphi_j)) \cdot \left. \frac{\partial uox(\varphi_j)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=\alpha(n)} + P_j \cdot (\Omega \cdot x + wox(\varphi_j)) \cdot \left. \frac{\partial wox(\varphi_j)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=\alpha(n)}$$

et

$$\left. \frac{\partial C_z oiox(\varphi_j)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=\alpha(n)} = \frac{\partial C_z}{\partial i} \cdot \left. \frac{\partial iox(\varphi_j)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=\alpha(n)}$$

De plus, le terme $\partial C_z / \partial i$ est connu à partir des coefficients aérodynamique des profils au point de calcul $x(\varphi_j)$ pour l'incidence $iox(\varphi_j)$. Il suffit donc de calculer $\partial iox(\varphi_j) / \partial \alpha_k$ et on a d'après (45) :

$$\left. \frac{\partial iox(\varphi_j)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=\alpha(n)} = - \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \operatorname{Arctg} \frac{v_0 + \sum_k \alpha_k \cdot u_k(x)}{\Omega \cdot x + \sum_k \alpha_k \cdot w_k(x)}$$

Après développement de calculs on obtient :

$$\frac{\partial iox(\varphi_j)}{\partial \alpha_k} = \left(\frac{1}{P_j} \right)^2 \cdot (\Omega \cdot x + wox(\varphi_j)) \cdot \left. \frac{\partial uox(\varphi_j)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=\alpha(n)} - \left(\frac{1}{P_j} \right)^2 \cdot (v_0 + uox(\varphi_j)) \cdot \left. \frac{\partial wox(\varphi_j)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=\alpha(n)}$$

or :

$$\frac{\partial uox(\varphi_j)}{\partial \alpha_k} = u_k ox(\varphi_j)$$

$$\frac{\partial wox(\varphi_j)}{\partial \alpha_k} = w_k ox(\varphi_j)$$

on peut ainsi calculer $\partial F_j(\alpha(n)) / \partial \alpha_k$, et finalement son expression sous forme réduite est donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_j(\alpha(n))}{\partial \alpha_k} = & \sin(k.\varphi_j) + \frac{1}{2} \cdot \frac{lox(\varphi_j)}{P_j} \cdot (\Omega.x(\varphi_j) + wox(\varphi_j)) \cdot \frac{\partial C_z}{\partial i} \cdot u_k ox(\varphi_j) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{lox(\varphi_j)}{P_j} \cdot C_z oiox(\varphi_j) \cdot (v_0 + uox(\varphi_j)) \cdot u_k ox(\varphi_j) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{lox(\varphi_j)}{P_j} \cdot \frac{\partial C_z}{\partial i} \cdot (v_0 + uox(\varphi_j)) \cdot w_k ox(\varphi_j) \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{lox(\varphi_j)}{P_j} \cdot C_z oiox(\varphi_j) \cdot (\Omega.x(\varphi_j) + wox(\varphi_j)) \cdot w_k ox(\varphi_j) \end{aligned} \quad (46)$$

3.1.4. Organigramme de calcul de la circulation

L'organigramme suivant résume les différentes étapes nécessaires pour la détermination de la circulation le long de l'envergure de pale de l'hélice.

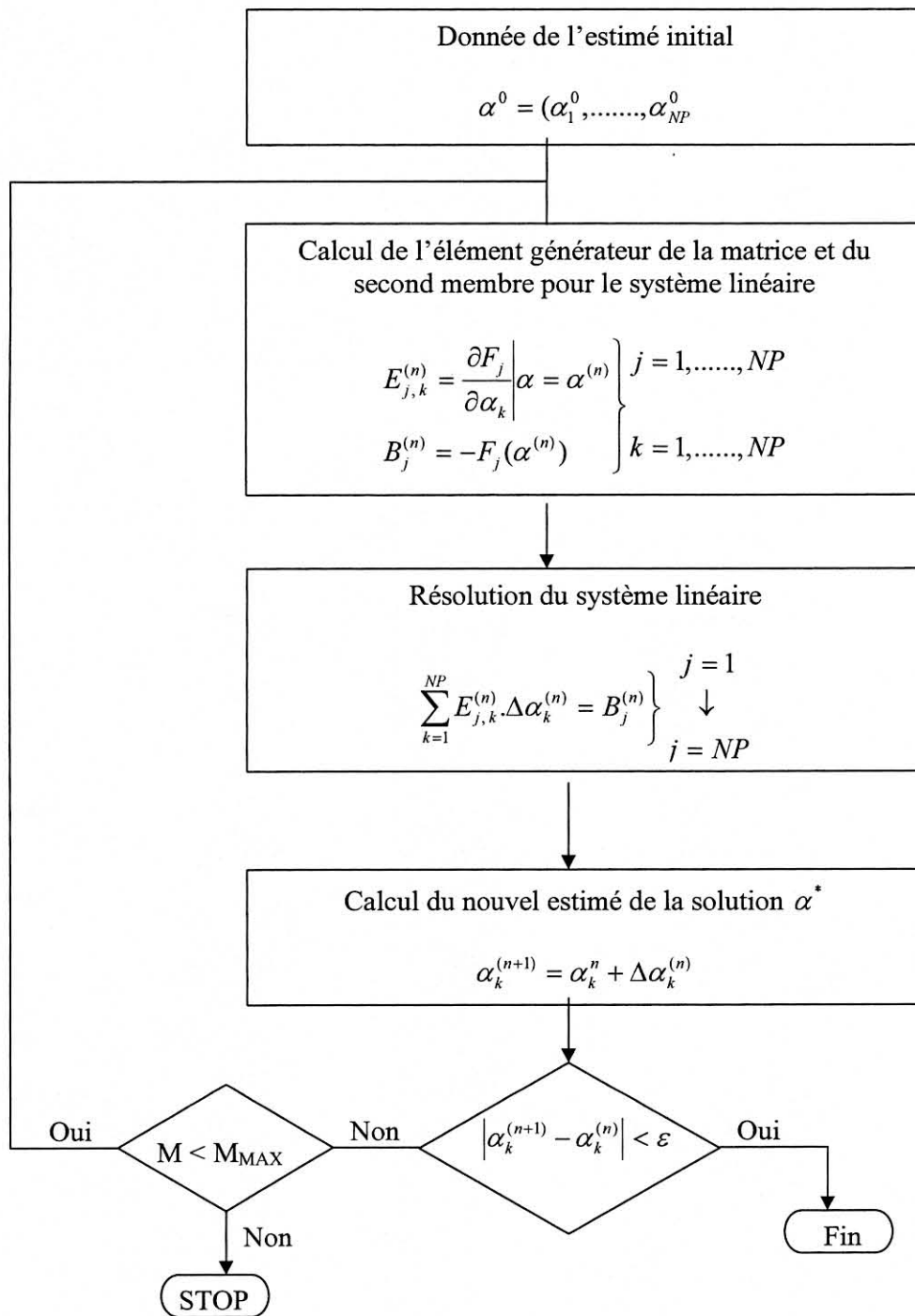


Figure 3.1 : Organigramme de calcul de la circulation

3.2. Traitement des instabilités numérique au voisinage d'une singularité

3.2.1. Position du problème

Quand on utilise dans le sillage une distribution discrétisée d'éléments tourbillonnaires, comme c'est le cas ici, le calcul des vitesses induites fait généralement apparaître des instabilités numériques au voisinage de ces éléments. En fait, ce problème peut se rencontrer pratiquement chaque fois que le maillage de discrétisation de la nappe est très fin, ou chaque fois que l'on veut évaluer la vitesse induite par un élément tourbillonnaire en un point situé au voisinage immédiat de celui-ci.

Ces instabilités résultent de l'approximation de la nappe tourbillonnaire, continue, à l'aide d'un modèle discrétisé par des éléments tourbillonnaires. Un exemple de résultats illustrant ce problème est donné sur le schéma ci-dessous.

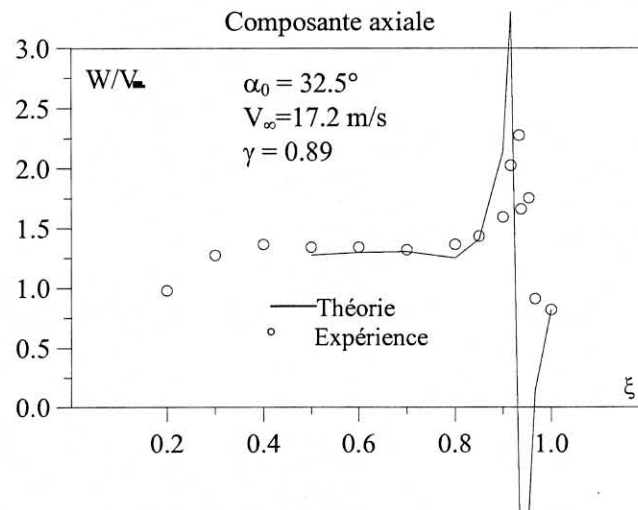


Figure 3.2 : Composante axiale de la vitesse

Ce schéma représente l'évolution, calculée, de la composante axiale de vitesse w en fonction du rayon réduit r/R_1 , à la phase $\psi = 45^\circ$ dans le plan $z/R_1 = 0,759$. L'instabilité numérique se manifeste d'autant plus que l'on se rapproche davantage de la trace du tourbillon d'extrémité dans le plan considéré.

3.2.2. Concept de rayon visqueux

Dans le cas d'une discrétisation très fine de la nappe tourbillonnaire (surtout lorsqu'il s'agit d'enroulement des lignes tourbillonnaires), certains auteurs [36], ont proposé une méthode générale d'approximation d'une telle distribution de singularités. La méthode consiste à étendre le domaine fluide où la vorticité n'est pas nulle à des petits éléments de volumes, tout en conservant globalement la même intensité tourbillonnaire. La distribution de Dirac δ associée à une telle répartition discrète de vorticité est ainsi approchée par une fonction φ vérifiant :

$$\iiint \varphi(\vec{r}) . dx . dy . dz = 1 \quad (i)$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{a^2} . f\left(\frac{|\vec{r}|}{a}\right) \quad (ii)$$

Le paramètre a dont dépend la fonction φ , définit le voisinage sphérique spatial dans lequel le champ de vitesse induit doit être traité d'une façon particulière, ce paramètre est appelé abusivement rayon visqueux. Signalons enfin qu'une distribution Gaussienne de la forme :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\pi . a^2} . e^{-\frac{|\vec{r}|}{a^2}}$$

pourrait convenir pour le choix de la fonction φ . Il est évident que le choix du paramètre a peut s'avérer délicat, de plus il nécessite généralement l'élaboration d'un algorithme complexe coûteux en temps de calcul. Une approximation de type linéaire, pour le calcul de la vitesse au voisinage de la singularité, a été adoptée dans le présent modèle comme indiqué ci-dessous.

3.2.3. Approximation linéaire du module de la vitesse au voisinage de la singularité

Physiquement le comportement linéaire de la vitesse au voisinage de la singularité, et ceci à partir d'un certain rayon a , est analogue à celui du champ de vitesse créé par un corps solide en rotation sur lui-même, comme le montre le schéma ci-dessous.

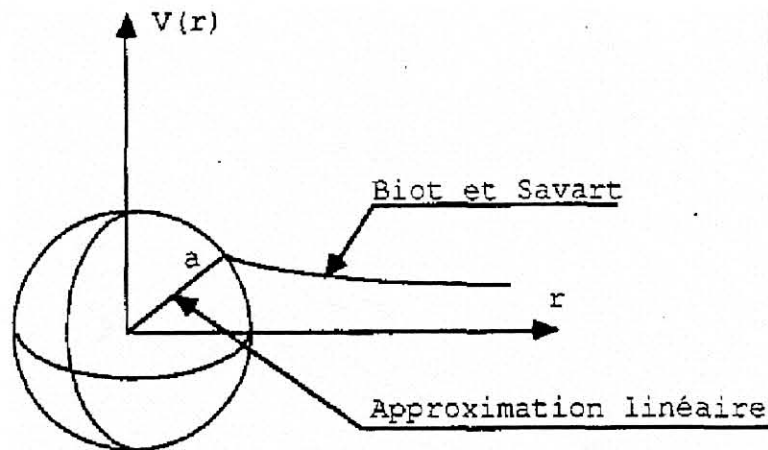


Figure 3.3 : Approximation linéaire du module de la vitesse

A l'intérieur de la sphère de rayon a le module de la vitesse sera approximé par :

$$V(r) = \frac{|\gamma|}{2\pi \cdot a^2} \cdot |\vec{r}|$$

où γ est l'intensité du tourbillon. En ce qui concerne le sens du vecteur vitesse ainsi réduit en module, il sera donné par la loi de Biot et Savart, qui exprime que \vec{v} est colinéaire et de même sens que le vecteur \vec{u} défini par :

$$\vec{u} = \frac{(\vec{r} \wedge \overline{dl})}{|\vec{r} \wedge \overline{dl}|}$$

Le champ de vitesse ainsi calculé au voisinage de la singularité est finalement donné par :

$$\vec{V} = \frac{\gamma}{2\pi \cdot a^2} \cdot |\vec{r}| \cdot \frac{(\vec{r} \wedge \overline{dl})}{|\vec{r} \wedge \overline{dl}|}$$

Ne nécessitant pas d'algorithme compliqué, ce modèle est par voie de conséquence d'une application plus aisée dans le programme de calcul.

Toutefois, le problème de l'optimisation de la valeur du paramètre a reste posé (par exemple une valeur trop élevée conduit à atténuer notablement l'influence du tourbillon). Pour le cas présent de l'hélice opérant de manière isolée, les mesures au fil chaud et les visualisations antérieurement réalisées [35], [37] sur la lanière tourbillonnaire marginale, ont montré que le rayon du noyau tourbillonnaire pouvait varier de 9mm à 12mm pour la plupart des régimes de fonctionnement de l'hélice considérée. Cette indication physique a donc permis de fixer le paramètre a à une valeur de 10mm. En outre les essais numériques réalisés à différentes valeurs du rayon, allant de 4mm à 20mm ont effectivement confirmé que la meilleure valeur $a = 10\text{mm}$.

3.3. Modélisation du sillage lointain

3.3.1. Position du problème

Les études expérimentales relatives au sillage d'une hélice aérienne ou d'un rotor d'hélicoptère en vol stationnaire [37], ont montré que le sillage est dans les deux cas constitué de deux zones distinctes :

- Une première zone appelée sillage proche, caractérisée par la convection axiale et la contraction radiale rapide de la ligne marginale.
- Une deuxième zone appelée sillage lointain, où la contraction radiale est pratiquement achevée, et qui se caractérise par l'apparition d'une instabilité spatiale et temporelle de la lanière d'extrémité.

Si le sillage proche de l'hélice a pu être représenté par une surface tourbillonnaire pseudo-hélicoïdale, il n'en va pas de même pour le sillage lointain où cette surface perd sa permanence de forme.

En outre, des résultats numériques préliminaires obtenus sur le champ de vitesse axiale induite a montré que l'influence de cette zone lointaine du sillage était importante sur les niveaux moyens de vitesse, en particulier pour des points situés loin du plan de rotation de l'hélice.

La même constatation a pu être effectuée pour les rotors d'hélicoptères en vol stationnaire. Dans ce cas, certains auteurs [22] ont proposé de modéliser l'influence globale du sillage lointain par l'introduction d'un anneau tourbillonnaire torique centré sur l'axe du rotor, de rayon voisin de celui-ci ($r = 1.2.R_1$) et d'intensité égale à 4 fois celle du tourbillon d'extrémité.

En raison de la surestimation des vitesses induites qu'engendrait ce tourbillon torique, et de sa définition quelque peu arbitraire (en intensité et en rayon), une autre modélisation du sillage lointain a été proposée à l'IMFM [37] en introduisant à partir d'une certaine distance aval du plan de rotation un cylindre, semi infini, généré par une série de cercles tourbillons dont l'intensité est constante et égale à celle du tourbillon d'extrémité.

Dans le cas présent de l'hélice aérienne, deux types de représentations du sillage lointain ont été testés :

- La première par des hélices tourbillonnaires cylindriques à pas constant axialement.
- La deuxième par l'introduction des cylindres tourbillonnaires semi infinis coaxiaux, de façon similaire au modèle utilisé sur le rotor d'hélicoptère en vol stationnaire. Toutefois, à la différence du rotor, où le cylindre n'est introduit que pour le tourbillon d'extrémité, toutes les lanières issues de la pale de l'hélice sont ici prolongées chacune par un cylindre tourbillonnaire. De plus il est tenu cette fois de leur influence radiale et tangentielle.

Bien que l'amélioration apportée par le premier type de modélisation (hélices à pas constant) soit assez comparable à celle obtenue par les tubes cylindriques coaxiaux, cette représentation demeure assez éloignée de la réalité physique des phénomènes qui se produisent dans cette zone du sillage lointain. En effet, les résultats expérimentaux permettent de conclure que :

- D'une part, la lanière tourbillonnaire marginale perd rapidement sa permanence de forme dans cette zone, et par conséquent modéliser le sillage lointain par des hélices cylindriques revient à contredire en grande partie cette réalité physique.
- D'autre part, l'ensemble des phénomènes liés à l'interaction tourbillonnaire et à la diffusion visqueuse conduit à la formation d'une veine fluide continue, essentiellement formée de particules tourbillonnaires.

Ces deux considérations nous ont amené à représenter le sillage lointain par des cylindres tourbillonnaires coaxiaux, comme indiqué ci après.

3.3.2. Modélisation par des cylindres tourbillonnaires semi infinis

Comme on l'a vu au paragraphe (2.6.1), la limite du sillage proche, associée à un régime de fonctionnement donné de l'hélice, est définie par l'azimut d'instabilité ψ_s dont la valeur est donnée par la formule (17).

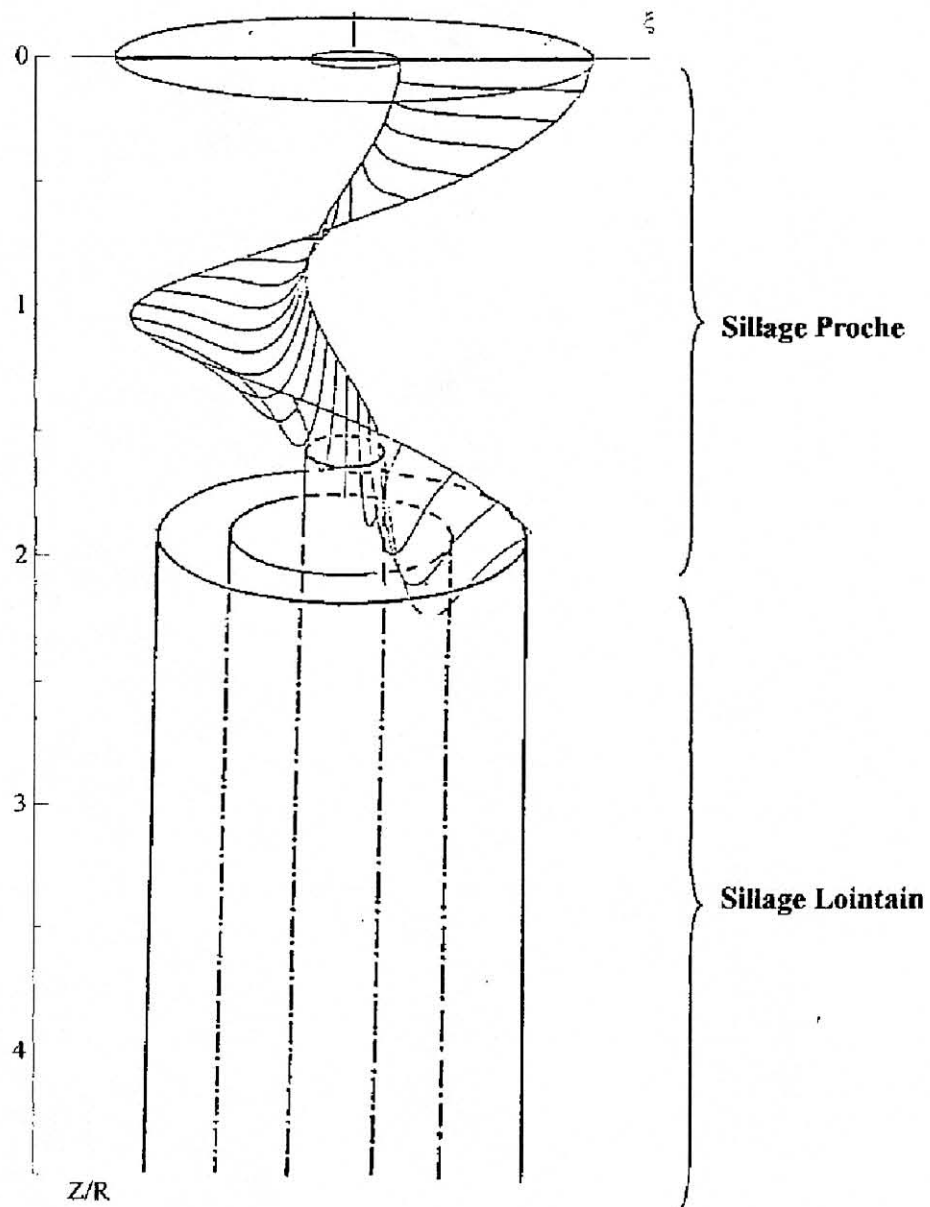


Figure 3.4 : Sillage

A partir de cet azimut ψ_s , toute lanière tourbillonnaire $L(x)$, issue du point $P(x, 0, 0)$ de la pale, sera prolongée par un cylindre semi infini noté (C_x) , pouvant être considéré à la limite comme un solénoïde à spires jointives. Chaque spire sera donc représentée par un anneau de tourbillons d'intensité :

$$\gamma(x) = \frac{-d\Gamma(x)}{dx} \cdot dx$$

et de rayon, $r_C(x)$ identique à celui de la lanière $L(x)$ au point correspondant à l'azimut d'instabilité ψ_s (voir schéma ci-dessus). Le champ induit par le cylindre en un point $I(x_0, y_0, z_0)$ de l'espace, est la somme des influences de tous les anneaux tourbillonnaires depuis l'altitude d'entrée du cylindre $z_C(x)$ jusqu'à l'infini aval.

3.3.2.1. Influence d'un anneau tourbillonnaire

Soit (C) un anneau tourbillonnaire élémentaire du cylindre (C_x) et soit I un point de l'espace. D'après la loi de Biot et Savart cette influence est donnée par :

$$\vec{l}(I) = \int_C \frac{\vec{MI} \wedge \vec{dl}}{|\vec{MI}|^3} \quad (47)$$

où M est le point courant du cercle tourbillon et \vec{dl} le vecteur tangent à (C) en M .

En notant (ρ_0, ψ_0, z_0) , (ρ, ψ, z) les coordonnées cylindriques respectives des points I et M dans le système d'axes relatif, et En utilisant le changement de variable $\varphi = \psi - \psi_0$ et la périodicité des fonctions situées sous le signe somme, on montre que l'induction $\vec{l}(I)$ admet une composante radiale B_r suivant $\vec{u}(\psi_0)$ et une autre axiale B_a suivant \vec{k} telles que :

$$\vec{u}(\psi_0) = \cos(\psi_0) \cdot \vec{i}' + \sin(\psi_0) \cdot \vec{j}'$$



A partir de cet azimut ψ_s , toute lanière tourbillonnaire $L(x)$, issue du point $P(x, 0, 0)$ de la pale, sera prolongée par un cylindre semi infini noté (C_x) , pouvant être considéré à la limite comme un solénoïde à spires jointives. Chaque spire sera donc représentée par un anneau de tourbillons d'intensité :

$$\gamma(x) = \frac{-d\Gamma(x)}{dx} . dx$$

et de rayon, $r_C(x)$ identique à celui de la lanière $L(x)$ au point correspondant à l'azimut d'instabilité ψ_s (voir schéma ci-dessus). Le champ induit par le cylindre en un point $I(x_0, y_0, z_0)$ de l'espace, est la somme des influences de tous les anneaux tourbillonnaires depuis l'altitude d'entrée du cylindre $z_C(x)$ jusqu'à l'infini aval.

3.3.2.1. Influence d'un anneau tourbillonnaire

Soit (C) un anneau tourbillonnaire élémentaire du cylindre (C_x) et soit I un point de l'espace. D'après la loi de Biot et Savart cette influence est donnée par :

$$\vec{l}(I) = \int_C \frac{\vec{MI} \wedge \vec{dl}}{|\vec{MI}|^3} \quad (47)$$

où M est le point courant du cercle tourbillon et \vec{dl} le vecteur tangent à (C) en M .

En notant (ρ_0, ψ_0, z_0) , (ρ, ψ, z) les coordonnées cylindriques respectives des points I et M dans le système d'axes relatif, et En utilisant le changement de variable $\varphi = \psi - \psi_0$ et la périodicité des fonctions situées sous le signe somme, on montre que l'induction $\vec{l}(I)$ admet une composante radiale B_r suivant $\vec{u}(\psi_0)$ et une autre axiale B_a suivant \vec{k} telles que :

$$\vec{u}(\psi_0) = \cos(\psi_0) . \vec{i}' + \sin(\psi_0) . \vec{j}'$$



$$M_z(\varphi) = - \int_{\lambda, \pi/2}^1 \frac{1}{(\cos^2(\theta) \cdot (1 + tg^2(\theta)) \cdot \beta^2)} \cdot d\theta$$

$$\lambda = \text{Arctg}\left(\frac{z_c(x) - z_0}{\beta}\right)$$

$$\beta = (\rho^2 + \rho_0^2 - 2 \cdot \rho \cdot \rho_0 \cdot \cos(\varphi))^{1/2}$$

Après développement du calcul d'intégrales, on aboutit à l'expression de la vitesse axiale induite par le cylindre C_x qui s'écrit sous la forme :

$$dv_z(x) = - \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\Gamma}{dx} \cdot dx \cdot \int_{[0, 2 \cdot \pi]} \frac{(\rho^2 - \rho \cdot \rho_0 \cdot \cos(\varphi))}{\beta^2} \cdot N_z \cdot d\varphi$$

$$N_z = 1 - \frac{z_c(x) - z_0}{(\beta^2 + (z_c(x) - z_0)^2)^{1/2}}$$

Si le point I appartient au disque d'entrée du cylindre C_x on a alors $z_c(x) = z_0$. Les formules précédentes, donnant les vitesses induites, se simplifient et un changement de variable complexe de la forme :

$$z = e^{(i \cdot \varphi)} \quad \text{d'où} \quad d\varphi = \frac{dz}{(i \cdot z)}$$

permet de calculer les intégrales considérées par la méthode des résidus. On a par exemple, pour la vitesse induite axiale en un point I situé dans le plan du disque d'entrée :

$$dV_z = - \frac{1}{2} \cdot \frac{d\Gamma(x)}{dx} \cdot dx \quad \text{si} \quad \rho_0 < \rho$$

$$dV_z = - \frac{1}{4} \cdot \frac{d\Gamma(x)}{dx} \cdot dx \quad \text{si} \quad \rho_0 = \rho$$

$$dV_z(x) = 0 \quad \text{si} \quad \rho_0 > \rho$$

Notons enfin que les intégrales étendues sur l'intervalle $[0, 2 \cdot \pi]$, ont été approximées par la méthode d'intégration de Gauss-Legendre (voir Appendice C).

3.4. Calcul des vitesses induites

La vitesse résultante en un point $I(x_0, y_0, z_0)$ de l'espace s'obtient par composition des vitesses élémentaires suivantes :

- ✓ La vitesse $\vec{V}_0 = v_0 \cdot \vec{k}$ du courant uniforme à l'infini amont.
- ✓ La vitesse induite par l'ensemble des tourbillons liés aux MP pales de l'hélice.
- ✓ La vitesse induite par l'ensemble des tourbillons libres émis dans le sillage par les MP pales.

Dans ce qui suit, le point M de coordonnées cylindriques $(r(\psi), \psi, z(\psi))$ sera le point courant du système tourbillonnaire (tourbillons liés + nappes). Comme on l'a vu dans le paragraphe (2.6) ce système est stationnaire dans le référentiel relatif (puisque l'hélice fonctionne sans incidence et possède une vitesse de rotation constante par rapport à son axe). La répartition symétrique de ses pales, permet de déduire une relation de symétrie entre les coordonnées du point M appartenant au système tourbillonnaire de la pale de référence, et celles du point homologue $M_p(r_p(\psi_p), \psi_p, z_p(\psi_p))$ élément du système associé à la $p^{\text{ième}}$ pale, cette relation est donnée par :

$$\begin{aligned} r_p(\psi_p) &= r(\psi) \\ \psi_p &= \psi + (p-1) \cdot \frac{2\pi}{MP} & ; \quad p = 1, \dots, MP \\ z_p(\psi_p) &= z(\psi) \end{aligned}$$

3.4.1. Influence des tourbillons liés

Soit $(T_p)_{p=1, \dots, MP}$ la famille des tourbillons liés associés aux MP pales de l'hélice, leur influence totale en un point $I(x_0, y_0, z_0)$ de l'espace est donnée, d'après la loi de Biot et Savart, par :

$$\vec{V}_I(I) = \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_p \int_{[R_0, R_1]} \Gamma(r) \cdot \frac{d\vec{OM}_p \wedge \vec{M}_p I}{|\vec{M}_p I|^3} \cdot dr \quad (50)$$

avec ; $\overrightarrow{OM_p} = r \cdot \cos(p-1)(2\pi / MP), r \cdot \sin(p-1)(2\pi / MP), 0$

Connaissant ainsi la distribution de circulation associée au tourbillon lié à l'une quelconque des pales (puisque l'hélice possède MP pales jouant des rôles symétriques), on peut calculer, grâce, à cette relation, la vitesse induite par la famille des tourbillons liés en un point quelconque de l'espace. Remarquons enfin qu'en raison de la symétrie, l'influence de cette famille en un point situé sur la pale est constamment nulle.

3.4.2. Influence des tourbillons libres

Comme nous l'avons vu précédemment chaque nappe de tourbillons libres est décrite à l'aide de deux paramètres r_0 (rayon compris entre R_0 et R_1) et ψ_p (azimut par rapport à la pale porteuse de l'axe Ox'). Par conséquent une lanière tourbillonnaire $L_p(r_0)$ s'échappant d'un point P appartenant à la $p^{\text{ième}}$ pale, sera décrite par l'ensemble des points $M_p(x_p, y_p, z)$ tel que :

$$x_p = r(r_0, \psi) \cdot \cos(\psi_p)$$

$$y_p = r(r_0, \psi) \cdot \sin(\psi_p)$$

$$z = z(r_0, \psi)$$

$$\psi_p = \psi + (p-1) \cdot (2\pi / MP) \quad ; \quad p \in \{1, \dots, MP\} \quad ; \quad \psi \in [0, \pi / 2]$$

Où $r(r_0, \psi)$ et $z(r_0, \psi)$ représentent respectivement la contraction radiale et la translation axiale de la lanière $L_p(r_0)$ au point M_p . Le vecteur tangent $\vec{\tau}_p (\tau_{px'}; \tau_{py'}; \tau_{pz'})$ à $L_p(r_0)$ en M_p aura pour composantes :

$$\tau_{px'} = \frac{dr(r_0, \psi)}{d\psi} \cdot \cos(\psi_p) - r(r_0, \psi) \cdot \sin(\psi_p)$$

$$\tau_{py'} = \frac{dr(r_0, \psi)}{d\psi} \cdot \sin(\psi_p) + r(r_0, \psi) \cdot \cos(\psi_p)$$

$$\tau_{pz'} = \frac{dz(r_0, \psi)}{d\psi}$$

Alors la vitesse induite en I par l'ensemble du système tourbillonnaire libre, engendré par le fonctionnement de l'hélice, prend la forme suivante :

$$\vec{V}_{Li}(I) = \frac{1}{4.\pi} \cdot \int_{[R_0, R_1]} \frac{d\Gamma(r_0)}{dr_0} \cdot \vec{G}(I, r_0) \cdot dr_0 \quad (51)$$

$$\text{où : } \vec{G}(I, r_0) = - \int_{L_p(r_0)} \sum_{1 \leq p \leq MP} \left(\frac{\vec{\tau}_p \wedge \overline{M_p I}}{|\overline{M_p I}|^3} \right) \cdot d\psi$$

Comme l'indique cette formule, l'intégration peut être menée en deux parties :

- La première partie purement géométrique, à intégrer suivant l'azimut ψ , puis à sommer suivant le paramètre p pour tenir compte du nombre de pales de l'hélice. Cette partie, notée G, sera appelée coefficient d'influence. La connaissance de la configuration tourbillonnaire dans l'espace est donc nécessaire pour la détermination de ce coefficient.
- La deuxième partie, à intégrer suivant l'axe de la pale, tient compte de la variation de charge en envergure par sommation des coefficients d'influences pondérés par les poids intensités tourbillonnaires $(d\Gamma(r_0) / dr_0)$.

Pour un élément $r_0 \in [R_0, R_1]$, L'intégrale définissant le coefficient d'influence existe pour tout point I n'appartenant pas aux nappes tourbillonnaires modélisant le souffle de l'hélice. En revanche, pour les points des nappes ils ont été traités dans le paragraphe (3.2) de ce chapitre, où la vitesse induite a été réduite au voisinage immédiat de la singularité afin d'éviter le problème de la divergence aux points singuliers.

En effectuant le changement de variable suivant :

$$r_0(\theta) = \frac{1}{2} \cdot ((R_1 + R_0) - (R_1 - R_0) \cdot \cos(\theta)) \quad ; \quad \theta \in [0, \pi]$$

la fonction vectorielle \vec{G} dépendant du paramètre r_0 donc de θ , peut être considérée comme la restriction d'une fonction \vec{F}^* définie par $\vec{F}^* = \vec{G}(I, r_0(\theta))$ avec $\theta \in R$. Comme \vec{F}^* est paire et périodique de période 2π , elle est développable en série de Fourier et en moyennant une erreur de troncature négligeable, on peut écrire :

$$\forall \theta \in [0, \pi] ; \vec{G}(I, r_0(\theta)) = \sum_{0 \leq n \leq NL-1} \vec{\beta}_n(I) \cdot \cos(n\theta)$$

Le nombre de coefficients $(\vec{\beta}_n)_{n=0, NL-1}$ étant fini, pour les déterminer il suffit d'écrire que cette relation est vérifiée pour NL valeurs de θ , donc de r_0 . Comme de plus les points r_0 correspondent aux départs des lanières tourbillonnaires sur la pale, alors le sillage associé à chacune des pales peut être représenté par un nombre fini (NL) de lanières. Ceci permet de diminuer sensiblement le temps de calcul, tout en gardant une bonne précision sur la détermination des coefficients d'influence.

En écrivant la relation précédente pour les θ_i tels que $1 \leq i \leq NL$, on aboutit alors à trois systèmes linéaires correspondant aux trois composantes du coefficient d'influence, les composantes des coefficients vectoriels $(\vec{\beta}_n)_{n=0, NL-1}$ sont alors données par :

$$\begin{aligned} [\beta_{n,x'}] &= [\cos(n\theta_i)]^{-1} \cdot [G_{x'}(I, r_0(\theta_i))] \\ [\beta_{n,y'}] &= [\cos(n\theta_i)]^{-1} \cdot [G_{y'}(I, r_0(\theta_i))] \\ [\beta_{n,z}] &= [\cos(n\theta_i)]^{-1} \cdot [G_z(I, r_0(\theta_i))] \end{aligned}$$

où $[\cos(n\theta_i)]$ est une matrice d'ordre NL. les indices n et i appartiennent respectivement à $\{0, \dots, NL-1\}$ et à $\{1, \dots, NL\}$.

La détermination numérique des coefficients d'influence, nécessite la discrétisation du souffle de l'hélice, qui doit prendre en compte la répartition non uniforme de la charge le long de l'envergure des pales. En effet, la loi de circulation varie plus rapidement en fonction du rayon réduit dans les régions situées vers les deux extrémités de la pale. Par

conséquent la densité du nombre de lanières s'échappant de la pale doit augmenter au voisinage des extrémités.

De même, des essais numériques préliminaires ont montré que la circulation doit être déterminée de la manière la plus stable possible, afin d'éviter l'apparition d'instabilités dans le calcul des vitesses induites sur la pale. Ce qui revient à dire que les points où s'effectue le calcul de ces vitesses pour la résolution de l'équation du fonctionnement aérodynamique doivent être suffisamment éloignés des points où se produisent les échappements tourbillonnaires.

Un tel critère a conduit à prendre pour points d'échappements tourbillonnaires, les points de Lobatto sur l'intervalle $[R_0, R_1]$. Tandis que les points de calcul des vitesses induites sur la pale, seront les points de Gauss sur cet intervalle. Par leurs propriétés mathématiques ces deux types de points remplissent pleinement les critères précédents (voir Appendice C).

L'influence de chaque lanière tourbillonnaire s'échappant de la pale est alors obtenue comme la somme de l'influence de sa partie proche et de sa partie éloignée. En ce qui concerne cette dernière partie (modélisée par des cylindres semi infinis), le principe de calcul a été développé dans le paragraphe (3.3) de ce chapitre. On s'intéressera donc seulement à l'influence de la partie proche du sillage.

Comme on l'a vu, cette partie proche de la lanière est paramétrée à l'aide de l'azimut ψ appartenant à l'intervalle $[0, \psi_s]$ où ψ_s désigne l'azimut d'instabilité. Le calcul de l'intégrale définissant le coefficient d'influence est effectuée en discrétisant l'intervalle $[0, \psi_s]$ en NT portions de la forme :

$$I_{k-1} = \left[(k-1) \cdot \frac{2\pi}{MP}, k \cdot \frac{2\pi}{MP} \right]$$

$$I_{NT} = \left[NT \cdot \frac{2\pi}{MP}, \frac{\pi}{180} \cdot \psi_s \right]$$

avec ; $k=1, \dots, NT$

Sur chacun de ces intervalles $(I_{k-1})_{k=1, NT+1}$; le calcul est mené en utilisant la méthode d'intégration de Gauss d'ordre (NQ), basée sur les polynômes orthogonaux de Legendre (voir Appendice C).

3.4.3. Expressions discrétisées des vitesses induites

En tenant compte du développement de la loi de circulation en série de sinus, et celui des coefficients d'influence en série de cosinus, la relation (51) se met alors sous la forme :

$$\vec{V}_{Li}(I) = \int_{[0, \pi]} \frac{1}{4.\pi} \left(\sum_{1 \leq k \leq NP} k.\alpha_k \cdot \cos(k.\xi) \right) \left(\sum_{0 \leq n \leq NL-1} \bar{\beta}_n(I) \cdot \cos(n.\xi) \right) d\xi \quad (52)$$

d'où :

$$\vec{V}_{Li}(I) = \sum_{1 \leq k \leq NP} \frac{k}{4.\pi} \alpha_k \cdot \sum_{1 \leq n \leq NL} \bar{\beta}_{n-1}(I) \cdot \int_{[0, \pi]} \cos(k.\xi) \cdot \cos(n.\xi) d\xi$$

Soit finalement :

$$\vec{V}_{Li}(I) = \sum_{1 \leq k \leq NP} \frac{k}{4} \alpha_k \bar{\beta}_k(I) \quad (53)$$

Pour reconstituer le champ de vitesse induit par l'ensemble du système tourbillonnaire modélisant le souffle de l'hélice, il suffit donc de rajouter à l'expression (53), la vitesse induite par la famille des tourbillons liés associés aux pales de l'hélice.

Si $(\omega_q)_{q=1, \dots, NP}$ désignent les poids de la formule d'intégration de Gauss correspondant respectivement aux points $(r_q)_{q=1, \dots, NP}$ de l'intervalle $[R_0, R_1]$ on déduit alors l'expression discrétisée de la vitesse induite finale en un point $I(x_0, y_0, z_0)$ donnée par:

$$\vec{V}(I) = \frac{1}{4.\pi} \sum_{1 \leq q \leq NP} \sum_{1 \leq p \leq MP} \omega_q \cdot \Gamma(r_q) \cdot \vec{H}(I, r_q) + \sum_{1 \leq k \leq NP} \frac{k}{8} \alpha_k \cdot \bar{\beta}_k(I) \quad (54)$$

avec ;

$$\vec{H}(I, r_q) = \frac{R_1 - R_0}{2} \cdot \frac{d\vec{OM}_p(r_q) \wedge \vec{M}_p I}{|\vec{M}_p I|^3}$$

$$\vec{OM}_p = \left(r_q \cdot \cos(p-1) \cdot \frac{2\pi}{MP}, r_q \cdot \sin(p-1) \cdot \frac{2\pi}{MP}, 0 \right)$$

Cette expression représente la vitesse induite par le souffle de l'hélice dans la base relative $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. Pour avoir son expression dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associé au système d'axes fixe, il suffit de faire une rotation d'angle ψ_0 (ψ_0 étant la deuxième coordonnée cylindrique associée au point I). si on note (v, w, u) les composantes de la vitesse donnée par l'expression précédente dans la base relative, alors :

$$\vec{V}(I) = (-v \cdot \cos(\psi_0) - w \cdot \sin(\psi_0)) \cdot \vec{i} + (v \cdot \sin(\psi_0) - w \cdot \cos(\psi_0)) \cdot \vec{j} + u \cdot \vec{k} \quad (55)$$

Le champ de vitesse moyenne par rapport à la phase ψ_0 peut être calculé à partir de la formule (55) par :

$$\vec{V}_m(r, z) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{[0, \pi/2]} \vec{V}(r \cdot \cos(\psi_0), r \cdot \sin(\psi_0), z) \cdot d\psi_0$$

En utilisant la méthode d'intégration de Gauss d'ordre NP, cette relation peut également être approximée par :

$$\vec{V}_m(r, z) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{1 \leq q \leq NP} \omega_q \cdot \vec{V}(r \cdot \cos(\psi_{0q}), r \cdot \sin(\psi_{0q}), z)$$

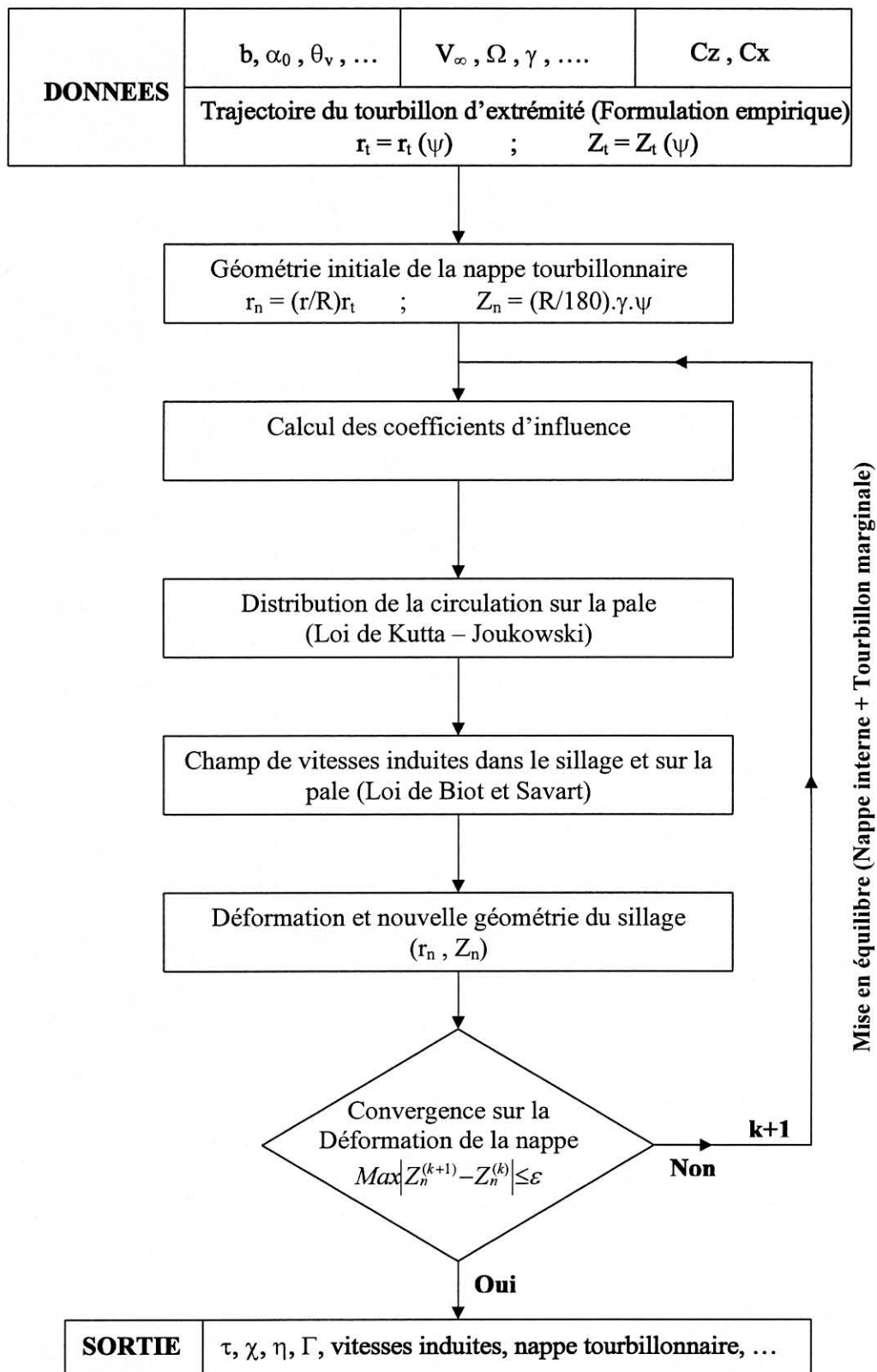
où r et z sont respectivement la première et la troisième coordonnée cylindrique du point d'observation I.

3.5. Organigramme de la procédure de mise en équilibre

La procédure qui permet le calcul du champ aérodynamique de l'hélice isolée en vol de translation, consiste principalement en la détermination de la répartition tourbillonnaire (Intensités, Positions) associée au régime de fonctionnement lié aux paramètres α_0 et γ .

Le schéma ci-dessous présente l'organigramme général du programme établi à l'aide des équations précédemment développées. Les différentes étapes du calcul peuvent être résumées de la façon suivante :

1. Une géométrie initiale du sillage est prédéterminée en fixant le régime de fonctionnement de l'hélice et en se donnant le pas d'évolution de la nappe tourbillonnaire interne.
2. La loi de circulation sur la pale, représentée par une ligne portante, est déterminée à partir de la résolution de l'équation du fonctionnement aérodynamique à l'aide d'une méthode itérative, et après avoir calculé les coefficients d'influence aux points de contrôles sur la pale.
3. Les vitesses induites peuvent être ainsi calculées aux points des échappements tourbillonnaires et dans le sillage. Ceci permet de déterminer pour chaque lanière issue de la pale les deux nouvelles fonctions (coefficients de descente) $H(x, 0)$ et $H(x, \psi_b)$.
4. Une nouvelle géométrie du sillage est ainsi obtenue, et un test de mise en équilibre complète du sillage (Nappe + tourbillon marginal) permet soit d'arrêter la procédure s'il est vérifié soit de réitérer jusqu'à l'obtention de la convergence.
5. Enfin, après convergence, le programme calcule les performances globales de l'hélice et les caractéristiques de son champ aérodynamique.



Mise en équilibre (Nappe interne + Tourbillon marginale)

Figure 3.5 : Procédure de mise en équilibre

CHAPITRE 4

RESULTATS ET CONFRONTATION CALCUL/EXPERIENCE

Les résultats du modèle numérique développé au chapitre 3, pour la configuration d'hélice isolée (code L.P.R et mise en équilibre complète du sillage), sont présentés dans ce chapitre et confrontés aux données expérimentales du champ aérodynamique. De façon à tester aussi largement que possible la méthode de mise en équilibre proposée, les confrontations calcul/expérience sont envisagées à différents niveaux; Nappes tourbillonnaires, performances globales, et champ des vitesses 3D moyennes et instantanées.

4.1. Données du calcul et données de comparaison

4.1.1. Hélice maquette

L'hélice étudiée est une maquette d'hélice aérienne, quadripale, de type MARQUIS dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Diamètre de l'hélice : $D_1 = 0.85\text{m}$
- Diamètre du moyeu : $D_0 = 0.14\text{m}$
- Les pales sont définies par la série de profils cambrés, NACA64A408 caractérisés, en fonction du rayon réduit $\xi = r/R$, par les lois d'épaisseur, de corde, de cambrure C_b , et de vrillage, indiquées par le tableau ci-dessous :

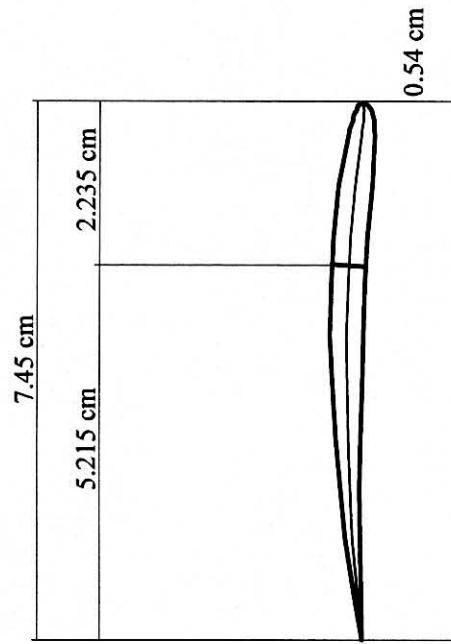
r/R_1	e/C	c/R_1	$C(m)$	C_b	θ_v°
0.176	0.187	0.204	0.087	0.40	28.3
0.300	0.091	0.291	0.124	0.40	20.8
0.400	0.085	0.250	0.119	0.40	15.1
0.500	0.082	0.242	0.103	0.40	9.66
0.600	0.080	0.202	0.088	0.40	4.53
0.700	0.073	0.174	0.074	0.35	0.00
0.800	0.051	0.155	0.066	0.30	-1.50
0.900	0.051	0.143	0.061	0.20	-8.30
1.000	0.051	0.134	0.057	0.15	-11.5

Tableau 4.1 : Caractéristiques des profils en fonction du rayon réduit

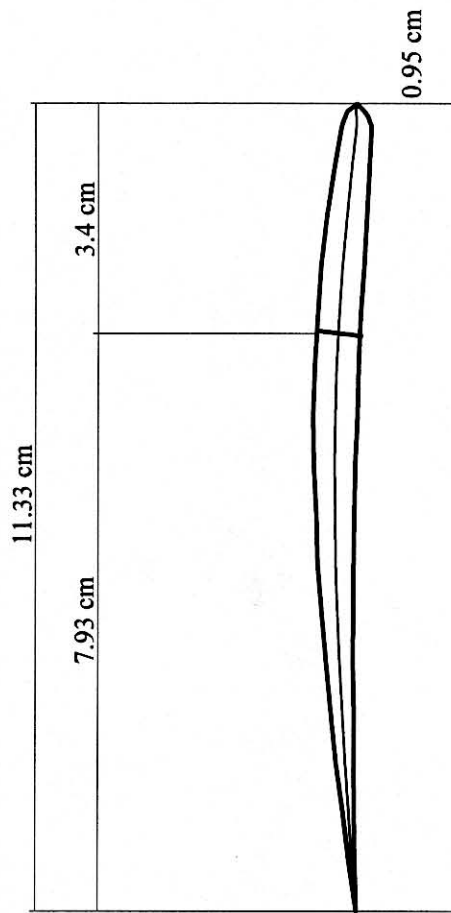
La géométrie des profils de deux sections de pales situées aux rayons réduits $\xi=0.45$ et $\xi=0.7$ est précisée sur la figure 1. En raison de la cambrure des profils, le calage géométrique α_0 par rapport à l'axe de portance nulle est défini par $\alpha_0 = \alpha_b + \alpha_c$, où α_b et α_c représentent respectivement l'incidence géométrique par rapport à la bi-tangente intrados et l'incidence relative au bord d'attaque du profil. Pour la section $\xi=0.7$ la figure 2a donne pour le calage moyen $\alpha_0 = 27^\circ$, la définition des angles α_b et α_c (dans ce cas $\alpha_b=25.5^\circ$ et $\alpha_c=1.5^\circ$).

La pale de l'hélice est caractérisée par une loi de vrillage fortement non linéaire, qui est telle que $\theta_v=0^\circ$ à $\xi=0.7$ (voir figure 2b), ainsi que par une forte évolution des cordes le long de l'envergure (voir figure 3). Les coefficients aérodynamiques 2D des profils constituant la pale, $C_z=C_z(i^\circ)$ et $C_x=C_x(i^\circ)$, où i désigne l'incidence, sont donnés sur la figure 4.

ECH. 1/1

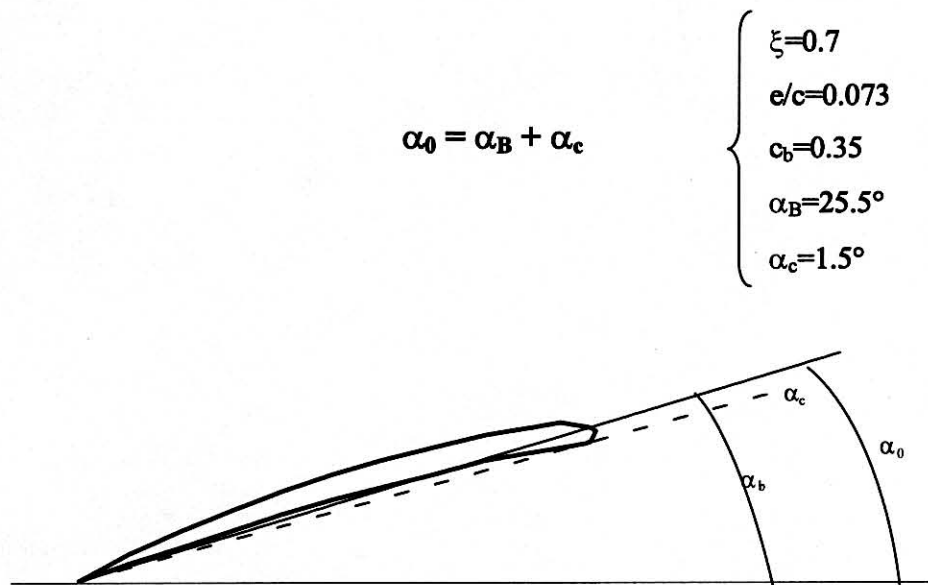
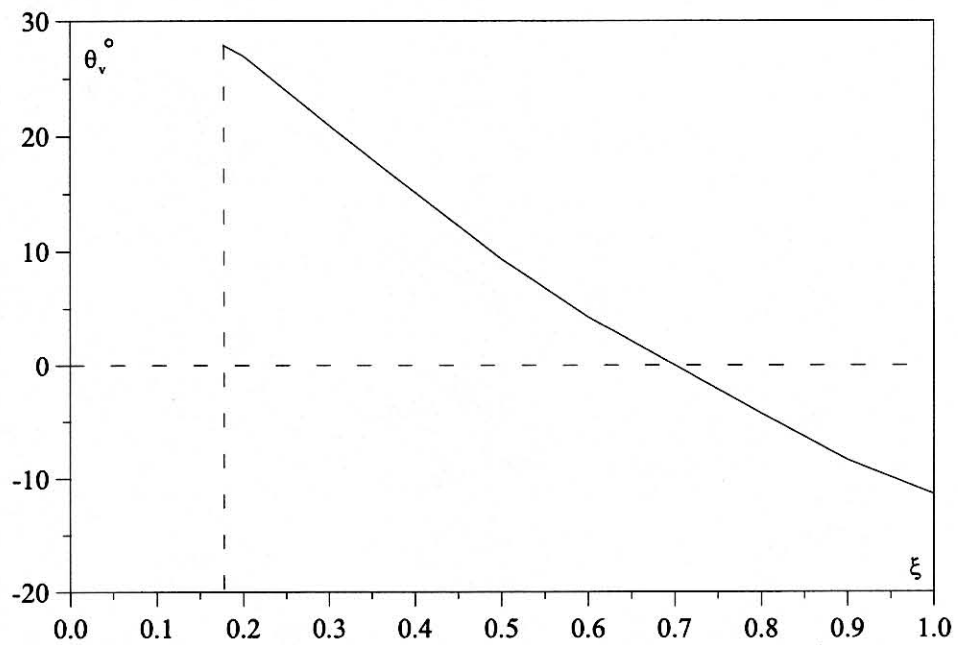


$\xi = 0.7$
 $e/l = 0.073$
cambrure 0.35



$\xi = 0.45$
 $e/l = 0.0836$
cambrure 0.40

Figure 4.1 : Profils de la pale à $\xi=0.45$ et $\xi=0.7$

Figure 4.2.a : Définition du calage à $\xi=0.7$ Figure 4.2.b : Evolution du Vrillage en fonction de ξ

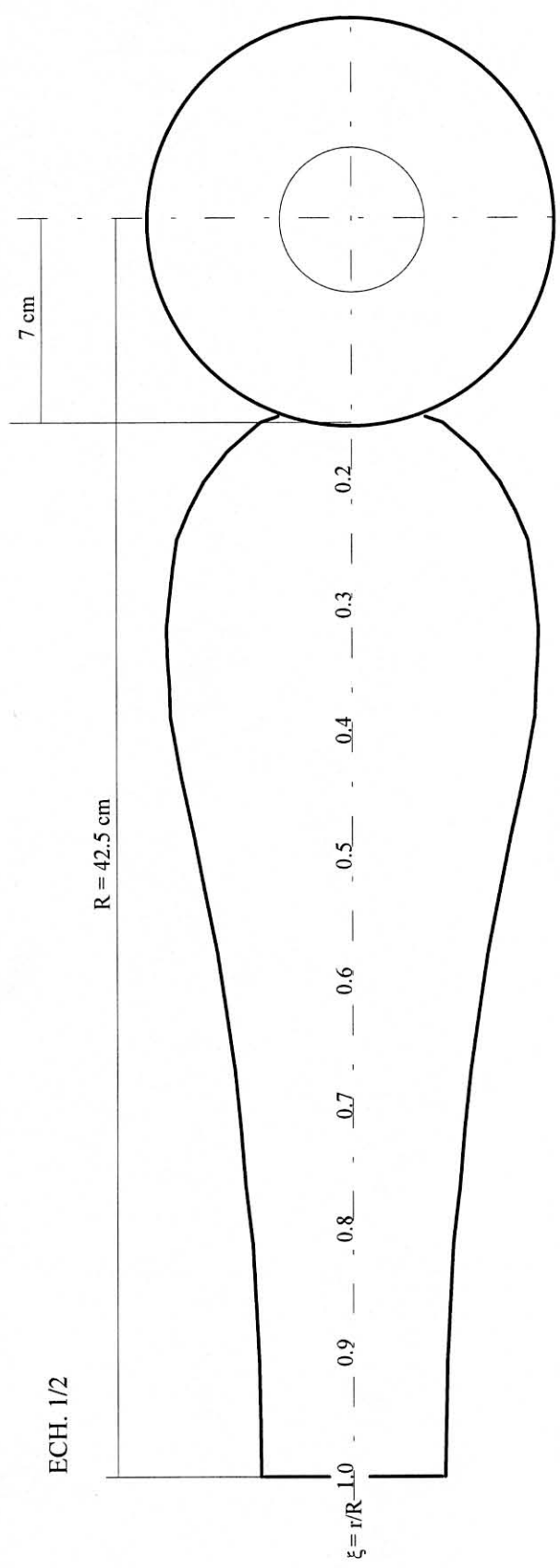


Figure 4.3 : Pale de l'hélice

4.1.2. Données de comparaison -Résultats expérimentaux disponibles

Le champ aérodynamique associé à l'hélice MARQUIS, précédemment définie, a fait l'objet d'une étude expérimentale détaillée [29], [35].

Les essais ont été menés dans la soufflerie subsonique S1 de l'IMFM, à veine ouverte, de section elliptique ($3,3 \times 2,2 \text{ m}^2$), et produisant un courant uniforme pouvant aller jusqu'à 45 m/s. La fréquence de rotation des pales pouvait varier de 20 t/s à 50 t/s.

Comme le montre la vue d'ensemble de la figure 5, l'hélice est maintenue dans la veine d'essai par un boîtier non caréné, sur lequel est incorporé un renvoi d'angle pour la transmission du mouvement de l'arbre moteur à l'hélice. Le boîtier d'hélice est soutenu par un mât cylindrique en acier perpendiculaire à l'axe de rotation et solidaire du bâti supportant le système d'entraînement.

Par ailleurs, un synchroniseur à cellule photoélectrique est monté sur le boîtier d'hélice, et est couplé avec un chronomètre électronique pour déterminer la période de rotation des pales. Ce top externe de synchronisation délivré par la cellule, permet d'initialiser l'enregistrement lors d'une acquisition de données de vitesses instantanées en fonction de l'azimut de rotation. L'instant initial ($\psi = 0^\circ$), est défini comme l'azimut où la pale est située juste au droit du point de mesure.

Les mesures globales de traction et de couple sont réalisées à l'aide de jauges de contraintes disposées sur le mât-support. Ces mesures ont été effectuées dans une gamme de variation étendue du paramètre de fonctionnement (allant du régime de traction nulle aux régimes voisins de traction maximale).

A titre d'exemple, la figure 6, donne les variations du coefficient de traction τ mesuré pour 5 valeurs différentes du calage moyen α_0 ($23^\circ \leq \alpha_0 \leq 32.5^\circ$), et pour un paramètre de fonctionnement γ variant de 0.2 à 1.1. On remarquera en particulier que ces résultats traduisent bien l'universalité du paramètre γ vis-à-vis des efforts globaux le long de chaque courbe considérée à iso- α_0 . En effet, pour un paramètre $\gamma = V_\infty / n.D$, réalisé de

manière différente par variation des grandeurs physiques V_∞ et n , il apparaît des points expérimentaux confondus pour un calage fixé des pales.

Les caractéristiques globales de l'hélice (τ, χ, η) étant définies, les explorations du sillage ont donné lieu à l'établissement de lois empiriques de synthèse sur l'évolution radiale et axiale du tourbillon marginal qui ont été rappelées au chapitre 3.

En ce qui concerne la mesure des champs de vitesses 3D, elle a été réalisée pour trois points de fonctionnements (α_0, γ) sélectionnés de telle manière que le coefficient de traction demeure constant et égal à 0,16. En se reportant à la figure 6 la valeur de ces trois couples de paramètres a été fixée à ($\alpha_0=23^\circ, \gamma=0.44$) ; ($\alpha_0=27^\circ, \gamma=0.63$) ; ($\alpha_0=32^\circ, \gamma=0.89$).

Pour chaque couple de paramètres (α_0, γ) le champ 3D des vitesses instantanées (axiale w , radiale u , tangentielle v) définies dans le repère fixe de la figure 7, a été mesuré dans cinq plans de coupes successifs du sillage $z/R_1=cste$, et dans chacun de ces plans le long de 15 abscisses radiales le long du rayon de la pale. D'une façon générale, les points de mesures ont été réalisés aux 9 abscisses suivantes : $r/R_1= 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,85; 0,9; 1,00$. Les six abscisses restantes sont réparties de part et d'autre de la position du tourbillon marginal avec un incrément radial $d\xi=0,01$. On dispose ainsi de 75 points de mesures 3D en fonction de l'azimut pour décrire le champ de vitesses associé à un point de fonctionnement donné ($\alpha_0, \gamma, \tau=0.16$).

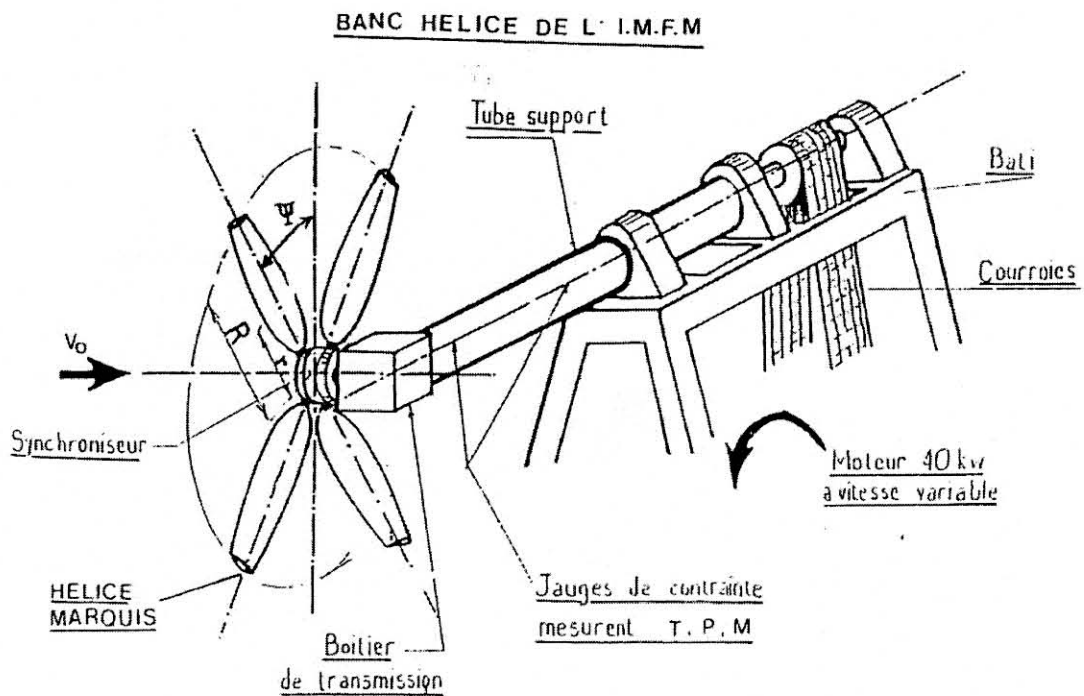
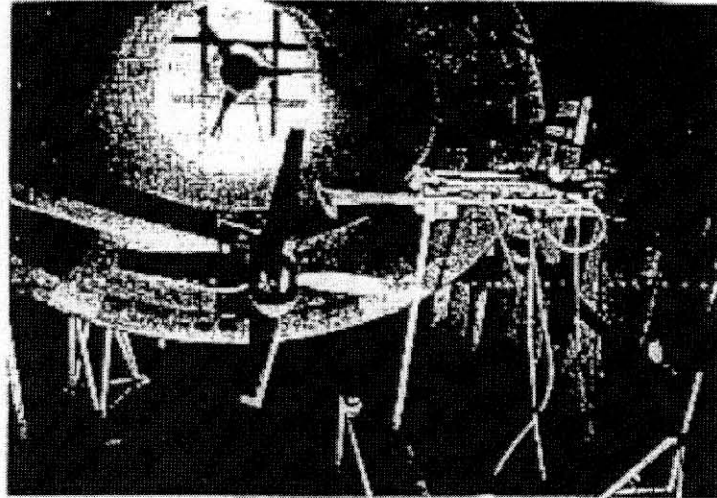


Figure 4.5 : Montage hélice et système d'exploration, Banc hélice de l'IMFM

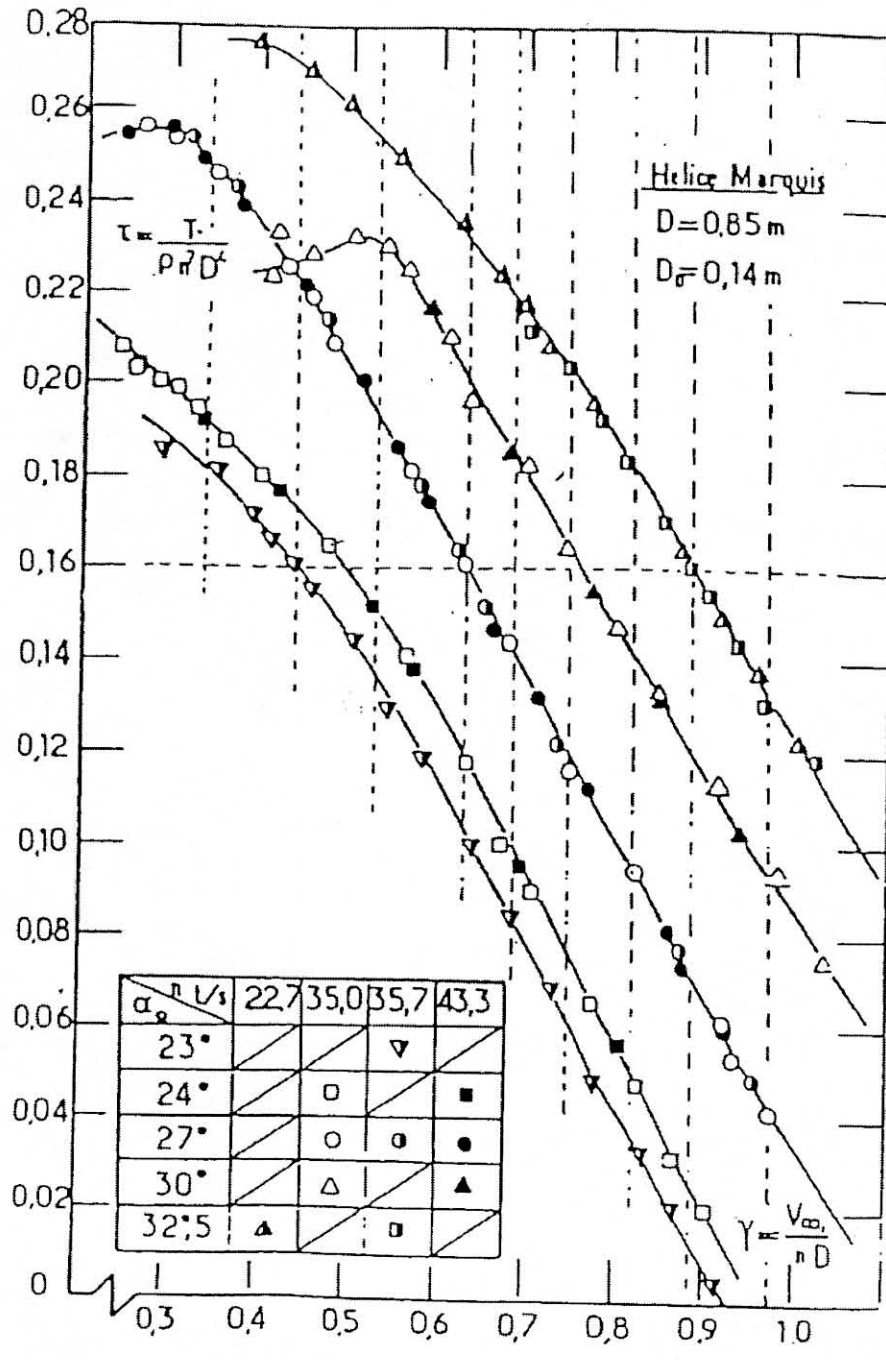


Figure 4.6 : Coefficient de traction expérimental à iso-calage

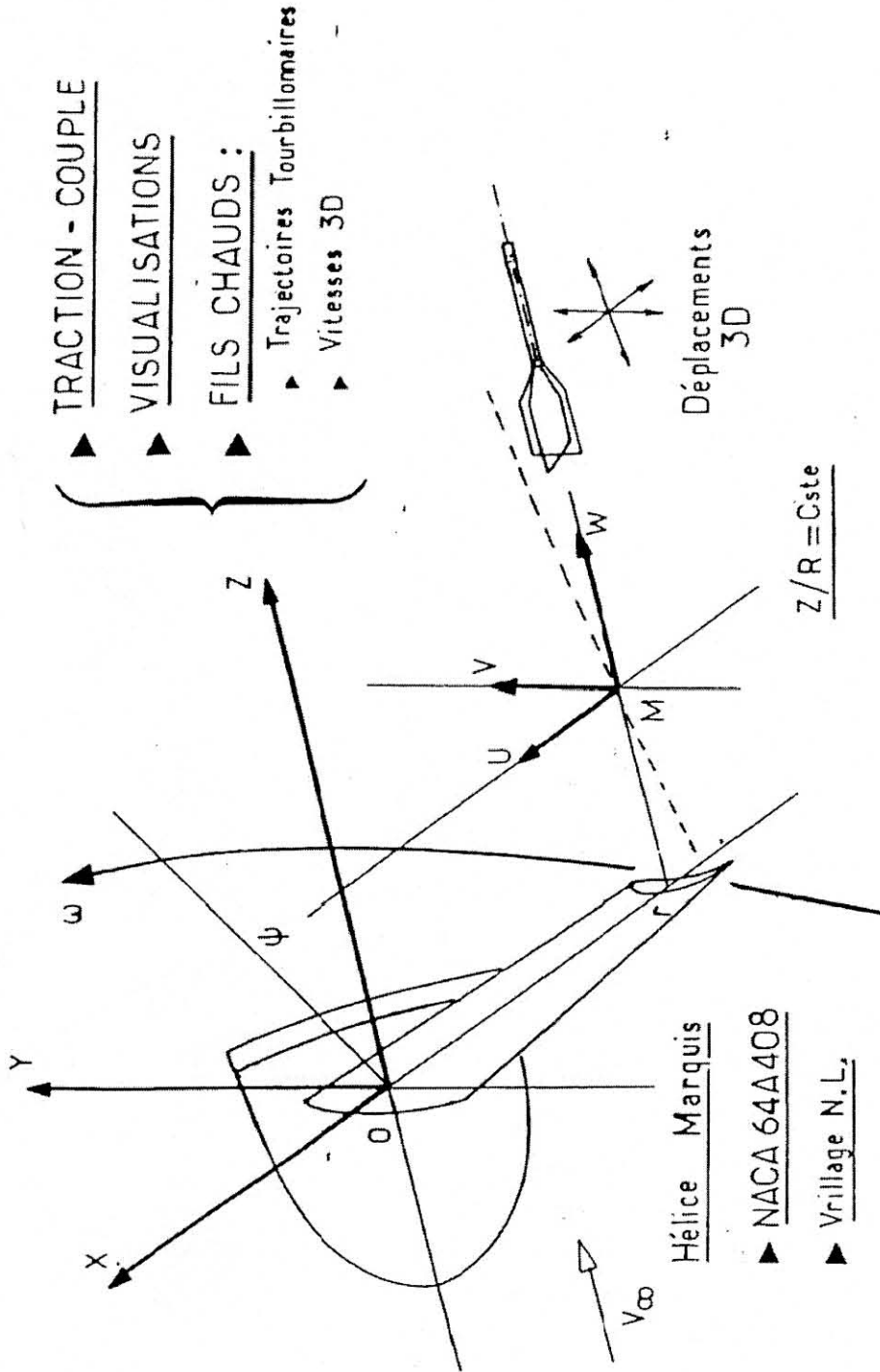


Figure 4.7 : Définition du système d'axes de mesures

4.2. Universalité du paramètre de fonctionnement vis-à-vis du champ aérodynamique de l'hélice opérant à iso-calage

Avant d'aborder l'analyse des résultats du calcul et leur fonctionnement avec l'expérience, il est utile de mettre en évidence l'influence du paramètre γ sur le champ aérodynamique et de son caractère universel vis-à-vis de ce champ.

Les résultats du calcul concernant le pas géométrique des lanières tourbillonnaires issues de la pale, montrent tout d'abord que le sillage développé à l'aval de l'hélice (fonctionnant à calage moyen fixé α_0) n'est fonction que du paramètre du fonctionnement γ .

Un exemple de ces résultats correspondant au point de fonctionnement ($\alpha_0=32.5^\circ$, $\gamma=0.5$), où γ a été obtenu pour deux jeux différents des paramètres V_0 et n , est présenté sur le tableau ci-dessous qui démontre bien l'identité des pas de nappes tourbillonnaires associées au paramètre γ .

V_0	15,172	9,647
n	35,7	22,7
R/R_1	H1(x, 0)	H1(x, 0)
0,164	0,200	0,200
0,187	0,304	0,304
0,240	0,410	0,410
0,318	0,431	0,431
0,415	0,441	0,441
0,525	0,433	0,433
0,639	0,414	0,414
0,749	0,396	0,396
0,846	0,383	0,383
0,924	0,370	0,370
0,976	0,330	0,330

Tableau 4.2 : Pas des lanières tourbillonnaires en fonction de γ

Par ailleurs le caractère universel de ce paramètre γ peut également être démontré à l'aide du calcul des performances de l'hélice (τ , χ , η) . Le tableau suivant présente les résultats

calculés pour 3 points de fonctionnement (α_0, γ) , où α_0 a été fixé à 32.5° et γ réalisé de manière différente par variation des grandeurs physiques V_0 et n .

V_∞	n	γ	Traction T	Puissance P	τ	χ	η
15,172	35,7	0,5	213,416	6023,660	0,261	0,243	0,537
9,647	22,7	0,5	86,289	1548,697	0,261	0,243	0,537
12,138	35,7	0,4	231,279	6209,640	0,283	0,251	0,452
7,718	22,7	0,4	93,510	1596,443	0,283	0,251	0,452
9,104	35,7	0,3	247,348	6339,039	0,304	0,256	0,355
5,788	22,7	0,3	100,219	1629,915	0,304	0,256	0,355

Tableau 4.3 : Performances de l'hélice en fonction de γ

L'universalité du paramètre γ vis-à-vis du champ aérodynamique global et local est donc bien confirmée à la fois par les résultats du calcul précédent, et par les essais (figure 6). Cette conclusion constitue donc une vérification précieuse de l'hypothèse de stationnarité de l'écoulement dans le référentiel relatif en fluide parfait, sur laquelle est basée la modélisation théorique du souffle de l'hélice fonctionnant à vitesse de rotation constante et sans incidence par rapport à l'écoulement uniforme.

Si l'on écrit en effet l'équation de quantité de mouvement d'Euler exprimée dans le système d'axes relatif, et donnée par le système 13 du chapitre 2 on a :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{V}) \wedge \vec{W} = -\text{grad}\left(\frac{P}{\rho} - \Omega^2 r^2 + \frac{w^2}{2}\right)$$

En prenant comme variable les quantités suivantes adimensionnées :

$$\vec{V}^+ = \frac{\vec{V}}{V_0} ; \quad p^+ = p / (1/2) \cdot \rho \cdot V_0^2 ; \quad \overrightarrow{OM}^+ = \overrightarrow{OM} / R$$

Cette équation devient :

$$\frac{R}{V_0} \cdot \frac{\partial \vec{W}^+}{\partial t} + \text{rot}^+(\vec{V}^+) \wedge \vec{W}^+ = -\text{grad}^+\left(\frac{p^+}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{\gamma^2} \cdot r^{+2} + \frac{w^+}{2}\right)$$

En régime instationnaire dans le référentiel relatif, la solution de cette équation dépend explicitement des grandeurs physiques V_0 et n donc de V_0 et γ . Par contre en mouvement relatif permanent $\partial \vec{W}^+ / \partial t = 0$, et l'équation précédente se réduit à :

$$\text{rot}^+(\vec{V}^+) \wedge \vec{W}^+ = -\text{grad}^+ \left(\frac{p^+}{2} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{\gamma^2} \cdot r^{+2} + \frac{w^+}{2} \right)$$

et sa solution générale n'est alors fonction que du paramètre de fonctionnement γ , et ceci quelque soit la manière dont on le réalise à partir des grandeurs physiques V_0 et n . En particulier, les trajectoires tourbillonnaires (confondues avec les lignes de courant, et caractérisées par le fait que l'énergie $E^+ = \frac{p^+}{2} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{\gamma^2} \cdot r^{+2} + \frac{w^+}{2}$ est une constante $C(\gamma, x^+)$ le long de ces lignes) ne dépendent que de ce paramètre γ et du point d'échappement correspondant à r^+ sur la pale de l'hélice.

4.3. Résultats relatifs aux nappes tourbillonnaires

Rappelons tout d'abord que la méthode de calcul décrite au chapitre 3 consiste à réaliser une mise en équilibre des lanières tourbillonnaires aux points de calcul, en modifiant à chaque itération, la géométrie du sillage soumis à l'influence des vitesses induites. Le sillage initial, correspondant à la première itération, est donné en considérant un pas constant axialement, et égal à l'avance par tour (ce qui revient donc à supposer que l'air traverse le disque hélice sans aucune perturbation). La procédure de mise en équilibre "adapte" le pas de la nappe tourbillonnaire et permet de contrôler la corrélation entre les vitesses induites et les vitesses d'éloignement des tourbillons du plan de rotation.

Le pas de cette nappe a été calculé pour différents régimes de fonctionnement de l'hélice, en fonction de la distance à l'axe de rotation et de l'azimut ψ (qui pour notre cas correspond à $\psi=0^\circ$ et à $\psi=\psi_b$, c'est à dire au droit du plan de rotation et au passage de la nappe sous la pale suivante). Deux exemples de comparaisons entre le calcul présent et l'expérience déduite des mesures aux fils chauds et des visualisations [38] sont présentés sur les figures 8 et 9. Ces deux figures représentent, pour deux valeurs de γ , l'évolution du pas réduit $H(x, 0)$ dans le plan de rotation en fonction de la distance r/R_1 à l'axe du moyeu. Les résultats font apparaître un bon accord entre les valeurs expérimentales et numériques. La concordance étant toutefois meilleure pour le γ le plus élevé ($\gamma=0,71$).

En ce qui concerne la variation du pas de la nappe en fonction de l'azimut les résultats expérimentaux montrent que, pour tout régime de fonctionnement de l'hélice situé entre celui de la traction nulle et celui du décrochage, on a (presque partout) $H(x, \psi_b) > H(x, 0)$ c'est à dire les lanières tourbillonnaires seront accélérées à leur passage sous la pale qui vient immédiatement après celle qui les a larguées.

Ce résultat est également bien confirmé par les résultats du calcul comme le montrent les figures 10 et 11. Ces figures représentent, pour la section de pale $\xi = 0,75$; la variation des pas $H(x, 0)$ et $H(x, \psi_b)$ en fonction du paramètre de fonctionnement γ , pour 3 calages différents $\alpha_0 = 32,5^\circ$; 27° et 23° . Les résultats indiquent bien que $H_2 > H_1$; et que $H(x, 0)$ et $H(x, \psi_b)$ apparaissent comme des fonctions croissantes du calage moyen α_0 , et du paramètre γ .

Pour les trois régimes de fonctionnement de l'hélice sélectionnés lors de l'étude expérimentale, à savoir ($\alpha_0 = 23^\circ$; $\gamma = 0,44$), ($\alpha_0 = 27^\circ$; $\gamma = 0,63$), ($\alpha_0 = 32,5^\circ$; $\gamma = 0,89$) et qui permettent de conserver le coefficient de traction constant et égal à 0,16, le calcul des nappes tourbillonnaires a permis de reconstituer la géométrie 3D complète des sillages associés.

Les figures 12, 13, 14 présentent les résultats du calcul ainsi obtenus pour les trois couples de paramètres (α_0, γ). La géométrie du sillage associée à une pale est représentée en perspective avec un angle d'inclinaison de 10° du plan de rotation vers l'observateur. Le sillage est calculé et tracé depuis son émission par la pale, jusqu'à l'apparition du sillage lointain.

On remarquera que contrairement au cas du rotor d'hélicoptère en vol stationnaire [39], [40], pour lequel un coefficient de traction C_T fixé (donc un calage moyen α_0 fixé) détermine une géométrie unique du sillage, les résultats de ces trois figures font apparaître des géométries de sillages totalement différentes pour chaque couple de paramètres (α_0, γ), et bien que $\tau = C_{ste} = 0,16$. On observe en effet une contraction radiale du sillage d'autant plus forte que le calage moyen α_0 , est faible. On constate également que lorsque le calage croît, la vitesse de convection axiale des nappes tourbillonnaires s'accroît par rapport au plan de rotation de l'hélice.

De plus, alors que pour le rotor en vol stationnaire la nappe tourbillonnaire s'échappant d'une pale, s'éloigne du plan de rotation d'autant plus rapidement que l'on se dirige du moyeu vers l'extrémité de la pale, on observe ici, dans le cas de l'hélice que la vitesse de descente des lanières tourbillonnaires est maximale dans la région de pale située entre le moyeu et la section $\xi=0.5$ (voir figures 8, 10, 12, 13, 14). Autrement dit, la vitesse de convection de la nappe interne est plus grande que celle des tourbillons émis aux extrémités.

Cette différence de comportement géométrique du sillage entre l'hélice en vol de translation et le rotor au point fixe, peut s'expliquer en partie par le fait que la première fonctionne dans un écoulement à composante axiale principale (qui emporte axialement les particules fluides avec une vitesse moyenne élevée), tandis que pour le rotor au point fixe, Ces mêmes particules fluides ne peuvent être évacuées dans le sillage qu'au bout d'un certain nombre de tours du rotor, puisque c'est le sillage lui même qui va induire l'écoulement principal et qui va finalement entraîner les particules tourbillonnaires. De plus, la géométrie de la pale de l'hélice (fortement vrillée par rapport à une pale de rotor classique) peut jouer un rôle déterminant dans la convection et l'éloignement des tourbillons émis le long de l'envergure de la pale.

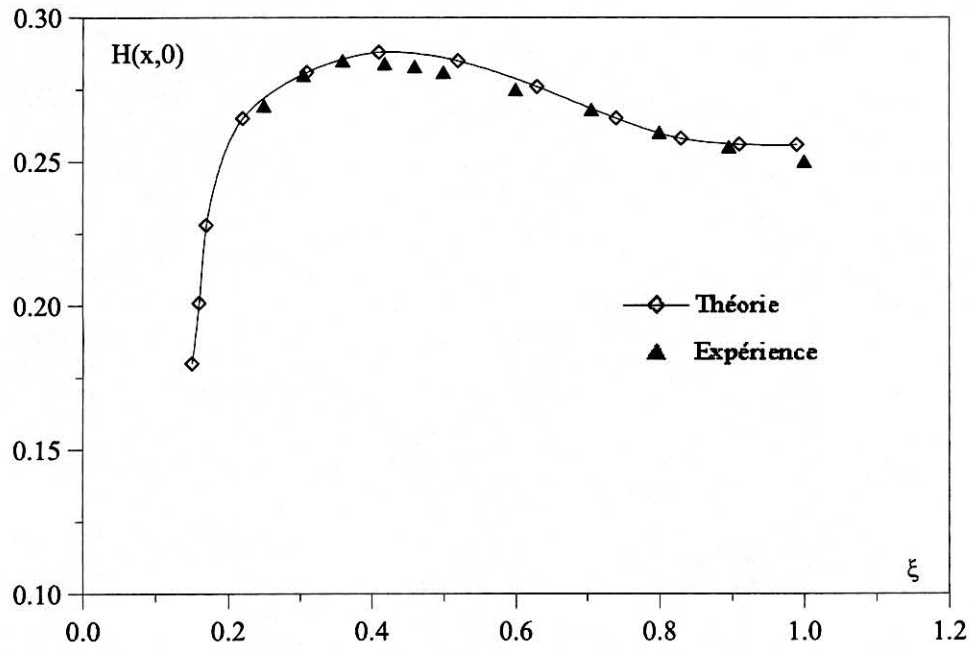


Figure 4.8 : Evolution du pas $H(x,0)$ le long de pale d'hélice
 $\alpha_0 = 27^\circ$; $\gamma=0.71$

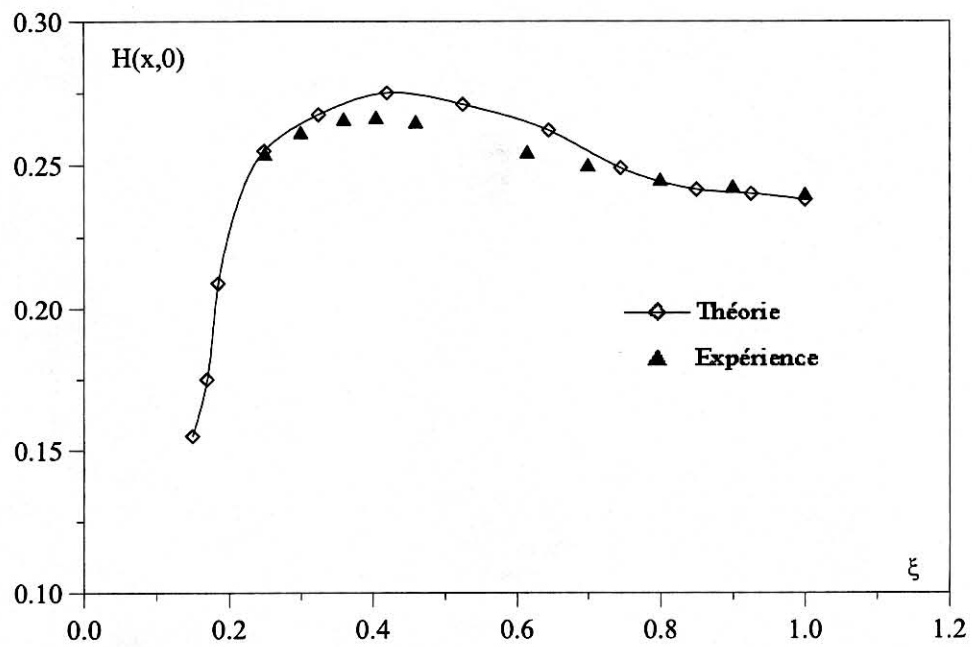


Figure 4.9 : Evolution du pas $H(x,0)$ le long de pale d'hélice
 $\alpha_0 = 27^\circ$; $\gamma=0.63$

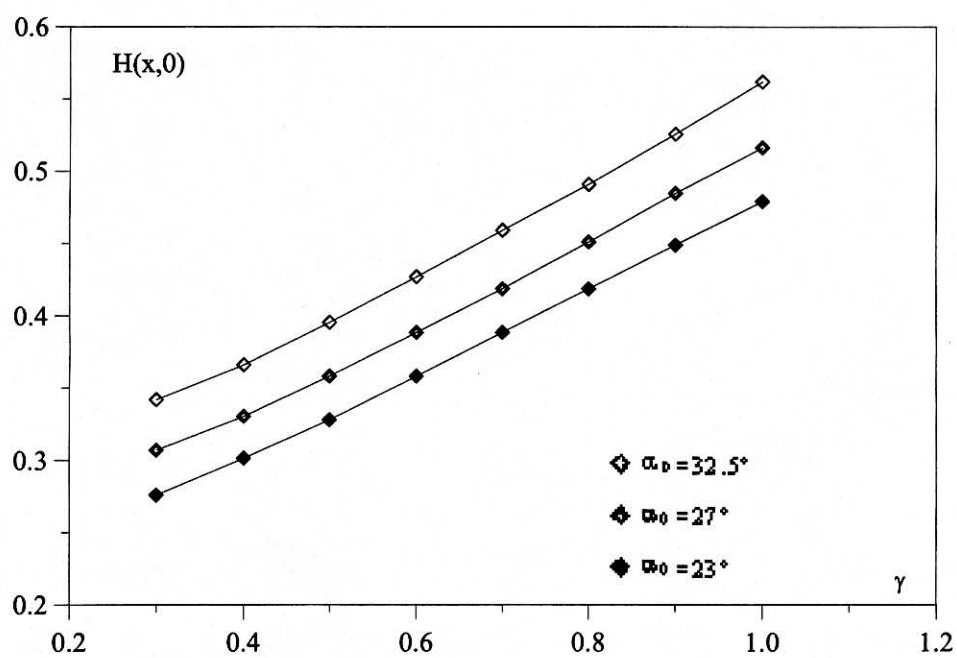


Figure 4.10 : Evolution du pas de nappes en fonction γ à $\xi=0.7$

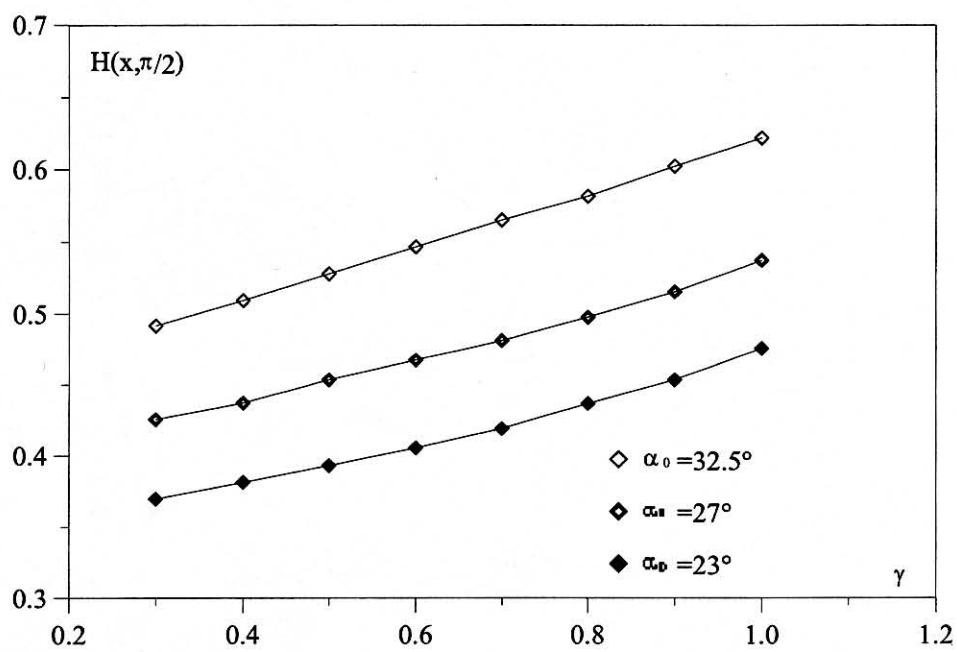


Figure 4.11 : Evolution du pas de nappes en fonction γ à $\xi=0.7$

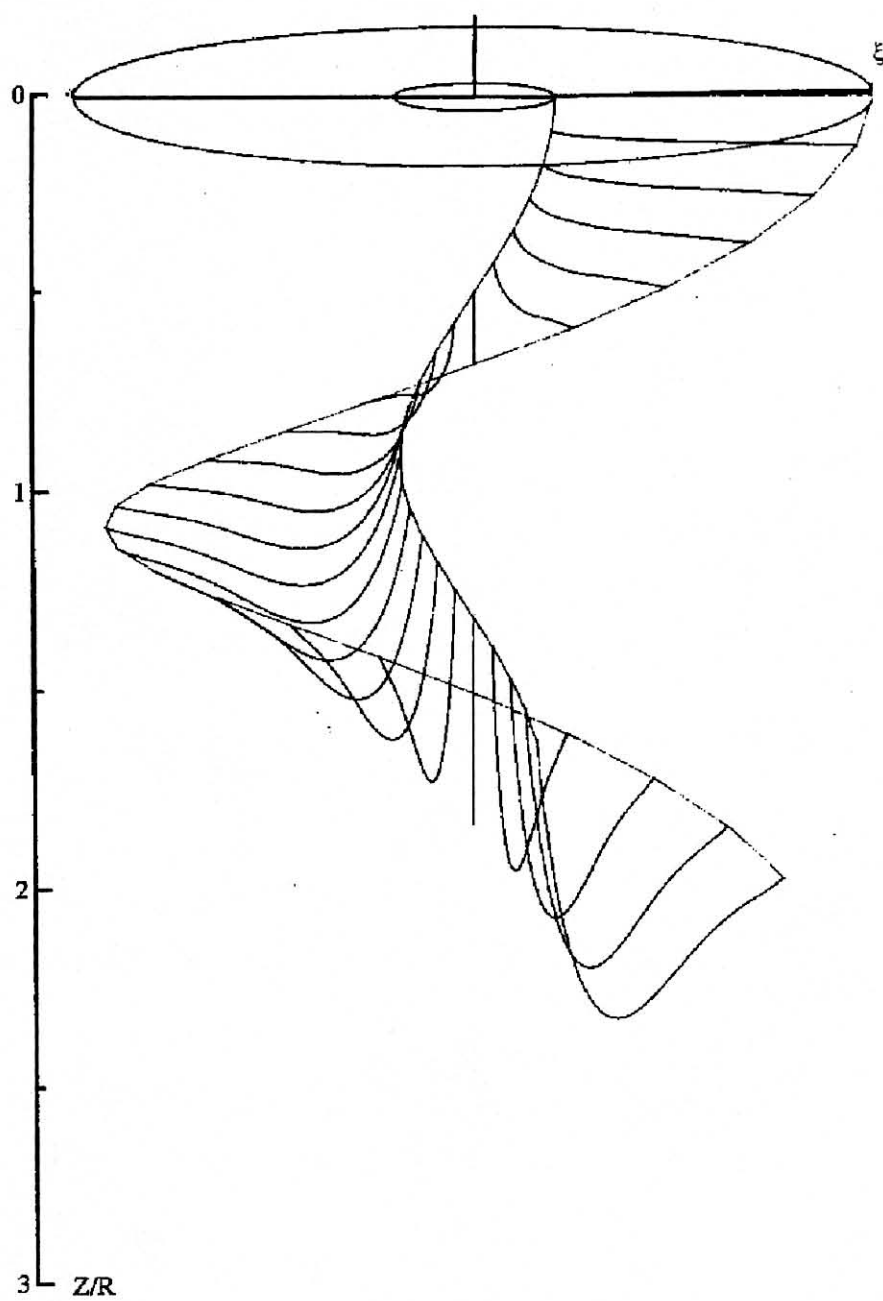


Figure 4.12 : Nappe tourbillonnaire ($\alpha_0 = 32.5^\circ$; $\gamma = 0.89$; $\tau = 0.16$)

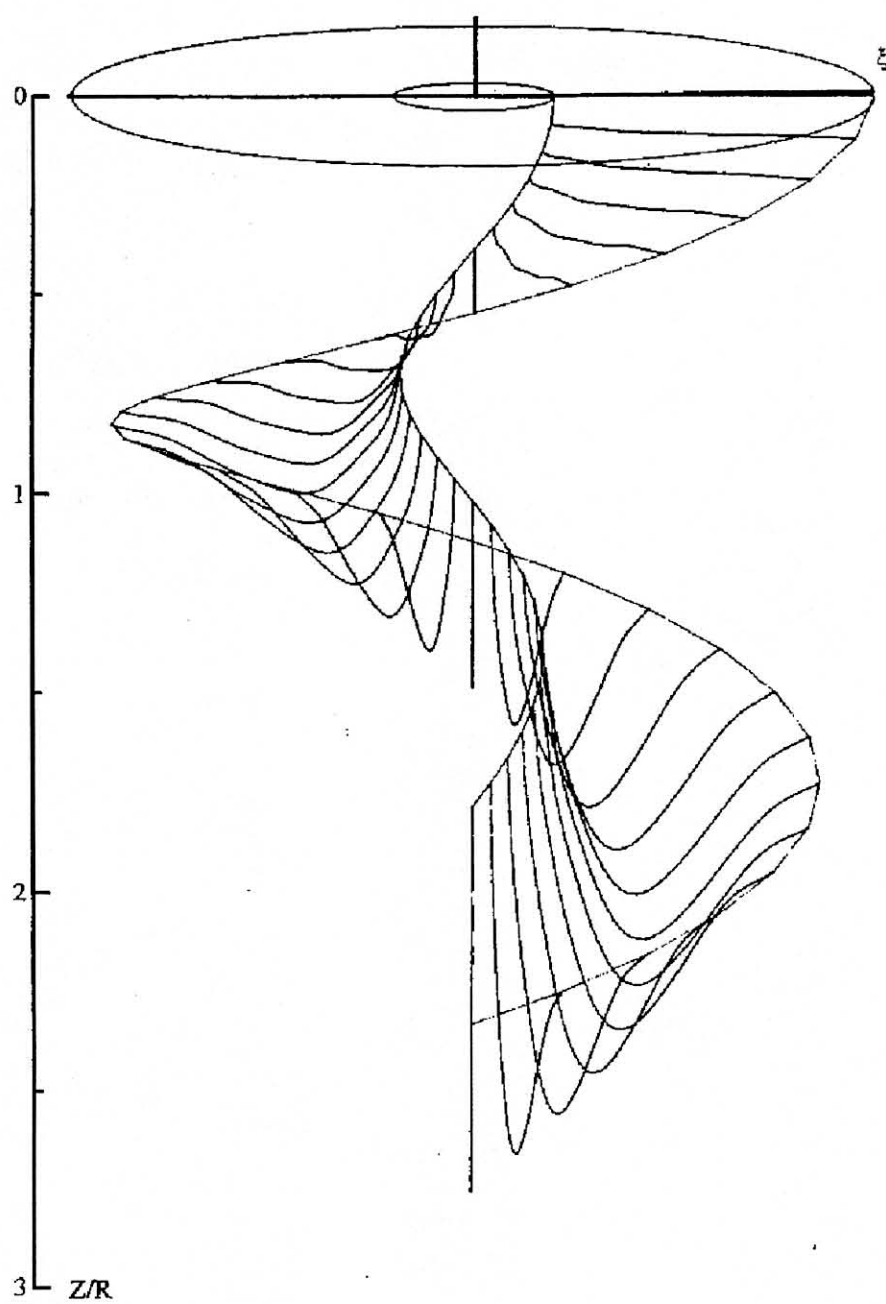


Figure 4.13 : Nappe tourbillonnaire ($\alpha_0 = 27^\circ$; $\gamma = 0.63$; $\tau = 0.16$)

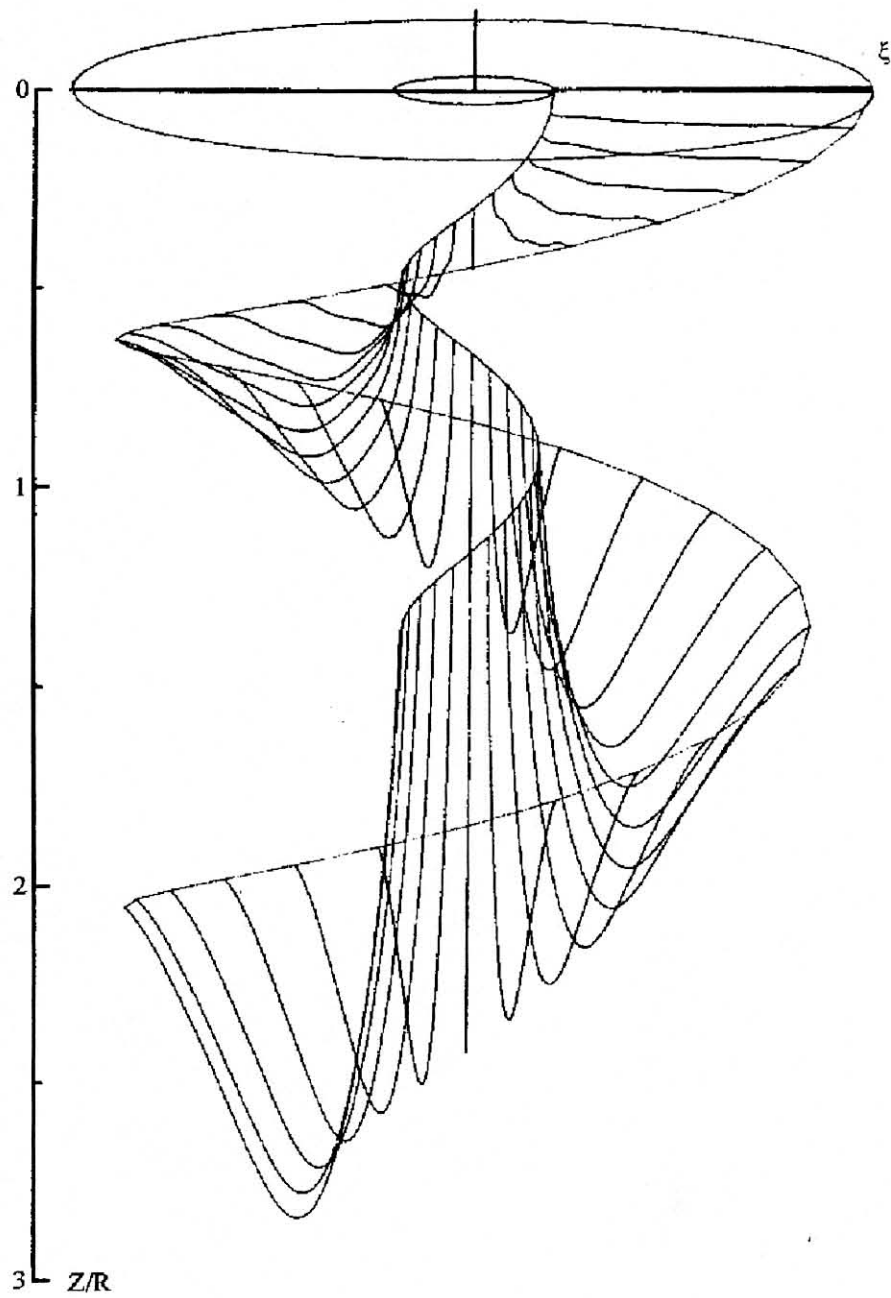


Figure 4.14 : Nappe tourbillonnaire ($\alpha_0 = 23^\circ$; $\gamma = 0.44$; $\tau = 0.16$)

4.4. Résultats relatifs aux performances globales de l'hélice

Les efforts globaux s'exerçant sur les pales, sont obtenus par intégration, le long de chaque pale, des composantes de traction et de couple dues à chaque profil fonctionnant dans le champ de vitesse relatif bidimensionnel, défini par la vitesse de rotation locale $\bar{\Omega} \wedge \vec{r}$, et la vitesse de perturbation de l'écoulement relatif créé par le fonctionnement de l'hélice.

Les caractéristiques du fonctionnement global de l'hélice ont ainsi été calculées pour trois valeurs différentes du calage moyen α_0 ($32,5^\circ$; 27° ; 23°), et pour des variations de γ telles que $0.3 \leq \gamma \leq 1.0$. Les résultats relatifs au coefficient de traction τ sont regroupés sur les figures 15, 16, 17, et comparés aux résultats expérimentaux mesurés à l'aide des jauges de contrainte. Sur l'ensemble des 3 figures, les valeurs calculées du coefficient τ , portées en fonction du paramètre γ pour les trois calages mentionnés ci-dessus, font apparaître un bon accord avec l'expérience, et ceci quelque soit le régime de fonctionnement de l'hélice variant de $\gamma=0.3$ à $\gamma=1.0$. A titre d'exemple, le coefficient de traction expérimental constant $\tau=0.16$, est recoupé dans les trois cas de calcul à moins de 0,6% pour $\alpha_0=32,5^\circ$ et 3% pour $\alpha_0=27^\circ$ et 4% pour $\alpha_0=23^\circ$.

La confrontation calcul/expérience concernant le coefficient de puissance $\chi=\chi(\gamma)$ est présenté sur les figures 18, 19, 20 pour les trois valeurs du calage $\alpha_0=32,5^\circ$; 27° ; 23° . Remarquons tout d'abord que, comme pour le coefficient de traction, le coefficient χ est une fonction décroissante de γ à iso-calage. Tandis que, à γ fixé l'hélice absorbe d'autant plus d'énergie que sa charge augmente (c'est à dire que son calage augmente). Là aussi la confrontation calcul/expérience est satisfaisante mais moins bonne que celle obtenue sur le coefficient de traction τ .

Cet écart, qui peut paraître important par rapport à celui relevé sur le coefficient τ , doit en fait être attribué à une double influence; D'une part la détermination expérimentale du couple est moins précise que celle de la traction (1% sur la traction et 2% sur le couple); d'autre part, les coefficients aérodynamiques (C_z , C_x) des profils utilisés dans le calcul sont établis en régime 2D, à un nombre de Reynolds différent de celui des essais sur l'hélice maquette. Cette influence du Reynolds est importante sur le C_z max des profils et

sur le coefficient de traînée C_x pour le calcul du couple χ . Une correction de ces coefficients, par prise en compte de l'effet du nombre de Reynolds, et également des effets tridimensionnels (négligés dans le calcul), pourrait améliorer la prédiction du coefficient de puissance χ .

Enfin, pour ces trois calages considérés, on a représenté sur les figures 21, 22, 23 l'évolution du rendement propulsif η défini comme le rapport entre la puissance de propulsion $V_0.T$ et la puissance fournie P , en fonction du paramètre γ . Ces courbes font apparaître que le rendement théorique prédit de manière satisfaisante le rendement mesuré. Cependant, comme pour le coefficient de puissance χ , la confrontation est moins bonne que celle obtenue sur τ , l'erreur ainsi commise sur le coefficient η est une conséquence directe de la sous estimation, par le calcul, de la puissance réelle à fournir pour vaincre le couple résistant sur l'arbre. En outre, un effort de modélisation géométrique du sillage est encore à apporter pour les régimes de fonctionnement à forte charge (dans le régime du décrochage dynamique).

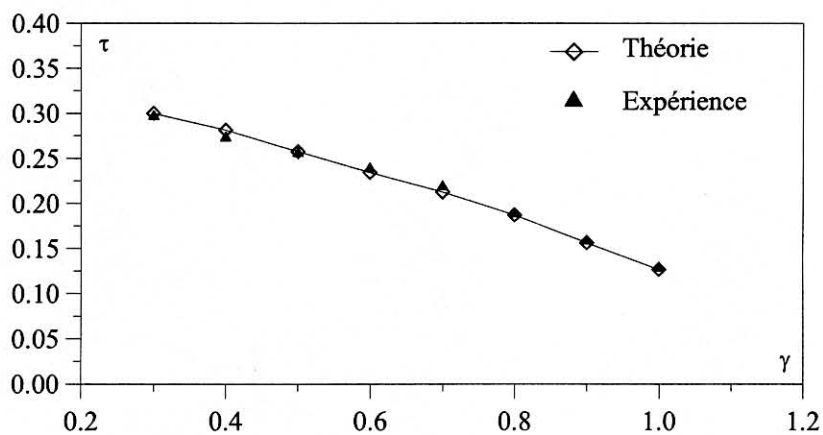


Figure 4.15 : Coefficient de traction en fonction de γ à $\alpha_0 = 32.5^\circ$

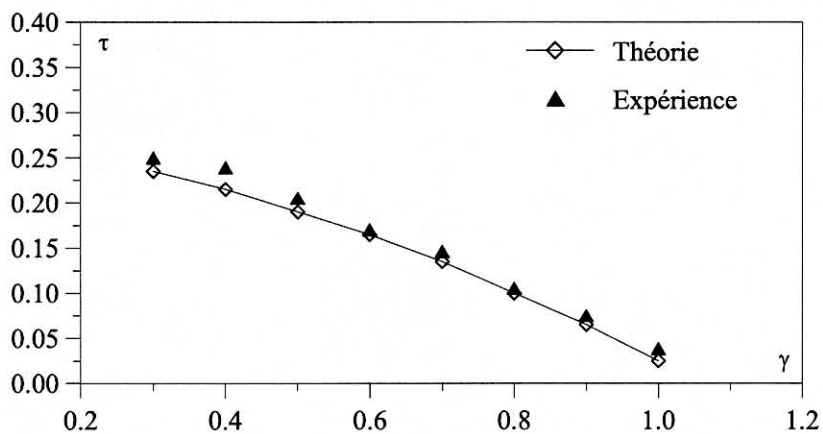


Figure 4.16 : Coefficient de traction en fonction de γ à $\alpha_0 = 27^\circ$

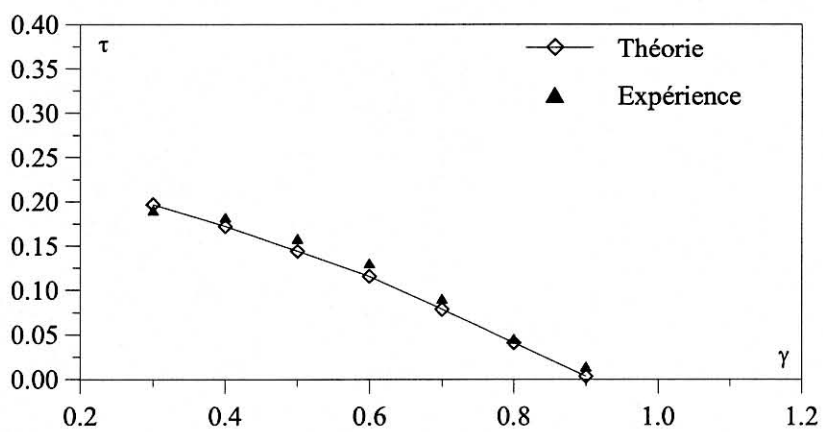


Figure 4.17 : Coefficient de traction en fonction de γ à $\alpha_0 = 23^\circ$

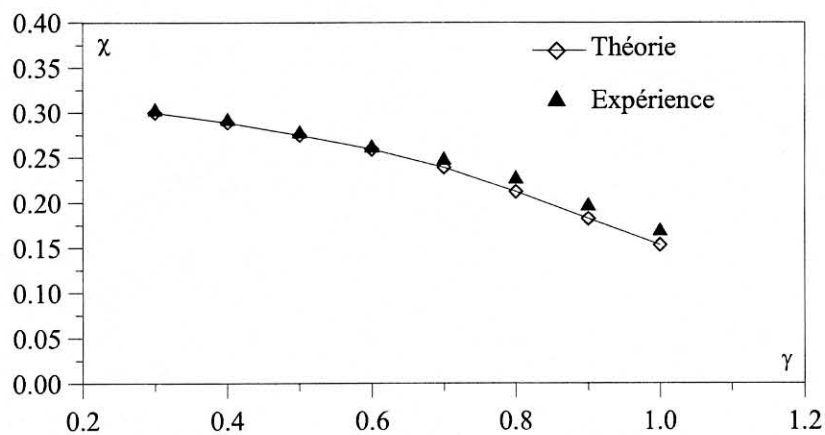


Figure 4.18 : Coefficient de puissance en fonction de γ à $\alpha_0 = 32.5^\circ$

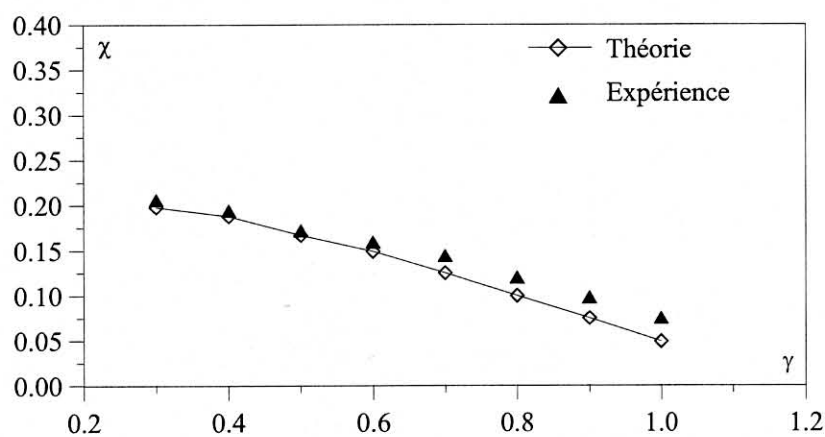


Figure 4.19 : Coefficient de puissance en fonction de γ à $\alpha_0 = 27^\circ$

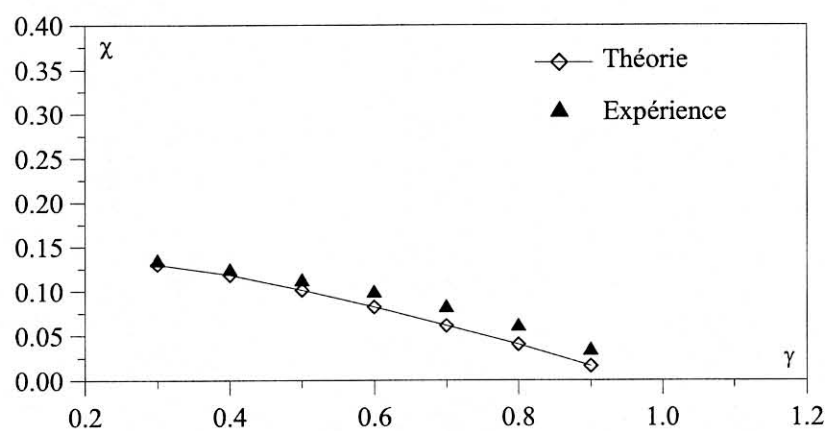


Figure 4.20 : Coefficient de puissance en fonction de γ à $\alpha_0 = 23^\circ$

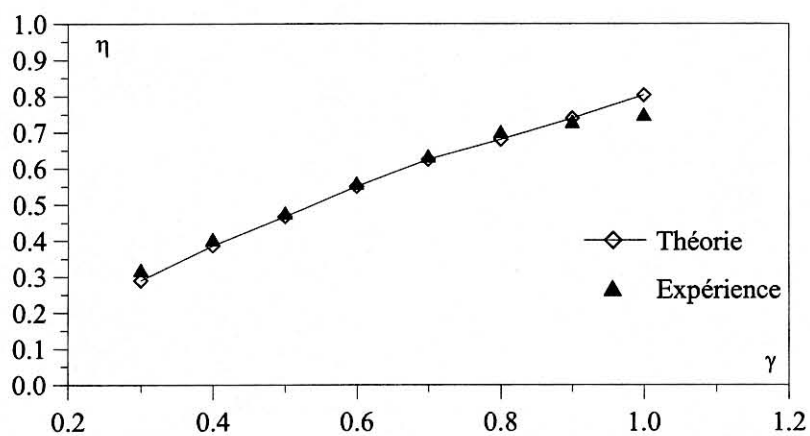


Figure 4.21 : Rendement en fonction de γ à $\alpha_0 = 32.5^\circ$

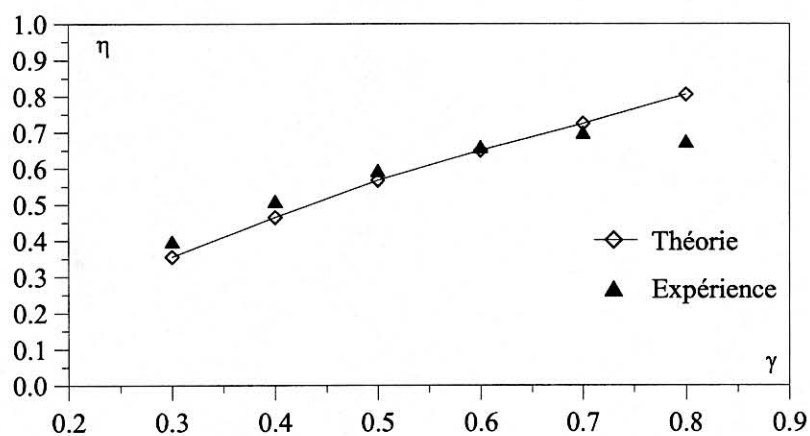


Figure 4.22 : Rendement en fonction de γ à $\alpha_0 = 27^\circ$

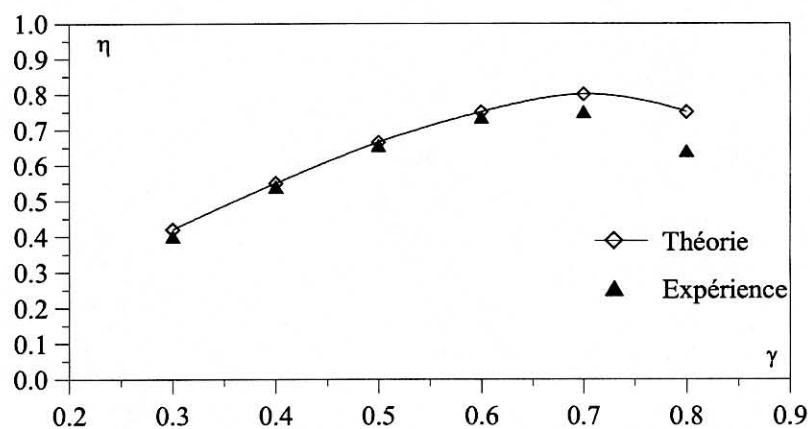


Figure 4.23 : Rendement en fonction de γ à $\alpha_0 = 23^\circ$

4.5. Résultats relatifs aux distributions de circulation sur la pale

La loi de circulation qui joue un rôle primordial dans le calcul du champ aérodynamique, est obtenue pour chaque section de pale par application de la relation de Kutta-Joukowski. Sa détermination numérique a été rendue possible par un développement en série de Fourier (à nombre limité de termes), dont les coefficients ont été calculés à l'aide d'une méthode itérative décrite au chapitre 3.

Notons $C_{\alpha_0, n, \gamma}$ la courbe représentative de la loi d'évolution de la distribution de circulation sur la pale, correspondant au régime de fonctionnement de l'hélice défini à partir de la donnée du triplet des grandeurs physiques (α_0, n, γ) . Pour les trois points de fonctionnement suivants $(\alpha_0=32.5^\circ ; n=22.7)$, $(\alpha_0=27^\circ ; n=35.7)$, $(\alpha_0=23^\circ ; n=35.7)$, on a déterminé, en faisant varier le paramètre de fonctionnement γ , trois familles de courbes $C_{\alpha_0, n, \gamma}$ qui sont représentées respectivement sur les figures 24, 25 et 26.

Sur l'ensemble des trois figures on peut remarquer que chaque courbe $C_{\alpha_0, n, \gamma}$ a une allure de forme elliptique, et présente un maximum d'intensité de circulation situé au voisinage de la section $\xi = 0,5$ de la pale. Cette position qui semble être pratiquement indépendante du paramètre de fonctionnement γ à calage fixé, tend au contraire à se déplacer légèrement vers le pied de pale lorsqu'on diminue le calage moyen α_0 (figure 27), ceci tend à montrer que la zone du sillage à intensité tourbillonnaire positive (région d'extrémité) se développe au détriment de la zone à intensité négative (région du moyeu), pour des calages décroissants.

Ce déplacement du maximum de la circulation peut être considéré comme la conséquence directe de la contraction du sillage. En effet : à calage décroissant, l'analyse des résultats théoriques et expérimentaux concernant le champ de vitesse moyen induit (qui seront présentés au paragraphe 4.6.1), montre également que le maximum du niveau des vitesses se déplace légèrement du côté du moyeu et de manière similaire. Or, l'accroissement et le déplacement de ce niveau des vitesses caractérisent la conservation du débit massique qui traverse les sections aval du souffle, parallèles au plan de rotation de l'hélice. Cette conservation du débit ne traduit rien d'autre que la contraction du sillage pour un régime de fonctionnement donné de l'hélice.

On peut aussi noter sur ces résultats que la forme de la loi de circulation obtenue pour l'hélice en vol de translation, est nettement différente de celle trouvée pour le rotor d'hélicoptère en vol stationnaire [39], [40]. Cette dernière se caractérise généralement (pour des pales de rotors conventionnelles) par un pic intense de circulation situé au voisinage immédiat de l'extrémité de la pale. Pour l'hélice étudiées il semble que sa géométrie (voir lois de corde et de vrillage non linéaires), joue un rôle déterminant sur la positionnement du maximum de la circulation en envergure, qui caractérise à son tour la frontière entre les deux zones contrarotatives du sillage. Pour les deux zones, l'intensité des lanières tourbillonnaires s'accroît d'autant plus que l'on se dirige vers les deux bords de la nappe, en raison de la variation rapide de la loi de circulation avec le rayon réduit ξ .

En ce qui concerne l'influence des grandeurs physiques α_0 , n , γ sur les niveaux d'intensité du tourbillon lié à la pale, on notera que le niveau du maximum de circulation se présente comme une fonction décroissante du paramètre de fonctionnement γ chaque fois que sont fixés les deux autres paramètres α_0 et n (figures 24, 25 et 26). Par contre, ce niveau augmente avec γ décroissant et n croissant en fixant le calage moyen α_0 (figure 28). On peut donc conclure que le niveau du maximum de la circulation s'accroît d'autant plus que la charge de l'hélice augmente.

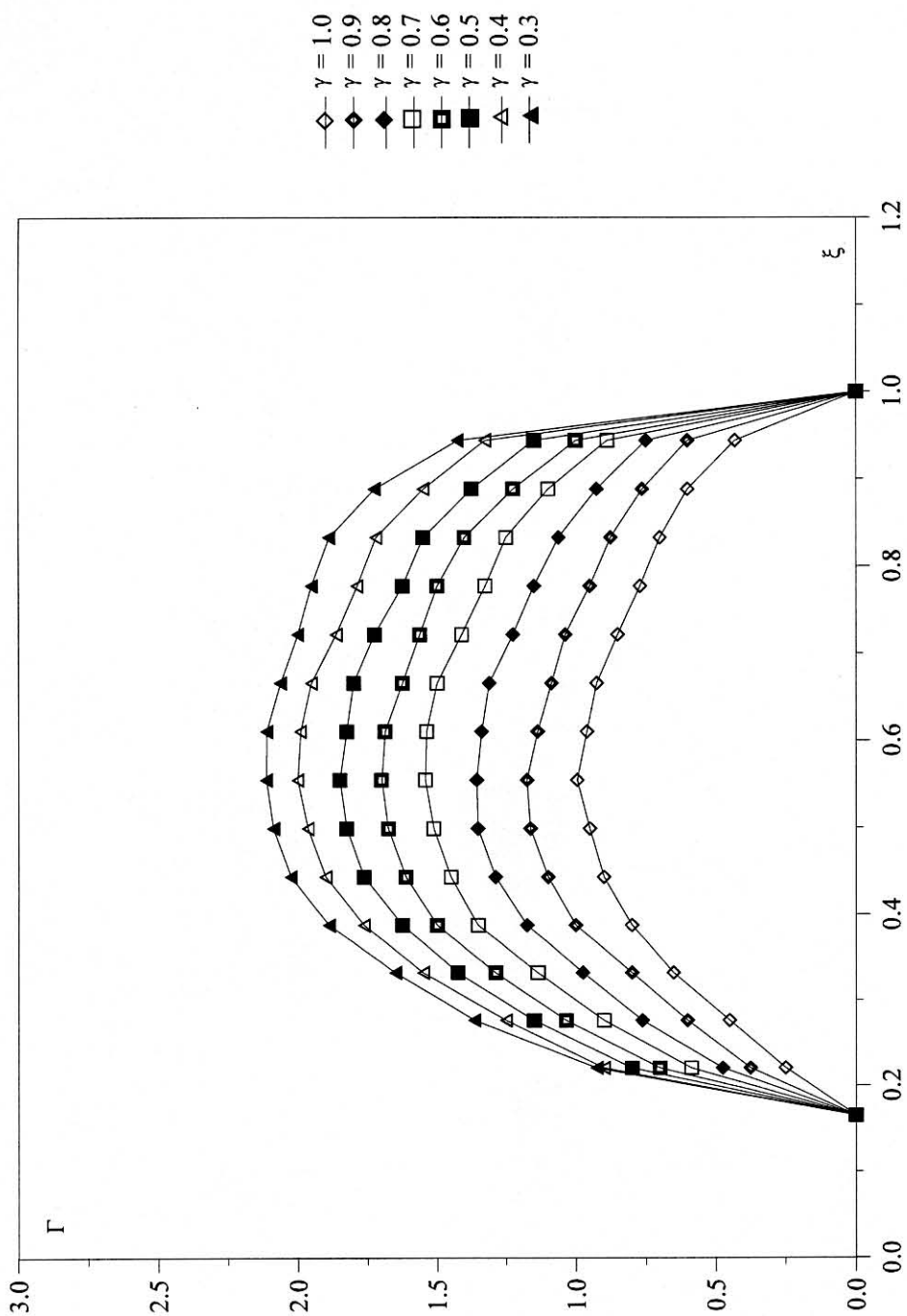


Figure 4.24 : Influence de γ sur la distribution de circulation de la pale
 $\alpha_0 = 32.5^\circ$; $n = 22.7$

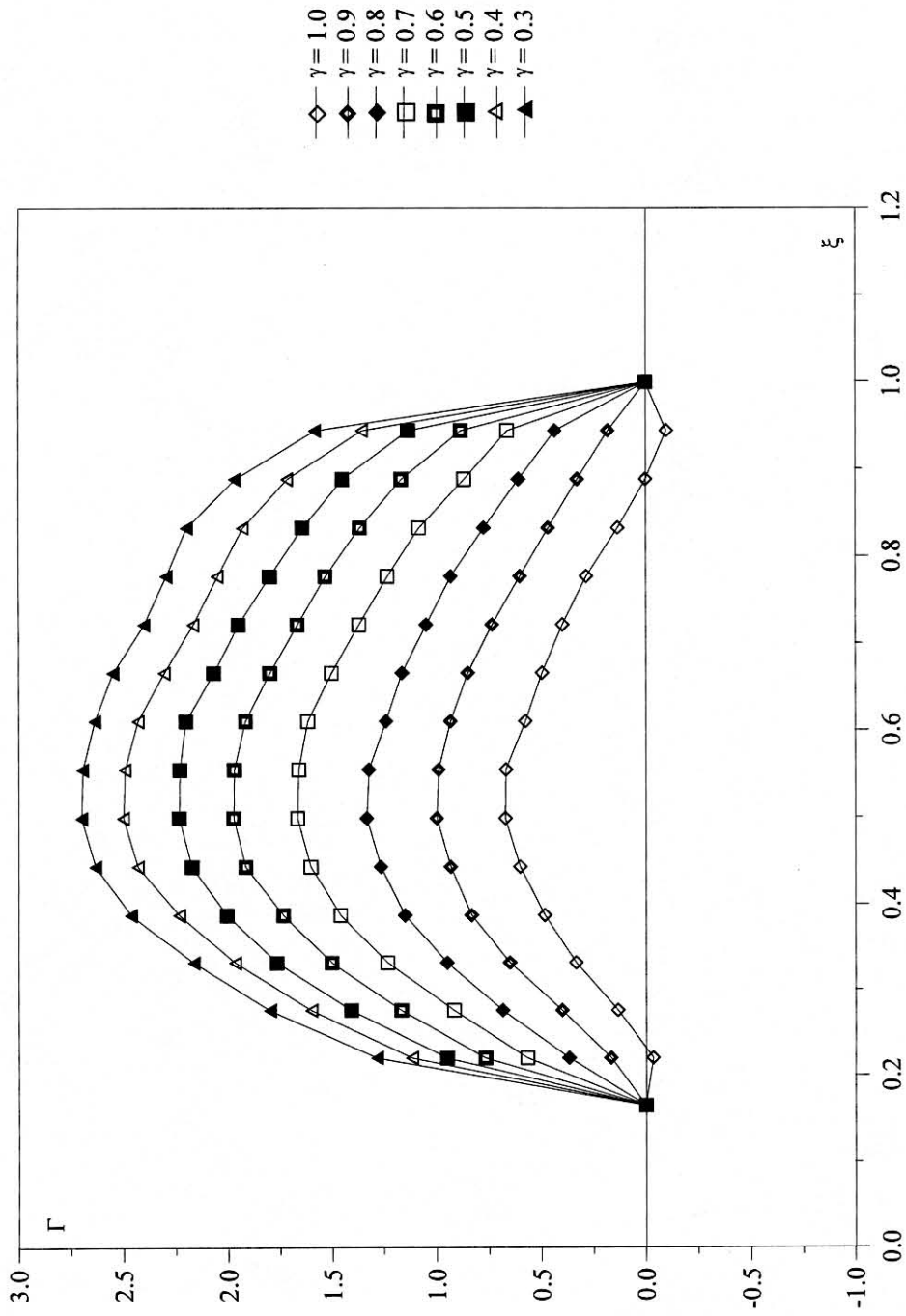


Figure 4.25 : Influence de γ sur la distribution de circulation de la pale
 $\alpha_0=27^\circ$; $n=35.7$

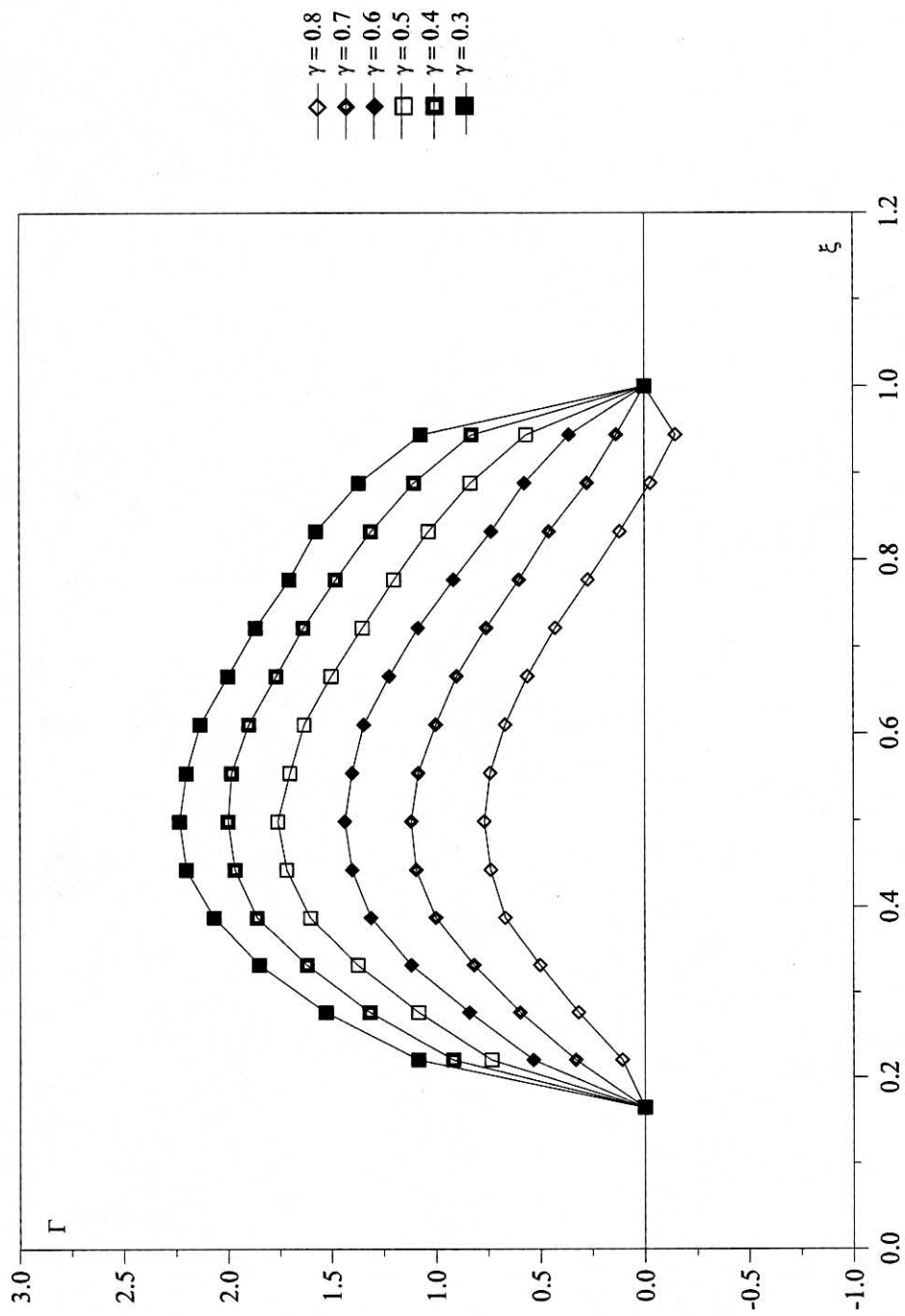


Figure 4.26 : Influence de γ sur la distribution de circulation de la pale
 $\alpha_0=23^\circ$; $n=35.7$

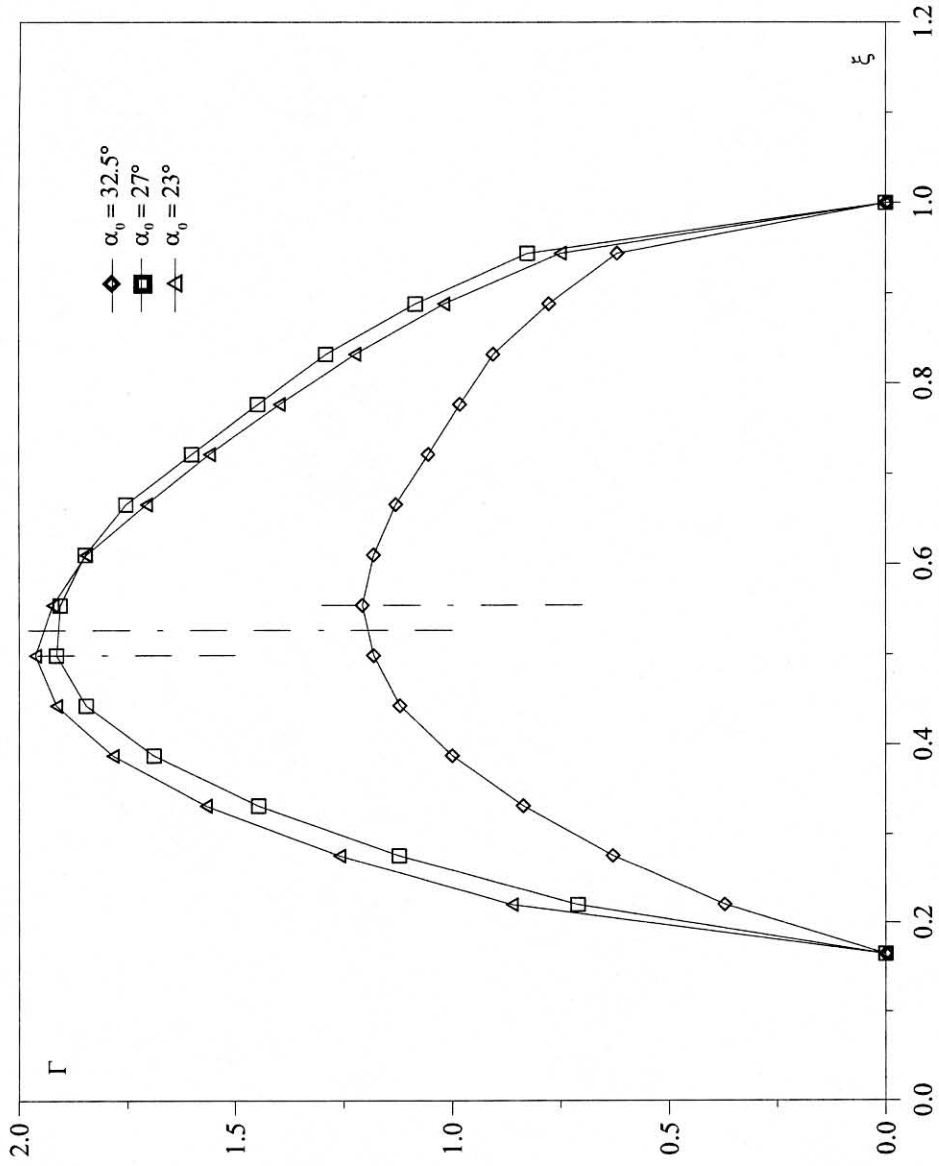


Figure 4.27 : Evolution de la circulation sur la pale à coefficient de traction constant $\tau=0.16$

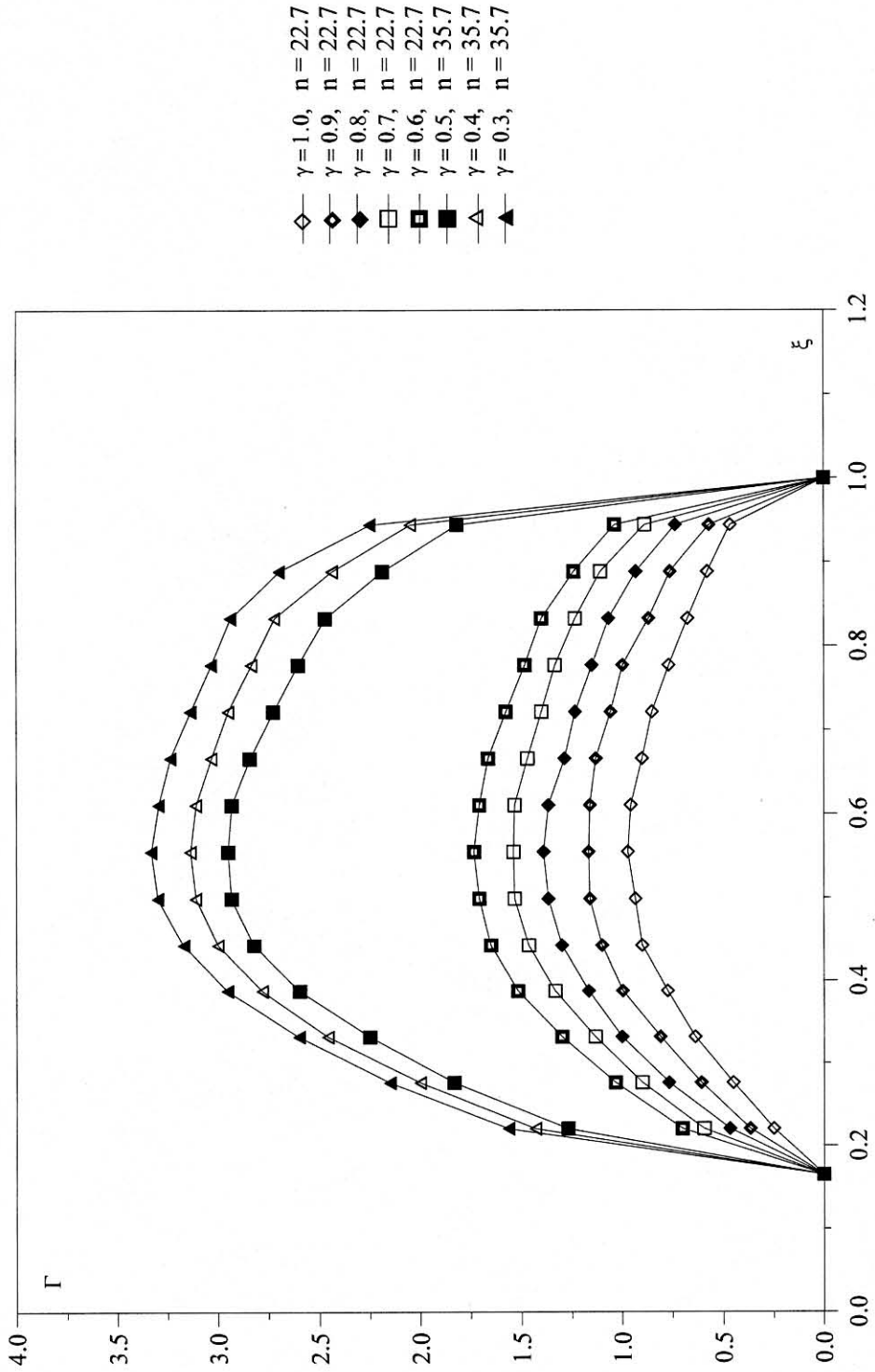


Figure 4.28 : Influence de n et de γ sur la distribution de circulation de la pale $\alpha_0=32.5^\circ$; $\gamma=V_\infty/n.D$

4.6. Résultats relatifs aux champs de vitesses dans le sillage

Comme cela a précédemment été mentionné au paragraphe 4.1, le champ d'écoulement moyen ou instantané associé à chacun des trois couples de paramètres (α_0, γ) considérés, a pu être reconstitué à partir des vitesses 3D déterminées en fonction de l'azimut ψ et en 75 points calculés ou mesurés dans le sillage (5 plans de coupe et 15 abscisses radiales par plan).

4.6.1. Champs moyens :

Les figures 29 et 30 donnent des exemples de comparaisons calcul/expérience réalisées sur le champ des vitesses moyennes. Ces exemples concernent les vitesses axiales (figure 29) et tangentielles (figure 30) calculées et mesurées dans un plan très proche du plan de rotation ($z/R_1=0.21$) et pour les calages 32.5° ; 27° ; 23° .

Un bon accord calcul/expérience apparaît sur ces résultats tout le long de l'envergure, sauf la région proche du pied de pale qui fait apparaître des écarts (influence du moyeu non modélisé dans le code de calcul). Pour les deux composantes de la vitesse moyenne w/V_∞ et v/V_∞ , les résultats font aussi apparaître, pour chaque section ξ , un accroissement de vitesse d'autant plus grand que le calage est faible. Par exemple pour la section $\xi=0,5$; on enregistre dans le plan considéré des niveaux de la composante axiale tels que $w/V_\infty=1.25$; 1.47; 1.70 respectivement pour $(\alpha_0=32,5^\circ$; 27° ; 23° . On peut remarquer aussi que le niveau de vitesse tangentielle décroît progressivement au fur et à mesure que le rayon réduit ξ augmente. Notons également une chute brutale des niveaux de vitesses (axiale ; tangentielle) au voisinage de l'extrémité de pale pour chacun des calages considéré. Cette perturbation, suivie d'un changement de signe de la vitesse induite ($1-w/V_\infty$; v/V_∞) est la conséquence directe de la présence du tourbillon marginal dans cette région.

Notons enfin que d'une façon générale, les résultats obtenus par le calcul sur le champ moyen, permettent de recouper (voir notamment référence [30]) des résultats classiques déduits des théories de Fronde et de quantités de mouvement (conservation du débit, corrélation entre la traction globale et le niveau de vitesse axiale induite, ...).

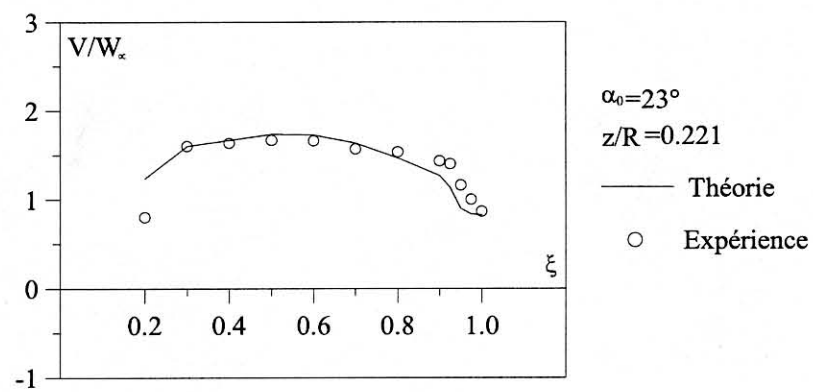
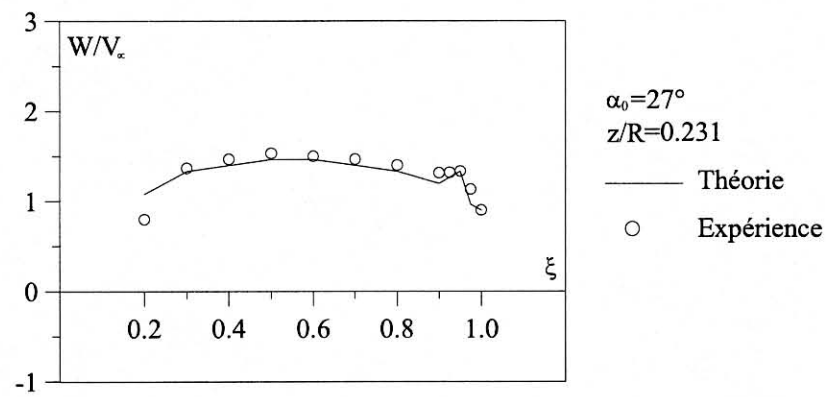
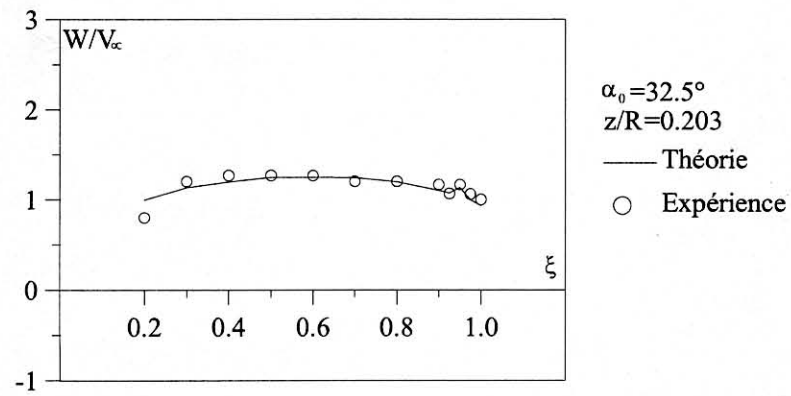


Figure 4.29 : Vitesse axiale moyenne dans un plan aval proche du plan de rotation à $\tau=0.16$

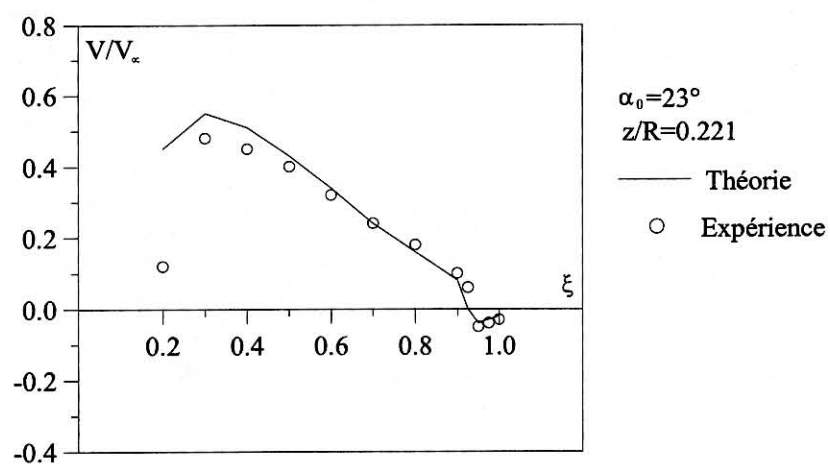
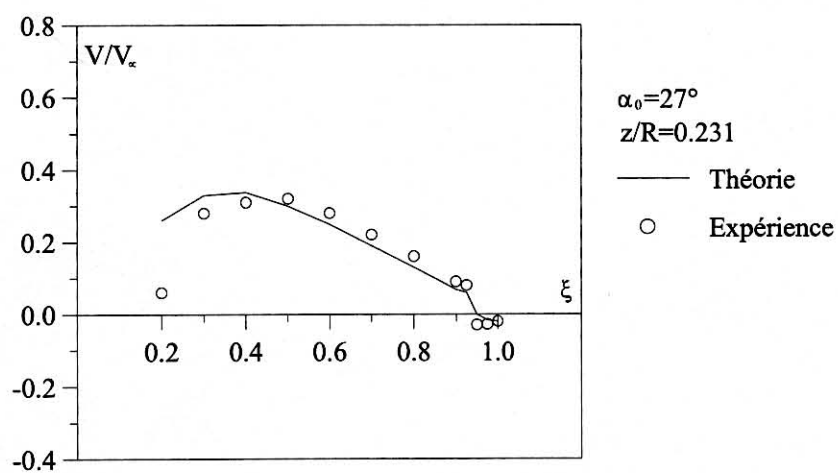
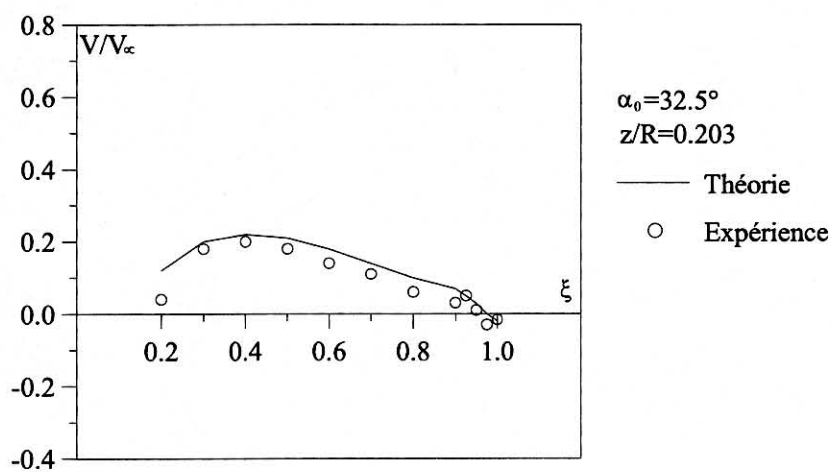


Figure 4.30 : Vitesse tangentielle moyenne dans un plan aval proche du plan de rotation à $\tau=0.16$

4.6.2. Champs instantanés

Un exemple de champ de vitesse 3D calculé et mesuré est donné sur les figures numérotées de 31 à 45 dans le tableau ci-dessous, et est relatif au point de fonctionnement $\alpha_0=32.5^\circ$; $\gamma=0.89$ ($\tau=0.16$).

Sur chacune de ces figures est reportée la distribution, le long du rayon ξ , des trois composantes u , v , w de la vitesse. Comme l'indique le tableau ci-dessous, pour chacun des plans considérés ($0,203 \leq z/R_1 \leq 1,819$), trois azimuts ψ ont été sélectionnés pour le champ des vitesses.

Plan z/R_1	Position de la pale en azimut	N° figure
0.203	15°	31
	45°	32
	75°	33
0.494	15°	34
	45°	35
	60°	36
0.759	0°	37
	45°	38
	75°	39
1.289	15°	40
	45°	41
	75°	42
1.819	30°	43
	45°	44
	60°	45

Tableau 4.4 : Paramètres de calcul du champs de vitesses

L'analyse de l'ensemble de ses répartitions montre que la méthode de calcul prédit de manière satisfaisante le champ des vitesses 3D mesuré, qu'il s'agisse d'un plan proche