RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ DE BLIDA 1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du diplôme de

MASTER EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

L'ARÊTE-DOMINATION ET LA 2-INDEPENDANCE DANS LES ARBRES

Par

M^lle^ FEKIH El-Ghalia

Devant le jury composé de :

Mr CHELLALI Mustapha	**Professeur, U.S.D. Blida 1**	**Président**
Melle RAMOUL Amina	**M.C.B, U.S.D. Blida 1**	**Examinatrice**
Mme MEDDAH Nacéra	**M.C.B, U.S.D. Blida 1**	**Promotrice**

Année universitaire 2019/2020

Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous ensemble D de $E(G)$ est dit arête-dominant de G si toute arête $e \in E(G)$ est dans D ou elle est adjacente à au moins une aréte $e' \in D$. La cardinalité minimum d'un ensemble arête-dominant de G est appelée le nombre de l'arête-domination et est notée par $\gamma'(G)$. Un sous ensemble S de V est un 2-indépendant de G si le degré maximum de sous graphe induit par S est au plus 1 i-e $\Delta(S) \leq 1$. La cardinalité maximum d'un ensemble 2-indépendant de G est appelée le nombre de 2-indépendance et est notée par $\beta_2(G)$

Dans ce mémoire on s'intéresse à étudier ces deux paramètres, et notre travail consiste à établir une nouvelle borne inférieur de β_2 en fonction de γ' dans les arbres. Aussi on a fourni une caractérisation constructive des arbres extrémaux atteignant cette nouvelle borne. On note de tels arbres par $(\beta_2, 2\gamma')-$arbres. Enfin, nous montrons que cette borne n'est pas satisfaite de manière générale.

Abstract

Let $G = (V, E)$ a simple graph . A subset D of $E(G)$ is said to be an edge dominating of G if each edge in $E(G)$ is either in D or adjacent to at least one edge of D. The minimum cardinality of an edge dominating set of G is called the edge domination number and is denoted by $\gamma'(G)$. A subset S of V is a 2-independent of G if the maximum degree of subgraph induced by S is at most 1, that is to say $\Delta(\langle S \rangle) \leq 1$. The maximum cardinality of a 2-independent set of G is called the 2-independent number and is denoted by $\beta_2(G)$.

In this thesis, we are interested in studying these two parameters, and our work consists of establishing a new lower bound of β_2 in terms of γ' in trees. Moreover, we provide a constructive characterization of extremal trees achieving this new bound. Such trees are denoted by $(\beta_2, 2\gamma')-$trees. Finally, we show that this bound is not valid for arbitrary graph.

ملخص

ليكن $G=(V,E)$ بيانا بسيطا. المجموعة الجزئية D من الحواف للبيان G تسمى حواف مسيطرة إذا كانت كل حافة $e\in E(G)$ تنتمي الى D او هي على الاقل مجاورة لحافة $e'\in D$. الأصلي الأدنى لمجموعة حواف مسيطرة للبيان G يسمى بعدد الحواف المسيطرة و يرمز له بالرمز $\gamma'(G)$. المجموعة الجزئية S من الرؤوس للبيان G تسمى 2-مستقلة إذا كانت الدرجة لقصوى للبيان الجزئي المستحث ب S على الأكثر 1 و هذا يعني $\Delta(S)\leq 1$. الأصلي الأقصى لمجموعة الرؤوس 2-مستقلة للبيان G يسمى بعدد 2-استقلالية و يرمز له بالرمز $\beta_2(G)$.

الهدف الرئيسي في هذه الأطروحة هو دراسة هذين الوسيطين ,و عملنا يرتكز حول إيجاد قيمة حدية صغرى جديدة β_2 بدلالة γ' في الأشجار. أيضا تمييز الأشجار T التي تبلغ هذه القيمة الحدية. نرمز لهذه الأشجار بال $(\beta_2, 2\gamma')$–أشجار. نبرهن في الأخير إن هذه القيمة الحدية غير محققه بصفة عامة .

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à ma promotrice M^{me} **MEDDAH** Nacéra, qui m'a accueilli, accompagné et conseillé tout au long de ce parcours. Son aide et sa confiance m'ont grandement aidé à mener à bien ce travail. Je remercie sincèrement les membres de jury qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail. Un grand Merci à tous nos enseignants de département de mathématiques.

Je tiens également à remercier M^{r} **CHELLALI Mustapha**, Professeur à l'université SAAD DAHLEB de Blida1, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire et examiner le travail .

J'addresse mes sincères et vifs remerciements à **M^{me} RAMOUL Amina**, MCB à l'université SAAD DAHLEB de Blida1, d'avoir accepté d'être membre de jury.

Mes remerciements les plus chaleureux vont vers toute la famille. Et bien sûr à tous les amis, qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire. Ce travail est dédié à la mémoire de mes parents en particulier.

Table des Matières

Résumé **1**

Abstract **2**

Résumé en arabe **3**

Remerciements **4**

Table des matières **5**

Liste des illustrations graphiques **7**

Introduction **8**

CHAPITRE 1. **Notions générales et terminologies** **11**

1.1. Concepts fondamentaux 11

1.1.1. Définition et notations 11

1.1.2. Graphes particuliers 14

1.1.3. Invariants de graphes 18

1.2. La domination dans les graphes 19

1.2.1. Définitions et propriétés préliminaires 20

1.2.2. Paramètres de domination 21

1.2.3. Applications : 22

1.3. L'arête-domination dans les graphes 23

1.3.1. Paramètres de l'arête-domination 24

1.3.2. Applications : 24

CHAPITRE 2. **La 2-indépendance et l'arête-domination dans les graphes avec quelques résultats existants** **25**

2.1. L'arête-domination dans les graphes 25

2.1.1. Definitions et notations : 25

2.1.2. Quelques résultats antérieurs : 27

2.2. La 2-indépendance dans les graphes 31

2.2.1. Définitions et propriétés préliminaires 31

2.2.2. Quelques résultats antérieurs 32

CHAPITRE 3. **Arbres avec le nombre de 2-indépendance égal à 2 fois le nombre d'arête-domination** **37**

3.1. Définitions et résultats préliminaires 37

3.2. Caractérisation des $(\beta_2, 2\gamma')$-arbres: 38

CONCLUSION ET PERSPECTIVES **49**

Liste des illustrations graphiques

Figure 1.1. Un graphe G avec 6 sommets et 6 arêtes 12
Figure 1.2. Une chaîne P_4 et un cycle C_3 13
Figure 1.3. Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$ 14
Figure 1.4. Un graphe G et son graphe adjoint $L(G)$ 15
Figure 1.5. Un graphe complet K_5 15
Figure 1.6. Un graphe biparti 16
Figure 1.7. Un graphe triangulé 16
Figure 1.8. Un cactus 16
Figure 1.9. Exemples sur les étoiles 17
Figure 1.10. Une chaîne P_5 20
Figure 1.11. Un graphe G avec 6 sommets et 5 arêtes 21
Figure 2.1. Un graphe G 26
Figure 3.1. Un arbre $R_{1,3,1}(u)$ et un arbre $R^*_{1,2}(v)$ 38
Figure 3.2. Un graphe biparti-cactus et un graphe triangulé-cactus 45
Figure 3.3. Un graphe triangulé G 46
Figure 3.4. Une étoile subdivisée S^*_p et une étoile $K_{1,p}$ 46
Figure 3.5. L'arbre $R^*_{2,1}(u)$ et l'arbre $K_{1,2}$ 47
Figure 3.6. Application de l'opération $\mathcal{F}_1$ 47
Figure 3.7. L'arbre $R^*_{0,2}(u_2)$ 47
Figure 3.8. Application de l'opération $\mathcal{F}_2$ 48

Introduction

Sans que l'on en soit toujours conscient, la Théorie des Graphes est aujourd'hui très présente dans notre société moderne. Cette branche des mathématiques, débute peut-être avec les travaux d'Euler au $18^{ème}$ siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème du coloriage de cartes et du plus court trajet entre deux points. La théorie des graphes a connu un essor spectaculaire au cours des cinquante dernières années, notamment grâce aux travaux de Claude Berge qui a grandement participé à sa diffusion.

La théorie des graphes s'est donc développée dans diverses disciplines et elle représente un domaine faisant le lien entre les Mathématiques discrètes et l'informatique. Les méthodes développées pour étudier les objets de cette théorie ont de nombreuses applications dans tous les domaines liés à la notion de réseaux (réseaux social, de téléphone, de micro-processeurs, de télécommunications, etc ...) et dans bien d'autres domaines (par exemple génétique). Depuis le début du $20^{ème}$ siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös. De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments: réseau de communication, réseaux routiers, circuits électriques, etc... .Les graphes constituent donc un outil de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en les ramenant à l'étude des propriétés des sommets et d'arêtes (d'arcs dans le cas où l'orientation est importante).

La domination dans les graphes est un thème important de la théorie des graphes du fait de sa grande utilité pour de nombreuses applications. Cette première notion (Berge, 1958) s'est très vite enrichie et a donné lieu à de nombreux travaux et développements, si bien qu'une récente bibliographie sur la domination compte plus de 2000 articles. Un sous ensemble D de sommets dans un graphe $G = (V, E)$ est dit dominant si tout sommet extérieur à D a au moins un voisin dans D. Plusieurs paramètres de domination sont dérivées de la domination classique, en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants, on cite par exemple : La k-indépendance, en imposant la condition que tout sommet de D a au plus $k-1$ voisins dans D, spécialement on cite la $2-$indépendance dans ce mémoire.

Une autre notion qui s'avère importante c'est la notion de l'arête-domination Le concept *d'arête-domination* a été introduit par Mitchell and Hedetniemi [13]. Un sous ensemble F des arêtes dans un graphe $G=(V,E)$ est un arête-dominant de G si chaque arête dans $E \backslash F$ est adjacente à au moins une arête dans F. Plusieurs paramètres de l'arête-domination sont dérivées de la l'arête-domination classique, en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles arête-dominants, on cite par exemple : L'arête-domination indépendance, en imposant la condition que toute arête de F ne possède pas une arête adjacente dans F.

Les deux types représentent l'objectif principal de ce mémoire composée de trois chapitres dont en voici une description.

Dans le premier chapitre, nous rappelons en premier les définitions de base de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Ainsi, nous évoquons la notion de la domination dans les graphes, en donnant en premier un petit historique sur la domination. Nous présentons par la suite quelques invariants de graphes et quelques paramètres de domination, et nous donnons à la fin quelques applications de la domination.

Le chapitre deux est composé de deux sections. Nous nous intéressons à étudier dans la première section le concept de l'arête-domination dans les graphes. Nous définissons dans la première partie de la section la notion de l'arête-domination et nous présentons dans la deuxième partie quelques résultats antérieurs . Dans la deuxième section nous évoquons la 2-indépendance dans les graphes.Nous définissons dans la première partie de la section deux cette notion et nous présentons dans la deuxième partie quelques résultats antérieurs. Notons que ces résultats sont spécifiques aux graphes dont la structure est simple, tels que les arbres .

Nous nous intéressons dans le chapitre trois et qui représente notre contribution, à donner une nouvelle borne inférieure pour le nombre de 2-indépendance dans un arbre

T. Nous présentons une nouvelle borne inférieure pour le nombre de 2-indépendance dans un arbre en fonction du nombre de l'arête-domination γ'. Aussi nous caractérisons constructivement les arbres extrémaux atteignant cette nouvelle borne. Nous clôturons notre contribution en reliant ce résultat à d'autres classes particulières de graphes, telles que les graphes bipartis, les cactus et les graphes triangulés.

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés le long de ce manuscript et quelques perspectives futures dans ce domaine.

CHAPITRE 1

Notions générales et terminologies

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions et terminologie utilisées le long de ce mémoire. Dans la première section, nous rappelons quelques définitions de base de la théorie des graphes ; les notions propres à un chapitre donné sont définies dans le chapitre en question. Dans la deuxième section on donne un aperçu sur la domination, où on y présentera aussi quelques invariants de graphes, quelques paramètres de domination, aussi quelques applications liées au concept de la domination, la 2-indépendance et l'arête-domination dans les graphes. Pour plus de détails conçernant la théorie des graphes, nous invitons le lecteur à consulter les ouvrages de *C. Berge* [1] et de *Chartrand et Lesniak* [2]. Pour la théorie de la domination dans les graphes, on recommande les ouvrages de *Haynes et al.* [3].

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Définition et notations

Un *graphe* $G = (V(G), E(G))$, est défini par deux ensembles $V(G)$ et $E(G)$, où $V(G)$ est l'ensemble de *sommets, et* $E(G)$ est l'ensemble de paires de sommets appelées *arêtes.* Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous notons simplement V et E. Dans un graphe G, le nombre de sommets est appelé *ordre* de G, est noté par $n = |V(G)|$, et le nombre d'arêtes est appelé la *taille* de G, et est noté par $m = |E(G)|$. Un graphe est dit *fini* ou *infini* suivant son ordre.

Soit G un graphe et soient u, v deux sommets de G. Une arête reliant deux sommets u, v est notée uv au lieu de $\{u, v\}$. Si $uv \in E$, alors u et v sont dits *adjacents* ou *voisins.* Par contre, si $uv \notin E$, alors u et v sont dits *non-adjacents* ou *non-voisins.* Si $e = uv$ est une arête de G, alors u et v sont les extrémités de e, et e est dite *incidente* à u et v. Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité en commun. Une *boucle* est une arête dont les extrémités sont confondues.

Un *graphe simple* est un graphe sans boucles ni arête multiple (i.e tout couple de sommets est relié par au plus une arête). Pour plus de détails sur la terminologie des graphes voir [1]. Dans tout ce qui suit on s'intéresse qu'à des graphes simples et finis.

A titre d'exemple d'un graphe, on considère le graphe G de la Figure suivante, dont l'ensemble des sommets est $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ et l'ensembles des arêtes est

$$\{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_6\}$$

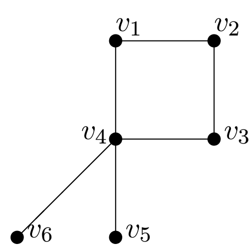


FIGURE 1.1. Un graphe G d'ordre 6 et de taille 6 .

Voisinage et degrés:

Pour un sommet v d'un graphe G, le *voisinage ouvert* est $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$ et le *voisinage fermé* est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert est $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ et le voisinage fermé de l'ensemble S est $N[S] = \cup_{v \in S} N[v]$. Pour un sommet v du graphe simple G, le *degré* de v noté par $d_G(v)$ (aussi par $d(v)$) est le nombre de sommets adjacents à v, i.e $|N_G(v)|$. Un sommet de degré 0 est dit sommet *isolé*, et un sommet de degré 1 est dit sommet *pendant* et son voisin est dit *support*. Dans un graphe G le degré minimum est noté par $\delta(G)$ et le degré maximum est noté par $\Delta(G)$. Les degrés des sommets v_1 et v_3 dans le graphe de la figure précédente, sont $d(v_5) = 1$ et $d(v_3) = 2$.

Chaînes et cycles :

Une *chaîne* de longueur $k-1$ dans un graphe G est une séquence alternée de sommets et d'arêtes $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, ..., v_{i-1}, e_{i-1}, v_i, ..., v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$ telle que $e_{i-1} = v_{i-1}v_i$ pour $i = 1, 2, ..., k$. Le nombre d'arêtes dans la chaîne définit sa *longueur* et le nombre de sommets définit son *ordre*. L'entier $k \geq 1$ représente le nombre de sommets de la chaîne. Une chaîne dans laquelle aucune arête ne se repète est dite *simple* et une chaîne dans laquelle aucun sommet ne se répète est dite *élémentaire*. Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par k sommets, notée P_k, est une chaîne élémentaire sans cordes. Un *cycle* noté C_k de longueur k est une chaîne de longueur $k \geq 1$ dans lequel les deux extrémités initiale et terminale sont confondues, dans ce cas le nombre de sommets de C_k est égal à sa longueur.

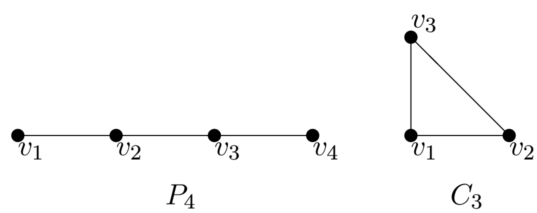


FIGURE 1.2. Une chaîne P_4 et un cycle C_3

Connexité :

Un graphe G est dit *connexe*, s'il existe une chaîne reliant toute paire de sommets $u, v \in V(G)$. Un graphe qui n'est pas connexe est dit *disconnexe ou non connexe*. Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe. Un sommet v d'un graphe G est appelé *un sommet d'articulation* si le graphe $G - v$ a plus de composantes connexes que G, *i.e* si G est connexe alors $G - v$ n'est pas connexe. Une arête e est appelée *un isthme* (arête d'articulation) de graphe G si le graphe $G - e$ possède plus de composantes connexes que G, *i.e* si G est connexe alors $G - e$ n'est pas connexe. Dans la suite, à moins que le contraire soit mentionné, nous travaillons avec des graphes connexes.

Distance, diamètre et excentricité

On appelle *distance* de x à y notée $d(x;y)$; la longueur d'une plus courte chaîne de x à y. Le *diamètre* dans un graphe G noté $\text{diam}(G)$ est la distance maximum entre deux sommets de G; c-à-d $\text{diam}(G) = \max_{x,y\in V}(d(x;y))$. L'*excentricité* de v est $exc(v) = \max\{d(v;w) : w \in V\}$.

1.1.2 Graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

a) **Graphe partiel et sous-graphe** :

Le graphe H est appelé un *sous-graphe* partiel de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$ et il est appelé un *graphe partiel* du graphe G si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Pour un sous ensemble de sommets non vide $S \subseteq V(G)$ du graphe G, le sous graphe $H = (S, E)$ induit par S dans G, noté par $G[S]$, est le sous graphe du graphe G avec l'ensemble de sommets $V(G[S]) = S$ et l'ensemble d'arêtes $E(G[S]) = \{uv \in E(G) : u, v \in S\}$.

b) **Graphes complémentaires :**

Le graphe complémentaire, noté $\overline{G}$, d'un G, est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête existe dans $\overline{G}$ si elle n'existe pas pas dans G (Voir Figure 1.3.).

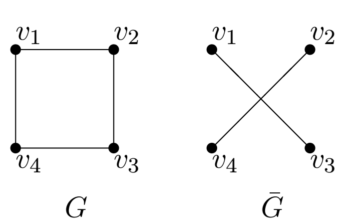


FIGURE 1.3. Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$

c) **Graphes adjoints :**

Le *graphe adjoint* $L(G)$ est le graphe défini de la façon suivante :

- Chaque sommet de $L(G)$ représente une arête de G,

- Deux sommets de $L(G)$ sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes dans G sont adjacentes (voir le graphe de la Figure 1.4) .

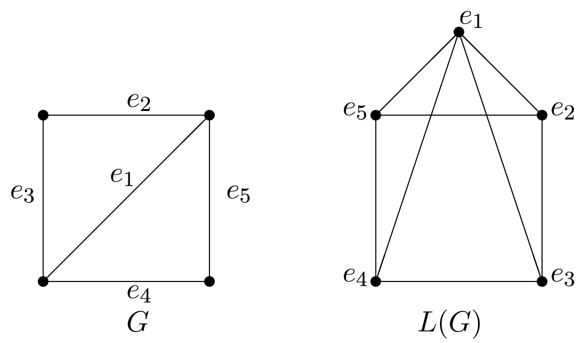


FIGURE 1.4. Un graphe G et son graphe adjoint $L(G)$

d) <u>Graphes complets</u> :

Un graphe *complet* d'ordre n, noté par K_n, est un graphe dont tous les sommets distincts sont adjacents. Un sous-graphe induit complet H de G est une clique de G et nous la notons également K_n (où $n = |V(H)|$). Comme illustration du concept, le graphe complet K_5 représenté dans la Figure 1.5.

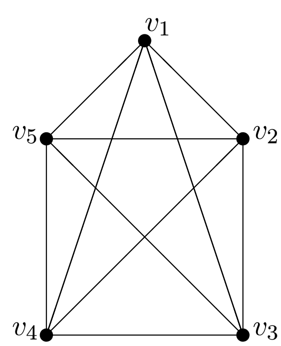


FIGURE 1.5. Un graphe complet K_5

e) <u>Graphes bipartis</u> :

Un graphe G est dit *biparti* si son ensemble de sommets peut être divisé en deux sous-ensembles disjoints U et V tels que chaque arête ait une extrémité dans U l'autre dans V. A titre d'exemple du concept le graphe de la Figure 1.6.

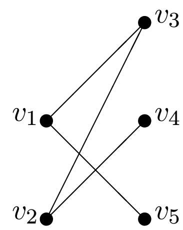


FIGURE 1.6. Un graphe biparti

f) Graphes triangulés :

Un graphe est *triangulé ou cordal* si chacun de ses cycles de quatre sommets ou plus possède une corde, c'est-à-dire une arête reliant deux sommets non adjacents du cycle. Une définition équivalente est que tout cycle sans corde possède au plus trois sommets.

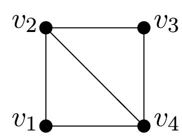


FIGURE 1.7. Un graphe triangulé

g) Graphes cactus :

Un *cactus* est un graphe connexe dans lequel chaque 2 cycles ont au plus un sommet en commun i-e chaque arête appartient à au plus un cycle simple.

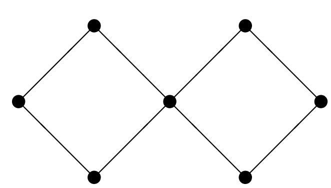


FIGURE 1.8. Un cactus

h) Arbres :

Les graphes connexes sans cycles (*acycliques*) jouent un rôle prépondérant dans diverses applications. Un *arbre* $T = (V, E)$ d'ordre n, est un graphe connexe, sans cycles et comporte $n-1$ arêtes.

Une *étoile*, notée $K_{1,p}$, est un arbre obtenu en attachant p sommets pendants à un sommet autre pendant (appelé le centre de l'étoile). Cela peut aussi être vu comme un *biparti complet.*

Une *étoile double*, notée $S_{p,q}$, est un arbre obtenu à partir de deux étoiles $K_{1,p}, K_{1,q}$: $p, q \geq 1$, en attachant les deux centres par une arête.

Une *étoile subdivisée*, notée S_p^*, est un arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,p}$: $p \geq 1$, en subdivisant chacune de ses arêtes en deux.

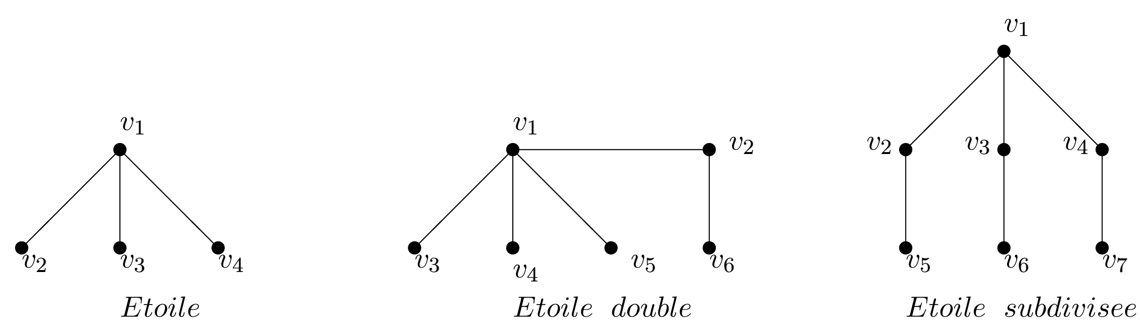


FIGURE 1.9. Exemples sur les étoiles

Propriétés de graphes

Nous définissons une propriété $\mathcal{P}$ de graphes et la classe des graphes satisfaisants cette propriété. Une propriété de graphes est non triviale si elle est vraie pour un ensemble infini de graphes et fausse pour un ensemble infini de graphes. Une propriété de graphes $\mathcal{P}$ est héréditaire si elle est close par suppression de sommets, c'est-à-dire pour tout graphe G satisfaisant $\mathcal{P}$, tout sous-graphe induit de G satisfait $\mathcal{P}$. Une propriété de graphes est monotone si elle est close par suppression de sommets ou d'arêtes, c'est-à-dire, pour tout graphe de $\mathcal{P}$, tout sous-graphe (non nécessairement induit) satisfait cette propriété. Ainsi, une propriété monotone est héréditaire. De nombreuses classes de graphes très étudiées ont des propriétés qui sont monotones ou héréditaires.

Propriétés des ensembles

Minimalité et maximalité des ensembles :

Soit une propriété $\mathcal{P}$. On dit qu'un ensemble $\mathcal{S}$ est **minima**l pour la propriété $\mathcal{P}$ si aucun sous-ensemble strict de $\mathcal{S}$ ne vérifie cette propriété. Un ensemble $\mathcal{S}$ est **maxima**l pour la propriété $\mathcal{P}$ si aucun ensemble contenant $\mathcal{S}$ et différent de $\mathcal{S}$ ne vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Ensemble minimum et ensemble maximum

Un ensemble $\mathcal{S}$ est dit **minimum** pour la propriété $\mathcal{P}$ si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous-ensemble) ne vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Ainsi, un ensemble $\mathcal{S}$ minimum est nécessairement minimal, mais l'inverse n'est pas vrai en général. De même, on dit qu'un ensemble S est **maximum** pour la propriété $\mathcal{P}$ si aucun ensemble plus grand que $\mathcal{S}$ (sans nécessairement le contenir) ne vérifie $\mathcal{P}$.

1.1.3 Invariants de graphes

Isomorphisme :

Soient $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ deux graphes. On dit que G et G' sont isomorphes s' il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes telle que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs images par la fonction bijective sont adjacentes dans l'autre graphe.$i.e$ (il existe $\varphi : V \to V'$ telle que $vw \in E \Longleftrightarrow \varphi(v)\varphi(w) \in E\ \forall v, w \in V$). Si deux graphes sont isomorphes alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées *invariants de graphes*, en d'autres termes un *invariant* est une propriété stable par isomorphsime. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe.

Couplage :

Un *couplage* dans un graphe G est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes; chaque sommet est donc incident à au plus une arête du couplage. La taille maximale d'un couplage dans G est notée par $\beta_1'(G)$. Un **couplage maximum** est un couplage de taille maximale; Un couplage de G est dit *parfait* si tout sommet de G est incident à une arête du couplage, autrement dit si $\beta_1'(G) = n/2$.

Stable :

On appelle **stable (indépendant)** d'un graphe $G = (V, E)$ un sous ensemble de sommets de V deux à deux non adjacents. Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale. La cardinalité d'un stable maximum est appelée nombre de stabilité, et est notée par $\beta(G)$.

1.2 La domination dans les graphes

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au $16^{éme}$ siecle en Inde (Voir [5]). En 1862, De Jaenisch [6] posa le problème suivant: Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un Èchiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum pour un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [7].

En 1958, Claude Berge [8] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors coefficient de stabilité externe.

L'appelation actuelle du nombre de domination est due à Ore [9] en 1962. La domination n'a connue sa veritable expansion qu' aprés la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [10] en 1977. Depuis, l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complet (pour plus de détails voir [11, 12]). Une étude approfondie de quelques types de domination fera l'objet des prochains chapitres.

1.2.1 Définitions et propriétés préliminaires

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un ensemble **dominant** est un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ tel que tout sommet de $V \setminus D$ est adjacent à au moins un sommet de D. Un ensemble dominant D est dit **minimal** si aucun sous ensemble propre de D n'est un ensemble dominant. Un dominant de cardinalite minimum est un dominant mininal l'inverse est faux.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples:

1. Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant de G si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$,

2. Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant de G si pour tout sommet $v \in V \setminus D$, $N(v) \cap D \neq \emptyset$,

3. Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant de G si $N[D] = V$.

Le nombre de domination inférieur (ou *nombre de domination*) d'un graphe G, noté $\gamma(G)$, représente *la cardinalité minimum* d'un ensemble dominant de G. Un ensemble dominant minimum avec une telle cardinalité est appelé $\gamma(G)-$ensemble. On note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)-$ensembles. *La cardinalité maximum* d'un ensemble dominant minimal est appelée *nombre de domination supérieur*, et est noté par $\Gamma(G)$. A titre d'exemple, la chaîne P_5 de la Figure 1.10, pour laquelle on a $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 3$.

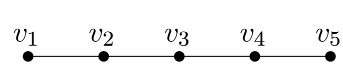


FIGURE 1.10. Une chaîne P_5

La notion d'*indépendance* (*stabilité*) dans les graphes a été liée en premier aux ensembles dominants. Cette notion est reliée à celle de domination par le fait qu'un ensemble indépendant maximal (au sens de l'inclusion des ensembles) est un dominant minimal. Dans un graphe G, un sous ensemble S de V est un indépendant si $\Delta(G[S]) = 0$,.$i.e$ il n'existe pas deux sommets dans S adjacents. Un ensemble indépendant S de G est *maximal* si pour tout sommet x dans $V \setminus S$, $S \cup \{x\}$ n'est pas un indépendant.

Le cardinal maximum (resp. minimum) d'un ensemble indépendant maximal est appelée *nombre d'indépendance* (resp. *nombre d'indépendance inférieur*) de G, noté par $\beta(G)$(resp. $i(G)$). Un ensemble indépendant maximal avec une telle cardinalité est appelé $\beta(G)-$ensemble, on note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\beta(G)-$ensembles. Pour le graphe de la Figure 1.11, on a : $i(G) = 2$ et $\beta(G) = 3$.

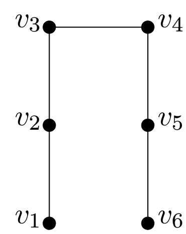


FIGURE 1.11. Un graphe G avec $\beta(G) = 3$ et $i(G) = 2$.

1.2.2 Paramètres de domination

Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble dominant D de G. On peut définir plusieurs types de domination, à titre d'exemple on peut citer :

- *La domination totale* : Un sous ensemble D de V est dit dominant total de G si tout sommet de V possède un voisin dans D, autrement dit, si D est un dominant et le sous graphe induit par D, $G[D]$, ne contient pas de sommets isolés. Le nombre de domination totale, noté $\gamma_t(G)$, désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant total de G.

- *La domination couplée* : Un sous ensemble D de V est dit *dominant couplé* de G si le sous graphe induit par D contient un *couplage parfait*. Le nombre de domination couplée, noté $\gamma_{pr}(G)$, désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant couplé de G.

- *La 2-indépendance* : Un sous ensemble D de V est dit 2-indépendant de G si le degré maximum de sous graphe induit par D est 1. Autrement dit le degré de chaque sommet de D dans $\langle D \rangle$ est au plus 1. Le nombre de 2-indépendance, noté $\beta_2(G)$, désigne la cardinalité maximum d'un ensemble 2-indépendant de G.

- *La k-domination* : Pour un entier $k \geq 1$, un sous ensemble D de V est dit k-dominant de G si tout sommet de $V \setminus D$ a au moins k voisins dans D. Le *nombre de k-domination*, noté $\gamma_k(G)$, designe la cardinalité minimale d'un ensemble k-dominant de G

1.2.3 Applications :

La domination est utilisée dans beaucoup de situations concrètes et son développement théorique a énormément contribué dans la résolution de problèmes pratiques comme les problèmes relevant des réseaux de communications, les systèmes de surveillances (par Radars), les systèmes électriques, les réseaux informatiques et d'autres. Le côté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de domination, en effet beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considéré. Cette condition peut être intérieure de l'ensemble dominant, extérieure de l'ensemble dominant ou bien intérieure et extérieure en même temps de l'ensemble dominant. Comme on peut imposer simultanément des conditions des deux types, par exemple un dominant double est un dominant sans sommet isolé qui domine au moins deux fois tout sommet extèrieur. Pour son application, considérons un réseau de communication constitué de stations fixes, et entre deux stations quelconques il peut exister une communication directe. Le problème posé est de selectionner un ensemble minimum de stations pour installer des transmetteurs, tout en assurant pour les stations qui ne possèdent pas de transmetteurs d'avoir une liaison directe avec ceux qui en possèdent.

1.3 L'arête-domination dans les graphes

Le concept de "arête-*domination" ou domination par les arêtes* a été introduit par Mitchell and Hedetniemi [13]. Un sous ensemble E' de E est appelé un arête-dominant de $G = (V, E)$ si chaque arête dans $E \backslash E'$ est adjacente à au moins une arête dans E'. Le nombre d'arête-domination $\gamma'(G)$, d'un graphe G (ou γ') représente la cardinalité minimum d'un ensemble arête-dominant minimal de G. Un ensemble arête-dominant avec une telle cardinalité est appelé un $\gamma'(G)$-ensemble. Dans [13], Mitchell et Hedetniemi ont présenté un algorithme polynomial pour le problème de la recherche de l'arête-domination dans les arbres. Dans [16], Yannakakis et Gavril ont également donné un algorithme polynomial pour le même problème et ils ont prouvé que ce problème est NP-complet pour les graphes planairs ou les graphes bipartis de degré maximum 3. Horton et Kilakos [20], ont prouvé que le problème de l'arête-domination est NP-complet pour les graphes bipartis planairs et pour d'autres classes de graphes. Ils ont aussi établi des algorithmes polynomiaux pour le même problème dans les classes des graphes suivantes : Le graphe triangulé sans $K_{1,3}$, le graphe adjoint d'un graphe total, le graphe adjoint d'un graphe triangulé, le graphe adjoint d'un graphe dans lequel chaque arête soit différente d'un isthme est un triangle, et le graphe total de chaque graphe précédent.

Puisque pour un graphe simple G, on a $\gamma'(G) = \gamma(L(G))$ et $i'(G) = i(L(G))$, alors ce qu'on peut dire : Comme $L(G)$ est sans $K_{1,3}$, d'aprés Allan et Laskar [14] (si G est sans $K_{1,3}$ alors $\gamma(G) = i(G)$), on a, $\gamma'(G) = i'(G)$.

1.3.1 Paramètres de l'arête-domination

Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble arête-dominant D de G. On peut définir plusieurs types de arête-domination, à titre d'exemple on peut citer :

- *L'arête-domination indépendante :* Un ensemble arête-dominant D est appelé arête-dominant indépendant s'il ne contient pas des arêtes adjacentes. Le nombre de l'arête-domination indépendante inférieur $i'(G)$, d'un graphe G (ou i') est la cardinalité minimum d'un ensemble arête-dominant indépendant maximal de G

- *L'arête-domination totale :* Un ensemble arête-dominant D est dit arête-dominant total s'il ne contient pas des arêtes isolées. Le nombre de l'arête-domination totale $\gamma'_t(G)$, d'un graphe G (ou γ'_t) est la cardinalité minimum d'un ensemble arête-dominant total minimal de G

1.3.2 Applications :

Une des applications est liée à un réseau de commutation téléphonique conçu pour transmettre les appels téléphoniques des lignes entrantes vers les lignes réseau sortantes (nous supposons que la ligne réseau ne peut transmettre qu'un seul appel à la fois). Le problème est de trouver le comportement le plus défavorable du réseau, c'est-à-dire le nombre minimum d'appels transmets lorsque le réseau est saturé et qu'aucun appel ne peut être ajouté. Pour cela, nous construisons un graphe biparti B en connectant une ligne à une ligne réseau si et seulement si la ligne peut être commutée sur la ligne réseau. Le problème est équivalent à trouver la taille minimum d'un ensemble arête-dominant indépendant de B. Pour d'autres applications de l'arête-domination voir *[16].*

CHAPITRE 2

La 2-indépendance et l'arête-domination dans les graphes avec quelques résultats existants

Nous allons consacrer ce chapitre composé de deux sections 1 et 2, à l'étude dans la première section les deux concepts de l'arête-domination et de la 2-indépendance dans les graphes, et dans la seconde section nous fournissons les principaux résultats existants.

Dans la première partie de la section 1, nous définissons la notion de l'arête-domination dans les graphes. Et dans la seconde partie, nous présentons des résultats antérieurs sur cette notion dans différentes classes de graphes.

La section 2 est composée de deux parties. Dans la première partie, nous définissons la notion de la 2-indépendance dans les graphes. Et dans la seconde partie, nous présentons quelques résultats antérieurs sur cette notion dans différentes classes de graphes.

2.1 L'arête-domination dans les graphes

2.1.1 Definitions et notations :

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Définition 2.1. *Un sous ensemble E' de E est appelé arête-dominant de G si chaque arête dans $E \backslash E'$ est adjacente à au moins une arête dans E'.*

Définition 2.2. *Le nombre d'arête-domination $\gamma'(G)$ (ou γ') (resp. nombre d'arête-domination supérieur $\Gamma'(G)$ (ou Γ')), d'un graphe G représente la cardinalité minimum (resp. la cardinalité maximum) d'un ensemble arête-dominant minimal de G. Un ensemble arête-dominant avec une telle cardinalité est appelé un $\gamma'(G)$-ensemble (resp. $\Gamma'(G)$-ensemble).*

On note qu'un ensemble arête-dominant d'un graphe G est un dominant pour son graphe adjoint $L(G)$, et vice versa.

Il est clair qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma'(G)$-ensembles (resp. plusieurs $\Gamma'(G)$-ensembles). A titre d'exemple le graphe de la Figure 2.1, pour lequel les ensembles $\{v_1v_2, v_4v_6\}$, $\{v_2v_3, v_4v_6\}$, sont des arête-dominants minimaux minimum, par conséquent $\gamma'(G) = 2$. Pour le même graphe de la Figure 2.1, $\{v_1v_2, v_3v_4, v_6v_7\}$ et $\{v_1v_2, v_4v_5, v_6v_7\}$ sont des arête-dominants minimaux de cardinalité maximum, d'où $\Gamma'(G) = 3$.

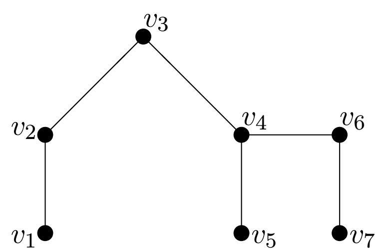


FIGURE 2.1. Un graphe G

Définition 2.3. *Un ensemble arête-dominant E' est appelé arête-domintant indépendant s'il ne contient pas des arêtes adjacentes.*

Définition 2.4. *Le nombre de l'arête-domination indépendante inférieur $i'(G)$ (ou i') (resp. nombre d'arête-domination indépendante $\beta'(G)$, (ou β')), d'un graphe G est la cardinalité minimum (resp. maximum) d'un ensemble arête-dominant indépendant maximal de G. Un ensemble arête-dominant indépendant avec une telle cardinalité est appelé un $i'(G)$-ensemble (resp. $\beta'(G)$-ensemble).*

On note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $i'(G)$-ensembles (resp. $\beta'(G)$-ensembles). Le *nombre d'arête-domination indépendante*, est noté parfois par $\beta_1(G)$. Pour le même graphe de la Figure 2.1, on a : Les ensembles $\{v_1v_2, v_4v_6\}$ et $\{v_2v_3, v_4v_6\}$, sont des arête-dominants indépendants minimaux minimums, par conséquent $i'(G) = 2$. Et les ensembles $\{v_1v_2, v_4v_5, v_6v_7\}$ et $\{v_2v_3, v_4v_5, v_6v_7\}$ sont des arête-dominants indépendants minimaux maximums, par conséquent $\beta'(G) = 3$.

Dans [14], Allan et Laskar ont montré que pour tout graphe G, $\gamma'(G) = i'(G)$, ainsi G possède un ensemble à la fois $\gamma'(G)$-ensemble et $i'(G)$-ensemble.

2.1.2 Quelques résultats antérieurs :

Théorème 2.5 (Allan et Laskar [14]). *Si G est un graphe sans $K_{1,3}$, alors $\gamma(G) = i(G)$.*

Proposition 2.6 (Jayaram [15]).

a)*Pour une chaîne P de longueur k,*

$$\gamma'(P) = \begin{cases} k/3 \ si \ k \equiv 0 (\bmod 3) \\ (k+2)/3 \ si \ k \equiv 1 (\bmod 3) \\ (k+1)/3 \ si \ k \equiv 2 (\bmod 3) \end{cases}$$

b) *Pour un cycle d'ordre $n \geq 4, \gamma'(C_n) = \lceil n/3 \rceil$.*

c) $\gamma'(K_{m,n}) = \begin{cases} \min(n,m) \ si \ 2 \leq n,m \\ 1 \ si \ n = 1 \ ou \ m = 1 \end{cases}$

On donne ainsi les définitions de quelques graphes particuliers qui seront utiles par la suite.

Définition 2.7 (Gallian [18]). *Un* graphe ombre *d'un graphe G, noté par $D_2(G)$, est le graphe construit à partir de deux copies de G, disons G' et G'', en joignant chaque sommet u' de G' aux voisins du sommet correspondant u'' de G''.*

Définition 2.8 (Gallian [18]). *Un* graphe milieu *d'un graphe G, noté par $M(G)$, est le graphe dont l'ensemble de sommets est $V(G) \cup E(G)$ où deux sommets sont adjacents si*

i) *Ils sont deux arêtes adjacentes de G, ou*

ii) *L'un est un sommet de G et l'autre est une arête incidente à ce sommet.*

Définition 2.9 (Behzad [19]). *Un* graphe total *d'un graphe G, noté par $T(G)$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est $V(G) \cup E(G)$ et deux sommets sont adjacents dans $T(G)$ si :*

i) *Ils sont deux arêtes adjacentes dans G, ou*

ii) *L'un est un sommet de G et l'autre est une arête incidente à ce sommet, ou*

iii) *Les deux sont des sommets adjacents dans G.*

Il est facile de voir que $T(G)$ contient toujours à la fois G et le graphe adjoint $L(G)$ comme sous-graphes induits.

Définition 2.10. *Soit $G = (V, E)$ un graphe. L'indice chromatique $\chi'(G)$ est défini par le nombre minimum de couleurs des arêtes de sorte que deux arêtes adjacentes ne soient pas colorées par la même couleur.*

Définition 2.11. *Pour un graphe $G = (V, E)$, le degré d'une arête $e \in E$ est le nombre des arêtes adjacentes à e dans G.*

Lemme 2.12 (Yannakakis et Gavril [16])**.** *On Considère le graphe $G = (V, E)$ et son graphe total $T(G)$. Soit M un ensemble des arêtes de G. Si M est le couplage maximal de G et $M \cup (V - V_M)$ est un ensemble indépendant maximum de $T(G)$, alors M est un ensemble arête-dominant indépendant minimum.*

Théorème 2.13 (Yannakakis et Gavril [16])**.** *Si M est un ensemble arête-dominant indépendant minimum de G, alors $M \cup (V - V_M)$ est un ensemble indépendant maximum de $T(G)$.*

Pour les différentes notations théoriques et terminologies de graphe, nous suivons [4] tandis que les termes relatifs au concept de domination sont utilisés dans le sens de [3]. Dans la partie suivante, nous donnos quelques résultats antérieurs pour les graphes particuliers :*Graphe milieu*, *graphe total* et *graphe ombre* des chaînes P_n et des cycles C_n.

Théorème 2.14 (Vaidya et Pandit [17])**.** *Si P_n est une chaîne d'ordre n, alors*

$$\gamma'(D_2(P_n)) = 2\lceil (n-1)/3 \rceil.$$

Théorème 2.15 (Vaidya et Pandit [17]). *Si P_n est une chaîne d'ordre n, alors*

$$\gamma'(M(P_n)) = \lfloor n/2 \rfloor.$$

Théorème 2.16 (Vaidya et Pandit [17]). *Si P_n est une chaîne d'ordre n, alors :*

$$\gamma'(T(P_n)) = \begin{cases} \lceil \frac{2n-1}{3} \rceil \ si\ n \equiv 0\ \ ou\ 2(\mathrm{mod}(3) \\ \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor \ sinon \end{cases}$$

Théorème 2.17 (Vaidya et Pandit [17]). *Si C_n est un cycle d'ordre n, alors:*

$$\gamma'(D_2(C_n)) = \begin{cases} 2\lceil \frac{n-1}{3} \rceil \ si\ n \equiv 0\ \ ou\ 2(\mathrm{mod}(3) \\ 2\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor \ sinon \end{cases}$$

Théorème 2.18 (Vaidya et Pandit [17]). *Si C_n un cycle d'ordre n, alors :*

$$\gamma'(T(C_n)) = \begin{cases} \lceil \frac{2n-1}{3} \rceil \ si\ n \equiv 0\ \ ou\ 1(\mathrm{mod}(3) \\ \lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor \ sinon \end{cases}$$

Théorème 2.19 (Vaidya et Pandit [17]). *Si C_n un cycle d'ordre n, alors*

$$\gamma'(M(C_n)) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor.$$

Théorème 2.20 (Jayaram [15]). *Pour tout graphe G de taille m, on a $\gamma'(G) \leq m - \Delta'$, où Δ' est le degré maximum d'une arête dans G.*

Théorème 2.21 (Jayaram [15]). *Pour tout graphe G de taille m, on a $\gamma'(G) \leq m - \beta_1 + q_0$, où q_0 présente le nombre des arêtes isolées dans G.*

Théorème 2.22 (Jayaram [15]). *Pour tout graphe G de taille m, on a $\gamma'(G) + \chi'(G) \leq m + 1$.*

Théorème 2.23 (Arumugam et Velammal [34]). *Pour tout graphe G de taille m, $\gamma'(G) + \chi'(G) = m + 1$ si et seulement si $G = C_3$ ou $K_{1,n-1}$ ou qK_2 avec $q \in N^*$.*

Théorème 2.24 (Arumugam et Velammal [34]). *Pour tout graphe connexe G d'ordre n pair, $\gamma'(G) = n/2$ si seulement si G est isomorphe à K_n ou $K_{n/2,n/2}$.*

Théorème 2.25 (Arumugam et Velammal [34]). *Pour tout arbre T d'ordre $n \neq 2$, $\gamma'(G) \leq (n-1)/2$, avec égalité si seulement si T est isomorphe à une étoile subdivisée.*

Pour le résultat suivant, on note par $C_{3,n}$ le graphe obtenu à partir d'un cycle C_3 et $n(\geq 0)$ copies de K_2 en reliant une extrémité de chaque K_2 avec un sommet fixe de C_3. On note par $C_{4,n}$ le graphe obtenu à partir d'un cycle C_4, en reliant un sommet de C_4 avec le centre de l'étoile subdivisée S_n^* obtenu à partir d'une étoile $K_{1,n}$ en subdivisant chaque arête une seule fois.

Théorème 2.26 (Arumugam et Velammal [34]). *Si G est un graphe connexe unicyclique d'ordre n, alors $\gamma'(G) = \lfloor n/2 \rfloor$ si et seulement si G est isomorphe à $C_4; C_5; C_7$; $C_{3,p}$ ou $C_{4,p}$ pour $p \geq 0$.*

Théorème 2.27 (Arumugam et Velammal [34]). *Soient T_u un arbre quelconque de taille m et $e = uv$ une arête de degré maximum Δ'. On a $\gamma' = m - \Delta'$ si seulement si diam$(T) \leq 4$ et $\deg(w) \leq 2$ pour tout sommet $w \neq u, v$.*

Théorème 2.28 (Arumugam et Velammal [34]). *Pour tout graphe unicyclique connexe $G = (V, E)$ avec cycle C, $\gamma' = n - \Delta'$ si seulemnt si l'un des cas suivants est vérifié :*

- $G = C_3$
- $C = C_3 = (u_1u_2u_3u_1)$, $\deg(u_2) = \deg(u_3) = 2$, $d(u_1, w) \leq 2$ pour tous sommets w n'est pas dans C et $\deg(w) \geq 3$ pour au moins un sommet w n'est pas dans C.
- $C = C_3 = (u_1u_2u_3u_1)$, $\deg(u_1) \geq 3, \deg(u_2) \geq 3, \deg(u_3) = 2$ tous sommets n'est pas dans C adjacent à u_1 avoir de degrée au moins 2 et tous sommets dont la distance à u_1 est 2 sont des sommets pendants .
- $C = C_3, \deg(u_1) = 3, \deg(u_2) \geq 3, \deg(u_3) \geq 3$ et tous les sommets non pas dans C sont des sommets pendants .
- $G = C_4$.
- $C = C_4$

2.2 La 2-indépendance dans les graphes

2.2.1 Définitions et propriétés préliminaires

La notion de la 2-indépendance a été introduite par Fink et Jacobson en 1985 (pour plus de détails voir [21]). On s'intéresse dans ce qui suit au cas $k = 2$. Pour $k = 1$ on retrouve les définitions de la l'indépendance usuelle. Donc pour tout graphe G, $i_1(G) = i(G)$, $\beta_1(G) = \beta(G)$.

Pour un graphe $G = (V, E)$, on donne les définitions suivantes.

Définition 2.29. *Un sous ensemble $S \subseteq V(G)$ est un 2-indépendant si tout sommet de S a au plus 1 voisin dans S, ou encore si $\Delta(S) \leq 1$.*

Tout sous ensemble d'un ensemble 2-indépendant est un 2-indépendant. Un ensemble 2-indépendant de G est maximal si pour tout sommet x dans $V(G) \setminus S$, $S \cup \{x\}$ n'est pas un 2-indépendant. Les ordres minimum et maximum d' un ensemble 2-indépendant maximal de G sont notés $i_2(G)$ et $\beta_2(G)$. Le *nombre de 2-indépendance* est $\beta_2(G)$.

Notons qu'un ensemble 2-indépendant est parfois appelé 1-dependant [21], 2-dependant [22], 1-small [23].

En 1989, Jacobson et Peters [25], ont démonté que la détermination du nombre $\beta_k(G)$ pour un graphe quelconque G est un problème difficile au sens de la complexité algorithmique, et ils ont élaboré un algorithme linéaire pour le calculer dans les arbres et les graphes séries-parallèle ([1]). Pour plus de détails voir [24, 25].

Chellali et al. [26], ont établi des conditions pour lesquelles un ensemble 2-indépendant d'un graphe G soit maximal.

Théorème 2.30 (Chellali et al. [26])**.** *Soit S un ensemble 2-indépendant d'un graphe G. Alors S est maximal si et seulement si pour tout sommet $v \in V \setminus S$, on a:*

a. v est adjacent à au moins 2 sommets dans S, ou

[1]Un graphe $G = (V, E)$ est dit série-parallèle s'il ne contient pas de sous-graphe partiel homéomorphe à K_4. Un homéomorphe à K_4 est obtenu par subdivision des aêtes de la clique à 4 sommets.

b. v est adjacent à un sommet $u \in S$ qui possède exactement 1 *voisin dans S.*

Donc, d'après ce qui précède et pour tout graphe G d'ordre n et tout entier positif k avec $n \geq k \geq 1$, on peut énoncer les propriétés principales suivantes:

1. Tout ensemble de k sommets est k-indépendant d'où $i_k(G) \geq k$ pour tout graphe G.
2. Par définition $i_2(G) \leq \beta_2(G)$
3. Tout ensemble 2-indépendant est 3-indépendant et donc $\beta_2(G) \leq \beta_3(G)$ pour tout graphe G. De plus l'ensemble des sommets V est le seul $(\Delta+1)$-indépendant maximal mais n'est pas un Δ-indépendant. On en déduit que pour tout graphe G, $i_{\Delta+1}(G) = n$ et
$$\beta(G) = \beta_1(G) \leq \beta_2(G) \leq \ldots \leq \beta_\Delta(G) < \beta_{\Delta+1}(G) = n.$$

2.2.2 Quelques résultats antérieurs

On présente dans cette partie quelques bornes inférieurs ou supérieurs du nombre de k-indépendance β_k dans les graphes.

Théorème 2.31 (Favaron [27]). *Pour tout graphe G et tout entier positif k, $\beta_k(G) \geq \gamma_k(G)$*

Corollaire 2.32 (Favaron [27]). *Pour tout graphe G, $\beta_2(G) \geq \gamma_2(G)$*

Théorème 2.33 (Blidia et al. [29]). *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum Δ tels que pour tout entier k avec $k \leq \Delta$, $\beta_k(T) \geq kn/(k+1)$.*

Pour $k = 2$ on a le corollaire suivant:

Corollaire 2.34. *Pour tout arbre T, on a $\beta_2(T) \geq 2n/3$.*

Théorème 2.35 (Blidia et al. [29]). *Pour tout graphe biparti connexe G avec $s(G)$ sommets supports, on a $i_2(G) \leq (n + s(G))/2 \leq \beta_2(G)$.*

Ainsi des caractérisations constructives des familles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des arbres T dont les deux bornes du Théorème 2.35 sont atteintes ont été réalisées par les mêmes auteurs (pour plus de détails voir [29])

Théorème 2.36 (Blidia et al. [29])**.** *Si T est un arbre non-trivial avec $s(T)$ sommets supports, alors $\beta_2(T) = (n + s(T))/2$ si seulement si $T = P_2$ ou $T \in \mathcal{H}$.*

Théorème 2.37 (Blidia et al. [29])**.** *Si T est un arbre non-trivial avec $s(T)$ sommets supports, alors $i_2(T) = (n + s(T))/2$ si seulement si $T \in \mathcal{G}$.*

Théorème 2.38 (Blidia et al. [29])**.** *Si G est un graphe biparti connexe d'ordre $n \geq 2$, avec $l(G)$ les sommets pendants et $s(G)$ les sommets supports , alors $\beta_k(G) \geq \beta(G) \geq (n + l(G) - s(G))/2$ et la borne est atteinte pour β_k.*

Une autre borne infériure du nombre de k-indépendance, généralise pour les arbres la borne $\beta_2(T) \geq n/2$ obtenue par Maddox [36], est donnée dans le Théorème 2.40. La carctérisation constructive des arbrest T dont la borne sur β_k est atteinte est donné par la famille $\mathcal{F}(k)$ définie ci-dessous.

Définition 2.39. *La famille $\mathcal{F}(k)$ est l'ensemble des arbres qui peuvent être obtenus récursivement à partir de $T_1 = K_{1,k}$ en utilisant l'opération F_1 décrite ci-dessous. Soit $H = K_{1,k}$.*

Operation F_1: Ajouter une copie de H attachée par une arête reliant un sommet de H à un sommet de T_i. Pour plus de détails sur cette caractérisation voir [29].

Théorème 2.40 (Blidia et al. [29])**.** *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum Δ. Alors pour tout entier k avec $2 \leq k \leq \Delta$, $\beta_k(T) \geq kn/(k+1)$ si et seulement si $T \in \mathcal{F}(k)$.*

Pour $k = 2$ on a :

Corollaire 2.41. *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum $\Delta \geq 2$. Alors $\beta_2(T) \geq 2n/3$ si et seulement si $T \in \mathcal{F}(2)$.*

Théorème 2.42 (Hopkins et Staton [32]). *Pour tout graphe G d'ordre n et un tout entier positif $k \leq \Delta$, on a $\beta_k(G) \geq \frac{n}{1+\lfloor \Delta/k \rfloor}$.*

Corollaire 2.43. *Pour un graphe G d'ordre n et de degré maximum $\Delta \geq 2$, on a $\beta_2(G) \geq \frac{n}{1+\lfloor \Delta/2 \rfloor}$.*

Théorème 2.44 (Favaron [35]). *Pour tout graphe G et tout entier positif k, on a $\beta_k(G) \geq \sum \frac{k}{1+kd(v)}$.*

Corollaire 2.45. *Pour un graphe G, on a $\beta_2(G) \geq \sum \frac{2}{1+2d(v)}$.*

Théorème 2.46 (Blidia et al. [28]). *Pour tout graphe G et tous entiers j et k avec $1 \leq j \leq k$, on a $\beta_{k+1}(G) \leq \beta_j(G) + \beta_{k-j+1}(G)$*

Théorème 2.47 (Bouchou et Blidia [31]). *Pour tout graphe G d'ordre n et tout entier $k \geq 2$, on a $\beta_k(G) \leq 2\beta_{k-1}(G)$.*

Corollaire 2.48 (Blidia et al. [28]). *Pour un graphe G et un entier positif k, on a:*

- $\beta_{k+1}(G) \leq \beta_k(G) + \beta(G)$
- $\beta_{k+1}(G) \leq 2\beta_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}(G)$
- $\beta_{k+1}(G) \leq (k+1)\beta(G)$

Théorème 2.49 (Bouchou et Blidia [31]). *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$. Soient k et j deux entiers positifs avec $1 \leq j < k \leq \Delta(G) + 1$. Alors $\beta_k(G) \leq \left\lceil \frac{k}{j} \right\rceil \beta_j(G)$.*

Corollaire 2.50. *Pour un graphe G, on a $\beta_2(G) \leq 2\beta(G)$*

Corollaire 2.51 (Hopkins et Staton [32]). *Pour tout graphe G et tout $k \leq \Delta(G), \beta_k(G) \geq n/(1 + \lfloor \frac{\Delta}{k} \rfloor)$*

Corollaire 2.52. *Pour tout graphe G , $\beta_2(G) \geq n/(1 + \lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor)$.*

Théorème 2.53 (Bouchou et Blidia [31]). *Soient G un graphe biparti d'ordre n et j, k deux entiers positifs avec $1 \leq j < k \leq \Delta(G)+1$. Alors $\beta_k(G) = \frac{k+j-1}{j}\beta_j(G)$ si et seulement si :*

1. *G est un $\frac{n}{2}K_2$ avec $j = 1$ et $k = 2$, ou*
2. *G est un $\frac{n}{4}C_4$ avec $j = 2$ et $k = 3$.*

Une conséquence directe du Théorème 2.53 précédent, est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 2.54 (Bouchou et Blidia [31]). *Soient G un graphe biparti d'ordre n et k un entier positif avec $2 \leq k \leq \Delta(G) + 1$. Alors $\beta_k(G) = 2\beta_{k-1}(G)$ si et seulement si :*

1. *G est un $\frac{n}{2}K_2$ avec $k = 2$, ou*
2. *G est un $\frac{n}{4}C_4$ avec $k = 3$.*

Avant de présenter le résultat suivant, on introduit l'opération O suivante:

Opération O: Pour un entier positif j, soit v un sommet quelconque de l'étoile $K_{1,j}$. L'arbre T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en reliant un sommet de T_i au sommet v.

On définit maintenant la famille $\mathcal{T}$ comme suit :

$T \in \mathcal{T}$ si et seulement si $T = K_{1,j}$ ou T est obtenu à partir de $K_{1,j}$ par une séquence finie de l'opération O décrite ci-dessus.

Théorème 2.55 (Bouchou et Blidia [31]). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$ et k un entier positif avec $k \leq \Delta(G)$, alors $\beta_k(T) \leq \frac{k+j-1}{j}\beta_j(T) - \frac{(k-2)n}{j+1} - 1$ avec égalité si et seulement si :*

1. *$T \in \mathcal{T}$, et*
2. *T a un sommet w sachant que tout voisin de w a un degré au plus k, au moins w ou un de ses voisins a un degré k ou plus, et chaque sommet dans $V(T) - N[w]$, s'il en existe, a un degré inférieur à k dans T.*

A partir du Théorème 2.55 précédent, on déduit une caractérisation descriptive des arbres atteignant la borne du Théorème 2.55 pour $k = 2$ et $j = 1$.

Corollaire 2.56 (Bouchou et Blidia [31]). *Si T est un arbre, alors $\beta_2(T) = 2\beta(T) - 1$ si et seulement si $T = K_1$, ou T est une couronne d'une étoile.*

Rappellons qu'une couronne d'un graphe G, est le graphe obtenu en reliant par une arête, chaque sommet de G à un sommet pendant.

Définition 2.57. *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour un sommet $v \in V$, la fonction domination Romaine (RDF) est définie par : $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ avec $f(v) = 0$ s'il existe un voisin $u \in N(v)$ avec $f(u) = 2$. Le poids d'une (RDF) est égal à $f(V) = \sum_{v\in V} f(v)$. Le poids minimum d'une (RDF) de G est appelé le nombre de domination Romaine de G, et est noté par $\gamma_R(G)$.*

Une relation entre le nombre 2-indépendance et le nombre de domination romaine est donnée par le Théorème 2.59 suivant. Ainsi une caractérisation constructive de la famille $\mathcal{U}$ des arbres T dont la borne du Théorème 2.59 est atteinte a été établie par les mêmes auteurs (pour plus de détails voir [30]).

Définition 2.58. *Soit $\mathcal{U}$ la famille des arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence $T_1, T_2, ..., T_k$ des arbres sachant que $T_1 \in \{P_1, P_2, P_3\}$, et si $k \geq 2$, alors T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i en utilisant l'une des opérations $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ pour $1 \leq i \leq k - 1$.*

Opération $\mathcal{U}_1$: Attacher une chaîne P_3 : x-y-z en joignant x à un sommet T_i.

Opération $\mathcal{U}_2$: Attacher une copie de $R_{2,j}$ centrée en w, avec $j \in \{0, 1, 2\}$ en joignant w à un sommet y de T_i sachant que $\gamma_R(T_i - y) \geq \gamma_R(T_i)$. (avec $R_{t,j}$ est l'arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,t}$ $(t \geq 2)$ centrée en u en subdivisant j arêtes de l'étoile exactement une fois.

Théorème 2.59 (Meddah et Chellali [30]). *Pour tout arbre T, $\beta_2(T) \geq \gamma_R(T)$ avec égalité si seulement si $T \in \mathcal{U}$.*

CHAPITRE 3

Arbres avec le nombre de 2-indépendance égal à 2 fois le nombre d'arête-domination

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à déterminer une relation entre les deux nombres de la 2-indépendance β_2 et de l'arête-domination γ' dans un arbre T.. Cette relation est illustrée par une nouvelle borne inférieure du nombre β_2 en fonction du nombre γ'. Ainsi de caractériser les arbres extrémaux atteignant cette nouvelle borne. On note de tels arbres par $(\beta_2, 2\gamma')$-arbres.

Le travail présenté dans ce chapitre a été réalisé en collaboration avec M^{me} Meddah.

3.1 Définitions et résultats préliminaires

Définition 3.1. *Pour trois entiers positifs t_0, t_1 et t_2 , soit $R_{t_0,t_1,t_2}(u)$ l'arbre obtenu par t_0 sommets, t_1 étoiles d'ordre 2, t_2 étoiles d'ordre au moins 2, en ajoutant un nouveau sommet u attaché aux t_0 sommets et aux $t_1 + t_2$ centres des étoiles. On note par m le cardinal de l'ensemble des sommets pendants attachés aux supports forts, ie $m \geq 2t_2$.*

Il est clair que $R_{t_0,0,0}(u)$ est une étoile K_{1,t_0} et $R_{0,t_1,0}(u)$ est une étoile subdivisée $S^*_{t_1}$. De même, il est facile de remarquer que $\gamma'(R_{t_0,t_1,t_2}(u)) = t_1 + t_2$ si $t_1 + t_2 \neq 0$ et $\gamma'(R_{t_0,t_1,t_2}(u)) = 1$ si $t_1 + t_2 = 0$.

Soit $R^*_{t_1,t_2}(u)$ un arbre défini à partir de l'arbre $R_{t_0,t_1,t_2}(u)$ centré en u avec $t_0 = 0$, ie $R^*_{t_1,t_2}(u) \equiv R_{0,t_1,t_2}(u)$, avec $t_1 + t_2 \geqslant 1, m = 2t_2$.

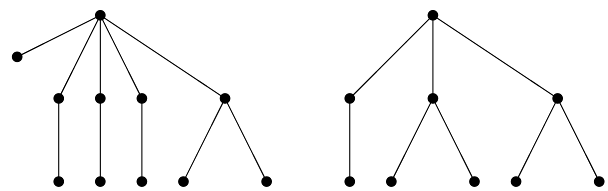


FIGURE 3.1. Un arbre $R_{1,3,1}(u)$ et un arbre $R^*_{1,2}(v)$

3.2 Caractérisation des $(\beta_2, 2\gamma')$-arbres:

Nous arrivons à la caractérisation constructive de la famille $\mathcal{F}$ des arbres T tels que $\beta_2(T) = 2\gamma'(T)$. On définit la famille $\mathcal{F}$ de tous les arbres T qui peuvent être obtenu récursivement à partir d'une séquence T_1, T_2, ...,T_k avec ($k \geqslant 1$) d'arbre, où T_1 est une chaîne P_2 ou une chaîne P_3, $T = T_k$ et si $k \geqslant 2$, T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en utilisant l'une des deux opérations suivantes :

- *Opération* $\mathcal{F}_1$: Ajouter un arbre $R^*_{t,j}$ de centre u avec $t \geqslant 1$, en ajoutant une arête ux à un sommet x de T'.
- *Opération* $\mathcal{F}_2$: Ajouter un arbre $R^*_{0,j}$ de centre u avec $j \geqslant 1$, en ajoutant une arête ux à un sommet x de T' tels que x appartient à tout $\beta_2(T')$-ensemble S et $d_{\langle S\rangle}(x) = 1$.

On établit le résultat suivant :

Proposition 3.2. *Soit T un arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial T' et de l'arbre $R_{t_0,t_1,t_2}(u)$ en ajoutant l'arête ux à un sommet x de T'. Si $t_1 + t_2 \geq 1$, alors on a :*

1. $\gamma'(T) = \gamma'(T') + t_1 + t_2$,
2. $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + t_0 + 2t_1 + m$, avec égalité si $t_1 \geq 1$ ou $t_0 \geq 2$.

Preuve. Soit T' un arbre d'ordre $n' < n$ avec $n' \geq 2$. Soit $Z = \{z_1, ..., z_{t_0}\}$ l'ensemble des sommets pendants attachés à u. Et soit $\{x_1, ..., x_{t_1}\}$ l'ensemble des sommets supports faibles attachés à u, avec x'_i est le sommet pendant attaché à x_i. Soit $\{y_1, ..., y_{t_2}\}$ l'ensemble des sommets supports forts attachés à u et soit M l'ensemble de sommets pendants attachés aux supports $y_i : i = \overline{1, t_2}$ tel que $m = |M| \geq 2t_2$.

1. Soit D' un $\gamma'(T')$-ensemble, alors $D' \cup \{ux_1, ..., ux_{t_1}, uy_1, ..., uy_{t_2}\}$ est un ensemble arête-dominat de T et ainsi $\gamma'(T) \leq \gamma'(T') + t_1 + t_2$. Maintenant, soient D un $\gamma'(T)$-ensemble et $D'' = D \cap E(T')$. Il est clair que $|E(R_{t_0,t_1,t_2}(u) \cap D)| \geq t_1 + t_2$. Maintenant si $ux \notin D$, alors D'' est un ensemble arête-dominant de T', d'où $\gamma'(T') \leq |D''| \leq \gamma'(T) - (t_1 + t_2)$. Supposons maintenant que $ux \in D$ et soit e une arête incidente à x dans T'. Par conséquent $(D'' \cup \{e\})$ est un ensemble arête-dominant de T', d'où $\gamma'(T') \leq |D'' \cup \{e\}| \leq \gamma'(T) - (t_1 + t_2 + 1) + 1 = \gamma'(T) - (t_1 + t_2)$. Dans les deux cas, et en utilisant le fait que $\gamma'(T) \leq \gamma'(T') + t_1 + t_2$, on a l'égalité $\gamma'(T) = \gamma'(T') + t_1 + t_2$.

2. Soit S' un $\beta_2(T')$-ensemble, alors $S' \cup Z \cup \{x_1x'_1, ..., x_{t_1}x'_{t_1}\} \cup M$ est un ensemble 2-indépendant de T et ainsi $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + t_0 + 2t_1 + m$. Maintenant, soient S un $\beta_2(T)$-ensemble et $S'' = S \cap E(T')$. On distingue deux sous cas suivants :

   Sous cas 2.1 : $t_1 \geq 1$: Alors sans perte de généralité on peut supposer que $Z \cup M \subset S$. Et par maximalité de S, on peut supposer que $\{x_i, x'_i\} \in S$ pour $i = \overline{1, t_1}$,.ce qui implique que $u \notin S$. D'où S'' est un ensemble 2-indépendant de T', par conséquent $\beta_2(T') \geq |S''| \geq \beta_2(T) - (t_0 + 2t_1 + m)$. Donc en utilisant le fait que $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + t_0 + 2t_1 + m$, on aura l'égalité $\beta_2(T) = \beta_2(T') + t_0 + 2t_1 + m$.

   Sous cas 2.2 : $t_0 \geq 2$: Alors de même que précédement sans perte de généralité on peut supposer que $Z \cup M \subset S$. Et par maximalité de S, $u \notin S$, d'où S'' est un ensemble 2-indépendant de T', par conséquent $\beta_2(T') \geq |S''| \geq \beta_2(T) - (t_0 + 2t_1 + m)$. Donc en utilisant le fait que $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + t_0 + 2t_1 + m$, on aura l'égalité $\beta_2(T) = \beta_2(T') + t_0 + 2t_1 + m$.

$\square$

Lemme 3.3. *Si $T \in \mathcal{F}$, alors $\beta_2(T) = 2\gamma'(T)$.*

Preuve. Soit T un arbre de $\mathcal{F}$. Alors T est obtenu à partir d'une séquence $T_1, T_2, ..., T_k$ $(k \geq 1)$ d'arbres, où $T_1 = P_2$ ou $T_1 = P_3$, $T = T_k$,et ,si $k \geq 2$,T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i en utilisant l'"une des deux opérations $\mathcal{F}_1$ ou $\mathcal{F}_2$ Par induction sur le nombre d'opérations effectuées pour construire l'arbre T, il est clair que la propriété est vraie si $k = 1$, ceci établit les cas de base.

Supposons maintenant que $k \geq 2$ et que le résultat est vérifié pour tous les arbres $T \in \mathcal{F}$ qui peuvent etre construit à partir d'une séquence d'au plus $k-1$ opérations, et soit $T' = T_{k-1}$..Par hypothèse d'induction, T' est un $(\beta_2, 2\gamma')$-arbre. Soit T un arbre obtenu à partir de T' en utilisant l'une des opérations $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Soit S un $\beta_2(T)$-ensemble contenant le maximum de sommets pendants. Alors d'aprés les items 1 et 2 du Proposition 3.2, on a $\gamma'(T) = \gamma'(T') + t + j$.et $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 2t + 2j$. On constate les deux situations suivantes, en respectant les mêmes notations des opérations pour la construction de la famille $\mathcal{F}$:

- Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $k-1$ opérations est $\mathcal{F}_1$: Alors d'aprés l'item 2 du Proposition 3.2, $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 2t + 2j$ (car $t \geq 1$). Il s'ensuit que:

$$\begin{aligned}\beta_2(T) &= \beta_2(T') + 2t + 2j \\ &= 2\gamma'(T') + 2t + 2j \\ &= 2\gamma'(T)\end{aligned}$$

Donc $\beta_2(T) = 2\gamma'(T)$, et ceci implique que T est un $(\beta_2, 2\gamma')$-arbre.

- Si la dernière opération effectuée sur l'arbre T' obtenu par $k-1$ opérations est $\mathcal{F}_2$: Alors d'aprés l'item 2 du Proposition 3.2, $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + 2j$. Soit $S' = S \cap V(T')$. On considère les cas suivants :

Cas 1 : Si $u \notin S$, alors S' est un ensemble 2-indépendant maximal de T', et donc:

$$\begin{aligned}\beta_2(T') &\geq \beta_2(T) - 2j \\ &\geq \beta_2(T') + 2j - 2j \\ &= \beta_2(T')\end{aligned}$$

Ceci implique que $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 2j$ et ainsi :

$$\begin{aligned} \beta_2(T) &= \beta_2(T') + 2j \\ &= 2\gamma'(T') + 2j \\ &= 2\gamma'(T) \end{aligned}$$

Donc $\beta_2(T) = 2\gamma'(T)$, et ceci implique que T est un $(\beta_2, 2\gamma')$-arbre.

Cas 2 : Si $u \in S$: Supposons que $\beta_2(T) > \beta_2(T') + 2j$.

Sous cas 2.1 : S' est un ensemble 2-indépendant maximal de T' : Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \beta_2(T') &\geq |S'| \\ &= \beta_2(T) - 2j - 1 \\ &> \beta_2(T') + 2j - 2j - 1 \\ &= \beta_2(T') - 1 \end{aligned}$$

D'où $\beta_2(T') \geq |S'| \geq \beta_2(T')$, et alors $\beta_2(T') = |S'|$, donc S' est un $\beta_2(T')$-ensemble avec la condition que $x \notin S'$ ou bien $x \in S'$ et il est isolé dans $\langle S' \rangle$, contradiction avec la condition imposée sur le sommet x dans T'. D'où $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 2j$ et alors on a :

$$\begin{aligned} \beta_2(T) &= \beta_2(T') + 2j \\ &= 2\gamma'(T') + 2j \\ &= 2\gamma'(T) \end{aligned}$$

Par conséquent $\beta_2(T) = 2\gamma'(T)$, et ceci implique que T est un $(\beta_2, 2\gamma')$-arbre.

Sous cas 2.2 : L'ensemble 2-indépendant S' n'est pas maximal : Ainsi , $|N_{T'}[x] \cap S| = 1$, et donc il existe un sommet $x' \in N_{T'}[x]$ tel que $S' \cup \{x'\}$ est un 2-indépendant de T'. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \beta_2(T') &\geq |S'| + 1 \\ &= \beta_2(T) - 2j - 1 + 1 \\ &= \beta_2(T) - 2j \\ &> \beta_2(T') + 2j - 2j \\ &> \beta_2(T'), \text{ contradiction.} \end{aligned}$$

D'où $\beta_2(T) = \beta_2(T') + 2j$. De même que précédement, on aura $\beta_2(T) = 2\gamma'(T)$, et donc T est un $(\beta_2, 2\gamma')$-arbre. □

A présent, on donne la caractérisation des arbres T tels que $\beta_2(T) = 2\gamma'(T)$.

Théorème 3.4. *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $\beta_2(T) \geq 2\gamma'(T)$ avec égalité si seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

Preuve. Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$. Si $T \in \mathcal{F}$, alors d'après le Lemme 3.3, $\beta_2(T) = 2\gamma'(T)$. Maintenant on montre la nécessité : Pour montrer que si T est un arbre, alors $\beta_2(T) \geq 2\gamma'(T)$, avec égalité si $T \in \mathcal{F}$, on procéde par induction sur l'ordre n de T. Il est clair que, si $n \in \{2, 3\}$, alors $T \in \mathcal{F}$ et $\beta_2(T) = 2\gamma'(T)$, ce qui établit les deux cas de base, P_2 et P_3. Soit $n \geq 4$ et supposons que tout arbre T' d'ordre $n' : 4 \leq n' < n$ satisfait $\beta_2(T') \geq 2\gamma'(T')$ avec égalité si uniquement $T' \in \mathcal{F}$. Soit T un arbre d'ordre n : alors on distingue deux situations : Si $\text{diam}(T) = 2$, alors T est une étoile $K_{1,t} : t \geq 3$ et dans ce cas l'arbre T vérifie $\beta_2(T) > 2\gamma'(T)$. Et si $\text{diam}(T) = 3$, alors T est une double étoile $S_{p,q} : p, q \geq 1$, de même que précédement T vérifie $\beta_2(T) > 2\gamma'(T)$. Donc on peut supposer que T est un abre d'ordre $n \geq 5$ avec un diamètre $\text{diam}(T) \geq 4$.

Enracinons T en un sommet pendant r de la plus longue chaîne. Soit v un sommet à distance $\text{diam}(T) - 2$ de r sur la plus longue chaîne commençant par r. Puisque $\text{diam}(T) \geq 4$, soit w le sommet parent de v. Ainsi le sous arbre T_v est isomorphe à un arbre R_{t_0,t_1,t_2} (v) avec $t_1 + t_2 \geq 1$. Soit $Z = \{z_1, ..., z_{t_0}\}$ l'ensemble des sommets pendants (s'il en existe) attachés à v dans T_v. Soient $\{x_1, ..., x_{t_1}\}$ l'ensemble des sommets supports faibles attachés à v, et $\{y_1, ..., y_{t_2}\}$ l'ensemble des sommets supports forts attachés à v dans T_v, avec M est l'ensemble des sommets pendants attachés aux supports forts $y_i : i = \overline{1, t_2}$ qui est de cardinal $m = |M| \geq 2t_2$.

Soit S un $\beta_2(T)$-ensemble contenant le maximum de sommets pendants. Comme $t_1 + t_2 \geq 1$, alors v est adjacent à au moins un sommet support. Soit $T' = T \setminus T_v$. D'après la Proposition 3.2, $\gamma'(T) = \gamma'(T') + t_1 + t_2$ et $\beta_2(T) \geq \beta_2(T') + t_0 + 2t_1 + m$, où m est le nombre de sommets pendants attachés aux supports forts dans $R_{t_0,t_1,t_2}(v)$. Ainsi on peut distinguer les cas suivants :

Cas 1 : $t_1 \geq 1$: Donc en utilisant l'induction sur l'arbre T', on a :

$$\begin{aligned}\beta_2(T) &\geq \beta_2(T') + t_0 + 2t_1 + m \\ &\geq 2\gamma'(T') + t_0 + 2t_1 + m \\ &= 2\gamma'(T) - 2t_1 - 2t_2 + t_0 + 2t_1 + m \\ &= 2\gamma'(T) + m - 2t_2 + t_0\end{aligned}$$

Comme $m \geq 2t_2$ et $t_0 \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned}\beta_2(T) &\geq 2\gamma'(T) + m - 2t_2 + t_0 \\ &\geq 2\gamma'(T)\end{aligned}$$

Si de plus $\beta_2(T) = 2\gamma'(T)$, alors on a l'égalité le long de la chaîne d'inégalité précédente, en particulier $\beta_2(T') = 2\gamma'(T')$ et $m - 2t_2 + t_0 = 0$, et ceci implique que $m = 2t_2 \geq 0$ (chaque support fort, s'il en existe, possède exactement deux sommets pendants) et $t_0 = 0$. Par induction sur l'ordre de T', $T' \in \mathcal{F}$ et ainsi $T \in \mathcal{F}$ car il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération $\mathcal{F}_1$.

Cas 2 : $t_1 = 0$: Ceci signifie que $t_2 \geq 1$. Ainsi on distingue les deux sous cas suivants:

Sous cas 2.1 : $t_0 \geq 1$: En utilisant l'induction sur l'arbre T', on aura :

$$\begin{aligned}\beta_2(T) &\geq \beta_2(T') + t_0 + m \\ &\geq 2\gamma'(T') + t_0 + m \\ &= 2\gamma'(T) - 2t_2 + t_0 + m \\ &= 2\gamma'(T) + m - 2t_2 + t_0\end{aligned}$$

Puisque $m \geq 2t_2$ et $t_0 \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned}\beta_2(T) &\geq 2\gamma'(T) + m - 2t_2 + t_0 \\ &\geq 2\gamma'(T) + 1 \\ &> 2\gamma'(T)\end{aligned}$$

D'où $\beta_2(T) > 2\gamma'(T)$.

<u>*Sous cas 2.2 :*</u> $t_0 = 0$: Soit S' un $\beta_2(T')$-ensemble.

Supposons en premier que ($w \notin S'$) ou ($w \in S'$ et $d_{\langle S' \rangle}(w) = 0$). Donc tout $\beta_2(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble 2-indépendant de T en ajoutant le sommet v et les m sommets pendants de l'arbre T_v. Ainsi et en utilisant l'induction sur l'arbre T', on aura :

$$\begin{aligned}
\beta_2(T) &\geq \beta_2(T') + m + 1 \\
&\geq 2\gamma'(T') + m + 1 \\
&= 2\gamma'(T) - 2t_2 + m + 1 \\
&= 2\gamma'(T) + 1 \\
&> 2\gamma'(T)
\end{aligned}$$

D'où $\beta_2(T) > 2\gamma'(T)$..

Supposons maintenant que $w \in S'$ et $d_{\langle S' \rangle}(w) = 1$. Il est clair que tout $\beta_2(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble 2-indépendant de T en ajoutant les m sommets pendants de l'arbre T_v. Ainsi et en utilisant l'induction sur l'arbre T', on aura :

$$\begin{aligned}
\beta_2(T) &\geq \beta_2(T') + m \\
&\geq 2\gamma'(T') + m \\
&= 2\gamma'(T) - 2t_2 + m \\
&\geq 2\gamma'(T)
\end{aligned}$$

Si de plus $\beta_2(T) = 2\gamma'(T)$, on a l'égalité le long de la chaîne d'inégalité précédente, en particulier $\beta_2(T') = 2\gamma'(T')$ et $m - 2t_2 = 0$, et ceci implique que $m = 2t_2 \geq 2$ (chaque support fort possède exactement deux sommets pendants). Par induction sur l'ordre de T', $T' \in \mathcal{F}$ et ainsi $T \in \mathcal{F}$ car il est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération $\mathcal{F}_2$. $\square$

Le résultat suivant est une conséquence directe de la construction des $(\beta_2, 2\gamma')$-arbres, en utilisant les deux opérations $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$:

Corollaire 3.5. *Soit T un arbre d'ordre $n \geqslant 2$. Si $\beta_2(T) = 2\gamma'(T)$, alors tous les sommets supports de T sont reliés à au plus deux sommets pendants.*

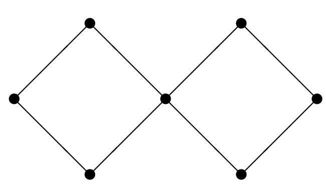
Une conséquence directe de la construction des $(\beta_2, 2\gamma')$-arbres, est la caractérisation de la sous famille $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}$ de toutes les chaînes P_n telles que $\beta_2(P_n) = 2\gamma'(P_n)$ en utilisant l'opération $\mathcal{F}_1$ pour $t = 1$ et $j = 0$, avec x un sommet pendant dans T', et pour un ordre qui dépend de l'arbre de base, une chaîne P_2 ou une chaîne P_3.

Corollaire 3.6. *Pour une chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, on a $\beta_2(P_n) = 2\gamma'(P_n)$ si et seulement si $n \equiv 0$ ou $2 \bmod(3)$.*

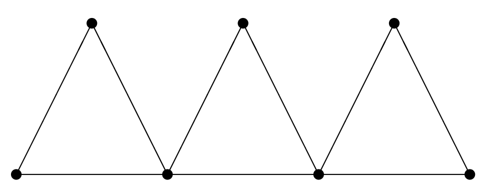
Une autre conséquence directe de la construction des $(\beta_2, 2\gamma')$-arbres, en utilisant l'opération $\mathcal{F}_1$ pour $t = 1$ et $j = 0$, à partir de l'arbre de base P_2, est le résultat suivant :

Corollaire 3.7. *Si T est une étoile subdivisée S_p^*, alors $\beta_2(T) = 2\gamma'(T)$.*

Le résultat de Théorème 3.4 ne peut être généralisé pour les graphes bipartis, les cactus et les graphes triangulés. En effet, le graphe G_1 de la Figure 3.2, est un graphe biparti et un cactus en même temps : pour lequel on a : $4 = \beta_2 < 2\gamma' = 2 \times 3 = 6$. Et pour le graphe G_2 de la même figure, qui est cactus et triangulé en même temps, on a : $5 = \beta_2 > 2\gamma' = 2 \times 2 = 4$.



G_1



G_2

Figure 3.2. Un graphe biparti-cactus et un graphe triangulé-cactus

Tandis que le graphe triangulé de la Figure 3.3, on a $\{v_1, v_2, v_4, v_5, v_8\}$ est un $\beta_2(G)$-ensemble et $\{v_4v_7, v_2v_6, v_1v_5\}$ est un $\gamma'(G)$-ensemble, d'où $5 = \beta_2 < 2\gamma' = 2 \times 3$.

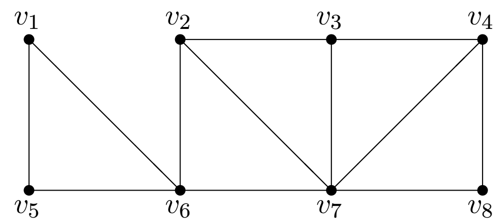


FIGURE 3.3. Un graphe triangulé G

Pour un arbre T, on sait que $\beta_2(T) \geq \gamma_2(T)$ d'après le Corrolaire 2.32 de Chapitre 2, et d'après le Théorème 3.4, on a $\beta_2(T) \geq 2\gamma'(T)$. Mais les deux paramètres $\gamma_2(T)$ et $2\gamma'(T)$ sont incomparables d'une manière générale. A titre d'exemple les deux graphes de la Figure 3.4 : Dans le graphe G_1, et qui représente une étoile subdivisée $S_p^* : p \geq 2$, on a $\gamma_2 = p + 1 < 2\gamma' = 2p$ et la différence $2\gamma' - \gamma_2$ peut être aussi large que l'on veut. Par contre dans le graphe G_2 de la même figure et qui représente une étoile $K_{1,p} : p \geq 3$, on a $\gamma_2 = p > 2\gamma' = 2$ et la différence $\gamma_2 - 2\gamma'$ peut être aussi large que l'on veut.

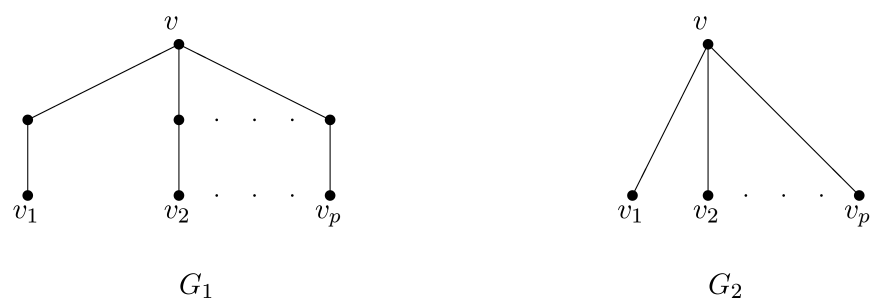
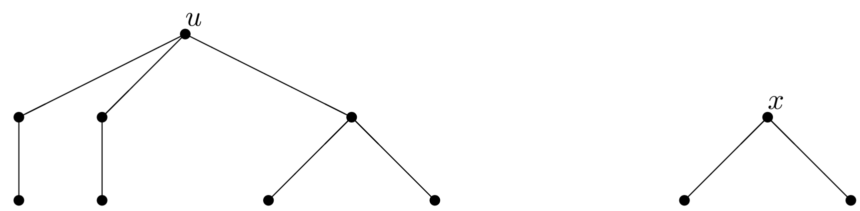


FIGURE 3.4. Une étoile subdivisée S_p^* et une étoile $K_{1,p}$

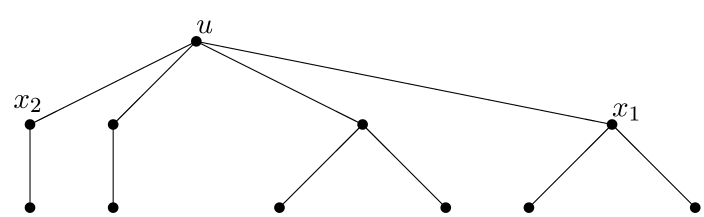
Exemple d'application : Pour illustrer la construction de la famille $\mathcal{F}$ des $(\beta_2, 2\gamma')$-arbres, on considère l'arbre de base $T_0 = K_{1,2}$ qui appartient à la famille $\mathcal{F}$. Soit l'arbre $R_{2,1}^*$ de centre u (voir la Figure 3.5).



$R*_{2,1}$ $\quad$ $K_{1,2}$

FIGURE 3.5. L'arbre $R^*_{2,1}(u)$ et l'arbre $K_{1,2}$

Appliquons l'opération $\mathcal{F}_1$ en attachant le sommet u à un sommet quelconque (disons x) de l'arbre T_0. L'arbre obtenu en appliquant cette opération est noté par T_1 (voir la Figure 3.6). Pour ce dernier arbre T_1 on a : $\gamma'(T_1) = 4$ et $\beta_2(T_1) = 8$. D'où $T_1 \in \mathcal{F}$.



$L'arbre\ T_1$

FIGURE 3.6. Application de l'opération $\mathcal{F}_1$

On considère maintenant l'arbre T_1 de la Figure 3.6, comme étant un arbre de départ et soit l'arbre $R^*_{0,2}$ de centre u_2 (voir la Figure 3.7).

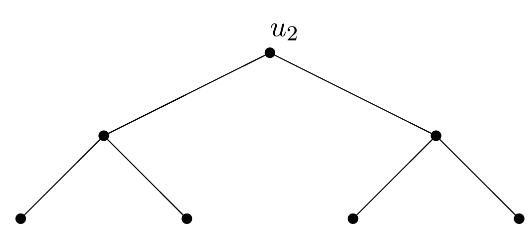
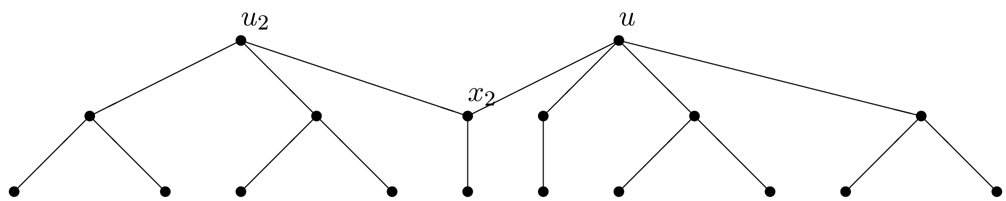


FIGURE 3.7. L'arbre $R^*_{0,2}(u_2)$

Appliquons maintenant l'opération $\mathcal{F}_2$ en attachant le sommet u_2 centre de l'arbre $R^*_{0,2}$ de la figure précédente, au sommet x_2 de l'arbre T_1 tel que x_2 est dans tout $\beta_2(T_1)$-ensemble. L'arbre obtenu en appliquant cette opération est noté par T_2 (voir la Figure 3.8). Pour l'arbre T_2, on a : $\gamma'(T_2) = 6$ et $\beta_2(T_2) = 12$. D'où $T_2 \in \mathcal{F}$.



$L'arbre\ \ T_2$

FIGURE 3.8. Application de l'opération $\mathcal{F}_2$

Donc l'arbre T_2 qui est dans $\mathcal{F}$, est obtenu à partir de l'arbre $K_{1,2}$ et l'arbre T_1 en appliquant successivement les deux opérations $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

Conclusion et perspectives

L'bjectif principal de ce mémoire est l'étude des deux notions arête-domination et 2-indépendance dans les arbres. Ces deux notions ont été intensivement étudiées au cours de ces dernières années, les résultats concernant l'arête-domination sont peu par rapport aux résultats concernant la 2-indépendance qui sont tellement nombreux que nous avons essayé d'en citer que les plus importants. Et cela se réalise par :

- L'établissement d'une nouvelle borne inférieure sur le nombre de la 2-indépendance.
- La caractérisation des arbres atteignant cette borne.

Nous avons en premier, prouver la borne inférieure pour le nombre de 2-indépendance β_2 en fonction de nombre de l'arête-domination γ' dans les arbres. Ainsi nous avons caractérisé constructivement les arbres atteignant cette nouvelle borne. Cette caractérisation a été basée essentiellement sur deux opérations. Ainsi nous avons prouvé que ce résultat n'est pas valable en général pour certaines classes particulières de graphes, telles que les graphes bipartis, les cactus et les graphes triangulés.

Bien que les travaux réalisés le long de ce mémoire et les travaux réalisés auparavant soient importants, nous sommes loin de répondre aux nombreux problèmes posés liés à la 2-indépendance et l'arête-domination dans les graphes.

La contribution réalisée durant ce mémoire ouvre plus de perspectives de recherche. Suite aux résultats obtenus sur le nombre d'arête-domination et de 2-indépendance dans les graphes, l'étude de ces problèmes peut être poursuivie dans des classes particulières de graphes ayant des structures simples tels que : Les graphes sans $K_{1,3}, \ldots$etc.

Il serait intéressant de même, de trouver une relation (si elle existe) entre le nombre de 2-indépendance inférieur i_2 et le nombre d'arête domination γ' dans les graphes d'une manière générale, sinon dans des classes particulières de graphes.

Références

[1] C. Berge, *"Graphes et Hypergraphes"*. Dunod, deuxième édition,1970.

[2] G. Chartrand, et L. Lesniak, *"Graphs &Digraphs"*. Third Edition, Chapman&Hall, London, 1996.

[3] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et P.J. Slater, *Domination in Graphs"*. Advanced Topics. Marcel Dekker, New York, 1998.

[4] D. B. West," *Introduction to Graph Theory"*, Prentice Hall, New Delhi, India, 2003.

[5] S.T. Hedetniemi and R.C. Laskar, *"Introduction"*, Discrete Mathematics,1990.

[6] C.F. de Jaenisch, *"Applications de l'analyse mathÈmatique au jeu des echecs"*, Petrograde 1862.

[7] G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H.W. Martin and W.D. Weakley, *"Combinatorial problems on chessboards"*, A briev survey, dans GraphTheory, Combinatorics and Applications: Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, (1995), $507 - 528$.

[8] C. Berge, "*Les problèmes de coloration en théorie des graphes"*. Publ.Inst. Statist. Univ. Paris 9, (1960), $123 - 160$.

[9] O. Ore, "*Theory of graphs"*, Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38(1962).

[10] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, "*Towards a theory of domation in graphs"*, Networks 7(1977), $247 - 261$.

[11] K.S. Booth et J.H. Johnson, "*Dominating sets in chordal graphs"*. SIAM J. Comput.11(1982), $191 - 199$.

[12] R. Laskar, J. Pfa§ and S.T. Hedetniemi, "*NP-complitness of total domination and connected domination*", and *"irredundance for bipartite graphs"*. Technical Report 428, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).

[13] S. Mitchell and S. T. Hedetniemi, "*Edge domination in trees*", Congr. Numer.$19(1977), 489 - 509$.

[14] R. B. Allan and R. Laskar, "*On domination and indpendent domination of a graph*", Discrete Math. 23(1978), $73 - 76$.

[15] S. R. Jayaram, *"Line domination in graphs"*, Graphs Combin., $3(1987), 357 - 363$.

[16] M. Yannakakis and F.Gavril, "*Edge dominating sets in graphs*", SIAM Journal on Applied Mathematics, $38(3) : 364 - 372$, *June* 1980.

[17] S. K. Vaidya and R. M. Pandit, *"Edge Domination in Some Path and Cycle Related Graphs",* Hindawi Publishing Corporation. ISRN Discrete Mathematics, 2014.

[18] J. A. Gallian, *"A dynamic survey of graph labeling,"* The Electronic Journal of Combinatorics, vol. 16, article #DS6, 2013.

[19] M. Behzad, *"A criterion for the planarity of the total graph of a graph"*,Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1967.

[20] J. D. Horton and K. Kilakos, *"Minimum edge dominating sets"*, SIAM J. Disc . Math., $6\ (1993), 375 - 387$.

[21] J.F. Fink et M.S. Jacobson, *On n-domination, n-dependence and forbidden subgraphs.* In: Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, Wiley, New York, $301 - 311$ (1985).

[22] M.S. Jacobson, K. Peters et D.F. Rall, *On n-irredundance and n-domination.* Ars Combin. 29B (1990), $151 - 160$.

[23] G. Hopkins et W. Staton, *Vertex partition and k-small subsets of graphs.* Ars Combin. $22, (1986)\ 19 - 24$.

[24] T.J. Bean, M.A. Henning et H.C. Swart, *On the integrity of distance domination in graphs*. Australas. J. Combin. 10, (1994), $29-43$.

[25] M.S. Jacobson et K. Peters, *Complexity questions for n-domination and related parameters*. Congr. Numer. 68, (1989), $7-22$.

[26] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg et L. Volkmann, *k-Domination and k-Independence in Graphs : A SURVEY,*. Graphs and Combinatorics 28, $1-55$ (2012). DOI $10.1007/\text{s}00373-011-1040-3$.

[27] O. Favaron, *On a conjecture of Fink and Jacobson concerning k-domination and k-dependence*. J. Combin. Theory Ser. B 39, (1985), $101-102$.

[28] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron and N. Meddah, *"Maximal k-independent sets in graphs"*, Discuss. Math. Graph Theory 28(2008).

[29] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron and N. Meddah, "*On k-independence in graphs with emphasis on trees*", Discrete Math. 307(2007), $2209-2216$.

[30] N. Meddah, M. Chellali, *"Roman domination and 2-independence in trees"*, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications Vol. $9, No.2$(2017)1750023 (6 pages) c World Scientific Publishing Company DOI: $10.1142/S1793830917500239$

[31] A.bouchou, M. Blidia. "*On the k-independence number in graphs".* Australasian journal of combinatorics 59(2)(2014), $311-322$.

[32] G. Hopkins and W. Staton, "*Vertex partitions and k-small subsets of graphs*", Ars Combin. 22(1986), $19-24$.

[33] S. R. Jayaram, "*Line domination in graphs*", Graphs Combin. 1987.

[34] S. Arumugam and S. Velammal, "*Edge domination in graphs*", Taiwanese Journal of Mathematics Vol. $2, No.2, 173-179$, June 1998.

[35] Favaron, O. "*k -domination and k -independence in graphs*". Ars Combin. 1988.

[36] Maddox,R.B."*On* k *-dependentsubsets and partitions of* k *-degenerategraphs"*. Congr.Numer. 1988

[37] Caro, Y., Tuza, Z. *"Improved lower bounds on* k *-independence"*. J. Graph Theory 1991.

[38] Jelen, F. "k *-Independence and the* k *-residue of a graph"*. J. Graph Theory . 1999.