

**UNIVERSITE DE SAAD DAHLED DE BLIDA**

**Faculté des Sciences de l'Ingénieur**

Département de Génie Civil

**MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité : Constructions civiles et industrielles

**COMPORTEMENT DES BATIMENTS**

**ASYMETRIQUES SOUS EXCITATIONS SISMIQUES**

Par

**Mohamed Draidı BENSALAH**

Devant le jury composé de :

N. BOURAHLA	Professeur, U.S.T.S.D, Blida	Président
M. HAMMOUTENE	Maître de conférences, E.N.P, Alger	Examineur
A. ATTAR	Maître de Conférences, U.S.T.S.D, Blida	Examineur
M. BENZAIBI	Maître de Conférences, U.S.T.S.D, Blida	Rapporteur
M. BADAOUİ	Maître Assistants, U. de Djelfa	Co-Rapporteur
M. BELAZOUGHI	Directeur, C.G.S, Alger	Invité

Blida, 29 Juin 2005

## ملخص

تقييم التشوهات، القوى الداخلية و الانحراف عن المركز التحريكي الديناميكي لبناية في الهندسة المدنية تشكل مهمة صعبة تتطلب تحكم كبير في أليات صنع النماذج مع معرفة كافية بالتقنين. هذه المهمة تصبح أكثر تعقيد حينما تكون البناية معرضة لظاهرة الإلتواء. طبعاً، هذه الظاهرة تصبح راجحة عند تعرض هذه البناية لهزات أرضية. لذا يجب الأخذ بعين الاعتبار هذه الظاهرة أثناء صنع النماذج و أثناء التحقق إزاء التقنين الساري المفعول.

نقترح عن طريق استعمال طريقة مبسطة الأخذ بعين الاعتبار ظاهرة الإلتواء. هذا باعتبار درجات الحرية الست للبناية، أيضاً تقييم القوى الداخلية و الانحراف عن المركز التحريكي. هذا التقارب السداسي الأبعاد يعتمد على نظرية الهندسة التفاضلية لمجموعة الزمر لي

التفاعل تربة- منشأة سيكون أيضاً محل دراسة في الميدان الترددي و هذا في حالة أساس صلب سطحي. عدة أمثلة للإثبات و التطبيق قد درست، النتائج المحصل عليها مرضية و واعدة.

## RESUME

Estimer les déformations, les efforts internes et l'excentricité dynamique d'une structure de génie civil est une tâche ardue nécessitant une grande maîtrise de l'outil de modélisation et une connaissance sans faille de la réglementation. Cette tâche est d'autant plus complexe que la structure considérée est sujette au phénomène de la torsion. En effet, ce phénomène peut devenir prépondérant lors de sollicitations sismiques. Aussi il convient de le prendre en charge aussi bien lors de la modélisation que lors de la vérification vis-à-vis de la réglementation en vigueur.

L'objectif visé à travers l'utilisation d'une méthode simplifiée est de prendre en compte la torsion, ceci en considérant les six degrés de liberté d'une structure et de déterminer ainsi ses efforts internes et l'excentricité dynamique. Cette approche hexadimensionnelle se base sur la théorie de la géométrie différentielle des groupes de Lie.

L'interaction sol-structure fera aussi l'objet d'une investigation dans le domaine fréquentiel pour une fondation rigide superficielle.

Plusieurs exemples de validation et d'application ont été étudiés. Les résultats obtenus sont satisfaisants et prometteurs.

## ABSTRACT

The estimation of the deformations, the internal efforts and the dynamic eccentricity of a structure in civil engineering is a difficult task requiring a great command of the modelling tool and a good knowledge about the regulation. This task is more complex since the considered structure is subject to the torsion phenomenon. Indeed, this phenomenon can become dominating at the time of seismic excitations. Therefore it is advisable to deal with it as well at the time of modelling as the checking with respect to the code.

We propose through the use of a simplified method to take into account the torsion. This by considering the six degrees of freedom of a structure and to determine its internal efforts and dynamic eccentricity. This hexadimensional approach is based on the theory of the differential geometry of the Lie's groups.

The soil-structure interaction will be also investigate in the frequency domain in the case of a surface rigid foundation.

Several examples of validation and application were studied. The results obtained are satisfactory and promising.



## REMERCIEMENTS

Je saisis cette occasion pour remercier en premier et en dernier dieu pour m'avoir donné le courage et la volonté d'achever se modeste travail.

Je remercie mon directeur de thèse Dr. Mahmoud BENZAIBI pour tous ses efforts dévoués, et pour son suivi tout au long de l'élaboration de ce travail.

Je tiens à remercier mon Co-Rapporteur Mr M. BADAOUI de l'université de Djelfa pour sa disponibilité et sa présence tout au long de la préparation de se modeste travail.

Je remercie vivement le Professeur N. BOURAHLA pour son aide malgré ses multiples occupations, M<sup>r</sup> ATTAR et M<sup>elle</sup> CHORFA pour leur soutien.

Mes vifs remerciements sont adressés aux enseignants de la graduation et post – graduation ainsi que le personnel de l'institut de génie civil et en particulier le Directeur M. MENADI BELKACEM.

Mes sincères salutations sont réservées à Monsieur le Président et honorables membres du jury et aux invités, dont la présence donne une dimension supplémentaire à ce travail. Je vous prie d'accepter du fond du cœur mes remerciements.

## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1 : Quelques formes architecturales de structures asymétriques	14
Figure 1.2 : Distribution des éléments résistants dans le plan horizontal	16
Figure 1.3 : Couplage des modes de torsion	16
Figure 1.4 : Modèle brochette à N masses concentrées	19
Figure 1.5 : Modèle manivelle	20
Figure 1.6 : Modèle analytique et paramètres structuraux en plan	21
Figure 1.7 : Effet du rapport fréquentiel sur la ductilité	22
Figure 1.8 : Effet de l'excentricité statique sur la déformation maximale dans le Plan	22
Figure 1.9 : Efforts tranchants additifs et de réduction dû aux moments de Torsion	24
Figure 1.10 : Amplification dynamique de l'excentricité	25
Figure 1.11 : Amplification de l'effort Tranchant	26
Figure 1.12 : Schéma des différentes excentricités	27
Figure 1.13 : Réponse d'une fondation à une sollicitation harmonique	33
Figure 1.14 : Schématisation d'une méthode de sous-structure	35
Figure 1.15 : Méthode Hybride	35
Figure 1.16 : Interaction sol-structure (a) Sans ISS, bâtiment souple et sol de très bonne résistance mécanique : (b) Sans ISS, bâtiment raide et sol de très bonne résistance mécanique : (c) Avec ISS, bâtiment raide et sol de faible ou moyenne résistance mécanique	37
Figure 2.1 : Modèle utilisé	39
Figure 2.2 : Diagramme représentant le changement de base $B_1$ à la base $B_2$	45
Figure 2.3 : Élément poutre	51
Figure 2.4 : Base locale liée à l'élément et la base centrale liée au plancher	53
Figure 2.5 : Déplacement relatif de deux étages	59

Figure 3.1: Organigramme du programme de calcul	68
Figure 3.2: Le modèle couverture champignon	69
Figure 3.3 : Diagramme Effort Tranchant et Moment de Flexion de la Couverture champignon	70
Figure 3.4 : Exemple 2 de validation	71
Figure 3.5 : Vue en plan du Bâtiment EDF	73
Figure 3.6 : Diagramme représentant les trois efforts internes de translation inter-étages du bâtiment EDF	74
Figure 3.7 : Diagramme représentant les trois moments de rotations inter étages du Bâtiment EDF	74
Figure 3.8 a : Les trois déplacements obtenus par modèle utilisé	75
Figure 3.8 b : Les trois rotations obtenues par le modèle utilisé	75
Figure 3.9.a : Vue en plan de l'excentricité dynamique du premier niveau du bâtiment EDF	76
Figure 3.9.b : Vue en plan de l'excentricité dynamique du deuxième niveau du bâtiment EDF	76
Figure 3.9.c : Vue en plan de l'excentricité dynamique du troisième niveau du bâtiment EDF	77
Figure 3.9.d : Vue en plan de l'excentricité dynamique du quatrième niveau du bâtiment EDF	77
Figure 3.10 : Bâtiment ISPRA à 4 étages	78
Figure 3.11 : Diagramme représentant les trois efforts internes de translation inter-étages du bâtiment ISPRA	79
Figure 3.12 : Diagramme représentant les trois moments de rotations inter-étages du bâtiment ISPRA	79
Figure 3.13 a-b-c et d : Vue en plan représentant les excentricités dynamiques inter-étages pour le bâtiment ISPRA	80
Figure 3.14-a : Vue en plan du sous-sol	81
Figure 3.14-b : Vue en plan du 1 <sup>er</sup> et 2 <sup>ème</sup> niveau	82
Figure 3.14-c : Vue en plan du 3 <sup>ème</sup> et 4 <sup>ème</sup> niveau	82



Figure 3.14-d : vue en plan du 5 <sup>ème</sup> niveau (terrasse)	83
Figure 3.15-a : Diagramme des trois efforts internes de translation inter-étages du bâtiment Bachir El Ibrahim	83
Figure 3.15-b : Diagramme des trois Moments internes de rotations inter-étages du bâtiment Bachir El Ibrahim	84
Figure 3.16 : Vue en plan de l'excentricité dynamique du 4 <sup>ème</sup> niveau pour le Bâtiment Bachir El Ibrahim	85
Figure 3.17 : Planchers sur trois poteaux	86
Figure 4.1 : Comparaison entre les fréquences obtenues dans le domaine fréquentiel pour les trois types de sols	96
Tableau 1.1 : Excentricités de conception dans les différents codes sismiques	25
Tableau 3.1: Moment de flexion maximal obtenu	70
Tableau 3.2: Efforts obtenus	72
Tableau 3.3 : Excentricité dynamique	86
Tableau 3.4 : Les six efforts internes du bâtiment trois pieds	87
Tableau 4.1 : Valeurs des coefficients d'impédance	90
Tableau 4.2 : Caractéristiques des sols considérés	94
Tableau 4.3 : Fréquences propres obtenues dans le cas de l'interaction sol-Structure.	95

## TABLE DES MATIERES

RESUME	
REMERCIEMENTS	
TABLE DES MATIERES	
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	
INTRODUCTION	11
1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	13
1.1 Introduction	13
1.2 L'asymétrie et le mode de torsion	14
1.3 Conception et modélisation des bâtiments	16
1.4 Amplification dynamique des vibrations de torsion	20
1.5 Prise en compte de la torsion dans les règlements parasismiques	23
1.6 Les effets de quelques paramètres	28
1.7 La torsion dans le Règlement Parasismique Algérien99 (RPA99) et dans les autres règlements	30
1.8 Etude de l'interaction sol-structure (ISS)	32
1.9 Conclusion	38
2. MODELE PAR MATRICE DE TRANSFERT A SIX DEGRES DE LIBERTE	39
2.1 Introduction	39
2.2 Hypothèses du modèle	39
2.3 La modélisation hexadimensionnelle	40
2.4 Les équations du mouvement en cas de séisme	42
2.5 Méthode hexadimensionnelle d'étude sismique d'un bâtiment	43
2.6 Rappel mathématique	43
2.7 Dynamique du solide rigide	47
2.8 Etude du contreventement	50
2.9 Equations de la dynamique sismique	58
2.10 Méthode de Runge-Kutta	63
2.11 Calcul des efforts internes	64
2.12 Calcul de l'excentricité dynamique	66
2.13 Conclusion	66
3. MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE	67
3.1 Introduction	67
3.2 Modélisation numérique	67
3.3 Exemples de validation	69
3.4 Exemples d'application	72
3.5 Conclusion	87

4. INTERACTION SOL-STRUCTURE	89
4.1 Introduction	89
4.2 Fondation rigide superficielle	89
4.3 Impédance d'une fondation rigide superficielle	89
4.4 Equations du mouvement	93
4.5 Exemple d'application	94
4.6 Conclusion	96
CONCLUSION	97
REFERENCES	99

## INTRODUCTION

Les structures de génie civil risquant d'être soumises aux excitations sismiques, nécessitent une attention particulière lors de la conception. Cette attention doit être plus accrue lorsqu'il s'agit d'édifice présentant des dissymétries de masse ou de forme. En effet, ces dissymétries peuvent engendrer le phénomène de torsion. Ce phénomène peut être particulièrement dangereux lors d'un séisme. Nous avons alors une excentricité entre le centre de masse et le centre de torsion. La détermination de cette excentricité appelée excentricité dynamique est alors un objectif majeur pour le concepteur. L'autre objectif de l'ingénieur concepteur est celui du calcul des efforts engendrés alors dans les différents éléments. Ces efforts vont lui permettre de dimensionner correctement sa structure. La vérification des déformations et des périodes de vibration va lui permettre d'affirmer si sa structure est capable de résister à un tremblement de terre.

Pourtant ceci reste des fois insuffisant, car il n'a pas été tenu compte de l'effet de l'interaction sol-structure, effet pouvant accentuer le phénomène de torsion ou bien changer la réponse de la structure à une excitation sismique.

De tout ceci, il en découle que dans les structures sujettes au phénomène de la torsion, le calcul des efforts internes, de l'excentricité et de l'effet du sol sur la structure, est un objectif primordial.

Nous nous proposons dans le présent travail d'atteindre cet objectif (en fait triple objectif) par l'utilisation d'un modèle appelé « modèle par matrice de transfert à six degrés de liberté ».

Ce modèle hexadimensionnel permet la prise en compte de tous les degrés de liberté d'une structure et donc, de fait, de la torsion.

La théorie de base du modèle et sa mise en œuvre existant auparavant, nous y avons inclus les écritures et les procédures nous permettant d'atteindre notre but.

Pour ce faire, nous avons décomposé ce mémoire en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre nous présentons une étude bibliographique sur la torsion et sa prise en charge. Cette prise en charge se fait soit à travers l'utilisation de modèles soit par la réglementation. La nécessité de la prise en compte de l'interaction sol-structure y est aussi signalée.

Nous donnons dans le chapitre deux les fondements mathématiques du modèle utilisé ainsi que les développements constituant notre apport.

Le chapitre trois est consacré à la mise en oeuvre numérique du modèle et aux résultats obtenus sur les exemples de validation et d'application traités. Ces exemples ont été étudiés sans y inclure l'effet de l'interaction sol-structure, cet effet faisant l'objet du prochain chapitre.

Enfin, dans le chapitre quatre, nous abordons l'aspect interaction sol-structure, dans le cas de fondations rigides superficielles tel que l'impédance de ces fondations soit fonction de la pulsation. Nous sommes donc dans le domaine fréquentiel. Nous présentons la méthodologie que nous avons mise en oeuvre et que nous avons testée dans le cas d'un exemple.

Nous achevons ce modeste travail par une conclusion générale.

## **CHAPITRE 1**

### **ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

#### 1.1 Introduction

Dans le calcul dynamique des structures, il apparaît nécessaire de faire une distinction entre les structures symétriques et les structures asymétriques. Ceci pour différentes raisons, choix de modèle d'analyse qui est souvent lié au type de structure (régulière ou irrégulière), commodité de calcul, fiabilité des résultats, simplification des modèles, nombre des degrés de libertés etc., car souvent les concepteurs ont affaire à des structures symétriques qui sont simples à calculer et ne nécessitant pas la modélisation de la structure complète, car l'étude d'une partie permet de restituer l'ensemble par le biais des axes et plans de symétrie. Contrairement aux structures asymétriques qui présentent des irrégularités architecturales et massiques (irrégularités dans la distribution des inerties et des raideurs) et ceci pour des raisons fonctionnelles (exemples : centrales nucléaires, imprimeries, théâtres...) ou bien pour des raisons architecturales (exemples : esthétiques, environnement...) figure 1.1 [1].

L'étude des bâtiments asymétriques diffère de celle des bâtiments symétriques, car dans ce cas le phénomène de torsion peut avoir une grande influence, effet souvent négligé par certains concepteurs et qui est dû principalement soit à l'excentricité du centre de rigidité appelé aussi centre élastique (différence entre le centre de masse et le centre de rigidité), soit à l'excentricité de résistance où à la plastification prématurée de certains éléments résistants lors d'une secousse sismique conduisant à une redistribution déséquilibrée de la rigidité. L'autre aspect qu'il ne faut pas négliger lors d'une excitation sismique est le mouvement de torsion du sol ou l'effet de propagation des ondes sismiques [2].

La torsion doit être prise en compte dans les calculs car un tel phénomène est toujours présent dans les bâtiments asymétriques et peut se manifester dans le cas de bâtiments symétriques fortement dissymétriques du point de vue de leur structure résistante ou de la distribution des masses [3] ou sous l'effet de la dégradation des caractéristiques mécaniques des éléments de contreventements.

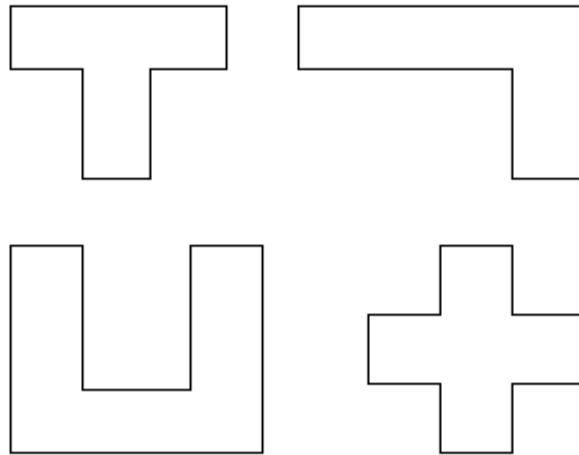


Figure 1.1 : Quelques formes architecturales de structures asymétriques [3].

De ce fait plusieurs chercheurs ont traité le phénomène de torsion pour les deux types de structures (*symétriques et asymétriques*), d'une part en utilisant la réglementation à travers l'introduction de quelques coefficients de majoration et, d'autre part, à travers la modélisation de ce phénomène. Plusieurs modèles ont été proposés dont le calcul est simple avec un nombre de degrés de libertés limité et des résultats qui ne reflètent pas souvent la réalité tels que *le modèle brochette*. Par contre, un modèle plus complexe avec un grand nombre de degrés de libertés a été préconisé ; c'est *le modèle éléments finis tridimensionnels* qui nous donne des résultats approchant le plus la réalité.

La torsion demeure un phénomène très complexe à étudier et dont il faut prendre en considération l'effet lors de la modélisation surtout pour les bâtiments asymétriques sujets à un mouvement sismique.

## 1.2 L'asymétrie et le mode de torsion

Généralement l'asymétrie (*excentricité*) de la structure est associée à la torsion, car la réponse en torsion lors d'une excitation latérale est souvent initiée par l'effet de couplage des modes latéraux et de torsion. Cependant il faut noter la différence entre l'excentricité et le mode de torsion qui est une caractéristique dynamique de la structure quel soit symétrique ou asymétrique. Le calcul de l'excentricité nécessite en premier lieu la détermination du centre de masse qui est le point d'application de la résultante de toutes les forces d'inertie situées dans le plan horizontal considéré, ainsi que le centre de résistance (ou centre de rigidité) qui est le point dans le plan horizontal (plancher ou diaphragme) à travers lequel l'application d'une force ne produit pas de mouvement de rotation du

plancher. La différence entre le centre de masse et le centre de rigidité nous donne alors l'excentricité statique  $e_S$ . Les coordonnées du centre de rigidité d'une structure sont données par la formule suivante [4] :

$$x_R = \frac{K_{y\theta}}{K_y} = \frac{\sum K_{yi} x_i}{\sum K_{yi}}$$

$$y_R = \frac{K_{x\theta}}{K_x} = \frac{\sum K_{xi} y_i}{\sum K_{xi}}$$
(1)

Avec

$K_{xi}$  Et  $K_{yi}$  sont les rigidités latérales de l'élément  $i$  suivant les axes  $x$  et  $y$  respectivement, et  $x_i$  et  $y_i$  représentent respectivement les coordonnées du centre de gravités de chaque élément  $i$ .

D'autres types d'excentricité en plus de l'excentricité statique peuvent être à l'origine du phénomène de torsion, citons entre autre :

***L'excentricité de résistance :*** Lors d'une sollicitation sismique, la plastification prématurée de certains éléments conduit à une redistribution déséquilibrée de la rigidité dans le plan horizontal.

***L'excentricité accidentelle :*** Qui est définie comme étant les incertitudes qui sont dues principalement aux anomalies entre la masse, la rigidité, et les distributions de résistance utilisées dans l'analyse et les vraies distributions sous sollicitations sismiques [4, 5, 6].

La fréquence associée au mode de torsion dépend de la distribution de la rigidité des éléments de résistance dans le plan horizontal de la structure. Par exemple les bâtiments ayant un noyau central, une structure auto stable avec une distribution uniforme de poteaux, ou des voiles périphériques comme système de contreventement (figure 1.2) peuvent avoir une fréquence de torsion inférieure, sensiblement égale ou supérieure à la fréquence fondamentale latérale [1, 4].



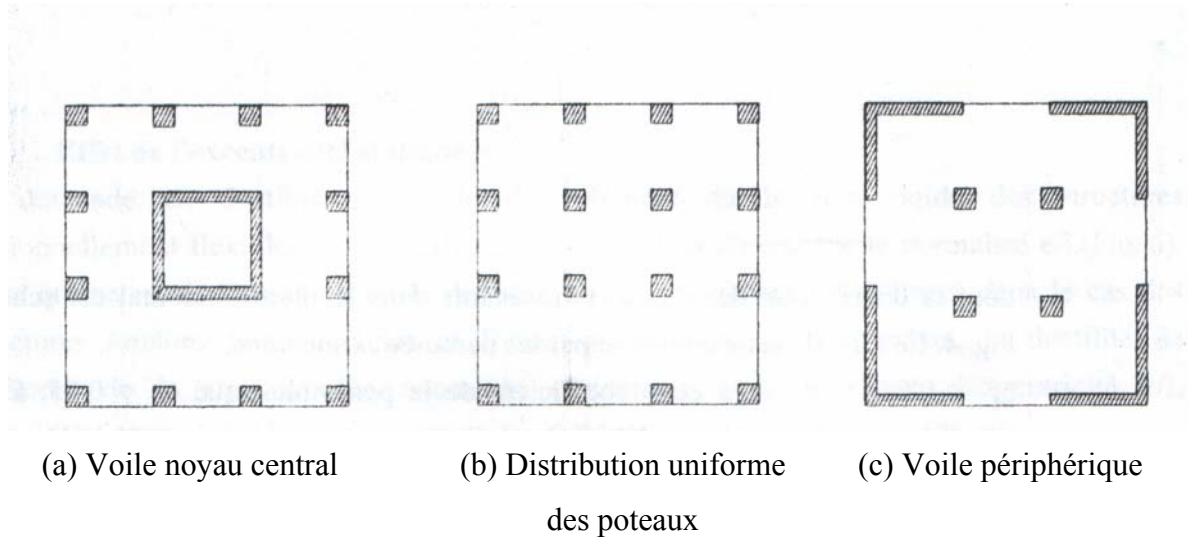


Figure 1.2 : Distribution des éléments résistants dans le plan horizontal [3, 4].

Le mode de torsion est pur dans une structure parfaitement symétrique (figure 1.3-a), mais il peut être couplé à l'un ou aux deux modes latéraux dans une structure asymétrique (figure 1.3-b, 1.3-c) [3, 4].

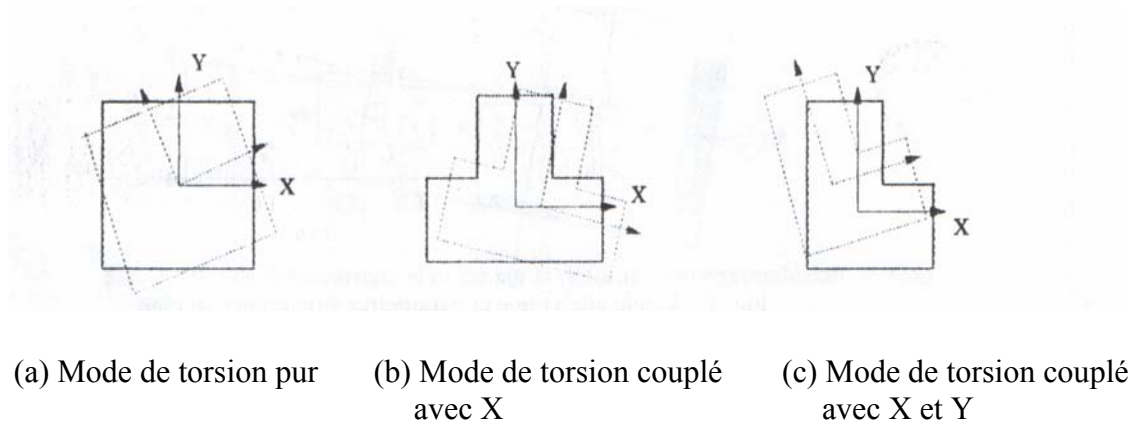


Figure 1.3 : Couplage des modes de torsion [3, 4]

### 1.3 Conception et modélisation des bâtiments

Les formes en plan idéales pour un bâtiment en zone sismique sont le cercle et le carré. Comme ces formes sont peu courantes, des critères sont indiqués dans les différents codes de calcul pour assurer un bon comportement vis à vis du séisme.

En effet d'une part un bâtiment bien conçu se comportera toujours mieux qu'un bâtiment irrégulier même en présence d'efforts supérieurs à ceux pour lesquels il a été calculé et

d'autre part l'obtention d'une sécurité suffisante pour ce type de structure nécessitera un coût moindre [7].

Les critères de régularité se subdivisent en deux catégories:

- Régularité en plan
- Régularité en élévation

### ***1. Régularité en plan***

La configuration doit être symétrique dans les deux directions orthogonales pour les raideurs et pour les masses. La forme du bâtiment doit être compacte, c'est-à-dire présenter des débords faibles par rapport à une forme générale rectangulaire.

Un moyen pratique de respecter cette condition est de diviser une forme en plan complexe en éléments sensiblement rectangulaires au moyen de joints dont la largeur sera dimensionnée en fonction des déplacements horizontaux des blocs.

Ces joints doivent être vides de tout matériau afin d'éviter le couplage dynamique entre deux blocs par système (masse - ressort - masse).

L'élancement en plan (rapport entre les cotés du rectangle) doit rester limité (inférieur à 4 dans les règles françaises PS92). Là aussi, on peut prévoir des joints.

L'excentricité structurelle doit être faible dans les deux directions.

Le bâtiment doit comporter un minimum de deux plans de contreventement dans les directions orthogonales.

Les planchers doivent se comporter comme des diaphragmes horizontaux, c'est à dire qu'ils ne doivent pas comporter d'ouvertures susceptibles de diminuer sensiblement leur raideur horizontale [7].

### ***2. Régularité en élévation***

- Les charges verticales doivent se transmettre en ligne directe vers les fondations.
- Les couplages entre les degrés de liberté entre le sens horizontal et le sens vertical sont particulièrement nuisibles (appui d'un poteau ou d'un mur sur une poutre par exemple).
- Les rétrécissements et élargissements entre deux niveaux successifs doivent être limités.
- Les porte-à-faux doivent être limités.

- La distribution des raideurs doit être régulière sur la hauteur du bâtiment.  
Faire en particulier très attention dans le cas d'une rehausse d'un bâtiment existant où dans la construction de bâtiments consacrés au culte comportant souvent un clocher ou un minaret.
- La distribution des masses doit être régulière [7].

La rupture d'un élément ne doit pas compromettre la stabilité du restant de la structure par un mécanisme de rupture en chaîne. A cette fin, les rotules plastiques doivent se former en priorité dans les poutres [7].

L'analyse dynamique nécessite toujours initialement la création d'un modèle de calcul représentant au mieux la structure. Ce modèle introduit ensuite dans un programme de calcul dynamique, permet la détermination de ses modes propres de vibration et des efforts engendrés par l'action sismique. Les structures en général ont le même principe de fonctionnement mécanique vis à vis des sollicitations statiques où dynamiques, mais la description mathématique varie d'un modèle à un autre. Cependant tous les modèles sont généralement supposés vérifier deux hypothèses :

- Les éléments de contreventement ainsi que les poutres ont un comportement élastique ;
- Les planchers sont infiniment rigides dans leurs plans et infiniment souples en dehors de leurs plans.

Parmi les modèles traités dans la littérature nous allons voir les plus répandus [7].

#### a) Modèle brochette

Le modèle brochette présenté sur la (figure 1.4 ) est une représentation simplifiée de la structure au moyen d'une console verticale encastrée à la base discrétisée en un certain nombre de nœuds reliés entre eux par un ressort linéaire et un amortisseur visqueux, les masses sont affectées aux nœuds. Les caractéristiques des barres de la brochette sont calculées à partir des formules de Bresse, adaptées au cas particulier, en utilisant les déplacements et rotations moyens par niveau (calage de la brochette). Toute la difficulté réside dans l'obtention de ces valeurs.

Ce modèle est inefficace pour tenir compte de l'effet de la torsion, surtout dans le cas des bâtiments présentant des dissymétries de répartition des masses et/ou d'ordre architectural. L'inconvénient du modèle brochette est dans l'hypothèse simplificatrice pour la « condensation » des masses sans prise en compte du moment d'inertie massique cette dernière peut donner lieu à des valeurs des périodes propres avec des écarts considérables (exemple du pylône) [2].

A l'encontre de cet inconvénient, ce modèle permet de prendre en compte l'interaction sol structure.

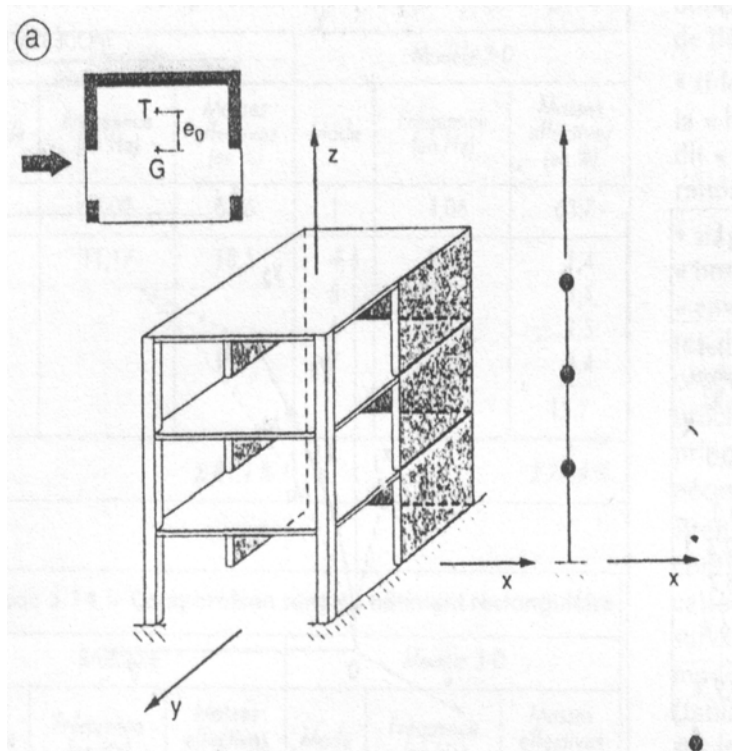


Figure 1.4 : Modèle brochette à N masses concentrées [2]

#### b) Modélisation tridimensionnelle en manivelle

Dans la modélisation tridimensionnelle type manivelle qui respecte la position géométrique des masses dans l'espace et tient compte des caractéristiques de torsion des voiles. Ce type de modélisation a l'allure suivante :

- Les planchers sont modélisés par des éléments rigides, et leur masse discrétisée en un nœud situé au centre de gravité ;
- Les voiles sont modélisés par une poutre équivalente positionnée à la verticale de son centre de gravité.

Néanmoins, ce type de modèle (figure 1.5) présente l'inconvénient de la désolidarisation des voiles à leurs intersections [1].

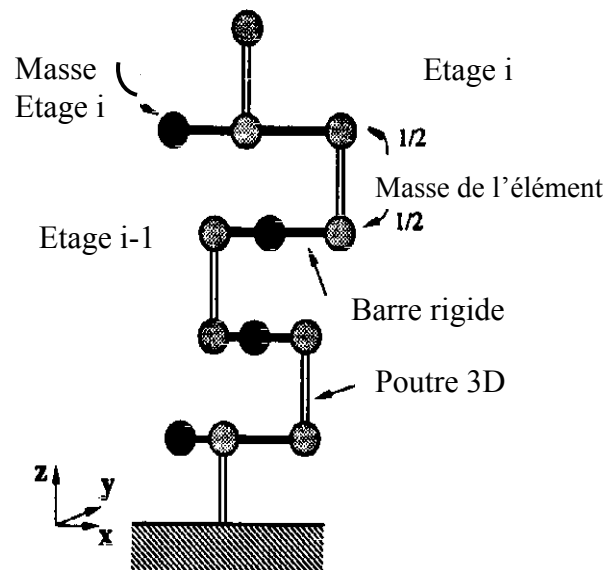


Figure 1.5 : Modèle manivelle [1, 8]

#### c) Modèle 3D classique

Le modèle tridimensionnel est le modèle le plus général, où la modélisation tridimensionnelle permet aux planchers de  $N$  étages d'un immeuble de se déplacer suivant les trois degrés de liberté : deux translations horizontales et une rotation autour d'un axe ne passant pas forcément par le centre de gravité du plancher.

L'inconvénient de ce modèle réside dans le nombre limité de degrés de libertés [1, 9, 34].

#### d) Modèle éléments finis tridimensionnels

Le modèle éléments finis tridimensionnel prend en compte les six degrés de liberté de la structure. L'analyse statique ou dynamique du bâtiment se fait sur le modèle complet ce qui permet de tenir compte de tous les facteurs y compris la torsion. L'inconvénient de ce modèle réside dans la lourdeur de la modélisation et la difficulté de l'interprétation des résultats [1].

En plus des modèles cités antérieurement, d'autres modèles existent dans la littérature telle que le *Modèle plan de Laredo (discontinus et continu)* et le *Modèle plan de Smith*.

#### 1.4 Amplification dynamique des vibrations de torsion

Plusieurs études paramétriques ont montré la grande influence de l'excentricité et du rapport de la fréquence de torsion à la fréquence latérale ( $\Omega$ ) sur la réponse élastique des structures excentrées [11], cependant d'autres facteurs subsistent et ne manquent pas d'importance [1, 4] tels que :

- Effet du rapport de fréquence  $\Omega$ ,
- Effet de l'excentricité statique.

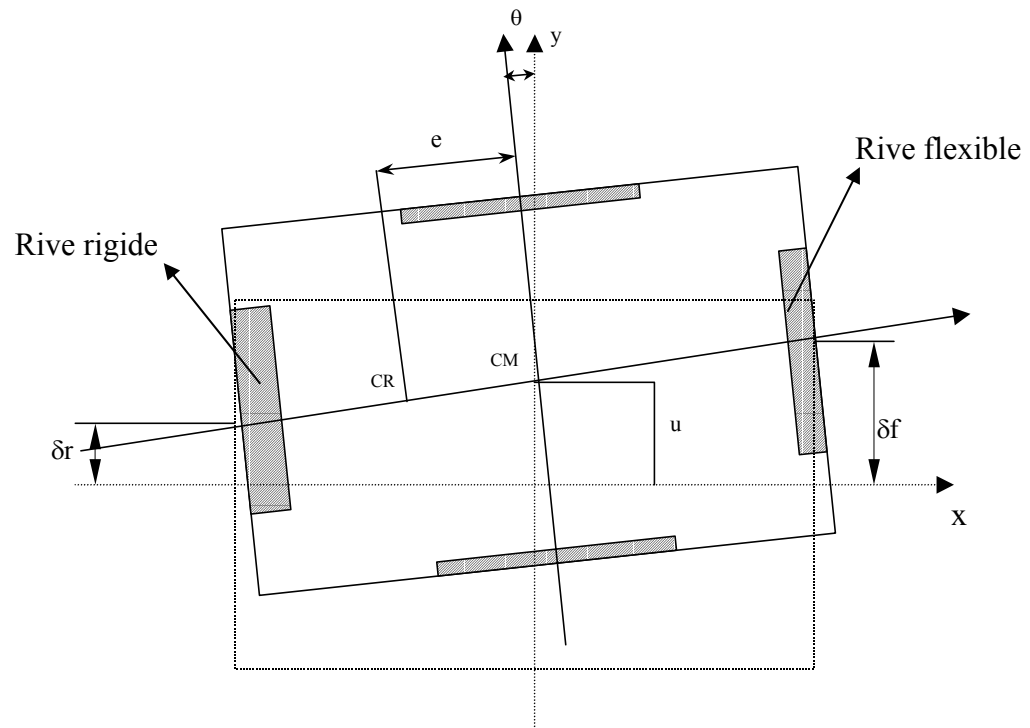


Figure 1.6 : Modèle analytique et paramètres structuraux en plan [4]

### ***Effet du rapport de fréquence $\Omega$ :***

Contrairement à l'élément de la rive rigide (le côté de la structure contenant des éléments avec une importante rigidité, figure 1.6) qui n'est pas sensible à la variation de  $\Omega$  l'élément de la rive flexible (le côté de la structure contenant des éléments avec une faible rigidité, figure 1.6) est très influencé par  $\Omega$  particulièrement pour les systèmes ayant une faible rigidité de torsion avec une importante excentricité statique (figure 1.7). Il faut souligner l'absence de l'amplification de couplage des modes de torsion et de translation quand ces derniers sont proches l'un de l'autre ( $\Omega \cong 1$ ) comme il a été fréquemment constaté dans les structures élastiques linéaires.

L'importance du rapport des fréquences de torsion et latéral  $\Omega$  des bâtiments asymétriques sur la réponse inélastique diffère d'un auteur à un autre pour différentes raisons [4].

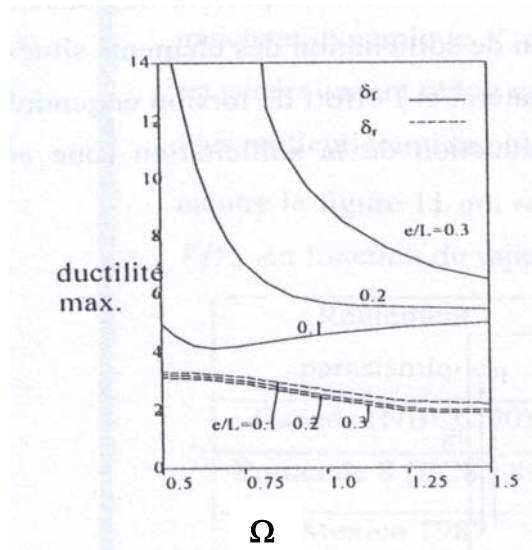


Figure 1.7 : Effet du rapport fréquentiel sur la ductilité [1, 4]

**Effet de l'excentricité statique e :**

La demande en ductilité maximale de l'élément de la rive rigide des structures torsionnellement flexibles est peu affectée par le facteur d'excentricité normalisé  $e/L$  figure 1.8, alors qu'une nette diminution de la ductilité est observée dans cet élément dans le cas des structures torsionnellement rigides et fortement excentriques. Cependant, la ductilité de l'élément de la rive flexible augmente rapidement avec le degré d'excentricité  $e/L$  particulièrement pour les structures ayant une faible rigidité de torsion [4].

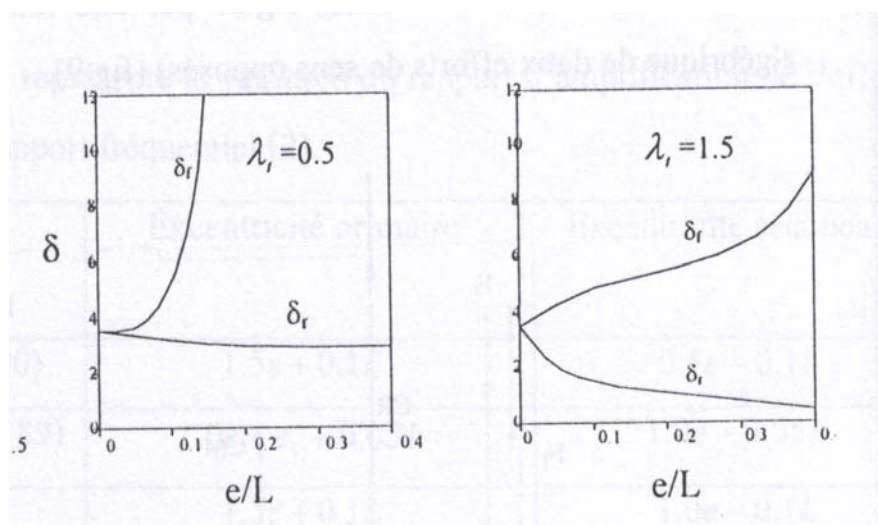


Figure 1.8 : Effet de l'excentricité statique sur la déformation maximale dans le plan [1, 4]

En plus de cette étude d'autres recherches ont été menées pour bien cerner l'importance du rapport des fréquences de torsion et latéral  $\Omega$  sur la réponse inélastique des bâtiments asymétriques, les résultats de ces investigations ont donné les conclusions suivantes :

- D'après H.Hao, pour un rapport des fréquences de torsion et latéral ( $\omega_\theta/\omega_x < 1.0$ ) et un rapport proche de l'unité ( $\omega_\theta/\omega_x = 1.0$ ) pour un modèle excentrique dans les deux sens sous une excitation non uniformes qui est plus significatif que l'excentricité au niveau du bord flexible. Alors que dans le cas ou le rapport des fréquences ( $\omega_\theta/\omega_x > 1.0$ ) l'effet de l'excentricité est très important surtout pour des structures symétrique avec des rapports de fréquences et des excentricités faibles. Notons aussi que l'effet du mouvement à la base est lui même très important dans les deux cas de bâtiment symétrique ou asymétrique [12].
- Pour Tso et Sadek le rapport des fréquences de torsion et latéral ( $\omega_\theta/\omega_x = 1.0$ ) ne constitue pas un cas critique [1].
- Pour Bozorgnia et Tso ce rapport n'est pas un paramètre critique pour l'estimation de la ductilité [1].
- Pour Syamal et Pekau la demande en ductilité décroît avec l'accroissement de  $\Omega$  dans l'élément de la rive rigide [1].
- Pour Goel et Chopra la déformation de l'élément de la rive rigide décroît avec la décroissance de ( $\Omega$ ) [1].

Les observations donnée par ces chercheurs de l'influence de rapport des fréquences de torsion et latéral ( $\Omega$ ) sur la réponse en torsion des systèmes excentrés sont contradictoires, du fait de l'utilisations de modèles qui différents d'un auteur à un autre, à la définition du rapport des fréquences ( $\Omega$ ), à l'estimation de excentricité accidentelle ( $e_a$ ), à la période et à la distribution de l'effort tranchant de base selon les différents éléments [13].

### 1.5 Prise en compte de la torsion dans les règlements parasismiques

En statique l'effet de la torsion est un moment de torsion qui est fonction de l'effort tranchant du niveau  $i$  multiplié par l'excentricité en plan de ce même niveau. Ce moment est donné par la formule suivante :

$$M_T = V_0 e \quad (2)$$

Ce moment est repris par les éléments de contreventement au prorata des distances du centre de torsion. Les éléments les plus éloignés du centre de rotation sont les plus sollicités, ou l'aspect additif de l'effort de torsion ainsi que l'effort tranchant latéral



concerne uniquement les éléments situés sur le côté flexible perpendiculaire au mouvement sismique. Contrairement au côté rigide où il en résulte une réduction de la sollicitation du fait que l'effort dû au moment de torsion est toujours de sens contraire à l'effort tranchant latéral (figure 1.9).

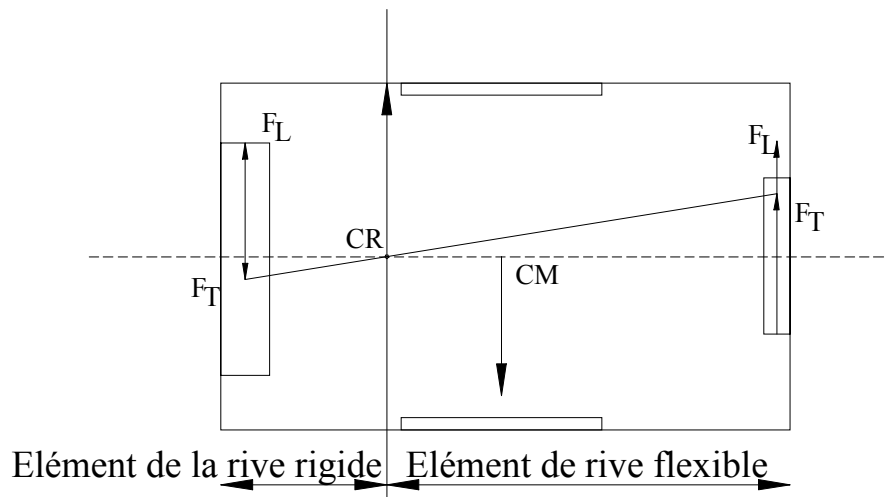


Figure 1.9 : Efforts tranchants additifs et de réduction dû aux moments de torsion [4]

C'est pour cette raison, que dans la plupart des règlements parasismiques on définit deux types d'excentricités de conception l'une dite primaire et l'autre secondaire, qui tiennent compte de l'augmentation ou de la diminution de la résistance des éléments. Ces excentricités sont données par les expressions suivantes [1, 4, 13, 14]:

$$e_{d1} = \alpha e_s + \beta b \quad (3)$$

$$e_{d2} = \delta e_s - \beta b \quad (4)$$

Où  $\alpha e_s$ ,  $\delta e_s$  représente respectivement les excentricités dynamique primaire et secondaire avec les facteurs d'amplification dynamique respective  $\alpha$  et  $\delta$ . L'excentricité accidentelle est donnée par l'expression  $\beta b$ , où,  $b$  est la distance perpendiculaire à la direction l'action sismique ;  $\beta$  est un coefficient variant entre (5% à 10%).

Une étude [15] sur l'amplification de la réponse d'une structure asymétrique conclut que, l'amplification dynamique est particulièrement prononcée pour les structures faiblement excentrées ayant le mode de torsion très proche du mode latéral fondamental (figure 1.10).

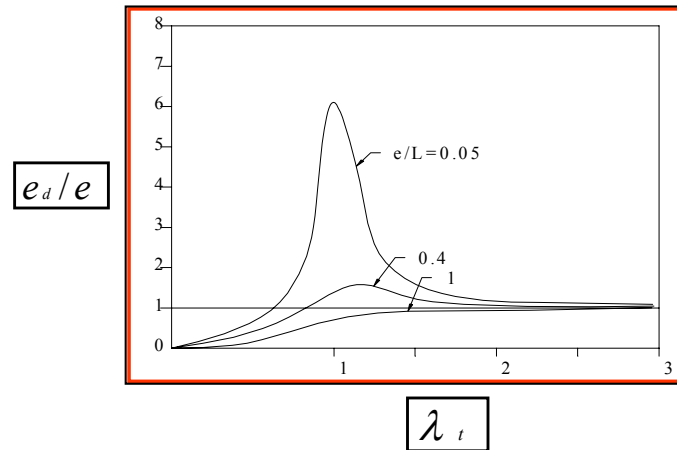


Figure 1.10 : Amplification dynamique de l'excentricité [4]

Ainsi certains codes sismiques comme le Canadien, le Mexicain et l'Eurocode 8 (tableau 1.1), tiennent compte de l'effet d'amplification dynamique de la torsion.

Tableau 1.1 : Excentricités de conception dans les différents codes sismiques [16, 17, 18].

Règlement parasismique	Excentricité primaire	Excentricité secondaire
Canada (NBCC90)	$1.5e+0.1L$	$0.5e-0.1L$
Eurocode 8 (EC8 :89)	$1.0e+e_1^{(1)}+0.05L$	$1.0e-0.05L$
Mexico 1987	$1.5e+0.1L$	$1.0e-0.1L$
New Zeland 92	$1.0e+0.1L$	$1.0e-0.1L$
UBC 88	$1.0e+0.05L$	$1.0e-0.05L, e \leq 0.05L$ $0.0$ pour $e > 0.05L$
UBC1997 [19]	$1.0e+0.05A_s^{(2)}L$	$1.0e-0.05A_s^{(2)}L$
RPA99 (Version : 2003)	$e_{\text{accidentelle}} = +0.05L$	$e_{\text{accidentelle}} = -0.05L$

Avec :

(1).  $e_1$  : Prend la plus grande des deux valeurs exprimées par :

$$e_1 = 0.1(L + B) \sqrt{10 \frac{e_s}{L}} \leq 0.1(L + B) ;$$

$$e_1 = \frac{1}{2e_s} \left[ l_x^2 - e_s^2 - P^2 + \sqrt{(l_x^2 + e_s^2 - P^2)^2 + 4e_s^2 P^2} \right]$$

Avec

$$l_x^2 = (L^2 + B^2) / 12$$

$L, B$  : Sont les dimensions en plan perpendiculaire et parallèle à l'action sismique ;

$P^2$  : Est le rapport de rigidité de torsion et la rigidité latérale ;

$e_s$  : L'excentricité statique.

L'excentricité supplémentaire  $e_1$  est négligée si  $p^2 > 5(l_x^2 + e^2)$

$$(2). A_x = \left( \frac{\delta_{\max}}{1.2 \times \delta_{\text{moy}}} \right)^2 ; 1.0 \leq A_x \leq 3.0. [4, 6]$$

Où  $\delta_{\max}$  : Est le déplacement latéral maximal au niveau  $x$ .

$\delta_{\text{moy}}$  : Est le déplacement moyen entre les deux points extrêmes au niveau  $x$ .

Ceci se fait en majorant l'excentricité statique par  $\alpha=1.5$ , à l'exception de l'Eurocode 8 qui en plus de l'excentricité statique ajoute une excentricité additionnelle  $e_1$ . Cette dernière dépend des dimensions en plan horizontal de la structure et du rapport des fréquences fondamentales latérale et torsionnelle ( $\Omega$ ). Cette étude conclue aussi que l'effort tranchant dynamique  $V$  du système couplé agissant dans la direction du mouvement sismique est généralement réduit comparativement à son correspondant pour le système non couplé  $V_0$ . Plus particulièrement pour  $\Omega$  inférieur ou égal à l'unité avec une forte excentricité comme le montre la figure 1.11 qui représente la variation du rapport d'amplification de l'effort tranchant  $V/V_0$  en fonction du rapport fréquentiel [1, 4].

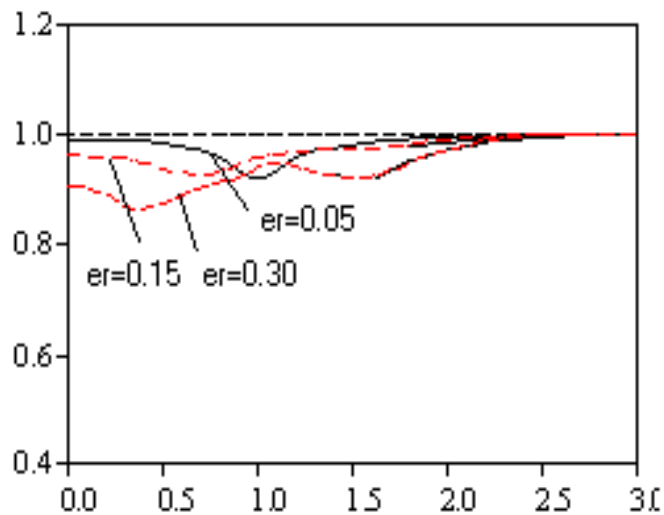


Figure 1.11 : Amplification de l'effort tranchant [4]

Le schéma de la figure 1.12 illustre les différentes excentricités comme définies dans la plupart des règlements parasismiques.

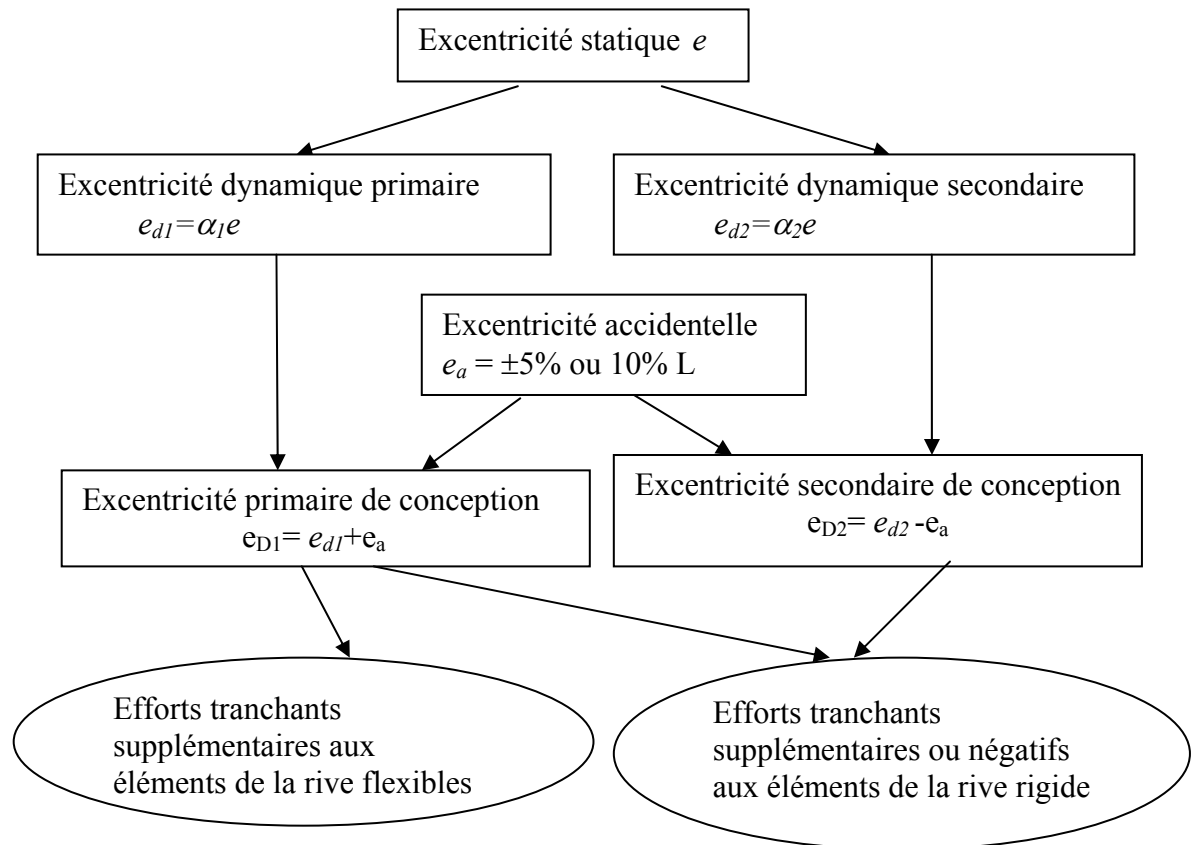


Figure 1.12 : Schéma des différentes excentricités [4]

Dans le Règlement Parasismique Algérien (RPA 99/Version 2003- Paragraphe 4.2.7) l'excentricité du calcul est prise égale à la plus grande des deux valeurs :

- 5% de la plus grande dimension du bâtiment à ce niveau (cette excentricité doit être prise en considération de part et d'autre du centre de torsion)
- excentricité théorique résultant des plans.

Cette éventuelle majoration par rapport à l'excentricité calculée est sensée prendre en compte les effets aussi bien de l'excentricité accidentelle que d'une éventuelle amplification de la torsion.

### 1.6 Les effets de quelques paramètres

Dans ce paragraphe nous allons donner d'autres paramètres qui peuvent influencer l'effet de la torsion couplée sur la réponse élastique et où inélastique des bâtiments sujet à un mouvement de la base (sol ou fondation) et de faire une comparaison avec les différents codes parasismiques qui tiennent compte généralement de ces effets par des procédures empiriques. Les paramètres sont :

- L'excentricité accidentelle,
- L'interaction sol-structure.

#### a) Effet de l'excentricité accidentelle

Plusieurs études ont été menées pour montrer les effets de l'excentricité accidentelle sur la réponse des structures sous sollicitations sismique. Les dispositions préconisées concernant cette excentricité diffèrent d'un code à un autre [19]. Il en ressort que :

1. Les dispositions des codes pour l'excentricité accidentelle basée sur une excentricité de 5% de la dimension en plan peut être suffisante pour représenter le mouvement de torsion bien qu'un grand mouvement de base peut causer une augmentation de 30% des efforts de cisaillement à la base [20].
2. La torsion accidentelle peut, cependant, être significative si la période de vibration de torsion est beaucoup plus longue que la période latérale de vibration, pour un bâtiment particulièrement long en plan dans une ou deux directions, causé par un mouvement de rotation exceptionnellement très fort à la base du bâtiment autour de l'axe vertical. Cependant, les dispositions des codes n'identifient pas ces facteurs [20].
3. Le mouvement de rotation à la base cause 25-45% de la torsion accidentelle dans les mouvements enregistrés de tremblement de terre pour les bâtiments symétriques où asymétriques [20].
4. Dans les bâtiments asymétriques, la réponse inélastique des éléments de contreventements des étages supérieurs au bord rigide augmente de manière significative avec la période fondamentale latérale désaccouplée et l'importance de l'excentricité de rigidité du bâtiment [21].

### b) Interaction sol-structure

Généralement l'effet de l'interaction sol-structure n'est pas prise en compte tout le temps par les ingénieurs sauf dans les calculs d'ouvrages très importants, particulièrement quand la structure a une rigidité relativement grande par rapport à celle du sol de fondation. Le règlement ATC3 donne des recommandations spécifiques pour son inclusion au moyen de facteurs empiriques pour réduire la valeur de l'effort tranchant à la base. Cependant l'utilisation de ces recommandations va réduire les valeurs de l'effort tranchant à la base ( $V_R$ ) et les forces latérales alors que les moments vont augmenter les valeurs des déplacements latéraux [1].

Les effets de l'interaction sont dus au changement dans la réponse dynamique structurale due à un séisme. Ce changement résulte de l'interdépendance des relations caractéristiques structurales et des propriétés du sol sur lequel est le bâtiment. Dans plusieurs règlements les effets de l'interaction sol structure sont négligés, quand les méthodes simplifiées sont utilisées pour l'analyse. On considère généralement que les fondations rigides donnent des solutions majorées dans tous les cas d'application. Cependant, la complexité des effets de l'interaction sol structure rend difficile la formulation de règles générales applicables aux méthodes simplifiées. Parmi ces effets [22] :

- L'effet de la composante de rotation du tremblement de terre dans les bâtiments avec de basses périodes qui cause une plus grande augmentation de la réponse structurale par rapport aux bâtiments, qui ont des valeurs plus élevées de la période structurale. Dans les systèmes avec les longues périodes ( $T > 1s$ ), l'effet de la composante de torsion du tremblement de terre est indépendante de la période.
- L'effet de la composante de rotation du tremblement de terre sur la réponse structurale diminue avec l'augmentation du ( $\Omega$ ).
- L'effet de la composante de torsion du tremblement de terre est beaucoup plus important dans les structures asymétriques que dans les structures symétriques. La valeur réelle du coefficient  $\beta$  pour l'estimation de l'excentricité accidentelle diminue avec  $\Omega$  et  $T$ . Dans les bâtiments avec ( $\Omega$ ) plus grands que 1.0, ce coefficient est généralement moins de 0,05 pour presque toutes les valeurs de  $T$ , cependant la valeur proposée  $\beta = 0,05$  (exemple d'Australie-93) ne suffit pas pour des conceptions avec des périodes courtes et quand  $\Omega < 1$ .

- L'effet de la composante de rotation du tremblement de terre dans les bâtiments situés sur des sols mous est beaucoup plus considérable que ceux situés sur les sols durs ou rocheux.

### 1.7 La torsion dans le Règlement Parasismique Algérien99 (RPA99) et dans les autres règlements

Le phénomène de torsion a été pris en considération dans les règlements parasismiques de différentes façons. Dans ce paragraphe nous allons essayer d'établir une analogie entre le Règlement parasismique Algérien (RPA99 version 2003) et les autres règlements parasismiques à notre disposition. Ces derniers ont essayé de prendre en compte le phénomène de torsion à travers l'introduction de coefficient de majoration dans les excentricités de conception.

Les règlements préconisent pour la distribution des forces dans les bâtiments d'utiliser soit la méthode statique soit la méthode dynamique. La méthode statique est généralement appliquée pour des structures présentant une régularité en plan et/ou en élévation. La méthode dynamique est utilisée dans le cas des bâtiments irréguliers.

La distribution verticale de la force sismique calculée à partir de la méthode statique équivalente, dans le RPA99 se fait selon la formule suivante [23] :

$$F_i = (V_b - F_t) \left[ w_i h_i / \sum_{j=1}^n w_j h_j \right] \quad (\text{Article-4.2.5}) \quad (5)$$

Où

$F_i$  : Effort horizontal revenant au niveau  $i$  ;

$h_i$  : Niveau du plancher au s'exerce la force  $F_i$  ;

$h_j$  : Niveau d'un plancher quelconque ;

$F_t$  : Force concentrée au sommet de la structure.

$w_i$  et  $w_j$  : Poids revenant aux planchers  $i, j$ .

Pour le RPA 99 version 2003  $F_t = 0.07TV_b$  ne dépassera en aucun cas  $0.25V_b$  et elle est prise égale à 0 quand  $T$  est plus petite ou égale à 0.7seconde.

Où  $T$  est la période propre du bâtiment et  $V_b$  est l'effort tranchant à la base.

La distribution horizontale de l'effort tranchant dans chaque niveau sera distribuée aux différents éléments de contreventement proportionnellement à leurs rigidités.

L'augmentation de l'effort tranchant provoqué par la torsion horizontale due à l'excentricité entre le centre de gravité et le centre de torsion doit être prise en compte (les

efforts tranchants négatifs dus à la torsion devront être négligés), cependant plusieurs définitions du centre de torsion [24, 25] sont données par les codes sismiques y compris le RPA99 version 2003.

Parmi ces définitions [24, 25] on note celle donnée par, Poole qui définit le centre de torsion, comme étant le centre de rigidité (centre élastique), où le point d'application de la résultante des efforts tranchants appliqués sur les éléments de l'étage et qui n'engendre aucune rotation en aucun des autres étages. Par contre Humar définit le centre de référence, comme étant le centre de résistance, le point dans le plancher où l'application de la charge latérale à travers ce point ne cause pas une rotation dans ce plancher, mais les autres planchers peuvent avoir des rotations. Enfin Cheung & Tso, ainsi que, Hejal & Chopra, définissent le centre de référence, comme étant le centre de rigidité. Le point dans le plancher où l'application de la force latérale à travers ce point n'engendre pas de rotation dans tous les planchers.

Une comparaison [4] entre les excentricités de conception des différents codes sismiques avec le RPA99 version 2003 est faite. L'excentricité primaire de conception du RPA99 version 2003 constitue l'enveloppe inférieure vu que l'excentricité accidentelle n'est pas cumulative à l'excentricité statique. Par contre l'excentricité secondaire qui est égale au signe près à l'excentricité primaire devient la plus sécuritaire surtout pour les structures fortement excentrées.

Concernant l'analyse dynamique, elle est généralement appliquée aux structures qui présentent une irrégularité ou une grande hauteur pour lequel la période principale est supérieure à 1.0 seconde et la forme propre diffère de la forme triangulaire associée à la méthode statique équivalente.

L'analyse dynamique spécifiée dans les codes sismiques utilise une des deux méthodes pour un système élastique linéaire, analyse par spectre de réponse ou analyse du mouvement en fonction du temps [21, 23].

La réponse dynamique donnée par l'analyse par spectre de réponse est obtenue par la méthode de la racine carrée qui [23] ne donne pas toujours des résultats satisfaisants.

L'analyse du mouvement en fonction du temps nécessite plusieurs enregistrements du mouvement sismiques pour mieux maîtriser le problème.

A titre indicatif des études faites par Duan et Chandler [21] ont montré que la procédure d'analyse modale peut être non sécuritaire pour un système non élastique, elle est applicable seulement dans les systèmes élastiques linéaires.



### 1.8 Etude de l'interaction sol-structure (ISS)

Nous avons vu que l'ISS avait une influence sur la torsion des bâtiments. (paragraphe 1.6), aussi nous allons ci-après en faire l'étude d'une manière exhaustive. Généralement dans le calcul des structures la fondation est prise rigide ce qui peut être acceptable dans le cas d'une structure asymétrique avec une petite excentricité, mais dans le cas où l'excentricité est large, ou la période est longue, la flexibilité de la fondation doit être prise en compte [26].

Les coûts de construction sont influencés par les sections et les fondations choisies, qui elles-mêmes, sont influencées par la répartition des efforts découlant de l'interaction sol structure [27]. Cette interaction est bien entendu plus au moins importante suivant la nature du sol, les caractéristiques de l'ouvrage et le type de fondation [10]. Ainsi l'influence du sol sur la réponse dynamique des structures stratégiques tel (centrale nucléaires et plates-formes marines etc..) peut être importante du fait de la modification des caractéristiques dynamiques de la structure en présence d'un sol déformable. Le problème principal dans la prise en compte de l'effet du sol sur la réponse dynamique des structures est la détermination des relations force déplacement à l'interface sol structure, appelées : fonctions d'impédances de la fondations [28]. Si l'on s'intéresse au mouvement de la fondation, les déformations du sol sont transmises à celle-ci et engendrent un mouvement de la superstructure ; même en l'absence de superstructure le mouvement de la fondation est différent du mouvement du champ libre du fait des différences de rigidité entre la fondation et le sol encaissant : le champ d'ondes incident est réfléchi et diffracté par la fondation et donc modifie le mouvement total du sol au voisinage de celle. Ce phénomène est connu sous le nom d'*interaction cinématique*. Par ailleurs, le mouvement induit sur la fondation développe des oscillations de la superstructure et donc donne naissance à des forces d'inertie qui sont retransmises à la fondation sous forme de forces et de moments. Ce phénomène est connu sous le nom d'*interaction inertielle* de toute évidence le dimensionnement de la fondation doit tenir compte de ces deux composantes de l'interaction.

Généralement, à tort, le terme interaction sol structure ne désigne dans l'esprit des ingénieurs que la part inertielle, il convient de garder à l'esprit que l'interaction cinématique peut dans certaines configurations être significative, même si parfois elle peut être négligée [10].

### 1.8.1 Impédance d'une fondation rigide

Soit une fondation **sans masse** soumis à une force (ou un moment) d'excitation harmonique  $P(t)$  (figure 1.13), et  $u(t)$  le déplacement (ou la rotation) harmoniques unitaires résultant. Par définition, l'impédance de la fondation est le quotient de la sollicitation  $P(t)$  par la réponse  $u(t)$ , déphasé par rapport à  $P$ . L'amplitude et le déphasage dépendent de la fréquence. L'expression de l'impédance est donc par définition le nombre complexe  $K$ , qui varie avec la fréquence et donné comme suit [29] :

$$K(\omega) = \frac{P(t)}{u(t)} \quad (6)$$

avec :

$$P(t) = P_0 \exp(i\omega t) \quad (7)$$

et 
$$u(t) = u_0(\omega) \exp(i\omega t) \quad (8)$$

Cette impédance peut être écrite sous une forme générale comme suit :

$$K(\omega) = K_1(\omega) + iK_2(\omega) \quad (9)$$

$K_1(\omega)$  et  $K_2(\omega)$  représente la partie réelle et imaginaire de l'impédance.

Sachant que l'impédance est fonction de la fréquence elle peut être utilisé dans une analyse dans le domaine fréquentiel. Néanmoins, l'analyse d'un tel système est très complexe vu la mise en œuvre d'un grand nombre de degré de liberté, qui peut être simplifié si les fonctions d'impédances sont considérées indépendantes de la fréquence d'excitation. Par contre si l'analyse est étendue dans le domaine non linéaire la résolution dans le domaine fréquentiel ne peut plus être envisagée [1].

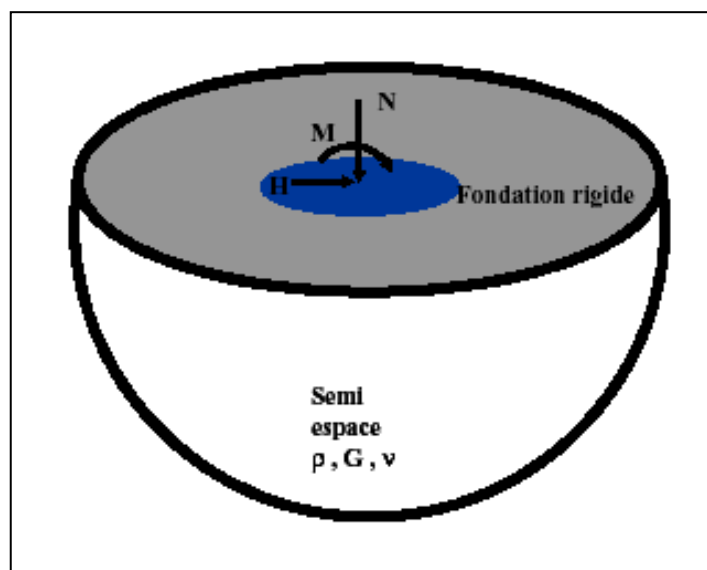


Figure 1.13 : Réponse d'une fondation à une sollicitation harmonique [10]

### 1.8.2 Méthode de prise en compte de l'interaction sol/structure

Plusieurs méthodes de prise en compte de l'interaction sol structure sont mise à la disposition des ingénieurs selon que l'on travail dans le domaine temporel où le domaine fréquentiel et se résume comme suit :

Les méthodes dans le domaine temporel sont divisées en trois grandes catégories :

- Méthode globale
- Méthode de frontière
- Méthode de volume

Les méthodes dans le domaine fréquentiel se décomposent en trois catégories :

- Méthode globale
- Méthode des sous-structures
- Méthode hybride

Nous allons donner un aperçu succinct des trois catégories utilisées dans le domaine fréquentiel permettant la prise en compte de l'interaction sol structure.

#### a) Méthode globale

Cette méthode de résolution se base sur la méthode des éléments finis qui présente la plus grande flexibilité et permet en outre la prise en compte de phénomènes non linéaires tels les comportements anélastiques des matériaux, le décollement ou le glissement des fondations.

La difficulté de la résolution par éléments finis des problèmes dynamiques d'interaction sol structure réside dans le traitement des conditions aux limites [10, 39].

#### b) Méthode de sous structure

Cette méthode fait appel au principe de superposition. L'analyse du problème d'interaction sol structure se fait en plusieurs étapes successives, chacune des étapes étant plus facile à résoudre que le problème globale. Les sous structures sont constituées d'une part par le sol d'autre part par la structure (figure 1.14). Cette méthode présente l'avantage d'identifier la part relative de chaque composant (interaction cinématique ou inertielle) contribuant au phénomène global d'interaction [10, 39].

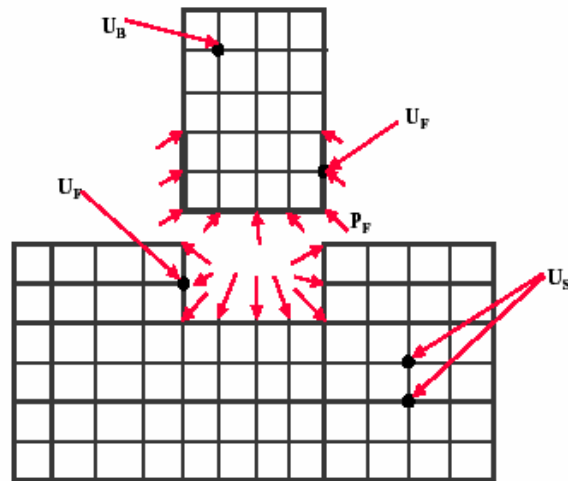


Figure 1.14 : Schématisation d'une méthode de sous-structure [10]

### c) Méthode hybride

Afin de s'affranchir de la méthode des sous-structure pour la résolution du problème d'impédance qui constitue une étape longue et coûteuse. Gupta et al (1980) ont développé une méthode dite « hybride », qui consiste à séparer le sol en champ libre et champ lointain figure (1.15). Le champ lointain est modélisé à l'aide d'une matrice d'impédance. En d'autres termes, le concept de sous-structures est étendu de façon à inclure le champ proche dans le modèle de structure. La difficulté de la méthode réside dans l'obtention, le long de la frontière séparant le champ proche du champ lointain, de la solution du problème de diffraction du champ incident. Gupta et al ont négligé cet aspect en admettant un mouvement uniforme, égal à celui du champ libre en surface, tout le long de la frontière [10, 39].

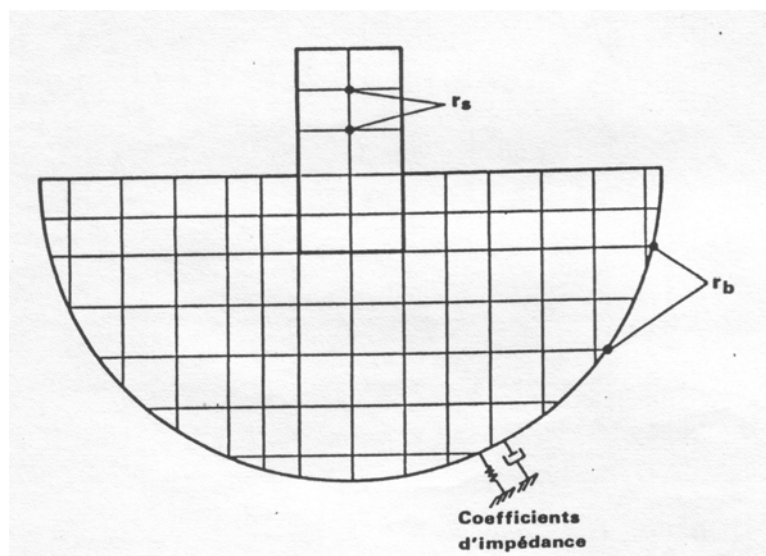


Figure 1.15 : Méthode Hybride [10]

### 1.8.3 Nécessite de modéliser le sol

Le mouvement sismique est le mouvement à la surface du sol en champ libre en l'absence de toute construction, défini à partir d'enregistrements réels disponibles en surface ou à très faible profondeur. Le mouvement sismique donné, déduit de tels enregistrements, est donc essentiellement représentatif du mouvement d'un point au voisinage de la surface.

La réponse de la structure à ce mouvement sismique dépend de la nature de ce mouvement, des propriétés dynamiques de l'ouvrage et de celle du sol. Il y a donc interaction entre la structure et le milieu extérieur.

Pour éliminer le problème de l'interaction sol structure (ISS) la méthode la plus radicale est de considérer la structure parfaitement encastree dans le sol, hypothèse d'autant plus valable que le sol de fondation est peu déformable (figure 1.16a) vis-à-vis de la structure, qui peut donc être considérée comme encastree (ex le cas des bâtiments courants faisant l'objet des méthodes de calcul simplifiées).

Il n'y a pas non plus d'interaction dans le cas d'un bâtiment rigide sur un sol rocheux. En effet, les déformations du sol au droit du bâtiment sont négligeables devant les déformations dues à l'action sismique (figure 1.16b).

En général, et plus particulièrement dans le cas de bâtiment massif sur des sols moyennement ou faiblement raides, il y a une intervention non négligeable du sol (modes de sol) et une modification de la réponse structure (figure 1.16c).

D'une manière générale, la déformabilité du sol entraîne :

- un allongement de la période de vibration du premier mode notamment, qui peut provoquer variation en plus ou en moins de la valeur de l'accélération selon la zone où l'on se situe sur le spectre élastique ;
- un amortissement non négligeable (amortissement radiatif+amortissement propre du matériau sol) puisque toujours supérieur à celui des matériaux de la structure. Ne pas le prendre en compte conduit à surestimer la réponse ;
- une rotation de la fondation qui peut modifier sensiblement le calcul de la déformée modale et donc la répartition des accélérations sur la hauteur du bâtiment ;
- le mouvement du sol à la base du bâtiment est supposé identique à celui du champ libre.

Figure 1.16 : Interaction sol -structure [2].

(a) Sans ISS, bâtiment souple et sol de très bonne résistance mécanique : (b) Sans ISS, bâtiment raide et sol de très bonne résistance mécanique : (c) Avec ISS, bâtiment raide et sol de faible ou moyenne résistance mécanique

La modélisation la plus fréquente de L'ISS suppose que la structure soit fondée en surface sur un sol homogène (solide élastique) et horizontal, avec des propriétés mécaniques connues et constantes au cours du séisme, et que le mouvement sismique sollicitant la structure soit des ondes de volume se propageant verticalement à partir d'un substratum horizontal.

En réalité, le substratum présente parfois un certain pendage, le sol est hétérogène et les caractéristiques dynamiques varient au cours du séisme, la structure peut être aussi sollicitée par des ondes de surface, et la fondation est plus souvent disposée à une certaine profondeur.

La principale difficulté est liée au caractère non borné du domaine de sol à l'échelle de la fondation.

Dans le cas d'un sol déformable le modèle comportant un encastrement parfait à la base n'est préconisé et donc la modélisation de sol se fait généralement par des ressorts ou des éléments finis.

Le modèle à étudier est composé en partie d'éléments du sol et en partie par une représentation simplifiée de l'ouvrage, à la base duquel on impose un mouvement défini par l'accélérogramme déconvolué [1, 2].

### 1.9 Conclusion

Le problème de la torsion dans les bâtiments est un problème complexe qu'il est difficile d'appréhender (plusieurs paramètres pouvant en être la cause). Les différents règlements essayent de le considérer à travers l'utilisation de différents coefficients mais il apparaît d'une part qu'il n'y a pas d'uniformisation de ces formulations et d'autre part que ces formulations ne sont pas satisfaisantes dans tous les cas de figure (surestimation ou sous estimation du phénomène de torsion).

La modélisation se heurte au problème de coût et d'interprétation des résultats. En effet les modèles simples ne sont plus assez précis et les modèles compliqués (Modèle élément finis tridimensionnel) donnent un grand nombre de résultats qu'il s'agit de bien analyser.

Le problème se complique si on introduit l'effet de l'interaction sol-structure qui joue des fois un rôle non négligeable dans la torsion des bâtiments.

Il serait donc intéressant de disposer d'un outil permettant la prise en charge du phénomène de torsion d'une manière simple et pouvant inclure l'effet du sol sur les bâtiments, ceci d'une manière abordable pour les ingénieurs.

C'est ce que nous nous proposons de faire à travers l'utilisation d'une méthode simplifiée appelée méthode par matrice de transfert à six degrés de liberté.

## CHAPITRE 2

### MODELE PAR MATRICE DE TRANSFERT A SIX DEGRES DE LIBERTE

#### 2.1 Introduction

On présente dans ce chapitre la formulation mathématique de notre modèle, dit modèle par matrice de transfert à six degrés de liberté. En se basant sur la théorie des groupes de Lie, ce modèle permet de prendre en compte les six degrés de libertés (les trois translations et les trois rotations) de la structure y compris donc la « torsion ». L'objectif principal dans cette étude étant la modélisation de ce phénomène. Ce dernier est présent généralement dans les bâtiments asymétriques « bâtiment qui présente des dissymétries en plan et/ou des décrochements en élévation et /ou des dissymétries de répartition de masse ».

#### 2.2 Hypothèses du modèle

Ce modèle se base sur les deux hypothèses suivantes :

1. Planchers parfaitement rigides.
2. Forces d'inertie des éléments de liaison entre les planchers négligeables devant celles du plancher.

Ce modèle illustré dans la figure 1, appelé « *modèle par matrice de transfert à six degrés de liberté* », est constitué par la succession de planchers assimilés à des solides rigides. Les liaisons élastiques de type poteau ou voile entre deux planchers consécutifs sont assimilées à une poutre [1, 16, 17, 30, 31 et 37].

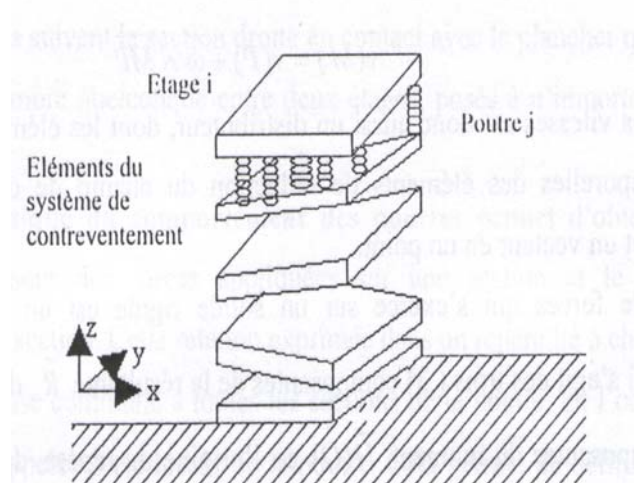


Figure 2.1 : Modèle utilisé [1, 16, 17, 30, 31 et 37]



### 2.3 La modélisation hexadimensionnelle

Dans ce qui suit nous allons voir le principe fondamental de la dynamique pour un solide rigide à partir de n'importe quel point de l'espace. Nous appliquons ce principe aux planchers de l'édifice puis nous formulons les matrices de masse et de raideur [1].

#### a) La modélisation du plancher

Par définition, la position d'un solide rigide dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  donné est déterminée par six degrés de libertés « 3 rotation et 3 translation ». Un mouvement de ce solide donne lieu à un champ de déplacements, qui, dans l'hypothèse des petites perturbations, s'avère être un distributeur. Un distributeur  $\vec{d}$  est un champ de vecteurs tel qu'il existe un vecteur  $\vec{\theta}$  vérifiant :

$$\text{Pour tous points } M, P \text{ on a : } \vec{d}(M) = \vec{d}(P) + \vec{\theta} \wedge \overline{MP} \quad (1)$$

Dans un repère, un distributeur est entièrement déterminé par ses éléments de réduction, à savoir sa valeur  $\vec{d}(O)$  en l'origine et le vecteur  $\vec{\theta}$  ; cela signifie simplement que **le mouvement d'un corps rigide se décompose en une translation et en une rotation autour d'un point**. Compte tenu de la relation des déplacements, les nouveaux éléments de réduction du même distributeur en un autre point  $O'$  sont :

$$\vec{d}(O') = \vec{d}(O) + \vec{\theta} \wedge \overline{OO'} \text{ et } \vec{\theta}.$$

En dérivant la relation précédente (toujours dans l'hypothèse des petites perturbations) par rapport au temps, on a la relation bien connue, analogue à la formule de changement de référentiel pour le champ des vitesses :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(P) + \vec{\omega} \wedge \overline{MP} \quad (2)$$

Le champ des vitesses est donc aussi un distributeur, dont les éléments de réduction les dérivées temporelles des éléments de réductions du champ de déplacements : une vitesse d'ensemble et un vecteur en un point.

Le champ de forces qui s'exerce sur un solide rigide est un torseur caractérisé par six paramètres ; il s'agit des trois (3) composantes de la résultante  $\vec{R}$  des efforts extérieurs et des trois composantes du moment  $\vec{H}(O)$  en l'origine du repère, duales des composantes du champ des vitesses. A partir d'un autre point  $O'$ , le même torseur est défini par  $\vec{R}$  et par :

$$\vec{H}(O') = \vec{H}(O) + \overline{OO'} \wedge \vec{R} \quad (3)$$

La puissance du torseur des efforts dans le distributeur des vitesses s'écrit  $\vec{R} \cdot \vec{v}(o) + \vec{H}(o) \cdot \vec{\omega}$

La relation fondamentale de la dynamique  $\vec{f} = m\vec{\gamma}$  appliquée en chaque point d'un solide rigide  $S$  permet d'identifier le torseur des forces extérieures et le torseur dynamique de résultante :

$\int_S \rho \vec{\gamma} dM$  et de moment  $\int_S \overrightarrow{OM} \wedge \rho \vec{\gamma} dM$ . En identifiant torseurs et distributeurs à des

éléments de  $R^6$  et en utilisant :

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d\vec{v}(O)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad (4)$$

Le calcul des éléments de réduction du torseur dynamique permet de faire apparaître dans  $R^6$  un opérateur linéaire de moment :  $M$  et un produit vectoriel  $[.,.]$ , vérifiant :

$$f = M \frac{dv}{dt} + [v, Mv] \quad (5)$$

Cette égalité est valable composante par composante, elle permet de déterminer l'évolution de la position d'un solide rigide par un **système couplé de six équations différentielles du deuxième ordre**. Le point  $O$ , origine du repère est quelconque, ce n'est pas obligatoirement le centre d'inertie du solide ni un point fixe [1].

#### b) La modélisation du contreventement

Pour la modélisation des contreventements dont il peut y en avoir un nombre quelconque entre deux étages, posés à n'importe quel endroit du plancher. Nous supposons que les éléments de contreventements sont des poutres cylindriques encastrées suivant la section droite en contact avec le plancher qui les soutient.

**La formulation classique du comportement des poutres** permet d'obtenir une relation **linéaire** entre le torseur des forces appliquées sur une section et le distributeur des déplacements de cette section. Cette relation exprimée dans un repère lié à chaque section doit être écrite dans une base commune à toutes les sections de la poutre, en l'occurrence la base de la section finale, appelée **base locale** de la poutre. Cela permet de définir une matrice de rigidité  $K_i$  écrite dans cette base locale.

Dans le cas (fréquent) où il y'a plusieurs éléments de contreventements, il faut exprimer les différentes matrices de rigidité dans une base commune, dite **base centrale** liée au plancher, au moyen d'une matrice de passage  $D_i$ . La matrice de rigidité d'une poutre est alors :

$$\tilde{K}_i = D_i K_i D_i^{-1} \quad (6)$$

**La compatibilité des déformations du plancher**, qui découle de l'hypothèse de corps rigide, permet de sommer les différentes matrices de rigidité. La matrice de raideur d'un système complet de contreventement entre deux étages est donc :

$$K = \sum_{i=1}^P \tilde{K}_i \quad (7)$$

**La matrice de masse correspond à celle de l'opérateur moment.** A un distributeur  $x$ , l'opérateur associe le distributeur  $M(x)$  défini par :

$$M(x)(P) = \int_S \overline{PM} \wedge x(M) \rho(M) dM \quad (8)$$

Où  $S$  est un solide (le plancher ou l'élément de contreventement).

Cet opérateur a pour valeur propre triple la masse  $m$  du solide, et pour valeur propre simple les moments d'inertie de ce solide par rapport aux trois axes du solide. La matrice de masse d'un plancher est la somme des matrices de masse du contreventement supérieur, du contreventement inférieur et du plancher [1].

#### 2.4 Les équations du mouvement en cas de séisme

Le mouvement du sol est donné par son déplacement  $u_g$ . Le mouvement **relatif** d'un bâtiment de  $N$  étages par rapport au sol est donné par le vecteur  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  où les  $x_i$   $i=1, \dots, N$  sont des vecteur hexadimensionnels. Chaque  $x_i$  correspond au distributeur décrivant le déplacement de l'étage  $i$ , ses trois premières composantes sont celles du vecteur rotation, les trois dernières celles du vecteur translation [1].

L'application du principe fondamental abouti à un système de  $2x(6N)$  équations différentielles qui se ramène à un système du premier ordre en le vecteur  $\left( X, \frac{dX}{dt} \right)$  [1]:

$$\begin{cases}
 \frac{dx_1}{dt} = v_1 \\
 \frac{dx_2}{dt} = v_2 \\
 \vdots \\
 \frac{dx_N}{dt} = v_N \\
 \frac{dv_1}{dt} = -\ddot{u}_g - M_1^{-1} \left( [v_1, M_1 v_1] + [\dot{u}_g, M_1 v_1] + [v_1, M_1 \dot{u}_g] + (K_1 + \tilde{K}_2) x_1 - H_2 K_2 x_2 \right) \\
 \vdots \\
 \frac{dv_N}{dt} = -\ddot{u}_g - M_N^{-1} \left( [v_N, M_N v_N] + [\dot{u}_g, M_N v_N] + [v_N, M_N \dot{u}_g] + K_N x_N - K_N H_N^{-1} x_{N-1} \right)
 \end{cases} \quad (9)$$

## 2.5 Méthode hexadimensionnelle d'étude sismique d'un bâtiment

Le modèle proposé se base essentiellement sur la notion de distributeur. Ce dernier est l'élément qui permet de présenter le déplacement avec ses 6 degrés de liberté appelé aussi champ équiprojectif. Pour un développement des équations de mouvement, le produit vectoriel dans l'espace des champs équiprojectifs ainsi que le changement de base, sont deux outils importants qu'il faut définir afin de permettre l'écriture de la relation hexadimensionnelle fondamentale de la dynamique d'une multi structure [1].

## 2.6 Rappel mathématique

### ***Définitions dans l'espace vectoriel des champs équiprojectifs***

Nous présentons ci-après une version formalisée de la dynamique des corps rigides, mais nous n'évoquerons la théorie des groupes de lie qui la sous entend que sommairement. Notons qu'il s'agit simplement d'identifier un distributeur à un élément de  $R^6$  via ses éléments de réduction.

#### a) Groupe de Lie

C'est un groupe qui vérifie la relation suivante :

Soit un groupe G, muni d'une structure de variété différentielle, telle que l'application

$(x, y) \rightarrow x y$  de  $G \times G$  dans  $G$  et l'application  $x \rightarrow x^{-1}$  de  $G$  dans  $G$  soient de classe  $C^\infty$ .

#### b) Algèbre de Lie

Algèbre E dont la multiplication, associant au couple  $(x, y)$  l'élément noté

$[x, y]$ , satisfait aux deux conditions suivantes :

1) Pour tout élément  $x$  de  $E$ ,

$$[x, y] = -[y, x]$$

2) Pour tout triplet  $(x, y, z)$  d'éléments de  $E$ ,

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \text{ (identité de Jacobi).}$$

c) Champs équiprojectifs

Soit  $x$  un champ de vecteurs sur l'espace affine  $R^3$ , ayant des valeurs dans l'espace vectoriel  $R^3$ , vérifiant :

$$\exists \bar{\omega}_x \in R^3 \text{ tel que } \forall M, P \in R^3 \quad x(M) = x(P) + \bar{\omega}_x \wedge \overrightarrow{PM} \quad (10)$$

$\bar{\omega}_x$  est l'invariant vectoriel de  $x$ .

$x$  est appelé **distributeur** ou **champ équiprojectif**. L'ensemble des distributeurs forme un espace vectoriel, noté **Eq** [1].

d) Base et changement de base

Soit un repère fixe  $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace affine  $R^3$ , un distributeur est défini par ses **éléments de réduction** en  $O$  : les deux vecteurs  $x(O)$  et  $\bar{\omega}_x$ . Une base  $B$  de **Eq** est donc  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . **Eq** est un espace vectoriel de **dimension 6** et les composantes d'un distributeur dans la base  $B$  sont les composantes de  $\bar{\omega}_x$  et de  $x(O)$  (dans cet ordre) dans le repère  $R$ .

Soient deux bases  $B_1$  et  $B_2$  de **Eq** déduites respectivement des repères

$R_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  et  $R_2 = (O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ . Pour avoir la matrice de passage  $D$  de  $B_1$  à  $B_2$

on doit écrire les vecteurs de base  $B_1$   $(\vec{i}_1 \wedge \overrightarrow{O_1M}, \vec{j}_1 \wedge \overrightarrow{O_1M}, \vec{k}_1 \wedge \overrightarrow{O_1M}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  dans la base  $B_2$   $(\vec{i}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M}, \vec{j}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M}, \vec{k}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M}, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$  :

$$\vec{i}_1 = \beta_{11}\vec{i}_2 + \beta_{21}\vec{j}_2 + \beta_{31}\vec{k}_2$$

$$\vec{j}_1 = \beta_{12}\vec{i}_2 + \beta_{22}\vec{j}_2 + \beta_{32}\vec{k}_2$$

$$\vec{k}_1 = \beta_{13}\vec{i}_2 + \beta_{23}\vec{j}_2 + \beta_{33}\vec{k}_2$$

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 \wedge \overrightarrow{O_1M} &= \vec{i}_1 \wedge (\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M}) = \vec{i}_1 \wedge \overrightarrow{O_1O_2} + \vec{i}_1 \wedge \overrightarrow{O_2M} \\ &= \vec{i}_1 \wedge \overrightarrow{O_1O_2} + \beta_{11}(\vec{i}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M}) + \beta_{21}(\vec{j}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M}) + \beta_{31}(\vec{k}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M}) \end{aligned}$$

$$\vec{j}_1 \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{j}_1 \wedge \overrightarrow{O_1O_2} + \beta_{12}(\vec{i}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M}) + \beta_{22}(\vec{j}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M}) + \beta_{32}(\vec{k}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M})$$

$$\vec{k}_1 \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{k}_1 \wedge \overrightarrow{O_1O_2} + \beta_{13}(\vec{i}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M}) + \beta_{23}(\vec{j}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M}) + \beta_{33}(\vec{k}_2 \wedge \overrightarrow{O_2M})$$

$$D = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ & \overrightarrow{O_2 O_1} \wedge \cdot & & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ & & & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix}$$

Donc la matrice de passage dans Eq. de la base  $B_1$  à la base  $B_2$  est :

$$D = \begin{bmatrix} P & 0 \\ (\overrightarrow{O_2 O_1} \wedge \cdot) & P \end{bmatrix} \quad (11)$$

Où P est la matrice de passage de  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  à  $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$  (voir la figure 2.2).

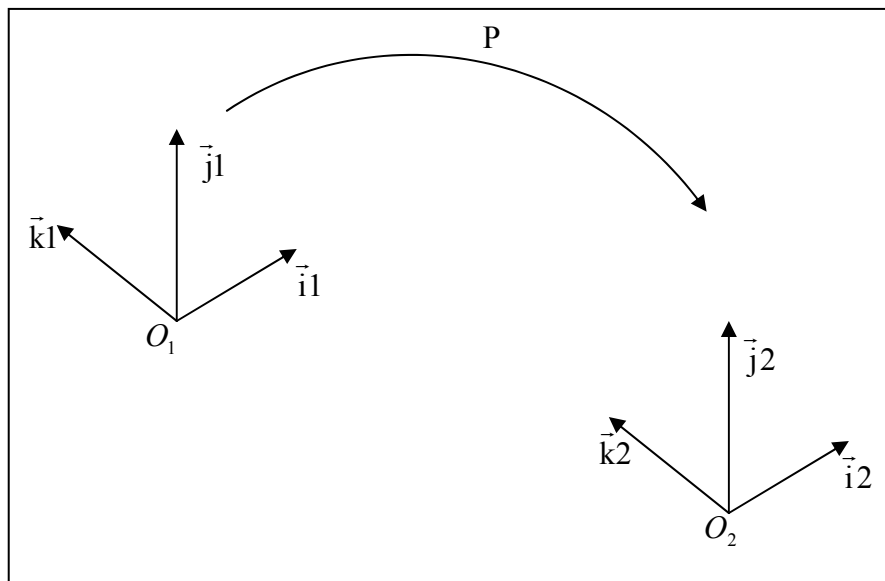


Figure 2.2 : Diagramme représentant le changement de base  $B_1$  à la base  $B_2$

$(\overrightarrow{O_2 O_1} \wedge \cdot)$  Est l'application  $\vec{x} \mapsto \overrightarrow{O_2 O_1} \wedge \vec{x}$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous pouvons l'écrire aussi,  $\overrightarrow{O_2 O_1} \wedge \vec{x} = A\vec{x}$  tel que A est une matrice de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_2 O_1} \wedge \vec{i}_1 & \overrightarrow{O_2 O_1} \wedge \vec{j}_1 & \overrightarrow{O_2 O_1} \wedge \vec{k}_1 \end{bmatrix}$$

dans la base  $B_2$  [1].

e) Produit vectoriel

Soient  $x$  et  $y$  deux distributeurs d'invariants vectoriels  $\vec{\omega}_x$  et  $\vec{\omega}_y$ , soit  $z$  le champ de vecteur  $z=[x, y]$  défini par :

$$z(M) = \vec{\omega}_x \wedge y(M) - \vec{\omega}_y \wedge x(M) \quad (12)$$

Remplaçant dans  $x(M)$  et  $y(M)$  :

$$\begin{aligned} z(M) &= \vec{\omega}_x \wedge \left( y(O) + \vec{\omega}_y \wedge \overrightarrow{OM} \right) - \vec{\omega}_y \wedge \left( x(M) + \vec{\omega}_x \wedge \overrightarrow{OM} \right) \\ &= \vec{\omega}_x \wedge y(O) - \vec{\omega}_y \wedge x(O) + \vec{\omega}_x \wedge \left( \vec{\omega}_y \wedge \overrightarrow{OM} \right) + \vec{\omega}_y \wedge \left( \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}_x \right) \end{aligned}$$

D'après la relation vectorielle :

$$\vec{\omega}_x \wedge \left( \vec{\omega}_y \wedge \overrightarrow{OM} \right) + \overrightarrow{OM} \wedge \left( \vec{\omega}_x \wedge \vec{\omega}_y \right) + \vec{\omega}_y \wedge \left( \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}_x \right) = \vec{0}$$

On écrit donc :

$$z(M) = \vec{\omega}_x \wedge y(O) - \vec{\omega}_y \wedge x(O) + \left( \vec{\omega}_x \wedge \vec{\omega}_y \right) \wedge \overrightarrow{OM} \quad (13)$$

$z$  est un distributeur d'invariant vectoriel  $\vec{\omega}_z = \vec{\omega}_x \wedge \vec{\omega}_y$ . D'une manière pratique, il se calcule ainsi :

$$\left[ \begin{pmatrix} \vec{\omega}_x \\ x(O) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{\omega}_y \\ y(O) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \vec{\omega}_x \wedge \vec{\omega}_y \\ \vec{\omega}_x \wedge y(O) - \vec{\omega}_y \wedge x(O) \end{pmatrix} \quad (14)$$

[., .] est **un produit vectoriel** sur Eq [1].

f) Moment d'un distributeur

Soit un solide  $S$  de masse  $m$ , de masse volumique  $\rho$  non uniforme et de barycentre  $O$ .

**L'opérateur de moment  $M$**  est l'endomorphisme de Eq défini par :

$$\forall x \in Eq, \forall O \in \mathbf{R}^3, M(x) = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge x(M) \rho(M) dM \quad (15)$$

D'un point de vue physique,  $M$  synthétise la masse, le tenseur d'inertie et le centre d'inertie du solide.

On peut vérifier que  $M(x)$  est bien un distributeur donc :

$$\begin{aligned} M(x)(P) - M(x)(O) &= \int_S \left( \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{OM} \right) \wedge x(M) \rho(M) dM \\ &= \overrightarrow{PO} \wedge \int_S x(M) \rho(M) dM \\ &= mx(O) \wedge \overrightarrow{PO} \end{aligned}$$

Dans une base B de Eq déduite d'un repère de  $\mathbb{R}^3$  d'origine A. Nous avons d'une part :

$$\overrightarrow{\omega_{M(x)}} = mx(O) = mx(A) + m\vec{\omega}_x \wedge \overrightarrow{AO} \quad (16)$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} M(x)(A) &= \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (x(A) + \vec{\omega}_x \wedge \overrightarrow{AM}) \rho(M) dM \\ &= m\overrightarrow{AO} \wedge x(A) + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\omega}_x \wedge \overrightarrow{AM}) \rho(M) dM \\ &= m\overrightarrow{AO} \wedge x(A) + I_A(\vec{\omega}_x) \end{aligned} \quad (17)$$

La matrice de l'application linéaire M dans la base B s'en déduit simplement :

$$M_A = \begin{bmatrix} m\overrightarrow{OA} \wedge . & mI_3 \\ I_A & -m\overrightarrow{OA} \wedge . \end{bmatrix} \quad (18)$$

$(m\overrightarrow{OA} \wedge .)$  est l'application  $\vec{x} \mapsto m\overrightarrow{OA} \wedge \vec{x}$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ , peut être écrite aussi,

$m\overrightarrow{OA} \wedge \vec{x} = T\vec{x}$  tel que T est une matrice de la forme :

$$T = \begin{bmatrix} m\overrightarrow{OA} \wedge \vec{i} & m\overrightarrow{OA} \wedge \vec{j} & m\overrightarrow{OA} \wedge \vec{k} \end{bmatrix}, \text{ dans la base B [1].}$$

## 2.7 Dynamique du solide rigide

En utilisant les expressions développées (au paragraphe 2.6), le principe fondamental de la dynamique peut être appliqué au cas d'un solide rigide **en nous limitant à six inconnues** [1].

### a) Cinématique du solide rigide en petits déplacements

L'étude de mouvement dans l'espace d'un solide rigide se fait par le biais de son déplacement d, défini mathématiquement par une application affine de l'espace conservant Les distances et l'orientation dont la partie linéaire associée est une rotation, élément du groupe spécial orthogonal  $SO_3(\mathbb{R})$ . Si M et O deux points de l'espace, on a alors :

$$d(M) = d(O) + R\overrightarrow{OM}$$

$$\text{Aussi} \quad \overrightarrow{d(O)d(m)} = R.\overrightarrow{OM} \quad \text{avec } R \in SO_3(\mathbb{R}) \quad (19)$$

L'ensemble des déplacements D est un groupe pour la loi de composition des applications o. Le mouvement d'un solide peut être décrit par une application  $t \mapsto D(t)$  de  $\mathbb{R}$  dans D. Cette application est au moins de classe  $C^2$  puisque D est un groupe de lie, c'est à dire, un groupe muni d'une structure différentielle compatible avec la loi de composition interne o.



Soit  $\partial$  Son algèbre de Lie, dans le cas du groupe D,  $\partial$  s'identifie à l'espace vectoriel des champs équiprojectifs muni du crochet de Lie :

$$[x, y] = \bar{\omega}_x \wedge y(M) - \bar{\omega}_y \wedge x(M) \quad (20)$$

Où  $\bar{\omega}_x$  et  $\bar{\omega}_y$  désignent les invariants vectoriels respectivement du champ x et du champ y. pour les petits déplacements, éléments d'un « petit » voisinage de l'élément neutre  $I_D$ ; on peut assimiler la partie voisine de  $I_D$  à une portion de l'espace tangent en ce point, c'est à dire son algèbre de Lie  $\partial$  qui est, à un isomorphisme près, l'espace vectoriel des champs équiprojectifs.

Il est à rappeler que toute matrice orthogonale R est l'exponentielle d'une matrice antisymétrique A :

$$R = \exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (21)$$

Qui s'écrit dans le cas de l'hypothèse des petits déplacements (H.P.D)

$$R \approx I_3 + A + o(A^2)$$

Pour toute matrice A antisymétrique 3x3 il existe un vecteur  $\bar{\theta}$  tel que  $A \cdot \overrightarrow{OM} = \bar{\theta} \wedge \overrightarrow{OM}$

Il vient alors :  $R \cdot \overrightarrow{OM} \approx \overrightarrow{OM} + \bar{\theta} \wedge \overrightarrow{OM}$

Soit x le champ de vecteur déplacement, défini par  $x(O) = \overrightarrow{Od(O)}$  alors de la relation (10) :

$$\overrightarrow{d(O)d(M)} = R \cdot \overrightarrow{OM} \approx \overrightarrow{OM} + \bar{\theta} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{d(O)\vec{O}} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Md(M)} = \overrightarrow{OM} + \bar{\theta} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$-x(O) + x(M) = \bar{\theta} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$x(O) = x(M) + \bar{\theta} \wedge \overrightarrow{MO} \quad (22)$$

*Le champ de déplacements d'un solide en petites perturbations est un distributeur.*

En dérivant la relation précédente, et en notant  $\bar{\omega} = \frac{d\bar{\theta}}{dt}$ , il apparaît la relation :

$$\frac{dx(O)}{dt} = \frac{dx(M)}{dt} + \frac{d\bar{\theta}}{dt} \wedge \overrightarrow{MO} + \bar{\theta} \wedge \frac{d\overrightarrow{MO}}{dt}$$

$$v(O) = v(M) + \bar{\omega} \wedge \overrightarrow{MO} \quad (23)$$

Le dernier terme s'écrit :  $\bar{\theta} \wedge (\bar{\theta} \wedge \overrightarrow{MO}) = A^2 \cdot \overrightarrow{MO} \approx 0$  A est petit cas (H.P.D)

*Le champ des vitesses d'un solide en petits déplacements est un distributeur [1].*

### b) Calcul du torseur dynamique

Les torseurs représentent le système de forces s'exerçant sur un solide rigide.

Ils sont par leurs éléments de réduction en un point O : la résultante  $\vec{R} = \int_S \vec{f}(M) dM$  et le moment  $\vec{H} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} dM$ .  $H$  vérifie la relation  $H(O') = H(O) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}$ . L'ensemble des torseurs est donc un espace vectoriel hexadimensionnel.

Le principe fondamental de la dynamique du solide :  $\vec{f} = M\vec{\gamma}$  appliqué en chaque point d'un solide rigide S nous permet **d'identifier le torseur dynamique et le torseur  $T_f$  des forces extérieures**. La résultante du torseur dynamique est :

$$R = \int_S \rho(M) \vec{\gamma}(M) d(M) \quad (24)$$

Et le moment en un point O est :

$$H = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \rho(M) \vec{\gamma}(M) dM \quad (25)$$

On dérivant la relation (23), on obtient donc :

$$\frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d\vec{v}(O)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

et en utilisant la relation (22) on trouve :

$$\frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d\vec{v}(O)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

En final la résultante est donc :

$$R = \int_S \left( \vec{\gamma}(O) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \right) \rho(M) dM$$

$$R = \vec{\gamma}(O) \int_S \rho(M) dM + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \int_S \rho(M) \overrightarrow{OM} dM + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(O) \int_S \rho(M) dM + \vec{\omega} \wedge \left( \vec{\omega} \wedge \int_S \rho(M) \overrightarrow{OM} dM \right)$$

$$R = m\vec{\gamma}(O) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge m\overrightarrow{OG} + m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge m\overrightarrow{OG}) \quad (26)$$

de la même manière on obtient le moment H :

$$H = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \rho(M) \vec{\gamma}(M) dM$$

$$H = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \left( \vec{\gamma}(O) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right) \rho(M) dM$$

$$\begin{aligned}
&= \int_S \rho(M) \overrightarrow{OM} dM \wedge \vec{\gamma}(O) + \int_S \rho(M) \overrightarrow{OM} \wedge \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} \right) dM \\
&+ \int_S \rho(M) \overrightarrow{OM} \wedge \left( \vec{\omega} \wedge \left( \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \right) dM \\
&= \int_S \rho(M) \overrightarrow{OM} dM \wedge \vec{\gamma}(O) + \int_S \rho(M) \overrightarrow{OM} \wedge \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} \right) dM \\
&+ \int_S \rho(M) \overrightarrow{OM} dM \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{v}(O)) + \int_S \rho(M) \vec{\omega} \wedge \left( \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \right) dM \\
&H = m \overrightarrow{OG} \wedge \vec{\gamma}(O) + I_0 \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) + m \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{v}(O)) + \vec{\omega} \wedge I_0(\vec{\omega}) \quad (27)
\end{aligned}$$

G et m notations déjà définies dans le § 2.6.

Comme le torseur dynamique est égal au torseur des forces appliquées :

$$T_f = \left\langle \left\langle \begin{matrix} R \\ H \end{matrix} \right\rangle \right\rangle \quad (26)$$

L'identification distributeur-torseur donne :

$$T_f = M \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right) + [\vec{v}, M(\vec{v})] \quad (27)$$

Le crochet du terme complémentaire est appelé **crochet de Lie** [1].

## 2.8 Etude du contreventement

L'étude de contreventement varie d'un auteur à un autre, elle dépend essentiellement de la modélisation. Dans notre cas les planchers sont modélisés par des solides rigides avec leurs six degrés de liberté. La modélisation des différents éléments de contreventement est réalisée en utilisant la **théorie des poutres** [1].

### a) Matrice de rigidité

L'élément de contreventement i entre les étages n-1 et n est une poutre de longueur l, de section S, de sections réduites  $S_x$  et  $S_y$ , de module de Young E, de coefficient de cisaillement G et de constante de torsion J (Figure 2.3). Elle est encastree suivant sa section droite d'origine O, et soumise à sa section finale à des efforts extérieurs de

résultante  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  et de moment de couple  $\vec{\Gamma} = (\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z)$ , définissant un vecteur  $\vec{f}$  de  $R^6$  [1].

On s'intéresse aux déplacements de la section finale A, les translations ( $u_x, u_y, u_z$ ) et les rotations ( $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ), groupées en un seul vecteur de  $R^6$  [1].

La théorie des poutres permet d'exprimer la loi de comportement (relation déformation – efforts intérieurs) à l'aide d'une matrice A de  $R^6$  telle que :  $\pi(M) = A\varepsilon(M)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & GS_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & GS_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ES \\ EI_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

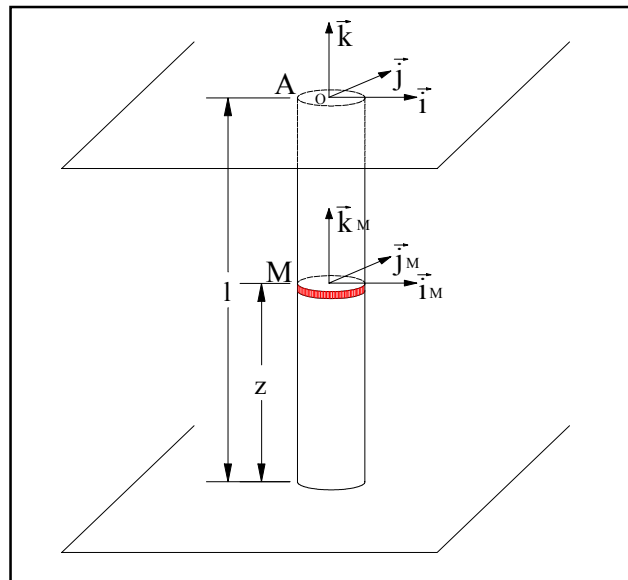


Figure 2.3 : Elément poutre [1]

Où  $\pi(M)$  représentent les six efforts intérieurs classiques au point M de la poutre (moments fléchissant, moment de torsion, efforts tranchants, effort normal) [1]:

$$\pi(M) = (M_x, M_y, M_t, T_x, T_y, N)$$

$\varepsilon(M)$  est le vecteur déformation associé.

Cette relation est écrite dans une **base orthonormée locale** liée à la section de côte Z.

La déformation est dérivée de la déformée  $\chi$ . Pour avoir la valeur de la déformée en A, il faut intégrer  $\varepsilon$  sur la poutre qui doit être exprimée dans une même base quelque soit la côte Z [1].

$$\chi = \int_0^l \varepsilon(M) dM = \int_0^l D^{-1} A^{-1} D \pi(M) dM \quad (29)$$

La valeur de  $\pi(M)$  dans la base liée à la section A est constante et vaut  $\vec{f}$ , d'où :

$$\chi = \left( \int_0^l D^{-1} A^{-1} D dz \right) \vec{f} \quad (30)$$

En prenant pour base fixe **la base de la section finale**, les bases locales sont les translâtées de celle-ci.

L'inverse de la matrice A se fait facilement en remplaçant chacune de deux diagonales de A par l'inverse de l'autre. D est la matrice de passage dans  $R^6$  de la base de côte Z à la base de côte Z=l définie dans l'équation 2.

$$D = \begin{bmatrix} P & 0 \\ \frac{P}{OM \wedge} & P \end{bmatrix} \quad (31)$$

O est l'origine de repère liée à la section de côte Z=l.

P est la matrice de passage dans  $R^3$  de la base de côte Z à la base de côte Z=l.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (l-z) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(l-z) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

L'inverse de D s'obtient en remplaçant (l-z) par son opposé.

En remplaçant (32) dans (30) et après intégration on obtient :

$$\chi = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{l^2}{2EI_x} & 0 & \frac{l}{EI_x} & 0 & 0 \\ \frac{l^2}{2EI_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{GJ} \\ \frac{l^3}{3EI_y} + \frac{l}{GS_x} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{2EI_y} & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI_x} + \frac{l}{GS_y} & 0 & -\frac{l^2}{2EI_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{ES} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \pi(A) \quad (33)$$

La matrice  $K_i^{-1}$  obtenue est écrite dans la base de la section finale en contact avec le plan supérieur. Son inverse  $K_i$  est la matrice de rigidité de l'élément  $i$  par rapport à la même base [1]:

$$K_i = \begin{bmatrix} 0 & -k_{ix\theta 2} & 0 & k_{ix} & 0 & 0 \\ k_{iy\theta 1} & 0 & 0 & 0 & k_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{iz} \\ k_{i\theta 1} & 0 & 0 & 0 & k_{iy\theta 1} & 0 \\ 0 & k_{i\theta 2} & 0 & -k_{ix\theta 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{i\theta 3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Avec :

$$k_{ix} = \frac{1}{\frac{l^3}{12EI_y} + \frac{l}{GS_x}} ; k_{iy} = \frac{1}{\frac{l^3}{12EI_x} + \frac{l}{GS_y}} ; k_{iz} = \frac{ES}{l} ; k_{ix\theta 2} = \frac{1}{\frac{l^2}{6EI_y} + \frac{2}{GS_x}} ;$$

$$k_{iy\theta 1} = \frac{1}{\frac{l^2}{6EI_x} + \frac{2}{GS_y}} ; k_{i\theta 1} = \frac{\frac{l^2}{3EI_x} + \frac{1}{GS_y}}{\frac{l^2}{12EI_x} + \frac{1}{GS_y}} \cdot \frac{EI_x}{l} ; k_{i\theta 2} = \frac{\frac{l^2}{3EI_y} + \frac{1}{GS_x}}{\frac{l^2}{12EI_y} + \frac{1}{GS_x}} \cdot \frac{EI_y}{l} ; k_{i\theta 3} = \frac{GJ}{l} .$$

On peut écrire la matrice de rigidité de chaque élément de contreventement par rapport à **une base centrale liée au plancher**, tout en passant par la matrice de passage  $D_i'$  dans  $R^6$  (Figure2.4) [1].

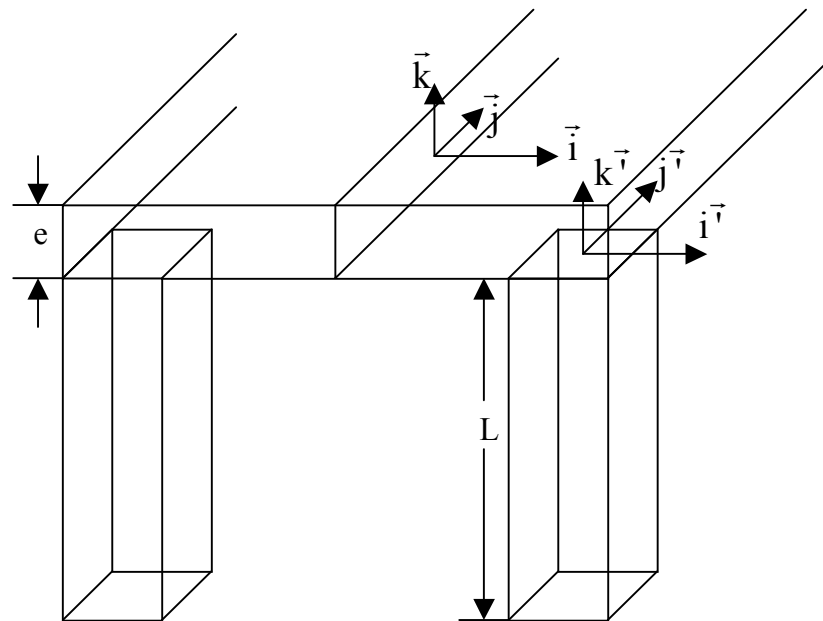


Figure2.4 : Base locale liée à l'élément et la base centrale liée au plancher [1]

A partir de la définition de la matrice de passage entre deux bases, on aura :

$$D_i' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_i & y_i & 1 & 0 & 0 \\ z_i & 0 & -x_i & 0 & 1 & 0 \\ -y_i & x_i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Où  $x_i$ ,  $y_i$  et  $z_i$  sont les coordonnées de la section finale dans la base centrale.

La matrice de rigidité d'un élément  $i$  dans la base centrale est donc [1]:

$$\tilde{K}_i = D_i' K_i D_i'^{-1} \quad (36)$$

Cette dernière s'écrit comme suite :

$$\tilde{K}_i = \begin{bmatrix} 0 & -k'_{ix\theta 2} & -y_i k_{ix} & k_{ix} & 0 & 0 \\ k'_{iy\theta 1} & 0 & x_i k_{iy} & 0 & k_{iy} & 0 \\ y_i k_{iz} & -x_i k_{iz} & 0 & 0 & 0 & k_{iz} \\ k'_{i\theta 1} + y_i^2 k_{iz} & -x_i y_i k_{iz} & x_i k'_{iy\theta 1} & 0 & k'_{iy\theta 1} & y_i k_{iz} \\ -x_i y_i k_{iz} & k'_{i\theta 2} + x_i^2 k_{iz} & x_i k'_{iy\theta 1} & -k'_{ix\theta 2} & 0 & -x_i k_{iz} \\ x_i k'_{iy\theta 1} & y_i k'_{ix\theta 2} & k_{i\theta 3} + y_i^2 k_{ix} + x_i^2 k_{iy} & -y_i k_{ix} & x_i k_{iy} & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Avec :

$$k'_{ix\theta 2} = k_{ix\theta 2} - k_{ix} z_i$$

$$k'_{iy\theta 1} = k_{iy\theta 1} - k_{iy} z_i$$

$$k'_{i\theta 1} = k_{i\theta 1} - 2k_{iy\theta 1} z_i + k_{iy} z_i^2$$

$$k'_{i\theta 2} = k_{i\theta 2} - 2k_{ix\theta 2} z_i + k_{ix} z_i^2$$

Où  $z_i = -\frac{e_p}{2}$ ,  $e_p$  est l'épaisseur du plancher (épaisseur est uniforme).

La rigidité globale est déterminée à partir de la compatibilité des déformations au niveau de la liaison avec les planchers supposés rigides indéformables, c'est à dire les déplacements des éléments de contreventement sont identiques dans une base liée au plancher [1]:

$$\chi_i = \chi_{pl} \quad \forall i = 1, 2, \dots, p \quad (38)$$

Où  $p$  est le nombre d'éléments.

Les efforts globaux exercés par les différents éléments de contreventement sur le plancher sont [1]:

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^p \vec{f}_i = \sum_{i=1}^p \tilde{K}_i \tilde{\chi}_i = \left( \sum_{i=1}^p \tilde{K}_i \right) \chi \quad (39)$$

La matrice de rigidité globale d'un système de contreventement écrite dans la base centrale d'un plancher est donc [1]:

$$K = \sum_{i=1}^p \tilde{K}^i \quad (40)$$

Soit :

$$K_G = \begin{bmatrix} 0 & -k_{x\theta_2} & -k_x \tilde{y} & k_x & 0 & 0 \\ k_{y\theta_1} & 0 & k_y \tilde{x} & 0 & k_y & 0 \\ k_z \hat{y} & -k_z \hat{x} & 0 & 0 & 0 & k_z \\ k_{\theta_1} + k_z \hat{y}^2 & -k_z \hat{x} \hat{y} & k_{y\theta_1} \hat{x} & 0 & k_{y\theta_1} & k_z \hat{y} \\ -k_z \hat{x} \hat{y} & k_{\theta_2} + k_z \hat{x}^2 & k_{x\theta_2} \hat{y} & -k_{x\theta_2} & 0 & -k_z \hat{x} \\ k_{y\theta_1} \hat{x} & k_{x\theta_2} \hat{y} & k_{\theta_3} + k_y \tilde{x}^2 + k_x \tilde{y}^2 & -k_x \tilde{y} & k_y \tilde{x} & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Avec :

$$k_x = \sum_{i=1}^p k_{ix} ; k_y = \sum_{i=1}^p k_{iy} ; k_z = \sum_{i=1}^p k_{iz} ; k_{\theta_1} = \sum_{i=1}^p k'_{i\theta_1} ; k_{\theta_2} = \sum_{i=1}^p k'_{i\theta_2} ; k_{\theta_3} = \sum_{i=1}^p k'_{i\theta_3}$$

$$k_{x\theta_2} = \sum_{i=1}^p k'_{ix\theta_2} ; k_{y\theta_1} = \sum_{i=1}^p k'_{iy\theta_1} ; \tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i k_{iy}}{k_y} ; \tilde{y} = \frac{\sum_{i=1}^p y_i k_{ix}}{k_x}$$

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i k_{iz}}{k_z} ; \hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^p y_i k_{iz}}{k_z} ; \hat{x} \hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i y_i k_{iz}}{k_z} ; \hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i k'_{iy\theta_1}}{k_{y\theta_1}} ; \hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^p y_i k'_{ix\theta_2}}{k_{ix\theta_2}}$$

### b) Matrice masse

Elle se déduit de l'équation notée (18) écrite dans la base centrale. La matrice totale d'un étage est la somme de la matrice masse du plancher et les moitiés des matrices de masse du système de contreventement inférieur et du système supérieur [1].



### Matrice masse d'un élément de contreventement (i)

La matrice masse d'une poutre i écrite dans la base locale liée à l'élément s'exprime comme suit [1]:

$$M_i = m_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ r_{xi}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{yi}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{zi}^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

La matrice masse de l'élément i dans la base centrale liée au plancher est [1]:

$$\tilde{M}_i = D'_i M_i D_i'^{-1} \quad (43)$$

De (35), (42) et (43) on écrit :

$$\tilde{M}_i = m_i \begin{bmatrix} 0 & z_i & -y_i & 1 & 0 & 0 \\ -z_i & 0 & x_i & 0 & 1 & 0 \\ y_i & -x_i & 0 & 0 & 0 & 1 \\ r_{xi}^2 + z_i^2 + y_i^2 & -y_i x_i & -z_i x_i & 0 & -z_i & y_i \\ -y_i x_i & r_{xi}^2 + z_i^2 + x_i^2 & -z_i y_i & z_i & 0 & -x_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & r_{xi}^2 + y_i^2 + x_i^2 & -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix}$$

Où  $r_{xi}$ ,  $r_{yi}$  et  $r_{zi}$  sont les rayons de giration de la poutre i.

**Matrice masse d'un élément du système de contreventement supérieur [1]**

Pour l'étage supérieur  $z_i = \frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}$

$$\tilde{M}_i = m_i \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) & -y_i & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) & 0 & x_i & 0 & 1 & 0 \\ y_i & -x_i & 0 & 0 & 0 & 1 \\ r_{xi}^2 + \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right)^2 + y_i^2 & -x_i y_i & -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) x_i & 0 & -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) y_i & y_i \\ -x_i y_i & r_{yi}^2 + \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right)^2 + x_i^2 & -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) y_i & \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) x_i & 0 & -x_i \\ -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) x_i & -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) y_i & r_{zi}^2 + x_i^2 + y_i^2 & -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix}$$

**Matrice masse d'un élément du système de contreventement inférieur [1]**

Pour l'étage supérieur  $z_i = -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right)$

$$\tilde{M}_i = m_i \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) & -y_i & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) & 0 & x_i & 0 & 1 & 0 \\ y_i & -x_i & 0 & 0 & 0 & 1 \\ r_{xi}^2 + \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right)^2 + y_i^2 & -x_i y_i & \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) x_i & 0 & \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) y_i & y_i \\ -x_i y_i & r_{yi}^2 + \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right)^2 + x_i^2 & \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) y_i & -\left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) x_i & 0 & -x_i \\ \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) x_i & \left(\frac{l_i}{4} + \frac{e_{pl}}{2}\right) y_i & r_{zi}^2 + x_i^2 + y_i^2 & -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix}$$

### Matrice masse du plancher

La matrice masse du plancher dans la base centrale liée au plancher s'écrit [1]:

$$\tilde{M}_{pl} = m_{pl} \begin{bmatrix} 0 & -z & -y & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ y & -x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ r_x^2 + y^2 + z^2 & -xy & zx & 0 & z & y \\ -xy & r_y^2 + x^2 + z^2 & zy & -z & 0 & -x \\ zx & zy & r_z^2 + x^2 + y^2 & -y & x & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Dans le cas où l'origine est confondu avec le centre de masse on aura  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , ce qui est généralement le cas.

### 2.9 Equations de la dynamique sismique

Le calcul des matrices de rigidités et masses liées aux planchers se fait dans des bases différentes pour chaque étages et à fin d'assuré ce passage entre étage un changement de base s'avère nécessaire a celui-ci [1].

#### a) 1e déplacements relatifs

Soient  $B_n$  une base de Eq relative à un repère orthonormé  $R_n$  lié au solide  $S_n$  et  $H_n$  la matrice de passage dans Eq de la base  $B_{n-1}$  à la base  $B_n$ , et soit  $x_n$  le déplacement de solide  $S_n$  dans la base  $B_n$ . Le déplacement relatif de  $S_{n-1}$  par rapport à  $S_n$  dans la base  $B_n$  est [1]:

$$\delta_n = x_n - H_n^{-1} x_{n-1} \quad (55)$$

Il est de même pour le déplacement relatif de  $S_{n+1}$  par rapport à  $S_n$  dans la base  $B_n$  qui est :

$$\delta_{n+1} = x_n - H_{n+1} x_{n+1} \quad (56)$$

La matrice de rigidité associée à  $\delta_n$  dans la base  $B_n$  est  $K_n$ , celle associée à  $\delta_{n+1}$  dans la base  $B_{n+1}$  est  $K_{n+1}$  donc  $H_{n+1} K_{n+1} H_{n+1}^{-1}$  dans la base  $B_n$ .

Ci-dessous la figure 2.5 représentant les différents déplacements.

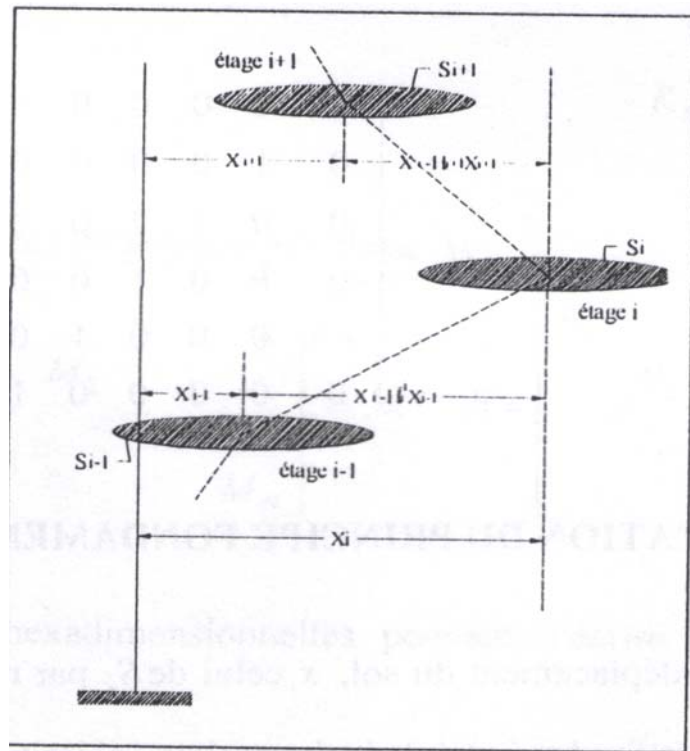


Figure 2.5 : Déplacement relatif de deux étages [30, 31]

### b) Force de rappel

La force de rappel agissant sur le solide  $S_n$  est alors :

$$F_n = -K_n \delta_n - H_{n+1} K_{n+1} H_{n+1}^{-1} \delta_{n+1} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} &= +(K_n H_n^{-1}) x_{n-1} - K_n x_n - (H_{n+1} K_{n+1} H_{n+1}^{-1}) x_n + H_n K_{n+1} H_{n+1}^{-1} H_{n+1} x_{n+1} \\ &= +(K_n H_n^{-1}) x_{n-1} - (H_{n+1} K_{n+1} H_{n+1}^{-1} + K_n) x_n + H_{n+1} K_{n+1} x_{n+1} \end{aligned} \quad (58)$$

sur la figure 2.5,  $x_i$  représente le déplacement du solide  $S_n$  qui a en fait six degrés de liberté. Les déplacements n'appartiennent pas à la même base d'où l'intervention des matrices de passage  $H_i$  quand il s'agit de comparer deux déplacements consécutifs [1].

### c) Expression de la matrice de passage

Si les deux repères liés aux deux solides consécutifs sont choisis de telle sorte que l'on puisse passer d'un repère à l'autre par une translation du vecteur  $\vec{h}_i$  alors la matrice de changement de base hexadimensionnelle est [1]:



Posons  $M$  et  $B$  les matrices diagonales par blocs [1]:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_N \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_N \end{bmatrix} \quad (65)$$

Alors les  $6N$  équations hexadimensionnelles peuvent s'écrire sous la forme condensée suivante [1]:

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + \left[ \frac{dX}{dt}, M \frac{dX}{dt} \right] + B \frac{dX}{dt} + KX = -M\ddot{u}_g I_N \quad (66)$$

Avec

$I_N$  : Vecteur unité

et  $\left[ \frac{dX}{dt}, M \frac{dX}{dt} \right]$  est un vecteur de dimension  $6N$  dont les composantes

hexadimensionnelles sont les crochets [1]:

$$\left[ \frac{dx_i}{dt}, M_i \frac{dx_i}{dt} \right]; i=1,2,\dots,N. \quad (67)$$

### e) Système différentiel

L'équation différentielle du 2<sup>ème</sup> ordre obtenue, qui se ramène à un système du premier ordre en le vecteur  $\left[ X, \frac{dX}{dt} \right]$ , peut être résolue par la méthode numérique de

Runge-Kutta à quatre pas.

Nous pouvons écrire donc le système différentiel de  $2 \times (6N)$  équations hexadimensionnelles comme suit [1]:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i \\ \frac{dv_i}{dt} = -M_i^{-1} \left( [v_i, M_i v_i] + [\dot{u}_g, M_i v_i] - [M_i \dot{u}_g, v_i] - (K_i H_i^{-1}) x_{i-1} + (\tilde{K}_{i+1} + K_i) x_i - (H_{i+1} K_{i+1}) x_{i+1} + M_i \ddot{u}_g \right) \end{cases} \quad (68)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

Si on pose pour chaque étage  $i$  :  $v_i = \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \\ v(4) \\ v(5) \\ v(6) \end{bmatrix}$  tel que :  $\bar{\omega}_v = \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \end{bmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v(4) \\ v(5) \\ v(6) \end{bmatrix}$

$$\text{et } M_i v_i = \begin{bmatrix} mv(1) \\ mv(2) \\ mv(3) \\ mv(4) \\ mv(5) \\ mv(6) \end{bmatrix} \text{ tel que : } \vec{\omega}_{mv} = \begin{bmatrix} mv(1) \\ mv(2) \\ mv(3) \end{bmatrix} \text{ et } \vec{mv} = \begin{bmatrix} mv(4) \\ mv(5) \\ mv(6) \end{bmatrix}$$

Alors et d'après la définition du produit vectoriel dans Eq [1]:

$$[v_i, M_i v_i] = \left( \begin{array}{c} \vec{\omega}_v \wedge \vec{\omega}_{mv} \\ \vec{\omega}_v \wedge \vec{mv} - \vec{\omega}_{mv} \wedge \vec{v} \end{array} \right) \quad (69)$$

On aura donc sous forme vectoriel [1]:

$$[v_i, M_i v_i] = \begin{pmatrix} v(2) \cdot mv(3) - v(3) \cdot mv(2) \\ v(3) \cdot mv(1) - v(1) \cdot mv(3) \\ v(1) \cdot mv(2) - v(2) \cdot mv(1) \\ v(2) \cdot mv(6) - v(3) \cdot mv(5) - mv(2) \cdot v(6) + mv(3) \cdot v(5) \\ v(3) \cdot mv(4) - v(1) \cdot mv(6) - mv(3) \cdot v(4) + mv(1) \cdot v(6) \\ v(1) \cdot mv(5) - v(2) \cdot mv(4) - mv(1) \cdot v(5) + mv(2) \cdot v(4) \end{pmatrix} \quad (70)$$

De la même manière et d'une façon pratique on peut avoir les crochets de l'équation de la dynamique.

#### f) Amortissement de Rayleigh

L'amortissement de Rayleigh est pris en compte par l'ajout d'un terme **combinaison linéaire des opérateurs de masse et de raideur** [1]:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (71)$$

L'équation du mouvement (sans termes complémentaires) s'écrit [1]:

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + C \frac{dX}{dt} + KX = 0 \quad (72)$$

Soit, en projetant sur la base des modes propres [1]:

$$m_i \ddot{\phi}_i + (\alpha m_i + \beta k_i) \dot{\phi}_i + k_i \phi_i \quad (73)$$

Les amortissements modaux réduits sont donc donnés par [1]:

$$\xi_i = \frac{\alpha + \beta \omega_i^2}{2\omega_i} \quad (74)$$

Le couple  $(\alpha, \beta)$  peut être ajusté pour que les  $\xi_i$  soient à peu près constants dans la gamme de fréquence considérée [1].

Pratiquement, on procède de la manière suivante [1]:

- On commence par calculer les fréquences propres du système non amorti
- Pour n modes, on se fixe un coefficient d'amortissement, l'occurrence 5% pour le premier et le dernier mode
- On calcule  $\alpha$  et  $\beta$  par la formule suivante [1]:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{2}{\begin{matrix} \omega_2 & \omega_1 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} \omega_2 & -\omega_1 \\ -1 & 1 \\ \omega_2 & \omega_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (75)$$

### 2.10 Méthode de Runge-Kutta :

Soit  $f$  une fonction continue et lipchitzienne de  $[a, b] \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et soit le problème de Cauchy [1]:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in [a, b] \\ y(a) = \alpha & \text{réel} \end{cases} \quad (76)$$

Il existe une fonction  $y$  de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  solution unique du problème.

La résolution du problème peut se faire à l'aide de la méthode itérative Runge-Kutta à quatre pas.

La méthode de Runge-Kutta classique est donnée par le schéma suivant [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h.F(x_n, y_n, h) \\ y_0 = \alpha \\ \text{avec } F(x, y, h) = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \\ k_1 = f(x, y) \\ k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = f(x + h, y + hk_3) \end{array} \right. \quad (77)$$



Où  $F$  est une fonction de  $[a, b] \times \mathbb{R}^x [0, h]$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $h$  est le pas tel que  $h = \frac{b-a}{N}$ .

### 2.11 Calcul des efforts internes

Après la détermination des matrices masses et rigidités de l'édifice écrites dans la base centrale, nous passons à la résolution de l'équation différentielle du mouvement dynamique en utilisant la méthode de Runge Kutta après l'avoir écrite sous la forme d'un système différentiel de  $2N$  équations hexadimensionnelles.

Une fois ce système résolu, on obtient alors le vecteur  $X(x_1, x_2, \dots, x_N)$  avec  $i=1, \dots, N$ ,  $N$  étant le nombre d'étage et où chaque  $x_i$  est un vecteur hexadimensionnel représentant le déplacement relatifs à chaque étage  $i$ .

Les efforts internes représentés par le vecteur  $F_i$  (désignant les forces de rappels) d'un étage  $i$  agissant sur les liaisons entre le niveau  $i-1$  et le niveau  $i$  sont calculés à l'aide de la formule suivante :

$$F_i = \tilde{K}_i \delta_i \quad (78)$$

$\tilde{K}_i$  : représente la matrice de rigidité d'un élément de contreventement écrite dans la base central.

et  $\delta_i$  est le déplacement relatif entre le niveau  $(i-1)$  et le niveau  $(i)$ , écrit dans la base  $B_i$  :

$$\delta_i = x_i - H_i^{-1} x_{i-1} \quad (79)$$

$H_i$  : étant la matrice de passage définie dans l'équation (59)

$x_i$  : est le vecteur déplacement relatifs de l'étage  $i$ ,

$$x_i = (R_{x_i}, R_{y_i}, R_{z_i}, U_{x_i}, U_{y_i}, U_{z_i})^T.$$

$x_{i-1}$  : est le vecteur déplacement relatifs de l'étage  $i-1$ ,

$$x_{i-1} = (R_{x_{i-1}}, R_{y_{i-1}}, R_{z_{i-1}}, U_{x_{i-1}}, U_{y_{i-1}}, U_{z_{i-1}})^T.$$

En remplaçant dans l'équation (78) on obtient :

$$\begin{aligned} F_i &= \tilde{K}_i (x_i - H_i^{-1} x_{i-1}) \\ F_i &= \tilde{K}_i x_i - \tilde{K}_i H_i^{-1} x_{i-1} \end{aligned} \quad (80)$$

$$\text{Or} \quad F_i = (M_{x_i}^*, M_{y_i}^*, M_{z_i}^*, T_{x_i}^*, T_{y_i}^*, N_i^*)^T \quad (81)$$

Tel que :

$T_x^*$  et  $T_y^*$  : représentent respectivement les efforts tranchants de rappel respectivement dans la direction x et y ;

$M_x^*$  et  $M_y^*$  : représentent respectivement les moments de flexion de rappel autour de l'axe x et y respectives ;

$M_z^*$  : est le moment de torsion de rappel par rapport à la axe z ;

$N_i^*$  : est l'effort normal de rappel.

En remplaçant dans l'équation (80) on trouve :

$$M_{x_i}^* = -k'_{ix\theta_2} (R_{y_i} - R_{y_{i-1}}) - y_i k_{ix} (R_{z_i} - R_{z_{i-1}}) + k_{ix} (U_{x_i} + h_i R_{y_{i-1}} - U_{x_{i-1}}) \quad (82)$$

$$M_{y_i}^* = k'_{iy\theta_1} (R_{x_i} - R_{x_{i-1}}) + x_i k_{iy} (R_{z_i} - R_{z_{i-1}}) + k_{iy} (U_{y_i} - h_i R_{x_{i-1}} - U_{y_{i-1}}) \quad (83)$$

$$M_{z_i}^* = y_i k_{iz} (R_{x_i} - R_{x_{i-1}}) - x_i k_{iz} (R_{y_i} - R_{y_{i-1}}) + k_{iz} (U_{z_i} - U_{z_{i-1}}) \quad (84)$$

$$T_{x_i}^* = (k'_{i\theta_1} + y_i^2 k_{iz}) (R_{x_i} - R_{x_{i-1}}) - x_i y_i k_{iz} (R_{y_i} - R_{y_{i-1}}) + x_i k'_{iy\theta_1} (R_{z_i} - R_{z_{i-1}}) + k'_{iy\theta_1} (U_{y_i} - h_i R_{x_{i-1}} - U_{y_{i-1}}) + y_i k_{iz} (U_{z_i} - U_{z_{i-1}}) \quad (85)$$

$$T_{y_i}^* = -x_i y_i k_{iz} (R_{x_i} - R_{x_{i-1}}) + (k'_{i\theta_2} + x_i^2 k_{iz}) (R_{y_i} - R_{y_{i-1}}) + y_i k'_{ix\theta_2} (R_{z_i} - R_{z_{i-1}}) - k'_{ix\theta_2} (U_{x_i} + h_i R_{y_{i-1}} - U_{x_{i-1}}) - x_i k_{iz} (U_{z_i} - U_{z_{i-1}}) \quad (86)$$

$$N_i^* = x_i k'_{iy\theta_1} (R_{x_i} - R_{x_{i-1}}) + y_i k'_{ix\theta_2} (R_{y_i} - R_{y_{i-1}}) + (k_{i\theta_3} + y_i^2 k_{ix} + x_i^2 k_{iy}) (R_{z_i} - R_{z_{i-1}}) - y_i k_{ix} (U_{x_i} + h_i R_{y_{i-1}} - U_{x_{i-1}}) + x_i k_{iy} (U_{y_i} - h_i R_{x_{i-1}} - U_{y_{i-1}}) \quad (87)$$

Maintenant déterminons les six efforts internes pour un étage i représentés par le vecteur ( $f_i$ ).

On a  $f_i = (T_{x_i}, T_{y_i}, N_i, M_{x_i}, M_{y_i}, M_{z_i})^T$  ;

Où

$$T_{x_i} = \sum_{i=1}^N T_{x_i}^* ; T_{y_i} = \sum_{i=1}^N T_{y_i}^* ; N_i = \sum_{i=1}^N N_i^* . \quad (88)$$

$$M_{x_i} = \sum_{i=1}^N (M_{x_i}^* - T_{x_i} \times h_i) ; M_{y_i} = \sum_{i=1}^N (M_{y_i}^* - T_{y_i} \times h_i) ; M_{z_i} = \sum_{i=1}^N M_{z_i}^* . \quad (89)$$

Avec :

$N$  : représente le nombre d'étages ;

$T_x$  et  $T_y$  : représentent respectivement les efforts tranchants dans la direction x et y ;

$M_x$  et  $M_y$  : représentent respectivement les moments de flexion par rapport à x et y ;

$M_z$  : est le moment de torsion par rapport à la axe z ;

$N_i$  : est l'effort normal dynamique.

Ce sont les efforts que nous cherchons à déterminer.

### 2.12 Calcul de l'excentricité dynamique

L'excentricité dynamique a été calculé à partir du rapport entre les efforts tranchants dans le sens x et y respectivement ( $T_x$  et  $T_y$ ) et le moment de torsion  $M_z$ . Le calcul de l'excentricité dynamique se fait comme suit :

$$e_{dx} = \frac{M_z}{T_x} \quad (90)$$

$$e_{dy} = \frac{M_z}{T_y} \quad (91)$$

L'excentricité totale étant obtenue par :

$$e_{dynamique} = \sqrt{(e_{dx})^2 + (e_{dy})^2} \quad (92)$$

### 2.13 Conclusion

Le formalisme mathématique de la méthode par matrice de transfert à six degrés de libertés a été présenté. Cette méthode permet le calcul des périodes, des déplacements ainsi que les six efforts internes. Ce modèle prend en compte l'effet de la torsion sous sollicitations sismiques et permet de déterminer l'excentricité totale de la structure.

Cette modélisation existait auparavant, mais nous y avons ajouté notre contribution à savoir le calcul des efforts internes et de l'excentricité totale de la structure.

Dans cette formulation, la prise en compte de l'effet de l'interaction sol-structure n'est pas considéré nous allons la voir dans le chapitre quatre.

Dans le chapitre suivant nous allons mettre en œuvre les développements que nous avons apportés, ceci a nécessité bien des efforts sur la compréhension détaillée de la méthodologie et de sa programmation.

## CHAPITRE 3

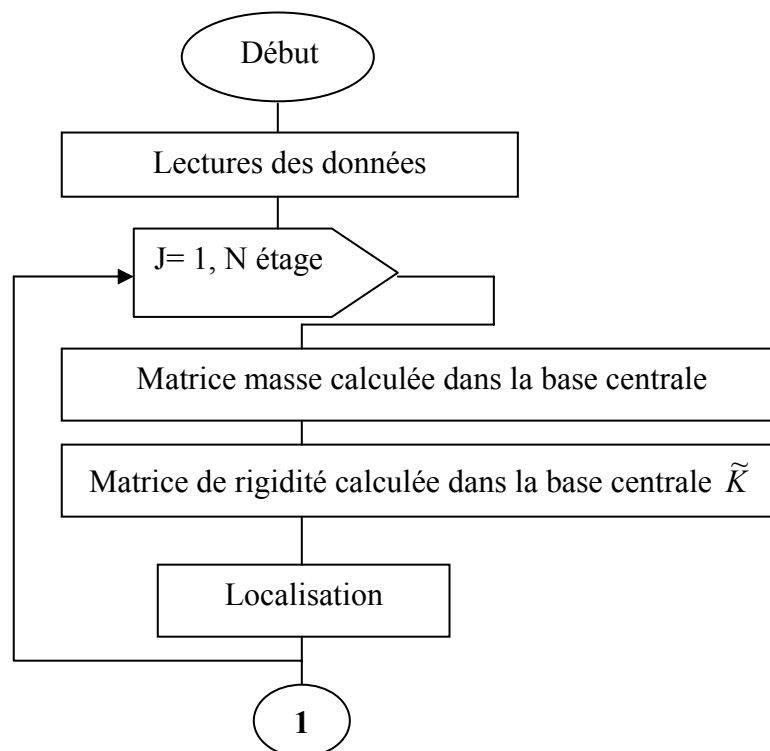
### MISE EN ŒUVRE NUMERIQUE

#### 3.1 Introduction

Nous aborderons dans le présent chapitre les développements que nous avons effectués. Nous donnerons aussi les principaux résultats que nous avons obtenus ; ceci en utilisant le modèle par matrice de transfert à six degrés de liberté (chapitre 2). La programmation et la validation de ce modèle ayant déjà fait l'objet d'une thèse de magister [1].

#### 3.2 Modélisation numériques

La méthode hexadimensionnelle présentée antérieurement (chapitre 2), a été programmée en langage de programmation Fortran sous visual Fortran5. Elle a été validée en ce qui concerne les périodes et les déplacements obtenus lors de la thèse de M.Badaoui [1]. Notre travail consistera donc à introduire un module permettant le calcul des six efforts internes (théorie développée au ch.2 paragraphe 2.10), ainsi qu'un second module permettant celui-ci de déterminer l'excentricité dynamique (théorie développée au ch.2 paragraphe 2.11). Nous donnerons ci-après l'organigramme du programme de calcul (figure 3.1). Nous mettrons aussi en relief notre apport.



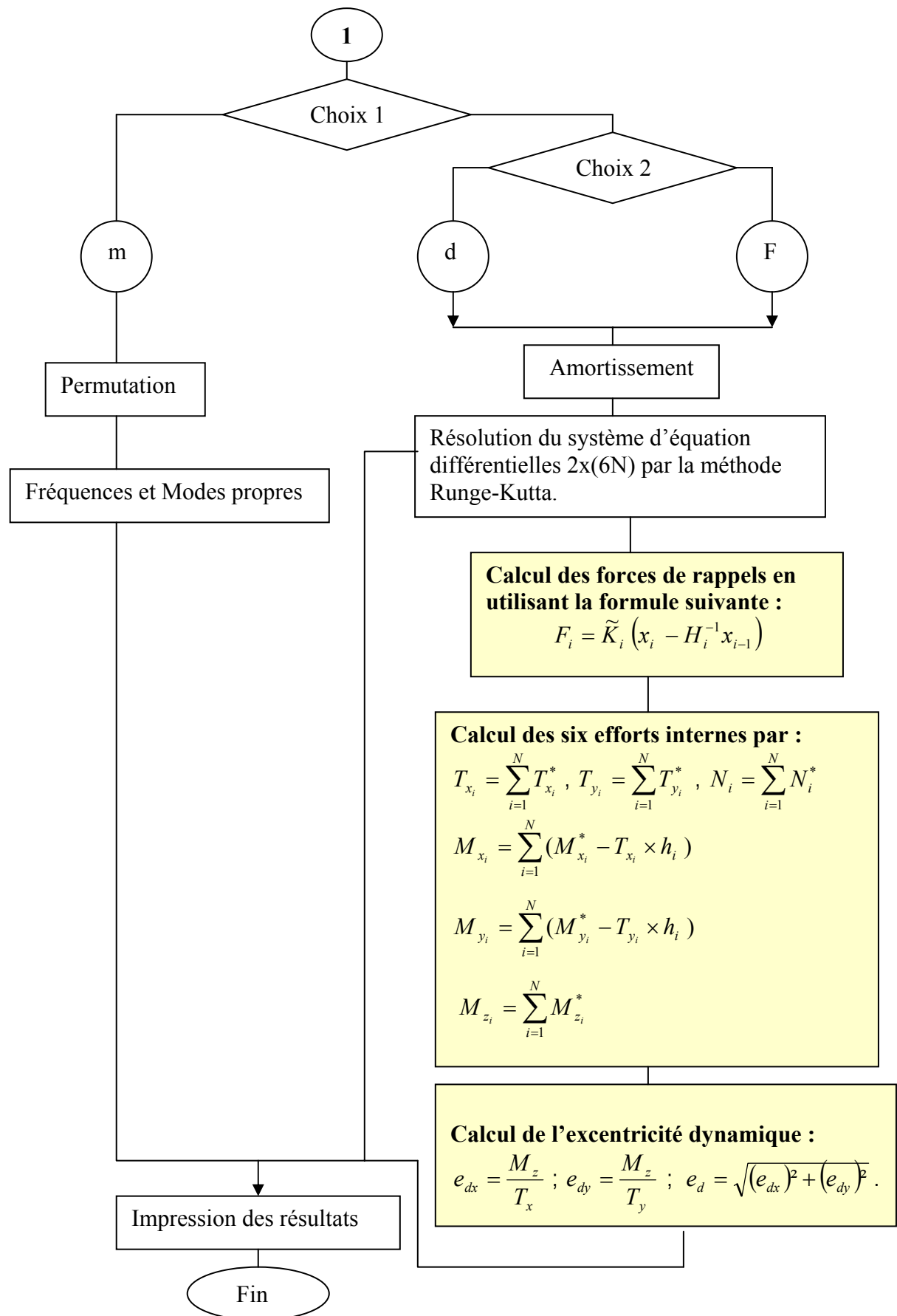


Figure 3.1: Organigramme du programme de calcul

### 3.3 Exemples de validation

Nous avons commencé par valider notre travail sur un certain nombre d'exemples.

#### Exemple 1

Nous avons utilisé l'exemple proposé par **M. Laredo** [36] et qui consiste à modéliser une couverture champignon (figure 3.2). Cette structure est sollicitée par une force horizontale harmonique  $F(t)$  avec un amortissement  $\zeta = 0,0383$ . Nous donnons ci-après les caractéristiques de cette structure :

Données géométriques :

$$2a = 12.00\text{m} ; e = 0.10\text{m} ; h = 9.00\text{m} ; 2R = 0.45\text{m} ; 2r = 0.10\text{m}.$$

Données physiques :

$$\rho = 2500 \text{ Kg/m}^3 ; G = 1.3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 ; E = 3.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2.$$

$$F(t) = F_0 \sin(\varphi t)$$

Avec :

$$\varphi = \omega_1$$

$\omega_1$ : est la pulsation propre du système correspondant au premier mode ;

$$F_0 = 0.03t.$$

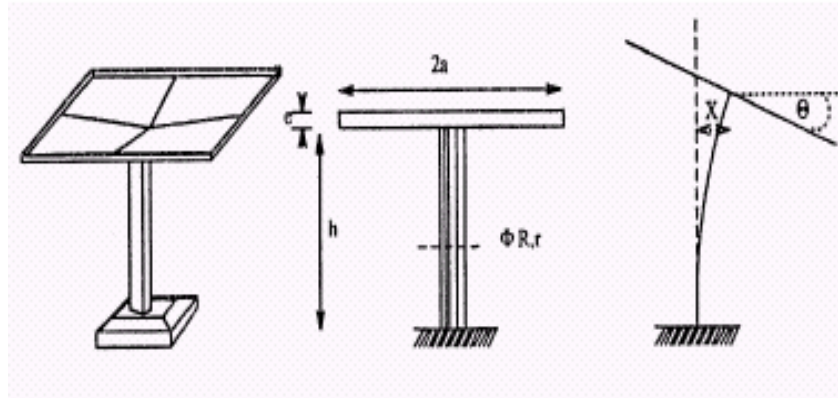


Figure 3.2 : Le modèle couverture champignon [30, 31]

Les résultats obtenus se déclinent comme suit :

#### a) Efforts internes

Les efforts internes obtenus sont résumés dans le tableau 3.1. Une représentation de ces efforts est donnée en figure 3.3 il s'agit uniquement de l'effort tranchant et du moment fléchissant les autres efforts étant nuls.

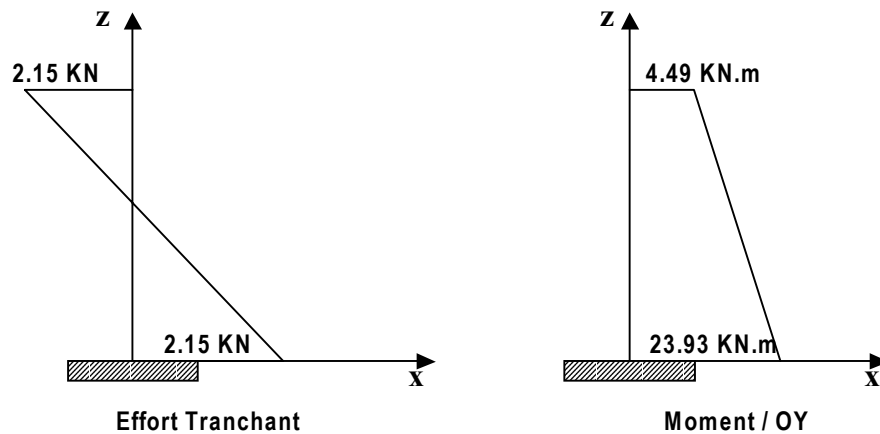


Figure 3.3 : Diagramme Effort Tranchant et Moment de Flexion de la Couverture Champignon.

Nous avons comparé alors le moment fléchissant maximal obtenu à la base par notre programme à celui donnée dans la littérature [36]. Le résultat est donné dans le tableau 3.1 :

Tableau 3.1: Moment de flexion maximal obtenu

<b>EFFORT</b>	<b>Laredo [36]</b>	<b>Modèle utilisé</b>
	KN.m	KN.m
$M^{max}$ à la base	23.96	23.93

Nous constatons que le moment maximal à la base calculé par M. Laredo et le modèle utilisé sont presque identiques avec un écart de 0,12%, ce pourcentage est faible, ce qui nous fait dire que notre résultat est correct dans ce cas de figure. Mis à part le moment de flexion et l'effort tranchant les efforts restants sont nuls. Ceci est le cas général des bâtiments symétriques où la réponse de l'élément de contreventement de la structure sous l'effet d'une force horizontale harmonique est équilibrée par l'effort tranchant en plus du moment de rotation autour de l'axe.

#### b) Excentricité totale

Nous avons calculé l'excentricité totale à partir du modèle utilisé et nous avons trouvé une excentricité dynamique égale à zéro ce qui confirme le fait que le moment de torsion et la rotation autour de l'axe  $O\vec{Z}$  sont nuls et que la structure étudiée est symétrique.

### Exemple 2

Un deuxième exemple a été traité pour valider le calcul des six efforts internes, il s'agit d'une poutre de section rectangulaire liée à un poteau formant ainsi un mat (figure 3.4).

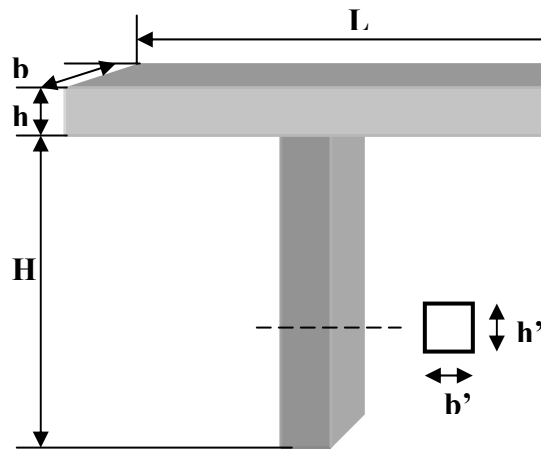


Figure 3.4 : Exemple 2 de validation

Données géométriques :

Pour la poutre on a  $L = 10.00\text{m}$  ;  $h = 0.50\text{m}$  ;  $b = 0.50$ ,  
et le poteau  $H = 10.00\text{m}$  ;  $a' = 0.50$ ,  $h' = 0.50$  ;

Données physiques :

$\rho = 2500 \text{ Kg/m}^3$  ;  $\nu = 0.2$  ;  $E = 4.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ .

Nous avons obtenu les résultats suivants :

#### a) Efforts internes

Nous avons déterminé les efforts internes en utilisant notre programme et avons comparé les résultats obtenus à ceux donnés par un logiciel industriel de calcul en éléments finis en l'occurrence le Sap2000 [35]. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 3.2.



Tableau 3.2: efforts obtenus

<b>EFFORT</b>	<b>Modèle utilisé</b>	<b>Sap2000</b>
Txx (KN)	35.80	35.18
Tyy (KN)	0	0
N (KN)	0	0
Mxx (KN.m)	0	0
Myy (KN.m)	119.79	123.13
Mz (KN.m)	0	0

Nous remarquons que les résultats obtenus sont très proches. L'écart entre les deux méthodes étant inférieur à 3% nous permet de dire que les résultats donnés par la méthode proposée sont corrects et peuvent être exploités dans le cas de structures complexes.

### 3.4 Exemples d'application

Nous avons étudié un certain nombre de structure afin d'analyser les résultats obtenus par notre programme. Nous présentons ci-après quelques exemples qui nous ont apparus comme les plus significatifs.

#### I. Bâtiment EDF

Il s'agit d'un bâtiment construit par la société Electricité De France (EDF). Nous avons soumis ce dernier à l'accélérogramme du séisme de Morgan Hill.

C'est un bâtiment à base rectangulaire de quatre étages, constitué : d'un radier et de quatre planchers identiques et d'éléments de contreventement en voile intérieur et extérieur (figure 3.5, a-b-c et d) [1].

Données géométriques :

$L= 30.0\text{m}$ ;  $B=10.0\text{m}$ ;  $e_{\text{plancher}} = 0.80\text{m}$ ;  $e'_{\text{radier}} = 1.50$ ;

$h=3.0\text{m}$ .

Données physiques :

$\rho = 2500 \text{ Kg/m}^3$  ;  $\nu = 0.2$  ;  $E = 4.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ .

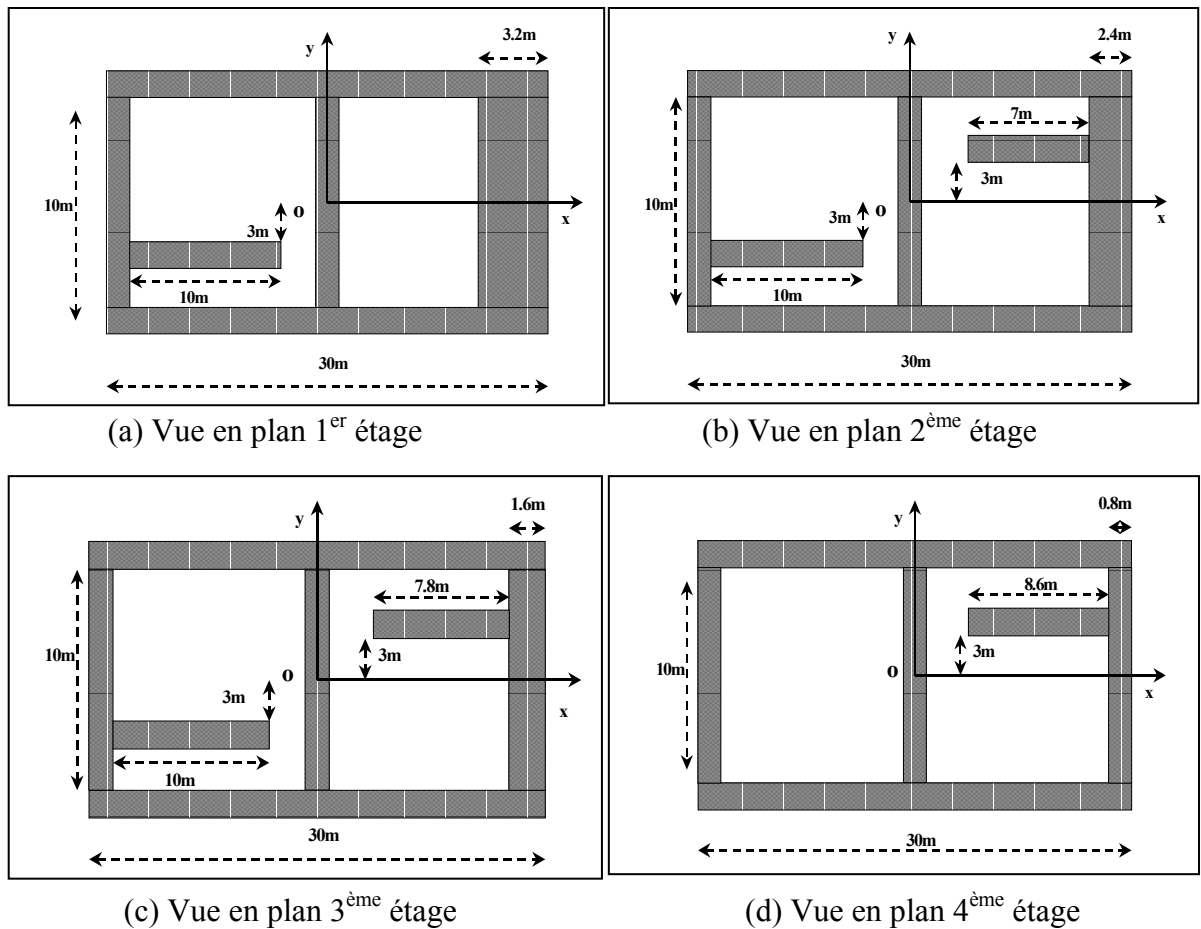


Figure 3.5 : Vue en plan du Bâtiment EDF [1]

#### a) Efforts internes

Nous avons appliqué le modèle proposé pour le calcul des six efforts internes inter-étages pour le bâtiment EDF dans le cas d'un système non amorti. Nous avons représenté les résultats trouvés c à d les efforts tranchants  $T_x$  et  $T_y$  (respectivement selon l'axe  $x$  et  $y$ ) ainsi que l'effort normal  $N$  sur la figures 3.6.

Sur la figures 3.7 nous avons tracé les moments de flexion  $M_x$  et  $M_y$  (respectivement selon l'axe  $x$  et  $y$ ) ainsi que le moment de torsion  $M_z$ .

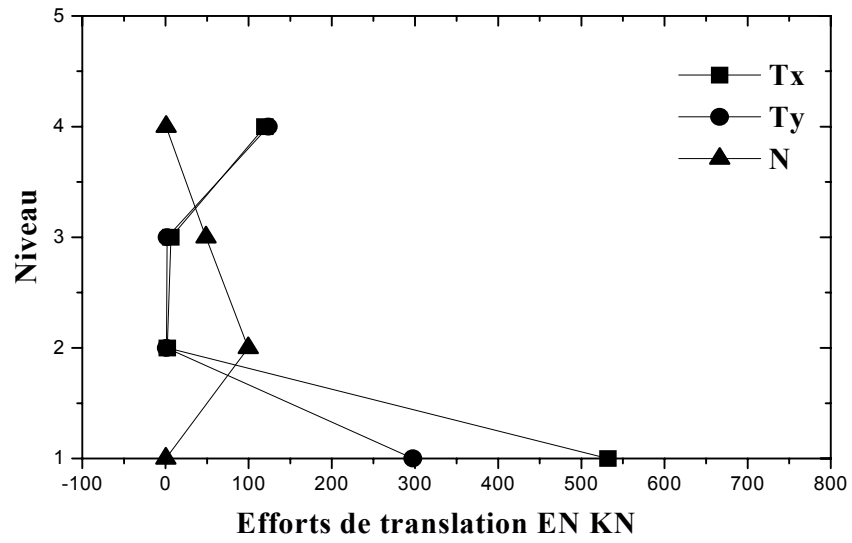


Figure 3.6 : Diagramme représentant les trois efforts internes de translation inter étages du bâtiment EDF

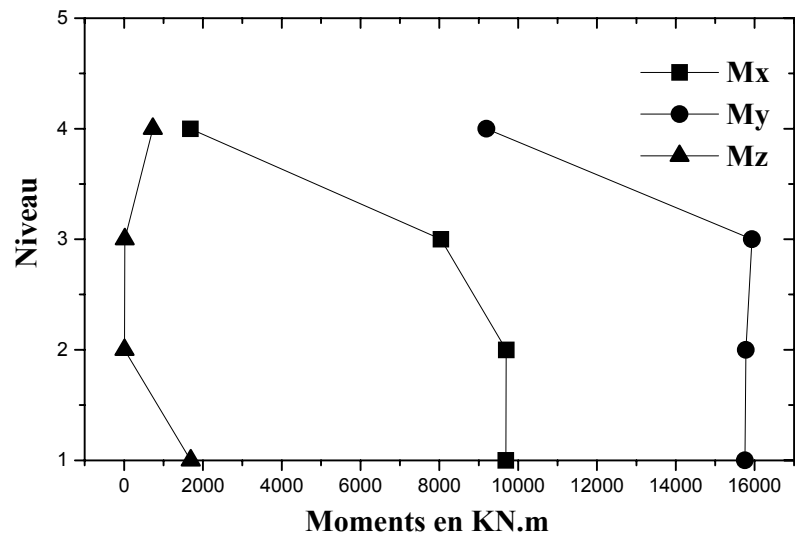


Figure 3.7 : Diagramme représentant les trois moments de rotations inter étages du bâtiment EDF

Les résultats obtenus pour le bâtiment EDF montrent que l'effort tranchant  $T_x$  au premier niveau est important par rapport à l'effort tranchant  $T_y$  et l'effort normal  $N$ , alors qu'au 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> niveau c'est l'effort normal qui devient important par rapport au deux efforts tranchant qui sont presque confondus, cependant au dernier niveau les deux efforts tranchant  $T_x$  et  $T_y$  sont presque confondus et deviennent supérieur par rapport à l'effort normal. Le moment de flexion autour de l'axe  $y$  est important par rapport au moment de flexion autour de l'axe  $x$  est cela du premier niveau jusqu'au dernier. Le moment de torsion est présent mais négligeable devant les deux moments de flexion.

En tout état de cause les valeurs à considérer sont celle de l'effort tranchant  $T_x$  au premier niveau et celle du moment de flexion  $M_y$  au premier niveau aussi.

#### b) Déplacements

Nous présentons ci après les résultats des six déplacements inter étages calculées par le modèle utilisé (figure 3.8.a et 3.8.b) :

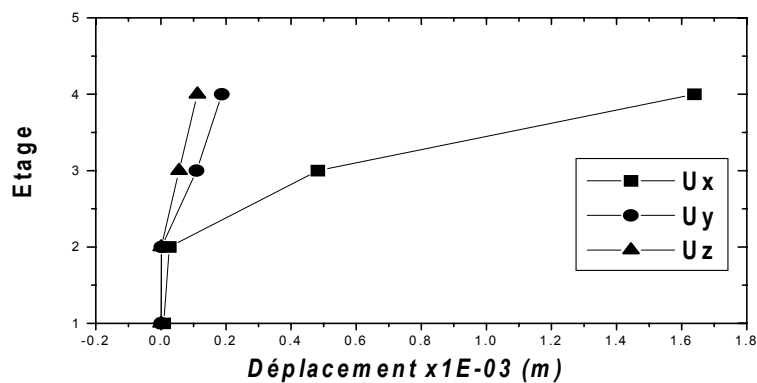


Figure 3.8 a : Les trois déplacements obtenus par modèle utilisé.

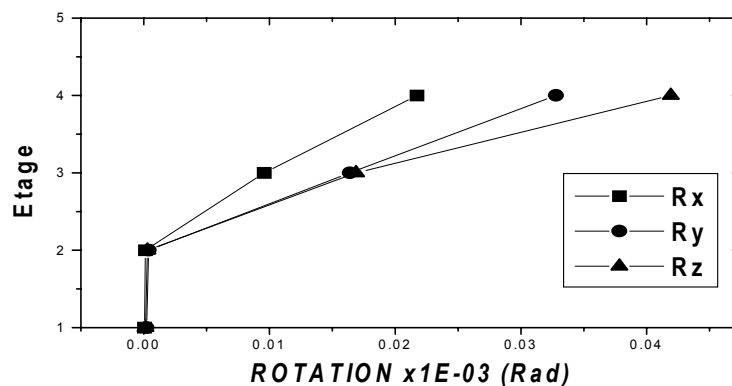


Figure 3.8 b : Les trois rotations obtenues par le modèle utilisé.

La figure 3.8.a montre que la translation dans le sens de l'excitation (sens x) est prépondérante par rapport aux deux autres directions. La figure 3.8.b montre que la torsion (Rotation autour de z) est présente et qu'elle devient importante au fur et à mesure que l'on monte dans les niveaux la valeur maximale qu'elle atteint est de  $4.2 \cdot 10^{-5}$  radian soit un angle de  $0.0024^\circ$ .

### c) Excentricité dynamique

Le modèle utilisé nous a permis de calculer les excentricités dynamiques inter-étage. Les résultats des excentricités dynamiques et statiques sont représentés sur les figures 3.9a, 3.9b, 3.9c et 3.9d.

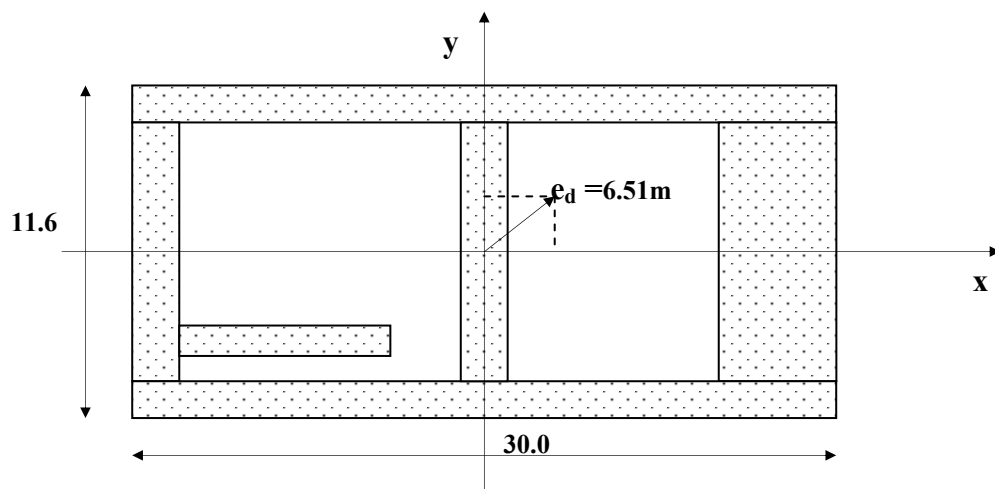


Figure 3.9.a : Vue en plan de l'excentricité dynamique du premier niveau du bâtiment EDF

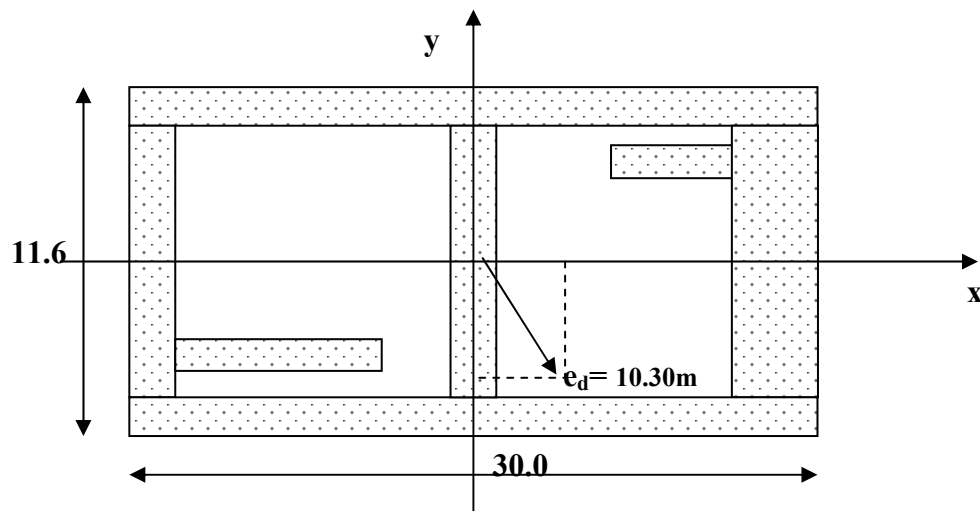


Figure 3.9.b : Vue en plan de l'excentricité dynamique du deuxième niveau du bâtiment EDF

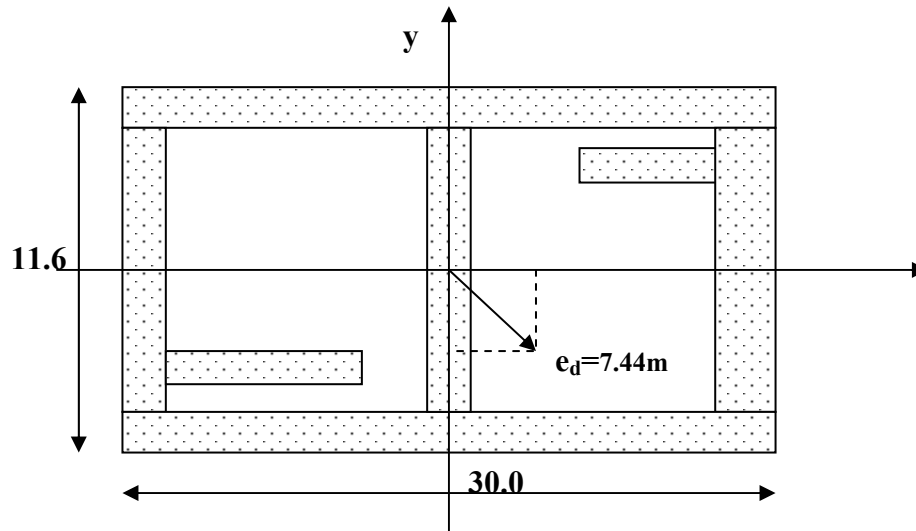


Figure 3.9.c : Vue en plan de l'excentricité dynamique du troisième niveau du bâtiment EDF

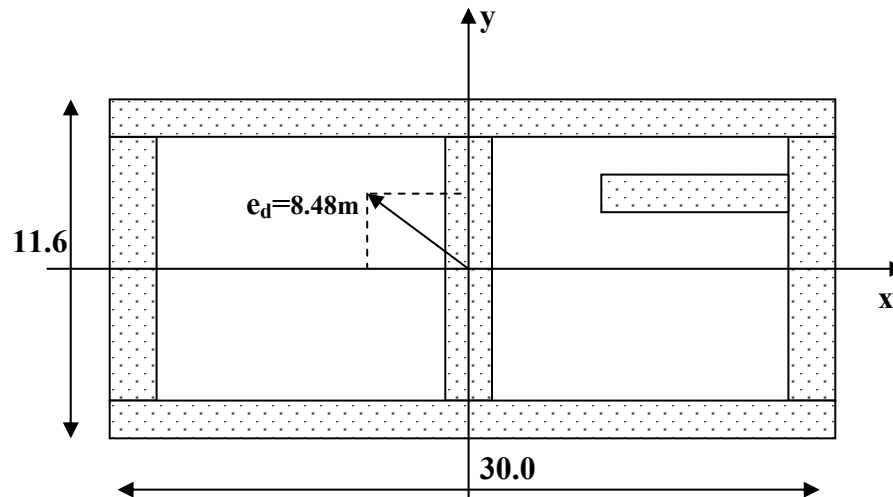


Figure 3.9.d : Vue en plan de l'excentricité dynamique du quatrième niveau du bâtiment EDF

Les résultats des excentricités dynamiques ( $e_d$ ) présentés sur les figures 3.9a, 3.9b, 3.9c et 3.9d montrent qu'il y'a une variation de l'excentricité inter-étages. Cette dernière est plus importante au deuxième niveau par rapport aux trois autres niveaux. A ce niveau il y'a un écart entre la position du centre de torsion et le centre de masse égale à 31% d'où l'effet non négligeable du phénomène de torsion qui peut engendrer des déséquilibres au niveau des éléments de contreventements. Ceci est dû à une distribution non uniforme des masses inter-étage.

## II. Bâtiments ISPRA

Il s'agit d'un bâtiment du centre de recherche ISPRA en France. Nous avons soumis ce dernier à l'accélérogramme du séisme de Morgan Hill.

C'est un bâtiment de base carré (10m x 10m) à quatre étages, constitué : d'un radier d'épaisseur 0.75m, de quatre planchers identiques et d'un système de contreventement par portiques formés de poutres et poteaux. Les planchers sont constitués de dalles de 0.15m d'épaisseur reposant sur le réseau de poutres croisées (figure 3.11) [1]. Les autres caractéristiques sont :

Données physiques :

- Module d'Elasticité  $E=3.05 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$  ;
- Coefficient de Poisson :  $\nu=0.2$  ;
- Masse volumique de béton :  $\rho=2500 \text{ kg/m}^3$ .

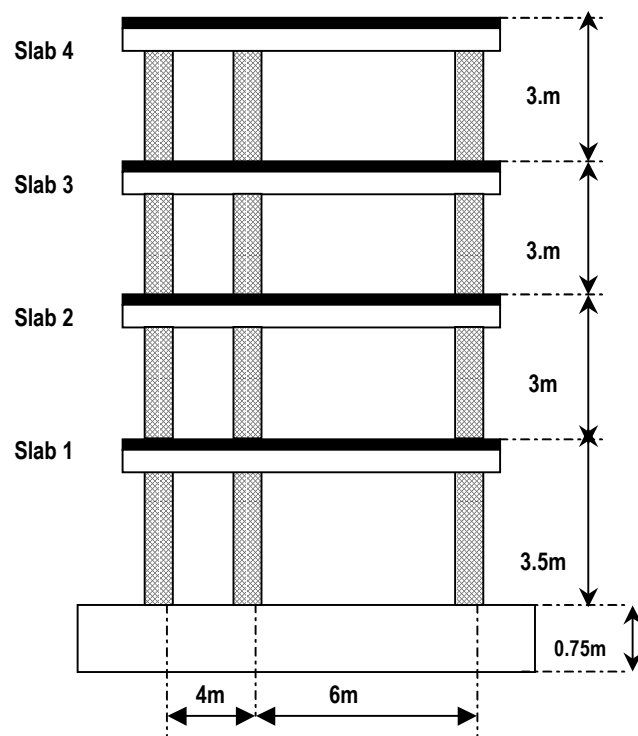


Figure 3.10 : Bâtiment ISPRA à 4 étages.

L'exemple présenté dans la figure 3.10 a été étudié par le modèle utilisé pour l'évaluation des six efforts internes inter étages et ainsi que le calcul des excentricités dynamiques.

Nous présentons ici les résultats obtenus.

a) Efforts internes

Nous avons appliqué le modèle proposé pour le calcul des six efforts internes inter-étages pour le bâtiment ISPRA dans le cas d'un système non amorti. Nous avons représentés les résultats trouvés c à d les efforts tranchants  $T_x$  et  $T_y$  (respectivement selon l'axe x et y) ainsi que l'effort normal N sur la figures 3.11.

Sur la figures 3.12 nous avons tracé les moments de flexion  $M_x$  et  $M_y$  (respectivement selon l'axe x et y) ainsi que le moment de torsion  $M_z$ .

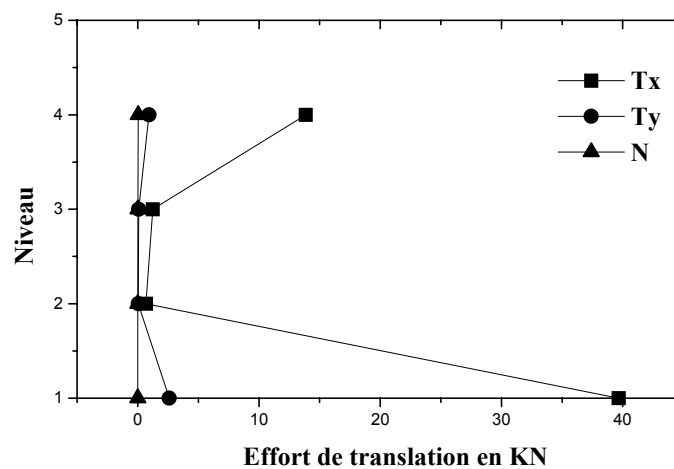


Figure 3.11 : Diagramme représentant les trois efforts internes de translation inter-étages du bâtiment ISPRA.

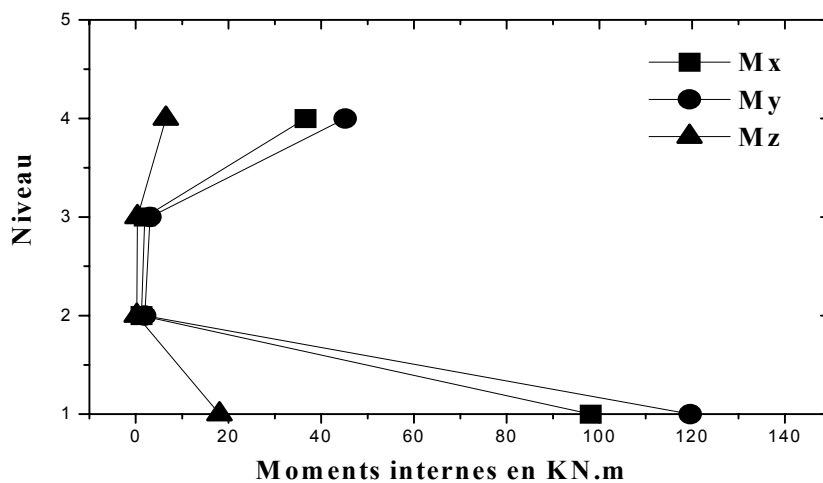


Figure 3.12 : Diagramme représentant les trois moments de rotations inter-étages du bâtiment ISPRA.



L'effort tranchant  $T_x$  est important au premier niveau c'est d'ailleurs cette valeur dont il faudra tenir compte pour le dimensionnement. Par rapport à l'effort tranchant  $T_y$  et l'effort normal est cela du premier niveau jusqu'au dernier.

Le moment de flexion autour de l'axe  $y$  est important par rapport au moment de flexion autour de l'axe  $x$ , cela du premier niveau jusqu'au dernier. C'est aussi la valeur maximal du moment  $M_y$  dont il faudra tenir compte pour le dimensionnement. Le moment de torsion est présent mais négligeable devant les deux moments de flexion.

#### b) Excentricité dynamique inter étages

Pour le bâtiment ISPRA nous avons calculés l'excentricités dynamiques inter-étage. Les principaux résultats sont représentés sur la figure (3.13 a-b-c et d).

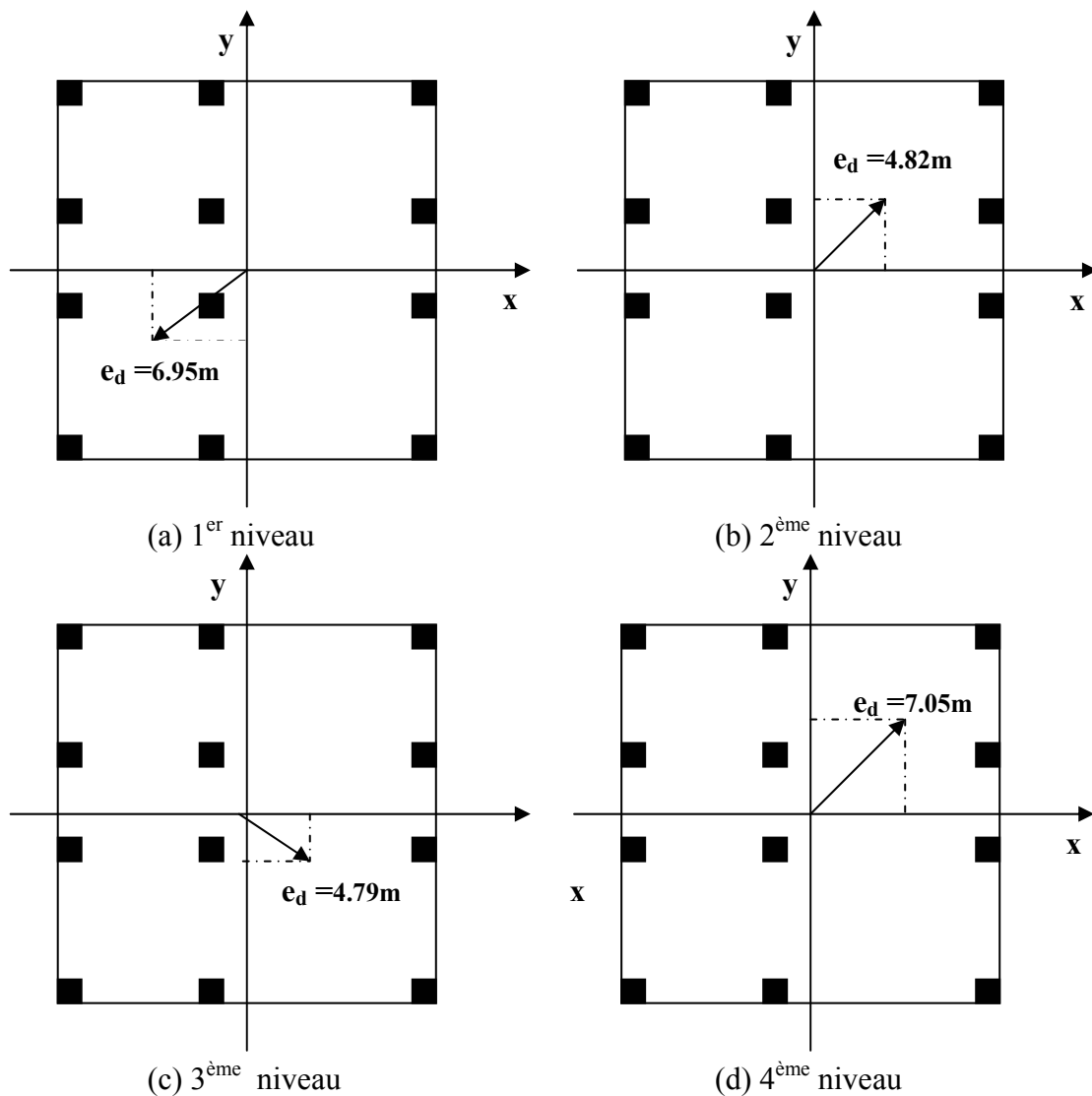


Figure 3.13 a-b-c et d : Vue en plan représentant les excentricités dynamiques inter-étages pour le bâtiment ISPRA

La figure (3.13 a-b-c et d) présentes les résultats des excentricités dynamiques ( $e_d$ ) et montrent la variation de cette excentricité du premier au dernier niveau. Cette excentricité est maximum au quatrième niveau. La valeur maximale de l'excentricité dynamique situé au 4<sup>ème</sup> niveau est de 7.05m ce qui représente un écart entre le centre de torsion et le centre de masse d'environ 41%. Ce qui rend le phénomène de torsion non négligeable.

### III. Bâtiment logements de fonction lycée Bachir El Ibrahimi de Aïn Temouchent

C'est un bâtiment réalisé en un sous sol plus rez de chaussée et quatre étages. Il est constitué d'un radier d'épaisseur 0.75m, de six planchers identiques et d'un système de contreventement par portiques formés de poutres et de poteaux. Les planchers sont constitués de dalles pleines en béton armé de 0.20m d'épaisseur reposant sur un réseau de poutres croisées (figure 3.14-a, b, c et d). La structure est excitée par l'accélérogramme du séisme de Aïn Temouchent [1]. Les autres caractéristiques sont:

Données physiques :

- Module d'Elasticité :  $E = 3.216 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$  ;
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.2$  ;
- Masse volumique de béton :  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ .

#### Niveau sous-sol

plancher dalle en BA de 20cm  
hauteur sous plafond: 3.40m  
p1: poteau de 30cmx30cm  
p2: poteau de 40cmx40cm

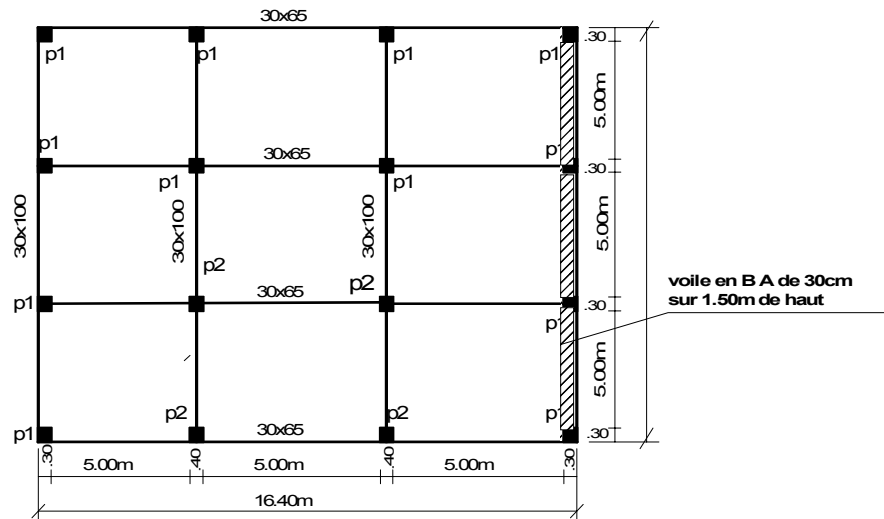


Figure 3.14-a : Vue en plan du sous-sol

Batiment R+4 Logements de fonction  
lycée Bachir El Ibrahim

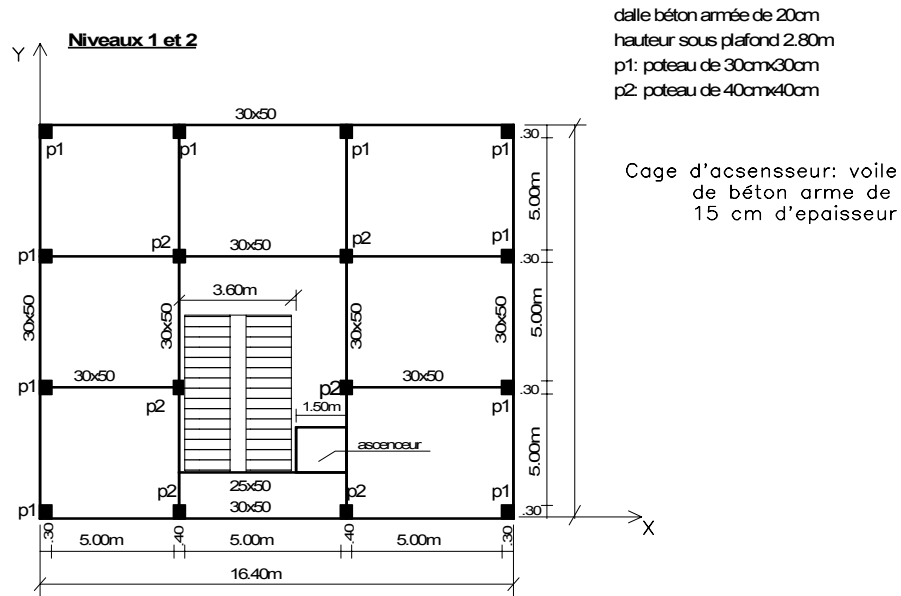


Figure 3.14-b : Vue en plan du 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> niveau

**Niveau 3 et 4**

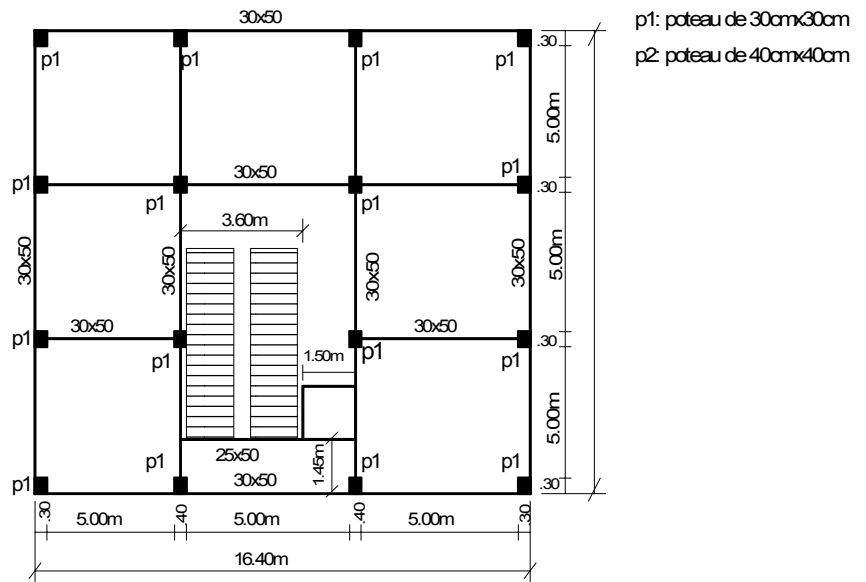


Figure 3.14-c : Vue en plan du 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> niveau

**Niveau 5 (terrasse)**

dalle béton armée de 20cm  
 hauteur sous plafond 2.80m  
 p1: poteau de 30cmx30cm  
 p2: poteau de 40cmx40cm

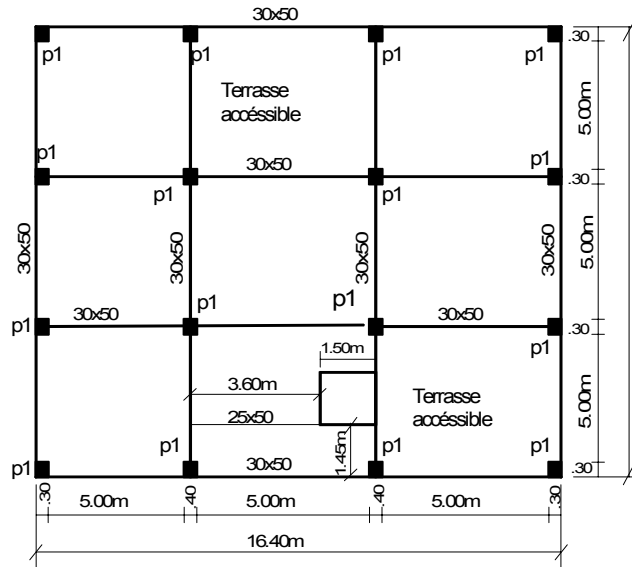


Figure 3.14-d : vue en plan du 5<sup>ème</sup> niveau (terrasse)

**a) Efforts internes**

Les deux efforts tranchants  $T_x$  et  $T_y$  ainsi que l'effort normal  $N$ , en plus des deux moments de flexion  $M_x$  et  $M_y$  et la torsion  $M_z$  ont été calculés par le modèle. Les résultats trouvés sont représentés sur la figure 3.15.a et 3.15.b.

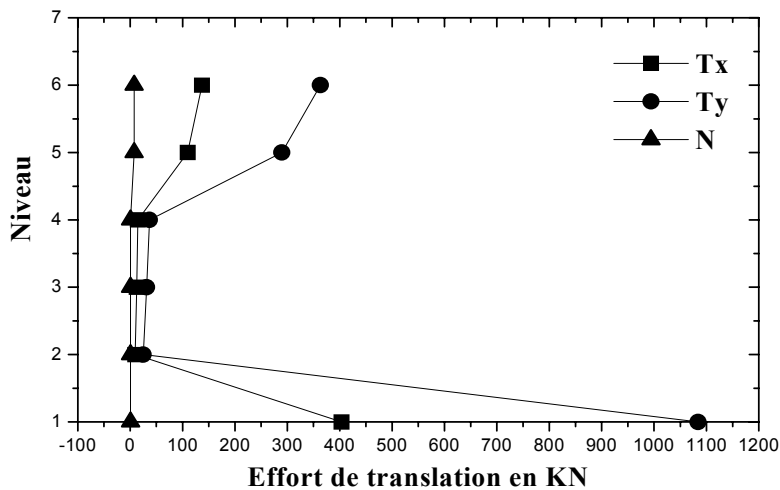


Figure 3.15-a : Diagramme des trois efforts internes de translation inter étages du bâtiment Bachir El Ibrahim

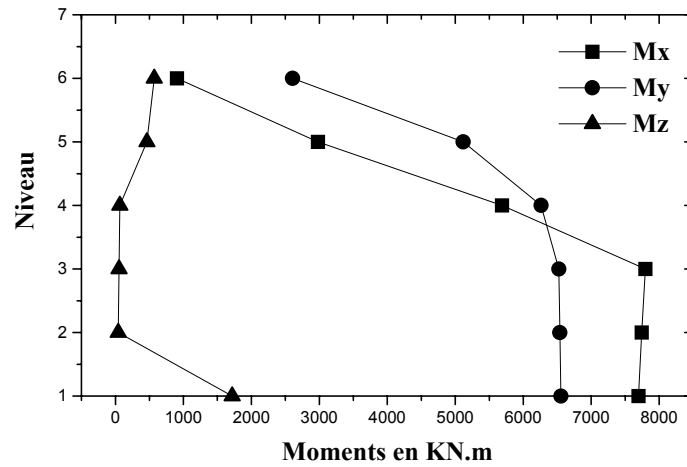


Figure 3.15-b : Diagramme des trois Moments internes de rotations inter-étages du bâtiment Bachir El Ibrahim

On note que l'effort tranchant  $T_y$  est important par rapport au deux efforts  $T_x$  et  $N$  au premier niveau, alors qu'au 2<sup>ème</sup>, 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> niveau les trois efforts  $T_x$ ,  $T_y$  et  $N$  sont presque confondu contrairement au 5<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> niveau où  $T_y$  est supérieur à  $T_x$  et à  $N$ .

Le moment de flexion  $M_x$  est important par rapport à  $M_y$  et à la torsion  $M_z$  au premier, deuxième et le troisième niveau. Par contre au 4<sup>ème</sup>, 5<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> niveau c'est le moment de flexion autour de l'axe  $y$  qu'est important par rapport au deux autres moments ( $M_x$  et  $M_z$ ). Dans se bâtiment la torsion existe mais elle n'est pas très importante devant les deux moments de flexion.

Dans tout les cas de figure les deux efforts qu'il faut considéré pour le dimensionnement de la structure est l'effort tranchant  $T_y$  et le moment de flexion  $M_x$  au premier niveau.

#### b) Excentricité dynamique

Nous avons calculés l'excentricité dynamique inter-étage. Les résultats sont représentés sur la figure 3.16.

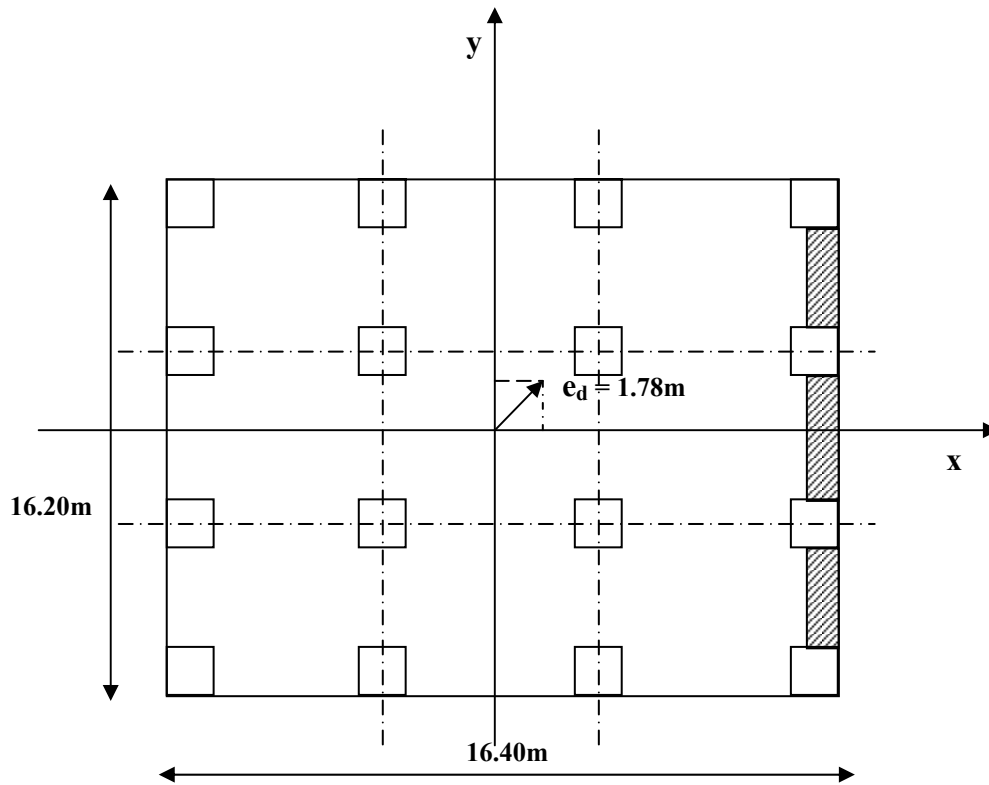


Figure 3.16 : Vue en plan de l'excentricité dynamique du 4<sup>ème</sup> niveau pour le Bâtiment Bachir El Ibrahim

La figure 3.16 représente l'excentricité dynamique maximale située au niveau du quatrième étage la valeur trouvée est de 1.78m en calculons l'écart entre le centre de masse et le centre de torsion on trouve une valeur de 78% ce qui représente une valeur d'excentrement très importante par rapport au centre de masse. Nous concluons que l'effet de torsion pour cette structure est important et ne peut être négligé dans les calculs. Pour les autres valeurs de l'excentricité dynamique  $e_d$  les résultats trouvés sont représentés sur le Tableau 3.3 et nous montre que la variation du centre de torsion au premier et deuxième niveau n'est pas importante, alors que le centre de torsion au 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> niveau devient légèrement grande par rapport au premier et deuxième niveau. Enfin pour le 5<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> niveau l'excentricité diminue.

Cet état de fait est réel car cette structure a subi des dégradations au niveau des éléments de contreventement après le séisme de Aïn Timouchent constaté lors des expertises effectuées par le Centre national de recherche en Génie parasismique (C.G.S) et classé orange3. Donc on peut dire que les résultats confirment la réalité du terrain.

Tableau 3.3 : Excentricité dynamique

niveau	Excentricité dynamique en (m)
1	1.627
2	1.637
3	1.743
4	1.778
5	1.648
6	1.614

#### IV. Plancher sur trois poteaux

Dans cette exemple on a considéré le cas non amortie d'une structure à un seul étage constituée d'un plancher carré de côté  $L = 10\text{m}$ , et d'épaisseur  $0.40\text{m}$ , reposant sur trois colonnes identiques en trois points (figure 3.17). La structure est excitée par le séisme de Morgan Hill, les caractéristiques de chaque colonne sont :

□ Données géométriques :

$L' = 10.00\text{m}$  ; section transversale carrée d'arête  $a = 0.30\text{m}$ .

□ Données physiques :

$\rho = 2500 \text{ Kg/m}^3$  ;  $\nu = 0.2$  ;  $E = 4.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ .

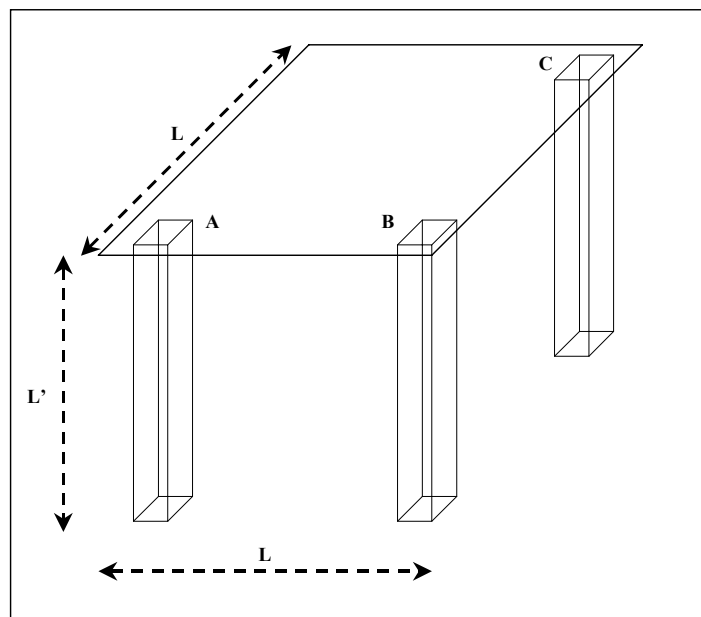


Figure 3.17 : planchers sur trois poteaux

Les résultats trouvés sont résumés comme suit :

a) Efforts internes

Nous donnons dans le tableau 3.4 les résultats obtenus pour les efforts internes de cet exemple.  $T_x$  et  $T_y$  étant les efforts tranchants.  $N$  l'effort normal,  $M_x$  et  $M_y$  les moments de flexion et  $M_z$  le moment de torsion.

Tableau 3.4 : les six efforts internes du bâtiment trois pieds

<b>EFFORT</b>	<b>MODELE UTILISE</b>
$T_x$ (KN)	-288.04
$T_y$ (KN)	390.01
$N$ (KN)	0.844
$M_x$ (KN.m)	55.95
$M_y$ (KN.m)	41.55
$M_z$ (KN.m)	524.65

On remarque que l'effort tranchant  $T_y$  est supérieurs à  $T_x$  et  $N$  alors que la torsion est importante par rapport aux deux moments de flexion. Dans cette structure la torsion est prépondérante et non négligeable. Le dimensionnement de cette structure se fera en prenant en compte les efforts les plus défavorables qui sont  $M_x$  et  $T_y$ .

b) Excentricité dynamique

Le calcul de l'excentricité dynamique pour cette structure à partir du modèle utilisé a donné une excentricité dynamique  $e_d = 2.27m$ . Cette valeur nous montre que le centre de torsion est décalé par rapport au centre de masse de la structure avec un écart de 54.6% la torsion est donc très importantes et non négligeable cela peut crée un déséquilibre au niveau des éléments de contreventements.

3.5 Conclusion

Nous avons mis en œuvre les développements que nous avons présentés au (chapitre 2). Nous les avons validés puis testés sur un certain nombre d'exemples. Les résultats obtenus semblent prometteur et sont dans quelques cas très proches des solutions exactes.

L'interprétation des résultats est aisé par cette méthode car donnant les efforts dont on a besoin directement pour le dimensionnement. La détermination de l'excentricité dynamique permet de positionner le centre de torsion d'une structure et de le comparer au centre de masse.



Cette excentricité dynamique ouvre la voie à des développements futurs multiples tel que la détermination de l'excentricité accidentelle. Rappelons que les résultats obtenus ici, ne tiennent pas compte de l'interaction sol-structure, cette dernière est prise en compte dans le chapitre suivant.

## CHAPITRE 4

### INTERACTION SOL-STRUCTURE

#### 4.1 Introduction

L'influence du sol sur la réponse dynamique des structures est importante du fait de la modification des caractéristiques dynamiques de la structure en présence d'un sol déformable, cette influence du sol dépend de plusieurs paramètres tels que le type de sol (granite, argile, alluvion, marne, etc.), propagations des ondes et ou les conditions aux limites. C'est pourquoi la prise en compte de l'interaction sol-structure est impérative pour toute structure sujette à des mouvements sismiques. Plusieurs chercheurs ont essayé de prendre en considération cette influence, d'ailleurs de nombreux travaux dans ce domaine ont eu lieu afin d'essayer d'apporter aux ingénieurs des solutions simples d'utilisations (ex. les travaux de Meek J. et Wolf J. [38]). Le modèle le plus répandu pour la modélisation de l'interaction sol-structure est la méthode des éléments finis, mais cette dernière s'avère dans certains cas très lourde à cause du nombre élevé de degrés de liberté à considérer.

Dans le cadre du présent travail, nous nous sommes intéressés à cet aspect du problème en introduisant les effets de l'interaction sol-structure dans le modèle utilisé ceci dans le domaine fréquentiel dans le cas d'une fondation rigide superficielle.

#### 4.2 Fondation rigide superficielle

L'interaction cinématique d'une fondation rigide superficielle, reposant sur une stratigraphie horizontale excitée par un champ incident composé d'onde de cisaillement ou de compression à propagation verticale est nulle ; le mouvement de la fondation sans masse est celui de la surface du sol en l'absence de toutes ouvrages. L'approche intuitive, consistant à calculer la réponse du bâtiment posé sur des ressorts de sol dont la base est excitée par un accélérogramme, est donc exacte dans ce cas particulier à condition que l'impédance, le « ressort » de sol, soit déterminé correctement.

#### 4.3 Impédance d'une fondation rigide superficielle

Les fonctions d'impédance de la fondation relient, dans le domaine des fréquences, les forces aux déplacements, tous les deux choisis au centre de gravité de la surface de contact dans un repère lié aux axes principaux d'inertie de la surface. Elle s'exprime sous

la forme d'une matrice 6x6 contenant de nombreux termes nuls. Ses termes dépendent généralement de la fréquence [1, 28 et 29].

Les coefficients d'impédance équivalents les plus répandus et les plus souvent utilisés dans le calcul dynamique sont des valeurs constantes (tableau 4.1). Ils sont utilisés dans la matrice de raideur [1, 28 et 29].

Tableau 4.1 : Valeurs des coefficients d'impédance [10]

Mode de vibration	Coefficients d'impédance équivalents	
	Partie réelle $k_1$	Partie imaginaire $c_1$
Vertical	1.0	0.850
Horizontal	1.0	0.576
Balancement	1.0	$\frac{0.30}{1 + \frac{3(1-\nu)I_x}{8\rho R_o^5}}$
Torsion	1.0	$\frac{\frac{V_s}{r_o} \sqrt{\frac{I_z}{k_\theta}}}{1 + \frac{2I_x}{\rho R_o^5}}$

Avec :

$I_x, I_y$  et  $I_z$  sont les inerties respectives de la fondations par rapport à l'axe x, y et z

$k_\theta$ , rigidité de torsion de la fondation

La matrice de raideur intervenant dans le calcul des modes propres avec prise en compte de l'interaction sol-fondation est de la forme suivante [29] :

$$K_{sol} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_x(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_y(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\phi z}(\omega) \\ k_{\phi x}(\omega) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\phi y}(\omega) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_y(\omega) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (93)$$

$k_x(\omega)$  : Fonction d'impédance selon le mode de translation x

$k_y(\omega)$  : Fonction d'impédance selon le mode de translation y

$k_v(\omega)$  : Fonction d'impédance selon le mode de translation verticale z

$k_{\phi_x}(\omega)$  : Fonction d'impédance selon le mode de rotation par rapport à l'axe  
x (balancement)

$k_{\phi_y}(\omega)$  : Fonction d'impédance selon le mode de rotation par rapport à l'axe  
y (balancement)

$k_t(\omega)$  : Fonction d'impédance selon le mode de torsion.

Les fonctions d'impédances selon le mode de vibration sont obtenus comme suit :

1. La fonction d'impédance de translation horizontales  $k_x(\omega)$  et  $k_y(\omega)$  respectivement dans le sens x, y et la fonction d'impédance de translation verticale dans le sens z sont obtenus à partir des formules suivantes [10, 29] :

$$\left. \begin{aligned} k_x(\omega) &= k_x^s (k_1 + ia_0 c_1) \\ k_y(\omega) &= k_y^s (k_1 + ia_0 c_1) \\ k_v(\omega) &= k_v^s (k_1 + ia_0 c_1) \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

$k_x^s, k_y^s$  : Rigidité statique de translation horizontale dans le sens x, y respective.

$k_v^s$  : Rigidité statique de translation verticale dans le sens z.

$k_1$  et  $c_1$  : coefficient d'impédance équivalents [tableau 4.1]

$a_0$  : Pulsation adimensionnelle

2. La fonction d'impédance de rotations (balancement) autour de l'axe x, y respectivement  $k_{\phi_x}(\omega)$  et  $k_{\phi_y}(\omega)$  et la fonction d'impédance de rotation (torsion) autour de l'axe z  $k_t(\omega)$  sont obtenus à partir des formules suivantes [10, 29] :

$$\left. \begin{aligned} k_{\phi_x}(\omega) &= k_{\phi_x}^s (k_1 + ia_0 c_1) \\ k_{\phi_y}(\omega) &= k_{\phi_y}^s (k_1 + ia_0 c_1) \\ k_t(\omega) &= k_t^s (k_1 + ia_0 c_1) \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

$k_{\phi x}^s$  et  $k_{\phi y}^s$  : Rigidité statique de rotation autour de l'axe x, y respective.

$k_t^s$  : Rigidité statique de torsion autour de l'axe z.

La pulsation adimensionnelle  $a_0$  est obtenue à partir de la formule suivante :

$$a_0 = \frac{\omega R_0}{V_s} \quad (96)$$

$\omega$  : Pulsation de l'excitation

$R_0$  : Rayon de la fondation (circulaire)

$V_s$  : Vitesse des ondes de cisaillement du sol (Célérité)

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (97)$$

$G$  : coefficient de cisaillement de sol

$\rho$  : masse volumique sol

$E$  : module d'élasticité du sol.

La rigidité statique de translation horizontal et vertical en x, y et z s'écrivent comme suit :

$$k_x^s = k_y^s = \frac{32(1-\nu)GR_0}{7-8\nu} \quad (98)$$

$$R_0 = \left[ \frac{4BL}{\pi} \right]^{1/2} \quad (99)$$

$$k_v^s = \frac{4GR_0}{1-\nu} \quad (100)$$

$B, L$  : Dimension en plan de la fondation.

$R_0$  : Rayon équivalent de la fondation rectangulaire.

$\nu$  : Coefficient de poisson.

La rigidité statique de rotation autour de l'axe x, y respective (balancement) s'écrivent comme suit :

$$k_{\phi x}^s = \frac{8GR_0^3}{(1-\nu)\beta} \quad (101)$$

$$k_{\phi y}^s = \frac{8GR_0^3}{(1-\nu)\beta} \quad (102)$$

Le rayon équivalent dans le sens x et y respectivement sont obtenus à partir des formules suivantes [29] :

$$R_0 = \left[ \frac{16BL^3}{3\pi} \right]^{1/4} \quad (103)$$

$$R_0 = \left[ \frac{16B^3L}{3\pi} \right]^{1/4} \quad (104)$$

La rigidité statique de torsion autour de l'axe z s'écrit comme suit :

$$k_t^s = \frac{16GR_0^3}{3} \quad (105)$$

Alors que le rayon équivalent de torsion s'écrit comme suit :

$$R_0 = \left[ \frac{8BL(B^2 + L^2)}{3\pi} \right]^{1/4} \quad (106)$$

#### 4.4 Equations du mouvement

Lorsque les impédances de la fondation sont connues, les équations du mouvement d'un système sol-structure s'écrivent comme suit [28, 29]:

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + \left[ \frac{dX}{dt}, M \frac{dX}{dt} \right] + B(\omega) \frac{dX}{dt} + K(\omega)X = -M\ddot{u}_g I_N \quad (107)$$

$X, \frac{dX}{dt}, \frac{d^2 X}{dt^2}$  = Vecteurs de déplacement, de vitesse et d'accélération de la structure,

Et où la masse totale du système sol-structure est donnée par la formule suivante :

$$M = M_G^{Structure} + M_{Fondation} \quad (108)$$

$M$  : Matrice de masse du système sol-structure.

$K(\omega)$  : Matrice de rigidité du système sol-structure

$$\text{Qui est égale à : } K(\omega) = K_G^{Structure} + K_{Sol} \quad (109)$$

$B(\omega)$  : Matrice de d'amortissement du système sol-structure

$I_N$  : Vecteur unité.

$\ddot{u}_{gi}$  : Accélération du mouvement de la base.

Comme les matrices de rigidité et d'amortissement dépendent de la fréquence, la solution des équations du mouvement est donnée par la transformation de Fourier de l'équation (107) :

$$-\omega^2 M \bar{X}(\omega) + i\omega [\bar{X}(\omega), M \bar{X}(\omega)] + i\omega B(\omega) \bar{X}(\omega) + K(\omega) \bar{X}(\omega) = \omega^2 M \bar{\ddot{u}}_g(\omega) I_N \quad (110)$$

$$[-\omega^2 M + i\omega B(\omega) + K(\omega)] \bar{X}(\omega) + i\omega [\bar{X}(\omega), M \bar{X}(\omega)] = \omega^2 M \bar{\ddot{u}}_g(\omega) I_N \quad (111)$$

Avec :

$$\bar{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \exp(-i\omega t) dt \quad \text{si} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)| dt \text{ est fini} \quad (112)$$

Où :

$\bar{X}(\omega)$  : Vecteur de déplacement généralisé obtenu par la transformée de Fourier du vecteur déplacement relatif  $X(t)$ .

$\bar{\ddot{u}}_{gi}(\omega)$  : Transformation de Fourier de  $\ddot{u}_{gi}(t)$ .

Afin de simplifier l'écriture de l'équation (111) on pose :

$$\alpha(\omega) = \frac{\bar{X}(\omega)}{[\bar{X}(\omega), M \bar{X}(\omega)]} \quad (113)$$

$$\text{Et } \beta(\omega) = \frac{1}{[\bar{X}(\omega), M \bar{X}(\omega)]} \quad (114)$$

L'équation (111) peut s'écrire alors de la manière suivante :

$$\alpha(\omega) [-\omega^2 M + i\omega B(\omega) + K(\omega)] + i\omega = \beta(\omega) \omega^2 M \bar{\ddot{u}}_g(\omega) I_N \quad (115)$$

On obtient alors  $\alpha(\omega)$  qui est une forme complexe définie par la formule suivante :

$$\alpha(\omega) = \frac{\beta(\omega) \omega^2 M \bar{\ddot{u}}_g(\omega) I_N}{[-\omega^2 M + i\omega B(\omega) + K(\omega)]} - \frac{i\omega}{[-\omega^2 M + i\omega B(\omega) + K(\omega)]} \quad (116)$$

Pour la résolution de l'équation (115) on a supposé que le vecteur de déplacement généralisé  $\bar{X}(\omega)$  est égal à l'unité afin de pouvoir calculer  $\beta(\omega)$  et en remplaçant dans l'équation (116) on peut alors calculer le module  $\alpha(\omega)$  qui est obtenu par la formule suivante :

$$\|\alpha(\omega)\| = \sqrt{\left( \frac{\beta(\omega) \omega^2 M \bar{\ddot{u}}_g(\omega) I_N}{[-\omega^2 M + i\omega B(\omega) + K(\omega)]} \right)^2 + \left( \frac{i\omega}{[-\omega^2 M + i\omega B(\omega) + K(\omega)]} \right)^2} \quad (117)$$

Le module  $\alpha(\omega)$  ainsi obtenu on passe alors au calcul du vecteur de déplacement généralisé qui est défini par la formule suivante :

$$\bar{X}(\omega) = \alpha(\omega) [\bar{X}(\omega), M \bar{X}(\omega)] \quad (118)$$

Si N est le nombre total des degrés de liberté du système sol-structure, le système d'équations (115) est constitué de 2N équations linéaires simultanées et peut être résolu par

les algorithmes standards de résolution des systèmes linéaires. L'historique de la réponse de la structure est ensuite obtenu en calculant l'inverse de la transformation de Fourier :

$$X(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X}(\omega) \cdot \exp(i\omega t) d\omega \quad (119)$$

#### 4.5 Exemple d'application

La formulation présentée précédemment a été mis en œuvre et introduit dans la méthode hexadimensionnel. Nous avons considéré l'exemple du bâtiment EDF présenté au chapitre 3 paragraphe (3.4-I.) ce bâtiment a été étudié pour trois types de sols différents (Granites, Argile et Sable) afin de comparer les résultats.

Les caractéristiques mécaniques de ces trois sols sont données dans le tableau 4.2 suivant :

Tableau 4.2 : Caractéristiques des sols considérés

Type de sol	$\nu$	G (MN/m <sup>2</sup> )	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Granites	0.38	11200	2640
Sable	0.38	110	1800
Argile	0.38	278	1558

Les résultats obtenus avec le modèle pour les trois types de sol (Granite, Argile et sable) concernant les fréquences propres sont représentés dans le tableau 4.3.

Tableau 4.3 : Fréquences propres obtenues dans le cas de l'interaction sol-structure

Numéro de mode	Domain fréquentiel			Domain temporelle [1]		
	Granite	Argile	Sable	Granite	Argile	Sable
1	<b>16.09</b>	<b>4.78</b>	<b>3.04</b>	15.27	4.57	2.93
2	<b>23.48</b>	<b>5.65</b>	<b>3.91</b>	22.87	5.54	3.52
3	<b>25.22</b>	<b>8.26</b>	<b>5.12</b>	24.60	7.96	5.03
4	<b>41.74</b>	<b>9.11</b>	<b>6.09</b>	39.84	8.86	5.73
5	<b>43.48</b>	<b>10.86</b>	<b>6.96</b>	41.91	10.75	6.80
6	<b>47.83</b>	<b>13.48</b>	<b>8.69</b>	46.77	13.13	8.34
7	<b>53.91</b>	<b>38.26</b>	<b>37.83</b>	53.58	36.83	36.29
8	<b>73.48</b>	<b>54.35</b>	<b>53.04</b>	71.89	52.52	51.79
9	<b>74.78</b>	<b>58.26</b>	<b>57.39</b>	73.44	56.70	56.28
10	<b>77.83</b>	<b>59.13</b>	<b>57.83</b>	76.76	57.37	56.88



Les résultats obtenus montrent un constat bien établi, qu'une structure construite sur du granite se comporte mieux que si elle était construite sur de l'argile ou du sable (figure 4.1).

La non considération de l'interaction sol-structure conduit à une surestimation de la fréquence de la structure surtout pour les modes supérieurs. D'où l'intérêt de la prise en compte de l'effet du sol surtout en présence d'un sol de type argileux ou sableux (figure 4.1).

Les résultats de dans le tableaux 4.3 montre que les fréquences propres de la structure obtenus dans le domaine fréquentiel sont supérieurs a ceux du domaine temporelle [1] avec un écart maximal de 3%. Cette marge d'écart n'est pas très grande ce qui nous fait dire que compte tenu du faible écart et de la difficulté de programmations dans le domaine fréquentiel par rapport au domaine temporel il est préférable d'utiliser ce dernier pour les fondations rigides superficielles.

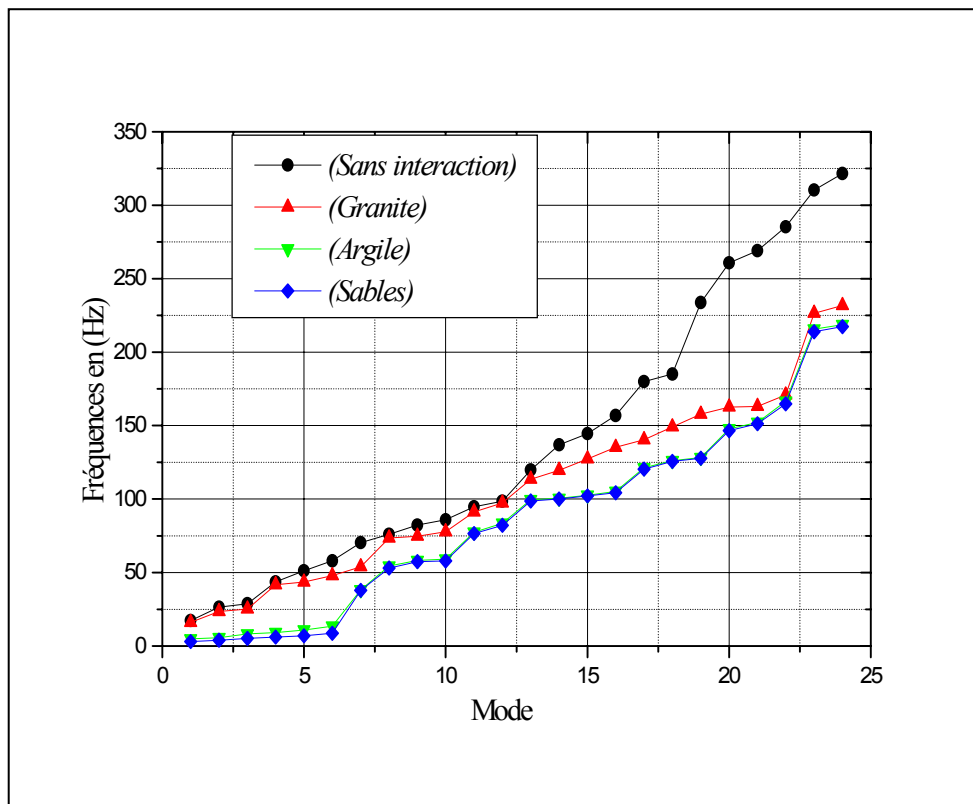


Figure 4.1 : Comparaison entre les fréquences obtenus dans le domain fréquentiel pour les trois types de sols

#### 4.6 Conclusion

La prise en compte de l'interaction sol structure à fait l'objet d'une analyse dans ce chapitre pour la détermination des fréquences propres de la structure. Nous avons pris l'exemple du bâtiment EDF (chapitre 3.4.I) en considérant trois types de sols (Granite, argile et sable). D'après les résultats trouvés nous remarquons que plus le sol est mou plus les fréquences diminues contrairement au sol ferme ou les fréquences obtenus sont proches des fréquences de la structure, ce constat est en conformité avec la réalité.

En comparant les résultats obtenus dans le domaine fréquentiel avec ceux du domaine temporelle [1] nous avons trouvés qu'il n'y a pas un grand écart entre les deux domaines, donc pour des études plus approfondie de l'interaction sol-structure il est préférable de prendre en considération le domaine temporel que le domaine fréquentiel compte tenu de la complexité de la méthode fréquentiel.

## CONCLUSION

Les structures en génie civil sont sujettes dans leur environnement aux mouvements de translation et de rotation, soit trois translations et trois rotations du point de vue physique. Les trois translations correspondent aux deux déplacements longitudinaux et au déplacement vertical. Les trois rotations correspondent aux deux moments de flexion et au moment de torsion. La prise en compte de ces six mouvements (ou six efforts) nécessite l'utilisation d'une approche hexadimensionnelle. Cette approche se justifie par la nécessité de déterminer toutes les composantes du mouvement de la structure pour son dimensionnement correct, surtout si cette structure présente des dissymétries d'ordre architectural ou massique. Car à ce moment le phénomène de torsion peut prendre des proportions importantes et il devient prépondérant de le prendre en charge.

L'approche que nous utilisons dans ce travail se base sur la géométrie de Lie qui permet la prise en compte des six composantes de déplacement d'une structure. Le modèle qui en découle s'appelle « méthode par matrice de transfert à six degrés de liberté » ce modèle a été utilisé pour déterminer les six efforts internes d'une structure quelle soit symétrique ou non.

Le développement mathématique et la mise en œuvre de ces efforts ont été effectués lors de ce travail et ont fait l'objet de validation et d'application sur un certain nombre d'exemples. Les résultats obtenus sont satisfaisants.

La détermination de l'excentricité dynamique est aussi l'un des buts de cette thèse. Nous avons réussi à la déterminer à l'aide de notre programme de calcul. Ceci nous ouvre la voie vers des développements futurs très intéressants tel que la détermination de l'excentricité accidentelle dans les structures qui est un axe de recherche actuellement.

La prise en compte de l'interaction sol structure a été aussi l'objet d'une investigation lors du présent travail. Cette investigation a eu lieu en considérant des fondations rigides superficielles et en utilisant une matrice d'impédance de six par six dans le domaine fréquentiel c.à.d une matrice d'impédance complète, ce qui est un problème difficile à résoudre. Néanmoins ceci a été programmé et a donné lieu à de bons résultats.

Le modèle ainsi utilisé semble prometteur et présente de nombreux avantages tels que :

- Une mise en œuvre facile
- Un nombre de degrés de libertés réduit
- Un calcul automatique de l'excentricité dynamique.
- Une détermination des six efforts internes.
- Une prise en compte de l'effet de l'interaction sol-structure dans le domaine fréquentiel et temporel
- Une interprétation des résultats aisés. Car donnant les efforts dont on a besoin directement pour le dimensionnement. La détermination de l'excentricité dynamique permet de positionner le centre de torsion d'une structure et de le comparer au centre de masse.

Ce modèle peut être utilisée dans d'autres investigations afin de prendre en compte les effets d'autres paramètres qui peuvent influencer la réponse d'une structure sous sollicitations sismiques tels que :

- La dégradation des caractéristiques mécaniques des matériaux.
- L'interaction sol structure avec d'autre type de fondation.
- L'estimation de l'excentricité accidentelle.

Des investigations plus approfondie sont nécessaire, nous en somme conscient, mais nous espérons avoir contribuer à faire évoluer l'état des connaissances concernant le phénomène de torsion ainsi que la prise en compte de l'effet de l'interaction sol-structure dans les structures sujette à ce phénomène.

## REFERENCES

1. Badaoui. M « Modélisation Hexadimensionnelle du comportement vibratoire des bâtiments asymétriques » Thèse de magister, sous la direction de Dr Bensaïbi. M, Ecole Nationale des travaux publics, Alger, février 2002.
2. Victor Davidovici « La construction en zone sismique » édition Le Moniteur, Paris, 1999, pp 144-147.
3. Jacques Betbeder-Matibet et Jean-Louis DOURY « Constructions parasismiques », in, technique d'ingénieur, 1984, C. 3 290, pp 14-15.
4. Bourahla N. « Considération de la torsion dans les règlements parasismiques », Rapport de recherche, Département de Génie Civil, Université de Sâad Dahleb, Algérie, Novembre, 1993.
5. Juan C.De la Llera, Student Member, ASCE, and Anil K. Chopra, Member, ASCE, « Estimation of Accidental Torsion Effects for Seismic Design of Buildings », Journal of structural engineering, Vol., 121 No.1, January, 1995.
6. Jagmohan HUMAR and Praveen KUMAR, « A New look at The Torsion Design Provisions in Seismic Buildings Code », 12<sup>th</sup> World conference on Earthquake Engineering Auckland, New Zeland, 30 January - 4 February, 2000.
7. Pascal Heisel « Formation modélisation des structures sous sollicitations sismiques avec logiciel StaadPro2003 », 2004.
8. Touret J.P., « Modélisation des bâtiments dissymétriques », 2<sup>ème</sup> Colloque National A.F.P.S Génie Parasismique et aspects vibratoires dans le Génie civil. Saint- Rémy- Les- chevreuse. (France).18-20 Avril.1989.
9. Vale C. and Sousa-Melo A., «The Influence of the Structural Calculation Method and the Model on Pavement Design », Proceedings of the Fourth International Conference on Engineering Computational Technology, B.H.V. Topping and C.A. Mota Soares (Editors), Civil-Comp Press, Stirling, Scotland, Portugal, September 2004.
10. Pecker A. , « Dynamique Des Sols », cours DEA de l'école national des ponts et chaussées, Site web, <http://www.enpc.fr>, 2004.

11. Hao H., Member, ASCE, and Duan X.N., « Seismic response of asymmetric structures to multiple ground motions », *Journal of structural engineering*, Vol. 121, No.11, November, 1995.
12. Hao H., Member, ASCE, « Response of two-way eccentric building to nonuniform base excitations », *Engineering structures*, Vol. 20, No. 8, pp. 677-684, April, 1998.
13. Chandler A.M., Duan X.N., Rutenberg A., « Seismic torsional assumptions, controversies and research progress », *European Earthquake Engineering*, 1996.
14. Caldéroni.B, D'Aveni.A., Ghersi.A and Rinaldi. Z., « Static vs. Modal Analysis of Asymmetric Buildings: Effectiveness of Dynamic Eccentricity formulations », Vol., 18, No. 2, *Earthquake Engineering Research Institute*, pp 219-231, May 2002.
15. Chandler. A.M and Hutchinson. G.L., « Evaluation of code torsional provisions by a time history approach ». *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, May, 1987.
16. Badaoui M. and Bensaïbi M., « the torsion effect in asymmetric buildings », *Proceedings of the 12<sup>th</sup> European Conference on Earthquake Engineering*. London, Grande Bretagne, September, 2002.
17. M. Bensaïbi « Estimation of the torsion in asymmetric multi-story buildings » *Proceedings de la 2<sup>e</sup> Rencontre en Génie Parasismique des Pays Méditerranéens*, 28-30 octobre, Faro, Portugal, pp 421-433,1999.
18. Paz Mario., « International Hand Book Of Earthquake Engineering: codes, programs, and examples ». Chapman & Hall, Inc, 1994.
19. Chandler A.M. & Correnza J.C & Hutchinson G.L., « Influence of accidental eccentricity on inelastic seismic torsional effects in buildings » *Engineering structures*, Vol., 17 No. 3, pp. 167-178, January, 1995.
20. Juan C.De la Llera, Student Member, ASCE, and Anil K. Chopra, Member, ASCE, « Evaluation of Code Accidental-Torsion Provisions Form Building Records ». *Journal of structural engineering*, Vol.120, No.2, February, 1994.
21. Duan X.N. and Chandler A.M., « Inelastic seismic response of code-designed multi-storey frame buildings with regular asymmetry ». *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, Vol.22, pp 431-445No.1, November, 1992.
22. Shakib .H and Tohidi R.Z., « Evaluation of accidental eccentricity in buildings due to rotational component of earthquake ». *Journal of Earthquake Engineering*, Vol.6, No. 4, pp 431-445No.1, October, 2001.
23. Règles Parasismiques Algériennes RPA99/version2003, Document technique réglementaire D.T.R- B-C.2.48.

24. Anthony Harasimowicz P. & Goel R.K., « Seismic code analysis of multi-storey asymmetric buildings ». *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, Vol.27, pp 173-185, 1998.
25. Filiatrault. A, « Eléments de génie parasismique et de calcul dynamique des structures ». Editions de l'Ecole polytechnique de Montréal, Août 1996.p.335-336
26. Sikaroudi H., Chandler A.M., « Structure-foundation interaction in the earthquake response of torsionnally asymmetric buildings ». *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1-6, 11, 1992.
27. Denis Lefebvre et Stéphane Thérroux « Interaction Sol Structure pour le design de bâtiments sur fondations superficielles ».Civil Design Inc. Québec, Canada.2004.
28. Ghaffar. M & Zadeh « Un modèle de fonctions d'impédance indépendantes de la fréquence d'excitations pour les système sol structure ». 2<sup>ème</sup> colloque national AFPS Génie Parasismique et aspects vibrations dans le Génie civil, Saint Rémy les Chevreuse (France), 18-20 avril,1989.
29. Sieffert J.G. & Cevaer F. « Handbook of impedance functions surface foundations », OUEST Editions Presses Académiques, Ecole Centrale de Nantes, pp 15-24, Décembre, 1991.
30. Alame, I. et Argoul, P., « Approche hexadimensionnelle de la dynamique des bâtiments », 3<sup>ème</sup> Colloque National A.F.P.S Génie Parasismique et aspects vibratoires dans le Génie civil. Saint- Rémy- Les- chevreuse. Vol.II, MC: 1-9,1993.
31. Alame, I. et Argoul, P., « Une nouvelle modélisation pour le comportement vibratoire des bâtiments », Rapport interne, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), Noisy-Le grand, Paris, France, 1993.
32. Touret, J.P., « Modélisation des bâtiments dissymétriques », 2<sup>ème</sup> Colloque National A.F.P.S Génie Parasismique et aspects vibratoires dans le Génie civil. Saint- Rémy- Les- chevreuse. (France).18-20 Avril.1989.
33. Alame, I. and Argoule, P., « Dynamic models for elastic coupled lateral and torsional response of asymmetric multi-storey buildings », 10<sup>th</sup> European conference on Earthquake Engineering, Duma (ed.), 1995.
34. Kan, C.L. and Chopra, A.K, « Coupled lateral torsional response of buildings to ground shaking », *Earthquake Engineering Research Center*. College of engineering university of California May, 1976.
35. Sap2000 manuals, « Integrated Finite Elements Analysis and design of structures »,

*Computers and structures*, Inc. Berkeley, California, USA, June, 1998.

36. Laredo M., Grand bâtiment - Contreventement - Dynamique des structures- calcul automatique. Edition Eyrolles, 1977.
  
37. Badaoui M., Bensalah M.D & Bensaïbi M. «Modélisation hexadimensionnelle des bâtiments asymétriques», Colloque International - Risque, Vulnérabilité & Fiabilité dans la Construction, Hôtel Sheraton, Alger - Algérie, pp 310-320, 11 & 12 Octobre, 2003.
  
38. Wolf J.P., « Foundation vibration analysis using simple physical models », Printice Hill, 1994.
  
39. Pecker A. , « Dynamique Des Sols », Presses de l'école national des ponts et chaussées», 1984.