

**UNIVERSITE DE SAAD DAHLEB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences de l'Ingénieur  
Département d'Aéronautique**

# **THESE DE DOCTORAT D'ETAT**

Spécialité : Aéronautique

## **CONCEPTION ET DIMENSIONNEMENT DES TUYERES SUPERSONIQUES DE PROPULSION**

Par

**ZEBBICHE Toufik**

Devant le jury d'examen composé de

N. AITMESSAOUDENE	Professeur,	U. de Blida	Président
S. BOUKRAA	Professeur,	U. de Blida	Examineur
K. BOUHADEF	Professeur,	U.S.T.H.B., Alger	Examinatrice
T. BENABID	Maître de Conférences,	U.S.T.H.B., Alger	Examineur
R. HAOUI	Maître de Conférences,	U.S.T.H.B., Alger	Examineur
Z. YOUNI	Professeur,	U. de Blida	Rapporteur

Blida, 25 Juin 2007

## RESUME

Lorsque la température génératrice  $T_0$  de la chambre de combustion d'un gaz parfait augmente, la chaleur spécifique  $C_p$  à pression constante et le rapport  $\gamma$  ne restent plus constants et commencent à varier. Le gaz reste parfait, son équation d'état reste toujours valable. Il est nommé en plus par gaz calorifiquement imparfait et thermiquement parfait, ou gaz à haute température. Une interpolation polynomiale aux valeurs de  $C_p$  est appliquée aux valeurs tabulées afin de trouver une forme analytique. Le travail présenté est divisé en quatre parties.

La première partie consiste à développer les relations des rapports thermodynamiques et géométriques nécessaires, et d'étudier l'écoulement supersonique isentropique à haute température dans une tuyère quasi  $1D$ . Les résultats trouvés sont présentés par la résolution des équations algébriques non linéaires, et intégration des fonctions analytiques complexes, où la solution exacte n'existe pas. La méthode de dichotomie est utilisée pour résoudre ces équations, et l'algorithme de Simpson pour l'intégration de ces fonctions. Une procédure de condensation des nœuds est utilisée, vu que les fonctions à intégrer ont un gradient élevé aux extrémités de l'intervalle d'intégration.

La deuxième partie consiste à développer une nouvelle forme généralisée de la fonction de Prandtl Meyer à Haute Température en considérons la variation de  $C_p$  avec  $T_0$ . La nouvelle relation obtenue est présentée sous la forme d'une intégrale d'une fonction analytique complexe, où la procédure analytique d'intégration est impossible. La fonction à intégrer possède une dérivée infinie à la température critique. Une quadrature d'intégration numérique robuste est développée dans ce contexte, basée sur la quadrature de Gauss Legendre. La forme classique de la fonction de Prandtl Meyer d'un gaz parfait devient un cas particulier de la forme développée.

Le but de la troisième partie, c'est de tracer les profils des tuyères supersoniques à détente centrée  $2D$  et axisymétrique, lorsque la température  $T_0$  est prise en compte, inférieur au seuil de dissociation des molécules, de manière à obtenir un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. Pour chaque nombre de Mach, on peut avoir plusieurs formes de tuyère en changeant la température  $T_0$ . La méthode des caractéristiques est utilisée avec la nouvelle forme de la relation de Prandtl Meyer. La résolution des équations obtenues se fait par la méthode des différences finies en utilisant l'algorithme de prédicteur correcteur. La tuyère axisymétrique possède un point d'inflexion, ce qui n'est pas le cas pour la tuyère  $2D$ .

La quatrième partie consiste à tracer le contour des tuyères supersoniques à corps central (plug nozzle)  $2D$ , de manière à obtenir un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie, et d'avoir pour un même nombre de Mach, plusieurs formes en changeant la température  $T_0$ . La méthode de conception est basée sur la détente de Prandtl Meyer, où la nouvelle forme développée de la fonction de Prandtl Meyer est utilisée.

Pour chaque partie, une étude sur l'erreur donnée par les paramètres de conception du modèle  $GP$  par rapport au modèle  $HT$  est présentée. La comparaison est faite entre les deux modèles dans le but de déterminer une limite d'application du modèle  $GP$ .

### Mots Clés

Écoulement Supersonique, Haute Température, Rapports Thermodynamiques et Géométrie, Fonction de Condensation, Interpolation, Gaz Calorifiquement Imparfait, Quadrature de Simpson, Quadrature de Gauss Legendre, Prandtl Meyer, Méthode des Caractéristiques, Tuyère à Détente Centrée bidimensionnelle et axisymétrique, Méthode des Différences Finies, Algorithme de Prédicteur Correcteur, Ligne sonique droite, Tuyère à Corps Central bidimensionnelle, Erreur Relative.

## ABSTRACT

When the stagnation temperature of a combustion chamber of a perfect gas increases, the specific heat  $C_p$  for constant pressure and the ratio  $\gamma$  do not remain constant any more, and start to vary with  $T_0$ . The gas remains perfect; its state equation remains always valid, except it is named in more by calorically imperfect gas. And thermally perfect or gas at high temperature. A polynomial interpolation is applied to the experimental values of  $C_p$  to obtain an analytical form. The presented work is divided into four parts.

The first part is to develop the necessary thermodynamical and geometrical ratios and to study the supersonic isentropic flow at high temperature in nozzle. The obtained results are found by the resolution of nonlinear algebraic equations and integration of complex analytical functions where the exact calculation is impossible. The dichotomy method is used to solve the nonlinear equations, and the Simpson's algorithm for the numerical integration of the found integrals. A condensation of nodes is used. Since, the functions to be integrated have a high gradient at the extremity of the interval of integration.

The second part is to develop a generalized new form of the Prandtl Meyer function at high temperature by consideration of  $C_p$  and  $\gamma$  variation with  $T_0$ . The obtained new relation is presented by a complex analytical function integral form, where the analytical integration procedure is impossible. The function to be integrated has an infinite derivative at the critical temperature. A robust numerical integration quadrature is developed in this context, based on the Gauss Legendre quadrature. The classical form of the Prandtl Meyer function of a perfect gas becomes a particular case of the developed form.

The aim of the third part is to trace the profiles of the supersonic Minimum Length Nozzle with centered expansion giving a uniform and parallel flow at the exit section, when the temperature  $T_0$  is taken into account, lower than the threshold of dissociation of the molecules, and to have for each exit Mach number several nozzles shapes by changing the value of the temperature  $T_0$ . The method of characteristics is used with a new form of the Prandtl Meyer function at high temperature. The resolution of the obtained equations is done by the second order of finite differences method by using the predictor corrector algorithm. The axisymmetric nozzle has an inflexion point which is not the case for the bidimensional nozzle.

The goal of the fourth part is to trace the profiles of the supersonic Plug Nozzle giving a uniform and parallel flow at the exit section, when the stagnation temperature is taken into account, lower than the threshold of dissociation of the molecules, by using the new formula of the Prandtl Meyer function, and to have for each exit Mach number, several nozzles shapes by changing the value of this temperature. The method of conception is based on the expansion of the Prandtl Meyer, where the new developed new form is used for application.

For each part, the study on the given error by the parameters of conception of a *PG* model compared to the *HT* model is presented. The comparison is made with the calorically perfect gas to determine the error made by this model. The application is made for air in a supersonic nozzle.

### Keys words

Supersonic Flow, High Temperature, Thermodynamic and geometric ratios, Stretching Function, Interpolation, Calorically Imperfect Gas, Simpson Quadrature, Gauss Legendre Quadrature, Prandtl Meyer Function, Method of Characteristics, Two-dimensional and Axisymmetric Minimum Length Nozzle, Finite Differences Method, Predictor Corrector Algorithm, Straight Sonic Line, Two-dimensional Plug Nozzle, Relative error.

## ملخص

عندما تزداد درجة حرارة ركود الغاز المثالي  $T_0$  لغرفة الاحتراق، فإن الحرارة النوعية لضغط ثابت  $C_p$  لا تبقى ثابتة و تبدأ بالتغير مع  $T_0$ . يبقى الغاز مثالياً، بحيث المعادلة الربط بين الضغط و الحجم و درجة الحرارة الغاز المثالي ثابتة أيضاً، إلا أنه يسمى زيادة علي ذلك بغاز غير مثالي نوعياً و مثالي حرارياً، أو باختصار غاز ذو دراجة الحرارة عالية، علاقة ربط من شكل كثير حدود تم استعمالها لربط لاعداد  $C_p$  لجدول و هذا لايجاد عبارة تحليلية. يتكون العمل المقدم من اربعة اجراء:

يتمثل الجزء الاول في محاولة لايجاد علاقات ضرورية لتناسبات ترموديناميكية و هندسية، و دراسة تدفق م فوق الصوتية ذو درجة حرارة عالية داخل بوق شبه احادي القياس. النتائج المتحصل عليها تتمثل في حل معادلات جبرية غير خطية و تكمل لدوال تحليلية معقدة، بحيث لا يمكن ايجاد الحل الدقيق و الصحيح. طريقة التقسيم الثنائي استعملت لحل المعادلات و خوارزمي سيمبسون لتكامل الدوال. استعملت طريقة تجمع النقاط، نظراً لان الدوال لديها تغير كبير جيداً في نهاية اطراف المجال التكامل.

يتمثل الجزء الثاني في ايجاد صيغة جديدة عامة لدالة برنتل ماير ذو درجة حرارة مرتفعة، وهذا باخذ بالعين الاعتبار تغير  $C_p$  مع  $T_0$ .

الدالة الجديدة المتحصل عليها متمثلة علي شكل تكامل لدالة معقدة، بحيث لا يمكن لايجاد التكامل بطريقة التحليلية. الدالة الجديدة غير قابلة للاشتقاق عند طرف المجال ذو درجة الحرارة القصوي. طريقة عددية قوية جديدة لحساب التكامل استعملت في هذا المضمون، ترتكز علي طريقة غوس ليجوندر. العبارة الكلاسيكية لدالة برونتل ماير لغاز مثالي تصبح حالة خاصة للعبارة الجديدة المتحصل عليها.

الهدف من الجزء الثالث هو رسم الاشكال للابواق مافوق الصوتية ذات النوع الطول الصغير ثنائية الابعاد و التناظر المحوري، عندما درجة الحرارة الركود ماخوذة بالعين الاعتبار، و بدرجة حرارة اقل من درجة حرارة الانحلال الجزيئات، بحيث يمكننا الحصول علي تدفق منتظم و متوازي عند مقطع الخروج البوق، و امكانية الحصول لكل عدد ماك، عدة اطوال مختلفة و هذا بتغير قية درجة الحرارة الركود. استعملت طريقة الخصائص مع المعادلة الجديدة لبرنتل ماير. يتم تحليل المعادلات التي تم الحصول عليها باستخدام نظرية الفروق المحدودة من الدرجة الثانية و خوارزمية مصدحات التنبؤ. البوق ذو الشكل التناظر المحوري لديه نقطة الانعطاف و الذي غير موجود بالنسبة للبوق ثنائي الابعاد. الهدف من الجزء اربع هو رسم اشكال الابواق ما فوق الصوتية ذات جسم مركزي ثنائية الابعاد بحيث يمكننا الحصول علي تدفق منتظم و موازي عند مقطع الخروج دائماً تحت تطبيق فرضية دراجة الحرارة مرتفعة و من ثم يمكننا الحصول علي عدة اطوال مختلفة تعطي نفس العدد ماك عند الخروج و لكن درجة حرارة الركود مختلفة. يتم الحساب تحت تطبيق معادلة الجديدة لبرنتل ماير.

من اجل كل جزء، قمنا بدراسة الخطأ الوارد و المتحصل عليه من نتائج التصميم تحت تطبيق فرضية و نموذج الغاز المثالي بالنسبة لفراضية و نموذج الغاز ذو دراجة الحرارة المرتفعة.

تمت المقارنة بين النموذجين من اجل الحصول علي نهاية المجال تطبيق النموذج الغاز المثالي.

## كلمات المفاتيح

تد فق فوق الصوتية، درجة الحرارة مرتفعة، تناسبات ترموديناميكية و هندسية، دالة تراحم، ربط النقاط، غاز كالوريكولي غير مثالي، طريقة سيمبسون العددية، طريقة غوس ليجوندر العددية، طريقة المميزات، البوق ذو التندد المركزي ثنائي البعد و ذو التناظر المركزي، طريقة الفروق المنتهية، خوارزميات المصححات التنبؤ، منحني الصوتي مستقيم، البوق ذو جسم مركزي ثنائي البعد، خطأ النسبي.

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier infiniment mon dieu tout puissant pour l'aide qu'il m'a apporté pour la réalisation de ce modeste travail. Je remercie ma mère **Fettoum** pour le courage et le soutien morale durant cette période de réalisation de ce travail.

Toute mon infinie gratitude à monsieur **Z. YOUBI**, Professeur au département d'Aéronautique de l'université SAAD Dahleb de Blida pour son aide précieuse qui ma permis d'entreprendre cette thèse, ainsi que pour l'aide financière du droit des publications des articles.

Monsieur **N. AIT MESSAOUDENE**, Professeur au Département de Mécanique de l'Université SAAD Dahleb de Blida, m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

La présence de Monsieur **S. BOUKRAA**, Professeur au Département d'Aéronautique de l'Université SAAD Dahleb de Blida dans mon jury, constitue un gage de confiance.

Mes remerciements s'adressent aussi à madame **K. BOUHADEF**, Professeur au département de mécanique de l'Université des Sciences et Technologie Houari Boumediene pour sa confiance et d'avoir accepté être examinatrice de mon travail.

Mes sincères remerciements d'adressent encore à monsieur **T. BENABID**, Maître de Conférences au département de physique de l'Université des Sciences et Technologie Houari Boumediene, pour avoir accepté de critiquer mon travail et d'avoir bien voulu participer au jury.

Je remercie vivement Monsieur **R. HAOUI**, Maître de Conférences au Département de Mécanique de l'Université des Sciences et Technologie Houari Boumediene, pour avoir accepté de critiquer mon travail et d'avoir bien voulu participer au jury.

## TABLE DES MATIERES

RESUME .....	1
REMERCIEMENTS .....	4
TABLE DES MATIERES .....	5
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX .....	7
INTRODUCTION .....	17
<b>1. PARAMETRES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE .....</b>	<b>21</b>
1.1. Formulation mathématique du problème .....	22
1.2. Modèle du gaz parfait .....	27
1.3. Procédure du calcul .....	27
1.4. Paramètres critiques au col correspondant à $T_0$ .....	31
1.5. Paramètres supersoniques correspondant à $T_0$ .....	32
1.6. Erreur du modèle du gaz parfait .....	34
1.7. Application dans une tuyère .....	34
<b>2. FONCTION DE PRANDTL MEYER A HAUTE TEMPERATURE .....</b>	<b>36</b>
2.1. Formulation mathématique .....	37
2.2. Procédure de calcul par la méthode de Simpson .....	38
2.3. Procédure de calcul par l'adaptation de la quadrature de Gauss Legendre .....	41
2.4. Applications .....	47
2.5. Erreur du modèle du gaz parfait .....	49
<b>3. TUYERE A DETENTE CENTREE A HAUTE TEMPERATURE .....</b>	<b>51</b>
3.1. Formulation mathématique .....	54
3.2. Procédure de calcul dans la tuyère .....	60
3.3. Courbes iso-valeurs .....	70
3.4. Masse de la structure de la tuyère .....	72
3.5. Force de pression exercée sur la paroi du divergent .....	73
3.6. Erreur du modèle du gaz parfait .....	74
<b>4. TUYERE A CORPS CENTRAL BIDIMENSIONNELLE A HAUTE TEMPERATURE .....</b>	<b>75</b>
4.1. Formulation mathématique du problème .....	77
4.2. Discrétisation .....	80
4.3. Procédure de calcul .....	81
4.4. Paramètres Thermodynamiques .....	84
4.5. Masse du corps central .....	85
4.6. Force de pression exercée sur la paroi .....	85
4.7. Masse du gaz dans le divergent .....	86
4.8. Erreur du modèle du gaz parfait .....	87

5. RESULTATS ET COMMENTAIRES .....	88
5.1. Résultats sur les paramètres supersonique .....	88
5.2. Fonction du Prandtl Meyer .....	101
5.3. Résultats sur la tuyère à détente centrée bi-dimensionnelle ( <i>2D MLN</i> ) .....	106
5.4. Résultats sur la tuyère à corps central bi-dimensionnelle .....	123
5.5. Résultats sur la tuyère à détente centrée axisymétrique ( <i>Axisymmetric MLN</i> ) ..	138
CONCLUSION .....	159
APPENDICES	
A. Liste des symboles .....	162
B. Résultats sur la tuyères à corps central <i>2D</i> du modèle du gaz parfait .....	164
C. Ligne de Courant Tridimensionnelle .....	174
REFERENCES .....	187

## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Variation de la fonction $F_{\rho}(T)$ dans l'intervalle $[T_S, T_0]$ .....	30
Figure 1.2	Variation de la fonction $F_A(T)$ dans l'intervalle $[T_S, T^*]$ .....	30
Figure 1.3	Présentation de la condensation des nœuds .....	30
Figure 2.1	Variation de la fonction $F_v(T)$ dans $[T_S, T^*]$ .....	40
Figure 2.2	Condensation des nœuds vers les deux extrémités de l'intervalle $[T_S, T^*]$ .....	40
Figure 2.3	Graphe de la fonction $w(x)f(x)$ lorsque $M_S=6.00$ .....	45
Figure 2.4	Graphe de la fonction $f(x)$ lorsque $M_S=6.00$ .....	45
Figure 2.5	Dérivées d'ordre seconde de la fonction $f(x)$ lorsque $M_S=6.00$ .....	45
Figure 2.6	Présentation d'un écoulement autour d'un dièdre .....	48
Figure 2.7	Centre de détente d'une tuyère supersonique.....	49
Figure 3.1	Différentes géométries de tuyères .....	51
Figure 3.2	Présentation du champ de l'écoulement dans la tuyère $MLN$ .....	53
Figure 3.3	Illustration des lignes caractéristiques et des lignes de Mach .....	54
Figure 3.4	Différents points de calcul .....	58
Figure 3.5	Processus du calcul des caractéristiques dans la région de Kernel .....	62
Figure 3.6	Différents type de dimensionnement de la tuyère à détente centrée .....	63
Figure 3.7	Processus de détermination des points de la paroi de la tuyère A détente centrée bidimensionnelle .....	64
Figure 3.8	Paramètres de calcul du point $P_i$ ( $i=2, 3, N$ ) de la paroi de la tuyère .....	65
Figure 3.9	Processus de calcul des $C^*$ de la région de transition de la tuyère axisymétrique .....	68
Figure 3.10	Différents cas de l'intersection de la paroi avec les caractéristiques de la tuyère axisymétrique .....	69
Figure 3.11	Passage d'une caractéristique à l'autre dans la région de transition .....	69
Figure 3.12	Différents segments des points de la courbe iso-Mach .....	70

Figure 3.13	Présentation d'un tronçon de la tuyère à détente centrée .....	72
Figure 4.1	Géométrie de la tuyère à corps central .....	76
Figure 4.2	Ecoulement au col et à la sortie d'une tuyère à corps central .....	77
Figure 4.3	Angle de déviation $\Psi$ de la carène de la tuyère à corps central .....	77
Figure 4.4	Angles de Mach du col et de la section de sortie de la tuyère à corps central .....	78
Figure 4.5	Discrétisation de la zone de détente de la tuyère à corps central .....	79
Figure 4.6	Paramètres d'une ligne de Mach intermédiaire reliant les points $A$ et $i$ ...	79
Figure 4.7	Présentation des paramètres dans un triangle .....	81
Figure 4.8	Force de pression exercée sur un segment du corps central .....	86
Figure 5.1	Variation de $C_P(T)$ et $\gamma(T)$ en fonction de la température génératrice ....	89
Figure 5.2	Variation des rapports thermodynamiques critiques en fonction de $T_0$	90
Figure 5.3	Variation du débit massique critique non-dimensionnel en fonction de la température génératrice $T_0$ .....	90
Figure 5.4	Variation du rapport $a^*/a_0$ en fonction de $T_0$ .....	91
Figure 5.5	Variation des rapports thermodynamiques en fonction du nombre de Mach .....	92
Figure 5.6	Variation du rapport des sections $A/A^*$ à Haute Température en fonction du nombre de Mach .....	95
Figure 5.7	Variation du rapport des vitesses du son en fonction du nombre de Mach .....	96
Figure 5.8	Effet de $T_0$ sur la variation du nombre de Mach à travers la tuyère .....	97
Figure 5.9	Correction du nombre de Mach d'une tuyère dimensionnée par le modèle $GP$ .....	98
Figure 5.10	Formes des tuyères donnant la même variation du nombre de Mach .....	98
Figure 5.11	Variation de l'erreur relative donnée par les paramètres thermodynamiques et géométrique du modèle du gaz parfait en fonction de nombre de Mach .....	100
Figure 5.12	Variation de la fonction de Prandtl Meyer à Haute Température .....	102

Figure 5.13	Variation de l'erreur donnée par la fonction $v$ d'un gaz parfait par rapport à notre modèle en fonction du nombre de Mach .....	105
Figure 5.14	Raffinement du maillage dans la zone de Kernel de la tuyère <i>MLN 2D</i> sans insertion des caractéristiques supplémentaire .....	107
Figure 5.15	Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère <i>MLN 2D</i> avec $\Delta=2.00$ et $\Delta\theta=3.0$ .....	107
Figure 5.16	Effet du coefficient $\Delta$ sur la qualité du maillage en caractéristique d'une tuyère <i>MLN 2D</i> avec $\Delta\theta=2.0$ degré et $N_i=10$ .....	108
Figure 5.17	Formes des tuyères <i>MLN 2D</i> donnant à la sortie $M_S=1.50$ .....	110
Figure 5.18	Formes des tuyères <i>MLN 2D</i> donnant à la sortie $M_S=2.00$ .....	110
Figure 5.19	Formes des tuyères <i>MLN 2D</i> donnant à la sortie $M_S=3.00$ .....	111
Figure 5.20	Formes des tuyères <i>MLN 2D</i> donnant à la sortie $M_S=4.00$ .....	111
Figure 5.21	Formes des tuyères <i>MLN 2D</i> donnant à la sortie $M_S=5.00$ .....	112
Figure 5.22	Formes des tuyères <i>MLN 2D</i> donnant à la sortie $M_S=6.00$ .....	112
Figure 5.23	Variation des rapports thermodynamiques le long de la paroi de la tuyère lorsque $M_S=3.00$ .....	114
Figure 5.24	Variation du nombre de Mach dans la tuyère <i>MLN 2D</i> donnant $M_S=3.00$ .....	115
Figure 5.25	Variation de l'angle de déviation de l'écoulement le long de la paroi de la tuyère <i>MLN 2D</i> lorsque $M_S=3.00$ .....	115
Figure 5.26	Variation de l'angle $\theta^*$ du col pour la tuyère à détente centrée <i>2D</i> .....	116
Figure 5.27	Variation du nombre de Mach $M^*$ au col de la tuyère <i>MLN 2D</i> .....	117
Figure 5.28	Variation de la longueur de Kernel de la tuyère à détente centrée <i>2D</i> ....	117
Figure 5.29	Variation de la longueur de la tuyère à détente centrée <i>2D</i> .....	118
Figure 5.30	Variation de la masse de la structure de la tuyère <i>MLN 2D</i> .....	118
Figure 5.31	Variation de la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère <i>MLN 2D</i> .....	119
Figure 5.32	Variation du rayon de la section de sortie de la tuyère <i>MLN 2D</i> .....	119
Figure 5.33	Variation de l'erreur relative donnée par les paramètres de conception de la tuyère <i>MLN 2D</i> du modèle <i>GP</i> en fonction de $M_S$ .....	120

Figure 5.34	Courbes iso-valeurs de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle .....	121
Figure 5.35	Tuyères ayant mêmes rapport $A_S/A^*$ , donnant $M_S=3.00$ pour le modèle $GP$ .....	122
Figure 5.36	Formes du corps central donnant $M_S=1.50$ .....	125
Figure 5.37	Formes du corps central donnant $M_S=2.00$ .....	126
Figure 5.38	Formes du corps central donnant $M_S=3.00$ .....	126
Figure 5.39	Formes du corps central donnant $M_S=4.00$ .....	127
Figure 5.40	Formes du corps central donnant $M_S=5.00$ .....	127
Figure 5.41	Variation des paramètres thermodynamiques le long de la paroi du corps central donnant $M_S=3.00$ .....	128
Figure 5.42	Variation de $M$ et $\theta$ le long de la paroi du corps central donnant $M_S=3.00$ .....	129
Figure 5.43	Variation à Haute Température de la longueur de la tuyère à corps central $2D$ .....	130
Figure 5.44	Variation à Haute Température de $C_{Masse}$ de la tuyère à corps central $2D$ .....	130
Figure 5.45	Variation à Haute Température de $C_{Force}$ de la tuyère à corps central $2D$ .....	131
Figure 5.46	Variation à Haute Température de l'angle $\Psi$ de la tuyère à corps central $2D$ .....	132
Figure 5.47	Variation à Haute Température de l'angle $\theta^*$ d'une tuyère à corps central $2D$ .....	132
Figure 5.48	Variation à Haute Température de $C_{Gas}$ d'une tuyère à corps central $2D$ .....	132
Figure 5.49	Variation à Haute Température de $x_{Plug}$ d'une tuyère à corps central $2D$ .....	133
Figure 5.50	Variation à Haute Température du rayon de sortie du corps central $2D$ ..	133
Figure 5.51	Tuyères ayant même section de sortie .....	134
Figure 5.52	Variation de l'erreur relative donnée par les paramètres de conception du modèle du gaz parfait en fonction du nombre de $M_S$ .....	135

Figure 5.53	Comparaison entre la forme de la tuyère à corps central et à détente centrée pour $M_S=3.00$ et $T_0=2000 K^\circ$ .....	136
Figure 5.54	Comparaison des paramètres de conception entre la tuyère <i>MLN</i> et la tuyère à corps central à Haute Température lorsque $T_0=2000 K^\circ$ ...	137
Figure 5.55	Raffinement du maillage dans la zone de transition sans insertion des caractéristiques supplémentaires avec $\Delta\theta=3.0$ degré .....	140
Figure 5.56	Raffinement du maillage dans la zone de Kernel de la tuyère <i>MLN</i> axisymétrique sans insertion des <i>C</i> supplémentaire avec $\Delta x=0.30$ .....	140
Figure 5.57	Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel de la tuyère <i>MLN</i> axisymétrique avec $\Delta=2$ , $\Delta\theta=3.0$ degré et $\Delta x=0.23$ .....	141
Figure 5.58	Effet du coefficient $\delta$ sur la qualité du maillage en caractéristique dans une tuyère <i>MLN</i> axisymétrique avec $\Delta\theta=2.0$ degré, $\Delta x=0.5$ et $N_i=10$ ...	141
Figure 5.59	Tuyères à détente centrée axisymétrique donnant à la sortie $M_S=1.50$ ...	145
Figure 5.60	Tuyères à détente centrée axisymétrique donnant à la sortie $M_S=2.00$ ...	145
Figure 5.61	Tuyères à détente centrée axisymétrique donnant à la sortie $M_S=3.00$ ...	145
Figure 5.62	Tuyères à détente centrée axisymétrique donnant à la sortie $M_S=4.00$ ...	146
Figure 5.63	Tuyères à détente centrée axisymétrique donnant à la sortie $M_S=5.00$ ...	146
Figure 5.64	Tuyères à détente centrée axisymétrique donnant à la sortie $M_S=6.00$ ...	146
Figure 5.65	Variation des rapports thermodynamiques le long de la paroi de la tuyère <i>MLN</i> axisymétrique donna à la sortie $M_S=3.00$ .....	146
Figure 5.66	Variation l'angle $\theta^*$ le long de la paroi de la tuyère à détente centrée axisymétrique lorsque $M_S=3.00$ .....	149
Figure 5.67	Variation du nombre de Mach à travers la tuyère à détente centrée axisymétrique lorsque $M_S=3.00$ .....	150
Figure 5.68	Variation de l'angle $\theta^*$ de la tuyère à détente centrée axisymétrique .....	151
Figure 5.69	Variation de l'angle $\theta_{max}$ de la tuyère à détente centrée axisymétrique ...	152
Figure 5.70	Variation de $M^*$ à Haute Température de la tuyère <i>MLN</i> axisymétrique .	152
Figure 5.71	Variation de la longueur de Kernel de la tuyère <i>MLN</i> axisymétrique .....	152
Figure 5.72	Variation de la longueur de la tuyère à détente centrée axisymétrique ...	153

Figure 5.73	Variation du rayon de sortie de la tuyère <i>MLN</i> axisymétrique .....	153
Figure 5.74	Variation de la masse de la tuyère à détente centrée axisymétrique .....	153
Figure 5.75	Variation de $C_{Force}$ de la tuyère à détente centrée axisymétrique .....	154
Figure 5.76	Variation de l'erreur relative donnée par les paramètres de conception du modèle <i>GP</i> en fonction de $M_S$ de la tuyère <i>MLN</i> axisymétrique .....	155
Figure 5.77	Courbes iso-valeurs de la tuyère à détente centrée axisymétrique .....	156
Figure 5.78	Tuyères <i>MLN</i> axisymétrique ayant mêmes rapport des sections de sortie donnant le nombre de Mach $M_S=3.00$ pour le modèle <i>GP</i> .....	156
Figure 5.79	Tuyères <i>MLN</i> 2D et axisymétrique donnant $M_S=3.00$ pour $T_0=2000 K^\circ$ .....	157
Figure 5.80	Comparaison des paramètres de conception à Haute Température de la tuyère à détente centrée entre le cas 2D et l'axisymétrique lorsque $T_0=2000 K^\circ$ en fonction du nombre de Mach de sortie .....	158
Figure B.1	Formes du corps central donnant $M_S=1.50$ .....	166
Figure B.2	Formes du corps central donnant $M_S=2.00$ .....	166
Figure B.3	Formes du corps central donnant $M_S=3.00$ .....	167
Figure B.4	Formes du corps central donnant $M_S=4.00$ .....	167
Figure B.5	Formes du corps central donnant $M_S=5.00$ .....	167
Figure B.6	Variation de $M$ et $\theta$ le long de la paroi du corps central 2D lorsque $M_S=3.00$ .....	168
Figure B.7	Variation des rapports $T/T_0$ et $P/P_0$ le long de la paroi du corps central 2D lorsque $M_S=3.00$ .....	168
Figure B.8	Variation des paramètres de conception de la tuyère à corps central 2D du modèle du gaz parfait en fonction de $M_S$ .....	170
Figure B.9	Variation du coefficient de conception des Tuyères des moteurs fusées en fonction du nombre de Mach de sortie.....	171
Figure B.10	Variation du coefficient de conception des souffleries en fonction du nombre de Mach de sortie .....	171
Figure B.11	Comparaison entre la forme de la tuyère à corps central et <i>MLN</i> configuration pour $M_S=2.50$ et $\gamma=1.40$ .....	172

Figure B.12	Comparaison des paramètres de conception entre la tuyère à corps central et <i>MLN</i> configuration pour l'air $\gamma=1.40$ .....	173
Figure C.1	Schéma en caractéristiques .....	174
Figure C.2	Illustration de la ligne de Mach du col <i>OA</i> et de la zone uniforme <i>BS</i> de sortie .....	177
Figure C.3	Différents segments de recherche des points d'une ligne de courant .....	178
Figure C.4	Différents cas possible de segment .....	180
Figure C.5	Segment de droite placé verticalement .....	182
Figure C.6	Section de sortie arbitraire avec différentes dispositions .....	183
Figure C.7	Choix de la section de sortie d'une tuyère tridimensionnelle dans la zone d'écoulement uniforme .....	183
Figure C.8	Discrétisation de la section de sortie de la tuyère tridimensionnelle et numérotation des nœuds choisis .....	184
Figure C.9	Forme en profil de la tuyère passant par un point de la section de sortie .	184
Figure C.10	Eléments finis placé entre deux stations successives de la tuyère <i>3D</i> .....	185
Tableau 1.1	Table de variation de $C_P(T)$ et $\gamma(T)$ avec la température pour l'air .....	27
Tableau 1.2	Coefficients du polynôme $C_P(T)$ .....	28
Tableau 2.1	Abscisses et coefficients associés de la quadrature d'intégration numérique de Gauss Legendre .....	49
Tableau 5.1	Valeurs numériques des paramètres critiques à haute température .....	89
Tableau 5.2	Valeurs numériques du rapport $T/T_0$ à Haute Température .....	93
Tableau 5.3	Valeurs numériques du rapport $\rho/\rho_0$ à Haute Température .....	94
Tableau 5.4	Valeurs numériques du rapport $P/P_0$ à Haute Température .....	95
Tableau 5.5	Valeurs numériques du rapport $A/A^*$ à Haute Température .....	95
Tableau 5.6	Valeurs numériques du rapport $a/a_0$ à Haute Température .....	96
Tableau 5.7	Correction du nombre de Mach de sortie de la tuyère .....	98
Tableau 5.8	Effet de la quadrature sur la convergence du problème .....	101
Tableau 5.9	Efficacité des quadratures sur le résultat pour une précision $\varepsilon=10^{-6}$ .....	101

Tableau 5.10	Valeurs numériques de la fonction de Prandtl Meyer à Haute Température .....	102
Tableau 5.11	Valeurs du nombre de Mach lorsque la fonction de Prandtl Meyer est connue (problème inverse) .....	104
Tableau 5.12	Effet de raffinement de la zone de Kernel sur la convergence pour des paramètres de conception de la tuyère <i>MLN 2D</i> pour $T_0=2000 K^\circ$ , $M_S=3.00$ et $N_i=0$ .....	108
Tableau 5.13	Effet du coefficient $\delta$ sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère <i>MLN 2D</i> pour $T_0=2000K^\circ$ , $M_S=3.00$ , $\Delta\theta=0.05$ ( $^\circ$ ), $\Delta x=0.01$ et $N_i=10$ .....	108
Tableau 5.14	Effet du nombre de Mach de sortie sur le nombre de points obtenus sur la dernière <i>C</i> de la zone de Kernel de la tuyère <i>MLN 2D</i> lorsque $T_0=2000 K^\circ$ sans effet de condensation .....	108
Tableau 5.15	Effet de la température $T_0$ sur le nombre de points obtenus sur la dernière <i>C</i> de la zone de Kernel de la tuyère <i>MLN 2D</i> lorsque $M_S=3.00$ sans effet de condensation .....	109
Tableau 5.16	Résultats numériques de conception des tuyères de la figure 5.17 .....	110
Tableau 5.17	Résultats numériques de conception des tuyères de la figure 5.18 .....	110
Tableau 5.18	Résultats numériques de conception des tuyères de la figure 5.19 .....	111
Tableau 5.19	Résultats numériques de conception des tuyères de la figure 5.20 .....	111
Tableau 5.20	Résultats numériques de conception des tuyères de la figure 5.21 .....	112
Tableau 5.21	Résultats numériques de conception des tuyères de la figure 5.22 .....	112
Tableau 5.22	Nombre de Mach $M^*$ et les rapports thermodynamiques correspondants pour la tuyère <i>MLN 2D</i> lorsque $M_S=3.00$ .....	115
Tableau 5.23	Résultats du dimensionnement des tuyères de la figure 5.35 .....	122
Tableau 5.24	Paramètres de conception de la tuyère à corps central <i>2D</i> indépendant de $N$ .....	123
Tableau 5.25	Paramètres de conception de la tuyère à corps central <i>2D</i> dépendent de $N$ .....	124
Tableau 5.26	Valeurs minimum de $N$ donnant une erreur $\varepsilon$ lorsque $T_0=2000 K^\circ$ .....	124
Tableau 5.27	Valeurs minimum de $N$ donnant une erreur $\varepsilon$ lorsque $M_S=3.00$ .....	124
Tableau 5.28	Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.36 .....	125

Tableau 5.29	Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.37 .....	126
Tableau 5.30	Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.38 .....	126
Tableau 5.31	Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.39 .....	127
Tableau 5.32	Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.40 .....	127
Tableau 5.33	Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.51 .....	134
Tableau 5.34	Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.53 .....	136
Tableau 5.35	Effet de raffinement de la zone de Transition sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère à détente centrée axisymétrique pour $T_0=2000\text{ K}^\circ$ , $M_S=3.00$ , $\Delta\theta=0.1\text{ degré}$ et $N_i=0$ .....	142
Tableau 5.36	Effet de raffinement de la zone de Kernel sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère à détente centrée axisymétrique pour $T_0=2000\text{ K}^\circ$ , $M_S=3.00$ , $\Delta x=0.05$ et $N_i=0$ .....	142
Tableau 5.37	Effet de l'addition des $C$ supplémentaires dans la région de Kernel sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère $MLN$ axisymétrique pour $T_0=2000\text{ K}^\circ$ , $M_S=3.00$ , $\Delta\theta=0.01\text{ degré}$ , $\Delta x=0.01$ et $\Delta=3$ .....	142
Tableau 5.38	Effet du coefficient $\Delta$ sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère à détente centrée axisymétrique pour $T_0=2000\text{ K}^\circ$ , $M_S=3.00$ , $\Delta\theta=0.01\text{ degré}$ , $\Delta x=0.01$ et $N_i=10$ .....	143
Tableau 5.39	Effet du nombre de Mach de sortie sur le nombre de points obtenus sur la dernière $C$ de la zone de Kernel de la tuyère à détente centrée axisymétrique lorsque $T_0=2000\text{ K}^\circ$ sans effet de condensation .....	144
Tableau 5.40	Effet de la température $T_0$ sur le nombre de points obtenus sur la dernière $C$ de la zone de Kernel de la tuyère à détente centrée axisymétrique lorsque $M_S=3.00$ sans effet de condensation .....	144
Tableau 5.41	Nombre de points obtenus sur la paroi de la tuyère à détente centrée axisymétrique lorsque $M_S=3.00$ et $T_0=2000\text{ K}^\circ$ sans $C$ insérées .....	144
Tableau 5.42	Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.59 .....	145
Tableau 5.43	Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.60 .....	145
Tableau 5.44	Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.61 .....	146
Tableau 5.45	Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.62 .....	146
Tableau 5.46	Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.63 .....	146

Tableau 5.47	Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.64 .....	147
Tableau 5.48	Position du point d'inflexion de la tuyère $MLN$ axisymétrique .....	147
Tableau 5.49	Valeurs de $M$ et $\theta$ aux points d'inflexion de la tuyère à détente centrée axisymétrique .....	147
Tableau 5.50	Valeurs de $T/T_0$ et $\rho/\rho_0$ aux points d'inflexion de la tuyère à détente centrée axisymétrique .....	147
Tableau 5.51	Nombre de Mach $M^*$ et les rapports thermodynamiques correspondants pour la tuyère à détente centrée axisymétrique lorsque $M_S=3.00$ .....	150
Tableau 5.52	Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.78 .....	157
Tableau 5.53	Comparaison entre les valeurs de conception des tuyères de la figure 5.79 .....	157
Tableau B.1	Paramètres de conception de la tuyère à corps central $2D$ indépendant de $N$ .....	165
Tableau B.2	Paramètres de conception de la tuyère à corps central $2D$ dépend de $N$ .....	165
Tableau B.3	Valeur minimum de $N$ donnant une erreur $\varepsilon$ lorsque $\gamma=1.40$ .....	166
Tableau B.4	Valeurs minimum de $N$ donnant une erreur $\varepsilon$ lorsque $M_S=3.00$ .....	166
Tableau B.5	Résultats du calcul des tuyères de la figure B.1 .....	166
Tableau B.6	Résultats du calcul des tuyères de la figure B.2 .....	167
Tableau B.7	Résultats du calcul des tuyères de la figure B.3 .....	167
Tableau B.8	Résultats du calcul des tuyères de la figure B.4 .....	167
Tableau B.9	Résultats du calcul des tuyères de la figure B.5 .....	168
Tableau B.10	Rapports $T_S/T_0$ et $P_S/P_0$ des tuyères de la figure B.7 pour l'air .....	169
Tableau B.11	Résultats du calcul des tuyères de la figure B.9 .....	172

## INTRODUCTION

Les tuyères supersoniques jouent un rôle très important pour la conception des engins aérospatiaux. Ils interviennent dans beaucoup de structures telles que les missiles [21], [27], [34] et [40], les moteurs d'avions et dans la fabrication des souffleries supersoniques pour la modélisation et la réalisation expérimentale des écoulements supersoniques réels. Les concepteurs aérodynamiciens ont débuté les applications en 1935. A cette époque, toutes les études étaient basées sur les expériences. Le développement par ordinateur n'avait pas commencé [40].

Après quelques années, en parallèle avec les développements expérimentaux et numériques, les concepteurs ont pensé à améliorer les performances des tuyères de propulsion. Ils ont remarqué que les tuyères coniques délivrent certes une poussée, mais une perte considérable, vu l'inclinaison de la portion supersonique. Si l'inclinaison de la tuyère à la section de sortie est nulle, la poussée délivrée par le moteur sera donc complètement utilisée pour la propulsion et sera par conséquent maximale [21] et [27]. Ce problème sera donc réglé par la recherche d'une forme de tuyère donnant à la sortie un écoulement parallèle.

Le besoin et le souhait d'obtenir une forme de tuyère diffèrent suivant son utilisation. Pour les applications des moteurs fusés, la conception est basée sur deux facteurs essentiels qui sont ; l'obtention d'une poussée maximale avec un poids le plus petit possible de la tuyère (longueur minimale). Il est connu que la masse de la tuyère contient une grande portion de la masse totale des missiles [1] et [2].

En jouant sur ces facteurs, plusieurs formes de tuyères ont été trouvées [32], [34] parmi les quelles deux sont le but de ce présent travail : tuyère à détente centrée (*MLN*) et tuyère à corps central (*PN*) [51], [52], [56], [57] et [65].

Les expériences en soufflerie ont permis aux concepteurs d'observer des lignes privilégiés dans le champ d'écoulement supersonique, appelées *lignes caractéristiques*, faisant un angle bien défini de part et d'autre du vecteur vitesse [2], [38] et [39]. La transformation mathématique des équations de conservation écrites dans le système de coordonnées cartésiennes suivant les lignes caractéristiques permet une simplification remarquable des équations de conservation [2], [38], [59] et [60]. Ils ont appelé cette méthode *la méthode des caractéristiques*.

La solution numérique des divers problèmes qui peuvent se poser et qui ne peuvent pas être traités analytiquement à cause principalement de leur complexité est réalisée grâce à

l'application des lois mathématiques décrivant leur comportement physique qui s'exprime généralement par des équations aux dérivées partielles [20], [25], [38] et [39]. Le principe d'une approche numérique est essentiellement basé sur la transformation des équations différentielles régissant le problème en équations algébriques [62], [63].

Les solutions des équations de base d'un fluide compressible ou non dans un régime subsonique et supersonique diffèrent selon le type des régimes, et on peut les partager en elliptiques, hyperboliques et paraboliques. Elles sont de type elliptiques pour un écoulement subsonique et de type hyperbolique pour un écoulement supersonique [62].

Pour obtenir les solutions numériques des équations de base non linéaires de types elliptiques et paraboliques, on utilise de préférence une méthode fondée sur les éléments finis. Par contre dans le cas où l'écoulement est supersonique, une méthode issue de la formulation caractéristique des équations hyperboliques est plus appropriée [13], [16] et [20].

L'aérodynamique numérique, ou l'étude des problèmes de l'aérodynamique par voie numérique, est un domaine de recherche relativement récent. Les aérodynamiciens soulevant la question de savoir si ce domaine de recherche devrait être considéré comme théorique ou bien expérimental. Ils estiment toute-fois que l'aérodynamique numérique constitue en effet une discipline spécifique, mais qui représente des points communs avec l'aérodynamique théorique, en raison des nombreux essais numériques nécessaires pour palier aux insuffisances de la connaissance des méthodes de calcul. On peut partager l'aérodynamique en deux branches essentielles, aérodynamique externe et l'autre interne. Cette dernière est spécialisée dans l'étude des écoulements internes des fluides, telle que, les moteurs fusées, les moteurs d'avions et les tuyères. L'autre branche est consacrée à l'étude de l'écoulement en présence de l'air libre, telle que les écoulements autour des profils d'ailes.

Dans les moteurs fusés, l'organe tuyère constitue la partie essentielle. Elle permet d'accélérer les gaz à la sortie de la chambre de combustion jusqu'à une certaine vitesse, dans le but d'obtenir une force de poussée comme une résultante de cette accélération [34] et [39].

### Motivation

Le problème rencontré dans les expériences et les applications aéronautiques est que l'utilisation des tuyères dimensionnées sur la base des hypothèses d'un gaz parfait, dégrade les performances souhaitées par cette tuyère. Si on fait des mesures dans une expérience,

on va trouver des valeurs différentes de celles déterminées par le calcul; surtout si la température génératrice de la chambre de combustion est élevée. Plusieurs éléments sont responsables de ce changement. Notons ici que la théorie du gaz parfait ne tient pas compte de cette température [1]. Notre étude va résoudre ce problème en développant un modèle mathématique qui va tenir compte de cette température, en corrigeant la forme de la tuyère pour donner les performances souhaitées sans dégradations, ou en corrigeant les résultats de l'écoulement dans la tuyère utilisée dans les applications [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [65].

Une interpolation polynomiale aux valeurs de la table afin de trouver une forme analytique à la fonction  $C_p(T)$  est appliquée [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [65]. Les relations mathématiques présentées sont valables dans le cas général indépendamment de la forme de l'interpolation et de la substance, mais nos résultats seront présentés par le choix d'une interpolation par un polynôme de 9<sup>ème</sup> degré. La substance choisie est l'air. La comparaison est faite avec le modèle d'un gaz calorifiquement parfait dans le but de déterminer la limite d'application de ce modèle. Une étude sur l'erreur donnée par le modèle du gaz parfait est présentée dans ce contexte.

#### Position du problème par rapport à la littérature

Après une recherche bibliographique assez poussée dans différents documents et maisons d'éditions, on a remarqué que la majorité des travaux *publiés* dans le domaine de la conception des tuyères sont basés sur l'utilisation du modèle du gaz parfait à chaleur spécifique  $C_p$  constante [3], [4], [5], [6], [8], [11], [12], [13], [15], [18], [19], [24], [29], [32], [33], [34], [35], [36] et [45]. Cette supposition ne tient pas compte du comportement réel du gaz lorsque la température génératrice est élevée, dépassons les  $1000 K^\circ$ . Dans ce cas, le modèle mathématique du calcul est à revoir complètement. Le nouveau modèle sera appelé modèle du gaz parfait à Haute Température. La seule différence entre les deux modèles réside au niveau de l'équation de conservation de l'énergie. On n'a pas un problème au niveau de la conservation de la masse et de la quantité du mouvement. Donc le changement de l'équation de l'énergie par une nouvelle qui tient compte de la variation des chaleurs spécifiques à haute température donne un nouveau modèle à résoudre dont la philosophie de la résolution ne change pas complètement, sauf quelque modification. Il est à noter que pour résoudre un tel problème, il suffit généralement de choisir deux variables d'état pour déterminer le reste des paramètres. Alors le modèle mathématique du gaz parfait devient un cas particulier de notre modèle à Haute Température.

### Disposition des chapitres (plan du travail)

Le travail présenté est composé de 5 chapitres.

*Le premier chapitre* est consacré à la présentation des relations thermodynamiques et géométrique lorsque l'on tient compte de la température génératrice. Nous présentons aussi les techniques numériques de calcul de chaque paramètre avec une application dans une tuyère quasi unidirectionnelle. Une étude de l'erreur donnée par le modèle du gaz parfait par rapport à notre modèle pour chaque paramètre [53] et [54] est présentée.

*Le deuxième chapitre* présente d'une manière détaillée la nouvelle forme de la fonction de Prandtl Meyer qui sera valable lorsque la température  $T_0$  est prise en compte ou élevée. Elle est représentée par l'intégration d'une fonction analytique assez complexe. La quadrature de Simpson avec pas variable et l'adaptation avec modification de la quadrature de Gauss Legendre ont été présentées [52] et [58].

*Dans le troisième chapitre*, on présente la méthode de calcul et de conception de la tuyère à détente centrée  $2D$  et axisymétrique, par la méthode des caractéristiques à haute température et les manières de calcul de l'écoulement dans la tuyère avec quelques nomenclatures utilisées. L'intégration des équations de compatibilité et des caractéristiques est faite par la méthode des différences finies [3], [13], [26], [30], [51], [57] et [65]. Ensuite le calcul de la masse de la tuyère ainsi que la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère sont présentées dans les références [51], [55], [57] et [65]. Une étude de l'erreur donnée par le modèle  $GP$  est présentée dans le but de déterminer la limite d'application de ce modèle.

*Le quatrième chapitre* est consacré à la présentation de la méthode de conception de la tuyère à corps central  $2D$  [5], [6], [15], [33], [35], [36], [46] et [56] à haute température [55] donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle.

*Le cinquième chapitre* présente divers résultats obtenus sous forme de graphes et tableaux des quatre chapitres, notamment la conception et le dimensionnement des tuyères  $MLN$   $2D$  et axisymétrique et la tuyère à corps central type à bouchon bidimensionnelle, et le calcul de l'erreur donnée par les paramètres de l'écoulement supersonique et les paramètres de conception du modèle du gaz parfait par rapport à notre modèle  $HT$ .

Enfin on présente une conclusion générale sur le travail élaboré suivi par la proposition de quelques travaux de futur.

## CHAPITRE 1

### PARAMETRES D'UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE

Les résultats obtenus d'un écoulement supersonique d'un gaz parfait présentés dans les références [1], [2], [9], [13], [25], [59] et [60] sont valables sous la base de quelques hypothèses. Parmi ces hypothèses, le gaz est considéré comme calorifiquement parfait, c'est à dire, les chaleurs spécifiques  $C_P$  et  $C_V$  sont constantes et ne dépendent pas de la température, ce qui n'est pas valable dans le cas réel lorsque la température croît [53] et [54]. Le but de ce chapitre est de présenter le modèle mathématique en ajoutant l'effet de variation de  $C_P$  avec la température. Dans ce cas, le gaz est nommé gaz calorifiquement imparfait ou gaz à Haute Température. On trouve dans la référence [27], une table contenant les valeurs de  $C_P$  et  $\gamma$  en fonction de la température pour l'air dans l'intervalle 55 K° et 3550 K°. Ici, on a fait une interpolation polynomiale [22], [28] et [30] aux valeurs de la table afin de trouver une forme analytique de la fonction  $C_P(T)$ , vu qu'il existe une relation analytique entre  $C_P(T)$  et  $\gamma(T)$ . Les relations mathématiques présentées sont valables dans le cas général indépendamment de la forme d'interpolation et de la substance, mais les résultats seront illustrés par le choix d'une interpolation par un polynôme du 9<sup>ème</sup> degré [53] et [54]. Les relations mathématiques développées sont sous la forme des équations algébriques non linéaires et l'intégrale des fonctions analytiques complexes, où la procédure analytique est impossible. Alors, notre intérêt s'oriente vers la détermination des solutions numériques approchées. La méthode de dichotomie [10], [30], [53], [54] et [64] est utilisée pour la résolution des équations algébriques non linéaires et l'algorithme de Simpson est utilisé pour l'intégration numérique des fonctions présentées [10], [30], [53], [54] et [64]. Les fonctions à intégrer possèdent des gradients élevés aux extrémités de l'intervalle d'intégration. La quadrature de Simpson à pas constant demande une discrétisation très élevée pour avoir une précision convenable. La solution de ce problème est faite par introduction d'une procédure de condensation afin de raffiner les points à l'endroit où il y a un gradient élevé [14], [53] et [54]. Les fonctions possèdent un gradient élevé au point supersonique. La formule de condensation choisie est celle de Robert, présentée dans la référence [14]. L'application sera pour l'air dans le domaine supersonique inférieure au seuil de dissociation des molécules, qui sera applicable si le nombre de Mach reste inférieur à 6.00 environ [3]. La comparaison est faite avec le modèle d'un gaz calorifiquement parfait à  $\gamma$  constant.

Dans le but de déterminer la limite d'application du modèle du gaz parfait, une étude sur l'erreur donnée par ce modèle par rapport à notre modèle à Haute Température sera présentée.

### 1.1. Formulation Mathématique du problème

Le développement des relations thermodynamiques est basé sur l'utilisation des équations de conservations sous forme différentielle [37], [49], [59] et [60]. On rappelle que l'équation d'état d'un gaz parfait reste valable et elle est donnée par:

$$P = \rho r T \quad (1.1)$$

Avec  $r = 287.1029 \text{ J}/(\text{Kg} \cdot \text{K}^\circ)$ .

#### 1.1.1. Equation adiabatique

D'après les relations de la thermodynamique [37], on peut écrire pour un écoulement adiabatique, la relation suivante:

$$dq = C_V dT + l dV = 0 \quad (1.2)$$

Avec 
$$l = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{rT}{v} \quad (1.3)$$

Et 
$$v = \frac{1}{\rho}$$

D'où 
$$d v = - \frac{d\rho}{\rho^2} \quad (1.4)$$

Notre domaine d'étude est limité dans le régime supersonique pour un nombre de Mach  $M \in [1.0, 6.00]$ . Le rapport des chaleurs spécifiques donne la relation suivante:

$$C_V = \frac{C_P}{\gamma} \quad (1.5)$$

Remplaçons les relations (1.3), (1.4) et (1.5) dans l'expression (1.2), on obtient:

$$\frac{C_P}{\gamma} dT - \frac{rT}{\rho} d\rho = 0$$

Nous pouvons vérifier à partir des résultats de la table que  $C_P$ ,  $C_V$  et  $\gamma$  vérifient entre elles la relation (1.5) et celle de Meyer  $C_P - C_V = r$  ou  $[\gamma(T) = C_P(T) / (C_P(T) - r)]$  pour un gaz parfait. Cette relation devient:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T [\gamma(T) - 1]} \quad (1.6)$$

Alors, l'intégration de la relation (1.6) donne la relation adiabatique pour le gaz parfait à Haute Température.

### 1.1.2. Equation de la vitesse du son

La vitesse du son, par définition, est donnée par [1], [9] et [25]:

$$a^2 = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_{s=\text{constante}} \quad (1.7)$$

La différentielle de l'équation d'état du gaz parfait (1.1) donne

$$\frac{dP}{d\rho} = \rho r \frac{dT}{d\rho} + r T \quad (1.8)$$

Remplaçons la relation (1.6) dans (1.8) et après réarrangement, on aura:

$$a^2(T) = \gamma(T) r T \quad (1.9)$$

L'équation (1.9) prouve l'invariance de la relation de la vitesse du son, qui reste toujours valable pour le modèle à Haute Température, sauf, qu'il faut tenir compte de la variation du rapport  $\gamma(T)$ .

$$\frac{da}{a} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d[\gamma(T)]}{\gamma(T)} + \frac{dT}{T} \right] \quad (1.10)$$

Cette relation présente la différentielle de la vitesse du son en terme de température pour le gaz à Haute Température.

### 1.1.3. Relation entre la vitesse et la température

L'équation de conservation de l'énergie sous forme différentielle [1] et [37] s'écrit:

$$C_p dT + V dV = 0 \quad (1.11)$$

D'où

$$V dV = -C_p dT \quad (1.12)$$

Intégrant la relation (1.12) entre l'état générateur donné par  $(V_0 \approx 0, T_0)$  et un état quelconque donné par  $(V, T)$ . On obtient:

$$\int_{V_0}^V V dV = - \int_{T_0}^T C_p(T) dT \quad (1.13)$$

A la sortie de la chambre de combustion on a  $V_0 \approx 0$  et  $T_0$  donnée. Donc la relation (1.13) donne :

$$V^2 = -2 \int_{T_0}^T C_p(T) dT \quad (1.14)$$

On pose 
$$H(T) = \int_T^{T_0} C_p(T) dT \quad (1.15)$$

Donc 
$$V^2 = 2 H(T) \quad (1.16)$$

Divisons la relation (1.11) par  $V^2$  et remplaçons (1.16) dans le résultat obtenu, on aura:

$$\frac{dV}{V} = - \frac{C_p(T)}{2 H(T)} dT \quad (1.17)$$

L'expression (1.17) présente la forme différentielle de la vitesse de l'écoulement en fonction de la température.

#### 1.1.4. Relation entre le nombre de Mach et la température

Le nombre de Mach est défini par [1]

$$M = \frac{V}{a} \quad (1.18)$$

Remplaçons la relation (1.9) dans (1.18) et élevons la relation au carré, ensuite substituons l'équation (1.17), on obtient:

$$M(T) = \frac{\sqrt{2 H(T)}}{a(T)} \quad (1.19)$$

La relation (1.19) montre la variation du nombre de Mach en fonction de la température pour un gaz calorifiquement imparfait.

#### 1.1.5. Relation entre la masse volumique et la température

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement connue par l'équation de Bernoulli, sous forme différentielle, s'écrit [1] :

$$V dV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (1.20)$$

Remplaçons la relation (1.7) dans la relation (1.20), on aura

$$V dV + a^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (1.21)$$

Figurant le nombre de Mach, en remplaçant la relation (1.18) dans la relation (1.21), on aura l'expression suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (1.22)$$

Remplaçant les relations (1.16) (1.17), (1.18) et (1.19) dans la relation (1.22), on aura

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_p(T)}{\gamma(T) r \cdot T} dT \quad (1.23)$$

On préfère l'écriture de la relation (1.23) sous la forme suivante

$$\frac{d\rho}{\rho} = F_\rho(T) dT \quad (1.24)$$

Avec

$$F_\rho(T) = \frac{C_p(T)}{a^2(T)} \quad (1.25)$$

Le rapport des masses volumiques correspondant à la température  $T_0$  peut être obtenu en intégrant l'équation (1.26) entre l'état générateur  $(\rho_0, T_0)$  et l'état concerné donné par  $(\rho, T)$ , on obtient

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \text{Exp} \left( - \int_T^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad (1.26)$$

#### 1.1.6. Relation entre la pression et la température

Le rapport des pressions est donné, en utilisant la relation (1.1) par

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \left( \frac{T}{T_0} \right) \quad (1.27)$$

Prenons la différentielle de l'équation d'état des gaz parfait (1.1), ensuite remplaçons la relation (1.25) dans le résultat obtenu, on aura:

$$\frac{dP}{P} = \left( F_\rho(T) + \frac{1}{T} \right) dT \quad (1.28)$$

Cette relation présente la différentielle de la pression en fonction de la température pour le gaz à Haute Température.

#### 1.1.7. Relation entre la section et la température

L'équation de conservation de la masse s'écrit [38] et [39]:

$$\rho V A = \text{constante} \quad (1.29)$$

La différentielle de la relation (1.29) donne

$$\frac{dA}{A} = - \left\{ \frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} \right\} \quad (1.30)$$

En remplaçant  $dV/V$  et  $d\rho/\rho$  par leurs expressions (1.17) et (1.24) respectivement, on obtient la forme suivante:

$$\frac{dA}{A} = F_A(T) dT \quad (1.31)$$

$$\text{Avec} \quad F_A(T) = C_p(T) \left[ \frac{1}{a^2(T)} - \frac{1}{2H(T)} \right] \quad (1.32)$$

L'intégration de l'équation (1.31), entre l'état du col ( $A^*$ ,  $T^*$ ) et un état quelconque ( $A$ ,  $T$ ) du divergent, détermine le rapport des sections supersonique par

$$\frac{A}{A^*} = \text{Exp} \left( \int_T^{T^*} F_A(T) dT \right) \quad (1.33)$$

Nous remarquons que pour calculer les paramètres  $\rho$  et  $A$ , nous avons besoin de calculer l'intégrale d'une certaine fonction où la procédure analytique est impossible, vu la complexité des fonctions à intégrer. Donc, notre intérêt s'oriente vers le calcul numérique. *Tous les paramètres  $M$ ,  $\rho$  et  $A$  sont fonctions de la température.*

#### 1.1.8. Débit massique critique

Le débit massique traversant une section  $A$  est donné par [1], [25] et [27]:

$$m = \int_A \rho V \cos \theta dA \quad (1.34)$$

$\theta$  est l'angle que fait le vecteur vitesse avec la normale à la section  $A$ . Si nous divisons la relation (1.34) par la quantité  $A^* \rho_0 a_0$ , pour rendre le calcul non-dimensionnel, nous aurons

$$\frac{m}{A^* \rho_0 a_0} = \int_A \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \left( \frac{a}{a_0} \right) M \cos(\theta) \frac{dA}{A^*} \quad (1.35)$$

Sachant que le débit critique est constant, on peut le calculer au niveau du col de la tuyère. A cette section on  $\rho = \rho^*$ ,  $A = A^*$ ,  $a = a^*$ ,  $M = 1$  et  $\theta = 0$  (écoulement horizontal). Donc, la relation (1.46) se réduit à une relation plus simple:

$$\frac{\dot{m}}{A^* \rho_0 a_0} = \left( \frac{\rho^*}{\rho_0} \right) \left( \frac{a^*}{a_0} \right) \quad (1.36)$$

La détermination du rapport des vitesses du son se fait par l'utilisation de la relation (1.9). On obtient :

$$\frac{a}{a_0} = \left[ \frac{\gamma(T)}{\gamma(T_0)} \right]^{1/2} \left[ \frac{T}{T_0} \right]^{1/2} \quad (1.37)$$

La relation (1.37) montre qu'il faut tenir compte de la variation du rapport  $\gamma(T)$  pour la détermination du rapport des vitesses du son.

### 1.2. Modèle du gaz parfait

Pour faire une comparaison entre le cas à Haute Température et le cas d'un gaz parfait, on rappelle les relations thermodynamiques isentropiques d'un gaz parfait [1], [2], [3], [9], [11], [13], [15], [24], [25], [36], [37], [38], [39], [44], [59] et [60] :

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_0} &= \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-1}, & \frac{P}{P_0} &= \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-\gamma/(\gamma-1)}, & \frac{\rho}{\rho_0} &= \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-1/(\gamma-1)} \\ \frac{A}{A_*} &= \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, & \frac{\dot{m}}{A_* \rho_0 a_0} &= \left[ \frac{\gamma+1}{2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Les relations (1.38) donnant les paramètres  $T$ ,  $P$ ,  $\rho$ ,  $A$  et le débit sont reliées explicitement avec le nombre de Mach qui est la variable principale pour un gaz parfait. Pour notre modèle, la variable principale est la température à cause de l'équation (1.19), reliant  $M$  et  $T$ , où la détermination de l'expression analytique de son inverse est impossible.

### 1.3. Procédure du calcul

On présente en premier lieu, la table de variation de la chaleur spécifique  $C_P$  et le rapport  $\gamma$ , pour l'air [27], voir le tableau 1.1. Par contre, pour un gaz parfait, les valeurs de  $\gamma$  et  $C_P$  sont données à 298.15 K° par [1], [9], [27] et [49],

$$\gamma=1.402, \quad C_P=1001.28932 \text{ J / ( Kg K° )}$$

Tableau 1.1 : Table de variation de  $C_P(T)$  et  $\gamma(T)$  avec la température pour l'air.

$T$ (K°)	$C_P$ (J/(Kg K°))	$\gamma(T)$	$T$ (K°)	$C_P$ (J/(Kg K°))	$\gamma(T)$	$T$ (K°)	$C_P$ (J/(Kg K°))	$\gamma(T)$
55.538	1001.104	1.402	833.316	1107.192	1.350	2111.094	1256.813	1.296
.	.	.	888.872	1119.078	1.345	2222.205	1263.410	1.294
222.205	1001.101	1.402	944.427	1131.314	1.340	2333.316	1270.097	1.292
277.761	1002.885	1.401	999.983	1141.365	1.336	2444.427	1273.476	1.291
305.538	1004.675	1.400	1055.538	1151.658	1.332	2555.538	1276.877	1.290
333.316	1006.473	1.399	1111.094	1162.202	1.328	2666.650	1283.751	1.288
361.094	1008.281	1.398	1166.650	1170.280	1.325	2777.761	1287.224	1.287
388.872	1011.923	1.396	1222.205	1178.509	1.322	2888.872	1290.721	1.286
416.650	1015.603	1.394	1277.761	1186.893	1.319	2999.983	1294.242	1.285
444.427	1019.320	1.392	1333.316	1192.570	1.317	3111.094	1297.789	1.284
499.983	1028.781	1.387	1444.427	1204.142	1.313	3222.205	1301.360	1.283
555.538	1054.563	1.374	1555.538	1216.014	1.309	3333.316	1304.957	1.282
611.094	1054.563	1.370	1666.650	1225.121	1.306	3444.427	1304.957	1.282
666.650	1067.077	1.368	1777.761	1234.409	1.303	3555.538	1308.580	1.281
722.205	1080.005	1.362	1888.872	1243.883	1.300			
777.761	1093.370	1.356	1999.983	1250.305	1.298			

### 1.3.1. Polynôme d'interpolation de $C_P(T)$

L'interpolation des valeurs de  $C_P$  en fonction de la température est réalisée par un polynôme du 9<sup>ème</sup> degré [53] et [54]. Ce choix est justifié par la petite valeur de l'erreur [28] obtenue entre les valeurs tabulées et les valeurs interpolées [30] et [64]. A titre d'information, plusieurs tests d'interpolations [28] ont été effectués afin de choisir la meilleure interpolation. En outre, on a utilisé le schéma de *Horner* [30] pour la présentation du polynôme  $C_P(T)$ . Alors

$$C_P(T)=a_1+T(a_2+T(a_3+T(a_4+T(a_5+T(a_6+T(a_7+T(a_8+T(a_9+T(a_{10})))))))))) \quad (1.39)$$

Les coefficients  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, 10$ ) sont présentés dans le tableau 1.2 suivant

Tableau 1.2 : Coefficients du polynôme  $C_P(T)$ .

$i$	$a_i$	$i$	$a_i$	$i$	$a_i$	$i$	$a_i$	$i$	$a_i$
1	1001.1058	3	$-6.3376997 \cdot 10^{-4}$	5	$-4.0338459 \cdot 10^{-9}$	7	$-1.3509355 \cdot 10^{-15}$	9	$-4.8467531 \cdot 10^{-23}$
2	$4.0661289 \cdot 10^{-2}$	4	$2.7474759 \cdot 10^{-6}$	6	$3.0697736 \cdot 10^{-12}$	8	$3.472262 \cdot 10^{-19}$	10	$2.8411878 \cdot 10^{-27}$

Un petit problème se pose durant l'interpolation par la formule (1.39). Après une présentation graphique du polynôme de  $C_P(T)$  et une comparaison avec les valeurs données par le tableau 1.1, on remarque une variation ondulée à basse température jusqu'à environ  $240 \text{ K}^\circ$ , au lieu d'avoir une fonction constante dans cette portion conformément aux valeurs de la table. A cet effet, une correction est introduite pour rapprocher les valeurs interpolées des valeurs du tableau 1.1. Alors, si  $T=\bar{T}=240 \text{ K}^\circ$ , la relation (1.39) donne la valeur suivante:

$$\bar{C}_P=C_P(\bar{T})=1001.15868 \text{ J} / (\text{Kg K}^\circ)$$

Donc, la correction est faite de la manière suivante

- Si  $T \leq \bar{T}$ , on utilise la correction suivante:  $C_P(T)=\bar{C}_P$
- Si  $T > \bar{T}$ , on utilise la formule (1.39).

Concernant la détermination de la forme analytique de la fonction  $C_P(T)$ , on peut avoir plusieurs formes de polynômes par plusieurs procédures et méthodes [30] et [64]. Pour le choix de la bonne forme d'interpolation, il faut faire une étude sur les erreurs entre les valeurs du tableau 1.1 et les valeurs données par la substitution dans l'équation analytique du polynôme d'interpolation. L'interpolation choisie donne une erreur meilleure à  $\varepsilon=10^{-3}$ .

### 1.3.2. Intégration de la chaleur spécifique $C_p(T)$

Une fois que l'interpolation est faite, on détermine la fonction  $H(T)$  de la relation (1.15), par intégration de la fonction  $C_p(T)$  dans l'intervalle  $[T, T_0]$ . Alors,  $H(T)$  est une fonction à un paramètre  $T_0$  et elle est définie tant que  $T \leq T_0$ . Remplaçons la relation (1.39) dans la relation (1.15) et écrivons le résultat obtenu de l'intégration sous la forme du schéma de Horner, on aura:

$$H(T)=H_0 - [c_1+T(c_2+T(c_3+T(c_4+T(c_5+T(c_6+T(c_7+T(c_8+T(c_9+T(c_{10}))))))))))] \quad (1.40)$$

avec: 
$$H_0=T_0(c_1+T_0(c_2+T_0(c_3+T_0(c_4+T_0(c_5+T_0(c_6+T_0(c_7+T_0(c_8+T_0(c_9+T_0(c_{10})))))))))) \quad (1.41)$$

et 
$$c_i=a_i / i \quad (i=1, 2, 3, \dots, 10)$$

Vu la correction faite sur la fonction  $C_p(T)$ , la fonction  $H(T)$  prend la forme suivante:

- Si  $T_0 < \bar{T}$  alors:  $H(T)=\bar{C}_p(T_0-T)$
- Si  $T_0 > \bar{T}$  on a deux cas: 
$$\begin{cases} \text{Si } T > \bar{T} & \text{alors } H(T) = \text{relation (1.40)} \\ \text{Si } T \leq \bar{T} & \text{alors } H(T) = \bar{C}_p(\bar{T}-T) + H(\bar{T}) \end{cases}$$

### 1.3.3. Calcul numérique des rapports thermodynamiques

La détermination des rapports des masses volumiques et des sections donnés par les formules (1.26) et (1.33), respectivement, demande l'intégration numérique des fonctions  $F_p(T)$  et  $F_A(T)$  dans les intervalles  $[T, T_0]$  et  $[T, T^*]$ . Notons que la fonction  $F_A(T)$  dépend du paramètre  $T_0$ .

Pour avoir une idée sur la variation de chacune des deux fonctions précédentes, avant de prendre une décision sur le choix de la quadrature d'intégration, nous avons tracé leurs courbes de variations. Elles sont illustrées par les figures 1.1 et 1.2 respectivement. Nous pouvons conclure que les quadratures d'intégrations à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision vue la variation très rapide aux extrémités gauches de chaque intervalle ( $T=T_S$ ). Pour une bonne présentation à ces extrémités, le traçage des fonctions est choisi pour la température  $T_0=500 \text{ K}^\circ$  (basse température) et  $M_S=6.00$  (extrême supersonique). Nous remarquons que chaque fonction présente une dérivée très grande au voisinage de la température  $T_S$ . Une condensation des nœuds est alors nécessaire au voisinage de la température  $T_S$  pour les deux fonctions [54]. Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision très élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature.

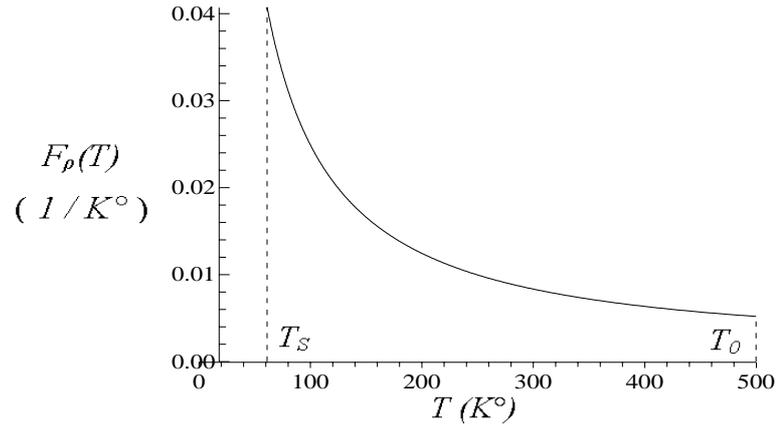


Figure 1.1 : Variation de la fonction  $F_\rho(T)$  dans l'intervalle  $[T_S, T_0]$ .

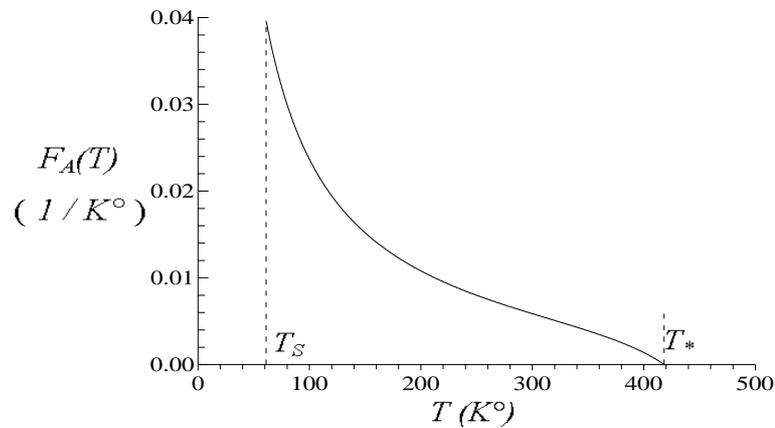


Figure 1.2 : Variation de la fonction  $F_A(T)$  dans l'intervalle  $[T_S, T^*]$ .

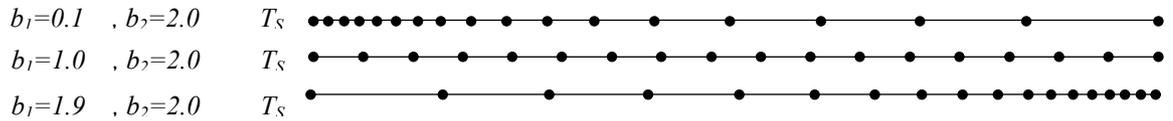


Figure 1.3 : Présentation de la condensation des nœuds

La quadrature d'intégration choisie est celle de *Simpson* [10] et [30], pour le calcul numérique des intégrales (1.26) et (1.33). La fonction de condensation utilisée est celle de *Robert* [14]. Elle est donnée par :

$$s_i = b_1 z_i + (1 - b_1) \left[ 1 - \frac{\tanh[b_2(1 - z_i)]}{\tanh(b_2)} \right] \quad (1.42)$$

Avec 
$$z_i = \frac{i-1}{N-1} \quad 1 \leq i \leq N \quad (1.43)$$

Après la détermination de la fonction de condensations, on peut déterminer la distribution des températures par:

$$T_i = s_i(T_D - T_G) + T_G \quad (1.44)$$

La température  $T_D$  égale à  $T_0$  pour la fonction  $F_\rho(T)$ , et égale à  $T^*$  pour la fonction  $F_A(T)$ . La température  $T_G$  égale à  $T^*$  pour le paramètre critique, et égale à  $T_S$  pour le paramètre à une section supersonique. Si on prend une valeur de  $b_I$  proche de zéro ( $b_I=0.1$ ) et  $b_2=2.0$ , on peut condenser les nœuds vers l'extrémité gauche  $T_S$  de l'intervalle. Si on prend des valeurs de  $b_I$  proche de 2 (par exemple  $b_I=1.9$ ), on peut condenser les nœuds vers l'extrémité droite. Pour des sous intervalles de même longueurs, on peut prendre  $b_I=1.0$ . La figure 1.3 présente la distribution des nœuds suivant le choix de la valeur de  $b_I$ . Il faut noter que notre intérêt est de condenser les nœuds vers l'extrémité gauche  $T_S$  vu la variation des fonctions  $F_\rho(T)$  et  $F_A(T)$

#### 1.4. Paramètres critiques au col correspondant à $T_0$

L'état générateur est donné par le nombre de Mach nul ( $M=0$ ). Alors, les paramètres critiques ( $T^*$ ,  $P^*$ ,  $\rho^*$  et  $a^*$ ) correspondant à la température  $T_0$  et au nombre de Mach  $M=1$  (ce qui est le cas au col de la tuyère), peuvent être déterminés. Si on remplace dans la relation (1.19), les paramètres  $M$  et  $T$  par les conditions critiques, on obtient :

$$M_*^2 = \frac{2 H(T^*)}{\gamma(T^*) \cdot r \cdot T^*} \quad (1.45)$$

Comme  $M^*=1$ , alors, la relation (1.45) devient

$$F(T^*) = 2 H(T^*) - a^2(T^*) = 0 \quad (1.46)$$

La détermination de la racine  $T^*$  de l'équation (1.46) se fait en utilisant l'algorithme de dichotomie [11] et [53]. Sachant que  $T^* < T_0$ , on peut choisir facilement un intervalle  $[T_1, T_2]$  contenant la température  $T^*$  et qui doit vérifier la condition  $F(T_1) F(T_2) \leq 0$ . On peut prendre  $T_1 = 0 \text{ K}^\circ$  et  $T_2 = T_0$ . Une fois que cet intervalle est déterminé, on peut calculer  $T_1$  avec une précision  $\varepsilon$ , et par suite le rapport  $T^*/T_0$  correspondant à la température  $T_0$ . La valeur  $T^*$  obtenue dépend de la précision  $\varepsilon$ . Le nombre de subdivisions  $K$  de l'intervalle  $[T_1, T_2]$  correspondant à la précision  $\varepsilon$  nécessaire pour déterminer la température  $T^*$  est donné par [10]

$$K = 1.4426 \text{Log}(T_0 / \varepsilon) + 1 \quad (1.47)$$

Si  $\varepsilon = 10^{-6}$ , le nombre de subdivisions  $K$  ne peut excéder 66.

Si nous remplaçons  $T=T^*$  dans la relation (1.26) et nous intégrons la fonction, dans l'intervalle  $[T^*, T_0]$ , en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds

vers l'extrémité gauche ( $T=T^*$ ), nous obtenons le rapport critique des masses volumiques suivant:

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \text{Exp} \left( - \int_{T^*}^{T_0} F_p(T) dT \right) \quad (1.48)$$

Le rapport critique des pressions peut être déterminé en remplaçant ceux des températures et des masses volumiques dans la relation (1.27), on aura

$$\frac{P^*}{P_0} = \left( \frac{\rho^*}{\rho_0} \right) \left( \frac{T^*}{T_0} \right) \quad (1.49)$$

Le rapport des vitesses critiques du son peut être obtenu en substituant la valeur de  $T^*$  dans la relation (1.37) par :

$$\frac{a^*}{a_0} = \left[ \frac{\gamma(T^*)}{\gamma(T_0)} \right]^{1/2} \left[ \frac{T^*}{T_0} \right]^{1/2} \quad (1.50)$$

Pour trouver la valeur non-dimensionnelle du débit massique critique, il suffit de remplacer l'expression du rapport critique des masses volumiques (1.48), et celle des vitesses du son (1.50), dans l'expression (1.36).

### 1.5. Paramètres Supersoniques correspondant à $T_0$

On procède maintenant à la détermination des rapports thermodynamiques et géométrique à une section quelconque du divergent de la tuyère correspondant à un nombre de Mach supersonique  $M_S$ . Cette section est caractérisée par  $\rho=\rho_S$ ,  $P=P_S$ ,  $A=A_S$  et  $T=T_S$ .

L'obtention du rapport des températures se fait en premier lieu par le remplacement de  $T=T_S$  et  $M=M_S$  dans la relation (1.19), on obtient:

$$M_S^2 = \frac{2 H(T_S)}{\gamma(T_S) \cdot r \cdot T_S}$$

ou 
$$F(T_S) = 2 H(T_S) - M_S^2 a^2(T_S) = 0 \quad (1.51)$$

La détermination de la racine  $T_S$  de l'équation (1.51) se fait de la même manière que celle de  $T^*$  et avec la même démarche en utilisant l'algorithme de dichotomie [11] et [54], sauf ici, nous avons  $T_S < T^*$ . Une fois l'intervalle  $[T_1, T_2]$  déterminé, on peut facilement obtenir  $T_S$  avec une précision  $\varepsilon$  et par suite le rapport  $T_S/T_0$  correspondant à la température

$T_0$ . On peut prendre dans ce cas  $T_1 = 0 K^\circ$  et  $T_2 = T^*$ . La valeur obtenue de  $T^*$  dépend de la précision  $\varepsilon$ .

Remplaçons  $T=T_S$  dans la relation (1.26) et intégrons la fonction  $F_\rho(T)$  dans l'intervalle  $[T_S, T_0]$ , en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche, nous obtenons le rapport des masses volumiques.

$$\frac{\rho_S}{\rho_0} = \text{Exp} \left( - \int_{T_S}^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad (1.52)$$

Le rapport des pressions supersoniques peut être déterminé en remplaçant ceux des températures et des masses volumiques dans la relation (1.27), nous aurons

$$\frac{P_S}{P_0} = \left( \frac{\rho_S}{\rho_0} \right) \left( \frac{T_S}{T_0} \right) \quad (1.53)$$

Le rapport des vitesses du son peut être obtenu encore en remplaçant  $T$  par  $T_S$  dans la relation (1.37), nous obtenons

$$\frac{a_S}{a_0} = \left[ \frac{\gamma(T_S)}{\gamma(T_0)} \right]^{1/2} \left[ \frac{T_S}{T_0} \right]^{1/2} \quad (1.54)$$

L'obtention du rapport géométrique des sections se fait par la substitution de  $T$  par  $T_S$  dans la relation (1.33), ensuite l'intégration de la relation obtenue dans l'intervalle  $[T_S, T_0]$  en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche  $T_S$ . On obtient:

$$A_S / A_* = \text{Exp} \left( \int_{T_S}^{T_*} F_A(T) dT \right) \quad (1.55)$$

### Remarque

- A titre d'information, on peut calculer le débit à cette section en introduisant les paramètres nécessaires dans la relation (1.35) puis en intégrant, on obtient le résultat suivant:

$$\frac{m}{A_*} = \frac{\rho_S}{\rho_0} \cdot \frac{a_S}{a_0} \cdot M_S \cdot \frac{A_S}{A_*} \quad (1.56)$$

Puisque le débit est constant à travers la tuyère, les relations (1.36) et (1.56) donnent le même résultat.

- La précision du résultat de l'intégration de (1.48), (1.52) et (1.55) dépend essentiellement des valeurs de  $N$ ,  $b_1$  et  $b_2$ .

### 1.6. Erreur du modèle du Gaz Parfait

Le modèle mathématique d'un gaz parfait en considère la chaleur spécifique  $C_p$  et le rapport  $\gamma$  constants donne des résultats acceptables avec une certaine erreur pour des faibles températures. D'après cette étude, on peut remarquer une différence des relations données entre le modèle du gaz parfait et notre modèle développé. L'erreur donnée par le modèle du gaz parfait par rapport à notre modèle qui tiens compte de la température génératrice peut être calculée pour chaque paramètre. Alors pour chaque couple  $(T_0, M)$ , l'erreur relative  $\varepsilon$  peut être évaluée par la relation suivante [30]:

$$\varepsilon_{Paramètre}(T_0, M) = \left| 1 - \frac{Paramètre_{GP}(T_0, M)}{Paramètre_{HT}(T_0, M)} \right| \times 100 \quad (1.57)$$

Le mot paramètre dans la relation (1.57) peut représenter tous les paramètres ( $T$ ,  $P$ ,  $\rho$ ,  $A$ ,  $a$  et débit) mentionnés dans ce chapitre. Dans les applications aérodynamiques, généralement les auteurs acceptent une erreur inférieure à 5 %. [2].

L'erreur maximale commise entre les erreurs données par les paramètres peut être évaluée pour donner une erreur globale des résultats du phénomène physique.

### 1.7. Application dans une tuyère

On peut rencontrer le problème étudié, par exemple, lors de la conception des tuyères supersoniques de propulsion. L'utilisation de la forme de la tuyère dimensionnée, obtenue sur la base du modèle d'un gaz parfait donnant un nombre de Mach  $M_S$  supersonique uniforme à la section de sortie pour les applications des moteurs fusées ou des souffleries, dégrade les performances souhaitées ; surtout si la température de la chambre de combustion  $T_0$  est élevée [54]. On rappelle que la forme de la structure de la tuyère ne change pas, mais le comportement thermodynamique de l'air change avec la température  $T_0$ . En augmentant la valeur de  $T_0$ , on peut avoir des résultats autres que ceux obtenus pour le modèle du gaz parfait. Si on veut conserver la même variation du nombre de Mach à travers la tuyère et par conséquent, le même nombre de Mach de sortie  $M_S$  du modèle d'un gaz parfait, il faut déterminer pour notre modèle, le rayon de chaque section et en particulier le rayon de la section de sortie qui va donner la même variation du nombre de Mach et par conséquent une autre forme de la tuyère sera obtenue. La relation (1.58)

indique que le nombre de Mach du modèle  $GP$  est conservé. En premier lieu, on détermine la température à cette section qui présente la solution de l'équation (1.59). Pour déterminer le rapport des sections et par conséquent le rayon de la section, on utilise la relation (1.60). Le rapport des sections obtenu par notre modèle est supérieur au rapport des sections du modèle  $GP$ . La forme de la tuyère obtenue par le modèle à  $\gamma$  constant est alors incluse dans la tuyère obtenue par notre modèle.

$$M_S(HT) = M_S(GP) \quad (1.58)$$

$$M_S(HT) = \frac{\sqrt{2H[T_S(HT)]}}{a[T_S(HT)]} \quad (1.59)$$

$$A_S/A_*(HT) = \text{Exp}\left(\int_{T_S(HT)}^{T_*} F_A(T) dT\right) > A_S/A_*(GP) \quad (1.60)$$

La deuxième situation consiste à conserver la forme de la tuyère dimensionnée sur la base du modèle du gaz parfait pour les applications aéronautiques (voir la relation (1.61)). Dans ce cas, cette tuyère va délivrer un nombre de Mach inférieur à celui souhaité (voir la relation (1.62)). La correction du nombre de Mach pour le modèle à Haute Température se fait en premier lieu par la détermination de la température  $T_S$  comme solution de l'équation (1.60). Ensuite on détermine le nombre de Mach de sortie par la relation (1.50). Dans ce cas, les rapports thermodynamiques changent et vont influencer sur les autres paramètres de conception comme la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère. La résolution de l'équation (1.60) se fait en combinant la méthode de dichotomie avec la quadrature de Simpson.

$$A_S/A_*(HT) = A_S/A_*(GP) \quad (1.61)$$

$$M_S(HT) < M_S(GP) \quad (1.62)$$

## CHAPITRE 2

### FONCTION DE PRANDTL MEYER A HAUTE TEMPERATURE

Dans ce chapitre on va présenter l'effet de la variation de la chaleur spécifique  $C_p(T)$  sur l'expression de la fonction de Prandtl-Meyer, avec la même démarche présentée dans le chapitre 1 pour l'étude de l'écoulement supersonique à haute température.

La fonction de Prandtl Meyer joue un rôle très important dans le calcul des écoulements supersoniques. Si on veut concevoir une tuyère supersonique donnant un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie [3], [5], [6], [8], [11], [12], [13], [15] et [16], il est nécessaire de connaître l'angle de détente initial au col qu'il faut donner pour avoir le nombre de Mach de sortie voulu. La conception de ce type de tuyère est basée sur l'application de la méthode des caractéristiques [2], [3] et [16]. Cette dernière est formulée sur la base de la fonction de Prandtl Meyer. Une deuxième application consiste à calculer l'écoulement supersonique autour d'un dièdre dans un milieu ambiant chaud, notamment le calcul de l'écoulement autour d'un profil d'aile pointu ou d'un cône de révolution [1].

Les résultats obtenus pour un écoulement supersonique d'un gaz parfait présentés dans les références [1] et [2] sont valables sous la base de hypothèse d'un gaz calorifiquement parfait, c'est à dire, les chaleurs spécifiques  $C_p$  et  $C_v$  sont constantes et ne dépendent pas de la température; ce qui n'est pas valable dans le cas réel lorsque la température  $T_0$  croît.

La nouvelle fonction de Prandtl Meyer est présentée sous la forme d'une intégrale d'une certaine fonction complexe [52] et [58], où la procédure analytique d'intégration est impossible. Alors, notre intérêt s'oriente vers la détermination des solutions approchées [10], [30] et [31]. On présente dans ce chapitre deux méthodes d'intégrations numériques, l'une de Simpson avec pas variables et l'autre de Gauss Legendre adaptée vu que la fonction à intégrer possède une singularité dans sa dérivée.

La dérivée de cette fonction au point critique est infinie. Elle présente alors un gradient élevé en ce point. Les quadratures d'intégration à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une précision convenable, notamment les quadratures de trapèze et de Simpson. Une quadrature robuste et rapide qui répond bien à la spécificité de la fonction est développée. Avec un nombre de point très réduit, on peut intégrer notre fonction avec une précision très élevée. Le problème qui se pose dans l'application de cette quadrature est que les points d'intégration sont des nombres irrationnels équidistants et varient avec le rang de la quadrature [30] et [31].

L'application est pour l'air dans le domaine supersonique, inférieure au seuil de dissociation des molécules applicable si le nombre de Mach reste inférieur à 6.00 environ.

Dans le but de déterminer la limite d'application du modèle *GP*, une étude sur l'erreur donnée par ce modèle par rapport à notre modèle *HT* sera présentée. Les relations mathématiques présentées sont valables dans le cas général indépendamment de la forme de l'interpolation et de la substance.

### 2.1. Formulation mathématique

La déviation d'un écoulement supersonique peut engendrer une expansion ou une compression. Lorsque l'intensité du choc  $\Delta P/P$  tend vers zéro, fournis l'outil nécessaire à l'étude de ce phénomène [37]. En effet, l'onde de choc oblique devient une onde de Mach. La vitesse normale à l'onde est la vitesse du son. Une petite déviation d'écoulement  $\Delta\theta$  en aval de l'onde est liée à une différence de vitesse  $\Delta V$  par la relation suivante [2], [13], [25], [37], [38], [39], [59] et [60] :

$$d\theta = - \frac{\cot g(\mu)}{V} dV \quad (2.1)$$

En insérant la relation entre l'angle de Mach  $\mu$  et le nombre de Mach  $M$  dans l'équation (2.1), on obtient:

$$dv = (M^2 - 1)^{1/2} \frac{dV}{V} \quad (2.2)$$

La relation (2.2) est très importante pour l'étude de l'écoulement supersonique isentropique externe ou interne. Notons que l'angle  $d\theta$  est considéré positif lorsque l'écoulement s'éloigne de la direction normale à l'onde (onde de compression) et négatif quand l'écoulement se rapproche de la direction normale à l'onde (onde de détente).

Pour l'intégration de l'équation (2.2), il convient d'exprimer  $dV/V$  et le nombre de Mach par leurs expressions (1.17) et (1.19) présentées dans le chapitre 1, on obtient la relation suivante:

$$dv = - F_v(T) dT \quad (2.3)$$

Avec: 
$$F_v(T) = \frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{2H(T)/a^2(T) - 1} \quad (2.4)$$

Les expressions de  $C_p(T)$ ,  $H(T)$  et  $a(T)$  sont présentées respectivement par les relations (1.39), (1.40) et (1.9) du chapitre 1 avec [54]:

$$\gamma(T) = \frac{C_p(T)}{C_p(T) - r} \quad (2.5)$$

On remarque clairement que la fonction de Prandtl-Meyer est reliée directement à la température.

L'intégration de la relation (2.4) entre deux états 1 et 2 donne:

$$v_2 - v_1 = \int_{T_1}^{T_2} -F_v(T) dT = v(T_2) - v(T_1) \quad (2.6)$$

La fonction  $v$  est définie purement dans le régime supersonique. Lorsque  $M=1.0$ , on prend  $v=0.0$ , puisque le calcul se fait par une intégration définie. Alors, la valeur de  $v$  pour un nombre de Mach supersonique  $M>1.0$  [dans ce cas la température est inférieure à la température critique ( $T<T^*$ )] est donnée par:

$$v(T) = \int_T^{T^*} F_v(T) dT \quad (2.7)$$

On remarque que le calcul de  $v$  nécessite l'intégration de la fonction  $F_v(T)$  où la procédure analytique est impossible vu la complexité de cette fonction. Donc, notre intérêt s'oriente vers le calcul numérique. On peut obtenir la relation de Prandtl Meyer d'un gaz parfait à partir de la relation (2.7) en annulant tous les coefficients de la variation du polynôme  $C_p(T)$  avec la température sauf le premier. La relation pour un gaz parfait est donc un cas particulier de la forme générale (2.7) de la fonction de Prandtl Meyer. Dans cette relation, la température  $T$  correspondant au nombre de Mach  $M$  doit être déterminée par la résolution de l'équation (1.19) présentée dans le chapitre 1.

Pour faire une comparaison entre les cas *HT* et *GP*, on rappelle la fonction de Prandtl-Meyer donnée par la théorie d'un gaz parfait [1]:

$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctg \left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} (M^2 - 1) \right]^{1/2} - \arctg [M^2 - 1]^{1/2} \quad (2.8)$$

La fonction de Prandtl-Meyer (2.8) est reliée explicitement avec le nombre Mach, qui est la variable principale pour le gaz parfait. Contrairement notre modèle *HT*, la variable principale est la température  $T$  à cause de l'équation (1.19) présentée dans le chapitre 1, reliant  $M$  et  $T$  qu'on ne peut pas déterminer une expression analytique de son inverse.

## 2.2. Procédure de calcul par la méthode de Simpson

La détermination de la valeur de  $v_S$  correspondant au nombre de Mach  $M_S$  ( $T=T_S$ ) demande l'intégration numérique de la fonction  $F_v(T)$  dans l'intervalle  $[T_S, T^*]$ . Notons ici que l'intégration dépend du paramètre  $T_0$ . Dans la figure 2.1, on a présenté la variation de cette fonction pour voir une idée sur la forme exacte avant de prendre une décision sur le

choix de la quadrature d'intégration. On peut conclure que les quadratures d'intégrations à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision vu la variation très rapide de la fonction  $F_v(T)$  aux extrémités de l'intervalle. Le traçage de la fonction est choisi pour  $T_0=500 \text{ K}^\circ$  (basse température) et  $M_S=5.00$  (extrême supersonique) pour une bonne présentation aux extrémités. La fonction présente une dérivée infini à  $T=T^*$ .

Une condensation des nœuds est alors indispensable et nécessaire aux voisinage des températures  $T^*$  et  $T_S$ . Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature. La quadrature d'intégration choisie est celle de Simpson [10] et [30] pour le calcul numérique de l'intégrale donnée par (2.7). La forme de condensation retenue dans notre calcul est présentée par la relation (1.42) du chapitre 1. Après avoir obtenu  $s$ , on peut facilement déterminer la distribution des valeurs de  $T$  par:

$$\frac{T-T_S}{T^*-T_S}=f(s) \quad (2.9)$$

La fonction  $f(s)$  de la relation (2.9) est arbitraire. Pour notre calcul, on prend la forme  $f(s)=s$ . Alors, la distribution des nœuds se fait de la manière suivante:

$$T_i = S_i ( T^* - T_S ) + T_S \quad (2.10)$$

Si on prend des valeurs de  $b_1$  proches de zéro (exemple  $b_1=0.1$ ) et  $b_2=2.0$ , on peut condenser les nœuds vers l'extrémité gauche  $T_S$  de l'intervalle. Pour des valeurs de  $b_1$  proche de 2.0 (exemple  $b_1=1.9$ ) et  $b_2=2.0$ , on peut condenser les nœuds vers l'extrémité droite  $T^*$ . La fonction de condensation (1.42) du chapitre 1 permet uniquement de condenser les nœuds vers une seule extrémité gauche ou droite.

Comme notre fonction présente une variation très rapide aux deux extrémités, il est nécessaire de condenser les nœuds vers les deux en même temps. Il est alors nécessaire de diviser l'intervalle d'intégration  $[T_S, T^*]$  en deux parties, (égales par exemple)  $[T_S, T_M]$  et  $[T_M, T^*]$  telle que:

$$T_M = \frac{T_S + T^*}{2} \quad (2.11)$$

Pour l'intervalle  $[T_S, T_M]$  gauche, on prend  $b_1$  proche de zéro (exemple  $b_1=0.1$ ) et  $b_2=2.00$  et pour l'intervalle  $[T_M, T^*]$  de droite, on doit prendre des valeurs de  $b_1$  proche de 2.00 (exemple  $b_1=1.9$ ) et  $b_2=2.00$  pour condenser respectivement les nœuds vers l'extrémité gauche  $T_S$  et droite  $T^*$  pour chaque intervalle. On divise encore le nombre  $N$  en

deux parties. Alors, la subdivision de l'intervalle  $[T_S, T^*]$  possède la forme présentée sur la figure 2.2.

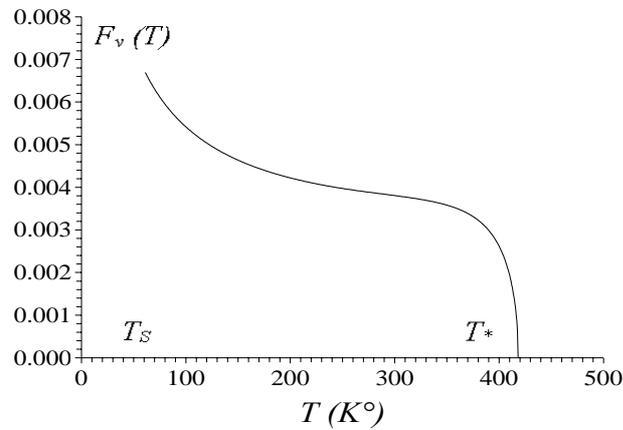


Figure 2.1 : Variation de la fonction  $F_v(T)$  dans  $[T_S, T^*]$

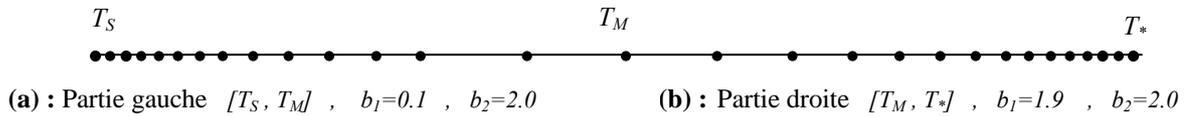


Figure 2.2 : Condensation des nœuds vers les deux extrémités de l'intervalle  $[T_S, T^*]$

Les deux problèmes qui se posent sont les suivants:

### 2.2.1. Calcul de la valeur de $v_S$ d'un nombre de Mach $M_S$

La valeur de  $v_S$  correspondant à  $T_S$  peut être obtenue par intégration de la fonction  $F_v(T)$  dans l'intervalle  $[T_S, T^*]$  en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers les deux extrémités.

### 2.2.2. Problème inverse

Un problème se pose dans les applications du calcul des écoulements supersoniques externe et interne, connu par problème inverse. Ce problème est représenté par la détermination de la température  $T$  lorsque la valeur de la fonction de Prandtl-Meyer  $v$  de cette température est connue. Le problème se pose par la détermination de  $T_S$  en connaissant  $v_S$ . A partir de la relation (2.7), on peut écrire:

$$F(T_S) = v_S - \int_{T_S}^{T^*} F_v(T) dT = 0 \quad (2.12)$$

Nous avons  $T_S < T^*$ . La fonction  $v$  est toujours positive dans le régime supersonique. Pour déterminer  $T_S$  comme racine de (2.12), on utilise l'algorithme de dichotomie combiné avec la quadrature de Simpson pour l'évaluation à chaque fois l'intégrale de (2.12). En

premier lieu, on définit un intervalle fermé  $[T_G, T_D]$  contenant la température  $T_S$  qui vérifie la condition  $F(T_G) \cdot F(T_D) \leq 0$ . On peut prendre  $T_G=0$  et  $T_D=T^*$ . En raccourcissant  $[T_G, T_D]$ , on a besoin chaque fois de calculer la valeur  $F(T_M)$  avec  $T_M$  milieu de l'intervalle  $]T_G, T_D[$ . Dans ce cas, on est obligé de calculer  $v=v_M$  comme résultat de l'intégrale (2.7) lorsque  $T=T_M$ .

### 2.3. Procédure de calcul par l'adaptation de la quadrature de Gauss Legendre

La première remarque concernant la fonction  $F_v(T)$  est qu'elle est obtenue par des termes positives présentées par les fonctions  $C_p(T)$ ,  $H(T)$ ,  $a(T)$  et la racine carrée, quelque soit l'intervalle  $[T_S, T^*]$ . La fonction  $F_v(T)$  à intégrer est alors une fonction positive.

Une deuxième remarque donnée est que la fonction  $F_v(T)$  est une fonction régulière propre ne possède pas de singularité. Autrement dit, la fonction à intégrer est totalement définie dans l'intervalle fermé quelque soit les valeurs de  $T_S$  et  $T^*$  dans le domaine du phénomène physique.

Une autre remarque est que l'intervalle d'intégration contient toujours la température critique  $T^*$  correspondant au nombre de Mach critique  $M=1$  ; ce qui donne que *la fonction  $F_v(T)$  possède une dérivée infini à cette température*. On remarque encore que la fonction  $F_v(T)$  est nulle pour  $T=T^*$ . Alors, en ce point, on a:

$$F_v(T^*)=0.0 \quad , \quad \left( \frac{dF_v}{dT} \right)_{T=T^*} = -\infty \quad (2.13)$$

Et par conséquent, les dérivées successives d'ordre supérieure présentent une singularité au point  $T=T^*$ , alors:

$$\left[ \frac{d^{(n)}F_v}{(dT)^n} \right]_{T=T^*} = -\infty \quad (n=2, 3, 4, \dots) \quad (2.14)$$

Nous sommes en présence d'une fonction complètement définie dans l'intervalle d'intégration, mais sa *dérivée possède un point singulier*. Les quadratures d'intégrations numériques basées sur le calcul de l'aire de la fonction  $F_v(T)$  demandent une discrétisation très élevée pour avoir une convergence convenable. Un inconvénient majeur donné si on utilise ces quadratures est qu'aucune information sur l'erreur commise par le calcul sera donnée, vu que le calcul de cette l'erreur correspondant à la discrétisation est basé sur la valeur maximale de la dérivée de la fonction  $F_v(T)$  et des dérivées d'ordre supérieure [30]. Vu la propriété (2.14), ce type de quadrature ne donne aucune information sur l'erreur

donnée par son utilisation. On peut citer ici les quadratures de trapèze, de Simpson et de Runge Kutta [30].

La fonction  $F_v(T)$  possède par conséquent un terme appelé par *fonction poids*, responsable de la singularité de la dérivée de la fonction  $F_v(T)$  au point  $T=T^*$ . Notre intérêt se base donc sur la décomposition de la fonction  $F_v(T)$  afin d'enlever la singularité et considérer la reste de la fonction décomposée pour le calcul de l'intégrale correspondant à la discrétisation.

La fonction sous le signe racine dans l'expression (2.4) possède une racine  $T=T^*$ . On peut démontrer ce résultat à partir de la relation (1.9) du chapitre 1 lorsque  $M=1$  ( $T=T^*$ ). Alors cette expression est divisible par  $(T^*-T)$ . La relation (2.4) peut être écrite sous la forme suivante (ici on a multiplié et divisé eu même temps par  $\sqrt{T^*-T}$  :

$$F_v(T) = \frac{C_P(T)}{2 H(T) a(T)} \sqrt{T^*-T} \sqrt{\frac{2H(T)-a^2(T)}{T^*-T}} \quad (2.15)$$

Dans l'expression (2.15), on n'a pas préféré le résultat de la division euclidienne, afin de prendre le cas général indépendamment de l'interpolation de la fonction  $C_P(T)$ . On remarque que l'expression (2.15) possède une *fonction poids de la forme racine carré*.

Prenons le changement de variable suivant dans le but de transformer l'intervalle  $[T_S, T^*]$  à l'intervalle  $[0, 1]$ .

$$T = T^* - (T^* - T_S) x \quad (2.16)$$

Lorsque  $x=0$  on aura  $T=T^*$  , Lorsque  $x=1$  on aura  $T=T_S$

Alors

$$dT = -(T^* - T_S) dx$$

Par conséquent, la valeur  $v_S$  peut être obtenue par l'évaluation de l'intégrale suivante dans un intervalle de référence  $[0, 1]$  constant. On obtient:

$$v_S = \int_0^1 \sqrt{x} \left[ \frac{(T^*-T_S)^{3/2} C_P(T)}{2 H(T) a(T)} \sqrt{\frac{2H(T)-a^2(T)}{T^*-T}} \right] dx \quad (2.17)$$

Dans la relation (2.17), la température  $T$  est donnée par la relation (2.16). On peut remarquer ici que l'obtention de la valeur de  $v_S$  dépend de deux paramètres  $M_S$  et  $T_0$ . Dans la relation (2.17) on a:

$$\lim_{T \rightarrow T^*} \frac{2 H(T) - a^2(T)}{T^* - T} = \frac{0}{0} = 2 a(T^*) \left. \frac{da}{dT} \right|_{T=T^*} + 2 C_P(T^*) = \text{Valeur finie non nulle} \quad (2.18)$$

On peut considérer la relation (2.17) sous la forme suivante:

$$v_S = \int_0^1 w(x) f(x) dx \quad (2.19)$$

avec: 
$$w(x) = \sqrt{x} \quad (2.20)$$

et 
$$f(x) = \frac{(T_* - T_S)^{3/2} C_P(T)}{2 H(T) a(T)} \sqrt{\frac{2H(T) - a^2(T)}{T_* - T}} \quad (2.21)$$

Notons que la fonction  $f(x)$  dépend des paramètres  $T_0$  et  $M_S$ . Dans la relation (2.21), la quadrature d'intégration développée n'a pas besoin de connaître la valeur de la fonction  $f(x)$  lorsque  $x=0$  ( $T=T_*$ ). Le problème qui se pose, c'est lors de l'évaluation de l'erreur commise par la quadrature, puisque l'expression (2.21) sera maximale au point  $x=0$ .

*La fonction  $f(x)$  et les dérivées successives d'ordre supérieure  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f^{(3)}(x)$ , ...,  $f^{(n)}(x)$  ne présentent aucune singularité type infini dans l'intervalle  $[0,1]$  fermé et particulièrement au point  $x=0$ . Alors à  $x=0$ , on a*

$$\left. \left( \frac{d^{(n)} f}{(dx)^n} \right) \right|_{x=0} = \text{valeur finie} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (2.22)$$

Les figures 2.3 et 2.4 représentent respectivement l'allure des fonctions  $w(x)f(x)$  et  $f(x)$ .

Les fonctions présentées sur les figures 2.3 et 2.4 sont choisies pour le nombre de Mach  $M_S=6.00$  (extrême supersonique). Pour les autres valeurs du nombre de Mach, on obtient la même allure avec des valeurs différentes.

Sur la figure 2.3, on remarque clairement que la fonction  $F_v(x)$  ou  $w(x)f(x)$  possède une dérivée infinie à  $x=0$ . La figure 2.4 nous montre que la fonction  $f(x)$  est régulière dans l'intervalle  $[0,1]$  quelque soit la température  $T_0$  et  $M_S$ .

Vu la forme de la fonction  $f(x)$ , on peut dire que *les dérivées successives supérieures  $|f^{(2n)}(x)|$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) d'ordre pair atteignent la valeur maximale au point  $x=0$ .*

La quadrature d'intégration numérique convenable choisie est celle de *Gauss Legendre* [12] lorsque la fonction à intégrer possède une fonction poids  $w(x)$  de la forme  $\sqrt{x}$ . La forme générale de la quadrature est donnée par [30]:

$$I = \int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j f(a_j) + E \quad (2.23)$$

On remarque clairement que la fonction poids  $w(x)$  n'entre pas dans le calcul de la somme du terme de droite de la relation (2.23).

Les points d'intégrations  $a_j$  ainsi que les coefficients  $\alpha_j$  de la quadrature (2.23) jusqu'à  $n=15$  sont présentés dans le tableau 2.1.

Ces points sont obtenus à partir de la référence [58]. Ils sont donnés par la forme suivante:

$$a_j = \xi_j^2 \quad , \quad \alpha_j = 2 \sigma_j \xi_j^2 \quad (2.24)$$

$\xi_j$  représentent les racines positives du polynôme de Legendre d'ordre  $(2n+1)$  et  $\sigma_j$  sont les coefficients associés aux racines  $\xi_j$  de la quadrature de Gauss Legendre d'ordre  $2n+1$ .

L'inconvénient majeur de cette quadrature est que *les points  $a_j$  et les coefficients  $\alpha_i$  d'évaluation de l'intégrale sont des nombres irrationnels*. Le reste  $E$  de cette quadrature est donné par [30]:

$$E_n = K_n \left| f^{(2n)}(\eta) \right| \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

Avec

$$K_n = \frac{2^{4n+3} [(2n+1)!]^4}{(4n+3) [(4n+2)!]^2 (2n)!}$$

La relation de récurrence reliant deux valeurs successives du coefficient  $K$  de la formule (2.25) est de la forme suivante:

$$n=0 \quad K_0 = \frac{2}{3} \quad , \quad K_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+3)^2}{(2n+1)(4n+3)(4n+5)^2(4n+7)} K_n$$

L'expression (2.25) donne, pour quelques valeurs de  $n$ , les valeurs suivantes:

$$K_1 = \frac{4}{175} \quad , \quad K_2 = \frac{16}{130977} \quad , \quad K_3 = \frac{96}{372683025}$$

La valeur de  $\eta$  dans la relation (2.25) représente le point dans l'intervalle  $[0, 1]$  pour lequel la dérivée de la fonction  $f^{(2n)}(x)$  est maximale. La valeur maximale des fonctions  $f^{(2n)}(\eta)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) est atteinte au point  $x=0$  ( $T=T_*$ ) quelque soit l'ordre de la dérivée de la fonction  $f(x)$  et quelque soit les paramètres  $T_0$  et  $M_S$ . On note que pour la relation (2.25), on a besoin que les dérivées successives d'ordre pair. Sur la figure 2.5 on a présenté l'allure de la fonction  $f''(x)$  pour quelques valeurs de  $T_0$  lorsque  $M_S=6.00$ . On peut bien remarquer que le maximum de la valeur des fonctions des dérivées successives est atteint au point critique. Alors:

$$\eta = 0 \quad , \quad \max \left| f^{(2n)}(\eta) \right| = f^{(2n)}(x=0) \quad (2.26)$$

Le calcul des dérivées successives de la fonction  $f(x)$  se fait numériquement et non analytiquement. Comme la fonction  $f(x)$  ne permet pas de donner la valeur à  $x=0$  sous cette forme, on a rapproché la valeur pour  $x=0$  à la valeur pour  $x=\varepsilon$  avec  $\varepsilon=10^{-8}$  vu que la fonction est régulière et la valeur à  $x=0$  est finie. Le calcul de la dérivée seconde  $f''(x)$  directement à partir de la fonction  $f(x)$  se fait par la relation suivante [30]:

$$f^{(2)}(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{\Delta x^2} \quad i=2, 3, \dots, N \quad (2.27)$$

avec  $\Delta x = \frac{1}{(N-1)}$  (discrétisation uniforme) ,  $x_i = (i-1) \Delta x$   $i=1, 2, 3, \dots, N$

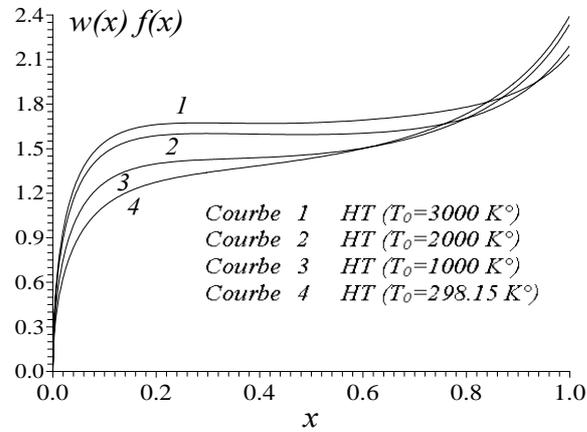


Figure 2.3 : Graphe de la fonction  $w(x)f(x)$  lorsque  $M_S=6.00$ .

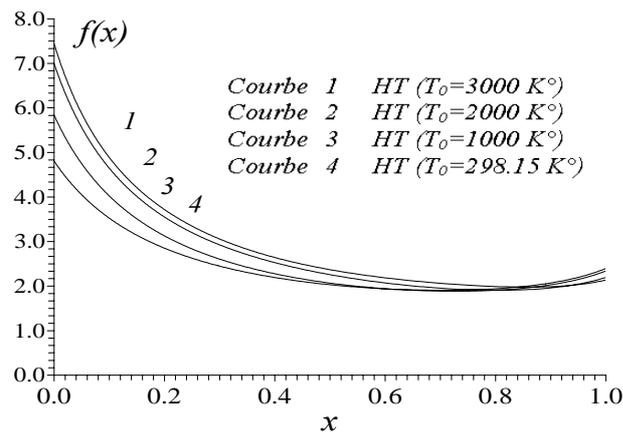


Figure 2.4 : Graphe de la fonction  $f(x)$  lorsque  $M_S=6.00$ .

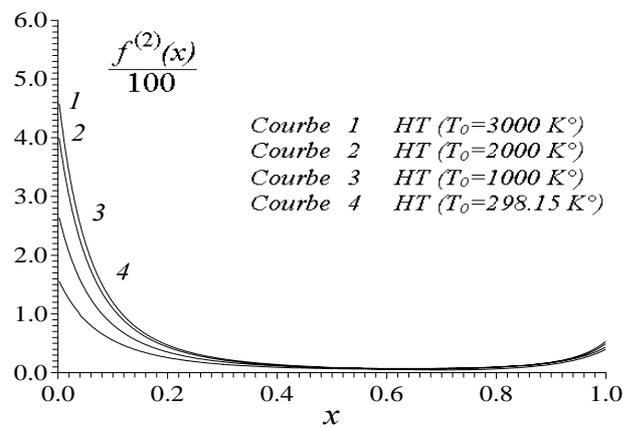


Figure 2.5 : Dérivées d'ordre seconde de la fonction  $f(x)$  lorsque  $M_S=6.00$ .

La relation (2.27) ne permet pas de calculer la valeur de la dérivée au point  $i=1$  et elle pose un problème pour  $i=2$ . Dans notre calcul, on s'intéresse uniquement au calcul de la valeur de (2.27) au point  $i=1$  avec  $x_1=\varepsilon=10^{-8}$ , qui représente la valeur maximale rapprochée de  $f''(x)$ . Au point  $x=0$ , la relation (2.27) n'est plus valable, il faut approcher la fonction  $f''(x)$  par des dérivées directes. Alors:

$$f^{(2)}(x_1=0) \approx \frac{f(x_1=\varepsilon)-2f(x_2=2\varepsilon)+f(x_3=3\varepsilon)}{\varepsilon^2} \quad (2.28)$$

Pour le calcul des dérivées successives d'ordre pair directement à partir de la fonction  $f(x)$ , on peut utiliser la relation suivante:

$$f^{(2n)}(x_i) = \frac{C_{2n}^n (-1)^n f(x_i) + \sum_{K=1}^{K=n} C_{2n}^{n-K} (-1)^{n+K} [f(x_{i-K}) + f(x_{i+K})]}{(\Delta x)^{2n}} \quad (2.29)$$

Avec 
$$C_P^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$$

La relation (2.29) pose un problème pour les points  $i=1, 2, \dots, n$  de gauche, et les points  $i=N, N-1, N-2, \dots, N-n$  de droite. Dans ce cas, il faut utiliser respectivement des dérivées directes et les dérivées inverses pour les points de droite

A partir du graphe de la figure 2.3, on remarque la singularité de la dérivée de la fonction  $w(x) f(x)$  au point  $x=0$ .

### 2.3.1. Calcul de la valeur de $v_S$ correspondant au nombre de Mach $M_S$

La valeur de  $v_S$  correspondant à  $T_0$  peut être obtenue par l'évaluation de l'intégrale (2.19) en considérant la quadrature (2.23).

### 2.3.2. Problème inverse

Le problème inverse est présenté par la détermination de la température  $T$  lorsque la valeur de la fonction de Prandtl-Meyer  $v$  est connue. Le problème se pose par la détermination de  $T_S$  en connaissant  $v_S$ . A partir de la relation (2.19), on peut écrire:

$$F(T_S)=0=v_S - \int_0^1 w(x) f(x) dx \quad (2.30)$$

Pour déterminer  $T_S$ , racine de l'équation (2.30) on utilise l'algorithme de dichotomie combiné avec la quadrature (2.19) pour l'évaluation à chaque fois de l'intégrale de (2.30).

## 2.4. Applications

On présente deux applications, l'une concernant l'écoulement externe et l'autre l'aérodynamique interne.

### 2.4.1. Détente supersonique autour d'un dièdre

L'application présentée concerne la détente supersonique autour d'un dièdre. Cette application est très importante dans le calcul des écoulements supersoniques lors d'une déviation ouverte supersonique. Ici on va résoudre le problème de base de toute application supersonique externe, en déterminant l'influence de la température génératrice (air libre)  $T_0$  sur les résultats après la détente, et en particulier le nombre de Mach  $M_2$  aval. Le schéma représentatif est illustré dans la figure 2.6.

Sur la figure 2.6, on a deux parois inclinées avec des angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  respectivement par rapport à l'horizontale. L'écoulement en amont (juste après la détente) est entièrement connu par les paramètres  $T_0, M_1, P_1, T_1, \rho_1$ . Le problème consiste à présenter les résultats juste après la détente par les paramètres  $M_2, T_2, P_2, \rho_2$ . Ce qui nous intéresse beaucoup c'est le nombre de Mach  $M_2$  et la température  $T_2$ . Les autres paramètres peuvent être déterminés par application des relations données dans le chapitre 1 en posant  $M=M_2$ . Après la détente, la température  $T_0$  ne change pas. D'après [1] et [2], on peut écrire:

$$v_2 = v_1 + \theta_1 - \theta_2 \quad (2.31)$$

Notons ici que  $\theta_1 > 0$  et  $\theta_2 < 0$ .

La valeur  $v_1$  peut être déterminée par la relation (2.7) pour le gaz à  $HT$  en posant  $T=T_1$  et elle est donnée par la relation (2.8) pour le gaz parfait en posant  $M=M_1$ . Comme  $\theta_1 - \theta_2$  est positif, la valeur de  $v_2 > v_1$ , ce qui donne que  $M_2 > M_1$  et  $T_2 < T_1$ . Le problème maintenant consiste à déterminer  $T_2$  et  $M_2$  correspondant à  $v = v_2$ . Donc, il faut déterminer la racine de l'équation  $F(T_2) = 0.0$  de la relation (2.12) en remplaçant  $v_S$  par  $v_2$  et  $T_S$  par  $T_2$ , ensuite substituons  $T=T_2$  dans la relation (1.19) du chapitre 1 pour obtenir  $M_2$ .

Le rapport des pressions peut être calculé par [54]:

$$\frac{P_2}{P_0} = \frac{T_2}{T_0} \text{Exp} \left( - \int_{T_2}^{T_0} C_P(T) / a^2(T) dT \right) \quad (2.32)$$

La procédure d'intégration de (2.32) est présentée dans le chapitre 1. Notons qu'à travers le faisceau d'ondes, la pression totale reste constante.

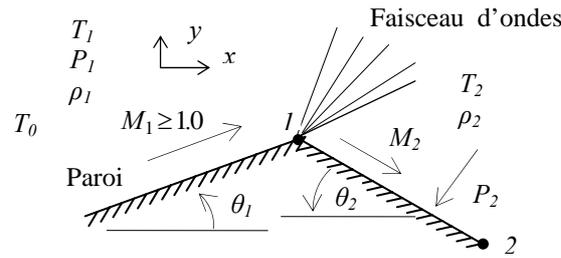


Figure 2.6 : Présentation d'un écoulement autour d'un dièdre.

Si on considère le segment reliant les points 1 et 2 de coordonnées respectivement  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  comme étant un segment de la surface d'un profil d'aile, on peut déterminer la traînée d'onde  $F_x$  ainsi que la portance  $F_y$  donnée par ce segment et cela par:

$$\frac{F_y}{(x_2 - x_1) l P_0} = \frac{F_x}{(y_1 - y_2) l P_0} = \frac{P_2}{P_0} \quad (2.33)$$

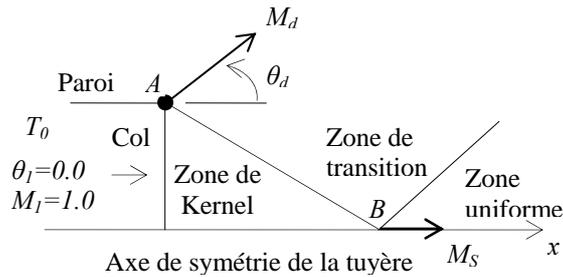
#### 2.4.2. Centre de détente au col d'une tuyère

On rencontre ce problème par exemple au col des tuyères supersoniques possédant une détente brusque et instantanée lors de la conception de cette dernière. Cette situation est présentée dans la figure 2.7. Si on veut obtenir une tuyère supersonique donnant un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie ( $M=M_S$ , et  $\theta=\theta_S=0$ ), il est nécessaire pour certains types (tuyère à détente centrée), de dévier la tuyère d'un angle  $\theta_d$  au col d'une quantité donnée par [2], [16], [38], [39], [51], [52], [55] et [57]:

$$\theta_d = \frac{v_s}{2} \quad (2.34)$$

La relation (2.34) est valable uniquement pour le cas de la tuyère bi-dimensionnelle. Le nombre de Mach  $M_d$  juste après la détente peut être déterminé par la suite et il correspond à la fonction de Prandtl-Meyer lorsque  $v=v_d=\theta_d$ . Pour le gaz HT, il faut déterminer la température  $T_d$ , racine de l'équation  $F(T_d)=0$  de la relation (2.12) ensuite remplacer  $T=T_d$  dans l'équation (1.19) pour déterminer  $M_d$ . Pour le gaz parfait, il faut déterminer la racine de l'équation  $\theta_d-v(M_d)=0$ , avec  $v(M)$  donnée par l'équation (2.8).

On peut considérer le problème de la détermination du nombre de Mach  $M_d$  comme le cas inverse du problème d'une détente supersonique autour d'un dièdre en posant  $\theta_1=0$ ,  $M_1=1$ ,  $M_2=M_d$  et  $\theta_2=\theta_d$ , connaissant la valeur de  $\theta_2$  et déterminant la valeur de  $M_2$ .



- $AB$  : Dernière Caractéristique Descendante de la zone de Kernel.  
 $M_d$  : Nombre de Mach juste après la détente  
 $\theta_d$  : Déviation de l'écoulement juste après la détente (déviaton initiale de la paroi)  
 $A$  : Centre de détente.  
 $M_S$  : Nombre de Mach de sortie de la tuyère.

Figure 2.7 : Centre de détente d'une tuyère supersonique.

### 2.5. Erreur du modèle du gaz parfait

Le modèle mathématique d'un gaz parfait est développé en considérant la chaleur spécifique  $C_P$  et le rapport  $\gamma$  constants. Ce modèle donne des résultats acceptables avec une certaine erreur pour des faibles températures génératrices. D'après ce chapitre, on peut remarquer une différence entre les relations données entre le modèle du gaz parfait et notre modèle. L'erreur donnée par la fonction de Prandtl Meyer du modèle  $GP$  par rapport à notre modèle peut être calculée. Alors pour chaque couple  $(T_0, M)$ , l'erreur relative  $\varepsilon$  peut être évaluée par la relation suivante:

$$\varepsilon_v(T_0, M) = \left| 1 - \frac{v_{GP}(T_0, M)}{v_{HT}(T_0, M)} \right| \times 100 \quad (2.35)$$

Tableau 2.1 : Abscisses et coefficients associés de la quadrature d'intégration numérique de Gauss Legendre.

$N$	$a_i$	$\alpha_i$	$N$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0.6000000000000000	0.6666666666666666	2	0.2899491979256902 0.8211619131854210	0.2775559982310616 0.3891106684356050
3	0.1647102868965424 0.5498684992164439 0.9008058292716296	0.1257826743288387 0.3076023676819134 0.2332816246559146	4	0.1051402825890898 0.3762245144531748 0.6989480124178011 0.9373342493634639	0.0656805198917234 0.1960962654309977 0.2525273457292033 0.1523625356147421
5	0.0726535129207501 0.2694607913574952 0.5331219512438072 0.7868800559073295 0.9569313076182372	0.0381873467404138 0.1256731526931836 0.1986308014948250 0.1976333762908178 0.1065419894474264	6	0.0531110353928767 0.2011457477322402 0.4126126738794413 0.6425274355436412 0.8419868222565622 0.9686162851951935	0.0240362679915080 0.0836026285451424 0.1470105789261011 0.1784600807729455 0.1551301778197343 0.0784269326112352
7	0.0404790634594485 0.1553552844030579 0.3260092218933120 0.5247810495090229	0.0160646413738235 0.0578421902043224 0.1084105888264953 0.1464880936854638	8	0.0318566030442427 0.1233637516589200 0.2628515868180197 0.4325313536654318	0.0112493760345859 0.0414512326722138 0.0809823454832890 0.1169014327661387

	0.7194544081407778 0.8784814121022774 0.9761292156643709	0.1541923470761435 0.1236305295226674 0.0600382759777507		0.6107641382867313 0.7748209677543141 0.9037839476907447 0.9812397722945748	0.1366692830387442 0.1317755814666915 0.1002468647893110 0.0473905504156923
9	0.0257148952315673 0.1002128293857829 0.2158259737426140 0.3606546629512023 0.5197922288614458 0.6768594060792262 0.8156905862343558 0.9219996954300895 0.9848713437072607	0.0081757343060123 0.0306182346186445 0.0615564607182935 0.0928714339256972 0.1159829507119946 0.1238517633922341 0.1126379670908384 0.0826374068544782 0.0383347150484735	10	0.0211882533867576 0.0829562789325890 0.1800662349821435 0.3042833401055605 0.4450741840659490 0.5904999774662215 0.7282290320205662 0.8465827847034116 0.9355277572455496 0.9875433766109905	0.0061244393846844 0.0232090754827376 0.0476343395695447 0.0741425404140244 0.0968457383081531 0.1103578598972912 0.1108366241648916 0.0967380419593785 0.0691425921303112 0.0316354153556496
11	0.0177573812221122 0.0697676579616676 0.1523349002875194 0.2595917559272685 0.3839163981438633 0.5164741548563255 0.6478453390661046 0.7686946977274729 0.8704350488516294 0.9458388582894007 0.9895660298557983	0.0047043578619363 0.0179869006719414 0.0374893399706037 0.0597043595348431 0.0805395878758111 0.0959771835285512 0.1027241861530468 0.0987502435528373 0.0836273462272987 0.0586193201912444 0.0265438410985522	12	0.0150957326903243 0.0594710569757861 0.1304454344836689 0.2237315839551131 0.3336944609748679 0.4536916527396207 0.5764746285191373 0.6946266154271490 0.8010106761709498 0.8892010419046903 0.9538724158796266 0.9911336801673817	0.0036906784746633 0.0142083210796484 0.0299654709534825 0.0485585350762163 0.0670965784946015 0.0825975254591715 0.0923981606785536 0.0945224752917305 0.0879584949065280 0.0728062821925218 0.0502785894275588 0.0225855546319901
13	0.0129897502705216 0.0512838441952777 0.1128919032822428 0.1946117800221262 0.2921959939697007 0.4005725009573279 0.5141083215114313 0.6269023284435321 0.7330919812674158 0.8271580897901583 0.9042118716043621 0.9602500196306364 0.9923731235626250	0.0029480588493693 0.0114109103597936 0.0242894352552287 0.0398960518221956 0.0561534830777808 0.0708397708300481 0.0818510505055464 0.0874513996300392 0.0864807148627070 0.0784963310907718 0.0638320328841994 0.0435689066838132 0.0194485208151730	14	0.0112950622001347 0.0446697888675952 0.0986158695818322 0.1706953090065631 0.2576506080916358 0.3555519816023176 0.4599749590291040 0.5662003431404894 0.6694274914886765 0.7649912897634026 0.8485730260405570 0.9163957124709954 0.9653956749088579 0.9933699141021641	0.0023917557079817 0.0092978648456790 0.0199384092291376 0.0331025409386701 0.0472725808232962 0.0607796575510705 0.0719753460719028 0.0794015924914229 0.0819420645611021 0.0789391881761548 0.0702653481288455 0.0563409079591306 0.0380985449133227 0.0169208652689493
15	0.0099112601777501 0.0392520096261649 0.0868587407737392 0.1508436085680446 0.2286692931864920 0.3172496178246755 0.4130719316528301 0.5123364056028021 0.6111067151997881 0.7054661402994122 0.7916729120106504 0.8663086221642279 0.9264137961939577 0.9696063477763266 0.9941834489909690	0.0019668892938978 0.0076732465507323 0.0165535774008130 0.0277220779224562 0.0400522167025845 0.0522782961262539 0.0631094447893657 0.0713465178021711 0.0759908609040299 0.0763357722406708 0.0720323105930004 0.0631231668159575 0.0500430390021181 0.0335845059186083 0.0148547446040063			

## CHAPITRE 3

### TUYERE À DETENTE CENTREE A HAUTE TEMPERATURE

La tuyère est un organe utilisée pour accélérer un écoulement supersonique jusqu'à un nombre de Mach supersonique, afin d'engendrer une force de poussée comme une résultante de cette accélération.

Dans ce chapitre, on va présenter la méthode de conception et dimensionnement des tuyères type à détente centrée, bidimensionnelle ou axisymétrique, en utilisant la méthode des caractéristiques, en ajoutant l'effet de variation de la chaleur spécifique  $C_p(T)$  et le rapport  $\gamma(T)$  en fonction de la température [51], [52] et [65]. Cette hypothèse est valable lorsque la température génératrice de la chambre de combustion est élevée, inférieur au seuil de dissociation des molécules.

La figure 3.1 présente les différentes géométries de tuyère supersoniques de propulsion ayant un écoulement horizontal au col et à la section de sortie. Les cas (a) et (b) respectivement de géométrie bi-dimensionnelle et axisymétrique sont le but de ce chapitre. Le cas (c) représente une tuyère tridimensionnelle de section de sortie arbitraire. Elle sera l'objet de travaux de futur. L'idée de base de sa conception est présentée dans l'appendice C.

Dans la réalité, la conception des tuyères se fait suivant la manière de son utilisation. Si la tuyère est utilisée pour la construction d'une soufflerie supersonique, notre intérêt est que la propulsion du gaz donne un écoulement froid à la sortie en plus d'être uniforme et parallèle. Cette condition a pour raison de faire des expériences et de conserver les outils de mesures, sans baser sur la longueur d'être minimale ou non. Mais si la tuyère est conçue pour l'application des missiles et avions supersoniques, on s'intéresse dans ce cas, d'avoir une tuyère ayant un poids le plus petit possible et une force de poussée élevée.

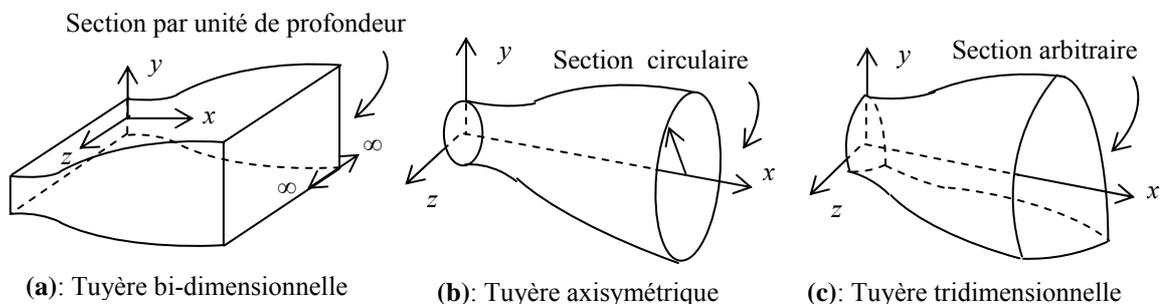


Figure 3.1 : Différentes géométries de tuyères

La tuyère supersonique est divisée en deux parties. Il est à noter que la portion supersonique est indépendante des conditions amont de la ligne sonique. On peut étudier cette partie indépendamment de la partie subsonique. Cette dernière est utilisée pour déterminer la ligne sonique au col de la tuyère. Dans cette classe, on va étudier un type de tuyère donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. Elle est nommée tuyère à détente centrée. Ce type de tuyère donne une longueur minimale par rapport aux autres types existants. Il existe deux catégories pour ce type de tuyères suivant la ligne sonique. Si la ligne sonique est une ligne droite, la paroi au col génère des ondes de détente centrées et divergentes. La deuxième catégorie possède une ligne sonique courbée; dans ce cas l'écoulement à l'intérieur de la tuyère possède des lignes de Mach non centrées. Ce type de tuyère est nommé Tuyère de longueur minimale avec ligne sonique courbée, ou tuyère à zone d'expansion. Chaque type existe pour un écoulement bi-dimensionnel et axisymétrique donnant au total quatre configurations possibles. La tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite est étudiée dans les références [2], [3] [11] et [16]. La référence [11] a étudié la tuyère de longueur minimale axisymétrique avec ligne sonique droite. La référence [13] traite l'analyse complète de la tuyère de longueur minimale plane avec ligne sonique courbée. Les références [3], [13] présentent l'analyse de la tuyère de longueur minimale axisymétrique avec ligne sonique courbée.

Pour permettre d'étudier l'écoulement et faire la conception des tuyères ayant une ligne sonique courbée, vu que l'écoulement est tridimensionnel dans le cas réel, il faut déterminer la position de cette ligne sonique. Cette courbe représente la limite des deux régions subsoniques du convergent et supersonique du divergent. Le nombre de Mach sur cette ligne est égal à l'unité. Alors, il faut étudier un écoulement transsonique à travers le col de la tuyère. De nombreux travaux ont été effectués dans ce contexte [4], [34], [39], [41], [43] et [63].

Dans notre étude, le rapport des sections (1.33) n'est plus valable pour valider les résultats numériques de conception de ce type de tuyère (ligne sonique courbée) mais peut quand même servir pour obtenir les résultats approchés.

La figure 3.2 illustre le schéma général de la tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite et présente les caractéristiques du champ d'écoulement dans différentes régions. Ce type de tuyère est nommé encore par tuyère à détente centrée. Cette nomination est valable pour le cas bi-dimensionnel et axisymétrique. L'écoulement entre le col  $OA$  et la région uniforme  $BES$  est divisé en deux régions. Pour les écoulements bi-dimensionnel et axisymétrique, la région  $OAB$ , appelée par région de Kernel, est une

région d'ondes non simples. La région de transition  $ABS$  est une région d'onde simple si l'écoulement est bi-dimensionnel et la solution peut être obtenue analytiquement [2], [16], [39], [51], [57] et [59]. Cependant, cette région est une région d'ondes non simples si l'écoulement est axisymétrique et dans ce cas la solution numérique est nécessaire [3], [11], [13], [16], [65].

La région triangulaire  $BES$  est une région d'écoulement uniforme à nombre de Mach  $M_S$  de sortie. Dans ce contexte, la paroi, au col, est inclinée d'un angle  $\theta^*$ .

Une convention usuelle consiste à omettre de représenter les caractéristiques dans une région uniforme, de ne représenter que les caractéristiques rectilignes dans le cas d'une région d'ondes simples et de représenter les deux types de caractéristiques dans le cas de régime non simple. Une région uniforme est toujours limitée par des zones d'ondes simples et qu'elle n'est en contact avec une zone d'ondes non simple en un seul point [2].

L'application de la tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite est limitée pour la dynamique des gaz [2], [27] [32], [34], [59] et [60], où seule la tuyère bidimensionnelle avec ligne sonique droite est utilisée. Cependant, pour les souffleries hypersoniques ainsi que les moteurs fusées, les concepteurs utilisent la tuyère axisymétrique [27], [32], [34] et [40]. L'étude dans ce chapitre est limitée pour le cas de la tuyère de longueur minimale avec ligne sonique droite.

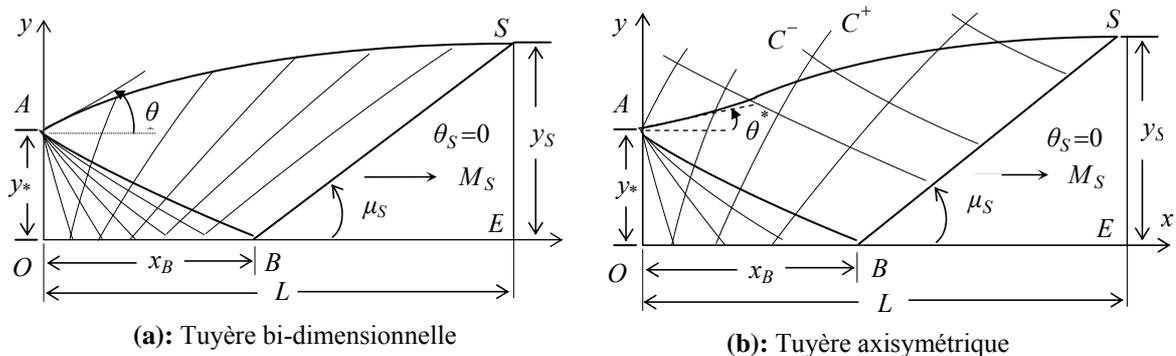


Figure 3.2 : Présentation du champ de l'écoulement dans la tuyère à détente centrée.

Les travaux discutés auparavant dans les références sont réalisés pour le cas du gaz parfait à  $C_p$  et  $\gamma$  constants. Ces travaux sont limités pour des faibles températures génératrices, pour lesquelles on peut aller jusqu'à  $1000 K^\circ$  environ pour des nombres de Mach de sortie qui ne dépassent pas  $M_S=2.0$ . Dans le cas réel, la chaleur spécifique  $C_p$  et le rapport  $\gamma$  varient avec la température. Le but de ce chapitre c'est d'ajouter l'effet de variation en fonction de la température à la chaleur spécifique  $C_p$  et le rapport  $\gamma$  sur la conception des tuyères supersoniques, inférieur au seuil de dissociation. Dans ce cas, les

équations de conservation restent inchangées ; sauf l'équation d'énergie. Les nouvelles relations sur des rapports thermodynamiques à Haute Température sont présentées dans la référence [34], celle de la fonction de Prandtl Meyer est le but des références [52] et [58].

Les équations des caractéristiques présentées par le système (3.1) et (3.2) restent toujours valables sous cette forme. Ici, il faut insérer l'équation de Prandtl Meyer développée dans le système pour obtenir notre propre modèle mathématique valable lorsque l'effet de la haute température est pris en compte. Comme résultats, le modèle mathématique développé dans ce chapitre est une généralisation du modèle du gaz parfait à  $C_p$  et  $\gamma$  constants. Généralement les résultats dans la dynamique des gaz sont acceptés avec une erreur inférieure à 5%.

### 3.1. Formulation mathématique

Pour un écoulement supersonique, irrotationnel, adiabatique d'un gaz parfait, la méthode des caractéristiques donne les équations suivantes, dites équations des caractéristiques et de compatibilités [2] et [65]:

Suivant  $\xi$  (1-3), voir figure 3.3:

$$d(v+\theta) = \delta \frac{\sin\theta \sin\mu}{y} d\xi \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \mu) \quad (3.1)$$

Suivant  $\eta$  (2-3), voir figure 3.3:

$$d(v-\theta) = \delta \frac{\sin\theta \sin\mu}{y} d\eta \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \mu) \quad (3.2)$$

$$\delta = 0 \text{ pour le cas bi-dimensionnel } , \quad \delta = 1 \text{ pour le cas axisymétrique}$$

L'axe du col est nommé par  $y$  pour le différentiel avec la constante  $r$  du gaz. Les équations (3.1) et (3.2) sont valables respectivement sur les caractéristiques  $C^-$  et  $C^+$  comme le montre la figure 3.3. Dans le cas réel, les caractéristiques sont courbes, et si le maillage est fin de sorte que les points soient proches l'un de l'autre, on peut rapprocher la courbure par une ligne droite, le calcul sera sur les lignes de Mach nommées  $\xi$  sur la caractéristique  $C^-$  et par  $\eta$  sur la caractéristique  $C^+$  comme le montre la figure 3.3.

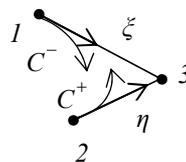


Figure 3.3 : Illustration des lignes caractéristiques et des lignes de Mach.

Dans les relations (3.1) et (3.2), la fonction de Prandtl Meyer de notre modèle à Haute Température est donnée par la relation suivante [52], [58] et [57]:

$$dv=F_v(T)=-\frac{C_P(T)}{2 H(T)}\sqrt{M^2(T)-1} dT \quad (3.3)$$

Avec [53] et [54]

$$M(T)=\frac{\sqrt{2 H(T)}}{a(T)} \quad (3.4)$$

$$a(T)=\sqrt{\gamma(T) r T} \quad (3.5)$$

$$\gamma(T)=\frac{C_P(T)}{C_P(T)-r} \quad (3.6)$$

Les fonctions  $C_P(T)$  et  $H(T)$  sont présentés dans le chapitre 1 par les relations (1.39) et (1.40). L'angle de Mach est donné par [1]:

$$\mu=\arcsin(1 / M) \quad (3.7)$$

On peut exprimer les directions  $\zeta$  et  $\eta$  des lignes de Mach en fonction des coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  par les relations suivantes [2], [11] et [59]:

$$d\zeta=\frac{dx}{\cos(\theta-\mu)} \quad , \quad d\eta=\frac{dy}{\sin(\theta+\mu)} \quad (3.8)$$

Remplaçant les relations (3.8) et (3.3) dans le système (3.1) et (3.2) on obtient, le *modèle mathématique à Haute Température de la méthode des caractéristiques*:

Suivant  $\xi$  (1-3):

$$-\frac{C_P(T)}{2 H(T)}\sqrt{M^2(T)-1} dT+d\theta=\delta \frac{\sin\theta \sin\mu}{y \cos(\theta-\mu)} dx \quad (3.9)$$

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}(\theta-\mu) \quad (3.10)$$

Suivant  $\eta$  (2-3):

$$-\frac{C_P(T)}{2 H(T)}\sqrt{M^2(T)-1} dT-d\theta=\delta \frac{\sin\theta \sin\mu}{y \sin(\theta+\mu)} dy \quad (3.11)$$

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}(\theta+\mu) \quad (3.12)$$

$M(T)$ ,  $a(T)$  et  $\mu(T)$  sont données respectivement par les relations (3.4), (3.5) et (3.6).

Comme la fonction  $H(T)$  dépend du paramètre  $T_0$ , [53] et [54], alors notre modèle mathématique dépend essentiellement de la température génératrice  $T_0$  de la chambre de combustion.

On a préféré une transformation entre  $\xi$  et  $x$  et une transformation entre  $\eta$  et  $y$  présentées par les relations (3.8). Le cas contraire donne un modèle différent de celui présenté par les équations (3.9) et (3.11).

Le modèle mathématique développé est un système d'équations différentielles de quatre inconnues ( $x, y, T, \theta$ ). Celui du gaz parfait est basé sur les variables  $x, y, M$  et  $\theta$ . A cause de l'équation implicite (3.4) reliant  $M$  et  $T$  dont l'expression analytique inverse n'existe pas, on a considéré la variable  $T$  au lieu de  $M$ .

Comme les caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$  sont courbes, l'application de la méthode des caractéristiques nous oblige à introduire un maillage fin, afin d'approximer chaque caractéristique entre deux points par des segments de droite. Les propriétés ( $x, y, T, \theta, \rho, P$ ) au point 3 de la figure 3.3 peuvent être déterminées à partir de celles des points 1 et 2 qui les relie. On approche dans ce cas la variation des paramètres  $y, \theta$  et  $T$  le long les segments reliant les points 1 et 2 et les points 2 et 3 par les expressions suivantes [57] et [65]:

$$\theta_{13} = C_\theta \theta_1 + (1 - C_\theta) \theta_3 \quad ; \quad \theta_{23} = C_\theta \theta_2 + (1 - C_\theta) \theta_3 \quad (3.13)$$

$$T_{13} = C_T T_1 + (1 - C_T) T_3 \quad ; \quad T_{23} = C_T T_2 + (1 - C_T) T_3 \quad (3.14)$$

$$y_{13} = C_y y_1 + (1 - C_y) y_3 \quad ; \quad y_{23} = C_y y_2 + (1 - C_y) y_3 \quad (3.15)$$

$C_y, C_\theta$  et  $C_T$  sont des coefficients d'interpolation appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ . Si ces coefficients sont égaux à 0.5, on obtient la valeur moyenne des paramètres.

### 3.1.1. Equation et procédure pour un point interne

Le schéma d'un point interne du champ d'écoulement est illustré dans la figure 3.4b. L'intégration des équations (3.9), (10), (3.11) et (3.12) donne:

Suivant  $\xi$  (1 - 3):

$$A_{13} (T_3 - T_1) + (\theta_3 - \theta_1) = \delta B_{13} (x_3 - x_1) \quad (3.16)$$

$$y_3 - y_1 = C_{13} (x_3 - x_1) \quad (3.17)$$

Suivant  $\eta$  (2 - 3):

$$A_{23} (T_3 - T_2) - (\theta_3 - \theta_2) = \delta B_{23} (y_3 - y_2) \quad (3.18)$$

$$y_3 - y_2 = C_{23} (x_3 - x_2) \quad (3.19)$$

Avec 
$$A_{13} = - \frac{C_P(T_{13})}{2 H(T_{13})} \sqrt{M_{13}^2 - 1} \quad , \quad A_{23} = - \frac{C_P(T_{23})}{2 H(T_{23})} \sqrt{M_{23}^2 - 1} \quad (3.20)$$

$$B_{13} = \frac{\sin(\theta_{13}) \sin(\mu_{13})}{y_{13} \cos(\theta_{13} - \mu_{13})} \quad , \quad B_{23} = \frac{\sin(\theta_{23}) \sin(\mu_{23})}{y_{23} \sin(\theta_{23} + \mu_{23})} \quad (3.21)$$

$$C_{13} = \operatorname{tg}(\theta_{13} - \mu_{13}) \quad , \quad C_{23} = \operatorname{tg}(\theta_{23} + \mu_{23}) \quad (3.22)$$

et  $\mu_{13} = \arcsin(1 / M_{13}) \quad , \quad \mu_{23} = \arcsin(1 / M_{23}) \quad (3.23)$

$$M_{13} = \frac{\sqrt{2 H(T_{13})}}{a_{13}} \quad , \quad M_{23} = \frac{\sqrt{2 H(T_{23})}}{a_{23}} \quad (3.24)$$

$$a_{13} = \sqrt{\gamma_{13} r T_{13}} \quad , \quad a_{23} = \sqrt{\gamma_{23} r T_{23}} \quad (3.25)$$

$$\gamma_{13} = \frac{C_p(T_{13})}{C_p(T_{13}) - r} \quad , \quad \gamma_{23} = \frac{C_p(T_{23})}{C_p(T_{23}) - r} \quad (3.26)$$

Les équations (3.16), (3.17), (3.18) et (3.19) constituent un système d'équations algébriques non linéaires à quatre inconnues ( $x_3$ ,  $y_3$ ,  $T_3$ ,  $\theta_3$ ). L'algorithme par itérations successives s'écrit [51], [57], [62], [63], [64] et [65]:

$$x_3 = \frac{E_2 - E_1}{C_{13} - C_{23}} \quad (3.27)$$

$$y_3 = E_1 + C_{13} x_3 \quad (3.28)$$

$$T_3 = \frac{D_1 + D_2 + \delta [B_{23} y_3 + B_{13} x_3]}{A_{13} + A_{23}} \quad (3.29)$$

$$\theta_3 = D_1 + \delta B_{13} x_3 - A_{13} T_3 \quad (3.30)$$

Avec:  $E_1 = y_1 - C_{13} x_1 \quad , \quad E_2 = y_2 - C_{23} x_2 \quad (3.31)$

$$D_1 = \theta_1 + A_{13} T_1 - \delta B_{13} x_1 \quad , \quad D_2 = -\theta_2 - \delta B_{23} y_2 + A_{23} T_2 \quad (3.32)$$

Les relations (3.27), (3.28), (3.29) et (3.30) constituent un système d'équations par itérations pour un écoulement supersonique bidimensionnel et axisymétrique, permanent et irrotationnel pour notre *modèle à Haute Température*.

La résolution du système se fait par la procédure d'intégration numérique de prédicteur correcteur par différences finies [2], [3], [11], [13], [16], [20], [26] et [64]. Pour l'algorithme de prédicteur d'Euler, les valeurs initiales de  $y_{i3}$ ,  $T_{i3}$  et  $\theta_{i3}$  ( $i=1,2$ ) à l'itération,  $K=0$ , sont données par:

$$T_{13} = T_1 \quad , \quad \theta_{13} = \theta_1 \quad , \quad y_{13} = y_1 \quad (3.33)$$

$$T_{23} = T_2 \quad , \quad \theta_{23} = \theta_2 \quad , \quad y_{23} = y_2 \quad (3.34)$$

Substituons les expressions (3.33) et (3.34) dans les relations (3.20), (3.21), (3.22), (3.23), (3.24), (3.25) et (3.26) ainsi que dans les relations (3.31) et (3.32), ensuite

remplaçons les résultats obtenus dans les relations (3.27), (3.38), (3.39) et (3.40) pour obtenir les valeurs prédites des paramètres  $(x_3^0, y_3^0, T_3^0, \theta_3^0)$  au point 3.

Pour l'algorithme de correcteur d'Euler, les valeurs des relations (3.13), (3.14) et (3.15) sont utilisées et substituées dans les équations (3.27), (3.28), (3.29) et (3.30) pour obtenir les nouvelles valeurs des paramètres au point 3. Les valeurs corrigées sont  $(x_3^1, y_3^1, T_3^1, \theta_3^1)$ .

L'algorithme de correcteur d'Euler sera répété jusqu'à obtenir à la précision  $\varepsilon$  voulue. Autrement dit, pour  $K$  itérations, il faut satisfaire la condition suivante pour assurer la convergence:

$$\text{Max} \left[ \left| y_3^K - y_3^{K-1} \right|, \left| \theta_3^K - \theta_3^{K-1} \right|, \left| T_3^K - T_3^{K-1} \right| \right] < \varepsilon \quad (3.35)$$

La variable  $x$  converge automatiquement avec la convergence de la condition (3.35).

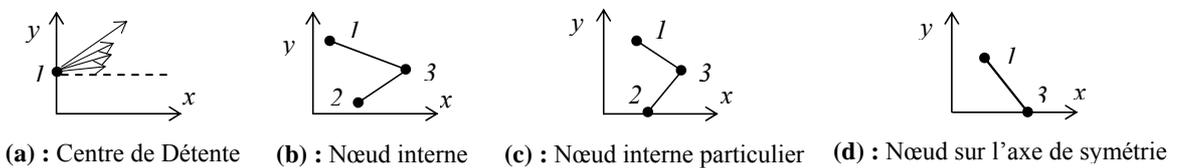


Figure 3.4 : Différents points de calcul.

### 3.1.2. Point interne particulier

On rencontre ce type de points comme le montre la figure 3.4c, lorsque le point 2 se trouve sur l'axe de symétrie *pour le cas axisymétrique*. Pour le cas bi-dimensionnel, ce type de point n'a pas de spécificité de calcul. L'utilisation de l'algorithme du point interne pour le cas axisymétrique pose un problème pour la détermination des propriétés de ce point particulier. Le terme  $B_{23}$  dans la relation (3.21) est indéterminé pour la valeur prédite, puisque, au point 2 on a  $y_2=0$ ,  $\theta_2=0$ . Comme le segment de la ligne de Mach montante est petit, le point 3 sera proche de l'axe de symétrie et dans ce cas, on peut rapprocher le numérateur du terme  $B_{23}$  par  $\sin(\theta_{23})=\sin(\theta_3)\approx\theta_3$  et le dénominateur par  $\sin(\theta_{23}+\mu_{23})\approx\sin(\mu_{23})$ . Le terme  $B_{23}$  se simplifie à:

$$B_{23} \approx \frac{\theta_3}{y_3} \quad (3.36)$$

L'équation (3.18) ne reste plus valable, et sera remplacée par:

$$A_{23} (T_3 - T_2) - (\theta_3 - \theta_2) = \theta_3 \quad (3.37)$$

Alors, la résolution de l'équation (3.37) par rapport à  $\theta_3$  donne:

$$\theta_3 = \frac{A_{23} T_3 - A_{23} T_2 + \theta_2}{2} \quad (3.38)$$

Remplaçons l'équation (3.38) dans la relation (3.16) et résolvons l'équation obtenue par rapport à  $T_3$  on obtient:

$$T_3 = \frac{2 [D_1 + B_{13} x_3] + A_{23} T_2}{2 A_{13} + A_{23}} \quad (3.39)$$

Comme résultat, l'équation (3.29) sera changée par l'équation (3.39). Donc pour déterminer les propriétés  $(x_3, y_3, T_3, \theta_3)$  de ce type de point particulier, on utilise les équations (3.27), (3.28), (3.29) et (3.39).

### 3.1.3. Equations pour un point sur l'axe de symétrie

D'après la figure 3.4d, le point 3 se trouve sur l'axe de symétrie de la tuyère. Comme  $y_3=0, \theta_3=0$  en ce point, la procédure est simplifiée et une ligne de Mach  $\xi$  joignant les nœuds 1 et 3 est employée. Les équations valables sur cette ligne de Mach sont à utiliser et  $x_3, T_3$  sont respectivement obtenues par la résolution des équations algébriques (3.16) et (3.17). On obtient:

$$x_3 = x_1 - \frac{y_1}{C_{13}} \quad (3.40)$$

$$T_3 = T_1 + \frac{\delta B_{13} (x_3 - x_1) + \theta_1}{A_{13}} \quad (3.41)$$

On peut considérer ce point comme étant un point interne si les propriétés au point 2 sont prises par:

$$x_2 = x_1 \quad y_2 = -y_1 \quad \theta_2 = -\theta_1 \quad T_2 = T_1 \quad (3.42)$$

### 3.1.4. Autres paramètres

Une fois qu'on a déterminé les propriétés  $(x, y, T$  et  $\theta)$  en un point 3 du champ d'écoulement, on peut déterminer le nombre de Mach  $M_3$  en remplaçant la température  $T=T_3$  dans la relation (3.4). Les autres paramètres (rapports des masses volumiques, rapport des pressions, rapport des vitesses du son, vitesse de l'écoulement et composantes du vecteur vitesse) peuvent être déterminés respectivement par les relations suivantes [57] et [65]:

$$\left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_3 = \text{Exp} \left( - \int_{T_3}^{T_0} C_P(T) / a^2(T) dT \right) \quad (3.43)$$

$$\left( \frac{P}{P_0} \right)_3 = \left( \frac{T}{T_0} \right)_3 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_3 \quad (3.44)$$

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)_3 = \frac{a(T_3)}{a(T_0)} = \left(\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)}\right)^{1/2} \left(\frac{T_3}{T_0}\right)^{1/2} \quad (3.45)$$

$$\left[\frac{V}{a_0}\right]_3 = M_3 \left[\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)}\right]^{1/2} \left[\frac{T_3}{T_0}\right]^{1/2} \quad (3.46)$$

$$\left[\frac{u}{a_0}\right]_3 = M_3 \left[\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)}\right]^{1/2} \left[\frac{T_3}{T_0}\right]^{1/2} \cos(\theta_3) \quad , \quad \left[\frac{v}{a_0}\right]_3 = M_3 \left[\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)}\right]^{1/2} \left[\frac{T_3}{T_0}\right]^{1/2} \sin(\theta_3) \quad (3.47)$$

### 3.2. Procédure de calcul dans la tuyère

Le calcul de l'écoulement dans la tuyère est divisé en deux régions nommées respectivement par région de Kernel et de transition.

#### 3.2.1. Région de Kernel

Le calcul de l'écoulement dans la région de Kernel commence au point  $A$  avec plusieurs types de conception. Une première possibilité consiste à dimensionner la tuyère sur la base de l'angle de détente  $\theta^*$ . Le nombre  $N$  des  $C^*$  à calculé dans cette région sera parmi les données. Le nombre de Mach  $M_S$  correspondant à cet angle sera déterminé juste après le calcul de l'écoulement dans la région de Kernel. Cette méthode est utilisée dans la référence [3]. Il est à noter que pour le cas axisymétrique, il n'existe aucune relation analytique entre le nombre de Mach  $M_S$  et l'angle de déviation initiale  $\theta^*$ . Une deuxième possibilité consiste à considérer le nombre de Mach  $M_S$  de sortie. Ici le pas  $\Delta\theta$  doit être parmi les données. L'angle de détente  $\theta^*$  correspondant sera déterminé juste après le calcul de la région de Kernel. Dans ce cas un problème se pose durant le calcul, présenté par la figure 3.6. Notons que notre code de calcul peut faire la conception sur la base du choix de ces deux possibilités.

Pour le cas bidimensionnel, l'angle de détente initial  $\theta^*$  est relié avec le nombre de Mach  $M_S$  par la relation suivante [2] et [57]:

$$\theta^* = \frac{v_S}{2} = \frac{1}{2} \int_{T_S}^{T^*} F_v(T) dT \quad (3.48)$$

La température  $T_S$  peut être déterminée par la résolution de l'équation (3.4) en prenant  $T=T_S$  et  $M=M_S$ .

Substituons les valeurs de  $T^*$  et  $T_S$  dans la relation (3.48) pour obtenir la valeur de  $v_S$  et ensuite, la valeur de l'angle de détente  $\theta^*$  correspondant au nombre de Mach de sortie. La procédure d'intégration de la relation (3.48) est présentée dans les références [52] et [58].

Il y a une infinité d'ondes de Mach qui seront issues du point  $A$  et qui se réfléchiront sur l'axe de symétrie. Si la conception se fait sur la base de l'angle de détente  $\theta^*$ , le calcul numérique nous oblige à discrétiser la zone de détente de l'écoulement  $0 \leq \theta \leq \theta^*$  en un nombre fini  $N$  de points. Au total, on obtient  $N+1$   $C^*$ ; y compris les deux extrémités. Alors, entre deux caractéristiques successives, on prend:

$$\Delta\theta = \Delta\nu = \frac{\theta^*}{N} \quad (3.49)$$

Si la conception se fait sur la base du nombre de Mach  $M_S$ , le calcul nous oblige à considérer un pas  $\Delta\theta = \Delta\nu$  assez petit. Chaque passage à une caractéristique, on incrémente l'angle de déviation de l'écoulement au point  $A$  par un pas  $\Delta\theta$ . Le nombre des  $C^*$  à calculer est inconnu a priori. Il dépend essentiellement du pas  $\Delta\theta$  adopté et de la valeur de  $M_S$  choisie.

Le pas  $\Delta\theta$  donne un maillage uniforme pour les  $C^*$  de la fin de la région de Kernel et un espace large et un maillage non uniforme pour les premières  $C^*$  juste après le col. En conséquence, le contour de la paroi, juste après le col, sera mal présenté. Pour corriger ce problème, on adopte dans notre étude, un raffinement du maillage par insertion des  $C^*$  supplémentaires entre la ligne sonique et la première caractéristique régulière descendante. La distribution des caractéristiques insérées est réalisée en introduisant la condensation suivante [3], [57] et [65]:

$$\nu_i = \left( \frac{i}{N_i} \right)^\Delta \Delta\nu \quad i=1, 2, 3, 4, \dots, N_i \quad (3.50)$$

$N_i$  indique le nombre des  $C^*$  insérées entre le col et la première caractéristique régulière descendante et  $\Delta$  représente un nombre réel supérieur à l'unité

Le processus de calcul dans la région de Kernel est présenté dans la figure 3.5. En premier lieu, on détermine les propriétés au point  $I$  de la figure 3.5a. En ce point, on a  $x_I/y^*=0$ ,  $y_I/y^*=1$  (non-dimensionnel) et  $\theta_I = \nu_I$  en utilisant la relation (3.50) si on utilise un maillage avec condensation ou égale à  $\theta_I = \Delta\theta$  si le maillage est sans procédure de condensation. La température  $T_I$  doit être déterminée en résolvant l'équation suivante [20]:

$$\theta_I = \int_{T_I}^{T^*} F_\nu(T) dT \quad (3.51)$$

La fonction  $F_\nu(T)$  est donnée par la relation (3.3).

La procédure de résolution de l'équation (3.51) est présentée dans les références [57] et [65]:

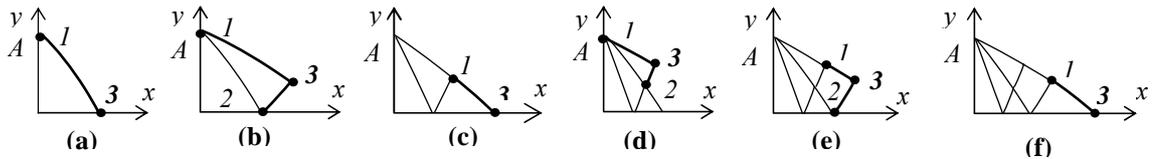


Figure 3.5 : Processus du calcul des caractéristiques dans la région de Kernel.

On procède ensuite à la détermination des propriétés au point 3 de la figure 3.5a en utilisant la procédure d'un point sur l'axe de symétrie. Maintenant, la première caractéristique est calculée. On passe à la deuxième  $C$  et le calcul commence par la détermination des propriétés au point 1 de la figure 3.5b. En ce point on a toujours  $x_1/y^*=0$ ,  $y_1/y^*=1$ , mais  $\theta_1=v_2$  ou  $\theta_1=2 \Delta\theta$  suivant que le maillage soit avec ou sans procédure de condensation. La détermination de la température  $T_1$  se fait toujours par la résolution de l'équation (3.51) avec la nouvelle valeur de  $\theta_1$ . On passe par la suite à la détermination des propriétés au point 3 de la figure 3.5b en utilisant la procédure d'un point interne si l'écoulement est bi-dimensionnel, ou la procédure d'un point interne particulier si l'écoulement est axisymétrique. Nous finissons le calcul sur cette  $C$  par la détermination des propriétés au point 3 de la figure 3.5c en utilisant la procédure d'un point sur l'axe de symétrie. Une fois arrivé au point de l'axe de symétrie, la caractéristique descendante concernée est complètement calculée. On passe à la troisième  $C$ . Chaque caractéristique à partir de la troisième, contient 4 types de points si l'écoulement est axisymétrique et 3 types de points si l'écoulement est bi-dimensionnel. Le premier, c'est le point 1 confondu avec le point A. Un point 3 sur l'axe de symétrie comme le montre la figure 3.5f. Un point 3 interne particulier (écoulement axisymétrique) comme le montre la figure 3.5e et le reste des points sont de type point interne. Chaque type de point nécessite une procédure différente comme présentée au paravent. Notons ici, qu'une  $C$  de numéro  $i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ ) contient  $i+1$  points à traiter. Si la zone de Kernel contient  $N$  caractéristiques à traiter, le nombre totale  $N_T$  de points à traiter est exactement égal à:

$$N_T = 2+3+4+\dots+N = \frac{N(N+1)}{2} - 1 \quad (3.52)$$

Il se partage en  $(N-1)$  points au début de chaque  $C$ ,  $(N-1)$  points sur l'axe de symétrie,  $(N-2)$  points internes particuliers et le reste sont des points internes.

Le calcul de l'écoulement dans la région de Kernel s'arrête suivant le type de conception. Si le dimensionnement se fait sur la base de l'angle de détente  $\theta^*$ , le processus s'arrête si le calcul suivant toutes les  $N$  caractéristiques sélectionnées au départ est achevé. Dans ce cas, le nombre de Mach  $M_S$  est déterminé comme le nombre de Mach du dernier

point calculé sur l'axe de symétrie. Les propriétés en ce point sont celles de la section de sortie. Dans ce cas aucun problème ne se pose et la fin de calcul se fait d'une façon normale comme le montre la figure 3.6b.

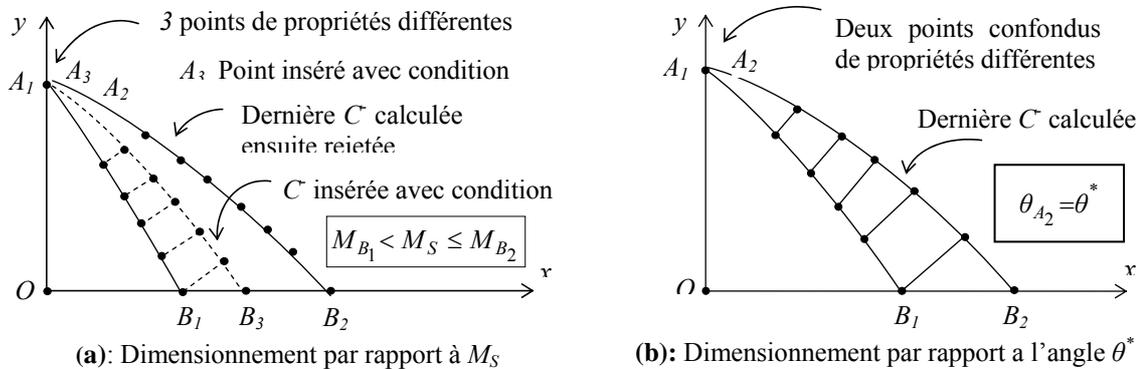


Figure 3.6 : Différents type de dimensionnement de la tuyère à détente centrée

Si le dimensionnement se fait sur la base du nombre de Mach  $M_S$  de sortie, chaque fois qu'on détermine les propriétés aux points d'une  $C$ , on contrôle si le nombre de Mach au point de l'axe de symétrie est égal ou juste supérieur au nombre de Mach  $M_S$  pour arrêter le calcul. En général, c'est très rare de trouver  $M_3 = M_S$ . Pour cette raison, un problème est rencontré. Il consiste à détecter la caractéristique  $C$  contenant le nombre de Mach  $M_S$  sur l'axe de symétrie avec une précision  $\varepsilon$ . Cette situation est présentée sur la figure 3.6a. L'algorithme de dichotomie [10] sera utilisé pour insérer et éliminer des  $C$  entre les deux dernières  $C$  régulières, celle la dernière  $A_2B_2$  et l'avant dernière  $A_1B_1$  puisque on a trouvé la relation suivante:

$$M_{B_1} < M_S \leq M_{B_2} \quad (3.53)$$

Une  $C A_3B_3$  sera insérée entre les  $C A_1B_1$  et  $A_2B_2$ , qui remplace la dernière rejetée. En premier lieu, on insère un point  $A_3$  avec la condition suivante:

$$\theta_{A_3} = \theta_1 = \frac{\theta_{A_1} + \theta_{A_2}}{2} \quad (3.54)$$

On détermine la température  $T_{A_3}$  en résolvant l'équation (3.51) après le remplacement de l'expression (3.54) ensuite on calcule les propriétés en tous les points de la  $C A_3B_3$  jusqu'au point  $B_3$  et vérifie la condition (3.53). Le calcul sera répété jusqu'à ce que l'on détermine la valeur de  $M_S$  avec une précision  $\varepsilon$  voulue. Le nombre de  $C$  totale à traiter sera augmenté légèrement par rapport à celui déterminé (ou donné) avant l'application de l'algorithme de dichotomie dans cette région particulière.

Après la détermination du champ d'écoulement dans la région de Kernel, on peut déterminer sa longueur (longueur de détente) par:

$$\frac{L_d}{y^*} = \frac{x_B}{y^*} \quad (3.55)$$

### 3.2.2. Contour de la paroi de la tuyère bidimensionnelle

La détermination du contour de la paroi se fait suivant le processus présenté sur la figure 3.7. Le processus de calcul à la forme d'une suite de récurrence et le calcul ne dépend pas des résultats en aval du point considéré. Si on connaît les propriétés en un point, il est facile de déterminer celles du point adjacent à droite jusqu'au point de la section de sortie.

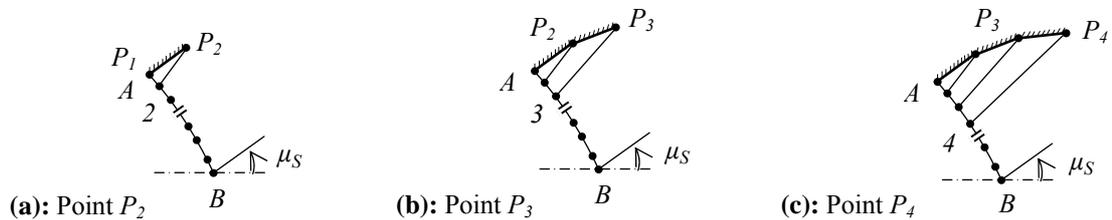


Figure 3.7 : Processus de détermination des points de la paroi de la tuyère *MLN 2D*

La paroi de la tuyère passe par le point  $A$ . En ce point, on a  $x_A=0.0$ ,  $y_A=y^*$ ,  $M_A=M^*$  et  $\theta_A=\theta^*$ . La valeur de  $M^*$  est égale au nombre de Mach au point  $A$  juste après la détente et correspond au nombre de Mach au premier point sur la dernière caractéristique descendante  $AB$  (voir figure 3.2).

Les propriétés de l'écoulement sur chaque ligne de Mach montante dans la région de transition  $ABS$  sont constantes, alors les paramètres  $(T, \theta, M, P, \rho)$  sur les points  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) de la paroi sont connues et il ne nous reste qu'à déterminer les positions  $(x, y)$  de chaque points. A titre d'information, les lignes de Mach montantes dans cette région représentent une portion des lignes iso-Mach.

La figure 3.8 présente un schéma général pour déterminer les équations nécessaires pour l'obtention de la position du point  $P_i$ . La pente d'un panneau numéro  $(i-1)$  entre les points  $i-1$  et  $i$  est approchée par l'angle  $\alpha_{(i-1)}$  prise comme valeur interpolée entre les valeurs aux deux extrémités. Pour les applications, on prend  $C_\theta=0.5$  (voir figure 3.8). La position du point  $P_i$  peut alors être déterminée par les relations suivantes [57]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_{P_i}}{y_*} = \frac{\left(\frac{y_i}{y_*}\right) - \left(\frac{y_{P_{i-1}}}{y_*}\right) + \left(\frac{x_{P_{i-1}}}{y_*}\right) \operatorname{tg}(\alpha_{(i-1)}) - \left(\frac{x_i}{y_*}\right) \operatorname{tg}(\theta_i + \mu_i)}{\operatorname{tg}(\alpha_{(i-1)}) - \operatorname{tg}(\theta_i + \mu_i)} \\ \frac{y_{P_i}}{y_*} = \frac{y_{P_{i-1}}}{y_*} + \left(\frac{x_{P_i}}{y_*} - \frac{x_{P_{i-1}}}{y_*}\right) \operatorname{tg}(\alpha_{(i-1)}) \end{array} \right. \quad i=2, 3, \dots, N \quad (3.56)$$

avec  $\alpha_{(i-1)} = C_\theta \theta_{i-1} + (1-C_\theta) \theta_i$  (3.57)

Pour  $i=1$ , on a  $\frac{x_{P_1}}{y_*} = 0$ ,  $\frac{y_{P_1}}{y_*} = 1$

Lorsque  $i=N$ , On obtient la position du dernier point de la paroi qui représente le point de la section de sortie. Alors, à partir de ce point, et sous forme non-dimensionnelle, on peut calculer la longueur de la tuyère et la section de sortie correspondant à cette discrétisation de  $N$  points par:

$$\frac{L}{y_*} = \frac{x_S}{y_*} = \frac{x_{P_N}}{y_*} \quad (3.58)$$

$$\frac{A_S}{A_*} = \frac{y_S}{y_*} \text{ (calculé)} = \frac{y_{P_N}}{y_*} \quad (3.59)$$

La comparaison des résultats numériques obtenus est faite entre le rayon de la section de sortie calculé numériquement et le rapport des sections théorique normalisé ( $y_*=1.0$ ) présenté par la formule suivante [53], [54] et [57]:

$$\left(\frac{y_S}{y_*}\right)_{\text{théorique}} = \frac{A_S}{A_*} = \operatorname{Exp}\left(\int_{T_S}^{T_*} F_A(T) dT\right) \quad (3.60)$$

Le nombre de points trouvés sur la paroi est égal au nombre de points de la dernière  $C AB$  de la région de Kernel.

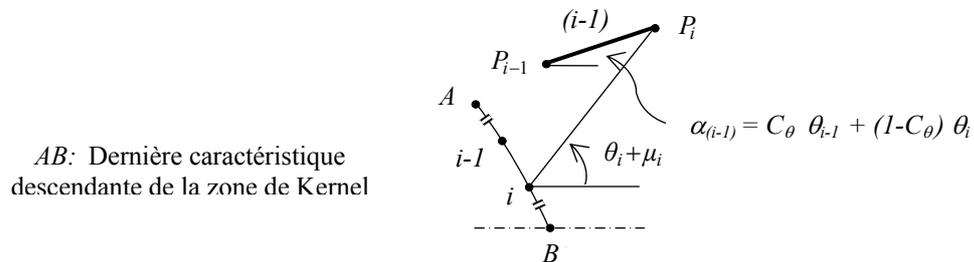


Figure 3.8 : Paramètres de calcul du point  $P_i$  ( $i=2, 3, 4, \dots, N$ ) de la paroi de la tuyère.

### 3.2.3. Région de Transition et contour de la tuyère axisymétrique

La détermination du contour de la paroi de la tuyère axisymétrique se fait en même temps que le calcul de l'écoulement aux points d'intersection des caractéristiques dans la région de transition  $ABS$  de la figure 3.2.

Le contrôle de la géométrie du maillage dans la région de transition dépend de la distance  $\Delta x$  (non-dimensionnel) choisie pour les points sélectionnés sur la ligne de Mach uniforme  $BS$ . Les propriétés des points sur cette ligne sont connues et sont égales aux valeurs de l'écoulement uniforme de la section de sortie. La figure 3.9 présente le processus de calcul et illustre la direction de calcul dans la région de transition. On calcul en premier les propriétés au point 3 de la figure 3.9a. Ici les propriétés au point 2 sont connues puisque il appartient à la dernière  $C$  dans la région de Kernel. Les propriétés au point 1 sont données par:

$$x_1 = x_B + \Delta x \quad , \quad y_1 = \Delta x \operatorname{tg}(\mu_S) \quad , \quad \theta_1 = 0.0 \quad , \quad T_1 = T_S \quad (3.61)$$

La température  $T_S$  peut être déterminée par la résolution de l'équation (3.4) en remplaçant  $T = T_S$  et  $M = M_S$ .

Le calcul des propriétés au point 3 se fait en utilisant la procédure d'un point interne. On passe ensuite au calcul des propriétés au point interne 3 de la figure 3.9b sur la même  $C$ . On poursuit le calcul suivant la flèche indiquée sur la figure 3.9b jusqu'au le premier point (point 3) de la  $C$  comme le montre la figure 3.9c. Le premier point de la caractéristique précédente est toujours un point de la paroi, déjà déterminé.

Le problème qui se pose c'est de déterminer un point de la paroi de la tuyère qui coupe la  $C$  calculée. Entre les deux caractéristiques, on peut détecter plusieurs points intermédiaires de la paroi. Les différents cas possibles de détection de point de la paroi sont illustrés sur la figure 3.10.

Sur la figure 3.10, les segments reliant les points 1 et 3 et les points 2 et 3 ainsi que le segment de la paroi sont considérés comme des lignes droites. Les propriétés aux points 1, 2, 3 et  $W$  sont connues. L'intersection de la paroi avec la  $C^-$  est nommée par le point  $P^-$  de propriétés  $(x^-, y^-, \theta^-, T^-)$  et l'intersection avec la  $C^+$  est nommée par le point  $P^+$  de propriétés  $(x^+, y^+, \theta^+, T^+)$ .

Pour connaître l'intersection du segment de la paroi avec  $C^+$  ou  $C^-$ , on calcule la valeur suivante avec l'approximation initiale  $\theta^\pm = \theta_W$ .

$$\Delta y = y_W - y_1 + (x_1 - x_W) \operatorname{tg}(\varphi) \quad (3.62)$$

$$\text{Avec} \quad \varphi = C_W \theta_W + (1 - C_W) \theta^+ \quad (3.63)$$

et  $C_W \in [0, 1]$  coefficient d'interpolation.

Si  $\Delta y \geq 0$ , on se trouve dans la situation (a) ou (c) de la figure 3.10.

Si  $\Delta y < 0$ , on se trouve dans la situation (b) ou (d) de la figure 3.10.

On rencontre le cas (a) si le nombre de points de l'intersection de la paroi avec les  $C^+$  entre deux  $C^-$  est nul. Au début du calcul de l'écoulement dans la région de transition, on rencontre soit le cas (a) soit le cas (d). Si  $\Delta y \geq 0$ , on trouve une intersection de la paroi avec la caractéristique calculée. Il faut sauvegarder les paramètres ( $x_P, y_P, T_P, \theta_P$ ) du dernier point calculé comme un nouveau point de la paroi et passer à la sélection d'une nouvelle  $C^-$  comme l'indique la figure 3.11. Si  $\Delta y < 0$ , on n'a pas encore trouvé une intersection de la paroi avec la caractéristique calculée, et on se trouve dans la configuration (b) ou (d) de la figure 3.10.

Pour déterminer les propriétés du nouveau point détecté de la paroi, on suppose une variation linéaire de l'angle  $\theta$  sur le segment reliant les points 1 et 3 si  $\Delta y \geq 0$ , et sur le segment reliant les points 2 et 3 si  $\Delta y < 0$  (voir figure 3.10).

### 1<sup>er</sup> Cas: Si $\Delta y \geq 0$

Lorsque  $\zeta=0$ , on a  $\theta_{13}(\zeta)=\theta_3$  et lorsque  $\zeta=\Delta\zeta_{13}$  (distance entre les points 1 et 3) on a  $\theta_{13}(\zeta)=\theta_1$ . La variation linéaire de l'angle  $\theta$  donne au point  $P^-$ , le résultat suivant:

$$\theta^- = \theta_3 + \left[ \frac{(x^- - x_3)^2 + (y^- - y_3)^2}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \right]^{1/2} (\theta_3 - \theta_1) \quad (3.64)$$

La détermination de la position du point  $P^-$  se fait en écrivant les équations reliant les points 1 et 3 et les points  $W$  et  $P^-$ . On obtient:

$$x^- = \frac{y_3 - y_W - x_3 \lambda^- + x_W \text{tg}(\varphi^-)}{\text{tg}(\varphi^-) - \lambda^-} \quad (3.65)$$

$$y^- = y_3 + \lambda^- (x^- - x_3) \quad (3.66)$$

Avec: 
$$\varphi^- = C_W \theta_W + (1 - C_W) \theta^- \quad (3.67)$$

et 
$$\lambda^- = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad (3.68)$$

### 2<sup>ème</sup> Cas: Si $\Delta y < 0$

Lorsque  $\eta=0$ , on a  $\theta_{23}(\eta)=\theta_2$  et lorsque  $\eta=\Delta\eta_{23}$  (distance entre les points 2 et 3), on a  $\theta_{23}(\eta)=\theta_3$ . La variation linéaire de l'angle  $\theta$ , donne au point  $P^+$ , le résultat suivant:

$$\theta^+ = \theta_2 + \left[ \frac{(x^+ - x_2)^2 + (y^+ - y_2)^2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \right]^{1/2} (\theta_3 - \theta_2) \quad (3.69)$$

La détermination de la position du point  $P^+$  se fait en écrivant toujours les équations reliant les points 2 et 3 et les points  $W$  et  $P^+$ . On obtient:

$$x^+ = \frac{y_3 - y_W - x_3 \lambda^+ + x_W \operatorname{tg}(\varphi^+)}{\operatorname{tg}(\varphi^+) - \lambda^+} \quad (3.70)$$

$$y^+ = y_3 + \lambda^+ (x^+ - x_3) \quad (3.71)$$

$$\text{Avec} \quad \varphi^+ = C_W \theta_W + (1 - C_W) \theta^+ \quad (3.72)$$

et 
$$\lambda^- = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad (3.73)$$

Les équations (3.65) et (3.66) représentent un système algébrique non linéaire permettant de déterminer la position  $(x^-, y^-)$  du point  $P^-$ . En premier lieu, on approxime l'angle  $\theta = \theta_W$ . On introduit cette approximation dans les équations (3.65) et (3.66) pour obtenir l'approximation initiale de la position du point  $P^-$ . En substituons cette valeur initiale dans la relation (3.64) on corrige l'angle  $\theta$ . La procédure sera répétée jusqu'à satisfaction le critère de convergence  $\varepsilon$  (voir équation (3.74)).

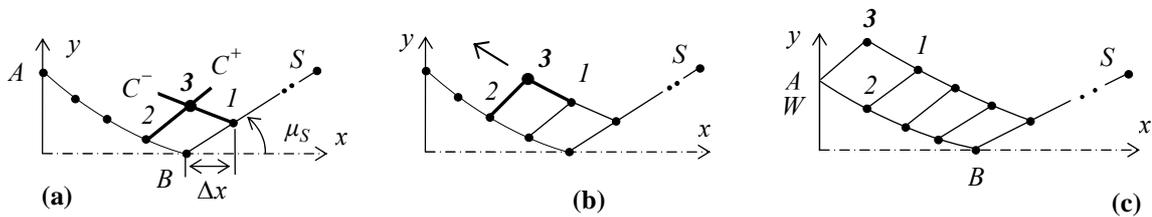


Figure 3.9 : Processus de calcul des  $C^-$  de la région de transition de la tuyère axisymétrique

Pour le point  $P^+$ , l'algorithme est présenté par les équations (3.69), (3.70) et (3.71) pour obtenir la position de ce point et l'angle de déviation de la paroi.

$$\operatorname{Max} \left[ \left| x^\pm (\text{itération } K) - x^\pm (\text{itération } K-1) \right|, \left| y^\pm (\text{itération } K) - y^\pm (\text{itération } K-1) \right| \right] < \varepsilon \quad (3.74)$$

Entre chaque deux itérations successives il faut vérifier la condition (3.62) pour la nouvelle valeur corrigée de  $\theta$  ou  $\theta^+$  pour prendre convenablement les équations nécessaires entre le point  $P^+$  ou  $P^-$  et de détecter exactement le point de la paroi. Une fois la position d'un point déterminée, il sera considéré comme un nouveau point de la paroi et une ou deux parmi les configurations de la figure 3.10 étaient appliquées. La procédure sera répétée pour les prochaines caractéristiques sélectionnées dans la région de transition. La présentation de la paroi dépend du pas  $\Delta x$  choisi pour les points de la ligne de Mach uniforme  $BS$  et des résultats obtenus sur la dernière  $C^-$  de la région de Kernel.

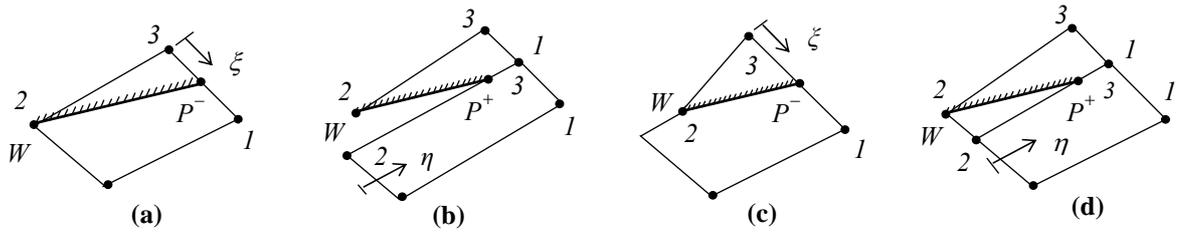


Figure 3.10 : Différents cas de l'intersection de la paroi avec les caractéristiques de la tuyère axisymétrique

Une fois la position des points  $P^+$  et  $P^-$  est déterminée, l'angle de déviation de la paroi converge en même temps avec le processus de calcul. La température en ces points peuvent être calculée en supposons une variation linéaire sur les segments reliant les points  $1$  et  $3$  et les points  $2$  et  $3$  avec la même démarche comme l'angle  $\theta$ . On aura le résultat suivant, respectivement pour le point  $P^-$  et  $P^+$ :

$$T^- = T_3 + \left[ \frac{(x^- - x_3)^2 + (y^- - y_3)^2}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \right]^{1/2} (T_1 - T_3) \quad (3.75)$$

$$T^+ = T_2 + \left[ \frac{(x^+ - x_2)^2 + (y^+ - y_2)^2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \right]^{1/2} (T_3 - T_2) \quad (3.76)$$

Pour obtenir le nombre de Mach en ce point, on remplace la valeur obtenue de la température dans l'équation (3.4). Les autres paramètres peuvent être obtenus en remplaçant la valeur de  $T_3$  par la valeur obtenue de  $T^-$  ou  $T^+$  dans les relations (3.43), (3.44), (3.45), (3.46) et (3.47).

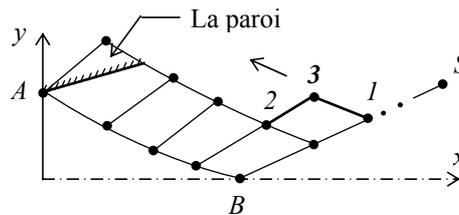


Figure 3.11 : Passage d'une caractéristique à l'autre dans la région de transition

La procédure complète sera répétée pour chaque  $C^-$  sélectionnée dans la région de transition jusqu'à la détermination d'une intersection de la paroi avec la  $C^+ BS$  uniforme. Chaque fois qu'on sélectionne un point sur La ligne  $BS$ , le nombre de points interne a calculer sur la  $C^-$  correspondante diminue graduellement jusqu'à obtenir un point. Cette situation est obtenue cela veut dire qu'on est arrivé au point  $S$  de la section de sortie. Par conséquent, le rayon de sortie non-dimensionnel correspondant à la discrétisation sera donné par:

$$\frac{y_S}{y^*}(\text{calculé}) = \frac{y_{N_W}}{y^*} \quad (3.77)$$

Le nombre de points trouvés sur la paroi de la tuyère (précisément le nombre  $N_W$  dans la relation (3.77)) dépend du pas  $\Delta x$  choisi sur la  $C^-$  uniforme  $BS$  et du nombre de points sur la dernière  $C^-$   $AB$  de la région de Kernel. Il est supérieur ou égal au nombre de points choisi sur la  $C^-$   $BS$  uniforme et même supérieur au nombre de points obtenus sur la dernière  $C^-$   $AB$  de la région de Kernel ; ce qui n'est pas le cas pour la géométrie bidimensionnelle, où le nombre de points de la paroi est égal forcément au nombre de points de la dernière  $C^-$   $AB$  de la région de Kernel.

La comparaison des résultats numériques obtenus sera faite entre le rayon de la section de sortie calculé numériquement et le rapport des sections théorique normalisé ( $y^*=1.0$ ) présenté par la formule suivante [54], [65].

$$\left(\frac{y_S}{y^*}\right)_{\text{théorique}}^2 = \frac{A_S}{A^*} = \text{Exp}\left(\int_{T_S}^{T^*} F_A(T) dT\right) \quad (3.78)$$

$F_A(T)$  est donnée par la relation (1.43) du chapitre 1.

### 3.3. Courbes iso-valeurs

Il est très intéressant de déterminer des courbes dans le champ d'écoulement de la tuyère, possédant les mêmes propriétés physiques. Ces courbes sont appelées courbes iso-valeurs. Les plus intéressantes sont les courbes iso-Mach et les iso-directions. Notons ici, que les courbes iso-pressions, iso-températures, iso-masse volumiques sont elles mêmes des iso-Mach. La détermination de ces courbes se fait après le calcul de l'écoulement dans la tuyère. La recherche des points de ces courbes se fait dans chaque segment des caractéristiques montantes et descendantes ou sur les segments de l'axe de symétrie, y compris la paroi de la tuyère comme le montre la figure 3.12.

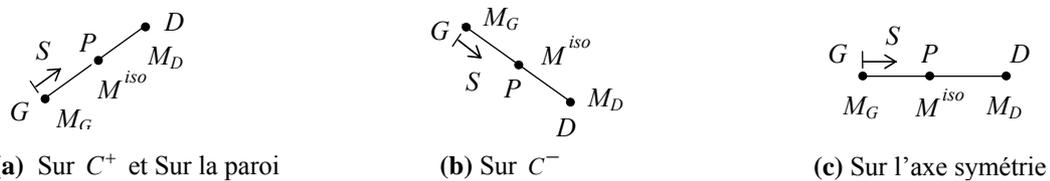


Figure 3.12 : Différents segments des points de la courbe iso-Mach.

Les propriétés ( $x, y, M, T, \dots$ ) aux points  $G$  et  $D$  sont connues et le problème consiste à déterminer la position ( $x_P, y_P$ ) du point  $P$  possédant une propriété donnée (nombre de Mach, Déviation de l'écoulement).

Pour savoir si l'on est sur la caractéristique montante ou descendante ou sur l'axe de symétrie ou sur paroi de la tuyère, on fait le test suivant:

$$\Delta y = y_D - y_G \quad (3.79)$$

- Si  $\Delta y > 0$ , on est sur la caractéristique montante  $C^+$  ou sur la paroi de la tuyère.
- Si  $\Delta y < 0$ , on est sur la caractéristique descendante  $C^-$ .
- Si  $\Delta y = 0$ , on est sur l'axe de symétrie.

### 3.3.1. Courbes Iso-Mach

Soit  $M^{iso}$  la valeur du nombre de Mach que doit avoir un ensemble de points interne dans la tuyère dont on doit déterminer les positions. Le segment contenant le point  $P$  de la courbe iso-Mach doit vérifier la condition suivante:

$$(M^{iso} - M_G)(M^{iso} - M_D) \leq 0 \quad (3.80)$$

Pour arriver à déterminer la position du point  $P$ , on considère une variation linéaire  $M(S) = \alpha S + \beta$  du nombre de Mach sur le segment  $GD$ . Lorsque  $S=0$ ,  $M(S) = M_G$  et lorsque  $S = S_{GD}$  (distance entre les points  $G$  et  $D$ ),  $M(S) = M_D$ . La relation  $M(S) = M_P = M^{iso}$  est vérifiée lorsque  $S = S_{GP} = S^{iso}$ . Alors, la distance entre les points  $G$  et  $P$  est donnée par:

$$S_{GP} = S^{iso} = \frac{M^{iso} - M_G}{M_D - M_G} \sqrt{(x_G - x_D)^2 + (y_G - y_D)^2} \quad (3.81)$$

La position  $(x_P, y_P)$  du point  $P$  de la courbe iso-Mach peut être déterminée par:

$$x_P = x_G + S_{GP} \cos(\theta_{GP}) \quad (3.82)$$

$$y_P = y_G + S_{GP} \sin(\theta_{GP}) \quad (3.83)$$

Avec: 
$$\theta_{GD} = \arctg\left(\frac{y_D - y_G}{x_D - x_G}\right) \quad (3.84)$$

Il faut trier les points obtenus de sorte qu'il y ait accroissement des ordonnées pour permettre un traçage convenable.

### 3.3.2. Courbes iso-directions

Soit  $\theta = \theta^{iso}$  la valeur de l'angle de déviation de l'écoulement que doit avoir un ensemble de points interne dans la tuyère dont on doit déterminer les positions. On peut avoir deux possibilités illustrées sur les cas (a) et (b) de la figure 3.10. Le problème est de déterminer la position  $(x_P, y_P)$  du point  $P$  possédant l'angle  $\theta_P = \theta^{iso}$ .

Le segment contenant le point  $P$  de la courbe iso-direction doit vérifier la condition suivante:

$$(\theta^{iso} - \theta_G)(\theta^{iso} - \theta_D) \leq 0 \quad (3.85)$$

Pour arriver à déterminer la position du point  $P$ , on considère une variation linéaire  $\theta(S) = \alpha S + \beta$  sur le segment  $GD$ . Lorsque  $S=0$ ,  $\theta(S) = \theta_G$  et lorsque  $S=S_{GD}$ ,  $\theta(S) = \theta_D$ .

La relation  $\theta(S) = \theta_P = \theta^{iso}$  est vérifiée lorsque  $S = S_{GP} = S^{iso}$ . Donc, la distance entre les points  $G$  et  $P$  est donnée par:

$$S_{GP} = S^{iso} = \frac{\theta^{iso} - \theta_G}{\theta_D - \theta_G} \sqrt{(x_G - x_D)^2 + (y_G - y_D)^2} \quad (3.86)$$

La position  $(x_P, y_P)$  du point  $P$  de la courbe iso-direction peut être déterminée par les relations (3.82) et (3.83) et  $\theta_{GD}$  et  $S_{GP}$  sont données respectivement par les relations (3.84) et (3.86). Dans ce cas, il faut trier les points obtenus de la courbe iso-direction de sorte qu'il y ait accroissement des abscisses pour permettre un traçage convenable.

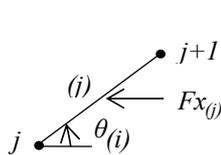
#### Remarque:

On peut déterminer des courbes dans le champ d'écoulement possédant la même composante horizontale  $u^{iso}$  ou la même composante verticale  $v^{iso}$  du vecteur vitesse. Dans ce cas, on utilise les relations (3.46) et (3.47) respectivement.

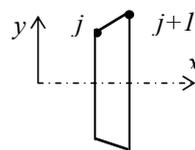
### 3.4. Masse de la structure de la tuyère

Pour arriver à calculer la masse de la structure du divergent de la tuyère, on considère les deux suppositions suivantes:

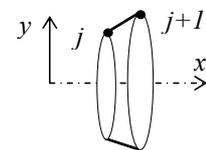
1. La forme de la paroi entre deux points successifs est une ligne droite. Cette configuration donne de bons résultats lorsque le nombre de points  $N$  de la paroi est très élevé.
2. La structure du divergent est constituée du même matériau, d'une épaisseur  $t_M$  et de masse volumique  $\rho_m$  constante.



(a): Force de pression



(b): Tronçon d'une tuyère bidimensionnelle



(c): Tronçon d'une tuyère axisymétrique

Figure 3.13 : Présentation d'un tronçon de la tuyère à détente centrée

#### 3.4.1. Tuyère bidimensionnelle

Le calcul de la masse est lié au calcul de l'arc curviligne de la paroi. Sous la forme non-dimensionnelle, on obtient [57]:

$$\frac{Masse}{\rho_M t_M A^*} = C_{Masse} = \sum_{j=1}^{j=N-1} \left[ \left( \frac{x_{j+1}}{y^*} - \frac{x_j}{y^*} \right)^2 + \left( \frac{y_{j+1}}{y^*} - \frac{y_j}{y^*} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.87)$$

### 3.4.2. Tuyère axisymétrique

Le calcul de la masse de la structure de la tuyère est lié au calcul de sa surface de révolution. Comme on aura  $(N-1)$  segments de droite, alors, sous forme non-dimensionnelle, la masse peut être obtenue par:

$$\frac{Masse}{\rho_M t_M A^*} = C_{Masse} = \sum_{j=1}^{j=N-1} \frac{S_{(j)}}{A^*} \quad (3.88)$$

$S_{(j)}$  représente la surface de révolution de la couronne circulaire limitée entre les points  $j$  et  $j+1$  ( $j=1, 2, \dots, N-1$ ) comme l'indique la figure 3.13 pour le cas axisymétrique. D'après le théorème de Guldin [48] et [61], la surface  $S_{(j)}$ , sous forme non-dimensionnelle, peut être calculée par:

$$\frac{S_{(j)}}{A^*} = \left( \frac{y_i + y_{i+1}}{y^*} \right) \left[ \left( \frac{x_{j+1}}{y^*} - \frac{x_j}{y^*} \right)^2 + \left( \frac{y_{j+1}}{y^*} - \frac{y_j}{y^*} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.89)$$

### 3.5. Force de pression exercée sur la paroi du divergent

Pour calculer la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère, on suppose encore que la pression exercée sur le tronçon  $(j)$  de la figure 3.13 est approchée par:

$$P_{(j)} = \sigma P_j + (1-\sigma) P_{j+1} \quad (3.90)$$

Alors: 
$$F_{(j)} = P_{(j)} S_{(j)} \quad (3.91)$$

Pour les applications, on prend  $\sigma=0.5$ .

#### 3.5.1. Tuyère bidimensionnelle

La force de pression axiale exercée sur le panneau  $(j)$ , par unité de profondeur, est donnée par:

$$Fx_{(j)} = P_{(j)} (y_{j+1} - y_j) l \quad (3.92)$$

Alors, la force de pression axiale  $F_x$  exercée sur la paroi est la somme de toutes les forces de pression exercées sur tous les tronçons. Sous forme non-dimensionnelle, on obtient:

$$\frac{F_x}{P_0 A^*} = C_{Force} = \sum_{j=1}^{j=N-1} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{(j)} \left[ \frac{y_{j+1} - y_j}{y^* - y^*} \right] \quad (3.93)$$

Le rapport des pressions dans l'expression (3.93) est donné par la relation (3.44).

### 3.5.2. Tuyère axisymétrique

La force de pression exercée sur le panneau ( $j$ ), en tenant compte de sa révolution autour de l'axe ( $x$ ) de symétrie est donnée par la projection de la force  $F_{(j)}$  sur l'axe  $x$ . Alors, la force de pression totale  $F_x$  exercée sur la paroi, est obtenue par la somme de toutes les forces de pression exercées sur tous les tronçons. Sous forme non-dimensionnelle, on obtient:

$$\frac{F_x}{P_0 A^*} = C_{Force} = \sum_{j=1}^{j=N-1} \left( \frac{P_{(j)}}{P_0} \right) \left( \frac{S_{(j)}}{A^*} \right) \sin(\theta_{(j)}) \quad (3.94)$$

Le rapport des pressions dans l'expression (3.94) est donné par la relation (3.44) et l'angle  $\theta_{(j)}$  peut être obtenu par la relation suivante:

$$\theta_{(j)} = \arctg \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} \right) \quad (3.95)$$

Le coefficient de la force de pression est une partie du coefficient de poussée globale de propulsion. Dans les relations du calcul de la masse et la force de pression, l'expression  $A^*$  est égale à  $2\gamma^* l$  pour le cas  $2D$ , et elle est égale à  $\pi \gamma^{*2}$  pour le cas axisymétrique.

### 3.6. Erreur du modèle du gaz parfait

Le modèle mathématique d'un gaz parfait est développé en considérant la chaleur spécifique  $C_p$  et le rapport  $\gamma$  constants. Il donne des résultats acceptables avec une certaine erreur aux faibles valeurs de la température génératrice. L'erreur donnée par le modèle  $GP$  par rapport à notre modèle peut être calculée pour chaque paramètre de conception. Alors pour chaque couple  $(T_0, M_S)$ , l'erreur  $\varepsilon$  peut être évaluée par la relation suivante:

$$\varepsilon_{paramètre} \% = \left| 1 - \frac{Paramètre_{Gaz\ Parfait}}{Paramètre_{Haute\ Température}} \right| \times 100 \quad (3.96)$$

Le mot paramètre dans la relation (3.96) peut représenter tous les paramètres de conception ; en particulier la longueur de la tuyère, la masse de la structure, la force de pression exercée sur la paroi ou le rapport des sections. Dans les applications aérodynamiques, les auteurs adoptent généralement une erreur inférieure à 5 %.

## CHAPITRE 4

### TUYERE A CORPS CENTRAL BIDIMENSIONNELLE A HAUTE TEMPERATURE

Le but de ce chapitre est de présenter une méthode de conception et de dimensionnement des tuyères à corps central type à bouchon (Plug Nozzle), de manière à obtenir un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. On peut avoir deux formes pour ce type de tuyère comme présente sur la figure 4.1. La tuyère à bouchon est présentée par le cas (a). Une autre forme appelée tuyère à détente déflexion est illustrée par le cas b. La méthode de conception est la même pour les deux types de tuyères [33], [34] et [35].

Il existe deux catégories des tuyères suivant la ligne sonique. Si la ligne sonique est une ligne droite, la paroi au col génère des ondes de détente centrées et divergentes [6], [15] et [24]. La deuxième catégorie possède une ligne sonique courbée [27], [36] et [66]. Dans ce cas l'écoulement à l'intérieur de la tuyère possède des lignes de Mach non centrées. Ce type de tuyère est appelé par tuyère à corps central avec ligne sonique courbée. Chaque type existe pour les deux sortes d'un écoulement bidimensionnel [5], [6], [15], [56], [68], [69] et [70] et axisymétrique [44], [45], [46], [47] et [70] donnant au total quatre configurations possibles.

La référence [15] présente la première étude de dimensionnement des tuyères à corps central  $2D$  pour un contour inconnu et les références [5], [67] ont fait l'extension par examen de l'effet de l'écoulement au départ. Les références [36], [66], [69] et [70] présentent des études de l'écoulement dans les tuyères à corps central de *contour connu*. Une comparaison sur les contours des différentes tuyères utilisées pour la propulsion des missiles est présentée dans les références [17], [34] et [70]. Une étude analytique de modélisation du champ d'écoulement dans les tuyères est menée dans la référence [69]. L'écoulement axisymétrique dans les tuyères à corps central est examiné dans les références [19], [44] et [45]. La référence [23] examine le phénomène de l'écoulement à l'extrémité de la carène et la considère par analogie comme l'écoulement au bord de fuite d'un profil d'aile. Dans la référence [56], l'écoulement à l'intérieur de la tuyère à corps central est examiné et les performances obtenues sont meilleures par rapport aux autres types de tuyères, notamment la tuyère à détente centrée (*MLN*).

Les travaux mentionnés sont réalisés pour le cas du gaz parfait à  $C_P$  et  $\gamma$  constants. Ils sont limités pour des faibles températures génératrices, où on peut aller jusqu'à  $1000 K^\circ$  environ pour des nombres de Mach de sortie qui ne dépassent pas  $M_S=2.00$ .

Dans le cas réel, la chaleur spécifique  $C_P$  et le rapport  $\gamma$  varient avec la température. Le but de ce chapitre est d'ajouter l'effet de variation, en fonction de la température, de la chaleur spécifique  $C_P$  et du rapport  $\gamma$  sur la conception de la tuyère à corps central, inférieur au seuil de dissociation. Les rapports thermodynamiques à Haute Température sont présentés dans le chapitre 1, celle de la fonction de Prandtl Meyer à Haute Température est le but des références [51], [52], [55] et [58]. Comme résultat, le modèle mathématique développé dans ce chapitre est une généralisation des équations du modèle d'un gaz parfait à  $C_P$  et  $\gamma$  constants présentées dans les références [5], [6], [33], [35], [36], [66], [67] et [68]. En général, les résultats dans la dynamique des gaz sont acceptés avec une erreur de 5%.

*Le contour de la tuyère est inconnu* et il est déterminé de manière à obtenir un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. En particulier, la forme obtenue va délivrer une poussée maximale vu que l'écoulement à la sortie est horizontal. Une comparaison avec la configuration *MLN* est faite afin de présenter un gain longueur, la masse et la force de pression.

La méthode de conception est une méthode approximative basée sur la détente de Prandtl-Meyer à Haute Température.

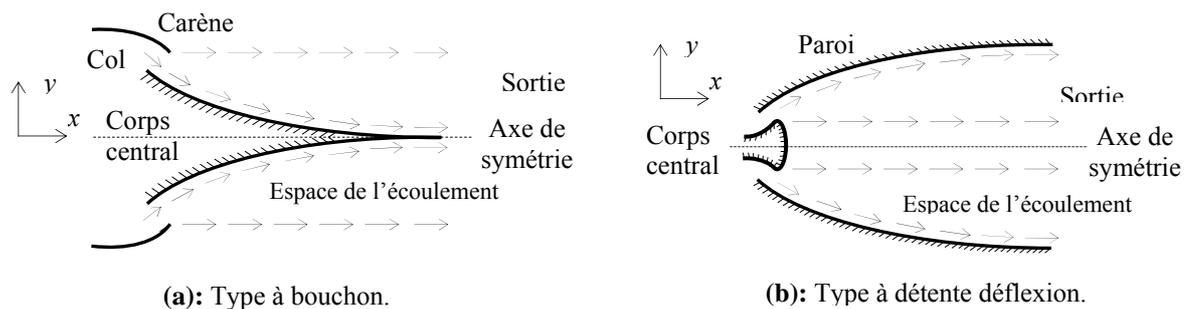


Figure 4.1 : Géométrie de la tuyère à corps central.

La différence entre ce type de tuyère et les autres modèles, notamment la tuyère à détente centrée, est que l'écoulement au col est incliné d'un angle  $\theta^*$  par rapport à l'horizontale comme indique sur la figure 4.2 ; ce qui n'est pas le cas pour les autres modèles où l'écoulement est horizontal au col.

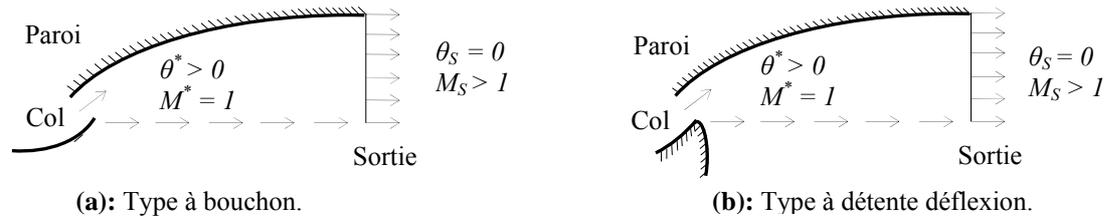


Figure 4.2 : Ecoulement au col et à la sortie d'une tuyère à corps central.

En conséquence, la carène (lip) doit être inclinée d'un angle  $\Psi$  par rapport à la verticale comme indique sur la figure 4.3.

L'écoulement est supposé sonique au col pour avoir un écoulement supersonique dans la partie divergente de la tuyère. Pour obtenir la forme du contour de la géométrie du corps central, la ligne de courant déterminée par le calcul sera remplacée par une surface rigide limitant le domaine de l'écoulement et par conséquent la forme du corps central sera obtenue. Dans notre étude, on s'intéresse uniquement à la partie divergente supersonique. Des ondes de Mach centrées divergentes sont issues à partir du coin du col. La comparaison est faite avec le modèle d'un gaz calorifiquement parfait à chaleur spécifique constante.

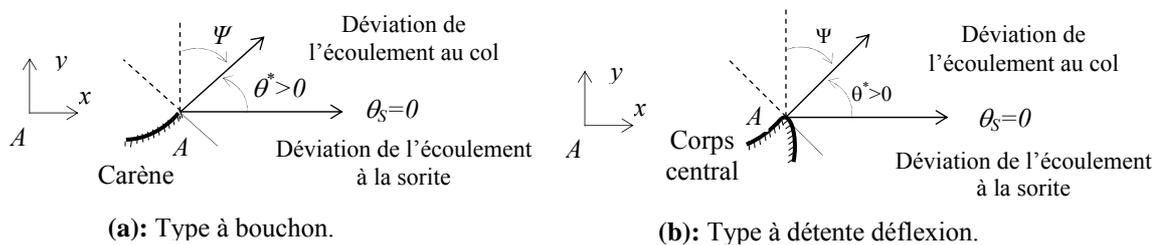


Figure 4.3 : Angle de déviation  $\Psi$  de la carène de la tuyère à corps central.

#### 4.1. Formulation Mathématique du Problème

L'écoulement au col et à la section de sortie est unidirectionnel, le rapport des sections critiques reste toujours valable et est pris en considération pour comparer les calculs numériques trouvés par notre modèle et la théorie. Notons ici que le rapport des sections [1] d'un gaz parfait (1.38) n'est plus valable et que le rapport des sections à Haute Température est développé dans la référence [53] et [54]. Le calcul de l'écoulement à l'intérieur de la tuyère est assez délicat, puisque la forme de la tuyère est inconnue a priori. La forme recherchée du corps central accélère l'écoulement du nombre de Mach  $M=1.00$  au col jusqu'au nombre de Mach  $M=M_s$  à la sortie de la tuyère. Comme la déviation de l'écoulement au col n'est pas nulle, l'écoulement à travers le corps central se redresse uniquement de l'angle  $\theta=\theta^*$  au col à l'angle  $\theta=0$  à la sortie.

Le calcul de l'écoulement et la détermination du contour du corps central pour un gaz parfait à haute température sont basés sur la détente de Prandtl-Meyer présentée dans le chapitre 2 par :

$$v(T) = \int_T^{T^*} F_v(T) dT \quad (4.1)$$

Avec :

$$F_v(T) = -\frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{\frac{2H(T)}{a^2(T)} - 1} \quad (4.2)$$

Les paramètres figurant dans la relation (4.2) sont donnés dans le chapitre 1 par les relations (1.9), (1.19), récapitulées par :

$$M(T) = \frac{\sqrt{2H(T)}}{a(T)} \quad (4.3)$$

$$a(T) = \sqrt{\gamma(T) r T} \quad (4.4)$$

$$\gamma(T) = \frac{C_p(T)}{C_p(T) - r} \quad (4.5)$$

Les coefficients d'interpolation du polynôme de la fonction  $C_p(T)$  ainsi que la fonction  $H(T)$  sont donnés respectivement par les relations (1.39) et (1.40) du chapitre 1. La valeur  $T^*$  représente la température au col de la tuyère.

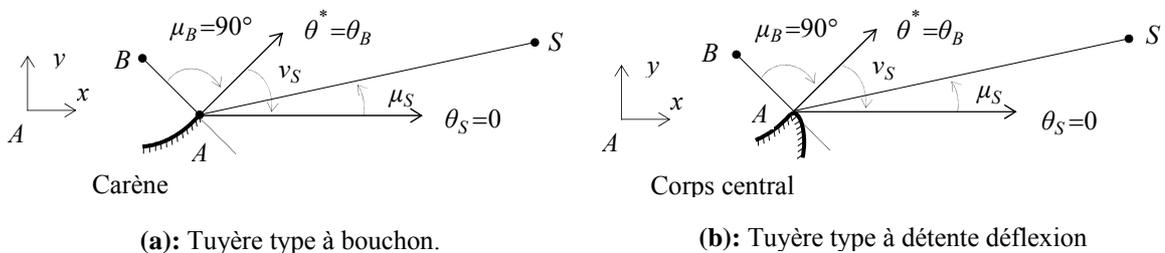


Figure 4.4 : Angles de Mach du col et de la section de sortie de la tuyère à corps central.

L'angle  $\nu$  est mesuré par rapport au vecteur vitesse du col. Sur la figure 4.4, les lignes  $AB$  et  $AS$  présentent respectivement les ondes de Mach du col et de la section de sortie. Ces lignes sont inclinées d'angles  $\mu_B$  et  $\mu_S$  donnés respectivement par :

$$\mu_B = 90^\circ, \quad \mu_S = \arcsin\left(\frac{1}{M_S}\right) < 90^\circ \quad (4.6)$$

Entre ces deux lignes de Mach, il y a une infinité d'ondes de Mach centrées divergentes issues du point  $A$  de la carène 'lip' comme le montre la figure 4.5. Chaque ligne donne un nombre de Mach et on peut facilement, à partir de ce nombre, déduire un point du contour

du corps central. Comme le gaz est parfait, le vecteur vitesse est tangent à la ligne de courant, qui sera considérée comme le contour de la paroi du corps central à rechercher.

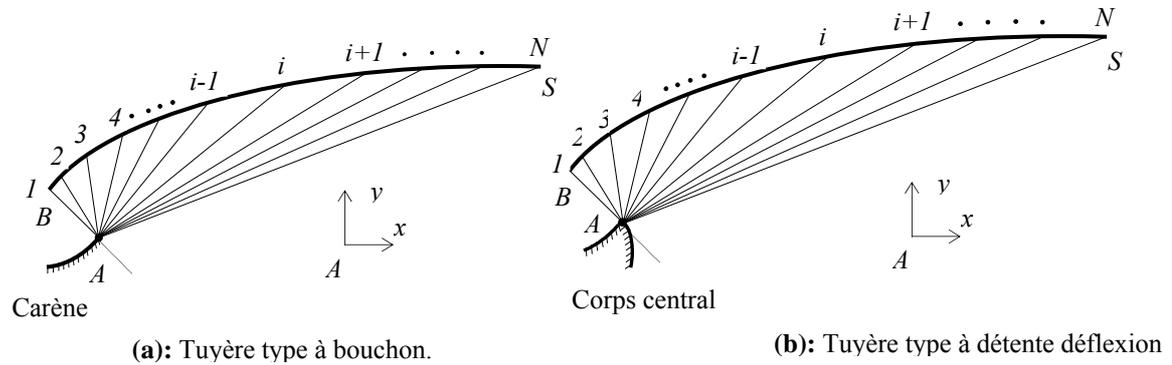


Figure 4.5 : Discretisation de la zone de détente de la tuyère à corps central.

Les propriétés de l'écoulement comme le nombre de Mach, la déviation de l'écoulement  $\theta$ , les rapports thermodynamiques de pressions, des températures et des masses volumiques sont constants le long de chaque ligne de Mach issue du point  $A$ . Cette propriété nous donne l'avantage de pouvoir déterminer rapidement et explicitement la position du point de la paroi.

Chaque ligne de Mach issue du point  $A$  sera absorbée par la paroi du corps central, vu que l'écoulement est bidimensionnel. La figure 4.6 présente les paramètres d'une ligne de Mach intermédiaire reliant les points  $A$  et  $i$  absorbée par la paroi. L'angle  $\theta_S$  n'est pas connu a priori. Si le dimensionnement se fait sur la base du nombre de Mach de sortie  $M_S$ , la température  $T_S$  sera déterminée par la résolution de l'équation (4.3) en remplaçant  $T=T_S$  et  $M=M_S$ . Pour avoir un écoulement uniforme et parallèle à la sortie, on peut calculer l'angle  $\theta_S$  par la relation ci-dessous. Sa procédure de calcul est présentée dans le chapitre 2 et la référence [55].

$$\theta_B = v_S = \int_{T_S}^{T_*} F_v(T) dT \quad (4.7)$$

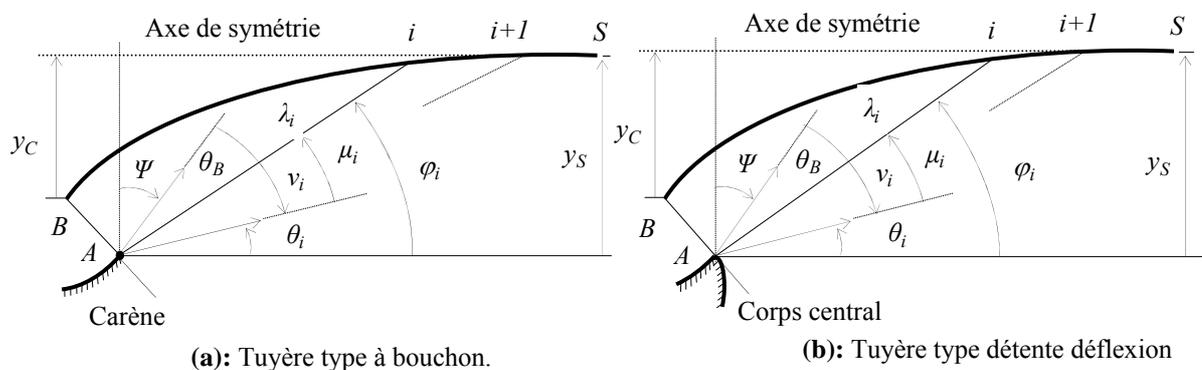


Figure 4.6 : Paramètres d'une ligne de Mach intermédiaire reliant les points  $A$  et  $i$

L'inclinaison de la carène 'lip' par rapport à la verticale est déterminée par la relation suivante [15], [55] et [56]:

$$\Psi = 90 - v_S \quad (4.8)$$

#### 4.2. Discrétisation

Partageons la zone de détente entre  $AB$  et  $AS$  en  $N$  ondes de Mach y compris les extrémités, et numérotons ces ondes de gauche à droite, on obtient le schéma sur la figure 4.5. Le repère de calcul est placé au point  $A$ .

On remarque clairement que plus le nombre  $N$  des ondes de Mach est grand, plus on va voir une très bonne présentation de l'allure du corps central. On préfère dans notre étude commencer le calcul du point  $B$  du col vers le point  $S$  de sortie. La détermination des points de la paroi se fait d'une façon explicite. Si on connaît la position et les propriétés d'un point sur la paroi, on peut facilement déterminer celles du point adjacent à droite et vis versa jusqu'à ce qu'on arrive à la section de sortie. Notons que les ondes de Mach sont des lignes droites. Le schéma du modèle sous la présence d'une ligne de Mach est illustré dans la figure 4.6. La température  $T_i$  au point  $i$  est connue, voir équation (4.26). Alors, on peut écrire [55]:

$$\mu_i = \arcsin(1/M_i) \quad (4.9)$$

$$v_i = \int_{T_i}^{T^*} F_v(T) dT \quad (4.10)$$

$$\varphi_i = 90 - \Psi - v_i + \mu_i \quad (4.11)$$

$$\theta_i = \varphi_i - \mu_i \quad (4.12)$$

Avec:

$$a_i = \sqrt{\gamma_i r T_i} \quad (4.13)$$

$$M_i = \frac{\sqrt{2 H(T_i)}}{a_i} \quad (4.14)$$

$$\gamma_i = \frac{C_p(T_i)}{C_p(T_i) - r} \quad (4.15)$$

Sur la figure 4.5, toutes les propriétés  $M_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $\theta_i$ ,  $v_i$ ,  $T_i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$  au point  $i$  sont connues, et le problème devient la détermination de celles au point  $i+1$  adjacent à droite. Considérons le triangle reliant les points  $A$ ,  $i$  et  $i+1$ . Ces points  $i$  et  $i+1$ , voir figure 4.7, sont reliés par une ligne droite avec le point  $A$ . Alors:

$$\alpha_i = \pi - \varphi_i + v_S - v_i \quad (4.16)$$

$$\beta_i = \varphi_{i+1} - v_B + v_i \quad (4.17)$$

$$\frac{\sin(\beta_i)}{\lambda_i} = \frac{\sin(\alpha_i)}{\lambda_{i+1}} \quad (4.18)$$

Le rayon polaire du point  $i+1$  est donné par:

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i \frac{\sin(\alpha_i)}{\sin(\beta_i)} \quad (4.19)$$

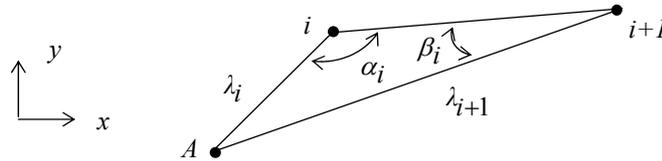


Figure 4.7 : Présentation des paramètres dans un triangle.

Par analogie avec les équations (4.9), (4.10), (4.11), et (4.12), on peut déduire les autres équations pour le point  $i+1$  en changeant l'indice  $i$  par  $i+1$ . Au point  $i+1$ , la température  $T_{i+1}$  est connue. Les coordonnées du point  $i+1$  peuvent être, sous la forme non-dimensionnelle, calculées par:

$$\frac{x_{i+1}}{\lambda_B} = \left( \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_B} \right) \cos(\varphi_{i+1}) \quad (4.20)$$

$$\frac{y_{i+1}}{\lambda_B} = \left( \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_B} \right) \sin(\varphi_{i+1}) \quad (4.21)$$

Chaque point  $i$  sur la paroi possède sa propre température, différente de celle des autres points, et ils sont tous reliés avec le point  $A$  par une ligne de Mach. Alors, au point  $A$ , il y a une infinité de valeurs de  $T$  et par conséquent *le point  $A$  est un point de discontinuité des propriétés  $T, M, \theta, \dots$  etc.*

Pour arriver à concevoir la tuyère, on a choisi la discrétisation de la zone de variation de la température  $T \in [T_S, T_*]$  en  $N$  valeurs y compris les valeurs des extrémités pour que le calcul soit rapide. Par exemple, si on fait la discrétisation sur la base du nombre de Mach, on est obligé pour déterminer la température de résoudre chaque fois l'équation algébrique (4.3).

### 4.3. Procédure du Calcul

La première étape consiste à déterminer quelques résultats nécessaires pour la conception:

Pour un gaz parfait à Haute Température, les expressions analytiques du calcul des rapports thermodynamiques critiques  $T^*/T_0$ ,  $\rho^*/\rho_0$ , et  $P^*/P_0$  sont présentés respectivement par les relations (1.46), (1.48) et (1.49) du chapitre 1.

Les rapports thermodynamiques  $T_S/T_0$ ,  $\rho_S/\rho_0$ , et  $P_S/P_0$  d'un gaz parfait à Haute Température correspondant au nombre de Mach supersonique de sortie sont présentés respectivement par les relations (1.51), (1.52) et (1.53) du chapitre 1.

Le rapport des sections critique est illustré dans le chapitre 1, récapitulé par:

$$\frac{A_S}{A^*} = \text{Exp} \left( \int_{T_S}^{T^*} F_A(T) dT \right) \quad (4.22)$$

La fonction  $F_A(T)$  est donnée par la relation (1.32) du chapitre 1.

La valeur  $T_S$  représente la température à la section de sortie. La procédure numérique de calcul de l'intégrale (4.22) est illustrée dans le chapitre 1. *Ce rapport nous servira comme une source de comparaison de validation des calculs numériques.*

La valeur de la fonction de Prandtl Meyer  $v_S$  peut être calculée en utilisant la relation (4.7) en remplaçant  $T$  par  $T_S$ . L'algorithme de calcul est présenté dans le chapitre 2.

La déviation  $\Psi$  de la carène 'lip' par rapport à la verticale peut être calculée en utilisant la relation (4.8)

Comme le procédé de calcul est en fonction de deux points successifs (à une forme d'une suite de récurrence), il faut donner les résultats au point de départ. Le point de départ est celui le point  $B$ . On a:

1. Le nombre de Mach est égale à  $M_B=1.00$ . Entrée sonique.
2. L'angle de Mach est égal à  $\mu_B=90.0\text{degré}$
3. La valeur de la fonction de Prandtl Meyer est égale à  $v_B=0.0$ .
4. L'angle polaire est égal à  $\varphi_B=90-\Psi-v_B+\mu_B$ .
5. Le rayon polaire est égal à  $\lambda_B=1.00$  (parmi les données).
6. Position du premier point de la paroi (point  $B$ ) est donnée par:

$$\frac{x_B}{\lambda_B} = \cos(\varphi_B) \quad , \quad \frac{y_B}{\lambda_B} = \sin(\varphi_B) \quad (4.23)$$

L'angle de déviation de l'écoulement  $\theta^*$  au col peut être déterminé en utilisant la figure 4.6 par :

$$\theta^* = \theta_B = \varphi_B - \mu_B \quad (4.24)$$

Le rayon non-dimensionnel théorique de la section de sortie est donné en utilisant la relation (4.22). On obtient:

$$\frac{y_S}{\lambda_B} = \frac{A_S}{A^*} \quad (4.25)$$

La même valeur sera recalculée par le modèle numérique en utilisant l'équation (4.30) comme le dernier point de calcul.

La deuxième étape consiste à affecter les résultats obtenus au point  $B$  comme le premier point de calcul numérique pour  $i=1$ . Ici la température au point  $B$  est égale à  $T^*$ .

Pour chaque ligne de Mach, il faut connaître la température au centre de détente  $A$  qui représente aussi la température le long de la ligne de Mach reliant les points  $A$  et  $i$ .

Comme le nombre de point choisi est égale  $N$ , alors, on obtient  $N-1$  panneaux, d'où, la température au point  $i$  peut être donnée par:

$$T_i = T^* - (i-1) \Delta T \quad i=1, 2, 3, \dots, N \quad (4.26)$$

Avec

$$\Delta T = \frac{T^* - T_S}{N-1} \quad (4.27)$$

En incrémentant le compteur de  $i=2$  jusqu'à  $N$ , on peut déterminer les propriétés thermodynamiques et physiques (en particulier les positions  $(x_i, y_i)$  des points de la paroi) le long de toutes les lignes de Mach sélectionnées au départ, et par conséquent la forme du corps central sera obtenue.

Pour accélérer le processus du calcul de l'intégrale (4.11), on peut considérer cette intégrale sous la forme suivante [55]:

$$v_{i+1} = v_i + \int_{T_{i+1}}^{T_i} F_v(T) dT \quad (4.28)$$

Alors, l'obtention de la valeur  $v_{i+1}$  du point adjacent se fait en ajoutant à la valeur de la fonction de Prandtl-Meyer  $v_i$ , l'intégrale entre les températures successifs  $T_{i+1}$  et  $T_i$ . Dans ce cas, le calcul de l'intégrale (4.28) se fait en utilisant l'algorithme de Simpson avec un nombre de panneaux très réduit puisque l'intervalle de l'intégration  $(T_{i+1}, T_i)$  est petit. Pour les applications numériques, et si  $N$  est grand, on peut choisir environ 5 à 7 points de Simpson pour l'évaluation de cette intégrale avec une précision convenable. On peut même choisir la quadrature de Gauss Legendre présentée dans le chapitre 1.

A partir du dernier point lorsque  $i=N$ , on peut fixer les résultats suivants:

1) La position du point  $S$  de la section de sortie est donnée, sous forme non-dimensionnelle, par:

$$\frac{x_S}{\lambda_B} = \frac{x_N}{\lambda_B} \quad (4.29)$$

$$\frac{y_S}{\lambda_B} = \frac{y_N}{\lambda_B} \quad (4.30)$$

La distance axiale entre la section de sortie et le coin de la carène 'lip' est donnée par:

$$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B} = \frac{x_S}{\lambda_B} \quad (4.31)$$

2) La longueur totale de la tuyère est mesurée comme la distance axiale entre le point  $B$  du col et le point  $S$  de la section de sortie. Elle est donnée, sous forme non-dimensionnelle par:

$$\frac{L}{\lambda_B} = \frac{x_S}{\lambda_B} - \frac{x_B}{\lambda_B} \quad (4.32)$$

3) Le rapport des sections correspondant à la discrétisation de  $N$  points peut être évalué par:

$$\frac{A_S}{A^*} (\text{Calculé}) = \frac{y_S}{\lambda_B} = \frac{y_N}{\lambda_B} \quad (4.33)$$

#### 4.4. Paramètres Thermodynamiques

En chaque points  $i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N$ ), les paramètres thermodynamiques peuvent être déterminés par:

1) Le rapport des températures au point  $i$  de la paroi peut être calculé par la relation suivante une fois la température  $T_i$  est obtenue:

$$\left( \frac{T}{T_0} \right)_i = \frac{T_i}{T_0} \quad (4.34)$$

Ce rapport nous servira pour faire le choix convenable du matériau de construction du corps central résistant à cette température.

2) Le rapport des masses volumiques au point  $i$  de la paroi est donné par la relation suivante (Son procédé de calcul est présenté dans le chapitre 1) :

$$\left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_i = \text{Exp} \left( - \int_{T_i}^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad (4.35)$$

La fonction  $F_\rho(T)$  est donnée par la relation (1.25) du chapitre 1.

La même remarque mentionnée pour le calcul de la valeur de  $v_{i+1}$  par la relation (4.28), reste valable pour calculer le rapport des masses volumiques par la relation (4.35). On peut alors considérer cette relation sous la forme suivante:

$$\left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_i = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_{i-1} \text{Exp} \left( - \int_{T_{i-1}}^{T_i} F_\rho(T) dT \right) \quad (4.36)$$

Ce rapport servira pour évaluer la masse du gaz existant à chaque instant dans l'espace de l'écoulement du corps central.

3) Le rapport des pressions au point  $i$  de la paroi est donné par:

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)_i = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_i \left(\frac{T}{T_0}\right)_i \quad (4.37)$$

Ce rapport nous servira pour la détermination de la force de pression exercée sur la paroi du corps central. *On peut calculer ces rapports durant la détermination du contour du corps central.*

#### 4.5. Masse du corps central

Le segment numéro (*i*) du corps central est illustré sur la figure 4.8. Pour arriver à calculer la masse de la structure du corps central, considérons les deux suppositions suivantes:

- 1) La forme de la paroi entre deux points successifs est approchée par une ligne droite. Cette supposition donne de bons résultats si le nombre de points *N* est très élevé.
- 2) Le corps central est constitué du même matériau et d'une épaisseur constante.

Le calcul de la masse de la structure est lié avec le calcul de la longueur curviligne de la paroi du corps central. Alors, par unité de profondeur et sous forme non-dimensionnelle, on obtient [55]:

$$\frac{Masse}{\rho_M t_M A^*} = C_{Masse} = \sum_{i=1}^{i=N-1} \sqrt{\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\lambda_B}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{\lambda_B}\right)^2} \quad (4.38)$$

Le terme  $A^*$  dans la relation (4.38) est égale à  $A^* = 2 l \lambda_B$ .

#### 4.6. Force de pression exercée sur la paroi

La pression exercée sur le tronçon numéro (*i*) de la figure 4.8 est approchée par l'interpolation suivante:

$$P_{(i)} = \sigma P_i + (1-\sigma) P_{i+1} \quad (4.39)$$

Pour les applications, on prend  $\sigma = 0.5$ .

La force de pression axiale exercée sur ce tronçon peut être calculée par:

$$Fx_{(i)} = P_{(i)} (y_{i+1} - y_i) \quad (4.40)$$

La force de pression axiale totale exercée sur le corps central, par unité de profondeur, est calculée comme la somme de toutes les forces de pression axiales exercées sur tous les tronçons. Le corps central est constitué par deux parties par raison de symétrie. Sous forme non-dimensionnelle, on obtient [55] et [56]:

$$\frac{F_x}{P_0 A^*} = C_{Force} = \sum_{i=1}^{i=N-1} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{(i)} \left[ \frac{y_{i+1}}{\lambda_B} - \frac{y_i}{\lambda_B} \right] \quad (4.41)$$

Le rapport des pressions dans la relation (4.41) est donné par les expressions (4.37) et (4.39).

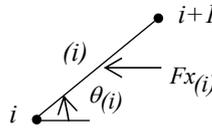


Figure 4.8 : Force de pression exercée sur un segment du corps central.

#### 4.7. Masse du gaz dans le divergent

La masse du gaz existant à chaque instant dans la partie divergente du corps central entre les lignes de Mach  $AB$  et  $AS$  y compris la zone uniforme peut être évaluée. On peut considérer l'espace de la tuyère comme l'union des triangles placés l'un adjacent à l'autre comme le montre la figure 4.5, y compris la zone uniforme entre la ligne de Mach  $AS$  et la ligne horizontale. Le nombre total des triangles est égale à  $N-1$  en ajoutant le triangle de la zone uniforme. La masse du gaz, par unité de profondeur, qui se trouve dans l'espace compris entre deux lignes de Mach successives reliant les points  $A$  et  $i$  et les points  $A$  et  $i+1$  comme le montre la figure 4.7, est approchée par:

$$Masse_{Gaz(i)} = \rho_{(i)} A_{(i)} l \quad (4.42)$$

Avec

$$\rho_{(i)} = \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2} \quad (4.43)$$

$$A_{(i)} = \frac{x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}}{2} \quad (4.44)$$

Au point  $A$  du triangle considéré, il y a deux valeurs de la masse volumique, l'une égale à celle du point  $i$  et l'autre égale à celle du point  $i+1$ . Pour cette raison, on a considéré la valeur moyenne de la masse volumique entre les deux points comme le montre l'équation (4.43). La position du point  $A$  ne figure pas dans la relation (4.44), puisque  $x_A = y_A = 0$ .

Dans la zone uniforme, la masse du gaz, par unité de profondeur, est donnée par

$$Masse_{Gaz} (zone\ uniforme) = \rho_S \frac{x_S y_S}{2} l \quad (4.45)$$

La masse totale du gaz dans le divergent y compris la symétrie du corps central, par unité de profondeur, sera donc donnée, sous forme non-dimensionnelle, par la relation suivante [55] et [56]:

$$\frac{Masse_{Gaz}}{\rho_0 \lambda_B A_*} = C_{Gaz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_S}{\rho_0} \right) \left[ \frac{x_S}{\lambda_B} \frac{y_S}{\lambda_B} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N-1} \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{(i)} \left[ \frac{x_{i+1}}{\lambda_B} \frac{y_i}{\lambda_B} - \frac{x_i}{\lambda_B} \frac{y_{i+1}}{\lambda_B} \right] \quad (4.46)$$

Le rapport des masses volumiques dans l'expression (4.46) est donné par les relations (4.43) et (4.35).

#### 4.8. Erreur du modèle du gaz parfait

Le modèle mathématique d'un gaz parfait est développé en considérant la chaleur spécifique  $C_P$  et le rapport  $\gamma$  constants. Il donne des résultats acceptables avec une certaine erreur pour les faibles températures génératrices. Une différence entre les résultats donnés entre le modèle du gaz parfait et notre modèle sera présentée. L'erreur donnée par le modèle du gaz parfait par rapport à notre modèle peut être calculée pour chaque paramètre de conception. Pour chaque couple  $(T_0, M_S)$ , l'erreur relative  $\varepsilon$  peut être évaluée par la relation suivante:

$$\varepsilon_{paramètre\%} = \left| 1 - \frac{Paramètre_{Gaz\ Parfait}}{Paramètre_{Haute\ Température}} \right| \times 100 \quad (4.47)$$

Le mot paramètre dans la relation (4.47) peut représenter tous les paramètres de conception, notamment la longueur de la tuyère, la masse de la structure, la force de pression exercée sur la paroi et le rapport des sections.

## CHAPITRE 5

### RESULTATS ET COMMENTAIRES

Dans ce chapitre, on présente les divers résultats obtenus par le programme de calcul élaboré pour les deux formes de tuyères. Ce chapitre est divisé en cinq paragraphes. Le premier paragraphe 5.1 comporte les résultats obtenus pour les paramètres de l'écoulement supersonique à haute température. Le deuxième paragraphe 5.2 comporte les résultats obtenus sur la fonction de Prandtl Meyer à haute température. Le troisième paragraphe 5.3 comporte les résultats obtenus pour la tuyère à détente centrée bi-dimensionnelle. Le cinquième paragraphe 5.5 concerne aussi les résultats sur la tuyère à détente centrée mais de la géométrie axisymétrique suivie à la fin de ce paragraphe par une comparaison avec la forme bi-dimensionnelle. Dans le paragraphe 5.4 on a présenté les divers résultats obtenus pour la tuyère à corps central à bouchon, suivie à la fin du paragraphe par une comparaison des paramètres de conception avec ceux de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle.

*La présentation des formes des tuyères de dimensionnement est reportée dans un repère orthonormé à axes non-dimensionnels.*

On a préféré la présentation des figures par quatre courbes, trois courbes pour le cas à haute température correspondant à la température génératrice  $T_0=1000\text{ K}^\circ$ ,  $2000\text{ K}^\circ$  et  $3000\text{ K}^\circ$  y compris la quatrième courbe du cas du gaz parfait pour  $\gamma=1.402$ . Les résultats numériques présentés sont déterminés avec une précision de  $10^{-4}$ . *Les résultats de conception, comme la longueur de la tuyère, la masse de la structure, la force de pression, la masse du gaz et les autres paramètres sont présentés sous une forme non-dimensionnelle.*

Dans la discussion, on a introduit l'abréviation *GP* pour le gaz calorifiquement parfait et par *HT* pour le modèle à Haute Température.

*Les résultats concernant le modèle GP ( $\gamma=1.402$ ) obtenus par notre calcul numérique peuvent être trouvés dans les références indiquées dans chaque chapitre.*

#### 5.1. Résultats pour les paramètres supersoniques

La figure 5.1 représente la variation de la chaleur spécifique  $C_p(T)$  et le rapport  $\gamma(T)$  de l'air en fonction de la température jusqu'à  $3550\text{ K}^\circ$  pour les modèles *HT* et *GP*. Les graphes à Haute Température sont présentés en utilisant le polynôme d'interpolation (1.39). On peut dire qu'à basse température jusqu'à environ  $240\text{ K}^\circ$ , le gaz peut être considéré comme calorifiquement parfait, à cause de l'invariance de la chaleur spécifique

$C_p(T)$  et du rapport  $\gamma(T)$ . Mais si la température  $T_0$  augmente, on peut voir la différence entre ces valeurs, qui influent sur le comportement thermodynamique de l'écoulement.

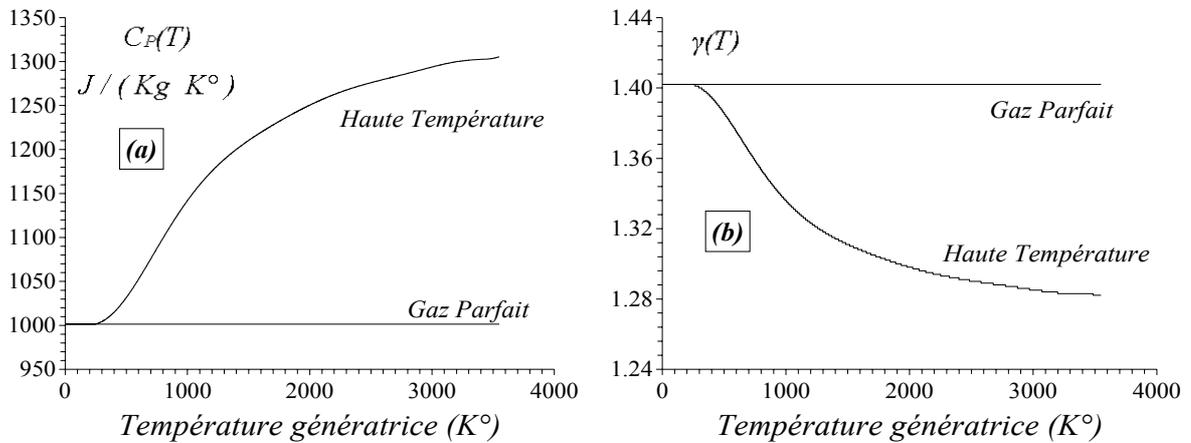


Figure 5.1 : Variation de  $C_p(T)$  et  $\gamma(T)$  en fonction de la température génératrice.  
**(a)** : Variation de  $C_p(T)$  en fonction de  $T_0$ . **(b)** : Variation de  $\gamma(T)$  en fonction de  $T_0$ .

### 5.1.1. Paramètres critiques

Les figures 5.2, 5.3 et 5.4 représentent respectivement la variation des rapports thermodynamiques critiques, débit massique critique et le rapport des vitesses du son critique en fonction de la température génératrice  $T_0$ . On constate que, *lorsque la température  $T_0$  augmente, les valeurs critiques à haute température varient et cette variation devient considérable lorsque la valeur de  $T_0$  est élevée ; ce qui n'est pas le cas pour le modèle GP.*

Tableau 5.1 : Valeurs numériques des paramètres critiques à haute température.

	$\frac{T^*}{T_0}$	$\frac{\rho^*}{\rho_0}$	$\frac{P^*}{P_0}$	$\frac{a^*}{a_0}$	$\frac{m}{A^* \rho_0 a_0}$
<b>GP (<math>\gamma=1.402</math>)</b>	<b>0.83264</b>	<b>0.63406</b>	<b>0.52795</b>	<b>0.91249</b>	<b>0.57858</b>
$T_0=298.15 K^\circ$	0.83284	0.63390	0.52793	0.91310	0.57881
$T_0=500 K^\circ$	0.83667	0.63267	0.52934	0.91713	0.58025
$T_0=1000 K^\circ$	0.85345	0.62911	0.53691	0.92812	0.58389
$T_0=1500 K^\circ$	0.86372	0.62778	0.54223	0.93207	0.58514
$T_0=2000 K^\circ$	0.86892	0.62705	0.54485	0.93435	0.58589
$T_0=2500 K^\circ$	0.87228	0.62664	0.54661	0.93551	0.58623
$T_0=3000 K^\circ$	0.87429	0.62638	0.54764	0.93644	0.58657
$T_0=3500 K^\circ$	0.87583	0.62623	0.54847	0.93664	0.58655

Notons qu'on a pris une erreur égale à  $\varepsilon=10^{-6}$  pour la détermination de la valeur de la température critique  $T^*$ . La température critique déterminée par le modèle *HT* est toujours supérieure à la température critique donnée par le modèle *GP*, ce qui donne que ce modèle refroidi le gaz par rapport au cas réel. Le rapport  $\rho^*/\rho_0$  est déterminé par le choix de  $N=300000$ ,  $b_1=0.1$  et  $b_2=2.00$  pour avoir une précision meilleur à  $\varepsilon=10^{-5}$ .

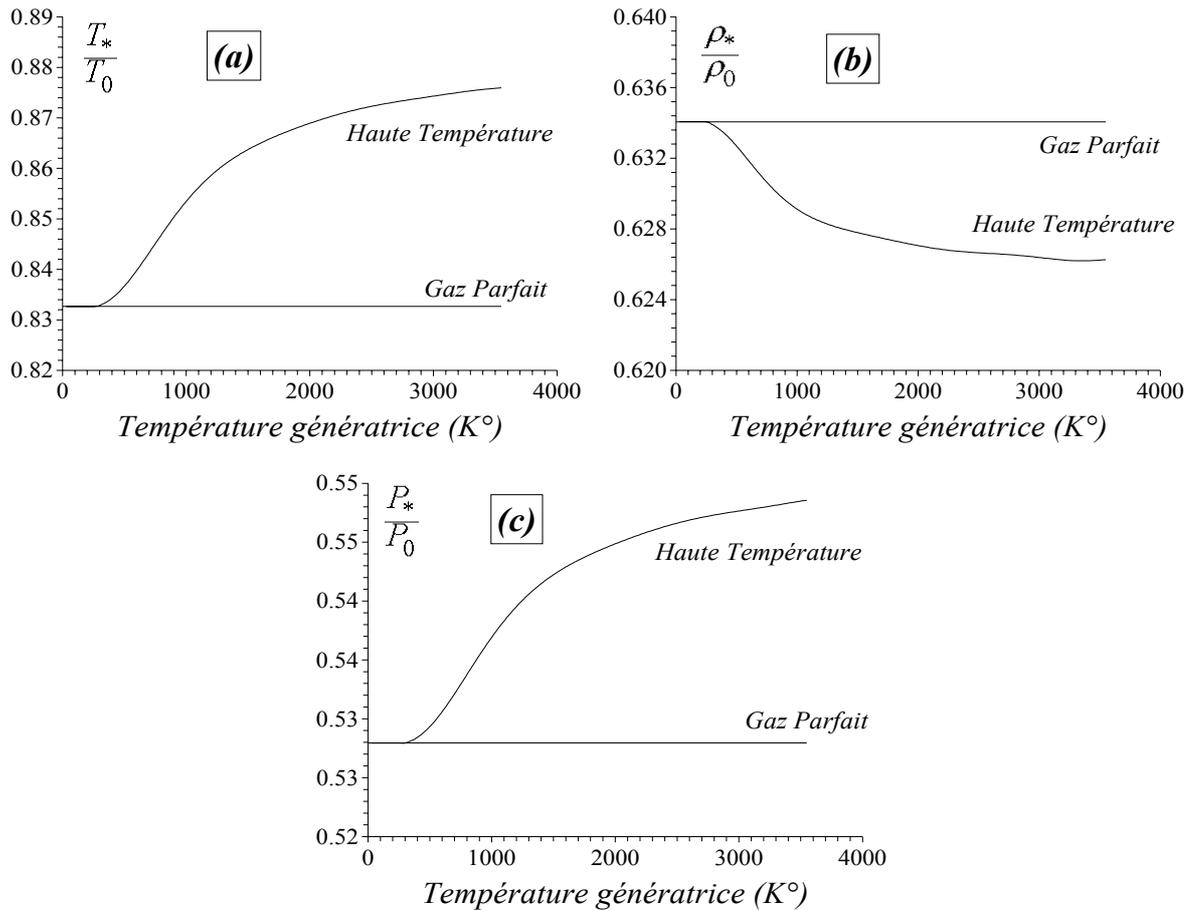


Figure 5.2 : Variation des rapports thermodynamiques critiques en fonction de  $T_0$ .  
 (a) : Rapport des températures. (b) : Rapport des masses volumiques. (c) : Rapport des pressions.

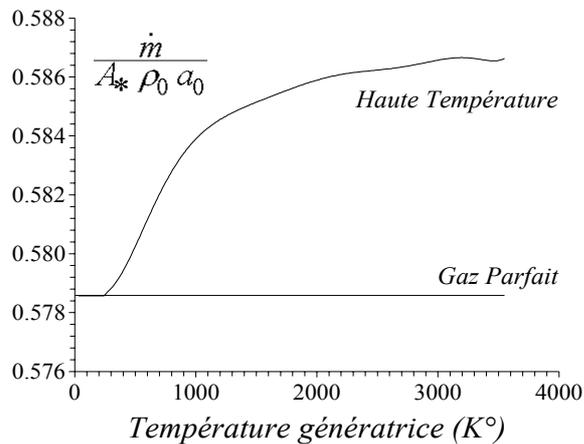


Figure 5.3 : Variation du débit massique critique non-dimensionnel en fonction de  $T_0$ .

Sur la figure 5.3, la théorie du gaz parfait détermine le débit massique critique, traversant par exemple une tuyère supersonique, par un manque par rapport au cas réel qui va influer sur la valeur de la force de poussée, surtout si la température  $T_0$  est grande. Ce manque va influer sur l'information donnée sur la durée de vie du carburant, qui sera

inférieure par rapport à la durée de vie donnée par le modèle *GP*. Notons que la durée du vie du carburant est liée avec l'autonomie du vol d'un missile.

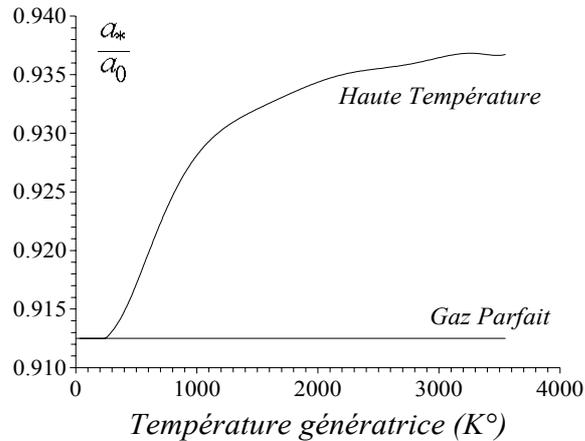


Figure 5.4 : Variation du rapport  $a^*/a_0$  en fonction de  $T_0$ .

Les valeurs numériques trouvées pour les paramètres critiques en quelques valeurs de la température génératrice  $T_0$  sont présentées dans le tableau 5.1. Ces valeurs sont déterminées avec une précision de  $10^{-5}$ . Une étude sur l'erreur causée par le modèle *GP* sera présentée par suite dans le paragraphe correspondant.

### 5.1.2. Résultats sur les paramètres supersoniques

Les figures 5.5, 5.6 et 5.7 représentent respectivement la variation des rapports thermodynamiques, rapport critique de sections et le rapport supersonique des vitesses du son de l'écoulement à une section droite en fonction du nombre de Mach  $M_S$  pour les températures génératrices  $T_0=1000\text{ K}^\circ$ ,  $2000\text{ K}^\circ$  et  $3000\text{ K}^\circ$  y compris le cas du gaz parfait à  $\gamma=1.402$ . Lorsque  $M=1$ , on trouve les valeurs des rapports critiques. On remarque que si on prend en considération la variation de  $C_P(T)$  et de  $\gamma(T)$ , la température génératrice  $T_0$  influe sur les grandeurs des paramètres thermodynamiques et géométrique de l'écoulement, ce qui n'est pas le cas pour le modèle du gaz parfait.

La courbe 4 de la figure 5.5a indique que le gaz parfait va refroidir l'écoulement par rapport au comportement thermodynamique réel du gaz et par conséquent, une influence sur les paramètres du dimensionnement de la tuyère.

Les valeurs numériques trouvées pour les rapports thermodynamiques (des températures, des masses volumiques et des pressions) sont présentés pour quelques valeurs de  $M_S$  et  $T_0$ , respectivement dans les tableaux 5.2, 5.3 et 5.4.

Le tableau 5.5 représente les valeurs numériques trouvées du rapport des sections critique. Pour le rapport des vitesses du son, le tableau 5.6 présente quelques valeurs numériques calculées. Pour les rapports  $T/T_0$ ,  $\rho/\rho_0$  et  $A/A^*$ , on a préféré la présentation des valeurs numériques avec un pas  $\Delta M=0.1$ , parce ce que ces rapports sont déterminés après faire l'intégration numérique. Mais pour les autres paramètres (rapport des pressions, rapport des vitesses du son), on a juste présenté des résultats numériques pour quelques valeurs réduit du nombre de Mach supersonique ( $\Delta M=0.5$ ), puisque, on peut déterminer ces rapports analytiquement à partir de ce calculé numériquement, voir équations (1.27) et (1.37) du chapitre 1. Les valeurs numériques présentées sont déterminées avec une précision meilleure à  $\varepsilon=10^{-5}$ . Une étude sur l'erreur commise par le modèle *GP* à  $\gamma$  constant par rapport à notre modèle *HT* est présentée dans le paragraphe prochain.

*On peut conclure à partir de cette première partie des résultats concernant les paramètres d'un écoulement supersoniques, qu'avec une certaine erreur acceptée et à basse température et nombre de Mach, la théorie du gaz parfait donne des résultats acceptables.*

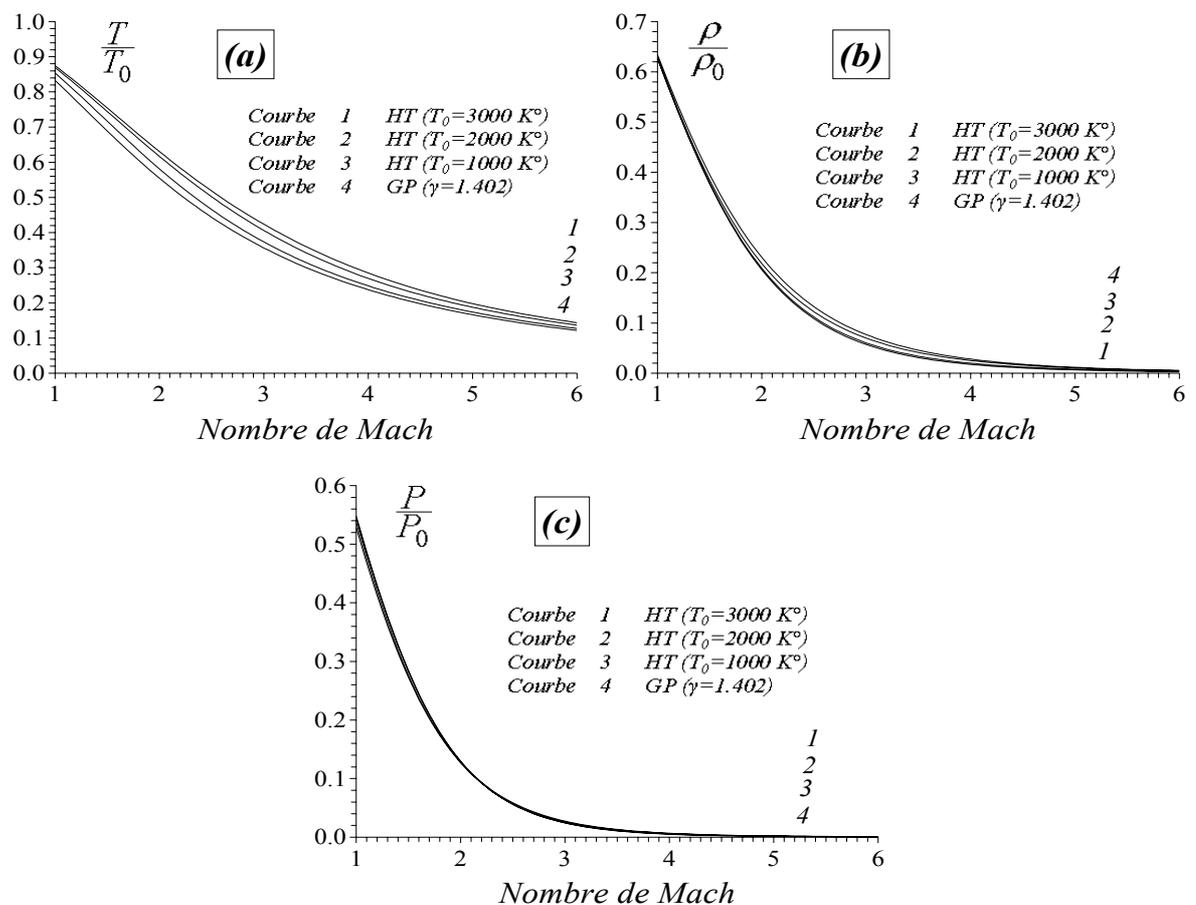


Figure 5.5 : Variation des rapports thermodynamiques en fonction du nombre de Mach.

(a) : Rapport des températures. (b) : Rapport des masses volumiques. (c) : Rapport des pressions.

Tableau 5.2 : Valeurs numériques du rapport  $T/T_0$  à Haute Température.

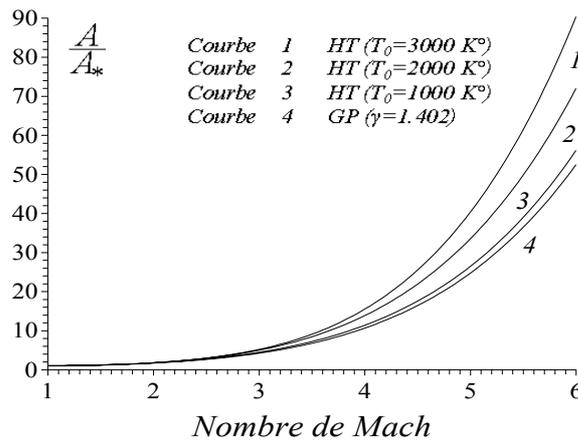
$T/T_0$	$GP (\gamma=1.402)$	$T_0=1000 K^\circ$	$T_0=2000 K^\circ$	$T_0=3000 K^\circ$
$M_S=1.1$	<b>0.80437</b>	0.82735	0.84532	0.85162
$M_S=1.2$	<b>0.77553</b>	0.80032	0.82080	0.82804
$M_S=1.3$	<b>0.74644</b>	0.77266	0.79559	0.80377
$M_S=1.4$	<b>0.71738</b>	0.74463	0.76992	0.77903
$M_S=1.5$	<b>0.68858</b>	0.71649	0.74400	0.75400
$M_S=1.6$	<b>0.66025</b>	0.68846	0.71801	0.72887
$M_S=1.7$	<b>0.63255</b>	0.66074	0.69212	0.70378
$M_S=1.8$	<b>0.60560</b>	0.63349	0.66647	0.67887
$M_S=1.9$	<b>0.57950</b>	0.60687	0.64118	0.65427
$M_S=2.0$	<b>0.55432</b>	0.58098	0.61636	0.63009
$M_S=2.1$	<b>0.53010</b>	0.55593	0.59208	0.60640
$M_S=2.2$	<b>0.50688</b>	0.53177	0.56842	0.58329
$M_S=2.3$	<b>0.48466</b>	0.50856	0.54543	0.56082
$M_S=2.4$	<b>0.46344</b>	0.48632	0.52316	0.53902
$M_S=2.5$	<b>0.44321</b>	0.46506	0.50163	0.51792
$M_S=2.6$	<b>0.42395</b>	0.44479	0.48086	0.49756
$M_S=2.7$	<b>0.40563</b>	0.42548	0.46088	0.47792
$M_S=2.8$	<b>0.38822</b>	0.40712	0.44169	0.45902
$M_S=2.9$	<b>0.37169</b>	0.38968	0.42329	0.44085
$M_S=3.0$	<b>0.35599</b>	0.37313	0.40569	0.42340
$M_S=3.1$	<b>0.34111</b>	0.35742	0.38886	0.40665
$M_S=3.2$	<b>0.32698</b>	0.34253	0.37280	0.39059
$M_S=3.3$	<b>0.31358</b>	0.32841	0.35749	0.37521
$M_S=3.4$	<b>0.30088</b>	0.31503	0.34291	0.36047
$M_S=3.5$	<b>0.28883</b>	0.30235	0.32903	0.34637
$M_S=3.6$	<b>0.27739</b>	0.29032	0.31584	0.33289
$M_S=3.7$	<b>0.26654</b>	0.27891	0.30330	0.32000
$M_S=3.8$	<b>0.25625</b>	0.26810	0.29139	0.30769
$M_S=3.9$	<b>0.24647</b>	0.25784	0.28008	0.29594
$M_S=4.0$	<b>0.23719</b>	0.24810	0.26934	0.28472
$M_S=4.1$	<b>0.22837</b>	0.23885	0.25914	0.27401
$M_S=4.2$	<b>0.21999</b>	0.23008	0.24945	0.26381
$M_S=4.3$	<b>0.21202</b>	0.22175	0.24025	0.25408
$M_S=4.4$	<b>0.20444</b>	0.21382	0.23150	0.24480
$M_S=4.5$	<b>0.19723</b>	0.20628	0.22320	0.23596
$M_S=4.6$	<b>0.19036</b>	0.19909	0.21529	0.22754
$M_S=4.7$	<b>0.18382</b>	0.19225	0.20778	0.21951
$M_S=4.8$	<b>0.17758</b>	0.18573	0.20063	0.21187
$M_S=4.9$	<b>0.17164</b>	0.17952	0.19382	0.20458
$M_S=5.0$	<b>0.16597</b>	0.17359	0.18734	0.19763
$M_S=5.1$	<b>0.16056</b>	0.16793	0.18116	0.19101
$M_S=5.2$	<b>0.15540</b>	0.16252	0.17526	0.18469
$M_S=5.3$	<b>0.15046</b>	0.15736	0.16964	0.17867
$M_S=5.4$	<b>0.14574</b>	0.15243	0.16427	0.17292
$M_S=5.5$	<b>0.14123</b>	0.14771	0.15914	0.16743
$M_S=5.6$	<b>0.13692</b>	0.14320	0.15424	0.16219
$M_S=5.7$	<b>0.13279</b>	0.13888	0.14956	0.15718
$M_S=5.8$	<b>0.12884</b>	0.13475	0.14507	0.15240
$M_S=5.9$	<b>0.12505</b>	0.13078	0.14078	0.14782
$M_S=6.0$	<b>0.12141</b>	0.12698	0.13667	0.15344

Tableau 5.3 : Valeurs numériques du rapport  $\rho/\rho_0$  à Haute Température.

$\rho / \rho_0$	<b>GP (<math>\gamma=1.402</math>)</b>	$T_0=1000 K^\circ$	$T_0=2000 K^\circ$	$T_0=3000 K^\circ$
$M_S=1.1$	<b>0.58185</b>	0.57561	0.57289	0.57201
$M_S=1.2$	<b>0.53133</b>	0.52380	0.52036	0.51924
$M_S=1.3$	<b>0.48313</b>	0.47437	0.47015	0.46878
$M_S=1.4$	<b>0.43769</b>	0.42783	0.42280	0.42115
$M_S=1.5$	<b>0.39528</b>	0.38449	0.37865	0.37671
$M_S=1.6$	<b>0.35606</b>	0.34454	0.33789	0.33567
$M_S=1.7$	<b>0.32005</b>	0.30802	0.30060	0.29811
$M_S=1.8$	<b>0.28719</b>	0.27487	0.26675	0.26400
$M_S=1.9$	<b>0.25738</b>	0.24497	0.23620	0.23325
$M_S=2.0$	<b>0.23046</b>	0.21814	0.20881	0.20569
$M_S=2.1$	<b>0.20622</b>	0.19415	0.18437	0.18113
$M_S=2.2$	<b>0.18447</b>	0.17279	0.16265	0.15933
$M_S=2.3$	<b>0.16501</b>	0.15381	0.14341	0.14005
$M_S=2.4$	<b>0.14762</b>	0.13698	0.12644	0.12306
$M_S=2.5$	<b>0.13210</b>	0.12207	0.11149	0.10812
$M_S=2.6$	<b>0.11828</b>	0.10889	0.09835	0.09500
$M_S=2.7$	<b>0.10597</b>	0.09722	0.08682	0.08351
$M_S=2.8$	<b>0.09502</b>	0.08690	0.07672	0.07344
$M_S=2.9$	<b>0.08527</b>	0.07777	0.06787	0.06464
$M_S=3.0$	<b>0.07659</b>	0.06969	0.06012	0.05694
$M_S=3.1$	<b>0.06887</b>	0.06254	0.05334	0.05021
$M_S=3.2$	<b>0.06199</b>	0.05619	0.04741	0.04433
$M_S=3.3$	<b>0.05586</b>	0.05056	0.04220	0.03919
$M_S=3.4$	<b>0.05040</b>	0.04556	0.03764	0.03469
$M_S=3.5$	<b>0.04553</b>	0.04111	0.03363	0.03076
$M_S=3.6$	<b>0.04118</b>	0.03715	0.03011	0.02731
$M_S=3.7$	<b>0.03728</b>	0.03361	0.02701	0.02430
$M_S=3.8$	<b>0.03380</b>	0.03046	0.02428	0.02165
$M_S=3.9$	<b>0.03069</b>	0.02763	0.02187	0.01933
$M_S=4.0$	<b>0.02789</b>	0.02511	0.01973	0.01729
$M_S=4.1$	<b>0.02538</b>	0.02284	0.01784	0.01550
$M_S=4.2$	<b>0.02313</b>	0.02082	0.01615	0.01391
$M_S=4.3$	<b>0.02110</b>	0.01899	0.01466	0.01252
$M_S=4.4$	<b>0.01927</b>	0.01735	0.01332	0.01129
$M_S=4.5$	<b>0.01762</b>	0.01586	0.01213	0.01020
$M_S=4.6$	<b>0.01614</b>	0.01452	0.01106	0.00923
$M_S=4.7$	<b>0.01480</b>	0.01331	0.01011	0.00837
$M_S=4.8$	<b>0.01357</b>	0.01222	0.00924	0.00760
$M_S=4.9$	<b>0.01247</b>	0.01123	0.00847	0.00692
$M_S=5.0$	<b>0.01147</b>	0.01033	0.00777	0.00631
$M_S=5.1$	<b>0.01056</b>	0.00951	0.00714	0.00576
$M_S=5.2$	<b>0.00974</b>	0.00877	0.00657	0.00528
$M_S=5.3$	<b>0.00899</b>	0.00809	0.00605	0.00483
$M_S=5.4$	<b>0.00831</b>	0.00747	0.00558	0.00444
$M_S=5.5$	<b>0.00768</b>	0.00691	0.00516	0.00408
$M_S=5.6$	<b>0.00711</b>	0.00640	0.00477	0.00376
$M_S=5.7$	<b>0.00659</b>	0.00593	0.00441	0.00347
$M_S=5.8$	<b>0.00611</b>	0.00550	0.00409	0.00320
$M_S=5.9$	<b>0.00567</b>	0.00510	0.00380	0.00296
$M_S=6.0$	<b>0.00527</b>	0.00474	0.00353	0.00274

Tableau 5.4 : Valeurs numériques du rapport des pressions  $P/P_0$  à Haute Température.

$P/P_0$	$M=2.00$	$M=3.00$	$M=4.00$	$M=5.00$	$M=6.00$
<b>GP (<math>\gamma=1.402</math>)</b>	<b>0.12775</b>	<b>0.02726</b>	<b>0.00661</b>	<b>0.00190</b>	<b>0.00064</b>
$T_0=500\text{ K}^\circ$	0.12737	0.02715	0.00659	0.00189	0.00063
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	0.12673	0.02600	0.00623	0.00179	0.00060
$T_0=1500\text{ K}^\circ$	0.12765	0.02489	0.00571	0.00161	0.00054
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	0.12870	0.02439	0.00531	0.00145	0.00048
$T_0=2500\text{ K}^\circ$	0.12923	0.02421	0.00506	0.00133	0.00043
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	0.12960	0.02411	0.00492	0.00124	0.00039
$T_0=3500\text{ K}^\circ$	0.12995	0.02400	0.00483	0.00118	0.00036

Figure 5.6 : Variation de  $A/A^*$  à Haute Température en fonction du nombre de Mach.Tableau 5.5 : Valeurs numériques du rapport des sections  $A/A^*$  à Haute Température.

$A/A^*$	<b>GP (<math>\gamma=1.402</math>)</b>	$T_0=1000\text{ K}^\circ$	$T_0=2000\text{ K}^\circ$	$T_0=3000\text{ K}^\circ$
$M_S=1.1$	<b>1.00791</b>	1.00819	1.00833	1.00837
$M_S=1.2$	<b>1.03040</b>	1.03157	1.03218	1.03238
$M_S=1.3$	<b>1.06622</b>	1.06897	1.07051	1.07102
$M_S=1.4$	<b>1.11478</b>	1.11992	1.12299	1.12403
$M_S=1.5$	<b>1.17592</b>	1.18437	1.18981	1.19167
$M_S=1.6$	<b>1.24984</b>	1.26267	1.27154	1.27463
$M_S=1.7$	<b>1.33703</b>	1.35539	1.36914	1.37397
$M_S=1.8$	<b>1.43816</b>	1.46337	1.48485	1.49109
$M_S=1.9$	<b>1.55413</b>	1.58762	1.61718	1.62765
$M_S=2.0$	<b>1.68598</b>	1.72931	1.77093	1.78565
$M_S=2.1$	<b>1.83493</b>	1.88978	1.94714	1.96734
$M_S=2.2$	<b>2.00236</b>	2.07050	2.14810	2.17531
$M_S=2.3$	<b>2.18978</b>	2.27312	2.37633	2.41244
$M_S=2.4$	<b>2.39885</b>	2.49938	2.63459	2.68197
$M_S=2.5$	<b>2.63139</b>	2.75121	2.92585	2.98747
$M_S=2.6$	<b>2.88936</b>	3.03066	3.25332	3.33291
$M_S=2.7$	<b>3.17487</b>	3.33995	3.62038	3.72263
$M_S=2.8$	<b>3.49018</b>	3.68144	4.03061	4.16137
$M_S=2.9$	<b>3.83770</b>	4.05766	4.48778	4.65431
$M_S=3.0$	<b>4.22002</b>	4.47131	4.99582	5.20699
$M_S=3.1$	<b>4.63988</b>	4.92527	5.55883	5.82541
$M_S=3.2$	<b>5.10019</b>	5.42257	6.18108	6.51592
$M_S=3.3$	<b>5.60403</b>	5.96646	6.86700	7.28527
$M_S=3.4$	<b>6.15466</b>	6.56035	7.62119	8.14056

$M_S=3.5$	<b>6.75552</b>	7.20788	8.44843	9.08924
$M_S=3.6$	<b>7.41024</b>	7.91287	9.35368	10.13905
$M_S=3.7$	<b>8.12264</b>	8.67934	10.34212	11.29802
$M_S=3.8$	<b>8.89673</b>	9.51155	11.41912	12.57446
$M_S=3.9$	<b>9.73673</b>	10.41395	12.59028	13.97691
$M_S=4.0$	<b>10.64706</b>	11.39122	13.86147	15.51414
$M_S=4.1$	<b>11.63235</b>	12.44796	15.23880	17.19514
$M_S=4.2$	<b>12.69747</b>	13.58758	16.72865	19.02912
$M_S=4.3$	<b>13.84746</b>	14.81801	18.33769	21.02551
$M_S=4.4$	<b>15.08765</b>	16.14491	20.07291	23.19396
$M_S=4.5$	<b>16.42354</b>	17.57421	21.94160	25.54437
$M_S=4.6$	<b>17.86092</b>	19.11205	23.95136	28.08689
$M_S=4.7$	<b>19.40598</b>	20.76488	26.11016	30.83198
$M_S=4.8$	<b>21.06441</b>	22.53938	28.42629	33.79037
$M_S=4.9$	<b>22.84328</b>	24.44251	30.90540	36.97314
$M_S=5.0$	<b>24.74917</b>	26.48151	33.56551	40.39175
$M_S=5.1$	<b>26.78910</b>	28.66388	36.40700	44.05801
$M_S=5.2$	<b>28.97038</b>	30.99744	39.44265	47.98416
$M_S=5.3$	<b>31.30057</b>	33.49027	42.68261	52.18287
$M_S=5.4$	<b>33.78752</b>	36.15077	46.13743	56.66729
$M_S=5.5$	<b>36.43936</b>	38.98763	49.81807	61.45101
$M_S=5.6$	<b>39.26451</b>	42.00985	53.73588	66.54816
$M_S=5.7$	<b>42.27168</b>	45.26764	57.90264	71.97337
$M_S=5.8$	<b>45.46989</b>	48.64797	62.33055	77.74178
$M_S=5.9$	<b>48.86844</b>	52.28346	67.03224	83.86913
$M_S=6.0$	<b>52.47697</b>	56.14352	72.02078	90.37169

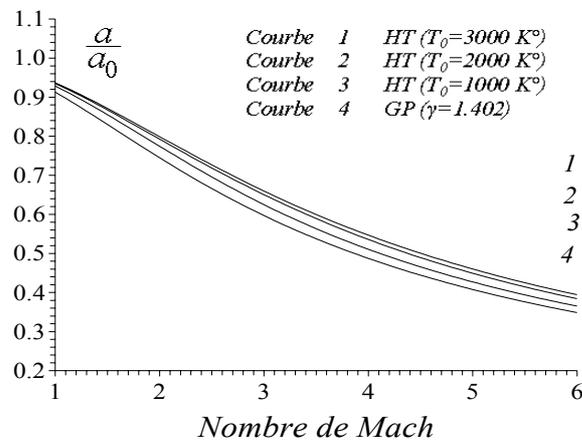


Figure 5.7 : Variation du rapport des vitesses du son en fonction du nombre de Mach

Tableau 5.6 : Valeurs numériques du rapport des vitesses du son  $a/a_0$  à Haute Température.

$a / a_0$	$M=2.00$	$M=3.00$	$M=4.00$	$M=5.00$	$M=6.00$
<b>GP (<math>\gamma=1.402</math>)</b>	<b>0.74453</b>	<b>0.59665</b>	<b>0.48702</b>	<b>0.40740</b>	<b>0.34845</b>
$T_0=500 K^\circ$	0.75101	0.60198	0.49136	0.41103	0.35155
$T_0=1000 K^\circ$	0.77392	0.62453	0.51027	0.42685	0.36508
$T_0=1500 K^\circ$	0.78624	0.64088	0.52545	0.43988	0.37624
$T_0=2000 K^\circ$	0.79216	0.65013	0.53543	0.44890	0.38411
$T_0=2500 K^\circ$	0.79599	0.65568	0.54205	0.45533	0.38986
$T_0=3000 K^\circ$	0.79847	0.65938	0.54651	0.45997	0.39416
$T_0=3500 K^\circ$	0.79988	0.66189	0.54950	0.46323	0.39733

### 5.1.3. Résultats sur l'application des tuyères supersoniques

La figure 5.8b représente la variation du nombre de Mach à travers la tuyère du cas (a). L'exemple est choisi pour  $M_S=3.00$  pour le modèle du gaz parfait. On remarque clairement que si la température  $T_0$  est prise en considération, on va voir une chute en grandeur du nombre de Mach de la tuyère dimensionnée sur la base de ce modèle. On remarque que la différence devient considérable si la valeur de  $T_0$  commence à dépasser les  $1000 K^\circ$ .

La figure 5.9 présente la variation de la correction du nombre de Mach d'une tuyère donnant un nombre de Mach de sortie  $M_S$ , dimensionnée sur la base du modèle *GP* pour différentes valeurs de  $T_0$ . On remarque que les courbes se confondent jusqu'à nombre de Mach  $M_S=2.00$ , indépendamment à la température  $T_0$ . A partir de cette valeur, la différence entre les trois courbes 1, 2 et 3, commencent à agrandir. On remarque encore que les courbes 3 et 4 sont presque confondues quelque soit le nombre de Mach, qui s'interprète par la possibilité d'utilisation du modèle *GP* pour les applications, si la température génératrice  $T_0$  soit inférieure à  $1000 K^\circ$  environ.

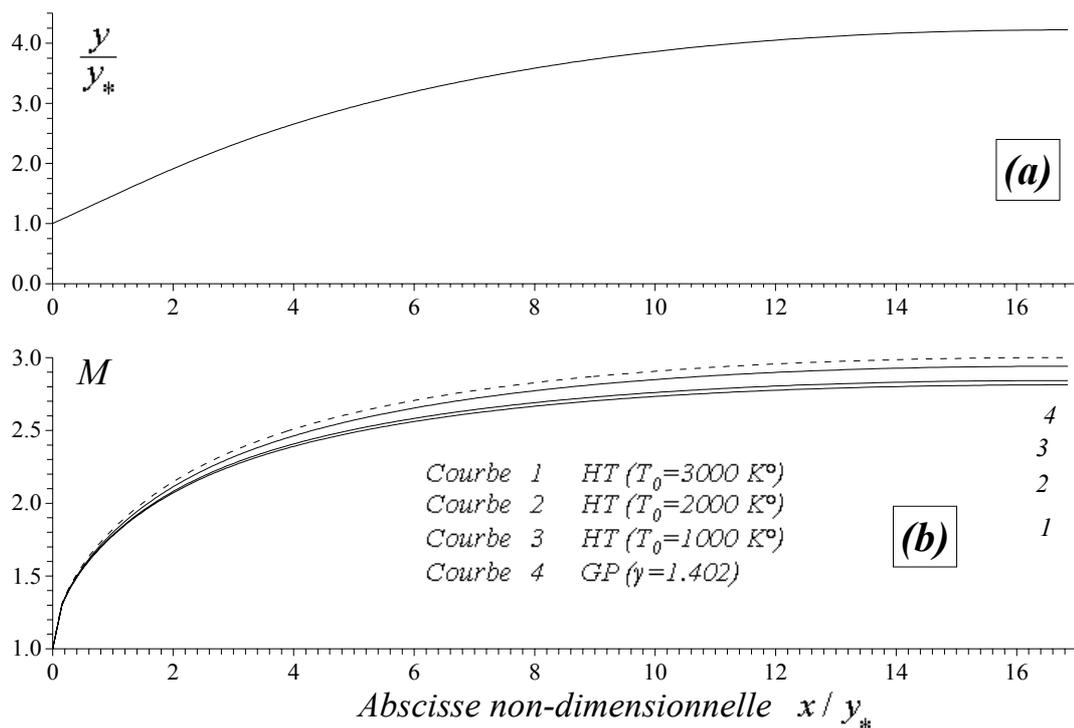


Figure 5.8 : Effet de  $T_0$  sur la variation du nombre de Mach à travers la tuyère.  
 (a) : Forme de la tuyère dimensionnée sur la base du modèle *GP* donnant  $M_S=3.00$ . (b) : Variation à Haute Température du nombre de Mach à travers la tuyère du cas (a).

Le tableau 5.7 présente quelque valeur numérique de  $M_S$  qui sera délivré par une tuyère supersonique à haute température, dimensionnée en considérant le modèle *GP*, donnant un nombre de Mach  $M_S$ . Par exemple, si la tuyère délivre  $M_S=3.00$  sur l'hypothèse *GP*, elle va

délivrer, sur la considération du modèle *HT*,  $M_S(HT)=2.94$ ,  $M_S(HT)=2.84$  et  $M_S(HT)=2.81$  respectivement si  $T_0=1000\text{ K}^\circ$ ,  $T_0=2000\text{ K}^\circ$  et  $T_0=3000\text{ K}^\circ$ .

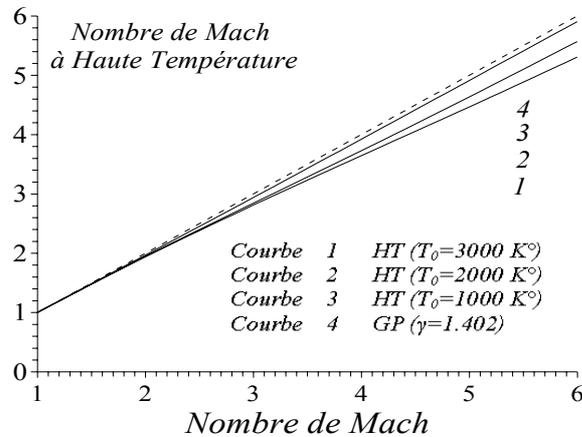


Figure 5.9 : Correction du nombre de Mach d'une tuyère dimensionnée par le modèle *GP*.

Tableau 5.7 : Correction du nombre de Mach de sortie de la tuyère.

$M_S(GP \ \gamma=1.402)$	1.5000	2.0000	3.0000	4.0000	5.0000	6.0000
$M_S(T_0=500\text{ K}^\circ)$	1.49773	1.99595	2.99568	3.99552	4.99516	5.99472
$M_S(T_0=1000\text{ K}^\circ)$	1.48799	1.97074	2.94037	3.92458	4.91548	5.90515
$M_S(T_0=1500\text{ K}^\circ)$	1.48300	1.95349	2.87771	3.81475	4.77270	5.74111
$M_S(T_0=2000\text{ K}^\circ)$	1.48090	1.94647	2.84273	3.72918	4.63778	5.56853
$M_S(T_0=2500\text{ K}^\circ)$	1.47929	1.94173	2.82457	3.67656	4.53600	5.42096
$M_S(T_0=3000\text{ K}^\circ)$	1.47857	1.93859	2.81252	3.64504	4.46704	5.30676
$M_S(T_0=3500\text{ K}^\circ)$	1.47784	1.93689	2.80357	3.62419	4.42160	5.22374

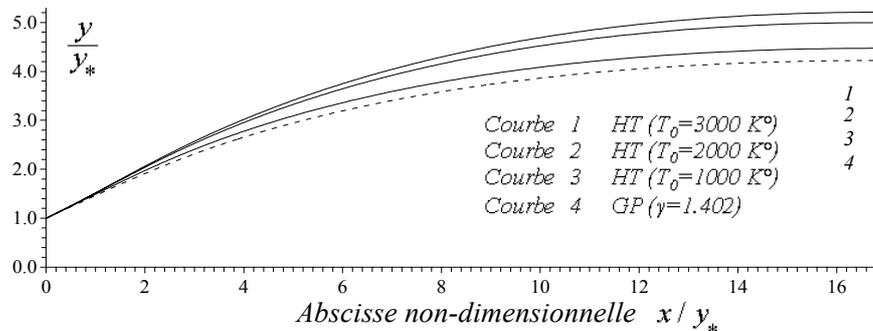


Figure 5.10 : Formes des tuyères donnant la même variation du nombre de Mach.

La figure 5.10 représente la forme des tuyères supersonique délivrant le même nombre de Mach de sortie  $M_S$ . On a pris un exemple pour  $M_S=3.00$ . La variation du nombre de Mach à travers ces 4 tuyères est illustrée sur la courbe 4 de la figure 5.8. Les trois autres courbes 1, 2, et 3 de la figure 5.10 sont déterminées sur l'utilisation du modèle *HT* pour  $T_0=3000\text{ K}^\circ$ ,  $2000\text{ K}^\circ$  et  $1000\text{ K}^\circ$  respectivement. La courbe 4 de la figure 5.10 est représentée encore dans la figure 5.8a, déterminée sur l'hypothèse d'un gaz parfait. On remarque que la tuyère du modèle *GP* est moins volumineuse par rapport au cas *HT*.

#### 5.1.4. Résultats sur l'erreur du modèle du gaz parfait

La figure 5.11 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage donnée respectivement par les rapports  $T/T_0$ ,  $\rho/\rho_0$  et  $A/A^*$  et le nombre de Mach du modèle  $GP$  comparé au modèle  $HT$  pour quelques valeurs de  $T_0$ .

Il est clair que si on opte une erreur par exemple inférieure à 5 %, le modèle  $GP$  peut être utilisé, si  $T_0$  soit inférieure à  $1000 K^\circ$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach, ou jusqu'au  $M=2.00$  pour n'importe quelle valeur de  $T_0$ . Si un auteur accepte une erreur supérieure à 5%, il peut utiliser le modèle  $GP$  dans un intervalle de  $M$  et  $T_0$  modéré.

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $T_0$  et  $M_S$  et elle augmente si  $T_0$  augmente. Par exemple si  $T_0=2000 K^\circ$  et  $M=3.00$ , l'utilisation du modèle  $GP$  va nous donner une erreur relative égale à  $\varepsilon=12.24 \%$  pour le rapport  $T/T_0$ , qui donne une différence de  $99.6 K^\circ$  entre les valeurs des températures des deux modèles, une erreur  $\varepsilon=27.38 \%$  pour le rapport  $\rho/\rho_0$ , une erreur  $\varepsilon=11.71 \%$  pour le rapport  $P/P_0$  (on a pas présenté ici le graphe de variation de l'erreur de ce rapport), et une erreur  $\varepsilon=15.52\%$  pour le rapport  $A/A^*$ . La figure 5.11d illustre l'erreur relative donnée par le nombre de Mach de sortie d'une tuyère dimensionnée sur la base d'un gaz parfait, si cette tuyère est utilisée dans les applications à  $T_0$  considérée. Par exemple, le modèle  $GP$  donne par rapport à notre modèle  $HT$  une erreur  $\varepsilon=5.53 \%$ .

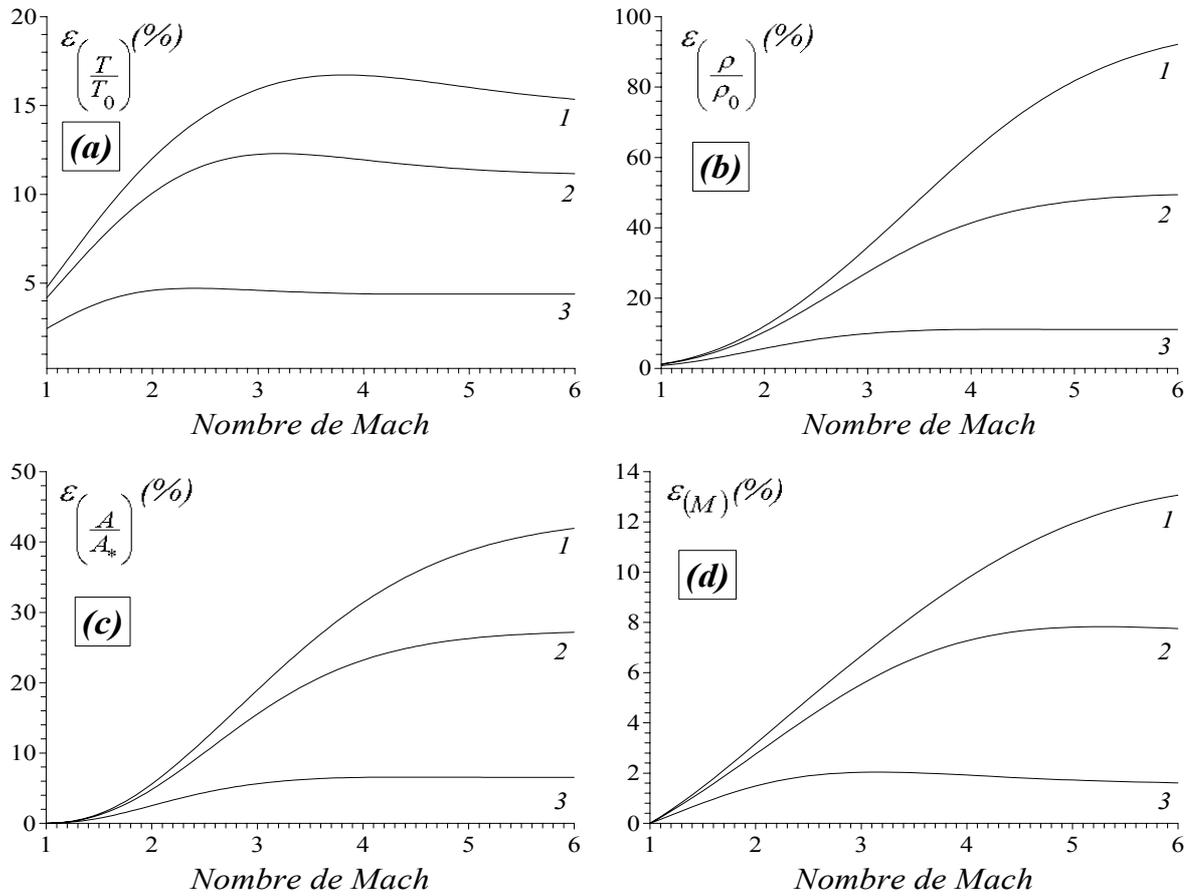
On peut remarquer qu'à faible valeur de  $M$  et  $T_0$ , l'erreur  $\varepsilon$  est faible. Sur ces figures, la courbe 4 se trouve au dessous de l'erreur 5%. Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle  $GP$  jusqu'à  $T_0=1000 K^\circ$  pour les applications aéronautiques, si on accepte une erreur inférieure à 5%. Mais si la température  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et a mesure, et dans ce cas, on peut utiliser le modèle  $GP$  indépendamment à la température  $T_0$ , si le nombre de Mach n'excède pas  $M=2.00$  avec une erreur de 10% environ. Les erreurs données par les rapports thermodynamiques et des sections, lorsque  $M=1$  peuvent être déterminées par:

$$\varepsilon_{(T^*/T_0)}(M=1) = \left| 1 - \frac{(T^*/T_0)_{GP}}{(T^*/T_0)_{HT}} \right| \times 100 = \begin{cases} 2.438 \% & \text{Pour } T_0=1000 K^\circ \\ 4.175 \% & \text{Pour } T_0=2000 K^\circ \\ 4.764 \% & \text{Pour } T_0=3000 K^\circ \end{cases}$$

$$\varepsilon_{(\rho^*/\rho_0)}(M=1) = \left| 1 - \frac{(\rho^*/\rho_0)_{GP}}{(\rho^*/\rho_0)_{HT}} \right| \times 100 = \begin{cases} 0.786 \% & \text{Pour } T_0=1000 K^\circ \\ 1.117 \% & \text{Pour } T_0=2000 K^\circ \\ 1.226 \% & \text{Pour } T_0=3000 K^\circ \end{cases}$$

$$\varepsilon_{(A/A^*)}(M=1) = \left| 1 - \frac{(A/A^*)_{GP}}{(A/A^*)_{HT}} \right| \times 100 = 0 \% \quad \text{Quelque soit } T_0$$

$$\varepsilon_{(M)}(M=1) = \left| 1 - \frac{M_{GP}}{M_{HT}} \right| \times 100 = 0\%, \text{ quelque soit } T_0.$$



Courbe 1 Erreur du modèle GP comparée au modèle HT lorsque ( $T_0=3000 \text{ K}^\circ$ )  
 Courbe 2 Erreur du modèle GP comparée au modèle HT lorsque ( $T_0=2000 \text{ K}^\circ$ )  
 Courbe 3 Erreur du modèle GP comparée au modèle HT lorsque ( $T_0=1000 \text{ K}^\circ$ )

Figure 5.11 : Variation de l'erreur relative donnée par les paramètres thermodynamiques et géométrique du modèle du gaz parfait en fonction de nombre de Mach  
 (a) : Rapport  $T/T_0$ . (b) : Rapport  $\rho/\rho_0$ . (c) : Rapport  $A/A_*$ . (d) : Nombre de Mach.

## 5.2. Fonction de Prandtl-Meyer

Dans ce paragraphe, on présente quelques résultats sur la fonction de Prandtl Meyer à Haute Température et comparaison avec celle du gaz parfait.

### 5.2.1. Effet de la quadrature sur la convergence du problème

Le tableau 5.8 suivant présente l'effet de la quadrature de Gauss Legendre développée sur la convergence du problème. L'exemple choisi est pour  $T_0=3500 K^\circ$  et  $M_S=6.00$ . Cet exemple demande une quadrature d'ordre élevée par rapport au autre couple  $(T_0, M_S)$  pour même précision voulue (le cas le plus défavorable). Le résultat donné par la quadrature est toujours inférieur à la solution exacte, c'est-à-dire que *la convergence de la solution aura lieu d'une façon monotone*.

Tableau 5.8 : Effet de la quadrature sur la convergence du problème.

$n$	$v(T_0, M_S)$								
1	84.6380267	3	96.9698470	5	97.5501446	7	97.5681767	9	97.5688963
2	95.1501156	4	97.4785587	6	97.5651528	8	97.5687775	10	97.5689187

Le contrôle de fixation des chiffres décimaux exactes conduit à dire que, pour avoir la précision  $\varepsilon=10^{-6}$ , on a besoin de la quadrature d'ordre 15 pour avoir le résultat. Alors, quelque soit le couple  $(T_0, M_S)$ , on peut utiliser la quadrature d'ordre  $n=15$  au maximum pour avoir la même précision  $\varepsilon$ . A titre information, pour avoir une précision  $\varepsilon=10^{-6}$  pour le même exemple, les quadratures de trapèze et de Simpson à pas constant demande un nombre de points *minimum* présenté dans le tableau 5.9 suivant:

Tableau 5.9 : Efficacité des quadratures sur le résultat pour une précision  $\varepsilon=10^{-6}$ .

Quadrature	Trapèze	Simpson	Notre Quadrature de Gauss Legendre
Minimum Nombre de points pour avoir une précision $\varepsilon=10^{-6}$	490977	78954	15

On peut avoir la même précision  $\varepsilon$  en utilisant la quadrature de trapèze ou Simpson avec un nombre de points inférieure à celui indiqué dans le tableau 5.9, si on utilise la condensation des nœuds vers les deux extrémités de l'intervalle d'intégration  $[T_S, T^*]$  comme présente la référence [21], Dans ce cas, *la quadrature de Simpson demande 2656 points*, et la quadrature de trapèze avec pas variable demande 34534 points. On peut même obtenir des valeurs inférieures à celles indiquées, si on choisi d'autres paramètres de la fonction de condensation (1.42) du chapitre 1.

### 5.2.2. Effet de la température génératrice sur la variation de la fonction de Prandtl Meyer

La figure 5.12 présente la variation de la fonction de Prandtl-Meyer en fonction du nombre de Mach dans l'intervalle  $[M=1.00, M=6.00]$ , pour quelques valeurs de  $T_0$ , y compris le cas du gaz parfait à  $\gamma=1.402$ , illustré par la partie (a), ainsi que la variation de la fonction  $v$  en fonction de la température génératrice lorsque  $M=3.00$ , illustrée sur la partie (b) de la figure 5.12.

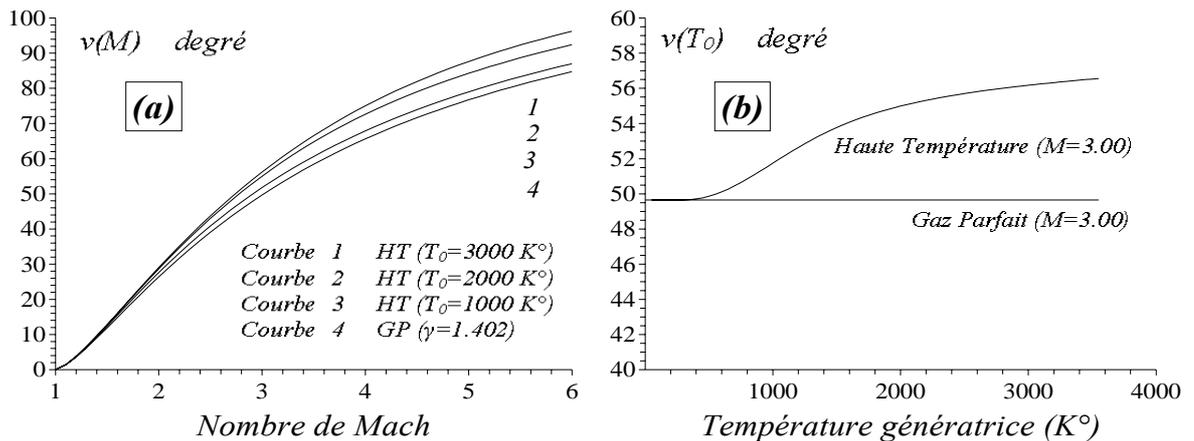


Figure 5.12 : Variation de la fonction de Prandtl Meyer à Haute Température.  
(a): en fonction du nombre de Mach. (b): en fonction de la température  $T_0$  pour  $M=3.00$ .

On remarque clairement que si on prend en considération, la variation de  $C_P(T)$  et de  $\gamma(T)$ , la température génératrice  $T_0$  influe sur la grandeur de cette fonction. A titre information, les valeurs numériques trouvées pour quelques valeurs du nombre de Mach et de  $T_0$  sont présentées dans le tableau 5.10. On remarque encore qu'à basse température, le gaz peut être considéré comme calorifiquement parfait et cela jusqu'à environ  $240\text{ K}$  avec une erreur  $\varepsilon=0\%$ . Plus  $T_0$  augmente, la valeur de  $v$  augmente considérablement et s'éloigne du modèle *GP*, d'où, la nécessité d'utiliser le modèle *HT* pour corriger les résultats, puisque réellement les valeurs de  $C_P$  et  $\gamma$  varient avec la température.

Tableau 5.10 : Valeurs numériques de la fonction de Prandtl Meyer à Haute Température.

$v$ (degré)	<b>GP (<math>\gamma=1.402</math>)</b>	$T_0=1000\text{ K}$	$T_0=2000\text{ K}$	$T_0=3000\text{ K}$
$M_S=1.1$	<b>1.33497</b>	1.38125	1.40420	1.41155
$M_S=1.2$	<b>3.55468</b>	3.68650	3.75520	3.77743
$M_S=1.3$	<b>6.16362</b>	6.40570	6.53876	6.58243
$M_S=1.4$	<b>8.97660</b>	9.34654	9.56180	9.63358
$M_S=1.5$	<b>11.89047</b>	12.40030	12.71539	12.82210
$M_S=1.6$	<b>14.84083</b>	15.49772	15.93017	16.07851
$M_S=1.7$	<b>17.78520</b>	18.59204	19.15918	19.35546
$M_S=1.8$	<b>20.69483</b>	21.65082	22.36950	22.61936
$M_S=1.9$	<b>23.55010</b>	24.65132	25.53762	25.84584
$M_S=2.0$	<b>26.33770</b>	27.57774	28.64657	29.01706

$M_S=2.1$	<b>29.04884</b>	30.41939	31.68409	32.12006
$M_S=2.2$	<b>31.67794</b>	33.16941	34.64136	35.14560
$M_S=2.3$	<b>34.22184</b>	35.82381	37.51215	38.08736
$M_S=2.4$	<b>36.67913</b>	38.38087	40.29222	40.94130
$M_S=2.5$	<b>39.04969</b>	40.84047	42.97886	43.70520
$M_S=2.6$	<b>41.33438</b>	43.20380	45.57055	46.37816
$M_S=2.7$	<b>43.53473</b>	45.47292	48.06680	48.96034
$M_S=2.8$	<b>45.65277</b>	47.65053	50.67902	51.45259
$M_S=2.9$	<b>47.69088</b>	49.73981	52.77483	53.85627
$M_S=3.0$	<b>49.65169</b>	51.74417	54.98912	56.17309
$M_S=3.1$	<b>51.53795</b>	53.66719	57.11282	58.40494
$M_S=3.2$	<b>53.35251</b>	55.51250	59.14833	60.55387
$M_S=3.3$	<b>55.09823</b>	57.28372	61.09839	62.62198
$M_S=3.4$	<b>56.77796</b>	58.9840	62.96600	64.61144
$M_S=3.5$	<b>58.39451</b>	60.61797	64.75435	66.52443
$M_S=3.6$	<b>59.95064</b>	62.18777	66.46673	68.36318
$M_S=3.7$	<b>61.44901</b>	63.69697	68.10653	70.12995
$M_S=3.8$	<b>62.89221</b>	65.14862	69.67714	71.82702
$M_S=3.9$	<b>64.28273</b>	66.54558	71.18197	73.45671
$M_S=4.0$	<b>65.62296</b>	67.89059	72.62432	75.02138
$M_S=4.1$	<b>66.91519</b>	69.18583	74.00745	76.52340
$M_S=4.2$	<b>68.16160</b>	70.43212	75.33448	77.96518
$M_S=4.3$	<b>69.36428</b>	71.63442	76.60842	79.34913
$M_S=4.4$	<b>70.52523</b>	72.79547	77.83216	80.67767
$M_S=4.5$	<b>71.64632</b>	73.91645	79.00842	81.95320
$M_S=4.6$	<b>72.72938</b>	74.99913	80.13978	83.17809
$M_S=4.7$	<b>73.77609</b>	76.04527	81.22869	84.35470
$M_S=4.8$	<b>74.78810</b>	77.05753	82.27743	85.48530
$M_S=4.9$	<b>75.76694</b>	78.03655	83.28817	86.57214
$M_S=5.0$	<b>76.71408</b>	78.98367	84.26292	87.61738
$M_S=5.1$	<b>77.63090</b>	79.90032	85.20358	88.62309
$M_S=5.2$	<b>78.51873</b>	80.78785	86.11192	89.59128
$M_S=5.3$	<b>79.37881</b>	81.64753	86.98959	90.52388
$M_S=5.4$	<b>80.21234</b>	82.48058	87.83814	91.42269
$M_S=5.5$	<b>81.02044</b>	83.28815	88.65903	92.28946
$M_S=5.6$	<b>81.80418</b>	84.07180	89.45360	93.12583
$M_S=5.7$	<b>82.56458</b>	84.83256	90.22312	93.93336
$M_S=5.8$	<b>83.30259</b>	85.57082	90.96879	94.71352
$M_S=5.9$	<b>84.01915</b>	86.28754	91.69171	95.46769
$M_S=6.0$	<b>84.71511</b>	86.98356	92.39293	96.19717

Les résultats présentés sur le tableau 5.11 concerne les valeurs du nombre de Mach nécessaire pour avoir une valeur connue de la fonction de Prandtl Meyer, pour différente valeurs de  $T_0$ . Ce problème est connu par problème inverse, présenté dans les paragraphes 2.2.2 et 2.3.2 du chapitre 2. On rencontre se problème lors du calcul par exemple l'écoulement supersonique autour du profil aile pointu, ou au centre de détente d'une tuyère à détente centrée traité dans le chapitre 3. On note que la valeur de  $v_S$  présentée dans les équations (2.12) et (2.30) du chapitre 2 doit être donnée en radian et non en degré. Alors, *il faut convertir les valeurs de  $v$  du tableau 5.11 en radian.*

Les résultats concernant le centre de détente d'une tuyère supersonique présentée dans le paragraphe 2.4.2 du chapitre 2 sont présentés dans les paragraphes 5.3 et 5.5 prochains spécialement pour la tuyère à détente centrée  $2D$  et axisymétrique respectivement.

Tableau 5.11 : Valeurs du nombre de Mach lorsque la fonction de Prandtl Meyer est connue (problème inverse).

$M$	$GP (\gamma=1.402)$	$T_0=1000 K^\circ$	$T_0=2000 K^\circ$	$T_0=3000 K^\circ$
$v(^{\circ})=10$	<b>1.43538</b>	1.42161	1.41408	1.41166
$v(^{\circ})=20$	<b>1.77597</b>	1.74583	1.72610	1.71968
$v(^{\circ})=30$	<b>2.13581</b>	2.08504	2.04424	2.03142
$v(^{\circ})=40$	<b>2.54114</b>	2.46538	2.38933	2.36667
$v(^{\circ})=50$	<b>3.01817</b>	2.91274	2.78020	2.74128
$v(^{\circ})=60$	<b>3.60323</b>	3.46169	3.24314	3.17385
$v(^{\circ})=70$	<b>4.35432</b>	4.16491	3.82109	3.69250
$v(^{\circ})=80$	<b>5.37422</b>	5.11107	4.58743	4.34848
$v(^{\circ})=90$	<b>6.86730</b>	6.46966	5.67067	5.24336
$v(^{\circ})=100$	<b>9.30933</b>	8.62710	7.31950	6.58002

### 5.2.3. Erreur de la fonction de Prandtl Meyer du modèle du gaz parfait

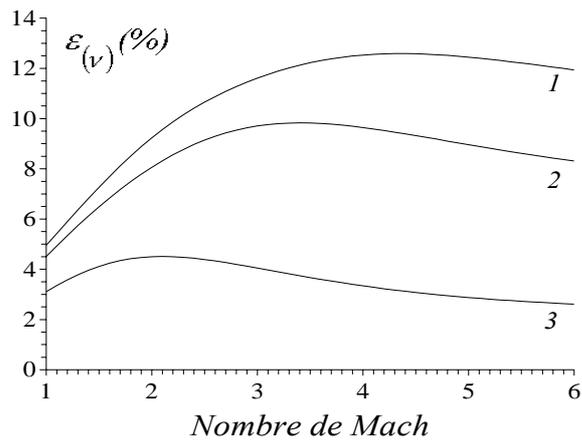
La figure 5.13 présente l'erreur donnée par la fonction de Prandtl Meyer du modèle  $GP$  par rapport à notre modèle  $HT$  pour différente valeur de  $T_0$ . Il est clair que l'erreur varie en fonction de  $T_0$  et  $M$ . Par exemple, si  $T_0=2000 K^\circ$  et  $M=3.00$ , l'erreur donnée par le modèle  $GP$  est égale  $\varepsilon=9.70 \%$ .

Malgré à basse température, les résultats numériques démontrent qu'il y a une différence en valeurs. A titre information, lorsque  $T_0=298.15 K^\circ$  ( $25 C^\circ$ ) et  $M=1.1$ , la valeur de la fonction de Prandtl Meyer  $v=1.33579$ . En comparons cette valeur avec celle du gaz parfait, on trouve une erreur  $\varepsilon=0.06 \%$ .

Vu que la fonction de Prandtl Meyer est égale à zéro lorsque  $M=1$  pour les deux modèles, le calcul de l'erreur par ordinateur pose un problème puisque on obtient une division par zéro. La valeur de l'erreur calculée en ce point ( $M=1$ ) est donnée par:

$$\varepsilon_v(M=1) = \lim_{M \rightarrow 1 (T \rightarrow T^*)} \left| 1 - \frac{v_{GP}(M)}{v_{HT}(T)} \right| \times 100 = \left| 1 - \frac{0}{0} \right| \times 100 = \begin{cases} 3.104 \% \text{ lorsque } T_0=1000 K^\circ \\ 4.510 \% \text{ lorsque } T_0=2000 K^\circ \\ 4.949 \% \text{ lorsque } T_0=3000 K^\circ \end{cases} \quad (5.1)$$

Dans la relation (5.1), on a rapproché le calcul de la limite à la valeur  $M=1+10^{-6}$  pour éviter le calcul analytique de la valeur de la limite (enlèvement de l'indétermination). Ces valeurs représentent l'intersection des courbes 1, 2 et 3 de la figure 5.13 avec l'axe verticale des erreurs.



- Courbe 1 Erreur du modèle GP comparée au modèle HT lorsque ( $T_0=3000\text{ K}^\circ$ )  
 Courbe 2 Erreur du modèle GP comparée au modèle HT lorsque ( $T_0=2000\text{ K}^\circ$ )  
 Courbe 3 Erreur du modèle GP comparée au modèle HT lorsque ( $T_0=1000\text{ K}^\circ$ )

Figure 5.13 : Variation de l'erreur donnée par la fonction  $v$  d'un gaz parfait par rapport à notre modèle en fonction du nombre de Mach

### 5.3. Résultats sur la tuyère à détente centrée bi-dimensionnelle (2D MLN)

Dans cette partie du chapitre des résultats, on présente les divers résultats obtenus sur la tuyère à détente centrée bidimensionnelle.

#### 5.3.1 Maillages en caractéristiques

Dans les figures 5.14, 5.15 et 5.16, on a présenté des maillages en caractéristiques dans une tuyère à détente centrée avec et sans effet de condensation. Dans ces figures, on a pris l'exemple avec  $T_0=2000 K^\circ$ ,  $M_S=3.00$  qui donne  $\theta^*=27.49$  degré. Le but de ces figures c'est de présenter les différents cas possibles de maillage et leurs effets sur les résultats numériques de dimensionnement et de conception. Chaque figure contient quatre présentation pour différentes données.

Sur la figure 5.14, on a raffiner la zone de Kernel en choisissant plusieurs pas de déviation du vecteur vitesse au centre de détente sans effet de condensation. L'augmentation du pas  $\Delta\theta$  conduit à déterminer les résultats de la conception et de dimensionnement avec une précision élevée. Les résultats numériques obtenus sur le raffinement du maillage dans cette région sont présentés pour quelques valeurs de  $\Delta\theta$  dans le tableau 5.12. Pour avoir, par exemple, une précision  $\varepsilon=10^{-4}$ , il nous faut environ  $\Delta\theta=0.007$  degré, qui donne environ 4000 points sur la dernière  $C$   $AB$ . Le nombre de points trouvés sur la dernière  $C$  dans la région de Kernel, qui représente aussi le nombre de points sur la paroi de la tuyère est présenté dans les tableaux 5.14 et 5.15.

Le nombre de point  $N_C$  à trouvé sur la dernière  $C$  dépend des paramètres suivants :

$$N_C=f(M_S, T_0, \Delta\theta, N_i, \Delta) \quad (5.2)$$

Sur cette figure, on remarque clairement que la paroi de la tuyère est mal présentée au voisinage du col, ainsi qu'un espace large entre la ligne sonique et la première  $C$  régulière, malgré le pas  $\Delta\theta$  est très petit. Mais la distance diminue si  $\Delta\theta$  diminue.

La figure 5.15 représente quelques maillages obtenus si on utilise l'insertion progressive des caractéristiques supplémentaires dans la région de Kernel entre la ligne sonique et la première  $C$  régulière. On remarque que malgré le pas  $\Delta\theta$  est grand, la paroi au voisinage du col est bien présentée. La distance entre la ligne sonique et la 1<sup>ère</sup>  $C$  régulière est diminuée.

Sur la figure 5.16, on a pris des exemples en changeant le coefficient  $\Delta$  de la formule (3.50) sur la forme du maillage et en particulier sur la paroi de la tuyère au voisinage du

col. Il est clair que si on prend un coefficient élevé,  $\Delta=8$  par exemple, la tuyère sera très bien présentée au voisinage du col. Les valeurs numériques de dimensionnement et de conception sont présentées dans le tableau 5.13. Les tuyères dans les quatre exemples sont présentées par le même nombre de points sauf la disposition des points qui influe sur la conception de la tuyère.

On remarque qu'il est très intéressant de raffiner le maillage sur la paroi au voisinage du col, par ce que la nature d'un écoulement supersonique détermine les propriétés en un point en fonction de deux points qui se trouvent en amont, voir figure 3.3 du chapitre 3. Alors, une mauvaise présentation de la paroi au col va propager et agrandir les erreurs à la sortie, et par conséquent, on va déterminer une mauvaise allure de la paroi. Le control des résultats se fait par l'utilisation du rapport des sections qui reste toujours valable puisque l'écoulement à la sortie de la tuyère est uniforme et parallèle.

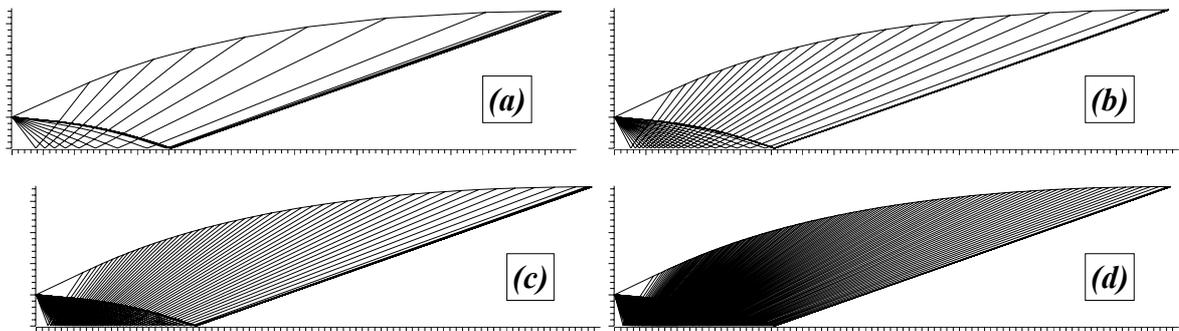


Figure 5.14 : Raffinement du maillage dans la zone de Kernel de la tuyère *MLN 2D* sans insertion des caractéristiques supplémentaire

(a) : Zone de Kernel gros avec  $\Delta\theta=3.0$ . (b) : Zone de Kernel modéré avec  $\Delta\theta=1.2$ .  
(c) : Zone de Kernel assez fin avec  $\Delta\theta=0.50$ . (d) : Zone de Kernel fin avec  $\Delta\theta=0.20$ .

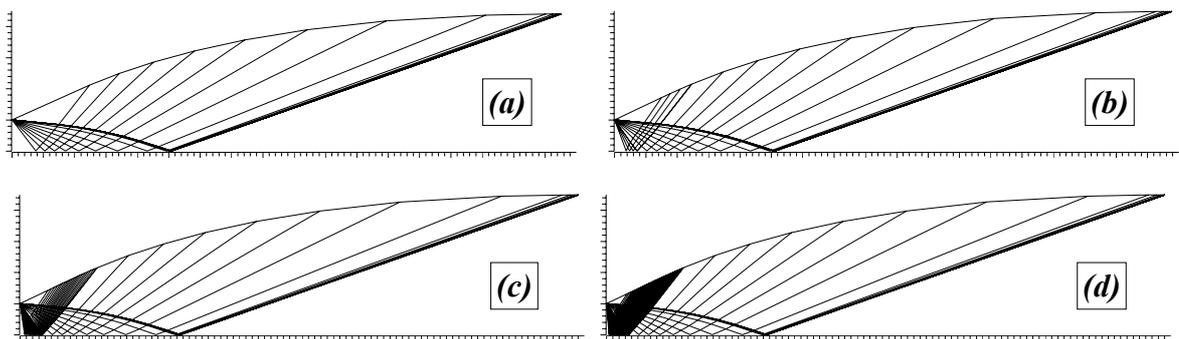


Figure 5.15 : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère *MLN 2D* avec  $\Delta=2.00$  et  $\Delta\theta=3.0$ .

(a) : Sans insertion  $N_i=0$ . (b) : Insertion avec  $N_i=5$ . (c) : Insertion avec  $N_i=20$ . (d) : Insertion avec  $N_i=50$ .

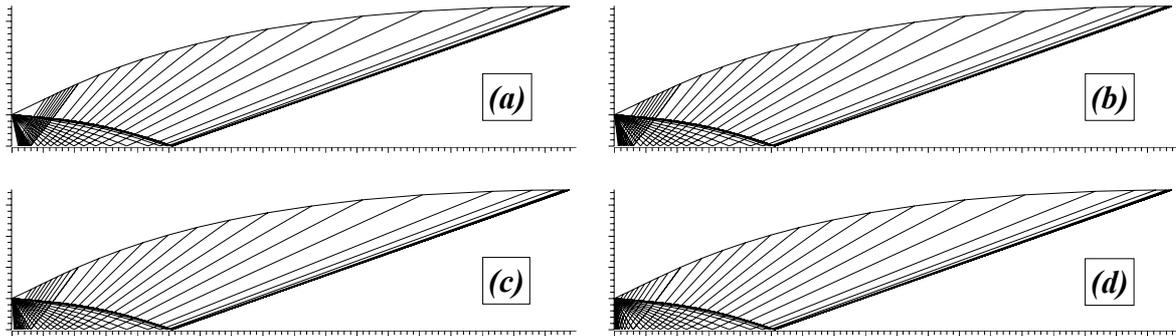


Figure 5.16 : Effet du coefficient  $\Delta$  sur la qualité du maillage en caractéristique d'une tuyère *MLN 2D* avec  $\Delta\theta=2.0$  degré et  $N_i=10$ .

(a) :  $\Delta=2$ . (b) :  $\Delta=3$ . (c) :  $\Delta=4$ . (d) :  $\Delta=7$ .

Tableau 5.12 : Effet de raffinement de la zone de Kernel sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère *MLN 2D* pour  $T_0=2000 K^\circ$ ,  $M_S=3.00$  et  $N_i=0$ .

$\Delta\theta$ (°)	$N_C$	$\frac{y_S}{y^*}$	$\theta^*$ (°)	$M^*$	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\mathcal{E}$ (%)
2.0	24	4.94732	27.49444	1.96269	5.55708	19.54997	20.17139	0.34055	0.982
1.0	38	4.97437	27.49456	1.96269	5.56905	19.63872	20.26901	0.34573	0.431
0.7	46	4.98197	27.49456	1.96269	5.57211	19.66326	20.29593	0.34715	0.278
0.5	65	4.98670	27.49456	1.96269	5.57395	19.67848	20.31259	0.34804	0.182
0.3	97	4.99107	27.49460	1.96269	5.57560	19.69252	20.32794	0.34884	0.095
0.1	281	4.99470	27.49462	1.96269	5.57692	19.70411	20.34059	0.34949	0.022
0.07	400	4.99521	27.49461	1.96269	5.57706	19.70545	20.34205	0.34957	0.013
0.05	555	4.99539	27.49462	1.96269	5.57716	19.70629	20.34296	0.34962	$8.6 \cdot 10^{-3}$
0.03	923	4.99559	27.49458	1.96269	5.57722	19.70691	20.34365	0.34966	$4.4 \cdot 10^{-3}$
0.01	2755	4.99578	27.49460	1.96269	5.57729	19.70753	20.34432	0.34969	$6.5 \cdot 10^{-4}$
0.007	3933	4.99579	27.49457	1.96269	5.57727	19.70753	20.34432	0.34969	$5.3 \cdot 10^{-4}$
0.005	5504	4.99582	27.49460	1.96269	5.57730	19.70764	20.34443	0.34970	$2.5 \cdot 10^{-6}$

Tableau 5.13 : Effet du coefficient  $\Delta$  sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère *MLN 2D* pour  $T_0=2000K^\circ$ ,  $M_S=3.00$ ,  $\Delta\theta=0.05$  (°),  $\Delta x=0.01$  et  $N_i=10$ .

$\Delta$	$N_C$	$\frac{y_S}{y^*}$	$\theta^*$ (°)	$M^*$	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\mathcal{E}$ (%)
1	564	4.99539	27.49462	1.96269	5.57716	19.70629	20.34296	0.34962	$8.6 \cdot 10^{-3}$
2	564	4.99579	27.49462	1.96269	5.57729	19.70755	20.34434	0.34969	$6.2 \cdot 10^{-4}$
5	564	4.99584	27.49462	1.96269	5.57731	19.70771	20.34451	0.34970	$3.9 \cdot 10^{-4}$
8	564	4.99583	27.49462	1.96269	5.57731	19.70770	20.34450	0.34970	$3.2 \cdot 10^{-4}$

Tableau 5.14 : Effet du nombre de Mach de sortie sur le nombre de points obtenus sur la dernière  $C^*$  de la zone de Kernel de la tuyère *MLN 2D* lorsque  $T_0=2000 K^\circ$  sans effet de condensation.

$N_C$	$M_S=1.50$	$M_S=2.00$	$M_S=3.00$	$M_S=4.00$	$M_S=5.00$	$M_S=6.00$
$\Delta\theta=2.0^\circ$	13	15	24	30	27	31
$\Delta\theta=1.0^\circ$	15	22	38	48	49	54
$\Delta\theta=0.7^\circ$	16	30	46	64	65	79
$\Delta\theta=0.5^\circ$	21	35	65	83	91	99
$\Delta\theta=0.3^\circ$	27	56	97	128	146	165
$\Delta\theta=0.1^\circ$	70	151	281	371	426	473

$\Delta\theta=0.07^\circ$	97	211	400	528	608	667
$\Delta\theta=0.05^\circ$	133	294	555	734	847	934
$\Delta\theta=0.03^\circ$	218	483	923	1218	1411	1547
$\Delta\theta=0.01^\circ$	741	1437	2755	3638	4218	4626

Tableau 5.15 : Effet de la température  $T_0$  sur le nombre de points obtenus sur la dernière  $C$  de la zone de Kernel de la tuyère  $MLN$  2D lorsque  $M_S=3.00$  sans effet de condensation.

$N_c$	$GP$ ( $\gamma=1.402$ )	$T_0=1000\text{ K}^\circ$	$T_0=2000\text{ K}^\circ$	$T_0=3000\text{ K}^\circ$
$\Delta\theta=2.0^\circ$	17	24	24	22
$\Delta\theta=1.0^\circ$	28	37	38	35
$\Delta\theta=0.7^\circ$	38	46	46	49
$\Delta\theta=0.5^\circ$	50	63	65	63
$\Delta\theta=0.3^\circ$	80	94	97	102
$\Delta\theta=0.1^\circ$	228	265	281	298
$\Delta\theta=0.07^\circ$	320	377	400	408
$\Delta\theta=0.05^\circ$	448	523	555	569
$\Delta\theta=0.03^\circ$	741	869	923	944
$\Delta\theta=0.01^\circ$	2207	2592	2755	2814

### 5.3.2. Effet de la température $T_0$ du l'allure de la paroi

La figure 5.17 présente l'allure des tuyères obtenues lorsque le nombre de Mach  $M_S=1.50$ . Les valeurs numériques des paramètres du dimensionnement sont présentées dans le tableau 5.16. D'après les formes obtenues et les résultats numériques, on remarque une très petite différence entre les quatre courbes, qui s'interprète par le non influence en sens de vision de la température  $T_0$  sur le dimensionnement des tuyères lorsque  $M_S=1.50$ .

La figure 5.18 présente l'allure des tuyères obtenues lorsque le nombre de Mach  $M_S=2.00$ . Les valeurs numériques des paramètres du dimensionnement sont présentées dans le tableau 5.17. D'après les formes obtenues et les résultats numériques, on remarque que la différence est toujours petite, mais avec une erreur grande par rapport au cas de la figure 5.17. Ici on parle de l'erreur en sens de l'écart entre les quatre courbes de chaque figure. L'étude sur l'erreur donnée par le modèle  $HT$  par rapport au modèle  $GP$  sera présentée dans le paragraphe 5.3.5 prochain.

En augmentant le nombre de Mach de sortie pour les valeurs  $M_S=3.00$ ,  $4.00$ ,  $5.00$  et  $6.00$  et pour chaque nombre de Mach on fait le traçage des formes des tuyères obtenues à haute température y compris le cas du gaz parfait, présentés respectivement sur les figures 5.19, 5.20, 5.21 et 5.22. Les valeurs numériques du dimensionnement pour chaque figure sont présentées respectivement dans les tableaux 5.18, 5.19, 5.20 et 5.21.

Entre les figures présentées, on peut dire que si la température génératrice  $T_0$  augmente, l'écart entre le modèle  $GP$  et notre modèle  $HT$  agrandie et devient considérable si  $T_0 > 1000$

$K^\circ$  environ, indépendamment au nombre de Mach  $M_S$ , ou à partir du  $M_S > 2.00$  pour n'importe quelle température  $T_0$ . Cette limite peut être trouvée si on opte une erreur  $\varepsilon$  inférieure à 5%.

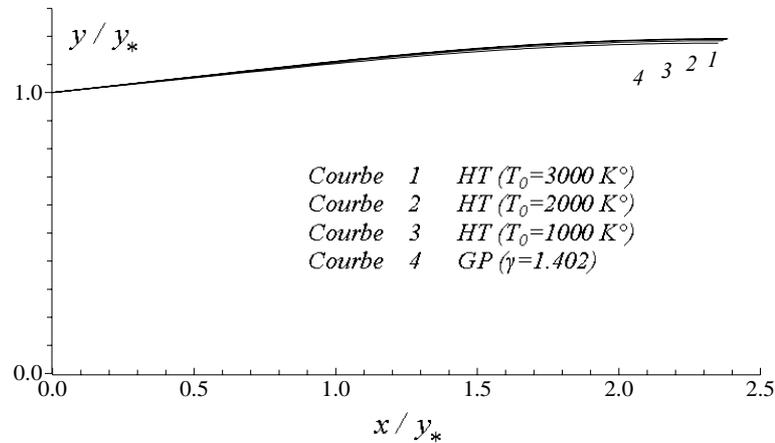


Figure 5.17 : Formes des tuyères MLN 2D donnant à la sortie  $M_S=1.50$ .

Tableau 5.16 : Résultats numériques de conception des tuyères de la figure 5.17

	$\frac{L_d}{y_*}$	$\frac{L}{y_*}$	$\theta^*$ (degré)	$M^*$	$\frac{y_S}{y_*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
<b>GP (<math>\gamma=1.402</math>)</b>	<b>1.0365</b>	<b>2.3512</b>	<b>5.9453</b>	<b>1.2919</b>	<b>1.1759</b>	<b>2.3591</b>	<b>0.0616</b>
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	<b>1.0453</b>	<b>2.3695</b>	<b>6.2001</b>	<b>1.2927</b>	<b>1.1843</b>	<b>2.3781</b>	<b>0.0655</b>
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	<b>1.0517</b>	<b>2.3820</b>	<b>6.3578</b>	<b>1.2938</b>	<b>1.1898</b>	<b>2.3910</b>	<b>0.0687</b>
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	<b>1.0539</b>	<b>2.3862</b>	<b>6.4110</b>	<b>1.2941</b>	<b>1.1916</b>	<b>2.3954</b>	<b>0.0699</b>

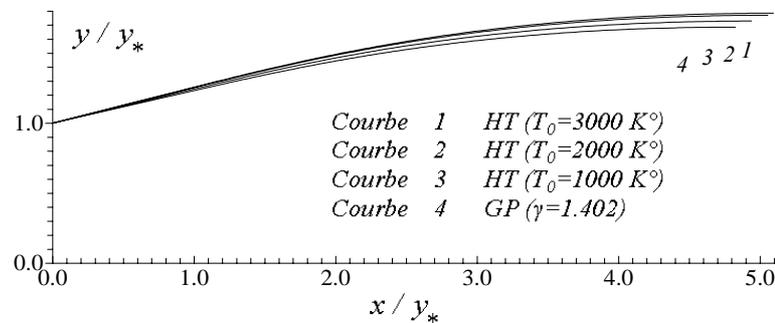


Figure 5.18 : Formes des tuyères MLN 2D donnant à la sortie  $M_S=2.00$ .

Tableau 5.17 : Résultats numériques de conception des tuyères de la figure 5.18

	$\frac{L_d}{y_*}$	$\frac{L}{y_*}$	$\theta^*$ (degré)	$M^*$	$\frac{y_S}{y_*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
<b>GP (<math>\gamma=1.402</math>)</b>	<b>1.9063</b>	<b>4.8265</b>	<b>13.1688</b>	<b>1.5433</b>	<b>1.6859</b>	<b>4.8897</b>	<b>0.1551</b>
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	<b>1.9450</b>	<b>4.9407</b>	<b>13.7917</b>	<b>1.5449</b>	<b>1.7295</b>	<b>5.0108</b>	<b>0.1656</b>
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	<b>1.9866</b>	<b>5.0543</b>	<b>14.3271</b>	<b>1.5500</b>	<b>1.7711</b>	<b>5.1311</b>	<b>0.1773</b>
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	<b>2.0006</b>	<b>5.0926</b>	<b>14.5035</b>	<b>1.5517</b>	<b>1.7851</b>	<b>5.1716</b>	<b>0.1816</b>

Avant le remplissage les valeurs des tableaux 5.16 à 5.21, on a fait une étude sur la discrétisation de la paroi en variant et en augmentant les nombre  $N$ ,  $N_i$  et  $\delta$  et chaque fois

on détermine les paramètres de dimensionnement, et on calcule l'erreur relative donnée par le rayon de sortie non-dimensionnel en utilisant la relation (5.3) jusqu'à satisfaire une précision de  $10^{-4}$ .

$$\varepsilon_{(y_S/y_*)}\% = \left| 1 - (y_S/y_*)_{\text{Calculé}} / (y_S/y_*)_{\text{Théorique}} \right| \times 100 \quad (5.3)$$

Le rapport  $y_S/y_*$  calculé et théorique sont déterminés respectivement par les relations (3.59) et (3.60) du chapitre 3.

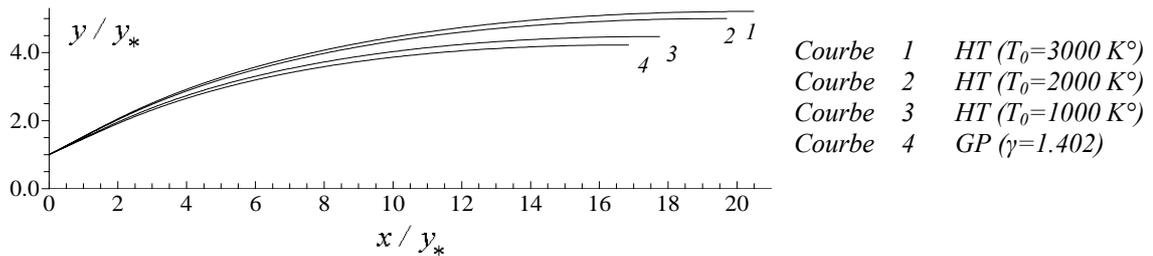


Figure 5.19 : Formes des tuyères *MLN 2D* donnant à la sortie  $M_S=3.00$ .

Tableau 5.18 : Résultats numériques de conception des tuyères de la figure 5.19

	$\frac{L_d}{y_*}$	$\frac{L}{y_*}$	$\theta^*$ (degré)	$M^*$	$\frac{y_S}{y_*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
GP ( $\gamma=1.402$ )	<b>4.9161</b>	<b>16.8521</b>	<b>24.8258</b>	<b>1.9454</b>	<b>4.2200</b>	<b>17.3268</b>	<b>0.2989</b>
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	<b>5.1094</b>	<b>17.7563</b>	<b>25.8721</b>	<b>1.9413</b>	<b>4.4713</b>	<b>18.2844</b>	<b>0.3168</b>
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	<b>5.5772</b>	<b>19.7076</b>	<b>27.4945</b>	<b>1.9626</b>	<b>4.9958</b>	<b>20.3444</b>	<b>0.3497</b>
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	<b>5.7639</b>	<b>20.4916</b>	<b>28.0866</b>	<b>1.9704</b>	<b>5.2069</b>	<b>21.1728</b>	<b>0.3632</b>

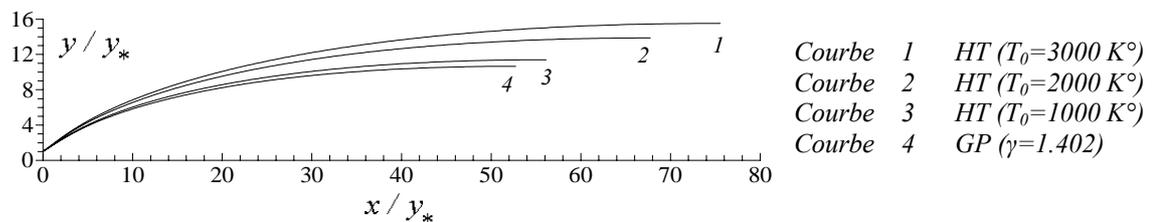


Figure 5.20 : Formes des tuyères à détente centrée *2D* donnant à la sortie  $M_S=4.00$ .

Tableau 5.19 : Résultats numériques de conception des tuyères de la figure 5.20

	$\frac{L_d}{y_*}$	$\frac{L}{y_*}$	$\theta^*$ (degré)	$M^*$	$\frac{y_S}{y_*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
GP ( $\gamma=1.402$ )	11.4808	52.7168	32.8115	2.2441	10.6470	54.2856	0.3825
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	12.0080	56.1263	33.9453	2.2288	11.3912	57.8513	0.4021
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	14.0685	67.7540	36.3121	2.2578	13.8614	69.9740	0.4470
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	15.4791	75.5656	37.5107	2.2801	15.5141	78.1123	0.4707

On a remarqué que la longueur de détente, la longueur de la tuyère, la masse de la structure et la force de pression convergent avant la convergence du rayon de la section de sortie vers la solution exacte. Cette propriété est un avantage afin de contrôler que la

convergence du rayon des sortie. On remarque encore, que les paramètres convergent par une voie décroissante, c'est-à-dire que la solution exacte est toujours inférieure à la solution numérique calculée.

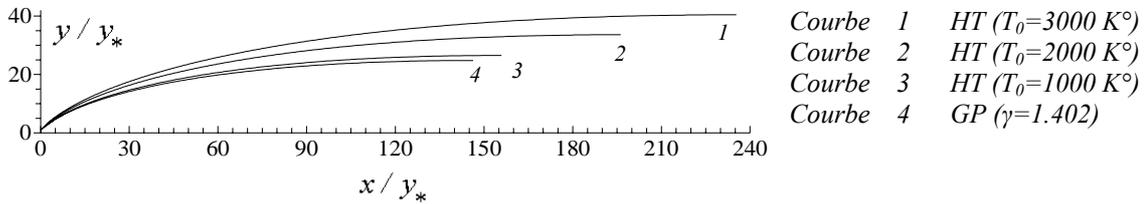


Figure 5.21 : Formes des tuyères *MLN 2D* donnant à la sortie  $M_S=5.00$ .

Tableau 5.20 : Résultats numériques de conception des tuyères de la figure 5.21

	$\frac{L_d}{y_*}$	$\frac{L}{y_*}$	$\theta^*$ (degré)	$M^*$	$\frac{y_S}{y_*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
<i>GP</i> ( $\gamma=1.402$ )	25.0111	146.2574	38.3570	2.4704	24.7491	150.0359	0.4313
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	26.1754	155.9080	39.4916	2.4446	26.4815	160.0195	0.4513
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	31.8326	196.2695	42.1314	2.4680	33.5655	201.6756	0.5004
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	37.4903	235.3698	43.8087	2.5038	40.3917	241.9917	0.5305

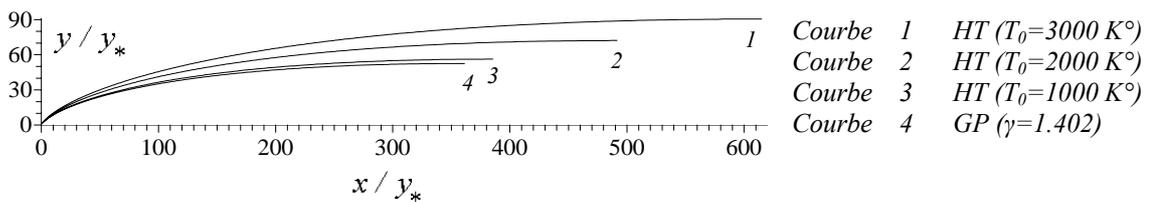


Figure 5.22 : Formes des tuyères *MLN 2D* donnant à la sortie  $M_S=6.00$ .

Tableau 5.21 Résultats numériques de conception des tuyères de la figure 5.22

	$\frac{L_d}{y_*}$	$\frac{L}{y_*}$	$\theta^*$ (degré)	$M^*$	$\frac{A_S}{A_*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
<i>GP</i> ( $\gamma=1.402$ )	50.7601	361.2186	42.3575	2.6460	52.4769	368.8827	0.4613
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	53.1663	385.3171	43.4915	2.6124	56.1435	393.6110	0.4815
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	65.4640	491.5464	46.1964	2.6247	72.0207	502.4555	0.5320
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	80.3347	614.9825	48.0986	2.6662	90.3716	628.8317	0.5648

### 5.3.3. Variation des paramètres à travers la paroi de la tuyère

La figure 5.23 représente la variation des rapports thermodynamiques ( $T/T_0$ ,  $\rho/\rho_0$ ,  $P/P_0$ ) à travers la paroi de la tuyère. Ici on a pris un exemple pour  $M_S=3.00$  de la figure 5.19. On remarque la diminution de ces rapports de ceux correspondants à  $M=1$  du col à ceux correspondants à  $M=M^*$  juste après la détente, ensuite à ceux correspondants à  $M=M_S$  de la section de sortie. Les valeurs numériques des rapports thermodynamiques correspondants à  $M=1$  et à  $M=M_S=3.00$  peuvent être déterminées respectivement à partir des tableaux 5.1 (rapports critiques), 5.2, 5.3 et 5.4 (rapports supersoniques). Le nombre de Mach  $M^*$  et les

rapports thermodynamiques correspondants, sont présentés dans le tableau 5.22. Ces rapports représentent l'intersection des courbes de la figure 5.23 avec l'axe vertical. A titre information la valeur  $M=M^*$  représente encore l'intersection des courbes de la figure 5.24a avec l'axe vertical.

La variation du rapport  $T/T_0$  dans la figure 5.23a nous donne une indication sur le choix convenable du matériau de construction qui va résister à cette température. Ce rapport nous servie encore pour déterminer la condition au limite interne du modèle mathématique du transfert de chaleur à travers le matériau utilisé pour la construction de la tuyère. Au cours de la détente, le gaz va se refroidi, où la température critique est toujours supérieure à la température de la section de sortie. On remarque encore que le gaz parfait indique un refroidissement par rapport au comportement thermodynamique réel, surtout si la température  $T_0$  est élevée. Par exemple si  $T_0=2000 K^\circ$ , on aura une différence de  $72.6 K^\circ$  au col et  $124 K^\circ$  à la sortie. Pour le gaz parfait, les valeurs au col et à la sortie sont  $T^*=1665 K^\circ$ ,  $T_S=1108 K^\circ$  et pour le cas à haute température on a  $T^*=1737 K^\circ$  et  $T_S=1232 K^\circ$ . Il est possible que le matériau choisi fait sur la base du modèle du gaz parfait ne peut résister à la température de notre modèle puisque le gaz se comporte à haute température.

Le rapport  $\rho/\rho_0$  présenté sur la figure 5.23b nous donne une indication sur la quantité du gaz qui va traverser le divergent afin de déterminer la durée du vie du carburent. Encore il servira pour l'obtention du rapport des pressions.

Le rapport  $P/P_0$  présenté sur la figure 5.23c nous servira pour déterminer la force de pression exercée sur la paroi du divergent. Cette figure indique une chute de pression à travers le divergent qui va délivrer une force de pression. Ce rapport servie encore pour faire l'étude sur la distribution du contrainte radiale et tangentielle, pour but d'étudier la résistance du matériau. Le modèle *GP* indique que la force de pression est inférieure à celle donnée par le modèle *HT*, qui est proche du comportement réel de l'écoulement dans la tuyère, voir les valeurs de  $C_{Force}$  dans le tableau 5.18.

La figure 5.24a représente la variation du nombre de Mach à travers la paroi de la tuyère pour différentes valeurs de  $T_0$ , y compris le cas du gaz parfait. On remarque l'augmentation du nombre de Mach de  $M=1$  au col à  $M=M^*$  juste après la détente ensuite à  $M=M_S$  à la sortie de la tuyère. L'exemple pris ici est pour  $M_S=3.00$ . On remarque une portion uniforme à nombre de Mach constant le long de la paroi au voisinage du col quelque soit  $T_0$ , qui s'interprété par l'existence d'une zone d'écoulement presque uniforme dans cette région pour ce type de tuyère. L'augmentation du nombre de Mach à travers la paroi s'interprète par la détente du gaz jusqu'à la section de sortie.

La figure 5.24b représente la variation du nombre de Mach sur l'axe de symétrie pour les mêmes tuyères de la figure 5.24a. On remarque une portion constante des 4 courbes. Cette portion indique la région uniforme  $BS$  de la figure 3.2a du chapitre 3. L'autre portion indique la variation du nombre de Mach dans la région de Kernel  $AB$  jusqu'à nombre de Mach  $M_S=3.00$ . La longueur de la zone de Kernel est différente pour les 4 tuyères. On remarque clairement l'effet de la température  $T_0$  sur l'allure des paramètres.

La figure 5.25 représente la variation de l'angle de déviation de l'écoulement à travers la paroi de la tuyère. On remarque qu'il y a redressement de l'écoulement. L'angle de déviation augmente brusquement de  $\theta=0.0$  à  $\theta=\theta^*$  au centre de détente  $A$ , ensuite diminue à travers la paroi jusqu'à où il devient nul à la section de sortie. L'intersection des courbes avec l'axe vertical correspondant à l'angle de détente initiale  $\theta^*$  et non pour  $\theta=0.0$ . Au col de la tuyère on a une discontinuité du nombre de Mach. Pour les courbes 1, 2, 3 et 4, les valeurs de  $\theta^*$  sont présentées dans le tableau 5.18.

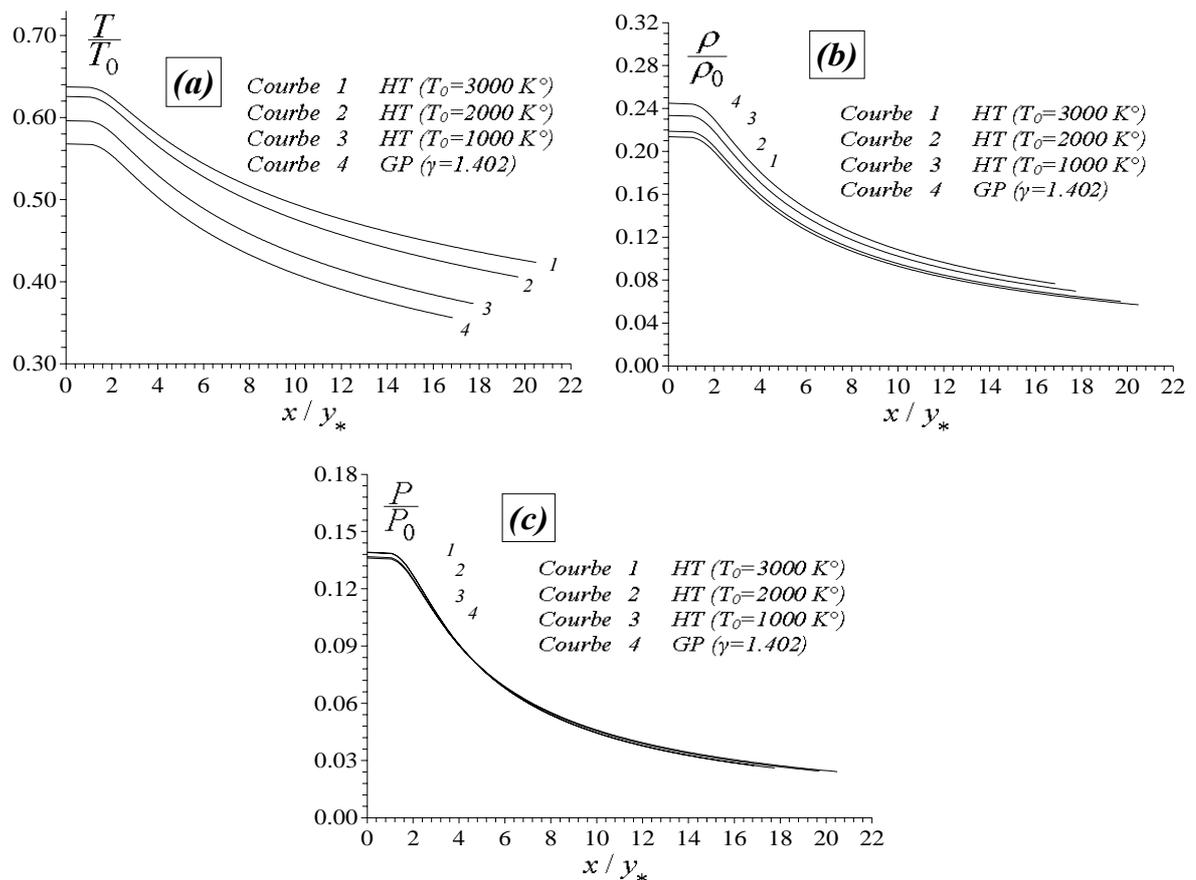


Figure 5.23 : Variation des rapports thermodynamiques le long de la paroi de la tuyère lorsque  $M_S=3.00$ .

(a) : Rapport des Températures. (b) : Rapport des masse volumiques. (c) : Rapport des pressions.

Ici on remarque bien l'influence de la température  $T_0$  sur les paramètres de conception. L'intersection des courbes des figures 5.23, 5.24 et 5.25 avec l'axe vertical correspondant

au valeurs pour  $M=M^*$  et non pour  $M=1.00$ . Autrement dit, elle correspondant à la valeur juste après la détente, puisque la détente est brusque au point A.

Les figures 5.24 et 5.25 démontrent que l'écoulement est 2D. Pour une section donnée, le nombre de Mach diminue avec l'ordonnée  $y$  de la tuyère. Par exemple, pour  $T_0=3000\text{ K}^\circ$  et  $x/y_*=4.00$ , on aura environ  $M=2.65$  sur l'axe horizontal et  $M=2.20$  sur la paroi.

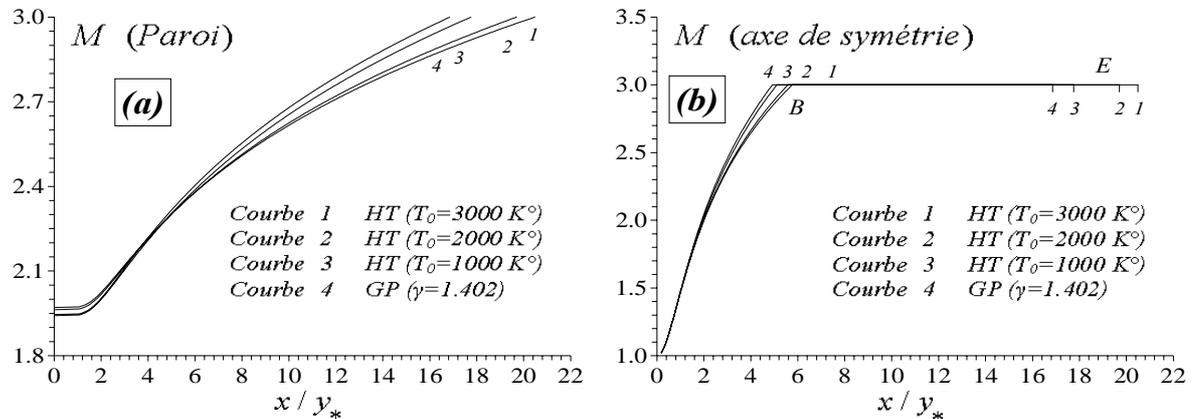


Figure 5.24 : Variation du nombre de Mach dans la tuyère MLN 2D donnant  $M_S=3.00$ .  
(a) : Le long de la paroi de la tuyère. (b) : Le long de l'axe de symétrie.

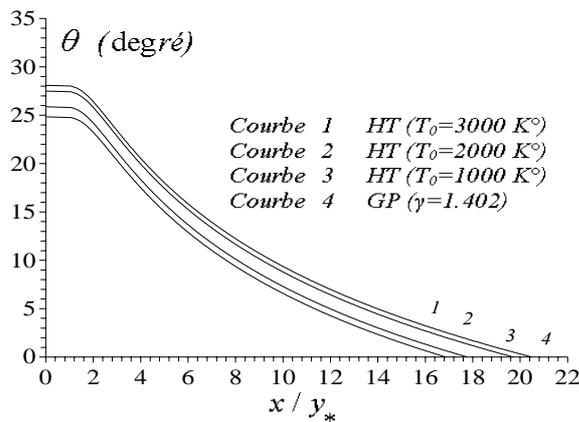


Figure 5.25 : Variation de l'angle de déviation de l'écoulement le long de la paroi de la tuyère MLN 2D lorsque  $M_S=3.00$ .

Tableau 5.22 : Nombre de Mach  $M^*$  et les rapports thermodynamiques correspondants pour la tuyère MLN 2D lorsque  $M_S=3.00$ .

	GP ( $\gamma=1.402$ )	HT ( $T_0=1000\text{ K}^\circ$ )	HT ( $T_0=2000\text{ K}^\circ$ )	HT ( $T_0=3000\text{ K}^\circ$ )
$M^*$	1.9454	1.9413	1.9626	1.9704
$T/T_0$	0.5679	0.5960	0.6255	0.6371
$\rho/\rho_0$	0.2448	0.2335	0.2186	0.2135
$P/P_0$	0.1390	0.1391	0.1367	0.1360

#### 5.3.4. Paramètres de conception

La figure 5.26 présente la variation de l'angle de détente initiale  $\theta^*$  à haute température de la tuyère à détente centrée 2D. Sur la partie (a) de cette figure, on a présenté la variation

du nombre de Mach  $M_S$  de sortie et sur la figure 5.26b, on présenté la variation de  $\theta^*$  en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ , pour but d'illustrer clairement l'effet de la température  $T_0$  sur l'angle de détente initiale. Donc plus  $T_0$  augmente, plus il y a ouverture de la paroi au col. Les courbes sur la figure 5.26a sont presque confondues jusqu'à environ  $M_S=2.00$ , ensuite commencent à différencier. Entre les courbes 4 et 3, on peut remarquer une petite différence entre les valeurs d'un gaz parfait et notre modèle *HT*. Pour voir la différence en valeurs numériques, on peut se référer aux valeurs des tableaux 5.16 à 5.21 concernant la grandeur de l'angle  $\theta^*$ . Sur la figure 5.26b, on a présenté une ligne droite horizontale concernant le gaz parfait pour prouver que ce modèle ne tient pas compte de  $T_0$ . Les deux courbes se confondent jusqu'à la température  $T_0=240\text{ K}^\circ$ .

Sur la figure 5.27a, on a présenté la variation à Haute Température du nombre de Mach  $M^*$  au point *A* du col en fonction de  $M_S$  de la tuyère, et la figure 5.27b représente la variation de  $M^*$  en fonction du changement de  $T_0$  de la chambre de combustion pour une tuyère délivrant même nombre de Mach de sortie (Ici  $M_S=3.00$ ). Alors, la figure 5.27a démontre qu'il y a une détente brusque centrée au point *A*, qui augmente le nombre de Mach de  $M=1$  à  $M=M^*$ . Si  $T_0$  augmente, la portion de redressent du gaz à travers la paroi diminue pour même nombre de Mach de sortie, vu que l'intervalle  $[M^*, M_S]$  diminue si  $T_0$  augmente. La figure 5.27b démontre que le modèle *GP* ne dépend pas de  $T_0$ , et que  $M^*$  dépend essentiellement de  $T_0$  pour notre modèle *HT*, qui influe sur la conception de la tuyère. On remarque une portion de superposition des deux modèles jusqu'à la température  $T_0=240\text{ K}^\circ$ . La variation ondulée de  $M^*$  avec  $T_0$  existe pour n'importe quelles valeur de  $M_S$ . On a fait des calculs, où on a changé  $M_S$ , et chaque fois on a tracé le même graphe que la figure 5.27b, et on a trouvé la même variation ondulée. Ce qui nous intéresse de cette variation est que  $M^*$  tiens compte de la variation de  $T_0$ .

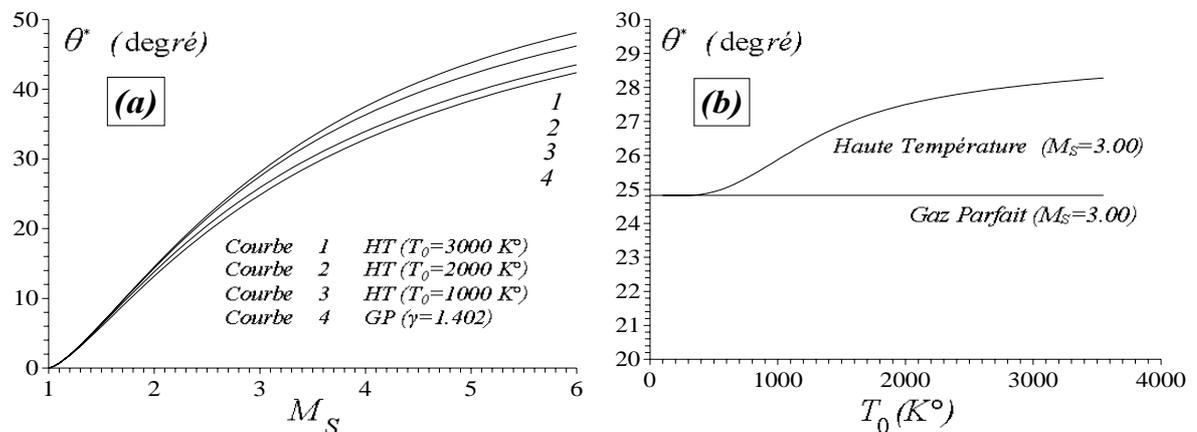


Figure 5.26 : Variation de l'angle  $\theta^*$  du col pour la tuyère à détente centrée 2D.  
 (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

La figure 5.28a présente la variation de la longueur de Kernel en fonction de  $M_S$ . Ici, plus la tuyère délivre un nombre de Mach de sortie élevé, plus la longueur de la zone de Kernel devient élevée. Le but de la présentation de cette variation est que, à partir de la longueur de cette zone, on peut déduire la longueur de la tuyère directement sans faire le calcul de l'écoulement dans la zone de transition. Toujours on remarque que les quatre courbes se confondent à faible nombre de Mach jusqu'à environ  $M_S=2.00$ . A partir de cette valeur, les quatre courbes commencent à différencier, et entre les courbes 4 et 3 correspondant au cas GP et HT lorsque  $T_0=1000 K^\circ$  environ, on peut dire que la théorie d'un gaz parfait donne des bon résultats si cette condition est vérifiée. La figure 5.27b représente la variation de la longueur de Kernel en fonction de  $T_0$  pour même nombre de Mach de sortie. Il est clair que la longueur de Kernal augmente avec  $T_0$ , et par conséquent, la longueur et la masse de la tuyère augmente.

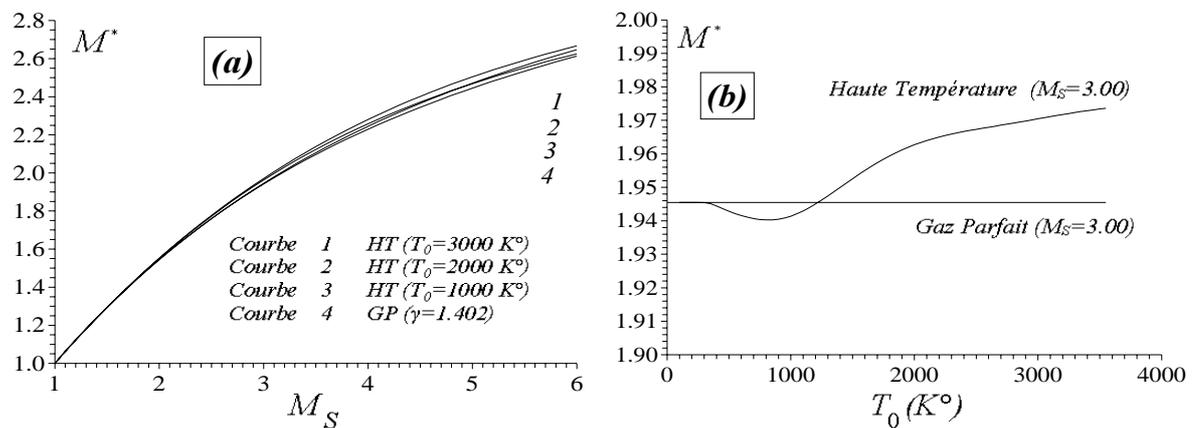


Figure 5.27 : Variation du nombre de Mach  $M^*$  au col de la tuyère MLN 2D. (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

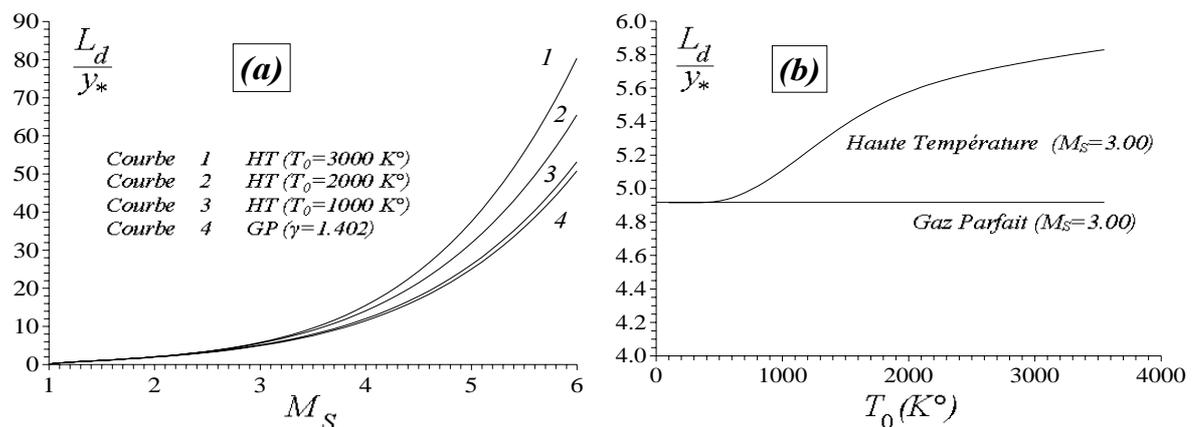


Figure 5.28 : Variation de la longueur de Kernel de la tuyère à détente centrée 2D. (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

La portion horizontale du col existe toujours pour ce paramètre. La longueur de la tuyère peut être calculée à partir de la longueur de Kernel par la relation suivante:

$$\frac{L}{y_*} = \frac{L_d}{y_*} + \frac{A_S}{A_*} \sqrt{M_S^2 - 1} \quad (5.4)$$

Le rapport des sections dans cette relation doit être calculé par la formule (3.60) du chapitre 3. La longueur de la zone uniforme peut être déterminée par la relation (5.4).

La figure 5.29a représente la variation de la longueur de la tuyère en fonction de  $M_S$ , et la figure 5.29b représente la variation en fonction de  $T_0$ . On remarque toujours l'influence de la température  $T_0$  surtout si sa valeur dépasse les  $1000 \text{ K}^\circ$  environ. Les figures 5.28 et 5.29 possèdent mêmes commentaires.

La figure 5.30a représente la variation de la masse de la structure de la tuyère sous forme non-dimensionnelle en fonction de  $M_S$ . Si  $M_S < 2.50$  environ, la température  $T_0$  ne présente *presque* aucune influence sur la masse de la structure. De même, la figure 5.30b présente la variation en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S = 3.00$ . Le calcul de la masse est lié avec le calcul de l'arc curviligne de la paroi. On n'a pas pris en compte le calcul de la masse des deux cotés gauche et droite de la tuyère. Ils se trouvent à l'infini (n'existe pas), vu que la tuyère est  $2D$ .

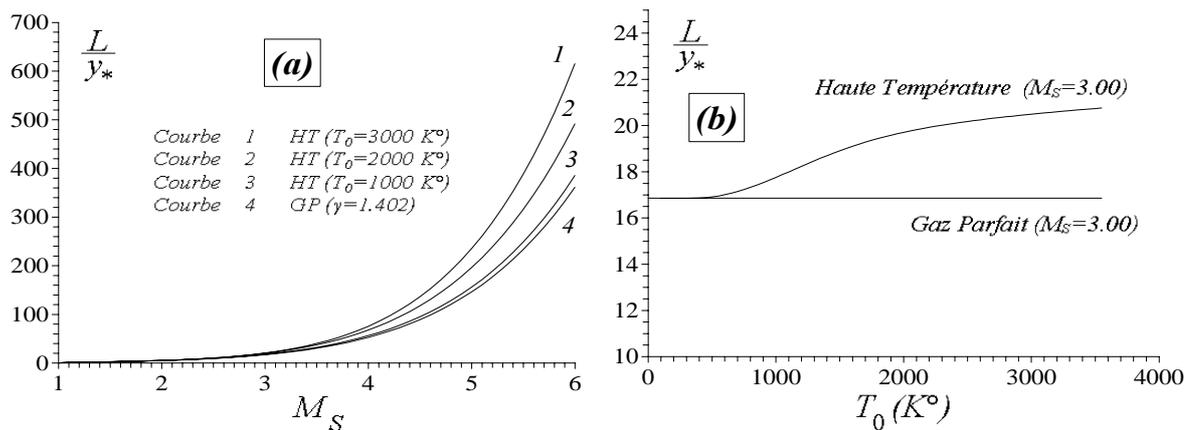


Figure 5.29 : Variation de la longueur de la tuyère à détente centrée  $2D$ .  
(a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S = 3.00$ .

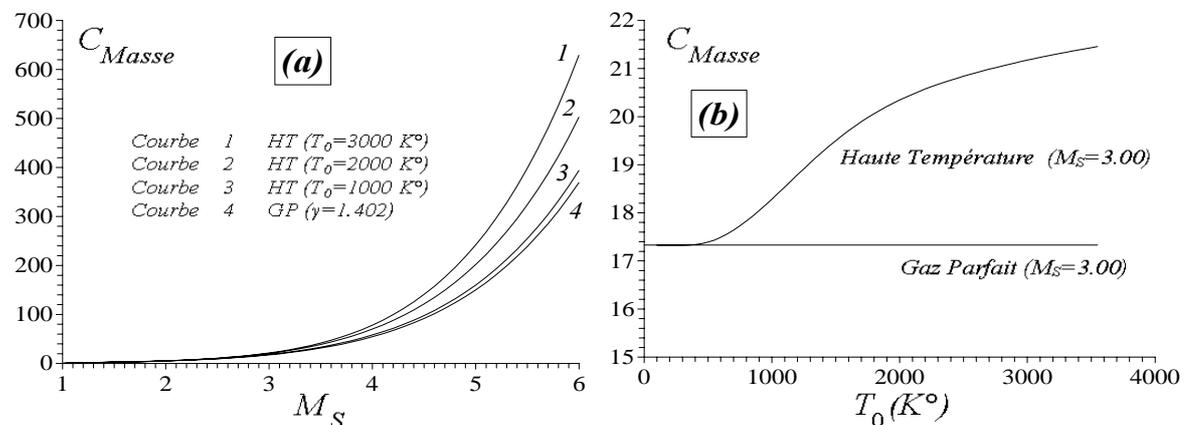


Figure 5.30 : Variation de la masse de la structure de la tuyère  $MLN \ 2D$ .  
(a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S = 3.00$ .

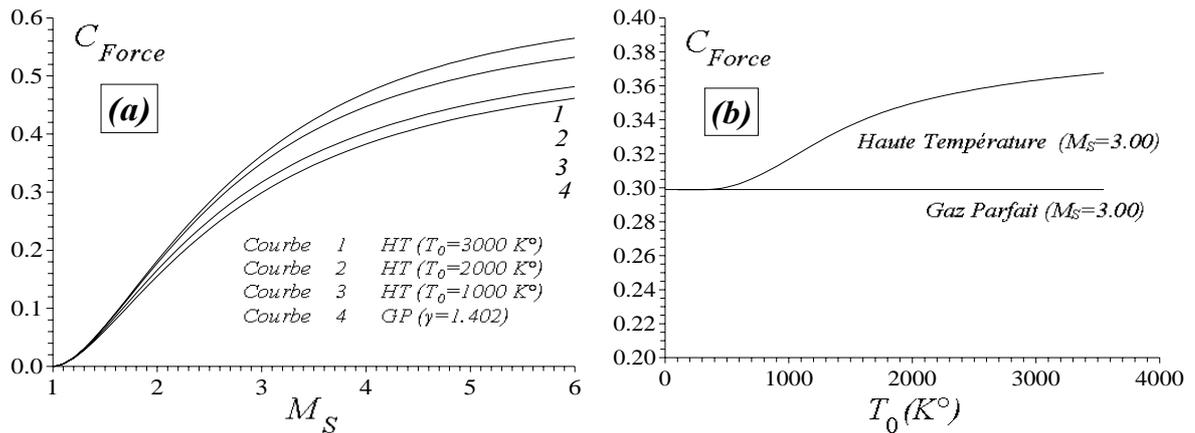


Figure 5.31 : Variation de la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère MLN 2D. (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

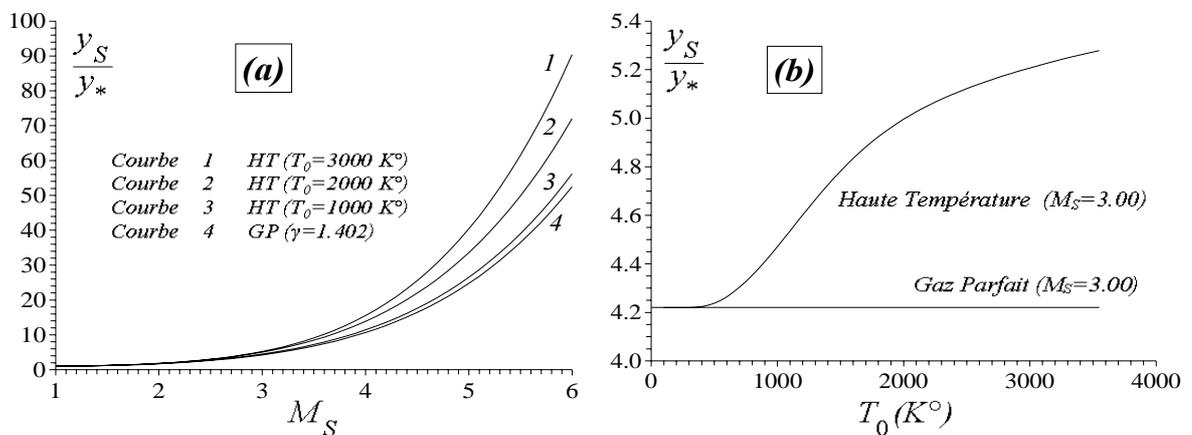


Figure 5.32 : Variation du rayon de la section de sortie de la tuyère MLN 2D. (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

La figure 5.31a représente la variation de la force axiale de pression délivrée sur le divergent en fonction de  $M_S$  pour différentes température  $T_0$ , y compris le cas du gaz parfait. Le but de la figure 5.31b c'est de présenter l'effet de  $T_0$  sur ce paramètre, si on change  $T_0$  de la chambre de combustion sans changer le nombre de Mach  $M_S$ .

La figure 5.32 représente la variation du rayon de la section de sortie à haute température. Même commentaires comme les autres paramètres.

Comme commentaire sur les figures 5.26 à 5.32, la température  $T_0$  influe sur tous les paramètres de dimensionnement. La variation des paramètres est normalisée pour déterminer des courbes standard qui seront valables dans le cas général, sans connaître les données réelles de quelques valeurs comme le rayon du col, pression de la chambre de combustion, épaisseur de la paroi et la masse volumique du matériaux de construction.

Sur la partie b de ces figures, la différence des valeurs données par les modèles HT et GP pour  $T_0=1000\text{ K}^\circ$  diminue lorsque  $M_S$  diminue, particulièrement lorsque  $M_S=2.00$ .

Le commentaire fait sur la partie (a) de chaque figures, concernant la limite d'application du modèle GP ( $M_S < 2.00$ , quel que soit  $T_0$ , ou  $T_0 < 1000 \text{ K}^\circ$  quel que soit  $M_S$ ) est faite sur une base de visualisation des courbes et non sur un calcul de l'erreur.

### 5.3.5. Résultats sur l'erreur du modèle du gaz parfait

La figure 5.33 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage donnée par les paramètres de conception de la tuyère, notamment la longueur de la tuyère, la masse de la structure et la force de pression. Concernant l'erreur donnée par le rapport des sections du modèle GP comparée au modèle HT, il est présenté dans la figure 5.11c. L'erreur donnée par la longueur et la masse de la tuyère sont présentées sur la même figure 5.33a, puisque, les deux paramètres donnent presque la même erreur. L'erreur donnée par la force de pression est présentée sur la figure 5.33b. On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $T_0$  et  $M_S$ , et elle augmente si  $T_0$  augmente. Par exemple, si  $T_0 = 2000 \text{ K}^\circ$  et  $M_S = 2.50$ , l'utilisation du modèle GP va donner une erreur  $\varepsilon = 9.24\%$  pour la longueur de la tuyère, une erreur  $\varepsilon = 9.57\%$  pour la masse de la structure et une erreur  $\varepsilon = 13.87\%$  pour la force de pression. On peut remarquer qu'à faible valeur de  $M_S$  et  $T_0$ , l'erreur  $\varepsilon$  est faible. Sur cette figure, la courbe 3 se trouve au dessous de l'erreur 5%. Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle GP jusqu'à  $T_0 = 1000 \text{ K}^\circ$  pour les applications aéronautiques. Mais si  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure et dans ce cas, on peut utiliser le modèle GP indépendamment de la température  $T_0$  si le nombre de Mach n'excède pas  $M_S = 2.00$  avec une erreur de 5% environ.

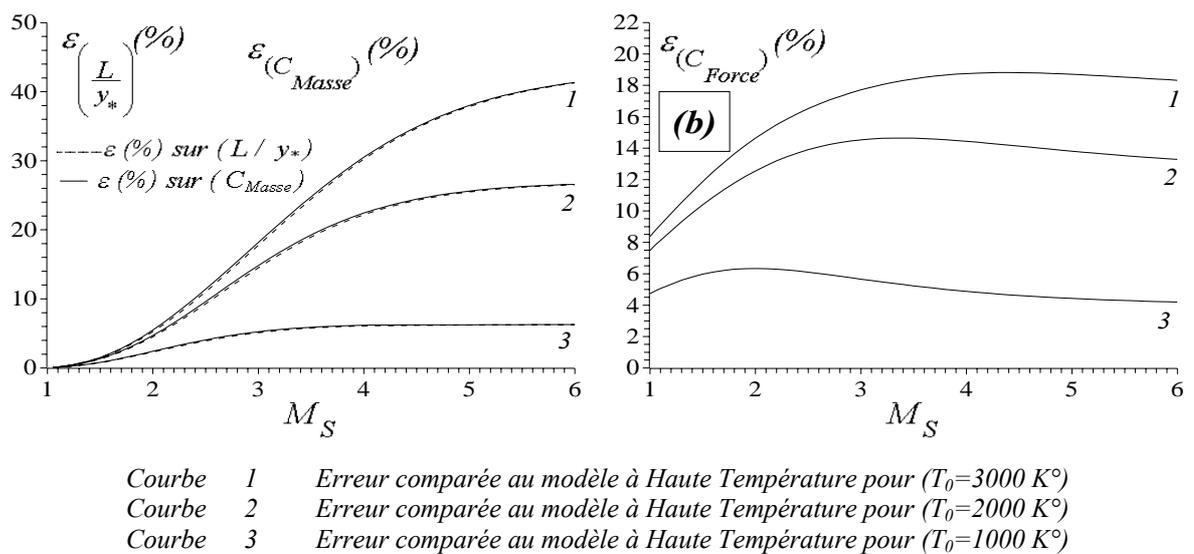


Figure 5.33 : Variation de l'erreur relative donnée par les paramètres de conception de la tuyère MLN 2D du modèle GP en fonction du nombre de Mach de sortie.

(a) : Longueur et la masse de la tuyère. (b) : Force de pression.

L'erreur relative donnée lorsque  $M=1$  (intersection des courbes avec l'axe vertical) peut être calculée pour chaque paramètres par les relations (5.5), (5.6) et (5.7). Concernant, l'erreur donnée par la longueur et la masse, l'enlèvement de l'indétermination dans les relations (5.5) et (5.6) est faite par l'utilisation de la relation (3.87) du chapitre 3. Mais pour le calcul de l'erreur donnée par la force de pression, on utilise la relation (3.93).

$$\varepsilon_{(Longueur)}(M=1) = \lim_{M \rightarrow 1(T \rightarrow T_*)} \left| 1 - \frac{(L/y_*)_{GP}(M)}{(L/y_*)_{HT}(T)} \right| \times 100 = \left| 1 - \frac{0}{0} \right| \times 100 = 0 \text{ quelque soit } T_0 \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_{(Masse)}(M=1) = \lim_{M \rightarrow 1(T \rightarrow T_*)} \left| 1 - \frac{(C_{Masse})_{GP}(M)}{(C_{Masse})_{HT}(T)} \right| \times 100 = \left| 1 - \frac{0}{0} \right| \times 100 = 0 \text{ quelque soit } T_0 \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_{(C_{Force})}(M=1) = \lim_{M \rightarrow 1(T \rightarrow T_*)} \left| 1 - \frac{(C_{Force})_{GP}(M)}{(C_{Force})_{HT}(T)} \right| \times 100 = \left| 1 - \frac{0}{0} \right| \times 100 =$$

$$\left| 1 - \frac{(P^*/P_0)_{GP}}{(P^*/P_0)_{HT}} \lim_{M \rightarrow 1(T \rightarrow T_*)} \frac{v_{GP}(M)}{v_{HT}(T)} \right| \times 100 = \begin{cases} 4.724 \% \text{ lorsque } T_0=1000 \text{ K}^\circ \\ 7.474 \% \text{ lorsque } T_0=2000 \text{ K}^\circ \\ 8.368 \% \text{ lorsque } T_0=3000 \text{ K}^\circ \end{cases} \quad (5.7)$$

### 5.3.6. Divers résultats

La figure 5.34 représente les courbes iso-valeurs, notamment les courbes iso-Mach illustrées sur la figure 5.34a et les courbes iso-directions illustrées sur la figure 5.34b. Cette figure montre que l'écoulement est bidimensionnel. On remarque que les courbes iso-Mach dans la zone de transition sont des lignes de droites. L'écoulement commence par une entrée  $ID$  et se termine par une sortie  $ID$ , mais à travers la tuyère l'écoulement est  $2D$ . On peut bien remarquer la détente brusque au coin supérieure où les courbes se passent par ce point dans la région de Kernel. Cette dernière est une zone non simple. Les courbes iso-Mach passant par le coin supérieure possèdent un nombre de Mach  $M^{iso} \leq M^*$ .

Concernant les courbes iso-direction, les points qui possèdent une direction nulle sont les points du col, l'axe horizontal et la partie uniforme triangulaire. Cette figure démontre aussi que l'écoulement est bidimensionnel.

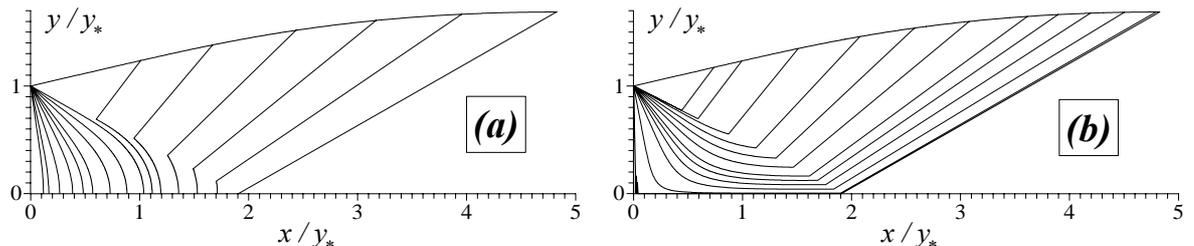


Figure 5.34 : Courbes iso-valeurs de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle.  
(a) : Courbes iso-Mach. (b) : Courbes iso-direction.

Dans la figure 5.35, on a représenté la forme de quatre tuyères ayant toutes même section de sortie. Les courbes 1, 2 et 3 sont pour le cas *HT* lorsque  $T_0=1000\text{ K}^\circ$ ,  $2000\text{ K}^\circ$  et  $3000\text{ K}^\circ$  respectivement. La courbe 4 correspondant au cas *GP*. On remarque que les quatre tuyères ne délivrent pas le même  $M_S$ . Le rayon de sortie des quatre courbes correspondant au cas *GP* pour  $M_S=3.00$ . Le rapport des sections est égale  $A_S/A^*=4.22002$

On peut démontrer qu'elles ne délivrent pas le même nombre de Mach  $M_S$  à partir des relations (3.4) et (3.60) du chapitre 3. Le but de la présentation cette figure est que, si on considère la tuyère dimensionnée sur la base et les hypothèses *GP* pour les applications aéronautiques (courbe 4), on peut remarquer la dégradation des performances notamment le nombre de Mach de sortie, vu que les tuyères possèdent presque la même taille et forme, sauf une petite différence en longueur. Les résultats numériques des principaux paramètres sont présentés dans le tableau 5.23. L'écoulement dans cette différence de longueur est presque uniforme. La forme de la structure de la tuyère utilisée ne change pas, sauf le comportement thermodynamique de l'air avec la température. Vu les valeurs de l'angle  $\theta^*$ , on peut dire la tuyère du modèle *GP* (courbe 4) est au dessous (incluse dans) des courbes *HT*, et que sa longueur est la plus grande des autres. Par exemple, lorsque  $x/y^*=6.00$ , l'ordonnée  $y/y^*$  égale à 3.192, 3.220, 3.254 et 3.267 respectivement pour la courbe 4,3,2,1.

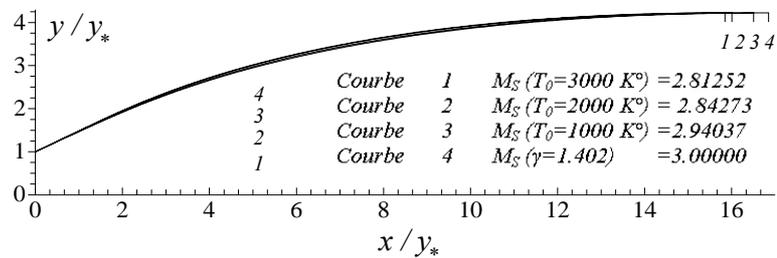


Figure 5.35 : Tuyères ayant mêmes rapport  $A_S/A^*$ , donnant  $M_S=3.00$  pour le modèle *GP*.

Tableau 5.23 : Résultats du dimensionnement des tuyères de la figure 5.35.

	$M_S$	$\theta^*$ (degré)	$M^*$	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
<b>GP (<math>\gamma=1.402</math>)</b>	<b>3.00000</b>	<b>24.8258</b>	<b>1.9454</b>	<b>4.9161</b>	<b>16.8521</b>	<b>17.3268</b>	<b>0.2989</b>
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	2.94037	25.2795	1.9212	4.8427	16.5116	16.9954	0.3099
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	2.84273	25.7326	1.9062	4.7780	16.0077	16.5030	0.3281
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	2.81252	25.8792	1.9010	4.7571	15.8505	16.3494	0.3354

#### 5.4. Résultats sur la tuyère à corps central bi-dimensionnelle

Dans cette partie, on va présenter les divers résultats de dimensionnement et de conception de la tuyère à corps central 2D déterminés par l'utilisation du modèle *HT*. Les résultats pour même type de tuyère déterminés sur la base d'utilisation du modèle *GP* sont présentés dans l'appendice B.

##### 5.4.1. Effet de discrétisation sur la convergence

Si on augmente le nombre  $N$  de points de la discrétisation, on va voir la convergence des résultats numériques vers la solution exacte. On prend un exemple pour  $M_S=2.50$ ,  $\lambda_B=1.0$  et  $T_0=2000 K^\circ$ . Le rapport des sections théorique est égale à  $A_S/A^*=2.92585$ , voir tableau 5.5. Le commentaire est valable pour n'importe quel exemple. Les résultats présentés dans le tableau 5.24 ne dépendent pas de la discrétisation. Le tableau 5.25 présente les différents résultats numériques obtenus des paramètres de conception de l'exemple proposé pour quelques valeurs de  $N$  de la discrétisation.. On dit que le problème est convergent avec une erreur relative  $\varepsilon$  donnée, si le rapport des sections, calculé numériquement pour une discrétisation, voir équation (4.33), et le rapport des sections théorique (1.55) vérifie la relation (5.3). Les paramètres de conception convergent automatiquement vers la solution précise.

Les autres paramètres ne sont pas mentionnés dans ce tableau. On remarque que si  $N$  augmente, le rapport des sections convergence par une voie décroissante, c'est-à-dire que la valeur calculée numériquement est toujours inférieure à la valeur théorique. Les autres rapports mentionnés dans le tableau 5.25 convergence vers la solution précise avant la convergence du rapport des sections, ce qui est un avantage, afin de contrôler que la convergence du rapport des sections. On peut dire que le nombre  $N$  nécessaire (le plus petit possible), pour avoir la convergence dépend des paramètres suivants:

$$N=f(\varepsilon, M_S, T_0) \quad (5.7)$$

Le nombre  $N$  dépend encore du nombre de points nécessaires pour l'évaluation des intégrales (4.10) et (4.22) par la méthode de Simpson. On remarque encore que, la longueur de la tuyère, la masse de la structure et la masse du gaz convergent par une voie décroissante, tandis que, la force de pression converge par une voie croissante.

Tableau 5.24 : Paramètres de conception de la tuyère à corps central 2D indépendant de  $N$ .

$\Psi$ (degré)	$\varphi_S$ (degré)	$\varphi_B$ (degré)	$x_B / \lambda_B$	$y_B / \lambda_B$	$\theta^*$ (degré)
47.0211	23.5781	132.9788	-0.6817	0.7316	42.9788

Nous avons fait des calculs pour  $N=20$  million,  $N=30$  million et  $N=50$  million de points, et nous avons trouvé respectivement une erreur  $\varepsilon=8.7 \cdot 10^{-6}$ ,  $5.8 \cdot 10^{-6}$ , et  $3.5 \cdot 10^{-6}$ . En comparant ces résultats avec ceux de  $N=2$  million,  $N=3$  million et  $N=5$  million du tableau 5.25, on remarque que pour deux discrétisations de mêmes  $M_S$  et  $T_0$ , on peut vérifier la relation suivante:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (5.8)$$

Tableau 5.25 : Paramètres de conception de la tuyère à corps central 2D dépendent de  $N$ .

$N$	$y_S / y_*$	$L / \lambda_B$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$C_{Gaz}$	$\varepsilon$ (%)
10	3.724203	8.80488	9.51295	0.56913	9.51297	27.285
50	3.042415	7.62447	8.17727	0.60239	8.17727	3.983
100	2.981466	7.50341	8.04246	0.60672	8.04246	1.900
500	2.936430	7.40908	7.93798	0.61019	7.93798	0.361
1000	2.931090	7.39739	7.92510	0.61062	7.92510	0.178
2000	2.928456	7.39155	7.91866	0.61084	7.91866	0.088
5000	2.926891	7.38805	7.91480	0.61093	7.91480	0.035
10000	2.926373	7.38688	7.91352	0.61101	7.91352	0.017
20000	2.926115	7.38629	7.91288	0.61103	7.91288	$8.7 \cdot 10^{-3}$
50000	2.925960	7.38594	7.91249	0.61105	7.91249	$3.5 \cdot 10^{-3}$
100000	2.925909	7.38582	7.91236	0.61105	7.91236	$1.710^{-3}$
500000	2.925868	7.38573	7.91226	0.61105	7.91226	$3.5 \cdot 10^{-4}$
800000	2.925864	7.38572	7.91225	0.61106	7.91225	$2.1 \cdot 10^{-4}$
1000000	2.925863	7.38572	7.91225	0.61106	7.91225	$1.7 \cdot 10^{-5}$
2000000	2.925860	7.38571	7.91224	0.61106	7.91224	$8.7 \cdot 10^{-5}$
5000000	2.925859	7.38571	7.91224	0.61106	7.91224	$3.4 \cdot 10^{-5}$
6000000	2.925858	7.38571	7.91224	0.61106	7.91224	$2.9 \cdot 10^{-5}$
10000000	2.925858	7.38571	7.91223	0.61106	7.91223	$1.7 \cdot 10^{-5}$

Tableau 5.26 : Valeurs minimum de  $N$  donnant une erreur  $\varepsilon$  lorsque  $T_0=2000$  K°.

	$\varepsilon=1.0$	$\varepsilon=10^{-1}$	$\varepsilon=10^{-2}$	$\varepsilon=10^{-3}$	$\varepsilon=10^{-4}$
$M_S=1.50$	18	155	1493	14734	146767
$M_S=2.00$	76	719	7065	70239	701355
$M_S=3.00$	339	3311	32871	327933	3277629
$M_S=4.00$	762	7524	74922	748196	7479266
$M_S=5.00$	1299	12883	128469	1283404	12829115

Tableau 5.27 : Valeurs minimum de  $N$  donnant une erreur  $\varepsilon$  lorsque  $M_S=3.00$ .

	$\varepsilon=1.0$	$\varepsilon=10^{-1}$	$\varepsilon=10^{-2}$	$\varepsilon=10^{-3}$	$\varepsilon=10^{-4}$
GP ( $\gamma=1.402$ )	270	2696	26954	269540	2695346
$T_0=500$ K°	296	2887	28663	285996	2858721
$T_0=1000$ K°	309	3014	29908	298358	2982048
$T_0=3000$ K°	352	3442	34174	340983	3408164

Dans le tableau 5.26, nous avons présenté l'effet du nombre de Mach  $M_S$  sur le nombre de points  $N$  minimum pour avoir la précision  $\varepsilon$  indiquée, lorsque  $T_0=2000$  K°, et dans le

tableau 5.27, nous avons présenté l'effet de  $T_0$  sur le nombre de points minimum  $N$  de discrétisation pour avoir la précision  $\varepsilon$  indiquée, lorsque  $M_S=3.00$ .

Dans ces deux tableaux, on peut bien vérifier la relation (5.8). Si on choisit  $M_S=5.0$ ,  $T_0=2000\text{ K}^\circ$  et  $\varepsilon=10^{-3}$ , il faut  $N=1285404$ , mais si on prend le même exemple avec  $\varepsilon=10^{-4}$ , il faut  $N=12829115$  points.

#### 5.4.2. Effet de la température génératrice $T_0$ sur l'allure du corps central

Les figures 5.36 à 5.40 présentent l'allure du corps central respectivement lorsque  $M_S=1.50, 2.00, 3.00, 4.00$  et  $5.00$ .

Sur la figure 5.36, les quatre courbes sont presque identiques pour les températures jusqu'à  $3000\text{ K}^\circ$ . On peut même vérifier les valeurs numériques du tableau 5.28.

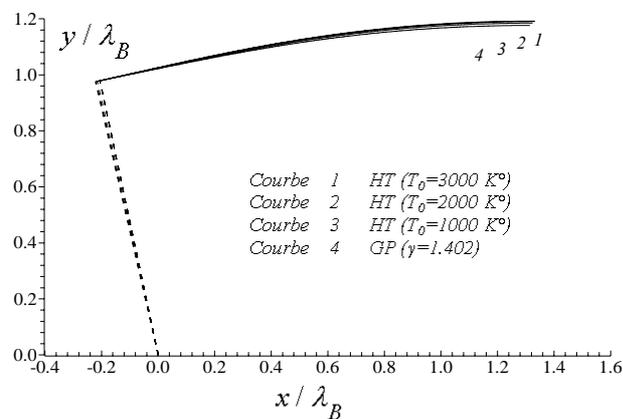


Figure 5.36 : Formes du corps central donnant  $M_S=1.50$ .

Tableau 5.28 : Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.36.

	$\Psi$ ( $^\circ$ )	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$C_{Gaz}$	$\theta^*$ ( $^\circ$ )
$GP$ ( $\gamma=1.402$ )	78.109	1.175	1.314	-0.206	0.978	1.520	1.536	0.088	0.727	11.890
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	77.599	1.184	1.324	-0.214	0.976	1.538	1.556	0.094	0.722	12.400
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	77.284	1.189	1.330	-0.220	0.975	1.550	1.569	0.099	0.721	12.715
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	77.177	1.191	1.332	-0.221	0.975	1.554	1.573	0.101	0.720	12.822

Sur la figure 5.37, on remarque dans ce cas que la différence entre les quatre courbes s'agrandit un peu par rapport aux courbes de la figure 5.36. Mais, la presque superposition des courbes  $GP$  et  $HT$  ( $T_0=1000\text{ K}^\circ$ ) est toujours visualisée. On peut vérifier les valeurs numériques du tableau 5.29.

A partir du nombre de Mach  $M_S=2.00$ , ce qui est le cas respectivement pour les figures 5.38, 5.39 et 5.40, on remarque que la différence entre les courbes commence à s'agrandir graduellement. On peut faire les mêmes remarques pour les valeurs numériques des tableaux 5.30, 5.31 et 5.32 lorsque  $M_S > 2.00$ .

Sur les figures 5.36 à 5.40, les tuyères ne sont pas confondues au même point au col, vu que l'angle  $\Psi$  n'est pas le même. Ces points se trouvent sur un cercle de rayon  $\lambda_B=1.00$ .

Les valeurs numériques présentées dans les tableaux 5.28 à 5.32 sont déterminées avec une précision  $\varepsilon=10^{-5}$ . Une étude sur l'erreur donnée par le modèle GP par rapport à notre modèle pour ce type de tuyère sera présentée dans le paragraphe 5.4.6 prochain. A partir des graphes et les valeurs numériques, on peut remarquer l'influence de la température  $T_0$  de la chambre de combustion sur l'allure des tuyères et les paramètres de conception.

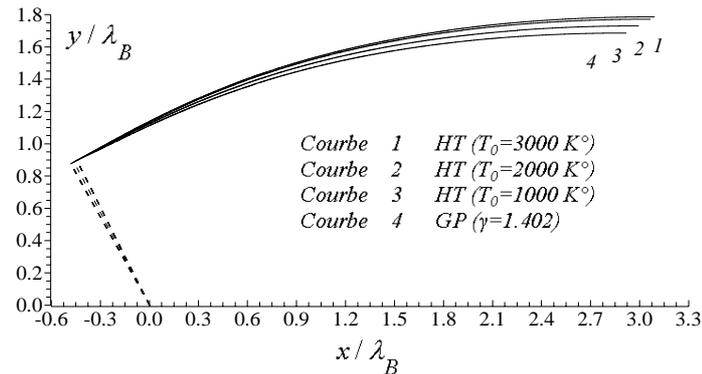


Figure 5.37 : Formes du corps central donnant  $M_S=2.00$ .

Tableau 5.29 : Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.37.

	$\Psi$ (°)	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$C_{Gaz}$	$\theta^*$ (°)
GP ( $\gamma=1.402$ )	63.662	1.685	2.920	-0.443	0.896	3.363	3.494	0.286	1.399	26.337
$T_0=1000 K^\circ$	62.422	1.729	2.995	-0.462	0.886	3.458	3.604	0.308	1.403	27.577
$T_0=2000 K^\circ$	61.353	1.770	3.067	-0.479	0.877	3.546	3.706	0.331	1.417	28.646
$T_0=3000 K^\circ$	60.982	1.785	3.092	-0.485	0.874	3.577	3.743	0.339	1.423	29.017

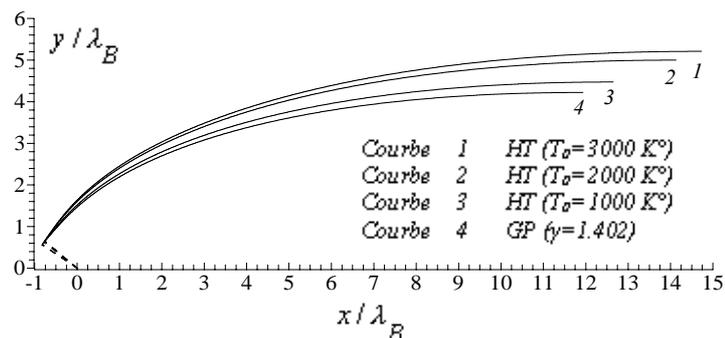


Figure 5.38 : Formes du corps central donnant  $M_S=3.00$ .

Tableau 5.30 : Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.38.

	$\Psi$ (°)	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$C_{Gaz}$	$\theta^*$ (°)
GP ( $\gamma=1.402$ )	40.348	4.220	11.936	-0.762	0.647	12.698	13.594	0.746	4.499	49.651
$T_0=1000 K^\circ$	38.255	4.471	12.646	-0.785	0.619	13.432	14.427	0.796	4.608	51.744
$T_0=2000 K^\circ$	35.010	4.995	14.130	-0.819	0.573	14.949	16.142	0.884	4.974	54.989
$T_0=3000 K^\circ$	33.826	5.207	14.727	-0.830	0.556	15.558	16.830	0.918	5.121	56.173

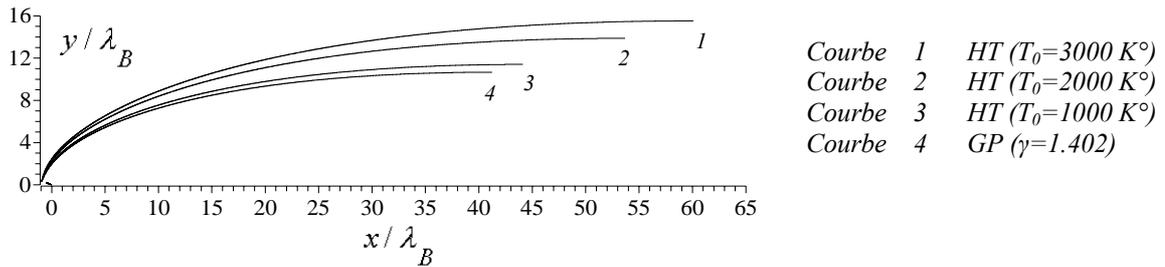
Figure 5.39 : Formes du corps central donnant  $M_S=4.00$ .

Tableau 5.31 : Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.39.

	$\Psi$ ( $^\circ$ )	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$C_{Gaz}$	$\theta^*$ ( $^\circ$ )
GP ( $\gamma=1.402$ )	24.377	10.647	41.235	-0.910	0.412	42.146	44.784	1.127	13.468	65.622
$T_0=1000 K^\circ$	22.109	11.391	44.118	-0.926	0.376	45.044	47.934	1.188	13.891	67.890
$T_0=2000 K^\circ$	17.375	13.861	53.685	-0.954	0.298	54.639	58.301	1.327	16.155	72.624
$T_0=3000 K^\circ$	14.978	15.514	60.086	-0.966	0.258	61.052	65.208	1.400	17.719	75.021

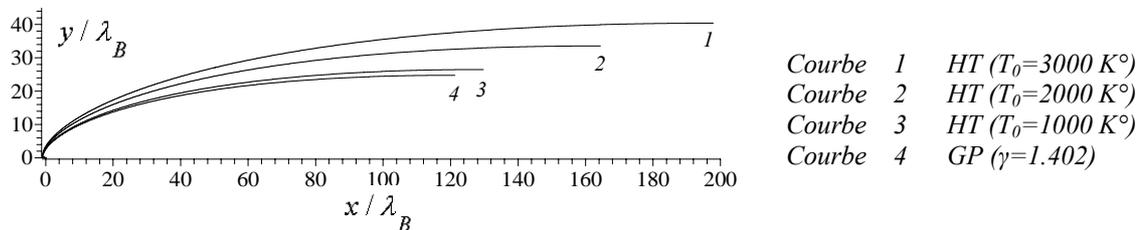
Figure 5.40 : Formes du corps central donnant  $M_S=5.00$ .

Tableau 5.32 : Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.40.

	$\Psi$ ( $^\circ$ )	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$C_{Gaz}$	$\theta^*$ ( $^\circ$ )
GP ( $\gamma=1.402$ )	13.285	24.749	121.245	-0.973	0.229	122.218	127.978	1.408	36.580	76.714
$T_0=1000 K^\circ$	11.016	26.482	129.732	-0.981	0.191	130.713	136.956	1.471	37.712	78.983
$T_0=2000 K^\circ$	5.737	33.565	164.436	-0.994	0.099	165.431	173.502	1.630	45.576	84.262
$T_0=3000 K^\circ$	2.382	40.391	197.878	-0.999	0.041	198.877	208.612	1.732	53.525	87.617

### 5.4.3. Variation des paramètres thermodynamiques le long de la paroi du corps central

La figure 5.41 représente respectivement la variation des rapports thermodynamiques  $T/T_0$ ,  $\rho/\rho_0$  et  $P/P_0$  le long de la paroi des tuyères de la figure 5.38 lorsque  $M_S=3.00$ . Les valeurs numériques de ces rapports, au col et à la sortie de la tuyère sont présentées dans les tableau 5.1 (rapports critiques) et les tableaux 5.2, 5.3 et 5.4 (rapports supersoniques).

La figure 5.41a illustre la variation du rapport  $T/T_0$  le long de la paroi. On remarque la diminution de ce rapport le long de la paroi. Le gaz parfait indique un refroidissement par rapport au comportement thermodynamique réel, surtout si  $T_0$  est élevée. Par exemple si  $T_0=2000 K^\circ$ , on aura une différence de  $72.6 K^\circ$  au col et  $124 K^\circ$  à la sortie. Pour le gaz parfait, les valeurs au col et à la sortie sont  $T^*=1665 K^\circ$ ,  $T_S=1108 K^\circ$  et pour le cas HT, on

a  $T^*=1737 K^\circ$  et  $T_S=1232 K^\circ$ . Il est possible que le matériau choisi sur la base du modèle *GP*, ne pouvoir résister à la température de notre modèle puisque le gaz se comporte à haute température.

La variation de la masse volumique le long de la paroi est présentée sur la figure 5.41b et pour le rapport des pressions, voir la figure 5.41c. Le rapport  $\rho/\rho_0$  nous donne une indication sur la quantité du gaz qui va traverser le divergent afin de déterminer la durée du vie du carburant. Il servira encore pour l'obtention du rapport des pressions.

Le rapport  $P/P_0$  nous servira pour déterminer la force de pression exercée sur la paroi du divergent. Cette figure indique une chute de pression à travers le divergent qui va délivrer une force de pression. Ce rapport servie encore pour faire l'étude sur la distribution du contrainte radiale et tangentielle pour but de d'étudier la résistance du matériau. Le modèle *GP* indique que la force de pression est inférieure à celle donnée par le modèle *HT* (qui est proche du comportement réel de l'écoulement dans la tuyère), voir les valeurs de  $C_{Force}$  dans le tableau 5.30.

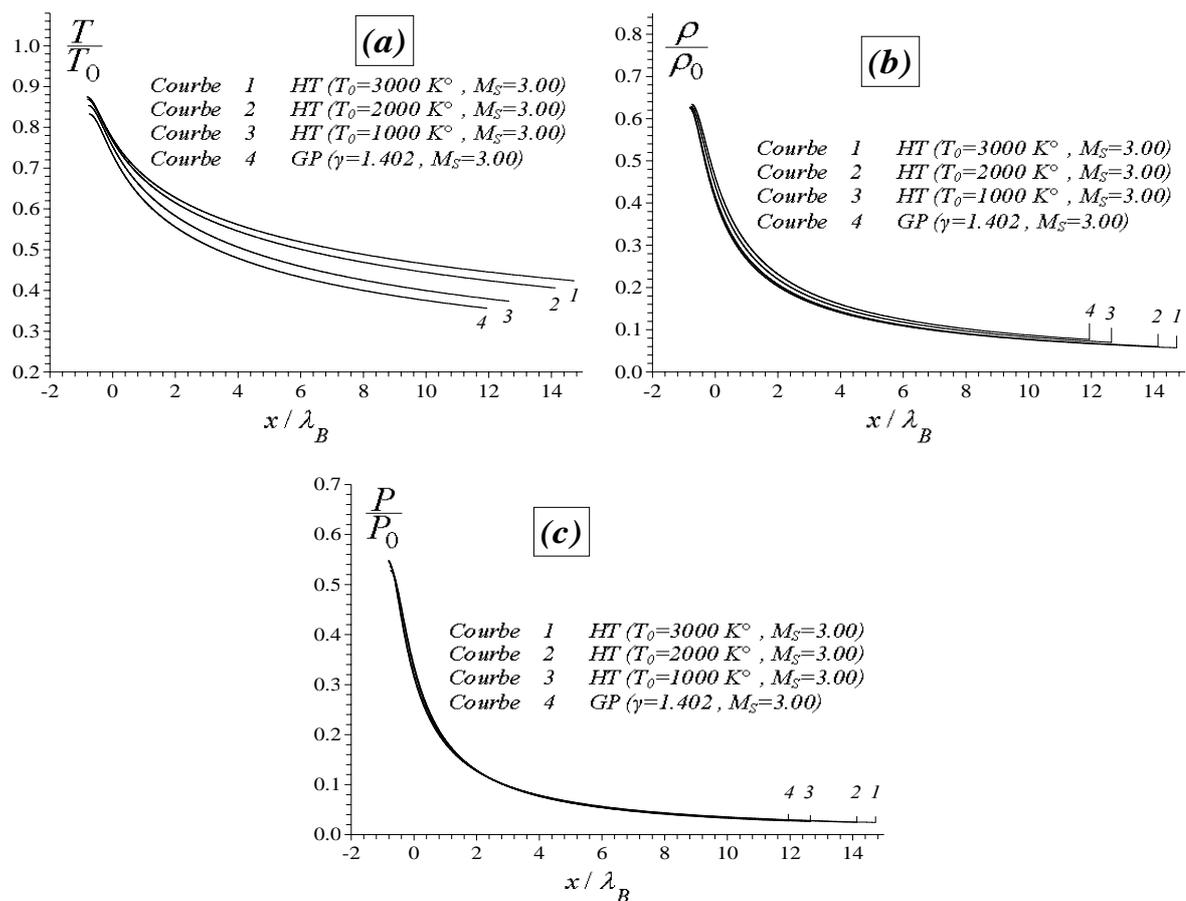


Figure 5.41 : Variation des paramètres thermodynamiques le long de la paroi du corps central donnant  $M_S=3.00$ .

(a) : Rapport des Températures. (b) : Rapport des masses volumiques. (c) : Rapport des pressions.

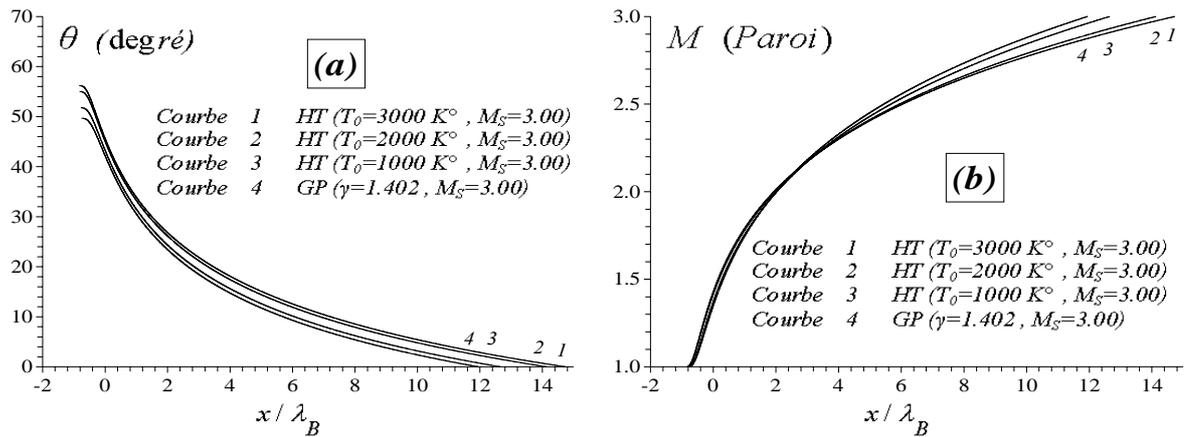


Figure 5.42 : Variation de  $M$  et  $\theta$  le long de la paroi du corps central donnant  $M_S = 3.00$

La figure 5.42 représente la variation de l'angle de déviation de l'écoulement ainsi que le nombre de Mach à travers la paroi de la tuyère de la figure 5.38.

Pour la variation du nombre de Mach, il est égale à l'unité au col et à  $M = M_S = 3.00$  à la sortie. Environ sur les 30 % premières de tuyère, le nombre de Mach augmente de 60%. Concernant l'angle de déviation de l'écoulement, il est égale à zéro à la sortie (écoulement parallèle), et égale à  $\theta^*$  au col, voir tableau 5.30.

Les courbes de ces figures ne sont pas confondues au col, vu les formes des tuyères de la figure 5.38. Sur ces figures, on peut voir clairement l'effet de la température  $T_0$  sur les paramètres thermodynamiques et physique.

#### 5.4.4. Paramètres de conception

La partie (a) sur les figures 5.43 à 5.50 représentent la variation à Haute Température des paramètres de conception (longueur du corps central, masse du corps central, force de pression exercée sur le corps central, l'angle de déviation de la carène  $\Psi$ , l'angle de déviation initiale  $\theta^*$  de l'écoulement, masse du gaz dans la région de l'écoulement, la distance que doit avoir le cors central entre la carène et la section de sortie et le rayon de la section de sortie) en fonction du nombre de Mach  $M_S$  de sortie, et la partie (b) de ces figures représentent la variation des mêmes paramètres en fonction de la température génératrice  $T_0$  lorsque  $M_S = 3.00$ . Si on diminue le nombre de Mach  $M_S$  sur les figure (b), la différence entre les valeurs données par les modèles *HT* et *GP* diminuent et en particulier lorsque  $M_S = 2.00$ , pour faire liaison entre la partie (a) et (b).

La figure 5.43 présente la variation à haute Température de la longueur du corps central. Plus la tuyère délivre un nombre de Mach de sortie élevé, plus la longueur devient élevée.

Toujours on remarque que les quatre courbes sont presque confondues à faible nombre de Mach jusqu'à environ  $M_S=2.00$ . A partir de cette valeur, les quatre courbes commencent à différencier, et entre les courbes 4 et 3 correspondant au cas *GP* et *HT* ( $T_0=1000\text{ K}^\circ$ ), on peut dire que la théorie *GP* donne des bon résultats, si cette condition est vérifiée. Sur la partie (b), les deux courbes des modèles *GP* et *HT* sont confondues jusqu'à  $240\text{ K}^\circ$ .

La masse du corps central nécessaire pour avoir un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie est illustrée sur la figure 5.44. Les valeurs numériques obtenues, pour des valeurs de  $T_0$  et  $M_S$ , sont présentées dans les tableaux 5.28 à 5.32.

La force de pression exercée sur la paroi du corps central est présentée, sous la forme non-dimensionnelle, sur la figure 5.45. Quelques valeurs du calcul numérique sont présentées sur la colonne 8 des tableaux 5.28 à 5.32.

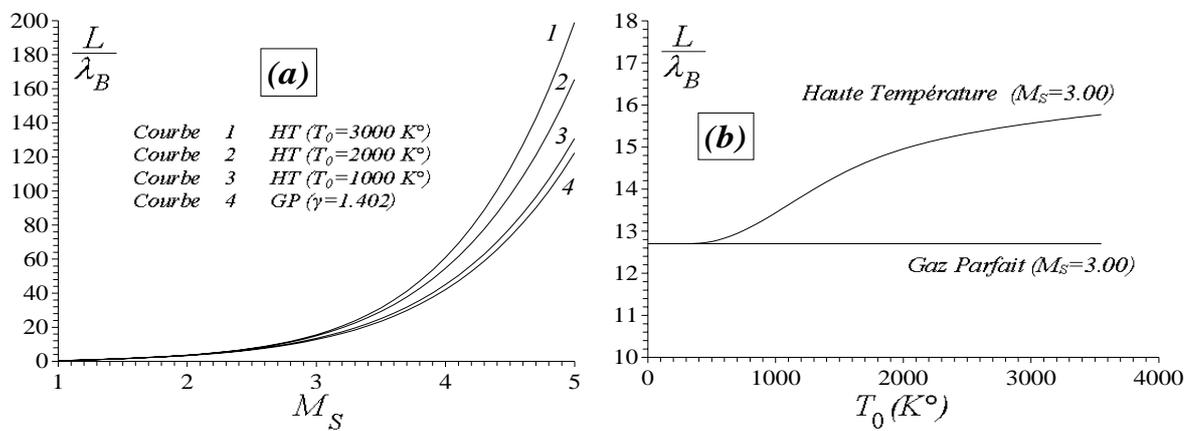


Figure 5.43 : Variation à Haute Température de la longueur de la tuyère à corps central 2D. (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

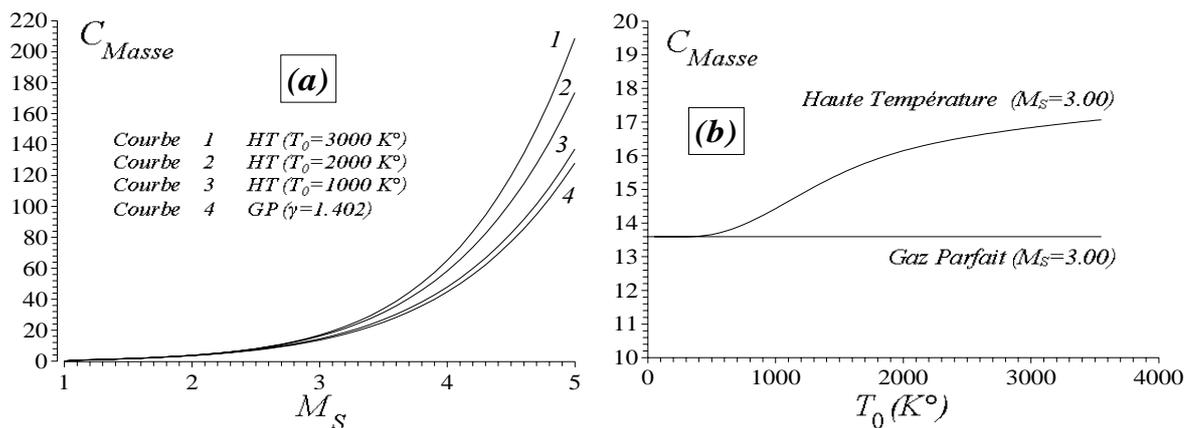


Figure 5.44 : Variation à Haute Température de  $C_{Masse}$  de la tuyère à corps central 2D. (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

La figure 5.46 illustre la variation de l'angle de déviation  $\Psi$  de la carène par rapport à la verticale en fonction de  $M_S$ , présentée sur la partie (a) et en fonction de  $T_0$  présentée sur la partie (b). Voir la première colonne des tableaux 5.28 à 5.32 pour les valeurs numériques.

La variation de l'angle de déviation initiale  $\theta^*$  de la paroi est illustré sur la figure 5.47. Cette valeur est liée avec l'angle  $\Psi$  par la relation  $\Psi + \theta^* = 90^\circ$ .

La figure 5.48 présente la variation sous forme non-dimensionnelle de la masse du gaz existant à chaque instant dans le divergent. Quelques valeurs numériques sont présentées sur la colonne 9 des tableaux 5.28 à 5.32.

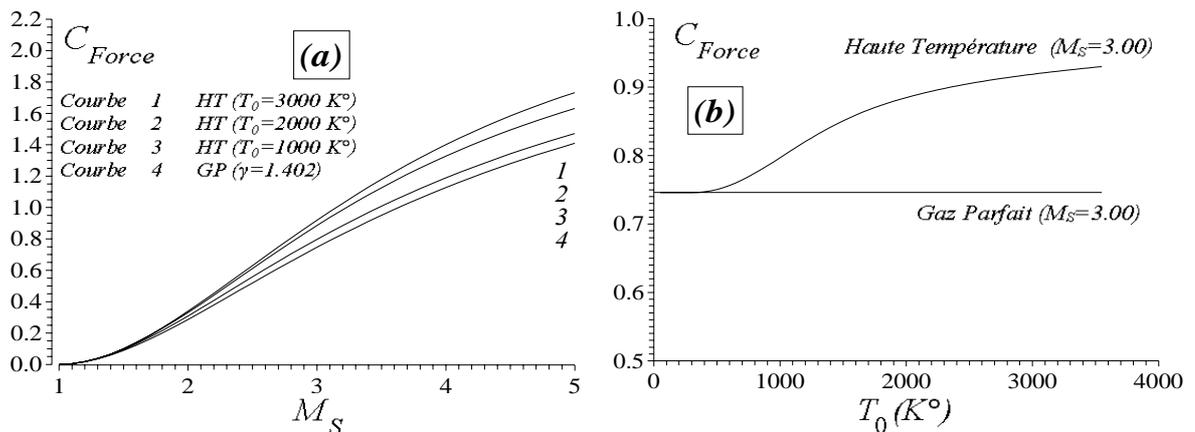


Figure 5.45 : Variation à Haute Température de  $C_{Force}$  de la tuyère à corps central 2D.  
(a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

La figure 5.49 présente la variation sous forme non-dimensionnelle de la distance nécessaire entre la section de sortie et la carène de la tuyère que doit avoir le corps central pour obtenir une section critique au col, et par conséquent un écoulement supersonique dans la partie divergente. *Si cette distance n'est pas respectée, on aura une section  $A_{col} \neq A^*$  et par conséquent un écoulement subsonique dans la partie divergente aura lieu.*

La figure 5.50 présente la variation du rayon de sortie du corps central. Même commentaires comme les autres paramètres.

On remarque que les quatre courbes dans la partie (a) de chaque figures 5.43 à 5.50 commencent avec une portion presque confondue jusqu'à  $M_S=2.00$  environ, ensuite se différencier graduellement avec une erreur  $\varepsilon$  qui varie avec  $T_0$  et  $M_S$ , et le paramètre lui-même. Cette variation s'interprète par la possibilité d'utiliser le modèle GP tant que  $M_S < 2.00$  environ quelque soit  $T_0$  avec une précision environ égale à 5%, voir figure 5.52 prochaine dans l'intervalle  $[1.00, 2.00]$ . On remarque encore que, les courbes 4 et 3 dans ces figures sont presque confondues encore quelque soit  $M_S$ , et que l'erreur maximale lorsque  $M_S=5.00$  est égale à 5%, voir la courbe 3 dans la figure 5.52. Cette variation

s'interprète par la possibilité d'utiliser le modèle *GP* tant que  $T_0 < 1000 \text{ K}^\circ$  quelque soit  $M_S$  jusqu'à 5.00. L'erreur de chaque paramètre donnée par le modèle *GP* par rapport à notre modèle est présentée dans la figure 5.52.

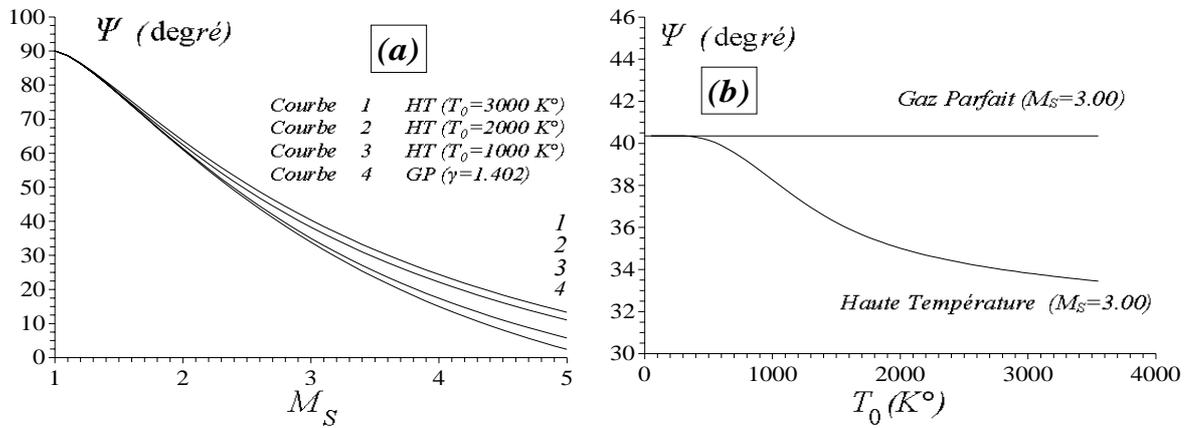


Figure 5.46 : Variation à Haute Température de l'angle  $\Psi$  de la tuyère à corps central 2D. (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

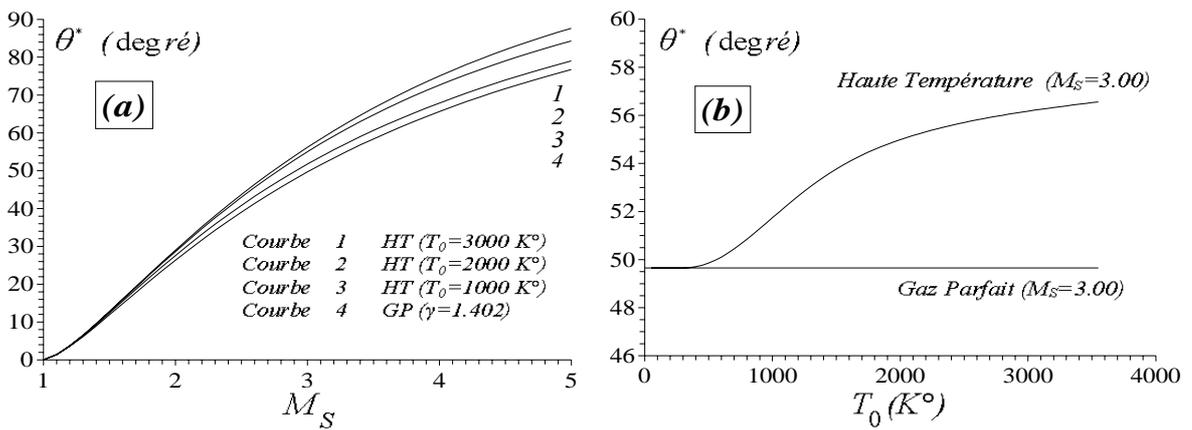


Figure 5.47 : Variation à Haute Température de l'angle  $\theta^*$  d'une tuyère à corps central 2D. (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

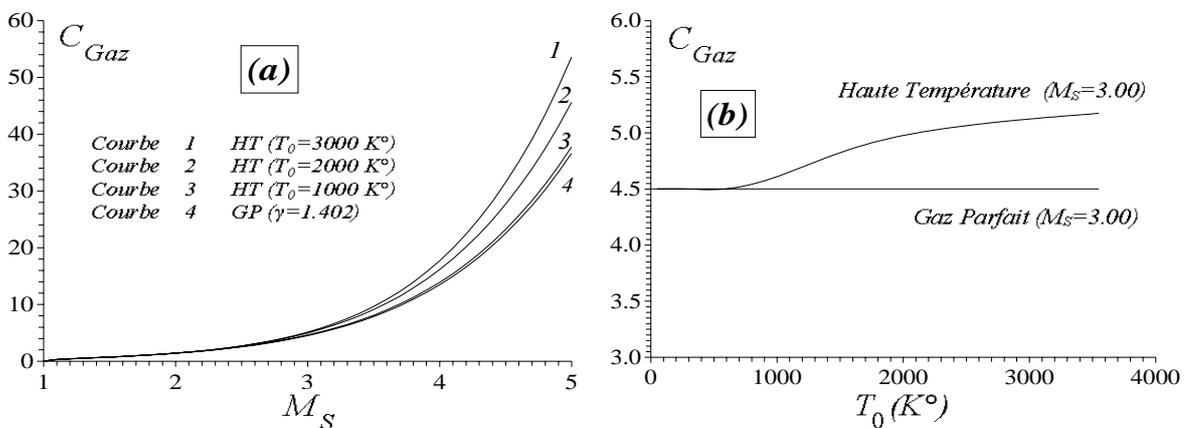


Figure 5.48 : Variation à Haute Température de  $C_{Gas}$  d'une tuyère à corps central 2D. (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

Sur la partie (b) des figures 5.43 à 5.50, on a représenté la variation des paramètres de conception en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S = 3.00$  pour les deux modèles *HT* et *GP*. Il est clair dans ces figures, que le modèle *GP* ne dépend pas de  $T_0$ , et que notre modèle *HT* tiens compte de  $T_0$  et que la dépendance devient considérable plus  $T_0$  sera élevée.

A faible valeur de  $T_0$ , le modèle *GP* donne des bons résultats jusqu'à  $T_0 = 1000 \text{ K}^\circ$  avec une erreur maximale égale à 5% environ. On remarque que ce modèle chute les valeurs des paramètres de conception par rapport aux valeurs réelles du comportement physique.

Une étude sur l'erreur donnée par les paramètres de conception du modèle d'un gaz parfait est présentée dans le paragraphe 5.4.6.

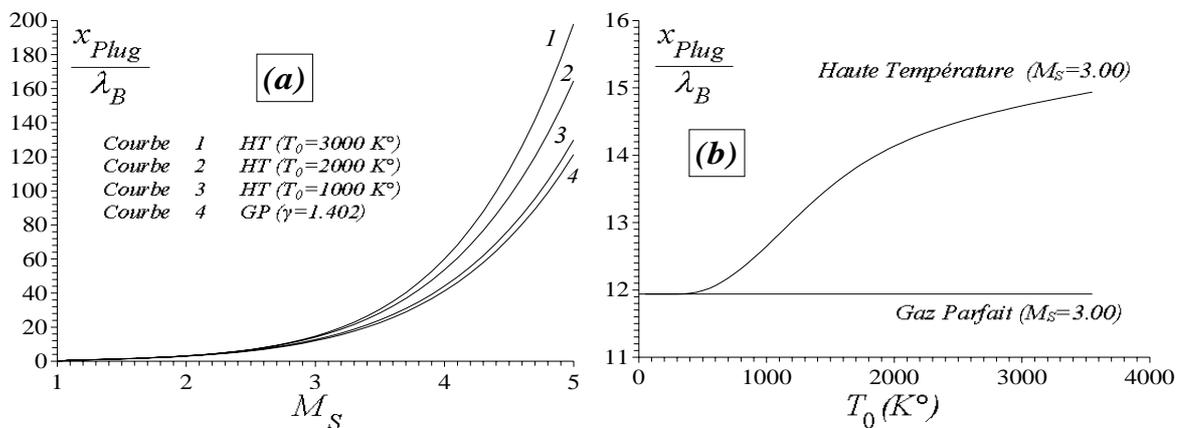


Figure 5.49 : Variation à Haute Température de  $x_{Plug}$  d'une tuyère à corps central 2D. (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S = 3.00$ .

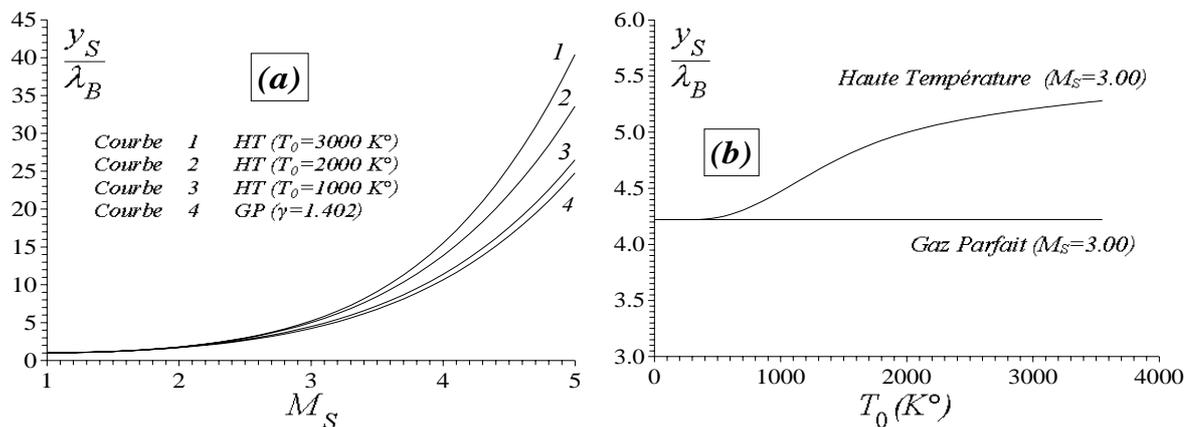


Figure 5.50 : Variation à Haute Température du rayon de sortie du corps central 2D. (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S = 3.00$ .

#### 5.4.5. Correction du nombre de Mach $M_S$ de sortie

Dans la figure 5.51, on a représenté la forme de quatre tuyères ayant toutes même section de sortie. Les courbes 3, 2 et 1 sont pour le cas *HT* lorsque  $T_0 = 1000 \text{ K}^\circ$ ,  $2000 \text{ K}^\circ$  et  $3000 \text{ K}^\circ$  respectivement. La courbe 1 correspondant au cas *GP*. On remarque que les

quatre tuyères ne délivrent pas le même  $M_S$ . Le rayon de sortie des quatre courbes correspondant au cas  $GP$  pour  $M_S=3.00$ . Il est égale à  $A_S/A^*=4.2200$ , voir tableau 5.5.

On peut démontrer qu'elles ne délivrent pas le même nombre de Mach  $M_S$  et cela à partir des relations (3.4) et (3.60) du chapitre 3. Le but de la présentation de cette figure est que, si on considère la tuyère dimensionnée sur la base et les hypothèses d'un gaz parfait pour les applications aéronautiques, on peut remarquer la dégradation des performances notamment le nombre de Mach de sortie et les autres paramètres, vu que les tuyères possèdent presque la même taille et forme, sauf une petite différence en longueur. Les résultats numériques des principaux paramètres sont présentés dans le tableau 5.33. L'écoulement dans cette différence de longueur est presque uniforme. La forme de la tuyère utilisée ne change pas, sauf le comportement thermodynamique de l'air avec la température. Vu les valeurs de l'angle  $\theta^*$ , on peut dire la tuyère du modèle  $GP$  (courbe 4) est au dessous des courbes  $HT$ , et que sa longueur est la plus grande des autres. Par exemple, lorsque  $x/y^*=3.00$ , l'ordonnée  $y/y^*$  égale respectivement à 3.077, 3.106, 3.144 et 3.156 pour les courbes 4, 3, 2 et 1.

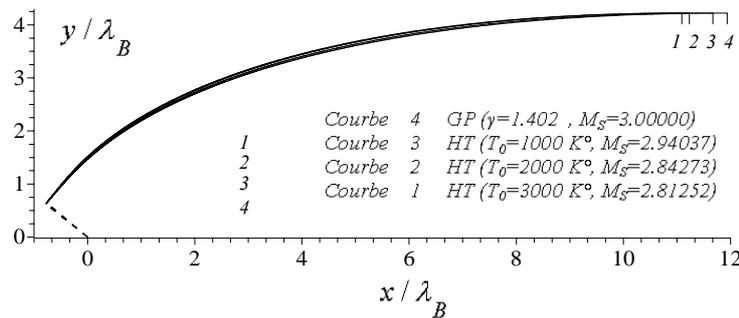


Figure 5.51 : Tuyères ayant même section de sortie.

Tableau 5.33 : Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.51.

	$M_S$	$\theta^*$ ( $^\circ$ )	$L/\lambda_B$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$C_{Gaz}$
$GP$ ( $\gamma=1.402$ )	3.0000	49.6516	12.6981	13.5943	0.7460	4.4990
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	2.9403	50.5591	12.4411	13.3601	0.7698	4.3029
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	2.8427	51.4652	12.0119	12.9589	0.8015	4.0940
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	2.8125	51.7584	11.8787	12.8348	0.8130	4.0293

#### 5.4.6. Résultats sur l'erreur du modèle du gaz parfait

La figure 5.52 représente la variation de l'erreur relative en pourcentage donnée par les paramètres de conception (la longueur de la tuyère, la masse de la structure et la force de pression) du modèle  $GP$  comparée au modèle  $HT$  pour quelques valeurs de  $T_0$ .

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $T_0$  et  $M_S$ , et elle augmente si  $T_0$  augmente. Par exemple, si  $T_0=2000\text{ K}^\circ$  et  $M_S=4.00$ , l'utilisation du modèle  $GP$  va

donner une erreur  $\varepsilon=22.86\%$  pour la longueur de la tuyère, une erreur  $\varepsilon=23.18\%$  pour la masse de la structure et une erreur  $\varepsilon=15.07\%$  pour la force de pression. On peut remarquer qu'à faible valeur de  $M_S$  et  $T_0$ , l'erreur  $\varepsilon$  est faible. Sur ces figures, la courbe 3 se trouve au dessous de l'erreur 5%. Cette position est interprétée par la possibilité d'utiliser le modèle *GP* jusqu'à  $T_0=1000\text{ K}^\circ$  pour les applications aéronautiques. Mais si  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure et dans ce cas, on peut utiliser le modèle *GP* indépendamment de  $T_0$  si  $M_S=2.00$  avec une erreur de 5% au maximum environ.

L'erreur relative donnée lorsque  $M=1$  (intersection des courbes avec l'axe vertical) peut être calculée pour chaque paramètre par les relations (5.9), (5.10) et (5.11). Concernant l'erreur donnée par la longueur et la masse, l'enlèvement de l'indétermination dans les relations (5.9) et (5.10) est faite par l'utilisation de la relation (4.38) du chapitre 4. Mais pour le calcul de l'erreur donnée par la force de pression, on utilise les relations (4.41), (4.7) et (4.47) du chapitre 4.

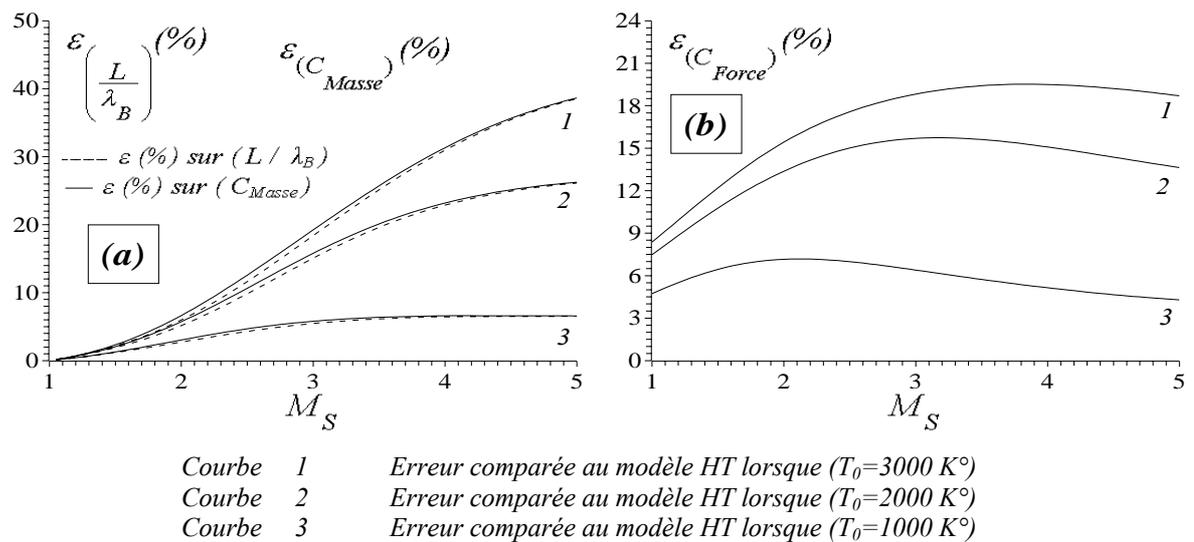


Figure 5.52 : Variation de l'erreur relative donnée par les paramètres de conception du modèle du gaz parfait en fonction du nombre de Mach de sortie.

(a) : Longueur et masse de la tuyère. (b) : Force de pression.

$$\varepsilon_{(Longueur)}(M=1) = \lim_{M \rightarrow 1 (T \rightarrow T_0)} \left| 1 - \frac{(L/y_*)_{GP}(M)}{(L/y_*)_{HT}(T)} \right| \times 100 = \left| 1 - \frac{0}{0} \right| \times 100 = 0 \text{ Quelque soit } T_0 \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_{(C_{Masse})}(M=1) = \lim_{M \rightarrow 1 (T \rightarrow T_0)} \left| 1 - \frac{(C_{Masse})_{GP}(M)}{(C_{Masse})_{HT}(T)} \right| \times 100 = \left| 1 - \frac{0}{0} \right| \times 100 = 0, \text{ quelque soit } T_0 \quad (5.10)$$

$$\varepsilon_{(C_{Force})}(M=1) = \lim_{M \rightarrow 1 (T \rightarrow T_*)} \left| 1 - \frac{(C_{Force})_{GP}(M)}{(C_{Force})_{HT}(T)} \right| \times 100 = \left| 1 - \frac{0}{0} \right| \times 100 =$$

$$\left| 1 - \frac{(P^*/P_0)_{GP}}{(P^*/P_0)_{HT}} \lim_{M \rightarrow 1 (T \rightarrow T_*)} \frac{v_{GP}}{v_{HT}} \right| \times 100 = \begin{cases} 4.724 \% \text{ lorsque } T_0=1000 \text{ K}^\circ \\ 7.474 \% \text{ lorsque } T_0=2000 \text{ K}^\circ \\ 8.368 \% \text{ lorsque } T_0=3000 \text{ K}^\circ \end{cases} \quad (5.11)$$

#### 5.4.7. Comparaison avec la configuration *MLN*

Sur la figure 5.53, on a présenté les formes des tuyères à corps central et à détente centrée pour le cas  $M_S=3.00$  et  $T_0=2000 \text{ K}^\circ$ , pour but de faire une comparaison entre ces deux types de tuyères. Les valeurs numériques de conception obtenues par les programmes sont présentées dans le tableau 5.34

On remarque clairement le gain en longueur et par conséquent en masse. Les deux tuyères délivrent même nombre de Mach de sortie puisque ont même rapport des sections de sortie, et sont obtenues sur même modèle *HT* et de même géométrie *2D*. D'après les relations (3.48) et (4.7), ainsi que les valeurs de  $\theta^*$  du tableau 5.34, on a

$$\theta^* (\text{tuyère à corps central}) = 2 \theta^* (\text{détente centrée})$$

La figure 5.54 représente la comparaison des paramètres de conception (longueur de la tuyère, masse de la tuyère, force de pression et déviation initiale de l'écoulement au col) entre ces deux types de tuyères en fonction de  $M_S$ . Sur la partie (a), nous avons présenté la comparaison de la longueur, sur la partie (b), la comparaison de la masse, et sur partie (c), la comparaison de la force de pression délivrée par le divergent.

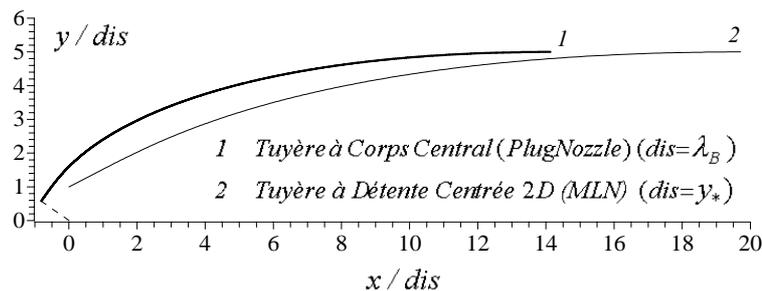


Figure 5.53 : Comparaison entre la forme de la tuyère à corps central et à détente centrée pour  $M_S=3.00$  et  $T_0=2000 \text{ K}^\circ$ .

Tableau 5.34 : Résultats du calcul des tuyères de la figure 5.53.

	$L / dis$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\theta^*$ (degré)
Tuyère à Corps Central (Plug Nozzle)	14.9493	16.1420	0.8848	54.9891
Tuyère à Détente Centrée (MLN)	19.7076	20.3444	0.3497	27.4945

Pour le cas de la figure 5.53, le gain relatif en pourcentage sur la longueur, masse de la structure et la force de pression peut arriver respectivement à 15.01 %, 15.73 %, et 15.65 %. D'après ce gain, on peut voir l'avantage d'utilisation de ce type de tuyère. Les résultats concernant la tuyère *MLN* sont présentés dans la référence [39]. Le champs d'écoulement à l'intérieur de la tuyère à corps central est divisé en zone de transition *ABS* de type simple et une zone d'écoulement uniforme, ce qui est n'est pas le cas pour la tuyère *MLN* où elle possède en plus une zone de Kernel d'écoulement non simple.

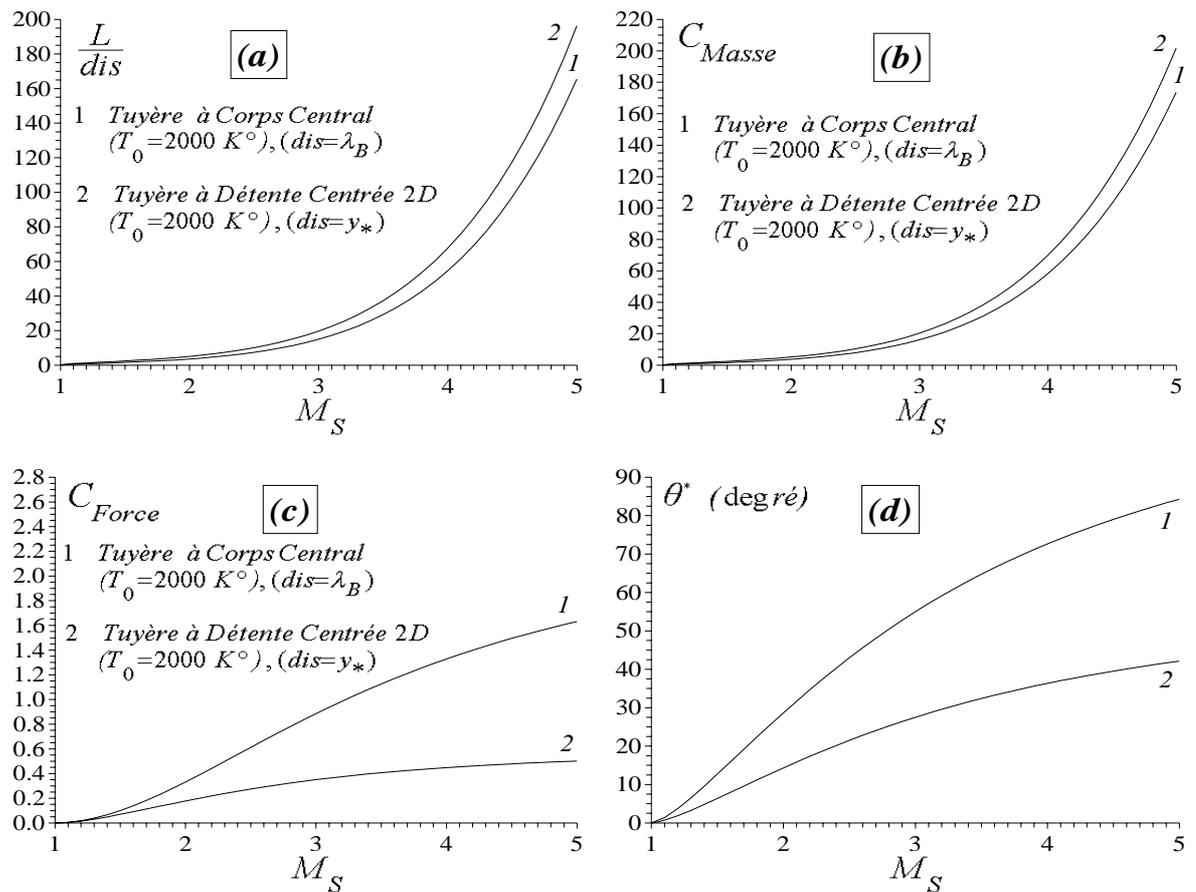


Figure 5.54 : Comparaison des paramètres de conception entre la tuyère *MLN* et la tuyère à corps central à Haute Température lorsque  $T_0 = 2000 \text{ K}^\circ$ .

(a) : Longueur de la tuyère. (b) : Masse de la tuyère. (c) : Force de pression. (d) : Angle  $\theta^*$  initiale au col

## 5.5. Résultats sur la tuyère à détente centrée axisymétrique (Axisymmetric MLN)

Dans ce présent paragraphe, on va présenter les divers résultats de dimensionnement et de conception des tuyères à détente centrée de géométrie axisymétrique.

### 5.5.1. Effet de la discrétisation sur la convergence de problème

Dans les figures 5.55 à 5.58 on a présenté des maillages en caractéristiques obtenus dans chaque région d'écoulement en jouant sur les différents paramètres intervenant pour la génération de maillage. Chaque paramètre a une importance qui va influencer sur les résultats de conception. La nature d'un écoulement supersonique dépend des conditions amont. Alors, une erreur au début du calcul (col) va se propager afin d'être assez grande à la section de sortie, sans oublier les erreurs causées par les opérations mathématiques du calcul, qu'on appelle par la viscosité artificielle. L'exemple choisi est pour  $T_0=2000\text{ K}^\circ$ ,  $M_S=3.00$  qui donne  $\theta^*=13.08$  degré. Physiquement, le champ d'écoulement nécessaire par le calcul est divisé en deux parties, celui dans la zone de Kernel et de transition, mais mathématiquement et numériquement on le divise par quatre parties, de Kernel, de transition, zone d'insertion des  $C$  supplémentaires et rapprochement de la première  $C$  régulière vers la ligne sonique. Pour chaque région on a un paramètre qui interprète le maillage obtenu et le but d'une figure parmi les quatre présentées.

La figure 5.55 présente des maillages obtenus en raffinant uniquement la zone de transition par la variation du pas  $\Delta x$  non-dimensionnel, en fixons les autres paramètres. Quelques résultats numériques obtenus pour quelques valeurs de  $\Delta x$  sont présentés dans le tableau 5.35. Il est clair en examinant l'erreur obtenue sur le rayon de sortie, que malgré la région est très bien raffinée ( $\Delta x=0.007$  degré), la progression de l'erreur n'est pas honorée, pour raison que l'erreur donnée par les trois autres régions ont influé explicitement sur les résultats dans cette région, et par conséquent sur les résultats de conception. On peut obtenir des résultats avec des erreurs arrivons à  $10^{-5}$  par exemple, si on raffine au même temps le maillage dans les autres régions. Les valeurs de  $N_C$ ,  $\theta^*$ ,  $M^*$  et la longueur de Kernel ne dépendent pas de la discrétisation de la zone de transition. Elles dépendent essentiellement de  $\Delta\theta$ ,  $N_i$  et  $\Delta$ . Pour l'exemple proposé, les valeurs obtenues sont respectivement égales à  $N_C=139$ ,  $\theta^*=13.135$  degré,  $M^*=1.513$  et  $L_d/y^*=2.7361$ .

Dans la figure 5.56 on a raffiné la zone de Kernel sans insertion des  $C$  supplémentaires. L'exemple (a) de cette figure est celui du cas (b) de la figure 5.5. En diminuant le pas  $\Delta\theta$ , on peut obtenir d'autres configurations dont trois sont présentées sur les cas (b), (c) et (d).

Les résultats numériques obtenus de conception sont présentés dans le tableau 5.37. Ici, tous les paramètres dépendent du pas  $\Delta\theta$ . En examinons l'erreur obtenue sur le rayon de sortie, le raffinement dans cette région peut diminué encore l'erreur, on peut aller à 0.03 % si on choisi  $\Delta\theta=0.005$  degré. Si on mélange le cas (d) des figures 5.55 et 5.56, on peut obtenir une erreur  $\varepsilon=10^{-5}$ .

La figure 5.57 présente quelques maillages en insèrent des  $C$  supplémentaires avec  $\Delta=2$ . Le cas (a) de cette figure est celui le cas (a) de la figure 5.56 sans effet de condensation. Dans les trois autres cas (b), (c) et (d), on a inséré respectivement  $N_i=5$ ,  $N_i=10$  et  $N_i=50$   $C$ . Les résultats numériques de conception obtenus sont présentés dans le tableau 5.37. En examinons l'erreur obtenu pour chaque valeurs de  $N_i$ , on peut remarqué qu'on peut aller à une précision  $\varepsilon=10^{-4}$ . On note que les résultats obtenus dans la région de Kernel dépendent des résultats après l'insertion des  $C$  supplémentaires. De point de vu présentation de la tuyère au col, on remarque qu'il y a fermeture progressive vers le col ainsi que la diminution de la distance entre la première  $C$  (insérée) et la ligne sonique.

Dans la figure 5.58, on a présenté des maillages en changeant que le coefficient  $\Delta$  de la fonction (3.50), pour but de bien présenté la paroi au col de la tuyère. Alors, si  $\Delta$  est grand, la distance entre la ligne sonique et la première  $C$  diminue d'une façon remarquable qui influe sur la présentation de la paroi au col et notamment sur les résultats de conception. Les résultats numériques de conception pour différentes valeurs de  $\Delta$  sont présentés dans le tableau 5.38. En examinons les résultats obtenus dans le tableau 5.37 lorsque  $N=10$  et les résultats obtenus dans le tableau 5.38, on peut remarquer qu'on peut aller d'une erreur  $10^{-3}$  à  $10^{-4}$ , ce qui donne l'influence de ce coefficient sur le maillage et les résultats de conception.

Si on prend les paramètres du cas (d) de chaque figure dans une même figure, on peut obtenir une erreur  $\varepsilon=10^{-6}$  environ.

Le nombre de points  $N_C$  obtenus sur la dernière  $C$  de la région de Kernel dépend des paramètres suivants :

$$N_C = f(M_S, T_0, \Delta\theta, N_i, \Delta) \quad (5.12)$$

Il ne dépend pas du paramètre  $\Delta x$  de la région de transition.

Quelques valeurs de  $N_C$  obtenus en changeant le nombre de Mach de sortie et en fixons la température  $T_0$  sont présentées dans le tableau 5.39. En changeant  $T_0$  et en fixons  $M_S$  est le but du tableau 5.40. D'après les deux tableaux, on peut dire que si  $M_S$  et  $T_0$  augmente, la

tuyère aura une longueur grande et par conséquent demande des  $C$  en plus, ce qui donne l'augmentation de  $N_C$ .

On remarque qu'il est très intéressant de raffiner le maillage sur la paroi au voisinage du col. En conclusion sur les figures 5.55 à 5.58, on peut dire qu'on peut concevoir une tuyère avec un nombre modéré de points sur la paroi si on utilise la technique de raffinement ou insertion des  $C$  supplémentaires.

Le nombre de points  $N_W$  trouvés sur la paroi de la tuyère est toujours supérieure au nombre  $N_C$  de points sur la dernière  $C$   $AB$  de la zone de Kernel, ce qui n'est pas le cas pour la géométrie bidimensionnelle, où il dépend essentiellement des paramètres suivants :

$$N_W = f(N_C, \Delta x, \text{disposition des points sur la } C^+ BS) \quad (5.13)$$

Quelques valeurs obtenues sont présentées dans le tableau 5.41 pour  $M_S=3.00$  et  $T_0=2000 K^\circ$  sans  $C$  insérées. Les valeurs de  $N_C$  et  $N_W$  correspondant aux valeurs du tableau 5.38 sont égales respectivement à 1323 et 1992.

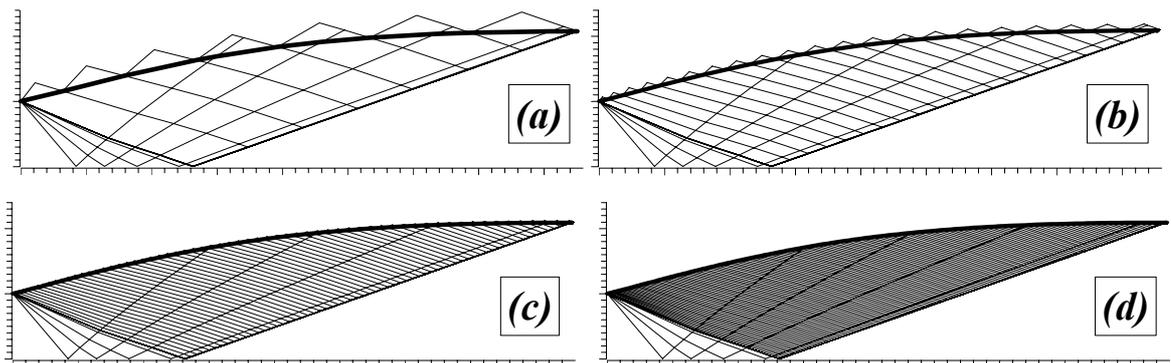


Figure 5.55 : Raffinement du maillage dans la zone de transition sans insertion des caractéristiques supplémentaires avec  $\Delta\theta=3.0$  degré.

(a) : Zone de transition faible avec  $\Delta x=0.89$ . (b) : Zone de transition modérée avec  $\Delta x=0.3$ . (c) : Zone de transition assez fin avec  $\Delta x=0.1$ . (d) : Zone de transition fin  $\Delta x=0.045$ .

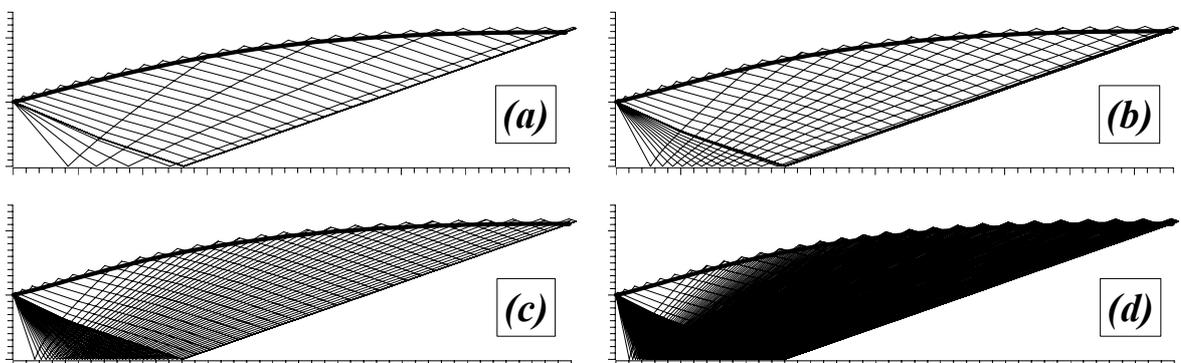


Figure 5.56 : Raffinement du maillage dans la zone de Kernel de la tuyère  $MLN$  axisymétrique sans insertion des  $C$  supplémentaire avec  $\Delta x=0.30$ .

(a) : Zone de Kernel gros avec  $\Delta\theta=3.0$ . (b) : Zone de Kernel modéré avec  $\Delta\theta=1.0$ .  
(c) : Zone de Kernel assez fin avec  $\Delta\theta=0.28$ . (d) : Zone de Kernel fin avec  $\Delta\theta=0.07$ .

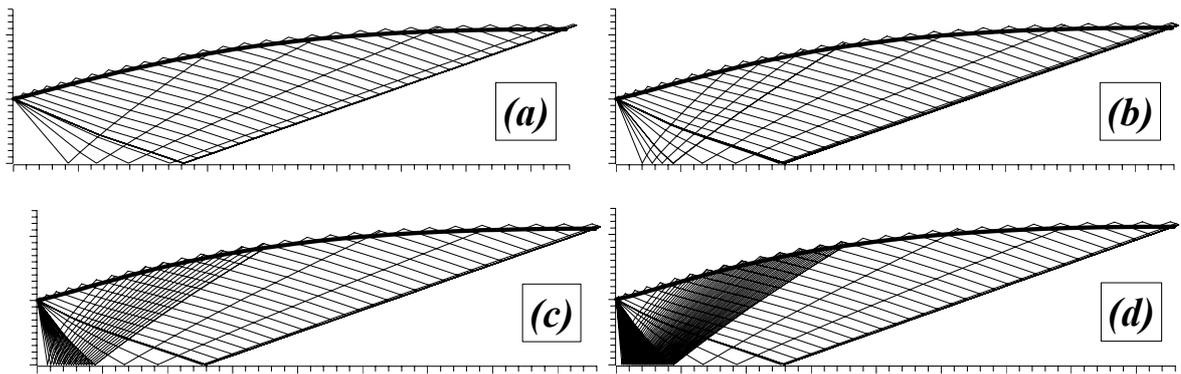


Figure 5.57 : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel de la tuyère *MLN* axisymétrique avec  $\Delta=2$ ,  $\Delta\theta=3.0$  et  $\Delta x=0.23$   
**(a)** : Sans insertion  $N_i=0$ . **(b)** : Insertion avec  $N_i=5$ . **(c)** : Insertion avec  $N_i=20$ . **(d)** : Insertion avec  $N_i=50$ .

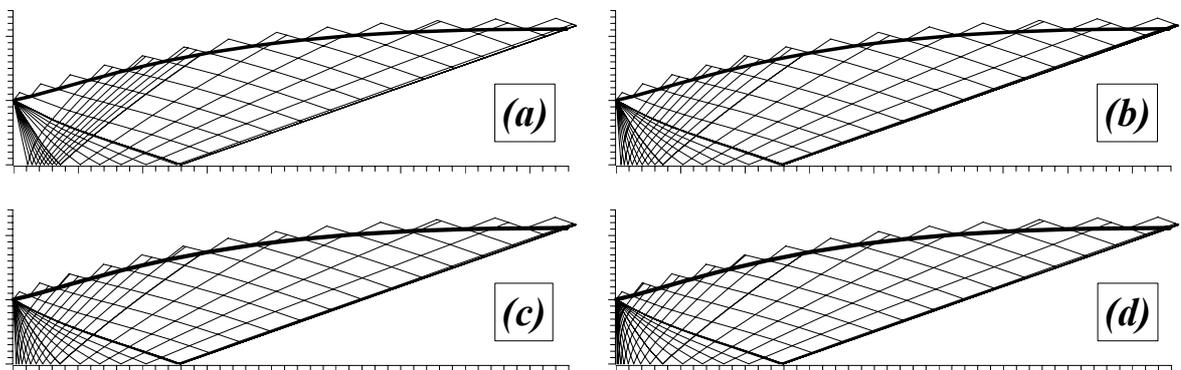


Figure 5.58 : Effet du coefficient  $\Delta$  sur la qualité du maillage en caractéristique dans une tuyère *MLN* axisymétrique avec  $\Delta\theta=2.0$  degré,  $\Delta x=0.5$  et  $N_i=10$ .  
**(a)** :  $\Delta=2$ . **(b)** :  $\Delta=4$ . **(c)** :  $\Delta=5$ . **(d)** :  $\Delta=7$ .

### 5.5.2. Effet de la température génératrice sur l'allure de la paroi

La figure 5.59 présente l'allure de la tuyère obtenue lorsque le nombre de Mach  $M_S=1.50$ . Les valeurs numériques des paramètres du dimensionnement sont présentées dans le tableau 5.42. D'après les formes obtenues et les résultats numériques, on remarque une petite différence entre les quatre courbes.

La figure 5.60 présente l'allure de la tuyère obtenue lorsque le nombre de Mach  $M_S=2.00$ . Les valeurs numériques des paramètres du dimensionnement sont présentées dans le tableau 5.43. D'après les formes obtenues et les résultats numériques, on remarque que la différence est toujours petite mais avec une erreur grande par rapport au cas de la figure 5.59.

En augmentons la valeur de  $M_S$  de 3.00, 4.00, 5.00 à 6.00 et pour chaque cas, on fait le traçage des formes des tuyères obtenues, on obtient les figures 5.61 à 5.64. Les valeurs numériques du dimensionnement pour chaque figure sont présentées respectivement dans les tableaux 5.44 à 5.47.

Tableau 5.35 : Effet de raffinement de la zone de transition sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère *MLN* axisymétrique pour  $T_0=2000\text{ K}^\circ$ ,  $M_S=3.00$ ,  $\Delta\theta=0.1\text{ degré}$  et  $N_i=0$ .

$\Delta x$	$N_w$	$\frac{y_S}{y^*}$	$\theta_{Max} (\text{°})$	$\frac{L}{y^*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\mathcal{E} (\%)$
2.0	143	2.20007	15.85372	8.48258	35.5231	0.3022	3.153
1.0	146	2.22219	16.73239	8.89115	34.6820	0.3153	1.168
0.7	149	2.22689	16.71681	8.90996	34.8156	0.3203	0.741
0.5	153	2.22960	16.75933	8.92081	34.8931	0.3247	0.496
0.3	162	2.23158	16.81499	8.96665	34.7822	0.3291	0.318
0.1	206	2.23271	16.82392	9.05048	34.4627	0.3335	0.216
0.07	235	2.23279	16.82606	9.04269	34.5018	0.3342	0.209
0.05	273	2.23285	16.82793	9.05105	34.4671	0.3345	0.204
0.03	363	2.23290	16.82848	9.04312	34.5049	0.3349	0.199
0.01	809	2.23291	16.82830	9.05132	34.4691	0.3355	0.1983
0.007	1096	2.23292	16.82842	9.05133	34.4673	0.3356	0.1982
0.005	1479	2.23292	16.82814	9.05133	34.4692	0.3357	0.1980

Tableau 5.36 : Effet de raffinement de la zone de Kernel sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère *MLN* axisymétrique pour  $T_0=2000\text{ K}^\circ$ ,  $M_S=3.00$ ,  $\Delta x=0.05$  et  $N_i=0$ .

$\Delta\theta (\text{°})$	$\frac{y_S}{y^*}$	$\theta^* (\text{°})$	$M^*$	$\theta_{Max} (\text{°})$	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\mathcal{E} (\%)$
2.0	2.21530	13.4858	1.5240	16.1048	2.7615	9.0257	34.0182	0.2875	1.798
1.0	2.22311	13.3193	1.5188	16.3022	2.7509	9.0263	34.2717	0.3059	1.084
0.7	2.22588	13.2668	1.5172	16.3998	2.7474	9.0340	34.3327	0.3129	0.832
0.5	2.22792	13.2285	1.5160	16.4881	2.7444	9.0393	34.3708	0.3182	0.647
0.3	2.23017	13.1868	1.5147	16.6100	2.7410	9.0450	34.4155	0.3249	0.445
0.1	2.23285	13.1350	1.5131	16.8279	2.7361	9.0510	34.4671	0.3345	0.204
0.07	2.23333	13.1248	1.5128	16.8859	2.7351	9.0317	34.5667	0.3366	0.160
0.05	2.23369	13.1171	1.5125	16.9382	2.7343	9.0323	34.5733	0.3383	0.128
0.03	2.23410	13.1080	1.5122	17.0079	2.7333	9.0329	34.5805	0.3406	0.092
0.01	2.23460	13.0956	1.5118	17.1046	2.7319	9.0336	34.5893	0.3435	0.047
0.007	2.23470	13.0930	1.5118	17.1049	2.7315	9.0337	34.5909	0.3443	0.038
0.005	2.23478	13.0909	1.5117	17.1027	2.7313	9.0337	34.5922	0.3449	0.031

Tableau 5.37 : Effet d'addition des  $C$  dans la région de Kernel sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère *MLN* axisymétrique pour  $T_0=2000\text{ K}^\circ$ ,  $M_S=3.00$ ,  $\Delta\theta=0.01\text{ degré}$ ,  $\Delta x=0.01$  et  $\Delta=3$ .

$N_i$	$\frac{y_S}{y^*}$	$\theta^* (\text{°})$	$M^*$	$\theta_{Max} (\text{°})$	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\mathcal{E} (\%)$
0	2.23464	13.09566	1.51189	17.10555	2.73190	9.04997	34.51844	0.3443	0.043
1	2.23464	13.09566	1.51189	17.10555	2.73190	9.04997	34.51844	0.3443	0.043
2	2.23464	13.09566	1.51189	17.10555	2.73190	9.04997	34.51844	0.3443	0.043
5	2.23503	13.08425	1.51153	17.10015	2.73052	9.05014	34.52450	0.3472	$9.1 \cdot 10^{-3}$
10	2.23510	13.08179	1.51146	17.10109	2.73020	9.05011	34.52541	0.3481	$3.0 \cdot 10^{-3}$
15	2.23511	13.08117	1.51144	17.10132	2.73011	9.05008	34.52557	0.3484	$1.6 \cdot 10^{-3}$
20	2.23512	13.08093	1.51143	17.10145	2.73009	9.05008	34.52566	0.3486	$1.1 \cdot 10^{-3}$
30	2.23512	13.08074	1.51142	17.10137	2.73007	9.05008	34.52574	0.3488	$6.9 \cdot 10^{-4}$
50	2.23512	13.08058	1.51142	17.10172	2.73005	9.05007	34.52574	0.3489	$4.3 \cdot 10^{-4}$
70	2.23512	13.08054	1.51142	17.10120	2.73004	9.05007	34.52576	0.3490	$3.6 \cdot 10^{-4}$
80	2.23513	13.08054	1.51142	17.10168	2.73004	9.05007	34.52578	0.3490	$3.2 \cdot 10^{-4}$

Tableau 5.38 : Effet du coefficient  $\Delta$  sur la convergence des paramètres de conception de la tuyère *MLN* axisymétrique pour  $T_0=2000\text{ K}^\circ$ ,  $M_S=3.00$ ,  $\Delta\theta=0.01\text{ degré}$ ,  $\Delta x=0.01$  et  $N_i=10$ .

$\Delta$	$\frac{y_S}{y^*}$	$\theta^* (\text{°})$	$M^*$	$\theta_{Max} (\text{°})$	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\mathcal{E} (\%)$
1	2.23494	13.08699	1.51162	17.1031	2.73086	9.05015	34.52328	0.3465	$1.6\ 10^{-2}$
2	2.23505	13.08335	1.51151	17.1018	2.73040	9.05014	34.52489	0.3476	$6.6\ 10^{-3}$
3	2.23510	13.08179	1.51146	17.1010	2.73020	9.05011	34.52541	0.3481	$3.0\ 10^{-3}$
4	2.23511	13.08113	1.51144	17.1018	2.73012	9.05017	34.52523	0.3484	$1.5\ 10^{-3}$
5	2.23512	13.08085	1.51143	17.1011	2.73008	9.05019	34.52515	0.3485	$1.0\ 10^{-3}$
6	2.23512	13.08074	1.51142	17.0998	2.73007	9.05020	34.52510	0.3485	$8.4\ 10^{-4}$
7	2.23512	13.08070	1.51142	17.0988	2.73006	9.05020	34.52506	0.3485	$8.3\ 10^{-4}$
8	2.23512	13.08070	1.51142	17.0984	2.73006	9.05020	34.52507	0.3486	$8.1\ 10^{-4}$

Entre les figures présentées, on peut dire que si  $T_0$  augmente, l'écart entre le modèle *GP* et notre modèle *HT* agrandie et devient considérable si  $T_0 > 1000\text{ K}^\circ$  environ, indépendamment au nombre de Mach  $M_S$ , ou à partir du  $M_S > 2.00$  pour n'importe quelle température  $T_0$ . Cette limite peut être trouvée si on opte une erreur  $\mathcal{E}$  inférieure à 5%.

Avant le remplissage les tableaux 5.42 à 5.47, on a fait une étude sur la discrétisation de la paroi en varions et en augmentons les nombres  $N$ ,  $N_i$  et  $\Delta$ , et chaque fois on détermine les paramètres de dimensionnement, et on calcul l'erreur relative donnée par le rayon de sortie non-dimensionnel en utilisant la relation (5.3) jusqu'à satisfaire une précision  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Les rapports  $y_S/y^*$  calculé et théorique sont déterminés respectivement par les relations (3.77) et (3.78).

On a remarqué que la longueur de détente, la longueur de la tuyère, la masse de la structure et la force de pression convergent avant la convergence du rayon de la section de sortie vers la solution exacte. Cette propriété est un avantage, afin de contrôler que la convergence du rayon de la sortie. On remarque encore, que les paramètres convergent par une voie décroissante, c'est-à-dire que la solution exacte est toujours inférieure à la solution numérique calculée. On remarque encore que ce type de tuyère possède un point d'inflexion ayant un angle  $\theta_{max}$  situé proche du col. Alors, l'angle de déviation de la paroi augmente de  $\theta^*$  à  $\theta_{max}$  ensuite diminue progressivement jusqu'à  $\theta=0$  à la section de sortie. Les positions des points d'inflexions, pour quelques valeurs de  $M_S$  [3] et  $T_0$  y compris le cas du gaz parfait sont présentées dans le tableau 5.48. A titre information, le nombre de Mach et l'angle de déviation de l'écoulement, ainsi que les rapports thermodynamiques sont présentées respectivement dans les tableaux 5.49 et 5.50.

Tableau 5.39 : Effet du nombre de Mach de sortie sur le nombre de points obtenus sur la dernière  $C$  de la zone de Kernel de la tuyère  $MLN$  axisymétrique lorsque  $T_0=2000 K^\circ$  sans effet de condensation.

$N_C$	$M_S=1.50$	$M_S=2.00$	$M_S=3.00$	$M_S=4.00$	$M_S=5.00$	$M_S=6.00$
$\Delta\theta=2.0^\circ$	9	15	16	20	22	22
$\Delta\theta=1.0^\circ$	10	14	21	26	32	34
$\Delta\theta=0.7^\circ$	10	17	31	36	40	42
$\Delta\theta=0.5^\circ$	12	24	38	43	50	56
$\Delta\theta=0.3^\circ$	13	28	52	69	79	88
$\Delta\theta=0.1^\circ$	32	69	139	185	217	248
$\Delta\theta=0.07^\circ$	45	96	197	265	315	344
$\Delta\theta=0.05^\circ$	59	134	270	363	432	481
$\Delta\theta=0.03^\circ$	91	218	445	605	721	799
$\Delta\theta=0.01^\circ$	265	637	1313	1801	2139	2378
$\Delta\theta=0.007^\circ$	377	905	1876	2574	3053	3394
$\Delta\theta=0.005^\circ$	525	3264	2622	3601	4271	4748

Tableau 5.40 : Effet de la température  $T_0$  sur le nombre de points obtenus sur la dernière  $C$  de la zone de Kernel de la tuyère à détente centrée axisymétrique lorsque  $M_S=3.00$  sans effet de condensation.

$N_C$	$GP (\gamma=1.402)$	$T_0=1000 K^\circ$	$T_0=2000 K^\circ$	$T_0=3500 K^\circ$
$\Delta\theta=2.0^\circ$	14	15	16	15
$\Delta\theta=1.0^\circ$	20	23	21	23
$\Delta\theta=0.7^\circ$	24	28	31	27
$\Delta\theta=0.5^\circ$	28	33	38	31
$\Delta\theta=0.3^\circ$	42	49	52	53
$\Delta\theta=0.1^\circ$	107	133	139	143
$\Delta\theta=0.07^\circ$	148	182	197	201
$\Delta\theta=0.05^\circ$	206	252	270	278
$\Delta\theta=0.03^\circ$	334	415	445	456
$\Delta\theta=0.01^\circ$	993	1233	1313	1355
$\Delta\theta=0.007^\circ$	1417	1757	1876	1933
$\Delta\theta=0.005^\circ$	1983	2456	2622	2705

Tableau 5.41 : Nombre de points obtenus sur la paroi de la tuyère à détente centrée axisymétrique lorsque  $M_S=3.00$  et  $T_0=2000 K^\circ$  sans  $C$  insérées.

$N_w$	$\Delta x=0.5$	$\Delta x=0.3$	$\Delta x=0.1$	$\Delta x=0.05$	$\Delta x=0.03$	$\Delta x=0.01$	$\Delta x=0.007$	$\Delta x=0.005$
$\Delta\theta=2.0^\circ$	30	39	83	149	238	681	966	1346
$\Delta\theta=1.0^\circ$	35	44	88	155	244	689	974	1356
$\Delta\theta=0.7^\circ$	45	54	98	165	254	699	986	1367
$\Delta\theta=0.5^\circ$	52	61	105	172	261	707	993	1375
$\Delta\theta=0.3^\circ$	66	75	119	186	276	722	1008	1391
$\Delta\theta=0.1^\circ$	153	162	206	273	363	809	1096	1479
$\Delta\theta=0.07^\circ$	211	220	264	332	421	868	1155	1538
$\Delta\theta=0.05^\circ$	284	293	338	405	494	941	1228	1611
$\Delta\theta=0.03^\circ$	459	468	513	580	669	1116	1403	1786
$\Delta\theta=0.01^\circ$	1327	1336	1381	1448	1537	1984	2271	2654
$\Delta\theta=0.007^\circ$	1890	1899	1944	2011	2100	2547	2834	3217
$\Delta\theta=0.005^\circ$	2636	2645	2690	2757	2846	3293	3580	3963

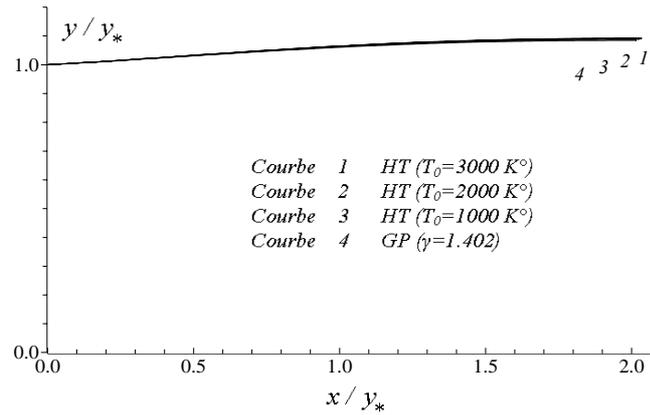
Figure 5.59 : Tuyères à détente centrée axisymétrique donnant à la sortie  $M_S=1.50$ .

Tableau 5.42 : Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.59.

	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	$\frac{y_S}{y^*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
GP ( $\gamma=1.402$ )	0.8035	2.0143	2.4138	3.7584	1.1515	1.0843	4.2573	0.0615
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	0.8087	2.0242	2.5226	3.9190	1.1525	1.0882	4.2871	0.0654
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	0.8126	2.0302	2.5896	4.0185	1.1534	1.0907	4.3094	0.0686
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	0.8140	2.0332	2.6123	4.0521	1.1537	1.0916	4.3153	0.0698

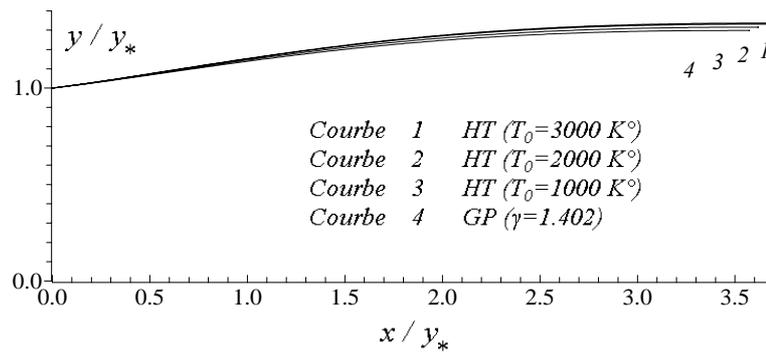
Figure 5.60 : Tuyères à détente centrée axisymétrique donnant à la sortie  $M_S=2.00$ .

Tableau 5.43 : Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.60.

	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	$\frac{y_S}{y^*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
GP ( $\gamma=1.402$ )	1.3253	3.5731	5.7466	8.2830	1.2846	1.2984	8.6117	0.1548
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	1.3426	3.6193	6.0372	8.6699	1.2870	1.3150	8.8087	0.1653
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	1.3629	3.6668	6.2874	9.0044	1.2913	1.3307	9.0070	0.1771
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	1.3700	3.6831	6.3742	9.1204	1.2929	1.3362	9.0775	0.1814

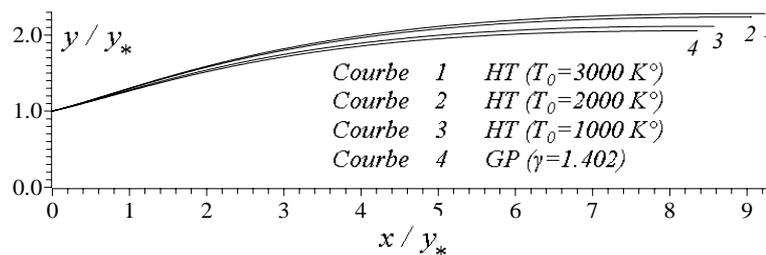
Figure 5.61 : Tuyères à détente centrée axisymétrique donnant à la sortie  $M_S=3.00$ .

Tableau 5.44 : Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.61.

	$\frac{L_d}{y_*}$	$\frac{L}{y_*}$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	$\frac{y_S}{y_*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
GP ( $\gamma=1.402$ )	2.5457	8.3554	11.7091	15.4652	1.4938	2.0542	29.5532	0.2983
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	2.5958	8.5759	12.2434	16.1048	1.4949	2.1145	31.1362	0.3162
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	2.7300	9.0508	13.0807	17.1019	1.5114	2.2351	34.5225	0.3490
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	2.7817	9.2351	13.3874	17.4638	1.5174	2.2818	35.8782	0.3625

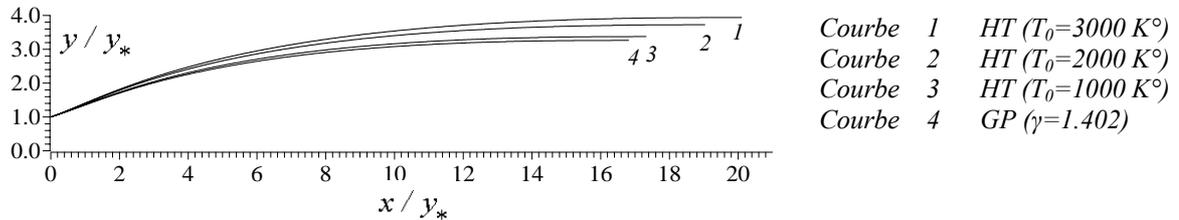
Figure 5.62 : Tuyères à détente centrée axisymétrique donnant à la sortie  $M_S=4.00$ .

Tableau 5.45 : Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.62.

	$\frac{L_d}{y_*}$	$\frac{L}{y_*}$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	$\frac{y_S}{y_*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
GP ( $\gamma=1.402$ )	4.1774	16.8144	16.1020	20.2781	1.6427	3.2629	91.1279	0.3818
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	4.2568	17.3278	16.7005	20.9600	1.6387	3.3750	97.0316	0.4014
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	4.6139	19.0335	17.9694	22.3864	1.6631	3.7231	116.9732	0.4462
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	4.8465	20.1012	18.6250	23.1071	1.6777	3.9387	130.2840	0.4699

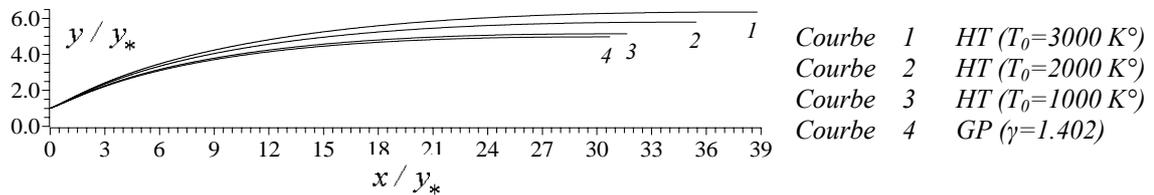
Figure 5.63 : Tuyères à détente centrée axisymétrique donnant à la sortie  $M_S=5.00$ .

Tableau 5.46 : Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.63.

	$\frac{L_d}{y_*}$	$\frac{L}{y_*}$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	$\frac{y_S}{y_*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
GP ( $\gamma=1.402$ )	6.3312	30.7030	19.2722	23.5528	1.7509	4.9748	249.8253	0.4306
$T_0=1000\text{ K}^\circ$	6.4385	31.6488	19.8805	24.2277	1.7419	5.1460	266.3443	0.4505
$T_0=2000\text{ K}^\circ$	7.0652	35.4476	21.3163	25.7970	1.7670	5.7935	334.9706	0.4995
$T_0=3000\text{ K}^\circ$	7.6553	38.7904	22.2585	26.7937	1.7888	6.3554	400.9872	0.5297

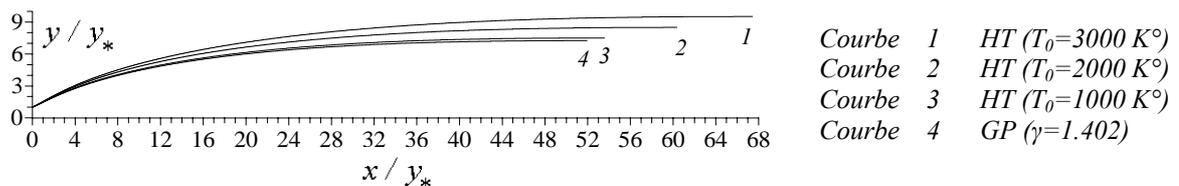
Figure 5.64 : Tuyères à détente centrée axisymétrique donnant à la sortie  $M_S=6.00$ .

Tableau 5.47 : Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.64.

	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	$\frac{y_s}{y^*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
GP ( $\gamma=1.402$ )	9.0873	51.9449	21.6141	25.8751	1.8319	7.2440	611.3943	0.4597
$T_0=1000 K^\circ$	9.2344	53.5639	22.2279	26.5444	1.8190	7.4928	652.2294	0.4799
$T_0=2000 K^\circ$	10.1522	60.3605	23.7059	28.1349	1.8419	8.4865	831.6022	0.5302
$T_0=3000 K^\circ$	11.1976	67.4405	24.7883	29.2554	1.8670	9.5064	1038.9061	0.5629

Tableau 5.48 : Position du point d'inflexion de la tuyère à détente centrée axisymétrique.

	GP ( $\gamma=1.402$ )		HT ( $T_0=1000 K^\circ$ )		HT ( $T_0=2000 K^\circ$ )		HT ( $T_0=3000 K^\circ$ )	
	$x/y^*$	$y/y^*$	$x/y^*$	$y/y^*$	$x/y^*$	$y/y^*$	$x/y^*$	$y/y^*$
$M_S=1.50$	0.4317	1.0261	0.4333	1.0274	0.4344	1.0281	0.4340	1.0284
$M_S=2.00$	0.5666	1.0769	0.5703	1.0811	0.5715	1.0845	0.5739	1.0860
$M_S=3.00$	0.7074	1.1845	0.7137	1.1945	0.7228	1.2100	0.7338	1.2182
$M_S=4.00$	0.8239	1.2894	0.8227	1.2998	0.8400	1.3295	0.8535	1.3471
$M_S=5.00$	0.9125	1.3803	0.8947	1.3849	0.8951	1.4137	0.9013	1.4354
$M_S=6.00$	0.9503	1.4419	0.9295	1.4452	0.9287	1.4761	0.9353	1.5025

Tableau 5.49 : Valeurs de  $M$  et  $\theta$  aux points d'inflexion de la tuyère  $MLN$  axisymétrique.

	GP ( $\gamma=1.402$ )		HT ( $T_0=1000 K^\circ$ )		HT ( $T_0=2000 K^\circ$ )		HT ( $T_0=3000 K^\circ$ )	
	$M$	$\theta$ (degré)	$M$	$\theta$ (degré)	$M$	$\theta$ (degré)	$M$	$\theta$ (degré)
$M_S=1.50$	1.2765	3.7587	1.2775	3.9192	1.2785	4.0187	1.2788	4.0523
$M_S=2.00$	1.5032	8.2892	1.5053	8.6698	1.5099	9.0044	1.5120	9.1199
$M_S=3.00$	1.8430	15.4645	1.8423	16.1035	1.8615	17.0992	1.8710	17.4614
$M_S=4.00$	2.0892	20.2754	2.0778	20.9573	2.1057	22.3850	2.1244	23.1066
$M_S=5.00$	2.2690	23.5504	2.2436	24.2253	2.2618	25.7960	2.2894	26.7930
$M_S=6.00$	2.3943	25.8733	2.3624	26.5422	2.3745	28.1343	2.4049	29.2551

Tableau 5.50 : Valeurs de  $T/T_0$  et  $\rho/\rho_0$  aux points d'inflexion de la tuyère  $MLN$  axisymétrique.

	GP ( $\gamma=1.402$ )		HT ( $T_0=1000 K^\circ$ )		HT ( $T_0=2000 K^\circ$ )		HT ( $T_0=3000 K^\circ$ )	
	$T/T_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$\rho/\rho_0$	$T/T_0$	$\rho/\rho_0$
$M_S=1.50$	0.7532	0.4942	0.7789	0.4852	0.8010	0.4806	0.8089	0.4792
$M_S=2.00$	0.6876	0.3939	0.7149	0.3822	0.7414	0.3744	0.7509	0.3715
$M_S=3.00$	0.5942	0.2739	0.6221	0.2618	0.6508	0.2475	0.6613	0.2418
$M_S=4.00$	0.5326	0.2087	0.5614	0.1992	0.5907	0.1830	0.6007	0.1755
$M_S=5.00$	0.4914	0.1708	0.5215	0.1642	0.5541	0.1504	0.5631	0.1419
$M_S=6.00$	0.4646	0.1485	0.4945	0.1430	0.5287	0.1305	0.5379	0.1222

### 5.5.3. Variation des paramètres à travers la paroi de la tuyère

La figure 5.65 représente la variation des rapports thermodynamiques ( $T/T_0$ ,  $\rho/\rho_0$ ,  $P/P_0$ ) le long de la paroi des tuyères  $MLN$  axisymétrique à haute température. On remarque une diminution des paramètres sans existence de la portion uniforme comme pour le cas bidimensionnel. L'effet de  $T_0$  sur ces paramètres est bien présenté.

Le rapport  $T/T_0$  présenté sur la partie (a) nous permet de faire un choix convenable du matériau de construction qui va résisté à cette distribution. Au cours de la détente, le gaz va

se refroidi, où la température  $T^*$  est toujours supérieure à  $T_S$ , ou même la plus grande dans la portion supersonique. Le modèle  $GP$  indique un refroidissement par rapport au comportement thermodynamique réel, surtout si  $T_0$  est élevée, par exemple si  $T_0=2000\text{ K}^\circ$ , on aura  $T^*=1665\text{ K}^\circ$ ,  $T_S=1108\text{ K}^\circ$  pour le modèle  $GP$  et  $T^*=1737\text{ K}^\circ$  et  $T_S=1232\text{ K}^\circ$  pour le modèle  $HT$ , qui donne une différence de  $72\text{ K}^\circ$  au col et  $124\text{ K}^\circ$  à la sortie.

Le rapport  $P/P_0$  servira pour déterminer la force de pression exercée sur la paroi du divergent. Il nous servira encore pour déterminer la condition à la limite interne pour faire l'étude de transfert de chaleur à travers le matériau de la paroi.

Le rapport  $\rho/\rho_0$  présenté sur la figure 5.64b servira pour déterminer la quantité du gaz qui va traverser le divergent, afin de déterminer la durée de vie du carburant.

La figure 5.66 représente la variation de l'angle de déviation de l'écoulement à travers la paroi de la tuyère. On remarque l'existence d'un point d'inflexion proche du col, d'où l'écoulement se détend de  $\theta=0$  à  $\theta=\theta^*$  au col (détente brusque), à  $\theta=\theta_{max}$  au point d'inflexion ensuite se redresse à  $\theta=0$  à la sortie de la tuyère. L'intersection des quatre courbes avec l'axe vertical représente la valeur de  $\theta=\theta^*$  présentée dans le tableau 5.44. Les valeurs de  $\theta=\theta_{max}$  sont présentées dans le tableau 5.49.

Il n'existe aucune formule analytique reliant les paramètres  $\theta^*$  et  $M_S$  pour la géométrie axisymétrique, contrairement au cas  $2D$ , la relation 3.48 est vérifiée. On remarque que la valeur de  $\theta^*$  du cas axisymétrique est inférieure à  $\theta^*$  du cas bidimensionnel. Alors :

$$\theta_{axisymétrique}^* < \frac{\theta_{bidimensionnel}^*}{2} \quad (5.12)$$

La figure 5.67 représente la variation du nombre de Mach à travers la paroi de la tuyère ainsi qu'à travers l'axe de symétrie. Cette figure montre l'augmentation du nombre de Mach qui s'interprète par la détente du gaz. Entre les figures 5.67a et 5.65c, l'augmentation du nombre de Mach donne une diminution de pression. L'intersection des quatre courbes de la figure 5.67a avec l'axe vertical donne les valeurs de  $M^*$  du col présentées dans le tableau 5.44. En ce point on a une variation brusque de  $M=1$  à  $M=M^*$  juste après la détente. On remarque que les valeurs de  $M^*$  du cas axisymétrique sont inférieure aux valeurs du cas bidimensionnel. La longueur de Kernel est différente pour les quatre courbes.

La figure 5.67 démontre que l'écoulement est bidimensionnel et vu que la géométrie est axisymétrique, l'écoulement est tridimensionnel. Entre la présentation et la méthode du calcul, ce type d'écoulement est appelée quasi-tridimensionnel. Pour une section donnée, le

nombre de Mach diminue suivant le rayon de la tuyère. Par exemple pour  $T_0=3000\text{ K}^\circ$  et  $x/y_*=2.00$ , on aura environ  $M=2.56$  sur l'axe de symétrie et  $M=2.21$  sur la paroi.

Les rapports thermodynamiques correspondant au nombre de Mach  $M=M^*$  juste après la détente sont présentées dans le tableau 5.51.

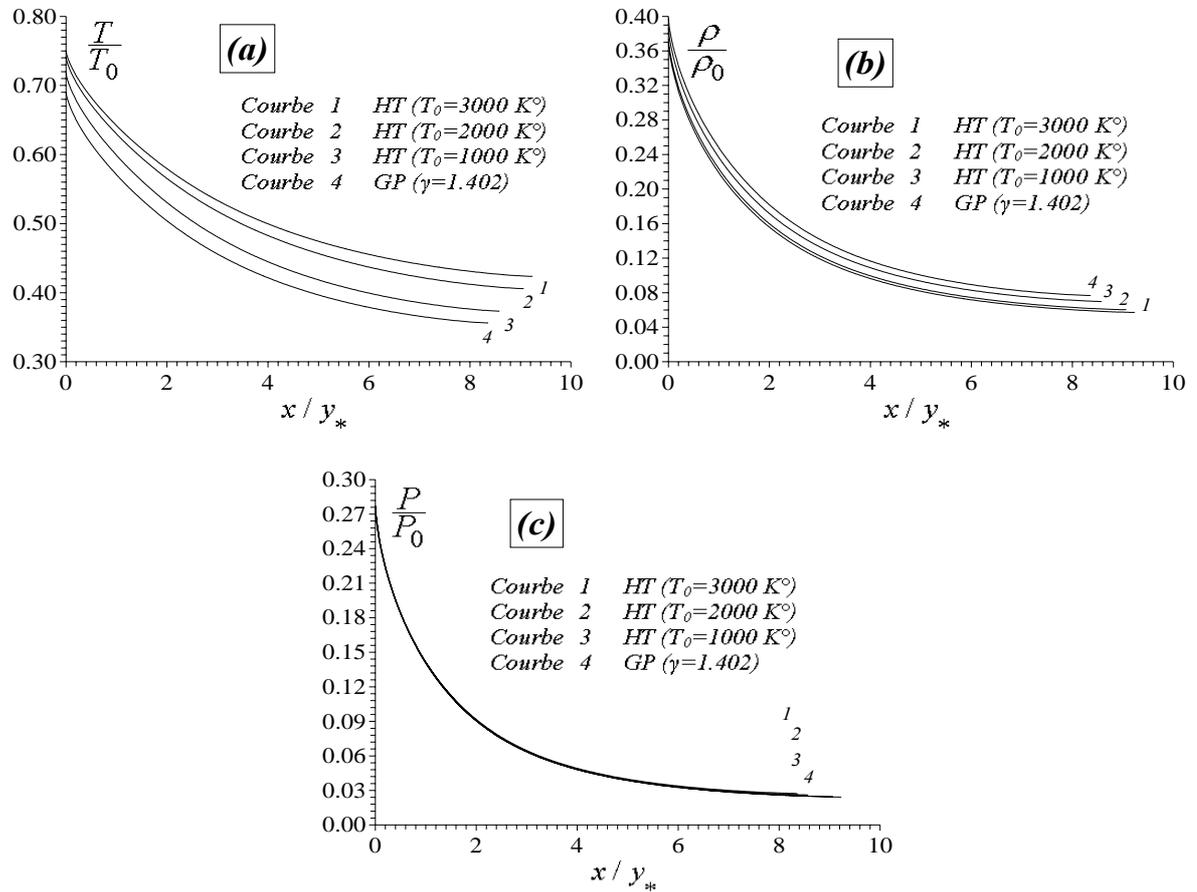


Figure 5.65 : Variation des rapports thermodynamiques le long de la paroi de la tuyère à détente centrée axisymétrique donnant à la sortie  $M_S=3.00$ .

(a) : Rapport des Températures. (b) : Rapport des masse volumiques. (c) : Rapport des pressions.

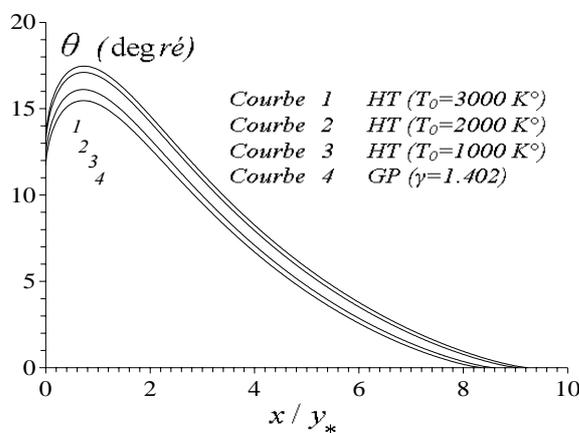


Figure 5.66 : Variation l'angle  $\theta^*$  le long de la paroi de la tuyère à détente centrée axisymétrique lorsque  $M_S=3.00$ .

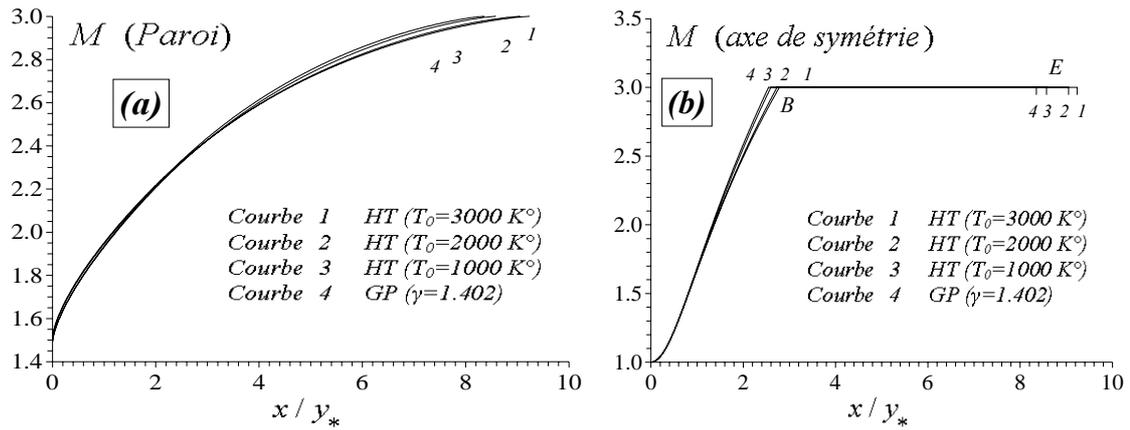


Figure 5.67 : Variation du nombre de Mach à travers la tuyère  $MLN$  axisymétrique lorsque  $M_S=3.00$ .

(a) : le long de la paroi de la tuyère. (b) : le long de l'axe horizontale.

Tableau 5.51 : Nombre de Mach  $M^*$  et les rapports thermodynamiques correspondants pour la tuyère à détente centrée axisymétrique lorsque  $M_S=3.00$ .

	$GP (\gamma=1.402)$	$HT (T_0=1000\text{ K}^\circ)$	$HT (T_0=2000\text{ K}^\circ)$	$HT (T_0=3000\text{ K}^\circ)$
$M^*$	1.4938	1.4949	1.5114	1.5174
$T/T_0$	0.6903	0.7179	0.7410	0.7496
$\rho/\rho_0$	0.3978	0.3866	0.3738	0.3692
$P/P_0$	0.2746	0.2775	0.2770	0.2768

#### 5.5.4. Paramètres de conception

Les figures 5.68 à 5.75 représentent la variation à haute température, des divers paramètres de conception de la tuyère  $MLN$  axisymétrique nécessaire pour avoir un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie. Sur la partie (b) de chaque figure, on a présenté une comparaison entre les modèles  $GP$  et  $HT$  lorsque  $M_S=3.00$ . Il est clair que  $T_0$  influe sur tous les paramètres de conception, et que plus sa valeur est élevée, plus l'écart entre les deux modèles augmente, ce qui donne la nécessité de tenir en compte de cette température. On remarque que les courbes 3 et 4 de la partie (a) de chaque figure représentant respectivement les résultats à haute température lorsque  $T_0=1000\text{ K}^\circ$  et du modèle  $GP (\gamma=1.402)$  sont proches quelque soit la valeur de  $M_S$  avec une certaine erreur qui ne dépasse pas les 5%. Mais entre les quatre courbes, on remarque qu'elles sont presque confondues jusqu'à  $M_S=2.00$ , ensuite commence à différencier au fur et à mesure avec  $M_S$  et  $T_0$ . Ce résultat s'interprète par la possibilité d'utiliser le modèle  $GP$  pour concevoir les tuyères supersoniques tant que  $M_S$  soit inférieure à 2.00 quelque soit  $T_0$ , ou si  $T_0 < 1000\text{ K}^\circ$  environ quelque soit  $M_S$ . Pour voir la différence en valeurs numériques, on peut se référer aux tableaux 5.42 à 5.47.

Sur la figure 5.68 démontre que, plus la tuyère délivre  $M_S$  élevé, plus la tuyère devient ouverte au col pour permettre une détente convenable adaptée, afin de donner un écoulement uniforme et parallèle souhaité. De même, pour un nombre de Mach donné, plus  $T_0$  augmente, plus la tuyère devient ouverte au col.

La figure 5.69 démontre l'existence d'un point d'inflexion sur la paroi de la tuyère au voisinage du col d'une valeur  $\theta_{max}$  proche de  $\theta^*$ , ce qui n'est pas le cas pour la géométrie  $2D$ . Pour quelques valeurs de  $M_S$  et  $T_0$ , la position, le nombre de Mach et les rapports thermodynamiques des points d'inflexion sont présentées dans les tableaux 5.48 à 5.50.

La figure 5.69 détermine le nombre de Mach  $M^*$  juste après la détente au point  $A$  du col nécessaire pour donné un écoulement uniforme et parallèle à la sortie. Ce nombre de Mach représente la valeur au premier point de la dernière  $C$  de la zone de Kernel. Sur la partie (b) de la figure 5.70, on remarque une portion ondulée avec une différence de  $0.02\%$  au maximum entre les modèles  $HT$  et  $GP$ .

La figure 5.71 donne la longueur de Kernel nécessaire à haute température en fonction de  $M_S$ . Plus la tuyère délivre un nombre de Mach  $M_S$  élevée, plus la longueur  $L_d$  devient grande. Le but de la présentation de cette figure est qu'on peut déduire directement la longueur de la tuyère sans faire le calcul de l'écoulement dans la zone de transition, vu que l'écoulement dans la zone  $BES$  est uniforme et parallèle. La longueur de la tuyère présentée dans la figure 5.72 est liée avec la longueur de détente par la relation (5.4). Le rapport des sections dans cette relation doit être calculé par la formule (3.75).

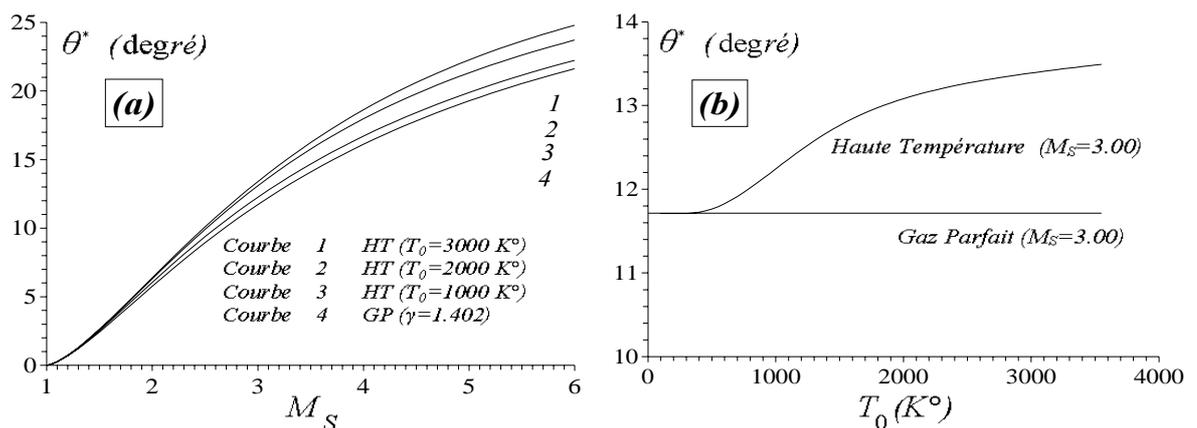


Figure 5.68 : Variation de l'angle  $\theta^*$  du col de la tuyère à détente centrée axisymétrique. (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

La figure 5.73 représente la variation du rayon de la section de sortie. La valeur du rayon est celui obtenu après le dimensionnement par la relation (3.77) avec une erreur meilleure à  $10^{-4}$ . A titre information, on peut tracer cette figure indépendamment du calcul

de dimensionnement (sortie  $ID$ ). Il suffit de déterminer la température  $T_S$  correspondant au  $M_S$ , ainsi que la température  $T^*$  correspondante à  $T_0$ , ensuite faire l'intégration de la fonction  $F_A(T)$  et obtenir le rayon de sortie à partir de la relation (3.78). Notons que le rayon de sortie calculé par le dimensionnement diffère de celui théorique avec une erreur meilleure à  $10^{-4}$ .

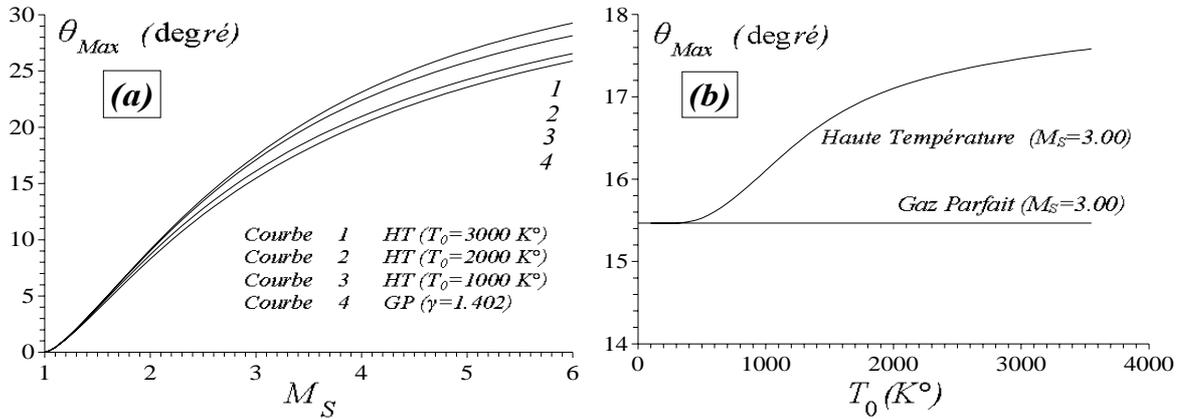


Figure 5.69 : Variation de l'angle  $\theta_{max}$  de la tuyère à détente centrée axisymétrique (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

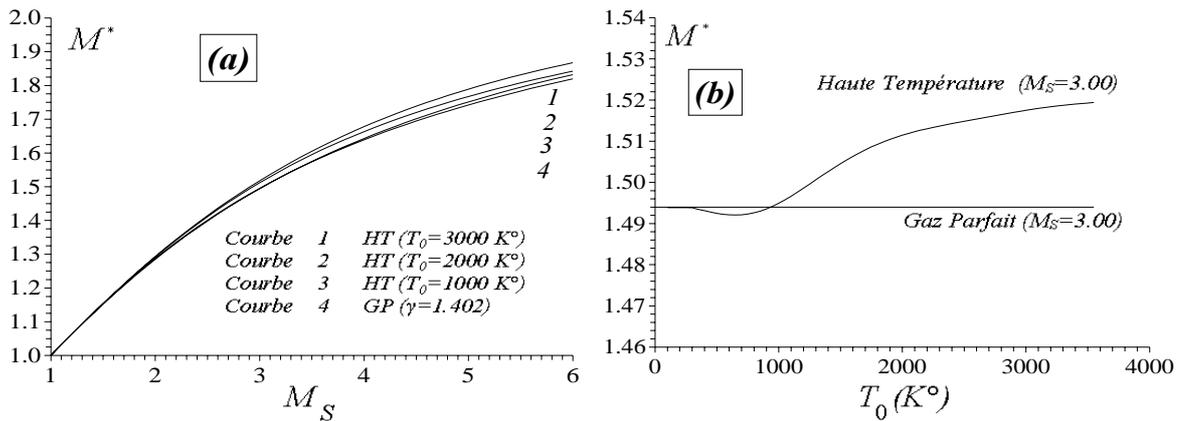


Figure 5.70 : Variation de  $M^*$  du col à Haute Température de la tuyère MLN axisymétrique (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

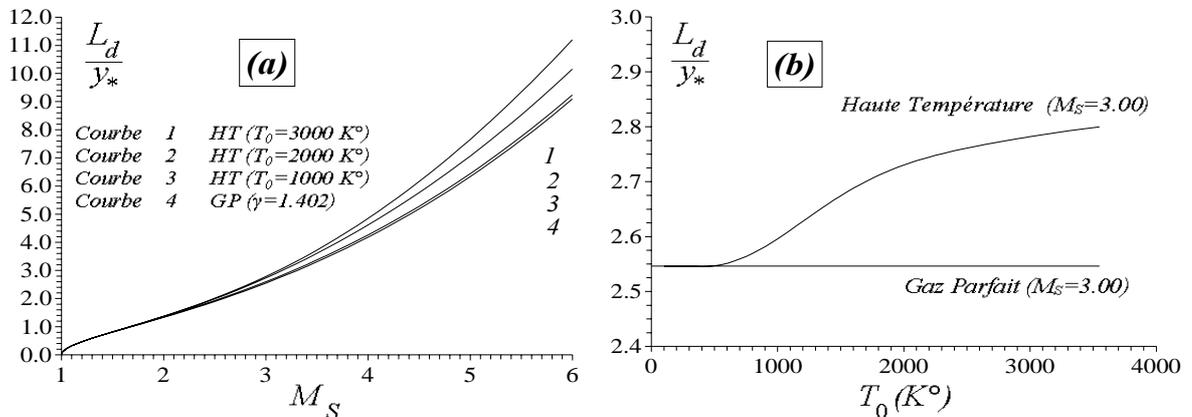


Figure 5.71 : Variation de la longueur de Kernel de la tuyère MLN axisymétrique (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

Les figures 5.74 et 5.75 représentent respectivement la variation de la masse de la tuyère ainsi que la force de pression exercée sur la paroi, sous forme non-dimensionnelle, nécessaire pour obtenir un écoulement uniforme et parallèle à la sortie de la tuyère.

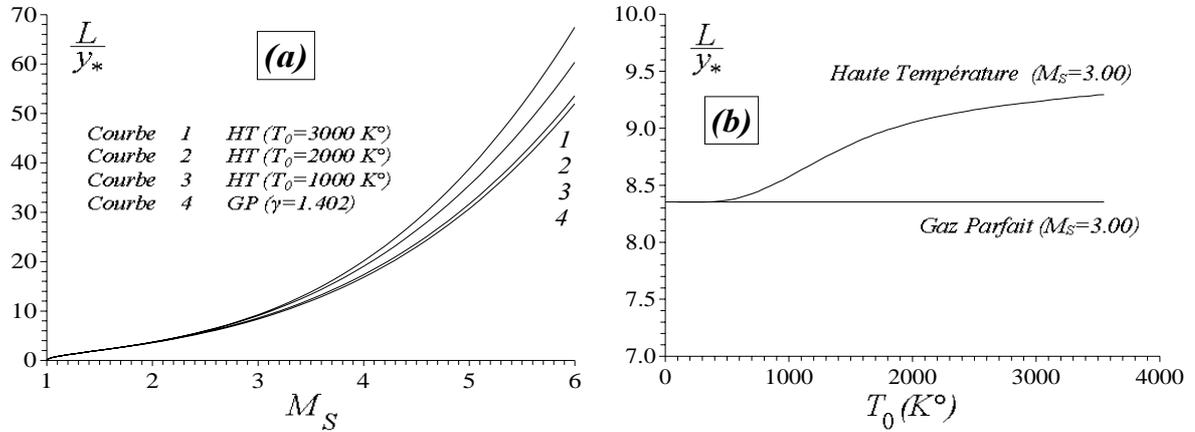


Figure 5.72 : Variation de la longueur de la tuyère à détente centrée axisymétrique  
 (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

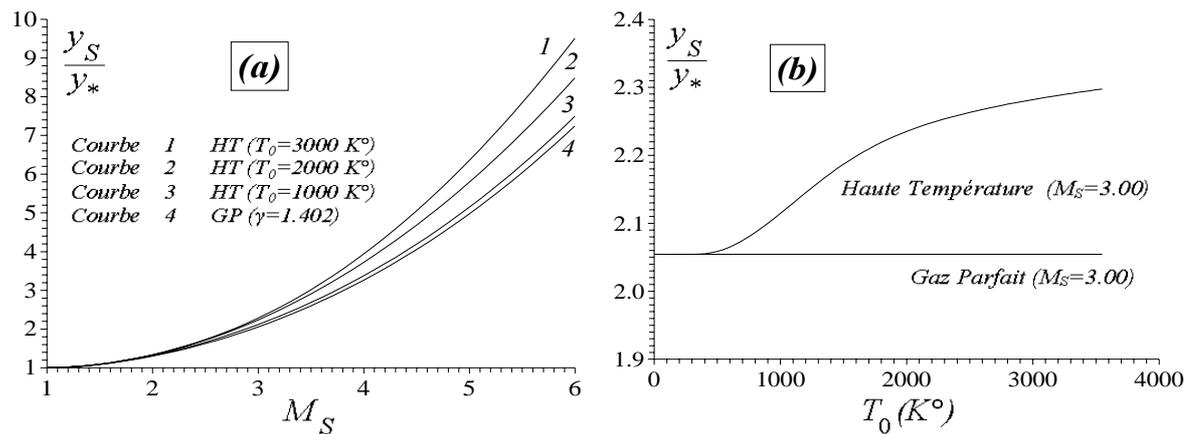


Figure 5.73 : Variation du rayon de sortie de la tuyère  $MLN$  axisymétrique  
 (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

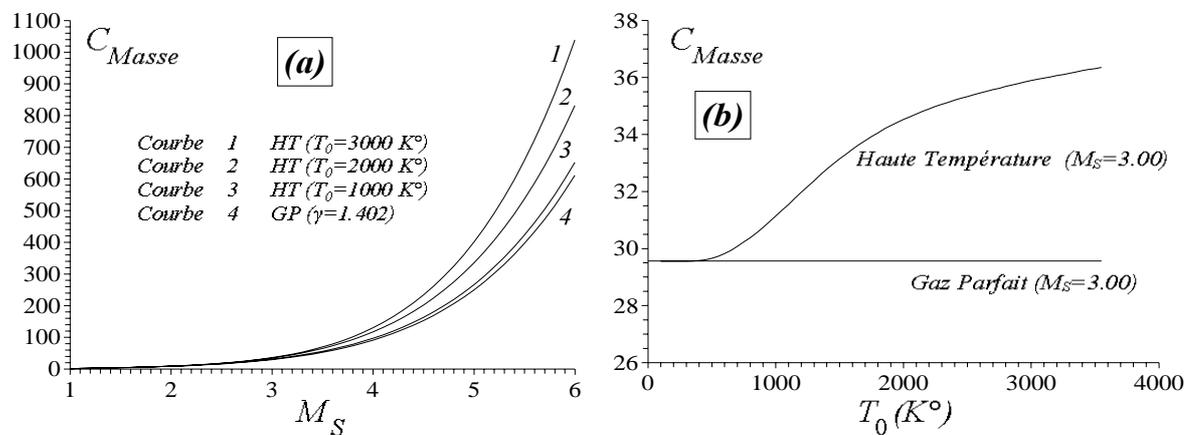


Figure 5.74 : Variation de la masse de la tuyère à détente centrée axisymétrique  
 (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

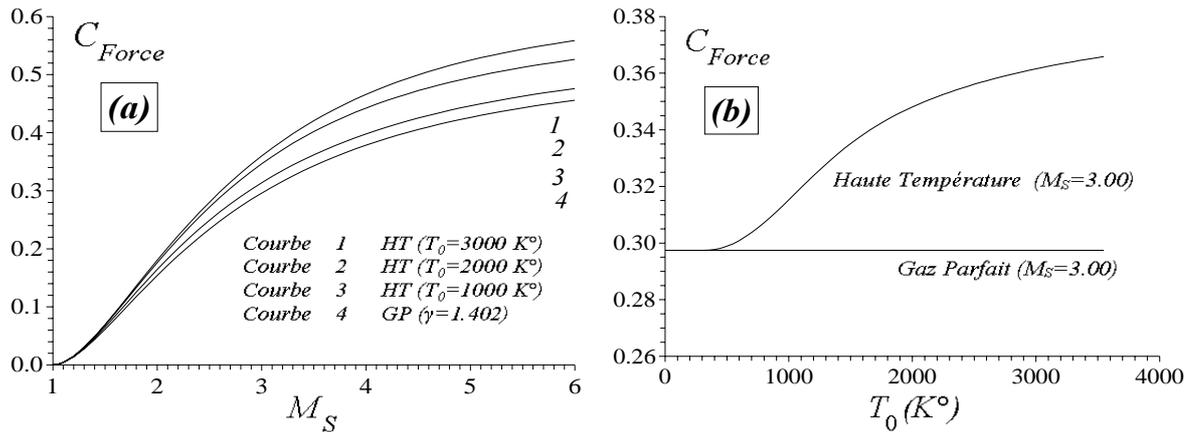


Figure 5.75 : Variation de  $C_{Force}$  de la tuyère à détente centrée axisymétrique  
 (a) : en fonction de  $M_S$ . (b) : en fonction de  $T_0$  lorsque  $M_S=3.00$ .

### 5.5.5. Résultats sur l'erreur du modèle du gaz parfait

La figure 5.76 représente la variation de l'erreur relative donnée respectivement par la longueur de la tuyère, la masse de la structure et la force de pression du modèle *GP* comparée au modèle *HT* pour quelques valeurs de  $T_0$ .

On remarque clairement que l'erreur dépend des valeurs de  $T_0$  et  $M_S$ , et elle augmente si  $T_0$  augmente. Par exemple, si  $T_0=2000\text{ K}^\circ$  et  $M_S=2.50$ , l'utilisation du modèle *GP* va donner une erreur égale à  $\varepsilon=10\%$  pour la longueur de la tuyère, une erreur  $\varepsilon=5\%$  pour la masse de la structure et une erreur  $\varepsilon=13\%$  pour la force de pression. On peut remarquer qu'à faible valeur de  $M_S$  et  $T_0$ , l'erreur  $\varepsilon$  est faible. Sur ces figures, la courbe 3 se trouve au dessous de l'erreur 5%. Cette position est interprétée par la possibilité d'utilisation le modèle *GP* jusqu'à  $T_0=1000\text{ K}^\circ$  pour les applications aéronautiques. Mais si  $T_0$  est élevée, l'erreur augmente au fur et à mesure et dans ce cas, on peut utiliser le modèle *GP* indépendamment de  $T_0$  si le nombre de Mach n'excède pas  $M_S=2.00$ .

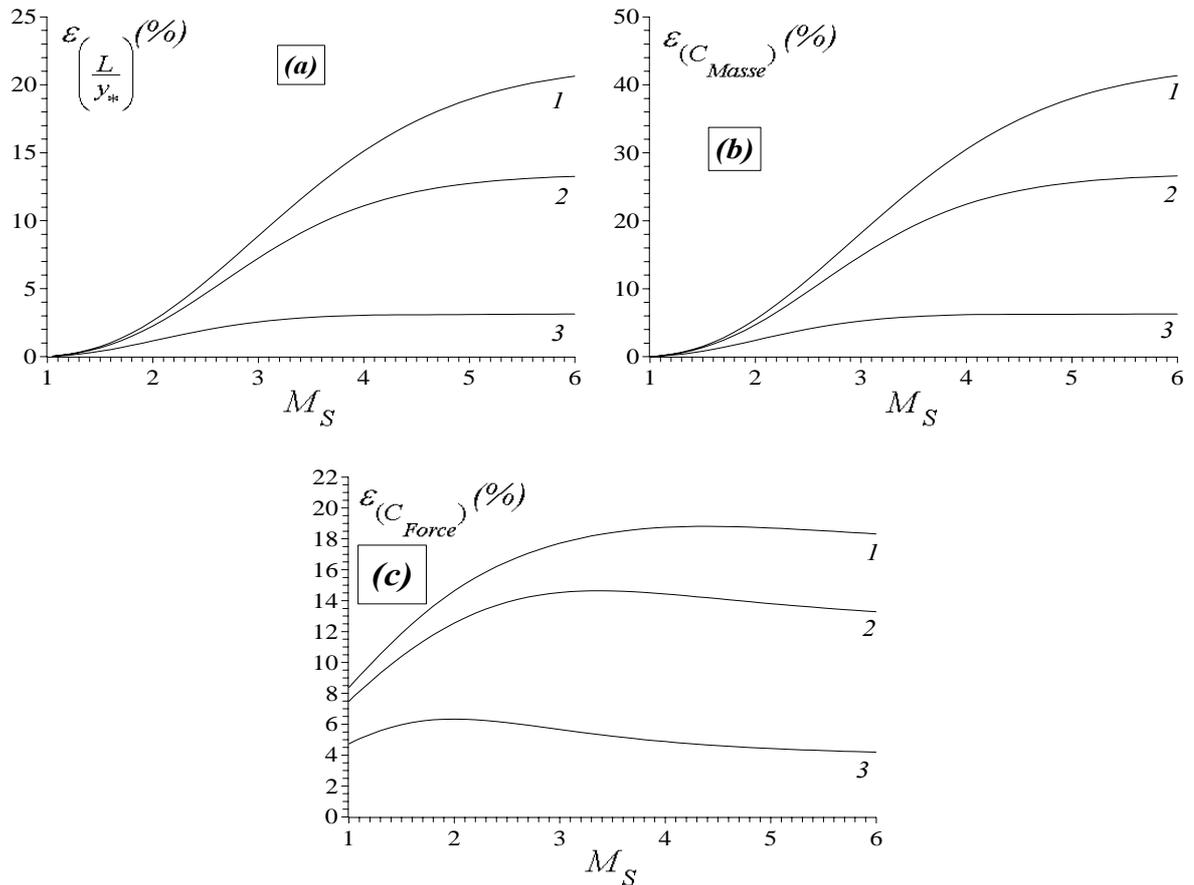
En comparant les erreurs données par les paramètres de conception entre les cas *2D* et l'axisymétrique, on remarque que les erreurs données par la force de pression et la masse de la structure ont presque les mêmes grandeurs, mais pour la longueur, on a trouvé la moitié de l'erreur du cas *2D*.

L'erreur relative donnée lorsque  $M=1$  (l'intersection des courbes avec l'axe de l'erreur) peut être obtenue pour chaque paramètres en utilisant les relations (5.13) à (5.15). L'enlèvement de l'indétermination dans la relation (5.14) est faite par l'utilisation des relations (3.88) et (3.89). Pour la force de pression, on utilise la relation (3.94).

$$\varepsilon_{(Longueur)}^{(M=1)} = \lim_{M \rightarrow 1 (T \rightarrow T_*)} \left| 1 - \frac{(L/y_*)_{GP}(M)}{(L/y_*)_{HT}(T)} \right| \times 100 = \left| 1 - \frac{0}{0} \right| \times 100 = 0 \text{ quelque soit } T_0 \quad (5.13)$$

$$\varepsilon_{(C_{Masse})}(M=1) = \lim_{M \rightarrow 1(T \rightarrow T_*)} \left| 1 - \frac{(C_{Masse})_{GP}(M)}{(C_{Masse})_{HT}(T)} \right| \times 100 = \left| 1 - \frac{0}{0} \right| \times 100 = 0 \text{ quelque soit } T_0 \quad (5.14)$$

$$\varepsilon_{(C_{Force})}(M=1) = \lim_{M \rightarrow 1(T \rightarrow T_*)} \left| 1 - \frac{(C_{Force})_{GP}(M)}{(C_{Force})_{HT}(T)} \right| \times 100 = \left| 1 - \frac{0}{0} \right| \times 100 = \begin{cases} 4.724 \% \text{ pour } T_0=1000 \text{ K}^\circ \\ 7.474 \% \text{ pour } T_0=2000 \text{ K}^\circ \\ 8.368 \% \text{ pour } T_0=3000 \text{ K}^\circ \end{cases} \quad (5.16)$$



Courbe 1 Erreur comparée au modèle HT pour ( $T_0=3000 \text{ K}^\circ$ )  
 Courbe 2 Erreur comparée au modèle HT pour ( $T_0=2000 \text{ K}^\circ$ )  
 Courbe 3 Erreur comparée au modèle HT pour ( $T_0=1000 \text{ K}^\circ$ )

Figure 5.76 : Variation de l'erreur relative donnée par les paramètres de conception du modèle du gaz parfait en fonction de  $M_S$  de la tuyère MLN axisymétrique (a) : Longueur de la tuyère. (b) : Masse de la tuyère. (c) : Force de pression.

### 5.5.6. Divers résultats

La figure 5.77 représente les courbes iso-valeurs, notamment les courbes iso-Mach illustrées sur la figure 5.77a, et les iso-directions illustrées sur la figure 5.77b

On remarque que les courbes obtenues dans la région de transition ne sont pas des lignes de droites, vu que cette zone est de type non simple, contrairement au cas 2D, où on a trouvé des segments de droites, voir figure 5.34. La figure 5.77 démontre que l'écoulement est axisymétrique avec une sortie uniforme et parallèle.

Dans la figure 5.77b, on remarque que les courbes coupent la paroi de la tuyères en deux points, qui démontrent l'existence d'un point d'inflexion possédant  $\theta = \theta_{max}$ .

On remarque que quelques courbes iso-valeurs passent par le point  $A$  du col, qui démontre encore que les courbes iso-Mach possèdent un nombre de Mach  $M \leq M^*$  et les courbes iso-directions possède  $\theta \leq \theta^*$ . Les points possédant une direction nulle sont les points du col, l'axe de symétrie et la partie uniforme triangulaire.

Dans la figure 5.78, on a représenté les formes de quatre tuyères ayant toutes même section de sortie. Les courbes 3, 2 et 1 sont pour le cas  $HT$  lorsque  $T_0 = 1000 K^\circ$ ,  $2000 K^\circ$  et  $3000 K^\circ$  respectivement. La courbe 4 correspondant au cas  $GP$ . On remarque que les quatre tuyères ne délivrent pas le même nombre de Mach de sortie. Le rayon de sortie des quatre courbes correspondant au cas  $GP$  pour  $M_S = 3.00$ . Il est égale à  $y_S/y_* = 2.054$ . On peut démontrer qu'elles ne délivrent pas le même nombre de Mach  $M_S$  à partir des relations (3.4) et (3.6). Le but de la présentation de cette figure est que, si on considère la tuyère dimensionnée sur la base et les hypothèses d'un gaz parfait, on peut remarquer la dégradation des performances notamment le nombre de Mach de sortie, vu que les tuyères possèdent presque la même taille, sauf une petite différence en longueur. Les résultats numériques des principaux paramètres sont présentés dans le tableau 5.52. L'écoulement dans cette différence de longueur est presque uniforme. La forme de la tuyère utilisée ne change pas sauf le comportement thermodynamique de l'air avec la température.

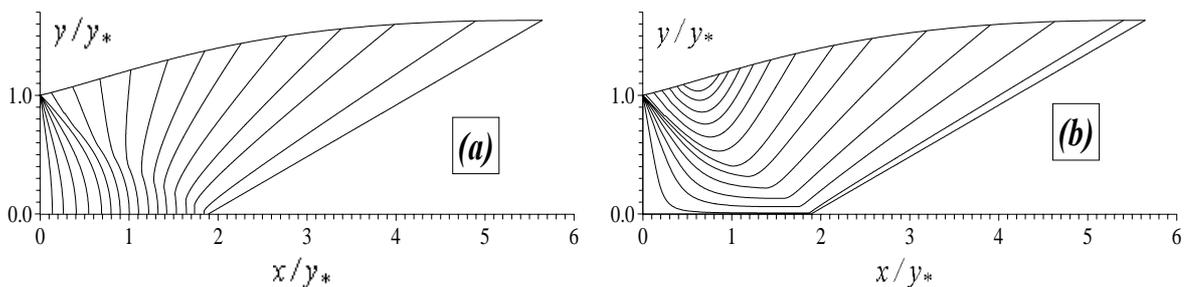


Figure 5.77 : Courbes iso-valeurs de la tuyère à détente centrée axisymétrique  
(a) : Courbes iso-Mach. (b) : Courbes iso-directions.

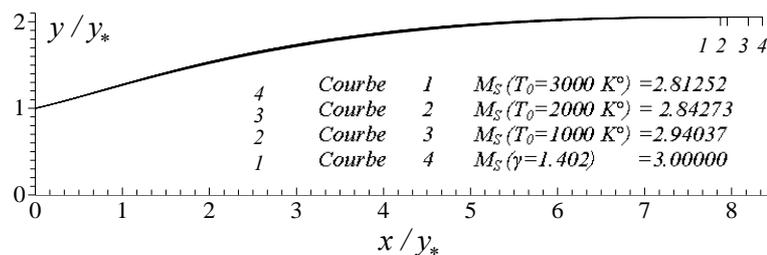


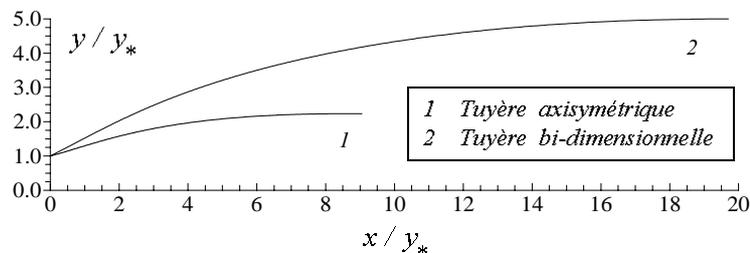
Figure 5.78 : Tuyères à détente centrée axisymétrique ayant mêmes rapport des sections de sortie donnant le nombre de Mach  $M_S = 3.00$  pour le modèle du gaz parfait.

Tableau 5.52 : Valeurs numériques de conception des tuyères de la figure 5.78.

	$M_S$	$\theta^*(^\circ)$	$\theta_{\max}(^\circ)$	$M^*$	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$
<b>GP (<math>\gamma=1.402</math>)</b>	<b>3.00000</b>	<b>11.7128</b>	<b>15.4644</b>	<b>1.4939</b>	<b>2.5462</b>	<b>8.3532</b>	<b>29.5620</b>	<b>0.2968</b>
$T_0=1000 K^\circ$	2.94037	11.9285	15.7439	1.4846	2.5114	8.1873	28.9920	0.3078
$T_0=2000 K^\circ$	2.84273	12.1366	16.0296	1.4818	2.4833	7.9494	28.1051	0.3259
$T_0=3000 K^\circ$	2.81252	12.2033	16.1216	1.4808	2.4742	7.8730	27.8368	0.3331

### 5.5.7. Comparaison entre le cas bidimensionnelle et l'axisymétrique

Sur la figure 5.79, on a présenté les formes obtenues des tuyères 2D et axisymétrique en coupe vertical donnant à la sortie  $M_S=3.00$  lorsque  $T_0=2000 K^\circ$ . Les deux tuyères possèdent même rapport des sections. Les résultats numériques de conception sont présentés dans le tableau 5.53. Concernant le rayon de sortie non-dimensionnel, il est égal au rapport des sections pour le 2D et il est égal à la racine carrée du rapport des sections pour le cas axisymétrique. La force de pression délivrée par la tuyère est la même pour les deux géométries. Concernant la comparaison de la masse de la tuyère, réellement, on ne peut pas faire sous cette forme une comparaison de ce paramètre, vu que pour le cas 2D on n'a pas ajouté la masse des deux cotés verticaux gauche et droite. Ils se trouvent à l'infini (n'existe pas). Cette figure démontre que la détente de l'écoulement axisymétrique est rapide par rapport à la détente 2D. Cette dernière est ouverte au col par rapport à la tuyère axisymétrique. Les valeurs obtenues de  $\theta^*$  vérifiées la relation (5.12).

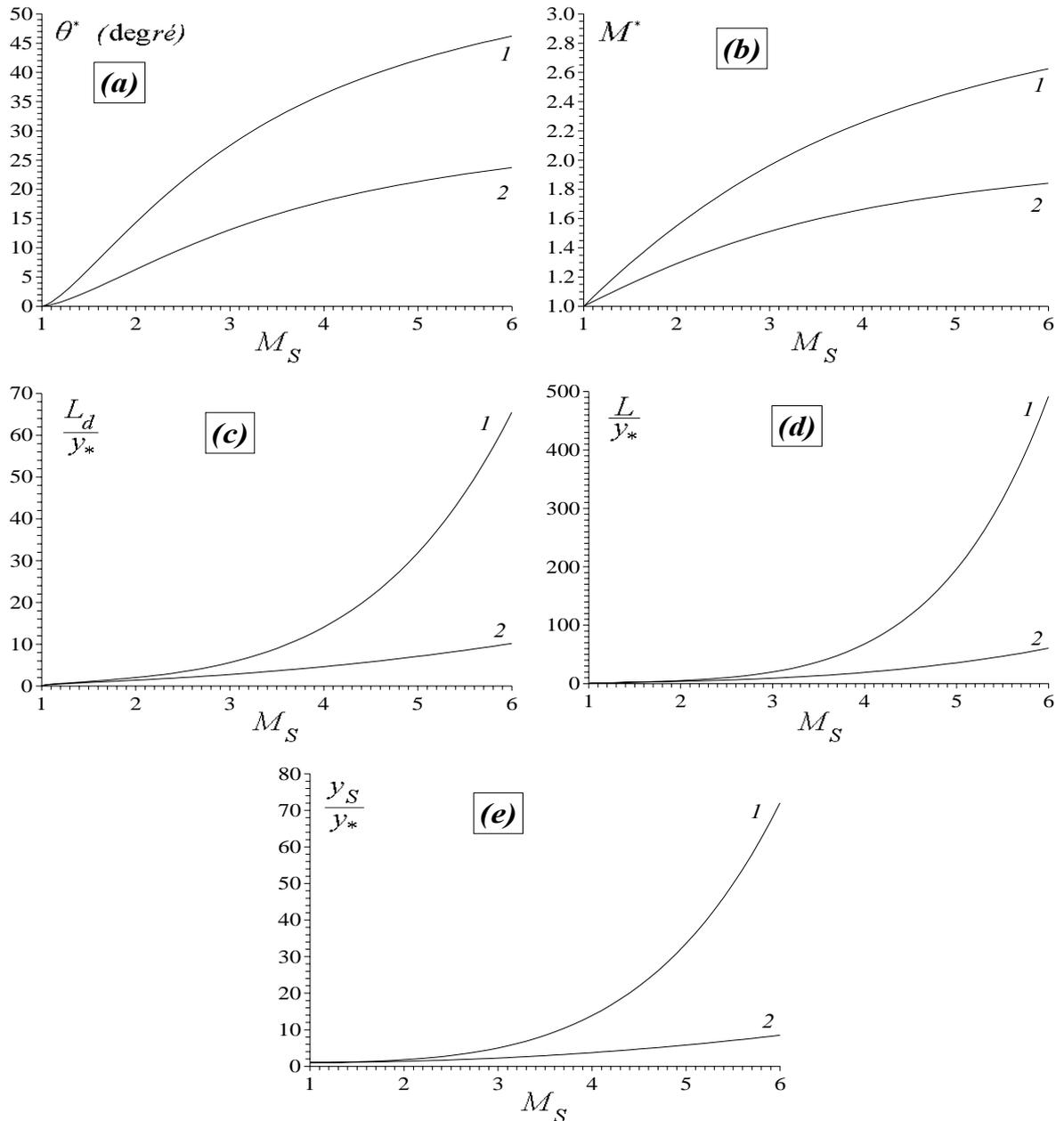
Figure 5.79 : Tuyères MLN 2D et axisymétrique donnant  $M_S=3.00$  pour  $T_0=2000 K^\circ$ .

Tableaux 5.53 : Comparaison entre les valeurs de conception des tuyères de la figure 5.79.

	$\frac{L_d}{y^*}$	$\frac{L}{y^*}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\frac{y_S}{y^*}$	$\theta^*(^\circ)$	$M^*$	$\theta_{Max}(^\circ)$
Bi-dimensionnelle	5.5772	19.7076	20.3444	0.3497	4.9958	27.4945	1.9626	27.4945
Axisymétrique	2.7300	9.0508	34.5225	0.3490	2.2351	13.0807	1.5114	17.1019

La figure 5.80 représente la comparaison des divers paramètres de conception des tuyères MLN entre la géométrie 2D et l'axisymétrique en fonction de  $M_S$  lorsque  $T_0=2000 K^\circ$ . Dans cette figure, on n'a pas présenté la comparaison de la force de pression puisque le même résultat trouver entre les deux géométries. De même, la comparaison de la masse de la structure n'est pas faite à cause de la non addition de la masse des cotés gauche et droite

pour le cas  $2D$ . Pour comparer la masse, il faut appliquer la relation (3.87) conçue pour calculer la masse de la géométrie  $2D$ , pour calculer la longueur curviligne de la géométrie axisymétrique. Les valeurs présentées dans le tableau 5.53 peuvent être extrapolées à partir des courbes de la figure 5.80. Si le lecteur compare les deux valeurs de  $C_{masse}$  du tableau 5.53, il croit que la masse de la forme axisymétrique est supérieure à la masse de la géométrie  $2D$ . C'est pas le cas, en ajoutant la masse des deux cotés de la géométrie  $2D$  (la tuyère dans ce cas devient rectangulaire), on trouve le cas contraire.



Courbe 1 Tuyère à détente centrée  $2D$ . Courbe 2 Tuyère à détente centrée axisymétrique

Figure 5.80 : Comparaison des paramètres de conception à Haute Température de la tuyère  $MLN$  entre le cas  $2D$  et l'axisymétrique lorsque  $T_0=2000 K^\circ$  en fonction de  $M_S$ .

(a) : L'angle de détente initiale. (b) : Nombre de Mach  $M^*$ . (c) : Longueur de Kernel. (d) : Longueur de la tuyère. (e) : Rayon de la section de sortie.

## CONCLUSION

A partir de cette étude, on peut citer les points suivants :

Si on accepte une erreur inférieure à 5 %, ce qui est le cas généralement pour les applications aérodynamiques, on peut étudier un écoulement supersonique en utilisant les relations d'un gaz parfait, si la température génératrice  $T_0$  est inférieure à  $1000\text{ K}^\circ$  pour n'importe quelle valeur du nombre de Mach, ou lorsque le nombre de Mach soit inférieure à 2.00 pour n'importe quelle température génératrice jusqu'à  $3000\text{ K}^\circ$  environ.

Le modèle *GP* est représenté par des relations explicites et simples et ne demande pas un temps de calcul élevé, ce qui n'est pas le cas pour notre modèle, où il est présenté par la résolution d'une équation algébrique non linéaire et intégration de trois fonctions analytiques complexes nécessitent un temps de calcul élevé et programmation numérique.

La variable principale pour notre modèle est la température et pour le modèle *GP* est le nombre de Mach à cause d'une équation implicite non linéaire reliant  $T$  et  $M$ .

Les relations présentées dans cette étude sont valables pour n'importe quelle type interpolation choisie pour la fonction  $C_p(T)$ . L'essentielle est que l'interpolation choisie donne une erreur petite acceptable.

On peut choisir d'autre substance au lieu de l'air. Les relations restent valables. Il faut disposer de la table de variation de  $C_p$  en fonction de  $T$  et faire une bonne interpolation.

Le rapport des sections présenté par la relation (1.33) peut être utilisé comme une *source de comparaison pour la validation des résultats numériques du dimensionnement des diverses tuyères supersoniques* donnant un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie par la méthode des caractéristiques et la fonction du Prandtl Meyer, notamment la tuyère à corps central axisymétrique.

Les rapports thermodynamiques peuvent être utilisés pour déterminer les paramètres de conception des diverses formes de tuyères sous la base du modèle *HT*.

On peut obtenir les relations d'un gaz parfait à partir des relations du modèle *HT* en annulant toutes les constantes d'interpolations de la fonction  $C_p(T)$  sauf le premier. Dans ce cas, le modèle *GP* devient un cas particulier de notre modèle *HT*.

A faible température et nombre de Mach, l'écart en résultats entre les deux modèles est petit, ce qui donne la possibilité d'étudier un écoulement *HT* en utilisant les relations *GP*. Par contre, lorsque  $T_0$  augmente, la théorie *GP* commence de donner des résultats qui s'éloignent de plus en plus et à mesure du cas réel, d'où la nécessité d'utiliser le modèle *HT*.

La tuyère axisymétrique possède un point d'inflexion.

On peut utiliser la fonction de Prandtl Meyer pour résoudre des problèmes des écoulements externes dans un milieu chaud. Notamment l'écoulement autour d'un profil d'aile supersonique pointu et d'un cône de révolution.

La convergence de la relation (3.35) demande des itérations en plus pour le modèle *HT* par rapport au modèle *GP* pour même précision. La différence entre le nombre d'itérations entre les deux modèles est environ 30 %, qui influe sur le temps de calcul numérique.

Pour même précision, le nombre des ondes de Mach nécessaire pour faire la conception des tuyères à corps central du modèle *HT* est supérieur à celui du modèle *GP*. Cette différence est due à la différence en longueur qui demande plus de discrétisation.

A partir de cette étude, nous avons illustrer une amélioration des paramètres de la tuyère de propulsion supersonique par rapport à la tuyère de longueur minimale, qui est très utilisée dans les applications aéronautiques par une nouvelle forme de tuyère appelée tuyère à corps central. Donc un simple changement de la tuyère *MLN* par notre tuyère permet une nouvelle stratégie d'utilisation des missiles et engins spatiaux.

La méthode développée peut faire la conception de la tuyère à corps central jusqu'à  $\varepsilon=10^{-6}$  dans un temps réduit, malgré la discrétisation demande un nombre élevé de point.

Le calcul et la détermination du contour du corps central de la tuyère bidimensionnel ne dépendent pas du positionnement du repère du calcul. Plus le nombre  $N$  est grand, plus on obtient une très bonne présentation du corps central

Le point  $A$  de la carène et du col de la tuyère à détente centrée est un point de discontinuité en paramètres, notamment  $M$ ,  $\theta$  ... etc.

La quadrature de Gauss Legendre développée pour intégrer de  $F_v(T)$  demande un nombre de points très réduit en comparant avec celui donné par les quadratures de trapèze et de Simpson pour même précision.

La précision de la méthode de conception des tuyères supersoniques par la méthode des caractéristiques ou la fonction de Prandtl Meyer dépend essentiellement des résultats amont, indépendamment des résultats aval. Une mauvaise disposition des points au col peut ne pas converger les calculs rapidement vers la solution désirée.

L'utilisation du modèle *GP* pour la conception des tuyères supersoniques dégrade les performances des paramètres réelles de conception, notamment le nombre de Mach et la force de pression, si la température  $T_0$  de la chambre de combustion est élevée.

La conservation des paramètres de conception déterminée par le modèle *GP* nécessite un changement de la forme de la tuyère qui supporte ces paramètres.

La détente dans une tuyère axisymétrique est plus rapide que celle dans une tuyère *2D*.

L'existence d'une infinité de profils possédant le même nombre de Mach de sortie, en changeant la température génératrice  $T_0$ .

A la fin de ce modeste travail et pour compléter l'étude dans cet axe de recherche, on peut citer quelques travaux intéressants comme une continuation à notre travail.

- Développer un modèle  $HT$  d'une onde de choc normale et déterminer les conditions après le choc dans une tuyère supersonique non adaptée, et par conséquent le nombre de Mach à la section de sortie.
- On peut utiliser la fonction de Prandtl Meyer pour résoudre les problèmes des écoulements externes dans un milieu chaud, notamment l'écoulement autour d'un cône et profil d'aile supersonique pointu.
- Comme l'écoulement à la section de sortie est horizontal, on peut tronquer la tuyère à une section possède une déviation un ou deux degré. Dans ce cas, on peut gagner une portion intéressante de la masse de la tuyère. L'écoulement à la sortie de la tuyère tronquée devient non horizontal au voisinage de la paroi, et dans ce cas on va perdre une petite quantité de la grandeur de la force de pression. Cette idée peut être applicable pour les deux types de tuyères que se soit de géométrie  $2D$  ou axisymétrique.
- A partir des résultats de conception et de dimensionnement des tuyères  $MLN$  axisymétrique, on peut faire l'extension afin de concevoir des tuyères supersoniques tridimensionnelles de section de sortie arbitraires, par exemple carrée, elliptique, ... en utilisant la définition de la fonction de courant dans l'espace. Le principe de calcul de d'une ligne de courant dans l'espace est présentée dans l'appendice C.
- La conception des tuyères asymétriques  $3D$  peut être réalisée avec la même démarche en choisissant des sections de sortie non symétriques.
- La conception des tuyères supersoniques à corps central axisymétrique à haute température en utilisant la méthode des caractéristiques, ensuite faire l'extension vers le tridimensionnel par l'utilisation de la définition de la ligne de courant dans l'espace, présentée dans l'appendice C.
- Correction de l'écoulement dans une tuyère dimensionnée sur la base d'utilisation du modèle  $GP$  en utilisant notre modèle  $HT$ . Le champs d'écoulement à l'intérieure de la tuyère devient totalement non simple et la zone uniforme disparaître, et on estime dans ce cas que, l'écoulement à la section de sortie devient horizontale mais non uniforme avec diminution du nombre de Mach de sortie. Dans ce cas il faut ajouter une procédure de calcul  $HT$  d'intersection d'une caractéristique avec une paroi rigide donnée.

## APPENDICE A

## LISTE DES SYMBOLES

$M$	nombre de Mach.
$x$	abscisse d'un point.
$y$	rayon d'un point.
$a$	vitesse du son.
$V$	vitesse de l'écoulement.
$u, v$	composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse.
$A$	aire d'une section de la tuyère.
$P$	pression.
$T$	température.
$m$	débit massique critique.
$L$	longueur de la tuyère.
$l$	unité de profondeur de la tuyère bi-dimensionnelle.
$S$	longueur curviligne suivant le segment d'une courbe iso-valeur
$r$	constante thermodynamique de l'air.
$t_M$	épaisseur du matériau de la structure de la tuyère.
$H$	enthalpie à une constante près (enthalpie dynamique).
$C_P$	chaleur spécifique à pression constante.
$x_{plug}$	distance entre la carène et la section de sortie de la tuyère à corps central.
$F_x$	force de pression exercée sur la paroi interne de la tuyère.
$N$	nombre des caractéristiques descendantes régulières pour la tuyère $MLN$ , et représente le nombre de points de la discrétisation de la zone de détente pour la tuyère à corps central.
$N_i$	nombre des caractéristiques descendantes insérées dans la région de Kernel.
$C_{Force}$	coefficient de la force de pression.
$C_{Gas}$	coefficient de la masse du gaz.
$C_{Masse}$	coefficient de la masse de la structure de la tuyère.
$C_y$	coefficient de l'interpolation de l'ordonnée $y$ .
$C_\theta$	coefficient de l'interpolation du paramètre $\theta$ .
$C_T$	coefficient de l'interpolation du paramètre $T$ .
$b_1, b_2$	coefficients de la fonction de condensation [voir équation (1.42)]
$\mu$	angle de Mach.
$\nu$	fonction de Prandtl Meyer.
$\theta$	déviations du vecteur vitesse.
$\gamma$	rapport des chaleurs spécifiques.
$\rho$	masse volumique.
$\Delta$	coefficient de la fonction de condensation [équation (3.50) du chapitre 3]
$\Phi$	angle polaire d'un point de la paroi par rapport à la carène 'lip'.
$\Psi$	déviations de la carène par rapport à la vertical.
$\rho_M$	masse volumique du matériau de la structure de la tuyère.
$\varepsilon$	tolérance de calcul (précision voulue)
$\sigma$	coefficient d'interpolation de la pression $P$ .
$\alpha, \beta$	angles aux sommets $i$ et $i+1$ du triangle de la figure 4.7 du chapitre 4.
$\delta$	géométrie de la tuyère. $\delta=0$ cas 2D. $\delta=1$ cas axisymétrique.
$\xi, \eta$	lignes de Mach descendante et montante respectivement.
$\Delta x$	pas non-dimensionnel ( $\Delta x/y^*$ ) pour le calcul dans la région de transition

## Abréviations

<i>HT</i>	Haute Température.
<i>GP</i>	Gaz Parfait.
<i>MLN</i>	abréviation du terme Minimum Length Nozzle (tuyère à détente centrée).
$C^+$	caractéristique montante.
$C^-$	caractéristique descendante.

## Indices

<i>13</i>	valeur moyenne entre les points <i>1</i> et <i>3</i> .
<i>23</i>	valeur moyenne entre les points <i>2</i> et <i>3</i> .
<i>GP</i>	valeur moyenne entre les points <i>G</i> et <i>P</i> .
<i>GD</i>	valeur moyenne entre les points <i>G</i> et <i>D</i> .
<i>3</i>	concernant la valeur au point <i>3</i> .
<i>0</i>	condition d'arrêt (Etat générateur) (chambre de combustion)
*	condition critique.
<i>S</i>	section de sortie.
<i>d</i>	détente de Kernel.
<i>(j)</i>	tronçon.
<i>j</i>	nœud.
<i>W</i>	paroi.

## Exposant

*	valeur au col juste après la détente.
<i>K</i>	itération.
<i>Iso</i>	courbe iso-valeurs.
-	valeur en un point sur la caractéristique descendante.
+	Valeur en un point sur la caractéristique montante

## APPENDICE B

### RESULTATS SUR LA TUYERE A CORPS CENTRAL DU MODELE DU GAZ PARFAIT

Dans cet appendice, on présente les divers résultats de conception et de dimensionnement de la tuyère à corps central bidimensionnelle, *sur la considération du modèle du gaz parfait à  $\gamma$  constant*. La méthode de conception est la même entre les deux modèles *GP* et *HT*, sauf qu'il faut utiliser les équations du modèle *GP* notamment la fonction de Prandtl Meyer (2.8) au lieu de (2.7), le rapport des sections (1.38) au lieu (1.33). La discrétisation de la paroi par la relation (4.26) doit être changé sur la base du nombre de Mach  $1 \leq M \leq M_S$  (pour rendre le calcul rapide). Le calcul des rapports des températures et des masses volumiques doit se faire par l'utilisation des équations (1.38) et non par les équations (1.19) et (1.24).

Les résultats sont présentés pour trois valeurs du rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma=1.30, 1.40$  et  $5/3$ . Le contour du corps central est présenté dans un repère orthonormé non-dimensionnel.

Les résultats de conception comme la longueur du corps central, la masse de la structure du corps central, la force de pression et la masse du gaz, présentées respectivement par les équations (4.32), (4.38), (4.41) et (4.46) sont présentées sous forme non-dimensionnelle. Notons que le programme réalisé peut faire le calcul avec une précision meilleur à  $10^{-6}$ .

#### B.1. Effet de la discrétisation sur la convergence du problème

Si on augmente le nombre  $N$  de points de la discrétisation de la paroi, on peut voir la convergence des résultats numériques du calcul vers la solution exacte. On prend un exemple pour  $M_S=2.50, \lambda_B=1.0$  et  $\gamma=1.40$ .

Le rapport des sections critiques théorique exacte pour cet exemple est égale à  $A_S/A_* = 2.6367188$ . Les résultats présentés dans le tableau B.1 ne dépendent pas de la discrétisation. On note que  $\Psi + \theta^* = 90^\circ$ . Le tableau B.2 présente les résultats numériques obtenus sur les paramètres de conception de l'exemple choisi en fonction du nombre  $N$  de points de la discrétisation. Le problème converge avec une erreur  $\varepsilon$ , si le rapport des sections calculé numériquement pour la discrétisation choisi et le rapport des sections théorique, voir équation (1.38) du chapitre 1, vérifiés la relation (B.1) suivante. Les autres paramètres convergent aussi vers la solution exacte.

$$\varepsilon_{(A_S/A_*)} \% = \left| 1 - (A_S/A_*)_{Théorique} / (A_S/A_*)_{Calculé} \right| \times 100 \quad (B.1)$$

Tableau B.1 : Paramètres de conception de la tuyère à corps central 2D indépendant de  $N$ 

$\Psi(^{\circ})$	$\varphi_S(^{\circ})$	$\varphi_B(^{\circ})$	$x_B / \lambda_B$	$y_B / \lambda_B$	$\theta^*(^{\circ})$
50.8764	23.5781	129.1235	-0.6309	0.7757	39.1235

Tableau B.2 : Paramètres de conception de la tuyère à corps central 2D dépend de  $N$ .

$N$	$A_S/A_*$	$L / \lambda_B$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$C_{Gaz}$	$\varepsilon$ (%)
3	13.09204	30.628	33.1919	1.2607	33.5430	79.86
10	3.152120	7.8534	8.3765	0.5529	3.2825	16.35
50	2.718915	6.8608	7.2917	0.5268	2.6473	3.02
100	2.676870	6.7644	7.1862	0.5239	2.5888	1.49
200	2.656574	6.7179	7.1353	0.5225	2.5607	0.74
500	2.644610	6.6905	7.1053	0.5216	2.5442	0.29
1000	2.640656	6.6815	7.0954	0.5213	2.5388	0.14
5000	2.637505	6.6742	7.0875	0.5210	2.5344	0.02
10000	2.637112	6.6733	7.0865	0.5210	2.5339	0.01
20000	2.636915	6.6729	7.0860	0.5210	2.5336	$7.45 \cdot 10^{-3}$
50000	2.636797	6.6726	7.0857	0.5210	2.5335	$2.98 \cdot 10^{-3}$
100000	2.636758	6.6725	7.0856	0.5210	2.5334	$1.49 \cdot 10^{-3}$
200000	2.636738	6.6725	7.0855	0.5210	2.5334	$7.45 \cdot 10^{-4}$
500000	2.636726	6.6724	7.0855	0.5210	2.5334	$2.98 \cdot 10^{-4}$
1 million	2.636722	6.6724	7.0855	0.5210	2.5334	$1.49 \cdot 10^{-4}$
2million	2.636720	6.6724	7.0855	0.5210	2.5334	$7.45 \cdot 10^{-5}$
3million	2.636720	6.6724	7.0855	0.5210	2.5334	$4.96 \cdot 10^{-5}$
4million	2.636719	6.6724	7.0855	0.5210	2.5334	$3.72 \cdot 10^{-5}$
5 million	2.636718	6.6724	7.0855	0.5210	2.5334	$2.98 \cdot 10^{-5}$
10 million	2.636718	6.6724	7.0855	0.5210	2.5334	$1.49 \cdot 10^{-5}$

Si le nombre  $N$  augmente, Le rapport des sections ainsi que les autres paramètres converge par une voie décroissante, i.e. la valeur calculée est toujours supérieure à la valeur exacte théorique. Les autres rapports mentionnés dans le tableau B.2 converge vers la solution précise avant la convergence du rapport des sections, qui est avantage afin de contrôler que la convergence du rapport des sections.

L'erreur donnée pour chaque discrétisation choisie est présentée dans le tableau B.2. Pour  $N=1000$  points, l'erreur est inférieure à 0.15%, et pour  $N=10000$  points, l'erreur est égale à  $\varepsilon=0.01\%$ . On note suivant les résultats obtenus, que pour deux discrétisations de même nombre valeurs de  $M_S$  et  $\gamma$ , le nombre de points vérifié l'égalité suivante :

$$N_2 / N_1 \approx \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \quad (\text{B.2})$$

Le tableau B.2 donne le nombre de points  $N$  minimum nécessaire pour avoir la précision pour quelques valeurs du  $M_S$  lorsque  $\gamma=1.40$ . Dans le tableau B.4, on a présenté l'effet du rapport  $\gamma$  sur le nombre minimum  $N$  pour avoir une précision désirée. Alors, on peut conclure que le nombre  $N$  nécessaire pour avoir une précision donnée dépend essentiellement de  $M_S$  et  $\gamma$ .

Tableau B.3 : Valeur minimum de  $N$  donnant une erreur  $\varepsilon$  lorsque  $\gamma=1.40$ .

	$\varepsilon=0.1$	$\varepsilon=0.01$	$\varepsilon=0.001$	$\varepsilon=0.0001$	$\varepsilon=0.00001$
$M_S=1.5$	136	1349	13481	134803	1347936
$M_S=2.0$	621	6205	62040	620391	6203134
$M_S=3.0$	2706	27052	270515	2705097	27046001
$M_S=4.0$	5909	59094	590939	5909278	58973000
$M_S=5.0$	9789	97901	979028	9790076	97873419

Tableau B.4 : Valeurs minimum de  $N$  donnant une erreur  $\varepsilon$  lorsque  $M_S=3.00$ .

	$\varepsilon=0.1$	$\varepsilon=0.01$	$\varepsilon=0.001$	$\varepsilon=0.0001$	$\varepsilon=0.00001$
$\gamma=1.30$	3296	32959	329584	3295767	32950902
$\gamma=5/3$	1814	18138	181380	1813769	18134834

**B.2. Effet du gaz sur la forme du corps central**

Les figures B.1 à B.5 présentent la forme du contour du corps central respectivement lorsque  $M_S=1.50, 2.00, 3.00, 4.00, et 5.00$ . Les valeurs de conception obtenues par le calcul numérique sont présentées respectivement dans les tableaux B.5 à B.9.

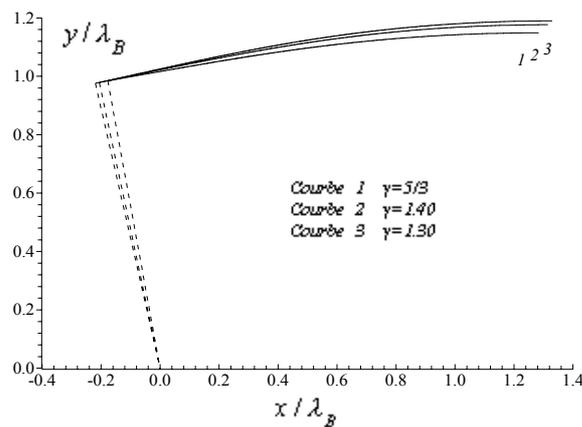


Figure B.1 : Formes du corps central donnant  $M_S=1.50$ .

Tableau B.5 : Résultats du calcul des tuyères de la figure B.1.

	$\Psi$ (°)	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$C_{Gaz}$	$\theta^*$ (°)
$\gamma=1.30$	77.3071	1.1894	1.3298	-0.2197	0.9755	1.5496	1.5683	0.0996	0.7220	12.6928
$\gamma=1.40$	78.0947	1.1761	1.3149	-0.2032	0.9784	1.5212	1.5375	0.0890	0.7272	11.9052
$\gamma=5/3$	79.7778	1.1484	1.2839	-0.1774	0.9841	1.4614	1.4730	0.0680	0.7408	10.2221

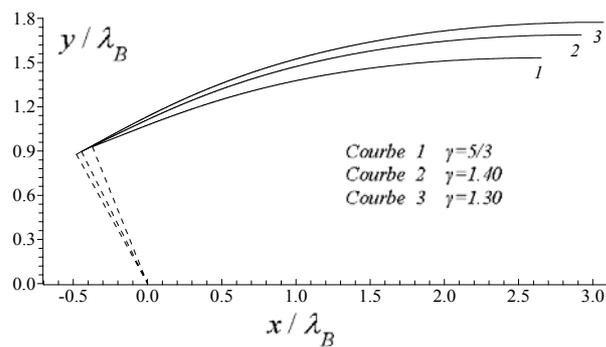


Figure B.2 : Formes du corps central donnant  $M_S=2.00$ .

Tableau B.6 : Résultats du calcul des tuyères de la figure B.2.

	$\Psi$ (°)	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$C_{Gaz}$	$\theta^*$ (°)
$\gamma=1.30$	61.3191	1.7731	3.0712	-0.4799	0.8773	3.5511	3.7119	0.3330	1.4211	28.6808
$\gamma=1.40$	63.6202	1.6875	2.9228	-0.4443	0.8958	3.3671	3.4986	0.2875	1.3994	26.3797
$\gamma=5/3$	68.2132	1.5312	2.6522	-0.3711	0.9285	3.0233	3.1071	0.2053	1.3651	21.7867

Dans ces figures, les tuyères ne sont pas confondues aux mêmes points au col de la tuyère, puisque l'angle  $\Psi$  est différent pour chaque cas. Ces points se trouvent sur un cercle de rayon  $\lambda_B=1.00$ .

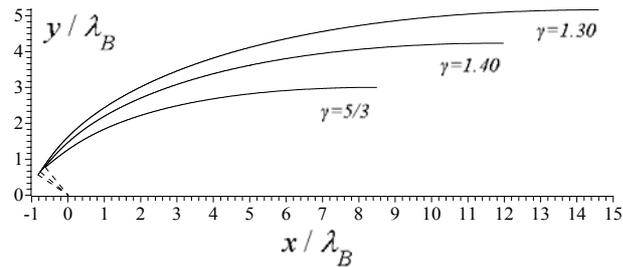
Figure B.3 : Formes du corps central donnant  $M_S=3.00$ .

Tableau B.7 : Résultats du calcul des tuyères de la figure B.3.

	$\Psi$ (°)	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$C_{Gaz}$	$\theta^*$ (°)
$\gamma=1.30$	34.2415	5.1597	14.5940	-0.8266	0.5626	15.4207	16.6713	0.9098	5.1146	55.7584
$\gamma=1.40$	40.2426	4.2345	11.9771	-0.7633	0.6460	12.7404	13.6420	0.7487	4.5087	49.7573
$\gamma=5/3$	51.0575	3.0000	8.4852	-0.6285	0.7777	9.1138	9.5767	0.4896	3.6600	38.9424

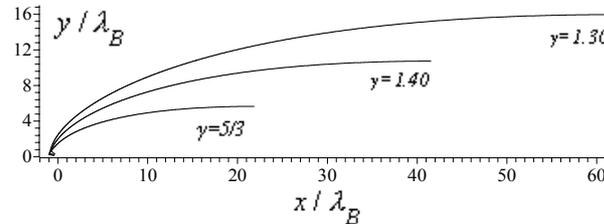
Figure B.4 : Formes du corps central donnant  $M_S=4.00$ .

Tableau B.8 : Résultats du calcul des tuyères de la figure B.4.

	$\Psi$ (°)	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$C_{Gaz}$	$\theta^*$ (°)
$\gamma=1.30$	14.7897	15.9441	61.7513	-0.9668	0.2552	62.7182	66.9813	1.4093	18.2944	75.2102
$\gamma=1.40$	24.2151	10.7187	41.5135	-0.9120	0.4101	42.4255	45.0852	1.1318	13.5363	65.7848
$\gamma=5/3$	40.1459	5.6406	21.8460	-0.7644	0.6447	22.6104	23.7210	0.7084	8.4935	49.8540

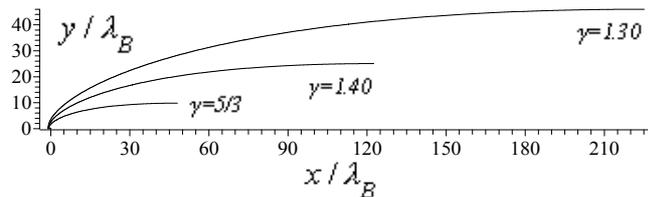
Figure B.5 : Formes du corps central donnant  $M_S=5.00$ .

Tableau B.9 : Résultats du calcul des tuyères de la figure B.5.

$\Psi$ (°)	$\frac{y_S}{\lambda_B}$	$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B}$	$\frac{x_B}{\lambda_B}$	$\frac{y_B}{\lambda_B}$	$\frac{L}{\lambda_B}$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$C_{Gaz}$	$\theta^*$ (°)	
$\gamma=1.30$	0.8765	45.9565	225.1403	-0.9998	0.0152	226.1402	237.1159	1.7798	60.8268	89.1234
$\gamma=1.40$	13.0797	25.0000	122.4745	-0.9740	0.2263	123.4485	129.2701	1.4141	36.8809	76.9202
$\gamma=5/3$	32.8783	9.8000	48.0100	-0.8398	0.5428	48.8498	50.8298	0.8659	17.5918	57.1216

### B.3. Variation des paramètres le long de la paroi du corps central

La figure B.6 présente la variation du nombre de Mach et l'angle de déviation de l'écoulement à travers la paroi du corps central pour différentes valeurs de  $\gamma$  lorsque  $M_S=3.00$ . La détente du gaz est due à l'augmentation du nombre de Mach de  $M=1$  au col à  $M=M_S$  à la sortie, encore à la diminution de l'angle de déviation de l'écoulement de  $\theta=\theta^*$  au col à  $\theta=0$  à la sortie pour avoir un écoulement uniforme et parallèle.

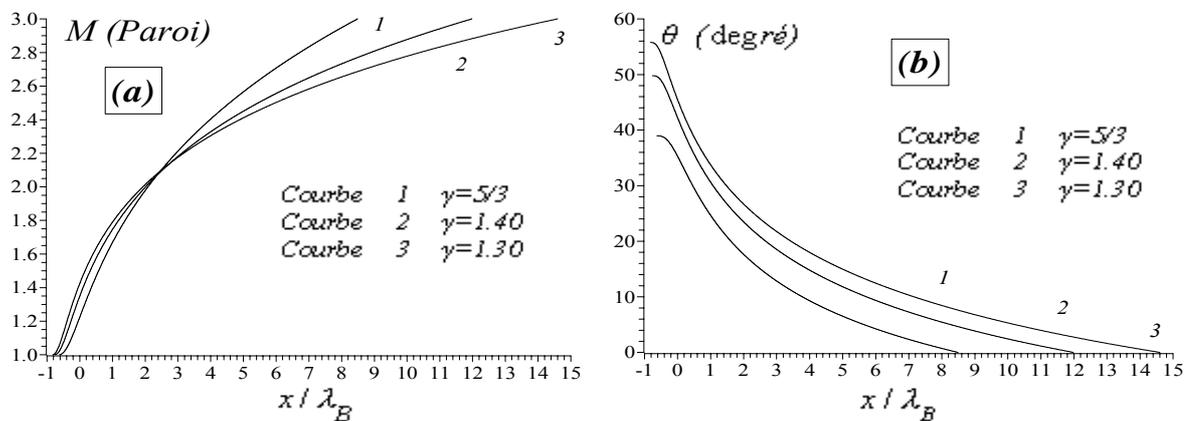


Figure B.6 : Variation de  $M$  et  $\theta$  le long de la paroi du corps central 2D lorsque  $M_S=3.00$ .  
(a) : Nombre de Mach. (b) : Angle de déviation de l'écoulement.

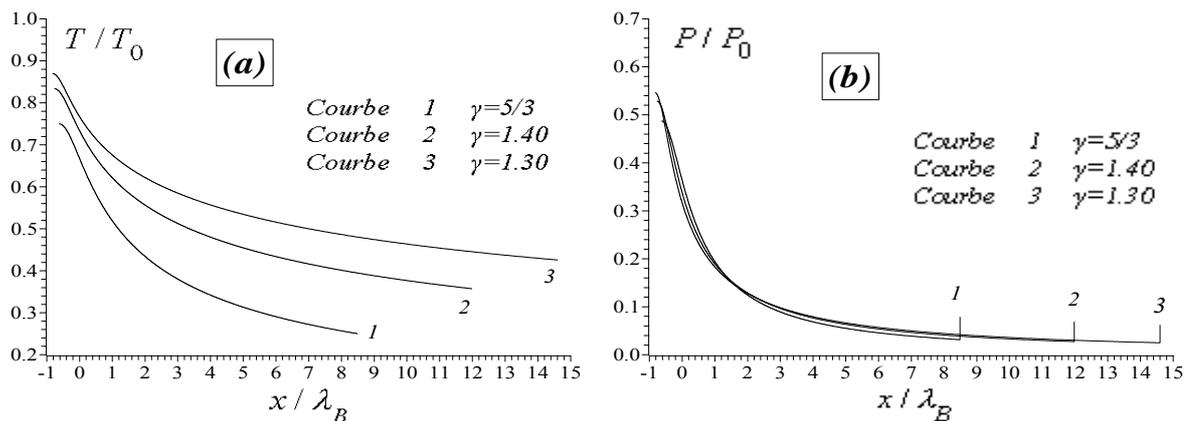


Figure B.7 : Variation des rapports  $T/T_0$  et  $P/P_0$  le long de la paroi du corps central 2D lorsque  $M_S=3.00$ .  
(a) : Rapport des températures. (b) : Rapport des pressions.

La figure B.7 présente la variation des rapports thermodynamiques (rapport températures, rapport des pressions) le long de la paroi du corps central pour différentes valeurs du rapport  $\gamma$  lorsque  $M_S=3.00$ . Le but de la présentation du rapport  $T/T_0$  c'est pour

faire un bon choix du matériau, qui va résister à cette distribution de température. On note que cette variation présente encore la condition aux limites du traitement du problème de transfert de chaleurs avec la paroi du corps central.

La présentation du rapport  $P/P_0$ , nous servira pour la détermination de la force de pression exercée sur la paroi du corps central, ainsi que pour faire l'étude de la distribution de contrainte et déformation appliquée sur la structure constituant la paroi.

Tableau B.10 : Rapports  $T_S/T_0$  et  $P_S/P_0$  des tuyères de la figure B.7

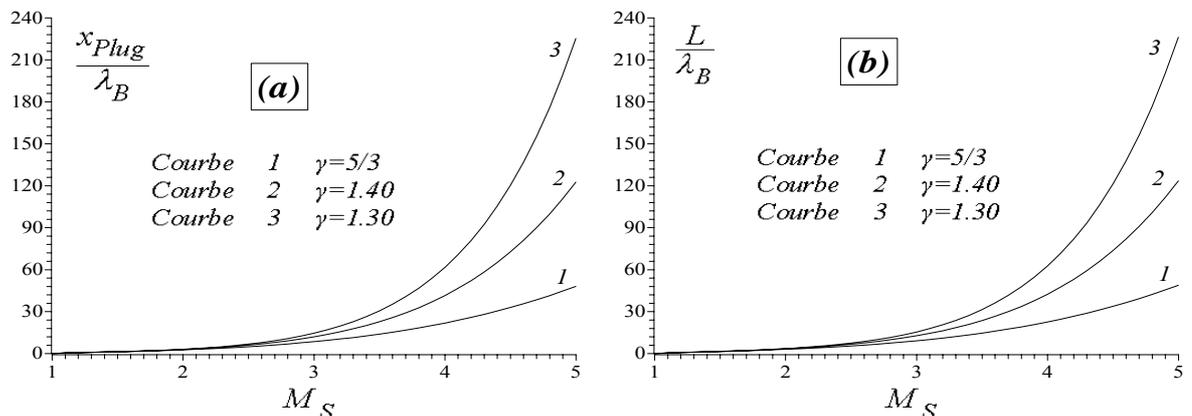
	$\gamma=1.30$	$\gamma=1.40$	$\gamma=5/3$
$T_S/T_0$	0.42553	0.35714	0.25000
$P_S/P_0$	0.02466	0.02722	0.03124

#### B.4. Variation des paramètres de conception

La figure B.8 présente globalement la variation des différents paramètres de conception, respectivement (la distance entre la section de sortie et la carène, la longueur du corps central, masse du corps central, force de pression, déviation de la carène par rapport à la verticale, déviation initiale de l'écoulement, masse du gaz, rayon de sortie) en fonction du  $M_S$  lorsque  $\gamma=1.30$ ,  $1.40$  et  $5/3$ . Le but de présenter la distance  $x_{plug}$  (cas a) est pour avoir un écoulement sonique au col et par conséquent un écoulement supersonique dans le divergent. *On note que, si cette distance n'est pas prise en compte, on aura un écoulement sonique au col et dans la partie divergent. La longueur de la tuyère et la distance  $x_{plug}$  est reliée par la relation suivante :*

$$\frac{x_{Plug}}{\lambda_B} = \frac{L}{\lambda_B} - \cos(\psi) \quad (B.3)$$

Les courbes des cas (b), (c) et (d) de la figure B.8 montre que, si on veut concevoir des tuyères pour les moteurs fusées ayant la plus petite longueur et par conséquent une petite masse possible, il est nécessaire de choisir un gaz ayant un rapport  $\gamma$  le grand possible, voir parties (b) et (c). Dans ce cas, la force de pression produite sera petite, voir partie (d).



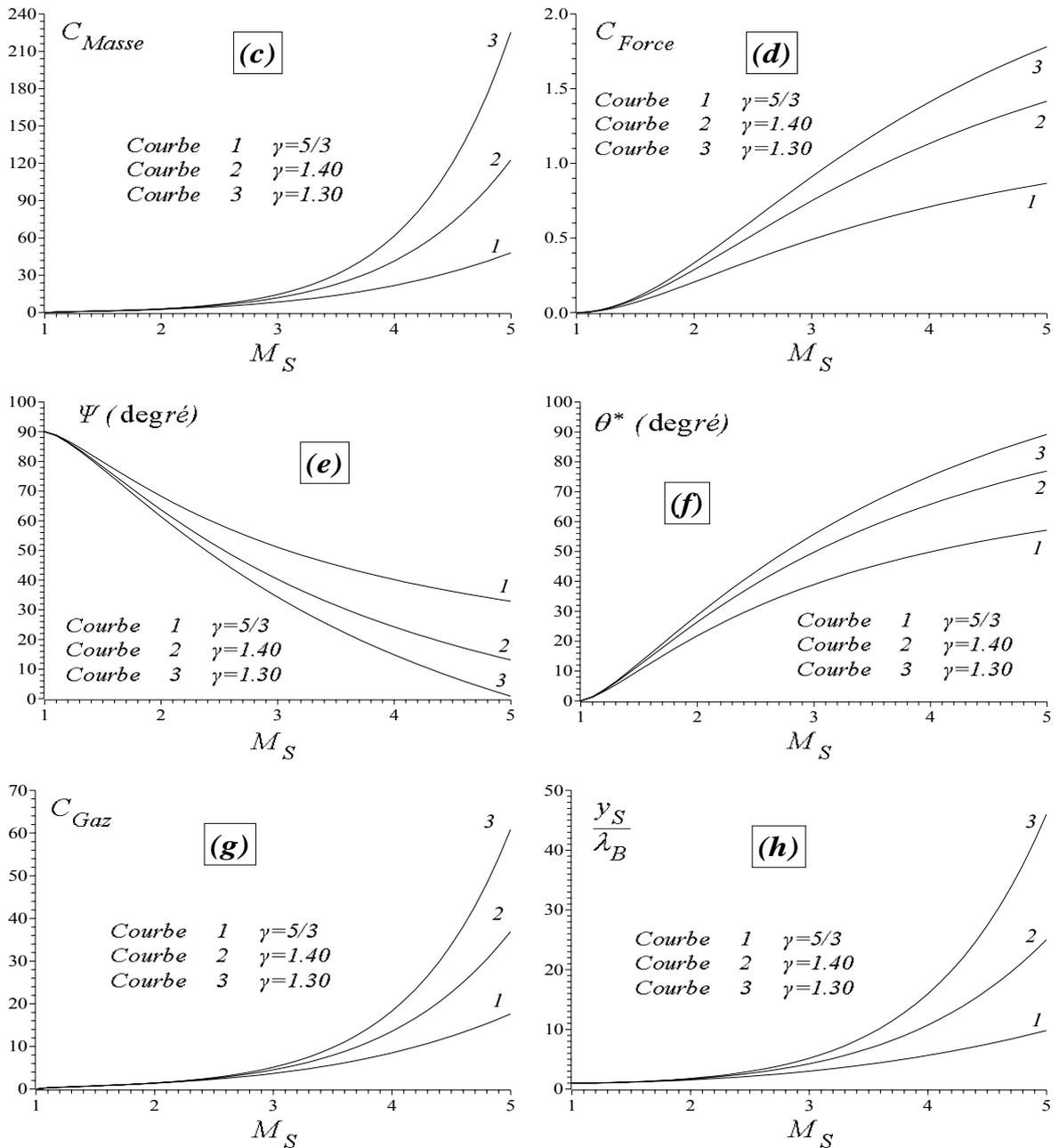


Figure B.8 : Variation des paramètres de conception de la tuyère à corps central 2D du modèle du gaz parfait en fonction du nombre de Mach de sortie.

(a): distance entre la section de sortie et la carène. (b): Longueur du corps central. (c): Masse de la structure du corps central. (d): Force de pression exercée sur la paroi du corps central. (e): Angle de déviation de l'écoulement au col (f): Angle de déviation de la carène par rapport à la verticale. (g): Masse du gaz dans le divergent. (h): Rayon de la section de sortie.

Mais si un constructeur préfère la conception sur la base d'obtenir une force de pression la plus grande possible, il choisit un gaz ayant la plus petite valeur de  $\gamma$ , voir partie (d). La longueur et la masse de la tuyère deviennent grandes, voir parties (b) et (c). Entre les deux possibilités de conception, on pense que le constructeur préfère d'obtenir un maximum force de pression pour les missiles. Dans le cas réel, on calcule le rapport entre la masse et la force de pression et dans ce cas, on choisit les paramètres de conception sur la base

d'obtenir une valeur plus petite de ce rapport. La figure B.9 présente la variation de ce rapport en fonction de  $M_S$ . On peut déduire que pour chaque valeur de  $M_S$ , il existe une valeur convenable du rapport  $\gamma$ . Par exemple, si  $M_S$  est inférieure à 3.25 approximativement, on peut choisir un gaz ayant une petite valeur de  $\gamma$ . Mais si  $M_S$  est supérieur à 3.25, on peut choisir un grand possible du rapport  $\gamma$ . Pour  $M_S=3.25$ , on peut choisir n'importe quelle valeur de  $\gamma$ . Dans la figure B.9, il n'existe aucune intersection des trois courbes au même temps.

Pour les applications des souffleries, la conception se fait sur la base d'obtenir la plus petite valeur possible de température à la section de sortie, pour ne pas détruire les instruments de mesure, et pour conserver le milieu externe ambiant. Pour maintenir cette condition et à partir de la figure B.7a, il faut choisir un gaz ayant un maximum valeur du rapport  $\gamma$ .

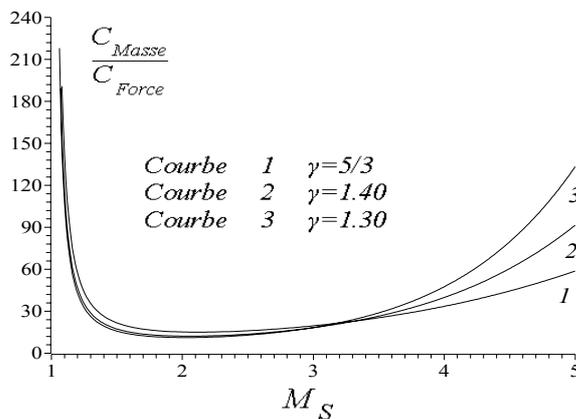


Figure B.9 : Variation du coefficient de conception des Tuyères des moteurs fusées en fonction du nombre de Mach de sortie

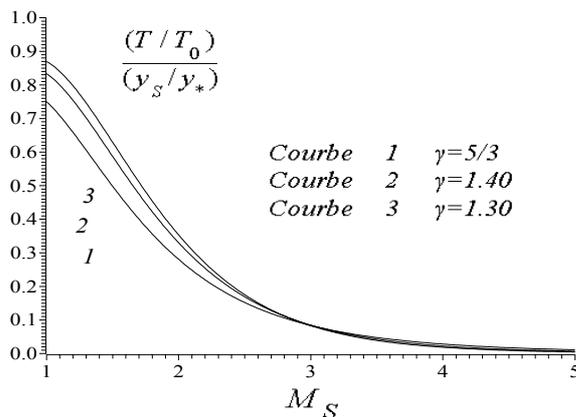


Figure B.10 : Variation du coefficient de conception des souffleries en fonction du nombre de Mach de sortie.

Une autre condition intéressante est d'avoir une grande valeur du rayon de sortie pour l'emplacement des instruments de mesure. Pour appliquer cette condition, on peut choisir

un gaz ayant une petite valeur de  $\gamma$  à partir de la figure B.8h. Entre ces deux possibilités de construction, on préfère la première condition. Dans le cas réel, on peut introduire un nouveau coefficient pour déterminer la meilleure valeur de  $\gamma$ . Ce coefficient est déterminé comme le rapport de  $T/T_0$  sur  $y_E/y^*$ . La figure B.10 représente la variation de ce coefficient en fonction de  $M_S$ . Si ce coefficient est petit, la soufflerie construite possède une bonne conception. Pour des valeurs de  $M_S$  inférieure à 3.00 environ, le choix d'une grande valeur possible de  $\gamma$  est meilleur. Dans l'autre cas, le choix d'une petite valeur est recommandé. Il n'est y à aucune intersection de ces trois courbes au même temps. Lorsque  $M_S=1.00$ , le coefficient est égale à  $T/T_0$ .

### B.5. Comparaison avec la configuration *MLN*

Sur la figure B.11, les tuyères à corps central et *MLN* pour  $M_S=2.50$  et  $\gamma=1.40$  sont comparées. On remarque que la tuyère à corps central possède une longueur petite et par suite une masse petite comparant à la tuyère *MLN*. Les deux tuyères délivrent le même nombre de Mach de sortie. Les valeurs numériques de comparaison sont présentées dans le tableau B.11. Ceux concernant la tuyère *MLN* peuvent être obtenus à partir des références [1] et [3].

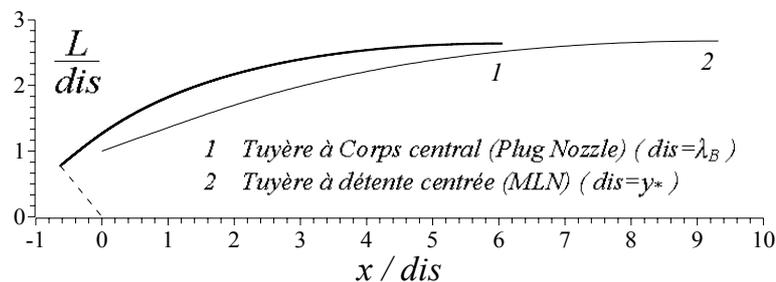


Figure B.11 : Comparaison entre la forme de la tuyère à corps central et *MLN* configuration pour  $M_S=2.50$  et  $\gamma=1.40$ .

Tableau B.11 : Résultats du calcul des tuyères de la figure B.9.

	$L / dis$	$C_{Masse}$	$C_{Force}$	$\theta^*$ (degré)
Tuyère à Corps Central (Plug Nozzle)	6.6724	7.0855	0.5210	39.1235
Tuyère à Détente Centrée (MLN Nozzle)	9.2241	9.3763	0.2367	19.6086

Figure B.12 compare les paramètres de conception (longueur, masse de la structure, force de pression et angle de déviation  $\theta^*$ ) entre la tuyère à corps central et *MLN* en fonction de  $M_S$ . Par exemple, lorsque  $M_S=2.50$  (cas de la figure B.11) le gain en longueur, en masse, et en force de pression sont respectivement 26%, 24%, et 55%.

Si on examinons la figure B.12d, l'angle  $\theta^*$  de la tuyère à corps central est égale au double de la valeur pour le cas de la tuyère *MLN*. Ce résultat peut être vérifié en comparons les relations (3.48) et (4.24).

L'écoulement à l'intérieur de la tuyère à corps central est divisé en zone of transition *ABE* (région simple) et une zone d'écoulement uniforme, ce qui n'est pas le cas pour la tuyère *MLN* qui possède en plus une région d'écoulement non simple de Kernel.

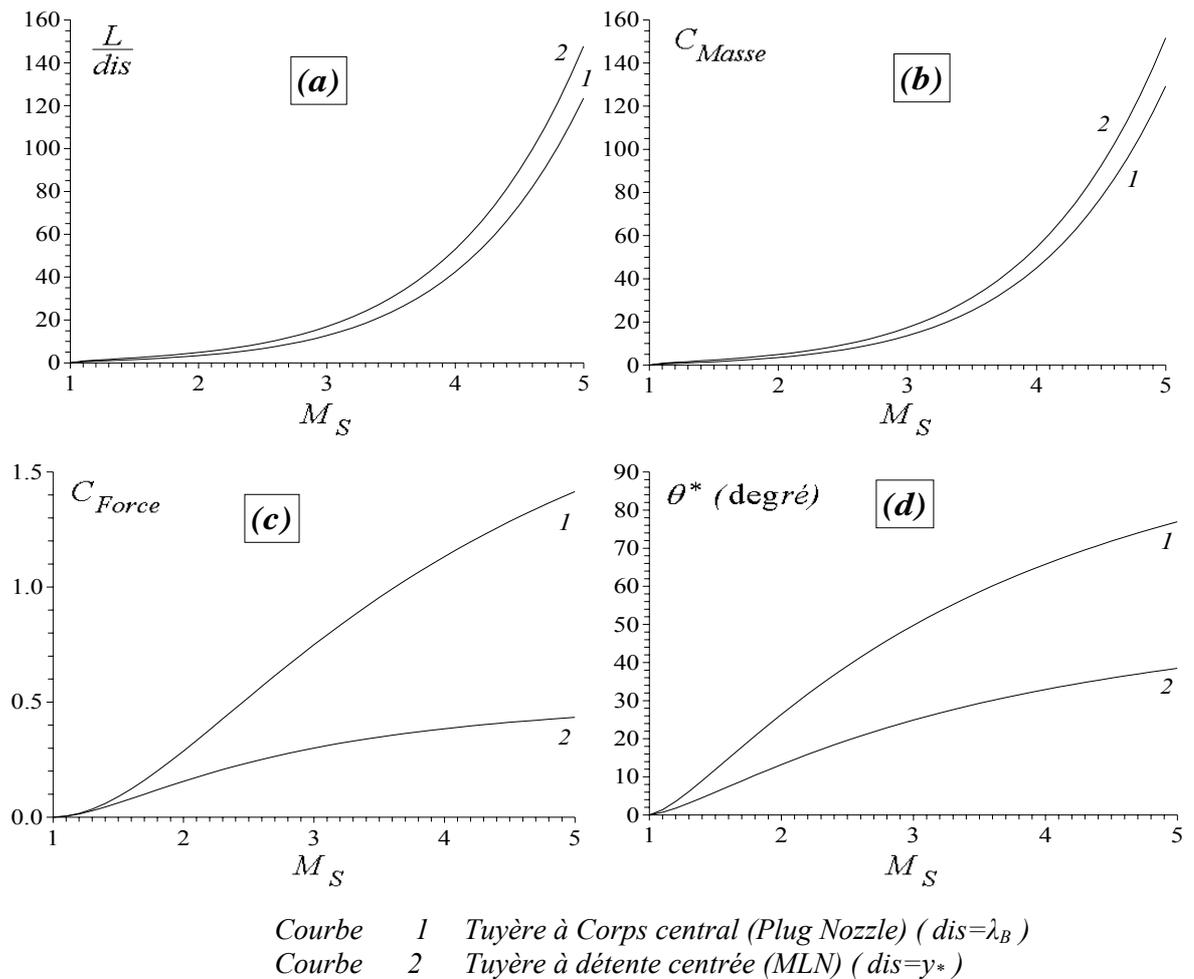


Figure B.12 : Comparaison des paramètres de conception entre la tuyère à corps central et *MLN* configuration pour l'air  $\gamma=1.40$ .

(a): Longueur du corps central. (b): Masse de la structure du corps central. (c): Force de pression exercée sur la paroi du corps central. (d): Angle de déviation de l'écoulement au col.

## APPENDICE C

### LIGNE DE COURANT TRIDIMENSIONNELLE

Le but de la présentation de cet appendice c'est d'étudier la possibilité d'améliorer les performances d'une tuyère par rapport à la géométrie axisymétrique. Deux situations peuvent se présenter.

La première possibilité consiste à essayer de trouver une forme 3D ayant même masse que la géométrie axisymétrique mais délivre un nombre de Mach supérieure. La deuxième possibilité c'est de trouver toujours une forme 3D délivrant le même nombre de Mach de sortie, mais possède une masse inférieure par rapport à la géométrie axisymétrique.

L'idée principale consiste à faire l'extension vers la géométrie tridimensionnelle de la définition d'une ligne de courant. A cette raison, on propose quelques idées dans ce contexte.

#### C.1. Fonction de courant en un point de l'écoulement

Considérons l'équation de la conservation de la masse écrite en fonction des paramètres  $V$  et  $\theta$  sous la forme suivante [1], [2], [3], [12], [39] et [59]:

$$\frac{\partial(\rho V y^\delta \cos\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V y^\delta \sin\theta)}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.1})$$

Alors, il existe des fonctions de potentielle  $\phi(x,y)$  et de courant  $\psi(x,y)$  comme solution de l'équation (C.1). On s'intéresse par la solution en terme de fonction de courant par la forme suivante:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\rho_0} V y^\delta \sin \theta \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0} V y^\delta \cos \theta \quad (\text{C.2})$$

Considérons le schéma en caractéristique illustré sur la figure C.1 suivante:

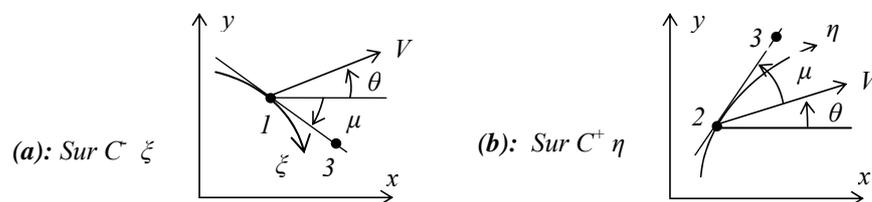


Figure C.1 : Schéma en caractéristiques

A partir du schéma de la figure C.1, on peut écrire la transformation entre les coordonnées cartésiennes  $(xy)$  et les coordonnées curvilignes  $\xi\eta$  sous la forme suivante:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(\theta + \mu) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin(\theta + \mu) \quad (\text{C.3})$$

Substituons l'équation (C.2) dans la relation (C.3), connaissons  $\sin(\theta + \mu) \cos(\theta) - \cos(\theta + \mu) \sin(\theta) = \sin(\mu)$  et  $\sin(\mu) = 1/M$ . On obtient:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\rho}{\rho_0} V y^\delta \frac{1}{M} \quad (\text{C.4})$$

Remplaçant la relation entre  $d\eta$  et  $dy$  présentée dans la relation (3.8) du chapitre 3 dans la relation (C.4), on obtient:

$$d\psi = \frac{\rho}{\rho_0} V y^\delta \frac{1}{M} \frac{dy}{\sin(\theta + \mu)} \quad (\text{C.5})$$

L'intégration de (C.5) entre les états 2 et 3 s'écrit:

$$\psi_3 - \psi_2 = \int_{y_2}^{y_3} \frac{\rho}{\rho_0} V y^\delta \frac{1}{M} \frac{dy}{\sin(\theta + \mu)} \quad \text{Suivant } \eta \quad (\text{C.6})$$

De la même manière, on considérons la caractéristique descendante  $\xi$ . On peut écrire la relation suivante:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin(\theta - \mu) \quad (\text{C.7})$$

Substituant l'équation (C.2) dans la relation (C.7), connaissons  $\sin(\theta - \mu) \cos(\theta) - \cos(\theta - \mu) \sin(\theta) = -\sin(\mu)$  et  $\sin(\mu) = 1/M$ . On obtient:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\frac{\rho}{\rho_0} V y^\delta \frac{1}{M} \quad (\text{C.8})$$

A partir de la figure C.1, on peut écrire la relation suivante reliant les coordonnées  $y$  et la direction des caractéristiques descendante  $\xi$  par:

$$d\xi = \frac{dy}{\sin(\theta - \mu)} \quad (\text{C.9})$$

Le remplacement de la relation (C.9) dans (C.8) donne:

$$d\psi = -\frac{\rho}{\rho_0} V y^\delta \frac{1}{M} \frac{dy}{\sin(\theta - \mu)} \quad (\text{C.10})$$

L'intégration de (C.10) entre les états 1 et 3 s'écrit:

$$\psi_3 - \psi_1 = - \int_{y_1}^{y_3} \frac{\rho}{\rho_0} V y^\delta \frac{1}{M} \frac{dy}{\sin(\theta - \mu)} \quad \text{Suivant } \xi \quad (\text{C.11})$$

En divisant les relations (C.6) et (C.11) par la vitesse d'arrêt du son  $a_0$ , pour raison d'obtenir des rapports thermodynamiques dans la partie sous le signe intégrale, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_3}{a_0} - \frac{\psi_2}{a_0} &= \int_{y_2}^{y_3} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{V}{a_0} y^\delta \frac{1}{M} \frac{dy}{\sin(\theta + \mu)} \text{ suivant } \eta \\ \frac{\psi_3}{a_0} - \frac{\psi_1}{a_0} &= - \int_{y_1}^{y_3} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{V}{a_0} y^\delta \frac{1}{M} \frac{dy}{\sin(\theta - \mu)} \text{ suivant } \zeta \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Comme un point du champ d'écoulement supersonique est relié avec deux caractéristiques l'une montante et l'autre descendante, on peut obtenir la valeur de la fonction de courant  $\psi$  au point 3 par l'utilisation de la relation (C.12) valable sur la ligne de Mach  $\eta$  montante ou celle valable sur la ligne de Mach  $\zeta$  descendante. Ici la valeur de  $\psi$  aux points 1 et 2 sont supposées connues (calcul dans une tuyère 2D ou axisymétrique).

Dans la relation (C.12), le résultat de l'intégration est toujours positif, puisque tous les paramètres  $M$ ,  $\theta$  et les rapports thermodynamiques sont positifs et l'intégration de la variable  $y$  est positive aussi. Alors, comme résultat, la valeur de  $\psi_3$  est supérieure à  $\psi_2$ , ce qui donne que la fonction de courant  $\psi$  augmente en montant sur la caractéristique montante  $\eta$ . Autrement, la fonction  $\psi$  augmente avec l'ordonnée  $y$ .

### C.1.1. Approximation

Dans la relation (C.12), on peut considérer deux variables indépendantes parmi l'ensemble des paramètres. Les autres paramètres peuvent être exprimés en fonction des deux choisis. Alors, on suppose qu'entre les points 2 et 3 et entre les points 1 et 3, la variation des paramètres  $\theta$  et  $T$  prend la valeur moyenne. Cette approximation est valable plus les points 2 et 3 et les points 1 et 3 sont proches l'un de l'autre. Donc l'intégration des relations (C.12) donne:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_3}{a_0 y_*} - \frac{\psi_2}{a_0 y_*} &= \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{23} \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{23} \frac{1}{M_{23}} \frac{1}{\sin(\theta_{23} + \mu_{23})} \frac{\left( \frac{y_3}{y_*} \right)^{\delta+1} - \left( \frac{y_2}{y_*} \right)^{\delta+1}}{\delta+1} \text{ suivant } \eta \\ \frac{\psi_3}{a_0 y_*} - \frac{\psi_1}{a_0 y_*} &= - \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{13} \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{13} \frac{1}{M_{13}} \frac{1}{\sin(\theta_{13} - \mu_{13})} \frac{\left( \frac{y_3}{y_*} \right)^{\delta+1} - \left( \frac{y_1}{y_*} \right)^{\delta+1}}{\delta+1} \text{ suivant } \zeta \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Les valeurs de  $T_{13}, T_{23}, \theta_{13}, \theta_{23}$  sont données par les relations (3.13) et (3.14) du chapitre 3.

Par analogie avec les relations (3.43) et (3.46) du chapitre 3, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{23} &= e^{-\int_{T_{23}}^{T_0} F_\rho(T) dT} \text{ suivant } \eta \quad ; \quad \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{13} = e^{-\int_{T_{13}}^{T_0} F_\rho(T) dT} \text{ suivant } \zeta \\ \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{23} &= M_{23} \left[ \frac{\gamma_{23}}{\gamma(T_0)} \right]^{1/2} \left[ \frac{T_{23}}{T_0} \right]^{1/2} \text{ suivant } \eta \quad ; \quad \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{13} = M_{13} \left[ \frac{\gamma_{13}}{\gamma(T_0)} \right]^{1/2} \left[ \frac{T_{13}}{T_0} \right]^{1/2} \text{ suivant } \zeta \end{aligned}$$

Les valeurs de  $\mu_{13}, \mu_{23}, a_{13}, a_{23}, M_{13}, M_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$  peuvent être déterminées par les relations (3.23), (3.24), (3.25) et (3.26) du chapitre 3.

### C.1.2. Valeur de $\psi$ au col et à la section de sortie de la tuyère

En premier lieu, on suppose que sur l'axe de symétrie, la valeur de  $\psi$  est égale à zéro, puisque on s'intéresse à une différence des valeurs. Le schéma sur la figure C.2 illustre les zones de l'écoulement de la tuyère  $MLN$ . Sur la ligne de Mach montante  $BS$ , on peut écrire, en utilisant la relation entre les points 2 et 3 de l'équation (C.13), la relation suivante:

$$\frac{\psi_S}{a_0 y_*} - \frac{\psi_B}{a_0 y_*} = \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{BS} \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{BS} \frac{1}{M_{BS}} \frac{1}{\sin(\theta_{BS} + \mu_{BS})} \frac{(y_S/y_*)^{\delta+1} - (y_B/y_*)^{\delta+1}}{\delta+1} \quad (C.14)$$

Avec:

$$\left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{BS} = \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_S, \quad \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{BS} = M_{BS} \left[ \frac{a}{a_0} \right]_{BS}, \quad \left( \frac{a}{a_0} \right)_{BS} = \left( \frac{a}{a_0} \right)_S$$

$$\psi_B = 0, \quad y_B = 0, \quad M_{BS} = M_S, \quad \theta_{BS} = 0.0, \quad \sin(\mu_{BS}) = \frac{1}{M_{BS}}$$

Alors, la relation (C.14) devient:

$$\frac{\psi_S}{a_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_S \left( \frac{a}{a_0} \right)_S M_S \frac{y_S^{\delta+1}}{\delta+1} \quad (C.15)$$

Le rapport des masses volumiques et des vitesses du son dans la relation (C.15) est respectivement donné par les relations (1.52) et (1.54) du chapitre 1.

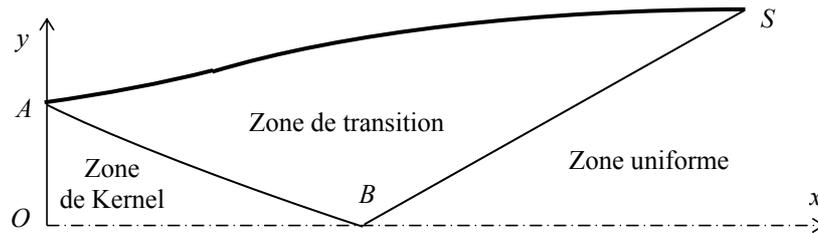


Figure C.2 : Illustration de la ligne de Mach du col  $OA$  et de la zone uniforme  $BS$  de sortie

Maintenant sur la ligne de Mach  $AO$  du col (ligne sonique), on peut écrire:

$$\frac{\psi_O}{a_0} - \frac{\psi_A}{a_0} = \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{AO} \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{AO} \frac{1}{M_{AO}} \frac{1}{\sin(\theta_{AO} + \mu_{AO})} \frac{y_O^{\delta+1} - y_A^{\delta+1}}{\delta+1} \quad (C.16)$$

Avec:

$$\left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{AO} = \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_*$$

$$\left[ \frac{V}{a_0} \right]_{AO} = M_{AO} \left[ \frac{a}{a_0} \right]_{AO}, \quad \left( \frac{a}{a_0} \right)_{AO} = \left( \frac{a}{a_0} \right)_*$$

$$\psi_O = 0, \quad y_O = 0, \quad M_{AO} = 1.00, \quad \theta_{AO} = 0.0, \quad \mu_{AO} = 90^\circ$$

Alors, la relation (A.16) devient:

$$\frac{\psi_A}{a_0 y_*} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_* \left( \frac{a}{a_0} \right)_* \frac{(y_A/y_*)^{\delta+1}}{\delta+1} \quad (C.17)$$

Remarque: Puisque la paroi  $AS$  de la tuyère représente une ligne de courant, alors:

$$\psi_S = \psi_A \quad (C.18)$$

### C.2. Recherche les points d'une ligne de Courant Tridimensionnelle

En entend par une courbe iso-valeurs, des courbes dans le champ de l'écoulement dans la tuyère ayant un ensemble de points possédant une même propriétés physique ou thermodynamique. Si cette courbe possède des points ayant même valeur de la fonction de courant, ces courbes sont appelées par les lignes de courant. Elles sont très intéressantes pour la description de l'écoulement et pour faire l'extension de l'étude vers le cas tridimensionnel. Notons que la paroi de la tuyère est une ligne de courant à valeur de la fonction de courant connue. La recherche des points de ces courbes se fait dans chaque segments des caractéristiques que se soit montantes ou descendantes.

Soit  $\psi^{iso}$ , la valeur de la fonction de courant d'un ensemble de points interne dans la tuyère qu'on doit déterminés leurs positions. On détermine au même temps les valeurs de  $M$ ,  $\theta$ ,  $P/P_0$ ,  $\rho/\rho_0$  et  $T$  aux points de chaque ligne de courant. La recherche des points sur la paroi de la tuyère et sur l'axe de symétrie n'est pas nécessaire. On peut avoir les deux possibilités suivantes:



Figure C.3 : Différents segments de recherche des points d'une ligne de courant

Les propriétés ( $x$ ,  $y$ ,  $M$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $T$ ,  $\rho/\rho_0$  et  $P/P_0$ ) aux points  $G$  et  $D$  sont connues (déjà déterminées lors de calcul de l'écoulement dans la tuyère 2D ou axisymétrique) devient la détermination les mêmes propriétés au point  $P$  vérifiant la condition:

$$\psi_P = \psi^{iso} \quad (C.19)$$

Il est à noter que  $\psi^{iso} < \psi_S$  (valeur de la fonction de courant de la paroi de la tuyère).

Pour connaître, est ce qu'on est sur la  $C^+$  ou  $C^-$ , on fait le test (3.79). Le segment contenant le point  $P$  respectant la propriété (C.3), doit vérifié la condition suivante:

$$(\psi^{iso} - \psi_G) (\psi^{iso} - \psi_D) \leq 0 \quad (C.20)$$

### Approximation

Cette approximation est basée sur l'utilisation des interpolations des paramètres  $T$  et  $\theta$  sur les caractéristiques pour déterminer la position du point  $P$  de la ligne de courant. Il existe deux possibilités de segment contenant le point  $P$  d'après la figure C.3. On considère la relation suivante d'après la condition (3.79) du chapitre 3.

$$\tau = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta y > 0 \\ -1 & \text{si } \Delta y < 0 \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

Le but de la relation (C.21) est pour englober les deux équations de la relation (C.13) dans une seule. La procédure de recherche de la position du point  $P$  commence par l'itération initiale ( $K=0$ ) de l'ordonnée  $y_P$  par la relation suivante:

$$y_P = \frac{y_G + y_D}{2} \quad (\text{C.22})$$

Le point  $P$  se trouve sur la droite reliant les points  $G$  et  $D$ . L'abscisses  $x_P$  est donnée par:

$$x_P = x_G + \left[ \frac{y_D - y_G}{x_D - x_G} \right] (y_P - y_G) \quad (\text{C.23})$$

Les relations (C.22) et (C.23) donnent l'approximation initiale de la position du point  $P$ . L'interpolation de  $\theta$  et  $T$  sur le segment  $GD$  donne au point  $P$ , les résultats suivants:

$$\theta_P = \frac{S_{GP}}{S_{GD}} (\theta_D - \theta_G) + \theta_G \quad , \quad T_P = \frac{S_{GP}}{S_{GD}} (T_D - T_G) + T_G \quad (\text{C.24})$$

Avec

$$S_{GD} = \sqrt{(x_G - x_D)^2 + (y_G - y_D)^2} \quad , \quad S_{GP} = \sqrt{(x_G - x_P)^2 + (y_G - y_P)^2} \quad (\text{C.25})$$

Les valeurs de  $x_P$  et  $y_P$  dans la relation (C.25) sont données par (C.22) et (C.23). Une fois les valeurs de la première approximation sont évaluées, on peut considérer les relations (C.13) pour la détermination de la première approximation de la valeur de la fonction de courant au point  $P$  sur la caractéristique  $GP$ . Alors :

$$\frac{\psi_P}{a_0 y_*} = \frac{\psi_G}{a_0 y_*} + \tau f_{GP} \frac{(y_P/y_*)^{\delta+1} - (y_G/y_*)^{\delta+1}}{\delta+1} \quad (\text{C.26})$$

Avec

$$f_{GP} = \left[ \frac{\rho}{\rho_0} \right]_{GP} \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{GP} \frac{1}{M_{GP}} \frac{1}{\sin(\theta_{GP} + \tau \mu_{GP})} \quad (\text{C.27})$$

et

$$T_{GP} = \frac{T_G + T_P}{2} \quad , \quad \theta_{GP} = \frac{\theta_G + \theta_P}{2} \quad , \quad a(T_{GP}) = \sqrt{\gamma(T_{GP}) r T_{GP}} \quad (\text{C.28})$$

$$M_{GP} = \frac{\sqrt{2 H(T_{GP})}}{a(T_{GP})} \quad , \quad \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_{GP} = e^{-\int_{T_{GP}}^{T_0} F_\rho(T) dT} \quad , \quad \left[ \frac{V}{a_0} \right]_{GP} = M_{GP} \left[ \frac{\gamma(T_{GP})}{\gamma(T_0)} \right]^{1/2} \left[ \frac{T_{GP}}{T_0} \right]^{1/2} \quad (\text{C.29})$$

$$\mu_{GP} = \arcsin\left(\frac{1}{M_{GP}}\right) \quad , \quad \gamma(T_{GP}) = \frac{C_P(T_{GP})}{C_P(T_{GP}) - r} \quad (\text{C.30})$$

Comme la valeur de la fonction de courant  $\psi_P$  est connue, elle est égale à  $\psi_P = \psi^{iso}$ . Alors, dans la relation (C.26), on peut déterminer la correction de l'ordonnée  $y_P$  par :

$$\frac{y_P}{y_*} = \left[ \left(\frac{y_G}{y_*}\right)^{\delta+1} + \tau(\delta+1) \frac{\frac{\psi^{iso} - \psi_G}{a_0 y_*} - \frac{\psi_G}{a_0 y_*}}{f_{GP}} \right]^{\frac{1}{\delta+1}} \quad (\text{C.31})$$

La relation (C.31) permettant de corriger l'ordonnée  $y_P$  du point  $P$  appartenant à la courbe d'une ligne de courant. Pour satisfaire la convergence, il faut que l'erreur entre deux itérations successives soit inférieure à une tolérance donnée. Alors :

$$|y_P(\text{itération } K) - y_P(\text{itération } K-1)| < \varepsilon \quad (\text{C.32})$$

Les paramètres  $x_P$ ,  $T_P$ ,  $\theta_P$  et  $\psi_P$  donnés par (C.23), (C.24) et (C.26) convergent aussi vers la solution désirée. Les autres paramètres au point  $P$  peuvent être déterminés en remplaçons  $T_{GP}$  par  $T_P$  dans les relations (C.29). La pression au point  $P$  peut être déterminée en remplaçons  $T$  par  $T_P$  dans la relation (1.27) du chapitre 1.

#### Remarque:

Les points  $(x_P, y_P)$  déterminés pour chaque ligne de courant sont disposés d'une façon aléatoire après l'exécution du programme de calcul. Donc, il faut organiser les points de telle manière qu'il y a accroissement ou décroissement des abscisses, du premier point du col jusqu'à le dernier de la section de sortie.

### C.3. Variation de la fonction de courant dans une section droite

Soit  $x = x_{SEC}$  la position d'une section par rapport au col. Le problème consiste à déterminer la valeur de  $\psi$  dans cette section aux points dans les segments des caractéristiques coupant la section considérée, et déduire les autres paramètres en ces points. Sur l'axe de symétrie on a  $\psi = 0$  et sur la paroi de la tuyère  $\psi = \psi_S$ . On peut avoir deux possibilités comme présente la figure C.4.

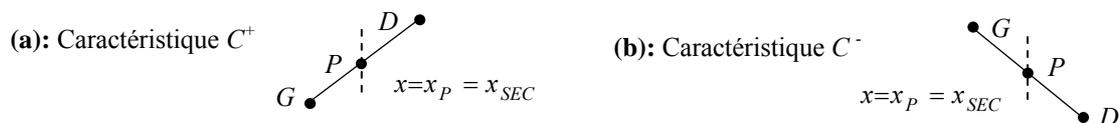


Figure C.4 : Différents cas possible de segment

Les propriétés  $(x, y, M, \theta, \psi, T, \rho/\rho_0, P/P_0)$  aux points  $G$  et  $D$  sont connues (déjà déterminées lors de calcul de l'écoulement par la méthode des caractéristiques). Le problème consiste à déterminer la valeur de  $\psi$  et les autres paramètres au point  $P$ , sachant  $x_P = x_{SEC}$ . Pour connaître est ce qu'on est sur la  $C^+$  ou  $C^-$ , on fait le test (3.79). Le segment contenant le point  $P$  de la section  $x = x_{SEC}$  doit vérifié la condition suivante:

$$(x_{SEC} - x_G)(x_{SEC} - x_D) \leq 0 \quad (C.33)$$

### C.3.1. Détermination les propriétés au point $P$

On premier lieu, il faut connaître la position du point  $P$ . Donc il manque l'ordonnée de ce point. Par écriture les équations reliant les points  $G$  et  $P$  et les points  $G$  et  $D$ , on obtient:

$$y_P = \left[ \frac{y_D - y_G}{x_D - x_G} \right] (x_P - x_G) + y_G \quad (C.34)$$

On peut déterminer les paramètres au point  $P$ , si on fait une interpolation à  $\theta$  et à  $T$  entre le point  $G$  ( $S=0, \theta=\theta_G, T=T_G$ ) et le point  $D$  ( $S=S_{GD}, \theta=\theta_D, T=T_D$ ). Les autres paramètres seront déduits par suite. Les paramètres  $\theta$  et  $T$ , au point  $P$ , peuvent être déterminés par les relations (C.24) et (C.25).

La valeur de la fonction de courant  $\psi_P$  au point  $P$  peut être déterminée en utilisant la relation (C.26). Les paramètres intervenant dans cette relation sont présentés par les relations (C.27) à (C.30).

Le calcul du nombre de Mach et le rapport des masses volumiques au point  $P$  s'obtiennent en remplaçant  $T_{GP}$  par  $T_P$  dans les relations (C.29), et pour le rapport des pressions, on remplace  $T$  par  $T_P$  dans la relation (1.27) du chapitre 1.

### C.3.2. Variation des paramètres entre deux points proches placés verticalement

Considérons la configuration illustrée dans la figure C.5 concernant deux points placés verticalement, dont les propriétés  $(y, M, \theta, \psi, T, \rho/\rho_0, P/P_0)$  aux points  $B$  et  $H$  sont connues. Ces points représentent l'intersection des caractéristiques avec une section de la tuyère. On rencontre ce problème après la détermination de tous les points de l'intersection des caractéristiques avec une section droite donnée, et que la distance entre les points placés verticalement est assez grande, de telle manière que les informations obtenues ne sont pas suffisantes pour déterminer la variation des paramètres suivant l'axe vertical. Ce problème peut être obtenu si le nombre de points de maillage est faible.

On rencontre aussi se problème dans la région uniforme d'une section droite, où la distance entre le point de l'axe de symétrie et le point de l'intersection de la ligne montante

$BS$  avec la section considérée est grande. Cette distance devient de plus en plus grande plus on rapproche vers la section de sortie.

Le problème consiste à déterminer les propriétés en un point  $P$  entre les points  $B$  et  $H$ , connaissons l'ordonnée du point  $P$  par  $y=y_P$ .

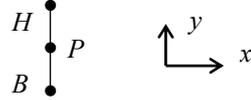


Figure C.5 : Segment de droite placé verticalement

On peut démontrer, en utilisant les relations (C.13), que la variation de la fonction de courant  $\psi$  entre les points  $B$  et  $H$  est de la forme:

$$\psi(y) = \alpha + \beta y^{\delta+1} \quad (\text{C.35})$$

Aux points  $B$  et  $H$  on a respectivement  $(y=y_B, \psi=\psi_B)$ ,  $(y=y_H, \psi=\psi_H)$ . Alors, la variation (C.35) donne au point  $P$ , la valeur suivante:

$$\psi_P = \psi(y=y_P) = \frac{\psi_H - \psi_B}{y_H^{\delta+1} - y_B^{\delta+1}} (y_P^{\delta+1} - y_B^{\delta+1}) + \psi_B \quad (\text{C.36})$$

On rapproche la variation de  $\theta$  et  $T$  sur la droite  $BH$  par une variation linéaire. Lorsque  $y=y_B$  on  $\theta=\theta_B$ ,  $T=T_B$  et lorsque  $y=y_H$ , on a  $\theta=\theta_H$ ,  $T=T_H$ . Alors, au point  $P$ , on aura les résultats suivants:

$$\theta_P = \frac{\theta_H - \theta_B}{y_H - y_B} (y_P - y_B) + \theta_B \quad , \quad T_P = \frac{T_H - T_B}{y_H - y_B} (y_P - y_B) + T_B \quad (\text{C.37})$$

Le nombre de Mach et la masse volumique au point  $P$  peuvent être déterminés en remplaçons  $T_{GP}$  par  $T_P$  dans les relations (C.29). Le rapport des pressions peut être déterminé en remplaçons  $T=T_P$  dans la relation (1.27) du chapitre 1.

Comme les points  $B$  et  $H$  de la figure C.5 représentent l'intersection des segments des caractéristiques avec une section de la tuyère, il y on a pas de problème et de conflit de considération une variation linéaire sur la figure C.5 et la variation linéaire sur les segments des caractéristiques reliant les points  $G$  et  $D$  de la figure C.4.

*Le traçage de la variation de la fonction de courant en fonction du rayon de la tuyère pour chaque section est recommandé. Alors, pour chaque couple  $(T_0, M_S)$ , on peut obtenir un diagramme  $(\psi, y, x)$ .*

On peut faire l'extension de traçage des diagrammes  $(P, y, x)$ ,  $(T, y, x)$ ,  $(M, y, x)$ ,  $(\rho, y, x)$  et  $(\theta, y, x)$  respectivement pour les paramètres (Pression, Nombre de Mach, Masse volumique et déviation de l'écoulement) serviront pour faire la conception de la tuyère 3D.

#### C.4. Aperçu sur la manière de dimensionnement de la tuyère 3D :

Après avoir obtenu l'écoulement en tous points internes du champ d'écoulement dans la tuyère axisymétrique, on peut procéder au dimensionnement de la tuyère 3D en appliquant l'idée de la définition d'une ligne de courant.

La conception commence par le choix de la section de sortie de la tuyère 3D à dimensionnée. Plusieurs formes peuvent être choisies. Citons des sections ayant un plan de symétrie, autres ayant deux plans de symétries, ou qui n'ont aucune symétrie. La figure C.6 illustre quelques géométries de la section de sortie et leurs emplacements. La section du col sera de la même forme que la section de sortie, vu que l'écoulement à travers ces deux sections est *ID*.

Il est recommandé de placer la section à choisir dans la région uniforme, voir figure C.7, afin de ne pas obtenir toute une portion à la section de sortie de la tuyère 3D ayant un écoulement uniforme. Dans ce cas, l'intersection de la zone du cône uniforme avec la section choisie donne au minimum un point.

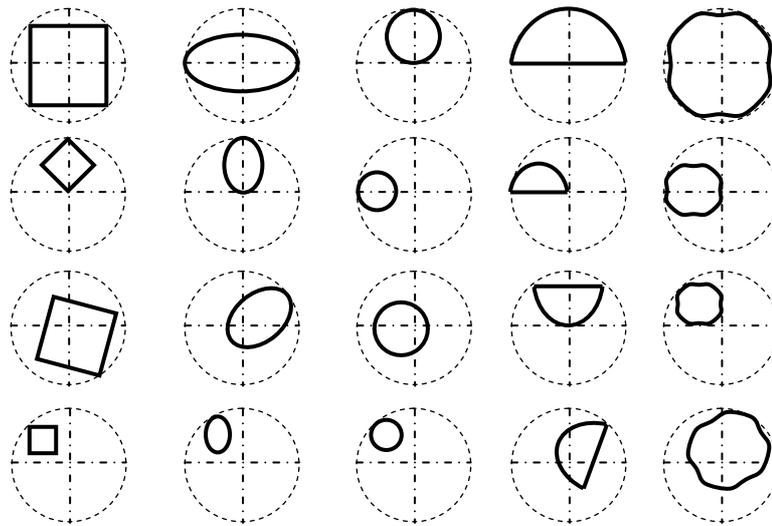


Figure C.6 : Section de sortie arbitraire avec différentes dispositions

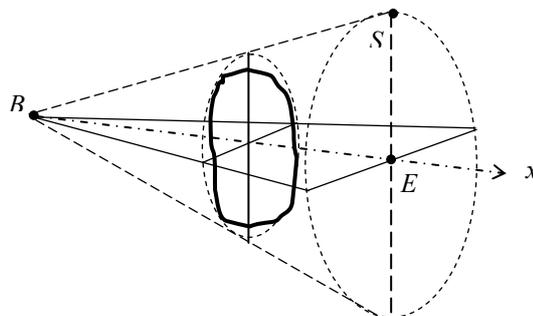


Figure C.7 : Choix de la section de sortie d'une tuyère tridimensionnelle dans la zone d'écoulement uniforme

La deuxième étape consiste à diviser la section de sortie choisie en plusieurs points et de déterminer leurs positions ainsi que les paramètres  $(\psi, P, T, \rho, M, \theta, x)$ , voir la figure C.8.

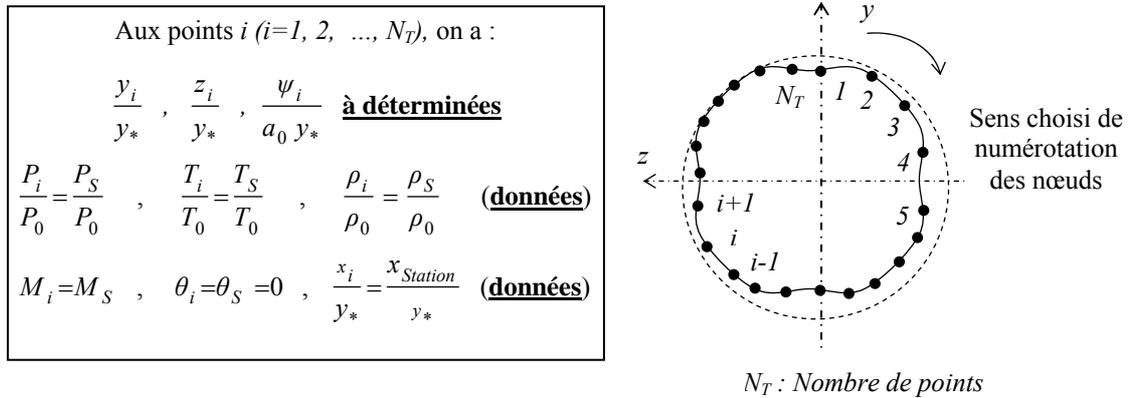


Figure C.8 : Discrétisation de la section de sortie de la tuyère tridimensionnelle et numérotation des nœuds choisis

Chaque point sur la section choisie possède sa propre valeur de  $\psi$ . Si deux points ou plus se trouvent sur même distance par rapport à l'axe de symétrie, elles possèdent la même valeur de la fonction de courant.

La troisième étape consiste à diviser l'axe longitudinal en plusieurs stations y compris le col. Pour chaque points  $i (i=1, 2, \dots, N_T)$  de la section de sortie, la tuyère en vu de profil possède la forme présentée dans la figure C.9, mais avec autres emplacements des points.

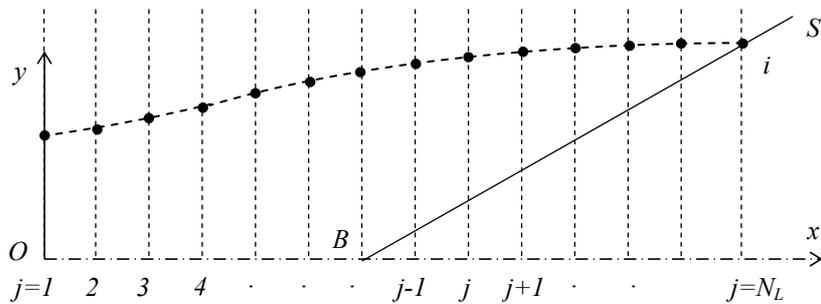


Figure C.9 : Forme en profil de la tuyère passant par un point de la section de sortie

Tous les points qui se trouvent sur la courbe  $AS$  possèdent la même valeur de la fonction de courant : Alors :

$$\psi_j = \psi_i \quad j=1, 2, 3, \dots, N_L \tag{C.38}$$

En appliquons cette propriété, on peut déterminer la position  $(x, y, z)$  de chaque point  $j (j=1, 2, 3, \dots, N_L)$  de cette ligne de courant, en utilisant l'algorithme (C.31). En parallèle, il faut déterminer encore les propriétés  $(M, P, T, \rho, \dots)$  en ces points en appliquons les relations (C.29) et (1.27) du chapitre 1.

Le nombre total de points à traité est égale à  $N_T \times N_L$

La précision du calcul dépend du nombre de points choisi sur la section de sortie et le nombre de stations longitudinales. Une fois la paroi de la tuyère 3D est déterminée, on peut procéder à la détermination de sa masse et la force de pression exercée sur sa paroi interne.

Entre deux stations successives, on obtient des cellules quadrilatères dans l'espace comme présente la figure C.10.

On suppose que la tuyère est constituée d'une épaisseur constante et de même matériau. Alors, le calcul de la masse et la force de pression totale sont reliés donc respectivement avec le calcul des aires et de la force de pression exercée sur la paroi de chaque quadrilatère. Le quadrilatère est regardé comme union de deux triangles adjacents, voir figure C.10. On note ici que la force de pression interpolée, exercée sur la paroi du triangle 123 n'est pas parallèle à celle exercée sur le triangle 243.

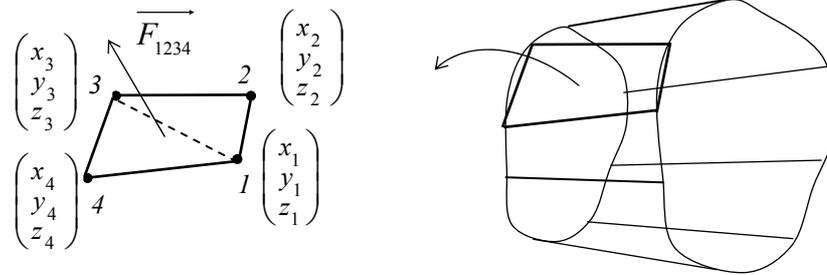


Figure C.10 : Eléments finis placés entre deux stations successives de la tuyère 3D.

On note que les quatre nœuds ne se trouvent pas dans un même plan dans l'espace. En appliquons le principe du produit vectoriel, on peut obtenir la contribution de la force et la masse de la structure données par le quadrilatère 1234. Alors :

$$Masse_{1234} = \rho_M t_M [A_{123} + A_{134}] \quad (C.39)$$

$$\vec{F}_{1234} = \frac{\vec{12} \wedge \vec{13}}{|\vec{12} \wedge \vec{13}|} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{123} A_{123} + \frac{\vec{41} \wedge \vec{43}}{|\vec{41} \wedge \vec{43}|} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{134} A_{134} \quad (C.40)$$

avec

$$A_{123} = \frac{1}{2} |\vec{12} \wedge \vec{13}|, \quad A_{134} = \frac{1}{2} |\vec{41} \wedge \vec{43}| \quad (C.41)$$

$$\left( \frac{P}{P_0} \right)_{123} = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{P_1}{P_0} \right) + \left( \frac{P_2}{P_0} \right) + \left( \frac{P_3}{P_0} \right) \right], \quad \left( \frac{P}{P_0} \right)_{134} = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{P_1}{P_0} \right) + \left( \frac{P_3}{P_0} \right) + \left( \frac{P_4}{P_0} \right) \right] \quad (C.42)$$

Alors, la relation (C.40) devient

$$\vec{F}_{1234} = \left( \vec{12} \wedge \vec{13} \right) \frac{1}{6} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{123} + \left( \vec{41} \wedge \vec{43} \right) \frac{1}{6} \left( \frac{P}{P_0} \right)_{134} \quad (\text{C.43})$$

$$(F_{1234})_x \vec{i} + (F_{1234})_y \vec{j} + (F_{1234})_z \vec{k}$$

d'où

$$\Delta x_{kl} = x_k - x_l, \quad \Delta y_{kl} = y_k - y_l, \quad \Delta z_{kl} = z_k - z_l \quad (k=1, 2, 3, 4), \quad (l=1, 2, 3, 4)$$

$$A_{123} = \sqrt{[\Delta y_{21} \Delta z_{31} - \Delta z_{21} \Delta y_{31}]^2 + [\Delta z_{21} \Delta x_{31} - \Delta x_{21} \Delta z_{31}]^2 + [\Delta x_{21} \Delta y_{31} - \Delta y_{21} \Delta x_{31}]^2} \quad (\text{C.44})$$

$$A_{134} = \sqrt{[\Delta y_{14} \Delta z_{34} - \Delta z_{14} \Delta y_{34}]^2 + [\Delta z_{14} \Delta x_{34} - \Delta x_{14} \Delta z_{34}]^2 + [\Delta x_{14} \Delta y_{34} - \Delta y_{14} \Delta x_{34}]^2} \quad (\text{C.45})$$

Les relations (C.44) et (C.45) ne sont pas simplifiées (on a  $x_1=x_2$  et  $x_3=x_4$ , puisque la direction  $x$  présente l'axe de la tuyère). La relation (C.43) donne :

$$(F_{1234})_x = \frac{1}{2} \left\{ [\Delta y_{21} \Delta z_{31} - \Delta z_{21} \Delta y_{31}] \left( \frac{P}{P_0} \right)_{123} + [\Delta y_{14} \Delta z_{34} - \Delta z_{14} \Delta y_{34}] \left( \frac{P}{P_0} \right)_{134} \right\} \quad (\text{C.46})$$

$$(F_{1234})_y = \frac{1}{2} \left\{ [\Delta z_{21} \Delta x_{31} - \Delta x_{21} \Delta z_{31}] \left( \frac{P}{P_0} \right)_{123} + [\Delta z_{14} \Delta x_{34} - \Delta x_{14} \Delta z_{34}] \left( \frac{P}{P_0} \right)_{134} \right\} \quad (\text{C.47})$$

$$(F_{1234})_z = \frac{1}{2} \left\{ [\Delta x_{21} \Delta y_{31} - \Delta y_{21} \Delta x_{31}] \left( \frac{P}{P_0} \right)_{123} + [\Delta x_{14} \Delta y_{34} - \Delta y_{14} \Delta x_{34}] \left( \frac{P}{P_0} \right)_{134} \right\} \quad (\text{C.48})$$

Le nombre total de quadrilatères à traité est égale à  $N_{Tx} (N_L - 1)$ .

On estime, suivant la forme choisie de la section de sortie et suivant les relations (C.46), (C.47) et (C.48), que la force de pression exercée sur la paroi de la tuyère 3D peut avoir trois composantes suivant les trois axes de coordonnées. *Reste à vérifier ce résultat avec le calcul numérique.*

## REFERENCES

1. Anderson J. D. Jr., "Fundamentals of Aerodynamics," McGraw-Hill Book company, New York, 1988.
2. Anderson J. . Jr., "Modern Compressible Flow: With Historical Perspective," McGraw Hill Book company, New York, 1982.
3. Argrow B.M. and Emanuel G., "Comparison of Minimum Length Nozzles," Journal of Fluids Engineering, Vol. 110, PP. 283-288, September 1988.
4. Argrow B. M. and Emanuel G., "Computational Analysis of the Transonic Flow field of Two-Dimensional Minimum Length Nozzles," AIAA-1989-1822, 20<sup>th</sup> Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, Buffalo, NY, June 12-14, 1989.
5. Angelino G., "Approximate Method for plug Nozzle Design," AIAA Journal, Vol. 2, N° 10, PP. 1834-1835, 1964.
6. Berman K., "The Plug nozzle: A new approach to engine design," Astronautics, PP. 22-24, April 1960.
7. Birkhoff G., "Interpolation to Boundary Data in Triangles," J. of Math. Analy. And Appl., Vol. 42, PP. 474-484, 1973.
8. Berman H. and Neuffer B., "Plug Nozzle flexibility," Astronautics, Sptember 1960, PP. 30-32.
9. Comolet R., "Mécanique Expérimentale des Fluides. Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux," Tome 1, 3<sup>ème</sup> Edition, Masson,1979.
10. Démidovitch B. and I. Maron., "Eléments de calcul numérique," Editions Mir, Moscow, 1987.
11. Dumitrescu L. Z., "Minimum Length Axisymmetric Laval Nozzles," AIAA Journal, Vol. 13, PP. 520-531, 1975.
12. Evvard J. C. and Maslen. S. H., "Three-Dimensional Supersonic Nozzles and Inlets of Arbitrary Exit Cross Section," NASA TN-2688, April 1952.
13. Emanuel G., "Gasdynamic: Theory and Application", New York, AIAA Educational Serie, 1986.
14. Fletcher C. A. J. "Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories," Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
15. Greer H., "Rapid Method for Plug Nozzle Design," ARS Journal, Vol. 31, N° 04, PP. 560-561, 1961.

16. Geoinig M., "Nozzle Design Optimization by Method-of-Characteristics," AIAA-1990-2024, 26<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Orlando, Florida, July 16-18, 1990.
17. Hagemann G., Immich H. and Terhardt M., "Flow phenomena in advanced rocket nozzles - The plug nozzle," AIAA-1998-3522, 34<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Cleveland, OH, July 13-15, 1998
18. Hagemann G., Immich H., Van Nguyen T. and Dumnov G. E., "Advanced Rocket Nozzles," Journal of Propulsion and Power, Vol. 14, N° 5, PP. 620-634, 1998.
19. Higdon K. and Landrum D., "Analysis of Annular Plug Nozzle Performance and TVC," AIAA-1999-3211, AIAA-2003-4908, 39<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Huntsville, Alabama, July 20-23, 2003.
20. Lax P. D. and Wendroff B., "Difference Schemes with High Order of Accuracy for Solving Hyperbolic Equations," CIMS Report NY0-9759, July 1962, New York Univ., New York.
21. Malina F. J., "Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect gases," J. Franklin Inst., Vol. 230, PP. 433-450, 1940.
22. McLain D. H., "Drawing contours from arbitrary data points," The Computer Journal, Vol. 17, PP. 318-324, 1974
23. Menko E. N., Wisse M. E. N. and Bannink J. W., "Trailing-Edge Cavity Afterbodies for Linear Plug Nozzle Engines," AIAA Journal, Vol. 41, N°9, PP. 1715-1721, 2003.
24. Onofri M., "CFD Results of Plug Nozzle Test Cases," AIAA-2002-4036 38<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Indianapolis, Indiana, July 7-10, 2002.
25. Oosthuisen P. H. and Carscallen W. E., "Compressible Fluid Flow," Mc Graw-Hill, New York, 1997.
26. Ortega J. and Rheinboldt W., "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables," New York, Academic Press, 1970.
27. Peterson C. R. and Hill P. G. "Mechanics and Thermodynamics of Propulsion," Addition-Wesley Publishing Company Inc. New York. 1965.
28. Powell M. J. D., "On the Maximum Error of Polynomial Approximation Defined by Interpolation and by Least Squares Criteria," Comput. J., Vol. 9, PP. 404-407, 1978.
29. Ranson V. H., Thompson H. D. and Hoffman J. D., "Three-Dimensional Supersonic Nozzle Flowfield Calculation," J. of Spacecraft, Vol. 7, N° 4, PP. 458-462, 1970.
30. Ralston A. and Rabinowitz P., "A First Course in Numerical Analysis," McGraw-Hill Book Company, 1985.

31. Raltson A., "A Family of Quadrature Formulas Which Achieve High Accuracy in Composite Rules," *J. Ass. Comput. Mach.*, Vol. 6, PP. 384-394, 1984.
32. Rao G. V. R., "Contoured Rocket Nozzles," *Proc. 9<sup>th</sup> Int. Astro-Fed. Congress*, Amsterdam, 1958.
33. Rao G. V. R., "Spike Nozzle Contour for Optimum Thrust", *Ballistic Missile and Space Technology*; edited by C. W. Morrow, Vol. 2, Pergamon Press, New York, PP. 92-101, 1961.
34. Rao G. V. R., "Recent development in Rocket Nozzle Configuration", *ARS Journal*, Vol. 31, N° 04, PP. 1488-1494, 1961.
35. Rao G. V. R., "The E-D Nozzle," *Astronautics*, September 1960, PP. 28-29.
36. Rommel T., Hagemann G., Schley C. A. and all., "Plug Nozzle Flowfield Analysis," *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 13, N° 5, PP. 629-634, 1997.
37. Ryming I. L., "Dynamique des Fluides," *Presses Polytechnique romandes*, Lausanne, Suisse, 1984.
38. Shapiro A. H., "Compressible Fluid Flow," Vol. 1, New York, the Ronald Press, 1953.
39. Shapiro A. H., "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow," Vol. 1, The Ronald Press Company, New York, 1953.
40. Sutton G. P., "Rocket Propulsion Elements," sixth edition, California, 1992.
41. Serra R. A., "Determination of Internal Gas Flows by a Transient Numerical Technique," *AIAA Journal*, Vol. 10, N° 5, PP. 603-611, May 1972.
42. Shepard D., "A Two Dimensional Interpolation Function for Irregularly Spaced Data," *Proc. 23<sup>rd</sup> Nat. Conf. ACM*, PP. 517-523, 1965.
43. Sauer R., "General Characteristics of the Flow Through Nozzles at near Critical Speeds," *NASA TM-1147*, 1947.
44. Takashi I., Fujii K. and Hayashi A. K., "Computations of Axisymmetric Plug-Nozzle Flow fields: Flow Structures and Thrust Performance," *AIAA Journal of Propulsion and Power*, Vol. 18, N° 2, PP. 254-260, 2002.
45. Takashi I. and Fujii K., "Numerical Investigations of the Base-Flow Characteristics of Axisymmetric Aerospike Nozzles," *Transactions of the Japon Society for Aeronautical and space Sciences*, Vol. 45, N° 148, PP. 108-115, 2002.
46. Takashi I., Kozo F., and Hayashi A. K., "Computations of the axisymmetric plug nozzle flow fields - Flow structures and thrust performance," *AIAA-1999-3211*, 17<sup>th</sup> AIAA Applied Aerodynamics Conference, Norfolk, VA, June 28-July 1, 1999.

47. Tomita T., Tamura H., and Takahashi M., "An experimental evaluation of plug nozzle flow field," AIAA-1996-2632, 32<sup>nd</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Lake Buena Vista, FL, July 1-3, 1996
48. 'Cours de Géométrie Théorique', livre VII, bibliothèque d'enseignement polytechnique, Imprimerie Montenson, Bondy, Seine, 3<sup>ème</sup> Trimestre 52, N°8, 1952.
49. Van Wylen J. J. and Sonntag R. E., "Fundamentals of classical thermodynamics," 2<sup>ème</sup> edition, John Willey and sons, inc., 1976.
50. Wisse M., Oudheusden V. B. and Bannik W., "Analytical Optimisation of an inviscid Flow Linear Plug Nozzle Bottail," AIAA-2004-4017, 40<sup>th</sup> AIAA/ASME/ SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Fort Lauderdale, Florida, July 11-14, 2004.
51. Zebbiche T. and Youbi Z., "Design of Two-Dimensional Supersonic Minimum Length Nozzle at High Temperature. Application for Air," DGLR 2005-257, German Aerospace Congress 2005, 26-29 Sep. 2005, Friedrichshafen, Germany.
52. Zebbiche T. et Youbi Z., "Fonction de Prandtl Meyer A Haute Température," Conférence Internationale de la Mécanique Avancée, CIMA'04, Boumerdès (Algérie), 30 Nov., 02 Déc. 2004.
53. Zebbiche T. and Youbi Z., "Parameters of Supersonic Flow at High Temperature. Application for Air," 4<sup>th</sup> International Conferences on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics HEFAT, 19-22 Sep. 2005, Caire, Egypt.
54. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Flow Parameters at High Temperature. Application for Air in Nozzles," DGLR-2005-256, German Aerospace Congress 2005, 26-29 Sep. 2005, Friedrichshafen, Germany.
55. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Plug Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," AIAA-2006-0592, 44<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 9-12 Jan. 2006, Reno Nevada, Reno Hilton, USA.
56. Zebbiche T., "Supersonic Plug Nozzle Design," AIAA-2005-4490, 41<sup>st</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Tucson, Arizona, July 10-13, 2005.
57. Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Two-Dimensional Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," AIAA-2006-4599, 42<sup>st</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Sacramento, California, July 09-12, 2006.
58. Zebbiche T., "New Generalized Form of the Prandtl Meyer Function. Application for Air at High Temperature," AIAA-2006-3674, 25<sup>th</sup> Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, California, 5-8 Jun 2006.
59. Zucker R. D. and Bilbarz O., "Fundamentals of GasDynamics," John Wiley & Sons, New Jersey, 2002.

60. Zucro M. J. and Hoffman J. D., "Gas Dynamics," Vol. 1 and Vol. 2, New York, Wiley, 1976.
61. Berger M., "Géométrie: Convexes et Poly topes, Polyèdres réguliers, aires et Volumes," Tome 3, Fernand Nathan, Paris, 1978.
62. Raviart P. A. et Thomas J. M., "Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles," Masson, 1983.
63. Sod G. A., "Numerical Methods in Fluid Dynamics," Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
64. Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A. and Vetterling W. T., "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing," Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
65. Zebbiche T., "Supersonic Axisymmetric Minimum Length Nozzle Design at High Temperature," Submitted to 45<sup>th</sup> AIAA Aerospace Meeting and Exhibit, 8-11 Jan. 2007, Reno Hilton, Reno, Nevada, 2007.
66. Marsilio R., "Numerical Simulation for Plug Nozzle Flow Field," AIAA-2001-670, 39<sup>th</sup> AIAA Aerospace Meeting and Exhibit, 8-11 Jan. 2001, Reno Hilton,, Reno, Nevada.
67. Kraiko A. N., Tillyayeva N. I. and Baftalovski S. V., "Optimal Design of Plug Nozzle and Their Thrust Determination at Start," Journal of Propulsion and Power, Vol. 17, N° 6, 2001, PP. 1347-1352.
68. Korte J. J., Salas A. O., Dunn H. J., Alexandrov N. M., Follett W. W., Orient G. E. and Hadid A. H., "Multidisciplinary Approach to Linear Aerospike Nozzle Design," Journal of Propulsion and Power, Vol. 17, N° 1, 2001, PP. 13-98.
69. Francesco N. and Onofri M., "Theoretical Analysis and Engineering Modeling of Flowfields in Clustered Modules Plug Nozzle," Journal of Propulsion and Power, Vol. 15, N° 4, 1999, PP. 544-551.
70. Gerald H., Hans L., Thong V. N. and Gennady E. D., "Advanced Rocket Nozzle," Journal of Propulsion and Power, Vol. 14, N° 3, 1998, PP. 318-326.