

**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences de l'Ingénieur**

Département d'Aéronautique de Blida

## **MEMOIRE DE MAGISTER**

en Aéronautique

Spécialité : Aéronautique

**SIMULATION NUMERIQUE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE D'UN  
BLOCHET A DOUBLE INCLINAISON AVEC PRISE EN COMPTE DES EFFETS  
THERMIQUES**

Par

**Mme BOUBEKER née DJIGOUADI Shiraz**

Devant le jury composé de :

- T.REZOUG	Maître de conférences, USTB	Président
- R.HAOUI	Maître de conférences, USTHB	Examineur
- B.BENAOUDA.Z	Maître de conférences, USTB	Examineur
- S.BOUKRAA	Professeur, USTB	Rapporteur

Blida, mai 2005.

*A mes parents.*

## RESUME

Une recherche bibliographique a été menée en vue de mieux comprendre les fondements de la lubrification hydrodynamique, ainsi les équations modélisant le phénomène de lubrification par fluide newtonien ont été posées et ce avec et sans la prise en compte des effets thermiques. Les paramètres mécaniques tels que la charge, les débits et la force de frottement d'un système hydrodynamique de type blochet lubrifié par un fluide newtonien sont analysés et ce par la résolution de l'équation de Reynolds pour le cas d'un régime isotherme et de l'équation généralisée de Reynolds et de l'énergie pour le cas où l'on prends en compte les effets de la température, l'équation de Reynolds étant une équation modélisant le phénomène de lubrification dans de nombreux mécanismes. Cette résolution est faite numériquement à l'aide de la méthode des différences finies. Plusieurs moyens de comparaison ont été recueillis de par notre recherche bibliographique afin de conforter nos résultats. Une analyse de la lubrification des butées et paliers hydrodynamiques est aussi présentée afin de permettre à l'avenir de nouvelles perspectives dans le domaine de la lubrification hydrodynamique.

## REMERCIEMENTS

- A Monsieur le Professeur S. BOUKRAA.

Nous tenons à vous exprimer notre profonde gratitude ainsi que notre immense reconnaissance. Sans vous, ce travail n'aurait jamais pu être tel quel, car en plus de l'enseignement brillant que vous nous avez apporté lors de notre cursus universitaire, le respect qu'on vous porte nous a obligé sans cesse de porter à ce travail des critiques et de tenter de l'améliorer. C'est aujourd'hui Monsieur, un grand honneur d'avoir accompli cette première post-graduation avec votre encadrement.

- A Mr le directeur de l'Institut d'Aéronautique S.BERGHEUL, ainsi qu'à tous les membres du département.

- Aux enseignants qui m'ont le plus marqués.

Mme M.BENSOUNA : Madame, je tiens à vous remercier pour l'enseignement sans égal des mathématiques que vous nous avez prodigué avec tant de passion. Assister à vos cours était toujours un instant de bonheur.

Mr L.AMTOUT : Monsieur, nous tenons à vous remercier pour votre haute conscience et votre grandeur d'esprit. Vos qualités professionnelles et humaines resteront toujours en nous un exemple de sagesse.

Mr M.BOUNEDER : Votre compétence professionnelle, votre sens de la pédagogie et votre rigueur scientifique sont pour nous le symbole même d'un enseignement de haute qualité.

Mr J.FRENE : Un homme de science d'une gentillesse et d'une amabilité remarquable, je lui communique mes plus profonds respects et ma sincère gratitude.

- A Messieurs les jury, pour leur lecture et leurs critiques.

- A mon frère RAFIK DJIGOUADI,

Son sérieux, sa rigueur, et son sens de l'organisation face à un problème scientifique sont un continuel enseignement pour moi, je saisis cette occasion pour l'en remercier.

- A toute ma famille,

A ma mère pour sa générosité, à mon père pour son disponibilité, à mon mari pour sa présence et à mon fils Rachik.

# TABLE DES MATIERES

RESUME	2
REMERCIEMENTS	3
TABLE DES MATIERES	4
LISTE DES ILLUSTRATIONS,GRAPHIQUES ET TABLEAUX	6
LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS	8
INTRODUCTION	10
1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	12
1.1 Historique sur la lubrification hydrodynamique	12
1.2 Effets thermiques en lubrification hydrodynamique	13
1.3 La lubrification elasto-hydrodynamique	14
1.4 Differents modèles de lubrifiants	16
1.4.1 Principales lois de comportement	17
1.4.2 Quelques modèles rhéologiques de lubrifiants	18
1.5 Conclusion	19
2. THEORIE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE	20
2.1 La lubrification hydrodynamique	20
2.1.1 Equation généralisée de la mécanique des films minces visqueux	20
2.1.2 Equation des films minces visqueux	26
2.1.3 Equation de Reynolds généralisée	26
2.1.4 Equation de Reynolds	27
2.2 Effets thermiques en lubrification hydrodynamique	28
2.2.1 Bilan thermique global	28
2.2.2 Résolution d'un système couplé	29
2.2.3 Equation de l'énergie des films minces visqueux	30
2.3 Conclusion	32
3. APPLICATION A DES SYSTEMES HYDRODYNAMIQUES DE TYPE: BLOCHET - PATIN	33
DE BUTEE - PALIER CYLINDRIQUE	
3.1 Lubrification d'un blochet de dimensions finies à double inclinaison par un fluide newtonien en régime isotherme, incompressible et stationnaire	33
3.1.1 Conditions aux limites	34
3.1.2 Equation de Reynolds	35
3.1.3 Composantes de vitesses et contraintes de cisaillement	36
3.1.4 Adimensionnement de l'équation de Reynolds	37
3.1.5 Adimensionnement des vitesses et des contraintes de cisaillement	38
3.1.6 Calcul des paramètres dans le contact	40
3.1.7 Discrétisation de l'équation de Reynolds	41
3.1.8 Organigramme de résolution	43
3.1.9 Discussion et validation des Résultats	45

3.2	Lubrification d'un patin de butée cylindrique par un fluide newtonien en régime isotherme, incompressible et stationnaire	60
3.2.1	Configuration géométrique du patin de butée	61
3.2.2	Equation de Reynolds en coordonnées cylindriques	62
3.2.3	Adimensionnement de l'équation de Reynolds	64
3.2.4	Calcul des paramètres dans le contact	65
3.2.5	Discrétisation de l'équation généralisée de Reynolds	66
3.2.6	Discussion et validation des résultats	67
3.3	Lubrification d'un palier cylindrique de longueur finie par un fluide newtonien en régime isotherme, incompressible et stationnaire	69
3.3.1	Conditions aux limites	71
3.3.2	Calcul de l'épaisseur du film	72
3.3.3	Equation de Reynolds en coordonnées cylindriques	72
3.3.4	Adimensionnement de l'équation de Reynolds	72
3.3.5	Discussion des résultats	73
3.4	Conclusion	74
4.	PRISE EN COMPTE DES EFFETS THERMIQUES EN LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE, APPLICATION AU BLOCHET	75
4.1	Etude théorique	75
4.1.1	Conditions aux limites	75
4.1.2	Equation de Reynolds généralisée	76
4.1.3	Composantes de vitesses et contraintes de cisaillement	77
4.1.4	Adimensionnement de l'équation de Reynolds généralisée	77
4.1.5	Equation de l'énergie	78
4.1.6	Adimensionnement de l'équation de l'énergie	78
4.1.7	Calcul des paramètres dans le contact	79
4.2	Etude numérique	79
4.2.1	Discrétisation de l'équation de Reynolds généralisée	79
4.2.2	Discrétisation de l'équation de l'énergie	81
4.2.3	Organigramme de résolution	83
4.3	Résolution et discussion des résultats	85
4.4	Conclusion	90
	CONCLUSION	92
	REFERENCES	94

## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1 :	Transport d'une statue, 1880 avant J.C.	12
Figure 1.2 :	Lois de comportement rhéologiques	16
Figure 2.1 :	Configurations du contact et systèmes d'axes	22
Figure 2.2 :	Paroi à composante normale de vitesse nulle	26
Figure 2.3 :	Organigramme de calcul thermo-hydroynamique	30
Figure 3.1 :	Configuration du blochet de dimensions finies à double inclinaison	34
Figure 3.2 :	Organigramme de calcul de la lubrification d'un blochet de dimensions finies à double inclinaison lubrifié par un fluide newtonien incompressible en régime isotherme et stationnaire	44
Figure 3.3 :	Blochet de largeur infinie	45
Figure 3.4 :	Pressions adimensionnelles pour le blochet infini obtenues numériquement et analytiquement pour $a = \frac{h_{e1}}{h_{e2}} = 2$ (au milieu de la largeur)	48
Figure 3.5 :	Charge adimensionnelle pour le blochet infini obtenue numériquement et analytiquement	49
Figure 3.6 :	Débit adimensionnel pour le blochet infini obtenu numériquement et analytiquement	49
Figure 3.7 :	Force de frottement adimensionnelle pour le blochet infini obtenue numériquement et analytiquement	50
Figure 3.8 :	Coefficient de frottement pour le blochet infini obtenue numériquement et analytiquement	50
Figure 3.9 :	Distribution de la pression adimensionnelle pour le blochet de largeur infinie obtenue numériquement	51
Figure 3.10 :	Distribution de la pression adimensionnelle pour le blochet de largeur infinie obtenue numériquement	51
Figure 3.11 :	Distribution de la pression adimensionnelle pour le blochet de dimensions finies sur la surface du blochet pour $\frac{L}{B} = 1$	52
Figure 3.12 :	Distribution des pressions (en Mpa) sur la surface du blochet donnée par notre programme	53
Figure 3.13 :	Distribution des pressions sur la surface d'un blochet donnée par PAFEC [3]	53
Figure 3.14 :	Distribution de la vitesse (en module) sur le plan $y=h(x,z)$ pour $\frac{L}{B} = 1$	56

Figure 3.15 :	Distribution de la pression suivant la longueur pour différents rapports de $\frac{L}{B} = 0$ (au milieu de la largeur)	57
Figure 3.16 :	Variation de la charge adimensionnelle avec l'inclinaison $a$ et pour $b = 1$	57
Figure 3.17 :	Distribution des pressions sur la surface du blochet en variant l'inclinaison suivant $x$ (en Mpa)	58
Figure 3.18 :	Distribution des pressions sur la surface du blochet en variant l'inclinaison suivant $z$ (en Mpa)	58
Figure 3.19 :	Distribution des pressions sur la surface du blochet en variant l'inclinaison suivant $x$ et $z$ (en Mpa)	59
Figure 3.20 :	Distribution tridimensionnelle des pressions sur la surface du blochet (en Mpa)	59
Figure 3.21 :	Configuration d'une butée cylindrique à patins fixes	60
Figure 3.22 :	Schéma de principe d'un patin de butée cylindrique	61
Figure 3.23 :	Systèmes d'axes de coordonnées cylindrique	63
Figure 3.24 :	Configuration d'un palier cylindrique	70
Figure 3.25 :	Variation de la charge donnée par notre programme pour $\frac{R}{L} = 0$	73
Figure 3.26 :	Variation de la charge pour un palier de longueur infinie ( $\frac{R}{L} = 0$ )	73
Figure 4.1 :	Organigramme de résolution de la lubrification thermo-hydrodynamique d'un blochet à double inclinaison	84
Figure 4.2 :	Distribution de la pression (adimensionnelle) pour le cas isotherme (en Mpa)	85
Figure 4.3 :	Distribution de la pression (adimensionnelle) pour le cas thermohydrodynamique (en Mpa)	86
Figure 4.4 :	Distribution de la température suivant la longueur (cas dimensionnel)	87
Figure 4.5 :	Distribution de la température suivant la l'épaisseur (cas dimensionnel)	87
Figure 4.6 :	Distribution de la température suivant la largeur (cas dimensionnel)	88
Figure 4.7 :	Distribution de la température suivant la longueur donnée par notre programme	89
Figure 4.8 :	Distribution de la température suivant la direction tangentielle donnée par A.DADOUCHE [25]	89
Figure 4.9 :	Distribution de la température suivant la direction tangentielle donnée par D.MARKIN [26]	90
Tableau 3.1 :	Coefficient $\eta_w$ donné par HERSAY M.D. [1]	54
Tableau 3.2 :	Coefficient $\eta_w$ donné par notre programme	54



Tableau 3.3 :	Coefficient $\eta_f$ donné par HERSHEY M.D. [1]	55
Tableau 3.4 :	Coefficient $\eta_f$ donné par notre programme	55
Tableau 3.4 :	variation de la charge et du couple de frottement donnée par notre programme et par PINKUS et STERNLICHT [2]	57

## LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

$B$	Largeur du blochet	( $m$ )
$C_f$	Couple de frottement par patin	( $N.m$ )
$C_T$	Couple de frottement total	( $N.m$ )
$C_p$	Chaleur spécifique du fluide	( $J/Kg.K$ )
$e$	Exentricité	( $m$ )
$F_m$	Force de frottement sur la surface mobile du blochet	( $N$ )
$h$	Epaisseur de film	( $m$ )
$h_{e_1}, h_{e_2}$	Epaisseurs à l'entrée du blochet	( $m$ )
$h_{s_1}, h_{s_2}$	Epaisseurs à la sortie du blochet	( $m$ )
$K$	Conductivité thermique du lubrifiant	( $W/m.K$ )
$L$	Longueur du blochet	( $m$ )
$N$	Vitesse de rotation	(trs/mn)
$n_p$	Nombre de patins	
$p$	Pression hydrodynamique dans le film lubrifiant	( $Mpa$ )
$P_d$	Puissance dissipée par patin	( $W$ )
$Q$	Débit d'alimentation du fluide	( $m^3/s$ )
$r, \theta$	Coordonnées cylindriques	
$R_2, R_1$	Rayons extérieur et intérieur du patin de butée	( $m$ )
$T$	Température	( $^{\circ}C$ )
$t$	Temps	( $s$ )
$(u_1, u_2, u_3), (u, v, w)$	Composantes du champs de vitesse	( $m/s$ )
$(x_1, x_2, x_3), (x, y, z)$	Coordonnées cartésiennes	( $m$ )
$U$	Vitesse de translation à la paroi mobile	( $m/s$ )
$W$	Charge supportée par le blochet	( $N$ )
$W_p$	Charge supportée par patin	( $N$ )
$W_t$	Charge totale supportée par butée	( $N$ )
$\alpha$	Coefficient de dilatation thermique	( $1/K$ )
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide	( $Kg/m.s$ )
$\rho$	Densité volumique du lubrifiant	( $Kg/m^3$ )
$\omega$	Vitesse de rotation de l'arbre	( $rd/s$ )
$\beta$	Coefficient de thermoviscosité	
$\epsilon$	Exentricité relative	

## INTRODUCTION

Le contact de deux surfaces en mouvement d'un mécanisme produit, outre une perte d'énergie par frottement, de multiples phénomènes telles que l'usure, l'abrasion et la fatigue des surfaces. La durée de vie et la fiabilité d'un mécanisme dépendent essentiellement de ces paramètres, la réduction du frottement devient un enjeu crucial dans l'étape de sa conception.

La lubrification hydrodynamique intervient comme une solution des plus efficaces au problème de frottement solide; son procédé consiste à introduire un film lubrifiant entre les surfaces en contact, ce qui les empêche de se toucher. Par ailleurs, lorsque le mécanisme est en marche un champ de pression se crée, une portance hydrodynamique est alors engendrée, ce qui permet de maintenir le film lubrifiant entre les parois du contact et de supporter les charges appliquées au mécanisme.

Grâce aux développements effectués en mécanique des fluides, une théorie sur la lubrification hydrodynamique a pu voir le jour. En tenant compte de certaines hypothèses, il a été possible à partir des équations fondamentales de la mécanique de formuler les équations gouvernant l'écoulement d'un film mince.

Parmi ces hypothèses : celle d'un film de faible épaisseur et celle de forces de viscosité prédominantes aux forces d'inertie. En effet ces deux hypothèses permettent une modélisation très représentative de la lubrification hydrodynamique d'un mécanisme, bien que la résolution des équations correspondantes reste encore très complexe. Celles ci sont simplifiées selon la géométrie considérée et le régime de l'écoulement du lubrifiant. On parle alors souvent de résoudre l'équation de 'Reynolds' laquelle modélise l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible en régime isotherme et stationnaire avec des considérations particulières sur la géométrie et les vitesses aux parois du contact. Cette équation peut se résoudre aisément à l'aide de méthodes numériques adaptées.

Cependant les effets thermiques, la nature du lubrifiant (newtonien ou non newtonien), l'instationnarité de l'écoulement, les déformations des surfaces du contact, le régime d'écoulement (turbulent ou laminaire), la compressibilité du fluide n'étant pas pris en compte, il nous appartient de trouver le moyen de les intégrer à une étude de lubrification hydrodynamique dans laquelle ils auraient été au préalable négligés.

De manière générale l'analyse de la lubrification d'un mécanisme varie essentiellement selon deux paramètres : la géométrie du mécanisme et la nature du lubrifiant. Ainsi, l'épaisseur du film et la viscosité du lubrifiant sont les principaux paramètres à introduire pour pouvoir déterminer la charge que le mécanisme peut supporter, la force de frottement exercée sur les parois du contact ainsi que les débits d'alimentations nécessaires au bon fonctionnement du mécanisme.

Les autres paramètres (compressibilité, température, déformations des surfaces...etc) sont introduits selon leur degré d'influence. De ce fait, il existe plusieurs modes de lubrification : hydrodynamique, thermo-hydrodynamique, élasto-hydrodynamique ou encore thermo-élasto-hydrodynamique.

L'étude que l'on propose concerne la lubrification thermohydrodynamique. Le mécanisme qui a attiré notre intérêt est un système hydrodynamique de type blochet. Son étude permet de traiter plus aisément des systèmes plus complexes tels que les paliers et les butées hydrodynamiques, particulièrement intéressants dans le domaine de la lubrification, lesquels sont également abordés au troisième chapitre mais sans la prise en compte des effets de la température.

Nous exposons notre travail en quatre chapitres :

Le premier englobe une étude bibliographique sur la lubrification hydrodynamique, thermohydrodynamique et élastohydrodynamique avec passage en revue de différents modèles rhéologiques de lubrifiants.

Dans le second chapitre, la théorie de la lubrification hydrodynamique est présentée, les équations gouvernant un écoulement en film mince sont écrites dans leurs formes générales et simplifiées ; une analyse des effets thermiques est également présentée.

Au troisième chapitre, trois systèmes hydrodynamiques sont étudiés : celui du blochet de dimensions finies à double inclinaison, de la butée cylindrique à patins fixes, et du palier cylindrique de longueur finie. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux du calcul analytique ainsi qu'à ceux de travaux antérieurs [1][2][3].

Au quatrième chapitre, en vue de souligner l'importance des effets thermiques, nous présentons l'étude de la lubrification thermohydrodynamique d'un blochet de dimensions finies.

Enfin nous concluons par une discussion générale de nos résultats.

## CHAPITRE 1

### ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Nous exposons dans ce premier chapitre un bref historique sur la lubrification hydrodynamique et retraçons en détails les progrès effectués dans le domaine thermohydrodynamique et élastohydrodynamique, ainsi que dans le domaine de la lubrification par des fluides non newtoniens.

Grâce à cette recherche, il nous a été possible de recueillir le moyen de valider notre travail par une comparaison de nos résultats avec les résultats de travaux antérieurs [1][2][3], ce que l'on verra dans les prochains chapitres.

#### 1.1 Historique sur la lubrification hydrodynamique

Pour les besoins de transport, la roue et le chariot existaient déjà 4000 ans avant J.-C. Pour les poids importants, les égyptiens utilisaient des rouleaux de bois pour faire glisser leurs statues. Sur cette figure par exemple un homme verse vraisemblablement du liquide pour permettre la lubrification de la piste.

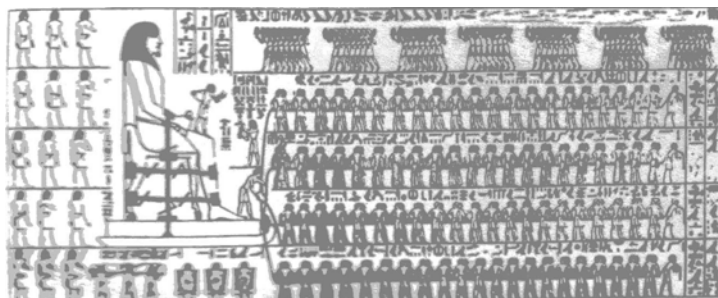


Figure 1.1 - Transport d'une statue, 1880 avant J.C.

Il semble par ailleurs que vers 1400 ans avant J.-C., la graisse de bœuf ait été employée pour lubrifier les paliers de roue des chariots. Les grecs se sont eux aussi servis de la roue ; ils utilisaient comme

fluide lubrifiant des huiles végétales et animales. C'est à eux que revient l'invention des engrenages et de l'arbre à came. Les romains connaissaient aussi l'usage des butées à billes et à rouleaux coniques de même que les glissières à rouleaux cylindriques, des fouilles ont permis de retrouver dans une galère coulée en l'an 40, des éléments de butée soit en bois ou en bronze.

Vers la fin du moyen âge, l'emploi de coussinets de fer lubrifiés à l'aide d'huiles animales ou minérales était courant dans l'horlogerie. Plus tard des coussinets en bronze permettaient de diminuer à la fois le frottement et l'usure. Avec l'arrivée de l'énergie hydraulique au XII<sup>ème</sup> siècle, de nombreux traités techniques sont publiés. Le premier connu de ces traités est celui de l'architecte Villard de Honnecourt, datant de 1250 et qui présente de nombreux mécanismes.

La période de la renaissance est marquée par toutes sortes de progrès auxquels Léonard de Vinci a apporté une contribution remarquable. Il fut le premier à calculer les efforts de frottement et à définir un coefficient de frottement. Il a proposé afin de réduire le frottement dans les paliers de remplacer le glissement de l'arbre dans l'alésage par le roulement de l'axe sur des galets. Léonard de Vinci décrit aussi l'utilisation d'une cage dans les roulements à billes en vue de réduire le frottement ; dans ce même objectif, il propose des formes de dentures pour les engrenages.

Bien plus tard, avec le progrès des techniques, des machines de plus en plus complexes ont vu le jour et ont nécessité de connaître les mécanismes de déformation des solides partiellement responsables des phénomènes de frottement, en particulier de frottement de roulement comme cela a été montré en Angleterre par Robert Hooke (1635-1703).

Après des expériences sur l'étude du frottement réalisées en France par Guillaume Amontons (1663-1705), Jacob Rowe publie bien plus tard, en 1734, un recueil intitulé "*All sorts of wheel carriage improved*" où il reprend l'idée de Léonard de Vinci et montre qu'il est possible de réduire sensiblement le frottement dans les paliers, en leur substituant des galets mus en rotation par l'arbre.

Au même moment, John Théophilus Désaguliers (1683-1744) étudie l'adhérence entre deux corps, ce qui donne lieu à la publication d'un ouvrage volumineux intitulé "*A course of experimental philosophy*". En 1748, Leonhard Euler (1707-1783) développe une approche analytique du frottement encore d'usage aujourd'hui et identifie les concepts de frottement statique et dynamique.

En 1780, Charles Augustin Coulomb (1736-1806) étudie de façon relativement précise l'influence de différents paramètres sur le frottement de glissement et de roulement ; on peut citer comme paramètres la nature des matériaux, l'effet du lubrifiant, l'étendue de la surface de contact et la charge appliquée. Les travaux de cet auteur ont fait référence pendant près d'un siècle et demi.

Les principaux lubrifiants alors utilisés étaient d'origine animale ou végétale et les huiles dérivées

de pétrole étaient d'un emploi peu fréquent. Par ailleurs, à cette période, de très nombreuses réalisations nécessitaient l'utilisation des paliers et des butées ; c'est en particulier le cas avec l'arrivée des machines à vapeur annonçant la période de la révolution industrielle dont les conséquences ont été une augmentation considérable des besoins en lubrifiants.

En 1847, Gustave Hirn (1815-1890) constate dans ses premières expériences qu'en présence d'une charge donnée, le couple de frottement à faible vitesse présente des fluctuations ; il montre par la suite que le couple dépend de la viscosité. Il distingue le frottement *médiat* où les surfaces de contact sont constamment séparées par un film lubrifiant, du frottement *immédiat* où il y a rupture du film.

En 1879, Robert Henry Thurton (1839-1903) publie les résultats de ses études sur le frottement et la lubrification ; l'ensemble de ses travaux fut ensuite publié dans un livre intitulé "*A treatise on friction and lost work in machinery and mill work*".

En 1883, Nikolaï Pavlovich Petrov (1836-1920) étudie le frottement des paliers lubrifiés ; il formule une loi sur les paliers connue sous le nom de loi de Petrov. Une année auparavant, Beauchamp Tower travaille sur la lubrification des paliers. Ses travaux ont bien montré la présence d'un film lubrifiant entre les surfaces de l'arbre et du coussinet ainsi qu'une génération de pression dans le film ; il prouve l'existence d'une pression hydrodynamique dans un palier et préconise l'emplacement des rainures d'alimentation dans les zones non chargées du palier et de laisser l'arbre entraîner l'huile vers la zone de pression pour assurer un bon fonctionnement du palier. Les études de B. Tower ont été fondamentales dans la mise au point de la théorie de la lubrification hydrodynamique.

En 1886 Osborne Reynolds expose pour la première fois la théorie hydrodynamique de la lubrification, où il met en évidence le phénomène de portance au sein du film fluide dans un convergent. Il explique dès lors le phénomène plus connu sous le nom de 'coin d'huile'. De nombreux travaux ont été menés depuis. Les effets thermiques, les déformations des surfaces en contact, la nature du lubrifiant ou encore le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent) furent introduits par la suite.

## 1.2 Effets thermiques en lubrification hydrodynamique

L'évolution de la théorie de la lubrification hydrodynamique est en parallèle marquée par la prise en compte des phénomènes thermiques. En 1933, KINGSBURY [4] mène une première analyse à ce sujet ; il montre que la charge calculée en régime isotherme est largement surestimée.

Plusieurs travaux sont par la suite menés pour calculer le champ thermique. En 1937 SWIFT [5] propose de déterminer les valeurs des caractéristiques des paliers en utilisant une viscosité moyenne effective calculée à partir d'un bilan thermique global, HAGG [6] apporte une solution analytique

au problème de KINGSBURY [4] et une loi simplifiée de la variation de la viscosité par rapport à la température.

En 1949, Cope fait intervenir l'équation de l'énergie pour obtenir la température du film. En 1958, Cameron montre que dans le cas d'un blochet la variation de la masse volumique est négligeable devant celle de la viscosité.

En 1962, Dowson modifie l'équation de Reynolds classique et obtient l'équation dite de Reynolds généralisée ; il fournit alors, avec l'équation de l'énergie, un modèle assez complet pour l'étude de la lubrification thermohydrodynamique. Cependant il restait à établir les conditions aux limites et à résoudre ces équations. Deux types d'approches ont été proposées : celle utilisant des méthodes analytiques ou semi-analytiques et celle utilisant des méthodes numériques.

Toutefois l'essentiel des progrès accomplis dans la prise en compte des effets thermiques est relativement récent; une grande part en est due aux équipes de Poitiers (France), notamment avec les travaux de FRENE et al. [7] sur les paliers et butées. L'influence thermique sur à la fois la viscosité du lubrifiant, la modification des caractéristiques mécaniques des matériaux ainsi que les déformations thermoélastiques des surfaces en contact y est traitée.

Depuis 1965, les progrès effectués dans le sens de la lubrification thermohydrodynamique ont constamment augmenté. Des conditions aux limites représentant de mieux en mieux les phénomènes physiques sont formulées, des méthodes de calcul prenant en compte les déformations élastiques, la nature du lubrifiant parfois non newtonien ainsi que le régime turbulent ont été mis en oeuvre.

### 1.3 La lubrification élasto-hydrodynamique

Parmi les premiers modèles de lubrification hydrodynamique, on trouve celui de Martin, en 1916 qui suppose la viscosité indépendante de la pression. L'hypothèse est toutefois invalidée par les expériences de l'auteur et conforte une prise en compte de l'effet piézo-visqueux. La piézo-viscosité est introduite, sous forme simplifiée, par Grubin, Gatambe et Vidagrova en 1940 ; les équations obtenues rejoignent alors la forme de Reynolds que l'on connaît actuellement.

Toutefois, en 1949, Grubin et al. fournissent des résultats plus réalistes en tenant compte des déformations élastiques des surfaces contigües au film ; ils ouvrent la voie à la lubrification élasto-hydrodynamique. Il est alors question de faire intervenir les déformations de surfaces et les actions hydrodynamiques lorsque celles-ci jouent un rôle important.

L'utilisation des matériaux déformables en lubrification hydrodynamique est une idée très originale



car, le coin d'huile se crée par la déformation mécanique des surfaces élastiques. CASTELLI et MALANOSKI [8] et Ettles et ADVANI [9] ont souligné le phénomène de réduction de la capacité de charge induit par les déformations thermiques des patins. ar la suite, une analyse thermoélastohydrodynamique sur les butées a été menée par BROCKETT et al.[10], dans cette étude, une comparaison entre trois modèles (adiabatique, thermohydrodynamique (THD) et thermoélastohydrodynamique (TEHD)) est présentée.

#### 1.4 Différents modèles de lubrifiants

Pour des conditions sévères de fonctionnement, on est parfois amené à ajouter au lubrifiant des additifs d'extrême pression ce qui a pour conséquence de changer sa loi de comportement. Le fluide est alors non newtonien c'est à dire que la viscosité n'est plus constante mais varie par rapport aux contraintes de cisaillement. Une loi de comportement non newtonienne doit alors être formulée et intégrée dans les équations de la lubrification.

Dans les fluides non newtoniens, deux types de comportements sont envisageables selon la contrainte appliquée. On distingue d'une part, les fluides viscoplastiques qui se solidifient ou se fluidifient selon une contrainte limite dite seuil de cisaillement, et d'autre part, les fluides pseudoplastiques, ou visqueux non linéaires, qui ne requièrent pas de contrainte seuil pour s'écouler.

Il existe des lois générales pour décrire l'écoulement d'un fluide non newtonien (Figure ci-dessous). Nous citerons celles d'Oswald, de Bingham et d'Herschel-Bulkley, ainsi que des lois plus spécifiques. Notons que la plupart des coefficients intervenant dans ces lois sont déduits d'une analyse expérimentale.

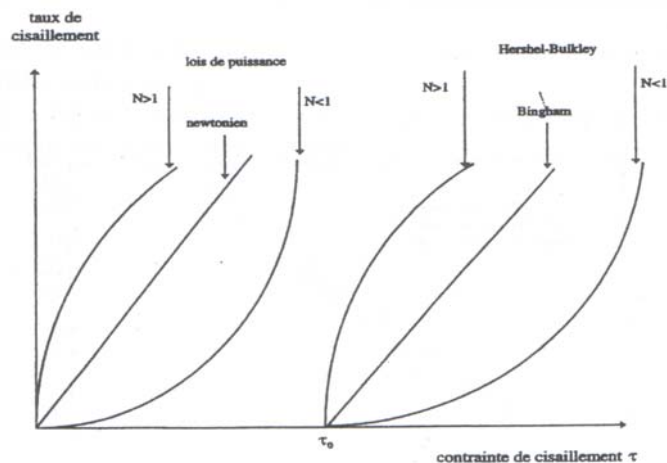


Figure 1.2 - Lois de comportement rhéologiques

### 1.4.1 Principales lois de comportement

#### *\*Loi d'Oswald*

C'est une loi de puissance permettant de prendre en compte les variations de viscosité par rapport aux contraintes de cisaillement pour les fluides visqueux non linéaires.

$$\tau = m \dot{\gamma}^n$$

avec :

$\tau$ , la contrainte de cisaillement,

$\dot{\gamma}$ , le taux de cisaillement,

$m$ , la consistance.

$n$ , l'indice de comportement de l'écoulement.

Le fluide est dit rhéofluidifiant si  $n < 1$  et rhéoépaississant si  $n > 1$ .

#### *\* Loi de Bingham*

La loi de Bingham stipule que le fluide est toujours à l'état de repos et ne s'écoule qu'au delà d'une contrainte limite  $\tau_0$

$$\tau = \tau_0 + \mu_0 \dot{\gamma}$$

avec :

$\tau_0$ , la contrainte de cisaillement limite,

$\dot{\gamma}$ , le taux de cisaillement,

$\mu_0$ , la viscosité.

#### *\* Loi d'Herschel-Bulkley*

Herschel et Bulkley ont réalisé des études expérimentales sur l'écoulement des graisses et ont établi une loi de comportement qui prend en compte la loi de puissance d'Oswald ainsi que la loi de Bingham.

$$\tau = \tau_0 + m\dot{\gamma}^n$$

avec :

$\tau_0$ , la contrainte de cisaillement,  
 $m$ , la consistance du fluide,  
 $n$ , l'indice de comportement de l'écoulement.

#### 1.4.2 Quelques modèles rhéologiques de lubrifiants

Les lois de comportements citées plus haut sont représentatives des écoulements pour une large gamme de fluides. Il existe par ailleurs d'autres modèles rhéologiques établis plus récemment pour décrire la variation de la viscosité et des contraintes de cisaillement en fonction des taux de déformation, de la température et de la pression.

##### *\*Modèle de Roeland*

Pour un fluide newtonien soumis à de faibles contraintes de cisaillement, ROELAND [11] établit que :

$$\ln\left(\frac{\eta}{\eta_a}\right) = A \left[ \frac{(1 + p/196.10)^{6M}}{(1 + 135.T)^s} - 1 \right]$$

avec :

$\eta$ , la viscosité,  
 $\eta_a$ , la viscosité à  $P_{atm}$  et  $0^\circ\text{C}$ ,  
 $T$ , la température,  
 $p$ , la pression,  
 $A, M$  et  $s$ , les paramètres du fluide.

##### *\*Modèle de Maxwell*

MAXWELL [12] établit un modèle rhéologique où le taux de déformation total est la somme des taux de déformations élastiques et plastiques.

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_e + \dot{\gamma}_p = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + F(t)$$

avec :

$\dot{\gamma}$ , le taux de déformation totale,  
 $\dot{\gamma}_e$ , le taux de déformations élastiques,  
 $\dot{\gamma}_p$ , le taux de déformations plastiques,  
 $G$ , le module de cisaillement,  
 $\frac{d\tau}{dt}$ , le taux de variation des contraintes.  
 $F(t)$  est la fonction de Maxwell.

*\*Modèle d'Ellis*

La loi de comportement d'un fluide d'ELLIS [13] est la suivante :

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \alpha(\tau_{xy})^{-1}}$$

avec :

$\tau_{xy}$ , la contrainte de cisaillement,  
 $\mu_0$ , la viscosité à taux de cisaillement nul,  
 $\alpha$ , un paramètre du fluide.

### 1.5 Conclusion

Nous avons fait le choix d'orienter notre étude bibliographique sur la lubrification hydrodynamique en général et non sur le système de blochet que nous traiterons dans les prochains chapitres afin de permettre aux prochaines études de traiter d'autres systèmes hydrodynamiques dans d'autres conditions de fonctionnement. Cela dit, nous avons par ordre de priorité exposé le problème des effets thermiques, des déformations élastiques des surfaces en contact ainsi que de la lubrification par fluides non newtoniens. D'autres problèmes existent tels que les effets de la turbulence, les effets dynamiques, la rupture du film, l'instationnarité de l'écoulement. Nous citerons quelques références pour orienter certains étudiants voulant aborder ce type de problème [14,15,16,17,18,19].

## CHAPITRE 2

### THEORIE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

Il nous a semblé nécessaire de consacrer tout un chapitre à la " théorie de la lubrification hydrodynamique " en présentant en détails toutes les étapes de son développement. Ainsi en se basant sur les équations fondamentales de la dynamique des fluides newtoniens, nous verrons comment il a été possible d'aboutir aux équations de la mécanique des films minces et de Reynolds.

Nous présenterons également les procédés de modélisation de la lubrification thermohydrodynamique.

#### 2.1 La lubrification hydrodynamique

La théorie de la lubrification hydrodynamique repose sur l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée. Cette équation est en pratique simplifiée pour aboutir à l'équation de Reynolds généralisée. Un développement succinct de ces équations est présenté d'après [20].

##### 2.1.1 Equation généralisée de la mécanique des films minces visqueux

Cette équation est déduite des équations de la mécanique des milieux continus, lesquelles sont données par :

1. La loi de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

2. La loi fondamentale de la dynamique

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

3. La loi de comportement rhéologique pour un fluide newtonien

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda\theta) \delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (2.3)$$

4. La loi de conservation de l'énergie pour un fluide newtonien

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

avec :

$p$  : la pression du film mince.

$T$  : la température du film mince.

$\rho$  : la densité volumique du lubrifiant.

$\mu$  : la viscosité du lubrifiant.

$x_i$  : les coordonnées cartésiennes.

$u_i$  : le vecteur vitesse du film.

$\sigma_{ij}$  : le tenseur de contraintes.

$f_i$  : les forces de volume.

$k$  : coefficient de conductivité thermique.

$\alpha$  : coefficient de dilatation calorimétrique

Notons que  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  représente le tenseur de taux de déformations,  $\lambda$  est le coefficient de Navier, et  $\theta$  est le taux de dilatation cubique ( $\theta = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \vec{u}$ ).

La configuration du contact, pris dans le cas le plus général, ainsi que les systèmes d'axes sont schématisés par la figure ci dessous.

En reportant (2.3) dans (2.2) et en négligeant les forces massiques extérieures, on obtient les équations de Navier :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad (2.5)$$

Pour mettre en évidence les termes prépondérants, il est commode d'écrire (2.5) sous forme adimensionnelle. L'épaisseur  $h$  selon  $x_2$  étant supposée très faible relativement aux autres dimensions,

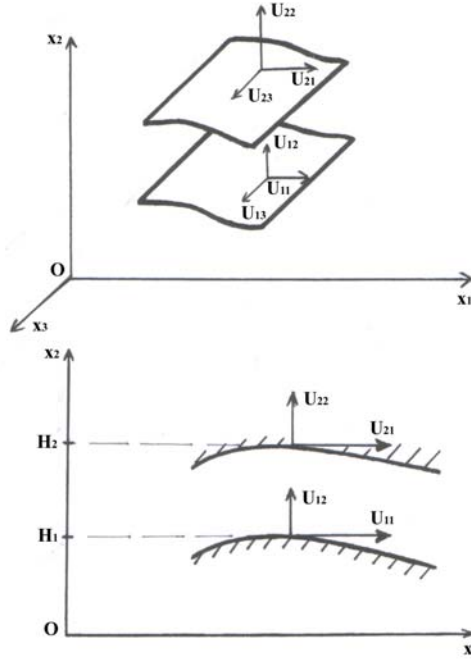


Figure 2.1 - Configuration du contact et systèmes d'axes

*i.e.* longueur et largeur du film, on choisi l'adimensionnement suivant :

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{x_1}{L}, & \bar{x}_2 &= \frac{x_2}{h}, & \bar{x}_3 &= \frac{x_3}{L} \\ \bar{u}_1 &= \frac{u_1}{U}, & \bar{u}_2 &= \frac{u_2 L}{Uh}, & \bar{u}_3 &= \frac{u_3}{U}, & \bar{t} &= \frac{tU}{L} \\ \bar{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0}, & \bar{\lambda} &= \frac{\lambda}{\lambda_0}, & \bar{p} &= p \frac{h^2}{\mu_0 UL}\end{aligned}$$

En posant  $\epsilon = \frac{h}{L}$  et en notant  $\Re$  le nombre de Reynolds, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_1} &= -\epsilon \Re \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_j} \right) + \epsilon^2 \left( \bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \epsilon^2 \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3^2} \right) + \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1^2} \right) + \\ &\epsilon^2 \left[ \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1} \right) \right] + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} + \epsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} \frac{1}{\epsilon^2} &= \\ &-\epsilon \Re \left( \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_j} \right) + \epsilon^2 \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3^2} \right) + \left( \bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1^2} \right) + \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + \\ &\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} + \epsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} \right) + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} + \epsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_3} &= -\epsilon \Re \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_j} \right) + \epsilon^2 \left( \bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \epsilon^2 \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3^2} \right) + \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2^2} \right) + \\ &\epsilon^2 \left[ \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3} \right) \right] + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} + \epsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} \right)\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse des films minces, les termes multipliés par  $\epsilon^3 \mathfrak{R}$  et  $\epsilon^2$  sont négligés et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} &= -\epsilon \mathfrak{R} \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} \right] + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \quad (i = 1, 3) \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

les termes en  $\epsilon \mathfrak{R}$  étant les termes d'inertie.

Par ailleurs, en tenant compte de l'hypothèse des forces de viscosité prédominantes, les termes d'inertie sont négligés. Il vient que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} &= \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \quad (i = 1, 3) \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

En revenant aux variables dimensionnées, et en notant les coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  par  $(x, y, z)$  et les vitesses  $(u_1, u_2, u_3)$  par  $(u, v, w)$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pour intégrer (2.8) en vue d'obtenir les vitesses, il faut connaître les conditions aux limites (Figure 1.3). Compte tenu de la condition d'adhérence à la paroi, celles-ci peuvent être formulées par :

$$\text{pour } y = h_1(x, z, t) : \quad \begin{cases} u = U_1 \\ v = V_1 \\ w = W_1 \end{cases}$$

$$\text{pour } y = h_2(x, z, t) : \quad \begin{cases} u = U_2 \\ v = V_2 \\ w = W_2 \end{cases}$$



En posant que :

$$I = \int_{h_1}^y \frac{\xi}{\mu(x, \xi, z, t)} d\xi \quad , \quad J = \int_{h_1}^y \frac{d\xi}{\mu(x, \xi, z, t)} \quad , \quad I_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{y}{\mu(x_i, t)} dy \quad , \quad J_2 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dy}{\mu(x_i, t)}$$

On obtient après intégration de (2.8), l'expression des vitesses :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial p}{\partial x} \left( I - \frac{JI_2}{J_2} \right) + \frac{U_2 - U_1}{J_2} J + U_1 \\ w &= \frac{\partial p}{\partial z} \left( I - \frac{JI_2}{J_2} \right) + \frac{W_2 - W_1}{J_2} J + W_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Par ailleurs, en intégrant à travers l'épaisseur du film l'équation (2.1) de conservation de la masse, on peut écrire :

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} dy + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dy = 0$$

Compte tenu à la fois des conditions aux limites, de la relation (2.9) et du fait que :

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy = \rho_2 V_2 - \rho_1 V_1$$

où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont respectivement la masse volumique du fluide sur les parois 1 et 2, il vient que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} \rho u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{h_1}^{h_2} \rho w dy - \rho_2 U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} - \rho_2 W_2 \frac{\partial h_2}{\partial z} + \rho_1 U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \\ + \rho_1 W_1 \frac{\partial h_1}{\partial z} + \rho_2 V_2 - \rho_1 V_1 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_1}^{h_2} \rho dy - \rho_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

En intégrant par partie les deux premiers termes de (2.10) et en posant :

$$R = \int_{h_1}^y \rho(x, \xi, t) d\xi, \quad F = \frac{1}{J_2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{R}{\mu} dy, \quad G = \int_{h_2}^y \frac{R}{\mu} \left( y - \frac{I_2}{J_2} \right) dy, \quad R_2 = \int_0^h \rho dy$$

On aboutit à :

$$\int_{h_1}^{h_2} \rho u dy = R_2 W_2 - \frac{\partial p}{\partial x} G - (U_2 - U_1) F \quad (11.a)$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \rho w dy = R_2 W_2 - \frac{\partial p}{\partial z} G - (W_2 - W_1) F \quad (11.b)$$

En regroupant les différents termes de (2.10) et compte tenu de (11.a) et (11.b), on peut écrire l'équation des films minces visqueux généralisée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} [U_2 (R_2 - F) + U_1 F] \\ -\rho_2 U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + \rho_1 U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} [W_2 (R_2 - F) + W_1 F] \\ &\quad -\rho_2 W_2 \frac{\partial h_2}{\partial z} + \rho_1 W_1 \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial t} \\ &\quad -\rho_2 \frac{\partial h_1}{\partial t} + \rho_2 V_2 - \rho_1 V_1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pour obtenir cette équation, il a été nécessaire de poser (1) l'hypothèse fondamentale des films minces ; (2) que les forces massiques extérieures sont négligeables ; (3) qu'il y a prédominance des effets visqueux sur les effets inertiels (implicitement, régime d'écoulement considéré laminaire) ; (4) que le fluide est newtonien ; (5) qu'il y a adhérence à la paroi et (6) que la courbure du contact est négligeable.

On peut expliciter les contraintes de cisaillement. Celles-ci, d'après l'hypothèse de fluide newtonien, se réduisent à :

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \sigma_{yz} &= \mu \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.12)$$

soit, en tenant compte de (2.9)

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \left( y - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{U_2 - U_1}{J_2} \\ \sigma_{yz} &= \left( y - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{W_2 - W_1}{J_2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 2.1.2 Equation des films minces visqueux

L'équation des films minces visqueux généralisée (2.11) peut être simplifiée si l'on considère la température constante selon l'épaisseur du film et si l'on suppose, comme c'est généralement le cas, la viscosité et la masse volumique uniquement fonctions de la température et de la pression, c'est à dire :

$$\mu = \mu(x, z, t)$$

$$\rho = \rho(x, z, t)$$

l'équation (2.11) prend alors la forme (2.14), appelée équation de la mécanique des films minces :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\Delta h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{\Delta h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= 6 \frac{\partial}{\partial x} [\rho (U_1 + U_2) \Delta h + U_1 F] \\ &+ 6 \frac{\partial}{\partial z} [\rho (W_1 + W_2) \Delta h + U_1 F] - 12 \rho U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \\ &+ 12 \rho U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - 12 \rho W_2 \frac{\partial h_2}{\partial z} + 12 \rho W_1 \frac{\partial h_1}{\partial z} \\ &+ 12 \rho ((V_2 - V_1) + 12 \Delta h \frac{\partial \rho}{\partial t}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec  $\Delta h$  correspondant à  $h_2 - h_1$ .

### 2.1.3 Equation de Reynolds généralisée

Il est un cas fréquent en lubrification où, au niveau d'une paroi du contact, la vitesse est tangente en tous points à cette paroi, tel que schématisé sur la figure(1.3). L'équation généralisée de la mécanique des films minces, de même que l'écriture des vitesses et des contraintes de cisaillement, sont alors considérablement simplifiées.

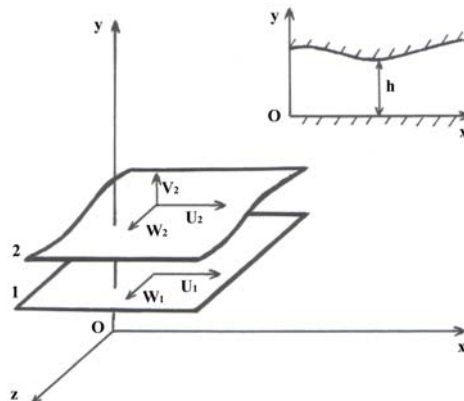


Figure 2.2 - Paroi à composante normale de vitesse nulle

Pour cela, on a les conditions aux limites sur la vitesse :

$$\begin{array}{l} \text{pour } y = 0 : \\ \text{pour } y = h : \end{array} \left\{ \begin{array}{l} u = U_1 \\ v = 0 \\ w = W_1 \\ \\ u = U_2 \\ v_2 = V_2 \\ w = W_2 \end{array} \right.$$

que l'on reporte dans l'équation (2.11) et où on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} [U_2 (R_2 - F) + U_1 F] - \rho_2 U_2 \frac{\partial h}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} [W_2 (R_2 - F) + W_1 F] - \rho_2 W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_2 V_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

qui est l'équation de Reynolds généralisée.

#### 2.1.4 Equation de Reynolds

De la même manière que dans § 1.2, l'équation de Reynolds généralisée peut être simplifiée moyennant l'hypothèse que la masse volumique et la viscosité ne varient pas avec l'épaisseur du film. L'équation obtenue est dite équation de Reynolds. Elle est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= 6\rho (U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho (W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} \\ &+ 6h \frac{\partial}{\partial x} (\rho (U_1 + U_2)) + 6h \frac{\partial}{\partial z} (\rho (W_1 + W_2)) \\ &+ 12\rho V_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Les composantes de la vitesse  $u$  et  $v$  s'écrivent :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y (y - h) + \frac{h - y}{h} U_1 + \frac{y}{h} U_2$$

$$v = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) + \frac{h-y}{h} W_1 + \frac{y}{h} W_2 \quad (2.17)$$

de ces relations, on déduit les contraintes de cisaillement :

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y-h) + (U_2 - U_1) \frac{\mu}{h} \\ \sigma_{yz} &= \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y-h) + (W_2 - W_1) \frac{\mu}{h} \end{aligned} \quad (2.18)$$

En synthèse, les équations de la mécanique des films minces que nous avons retracées, dont l'équation de Reynolds représente une forme simplifiée, associées à l'équation de l'énergie, permettent de déterminer les caractéristiques d'un système hydrodynamique arbitraire, lubrifié par un fluide supposé newtonien.

## 2.2 Effets thermiques en lubrification hydrodynamique

Afin de simplifier la résolution des équations gouvernant l'écoulement en film mince on est souvent amené à faire l'hypothèse d'un régime isotherme, ce qui n'est pas toujours représentatif de la réalité à fortiori pour de sévères conditions de fonctionnement (vitesses de rotation élevées, charges importantes...etc). La puissance dissipée par échauffement n'étant plus négligeable, on observe une diminution de la viscosité du fluide ainsi que de la portance hydrodynamique. L'équation de Reynolds définie précédemment ne peut alors être utilisée puisque la viscosité n'est plus constante.

Il existe deux types d'approches pour traiter ce problème :

- La première consiste, à partir de la théorie isotherme, à évaluer la quantité d'énergie dissipée, puis à calculer une température moyenne de fonctionnement.
- La deuxième consiste à résoudre simultanément l'équation de Reynolds généralisée et de l'énergie. La loi de variation de la viscosité par rapport à la température propre au lubrifiant utilisé est intégrée aux deux équations permettant ainsi de considérer les effets de la température sur le mécanisme étudié.

### 2.2.1 Bilan thermique global

La température moyenne de fonctionnement est déterminée à partir de la puissance dissipée, elle se calcule différemment selon le mécanisme étudié.

\* *Exemple du palier*

Dans le cas du palier, le couple résistant  $C_a$  permet de déterminer la puissance dissipée  $P$  laquelle est définie comme suit :

$$P = C_a \omega = \rho C_p Q \Delta T$$

avec :

$\omega$  : la vitesse angulaire de l'arbre

$\rho$  : la masse volumique du lubrifiant

$C_p$  : la capacité thermique massique du lubrifiant

$Q$  : Le débit sortant du palier

où  $\Delta T = T_s - T_e$  représente l'élévation moyenne de température;  $T_e$  et  $T_s$  étant les températures d'entrée et de sortie.

La température moyenne est donnée par la relation :  $T_m = (1 - a)T_e + \alpha T_s$

$a$  étant un coefficient variant de 0.5 à 1 selon les conditions d'alimentation.

La température maximale est donnée par :  $T_{max} = T_e + 2\Delta T$

### 2.2.2 Résolution d'un système couplé

La viscosité variant avec la température, une loi décrivant cette variation, en général obtenue lors d'essais expérimentaux est introduite dans l'équation des films minces ou dans l'équation généralisée de Reynolds (selon la géométrie étudiée). Un champ de pression est obtenu de la résolution de cette équation, les vitesses et les contraintes de cisaillement peuvent alors être définies. L'équation de l'énergie ayant en commun ces éléments, est également résolue ; le champ de température obtenu permet le calcul d'une nouvelle valeur de la viscosité. La répétition de ces étapes jusqu'à convergence permet d'obtenir toutes les caractéristiques du mécanisme étudié (portance, coefficient de frottement, débit) ainsi que l'élévation de la température entre l'entrée et la sortie du film lubrifiant.

Pour mieux saisir ce procédé de résolution, nous donnons l'organigramme de résolution suivant :

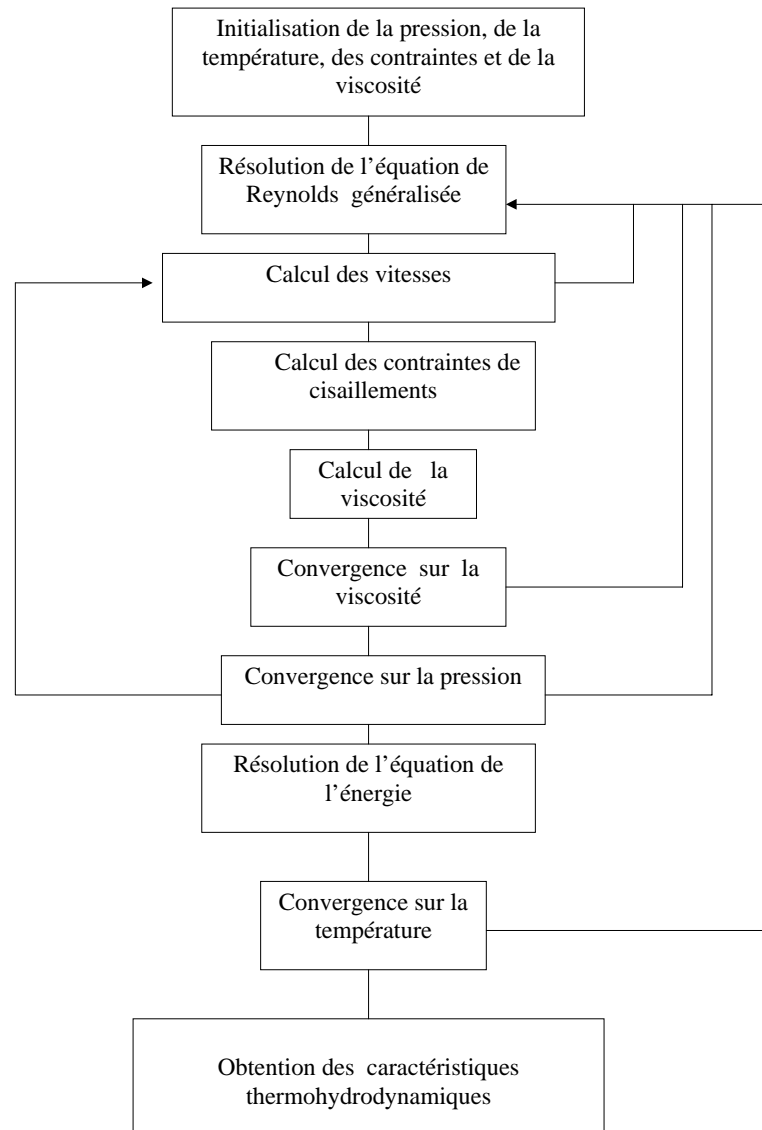


Figure 2.3 - Organigramme de calcul thermo-hydrodynamique

### 2.2.3 Equation de l'énergie des films minces visqueux

Pour obtenir l'équation de l'énergie en mécanique des films minces, on procède de la même manière que pour l'équation des films minces (§ 1.1), c'est à dire que l'on va dans un premier temps adimensionner l'équation de l'énergie afin d'éliminer certains termes. Plusieurs nombres adimensionnels seront retenus, puis nous reviendrons à la forme générale dimensionnée.

De même que pour l'équation des films minces, l'hypothèse d'une faible épaisseur de film devant les

autres dimensions du contact permet de simplifier considérablement l'équation de l'énergie laquelle pour rappel s'écrit comme suit :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \alpha T \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.19)$$

L'adimensionnement retenu dans ce cas précis est le suivant :

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_1}{L}, & \bar{x}_2 &= \frac{x_2}{H}, & \bar{x}_3 &= \frac{x_3}{L}, & \bar{t} &= \frac{tV}{L} \\ \bar{u}_1 &= \frac{u_1}{V}, & \bar{u}_2 &= \frac{u_2 L}{VH}, & \bar{u}_3 &= \frac{u_3}{V}, & \bar{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0} \\ \bar{\alpha} &= \frac{\alpha}{\alpha_0}, & \bar{C}_p &= \frac{C_p}{C_{p_0}}, & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0}, & \bar{K} &= \frac{K}{K_0} \\ \bar{p} &= p \frac{H^2}{\mu_0 V L}, & \bar{T} &= \frac{T}{T_0}, & \bar{\lambda} &= \frac{\lambda}{\lambda_0} \end{aligned}$$

L'équation de l'énergie s'écrit alors comme suit:

$$\begin{aligned} P_e \bar{\rho} \bar{C}_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \right) &= \alpha_0 T_0 N_d \alpha \bar{T} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_1} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_3} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left( \bar{K} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_2} \right) + N_d \mu \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

où  $P_e$  est le nombre de Peclet et  $N_d$  est le nombre de dissipation tel que :

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{\rho_0 C_{p_0} V H^2}{K_0 L} \\ N_d &= \frac{\mu_0 V^2}{T_0 K_0} \end{aligned}$$

En revenant à la forme dimensionnée :

$$\begin{aligned} \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \right) &= \alpha T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + u_3 \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( K \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \mu \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Notons que dans cette équation, Le terme de gauche dans la relation représente le flux de chaleur évacué par convection. Le premier terme de droite correspond à la dilatation du fluide, le second



terme au flux de chaleur évacué par convection et le dernier terme représente la dissipation visqueuse.  $\alpha$  est le coefficient de dilatation calorimétrique à pression constante ; ce coefficient est nul pour un fluide incompressible.

### 2.3 Conclusion

Les équations de la lubrification hydrodynamique trouvent leurs fondements dans les équations fondamentales de la dynamique des fluides. L'idée est de simplifier celles ci grâce à plusieurs hypothèses dont celle d'une faible épaisseur de film. On arrive de cette manière à écrire plusieurs équations, chacune appropriée au cas étudié: l'équation de Reynolds est la plus utilisée car les hypothèses retenues pour sa formulation concernent plusieurs systèmes hydrodynamiques tels que le blochet, les paliers et butées.

Les effets de la température sont pris en compte en résolvant l'équation généralisée de Reynolds (qui prend en compte la variation de la viscosité dans le film) et l'équation de l'énergie. L'exposé détaillé des équations gouvernant un écoulement en film mince nous permet de poser les bases théoriques nécessaires à une étude de lubrification.

Dans notre cas nous avons choisi un système hydrodynamique de type blochet, mais il est possible d'aborder l'étude de géométries plus complexes, il suffit pour cela de choisir l'équation la mieux appropriée (l'équation des films minces, de Reynolds généralisée, de Reynolds...etc), d'adopter un bon système de coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques...etc) et d'écrire les bonnes conditions aux limites suivant la géométrie considérée (blochet, secteur de butée, palier, joint...etc).

## CHAPITRE 3

### APPLICATIONS A DES SYSTEMES HYDRODYNAMIQUES DE TYPE : BLOCHET, PATIN DE BUTEE, PALIER CYLINDRIQUE

Nous proposons dans ce chapitre un traitement de la lubrification hydrodynamique de trois systèmes mécaniques: le blochet de dimensions finies à double inclinaison ; sa géométrie simple permettant de mieux visualiser les étapes à suivre pour une étude de lubrification et d'approcher plus facilement l'analyse de géométries plus complexes tels que les paliers et les butées hydrodynamiques. Le patin de butée cylindrique et le palier cylindrique de longueur finie seront également traités sans toutefois prendre en compte les effets thermiques et la rupture du film.

#### 3.1 Lubrification d'un blochet de dimensions finies à double inclinaisons par un fluide newtonien en régime isotherme, incompressible et stationnaire

Un blochet est constitué de deux surfaces inclinées l'une par rapport à l'autre entre lesquelles un fluide lubrifiant s'écoule. Le déplacement relatif de ces deux surfaces crée un champ de pression et permet ainsi de générer une portance hydrodynamique dans le film.

Nous supposerons dans ce qui suit que le lubrifiant est un fluide newtonien et incompressible, qui s'écoule en régime isotherme et stationnaire. Nous écrirons les équations correspondantes, les adimensionnerons et les résolverons à l'aide de la méthode des différences finies. Ceci afin de calculer les caractéristiques de fonctionnement du blochet (charge, débit d'alimentation, force de frottement).

Une validation sera faite en comparant les résultats obtenus à ceux de HERSAY M.D. [1], à un code de calcul connu sous le nom de PAFEC [3] ainsi qu'à ceux du calcul analytique de la lubrification d'un blochet de largeur infinie.

### 3.1.1 Conditions aux limites

Pour pouvoir appliquer à notre configuration les équations de la mécanique des films minces, il est nécessaire d'écrire les conditions aux limites de la géométrie du blochet, des pressions ainsi que des vitesses.

#### 3.1.1.1 Configuration géométrique du blochet

Le blochet que nous avons considéré a deux inclinaisons, on pourra de ce fait apprécier l'évolution de ses performances par rapport à celles d'un blochet à une seule inclinaison.

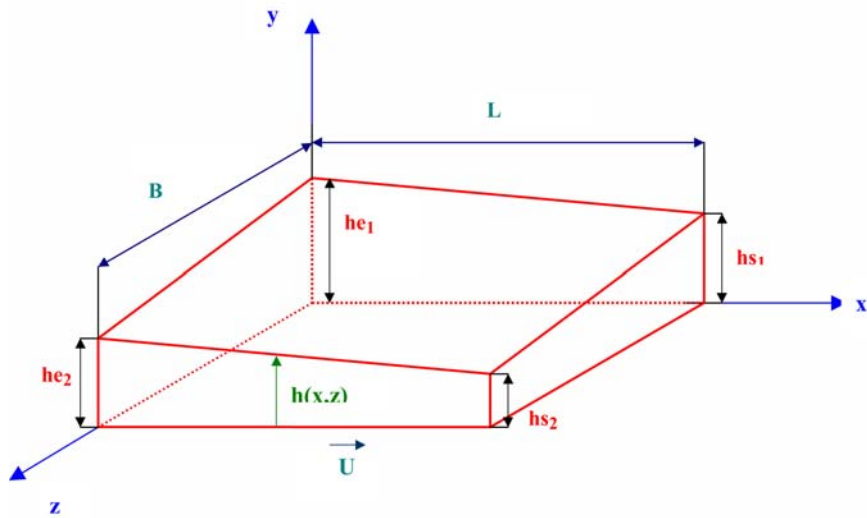


Figure 3.1 - Configuration du blochet de dimension finie à double inclinaison

\* Calcul de l'épaisseur du film  $h(x,z)$  (correspondant à l'équation d'un plan) :

$$h(x,z) = ax + bz + c$$

on a :	$h(0,0) = h_{e1} :$	$c = h_{e1}$
	$h(0,B) = h_{e2} :$	$B.b + c = h_{e2}$
	$h(L,0) = h_{s1} :$	$L.a + c = h_{s1}$
	$h(L,B) = h_{s2} :$	$L.a + B.b + c = h_{s2}$

ce qui donne :

$$h(x, z) = \frac{h_{s_1} - h_{e_1}}{L} \cdot x + \frac{h_{e_2} - h_{e_1}}{B} \cdot z + h_{e_1} \quad (3.1)$$

avec :

$$h_{s_2} = h_{s_1} + h_{e_2} - h_{e_1}$$

### 3.1.1.2 Conditions aux limites sur la pression

Nous supposons dans tout ce qui suit que le blochet est placé à l'air ambiant; ainsi en prenant la pression atmosphérique pour référence on a :

$$p(0, z) = p(L, z) = p(x, 0) = p(x, B) = 0$$

### 3.1.1.3 Conditions aux limites sur la vitesse

On suppose que la surface supérieure est immobile, et que la surface inférieure se déplace à une vitesse constante selon l'axe des x.

$$\begin{aligned} u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = 0 \quad , \quad \text{en} \quad y = h(x, z) \\ u = U \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = 0 \quad , \quad \text{en} \quad y = 0 \end{aligned}$$

Remarquons que la vitesse d'une des paroi du contact est tangente en tous point à cette même paroi : la condition nécessaire pour écrire l'équation généralisée de Reynolds est donc vérifiée.

## 3.1.2 Equation de Reynolds

Nous avons vu au chapitre précédent que l'équation de Reynolds s'écrivait comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\rho(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho(W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} \\ + 6h \frac{\partial}{\partial x} (\rho(U_1 + U_2)) + 6h \frac{\partial}{\partial z} (\rho(W_1 + W_2)) \\ + 12\rho V_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dans le cas d'une lubrification par un fluide newtonien en écoulement incompressible et isotherme, la viscosité et la masse volumique ne varient pas avec l'épaisseur du film. Ainsi après l'introduction des conditions aux limites sur les vitesses, l'équation de Reynolds prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.3)$$

comme l'épaisseur  $h$  est une fonction de  $x$  et de  $z$  il vient :

$$h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial h^3}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial h^3}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.4)$$

Cette équation décrit la variation de la pression dans le film suivant  $x$  et  $z$ , sa résolution par des méthodes numériques permettra d'obtenir la charge, les débits et la force de frottement pour différentes inclinaisons.

### 3.1.3 Composantes de vitesse et contraintes de cisaillement

Nous avons écrit dans le chapitre précédent au § 1.4 l'expression des vitesses associée à l'équation de Reynolds :

$$\text{Pour : } U_1 = U \quad , \quad U_2 = 0 \quad \text{et} \quad W_1 = W_2 = 0$$

on a alors :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \frac{h-y}{h} U \\ w &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Les contraintes de cisaillement étant définies comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \sigma_{yz} &= \mu \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

Dans notre cas elles deviennent :

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y - h) - U \frac{\mu}{h} \\ \sigma_{yz} &= \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y - h)\end{aligned}\quad (3.6)$$

### 3.1.4 Adimensionnement de l'équation de Reynolds

L'équation de Reynolds permet de calculer les caractéristiques mécaniques du blochet à condition de connaître la vitesse  $U$ , la viscosité  $\mu$ , les hauteurs du blochet ainsi que la longueur  $L$  et la largeur  $B$ . Cependant avant de faire ce calcul on doit l'adimensionner en vue de généraliser notre étude et afin de comparer nos résultats à ceux de travaux effectués sur un même mécanisme dans le cas adimensionnel.

Dans le cas du blochet de largeur finie, il est intéressant de garder comme paramètre adimensionnel le rapport de la longueur sur la largeur du blochet  $\frac{L}{B}$ . l'épaisseur du film peut aussi être adimensionnée par rapport à une hauteur de sortie par exemple  $h_{s_1}$  pour avoir dans l'équation de Reynolds comme autres paramètres adimensionnels les inclinaisons suivant  $x$  et  $z$ .

Nous retiendrons donc l'adimensionnement suivant :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x}{L}, & \bar{y} &= \frac{y}{h}, & \bar{z} &= \frac{z}{B}, & \bar{h} &= \frac{h}{h_{s_1}} \\ \bar{p} &= p \frac{h_{s_1}^2}{\mu U L}\end{aligned}$$

L'équation de Reynolds devient alors :

$$\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( h_{s_1}^3 \bar{h}^3 \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \frac{\mu U L}{h_{s_1}^2} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( h_{s_1}^3 \bar{h}^3 \frac{1}{B} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \frac{\mu U L}{h_{s_1}^2} \right) = 6 \mu U \frac{h_{s_1}}{L} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \quad (3.7)$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) + \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 6 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \quad (3.8)$$

avec :

$$\bar{h}(x, z) = \frac{h(x, z)}{h_{s_1}} = \left(1 - \frac{h_{e_1}}{h_{s_1}}\right) \frac{x}{L} + \frac{h_{e_1}}{h_{s_1}} \cdot \left(\frac{h_{e_2}}{h_{e_1}} - 1\right) \frac{z}{B} + \frac{h_{e_1}}{h_{s_1}} \quad (3.9)$$

Notons que  $\frac{h_{e1}}{h_{s1}}$  et  $\frac{h_{e2}}{h_{s2}}$  sont respectivement les inclinaisons du blochet suivant x et z.

Remarquons que la pression adimensionnelle varie suivant x et z en fonction du rapport  $\frac{L}{B}$  et des inclinaisons  $\frac{h_{e1}}{h_{s1}}$  et  $\frac{h_{e2}}{h_{s2}}$ , et que lorsque  $\frac{L}{B}$  tend vers 0 c'est à dire pour un blochet de largeur infinie l'équation de Reynolds adimensionnée se simplifie considérablement et peut-être intégrer analytiquement.

### 3.1.5 Adimensionnement des vitesses et des contraintes de cisaillement

\* *Adimensionnement des vitesses*

Les vitesses sont adimensionnées comme suit :

$$\bar{u} = \frac{u}{U} , \quad \bar{v} = \frac{vL}{UH} , \quad \bar{w} = \frac{w}{U}$$

il vient :

$$\begin{aligned} \bar{u} = \frac{u}{U} &= \frac{1}{U} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y (y - h) + \frac{h - y}{h} U \right] \\ &= \frac{1}{2\mu L} \frac{1}{U} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \frac{\mu U L}{h_{s1}^2} h_{s1} \cdot \bar{h} \bar{y} (h_{s1} \cdot \bar{h} \bar{y} - h_{s1} \cdot \bar{h}) + \frac{h_{s1} \cdot \bar{h} - h_{s1} \cdot \bar{h} \bar{y}}{h_{s1} \cdot \bar{h}} \end{aligned}$$

soit :

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \bar{h}^{-2} \bar{y} (\bar{y} - 1) + \bar{h} (1 - \bar{y}) \quad (3.10)$$

on a aussi :

$$\begin{aligned} \bar{w} = \frac{w}{U} &= \frac{1}{U} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y (y - h) \right] \\ &= \frac{1}{2\mu U B} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \frac{\mu U L}{h_{s1}^2} h_{s1} \cdot \bar{h} \bar{y} (h_{s1} \cdot \bar{h} \bar{y} - h_{s1} \cdot \bar{h}) \end{aligned}$$

soit :

$$\bar{w} = \frac{L}{B} \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \bar{h}^{-2} \bar{y} (\bar{y} - 1) \quad (3.11)$$

Le calcul de  $v$  est obtenu à partir de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.12)$$

\* *Adimensionnement des contraintes de cisaillement*

Les contraintes de cisaillement sont adimensionnées comme suit :

d'une part d'après (3.6) :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\mu U L}{h_{s_1}^2} \frac{\partial \bar{p}}{L \partial \bar{x}} \cdot (2h_{s_1} \bar{h} \bar{y} - h_{s_1} \bar{h}) - \frac{\mu U}{h_{s_1} \bar{h}}$$

soit :

$$\sigma_{xy} = \frac{\mu U}{h_{s_1}} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \bar{h} (2\bar{y} - 1) - \frac{1}{\bar{h}} \right] \quad (3.13)$$

avec :

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \bar{h} (2\bar{y} - 1) - \frac{1}{\bar{h}} \quad (3.14)$$

de la même manière :

$$\sigma_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}}{B \partial \bar{z}} \frac{\mu U L}{h_{s_1}^2} \cdot (2h_{s_1} \bar{h} \bar{y} - h_{s_1} \bar{h})$$

soit :

$$\sigma_{yz} = \frac{L}{B} \frac{\mu U}{h_{s_1}} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \bar{h} (2\bar{y} - 1) \right] \quad (3.15)$$

avec :

$$\bar{\sigma}_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \bar{h} (2\bar{y} - 1) \quad (3.16)$$



### 3.1.6 Calcul des paramètres dans le contact

#### 3.1.6.1 Calcul de la charge

La charge est obtenue en intégrant le champ de pression sur la surface du contact.

$$W = \int_0^L \int_0^B dx dz P(x, z)$$

comme  $p = \bar{p} \frac{\mu UL}{h_{s1}^2}$  on a :

$$W = \frac{\mu UL}{h_{s1}^2} LB \int_0^1 \int_0^1 d\bar{x} d\bar{z} \bar{P}(\bar{x}, \bar{z})$$

c'est à dire :

$$W = \frac{\mu UL^2 \cdot B}{h_{s1}^2} \bar{W} \quad \text{avec} \quad \bar{W} = \int_0^1 \int_0^1 d\bar{x} d\bar{z} \bar{P}(\bar{x}, \bar{z})$$

#### 3.1.6.2 Calcul de la force de frottement

La force de frottement est obtenue en intégrant les contraintes de cisaillement sur la paroi mobile du blochet.

la force de frottement s'écrit  $F_m = \sqrt{(F_1)^2 + (F_2)^2}$  avec :

$$F_1 = \int_0^L \int_0^B dx dz \sigma_{xy}$$

$$F_2 = \int_0^L \int_0^B dx dz \sigma_{yz}$$

comme :

$$\bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \frac{h_{s1}}{\mu U}, \quad \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \frac{L}{B} \frac{h_{s1}}{\mu U}$$

il vient :

$$F_1 = \frac{\mu ULB}{h_{s1}} \cdot \bar{F}_1 \quad \text{et} \quad F_2 = \frac{\mu UB^2}{h_{s1}} \cdot \bar{F}_2$$

$$\text{avec } \overline{F}_1 = \int_0^1 \int_0^1 d\bar{x}d\bar{z} \bar{\sigma}_{xy} \quad \text{et} \quad \overline{F}_2 = \int_0^1 \int_0^1 d\bar{x}d\bar{z} \bar{\sigma}_{yz}$$

La force de frottement adimensionnelle est alors calculée comme suit :

$$\overline{F}_m = \sqrt{(\overline{F}_1)^2 + (\overline{F}_2)^2}$$

### 3.1.6.3 Calcul du débit d'entrée

Le débit d'entrée est obtenu en intégrant la vitesse à l'entrée du blochet (en  $x=0$ ):

$$Q_e = \int_0^B \int_0^{h(0,z)} dydz \quad u(0, y, z)$$

soit:

$$Q_e = B.h_{s_1}\bar{h}(0, z).U. \int_0^1 \int_0^1 d\bar{y}d\bar{z} \quad \bar{u}(0, \bar{y}, \bar{z})$$

c'est à dire :

$$Q_e = B.h_{s_1}\bar{h}(0, z).U.\overline{Q}_e \quad \text{avec} \quad \overline{Q}_e = \int_0^1 \int_0^1 d\bar{y}d\bar{z} \quad \bar{u}(0, \bar{y}, \bar{z})$$

### 3.1.7 Discrétisation de l'équation de Reynolds

Pour résoudre numériquement l'équation adimensionnée de Reynolds on utilise la méthode des différences finies. Le domaine d'intégration est découpé en un certain nombre de rectangles élémentaires. Les variables continues  $x$  et  $z$  sont remplacées par des variables discrètes  $i$  et  $j$  allant respectivement de 1 à  $n$  et de 1 à  $m$ .

On commence par discrétiser les pressions aux points  $(i, j)$  à l'intérieur du domaine (sans les frontières). On utilise pour cela un schéma aux différences finies centrées de précision double:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}(i, j) = \frac{\bar{p}(i+1, j) - \bar{p}(i-1, j)}{2k}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}(i, j) = \frac{\bar{p}(i, j+1) - \bar{p}(i, j-1)}{2l}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2}(i, j) = \frac{p(i+1, j) - 2\bar{p}(i, j) + \bar{p}(i-1, j)}{k^2}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{z}^2}(i, j) = \frac{\bar{p}(i, j+1) - 2\bar{p}(i, j) + \bar{p}(i, j-1)}{l^2}$$

où  $k$  et  $l$  sont les pas du maillage respectivement suivant  $x$  et  $z$ .

On procède aussi de la même manière pour les  $\bar{h}(x, z)$ . A l'intérieur du domaine, les termes en  $\bar{h}$  sont discrétisés avec un schéma centré de précision double. Pour les frontières, on utilise un schéma progressif ou régressif d'ordre trois. Le schéma est progressif si la frontière est aux premiers nœuds, régressif si elle est au niveau des derniers nœuds.

En reportant les différentes expressions discrétisées pour les  $\bar{p}(i, j)$  et  $\bar{h}(i, j)$  dans l'équation de Reynolds adimensionnée, on obtient au point  $(i, j)$  une équation de la forme :

$$\begin{aligned} -2 \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{h}^3}{l^2} + \frac{\bar{h}^3}{k^2} \right) \bar{p}(i, j) + \frac{1}{k} \left( \frac{\bar{h}^3}{k} + \frac{\partial \bar{h}^3}{2\partial \bar{x}} \right) \bar{p}(i+1, j) + \frac{1}{k} \left( \frac{\bar{h}^3}{k} - \frac{\partial \bar{h}^3}{2\partial \bar{x}} \right) \bar{p}(i-1, j) \\ + \frac{1}{l} \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{h}^3}{l} + \frac{\partial \bar{h}^3}{2\partial \bar{z}} \right) \bar{p}(i, j+1) + \frac{1}{l} \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{h}^3}{l} - \frac{\partial \bar{h}^3}{2\partial \bar{z}} \right) \bar{p}(i, j-1) = 6 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

On se propose de résoudre cette équation à l'aide de la méthode SOR (*Successive Over Relaxation*) ou encore dite de Gauss Seidel accélérée.

On obtient un système de  $(m-2).(n-2)$  équations à  $m.n$  inconnues ( $m$  et  $n$  sont les nombres de points suivant  $x$  et  $z$ ). Les  $(2(m+n)-4)$  équations restantes sont obtenues en écrivant les conditions aux limites sur la pression en chaque point de la frontière.

L'application de cette méthode se fait comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{p}(i, j)^{r+1} = (1 - \Omega)\bar{p}(i, j)^r + \Omega(A_1(i)\bar{p}(i + 1, j)^r + A_2(i)\bar{p}(i - 1, j)^r + A_3(i)\bar{p}(i, j + 1)^r \\ + A_4(i)\bar{p}(i, j - 1)^r + A_5(i)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$r$  est le nombre d'itérations ;  $\Omega$  est un coefficient de surrelaxation compris entre 1.5 et 1.85 dans la majorité des problèmes de lubrification [20].

Certains auteurs [21], proposent des relations empiriques telles que :

$$\Omega = 2 - \sqrt{2}\Pi\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}}$$

Notons que pour notre problème du blochet, nous avons testé la convergence de l'algorithme de Gauss-Seidel pour plusieurs coefficients  $\Omega$  et avons retenu la valeur 1.56 qui a permis d'obtenir la convergence de la méthode en un nombre minimal d'itérations.

$A_1(i)$  ,  $A_2(i)$  ,  $A_3(i)$  ,  $A_4(i)$  ,  $A_5(i)$  sont les coefficients de l'équation aux différences finies :

$$\begin{aligned} A_1(i) = \frac{\frac{1}{k} \left( \frac{\bar{h}^3}{k} + \frac{\partial \bar{h}^3}{2\partial \bar{x}} \right)}{2 \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{h}^3}{l^2} + \frac{\bar{h}^3}{k^2} \right)} \quad , \quad A_2(i) = \frac{\frac{1}{k} \left( \frac{\bar{h}^3}{k} - \frac{\partial \bar{h}^3}{2\partial \bar{x}} \right)}{2 \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{h}^3}{l^2} + \frac{\bar{h}^3}{k^2} \right)} \quad , \quad A_3(i) = \frac{\frac{1}{l} \left( \frac{L}{B} \right)^2 \left( \frac{\bar{h}^3}{l} + \frac{\partial \bar{h}^3}{2\partial \bar{z}} \right)}{2 \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{h}^3}{l^2} + \frac{\bar{h}^3}{k^2} \right)} \\ A_4(i) = \frac{\frac{1}{l} \left( \frac{L}{B} \right)^2 \left( \frac{\bar{h}^3}{l} - \frac{\partial \bar{h}^3}{2\partial \bar{z}} \right)}{2 \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{h}^3}{l^2} + \frac{\bar{h}^3}{k^2} \right)} \quad , \quad A_5(i) = \frac{-6 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}}{2 \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{h}^3}{l^2} + \frac{\bar{h}^3}{k^2} \right)} \end{aligned}$$

### 3.1.8 Organigramme de résolution

Un algorithme du calcul de la lubrification hydrodynamique du blochet présenté dans cette étude a été mis en place, un programme en langage de programmation *Fortran90* a été écrit , les résultats obtenus sont présentés et discutés dans les paragraphes qui suivent. L'organigramme correspondant est le suivant :

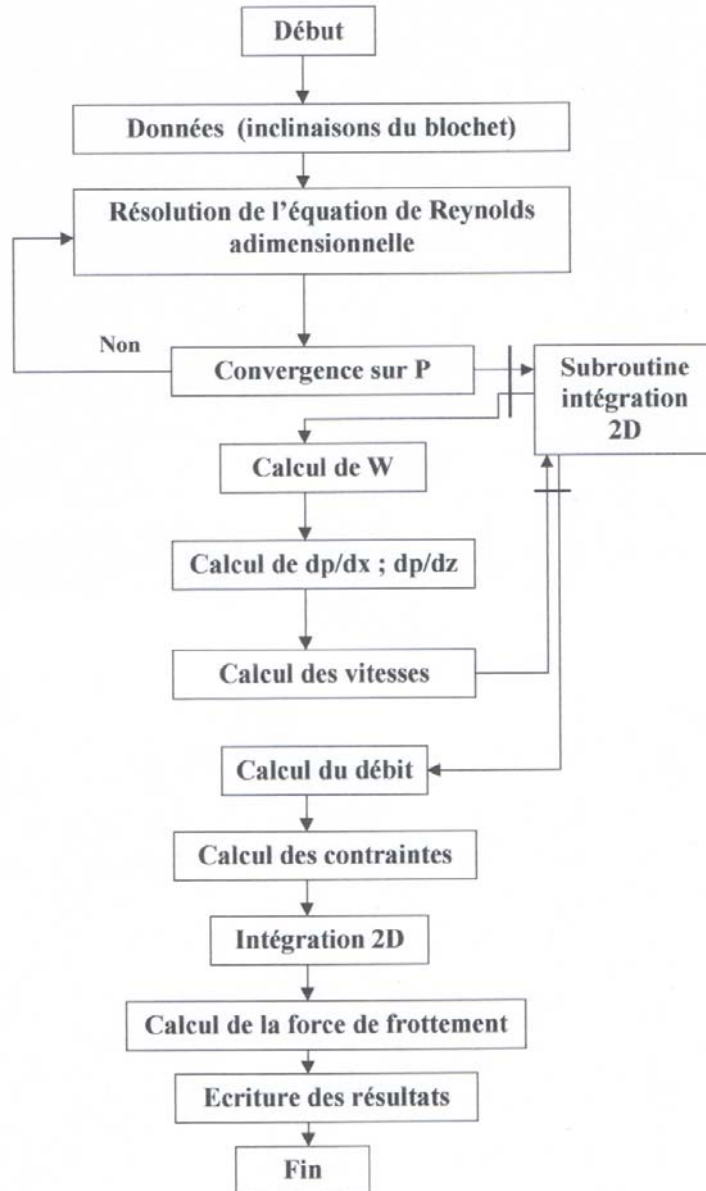


Figure 3.2 - Organigramme du calcul de la lubrification d'un blochet de dimension finie à double inclinaison lubrifié par un fluide newtonien incompressible en régime isotherme et stationnaire

### 3.1.9 Discussion et validation des Résultats

#### \* Validation des résultats

Plusieurs moyens de validation ont été dégagés de par notre recherche bibliographique : d'une part une comparaison avec les résultats du calcul analytique d'un blochet de largeur infinie a été effectuée, d'autre part nous comparons nos résultats avec ceux de HERSAY M.D.[1] donnant des valeurs de la charge et de la force de frottement d'un blochet de dimension finie à une seule inclinaison et ce pour différents rapports de la longueur sur la largeur  $\frac{L}{B}$ ; nous comparons également l'évolution des pressions sur toute la surface du blochet avec celle d'un code de calcul connu sous le nom de PAFEC [3].

#### 1 - Comparaison avec le calcul analytique d'un blochet de largeur infinie

Soit l'écoulement entre deux plaques planes non parallèles de largeur infinie suivant Oz et de longueur L suivant Ox. La plaque inférieure est animée d'un mouvement de translation uniforme de vitesse  $u(x, 0, z) = U$ , la plaque supérieure est immobile et inclinée d'un angle  $\alpha$  (Figure 3.3)

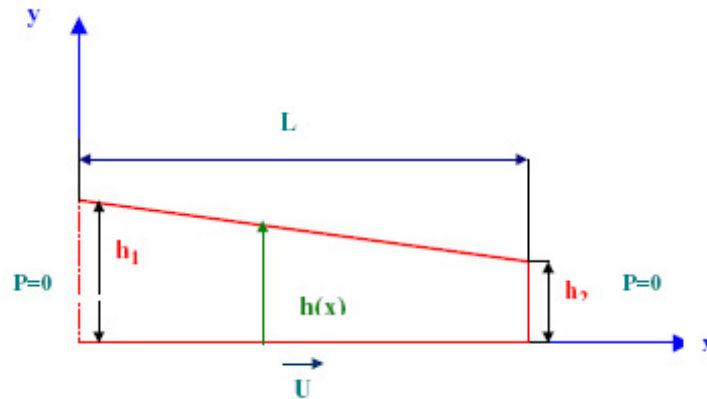


Figure 3.3 - Blochet de largeur infinie

Notons que les épaisseurs de film  $h_1$  et  $h_2$  sont très petites : de l'ordre de 0.005 à 0.5 mm devant la longueur du blochet  $L$  de l'ordre de 300 à 500 mm.

L'équation généralisée de Reynolds s'écrit alors comme suit :

$$\frac{d}{dx} \left( h^3 \frac{dp}{dx} \right) = 6\mu U \frac{dh}{dx} \quad (3.19)$$

avec :  $h = h_1 - x \operatorname{tg}\alpha$  et  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_1 - h_2}{L}$

il vient :

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu U \frac{h - h^*}{h^3} \quad (3.20)$$

où :  $h^*$  est l'épaisseur de film au point  $x$  où le gradient de pression s'annule

L'intégration de cette équation conduit alors à :

$$p = \frac{6\mu U}{\operatorname{tg}\alpha} \left( \frac{1}{h} - \frac{h^*}{2h^2} + C_1 \right) \quad (3.21)$$

Dans le cas où à la sortie et à l'entrée du blochet la pression est égale à la pression atmosphérique et en prenant celle ci comme référence, les conditions aux limites sur la pression sont:

$$\begin{aligned} p &= 0 & \text{pour} & & x &= 0 \\ p &= 0 & \text{pour} & & x &= L \end{aligned}$$

on a alors :

$$h^* = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2} \quad \text{et} \quad C_1 = -\frac{1}{h_1 + h_2}$$

soit :

$$p = \frac{6\mu U}{\operatorname{tg}\alpha} \left[ \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} - \frac{1}{h_1 + h_2} \right] \quad (3.22)$$

en posant  $a = \frac{h_1}{h_2}$  et  $\bar{h} = \frac{h}{h_2}$  on a :

$$p = \frac{6\mu U}{h_2^2 (a - 1)} \left[ \frac{1}{\bar{h}} - \frac{1}{\bar{h}^2} \frac{a}{(a + 1)} - \frac{1}{a + 1} \right] \quad (3.23)$$

La charge est obtenue en intégrant le champs de pression, elle s'écrit comme suit :

$$W = \frac{6\mu UB}{tg^2\alpha} \left( \ln \frac{h_1}{h_2} - 2 \frac{1}{h^2} \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right) \quad (3.24)$$

ou encore :

$$W = \frac{6\mu UBL^2}{h_2^2 (a-1)^2} \left( \ln a - 2 \frac{a-1}{a+1} \right) \quad (3.25)$$

La force de frottement est obtenue en intégrant les contraintes de cisaillement à la surface mobile du blochet , elle s'écrit comme suit [20]:

$$F_m = \frac{\mu ULB}{h_2} \left( \frac{4 \ln a}{a-1} - \frac{6}{a+1} \right) \quad (3.26)$$

Le débit d'entrée du blochet de largeur finie est donnée par :

$$Q_e = B \int_0^{h_1} dy \ u(0, y, z) = B.U \frac{h_1 \cdot h_2}{h_1 + h_2}$$

soit :

$$Q_e = BUh_2 \frac{a}{a+1} \quad (3.27)$$

Les coefficients adimensionnels associés respectivement à la pression , à la charge, à la force de frottement et au débit sont les suivants :

$$\frac{6\mu U}{h_2^2} , \frac{6\mu UBL^2}{h_2^2} , \frac{\mu ULB}{h_2} \text{ et } BUh_2$$



Dans notre cas  $h_2$  est représentée par  $h_{e_1}$ . Notons que le coefficient de frottement relatif à la surface mobile est définie comme suit :

$$C_f = \frac{F_m}{W} \quad (3.28)$$

Pour valider nos résultats, on se place dans le cas ou  $\frac{L}{B} = 0$ , ce qui correspond au blochet de largeur infinie. On compare ensuite les résultats obtenus numériquement avec les résultats analytiques.

Cette comparaison concerne la variation du champ de pression suivant la longueur du blochet (c'est à dire Ox), ainsi que les variations avec l'inclinaison  $\frac{h_{e_1}}{h_{s_1}}$  des paramètres adimensionnels : charge, débit, force et coefficient de frottement et cela comme indiqué sur les figures qui suivent.

Notons que nous écrirons dans ce qui va suivre  $a = \frac{h_{e_1}}{h_{s_1}}$  et  $b = \frac{h_{e_1}}{h_{e_2}}$  correspondant aux inclinaisons du blochet suivant la longueur et la largeur du blochet.

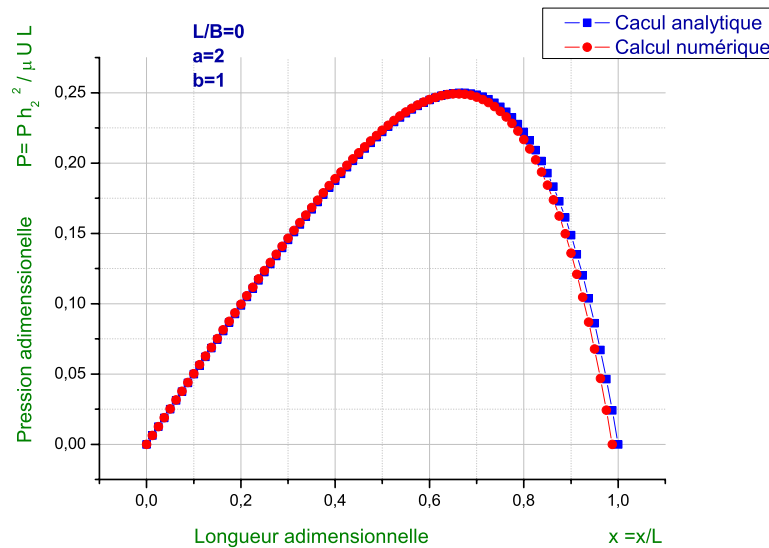


Figure 3.4 - Pressions adimensionnelles pour le blochet infini obtenue numériquement et analytiquement pour  $a = \frac{h_{e_1}}{h_{s_1}} = 2$  (au milieu de la largeur)

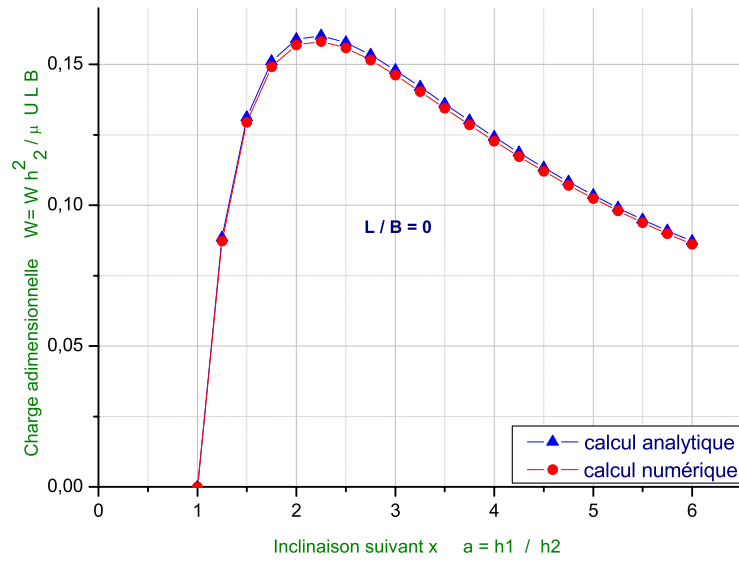


Figure 3.5 - Charge adimensionnelle pour le blochet infini obtenue numériquement et analytiquement

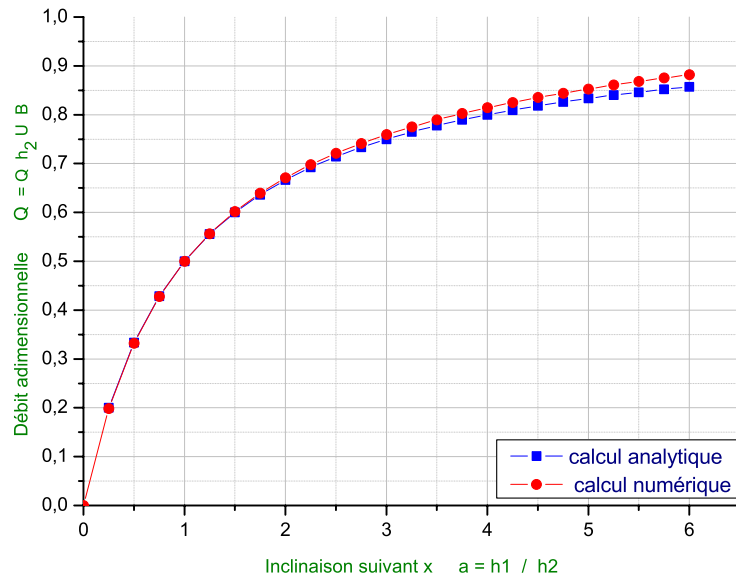


Figure 3.6 - Débit adimensionnel pour le blochet infini obtenu numériquement et analytiquement

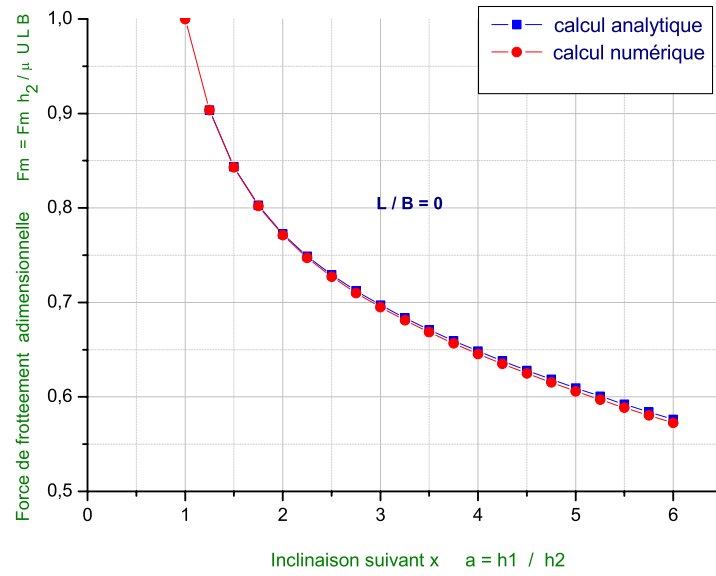


Figure 3.7 - Force de frottement adimensionnelle pour le blochet infini obtenue numériquement et analytiquement

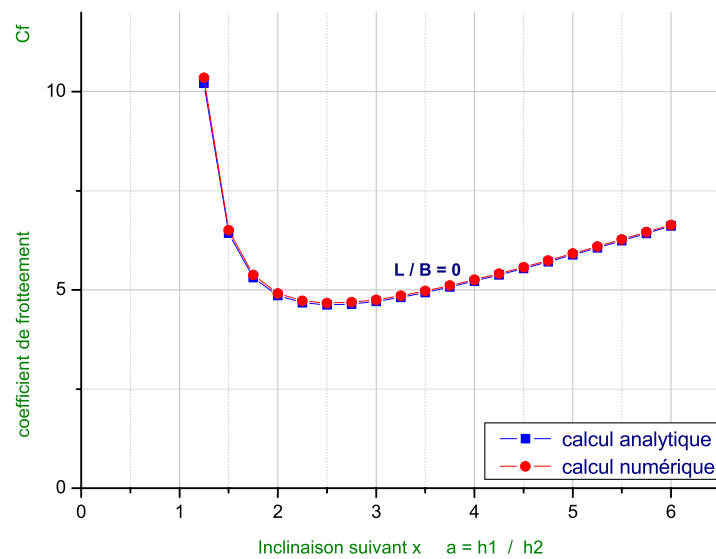


Figure 3.8 - Coefficient de frottement pour le blochet infini obtenue numériquement et analytiquement

Ces figures font apparaître une excellente concordance entre les résultats numériques et ceux de l'analytique.

Pour saisir la répartition tridimensionnelle des pressions dans le contact, il est utile de regarder ces figures :

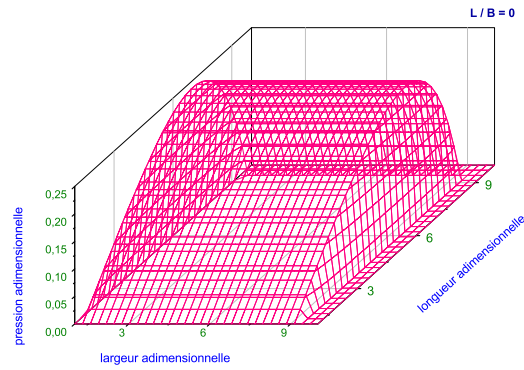


Figure 3.9 - Distribution de la pression adimensionnelle pour le blochet de largeur infinie obtenue numériquement

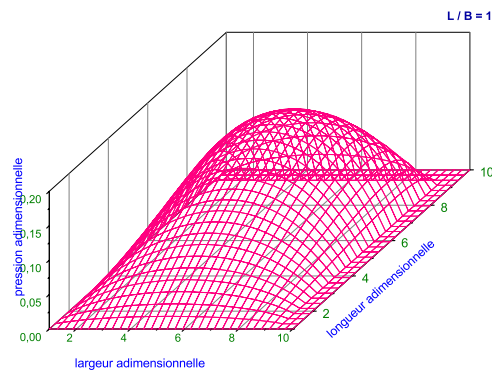


Figure 3.10 - Distribution de la pression adimensionnelle pour le blochet de largeur finie obtenue numériquement

L'aire située sous les surfaces représente la charge adimensionnelle ou encore la portance hydrodynamique développée dans le contact. L'évolution de cette charge est conditionnée par les inclinaisons du blochet ainsi que par le rapport  $\frac{L}{B}$ .

Afin de situer la zone de pression maximale, il est utile d'observer la figure qui suit :

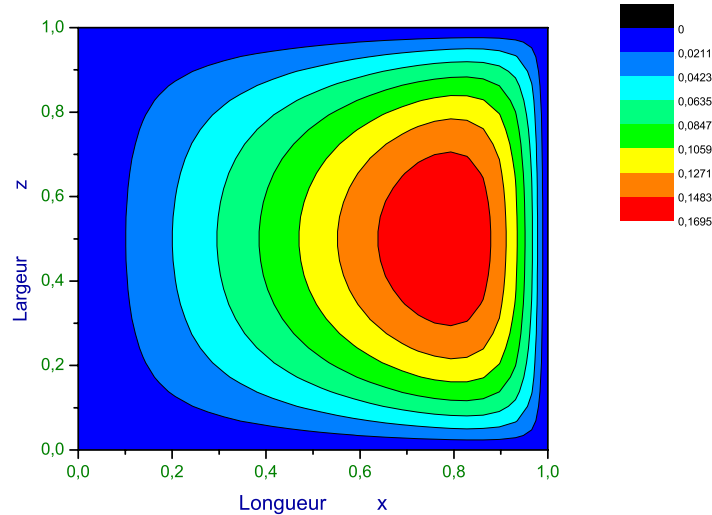


Figure 3.11 - Distribution de la pression adimensionnelle pour le blochet de dimensions finies sur la surface du blochet pour  $\frac{L}{B}=1$

## 2 - Comparaison avec le code de calcul PAFEC [3]

Nous nous plaçons dans le cas dimensionnel et dans les mêmes conditions de fonctionnement, en choisissant un blochet ayant les caractéristiques géométriques suivantes :  $L = 0.3 \text{ m}$ ,  $B = 0.3 \text{ m}$ ,  $h_{e_1} = h_{e_2} = 30 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $h_{s_1} = 10 \text{ } \mu\text{m}$  et un lubrifiant ayant une viscosité  $\mu = 0.01 \text{ Kg}/(\text{ms})$ , on supposera également la vitesse à l'entrée  $U = 15 \text{ m}/\text{s}$ . Notons que nous ne considérons pas le cas d'une inclinaison suivant  $z$ , c'est à dire que les courbes de pressions évolueront de manière symétrique par rapport au milieu de la largeur puisque les pressions en  $z = 0$  et  $z = B$  sont égales.

L'évolution des pressions sur la surface du blochet donnée par notre programme et celle donnée sur la demi surface du blochet donnée par le code de calcul PAFEC [3] est la suivante :

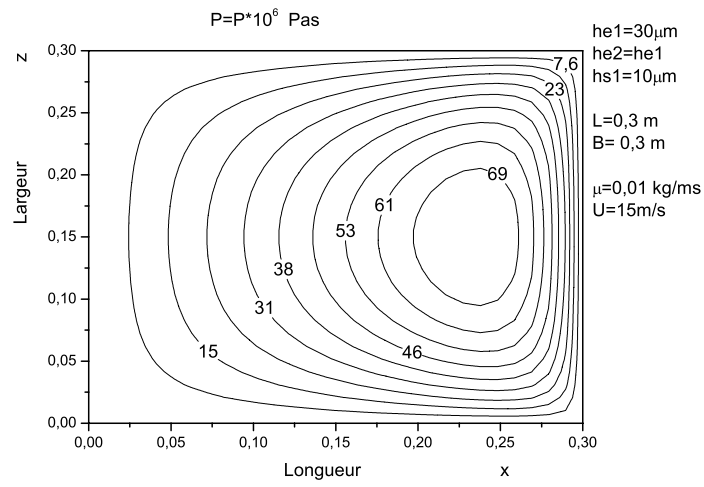


Figure 3.12 - Distribution des pressions (en Mpa) sur la surface du blochet donnée par notre programme

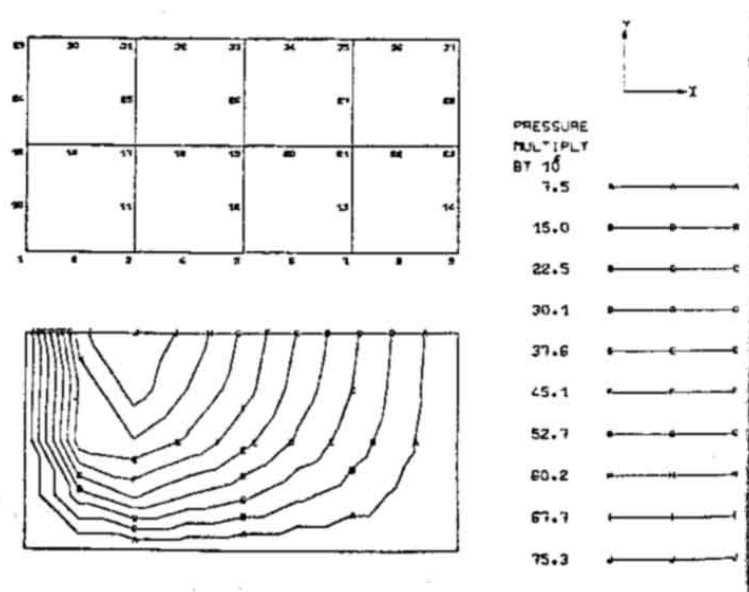


Figure 3.13 - Distribution des pressions sur la surface d'un blochet donnée par PAFEC [3]

Nous constatons une bonne concordance entre les valeurs des pressions des deux graphes.

Notons que nous avons pris le cas d'une simple inclinaison, la pression varie dans ce cas de manière symétrique par rapport à l'axe Oz.

### 3 - Comparaison de la charge et de la force de frottement de blochets de dimensions finies [1]

Après avoir validé nos résultats par une comparaison avec le blochet de largeur infinie ainsi qu'avec le code de calcul PAFEC [3], nous avons comparé nos résultats avec ceux de HERSAY M.D.[1] dans le cas d'un blochet de dimensions finies à une seule inclinaison. Les tableaux ci-dessous illustrent cette troisième comparaison, les résultats sont quasi-identiques.

Notons que les coefficients  $\eta_w$  et  $\eta_f$  sont définis comme suit:

$$\eta_w = \frac{W_{\text{blochet finie}}}{W_{\text{blochet in finie}}}, \eta_f = \frac{Fm_{\text{blochet finie}}}{Fm_{\text{blochet in finie}}}$$

avec  $W$  : la charge appliquée au blochet et  $Fm$  : la force de frottement exercée sur les parois du blochet.

Tableau 3.1 - coefficient  $\eta_w$  donné par HERSAY M.D [1]

$a \ B/L$	1/4	1/2	1	2	4	$\infty$
1.5	0.0545	0.175	0.425	0.685	0.84	1
2	0.058	0.18	0.435	0.69	0.84	1
5	0.085	0.235	0.49	0.725	0.867	1

Tableau 3.2 - coefficient  $\eta_w$  donné par notre programme :

$a \ B/L$	1/4	1/2	1	2	4	$\infty$
1.5	0.0543809	0.1749432	0.4251490	0.6868930	0.8412266	0.9870876
2	0.0581792	0.1827799	0.4345410	0.6931463	0.8445856	0.9874842
5	0.08605662	0.2344110	0.4906220	0.7284511	0.8629876	0.9887587

Tableau 3.3 - coefficient  $\eta_f$  donné par HERSAY M.D [1] :

$a \quad B/L$	1/4	1/2	1	2	4	$\infty$
1.5	0.096	0.97	0.98	0.99	0.995	1
2	0.905	0.915	0.94	0.97	0.985	1
5	0.69	0.74	0.825	0.905	0.95	1

Tableau 3.4 - coefficient  $\eta_f$  donné par notre programme :

$a \quad B/L$	1/4	1/2	1	2	4	$\infty$
1.5	0.09628416	0.972623	0.9767450	0.9868313	0.9928027	0.9994065
2	0.9023542	0.9146768	0.9401432	0.9665972	0.982130	0.9984370
5	0.6866179	0.7357777	0.8220496	0.9027065	0.9483904	0.9943631

### \* Discussion des résultats

Nous présentons dans ce qui suit quelques courbes pour observer l'évolution des paramètres physiques de l'écoulement du film à travers le blochet. Nous analyserons d'abord la distribution des vitesses  $u$  et  $v$ , puis observerons l'influence de la longueur et largeur du blochet sur ses caractéristiques, ainsi que celle de la double inclinaison du blochet.

#### 1 - Distribution des vitesses

Le calcul des vitesses effectué par notre programme nous a permis d'évaluer le sens de l'écoulement du film lubrifiant à l'intérieur du blochet comme le montre la figure 3.14.

#### 2 - Influence des dimensions du blochet (largeur et longueur) sur ses caractéristiques mécaniques

Pour observer l'influence du rapport  $\frac{L}{B}$  sur un blochet de dimensions finies, quelques courbes sont données (figures 3.15 et 3.16) montrant l'évolution de la pression et de la charge par rapport à la longueur du blochet dans le cas adimensionnel.



### 3 - Influence des inclinaisons sur les caractéristiques mécaniques du blochet

Nous présentons quelques courbes pour montrer l'influence des inclinaisons du blochet sur ses caractéristiques (figures 3.17 , 3.18 et 3.19) et remarquerons que celles ci influencent sensiblement l'emplacement de la zone maximale de pression.

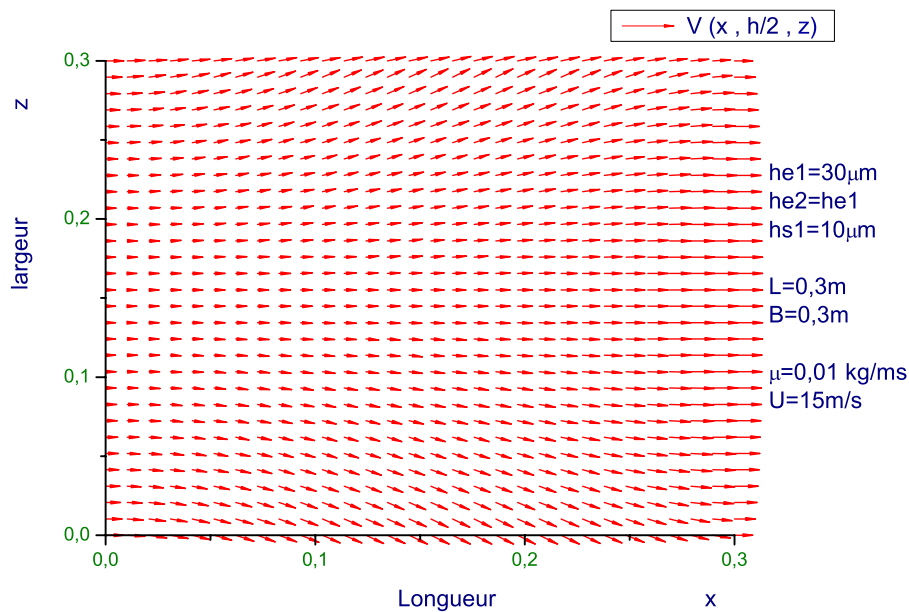


Figure 3.14 - Distribution de la vitesse (en module) sur le plan  $y=h(x,z)/2$  pour  $\frac{L}{B}=1$

Dans le cas dimensionnel, avec les mêmes conditions de fonctionnement que celles citées plus haut (prise pour la validation de nos calculs avec ceux obtenus par le code de calcul PAFEC [3]), nous avons une distribution tridimensionnelle de la pression dans un cas réel ainsi que le montre la figure 3.20.

Notons que nous pourrions tester l'évolution des pressions dans le cas dimensionnel en variant la vitesse  $U$ , les inclinaisons, la viscosité  $\mu$ , et cela afin de mieux apprécier leurs influences sur les caractéristiques mécaniques du blochet en terme de charge, de force de frottement, de débit.

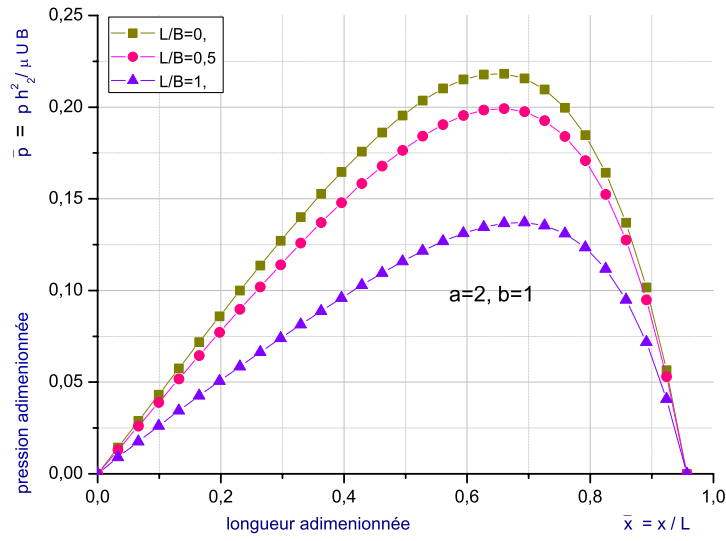


Figure 3.15 - Distribution de la pression suivant la longueur pour différents rapports de  $\frac{L}{B}$  (au milieu de la largeur)

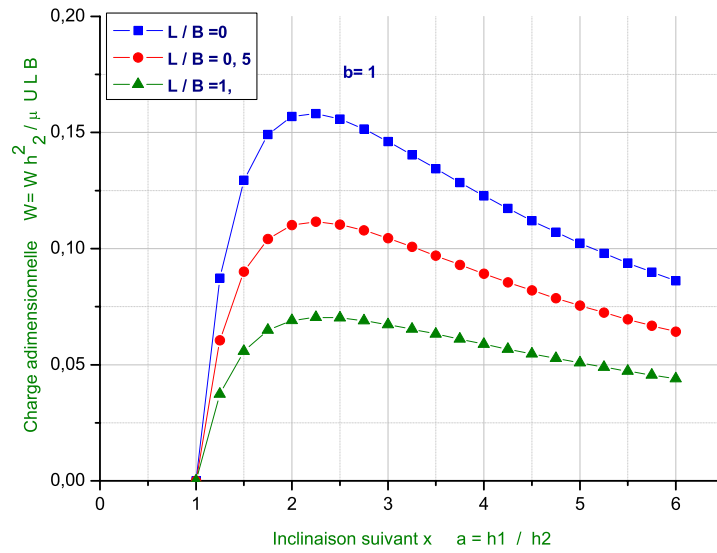


Figure 3.16 - Variation de la charge adimensionnelle avec l'inclinaison  $a$  et pour  $b=1$

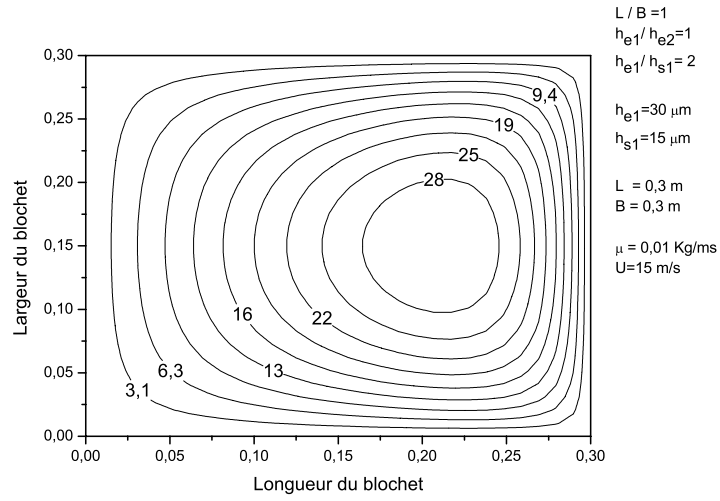


Figure 3.17 - Distribution des pressions sur la surface du blochet en variant l'inclinaison suivant  $x$  (en Mpa)

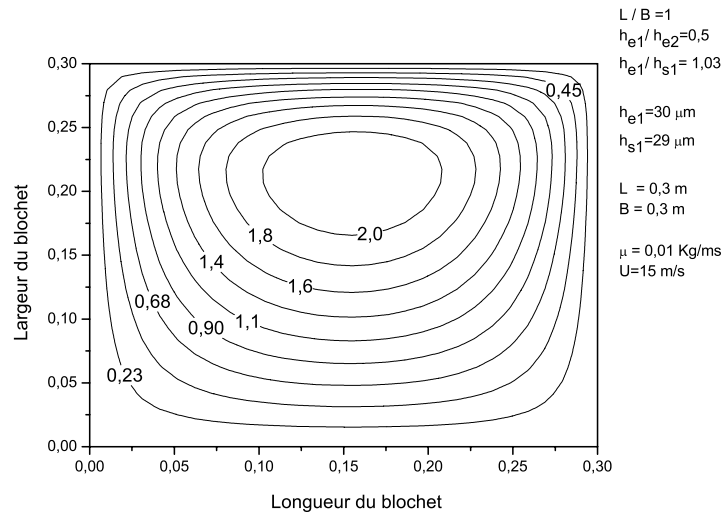


Figure 3.18 - Distribution des pressions sur la surface du blochet en variant l'inclinaison suivant  $z$  (en Mpa)

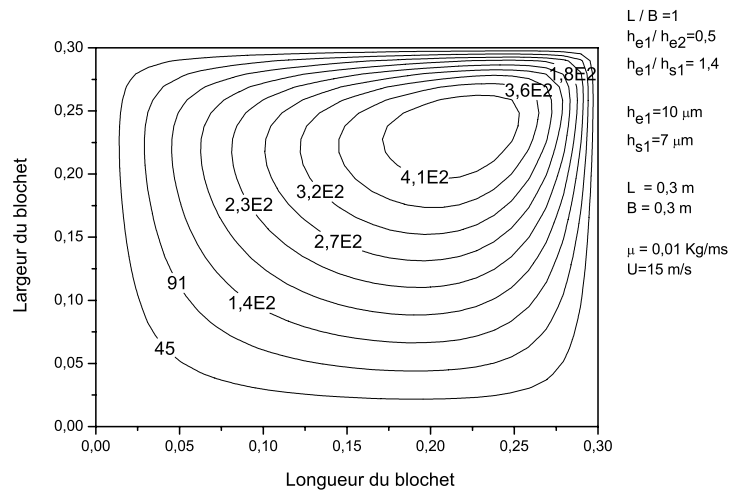


Figure 3.19 - Distribution des pressions sur la surface du blochet en variant l'inclinaison suivant  $x$  et  $z$  (en Mpa)

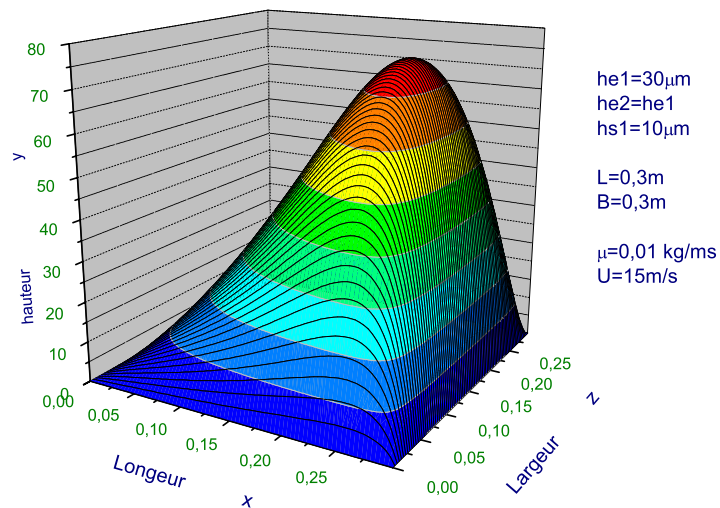


Figure 3.20 - Distribution tridimensionnelle des pressions sur la surface du blochet (en Mpa)

### 3.2 Lubrification d'un patin de butee cylindrique par un fluide newtonien en régime isotherme, incompressible et stationnaire

Une butée cylindrique est un organe mécanique dont le rôle est de bloquer le mouvement de translation d'un arbre, elle est formée de plusieurs patins comme cela est schématisée sur la figure ci dessous.

Un lubrifiant est introduit entre l'arbre et la butée, il circule à travers des rainures créant un film mince entre les patins et l'arbre. Lorsque l'arbre tourne un champ de pression se crée, il suffit alors de multiplier le nombre de patins par la force de portance hydrodynamique engendrée sur chaque patin pour obtenir la charge totale que peut supporter la butée; il en va de même pour la force de frottement.

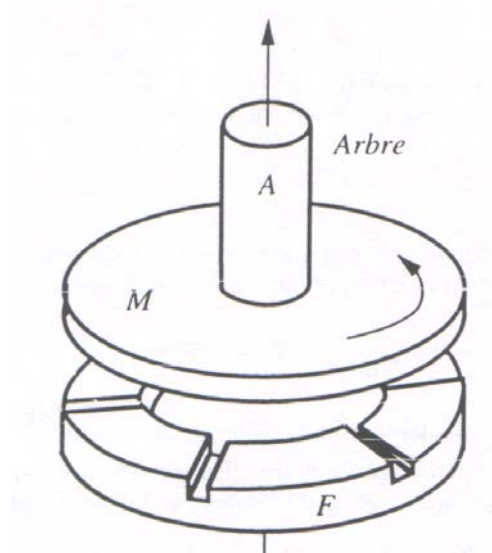


Figure 3.21 - Configuration d'une butée cylindrique à patins fixes

Le traitement de la butée est différent de celui du blochet car les conditions aux limites sur les vitesses et la pression changent. La configuration géométrique également est différente et bien que les surfaces du patin et du blochet soient assimilables moyennant un coefficient de corrélation, une reformulation complète du problème s'avère nécessaire.

De ce fait, nous utiliserons l'équation généralisée de Reynolds en coordonnées cylindriques et procéderons à un adimensionnement qui simplifiera d'une part, notre formulation du problème et la généralisera; d'autre part, nous permettra aisément de comparer nos résultats aux travaux antérieurs de PINKUS et STERNLICHT [2].

Pour se faire, nous ferons les mêmes hypothèses que pour l'étude du blochet c'est à dire que le fluide est newtonien, incompressible et s'écoule en régime isotherme et stationnaire. Nous écrirons comme pour le blochet les équations correspondantes, les adimensionnerons et les discrétiserons.

Les caractéristiques de fonctionnement de la butée en termes de charge et de couple de frottement seront calculés puis comparés à ceux de PINKUS et STERNLICHT [2].

### 3.2.1 Configuration géométrique du patin de butée

Nous avons choisi d'étudier un patin de butée cylindrique à une seule inclinaison, ceci afin d'être dans les mêmes conditions que l'étude faite par PINKUS et STERNLICHT [2].

Les paramètres géométriques de ce patin sont : le rayon extérieur  $R_2$ , le rayon intérieur  $R_1$  et l'angle  $\beta$  qui intercepte le patin comme le montrent la figure ci dessous :

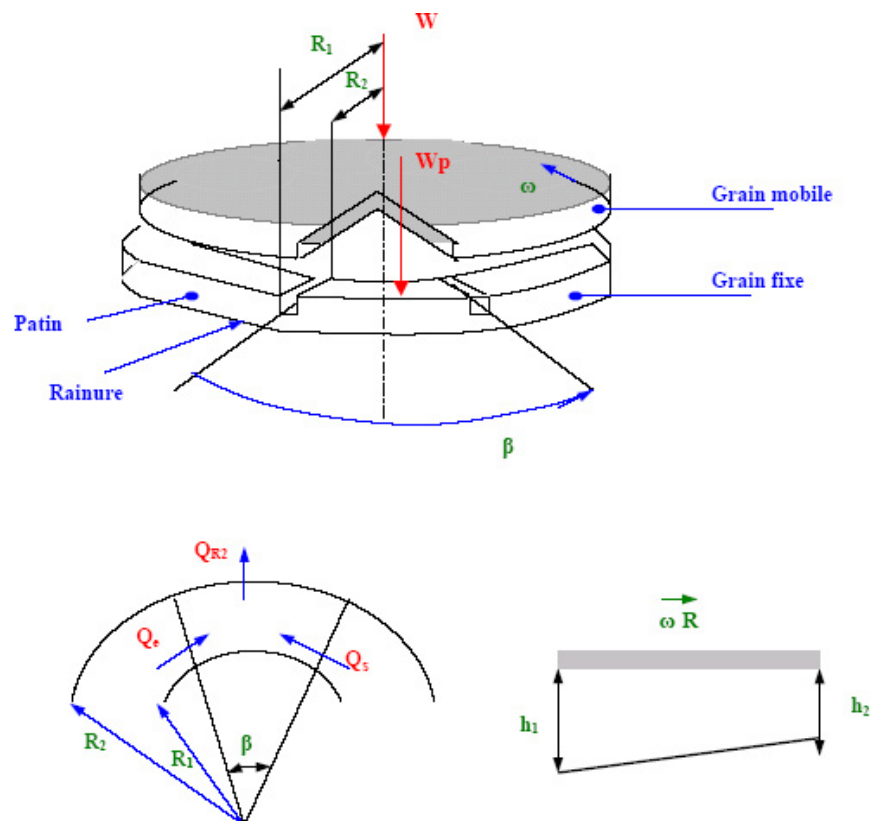


Figure 3.22 - Schéma de principe d'un patin de butée cylindrique

L'épaisseur de film est calculée de la même manière que pour le blochet de largeur infinie, rappelons l'écriture de cette dernière :

$$h = h_2 + (L - x) \cdot \frac{(h_1 - h_2)}{L}$$

soit

$$h = h_2(1 + (1 - x/L) \cdot \frac{(h_1 - h_2)}{h_2})$$

où  $L$  représente la longueur du blochet.

s'agissant d'un patin de butée, l'épaisseur s'écrit comme suit :

$$h = h_2(1 + \delta \cdot (1 - \frac{\theta}{\beta}))$$

où  $\delta = \frac{(h_1 - h_2)}{h_2}$  représente l'inclinaison du patin .

Notons que les paramètres adimensionnels que nous avons choisi d'utiliser pour exprimer les caractéristiques de la butée sont :

- L'inclinaison  $\delta$
- L'angle  $\beta$
- Le rapport des différences de rayon au rayon extérieur  $\gamma = \frac{(R_2 - R_1)}{R_2}$

### 3.2.2 Equation de Reynolds généralisée en coordonnées cylindriques

L'équation de Reynolds généralisée formulée au second chapitre prend en coordonnées cylindriques la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho r \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \rho \frac{h^3}{\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) &= 6r\rho(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial r} + 6\rho(V_1 - V_2) \frac{\partial h}{\partial \theta} \\ &+ 6rh \frac{\partial}{\partial r} [\rho(U_1 + U_2) + 6h \frac{\partial}{\partial \theta} (V_1 + V_2)] \\ &+ 6\rho h (U_1 + U_2) + 12\rho r W_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.29)$$

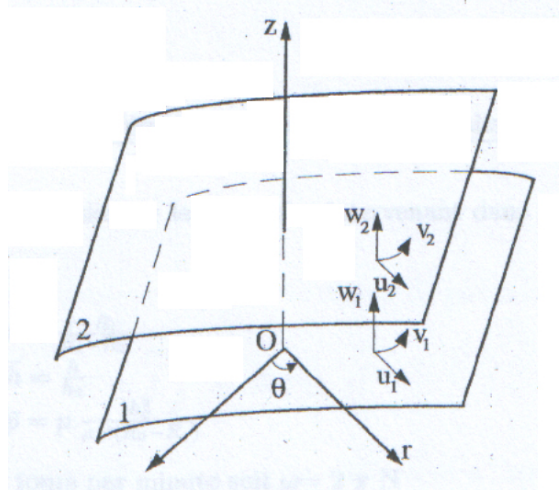


Figure 3.23 - Systèmes d'axes de coordonnées cylindriques

La figure 3.23 illustre les conditions géométriques et cinématiques de cette formulation :

\*Conditions aux limites sur la pression et les vitesses

Nous supposons qu'aux frontières du patin règne une pression égale à la pression atmosphérique, c'est à dire qu'on aura en prenant celle ci pour référence :

$$p(0, r) = p(\beta, r) = p(\theta, R_1) = p(\theta, R_2) = 0$$

Par ailleurs les conditions aux limites sur la vitesse s'écrivent comme suit :

$$\begin{array}{llll} U_1 = 0 , & V_1 = 0 , & W_1 = 0 & \text{en } z = 0 \\ U_2 = 0 , & V_2 = r\omega , & W_2 = 0 & \text{en } z = h \end{array}$$

Pour un fluide incompressible qui s'écoule en régime isotherme et stationnaire l'équation de Reynolds généralisée prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 6r\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (3.30)$$



### 3.2.3 Adimensionnement de l'équation de Reynolds généralisée

Nous avons choisi d'adimensionner les variables intervenant dans (3.30) comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{r-R_1}{R_1-R_2} \\ \bar{h} &= \frac{h}{h_2} \\ \bar{p} &= p \cdot \frac{h_2^2}{\mu N (R_2-R_1)}\end{aligned}$$

avec :  $N$  la vitesse en tours par minute soit  $\omega = 2 \pi N$

En outre , et en prenant  $\bar{\theta} = \frac{\theta}{\beta}$

on a :

$$\begin{aligned}\theta &= \beta \bar{\theta} \\ r &= \bar{r} (R_1 - R_2) + \frac{R_1}{R_1-R_2} \\ h &= h_2 \bar{h} \\ p &= \bar{p} \cdot \frac{\mu N (R_2-R_1)}{h_2^2}\end{aligned}$$

En notant  $\alpha = \frac{R_1}{(R_1-R_2)}$  le developpement de l'équation (3.30) mène à :

$$\bar{h}^3 (\bar{r} + \alpha) \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{r}^2} + \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{h}^3}{\partial \bar{\theta}} \frac{1}{\beta (\bar{r} + \alpha)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} + \bar{h}^3 \frac{1}{\beta (\bar{r} + \alpha)} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{\theta}^2} = \frac{12\pi (\bar{r} + \alpha)}{\beta} \quad (3.31)$$

Nous remarquons que les variables adimensionnelles  $\beta$  et  $\alpha$  ont une influence certaine sur cette équation, comme il a été le cas avec les variables  $L$  et  $B$  pour le blochet.

En somme, l'adimensionnement que nous avons retenu nous a permis comme pour le blochet de garder les paramètres que nous avons choisi plus haut § 1.1 pour exprimer les caractéristiques de la butée c'est à dire  $\beta$  ,  $\delta$  et  $\gamma$  puisque :

- $\alpha$  et  $\gamma$  sont fonction des rayons, car on a par ailleurs  $\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma}$
- L'inclinaison  $\delta$  est intégrée dans l'expression de l'épaisseur de film.

### 3.2.4 Calcul des paramètres dans le contact

#### \* Calcul de la charge

La charge par patin est obtenue en intégrant le champ de pression. Elle est donnée par :

$$W = \int_{R_1}^{R_2} \int_{\theta_e}^{\theta_s} r dr d\theta P(x, z)$$

$\theta_e$  et  $\theta_s$  : Les angles interceptant le patin respectivement à l'entrée et à la sortie.

La charge sur une butée est obtenue par la relation :  $W_T = n_p W_p$ ,  $n_p$  étant le nombre de patins de la butée.

#### \* Calcul du couple de frottement

le couple de frottement est calculé par l'intégration de la contrainte de cisaillement tangentielle sur le grain mobile :

$$C_f = \int_{R_1}^{R_2} \int_{\theta_e}^{\theta_s} r^2 dr d\theta \sigma_{\theta z}|_{z=0}$$

avec :

$$\sigma_{\theta z} = \frac{1}{2r}(2z - h) \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{\mu r \omega}{h}$$

Notons que le couple de frottement total est :  $C_T = n_p C_f$ ,  $n_p$  étant le nombre de patins de la butée.

#### \* Calcul de la puissance dissipée

la puissance dissipée est donnée par la relation :

$$P_d = C_f \omega$$

$\omega$  étant la vitesse de rotation.

Notons que la puissance totale dissipée est :  $P_{dT} = n_p P_d$ ,  $n_p$  étant le nombre de patin de la butée.

\*Calcul des débits

Les débits à l'entrée et à la sortie des patins sont calculés par l'intégration du champ de vitesse dans la direction tangentielle :

$$Q_e = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^h dr dy \quad v_{\theta=\theta_e}$$

$$Q_s = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^h dr dy \quad v_{\theta=\theta_s}$$

### 3.2.5 Discrétisation de l'équation généralisée de Reynolds

Pour résoudre l'équation (3.31) nous avons utilisé la méthode des différences finies comme dans l'étude du blochet (§ 1.7), nous avons choisi la méthode de Gauss-Seidel surrelaxée avec le même coefficient de relaxation , c'est à dire  $\Omega = 1.56$ .

Les termes de l'équation (3.31) sont dicrétisés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}(i, j) &= \frac{\bar{p}(i+1, j) - \bar{p}(i, j)}{\Delta \theta} \\ \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \theta^2}(i, j) &= \frac{\bar{p}(i+1, j) - 2\bar{p}(i, j) + \bar{p}(i-1, j)}{\Delta \theta^2} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right)_{(i, j)} &= \frac{1}{\Delta \bar{r}} \left[ \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{\bar{r}(i, j+1) + \bar{r}(i, j)}{2} \cdot \frac{\bar{p}(i, j+1) - \bar{p}(i, j)}{\Delta \bar{r}^2} \\ &\quad - \frac{\bar{r}(i, j-1) + \bar{r}(i, j)}{2} \cdot \frac{\bar{p}(i, j) - \bar{p}(i, j-1)}{\Delta \bar{r}^2} \end{aligned}$$

$\Delta \bar{r}$  et  $\Delta \bar{\theta}$  sont les pas du maillage respectivement suivant  $r$  et  $\theta$ .

En intégrant les variables discrétisées dans l'équation (3.31) et en appliquant la méthode de Gauss-Seidel surrelaxée, nous obtenons l'expression de la pression :

$$\begin{aligned} \bar{p}(i, j)^{r+1} &= (1 - \Omega) \bar{p}(i, j)^r + \Omega (A_1(i) \bar{p}(i+1, j)^r + A_2(i) \bar{p}(i-1, j)^r + A_3(i) \bar{p}(i, j+1)^r \\ &\quad + A_4(i) \bar{p}(i, j-1)^r + A_5(i)) \end{aligned} \quad (3.32)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 A_1(i) &= \frac{1}{\beta^2 \bar{r}(k) AA} \left( \frac{h^3}{\Delta \bar{\theta}^2} + \frac{\partial \bar{h}^3}{\partial \bar{\theta}} \right) \quad , \quad A_2(i) = \frac{1}{\beta^2 \bar{r}(k)} \frac{\partial \bar{h}^3}{\partial \bar{\theta} AA} \\
 A_3(i) &= \frac{\bar{r}(k) + \bar{r}(k-1)}{2\Delta \bar{r}^2 AA} \bar{h}^3 \quad , \quad A_4(i) = \frac{\bar{r}(k) + \bar{r}(k-1)}{2\Delta \bar{r}^2 AA} \bar{h}^3 \\
 A_5(i) &= -12\pi \bar{r}(k) \frac{\partial \bar{h}^2}{\partial \bar{\theta} AA}
 \end{aligned}$$

où  $AA = 2 \frac{1}{\beta^2 \bar{r}(k)} \left( \frac{\bar{h}^3}{\Delta \bar{\theta}^2} + \frac{\partial \bar{h}^3}{\partial \bar{\theta}} \right) + \frac{1}{\beta^2 \bar{r}(k)} \frac{\partial \bar{h}^3}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\bar{r}(k) + \bar{r}(k-1)}{2\Delta \bar{r}^2} \bar{h}^3$

### 3.2.6 Discussion et validation des résultats

Nous comparons la charge et le couple adimensionnels pour différentes valeurs de  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $\beta$  à ceux de PINKUS et STERNLICHT [2] comme le montre le tableau ci-dessous. Nous noterons que concernant le couple de frottement la concordance est parfaite, pour la charge cela est moins évident bien que pour de faibles inclinaisons, l'écart n'est pas très important, cela dit la technique de discrétisation utilisée par PINKUS et STERNLICHT [2] est différente de la nôtre, l'écart pourrait s'expliquer par cela, ou provenir des sous-routines d'intégration [22] car nous ne connaissons pas la méthode qu'ils ont utilisé pour l'intégration des pressions et l'obtention de la charge.

Tableau 3.5 - Variation de la charge et du couple de frottement donnée par notre programme et par PINKUS et STERNLICHT [2]

$\gamma$	$\delta$	$\beta$	$\bar{W}_p$ [2]	$\bar{W}_p$ programme	$\bar{C}_p$ [2]	$\bar{C}_p$ programme
1/3	1	80	0.703	0.64	1.22	1.22
		55	0.9025	0.82	0.842	0.85
		40	1.06	0.97	0.63	0.62
		30	1.15	1.06	0.475	0.473
	2	80	3.11	2.75	1.97	1.97
		55	3.89	3.45	1.35	1.38
		40	4.446	3.97	1.0	1.02
		30	4.74	4.27	0.785	0.78

	4	80	11.7	9.81	2.98	2.97
		55	14.0	11.72	2.12	2.11
		40	15.3	12.95	1.62	1.60
		30	15.75	13.45	1.27	1.26
	8	80	36.0	29.42	4.26	4.27
		55	40.5	32.82	3.12	3.12
		40	42.0	34.23	2.43	2.42
		30	41.3	33.89	1.96	1.94
1/2	1	80	0.581	0.53	1.45	1.45
		55	0.669	0.62	0.98	1.01
		40	0.697	0.65	0.735	0.74
		30	0.672	0.63	0.565	0.56
	2	80	2.49	2.20	2.36	2.36
		55	2.79	2.50	1.67	1.67
		40	2.84	2.58	1.25	1.25
		30	2.70	2.45	0.96	0.96
	4	80	8.79	7.36	3.66	3.64
		55	9.42	7.99	2.65	2.64
		40	9.26	7.96	2.03	2.02
		30	9.07	7.45	1.59	1.58
	8	80	24.9	20.13	5.40	5.40
		55	25.1	20.50	4.03	4.01
		40	23.6	19.50	3.15	3.12
		30	21.3	17.68	2.51	2.48
2/3	1	80	0.446	0.42	1.53	1.56
		55	0.458	0.40	1.06	1.09
		40	0.431	0.36	0.785	0.80
		30	0.386	1.66	0.60	0.60
	2	80	1.859	1.66	2.54	2.59
		55	1.86	1.70	1.80	1.82
		40	1.73	1.59	1.35	1.36
		30	1.53	1.42	1.04	1.04
	4	80	6.26	5.30	4.00	4.04
		55	6.04	5.22	2.90	2.92
		40	5.49	4.79	2.22	2.22
		30	4.80	4.21	1.73	1.72
	8	80	16.7	13.69	6.04	6.07
		55	15.4	12.76	4.49	4.49
		40	13.6	11.34	3.47	3.46
		30	11.6	9.71	2.74	2.71

### 3.3 Lubrification d'un palier de longueur finie par un fluide newtonien en régime isotherme, incompressible et stationnaire

Un palier hydrodynamique circulaire est constitué d'un arbre et d'un coussinet. Un film lubrifiant sépare les deux éléments et génère lorsque l'arbre est mis en rotation une portance hydrodynamique qui permet de supporter les charges appliquées au palier. On retrouve ce mécanisme hydrodynamique dans les moteurs thermiques, les compresseurs, les turbomachines, les réducteurs....etc. La figure 3.24 illustre son mode de fonctionnement.

En vue de déterminer les caractéristiques mécaniques de ce palier (charge, force de frottement, débits...) nous calculerons l'épaisseur du film puis l'intégrerons à l'équation généralisée de Reynolds en coordonnées cylindriques.

Nous supposerons comme il a été le cas pour le blochet que le lubrifiant est newtonien et s'écoule en régime isotherme, incompressible et stationnaire. Un adimensionnement adéquat des équations obtenues sera effectué. Enfin nous discrétiserons et résolverons ces équations à l'aide de la méthode des différences finies.

Par ailleurs, il existe plusieurs types de paliers circulaires. En notant  $L$  et  $D$  la longueur et le diamètre de l'arbre, on citera trois types de paliers :

- Le palier infiniment long , pour un rapport  $\frac{L}{D} > 4$
- Le palier court , pour un rapport  $\frac{L}{D} < \frac{1}{8}$
- Le palier de longueur finie , pour un rapport  $\frac{L}{D}$  quelconque.

Nos résultats seront comparés à ceux obtenues pour un palier de longueur infinie [20].

L'étude que nous présentons concerne le palier de longueur finie. Nous noterons que la principale difficulté de l'étude des paliers est l'écriture des conditions aux limites sur la pression. En effet, lorsque l'arbre tourne le film lubrifiant peut se rompre à cause de la géométrie d'écoulement : convergente puis divergente. Des pressions négatives sont alors notées, ce qui pose un réel problème dans l'écriture des conditions aux limites et de là à la résolution de l'équation généralisée de Reynolds.

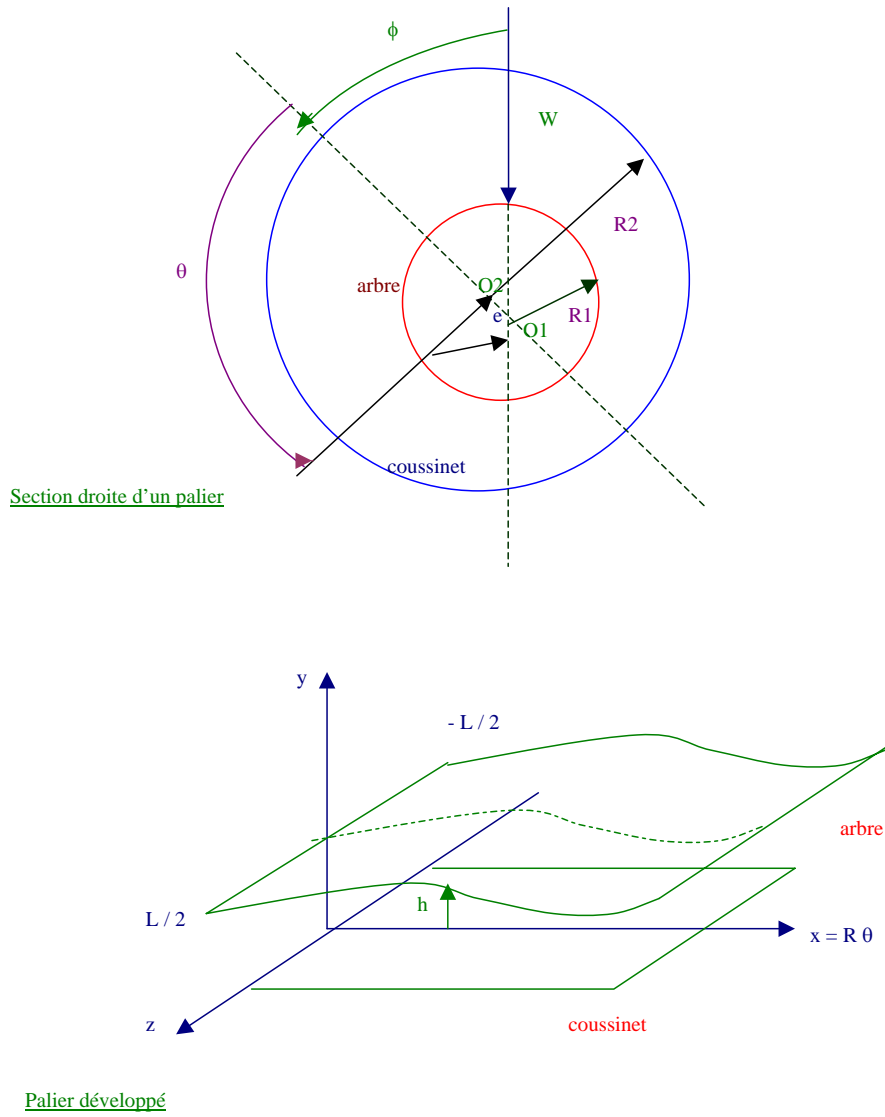


Figure 3.24 - Configuration d'un palier cylindrique

### 3.3.1 Conditions aux limites

\* *Conditions aux limites sur les vitesses*

Les rayons  $R_a$  et  $R_c$  étant très voisins, il est possible de négliger la courbure du film et d'assimiler le coussinet ou l'arbre à un plan. Les conditions aux limites sur la vitesse s'écrivent alors :

$$\begin{array}{lll} \text{à la surface du coussinet :} & U_1 = R_c \omega_c & V_1 = 0 & W_1 = 0 \\ \text{à la surface de l'arbre :} & U_2 = R_a \omega_a \cos \alpha & V_2 = R_a \omega_a \sin \alpha & W_2 = 0 \end{array}$$

$\alpha$  représente la pente de la courbe  $h(x)$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dh}{dx} = \frac{1}{R_a} \frac{dh}{d\theta} = -\frac{e}{R_a} \sin \theta$$

$\frac{e}{R_a}$  et  $\alpha$  étant négligeables, et en notant  $R = R_a = R_c$  les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{array}{ll} U_1 = R \omega_c & \\ U_2 = R \omega_a, & V_2 = R \omega_a \frac{dh}{dx} \end{array}$$

\* *Conditions aux limites sur les pressions*

Les conditions aux limites sur la pression dépendent de l'abscisse angulaire  $\theta$  et de  $z$  mais aussi de la position de la rainure d'alimentation.

En l'absence de rainure d'alimentation on a :

- $p(\theta, z = L/2) = P_1$  ,  $p(\theta, z = -L/2) = P_2$
- $p(\theta = 0, z = L/2) = p(\theta = 2\pi, z = -L/2)$

En présence d'une rainure d'alimentation de pression  $p = P_a$  nous aurons par exemple :

$$p(\theta, z = 0) = 0 \text{ pour une rainure en } z = 0$$

En écrivant ainsi ces conditions aux limites nous supposons qu'il n'y a pas rupture de film ce qui n'est généralement pas le cas.

Sommerfeld, Gumbel et Reynolds [20] ont proposé des solutions à ce problème. Sommerfeld suppose que le palier est alimenté à la pression  $p = P_a$  par une rainure axiale en  $\theta = 0$  soit



$p(\theta = 0) = p(\theta = 2\pi) = P_a$ . Gumbel propose dans ses travaux de négliger les pressions négatives et de prendre comme pression d'alimentation la pression atmosphérique. Reynolds par contre propose une prise en compte des pressions négatives en imposant une pression d'alimentation nulle et une continuité du gradient de pression à travers la région où le film se rompt soit  $p(\theta = \theta_s) = \left(\frac{dp}{d\theta}\right)_{(\theta=\theta_s)}$ .

Cela dit, nous utiliserons dans notre étude les conditions aux limites de Gumbel .

### 3.3.2 Calcul de l'épaisseur de film

Celle ci se calcule à la suite des considérations géométriques imposées sur la figure précédente comme suit :

$$h = C(1 + \epsilon \cos \theta)$$

où  $\epsilon$  représente l'excentricité relative tel que :  $\epsilon = e/c$

### 3.3.3 Equation de Reynolds en coordonnées cylindriques

L'équation de Reynolds formulée au chapitre II à laquelle on associe les conditions aux limites sur la vitesse prend la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 6\mu R(\omega_a + \omega c) \frac{dh}{dx} \quad (3.33)$$

### 3.3.4 Adimensionnement de l'équation généralisée de Reynolds

L'adimensionnement que nous avons retenu pour l'étude du palier est le suivant :

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{h}{C} \\ \bar{z} &= \frac{z}{L} \\ \bar{\theta} &= \frac{x}{R} \\ \bar{p} &= p \cdot \frac{R^2}{6\mu\omega(R/C)^2} \end{aligned}$$

L'équation généralisée de Reynolds adimensionnelle pour un palier de longueur finie devient :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\theta}} \right) + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{d\bar{h}}{d\bar{\theta}} \quad (3.34)$$

### 3.3.5 Discussion des résultats

Nous donnons ci-dessous la courbe décrivant la variation de la charge en fonction de l'excentricité avec les conditions de Gumbel pour un rapport  $\frac{R}{L} = 0$  (palier de longueur infinie), et la courbe décrivant cette même variation donnée par FRENE et al.[20].

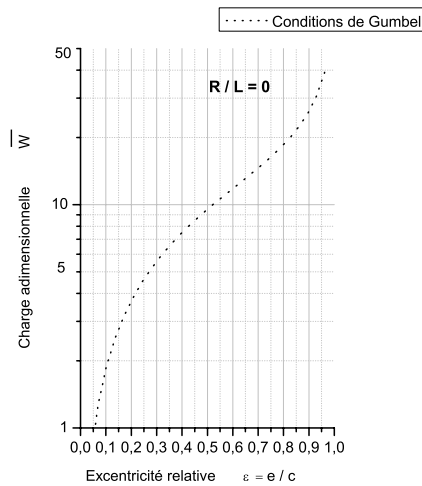


Figure 3.25 - Variation de la charge donnée par notre programme pour  $\frac{R}{L} = 0$

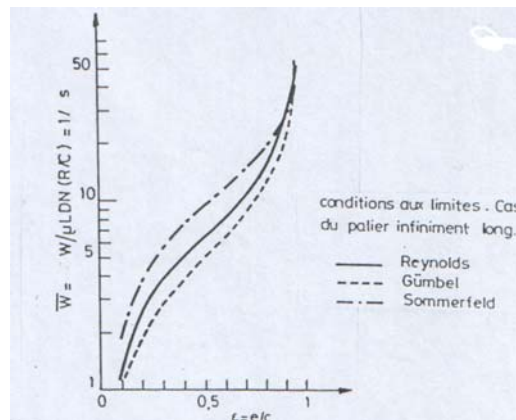


Figure 3.26 - Variation de la charge pour un palier de longueur infinie ( $\frac{R}{L} = 0$ ) [20]

L'allure des graphes pour les conditions de Gumbel paraît bonne.

### 3.4 Conclusion

Les résultats obtenus par notre programme se révèlent très satisfaisants. Concernant le blochet : trois types de comparaison ont été présentés, nos calculs concordent parfaitement à ceux obtenus par le calcul analytique d'un blochet de largeur infinie et ce pour l'obtention des pressions, de la charge, du débit et de la force de frottement. La comparaison avec le code de calcul PAFEC [3] a montré que notre programme est opérationnel dans le cas adimensionnel et dimensionnel. Enfin, la comparaison de nos calculs avec ceux de HERSAY M.D [1] sur la charge et la force de frottement dans le cas de blochets de dimensions finies ont permis d'obtenir une troisième validation.

Concernant le secteur de butée : nous avons établi les équations correspondant à ce type de géométrie et avons écrit un programme qui calcule les pressions, la charge et le couple de frottement. La comparaison de nos résultats à ceux de PINKUS et STERNLICHT [2] montrent une parfaite concordance dans le calcul du couple de frottement, et un écart plus ou moins important dans le calcul de la charge ce qui pourrait s'expliquer par le fait que notre mode de discrétisation diffère du leur.

Concernant le palier cylindrique : nous formulons les équations correspondantes, puis calculons la charge en fonction de l'excentricité; l'allure de la courbe obtenue pour le cas d'une longueur de palier infinie avec les conditions aux limites de Gumbel est assez bonne en comparaison à celle d'un palier de longueur infinie [20] et ce pour les mêmes conditions aux limites.

## CHAPITRE 4

### PRISE EN COMPTE DES EFFETS THERMIQUES EN LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE : APPLICATION AU BLOCHET

Nous nous proposons dans ce chapitre d'introduire les effets thermiques en lubrification hydrodynamique au blochet considéré au chapitre précédent. Nous intégrerons l'effet de la température dans notre étude en procédant à la résolution couplée de l'équation généralisée de Reynolds et de l'énergie.

#### 4.1 Etude théorique

Nous avons exposé au second chapitre les méthodes utilisées pour le traitement des effets thermiques en lubrification hydrodynamique. Nous allons dans ce qui suit écrire les équations de Reynolds généralisée et de l'énergie dans le cas du blochet de dimensions finies, puis les adimensionner.

##### 4.1.1 Conditions aux limites

Nous gardons les mêmes conditions aux limites que pour l'analyse hydrodynamique faite au chapitre précédent, c'est à dire la même épaisseur de film (§ 1.1.1), les mêmes pressions aux limites (§1.1.2) ainsi que les mêmes vitesses aux parois supérieures et inférieures du blochet (§1.1.3).

S'agissant de la résolution de l'équation de l'énergie, nous considérons les conditions aux limites sur la température suivantes :

\* à la paroi d'entrée :  $T(0, y, z) = T_e$  (température d'entrée)

\* à la paroi mobile :  $T(x, 0, z) = T_{pm}$  (température imposée)

\* à la paroi supérieure :  $\frac{\partial T}{\partial y}|_{(x,h(x,z),z)} = 0$  (condition adiabatique)

\* à la paroi transversale en  $z=0$  :  $\frac{\partial T}{\partial z}|_{(x,y,0)} = 0$  (condition adiabatique)

\* à la paroi transversale en  $z=B$  :  $\frac{\partial T}{\partial z}|_{(x,y,B)} = 0$  (condition adiabatique)

\* à la paroi de sortie :  $\frac{\partial T}{\partial z}|_{(L,y,z)} = 0$  (condition adiabatique d'après [23])

#### 4.1.2 Equation de Reynolds généralisée

Rappelons la forme générale de l'équation de Reynolds généralisée citée au troisième chapitre pour le cas du blochet de largeur finie :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} \left( G \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [U_2(R_2 - F) + U_1 F] + \frac{\partial}{\partial z} [W_2(R_2 - F) + W_1 F] - \rho_2 U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - \rho_2 W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_2 V_2 \quad (4.1)$$

avec

$$R = \int_0^y \rho(x, \xi, t) d\xi \quad , \quad F = \frac{1}{J_2} \int_0^h \frac{R}{\mu} dy \quad , \quad G = \int_h^y \frac{R}{\mu} \left( y - \frac{I_2}{J_2} \right) dy$$

où :

$$R_2 = \int_0^h \rho dy \quad , \quad I_2 = \int_0^h \frac{y}{\mu(x_i, t)} dy \quad , \quad J_2 = \int_0^h \frac{dy}{\mu(x_i, t)}$$

$U_1, W_1, U_2, V_2, W_2$  étant les vitesses aux parois supérieures et inférieures du blochet.

Dans le cas d'une lubrification par un fluide incompressible en régime stationnaire, en associant à ces équations les conditions aux limites propre au blochet de largeur finie énoncées au troisième chapitre (§1.1), l'équation de Reynolds généralisée s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial p}{\partial z} \right) = U_1 \frac{\partial F}{\partial x} \quad (4.2)$$

### 4.1.3 Composantes des vitesses et contraintes de cisaillement

L'expression des composantes de vitesses et des contraintes de cisaillement énoncée au second chapitre (§1.1, equation (10) et (14)), associée aux conditions aux limites sur les vitesses énoncées au troisième chapitre (§ 1.1.3) s'écrit comme suit :

d'une part :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial p}{\partial x} \left( I - \frac{JI_2}{J_2} \right) - \frac{U}{J_2} J + U \\ w &= \frac{\partial p}{\partial z} \left( I - \frac{JI_2}{J_2} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec :

$$I = \int_0^y \frac{\xi}{\mu(x, \xi, z, t)} d\xi \quad , \quad J = \int_0^y \frac{d\xi}{\mu(x, \xi, z, t)}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \left( y - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{U}{J_2} \\ \sigma_{yz} &= \left( y - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.4)$$

### 4.1.4 Adimensionnement de l'équation de Reynolds généralisée

Nous reprendrons pour l'équation de Reynolds généralisée l'adimensionnement retenu au chapitre précédent (§ 1.4) :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L} \quad , \quad \bar{y} = \frac{y}{h} \quad , \quad \bar{z} = \frac{z}{B} \quad , \quad \bar{h} = \frac{h}{h_{s_1}} \\ \bar{u} &= \frac{u}{U} \quad , \quad \bar{v} = \frac{vL}{Uh_{s_1}} \quad , \quad \bar{w} = \frac{w}{U} \\ \bar{p} &= p \frac{h_{s_1}^2}{\mu UL} \end{aligned}$$

L'équation de Reynolds généralisée dans le cas adimensionnel s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial}{L \partial \bar{x}} \left( \frac{h_{s_1}^3}{\mu} \bar{h}^3 \bar{G} \frac{1}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \frac{\mu UL}{\bar{h}_{s_1}^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{h_{s_1}^3}{\mu} \bar{h}^3 \bar{G} \frac{1}{B} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \frac{\mu UL}{h_{s_1}^2} \right) = \mu U \frac{h_{s_1}}{L} \bar{h} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} \quad (4.5)$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{h}^2 \bar{G} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) + \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \bar{h}^2 \bar{G} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} \quad (4.6)$$

#### 4.1.5 Equation de l'énergie

L'équation de l'énergie correspondant à un écoulement en film mince ( chap.II § 2.3) s'écrit comme suit :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \alpha T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left[ \left( \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w^2}{\partial y} \right) \right] \quad (4.7)$$

Notons que pour un fluide incompressible, le coefficient de dilatation calorimétrique  $\alpha$  est nul, dans le cas d'un régime stationnaire l'équation de l'énergie s'écrit alors comme suit:

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left[ \left( \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w^2}{\partial y} \right) \right] \quad (4.8)$$

$\rho$  : la masse volumique

$C_p$  : la chaleur massique du lubrifiant

$K$  : le coefficient de conductivité thermique

#### 4.1.6 Adimensionnement de l'équation de l'énergie

Nous ajouterons à l'adimensionnement retenu pour l'obtention de l'équation de Reynolds généralisée adimensionnée (§ 1.4) la variable sans dimension :

$$\bar{T} = \frac{T}{T_0}$$

$T_0$  étant une température de référence, prise dans notre cas égale à la température d'entrée.

L'équation (64) devient alors :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + \left( \frac{v}{h} + \frac{y}{h} \frac{\partial h}{\partial x} u - \frac{U}{B} \frac{y}{h} \frac{\partial h}{\partial z} w \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{L}{B} w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{P_e} \frac{\partial^2 T}{h^2 \partial y^2} + \frac{N_d}{P_e} \frac{\mu}{h^2} \left[ \left( \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w^2}{\partial y} \right) \right] \quad (4.9)$$

où

$P_e$  est le nombre de Peclet tel que :  $P_e = \frac{\rho C_p U h^2}{k L}$

$N_d$  est le nombre de dissipation tel que :  $N_d = \frac{\mu_0 U^2}{k T_0}$

En posant :  $\gamma = \frac{v}{h} + \frac{y}{h} \frac{\partial h}{\partial x} u - \frac{U}{B} \frac{y}{h} \frac{\partial h}{\partial z} w$

On a alors :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + \gamma \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{L}{B} w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{P_e} \frac{\partial^2 T}{h^2 \partial y^2} + \frac{N_d}{P_e} \frac{\mu}{h^2} \left[ \left( \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w^2}{\partial y} \right) \right] \quad (4.10)$$

#### 4.1.7 Calcul des paramètres dans le contact

Les paramètres dans le contact en termes de charge, de débit et de force de frottement se calculent de la même manière que pour l'analyse hydrodynamique (Chap III : §1.6.1, §1.6.2 et §1.6.3 ).

#### 4.2 Etude numerique

Pour l'écriture des équations numérisées correspondant à l'étude thermo-hydrodynamique, nous procédons de la même manière que pour le calcul des pressions effectué lors de l'analyse de la lubrification hydrodynamique du blochet au chapitre précédent, c'est à dire que nous discrétisons les équations de Reynolds généralisée et de l'énergie en utilisant la méthode des différences finies.

Pour la résolution de l'équation de Reynolds généralisée, la méthode de Gauss-Seidel est utilisé, pour l'équation de l'énergie une autre méthode a été choisie, celle de BONCOPAIN [24] que l'on explicitera par après en détail.

##### 4.2.1 Discrétisation de l'équation de Reynolds généralisée

On procède de la même manière que pour l'analyse hydrodynamique (Chap.III, §1.7). On utilise pour cela un schéma aux différences finies centrées de précision double.



$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}(i, j) = \frac{\bar{p}(i+1, j) - \bar{p}(i-1, j)}{2k}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}(i, j) = \frac{\bar{p}(i, j+1) - \bar{p}(i, j-1)}{2l}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2}(i, j) = \frac{p(i+1, j) - 2\bar{p}(i, j) + \bar{p}(i-1, j)}{k^2}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2}(i, j) = \frac{\bar{p}(i, j+1) - 2\bar{p}(i, j) + \bar{p}(i, j-1)}{l^2}$$

où  $k$  et  $l$  sont les pas du maillage respectivement suivant  $x$  et  $z$ .

On procède aussi de la même manière pour  $\bar{h}(x, z)$  avec  $\bar{G}(x, z)$  et  $\bar{F}(x, z)$ .

En reportant les différentes expressions discrétisées pour  $\bar{p}(x, z)$  et  $\bar{G}(x, z)$  et  $\bar{F}(x, z)$  dans l'équation de Reynolds généralisée adimensionnée, on obtient au point  $(i, j)$  une équation de la forme :

$$\begin{aligned} -2 \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{G}}{l^2} + \frac{\bar{G}}{k^2} \right) \bar{p}(i, j) + \frac{1}{k} \left( \frac{\bar{G}}{k} + \frac{\partial \bar{G}}{2\partial x} \right) \bar{p}(i+1, j) + \frac{1}{k} \left( \frac{\bar{G}}{k} - \frac{\partial \bar{G}}{2\partial x} \right) \bar{p}(i-1, j) \\ + \frac{1}{l} \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{G}}{l} + \frac{\partial \bar{G}}{2\partial z} \right) \bar{p}(i, j+1) + \frac{1}{l} \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{G}}{l} - \frac{\partial \bar{G}}{2\partial z} \right) \bar{p}(i, j-1) = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.11)$$

De même que pour l'analyse hydrodynamique, la méthode de Gauss-Seidel est utilisée :

$$\begin{aligned} \bar{p}(i, j)^{r+1} = (1 - \Omega) \bar{p}(i, j)^r + \Omega (A_1(i) \bar{p}(i+1, j)^r + A_2(i) \bar{p}(i-1, j)^r + A_3(i) \bar{p}(i, j+1)^r \\ + A_4(i) \bar{p}(i, j-1)^r + A_5(i)) \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1(i) = \frac{\frac{1}{k} \left( \frac{\bar{G}}{k} + \frac{\partial \bar{G}}{2\partial x} \right)}{2 \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{G}}{l^2} + \frac{\bar{G}}{k^2} \right)}, \quad A_2(i) = \frac{\frac{1}{k} \left( \frac{\bar{G}}{k} - \frac{\partial \bar{G}}{2\partial x} \right)}{2 \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{G}}{l^2} + \frac{\bar{G}}{k^2} \right)}, \quad A_3(i) = \frac{\frac{1}{l} \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{G}}{l} + \frac{\partial \bar{G}}{2\partial z} \right)}{2 \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{G}}{l^2} + \frac{\bar{G}}{k^2} \right)} \\ A_4(i) = \frac{\frac{1}{l} \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{G}}{l} - \frac{\partial \bar{G}}{2\partial z} \right)}{2 \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{G}}{l^2} + \frac{\bar{G}}{k^2} \right)}, \quad A_5(i) = \frac{\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}}{2 \left( \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\bar{G}}{l^2} + \frac{\bar{G}}{k^2} \right)} \end{aligned}$$

### 4.2.2 Discrétisation de l'équation de l'énergie

La température variant selon trois directions, nous discrétisons dans un premier temps par la méthode des différences finies l'équation de l'énergie en différence centrées, puis procéderons à sa résolution en utilisant la méthode de BONCOPAIN [24].

$$\frac{\partial T}{\partial x}(i, j, k) = \frac{T(i, j, k) - T(i - 1, j, k)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(i, j, k) = \frac{T(i, j + 1, k) - T(i, j - 1, k)}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(i, j, k) = \frac{T(i, j, k + 1) - T(i, j, k - 1)}{2\Delta z}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(i, j, k) = \frac{T(i, j + 1, k) - 2T(i, j, k) + T(i, j - 1, k)}{(\Delta y)^2}$$

$i, j, k$  variant de 1 à respectivement  $m, o, n$

L'équation de l'énergie (adimensionnée) discrétisée s'écrit alors comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot \frac{\bar{T}(i, j, k) - \bar{T}(i - 1, j, k)}{2\Delta x} + \gamma \cdot \frac{\bar{T}(i, j + 1, k) - \bar{T}(i, j - 1, k)}{2\Delta y} + \frac{L}{B} \cdot \bar{w} \cdot \frac{\bar{T}(i, j, k + 1) - \bar{T}(i, j, k - 1)}{2\Delta z} \\ = \frac{1}{P_e} \cdot \frac{\bar{T}(i, j + 1, k) - 2\bar{T}(i, j, k) + \bar{T}(i, j - 1, k)}{(\bar{h}\Delta y)^2} + \frac{N_d}{P_e} \cdot \frac{\bar{\mu}}{h^2} \left( \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

En regroupant les termes de température, on a :

$$\begin{aligned} \left( \frac{-\bar{u}}{2\Delta x} + \frac{2}{P_e(\bar{h}\Delta y)^2} \right) \cdot \bar{T}(i, j, k) + \left( \frac{-\gamma}{2\Delta y} + \frac{2}{P_e(\bar{h}\Delta y)^2} \right) \cdot \bar{T}(i, j + 1, k) \\ + \left( \frac{-\gamma}{2\Delta y} + \frac{2}{P_e(\bar{h}\Delta y)^2} \right) \cdot \bar{T}(i, j - 1, k) - \left( \frac{\bar{u}}{\Delta y^2} \right) \cdot \bar{T}(i - 1, j - 1, k) \\ - \left( \frac{L}{B} \frac{\bar{w}}{2\Delta z} \right) \cdot \bar{T}(i, j, k - 1) - \left( \frac{L}{B} \frac{\bar{w}}{2\Delta z} \right) \cdot \bar{T}(i, j, k + 1) \\ - \frac{N_d}{P_e} \frac{\bar{\mu}}{h^2} \cdot \left( \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

En posant :

$$C_1 = \frac{-\bar{u}}{2\Delta x} + \frac{2}{P_e(\bar{h}\Delta y)^2} \quad , \quad C_2 = \frac{-\gamma}{2\Delta y} + \frac{2}{P_e(\bar{h}\Delta y)^2} \quad , \quad C_3 = -C_2 \quad , \quad C_4 = \frac{\bar{u}}{\Delta x} \quad ,$$

$$C_5 = -\frac{L}{B} \frac{\bar{w}}{2\Delta z} \quad , \quad C_6 = C_5 \quad , \quad C_7 = -\frac{N_d}{P_e} \frac{\mu}{h^2} \cdot \left( \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right)$$

On aura :

$$C_1.\bar{T}(i, j, k) + C_2.\bar{T}(i, j + 1, k) + C_3.\bar{T}(i, j - 1, k) + C_4.\bar{T}(i - 1, j, k) \\ - C_5.\bar{T}(i, j, k - 1) - C_6.\bar{T}(i, j, k + 1) - C_7 = 0$$

Pour la résolution de cette équation, nous avons choisi la méthode de BONCOPAIN [24] qui suggère le changement de variable suivant :

$$TT(i, j, k) = \bar{T}(i, j, k) - \bar{T}(i, 1, k)$$

$$TT(i, j - 1, k) = \bar{T}(i, j - 1, k) - \bar{T}(i, 1, k)$$

$$TT(i, j + 1, k) = \bar{T}(i, j + 1, k) - \bar{T}(i, 1, k)$$

L'équation précédente devient :

$$C_1.TT(i, j, k) + C_2.TT(i, j + 1, k) + C_3.TT(i, j - 1, k) + (C_1 - C_2 - C_3).\bar{T}(i, 1, k) \\ + C_4.TT(i - 1, j, k) - C_5.TT(i, j, k - 1) - C_6.TT(i, j, k + 1) - C_7 = 0$$

On posera :

$$F(i, j, k) = (-C_1 + C_2 + C_3).\bar{T}(i, 1, k) - C_4.\bar{T}(i - 1, j, k) + C_5.\bar{T}(i, j, k - 1) \\ + C_6.\bar{T}(i, j, k + 1) + C_7$$

En outre :

$$C_1.TT(i, j, k) = C_2.TT(i, j + 1, k) + C_3.TT(i, j - 1, k) + F(i, j, k)$$

On définira deux variables Q et S tel que :

$$TT(i, j, k) = Q(i, j, k).TT(i, j + 1, k) + S(i, j, k)$$

on aura donc :

$$C_1.TT(i, j, k) = C_2.TT(i, j + 1, k) + C_3.(Q(i, j - 1, k).TT(i, j, k) + S(i, j - 1, k)) + F(i, j, k)$$

Il vient alors :

$$TT(i, j, k) = \frac{C_2}{C_1 - C_3.Q(i, j - 1, k)}.TT(i, j + 1, k) + \frac{C_3.S(i, j - 1, k) + F(i, j, k)}{C_1 - C_2.Q(i, j - 1, k)}$$

Par identification on a :

$$Q(i, j, k) = \frac{C_2}{C_1 - C_3.Q(i, j - 1, k)} \quad , \quad S(i, j, k) = \frac{C_3.S(i, j - 1, k) + F(i, j, k)}{C_1 - C_2.Q(i, j - 1, k)}$$

En calculant  $Q(i, j, k)$  et  $S(i, j, k)$  à  $j$  croissant, on obtiendra par l'intermédiaire de  $TT(i, j, k)$ ,  $\bar{T}(i, j, k)$  à  $j$  décroissant.

La température s'exprimant comme suit :

$$\bar{T}(i, j, k) - \bar{T}(i, 1, k) = Q(i, j, k).(\bar{T}(i, j + 1, k) - \bar{T}(i, 1, k)) + S(i, j, k) + \bar{T}(i, 1, k)$$

### 4.2.3 Organigramme de résolution

Un programme numérique a été réalisé pour le calcul des caractéristiques mécaniques du blochet sans négliger les effets de la température, pour se faire nous avons repris le programme précédemment élaboré dans le cas d'un régime isotherme, en rajoutant une loi de variation de la viscosité avec la température, ainsi que la résolution de l'équation de l'énergie en film mince. La résolution simultanée du système couplé 'Equation de Reynolds généralisée' et 'Equation de l'énergie' nous a permis d'obtenir d'une part l'élévation de température suivant les trois directions du blochet et d'autre part le champ de pression, la charge, les débits, la force de frottement ainsi que le coefficient de frottement dans le cas d'une lubrification thermohydrodynamique.

L'organigramme correspondant à ce programme est le suivant :

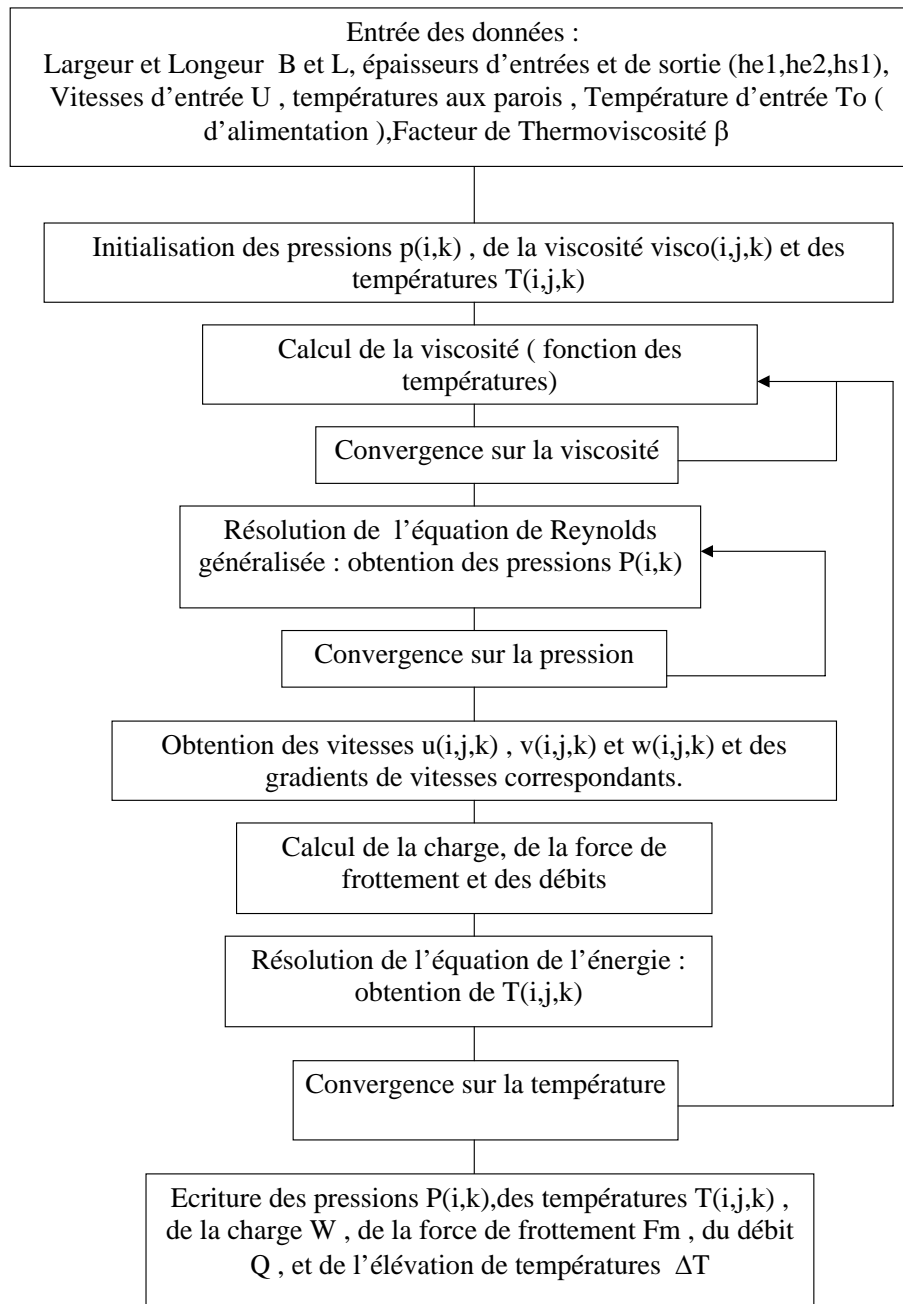


Figure 4.1 - Organigramme de résolution de la lubrification thermo-hydrodynamique d'un blochet à double inclinaison

La loi de variation de la viscosité par rapport à la température que nous avons choisie est la suivante [7] :

$$\mu = e^{-\beta T_0(T(x,y,z)-1)}$$

$\beta$  est un coefficient de thermoviscosité et  $T_0$  correspond à la température d'alimentation (d'entrée).

### 4.3 Résolution et discussion des Résultats

Il est utile d'observer l'évolution du champ de pression sur la surface du blochet après la prise en compte des effets thermiques, ainsi en comparant cette évolution à celle obtenue avec l'hypothèse d'un régime isotherme, nous évaluerons l'importance d'inclure les effets thermiques dans une étude de lubrification hydrodynamique.

Ci-dessous deux courbes représentant la répartition de la pression (adimensionnelle) , pour le cas du régime isotherme et pour le cas thermohydrodynamique et cela pour  $\frac{L}{B} = 1$  ,  $a = 3$  et  $b = 1$  (  $a$  et  $b$  sont les inclinaisons du blochet respectivement suivant la largeur et la longueur du blochet).

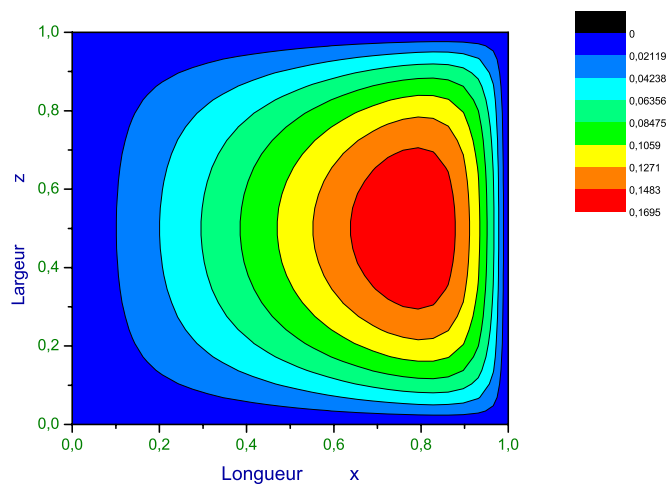


Figure 4.2 - Distribution de la pression (adimensionnelle) pour le cas isotherme (en Mpa)

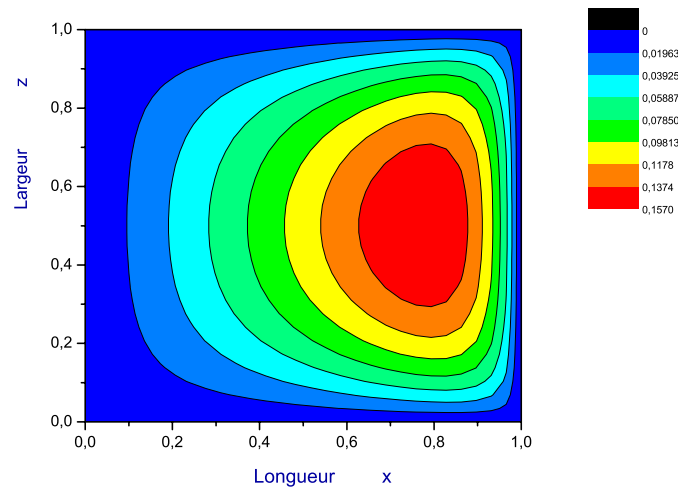


Figure 4.3 - Distribution de la pression (adimensionnelle) pour le cas thermohydrodynamique (en Mpa)

Nous remarquons que la pression maximale a baissé de  $0.1695 \text{ Mpa}$  à  $0.1570 \text{ Mpa}$  ce qui est en accord avec la physique de l'écoulement puisqu'une augmentation de la température entraîne une baisse de la viscosité et donc une baisse de la pression.

Nous avons calculé les caractéristiques mécaniques du blochet (charge, débit d'entrée et force de frottement) dans le cas isotherme et thermohydrodynamique (THD), et avons constaté ce qui suit :

Pour le cas isotherme, dans le cas adimensionnel et en prenant  $\frac{L}{B} = 1$ ,  $a = 3$  et  $b = 1$  :

Une charge :	$W = 6.7163922 \cdot 10^{-2} \text{ KN}$
Une force de frottement :	$F_m = 0.6144176 \text{ N}$
Un débit d'entrée :	$Q_e = 1.162138 \text{ m}^3/\text{s}$

Pour le cas THD, dans le cas adimensionnel et en prenant  $\frac{L}{B} = 1$ ,  $a = 3$  et  $b = 1$  :

Une charge :	$W = 6.3424066 \cdot 10^{-2} \text{ KN}$
Une force de frottement :	$F_m = 0.6105551 \text{ N}$
Un débit d'entrée :	$Q_e = 1.167054 \text{ m}^3/\text{s}$

En effet, ces résultats concordent avec la physique de l'écoulement puisque la viscosité diminuant, la charge et la force de frottement baissent. Par ailleurs, le débit d'entrée augmente pour qu'il y ait conservation du débit, car les débits de fuite augmenteront suite à une élévation de la température

et à une diminution de la charge.

Nous donnons ci-dessous quelques courbes pour observer la variation de la température suivant les trois directions  $(x,y,z)$ .

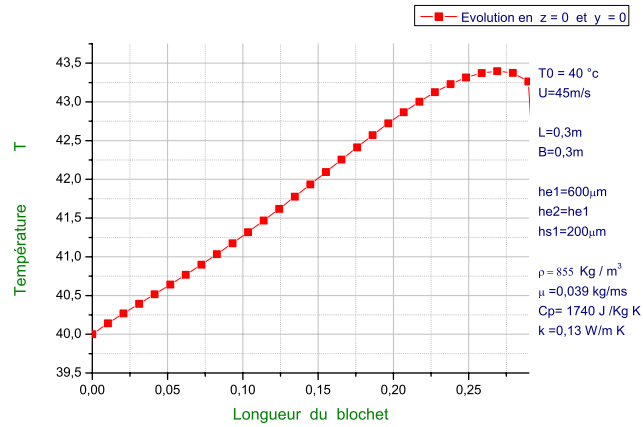


Figure 4.4 - Distribution de la température suivant la longueur (cas dimensionnel)

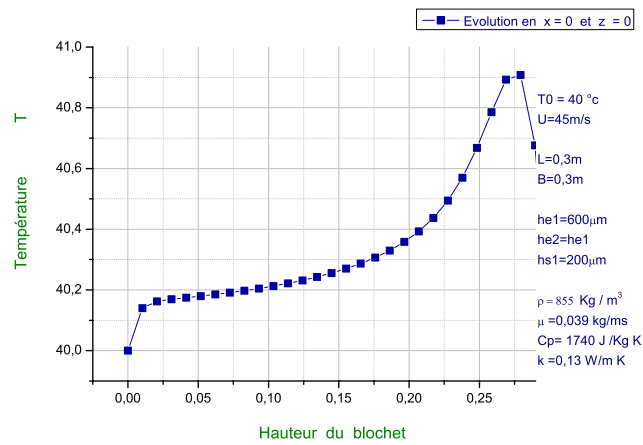


Figure 4.5 - Distribution de la température suivant l'épaisseur (cas dimensionnel)



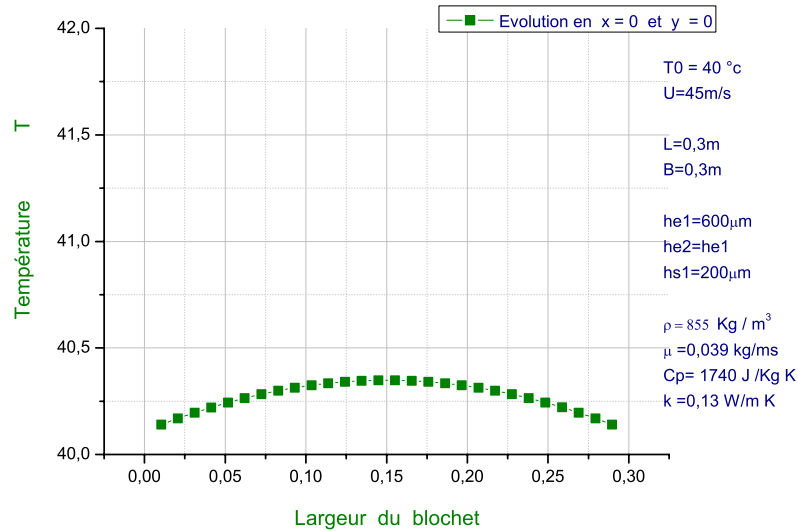


Figure 4.6 - Distribution de la température suivant la largeur (cas dimensionnel)

Nous remarquons sur les figures 4.4 et 4.6 suivant la longueur et la largeur, l'élévation de la température pour une température à l'entrée égale à  $40^{\circ}$  est de l'ordre de  $3,5^{\circ}\text{C}$  et  $1,5^{\circ}\text{C}$  respectivement suivant la longueur et la largeur du blochet.

Notons aussi que la symétrie du graphe décrivant la variation suivant la largeur ( $z$ ) s'explique par le fait que nous avons imposé les mêmes conditions aux limites sur la température sur les deux surfaces latérales du blochet (en  $z=0$  et  $z=B$ ).

Ces résultats nous ont paru satisfaisants en les comparant aux résultats obtenus d'une part par A.DADOUCHE [25] et d'autre part par MARKIN D.[26] et ce sur un patin de butée; en effet d'après PINKUS et STERNLICHT [2] l'écart entre les pressions générées sur un blochet et sur un patin s'avèrerait très faible.

Nous donnons quelques courbes décrivant la variation de température tangentielle dans le cas d'un secteur de butée et selon la longueur dans le cas du blochet, la figure 4.7 décrit la variation de température par rapport à la longueur du blochet donnée par notre programme, les figures 4.8 et 4.9 représentent la variation de la température tangentielle.

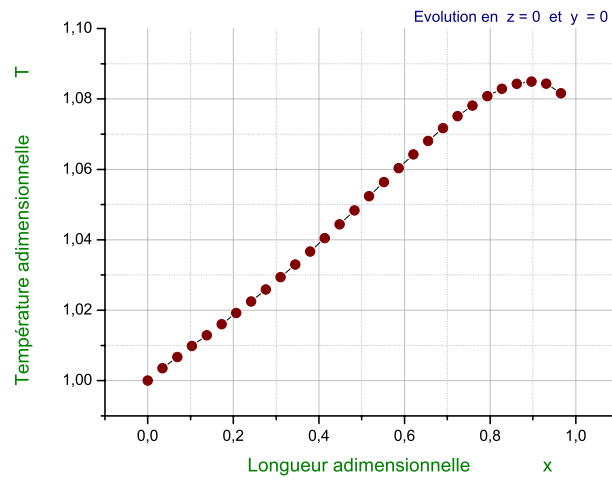


Figure 4.7 - Distribution de la température adimensionnelle suivant la longueur donnée par notre programme

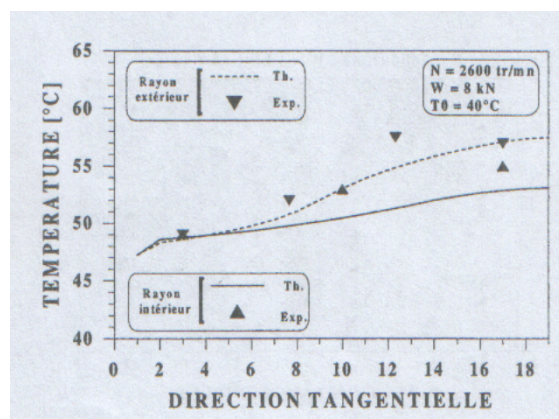


Figure 4.8 - Variation de la température suivant la direction tangentielle ( correspondant à la longueur) donnée par A.DADOUCHE [25]

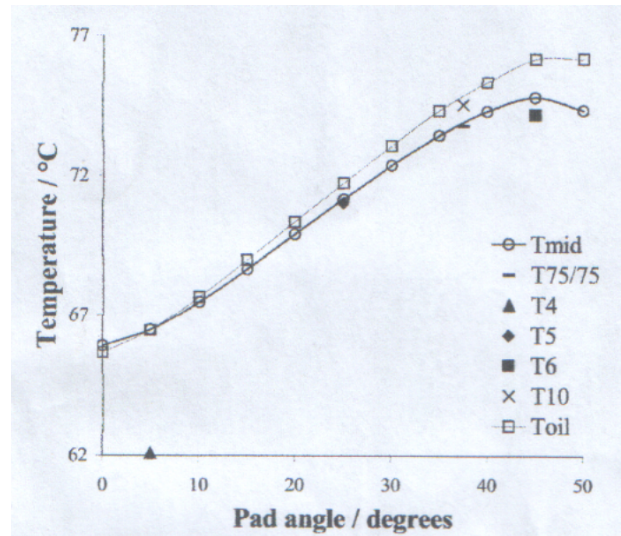


Figure 4.9 - Variation de la température suivant la direction tangentielle ( correspondant à la longueur) donnée par D. MARKIN [26]

Sur cette dernière courbe  $T_{mid}$  représente la température calculée théoriquement au milieu du patin (direction radiale), les autres températures sont celle donnés par les thermocouples placés sur le patin.

Les résultats ne sont pas identiques car nous n'avons pas implémenter dans notre programme les mêmes données (viscosité, géométrie, températures aux limites) que les leurs, rappelons aussi que nous ne considérons pas cette comparaison comme une validation. Nous comparons seulement le taux d'élévation de la température entre l'entrée et la sortie et l'allure des courbes.

#### 4.4 Conclusion

L'introduction des effets thermiques dans l'étude de la lubrification hydrodynamique du blochet de largeur finie, a nécessité de réévaluer la variation de la viscosité dans le film. Celle ci n'étant plus constante, nous avons été amené à écrire les équations de Reynolds généralisée et de l'énergie pour le cas du blochet.

En considérant que la viscosité variait avec la température, une résolution simultanée de ces deux équations s'imposait. Des conditions aux limites sur les températures ont été associées aux précédentes conditions aux limites de l'analyse hydrodynamique (Chap.III, §1.1), comme au précédent chapitre la méthode de Gauss-Seidel est utilisé pour la résolution de l'équation de Reynolds général-

isée. Concernant la résolution de l'équation de l'énergie, la méthode de BONCOPAIN [24] a été choisie.

Les résultats obtenus sont en très bon accord avec la physique de l'écoulement du film lubrifiant, puisque une élévation de la température a entraîné une baisse de la charge et de la force de frottement, ce qui s'explique par le fait que la viscosité a baissé.

N'ayant pas trouvé lors de notre recherche bibliographique des documents traitant ce même type de problème nous avons comparé l'évolution des températures (suivant la longueur du blochet) à celle donnée par A.DADOUCHE [25] et MARKIN D.[26]. L'écart ne semble pas très important, toutefois, l'idéal aurait été de comparer nos résultats à d'autres travaux traitant une même géométrie.

## CONCLUSION

Dans les organes des systèmes mécaniques, le frottement sec ou 'solide à solide' est un phénomène à fréquemment éviter, celui-ci dissipe de l'énergie et provoque une usure des matériaux, le problème est résolu en utilisant un film lubrifiant entre les surfaces en contact.

La mise en oeuvre de ce procédé n'est pas sans difficultés car lorsque le mécanisme est chargé, le maintien du film n'est plus assuré et il faut développer une pression suffisante permettant de porter le mécanisme. Les lois régissant l'écoulement du lubrifiant sont du ressort de la de la théorie de la lubrification hydrodynamique.

Les équations de la lubrification hydrodynamique trouvent leurs fondements dans les équations fondamentales de la dynamique des fluides, l'idée est de simplifier celles ci grâce à plusieurs hypothèses dont celle d'une faible épaisseur de film. Les effets de la température sont pris en compte en résolvant l'équation généralisée de Reynolds (qui prend en compte la variation de la viscosité dans le film) et l'équation de l'énergie.

L'étude bibliographique présentée au premier chapitre et l'exposé détaillé des équations gouvernant un écoulement en film mince fait au second chapitre nous a permis de poser les bases théoriques nécessaires à l'étude de la lubrification de systèmes hydrodynamiques de type: blochet, patin de butée, palier cylindrique.

Les résultats obtenus au troisième chapitre, se sont révélés très satisfaisants, puisque plusieurs types de comparaisons ont été faites pour leur validation, la première étant une comparaison avec l'analyse théorique d'un blochet de largeur infinie dont la modélisation permet de résoudre analytiquement l'équation de Reynolds gouvernante. La seconde , une comparaison avec les travaux de HERSAY M.D.[1], a permis de comparer la charge et la force de frottement obtenues sur des blochets de largeur finie et infinie; et enfin une comparaison avec les résultats d'un code de calcul connu sous le nom de PAFEC [3] a été effectué.

Toujours au troisième chapitre, l'étude d'un patin de butée et d'un palier à été présentée dans le but de permettre à d'autres travaux de continuer dans ce sens, la comparaison de nos résultats avec

ceux de PINKUS et STERNLICHT [2] et FRENE et al.[20] nous a paru satisfaisante.

Concernant l'analyse thermique, les résultats obtenues semblent en accord avec la physique de l'écoulement. Une comparaison avec un secteur de butée a été effectuée, puisque d'après PINKUS et STERNLICHT [2] il n'existe pas une grande différence entre les pressions calculées sur cette géométrie et sur un blochet de largeur finie. Une allure satisfaisante de nos courbes a été observée, toutefois cette comparaison ne tient pas lieu de validation.

Enfin, il serait intéressant dans de prochains travaux de pouvoir d'une part valider la partie thermique de notre étude et d'autre part intégrer les effets thermiques sur un patin de butée cylindrique et d'étendre l'étude à une butée hydrodynamique.

## REFERENCES

1. HERSAY M.D., Theory and research in Lubrication. 1966 John Wiley
2. PINKUS O., STERMLICHT B. Theory of Hydrodynamic Lubrication, Mc Graw Hill Book Co N.Y 1971
3. PAFEC Lubrication Analysis, A.C. Stafford.(1980-2005)
4. KINGSBURRY A. , Heat Effects in Lubricating Films (Mechanical Engineering,n°55,1933, p.685-688)
5. SWIFT H.W., Theory and Experiment Applied to Journal Bearing Design (Proc. I.M.E. of the General Discussion on Lubrication and Lubricants , n°1, 1937, p, 309-316 ).
6. HAGG A.C., Heat Effects in Lubricating Films (J. Applied Mech., n° 11, 1944)
7. FRENE et al., Effets thermiques dans les paliers hydrodynamiques aspects théoriques et expérimentaux (Journal of theoretical and Applied mechanics, vol 6, n°2, p.253-293)
8. MALANOSKY S.B Rerate Tilting-Pad Thrust Bearings, Machin design, 1973, pp.100-103
9. ETTLES R.C. and ADVANI S. The control of thermal and Elastic Effects in thrust Bearings, Proc.of the6th Leeds-Lyon Symposium,1980, pp.105-116.
10. BROCKETT et al.,Thermoelastohydrodynamic Analysis of fixed Geometry thrust Bearing Including Runner Deformation, Tribology Transaction, 1996, vol.33 pp.481-492.
11. ROELAND, C.J.A., Correlationnal Aspects of the Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of Lubricating oils, Delft 1966.
12. MAXWELL , C., Illustration of the dynamical theory of gases, Phil.Mag., series 4,14,19,1860
13. GUINEAUDEAU, Etude thermohydrodynamique d'un blochet lubrifié par un fluide d'ELLIS, rapport de DEA , 3ième cycle, Poitiers(1995)
14. FRENE J. Régime d'écoulement non laminaire en films minces. Application aux paliers lisses . Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques présentée à l'université Claude Bernard de Lyon. 1974
15. SWIFT H.W. The stability of lubricating films in journal bearings. Proc.Inst.Civil Eng., 233, pt pp. 267-322, 1931.
16. BAYADA G. Modélisation of a cavitation problem. Euromech colloquium n°124 or hydrodynamic lubrication of bearings , Torino-Italy, October 1979.
17. ELROD H.G., ADAMS M.L , a computer program for cavitaion and starvation problems, in ref 10 pp 37-41.
18. BAYADA G., Inequations variationnelles à conditions aux limites périodiques. Thèse présentée à l'Université de Lyon, 1972.
19. DOWSON D., TAYLOR C.M , Caviation in bearings, ann rev Fluid Mech, 11 99 35-60,1979
20. FRENE J. et al., Lubrification hydrodynamique, Paliers et Butées, Eyrolles, 1990.
21. CARRE B.A. The determination of the optimum accelerating factor for successive over relaxation, Computer. Journal, 4-73, 1969
22. L.LAPIDUS, G.PINDER, Numerical solution of PARTIAL Differential equations in science and engineering, 1982, Jhon Wiley and SONS

23. HUEBNER , a three dimensionnal thermohydrodynamic analysis of sector thrust bearings, ASLE transactions,1974 vol 17 pp 62 -73
24. GUINAUDEAU, Etude thermohydrodynamique d'un blochet lubrifié par un fluide non newtonien, rapport de DEA, Poitiers, France (1995)
25. A.DADOUCHE , Etude des phénomènes thermiques dans les butées hydrodynamiques, thèse de doctorat, Poitiers (1998).
26. D.MARKIN,D.M.C. McCarthy, S.B. Glavatskih, Tribology International 36, 2003, pp. 807-814.