

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ DE BLIDA 1
Faculté des Sciences
Département de Mathématique**



MEMOIRE DE MASTER

Spécialité : Recherche Opérationnelle

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA
DOMINATION ROMAINE FAIBLE DANS LES
GRAPHES MODIFIES**

Présenté par :

- M^{lle} HAMID Rihab
- M^{lle} BENDAHIB Nour El Houda

Devant le jury composé de :

- | | | |
|---------------------|------------------------|--------------|
| - Mme S. KERDJOU DJ | M.C.B /U. Blida 1 | Présidente |
| - Mme N. MEDDAH | M.C.B /U. Blida 1 | Examinatrice |
| - Mr M. CHELLALI | Professeur/ U. Blida 1 | Promoteur |

Année universitaire 2019/2020

RÉSUMÉ

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Si f est une fonction définie de V dans $\{0, 1, 2\}$, alors un sommet v avec $f(v) = 0$ est dit non défendu (non protégé) par rapport à f s'il n'est pas adjacent à un sommet w avec $f(w) > 0$. Une fonction de domination romaine faible (FDRF) est une fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ vérifiant pour tout sommet v avec $f(v) = 0$ il existe un voisin w avec $f(w) > 0$ et la fonction $f' = (V'_0, V'_1, V'_2)$ définie par $f'(v) = 1$, $f'(w) = f(w) - 1$, et $f'(u) = f(u)$ pour tout sommet $u \in V - \{v, w\}$, n'a pas de sommet non défendu. Le poids d'une FDRF est la valeur $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$ et le nombre de domination Romaine faible, $\gamma_r(G)$ est le poids minimum d'une FDRF de G .

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées à l'étude de l'effet de la suppression d'une arête d'un graphe sur le paramètre $\gamma_r(G)$, où il a été montré que la suppression d'une arête e de G ne fait pas diminuer le paramètre $\gamma_r(G)$, mais peut l'augmenter d'au plus une unité. Ainsi, le résultat principal de ce mémoire a été de donner une caractérisation constructive de tous les arbres dont la suppression d'une arête quelconque fait augmenter le nombre de domination Romaine faible.

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a graph and f be a function $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$. A vertex v with $f(v) = 0$ is said to be undefended with respect to f , if it is not adjacent to a vertex w with $f(w) > 0$. The function f is a weak roman dominating function (WRDF) if each vertex v with $f(v) = 0$ is adjacent to a vertex w with $f(w) > 0$ such that the function $f' : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ defined by $f'(v) = 1$, $f'(w) = f(w) - 1$ and $f'(u) = f(u)$ if $u \in V - \{u, v\}$, has no undefended vertex. The weight of f is $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$. The weak Roman domination number, $\gamma_r(G)$ is the minimum weight of a WRDF in G .

In this thesis, we are interested in the study of the effect of removing an edge from a graph on the weak roman domination number, where it was shown that the removal of an edge in a graph G cannot decrease $\gamma_r(G)$, but can increase it by at most one. Thus, the main result of this thesis was to give a constructive characterization of all trees whose removal of any edge increases the weak roman domination number.

ملخص

ليكن $G=(V, E)$ بياناً. ولتكن الدالة f معرفة من المجموعة V الى المجموعة $\{0,1,2\}$ ، نقول أن الرأس v مع $f(v) = 0$ غير محمي بواسطة f إذا لم يكن مجاوراً للرأس w بحيث $f(w) > 0$. نقول عن الدالة f انها دالة مسيطرة رومانية ضعيفة (FDRF) إذا كان كل رأس v حيث $f(v) = 0$ يملك جاراً w وزنه موجب تماماً، و الدالة $f' = (V'_0, V'_1, V'_2)$ المعرفة بـ $f'(v) = 1$, $f'(w) = f(w) - 1$, و $f'(u) = f(u)$ من أجل كل رأس $u \in V - \{v,w\}$ ، ليس لها رأس غير محمي. وزن الدالة المسيطرة الرومانية الضعيفة هو المقدار $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$ ، اما وزنها الاصغر في البيان G هو العدد المسيطر الروماني الضعيف الذي نرسم له بـ $\gamma_r(G)$.

في هذا البحث نتعرض لدراسة تأثير ازالة حافة عشوائية من البيان G على قيمة العدد $\gamma_r(G)$ ، حيث تبين أن ازالة حافة e من البيان G لا تقلل من قيمة العدد $\gamma_r(G)$ ، لكنها تؤدي الى زيادة قيمته بمقدار واحد على الأكثر. وبالتالي ، النتيجة الرئيسية لهذا البحث هي إعطاء وصف بناء للأشجار T التي تؤدي ازالة اي حافة عشوائية منها إلى زيادة عدد المسيطر الروماني الضعيف.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, merci pour le grand DIEU notre créateur qui nous a donné la volonté, la force et le courage pour le parachèvement de ce travail durant cette période difficile.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à monsieur M. CHELLALI, Professeur à l'université Saad DAHLEB Blida 1, pour les conseils bénéfiques et son soutien qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.

Nos remerciements s'adressent également à Madame S. Kerdjoudj, Maître de Conférences à université Saad DAHLEB Blida 1, pour avoir manifesté un grand intérêt pour le sujet en acceptant d'être Présidente de Jury.

Nous voudrions également exprimer toute notre reconnaissance à N. Meddah, Maître de conférences à l'université Saad DAHLEB Blida 1, d'avoir accepté de nous faire l'honneur de juger ce travail et de participer à notre jury de mémoire.

Nous profitons également pour remercier chaleureusement tous les membres de nos familles ainsi que les enseignants du département de Mathématiques qui ont contribué à notre formation.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	1
ABSTRACT	2
RÉSUMÉ EN ARABE.	3
REMERCIEMENTS	4
TABLE DES MATIÈRES	5
LISTE DES FIGURES	7
INTRODUCTION	9
I CONCEPTS FONDAMENTAUX	12
1 Notions de base sur la théorie des graphes	12
1.1 Définition et notations	12
1.2 Quelques graphes particuliers	15
2 Fonction de Domination Romaine	19
2.1 Fonction de domination romaine faible	22
II ETAT DE L'ART	24
1 Terminologie	25
2 Les classes des graphes \mathcal{R}_{CVR} , \mathcal{R}_{CER} et \mathcal{R}_{CEA}	27
2.1 Suppression d'un sommet	27

2.2	Suppression d'une arête	29
2.3	Ajout d'une arête	30
3	Les classes des graphes \mathcal{R}_{UVR} , \mathcal{R}_{UER} et \mathcal{R}_{UEA}	32
3.1	Suppression d'un sommet	32
3.2	Suppression d'une arête	33
3.3	Ajout d'une arête	33
4	Relations entre les classes	35
5	Autres Opérations	36
6	Fonction de domination romaine faible	37
III EFFET DE LA SUPPRESSION D'UNE ARÊTE SUR LE NOMBRE DE DOMINATION ROMAINE FAIBLE		
1	Quelques résultats préliminaires	38
2	Propriétés des graphes γ_r - ER -critiques	39
CONCLUSION ET PERSPECTIVES.		56
RÉFÉRENCES		57

LISTE DES FIGURES

FIGURE.1.1	Une chaîne et un cycle d'ordre 6.	13
FIGURE.1.2	Une chaîne pendante de longueur 4.	14
FIGURE.1.3	Le sous graphe induit par $\{a, b, c\}$ et un sous graphe partiel de G .	15
FIGURE.1.4	Deux graphes complémentaires d'ordre 5.	15
FIGURE.1.5	Graphes complets d'ordres 3, 4 et 5.	16
FIGURE.1.6	Un unicycle.	16
FIGURE.1.7	Un arbre T d'ordre 7.	16
FIGURE.1.8	Une forêt à 3 composantes connexes.	17
FIGURE.1.9	Un graphe 3-régulier.	17
FIGURE.1.10	Un graphe biparti complet $K_{2,3}$.	17
FIGURE.1.11	Une étoile $K_{1,5}$ et une étoile subdivisée SS_5 .	18
FIGURE.1.12	Une étoile double $DS_{3,3}$.	18
FIGURE.1.13	Un cycle C_4 et sa couronne.	19
FIGURE.1.14	Un graphe à 5 blocs.	19
FIGURE.1.15	Une chaîne P_5 où $\gamma_R = 4$.	20
FIGURE.1.16	Une chaîne P_5 où $\gamma_r = 3$.	23
FIGURE.2.1	$V_R^- = \{f\}$, $V_R^0 = \{a, b, c, e, g\}$, $V_R^+ = \{d\}$.	25
FIGURE.2.2	Exemple des graphes appartenant à la classe \mathcal{H} .	31
FIGURE.2.3	Les graphes W, W_1, W_2 .	32
FIGURE.2.4	Les relations entre les classes.	35
FIGURE.3.1	Opération \mathcal{O}_1 .	42
FIGURE.3.2	Opération \mathcal{O}_2 .	43
FIGURE.3.3	Un arbre T de $\text{diam}(T) = 5$.	50
FIGURE.3.4	Représente l'arbre T_{x_4} .	52
FIGURE.3.5	Représente l'arbre T_{x_5} du Cas(I).	53
FIGURE.3.6	Représente l'arbre T_{x_5} du Cas(II).	53

FIGURE.3.7 Représente l'arbre T_{x_5} du Cas(III). 54

FIGURE 3.8 Un arbre γ_r -*ER-critique* obtenu par les opérations \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 . 55

INTRODUCTION

La Recherche Opérationnelle (*RO*) est une branche des mathématiques, appelée aussi, optimisation sous contraintes. Celle-ci a été développée dans les années quarante pour optimiser les problèmes complexes de gestion logistique. Il s'agit d'un ensemble de méthodes d'analyse scientifique (mathématiques et informatiques) des phénomènes d'organisation qui traite de la maximisation d'un profit, d'une performance, d'un rendement ou bien de la minimisation d'un coût, d'une dépense. La *RO* est avant tout un outil d'aide à la décision.

A nos jours elle comprend un grand nombre de disciplines comme l'optimisation linéaire, l'optimisation non linéaire, la programmation dynamique, la simulation de phénomènes, la théorie de files d'attente et la théorie des graphes.

La théorie des graphes représente une classe très importante de la recherche opérationnelle, elle constitue un outil très puissant pour schématiser les modèles des liens et relations entre les objets. L'étude des graphes a commencé en 1736 quand Euler posa le fameux problème : "comment parcourir une fois et une seule fois les sept ponts de la ville de Königsberg". La théorie des graphes est devenue très utile comme modèle mathématique. Elle regroupe généralement des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être représentés par un schéma. Ce schéma appelé graphe est constitué par un ensemble de points (sommets) représentant des individus, des objets, des situations, etc ... et qui sont reliés par des flèches ou des lignes (arcs ou arêtes) symbolisant les relations entre eux.

Parmi les problèmes importants et très étudiés en théorie des graphes citons les problèmes de domination, les problèmes de coloration et les problèmes de noyaux dans les graphes.

La domination dans les graphes est considérée actuellement comme l'un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes. Elle devient un domaine théorique à partir de 1958 grâce à Claude Berge [7] et ne connaîtra sa véritable expansion qu'à partir de 1977 grâce aux travaux de Cockayne et Hedetniemi [19]. Un ensemble dominant D dans

un graphe est un sous-ensemble de sommets tel que chaque sommet du graphe appartient à D ou est adjacent à au moins un sommet de D .

Le principe de la domination trouve son origine dans les jeux d'échecs au 16^{ème} siècle, qui consiste à placer un nombre minimum de reines sur l'échiquier, de telle manière que chaque case de l'échiquier soit ou bien occupée par une reine ou bien atteinte par un seul déplacement d'une reine [21].

Depuis l'introduction du concept de la domination, plusieurs types sont définis sur la base de la définition précédente en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants, comme la domination double, la domination totale, la domination couplée et la domination connexe etc... .

En 2004 Cockayne et al. [17] ont introduit une nouvelle variante de la domination à savoir la domination Romaine, qui ne rassemblait à rien a ce qui avait déjà été étudié sur la fonction de domination. Depuis d'autres variantes ont vu le jour, nous citons la fonction de domination romaine faible, introduite par Henning et Hedetniemi [42]. Elle est définie comme suit: soit $G = (V, E)$ un graphe, si f est une fonction défini de V dans $\{0, 1, 2\}$, alors un sommet v avec $f(v) = 0$ est dit non défendu (non protégé) par rapport à f , s'il n'est pas adjacent à un sommet w avec $f(w) > 0$. Une fonction de domination romaine faible (FDRF) est une fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ vérifiant, pour tout sommet v avec $f(v) = 0$ il existe un voisin w avec $f(w) > 0$ et la fonction $f' = (V'_0, V'_1, V'_2)$ définie par $f'(v) = 1$, $f'(w) = f(w) - 1$, et $f'(u) = f(u)$ pour tout sommet $u \in V - \{v, w\}$, n'a pas de sommet non défendu. Le poids d'une FDRF est la valeur $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$ et le nombre de domination Romaine faible, $\gamma_r(G)$ est le poids minimum d'une FDRF de G .

Parmi les problèmes les plus traités en domination est l'étude de l'effet sur les paramètres d'un graphe lorsque le graphe est modifié par des opérations simples à savoir la suppression, l'ajout, la contraction et l'identification.

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de l'effet de la suppression d'une arête d'un graphe sur le nombre de domination romaine faible.

Dans le premier chapitre, nous présentons les définitions et les terminologies de la théorie des graphes utilisées dans ce mémoire. Ainsi, nous évoquons la notion de fonctions de dominations Romaine, en donnant d'abord un petit historique. Ensuite, nous présen-

tons l'une de ses variantes à savoir la fonction de domination romaine faible (FDRF).

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les principaux résultats qui existent dans la littérature concernant la domination romaine dans les graphes modifiés (par une suppression de sommet ou d'arêtes, ajout de sommet ou d'arête, contraction d'arête ou bien identification de sommets).

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'effet de la suppression d'une arête d'un graphe sur le nombre de domination romaine faible. On établit quelques propositions dans ce sens, puis nous donnons une caractérisation constructive de tous les arbres dont la suppression d'une arête quelconque fait augmenter le nombre de domination Romaine faible.

Nous terminons notre travail par une conclusion générale, dans laquelle nous résumons tout ce que nous avons fait dans ce mémoire.

CHAPITRE 1

Concepts fondamentaux

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base sur la théorie des graphes et des terminologies utilisées dans notre mémoire. Ensuite, nous donnons un aperçu sur les fonctions de dominations romaine dans les graphes, Il contiendra en particulier une partie sur la fonction de domination romaine faible, cette dernière sera l'objet de notre travail. Pour plus de détails le lecteur peut se référer au livre de Berge [8], ou bien au livre de Chartrand et Lesniak [12], et aux articles [17], [38], [42].

1.1 Notions de base sur la théorie des graphes

1.1.1 Définition et notations

Un graphe $G = (V, E)$ est déterminé par deux ensembles, un ensemble fini de sommets V et un ensemble fini d'arêtes E . Le cardinal de V est appelé *l'ordre* de G , noté souvent par n et le cardinal de E est appelé la *taille* de G , noté par m . Une arête $e \in E$ est une paire de sommets (u, v) notée par abus $e = uv$ ou bien $e = vu$, où u et v sont les extrémités de l'arête e . On dira dans ce cas que les sommets u et v sont *adjacents* et que l'arête e est *incidente* aux sommets u et v . Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe est dit *simple* s'il est sans boucles et sans arêtes multiples (plusieurs arêtes relient deux sommets). Tous les graphes considérés dans ce mémoire, sont simples et finis.

1) Voisinage et degrés

Pour un sommet v d'un graphe G , le *voisinage ouvert* de V est défini par l'ensemble $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$ et le *voisinage fermé* de V est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert de S est défini par $N(S) =$

$\cup_{v \in S} N(v)$ et le voisinage fermé de S est $N[S] = \cup_{v \in S} N[v]$. Le *voisinage privé* dans S , noté $pn(v, S)$ est l'ensemble des voisins de v qui ne sont voisins d'aucun autre sommet de S : $pn(v, S) = N(v) \setminus N(S - \{v\})$.

Le *degré* d'un sommet v de G , noté par $d_G(v)$ est le nombre de sommets adjacents à v , i.e $|N_G(v)|$. Un sommet de degré nul est dit *isolé* et un sommet de degré égal à un est dit *pendant* (*feuille*). On note par $L(G)$ l'ensemble des sommets *pendants* de G . Un sommet adjacent à un sommet *pendant* est appelé *support*. L'ensemble des sommets *supports* de G est noté par $S(G)$. Un *support* est dit *faible*, s'il est adjacent à exactement une *feuille*, sinon il est dit *fort*. On désigne par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ le degré minimum et le degré maximum dans G , respectivement.

2) Chaînes, cycles et connexité :

Une *chaîne* C dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets v_1, v_2, \dots, v_k telle que pour tout $1 \leq i \leq k - 1$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k - 1$ représente la longueur de C (au sens des arêtes) et les sommets v_1 et v_k sont appelés respectivement extrémité initiale et extrémité finale de la *chaîne* C . Une *chaîne* est dite élémentaire (resp. simple) si tous ses sommets sont distincts (resp. toutes ses arêtes sont distinctes). Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une *chaîne*. Une *chaîne minimale* induite par n sommets, notée par P_n est une *chaîne élémentaire* sans cordes. Un *cycle* est une *chaîne* dont les deux extrémités sont confondues. Un *cycle élémentaire* C_n induit par n sommets est un *cycle* dont les sommets sont distincts (Voir Figure 1.1). Un graphe est dit *connexe*, si et seulement si pour toute paire de sommets u, v du graphe, il existe une chaîne les reliant.

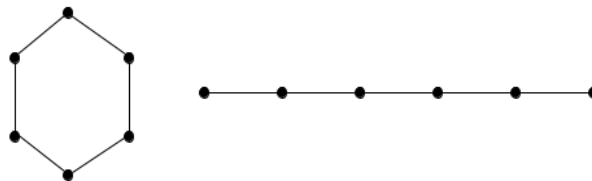


FIGURE 1.1. Une chaîne et un cycle d'ordre 6.

Une *chaîne pendante* P dans un graphe G , est une chaîne induite tel que l'une de ses extrémités est une feuille dans G et l'autre n'est que le sommet de P adjacent à un sommet de $G - P$. (Voir Figure 1.2).

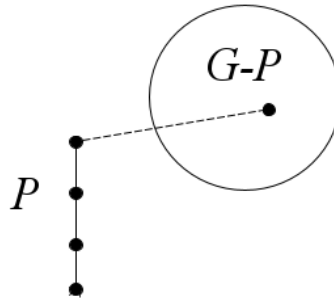


FIGURE 1.2. Une chaîne pendante de longueur 4.

3) Distance, diamètre, excentricité et centre:

La distance entre deux sommets x et y dans un graphe connexe G notée $d(x, y)$ est la longueur du plus courte *chaîne* joignant x et y . L'*excentricité* d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$ est $\text{exc}(v) = \max\{d(v, w), w \in V\}$ et le *diamètre* de G , noté $\text{diam}(G)$, est égal à $\max\{\text{exc}(v), v \in V\}$. Un sommet de G ayant une *excentricité* minimum est appelé *centre*. Un graphe peut évidemment avoir plusieurs *centres*. Par exemple, les *chaînes* d'ordre pair possèdent deux sommets *centres*.

Une *chaîne diamétrale* d'un graphe G , est une chaîne dont la longueur est égale au *diamètre* de G .

4) Stables et cliques:

Un *stable* (*indépendant*) dans G , est un sous ensemble de sommets de V deux à deux non adjacents.

Une *clique* K de G est un sous ensemble de sommets de V deux à deux adjacents.

1.1.2 Quelques graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le sous-graphe induit par S , noté par $G[S]$ est le graphe ayant S comme ensemble de sommets et ses arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans S . Le graphe partiel de G défini par $U \subseteq E$ noté G_U est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et U (Voir Figure 1.3).

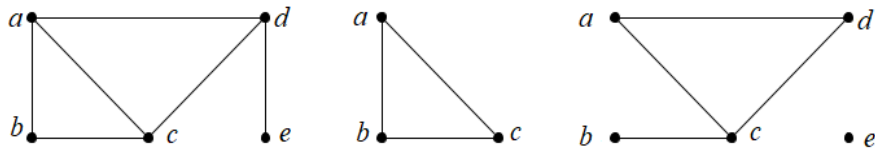


FIGURE 1.3. Le sous graphe de G induit par $\{a, b, c\}$ et un sous graphe partiel de G .

Un graphe est dit trivial s'il a un seul (graphe singleton) ou aucun sommet (graphe nul).

Le graphe complémentaire de G , noté \overline{G} , est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans \overline{G} si elle n'est pas dans G (Voir Figure 1.4).

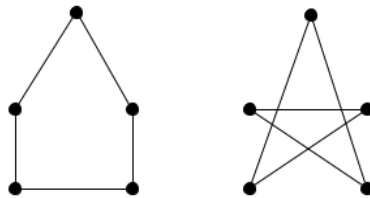


FIGURE 1.4. Deux graphes complémentaires d'ordre 5.

Un graphe *complet* d'ordre n noté par K_n , est un graphe dont tous les sommets distincts sont adjacents (Voir Figure 1.5).

Un unicycle est un graphe ayant un seul cycle (Voir Figure 1.6).

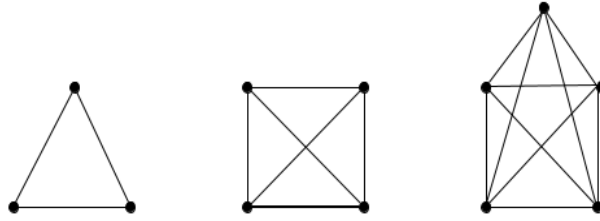


FIGURE 1.5. Graphes complets d'ordres 3,4 et 5.

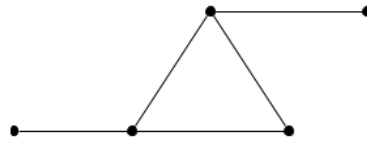
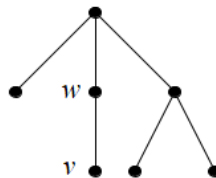


FIGURE 1.6. Un unicycle.

Un arbre $T = (V, E)$ d'ordre n est un graphe connexe et sans cycle, il comporte exactement $n - 1$ arêtes. Un arbre enraciné est un arbre dans lequel un sommet a été désigné comme racine noté r et chaque arête est dirigée loin de la racine. Un sommet v est un fils d'un sommet w , si les deux sommets v et w sont consécutifs sur la chaîne de la racine à v . Le sommet v est un fils de w , si et seulement si w est le père de v . Pour un sommet x de l'arbre enraciné, l'arbre T_x est le sous graphe induit par x et ses descendants. La profondeur d'un sommet x est la distance entre x et la feuille la plus loin dans T_x .

FIGURE 1.7. Une arbre T d'ordre 7.

Une composante connexe d'un graphe G est un sous graphe G' qui est maximal connexe (c'est à dire qu'aucun autre sous graphe connexe de G contient G'). Une forêt d'ordre n est un graphe où chaque composante connexe est un arbre. Le nombre d'arêtes d'une

forêt à k composantes connexes est $n - k$.

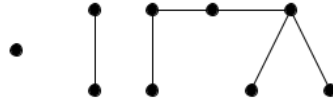


FIGURE 1.8. Une forêt à 3 composantes connexes.

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré k est appelé un graphe k -régulier (Voir Figure 1.9).

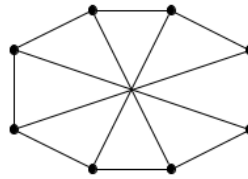


FIGURE 1.9. Un graphe 3-régulier.

Un graphe G est dit *multiparti*, si l'ensemble des sommets peut être partitionné en p sous ensembles avec $p \geq 2$, sachant qu'aucune arête du graphe G ne joint deux sommets appartenant au même sous ensemble. Pour $p = 2$, le graphe G est appelé *biparti*. Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles impaires.

Si un sommet appartenant à un ensemble V_i de la partition d'un graphe multiparti est adjacent à tout sommet des autres ensembles $\{V_j : j \neq i\}$ pour tout $i = \overline{1, p}$, alors le graphe G est appelé *multiparti complet* et noté par K_{k_1, k_2, \dots, k_p} , avec $k_i = |V_i|$.



FIGURE 1.10. Un graphe biparti complet $K_{2,3}$.

Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = p$ est appelé *une étoile* et notée $K_{1,p}$. Le sommet de V_1 est appelé *centre de l'étoile* (Voir Figure 1.11).

On dit qu'un graphe H est *une subdivision* du graphe G , s'il est obtenu à partir de G en remplaçant des arêtes de G (Pas nécessairement toutes) par des chaînes élémentaires. Une *étoile subdivisée* SS_p est un arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,p}$ en subdivisant chaque arête par exactement un sommet (Voir Figure 1.11).

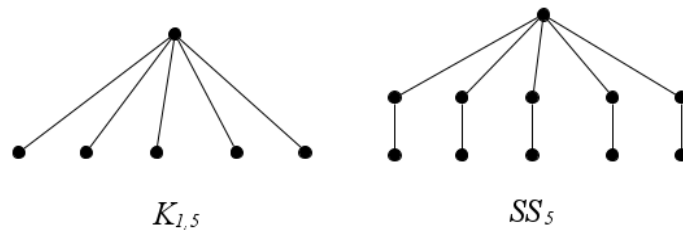


FIGURE 1.11. Une étoile $K_{1,5}$ et une étoile subdivisée SS_5 .

Une *étoile double*, notée $S_{p,q}$, ou bien $DS_{p,q}$, est un arbre obtenu à partir de deux étoiles $K_{1,p}, K_{1,q}$ tel que $p, q \geq 1$, en attachant les deux sommets centraux par une arête (Voir Figure 1.12).

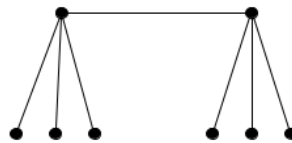
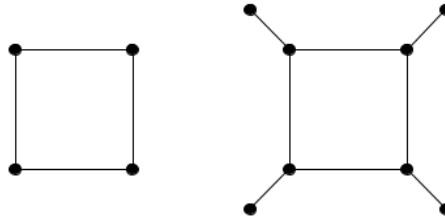


FIGURE 1.12. Une étoile double $DS_{3,3}$.

La k -*couronne* de $G = (V, E)$ est le graphe d'ordre $(k + 1)|V|$ obtenu d'une copie de G en attachant à chaque sommet de G une chaîne de longueur $k - 1$ de manière que les chaînes soient disjointes. Pour $k = 1$, la 1-couronne de G est appelée la couronne de G (voir Figure 1.13).

FIGURE 1.13. Un cycle C_4 et sa couronne.

Une arête e d'un graphe G est appelée *isthme* (*arête d'articulation du graphe G*) si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes, i.e. si G est connexe alors $G - e$ n'est pas connexe.

Un sommet v d'un graphe G est *un sommet d'articulation* si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes, i.e. si G est connexe alors $G - v$ n'est pas connexe.

Un bloc dans un graphe G est un sous graphe connexe maximal qui ne contient pas de sommet d'articulation.

Un graphe bloc G est un graphe dont tous *les blocs* sont complets. Si G ne possède pas de sommets d'articulations, alors G est lui même *un bloc*. L'intersection de deux blocs contient au plus un sommet (Voir Figure 1.14).

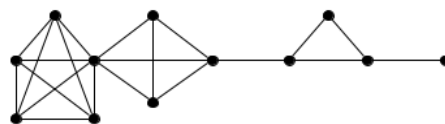


FIGURE 1.14. Un graphe à 5 blocs.

1.2 Fonction de domination Romaine

Commençons par donner la définition des ensembles dominants. Un sous ensemble S d'un graphe $G = (V, E)$ est *un dominant* si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S . *Le nombre de domination* est le cardinal minimum d'un ensemble dominant dans G . Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à se référer aux deux livres [24, 25]

Le concept de la domination Romaine dans les graphes a été introduit par Cockayne et al. en 2004 [17]. Ils ont défini une *Fonction de Domination Romaine (FDR)* dans un graphe $G = (V, E)$ comme étant une application $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ satisfaisant à la condition que pour chaque sommet v de $V(G)$ ayant $f(v) = 0$, il existe au moins un sommet u adjacent à v , avec $f(u) = 2$. Le poids d'une FDR est la quantité $\omega(f) = f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$. Le nombre de domination Romaine $\gamma_R(G)$ est le poids minimum parmi toutes les FDR de G . Si $f(V(G)) = \gamma_R(G)$, alors on dira que f est une $\gamma_R(G)$ -fonction.

Soit (V_0, V_1, V_2) la partition ordonnée de $V(G)$ induite par f , où $V_i = \{v \in V(G), f(v) = i\}$ pour $i = \{0, 1, 2\}$. Il existe une correspondance entre les fonctions $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ et la partition (V_0, V_1, V_2) . Nous allons donc écrire $f = (V_0, V_1, V_2)$ pour désigner une FDR (Voir l'exemple de la Figure 1.15).

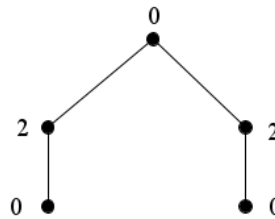


FIGURE 1.15. Une chaîne P_5 où $\gamma_R = 4$.

Cockayne et al. se sont inspirés des stratégies de défense de l'empire Romain présentées dans les travaux de ReVelle et Rosing (2000) et Stewart (1999) [38].

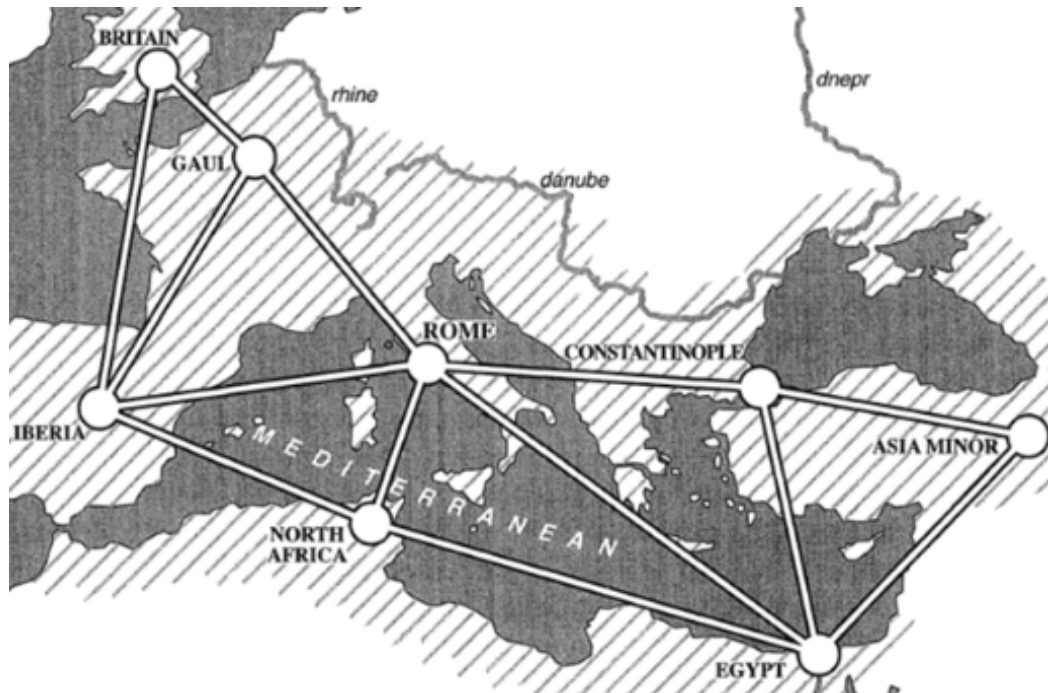
Au troisième siècle de l'ère commune (EC), lorsque Rome dominait non seulement l'Europe, mais aussi l'Afrique du Nord et le Proche-Orient, où elle a pu déployer cinquante légions dans tout l'empire. Dans cette stratégie de défense avancée, même les zones les plus éloignées de l'empire étaient sécurisées par la présence sur place d'un nombre suffisant de légions de l'armée romaine. Cependant, l'empire avait perdu une grande partie de ses forces au quatrième siècle de notre ère et les forces de Rome n'étaient plus que de vingt-cinq légions. Il était donc devenu impossible de stationner des légions en force suffisante à toutes les positions avancées de l'empire sans abandonner le noyau.

Constantin 1^{er} (dit le grand) (272 – 337) a mis au point une stratégie de défense

en profondeur en utilisant des troupes locales pour perturber les invasions et en déployant des armées mobiles (AM) pour stopper et repousser les ennemis, ou pour réprimer l'insurrection. La stratégie de défense avancée antérieure avait fourni un mur autour de l'empire empêchant aucune des incursions les plus modestes, elle a même permis aux forces romaines de pénétrer dans les terres barbares pour perturber les invasions pendant leur montée.

Au lieu des forces de Rome, la stratégie de défense en profondeur a substitué les milices locales à temps partiel (qui se battaient pour leur propre terre et leurs familles) pour ralentir et fragmenter toute armée barbare envahissante jusqu'au poids plus lourd d'une AM, envoyée par une région éloignée, pourrait être mis à contribution. Chaque ensemble d'environ six légions avec de la cavalerie auxiliaire, de l'artillerie, etc. forme une AM, une unité de forces dont le nombre est suffisant pour sécuriser l'une des régions de l'empire. Au troisième siècle de notre ère, les cinquante légions de Rome, ou environ AM, pouvaient être allouées afin que chacune des huit provinces soit sécurisée par sa propre AM. Cependant, au quatrième siècle de notre ère, seules quatre AM étaient disponibles pour le déploiement. Les régions de l'empire sont considérées comme connectées (Voir Figure 1.2), où chaque région est représentée comme un cercle (*sommet*). Le mouvement le long d'une ligne (*arête*) entre des régions représente une «étape» et pour qu'une région soit sécurisée, une AM doit pouvoir l'atteindre en une seule étape. Une région est considérée comme sécurisée si elle contient déjà une ou plusieurs AM. D'un autre côté, la région peut être sécurisée, c'est-à-dire qu'une AM peut être capable de se déployer pour protéger cette région en une seule étape, mais uniquement dans des conditions spéciales. Une AM ne peut être déployée d'une région à une région adjacente que s'il se déplace d'une région où il y a au moins une autre AM pour aider à le lancer. Ceci est analogue à la stratégie d'île en île poursuivie par le général MacArthur pendant la seconde guerre mondiale dans le mouvement du théâtre du Pacifique suivi la chaîne d'îles déjà sécurisées par les troupes laissées derrière.

Le défi pour Constantin était d'allouer seulement quatre AM à des postes dans les huit régions de l'empire. Constantin a choisi d'en placer deux à Rome, un choix symbolique



et stratégique, et deux dans sa nouvelle capitale, Constantinople. Avec ce déploiement, chaque région de l'empire était déjà sécurisée ou pouvait être atteinte par une AM en une seule étape, à l'exception de la Bretagne. Pour l'atteindre avec une AM, une AM devait se déplacer de Rome en Gaule, sécurisant la Gaule. Ensuite, une deuxième AM devait être lancée de Constantinople à Rome. Ce n'est qu'alors qu'une AM pourrait passer de Rome à la Gaule, et finalement une AM pourrait passer de la Gaule à la Bretagne, un total de quatre étapes pour les armées du monde. Chacune des quatre étapes a commencé à partir d'une base qui avait deux AM présentes.

Grace à la fonction de domination Romaine, d'autres alternatives peuvent être envisagées plus efficaces que celle de Constantin et toutes les régions seront sécurisées par une seule étape. Soit qu'on place 2 à Rome, 1 à Bretagne et l'Asie Mineure, ou bien 2 à Constantinople et Iberia.

1.2.1 Fonction de domination romaine faible

Il existe plusieurs variantes de la domination romaine, parmi ses variantes, on s'intéresse dans notre travail à l'étude de la fonction de domination romaine faible, introduite par

Henning et Hedetniemi [42] et approfondi par exemple dans [13, 18, 37].

Ils ont exploré le potentiel économique pour maintenir les légions à des coûts substantiels pour que l'empire reste protégé en cas d'une seule attaque (mouvement) entre les régions. Soient $G = (V, E)$ un graphe, $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ une fonction et pour toute paire de sommets adjacents $u \in V_0$ et $v \in V_1 \cup V_2$, la fonction $f_{v \rightarrow u} : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ définie par $f_{v \rightarrow u}(u) = 1$, $f_{v \rightarrow u}(v) = f(v) - 1$ et $f_{v \rightarrow u}(w) = f(w)$ pour tout $w \in V(G) - \{u, v\}$. Dans ce cas, v est dit *voisin mobile* pour u par rapport à la fonction f .

La fonction f est dite une fonction de domination romaine faible (FDRF), si pour tout sommet $u \in V_0$, il existe un sommet $v \in (V_1 \cup V_2) \cap N(u)$, tel que G n'a pas de sommets non protégés par $f_{v \rightarrow u}$. Le poids de la fonction f est la quantité $f(V) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$. Le nombre de domination romaine faible noté $\gamma_r(G)$ est le poids minimum parmi toutes les (FDRF) de G (Voir Figure 1.16). Une fonction de domination romaine faible de poids $\gamma_r(G)$ est appelée $\gamma_r(G)$ -fonction. Dans la suite, on écrira $f = (V_0, V_1, V_2)$ (ou bien, $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$) pour désigner une FDRF.

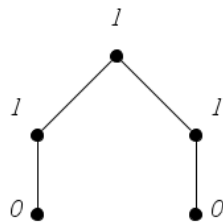


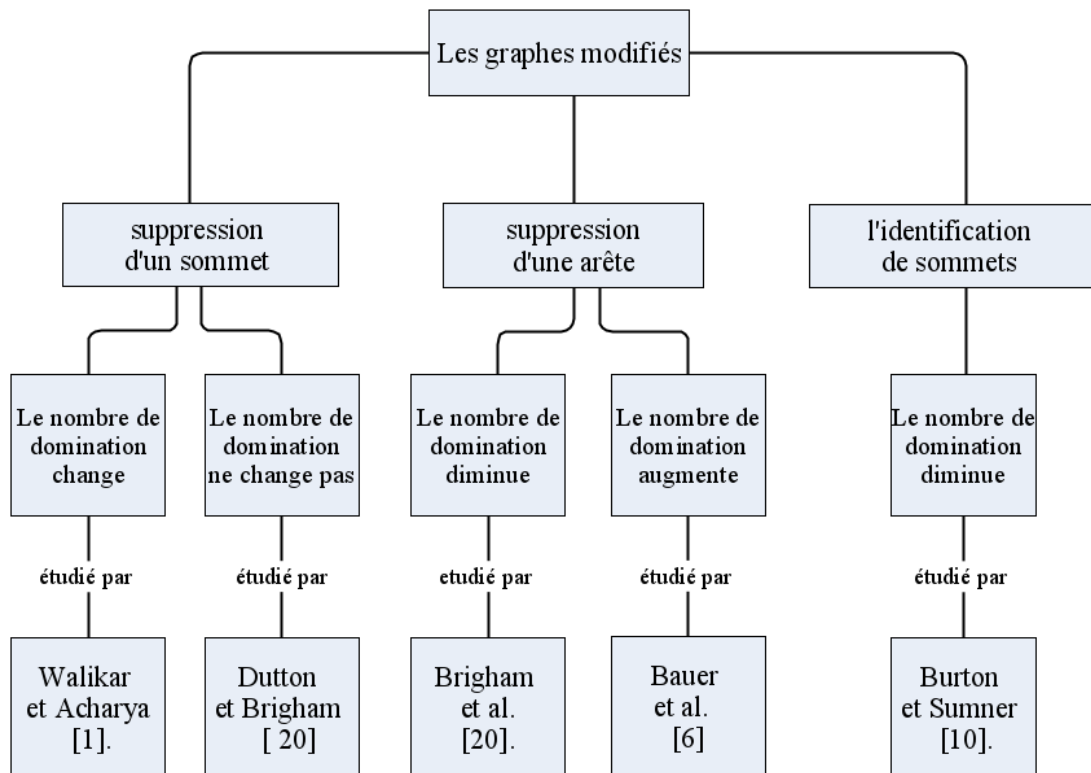
FIGURE 1.16. Une chaîne P_5 où $\gamma_r = 3$.

CHAPITRE 2

ÉTAT DE L'ART

De nombreuses études ont été réalisées sur les paramètres du graphe lorsque la structure du graphe est légèrement modifiée par l'ajout d'arête/sommet, la suppression d'arête /sommet et la contraction d'arête ou l'identification de sommets. Ainsi, les notions de criticité et de stabilité ont été introduites selon si le paramètre augmente, diminue ou reste inchangé.

Pour le nombre de domination, les premiers travaux fait dans ce sens, sont présentés dans l'organigramme ci-dessous:



Dans ce chapitre, nous présentons les principaux résultats des différents travaux de recherche sur les fonctions de dominations Romaine dans les graphes modifiés. Nous

rappelons que tous les graphes considérés dans ce mémoire sont finis, simples et non orientés.

2.1 Terminologie

Avant de commencer, nous devons d'abord introduire une terminologie qui peut se trouver dans les articles Jafari Rad et al. [30, 32], Chellali et al. [15], ou Samodivkin [40]. Selon les effets de la suppression d'un sommet sur le nombre de domination Romaine d'un graphe G , nous pouvons partitionner l'ensemble $V(G)$ en trois classes disjointes, Soit $V(G) = V_R^- \cup V_R^+ \cup V_R^=$, tels que:

$$V_R^= = \{v \in V(G) : \gamma_R(G - v) = \gamma_R(G)\},$$

$$V_R^+ = \{v \in V(G) : \gamma_R(G - v) > \gamma_R(G)\},$$

$$V_R^- = \{v \in V(G) : \gamma_R(G - v) < \gamma_R(G)\},$$

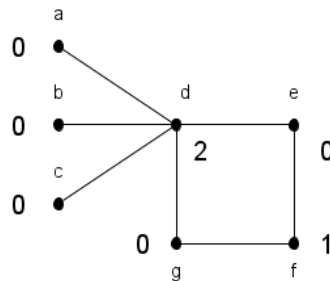


FIGURE 2.1. $V_R^- = \{f\}, V_R^= = \{a,b,c,e,g\}, V_R^+ = \{d\}, E_R^+ = \{ad, bd, cd, dg, de\}, E_R^- = \{ef, gf\}$.

Par conséquent, nous avons les définitions suivantes:

- Un graphe G d'ordre $n \geq 2$, est dit γ_R -*sommet-critique*, si la suppression d'un sommet quelconque de G diminue le nombre de domination Romaine.
- Un graphe G d'ordre $n \geq 2$, est dit γ_R -*sommet-supercritique*, si la suppression d'un sommet quelconque de G augmente le nombre de domination Romaine.

- Un graphe G d'ordre $n \geq 2$ est dit γ_R -*sommet-stable*, si la suppression d'un sommet quelconque de G laisse le nombre de domination Romaine inchangé.

Étant donné que la suppression d'une arête d'un graphe G ne fait pas diminuer le nombre de domination Romaine, nous avons alors $\gamma_R(G - e) \geq \gamma_R(G)$, pour toute arête $e \in E(G)$. Par conséquent, l'ensemble des arêtes de G peut être partitionné en $E_R^- = \{e \in E(G) : \gamma_R(G - e) = \gamma_R(G)\}$ et $E_R^+ = \{e \in E(G) : \gamma_R(G - e) > \gamma_R(G)\}$. (Voir Figure 2.1). Donc, on obtient les définitions suivantes:

- Un graphe G de taille $m \geq 1$ est dit γ_R -*arête-critique*, si pour toute arête e de $E(G)$, $\gamma_R(G - e) > \gamma_R(G)$.
- Un graphe G de taille $m \geq 1$ est dit γ_R -*arête-stable*, si pour toute arête e de $E(G)$, $\gamma_R(G - e) = \gamma_R(G)$.

De même, l'ajout d'une arête e ne fait pas augmenter le nombre de domination Romaine, nous avons alors $\gamma_R(G + e) \leq \gamma_R(G)$ pour toute arête e de $E(\overline{G})$. Donc, on obtient les définitions suivantes:

- Un graphe G est dit γ_R -*arête-critique*, si pour toute arête e de $E(\overline{G})$, $\gamma_R(G + e) < \gamma_R(G)$.
- Un graphe G est dit γ_R -*arête-stable*, si pour tout arête e de $E(\overline{G})$, $\gamma_R(G + e) = \gamma_R(G)$.

Maintenant, d'après le comportement du paramètre γ_R (changé ou inchangé) lorsqu'un graphe est légèrement modifié par la suppression d'un sommet ou d'une arête ou l'ajout d'une arête quelconque, nous avons les six classes de graphes suivantes. Pour cela, nous utilisons les notations ci-dessous qui indiquent les explications suivantes:

CVR : Changing Vertex Removal (la suppression d'un sommet change le paramètre γ_R).

CER : Changing Edge Removal (la suppression d'une arête change le paramètre γ_R).

UVR : Unchanging Vertex Removal (la suppression d'un sommet ne change pas le paramètre γ_R).

UER : Unchanging Edge Removal (la suppression d'une arête ne change pas le paramètre γ_R).

- \mathcal{R}_{CVR} est la classe des graphes G tels que $\gamma_R(G - v) \neq \gamma_R(G)$ pour tout $v \in V(G)$.
- \mathcal{R}_{UVR} est la classe des graphes G tels que $\gamma_R(G - v) = \gamma_R(G)$ pour tout $v \in V(G)$.
- \mathcal{R}_{CER} est la classe de graphes G telle que $\gamma_R(G - e) \neq \gamma_R(G)$ pour tout $e \in E(G)$.
- \mathcal{R}_{UER} est la classe de graphes G telle que $\gamma_R(G - e) = \gamma_R(G)$ pour tout $e \in E(G)$.
- \mathcal{R}_{CEA} est la classe de graphes G telle que $\gamma_R(G + e) \neq \gamma_R(G)$ pour tout $e \in E(\overline{G})$.
- \mathcal{R}_{UEA} est la classe de graphes G telle que $\gamma_R(G + e) = \gamma_R(G)$ pour tout $e \in E(\overline{G})$.

2.2 Les classes des graphes \mathcal{R}_{CVR} , \mathcal{R}_{CER} et \mathcal{R}_{CEA} :

Dans cette section, on s'intéressera aux opérations suivantes:

- Suppression d'un sommet.
- Suppression d'une arête.
- Ajout d'une arête.

2.2.1 Suppression d'un sommet

Il est à noter que la suppression d'un sommet peut faire augmenter $\gamma_R(G)$ par au moins un. Par exemple, la suppression d'un sommet centre de l'étoile $K_{1,t}$ avec $t \geq 3$, augmente le nombre de domination par $n - 3$. Mais elle peut faire diminuer $\gamma_R(G)$ par au plus un. Par exemple la suppression d'un sommet pendant de la chaîne P_n où $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$. Donc, dans un graphe G le nombre de domination Romaine satisfait la propriété suivante: $\gamma_R(G) - 1 \leq \gamma_R(G - v)$. Le résultat suivant donne des propriétés pour quelques classes de $V(G)$.

Proposition 2.1 (Jafari Rad et Volkmann [33]). *Si x et y sont deux sommets de G tel que $x \in V_R^+$ et $y \in V_R^-$, alors x et y ne sont pas adjacents.*

Proposition 2.2 (Jafari Rad et Volkmann [33]). *Soit G un graphe, tel que $v \in V_R^+$, alors pour toute $\gamma_R(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$, on a:*

- 1) $v \in V_2$.
- 2) v a au moins trois voisins privés dans V_0 .

En conséquence, il n'existe pas un graphe G tel que $V_R^+ = V(G)$, et donc aucun graphe est $\gamma_R(G)$ -sommet-supercritique.

Dans [30, 33], Jafari Rad et al. ont travaillé sur les graphes $\gamma_R(G)$ -sommet-critiques. Ils ont donné quelques résultats pour tout graphe G . Ils ont aussi caractérisé quelques classes particulières comme les cycles, les arbres, les graphes blocs et les graphes multipartis complets.

Théorème 2.3 (Jafari Rad et al. [30]). *Un graphe G est dite un γ_R -sommet-critique, si et seulement si pour tout $v \in V(G)$ il existe une $\gamma_R(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ telle que $v \in V_1$.*

Proposition 2.4 (Jafari Rad et al. [30]). *Soit G un graphe γ_R -sommet-critique et $v \in V(G)$. S'il existe une γ_R -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ de $G - v$, alors $N(v) \cap V_2 = \emptyset$.*

Proposition 2.5 (Jafari Rad et al. [30] [33]). **1)** *Un graphe multiparti complet*

K_{p_1, p_2, \dots, p_r} , $r \geq 2$, est γ_R -sommet-critique, si et seulement si $p_1 = p_2 = \dots = p_r \in \{2, 3\}$ ou $r = 2$ et $p_1 = p_2 = 1$, i.e $K_{p_1, p_2, \dots, p_r} \equiv K_2$.

- 2) *Un cycle C_n d'ordre n est γ_R -sommet-critique, si et seulement si $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$.*
- 3) *Un arbre T est γ_R -sommet-critique, si et seulement si $T \equiv K_2$.*
- 4) *Un graphe bloc G est γ_R -sommet-critique, si et seulement si $G \equiv K_2$*

Pour tout graphe de degré minimum 1, il est montré dans [33], que tout sommet support d'un graphe $\gamma_R(G)$ -sommet-critique est adjacent à exactement une feuille.

Un graphe G est dit k - γ_R -sommet-critique, pour tout $k \geq 2$, si G est γ_R -sommet-critiques et $\gamma_R(G) = k$. Les résultats suivants donnent une caractérisation pour les graphes 3- γ_R -sommet-critiques, et 4- γ_R -sommet-critiques [33].

Théorème 2.6 (Jafari Rad et Volkmann [33]). *Un graphe G d'ordre $n \geq 4$ est 3- γ_R -sommet-critique, si et seulement si n est pair et G est un graphe $(n - 2)$ -régulier.*

Théorème 2.7 (Jafari Rad et Volkmann [33]). *Un graphe G d'ordre $n \geq 5$ est $4-\gamma_R$ -sommets-critique, si et seulement si pour tout $v \in V(G)$, il existe un sommet u de degré $n - 3$ qui n'est pas adjacent à v .*

Maintenant, on donne une borne supérieure pour le diamètre d'un graphe γ_R -sommets-critique.

Théorème 2.8 (Jafari Rad et Volkmann [33]). *Pour tout graphe G γ_R -sommets-critique, on a:*

$$\text{diam}(G) \leq \left\lceil \frac{3\gamma_R(G)-5}{2} \right\rceil.$$

2.2.2 Suppression d'une arête

Dans [33], Jafari Rad et Volkmann ont montré que la suppression d'une arête quelconque de G ne fait pas diminuer le nombre de domination $\gamma_R(G)$. Mais elle l'augmente par au plus un, ce qui implique le résultat suivant.

Proposition 2.9 (Jafari Rad et Volkmann [33]). *Pour toute arête e de $E(G)$, $\gamma_R(G-e) \leq \gamma_R(G) + 1$.*

Par la Proposition 2.9, si G est un graphe γ_R -arête-critique, alors $\gamma_R(G-e) = \gamma_R(G)+1$. Notons que si G est un graphe avec $\Delta(G) \leq 1$, alors il n'existe pas une arête e , telle que $\gamma_R(G-e) > \gamma_R(G)$. Par conséquent, si G est un graphe $\gamma_R(G)$ -arête-critique, alors $\Delta(G) \geq 2$. En [33], Jafari Rad et Volkmann ont aussi donné une caractérisation pour les graphes γ_R -arête-critiques.

Théorème 2.10 (Jafari Rad et Volkmann [33]). *Soit G un graphe avec $\Delta(G) \geq 2$. Alors, G est γ_R -arête-critique si et seulement si G est une forêt dans laquelle chaque composante est un sommet isolé ou bien une étoile d'ordre au moins 3.*

Puisqu'une étoile d'ordre au moins 3 n'est une γ_R -sommets-critique, le Théorème 2.10 implique le résultat suivant.

Corollaire 2.11. $\mathcal{R}_{CVR} \cap \mathcal{R}_{CER} = \emptyset$.

2.2.3 Ajout d'une arête

Jafari Rad et al. ont montré dans [32], que l'ajout d'une arête quelconque d'un graphe G peut diminuer $\gamma_R(G)$ par au plus un. Donc si G un graphe γ_R -arête-critique, alors $\gamma_R(G + e) = \gamma_R(G) - 1$, pour tout e de $E(G)$. Puis, Ils ont donné des caractérisations des graphes et des arbres γ_R -arête-critiques.

Proposition 2.12 (Jafari Rad et al. [32]). *Un graphe G est γ_R -arête-critique, si et seulement si pour tous deux sommets x, y non adjacents, il existe une $\gamma_R(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ telle que $\{f(x), f(y)\} = \{1, 2\}$.*

Soit T_1 un arbre obtenu à partir de deux copies de P_5 en ajoutant une arête entre les sommets centraux, et soit T_2 l'arbre obtenu à partir de T_1 en supprimant une feuille.

Théorème 2.13 (Jafari Rad et al. [32]). *T_1 et T_2 sont les seuls arbres γ_R -arête-critiques.*

Proposition 2.14 (Jafari Rad et al. [32]). *Si T est un arbre γ_R -arête-critique, alors $\text{diam}(T) = 5$.*

Dans [16], Chellali et al. ont donné des conditions nécessaires pour les graphes γ_R -arête-critiques.

Théorème 2.15 (Chellali et al. [16]). *Si G est un graphe γ_R -arête-critique d'ordre $n \geq 2$, alors $V(G) = V_R^- \cup V_R^=$.*

Théorème 2.16 (Chellali et al. [16]). *Si G est un graphe γ_R -arête-critique, alors V_R^- est vide ou bien $G[V_R^=]$ est un graphe complet.*

Pour un entier $k \geq 2$, un graphe G est dit k - γ_R -arête-critique, si G est γ_R -arête-critique et $\gamma_R(G) = k$. Dans [16], les auteurs ont caractérisé les graphes k - γ_R -arête-critiques, selon les différentes valeurs de k .

Théorème 2.17 (Chellali et al. [16]). *Un graphe G d'ordre $n \geq 2$ est 2- γ_R -arête-critique si et seulement si G est un graphe complet.*

Soit \mathcal{H} la classe de tous les graphes G d'ordre $n \geq 3$ tels que $\Delta(G) = |V(G)| - 2$, et pour tous deux sommets non adjacents x, y de G , $\Delta(G) \in \{d_G(x), d_G(y)\}$ (Voir la Figure 2.2).

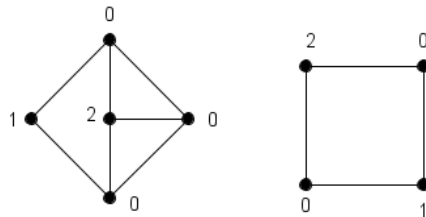


FIGURE 2.2. Exemple des graphes appartenant à la classe \mathcal{H} .

Théorème 2.18 (Chellali et al. [16]). *Un graphe G est $3\text{-}\gamma_R$ -arête-critique, si et seulement si $G \in \mathcal{H}$.*

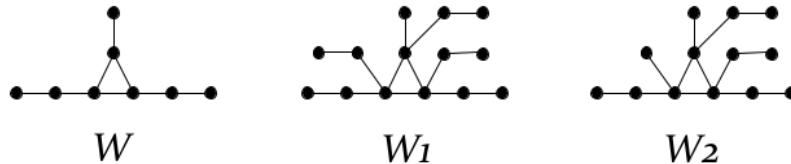
Théorème 2.19 (Chellali et al. [16]). *Un graphe G d'ordre n est $n\text{-}\gamma_R$ -arête-critique, si et seulement si $G = \frac{n}{2}K_2$ si n pair, ou bien $G = \frac{n-1}{2}K_1 \cup K_1$ si n impair.*

Théorème 2.20 (Chellali et al. [16]). *Un graphe G d'ordre $n \geq 3$ est $(n-1)\text{-}\gamma_R$ -arête-critique, si et seulement si $G = C_i \cup m_1K_1 \cup m_2K_2$, où $i \in \{3, 4, 5\}$, $m_1 \leq 1$ et $m_1 + 2m_2 = n - i$.*

De plus dans [16], Chellali et al. ont présenté une borne reliant le diamètre d'un graphe γ_R -arête-critique avec le nombre de domination Romaine. Aussi, ils ont montré que pour chaque entier pair $n \geq 6$, il existe un graphe G , γ_R -arête-critique avec $\text{diam}(G) = 5$.

Théorème 2.21 (Chellali et al. [16]). *Si G un graphe γ_R -arête-critique avec $\gamma_R(G) > 3$, alors $\text{diam}(G) \leq 3 \left\lceil \frac{\gamma_R(G)-3}{2} \right\rceil + 2$.*

Dans [23], Hansberg et al. ont caractérisé les graphes unicycles γ_R -arête-critiques. Soit W le graphe obtenu à partir d'une 2-couronne de C_3 en supprimant une feuille. Pour tout sommet x de W , avec $d_W(x) = 3$, nous joignons x à une feuille d'une chaîne P_2 pour obtenir un graphe W_1 . A noter que W_1 a six feuilles et six sommets supports. Soit W_2 obtenu à partir de W_1 en supprimant une feuille (Voir la Figure 2.3).

FIGURE 2.3. Les graphes W , W_1 et W_2 .

Théorème 2.22 (Hansberg et al. [23]). *Un graphe unicycle connexe G est γ_R -arête-critique, si et seulement si $G \in \{C_4, C_5, W, W_1, W_2\}$.*

2.3 Les classes des graphes \mathcal{R}_{UVR} , \mathcal{R}_{UER} et \mathcal{R}_{UEA} :

2.3.1 Suppression d'un sommet

Puisque, pour une chaîne P_n et un cycle C_n d'ordre n , on a $\gamma_R(P_n) = \gamma_R(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$, Jafari Rad et Volkmann [33] ont montré que $P_n \in \mathcal{R}_{UVR}$ si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{3}$ et $C_n \in \mathcal{R}_{UVR}$ si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Maintenant, nous présentons une caractérisation des graphes G appartenant à \mathcal{R}_{UVR} a été donnée dans [33].

Théorème 2.23 (Jafari Rad et Volkmann [33]). *Pour un graphe G , $G \in \mathcal{R}_{UVR}$ si et seulement si G est sans sommets isolés, et pour tout sommet v on a :*

- 1) *Pour toute $\gamma_R(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$, $v \in V_2$ et il existe une fonction g qui soit une FDR de $G - v$ avec $w(g) = \gamma_R(G)$, ou bien*
- 2) *Il existe une $\gamma_R(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ tel que $v \notin V_2$, et pour toute γ_R -fonction $g = (V'_0, V'_1, V'_2)$ de G , $v \notin V'_1$.*

Chambers et al. [11] ont prouvé que si G est un graphe sans sommets isolés, alors $\gamma_R(G) \leq \frac{4n}{5}$. Cette borne a été améliorée pour les graphes de \mathcal{R}_{UVR} dans [40].

Samodivkin [40], a donné une caractérisation constructive des arbres de \mathcal{R}_{UVR} qui a montré en outre que tout arbre de \mathcal{R}_{UVR} a une fonction de domination Romaine unique de

poinds minimum. Il convient également de noter que les arbres admettant des fonctions de dominations Romaine minimum unique ont été caractérisés par Chellali et Jafari Rad [14], tandis que Hajian et Jafari Rad [22], ont caractérisé les graphes G de degré minimum au moins deux appartenant à \mathcal{R}_{UVR} . Par ailleurs, ils ont donné pour cette classe de graphes une borne supérieure pour le nombre de domination Romaine.

Théorème 2.24 (Hajian et Jafari Rad [22]). *Si $G \in \mathcal{R}_{UVR}$ est un graphe d'ordre n , où $\delta(G) \geq 2$ alors, $\gamma_R(G) \leq \frac{2n}{3} \left(1 / \left(1 + \frac{\delta(G)-2}{3\Delta(G)} \right) \right)$.*

A noter que le Théorème 2.24 a été amélioré pour certaines classes des graphes dans [22].

2.3.2 Suppression d'une arête

Jafari Rad et Volkmann ont montré dans [33], que les cycles C_n et les chaînes P_n appartenant à \mathcal{R}_{UER} , si et seulement si $n \equiv 2 \pmod{3}$. Pour les graphes G d'ordre $n \geq 2$ et de degré maximum $\Delta(G) = n - 1$ sont dans \mathcal{R}_{UER} , si et seulement si G contient au moins trois sommets de degré $n - 1$, ou bien $G \equiv K_2$. En particulier, si G est un graphe multiparti complet K_{p_1, p_2, \dots, p_r} avec $r \geq 2$ et $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$, alors $G \in \mathcal{R}_{UER}$ si et seulement si $r = 2$ et $p_1 = p_2 = 1$, ou bien $r \geq 3$ et $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ ou bien $p_1 \geq 2$. Il ont aussi caractérisé les graphes G appartenant à \mathcal{R}_{UER} comme suit.

Théorème 2.25 (Jafari Rad et Volkmann [33]). *Pour un graphe G , $G \in \mathcal{R}_{UER}$, si et seulement si pour toute arête $e = xy$ dans G , il existe une $\gamma_R(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ qui est également une γ_R -fonction de $G - e$.*

2.3.3 Ajout d'une arête

Un graphe G est dit γ_R -EA-stable, si $G \in \mathcal{R}_{UEA}$. Chellali et Jafari Rad [15], ont montré qu'il n'existe pas une caractérisation par sous-graphes interdits des graphes γ_R -EA-stables, car pour tout graphe H , ils ont fourni un graphe γ_R -EA-stable G , tel que H est un sous-graphe induit de G . Par ailleurs, ils ont donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit en \mathcal{R}_{UEA} .

Théorème 2.26 (Chellali et Jafari Rad [15]). *Un graphe G d'ordre $n \geq 3$, est un γ_R -arête-stable, si et seulement si pour toute $\gamma_R(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$, $V_1 = \emptyset$.*

D'après le Théorème 2.26, si un graphe G est γ_R -EA-stable, alors $\gamma_R(G) = 2|V_2|$, et donc il n'existe pas un graphe γ_R -arête-stable dont le nombre de domination Romaine est impair. Chellali et Jafari Rad [15] ont donné aussi une caractérisation des graphes γ_R -EA-stables ayant un nombre de domination Romaine égale à 2 ou 4. Pour un entier k , un graphe G est dit k - γ_R -EA-stable si G est γ_R -EA-stable et $\gamma_R(G) = k$. Rappelons que $\gamma_R(G) \geq 2$ pour tout graphe G non trivial.

Proposition 2.27 (Chellali et Jafari Rad [15]). *Un graphe connexe G d'ordre $n \geq 2$ est 2 - γ_R -EA-stable, si et seulement si G possède un sommet de degré $n - 1$.*

Proposition 2.28 (Chellali et Jafari Rad [15]). *Un graphe G connexe d'ordre n est un 4 - γ_R -EA-stable, si et seulement si $\Delta(G) \leq n - 4$ et il existe deux sommets x, y tels que $N(x) \cup N(y) = V(G)$.*

De plus, ils ont caractérisé dans [15] certaines classes de graphes γ_R -EA-stables. A noter que les graphes complets K_n sont γ_R -EA-stables.

Proposition 2.29 (Chellali et Jafari Rad [15]). **1)** *Une chaîne P_n est γ_R -EA-stable, si et seulement si $n = 2$ ou $n \equiv 0 \pmod{3}$.*

2) *Un cycle C_n est γ_R -EA-stable, si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{3}$.*

3) *Pour un graphe biparti $K_{m,n}$, $m \leq n$ est γ_R -EA-stable, si et seulement si $m \neq 2$.*

Proposition 2.30 (Chellali et Jafari Rad [15]). *Soit G un graphe γ_R -EA-stable d'ordre $n \geq 3$, alors on a :*

1) *Pour tout sommet v , $\gamma_R(G - v) \geq \gamma_R(G)$.*

2) $\text{diam}(G) \leq \frac{3\gamma_R(G)}{2} - 1$.

2.4 Relations entre les classes

Samodivkin [41], a étudié la relation entre les six classes \mathcal{R}_{CVR} , \mathcal{R}_{UVR} , \mathcal{R}_{CER} , \mathcal{R}_{UER} , \mathcal{R}_{CEA} et \mathcal{R}_{UEA} qui peut être vue dans le diagramme de Venn de la Figure 2.4 basé sur les différents résultats établis.

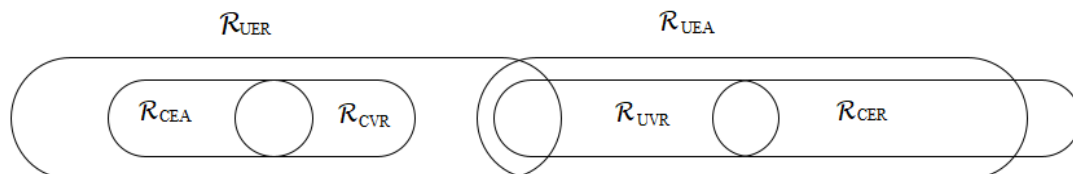


FIGURE 2.4. Les relations entre les classes.

Théorème 2.31 ([41]). *Soit G un graphe dans \mathcal{R}_{CEA} . Alors, les conditions suivantes sont vérifiées*

- 1) *Un sommet $x \in V_R^-(G)$ si et seulement s'il existe des $\gamma_R(G)$ -fonctions f_x et g_x avec $\{f_x(G), g_x(G)\} = \{0, 2\}$.*
- 2) *Si $V_R^-(G) \neq \emptyset$ et $G[V_R^-(G)]$ n'est pas une composante connexe de G , alors chaque sommet de $V_R^-(G)$ a un voisin dans $V_R^-(G)$.*
- 2) *$G \in \mathcal{R}_{UER}$.*

Il convient de noter que pour l'établissement du diagramme de Venn, les cas qui étaient vides en réalité n'ont pas été pris en compte. Par exemple les graphes complets sont à la fois dans \mathcal{R}_{CEA} et \mathcal{R}_{UEA} , et les graphes sans arêtes sont à la fois dans \mathcal{R}_{CER} et \mathcal{R}_{UER} . Par conséquent, nous excluons les graphes sans arêtes et les graphes complets.

Théorème 2.32 ([41]). *Les classes \mathcal{R}_{CVR} , \mathcal{R}_{CEA} , \mathcal{R}_{CER} , \mathcal{R}_{UVR} , \mathcal{R}_{UER} et \mathcal{R}_{UEA} sont liées comme indiqué dans le diagramme de Venn de la Figure [20].*

Samodivkin [41], a poursuivi l'étude du diagramme de Venn de la Figure 2.4, et il a montré ce qui suit: un graphe $G \in \mathcal{R}_{CER} \cap \mathcal{R}_{UVR}$ si et seulement si $G = nK_{1,2}$ $n \geq 1$,

un graphe $G \in (\mathcal{R}_{CER} \cap \mathcal{R}_{UEA}) - \mathcal{R}_{UVR}$ si et seulement si chaque composante de G est une étoile d'ordre au moins 4, et un graphe $G \in \mathcal{R}_{CER} - \mathcal{R}_{UEA}$, si et seulement si $\delta(G) = 0$ et chaque composante de G est un sommet isolé ou une étoile d'ordre au moins 3. Il a également montré que pour les arbres d'ordre $n \geq 3$, $\mathcal{R}_{CER} - \mathcal{R}_{UEA} = \mathcal{R}_{UER} \cap \mathcal{R}_{UEA} = \mathcal{R}_{CVR} = \emptyset$.

2.5 Autres Opérations

La *contraction* de deux sommets adjacents u et v (ou l'identification de deux sommets adjacents) forme un nouveau sommet, désigné par \overline{uv} , dont le voisinage ouvert est $(N(u) \cap N(v)) - \{u, v\}$. Le graphe obtenu sera désigné par G_{uv} .

Jafari Rad et Volkmann [31, 34], ont étudié les graphes pour lesquels la contraction de toute arête diminue le nombre de domination Romaine, tandis que Jafari Rad a étudié dans [29], la domination Romaine critiques par subdivision d'arêtes. Dans [28], *les graphes bicritiques* ont été considérés par Jafari Rad, où la suppression de toute paire de sommets diminue le nombre de domination Romaine. Les propriétés des graphes bicritiques par rapport à la domination Romaine sont présentées et les arbres et unicycles sont caractérisés. D'un autre côté, Amraee et al. [3] ont introduit le paramètre *de domination Romaine stable*, défini comme étant le nombre minimum de sommets dont la suppression change le nombre de domination Romaine. Ils ont présenté différentes bornes sur le nombre de domination Romaine stable, et ils ont montré que le problème de décision correspondant au nombre de domination Romaine stable est NP-difficile. Bouchou et Blidia [9] ont associé un indice à savoir l'indice de criticité de la suppression et l'indice de criticité d'ajout, en calculant pour les chaînes et les cycles. Le nombre de subdivision de la domination Romaine $sd_{\gamma_R}(G)$ d'un graphe G a été introduit par, Atapour et al. [4], défini comme le nombre minimum d'arêtes qui doivent être subdivisées (chaque arête de G peut être subdivisée au plus une fois) afin d'augmenter le nombre de domination Romaine. Atapour et al. ont présenté des bornes supérieures sur $sd_{\gamma_R}(G)$ pour les graphes arbitraires G en termes de degré de sommets. Ils ont également montré que le nombre de subdivision de la domination Romaine d'un graphe peut être arbitrairement grand. Par ailleurs ils

ont présenté plusieurs conditions différentes sur G qui sont suffisantes pour impliquer que $1 \leq sd_{\gamma_R}(G) \leq 3$. De nouvelles bornes pour le nombre de subdivision de la domination Romaine est présenté par Khodkar et al. [35, 36]. Une caractérisation constructive des arbres tels que $sd_{\gamma_R}(T) = 2$ a été donné par Atapour et Al. [5]. Enfin, Amjadi et al. [2], ont introduit le nombre de subdivision de la domination Romaine du jeu d'un graphe G et ont présenté des bornes sur le nombre de subdivision de la domination Romaine du jeu dans les arbres.

2.6 Fonction de domination romaine faible

Pour la fonction de domination romaine faible, la documentation est inexistante, à l'exception du travail de Roushini et Kamalamb [39]. Ce dernier examine seulement l'effet de la suppression d'un sommet sur le nombre de domination romaine faible $\gamma_r(G)$.

CHAPITRE 3

EFFET DE LA SUPPRESSION D'UNE ARÊTE SUR LE NOMBRE DE DOMINATION ROMAINE FAIBLE

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de la fonction de domination romaine faible dans les graphes modifiés, à savoir, étude de l'effet de la suppression d'une arête sur le nombre de domination romaine faible $\gamma_r(G)$. Avant de présenter notre contribution, nous donnons un résultat important établi par Henning et Hedetniemi [26] et qui sera utile pour la suite.

Concernant les cycles et les chaînes. Il est clair que $\gamma_r(P_2) = \gamma_r(C_3) = 1$ et $\gamma_r(P_3) = 2$.

Proposition 3.1 (Henning et Hedetniemi [26]). *Pour $n \geq 4$, $\gamma_r(C_n) = \gamma_r(P_n) = \lceil \frac{3n}{7} \rceil$.*

3.1 Quelques résultats préliminaires:

Il est évident que l'ajout d'une arête de \overline{G} ne fait pas augmenter le paramètre $\gamma_r(G)$. Mais elle le fait diminuer au plus d'une unité, d'où la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$. Alors, pour toute arête $e = uv$ de $E(\overline{G})$ on a: $\gamma_r(G) - 1 \leq \gamma_r(G + e) \leq \gamma_r(G)$.*

Preuve. Puisque toute FDRF de G est aussi une FDRF de $G + uv$, alors on obtient la borne supérieure.

Soit $u, v \in V(G)$ et soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $\gamma_r(G + uv)$ -fonction. Examinons les cas suivants:

- Si $\{u, v\} \cap V_0 \neq \emptyset$, on peut supposer sans perte de généralité que u dans V_0 . Alors, la fonction g définie par $g(x) = f(x)$, pour tout $x \in V - \{u\}$ et $g(u) = 1$, est une FDRF de G de poids $\gamma_r(G + uv) + 1$, par conséquent $\gamma_r(G) \leq \gamma_r(G + uv) + 1$.

- Si $\{u, v\} \cap V_0 = \emptyset$, alors f reste une FDRF de G et donc $\gamma_r(G) \leq \gamma_r(G + uv)$. Ainsi, on obtient la borne inférieure \square

Il est à noter que la borne inférieure de la Proposition 3.2 est atteinte. Pour voir, considérons une étoile double $DS_{2,2}$, où $\gamma_r(DS_{2,2}) = 4$ et $\gamma_r(DS_{2,2} + e) = 3$, pour toute arête e de \overline{G} et pour la borne supérieure, on prend une étoile $K_{1,t}$ ($t \geq 3$), où $\gamma_r(K_{1,t}) = \gamma_r(K_{1,t} + e) = 2$ pour toute arête e de \overline{G} .

Par la Proposition 3.2, et le fait que $G - e$ est un graphe partiel de G , le Corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 3.3. *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$. Alors, pour toute arête e de $E(G)$ on a : $\gamma_r(G) \leq \gamma_r(G - e) \leq \gamma_r(G) + 1$*

En conséquence du Corollaire 3.3, un graphe G est dit γ_r -*ER-critique*, si pour toute arête e de $E(G)$, $\gamma_r(G - e) = \gamma_r(G) + 1$. À noter que, l'abréviation *ER* désigne Edge Removal (arête supprimée).

3.2 Propriétés des graphes γ_r -*ER*-critiques:

Dans cette partie, on donnera quelques propriétés des graphes G , dont la suppression de toute arête fait augmenter le nombre de domination romaine faible $\gamma_r(G)$.

Il est à noter en premier lieu qu'il existe une $\gamma_r(G)$ -fonction, qui affecte des valeurs positives non nulles aux sommets supports de tout graphe G . D'où, l'observation suivante,

Observation 3.4. *Si $S(G)$ est l'ensemble des sommets supports de G , alors il existe une $\gamma_r(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ telle que $S(G) \subseteq V_1 \cup V_2$.*

Définition 3.5. *Si $f = (V_0, V_1, V_2)$ est une $\gamma_r(G)$ -fonction, alors pour tout sommet v de $V_1 \cup V_2$, on définit $P_f(v)$ comme étant l'ensemble des sommets de V_0 , pour lesquels v est un voisin mobile. À noter qu'un sommet de V_0 possède au moins un voisin mobile.*

Le résultat suivant donne une condition nécessaire pour les graphes γ_r -ER-critiques.

Proposition 3.6. *Si G est un graphe γ_r -ER-critique, alors pour toute $\gamma_r(G)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ on a:*

- 1) $V_1 \cup V_2$ est un stable.
- 2) Si $v \in V_2$, alors pour tout $x \in P_f(v)$, $N(x) \cap V_0 = \emptyset$. En particulier $P_f(v)$ est stable.
- 3) Pour tous $u, v \in V_1 \cup V_2$, aucune arête ne lie un sommet de $P_f(v)$ à un sommet de $P_f(u)$.
- 4) Pour tout sommet $v \in V_0$, $|N(v) \cap (V_1 \cup V_2)| \leq 2$. En particulier, $|N(v) \cap V_1| \leq 2$, $|N(v) \cap V_2| \leq 1$ et si $N(v) \cap V_2 \neq \emptyset$, alors $N(v) \cap V_1 = \emptyset$.
- 5) Si de plus G est connexe, alors $|V_2| \leq 1$.

Preuve. Soient G est un graphe γ_r -ER-critique, et $f = (V_0, V_1, V_2)$ est une $\gamma_r(G)$ -fonction.

1) Supposons que $V_1 \cup V_2$ n'est pas un stable, et soient x, y deux sommets adjacents de $V_1 \cup V_2$. Alors, f reste une FDRF de $G - xy$, et donc, $\gamma_r(G - xy) \leq \gamma_r(G)$. D'où la contradiction. Ainsi, $V_1 \cup V_2$ est un stable.

2) Supposons le contraire, et soit $y \in V_0 \cap N(x)$. Alors, f reste une FDRF de $G - xy$. D'où, la contradiction. De plus, puisque $P_f(v) \subseteq V_0$, alors $N(x) \cap P_f(v) = \emptyset$. D'où $P_f(v)$ est un stable.

3) Supposons le contraire, qu'il existe une arête xy de G , telle que $x \in P_f(v)$ et $y \in P_f(u)$. Par (2), $u, v \in V_1$ et donc f reste une FDRF de $G - xy$. D'où, la contradiction.

4) Supposons qu'il existe un sommet $v \in V_0$ tel que $|N(v) \cap (V_1 \cup V_2)| \geq 3$. Parmi tous les voisins de v dans $V_1 \cup V_2$, soit w un voisin de v qui n'est pas mobile (sinon w est un voisin quelconque de v dans $V_1 \cup V_2$). Alors, f reste une FDRF de $G - vw$. D'où la contradiction. La deuxième propriété s'obtient similairement. Supposons Maintenant que $|N(v) \cap V_2| = 2$, et soient x, y les voisins de v dans V_2 . Il est clair que f reste une FDRF de $G - xv$, d'où la contradiction. Ainsi, $|N(v) \cap V_2| \leq 1$.

5) Supposons que G est connexe, et que $|V_2| \geq 2$. Soient x_1, x_2 deux sommets quelconque de V_2 . Alors, pour tout $x'_i \in P_f(x_i)$ on a $N(x'_i) \cap V_0 = \emptyset$ (d'après (2)), $N(x'_i) \cap V_1 = \emptyset$ et $N(x'_i) \cap V_2 = \{x_i\}$ (d'après (4)). Par ailleurs puisque $V_1 \cup V_2$ est un stable (d'après (1)), on a déduit que $N[x_i]$ induit un sous graphe connexe maximal, ce qui contredit la connexité de G . D'où $|V_2| \leq 1$. \square

Par la Proposition 3.6, et l'Observation 3.4, le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 3.7. *Si G est un graphe γ_r -ER-critique, alors l'ensemble des sommets supports est un stable.*

En se restreignant à la classe des arbres γ_r -ER-critiques, nous avons les propriétés supplémentaires suivantes.

Proposition 3.8. *Si T est un arbre γ_r -ER-critique, alors pour toute $\gamma_r(T)$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ on a :*

- 1) V_0 est un stable.
- 2) Pour tout $x \in V_0$, $d_T(x) \in \{1, 2\}$. Par ailleurs, si $d_T(x) = 2$, alors $N(x) \cap V_2 = \emptyset$.

Preuve. Soit T est un arbre γ_r -ER-critique, et soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ est une $\gamma_r(T)$ -fonction.

1) Maintenant, pour que aucune arête ne relie $P_f(v)$ et $P_f(u)$ pour tous deux sommets u, v de $V_1 \cup V_2$ (d'après (3) de la Proposition 3.6), alors V_0 est un stable.

2) découle de (4) de la Proposition 3.6. \square

Le résultat suivant donne une caractérisation des graphes γ_r -ER-critiques-connexes, lorsque l'ensemble V_2 d'une γ_r -fonction a un cardinal 1.

Proposition 3.9. *Si G est un graphe γ_r -ER-critique-connexe. Alors, G admet une γ_r -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ telle que $|V_2| = 1$, si et seulement si G est une étoile d'ordre au moins 4.*

Preuve. Soit $V_2 = \{x\}$, montrons que $V_1 = \emptyset$. Supposons le contraire que $V_1 \neq \emptyset$. Par (2) de la Proposition 3.6 pour tout $y \in P_f(x)$, $N(y) \cap V_0 = \emptyset$. Mais puisque G est connexe, alors $N(y) \cap V_1 \neq \emptyset$, ce qui contredit (4) de la Proposition 3.6, d'où $V_1 = \emptyset$. Maintenant $P_f(x)$ est un stable, alors G est une étoile $K_{1,t}$ centrée en x . Par ailleurs, puisque G est γ_r -ER-critique on a $t \neq 2$. Aussi puisque pour $t = 1$, on a $V_2 = \emptyset$, alors on a déduit que $t \geq 3$. La réciproque est simple à voir \square

Notre objectif est la caractérisation des arbres γ_r -ER-critiques. Pour cela, nous définissons la famille \mathcal{H} de tous les arbres T , qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_p , ($p \geq 1$) où T_1 est une chaîne P_2 et $T = T_p$. Si $p \geq 2$, pour tout i avec $1 \leq i \leq p - 1$, alors l'arbre T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i par les opérations ci dessous. On supposera que l'un des sommets de T_1 est un sommet support et l'autre une feuille.

- **Opération \mathcal{O}_1 :** Attacher une chaîne $P_5 = x_1x_2x_3x_4x_5$ en ajoutant une arête entre x_5 et un sommet support x de T_i (Voir Figure 3.1).

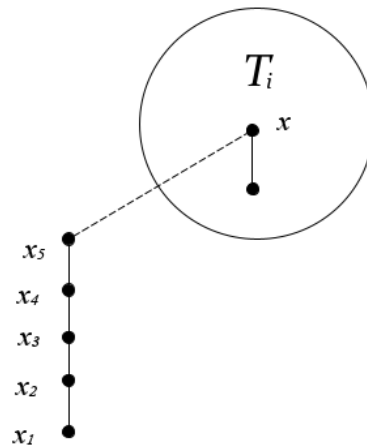
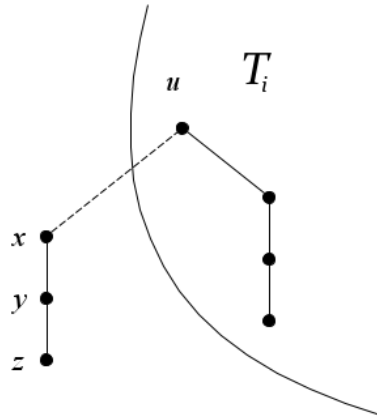


FIGURE 3.1. **Opération \mathcal{O}_1**

- **Opération \mathcal{O}_2 :** Ajouter une chaîne $P_3 = xyz$ en l'attachant par une arête xu à un sommet u de T_i appartenant à une chaîne pendante de longueur 3 (Voir Figure 3.2).

FIGURE 3.2. Opération \mathcal{O}_2

Avant de présenter le résultat principal, commençons par donner des lemmes, sur le nombre de domination romaine faible d'un graphe lorsqu'une chaîne pendante est attachée au graphe.

Si f est une FDRF dans un graphe G et H est un sous-graphe de G , alors nous notons la restriction de f sur H par $f|_{V(H)}$.

Lemme 3.10. *Si G est un graphe obtenu à partir d'un graphe G' , en ajoutant une chaîne $P_5 = x_1x_2x_3x_4x_5$ attachée par une arête x_5x à un sommet support x de G' . Alors, $\gamma_r(G) = \gamma_r(G') + 2$.*

Preuve. Soit f une $\gamma_r(G)$ -fonction telle que $f(x) > 0$, par l'Observation 3.4. Il est clair que $2 \leq f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) \leq 3$. Maintenant, si $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) = 2$, alors on a sans perte de généralité, $f(x_2) = f(x_4) = 1$ et $f(x_1) = f(x_3) = f(x_5) = 0$. Ainsi, $f|_{V(G')}$ est une FDRF de G' de poids $\gamma_r(G) - 2$. Si $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) = 3$, alors il est toujours possible de réaffecter les poids aux sommets $x, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ de façon à avoir $f(x) = 2, f(x_2) = f(x_4) = 1$ et $f(x_1) = f(x_3) = f(x_5) = 0$. Ainsi, on se retourne au cas précédent. D'où, $\gamma_r(G') \leq \gamma_r(G) - 2$. L'égalité est atteinte par le fait que toute $\gamma_r(G')$ -fonction g telle que $g(x) > 0$, peut être étendu à une FDRF de G en affectant la valeur 1 à x_2, x_4 , et la valeur 0 à x_1, x_3, x_5 . D'où, $\gamma_r(G) = \gamma_r(G') + 2$. \square

Définition 3.11. *Un sommet x d'un graphe G est dit bon, s'il existe une $\gamma_r(G)$ -fonction f telle que $f(x) > 0$. Sinon, il est dit mauvais. Par ailleurs, un bon sommet x de G est dit 1-bon, si $f(x) = 1$ pour toute $\gamma_r(G)$ -fonction f .*

Lemme 3.12. *Si G est un graphe obtenu à partir d'un graphe G' , en ajoutant une chaîne $P_2 = x_1x_2$ attachée par une arête x_2x à un sommet x , où x est un support ou bien appartient à une chaîne pendante de longueur 3 dans G' . Alors, $\gamma_r(G) = \gamma_r(G') + 1$.*

Preuve. L'inégalité $\gamma_r(G) \leq \gamma_r(G') + 1$, est simple à voir. Maintenant, soit f une $\gamma_r(G)$ -fonction telle que $f(x) > 0$. Il est clair qu'une telle fonction existe. Par ailleurs, on a $f(x_1) + f(x_2) = 1$. Ainsi, $f|_{V(G')}$ est une FDRF de G' de poids $\gamma_r(G) - 1$. D'où, $\gamma_r(G) = \gamma_r(G') + 1$. \square

Lemme 3.13. *Si G est un graphe obtenu à partir d'un graphe G' , en ajoutant une chaîne $P_4 = x_1x_2x_3x_4$ attachée par une arête x_4x à un sommet support x de G' . Alors, $\gamma_r(G) = \gamma_r(G') + 2$.*

Preuve. Soit f une $\gamma_r(G)$ -fonction affectant des poids positifs aux sommets supports de G . Par l'Observation 3.4, $f(x_2) > 0$ et $f(x) > 0$. Examinons les situations suivantes.

- Si $f(x_2) = 2$, alors sans perte de généralité $f(x_1) = f(x_3) = 0$. Maintenant si $f(x_4) > 0$, alors on peut réaffecter aux sommets x_4 et x les valeurs 0 et $\max\{f(x), 2\}$, respectivement. Donc, on peut supposer que $f(x_4) = 0$. D'où, $f|_{V(G')}$ est une FDRF de G' . Ainsi, $\gamma_r(G') \leq \gamma_r(G) - 2$.
 - Si $f(x_2) = 1$, alors on a $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) \geq 2$. Et puisque la valeur minimum 2 est possible, alors $f|_{V(G')}$ est une FDRF de G' . D'où, $\gamma_r(G') \leq \gamma_r(G) - 2$.
- L'égalité est atteinte par le fait que $\gamma_r(G) \leq \gamma_r(G') + 2$.

\square

Lemme 3.14. *Si G est un graphe obtenu à partir d'un graphe G' , en ajoutant une chaîne $P_3 = x_1x_2x_3$ attachée par une arête x_3x à un sommet x de G' . Alors, $\gamma_r(G) \leq \gamma_r(G') + 2$, avec égalité atteinte, si x est un mauvais sommet ou bien x est un sommet support 1-bon de G' .*

Preuve. L'inégalité $\gamma_r(G) \leq \gamma_r(G') + 2$ est simple à voir. Supposons maintenant que x est un mauvais sommet, ou bien un sommet support 1-bon de G' et que $\gamma_r(G) < \gamma_r(G') + 2$. Soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $\gamma_r(G)$ -fonction, telle que $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ soit la plus petite possible. D'après le choix de f , on a $1 \leq f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \leq 2$. Supposons d'abord que $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = 1$. Alors on a $f(x_1) = f(x_3) = 0$ et $f(x_2) = 1$. Il est clair que x est l'unique voisin mobile de x_3 . Donc, $f|_{V(G')}$ est une FDRF de G' de poids $\gamma_r(G) - 1$. D'où, $\gamma_r(G') \leq \gamma_r(G) - 1 < \gamma_r(G') + 2 - 1 = \gamma_r(G') + 1$. Par conséquent $\gamma_r(G') = \gamma_r(G) - 1$, et donc, $f|_{V(G')}$ est une $\gamma_r(G')$ -fonction, tel que x est affecté une valeur positive par $f|_{V(G')}$. Il s'ensuit que x est un bon sommet de G' . Ainsi x est un support de G' . Par ailleurs, puisque x protège x_3 par f , x est affecté la valeur 2, et donc x n'est pas un 1-bon sommet de G' , contradiction. Supposons maintenant que $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = 2$, indépendamment des valeurs affectées à x_1, x_2, x_3 par f , on peut se ramener au cas précédent par $f(x_1) = f(x_3) = 0$, $f(x_2) = 1$, et $f(x) = \min\{f(x) + 1, 2\}$. Par conséquent, $\gamma_r(G) = \gamma_r(G') + 2$. □

Lemme 3.15. *Si G est un graphe obtenu à partir d'un graphe G' , en ajoutant une chaîne $P_3 = x_1x_2x_3$ attachée par une arête x_3x à un sommet x de G' appartient à une chaîne pendante $xy_3y_2y_1$. Alors, $\gamma_r(G) = \gamma_r(G') + 1$.*

Preuve. Soit f' une $\gamma_r(G')$ -fonction, telle que $f'(y_3) + f'(y_2) + f'(y_1)$ soit minimum. Par ce choix on a forcément y_3, y_2, y_1 affecter les valeurs 0, 1 et 0, ou bien 0, 0 et 1 respectivement. Dans tous les cas, $f'(x) > 0$. Donc, f' peut être étendu à une FDRF de G , en affectant la valeur 1 à x_2 , et la valeur 0 à x_1, x_3 . Par conséquent, $\gamma_r(G) \leq \gamma_r(G') + 1$. Pour l'autre inégalité, soit f une $\gamma_r(G)$ -fonction telle que $f(x_3) + f(x_2) + f(x_1)$ soit minimum. Il est clair que f affecte les valeurs 0, 1 et 0 ou bien 1, 0 et 0 à x_1, x_2, x_3 respectivement. D'où $f(x) > 0$, et donc $f|_{V(G')}$ reste une FDRF de G' . Par conséquent, $\gamma_r(G') \leq \gamma_r(G) - 1$ et l'égalité est obtenue. □

Lemme 3.16. *Si $T \in \mathcal{H}$ alors, T est un arbre γ_r -ER-critique.*

Preuve. Soit T un arbre de \mathcal{H} . Alors, T est obtenu à partir d'une séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_p ($p \geq 1$), tel que T_1 est une chaîne P_2 , $T = T_p$, et si $p \geq 2$, pour tout i avec

$1 \leq i \leq p - 1$, alors l'arbre T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i par l'une des deux opérations \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 . Nous utilisons une induction sur le nombre d'opérations effectuées pour construire T . Si $p = 1$, alors $T = P_2$ ce qui établit le cas de base.

Soit $p \geq 2$, et supposons que le résultat est valide pour tout arbre $T \in \mathcal{H}$ pouvant être construits par une séquence de longueur au plus $p - 1$. Soit T un arbre de \mathcal{H} obtenu à partir de $T' = T_{p-1}$ en utilisant l'opération \mathcal{O}_1 ou \mathcal{O}_2 . Par induction sur $T' \in \mathcal{H}$, on sait que T' est γ_r -*ER-critique*. Montrons alors que T est γ_r -*ER-critique*.

Cas 1. T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_1 .

Par le Lemme 3.10, on a $\gamma_r(T) = \gamma_r(T') + 2$. Soit $e \in E(T)$ et examinons les sous cas suivants selon la suppression de e .

Cas 1.1. $e = xx_5$.

Alors, $T - e$ donne deux sous arbres une chaîne P_5 et un arbre T' , et donc

$$\gamma_r(T - xx_5) = \gamma_r(T') + \gamma_r(P_5) = \gamma_r(T') + 3 = \gamma_r(T) + 1.$$

D'où, $\gamma_r(T' - xx_5) > \gamma_r(T)$.

Cas 1.2. $e = x_4x_5$.

Alors, $T - e$ donne une chaîne P_4 , et un arbre T_1 obtenu à partir de T' en ajoutant un sommet x_5 attaché à un sommet support x de T' . D'où,

$$\gamma_r(T - x_4x_5) = \gamma_r(T_1) + \gamma_r(P_4) = \gamma_r(T_1) + 2. \quad (3.1)$$

Montrons que $\gamma_r(T_1) = \gamma_r(T') + 1$. L'inégalité $\gamma_r(T_1) \leq \gamma_r(T') + 1$ est évidente. Supposons maintenant que $\gamma_r(T_1) < \gamma_r(T') + 1$. Alors, $\gamma_r(T_1) = \gamma_r(T')$. Soit $h = (V_0, V_1, V_2)$ une $\gamma_r(T_1)$ -fonction telle que $h(x) = 2$, (car x est un support fort). Ainsi, $h(x_5) = 0$ et donc $h|_{V(T')}$ est une $\gamma_r(T')$ -fonction où x est affecté la valeur 2. Puisque T' est un arbre γ_r -*ER-critique*, alors par la Proposition 3.9, T' est une étoile d'ordre au moins 4, ce qui contredit le fait que $T' \in \mathcal{H}$. D'où, $\gamma_r(T_1) = \gamma_r(T') + 1$. Alors, (3.1) devient

$$\gamma_r(T - x_4x_5) = \gamma_r(T') + 3 = \gamma_r(T) + 1.$$

D'où, $\gamma_r(T - x_4x_5) > \gamma_r(T)$.

Cas 1.3. $e = x_3x_4$.

Alors, $T - e$ donne une chaîne P_3 et un arbre T_2 obtenu à partir de T' en ajoutant une chaîne $P_2 = x_4x_5$ attachée par une arête xx_5 à un sommet support x de T' . Par le Lemme 3.12, on a

$$\gamma_r(T - x_3x_4) = \gamma_r(T_2) + \gamma_r(P_3) = \gamma_r(T_2) + 2 = \gamma_r(T') + 3 = \gamma_r(T) + 1.$$

D'où, $\gamma_r(T - x_3x_4) > \gamma_r(T)$.

Cas 1.4. $e = x_3x_2$.

Alors, $T - e$ donne une chaîne P_2 et un arbre T_3 obtenu à partir de T' en ajoutant une chaîne $P_3 = x_3x_4x_5$ attachée par une arête xx_5 à un sommet support x de T' . Donc $\gamma_r(T - x_3x_2) = \gamma_r(T_3) + \gamma_r(P_2) = \gamma_r(T_3) + 1$. Par ailleurs, puisque T' est γ_r -ER-critique différent d'une étoile d'ordre au moins 4, alors pour tout $\gamma_r(T')$ -fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ on a $V_2 = \emptyset$, et donc $f(x) \neq 2$. Ainsi x est un support 1-bon. D'après le Lemme 3.14, on a

$$\gamma_r(T - x_3x_2) = \gamma_r(T_3) + 1 = \gamma_r(T') + 3 = \gamma_r(T) + 1.$$

D'où, $\gamma_r(T - x_2x_3) > \gamma_r(T)$.

Cas 1.5. $e = x_2x_1$.

Alors, $T - e$ donne deux sous arbres dont l'un est trivial contenant x_1 et l'autre noté T_4 obtenu à partir de T' en ajoutant une chaîne $P_4 = x_2x_3x_4x_5$ attachée par une arête xx_5 à un sommet support x de T' . D'après le Lemme 3.13, on a

$$\gamma_r(T - e) = \gamma_r(T_4) + 1 = \gamma_r(T') + 3 = \gamma_r(T) + 1.$$

D'où, $\gamma_r(T - x_2x_1) > \gamma_r(T)$.

Cas 1.6. $e \in E(T')$.

Notons par x' la feuille de x et considérons les deux situations suivantes :

Cas 1.6.1. $e \in E(T') - \{xx'\}$.

Alors, $T - e$ donne deux sous arbres T'_2 et T'_3 et donc $\gamma_r(T - e) = \gamma_r(T'_3) + \gamma_r(T'_2)$. Sans perte de généralité, supposons que $x \in V(T'_3)$. A noter que x reste un support dans T'_3 . Dans ce cas, T'_3 est obtenu à partir d'un arbre T'_1 (où x est support de T'_1) en ajoutant une chaîne $P_5 = x_1x_2x_3x_4x_5$ attachée par une arête xx_5 à x . Donc par le Lemme 3.10, $\gamma_r(T'_3) = \gamma_r(T'_1) + 2$. Il est à noter que les deux composantes connexes de $T' - e$ sont

précisément T'_1 et T'_2 D'où, $\gamma_r(T' - e) = \gamma_r(T'_1) + \gamma_r(T'_2) = \gamma_r(T') + 1$, car T' est γ_r -*ER-critique*. Ainsi, on obtient

$$\gamma_r(T - e) = \gamma_r(T'_3) + \gamma_r(T'_2) = \gamma_r(T'_1) + 2 + \gamma_r(T'_2) = \gamma_r(T' - e) + 2 = \gamma_r(T') + 3 = \gamma_r(T) + 1.$$

D'où, $\gamma_r(T - e) > \gamma_r(T)$.

Cas 1.6.2. $e = xx'$.

Alors, $T - e$ donne deux sous arbres dont l'un est trivial et l'autre noté T^* obtenu à partir de $T' - x'$ en ajoutant une chaîne $P_5 = x_1x_2x_3x_4x_5$ attachée par x_5x au sommet x de $T' - x'$. Il est clair que $\gamma_r(T - xx') = \gamma_r(T^*) + 1$. Aussi, il est simple de voir que $\gamma_r(T^*) \geq \gamma_r(T' - x') + 2$. Maintenant vu que T' est γ_r -*ER-critique*, on aura $\gamma_r(T' - xx') = \gamma_r(T' - x') + 1$. Ainsi,

$$\gamma_r(T - xx') = \gamma_r(T^*) + 1 \geq \gamma_r(T' - x') + 3 = \gamma_r(T' - xx') + 2 = \gamma_r(T') + 3 = \gamma_r(T) + 1.$$

D'où, $\gamma_r(T - xx') = \gamma_r(T) + 1$.

Cas 2. T est obtenu à partir de T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_2 .

Soit $uu_1u_2u_3$ une chaîne pendante de longueur 3 contenant u dans T' . Par le Lemme 3.15, $\gamma_r(T) = \gamma_r(T') + 1$. Soit e une arête quelconque de $E(T)$. Examinons les sous cas suivants:

Cas 2.1. $e \in E(T') - \{uu_1, u_1u_2, u_2u_3\}$.

Alors, $T - e$ donne deux sous arbres T'_2 et T'_3 et donc $\gamma_r(T - e) = \gamma_r(T'_3) + \gamma_r(T'_2)$. Sans perte de généralité, $u \in V(T'_3)$. A noter que $uu_1u_2u_3$, reste une chaîne pendante de longueur 3 dans T'_3 . Donc, T'_3 peut être considéré comme étant un arbre obtenu à partir d'un arbre T'_1 en ajoutant une chaîne $P_3 = xyz$ attachée par une arête xu au sommet $u \in V(T'_1)$. Par le Lemme 3.15, $\gamma_r(T'_3) = \gamma_r(T'_1) + 1$. On remarque que $T' - e$ est l'union de T'_1 et T'_2 . D'où, $\gamma_r(T' - e) = \gamma_r(T'_1) + \gamma_r(T'_2)$ Puisque, T' est γ_r -*ER-critique* on a $\gamma_r(T' - e) = \gamma_r(T'_1) + \gamma_r(T'_2) = \gamma_r(T') + 1$. Ainsi,

$$\gamma_r(T - e) = \gamma_r(T'_3) + \gamma_r(T'_2) = \gamma_r(T'_1) + 1 + \gamma_r(T'_2) = \gamma_r(T') + 2 = \gamma_r(T) + 1.$$

D'où, $\gamma_r(T - e) > \gamma_r(T)$.

Cas 2.2. $e = uu_1$, par symétrie $e = xu$.

Alors, $T - e$ donne deux sous arbres une chaîne $P_3 = u_1u_2u_3$ et un arbre isomorphe à T' .

Donc,

$$\gamma_r(T - e) = \gamma_r(T') + \gamma_r(P_3) = \gamma_r(T') + 2 = \gamma_r(T) + 1.$$

D'où, $\gamma_r(T' - e) > \gamma_r(T)$.

Cas 2.3. $e = u_1u_2$, par symétrie $e = xy$.

Alors, $T - e$ donne deux sous arbres, une chaîne $P_2 = u_2u_3$ et un arbre T_1 . D'où $\gamma_r(T - e) = \gamma_r(T_1) + \gamma_r(P_2) = \gamma_r(T_1) + 1$. Puisque u est un support dans T_1 , Alors T_1 est obtenu à partir d'un arbre T'_1 en ajoutant une chaîne $P_3 = xyz$ attachée par une arête xu à un sommet support de T'_1 . Il est facile de voir que $\gamma_r(T'_1) \leq \gamma_r(T_1) - 1$. A noter aussi que $T' - e$ est l'union de T'_1 et la chaîne $P_2 = u_2u_3$. Ainsi,

$$\gamma_r(T - e) = \gamma_r(T_1) + \gamma_r(P_2) \geq \gamma_r(T'_1) + 1 + \gamma_r(P_2) = \gamma_r(T' - e) + 1 > \gamma_r(T') + 1 = \gamma_r(T).$$

D'où, $\gamma_r(T - e) > \gamma_r(T)$.

Cas 2.4. $e = u_2u_3$, par symétrie $e = zy$.

Alors, $T - e$ donne un arbre trivial contenant u_3 et un arbre T_2 . D'où, $\gamma_r(T - e) = \gamma_r(T_2) + 1$. Il est à remarquer que T_2 est un arbre obtenu à partir d'un arbre isomorphe à T' en ajoutant une chaîne $P_2 = u_1u_2$ attachée par une arête uu_1 à un sommet u appartient à un chaîne pendant de longueur 3, $uxyz$. Par le Lemme 3.12, $\gamma_r(T_2) = \gamma_r(T') + 1$. Ainsi,

$$\gamma_r(T - e) = \gamma_r(T_2) + 1 = \gamma_r(T') + 2 = \gamma_r(T) + 1$$

D'où, $\gamma_r(T - e) > \gamma_r(T)$.

Par conséquent pour toute arête $e \in E(T)$ on a $\gamma_r(T - e) > \gamma_r(T)$, c'est à dire, T est une γ_r -ER-critique. \square

Théorème 3.17. *Un arbre, non trivial T est γ_r -ER-critique si et seulement si $T = K_{1,t}$ ($t \geq 3$) ou $T \in \mathcal{H}$.*

Preuve. Pour la condition suffisante si $T \in \mathcal{H}$, alors par le Lemme 3.16, T est γ_r -ER-critique et si $T = K_{1,t}$ ($t \geq 3$), il est clair alors que T est aussi un arbre γ_r -ER-critique. Pour montrer la nécessité, soit T un arbre γ_r -ER-critique et soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une $\gamma_r(T)$ -fonction. Par la Proposition 3.6, $|V_2| \leq 1$. Si $|V_2| = 1$, alors d'après la Proposition 3.9, T est une étoile d'ordre au moins 4. Pour la suite, on peut supposer que $V_2 = \emptyset$ pour toute $\gamma_r(T)$ -fonction f . En conséquence, T ne possède pas de supports forts. On utilise une induction sur n . Si $n = 2$, alors $T = P_2$ appartenant à \mathcal{H} , ce qui établit le cas de

base. Soit $n \geq 3$, et supposons que tout arbre γ_r -ER-critique T' , d'ordre $n' \leq n$ est dans \mathcal{H} . Soit T un arbre γ_r -ER-critique d'ordre n . Puisque P_3 n'est pas γ_r -ER-critique et $V_2 = \emptyset$ pour toute $\gamma_r(T)$ -fonction, on peut supposer que $\text{diam}(T) \neq 2$. Par ailleurs, par le Corollaire 3.7, $\text{diam}(T) \neq 3$. Ainsi, soit $\text{diam}(T) \geq 4$. Supposons que $\text{diam}(T) = 4$, et soit x le sommet centre de T . Puisque T ne possède pas de supports adjacents, ni de supports forts, alors T est une étoile subdivisée SS_t ($t \geq 2$), où $\gamma_r(T) = t + 1$. En considérant une arête e incidente à x , on peut voir que $\gamma_r(T - e) = \gamma_r(T)$. Maintenant si $\text{diam}(T) = 5$, alors soit x, y les centres de T . Par le Corollaire 3.7, tout voisin de x sauf y est un support et vice versa, tout voisin de y sauf x est aussi un support. D'où, T est un arbre de la figure ci-dessous, où $\gamma_r(T) = |S(T)| + 1$. On peut voir que $\gamma_r(T - xz) = \gamma_r(T)$. D'où, $\text{diam}(T) \geq 6$. Il est à noter que le plus petit arbre γ_r -ER-critique de diamètre 6, est la chaîne P_7 qui

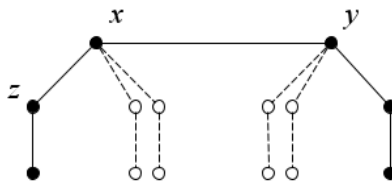


FIGURE 3.3. Un arbre T de $\text{diam}(T) = 5$.

appartient à la famille \mathcal{H} , car il est obtenu à partir de $T_1 = P_2$ en utilisant l'opération \mathcal{O}_1 . Donc, on peut supposer que $n \geq 8$. Posons $\text{diam}(T) = k$ et soit $P = x_0x_1\dots x_k$ une chaîne diamétrale dans T . Enracinons T vers x_k . Notons que $d_T(x_1) = 2$ (puisque T ne possède pas de supports forts). Aussi, x_2 n'est pas un support par le Corollaire 3.7. Montrons maintenant que $d_T(x_2) = 2$. Supposons que $d_T(x_2) \geq 3$ et soit y_1 un fils de x_2 tel que $y_1 \neq x_1$. On a $f(x_1) = f(y_1) = 1$ et par la Proposition 3.6, $f(x_0) = f(x_2) = 0$. Il est clair qu'aucun fils de x_2 n'est un voisin mobile pour lui, ce qui donne $f(x_3) = 1$. Ainsi, $\gamma_r(T - x_1x_2) = \gamma_r(T)$, d'où la contradiction. Donc $d_T(x_2) = 2$. Pour la suite, on distingue les cas suivants:

Cas 1. $d_T(x_3) \geq 3$.

Notons que $f(x_3) = f(x_1) = 1$, et $f(x_2) = f(x_0) = 0$. Il est clair que si x_3 possède un fils support, alors un tel fils sera affecté la valeur 1, ce qui contredit la Proposition 3.6. D'où

x_3 est un support, ou bien x_3 appartient à des chaînes pendantes de longueur 3. Si x_3 est un support, alors ni x_1 ni x_2 ne sont des voisins mobiles pour x_3 , ce qu'est impossible. On peut supposer maintenant que x_3 appartient à au moins une chaîne pendante de longueur 3, disons $x_3 y_2 y_1 y_0$. Soit $T' = T - T_{x_2}$. Alors, par le Lemme 3.15, $\gamma_r(T') = \gamma_r(T) - 1$. Montrons maintenant que T' est γ_r -ER-critique. Supposons le contraire, qu'il existe une arête e de $E(T')$ telle que $\gamma_r(T' - e) = \gamma_r(T')$. Si $d_{T'}(x_3) \geq 3$ ou ($d_{T'}(x_3) = 2$ et $e \in E(T') - \{x_3 y_2, y_1 y_0\}$), alors il existe une $\gamma_r(T' - e)$ -fonction f' telle que $f'(x_3) > 0$, et une telle fonction peut être étendue à une FDRF de $T - e$ en affectant à x_0, x_2 la valeur 0 et à x_1 la valeur 1. D'où $\gamma_r(T - e) \leq \gamma_r(T' - e) + 1 = \gamma_r(T') + 1 = \gamma_r(T)$, ce qui contredit le fait que T est γ_r -ER-critique. Il reste à examiner les cas où $d_{T'}(x_3) = 2$ et $e \in \{x_3 y_2, y_1 y_0\}$. Supposons d'abord que $e = x_3 y_2$. Donc, x_3 est une feuille de $T' - e$. A noter que $T' - e$ est une forêt à deux composantes connexes, dont l'une est une chaîne $P_3 = y_2 y_1 y_0$. Puisque x_3 est une feuille de $T' - e$, alors il existe une $\gamma_r(T' - e)$ -fonction telle que $f'(x_3) = 0$ et donc $f'(x_4) > 0$. On supposera aussi sans perte de généralité, $f'(y_2) = f'(y_1) = 1$ et $f'(y_0) = 0$. Définissons la fonction g sur $V(T)$ par $g(x_1) = g(x_3) = 1$, $g(y_2) = g(x_2) = g(x_0) = 0$ et $g(x) = f'(x)$ ailleurs. Alors, g est une FDRF de T de poids $\gamma_r(T') + 1$. Donc, g est $\gamma_r(T)$ -fonction avec $g(x_4) > 0$ et $g(x_3) > 0$, ce qui contredit la Proposition 3.6. Supposons maintenant que $e = y_1 y_0$. Donc, $T' - e$ est constitué d'un sommet isolé et un arbre T^* ayant y_2 est un sommet support. Soit f' une $\gamma_r(T' - y_1 y_0)$ -fonction telle que $f'(y_2) > 0$ et qui affecte à y_0 la valeur 1. Maintenant si $f'(y_2) = 2$, alors évidemment $f'(x_3) = f'(y_1) = 0$. Dans ce cas, la fonction g définie sur $V(T)$ par $g(x_3) = g(y_1) = g(x_1) = 1$, $g(x_2) = g(x_0) = g(y_2) = g(y_0) = 0$ et $g(x) = f'(x)$ ailleurs est une FDRF de T de poids $\gamma_r(T) - 1$, ce qu'est impossible. Supposons maintenant que $f'(y_2) = 1$, si $f'(x_3) = 1$, alors la fonction g définie sur $V(T)$ par $g(x_3) = 2$, $g(y_1) = g(x_1) = 1$, $g(x_2) = g(x_0) = g(y_2) = g(y_0) = 0$ et $g(x) = f'(x)$ ailleurs est une $\gamma_r(T)$ -fonction telle que $V_2^g \neq \emptyset$, ce qui donne une contradiction, car T n'est pas une étoile. Maintenant si $f'(x_3) = 0$, alors dans ce cas x_4 est un voisin mobile de x_3 par f' , donc $f'(x_4) > 0$. Ainsi la fonction g définie sur $V(T)$ par $g(x_3) = g(x_1) = g(y_1) = 1$, $g(x_0) = g(x_2) = g(y_2) = g(y_0) = 0$ et $g(x) = f'(x)$ ailleurs une $\gamma_r(T)$ -fonction avec $g(x_4) > 0$ et $g(x_3) > 0$, ce qui contredit la Proposition 3.6. Par conséquent, T' est γ_r -ER-

critique. Puisque, T' n'est pas une étoile donc, $T \in \mathcal{H}$ car il est obtenu par T' en utilisant l'opération \mathcal{O}_2 .

Cas 2. $d_T(x_3) = 2$. La preuve de ce cas repose sur les deux faits suivants

Fait 1: $d_T(x_4) = 2$.

Preuve de Fait 1: Supposons le contraire que $d_T(x_4) \geq 3$. Par le choix de f , la Proposition 3.6, et le Corollaire 3.7, $f(x_5) = f(x_3) = f(x_1) = 1$, et $f(x_2) = f(x_0) = f(x_4) = 0$. Il est clair que x_4 n'est pas un support. De plus si x_4 possède un fils support x , alors x ne peut être un voisin mobile de x_4 et donc $\gamma_r(T - x_4x) = \gamma_r(T)$, ce qui contredit le fait que T est γ_r -ER-critique. D'où tout fils de x_4 a une profondeur 2 ou bien 3. A noter que tout voisin de x_4 est affecté la valeur 1. Donc si x est un fils de x_4 de profondeur 2 alors, tous ses fils sont des supports et seront affectés la valeur 1, ce qui contredit la Proposition 3.6. Ainsi, tout fils de x est de profondeur 3. Vu les cas précédents, x_4 appartient à des chaînes pendantes de longueur 4. (Voir Figure 3.4). Donc, il est facile de voir que $\gamma_r(T - x_2x_1) = \gamma_r(T)$, d'où la contradiction.

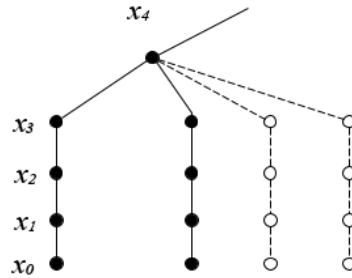


FIGURE 3.4. Représente l'arbre T_{x_4} .

Par conséquent, $d_T(x_4) = 2$.

Fait 2: x_5 est un sommet support de T .

Preuve de Fait 2: Supposons le contraire que x_5 n'est pas un sommet support. Par le choix de f , la Proposition 3.6, et le Corollaire 3.7, on a $f(x_0) = f(x_2) = f(x_4) = 0$ et $f(x_1) = f(x_3) = f(x_5) = 1$. Par ailleurs, f affecte la valeur 0 à tout voisin de x_5 . Si x_5 est un voisin mobile de x_4 , alors $\gamma_r(T - x_1x_2) = \gamma_r(T)$, contradiction. Donc, x_4 possède un voisin mobile autre que x_5 . D'où, $d_T(x_5) \geq 3$ (Sinon x_5 peut être un voisin mobile de

x_4). De plus puisque f affecte un 1 aux supports, x_5 ne peut avoir de fils supports (vu que $f(x_5) = 1$). D'où, tout fils de x_5 a une profondeur au moins 2 et au plus 4. Rappelons que T ne possède pas de supports forts. Examinons les sous cas suivants.

Cas (I). x_5 possède un fils x de profondeur 2, (Voir Figure 3.5). Ainsi, $T_x = SS_t$ ($t \geq 1$)

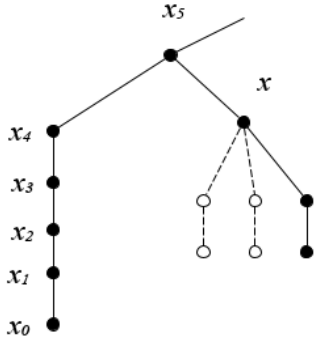


FIGURE 3.5. Représente l'arbre T_{x_5} du Cas(I).

et dans ce cas x ne peut être protégé que par x_5 . Mais x_4 peut être aussi protégé par x_5 , contradiction.

Cas (II). x_5 possède un fils x de profondeur 3, (Voir Figure 3.6). Soit y un fils de x de

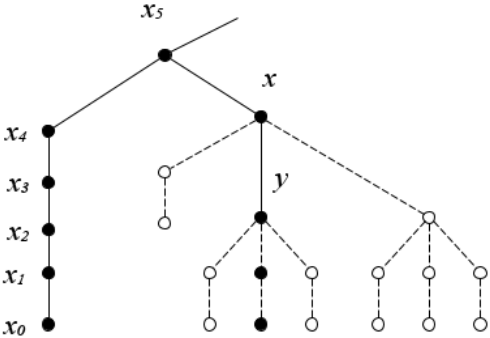


FIGURE 3.6. Représente l'arbre T_{x_5} du Cas(II).

profondeur 2, alors $T_y = SS_t$ ($t \geq 1$) et dans ce cas x est le seul voisin mobile de y par f . Ainsi, $f(x) = 1$ ce qui contredit la Proposition 3.6, car $f(x_5) = 1$.

Cas (III). Tout fils de x_5 est de profondeur 4.

Vu les cas précédents considérés x_5 appartient à des chaînes pendantes de longueur 5 (Voir la Figure 3.7). Rappelons que x_5 n'est pas un voisin mobile de x_4 et par analogie à aucun

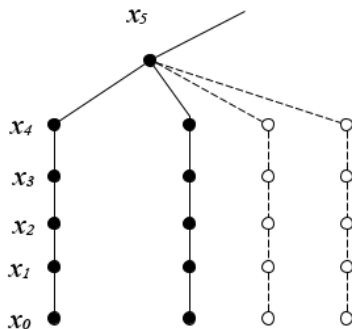


FIGURE 3.7. Représente l'arbre T_{x_5} du Cas(III).

de ses fils. Donc, x_5 protège uniquement x_6 . Mais puisque x_5 n'est pas un support, tous les voisins de x_6 sont affectés 1 par f . On conclut de ce fait que x_5 peut être mobile pour x_4 , d'où la contradiction.

Par conséquent, x_5 est un support. Soit w la feuille de x_5 .

Posons $T' = T - T_{x_4}$. Alors par le Lemme 3.10, $\gamma_r(T) = \gamma_r(T') + 2$. Montrons maintenant que T' est γ_r -ER-critique. Supposons le contraire et soit e une arête de T' telle que $\gamma_r(T' - e) = \gamma_r(T')$. Supposons d'abord que $e \neq wx_5$. Dans ce cas, $T' - e$ donne deux sous arbres, dont l'un contient x_5 comme sommet support. Donc, il existe une $\gamma_r(T' - e)$ -fonction f' tel que $f'(x_5) = 1$. Définissons la fonction f sur $V(T)$ par $f(x_3) = f(x_1) = 1$, $f(x_0) = f(x_2) = f(x_4) = 0$ et $f(x) = f'(x)$ ailleurs. Alors, f est une FDRF de $T - e$, de poids $\gamma_r(T') + 2$. D'où, $\gamma_r(T - e) \leq \gamma_r(T') + 2 = \gamma_r(T)$, ce qui contredit le fait que T est γ_r -ER-critique. Supposons maintenant que $e = wx_5$. Dans ce cas, $T' - e$ donne deux sous arbres dont l'un est trivial contenant w , et l'autre non trivial. Soit f' une $\gamma_r(T' - e)$ -fonction. Il est clair que $f'(w) = 1$. Si $f'(x_5) = 0$, alors x_6 est un voisin mobile de x_5 et donc $f'(x_6) > 0$. Ainsi, la fonction g définie sur $V(T)$ par $g(x_5) = g(x_3) = g(x_1) = 1$, $g(w) = g(x_0) = g(x_2) = g(x_4) = 0$ et $g(x) = f'(x)$ ailleurs, est une FDRF de T de poids $\gamma_r(T') + 2$. D'où, $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 2 = \gamma_r(T)$. Par conséquent, g est une $\gamma_r(T)$ -fonction ayant deux sommets x_5 et x_6 affectés des valeurs non nulles, ce qui contredit la

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à l'étude de la fonction de domination romaine faible dans les graphes modifiés.

En premier lieu, nous avons tenté de faire le point sur ce qui a été fait dans ce domaine. Puis, nous nous sommes orientés vers l'étude des graphes où le nombre de domination romaine faible change lorsqu'on supprime une arête quelconque.

Nous avons donné une borne supérieure et une borne inférieure pour les graphes modifiés par l'ajout/la suppression d'arête. En suite, nous avons donné des conditions nécessaires pour les graphes γ_r -*ER-critiques*. Puis, nous avons caractérisé les graphes γ_r -*ER-critiques-connexes*, lorsque l'ensemble V_2 d'une γ_r - fonction a un cardinal 1. Enfin, nous avons fourni une caractérisation constructive des arbres γ_r -*ER-critiques*.

Comme perspectives, on peut citer les problèmes suivants:

- L'étude des graphes dont l'ajout d'une arête quelconque ne change pas le nombre de domination romaine faible.
- L'étude de l'effet de la contraction d'une arête ou l'identification d'un couple de sommets non adjacents sur le nombre de domination romaine faible.

RÉFÉRENCES

- [1] B.D. Acharya, H.B. Walikar, *Domination critical graphs*. Nat.Acad. Sci. Lett. 2 (1979) 70–72.
- [2] J. Amjadi, H. Karami, S.M. Sheikholeslami, L. Volkmann, *Roman game domination subdivision number of a graph*. Trans. Combin. 2 (2013) 1–12.
- [3] M. Amraee, N. Jafari Rad, M. Maghasedi, *Roman domination stability in graphs*. Math. Reports. 21(71)(2019) 193–204.
- [4] M. Atapour, A. Khodkar, S.M. Sheikholeslami, *Roman domination subdivision number of a graph*. Aequationes Math. 78 (2009) 237–245.
- [5] M. Atapour, A. Khodkar, S.M. Sheikholeslami, *Trees whose Roman domination subdivision number is 2*. Util. Math. 82 (2010) 227–240.
- [6] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen, C. Suffel, *Domination alteration sets in graphs*. Discrete Math. 47 (1983) 153–161.
- [7] C. Berge, "*Les problèmes de coloration en théorie des graphes*". Publ.Inst. Statist. Univ. Paris. 9 (1960) 123–160.
- [8] C. Berge, "*Graphes et Hypergraphes*". Dunod, deuxième édition. 1970.
- [9] M. Blidia, A. Bouchou, *Criticality indices of Roman domination of paths and cycles*. Australas. J. Combin. 56 (2013) 103–112.
- [10] T. Burton, D.P. Sumner, *Domination dot-critical graphs*. Discrete Mathematics. 306(2006) 11–18.
- [11] E.W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince, D.B. West, *Extremal problems for Roman domination*. SIAM J. Discrete Math. 23 (2009) 1575–1586
- [12] G. Chartrand, L. Lesniak, *Graphs & Digraphs*. Third Edition, Chapman & Hall, London. (1996).

- [13] M. Chellali, T. W. Haynes, S.T. Hedetniemi, *Bounds on weak roman and 2-rainbow domination numbers*, Discrete Appl. Math. 178 (2014) 27–32.
- [14] M. Chellali, N. Jafari Rad, *Trees with unique Roman dominating functions of minimum weight*. Discrete Math. Algorithms Appl. 6 (2014) 10p, 1450038.
- [15] M. Chellali, N. Jafari Rad, *Roman domination stable graphs upon edge-addition*. Util. Math. 96(2015) 165–178.
- [16] M. Chellali, N. Jafari Rad, L. Volkmann, *Some results on Roman domination edge critical graphs*, AKCE Int. J. Graphs Comb, No 2, 9 (2012).195–203
- [17] E.J. Cockayne, P.A. Dreyer, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, *Roman domination in graphs*. Discrete Math. 278 (2004) 11–22.
- [18] E. J. Cockayne, O. Favaron, C. M. Mynhardt, *Secure domination, weak Roman domination and forbidden subgraphs*, Bull. Inst. Combin. Appl. 39 (2003) 87–100.
- [19] E.J. Cockayne, S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks
- [20] R.D. Dutton, R.C. Brigham, *An extremal problem for edge domination in insensitive graphs*. Discrete Appl. Math. 20 (1988) 113–125.
- [21] G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, M.S. Jacobson, H.W. Martin, C.K. Wallis, W.D. Weakley, *Combinatorial problems on chessboards*, A brief survey, dans *Graph Theory , Combinatorics and Applications: Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs*, Y. Alavi, A. Schwenk, Eds. Wiley, 1 (1995) 507–528.
- [22] M. Hajian, N. Jafari Rad, *On the Roman domination stable graphs*. Discuss. Math. Graph Theory, 37 (2017) 859–871.
- [23] A. Hansberg, N. Jafari Rad, L. Volkmann, *Characterization of Roman domination critical unicyclic graphs*. Util. Math. 86 (2011) 129–146.
- [24] Haynes, Hedetniemi, Slater, *Domination in Graphs: Advanced topics marcel Dekker*. New york (1998)

- [25] Haynes, Hedetniemi, Slater, *Fundamentals of domination in graphs*. Marcel Dekker, New York (1998).
- [26] S.T. Hedetniemi, M.A. Henning, *Defending the Roman Empire—a new strategy*, Discrete Math. 266(1-3)(2003) 239–251.
- [27] C.F. Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs*, Petrograde (1862)
- [28] N. Jafari Rad, *A generalization of Roman domination critical graphs*. J. Combin. Math. Combin. Comput, 83 (2012) 33–49.
- [29] N. Jafari Rad, *Roman domination critical graphs upon edge subdivision*. J. Combin. Math. Combin. Comput. 93 (2015) 227–245.
- [30] N. Jafari Rad, A. Hansberg, L. Volkmann, *Vertex and edge critical Roman domination in graphs*. Util. Math, 92 (2013) 73–88.
- [31] N. Jafari Rad, L. Volkmann, *Roman domination dot-critical trees*. AKCE Int. J. Graphs Combin, 8 (2011) 75–83.
- [32] N. Jafari Rad, L. Volkmann, *Roman bondage in graphs*. Discuss. Math. Graph Theory, 31 (2011) 763–773.
- [33] N. Jafari Rad, L. Volkmann, *Changing and unchanging the Roman domination number of a graph*, Util. Math, 89 (2012) 79–95.
- [34] N. Jafari Rad, L. Volkmann, *Roman domination dot-critical graphs*. Graphs Combin, 29 (2013) 527–533
- [35] A. Khodkar, B.P. Mobaraky, S.M. Sheikholeslami, *Upper bounds for the Roman domination subdivision number of a graph*. AKCE Int. J. Graphs Comb. 5 (2008) 7–14.
- [36] A. Khodkar, B.P. Mobaraky, S.M. Sheikholeslami, *Roman domination subdivision number of a graph and its complement*. Ars Combin. 111 (2013) 97–106.

- [37] H. Pérez-Rosés, J.A. Rodríguez-Velázquez, M. Valveny, *On the weak Roman domination number of lexicographic product graphs*, Discrete Appl. Math. To appear. Doi: 10.1016/j.dam. 2018.03.039
- [38] C.S. ReVelle, K.E. Rosing, *Defendens Imperium Romanum: A Classical Problem in Military Strategy* The American Mathematical Monthly. 107 (2000) 585–594.
- [39] P.L.P. Roushini, M. Kamalamb, *Effect of vertex deletion on the weak Roman domination number of a graph*, AKCE International Journal. 16 (2019) 204–212.
- [40] V. Samodivkin, *Roman domination in graphs: The class R_{UVR}* . Discrete Math. Algorithms, Appl. 8 (2016)14p, 1650049
- [41] V. Samodivkin, *A note on Roman domination: changing and unchanging*. Australas. J. Combin. 71(2018) 303–311.
- [42] I. Stewart, *Defend the Roman Empire!*, Scientific American, December. (1999) 136–138.