الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة سعد دحلب البليدة _ 1

Université Saad Dahleb _ Blida 1

Mémoire de Fin d'études

En vue de l'Obtention de Diplôme de Master

Faculté de sciences

Département : Mathématique

Spécialité : Modélisation stochastique et statistique

THEME :

Caractérisation et estimation semi paramétrique des mesures de risque basées sur les expectiles

Réalise par :

BENCHERIF Ikram & AMROUCH Fatma

Devant le jury :

Président : O.TAMI MAA **Université de Blida 1**

Promoteur : A.RASSOUL MCA **ENSH de Blida**

Examinateur : R. FRIHI MAA **Université de Blida 1**

Année universitaire : 2019/202

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents ma mère et mon père

Pour leur patience, leur amour, leur soutien

et leurs encouragements.

A mes sœurs, mon frère et leurs enfants.

A mes amies et mes camarades.

Sans oublier tous les professeurs que ce soit

du primaire, du moyen, du secondaire ou de

l'enseignement supérieur.

AMROUCH Fatma

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail accompagné d'un profond amour :

A celle qui m'a arrosé de tendresse et d'espoirs, à la source d'amour

Incessible, à la mère des sentiments fragiles qui ma bénie par ce

*Prière …….. **ma mère***

A mon support dans ma vie, qui m'a appris m'a supporté et ma dirigé

*Vers gloire ……… **mon père***

A mes chèrs frères

A toutes les personnes de ma grande famille

A ma meilleurs amies

D' abord je
remercie dieu
de bien fait

Remerciements

Au terme de cette étude en achevants notre mémoire

Nous voudrons exprimés notre sincère gratitude à notre

encadreur « MR.RASSOUL ABD EL AZIZ »

Qui me aidée pour faire se travaille la .

Et aussi nos remerciements d'adressent en particulière

Touts les enseignons de département de mathématique

A tous ceux qui nous ont aidée et encouragée de prés au

De loin

A tous ceux nous disons

ملخص

في هذه الاطروحة، نهتم بتقدير مقاييس المخاطر المعتادة. أولا، نعطي عموميات حول قياس المخاطر، حول الكمية والقيمة المتوقعة. ثم نقدم طرقا لتقدير مقاييس الخطر VaR وCVaR استنادا على التوقعات وطرقا أخرى استنادا على الكميات. وأخيرا، نجري محاكاة لفحص ومقارنة كفاءة الكميات مع القيم المتوقعة حول VaRوCVaR . ونستخلص ان استخدام التوقعات كطريقة بديلة لتقدير المخاطر يرجع الى حقيقة ان التوقعات تكون أكثر يقظة من الكميات في موقع الخسائر الكارثية النادرة، تعتمد على كل من تحققات الذيل للمتغيرات العشوائية واحتمالاتها بينما تعتمد الكميات فقط على تواتر إدراك الذيل وان التوقعات هي المقاييس الثابتة الوحيدة التي لا تتغير بالتغير في توزيع المخاطر.

الكلمات المفتاحية: مقياس الخطر، القيمة المعرضة للخطر، القيمة المشروطة المعرضة للخطر، الكمية، القيمة المتوقعة.

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'estimation des mesures de risque usuelles. Dans un premier temps, nous donnons généralités sur les mesures de risque, le quantile et l'expectile. Nous présentons ensuite les methodes d'estimation de la VaR et la CVaR basées sur les expectiles et les autres méthodes basées sur les quantiles. Enfin on étudie la simulation pour examiner et comparer l'efficacité des quantiles avec les expectiles autour VaR et CVaR. Nous concluons que les expectiles sont plus alerte que les quantiles à l'empleur des rares pertes catastrophique et ils dépendent à la fois des réalisations des queues des variables aléatoires et de leurs probabilités tandis que les quantiles ne dépendent que de la fréquence des réalisations de queue, les expectiles sont les seules mesures cohérentes invariantes par changement de distribution du risque.

Mots-clés: Mesure de risque; Valeur à risque (VaR); Valeur conditionnelle à risque (CVaR); quantile; expectile.

ABSTRACT

In this thesis, we are interested in the estimation of usual risk measures. First of all, we give generalities on risk measurement, quantile and expectile. Then, we presente the methods of estimating risk measures of the VaR and the CVaR based on expectile and the authers methodes based quantile. Finally, we study the simulation to examine and compare the efficiency of the quantiles with the expectiles around VaR and CVaR. We conclude with the expectiles are more alerte than the quantiles at the locations of the rare catastrofhique losses and they depend on both tail realisations of the random variables and their probabilities while the quantiles depend only the frequency of tail realisations. The expectiles are the only coherent measures invariant by change in risque.

Keywords : Risk measure ; Valeur-at-risk (VaR) ; Conditional Valeur-at-risk (CVaR) ; quantile ; expectile.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

INTRODUCTION GÉNÉRALE

De nombreux évènements (risques), qu'il s'agisse de catastrophes naturelles ou d'accidents liés à l'activité humaine, ont présenté une menace réelle dans notre vie. Il est impératif de prendre en compte et d'anticiper les possibilités de survenance de tels phénomène afin d'en limiter les impacts humains, environnements et économiques. C'est pour cela que les institutions financières (les banques et les compagnies d'assurance) ont toujours cherché à trouver de nouvelles régles pour gérer et évaluer ces risques et leurs potentiels ainsi que pour équilibrer un invertissement risqué. Pour la gestion de ces risques, plusieurs mesures de risques ont été proposées. Chacune a ses avantages et ses inconvénients.

Apparue pour la première fois dans les années 1990, la $Value$-at-$Risk$ a été introduite dans la banque JP Morgan suite aux différentes crises financières que le monde a subi depuis ce temps là. Elle consistue un modèle de mesure de risque très répandu dans le monde de finance et l'assurance. La $Value$-at-$Risk$ est généralement accompangnée par l'$Expected\ Shortfall$ qui est égale à la $Conditional\ Value$-at-$Risk$ dans le cas continu.

Les quantiles et les expectiles sont fréquemment utilisés en statistique, et pour calculer les mesures de risques ($VaR, CVaR$).

En statistique et en théorie des probabilités, les quantiles sont les valeurs qui divisent un jeu de données en intervalles contenant le même nombre de données, il y a donc un quantile de moins que le nombre de groupes créés. Ainsi les quartiles sont les trois quantiles qui divisent un ensemble de données en quatre groupes de taille égale. La médiane quant à elle est le quantile qui sépare le jeu de données en deux groupes de taille égale.

Les expectiles constituent une solution de rechange naturelle ou un compléments aux quantiles. En tant que généralisation de la moyenne, les expectiles ont gagné en popularité ces dernières années parce qu'en plus d'offrir un portrait plus détaillé des données que la moyenne ordinaire, ils peuvent servir a calculer les quantiles grâce aux liens étroits.

Nous réalisons une étude par simulation pour examiner et comparer l'éfficacité des expectiles et des quantiles autour les mesures de risque.

Ce mémoire s'articule sur trois chapitres, qui nous permettront de présenter les différents aspects de notre travail.

Dans ce chapitre, au début nous rappelons des définitions et des caractéristiques de base. Ensuite, on donne généralités sur les mesures de risque, notamment VaR et $CVaR$, nous présentons les propriétés de chaque mesure et la relation entre les mesures de risque.

Dans le deuxième chapitre, on passe à la présentation des quantiles et les expectiles : au début on donne généralités sur les deux fonctions, leurs propriétés puis la relation existe entre quantile et expectile. nous présentons les deux mesures de risque de base quantile et de base expectile.

Dans le troisième chapitre, on donnera les méthodes d'estimation de la VaR et la $CVaR$ basées sur les expectiles et l'autres méthodes basées sur les quantiles. Puis, on donnera aussi la théorie des valeures extrêmes. Enfin on étudiera la simulation.

CHAPITRE 1

MESURES DU RISQUE

Sommaire

1.1 Introduction

La mesure de risque est un objectif centrale de la gestion des risques. Mathématiquement, une mesure de risque est une fonction qui assigne à une variable aléatoire un nombre réel. Idéalement, cette mesure doit bien quantifier le risque en plus d'être facile à comprendre et à intrépéter. Les deux mesures les plus populaires actuellement sont la Valeur à Risque (VaR) et la Valeur à Risque conditionnelle ($CVaR$), communément appelé $Expected\ Shortfall$. Elles seront présentées dans les prochaines sections.

1.2 Variable aléatoire réelle

Définition 1.1 *Etant donné une univers Ω, une variable aléatoire réelle (v.a.r) est une application de Ω dans $\mathbb{R}$,*

$$X : w \in \Omega \to X(w) \in \mathbb{R}.$$

1.2.1 Loi de probabilité

Définition 1.2 *soit Ω un univers muni d'une probabilité P, et soit X une v.a.r. On appelle loi de probabilité de X, notée P_X. L'application qui à tout partie A de $\mathbb{R}$ associe*

$$P_X(A) = P(w \in \Omega : X(w) \in A).$$

Une variable aléatoire continue X décrite par sa distribution de probabilité. Une fois cette distribution de probabilité connue, des mesures de risque peuvent être calculées. C'est pourquoi la majorité du travail dans le calcule d'une mesure de risque consiste à modéliser adéquatement la distribution de la variable aléatoire X. Il s'agit ici d'une distribution univariée puisque la variable aléatoire est unique.
Une distribution de probabilité est caractérisée par la fonction de répartition

$$F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] \tag{1.1}$$

Elle représente la probabilité que la variable aléatoire X soit à inférieure ou égale à certain nombre x.

1.2.1.1 Proprietés de la fonction de répartition

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
2. $F_X(x)$ tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.
3. $F_X(x)$ est croissante .

4. $F_X(x)$ est continue à droite.

Proposition 1.3 *On a l'identité :*

$$P(a < x < b) = F_X(b) - F_X(a), \forall a < b.$$

1.2.1.2 La densitée de X

Définition 1.4 *La fonction de densité de la variable aléatoire continue est donnée par*

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{1.2}$$

La fonction de densité permet de calculer la probabilité que la variable aléatoire X soit dans l'intervalle $[a, b]$ avec

$$\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Nous pouvent également considérer un vecteur des variables aléatoires continues

$$X = (X_1, ..., X_N)'.$$

Ce vecteur aléatoire est décrit par une distribution multivariée. Cette distribution contient l'information sur les distributions marginales des variables ainsi que sur les dépendences entre ces variables. Une distribution multivariée est caractérisée par la fonction de répartition multivariée :

$$F(x_1, x_2, ..., x_N) = \mathbb{P}[X_1 < x_1, ..., X_N < x_N]. \tag{1.3}$$

La fonction de densité multivariée du vecteur aléatoire est donnée par :

$$f(x_1, ..., x_N) = \frac{\partial^N F(x_1, ..., x_N)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_N}. \tag{1.4}$$

La fonction de densité multivariée permet de calculer la probabilité que les variables aléatoires continues dans du vecteur soient dans des intervalles données. Par exemple, pour deux variables nous avons

$$\mathbb{P}[a \leq X_1 \leq b, c \leq X_2 \leq d] = \int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2. \tag{1.5}$$

La variable aléatoire X peut représenter n'importe quelle position risquée dont la valeur future est incertaine. Dans ce chapitre, le vecteur aléatoire $x_t = (x_{1t}, ..., x_{Nt})'$représentra les rendements de N actifs du portefeuille au temps T. Tous les variables aléatoires et les distributions qui seront présentées sont continues.

On note habituellement une variable aléatoire par une lettre majuscule et sa réalisation par une lettre miniscule.

1.2.2 Fonction réciproque

Définition 1.5 *Soit $f \in C_M(I)$ l'application qui à tout $y \in f(I)$ assosié son unique antécédente par la fonction f est appellé réciproque de f. On la note f^{-1}.*

Remarque 1.6

$$\begin{pmatrix} y = f(x) \\ x \in I \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(I) \end{pmatrix}$$

Si $f \in C_m(I)$, alors

$$f^{-1} \circ f = Id_I \text{ et } f \circ f^{-1} = Id_{f(I)}.$$

1.2.2.1 Proprieté de la fonction réciproque

1. f^{-1} a le même sense de variation que f.
2. f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$.
3. f^{-1} est continue sur $f(I)$.
4. f^{-1} est dérivable.
5. Le graphe f^{-1} est symétrique de le graphe de f par rapport la $1^{ère}$ bissetrice dessin.

1.2.3 Inverse généralisé

Définition 1.7 *On appelle inverse généralisé de F, l'application notée $F^{\leftarrow}$ définie par :*

$$F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\}, \quad p \in [0,1].$$

L'inverse généralisé $F^{\leftarrow}$ coïncide avec l'inverse F^{-1} lorsque la fonction F est strictement croissante et continue.

1.2.4 Espérance

Définition 1.8 *L'espérance est définie par*

$$E(X) = \int x f(x)\, dx, \text{ si on a une variable continue,}$$

$$E(X) = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i), \text{si on a une variable discrète.}$$

Plus généralement,

$$E\left(\varphi(x)\right) = \int \varphi(x) f(x)\,dx \text{ si on a une variable continue,}$$

$$E\left(\varphi(x)\right) = \sum \varphi(x) \mathbb{P}(X = x_i) \text{ si on a une variable discrète.}$$

Rappelons aussi qu'on a la linéairité de l'espérence :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y),$$

$$E(\alpha X) = \alpha E(X), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

1.2.5 Variance et écart-type

La variance d'une variable aléatoire X est

$$var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

L'écart-type se définit ensuite comme la racine de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{var(X)}.$$

Ces grandeurs sont des indicateurs de dispersion : elles mesurent l'écart entre les valeurs prises par X et son espérance $E(X)$.

Rappelons les modalités de manipulation de la variance :

$$var(X+Y) = var(X) + var\left(y\right), \text{ si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}$$

$$var(\alpha X) = \alpha^2 var(X), \text{ pour tout réel } \alpha.$$

1.3 Statistique d'ordre

Définition 1.9 *On appelle statistique d'ordre notée $X_{(1.n)}, ..., X_{(n.n)}$ les variables aléatoires ordonnées :*

$$\min(X_1, ..., X_n) = X_{(1.n)} \leq ... \leq X_{(n.n)} = \max(X_1, ..., X_n).$$

On note

$$M_n = X_{(n.n)} = \max(X_1, ..., X_n).$$

1.3.1 Densité conjointe de n statistique d'ordre

Lemme 1.10 *Soit $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F continue, alors la densité de $\left(X_{(1.n)}, ..., X_{(n.n)}\right)$ est donnée par :*

$$f_{X_{(1.n)},...,X_{(n.n)}}\left(x_1, ..., x_n\right) = n! \prod_{i=1}^{i=n} f\left(x_i\right),$$

avec $x_1 \leq ... \leq x_n$.

1.3.2 Densité conjointe de $k^{éme}$statistique d'ordre

Lemme 1.11 *La loi de la variable aléatoire $X_{(k.n)}$, pour $1 \leq k \leq n$ est donnée par :*

$$F_{X_{(k.n)}}(x) = P\left[X_{(k.n)} \leq x\right] = \sum_{j=k}^{n} C_n^j \left[F(x)\right]^j \left[1 - F(x)\right]^{n-j}.$$

Sa densité est :

$$f_{X_{(k.n)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left[F(x)\right]^{k-1} \left[1 - F(x)\right]^{n-k} f(x).$$

1.3.3 Convergence presque sûre des statistique d'ordre

Proposition 1.12 *Soit F une fontion de répartition, telle que $x_F \leq \infty$, et $(k(n), n \in \mathbb{N})$ une suite d'entiers naturels non décroissante telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n} = c \in [0.1],$$

alors :

1. *$X_{(k(n).n)} \overset{p.s}{\rightarrow} x_F$, avec $c = 0$ respectivement $(c = 1)$.*
2. *Si $c \in [0.1]$, alors $x(c)$ est la solution unique de l'équation $F(x) = c$.*

1.4 Théorème centrale limite

On a vu que deux v.a.r ont la même loi si et seulement si leurs fonctions de répartition sont égales. Ainsi, la fonction de répartition est souvent utilisée en pratique afin de démontrer l'égalité en loi. On est donc amené à définir la convergence en loi comme la convergence des fonctions de répartition associées.

Définition 1.13 *Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r et soit Y une v.a.r. On dit que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence en loi vers Y si pour tout x_0 point de continuité de la fonction de répartition F_Y de Y,*

$$F_{Y_n}(x_0) = \mathbb{P}(Y_n \leq x_0) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} F_Y(x_0) = \mathbb{P}(Y \leq x_0).$$

On note la convergence en loi $Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$.

La convegence en loi est réalisée aux points de continuité de F_Y. C'est la convergence simple de la suite de fonctions de répartition F_{Y_n}.

Propriété d'additivité de la loi normale : si $X_1, ..., X_n$ sont des v.a.r indépendentes et de même loi $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, alors la v.a.r $X_1 + ... + X_n$ suit la loi $\mathcal{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$.

Ce résultat implique que la v.a.r centrée réduite $\sum_{i=1}^{n} \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Que se passe-t-il dans le cas générale où les v.a.r X_i ne sont pas nécessairement normales. Le résultat ci-dessus se transforme alors en un résultat de convergence en loi.

Théorème 1.14 *(TCL) Soit $X_1, ..., X_n$ des v.a.r indépendantes, de même loi, et admettant une variance. On note $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = var(X_1)$, Alors*

$$\frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

lorsque $n \to +\infty$.

1.5 La fonction de répartition empirique

Définition 1.15 *On appelle fonction de répartition empirique associée à un échantillon $X_1, ..., X_n$, la fonction F_n définie par :*

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k \leq x\}} = \frac{1}{n} card\{k \in \{1, ..., n\} : X_k \leq x\}.$$

où $1_{\{\}}$ est la fonction indicatrice.

1.5.1 Convergence de la fonction de répartition empirique

Théorème 1.16 *Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires réelles indépendents et de même loi F, alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0 \quad C.P.S.$$

1.6 Généralités sur la VaR et la $CVaR$:

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace de probabilité, $\mathscr{F}$ une sigma algèbre sur les sous ensembles de Ω et P une mesure de probabilité $P : \mathscr{F} \to [0,1]$.

Suivant la configuration de [Follmer et Schied (2004)], soit $M(P)$ l'ensemble de toutes les mesures de probabilité absolument continues par rapport à P sur cet espace de probabilités et $\mathscr{Q}$ une classe de mesures de probabilité sur Ω.

Définition 1.17 *La définition formelle d'une mesure de risque est simplement une application qui contient tout les scénarios possibles.*

$$\rho : \Omega \rightarrow R_+$$

Si l'application ρ satisfait les trois conditions suivantes il est référé comme un mesure de risque :

1. $\rho(0) = 0$: *si le portefeuille est vide, donc il n'existe pas d'un risque. Une application satisfait cette condition est appelée normalisée.*
2. $\rho(L + a) = \rho(L) - a, \forall a \in R$, *Si a un scalaire (i.e. a cash position) est ajouté, alors le risque est décroissant par la valeur ajoutée. Les mesures de risque doivent être traduites car cela simplifie grandement la détermination des fonds nécessaires réserves de risque nécessaires pour compenser les positions risquées.*
3. $\rho(L_1) < \rho(L_2)$, $\forall L_1 < L_2 \in \Omega$. *Monotonicité assurée que (absolue) grande perte implique grand risque.*

1.6.1 Valeur à Risque(VaR)

La valeur à risque, la mesure la plus populaire du risque financier, a été largement utilisée par les instituts financiers du monde entier depuis sa proposition. Cependant, la valeur à risque présente plusieurs inconvénients.

Par exemple, [Artzner et al., (1997)] et [Artzner et al.,1999] ont montré que la valeur en risque non seulement ignore toute perte au-delà de la valeur au niveau du risque et ne peut pas non plus satisfaire l'un des axiomes de cohérence car elle n'est pas sous-additive. En autre, [Yamai et Yoshiba (2002)] ont énoncé deux autres inconvénients. Le premier est que les investisseurs rationnels qui souhaitent maximiser l'utilité attendue peuvent être induits en erreur par les informations offertes par la valeur à risque. L'autre est que la valeur à risque est difficile à utiliser lorsque les investisseurs souhaitent optimiser leurs portefeuilles. Afin de traiter les problèmes conceptuels causés par la valeur en danger, [Artzner et al.,1999] ont introduit une nouvelle mesure du risque nancier appelé $Expected\ Shortfall$.

Il est défini comme suit. La VaR en rendement pour la prochaine période est définie comme étant la perte telle que

$$\mathbb{P}\left[x_{t+1} < -VaR^p_{t+1}\right] = p \tag{1.6}$$

où $p \in [0,1]$ est une probabilité généralement fixée à 0.05 ou 0.01.

En mots, la VaR représente la perte en rendement qui sera dépassée dans une proposition p.100% des cas sur la prochaine période. Elle est normalisée pour être un nombre positif. Si nous connaissons la distribution de probabilité du rendement pour la prochaine période x_{t+1}, alors la VaR dans (1.6) peut être exprimée par

$$VaR_{t+1}^{p} = -F_{x_{t+1}}^{-1}(p) \tag{1.7}$$

où $F_{x_{t+1}}^{-1}(p)$ représente la fonction de répartition inverse, aussi appelée fonction quantile de x_{t+1}.

Cette expression montre que la VaR correspond au quantile p de la queue de gauche de la distribution de x_{t+1}, normalisée pour être positif.

À partir de la variable aléatoire x_{t+1}, nous pouvons définir une nouvelle variable aléatoire de rendement standardisée z_{t+1}d'espérance nulle et de variance unitaire par la transformation de localisation et de mise à l'échelle suivante :

$$z_{t+1} = \frac{x_{t+1} - \mu_{t+1}}{\sigma_{t+1}} \tag{1.8}$$

où μ_{t+1}et σ_{t+1} sont respectivement l'espérance et l'écart-type de x_{t+1}. L'équation (1.8) peut être reécrite afin d'exprimer x_{t+1}en fonction de z_{t+1} :

$$x_{t+1} = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} z_{t+1}. \tag{1.9}$$

Cette expression sera utile afin de modéliser individuellement les dynamiques de μ_{t+1}et σ_{t+1}.

On peut obtenir une représentation moyenne-variance de la VaR en utilisant (1.6) et (1.9). On obtient alors

$$VaR_{t+1}^{p} = -\mu_{t+1} - \sigma_{t+1} F_{z_{t+1}}^{-1}(p) \tag{1.10}$$

Ainsi la VaR correspond également au quantile de la queue de la gauche de la distribution de z_{t+1} auquele on applique la transformation (1.10).

1.7 Mesures de risque cohérentes

Après avoir échoué par le critère de non sous-additivé, on s'est avéré que la mesure de risque VaR comprend certaines lacunes et qu'elle n'est pas une mesure exacte qui reflète le risque d'un portefeuille, d'où le développement par [Artzner et al.,1999] de développer d'autres mesures de risque dites « mesure de risque cohérente » à la fin des années quatre-vingt dix. C'est une mesure de risque d'un portefeuille à une période déterminée. Elle est similaire à la VaR de point de vue conceptuel mais elle diffère au niveau du calcul.

1.7.1 Propriétés des mesures de risque cohérentes

Mesurer le risque d'un actif correspond à établir une fonctionnelle $\rho : X \to R$ où X et la variable aléatoire (exemple : le rendement de l'actif) et R est un réel non négatif. Alors, cette valeur de risque permet de comparer les différents actifs.

Certaines conditions sont considérées pour cette fonctionnelle.

- **Homogénéité positive :** cette propriété stipule que $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ pour toute variable aléatoire X et tout réel positif λ. C'est-à-dire que la hausse de la taille d'un portefeuille X par une quantité positive λ ne fait que multiplier le risque de ce portefeuille par ce facteur λ.

- **Sous-additivité :** c'est la propriété que la VaR ne respecte pas. Elle montre que pour toute variable aléatoire X et Y,

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y),$$

  c'est à dire que le risque agrégé d'un portefeuille doit être moins élevé que la somme du risque individuel des actifs composants de ce portefeuille. Ce qui prouve qu'une fonction homogène positive ρ est convexe si et seulement si elle est sous additive.

- **Monotonie :** cette propriété montre que si $X \leq Y$, alors

$$\rho(X) \leq \rho(Y)$$

  pour toute variable aléatoire X et Y. Ce critère montre que plus la perte d'un portefeuille est faible, son risque sera nécessairement moins élevé. C'est-à-dire que si le portefeuille X a une perte moins grande que le portefeuille Y, alors ce dernier est plus risqué.

- **Invariance par transition :** cette propriété stipule que

$$\rho(X+\alpha r_0) = \rho(X) - \alpha,$$

  pour chaque variable aléatoire X, pour chaque réel α et pour chaque actif sans risque r_0. Cette propriété explique que si on ajoute à un portefeuille risqué une quantité α d'actif sans risque, alors le risque du portefeuille se réduit par α.

Une mesure de risque qui respecte ces quatre propriétés est appelée une mesure de risque cohérente au sens d'[Artzner et al.,1999]. Il existe plusieurs mesures de risque cohérentes qui seront énumérées dans la section suivante.

1.7.2 Valeur conditionnelle à risk ($CVaR$)

Bien que la VaR soit une mesure de risque populaire et intuitive, elle a deux limites imporatantes :

1. Elle n'est pas une mesure de risque cohérente. Spécifiquement, elle ne respecte pas toujours la propriété de sous-additivité ou le principe de diversification.

2. Elle ne dit rien par rapport à l'étendue des pertes au-délà de la VaR dans $p100\%$ des cas. Autrement-dit, la VaR est insensible à la portion de la distribution à sa gauche.

La $CVaR$ permet d'éviter ces deux limitations. Elle est définie de la manière suivante :

$$CVaR_{t+1}^{p} = -E\left[x_{t+1} \mid x_{t+1} < -VaR_{t+1}^{p}\right]. \tag{1.11}$$

En mots, la $CVaR$ correspond à la moyenne des pertes à la gauche de la VaR. Tout comme la VaR, elle est normalisée pour être positive.

Si nous connaissons la distribution de probabilité du rendement pour la prochaine période, alors la $CVaR$ peut être exprimée en utilisant la fonction de répartition et la fonction de densité de x_{t+1} :

$$CVaR_{t+1}^{p} = -\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{-VaR_{t+1}^{p}} x_{t+1}.f\left(x_{t+1}\right)dx_{t+1}. \tag{1.12}$$

De même, tout comme la VaR nous pouvons exprimer la $CVaR$ en fonction de l'espérance et l'écart-type de x_{t+1} en utilisant (1.10). On obtient alors

$$CVaR_{t+1}^{p} = -\mu_{t+1} - \sigma_{t+1}\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{-F_{z_{t+1}}^{-1}(p)} z_{t+1}.f\left(z_{t+1}\right)dz_{t+1}. \tag{1.13}$$

Les équations (1.10) et (1.13) permettent de calculer des $VaRs$ et des $CVaRs$ non conditionnelles puisqu'elles supposent une distribution non conditionnelle pour x_{t+1}.Toutefois, il est toujours avantageux d'utiliser l'information disponible afin d'améliorer nos prévisions du risque. C'est pourquoi nous utiliserons plutôt la distribution conditionnelle de x_{t+1}, où l'on conditionne par rapport à l'ensemble des rendements passés. Plus précisément, nous supposons que seuls les deux premiers moments de la distribution conditionnelle de x_{t+1}varient dans le temps alors que les moments d'ordre supérieure sont constants. Cela ne change pas la forme des équations (1.10) et (1.13), à l'exception qu'il faut interpréter μ_{t+1}et σ_{t+1} étant des moments conditionnelles aux rendements passés. La distribution de z_{t+1} demeure une distribution non conditionnelle par hypothèse. De même, tout les $VaRs$ et $CVaRs$ qui seront calculées, seront conditionnelles aux rendements passés.

1.7.3 Définitions clées

Soit Y une variable aléatoire décrivant les rendements du portefeuille. Pour un niveau de confiance donné $\alpha \in [0.1]$, nous considérons le $(1-\alpha)$ ème quantile de la distribution des rendements :

$$y^{(1-\alpha)}(Y) = \sup\left\{y \mid \mathbb{P}\left[Y \leq y\right] \leq 1-\alpha\right\}. \tag{1.14}$$

De point de vue de l'économétrie $y^{(1-\alpha)}(Y)$ détermine la valeur minimale des rendements y avec probabilité $(1-\alpha)$. Si, par exemple, $\alpha = 0.95$ puis $y^{(1-\alpha)}(Y)$ $\big($peut être négative$\big)$ avec probabilité 95%, détermine les rendements minimaux, pour faciliter la compréhension, l'économétrie fonctionne avec le concept $VaR_\alpha(Y)$ défini comme :

$$VaR_\alpha(Y) = -y^{(1-\alpha)}(Y). \tag{1.15}$$

Alors, $VaR_\alpha(Y)$ avec probabilité $(1-\alpha)$ définit la valeur limite de la perte $\big($le signe $(-)\big)$.

Certains travaux fonctionnent avec des pertes. Soit X désigne une variable aléatoire décrivant les pertes du portefeuille, alors $X = -Y$, le quantile de la fonction de distribution cumulée (cdf) de la fonction de perte est défini comme

$$x^\alpha(X) = \inf\{x \mid \mathbb{P}\{X \leq x\} \geq \alpha\} \tag{1.16}$$

et

$$VaR_\alpha(X) = x^\alpha(X). \tag{1.17}$$

Donc

$$VaR_\alpha(Y) = VaR_\alpha(X), x^\alpha(X) = -y^{(1-\alpha)}(Y). \tag{1.18}$$

De point de vue de la statistique (1.17), nous voyons que :

$$VaR_\alpha(X) = F_x^{-1}(\alpha), \tag{1.19}$$

où $F_x^{-1}(x)$ est la fonction inverse du cdf de la variable aléatoire X.

Pour un niveau de confiance donné $\alpha \in [0.1]$, la mesure de risque $CVaR_\alpha(X)$ peut être définie comme une valeur moyenne attendue de la perte avec probabilité α :

$$CVaR_\alpha(X) = E\left[X \mid X > VaR_\alpha(X)\right]. \tag{1.20}$$

Dans le cas où $VaR_\gamma(X)$, $(\gamma \in [0.\alpha])$ est intégrabilité, $CVaR_\alpha(X)$ peut être défini comme :

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\gamma(X)\,d\gamma, \tag{1.21}$$

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\left[E\left[X1_{\{X\leq VaR_\alpha(X)\}}\right] + \alpha VaR_\alpha(X) - VaR_\alpha(X)\mathbb{P}\left[X \leq VaR_\alpha(X)\right]\right], \tag{1.22}$$

où $1_{\{.\}}$ désigne la fonction d'indicatrice.

Considérons une autre définition des mesures de risque. Soit X une variable aléatoire avec la fonction de densité de probabilité (pdf) $p(x)$, $\xi \in \mathbb{R}$ est un scalaire, la fonction $f(\xi, x)$ pour chaque ξ fixe est une variable aléatoire avec pdf $p(x)$. Laissons-nous introduire la fonction $\Psi(\xi,\gamma)$. La probabilité que $f(\xi,x)$ ne dépasse pas le niveau donné γ :

$$\Psi(\xi,\gamma) = \int_{f(\xi,x)\geq\gamma} p(x)\,dx, \tag{1.23}$$

ici $\Psi(\xi,\gamma)$ est une fonction de distribution des pertes, alors $VaR_\alpha(x)$ et $CVaR_\alpha(x)$ peuvent être définis comme :

$$VaR_\alpha(X) = \min\left\{\gamma \in \mathbb{R} \,|\, \Psi(\xi,\gamma) \geq \alpha\right\}, \tag{1.24}$$

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{f(\xi,x)\geq VaR_\alpha(X)} f(\xi,x)\,p(x)\,dx. \tag{1.25}$$

Commentaires, un grand nombre d'études mathémathiques et économétriques sur la VaR et la $CVaR$ conduisent à une problématique d'un niveau de confiance α.

Notez que les évènements (la perte est plus grand que le niveau donné) et (la perte n'atteint pas le niveau) sont un groupe complet d'évènements avec les probabilités de α et $1-\alpha$ respectivement . Dans cet article, le niveau de confiance est le α éme quantile de la fonction de la perte (1.17), les mesures de risque sont appelées VaR et $CVaR$. En pratique, le niveau $\alpha \in [0.9, 1]$.

CHAPITRE 2

QUANTILES ET EXPECTILES

Sommaire

2.1 Introduction

Lors de l'estimation des paramètres d'une population, la moyenne est généralement utilisée comme mesure de choix. Dans certains cas, la médiane comme paramètre de centralité est préférée. Une généralisation de la médiane est donnée par les quantiles. L'estimation quantile et la régression quantile ont connu un certain nombre de nouveaux développements ces dernières années avec [Koenker (2005)] comme référence centrale.

L'idée principale est ainsi d'estimer une fonction de distribution cumulative inversée, généralement appelée fonction quantile $q_\alpha = F^{-1}(\alpha)$ pour $\alpha \in (0,1)$, où le quantile $0,5$, $q_{0,5}$ comme médiane joue un rôle central. Pour le traçage des données d'enquête à partir d'un échantillon à probabilité inégale avec des probabilités d'inclusion connues, on montre comment estimer les quantiles en tenant compte des probabilités d'inclusion. L'idée centrale est ainsi d'estimer une fonction de distribution de la variable d'intérét et de l'inverser dans un second temps pour obtenir la fonction quantile.

L'estimation de quantile résulte en minimisant une fonction de perte L^1 comme démontré dans [Koenker (2005)]. Si la perte L^1 est remplacée par la fonction de perte L^2, on obtient ce que l'on appelle les expectiles comme introduit dans [Aigner et al., (1976)] ou [Newey et Powell, (1987)]. Pour $\alpha \in (0,1)$, cela conduit à la fonction expectile e_α qui, comme la fonction quantile q_α, définit de manière unique la fonction de distribution cumulative F(y). L'estimation des expectiles a récemment suscité un certain intérêt, (voir par ex. [Pratesi et al., (2009)], [Sobotka et Kneib, (2012)]). Cependant, comme les expectiles n'ont pas d'interprétation aussi simple que les quantiles, leur acceptation et leur utilisation dans les statistiques sont moins développées que les quantiles.

Quantiles et expectiles sont connectés en ce qu'une fonction de transformation unique et inversible $h : [0,1] \to [0,1]$ existe de telle sorte que $e_{h(\alpha)} = q_\alpha$, (voir [Yao et Tong (1996)]) et [De Rossi et Harvey (2009)]).
Cette connexion peut être utilisée pour estimer les quantiles à partir d'un ensemble d'expectiles ajustés. Cette idée a été utilisée dans [Schulze Waltrup et al., (2014)] et les auteurs démontrent dans des simulations que les quantiles résultants peuvent être plus efficaces que les quantiles empiriques, même si une étape de lissage est appliquée à ces derniers. Dans cette note, nous étendons ces résultats et démontrons comment les expectiles peuvent être estimées pour des échantillons de probabilité inégale et comment obtenir une fonction de distribution ajustée à partir des expectiles ajustés.

2.2 Notion de Quantile

Les quantiles d'une variable aléatoire discrète (entière) ou continue (réelle) sont les valeurs que prend la variable pour des valeurs de probabilité p $(0 < p < 1)$. On les appelle encore fractiles, et ce sont des valeurs réciproques de la fonction de répartition de la loi de probabilité considérée.

Les quantiles d'un échantillon statistique de nombres sont les valeurs remarquables permettant de diviser le jeu de ces données ordonnées. C'est à dire triées en intervalle consécutifs contenant le même nombre de données.

Suite aux travaux antérieurs de [Koenker et Bassett (1978)] qui caractérisaient les quantiles comme des solutions d'un problème de minimisation de L^1 :

$$q(\alpha) \in \arg\min_{t\in\mathbb{R}} E\left(\rho_\alpha(Y-t)-\rho_\alpha(Y)\right), \tag{2.1}$$

où

$$\rho_\alpha(y) = \left|\alpha - 1_{\{y\leq 0\}}\right| |y| \tag{2.2}$$

est la fonction de vérification des quantiles et $1_{\{\cdot\}}$ est la fonction d'indicatrice. Notez le signe $\in$, qui tient compte du fait que le minimiseur ne peut pas être unique dans (2.1) ; il y a en fait égalité si la fonction de distribution de Y augmente.

2.2.1 Les notions des différents quantiles

2.2.1.1 Quantile d'ordre p

Définition 2.1 *On appelle quantile ou fractile d'ordre p, le nombre x_p défini par :*

$$x_p = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\right\}, \text{ avec } p \in]0,1[. \tag{2.3}$$

Remarque 2.2 *Si F est strictement croissante et continue, alors x_p est l'unique nombre réel tel que :*

$$F\left(x_p\right) = p.$$

2.2.1.2 Fonction quantile de queue

La fonction quantile de queue est définie par :

$$\mathbb{U}(t) = F^{\leftarrow}\left(1-\frac{1}{t}\right), \text{ avec } 1 < t < \infty. \tag{2.4}$$

2.2.1.3 Quantile extrême

On appelle quantile extrême le quantile d'ordre $\left(1-p\right)$ défini par :

$$x_{1-p} = \inf\left\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq 1-p\right\} = F^{-1}(1-P), \tag{2.5}$$

où p proche de zéro.

2.2.2 Quantile empirique

La fonction quantile empirique de l'échantillion de $X_1,..., X_n$ est donnée par :

$$Q_n\left(p\right) = F^{-1}\left(P\right) = \inf\left\{x \in \mathbb{R}, F_n\left(x\right) \geq p\right\}, \tag{2.6}$$

avec $(0 < p < 1)$.

La fonction quantile empirique de la queue correspond est défini par :

$$U_n\left(t\right) = F_n^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{t}\right), \tag{2.7}$$

avec $(1 < t < \infty)$.

Définition 2.3 *Soit $X_1,...,X_n$ un n-échantillon issu d'une loi F, et $X_{(1,n)},...,X_{(n,n)}$ l'échantillon ordonné. Soit $p \in]0.1[$, on appelle empirique d'ordre p, la variable aléatoire notée $\hat{X}_{([np],n)}$ défini par :*

$$\hat{X}_{([np],n)} = \begin{cases} \frac{X_{([np],n)}+X_{([np]+1,n)}}{2}, \textit{ si } np \in \mathbb{N} \\ X_{([np]+1,n)}, \textit{ sinon} \end{cases} \tag{2.8}$$

où $\left[np\right]$ désigne la partie entière de np.
En particulier $X_{([n/2]+1,n)}$ est la médiane empirique.

Il est facile de vérifier que :

$$Q_n\left(p\right) = F_n^{-1}\left(p\right) = X_{n-k,n}, \forall k \in \left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[. \tag{2.9}$$

2.2.3 Propriété asymptotique du quantile

2.2.3.1 Estimation du quanitle

On considère une suite de variables aléatoires réelles $Y_1,...,Y_n$ indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de fonction de répartition commune F.

Soit $p \in]0.1[$, on définit la fonction de répartition empirique associée à la fonction F.

Soit donc

$$\hat{F}_n\left(y\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{Y_i \leq y\}}, \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Soit $Q_{F_n}\left(p\right)$ l'estimation de $Q_F\left(P\right)$ associé à la fonction de répartition empirique $\hat{F}_n$ définie par la relation

$$Q_{F_n}(p) = \hat{F}_n^{-1}(p) = \inf\{y : \hat{F}_n(y) \geq p\}. \tag{2.11}$$

Remarque 2.4 *Les propriétés de la monotonie et de l'insensibilité du médiane du quantile reste valable pour le quantile empirique* Q_{F_n}.

2.2.4 Normalité asymptotique de l'estimateur du quantile

Il est important de savoir comment les quantiles se comportent dans les grands échantillons. En fait Q_{F_n}hérite

d'un certain nombre de propriétés de la fonction de répartition empirique $\hat{F}_n$ comme le fait que la loi de la variable aléatoire $n\hat{F}_n(y)$ soit une loi Binomiale $\mathscr{B}(n, F(y))$.

Théorème 2.5 *Soit* $(Y_1, ..., Y_n)$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition commune F avec une densité continue* f. *Alors si* $f(Q_F(p)) > 0,$*on a*

$$\sqrt{n}\left(Q_{F_n}(p) - Q_F(p)\right) = \sqrt{n}\left(\hat{F}_n^{-1}(p) - \hat{F}^{-1}(p)\right) \rightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right), \tag{2.12}$$

où

$$\sigma^2 = p(1-p)/f(Q_F(p))^2.$$

Preuve. Le théorème centrale limite pour les variables aléatoires i.i.d. implique que pour tout y dans le support de F, on a :

$$\sqrt{n}\left(\hat{F}_n(y) - F(y)\right) \rightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$$

où :

$$\sigma^2 = F(y)(1 - F(y))$$

Posons $y = Q_F(p) = F^{-1}(p)$, donc on obtient :

$$\sqrt{n}\left(\hat{F}_n(Q_F(p)) - F(Q_F(p))\right) = \sqrt{n}\left(\hat{F}_n\left(F^{-1}(p)\right) - F\left(F^{-1}(p)\right)\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}\left(0, p(1-p)\right)$$

Ceci implique que

$$\sqrt{n}\left(\hat{F}_n\left(F_n^{-1}(p)\right) - F\left(F_n^{-1}(p)\right)\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}\left(0, p(1-p)\right).$$

(Voir [Andrews(1996)]). Alors

$$\sqrt{n}(p - F\left(\hat{F}_n^{-1}(p)\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}\left(0, p(1-p)\right).$$

Un développement limité de Taylor donne

$$F\left(\hat{F}_n^{-1}(p)\right) = F\left(F^{-1}(p)\right) + f\left(\tilde{Q}_F(p)\right)\left(\hat{F}_n^{-1}(p) - F^{-1}(p)\right),$$

où $\tilde{Q}_F(p)$ est un point sur le segment entre $Q_F(p)$ et $Q_{F_n}(p)$. En reécrivant la dernière formule en supposant que $f\left(\tilde{Q}_F(p)\right) > 0$, on obtient

$$\sqrt{n}\left(\hat{F}_n^{-1}(p) - F^{-1}(p)\right) = -\frac{\sqrt{n}}{f\left(\tilde{Q}_F(p)\right)}\left(p - F\left(\hat{F}_n^{-1}(p)\right)\right).$$

Lorsque

$$Q_{F_n}(p) \to Q_F(p) \quad \text{en probabilité,}$$

$$\tilde{Q}_F(p) \to Q_F(p) \quad \text{en probabilité.}$$

Comme f est continue alors $f\left(\tilde{Q}_F(p)\right) \to f\left(Q_F(p)\right)$ en probabilité.
Alors d'après Slutsky

$$\sqrt{n}\left(\hat{F}_n^{-1}(p) - F^{-1}(p)\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right),$$

où : $\sigma^2 = p(1-p)/f\left(Q_F(p)\right)^2$. D'où le résultat. ■

2.2.5 Autres proprietes du quantiles

2.2.5.1 L'insensibilité de la médiane

Contrairement à la moyenne qui est sensible aux valeurs aberrantes, ces dernières n'ont aucune influence sur la médiane.

En effet, si on a un échantillion $Y_1, ..., Y_n$ de médiane m, on peut modifier l'échantillon en changement une donnée Y_i qui est inférieure à m par une autre donnée inférieure à m. Similairement, on peut changer une donnée de l'échantillon supérieure à m par une autre donnée supérieure à m. Cette modification sur les données d'échantillon n'a aucune influence sur la médiane.

2.2.5.2 La propriété du monotonie

Les quantiles satisfait l'importante propriété d'invariance suivante.

Proposition 2.6 *soit g une fonction croissante et continue à gauche. Alors :*

$$g\left(q_p(u)\right) = q_p\left(g(u)\right). \tag{2.13}$$

Ce résultat implique notamment que

$$q_p(au + b) = aq_p(u) + b, \tag{2.14}$$

de même,

$$q_p((aX)\,u + b(X)\,/\,X) = a(X)\,u + b(X)\,. \tag{2.15}$$

Mais il implique également que

$$q_p\,(\max(s,u)) = \max(s, q_p\,(u)), \tag{2.16}$$

où que

$$q_p\,(1\,\{u > 0\}) = 1\left\{q_p\,(u) > 0\right\}. \tag{2.17}$$

En revanche, et contrairement à l'espérance, la fonction quantile n'est pas linéaire. On a en général :

$$q_p\,(u_1 + u_2) \neq q_p\,(u_1) + q_p\,(u_2)\,. \tag{2.18}$$

2.3 Généralités sur les expectiles

Les expectiles en tant que généralisation de la moyenne sont devenues populaires au cours des dernières années car elles donnent non seulement une image plus détaillée des données que la moyenne ordinaire, mais peuvent également servir de base pour calculer les quantiles en utilisant leur relation étroite.

Définition 2.7 *L'expectile est une moyenne pondérée avec la seule particularité que son poids associé est une variable aléatoire en fonction des données. Comme les quantiles, l'expectile suffisent pour décrire la distribution d'une variable aléatoire, notamment avec la moyenne et quelques expectiles supérieurs et inférieurs à la moyenne de niveau* $\tau \in (0,1)$

$$e_\tau\,(Y) = \arg\min_{\theta\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(\eta_\tau(Y-\theta) - \eta_\tau(Y)\right) \quad \text{où}\ \eta_\tau(y) = \left|\tau - 1_{\{y\le 0\}}\right| y^2 \tag{2.19}$$

avec $1_{\{\cdot\}}$ *étant la fonction d'indicateur.*

Bien que formulé par l'utilisation des pertes quadratiques, le problème (2.19) est bien défini dés que $E\,|Y|$ est fini, grace à la présence du terme $\eta_\tau(Y)$. En termes d'interprétation, le τ-expectile spécifie la position e_τ de telle sorte que la distance moyenne des données inférieures à e_τ la même représentent 100τ de la distance moyenne entre e_τ et toutes les données :

$$\tau = \frac{\mathbb{E}\left\{|Y - e_\tau|\,1_{\{Y\le e_\tau\}}\right\}}{\mathbb{E}\,|Y - e_\tau|}. \tag{2.20}$$

Les expectiles ont été introduites par [Newey et Powell, (1987)] dans le contexte des modèles de régression linéaire. D'une part, (2.19) généralise l'espérence de X, qui coïncide avec $e_\tau\,(X)$ lorsque spécifiquement $\tau = 1/2$. Par contre, (2.19) est similaire au α-quantile de X, qui peut être obtenu en remplaçant y^2 par $|y|$ dans la définition de η_τ.

Cela motive le nom τ-expectile.
Bien que l'estimation des expectiles par les moindres carrées dans le cas de la régression linéaire, il a récemment regagné un intéret croissant pour le contexte des modèles non paramétrique, semi-paramétrique et plus complexes, plusieurs résultats asymptotiques tels qu'une cohérence uniforme et une théorème de limite centrale uniforme est montrée pour les estimateurs d'espérance, mais l'ordre τ_Y est supposé se situer dans un intervalle fixe de limite par 0 et 1.

Remarque 2.8 *Pour tout $X \in L^2$, l'application $\theta \mapsto \mathbb{E}\left(\eta_\tau(Y-\theta)\right)$ est convex et différentiable avec une dérivée donnée par $\theta \mapsto -2\mathbb{U}_\tau(Y)(\theta)$, où*

$$\mathbb{U}_\tau(Y) = \mathbb{E}\left(U_\tau(Y-\theta)\right), m \in \mathbb{R} \tag{2.21}$$

avec

$$U_\tau(y) = \begin{cases} \tau y, & y \geq 0 \\ (1-\tau)\, y, & y < 0 \end{cases}, y \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

De plus, $X \in L^1$, l'application $\theta \mapsto \mathbb{U}_\tau(Y)(\theta)$ est bien définie et bijective. Cette remarque implique que pour tout $X \in L^2$, le τ-expectile admis la représentation

$$e_\tau(X) = \mathbb{U}_\tau(X)^{-1}(0), \tag{2.23}$$

où $\mathbb{U}_\tau(X)^{-1}$ denote la fonction inverse de $\mathbb{U}_\tau(X)$. En particulier, (2.23) peut être utilisé pour définir l'application, $e_\tau : L^1 \to \mathbb{R}$ qui est compatible avec la forme (2.19).
Pour tout $X \in L^2$, la valeur dans (2.23) qu'il appelé le τ-expectile correspondant.

Comme le but est d'étendre leur estimation est la théorie asymptotique suffisamment loin dans les queues. Cela se traduit à considérer le niveau d'attente $\tau = \tau_n \to 0$ ou $\tau_n \to 1$ lorsque la taille de l'échantillon n tends vers ∞.

Remarque 2.9 *Le tableau suivant représente la syntaxe de calculer la valeur des expectiles sous logiciel de statistique R.*

Exemple 2.10 *On considère un échantion normal, et on calcule les quantiles et les expectiles des différentes valeurs, on obtient*

2.4 Propriétés de base

On considère la variable aléatoire Y est à valeur réelle, et les données $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ sont considérées comme la négative d'une série de rendements financiers. La queue droite de la distribution de Y correspond alors au négatif des pertes extrêmes, l'expectile e_τ d'ordre $\tau \in (0,1)$ de la variable Y peut être définie comme minimisation de

TABLE 2.1 – Liste des fonctions expectiles théoriques implémentées dans le package, y compris les paramètres de distribution.

Distribution	Expectile function	Paramèters
normal	enorm	m, sd
student t	et	df
Khi2	echisq	df
gamma	egamma	shape, rate, scale
exponential	eexp	rate
beta	ebeta	a,b
uniform	eunif	min, max
lognormal	elnorm	meanlog, sdlog

TABLE 2.2 – Calcul des quantiles et expectiles pour différentes valeurs d'un échantillon Gaussien

α	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99
q(α)	-2.201	-2.009	-1.696	-1.293	-0.797	0.070	0.820	1.275	1.695	2.075	2.259
e(α)	-1.724	-1.487	-1.146	-0.854	-0.533	0.019	0.549	0.855	1.131	1.465	1.690

l'équation (2.19) d'une fonction de perte quadratique par morceaux ou de manière équivalente

$$e_\tau = \arg\min_{\theta\in\mathbb{R}} \tau \left\{\mathbb{E}(Y-\theta)_+^2 - Y_+^2\right\} + (1-\tau)\,\mathbb{E}\left\{(Y-\theta)_-^2 - Y_-^2\right\},$$

où

$$y_+ = \max\left(y, 0\right) \;\; et \;\; y_- = \min(y, 0)$$

rend ce problème $Y \in L^1$ (c.à.d $E|Y| < \infty$).

La condition nécessaire de premier ordre associée pour l'optimalité peut être écrit de plusieurs façons l'un d'eux étant

$$e_\tau - \mathbb{E}(Y) = \frac{2\tau - 1}{1-\tau}\mathbb{E}\left\{(Y - e_\tau)_+\right\},$$

cette équation a une solution unique pour tout $Y \in L^1$. Les expectile désormais d'une distribution de la fonction F_Y avec le premier moment absolu fini est bien définie et nous supposerons en quoi s'ensuit $E(Y) < \infty$.

Les expectile résument la fonction de distribution de la même manière que les quantiles, une justification de leur utilisation pour décrire les distribution et leurs queues, ainsi que pour quantifier le "risque" qui implique le rendement de distribution considérée peut être basée sur les propriétés suivantes :

a/ Invariance de la loi : deux variables aléatoire intégrables Y et $\tilde{Y}$ avec des densités continues, ont la même distribution ssi $e_\tau(Y) = e_\tau\left(\tilde{Y}\right)$ pour chaque $\tau \in (0,1)$.

b/ Equivariance de localistion et d'échelle : le $\tau^{ème}$ espile de la transformation linéaire $\tilde{Y} = a + bY$ où $a, b \in \mathbb{R}$, satisfisant

$$e_\tau\left(\tilde{Y}\right) = \begin{cases} a + be_\tau(Y), & si\, b > 0 \\ a + be_{1-\tau}(Y), & si\, b \leq 0. \end{cases}$$

c/ Constante : si $Y = c \in \mathbb{R}$ avec probabilité 1, alors $e_\tau(Y) = c$ pour tout τ.

d/ Monotone stricte dans τ : si $\tau_1 < \tau_2$ avec $\tau_1, \tau_2 \in (0,1)$, alors $e_{\tau_1}(Y) < e_{\tau_2}(Y)$ de plus la fonction $\tau \longmapsto e_\tau$ dans $(0,1)$ sur sa gamme $\{y \in \mathbb{R}, 0 < F_Y(y) < 1\}$.

e/ Préserver l'ordre stochastique :si $Y \leq \tilde{Y}$ avec probabilité 1, alors $e_\tau(Y) \leq e_\tau\left(\tilde{Y}\right)$, pour tout τ.

f/ Sous-additivité : pour toutes les variables $Y, \tilde{Y} \in L^1$,

$$e_\tau\left(Y + \tilde{Y}\right) \leq e_\tau(Y) + e_\tau\left(\tilde{Y}\right), \text{ pour tout } \tau \leq \frac{1}{2}.$$

g/ Lipschitzianité par rapport à la distance de Wasserstein : pour tout $Y, \tilde{Y} \in L^1$ et tout $\tau \in (0,1)$, il considère que

$$\left|e_\tau(Y) - e_\tau\left(\tilde{Y}\right)\right| \leq \tilde{\tau}\mathbf{d}_W(\mathbf{Y}, \bar{\mathbf{Y}})$$

où

$$\tilde{\tau} = \max\{\tau/(1-\tau), (1-\tau)/\tau\}$$

et

$$d_W(Y, \bar{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|F_Y(y) - F_{\bar{Y}}(y)\right| dy = \int_0^1 \left|F_Y^{-1}(t) - F_{\bar{Y}}^{-1}(t)\right| dt.$$

h/ Sensibilité contre résistance : les expectiles sont très sensibles à l'amplitude de l'extrême étant donné que leur sensibilité aux erreurs grossières et leurs points de rejet sont infinis, alors qu'ils résistent à l'arrondissement et au regroupement systématiques car leur sensibilité au décalage locale est limitée.

2.4.1 Exprimer la fonction expectile $e(\tau)$ en termes de α, VaR et ES $(CVaR)$:

Jusqu'à présent, nous avons commodément redimensionné la fonction d'expectile $e(\tau)$ par raport à la fonction quantile plus connue $q(\alpha)$. Les cas extrêmes de la distribution uniforme sur l'intervalle unitaire remarquablement, rendent leurs fonctions expectiles sous une forme simple et fermée "Mais dans des contextes plus compliqués, la relation entre les deux familles de fonctions est plus opaque" par exemple : la non-linéairité dans une fonction quantile même si ce n'est que dans une queue induit la non-linéairité dans la fonction expectile correspondante sur toute sa rang même des approches paramétriques appliquant des fonctions de distribution qui prennent en compte "à la fois les queues lourdes et l'asymétrie" telles que "la distribution de student asymétrique " ou "la distribution de Pareto généralisée" compliqueraient la relation entre quantile et l'expectile de manière non triviale.

L'argument de la fonction expectile $\tau \in (0,1)$ n'a pas de point de départ naturel sauf $\frac{1}{2}$ puisque $\tau = \frac{1}{2}$ indique $e(\tau)$ comme la moyenne de la distribution pour les autres valeurs de τ utilisé des simulations de Monte Carlo pour tracer τ en fonction de α pour les distributions normales, logistiques et $t(3)$ sauf dans des cas extraordinaires tels que la distribution uniforme et les distributions généralisées, il ne peut pas y avoir de formule analytique qui exprime la fonction expectile $e(\tau)$ directement en termes de distribution sous-jacente. Cette section aborde cette barrière apparente à une compréhension intutive des expectiles en définissant les intervalles $e(\tau)$ de VaR, $(CVaR, ES)$ et le niveau α auquel ces valeurs sont calculées.

2.4.2 Expectile en fonction de la VaR et $CVaR$ (ES) :

Les régulateurs financiers peuvent trouver utiles d'avoir une définition formulaire de $e(\tau)$, ou au moins de son argument τ. Bien que τ, $\alpha \in (0,1)$, $\tau \neq \alpha$, sauf théoriquement dans la classe unique des distributions généralisées. Cette section définit maintenant τ en termes de α et mieux encore, $e(\tau)$ par référence à la VaR et à la $CVaR$ (ES), soit q_α le quantile d'une variable financière aléatoire Y dont la fonction de distribution est $F(y)$.

La probabilité que toute valeur de y est inférieur ou égale à q_α est α :

$$q_\alpha = F_\alpha^{-1}(y) = P\left[Y \leq q_\alpha\right].$$

Pour tout $\alpha \in (0,1)$, il existe un expectile correspondant e_τ avec l'argument $\tau \in (0,1)$ tel que $e_\tau = q_\alpha$, "il existe une fonction bijective unique" $h : (0,1) \to (0,1)$ tel que

$$e_{h(\alpha)} = q_\alpha$$

où $h(\alpha)$ est défini par :

$$h(\alpha) = \frac{-\alpha q_\alpha + \int_{-\infty}^{q_\alpha} y dF(y)}{-e_{1/2} + 2\int_{-\infty}^{q_\alpha} y dF(y) + (1-2\alpha) q_\alpha}$$

cette solution pour $e_\tau = q_\alpha$ à travers l'étape intermédiaire de mise en correspondance bijective de α sur τ relie les expectiles aux quantiles dans la mesure où "la solution ultime à $e(\tau)$ est déterminée par les propriétés de la variable aléatoire Y conditionelle à ce que Y dépasse e_τ " la définition da la fonction expectile suggère un autre lien relient les expectiles au ES ($CVaR$).

Pour compléter le lien entre cette définition des expectiles et les définitions réglementaires existantes de la VaR et la $CVaR$ adoptons des définitions qui rapportent la VaR et la $CVaR$ selon la convention statistique de $\alpha \in (0,1)$, plutôt que la convention réglementaire commune de fixation un niveau de confiance à $1-\alpha$ sont exemplaires :

$$\begin{aligned} VaR\left(y\right) &= q_{\alpha} = F_{\alpha}^{-1}\left(y\right),\ \alpha \in (0,1) \\ CVaR_{\alpha} &= \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{\alpha} VaR_{\alpha}\left(y\right) dFy = \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{\alpha} F^{-1}\left(y\right) dF\left(y\right). \end{aligned}$$

$CVaR$ (la valeur conditionnelle à risque)peut également s'exprimer par l'intégration de la fonction de densité de probabilité plutôt que la fonction de distribution cumulative :

$$CVaR_{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{q(\alpha)} f\left(y\right) dy = \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{\alpha} VaR_{\alpha}\left(y\right) dF\left(y\right).$$

La substitution de ces définitions de VaR et $CVaR$ à α dans l'équation définissant invariant dans le temps $h(\alpha)$ rapporte l'argument de l'expectile de la distribution $e(\tau)$ où précisement l'expectile est égale à $q(\alpha)$ le quantile de la distribution à α :

$$h(\alpha) = \frac{-\alpha VaR\alpha + \alpha CVaR_{\alpha}}{-e\left(\frac{1}{2}\right) + (1-2\alpha)VaR_{\alpha} + 2\alpha CVaR_{\alpha}}$$

après avoir traité le terme $e\left(\frac{1}{2}\right)$ dans le dénomonateur comme la valeur conditionelle (expected) de $y=0$ pour presque toutes les distributions financières, un réarrangement modeste donne une expression très simple de $h(\alpha)$ en termes de α, VaR et $CVaR$

$$h(\alpha) = \frac{\alpha\left(CVaR_{\alpha} - VaR_{\alpha}\right)}{VaR_{\alpha} + 2\alpha\left(CVaR_{\alpha} - VaR_{\alpha}\right)}.$$

Un nouveau réarrangement rapporte une somme très proche $\frac{1-\tau}{\tau}$ au moins pour les petites valeurs de τ :

$$\frac{1-2\tau}{\tau} = \frac{Var\alpha}{\alpha\left(CVar_{\alpha} - Var_{\alpha}\right)}$$

puisque $e(h(\alpha)) = q(\alpha)$,$CVaR$ à α peut être exprimer comme la valeur correspondante de VaR multipliée par une valeur supérieure à 1 pour $\tau \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$:

$$CVaR_{\alpha} = VaR_{\alpha}\left[1 + \frac{\tau}{\alpha(1-2\tau)}\right].$$

Ce ratio confirme deux propriétés de $CVaR$:

◇ Premièrement, pour tous les expectiles $\tau < \frac{1}{2}$, La $CVaR$ est plus conservateur que la valeur correspondante de VaR_{α}.

◇ Deuxièment à mesure que τ se rapproche à zéro, l'écart entre VaR et les écarts entre le VaR et $CVaR$ disparaît, tout comme tout avantage de précaution de remplacer la VaR par $CVaR$:

$$\lim_{\tau \to 0} VaR_{\alpha} \left[1 + \frac{\tau}{\alpha (1 - 2\tau)} \right] = VaR_{\alpha}.$$

Pour résumer : pour une distribution dont la fonction quantile $q(\alpha) = F^{-1}(\alpha)$ est comme l'argument expectile $e(\alpha)$ peut être exprimé uniquement en termes de seuil de probabilité de la distribution $\alpha \in (0,1)$.

La valeur à risque (VaR) le mesure de risque financier la plus populaire est définie de manière simple en tant que quantile :

$$VaR_{\alpha} = q(\alpha) = F^{-1}(\alpha).$$

L'expression

$$CVaR_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_{0}^{\alpha} VaR_{\alpha}(y) dF(y)$$

note $CVaR$. En effet, c'est l'intégrale définie de VaR_{α} de 0 à α,divisée par α de $CVaR$ est donc fonction de la fonction quantile $q(\alpha) = F^{-1}(\alpha)$.

$CVaR$ peut être compris inututivement comme la moyenne de tous les résultats au-délà du quantile $q(\alpha)$.

L'expectile $e(\tau)$ à son tour est égale à $q(\alpha)$. $e(\tau)$ est presque toujours impossible à exprimer directement en termes de α ou de son quantile correspondant, mais il peut être défini est tracé tout que son argument τ est correctement spécifié en termes de α.

2.5 Gestion des risques avec expectiles :

Il est bien connu que les quantiles gauche et droit x_{α}^{-} et x_{α}^{+} d'une variable aléatoire X peuvent être définie par la minimisation d'une fonction de perte linéaire par morceaux asymétrique :

$$\left[x_{\alpha}^{-}(X), x_{\alpha}^{+}(X) \right] = \arg\min_{x \in \mathbb{R}} \alpha \mathbb{E}\left[(X - x)_{+} \right] + (1 - \alpha) \mathbb{E}\left[(X - x)_{-} \right], \alpha \in (0,1)$$

où $x_{+} = \max(x, 0)$ et $x_{-} = \max(-x, 0)$.

Expectiles $e_q(X)$ comme minimiseurs d'une perte quadratique asymétrique :

$$e_q(X) = \arg\min_{x \in \mathbb{R}} q \mathbb{E}\left[(X - x)_{+}^{2} \right] + (1 - q) \mathbb{E}\left[(X - x)_{-}^{2} \right], \quad q \in (0,1) \tag{2.24}$$

quand $q = \frac{1}{2}$, il est bien connu que $e_q(X) = E[X]$, donc les expectiles peuvent être considérées comme une généralisation asymétrique de la moyenne. Le terme "expectiles" a probablement été suggéré comme une combinaison de "expectative" et de "quantiles". Les expectiles sont identifiées de manière unique par la condition du premier ordre :

$$q\mathbb{E}\left[\left(X-e_q(X)\right)_+\right]=\left(1-q\right)\mathbb{E}\left[\left(X-e_q(X)\right)_-\right] \tag{2.25}$$

puisque l'équation est bien définie pour chaque $X \in L^1$, qui est le domaine naturel de définition des expectiles, nous la prenons comme définition de l'$e_q(X)$

$$l_q(x) := qx_+ - \left(1-q\right)x_-$$

nous voyons que l'équation (2.25) peut être réecrite comme

$$\mathbb{E}\left[l_q\left(X-e_q(X)\right)\right]=0$$

Les expectiles sont donc un exemple de mesure du risque également connu sous le nom de primes d'utilité zéro dans la littérature actuarielle de ce point de vue, il avaient été pris en compte bien que le lien avec le problème de minimisation (2.24) et avec la notion statistique des expectiles n'apparaise que dans la littérature la plus récente. En général, une fonction statistique qui peut être définie comme le minimiseur d'une fonction d' $Expected\ Shortfall$ appropriée comme dans (2.24) est dite éligible pour plus d'informations sur la propriété d'élicitabilité et sa pertinence financière.

Dans cette section, nous comparons les expectiles avec mesures de risque financier les plus courantes, à savoir la valeur à risque (VaR_α) et la valeur conditionnelle à risque ($CVaR_\alpha$) nous définissons

$$VaR_\alpha(X) = -x_\alpha^+(X)\ ,\alpha\in(0,1)$$
$$CVaR_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha x_s^+(X)\,ds\ ,\alpha\in(0,1)$$

pour être cohérente avec ces conventions de signe et pour faciliter les comparaisons, nous définissons la VaR d'expectile $\left(EVaR_q\right)$ comme suit :

$$EVaR_q(X) = -e_q(X)$$

$EVaR_q$ est la mesure du risque financier associée aux expectiles, de la même manière que VaR_α est la mesure du risque financier associée aux quantiles.
Pour $q \leq \frac{1}{2}$, $EVaR_q$ est une mesure de risque cohérente, car elle satisfait les axiomes bien connus. En effet, il est facile de voir que

♣ *Invariance par translation :*

$$EVaR_q(X+h) = EVaR_q(X) - h\ ,h\in\mathbb{R}$$

♣ *Monotonie* :

$$X \leq Y \implies EVaR_q(X) \geq EVaR_q(Y)$$

♣ *Homogénéité positive* :

$$EVaR_q(\lambda X) = \lambda EVaR_q(X) \ \ , \lambda \geq 0$$

♣ *Sous additivité* :

$$EVaR_q(X+Y) \leq EVaR(X) + EVaR_q(Y)$$

De plus, il a été démontré dans plusieurs références (Voir par exemple, [Bellini et al., 2014]), bien qu'à partir d'angles différents, que $EVaR_q$ avec $q \leq \frac{1}{2}$ est la seule mesure de risque cohérenteDe plus, il a été démontré dans plusieurs références (Voir par exemple, [Bellini et al., 2014]), bien qu'à partir d'angles différents, que $EVaR_q$ avec $q \leq \frac{1}{2}$ est la seule mesure de risque cohérente qui soit également possible pour les propriétés d'$EVaR_q$ en tant que mesure de risque cohérente, notamment pour sa double représentation.
Afin de mieux comprendre le signification financière d'$EVaR_q$, il est intéressant de comparer son ensemble d'acceptation avec VaR_α.
Rappelons que l'ensemble d'acceptation d'une mesure de risque invariant de translation ρ est défini comme :

$$A_\rho = \left\{X \ / \ \rho(X) \leq 0\right\}$$

et que ρ peut être récupéré par A_ρ par la formule

$$\rho(X) = \inf\left\{m \in \mathbb{R} / \ X + m \in A_\rho\right\},$$

pour les traitements manuels dans le cas de Var_α

$$A_{Var_\alpha} = \{X \mid P(X < 0) \leq \alpha\},$$

notons que nous pouvons écrire de manière équivalente

$$A_{Var_\alpha} = \left\{X \ \mid \frac{P(X > 0)}{P(X \leq 0)} \geq \frac{1-\alpha}{\alpha}\right\} \tag{2.26}$$

Dans le cas de $CVaR$, nous avons

$$A_{EVar_q} = \left\{X \mid \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha x_\mu(X)\, d\mu \geq 0\right\}$$

Dans le cas de $CVaR_q$ l'ensemble d'acceptation peut être écrit comme

$$A_{EVaR_q} = \left\{X \mid \frac{\mathbb{E}[X_+]}{\mathbb{E}[X_-]} \geq \frac{1-q}{q}\right\} \tag{2.27}$$

$L'EVaR_q$ est alors le montant d'argent qui devrait être ajouté à une position afin d'avoir un rapport gain/pert prédéfini, suffisamment élevé.

Nous rappelons que le rappoert gain-perte ou $\Omega - ratio$ est une mesure de perfomance populaire dans la gestion de portefeuille et également bien connu dans la littérature sur la valorisation sans accord sur des marchés incomplets. On soutient parfois que $EVaR_q$ est "difficile à expliquer" à la communauté financière, mais cela est probablement dû au fait que (2.24) est généralement pris comme point de départ au lieu de (2.27), qui a une signification financière transparente : dans le cas de VaR_α, une position est acceptable si le rapport de la probabilité d'un gain par rapport à la probabilité d'une perte est su samment élevé (2.26), dans le cas d'VaR_q, une position est acceptable si le rapport entre la valeur entendue du gain et la valeur entendue de la perte est suffisamment élevée (2.27).

2.5.1 Propriétés des expectiles :

nous prenons comme définition des expectiles l'équation suivante, valable pour chaque $X \in L^1$:

$$q\mathbb{E}\left[\left(X - e_q(X)\right)_+\right] = (1-q)\,\mathbb{E}\left[\left(X - e_q(X)\right)_-\right] \tag{2.28}$$

qui peut aussi s'écrire :

$$q = \frac{\mathbb{E}\left[\left(X - e_q(X)\right)_-\right]}{\mathbb{E}\left[\left|X - e_q(X)\right|\right]}$$

Ce qui montre que les expectiles $e_q(X)$ peuvent être considérés comme les quantiles d'une distribution transformée avec fonction de distribution

$$G(X) := \frac{\mathbb{E}\left[\left(X - e_q(X)\right)_-\right]}{\mathbb{E}\left[\left|X - e_q(X)\right|\right]}$$

nous collectons dans la proposition suivante d'autres propriétés des expectiles :

Proposition 2.11 *Soit $X \in L^1$ et soit $e_q(X)$ la solution unique de (2.28). Alors*

a) *$e_q(X)$ est strictement monotone en q, pour $q \in (0,1)$*

b) *$e_q(X)$ est strictement monotone en X, dans le sens où*

$$X \geq Y \text{ et } P(X > Y) > 0 \Longrightarrow e_q(X) > e_q(Y)$$

c) $e_q(-X) = -e_{1-q}(X)$.

d) *Si X est symétrique par rapport à x_0, puis*

$$\frac{e_q(X) + e_{1-q}(X)}{2} = x_0$$

e) *Si X a une densité C^1, alors $e_q(X)$ est une fonction C^1 de q, avec*

$$\frac{de_q(X)}{dq} = \frac{\mathbb{E}\left[\left|X - e_q(X)\right|\right]}{(1-q)\,F\left(e_q(X)\right) + q\,\bar{F}\left(e_q(X)\right)}.$$

2.6 Processus empirique de queue

Supposons que nous observons des copies indépendantes $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ d'une variable aléatiore Y et notons $Y_{1,n} \leq Y_{2,n} \leq ... \leq Y_{n,n}$ leurs statistiques de $n^{ième}$ ordre.
L'expectile élevé e_{τ_n} comme $\tau_n \to 1$ et comme $n \to \infty$ peut être estimé par sa contre partie empirique

$$\tilde{e}_{\tau_n} = \arg\min_{\theta\in\mathbb{R}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\eta_{\tau_n}(Y_i - \theta) - \eta_{\tau_n}(Y_i)\right] = \arg\min_{\theta\in\mathbb{R}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_{\tau_n}(Y_i - \theta), \tag{2.29}$$

où $\eta_\tau(y) = \left|\tau - 1_{\{y\leq 0\}}\right| y^2$ est la fonction de vérification expectile. Ce minimiseur LAWS peut être facilement calculé en appliquant la fonction "expectile " implémentée dans le package R" expectreg ".
Il n'est pas difficile de vérifier que

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}\left(\frac{\tilde{e}_{\tau_n}}{e_{\tau_n}} - 1\right) = \arg\min_{\theta\in\mathbb{R}} \Psi_n(\theta)$$

avec

$$\Psi_n(\theta) = \frac{1}{2e_{\tau_n}^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\eta_{\tau_n}\left(Y_i - e_{\tau_n} - \frac{\theta e_{\tau_n}}{\sqrt{n(1-\tau_n)}}\right) - \eta_{\tau_n}(Y_i - e_{\tau_n})\right].$$

Théorème 2.12 *On suppose qu'il existe $\delta > 0$ telle que $\mathbb{E}\left(X^{2+\delta}\right) < \infty$, et que $0 < \gamma < 1/2$ et $\tau_n \to 1$ et tel que $n(1-\tau_n) \to \infty$ comme $n \to \infty$. Alors*

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}\left(\frac{\tilde{e}_{\tau_n}}{e_{\tau_n}} - 1\right) \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathcal{N}\left(0, V(\gamma)\right)$$

avec

$$V(\gamma) = \frac{2\gamma^3}{1-2\gamma}.$$

Par analogie avec le processus de quantile empirique de queue bien connu

$$\begin{array}{ccc} (0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ s & \mapsto & \hat{q}_{1-ks/n} := Y_{n-[ks],n} \end{array}$$

où $[\cdot]$ représente la partie entière et $k = k(n) \longrightarrow 0$, nous définissons que le processus empirique de queue est le processus stochastique

$$\begin{array}{rcl}(0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ s & \longmapsto & \tilde{e}_{1-(1-\tau_n)_s}.\end{array}$$

Notez que le processus de quantile de queue n'est rien d'autre que $\left\{\hat{q}_{1-(1-\tau_n)s}\right\}_{0<s\leq 1}$ avec $\tau_n = 1 - k/n$.

Notre objectif principale dans cette section est de fournir des approximations asymptotiques générales du processue gaussiens, sous l'hypothèses du modèle des distributions à queue lourde à cette fin, quelques remarques et travaux préparatoires sont nécessaires.

2.6.0.1 Modèle statistiques et résultats préliminaires :

La convention que nous avons choisi pour les valeurs de Y comme négatif des rendements implique que les pertes extrêmes correspondent à des niveaux τ proches de 1, ont décrit ce qui se passe pour grandis espoirs de population $e_\tau$et leur lien avec des quantiles élevés q_τ lorsque F_Y est attiré par le domaine maximal des distribution de type Pareto avec indice de queue $0 < \gamma < 1$, une telle fonction de distribution à queue lourde peut être exprimée comme :

$$F_Y(y) = (1 - y^{-1/y})\ell(y) \tag{2.30}$$

où $\ell(.)$ est une fonction à variation lente en ∞, c.à.d. $\ell(\lambda y)/\ell(y) \to 1$ pour tout $\lambda > 0$. L'index γ règle la lourdeur de queue de la fonction de distribution F_Y, dont le premier moment n'éxiste pas lorsque $\gamma > 1$, écrivant $\bar{F}_Y = 1 - F_Y$, ont montré dans le cas $\gamma < 1$ que

$$\frac{\bar{F}_Y(e_\tau)}{\bar{F}_Y(q_\tau)} \sim \gamma^{-1} - 1, \text{ quand } \tau \to 1, \tag{2.31}$$

où de manière équivalente

$$\frac{\bar{F}_Y(e_\tau)}{1-\tau} \sim \gamma^{-1} - 1, \text{ quand } \tau \to 1.$$

Il s'ensuit que les expectiles extrêmes e_τ sont plus grands que les quantiles q_τ(c.à.d. $e_\tau > q_\tau$) lorsque $\gamma > \frac{1}{2}$, tandis que $e_\tau < q_\tau$ lorsque $\gamma < \frac{1}{2}$, pour tout grand τ.

La connexion (2.31) entre les expectile élevés et les quantiles peut en faite être raffinée sensiblement en considérant une version renforcée mais classique de la condition (2.30). Supposons $\mathbb{U}$ la fonction quantile de Y à savoir l'inverse continu à gauche de $\frac{1}{\bar{F}_Y}$ défini par :

$$\forall t > 1, \mathbb{U}(t) = q_{1-\frac{1}{t}} = \inf\left\{y \in \mathbb{R} : \frac{1}{\bar{F}_Y(y)} \geq t\right\}.$$

On a : la condition de régularité de premier ordre comme suit :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{U}(tx)}{\mathbb{U}(t)} = x^{\gamma}, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.32}$$

Sous la condition (2.32), il a été constaté que

$$\frac{e_\tau}{q_\tau} \sim \left(\gamma^{-1} - 1\right)^{-\gamma}, \text{ quand } \tau \to 1. \tag{2.33}$$

La condition de deuxième ordre est formulée comme suit, est telle qu'il existe $\gamma > 0, \rho <$ 0 est une fonction $A(\cdot)$ convergeant vers 0 à l'infini et ayant un signe constant tel que $C_2(\gamma, \rho, A)$ pour tout $x > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{A(t)} \left[\frac{U(tx)}{U(t)} - x^{\gamma}\right] = x^{\gamma} \frac{x^{\rho} - 1}{\rho} \tag{2.34}$$

ici et dans ce qui suit, $(x^{\rho} - 1)/\rho$, ρ doit être compris comme $\log x$ lorsque $\rho = 0$, ainsi que de nombreux exemples de distributions continues couramment utilisées satisfaisant $C_2(\gamma, \rho, A)$ par exemple : les distibutions de Pareto généralisées, Burr, Fréchet, Fisher, Student et gamma inverse, tous satisfont à cette condition et plus généralement toute distribution dont la fonction de distribution F est satisfaisante

$$1 - F(x) = x^{\frac{-1}{\gamma}} \left(a + bx^{\frac{\rho}{\gamma}} + o(x^{\frac{\rho}{\gamma}})\right), \text{ quand } x \to \infty \tag{2.35}$$

où a et b sont des constantes positives et $\rho < 0$.

2.7 Relation entre quantile et expectile

Un fait intéressant est que plusieurs caractéristiques et expressions existantes pour les quantiles ont leur analogue avec les expectiles. Par exemples, les quantiles sont des statistiques équivalentes pour des distributions obsolument continues c.à.d qu'à chaque quantile q_θ de niveau θ, on peut trouver une expectile U_{τ_θ} de niveau τ_θ tel que :$q_\theta = e_{\tau_\theta}$. Pour le montrer, considérons d'un côté le niveau θ du quantile q_θ défini par :

$$\theta = F(q_\theta) = \mathbb{E}\left[1_{\left\{Y < q_\theta\right\}}\right] \tag{2.36}$$

D'un autre côté, la condition d'ordre première de la fonction (2.30) sous sa forme intégrales :

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_\tau(y-e_\tau)(y-e_\tau)dF_Y = \tau \int_{\mathbb{R}} \left|y-e_\tau\right| dF_Y - \int_{-\infty}^{e_\tau} (y-e_\tau)dF_Y = 0$$

nous permet de définir le niveau

$$\tau = \frac{\mathbb{E}\left[|Y-e_\tau| 1_{\{Y<e_\tau\}}\right]}{\mathbb{E}\left[|Y-e_\tau|\right]} \tag{2.37}$$

de l'expectile e_τ maintenant, soit quantile q_θ de niveau θ. Pour chaque θ fixé, définissons le niveau τ_θ tel que

$$q_\theta = e_{\tau_\theta}. \tag{2.38}$$

A partir des expressions (2.36) et (2.38), nous avons :

$$\tau_\theta = \frac{\theta q_\theta - \left[\mathbb{E} Y 1_{(Y<q_\theta)}\right]}{\mathbb{E}\left[\left|Y-q_\theta\right|\right]} \tag{2.39}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|Y-q_\theta\right|\right] &= -\int_{-\infty}^{q_\theta} (y-q_\theta)dF_Y + (y-q_\theta)dF_Y \\ &= \zeta - 2\mathbb{E}\left[Y 1_{(Y<q_\theta)}\right] - q_\theta\left(1-2\theta\right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque θ fixée, il existe un τ_θ tel que $e_{\tau_\theta} = q_\theta$ avec :

$$\tau_\theta = \frac{\theta q_\theta - \mathbb{E}\left[Y 1_{(Y<q_\theta)}\right]}{e - 2\mathbb{E}\left[Y 1_{(Y<q_\theta)}\right] - q_\theta(1-2\theta)}.$$

Ce résultat est également vrai pour la classe des modèles conditionnels (ex : régression), ainsi par cette correspondance bijective, les expectiles peuvent s'interpréter comme des quantiles et vice versa. Ce résultat est très utile dans des situation où l'estimation des quantiles est très longue et que son unicité n'est pas garantie. D'ailleurs, la correspondance est utilisée pour estimer dans un cadre non paramétrique les quantiles conditionnels à partir des expectiles conditionels. Il existe un développement similaire, avec une notation différente, en plus de montrer que l'expectile d'une distribution F est un quantile d'une distribution G. L'expectile peut également s'interpréter comme l'espérance de la queue de la distribution «tail expectation». Pour terminer, lorsque la fonction de répartition de Y définie par :

$$F\left(y\right) = \frac{1}{2}\left\{1 + sign(y)\sqrt{1+4/(4+y^2)}\right\}_{y\in\mathbb{R}}$$

alors $q_\theta = e_\theta$.

Preuve. Les distributions de type Pareto avec un indice de queue β sont définies comme

$$F_x(x) = 1 - L(x)\, X^{-\beta}, \qquad \text{avec } \lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(X)} = 1, \forall t > 0.$$

[Bellini et al., 2014] montrer que les distributions de type pareto, il tient que

$$\frac{\bar{F}\{e_\tau(X)\}}{\beta - 1} \approx 1 - \tau \text{ où } \tau \to 1.$$

Évédement, cela tient plus lois

$$\frac{\bar{F}\{e_\tau(X)\}}{\bar{F}\{q_\tau(x)\}} = (\beta - 1)\frac{1-\tau}{1-\tau}.$$

En établissant que pour une distribution de type pareto, le qauntile sera plus grand que l'expectile si $\beta < 2$ et plus petit que l'expectile si $\beta > 2$ pour les grandes valeurs de τ.Ainsi pour la distribution de retour dans le domaine maximum d'attraction (MDA) de la distribution des valeurs extêmes généralisées, c'est-à-dire si $\exists W$ que le pareto généralisé (GP) distribué avec le paramètre de forme γ, tel que

$$\sup_{x\geq 0} \left| F_u(x) - W_{\gamma,\beta(u)}(x) \right| \to 0 \text{ for } u \to \infty,$$

voir le théorème 18.9 dans ([Franke et al., (2010)].Il a été constate dans des études antérieures que cette hypothèse décrit suffisamment bien la structure de queue des données financières pour fournir des résultats copmtitifs pour la plupart des applications gestion de risque, voir par exemple ([Moscadelli, (2004)]). Dans ces études, la valeur réalisée de β a été trouvée bien au-desssus de 2, ce qui correspond aux résultats de cet article et à la constation supplémentaire que les expectiles étaient plus centrées sur la moyenne que les quntiles pour des séries chronologiques financières considérées dans cette enquête. Les implications pour l'application dans la gestion des risque sont que l'expectile est une mesure de risque moins prudente pour les données financières typiques.

D'autre implication prometteuses sont une extension possible d'un estimateur de $Expected\ Shortfall$ basé sur l'expectile dynamique dans le temps, introduit ultérieurement. L'estimation du paramètre de queue β pourrait enrichir l'ensemble d'information disponible, en identifiant la distance relative entre l'expectile et le quantile. Cela pourrait potentiellemnt être utilisée pour éliminer le biais. ■

CHAPITRE 3

MÉTHODES DE L'ESTIMATION DE LA VAR ET DE LA CVAR

Sommaire

3.1 Introduction

La méthode d'estimation de la VaR se divise en trois catégories [Manganelli et Engle (2004)].

- La première est la méthode paramétrique dans laquelle un processus de retour d'intérêt est généré par un modèle avec des termes d'erreur suivant une distribution spécifique, par exemple, des modèles $GARCH$ linéaires avec des innovations normales. Dans ce cas, on estime tous les paramètres et VaR à partir du modèle paramétrique donné ;
- La seconde est la méthode non paramétrique qui utilise des données de retour sans aucune hypothèse sur un modèle. Dans ce cas, la VaR est estimée comme le quantile d'une fenêtre mobile, tandis que ES est estimée comme la moyenne des valeurs au-delà de la VaR estimée ;
- La troisième est la méthode semi-paramétrique qui inclut la théorie des valeurs extrêmes (EVT) et l'approche de régression quantile.

La méthode de la VaR non paramétrique la plus largement utilisée est la simulation historique, qui ne nécessite aucune hypothèse de distribution et estime la VaR comme le quantile de la distribution empirique des rendements historiques à partir d'une fenêtre mobile des périodes les plus récentes. Pour cette approche, le $CVaR$ peut être estimée comme la moyenne des rendements, dans la fenêtre mobile, qui dépassent l'estimation de la VaR. Une difficulté avec la méthode de simulation historique est le choix du nombre de périodes passées inclure dans la fenêtre en mouvement.

La catégorie VaR semi-paramétrique comprend des méthodes basées sur la théorie des valeurs extrêmes (EVT) ou la régression quantile. L'application simple de l'EVT est entravée par l'hétéroscédasticité présente dans les séries de rendements financiers. Pour surmonter cela, [Diebold et al., (2000)] et [McNeil et Frey, (2000)] proposent que la méthode EVT des pics au-dessus du seuil soit appliquée aux résidus normalisés par les estimations de volatilité conditionnelle $GARCH$. En utilisant la distribution de dépassement, l'approche fournit une formule analytique pour le $CVaR$ (voir [McNeil et Frey, (2005)]).

3.2 Estimations non paramétriques

Cette section se concentre sur l'estimation du VaR lorsque les données proviennent d'une distribution paramétrique et que nous voulons utiliser les paramètres.

3.2.1 VaR et CVaR empirique

L'estimation empirique des quantiles est l'une des méthodes non paramétriques classiques pour l'estimation de la VaR et de la $CVaR$. Soit X une variable aléatoire,

$(X_1, X_2, ..., X_N)$ est un échantillon de ses valeurs, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(N)}$ est les statistiques d'ordre croissant, $f(X)$ et $F(X)$ sont respectivement le pdf et cdf. La méthode est basée sur le résultat théorique, si x^{α} est le $\alpha^{ème}$ de quantile de $F(x)$ et $f(x^{\alpha}) \neq 0$ alors

$$X_{\ell} \underset{\ell \to \infty}{\mapsto} \mathcal{N}\left\{x^{\alpha}, \frac{\alpha(1-\alpha)}{n\left[f(x^{\alpha})\right]^2}\right\}, \tag{3.1}$$

lorsque $\ell = n\alpha$. En tenant compte (1.19), l'estimaton de la VaR_{α} peut être obtenue (3.1) en utilisant $X_{(\ell)}$.
Si $\ell = n\alpha$ n'est pas entier, l'interpolation peut être utilisée pour l'estimation quantile. Soit ℓ_1, ℓ_2 les deux entiers positifs voisins tels que $\ell_1 < n\alpha < \ell_2$ et $p = \frac{\ell_i}{N}$, $i = 1, 2$. Puis

$$\overline{VaR_{\alpha}} = \frac{p_2 - \alpha}{p_2 - p_1} X_{(\ell_1)} + \frac{\alpha - p_1}{p_2 - p1} X_{(\ell_2)}, \tag{3.2}$$

$$\overline{CVaR_{\alpha}} = \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{n} X_{(i)} 1_{\left\{X_{(i)} > \overline{VaR_{\alpha}}\right\}}, \tag{3.3}$$

où N_{α} est le nombre de statistiques d'ordre supérieure à $\overline{VaR_{\alpha}}$.

Si la valeur de la statistique d'ordre α des probabilités différents, les estimations des mesures de risque peuvent être obtenues comme suit. Nous considérons les statistique d'ordre : $\left\{X_{(1)}, P_{(1)}\right\}, ..., \left\{X_{(n)}, P_{(n)}\right\}$,

$$\sum_{i=1}^{n} P_{(i)} = 1, p = 1 + (\alpha - 1)\frac{n}{N}, \; \bar{p}^{-} = \sum_{i=1}^{k^{-}} P_{(i)} \leq p, \bar{p}^{+} = \sum_{i=1}^{k^{-}+1} P_{(i)} \geq p. \tag{3.4}$$

Puis :

$$\overline{VaR_{\alpha}} = X_{(k^{-})} + \frac{X_{(k^{-}+1)} - X_{(k^{-})}}{\bar{p}^{+} - \bar{p}^{-}}\left(p - \bar{p}^{-}\right), \tag{3.5}$$

$$\overline{CVaR_{\alpha}} = \overline{VaR_{\alpha}} . \frac{\bar{p} - \bar{p}^{-}}{\bar{p}^{+} - \bar{p}^{-}} + \frac{1}{n - \bar{k} - 1} \sum_{i=1}^{n-k-1} X_{(k^{-}+i)} P_{(k^{-}+i)}. \tag{3.6}$$

Les avantages de l'estimation quantile empirique sont sa simplicité et l'utilisation d'aucune hypotèse de distribution spécifique. Cependant, elle présente certains inconvénients. Elle suppose que la distribution sous échantillon reste inchangée, ce qui n'est souvent pas le cas dans la pratique. De plus, si α est assez proche de l, le quantile empirique n'est pas une estimation efficace du quantile théorique. En pratique, la $\overline{VaR_{\alpha}}$ obtenue par le quantile empirique peut servir de limite inférieure pour cette mesure de risque.

3.2.2 Simulation historique pour la VaR et la $CVAR$

3.2.2.1 Pour la VaR

La VaR est estimée comme le α éme quantile de la distribution empirique des pertes

$$\widehat{VaR}_t^{\alpha} = -R_{w:T}, \tag{3.7}$$

où $R_{w:T}$ est la statistique d'ordre α des données et

$$w = [T\alpha] = \max\{m \mid m \leq T\alpha, m \in \mathbb{N}\}. \tag{3.8}$$

Mais le quantile empirique n'est pas un bon estimateur pour un quantile extrême.

Comme vu dans le séminaire, ne peut être révisé quotidiennement. Parceque nous avons besoin de beaucoup d'observations pour estimer les quantiles.

3.2.2.1.1 Pour la $CVaR$ La loi forte de Kolmogorove des nombres stipule que pour une séquence i.i.d. $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ avec $E(Y_i) = \mu < \infty$ et $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$

$$\bar{Y} \overset{a.s}{\rightarrow} \mu. \tag{3.9}$$

Cela vaut également pour l'ensemble de tous les L_i qui dépassent le quantile q_θ, donc sous l'hypothèse de données i.i.d. data, une approche simple pour calculer l' $Expected\ Shortfall$ de L est la moyenne de toutes les valeurs dépassantes le quantile empirique pendant une période limitée $[t-\Delta, t]$ où $\Delta \in \mathbb{N}$ est la taille de la fenêtre d'estimation

$$\widehat{ES} = \sum_{i=t-\Delta}^{t} E\left[L_i \mid L_i > q_\theta\right]. \tag{3.10}$$

La simulation historique est une technique non paramétrique, même si la structure i.i.d. est supposée, ce qui donne l'aventage que les erreurs de spécification du modèle sont minimisées. Une évidence complète de la spécification incorrecte du modèle ne peut pas être obtenue, car le risque de liquidité n'est pas pris en compte en raison de la structure de portefeuille constante supposée.

3.3 Estimation semi-paramétrique

3.3.1 Estimation basée sur les expectiles :

3.3.1.1 Estimation de la valeur à risque (VaR) basée sur les expectiles :

Notre objectif principal dans cette section est d'estimer e_{τ_n} pour les niveaux élevés τ_n qui peuvent approche 1 de toute façon, courant à la fois les scénarios d'expectiles

intermédiaires avec $n(1-\tau_n) \to \infty$ et les expectiles extrêmes avec $n(1-\tau_n) \to c$ pour une constante non négative c.
Nous supposons que les données disponibles sont constituées de copies indépendantes $(Y_1, \ldots\ldots, Y_n)$ de Y et nous notons $Y_{1,n} \le \ldots\ldots \le Y_{n,n}$ leurs statistiques d'ordre croissant.

3.3.1.2 Estimation intermédiaire des expectiles

3.3.1.2.1 Estimation basée sur des quantiles intermédiaires : La justification de cette première méthode repose sur la propriété de variation régulière et sur l'équivalence

$$F_Y(y) = 1 - \ell(y).y^{\frac{-1}{\gamma}} \tag{3.11}$$

asymptotique

$$\frac{\bar{F}_Y(e_\tau)}{\bar{F}_Y(q_\tau)} \sim \gamma^{-1} - 1, \tau \to 1, \gamma < 1 \tag{3.12}$$

étant donné que F_Y satisfait la condition (3.11), nous attendons à ce que le résultat (3.12) implique que

$$\frac{e_\tau}{q_\tau} \sim \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)^{-\gamma}, \ \tau \to 1. \tag{3.13}$$

Par conséquent, pour un estimateur convenable $\hat{\gamma}$ de γ, nous pouvons suggérer d'estimer d'expectile intermédiaire e_{τ_n} pour :

$$\hat{e}_{\tau_n} = \left(\hat{\gamma}_H^{-1} - 1\right)^{-\hat{\gamma}} \hat{q}_{\tau_n} \text{ où } \hat{q}_{\tau_n} = Y_{n-[n(1-\tau_n)],n}$$

et $[\cdot]$ représente la partie entière. Cet estimateur est parallèle à la VaR quantile intermédiaire $\hat{q}_{\tau_n}$ et dépend essentiellement de l'indice de queue estimé $\hat{\gamma}$. Par conséquent, il est plus extrême lorsque $\hat{\gamma} < \frac{1}{2}$ un estimateur simple et largement utilisé de γ est donnée par l'estimation populaire de Hill :

$$\hat{\gamma}_H = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \log \frac{Y_{n-i+1,n}}{Y_{n-k,n}} \tag{3.14}$$

où $k = k(n)$ est une séquence intermédiaire dans le sens où $k(n) \to \infty$ telle que $k(n)/n \to 0$ et $n \to \infty$. Ensuite, nous formulons des conditions qui conduisent à une normalité asymptotique pour $\hat{e}_{\tau_n}$.

Théorème 3.1 *Supposons que F_Y est strictement croissante, satisfait la condition $C_2(\gamma, \rho, A)$ avec $0 < \gamma < 1$ et que $\tau_n \to 1$ et $n(1-\tau_n) \to \infty$. On suppose en plus que*

$$\sqrt{n(1-\tau_n)} \left(\hat{\gamma} - \gamma, \frac{\hat{q}_{\tau_n}}{q_{\tau_n}} - 1\right) \xrightarrow{\mathscr{D}} N(\Gamma, \Theta)$$

si

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}q_{\tau_n}^{-1} \to \lambda_1 \in \mathbb{R},$$

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}A\left((1-\tau_n)^{-1}\right) \to \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

et

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}/\log\left[(1-\tau_n)/\left(1-\tau_n'\right)\right] \to \infty,$$

alors

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}\left(\frac{\hat{e}_{\tau_n}}{e_{\tau_n}}-1\right) \xrightarrow{\mathscr{D}} m(\gamma)\Gamma+\Theta-\lambda$$

avec

$$m(\gamma) = (\gamma-1)^{-1} - \log\left(\gamma^{-1}-1\right)$$

et

$$\lambda = \gamma\left(\gamma^{-1}-1\right)^{\gamma}\mathbb{E}(Y) + \left(\frac{\left(\gamma^{-1}-1\right)^{-\rho}}{1-\rho-\gamma} + \frac{\left(\gamma^{-1}-1\right)^{-\rho}-1}{\rho}\right)\lambda_2.$$

3.3.2 Estimation des expectiles extrêmes :

Nous discutons maintenant une question importante de l'estimation des expectiles extrêmes de la queue $e_{\tau'}$ où $\tau' \to 1$ avec $n\left(1-\tau_n'\right) \to c < \infty$ lorsque $n \to \infty$.

L'idée de base est d'extrapoler les estimations intermédiaires des expectiles d'ordre $\tau_n \to 1$, tel que $n(1-\tau_n) \to \infty$ au niveau très extrême τ_n'. Ceci est réalisé en transférant l'élégant dispositif pour estimer un quantile extrême à notre configuration expectile. Notez que, dans la théorie standard des valeurs extrêmes et les domaines d'application connexes, les niveaux $\acute{\tau}_n$ et τ_n sont généralement définis pour être $\tau_n = 1-p_n$, pour un p_n beaucoup plus petit que $\frac{1}{n}$, et $\tau_n = 1-\frac{k(n)}{n}$ pour une séquence intermédiaire d'entiers $k(n)$.

L'hypothèse du modèle de queue de type Pareto qui à son tour suggère que

$$\frac{q_{\tau_n'}}{q_{\tau_n}} = \frac{\mathbb{U}\left(\left(1-\tau_n'\right)^{-1}\right)}{\mathbb{U}\left((1-\tau_n)^{-1}\right)} \approx \left(\frac{1-\tau_n'}{1-\tau_n}\right)^{-\gamma}$$

et ainsi

$$\frac{e_{\tau_n'}}{e_{\tau_n}} \approx \left(\frac{1-\tau_n'}{1-\tau_n}\right)^{-\gamma}$$

Par la relation (3.13), pour τ_n, τ_n' satisfaisant aux conditions appropriées. Cette approximation motive la classe suivante d'estimateurs $plug\_in$ de $e_{\tau_n'}$:

$$\bar{e}_{\tau_n'}^{*} = \bar{e}_{\tau_n'}^{*}(\tau_n) = \left(\frac{1-\tau_n'}{1-\tau_n}\right)^{-\hat{\gamma}}\bar{e}_{\tau_n} \tag{3.15}$$

où $\hat{\gamma}$ est un estimateur de γ, et $\bar{e}_{\tau_n}$ représente soit l'estimateur $\hat{e}_{\tau_n}$ ou $\tilde{e}_{\tau_n}$ de l'expectile intermédiaire e_{τ_n}. En fait, nous avons

$$\frac{\bar{e}^*_{\tau'_n}}{\bar{e}_{\tau_n}} = \frac{\hat{q}^*_{\tau'_n}}{\hat{q}_{\tau_n}}, \text{ où } \hat{q}_{\tau_n} = Y_{n-[n(1-\tau_n)],n}$$

est l'estimateur quantile intermédiaire présenté ci dessus, et est l'estimateur quantile extrême de Weissman défini comme :

$$\hat{q}^*_{\tau'_n} = \hat{q}^*_{\tau'_n}(\tau_n) = \left(\frac{1-\tau'_n}{1-\tau_n}\right)^{-\hat{\gamma}} \hat{q}_{\tau_n}. \tag{3.16}$$

Nous montrons ensuite que $\left(\frac{\bar{e}^*_{\tau'_n}}{\bar{e}_{\tau_n}} - 1\right)$ a la même distribution limite que $\left(\hat{\gamma} - \gamma\right)$ avec une mise à l'echelle différente.

Théorème 3.2 *Supposons que F_Y augmente strictement, que la condition $C_2\left(\gamma, \rho, A\right)$ est vraie avec $\rho < 0$,ce $\tau_n, \tau'_n \nearrow 1$ avec $n(1-\tau_n) \to \infty$ et $n\left(1-\tau'_n\right) \to c < \infty$,si d'ailleurs*

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}\left(\frac{\bar{e}^*_{\tau'_n}}{\bar{e}_{\tau_n}} - 1\right) \xrightarrow{\mathscr{D}} \Delta$$

et

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}\left(\hat{\gamma} - \gamma\right) \xrightarrow{\mathscr{D}} \Gamma,$$

avec

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}q^{-1}_{\tau_n} \to \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}A\left((1-\tau_n)^{-1}\right) \to \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

et

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}/\log\left[(1-\tau_n)/\left(1-\tau'_n\right)\right] \to \infty,$$

alors

$$\frac{\sqrt{n(1-\tau_n)}}{\log\left[(1-\tau_n)/\left(1-\tau'_n\right)\right]}\left(\frac{\bar{e}^*_{\tau'_n}}{\bar{e}_{\tau_n}} - 1\right) \xrightarrow{\mathscr{D}} \Gamma.$$

Plus précisement, nous pouvons choisir $\bar{e}_{\tau_n}$ dans (3.15) (estimtion d'expectile extrême) pour être soit l'estimateur d'expectile intermédiaire indirect $\hat{e}_{\tau_n}$,l'estimateur d'expectile extrême résultant

$$\hat{e}^*_{\tau'_n} = \bar{e}^*_{\tau'_n}$$

étant

$$\hat{e}^*_{\tau'_n} = \left(\frac{1-\tau'_n}{1-\tau_n}\right)^{-\hat{\gamma}} \hat{e}_{\tau_n} = \left(\hat{\gamma}^{-1} - 1\right)^{-\hat{\gamma}} \hat{q}^*_{\tau'_n} = \left(\hat{\gamma}^{-1} - 1\right)^{-\hat{\gamma}} Y_{n-k,n} \tag{3.17}$$

ou nous pouvons choisir $\bar{e}_{\tau_n}$ pour être l'estimateur **LAWS** $\tilde{e}_{\tau_n}$, ce qui donne l'estimateur à expectile extrême

$$\tilde{e}^*_{\tau'_n} = \left(\frac{1-\tau'_n}{1-\tau_n}\right)^{-\hat{\gamma}} \tilde{e}_{\tau_n}. \tag{3.18}$$

Leurs propriétés asymptotiques respectives sont données dans les deux corollaires suivants du théorème 3.2.

Corollaire 3.3 *Supposons que F_Y est strictement croissante , la condition $C_2\left(\gamma,\rho,A\right)$ est vérifiée pour $0<\gamma<1$ et $\rho<0$. et que $\tau_n,\tau'_n\to 1$ tel que $n(1-\tau_n)\to\infty$ et $n\left(1-\tau'_n\right)\to c<\infty$. Supposons en plus que*

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}\left(\hat{\gamma}-\gamma,\frac{\hat{q}_{\tau_n}}{q_{\tau_n}}-1\right)\xrightarrow{\mathscr{D}} N(\Gamma,\Theta).$$

Si

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}q_{\tau_n}^{-1}\to\lambda_1\in\mathbb{R},$$
$$\sqrt{n(1-\tau_n)}A\left((1-\tau_n)^{-1}\right)\to\lambda_2\in\mathbb{R},$$
$$\sqrt{n(1-\tau_n)}/\log\left[(1-\tau_n)/\left(1-\tau'_n\right)\right]\to\infty,$$
$$\sqrt{n(1-\tau_n)}q_{\tau_n}^{-1}\to 0$$

et

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}A\left((1-\tau_n)^{-1}\right)\to 0.$$

Alors

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}\left(\frac{\hat{e}^*_{\tau'_n}}{e_{\tau_n}}-1\right)\xrightarrow{\mathscr{D}}\Gamma.$$

Corollaire 3.4 *Supposons que F_Y est strictement croissante , s'il exist $\delta>0$ tel que $\mathbb{E}\left(X^{2+\delta}\right)<\infty$, la condition $C_2\left(\gamma,\rho,A\right)$ est vérifiée pour $0<\gamma<1/2$ et $\rho<0$, et que $\tau_n,\tau'_n\to 1$, tel que $n(1-\tau_n)\to\infty$ et $n\left(1-\tau'_n\right)\to c<\infty$. Supposons en plus que*

$$\sqrt{n(1-\tau_n)}(\hat{\gamma}-\gamma)\xrightarrow{\mathscr{D}}\Gamma.$$

Si $\sqrt{n(1-\tau_n)}q_{\tau_n}^{-1}\to\lambda_1\in\mathbb{R}$, $\sqrt{n(1-\tau_n)}A\left((1-\tau_n)^{-1}\right)\to\lambda_2\in\mathbb{R}$ et $\sqrt{n(1-\tau_n)}/\log\left[(1-\tau_n)/\left(1-\tau'_n\right)\right]\to\infty$, Alors

$$\frac{\sqrt{n(1-\tau_n)}}{\log\left((1-\tau_n)/\left(1-\tau'_n\right)\right)}\left(\frac{\tilde{e}^*_{\tau'_n}}{e_{\tau_n}}-1\right)\xrightarrow{\mathscr{D}}\Gamma.$$

3.3.3 Estimation du valeur de risque conditionnelle ($CVaR$) basée sur les expectiles

La VaR conditionnelle basée sur les quantiles a souvent été critiquée pour être insensible à l'ampleur des pertes extrêmes car elle ne dépend que de la fréquence des pertes de queue et non de leurs valeurs. [Acerbi et Tasche, (2002)], [Rockafellar et Uryasev (2002)] ont proposé de changer la méthode de mesure pour le calcul des pertes du quantile-VaR habituel à une autre méthode cohérente connue sous le nom de $Expected\ Shortfall$

(ES). Cette proposition a été critiquée cependant pour sa dépendance uniquement sur l'événement de queue. La formulation de l'ES reste toujours intrinsèquement liée aux quantiles comme on peut le voir à partir de (3.19) et (3.20) ci-dessous. Cela a motivé [Kuan, et al., (2009)] pour introduire la VaR anticipée qui dépend à la fois des réalisations extrêmes de la variable de perte et de leur probabilité. Pourtant, avec la récente crise du secteur financier, la grande majorité des acteurs du marché (investisseurs, gestionnaires des risques, chambres de compensation, universitaires et régulateurs) sont plus préoccupés par l'exposition au risque d'un événement catastrophique qui pourrait anéantir un investissement en termes de la taille des pertes potentielles. Déjà en octobre 2013, le Comité de Bâle sur le contrôle bancaire a proposé de changer la VaR traditionnelle avec l'ES pour le calcul des pertes. Cela nous motive à introduire une nouvelle variante d'ES qui est purement bâtie sur des expectiles, hérite de leur cohérence, mais est plus attentive aux risques extrêmes.

3.3.3.1 Propriétés de base

L'ES standard, également connue sous les noms de valeur conditionnelle à risque ou valeur moyenne à risque, est définie comme la moyenne de la fonction quantile au-dessus d'un niveau de confiance donné. Il est traditionnellement exprimé au niveau de sécurité $100(1-\tau)\%$ en tant que $Expected\ Shortfall$ basée sur le quantile (QES) :

$$QES(\tau) = \frac{1}{1-\tau}\int_{\tau}^{1} q_s ds \tag{3.19}$$

Lorsque la situation financière Y est continue, $QES(\tau)$ n'est que l'espérance conditionnelle de Y étant donné qu'il dépasse la $VaR\ q_{\tau}$.

$$QTCE(\tau) = \mathbb{E}\left(Y|Y > q_{\tau}\right) \tag{3.20}$$

En ce sens, il est appelé «$Tail\ Conditional\ Expectation$» ($TCE$), le QES_{τ} étant interprété comme le rendement attendu du portefeuille dans le pire $100(1-\tau)\%$ des cas. De même, [Taylor, (2008)] a suggéré d'utiliser un TCE basé sur l'expectative défini comme

$$\begin{aligned} XTCE(\tau) &= \mathbb{E}(Y|Y > e_{\tau}) \\ &= \left(1 + \frac{1-\tau}{(2\tau-1)\bar{F}_Y(e_{\tau})}\right)e_{\tau} - \left(\frac{1-\tau}{(2\tau-1)\bar{F}_Y(e_{\tau})}\right)\mathbb{E}(Y). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Nous verrons ci-dessous que cette proposition ne semble pas cependant être une mesure de risque cohérente en général. Au lieu de cela, nous introduisons l'alternative ES basée sur les expectiles

$$XES(\tau) = \frac{1}{1-\tau}\int_{\tau}^{1} e_s ds, \tag{3.22}$$

qui est définie comme une mesure de risque cohérent.

Proposition 3.5 *Supposons que la distribution de la variable aléatoire Y est appartient au domaine d'attraction de Fréchet avec indice $\gamma < 1$. Alors*

$$\frac{XES(\tau)}{QES(\tau)} \sim \frac{e_\tau}{q_\tau} \sim \frac{XTCE(\tau)}{QTCE(\tau)}$$

et

$$\frac{XES(\tau)}{e_\tau} \sim \frac{1}{1-\gamma} \sim \frac{XTCE(\tau)}{e_\tau}$$

lorsque $\tau \to 1$.

Proposition 3.6 *Supposons que la condition $C_2(\gamma,\rho,A)$ avec $0<\gamma<1$. Alors, lorsque* $\tau \to 1$

$$\begin{aligned}\frac{XES(\tau)}{e_\tau} &= \frac{1}{1-\gamma}\left(1-\frac{\gamma^2\left(\gamma^{-1}-1\right)^{\gamma}\mathbb{E}(Y)}{q_\tau}\right)(1+o(1)) \\ &\quad +\left(\frac{1-\gamma}{\left(1-\gamma-\rho\right)}\left(\gamma^{-1}-1\right)^{-\rho}A\left((1-\tau)^{-1}\right)(1+o(1))\right)\end{aligned}$$

$$\frac{XTCE(\tau)}{e_\tau} = \frac{1}{1-\gamma}\left(1+\frac{\left(\gamma^{-1}-1\right)^{-\rho}}{1-\gamma-\rho}A\left((1-\tau)^{-1}\right)(1+o(1))+o\left(q_\tau^{-1}\right)\right).$$

3.3.3.2 Alternatives estimateurs de ES basé sur l'expectile extrême

La relation $\frac{XES(\tau)}{e_\tau} = \frac{1}{1-\gamma}$ quand $\tau \to 1$, suggère deux estimateurs possibles pour le ES basé sur l'expectile extrême :

$$\widetilde{XES}^*\left(\tau_n'\right) = \frac{\tilde{e}^*_{\tau_n'}}{1-\hat{\gamma}_H}$$

et

$$\widehat{XES}^*\left(\tau_n'\right) = \frac{\hat{e}^*_{\tau_n'}}{1-\hat{\gamma}_H}.$$

où $\tilde{e}^*_{\tau_n'}$ et $\hat{e}^*_{\tau_n'}$ sont les estimateurs des expectiles extrêmes donnés par (3.17) et (3.18), et $\hat{\gamma}_H$ est l'estimateur de Hill pour l'indice de forme de la distribution extrême γ.

Corollaire 3.7 *Sous les mêmes conditions du corollaire 3.3,*

$$\frac{\sqrt{n(1-\tau_n)}}{\log\left((1-\tau_n)/\left(1-\tau_n'\right)\right)}\left(\frac{\widehat{XES}^*\left(\tau_n'\right)}{XES\left(\tau_n'\right)}-1\right) \xrightarrow{\mathscr{D}} \Gamma.$$

Corollaire 3.8 *Sous les mêmes conditions du corollaire 3.4,*

$$\frac{\sqrt{n(1-\tau_n)}}{\log\left((1-\tau_n)/\left(1-\tau_n'\right)\right)}\left(\frac{\widetilde{XES}^*\left(\tau_n'\right)}{XES\left(\tau_n'\right)}-1\right) \xrightarrow{\mathscr{D}} \Gamma.$$

Le modèle conditionnel basé sur des techniques de régression asymétrique et le modèle conditionnel à risque ($CVaR$). Le but de $CVaR$ est de prévoir le manque à gagner prévu dans un cadre dynamique temporel. La section suivante donnera une brève introductionn à ces fondation pour mesurer la valeur de risque conditionnelle .

La reformulation de

$$e_\tau - \mathbb{E}[X] = \frac{(2\tau-1)}{1-\tau}\int_{e_\tau}^{\infty}(\mu - e_\tau) f(\mu)\, du,$$

établit une relation entre les expectiles et la valeur de risque conditionnelle ($CVaR$)

$$\frac{1-2\tau}{\tau}\mathbb{E}\left[(Y-e_\tau)1_{\{Y<e_\tau\}}\right] = e_\tau - \mathbb{E}[Y]$$

pour scalaire e_τ donne

$$\mathbb{E}[Y|Y<e_\tau] = e_\tau + \frac{(e_\tau - \mathbb{E}[Y])\tau}{(1-2\tau)F(2\tau)} \tag{3.23}$$

Pour un τ approprié avec $e_\tau = q_\theta$ est vrai

$$CVaR_\theta = e_\tau + \frac{(e_\tau - \mathbb{E}[Y])\tau}{(1-2\tau)\theta} \tag{3.24}$$

cette relation entre la valeur à risque conditionnelle ($CVaR$) et l'expectile peut être utilisée pour mesurer et prévoir la valeur conditionnelle. L'approche employée dans cette enquête suit l'algorithme suivante :

- Commencer avec une fenêtre mobile sous échantillon $L_1, \ldots.., L_n$ pour permettre une estimation adaptive du temps
- Estimr le quantile d'échantillon $\hat{q}_\theta$. Cela peut être fait historiquement avec une fonction de densité pré lissée. Surtout dans les petits échantillons, le pré_lissage a entraine une augmentation de la puissance de prédiction.
- Avec l'expectile d'échantillon e_τ trouver τ par $\arg\min_\tau \{\hat{q}_\theta - \hat{e}_\tau\}$
- Décaler le sous échantillon de la fenêtre mobile pour l'inclure $L_2, \ldots..., L_{n_w+1}$, q_θ a été estimé dans l'échatillon de fenêtre mobile via une estimation historique, sauf indication contraire dans des échantillons extrêment petits, cela pourrait être fait alternativement avec une régression quantile ou une adaptation locale.

La méthode a la propriété supplémentaire de produire des résultats assez similaires à l'estimation historique, ce qui permet une bonne comparaison de deux méthodes.

3.3.4 Théorie des valeurs extrêmes

[Diebold et al., (2000)] et [McNeil et Frey, (2000)] ont proposé d'utiliser la méthode des pics au-dessus du seuil (POT) pour les données financières. La section suivante est un bref résumé de l'approche présentée dans [McNeil et Frey, (2000)]. La fondation de la théorie de la valeur extrême est présentée selon [McNeil et Frey, (2000)] et [Embrechts et al., (1997)].

L'objectif de cette section est d'introduire une approche semi-paramétrique d' $Expected Shortfall$. L'estimateur résultant estimera le quantile non paramétrique et supposera qu'une distribution de Pareto Généralisée se rapproche suffisament de la structure de la queue. L'échantillon est supposé être généré par un processus de la forme

$$L_t = \mu_t + \sigma_t z_t. \tag{3.25}$$

Malheureusement, l'hétéroscédasticité et l'autocorrélation sont des problèmes graves pour la théorie classique des valeurs extrêmes en raison du i.i.d. hypothèse qui sera nécessaire pour (3.29) ci-dessous. l'hétéroscédasticité conditionnelle apparente dans les données financières viole clairement cette hypothèse. Pour rendre ces problèmes moins graves, les données sont "pré-blanchies " avec les processus de volatilité $GARCH$. L'approche proposée par [McNeil et Frey, (2000)] est mise en oeuvre en utilisant un $ARMA$ $GARCH$ puis en ajustant un GPD aux résidents z_t. F_z dénote la distribution inconnue de z.

En raison de (3.25), la prévision de Expected Shortfall pour $t+1$ peut être exécutée par

$$\widehat{ES}_{\theta}^{t+1} = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \widehat{ES}^{t}. \tag{3.26}$$

Pour tout variables aléatoires X de distribution F, il découle du théorème de Bayes pour la distribution des excès sur un seuil u :

$$F_u(x) = \mathbb{P}[L - u \leq l \mid L > u] = \frac{F(l-u) - F(U)}{1 - F(U)} \tag{3.27}$$

La distribution de Pareto Généralisé (GPD) est définie comme :

$$G_{\gamma,\beta}(l) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{\gamma l}{\beta}\right), & si \quad \gamma \neq 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{-l}{\beta}\right), & sinon \end{cases} \tag{3.28}$$

ξ et β sont les paramètres de forme et d'échelle du GPD. Le théorème de [Pickands (1975)], [Balkema et de Haan (1974)] déclare que pour une séquence i.i.d. $(X_1, X_2, ..., X_n)$ la fonction d'excés de seuil F_u est bien approximée pour une large classe de distribution par le GPD tant que u est "grand" :

$$F_u(l) \to G_{\gamma,\beta}(l), \quad u \to \infty \tag{3.29}$$

La fonction d'excès moyen est définie comme :

$$e(u) = E(L - u \mid L > u). \tag{3.30}$$

Pour une distribution Pareto Généralisée avec

$$\begin{cases} 0 \le u < \infty, & si \quad 0 < \xi < 1 \\ 0 \le u \le -\left(\frac{-\beta}{\xi}\right), & si \quad \xi < 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

La fonction d'excès moyen peut être calculées explicitement comme suit :

$$e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}. \tag{3.32}$$

Pour un échantillon de perte positive $L_1, L_2, ..., L_n$ la fonction excédentaire moyenne peut être estimée de manière cohérente par

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (L_i - u) 1_{\{L_i > u\}}}{\sum_{i=1}^{n} 1\{L_i > u\}}. \tag{3.33}$$

À partir de (3.39), il devient évident que le GPD est manifestement caractérisée par une fonction d'excès moyenne linéaire dans le seuil u. Ainsi, un u approprié peut être trouvé en sélectionnant une valeur qui linéarise approximativement la fonction d'excès moyen.À cette fin, l'échantillon de la fonction d'excès moyen peut être tracé en fonction de la statistique d'ordre. Une fois ce seuil initial u trouvé, la fonction d'excès moyen pour tout seuil $v > u$ peut être obtenue en

$$e(v) = \frac{\beta + \xi(v - u)}{1 - \xi} = \frac{\xi v}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi v}{1 - \xi}, \quad if\ \xi < 1. \tag{3.34}$$

Cela vaut en paticulier pour tout quantile $q_\theta > u$ des pertes résiduelles $-z$. Pour des raisons pratiques $F(u)$ peut être estimé par le rapport d'échantillonnage des dépassements par rapport u : $\frac{N_u}{N}$. De toute évidence, un nombre suffisant de dépassements est nécessaire pour effectuer une estimation fiable.Dans le cas où les données sont insuffisantes, un estimateur pour $F(u)$ a été proposé par

.

En supposant que la queue de z suit un GPD , Expected Shortfall est Ensuite, maintenez également

$$\begin{aligned} z - q_\theta \quad | \quad z > q_\theta &= (z - u) - (q_\theta) \mid (z - u) > (q_\theta), \\ z - q_\theta \quad | \quad z > q_\theta &\sim GPD\{\xi, \beta + \xi(q_\theta - u)\}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

avec (3.34) et (3.35) Expected Shortfall suit comme

$$ES_\theta = q_\theta + e\left(q_\theta\right) = \frac{q_\theta}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi}. \tag{3.36}$$

Le choix de u est un inconvénient du modèle. Plusieurs choix possibles ont été mis en oeuvre et une forte dépendance de l'estimateur à u a été notée.La proposition (arbitraire) de [McNeil et Frey, (2000)] utiliser $u = q_{0.1}$ résultats d'estimation comparative fournis dans la simulation et les études empiriques.

3.3.4.1 Estimation quantile basée sur la théorie des valeurs extrêmes

[Smith (1987)] fournit un estimateur quantile basé sur les valeurs extrêmes. Un estimateur évident pour la distribution de la queue (des observations dépassant le seuil u)

$$1 - F(x) = \{1 - F(u)\}\{1 - F_u(x-u)\} \tag{3.37}$$

est acquise en estimant $F(u)$ par la proportion dans l'échantillon des dépassements de seuil $\frac{N_u}{N}$ et$\{1 - F_u(x-u)\}$ par une distribution de valeur extrême

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{N}\left(1 + \hat{\varepsilon}_N \frac{x-u}{\hat{\beta}_N}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon_N}} \tag{3.38}$$

Les rendements d'inversion

$$\hat{q}_\theta = q_u + \frac{\hat{\beta}_u}{\hat{\varepsilon}_u}\left\{\left(\frac{1-\theta}{\frac{N_u}{N}}\right)^{\hat{\varepsilon}_u} - 1\right\} \tag{3.39}$$

Pour s'assurer que q_μ est toujours bien à l'inférieur de l'échantillon, u est fixe et choisi de tall sorte que q_u soit significativement plus proche du centre de la distribution que q_θ.En suivant légèrement [McNeil et Frey, (2000)] $u = 10\%$, on a constaté qu'il fonctionnait bien dans les tailles d'estimation de fenêtre mobile de $\{50,100,200\}$ par rapport à l'efficacité d'estimation et à la linéarité de la fonction d'excés moyen. Donc $\frac{N_u}{N} = 0.1$.

3.4 Étude de simulation

3.4.1 Présentation du packages expectreg

Le package contient non seulement des méthodes pour traiter univarié expectiles, mais comprend également par ex. toutes les méthodes de régression décrites et introduites dans [Sobotka et Kneib, (2012)], [Sobotka, et al., (2013)] ainsi que [Schulze Waltrup et al., (2014)].

Par conséquent, expectreg propose des estimations de régression basées sur les moindres carrés et le boosting, des modèles de localisation à l'échelle et des techniques plus raffinées pour surmonter les courbes de croisement.

Le package est disponible sur le Comprehensive R Archive Network à l'adresse $http://CRAN.R-project.org/package=expectreg$.

3.4.2 VaR et $CVaR$ basées sur les expectiles :

Dans notre expérience de simulation, pour évaluer les estimateurs de l'expectile, valeur à risque VaR, la valeur conditionnelle à risque $CVaR$ et la valeur conditionnelle à risque basée sur l'expectile. Nous avons examiné la différence significative en utilisant un teste basé sur la distribution t-Student, $v = (3,5,7)$ comme degré de liberté avec $\tau = (0.95, 0.99)$ pour $n = (100, 500, 1000, 2000)$. Les niveaux intermédiaires $\tau_n = 1 - \frac{k}{n}$, où l'entier k peut en fait être considéré comme la taille d'échantillon éfficace pour l'extrapolation de la queue.

TABLE 3.1 – Estimation de VaR et ES basée sur les quantiles et les expectiles pour la loi de student pour différent degré de liberté

tau		0.95				0.99			
V	n	VaR	ES	e	XES	VaR	ES	e	XES
3	100	2.0530	4.0749	1.9821	3.7296	2.9042	3.3511	2.1834	2.9128
	500	2.4562	4.3711	2.1254	3.9645	4.6048	6.2095	3.5012	4.9617
	1000	2.2362	3.7262	1.8535	3.0568	4.3897	6.6769	3.5765	5.1696
	2000	2.3480	3.6922	1.8350	3.0422	4.7652	6.5169	3.5594	5.0953
5	100	1.5896	3.2709	1.5393	2.7834	3.1979	7.2157	3.5721	7.2157
	500	2.1298	2.8417	1.4767	2.2374	2.6491	3.9847	2.2136	2.8918
	1000	2.0477	2.9806	1.5327	2.3380	3.2431	4.3170	2.4206	3.1710
	2000	2.0534	2.9236	1.5202	2.3048	3.1258	4.4232	2.4261	3.2920
7	100	1.4405	1.9876	0.9562	1.5552	3.2131	4.0709	2.4476	3.2789
	500	2.1118	2.5115	1.3959	2.0368	3.0382	4.0080	2.2573	3.1414
	1000	1.8625	2.4072	1.2681	1.9053	2.8464	3.5940	2.1351	2.8838
	2000	1.8067	2.4111	1.2956	1.9113	2.8511	3.8871	2.1547	2.9639

Remarque 3.9 *Dans le cas des distributions de t-student, le tableau (3.1) donne l'estimation de VaR et $CVaR$ basée sur les quantiles et les expectiles pour degré de liberté $v(3,5,7)$. nous voyons que d'estimateur de VaR est proche de l'estimatuer d'expectile et l'estimateur de $CVaR$ est aussi proche de XES.*

Dans nos simulations pour Pareto-distribution et Fréchet-distribution,nous utilisons des échantillions de taille $n = (100, 500, 1000, 2000)$, $\tau = (0.95, 0.99)$ et gamma égale à $(2/3, 3/4)$.

l'utilisation de la distribution de Pareto

$$F_Y(y) = 1 - y^{\frac{-1}{\gamma}}, y > 1,$$

Remarque 3.10 *Dans les tableaux (3.2)et (3.3) pour tous niveaux extrême, l'expectile* (e) *plus grand que la valeur à risque* (VaR) *et l'*$Expected\ Shortfall$ (ES) *est plus petit que l'*$Expected\ Shortfall$ (XES) *basé sur les expectiles, sauf dans le cas pour* $n = 100$, $tau = 0.99$ *et* $gamma$ *pour* $3/4$ *les valeurs de* ES *et* XES *sont égaux.*

et distribution de Fréchet

$$F_Y(y) = e^{-y^{\frac{-1}{\gamma}}}, y > 0$$

Remarque 3.11 *Dans les tableaux (3.4)et (3.5) pour tous niveaux extrême, l'expectile* (e) *plus grand que la valeur à risque* (VaR) *et l'*$Expected\ Shortfall$ (ES) *est plus petit que l'*$Expected\ Shortfall$ (XES) *basé sur les expectiles, sauf dans le cas pour* $n = 100$, $tau = 0.99$ *et* $gamma$ *pour* $3/4$ *les valeurs de* ES *et* XES *sont égaux.*

TABLE 3.2 – Estimation de VaR et ES basée sur les quantiles et les expectiles pour la loi de Pareto pour gamma (0.95)

tau	0.95				
gamma	n	VaR	ES	e	XES
2/3	100	83.4842	794.5783	494.1824	1741.91
	500	69.7922	899.7034	596.2669	3624.708
	1000	92.8620	3764.283	3012.777	42135.61
	2000	88.0347	2665.293	1914.022	14232.37
3/4	100	33.5834	421.7985	229.8443	513.8063
	500	50.0343	777.4436	527.5852	2448.85
	1000	56.1885	348.3579	209.8167	953.4469
	2000	57.1011	1117.766	815.2584	7257.961

TABLE 3.3 – Estimation de VaR et ES basée sur les quantiles et les expectiles pour la loi de Pareto pour gamma (0.99)

tau	0.99				
gamma	n	VaR	ES	e	XES
2/3	100	286.2444	4561.798	2286.22	4561.798
	500	1783.873	29578.12	19368.04	67939.7
	1000	593.2641	2466.839	1307.449	3890.811
	2000	1041.711	8924.668	5230.112	16243.3
3/4	100	263.7783	15877.78	7942.147	15877.78
	500	399.0065	2221.715	1179.965	3131.252
	1000	431.2092	2320.494	1310.129	3915.919
	2000	512.5174	1992.077	1135.785	4356.65

TABLE 3.4 – Estimation de VaR et ES basée sur les quantiles et les expectiles pour la loi de Fréchet de gamma (0.95)

tau	0.95				
gamma	n	VaR	ES	e	XES
2/3	100	182.6054	1308.845	784.5877	2753.282
	500	76.8347	7062.501	5808.21	81489.05
	1000	66.5856	1180.623	822.3702	5502.136
	2000	87.6204	23493.05	20825.54	457376.3
3/4	100	35.5734	208.1669	115.6691	396.7077
	500	61.3212	703.2795	474.1017	2887.982
	1000	44.6045	226.9511	130.4975	420.9806
	2000	48.9675	1133.935	857.5879	7666.373

TABLE 3.5 – Estimation de VaR et ES basée sur les quantiles et les expectiles pour la loi de Fréchet de gamma (0.99)

tau	0.99				
gamma	n	VaR	ES	e	XES
2/3	100	266.6457	11612.39	5813.14	11612.39
	500	430.0599	2222.183	1218.971	3231.971
	1000	627.4662	19534.43	14379.75	86672.61
	2000	881.7297	35659.96	27994.91	309835
3/4	100	961.3749	5296.638	2658.051	5296.638
	500	984.3379	5394.15	3155.73	11038.22
	1000	351.1955	2118.102	12074.741	5503.902
	2000	485.3832	2191.434	1207.196	3205.803

CONCLUSION GÉNÉRALE

La gestion de risque prend une part importante (de plus en plus prépondérente) dans la gestion d'un établissement financier. un certain nombre de risque peuvent être qualifiés de "risque extrêmes" car ils présentent une probabilité trés faible. Ils correspondent à des évènement rares.

Dans ce travail, dans un premier temps, nous avons présenté les mesures de risque, le quantile et l'expectile. Nous avons ensuite donné des méthodes pour estimer des mesures de risques (VaR,$CVaR$). Puis, nous avons simulé pour examiner et comparer l'efficacité des quantiles avec les expectiles autour (VaR, $CVaR$).

Enfin, Nous avons conclu que l'utilisation des expectiles comme moyen alternatif pour quantifier le risque est due au fait que les expectiles sont plus alerte que les quantiles à l'empleur des rares pértes catastrophiques et ils dépendent à la fois des réalisations des queues des variables aléatoires et de leurs probabilités tandis que les quantiles ne dépendent que de la fréquence des réalisations de queue. De plus, ils sont les seules mesures cohérentes invariantes par changement de distribution du risque.

Les expectiles ont un grand potentiel dans l'analyse des risques en finance. L'expectile présente des propriétés qui satisfont les axiomes de cohérence, un élément essentiel compte tenu de notre compréhension actuelle de risque. Il cractérise pleinement sous-jacent et tire parti plus d'information que les mesures de risque concurrentes. Actuellement, l'abscense de procédure de backtesting limite l'utilisation de l'expectile en finance à l'estimation du quantile. La relation entre l'expectile et le quantile doit être étudiée en profondeur. On sait encore que l'expectile de l'échantillon est plus efficace pour estimer le quantile de l'échantillon dans de nombreux cas .

L'expectile pourrait être utilisée dans l'optimisation du portefeuille en sélectionneant pour un niveau de prudentialité donnée et en retournant le portefeuille qui correspond le mieux au profil d'aversion au risque souhaité.

La société financière continuera à rechercher une mesure de risque cohérente, efficace, précise et robuste. L'expectile satisfait plusieurs de ces demandes. Peut-être qu' avec un peut de travail, il sera la principale mesure de risque de l'institution financière au futur.

BIBLIOGRAPHIE

[Acerbi et Tasche, (2002)] Acerbi, C., and D. Tasche. (2002). "On the Coherence of Expected Shortfall." Journal of Banking and Finance 26, 1487–1503.

[de Haan et Ferreira, (2006)] de Haan, L. and Ferreira, A. (2006). Extreme Value Theory : An Introduction. Springer-Verlag, New York.

[Embrechts,et al., (2007)] Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer.

[Newey et Powell, (1987)] Newey, W. and Powell, J. (1987). Asymmetric least squares estimation and testing. Econometrica, 55(4) :819-847.

[Sobotka, et al., (2013)] Sobotka, F., S. Schnabel, and L. SchulzeWaltrup (2013). expectreg : Expectile and Quantile Regression. with contributions from P. H. C. Eilers, T. Kneib and G. Kauermann, R package version 0.36.

[Taylor, (2008)] Taylor, J. (2008). Estimating Value at Risk and Expected Shortfall using expectiles. Journal of Financial Econometrics, 6(2) :231-252.

[Kuan, et al., (2009)] Kuan, C-M., Yeh, J-H. and Hsu, Y-C. (2009). Assessing value at risk with CARE, the Conditional Autoregressive Expectile models, Journal of Econometrics, 2, 261–270.

[Mao, et al., (2015)] Mao, T., Ng, K. and Hu, T. (2015). Asymptotic Expansions of Generalized Quantiles and Expectiles for Extreme Risks, Probability in the Engineering and Informational Sciences, 29, 309–327.

[Mao et Yang, (2015)] Mao, T. and Yang, F. (2015). Risk concentration based on Expectiles for extreme risks under FGM copula, Insurance : Mathematics and Economics, 64, 429–439.

[Martin, (2014)] Martin, R. (2014). Expectiles behave as expected, Risk Magazine, 27 (6), 79–83.

[McNeil et Frey, (2000)] McNeil, A.J. and Frey, R. (2000). Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series : An Extreme Value Approach, Journal of Empirical Finance, 7, 271–300.

[McNeil et Frey, (2005)] McNeil, A.J., Frey. R. and Embrechts, P. (2005). Quantitative Risk Management. New Jersey : Princeton University Press.

[Sobotka et Kneib, (2012)] Sobotka, F. and Kneib, T. (2012). Geoadditive expectile regression, Computational Statistics and Data Analysis, 56, 755–767.

[Franke et al., (2010)] Franke, J., Härdle, W.K et Hafner, C.M (eds) (2010). Statistics of financial Markets : An itroduction, Vol. 3, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[Moscadelli, (2004)] Moscadelli, M. (2004). The modeling of operational risk : experiencewith the analysis of tha data collected by the based committee, Bank of Italy, Temi di discussione (Economic working papers) 517.

[Embrechts et al., (1997)] P. Embrechets, G. Puccetti, L. Rüschendorf, R. Wang, et A. Beleraj. An academic response to base l3.5, 61 : 1-16, 2005.40.

[Smith (1987)] Smith, R.L (1987)Estimating tailsof probabiltydistribution, Annals of Statistics 15.

[Follmer et Schied (2004)] Föllmer, H. Schied,A (2004). Stochastic Finance, de Gruyter.

[De Rossi et Harvey (2009)] De Rossi, G., Harvey, H (2009). Quantiles, expectiles and splines. Journal of Econométrics 152.

[Koenker (2005)] Koenker, R (2005). Quantile regression. Cambridge University Press

[Artzner et al., (1997)] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J-M and Heath, D. (1997). Thinking Coherently. Risk 10.

[Yamai et Yoshiba (2002)] Yamai, Y. et Yoshiba, T. (2002). comparative Analyses of Expected Shortfall and value-at-risque (3) :their Validity underMarket Stress. IMES Discussion Paper No 2002-E-2, Bank of Japan.20 (2)

[Rockafellar et Uryasev (2002)] Rockafellar, R.T et Uryasev, S (2002). Conditionnel value-at- Risk for General Loss Distributions. Journal of Banking and Finance 26,1443-1471.

[Aigner et al., (1976)] Aigner, D.J., T.Amemiya, et D.J. Poirier (1976). On the estimation of Production Frontiers : Maximum Likelihood Estimation of the parameters of a Discontinuous Density Function. International Economic Review 17.

[Yao et Tong (1996)] Yao, Q., et H. Tong. (1996). Asymmetric Least Squares Regression Estimatio : A Nonparametric Approach. Nonparametric Statistics 6.

[Pratesi et al., (2009)] Pratesi, M., G.Ranalli et Salvati, N. (2009). Nonparametric M-quantile regression using penalized splines, Journal of Nonparametric Statistics,21 : 3, DOI :10.1080/10485250802638290.

[Diebold et al., (2000)] Diebold, F.X, T.Schuermann, et J.D.Stroughair. (2000). Pitfalls and Opportunities in the Use of Extrem Value Theory in Risk Management. Journal of Risk Finance 1 (Winter).

[Balkema et de Haan (1974)] Balkema, A et L.de Haan (1974). Residual life time at great age. Annals of Probability, 2.

[Schulze Waltrup et al., (2014)] Schulze Waltrup, L., Sobotka, F., Kneib,T. et Kauermann, G. (2014). Expectile and quantile regression. David and Goliath ? Statistical Modelling, DOI :10.1177/1471082X14561155.

[Artzner et al.,1999] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J-M et Heath, D. Coherent, 9 (3). Mesures of Risk. Mathematical Finance.

[Manganelli et Engle (2004)] Manganelli, S., and R. F. Engle. (2004). "A Comparison of Value-at-Risk Models in Finance." In G. Szeg¨o (ed.), Risk Measures for the 21st Century. Chichester, UK : Wiley.

[Pickands (1975)] Pikands, J.(1975). Statistical inference using extrem order statistics, Annals of statistics 3.

[Andrews(1996)] Andrews. (1996). Handbook of Econometries (vol.4)

[Koenker et Bassett (1978)] Koenker, R. and Bassett, G. J. (1978). Regression quantiles. Econometrica, 46(1).

[Bellini et al., 2014] Bellini, F., Klar, B., Muller, A., and Gianin, E. R. (2014). Generalized quantiles as risk measures. Insurance : Mathematics and Economics.