

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Saad Dahlab Blida1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



**Mémoire**

En vue de l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Spécialité : **Modélisation Stochastique et Statistique**

**Thème**

**Probabilité de Ruine du Processus de Risque avec des Arrivées Non Stationnaires et des Remboursements Sous-Exponentielles**

Présenté par : -NEBBAR Belkis

-CHERIF Hafsa

Soutenu le 23 Septembre 2020, devant le jury composé de :

Président : O. TAMI M.A.A

Examineur : A.RASSOUL Pr

Promoteur : R.FRIHI M.A.A

# *REMERCEMENT*

En préambule à ce mémoire nous remercions **ALLAH** qui nous a aide et nous donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Nous souhaitons adresser notre remerciement les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Ces remerciements vont tout d'abord au corps professoral et administratif de la faculté des sciences, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient se grands efforts pour assurer à leur étudiants une formation actualisée.

Noud tenant à remercier sincèrement Monsieur **REDHOUANE FRIHI**, qui en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Nous remercions les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer notre travail.

Nous n'oublions pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

En fin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragées au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

# DEDICACE

Tous d'abord, je remercie le **Allah** de m'avoir donné le courage pour réaliser ce travail et la patience pour aller jusqu'au bout du parcours de mes études.

Je dédie le fruit de ma patience, de ma persévérance :

Aux êtres les plus chers au monde,

à ma raison de vivre et ma fleur de vie, **ma chère mère** qui m'a apporté beaucoup d'amour et d'affection, je la remercie de sa présence dans les meilleurs moments comme les mauvais.

**Mon cher père** qui n'a jamais cessé de combattre pour me voir réussir un jour.

Que dieu leurs accorde une longue vie.

A mon très cher frère **Mohamed Amine**, merci d'être toujours à mes côtés, et cher frère **Abd Erraouf** qui je lui souhaite une vie pleine de bonheur et de réussite inchallah. A ma chère sœur **Asma**, son époux **Karim** et leur petits anges **Wael** et **maroua**. A ma chère sœur **khadidja** son époux **Mohamed**.

A toute **ma famille**.

A mon binôme **Belkïs** qui m'a accompagnée tout au long de ce mémoire, je la remercie pour son amitié sincère et pour tous les bons moments passés ensemble.

A tous mes camarades de promotion.

A tous mes amis, surtout **Amina, chérifa** et **zahia**, qui m'ont aidé et encourager chacun a sa façon.

A tous mes enseignants, je leurs exprime ma profonde gratitude.

À toutes les personnes qui m'ont aidé, soutenu et contribué de près ou de loin pour la réalisation de ce travail.

**Hafsa**

## DEDICACE

*Je dédie le fruit de ce modeste travail  
comme un geste de gratitude à :*

*Mes très chers parents, qui m'ont soutenu,  
encouragé pour que je puisse mener à bien mes  
études, et qui attendent ce jour avec impatience.*

*Mes frères : Ahmed, Youcef, Ayoub et Taha  
Ma sœur Chaimaa.*

*Ma tante : Rachida.*

*Ma binôme : Hafsa.*

*A Mes enseignants et mes amies de l'étude.*

*A tous ceux qui ont contribué à la réalisation de  
ce travail.*

*Belkis*

## ملخص

خطر افلاس شركات التأمين مشكل كبير لذلك من الضروري اخذها في الاعتبار توقع الافلاس من خلال حساب احتمالية وقوعه.

لقد درسنا في اطروحتنا احتمالية الافلاس على المدى القصير و الطويل و ذلك في حالة وصول المتضررين ليتم تعويضهم وفقا لعملية ثابتة وغير ثابتة مع دالة التوزيع وفق قانون السداد شبه اسي

## Résumé

Le risque de faillite des sociétés d'assurances est un problème primordial.

Par conséquent, il est impératif de le prendre en compte et anticiper la faillite en calculant la probabilité de ruine.

Dans notre mémoire, nous avons étudié la probabilité de ruine à court terme et à long terme et cela dans le cas où les sinistres arrivent pour se rembourser suivant un processus stationnaire et non stationnaire dont la loi des remboursements est sous-exponentielle.

Mots clés: Valeurs extremes, Probabilité de ruine, queue sous exponentielles, Processus de Hawkes.

## Abstract

The risk of failure of insurance companies is a major problem.

Therefore, it is imperative to take it in to account and anticipate failure by calculating the probability of ruin.

In our paper, we have studied the probability of ruin in the short term and in the long term, and this in the case where claims arrive to be reimbursed following a stationary and non-stationary process with a sub-exponential law of reimbursement.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction générale</b>	<b>2</b>
<b>1 Valeurs Extrêmes</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	5
1.2 Définition de la théorie des valeurs extrêmes	6
1.3 Type des Valeurs Extrêmes GEV et GPD	7
1.3.1 Théorème de Fisher-Tippett	7
1.3.2 La loi des excès	10
1.4 Estimation des paramètres de la loi GPD	13
1.4.1 Méthode du maximum de vraisemblance (EMV)	14
1.4.2 Méthode des moments	14
1.5 Recherche du seuil $u$	16
1.5.1 Estimateur de Hill	16
<b>2 Types Des Queues</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction	17
2.2 Distributions à Queues Légères	18
2.3 Distributions à Queues Lourdes	18
2.3.1 Distributions Avec Des Moments Exponentiels Inexistants	20
2.3.2 Distributions subexponentielles	21
2.3.3 Distributions à Variations Régulières	22
2.3.4 Distributions Avec un Comportement de Pareto	27
2.3.5 Distribution $\alpha$ -stable	27
2.4 Exemples Des Distributions à Queues Légères et Lourdes	28
2.4.1 Distribution à Queues Légères	28
2.4.2 Distribution à Queues Lourdes	29

---

TABLE DES MATIÈRES

---

<b>3</b>	<b>Probabilité de ruine pour un processus du risque stationnaire</b>	<b>30</b>
3.1	Modèle de risque . . . . .	30
3.2	Le modèle individuel et le modèle collectif . . . . .	31
3.2.1	Modèle individuel . . . . .	31
3.2.2	Modèle collectif . . . . .	31
3.3	Modèle classique de la théorie de ruine . . . . .	32
3.3.1	Processus de réserve et surplus . . . . .	32
3.3.2	Hypothèses du modèle Cramer-Lundberg . . . . .	33
3.3.3	Probabilité de ruine . . . . .	34
3.3.4	Coefficient de sécurité . . . . .	35
3.3.5	Cas particulier : Modèle de Lundberg ou P/P . . . . .	36
3.4	Modèle de Sparre-Anderson . . . . .	36
3.5	Processus de risque de queue sous exponentielle . . . . .	37
3.5.1	Cas distribution de Fréchet . . . . .	37
3.5.2	Cas distribution de Gumbel . . . . .	38
3.5.3	Condition de stationnarité . . . . .	38
3.6	Calcul de la probabilité de ruine à horizon infini . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Probabilité de ruine pour un processus du risque non stationnaire</b>	<b>40</b>
4.1	Processus de risque avec arrivées non renouvelables . . . . .	40
4.1.1	Probabilité de ruine . . . . .	40
4.2	Réclamation globale . . . . .	43
4.3	Exemples de processus d'arrivée non renouvelable . . . . .	45
4.3.1	Processus de Hawkes . . . . .	45
4.3.2	Processus de Cox avec intensité de bruit de tir . . . . .	47
4.3.3	Processus de point d'autocorrection . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Application</b>	<b>52</b>
5.1	cas stationnaire . . . . .	53
5.1.1	Probabilité de ruine : Cas de loi de Pareto . . . . .	53
5.1.2	Probabilité de ruine : Cas de loi de Burr . . . . .	59
5.1.3	Probabilité de ruine : Cas de loi de Log-gamma . . . . .	61
5.2	cas non stationnaire . . . . .	62
5.2.1	Probabilité de ruine : Cas de loi de Pareto . . . . .	63
5.2.2	Probabilité de ruine : Cas de loi de Burr . . . . .	67
5.2.3	Probabilité de ruine : Cas de loi de Log-gamma . . . . .	69
	<b>Conclusion générale</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>74</b>
	<b>Annexe</b>	<b>77</b>

---

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'opération d'assurance a pour effet le transfert total ou partiel des conséquences financières du risque subi par l'assuré vers une société d'assurance. Les dépenses prises en charge par la société peuvent correspondre soit à des indemnités à verser à des tiers au titre de la responsabilité (civile, professionnelle, au autre) de l'assuré soit à la réparation des dommages subis par ce dernier.

En assurance, on qualifie de risque, la probabilité que la réserve d'une compagnie d'assurance, qui est la différence entre le total des primes reçues et le total des montants des réclamations payés, devienne négative à un certain temps. A ce moment là, on dit que la ruine apparaît, du fait d'un mauvais calcul du taux de cotisation des assurés ou de sinistres trop important à couvrir.

La théorie de la ruine, parfois appelée théorie collective de risque, est une branche des sciences actuarielles, qui étudie la vulnérabilité d'un assureur à l'insolvabilité basée sur la modélisation mathématique de l'excédent de l'assureur et l'étude de l'évolution des richesses d'une compagnie d'assurance. Elle est l'étude des problématiques (à court terme et long terme) d'un portefeuille d'assurance non-vie. Elle regroupe entre autres la théorie de la ruine et la réassurance. La première, quant à elle est l'analyse à long terme de la ruine d'une assurance (non-vie).

Le premier but de la théorie de ruine été modéliser l'évaluation de la richesse de la compagnie par un processus stochastique. C'est-à-dire de la probabilité que ses reverses financières passant sous la frontière fatidique du zéro.

Les modèles de ruine sont des modèles dynamique en général à temps continu

qui décrivent l'évaluation des réserves d'une compagnie.

Dans le cadre des assurances, le but est de modéliser l'évolution des réserves en fonction de :

-Sa réserve initiale.

-Des hypothèses faites sur le processus des arrivées des sinistres et de la distribution des montants.

-Des hypothèses sur le processus des rentrées des primes d'assurances.

Dans ce mémoire, nous considérons deux cas des processus des arrivées, le cas où le processus d'arrivée est un processus renouvelable donc stationnaire et le cas où le processus d'arrivée non renouvelable donc n'est pas stationnaire.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, Nous allons présenter la théorie des valeurs extrêmes (TVE) et sa contribution à l'estimation de l'indice de queue pour les valeurs extrêmes et nous allons également discuter les types des valeurs extrêmes.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons les différents types des queues des lois des probabilités, à savoir les distributions à queues légères et à queues lourdes.

Le troisième chapitre est reparti en trois parties. Dans la première partie, nous représentons le modèle de change des sinistres. La deuxième partie, nous présentons le modèle classique très utilisé en mathématique actuarielle : le modèle de Cramér-Lundberg est fondé sur un processus de poisson et certaines notions sur la probabilité de ruine (horizon fini et infini). Dans la troisième partie nous exposons la probabilité de ruine dans le cas stationnaire pour les arrivées des sinistres et la loi subexponentielle pour les montants des remboursements.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons la théorie du risque dans le cas non stationnaire (le processus des arrivées n'est pas processus de renouvellement). Nous présentons trois exemples de non stationnaire.

Le cinquième chapitre est réservé pour l'application. Nous calculons après probabilité de ruine dans le cas stationnaire et non stationnaire, pour des montants de loi de probabilité subexponentielle à savoir, la loi de Pareto, la loi Burr et la loi Loggamma.

Nous clôturons ce travail par une conclusion générale.

## 1.1 Introduction

La théorie des valeurs extrêmes (TVE) est une branche des statistiques qui s'intéresse aux valeurs extrêmes des distributions de probabilité.

La TVE propose un cadre théorique solide pour l'étude de ces grandes (ou petites) valeurs dites extrêmes. Elle permet d'évaluer les événements rares et les pertes associées à leur apparition. Les résultats théoriques sur le comportement stochastique des extrêmes permettent de proposer un cadre mathématique rigoureux pour réaliser de telles extrapolations.

La TVE est appliquée en hydrologie pour prévoir les crues, en démographie pour prévoir la distribution de probabilité de l'âge maximum que l'être humain pourra atteindre, en assurance pour prévoir les grands sinistres, en finance ou encore en météorologie

La TVE apparue entre 1920 et 1940, grâce à Fréchet, Fischer et Tippett, Gumbel et Gendenko, joue un rôle de plus en plus important dans la modélisation des événement rares, puisque son application fournit une méthode relativement sûre pour l'extrapolation au-delà de ce qui a été observé. En théorie de probabilité et en statistique la queue d'une loi de probabilité est le comportement de la loi de probabilité dans la zone éloignée de sa va-

leur centrale.

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à explorer l'apport de cette théorie en matière d'estimation de l'indice de queue des valeurs extrêmes.

## 1.2 Définition de la théorie des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes étudie les événements rares ayant une faible probabilité d'apparition, et a pour but d'étudier la loi du maximum d'une suite des variables aléatoires réelles dans le cas où la loi du phénomène n'est pas connue.

Considérent  $X_1, \dots, X_n$  une suite de  $n$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d*) de fonction de répartition  $F$  définie par :

$$F(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x) \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

Pour étudier le comportement extrême des événement, on considère la variable aléatoire :

$$M_n = \text{Max}(X_1, \dots, X_n)$$

Le maximum d'un échantillon de taille  $n$ .

Comme les variables aléatoires sont (*i.i.d*) alors la fonction de répartition de  $M_n$  peut être écrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= \mathbb{P}(M_n \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \leq x) \\ &= [F(x)]^n \end{aligned} \tag{1.1}$$

**Remarque 1.2.1** *On obtient la correspondance entre minimum et maximum par la relation suivante :*

$$\text{Min}(X_1, \dots, X_n) = -\text{Max}(-X_1, \dots, -X_n)$$

*Ainsi tous les résultats que nous allons présenter pour les maximas pourront être transposés pour les minimas.*

### 1.3 Type des Valeurs Extrêmes GEV et GPD

Historiquement, la première approche développée dans l'analyse des valeurs extrêmes pour une population donnée est celle des blocs maxima connus par la distribution des Valeurs Extrêmes Généralisées (GEV) (*Generalized Extreme Value*). Cette approche est apportée aux données qui consistent en un ensemble maximums : annuels journaliers, semestriels journaliers, trimestriels journaliers etc, et qui regroupent trois lois des valeurs extrêmes à savoir la loi Gumbel, loi de Weibull et loi de Fréchet.

Cependant, cette approche a été critiquée dans les autres grandes valeurs de l'échantillon. Pour pallier ce problème, (Pickands 1975) a introduit une nouvelle approche dans l'analyse des valeurs extrêmes connue par la Distribution de Parto Généralisée(GPD)(*Peaks Over Threshod*), qui est apportée aux données qui dépassent un certain seuil élevé bien déterminé .

#### 1.3.1 Théorème de Fisher-Tippett

L'estimation de la loi des extremums à partir de la fonction parente  $F$  pose une difficulté majeure car, cette dernière n'est pas connue. Même si la loi de variable  $X$  est connue avec exactitude la loi du terme maximum n'est pas toujours facilement calculable. Pour contourner cette limite, les chercheurs ( Fisher-Tippet(1928)) se sont intéressés au comportement asymptotique des variables aléatoires  $M_n$ . Il s'agit de déterminer la loi vers laquelle  $M_n$  converge, quand  $n$  tend vers l'infini afin de remplacer  $F$  par cette dernière pour les plus grandes valeurs de  $n$ .

Le théorème de Fisher-Tippet (1928) a permis de caractériser la loi de la distribution des valeurs extrêmes sans que celle-ci soit conditionnée par la loi de la variable parente.

**Définition 1.3.1** (*Loi de même type*)

*On dit que deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  sont de même type s'il existe des constantes réelles  $a \geq 0$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $Y = aX + b$  i.e si  $F$  et  $H$  sont des lois respectives des variables  $X$  et  $Y$  alors on a  $F(ax+b) = H(x)$ .*

*Autrement dit, les variables "de même type" ont la même loi, à un facteur de localisation et d'échelle près.*

De façon analogique au théorème central limite, peut-on trouver des constantes de normalisation :  $a_n$  et  $b_n$ , avec  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  et une loi non-dégénérée de loi  $H$  telle que :

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right) = (F(a_n x + b_n))^n \rightarrow H(x) \quad (1.2)$$

Fisher et Tippett trouvent en 1928 une solution à ce problème au moyen d'un théorème qui port leur nom et qui est l'un des fondement de la théorie des valeurs extrêmes.

**Théorème 1.3.1 (Théorème de Fisher-Tippett)**

S'il existe deux suites de consentes de normalisation  $(a_n)$  et  $(b_n)$  et une loi non-dégénérée de loi  $H$  telle que :  $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\text{loi}} H$ , alors  $H$  est l'une des trois lois limites :

$$\Lambda(x) = \exp\{-\exp[-x]\}, x \in \mathbb{R} \quad (\text{distribution de Gumbel})$$

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-x^{-\alpha}\} & , \text{si } x > 0 \quad (\text{distribution de Fréchet}) \\ 0 & , \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\} & , \text{si } x \leq 0 \quad (\text{distribution de Weibull}) \\ 1 & , \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ce théorème donne un résultat intéressant : quelle que soit la loi limite de la variable parente, la loi limite des extrêmes a toujours la même forme. Bien que le comportement de ces lois soit complètement différent, elles peuvent être combinées en un seule paramétrisation contenant un unique paramètre  $\xi$  qui contrôle "lourdeur" de la queue de loi appelé indice des valeurs extrêmes(ou indice de queue) :

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(- (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right), & \xi \neq 0, \quad 1 + \xi x > 0 \\ \exp(-\exp(-x)), & \xi = 0, \quad -\infty \leq x \leq +\infty \end{cases} \quad (1.3)$$

Où  $H$  est une fonction de répartition non-dégénérée. Cette loi est appelée loi de valeurs extrêmes généralisée (*Generalized Extreme Value*), que l'on notera GEV.

Le théorème de Fisher-Tippett fournit, en quelque sorte, la contrepartie du Théorème Central Limite (TCL) dans le cas d'événements extrêmes. Cependant, contrairement au TCL, où la loi limite est la seule loi limite possible, dans le cas des extrêmes, trois types de loi limite sont possibles (cf. Figure 1.1) :

$$\text{Frechet} : \alpha = \frac{1}{\xi}, \xi > 0.$$

$$\text{Weibull} : \alpha = -\frac{1}{\xi}, \xi < 0.$$

$$\text{Gumbel} : \xi = 0.$$

Le choix de l'une des trois distributions du domaine d'attraction de la théorie des valeurs extrêmes dépend de la valeur de l'indice de queue  $\xi$ .

- Si  $\xi > 0$  la GEV devient la distribution de Fréchet caractérisée par des queues de distribution épaisses et décroissantes à l'image d'une fonction puissance (loi de Student ou loi de Pareto).
- Si  $\xi = 0$ , la GEV suit la loi de Gumbel avec des queues qui décroissent de manière exponentielle comme des lois normale et log-normale.
- Si  $\xi < 0$ , nous avons la distribution de Weibull dont les queues de distribution sont bornées comme celles de la distribution uniforme et

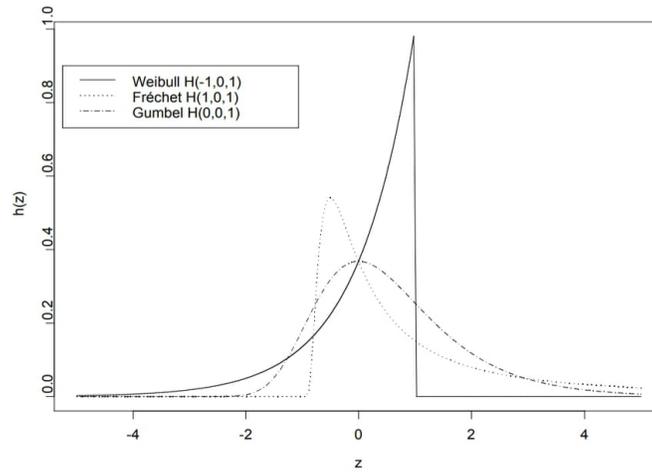


FIGURE 1.1 – Densité des lois de valeurs extrêmes, avec  $\xi = 1$  pour la loi de fréchet  $\xi = 0$  pour la loi de Gumbel et  $\xi = -1$  pour la loi de Weibull.

Bêta .

L'approche basée sur la GEV a été critiquée dans la mesure où l'utilisation d'un seul maxima conduit à une perte d'information contenue dans les autres grandes valeurs de l'échantillon. Pour pallier ce problème, la méthode POT (Peaks-over-Threshold) ou méthode des excès au-delà d'un seuil élevé a été introduite par Pickands[1975].

### 1.3.2 La loi des excès

L'approche basée sur les distributions GEV peut être réductrice du fait que l'utilisation d'un seul maxima conduit à une perte d'information continue dans les autres grandes valeurs de l'échantillon. La solution est de considérer plusieurs grandes valeurs au lieu de la plus grand.

La nouvelle approche de la théorie des valeurs extrêmes appelée POT (ou *Peak Over Threshold*) consiste à utiliser les observation qui dépassent un certain seuil, plus particulièrement les différence entre ces observation et le seuil, appelées *excès* .

Il est clair que cette méthode nécessite la détermination d'un seuil ni trop

faible pour ne pas prendre en considération des valeurs non extrêmes, ni trop élevé pour avoir suffisamment d'observation. Notons le seuil par  $u$ . Cette méthode initialement développée par Pickands 1975[26] et abondamment étudiée par divers auteurs tels que de Smith 1987[29], Davison et Smith 1990[8], ou Reiss et Thomas 2001[27].

**Définition 1.3.2** *Soit  $X$  une v.a de fonction de répartition  $F$  et de point terminal  $x_F$  tel que  $x_F = \{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$ . On cherche à partir de la loi  $F$  de  $X$  à définir une loi conditionnelle  $F_u$  par rapport au seuil  $u$  pour les v.a dépassant ce seuil.*

*On définit alors la loi conditionnelle des excès  $F_u$  par :*

$$F_u(y) = \mathbb{P}[X - u \leq y / X > u] \quad (1.4)$$

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)}, y \geq 0 \quad (1.5)$$

Notons  $Y = X - u$  pour  $X > u$  et pour  $n$  v.a observées  $X_1, \dots, X_n$  nous pouvons écrire  $Y_j = X_i - u > 0$  pour  $1 \leq j \leq N_u$  où  $N_u = \text{card}\{i : i = 1, \dots, n, X_i > u\}$  est nombre des dépassement du seuil  $u$  par les excès correspondants(cf.Figure1.2).

Le théorème de Pickands-balkema de Haan ci-après donne la forme de la loi limite pour les valeurs extrêmes : sous certaines conditions de convergence, la loi limite est une loi de Pareto généralisée que l'on notera GPD.

**Théorème 1.3.2 (de Pickands-Balkema-de Haan)** *Une fonction de répartition  $F$  appartient au domaine d'attraction maximal de  $G_{\xi,\beta}$ , si et seulement si, il existe une fonction positive  $\beta(u)$  telle que :*

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq y \leq x_F - u} |F_u(y) - G_{\xi,\beta(u)}(y)| = 0 \quad (1.6)$$

Où  $F_u(y)$  est la fonction de répartition conditionnelle des excès pour  $u$  élevé,  $x_F$  est le point terminal de  $F$ , et  $G_{\xi,\beta}$  est la GPD pour un seuil assez élevé

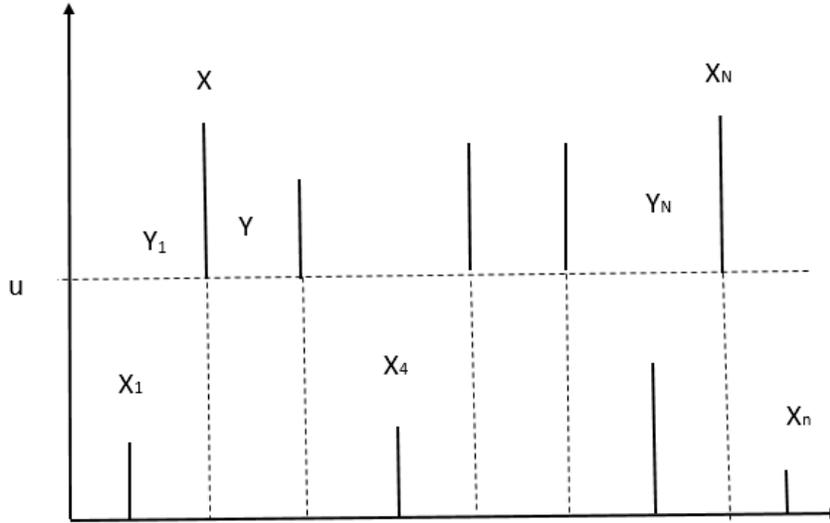


FIGURE 1.2 – Les dépassements de  $X$  au-delà d'un certain seuil  $u$

donnée par :

$$G_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \xi \frac{y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right), & \xi = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Où  $y \geq 0$  pour  $\xi \geq 0$  et  $0 \leq y \leq -\frac{\beta}{\xi}$  pour  $\xi < 0$ .

Ce théorème montre l'existence d'une relation étroite entre la GPD et la GEV :

Pickande 1975 a montré que n'importe quelle loi  $F$ , l'approximation GPD définie par (1.5) n'est vérifiée que s'il existe des constantes de normalisation et une loi non-dégénérée telle que le résultat donné par (1.2) est vérifié. Dans ce cas, si  $H$  est écrite sous la forme d'une GEV l'équation (1.3) alors l'indice de queue  $\xi$  est le même que celui de la GPD donnée dans (1.6).

De même, la loi GPD regroupe les trois distributions suivantes :

- Lorsque  $\xi > 0$ , on obtient la loi de Pareto usuelle.

- Lorsque  $\xi < 0$ , on obtient la loi de Pareto du type II.
- Lorsque  $\xi = 0$ , on obtient la loi exponentielle de paramètre  $\beta$ .

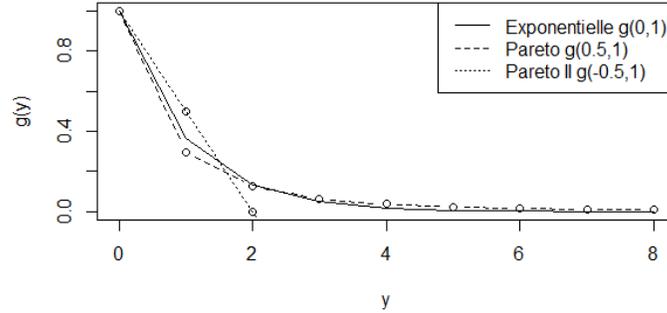


FIGURE 1.3 – Densité des lois de valeurs extrêmes ,avec  $\xi = 0.5$  pour la loi de Pareto,  $\xi = 0$  pour la loi exponentielle et  $\xi = -0.5$  pour la loi de Pareto II.

La dérivée de la distribution cumulative de GPD donne la fonction de densité de probabilité suivante :

$$g_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} \beta^{-1} (1 + \xi \frac{y}{\beta})^{-\frac{1}{\xi}-1}, & \xi \neq 0 \\ \beta^{-1} \exp(-\frac{y}{\beta}), & \xi = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

La GPD a les propriétés suivantes :

$$E(Y) = \frac{\beta}{1-\xi} (\xi < 1) \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{\beta^2}{(1-\xi)^2(1-2\xi)}, (\xi < \frac{1}{2})$$

## 1.4 Estimation des paramètres de la loi GPD

Nous avons vu que la loi asymptotique des excès au delà d'un seuil indexée par le paramètre  $\xi$  et un deuxième paramètre  $\beta$ . Ces paramètres appelés respectivement indice de V.E et paramètre d'échelle, apportent une information sur la forme de la queue de distribution de  $F$ , nous pouvons estimer ces deux paramètres par trois méthodes : la méthode de vraisemblance, la méthode des moments et la méthode de Hill.

### 1.4.1 Méthode du maximum de vraisemblance (EMV)

La méthode de maximum de vraisemblance sélectionne les estimateur  $\hat{\xi}$  et  $\hat{\beta}$  qui maximisent la fonction de vraisemblance.

Supposons que notre échantillon des excès  $Y = (Y_1, \dots, Y_{N_u})$  est *i.i.d* avec comme une fonction de densité  $g_{\xi, \beta}$ .

$$L((\hat{\xi}, \hat{\beta}), Y) = \max L((\xi, \beta), Y) = \max \prod_{i=1}^{N_u} g_{\xi, \beta}(y_i) \quad (1.9)$$

Nous maximisons la fonction de distribution de pareto généralisée :

$$L((\hat{\xi}, \hat{\beta}), Y) = \max L((\xi, \beta), Y) = \max \sum_{i=1}^{N_u} g_{\xi, \beta}(y_i) \quad (1.10)$$

La log-vraisemblance est donc égale à :

$$L((\xi, \beta), Y) = -N_u \log \beta - \left( \frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^{N_u} \log \left( 1 + \frac{\xi}{\beta} y_i \right) \quad (1.11)$$

On utilisant les propriétés du logarithme , $L((\xi, \beta), Y)$  se simplifie en donnant :

$$L((\hat{\xi}, \hat{\beta}), Y) = \begin{cases} -N_u \log \beta - \left( \frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^{N_u} \log \left( 1 + \xi \frac{y_i}{\beta} \right) & \xi \neq 0 \\ -N_u \log \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{N_u} y_i & \xi = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

### 1.4.2 Méthode des moments

La méthode des moments est une technique les plus simples pour ajuster une loi paramétrique. En général, les estimateurs calculés par cette méthode ne sont pas optimaux, mais ont l'avantage d'être rapides à implémenter et ne demandent pas beaucoup de temps de calcul.

Soit une variable aléatoire  $X$ . Pour  $j \in \mathbb{N}^*$ , le  $j^{eme}$  moment de la distribution de  $X$  est définie par :

$$m_j = E [X^j] \quad (1.13)$$

Si  $X$  suit une loi paramétrique, on peut alors exprimer les moments  $m_j$  en fonction des paramètre de la loi. A partir d'observations  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $X$ , on peut calculer l'estimateur empirique  $\hat{m}_j$  du  $j^e$  moment  $m_j$  de la façon suivante :

$$\hat{m}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j \quad (1.14)$$

La méthode des moments consiste à déterminer les estimateurs des paramètres de la loi en faisant coïncider les moments  $m_j$  de la loi avec leurs estimateurs empiriques. Pour estimer  $\xi$  et  $\beta$  dans le cas de la loi de Pareto généralisée, on utilise les deux premiers moments de la loi pour disposer de deux équations. Ces deux moments s'expriment ainsi en fonction des paramètres de la loi :

$$m_1 = E[X] = \frac{\beta}{1 - \xi} \quad (1.15)$$

$$m_2 = E[X^2] = \frac{2\beta^2}{(1 - \xi)(1 - 2\xi)}$$

Ces deux quantités existent uniquement si  $\xi < \frac{1}{2}$ . Leurs estimateurs empiriques sont égaux :

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X}$$

$$\hat{m}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = s^2 + \bar{X}^2$$

où  $\bar{X}$  et  $s$  sont la moyenne et l'écart type données  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ , on utilisant les équation :

$$m_1 = \hat{m}_1$$

$$m_2 = \hat{m}_2$$

On en déduit les estimateurs de la méthode des moments, sous hypothèse  $\xi < \frac{1}{2}$

$$\hat{\xi} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{X}^2}{s^2} \right) \quad (1.16)$$

$$\hat{\beta} = \bar{X} \left( \frac{1}{2} + \frac{\bar{X}^2}{s^2} \right) \quad (1.17)$$

## 1.5 Recherche du seuil $u$

Une bonne détermination de  $u$  est primordiale si nous voulons appliquer la théorie des valeurs extrêmes. En effet, un seuil trop faible conduit à une mauvaise adéquation entre la fonction de répartition et la loi GPD et les estimateurs sont biaisés. Inversement un seuil trop élevé entraîne une faible taille d'échantillon de dépassements et donc des estimateurs des grandes variances.

### 1.5.1 Estimateur de Hill

La méthode a été introduit par Hill en 1975 afin d'estimer l'indice de queue  $\xi$ . Cet estimateur est directement appliqué aux pertes ordonnées de la plus grande valeur à la plus petite. En considérant  $X_1, \dots, X_n$  ces pertes ordonnées, l'estimateur de Hill  $\hat{\xi}_{n,k}^{(H)}$  est donné par l'expression suivante :

$$\hat{\xi}_{n,N_u}^{(H)} = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} \log X_i - \log X_{N_u+1} \quad (1.18)$$

où  $N_u$  représente le nombre d'extrêmes dans la queue, utilisé pour estimer l'estimateur de Hill. Il doit être choisi d'une manière appropriée.

Il existe d'autre estimateurs du seuil comme la méthode graphique appelée MRL plot qui consiste à tracer le graphe de  $\xi$  en fonction du seuil. Autre méthode consiste à ajuster les donnée par la loi GPD pour différents seuil et choisi ce qui ajusté mieux l'échantillon disposé.

## CHAPITRE 2

## TYPES DES QUEUEES

### 2.1 Introduction

En 1908, en tant que moyen mémotechnique, William Gosset esquisse deux dessins mettant en scène un ornithorynque pour les courbes platikurtiques et deux kangourous pour les courbes leptokurtiques. Le terme queue (tail en anglais) est issu des queues des animaux.

La queue d'une loi est liée à son kurtosis. Ce coefficient d'aplatissement donne la concentration des valeurs autour de la valeur centrale de la loi et ainsi la concentration pour les valeurs extrêmes, c'est-à-dire éloignées de la moyenne. Pour un kurtosis nul, la queue est équivalente à celle de la loi normale. Pour un kurtosis négatif, la courbe est dite platikurtique et la queue est légère (en fait, plus légère que la loi normale), alors que pour un kurtosis positif, la courbe est dite leptokurtique et la queue est lourde (plus lourde que la loi normale).

La distribution à queue lourde et la distribution à queue légère permet de modéliser de nombreux phénomènes rencontrés dans diverses disciplines dont : la finance, l'hydrologie, les télécommunications et la géologie, etc... Et plus récemment en climatologie.

## 2.2 Distributions à Queues Légères

**Définition 2.2.1** Une distribution  $F_X(x)$  est dite à queue légère, s'il existe des constantes  $a, b > 0$ , telle que :

$$\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) \leq ae^{-bx} \quad (2.1)$$

où d'une manière équivalente :

$$\exists z > 0 \text{ tel que } M_X(z) < \infty \quad (2.2)$$

avec  $M_X(z) = E(e^{xz})$ .

## 2.3 Distributions à Queues Lourdes

Dans la théorie des probabilités, les distributions à queue lourde sont des distributions de probabilité dont les queues ne sont pas exponentiellement bornées, ce qui signifie qu'elles ont des queues plus « lourdes » que la distribution exponentielle. Dans de nombreuses applications, c'est la queue droite de la distribution qui est intéressante, mais une distribution peut avoir une lourde queue à gauche, ou les deux queues peuvent être lourdes et ces distributions sont liées à la théorie des valeurs extrêmes.

Plusieurs définitions ont été associées à ces distributions selon les critères de classification et la description la plus simple, qui dépend de la comparaison entre les distributions de queue lourde et la distribution normale.

**Définition 2.3.1** On dit qu'une distribution de  $X$  à la queue lourde si :

$$C_k = E \left( \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \right)^4 = \frac{\sigma_4}{\sigma_2^2} > 3 \quad (2.3)$$

avec  $\sigma_i$  les moments centrés d'ordre  $i$ .

Ce qui est équivalent à dire qu'une distribution a une queue lourde si et seulement si son coefficient d'aplatissement  $C_k$  est supérieur à celui de la loi normale (pour laquelle  $C_k = 3$ ). La différence entre la loi Normale et une loi avec une queue plus lourde est dans la Figure (2.1). Dans cette figure on présente les fonctions de densité de probabilité de la loi normale et d'une distribution à queue plus lourde.

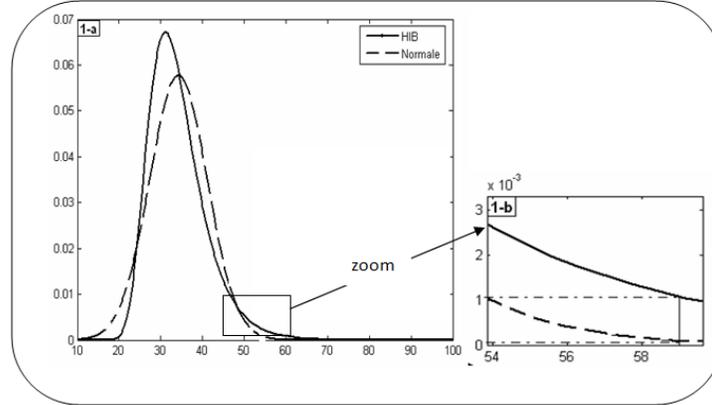


FIGURE 2.1 – Illustration de la différence entre la loi normale et une loi à queue lourde

La caractérisation, donnée par l'équation (2.1), est très générale et ne peut être appliquée que si le moment d'ordre 4 existe. Par conséquent aucune discrimination, pour les distributions ayant un moment d'ordre 4 infini, ne peut être faite si on ne considère que ce critère. Malheureusement, il n'y a pas de critère pour classer toutes les distributions selon la queue droite.

Cependant, un classement de queue peut être obtenu pour des catégories particulières de distributions. Dans la suite, une discussion de cinq classes, donnée dans Werner et Upper [31]. Ces classes sont emboîtées ( $A \subset B \subset C \subset D \subset E$ ) est illustrées à la Figure 2.1, pour plus de détails sur ces interrelations, on se réfère à Embrechts et Omey[12], Kluppelberg[24], et El-Adlouni et al. [11].

- (E) :Les distributions avec des moments exponentielles inexistantes.
- (D) :Les distributions Subexponentielles.
- (C) :Les distributions à variations régulières.
- (B) :Les distributions avec un comportement de Pareto.
- (A) :Les distributions  $\alpha - Stables$  avec  $\alpha < 2$ .

Les deux classes B et C sont très importants compte tenu de leur lien à la théorie des valeurs extrêmes, et le plus important dans ce mémoire est la classe C (les distributions Subexponentielles).

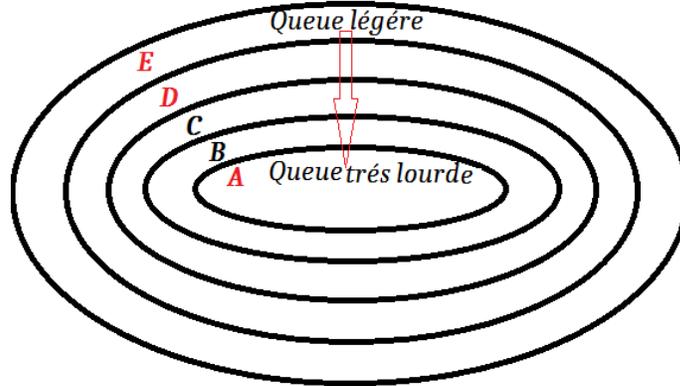


FIGURE 2.2 – Différentes classes de distribution de queue très légère (E) à très lourde (A)

### 2.3.1 Distributions Avec Des Moments Exponentiels Inexistants

La classe E plus large englobe toutes les distributions qui sont caractérisées par la définition suivante (Foss et al., [14])

**Définition 2.3.2** (*Distribution à queue lourde*). Une distribution  $F$  est dite à queue lourde ou à queue épaisse si sa fdr vérifie

$$E(e^{\lambda x}) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} dF(x) = \infty, \text{ pour tout } \lambda > 0. \quad (2.4)$$

On note que la distribution normale n'appartient pas à cette classe à cause de la probabilité au dépassement  $\bar{F}$ , pour les extrêmes de cette classe, décroît moins rapidement que celle de la loi normale. Dans ce sens, toutes les distributions de la classe E sont à queue plus lourds par rapport à la distribution normale.

**Définition 2.3.3** (*Distribution à queue légère*).

Une distribution  $F$  est dite à queue légère ou à queue fine si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} dF(x) < \infty, \text{ pour tout } \lambda > 0. \quad (2.5)$$

*c'est-à-dire si et seulement si elle ne parvient pas à être à queue lourde.*

### 2.3.2 Distributions subexponentielles

La classe  $D$  des distributions subexponentielles est caractérisée par la définition suivante (Embrechts et al.[13]).

**Définition 2.3.4** (*Distributions subexponentielles*). Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  une suite de v.a's i.i.d, de fdr  $F$ . La loi correspondant à  $F$  est dite subexponentielle si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > x)}{\mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) > x)} = 1, \quad n \geq 1 \quad (2.6)$$

*C'est équivalent à dire que la somme de  $n$  distributions subexponentielles (indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) est extrême si et seulement si leur maximum est extrême. On peut démontrer que l'équation (2.4) implique que :*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{\varepsilon x}} = \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (2.7)$$

*On rappelle que  $e^{-\varepsilon x}$  est la forme de la queue de la loi exponentielle. Certaines propriétés de base des distributions subexponentielles peuvent être trouvées dans le livre de Embrechts et al. [13] ou dans le livre de Foss et al. [14]. Comme son nom l'indique, la classe  $D$  contient les distributions telles que  $\bar{F}$  décroissent plus lentement que n'importe quelle loi exponentielle.*

Le tableau suivant donne un certain nombre de distribution subexponentielle :

Distribution	$\bar{F}(x)$ ou $f(x)$	Paramètres
Pareto	$\bar{F}(x) = (\frac{k}{k+x})^\alpha$	$\alpha, k > 0$
Burr	$\bar{F}(x) = (\frac{k}{k+x^r})^\alpha$	$\alpha, k, r > 0$
Weibull	$\bar{F}(x) = e^{-c^r}$	$0 < r < 1$
Log-normal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\mu^2})$	$\mu \in \mathbb{R}, \mu > 0$
Log-gamma	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$	$\alpha > 0, \beta > 0$
"Almost" Exponentielle	$\bar{F}(x) = e^{-x(\ln x^{-\alpha})}$	$\alpha > 0$

### 2.3.3 Distributions à Variations Régulières

Dans cette partie, on traite la classe  $\mathcal{C}$  des fonctions qui apparaît dans un vaste nombre d'applications dans la totalité de mathématiques. Ici, on va définir quelques généralités sur ces fonctions avec certaines de leurs propriétés les plus importantes. Ceux qui sont intéressés par la théorie de variation régulière, on peut consulter par exemple Bingham et al. [4], Embrechts et al. [13], Beirlant et al. [3], de Haan et Ferreira, [10] et Resnick [28].

**Définition 2.3.5** : (Fonctions à variation régulière et à variation lente).

- Une fonction mesurable  $V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est à variation régulière à  $\infty$  avec l'index  $\rho \in \mathbb{R}$ , et on note  $V \in \mathcal{RV}_\rho$ , si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(tx)}{V(x)} = x^\rho, \quad t > 0, \quad (2.8)$$

on appelle  $\rho$  l'exposant de variation ou l'indice de variation régulière. - Une fonction mesurable  $V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est à variation lente à  $\infty$  avec l'index  $\rho = 0$  et on note  $V \in \mathcal{RV}_0$ ; si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{l}(tx)}{\mathbf{l}(x)} = 1, \quad t > 0. \quad (2.9)$$

- Une fonction à variation régulière d'indice  $\rho \in \mathbb{R}$  peut toujours s'écrire sous la forme  $V(x) = x^\rho \mathbf{l}(x)$ , où  $\mathbf{l} \in \mathcal{RV}_0$ .

*Il est facile de donner des exemples de fonctions à variations lentes. Les exemples typiques sont les fonctions des constantes positives, fonctions convergent vers une constante positive, logarithmes et logarithmes itérés. D'autre part,*

*- Les fonctions  $x^\rho$ ,  $x^\rho \log(1+x)$  et  $(x \log(1+x))^\rho$  : sont à variations régulières.*

*- Les fonctions  $\exp(x)$ ,  $\sin(x+2)$  et  $\exp(\log(1+x))$  : ne sont pas à variations régulières.*

*On note que  $\log(x)$  est à variation lente, mais  $\exp(\log(x))$  n'est pas à variation régulière. Enfin, on donne quelques propriétés élémentaires, des fonctions à variations lentes, où les preuves peuvent être laissées au lecteur.*

**Proposition 2.3.1** : *(Propriétés de fonction à variation lente).*

*(i)  $\mathcal{RV}_0$  est fermé sous l'addition, la multiplication et la division.*

*(ii) Si  $\mathbf{l}$  est à variation lente,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \mathbf{l}(x)}{\log(x)} = 0$ .*

*(iii) Si  $\mathbf{l}$  est à variation lente, alors  $\mathbf{l}^a$  est à variation lente pour tout  $a \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*(iv) Si  $\mathbf{l}$  est à variation lente et  $\rho > 0$ ,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\rho \mathbf{l}(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\rho} \mathbf{l}(x) = 0.$$

*Le premier résultat utile est le théorème de convergence uniforme.*

**Théorème 2.3.1** : *(Convergence uniforme).*

*Si  $V \in \mathcal{RV}_\rho$ , pour  $0 < a \leq b < \infty$ , alors la relation (2.6) se tient uniformément pour*

*(i)  $x \in [a, b]$  si  $\rho = 0$ .*

*(ii)  $x \in (0, b]$  si  $\rho > 0$ .*

*(iii)  $x \in [a, \infty)$  si  $\rho < 0$ .*

Un autre résultat important concerne la représentation des fonctions à variations régulières.

**Théorème 2.3.2** : (Représentation de karamata).

(i)  $\mathbf{l} \in \mathcal{RV}_0$ , si et seulement si peut être représentée sous la forme.

$$\mathbf{l}(x) = c(x) \exp \left\{ \int_1^x \frac{r(t)}{t} dt \right\}, \quad x > 0, \quad (2.10)$$

où  $c, r$  sont des fonction mesurable, et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c_0 \in (0, \infty), \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} r(t) = 0. \quad (2.11)$$

(ii) Une fonction  $V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  à variation régulière avec l'index  $\rho$  si et seulement si  $V$  a la représentation.

$$V(x) = c(x) \exp \left\{ \int_1^x t^{-1} \rho(t) dt \right\}, \quad x > 0 \quad (2.12)$$

où  $c$  satisfait (2.9) et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho$ .

Quelques autres propriétés utiles se rassemblent dans la proposition suivante :

**Proposition 2.3.2** :

(i) Si  $V \in \mathcal{RV}_\rho$  -  $-\infty \leq \rho \leq \infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log V(x) / \log x = \rho$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \begin{cases} \infty & \rho > 0, \\ 0 & \rho < 0, \end{cases}$$

(ii) On suppose que  $V$  est non décroissante,  $V(\infty) = \infty$ , et  $V \in \mathcal{RV}_\rho$ ,  $0 \leq \rho \leq \infty$ . Alors

$$V^{-1} \in \mathcal{RV}_{-\rho}.$$

(iii) **Inégalité de Potter** : On Suppose que  $V \in \mathcal{RV}_\rho$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $t_0$  tel que pour  $x \leq 1$  et  $t \leq t_0$ ,

$$(1 - \varepsilon)x^{\rho - \tau} < \frac{V(tx)}{x} < (1 + \varepsilon)x^{\rho + \tau} \quad (2.13)$$

**Définition 2.3.6** (Fonction à variation rapide).

Une fonction mesurable  $V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est à variation rapide ou variation régulière d'indice  $\infty$  et on note  $V \in \mathcal{RV}_\infty$  si pour tout  $t > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(tx)}{V(x)} = x^\infty = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ 1 & x = 1, \\ \infty & x > 1. \end{cases}$$

De même,  $V \in \mathcal{RV}_{-\infty}$  si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(tx)}{V(x)} = x^{-\infty} = \begin{cases} \infty & x < 1, \\ 1 & x = 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

Un exemple d'une fonction  $V \in \mathcal{RV}_{-\infty}$  est  $V(x) = \exp(-x)$ . Pour une discussion sur la liste des propriétés des fonctions à variation rapide voir Resnick [9] et voir aussi Embrechts et al.[13].

**Conditions du premier et du Second ordre :**

Dans le contexte des modèles à queue lourd, c'est-à-dire, pour tout  $x > 0$ , et avec la fonction de queue de quantile  $U$ , l'une des conditions (équivalentes) suivantes sont satisfaites :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(t)} = x^{-1/\gamma} \iff \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx)}{U(x)} = x^\gamma, \quad (2.14)$$

L'équation (2.12) est connue comme la condition du premier ordre des fonctions à variations régulières avec l'indice  $-1/\gamma$  (ou l'indice  $\gamma$ ) et  $\gamma > 0$ , ce qui signifie  $\bar{F} \in \mathcal{RV}_{-1/\gamma}$  ou  $U \in \mathcal{RV}_\gamma$ .

Cependant, une condition du premier ordre en général n'est pas suffisante pour étudier les propriétés des estimateurs des paramètres de queue, en particulier la normalité asymptotique. Dans ce cas, une condition du second ordre des fonctions à variations régulières est nécessaire en spécifiant le taux de convergence dans l'équation (2.14). La définition suivante de cette condition vient de de Haan et Stadtmuller [10], Geluk et al. [18], de Haan et Ferreira [9], et Resnick [28], Voir aussi Neves [25] et Neves et al. [17] pour une version légèrement différente du second ordre étendu des fonctions à variations régulières.

**Définition 2.3.7** (*Condition du second ordre*).

*On dit que la fonction de queue de quantile  $U$  est à variation régulière du*

second ordre avec le paramètre du premier ordre  $\gamma > 0$  et le paramètre du second ordre  $\rho \leq 0$ , on écrit  $U \in \mathcal{RV}_{\gamma, \rho}$ , s'il existe une fonction  $A^*(t) \rightarrow 0$  et ne change pas le signe au voisinage de  $\infty$  telles que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx)/U(t) - x^\gamma}{A^*(t)} = x^\gamma \frac{x^\rho - 1}{\rho}, \quad x > 0, \quad (2.15)$$

où  $|A^*| \in \mathcal{RV}_\rho$  est appelée la fonction auxiliaire de  $U$ . Le corollaire suivant exprime la condition du second ordre des fonctions à variations régulières en fonction de  $\bar{F}$

**Corollaire 2.3.1** .

Pour tout  $x > 0$  avec  $\rho \leq 0$  et  $A(t) := A^*(1/(1 - F(t)))$ , la relation (2.15) est équivalent à

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)/\bar{F}(t) - x^{-1/\gamma}}{A(t)} = x^{-1/\gamma} \frac{x^\rho - 1}{\gamma\rho} \quad (2.16)$$

Bien que l'estimation du paramètre du second ordre  $\rho$  est difficile, tant du point de vue théorique et appliquée, plusieurs estimateurs pour  $\rho$  qui fonctionnent bien dans la pratique ont été récemment introduites, et leurs propriétés asymptotiques ont été étudiées. On se réfère ici à Gomes et al. [20], Fraga Alves et al. [16] et Caeiro et Gomes [5], entre autres. Ciuperca et Mercadier [7] ont étendu les estimateurs dans [20] et [16]. Goegebeur et al. [19] ont introduit une nouvelle classe d'estimateurs de noyau basés sur l'échelle log-excesses. D'autres estimateurs de ce paramètre ont été proposés notamment par de Wet et al., Caeiro et Gomes [6] pour réduire le biais et par Worms et Worms [32] qui introduisent un estimateur de moment de probabilité pondérée  $\rho$ . La classe des estimateurs dans [16] est considérée par de nombreux auteurs, l'état de l'art sur l'estimation du paramètre du second ordre  $\rho$  et a reçu beaucoup d'attention dans la littérature,  $y$  compris les citations dans certains livres importants dans le domaine de la statistique des extrêmes (voir Beirlant et al. [3], de Haan et Ferreira [9], Resnick [28], ...).

Une valeur de  $\rho$  proche de 0 implique une faible vitesse de convergence. On note que la distribution de Pareto, où  $x^\gamma(x^\rho - 1)/\rho$  dans l'équation (2.15) serait 0 pour toute fonction  $A^*(t)$ , ne satisfait pas la condition du second ordre. Comme un exemple de distributions à queue lourde satisfaire cette condition, on a ce qu'on appelle " le modèle de Hall ".

**Classe de Hall :**

Une sous-classe simple et riche de distributions à queue lourde joue un rôle important dans la discussion des estimateurs d'un IVE positif  $\gamma$ . Cette classe est présentée par Hall [21] et elle est mentionnée par " le modèle de Hall ". Pour lesquels la fonction de queue de quantile de cette classe est sous forme

$$U(t) = Ct^\gamma + Dt^{\gamma+\rho}(1 + o(1)), \quad \text{quand } t \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

avec  $C > 0, D \neq 0, \gamma > 0$  et  $\rho < 0$  satisfait la condition du seconde ordre avec  $A^*(t) = \rho\gamma dc^\rho t^\rho$ , pour les constantes  $c = C^{1/\gamma} > 0$  et  $d = \gamma^{-1}DC^\gamma/(\gamma + \rho) \neq 0$ . La relation ci-dessus peut être reformulée en termes de fonction  $\bar{F}$  comme suit :

$$\bar{F}(x) = cx^{-1/\gamma} + dx^{-1/\gamma+\rho/\gamma}(1 + o(1)), \quad \text{quand } x \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

### 2.3.4 Distributions Avec un Comportement de Pareto

Une classe de distributions s'écrivant selon le modelé suivant

$$\bar{F}(x) = (x/C)^{-1/\gamma}, \quad x \geq C \quad \text{et} \quad C > 0, \quad (2.19)$$

est dite à queue de type-Pareto (B) avec l'IVE  $\gamma > 0$  et  $C$  est un paramètre d'échelle. L'équation (2.19) est équivalente à

$$U(t) = Ct^\gamma, \quad C > 0, \gamma > 0.$$

Il existe dans la littérature de nombreux auteurs qui se sont concentrés sur cette classe.

### 2.3.5 Distribution $\alpha$ -stable

La propriété précédente est importante pour définir la classe A, la classe des distributions  $\alpha$ -Stables (appelées aussi distribution stables). Les distributions stables constituent une classe très riche de lois de probabilité capables de représenter différentes asymétries et des queues très lourdes. Cette classe a été caractérisée par Lévy (1925) dans ces travaux sur la somme de variables indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d*). L'absence de formules explicites des densités de ces distributions a limité leur utilisation. Les distributions de cette classe ont un comportement asymptotique de Pareto avec  $0 < \alpha \leq 2$ . Lorsque  $\alpha = 2$  on retrouve la loi Normale, cependant

pour  $\alpha < 2$  le moment d'ordre  $r \neq \alpha$  n'est pas fini, ces distributions ont donc une variance infinie, et par conséquent une queue très lourde. Pour  $\alpha = 1$  on retrouve la loi de Cauchy (avec une moyenne et une variance infinies). Cette classe a une grande importance dans la théorie des valeurs extrêmes, puisque les distributions stables peuvent être caractérisées à partir du théorème de la Limite Centrale Généralisé. En effet, le théorème de la limite centrale indique que la somme de  $n$  variables aléatoires (*i.i.d*) de variance finie tend vers une distribution normale lorsque  $n$  tend vers l'infini. Une généralisation de ce théorème par Gnedenko et Kolmogorov (1954) indique que si la condition de variance finie n'est pas respectée, la seule loi limite possible de la somme de  $n$  variables aléatoire (*i.i.d*), est une loi stable. L'utilisation de cette famille de distributions était très limitée à cause des problèmes de calcul : leurs fonctions de densité de probabilité et de distributions n'étant pas explicites. Récemment plusieurs logiciels ont été proposés pour permettre la résolution de ces problèmes (Nolan 2001, 2006), et on trouve des applications des distributions Stables dans plusieurs domaines tels que finances, physique et le trafic Internet.

## 2.4 Exemples Des Distributions à Queues Légères et Lourdes

### 2.4.1 Distribution à Queues Légères

Nom	Paramètres	Densité
Exponentielle	$\beta > 0$	$f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$
Gamma	$\alpha > 0, \beta > 0$	$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$
Weibull	$\beta > 0, r \geq 1$	$f_X(x) = \beta r x^{r-1} e^{-\beta x^r}$
Mélange exponentiel	$\beta_i > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$	$f_X(x) = \sum_{i=1}^n \{\alpha_i \beta_i e^{-\beta_i x}\}$

### 2.4.2 Distribution à Queues Lourdes

Nom	Paramètres	Densité
Weibull	$\beta > 0, 0 < r < 1$	$f_X(x) = \beta r x^{r-1} e^{-\beta x^r}$
Log-normal	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
Pareto	$\alpha > 0, \lambda > 0$	$f_X(x) = \frac{\alpha}{\lambda+x} \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$
Burr	$\alpha > 0, \lambda > 0, r > 0$	$f_X(x) = \frac{\alpha r \lambda^\alpha x^{r-1}}{(\lambda+x^r)^{\alpha+1}}$

## CHAPITRE 3

# PROBABILITÉ DE RUINE POUR UN PROCESSUS DU RISQUE STATIONNAIRE

La théorie de la probabilité de ruine appartient aux sciences de la gestion des risques et aux mathématiques appliquées à l'assurance.

Il s'agit de l'étude mathématique de modèles stochastiques et dynamiques adaptés aux réserves financières allouées à un portefeuille de contrats d'assurance de type non-vie d'une compagnie d'assurance. Assurance de type IARD (Incendie, Accidents et Risques Divers).

Dans ce chapitre, nous étudions la probabilité de ruine asymptotique à horizon fini et infini pour les processus de risque aux queues subexponentielles pour des processus des arrivées des sinistres stationnaires.

### 3.1 Modèle de risque

Le modèle classique de la théorie de ruine représente l'évaluation du résultat d'une compagnie d'assurances au cours du temps. Ce modèle est représenté par le processus de risque ou de réserve  $\{R(t); t \geq 0\}$  donné par :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Où

- $R(0) = u$  est le capital initial ou la réserve.
- $c$  représente le flux des primes généré par le portefeuille à l'instant  $t$ .
- Le montant total des sinistres au temps  $t \geq 0$  est représenté par le processus stochastique  $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ , on le modélise par l'un des modèles suivants, individuel ou collectif.

## 3.2 Le modèle individuel et le modèle collectif

### 3.2.1 Modèle individuel

Le modèle individuel modélise la charge totale générée par les sinistres individuels par individu. La charge totale pour un portefeuille comprenant  $n$  contrats est définie par la formule :

$$S^{Ind} = \sum_{i=1}^n I_i X_i \quad (3.1)$$

avec :

- $n$  est le nombre d'assurés ou l'effectif de portefeuille de l'assurance.
- $I_i$  *i.i.d.*  $\sim B(p)$  indiquant si l'assuré  $i$  a subi un sinistre sur la période donnée.
- $X_i$  variable aléatoire positive indépendante de  $I_i$ , représente le montant de  $i$ -ème sinistre.

Ce modèle est souvent utilisé en assurance santé lorsqu'on considère un groupe de  $n$  employés d'une entreprise où il est difficile de modéliser les pertes par les variables de même loi. En effet, chaque employé a une couverture différente (en fonction de leur salaire) et un comportement différent (les dépenses dépendent notamment de l'âge des employés).

### 3.2.2 Modèle collectif

Le modèle collectif modélise la charge totale subie par un portefeuille vu, non pas contrat par contrat, mais suivant un nombre total de sinistres

tout assuré confondu, la charge totale est définie par :

$$S^{coll} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad (3.2)$$

Où

- $N(t)$  est une variable aléatoire dans  $\mathbb{N}$ .
- $X_i$  est variable aléatoire dans  $\mathbb{R}$  *i.i.d.*, et indépendant de  $N(t)$

### 3.3 Modèle classique de la théorie de ruine

Le modèle classique de la théorie de ruine représente l'évaluation du résultat d'un compagnie d'assurances au cours du temps. Le modèle de Filip Landberg, et Hald Cramer en 1903, ont proposé le premier modèle pour modéliser la richesse de l'assurance, ce modèle est dit de poisson composé ou aussi dit de Cramer-Landberg.

#### 3.3.1 Processus de réserve et surplus

Le modèle classique de ruine est celui de Cramer-Lundberg ou  $P/G$  et connu comme le base du fondement du risque. La notation  $P/G$ , emprunté de la théorie des files d'attente fournit l'information au sujet des loi des arrivées et des montants des réclamations des sinistre. La lettre G signifie général et P signifie poisson.

Un processus de réserve  $\{R_t, t \geq 0\}$ , et  $u = R(0)$  la réserve initiale, on fait les hypothèses suivantes :

- $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  suite de v.a. positives i.i.d. égales aux temps inter-arrivée des sinistres.
- $\sigma_n = \sum_{i=1}^n T_i$  instant d'occurrence du  $n^{ième}$  sinistre.
- $N_t = \max\{n \in \mathbb{N}, \sigma_n \leq t\} = \max\{n \in \mathbb{N}, \sigma_{n+1} \geq t\}$  processus de comptage égal au nombre de sinistre jusqu'au temps  $t$ .

## CHAPITRE 3. PROBABILITÉ DE RUINE POUR UN PROCESSUS DU RISQUE STATIONNAIRE

---

- $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  suit de *v.a* positive *i.i.d* égale aux montants des sinistres, on notera  $F_X$  leur fonction de répartition,  $f_X$  leur densité, et  $\mu$  leur moyenne commune.
- $c$  flux de prime générée par unité de temps.

Ce qui donne

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i \quad (3.3)$$

on définit également le processus de surplus  $\{S_t, t \geq 0\}$  qui représente le perte total à

$$S(t) = u - R(t) \quad (3.4)$$

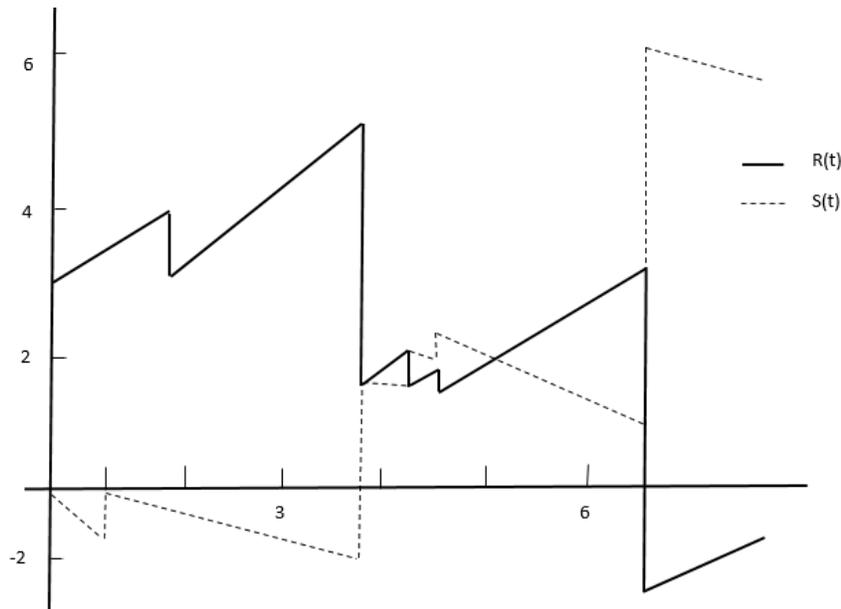


FIGURE 3.1 – Évolution de la réserve et de surplus

### 3.3.2 Hypothèses du modèle Cramer-Lundberg

Les hypothèses du ruine de Cramer-Lundberg sont :

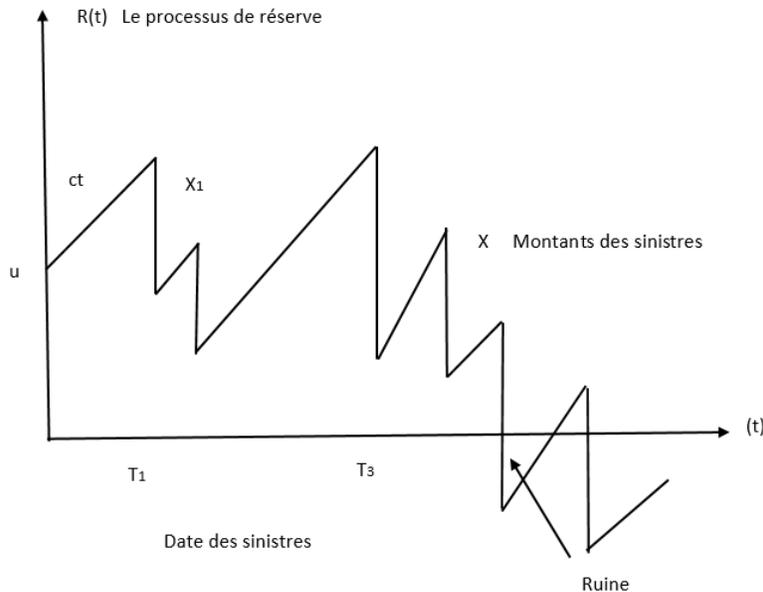


FIGURE 3.2 – Description du modèle de base en assurance

- $u > 0$  est la réserve initiale de la compagnie d'assurance. Une compagnie d'assurance dispose d'un capital initial, qui augmente régulièrement grâce aux cotisations des assurés, mais diminue ponctuellement lors des remboursements de sinistres.
- $c > 0$  le taux de cotisation reçu continuellement dans le temps ( $c$  est appelé taux instantané de prime) supposant que la prime perçue par l'assureur est linéaire en fonction du temps.  
c.à.d  $p(t) = ct$  est la prime perçue sur l'intervalle de temps  $[0, t]$ ,  $c$  est appelé taux instantané de prime.
- $N(t)$  est un processus de poisson homogène d'intensité  $\lambda$  modélise le nombre des sinistres jusqu'à l'instant  $t$ .

### 3.3.3 Probabilité de ruine

Pour tout modèle de risque d'un surplus financier, la première quantité d'intérêt est la probabilité de ruine.

**Définition 3.3.1** (*Le temps de ruine*)

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0; R_t < 0\} = \inf\{t \geq 0; S_t > u\} \quad (3.5)$$

est le premier instant où le processus de réserve devient négatif ou de manière équivalente le processus de surplus excède le niveau  $u$ .

**Définition 3.3.2** La probabilité de ruine à horizon de temps infini notée  $\psi$ , est défini par :

$$\psi(u) = P(\inf_{t \geq 0} R(t) < 0 : R(0) = u) \quad (3.6)$$

**Définition 3.3.3** La probabilité de ruine à horizon de temps finie est défini par :

$$\psi(u, T) = P(\inf_{t \in [0, T]} R(t) < 0 : R(0) = u) \quad (3.7)$$

**Définition 3.3.4** La probabilité complémentaire ou probabilité de non ruine, notée  $\phi$  est défini par :

$$\phi(u) = 1 - \psi(u), \phi(u, T) = 1 - \psi(u, T) \quad (3.8)$$

### 3.3.4 Coefficient de sécurité

Soit un processus  $\{Y_t; t \geq 0\}$  défini par :

$$Y_t = ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \quad (3.9)$$

le risque moyen sur une intervalle  $[0, t]$  est égal à :

$$E[Y_t] = ct - \mu E[N_t] = (c - \lambda\mu)t \quad (3.10)$$

nous appelons  $(c - \lambda\mu)$  le coefficient de sécurité.

**Définition 3.3.5** Notons par

$$\theta = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 \quad (3.11)$$

$\theta$  est dit coefficient de sécurité relatif.

**Proposition 3.3.1** Le coefficient  $\lambda\mu$  est interprété comme le montant moyen des sinistres par unité du temps. Il apparait prudent que l'assureur fixe un taux de prime  $c$  supérieur à  $\lambda\mu$  pour que en moyenne, les primes reçues soient supérieures aux indemnisation payés par la compagnie d'assurance. En effet, nous avons les propriétés suivantes :

- Si  $\theta > 0$ , cela garantit d'après la loi forte des grands nombres que le processus de réserve tend presque sûrement vers  $+\infty$  et que  $\psi(u) < 1$ . L'activité est dite dans ce cas "rentable".
- Si  $\theta < 0$ , alors  $R(t)$  tend vers  $-\infty$  presque sûrement quand  $t$  tend vers  $\infty$  et par conséquent  $\psi(u) = 1$ .

### 3.3.5 Cas particulier : Modèle de Lundberg ou P/P

Un cas particulier du modèle de risque classique est le modèle de Lundberg appelé aussi modèle P/P. Ce modèle se caractérise par la distribution exponentielle des montants des réclamations, c'est-à-dire :

$$F_X(y) = 1 - \exp^{-\frac{1}{\mu}y} \quad (3.12)$$

où  $F_X$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$  qui génère le montant des réclamations.

## 3.4 Modèle de Sparre-Anderson

Le modèle de Sparre-Anderson a étendu le modèle classique en 1957 en permettant aux temps d'inter-arrivées des réclamations d'avoir de fonction de distribution arbitraires.

soit  $R(t)$  le capital d'une compagnie d'assurances à l'instant  $t$  défini par :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad (3.13)$$

Où :

- $u$  est capital initial.
- $c$  est taux de cotisation demandé aux assurés.
- $N(t)$  dans ce modèle est décrit par un processus de renouvellement.
- $X_i$  est montant du  $i^{ime}$  sinistre.

$\tau_i$  le temps de réalisation du  $i^{ime}$  sinistre et posons  $T_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ ,  $i \geq 1$  avec  $\tau = 0$ .

Les  $T_i$  représentent les inter-arrivées.

Les  $\{X_i, i \in \mathbb{N}^*\}$  forment une suite de variables aléatoires *i.i.d* de fonction de répartition commune  $F$  et de fonction de densité  $f$ .

$\{T_j, j \in \mathbb{N}^*\}$  est une suite de variables aléatoires continues de fonction de répartition  $K$  et de fonction de densité  $k$ .

On suppose que :

- $T_i$  sont indépendants de  $X_i$ .
- $E(cT_i) - E(X_i) > 0, \forall i \in \mathbb{N}^*$ .

### 3.5 Processus de risque de queue sous exponentielle

Considérons le modèle de risque classique(3.3), on s'intéresse au cas où  $X_i$  ont des queues lourdes, une fonction de distribution  $B$  est une sous exponentielle *i.e*  $B \in \mathcal{S}$  si :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)}{\mathbb{P}(X_1 > x)} = 2 \quad (3.14)$$

Où  $X_1, X_2$  sont des v.a *i.i.d* avec une fonction de distribution  $B$ .

Notons  $B(x) = \mathbb{P}(X_1 \geq x)$  et supposons que  $E(X_1) < \infty$ , et on défini :

$$B_0(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x \bar{B}(y) dy \quad (3.15)$$

Goldie et Resnick(1988) ont montré que si  $B \in \mathcal{S}$  est satisfait à certaines condition de lissage, alors  $B$  appartient au domaine d'attraction maximum de la distribution Frecht ou la distribution de Gumbel.

#### 3.5.1 Cas distribution de Frèchet

Dans la premier ces (distribution de Frecht),  $\bar{B}$  varie régulièrement *i.e* :

$$\bar{B}(x) = \frac{L(x)}{x^{\alpha+1}}$$

pour certains  $\alpha > 0$  et nous écrivons comme  $\bar{B} \in \mathcal{R}\{-\alpha - 1\}$ ,  $\alpha > 0$ .

Où  $L(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est fonction a variation lent i.e :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(\gamma x)}{L(x)} = 1, \quad \text{pour tout } \gamma > 0$$

### 3.5.2 Cas distribution de Gumbel

Nous supposons que  $B_0 \in \mathcal{S}$  et soit  $\bar{B} \in \mathcal{R}(-\alpha - 1)$  ou  $B \in \mathcal{G}$ , c'est-à-dire le domaine d'attraction maximum de la distribution de Gumbel  $\Lambda(x) = \exp\{-\exp[-x]\}$ .

Une fonction de distribution  $F$  est dans le domaine d'attraction maximal d'une distribution avec une fonction de distribution  $H(x)$  si il existe  $a_n > 0$ ,  $b_n \in \mathbb{R}$  pour que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n x + b_n) = -\log H(x), x \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

Où la limite interprétée comme  $\infty$  lorsque  $H(x) = 0$ , par conséquent, le domaine maximal d'attraction de la distribution de Gumbel  $\mathcal{G}$  est constitué des fonction de distribution  $F$  pour qu'il existe  $a_n > 0$ ,  $b_n \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n x + b_n) = \exp(-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .  $\mathcal{G}$  inclut la distribution de Weibull et lognormal.

### 3.5.3 Condition de stationnarité

$T_i = \tau_i - \tau_{i-1}$  est la durée de l'intervalle de temps entre deux heures d'arrivée consécutives du processus ponctuel  $\tau_{i-1}$  et  $\tau_i$ , repesent dans le processus ponctuel.

Si  $T_i$  sont *i.i.d* avec moyenne  $E[T_1]$  alors  $N_t$  est une processus de renouvellement et assume la condition habituelle de :

$$\rho = \frac{E[X_1]}{cE[T_1]} < 1 \quad (3.17)$$

alors, il est bien connu que :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\bar{B}_0(u)} = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (3.18)$$

voir[1] avec  $\psi(u) = \mathbb{P}(\tau_u < \infty)$  c'est la probabilité de horizon infinie.

### 3.6 Calcul de la probabilité de ruine à horizon infini

Le théorème suivant fournit une expression de la probabilité de ruine à horizon infini  $\psi(u)$  dans le cas du modèle de risque classique.

**Théorème 3.6.1** *Pour tout  $u \geq 0$*

$$\psi(u) = \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1}{\mu} \int_u^{+\infty} \bar{F}(x) dx \quad \text{pour } \mu \text{ assez grand.} \quad (3.19)$$

Où  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  c'est la fonction de distribution complémentaire de  $F(x)$  à queue lourde.

## CHAPITRE 4

# PROBABILITÉ DE RUINE POUR UN PROCESSUS DU RISQUE NON STATIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous étudions la probabilité de ruine asymptotique à horizon fini et infini pour les processus de risques subexponentielles pour des processus des arrivées des sinistres non stationnaire.

Nous donnons trois exemples de processus non stationnaire et non renouvellement : processus de Hawkes, processus de Cox avec intensité de bruit de tie et processus ponctuel auto-correcteur. Nous montrons également quelques résultats pour les trois processus.

## 4.1 Processus de risque avec arrivées non renouvelables

### 4.1.1 Probabilité de ruine

Avant de poursuivre, rappelons que la séquence  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des mesures de probabilité sur  $X$  satisfait le principe de grande déviation (ou Large Deviation Principle (LDP)) avec une fonction de taux  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  où  $I$  est non négative, en semicontinu inférieur et pour tout ensemble mesurable  $A$ , nous

voyons :

$$-\inf_{x \in A^\circ} I(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(A) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(A) \leq -\inf_{x \in \bar{A}} I(x) \quad (4.1)$$

avec  $A^\circ$  est l'intérieur de  $A$  et  $\bar{A}$  est sa fermeture.

L'hypothèse suivante est l'hypothèse principale de ce chapitre.

**Hypothèse 4.1.1** (i)  $(N_t/t \in)$  satisfait à un principe de grande déviation avec fonction de taux  $I(\cdot)$  de telle sorte que  $I(x) = 0$  ssi  $x = \mu$ .

(ii)  $I(x)$  est en augmentation sur  $[\mu, \infty)$  et diminuant en  $[0, \mu]$ .

(iii) La condition de bénéfice net est satisfaite :

$$\rho = \frac{\mu E(X_1)}{c} < 1 \quad (4.2)$$

(iv) Il existe  $\theta > 0$  de telle sorte que  $E[\exp(\theta \sum_{i=1}^n T_i)]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Sous l'hypothèse précédent, les deux lemmes suivantes tiennent.

**Lemme 4.1.1** Dans l'hypothèse (4.1.1) pour tout  $\epsilon, \epsilon' > 0$ , il existe une constante  $M > 0$  telle que :

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ c \sum_{i=1}^n T_i \leq n \left( \frac{c}{\mu} + \epsilon \right) + M \right\} \right) > 1 + \epsilon' \quad (4.3)$$

**Preuve :** (Voir annexe.)

**Lemme 4.1.2** Sous l'hypothèse (4.1.1) et supposons en outre que  $B_0 \in \mathcal{S}$ ,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(\sup_{n \geq 1} \{n(c\mu^{-1} - \epsilon) - c \sum_{i=1}^n T_i\} \geq u)}{\bar{B}_0(u)} = 0 \quad (4.4)$$

pour tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit.

**Preuve :** (Voir annexe.)

Asmussen et al.(1999)[2] ont prouvé que (3.18) est vrai si les deux lemme précédentes sont vérifiés. Notre tâche principale ici est donc de prouver le lemme (4.1.1) et le lemme (4.1.2) sous les hypothèses suivantes. Notez que le lemme (4.1.1) est vrai si  $(T_i)_{i \geq 1}$  est stationnaire et ergodique(en utilisant le théorème ergodique). Et c'est le seul endroit où Asmussen et al(1999) ont utilisé l'hypothèse de stationnarité et d'ergodicité. C'est pourquoi tant que nous pouvons prouver le lemme (4.1.1), nous pouvons abandonner l'hypothèse de stationnarité et d'ergodicité.

Dans la suite, l'hypothèse principale pour les résultats asymptotiques des probabilités de ruine que nous allons établir dans ce chapitre.

**Théorème 4.1.1** *Sous l'hypothèse (4.1.1) et supposons que  $B_0 \in \mathcal{S}$ , nous donne*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\bar{B}_0(u)} = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (4.5)$$

**Remarque 4.1.1** *Dans le théorème (4.1.1), nous pouvons remplacer l'hypothèse de grande déviation de  $(N_t/t \in)$  par une hypothèse de grande déviation de  $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i)$ . Mais généralement si  $(N_t/t \in)$  satisfait un principe de grande déviation avec la fonction de taux  $I(x)$  ssi  $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i)$  satisfait un principe de grande déviation avec la fonction de taux  $xI(\frac{1}{x})$ . C'est pourquoi il faut choisi de supposer le grand écart pour  $(N_t/t \in)$  dans l'hypothèse (4.1.1) est que lorsque  $N_t$  n'est pas renouvellement, les temps inter-occurrences ne sont pas i.i.d et il est généralement plus facile et plus naturel d'établir la grande déviation pour  $(N_t/t \in)$ , ce qui vérifiée par trois exemples, processus Hawkes, processus Cox avec intensité du bruit de tir et processus ponctuel auto-correcteur.*

*Ensuite, considérons les probabilité de ruine à horizon fini.*

*Soit  $e(u) = E[X_1 - u/X_1 > u]$  la fonction moyenne en excès et  $\psi(u, z)$  la probabilité de ruine à l'horizon fini.*

**Remarque 4.1.2** (i) *(Distribution à variation régulière) si  $\bar{B}(u) = \frac{L(u)}{u^{\alpha+1}}$ ,  $\alpha \in (0, \infty)$ , i.e  $\bar{B} \in \mathcal{R}(-\alpha - \infty)$ , alors  $e(u) \sim \frac{u}{\alpha}$ .*

(ii) (Distribution de Lognormal) si  $B(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(\log u - \mu)}{\sigma}} \exp(-x^2/2) dx$ ,  
alors  $B \in \mathcal{G}$  et  $e(u) \sim \frac{\sigma^2 u}{\log u - \mu}$ .

(iii) Distribution de Weibull si  $B(u) = \exp(-u^\alpha)$ , où  $\alpha \in (0, 1)$ , alors  
 $B \in \mathcal{G}$  et  $B_0 \in \mathcal{S}$  et  $e(u) \sim \frac{u^{1-\alpha}}{\alpha}$ .

**Remarque 4.1.3** Il est bien connu que si  $B \in \mathcal{G}$ , (i.e le domaine maximal d'attraction de la distribution de Gumbel), alors :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{B}(u + xe(u))}{\bar{B}(u)} = \exp(-x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

**Lemme 4.1.3** Pour tout  $y_0 < \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}(x+y)}{\bar{G}(x)}$  uniformément pour  $y \in [0, y_0]$  pour tout  $G \in \mathcal{S}$ .

**Théorème 4.1.2** Sous l'hypothèse (4.1.1) supposons que  $B_0 \in \mathcal{S}$ , nous avons pour tout  $T > 0$

(i) Si  $\bar{B} \in \mathcal{R}(-\alpha - 1)$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u, e(u)T)}{\bar{B}_0(u)} = \frac{\rho}{1-\rho} \left[ 1 - \left( 1 + (1-\rho) \frac{T}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right] \quad (4.7)$$

(ii) Si  $B \in \mathcal{G}$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u, e(u)T)}{\bar{B}_0(u)} = \frac{\rho}{1-\rho} [1 - \exp(-(1-\rho)T)] \quad (4.8)$$

**Preuve :** (voir annexe.)

## 4.2 Réclamation globale

Soit  $A_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$  la réclamation globale jusqu'au temps  $t$ , où comme précédemment nous supposons que les  $X_i$  sont des v.a positives *i.i.d* considérons l'hypothèses suivante.

**Hypothèse 4.2.1** (i)  $E[N_t] < \infty$  pour toute  $t$  et  $E[N_t] \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow \infty$

(ii)  $\frac{N_t}{E[N_t]} \rightarrow 1$ , quand  $t \rightarrow \infty$

(iii) Il existe  $\epsilon, \sigma > 0$  tel que

$$\sum_{k > (1+\sigma)E[N_t]} P(N_t > k)(1 + \epsilon)^k \rightarrow 0, \text{ quand } t \rightarrow \infty \quad (4.9)$$

Klüppeberg et Mikosch (1997)[23] ont montré dans l'hypothèse (4.2.1) pour temps fixe  $t$ , on a

$$\mathbb{P}(A_t - E[A_t] > x) \sim E[N_t]P(X_1 \geq x) \quad (4.10)$$

de manière uniforme pour  $x \geq \gamma E[N_t]$  et pour tout  $\gamma > 0$ .

**Remarque 4.2.1** Klüppeberg et Mikosch(1997) ont montré un résultat légèrement plus fort que (4.10) est valable en supposant que les taille de sinistre  $X_i$ , sont i.i.d avec une fonction de distribution  $\bar{F} \in ERV(-\alpha, -\beta)$  pour un certain  $1 < \alpha \leq \beta \leq \infty$  où EVD désigne l'espace des fonctions variables réguliers étendus.

Il est généralement facile de vérifier *i* et aussi sous les hypothèse du théorème (4.1.1),  $\frac{N_t}{t} \rightarrow \mu$  et  $(N_t)$  satisfait un principe de grande déviation avec la fonction de taux  $I(x)$  qui est non nulle ssi  $x \neq \mu$ . Par conséquent, si nous supposons que nous pouvons prouver que  $\frac{E[N_t]}{t} \rightarrow \mu$  quand  $t \rightarrow \infty$ , alors (ii) est satisfait. De plus (iii) peut être remplacé par (iii'), donné par : pour tout  $\mu' > 0$ ,  $c_{\mu'} = \inf_{x \geq \mu'} \frac{I(x)}{x} > 0$ .

Supposons (iii'), nous pouvons trouver  $0 < \delta' < \delta$  tel que pour tout  $t$  suffi-

samment grand

$$\begin{aligned}
 \sum_{k > (1+\delta)E[N_t]} \mathbb{P}(N_t > k)(1 + \epsilon)^k &\leq \sum_{k > (1+\delta')\mu t} \mathbb{P}(N_t > k)(1 + \epsilon)^k \\
 &\leq \sum_{k > (1+\delta')\mu t} e^{-(I(k/t) - \epsilon')t} (1 + \epsilon)^k \\
 &\leq \sum_{k > (1+\delta')\mu t} e^{-(I(k/t) \frac{t}{k} - \epsilon' \frac{1}{(1+\epsilon')\mu})k} (1 + \epsilon)^k \\
 &\leq \sum_{k > (1+\delta')\mu t} e^{-(c_{(1+\delta')\mu} - \epsilon' \frac{1}{(1+\delta')\mu})k} (1 + \epsilon)^k
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

si on prend  $\epsilon' > 0$  assez petit pour que  $\epsilon' \frac{1}{(1 + \delta')\mu} < c_{(1+\delta')\mu}$ , alors on peut prendre  $\epsilon > 0$  assez petit pour que  $c_{(1+\delta')\mu} - \epsilon' \frac{1}{(1 + \delta')\mu} > \log(1 + \epsilon)$  et donc en laissant  $t \rightarrow \infty$ , (iii) est vérifiée.

## 4.3 Exemples de processus d'arrivée non renouvelable

### 4.3.1 Processus de Hawkes

Le processus de Hawkes est un processus ponctuel simple qui a une propriété auto-excitante, en effet de regroupement et une longue mémoire. Il a été introduit pour la première fois par Hawkes (1971) et a été largement appliqué dans la finance, la sismologie, les neurosciences, la modélisation de l'ADN et bien d'autres domaines. Un processus ponctuel simple  $N_t$  est un processus linéaire de Hawkes s'il a une intensité [22][33].

$$\lambda_t = \nu + \sum_{\tau < t} h(t - \tau) \tag{4.12}$$

$h(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  est intégrable et  $\|h\|_{L^1} < 1$ . Nous supposons également que  $N_t$  commence avec une histoire passée vide, c'est-à-dire  $N(-\infty, 0] = 0$ . Selon la définition, le processus Hawkes est non stationnaire et est en général même non markovien (sauf si  $h(\cdot)$  est une fonction exponentielle). En outre, il n'a pas de structure générative. Ainsi, les conditions énoncées dans

Asmussen et Albrecher (2010) ne s'appliquent pas ici.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \mu = \frac{\nu}{1 - \|h\|_{L^1}}, \quad (4.13)$$

Bordenave et Torrisi (2007) ont prouvé le principe de la grande déviation pour  $(N_t/t \in \cdot)$ , c'est-à-dire Lemme (4.3.1). Par conséquent il est donc naturel que nous puissions appliquer les résultats de notre chapitre pour étudier les probabilités de ruine avec des lois subexponentielles lorsque le processus d'arrivée est un processus de Hawkes linéaire non stationnaire.

**Lemme 4.3.1** (*Bordenave et Torrisi, 2007*)

$(N_t/t \in \cdot)$  satisfait à un principe de grande déviation avec fonction de taux,

$$I(x) = \begin{cases} x \log\left(\frac{x}{\nu + x\|h\|_{L^1}}\right) - x + x\|h\|_{L^1} + \nu & \text{si } x \in [0, \infty) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.14)$$

**Remarque 4.3.1** *En effet, dans Bordenave et Torrisi (2007), ils ont exprimé la fonction de taux  $I(\cdot)$  d'une autre manière, moins explicite. L'expression de la fonction de taux dans la lemme (4.3.1) a été signalée pour la première fois dans Zhu (2011).*

**Lemme 4.3.2** .

$$\frac{E(N_t)}{t} \rightarrow \frac{\nu}{1 - \|h\|_{L^1}} \text{ avec } t \rightarrow \infty.$$

**Preuve :** (Voir annexe.)

Supposons la condition de bénéfice net  $c > E[X] \frac{\nu}{1 - \|h\|_{L^1}}$ .

Si  $X_i$ , ont des queues légères, alors Stabile et Torrisi(2010) ont obtenu les asymptotiques pour la probabilité de ruine à horizon infini  $\psi(u)$  et la probabilité de ruine à horizon fini  $\phi(u, uz)$  pour tout  $z > 0$ . Comme indiqué dans Stabile et Torrisi(2010) le cas ou  $X_i$  sont à queue lourde est ouvert.

**Proposition 4.3.1** *Assumer la condition de bénéfice net  $c > E(X) \frac{\nu}{1 - \|h\|_{L^1}}$ .  
(i)(Horizon Infini)*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{B_0} = \frac{\nu E(X_1)}{c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu E(X_1)} \quad (4.15)$$

(ii) (*Horizon-Fini*) Pour tout  $T > 0$ ,

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u, uz)}{\bar{B}_0(u)} \\ &= \begin{cases} \frac{\nu E[X_1]}{c(1 - \|h\|_{L^1} - \nu E[X_1])} \left[ 1 - \left( 1 + \left( \frac{c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu E[X_1]}{c(1 - \|h\|_{L^1})} \right) \frac{T}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right] & \text{si } \bar{B} \in \mathcal{R}(-\alpha - 1) \\ \frac{\nu E[X_1]}{c(1 - \|h\|_{L^1} - \nu E[X_1])} \left[ 1 - e^{-\frac{c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu E[X_1]}{c(1 - \|h\|_{L^1})} T} \right] & \text{si } B \in \mathcal{G} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.16)$$

(iii) (*Réclamations globales*) Pour le temps fixe  $t$ ,

$$\mathbb{P}(A_t - E(A_t) > 0) \sim E(N_1) \mathbb{P}(X_1 \geq x), \quad (4.17)$$

de manière uniforme pour  $x \geq \gamma E(N_t)$  pour tout  $\gamma > 0$ .

**Remarque 4.3.2** *En effet, les grands écarts pour les processus non linéaires de Hawkes ont été établis par Zhu (2011)[33]. Contrairement aux processus de Hawkes linéaires, la fonction de taux pour les grands écarts des processus de Hawkes non linéaires est moins explicite et il est donc plus difficile à vérifier si elle remplit les conditions.*

### 4.3.2 Processus de Cox avec intensité de bruit de tir

Nous considérons un processus Cox  $N_t$  avec intensité  $\lambda_t$  qui suit un processus de bruit de tir

$$\lambda_t = \nu(t) + \sum_{\tau^{(1)} < t} g(t - \tau^{(1)}), \quad (4.18)$$

où  $\tau^{(1)}$  le temps d'arrivée d'un processus de Poisson externe homogène avec intensité  $\gamma$ . Ici,  $g(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est intégrable, c'est-à-dire  $\int_0^\infty g(t) dt < \infty$  et  $\nu(t)$  est une fonction positive, continue et déterministe telle que  $\nu(t) \rightarrow \nu$  avec  $t \rightarrow \infty$ .

La probabilité de ruine pour les demandes d'indemnisation à queue lourde, le processus d'arrivée étant un processus de Cox à bruit de tir, sont connues dans la littérature, voir par exemple le livre d'Asmussen et Albrecher (2010). Mais les techniques décrites dans la littérature utilisent les caractéristiques

## CHAPITRE 4. PROBABILITÉ DE RUINE POUR UN PROCESSUS DU RISQUE NON STATIONNAIRE

---

très spécifiques du processus de Cox et les preuves sont beaucoup plus longues.

Comme  $N_1$  est un processus de Poisson avec intensité  $\gamma$ , selon la définition de  $\lambda_t$ , il est facile de voir que

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \nu + \gamma \|g\|_{L^1}, \text{ avec } t \rightarrow \infty. \quad (4.19)$$

**Lemme 4.3.3** ( $N_t/t \in .$ ) *satisfait à un principe de grande déviation avec fonction de taux,*

$$I(x) = \begin{cases} \sup_{\theta \in R} \{ \theta x (e^\theta - 1) \nu - \gamma (e^{(e^\theta - 1)} \|g\|_{L^1} - 1) \} & \text{si } x \in [0, \infty) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.20)$$

**Preuve :** (Voir annexe.)

**Lemme 4.3.4**  $\frac{E(N_t)}{t} \rightarrow \nu + \gamma\|g\|_{L^1}$ , quand  $t \rightarrow \infty$ .

**Preuve :** (Voire annexe.)

**Proposition 4.3.2** supposons la condition de bénéfice net  $c > E[X](\nu + \gamma\|g\|_{L^1})$ .

(i)(Horizon infini)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\bar{B}_0(u)} = \frac{(\nu + \gamma\|g\|_{L^1})E[X_1]}{c - (\nu + \gamma\|g\|_{L^1})E[X_1]}. \quad (4.21)$$

(ii)(Horizon Fini) Pour tout  $T > 0$ ,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u, uz)}{\bar{B}_0(u)} = \begin{cases} \frac{(\nu + \gamma\|g\|_{L^1})E(X_1)}{c - (\nu + \gamma\|g\|_{L^1})E(X_1)} \left[ 1 - \left( 1 + \left( 1 - \frac{(\nu + \gamma\|g\|_{L^1})E(X_1)}{c} \right) \frac{T}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right] & \text{si } \bar{B} \in \mathcal{R}(-\alpha - 1) \\ \frac{(\nu + \gamma\|g\|_{L^1})E[X_1]}{c - (\nu + \gamma\|g\|_{L^1})E[X_1]} \left[ 1 - e^{-(c - (\nu + \gamma\|g\|_{L^1})E(X_1)) \frac{T}{\bar{p}}} \right] & \text{si } B \in \mathcal{G}. \end{cases} \quad (4.22)$$

(iii)(Réclamations globales) Pour un temps  $t$  fixe,

$$P(A_t - E(A_t) > x) \sim E[N_t] \mathbb{P}(X_1 \geq x), \quad (4.23)$$

uniformément pour  $x \geq \gamma E(N_t)$  pour tout  $\gamma > 0$ .

### 4.3.3 Processus de point d'autocorrection

Un processus ponctuel auto corrigé, également connu sous le nom de modèle de libération du stress, est un processus ponctuel simple  $N_t$  avec un historique vide, c'est-à-dire  $N(-\infty, 0] = 0$  tel qu'il admet l'intensité  $\mathcal{F}_t$

$$\lambda_t = \lambda(Z_t), \quad \text{et} \quad Z_t = t - N_{t-}. \quad (4.24)$$

La fonction de taux  $\lambda(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est continue et croissante de sorte que

$$0 < \lambda^- = \lim_{z \rightarrow -\infty} \lambda(z) < 1 < \lim_{z \rightarrow +\infty} \lambda(z) = \lambda^+ < \infty \quad (4.25)$$

## CHAPITRE 4. PROBABILITÉ DE RUINE POUR UN PROCESSUS DU RISQUE NON STATIONNAIRE

---

Notez que dans la définition de l'intensité en (4.24), l'utilisation  $N_{t-}$  au lieu de  $N_t$ . Cela est crucial pour garantir que l'intensité  $\lambda_t$  pour le processus du point d'autocorrection est  $\mathcal{F}_t$ -prévisible.

Le modèle a été introduit pour la première fois par Isham et Westcott (1979) comme exemple de processus qui corrige automatiquement un écart par rapport à sa moyenne. Plus tard, il a été étudié comme modèle en sismologie. La contrainte s'accumule au taux linéaire 1 dans notre modèle et se libère de la quantité 1 au ième saut. Vere-Jones (1988) a discuté d'une interprétation dans le domaine de l'assurance.

Selon ces hypothèses, il est bien connu que  $\frac{N_t}{t} \rightarrow 1$  comme  $t \rightarrow \infty$ . Récemment, Sen et Zhu (2013) ont prouvé le résultat suivant, qui est un écart important.

**Lemme 4.3.5** (*Sen et Zhu, 2013*).  $(N_t/t \in \cdot)$  satisfait à un principe de grande déviation avec la fonction de taux

$$I(x) = \begin{cases} \Lambda^-(x) & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \Lambda^+(x) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.26)$$

où

$$\Lambda^\pm(x) = \log\left(\frac{x}{\lambda^\pm}\right)x + \lambda^\pm - x, \quad x \geq 0 \quad (4.27)$$

**Lemme 4.3.6**  $\frac{E[N_t]}{t} \rightarrow 1$  comme  $t \rightarrow \infty$

**Preuve :** (Voir annexe.)

**Proposition 4.3.3** *assumer la condition de profit net*

(i) *(Horizon infini)*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\bar{B}_0} = \frac{E[X_1]}{c - E[X_1]} \quad (4.28)$$

(ii) *(Horizon Fini) pour tout  $T > 0$*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u, uz)}{\bar{B}_0(u)} = \begin{cases} \frac{E[X_1]}{c - E[X_1]} \left[ 1 - \left( 1 + \left( 1 - \frac{E[X_1]}{c} \right) \frac{T}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right] & \text{si } \bar{B} \in \mathcal{R}(-\alpha - 1) \\ \frac{E[X_1]}{c - E[X_1]} [1 - e^{-(c - E[X_1])\frac{T}{c}}] & \text{si } B \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (4.29)$$

(iii) *(Réclamations globales) pour un temps  $t$  fixe*

$$P(A_t - E[A_t > x]) \sim E[N_t]P(X_1 \geq x) \quad (4.30)$$

*uniformément pour  $x \geq \gamma E(N_t)$  pour tout  $\gamma > 0$ .*

## CHAPITRE 5

## APPLICATION

Le but de la théorie de ruine est d'évaluer le risque pour les compagnies d'assurance, en calculant la probabilité de ruine, qui mesure le risque de faillite des compagnies d'assurance.

Dans ce dernier chapitre nous allons calculer la valeur théorique de la probabilité de ruine pour trois lois de distributions subexponentielle à savoir, la loi de Pareto, la loi de Burr et la loi Log-gamma.

L'application est répartie en deux sections.

La première section consiste à calculer la valeur théorique de la probabilité de ruine dans le cas où le processus des arrivées des sinistres est un processus de renouvellement en particulier un processus de Poisson qui est donc stationnaire.

La deuxième section est consacré pour calculer la valeur théorique de la probabilité de ruine dans le cas où le processus des arrivées des sinistres est un processus non de renouvellement (non stationnaire).

Nous avons calculer la probabilité de ruine pour le processus non stationnaire de Hawkes.

Tous les calculs sont effectués à l'aide du logiciel R.

## 5.1 cas stationnaire

Calculer la valeur théorique de la probabilité de ruine en fonction de parametre de queue,  $\mu$ ,  $\lambda$ , temps instantané de prime  $p$  et capital initial pour trois lois, la loi de Pareto, loi de Burr et la loi Log-gamma, pour la distributions subexponentielle.

Avec la probabilité de ruine donnée par :

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \int_u^{+\infty} \bar{F}(x) dx \\ &= \frac{\lambda}{c - \mu\lambda} \int_u^{+\infty} \bar{F}(x) dx\end{aligned}$$

### 5.1.1 Probabilité de ruine : Cas de loi de Pareto

**Probabilité de ruine en fonction de paramètre de queue  $\xi$  :**

La probabilité de ruine en fonction de  $\xi$  a deux cadences suivant que  $0 < \xi < 2$  et  $\xi > 2$ .

Si la loi de Pareto est donnée par  $\bar{F}(x) = x^{-\frac{1}{\xi}}, x > 1$

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \left(\frac{\lambda}{c - \mu\lambda}\right) \int_u^{+\infty} \bar{F}(x) dx \\ &= \frac{\lambda}{c - \mu\lambda} \int_u^{+\infty} x^{-\frac{1}{\xi}} dx\end{aligned}$$

Nous remarquons que la probabilité de ruine est proportionnelle avec  $\xi$ . Nous avons remarqué graphiquement que la probabilité de ruine change de cadence si  $.5 < \xi < 1$ .

Nous confirmons graphiquement ce résultat théorique :

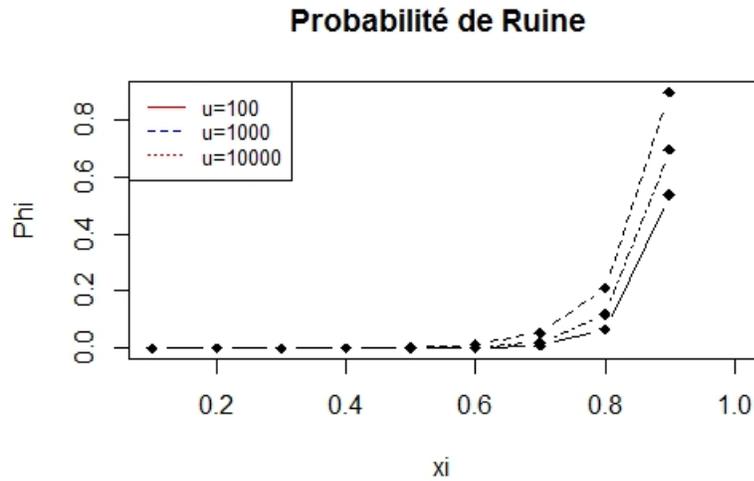


FIGURE 5.1 – Probabilité de ruine en fonction de  $\xi$  dans le cas stationnaire

**Probabilité de ruine en fonction de  $\mu$  :**

La probabilité de ruine en fonction de  $\mu$  change de direction suivant la croissante de la fonction  $\frac{\lambda}{c - \mu\lambda}$ .

Si pose  $g(\mu) = \frac{\lambda}{c - \mu\lambda}$ , sa dérivé est donnée par :

$$g'(\mu) = \frac{\lambda^2}{(c - \mu\lambda)^2}$$

Comme  $g'(\mu)$  est positif, par conséquent, la fonction  $g(\mu)$  est croissante donc la probabilité de ruine est augment.

Nous confirmons graphiquement ce résultat théorique :

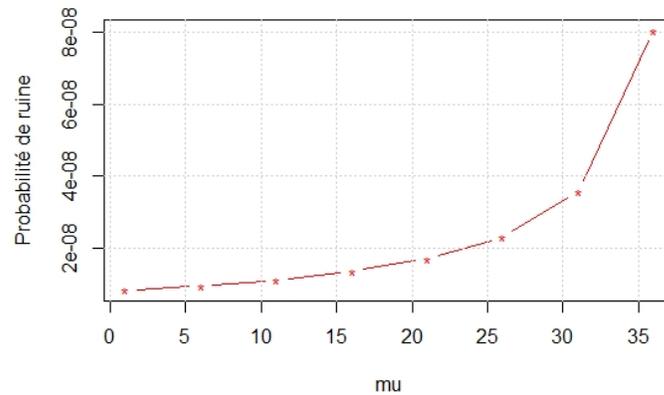


FIGURE 5.2 – Probabilité de ruine en fonction de  $\mu$

**Probabilité de ruine en fonction de  $\lambda$  :**

La probabilité de ruine en fonction de  $\lambda$  a sens de variation que la fonction  $\frac{\lambda}{c - \mu\lambda}$ .

Si on pose  $h(\lambda) = \frac{\lambda}{c - \mu\lambda}$ , sa dérivé est donnée par :

$$h'(\lambda) = \frac{c}{(c - \mu\lambda)^2}$$

Comme  $h'(\lambda)$  est positif, par conséquent, la fonction  $h(\lambda)$  est croissante d'où la probabilité de ruine est proportionnelle avec  $\lambda$ .

Nous confirmons graphiquement ce résultat théorique :

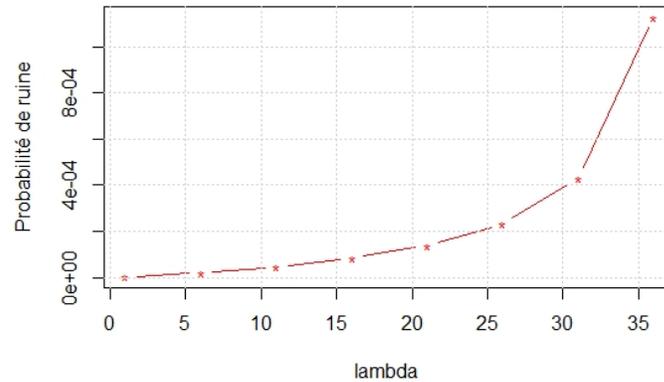


FIGURE 5.3 – Probabilité de ruine en fonction de  $\lambda$

### Probabilité de ruine en fonction de $c$

La probabilité de ruine en fonction de  $c$  a sens de variation que la fonction  $\frac{\lambda}{c - \mu\lambda}$ .  
Si pose

$$k(c) = \frac{\lambda}{c - \mu\lambda}.$$

On dérive la fonction  $k(c)$  par rapport à  $c$  on trouve :

$$k'(c) = \frac{-\lambda}{(c - \mu\lambda)^2}$$

$k'(c)$  est négatif, d'où la probabilité de ruine est inversement proportionnelle avec  $c$ .

Nous confirmons graphiquement ce résultat théorique :

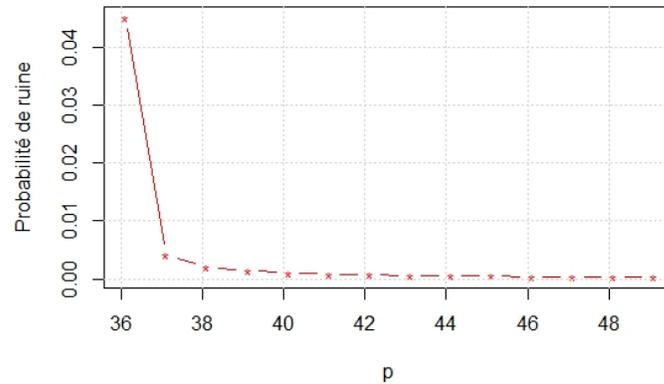


FIGURE 5.4 – Probabilité de ruine en fonction de  $\lambda$

### Probabilité de ruine en fonction de $u$

La probabilité de ruine en fonction de  $u$  change est proportionnelle par rapport à  $u$ .

Car si pose  $z(u) = \int_u^{+\infty} \bar{F}(x)dx$ .

La dérive de la fonction  $k(u)$  par rapport à  $u$  est donnée par :

$$\begin{aligned} z'(u) &= \bar{F}(u) \\ &= P[X > u] \end{aligned}$$

La probabilité  $P[X > u]$  diminue quand  $u$  augmente donc la fonction  $z(u)$  est décroissante. Par conséquent la probabilité de ruine est inversement proportionnelle par rapport à  $u$ .

Nous confirmons graphiquement ce résultat théorique :

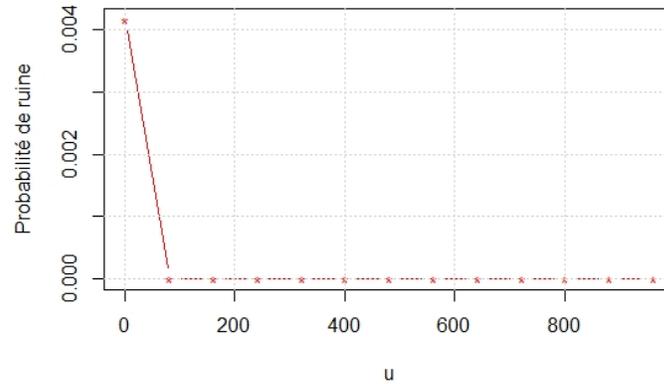


FIGURE 5.5 – Probabilité de ruine en fonction de capital initial  $u$

le calcul de l'intégrale de la fonction de répartition de la loi de Burr, loi Log-gamma sont difficiles, nous avons donc utilisé le calcul numérique par le biais du logiciel R pour la variation de la probabilité de ruine.

### 5.1.2 Probabilité de ruine : Cas de loi de Burr

Probabilité de ruine en fonction de paramètre de queue

Probabilité de ruine en fonction de  $\mu$

Nous avons les mêmes remarques que pour la loi de Pareto.

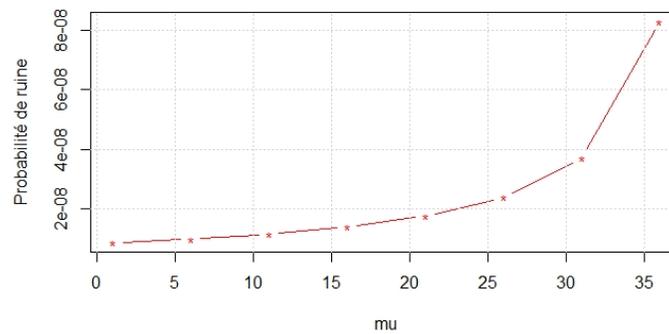


FIGURE 5.6 – Probabilité de ruine en fonction de  $\mu$

Probabilité de ruine en fonction de  $\lambda$

Nous avons les mêmes remarques que pour la loi de Pareto.

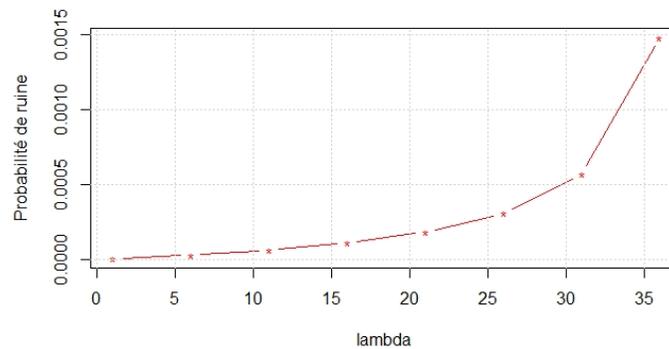


FIGURE 5.7 – Probabilité de ruine en fonction de  $\lambda$

Probabilité de ruine en fonction de  $c$

Nous avons les mêmes remarques que pour la loi de Pareto.

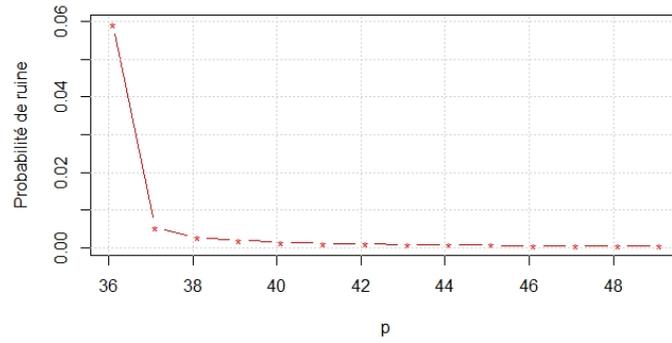


FIGURE 5.8 – Probabilité de ruine en fonction de  $c$

### Probabilité de ruine en fonction de $u$

Nous avons les mêmes remarques que pour la loi de Pareto.

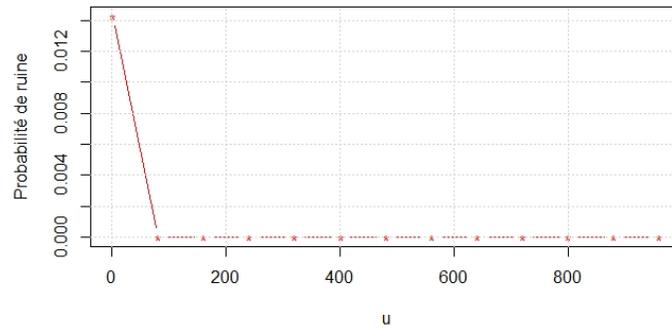


FIGURE 5.9 – Probabilité de ruine en fonction de  $u$

### 5.1.3 Probabilité de ruine : Cas de loi de Log-gamma

Nous avons les mêmes remarques que pour la loi de Pareto.

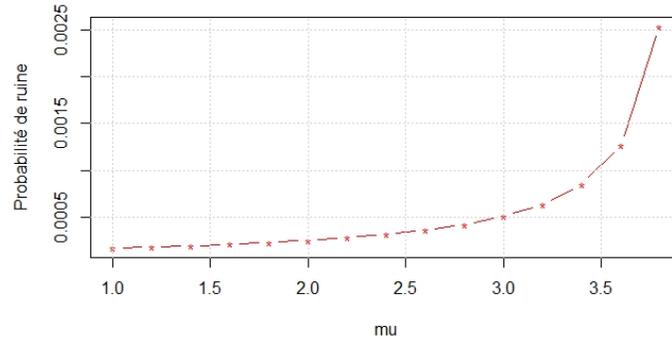


FIGURE 5.10 – Probabilité de ruine en fonction de  $\mu$

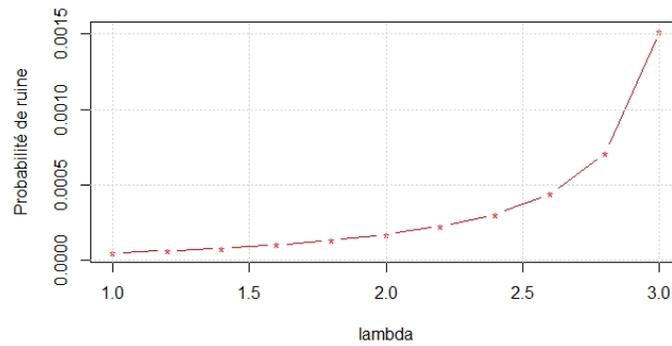


FIGURE 5.11 – Probabilité de ruine en fonction de  $\lambda$

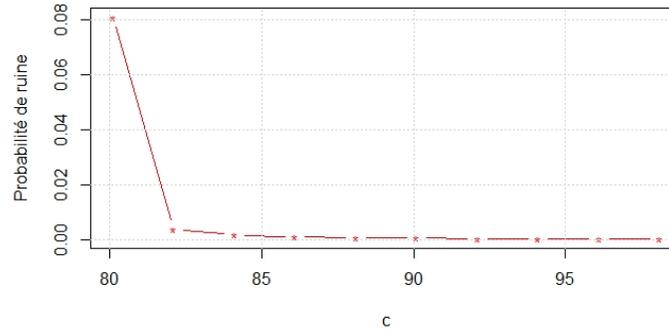


FIGURE 5.12 – Probabilité de ruine en fonction de temps instantané de prime

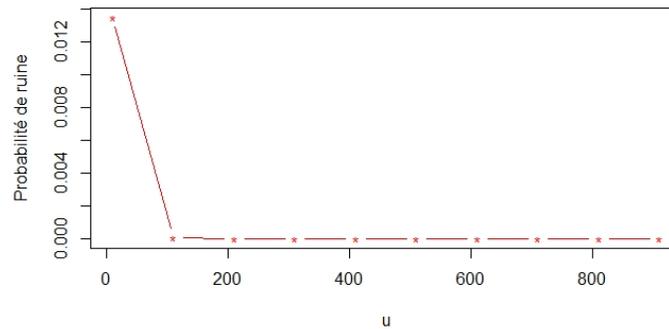


FIGURE 5.13 – Probabilité de ruine en fonction de  $u$

## 5.2 cas non stationnaire

Nous avons calculé la valeur théorique de la probabilité de ruine en fonction de paramètre de la queue,  $\mu$ ,  $\lambda$ , temps instantané de prime  $p$  et capital initial pour trois lois, loi de Pareto, loi de Burr et la loi de Log-gamma, pour le processus non stationnaire de Hawkes.

Probabilité de ruine donnée par :

$$\psi(u) = \frac{\nu\mu}{c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu\mu} \frac{1}{\mu} \int_u^{+\infty} \bar{F}(x) dx$$

$$= \frac{\nu}{c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu\mu} \int_u^{+\infty} \bar{F}(x) dx$$

### 5.2.1 Probabilité de ruine : Cas de loi de Pareto

#### Probabilité de ruine en fonction de paramètre de queue $\xi$

Nous remarquons que la probabilité de ruine est proportionnelle avec  $\xi$ . Nous avons remarqué graphiquement que la probabilité de ruine change de cadence si  $0.5 < \xi < 1$ .

Si la loi de Pareto est donnée par  $\bar{F}(x) = x^{-\frac{1}{\xi}}, x > 1$

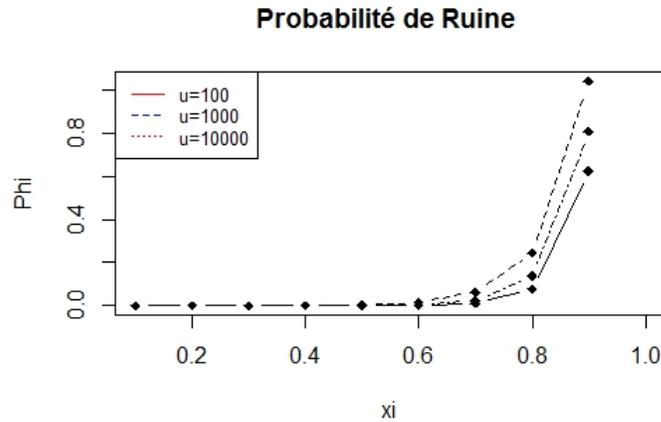


FIGURE 5.14 – Probabilité de ruine en fonction de  $\xi$  dans le ca non stationnaire

#### Probabilité de ruine en fonction de $\mu$

La probabilité de ruine en fonction de  $\mu$  a le même sens de variation que la fonction  $\frac{\nu}{c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu\mu}$ .

Si pose  $g(\mu) = \frac{\nu}{c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu\mu}$ , sa dérivé est donnée par :

$$g'(\mu) = \frac{\nu^2}{(c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu\mu)^2}$$

Comme  $g'(\mu)$  est positif, par conséquent, la fonction  $g(\mu)$  est croissante donc la probabilité de ruine est augment.

Nous confirmons graphiquement ce résultat théorique :

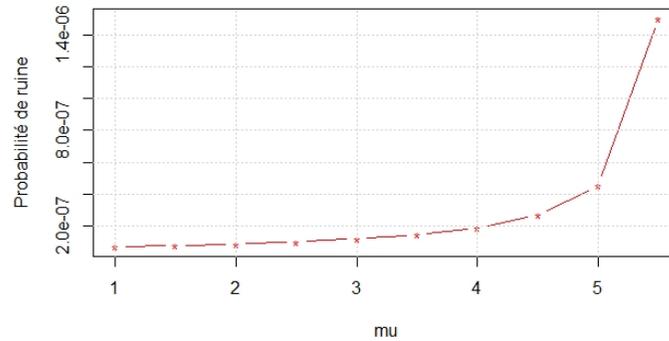


FIGURE 5.15 – la probabilité de ruine en fonction de  $\mu$

### Probabilité de ruine en fonction de $\nu$

La probabilité de ruine en fonction de  $\nu$  a le même sens de variation que la fonction  $\frac{\nu}{c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu\mu}$ .

Si pose  $h(\nu) = \frac{\nu}{c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu\mu}$ , sa dérivé est donnée par :

$$h'(\nu) = \frac{c(1 - \|h\|_{L^1})}{(c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu\mu)^2}$$

Comme  $h'(\nu)$  est positif, par conséquent, la fonction  $h(\nu)$  est croissante alors la probabilité de ruine est augment.

Nous confirmons graphiquement ce résultat théorique :

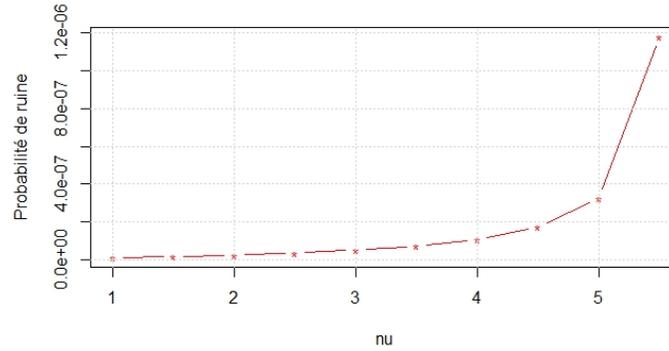


FIGURE 5.16 – Probabilité de ruine en fonction de  $\nu$

### Probabilité de ruine en fonction de $c$

La probabilité de ruine en fonction de  $c$  a le même sens de variation que la fonction  $\frac{\nu}{c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu\mu}$ .

Si pose

$$k(c) = \frac{\nu}{c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu\mu}.$$

On dérive la fonction  $k(c)$  par rapport à  $c$  on trouve

$$k'(c) = \frac{-\nu(1 - \|h\|_{L^1})}{(c(1 - \|h\|_{L^1}) - \nu\mu)^2}$$

Nous trouvons que  $k'(c)$  est négatif, alors la probabilité de ruine est décroissante.

Nous confirmons graphiquement ce résultat théorique :

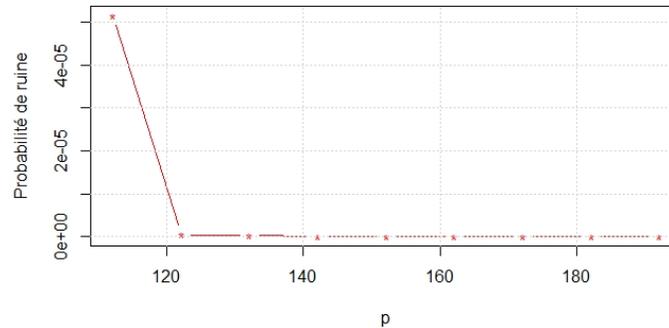


FIGURE 5.17 – Probabilité de ruine en fonction de  $c$

### Probabilité de ruine en fonction de $u$

La probabilité de ruine en fonction de  $u$  est inversement proportionnelle par rapport à  $u$ .

Si pose  $z(u) = \int_u^{+\infty} \bar{F}(x) dx$ .

La dérive de la fonction  $k(u)$  par rapport à  $u$  est donnée par :

$$\begin{aligned} z'(u) &= \bar{F}(u) \\ &= P[X > u] \end{aligned}$$

La probabilité  $P[X > u]$  est diminuée lorsque  $u$  augmente donc la fonction  $z(u)$  est décroissante alors la probabilité de ruine est diminuée.

Nous confirmons graphiquement ce résultat théorique :

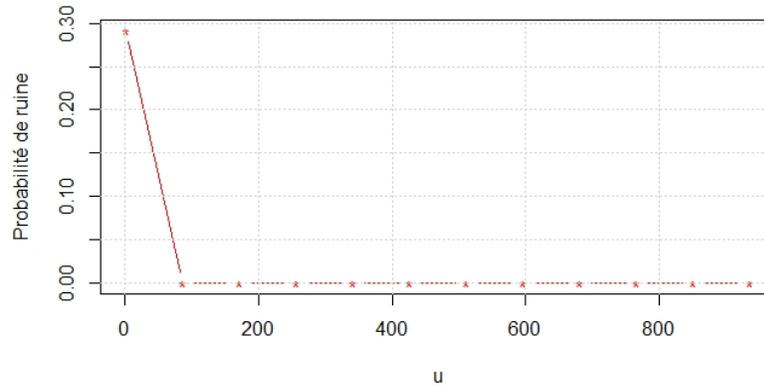


FIGURE 5.18 – Probabilité de ruine en fonction de capital initial u

Le calcul de l'intégrale de la fonction de répartition de la loi de Burr, loi Log-gamma est NP.difficile,nous allons donc utiliser logiciel R pour étudier change de direction de probabilité de ruine.

### 5.2.2 Probabilité de ruine : Cas de loi de Burr

Nous avons les mêmes remarques que pour la loi de Pareto.

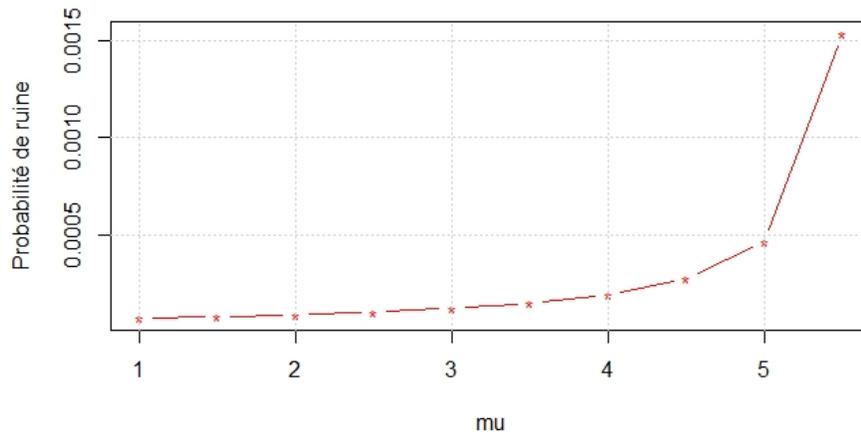


FIGURE 5.19 – Probabilité de ruine en fonction de  $\mu$

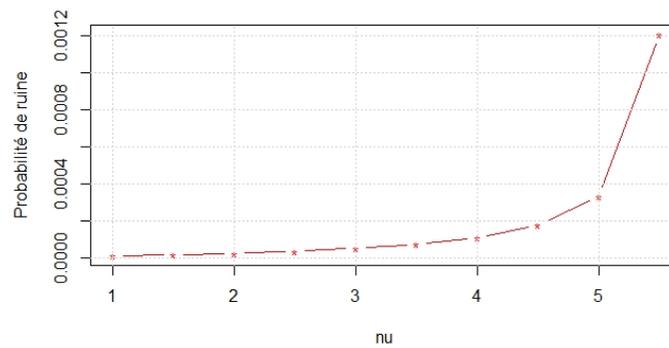


FIGURE 5.20 – Probabilité de ruine en fonction de  $\nu$

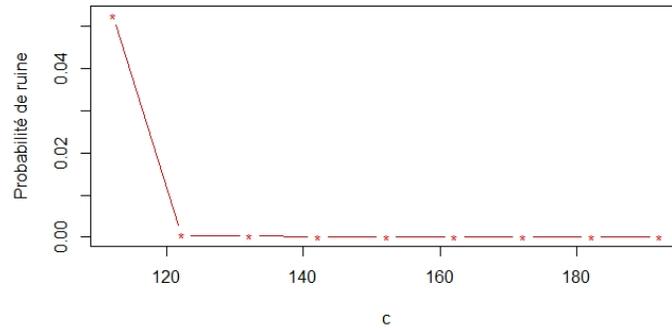


FIGURE 5.21 – la probabilité de ruine en fonction de  $c$

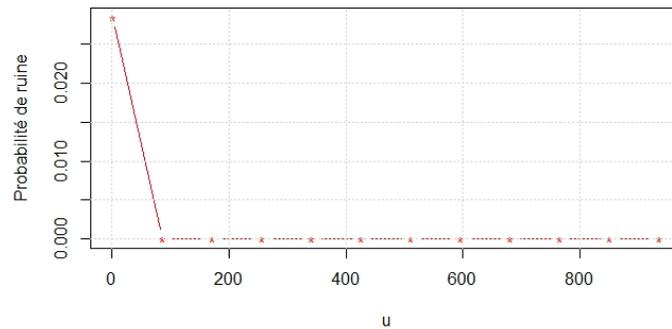


FIGURE 5.22 – Probabilité de ruine en fonction de  $u$

### 5.2.3 Probabilité de ruine : Cas de loi de Log-gamma

Nous avons les mêmes remarques que pour la loi de Pareto.

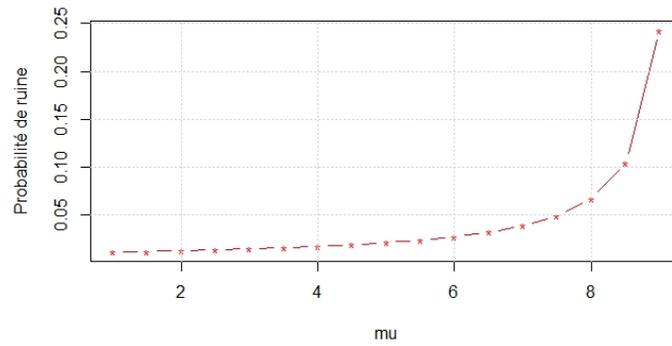


FIGURE 5.23 – Probabilité de ruine en fonction de  $\mu$

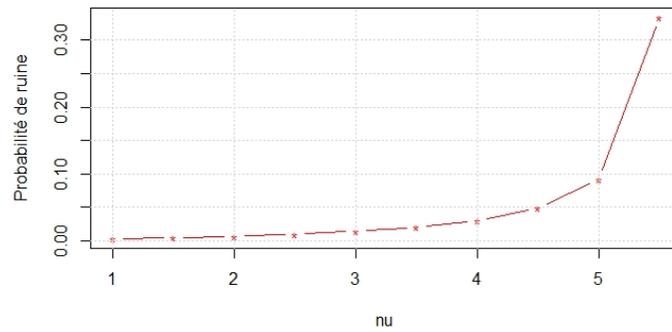


FIGURE 5.24 – Probabilité de ruine en fonction de  $\nu$

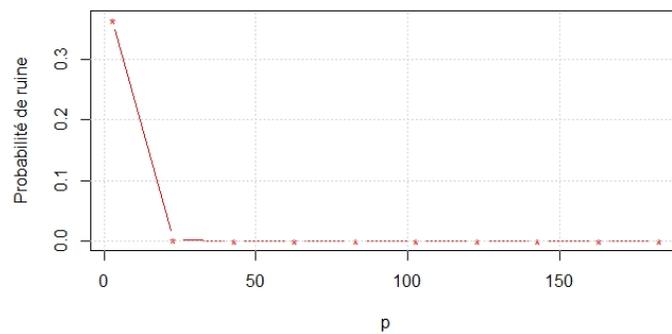


FIGURE 5.25 – Probabilité de ruine en fonction de temps instantané de prime

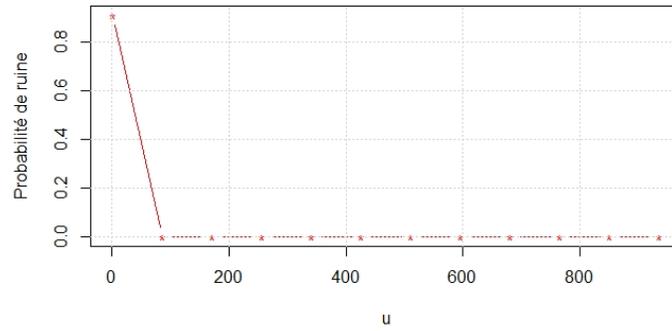


FIGURE 5.26 – Probabilité de ruine en fonction de  $u$

## CONCLUSION GÉNÉRALE

En assurance, il est nécessaire de modéliser le comportement d'un surplus financier afin de quantifier le risque qui lui est associé, plus précisément on tente d'étudier la probabilité que ce surplus financier tombe en zéro.

En retenons que la probabilité de ruine est une procédure d'évaluation des risques de faillite pour les compagnies d'assurance. La théorie de risque présente des méthodes permettant de calculer cette probabilité, après la précision de la distribution de nombre de sinistre et celle de montants de réclamation, ainsi que les paramètres de la loi de distribution.

Dans ce mémoire, nous avons présenté la probabilité de ruine au cas stationnaire et non stationnaire. Nous avons présenté les lois des queues légères et lourdes. Puis, nous avons défini le modèle de risque générale et la probabilité de ruine au horizon fini et infini dans le cas stationnaire et non stationnaire. Nous avons terminé cette étude par une application numérique par le biais du logiciel R où nous avons calculé la probabilité de ruine pour dans le cas des arrivées des sinistres est un processus de renouvellement et en particulier un processus de Poisson. Dans la deuxième partie de l'application, nous avons calculé la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres arrivent suivent un processus non renouvellement à savoir un processus de Hawkes. Dans la deuxième cas, nous utilisons des loi subexponentielle pour les montants de réclamation.

Nous avons étudié le comportement de la probabilité en fonction de chaque paramètre séparément. La remarque générale est que le comportement de la probabilité de ruine en fonction des paramètres  $u, \xi, \mu, \lambda, \nu$  et

## CONCLUSION GENERALE

---

$\|h\|_{L^1}$  est significative. Parmi les perspectives de cette étude est l'étude de l'influence de ces paramètres simultanément ce qui fait appel aux études des fonctions à plusieurs variables. Il est intéressant de voir ce comportement dans le cas bivarie et trivarie.

Autre perspective, est l'étude des autres types de stationnarité, par exemple l'étude de la dépendance de la moyenne et de la variance des remboursements du temps.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Asmussen, S., Albrecher, H., 2010. Ruin Probabilities. Second ed., World Scientific, Singapore.
- [2] Asmussen, S., Schmidli, H., Schmidt, V., 1999. Tail approximations for non-standard risk and queueing processes with subexponential tails. Adv. Appl. Probab 31, 422-447.
- [3] Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J., and Teugels, J. (2006). Statistics of extremes : theory and applications. John Wiley.
- [4] Bingham, N. H., Goldie, C. M., and Teugels, J. L. (1987). Cambridge University Press.
- [5] Caeiro, F., and Gomes, M. I. (2006). A new class of estimators of a "scale" second order parameter. Extremes, 9(3-4), 193-211.
- [6] Caeiro, F., and Gomes, M. I. (2015). Bias reduction in the estimation of a shape second-order parameter of a heavy-tailed model. J. Stat. Comput. Simul., 85(17), 3405-3419.
- [7] Ciuperca, G., and Mercadier, C. (2010). Semi-parametric estimation for heavy tailed distributions. Extremes, 13(1), 55-87.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [8] DAVISON A. C., SMITH R. L., “Models for exceedances over high thresholds” , *Journal of Royal Statistic Society Ser. B* 52, 1990, p. 393-442.
  
- [9] de Haan, L. and Ferreira, A. (2006). *Extreme Value Theory : An Introduction*. Springer-Verlag, New York.
  
- [10] de Haan, L., and Stadtmüller, U. (1996). Generalized regular variation of second order. *J. Aust. Math. Soc.*, 61(03), 381-395.
  
- [11] El Adlouni, S., Bobée, B., and Ouarda, T. B. M. J. (2008). On the tails of extreme event distributions in hydrology. *J. Hydrology*, 355(1), 16-33.
  
- [12] Embrechts, P., and Omey, E. (1984). A property of longtailed distributions. *J. Appl. Probab.*, 80-87.
  
- [13] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag, Berlin.
  
- [14] Foss, S., Korshunov, D., and Zachary, S. (2011). *An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions*. New York : Springer.
  
- [15] Fraga Alves, M. I., De Haan, L., and Lin, T. (2006). Third order extended regular variation. *Publ. Inst. Math.*, 80(94), 109-120.
  
- [16] Fraga Alves, M. I., Gomes, M. I., and De Haan, L. (2003). A new class of semi-parametric estimators of the second order parameter. *Port. Math.*, 60(2), 193-214.
  
- [17] Fraga Alves, M. I., Gomes, M. I., De Haan, L., and Neves, C. (2007). A note on second order conditions in extreme value theory : linking general and heavy tail conditions. *REVSTAT*, 5(3), 285-304.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [18] Geluk, J., De Haan, L., Resnick, S., and Starica, C. (1997). Second-order regular variation, convolution and the central limit theorem. *Stochastic Process. Appl.*, 69(2), 139-159.
- [19] Goegebeur, Y., Beirlant, J., and de Wet, T. (2010). Kernel estimators for the second order parameter in extreme value statistics. *J. Statist. Plann. Inference.*, 140(9), 2632-2652.
- [20] Gomes, M. I., De Haan, L., and Peng, L. (2002). Semi-parametric estimation of the second order parameter in statistics of extremes. *Extremes*, 5(4), 387-414.
- [21] Hall, P. (1982). On some simple estimates of an exponent of regular variation. *J. R. Stat. Soc.*, 37-42.
- [22] Hawkes, A.G., 1971. Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. *Biometrika* 58,83-90.
- [23] Klüppelberg, C., Mikosch, T., 1997 Large deviations of heavy-tailed random sums with applications to insurance and finance. *Journal of Applied Probability* 34, 293-308.
- [24] Klüppelberg, C. (1988). Subexponential distributions and integrated tails. *J. Appl. Probab.*, 132-141.
- [25] Neves, C. (2009). From extended regular variation to regular variation with application in extreme value statistics. *J. Math. Anal. Appl.*, 355(1), 216-230.
- [26] PICKANDS J., statistical inference using extreme order statistics, *Annals of Statistics* 3, 1975, p. 119-131.
- [27] REISS R . THOMAS M . *Statistical Analysis of Extreme value with Application to assurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, Basel,

## BIBLIOGRAPHIE

---

- Birkhauser, Verlag, 2001.
- [28] Resnick, S.I. (2007). Heavy-Tail Phenomena, probabilistic and statistical modeling. Springer.
- [29] SMITH R. L ., “*Estimating tail of probability lois*”, The Annals of Statistics 3, 1987, p. 1174-1207.
- [30] Wang, X. Q., and Cheng, S. H. (2005). General regular variation of n-th order and the 2nd order edgeworth expansion of the extreme value distribution (i). Acta Math. Sin., 21(5), 1121-1130.
- [31] Werner, T., and Upper, C. (2002). Time variation in the tail behaviour of bunds futures returns.
- [32] Worms, J., and Worms, R. (2012). Estimation of second order parameters using probability weighted moments. ESAIM Probab. Stat., 16, 97-113.
- [33] Zhu, L., 2011. Large deviations for Markovian nonlinear Hawkes processes. Preprint.

**Preuve du lemme (4.1.1) :** En remplaçant  $\epsilon$  par  $p\epsilon$  et  $M$  par  $pM$  dans l'équation ci-dessus, il suffit de prouver que :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup \mathbb{P} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n T_i > n \left( \frac{1}{\mu} + \epsilon \right) \right\} \right) = 0 \quad (5.1)$$

observer que  $\{N_t \leq n\} = \{\sum_{i=1}^n T_i > t\}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{R}^+$  et aussi pour tout  $\mu' < \mu$ , il existe  $\delta' > 0$  tel que  $I(\mu') - \delta' > 0$  et pour tout  $t$  suffisamment grand

$$\mathbb{P}(N_t/t < \mu') \leq e^{-t[I(\mu') - \delta']} \quad (5.2)$$

Nous avons utilisé le terme  $I(\mu')$  et  $I(\cdot)$  est en baisse sur  $[0, \mu]$  de l'hypothèse (4.1.1).

Également pour toute  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup \sum_{n < N} \left( \sum_{i=1}^n T_i > n \left( \frac{1}{\mu} + \epsilon \right) + M \right) = 0 \quad (5.3)$$

prennent ensemble  $N \in \mathbb{N}$  suffisamment grande :

$$\begin{aligned}
& \lim_{M \rightarrow \infty} \sup \mathbb{P} \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n T_i > n \left( \frac{1}{\mu} + \epsilon \right) + M \right\} \right) \\
& \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \sup \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n T_i > n \left( \frac{1}{\mu} + \epsilon \right) + M \right) \\
& = \lim_{M \rightarrow \infty} \sup \sum_{n \geq N} \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n T_i > n \left( \frac{1}{\mu + \epsilon} \right) + M \right) \\
& = \lim_{M \rightarrow \infty} \sup \sum_{n \geq N} \mathbb{P} \left( \frac{N_{n(\mu^{-1} + \epsilon) + M}}{n(\mu^{-1} + \epsilon) + M} \leq \frac{n}{n(\mu^{-1} + \epsilon) + M} + M \right) \\
& \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \sup \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left( \frac{N_{n(\mu^{-1} + \epsilon) + M}}{n(\mu^{-1} + \epsilon) + M} \leq \frac{\mu}{1 + \mu\epsilon} \right) \\
& \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \sup \sum_{n \geq N} e^{-(n(\mu^{-1} + \epsilon) + M)[I(\frac{\mu}{1 + \mu\epsilon}) - \delta']} = 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

**Preuve du lemme(4.1.2) :** On remarque que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left( \sup_{n \geq 1} \{ n(c\mu^{-1} - \epsilon) - c \sum_{i=1}^n T_i \} \geq u \right) & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n T_i \leq n \left( \frac{1}{\mu} - \frac{\epsilon}{c} \right) - \frac{u}{c} \right) \\
& = \sum_{n > \frac{u}{\frac{c}{\mu} - \epsilon}} \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n T_i \leq n \left( \frac{1}{\mu} - \frac{\epsilon}{c} \right) - \frac{u}{c} \right) \\
& \leq \sum_{n > \frac{u}{\frac{c}{\mu} - \epsilon}} \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n T_i \leq n \left( \frac{1}{\mu} - \frac{\epsilon}{c} \right) \right) \\
& \leq \sum_{n > \frac{u}{\frac{c}{\mu} - \epsilon}} \mathbb{P} \left( N_{n(\frac{1}{\mu} - \frac{\epsilon}{c})} \geq n \right) \\
& \leq \sum_{n > \frac{u}{\frac{c}{\mu} - \epsilon}} e^{-n(\frac{1}{\mu} - \frac{\epsilon}{c})[I((\frac{1}{\mu} - \frac{\epsilon}{c})^{-1}) - \delta']}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

qui est exponentiellement petit en  $u$  lorsque  $u \rightarrow 0$ .

**Preuve du théorème(4.1.2) :** la preuve est basée sur les idée Asmussen et al (1999) avec quelques modifications lorsque  $N_t$  est processus de renouvellement Asmussen et Klüppelberg (1996) ont prouvé à la fois (i) et (ii). Or si  $N_t$  satisfait l'hypothèse (4.1.1), alors par le lemme (4.1.1)

$$\begin{aligned} \psi(u, e(u)T) &= \mathbb{P} \left( \sup_{n \leq e(u)T} \{ \sum_{i=1}^n X_i - c \sum_{i=1}^n T_i \} > n \right) \\ &\geq (1 - \epsilon') \mathbb{P} \left( \sup_{n \leq e(u)T} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i - n \left( \frac{c}{\mu} + \epsilon \right) \right\} > u + M \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Or dans les deux cas (i) et (ii), nous savons que  $e(x) \sim \frac{\int_x^\infty \bar{B}(y) dy}{B(x)}$ . Puisque  $B(x)$  et  $B_0$  appartiennent à  $\mathcal{S}$ , le lemme (4.3) implique que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e(x+y)}{e(x)} = 1$  uniformément pour  $y \in [0, y_0]$  pour tout  $y_0 \leq \infty$ . Par conséquent pour tout  $\epsilon'' \in (0, 1)$ , nous avons  $e(u) \leq e(u+M)(1 - \epsilon'')$  pour tout  $u$  suffisamment grand et ainsi nous obtenons

$$\psi(u, e(u)T) \leq (1 - \epsilon') \mathbb{P} \left( \sup_{n \leq e(u+M)T(1-\epsilon'')} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i - n \left( \frac{c}{\mu} + \epsilon \right) \right\} > u + M \right) \quad (5.7)$$

Supposons maintenant  $\bar{B} \in \mathcal{R}(-\alpha - 1)$ . On a par le résultat correspondant pour le renouvellement  $N_t$  dans Asmussen et Klüppelberg(1996) et le lemme (4.1.3).

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \inf \frac{\psi(u, e(u)T)}{\bar{B}_0(u)} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \inf \frac{\psi(u, e(u)T)}{\bar{B}_0(u+M)} \\ &\geq (1 + \epsilon') \frac{\rho_\epsilon}{1 - \rho_\epsilon} [1 - (1 + (1 - \rho_\epsilon)T(1 - \epsilon''))/\alpha]^{-\alpha} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Où  $\rho_\epsilon = \frac{E[X_1]}{\frac{c}{\mu} + \epsilon}$ . Puisqu'il s'applique à tout  $\epsilon, \epsilon', \epsilon'' > 0$ , nous avons prouvé la limite inférieure. Le cas de  $B \in \mathcal{G}$  est similaire.

Maintenant, prouvons la borne supérieure. Choisissez  $\epsilon > 0$  assez petit

pour  $\frac{c}{\mu} - \epsilon > E[X_1]$ ,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{u \rightarrow \infty} \sup \frac{\psi(u, e(u)T)}{\bar{B}_0(u)} \\
 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \sup \frac{\mathbb{P}(\sup_{n \leq e(u)T} \{\sum_{i=1}^n X_i - n(c\mu^{-1} - \epsilon) + n(c\mu^{-1} - \epsilon) - \sum_{i=1}^n T_i\} > u)}{\bar{B}_0(u)} \\
 &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} \sup \frac{\mathbb{P}(X_\epsilon(u) + Y_\epsilon > u)}{\bar{B}_0(u)}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Où  $X_\epsilon(u) = \sup_{n \leq e(u)} \{\sum_{i=1}^n X_i - n(c\mu^{-1} - \epsilon)\}$  et  $Y_\epsilon = \sup_{n \geq 1} \{n(c\mu^{-1} - \epsilon) - \sum_{i=1}^n T_i\}$ . Par le lemme(4.1.2), nous avons  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(Y_\epsilon > u)}{\bar{B}_0(u)} = 0$  et par le résultats du renouvellement( Asmussen et Klüppelberg(1996)), pour  $\bar{B} \in \mathcal{R}(-\alpha - 1)$ ,

$$\mathbb{P}(X_\epsilon(u) > u) \sim \frac{\rho_\epsilon}{1 - \rho_\epsilon} [1 - (1 + (1 + \rho_\epsilon)T/\alpha)^{-\alpha}] \bar{B}_0(u) \tag{5.10}$$

Où  $\rho_\epsilon = \frac{E[X_1]}{c\mu^{-1} - \epsilon}$ .

**Preuve de lemme (4.3.2) :** Prendre l'attente de l'identité  $\lambda_t = \nu + \int_0^t h(t-s)N(ds)$ , on a

$$E[\lambda_t] = \nu + \int_0^t h(t-s)E[\lambda_s]ds \leq \nu + \|h\|_{L^1} \sup_{0 \leq s \leq t} E[\lambda_s]ds, \tag{5.11}$$

Ce qui implique pour tout  $t$ ,  $\sup_{0 \leq s \leq t} E[\lambda_s] \leq \frac{\nu}{1 - \|h\|_{L^1}}$  et donc  $\frac{\nu}{1 - \|h\|_{L^1}}$  uniformément dans  $t$ . Ensuite, laisser  $H(t) = \int_t^\infty h(s)ds$  et

$$\begin{aligned}
 E[N_t] &= E[\int_0^t \lambda_s ds] \\
 &= \nu t + \int_0^t \int_0^s h(s-u) dE[N_u] ds \\
 &= \nu t + \int_0^t \int_u^t h(s-u) ds dE[N_u] \\
 &= \nu t + E[N_t] \|h\|_{L^1} - \int_0^t H(t-u) dE[N_u]
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Ce qui implique que

$$E[N_t] = \frac{\nu t}{1 - \|h\|_{L^1}} - \int_0^t H(t-u) E[\lambda_u] du, \tag{5.13}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t H(t-u) E[\lambda_u] du &\leq \frac{\nu}{1 - \|h\|_{L^1}} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t H(t-u) du \\ &= \frac{\nu}{1 - \|h\|_{L^1}} \lim_{x \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t H(u) du = 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

puisque  $H(t) = \int_t^\infty h(s) ds \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

**Preuve de lemme (4.3.3) :** Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , nous donne

$$\begin{aligned} E[e^{\theta N_t}] &= E \left[ e^{(e^\theta - 1) \int_0^t \lambda_s ds} \right] \\ &= e^{(e^\theta - 1) \int_0^t \nu(s) ds} E \left[ e^{(e^\theta - 1) \int_0^t \int_0^s N^1(du) ds} \right] \\ &= e^{(e^\theta - 1) \int_0^t \nu(s) ds} e^{\gamma \int_0^t (e^{\int_u^t (e^\theta - 1) g(s-u) ds} - 1) du} \quad (5.15) \\ &= e^{(e^\theta - 1) \int_0^t \nu(s) ds} e^{\gamma \int_0^t (e^{\int_u^t (e^\theta - 1) g(s) ds} - 1) du} \\ &= e^{(e^\theta - 1) \int_0^t \nu(s) ds} e^{\gamma \int_0^t (e^{\int_0^u (e^\theta - 1) g(s) ds} - 1) du} \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E[e^{\theta N_t}] = (e^\theta - 1)\nu + \gamma(e^{(e^\theta - 1)\|g\|_{L^1}} - 1) \quad (5.16)$$

Par le théorème de Gärtner-Ellis, nous concluons que  $(N_t \in \cdot)$  satisfait un principe de grande déviation avec fonction de taux

$$I(x) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left\{ \theta x - (e^\theta - 1)\nu - \gamma(e^{(e^\theta - 1)\|g\|_{L^1}} - 1) \right\} \quad (5.17)$$

Maintenant, si  $x < 0$ , puis pour tout  $\theta < 0$ ,  $\theta x - (e^\theta - 1)\nu - \gamma(e^{(e^\theta - 1)\|g\|_{L^1}} - 1) \geq \theta x \rightarrow \infty$  si nous laissons  $\theta \rightarrow -\infty$ . Par conséquent  $I(x) = +\infty$  pour  $x < 0$ .

**Preuve de lemme (4.3.4) :** Observer que :

$$\begin{aligned} E[N_t] &= E \left[ \int_0^t \lambda_s ds \right] \\ &= \int_0^t \nu(s) ds + E \left[ \int_0^t \int_0^s g(s-u) N^{(1)}(du) ds \right] \\ &= \int_0^t \nu(s) ds + \gamma \int_0^t \int_0^s g(s-u) dud s \\ &= \int_0^t \nu(s) ds + \gamma \int_0^t \int_0^s g(u) dud s \end{aligned} \tag{5.18}$$

ce qui implique que  $\frac{E[N_t]}{t} \rightarrow \nu + \gamma \|g\|_{L^1}$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

**Preuve de lemme(4.3.6) :**  $E[N_t] = E[\int_0^t \lambda(Z_s) ds]$ . Zheng(1991) a prouvé qu'il existe une mesure invariante unique  $\pi(dz)$  pour tout processus de markov  $Z_t$ , par théorème ergodique, nous avons :

$$\frac{1}{t} \int_0^t \lambda(Z_s) ds \rightarrow \int \lambda(z) \pi(dz) \tag{5.19}$$

quand  $t \rightarrow \infty$ . Nous savons que  $Z_t = t - N_t$  a le générateur

$$Af(z) = \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda(z)(f(z-1) - f(z)) \tag{5.20}$$

et nous avons  $\mathcal{A}z\pi = 0$  ce qui implique que  $\int \lambda(z) \pi(dz) = 1$  et ainsi  $\frac{1}{t} \int_0^t \lambda(Z_s) ds \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Puisque  $\lambda^- \leq \lambda(\cdot) \leq \lambda^+$ , par le théorème de convergence borné, nous concluons que  $\frac{E[N_t]}{t} \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow \infty$ .