

N° d'ordre :



Département de mathématiques

Mémoire de projet de Fin d'Études

En vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : CHAUCHE Lidya et KHACEF Anfel

Thème

Coloration d'incidences des graphes planaires

Soutenu publiquement le 23/ 09/ 2020, devant le jury composé de :

Mr M. CHELLALI	Professeur / U. Blida1	Président
Mme N. MEDDAH	M.C.B / U. Blida1	Examinatrice
Mme S. KERDJOUJ	M.C.B / U. Blida1	Encadreur

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Ma très chère mère Nadia,

Mon père Hafid,

qu'ils trouvent en moi la source de leur fierté, à qui je dois tout , je les remercie pour leurs encouragements, soutiens et conseils ainsi que leurs amour.

Mon frère Mohamed naoufel et ma soeur Lina.

Ma famille.

Ma chère binôme et sa famille.

Mes Amis.

Et à tous ceux qui me sont chers.

KHACEF Anfel

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents,

pour tous leurs sacrifices, amour, tendresse, soutien et leurs prières tout au long de mes études.

Mes chères soeurs,

chers frères,

Je vous remercie pour votre amour inconditionnel.

Ma famille.

Ma chère soeur et binôme qui ma accompagnée pour la préparation de ce mémoire et sa famille.

Mes Amis,

Tous les gens qui m'aiment.

CHAOUCHE Lidya.

Remerciements

Avant de débiter ce mémoire, Nous remercions avant tout Allah, tout puissant pour la volonté et la santé qu'il nous a données durant toutes ces longues années d'études afin que nous puissions arriver à ce stade.

En second lieu, notre gratitude s'adresse à madame S. Kerdjoudj pour son encadrement, son orientation, ses conseils et la disponibilité qu'elle nous a témoigné pour nous permettre de mener à bien ce travail.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à Monsieur M. CHELLALI, Professeur à l'université de Blida 1, qui a accepté de présider le jury de soutenance. Madame N. MEDDAH, Maître de conférences à l'université de Blida 1, nous a fait l'honneur d'accepter d'examiner ce travail. Nous tenons à lui exprimer toute notre gratitude.

Nous adressons nos sincères remerciements à tous les enseignants du Département Mathématiques en particulier les enseignants de la spécialité Recherche Opérationnelle.

Coloration d'incidences des graphes planaires

Résumé : Une incidence d'un graphe G est un couple (u, e) où u est un sommet de G et e une arête de G incidente au sommet u . Deux incidences (u, e) et (v, f) sont adjacentes si elles sont distinctes et que $u = v$ ou $e = f$ ou $uv = e$ ou $uv = f$. Une k -coloration d'incidences d'un graphe G est une application de l'ensemble des incidences de G dans l'ensemble C de k couleurs telle que deux incidences adjacentes aient des couleurs différentes. Le nombre chromatique d'incidences, noté $\chi_i(G)$, est le plus petit entier k tel que G admette une k -coloration d'incidences. Cette notion a été introduite par Brualdi et Massey (1993), puis étudiée depuis par de nombreux chercheurs. Dans ce mémoire, nous prouvons que tout graphe planaire de degré maximum au plus 4 et sans cycles de longueurs 4 et 5 admette une 7-coloration d'incidences.

Mots-clé : Graphe planaire - Méthode de déchargement - nombre chromatique d'incidences - Coloration d'incidences.

Incidence coloring of planar graphs

Abstract : An incidence of a graph G is a pair (u, e) where u is a vertex of G and e an edge of G incident with vertex u . Two incidences (u, e) and (v, f) are adjacent if they are distinct and $u = v$ or $e = f$ or $uv = e$ or $uv = f$. An incidence k -coloring of G is a mapping from the set of incidences of G into the set C of k colors such that adjacent incidences are assigned distinct colors. The incidence chromatic number, denoted $\chi_i(G)$, is the smallest integer k such that G admits a incidence k -coloring. This notion was introduced by Brualdi and Massey (1993), and studied by many authors. In this work, we prove that any planar graph of maximum degree at most 4 and without cycles of lengths 4 and 5 admits an incidences 7-coloring.

Keywords : Planar graph- Discharging method- incidence chromatic number- incidence coloring

Table des matières

Introduction	1
1 Éléments de la théorie des graphes	4
1.1 Notions de base	4
1.1.1 Graphe non orientés	4
1.1.2 Graphe simple et graphe multiple	5
1.1.3 Adjacence, incidence et voisinage	5
1.1.4 Graphe partiel, sous graphe et sous graphe induit	6
1.1.5 Degré	6
1.1.6 Stable et couplage	7
1.1.7 Chaînes et cycles	7
1.1.8 Connexité	8
1.2 Quelques type de graphes	8
1.2.1 Graphe complet	8
1.2.2 Graphe biparti et biparti complet	9
1.2.3 Graphe régulier	9
1.2.4 Arbre et Fôret	10
1.2.5 Graphe planaire	10
1.2.6 Graphe planaire extérieur	11
1.2.7 Graphe triangulé	12
1.2.8 Graphe d -dégénéré	12
1.2.9 Graphe représentatif des arêtes	12
1.2.10 Graphe k -puissance	13
1.2.11 Graphe orienté	13
1.3 Aperçu sur la coloration de graphe	14
1.3.1 Coloration propre des sommets	14
1.3.2 Coloration propre des arêtes	16
1.4 Méthode de déchargement	17
1.4.1 Description de la méthode de déchargement	17

2	Coloration d'incidences	18
2.1	Introduction	18
2.2	Nombre chromatique d'incidences	20
2.3	Bornes générales sur le nombre chromatique d'incidences	20
2.4	(k, ℓ) -coloration d'incidences	21
2.5	Exemple d'application	22
2.6	Coloration d'incidences de quelques classes de graphes	22
2.7	Coloration d'incidences et coloration forte d'arêtes	24
2.7.1	Coloration d'incidences et étoile-arboricité	25
2.7.2	Coloration d'incidences et coloration à distance deux	26
2.8	Quelques variantes autour de la coloration d'incidences	26
2.8.1	Jeu de coloration d'incidences	26
2.8.2	Coloration fractionnaire d'incidences	27
2.8.3	Coloration intervalle d'incidences	28
3	Nombre chromatique d'incidences des graphes planaires	30
3.1	Nombre chromatique d'incidences des graphes planaires extérieurs	30
3.2	Quelques résultats sur les graphes planaires	31
3.2.1	Preuve de Théorème 3.8	32
	Conclusion et perspectives	44
	Bibliographie	45

Table des figures

1	Éléments de la théorie des graphes	4
1.1	Exemples de graphes non orientés	5
1.2	Exemples de sous graphes de G	6
1.3	Sable et couplage	7
1.4	Graphe connexe et graphe non connexe.	8
1.5	Le graphe complet K_5	9
1.6	Exemples de graphe biparti et de graphe biparti complet.	9
1.7	Exemples d'arbres et de forêt	10
1.8	Représentation plane d'un graphe	10
1.9	Les faces de graphe G	11
1.10	Un graphe plane extérieur et graphe non plane extérieur.	12
1.11	Un graphe non triangulé et triangulé.	12
1.12	Graphe représentatif des arêtes.	13
1.13	Graphe 2-puissance.	13
1.14	Graphe orienté D	14
1.15	Coloration propre des sommets de $W_7 \setminus \{e\}$	15
1.16	3-coloration des arêtes.	16
2	Coloration d'incidences	18
2.1	Adjacence entre deux incidences	19
2.2	$I_v = \{ \text{incidences notées } * \}$ et $A_v = \{ \text{incidences notées } \square \}$	19
2.3	Incidences adjacentes	19
2.4	5-coloration d'incidences.	20
2.5	(4, 2)-coloration d'incidences.	22
2.6	5-coloration forte des arêtes du graphe de Peterson.	24
2.7	Coloration d'incidences et coloration forte d'arêtes de K_3	25
2.8	$dst(G) = \chi_i(G) = 3$	25

2.9	$\chi_i(G) = \chi_2(G) = 3$.	26
2.10	Le graphe C_5 est $(5, 2)$ -coloriable et $\chi_f(C_5) = \frac{5}{2}$.	28
3	Nombre chromatique d'incidences des graphes planaires	30
3.1	Configuration réductible du Lemme 3.11.1	34
3.2	Configuration réductible du Lemme 3.11.2	34
3.3	Configuration réductible du Lemme 3.11.3	35
3.4	Configuration réductible du Lemme 3.11.3- Cas 1	36
3.5	Configuration réductible du Lemme 3.11.3- Cas 2	37
3.6	Configuration réductible du Lemme 3.11.3-Cas 3.1.2	41
3.7	Configuration réductible du Lemme 3.11.3- Cas 3.2.2	41

Introduction

En 1736, Leonhard Euler [17] (28 ans) a présenté devant l'Académie de Saint Pétersbourg, le problème des 7 ponts de Koenigsberg énoncé comme suit : " A Koenigsberg, en Poméranie, il y a une île appelée Kneiphof ; le fleuve qui l'entoure se divise en deux bras, sur lesquels sont jetés 7 ponts. Existe-t-il une promenade permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ? " . Pour répondre à cette question, Euler a généralisé le problème et a donné une solution qui fonde une nouvelle branche des mathématiques discrète : *la théorie des graphes*.

La théorie des graphes a connu un essor spectaculaire grâce aux travaux Konig, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős. De manière générale, un graphe est défini par un ensemble de points représentant un objet, appelés sommets, reliés entre eux, suivant une relation spécifique, par un ensemble de traits ou de flèches, appelés arêtes. Beaucoup de problèmes réels, tels que les réseaux informatiques, le transport de marchandises, d'emplois du temps, d'électronique, de mécanique du solide ou encore de sciences sociales, peuvent être modélisés en terme de graphe. La résolution du problème peut alors être traitée de façon logique, en opérant des algorithmes particuliers cherchant à optimiser le graphe, ou à déterminer le plus court chemin, ou juste à caractériser la structure du graphe.

La coloration de graphes est un champ de recherche emblématique de la théorie des graphes, à la fois de par sa position centrale en mathématiques discrètes, mais aussi par le nombre de ses applications.

En 1852 Francis Guthrie, cartographe anglais, remarque qu'il lui suffit quatre couleurs pour colorer la carte des cantons d'Angleterre, sans donner la même couleur à deux cantons ayant une frontière commune. Il demande alors à son frère Frederick, mathématicien, si cette propriété reste vraie pour toute carte plane. Ce problème fut communiqué à quelques mathématiciens célèbres de l'époque (De Morgan, Hamilton, Cayley, etc) et, est devenu en 1879, connu sous le nom de la conjecture des quatre couleurs.

Sous son apparente simplicité, cette conjecture dissimule un problème véritablement technique en témoigne le nombre de démonstrations erronées qui furent publiées pour la réfuter

ou la valider. En 1879, Kempe [1] a publié une première "solution" mais Heawood a découvert onze ans plus tard une erreur dans la démonstration et ni lui ni Kempe ont été en mesure de corriger l'erreur.

En 1913, Birkhoff, formule la notion de configuration réductible et démontre la conjecture pour toutes les cartes comportant moins de 26 régions à colorier. Finalement, ce n'est qu'en 1976, que Appel et Haken [4, 5] ont prouvé cette conjecture. La preuve de ce théorème utilise une méthodes de raisonnement appelée méthode de déchargement. Cette démonstration nécessite l'usage abondant de calculs réalisés par l'ordinateur pour compléter une preuve déjà fort longue. Il s'agit de la première preuve mathématique qui emploie des calculs par ordinateur pour compléter sa résolution. C'est pour cette raison, qu'elle fut longtemps sujette à débats avant d'être acceptée par la communauté scientifique. En 1996, Robertson, Sanders, Seymour [37] et ont proposé une autre preuve plus simple et plus courte, mais toujours assistée par ordinateur. Bien que la conjecture des quatre couleurs ait été résolu, elle continue à susciter l'intérêt de nombreux chercheurs qui tentent d'en obtenir une preuve combinatoire.

Actuellement, plusieurs types de colorations ont été introduits et étudiés. Nous citons, par exemple, la coloration d'arêtes, la coloration totale et la coloration par liste.

Une incidence d'un graphe G est un couple (u, e) où u est un sommet de G et e une arête de G incidente au sommet u . Deux incidences (u, e) et (v, f) sont adjacentes si elles sont distinctes et que $u = v$ ou $e = f$ ou $uv = e$ ou $uv = f$. Une k -coloration d'incidences d'un graphe G est une application de l'ensemble des incidences de G dans l'ensemble C de k couleurs telle que deux incidences adjacentes aient des couleurs différentes. Le nombre chromatique d'incidences est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration d'incidences.

Le nombre chromatique d'incidences a été introduit par Brualdi et Massey en 1993 [12]. Ces auteurs ont conjecturé que pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$, son nombre chromatique d'incidences est d'au plus $\Delta(G) + 2$. En 1997, Guiduli [21] a montré que cette conjecture est fausse, même si de nombreuses familles de graphes vérifient cette conjecture.

Dans ce présent mémoire, nous nous intéressons au problème de la coloration d'incidences des graphes planaires. Il comporte trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons les définitions et terminologies de la théorie des graphes en général et de la coloration de graphe en particulier.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons d'abord le concept de la coloration d'incidences dans les graphes. Puis, nous donnons les principaux résultats qui existent dans la littérature concernant le nombre chromatique d'incidences.

Le troisième chapitre, est consacré à l'étude de la coloration d'incidences des graphes planaires. Nous étudions plus particulièrement, le nombre chromatique d'incidences des graphes planaires de degré maximum au plus 4, sans cycles de longueurs 4 et 5.

Nous terminons avec une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Éléments de la théorie des graphes

Dans ce chapitre, nous introduisons, dans la première partie, les notations usuelles de la théorie des graphes et dont nous nous servons dans ce document. Ces notations sont standards et peuvent être retrouvées dans [10, 11, 41, 43]. Dans la deuxième partie, nous définissons des notions de coloration de graphes qui sont au centre de notre travail. Nous donnons un bref état de l'art sur les différentes colorations. Enfin, dans la dernière partie, nous présentons la méthode de déchargement, c'est une technique de démonstration qui intervient souvent pour prouver des lemmes structurelles de graphe. Pour plus d'informations nous renvoyons le lecteur aux références [15, 22, 36].

1.1 Notions de base

1.1.1 Graphe non orientés

Un graphe non orienté G est défini par une paire $(V(G), E(G))$, où $V(G)$ est un ensemble non vide dont les éléments sont appelés sommets et $E(G)$ est un ensemble de paires non-ordonnées de sommets dont les éléments sont appelés arêtes. Dans toute la suite, quand aucune confusion n'est possible, on écrira V et E au lieu de $V(G)$ et $E(G)$, respectivement.

Une arête $e \in E$ joignant deux sommets u et v est noté $e = uv$ ou bien $e = vu$. Les sommets u et v sont appelés *extrémités de e* . L'ordre de G est le nombre n de ses sommets ($n = |V|$). La taille de G est le nombre m de ses arêtes ($m = |E|$). Une boucle dans G est une arête dont les extrémités sont confondues. Une arête de G est dite simple s'il existe une seule arête d'extrémités u et v , dans le cas contraire elle est dite multiple.

Exemple : Le graphe $H = (V, E)$ de la Figure 1.1(a) est un graphe non orienté, d'ordre 5 et de taille 8. Il a pour ensemble sommets $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et pour ensemble d'arêtes $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1, v_5v_5\}$. L'arête v_3v_4 est une arête multiples. Il possède une

boucle en v_5 .

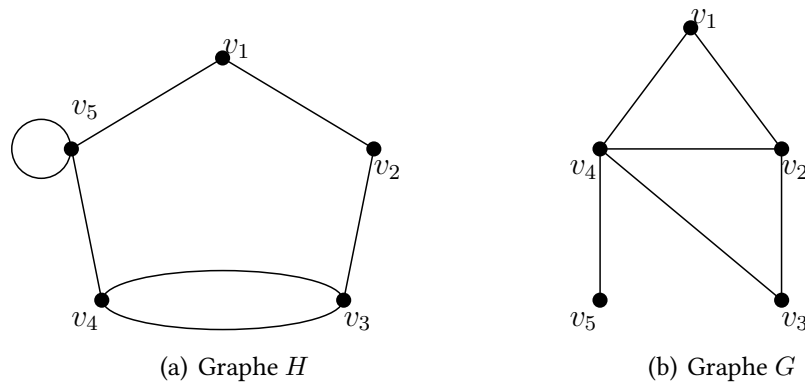


FIGURE 1.1 – Exemples de graphes non orientés

1.1.2 Graphe simple et graphe multiple

1. Un graphe $G = (V, E)$ est dit *simple* s'il est sans boucle et sans arête multiple. Il est dit *fini* si V et E sont des ensembles finis. Le graphe représenté dans la Figure 1.1(b) est sans boucle et sans arête multiple, donc c'est un graphe simple.
2. Un graphe $G = (V, E)$ est dit *multigraphe* s'il n'est pas simple. Le graphe représenté dans la Figure 1.1(a) contient une boucle et une arête multiple, donc c'est un multigraphe.

Dans ce qui suit, nous considérerons uniquement des graphes simples et finis.

1.1.3 Adjacence, incidence et voisinage

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

1. Deux sommets distincts sont adjacents dans G s'ils sont reliés par une arête e de G . Deux arêtes distinctes sont adjacentes si elles ont une extrémité commune.
2. Si le sommet $u \in V$ est l'extrémité de l'arête $e \in E$, alors u est dite incident à e . Inversement, une arête est incidente à un sommet, si ce sommet est une de ces extrémités.
3. L'ensemble des sommets adjacents à un sommet $v \in V$ est appelé le *voisinage* de v , on le note $N_G(v)$ (ou $N(v)$ s'il n'y a pas de confusion possible). Autrement dit, $N(v) = \{u \in V : uv \in E\}$.

Dans le graphe de la Figure 1.1(b), les sommets v_1 et v_2 sont adjacents. les arêtes v_1v_2 et v_1v_4 sont adjacentes. Le sommet v_2 est incident aux arêtes v_2v_1 , v_2v_3 et v_2v_4 . L'arête v_1v_2 est incidente aux sommets v_1 et v_2 . Les voisins de v_2 sont $N_G(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}$.

1.1.4 Graphe partiel, sous graphe et sous graphe induit

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe.

- Un graphe H est un sous graphe de G si $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ et toutes les arêtes de $E(H)$ ont leurs extrémités dans $V(H)$. On note $H \subseteq G$. Par exemple, si nous considérons les deux graphes G et H de la Figure 1.2, nous avons $H \subseteq G$.
- Un graphe $G' = (V(G'), E(G'))$ est un graphe partiel de G , si $V(G') = V(G)$ et $E(G') \subseteq E(G)$. Un graphe partiel d'un sous graphe est dit sous graphe partiel de G . Par exemple, dans la Figure 1.2, le graphe G' est un sous graphe partiel de G .
- Étant donné $S \subseteq V(G)$. Le graphe $G' = (S, E(G'))$ où $E(G')$ est l'ensemble des arêtes de $E(G)$ ayant leurs deux extrémités dans S est appelé un sous graphe induit par S , on note $G[S]$.
- Le sous graphe obtenu à partir de G en supprimant un sommet v (respectivement, une arête e) est noté $G \setminus \{v\}$ (respectivement, $G \setminus \{e\}$).

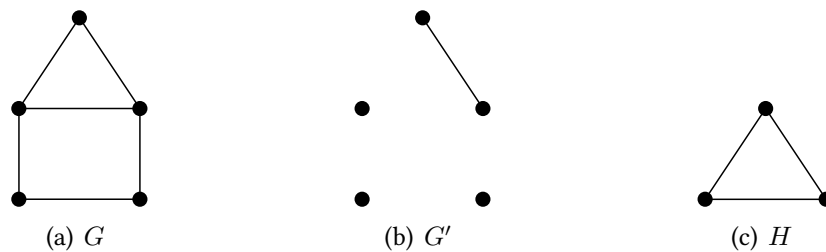


FIGURE 1.2 – Exemples de sous graphes de G

1.1.5 Degré

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- On appelle degré du sommet v , noté $d_G(v)$ (ou $d(v)$), le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Un sommet isolé est un sommet de degré nul. Un sommet pendant est un sommet de degré un.

Lemme 1.1. [17][Lemme des poignées de mains] Pour tout graphe $G = (V, E)$, on a

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

- Le degré minimum d'un graphe G , noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés des sommets de G . Autrement dit, $\delta(G) = \min \{d(v), v \in V(G)\}$.

- Le degré maximum de G , noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés des sommets de G . Autrement dit, $\Delta(G) = \max \{d(v), v \in V(G)\}$.
- Le degré moyen d'un graphe G , noté $Ad(G)$, est égal à la moyenne des degrés de G . D'après le Lemme 1.1, on a : $Ad(G) = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$.
- Le degré moyen maximum d'un graphe G , noté $mad(G)$, est le maximum parmi les degrés moyens de tous les sous graphe de G . Autrement dit, $mad(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}$.

1.1.6 Stable et couplage

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

1. Un sous-ensemble de sommet $S \subseteq V$ est un stable dans G , si tous les sommets de S sont deux à deux non adjacents. Le *nombre de stabilité* $\alpha(G)$ est le cardinal du plus grand stable dans G . Autrement dit, $\alpha(G) = \max \{|S| : S \text{ est un stable de } G\}$.
2. Un sous-ensemble d'arête $M \subseteq E$ est un couplage si toutes arêtes de M sont deux à deux non adjacentes. Un couplage M est dit parfait, si tout sommet de G est une extrémité d'une arête de M .

Dans le graphe de la Figure 1.3, l'ensemble $S = \{v_1, v_3, v_5\}$ est un stable. L'ensemble $M_0 = \{v_1v_2, v_4v_5\}$ est un couplage, l'ensemble $M_1 = \{v_2v_3, v_1v_4, v_5v_6\}$ est un couplage parfait.

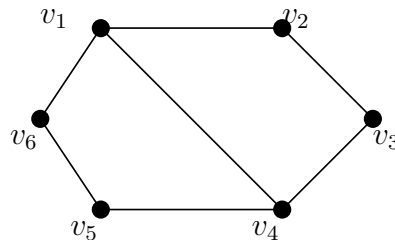


FIGURE 1.3 – Stable et couplage

1.1.7 Chaînes et cycles

Une *chaîne* dans un graphe G , est une séquence $P_n = v_1, v_2, \dots, v_n$ de sommets distincts, telle que deux sommets consécutifs v_i et v_{i+1} sont reliés par une arête. Les sommets v_1 et v_n sont les *extrémités* de P_n et v_2, \dots, v_{n-1} sont ses *sommets internes*. La *longueur* d'une chaîne est égale à son nombre d'arêtes. Une chaîne est dite *simple* si chaque arête apparaît au plus une fois.

On appelle *distance* entre deux sommets u et v dans G , notée $d_G(u, v)$ (ou $d(u, v)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté), la longueur de la plus courte chaîne joignant ces deux sommets. Le diamètre

d'un graphe G , noté $\text{diam}(G)$, est la plus grande distance entre deux sommets quelconques de G .

Une chaîne simple est appelée *cycle* si les extrémités ses sont confondues ($v_1 = v_n$), noté C_n . Une arête reliant deux sommets non adjacents dans un cycle est appelée une *corde*. La *maille* d'un graphe G , notée $g(G)$, est la longueur minimale d'un cycle contenu dans G . La maille peut être infinie si le graphe considéré est sans cycle.

Une chaîne (respectivement, un cycle) qui passe par toutes les arêtes, une et une seule fois, est appelée *chaîne eulérienne* (respectivement, *cycle eulérien*). Une chaîne (respectivement, un cycle) qui passe par tous les sommets, une et une seule fois, est appelée *chaîne hamiltonienne* (respectivement, *cycle hamiltonien*).

1.1.8 Connexité

Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe si toute paire de sommets v, u de G est reliée par une chaîne. On peut aussi remarquer que la relation $\forall u, v \in V, vCu \Leftrightarrow \{u = v \text{ ou il existe une chaîne reliant } u \text{ et } v\}$ est une relation d'équivalence. Les classes de cette relation d'équivalence constituent une partition de V en sous graphes connexes de G , appelées les composantes connexes de G . En d'autres termes, une composante connexe d'un graphe G est un sous graphe connexe maximal de G .

Le graphe représenté dans la Figure 1.4(a) est un graphe connexe. En revanche, le graphe de la Figure 1.4(b) n'est pas connexe car il contient deux composantes connexes.

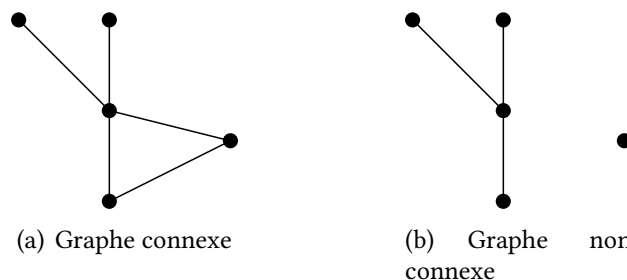


FIGURE 1.4 – Graphe connexe et graphe non connexe.

1.2 Quelques type de graphes

1.2.1 Graphe complet

Un graphe complet à n sommets, noté K_n , est un graphe tel que toute paire de sommets est reliée par une arête. Le graphe complet à 5 sommets, noté K_5 , est représenté sur la Figure

1.5.

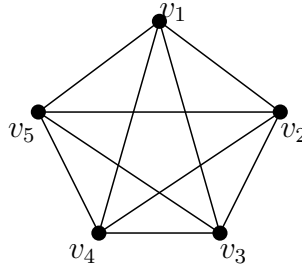


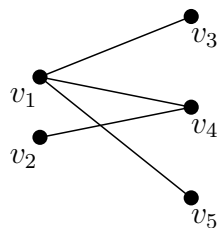
FIGURE 1.5 – Le graphe complet K_5 .

Une clique est un sous graphe complet d'un graphe G . Le nombre de clique, noté $\omega(G)$, est le cardinal de la plus grande clique de G .

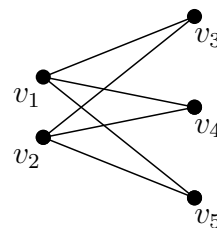
1.2.2 Graphe biparti et biparti complet

Un graphe est dit biparti s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous ensembles X et Y telle que chaque arête ait une extrémité dans X et l'autre dans Y . Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impaire. Le graphe représenté dans la Figure 1.6(a) est un graphe biparti.

Un graphe biparti est dit complet si chaque sommet de X est relié à chaque sommet de Y , on le note $K_{|X|,|Y|}$. Le graphe représenté dans la Figure 1.6(b) est le graphe biparti complet $K_{2,3}$. Un graphe biparti complet dont une partition contient un seul sommet est appelé *étoile*.



(a) Graphe biparti



(b) Graphe biparti complet

FIGURE 1.6 – Exemples de graphe biparti et de graphe biparti complet.

1.2.3 Graphe régulier

Un graphe est dit régulier si tous ses sommets sont de même degré. La notation k -réguliers signifie que chaque sommet est de degré k . Par exemple, les graphes complets K_n sont $(n - 1)$ -

réguliers. Un graphe cubique est un graphe 3-régulier.

1.2.4 Arbre et Forêt

Un graphe ne contenant pas de cycle est appelé forêt. Chaque composante connexe d'une forêt est un *arbre*. Les sommets de degré 1 d'une forêt sont appelés feuilles, les autres sont appelés sommets internes. Un exemple d'arbre et de forêt est donné sur la Figure 1.7.

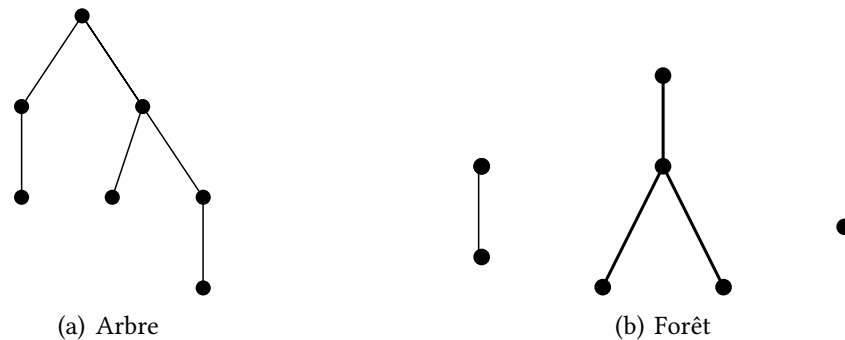


FIGURE 1.7 – Exemples d'arbres et de forêt

1.2.5 Graphe planaire

Un graphe G est dit planaire s'il existe une façon de le représenter dans un plan sans que deux arêtes ne se croisent. Par exemple, le graphe représenté dans la Figure 1.8 est un graphe planaire car il est possible de le représenter dans le plan sans croisement.

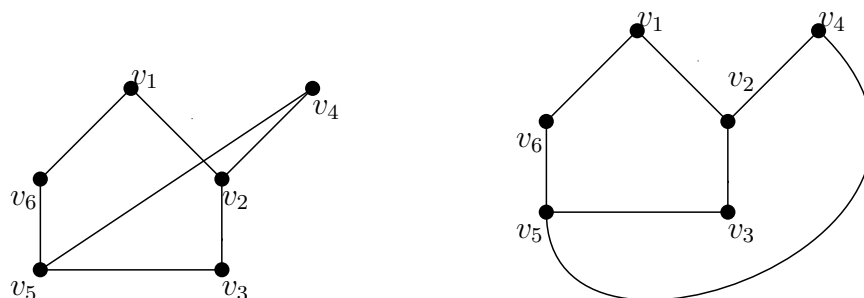


FIGURE 1.8 – Représentation planaire d'un graphe

Un graphe planaire découpe le plan en plusieurs régions :

- Une face f d'un graphe planaire G est une région du plan délimitée par des arêtes, qui ne contient ni sommet, ni arête dans son intérieur. L'unique face non bornée est appelée face extérieure de G . L'ensemble des faces d'un graphe planaire G est noté $F(G)$.

- Deux faces f_1 et f_2 de G sont dites adjacentes si elles ont au moins une arête commune. Deux faces qui se touchent que par un sommet ne sont pas adjacentes.
- Pour chaque face $f \in F(G)$, la frontière de f est l'ensemble des sommets et arêtes qui forment sa délimitation. Elle est composée d'un seul cycle.
- Le degré d'une face f , noté $r_G(f)$ (ou $r(f)$), est égal au nombre d'arêtes bordant f .

Le graphe de la Figure 1.9, comporte trois faces f_1, f_2 et la face extérieure f_3 . $r(f_1) = 3, r(f_2) = 4$.

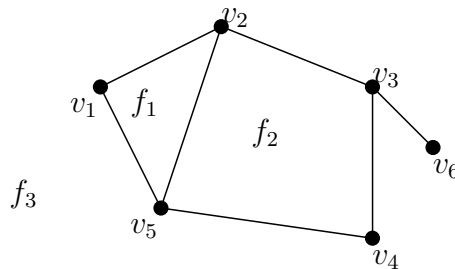


FIGURE 1.9 – Les faces de graphe G .

Lemme 1.2. [10] Pour tout graphe planaire $G = (V, E, F)$ on a :

$$\sum_{f \in F(G)} r_G(f) = 2|E|.$$

En 1752, Euler propose une formule établissant une relation entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un graphe planaire.

Théorème 1.3. [17] [Formule d'Euler] Si G est un graphe planaire connexe avec n sommets, m arêtes et f faces, alors :

$$f = m - n + 2.$$

Subdiviser une arête uv dans un graphe revient à remplacer uv par une chaîne uvw en ajoutant un sommet w . On dit qu'un graphe H est une subdivision d'un graphe G s'il peut être obtenu à partir de G en subdivisant des arêtes de G .

En 1930, K. Kuratowski [33] a établi la caractérisation suivante des graphes planaires :

Théorème 1.4. Un graphe fini est planaire si et seulement s'il ne contient pas de sous graphe partiel qui est une subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$.

1.2.6 Graphe planaire extérieur

Un graphe planaire G est un graphe planaire extérieur, s'il peut être dessiné dans le plan sans croisements de telle façon que tous les sommets appartiennent à la face extérieure. (voir la Figure 1.10)

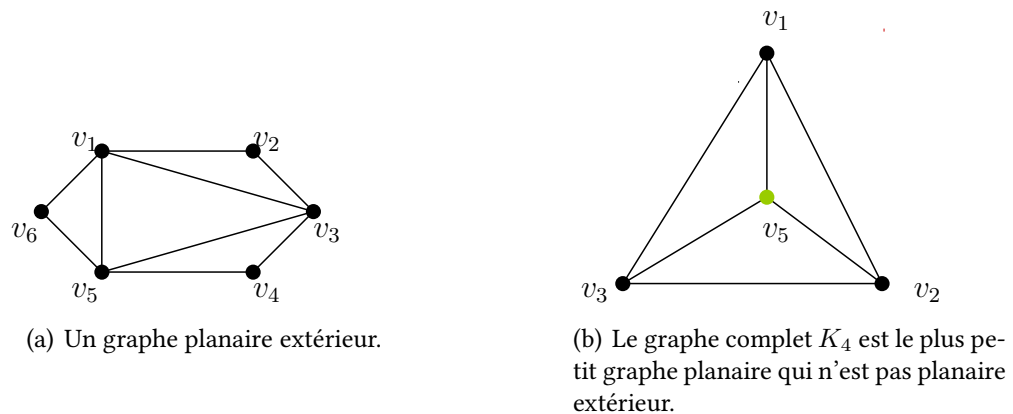


FIGURE 1.10 – Un graphe planaire extérieur et graphe non planaire extérieur.

1.2.7 Graphe triangulé

Un graphe est dit triangulé si tout cycle de longueur au moins quatre contient une corde. (voir la Figure 1.11).

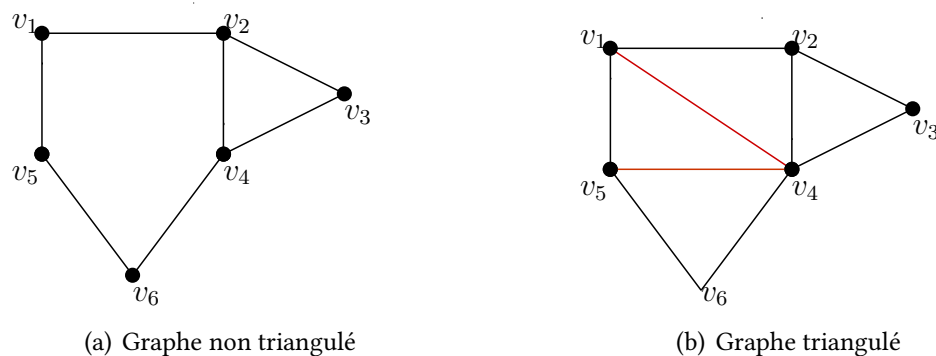


FIGURE 1.11 – Un graphe non triangulé et triangulé.

La roue d'ordre n , notée W_n , est le graphe formé d'un cycle C_{n-1} avec un sommet supplémentaire qui est adjacent à tous les sommets de ce cycle. Par exemple, le graphe complet d'ordre 4 est la roue d'ordre 4, $K_4 = W_4$ (Voir la figure 1.10(b)).

1.2.8 Graphe d -dégénéré

Un graphe G est d -dégénéré si et seulement si tout sous graphe de G contient un sommet de degré au plus d , le graphe planaire est 5-dégénéré.

1.2.9 Graphe représentatif des arêtes

Le graphe représentatif des arêtes (Line graph) d'un graphe G est le graphe, noté $L(G)$, tel que chaque sommet de $L(G)$ représente une arête de G . Deux sommets de $L(G)$ sont adjacents

si et seulement si les arêtes correspondantes dans G sont adjacentes. (voir la Figure 1.12)

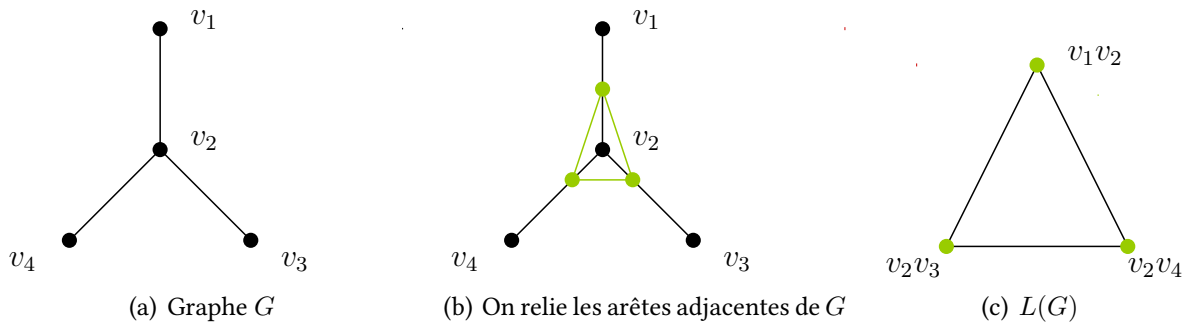


FIGURE 1.12 – Graphe représentatif des arêtes.

1.2.10 Graphe k -puissance

Un graphe k -puissance, noté G^k , de G est le graphe obtenu à partir de G en reliant par une arête toute paire de sommets à distance k ou moins, avec $k \geq 1$.

Le graphe G^2 est appelé le carré de G (voir la Figure 1.13)

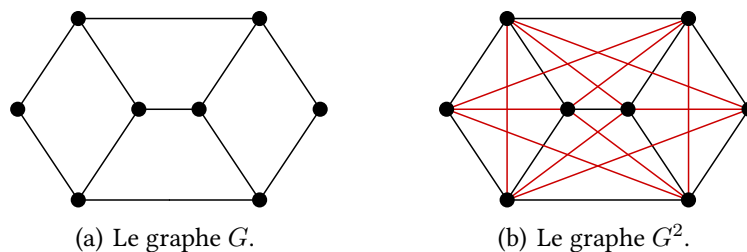


FIGURE 1.13 – Graphe 2-puissance.

1.2.11 Graphe orienté

Un graphe orienté D est défini par une paire $(V(D), A(D))$, où $V(D)$ est un ensemble non vide fini de sommets et $A(D)$ est un ensemble fini de paires ordonnées de sommets dont les éléments sont appelés arcs. On note \vec{uv} le couple de sommets (u, v) . (voir Figure 1.14)

Un graphe orienté est dit *symétrique* si pour tout arc \vec{uv} , le graphe contient également l'arc \vec{vu} . À l'inverse, un graphe orienté est *antisymétrique* si pour tout arc \vec{uv} existant dans le graphe, l'arc \vec{vu} n'existe pas. Pour éviter toute confusion, lorsque le graphe considéré ne sera pas nécessairement antisymétrique, nous parlerons de *digraphe*.

On note $d_D^+(v)$ (respectivement, $d_D^-(v)$) le degré sortant (respectivement, entrant) du sommet v , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant v comme extrémité initiale (respectivement, finale)

dans D . Un sommet v tel que $d_D^+(v) = 0$ est appelé *sommet puits* (ou simplement *puits*). Inversement, un sommet v tel que $d_D^-(v) = 0$ est appelé *sommet source* (ou simplement *source*).

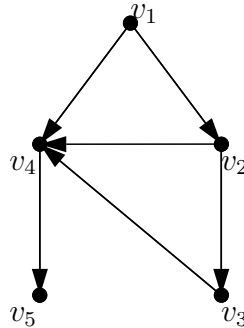


FIGURE 1.14 – Graphe orienté D

1.3 Aperçu sur la coloration de graphe

L'un des domaines le plus étudié en théorie des graphes est celui de la coloration des graphes. En effet, de nombreux problèmes réels tels que les problèmes d'ordonnancements ou encore d'allocations de fréquences se traduisent comme une partition d'ensemble d'objets (sommets, arêtes, faces, ...) en plusieurs classes suivant certaines contraintes. Il existe une grande variété de problèmes de colorations où il est question de rechercher des structures optimales particulières. De nombreux résultats de coloration ainsi que de nombreux problèmes ouverts sont rassemblés dans l'ouvrage de Jensen et Toft [30].

1.3.1 Coloration propre des sommets

Définition 1.5. Une k -coloration propre des sommets d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ est une application ϕ de l'ensemble des sommets $V(G)$ dans l'ensemble des entiers de couleurs $\{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux sommets adjacents dans G reçoivent des couleurs différentes, c-à-d, pour toute arête $uv \in E(G)$, $\phi(u) \neq \phi(v)$. Un graphe qui admet une k -coloration propre des sommets est dit k -colorable.

Le nombre chromatique, noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k telle que G admet une k -coloration propre des sommets.

La Figure 1.15(a) représente une 4-coloration propre des sommets du graphe $W_7 \setminus \{e\}$, mais le nombre de couleur utilisé n'est pas minimum. Le nombre chromatique de G vérifie : $\chi(W_7 \setminus \{e\}) \geq 3$, car G contient un C_3 . Donc, au moins 3 couleurs sont nécessaires pour colorer le graphe. Comme il existe une coloration utilisant 3 couleurs (voir Figure 1.15(b)), alors $\chi(W_7 \setminus \{e\}) \leq 3$. On conclue que $\chi(W_7 \setminus \{e\}) = 3$.

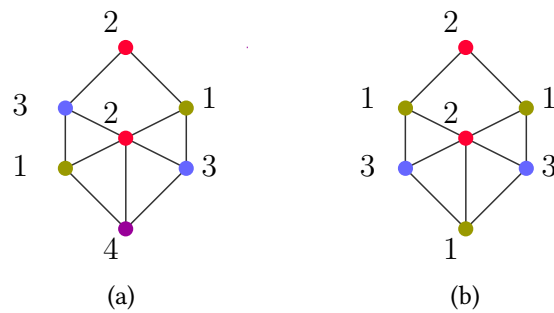


FIGURE 1.15 – Coloration propre des sommets de $W_7 \setminus \{e\}$

Remarque 1.6. Une k -coloration propre des sommets d'une graphe G est donc une partition de l'ensemble des sommets de G en k stables.

En 1941, Brooks [11], a proposé une majoration de $\chi(G)$ en fonction de $\Delta(G)$.

Théorème 1.7. [41] Pour tout graphe connexe G de degré maximum $\Delta(G)$, si G n'est ni un cycle d'ordre impair, ni un graphe complet, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$. De plus, si G est un graphe complet ou un cycle impair, alors $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Le théorème suivant donne une caractérisation des graphes pour lesquels le nombre chromatique est égal à 2.

Théorème 1.8. [45] Soit G un graphe de taille $m \geq 1$. Alors $\chi(G) = 2$ si et seulement si G est un graphe biparti.

Le nombre chromatique d'un sous graphe H de G est une borne inférieure du nombre chromatique du graphe G .

Théorème 1.9. [45] Si H est un sous graphe de G , alors $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Une autre borne inférieure du nombre chromatique d'un graphe G est donnée en fonction de la taille maximum d'une clique $\omega(G)$. En effet, si G contient une clique d'ordre k , alors d'après le Théorème 1.9, il faut au moins k couleurs pour le colorer.

Théorème 1.10. [45] Pour tout graphe G on a : $\chi(G) \geq \omega(G)$

Parmi les nombreux résultats relatifs au nombre chromatique nous pouvons citer le célèbre résultat de Appel et Haken [4, 5], obtenu en 1970 à l'aide d'un ordinateur.

Théorème 1.11. [4, 5] Si G est un graphe planaire, alors $\chi(G) \leq 4$.

1.3.2 Coloration propre des arêtes

Définition 1.12. Une k -coloration propre des arêtes d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ est une application ϕ de l'ensemble des arêtes $E(G)$ dans l'ensemble des entiers de couleurs $\{1, 2, \dots, k\}$, de telle sorte que deux arêtes adjacentes dans G reçoivent des couleurs différentes. Formellement, $\phi(e) \neq \phi(f)$ pour chaque deux arêtes adjacentes e et f de G . Un graphe G est k -arête-colorable s'il existe une k -coloration d'arêtes de G .

L'indice chromatique de G , noté $\chi'(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaire pour une coloration des arêtes de G .

Remarque 1.13.

- Une coloration des arêtes d'un graphe G correspond à la coloration propre des sommets de son graphe représentatif des arêtes $L(G)$. Nous avons donc $\chi'(G) = \chi(L(G))$.
- Une k -coloration propre des arêtes d'une graphe G est donc une partition de l'ensemble des arêtes de G en k couplage.

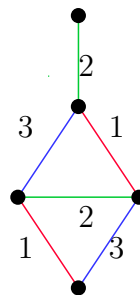


FIGURE 1.16 – 3-coloration des arêtes.

La 3-coloration propre des arêtes du graphe G représentée dans la Figure 1.16 possède un nombre minimum de couleurs. En effet, l'indice chromatique de G vérifie : $3 \leq \chi'(G)$ car il contient un C_3 . Au moins 3 couleurs sont nécessaire pour colorer le graphe G . Comme il existe une coloration utilisant 3 couleurs d'après la Figure 1.16, $\chi'(G) \leq 3$. D'où, $\chi'(G) = 3$.

En 1964, Vizing [40] a donné un résultat le plus important sur l'indice chromatique :

Théorème 1.14. [40] Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$ on a : $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Ainsi, on peut classifier les graphes en deux classes selon leurs indice chromatique : la première classe contient les graphes tel que $\chi'(G) = \Delta(G)$ et la deuxième contient les graphes tel que $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

1.4 Méthode de déchargement

Une des techniques de démonstration qui intervient et qui joue un rôle décisif dans les preuves du théorème des quatre couleurs est la méthode de déchargement. Cette dernière, est apparue pour la première fois en 1904, lorsque Wernicke a prouvé un lemme structurel sur les graphes planaires. La méthode de déchargement [22, 31] permet de résoudre de nombreux problèmes en théorie des graphes. Elle est plus utilisée pour prouver des assertions structurelles, et intervient plus particulièrement, dans les problèmes de coloration des graphes planaires et des graphes de densité faible (les graphes de degré moyen maximum borné).

1.4.1 Description de la méthode de déchargement

Supposons que l'on veuille montrer que la classe de graphe \mathcal{G} satisfait une propriété P . La méthode de déchargement s'effectue selon les 5 étapes suivantes :

Étape 1 : On suppose que $G \in \mathcal{G}$ est un graphe qui ne satisfait pas la propriété P . Soit \mathcal{S} un ensemble associé aux éléments de ce graphe (cela peut être les sommets, les arêtes ou les faces), qui vérifie certaines propriétés.

Étape 2 : On assigne à chaque élément a de \mathcal{S} un poids initial $\omega(a)$.

Étape 3 : On définit des règles de déchargement appropriées, puis on effectue le processus de déchargement, autour de \mathcal{S} , qui laisse le poids total constant et inchangé. À la fin de cette étape, on obtient une nouvelle fonction ω^* pour tout élément a de \mathcal{S} .

Étape 4 : On calcule le nouveau poids $\omega^*(a)$ pour tout $a \in \mathcal{S}$.

Étape 5 : On montre que la somme totale des nouveaux poids est différente de la somme totale des poids initiaux : $\sum_{a \in \mathcal{S}} \omega^*(a) \neq \sum_{a \in \mathcal{S}} \omega(a)$. Cette contradiction montre que le contre-exemple G ne peut pas exister. Par conséquent, tout graphe dans \mathcal{G} possède la propriété P .

Chapitre 2

Coloration d'incidences

Nous rappelons que l'objet principal de notre mémoire est de déterminer le nombre chromatique d'incidences dans les graphes planaires. La littérature joue un rôle de premier plan dans une telle étude.

Dans ce chapitre, nous introduisons d'abord le concept de la coloration d'incidences dans les graphes et quelques autres notions qui nous seront utiles. Nous donnerons un exemple d'application d'une telle coloration. Nous présenterons ensuite un certain nombre de résultats obtenus sur le nombre chromatique d'incidences de graphes. Nous nous intéresserons aussi respectivement aux liens existant entre la coloration d'incidences et la coloration forte des arêtes, l'étoile arboricité et la coloration à distance 2. Enfin, nous exposerons quelques variantes de la coloration d'incidences. Pour plus de précisions nous renvoyons le lecteur au résumé mis en ligne par Sopena [39].

2.1 Introduction

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une incidence de G est un couple (v, e) où $v \in V$ et $e \in E$ avec e incidente à v (une incidence peut ainsi être assimilée à une "demi-arête"). On note par $I(G)$ l'ensemble de toutes les incidences du graphe G :

$$I(G) = \{(v, e) : v \in V, e \in E \text{ et } e \text{ incidente à } v\}$$

Deux incidences (v, e) et (w, f) sont adjacentes si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- (a) $v = w$;
- (b) $e = f$;
- (c) $e = vw$ ou $f = vw$

Les conditions (a), (b) et (c) sont représentées dans la Figure 2.1. Les incidences notées $*$ sont adjacentes et les incidences notées \square sont non adjacentes.

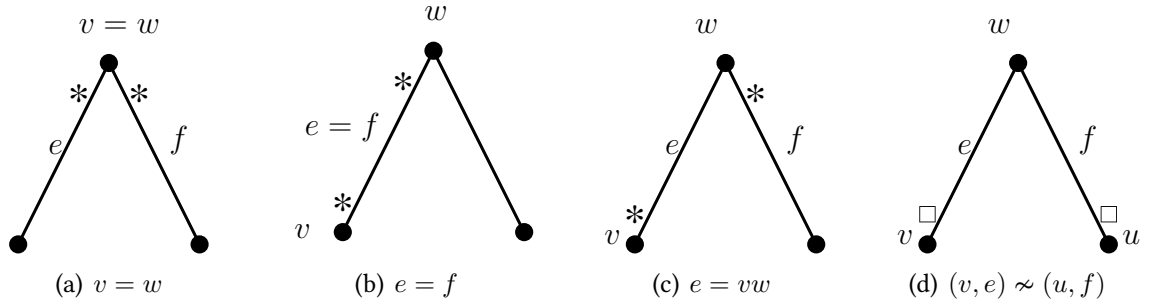


FIGURE 2.1 – Adjacence entre deux incidences

Notations : Pour un sommet $v \in V(G)$, nous notons A_v l'ensemble des incidences de la forme (w, vw) et I_v l'ensemble des incidences de la forme (v, vw) . (voir la Figure 2.2)

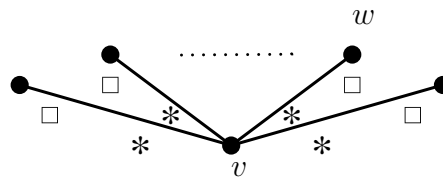


FIGURE 2.2 – $I_v = \{ \text{incidences notées } * \}$ et $A_v = \{ \text{incidences notées } \square \}$

Dans la Figure 2.3, l'ensemble des incidences I_u du sommet u est $I_u = \{(u, ux), (u, uw), (u, uv)\}$ et son ensemble $A_u = \{(x, xu), (w, wu), (v, vu)\}$. L'incidence (u, ux) est adjacente à toutes les incidences appartenant à l'ensemble $I_u \cup A_u \cup I_x$.

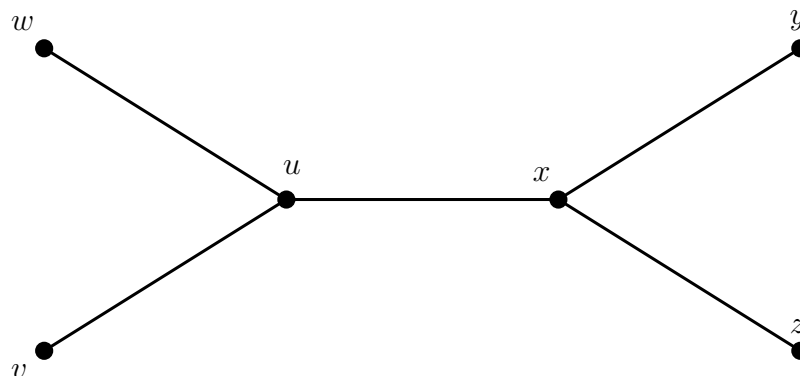


FIGURE 2.3 – Incidences adjacentes

2.2 Nombre chromatique d'incidences

Définition 2.1. Une k -coloration d'incidence d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ est une application ϕ de l'ensemble des incidences $I(G)$ dans l'ensemble des entiers de couleurs $\{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux incidences adjacentes dans G reçoivent des couleurs différentes. Un graphe qui admet une k -coloration d'incidence est dit k -colorable.

Le nombre chromatique d'incidence de G , noté $\chi_i(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration d'incidences.

Dans la Figure 2.4, on propose une 5-coloration d'incidences du graphe G . Il est facile de voir que $\chi_i(G) = 5$. En effet, pour colorer les incidences appartenant à $I_v = \{(v, vw), (v, vy), (v, vu), (v, vz)\}$, nous avons besoin de 4 couleurs distinctes. De plus, il nous faut au moins une couleur supplémentaire pour colorer les incidences appartenant à $A_v = \{(u, uv), (z, zv), (w, wv), (y, yv)\}$. On obtient, donc $\chi_i(G) \geq 5$.

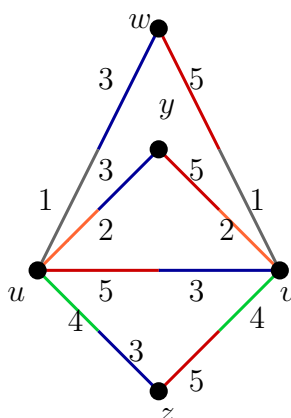


FIGURE 2.4 – 5-coloration d'incidences.

2.3 Bornes générales sur le nombre chromatique d'incidences

La coloration d'incidences a été introduite par Brualdi et Massey [12] en 1993, dans le but d'étudier l'indice chromatique fort des graphes bipartis. Ils proposent la borne inférieure suivante :

Proposition 2.2. Pour tout graphe G possédant au moins une arête, $\chi_i(G) \geq \Delta(G) + 1$.

En effet, si on considère un graphe possédant au moins une arête et v un sommet de degré $\Delta(G)$, il n'est pas difficile de voir que nous avons besoin de $\Delta(G)$ couleurs distinctes pour

colorer les incidences de I_v et d'au moins une couleur pour colorer les incidences de A_v . On obtient donc $\chi_i(G) \geq \Delta(G) + 1$.

De plus, Brualdi et Massey [12] ont établi la borne supérieure suivante :

Théorème 2.3. [12] *Pour tout graphe G , $\chi_i(G) \leq 2\Delta(G)$.*

De plus, Hosseini Dolama [16] montre que le nombre chromatique d'un cycle pair est égal à 4. Donc, la borne supérieure du Théorème 2.3 est optimale. Brualdi et Massey [12] ont proposé la (*ICC*) conjecture suivante :

Conjecture 2.4. [12] *Pour tout graphe G , $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

En 1997, Guiduli [21] a montré que cette conjecture est fautive en donnant une classe de graphe ayant un nombre chromatique d'incidences d'au moins $\Delta(G) + \Omega(\log(\Delta(G)))$. Guiduli [21] a montré aussi une nouvelle borne supérieure pour le nombre chromatique d'incidences.

Théorème 2.5. [21] *Pour tout graphe G , $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 20 \log(\Delta(G)) + 84$.*

2.4 (k, ℓ) -coloration d'incidences

Une (k, ℓ) -coloration d'incidences est une notion très forte de la coloration d'incidences. Elle a été introduite en 2004 par Hosseini Dolama, Sopena et Zhu [25].

Définition 2.6. [25] *Une (k, ℓ) -coloration d'incidences d'un graphe G est une k -coloration d'incidences ϕ telle que pour tout sommet v de $V(G)$, $|\phi(A_v)| \leq \ell$. Où $\phi(A_v)$ est l'ensemble des couleurs utilisés pour colorer les incidences de A_v . On note par $\chi_{i,\ell}(G)$, le plus petit entier k tel que G admet une (k, ℓ) -coloration d'incidences.*

Autrement dit, pour tout graphe G , on peut construire une coloration d'incidences telle que pour tout sommet u , le nombre de couleurs utilisé pour les incidences de la forme (v, vu) est borné par une constante indépendante du degré maximum du graphe. Dans la Figure 2.5, on propose une $(4, 2)$ -coloration d'incidences de G . On a $\phi(A_v) = \{4\}$, $\phi(A_u) = \{2\}$, $\phi(A_y) = \{1, 3\}$, $\phi(A_z) = \{1\}$, $\phi(A_w) = \{3\}$ alors $\forall x \in V$, $|\phi(A_x)| \leq 2$.

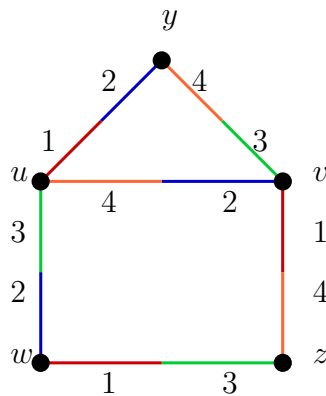


FIGURE 2.5 – $(4, 2)$ -coloration d'incidences.

2.5 Exemple d'application

L'étude de la coloration d'incidences peut être appliquée pour modéliser des problèmes réel comme le problème d'assignation de fréquences [13].

Supposons que nous avons un ensemble d'émetteurs-récepteurs, et que chacun d'entre eux souhaite communiquer avec un certain nombre d'autres émetteurs (ses "voisins"), avec un certain nombre de contraintes sur les fréquences pour éviter les interférences. Pour chaque paire d'émetteurs-récepteurs u et v en communication :

- La fréquence utilisée par u pour contacter v est différente de celle utilisée par v pour contacter u .
- u utilise une fréquence différente pour contacter chacun de ses voisins.
- La fréquence qu'utilise u pour contacter v est différente de toutes les fréquences qu'utilise v pour émettre, et distincte de toutes celles qui sont utilisées pour communiquer avec u .

Cette assignation de fréquences correspond à une coloration d'incidences d'un graphe G , si chaque sommet correspond à un émetteur, chaque arête correspond à une communication entre deux émetteurs, et que la couleur de chaque incidence (u, uv) correspond à la fréquence utilisée par u pour communiquer avec v .

La résolution de ce problème est équivalente à la recherche d'une k -coloration d'incidences d'un graphe.

2.6 Coloration d'incidences de quelques classes de graphes

La coloration d'incidences de graphes a largement été étudiée. De nombreux auteurs ont considéré la valeur de $\chi_i(G)$ pour quelques classes particulières de graphes.

Il est clair que pour chaque chaîne P_n , avec $n \geq 3$, $\chi_i(P_n) = 3$ car pour tout sommet v de P_n , on a $|\phi(I_v)| \leq 2$ et $|\phi(A_v)| = 1$ alors $\chi_i(P_n) \leq 3$ de plus le nombre minimum nécessaire pour colorer la chaîne P_n est 3 alors $\chi_i(P_n) \geq 3$.

Concernant les cycles, on a le résultat suivant :

Proposition 2.7. [16] Pour tout entier $n \geq 3$, $\chi_i(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ est multiple de } 3; \\ 4 & \text{sinon.} \end{cases}$

En 1993, Brualdi et Massey [12] ont étudié le nombre chromatique d'incidences du graphe complet K_n , biparti complet $K_{m,n}$ et d'un arbre T .

Théorème 2.8. [12]

1. Pour tout entier $n \geq 2$, $\chi_i(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$.
2. Pour tous entiers $m \geq n \geq 2$, $\chi_i(K_{m,n}) = m + 2 = \Delta(K_{m,n}) + 2$.
3. Pour tout arbre d'ordre $n \geq 2$, $\chi_i(T) = \Delta(T) + 1$.

Hosseini Dolama et al. [25] se sont intéressés au problème de la coloration d'incidences des graphes k -dégénérés. Ils montrent que si G est un graphe k -dégénéré, alors G admet une $(\Delta(G) + 2k - 1, k)$ -coloration d'incidences.

En 1995, Jensen et Toft dans [29] proposent un algorithme qui permet de calculer le degré moyen d'un graphe en un temps polynomial.

Comme pour tout entier k , un graphe G avec $\text{mad}(G) < k$ est $(k - 1)$ -dégénéré, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.9. Soient k un entier et G un graphe. Si $\text{mad}(G) < k$ alors G admet une $(\Delta(G) + 2k - 3, k - 1)$ -coloration d'incidences.

En attribuant une borne inférieure au degré maximum $\Delta(G)$ de G , Bonamy et al. ont réduit le nombre de couleurs nécessaires pour avoir une coloration d'incidences. Ils prouvent le théorème suivant :

Théorème 2.10. [8] Soient k un entier, et G un graphe de degré maximum $\Delta(G)$ et de degré moyen maximum $\text{mad}(G) < k$.

1. Si $\Delta(G) \geq \frac{k^2}{2} + \frac{3k}{2} - 2$, alors G admet une $(\Delta(G) + k - 1, k - 1)$ -coloration d'incidences.
2. Pour tout $\alpha > 0$, si $\Delta(G) \geq \frac{3\alpha+1}{2\alpha}k - 2$, alors G admet une $(\Delta(G) + (1 + \alpha)k - 1, (1 + \alpha)k - 1)$ -coloration d'incidences.

En 2005, Maydanskiy [34] a prouvé que la (ICC) conjecture est valable pour tous les graphes avec $\Delta(G) \leq 3$. Ils montrent que pour tout graphe G avec $\Delta(G) \leq 3$, $\chi_i(G) \leq 5$.

2.7 Coloration d'incidences et coloration forte d'arêtes

Définition 2.11. Une k -coloration forte d'arêtes d'un graphe G est une coloration propre des arêtes de G où deux arêtes qui ont en commun une arête voisine se voient attribuer des couleurs différentes. L'indice chromatique fort de G , noté $\chi'_s(G)$, est alors le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration forte d'arêtes.

Cette notion a été introduite en 1983 par Fouquet et Jolivet [19]. Dans la Figure 2.6, on donne une 5-coloration forte d'arêtes du graphe de Peterson.

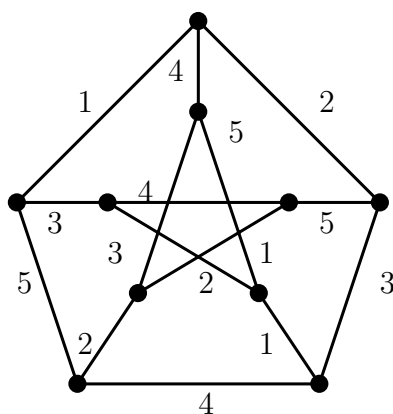


FIGURE 2.6 – 5-coloration forte des arêtes du graphe de Peterson.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On considère le graphe biparti $G' = (X \cup Y, E')$, obtenu à partir de G tel que, $X = V$, $Y = E$ et $E' = \{(v, e), v \in V, e \in E, v \text{ est incident à } e\}$ (i.e toute arête de G' correspond à une incidence de G). Si ϕ est une coloration d'incidences, alors l'application ϕ' définie pour toute arête ve dans G' par $\phi'(ve) = \phi(v, e)$ est une coloration forte d'arêtes de G' . On en déduit qu'une coloration d'incidences de G correspond à une coloration forte d'arêtes de G' . De même, si ϕ' est une coloration forte d'arêtes de G' , alors l'application ϕ définie pour toute incidence (v, e) de G par $\phi(v, e) = \phi'(ve)$ est une coloration d'incidences de G . On en déduit qu'une coloration forte d'arêtes G' correspond à une coloration d'incidences de G (voir Figure 2.7). On a alors :

$$\chi_i(G) = \chi'_s(G').$$

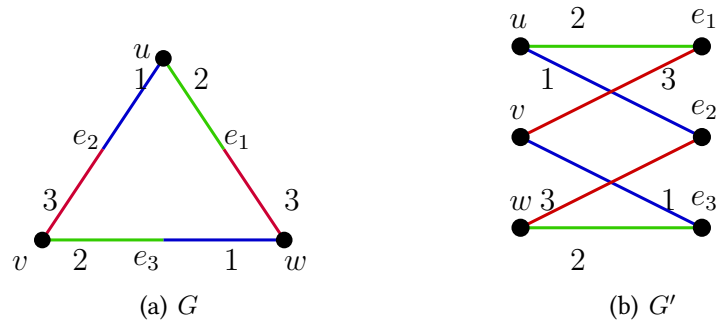


FIGURE 2.7 – Coloration d'incidences et coloration forte d'arêtes de K_3

2.7.1 Coloration d'incidences et étoile-arboricité

Algor et Alon [2] ont introduit la notion de l'étoile-arboricité orientée d'un digraphe.

Définition 2.12. Soit $D = (V, A)$ un digraphe. L'étoile arboricité orientée de D , notée $dst(D)$, est le nombre minimum de forêts d'étoiles sources arc-disjointes nécessaires pour couvrir les arcs de D où, une étoile source est une étoile dont les arcs sont orientés du centre vers les feuilles.

Guiduli [21] a montré que le concept de la coloration d'incidences correspond à un cas particulier de l'étoile arboricité orientée. Plus précisément, pour tout graphe G nous avons $\chi_i(G) = dst(S(G))$, où $S(G)$ est le digraphe obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête de G par deux arcs opposés. La Figure 2.8 représente le graphe $S(K_3)$ et une famille des forêts d'étoiles orientées.

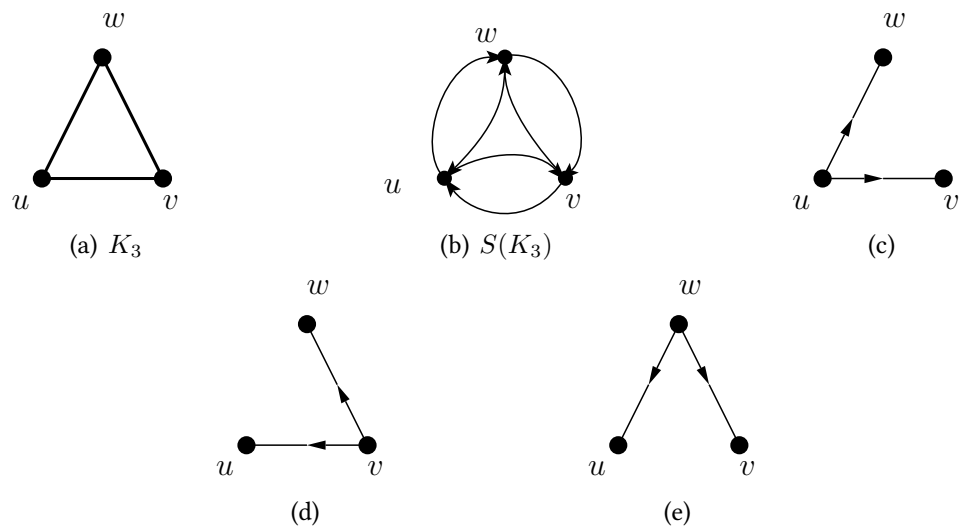


FIGURE 2.8 – $dst(G) = \chi_i(G) = 3$.

2.7.2 Coloration d'incidences et coloration à distance deux

Définition 2.13. Une k -coloration à distance deux d'un graphe G est une coloration propre de sommets, telle que deux sommets à distance au plus deux reçoivent deux couleurs différentes. Le nombre chromatique à distance deux, noté $\chi_2(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration à distance deux.

Il est clair que la coloration à distance deux d'un graphe G n'est autre que coloration propre de G^2 . Donc, $\chi_2(G) = \chi(G^2)$. Hosseini Dolama [16] a observé que si σ est une k -coloration à distance deux d'un graphe G alors l'application ϕ définie par $\phi(u, uv) = \sigma(v)$ pour toute incidence $(u, uv) \in I(G)$ est une $(k, 1)$ -coloration d'incidence de G . De plus, si ϕ est une $(k, 1)$ -coloration d'incidence alors l'application σ définie par $\sigma(v) = \phi(u, uv)$ pour tout $v \in V(G)$ où $u \in N(v)$ est un voisin quelconque de v , est une k -coloration à distance deux de G . (voir la Figure 2.9)

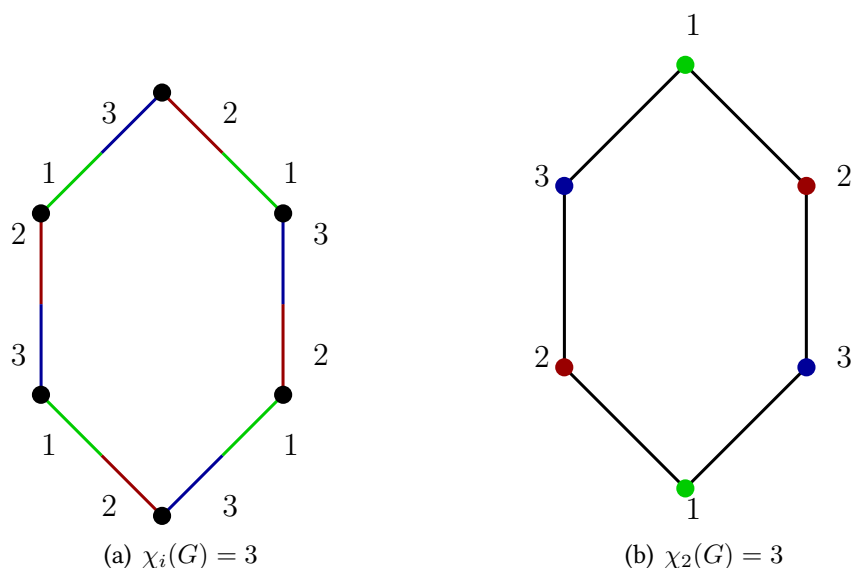


FIGURE 2.9 – $\chi_i(G) = \chi_2(G) = 3$.

2.8 Quelques variantes autour de la coloration d'incidences

2.8.1 Jeu de coloration d'incidences

Le jeu de coloration d'un graphe G est un jeu à deux joueurs. Considérons le jeu de coloration de graphe défini comme suit : Soient un graphe et un ensemble $C = \{1, 2, \dots, k\}$ de couleurs. Deux joueurs Alice et Bob essaient de colorer alternativement et proprement les sommets d'un graphe G avec l'une des k couleurs de C . Alice commence à jouer et la partie

s'arrête lorsque plus aucun sommet de G n'est proprement colorable. Si le graphe G est complètement coloré alors Alice gagne la partie, sinon c'est Bob qui gagne. L'objectif d'Alice est donc de colorer tout le graphe alors que Bob doit tenter de l'en empêcher. Le plus petit entier k pour lequel Alice a une stratégie gagnante dans un jeu de coloration de G est appelé le nombre chromatique ludique, on le note par $\chi_g(G)$.

La notion de jeu de coloration a été introduite en 1981 par Brams [20] puis réinventé par Bodlaender [7] dix ans plus tard. En 2009, Andres [3] a introduit la notion de jeu de coloration d'incidences

Définition 2.14. *Soient Alice et Bob deux joueurs qui essaient de colorer alternativement les incidences d'un graphe G . Chaque joueur doit affecter une couleur prise dans l'ensemble $C = \{1, 2, \dots, k\}$, de façon telle que deux incidences adjacentes reçoivent des couleurs différentes. Alice commence à jouer et la partie s'arrête lorsque plus aucune incidence de G n'est proprement colorable. Alice gagne si toutes les incidences de G sont colorées, et Bob gagne s'il est impossible de finir la coloration.*

Le plus petit entier k pour lequel Alice a une stratégie gagnante dans un jeu de coloration d'incidences de G est appelé le nombre chromatique ludique d'incidences et on le note par $i_g(G)$.

Dans [3], Andres donne des bornes triviales de $i_g(G)$ pour tout graphe G . Il a aussi considéré la valeur de $i_g(G)$ pour quelques classes particulières de graphes : les cycles, les chaînes, les étoiles, la roue, les graphes planaires, les graphes planaires extérieurs et les graphes d -dégénérés. Pour plus d'information sur cet invariant, nous renvoyons le lecteur aux références [14, 32].

2.8.2 Coloration fractionnaire d'incidences

Définition 2.15. *Une (k, t) -coloration d'un graphe G est une application qui associe t couleurs parmi un ensemble de k couleurs à chaque sommet de G , de sorte que deux sommets adjacents aient des ensembles de couleurs disjoints. Lorsque $t = 1$, on retrouve la k -coloration propre de G . Le nombre chromatique fractionnaire $\chi_f(G)$ est le minimum du ratio $\frac{k}{t}$ pour lequel G admet une (k, t) -coloration.*

Dans la Figure 2.10, on propose une $(5,2)$ -coloration du cycle d'ordre 5.

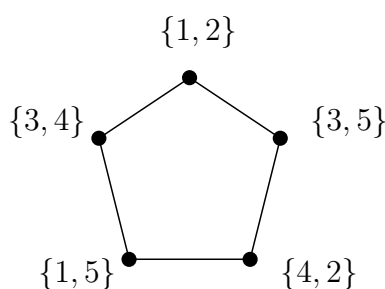


FIGURE 2.10 – Le graphe C_5 est $(5, 2)$ -coloriable et $\chi_f(C_5) = \frac{5}{2}$.

En 2012, Yang [44] a introduit la version incidence de cette coloration.

Définition 2.16. Une (k, t) -coloration d'incidences d'un graphe G est une application qui associe t couleurs parmi un ensemble de k couleurs à chaque incidence de G , de sorte que deux incidences adjacentes aient des ensembles de couleurs disjoints. Lorsque $t = 1$, on retrouve la k -coloration d'incidences de G . Le nombre chromatique fractionnaire d'incidences, noté $\chi_f(G)$, est le minimum du ratio $\frac{k}{t}$ pour lequel G admet une (k, t) -coloration d'incidences.

Dans [44], Yang a généralisé les résultats de Guiduli [21] qui concernent la coloration d'incidences de G . Ainsi, il montre que le nombre chromatique fractionnaire d'incidences d'un graphe G est au plus $\Delta(G) + 20 \log(G) + 84$. De plus, il donne un exemple de graphe pour lequel le nombre chromatique fractionnaire d'incidences est d'au moins $\Delta(G) + \Omega(\log(\Delta(G)))$.

2.8.3 Coloration intervalle d'incidences

Un sous-ensemble A de \mathbb{N} est un intervalle si et seulement s'il contient tous les entiers entre $\min(A)$ et $\max(A)$. En 1994, Asratian et Kamalian [6] ont introduit la notion de la coloration intervalle des arêtes. Janczewski, Malafiejska et Malafieski [27] ont défini la version incidences de ce type de coloration comme suit :

Définition 2.17. Une k -coloration intervalle d'incidences d'un graphe G est une k -coloration d'incidences ϕ , telle que pour tout sommet u de G , $\phi(I_u)$ est un intervalle. Le nombre chromatique intervalle d'incidence, noté $\chi_{ii}(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une k -coloration intervalle d'incidence.

Janczewski, Malafiejska et Malafieski [27] ont montré que la borne supérieure du nombre chromatique d'incidence présentée par Brualdi et Massey [12] dans le Théorème 2.3 reste valable pour le nombre chromatique intervalle d'incidences des graphes bipartis, cette borne est atteinte pour la classe de graphes bipartis réguliers. De plus, ils donnent une caractérisation complète des graphes bipartis de degré maximum au plus 3 qui admettent une coloration intervalle incidences utilisant 4, 5 ou 6 couleurs. Ils prouvent également que, pour les graphes bipartis ayant un degré maximum 4, le problème de décision associé à la recherche d'une

5-coloration intervalle d'incidences est facile, alors que celui associé à la recherche d'une 6-coloration intervalle d'incidences est NP-complet.

Janczewski, Malafiejska et Malafieski [28] ont étudié dans la coloration intervalle d'incidences de quelque classe particulière de graphe telle que les chaînes, les cycles, les étoiles, les roues, les graphes complets et les graphes k -bipartis complets.

Chapitre 3

Nombre chromatique d'incidences des graphes planaires

Dans ce chapitre nous mettons l'accent sur le nombre chromatique d'incidences des graphes planaires. Tout d'abord, nous présenterons un certain nombre de résultats obtenus sur le nombre chromatique d'incidences des graphes planaires extérieurs. Ensuite, nous donnerons les principaux résultats connus dans la littérature sur le nombre chromatique d'incidence des graphes planaires. Enfin, nous répondrons à la question posée par Hacquard et al. dans [23].

3.1 Nombre chromatique d'incidences des graphes planaires extérieurs

Hosseini Dolama, Sopena et Zhu [25] ont montré que tout graphe planaire extérieur admet une $(\Delta + 2, 2)$ -coloration d'incidences. Ainsi,

Théorème 3.1. [25] *Pour tout graphe planaire extérieur $\chi_i(G) \leq \Delta + 2$.*

De plus, cette borne est atteinte. En effet, d'après le Théorème 2.7, les cycles de longueur non divisible par 3 ont un nombre chromatique d'incidences égale à 4.

En 2002, Wang, Chen et Pang [42] ont réduit cette borne à $\Delta(G) + 1$ pour les graphes planaires extérieurs de degré maximum au plus 4. Quelques années plus tard, en 2008, Shiu et Sun dans [38], ont donné un exemple de graphe planaire extérieur de degré maximum 4 et qui n'admet pas de 5-coloration d'incidences. Ce qui démontre que la borne supérieure donnée par Wang, Chen et Pang [42] est fautive.

En attribuant une autre borne inférieure au degré maximum $\Delta(G)$ d'un graphe planaire extérieur G , Shiu et Sun [38] prouvent le théorème suivant :

Théorème 3.2. [38] *Pour tout graphe planaire extérieur avec $\Delta(G) \geq 7$, $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$.*

3.2 Quelques résultats sur les graphes planaires

Rappelons que tout graphe planaire est 5-dégénéré. Étant donné que tout graphe k -dégénéré G admet une $(\Delta(G) + 2k - 1, k)$ -coloration d'incidences, nous pouvons facilement déduire que tout graphe planaire G admet une $(\Delta + 9, 5)$ -coloration d'incidences. En utilisant un lemme structurel découlant de la formule d'Euler, Hosseini Dolama et al. [35] ont amélioré cette borne. En effet, ils montrent que tout graphe planaire G admet une $(\Delta(G) + 7, 7)$ -coloration d'incidence. Ce qui implique que la valeur de $\chi_i(G)$ est au plus $\Delta(G) + 7$.

En 2012, Yang [44] a obtenu une meilleure majoration pour le nombre chromatique d'incidences d'un graphe planaire, en prouvant le théorème suivant :

Théorème 3.3. [44] *Pour tout graphe planaire G , $\chi_i(G) \leq \begin{cases} \Delta(G) + 5 & \text{si } \Delta(G) \neq 6 \\ 12 & \text{si } \Delta(G) = 6 \end{cases}$*

Récemment, Kardoš, Maceková, Mockovčiaková, Sopena et Soták [18], ont améliorée encore une fois le cas où $\Delta(G) = 6$ par le théorème suivant :

Théorème 3.4. [18] *Si G est un graphe planaire avec $\Delta(G) = 6$ alors $\chi_i(G) \leq 10$.*

Plusieurs bornes ou valeurs exactes ont été trouvées pour cette classes de graphes en fonction de la maille g de G et de son degré maximum $\Delta(G)$. Dans la proposition suivante, nous recueillons des résultats connus dans la littérature concernant le nombre chromatique d'incidences des graphes planaires :

Proposition 3.5.

- $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$ pour tout graphe planaire G sans triangle. [24]
- $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 6$. [24]
- $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 6$ avec $\Delta(G) \geq 5$. [24]
- $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 11$. [24]
- $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 16$ avec $\Delta(G) \geq 4$. [24]
- $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 14$ avec $\Delta(G) \geq 4$. [9]
- $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 12$ avec $\Delta(G) \geq 5$. [26]
- $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 10$ avec $\Delta(G) \geq 6$. [26]
- $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 9$ avec $\Delta(G) \geq 8$. [9]
- $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 8$ avec $\Delta(G) \geq 10$. [26]
- $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 7$ avec $\Delta(G) \geq 16$. [26]

En 2017, Hocquard, Kerdjoudj et Raspaud [23] ont donné une borne supérieure de $\chi_i(G)$ pour le graphe planaire sans cycles de longueurs données.

Théorème 3.6. [23] Soit G un graphe planaire de degré maximum $\Delta(G)$.

1. Si G est sans C_3 adjacent à un C_4 alors $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$.
2. Si G est sans C_4 et C_5 alors $\chi_i(G) \leq \begin{cases} \Delta(G) + 3 & \text{si } \Delta(G) \neq 4. \\ 8 & \text{si } \Delta(G) = 4. \end{cases}$

Ils déduisent le Corollaire suivant :

Corollaire 3.7. [23] Si G est un graphe planaire sans C_4 alors $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$.

À la fin de cet article, les auteurs posent la question suivante :

Question 1. Pour tout graphe planaire G sans C_4 et C_5 , peut-on prouver que $\chi_i(G) \leq 7$ pour $\Delta(G) = 4$?

Nous avons répondu, dans ce mémoire, positivement à cette question en prouvant le théorème suivant :

Théorème 3.8. Si G est graphe planaire de degré maximum au plus 4, sans cycle de longueur 4 et 5, alors G admet une $(7, 3)$ -coloration d'incidences.

3.2.1 Preuve de Théorème 3.8

Considérons un contre-exemple H au Théorème 3.8 minimisant le nombre d'arêtes de H : H graphe planaire sans cycles de longueur 4 ou 5, n'admettant pas une $(7, 3)$ -coloration d'incidences, $\Delta(H) \leq 4$ et pour toute arête e , le graphe $H \setminus \{e\}$ admet une $(7, 3)$ -coloration d'incidences.

Par la suite nous allons exhiber un ensemble \mathcal{S} de configurations que H ne peut pas contenir compte tenu de sa minimalité. Nous définissons une fonction poids $\omega : V(H) \cup F(H) \rightarrow \mathbb{R}$ pour le graphe planaire H tel que la somme totale des poids est strictement négative d'après la formule d'Euler. Il nous reste à définir des règles de déchargement qui permettent de modifier les poids des sommets et des faces mais en conservant la somme totale de ces mêmes poids. En utilisant le fait que H est planaire de degré maximum au plus 4, sans cycles de longueurs 4 et 5 et que H ne contient aucune configuration de \mathcal{S} , nous montrons que les poids de tous les sommets et de toutes les faces de H sont positifs à la fin de la procédure de déchargement. Ce qui nous conduit à la contradiction suivante :

$$0 \leq \omega^*(x) = \omega(x) < 0$$

d'où, aucun contre-exemple au Théorème 3.8 ne peut exister.

Avant de démontrer le Théorème 3.8, commençons par introduire quelques notations, nécessaires à la compréhension de notre preuve.

Notations. Soit G un graphe planaire. Un sommet de degré k est appelé un k -sommet. On note $F(G)$ l'ensemble des faces de G et $r(f)$ le degré de la face f dans G . Une face de degré k est dite une k -face. Une k -face ayant les sommets x_1, x_2, \dots, x_k comme frontière dans cet ordre cyclique est notée par $[x_1x_2 \dots x_k]$. Un (k_1, k_2, k_3) -triangle est une 3-face $[xyz]$ avec $d(x) = k_1, d(y) = k_2$ et $d(z) = k_3$.

Dans toutes les figures et pour chaque configuration que nous présentons dans ce document, nous utilisons la convention graphique suivante : les sommets en noir ont un degré fixe et les sommets en blanc ont un degré quelconque.

Définition 3.9. [25] Une coloration d'incidences partielle ϕ' de G , est une coloration d'incidences définie uniquement pour un sous ensemble I de $I(G)$. Pour chaque incidence non colorée $(u, uv) \in I(G) \setminus I$, on définit l'ensemble $F_G^{\phi'}(u, uv)$ comme étant l'ensemble des couleurs interdites pour colorer l'incidence (u, uv) . Autrement dit :

$$F_G^{\phi'}(u, uv) = \phi'(A_u) \cup \phi'(I_u) \cup \phi'(I_v).$$

3.2.1.1 Propriétés structurelles de H .

Observation 3.10. On peut supposer que H est un graphe connexe ; sinon, par minimalité de H , on peut colorer indépendamment chacune des composantes connexes.

H satisfait les propriétés suivantes :

Lemme 3.11. Le contre-exemple H ne contient pas de :

1. 1-sommet.
2. 2-sommet.
3. $(3, 4, 4)$ -triangle.

Démonstration. Pour prouver le Lemme 3.11, nous supposons par contradiction que les configurations décrites dans H existent. Puis, nous construisons un graphe H' obtenu à partir de H en supprimant une arête de H . Le graphe H' ne contient pas de cycles de longueurs 4 et 5. Par minimalité de H , le graphe H' admet une $(7, 3)$ -coloration d'incidences. Finalement, pour chaque cas, on prouve une contradiction en étendant ϕ' à une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H .

1. Supposons que H contient un 1-sommet u . Soit v son unique voisin (voir la Figure 3.1). Considérons le graphe $H' = H \setminus \{uv\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous allons étendre la coloration ϕ' à une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit :

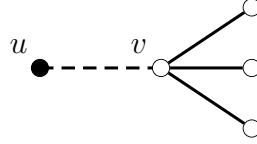


FIGURE 3.1 – Configuration réductible du Lemme 3.11.1

Puisque pour tout $w \in V(H')$, $|\phi'(A_w)| \leq 3$, nous avons

$$|F_H^\phi(v, vu)| = |\phi(I_v) \cup \phi(A_v) \cup \phi(I_u)| \leq \Delta(H) - 1 + 3 + 0 = \Delta(H) + 2 = 4 + 2 = 6,$$

il existe au moins une couleur, disons α , telle que $\alpha \notin F_H^\phi(v, vu)$. On pose $\phi(v, vu) = \alpha$ et on remarque que $|\phi(A_u)| = 1 \leq 3$. Il suffit de définir $\phi(u, uv) = \beta$ pour toute couleur $\beta \in \phi'(A_v)$. D'où nous avons étendu la coloration ϕ à H , contradiction.

2. Supposons que H contient un 2-sommet u . Soient v, w ces deux voisins (voir la Figure 3.2). Considérons $H' = H \setminus \{uv\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous allons étendre ϕ' à une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit :

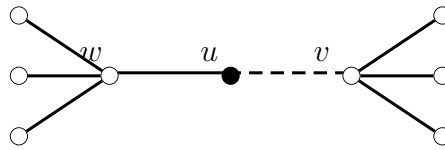


FIGURE 3.2 – Configuration réductible du Lemme 3.11.2

On décolore l'incidence (u, uw) et on suppose que $\phi'(w, wu) = \alpha$. Nous avons

$$|F_H^\phi(v, vu)| = |\phi(I_v) \cup \phi(A_v) \cup \phi(I_u)| \leq 4 - 1 + 3 + 0 = 4 + 2 = 6,$$

il existe au moins une couleur $\beta \notin F_H^\phi(v, vu)$, on pose $\phi(v, vu) = \beta$, et $|\phi(A_u)| \leq 2 \leq 3$. Pour colorer l'incidence (u, uv) , nous considérons les deux cas suivants :

- (a) Si $|\phi'(A_v)| = 3$, alors on colore (u, uv) avec une couleur $\gamma \in \phi'(A_v) \setminus \{\alpha\}$ (notons que $\beta \notin \phi'(A_v)$).

- (b) Si $|\phi'(A_v)| \leq 2$, alors on colore (u, uv) avec une couleur $\gamma \notin F_H^{\phi'}(u, uv)$ (notons que nous avons deux choix). On peut constater que $|\phi(A_v)| \leq 3$.

Maintenant, on colore l'incidence (u, uw) comme suit :

- (a) Si $|\phi'(A_w)| = 3$, alors on colore (u, uw) avec une couleur $\zeta \in \phi'(A_w) \setminus \{\beta, \gamma\}$ et nous avons $|\phi(A_w)| = 3$.
- (b) Si $|\phi'(A_w)| \leq 2$, alors on colore (u, uw) avec une couleur $\zeta \notin F_H^{\phi'}(u, uw)$ et on a $|\phi(A_w)| \leq 3$ (notons que nous avons un seul choix). Nous avons donc étendu la coloration, contradiction.

3. Supposons que H contient un $(3, 4, 4)$ -triangle. Soit u le sommet de degré 3 et v, w les deux sommets de degré 4. Soit $t \in N_H(u)$ (voir la Figure 3.3).

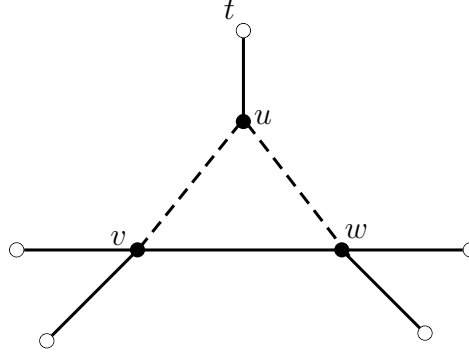


FIGURE 3.3 – Configuration réductible du Lemme 3.11.3

Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{uv, uw\}$ admet une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous allons étendre la coloration ϕ' à une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H . on a :

- $|F_H^{\phi'}(v, vu)| = |\phi'(I_v) \cup \phi'(A_v) \cup \phi'(I_u)| \leq 3 + 3 + 1 = 7$.
- $|F_H^{\phi'}(w, wu)| = |\phi(I_w) \cup \phi(A_w) \cup \phi'(I_u)| \leq 3 + 3 + 1 = 7$.

Considérons les 3 cas suivants :

- Cas 1.** Si $|F_H^{\phi'}(v, vu)| = 7$ et $|F_H^{\phi'}(w, wu)| = 7$. Sans perte de généralité, supposons que nous sommes dans la situation décrite dans la Figure 3.4.

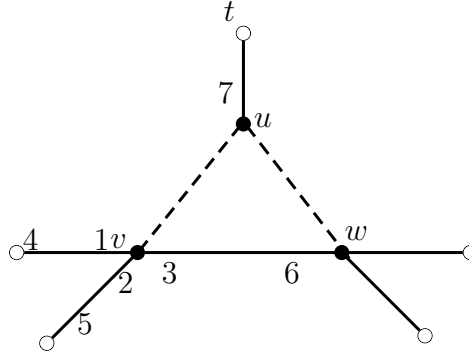


FIGURE 3.4 – Configuration réductible du Lemme 3.11.3- Cas 1

Commençons par colorer les incidences (u, uv) et (u, uw) :

Cas 1.1. S'il existe une couleur $\alpha \in \phi'(A_t)$ avec $\alpha \notin \{3, 6, 7\}$. Alors, on décolore l'incidence (u, ut) et on pose $\phi(u, ut) = \alpha$. Notons que d'après les hypothèses $7 \notin \phi'(I_w) \cup \phi'(A_w)$. Considérons les deux cas suivants :

- (a) Si on peut colorer l'incidence (u, uv) avec la couleur 6 alors, on pose $\phi(u, uv) = 6$ et on colore l'incidence (u, uw) comme suit :
- (i) Si on peut colorer l'incidence (u, uw) avec la couleur 3 alors, on pose $\phi(u, uw) = 3$ et $\phi(v, vu) = \phi(w, wu) = 7$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.
- (ii) Si on ne peut pas colorer l'incidence (u, uw) avec la couleur 3, alors ceci signifie que $\phi'(t, tu) = 3$.
- Si $|\phi'(A_w)| = 3$. On colore (u, uw) avec une couleur λ tel que $\lambda \in \phi'(A_w) \setminus \{3, \alpha\}$, on pose $\phi(v, vu) = \phi(w, wu) = 7$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.
 - Si $|\phi'(A_w)| \leq 2$ alors il existe au moins une couleur γ tel que $\gamma \notin F_H^{\phi'}(u, uw) \cup \{\alpha\}$, on pose $\phi(u, uw) = \gamma$, $\phi(v, vu) = \phi(w, wu) = 7$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.
- (b) Si on ne peut pas colorer l'incidence (u, uv) avec la couleur 6, alors ceci signifie que $\phi'(t, tu) = 6$. Dans ce cas,

$$|F_H^\phi(u, uv)| = |\phi(I_u) \cup \phi(A_u) \cup \phi(I_v)| \leq 2 + 1 + 3 = 6,$$

il existe au moins une couleur β pour colorer l'incidence (u, uv) tel que $\beta \in \{4, 5\}$. On pose $\phi(u, uv) = \beta$, $\phi(v, vu) = \phi(w, wu) = 7$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

Cas 1.2 S'il n'existe pas une couleur $\alpha \in \phi'(A_t)$ avec $\alpha \in \{3, 6, 7\}$. Alors, ceci signifie que $\phi'(A_t) = \{3, 6, 7\}$.

On décolore l'incidence (u, ut) et on pose : $\phi(u, ut) = 6$. Ensuite, on colore l'incidence (u, uv) avec une couleur $\beta \in \{4, 5\} \setminus \{\phi(t, tu)\}$. Enfin, on pose $\phi(u, uw) = 3$ et $\phi(v, vu) = \phi(w, wu) = 7$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

Cas 2 Si $|F_H^{\phi'}(v, vu)| = 7$ et $|F_H^{\phi'}(w, wu)| < 7$. Dans ce cas, il existe au moins une couleur $\alpha \notin F_H^{\phi'}(w, wu)$ pour colorer l'incidence (w, wu) . On pose $\phi(w, wu) = \alpha$. Sans perte de généralité, supposons que nous sommes dans la situation décrite dans la Figure 3.5.

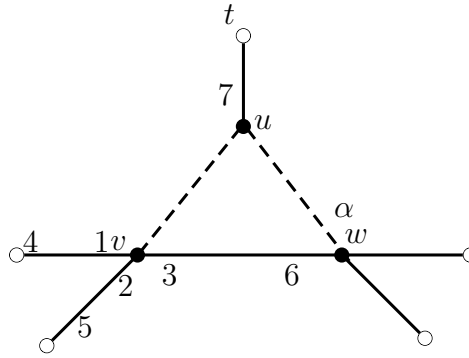


FIGURE 3.5 – Configuration réductible du Lemme 3.11.3- Cas 2

On remarque que $\alpha \in \{1, 2, 4, 5\}$, pour colorer les incidences (u, uv) et (u, uw) , considérons les deux cas suivants :

Cas 2.1 Si $\alpha \in \{4, 5\}$. Sans perte de généralité, on suppose que $\alpha = 4$.

On recolore l'incidence (u, ut) avec une couleur $\beta \notin \{7, 4\}$, c'est possible car :

- (a) Si $|\phi'(A_t)| \leq 2$, alors il existe une couleur β tel que $\beta \notin F_H^{\phi}(u, ut)$.
- (b) Si $|\phi'(A_t)| = 3$, alors il existe une couleur β tel que $\beta \in \phi'(A_t) \setminus \{7, 4\}$.

Ensuite, on colore l'incidence (v, vu) avec la couleur 7 (on pose $\phi(v, vu) = 7$).

Cas 2.1.1 Si on peut colorer l'incidence (u, uv) et l'incidence (u, uw) , alors on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

Cas 2.1.2 Si on ne peut pas colorer l'incidence (u, uv) avec une couleur appartenant à $\phi(A_v) = \{4, 5, 6\}$. Alors, $\phi(A_v) \subseteq \phi(I_u) \cup \phi(A_u)$ et $\{\phi(u, ut), \phi(t, tu)\} = \{5, 6\}$. Dans ce cas, on pose $\phi(u, uw) = 3$.

- (a) Si on peut permuter entre 4 et 6 autour de w alors, on pose $\phi(w, wu) = 6$ et $\phi(w, vw) = \phi(u, uv) = 4$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

- (b) Si on ne peut pas permuter entre 4 et 6 autour de w , ceci signifie que $\phi(u, ut) = 6$ et $\phi(t, tu) = 5$. Dans ce cas, on pose $\phi(u, ut) = 7$, $\phi(v, vu) = \phi(w, wu) = 6$ et $\phi(w, wv) = \phi(u, uv) = 4$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

Cas 2.1.3 Si on ne peut pas colorer l'incidence (u, uw) . Alors

- (a) Si $|\phi'(A_w)| \leq 2$, alors on décolore (u, ut) et (v, vu) et on pose $\phi(u, ut) = 7$.
- (i) Si on peut colorer l'incidence (u, uw) avec la couleur 3, alors on pose $\phi(u, uw) = 3$, on permute entre les couleurs 6 et 4 autour de w (on pose $\phi(w, wu) = 6$ et $\phi(w, wv) = 4$). Ensuite, on colore l'incidence (v, vu) avec la couleur 6 et l'incidence (u, uv) avec une couleur $\gamma \in \{4, 5\} \setminus \{\phi(t, tu)\}$ (Notons que $|\phi(A_v)| = 2$). Contradiction.
- (ii) Si on ne peut pas colorer l'incidence (u, uw) avec la couleur 3, alors $\phi(t, tu) = 3$. Dans ce cas,

$$|F_H^\phi(u, uw)| \leq |\phi(A_u) \cup \phi(I_u) \cup \phi(I_w)| \leq 2 + 1 + 3 \leq 6.$$

Il existe au moins une couleur $\lambda \notin F_H^\phi(u, uw)$, pour colorer l'incidence (u, uw) . On pose $\phi(u, uw) = \lambda$ et on a $|\phi(A_w)| \leq 3$. Ensuite, on permute entre les couleurs 6 et 4 autour de w (on pose $\phi(w, wu) = 6$ et $\phi(w, wv) = 4$). Enfin, on colore l'incidence (v, vu) avec la couleur 6 et l'incidence (u, uv) avec une couleur $\gamma \in \{4, 5\} \setminus \{\lambda\}$ (Notons que $|\phi(A_v)| = 2$). Contradiction.

- (b) Si $|\phi'(A_w)| = 3$, alors $\phi(A_w) = \{3, a, b\}$. Dans ce cas, $\phi(A_w) \subseteq \phi(I_u) \cup \phi(A_u)$ et $7 \in \phi(A_w)$. Donc $\phi(A_w) = \{3, 7, a\}$ et $a \notin \{4, 6\}$.
- (i) Si on peut permuter entre 7 et 3 autour de v alors, on pose $\phi(u, uv) = 6$, $\phi(v, vu) = 3$ et $\phi(v, vw) = \phi(u, uw) = 7$. Contradiction.
- (ii) Si on ne peut pas permuter entre 7 et 3 autour de v , ceci revient à dire que $\phi(u, ut) = 3$, on permute entre 4 et 6 autour de w et on pose $\phi(w, wu) = \phi(v, vu) = 6$, $\phi(w, wv) = 4$ et $\phi(u, uw) = 7$. Enfin, on colore l'incidence (u, uv) avec une couleur disponible $\gamma \notin F_H^\phi(u, uv)$ (notons que $|F_H^\phi(u, uv)| \leq 6$ et $|\phi(A_v)| \leq 3$) et on obtient une contradiction.

Cas 2.2. Si $\alpha \in \{1, 2\}$. Sans perte de généralité, on suppose que $\alpha = 1$.

On recolorer l'incidence (u, ut) avec la couleur $\beta \notin \{7, 1\}$, c'est possible car :

- (a) Si $|\phi'(A_t)| \leq 2$ alors il existe une couleur β tel que $\beta \notin F_H^\phi(u, ut)$.
- (b) Si $|\phi'(A_t)| = 3$ alors il existe une couleur β tel que $\beta \in \phi'(A_t) \setminus \{7, 1\}$.

Ensuite, on colore l'incidence (v, vu) avec la couleur 7 ($\phi(v, vu) = 7$).

Cas 2.2.1 Si on peut colorer l'incidence (u, uw) avec la couleur 3, alors on pose $\phi(u, uw) = 3$ et on colore l'incidence (u, uv) avec une couleur γ tel que $\gamma \in \phi(A_v) \setminus \{\phi(t, tu), \beta\}$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

Cas 2.2.2 Si on ne peut pas colorer l'incidence (u, uw) avec la couleur 3, alors ceci signifie que $\phi(u, ut) = 3$ ou $\phi(t, tu) = 3$.

Cas 2.2.2.1 Supposons que $\phi(u, ut) = 3$ et considérons les deux cas suivants :

(a) Si $|\phi'(A_w)| \leq 2$, on décolore l'incidence (w, wu) .

(i) Si on peut colorer (u, uw) avec la couleur 1, alors on pose $\phi(u, uw) = 1$ et on a

$$|F_H^\phi(w, wu)| = |\phi(I_w) \cup \phi(A_w) \cup \phi(I_u)| \leq 3 + 2 + 1 = 6.$$

Il existe au moins une couleur $\xi \notin F_H^\phi(w, wu)$, on pose $\phi(w, wu) = \xi$ et on colore l'incidence (u, uv) avec la couleur $\gamma \in \phi(A_v) \setminus \{\xi, \phi(t, tu)\}$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

(ii) Si on ne peut pas colorer (u, uw) avec la couleur 1, alors ceci signifie que $\phi(t, tu) = 1$. Dans ce cas, on pose $\phi(w, wu) = 1$ et on a

$$|F_H^\phi(u, uw)| = |\phi(I_u) \cup \phi(A_u) \cup \phi(I_w)| \leq 1 + 2 + 3 = 6.$$

Il existe au moins une couleur $\lambda \notin F_H^\phi(u, uw)$, on pose $\phi(u, uw) = \lambda$ et on colore l'incidence (u, uv) avec une couleur $\gamma \in \phi(A_v) \setminus \{\lambda, \phi(t, tu)\}$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

(b) Si $|\phi'(A_w)| = 3$, alors considérons les deux cas suivants :

(i) S'il existe une couleur λ tel que $\lambda \in \phi(A_w) \setminus \{3, 7, \phi(t, tu)\}$, alors on pose $\phi(u, uw) = \lambda$ et on colore l'incidence (u, uv) avec une couleur $\gamma \in \phi(A_v) \setminus \{\lambda, \phi(t, tu)\}$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

(ii) S'il n'existe pas une couleur λ tel que $\lambda \in \phi(A_w) \setminus \{3, 7, \phi(t, tu)\}$, alors ceci signifie que $\phi(A_w) = \{3, 7, \phi(t, tu)\}$. Dans ce cas, on permute entre la couleur de (v, vw) et la couleur de (w, wv) . On pose $\phi(v, vw) = 6$, $\phi(w, wv) = 3$ et $\phi(u, uw) = 6$ (notons que $6 \neq \phi(t, tu)$). Enfin, on colore l'incidence (u, uv) avec une couleur $\gamma \in \phi(A_v) \setminus \{3, \phi(t, tu)\}$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

Cas 2.2.2.2 Supposons que $\phi(t, tu) = 3$ et considérons les deux cas suivants :

(a) Si $|\phi'(A_w)| \leq 2$ alors,

(i) Si on peut permuer entre la couleur 7 et la couleur 3 autour de v alors, on pose $\phi(v, vw) = 7$ et $\phi(v, vu) = 3$ et $\phi(u, uw) = 7$. Enfin, on colore l'incidence

(u, uv) avec la couleur $\gamma \in \phi(A_v) \setminus \{\beta\}$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

(ii) Si on ne peut pas permuter entre la couleur 7 et la couleur 3 autour de v alors, ceci signifie que $7 \in \phi(I_w)$. Dans ce cas,

$$|F_H^\phi(u, uw)| = |\phi(I_u) \cup \phi(A_u) \cup \phi(I_w)| \leq 1 + 2 + 3 = 6.$$

Il existe au moins une couleur $\lambda \notin F_H^\phi(u, uw)$, on pose $\phi(u, uw) = \lambda$ et on colore l'incidence (u, uv) avec une couleur $\gamma \in \phi(A_v) \setminus \{\lambda, \beta\}$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

(b) Si $|\phi'(A_w)| = 3$, alors considérons les deux cas suivants :

(i) S'il existe une couleur λ tel que $\lambda \in \phi(A_w) \setminus \{3, 7, \beta\}$, alors on pose $\phi(u, uw) = \lambda$ et on colore l'incidence (u, uv) avec une couleur $\gamma \in \phi(A_v) \setminus \{\lambda, \beta\}$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

(ii) S'il n'existe pas une couleur λ tel que $\lambda \in \phi(A_w) \setminus \{3, 7, \beta\}$, alors ceci signifie que $\phi(A_w) = \{3, 7, \beta\}$. Dans ce cas, on permute entre la couleur de (v, vu) et la couleur de (v, vw) . On pose $\phi(v, vw) = 7$, $\phi(v, vu) = 3$ et $\phi(u, uw) = 7$ (notons que $7 \neq \beta$). Enfin, on colore l'incidence (u, uv) avec une couleur $\gamma \in \phi(A_v) \setminus \{\beta\}$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.

Cas 3 Si $|F_H^\phi(v, vu)| < 7$ et $|F_H^\phi(w, wu)| < 7$. Dans ce cas, il existe une couleur libre, disons α , pour colorer l'incidence (v, vu) et une couleur libre, disons β , pour colorer l'incidence (w, wu) . On pose $\phi(v, vu) = \alpha$, $\phi(w, wu) = \beta$. Maintenant, on colore les incidences (u, uv) et (u, uw) , on considère les deux cas suivants :

Cas 3.1 Si $\alpha = \beta$, alors $|\phi(A_u)| \leq 2$. On colore l'incidence (u, uw) avec une couleur $\lambda \notin F_H^\phi(u, uw)$. C'est possible car :

- (a) Si $|\phi'(A_w)| \leq 2$, alors il existe au moins une couleur λ tel que $\lambda \notin F_H^\phi(u, uw)$.
- (b) Si $|\phi'(A_w)| = 3$, alors il existe une couleur λ tel que $\lambda \in \phi(A_w) \setminus \{\phi(u, ut), \phi(t, tu)\}$.

Colorons maintenant l'incidence (u, uv) . Notons que

$$|F_H^\phi(u, uv)| = |\phi(I_u) \cup \phi(A_u) \cup \phi(I_v)| \leq 7$$

Cas 3.1.1 Si on peut colorer l'incidence (u, uv) , avec une couleur γ tel que $\gamma \notin F_H^\phi(u, uv)$ et $|\phi(A_v)| \leq 3$, alors on obtient une contradiction.

Cas 3.1.2 Si on ne peut pas colorer l'incidence (u, uv) , avec une couleur γ tel que $\gamma \notin F_H^\phi(u, uv)$ et $|\phi(A_v)| \leq 3$, alors ceci signifie que $|F_H^\phi(u, uv)| = 7$. Sans perte

de généralité, supposons que nous sommes dans la situation décrite dans la Figure 3.6.

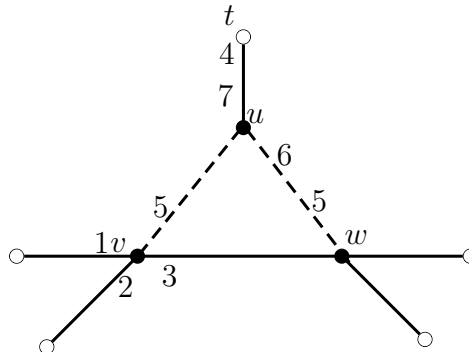


FIGURE 3.6 – Configuration réductible du Lemme 3.11.3-Cas 3.1.2

- (a) Si $|\phi(A_v)| \leq 2$ alors on décolore (u, uv) et on pose $\phi(u, uv) = 3$ et $\phi(u, uw) = 6$. contradiction.
- (b) Si $|\phi(A_v)| = 3$ alors ceci signifie que $\phi(A_v) = \{4, 6, 7\}$. On décolore (u, uw) et on pose $\phi(u, uv) = 3$ et $\phi(u, uw) = 6$. contradiction.

Cas 3.2 Si $\alpha \neq \beta$, alors considérons les deux cas suivants :

Cas 3.2.1 S'il existe une couleur libre, disons γ , pour colorer l'incidence (u, uv) et une couleur libre, disons λ , pour colorer l'incidence (u, uw) . On pose $\phi(u, uv) = \lambda$, $\phi(u, uw) = \gamma$ et nous obtenons une contradiction.

Cas 3.2.2 S'il n'existe pas une couleur libre pour colorer l'incidence (u, uv) ou il n'existe pas une couleur libre pour colorer l'incidence (u, uw) . Alors, sans perte de généralité, supposons qu'on ne peut pas colorer l'incidence (u, uv) et que nous sommes dans la situation décrite dans la Figure 3.7 :

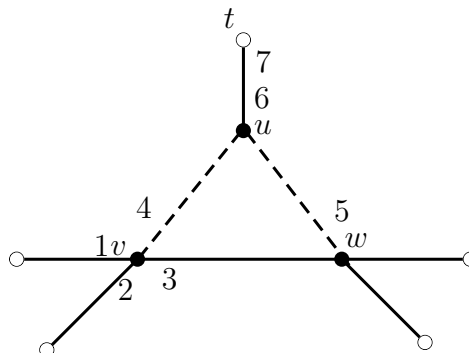


FIGURE 3.7 – Configuration réductible du Lemme 3.11.3- Cas 3.2.2

- (a) Si $|\phi(A_v)| \leq 2$ alors, on pose $\phi(u, uv) = 3$ et considérons les deux cas suivants :

- (i) Si on peut recolorer $\phi(v, vu)$ avec une couleur $\xi \in \{5, 7\}$ alors, on pose $\phi(v, vu) = \xi$ et $\phi(u, uv) = 4$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.
- (ii) Si on ne peut pas recolorer $\phi(v, vu)$ avec une couleur $\xi \in \{5, 7\}$, alors ceci signifie que $\phi(A_v) = \{5, 7\}$ avec $\phi(w, wv) = 7$. Dans ce cas, on permute entre 5 et 7 autour de w . On pose $\phi(w, wu) = 7$, $\phi(w, wv) = \phi(u, uv) = 5$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.
- (b) Si $|\phi(A_v)| = 3$ alors ceci signifie que $\phi(A_v) = \{5, 6, 7\}$ et $\phi(w, wv) \neq 5$. On pose $\phi(u, uv) = 3$.
 - (i) Si $\phi(w, wv) = 7$ alors on permute entre 5 et 7 autour de w . On pose $\phi(w, wu) = 7$, $\phi(w, wv) = \phi(u, uv) = 5$. Ainsi, on obtient une $(7, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H , contradiction.
 - (ii) Si $\phi(w, wv) = 6$ alors dans ce cas, on décolore (u, ut) et (v, vu) . Ensuite, on permute entre 5 et 6 autour de w . On pose $\phi(w, wv) = 5$ et $\phi(w, wu) = \phi(v, vu) = 6$. Ainsi, par un argument de comptage, il est facile de voir, qu'il existe au moins une couleur disponible, disons ξ , pour colorer (u, ut) . Notons que $\xi \notin \{3, 6\}$. On pose $\phi(u, ut) = \xi$. De cette façon, $|F_H^\phi(u, uv)| \leq 6$. Donc il existe au moins une couleur $\gamma \notin F_H^\phi(u, uv)$ pour colorer (u, uv) , on pose $\phi(u, uv) = \gamma$ et on obtient une contradiction.

□

3.2.1.2 Procédure de déchargement

Lemme 3.12. Soit G un graphe planaire connexe avec n sommets, m arêtes et f faces. Nous

avons la relation suivante :
$$\sum_{v \in V(H)} (2d(v) - 6) + \sum_{f \in F(H)} (r(f) - 6) = -12$$

Démonstration. La formule d'Euler $n - m + f = 2$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$(4m - 6n) + (2m - 6f) = -12.$$

La relation
$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{f \in F(G)} r(f) = 2m$$
 permet de conclure.

□

On définit la fonction poids $\omega : V(H) \cup F(H) \rightarrow R$ par $\omega(x) = 2d(x) - 6$ si $x \in V(H)$ et $\omega(x) = r(x) - 6$ si $x \in F(H)$.

D'après le Lemme 3.12, la somme totale des poids vaut -12 (strictement négative). On définit la règle de déchargement suivante :

(R) Chaque 4-sommet donne 1 à chaque 3-face incidente.

Pour $x \in V(H) \cup F(H)$, on note $\omega^*(x)$ le poids de x après la phase de déchargement. Évaluons à présent le nouveau poids de chaque face et sommet de H .

Soit $v \in V(H)$ un k -sommet. D'après le Lemme 3.11.1 et le Lemme 3.11.2, $k = 3$ ou $k = 4$.

1. Si $k = 3$, observons que $\omega(v) = 2 \times 3 - 6 = 0$. Par **(R)**, $\omega^*(v) = \omega(v) = 0$.
2. Si $k = 4$, observons que $\omega(v) = 2 \times 4 - 6 = 2$. Rappelons que H est sans cycle de longueur 4 et de longueur 5, donc v est incident à au plus deux 3-faces. Par **(R)**, $\omega^*(v) \geq 2 - 2 \times 1 = 0$.

Soit $f \in F(H)$ une d -face. D'après les hypothèses $d = 3$ ou $d \geq 6$.

1. Si $d = 3$. Observons que $\omega(f) = 3 - 6 = -3$.
D'après le Lemme 3.11.3 f est incidente à trois 4-sommets. En appliquant la règle de déchargement **(R)**, on obtient $\omega^*(f) = -3 + 3 \times 1 = 0$.
2. Si $d \geq 6$. $\omega(f) \geq d - 6 \geq 0$.
Dans ce cas, La règle **(R)** n'est pas appliquée et donc $\omega^*(f) = \omega(f) \geq 0$.

D'où, le graphe H ne peut pas exister, ceci achevé la preuve du Théorème 3.8.

□

Notons que si $\Delta(G) \leq 3$, alors d'après le Théorème 2.3 on obtient $\chi_i(G) \leq 2\Delta(G) = 2 \times 3 = 6$ et qui un meilleur résultat. Ainsi, le Théorème 3.6.2 peut être reformuler comme suit :

Théorème 3.13. *Si G est un graphe planaire sans C_4 ou C_5 alors $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées aux problèmes de colorations dans les graphes, plus précisément au problème de la coloration d'incidences des graphes planaires.

Tout d'abord, nous avons abordé les différents travaux de recherche réalisés sur le chromatique d'incidences. Nous avons ensuite donné quelques relations existantes entre le nombre chromatique d'incidences et d'autres invariants de colorations. Puis, nous avons présenté quelques variantes de la coloration d'incidences.

Les différents résultats obtenus sur le nombre chromatique d'incidences des graphes planaires en général, ont amené plusieurs chercheurs à considérer le nombre chromatique d'incidences des graphes planaires sans cycles de longueurs données. Ainsi, Hocquard et al. ont montré, dans [23], que tout graphe planaire G sans cycles de longueurs 4 et 5 et de degré maximum $\Delta(G) \neq 4$, le nombre chromatique d'incidences est au plus $\Delta(G) + 3$.

Nous avons montré, en utilisant la méthode de déchargement, que tout graphe planaire G de degré maximum au plus 4, sans cycles de longueurs 4 et 5, admet une $(7, 3)$ -coloration d'incidences. D'où, tout graphe planaire sans cycles de longueurs 4 et 5 admet une $(\Delta(G) + 3)$ -coloration d'incidences.

Nous proposons comme futurs travaux de recherche, les problèmes suivants :

1. Si G est un graphe planaire, peut-on prouver la ICC conjecture ? Autrement dit, a-t-on $\chi_i(G) \leq \Delta + 2$?
2. Peut-on caractériser les graphes pour lesquels $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$?
3. Il serait aussi intéressant de voir si on ne peut pas améliorer la borne supérieure du nombre chromatique d'incidences de graphes k -dégénérés pour certaines de ses sous classes, comme les k -arbres partiels.

Bibliographie

- [1] K. B. Alfred. On the geographical problem of the four colours. *American journal of mathematics*, 2(3) :193–200, 1897. (Cité en page 2)
- [2] I. Algor and N. Alon. The star arboricity of graphs. *Discrete Mathematics*, 75 :11–22, 1989. (Cité en page 25)
- [3] S. D. Andres. The incidence game chromatic number. *Discrete Applied Mathematics*, 157(9) :1980–1987, 2009. (Cité en page 27)
- [4] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 1, discharging. *Illinois J. Math.*, 21 :429–490, 1977. (Cité en pages 2 et 15)
- [5] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility. *Illinois J. Math.*, 21 :491–567, 1977. (Cité en pages 2 et 15)
- [6] A. Asratian and R. Kamalian. Investigation on interval edge-colorings of graphs. *J. Combinatorics. Theory Ser. B*, 62 :34–43, 1994. (Cité en page 28)
- [7] L. H. Bodlaender. On the complexity of some coloring games. *Internatinal Journal of Foundations of Computer Science*, 2(02) :133–147, 1991. (Cité en page 27)
- [8] M. Bonamy, H. Hocquard, S. Kerdjoudj, and A. Raspaud. Incidence coloring of graphs with high maximum average degree. *Discret Applied Mathematics*, 227 :29–43, 2017. (Cité en page 23)
- [9] M. Bonamy, B. Leveque, and A. Pinlo. 2-distance coloring of sparse graphs. *Journal of graph theory*, 77(3) :190–28, 2014. (Cité en page 31)
- [10] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Théorie des graphes*. 2008. (Cité en pages 4 et 11)
- [11] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 37 :194–197, 1941. (Cité en pages 4 et 15)
- [12] R. A. Brualdi and J. J. Q. Massey. Incidence and strong edge colorings of graphs. *Discrete Mathematics.*, 122 :51–58, 1993. (Cité en pages 2, 20, 21, 23, et 28)
- [13] C. Charpentier. *Coloration, jeu et marquages dans les graphes*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2014. (Cité en page 22)

- [14] C. Charpentier and E. Sopena. Incidence coloring game and arboricity of graphs. In *International Workshop on Combinatorial Algorithm*, pages 106–114, 2013. (Cité en page 27)
- [15] D. W. Cranston and D. B. West. A guide to the discharging method. arXiv :preprint arXiv :1306. 4434, 2013. (Cité en page 4)
- [16] M. Hosseini Dolama. *Contribution à l'étude de quelques problèmes de coloration de graphe*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2005. (Cité en pages 21, 23, et 26)
- [17] L. Euler. Solution problematics ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pages 128–140, 1741. (Cité en pages 1, 6, et 11)
- [18] E. Sopena F. Kardoš M. Maceková, M. Mockovčiaková and R. Soták. Incidence coloring-cold cases. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 40(1) :345–354, 2020. (Cité en page 31)
- [19] J. L. Fouquet and J. L. Jolivet. Strong edge-colorings of graphs and applications to multi-k-gons. *Ars Combinatoria A*, 16 :141–150, 1983. (Cité en page 24)
- [20] M. Gardner. *Science Fiction Puzzle Tales*. Crown Pub, 1981. (Cité en page 27)
- [21] B. Guiduli. On incidence coloring and star arboricity of graphs. *Discrete Mathematics*, 163 :275–278, 1997. (Cité en pages 2, 21, 25, et 28)
- [22] F. Havet. Méthode de déchargement. <http://www-sop.inria.fr/members/Frederic.Havet/Cours/decharg.ps>. (Cité en pages 4 et 17)
- [23] H. Hocquard, S. Kerdjoudj, and A Raspaud. Incidence coloring planar graph without adjacent small cycles. *Journal of Combinatorics*, 8(1) :167–187, 2017. (Cité en pages 30, 32, et 44)
- [24] M. Hosseini Dolama and E. Sopena. On the maximum average degree and the incidence chromatic number of a graph. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 7 :203–216, 2005. (Cité en page 31)
- [25] M. Hosseini Dolama, E. Sopena, and X. Zhu. Incidence coloring of k -degenerate graphs. *Discrete Mathematics*, 283 :121–128, 2004. (Cité en pages 21, 23, 30, et 33)
- [26] A. O Ivanova. List 2-distance $(\Delta + 1)$ -coloring of planar graphs with girth at least 7. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 5(2) :221, 2011. (Cité en page 31)
- [27] R. Janczeweki, A. Malfiejska, and M. Malfiejska. Interval incidence coloring of bipartite graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 166 :131–140, 2014. (Cité en page 28)
- [28] R. Janczeweki, A. Malfiejska, and M. Malfiejska. Interval incidence graph coloring. *Discrete Applied Mathematics*, 182 :73–83, 2015. (Cité en page 29)
- [29] T. R. Jensen and B. Toft. Choosability versus chromaticity. *Geombinatorics*, 5 :45–64, 1995. (Cité en page 23)
- [30] T. R. Jensen and B. Toft. *Graph Coloring Problems*. NewYork, 1995. (Cité en page 14)

- [31] S. Kerdjoudj. *Groupes d'automorphismes associés aux colorations de graphes*. PhD thesis, U. S. T. H. B, 2017. (Cité en page 17)
- [32] Y. J. Kim. The incidence game chromatic number of paths and subgraphs of wheels. *Discret Applied Mathematics*, 159(8) :683–694, 2011. (Cité en page 27)
- [33] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15 :271–283, 1930. (Cité en page 11)
- [34] M. Maydanskiy. The incidence coloring conjecture for graphs of maximum degree 3. *Discrete Mathematics*, 292 :131–141, 2005. (Cité en page 23)
- [35] J. Qu. *Studies on the coloring of some graph*, M. Sc. Thesis of Shandong Institute of Mining and Technology, Taian. People's Republic. 1998. (Cité en page 31)
- [36] R. Radoičić and G. Tóth. The discharging method in combinatorial geometry and the pach-sharir conjecture. *Contemporary Mathematics*, 453 :319–342, 2008. (Cité en page 4)
- [37] N. Robertson and P. Seymour D.Sanders. The four-colour theorem of combinatorie theory. 70(B) :2–44, 1997. (Cité en page 2)
- [38] W. C. Shiu and P. K. Sun. Invalid proofs on incidence coloring. *Discrete Mathematics*, 308(24) :6575–6580, 2008. (Cité en page 30)
- [39] E. Sopena. www.labri.fr/perso/sopena/theincidencecoloringpage. (Cité en page 18)
- [40] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz.*, 3 :25–30, 1964. (Cité en page 16)
- [41] I.V. Voloshin. *Introduction to graph theory*. Nova Science Publ., 2009. (Cité en pages 4 et 15)
- [42] S. D. Wang, D. L. Chen, and S. C. Pang. The incidence coloring number of halin graphs and outerplanar graphs. *Discrete Mathematics*, 252 :259–266, 2002. (Cité en page 30)
- [43] D. B. West. *Théorie des graphes*. 2001. (Cité en page 4)
- [44] D. Yang. Fractional incidence coloring and star arboricity of graphs. *Ars Combinatoria*, 105 :213–224, 2012. (Cité en pages 28 et 31)
- [45] P. Zhang. *Graphs and digraphs*. 6 edition, 2006. (Cité en page 15)