

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة سعد دحلب بلديّة  
UNIVERSITE SAAD DAHLAB  
BLIDA

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Génie civil  
Option : constructions civiles et industrielles

THEME

**COMPORTEMENT HYGROTHERMOMECHANIQUE  
D'UN COMPOSITE STRATIFIE A BASE  
DE FIBRES UNIDIRECTIONNELLES**

Présenté par : Mme Bentlemsan Nadia

Devant le jury composé de :

D <sup>r</sup> Ali Bouafia	Maître de conférences à l'université de Blida	Président
D <sup>r</sup> Mohamed Bouhicha	Maître de conférences au C.U. de Laghouat	Examineur
D <sup>r</sup> Mouldi Khenfer	Maître de conférences au C.U. de Laghouat	Examineur
D <sup>r</sup> Mohamed Abed	Maître de conférences à l'université de Blida	Membre
D <sup>r</sup> Brahim Attaf	Maître de conférences à l'université de Blida	Prometteur
D <sup>r</sup> Said Kenai	Maître de conférences à l'université de Blida	Co-prometteur et rapporteur

Octobre 2001

*A mon fils*

*Mohamed Lotfi Hocine*

# REMERCIEMENTS

*Je tiens tout d'abord à remercier M. Attaf pour m'avoir guidé et orienté durant la réalisation de ce travail, ainsi que M. Kenai, qui a accepté de le finaliser avec moi.*

*J'exprime ma gratitude à M. Bouafia, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury*

*Je remercie également M. Abed, M. Bouhicha ainsi que M. Mouldi Khenfer, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de juger ce travail*

*Je remercie également ma famille pour leur patience et leur aide tout le long de mes études en post-graduation*

*Que tout mes amis trouve ici, l'expression de toute ma gratitude particulièrement : Hocine, Dalila et Safia*

## ***RESUME***

Les conditions d'environnement auxquelles sont soumises les structures composites peuvent engendrer des variations non négligeables de contraintes et de déformations en l'absence de toute sollicitation mécanique, c'est suivant cette idée que cette étude a été menée.

Le travail effectué concerne les matériaux composites à base de fibres unidirectionnelles, il peut être divisé en deux parties essentielles, la première partie comporte une étude théorique du comportement du matériau composite sous chargement hygrothermomécanique, la deuxième partie consiste en l'élaboration d'un programme informatique en Pascal permettant le calcul soit des forces et des moments, soit des contraintes et des déformations du stratifié étudié.

La conformité du programme informatique a été validée par une comparaison des résultats obtenus avec ceux disponibles dans la littérature

En outre, la vérification du critère de rupture pour chaque pli constituant le stratifié peut être également effectuée par le présent programme.

## *ABSTRACT*

The environmental conditions to which are subjected composite structures can generate non negligible variations of stresses and deformations, in the absence of all mechanical sollicitation. This project has been studied to elucidate this idea.

The present work concerns composite materials with unidirectional fibber , it is divided into two parts, the first part includes a theoretical study of the behaviour of composite material under hygrothermomechanical load, the second part concerns the development of a computer program in Pascal language permitting the calculation of strength, moments, or stresses and deformations of the stratifies composite.

The validity of the computer program has been proved by a comparison of the results found with those available in the literature

In addition, the verification of the rupture criteria for every fold of the stratified composite can also be done by the present program.

# ملخص

إن الشروط البيئية التي تتعرض لها المواد المركبة ، في غياب أي تأثير ميكانيكي ، تستطيع أن تؤدي إلى تغيرات في الاجهادات و التشوهات ، لا يمكن إهمالها . هذا البحث كان تبعا لهذه الفكرة .

يتعلق عملنا بالمواد المركبة المحتوية على ألياف أحادية الاتجاه ، و يحتوي على قسمين أساسيين:

= الأول يتعلق بدراسة نظرية للمواد المركبة تحت تأثير حمولة ميكانيكية مع تغيرات في الحرارة و الرطوبة.

= الثاني يتعلق بتطوير برنامج معلوماتي يلغة باسكال لحساب القوى و العزوم أو الاجهادات و التشوهات للمواد المركبة قيد الدراسة.

تم التحقق من صلاحية البرنامج بمقارنة النتائج المتحصل عليها مع النتائج المتوفرة في المراجع.

إضافة إلى ذلك ، يمكننا بواسطة هذا البرنامج التحقق من شرط الانهيار لكل طبقة مكونة للمركب.

# INTRODUCTION GENERALE

## **I. Généralités**

L'utilisation des matériaux composites s'est étendue à plusieurs domaines, notamment, le domaine aéronautique, mécanique et génie-civil, leur principal intérêt provient de leurs excellentes caractéristiques spécifiques, en effet, les matériaux composites ont la principale qualité d'être légers, cette propriété a impliqué que leurs premières applications aient été réalisées dans l'industrie spatiale.

Chaque matériau composite est le résultat de deux ou plusieurs matériaux différents. le matériau composite est structuré selon :

- La nature, la texture et la forme du renfort
- Le taux de renforcement
- La nature de la résine et des charges ou additifs
- La qualité de l'interface renfort – matrice
- La géométrie de la pièce à réaliser
- Le procédé de mise en œuvre utilisé

En ce qui concerne le renfort, il a le principal rôle d'assurer la tenue mécanique, ils en existent plusieurs genres, et leur adhésion dans la matrice peut être faite de différentes manières. Dans notre travail, nous nous bornerons à l'étude des composites à fibres unidirectionnelles.

Les matériaux composites offrent certains avantages par rapport aux matériaux usuels, nous pouvons citer :

- Une grande résistance à la fatigue
- Ils ne se corrodent pas (sauf cas très particulier)
- Ils ne plastifient pas

Cependant, les matériaux composites ne sont pas à l'abri de toute forme de dégradation, en effet, en l'absence de toute action mécanique, ils peuvent se détériorer sous l'effet de contraintes répétées induites par la variation de la température ou de l'absorption de l'humidité et mener à leur fatigue.

Le problème de la fatigue des matériaux composites sous chargements hygrothermique a été traité par certains auteurs, et des approches théoriques et numériques traitant de la fatigue des matériaux composites à matrice polymères et fibres longues ont été développés.

Mais, Vu la complexité du comportement mécanique des structures stratifiées, l'outil informatique est devenu indispensable. Des programmes ont été développés pour permettre l'analyse des procédés de mise en œuvre des pièces composites, l'analyse du problème de délaminage, ou l'effet de la température ou de l'humidité sur le comportement des composites. Cependant, peu de programmes ont été développés pour permettre l'analyse des



composites sous l'effet de la température, de l'humidité et des chargement mécaniques, nous citerons principalement les programmes avalisés par la SACL, nous avons en exemple le programme qui permet d'étudier le comportement d'un composite carbone -phénolique et d'un composite carbone - carbone sous haute température, un autre programme permet la prédiction des propriétés mécaniques d'un composite à fibres unidirectionnelles soumis à un chargement hygrothermique, et enfin un programme qui permet de calculer le taux d'humidité contenu dans les composites.

## **II. But et plan de travail**

Le présent travail traite de l'effet de la température et de l'humidité sur le comportement d'un composite à base de fibres unidirectionnelles, et ceci quelque soit la nature des composants, il se compose de deux parties essentielles :

- (a) La première partie concerne principalement l'étude théorique du comportement hygrothermomécanique d'un composite stratifié à base de fibres unidirectionnelles.
- (b) La deuxième partie concerne l'élaboration du programme et ses applications.

Le programme élaboré traite seulement le cas des stratifiés non épais (il ne prend pas en compte le cisaillement transverse), en ce qui concerne l'étude de la température (respectivement l'humidité), nous prendrons deux cas :

**1<sup>er</sup> cas** : la température (respectivement l'humidité) est constante le long de l'épaisseur du stratifié.

2<sup>ème</sup> cas : la température (respectivement l'humidité) varie linéairement le long de l'épaisseur du stratifié.

Pour cela nous avons divisé notre mémoire en quatre chapitres. Tout d'abord, un premier chapitre qui représente une introduction générale dans le domaine des matériaux composites, ensuite, nous passerons dans le chapitre II à la formulation des équations du comportement des structures stratifiées sous chargement hygrothermomécanique, ces équations seront structurées dans le chapitre III en un programme élaboré en langage Pascal et testé par une comparaison avec un exemple tiré de la littérature, le chapitre IV qui regroupe des applications du programme permettant l'analyse de certains paramètres qui peuvent influencer le comportement des matériaux composites. Enfin, des conclusions générales et des recommandations sont données.

## *LISTE DES FIGURES*

FIGURE I.1	Courbes de Wölher de différents matériaux	14
FIGURE I.2	Résistance à la fatigue des verres E et R	14
FIGURE I.3	Résistance à l'eau et à l'humidité des verres E et R	15
FIGURE I.4	Coupe transversale d'une couche unidirectionnelle	15
FIGURE I.5	Constitution d'un stratifié	16
FIGURE I.6	Désignation d'un stratifié	16
FIGURE II.1	Déviat ion angulaire	41
FIGURE II.2	Axes d'orthotropie	41
FIGURE II.3	Etat de contraintes planes	41
FIGURE II.4	Changement de repère	42
FIGURE II.5	Notation conventionnelle des plis d'un stratifié	42
FIGURE II.6	Résultantes en membrane des actions exercées sur un stratifié	43
FIGURE II.7	Moments exercés sur un stratifié	43
FIGURE II.8	Variation linéaire de la température avec l'épaisseur du stratifié	43
FIGURE III.1	Organigramme de calcul	50
FIGURE III.2	Structuration du programme	57
FIGURE IV.1	Répartition des contraintes selon le repère (x,y) le long de l'épaisseur des deux stratifiés	60
FIGURE IV.2	Répartition des déformations selon le repère (x,y) le long de l'épaisseur du stratifié [90/-45/45/30]	64
FIGURE IV.3	Répartition des déformations selon le repère (l,t) le long de l'épaisseur du stratifié [90/-45/45/30]	65
FIGURE IV.4	Répartition des contraintes selon le repère (x,y) le long de l'épaisseur du stratifié [90/-45/45/30]	66
FIGURE IV.5	Répartition des contraintes selon le repère (l,t) le long de l'épaisseur du stratifié [90/-45/45/30]	67
FIGURE IV.6	Variation de la contrainte longitudinale moyenne en fonction de la fraction volumique	70

FIGURE IV.7	Variation de la contrainte transversale moyenne en fonction de la fraction volumique	70
FIGURE IV.8	Variation de la contrainte de cisaillement moyenne en fonction de la fraction volumique	71
FIGURE IV.9	Variation du module de Young longitudinal en fonction de la fraction volumique	71
FIGURE IV.10	Variation du module de Young transversal en fonction de la fraction volumique	72
FIGURE IV.11	Variation du module de cisaillement en fonction de la fraction volumique	72
FIGURE IV.12	Variation de la déformation longitudinale moyenne en fonction de la fraction volumique	73
FIGURE IV.13	Variation de la déformation transversale moyenne en fonction de la fraction volumique	73
FIGURE IV.14	Variation de la déformation angulaire moyenne en fonction de la fraction volumique	74
FIGURE IV.15	Variation des déformations moyennes en fonction de la température selon le repère (x,y) du stratifié [90/-45/45/30]	77
FIGURE IV.16	Variation des déformations moyennes en fonction de la température selon le repère (l,t) du stratifié [90/-45/45/30]	78
FIGURE IV.17	Variation des contraintes moyennes en fonction de la température selon le repère (x,y) du stratifié [90/-45/45/30]	79
FIGURE IV.18	Variation des contraintes moyennes en fonction de la température selon le repère (l,t) du stratifié [90/-45/45/30]	80
FIGURE IV.19	Variation des contraintes moyennes en fonction de l'angle téta selon le repère (x,y) du stratifié [90/-45/ $\theta$ /30]	83
FIGURE IV.20	Variation des contraintes moyennes en fonction de l'angle téta selon le repère (l,t) du stratifié [90/-45/ $\theta$ /30]	84
FIGURE IV.21	Variation des déformations moyennes en fonction de l'angle téta selon le repère (x,y) du stratifié [90/-45/ $\theta$ /30]	85
FIGURE IV.22	Variation des déformations moyennes en fonction de l'angle téta selon le repère (l,t) du stratifié [90/-45/ $\theta$ /30]	86

FIGURE IV.23	Relation contraintes – déformations du pli orienté à $90^\circ$	89
FIGURE IV.24	Relation contraintes – déformations du pli orienté à $-45^\circ$	89
FIGURE IV.25	Relation contraintes – déformations du pli orienté à $0^\circ$	90
FIGURE IV.26	Relation contraintes – déformations du pli orienté à $45^\circ$	90

## LISTE DES SYMBOLES

$E_l$  : module d'élasticité du composite suivant le sens longitudinal

$E_t$  : module d'élasticité du composite suivant le sens transversal

$G_{lt}$  : module de cisaillement du composite

$\nu_{ll}$  : coefficient de Poisson major

$\nu_{tl}$  : coefficient de Poisson minor

$\theta$  : angle de rotation de l'axe  $x$  par rapport à l'axe  $l$

$s$  : sinus de l'angle  $\theta$

$c$  : cosinus de l'angle  $\theta$

$V_f$  : fraction volumique des fibres

$V_m$  : fraction volumique de la matrice

$P_f$  : fraction massique des fibres

$P_m$  : fraction massique de la matrice

$\rho$  : masse volumique du composite

$\rho_f$  : masse volumique des fibres

$\rho_m$  : masse volumique de la matrice

$E_m, E_f$  : modules de Young, respectivement de la matrice et des fibres

$G_m, G_f$  : modules de cisaillement, respectivement de la matrice et des fibres

$\nu_m, \nu_f$  : coefficients de Poisson, respectivement de la matrice et des fibres

$\alpha_l$  : coefficient de dilatation thermique du composite dans le sens longitudinal

$\alpha_t$  : coefficient de dilatation thermique du composite dans le sens transversal

$\alpha_m, \alpha_f$  : coefficients de dilatation thermique, respectivement de la matrice et des fibres

$\beta_l$  : coefficient de l'influence de l'humidité du composite dans le sens longitudinal

$\beta_t$  : coefficient de l'influence de l'humidité du composite dans le sens transversal

$\beta_m, \beta_f$  : coefficients de l'influence de l'humidité, respectivement de la matrice et des fibres

$M$  : point matériel appartenant au plan moyen

$U_0$  : déplacement du point  $M$  suivant l'axe  $x$



$V_0$  : déplacement du point  $M$  suivant l'axe  $y$

$W_0$  : déplacement du point  $M$  suivant l'axe  $z$

$\varepsilon(M)$  : tenseur des déformations

$\sigma(M)$  : tenseur des contraintes

$[C]$  : matrice de rigidité donnée par la loi de Hook généralisée

$[S]$  : matrice de souplesse

$h$  : épaisseur du stratifié

$n$  : nombre de plis

$k$  : numéro du pli

$e_k$  : épaisseur du pli

$(x,y)$  : repère global

$(l,t)$  : repère local

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  : contraintes normales respectivement suivant les axes  $ox, oy, oz$

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  : contraintes de cisaillement respectivement suivant les plans  $(oxy)$ ,  $(oxz)$   
et  $(oyz)$

$\sigma_l, \sigma_t$  : contraintes normales suivant respectivement suivant les axes  $l$  et  $t$

$\tau_{lt}, \tau_{tz}, \tau_{zl}$  : contraintes de cisaillement respectivement suivant les plans  $(olt)$ ,  $(otz)$  et  $(olz)$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  : déformations linéaires du composite respectivement suivant les axes  $ox, oy, oz$

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  : déformations de rotation du composite respectivement suivant les plans  
 $(oxy)$ ,  $(oxz)$  et  $(oyz)$

$\varepsilon_l, \varepsilon_t$  : déformations linéaires du composite respectivement suivant les axes  $l$  et  $t$

$\gamma_{lt}$  : déformation de rotation du composite dans le plan  $(olt)$

$[Q]$  : matrice de rigidité en contraintes planes par rapport aux axes locaux du pli

$[\bar{Q}]$  : matrice de rigidité en contraintes planes par rapport aux axes du stratifié

$[T_\sigma]$  : matrice de transition qui relie les contraintes dans le repère local avec celles du repère  
global

$[T_\varepsilon]$  : matrice de transition qui relie les déformations dans le repère local avec celles du repère global

$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  : déformations en membrane

$k_x, k_y, k_{xy}$  : déformations de courbure

$N_x$  : effort résultant par unité de largeur suivant la direction  $x$

$N_y$  : effort résultant par unité de largeur suivant la direction  $y$

$T_{xy}(T_{yx})$  : effort de cisaillement par unité de largeur suivant la direction  $y$  (la direction  $x$ )

$M_x$  : moment fléchissant suivant la direction  $y$

$M_y$  : moment fléchissant suivant la direction  $x$

$M_{xy}(M_{yx})$  : moment de torsion suivant la direction  $y$  (la direction  $x$ )

$[A]$  : matrice de rigidité en membrane sous chargement mécanique

$[B]$  : matrice de couplage membrane – flexion sous chargement mécanique

$[D]$  : matrice de rigidité en flexion sous chargement mécanique

$\Delta T$  : variation de la température

$\Delta H$  : variation de l'humidité

$\alpha_x, \alpha_y$  : coefficients de dilatation thermique, respectivement suivant l'axe  $x$  et l'axe  $y$

$\beta_x, \beta_y$  : coefficients de l'influence de l'humidité, respectivement suivant l'axe  $x$  et l'axe  $y$

$[\overline{\alpha Q}]$  : matrice de rigidité dans le repère global sous chargement thermique

$[\overline{\beta Q}]$  : matrice de rigidité dans le repère global sous chargement hygrométrique

$[\alpha A]$  : matrice de rigidité en membrane sous chargement thermique

$[\alpha B]$  : matrice de couplage membrane – flexion sous chargement thermique

$[\alpha D]$  : matrice de rigidité en flexion sous chargement thermique

$[\beta A]$  : matrice de rigidité en membrane sous chargement hygrométrique

$[\beta B]$  : matrice de couplage membrane – flexion sous chargement hygrométrique

$[\beta D]$  : matrice de rigidité en flexion sous chargement hygrométrique

$X$  : contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction  $l$

$Y$  : contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction  $t$



$S_{tt}$  : contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan  $(l,t)$

# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b>	1
<b>Chapitre I Généralités</b>	
I.1. Introduction	6
I.2. Fatigue des matériaux composites	8
I.3. Définitions	10
I.3.2. Le pli	10
I.3.3. Le stratifié	10
I.3.3.1. Symétrie miroir	10
I.3.3.2. Stratifié équilibré	11
I.4. Caractéristiques des matériaux composites	11
I.4.1. Fractions volumique et massique	11
I.4.1.1. Fraction volumique	11
I.4.1.2. Fraction massique	11
I.4.2. Masse volumique du composite	12
I.4.3. Constantes élastiques d'un composite unidirectionnel	12
<b>Chapitre II Théorie du comportement hygrothermomécanique des structures stratifiées</b>	
II.1. Introduction	19
II.2. Théorie classique des stratifiés	19
II.3. Expressions des déplacements	19
II.4. Expressions des déformations	20
II.5. Expressions des contraintes	21
II.6. Relations contraintes – déformations	21
II.7. Comportement élastique d'un pli	22
II.7.1. Notion d'orthotropie	22
II.7.2. Définition d'un matériau unidirectionnel	22
II.7.3. Etat de contraintes planes	23
II.7.4. Coefficients de souplesse et de rigidité d'une couche (pli) par rapport aux axes du stratifié	24

II.8. Loi du comportement du stratifié (cas d'un chargement mécanique)	27
II.8.2. Comportement en flexion	29
II.9. Cas d'un chargement thermomécanique	30
II.9.1. Comportement en membrane	32
II.9.2. Comportement en flexion	32
II.10. Cas d'un chargement hygromécanique	33
II.10.1. Comportement en membrane	35
II.10.2. Comportement en flexion	35
II.11. Cas d'un chargement hygrothermomécanique	36
II.12. Détermination des déformations et des contraintes	37
II.13. Cas particuliers	38
II.14. Critère de rupture	40
<b>Chapitre III</b> Programmation	
III.1. Introduction	45
III.2. Présentation du programme	45
III.3. Organigramme de calcul	46
III.4. Langage de programmation	51
III.5. Guide de l'utilisateur	51
III.6. Comparaison des résultats	53
<b>Chapitre IV</b> Résultats et discussion	
IV.1. Introduction	59
IV.2. Applications	59
<b>Conclusion</b>	93
<b>Annexe A</b>	
<b>Annexe B</b>	
<b>Annexe C</b>	

# **CHAPITRE I**

## **GENERALITES**

## I.1. INTRODUCTION

Dés lors son existence, l'homme a commencé par utiliser des matériaux qui se trouvaient dans la nature en essayant de les adapter au mieux à ses besoins, mais l'évolution de la vie, et comme l'homme, par sa nature, est toujours en quête du meilleur, il a pensé à développer des matériaux qu'on ne trouvait pas directement dans la nature, car il arrive des fois qu'on ait besoin de matériaux qui aient certaines qualités en rapport avec les nécessités des structures à concevoir, des qualités qui ne peuvent exister que si on combine deux ou plusieurs matériaux différents. De cette idée sont nés les matériaux plastiques.

Les matériaux plastiques sont, à l'origine, des composants organiques qui ont été utilisés pour la conception des premières polymères de synthèse (fin XIXème siècle), ce sont les premières matières plastiques. Plus récemment encore (les années 40), l'idée est venue de leur incorporer des fibres pour améliorer leurs caractéristiques mécaniques, c'est ce qu'on appelle depuis les années 60-70, les matériaux composites. [1]

Le terme « matériau composite » a longtemps été synonyme de matériau renforcé de fibres, mais si on doit le prendre dans un sens plus général, c'est tout simplement l'association de deux ou plusieurs phases solides en un même matériau.

Donc l'idée ici est d'associer, dans une même masse, mais non allier, des matériaux différents par leur nature chimique et leur présentation géométrique afin de tenter d'amplifier leurs performances.

Les matériaux composites peuvent être classés de trois manières différentes

1. classification suivant la forme des constituants

- composites à fibres
- composites à particules

2. classification suivant la nature des constituants

- composites à matrice organique
- composites à matrice minérale
- composites à matrice métallique [2]

3. classification suivant le domaine d'application

- matériaux de grande diffusion (GD)
- matériaux hautes performances (HP): parmi lesquels on distingue :

- les matériaux ablatifs ou thermodégradables
- les matériaux structuraux
- les matériaux thermostructuraux [3]

Au sein d'un matériau composite, nous avons toujours deux constituants de base :

◆ Les renforts, dont le rôle est d'assurer la fonction mécanique, ils se présentent généralement sous formes de fibres dont l'orientation au sein d'un matériau composite dépend de la sollicitation mécanique qu'elles doivent supporter, c'est cette aptitude qui confère au matériau composite son anisotropie. Cette faculté doit toujours être mise à profit par l'ingénieur pour concevoir le matériau le plus apte à reprendre les sollicitations auxquelles il doit être soumis.

les renforts doivent répondre à certains critères, dont on cite :

- caractéristiques mécaniques élevées
  - masse volumique faible
  - bonne compatibilité avec la matrice
  - faible coût
  - facilité de mise en œuvre
- ◆ La matrice est une phase indispensable à la liaison des divers éléments constitutifs du composite, elle doit réaliser la liaison entre les renforts, assurer le transfert des sollicitations mécaniques à ces mêmes renforts ainsi que leur protection vis-à-vis des agents agressifs et bien sur, elle donne à la pièce sa forme.

Le principal intérêt de l'utilisation des composites provient de ses excellentes caractéristiques spécifiques (module divisé par la masse volumique), leur faible taux d'utilisation vient de leurs coût . Les GD représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés )

Les HP, principalement utilisés dans l'aéronautique sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui

influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux GD.

Le succès des matériaux composites à haute performance est très lié à leur résistance exceptionnelle à la fatigue. D'où leur pénétration incisive dans différents domaines, ainsi on retrouve les matériaux composites dans l'aérospatial (conception d'Ariane) [4], et dans la conception des automobiles. [5]

En ce qui concerne le domaine de génie-civil, les Japonais sont les plus grands utilisateurs de ce genre de matériau par le fait qu'ils vivent dans une région particulièrement touchée par les séismes, pour ne citer que quelques applications :

- En 1977, pour la construction du pont suspendu de Kurushima (longueur totale 1304 m)
- En 1993, Fujimi Bridge (Tokyo)
- En 1994, Johetsu Shikansen Bridge (Nagata)

Yonava Bridge et Sanahara Bridge (Yamanashi) [6]

Depuis, l'utilisation des matériaux composites s'est étendue tout d'abord en Europe puis en Amérique du Nord.

Toutefois, ce comportement exceptionnel des matériaux composites ne signifie pas qu'ils sont totalement à l'abri de toute forme d'endommagement. En réalité, selon les fibres, la résine, l'endurance des composites varie, et surtout s'ils sont requis pour travailler dans des cas particuliers, comme par exemple, variation de température ou d'humidité, ceci peut mener à la fatigue du matériau.

## **I.2. FATIGUE DES MATERIAUX COMPOSITES**

Lorsqu'un matériau est soumis à la variation de contraintes répétées, il peut finir par se rompre et ce pour des valeurs de contraintes qui peuvent être inférieures aux valeurs ultimes initiales, c'est le phénomène bien connu de la fatigue, qu'il faut bien prendre en compte dans tout dimensionnement d'un pièce quelconque.

Les propriétés de tenue à la fatigue des structures composites sont très différentes de ceux des métaux, et mêmes de ceux des alliages, d'abord, parce que leurs constituants eux-

mêmes (fibres, matrices) présentent des propriétés individuelles en fatigue, et d'un autre côté la dégradation avant rupture n'est pas ponctuelle. [7]

La présence des fibres, surtout unidirectionnelles, confère aux composites une grande résistance à la fatigue, la figure (I.1), présente les courbes de Wöhler de différents matériaux, dont deux composites à renforts unidirectionnels. [8]

La fatigue des matériaux composites est assez complexe vu le nombre de paramètres à prendre en compte, comme par exemple :

- Les fibres utilisées : les propriétés de résistance à la fatigue des structures composites sont très dépendantes des fibres utilisées, ainsi, les stratifiés à base de fibres de verre s'endommagent davantage que ceux à base de fibre de carbone : les composites à base de fibres de verre perdent de l'ordre de 10% de leur résistance par décade de cycle contre 2 à 3% pour des stratifiés à base de fibres de carbone. On peut remarquer des différences aussi entre des fibres de verre de type R et E (figure (I.2)) [8]
- L'environnement : certaines fibres montrent une baisse de leur aptitudes vis à vis de l'humidité comme par exemple les fibres de verre (figure(I.3)) [8]
- La résistance en fatigue d'une structure dépend aussi de la manière dont elle sollicitée par rapport à l'arrangement de ses couches.

Autant de paramètres susceptibles d'être optimisés pour améliorer la résistance à la fatigue des matériaux composites.

Divers approches ont été émises pour mettre en évidence ce phénomène et surtout dans le cas où la structure est soumise à une variation continue de la température, que ce soit des approches expérimentales [9], analytique ou bien numérique [10],[11], dans d'autres cas, c'est l'humidité qui est étudié en tant que phénomène induisant la fatigue. [12]

Concernant la variation de la température (respectivement l'humidité), nous nous sommes concentrés sur deux cas :

- La température ( respectivement l'humidité) est constante avec la profondeur.
- La température ( respectivement l'humidité) varie suivant une loi linéaire avec la profondeur.

Pour notre travail, nous aurons à développer la théorie du comportement des stratifiés composites sous chargement hygrothermomécanique, pour aboutir par la suite à un



organigramme permettant de concevoir un programme de calcul des contraintes et des déformations.

Mais avant d'entamer tout cela, certaines définitions sont nécessaires et doivent par ce fait être mentionnées

### **I.3. DEFINITIONS**

#### **I.3.1. Matériaux isotropes et anisotropes**

On dit qu'un matériau est isotrope s'il est caractérisé par deux coefficients indépendants, le module de Young ( $E$ ) et le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) Par contre, un matériau anisotrope est caractérisé par 5 coefficients élastiques dépendants qui sont :

- Le module d'élasticité suivant le sens longitudinal ( $E_l$ )
- Le module d'élasticité suivant le sens transversal ( $E_t$ )
- Le module de cisaillement ( $G_{lt}$ )
- Le coefficient de Poisson major ( $\nu_{lt}$ )
- Le coefficient de Poisson minor ( $\nu_{tl}$ )

#### **I.3.2. Le pli**

Le pli est composé de fibres parallèles liées par une résine, orientées suivant une seule direction, s'il s'agit d'un pli unidirectionnel. Dans les autres cas, ce sera soit un tissu (chaîne + trame) noyé dans une matrice ou bien une matrice + une matrice. Les plis sont repérés par leur orientations, la superposition de plusieurs plis orientés suivant la même direction nous donne une couche.

#### **I.3.3. Le stratifié**

Le terme stratifié désigne la superposition de plusieurs couches, en plis élémentaires, orientés suivant des directions dépendamment des besoins structurels.

##### **I.3.3.1. Symétrie miroir**

On dit qu'un stratifié est symétrique ou bien doté « de symétrie miroir », si les empilements des plis, de part et d'autre, sont identiques. Dans ce cas le nombre de plis est pair



**I.4.2 Masse volumique du composite**

Elle est définie par :

$$\rho = \rho_f \cdot V_f + \rho_m \cdot V_m \quad (I.5)$$

**I.4.3. Constantes élastiques d'un composite unidirectionnel**

Pour un pli unidirectionnel de matrice (m) et de fibres (f), on suppose que les déformations des fibres et de la matrice sont égales quand le pli est chargé dans la direction des fibres. Sous un chargement transversal ou en cisaillement, on suppose que les contraintes des fibres et de la matrice sont égales. Ces considérations conduisent aux relations suivantes :

❖ Module suivant le sens longitudinal :

$$E_l = V_f \cdot E_{ft} + V_m \cdot E_m \quad (I.6)$$

❖ Module suivant le sens transversal :

$$E_t = \frac{E_{ft} \cdot E_m}{V_m \cdot E_{ft} + V_f \cdot E_m} \quad (I.7)$$

❖ Module de cisaillement :

$$G_{lt} = \frac{G_{ft} \cdot G_m}{V_m \cdot G_{ft} + V_f \cdot G_m} \quad (I.8)$$

❖ Coefficients de Poisson :

$$\nu_{lt} = V_f \cdot \nu_f + V_m \cdot \nu_m \quad (I.9)$$

$$\nu_{tl} = \frac{E_t}{E_l} \cdot \nu_{lt} \quad (I.10)$$

❖ Coefficients de dilatation thermique:

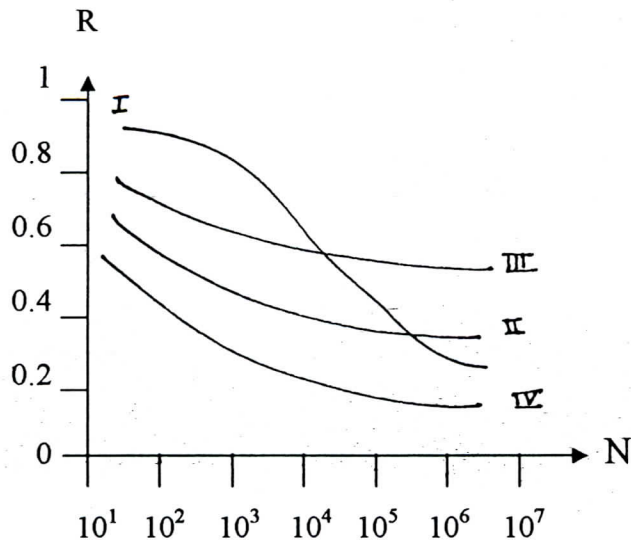
$$\alpha_t = \frac{\alpha_f \cdot E_f \cdot V_f + \alpha_m \cdot E_m \cdot V_m}{E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m} \quad (\text{I.11})$$

$$\alpha_t = \alpha_m \cdot V_m + \alpha_f \cdot V_f + \frac{(\nu_f \cdot E_m - \nu_m \cdot E_f)}{\frac{E_m}{V_f} + \frac{E_f}{V_m}} (\alpha_f - \alpha_m) \quad (\text{I.12})$$

❖ Coefficients de l'influence de l'humidité :

$$\beta_t = \frac{\beta_f \cdot E_f \cdot V_f + \beta_m \cdot E_m \cdot V_m}{E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m} \quad (\text{I.13})$$

$$\beta_t = \beta_m \cdot V_m + \beta_f \cdot V_f + \frac{(\nu_f \cdot E_m - \nu_m \cdot E_f)}{\frac{E_m}{V_f} + \frac{E_f}{V_m}} (\beta_f - \beta_m) \quad (\text{I.14})$$



N nombre de cycles jusqu'à la rupture

R rapport force appliquée/force de rupture

I aluminium II acier III composite à fibres de carbone IV composite à fibre de verre

FIGURE I.1 Courbes de Wöhler de différents matériaux

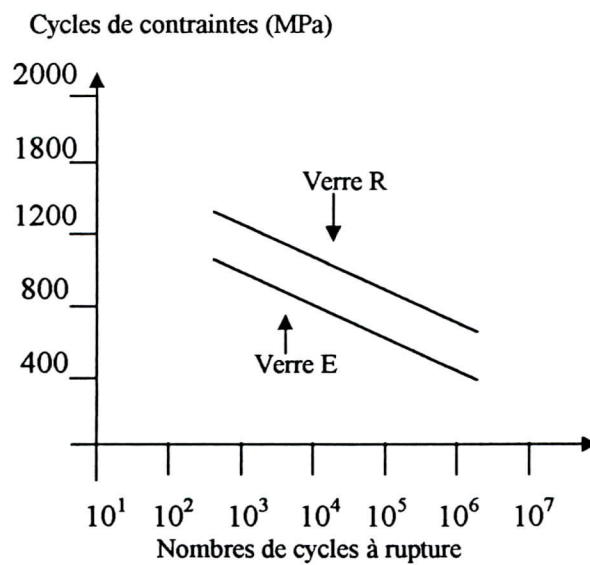


FIGURE I.2 Résistance à la fatigue des verres E et R

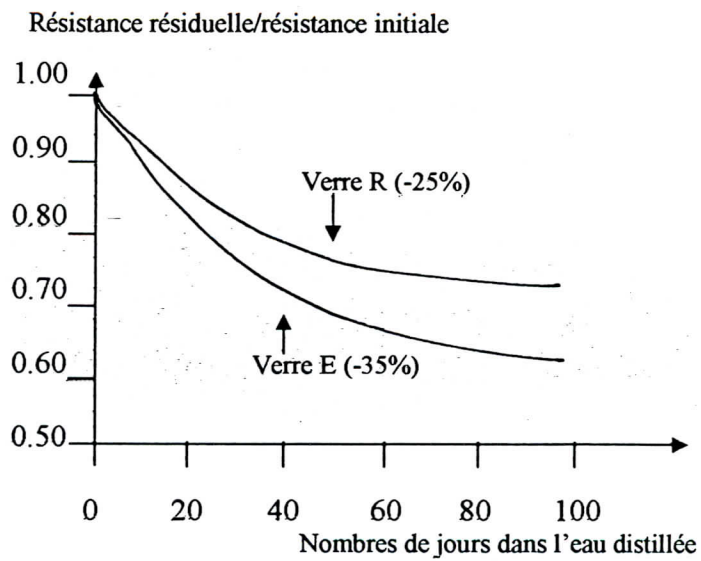


FIGURE I.3 Résistance à l'eau et à l'humidité des verres E et R

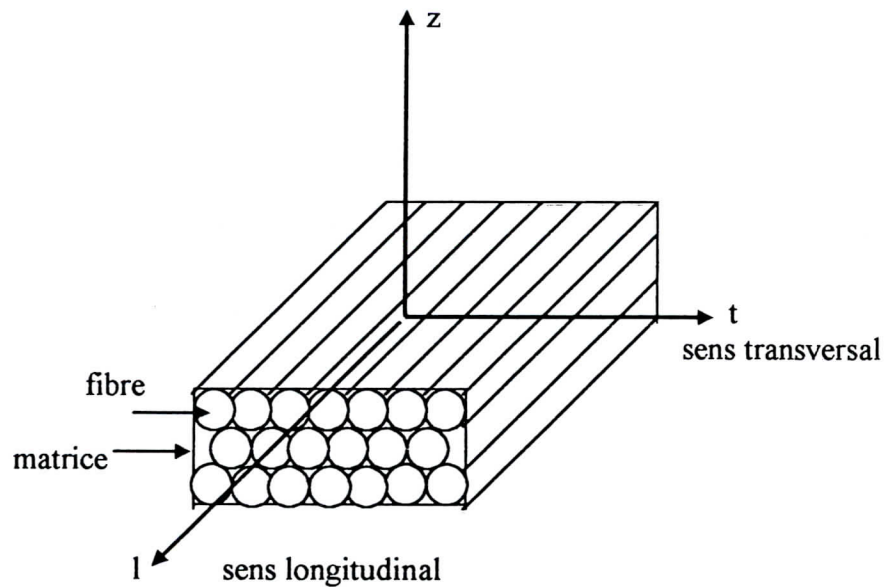


FIGURE I.4 Coupe transversale d'une couche unidirectionnelle

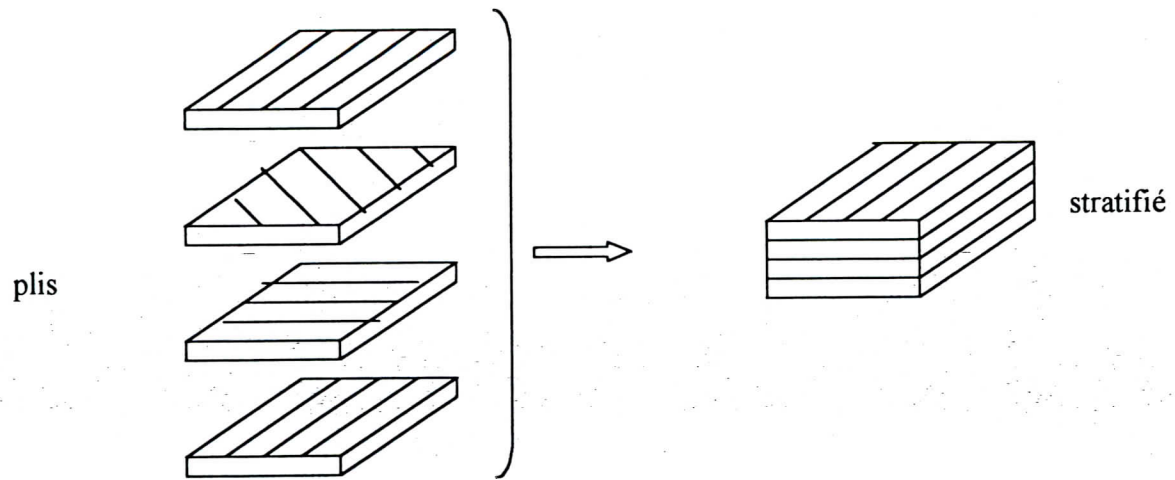


FIGURE I.5 Constitution d'un stratifié

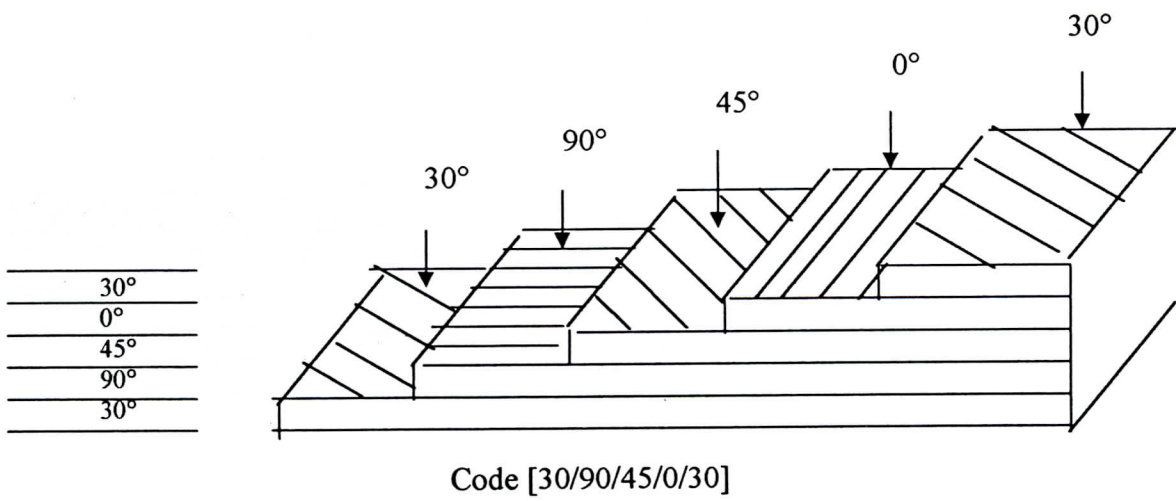


FIGURE I.6 Désignation d'un stratifié

Numéro du pli	Orientation	Notation conventionnelle	Symbole
10	90°	$[90/0_2/\pm 45]_s$	
9	0°		
8	0°		
7	-45°		
6	45°		
5	45°		
4	-45°		
3	0°		
2	0°		
1	90		

**TABLEAU I.1** Stratifié doté de la symétrie miroir

Numéro du pli	orientation	Notation conventionnelle	Symbole
7	0°	$[0/\pm 45/\overline{90}]_s$	
6	45°		
5	-45°		
4	90		
3	-45°		
2	45		
1	0°		

**TABLEAU I.2** Stratifié équilibré



# **CHAPITRE II**

THEORIE DU COMPORTEMENT  
HYGROTHERMOMECHANIQUE  
DES STRUCTURES STRATIFIEES

### II.1. INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est de schématiser le comportement mécanique des stratifiés. L'architecture des stratifiés résulte de la conception des pièces en matériaux composites suivant des plaques ou des coques ou par stratification des couches successives, ce qui permet d'utiliser les mêmes hypothèses que la théorie générale des plaques.

Pour tout ce qui suit, on supposera un stratifié de couches  $n$ , numérotées de la face inférieure à la face supérieure.

### II.2. THEORIE CLASSIQUE DES STRATIFIES

Les stratifiés sont souvent composés d'un grand nombre de plis, ces plis sont supposés être homogènes. Les modèles mécaniques basés sur cette hypothèse sont appelés modèles macromécaniques.

Les hypothèses de base utilisées sont :

- 1- Le schéma de déplacement utilisé est un schéma du premier degré (schéma de Kirchoff).
- 2- La contrainte normale sur tout élément parallèle au plan moyen est négligeable.
- 3- La déformation suivant l'axe  $z$  est nulle ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ )
- 4- L'effet de cisaillement transverse est négligé ( $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ )

### II.3. EXPRESSIONS DES DEPLACEMENTS

Pour tout point  $M$  d'une plaque, les déplacements peuvent être exprimés sous la forme d'un polynôme en fonction de  $z$ .

Pour un schéma de degré 1, on aura :

$$U = U_0 - z \frac{\partial W_0}{\partial x} \quad (\text{II.1})$$

$$V = V_0 - z \frac{\partial W_0}{\partial y} \quad (\text{II.2})$$

$$W = W_0 \quad (\text{II.3})$$

## Chapitre II Théorie du comportement hygrothermomécanique des structures stratifiées

Avec  $U_0$ ,  $V_0$ , et  $W_0$  les déplacements d'un point  $M_0$  situé au plan moyen suivant les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

### II.4. EXPRESSIONS DES DEFORMATIONS

Le tenseur de déformation d'un point  $M$  peut être exprimé sous la forme matricielle suivante :

$$\varepsilon(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.4})$$

$$\text{Avec } \gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \text{ et } \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad (\text{II.5})$$

La notation matricielle de l'ingénieur, nous permet alors d'arborer la matrice colonne suivante :

$$\left( \varepsilon_{xx} \cdot \varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{zz} \cdot \gamma_{xy} \cdot \gamma_{xz} \cdot \gamma_{yz} \right)^T \quad (\text{II.6})$$

En fonction des déplacements, on peut écrire les déformations comme suit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (\text{II.7})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (\text{II.8})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (\text{II.9})$$

Comme la déviation angulaire  $\gamma = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji} = 2\varepsilon_{ij}$ , on aura

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{II.10})$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \quad (\text{II.11})$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \quad (\text{II.12})$$

### **II.5. EXPRESSIONS DES CONTRAINTES**

En tout point M d'un milieu continu, l'état de contraintes peut être déterminé par la connaissance du tenseur de contraintes, ce tenseur peut être représenté par la matrice suivante :

$$\sigma(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Avec  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  et  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  (II.14)

Comme pour les déformations, on peut avoir la notation matricielle de l'ingénieur suivante :

$$\left( \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \right) \quad (\text{II.15})$$

### **II.6. RELATION CONTRAINTES – DEFORMATIONS**

La relation d'élasticité peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Cette loi, appelée loi de Hook généralisée, permet d'introduire la matrice de rigidité [C] symétrique. Donc, le comportement linéaire d'un matériau composite peut être décrit à l'aide de 21 coefficients indépendants.

Sous forme compacte :

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (\text{II.17})$$

En inversant la matrice  $[C]$ , on obtient la matrice  $[S]$ , matrice de souplesse, soit :

$$[S] = [C]^{-1} \quad (\text{II.18})$$

Les coefficients de la matrice  $[C]$  sont appelés coefficients de rigidité.

Les coefficients de la matrice  $[S]$  sont appelés coefficients de souplesse.



## **II.7. COMPORTEMENT ELASTIQUE D'UN PLI**

### **II.7.1. Notion d'orthotropie**

Les stratifiés sont constitués de couches de matériaux composites ou de composites à base de tissus, le tissu est constitué de fils unidirectionnels croisés à  $90^\circ$  dans les deux sens chaîne et trame, ces couches possèdent trois plans de symétrie perpendiculaires deux à deux.

Ainsi la relation (II.16) s'écrira :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \sigma_z \\ \tau_{tz} \\ \tau_{tz} \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{tz} \\ \gamma_{tz} \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

### **II.7.2. Définition d'un matériau unidirectionnel**

Un composite unidirectionnel est composé de fibres parallèles disposées dans une matrice, un tel matériau peut être assimilé à une fibre entourée d'un cylindre de matrice. Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant un axe de révolution. Le matériau est appelé " orthotrope de révolution ".

On peut dire alors que le matériau unidirectionnel est un cas particulier du matériau orthotrope, pour lequel :

$$C_{13} = C_{12} \qquad C_{33} = C_{22}$$

$$C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \qquad C_{55} = C_{66}$$

Les matrices de rigidité et de souplesse s'écrivent comme suit :

$$[C] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (\text{II.20})$$

$$[S] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \quad (\text{II.21})$$

En intervertissant la 3<sup>ème</sup> et la 6<sup>ème</sup> ligne ensuite la 3<sup>ème</sup> et la 6<sup>ème</sup> colonne, et en tenant compte de la relation (II.20), la relation (II.19) deviendra :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \\ \tau_{lz} \\ \tau_{tz} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ C_{12} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & C_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \\ \gamma_{lz} \\ \gamma_{tz} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

### II.7.3. Etat de contraintes planes

Un état de contraintes planes est un état à deux dimensions, pour lequel les composantes du tenseur des contraintes sont indépendantes de la coordonnée z, donc, le comportement du matériau sera décrit dans le plan (l, t)

Dans le repère local du pli, la relation de comportement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

Où  $Q_{ij}$  sont données en fonction des modules de l'ingénieur dans l'annexe 1

En inversant la relation (II.22) on aura :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

En fonction des modules de l'ingénieur la relation (II.24) deviendra :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_l & -\nu_{lt}/E_l & 0 \\ -\nu_{lt}/E_l & 1/E_t & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{lt} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

### **II.7.4. Coefficients de souplesse et de rigidité d'une couche (pli) par rapport aux axes du stratifié**

Le repère global du stratifié composite est  $(x,y,z)$ . Avant de faire un calcul sur une structure plaque composée de plusieurs plis d'orientations diverses, il faut ramener tous les plis dans le repère global de la structure. Pour cela, il faut effectuer un changement de repère de toutes les matrices de la relation de comportement du pli, c'est à dire passer du repère  $(l, t)$  au repère  $(x,y)$ . La plaque étant de faible épaisseur, la direction 3 est abandonnée.

Les contraintes s'écrivent dans le repère principal au moyen de la matrice  $[T]$  comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & SC \\ S^2 & C^2 & -SC \\ -2SC & 2SC & (C^2 - S^2) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

Avec :

$$C = \cos \theta$$

$$S = \sin \theta$$

Et tel que  $(x, l) = \theta$

Sous forme compacte, on aura :

$$\{\sigma\}_{xy} = [T_\sigma] \{\sigma\}_{lt} \quad (\text{II.27})$$

La relation inverse s'écrit comme suit :

$$\{\sigma\}_{lt} = [T_\sigma]^{-1} \cdot \{\sigma\}_{xy} \quad (\text{II.28})$$

De la même manière les déformations s'écrivent dans le repère du stratifié sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & SC \\ S^2 & C^2 & -SC \\ -2SC & 2SC & (C^2 - S^2) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Sous forme compacte, on aura :

$$\{\varepsilon\}_{xy} = [T_\varepsilon] \{\varepsilon\}_{lt} \quad (\text{II.30})$$

La relation inverse s'écrit comme suit :

$$\{\varepsilon\}_{lt} = [T_\varepsilon]^{-1} \cdot \{\varepsilon\}_{xy} \quad (\text{II.31})$$



❖ Détermination des coefficients de raideur

En combinant les relations (II.22), (II.26) et (II.31) on peut écrire

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T_\sigma] \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \cdot [T_\varepsilon]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Tout calcul effectué, on obtient la loi de comportement suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

Les expressions des coefficients de raideur sont données en annexe 1

❖ Détermination des coefficients de souplesse

On va opérer de la même façon que pour les coefficients de raideur mais cette fois, on va combiner les relations (II.24), (II.28) et (II.30), on aura

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T_\varepsilon] \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \cdot [T_\sigma]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

En procédant de la même façon, on trouve la loi de comportement suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{12} & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{26} \\ \overline{S}_{16} & \overline{S}_{26} & \overline{S}_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

Les expressions des coefficients de souplesse sont donnés en annexe 1

### II.8. LOI DE COMPORTEMENT DU STRATIFIE ( CAS D'UN CHARGEMENT MECANIQUE)

On considère un stratifié plan dont l'épaisseur totale est notée  $h$ . Il est constitué de  $n$  plis, le pli  $k$  a une épaisseur noté  $e_k$ , avec  $e_k = 0.125$  mm (valeur constante pour tout les plis).

#### II.8.1. Comportement en membrane

D'après l'hypothèse de base de la théorie générale des plaques, pour tout point  $M$  d'une plaque, les déplacements de ce point peuvent être exprimés sous la forme de polynômes en fonction de  $z$ .

Comme il a déjà été mentionné, on a supposé un schéma de déformation du 1<sup>er</sup> degré, il sera alors écrit sous la forme :

$$U(x,y,z)=U(x,y,0)+z\cdot\varphi_x(x,y)$$

$$V(x,y,z)=V(x,y,0)+z\cdot\varphi_y(x,y) \quad (\text{II.36})$$

$$W(x,y,z)=W(x,y,0)$$

En reprenant la relation entre les déformations et les déplacement et en considérant le cisaillement transverse négligeable, on peut, après calcul, retrouver les expressions des déformations comme suit :

$$\varepsilon(M)=\varepsilon_m(M)+\varepsilon_f(M)$$

ou bien

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

avec :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial U_0 / \partial x \\ \partial V_0 / \partial y \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\partial^2 W_0 / \partial x^2 \\ -\partial^2 W_0 / \partial y^2 \\ -2\partial^2 W_0 / \partial x \cdot \partial y \end{Bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Ce qui nous permet d'écrire la relation contraintes-déformations pour un pli sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}]_k \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot [\bar{Q}]_k \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

Le stratifié est soumis à des sollicitations dans son plan notées  $N_x, N_y$  et  $T_{yx}=T_{xy}$ , il s'agit là d'efforts dit de membrane, ils sont définis comme suit :

$N_x$  : effort résultant dans la direction x, par unité de largeur suivant la direction y

$N_y$  : effort résultant dans la direction y, par unité de largeur suivant la direction x

$T_{xy}$  ou  $T_{yx}$  cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction y (respectivement suivant la direction x)

Le champ des résultantes en membrane, noté  $N(x,y)$  est défini par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{II.40})$$

L'hypothèse utilisée pour intégrer sur l'épaisseur du stratifié et calculer un matériau homogène équivalent est l'homogénéité de la contrainte dans chaque pli. Ceci permet de discrétiser les intégrales et d'écrire des sommes finies, c'est-à-dire :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k \cdot dz \quad (\text{II.41})$$

Après calcul, on trouve ce qui suit

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

Avec : 
$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \cdot Q_{ij}^k \quad (\text{II.43})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \cdot Q_{ij}^k \quad (\text{II.44})$$

### II.8.2. Comportement en flexion

Aux efforts de membrane viennent s'ajouter des moments par unité d'envergure suivant la direction y ou la direction x, ces moments sont définis comme suit :

$M_x$  : moment fléchissant d'axe y du aux contraintes  $\sigma_x$  par unité de largeur suivant la direction y

$M_y$  : moment fléchissant d'axe x du aux contraintes  $\sigma_y$  par unité de largeur suivant la direction x

$M_{XY}$ (ou  $M_{YX}$ ) : moment de torsion d'axe x (ou y), du aux contraintes  $\tau_{xy}$  (ou  $\tau_{yx}$ ), par unité de largeur suivant y (ou suivant x)

Le champ des moments, noté  $M(x,y)$  est défini par :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz \quad (\text{II.45})$$

Comme pour les résultantes en membrane, on peut écrire

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^h \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz \quad (\text{II.46})$$

Après calcul, on trouve ce qui suit :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

$$\text{Avec : } B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \cdot Q_{ij}^k \quad (\text{II.48})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \cdot Q_{ij}^k \quad (\text{II.49})$$

L'expression générale reliant les contraintes et déformations globales qui représente l'équation constitutive pour les stratifiés s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.50})$$

En écriture condensée, on aura :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

La matrice A est la matrice de rigidité en membrane, D est la matrice de rigidité en flexion et B la matrice de couplage, ce couplage résulte de la structure en couches de matériaux de caractéristiques mécaniques différentes. Le couplage est nul (B=0), seulement dans le cas où le stratifié est symétrique

## II.9. CAS D'UN CHARGEMENT THERMOMECHANIQUE

### ❖ Coefficients de souplesse

Sous l'effet conjugué de chargement mécanique et de variation de température  $\Delta T$ , les déformations globales «thermomécaniques» pour un pli unidirectionnel sont obtenues au moyen d'une loi de comportement modifiée, exprimée dans le repère du pli par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} + \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_l \\ \alpha_t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

Les coefficients de souplesse sont exprimés dans le repère du stratifié par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{12} & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{26} \\ \overline{S}_{16} & \overline{S}_{26} & \overline{S}_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

Avec :  $\alpha_x = C^2 \cdot \alpha_l + S^2 \cdot \alpha_t$

$$\alpha_y = S^2 \cdot \alpha_l + C^2 \cdot \alpha_t \quad (\text{II.54})$$

$$\alpha_{xy} = 2 \cdot C \cdot S \cdot (\alpha_l - \alpha_t)$$

❖ Coefficients de raideur

En ce qui concerne la matrice de rigidité, on inverse la relation (II.53), on obtient alors l'expression des contraintes dans les axes globaux :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha Q_1 \\ \alpha Q_2 \\ \alpha Q_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

Les expressions de  $\overline{\alpha Q}_i$  sont données en annexe 1

En ce qui concerne la température, on prendra en compte deux cas :

- La température reste constante avec la profondeur
- La température varie linéairement avec la profondeur (voir figure II.8) selon l'équation :

$$\Delta T^k = \Delta T_C^k + z \cdot \Delta T_Z^k \quad (\text{II.56})$$

Dans ce cas, la relation (II.55) devient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \Delta T_C \begin{Bmatrix} \alpha Q_1 \\ \alpha Q_2 \\ \alpha Q_3 \end{Bmatrix} - z \cdot \Delta T_z \begin{Bmatrix} \alpha Q_1 \\ \alpha Q_2 \\ \alpha Q_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.57})$$

### II.9.1. Comportement en membrane

En suivant la même procédure que celle du paragraphe II.8.1, le flux d'effort en comportement thermomécanique s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k \cdot dz - \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha Q_1 \\ \alpha Q_2 \\ \alpha Q_3 \end{Bmatrix} \cdot dz \quad (\text{II.58})$$

En considérant la température variable avec la profondeur et suivant la loi de variation (II.61), après calcul, on trouve ce qui suit

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha A_1 \\ \alpha A_2 \\ \alpha A_3 \end{Bmatrix} \Delta T_C - \begin{Bmatrix} \alpha B_1 \\ \alpha B_2 \\ \alpha B_3 \end{Bmatrix} \Delta T_z \quad (\text{II.59})$$

$$\text{Avec : } \alpha A_i = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \overline{\alpha Q_i^k} \quad (\text{II.60})$$

$$\alpha B_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \overline{\alpha Q_i^k} \quad (\text{II.61})$$

Si la température devait être constante avec la profondeur, la relation (II.59) devient :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha A_1 \\ \alpha A_2 \\ \alpha A_3 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (\text{II.62})$$

### II.9.2. Comportement en flexion

En raisonnant de la même manière que pour le calcul des résultantes en membrane, on trouve après calcul ce qui suit :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha B_1 \\ \alpha B_2 \\ \alpha B_3 \end{Bmatrix} \Delta T_c - \begin{Bmatrix} \alpha D_1 \\ \alpha D_2 \\ \alpha D_3 \end{Bmatrix} \Delta T_z \quad (\text{II.63})$$

Avec : 
$$\alpha B_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \overline{\alpha Q_i^k} \quad (\text{II.64})$$

$$\alpha D_i = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \overline{\alpha Q_i^k} \quad (\text{II.65})$$

Si la température devait être constante avec la profondeur, la relation (II.63) devient :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha B_1 \\ \alpha B_2 \\ \alpha B_3 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (\text{II.66})$$

Pour un chargement thermomécanique, l'équation constitutive pour les stratifié s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha A_1 & \alpha B_1 \\ \alpha A_2 & \alpha B_2 \\ \alpha A_3 & \alpha B_3 \\ \alpha B_1 & \alpha D_1 \\ \alpha B_2 & \alpha D_2 \\ \alpha B_3 & \alpha D_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta T_c \\ \Delta T_z \end{Bmatrix} \quad (\text{II.67})$$

Pour une température constante, la relation (II.67) devient :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha A_1 \\ \alpha A_2 \\ \alpha A_3 \\ \alpha B_1 \\ \alpha B_2 \\ \alpha B_3 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (\text{II.68})$$

## II.10. CAS D'UN CHARGEMENT HYGROMECHANIQUE

Pour le cas de chargement hygromécanique, le raisonnement sera le même que pour le chargement thermomécanique, de ce fait, on donnera directement les formules



## Chapitre II Théorie du comportement hygrothermomécanique des structures stratifiées

### ❖ Coefficients de souplesse

Sous l'effet conjugué de chargement mécanique et de variation de l'humidité  $\Delta H$ , les déformations sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} + \Delta H \begin{Bmatrix} \beta_l \\ \beta_t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.69})$$

Les coefficients de souplesse sont exprimés dans le repère du stratifié par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{12} & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{26} \\ \overline{S}_{16} & \overline{S}_{26} & \overline{S}_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \Delta H \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.70})$$

Avec :  $\beta_x = C^2 \cdot \beta_l + S^2 \cdot \beta_t$

$$\beta_y = S^2 \cdot \beta_l + C^2 \cdot \beta_t \quad (\text{II.71})$$

$$\beta_{xy} = 2 \cdot C \cdot S \cdot (\beta_l - \beta_t)$$

### ❖ Coefficients de raideur

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \Delta H \begin{Bmatrix} \overline{\beta Q}_1 \\ \overline{\beta Q}_2 \\ \overline{\beta Q}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.72})$$

Les expressions des  $\overline{\beta Q}_i$  sont données en annexe 1

Comme pour la température, on prendra en compte deux cas :

- L'humidité reste constante avec la profondeur
- L'humidité varie linéairement la profondeur selon l'équation :

$$\Delta H^k = \Delta H_C^k + z \cdot \Delta H_Z^k \quad (\text{II.73})$$

Dans ce cas, la relation (II.55) devient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \Delta H_C \begin{Bmatrix} \overline{\beta Q_1} \\ \overline{\beta Q_2} \\ \overline{\beta Q_3} \end{Bmatrix} - z \cdot \Delta H_Z \begin{Bmatrix} \overline{\beta Q_1} \\ \overline{\beta Q_2} \\ \overline{\beta Q_3} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.74})$$

### II.10.1. Comportement en membrane

En suivant la même procédure on retrouve pour le cas où l'humidité varie avec la profondeur, ce qui suit

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta A_1 \\ \beta A_2 \\ \beta A_3 \end{Bmatrix} \Delta H_C - \begin{Bmatrix} \beta B_1 \\ \beta B_2 \\ \beta B_3 \end{Bmatrix} \Delta H_Z \quad (\text{II.75})$$

$$\text{Avec : } \beta A_i = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \overline{\beta Q_i^k} \quad (\text{II.76})$$

$$\beta B_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \overline{\beta Q_i^k} \quad (\text{II.77})$$

Si l'humidité devait être constante avec la profondeur, la relation (II.75) devient :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta A_1 \\ \beta A_2 \\ \beta A_3 \end{Bmatrix} \Delta H \quad (\text{II.78})$$

### II.10.2. Comportement en flexion

De la même manière que pour le cas de chargement thermomécanique, on trouve après calcul ce qui suit :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta B_1 \\ \beta B_2 \\ \beta B_3 \end{Bmatrix} \Delta H_C - \begin{Bmatrix} \beta D_1 \\ \beta D_2 \\ \beta D_3 \end{Bmatrix} \Delta H_Z \quad (\text{II.79})$$

$$\text{Avec : } \beta B_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \overline{\beta Q_i^k} \quad (\text{II.80})$$

$$\beta D_i = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \overline{\beta Q_i^k} \quad (\text{II.81})$$

Pour une humidité constante, on aura :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta B_1 \\ \beta B_2 \\ \beta B_3 \end{Bmatrix} \cdot \Delta H \quad (\text{II.82})$$

Pour un chargement hygromécanique, l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} \beta A_1 & \beta B_1 \\ \beta A_2 & \beta B_2 \\ \beta A_3 & \beta B_3 \\ \beta B_1 & \beta D_1 \\ \beta B_2 & \beta D_2 \\ \beta B_3 & \beta D_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta H_c \\ \Delta H_z \end{Bmatrix} \quad (\text{II.83})$$

Pour une humidité constante, la relation (II.83) devient :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} \beta A_1 \\ \beta A_2 \\ \beta A_3 \\ \beta B_1 \\ \beta B_2 \\ \beta B_3 \end{pmatrix} \cdot \Delta H \quad (\text{II.84})$$

## **II.11. CAS D'UN CHARGEMENT HYGROTHERMOMECHANIQUE**

Pour le cas d'un chargement hygrothermomécanique, on considère la stratifié sollicité avec variation de température et d'humidité. Les flux des efforts et des moments sont exprimés en fonction des déformations et des courbures dans l'équation constitutive générale qui est donné par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha A_1 & \alpha B_1 \\ \alpha A_2 & \alpha B_2 \\ \alpha A_3 & \alpha B_3 \\ \alpha B_1 & \alpha D_1 \\ \alpha B_2 & \alpha D_2 \\ \alpha B_3 & \alpha D_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta T_c \\ \Delta T_z \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \beta A_1 & \beta B_1 \\ \beta A_2 & \beta B_2 \\ \beta A_3 & \beta B_3 \\ \beta B_1 & \beta D_1 \\ \beta B_2 & \beta D_2 \\ \beta B_3 & \beta D_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta H_c \\ \Delta H_z \end{Bmatrix} \quad (\text{II.85})$$

## II.12. DETERMINATION DES DEFORMATIONS ET DES CONTRAINTES

On a vu que l'expression générale reliant les contraintes et les déformations s'écrit sous forme condensée :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix} \quad (\text{II.86})$$

Le calcul des déformations revient à inverser la relation (II.86), de ce fait, on aura :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (\text{II.87})$$

Connaissant les déformations en membrane et en flexion et torsion, on peut déterminer les déformations dans le stratifié en utilisant la relation :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.88})$$

Ensuite, pour les déformations dans chaque pli, il suffira de reporter ces déformations aux axes locaux en utilisant la relation :

$$\{\varepsilon\}_{ll} = [T_\varepsilon]^{-1} \cdot \{\varepsilon\}_{xy} \quad (\text{II.89})$$

En remplaçant par la relation (II.88), on aura :

$$\{\varepsilon\}_{ll} = [T_\varepsilon]^{-1} \cdot \{\varepsilon^o\}_{xy} + z \cdot [T_\varepsilon]^{-1} \cdot \{k\}_{xy} \quad (\text{II.90})$$

En ce qui concerne le calcul des contraintes, leur calcul se fait pour chaque pli en utilisant la relation contraintes- déformations déjà mentionnée, alors, on aura :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.91})$$

En introduisant la relation (II.88), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.92})$$

De la même façon que pour les déformations, on reportera ces contraintes aux axes locaux de chaque pli par la relation :

$$\{\sigma\}_{ll} = [T_\sigma]^{-1} \cdot \{\sigma\}_{xy} \quad (\text{II.93})$$

En prenant en compte la relation (II.92) on aura :

$$\{\sigma\}_{ll} = [T_\sigma]^{-1} \cdot [\bar{Q}] \cdot \{\varepsilon^o\}_{xy} + [T_\sigma]^{-1} \cdot [\bar{Q}] \cdot \{k\}_{xy} \quad (\text{II.94})$$

### **II.13. Cas particuliers**

La relation (II.50) représente le cas général de l'équation constitutive, il existe cependant des cas particuliers qui sont intéressants à mentionner.

1. Stratifiés symétriques

On a déjà défini un stratifié symétrique comme étant un stratifié dont le plan moyen est un plan de symétrie, dans ce cas, la relation (II.50) s'écrira :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.95})$$

La matrice [B] étant nulle, il n'y a pas de couplage membrane – flexion, le comportement du stratifié devient plus simple à analyser. Donc, il serait plus judicieux d'utiliser des stratifiés symétriques, à moins qu'il y ait des conditions spécifiques qui imposent l'utilisation des stratifiés non symétriques.

2. Stratifié symétrique dont les axes principaux de toutes les couches coïncident avec les axes du stratifié

L'équation (II.50) s'écrira comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.96})$$

Outre l'absence du couplage membrane-flexion, on remarque l'absence du couplage traction – cisaillement et du couplage flexion – torsion.

3. Stratifié antisymétrique

Pour ce cas, on aura la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{61} & B_{62} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{21} & D_{22} & 0 \\ B_{61} & B_{62} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.97})$$

Dans ce cas, les couplages existants sont : traction – torsion et cisaillement – flexion.

#### **II.14. CRITERE DE RUPTURE**

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de divers mécanismes élémentaires :

- la rupture des fibres
- la rupture transverse de la matrice
- la rupture longitudinale de la matrice
- la rupture de l'interface fibres-matrice

divers critères de ruptures ont été développés, mais celui qu'on aura à utiliser pour le cas d'un matériau composite unidirectionnel est le critère de Tsai-Hill, ce critère s'écrit :

$$\left(\frac{\sigma_l}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_l \cdot \sigma_t}{X^2} + \left(\frac{\sigma_{lt}}{S_{lt}}\right)^2 = 1 \quad (\text{II.98})$$

ou

X : c'est la contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction l

Y : c'est la contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction t

S<sub>lt</sub> : c'est la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan (l,t)

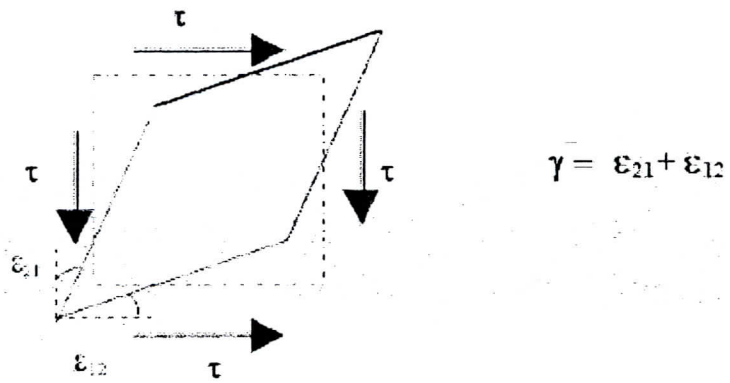


FIGURE II.1 Déviation angulaire

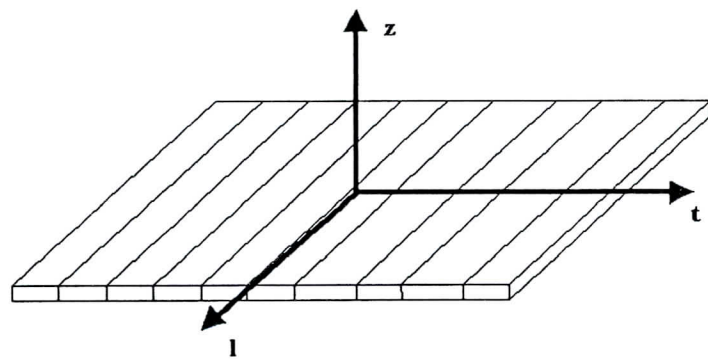


FIGURE II.2 Axes d'orthotropie

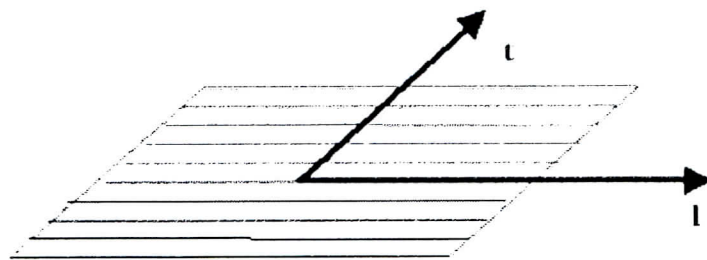


FIGURE II.3 Etat de contraintes planes



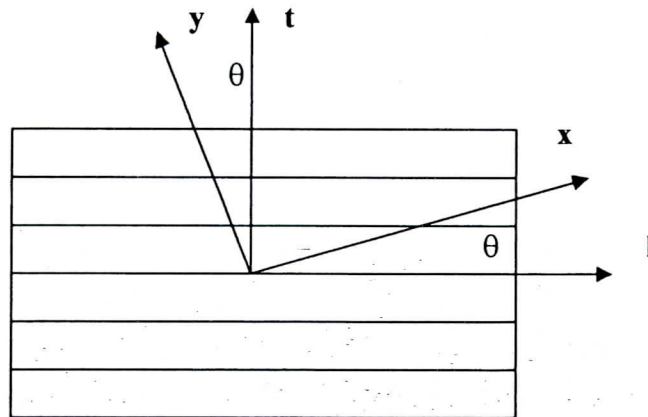


FIGURE II.4 Changement de repère

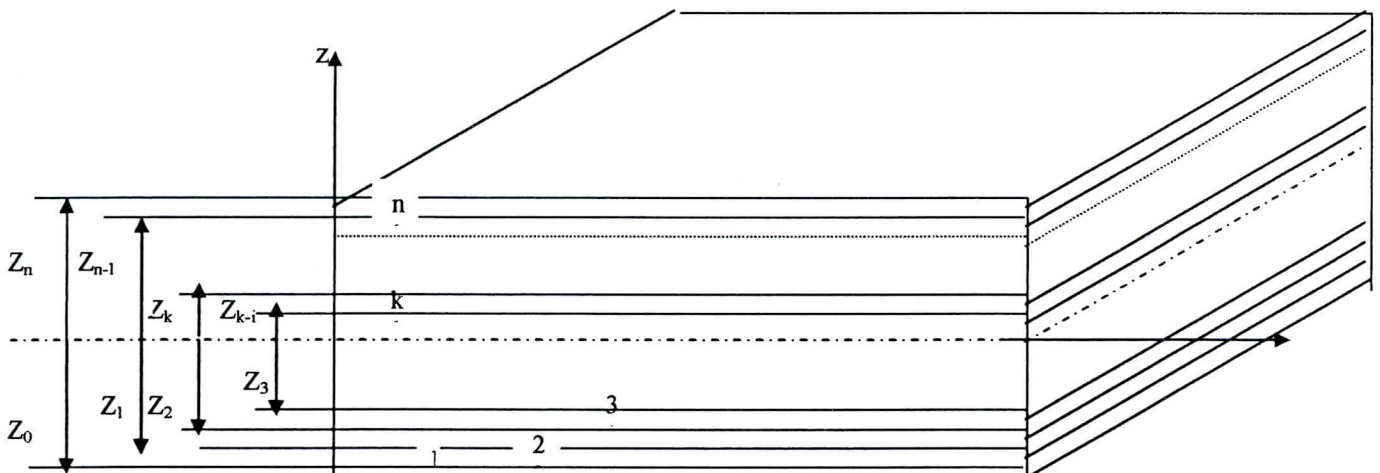


FIGURE II.5 Notation conventionnelle des plis d'un stratifié

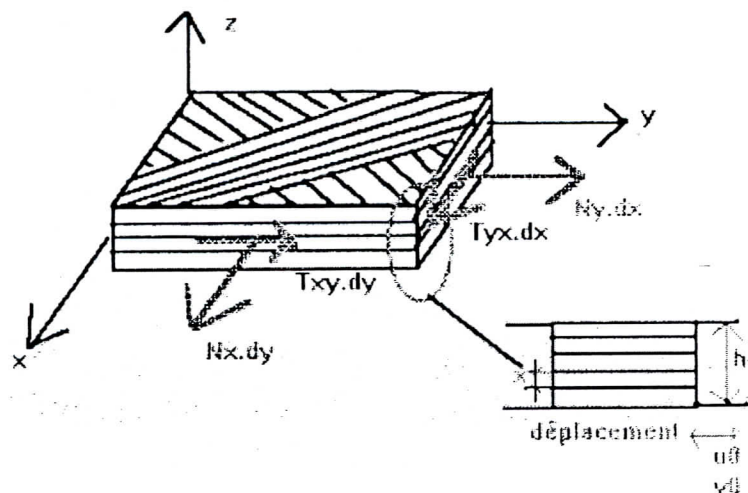


FIGURE II.6 Résultantes en membrane des actions exercées sur un stratifié

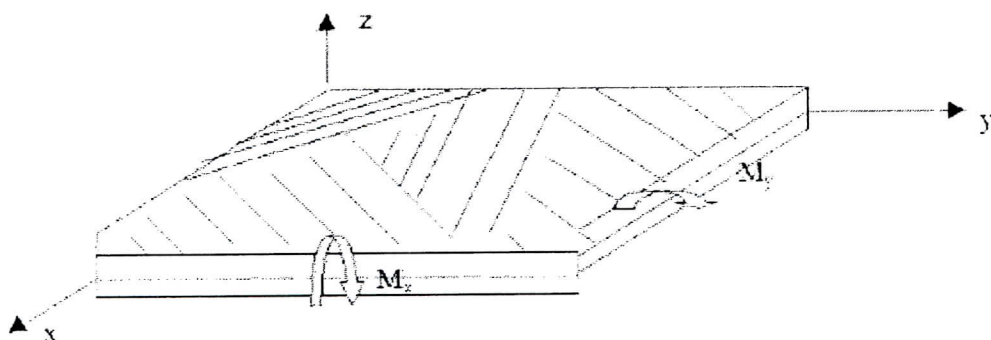


FIGURE II.7 Moments exercés sur un stratifié

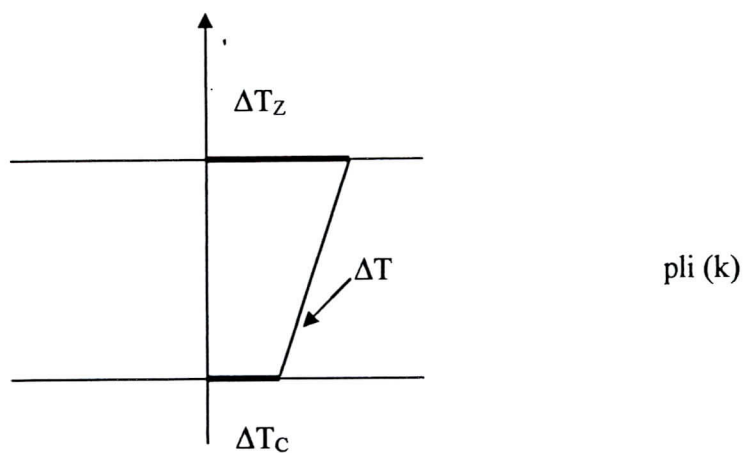


FIGURE II.8 Variation linéaire de la température avec l'épaisseur du stratifié

# **CHAPITRE III**

# **PROGRAMMATION**

### III.1 INTRODUCTION

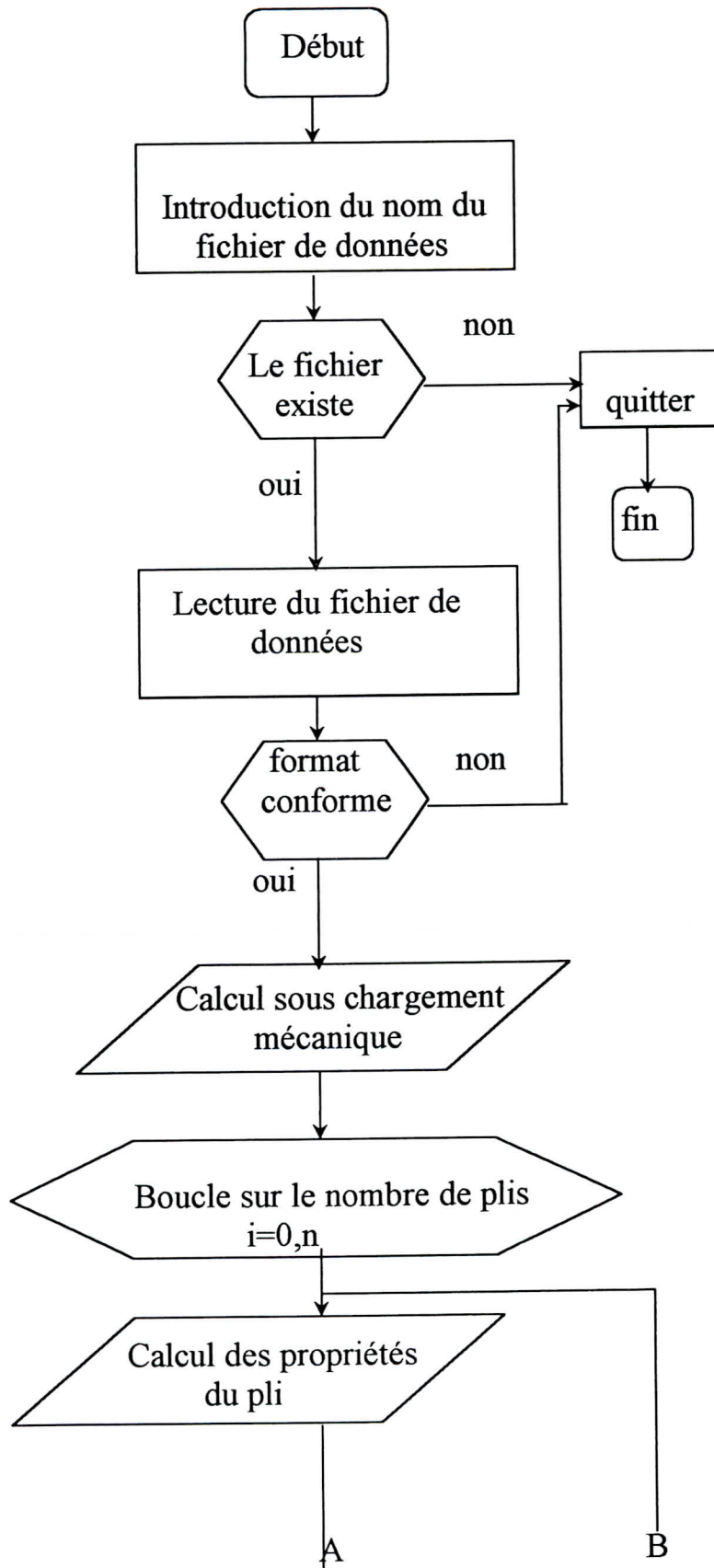
Lors de la conception d'une structure en matériaux composites, il est important, voire même, nécessaire de connaître les caractéristiques de chacun des composants. Des logiciels ont été mis au point (par exemple : progiciel Pact ou bien le logiciel Euclid Analyst) pour faciliter l'étude de ces matériaux [10] et [11], ces logiciels sont nécessaires dans le cas où le calcul devient complexe (la complexité dépend du but auquel nous voulons arriver), c'est pour cela que nous avons pensé à élaborer un programme qui permet, pour un nombre important de plis, d'étudier le comportement du composite à partir des caractéristiques de ses composants, nous essaierons aussi de mettre en évidence l'influence de la température et de l'humidité.

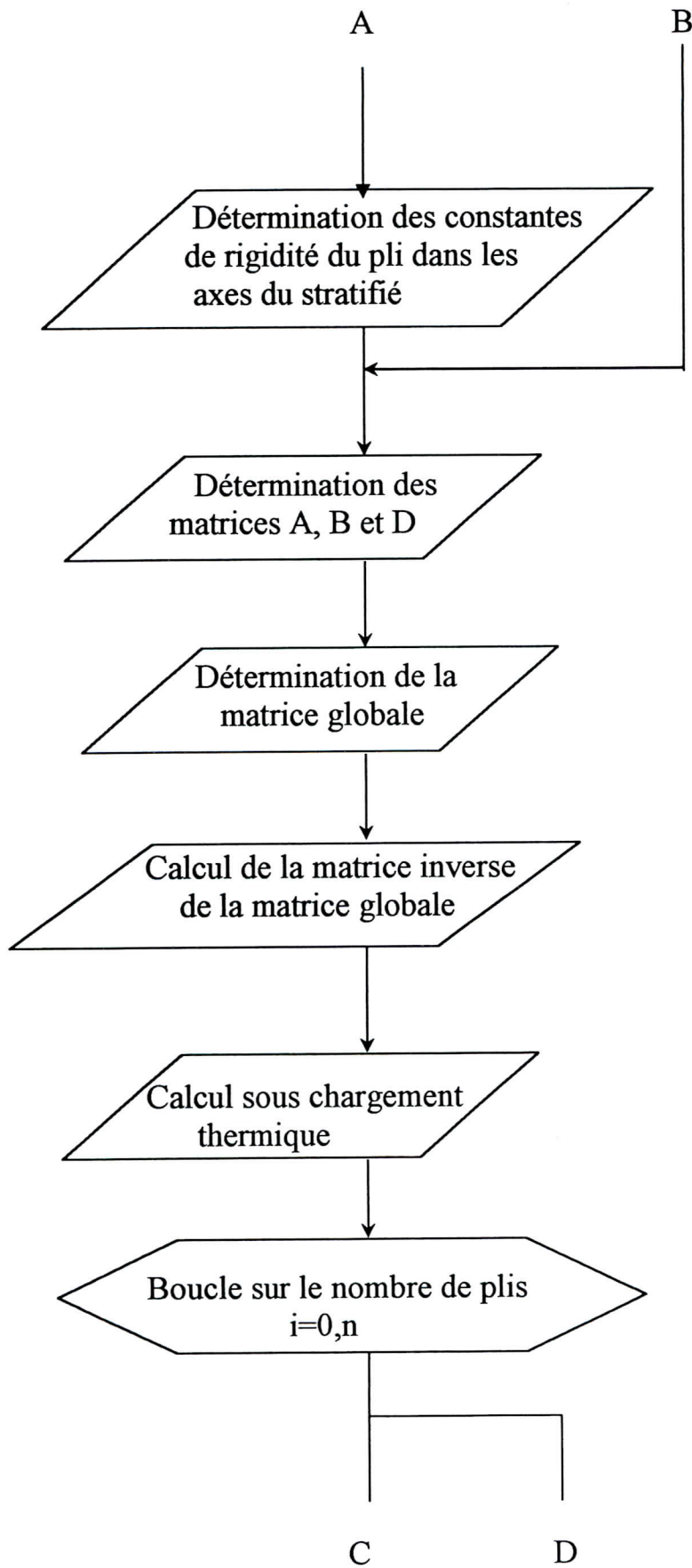
### III.2 PRESENTATION DES ETAPES DE CALCUL

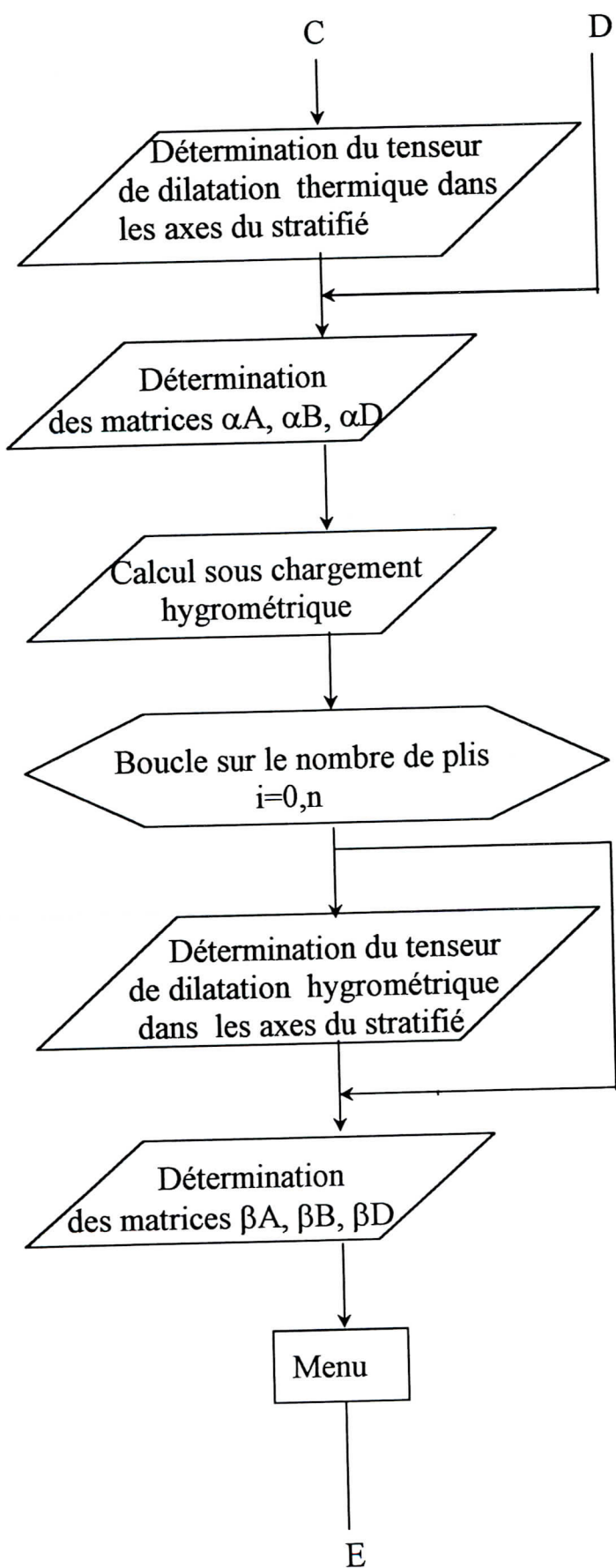
Pour pouvoir analyser le comportement d'un stratifié, il faut suivre les étapes suivantes :

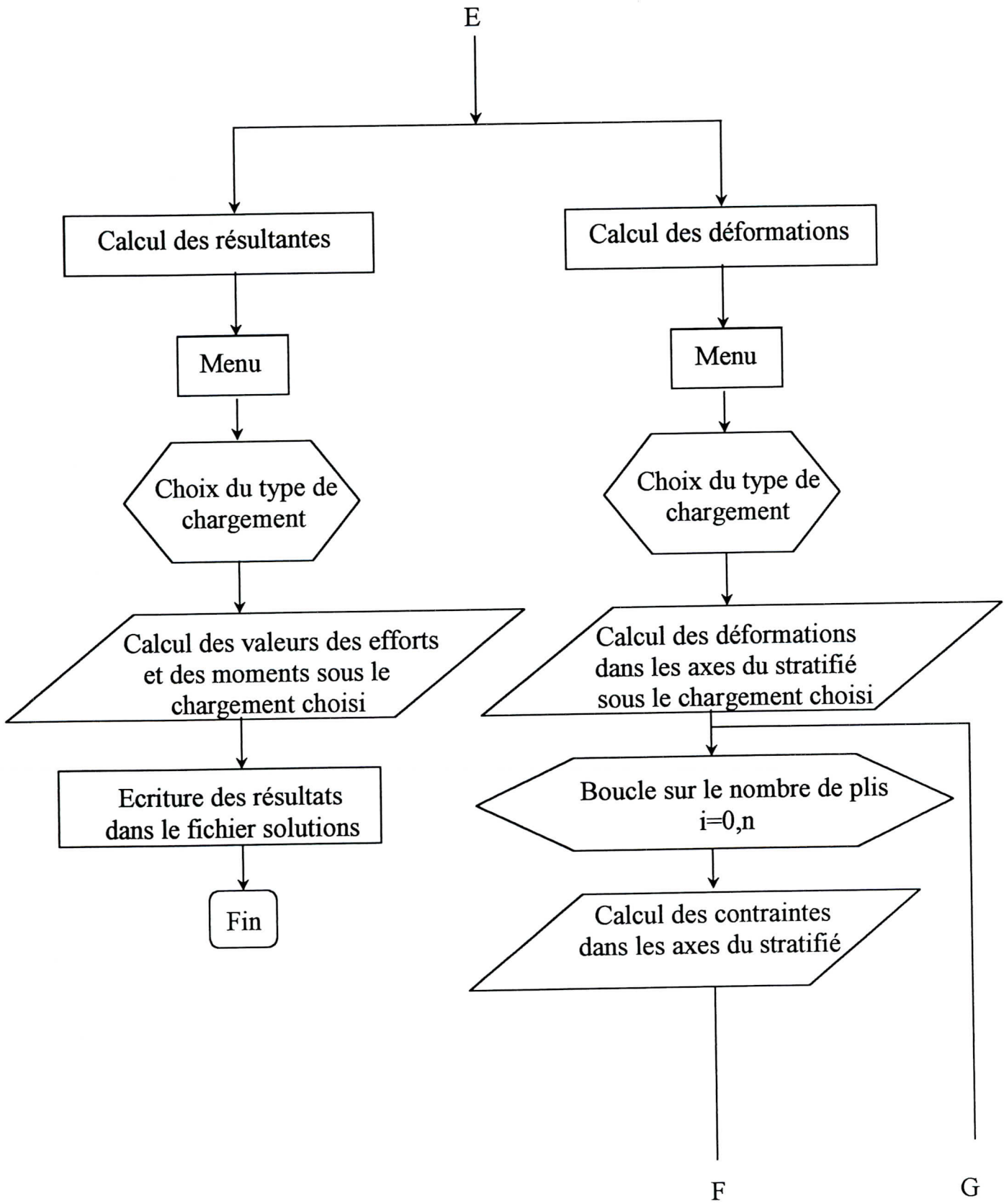
- Calcul des caractéristiques du composite
- Calcul de la matrice de rigidité de chaque pli par rapport à ses axes
- Calcul de la matrice de rigidité de chaque pli par rapport aux axes du stratifié
- Calcul des matrices [A], [B] et [D]
- Résolution de l'équation constitutive
- Calcul des champs de déformations des plis
  - par rapport aux axes du stratifié
  - par rapport aux axes des plis
- calcul des champs des contraintes des plis
  - par rapport aux axes du stratifié
  - par rapport aux axes des plis
- vérification du critère de rupture

III.3. ORGANIGRAMME DE CALCUL











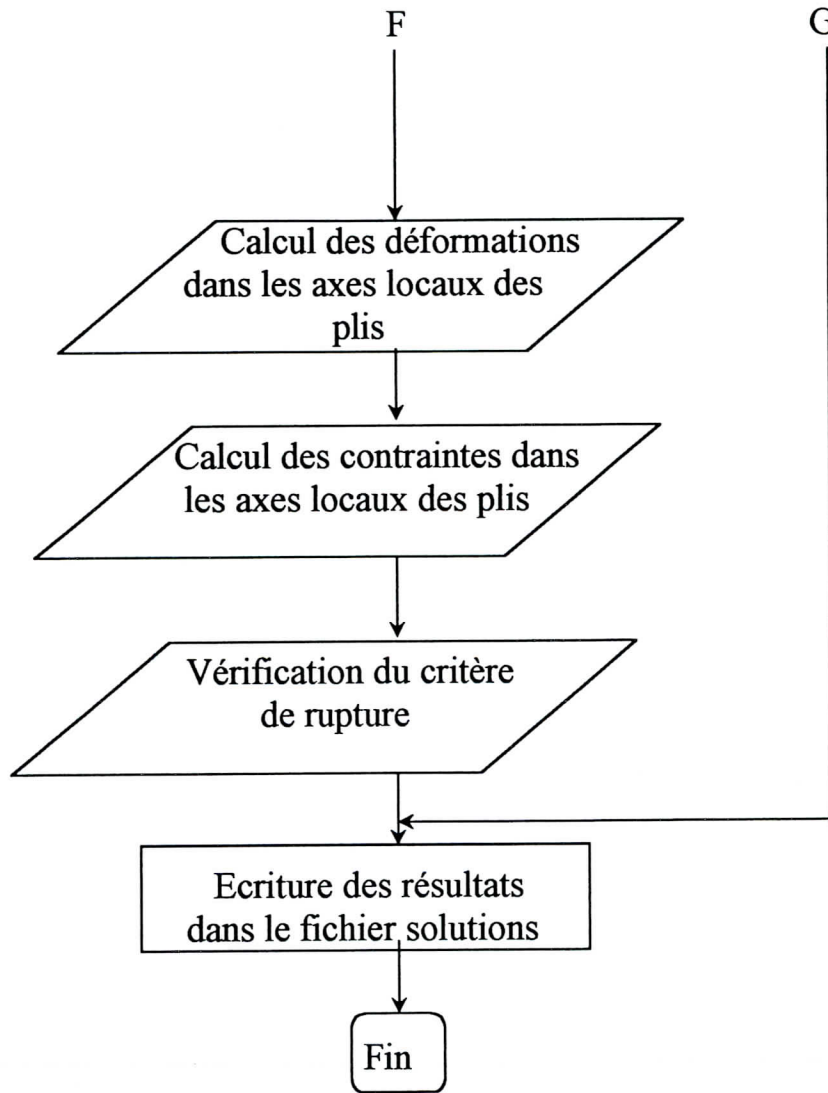


FIGURE III.1 Organigramme de calcul

### III.4. LANGAGE DE PROGRAMMATION

Le langage de programmation utilisé est le TURBO PASCAL (version 7.00).

Tout programme écrit est traduit intégralement dans le langage du processeur, ce n'est qu'à partir du moment qu'il est exempt de toute erreur de syntaxe qu'il devient fonctionnel.

Ce langage présente plusieurs avantages, dont on peut citer :

- Un compilateur extrêmement rapide pour convertir la source en un programme exécutable.
- Une structuration claire des programmes en blocs, ces blocs peuvent être compilés séparément et reliés entre eux pour constituer de grandes applications
- Un débogueur intégré qui est d'un grand secours pour traquer les erreurs du programme et qui permet aussi de dérouler le programme pas à pas pour mieux le surveiller

Vu que le programme présente volume important de calcul, il est constitué de plusieurs procédures qui sont reliées entre elles par le programme principal. (Figure II.2)

### III.5. GUIDE DE L'UTILISATEUR

Pour pouvoir utiliser le programme, il faut commencer par préparer un fichier de données « fichier.dat », ce fichier comporte les données suivantes :

- Caractéristiques des fibres :  $E_f$ ,  $G_f$ ,  $V_f$ ,  $\nu_f$ ,  $\alpha_f$ ,  $\beta_f$
- Caractéristiques de la matrice :  $E_m$ ,  $G_m$ ,  $V_m$ ,  $\nu_m$ ,  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$
- Nombre de plis
- Orientation et épaisseur de chaque pli
- Champ des déformations dans le cas où nous voulons calculer les efforts, ou bien le champ des efforts dans le cas où nous voulons calculer les déformations et les contraintes

Une fois le programme lancé, une fenêtre apparaît pour expliquer brièvement l'utilisation du programme, ensuite un choix est affiché :

---

I Choisissez une option

I 1 :Calcul des résultantes et des moments

I 2 :Calcul des déformations

I 3 :Aide

I 4 :Quitter

---

Si vous choisissez la quatrième option le programme va s'arrêter, si vous choisissez la troisième option, une fenêtre d'aide apparaît, par contre, si vous choisissez la première ou la deuxième option, un autre choix apparaît :

---

I Choisissez une option

I 1 :Chargement mécanique

I 2 :Chargement thermique

I 3 :Chargement hygrométrique

I 4 :Chargement thermomécanique

I 5 :Chargement hygromécanique

I 6 :Chargement hygrothermique

I 7 :Chargement hygrothermomécanique

I 8 :Quitter

---

Une fois le calcul effectué, on vous demande le nom du fichier solutions « fichier.sol » pour pouvoir stocker les résultats.

A la fin un message apparaît :

Voulez-vous vérifier le critère de rupture?(O/N)

Si vous choisissez la réponse négative, le programme va s'arrêter, sinon, il vous demandera les valeurs des contraintes à la rupture pour pouvoir vérifier le critère de rupture pour chaque pli et ces résultats seront rajoutés à la fin du fichier solutions.

Le fichier solutions va comporter les résultats suivants (voir annexe 2) :

- propriétés du mélange matrice-fibres
- épaisseurs et orientations des plis
- matrice de rigidité de chaque pli par rapport aux axes du stratifié
- les matrices [A], [B] et [D]
- expressions des résultantes et des moments sous :
  - chargement mécanique
  - chargement thermique
  - chargement hygrométrique
  - chargement thermomécanique
  - chargement hygromécanique
  - chargement hygrothermique
  - chargement hygrothermomécanique
- déformations rapportées aux axes (x,y)
- déformations de chaque pli rapportées aux axes (l,t)
- contraintes pour chaque pli rapportées aux axes (x,y)
- contraintes pour chaque pli rapportées aux axes (l,t)

Dans le cas où le critère de rupture est vérifié, on trouve les résultats de la vérification à la fin du fichier

### III.6. COMPARAISON DES RESULTATS

Faute de résultats expérimentaux, nous avons pensé à valider notre programme en faisant une comparaison avec un exemple analytique, c'est l'exemple 14.4.4.3, page 289 référence [2], dans cet exemple nous trouvons ce qui suit :

Nous considérons le stratifié de la figure,

Constitué de quatre couches unidirectionnelles

de mêmes propriétés :

$E_l = 38\text{GPa}$     $E_t = 9\text{GPa}$     $G_{lt} = 3,6\text{GPa}$

$\nu_{lt} = 0,32$

1mm	$\theta = 30^\circ$
1,5mm	$\theta = -15^\circ$
1mm	$\theta = -30^\circ$
1,5mm	$\theta = 15^\circ$

(a) Matrices

Résultat analytique

Résultat numérique

## Matrice A

158.22E6	30.432E6	0	1.5821E8	3.0432E7	0
30.432E6	51.277E6	0	3.0432E7	5.1277E7	0
0	0	33.674E6	0	0	3.3674E7

## Matrice B

-13.384E3	5.2247E3	-1.6154E3	-1.3384E4	5.2247E3	-1.6154E3
5.2247E3	2.934E3	5.9258E3	5.2247E3	2.934E3	5.9258E3
-1.6154E3	5.9258E3	5.2247E3	-1.6154E3	5.9258E3	5.2247E3

## Matrice D

327.38	64.271	60.686	3.2738E2	6.4271E1	6.0685E1
64.271	107.32	15.438	6.4271E1	1.0732E2	1.5438E1
60.686	15.438	71.025	6.0685E1	1.5438E1	7.1025E1

(b) Déformations

Résultat analytique

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.064 \\ 6.897 \\ 7.836 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} + \begin{pmatrix} 0.580 \\ -1.027 \\ -1.309 \end{pmatrix} \cdot Z$$

Résultat numérique

## DEFORMATIONS RAPPORTEES AUX AXES (X,Y)

$$5.0635358623E-03 + ( 5.7976619996E-01 ) z$$

$$6.8966985895E-03 + (-1.0266779957E+00 ) z$$

$$7.8356638797E-03 + (-1.3088516567E+00 ) z$$

(c) Contraintes

## Résultat analytique

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 263.564 \\ 147.009 \\ 140.579 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5522.83 \\ 11467.79 \\ -9580.17 \end{pmatrix} \cdot Z \quad (\text{MPa}) \quad 1.5\text{mm} \leq Z \leq 2.5\text{mm}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115.451 \\ 93.440 \\ -2.284 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -19217.67 \\ -2519.78 \\ -13520.26 \end{pmatrix} \cdot Z \quad (\text{MPa}) \quad -1\text{mm} \leq Z \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 263.411 \\ 94.571 \\ 80.758 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6785.75 \\ -7919.24 \\ -3805.83 \end{pmatrix} \cdot Z \quad (\text{MPa}) \quad -2.5\text{mm} \leq Z \leq -1\text{mm}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 157.918 \\ 83.622 \\ 2.951 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24407.03 \\ -6090.45 \\ 10176.80 \end{pmatrix} \cdot Z \quad (\text{MPa}) \quad 0 \leq Z \leq 1.5\text{mm}$$

## Résultat numérique

## CONTRAINTES RAPPORTEES AUX AXES (X, Y)

$$-2.5000000000\text{E}-03 \text{ m} \leq z \leq -1.0000000000\text{E}-03 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} & 2.6341098105\text{E}+02 + ( 6.7857502482\text{E}+03 ) z \\ & 9.4570869219\text{E}+01 + (-7.9192364484\text{E}+03 ) z \quad (\text{MPa}) \\ & 8.0758489154\text{E}+01 + (-3.8058335101\text{E}+03 ) z \end{aligned}$$

$$-1.0000000000\text{E}-03 \text{ m} \leq z \leq -1.7763568394\text{E}-15 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} & 1.1545110814\text{E}+02 + ( 1.9217670542\text{E}+04 ) z \\ & 9.3440295540\text{E}+01 + (-2.5197832114\text{E}+03 ) z \quad (\text{MPa}) \\ & -2.2840044335 + (-1.3520258449\text{E}+04 ) z \end{aligned}$$

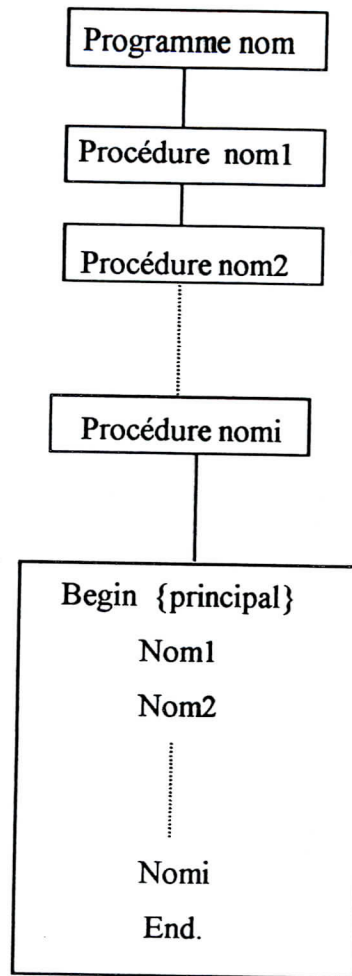
$$0.0000000000\text{E}+00 \text{ m} \leq z \leq 1.5000000000\text{E}-03 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} & 1.5791818662\text{E}+02 + ( 2.4407029172\text{E}+04 ) z \quad (\text{MPa}) \\ & 8.3622533574\text{E}+01 + (-6.0904511064\text{E}+03 ) z \\ & 2.9509251469 + (-1.0176798629\text{E}+04 ) z \end{aligned}$$

1.5000000000E-03 m <= z <= 2.5000000000E-03 m

2.6356431423E+02 + (-5.5228260070E+03 ) z  
1.4700904284E+02 + (-1.1467786180E+04 ) z (MPa)  
1.4057868747E+02 + (-9.5801741093E+03 ) z

Le fichier solutions est reporté en entier en annexe 2



**FIGURE III.2** Structuration du programme



# **CHAPITRE IV**

## **RESULTATS ET DISCUSSION**

### IV.1. INTRODUCTION

La conception des structures stratifiées repose sur plusieurs paramètres, qui sont dépendants des sollicitations auxquelles la structure est soumise. C'est pour cela qu'on a tendance à dire que tout matériau stratifié est unique, il est unique par le choix des matériaux (fibres et matrice) et leur taux, par l'orientation des fibres, ...etc. Pour cela, on va essayer, dans cette étude paramétrique, de prendre en compte le plus de paramètres possibles et essayer de les faire varier et voir ainsi leurs conséquences sur la conception des stratifiés.

### IV.2. APPLICATIONS

Dans toutes les applications qui vont suivre, nous utiliserons une matrice époxy qui a les caractéristiques élémentaires suivantes :

$$E_m = 3.45 \text{ GPa}$$

$$G_m = 1.33 \text{ GPa}$$

$$\nu_m = 0.30$$

Pour le reste des données, nous les mentionnerons en cas de besoin.

En ce qui concerne les fibres, cela dépendra de l'application.

1<sup>ère</sup> application : comparaison entre un stratifié symétrique et un stratifié antisymétrique soumis à un chargement mécanique.

On utilisera des fibres de carbone HM unidirectionnelles

Données de calcul :

$$E_f = 380 \text{ GPa}$$

$$G_f = 142.9 \text{ GPa}$$

$$\nu_f = 0.33$$

$$V_m = 0.4$$

$$N_x = 1000 \text{ Pa}$$

$$M_x = 0$$

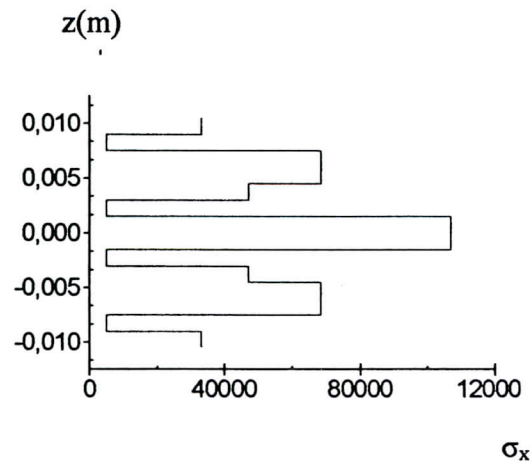
$$N_y = 500 \text{ Pa}$$

$$M_y = 0$$

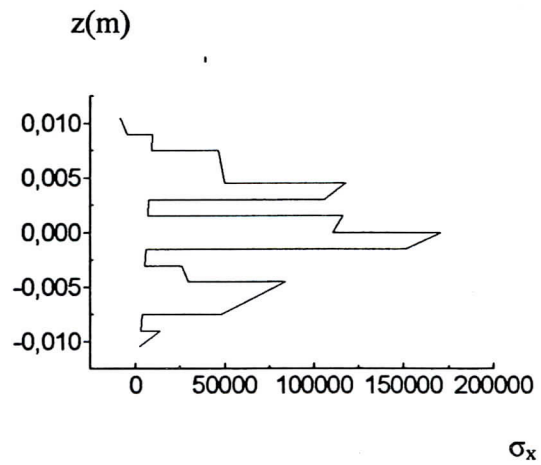
$$T_{xy} = 250 \text{ Pa}$$

$$M_{xy} = 0$$

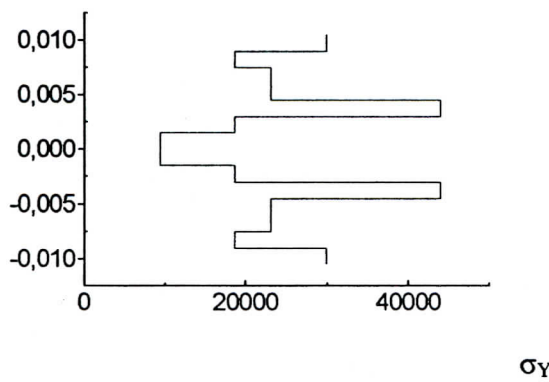
Stratifié symétrique



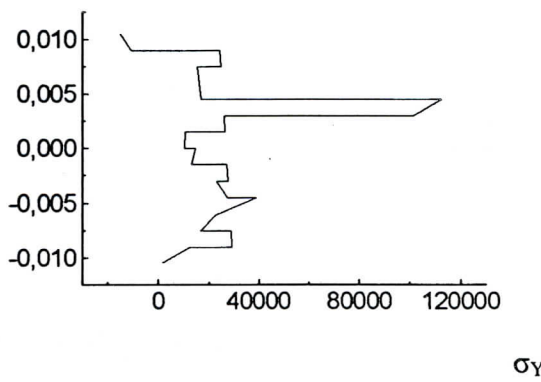
Stratifié antisymétrique



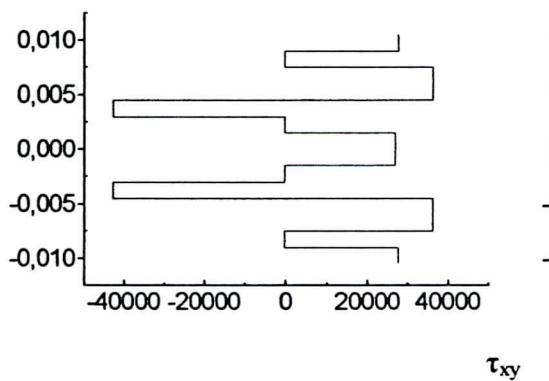
$z$ (m)



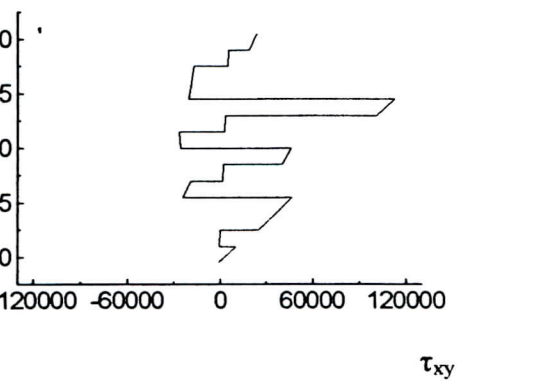
$z$ (m)



$z$ (m)



$z$ (m)



**Figure IV.1** REPARTITION DES CONTRAINTES SELON LE REPERE (X,Y) LE LONG DE L'ÉPAISSEUR DES DEUX STRATIFIÉS

Constatations :

En comparant les deux stratifiés, nous remarquons que la répartition des contraintes n'est pas similaire, en effet, pour le premier stratifié (stratifié symétrique) nous avons une répartition qui est symétrique, par contre la répartition pour le deuxième stratifié est quelconque, et donc, nous pouvons nous permettre de dire que la symétrie du stratifié induit la symétrie de la répartition des contraintes.

Pour confirmer les résultats obtenus, nous avons essayé de calculer manuellement les contraintes et les déformations d'un stratifié symétrique [45/90/90/45], les données de calcul sont :

$$V_m=0.4$$

$$E_m=3.4 \text{ GPa}$$

$$G_m=1.33 \text{ GPa}$$

$$v_m=0.3$$

$$\alpha_m = 0.5 \cdot 10^{-5}$$

$$\beta_m = 0.8 \cdot 10^{-5}$$

$$\Delta T_z=350$$

$$\Delta T_c=100$$

$$N_x=1000 \text{ MPa}$$

$$N_y=500 \text{ MPa}$$

$$T_{xy}=250 \text{ MPa}$$

$$E_f=73 \text{ GPa}$$

$$G_f=29.2 \text{ GPa}$$

$$v_f=0.22$$

$$\alpha_f = 0.2 \cdot 10^{-5}$$

$$\beta_f = 0.21 \cdot 10^{-5}$$

$$\Delta H_z=120$$

$$\Delta H_c=50$$

$$M_x=0$$

$$M_y=0$$

$$M_{xy}=0$$

Tout calcul fait, on obtient l'équation constitutive du stratifié suivante :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.72E7 & 4.04E7 & 2.82E7 & 0 & 0 & 0 \\ 4.04E7 & 1.9E8 & 2.82E7 & 0 & 0 & 0 \\ 2.82E7 & 2.82E7 & 4.66E7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.68E2 & 5.79E1 & 2.11E1 \\ 0 & 0 & 0 & 5.79E1 & 7.59E2 & 2.11E1 \\ 0 & 0 & 0 & 2.11E1 & 2.11E1 & 7.7E1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}$$

En ce qui concerne le calcul des contraintes par rapport au repère (x,y), on obtient ce qui suit :

$$-3E-03 \text{ mm} \leq z \leq -1.5E-03 \text{ mm}$$

$$\sigma_x = 1.14E8 + (2.18E-2) z$$

$$\sigma_y = 3.46E7 + (-8.61E-3) z \quad \text{Pa}$$

$$\tau_{xy} = -9.95E6 + (-4.01E-3) z$$

$$-1.5E-03 \text{ mm} \leq z \leq 0 \text{ mm}$$

$$\sigma_x = 2.18E8 + (3.28E-2) z$$

$$\sigma_y = 1.31E8 + (1.37E-2) z \quad \text{Pa}$$

$$\tau_{xy} = 9.32E7 + (6.91E-3) z$$

$$0 \text{ mm} \leq z \leq 1.5E-3 \text{ mm}$$

$$\sigma_x = 2.18E8 + (3.28E-2) z$$

$$\sigma_y = 1.31E8 + (1.37E-2) z \quad \text{Pa}$$

$$\tau_{xy} = 9.32E7 + (6.91E-3) z$$

$$1.5E-3 \text{ mm} \leq z \leq 3E-3 \text{ mm}$$

$$\sigma_x = 1.14E8 + (2.18E-2) z$$

$$\sigma_y = 3.46E7 + (-8.61E-3) z \quad \text{Pa}$$

$$\tau_{xy} = -9.95E6 + (-4.01E-3) z$$

Ces résultats nous permettent de confirmer qu'effectivement l'empilement de couches conditionne la structure de la matrice de rigidité et donc tous les résultats qui en découlent, et si nous devons calculer les déformations, nous constaterons la même symétrie.

2<sup>ème</sup> application : calcul des contraintes et des déformations d'un stratifié soumis aux cas de chargements suivants :

- chargement mécanique
- chargement thermique
- chargement hygrométrique
- chargement hygrothermomécanique

On utilisera des fibres de verre type (E) unidirectionnelles

Données de calcul :

$$E_f = 73 \text{ GPa}$$

$$G_f = 29.2 \text{ GPa}$$

$$\nu_f = 0.22$$

$$V_m = 0.4$$

$$\alpha_m = 0.5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$$

$$\alpha_f = 0.2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$$

$$\beta_m = 0.8 \cdot 10^{-5}$$

$$\beta_f = 0.21 \cdot 10^{-5}$$

$$\Delta T_z = 350^\circ\text{C}$$

$$\Delta H_z = 120$$

$$\Delta T_c = 100^\circ\text{C}$$

$$\Delta H_c = 50$$

$$N_x = 1 \text{ MPa}$$

$$M_x = 0$$

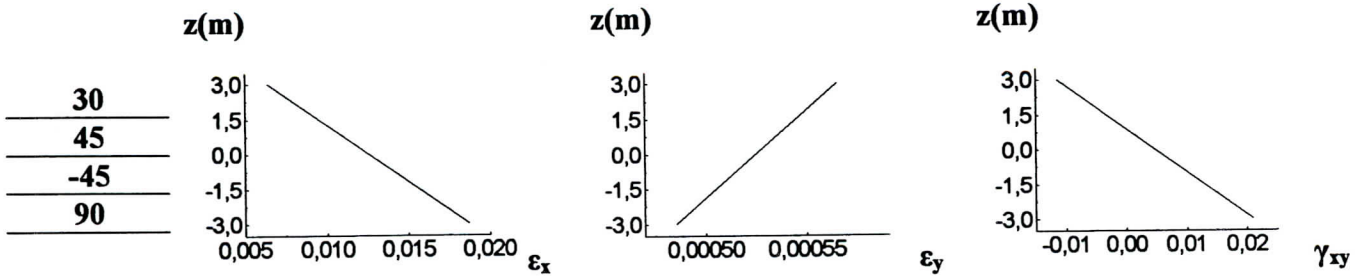
$$N_y = 0.5 \text{ MPa}$$

$$M_y = 0$$

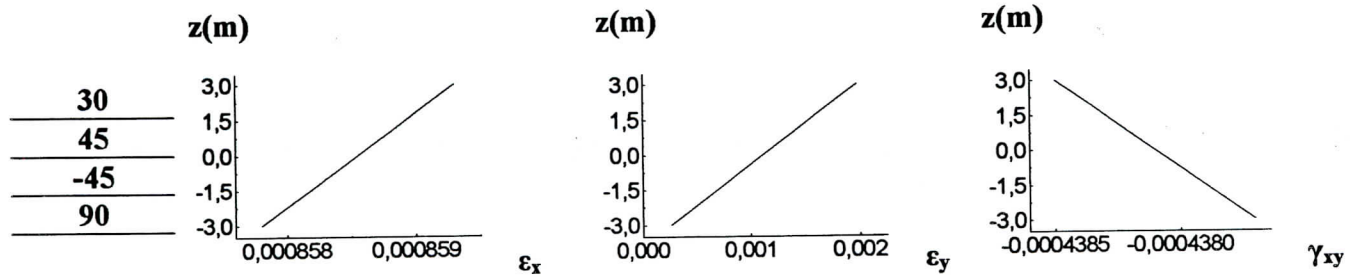
$$T_{xy} = 0.25 \text{ MPa}$$

$$M_{xy} = 0$$

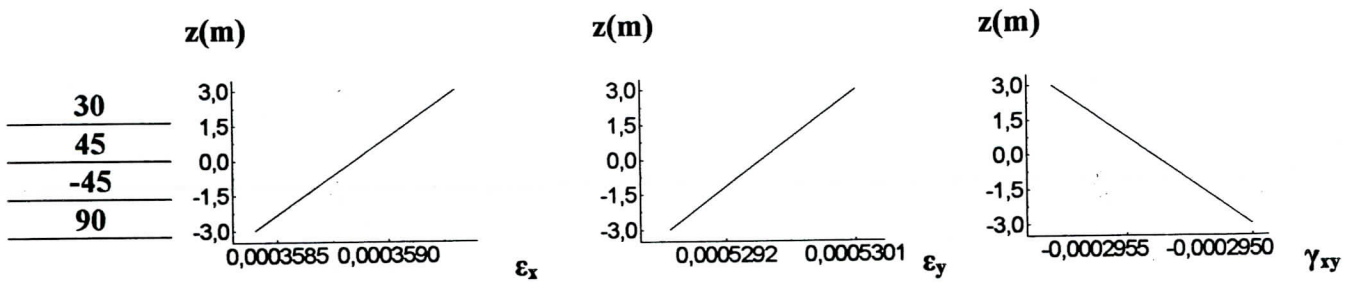
**(a) Chargement mécanique**



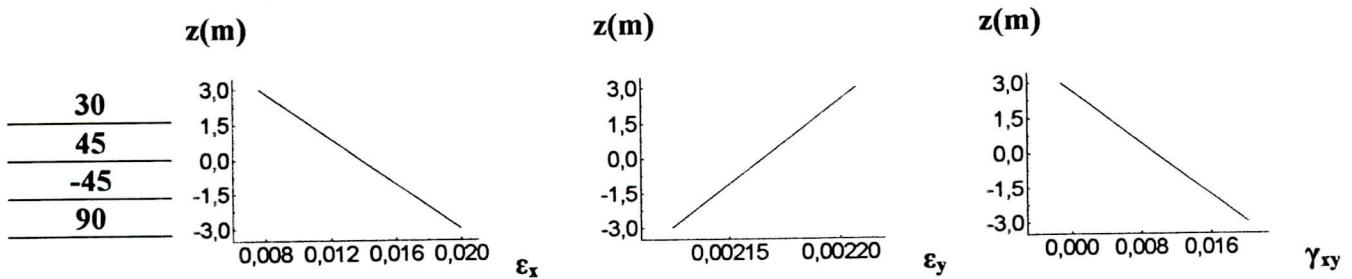
**(b) Chargement thermique**



**(c) Chargement hygrométrique**

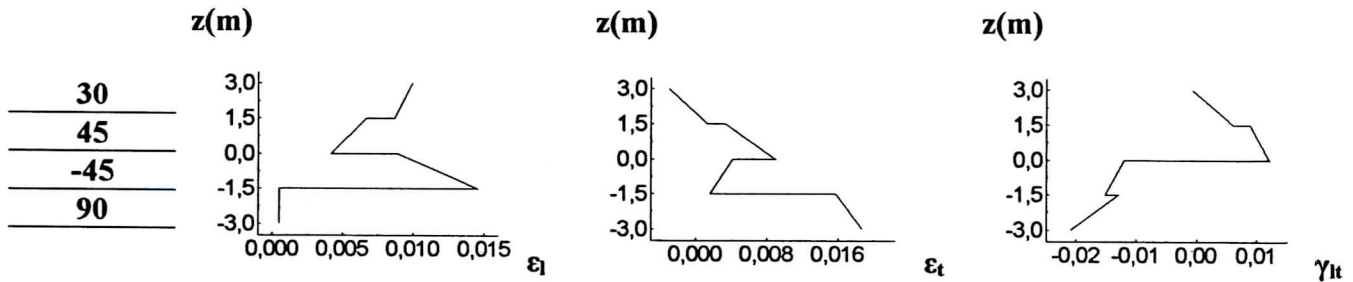


**(d) Chargement hygrothermomécanique**

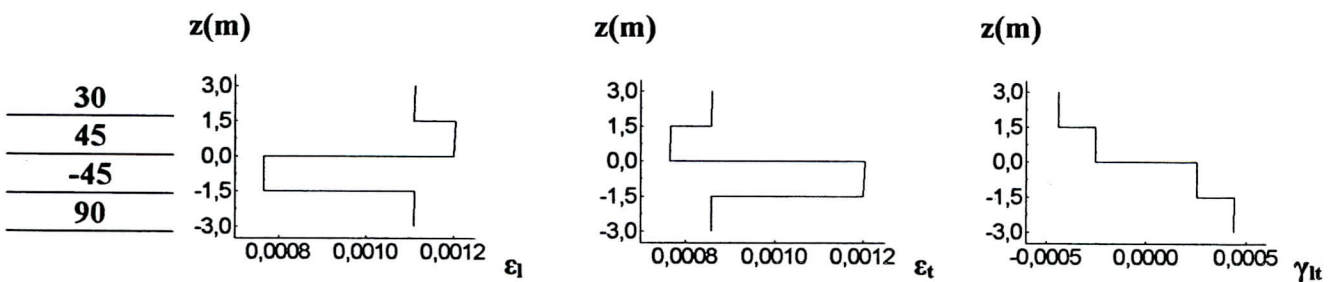


**Figure IV.2** REPARTITION DES DEFORMATIONS SELON LE REPERE (X,Y) LE LONG DE L'ÉPAISSEUR DU STRATIFIÉ [90/-45/45/30]

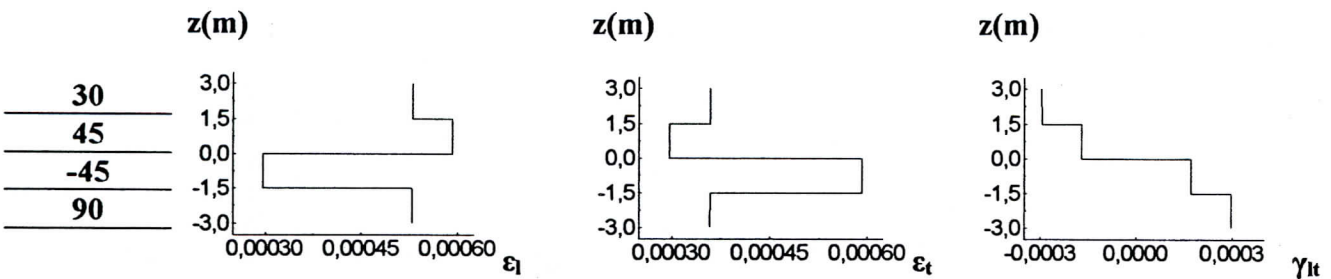
**(a) Chargement mécanique**



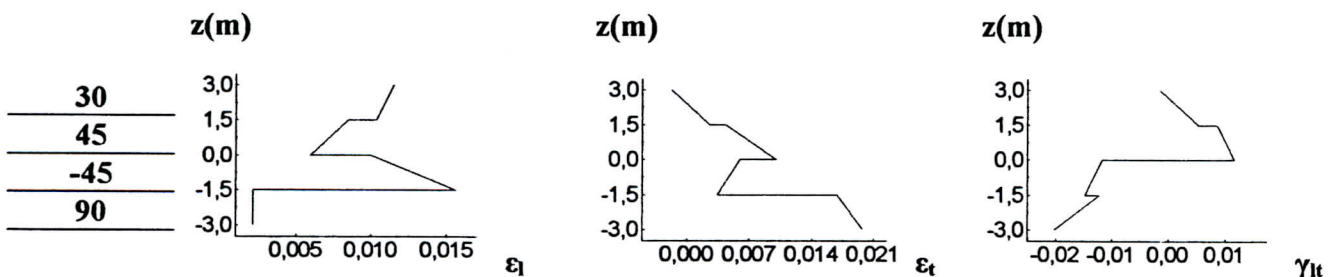
**(b) Chargement thermique**



**(c) Chargement hygrométrique**



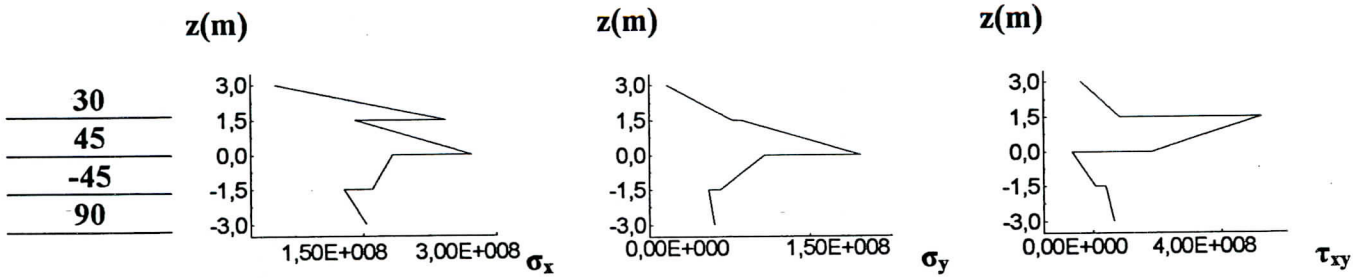
**(d) Chargement hygrothermomécanique**



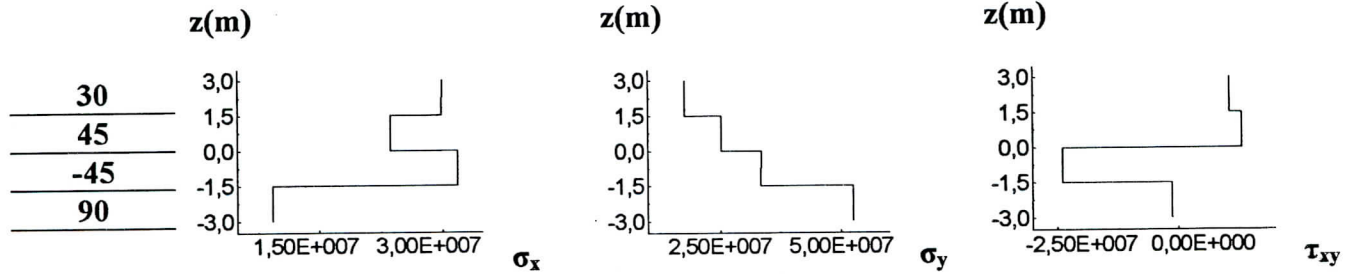
**Figure IV.3** REPARTITION DES DEFORMATIONS SELON LE REPERE (L,T) LE LONG DE L'ÉPAISSEUR DU STRATIFIÉ [90/-45/45/30]



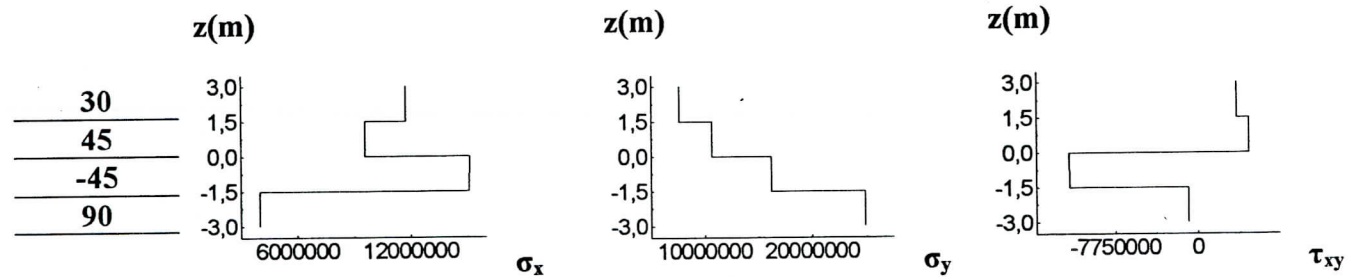
**(a) Chargement mécanique**



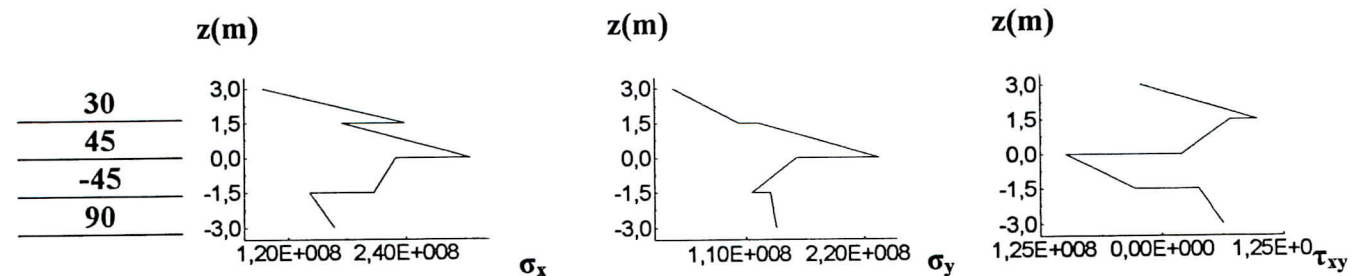
**(b) Chargement thermique**



**(c) Chargement hygrométrique**

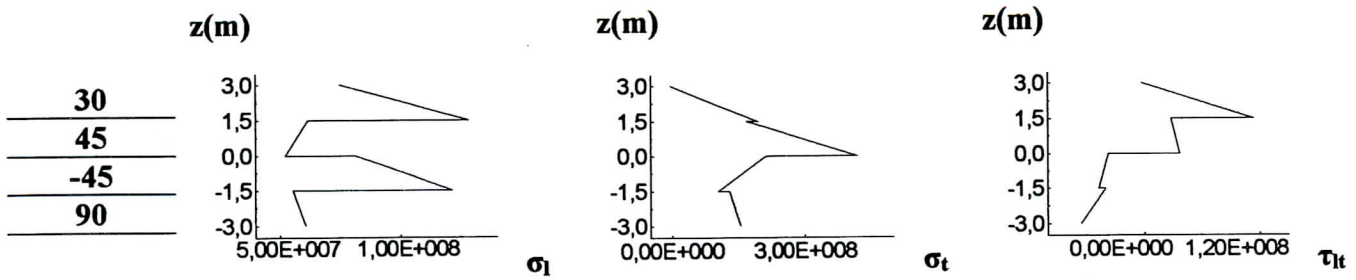


**(d) Chargement hygrothermomécanique**

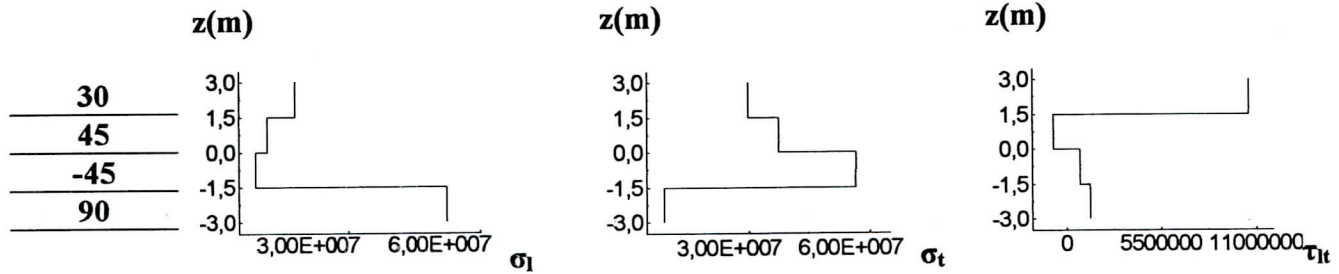


**Figure IV.4** REPARTITION DES CONTRAINTES SELON LE REPERE (X,Y) LE LONG DE L'ÉPAISSEUR DU STRATIFIÉ [90/-45/45/30]

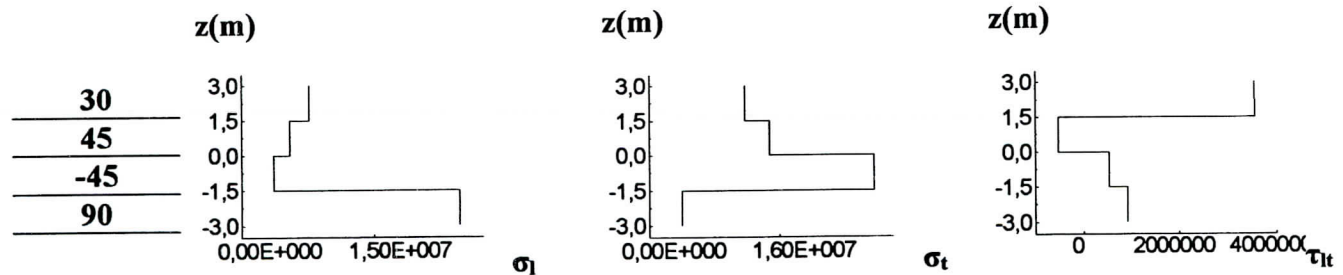
**(a) Chargement mécanique**



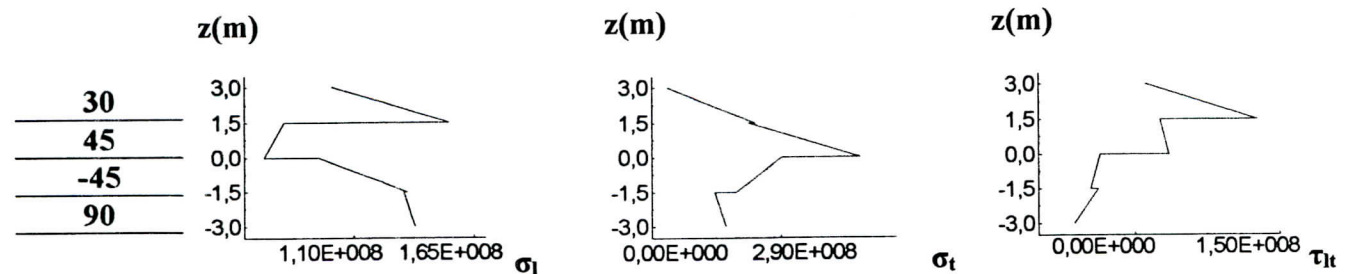
**(b) Chargement thermique**



**(c) Chargement hygrométrique**



**(d) Chargement hygrothermomécanique**



**Figure IV.5** REPARTITION DES CONTRAINTES SELON LE REPERE (L,T) LE LONG DE L'ÉPAISSEUR DU STRATIFIÉ [90/-45/45/30]

Constatations :

D'après les résultats obtenus, nous sommes en droit de dire que les valeurs des contraintes et des déformations dépendent du type du chargement auquel le stratifié est soumis, en effet, nous avons obtenu des résultats pour un chargement mécanique différents de ceux obtenus sous chargement thermique ou hygrométrique et c'est leur combinaison, soit deux à deux, soit tous les trois, qui permet d'avoir les résultats pour le cas à étudier.

D'après les graphes, nous remarquons que les valeurs des contraintes et des déformations sont amplifiées par l'effet de la température et de l'humidité et surtout si le stratifié est soumis à une haute température ou à une grande humidité. Donc, ce sont des paramètres à prendre en considération si le matériau est requis à travailler dans des environnements particuliers.

3<sup>ème</sup> application : influence du taux du volume de fibres d'un stratifié [90/-45/45/30] sur les différents modules ainsi que sur les contraintes et les déformations, on prendra les cas suivants :

- époxy/fibres de verre type (E)

$$E_f = 73 \text{ GPa}$$

$$G_f = 29.2 \text{ GPa}$$

$$\nu_f = 0.22$$

- époxy/fibres de verre type (R)

$$E_f = 86 \text{ GPa}$$

$$G_f = 35.2 \text{ GPa}$$

$$\nu_f = 0.22$$

- époxy/fibres de carbone HM

$$E_f = 380 \text{ GPa}$$

$$G_f = 142.9 \text{ GPa}$$

$$\nu_f = 0.33$$

- époxy/fibres de carbone HR

$$E_f = 260 \text{ GPa}$$

$$G_f = 97.7 \text{ GPa}$$

$$\nu_f = 0.33$$

- époxy/fibres de kevlar

$$E_f = 135 \text{ GPa}$$

$$G_f = 49.3 \text{ GPa}$$

$$\nu_f = 0.37$$

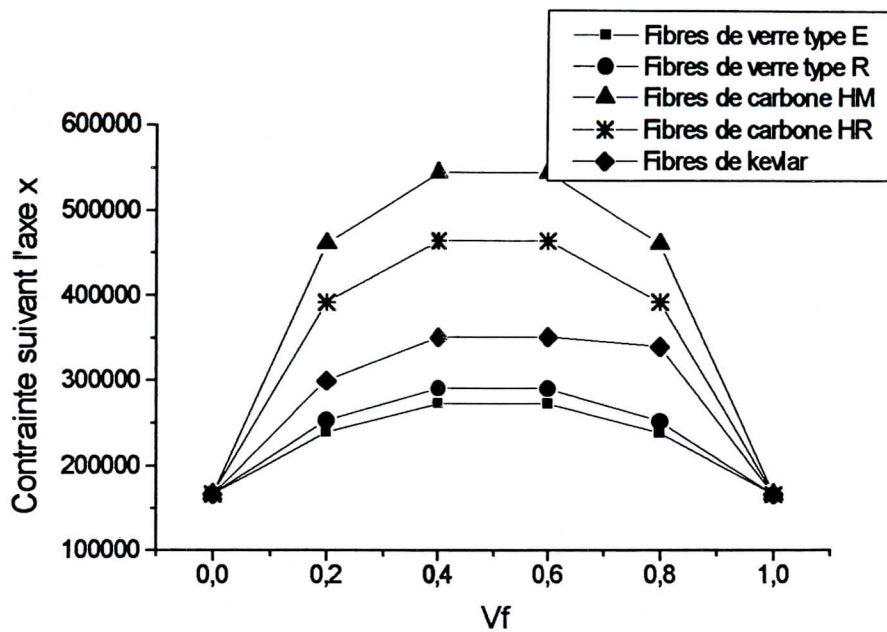


Figure IV.6 VARIATION DE LA CONTRAINTE LONGITUDINALE MOYENNE EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE

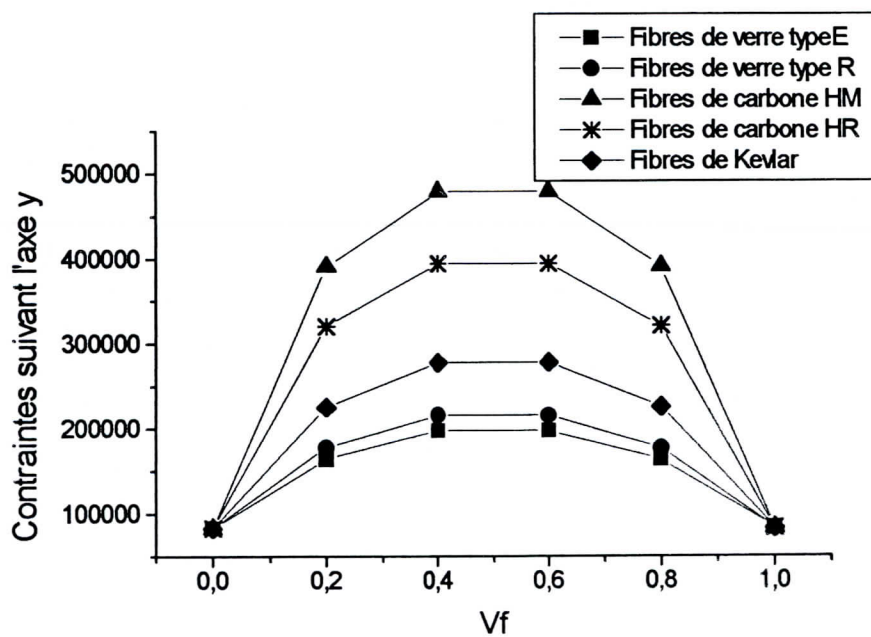


Figure IV.7 VARIATION DE LA CONTRAINTE TRANSVERSALE MOYENNE EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE

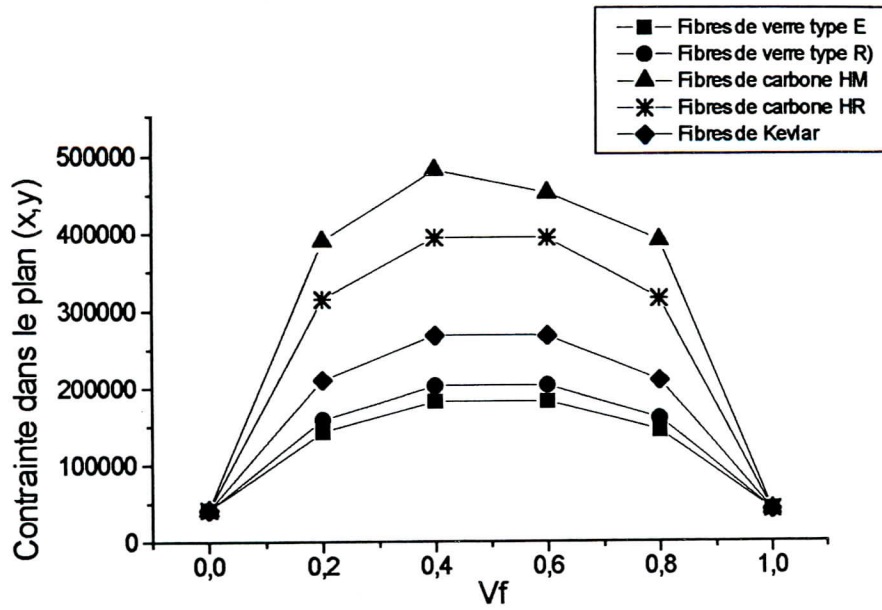


Figure IV.8 VARIATION DE LA CO NTRAINTE DE CISAILLEMENT MOYENNE EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE

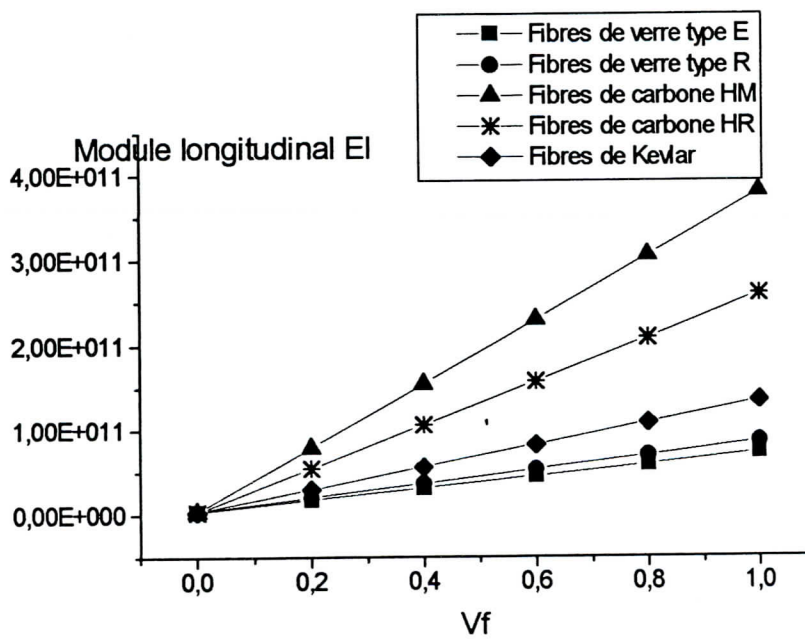
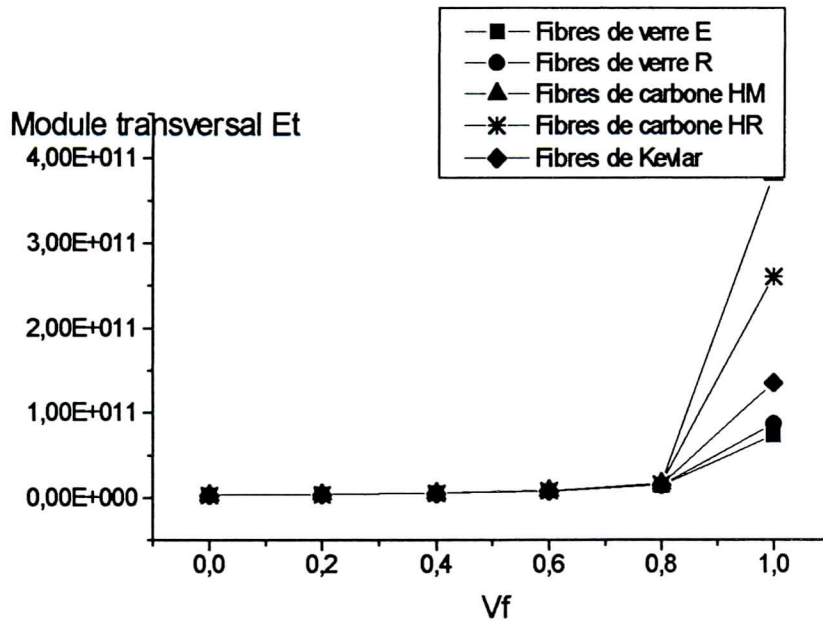
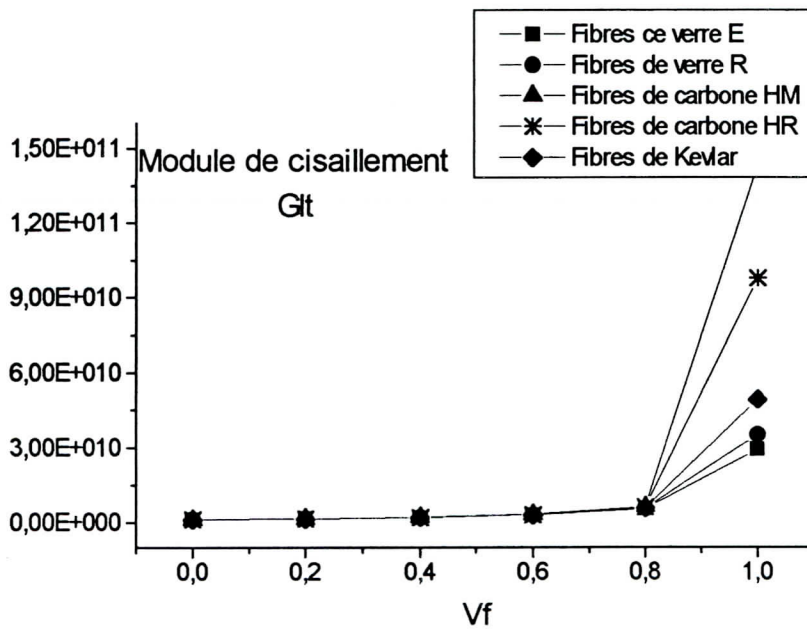


Figure IV.9 VARIATION DU MODULE DE YOUNG LONGITUDINAL EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE



**Figure IV.10** VARIATION DU MODULE DE YOUNG TRANSVERSAL EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE



**Figure IV.11** VARIATION DU MODULE DE CISAILLEMENT EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE

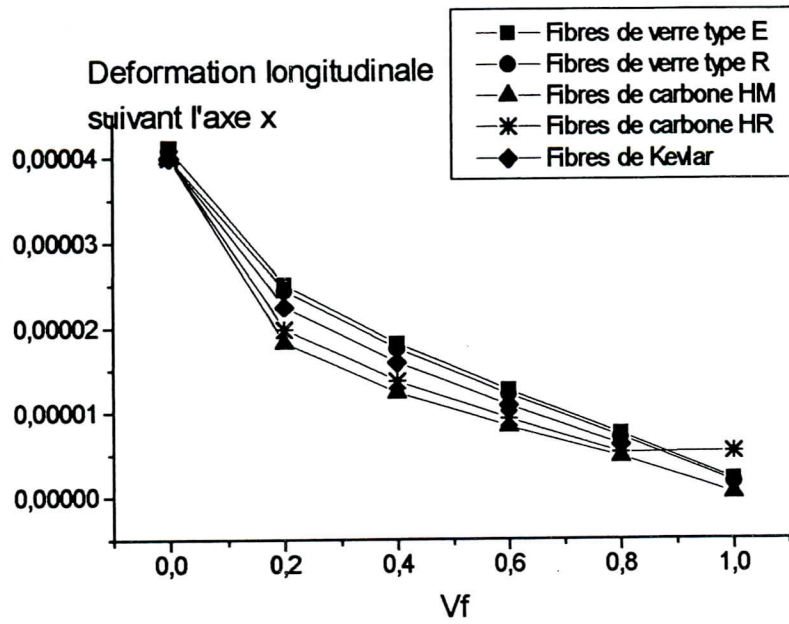


Figure IV.12 VARIATION DE LA DEFORMATION LONGITUDINALE MOYENNE EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE

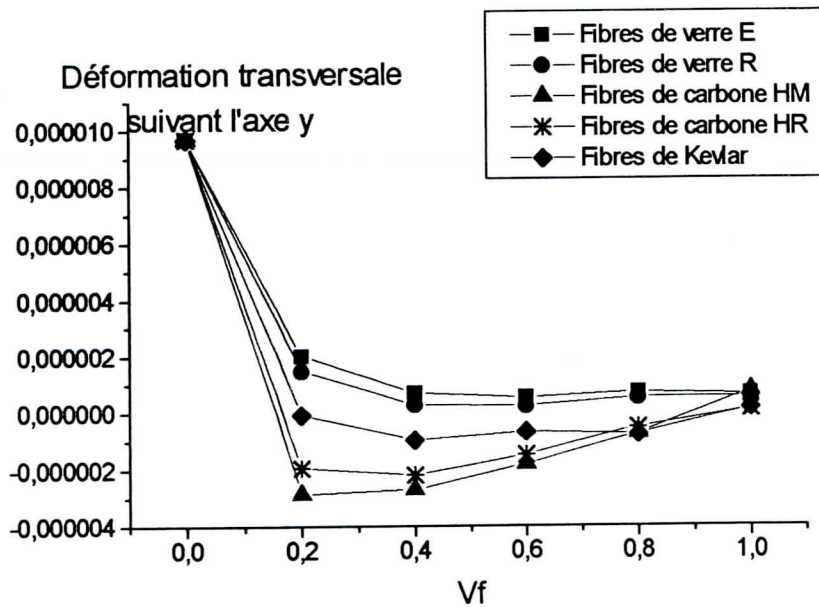
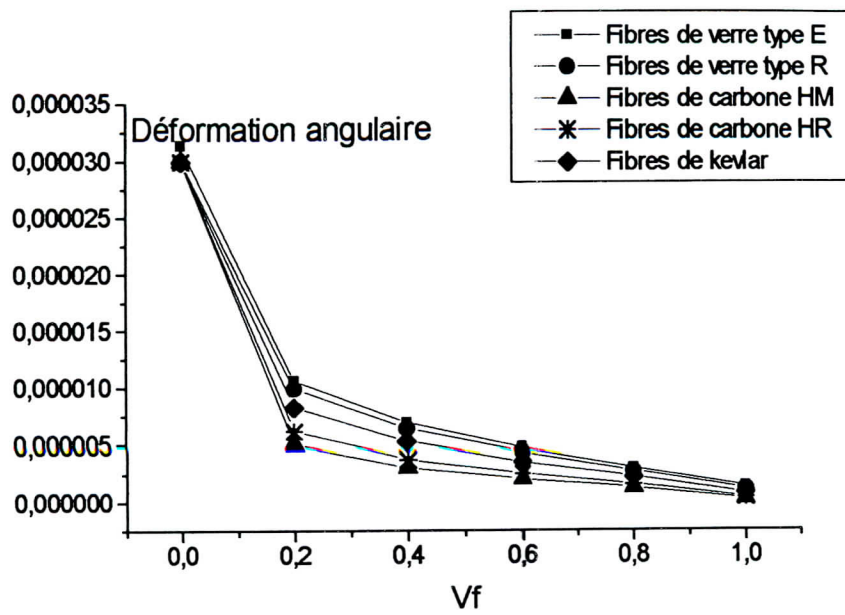


Figure IV.13 VARIATION DE LA DEFORMATION TRANSVERSALE MOYENNE EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE





**Figure IV.14** VARIATION DE LA DEFORMATION ANGULAIRE MOYENNE EN FONCTION DE LA FRACTION VOLUMIQUE

Constatations :

D'après les résultats obtenus, nous pouvons nous permettre de faire les remarques suivantes :

- En ce qui concerne les contraintes, elles commencent par une valeur minimale, pour passer à des valeurs extrêmes pour un volume de fibres variant entre 0.4 et 0.6, ensuite, elles diminuent à nouveau, et pour les trois cas les valeurs données par les fibres de carbone type HM sont les plus grandes tandis que celles données par les fibres de verre type E sont les plus petites.
- En ce qui concerne les modules  $E_l$ ,  $E_t$  et  $G_{lt}$ , nous remarquons que le module longitudinal, pour les cinq cas étudiés varie linéairement en fonction de la fraction volumique, par contre, pour le module transversal et le module de cisaillement, nous remarquons que la matrice est prédominante par les valeurs de ses modules  $E_m$  et  $G_m$ , ce n'est qu'à partir d'un taux de fibres égal à 0.8 que ces modules commencent à suivre une loi linéaire
- En ce qui concerne les déformations, nous pouvons remarquer que pour un taux de volume de fibres nul, nous avons une certaine valeur des déformations, cette valeur chute d'une façon assez nette à partir d'un taux de volume égal à 0.2, surtout pour le cas de la déformation transversale et de la déformation angulaire.

4<sup>ème</sup> application : influence de la variation de température sur les contraintes et les déformations, on prendra des fibres de verre unidirectionnelles :

époxy/fibres de verre type (E)

$$E_f = 73 \text{ GPa}$$

$$G_f = 29.2 \text{ Gpa}$$

$$\nu_f = 0.22$$

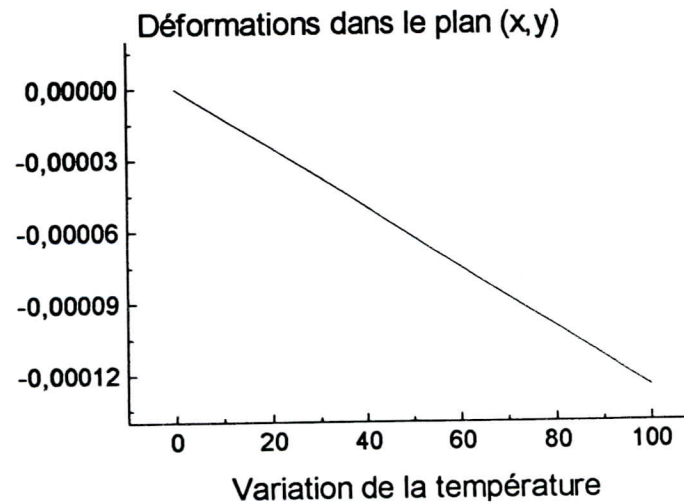
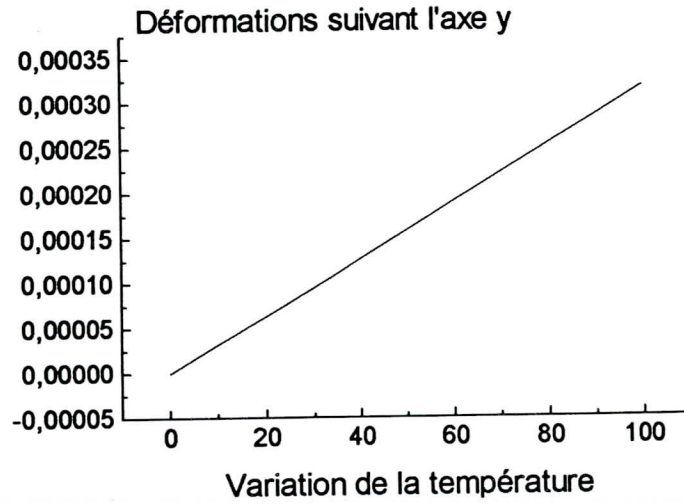
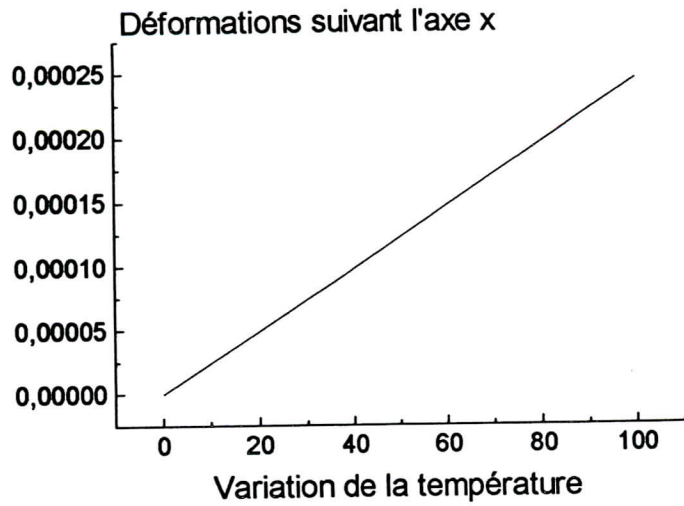
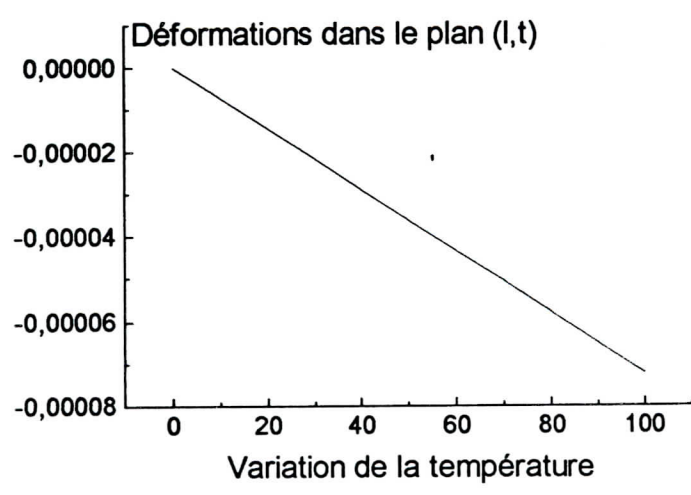
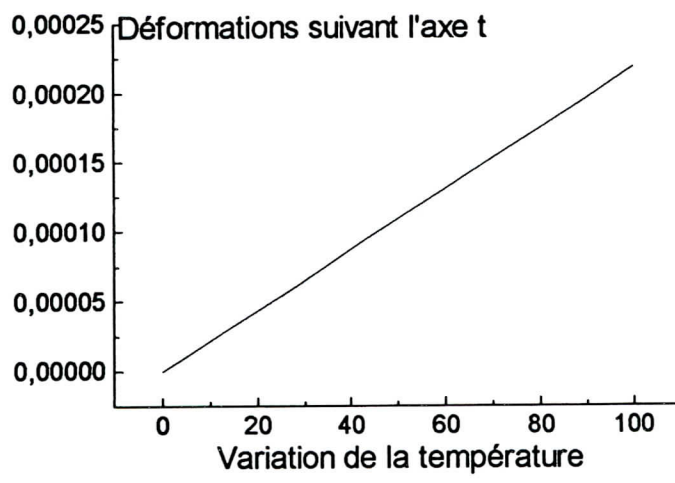
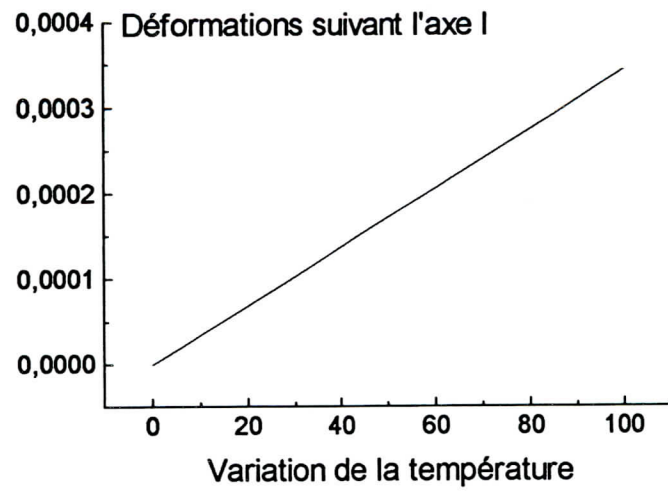


Figure IV.15

VARIATION DES DEFORMATIONS MOYENNES EN FONCTION DE LA TEMPERATURE SELON LE REPERE (X,Y)



**Figure IV.16** VARIATION DES DEFORMATIONS MOYENNES EN FONCTION DE LA TEMPERATURE SELON LE REPERE (L,T)

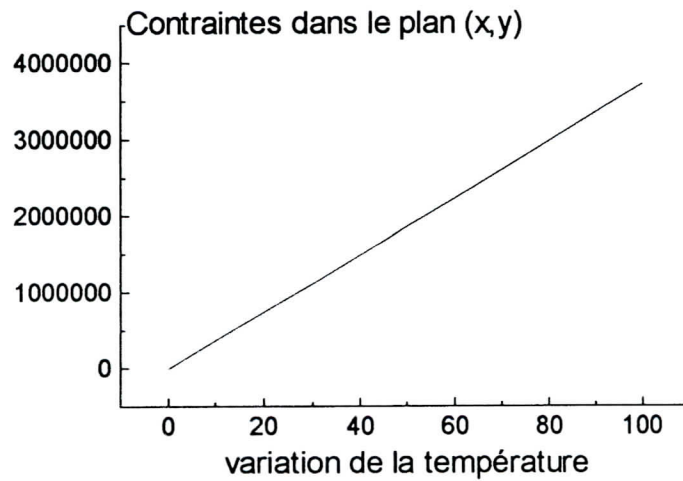
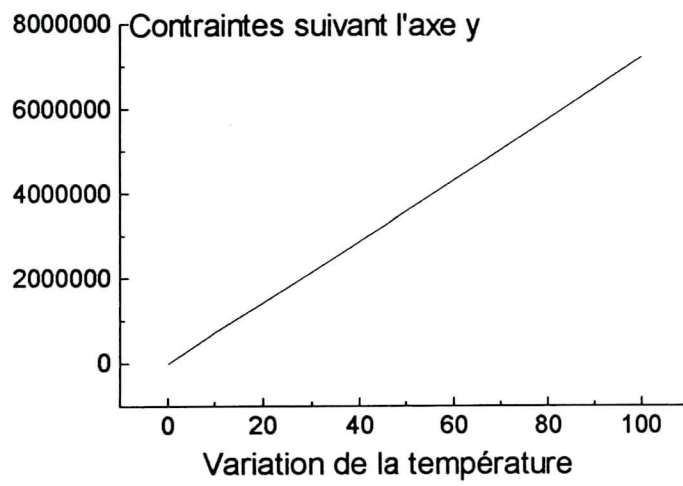
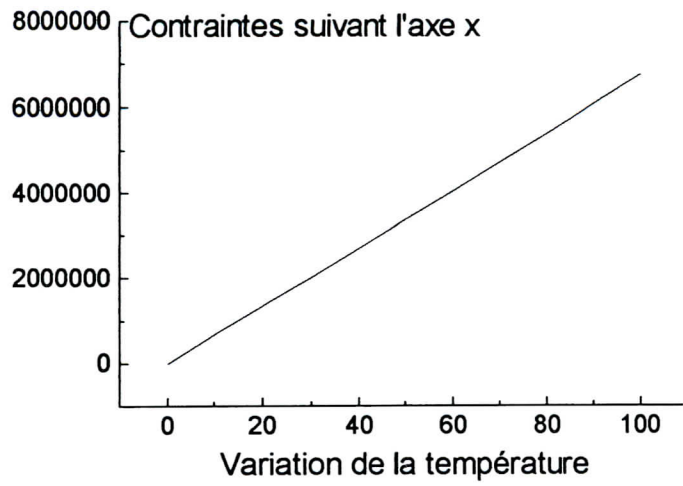


Figure IV.17

VARIATION DES CONTRAINTES MOYENNES EN FONCTION DE LA TEMPERATURE SELON LE REPERE (X,Y)

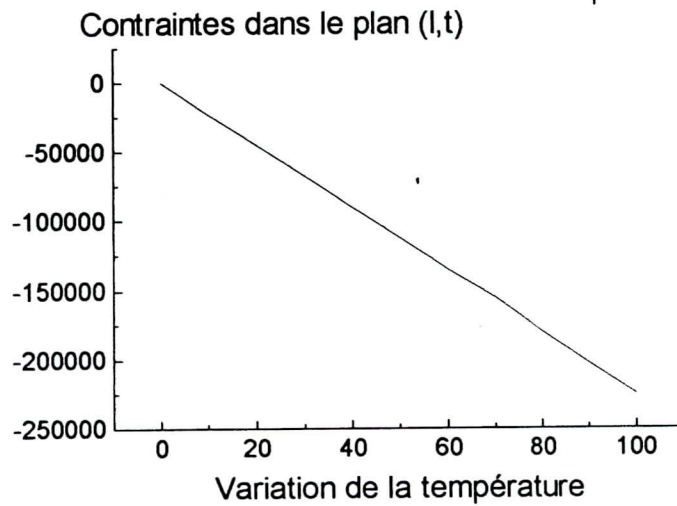
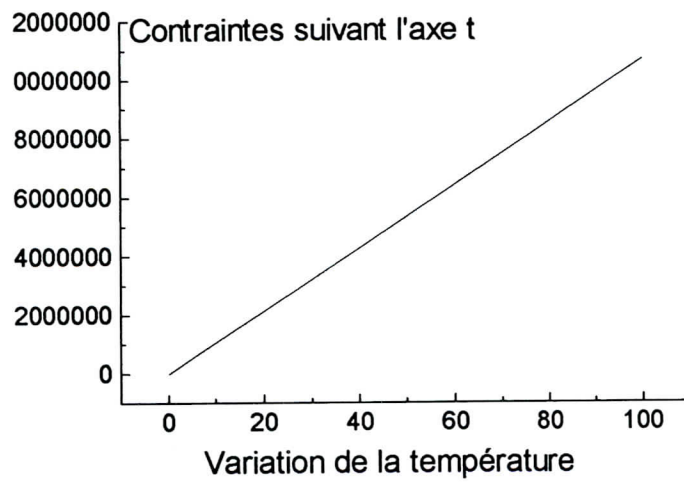
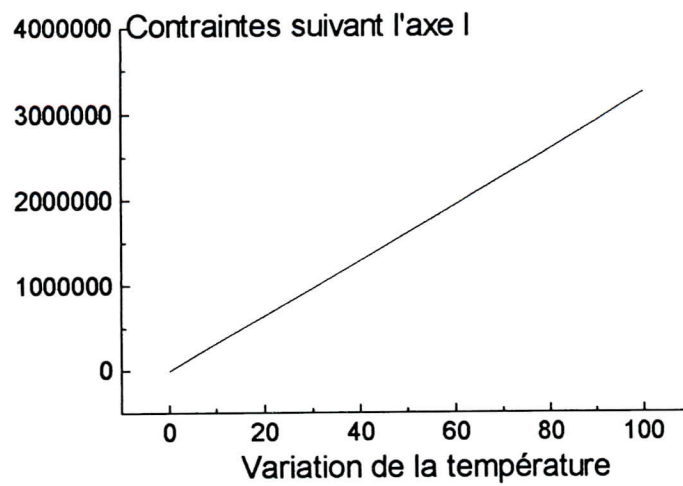


Figure IV.18

VARIATION DES CONTRAINTES MOYENNES EN FONCTION DE LA TEMPERATURE SELON LE REPERE (L,T)

**Constatations :**

Ces résultats nous permettent de confirmer la relation directe entre la température et les contraintes ou les déformations, nous pouvons remarquer que les contraintes augmentent avec l'augmentation de la température, et donc l'augmentation des déformations, alors, il s'agit de faire attention pour ne pas atteindre les contraintes de rupture.



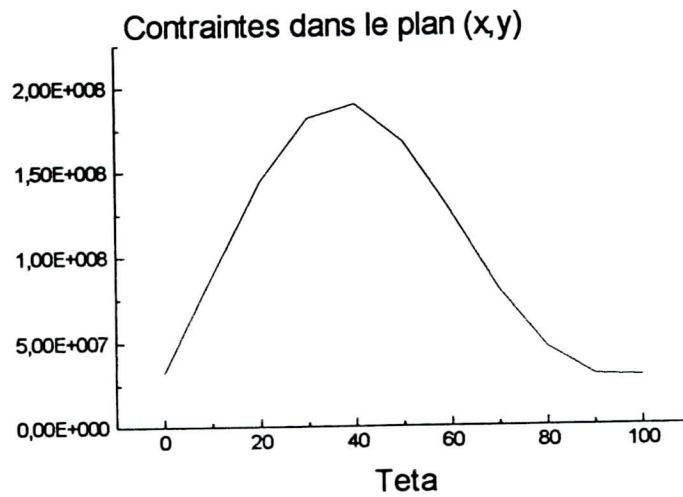
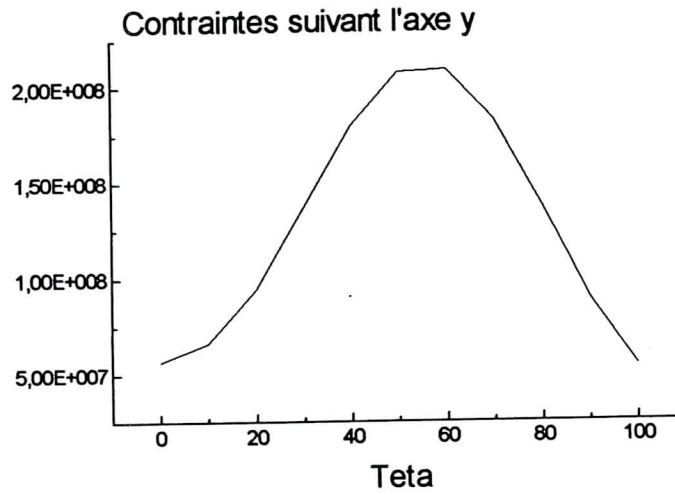
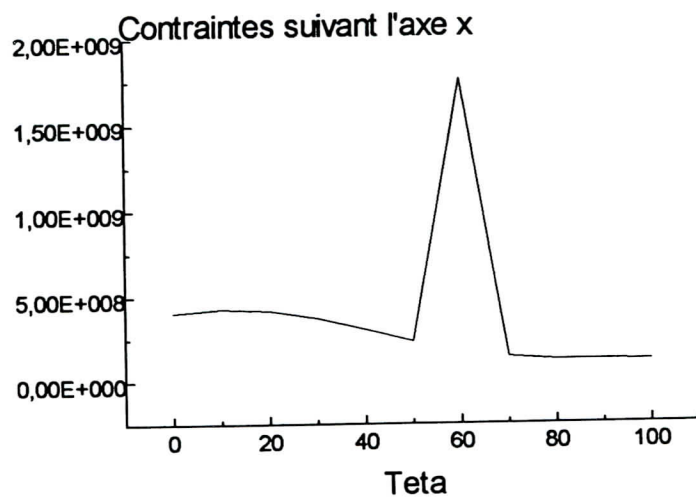
5<sup>ème</sup> application : influence du choix de l'angle sur les contraintes et les déformations, on prendra des fibres de verre unidirectionnelles :

époxy/fibres de verre type (E)

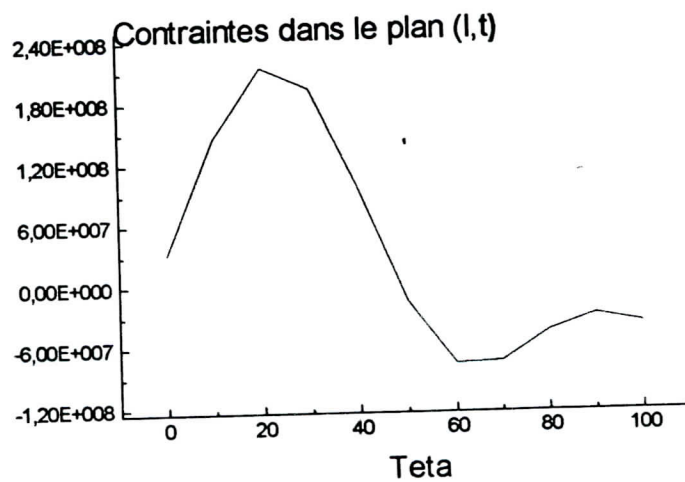
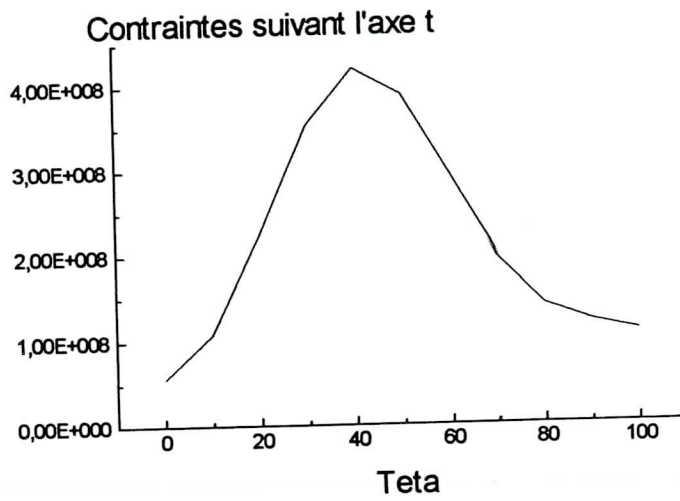
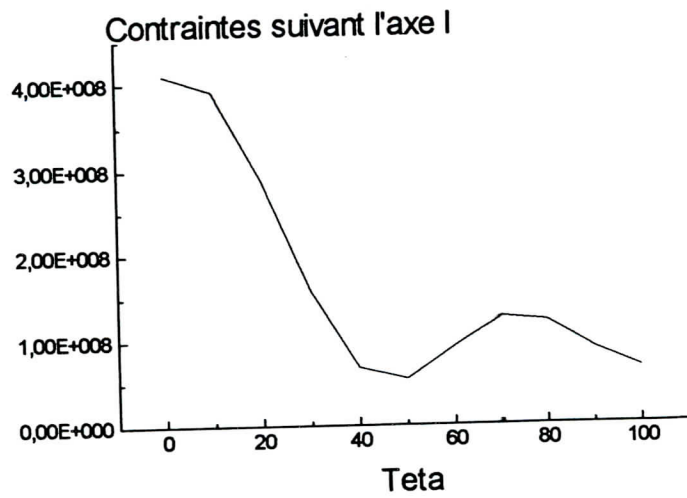
$$E_f = 73 \text{ GPa}$$

$$G_f = 29.2 \text{ Gpa}$$

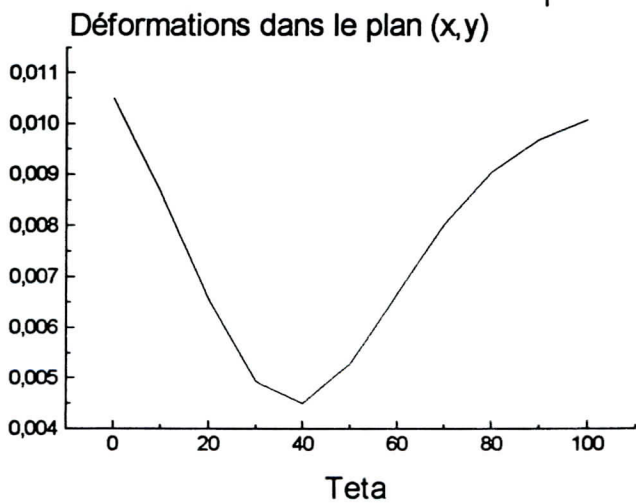
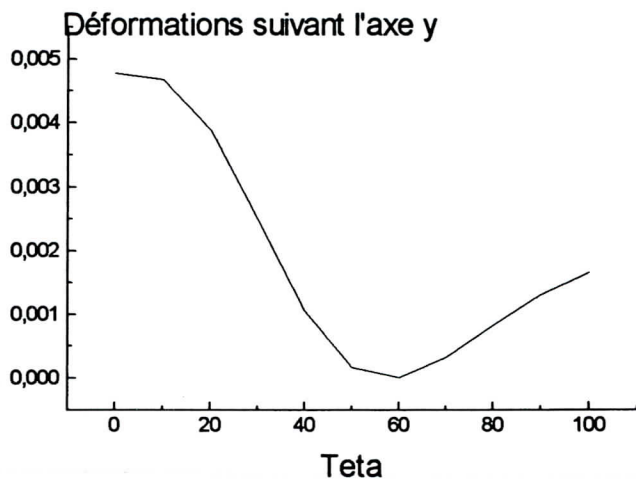
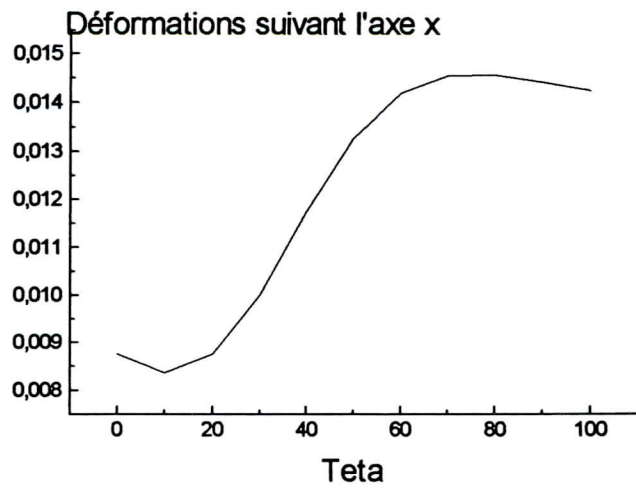
$$\nu_f = 0.22$$



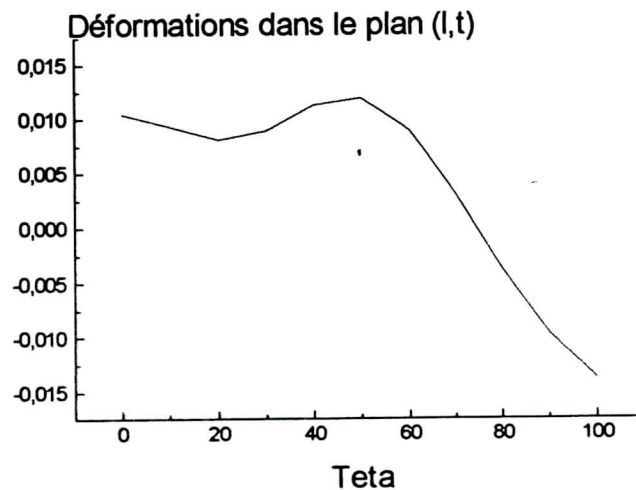
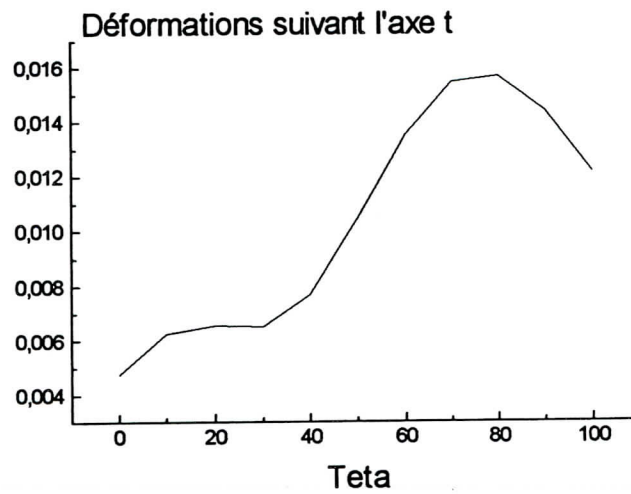
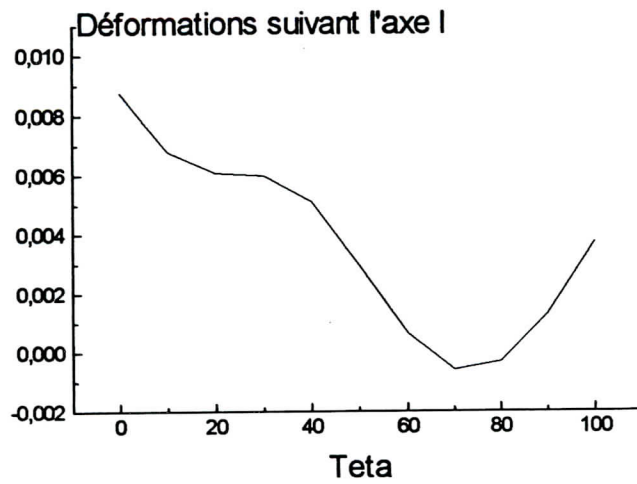
**Figure IV.19** VARIATION DES CONTRAINTES MOYENNES EN FONCTION DE L'ANGLE TETA SELON LE REPERE (X,Y) DU STRATIFIE [90/-45/0/30]



**Figure IV.20** VARIATION DES CONTRAINTES MOYENNES EN FONCTION DE L'ANGLE TETA SELON LE REPERE (L,T) DU STRATIFIE [90/-45/0/30]



**Figure IV.21** VARIATION DES DEFORMATIONS MOYENNES EN FONCTION DE L'ANGLE TETA SELON LE REPERE (X,Y) DU STRATIFIE [90/-45/0/30]



**Figure IV.22** VARIATION DES DEFORMATIONS MOYENNES EN FONCTION DE L'ANGLE TETA SELON LE REPERE (L,T) DU STRATIFIE [90/-45/0/30]

**Constatations :**

L'influence de l'angle est assez claire dans cet exemple, ce que nous pouvons remarquer c'est les valeurs des contraintes et des déformations passent à chaque fois par un maximum qui est autour de l'angle  $45^\circ$ , il est très intéressant de connaître l'allure des contraintes et des déformations en fonction de l'angle, ça permet de choisir correctement l'orientation des fibres d'après les sollicitations auxquelles la structure composite est soumise.

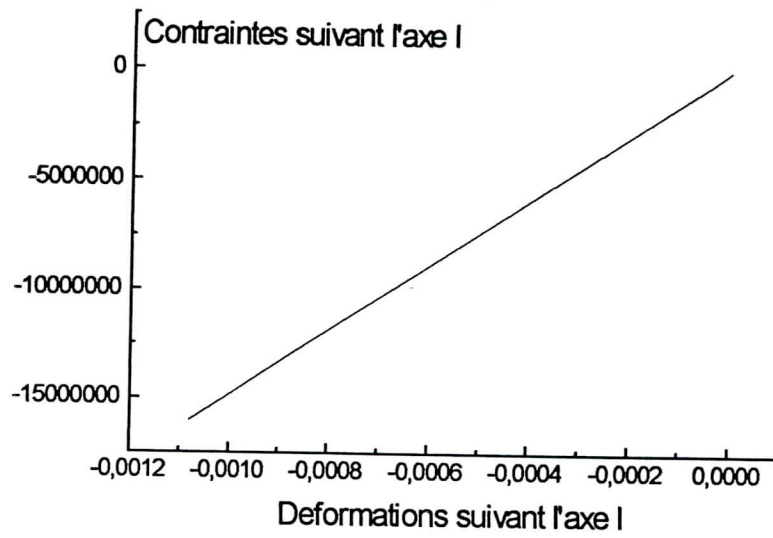
6<sup>ème</sup> application : relation contraintes – déformations sous chargement imposé pour un stratifié [90/-45/0/30], ce stratifié est soumis à une force axiale  $N_x$  variant de 0 à 10 MPa, les autres efforts ainsi que les moments sont nuls, on prendra des fibres de verre unidirectionnelles :

époxy/fibres de verre type (E)

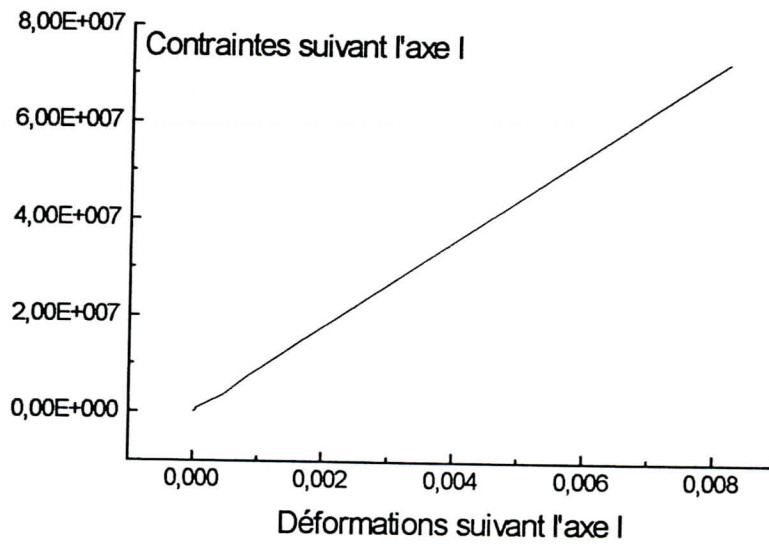
$$E_f = 73 \text{ GPa}$$

$$G_f = 29.2 \text{ Gpa}$$

$$\nu_f = 0.22$$

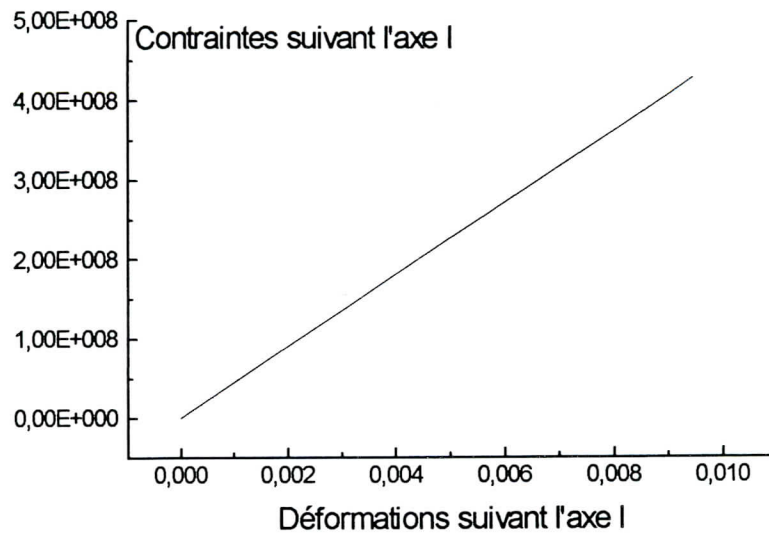


**Figure IV.23**      RELATION CONTRAINTES – DEFORMATIONS  
DU PLI ORIENTE A 90°

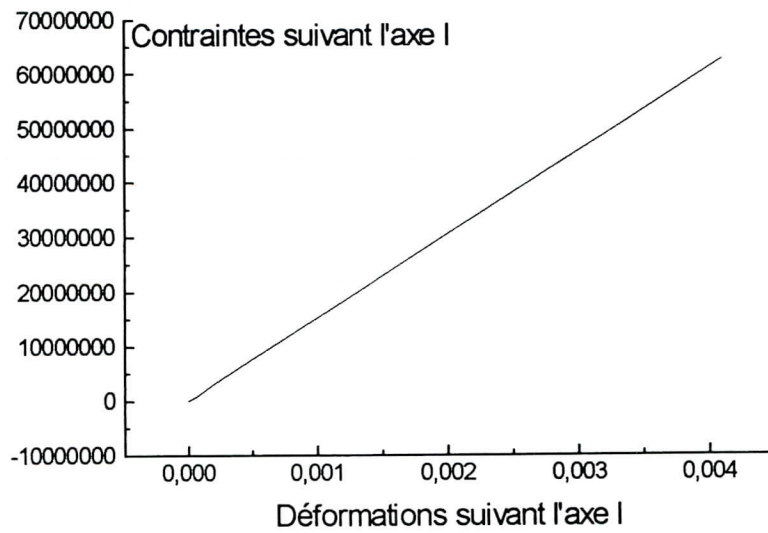


**Figure IV.24**      RELATION CONTRAINTES – DEFORMATIONS  
DU PLI ORIENTE A -45°





**Figure IV.25** RELATION CONTRAINTES – DEFORMATIONS  
DU PLI ORIENTE A 0°



**Figure IV.26** RELATION CONTRAINTES – DEFORMATIONS  
DU PLI ORIENTE A 30°

**Constatations :**

L'utilité de ce genre de calcul n'est pas d'avoir la relation contraintes – déformations en elle-même, mais plutôt de pouvoir avoir les valeurs des contraintes sous un chargement variables et les valeurs des déformations correspondantes, ça permet ainsi de connaître le pli qui risque de rompre en premier, on peut remarquer que le pli orienté à 0 donne les plus grandes valeurs de contraintes, par contre le pli orienté à 90 donne les plus petites valeurs.

CONCLUSION

Le matériau composite est engendré par de multiples paramètres influant chacun à sa façon sur son comportement, pour cela nous avons essayé d'étudier l'influence de quelques-uns de ces paramètres (fraction volumique, orientation des plis, variation de la température ou de l'humidité, ... etc.) sur le composite.

Le programme que nous avons élaboré permet d'étudier le comportement d'un stratifié comportant un grand nombre de plis et d'en calculer soit les efforts, soit les contraintes et les déformations, calcul qui est difficile à faire manuellement, et ceci quelle que soit la nature des fibres ou des matrices intervenant dans la composition du matériau composite. Ce calcul est effectué en introduisant seulement les caractéristiques des fibres et de la matrice.

Les résultats obtenus nous ont permis de remarquer l'influence des fibres sur le comportement des matériaux composites, en effet, nous avons pu voir que le module longitudinal, transversal et le module de cisaillement de la matrice sont augmentés par l'incorporation des fibres, cette augmentation dépend du type de fibres rajoutées.

En considérant l'environnement auquel est soumis le matériau stratifié, nous remarquons que valeurs des contraintes et les déformations sous chargement mécanique sont différentes de celles obtenus sous chargement hygrothermomécanique

Notre programme nous permet de considérer soit une température (respectivement une humidité) constante le long de l'épaisseur du stratifié, soit une température (respectivement une humidité) variant linéairement le long de l'épaisseur du stratifié, les cas plus complexes ne sont pas pris en considération.

L'étude de l'orientation des fibres nous a permis de saisir au mieux l'utilité d'orienter les fibres selon les efforts imposés à la structure composite, et ainsi avoir un matériau typique pour chaque cas envisagé.

Hormis le calcul des contraintes et des déformations, notre programme nous permet de vérifier le critère de rupture pour chaque pli en introduisant seulement les valeurs des contraintes à la rupture, cependant ce critère est vérifié pour un nombre de cycles nul. La question qui se pose alors : est-ce que ce critère reste vérifié dans le cas où la structure est soumise à une variation de contraintes répétées ? Nous aurions aimé développer ce point et introduire dans le programme une possibilité de calculer les contraintes à chaque cycle, en vérifiant à chaque fois le critère de rupture, pour aboutir à une relation contrainte – nombre de cycles qui permettra au mieux de cerner le problème de fatigue.

Cette tentative a été pour nous une possibilité de toucher le domaine très vaste des composites, c'est un domaine qui reste inconnu chez nous bien qu'il ait acquis beaucoup de partisans dans les autres pays, notre espoir est qu'il y ait plus d'approches dans ce domaine qui permettront de faire découvrir encore plus ces matériaux.

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- [1] **Dessarthe. A.** – Introduction aux plastiques et composites en mécanique – Techniques de l'ingénieur, B5170, 8 – 1996
- [2] **Berthelot. J.M** – Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures – ed. Masson, 1992
- [3] **Negrier. A et Rigal. J. C** – présentation des matériaux composites – Techniques de l'ingénieur, A7790, 8 - 1991
- [4] **Prel. Y** – Structures composites pour le lanceur Ariane – Techniques de l'ingénieur, AM5646, 1999
- [5] **Giocosa. A** – Les composites dans l'industrie automobile – Techniques de l'ingénieur, AM5600, 1999
- [6] **Luyckx. J** – Composites à fibres de carbone dans le génie civil – Techniques de l'ingénieur, AM5620, 1 – 1999
- [7] **Brand. A** – Fatigue des alliages ferreux, approche classique – Techniques de l'ingénieur, B5050, 2 – 1984
- [8] **Chatain. M** – Conception d'un objet – Techniques de l'ingénieur, AM3810, 7 – 1999
- [9] **Kim. H.S, Wang. X.M et Nik Abdullah. N.A.H** – Effect of temperature on fatigue growth in the polymer ABS – Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, Vol. 17, N° 3, 1994
- [10] **Biron. M** – Aide au choix des thermoplastiques, Progiciel PACT – Techniques de l'ingénieur, Disq. AM3811, 4 – 1998

- [11] **Skrzypczak. D** – CAO en mécanique et plasturgie, exemple d'un logiciel – Techniques de l'ingénieur, CD AM3814, 4 – 1999
- [12] Comportement hygrométrique d'un composite à base de fibres – Direction des publications et de l'animation scientifique, Université Mentouri, Constantine
- [13] **Attaf. B, Messaoud. B et Zouaoui. D** – Analysis of hygrothermomechanical stresses and strains of laminated faces for satellite sandwich solar panels – Institute of Mechanical Engineering, University of Blida
- [14] **Saarela. O** – Computer programs for mechanical analysis and design of polymer matrix composites panels – Prog. Polym. Sci. , Vol. 19, 171 – 201, 1994
- [15] **Gay. D** – Matériaux composites – ed. Hermes, 1989
- [16] **Duprat. D** – Fatigue et mécanique de la rupture des pièces en alliage léger – Techniques de l'ingénieur, BM5052, 7 – 1997
- [17] **Bathias. C** – Fatigue des matériaux composites à matrice polymères et fibres longues – Techniques de l'ingénieur, A7760, 11 – 1991
- [18] **Davis.H.E, Troxell.G.E et Hauck.G.F.W** – The testing of engineering materials – ed. McGraw-Hill, 1982
- [19] **Odru. P** – Calcul et conception des structures composites – Techniques de l'ingénieur, A7792, 11 – 1992
- [20] **Chevalier. Y** – Comportement élastique et viscoélastique des composites – Techniques de l'ingénieur, A7750, 5 – 1988
- [21] **Chang. K.C et Payn. U.J** – Analytical and numerical approaches for heat conduction in composite materials, Computer modelling, Vol. 14, pp 899 – 904, 1990



[22] **Patrick Cousot** – Algorithmique et programmation en Pascal –ed. Berti, 1993

[23] **Messaoud. B et Zouaoui. D** – Elaboration d'un programme de résolution de l'équation constitutive d'un stratifié soumis à des sollicitations thermo – hygro – mécaniques – Institut de Mécanique, Université de Blida, 1997



# ***ANNEXE 1***

Expressions des coefficients de rigidité d'un pli par rapport à ses axes

$$Q_{11} = \frac{E_t}{1 - \nu_{lt} \cdot \nu_{tl}} \quad Q_{22} = \frac{E_t}{1 - \nu_{lt} \cdot \nu_{tl}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{lt} \cdot E_t}{1 - \nu_{lt} \cdot \nu_{tl}} \quad Q_{66} = G_{lt} \quad (A1.1)$$

Expressions des coefficients de rigidité d'un pli par rapport aux axes du stratifié

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{11} &= E_{lt} \cdot \cos^4 \theta + E_{lt} \cdot \sin^4 \theta + 2 \cdot (\nu_{lt} \cdot E_{lt} + 2 \cdot G_{lt}) \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \\ \overline{Q}_{12} &= (E_{lt} + E_{lt} - 4 \cdot G_{lt}) \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + \nu_{lt} \cdot E_{lt} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \overline{Q}_{16} &= (E_{lt} - \nu_{lt} \cdot E_{lt} - 2 \cdot G_{lt}) \sin \theta \cdot \cos^3 \theta + (E_{lt} (\nu_{lt} - 1) + 2 \cdot G_{lt}) \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \\ \overline{Q}_{22} &= E_{lt} \cdot \sin^4 \theta + 2 \cdot (\nu_{lt} \cdot E_{lt} + 2 \cdot G_{lt}) \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + E_{lt} \cdot \cos^4 \theta \\ \overline{Q}_{26} &= (E_{lt} - \nu_{lt} \cdot E_{lt} - 2 \cdot G_{lt}) \sin^3 \theta \cdot \cos \theta + ((\nu_{lt} - 1) E_{lt} + 2 \cdot G_{lt}) \sin \theta \cdot \cos^3 \theta \\ \overline{Q}_{66} &= (E_{lt} + (1 - 2 \cdot \nu_{lt}) \cdot E_{lt} - 2 \cdot G_{lt}) \sin^3 \theta \cdot \cos \theta + G_{lt} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (A1.2)$$

Avec:

$$E_{lt} = \frac{E_t}{1 - \frac{E_t}{E_l} \cdot \nu_{lt}^2} \quad E_{tl} = \frac{E_t}{1 - \frac{E_t}{E_l} \cdot \nu_{lt}^2} \quad (A1.3)$$

Expressions des coefficients de souplesse d'un pli par rapport aux axes du stratifié

$$\begin{aligned} \overline{S}_{11} &= \frac{1}{E_x} & \overline{S}_{12} &= \frac{-\nu_{lx}}{E_y} = \frac{-\nu_{ly}}{E_x} & \overline{S}_{16} &= \frac{\eta_{xy}}{G_{xy}} = \frac{\eta_x}{E_x} \\ \overline{S}_{22} &= \frac{1}{E_y} & \overline{S}_{26} &= \frac{\mu_{xy}}{G_{xy}} = \frac{\mu_y}{E_y} & \overline{S}_{66} &= \frac{1}{G_{xy}} \end{aligned} \quad (A1.4)$$

Avec :

$$E_x(\theta) = \frac{1}{\frac{C^4}{E_l} + \frac{S^4}{E_t} + C^2 \cdot S^2 \cdot \left( \frac{1}{G_{lt}} - 2 \cdot \frac{\nu_{lt}}{E_t} \right)}$$

$$E_y(\theta) = \frac{1}{\frac{S^4}{E_l} + \frac{C^4}{E_t} + C^2 \cdot S^2 \cdot \left( \frac{1}{G_{lt}} - 2 \cdot \frac{\nu_{lt}}{E_t} \right)}$$

$$G_{xy}(\theta) = \frac{1}{4 \cdot C^2 \cdot S^2 \cdot \left( \frac{1}{E_l} + \frac{1}{E_t} + 2 \cdot \frac{\nu_{lt}}{E_t} \right) + \frac{(C^2 - S^2)^2}{G_{lt}}} \quad (\text{A1.5})$$

$$\frac{\nu_{yx}}{E_y}(\theta) = \frac{\nu_{lt}}{E_t} (C^4 - S^4) - S^2 \cdot C^2 \cdot \left( \frac{1}{E_l} + \frac{1}{E_t} \frac{1}{G_{lt}} \right)$$

$$\frac{\eta_{xy}}{G_{xy}}(\theta) = -2 \cdot C \cdot S \cdot \left[ \frac{C^2}{E_l} \frac{S^2}{E_t} + (C^2 - S^2) \left( \frac{\nu_{lt}}{E_t} - \frac{1}{2 \cdot G_{lt}} \right) \right]$$

$$\frac{\mu_{xy}}{G_{xy}}(\theta) = -2 \cdot C \cdot S \cdot \left[ \frac{S^2}{E_l} \frac{C^2}{E_t} + (C^2 - S^2) \left( \frac{\nu_{lt}}{E_t} - \frac{1}{2 \cdot G_{lt}} \right) \right]$$

Expressions des coefficients de rigidité sous chargement thermique par rapport aux axes du stratifié

$$\overline{\alpha Q_1} = C^2 \cdot E_n (\alpha_l + \nu_{lt} \cdot \alpha_t) + S^2 \cdot E_n (\nu_{lt} \cdot \alpha_l + \alpha_t)$$

$$\overline{\alpha Q_2} = S^2 \cdot E_n (\alpha_l + \nu_{lt} \cdot \alpha_t) + C^2 \cdot E_n (\nu_{lt} \cdot \alpha_l + \alpha_t)$$

$$\overline{\alpha Q_3} = C \cdot S \cdot [E_n (\nu_{lt} \cdot \alpha_l + \alpha_t) - E_n (\alpha_l + \nu_{lt} \cdot \alpha_t)]$$

(A1.6)

Expressions des coefficients de rigidité sous chargement hygrométrique par rapport aux axes du stratifié

$$\begin{aligned}\overline{\beta Q_1} &= C^2 \cdot E_n(\beta_l + \nu_{ll} \cdot \beta_t) + S^2 \cdot E_n(\nu_{tt} \cdot \beta_l + \beta_t) \\ \overline{\beta Q_2} &= S^2 \cdot E_n(\beta_l + \nu_{ll} \cdot \beta_t) + C^2 \cdot E_n(\nu_{tt} \cdot \beta_l + \beta_t) \\ \overline{\beta Q_3} &= C \cdot S \cdot [E_n(\nu_{tt} \cdot \beta_l + \beta_t) - E_n(\beta_l + \nu_{ll} \cdot \beta_t)]\end{aligned}\tag{A1.7}$$

# ***ANNEXE 2***



np=3

3.5212025262E+10	4.6931485717E+09	-6.7315798673E+09
4.6931485717E+09	9.4730506849E+09	-6.9862208321E+08
-6.7315798673E+09	-6.9862208321E+08	5.3415649004E+09

np=4

2.6289610123E+10	8.1762783723E+09	9.4512225363E+09
8.1762783723E+09	1.1429206222E+10	3.4182647523E+09
9.4512225363E+09	3.4182647523E+09	8.8246947009E+09

#### LES MATRICES A, B ET D

1.5821529603E+08	3.0432002460E+07	-1.5258789063E-05
3.0432002460E+07	5.1277564500E+07	1.9073486328E-05
-1.5258789063E-05	1.9073486328E-05	3.3674084103E+07
-1.3383622708E+04	5.2246947010E+03	-1.6153681614E+03
5.2246947010E+03	2.9342333065E+03	5.9258290688E+03
-1.6153681614E+03	5.9258290688E+03	5.2246947010E+03
3.2738459629E+02	6.4270787575E+01	6.0685509014E+01
6.4270787575E+01	1.0731729826E+02	1.5438325633E+01
6.0685509014E+01	1.5438325633E+01	7.1025124331E+01

#### MATRICE GLOBALE

1ere colonne	2eme colonne	3eme colonne
1.5821529603E+08	3.0432002460E+07	-1.5258789063E-05
3.0432002460E+07	5.1277564500E+07	1.9073486328E-05
-1.5258789063E-05	1.9073486328E-05	3.3674084103E+07
-1.3383622708E+04	5.2246947010E+03	-1.6153681614E+03
5.2246947010E+03	2.9342333065E+03	5.9258290688E+03
-1.6153681614E+03	5.9258290688E+03	5.2246947010E+03
4eme colonne	5eme colonne	6eme colonne
-1.3383622708E+04	5.2246947010E+03	-1.6153681614E+03
5.2246947010E+03	2.9342333065E+03	5.9258290688E+03
-1.6153681614E+03	5.9258290688E+03	5.2246947010E+03
3.2738459629E+02	6.4270787575E+01	6.0685509014E+01
6.4270787575E+01	1.0731729826E+02	1.5438325633E+01
6.0685509014E+01	1.5438325633E+01	7.1025124331E+01

#### MATRICE INVERSE DE LA MATRICE GLOBALE

1ere colonne	2eme colonne	3eme colonne
7.2070999093E-09	-4.3217057460E-09	6.9155303984E-11
-4.3217057460E-09	2.2297193803E-08	2.7922973627E-10
6.9155303984E-11	2.7922973627E-10	3.0507574830E-08
4.1543570413E-07	-1.8738273424E-07	1.0320874518E-06
-5.2541447198E-07	-4.2073058060E-08	-1.9209079789E-06
2.7864909276E-07	-1.8099009640E-06	-2.7302010699E-06
4eme colonne	5eme colonne	6eme colonne
4.1543570413E-07	-5.2541447198E-07	2.7864909276E-07

-1.8738273424E-07 -4.2073058059E-08 -1.8099009640E-06  
 1.0320874518E-06 -1.9209079789E-06 -2.7302010699E-06  
 4.0517597453E-03 -2.0576392904E-03 -3.0654991648E-03  
 -2.0576392905E-03 1.0747284204E-02 -4.4511640253E-04  
 -3.0654991648E-03 -4.4511640253E-04 1.7153690223E-02

EXPRESSIONS DES RESULTANTES ET DES MOMENTS SOUS CHARGEMENT MECANIQUE

0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00  
 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00

EXPRESSIONS DES RESULTANTES ET DES MOMENTS SOUS CHARGEMENT THERMIQUE

0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00  
 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00

EXPRESSIONS DES RESULTANTES ET DES MOMENTS SOUS CHARGEMENT HYGROMETRIQUE

0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00  
 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00

EXPRESSIONS DES RESULTANTES ET DES MOMENTS SOUS CHARGEMENT  
THERMOMECHANIQUE

0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00  
 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00

EXPRESSIONS DES RESULTANTES ET DES MOMENTS SOUS CHARGEMENT  
HYGROMECANIQUE

0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00  
 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00

EXPRESSIONS DES RESULTANTES ET DES MOMENTS SOUS CHARGEMENT  
HYGROTHERMIQUE

0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00  
 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00

EXPRESSIONS DES RESULTANTES ET DES MOMENTS SOUS CHARGEMENT  
HYGROTHERMOMECHANIQUE

0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00  
 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00 0.0000000000E+00

DEFORMATIONS RAPPORTEES AUX AXES (X, Y)

5.0635358623E-03 + ( 5.7976619996E-01 ) z  
 6.8966985895E-03 + (-1.0266779957E+00 ) z  
 7.8356638797E-03 + (-1.3088516567E+00 ) z

CONTRAINTES RAPPORTEES AUX AXES (X, Y)



-2.5000000000E-03 mm <= z <= -1.0000000000E-03 mm  
2.6341098105E+08 + ( 6.7857502482E+09 ) z  
9.4570869219E+07 + (-7.9192364484E+09 ) z  
8.0758489154E+07 + (-3.8058335101E+09 ) z

-1.0000000000E-03 mm <= z <= -1.7763568394E-15 mm  
1.1545110814E+08 + ( 1.9217670542E+10 ) z  
9.3440295540E+07 + (-2.5197832114E+09 ) z  
-2.2840044335E+06 + (-1.3520258449E+10 ) z

0.0000000000E+00 mm <= z <= 1.5000000000E-03 mm  
1.5791818662E+08 + ( 2.4407029172E+10 ) z  
8.3622533574E+07 + (-6.0904511064E+09 ) z  
2.9509251469E+06 + (-1.0176798629E+10 ) z

1.5000000000E-03 mm <= z <= 2.5000000000E-03 mm  
2.6356431423E+08 + (-5.5228260070E+09 ) z  
1.4700904284E+08 + (-1.1467786180E+10 ) z  
1.4057868747E+08 + (-9.5801741093E+09 ) z

#### DEFORMATIONS RAPPORTEES AUX AXES DU PLI

-2.5000000000E-03 mm <= z <= -1.0000000000E-03 mm  
3.2274185105E-03 + ( 7.9936775791E-01 ) z  
8.7328159413E-03 + (-1.2462795537E+00 ) z  
5.8693026118E-03 + (-3.3027668666E-01 ) z

-1.0000000000E-03 mm <= z <= -1.7763568394E-15 mm  
8.9147685317E-03 + (-3.8859424122E-01 ) z  
3.0454659200E-03 + (-5.8317554559E-02 ) z  
5.5053974308E-03 + (-2.0456473116E+00 ) z

0.0000000000E+00 mm <= z <= 1.5000000000E-03 mm  
7.1452504504E-03 + ( 1.4494192954E-01 ) z  
4.8149840014E-03 + (-5.9185372532E-01 ) z  
7.7024653389E-03 + (-1.9367208824E+00 ) z

1.5000000000E-03 mm <= z <= 2.5000000000E-03 mm  
2.1288845564E-03 + ( 7.4490454329E-01 ) z  
9.8313498953E-03 + (-1.1918163391E+00 ) z  
2.3302664489E-03 + ( 7.3679565486E-01 ) z

#### CONTRAINTES RAPPORTEES AUX AXES du pli

-2.5000000000E-03 mm <= z <= -1.0000000000E-03 mm  
2.1172159357E+08 + ( 7.7036196757E+09 ) z  
1.4626025670E+08 + (-8.8371058760E+09 ) z  
1.1214893114E+08 + ( 3.8029817184E+08 ) z

-1.0000000000E-03 mm <= z <= -1.7763568394E-15 mm  
1.0797039912E+08 + ( 2.0744198212E+09 ) z  
1.0092100455E+08 + ( 1.4623467510E+10 ) z  
-1.0672963650E+07 + (-1.6172722807E+10 ) z

0.0000000000E+00 mm <= z <= 1.5000000000E-03 mm  
1.5441678413E+08 + ( 1.7275686054E+10 ) z  
8.7123936059E+07 + ( 1.0408920109E+09 ) z  
-1.6018337119E+07 + (-1.6437736211E+10 ) z

1.5000000000E-03 mm <= z <= 2.5000000000E-03 mm  
1.1268078180E+08 + ( 1.2876081011E+09 ) z  
2.9789257527E+08 + (-1.8278220288E+10 ) z  
1.2075925672E+08 + (-2.2158437876E+09 ) z

# ***ANNEXE 3***

```

uses Crt;

type
Vect1=array[1..6] of real;
Vect2=array[0..100] of integer;
Vectx=array[0..100] of real;
Vect3=array[1..6] OF ARRAY[1..100] OF REAL;
Matrice=array[1..6,1..6] of real;
Matrice1=array[1..12,1..12] of real;

Var
reponse:char;
Fichier,fichier1:text;
Nom:string;

n,nc,i,j,k,choix:Integer;
Vm,Vf,Em,Ef,Gm,Gf,NUm,NUF,NUt1,El,Et,NULt,GlT,El1,Et1:Real;
ALPHAf,ALPHAm,BETAf,BETAm,ALPHA1,ALPHA1,ALPHA1,BETA1,BETA1,DELTA1c,DELTA1z,DELTA1hc,DELTA1hz:
Real;
h,C,S:Real;
np:Vect2;
epsilon1m,kam,epsilonte,kat,epsilon1h,kah,epsilon1nt,kamt,epsilon1nh,kath,epsilon1mh,kamh
,epsilon1mth,kamth:Vect1;
epsilon1xy1,epsilon1xy2,sigma11,sigma1t1,sigma1t1,sigma12,sigma12,sigma1t2:Vect1;
sigma1inf,sigma1inf,sigma1inf,sigma1sup,sigma1sup,sigma1sup:Vect1;
epsilon1ninf,epsilon1ntinf,epsilon1ntinf,epsilon1nlsup,epsilon1ntsup,epsilon1ntsup:Vect1;
epsilon1l1,epsilon1t1,epsilon1t1,epsilon1l2,epsilon1t2,epsilon1t2,r1,r2:Vect1;
Nm,Mm,Nt,Mt,Nh,Mh,Nmat,Mnt,Nmah,Mmh,Nth,Mth,Nmth,Mmth,Effort,Moment:Vect1;
ALPHAa,ALPHAa,ALPHAa,BETAa,BETAa,BETAa,ALPHA,ALPHA:Vect1;
hc,z0,z1,x,TETA:Vectx;
A,B,D,G,GI,ALPHAa,BETAa:Matrice;
Q:Matrice2;
ALPHAQ,BETAQ,sigmaXY1,sigmaXY2,sigmaXYinf,sigmaXYsup:Vect3;
sigma1r,sigma1r,sigma1r:real;

(*****
)
(*****
)
(*****
)
procedure quitter;
begin
  writeln;writeln;
  writeln('          CE PROGRAMME EST A PRESENT FINI          ');
  writeln;
  write('          APPUYEZ SUR RETURN ');
  readln;readln;
end;

(*****
)
(*****
)
(*****
)
PROCEDURE lecture_donnees;
label etq;
var fichier_existe:boolean;
begin
  etq: write ('  DONNEZ LE NOM DU FICHIER DE DONNEES  ');
  read(nom);
  begin
    (Si-)
    assign(fichier1,nom);
    reset(fichier1);
    close(fichier1);
    (Si+)
    fichier_existe:=(ioresult=0) and (nom <> '');
  end;
end;

```

```

if fichier_existe=false then
begin
  writeln;
  writeln('      ***FICHIER INTROUVABLE OU REPERTOIRE INCORRECT! ****');
  writeln('      Si vous voyez ce message, cela veut dire que vous avez
Commis');
  writeln('      l''une des deux erreurs suivantes: soit votre fichier
n''existe,');
  writeln('      soit il existe mais il n''est pas dans le bon repertoire');
  writeln;
  writeln;
  readln;
  QUITTER;
end
else
begin
  reset (fichier1);
  readln(fichier1);
  readln(fichier1, Vm);
  read (fichier1, Em);
  read (fichier1, Gm);
  read (fichier1, NUm);
  readln(fichier1);
  read (fichier1, Ef);
  read (fichier1, Gf);
  read (fichier1, NUF);
  readln(fichier1);
  readln(fichier1, ALPHAM);
  readln(fichier1, ALPHAF);
  readln(fichier1, BETAM);
  readln(fichier1, BETAF);
  readln(fichier1);
  readln(fichier1, nc);
  readln(fichier1);
  read (fichier1, NP[k]);
  readln(fichier1);
  read (fichier1, TETA[k]);
  READLN(fichier1);
  for j:=1 to 3 do
  begin
    readLN(fichier1, epsilon[m[j]]);
  end;
  readln(fichier1);
  for j:=4 to 6 do
  begin
    readln(fichier1, kam[j]);
  end;

  readln(fichier1);
  readln(fichier1, DELTATc);
  readln(fichier1, DELTATz);
  readln(fichier1);
  readln(fichier1, DELTAhc);
  readln(fichier1, DELTAhz);
  readln(fichier1);
  for j:=1 to 3 do
  begin
    readln(fichier1, effort[j]);
  end;
  readln(fichier1);
  for j:=1 to 3 do
  begin
    readln(fichier1, moment[j]);
  end;
  readln;

```

```
end;
end;
```

```
(*****
*****      ecriture dans le fichier      *****
*****)
```

```
PROCEDURE ecriture_resultats;
```

```
var fichier_existe:boolean;
```

```
begin
```

```
  Write ('  DONNEZ LE NOM DU FICHER DE solutions  :');
```

```
  read(nom);
```

```
  assign(fichier,nom);
```

```
  reset(fichier);
```

```
  REWRITE(fichier);
```

```
Writeln(fichier, '*****
*****');
```

```
Writeln(fichier, '*****
*****');
```

```
  Writeln(fichier, '*****
*****');
```

```
  Writeln(fichier, '*****
*****');
```

```
  Writeln(fichier, '*****      LOGICIEL DE CALCUL DES DEFORMATIONS ET DES
*****');
```

```
  Writeln(fichier, '*****      CONTRAINTES D'UN COMPOSITE STRATIFIE A BASE DE
*****');
```

```
  Writeln(fichier, '*****      FIBRES UNIDIRECTIONELLES SOUMIS A UN CHARGEMENT
*****');
```

```
  Writeln(fichier, '*****      HYGROTHERMOMECHANIQUE
*****');
```

```
  Writeln(fichier, '*****
*****');
```

```
  Writeln(fichier, '*****
*****');
```

```
Writeln(fichier, '*****
*****');
```

```
Writeln(fichier, '*****
*****');
```

```
  Writeln(fichier, '');
```

```
  Writeln(fichier, '');
```

```
  Writeln(fichier, '                                PROPRIETES DU PLI
');
```

```
  Writeln(fichier, '');
```

```
  Write(fichier, '  Vm=      ');
```

```
  Writeln(fichier, Vm);
```

```
  Write(fichier, '  Vf=      ');
```

```
  Writeln(fichier, Vf);
```

```
  Write(fichier, '  E1=      ');
```

```
  Writeln(fichier, E1);
```

```
  Write(fichier, '  Et=      ');
```

```
  Writeln(fichier, Et);
```

```
  Write(fichier, '  Glt=     ');
```

```
  Writeln(fichier, Glt);
```

```
  Write(fichier, '  NUlt=    ');
```

```
  Writeln(fichier, NUlt);
```

```
  Write(fichier, '  NUt1=    ');
```

```
  Writeln(fichier, NUt1);
```

```
  Write(fichier, '  ALPHAL=  ');
```

```

Writeln(fichier,ALPHA);
Write(fichier,'  ALPHAt=      ');
Writeln(fichier,ALPHAt);
Write(fichier,'  BETAt=      ');
Writeln(fichier,BETAt);
Write(fichier,'  BETAt=      ');
Writeln(fichier,BETAt);

Writeln(fichier,'');
Writeln(fichier,'
');
Writeln(fichier,'');
for k:=1 to nc do
begin
  Write(fichier,'  np=');
  Writeln(fichier,k);
  Write(fichier,'  hc['',k,'']= ');
  Write(fichier,hc[k]);
  Writeln(fichier,'mm');
  Write(fichier,'  teta['',k,'']=');
  Write(fichier,teta[k]);
  Writeln(fichier,'');
end;
Writeln(fichier,'');
Write(fichier,'  LA HAUTEUR TOTALE DU STRATIFIE EST EGALE A ');
Write(fichier,h);
Writeln(fichier,'mm');

Writeln(fichier,'');
Writeln(fichier,'
CONSTANTES DE RIGIDITE DANS LES AXES DU STRATIFIE
');
Writeln(fichier,'');
FOR k:=1 to nc do
begin
  Write(fichier,'  np=');
  Writeln(fichier,k);
  Write(fichier,'
');
  Write(fichier,Q[1,1][k]);
  Write(fichier,'
');
  Write(fichier,Q[1,2][k]);
  Write(fichier,'
');
  Writeln(fichier,Q[1,3][k]);
  Write(fichier,'
');
  Write(fichier,Q[2,1][k]);
  Write(fichier,'
');
  Write(fichier,Q[2,2][k]);
  Write(fichier,'
');
  Writeln(fichier,Q[2,3][k]);
  Write(fichier,'
');
  Write(fichier,Q[3,1][k]);
  Write(fichier,'
');
  Write(fichier,Q[3,2][k]);
  Write(fichier,'
');
  Writeln(fichier,Q[3,3][k]);
  Writeln(fichier,'');
end;

Writeln(fichier,'');
Writeln(fichier,'
LES MATRICES A, B ET D
');
Writeln(fichier,'');
for j:=1 to 3 do
begin
  for i:=1 to 3 do
begin

```

```

        Write(fichier, ' ');
        Write(fichier, a[i, j]);
    end;
    Writeln(fichier, '');
end;
Writeln(fichier, '');
for j:=1 to 3 do
begin
    for i:=1 to 3 do
    begin
        Write(fichier, ' ');
        Write(fichier, b[i, j]);
    end;
    Writeln(fichier, '');
end;
Writeln(fichier, '');
for j:=1 to 3 do
begin
    for i:=1 to 3 do
    begin
        Write(fichier, ' ');
        Write(fichier, d[i, j]);
    end;
    Writeln(fichier, '');
end;

Writeln(fichier, '');
Writeln(fichier, '
');
Writeln(fichier, '');
for j:=1 to 6 do
begin
    for i:=1 to 6 do
    begin
        Write(fichier, ' ');
        Write(fichier, G[i, j]);
    end;
    Writeln(fichier, '');
end;

Writeln(fichier, '');
Writeln(fichier, '
');
Writeln(fichier, '');
for j:=1 to 6 do
begin
    for i:=1 to 6 do
    begin
        Write(fichier, ' ');
        Write(fichier, GI[i, j]);
    end;
    Writeln(fichier, '');
end;

Writeln(fichier, '');
Writeln(fichier, '
');
MECANIQUE
Writeln(fichier, '
');
for i:=1 to 3 do
begin
    Write(fichier, ' ');
    Write(fichier, Nm[i]);
end;
Writeln(fichier, '
');
for i:=4 to 6 do

```

MATRICE GLOBALE

MATRICE INVERSE DE LA MATRICE GLOBALE

EXPRESSIONS DES RESULTANTES ET DES MOMENTS SOUS CHARGEMENT



```

end;
Writeln(fichier, '');
for i:=4 to 6 do
begin
  Write(fichier, ' ');
  Write(fichier, Mmh[i]);
end;
Writeln(fichier, '');
Writeln(fichier, '');
Writeln(fichier, ' EXPRESSIONS DES RESULTANTES ET DES MOMENTS SOUS
CHARGEMENT ');
Writeln(fichier, ' HYGROTHERMIQUE
');
Writeln(fichier, '');
for i:=1 to 3 do
begin
  Write(fichier, ' ');
  Write(fichier, Nth[i]);
end;
Writeln(fichier, '');
for i:=4 to 6 do
begin
  Write(fichier, ' ');
  Write(fichier, Mth[i]);
end;
Writeln(fichier, '');
Writeln(fichier, '');
Writeln(fichier, ' EXPRESSIONS DES RESULTANTES ET DES MOMENTS SOUS
CHARGEMENT ');
Writeln(fichier, ' HYGROTHERMOMECHANIQUE
');
Writeln(fichier, '');
for i:=1 to 3 do
begin
  Write(fichier, ' ');
  Write(fichier, Nmth[i]);
end;
Writeln(fichier, '');
for i:=4 to 6 do
begin
  Write(fichier, ' ');
  Write(fichier, Mmth[i]);
end;
Writeln(fichier, '');
Writeln(fichier, '');
Writeln(fichier, ' DEFORMATIONS RAPPORTEES AUX AXES (X,Y)
');
Writeln(fichier, '');

Write(fichier, ' ');
Write(fichier, EPSILONXY1[1]);
Write(fichier, ' +');
Write(fichier, ' ');
Write(fichier, epsilonxy2[1]);
Write(fichier, ' ');
Writeln(fichier, ' z');

Write(fichier, ' ');
Write(fichier, EPSILONXY1[2]);
Write(fichier, ' +');
Write(fichier, ' ');
Write(fichier, epsilonxy2[2]);
Write(fichier, ' ');
Writeln(fichier, ' z');

```

LCUAC

```
write(fichier, epsilonxy2[3]);
write(fichier, ' ');
writeln(fichier, ' z');

writeln(fichier, '');
writeln(fichier, '');
writeln(fichier, '
');
writeln(fichier, '');
for k:=1 to nc do
begin
  write(fichier, ' ');
  write(fichier, z0[k]);
  write(fichier, ' mm');
  write(fichier, ' <=');
  write(fichier, ' z');
  write(fichier, ' <= ');
  write(fichier, z1[k]);
  write(fichier, ' mm');
  writeln(fichier, '');

  write(fichier, ' ');
  write(fichier, SIGMAXY1[1][k]);
  write(fichier, ' +');
  write(fichier, ' (');
  write(fichier, SIGMAXY2[1][k]);
  write(fichier, ' )');
  writeln(fichier, ' z');

  write(fichier, ' ');
  write(fichier, SIGMAXY1[2][k]);
  write(fichier, ' +');
  write(fichier, ' (');
  write(fichier, SIGMAXY2[2][k]);
  write(fichier, ' )');
  writeln(fichier, ' z');

  write(fichier, ' ');
  write(fichier, SIGMAXY1[3][k]);
  write(fichier, ' +');
  write(fichier, ' (');
  write(fichier, SIGMAXY2[3][k]);
  write(fichier, ' )');
  writeln(fichier, ' z');
  writeln(fichier, '');
end;
writeln(fichier, '');
writeln(fichier, '');
writeln(fichier, '
');
writeln(fichier, '');
for k:=1 to nc do
begin
  write(fichier, ' ');
  write(fichier, z0[k]);
  write(fichier, ' mm');
  write(fichier, ' <=');
  write(fichier, ' z');
  write(fichier, ' <= ');
  write(fichier, z1[k]);
  write(fichier, ' mm');
```

CONTRAINTES RAPPORTEES AUX AXES (X, Y)

DEFORMATIONS RAPPORTEES AUX AXES DU PLI

```

Write (fichier, SIGMAlt2[k]);
WRITE (fichier, ' ');
WRITELN (fichier, ' z');
Writeln (fichier, ' ');

end;
close (fichier);
end;

(*****
*****      CALCUL DES PROPRIETES DU PLI      *****
*****
)
procedure pli;
var
alphac, betac: real;
begin
  Vf:=1-Vm;
  E1:=-Em*Vm+Ef*Vf;
  Et:=Em*(1/(Vm+Em*Vf/Ef));
  Glt:=Gm*(1/(Vm+Gm*Vf/Gf));
  NUlt:=NUM*Vm+NUf*Vf;
  NUt1:=-Et*NUlt/E1;
  ALPHAL:=(ALPHAf*Ef*Vf+ALPHAm*Em*Vm)/(Ef*Vf+Em*Vm);
  ALPHAC:=(ALPHAf-ALPHAm);
  ALPHAT:=(ALPHAm*Vm+ALPHAf*Vf+(NUf*Em-NUm*Ef)*ALPHAC)/((Em/Vf)+Ef/Vm);
  BETAL:=(BETAf*Ef*Vf+BETAm*Em*Vm)/(Em*Vm+Ef*Vf);
  BETAC:=(BETAf-BETAm);
  BETAT:=(BETAm*Vm+BETAf*Vf+(NUf*Em-NUm*Ef)*BETAC)/((Em/Vf)+Ef/Vm);
end;

(*****
*****
*****      CHARGEMENT MECANIQUE      *****
*****
*****      DETERMINATION DES CONSTANTES DE RIGIDITE DE CHAQUE COUCHE      *****
*****      DANS LES AXES DU STRATIFIE      *****
)

procedure axesstra(nc:integer;var Q:matrice2);
var
r: real;
begin
  r:=teta[k]*pi/180;
  C:=cos(r);
  S:=sin(r);
  E11:=E1/(1-(Et/E1)*puis(NUlt,2));
  Et1:=Et/(1-(Et/E1)*puis(NUlt,2));
  Q[1,1]:=E11*puis(C,4)+Et1*puis(S,4)+2*(NUlt*Et1+2*Glt)*sqr(C)*sqr(S);
  Q[2,2]:=E11*puis(S,4)+2*(NUlt*Et1+2*Glt)*puis(S,2)*puis(C,2)+Et1*puis(C,4);
  Q[3,3]:=E11+(1-2*NUlt)*Et1-2*Glt)*sqr(C)*sqr(S)+Glt*(puis(C,4)+puis(S,4));
  Q[1,2]:=(E11+Et1-4*Glt)*sqr(C)*sqr(S)+NUlt*Et1*(puis(C,4)+puis(S,4));
  Q[1,3]:=(E11-NUlt*Et1-2*Glt)*puis(C,3)*S+(Et1*(NUlt-1)+2*Glt)*C*puis(S,3);
  Q[2,3]:=(E11-NUlt*Et1-2*Glt)*C*puis(S,3)+((NUlt-1)*Et1+2*Glt)*puis(C,3)*S;
  Q[3,2]:=Q[2,3][k];
  Q[3,1]:=Q[1,3][k];
  Q[2,1]:=Q[1,2][k];
end;

(*****
*****      DETERMINATION DES MATRICES A, B et D      *****
)

PROCEDURE mat;
const
ep=0.125e-3;
begin

```

```

h:=0;
for k:=1 to nc do
begin
  hc[k]:=np[k]*ep;
  h:=h+hc[k];
end;
x[0]:=0;
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to 3 do
begin
  a[i,j]:=0;
  b[i,j]:=0;
  d[i,j]:=0;
end;
for k:=1 to nc do
begin
  z0[k]:=(-h/2)+x[k-1];
  z1[k]:=(-h/2)+x[k-1]+hc[k];
  axesstra(nc,q);
  for i:=1 to 3 do
  begin
    for j:=1 to 3 do
    begin
      a[i,j]:=a[i,j]+q[i,j][k]*(z1[k]-z0[k]);
      b[i,j]:=b[i,j]+q[i,j][k]*(sqr(z1[k])-sqr(z0[k]))/2;
      d[i,j]:=d[i,j]+q[i,j][k]*(puis(z1[k],3)-puis(z0[k],3))/3;
    end;
  end;
  x[k]:=-x[k-1]+hc[k];
end;
end;

(*****
***** MATRICE GLOBALE *****)

procedure matglo(a,b,d:matrice;var g:matrice);
var
i,j:integer;
begin
for i:=1 to 3 do
begin
for j:=1 to 3 do
begin
  G[i,j]:=a[i,j];
end;
end;
for i:=1 to 3 do
begin
for j:=1 to 3 do
begin
  G[i,j+5]:=b[i,j];
end;
end;
end;
for i:=1 to 3 do
begin
for j:=1 to 3 do
begin
  G[i+5,j]:=b[i,j];
end;
end;
end;
for i:=1 to 3 do
begin
for j:=1 to 3 do
begin
  G[i+5,j+5]:=d[i,j];

```

```

        end;
    end;
end;

(*****
*****          MATRICE INVERSE DE LA MATRICE GLOBALE          *****
*)

procedure inverse_G(G:matrice;var X1:matrice);
var
s:real;
m,l:integer;
g1:matrice1;
m0:matrice1;
begin
    for i:=1 to 6 do
        begin
            for j:=1 to 12 do
                begin
                    if (j<=6) then
                        begin
                            g1[i,j]:=g[i,j];
                        end
                    else
                        begin
                            if j=i+6 then
                                g1[i,j]:=-1
                            else
                                g1[i,j]:=0;
                            end;
                        end;
                    end;
                end;
            end;
            for k:=1 to 6 do
                begin
                    for i:=k+1 to 6 do
                        begin
                            m0[i,k]:=g1[i,k]/g1[k,k];
                            for j:=k to 12 do
                                begin
                                    g1[i,j]:=g1[i,j]-m0[i,k]*g1[k,j];
                                end;
                            end;
                        end;
                    end;
                end;
            for j:=1 to 6 do
                begin
                    l:=j+6;
                    x1[6,j]:=g1[6,l]/g1[6,6];
                    for i:=5 downto 1 do
                        begin
                            s:=0;
                            begin
                                for k:=i+1 to 6 do
                                    s:=s+g1[i,k]*x1[k,j];
                                end;
                            x1[i,j]:=(g1[i,l]-s)/g1[i,i];
                        end;
                    end;
                end;
            END;
            for J:=1 to 6 do
                BEGIN
                    for I:=1 to 6 do
                        begin
                            GI[i,j]:=X1[i,j];
                        end;
                    END;
                end;
            end;
end;
(*****
*****
*)

```

```

begin
  epsilonxy1[i]:=epsilonath[i];
end;
for i:=1 to 3 do
begin
  epsilonxy2[i]:=kamth[i];
end;
GotoXY(5,5);
Writeln('le calcul demand, a ,t, effectu,,veuillez faire un aute choix ');

end;

(*****
***** CONTRAINTES RAPPORTEES AUX AXES PRINCIPAUX *****
*****)
PROCEDURE SigmaAxesStra;
begin
  for k:=1 to nc do
  begin
    sigmaXY1[i][K]:=0;
    sigmaXY2[i][K]:=0;
    sigmaxyinf[i][k]:=0;
    sigmaxysup[i][k]:=0;
    for I:=1 to 3 do
    begin
      for J:=1 to 3 do
      begin
        sigmaXY1[i][K]:=sigmaXY1[i][K]+q[i,j][k]*epsilonxy1[j];
        sigmaXY2[i][K]:=sigmaXY2[i][K]+q[i,j][k]*epsilonxy2[j];
      end;
      sigmaxyinf[i][k]:= sigmaXYinf[i][K]+sigmaXY1[i][K]+z0[k]*sigmaXY2[i][K];
      sigmaxysup[i][k]:= sigmaXYSup[i][K]+sigmaXY1[i][K]+z1[k]*sigmaXY2[i][K];
    end;
  end;
end;

end;

(*****
***** DEFORMATIONS RAPPORTEES AUX AXES DU PLI *****
*****)
PROCEDURE CONTRAxesPli;
var
r:real;
begin
  for k:=1 to nc do
  begin
    r:=teta[K]*pi/180;
    C:=cos(r);
    S:=sin(r);
    sigmat1[k]:=puis(c,2)*sigmaxy1[1][k]+puis(s,2)*sigmaxy1[2][k]-
2*s*c*sigmaxy1[3][k];
sigma1[k]:=puis(s,2)*sigmaxy1[1][k]+puis(c,2)*sigmaxy1[2][k]+2*s*c*sigmaxy1[3][k];
sigmalt1[k]:=s*c*sigmaxy1[1][k]-s*c*sigmaxy1[2][k]+(puis(c,2)-
puis(s,2))*sigmaxy1[3][k];
sigmat2[k]:=puis(c,2)*sigmaxy2[1][k]+puis(s,2)*sigmaxy2[2][k]-
2*s*c*sigmaxy2[3][k];
sigma2[k]:=puis(s,2)*sigmaxy2[1][k]+puis(c,2)*sigmaxy2[2][k]+2*s*c*sigmaxy2[3][k];
sigmalt2[k]:=s*c*sigmaxy2[1][k]-s*c*sigmaxy2[2][k]+(puis(c,2)-
puis(s,2))*sigmaxy2[3][k];

```

```

sigma1inf[k]:= sigma1inf[K]+sigma11[K]+z0[k]*sigma12[K];
sigma1sup[k]:= sigma1sup[K]+sigma11[K]+z1[k]*sigma12[K];
sigma2inf[k]:= sigma2inf[K]+sigma21[K]+z0[k]*sigma22[K];
sigma2sup[k]:= sigma2sup[K]+sigma21[K]+z1[k]*sigma22[K];
sigmaltinf[k]:= sigmaltinf[K]+sigmalt1[K]+z0[k]*sigmalt2[K];
sigmaltsup[k]:= sigmaltsup[K]+sigmalt1[K]+z1[k]*sigmalt2[K];

end;
end;

(*****
***** CONTRAINTES RAPPORTEES AUX AXES DU PLI *****
*****)
PROCEDURE DEFORAXesPli;
var
r:real;
begin
for k:=1 to nc do
begin
r:=teta[K]*pi/180;
C:=cos(r);
S:=sin(r);
epsilon11[k]:=puis(c,2)*epsilonxy1[1]+puis(s,2)*epsilonxy1[2]-s*c*epsilonxy1[3];
epsilon12[k]:=puis(s,2)*epsilonxy1[1]+puis(c,2)*epsilonxy1[2]+s*c*epsilonxy1[3];
epsilon1t1[k]:=2*s*c*epsilonxy1[1]-2*s*c*epsilonxy1[2]+(puis(c,2)-
puis(s,2))*epsilonxy1[3];
epsilon12[k]:=puis(c,2)*epsilonxy2[1]+puis(s,2)*epsilonxy2[2]-s*c*epsilonxy2[3];
epsilon2[k]:=puis(s,2)*epsilonxy2[1]+puis(c,2)*epsilonxy2[2]+s*c*epsilonxy2[3];
epsilon1t2[k]:=2*s*c*epsilonxy2[1]-2*s*c*epsilonxy2[2]+(puis(c,2)-
puis(s,2))*epsilonxy2[3];

epsilon1inf[k]:= epsilon1inf[K]+epsilon11[k]+z0[k]*epsilon12[k];
epsilon1sup[k]:= epsilon1sup[K]+epsilon11[k]+z1[k]*epsilon12[k];
epsilon2inf[k]:= epsilon2inf[K]+epsilon21[k]+z0[k]*epsilon22[k];
epsilon2sup[k]:= epsilon2sup[K]+epsilon21[k]+z1[k]*epsilon22[k];
epsilon1tinf[k]:= epsilon1tinf[K]+epsilon1t1[k]+z0[k]*epsilon1t2[k];
epsilon1t2sup[k]:= epsilon1t2sup[K]+epsilon1t1[k]+z1[k]*epsilon1t2[k];

end;
end;

(*****
***** VERIFICATION DU CRITERE DE RUPTURE *****
*****)
PROCEDURE VERIF;
begin
GotoXY(5,7);
writeln('Donnez la valeur de la contrainte ... la rupture en traction');
GotoXY(5,8);
writeln('dans le sens longitudinal');
GotoXY(5,9);
writeln('sigma1r=');
readln(sigma1r);
GotoXY(5,10);
writeln('donnez la valeur de la contrainte ... la rupture en traction');
GotoXY(5,11);
writeln('dans le sens transversal');
GotoXY(5,12);
writeln('sigma2r=');
readln(sigma2r);
GotoXY(5,13);
writeln('donnez la valeur de la contrainte ... la rupture en cisaillement');
GotoXY(5,14);

```

```

writeln('dans le plan (l,t)');
GotoXY(5,15);
writeln('sigmaltr=');
readln(sigmaltr);
for k:=1 to nc do
begin
  r1[k]:=(sigmalinf[k]/sigmalr)+(sigmatinf[k]/sigmatr)-
  ((sigmalinf[k]*sigmatinf[k]/sqr(sigmatr))+sqr(sigmatinf[k]/sigmaltr);
  r2[k]:=(sigmalsup[k]/sigmalr)+(sigmatsup[k]/sigmatr)-
  ((sigmalsup[k]*sigmatsup[k]/sqr(sigmatr))+sqr(sigmatsup[k]/sigmaltr);
  if (r1[k]<1) and (r2[k]<1) then
  begin
    append(FICHER);
    write(fichier, ' NP= ');
    writeln(fichier,k);
    writeln(fichier);
    writeln(fichier, '      le critere de rupture est verifie pour cette couche');
    writeln(fichier);
    writeln(fichier);
    CLOSE(fichier);
  end
  else
  begin
    write(fichier, ' NP= ');
    writeln(fichier,k);
    WRITELN(fichier);
    writeln(fichier, '      le critere de rupture n\'est pas verifie pour cette
couche, il vous est ');
    writeln(fichier, '      conseil, de revoir vos donnees et particulierement les
orientations ');
    writeln(fichier, '      des plis ');
    writeln(fichier);
    writeln(fichier);
    CLOSE(fichier);
  end;
end;
end;
end;

```

```

procedure aide;

```

```

begin
  GotoXY(5,3);
  writeln('VOUS VOULEZ CALCULER LES EFFORTS, ET VOUS AVEZ DES PROBLEMES AVEC');
  GotoXY(5,4);
  writeln('LE LOGICIEL, IL FAUT VOUS POSER CERTAINES QUESTIONS RELATIVES AU');
  GotoXY(5,5);
  writeln('STRATIFIE, EN VOICI QUELQUES EXEMPLES:');
  GotoXY(5,6);
  writeln('AVES-VOUS INTRODUIT TOUTES LES DONNEES NECESSAIRES AUX CALCULS SUIVANT
');
  GotoXY(5,7);
  writeln('L\'ORDRE ETABLI?');
  GotoXY(5,8);
  writeln('A QUEL TYPE DE CHARGEMENT VOTRE STRUCTURE EST-ELLE SOUMISE?');
  GotoXY(5,9);
  writeln('SI VOTRE STRUCTURE EST SOUMISE A UN CHARGEMENT THERMIQUE');
  GotoXY(5,10);
  writeln('(RESPECTIVEMENT HYGROMETRIQUE), AVEZ-VOUS RESPECTE LA');
  GotoXY(5,11);
  writeln('VARIATION DE LA TEMPERATURE (RESPECTIVEMENT L\'HUMIDITE)');
  GotoXY(5,12);
  writeln('AVEC L\'EPAISSEUR DU STRATIFIE?');
end;

```

```

(*****
*****          MENU2          *****
)

```



```

(*****)
PROCEDURE menu2;
begin
  repeat
    writeln('
    writeln(' I Choisissez une option I ');
    writeln(' I 1 :CHARGEMENT MECANIQUE I ');
    writeln(' I 2 :CHARGEMENT THERMIQUE I ');
    writeln(' I 3 :CHARGEMENT HYGROMETRIQUE I ');
    writeln(' I 4 :CHARGEMENT THERMOMECANIQUE I ');
    writeln(' I 5 :CHARGEMENT HYGROMECHANIQUE I ');
    writeln(' I 6 :CHARGEMENT HYGROTHERMIQUE I ');
    writeln(' I 7 :CHARGEMENT HYGROTHERMOMECHANIQUE I ');
    writeln(' I 8 :QUITTER I ');
    writeln(' -----');
    write(' VOTRE CHOIX EST :');
    read(choix);
    clrscr;
    case choix of
      1: mecanique1;
      2: thermique1;
      3: hygrometrique1;
      4: thermo_mecanique1;
      5: hygro_mecanique1;
      6: hygro_thermique1;
      7: hygro_thermo_mecanique1;
      8: quitter;
    end;
  until choix=8;
end;

```

```

(*****)
(***** MENU3 *****)
(*****)
PROCEDURE menu3;
begin
  repeat
    writeln('
    writeln(' I CHOISISSEZ UNE OPTION I ');
    writeln(' I 1 :CHARGEMENT MECANIQUE I ');
    writeln(' I 2 :CHARGEMENT THERMIQUE I ');
    writeln(' I 3 :CHARGEMENT HYGROMETRIQUE I ');
    writeln(' I 4 :CHARGEMENT THERMOMECHANIQUE I ');
    writeln(' I 5 :CHARGEMENT HYGROMECHANIQUE I ');
    writeln(' I 6 :CHARGEMENT HYGROTHERMIQUE I ');
    writeln(' I 7 :CHARGEMENT HYGROTHERMOMECHANIQUE I ');
    writeln(' I 8 :QUITTER I ');
    writeln(' -----');
    write(' VOTRE CHOIX EST :');
    read(choix);
    clrscr;
    case choix of
      1: mecanique2;
      2: thermique2;
      3: hygrometrique2;
      4: thermo_mecanique2;
      5: hygro_mecanique2;
      6: hygro_thermique2;
      7: hygro_thermo_mecanique2;
      8: quitter;
    end;
  until choix=8;
end;

```

```

(*****
***** Calcul des efforts *****
*****
(* chargement m,canique *)
(* thermique *)
(* hygrom, trique *)
(* thermom,canique *)
(* hygrom,canique *)
(* hygrothermom,canique *)
procedure calceffor;
begin
  menu2;
end;

```

```

(*****
***** Calcul des Deformations *****
*****
(* chargement m,canique *)
(* thermique *)
(* hygrom, trique *)
(* thermom,canique *)
(* hygrom,canique *)
(* hygrothermom,canique *)

```

```

PROCEDURE CALCDEFOR;
begin
  menu3;
end;

```

```

(*****
***** MENU1 *****
*****

```

```

PROCEDURE MENU1;
begin
  repeat
    writeln('
    writeln(' I CHOISISSEZ UNE OPTION I ');
    writeln(' I 1 :CALCUL DES EFFORTS I ');
    writeln(' I 2 :CALCUL DES DEFORMATIONS ET DES CONTRAINTES I ');
    writeln(' I 3 :AIDE I ');
    writeln(' I 4 :QUITTER I ');
    writeln(' ----- ');
    write(' VOTRE CHOIX EST :');
    read(choix);
    clrscr;
    case choix of
      1: calceffor;
      2: calcdefor;
      3: aide;
      4: quitter;
    end;
  until choix=4;
end;

```

```
TextColor(WHITE);  
clrscr;  
GotoXY(5,1);  
Writeln('*****');  
GotoXY(5,2);  
Writeln('*****');  
GotoXY(5,3);  
Writeln('*****');  
GotoXY(5,4);  
Writeln('*****');  
GotoXY(5,5);  
Writeln('***** LOGICIEL DE CALCUL DES DEFORMATIONS ET DES *****');  
GotoXY(5,6);  
Writeln('***** CONTRAINTES D'UN COMPOSITE STRATIFIE A BASE DE *****');  
GotoXY(5,7);  
Writeln('***** FIBRES UNIDIRECTIONELLES SOUMIS A UN CHARGEMENT *****');  
GotoXY(5,8);  
Writeln('***** HYGROTHERMOMECANIQUE *****');  
GotoXY(5,9);  
Writeln('*****');  
GotoXY(5,10);  
Writeln('*****');  
GotoXY(5,11);  
Writeln('*****');  
GotoXY(5,12);  
Writeln('*****');  
readln;  
writeln('Tapez <ENTREE> pour continuer');  
readln;  
GotoXY(5,15);  
Writeln('*****');  
GotoXY(5,16);  
Writeln('*****');  
GotoXY(5,17);  
Writeln('CE PROGRAMME PERMET DE CALCULER LES EFFORTS, LES DEFORMATIONS ET LES ');  
GotoXY(5,18);  
Writeln('CONTRAINTES D'UN COMPOSITE STRATIFIE A BASE DE FIBRES UNIDIRECTIONELLES  
' );  
GotoXY(5,19);  
Writeln('SOUMIS A UN CHARGEMENT HYGROTHERMOMECANIQUE. ');  
GotoXY(5,20);  
Writeln('POUR POUVOIR EXECUTER LE PROGRAMME, IL SUFFIT DE CREER UN FICHER DE ');  
GotoXY(5,21);  
writeln('DONNEES *.DAT QUI COMPORTE LES DONNEES ESSENTIELLES DES FIBRES ET DE ');  
GotoXY(5,22);  
Writeln('LA MATRICE, PUIS CHOISIR SUR LE MENU LE CALCUL A EFFECTUER, AINSI, ');  
GotoXY(5,23);  
Writeln('APRES QUE LE CHOIX SERA FAIT; LE PROGRAMME AFFICHE UN DEUXIEME CHOIX');  
GotoXY(5,24);  
Writeln('CONCERNANT LE TYPE DE CHARGEMENT AUQUEL EST SOUMIS LE COMPOSITE, A LA ');  
GotoXY(5,25);  
Writeln('FIN, LA VERIFICATION DU CRITERE DE RUPTURE PEUT ETRE EFFECTUEE');  
readln;  
writeln('Tapez <ENTREE> pour continuer');  
readln;  
  
lecture_donnees;  
pli;  
MAT;  
ALPHA_mat;  
BETA_mat;  
Matglo(a,b,d,g);  
inverse_G(g,gi);
```

```
MENU1;  
SIGMAAXESSTRA;  
DeforAxesPli;  
CONTRAxesPli;  
ecriture_resultats;  
Write('voulez-vous verifier le critere de rupture?(O/N)');  
readln(reponse);  
if(reponse='O') then  
  begin  
    verif;  
  end  
else  
end.
```