

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département de Génie mécanique

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Science des matériaux

ETUDE D'UNE FISSURE COHESIVE A L'INTERFACE ENTRE DEUX
MATERIAUX DIFFERENTS

Par

Ahmed MAHAMMEDI

devant le jury composé de :

M. Hadji	Professeur, U. de Blida	Président
K. Azouaoui	Maître de conférences, U.S.T.H.B., Alger	Examineur
A. Brahim	Maître de conférences, U. de Blida	Examineur
A.Allali	Maître de conférences, U. de Blida	Examineur
H.Ferdjani	Maître de conférences, U. de Blida	Rapporteur

Blida, septembre 2011

ABSTRACT

The present work relies on the Dugdale surface energy hypothesis. The problem of an interface crack between two different materials has been studied. Using Fourier transforms the equations of elastic problem was transformed in a singular integral equation ,the resolution of integral equation was done using Chebyshev polynomials. Numerical applications are presented studying the evolution of the crack with the load. Finally a comparison with Griffith model was effected .

RESUME

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'appuient sur l'hypothèse d'une énergie de surface de type Dugdale. Le problème d'une fissure à l'interface entre deux matériaux différents a été étudié. En utilisant les transformées de Fourier, les équations du problème élastique sont transformées en une équation intégrale singulière, la résolution de l'équation intégrale se fait en utilisant les polynômes de Chebyshev. Des applications numériques sont présentées en étudiant l'évolution de la fissure avec le chargement appliqué. Enfin une comparaison avec le modèle de Griffith a été effectuée.

ملخص

يرتكز العمل المنجز في هذه المذكرة على فرضية طاقة السطح من نوع Dugdale و باستعمال محولات Fourier قمنا بدراسة تشقق بين مادتين مختلفتين حولت معادلات المرونة الى معادلة تكاملية شاذة تم حل هذه المعادلة باستعمال كثيرات الحدود Chebyshev و تم تقديم تطبيقات عديدة مختلفة بدراسة تطور التشقق مع الحمولة المطبقة ثم تم وضع مقارنة مع نموذج Griffith .

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier M. FERDJANI pour m'avoir proposé un sujet de Magister intéressant, et passionnant, car en pleine expansion dans le domaine de la mécanique de la rupture. Mais au-delà de cela, je le remercie pour sa disponibilité, et sa patience.

Je remercie aussi M.HADJI d'avoir présidé mon jury de mémoire ,
M .AZOUAOUI , M. BRAHIMI et M.ALLALI d'avoir accepté d'en être membres .

Je tiens aussi à remercier tous mes amis qui m'ont soutenu en fin de mémoire .

TABLE DE MATIERES

RESUME	1
TABLE DE MAIIERES	5
LISTE DES ILLUSTRATIONS	8
INTRODUCTION	10
1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	13
1.2 Quelques problèmes des fissures à l'interface entre deux matériaux différents	13
1.2 Lois d'interface des modèles de force cohésive	15
1.2.1. Modèle de Dugdale	16
1.2.2. Modèle de Needleman	17
1.2.3. Modèle de Tvergaard	17
2. THEORIE DE GRIFFITH REVISITEE ET FORMULATION VARIATIONNELLE	19
2.1. Théorie de Griffith révisitée	19
2.2. Formulation variationnelle	22
3. PRESENTATION DU PROBLEME	29
3.1. La structure étudiée	29
3.2. Evolution de la fissure initiale avec le chargement	31
3.2.1. La phase cohésive	32
3.2.2. La phase de propagation	35
4. ETABLISSEMENT DE L'EQUATION INTEGRALE	39
4.1. Transformée de Fourier	39
4.2. Dérivation de l'équation intégrale	39

4.3.	Convergence uniforme de l'intégrale I	45
4.3.1.	Rappel	45
4.3.2.	Convergence uniforme de I	46
5.	RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION INTEGRALE	49
5.1.	Valeur principale de Cauchy	49
5.1.1.	Définition	49
5.1.2.	Exemple	49
5.2.	Résolution de l'équation intégrale	50
5.3.	Le facteur d'intensité de contraintes aux pointes de la fissure $\pm l_a$	55
6.	PROCEDURE NUMERIQUE ET RESULTATS	58
6.1.	Phase cohésive	58
6.2.	Phase de propagation	60
6.3.	Etude de la convergence	61
6.3.1.	Détermination de A	61
6.3.2.	Détermination de N	61
6.3.3.	Détermination de n	62
6.4.	Etude de l'influence des paramètres	64
6.4.1.	Etude de l'influence du paramètre μ_1/μ_2	64
6.4.2.	Etude de l'influence du paramètre h/l_0	65
6.4.3.	Etude de l'influence du paramètre δ_c/l_0	65
6.5.	Discussion des résultats	66
7.	COMPARAISON ENTRE LES MODELES DE DUGDALE ET DE GRIFFITH	68
7.1.	Equations du problème	69
7.2.	Equation intégrale et résolution	70
7.3.	Mise en œuvre numérique	72
7.4.	Application numérique	73
7.4.1.	Détermination de N dans le cas de Griffith	73
7.4.2.	Résultats	74

CONCLUSION	76
APPENDICE A. Liste des symboles	78
APPENDICE B. Formule d'IRWIN pour une fissure d'interface en mode III	80
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	82

LISTE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1.1	Schéma de la fissure et de la zone cohésive	16
Figure 1.2	Loi d'interface de Dugdale dans la direction normale.	16
Figure 1.3	Loi d'interface de Needleman dans la direction normale	17
Figure 1.4	Evolution de la force tangentielle en fonction du saut tangent	18
Figure 2.1	Energie de surface en fonction du saut de déplacement	22
Figure 2.2	Schéma du domaine et chargement	23
Figure 2.3	Energie de surface de type Dugdale	24
Figure 2.4	Loi cohésive de type Dugdale en élasticité antiplane	28
Figure 3.1	géométrie du problème initial	30
Figure 3.2	Décomposition du problème	31
Figure 3.3	La structure durant la phase cohésive	35
Figure 3.4	Géométrie et chargement de la structure avec la fissure initiale et la fissure crée divisé en zone cohésive et zone non cohésive	36
Figure 5.1	Fissure à l'interface entre deux matériaux en mode III	55
Figure 6.1	Valeur de $k_3(l_a)$ en fonction de nombre d'itérations N	62
Figure 6.2	Valeur de $H_n(r)$ en fonction de n	63
Figure 6.3	Relation entre la charge appliquée et la position de la pointe de la fissure pour différentes valeurs de μ_1/μ_2	64
Figure 6.4	Relation entre la charge appliquée et la position de la pointe de la fissure pour différentes valeurs de h/l_0	65
Figure 6.5	Relation entre la charge appliquée et la position de la pointe de la fissure pour différentes valeurs de δ_c/l_0 .	66
Figure 7.1	Energie de surface en fonction du saut de déplacement	68
Figure 7.2	Structure et chargement dans le cas de Griffith	69

Figure 7.3	Valeur de k_3 en fonction de nombre d'itérations N dans le cas de Griffith.	74
Figure 7.4	La charge de rupture de la structure correspondant à la propagation de la fissure en fonction de la longueur de fissure (modèle de Dugdale)	74

INTRODUCTION

Le problème des revêtements, est un des problèmes importants du domaine technologique et industriel. En effet, diverses structures ont besoin d'un revêtement les protégeant des agressions du milieu extérieur. Ces agressions peuvent être de différentes natures : chimiques, mécaniques et thermiques. On peut citer comme exemple, le problème des palettes des turbines à gaz. En effet, ces palettes sont exposées à la pression de gaz à très haute température. Cette agression fait subir aux palettes des déformations importantes d'origine thermomécaniques, elle affaiblit les caractéristiques mécaniques du matériau constituant les palettes, comme la résistance à la rupture. Ce phénomène de réchauffement-refroidissement des palettes, induit des sollicitations cycliques et par conséquent, une fatigue et une ruine prématurée de la structure.

Afin de remédier à ce problème, une solution est de mettre sur les palettes un revêtement constitué d'un matériau résistant à la chaleur comme la céramique. Ce revêtement constitue une protection thermique, mais pose un autre problème. En effet, la différence importantes des propriétés mécaniques entre le revêtement et le substrat (céramique-métal dans le cas des palettes), induit des contraintes importantes au niveau de l'interface. Ces sollicitation induisent le développement de fissures dans cet interface, et par conséquent, sa rupture et le décollement du revêtement protecteur.

La problématique de la fissuration des interfaces a motivé plusieurs recherches. Le but est de modéliser le comportement de ces fissures. On appelle loi d'interface une relation entre le déplacement relatif et la force d'interaction entre les lèvres d'une fissure. Plusieurs lois d'interface ont été proposées dans la littérature. Parmi ces lois, le modèle des forces cohésives a été très largement utilisé. Ce modèle a été initialement introduit par (Dugdale, 1960) et (Barenblatt, 1962). Prenant acte du fait que les contraintes infinies en pointe de fissure,

prédites par le modèle élastique, n'ont pas de signification physique, ces derniers ont émis l'hypothèse de l'existence d'une « zone cohésive » (Fracture Process Zone dans la littérature) dans laquelle des forces s'exercent entre les futures lèvres de la fissure. De nombreux modèles de forces cohésives ont été développés dans la littérature. Un état de l'art de ces différents modèles a été présenté dans (Laverne 2004).

Notre travail, se situe dans la continuité des travaux simulant des fissures interfaciales. Nous nous intéressons plus particulièrement au problème d'une fissure à l'interface d'une bande infinie (revêtement) et d'un demi-plan (substrat) soumis à un chargement antiplan. Les deux milieux sont constitués de matériaux homogènes et isotropes de natures différentes. Ce problème peut être interprété comme une modélisation d'une fissure à l'interface d'une structure constituée d'un revêtement céramique et d'un substrat métallique, dans le cas où la dimension de la fissure est petite devant les dimensions de la structure. La loi d'interface utilisée dans notre travail, est le modèle des forces cohésives de Dugdale. Le problème est résolu semi-analytiquement. Par l'intermédiaire de la transformée de Fourier, les équations du problème élastique et les conditions aux limites sont réduits à une équation intégrale singulière. Cette équation intégrale est résolue numériquement à l'aide des polynômes de Chebychev.

La cadre théorique de ce travail est la mécanique de la rupture fragile. Dans ce formalisme, les principaux résultats ont été obtenus par (Griffith, 1920). Bien que très largement utilisée, cette théorie renferme des insuffisances notoires. Afin de corriger ces insuffisances, une nouvelle théorie appelée « théorie de Griffith revisitée » fût proposée par (Francfort et Marigo, 1998). Notre travail se situe dans le cadre de cette nouvelle théorie .

Nous proposons d'exposer les travaux effectués au cours de ce mémoire en adoptant le plan suivant :

Un premier chapitre permettra de présenter une étude bibliographique sur les problèmes de fissures interfaciales traités dans la littérature, ainsi que sur les modèles de forces cohésives.

Le deuxième chapitre sera consacré à une présentation succincte de la « théorie de Griffith revisitée », ainsi qu'une formulation variationnelle du problème de l'équilibre des structures fissurées en élasticité antiplane.

Le chapitre III, est consacré à la présentation de notre problème : équations d'équilibre, loi de comportement et conditions aux limites. Nous présentons également les critères de propagation de la fissure.

Dans le chapitre IV, nous établissons l'équation intégrale singulière, à partir des équations du problème en utilisant les transformées de Fourier.

On présentera, au chapitre V, la résolution numérique de l'équation intégrale singulière. On détaillera au chapitre VI la procédure numérique utilisée, et on présentera les résultats numériques obtenus, pour différents valeurs des paramètres définissant le problème.

Le chapitre VII sera l'occasion de présenter une comparaison entre les résultats obtenus avec les modèles de Dugdale et de Griffith.

On terminera par une conclusion générale.

CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Quelques problèmes des fissures à l'interface entre deux matériaux différents

1.1.1 Problèmes anti-plans élastiques-plastiques de deux milieux semi infinis liés contenant des fissures et des cavités (F. Erdogan , 1966) [1]

Le problème de deux milieux semi-infinis liés, ayant des propriétés différentes, contenant des fissures ou cavités sur l'interface et soumis à des forces de cisaillement longitudinaux de divers côtés, a été considéré. La solution élastique dans laquelle les composantes-z du forces externe sont uniquement pris en considération, complète le problème de déformation plane où les forces externes se trouvent dans un plan-xy. Employant l'approche de la théorie des dislocations à des déformations plastiques, une technique simple basée sur la théorie élastique est développée, afin d'estimer la taille de la zone plastique au voisinage de la fissure et des cavités.

1.1.2 Deux matériaux liés contenant des fissures parallèles à l'interface (F. Erdogan , 1971) [2]

Ce travail traite du problème de deux milieux élastiques semi-infinis liés avec différentes propriétés thermomécaniques. L'un des demi-plans contient une fissure parallèle à l'interface, et à une distance arbitraire de l'interface. Le système d'équations intégrales pour le problème général est obtenu. Les équations sont résolues pour trois combinaisons de matériaux adjacents pour le cas de traction uniforme symétrique et antisymétrique agissant sur les surfaces de la fissure. Les facteurs d'intensité de contraintes et les angles pour la contrainte maximale de clivage à la pointe de la fissure sont obtenus.

1.1.3 Une fissure de la forme d'une pièce de monnaie à l'interface entre une couche élastique et un demi espace.(F. Erdogan, K. Arin , 1972) [3]

On considère le problème élastostatique à symétrie axiale pour une couche liée à un demi-espace avec différentes propriétés de matériau. On suppose que l'interface entre les deux matériaux contient une fissure de la forme d'une pièce de monnaie, dont les faces sont soumises à des tractions connues. La solution du problème est ramenée à celle d'un système d'équations intégrales singulières de second ordre. Un exemple numérique pour une combinaison des matériaux aluminium-époxy est donné. Les facteurs d'intensité de contraintes et le taux de restitution de l'énergie sont calculés et donnés en fonction du rapport de l'épaisseur de la couche au rayon de la fissure.

1.1.4 L'effet de cisaillement sur une fissure de la forme d'une pièce de monnaie à l'interface entre un demi espace élastique et un support rigide(M. Lowengrub, I. N. Sneddon ,1972) [4]

Le problème considéré est celui de la détermination du champ de contrainte dans le voisinage d'une fissure ayant la forme d'une pièce de monnaie et située à l'interface d'un demi-espace élastique lié à un support rigide. Lorsque le solide élastique est soumis à un cisaillement. La solution est obtenue en prenant les représentations par transformation de Hankel pour les fonctions inconnues dans la solution de Muki des équations d'élasticité et puis en ramenant le système résultant d'équations intégrales doubles à un problème de Wiener-Hopf. Des expressions simples de forme explicite sont obtenues pour les composantes de la contrainte dans le plan de la fissure. Ces expressions permettent de calculer le facteur d'intensité de contraintes correspondant, alors que des expressions intégrales sont déduites pour les composantes du déplacement de la surface de la fissure.

1.1.5 Deux demi plans liés avec une fissure traversant l'interface (F. Erdogan, V. Biricikoglu , 1973) [5]

On considère le problème plan de deux demi-plans élastiques liés contenant une fissure finie perpendiculaire à l'interface et traversant celle-ci. Ce problème est transformé en un système d'équations intégrales singulières avec des noyaux de Cauchy généralisés. Bien que le système ait trois points irréguliers, il est montré que les fonctions inconnues sont liées algébriquement au point singulier de l'interface et les équations intégrales peuvent être résolues.

On montre que ce système d'équations intégrales aboutit à la même équation caractéristique que celle concernant deux quarts plans liés dans le cas général d'une fissure qui les traverse et que l'équation caractéristique pour une extrémité de la fissure aboutissant sur l'interface dans le cas spécial. Les résultats numériques donnés dans cet article comprennent les facteurs d'intensité de contraintes aux lèvres de la fissure, les composantes normales et de cisaillement des facteurs d'intensité de contraintes au point singulier de l'interface, et des déplacements de surface de la fissure.

1.1.6 Le champ des contraintes au voisinage d'une fissure de Griffith à l'interface entre deux demi plans élastiques différents (M. Lowengrub, I. N. Sneddon, 1973) [6]

Les champs de contraintes et de déplacement au voisinage d'une fissure de Griffith située à l'interface entre deux demi-plans élastiques, différents, liés entre eux, sont déterminés. Un emploi systématique des transformations de Fourier ramène le problème à celui de résoudre un système de deux équations intégrales simultanées, et il est montré que ceci à son tour est équivalent à un problème de Riemann de valeurs aux limites avec une solution sous forme implicite. Le cas particulier dans lequel la fissure est ouverte par une pression constante est étudié.

1.2 Lois d'interface des modèles de force cohésive (Laverne 2004) [7]

On appelle loi d'interface une relation entre le déplacement relatif et la force d'interaction entre les lèvres d'une fissure. Dans cette partie nous présenterons quelques unes d'entre elles basées sur la notion de force cohésive. Cette dernière s'appuie sur des observations expérimentales en pointe de fissure telles que l'apparition de micro fissures, la croissance de cavité ou le développement de zones de plastification. Cela correspond à une zone de transition entre le milieu sain et une vraie fissure (voir Figure 1.1) .

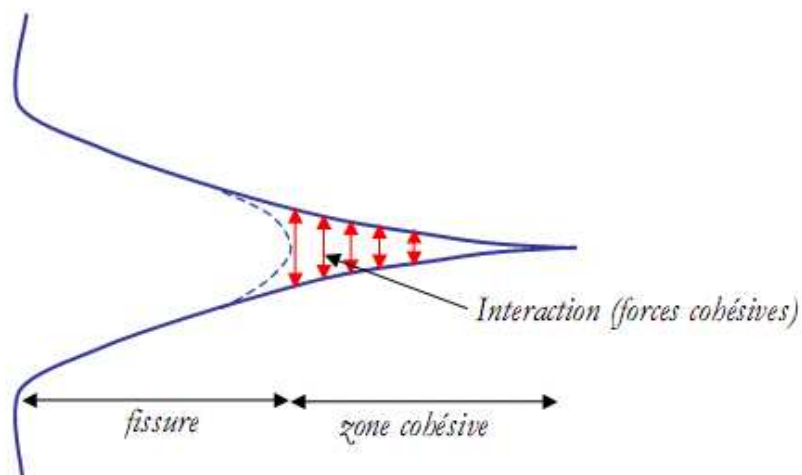


Figure 1.1 : Schéma de la fissure et de la zone cohésive.

Tant que la taille de cette zone est petite devant l'échelle de la structure, les principes de la mécanique de la rupture linéaire peuvent être appliqués. Dans le cas contraire cette zone doit être prise en compte. Les premiers modèles furent introduits par DUGDALE [8] et BARENBLATT [9] au début des années soixante. Dans les années soixante-dix HILLERBORG *et al.* [10] ont introduit le concept d'énergie de rupture dans les modèles de force cohésive et proposé quelques relations de comportement entre la traction et le saut de déplacement pour le béton. De nombreux modèles ont été développés depuis, citons en quelques uns :

1.2.1 Modèle de DUGDALE [8] (1960)

Ce modèle décrit l'évolution des forces de traction σ_n en fonction du saut de déplacement normal δ_n . Le saut reste nul tant que la force n'atteint pas une valeur critique σ_c puis le comportement est celui d'un solide rigide parfait jusqu'à un seuil d'ouverture δ_c au-delà duquel l'interaction des lèvres devient nulle (voir Figure 1.2) .

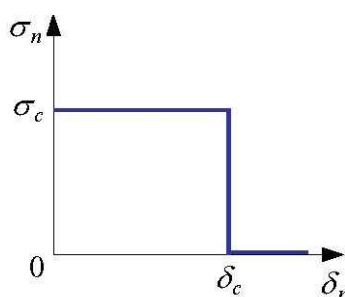


Figure 1.2 : Loi d'interface de Dugdale dans la direction normale.

1.2.2 Modèle de NEEDLEMAN [11] (1987)

Ce modèle décrit l'évolution des forces cohésives normale σ_n et tangentielle σ_t en fonction des composantes normale et tangentielle du saut de déplacement δ_n et δ_t . On représente sur la Figure 1.3, l'évolution de la force normale en fonction du saut normal quand le saut tangent est nul.

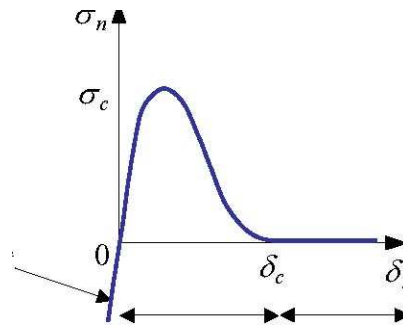


Figure 1.3 : Loi d'interface de Needleman dans la direction normale.

Ce dernier est choisi comme une fonction polynomiale faisant intervenir les paramètres σ_c contrainte critique du matériau en ouverture, δ_c saut critique au-delà duquel l'interaction entre les lèvres de fissure devient nulle ainsi que la part de résistance au glissement par rapport à la résistance normale. On note que lorsque $\delta_n < 0$ la valeur de la contrainte normale dérivant du potentiel joue le rôle d'une pénalisation afin de tenir compte de la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure. Aucune autre hypothèse n'intervient pour prendre en compte cette condition. Notons que ce modèle fut repris et modifié par de nombreux auteurs. Citons par exemple RICE et WANG [12] qui ont proposé une expression exponentielle du potentiel. La différence avec le modèle précédent tient au fait que la force tend asymptotiquement vers zéro quand le saut de déplacement augmente. Ce modèle ne fait donc pas intervenir le paramètre δ_c .

1.2.3. Modèle de TVERGAARD [13] (1990)

Ce modèle reprend le modèle de NEEDLEMAN de 1987 et introduit une notion d'irréversibilité du comportement : la décharge s'effectue linéairement, ainsi qu'un frottement de Coulomb post décohésion. On représente sur la figure 1.4 : l'allure de la force tangentielle en fonction du saut tangentiel lorsque le saut normal est nul.

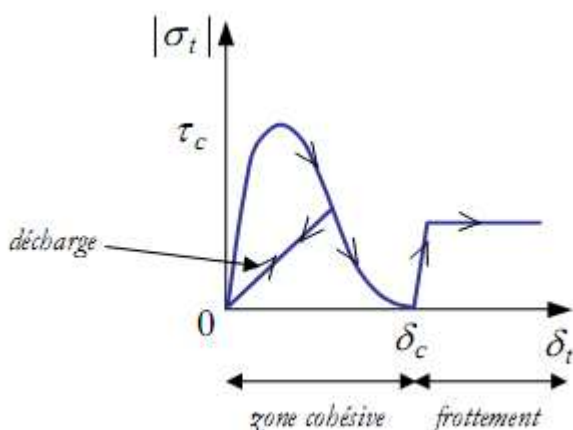


Figure 1.4 : Evolution de la force tangentielle en fonction du saut tangent.

Notons que le modèle formulé initialement par l'auteur s'appuie sur un indicateur de décohésion variant de zéro à un, faisant intervenir le saut normé par le saut critique, et qui fait office de variable d'endommagement dont dépendent les forces d'interaction.

D'autres modèles ont été développés en s'inspirant de celui-ci. Par exemple, CHABOCHE et al. [14] (1997), pour modéliser la décohésion interfaciale dans les composites à matrice métallique, proposent d'activer le frottement de Coulomb dès le début de la décohésion. Citons par ailleurs CHABOCHE et al. [15] qui reprennent ce dernier modèle et introduisent une régularisation visqueuse afin de lisser les instabilités intervenant dans l'ouverture brutale de fissure. La réponse dépend alors de la vitesse du chargement. Cette technique permet de remédier aux problèmes numériques liés à un saut de solution important difficile à capter avec des méthodes de type Newton. Cela permet d'avoir une réponse globale continue à tous les niveaux de chargement mais cette technique modifie les équations de comportement de l'interface.

Notons par ailleurs que ces lois peuvent être utilisées soit pour décrire le comportement d'une interface : séparation de deux parties d'un solide comme la propagation de fissure (objet d'épaisseur nulle) soit pour représenter le comportement d'une interphase entre deux matériaux (objet volumique de faible épaisseur) pouvant représenter une colle. A ce sujet SUQUET [16] et MICHEL et al. [17] ont travaillé sur la modélisation d'interphase dans les composites à matrice métallique. Ce type de modèle pose des questions de convergence mathématique du modèle d'interphase vers le modèle d'interface.

CHAPITRE II : THEORIE DE GRIFFITH REVISITEE ET FORMULATION VARIATIONNELLE

2.1. Théorie de Griffith revisitée (Laverne) [7]

L'objet de la mécanique de la rupture est de déterminer l'évolution d'une ou plusieurs fissures dans une structure en fonction du chargement auquel elle est soumise. Le cadre de la mécanique de la rupture fragile se limite à l'étude de la fissuration des milieux continus supposés élastiques. Cette hypothèse, bien qu'idéaliste, reste le cadre d'étude de nombreux chercheurs et ingénieurs préoccupés de sûreté concernant la propagation de défauts dans les structures en service. C'est le cadre que nous avons choisi pour nos travaux. Nous commençons par donner un bref rappel des principaux concepts de la mécanique de la rupture fragile. Nous ne présentons pas les démonstrations. Nous orientons le lecteur intéressé vers les ouvrages de référence (J-B Leblond, Ecole Polytechnique, Edition 1994) [18] par exemple.

Dans ce formalisme, les principaux résultats ont été obtenus à partir de la théorie de GRIFFITH [19]. Ce dernier associe à toute fissure une énergie de surface proportionnelle à sa longueur. Il postule qu'il y aura propagation et donc augmentation de l'énergie de surface si cette dernière est parfaitement compensée par la restitution de l'énergie élastique causée par l'avancée de la fissure. Dans le cas de problèmes quasi-statiques ce critère peut se formuler en terme de taux de restitution d'énergie élastique usuellement noté G . Ce dernier correspond à la variation d'énergie potentielle lors d'un accroissement infinitésimal de fissure. Le critère de GRIFFITH stipule alors qu'il n'y aura pas propagation tant que :

$$G < G_c$$

Où G_c désigne le taux de restitution d'énergie critique et correspond à la ténacité du matériau. Bien qu'elle connaisse encore un vrai succès, cette théorie renferme des insuffisances notoires.

La première concerne l'initiation de la fissuration, la théorie de GRIFFITH est incapable de rendre compte de l'amorçage de fissures, sauf dans des cas très particuliers où la structure possède des singularités fortes. En effet, prenons l'exemple d'un milieu bidimensionnel contenant une fissure rectiligne l , sollicitée en mode I, et supposons l'absence de singularités dans le problème d'élasticité initiale. Le critère de GRIFFITH prévoit que la fissure se propage pour un chargement en $\frac{1}{\sqrt{l}}$. Si l tend vers zéro, on en déduit que pour un milieu sain la fissure ne pourra pas s'amorcer sous un chargement fini.

La seconde lacune porte sur son incapacité à prédire seule le trajet spatial des fissures. Pour un milieu bidimensionnel, le critère ne prend en compte que la longueur de fissure or l'évolution spatiale nécessite une seconde information qui correspond à un critère de branchement.

Enfin, une troisième lacune concerne le trajet temporel de la fissure, seules les propagations progressives sont traitées de façon satisfaisante. En effet des situations où l'inégalité du critère est violée peuvent survenir. Celles-ci correspondent au cas de figure où l'excès de restitution d'énergie élastique conduit à l'apparition d'énergie cinétique. La propagation est alors considérée comme brutale.

On peut résumer ces trois points en disant que le problème majeur de la théorie de Griffith est de ne pas laisser assez de souplesse à l'évolution spatio-temporelle des fissures. De nombreux aménagements tentent d'y remédier proposant des ingrédients spécifiques à chacun des problèmes.

Une première tentative, destinée à proposer une théorie unifiée permettant de remédier aux principales lacunes citées précédemment, fut proposée par G. A. FRANCFORT et J.-J. MARIGO [20] en 1998, cette théorie est connue sous le nom de « Théorie de Griffith revisitée ». Celle-ci consiste à garder l'hypothèse d'une énergie de surface proportionnelle à la longueur de la fissure,

mais abandonner le critère de Griffith au profit d'un principe de minimisation d'énergie. Le problème revient à chercher, à chaque instant, le champ de déplacement admissible qui conduit à un *minimum global* de la somme de l'énergie élastique et de l'énergie de surface. Les travaux de thèse de B. BOURDIN [21], sur un plan numérique (régularisation des discontinuités), et de F. BILTERYST [22], sur un plan théorique appliqués à la fissuration des matériaux composites, ont permis d'illustrer les capacités de cette nouvelle approche à pallier pour une part importante aux lacunes de la théorie de GRIFFITH initiale.

Toutefois l'utilisation du principe de moindre énergie, en adoptant l'hypothèse de GRIFFITH relative à l'énergie de surface, reste déficiente concernant deux points importants. Premièrement parce qu'elle conduit à des effets d'échelle non satisfaisant.

Ainsi dans le cas d'une barre unidimensionnelle de longueur l chargée en déplacement dans la direction longitudinale, la contrainte à la rupture est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{l}}$ ce qui n'est pas conforme à l'observation. Deuxièmement parce qu'elle ne fonctionne pas à forces imposées. En effet, lorsque des forces sont imposées, la prise en compte du travail des efforts extérieurs dans la minimisation conduit à une énergie totale qui n'est (en général) plus bornée inférieurement.

Afin de remédier à ce second point, on pourrait être tenté d'effectuer une recherche de minimum local. Cependant le problème de l'amorçage de la théorie de GRIFFITH ressurgirait. En effet, la réponse élastique d'une structure saine est toujours un minimum local en l'absence de singularités fortes.

Au vu de ces difficultés une nouvelle idée a vu le jour. Celle-ci consiste d'une part à adopter une énergie de surface qui dépend du saut de déplacement δ entre les lèvres de la fissure et d'autre part à chercher des *minima locaux* de l'énergie totale. Les formes de la fonction énergie à adopter sont suggérées par les potentiels d'interaction à l'échelle atomique (voir Figure 2.1). L'idée d'une telle approche remonte à BARENBLATT [9].

Cependant, son utilisation concernant le cadre de la minimisation d'énergie est assez récente (voir DEL PIERO [23] et TRUSKINOVSKY [24]). On peut aussi

citer les travaux de thèse de M. CHARLOTTE [25] sur des modèles discrets de rupture ou encore CHARLOTTE et al [26].

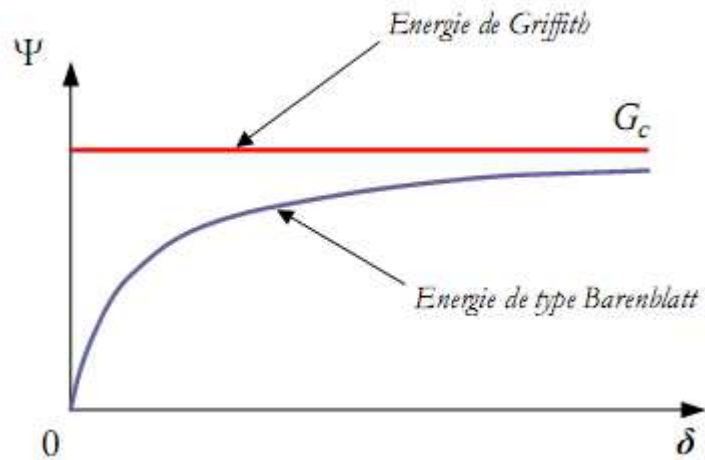


Figure 2.1 : Energie de surface en fonction du saut de déplacement.

D'autres travaux ont montré que le modèle de Barenblatt ou de façon plus générale les modèles de forces cohésives permet de rendre compte de l'amorçage de fissure dans une structure saine en termes d'un critère en contraintes, cf. par exemple (Del Piero, 1999) [23]; (Del Piero et al, 2001) [27]; (Charlotte et al, 2000) [26] ou (Laverne et al, 2004) [28]. De plus, dans le modèle des forces cohésives la singularité des contraintes en pointe de fissure, prédite par la mécanique linéaire de la rupture (MLR) dans le modèle de Griffith (Williams 1957) [29], est supprimée.

2.2. Formulation variationnelle

Considérons un solide élastique de coefficient d'élasticité μ et sans forces de volume. La partie de la frontière où les déplacements sont imposés est notée $\partial\Omega_D$, la partie où les forces sont imposées est notée $\partial\Omega_F$. On suppose que la fissure ne peut se développer que sur un trajet prédéfini Γ (Figure 2.2).

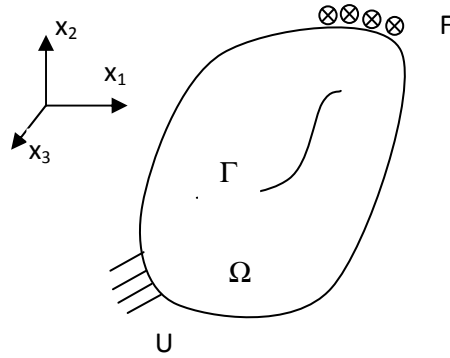


Figure 2.2 : Schéma du domaine et chargement.

On se met dans l'hypothèse de l'élasticité antiplane. C'est à dire :

$$U_1 = U_2 = 0, \quad U_3 = W(x_1, x_2) \quad (2.1)$$

Où U_1 , U_2 et U_3 sont les composantes du vecteur déplacement dans la base (x_1, x_2, x_3) .

Dans la suite, on appellera champ de déplacement le champ scalaire $w(x, y)$ représentant la composante U_3 du déplacement.

A partir de la loi de comportement de l'élasticité linéaire, on peut montrer que les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont:

$$\tau_{13} = \mu \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \tau_{23} = \mu \frac{\partial w}{\partial x_2}. \quad (2.2)$$

Un champ de déplacement $v(x, y)$ est un champ cinématiquement admissible, s'il respecte les conditions aux limites sur $\partial\Omega_D$, et s'il ne peut avoir de discontinuité que sur Γ , c'est à dire :

$$v \in C = \{v \text{ tel que } : v = U \text{ sur } \partial\Omega_D, \quad \|v\| \geq 0 \text{ sur } \Gamma \} \quad (2.3)$$

Où $\|v\| = v^+ - v^-$ représente la discontinuité du déplacement, les indices + et - correspondent aux lèvres supérieure et inférieure de la fissure.

On se met dans l'hypothèse de l'énergie de surface de type Barenblatt. Plus particulièrement, on suppose que l'énergie de surface ϕ est du type Dudgale.

Dans le cas où l'ouverture de la fissure se fait en mode III, la densité d'énergie de surface s'écrit comme suit (Figure 2.3) :

$$\phi([v]) = \begin{cases} G_c \frac{[v]}{\delta_c} & \text{si } |[v]| \leq \delta_c \\ G_c & \text{si } |[v]| \geq \delta_c \end{cases} \quad (2.4)$$

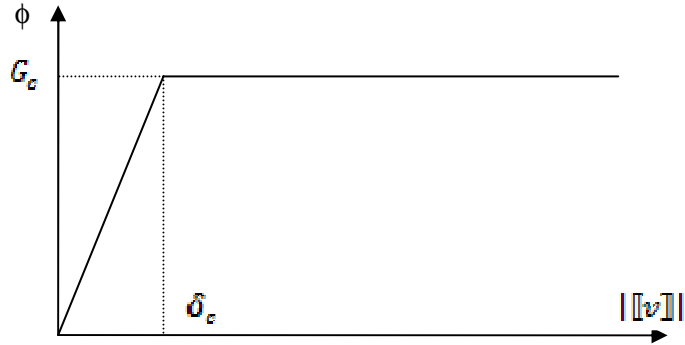


Figure 2.3 : Energie de surface de type Dugdale

Dans (2.4), G_c est le taux de restitution d'énergie critique de la théorie de Griffith. δ_c est une longueur caractéristique des modèles de forces cohésives. Le rapport $\frac{G_c}{\delta_c}$ a la dimension d'une contrainte notée τ_c :

$$\tau_c = \frac{G_c}{\delta_c} \quad (2.5)$$

L'énergie totale du solide est la somme de son énergie potentielle élastique et de l'énergie de surface. Elle est donnée par :

$$E(v) + \int_{\Omega/\Gamma} \frac{1}{2} \mu \nabla v \nabla v dx + \int_{\Gamma} \phi(\|v\|) ds - \int_{\partial\Omega_F} F v ds \quad (2.6)$$

où l'opérateur ∇ représente le gradient.

Le champ solution $w(x, y)$ correspond à un minimum local de l'énergie totale :

$$\forall v \in C, \exists \bar{h} > 0, \text{ tel que : } \forall h \in [0, \bar{h}] E(w) \leq E(w + h(v - w)) \quad (2.7)$$

En divisant l'inégalité ci-dessus par h et en passant à la limite lorsque h tend vers 0, on obtient :

$$\frac{d}{dh}(E(w+h(v-w)))(h=0) \geq 0 \quad (2.8)$$

En remplaçant (2.6) dans (2.8), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega/\Gamma} \mu \nabla w \nabla (v-w) dx + \int_{\Gamma^+} \frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) \|v-w\| ds - \int_{\Gamma^-} \frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) \|v-w\| ds \\ & + \int_{\Gamma^0} \frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (0) \|v\| ds - \int_{\partial\Omega_F} F(v-w) ds \geq 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

où :

Γ^+ : la partie de Γ où $\|w\| > 0$, Γ^- : la partie de Γ où $\|w\| < 0$, Γ^0 : la partie de Γ où $\|w\| = 0$

En intégrant par parties la première intégrale de (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega/\Gamma} \Delta w (v-w) dx - \int_{\Gamma} \tau_{i3} n_i \|v-w\| ds + \int_{\partial\Omega_F} \tau_{i3} n_i (v-w) ds + \int_{\Gamma^+} \frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) \|v-w\| ds \\ & - \int_{\Gamma^-} \frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) \|v-w\| ds + \int_{\Gamma^0} \frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (0) \|v\| ds - \int_{\partial\Omega_F} F(v-w) ds \geq 0, \quad \forall v \in C \end{aligned} \quad (2.10)$$

Où Δ représente l'opérateur laplacien bidimensionnel, n_i sont les composantes de la normale extérieure à la lèvres inférieure de la fissure.

(i) On choisit v , tel que $\|v\| = \|w\|$ sur Γ . Les intégrales surfaciques dans (2.10)

s'annulent et il reste :

$$- \int_{\Omega/\Gamma} \mu \Delta w (v-w) dx + \int_{\partial\Omega_F} (\tau_{i3} n_i - F)(v-w) ds \geq 0 \quad (2.11)$$

(i1) On choisit v , tel que $v = w$ sur $\partial\Omega_F$, on injecte dans (2.11), on obtient :

$$- \int_{\Omega/\Gamma} \mu \nabla w (v-w) dx \geq 0 \quad \forall v \Rightarrow \Delta w = 0 \text{ dans } \Omega/\Gamma \quad (2.12)$$

On reporte (2.12) dans (2.11), on obtient :

$$\int_{\partial\Omega_F} (\tau_{i3} n_i - F)(v-w) ds \geq 0 \quad \forall v \Rightarrow \tau_{i3} n_i = F \text{ sur } \partial\Omega_F \quad (2.13)$$

On reporte (2.12) et (2.13) dans (2.10) qui devient :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} \tau_{i_3} n_i \|v-w\| ds + \int_{\Gamma^+} \frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) \|v-w\| ds - \int_{\Gamma^-} \frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) \|v-w\| ds \\ & + \int_{\Gamma^0} \frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (0) \|v\| ds \geq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

L'inégalité précédente peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^+} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) - \tau_{i_3} n_i \right) \|v-w\| ds - \int_{\Gamma^-} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) + \tau_{i_3} n_i \right) \|v-w\| ds \\ & + \int_{\Gamma^0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (0) \|v\| - \tau_{i_3} n_i \|v\| \right) ds \geq 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

(ii) On choisit v tel que $\|v\| = 0$ sur Γ^0 dans (2.15), il vient :

$$\int_{\Gamma^+} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) - \tau_{i_3} n_i \right) \|v-w\| ds - \int_{\Gamma^-} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) + \tau_{i_3} n_i \right) \|v-w\| ds \geq 0 \quad (2.16)$$

(ii1) On choisit v tel que $\|v-w\| = 0$ sur Γ^+ dans (2.16), il vient :

$$- \int_{\Gamma^-} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) + \tau_{i_3} n_i \right) \|v-w\| ds \geq 0 \quad \forall v \Rightarrow \tau_{i_3} n_i = - \frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) \text{ sur } \Gamma^- \quad (2.17)$$

On reporte (2.17) dans (2.16), il vient :

$$- \int_{\Gamma^-} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) - \tau_{i_3} n_i \right) \|v-w\| ds \geq 0 \quad \forall v \Rightarrow \tau_{i_3} n_i = \frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (\|w\|) \text{ sur } \Gamma^+ \quad (2.18)$$

On reporte (2.17) et (2.18) dans (2.15), il vient :

$$\int_{\Gamma^0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (0) \|w\| - \tau_{i_3} n_3 \|v\| \right) ds \geq 0 \quad (2.19)$$

(iii) On choisit v tel que $\|v\| > 0$ sur Γ^0 dans (2.19), il vient :

$$\int_{\Gamma^0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (0) - \tau_{i_3} n_3 \right) \|v\| ds \geq 0 \Rightarrow \tau_{i_3} n_3 \leq \frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (0) \text{ sur } \Gamma^0 \quad (2.20)$$

(iv) On choisit v tel que $\|v\| < 0$ sur Γ^0 dans (2.19), il vient :

$$-\int_{\Gamma^0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (0) + \tau_{i_3} n_3 \right) \|v\| ds \geq 0 \Rightarrow \tau_{i_3} n_3 \geq -\frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (0) \text{ sur } \Gamma^0 \quad (2.21)$$

$$(2.20) \text{ et } (2.21) \text{ peuvent \u00eatre regroup\u00e9es en } |\tau_{i_3} n_3| \leq \frac{\partial \phi}{\partial \|v\|} (0) \text{ sur } \Gamma^0$$

En r\u00e9capitulant, la condition de minimum local pour le champ solution $w(x, y)$ est \u00e9quivalente aux \u00e9quations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w = 0 \text{ dans } \Omega / \Gamma \\ \tau_{i_3} n_3 = F \text{ sur } \partial \Omega_F \\ \tau_{i_3} n_3 = -\frac{\partial \phi}{\partial \|w\|} (\|w\|) \text{ sur } \Gamma^- \\ \tau_{i_3} n_3 = \frac{\partial \phi}{\partial \|w\|} (\|w\|) \text{ sur } \Gamma^+ \\ |\tau_{i_3} n_3| \leq \frac{\partial \phi}{\partial \|w\|} (0) \text{ sur } \Gamma^0 \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Remarques

- 1 La premi\u00e8re \u00e9quation de (2.22) repr\u00e9sente l'\u00e9quation de Navier en \u00e9lasticit\u00e9 antiplane sans forces de volume
- 2 La deuxi\u00e8me \u00e9quation de (2.22) repr\u00e9sente la condition aux limites en forces du probl\u00e8me \u00e9lastique
- 3 Les troisi\u00e8me et quatri\u00e8me \u00e9quations repr\u00e9sentent la loi reliant les forces coh\u00e9sives \u00e0 la discontinuit\u00e9 du d\u00e9placement sur les l\u00e8vres de la fissure cr\u00e9\u00e9e. Dans le cas d'une densit\u00e9 d'\u00e9nergie de surface de type Dugdale (\u00e9quation (2.2)), la loi s'\u00e9crit de la mani\u00e8re suivante :

$$\tau_{i_3} n_3 (\|w\|) = \begin{cases} \tau_c \text{ si } 0 < \|w\| < \delta_c \\ 0 \text{ si } \|w\| > \delta_c \\ -\tau_c \text{ si } -\delta_c < \|w\| < 0 \\ 0 \text{ si } \|w\| < -\delta_c \end{cases} \quad (2.23)$$

Cette loi est repr\u00e9sent\u00e9e sur la figure suivante :

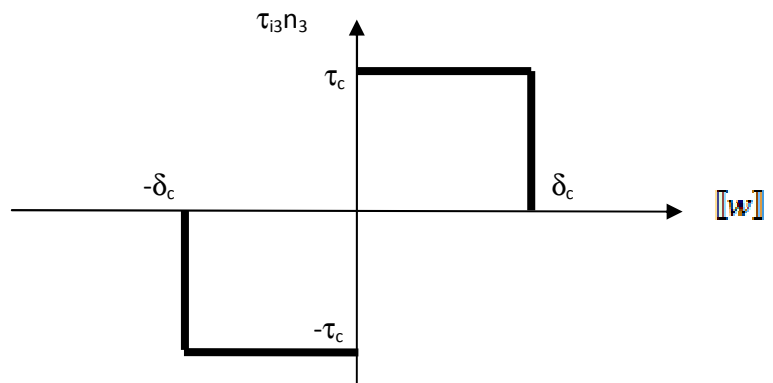


Figure 2.4: Loi cohésive de type Dugdale en élasticité antiplane

Cela veut que les lèvres de la fissure créée sont divisées en deux parties :

- une partie cohésive où l'ouverture est inférieure en valeur absolue à l'ouverture critique δ_c . Dans cette partie, les lèvres sont soumises à des forces d'interaction d'intensité constante égale à τ_c , en valeur absolue.
 - Une partie non cohésive où l'ouverture est supérieure en valeur absolue à l'ouverture critique δ_c . Dans cette partie, les lèvres sont libres.
- 4 La dernière équation de (2.22) représente la condition d'amorçage d'une nouvelle fissure. Pour qu'une fissure puisse apparaître sur le trajet prédéfini, il faut que la contrainte de cisaillement atteigne la valeur critique τ_c en valeur absolue.

CHAPITRE III : PRESENTATION DU PROBLEME

3.1. La structure étudiée

On considère un milieu bidimensionnel semi infini $\Omega = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, h)$ constitué de deux milieux : $\Omega_1 = (-\infty, +\infty) \times (0, h)$ (matériaux 1) et $\Omega_2 = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, 0)$ (matériaux 2), contenant un défaut initial de type fissure $D = [-l_0, l_0] \times \{0\}$ de longueur $2l_0$ située à l'interface entre les deux matériaux. On note par e_1, e_2 : la base canonique de R^2 , et par (x_1, x_2) les coordonnées cartésiennes associées à cette base.

Les faces supérieure $x_2 = h$ et inférieure $x_2 \rightarrow -\infty$ sont soumises à une contrainte de cisaillement anti-plan uniforme et positive d'intensité τ_∞ croissante depuis zéro, tandis que les lèvres de la fissure sont libres (Figure 3.1).

Les deux matériaux sont linéairement élastiques homogènes, et isotropes, de modules de cisaillement μ_1 et μ_2 respectivement et de masse volumique négligeables. A cause de la nature du chargement, nous sommes dans la situation de l'élasticité antiplane. Par conséquent, la seule composante du vecteur de déplacement est dans la direction x_3 , et indépendante de x_3

$$U_1 = U_2 = 0, \quad U_3 = W(x_1, x_2) \quad (3.1)$$

Le champ des contraintes correspondant est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{23} = \tau_{12} = 0 \\ \tau_{13} = \begin{cases} \mu_1 \frac{\partial W}{\partial x_1}, 0 < x_2 < h \\ \mu_2 \frac{\partial W}{\partial x_1}, x_2 < 0 \end{cases} \quad \tau_{23} = \begin{cases} \mu_1 \frac{\partial W}{\partial x_2}, 0 < x_2 < h \\ \mu_2 \frac{\partial W}{\partial x_2}, x_2 < 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

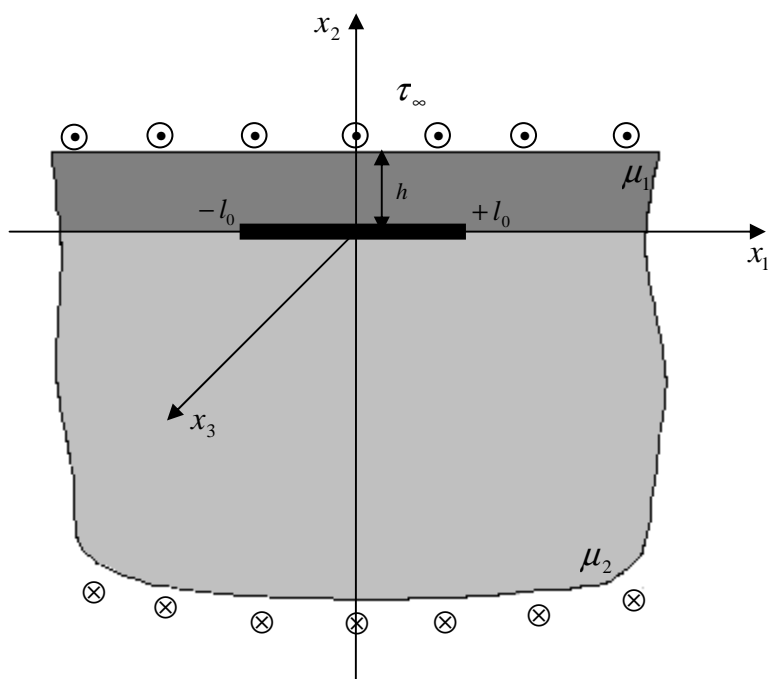
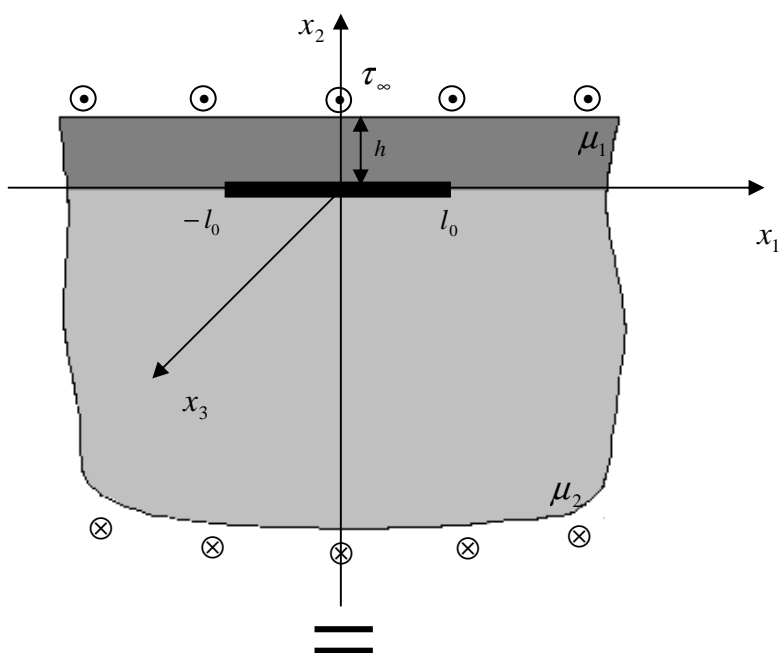


Figure 3.1 : géométrie du problème initial

En utilisant le principe de superposition, le problème est décomposé en la somme d'un problème homogène sans fissure et d'un problème non homogène due à la fissure (Figure 3.2). Puisque on s'intéresse à la propagation de la fissure, nous considérons par la suite le problème non homogène.



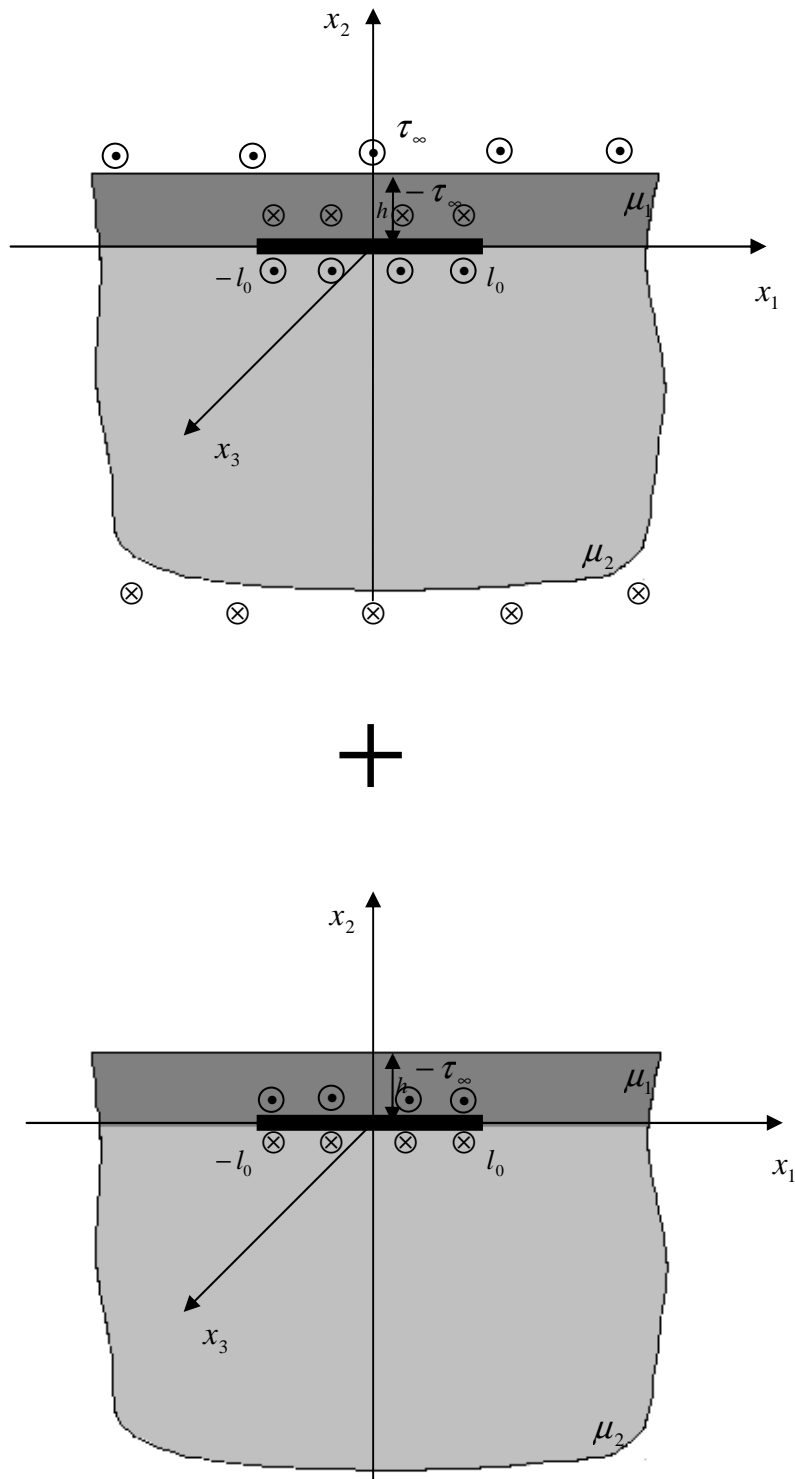


Figure 3.2: Décomposition du problème

3.2. Evolution de la fissure initiale avec le chargement

Pour des raisons de symétrie, on supposera que la fissuration se développe sur l'axe $x_2 = 0$, et de façon symétrique depuis les points $(\pm l_0, 0)$ du défaut initial.

On appelle Γ la fissure créée, ses pointes sont situées en $x_1 = \pm l_a$:

$$\Gamma =]-l_a, l_0] \cup [l_0, +l_a[\times \{0\}$$

Pour chaque valeur du chargement τ_∞ , le champ de déplacement solution $w(x, y)$ correspond au minimum local de l'énergie totale. On a vu au Chapitre II (paragraphe 2), qu'avec une énergie de surface de type Dugdale, la fissure créée comporte deux zones :

- une zone, proche de la pointe, et dite *zone cohésive*, où les lèvres sont soumises à des force cohésive de cisaillement d'intensité constante τ_c .
- une autre zone proche du défaut initial, et dite *zone non cohésive*, où les lèvres n'interagissent plus.

Les limites entre ces deux zones sont les pointes $x_1 = \pm l_c$. Les valeurs de l_a et l_c dépendent évidemment de la valeur de la charge τ_∞ . Compte tenu de la symétrie du problème, toutes les évolutions se feront en mode III pur. Notons que pour certaines valeurs de τ_∞ certaines zones peuvent ne pas exister. On a donc en général $l_a \geq l_c \geq l_0$, Les égalités étant possibles. Lors de la mise en charge ($\tau_\infty = 0$), les conditions initiales sont : $l_a = l_c = l_0$.

Dans notre cas, la propagation de la fissure s'effectue selon deux phases : la phase cohésive et la phase de propagation. Les critères d'initiation et de propagation de la fissure sont présentés dans les sections suivantes.

3.2.1. La phase cohésive $0 < \tau_\infty < \tau_r$

Durant cette phase, lorsque $\tau_\infty \neq 0$ une fissure se crée de façon à ce que la contrainte de cisaillement maximale dans le corps soit inférieure à la valeur critique τ_c . Lorsque la charge est suffisamment proche de zéro, la longueur de la fissure est suffisamment petite, donc l'ouverture w est inférieure à la valeur critique δ_c . Par conséquent, toutes les lèvres de la fissure créée sont soumises à une force cohésive d'intensité τ_c , et le champ des déplacements ainsi que le

champ des contraintes à l'équilibre sous le chargement τ_∞ sont donc solution du problème suivant : (figure 3.3).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus (D \cup \Gamma) \\ \mu_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} = \mu_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} = -\tau_\infty \quad \text{sur } D \\ \mu_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} = \mu_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} = -\tau_\infty + \tau_c \quad \text{sur } \Gamma \\ \tau_{23} = 0 \quad \text{sur } x_2 = h \\ \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \tau_{23} = 0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Afin de compléter la formulation du problème, il reste à définir la loi gouvernant l'évolution de la pointe l_a de la fissure avec le chargement. Nous exprimons d'abord ce critère en fonction du taux de restitution d'énergie, ensuite nous l'interprétons en termes de facteur d'intensité de contrainte.

L'énergie totale de la structure fissurée à l'équilibre est fonction du chargement τ_∞ et de la position l_a de la pointe de la fissure. En incluant l'énergie de surface due aux forces cohésives, l'énergie totale s'écrit :

$$E(\tau_\infty, l_a) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus (D \cup \Gamma)} \mu \nabla w \cdot \nabla w dx + \int_{\Gamma} \tau_c [w] dx_1 - \int_{D \cup \Gamma} \tau_\infty [w] dx_1 \quad (3.4)$$

Remarque

Nous avons vu au Chapitre II (paragraphe 2) que le signe des forces cohésives dépend du signe de $[w]$. Dans notre cas, et à cause du chargement, l'ouverture $[w]$ est toujours positive. Par conséquent, les forces cohésives sont toujours positives.

Dans (3.4), w est le champ de déplacement solution de (3.3) (w dépend évidemment de τ_∞ et de l_a). La longueur de la fissure cohésive doit être telle que

l'énergie totale de la structure soit un minimum local pour un chargement donné. La condition de minimum local s'écrit :

$$\exists h > 0, \quad \forall l_a^* : l_a^* \in [l_0, \infty[, \quad |l_a^* - l_a| \leq h, \quad E(\tau_\infty, l_a) \leq E(\tau_\infty, l_a^*) \quad (3.5)$$

Par conséquent, puisque nous cherchons un minimum local l_a dans l'intervalle $[l_0, \infty[$, l_a doit être un point stationnaire de $E(\tau_\infty, \cdot)$ et satisfait la condition suivante :

$$-\frac{\partial E}{\partial l_a}(\tau_\infty, l_a) = 0 \quad (3.6)$$

Ou en d'autres termes, le taux de restitution de l'énergie totale due à la croissance de la fissure cohésive doit être nul.

Ce critère énergétique est en fait une condition de disparition de la singularité à la pointe de la fissure. En effet, puisque les forces cohésives sont constantes (il suffit qu'elles soient des fonctions régulières de x_1 pour que la singularité soit de la forme qui va suivre), ils ne changent pas la forme de la singularité à la pointe de la fissure qui est la même que pour une fissure non cohésive. Autrement dit, le champ de déplacement s'écrit [30] (Cours « Mécanique de la rupture » J-J Marigo) :

$$w(x) = \frac{k_3}{\mu} \sqrt{2r} \sin \frac{\theta}{2} + \bar{w}(x), \quad (3.7)$$

où (r, θ) représentent les coordonnées polaires avec le pôle $(l_a, 0)$, \bar{w} est la partie régulière du champ de déplacement et k_3 est le Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC) en mode III. Bien sûr, la valeur de k_3 n'est pas la même selon la présence ou pas des forces cohésives. Dans tous les cas, la formule d'Irwin est valable, le taux de restitution d'énergie et le Facteur d'Intensité de Contrainte sont reliés par :

$$-\frac{\partial E}{\partial l_a}(\tau_\infty, l_a) = \frac{k_3^2 \pi}{2\mu} \quad (3.8)$$

Le critère (3.6) est donc équivalent à $k_3=0$, ce qui veut dire que la longueur de la fissure cohésive doit être telle qu'il n'y ait plus de singularité à la pointe de la fissure. Ceci est conforme à l'idée de Barenblatt que les forces cohésives existent pour corriger la propriété non physique des contraintes infinies induite par la théorie de Griffith.

Cette phase se termine quand l'ouverture de la fissure en $x_1 = \pm l_0$ atteint la valeur critique δ_c du modèle de Dugdale, et par conséquent, une fissure non cohésive doit apparaître. La valeur correspondante du chargement sera appelée la contrainte de *rupture*, et est définie par :

$$\tau_r = \sup\{\tau_\infty > 0 : [w](l_0) < \delta_c\}. \quad (3.9)$$

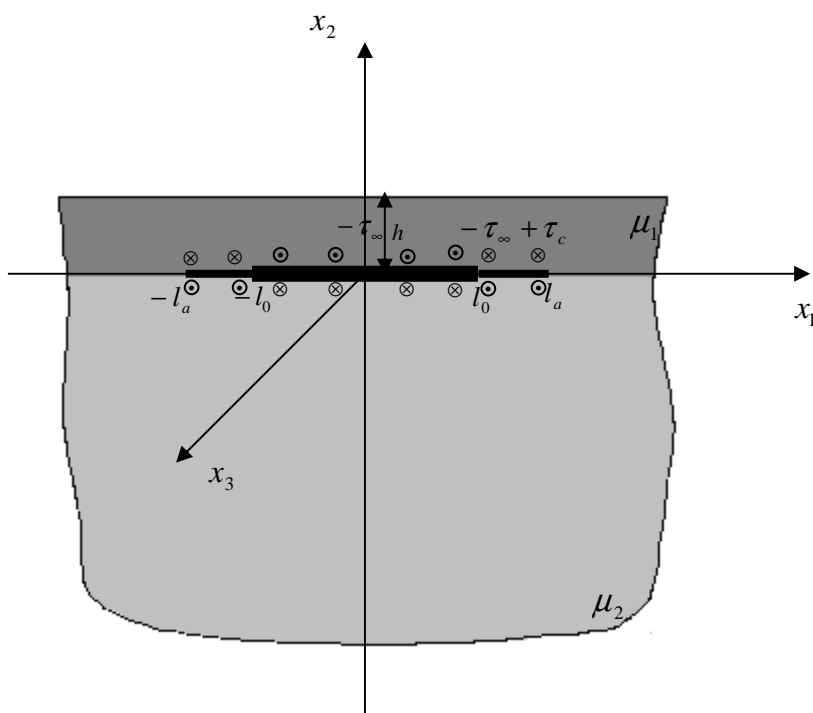


Figure 3.3 : La structure durant la phase cohésive

3.2.2 Phase de propagation

Une fois la charge de la rupture atteinte, l'équilibre de la structure ne peut plus être assuré sans que se développe une zone de fissuration non cohésive.

En tenant compte de la présence de cette zone, la fissure Γ doit se diviser en deux parties, la partie cohésive Γ_c est non cohésive Γ_0 . On note par l_c et l_a leur pointes respectivement. (Figure 3.4) .

$$\begin{aligned} \Omega_c^0 &= \Omega / (D \cup \Gamma), \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_c. \\ \Gamma_c &= (-l_a, -l_c] \times \{0\} \cup [l_c, l_a) \times \{0\} \\ \Gamma_0 &= (-l_c, -l_0] \times \{0\} \cup [l_0, l_c) \times \{0\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le champ des déplacements w et le champ des contraintes τ devront donc être solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w = 0 \quad \text{dans } \Omega_c^0 \\ \mu_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} = \mu_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} = -\tau_\infty \quad \text{sur } D \cup \Gamma \\ \mu_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} = \mu_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} = \tau_c \quad \text{sur } \Gamma_c \\ \tau_{23} = 0 \quad \text{sur } x_2 = h \\ \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \tau_{13} = 0, \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \tau_{23} = 0 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

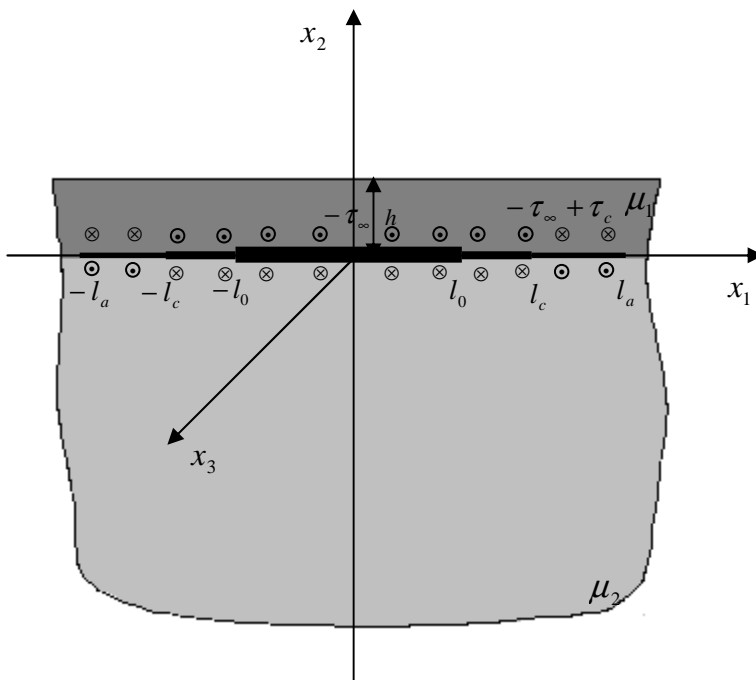


Figure 3.4 : géométrie et chargement de la structure avec la fissure initiale et la fissure créée divisée en zone cohésive et zone non cohésive.

Le champ de contrainte τ satisfait l'équation variationnelle suivante [31] (Théorème de Travaux Virtuels, Gurtin 1981), pour tout champ scalaire « régulier » sur Ω_c^0 ,

$$\int_{\Omega_c^0} \tau \cdot \nabla v dx_1 - \int_{D \cup \Gamma} \tau_\infty [v] dx_1 + \int_{\Gamma_c} \tau_c [v] dx_1 = 0. \quad (3.12)$$

Il reste à définir les lois gouvernant les évolutions des pointes l_c et l_a . Comme dans le cas de la phase cohésive, nous exprimons d'abord ces lois en utilisant des arguments énergétiques. L'énergie de surface de la structure à l'équilibre s'écrit maintenant :

$$E_s(\tau_\infty, l_c, l_a) = \int_{\Gamma} \phi([w]) dx_1 = \int_{\Gamma_c} \tau_c [v] dx_1 + 2G_c(l_c - l_0) \quad (3.13)$$

et l'énergie totale de la structure à l'équilibre est donnée par :

$$E(\tau_\infty, l_c, l_a) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_c^0} \mu \nabla w \cdot \nabla w dx + \int_{\Gamma_c} \tau_c [w] dx_1 - \int_{D \cup \Gamma} \tau_\infty [w] dx_1 + 2G_c(l_c - l_0). \quad (3.14)$$

Les évolutions des pointes l_c et l_a avec le chargement τ_∞ doit être tel que (l_c, l_a) est un minimum local de $E(\tau_\infty, \dots)$ pour τ_∞ fixé. Plus particulièrement, le critère s'écrit :

$$\exists h > 0, \quad \forall (l_c^*, l_a^*) : l_0 \leq l_c^* \leq l_a^* < \infty, \quad |l_c^* - l_c| + |l_a^* - l_a| \leq h, \quad E(\tau_\infty, l_c, l_a) \leq E(\tau_\infty, l_c^*, l_a^*). \quad (3.15)$$

Si on cherche un minimum local tel que $l_0 \leq l_c^* \leq l_a^* < \infty$, on obtient le système de conditions nécessaires reliant l_c et l_a à τ_∞

$$\text{a) } - \frac{\partial E}{\partial l_a}(\tau_\infty, l_c, l_a) = 0 \quad (3.16)$$

$$\text{b) } - \frac{\partial E}{\partial l_{ac}}(\tau_\infty, l_c, l_a) = 0$$

En d'autres termes, les pointes des parties cohésive et non cohésive doivent être telles que le taux de restitution de l'énergie totale due à la propagation de l'une des pointes est nul. Nous allons donner une interprétation locale de ces

critères. La condition (3.16a) est la même que pour la phase cohésive. Le champ de déplacement est *a priori* singulier aux pointes $x_1 = \pm l_a$ et la forme de la singularité est toujours donnée par (3.6). La formule d'Irwin est toujours valable, par conséquent, (3.16a) est toujours équivalent à l'annulation du FIC K_3 . D'autre part, le champ de déplacement n'est pas singulier aux points $x_1 = \pm l_c$, car le chargement est simplement discontinu en ces points, la contrainte sautant de $\tau_c - \tau_\infty$ à $-\tau_\infty$. Puisque le champ w n'est pas singulier aux pointes $\pm l_c$, on peut dériver formellement sous le signe de l'intégrale $E(\tau_\infty, l_c, l_a)$ par rapport à l_c , ce qui donne :

$$-\frac{\partial E}{\partial l_c}(\tau_\infty, l_c, l_a) = -\int_{\Omega_c^0} \mu \nabla w \cdot \nabla \left(\frac{\partial w}{\partial l_c} \right) dx - \int_{\Gamma_c} \tau_c \left[\frac{\partial w}{\partial l_c} \right] dx_1 + \int_{D \cup \Gamma} \tau_\infty \left[\frac{\partial w}{\partial l_c} \right] dx_1 + 2\tau_c [w](l_c) - 2G_c \quad (3.17)$$

Où nous avons tenu compte de la symétrie de la structure. Dans (3.17), $\frac{\partial w}{\partial l_c}$ représente le taux de variation du champ de déplacement à l'équilibre sous le chargement τ_∞ du à un accroissement (virtuel) de la zone non cohésive, la pointe de la zone cohésive restant fixe.

En vertu de l'équation variationnelle (3.12), les termes contenant $\frac{\partial w}{\partial l_c}$ disparaissent, et finalement on obtient :

$$-\frac{\partial E}{\partial l_c}(\tau_\infty, l_c, l_a) = 2\tau_c [w](l_c) - 2G_c \quad (3.18)$$

Le facteur 2 est du à la présence de deux lèvres. Par conséquent, le critère de propagation (3.16b) est équivalent au critère de l'ouverture critique $[w](l_c) = \delta_c$. Finalement (3.16) est équivalent à :

$$k_3(\pm l_a) = 0, [w](l_c) = \delta_c \quad (3.19)$$

Nous avons établi dans ce chapitre, les équations du problème dans les phases cohésives et de propagation, ainsi que les critères d'évolutions des pointes l_a et l_0 . Nous allons établir l'équation intégrale dans le prochain chapitre.

CHAPITRE IV : ETABLISSEMENT DE L'EQUATION INTEGRALE

Dans le but, d'étudier la propagation de la fissure dans les phases cohésive et de propagation, nous devons résoudre les problèmes élastiques correspondants (3.3) et (3.11). Pour ce faire, nous allons réduire les équations du problème à une équation intégrale singulière en utilisant la transformée de Fourier. Nous suivons en cela les travaux d'Erdogan (voir par exemple [32]). Nous commençons tout d'abord par un bref rappel sur la transformée de Fourier.

4.1. Transformée de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction continue avec $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$. La transformée de

$$\text{Fourier de } f(x) \text{ est définie par : } \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \quad (4.1)$$

La transformée de Fourier inverse est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \quad (4.2)$$

4.2. Dérivation de l'équation intégrale

Tout d'abord, nous écrivons les conditions aux limites à l'infini, sur les lèvres de la fissure, ainsi que les conditions de transmission sur l'axe $x_2 = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{23}(x_1, h) = 0 \quad |x_1| < +\infty \quad (4.3) \\ \tau_{23}(x_1, x_2) = 0 \quad x_2 \rightarrow -\infty \quad |x_1| < +\infty \quad (4.4) \\ w(x_1, 0^+) = w(x_1, 0^-) \quad |x_1| > l_a \quad (4.5) \\ \tau_{23}(x_1, 0^+) = \tau_{23}(x_1, 0^-) \quad |x_1| > l_a \quad (4.6) \\ \tau_{23}(x_1, 0^+) = \tau_{23}(x_1, 0^-) = \tau(x_1) \quad |x_1| \leq l_a \quad (4.7) \end{array} \right.$$

Avec :

$$\tau(x_1) = \begin{cases} -\tau_\infty & \text{Si } |x_1| < \alpha \\ -\tau_\infty + \tau_c & \text{Si } \alpha < |x_1| < l_a \end{cases} \quad (4.8)$$

où $\alpha = l_0$ dans la phase cohésive, et $\alpha = l_c$ dans la phase de propagation.

Les équations (4.3) et (4.4) sont les conditions aux limites en contraintes sur la face supérieure et la face inférieure ($x_2 \rightarrow -\infty$) de la structure.

L'équation (4.5) représente la condition de la continuité du déplacement à l'interface en dehors de la fissure.

L'équation (4.6) représente le chargement sur les lèvres de la fissure.

L'équation (4.7) est la condition de la continuité du vecteur contrainte à l'interface en dehors de la fissure.

Nous introduisons la transformée de Fourier du champ de déplacement $w(x, y)$:

$$\hat{W}(\lambda, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_1, x_2) \cdot e^{i\lambda x_1} dx_1 \quad (4.9)$$

Et la transformée de Fourier inverse :

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{W}(\lambda, x_2) \cdot e^{-i\lambda x_1} d\lambda \quad (4.10)$$

En injectant cette expression de $W(x_1, x_2)$, dans la première équation du système (3.11) ($\nabla W = 0$), et en prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient :

$$-\lambda^2 \hat{W}(\lambda, x_2) + \frac{\partial^2 \hat{W}(\lambda, x_2)}{\partial x_2^2} = 0 \quad (4.11)$$

En cherchant la solution pour l'équation (4.11), sous la forme $\hat{W}(\lambda, x_2) = C(\lambda) \cdot e^{n \cdot x_2}$, nous obtenons l'équation caractéristique suivante:

$$n^2 - \lambda^2 = 0, \quad (4.12)$$

Qui admet les racines suivantes :

$$n_{1,2} = \pm |\lambda| \quad (4.13)$$

A cause de la présence de la fissure, nous introduisons la définition suivante de la fonction $\hat{W}(\lambda, x_2)$ pour chacun des matériaux constituant la structure :

$$\hat{W}(\lambda, x_2) = C_1(\lambda).e^{n_1 x_2} + C_2(\lambda).e^{n_2 x_2} \quad 0 < x_2 < h \quad (4.14)$$

$$\hat{W}(\lambda, x_2) = C_3(\lambda).e^{n_1 x_2} + C_4(\lambda).e^{n_2 x_2} \quad -\infty < x_2 < 0 \quad (4.15)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de (4.14) et (4.15), nous en déduisons les expressions suivantes de W :

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (C_1(\lambda).e^{|\lambda|x_2} + C_2(\lambda).e^{-|\lambda|x_2}).e^{-i\lambda x_1} d\lambda \quad 0 < x_2 < h \quad (4.16)$$

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (C_3(\lambda).e^{|\lambda|x_2} + C_4(\lambda).e^{-|\lambda|x_2}).e^{-i\lambda x_1} d\lambda \quad -\infty < x_2 < 0 \quad (4.17)$$

Il nous reste à déterminer les coefficients $C_k(\lambda)$, pour $K = 1, \dots, 4$. Nous définissons d'abord la fonction densité suivante :

$$\psi(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} [W(x_1, 0^+) - W(x_1, 0^-)] \quad (4.18)$$

De plus, nous avons grâce aux équations (4.5) et (4.6) :

$$\int_{-l_a}^{l_a} \psi(t).dt = 0 \quad (4.19a)$$

$$\psi(x_1) = 0 \quad \text{pour} \quad |x_1| \geq l_a \quad (4.19b)$$

En effet, (4.19a) est obtenue de la manière suivante :

$$\int_{-l_a}^{l_a} \psi(t).dt = \int_{-l_a}^{l_a} \frac{\partial}{\partial t} [W(t,0^+) - W(t,0^-)].dt$$

$$= (W(l_a,0^+) - W(l_a,0^-)) - (W(l_a,0^+) - W(l_a,0^-)) = 0 \quad (4.20)$$

La dernière égalité est due à la continuité du déplacement aux pointes $\pm l_a$.
(4.19b) est due à la continuité du déplacement en dehors de la fissure.

Nous utilisons maintenant les conditions aux limites. Nous devons tout d'abord donner les expressions de la contrainte τ_{23} à partir de (4.16) et (4.17) et (3.2):

$$\tau_{23} = \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| (C_1(\lambda).e^{|\lambda|x_2} - C_2(\lambda).e^{-|\lambda|x_2}) e^{-i\lambda x_1} d\lambda \quad 0 < x_2 < h \quad (4.21)$$

$$\tau_{23} = \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| (C_3(\lambda).e^{|\lambda|x_2} - C_4(\lambda).e^{-|\lambda|x_2}) e^{-i\lambda x_1} d\lambda \quad -\infty < x_2 < 0 \quad (4.22)$$

En injectant (4.21) et (4.22) dans (4.3), et en prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient :

$$C_1(\lambda)e^{|\lambda|h} - C_2(\lambda)e^{-|\lambda|h} = 0 \quad (4.23)$$

En remplaçant (4.22) dans l'équation (4.4), nous déduisons que :

$$C_4(\lambda) = 0 \quad (4.24)$$

Nous utilisons maintenant la définition (4.18) de la fonction densité. En y injectant (4.16) et (4.17), en prenant la transformée de Fourier inverse et en tenant compte de (4.19b), on obtient :

$$C_1(\lambda) + C_2(\lambda) - C_3(\lambda) = \frac{i}{\lambda} \cdot \int_{-l_a}^{+l_a} \psi(t).e^{i\lambda t}.dt = F \quad (4.25)$$

En injectant (4.21) et (4.22) dans l'équation (4.6), et en prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient :

$$\mu_1 [C_1(\lambda) - C_2(\lambda)] - \mu_2 C_3(\lambda) = 0 \quad (4.26)$$

D'équations (4.23), (4.25) et (4.26), on déduit le système linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} e^{|\lambda|h} & -e^{-|\lambda|h} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\mu_1 & -\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(\lambda) \\ C_2(\lambda) \\ C_3(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

La résolution de ce système donne :

$$C_1(\lambda) = \frac{\mu_2 F e^{-2|\lambda|h}}{\mu_2 (e^{-2|\lambda|h} + 1) - \mu_1 (e^{-2|\lambda|h} - 1)} \quad (4.28)$$

$$C_2(\lambda) = \frac{\mu_2 F}{\mu_2 (e^{-2|\lambda|h} + 1) - \mu_1 (e^{-2|\lambda|h} - 1)} \quad (4.29)$$

$$C_3(\lambda) = \frac{\mu_1 F (e^{-2|\lambda|h} - 1)}{\mu_2 (e^{-2|\lambda|h} + 1) - \mu_1 (e^{-2|\lambda|h} - 1)} \quad (4.30)$$

Nous remarquons que tous les coefficients ne dépendent que de la seule inconnue F , et par conséquent de la seule fonction densité $\psi(x_1)$. Donc pour résoudre notre problème, il suffit de déterminer $\psi(x_1)$.

La fonction $\psi(x_1)$ sera déterminée par la résolution d'une équation intégrale singulière. Cette équation intégrale sera déduite à partir de l'équation (4.7). De l'équation (4.7), et en y injectant l'expression (4.17) du champ W , on trouve :

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \frac{\mu_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| C_3(\lambda) e^{|\lambda|x_2} e^{-i\lambda x_1} d\lambda = \tau(x_1) \quad |x_1| < l_a \quad (4.31)$$

Dans (4.31) le passage à la limite est nécessaire, car l'intégrale ne peut pas être évaluée en $x_2 = 0$.

En injectant l'expression (4.30) du coefficient $C_3(\lambda)$ dans (4.31), et en tenant en compte l'expression (4.25) de F , on obtient :

$$\begin{aligned} & \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \frac{\mu_1 \mu_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i \frac{|\lambda|}{\lambda} \left(\int_{-l_a}^{+l_a} \psi(t) e^{i\lambda t} dt \right) \frac{e^{-2|\lambda|h} - 1}{\mu_2 (e^{-2|\lambda|h} + 1) - \mu_1 (e^{-2|\lambda|h} - 1)} e^{|\lambda|x_2} e^{-i\lambda x_1} d\lambda \\ & = \tau(x_1) \quad |x_1| < l_a \end{aligned} \quad (4.32)$$

En changeant l'ordre de l'intégration, on obtient :

$$\int_{-l_a}^{l_a} K(x_1, t) \psi(t) dt = \frac{2\pi}{\mu_1 \mu_2} \tau(x_1) \quad |x_1| < l_a \quad (4.33)$$

Le noyau $K(x_1, t)$ est donné par :

$$K(x_1, t) = \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x_2, \lambda) e^{i\lambda(t-x_1)} d\lambda \quad (4.34)$$

où H est donnée par :

$$H(x_2, \lambda) = \frac{i|\lambda|}{\lambda} \frac{e^{-2|\lambda|h} - 1}{\mu_2 (e^{-2|\lambda|h} + 1) - \mu_1 (e^{-2|\lambda|h} - 1)} e^{|\lambda|x_2} \quad (4.35)$$

On observe que $H(x_2, -\lambda) = -H(x_2, \lambda)$, H est donc impair en λ . On a donc :

$$\begin{aligned} K(x_1, t) &= \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} H(x_2, \lambda) \cos(\lambda(t-x_1)) d\lambda + i \int_{-\infty}^{+\infty} H(x_2, \lambda) \sin(\lambda(t-x_1)) d\lambda \right) \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \int_0^{+\infty} N(x_2, \lambda) \sin(\lambda(t-x_1)) d\lambda \end{aligned} \quad (4.36)$$

Avec :

$$N(x_2, \lambda) = 2iH(x_2, \lambda) \quad (4.37)$$

Le noyau $K(x_1, t)$ est divergent en $x_2 = 0$. Puisque $N(\lambda, 0)$ est une fonction continue, la singularité de l'intégrale impropre ne peut venir que des extrémités de l'intervalle. Sachant que $N(0, 0) = 0$, la singularité ne peut venir que du voisinage de l'infini. Afin d'isoler cette singularité, on étudie le comportement de N lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

On a :

$$N^\infty(\lambda, x_2) = \frac{2e^{\lambda x_2}}{\mu_2 + \mu_1} \quad (4.38)$$

Afin d'extraire la singularité du noyau de $K(x_1, t)$, on ajoute et on retranche

N^∞ :

$$\begin{aligned}
K(x_1, t) &= \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \int_0^{+\infty} \left(N(\lambda, x_2) - \frac{2e^{\lambda x_2}}{\mu_1 + \mu_2} \right) \sin \lambda(t - x_1) d\lambda \\
&\quad + \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \int_0^{+\infty} \frac{2e^{\lambda x_2}}{\mu_1 + \mu_2} \sin \lambda(t - x_1) d\lambda
\end{aligned} \tag{4.39}$$

La deuxième intégrale de (4.39) peut être évaluée d'une manière explicite.

On a :

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \int_0^{+\infty} e^{\lambda x_2} \sin \lambda(t - x_1) d\lambda = \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \frac{t - x_1}{x_2^2 + (t - x_1)^2} = \frac{1}{(t - x_1)} \tag{4.40}$$

et :

$$N(\lambda, x_2) - \frac{e^{\lambda x_2}}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{-4\mu_2 e^{\lambda(x_2 - 2h)}}{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2(e^{-2\lambda h} + 1) - \mu_1(e^{-2\lambda h} - 1))} \tag{4.41}$$

Afin de pouvoir introduire la limite sous le signe de l'intégrale, dans la première intégrale de (4.39). On doit d'abord s'assurer que cette intégrale impropre converge uniformément. On pose :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda(x_2 - 2h)}}{\mu_2(e^{-2\lambda h} + 1) - \mu_1(e^{-2\lambda h} - 1)} d\lambda \tag{4.42}$$

4.3. Convergence uniforme de I

4.3.1. Rappel [33] (Mauch 2004)

Considérons l'intégrale impropre suivante :

$$\int_c^{\infty} f(x, t) dt$$

S'il existe une fonction continue $M(t)$, tel que $|f(x, t)| \leq M(t)$ et $\int_c^{\infty} M(t) dt$ est

convergente, donc $\int_c^{\infty} f(x, t) dt$ est uniformément convergente.

Si $\int_c^\infty f(x,t)dt$ est uniformément convergente, on a la propriété suivante :

- Si $f(x,t)$ est continue pour $x \in [a,b]$ et $t \in [c, \infty[$, donc pour $a < x_0 < b$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^\infty f(x,t)dt = \int_c^\infty \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,t) \right) dt \quad (4.43)$$

4.3.2. Convergence uniforme de I

Nous allons montrer que la condition de convergence uniforme énoncée ci-dessus s'applique à I. On pose :

$$M(\lambda) = e^{-\lambda h} \quad (4.44)$$

On a :

$$\int_0^\infty M(\lambda) d\lambda = - \left. \frac{e^{-\lambda h}}{h} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{h} \quad (4.45)$$

Donc :

$$\int_0^\infty M(\lambda) d\lambda \text{ est convergente.}$$

On pose :

$$f(x_2, \lambda) = \frac{e^{\lambda(x_2 - 2h)}}{A(\lambda)} \sin \lambda(t - x_1) \quad (4.46)$$

où :

$$A(\lambda) = \mu_2 (e^{-2\lambda h} + 1) - \mu_1 (e^{-2\lambda h} - 1) \quad (4.47)$$

On a :

$$A'(\lambda) = 2he^{-2\lambda h} (\mu_1 - \mu_2) \quad (4.48)$$

Selon le signe de A' , il existe deux cas :

- si $\mu_1 > \mu_2$

$$A'(\lambda) > 0$$

$$A(0) \leq A(\lambda) \leq A(+\infty)$$

$$2\mu_2 \leq A(\lambda) \leq \mu_1 + \mu_2$$

$$\frac{1}{A(\lambda)} \leq \frac{1}{2\mu_2}$$

$$\frac{e^{\lambda(x_2-h)}}{A(\lambda)} \leq \frac{1}{2\mu_2}$$

$$\frac{e^{\lambda(x_2-2h)}}{A(\lambda)} \leq \frac{e^{-\lambda h}}{2\mu_2}$$

Donc :

$$\left| \frac{e^{\lambda(x_2-2h)}}{A(\lambda)} \sin(\lambda(t-x_1)) \right| \leq \frac{e^{\lambda(x_2-2h)}}{A(\lambda)} \leq \frac{e^{-\lambda h}}{2\mu_2} \quad (4.49)$$

Ce qui implique que :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\lambda(x_2-2h)}}{A(\lambda)} \sin \lambda(t-x_1) d\lambda \text{ est uniformément convergente pour } \mu_1 > \mu_2$$

- si $\mu_1 < \mu_2$

De la même manière, on obtient :

$$\left| \frac{e^{\lambda(x_2-2h)}}{A(\lambda)} \sin(\lambda(t-x_1)) \right| \leq \frac{e^{\lambda(x_2-2h)}}{A(\lambda)} \leq \frac{e^{-\lambda h}}{\mu_1 + \mu_2} \quad (4.50)$$

Ce qui implique que :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\lambda(x_2-2h)}}{A(\lambda)} \sin \lambda(t-x_1) d\lambda \text{ est uniformément convergente pour } \mu_1 < \mu_2 .$$

Par conséquent, on peut introduire la limite sous le signe de l'intégrale dans le premier terme de (4.39), $K(x_1, t)$ se réduit à la forme suivante :

$$K(x_1, t) = \frac{2}{\mu_1 + \mu_2} \left[\frac{1}{t - x_1} - 2\mu_2 \int_0^{+\infty} B(\lambda) \sin(\lambda(t - x_1)) d\lambda \right] \quad (4.51)$$

avec :

$$B(\lambda) = \frac{e^{-2\lambda h}}{A(\lambda)} = \frac{e^{-2\lambda h}}{\mu_2(e^{-2\lambda h} + 1) - \mu_1(e^{-2\lambda h} - 1)} \quad (4.52)$$

Finalement, on obtient l'équation intégrale singulière, dont $\psi(t)$ est l'inconnue, et qui s'écrit :

$$\int_{-l_a}^{+l_a} \left[\frac{1}{t - x_1} + k(x_1, t) \right] \psi(t) dt = \frac{\pi(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2} \tau(x_1) \quad |x_1| < l_a \quad (4.53)$$

Avec la condition :

$$\int_{-l_a}^{l_a} \psi(t) dt = 0$$

$K(x_1, t)$ est donné par :

$$k(x_1, t) = -2\mu_2 \int_0^{+\infty} B(\lambda) \sin(\lambda(t - x_1)) d\lambda \quad (4.54)$$

L'équation (4.53) est appelée « équation intégrale singulière de Cauchy du premier type ». La singularité provient du noyau de Cauchy $1/(t - x_1)$. Nous présentons la résolution de (4.53) dans le prochain chapitre.

CHAPITRE V : RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION INTEGRALE

Ce chapitre est consacré à la résolution de l'équation intégrale singulière (4.53). Le noyau de cette équation contient la singularité de Cauchy. C'est donc une intégrale impropre. Pour l'évaluer, nous utilisons le concept de l'intégration au sens de la valeur principale de Cauchy. Nous commençons par en donner un bref rappel.

5.1. Valeur principale de Cauchy [33]

5.1.1. Définition

Si $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ sauf au point $x_0 \in [a, b]$, donc la valeur principale de Cauchy de l'intégrale est définie par :

$$VP\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx \right) \quad (5.1)$$

La valeur principale est obtenue en approchant la singularité symétriquement.

La valeur principale de l'intégrale peut exister quand l'intégrale diverge. Si l'intégrale existe, elle est égale à sa valeur principale.

5.1.2. Exemple

$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ est non définie. Sa valeur principale est égale à :

$$\begin{aligned}
VP\left(\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx\right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left([\log|x|]_{-1}^{-\varepsilon} + [\log|x|]_{\varepsilon}^1 \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log|\varepsilon| - \log|\varepsilon|) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dans la suite du travail , toutes les intégrales singulières (contenant le noyau $1/(t - x_1)$) seront évaluées au sens de la valeur principale de Cauchy. Pour simplifier l'écriture on omettra d'écrire $VP()$, et on écrira simplement le signe intégrale.

5.2. Résolution de l'équation intégrale

De même que pour l'établissement de l'équation intégrale, nous suivons pour sa résolution les travaux d'Erdogan [34] (Erdogan et al. 1973).

Le problème (3.5) de la phase cohésive est un cas particulier du problème (3.11) de la phase de propagation quand $l_c = l_0$. La résolution de l'équation intégrale (4.53) sera présentée pour ce dernier cas. La résolution s'effectuera numériquement en utilisant les polynômes de Chebychev qui seront définis plus tard. Ces polynômes sont définis dans l'intervalle $[-1,1]$. Nous devons donc changer l'intervalle de l'équation intégrale (4.53) de $[-l_a, l_a]$ à $[-1,1]$. Nous définissons d'abord les quantités normalisées suivantes :

$$r = \frac{x_1}{l_a}, \quad s = \frac{t}{l_a}, \quad \eta = \frac{l_c}{l_a}, \quad \psi(t) = f(s), \quad k(x_1, t) = L(r, s), \quad \tau(x_1) = \tau(r) \quad (5.2)$$

Par conséquent, l'équation intégrale (3.48) s'écrit :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{s-r} + l_a L(r, s) \right] f(s) ds = \frac{(\mu_2 + \mu_1)\tau(r)}{\mu_2 \mu_1}, \quad |r| \leq 1 \quad (5.3)$$

Avec la condition:

$$\int_{-1}^{+1} f(t) dt = 0 \quad (5.4)$$

Dans (5.3), le chargement $\tau(r)$ est donné par:

$$\tau(r) = \begin{cases} -\tau_{\infty} & \text{si } |r| \leq \eta \\ -\tau_{\infty} + \tau_c & \text{si } \eta < |r| < 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

On observe dans (5.5), que le chargement est discontinu. Par conséquent, les méthodes standard de résolution de ce type d'équation intégrale ne sont pas applicables et doivent être modifiées. L'idée est de décomposer $f(s)$ de la manière suivante [35] :

$$f(s) = h(s) + \phi(s) \quad (5.6)$$

où $h(s)$, est la solution de l'équation intégrale suivante:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{s-r} h(s) ds = \frac{(\mu_2 + \mu_1)\tau(r)}{\mu_2\mu_1}, \quad |r| \leq 1 \quad (5.7)$$

Avec la condition:

$$\int_{-1}^{+1} h(s) ds = 0 \quad (5.8)$$

En remplaçant (5.6) dans (5.3) en tenant compte de (5.7) et (5.8), on obtient l'équation intégrale dont $\phi(s)$ est l'inconnu :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{s-r} + l_a L(r, s) \right] \phi(s) ds = g(r), \quad |r| \leq 1 \quad (5.9)$$

Où:

$$g(r) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} l_a L(r, s) h(s) ds \quad (5.10)$$

Avec la condition:

$$\int_{-1}^{+1} \phi(t) dt = 0 \quad (5.11)$$

Il est clair à partir de (5.10) que puisque $L(r, s)$ a un comportement régulier, $g(r)$ a aussi un comportement régulier. Par conséquent, les techniques numériques de résolution de ce type d'équation intégrale [23] peuvent être

directement appliquées sans aucune modification. La solution analytique des équations (5.7) et (5.8), est déterminée par [36]:

$$h(s) = -\frac{(\mu_2 + \mu_1)}{\pi\mu_2\mu_1} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\tau(r)}{r-s} dr, |s| \leq 1 \quad (5.12)$$

En effectuant l'intégration dans (5.12), on obtient:

$$h(s) = h_1(s) + h_2(s) \quad (5.13)$$

où :

$$h_1(s) = \frac{(\mu_2 + \mu_1)s}{\pi\mu_2\mu_1} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} (-\tau_\infty\pi + 2\tau_c \arccos \eta) \quad (5.14)$$

$$h_2(s) = \frac{(\mu_2 + \mu_1)\tau_c}{\pi\mu_2\mu_1} \ln \frac{\eta \sqrt{1-s^2} - s \sqrt{1-\eta^2}}{\eta \sqrt{1-s^2} + s \sqrt{1-\eta^2}} \quad (5.15)$$

On observe que $h(s)$ présente une singularité logarithmique aux points $\pm l_c/l_a$. La fonction inconnue $\phi(s)$ a des singularités intégrables en points ± 1 . Il a été montré dans [30] que, dans ce cas, la solution de l'équation intégrale singulière (5.9) peut être exprimé comme: $\phi(s) = w(s) \cdot \varphi(s)$ où $w(s) = (1-s^2)^{-\frac{1}{2}}$ est la fonction poids associé au polynôme de Chebyshev de premier ordre $T_n(s) = \cos(n \cdot \arccos(s))$ et $\varphi(s)$ est une fonction continue et bornée sur l'intervalle $[-1, 1]$, laquelle peut être exprimé comme une série des polynômes de Chebyshev du premier ordre. Donc, la solution de l'équation (5.9) peut s'exprimer comme suit :

$$\phi(s) = (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot T_{2n-1}(s) \approx (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^N A_n \cdot T_{2n-1}(s) \quad (5.16)$$

Dans (5.16) nous avons pris que les polynômes de Chebyshev à indice impair, car $T_{2n-1}(-s) = -T_{2n-1}(s)$, et $\phi(s)$ est une fonction impaire à cause de la symétrie du problème.

En remplaçant l'équation (5.16) dans l'équation (5.9), et en utilisant les relations suivantes :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s)(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}}{s-r} dt = \begin{cases} U_{n-1}(r), & n > 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

où :

$U_n(r) = \sin((n+1) \cdot \arccos(r)) / \sqrt{1-r^2}$ désigne les polynômes de chebyshev de second ordre. On obtient:

$$\sum_{n=1}^N A_n [U_{2n-2}(r) + H_n(r)] = g(r), \quad |r| \leq 1 \quad (5.18)$$

où:

$$H_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} l_a L(r,s) T_{2n-1}(s) ds \quad (5.19)$$

On observe qu'avec l'expression (5.16), la condition (5.11) est automatiquement vérifiée.

On peut résoudre l'équation (5.18), en sélectionnant N points de collocation (les racines de T_{2N-1}), donnés par :

$$r_j = \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{2(2N-1)} \right), \quad j = 1, \dots, N \quad (5.20)$$

En écrivant (5.18) pour les points de collocation donnés par l'équation (5.20), on obtient un système de N équations avec N inconnues (A_1, \dots, A_N), donné par:

$$\sum_{n=1}^N A_n [U_{2n-2}(r_j) + H_n(r_j)] = g(r_j), \quad j = 1, \dots, N \quad (5.21)$$

La valeur de N du système d'équations (5.21) sera déterminée à l'aide d'une étude de convergence. Cette convergence dépendra des paramètres du problème h, μ_1 et μ_2 et sera étudiée au Chapitre VI.

Les valeurs de $H_n(r_j)$, du membre gauche de l'équation (5.21), sont calculées à l'aide de l'équation (5.19). Les intégrales ont été évaluées

numériquement, en utilisant les formules d'intégration de Gauss-Chebyshev [37], donnés par:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} \approx \sum_1^n \frac{f(t_k)}{n}, \quad t_k = \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \quad (5.22)$$

Les valeurs de $g(r_j)$, du membre droit de l'équation (5.21), sont déterminés par l'équation (5.9), qui s'écrivent en utilisant les équations (5.13):

$$g(r) = - \left(\int_{-1}^{+1} l_a L(r, s) h_1(s) ds + \int_{-1}^{+1} l_a L(r, s) h_2(s) ds \right) \quad (5.23)$$

La première intégrale de l'équation (5.23), est évaluée numériquement, en utilisant la formule précédente de Gauss-chebyshev. Puisque $h_2(s)$ présente des singularités logarithmique en $\pm \frac{l_c}{l_a}$, la seconde intégrale est divisée en trois intégrales, comme suit:

$$\int_{-1}^{+1} l_a L(r, s) h_2(s) ds = \int_{-1}^{-\frac{l_c}{l_a}} l_a L(r, s) h_2(s) ds + \int_{-\frac{l_c}{l_a}}^{+\frac{l_c}{l_a}} l_a L(r, s) h_2(s) ds + \int_{+\frac{l_c}{l_a}}^{+1} l_a L(r, s) h_2(s) ds \quad (5.24)$$

Les trois intégrales de (5.24), sont évaluées avec les formules d'intégration de Gauss - chebyshev.

Dans les expressions de $H_n(r)$ et de $g(r)$, il y a la fonction $L(r, s)$. Cette fonction est donnée sous la forme d'une intégrale impropre, qui s'écrit (équation (4.51) du Chapitre IV):

$$L(r, s) = -2\mu_2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda h}}{\mu_2(e^{-2\lambda h} + 1) - \mu_1(e^{-2\lambda h} - 1)} \sin(l_a \lambda (s - r)) d\lambda . \quad (5.25)$$

On observe que $L(r, s)$ est une intégrale impropre. A cause de la présence de l'exponentielle avec un exposant négatif dans son numérateur, l'intégrand tend très rapidement vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$. Par conséquent, $L(r, s)$ sera décomposée de la manière suivante :

$$L(r, s) = -2\mu_2 \left(\int_0^A \frac{e^{-2\lambda h}}{\mu_2(e^{-2\lambda h} + 1) - \mu_1(e^{-2\lambda h} - 1)} \sin(l_a \lambda (s - r)) d\lambda \right. \\ \left. + \int_A^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda h}}{\mu_2(e^{-2\lambda h} + 1) - \mu_1(e^{-2\lambda h} - 1)} \sin(l_a \lambda (s - r)) d\lambda \right) \quad (5.26)$$

Pour une valeur de A suffisamment grande, la deuxième intégrale devient négligeable, et $L(r, s)$ sera évaluée à l'aide de la première intégrale. Cette évaluation s'effectuera numériquement à l'aide de la méthode de Gauss-Chebyshev. La valeur numérique de A dépendra des paramètres : h , μ_1 et μ_2 et sera déterminée dans le prochain Chapitre.

5.3 Le facteur d'intensité des contraintes aux pointes de la fissure $\pm l_a$:

Pour une fissure à l'interface de deux matériaux en mode III, l'expression asymptotique du déplacement en pointe de fissure est donnée par l'expression suivante [30] (Cours « Mécanique de la rupture » J-J. Marigo) :

$$w = k_3 \sqrt{2r} f(\theta) \quad (5.27)$$

Avec :

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \frac{1}{\mu_2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\pi \leq \theta \leq 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

r et θ représentent les coordonnées polaires (Figure 5.1).

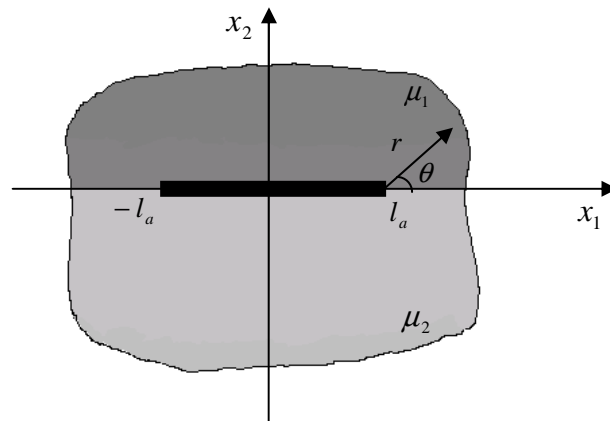


Figure 5.1: fissure à l'interface de deux matériaux en mode III .

Le saut du déplacement à travers la fissure est défini par :

$$\begin{aligned}
 \llbracket w \rrbracket &= w(r; +\pi) - w(r; -\pi) \\
 &= k_3 \sqrt{2r} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \\
 &= k_3 \sqrt{2r} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Sur les lèvres de la fissure r est donné par : $r = l_a - x_1$.

On a donc :

$$\llbracket w \rrbracket = k_3 \sqrt{2(l_a - x_1)} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \tag{5.30}$$

La fonction densité ψ est la dérivée du saut de déplacement par rapport à x :

$$\begin{aligned}
 \psi(x_1) &= \frac{d}{dx_1} \llbracket w \rrbracket \\
 &= - \frac{k_3}{\sqrt{2(l_a - x_1)}} \cdot \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Donc, à partir de l'équation précédente, on peut calculer le facteur d'intensité de contrainte en $x = l_a$, par la formule suivante :

$$k_3(l_a) = \lim_{\substack{x \rightarrow l_a \\ l_a \geq x}} - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)} \frac{\sqrt{l_a^2 - x_1^2}}{\sqrt{l_a}} \psi(x_1) = - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)} \sqrt{l_a} \lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ 1 \geq s}} \sqrt{1 - s^2} f(s) \tag{5.32}$$

On peut montrer de même que le facteur d'intensité de contrainte en $x = -l_a$ est donné par la formule suivante :

$$k_3(-l_a) = \lim_{\substack{x \rightarrow -l_a \\ -l_a \leq x}} \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)} \frac{\sqrt{l_a^2 - x_1^2}}{\sqrt{l_a}} \psi(x_1) = \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)} \sqrt{l_a} \lim_{\substack{s \rightarrow -1 \\ -1 \leq s}} \sqrt{1 - s^2} f(s) \tag{5.33}$$

Puisque, dans notre cas ψ est une fonction impaire, on a $k_3(l_a) = k_3(-l_a)$.

En remplaçant $f(s)$ par les équations (5.6),(5.13),(5.14),(5.15) et (5.16), on obtient le résultat suivant:

$$k_3(\pm l_a) = \sqrt{l_a} \left(\tau_\infty - \frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{l_c}{l_a} \right) - \frac{\mu_2 \mu_1}{(\mu_2 + \mu_1)} \sum_{n=1}^N A_n \right) \quad (5.34)$$

L'ouverture relative de la fissure en $x_1 \in [-1,1]$ est définie par :

$$\delta(x_1) = w(x_1, 0^+) - w(x_1, 0^-) = \int_{-l_a}^{x_1} \psi(t) dt = l_a \int_{-1}^r f(s) ds \quad (5.35)$$

On obtient de (5.2), (5.6), (5.13) et (5.16):

$$\begin{aligned} \delta(r) = \frac{l_a(\mu_2 + \mu_1)}{\pi\mu_2\mu_1} & \left(\pi\tau_\infty\sqrt{1-r^2} - \tau_c \left(r \ln \frac{r\sqrt{1-\eta^2} - \eta\sqrt{1-r^2}}{r\sqrt{1-\eta^2} + \eta\sqrt{1-r^2}} + \eta \ln \frac{\sqrt{1-r^2} + \sqrt{1-\eta^2}}{r^2 - \eta^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \arccos(\eta)\sqrt{1-r^2} - l_a\sqrt{1-r^2} \sum_{n=1}^N \frac{A_n U_{2n-2}(r)}{2n-1} \right) \right) \quad (5.36) \end{aligned}$$

Pour obtenir (5.36), on a utilisé la relation suivante:

$$\int_{-1}^s \frac{T_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{n} U_{n-1}(s) \sqrt{1-s^2} \quad (5.37)$$

A partir de (5.36), on voit que $\delta(x_1)$ n'est pas définie en $\pm l_c$, à cause des singularités logarithmiques, l'ouverture de la fissure en ces points est pris comme la limite de $\delta(x_1)$, lorsque $x_1 \rightarrow \pm l_c$. On obtient le résultat suivant:

$$\begin{aligned} \delta(\pm l_c) = \frac{(\mu_2 + \mu_1)}{\pi\mu_2\mu_1} & \left(\pi\sqrt{l^2 - l_c^2} \left(\tau_\infty - \frac{\tau_c}{\pi} \arccos \left(\frac{l_c}{l_a} \right) - \tau_c l_c \ln \left(\frac{l_c}{l_a} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{l_a^2 - l_c^2} \sum_{n=1}^N \frac{A_n U_{2n-2} \left(\pm \frac{l_c}{l_a} \right)}{2n-1} \right) \right) \quad (5.38) \end{aligned}$$

CHAPITRE VI : PROCEDURE NUMERIQUE ET RESULTATS

Dans ce chapitre nous présentons quelques applications numériques. On étudiera l'évolution de la fissure avec le chargement appliqué en faisant varier un certain nombre de paramètres du problème. Plus particulièrement on fera varier les paramètres suivants :

- μ_1/μ_2 afin d'étudier l'influence de la différence de rigidité entre le revêtement et le substrat.
- h/l_0 afin d'étudier l'influence de la taille relative de la fissure par rapport à l'épaisseur du revêtement.
- δ_c/l_0 afin d'étudier l'influence de la taille relative de la fissure par rapport à la longueur caractéristique du modèle de Dugdale.

Pour chaque étude, on doit d'abord déterminer les paramètres N , n et A (Chapitre V) nécessaires à la résolution numérique de l'équation intégrale. Cette détermination s'effectuera sur la base d'une étude de convergence. Pour N , on se basera sur la convergence du FIC $k_3(l_a)$. Pour n , on étudiera la convergence d'une intégrale particulière à l'aide de la méthode de Gauss-Chebyshev, par rapport au résultat trouvé par le logiciel Maple. Pour A , on se basera sur la convergence de l'intégrale impropre $L(r, s)$ (équation (5.25), chapitre V).

On a vu au Chapitre IV que l'évolution de la fissure suit deux phases : une phase cohésive et une phase de propagation. Nous présentons tout d'abord la procédure numérique utilisée dans chaque phase.

6.1. Phase cohésive

On a établi au chapitre III le critère de propagation des pointes $\pm l_a$. On a montré que la longueur de la fissure cohésive est telle que la singularité des

contraintes aux pointes $\pm l_a$ soit nulle et donc que le facteur d'intensité des contraintes $k_3(\pm l_a) = 0$.

D'un point de vue pratique, il est facile de calculer τ_∞ , supposant l_a connue. En utilisant la linéarité de problème élastique, le Facteur d'intensité des contraintes $k_3(l_a)$ est donné par la formule suivante :

$$k_3(l_a) = \tau_\infty k_3^\infty(l_a) + \tau_c k_3^c(l_a) \quad (6.1)$$

Où $k_3^\infty(l_a)$ et $k_3^c(l_a)$ sont les FIC du problème sans forces cohésives, avec $\tau_\infty = 1$, et du problème avec des forces cohésives unitaires $\tau_c = 1$ et $\tau_\infty = 0$, respectivement.

L'équation $k_3(l_a) = 0$ donne :

$$\tau_\infty = -\frac{\tau_c k_3^c(l_a)}{k_3^\infty(l_a)} \quad (6.2)$$

De même l'ouverture de la fissure en un point x_1 est donnée par :

$$\delta(x_1) = \tau_\infty \delta^\infty(x_1) + \tau_c \delta^c(x_1) \quad (6.3)$$

Où $\delta^\infty(x_1)$ et $\delta^c(x_1)$ sont respectivement, l'ouverture sans forces cohésives et $\tau_\infty = 0$, et avec des forces cohésives unitaires $\tau_c = 1$ et $\tau_\infty = 0$.

Par conséquent, la procédure numérique choisie pour la phase cohésive est la suivante :

1. On se donne une valeur initiale de $l_a > l_0$.
2. On pose $\tau_\infty = 1$ et $\tau_c = 0$, on résout le problème élastique et on calcule $k_3^\infty(l_a)$ et $\delta^\infty(l_0)$ (équations (5.34) et (5.38)).
3. On pose $\tau_\infty = 0$ et $\tau_c = 1$, on résout le problème élastique et on calcule $k_3^c(l_a)$ et $\delta^c(l_0)$.
4. On calcule $\delta(l_0)$ (équation (6. 3)), et on compare à δ_c .

5. Si $\delta(l_0) < \delta_c$, on calcule τ_∞ (équation (6. 2)), on incrémente l_a et on revient en 2.
- 6.
7. Si $\delta(l_0) > \delta_c$, on recherche la valeur de l_a (et τ_∞) qui nous donne $\delta(l_0) = \delta_c$ par dichotomie.
8. Fin

6.2. Phase de propagation

Dans cette phase, il y a deux pointes : une pointe non cohésive l_c et une pointe cohésive l_a . Les critères d'évolution de ces pointes ont été établis au Chapitre III. Nous choisissons de piloter le calcul en prescrivant la valeur de la pointe non-cohésive l_c . Les valeurs de la charge τ_∞ , et celle de la pointe cohésive l_a , sont déterminés en résolvant le système d'équations non linéaire suivant :

$$k_3(\pm l_a) = 0, \quad [w](\pm l_a) = \delta_c \quad (6.4)$$

La procédure numérique utilisée est la suivante :

1. On se donne une valeur initiale de $l_c > l_0$
2. On choisit une valeur arbitraire de $l_a > l_c$.
3. On pose $\tau_\infty = 1$ et $\tau_c = 0$, on résout le problème élastique et on calcule $k_3^\infty(l_a)$ et $\delta^\infty(l_c)$.
4. On pose $\tau_\infty = 0$ et $\tau_c = 1$, on résout le problème élastique et on calcule $k_3^c(l_a)$ et $\delta^c(l_c)$.
5. On calcule τ_∞ de telle sorte que $\delta(l_c) = \delta_c$. La formule est obtenue en utilisant le principe de superposition (linéarité du problème élastique), elle est donnée par :

$$\tau_\infty = \frac{\delta_c - \tau_c \delta^c(l_c)}{\delta^\infty(l_c)} \quad (6.5)$$

6. On calcule $K_3(l_a)$, si $K_3(l_a) = 0$, on incrémente l_c et on revient en 2.

7. Si $K_3(l_a) \neq 0$, on recherche la bonne valeur de l_a (et de τ_∞) par dichotomie.

On incrémente l_c et on revient en 2.

8. Fin .

6.3. Etude de la convergence

6.3.1. Détermination de A

L'expression de $L(r, s)$ est donnée par :

$$L(r, s) = -2\mu_2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda h}}{\mu_2(e^{-2\lambda h} + 1) - \mu_1(e^{-2\lambda h} - 1)} \sin(l_a \lambda (s - r)) d\lambda .$$

On prend la plus grande valeur possible de $s - r = 2$, ainsi que pour $l_a = 10$.

Pour les modules de cisaillement, on prend les valeurs suivantes :

$$\mu_1 = 1000 \quad \mu_2 = 2000 .$$

Pour h , on prend $h = 1$.

Avec ses valeurs choisies, l'évaluation numérique de l'intégrale à l'aide du logiciel MAPLE avec la fonction (*evalf*) avait donné :

$$\text{evalf} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda h}}{e^{-2\lambda h} + 3} \sin(20.\lambda) d\lambda = 0.01245252773 \quad (6.6)$$

Si on limite l'intégrale sur l'intervalle $[0,11]$, on obtient une bonne convergence.

$$\text{evalf} \int_0^{11} \frac{e^{-2\lambda h}}{e^{-2\lambda h} + 3} \sin(20.\lambda) d\lambda = 0.01245252773 \quad (6.7)$$

En conclusion on peut limiter l'intégrale sur l'intervalle $[0,11]$, et l'intégrale $L(r, s)$, prend la forme suivante :

$$L(r, s) = -2\mu_2 \int_0^{11} \frac{e^{-2\lambda h}}{\mu_2(e^{-2\lambda h} + 1) - \mu_1(e^{-2\lambda h} - 1)} \sin \lambda l_a (r - s) d\lambda \quad (6.8)$$

6.3.2. Détermination de N

On fixe tout d'abord par fixer n à 100, et on calcule la valeur du facteur d'intensité de contraintes K_3 pour différentes valeurs de N à partir de la formules

suivante :

$$k_3(\pm l_a) = \sqrt{l_a} \left(\tau_\infty - \frac{2}{\pi} \arccos \left(\frac{l_c}{l_a} \right) - \frac{\mu_2 \mu_1}{(\mu_2 + \mu_1)} \sum_{n=1}^N A_N \right) \quad (6.9)$$

Pour les différents paramètres de l'équation (6.9), on prend les valeurs suivantes :

$$\tau_\infty = 40MPa, \quad l_a = 20mm, \quad l_c = 1mm, \quad \mu_1 = 1100MPa, \quad \mu_2 = 100MPa.$$

Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 6.1 , ci-dessous.

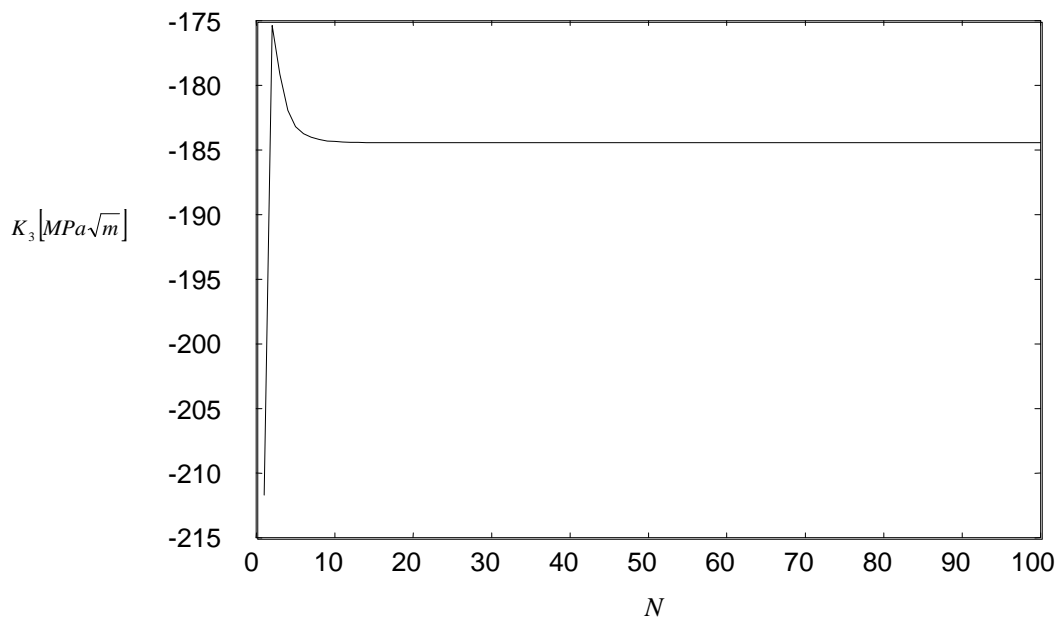


Figure 6.1 : valeur de $k_3(l_a)$ en fonction de nombre d'itérations N

La figure 6.1 montre qu'à partir de $N = 20$, il y'a convergence de la valeur de k_3 .

6.3.3. Détermination de n

On fixe la valeur de N à 20. Et on calcule la valeur de $H_n(r)$ pour différentes valeurs de n , en utilisant la formule d'intégration de Gauss-Chebyshev. L'expression de $H_n(r)$ est donnée par la formule suivante :

$$H_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} l_a L(r, s) T_{2n-1}(s) ds \approx l_a \sum_1^n \frac{L(r, s_k) T_{2n-1}(s_k)}{n} \quad (6.10)$$

où :

$$s_k = \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right)$$

Les différents paramètres existants dans (6.10), sont fixés aux valeurs suivantes :

$$r = 2, \quad l_a = 20\text{mm}, \quad \mu_1 = 1100\text{MPa}, \quad \mu_2 = 100\text{MPa}, \quad h = 1\text{mm}.$$

Les valeurs obtenues sont représentées sur le graphe de la figure 6.2.

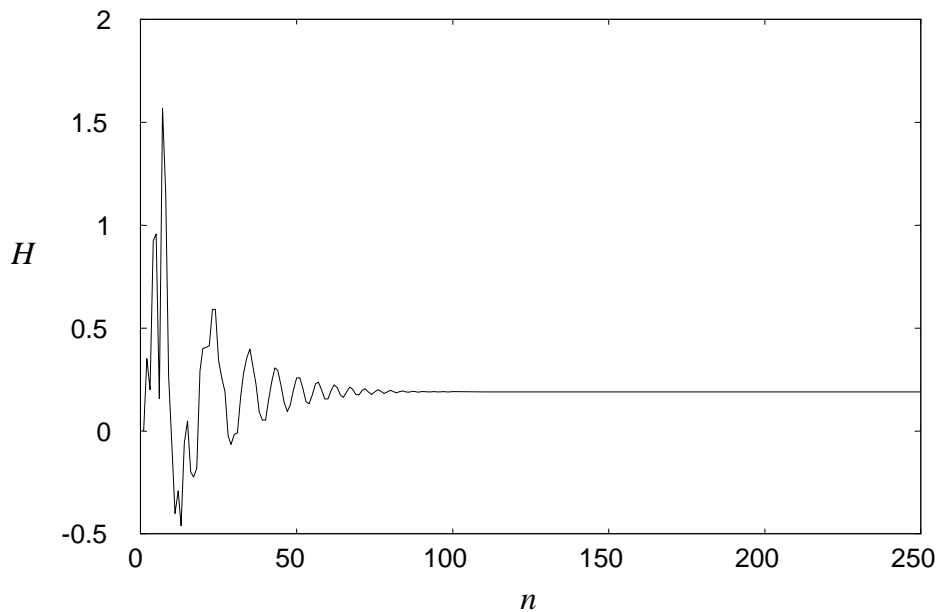


Figure 6.2 : valeur de $H_n(r)$ en fonction de n

La figure 6.2 montre qu'à partir de $n=100$, H converge

En conclusion, dans tout ce qui suit les calculs seront effectués avec $N = 20$, $n = 100$, et $A = 11$.

6.4. Etude de l'influence des différents paramètres du problème

6.4.1. Etude de l'influence du paramètre μ_1/μ_2

Dans cette partie on fait varier le paramètre μ_1/μ_2 , et on fixe les autres paramètres du problème aux valeurs suivantes :

$$\tau_c = 72MPa , l_0 = 1mm , h = 1mm , \delta_c = 0.001mm$$

On choisit trois valeurs pour le paramètre μ_1/μ_2 : 0.1, 1 et 10.

On trace la courbe τ_∞/τ_c en fonction de l_a , pour trois valeur du rapport :

$\mu_1/\mu_2 = 0.1, 1, \text{ et } 10$ (figure 6.3)

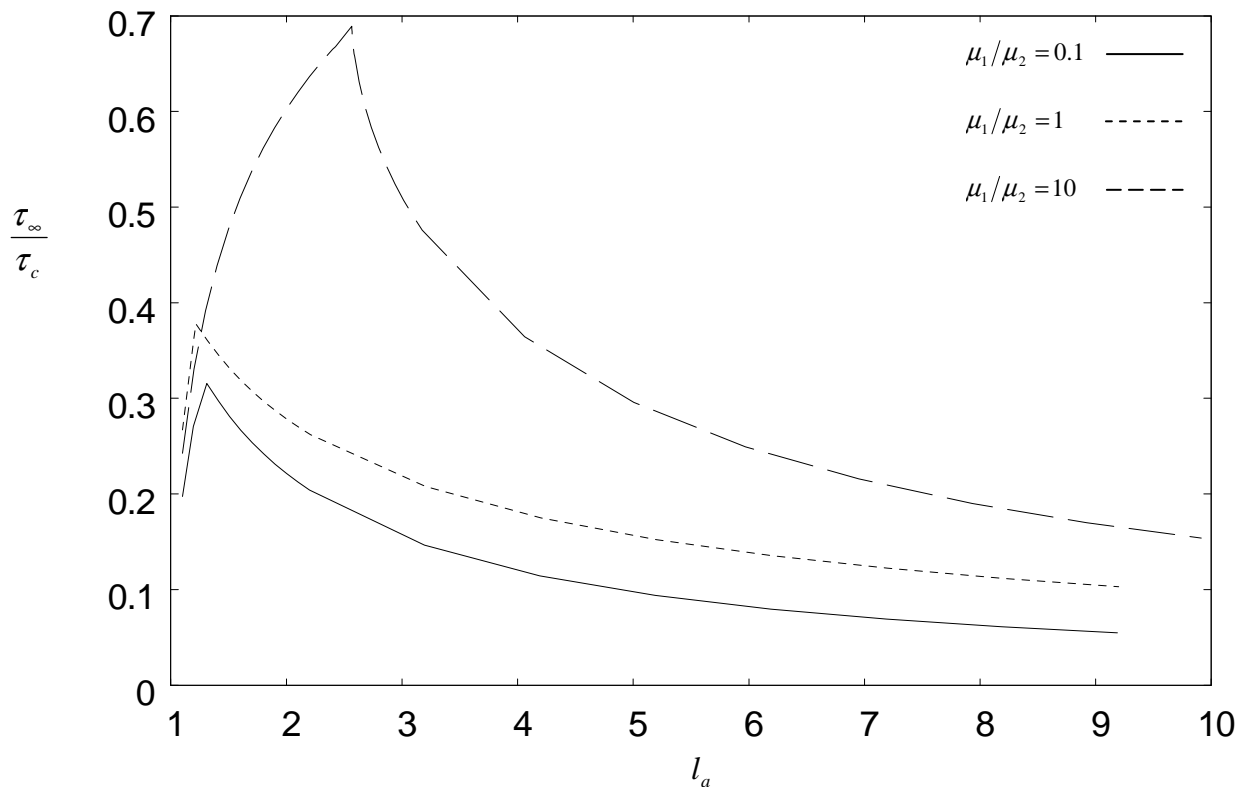


Figure 6.3 : Relation entre la charge appliquée et la position de la pointe de la fissure pour différentes valeurs de μ_1/μ_2 .

6.4.2. Etude de l'influence du paramètre h/l_0

Dans cette partie on fait varier le paramètre h/l_0 , et on fixe les autres paramètres du problème aux valeurs suivantes :

$$\tau_c = 72MPa, \delta_c = 0.001mm, \mu_1 = 1100MPa, \mu_2 = 1000MPa.$$

Pour le paramètre h/l_0 , on choisit les valeurs suivantes : 0.01, 0.1, et 1.

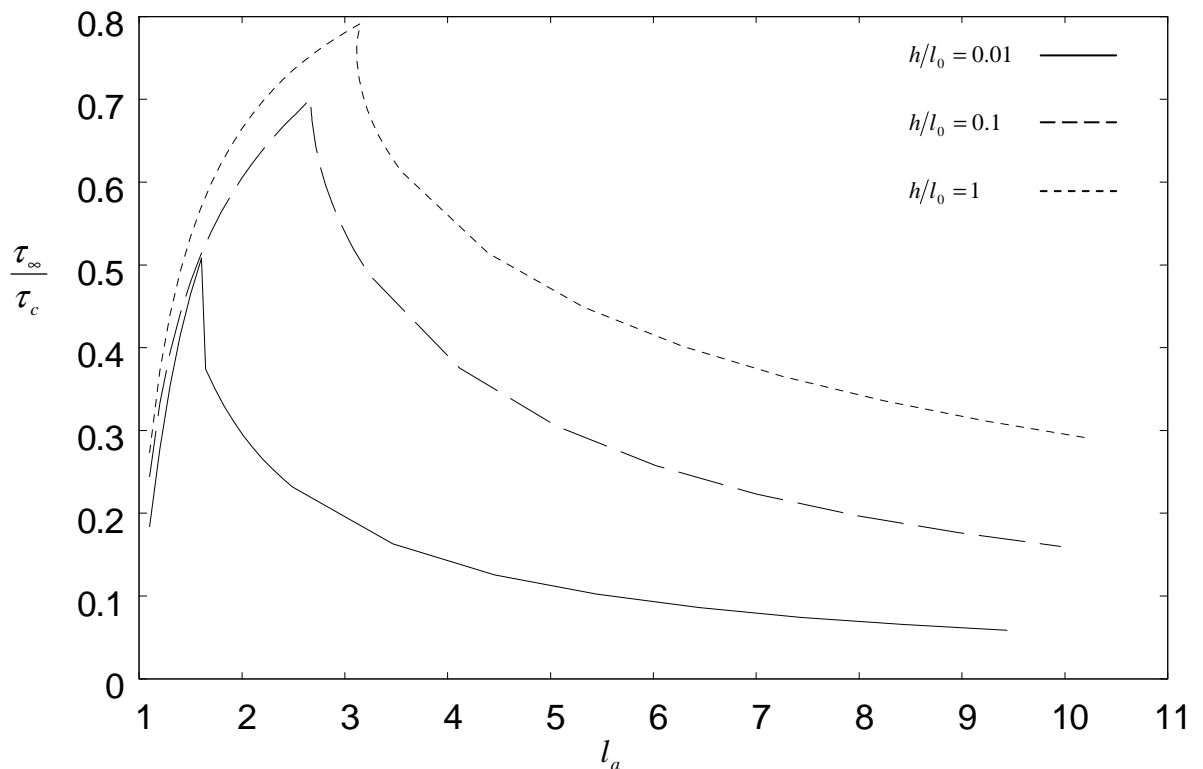


Figure 6.4 : Relation entre la charge appliquée et la position de la pointe de la fissure pour différentes valeurs de h/l_0

6.4.3. Etude de l'influence du paramètre δ_c/l_0

Dans cette partie on fait varier le paramètre δ_c/l_0 , et on fixe les autres paramètres du problème aux valeurs suivantes :

$$\tau_c = 72MPa, h = 1mm, \mu_1 = 1100MPa, \mu_2 = 1000MPa.$$

Pour le paramètre δ_c/l_0 , on choisit les valeurs suivantes : 0.01, 0.1, et 1.

On trace la même courbe, pour trois valeurs de $\delta_c/l_0 = 0.01, 0.1, 1$

(figure 6.5) .

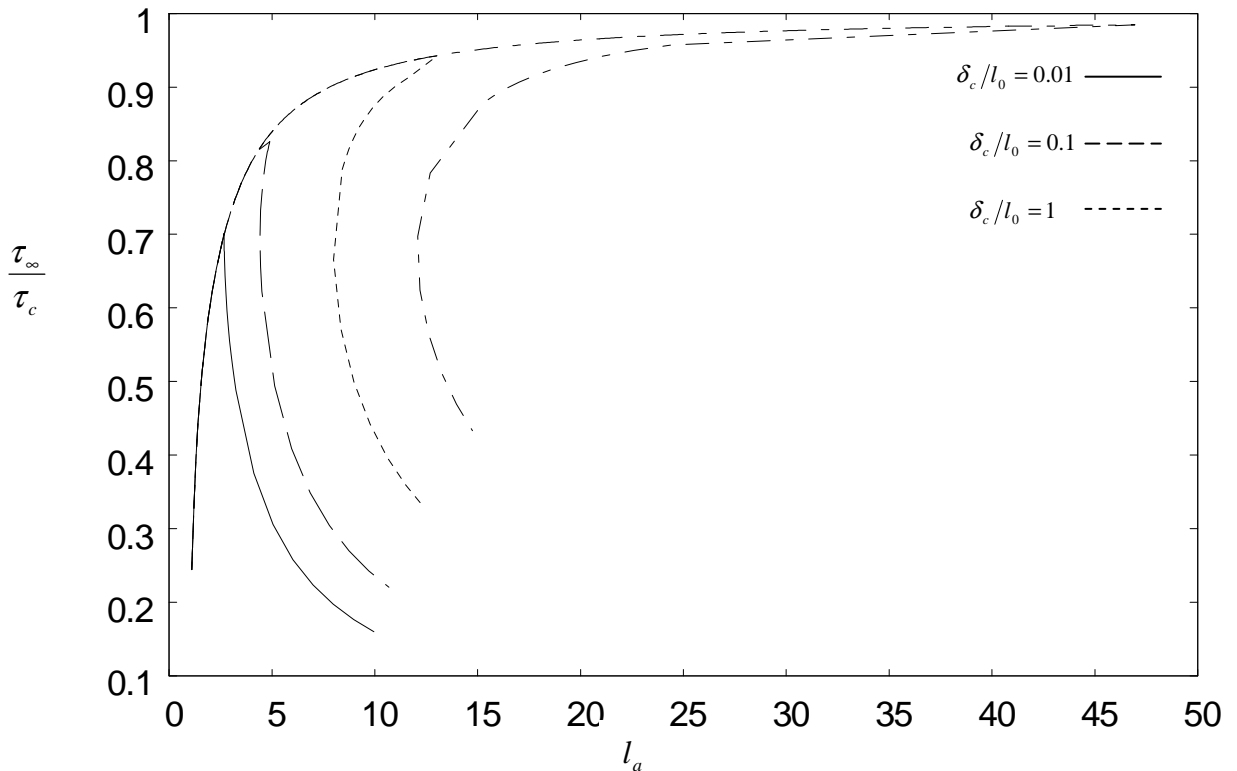


Figure 6.5 : La relation entre la charge appliquée et la position de la pointe de la fissure pour différentes valeurs de δ_c/l_0 .

6.5. Discussion des résultats

Dans les figures 6.3, 6.4 et 6.5, on présente l'évolution de la charge appliquée τ_∞ , en fonction de la position de la pointe cohésive l_a , pour différentes valeurs de μ_1/μ_2 , de h/l_0 et de δ_c/l_0 . Pour toutes les courbes, la partie croissante correspondant à la phase cohésive, est due au fait que la charge appliquée doit croître pour équilibrer les forces cohésives qui augmentent avec la propagation de la fissure cohésive. La partie décroissante correspond à la phase de propagation, est due à la relaxation de la structure provoquée par l'accroissement de la fissure non-cohésive. Pour les trois courbes le chargement

maximum est la charge de la rupture correspondant au début de la propagation de la fissure initiale.

Dans la figure 6.3, on voit que la charge de rupture croît avec le rapport μ_1/μ_2 . Puisque μ_1 et μ_2 représentent les rigidités du revêtement et du substrat, on en conclut que plus le revêtement est rigide plus l'interface est résistant à la propagation des fissures.

Dans la figure 6.4, on observe que la charge de rupture augmente avec le rapport h/l_0 , h et l_0 sont l'épaisseur du revêtement et la longueur de la fissure initiale. Ce résultat veut dire que plus l'épaisseur du revêtement est importante plus l'interface est résistant.

Sur la figure 6.5, nous observons que la contrainte de rupture est une fonction croissante de δ_c/l_0 et tend vers τ_c lorsque la taille de la fissure initiale l_0 est petite devant la longueur caractéristique du modèle de Dugdale δ_c . Ce résultat confirme les résultats obtenus par (Ferdjani et al 2006a, 2006b, 2007 et 2009) [38] [39] [40] et [41], pour le cas d'une plaque fissurée ou une plaque trouée, sous une traction uniforme, et pour une fissure dans un demi plan sous chargement antiplan. La conclusion que l'on peut tirer est qu'avec la loi de fissuration de Dugdale la charge de rupture des structures contenant des défauts de petite taille (par rapport la longueur caractéristique δ_c) tend vers la charge critique du matériau. En d'autres termes, avec le modèle de Dugdale en particulier et le modèle des forces cohésives en général, les structures sont insensibles aux défauts de petite taille, et se comportent comme des structures saines.

CHAPITRE 7 : COMPARAISON ENTRE LES MODELES DE DUGDALE ET DE GRIFFITH

Dans ce chapitre, on effectue une comparaison entre les résultats obtenus avec les modèles de Dugdale et de Griffith. Le problème traité est le même que celui traité dans les chapitres précédents. A savoir, étudier la propagation d'une fissure interfaciale sous chargement antiplan. Nous étudions plus particulièrement la convergence du modèle de Dugdale vers le modèle de Griffith lorsque la longueur caractéristique δ_c tend vers 0. En effet, nous observons sur la Figure 7.1, que la densité d'énergie de surface du modèle de Dugdale tend vers celle du modèle de Griffith lorsque δ_c tend vers 0. Nous allons donc faire un calcul avec le modèle de Griffith, et plusieurs calculs avec le modèle de Dugdale en maintenant G_c fixe et en faisant tendre δ_c vers 0, puis comparer les résultats obtenus.

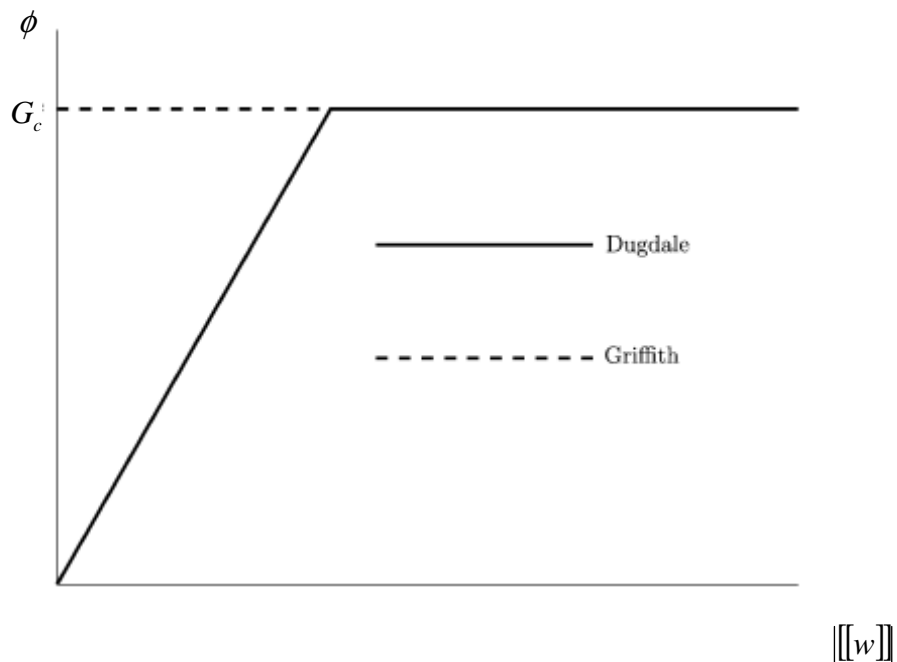


Figure 7.1 : Energie de surface en fonction du saut de déplacement.

Nous présentons tout d'abord dans le cas de Griffith les équations du

problème, l'équation intégrale, et la résolution numérique. Dans le cas de Dugdale, les équations ont déjà été présentées dans les Chapitres III, IV et V.

7.1. Equations du problème

La structure et le chargement initial sont expliqués au Chapitre III. Nous supposons que la fissure initiale $D = [-l_0, l_0] \times \{0\}$ se propage horizontalement. On note pour un chargement donné les nouvelles pointes de la fissure $\pm l$, la nouvelle fissure sera notée $\Gamma = [-l, l] \times \{0\}$. Dans le cas de Griffith, il n'existe pas de forces cohésives, par conséquent, toute la fissure est non cohésive. Comme précédemment (Chapitre III), on utilise le principe de superposition, pour décomposer le problème en un problème homogène et un problème non homogène. Nous étudions dans la suite le problème non homogène représenté sur la figure 7.2.

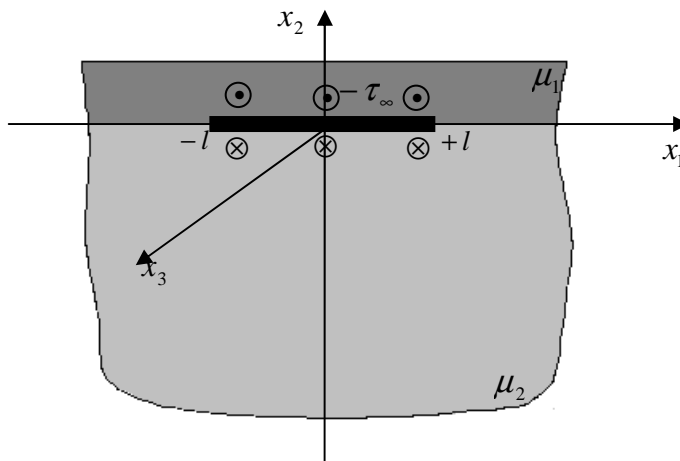


Figure 7.2 : Structure et chargement dans le cas de Griffith .

Le champ des déplacements ainsi que le champ des contraintes à l'équilibre sous le chargement τ_∞ sont donc solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \mu_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} = \mu_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} = -\tau_\infty \quad \text{sur } \Gamma \\ \tau_{23} = 0 \quad \text{sur } x_2 = h \\ \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \tau_{23} = 0 \end{array} \right. \quad (7.1)$$

Le critère de propagation de la fissure est le critère classique de Griffith : $G = G_c$.

7.2. Equation intégrale et résolution

En procédant de la même manière qu'au Chapitre IV, nous établissons l'équation intégrale suivante :

$$\int_{-l}^{+l} \left[\frac{1}{t - x_1} + k(x_1, t) \right] \psi(t) dt = - \frac{\pi(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2} \tau_\infty \quad |x_1| < l \quad (7.2)$$

Avec la condition :

$$\int_{-l}^l \psi(t) dt = 0 \quad (7.3)$$

L'équation intégrale (7.2) est la même que (4.53) (Chapitre IV), la seule différence réside dans le second membre qui est constant dans ce cas, au lieu d'être discontinu dans le cas de Dugdale. $\psi(t)$ et $k(x_1, t)$ ont les mêmes définitions qu'au Chapitre IV (équations 4.18 et 4.54).

Pour résoudre cette équation intégrale, nous devons changer le domaine d'intégration de $[-l, l]$ à $[-1, 1]$. Nous définissons d'abord les quantités normalisées suivantes :

$$r = \frac{x_1}{l}, \quad s = \frac{t}{l}, \quad \psi(t) = f(s), \quad k(x_1, t) = L(r, s) \quad (7.4)$$

En injectant (7.4) dans (7.2), l'équation intégrale devient :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{s - r} + l_a L(r, s) \right] f(s) ds = - \frac{(\mu_2 + \mu_1) \tau_\infty}{\mu_2 \mu_1}, \quad |r| \leq 1 \quad (7.5)$$

Avec la condition:

$$\int_{-1}^{+1} f(t) dt = 0 \quad (7.6)$$

La fonction inconnue $f(s)$ a des singularités intégrables en points ± 1 . La solution de l'équation intégrale singulière (7.5) peut être exprimé comme: $f(s) = w(s) \cdot \varphi(s)$ où $w(s) = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}}$ est la fonction poids associé au polynôme de Chebychev de premier ordre $T_n(s) = \cos(n \cdot \arccos(s))$ et $\varphi(s)$ est une fonction continue et bornée sur l'intervalle $[-1, 1]$, laquelle peut être exprimé comme une série des polynômes de Chebychev du premier ordre. Donc, la solution de l'équation (7.5) peut s'exprimer comme suit:

$$f(s) = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot T_{2n-1}(s) \approx (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^N A_n \cdot T_{2n-1}(s) \quad (7.7)$$

Dans (7.7) nous n'avons pris que les polynômes de Chebychev à indice impair, car $T_{2n-1}(-s) = -T_{2n-1}(s)$, et $f(s)$ est une fonction impaire à cause de la symétrie du problème.

En remplaçant l'équation (7.7) dans l'équation (7.4), on obtient :

$$\sum_{n=1}^N A_n [U_{2n-2}(r) + H_n(r)] = -\frac{(\mu_2 + \mu_1)\tau_{\infty}}{\mu_2\mu_1}, |r| \leq 1 \quad (7.8)$$

où:

$$H_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} lL(r, s) T_{2n-1}(s) ds \quad (7.9)$$

On observe qu'avec l'expression (7.7), la condition (7.6) est automatiquement vérifiée.

On peut résoudre l'équation (7.8), en sélectionnant N points de collocation (les racines de T_{2N-1}), donnés par :

$$r_j = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2(2N-1)}\right), j = 1, \dots, N \quad (7.10)$$

En écrivant (7.8) pour les points de collocation donnés par l'équation (7.10), on obtient le système de N équations avec N inconnues, (A_1, \dots, A_N) , suivant:

$$\sum_{n=1}^N A_n [U_{2n-2}(r_j) + H_n(r_j)] = -\frac{(\mu_2 + \mu_1)\tau_\infty}{\mu_2\mu_1}, \quad j = 1, \dots, N \quad (7.11)$$

La valeur de N du système d'équations (7.11) sera déterminée à l'aide d'une étude de convergence.

De la même manière qu'au Chapitre V, on peut montrer que le Facteur d'Intensité de Contrainte k_3 est donné par :

$$k_3(\pm l) = -\sqrt{l} \frac{\mu_2\mu_1}{(\mu_2 + \mu_1)} \sum_{n=1}^N A_n \quad (7.12)$$

7.3. Mise en œuvre numérique

Le critère de propagation dans ce cas est le critère classique de Griffith : $G = G_c$. Nous devons calculer le taux de restitution d'énergie potentielle élastique G à partir du k_3 en utilisant la formule d'IRWIN. Cette formule en mode III pour une fissure d'interface est donnée par (voir Annexe) :

$$G = \frac{k_3^2}{4} \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1\mu_2} \right) \quad (7.13)$$

A partir de l'équation précédente et du critère de Griffith, on déduit le F.I.C critique, correspondant à la propagation de la fissure :

$$k_3^c = \sqrt{\frac{4G_c\mu_1\mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)}} \quad (7.14)$$

Nous allons calculer la charge de rupture de la structure correspondant à la propagation de la fissure pour différentes longueurs de fissure. La procédure numérique utilisée est la suivante :

1. On se donne une valeur initiale de l .
2. On pose $\tau_\infty = 1$, on résout le système d'équations (7.11) et on calcule k_3 à l'aide de l'équation (7.12).
3. En utilisant la linéarité du problème élastique, on calcule τ_∞ correspondant à $k_3 = k_3^c$ avec la formule suivante :

$$\tau_{\infty} = \frac{k_3^c}{k_3} \quad (7.15)$$

où k_3 et k_3^c sont donnés par (7.12) et (7.14) respectivement .

4. On incrémente l et on revient en 2.

7.4. Application numérique

Pour les deux cas : Griffith et Dugdale, nous fixons certains paramètres du problème aux valeurs suivantes :

$$\mu_1 = 1000MPa, \mu_2 = 2000MPa, h = 1mm, G_c = 72 \cdot 10^{-3} N/mm.$$

Dans le cas de Dugdale, nous effectuons plusieurs calculs en faisant tendre δ_c vers 0. Nous considérons les valeurs suivantes de δ_c : 0.001, 0.0001 et 0.00001 mm .

Pour chaque valeur de δ_c , nous calculons la contrainte critique τ_c en utilisant la relation suivante :

$$\tau_c = \frac{G_c}{\delta_c}$$

7.4.1. Détermination de N dans le cas de Griffith

On fixe la valeur de n à 120, et on considère la valeur du facteur d'intensité de contraintes pour différentes valeurs de N . Le calcul de K_3 se fait à l'aide de l'équation (7.12), les différents paramètres sont fixés aux valeurs suivantes :

$$l = 20mm, \mu_1 = 1000MPa, \mu_2 = 2000MPa$$

Les valeurs obtenues sont représentées sur le graphe de la figure 7.3.

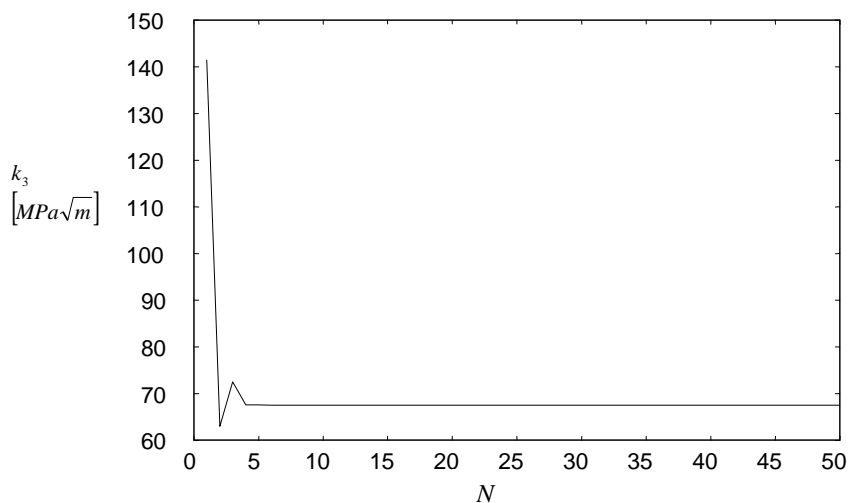


Figure 7.3 : Valeur de k_3 en fonction de nombre d'itérations N dans le cas de Griffith.

La figure 7.3 , montre qu'à partir de $N = 5$, k_3 se converge.

7.4.2. Résultats

On présente sur la même courbe les résultats pour les modèles de Dugdale et de Griffith (figure 7.4).

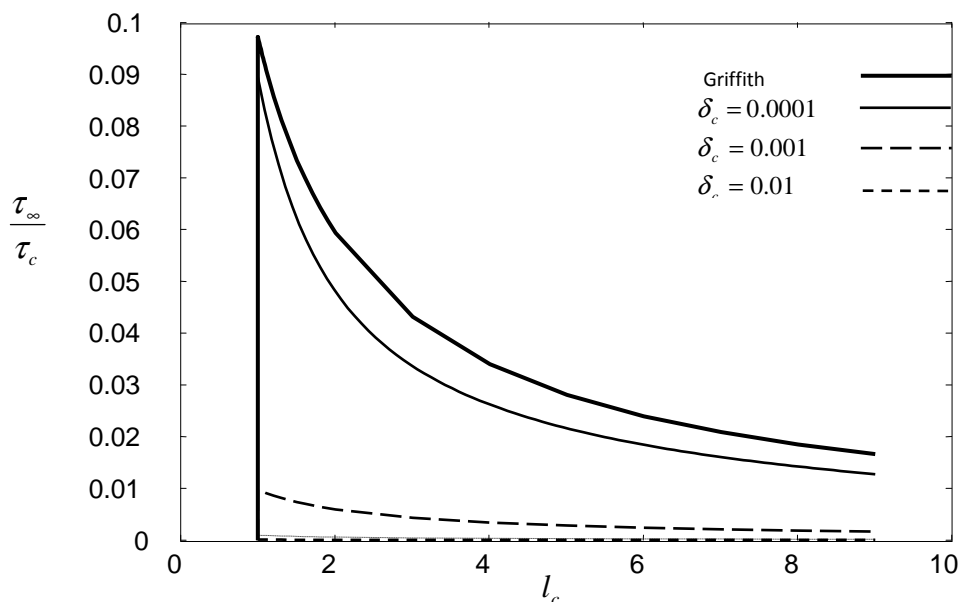


Figure 7.4 : la charge de rupture de la structure correspondant à la propagation de la fissure en fonction de la longueur de fissure (modèle de Dugdale)

Nous observons que les courbes du modèle de Dugdale convergent vers la courbe du modèle de Griffith lorsque la longueur caractéristique δ_c tend vers 0. Ce résultat est en conformité avec la convergence de la densité d'énergie de surface de type Dugdale vers celle du modèle de Griffith lorsque δ_c tend vers 0.

CONCLUSION

Le travail présenté dans cette thèse s'est articulé autour de quatre grandes parties, revenons rapidement sur les principaux résultats.

Tout d'abord l'établissement de l'équation d'équilibre et les conditions aux limites du problème d'une fissure interfaciale sous chargement antiplan. On a adopté l'hypothèse d'une énergie de surface de type Dugdale, avec une ouverture de la fissure en mode III. Nous avons montré, en utilisant la formulation variationnelle que la fissure créée comporte deux zones, une zone cohésive et une zone non-cohésive.

Nous avons ensuite réduit les équations du problème à une équation intégrale singulière de Cauchy du premier ordre, par l'utilisation de la transformée de Fourier selon les travaux d'Erdogan.

Nous avons ensuite présenté la méthode de résolution de l'équation intégrale singulière en suivant encore les travaux d'Erdogan, et en utilisant les polynômes de Chebychev, et nous avons présenté quelques applications numériques.

Dans un premier temps, nous avons étudié l'évolution de la fissure avec le chargement appliqué en faisant varier un certain nombre de paramètres : l'influence de la différence de rigidité entre le revêtement et le substrat, l'influence de la taille relative de la fissure par rapport à l'épaisseur du revêtement, et l'influence de la taille relative de la fissure par rapport à la longueur caractéristique du modèle de Dugdale.

Dans toutes les courbes que nous avons tracées pour ces applications, nous avons observé que la partie croissante correspondant à la phase cohésive, est due au fait que la charge appliquée doit croître pour équilibrer les forces cohésives qui augmentent avec la propagation de la fissure cohésive. La partie

décroissante correspondant à la phase de propagation, est due à la relaxation de la structure provoquée par l'accroissement de la fissure non-cohésive. Nous avons vu que la charge de rupture croît avec le rapport μ_1/μ_2 donc nous avons conclu que plus le revêtement est rigide plus l'interface est résistant à la propagation des fissures.

Nous avons observé ensuite que la charge de rupture augmente avec le rapport h/l_0 qui nous a permis de dire que plus l'épaisseur du revêtement est importante plus l'interface est résistant.

Par la suite nous avons observé que la contrainte de rupture est une fonction croissante de δ_c/l_0 et tend vers τ_c lorsque la taille de la fissure initiale l_0 est petite devant la longueur caractéristique du modèle de Dugdale δ_c , ce qui a confirmé les résultats obtenus par Ferdjani et al. A savoir, qu'avec la loi de fissuration de Dugdale et plus généralement avec le modèle des forces cohésives, la charge de la rupture des structures contenant des défauts de petite taille (par rapport la longueur caractéristique δ_c) tend vers la charge critique du matériau, et donc les structure sont insensibles aux défauts de petite taille, et se comportent comme ses structures saines.

Dans un deuxième temps, nous avons effectué une comparaison entre les résultats obtenus avec les modèles de Dugdale et de Griffith. Nous avons étudié l'évolution de la charge de rupture avec la longueur de la fissure pour différentes longueurs de fissure tout d'abord avec le modèle de Dugdale, et pour différentes valeurs de la longueur caractéristique δ_c , ensuite nous avons fait un seul calcul avec le modèle de Griffith.

Nous avons observé sur les courbes, que plus δ_c tend vers 0, plus les résultats de Dugdale se rapprochent des résultats de Griffith. Cela confirme la convergence observée entre les courbes des densité d'énergie de surface pour les modèles de Dugdale et de Griffith lorsque δ_c tend vers 0.

APPENDICE A

LISTE DES SYMBOLES

- σ_c : Contrainte critique (caractéristique du matériau).
- σ_n : Contrainte normale d'interaction entre les lèvres de la fissure.
- σ_t : Contrainte tangentielle d'interaction entre les lèvres de la fissure.
- δ_c : Ouverture critique de rupture (caractéristique des modèles cohésive).
- δ_n : Discontinuité du déplacement normale.
- δ_t : Discontinuité du déplacement tangentielle.
- G : Taux de restitution d'énergie.
- G_c : Taux de restitution d'énergie critique.
- ϕ : Densité d'énergie de surface.
- $\partial\Omega_D$: La partie de la frontière où les déplacements sont imposés
- $\partial\Omega_F$: La partie de la frontière où les forces sont imposées
- $w(x, y)$: Champ de déplacement
- x_1 : Direction parallèle a la fissure
- x_2 : Direction normale a la fissure.
- τ_{13} : Contrainte de cisaillement appliquée sur les lèvres de la fissure dans la direction x_1 .
- τ_{23} : Contrainte de cisaillement appliquée sur les lèvres de la fissure dans la direction x_3 .
- Ω : Domaine du milieu bidimensionnel semi infini

- D : La fissure (défaut).
 h : Profondeur de la fissure.
 μ_1 : Module de cisaillement du matériau (1) .
 μ_2 : Module de cisaillement du matériau (2) .
 l : Position de la pointe de fissure(Griffith)
 l_0 : Position de la pointe de fissure initial .
 l_a : Position de la zone non cohésive .
 l_c : Position de la zone cohésive.
 K_3 : Facteur d'intensité de contrainte en mode III.
 τ_r : Contrainte de rupture .
 Γ : La fissure .
 Γ_c : Partie cohésive de la fissure .
 Γ_0 : Partie non cohésive de la fissure .
 $\hat{f}(\omega)$: Transformée de Fourier de $f(x)$.
 $\psi(x_1)$: La fonction densité .
 $\tau(x_1)$: Chargement en fonction de x_1 .
 $K(x_1, t)$: Noyau de l'équation intégrale .
 T_n : Polynôme de Chebychev de premier ordre .
 w : La fonction poids associée au polynôme de Chebychev de premier ordre .
 U_n : Polynômes de chebyshev de second ordre.
 N : Nombre d'équation du système d'équations algébrique obtenu par application de la méthode de collocation sur l'équation intégrale.
 r_j : Points de collocation.
 t_k : Nœuds.
 n : Nombre de noeuds.

APPENDICE B

FORMULE D'IRWIN POUR UNE FISSURE INTERFACIALE EN MODE III

La formule d'IRWIN donne la relation entre le taux de restitution d'énergie élastique G et les singularités en pointe de fissure. Nous allons établir cette relation en utilisant l'intégrale de RICE J , sachant que $J = G$ en élasticité linéaire (voir Leblond 1994, par exemple). L'intégrale de RICE est définie par :

$$J = \int_{\Gamma} (Un_1 - \sigma_{ij}u_{i,1}n_j) ds$$

Où Γ est un contour entourant la pointe de la fissure, n est la normale extérieure au contour, et U est la densité d'énergie de déformation.

En utilisant la propriété d'invariance de J par rapport à Γ , nous choisissons comme contour un cercle de rayon infiniment petit (voir Figure A.1).

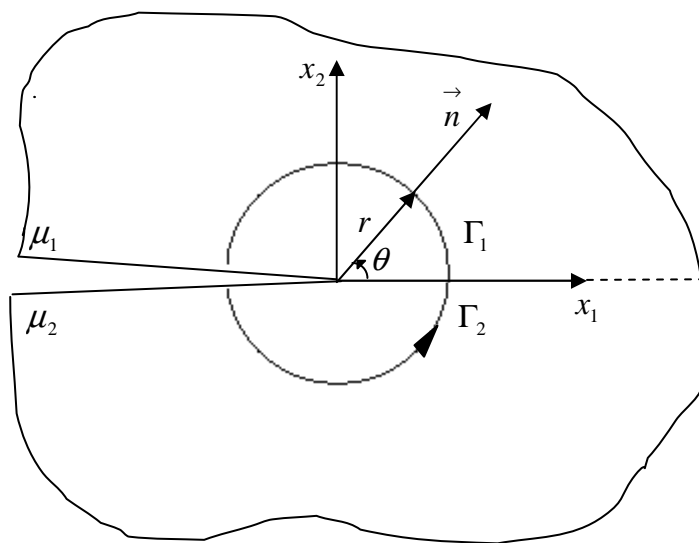


Figure A.1 : contour choisi pour le calcul de J .

En élasticité antiplane, et tenant compte de l'hétérogénéité du milieu, J s'écrit de la manière suivante :

$$J = \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\mu_1}{2} \nabla w \nabla w n_1 - \mu_1 \frac{\partial w}{\partial n_1} w_{,1} \right) ds + \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\mu_2}{2} \nabla w \nabla w n_1 - \mu_2 \frac{\partial w}{\partial n_2} w_{,1} \right) ds \quad (\text{A-1})$$

où : Γ_1 , Γ_2 représentent les parties de Γ contenues dans les domaines correspondant aux matériaux 1 et 2 (voir Figure), w représente la composante non nulle du déplacement (suivant x_3) et ∇ représente l'opérateur gradient.

Puisque on est proche de la pointe, le déplacement w peut être remplacé par sa forme asymptotique en pointe de fissure, qui, dans le cas d'une fissure interfaciale est donnée par :

$$w = k_3 \sqrt{2r} f(\theta) \quad (\text{A-2})$$

Avec :

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \frac{1}{\mu_2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\pi \leq \theta \leq 0 \end{cases}$$

En injectant (A-2) dans (A-1), en développant les calculs et en utilisant les coordonnées polaires, on aboutit au résultat suivant :

$$J = G = \frac{k_3^2 \pi}{4} \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right),$$

ce qui établit la formule d'IRWIN.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Erdogan, F., International Journal of Solids and Structures, V 2, n°2,(July 1966), 447-465 .
2. Erdogan, F., Engineering Fracture Mechanics, V 3, n°10, (October 1971), 231-240 .
3. Erdogan, F., K. Arin., International Journal of Engineering Science,V10,n°2, (February 1972), 115-125 .
4. Lowengrub,M., Sneddon, I.N. ,International Journal of Engineering Science,V10 ,n°10, (October 1972), 899-913 .
5. Erdogan,F., Biricikoglu,V., International Journal of Engineering Science, V11, n°7,(July 1973), 745-766 .
6. Lowengrub,M., Sneddon,I.N., International Journal of Engineering Science, V11, n°9, (September 1973), 1025-1034 .
7. Laverne,J., “Formulation énergétique de la rupture par les modèles de forces cohésives : considérations théoriques et implantations numériques” thèse de Doctorat , Université Paris XIII , France 2004 .
8. Dugdale, D. S. , “Yielding of steel sheets containing slits”. J. Mech. Phys. Solids 8: 100- 108 (1960).
9. Barenblatt,G. I ., “The mathematical theory if equilibrium cracks in brittle fracture”,Adv. Appl. Mech., 7, pp. 55-129 (1962).
10. Hillerborg, A., Modeer, M. and Petersson,P. E., “Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements”, Cement and Concrete Research 6(6):163-8 (1976.).
11. Needleman, A. , “A continuum model for void nucleation by inclusion debonding”. J of Appl. Mechanics, 54 , 525-531 (1987).
12. Rice, J. R. and Wang, J.S., “Embrittlement of interfaces by solute segregation”, Materials Science and Engineering ,107, 23-40 (1989).
13. Tvergaard, V., “Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal”, Mater. Sci. Eng. 125, 203-213 (1990).
14. Chaboche , J. L., Girard, R. and Schaff, A., “Numerical analysis of composite système by using interphase/interface models”. Computational Mechanics, 20, 3-11 (1997).

15. Chaboche , J. L., Feyel, F. and Monerie, Y., "Interface debonding models : a viscous regularization with a limited rate dependency", *Int. J. Solids Struct.*, 38 3127-3160 (2001).
16. Suquet,P. , "Discontinuities and plasticity". In : Moreau J.J., Panagiotopoulos P.D. (Eds.), *Nonsmooth Mechanics and Applications*. Springer, Berlin,280-340 (1987).
17. Michel, J. C. , Suquet, P. et Thebaud,F., "Une modélisation du rôle des interfaces dans le comportement des composites à matrice métallique". *Revue Européenne des Eléments Finis*, 3 (4) 573-595 (1994).
18. Leblond, J.B. ,"Mécanique de la rupture fragile "Ecole Polytechnique, Edition (1994)
19. Griffith,A., "The phenomena of rupture and flow in solids". *Phil. Trans. Roy. Soc. London CCXXI-A*, 163-198 (1920).
20. Francfort, G. A . and Marigo,J. J., "Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem". *J. Mech. Phys. Solids*, 46 (8), 1319-1342 (1998).
21. Bourdin, B., "Une méthode variationnelle en mécanique de la rupture. Théorie et applications numériques". Thèse de doctorat de l'Université Paris-Nord (1998).
22. Bilteryst,F., "Une approche énergétique de la décohésion et de la multifissuration dans les composites". Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris (2000).
23. Del piero ,G. ,"One dimensional ductile-brittle transition, yielding, and structured deformations". In *Proceedings of the IUTAM Symposium "Variations de domaines et frontières libres en mécanique"*, eds. ARGOUL, P. and FRÉMOND,M. Paris, 1997, Kluwer,197-202 (1999).
24. Truskinovsky,L., "Fracture as a phase transition". *Contemporary Research in the Mechanics and Mathematics of Materials*, ed. BATRA, R. C. and BEATTY,M. F., CIMNE, Barcelona ,322- 332 (1996).
25. Charlotte ,M., "Modèles discrets de rupture". Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris (2001).
26. Charlotte,M. , Francfort,G. A . , Marigo, J. J. and Truskinovsky, L. , "Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem" : comparison of Griffith and Barenblatt surface energy models. *Proceedings of the Symposium on "Continuous Damage and Fracture"* The data science library, Elsevier, edited by BENALLAL,A. Paris , 7 18, (2000).
27. Del Piero, G., Truskinovsky,L., "Macro- and micro-cracking in one-dimensional elasticity", *International Journal of Solids and Structures* 38 (6) (2001) 1135-1138.

28. Laverne, J., Marigo, J.J., "Approche globale, minima relatifs et critère d'amorçage en mécanique de la rupture", *Comptes Rendus Mécanique* 332 (2004) 313-318.
29. Williams, M.L., "On the stress distribution at the base of a stationary crack". *ASME J. Appl. Mech.* 24, 109–114. (1957).
30. Marigo, J.J., "Cours « Mécanique de la rupture »" (2004)
31. Gurtin, T., "Théorème de Travaux Virtuels", (1981)
32. Chen, Y. F., Erdogan, F., "The interface crack problem for a nonhomogeneous coating bonded to a homogeneous substrate", *J. Mech. Phys. Solids* 44 (5) (1996) 771–787.
33. Mauch, S. "introduction to methods of applied mathematics", (2004).
34. Erdogan, F., Gupta, G. D., Cook, T., "Numerical solution of singular integral equation", in: G. C. Sih (Ed.), *Methods of analysis and solutions of crack problems*, Noordhoff International Publishing, Leyden, (1973), 368-425.
35. Ioakimidis, N. I., "The numerical solution of crack problems in plane elasticity in the case of loading discontinuities", *Engineering Fracture Mechanics* 13 (1980) 709-716.
36. Gakhov, F. D., "Boundary Value Problems", Pergamon Press and Addison-Wesley, Oxford, (1966)
37. Abramowitz, M. I. Stegun, A., *Handbook of mathematical functions*, National Bureau of Standards, Appl. Math. Series 55, 1964.
38. Ferdjani, H., Abdelmoula, R., Marigo, J.J., "Etude de l'influence des défauts de petite taille sur le comportement la rupture avec le modèle de dugdale", *Revue Européenne de Mécanique Numérique* 15 (2006) 409-425.
39. Ferdjani, H., Abdelmoula, R., Marigo, J.J., "Study of the influence of small size defects on the rupture behavior with the dugdale model", in: *Third International Conference in Mechanical Engineering and Mechanics*, (2006).
40. Ferdjani, H., Abdelmoula, R., Marigo, J.J., "Insensitivity to small defects of the rupture of materials governed by the dugdale model", *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 19 (2007) 191-210.
41. Ferdjani, H., Marigo, J.J., El Borgi, S., "Study of size effects in the Dugdale model through its case of crack in a semi infinite plane under antiplane shear loading", *Continuum mechanics and thermodynamic* (2009)