

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département de Mécanique



THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Construction Mécanique

**ANALYSE ET ETUDE DES PLAQUES COMPOSITES FGM
EN VIBRATIONS LIBRES**

Par

Amale MAHI

Devant le jury composé de :

Y. BENKHEDA	Professeur, U. de Blida	Président
E. ADDA BEDIA	Professeur, U. de Sidi Bel Abbes	Directeur de thèse
A. AIAD	Professeur, U. de Blida	Examineur
S. BERGHEUL	Professeur, U. de Blida	Examineur
Z. SEREIR	Professeur, U. d'Oran	Examineur
A. BEZAZI	Professeur, U. de Guelma	Examineur

Blida, Avril 2012

RESUME

Les matériaux à gradient fonctionnel ou à gradient de propriétés (FGM) sont une nouvelle gamme de matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants (en général, métal et céramique) à travers l'épaisseur, induisant des changements en conséquence des propriétés thermomécaniques globales de l'élément structural qu'ils constituent. Ils ont été conçus pour pallier aux problèmes engendrés par des environnements thermiques sévères. Ce travail de recherche est justement consacré à l'étude des vibrations libres des poutres et des plaques FGM soumises à des contraintes thermiques initiales. Les équations du mouvement sont développées en vertu du principe de Hamilton. Dans un premier lieu, la poutre métal-céramique est analysée sous deux formes : la poutre symétrique dont les équations sont résolues par une méthode analytique développée dans le cadre de ce travail et proposée sous deux variantes, ensuite la poutre FGM non symétrique dont les équations du mouvement sont résolues par la DQM et la méthode de Ritz. En second lieu, la plaque FGM est étudiée et analysée. Ses équations sont développées sous une forme unifiée permettant de prendre en considération n'importe quelle théorie de déformation par un simple changement de paramètre. La résolution du problème de la plaque est réalisée grâce à la méthode de Ritz. L'étude paramétrique menée, permet d'analyser l'influence de la variation de la température, de la géométrie, des conditions aux limites et de l'index de la fraction volumique du métal et de la céramique, sur les fréquences naturelles des poutres et des plaques FGM. Différents types de matériaux à gradient fonctionnel (P-FGM, E-FGM et S-FGM) sont analysés. De multiples théories de déformations en cisaillement des poutres et des plaques sont appliquées, et une nouvelle théorie d'ordre supérieur est proposée et validée par des comparaisons. Les résultats obtenus révèlent que l'effet de la variation de la température dépend des conditions aux limites imposées à la structure, qu'une élévation uniforme de la température a plus d'effet sur les fréquences naturelles qu'un gradient de température, qu'une structure mince est plus vulnérable à la température qu'une structure épaisse, que le mode fondamental est plus sensible au paramètre température que les modes d'ordre supérieur et que l'index de la fraction volumique (concentration de métal et de céramique) a aussi un effet important sur les fréquences naturelles des éléments structuraux étudiés.

ملخص

المواد ذات التدرج الوظيفي أو ذات الخصائص المادية المتغيرة بالتدرج هي مجموعة جديدة من المواد المركبة تملك تباين تدرجي ومستمر لكسور حجم كلا من المكونات (معدن وسيراميك عادة) عبر سمك الهيكل، مما يؤدي إلى تغييرات في الخصائص الميكانيكية-الحرارية للعنصر الهيكلي المتكون منها. صممت هذه المواد للتغلب على المشاكل الناجمة عن البيئات الحرارية الشديدة. و يكرس هذا البحث على وجه التحديد لدراسة الاهتزازات الحرة لروافد وصفائح مكونة من مواد ذات خصائص مادية متغيرة بالتدرج، و معرضة لضغوط حرارية أولية. في أول الأمر، يتم تحليل رافدة معدن-سيراميك في شكلين : يتم حل معادلات رافدة متناظرة باستخدام أسلوب تحليلية مطور في هذا العمل ويتوفر في خيارين ثم حل معادلات رافدة غير متناظرة باستخدام أسلوب تحليلية مطور في هذا العمل ثاني الأمر يتم دراسة وتحليل صفيحة متغيرة الخصائص بالتدرج و تطور معادلات الحركة في شكل موحد يمكن من الأخذ بالاعتبار لأي نظرية بتغيير بارامترى بسيط . يتم حل معادلات الصفيحة باستخدام طريقة "ريتز". الدراسة البارامترية المحققة تمكن من تحليل تأثير اختلاف درجة الحرارة ، هندسة الهيكل، شروط الحدود والتغير الحجمي للمكونات، على الترددات الطبيعية. من خلال هذه الأطروحة، تدرس و تحل مواد مختلفة ذات خصائص مادية متغيرة بالتدرج (وفق دالة أسية، دالة أسية لعدد طبيعي أكبر أو يساوي صفر، دالة سينية). نظريات مختلفة للتشوه بالقص تؤخذ بعين الاعتبار، كما تقترح نظرية جديدة للقص بالنسبة للروافد والصفائح ذات الخصائص المادية المتغيرة بالتدرج في اتجاه السمك و يتم التصديق عليها من قبل نظام المقارنات. أظهرت النتائج المحصل عليها أن تأثير التغير في درجة الحرارة مرتبط بشروط الحدود المفروضة على الهيكل و أن ارتفاع درجة الحرارة الموحدة لديه أكثر تأثير على الترددات الطبيعية من الارتفاع التدرجي في درجة الحرارة و أن الهيكل الرقيق أكثر عرضة لتغيرات درجة الحرارة من الهيكل السميك كما أن النمط الأساسي للاهتزازات أكثر عرضة لاختلاف درجة الحرارة من الأنماط الأخرى و أن مؤشر كسر الحجم له أيضا تأثير كبير على الترددات الطبيعية للروافد والصفائح ذات الخصائص المادية المتغيرة بالتدرج.

SUMMARY

Functionally graded materials (FGM's) are a new kind of composite materials which have a gradual and continuous variation of the volume fraction of each component (usually metal and ceramic) through the thickness direction, leading to changes of global thermo-mechanical properties of the structural element they represent. They were designed to overcome the problems caused by severe thermal environments. This research is precisely devoted to the study of free vibrations of FGM beams and plates subjected to initial thermal stresses. The equations of motion are developed using the Hamilton's principle. In first time, a metal-ceramic beam is analyzed in two forms: the symmetrical beam whose equations of motion are solved by an analytical method developed in this work and available in two variants, then the asymmetrical FGM beam whose equations of motion are solved by the DQM (differential quadrature method) and the Ritz method. In second time, is studied and analyzed an FGM plate whose equations are developed in a unified form to consider any shear deformation theory with a simple parameter's change. The problem of free vibrations of the FGM plate is solved using Ritz method. The parametric study conducted, can analyze the influence of temperature variation, geometry, boundary conditions and index of the volume fraction of metal and ceramic, on natural frequencies of FGM beams and plates. Different types of functionally graded materials (P-FGM, E-FGM and S-FGM) are analyzed. Many shear deformation theories of beams and plates are applied, and a new higher order theory is proposed and validated by comparisons. The results show that the effect of temperature change depends on the boundary conditions imposed on the structure, that a uniform temperature rise has more effect on natural frequencies than a gradient of temperature, that a thin structure is more vulnerable to temperature change than a thick one, that the fundamental mode is more sensitive to the temperature than higher order modes and that the index of the volume fraction (concentration of metal and ceramic) has also a significant effect on the natural frequencies of the structural elements studied.

TABLE DES MATIERES

RESUME	
REMERCIEMENTS	
TABLE DES MATIERES	
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	
INTRODUCTION	23
1. HISTORIQUE ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE	27
1.1. Théories de déformations des plaques	30
1.2. Etude des contraintes résiduelles	34
1.3. Analyse thermoélastique statique	35
1.4. Analyse thermomécanique du flambage	36
1.5. Etude des vibrations des poutres FGM	38
1.6. Etude des vibrations des plaques FGM	39
1.7. Synthèse de la recherche bibliographique	44
1.8. Précision sur le sujet de thèse	46
2. LES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL ET LEUR MODELISATION	47
2.1. Introduction	47
2.2. Lois de distribution des propriétés	51
2.3. Gradient de température dans l'épaisseur du FGM	62
2.4. Influence de la température sur les propriétés thermomécaniques	65
2.5. Les théories de déformation des plaques	67
2.6. Conclusion	77
3. ETUDE DES VIBRATIONS LIBRES DES POUTRES FGM PLACEES DANS UN ENVIRONNEMENT THERMIQUE	78
3.1. Introduction	78
3.2. La poutre FGM symétrique	78
3.3. La poutre FGM non symétrique	94
3.4. Conclusion	108

4. ETUDE DES VIBRATIONS LIBRES DES PLAQUES FGM PLACEES DANS UN ENVIRONNEMENT THERMIQUE	109
4.1. Introduction	109
4.2. Formulation unifiée pour la plaque FGM	110
4.3. Champ des déformations en formulation d'ordre supérieur	110
4.4. Champ des contraintes thermiques initiales	112
4.5. Energie de déformation mécanique	112
4.6. Energie due aux contraintes thermiques initiales	117
4.7. Energie cinétique	121
4.8. Application du principe de Hamilton	122
4.9. Méthode variationnelle de Ritz	131
4.10. Conclusion	144
5. RESULTATS, VALIDATION ET INTERPRETATIONS	145
5.1. Introduction	145
5.2. Poutre FGM symétrique	146
5.3. Poutre FGM non symétrique	167
5.4. Plaque FGM	186
5.5. Conclusion	225
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	228
APPENDICE	231
A. LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS	231
B. TABLEAUX DES RESULTATS DE LA PLAQUE FGM	235
BIBLIOGRAPHIE	255

REMERCIEMENTS

Ce travail est le fruit d'une collaboration entre le laboratoire des sciences aéronautiques de l'université de Blida et le laboratoire de matériaux et hydrologie de l'université de Sidi Belabbes. Je remercie les chefs et les membres de ces deux laboratoires pour m'avoir acceptée au sein de leurs équipes.

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance et mes vifs remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur ADDA BEDIA El Abbas, Professeur à l'université Djilali Liabes de Sidi Belabbes, pour m'avoir tout d'abord proposé ce sujet de recherche et prodigué de précieux conseils durant ces quatre années. Je le remercie particulièrement pour son aide et ses encouragements et je salue en lui ses hautes qualités humaines et scientifiques qui m'ont permis de toujours aller de l'avant.

Je suis grée à Monsieur Y. BENKHEDA, professeur à l'université Sâad Dahlab de Blida, pour avoir eu l'amabilité d'accepter de présider le jury. Je remercie également les Professeurs S. BERGHEUL, A. AIAD, A. BEZAZI et Z. SEREIR pour avoir bien voulu examiner mon travail.

Je remercie particulièrement mon mari, mes enfants, et mes parents qui m'ont encouragée, soutenue et supportée et qui ont dû faire beaucoup de concessions pour me permettre d'avoir du temps pour travailler. Je n'oublie pas d'exprimer ma gratitude à mes amis qui ont toujours été présents pour moi et à toutes les personnes qui m'ont aidée en contribuant au bon déroulement de ce travail.

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 2.1: Variation continue des propriétés.....	47
Figure 2.2: Variation discrète des propriétés	47
Figure 2.3: Variation continue de la microstructure (schématisée)	48
Figure 2.4: Variation continue de la microstructure (photo)	49
Figure 2.5: Variation discrète de la microstructure avec espacement non-uniforme	49
Figure 2.6: Variation multi-phases de la microstructure	50
Figure 2.7: Variation de la (micro)structure (porosité) de l'Os.....	51
Figure 2.8: Variation de la (micro)structure (porosité) du bambou.....	51
Figure 2.9: Élément structural en FGM	51
Figure 2.10: Variation de la fraction volumique du P-FGM	55
Figure 2.11: Variation de la fraction volumique du S-FGM	55
Figure 2.12: Variation du module de Young E ([Pa] x 10^{-11}) du E-FGM (SUS304- Al ₂ O ₃).....	55
Figure 2.13: Variation de la fraction volumique du P-FGM symétrique.....	57
Figure 2.14: Variation de la fraction volumique du S-FGM symétrique.....	57
Figure 2.15: Variation du module d'Young E ([Pa] x 10^{-11}) (E-FGM Al ₂ O ₃ -SUS304- Al ₂ O ₃).....	57
Figure 2.16: Profil parabolique ($n = 2$) d'un FGM Céramique-Métal (PSZ-NiCrAlY).....	58
Figure 2.17: Profil linéaire ($n = 1$) d'un FGM Céramique-Métal (PSZ-NiCrAlY).....	58
Figure 2.18: Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulaire.....	59
Figure 2.19: Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique.....	60
Figure 2.20: Variation de la température à travers l'épaisseur (P-FGM, $n = 0.5$).....	64
Figure 2.21: Variation de la température à travers l'épaisseur (P-FGM symétrique, n $= 0.5$)	65
Figure 2.22: Variation du module de Young E (Pa x 10^{-10}) dans l'épaisseur en fonction de la température T (K) (P-FGM, $n = 0.5$).....	66
Figure 2.23: Variation du coefficient de Poisson ν dans l'épaisseur en fonction de la température T (K) (P-FGM, $n = 0.5$).....	66

Figure 2.24: Variation du coefficient de dilation thermique α ($K^{-1} \times 10^5$) dans l'épaisseur en fonction de la température T (K) (P-FGM, $n = 0.5$).....	67
Figure 2.25: Variation de la conductivité thermique κ (W/m K) dans l'épaisseur en fonction de la température T (K) (P-FGM, $n = 0.5$).....	67
Figure 2.26: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques.....	68
Figure 2.27: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre.....	69
Figure 2.28: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre supérieur.....	72
Figure 2.29: Profil de variation de $\varphi(z)$ à travers l'épaisseur ($\alpha = 3/2$).....	76
Figure 2.30: Profil de variation de $d\varphi(z)/dz$ à travers l'épaisseur ($\alpha = 3/2$).....	76
Figure 3.1: Géométrie de la poutre FGM symétrique.....	79
Figure 3.2: Géométrie de la poutre FGM non symétrique.....	94
Figure 4.1: Géométrie de la plaque FGM non symétrique.....	109
Figure 4.2: Composantes du vecteur des contraintes.....	111
Figure 4.3: Composantes des efforts normaux et de cisaillement en plan.....	116
Figure 4.4: Composantes des efforts de cisaillement transverse.....	116
Figure 4.5: Composantes des moments de flexion et de torsion.....	116
Figure 4.6: Les 8 premiers termes des fonctions trigonométriques hiérarchiques.....	138
Figure 4.7: Les 7 premiers polynômes de Chebyshev de 1 ^{ère} espèce.....	140
Figure 4.8: Les 7 premiers polynômes de Legendre de 1 ^{ère} espèce.....	141
Figure 5.1: Variation du module de Young E ($Pa \times 10^{-11}$) en fonction de T au niveau des faces externes (Poutre FGM, SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304).....	147
Figure 5.2: Variation du module de Young E ($Pa \times 10^{-11}$) en fonction de T au niveau du plan neutre (Poutre FGM, SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304).....	147
Figure 5.3: Variation du module de cisaillement G ($Pa \times 10^{-11}$) en fonction de T au niveau des faces externes (Poutre FGM, SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304).....	147
Figure 5.4: Variation du module de cisaillement G ($Pa \times 10^{-11}$) en fonction de T au niveau du plan neutre (Poutre FGM, SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304).....	147
Figure 5.5: Variation de la 1 ^{ère} fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 5$, $T_b = T_t = 313K$), Poutre FGM symétrique appuyée-appuyée.....	153

Figure 5.6: Variation de la 1ère fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 20$, $T_b = T_t = 313K$), Poutre FGM symétrique appuyée-appuyée.....	153
Figure 5.7: Variation de la 5 ^{ème} fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 5$, $T_b = T_t = 313K$), Poutre FGM symétrique appuyée-appuyée.....	154
Figure 5.8: Variation de la 5 ^{ème} fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 20$, $T_b = T_t = 313K$), Poutre FGM symétrique appuyée-appuyée	154
Figure 5.9: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre P-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée ($L/h = 5$, $T_b = T_t = 313K$)	155
Figure 5.10: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre P-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, ($L/h = 20$, $T_b = T_t = 313K$)	156
Figure 5.11: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre S-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée ($L/h = 5$, $T_b = T_t = 313K$)	156
Figure 5.12: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre S-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, ($L/h = 20$, $T_b = T_t = 313K$)	157
Figure 5.13: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre E-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, ($L/h = 5$, $T_b = T_t = 313K$)	157
Figure 5.14: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre E-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, ($L/h = 20$, $T_b = T_t = 313K$)	158
Figure 5.15: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $n = 0.5$, $L/h = 5$	159
Figure 5.16: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $n = 0.5$, $L/h = 5$	159

Figure 5.17: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $n = 0.5$, $L/h = 20$	160
Figure 5.18: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $n = 0.5$, $L/h = 20$	160
Figure 5.19: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $n = 1.5$, $L/h = 5$	161
Figure 5.20: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $n = 1.5$, $L/h = 5$	161
Figure 5.21: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $n = 1.5$, $L/h = 20$	162
Figure 5.22: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $n = 1.5$, $L/h = 20$	162
Figure 5.23: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $p = 2$, $L/h = 5$	163
Figure 5.24: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $p = 2$, $L/h = 5$	163
Figure 5.25: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $p = 2$, $L/h = 20$	164
Figure 5.26: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $p = 2$, $L/h = 20$	164
Figure 5.27: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $p = 3$, $L/h = 5$	165

Figure 5.28: Effet de la température sur la 5 ^{ème} fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $p = 3$, $L/h = 5$	165
Figure 5.29: Effet de la température sur la 1 ^{ère} fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $p = 3$, $L/h = 20$	166
Figure 5.30: Effet de la température sur la 5 ^{ème} fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃ -SUS304) appuyée-appuyée, $p = 3$, $L/h = 20$	166
Figure 5.31: Variation du module de Young E (Pa x 10 ⁻¹¹) en fonction de T au niveau de la face supérieure (Poutre FGM, SUS304-Al ₂ O ₃).....	168
Figure 5.32: Variation du module de Young E (Pa x 10 ⁻¹¹) en fonction de T au niveau de la face inférieure (Poutre FGM, SUS304-Al ₂ O ₃).....	168
Figure 5.33: Variation du module de cisaillement G (Pa x 10 ⁻¹¹) en fonction de T au niveau de la face supérieure (Poutre FGM, SUS304-Al ₂ O ₃).....	168
Figure 5.34: Variation du module de cisaillement G (Pa x 10 ⁻¹¹) en fonction de T au niveau de la face inférieure (Poutre FGM, SUS304-Al ₂ O ₃).....	168
Figure 5.35: Variation de la 1 ^{ère} fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 5$, $T_b = 293K$ & $T_t = 313K$), Poutre FGM appuyée-appuyée.....	175
Figure 5.36: Variation de la 1 ^{ère} fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 20$, $T_b = 293K$ & $T_t = 313K$), Poutre FGM appuyée-appuyée.....	175
Figure 5.37: Variation de la 5 ^{ème} fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 5$, $T_b = 293K$ & $T_t = 313K$), Poutre FGM appuyée-appuyée.....	176
Figure 5.38: Variation de la 5 ^{ème} fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 20$, $T_b = 293K$ & $T_t = 313K$), Poutre FGM appuyée-appuyée.....	176
Figure 5.39: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre P-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃) appuyée-appuyée, ($L/h = 5$, $T_b = 293K$ & $T_t = 313K$).....	177

Figure 5.40: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre P-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃) appuyée-appuyée, ($L/h = 20, T_b = 293K \& T_t = 313K$).....	177
Figure 5.41: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre S-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃) appuyée-appuyée, ($L/h = 5, T_b = 293K \& T_t = 313K$).....	178
Figure 5.42: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre S-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃) appuyée-appuyée, ($L/h = 20, T_b = 293K \& T_t = 313K$).....	178
Figure 5.43: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre E-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃) appuyée-appuyée, ($L/h = 5, T_b = 293K \& T_t = 313K$).....	179
Figure 5.44: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre E-FGM (SUS304-Al ₂ O ₃) appuyée-appuyée, ($L/h = 20, T_b = 293K \& T_t = 313K$).....	179
Figure 5.45: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle (nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$, poutre FGM SUS304-Al ₂ O ₃ , appuyée-appuyée, $L/h = 5$)	180
Figure 5.46: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle (nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$, poutre FGM SUS304-Al ₂ O ₃ , appuyée-appuyée, $L/h = 5$)	180
Figure 5.47 : Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle pour différentes conditions aux limites (nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$, poutre P-FGM SUS304-Al ₂ O ₃ , $n = 0.5, L/h = 5$).....	181
Figure 5.48 : Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle pour différentes conditions aux limites (nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$, poutre P-FGM SUS304-Al ₂ O ₃ , $n = 0.5, L/h = 5$).....	182
Figure 5.49 : Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle pour différentes conditions aux limites (nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$, poutre P-FGM SUS304-Al ₂ O ₃ , $n = 0.5, L/h = 20$).....	182
Figure 5.50 : Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle pour différentes conditions aux limites (nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$, poutre P-FGM SUS304-Al ₂ O ₃ , $n = 0.5, L/h = 20$).....	183

Figure 5.51: Variation du module de Young E ($\text{Pa} \times 10^{-11}$) en fonction de la température T au niveau de la face supérieure (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄)	187
Figure 5.52: Variation du module de Young E ($\text{Pa} \times 10^{-11}$) en fonction de la température T au niveau de la face inférieure (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄)	187
Figure 5.53: Variation du module de cisaillement G ($\text{Pa} \times 10^{-10}$) en fonction de la température T au niveau de la face supérieure (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄)	187
Figure 5.54: Variation du module de cisaillement G ($\text{Pa} \times 10^{-10}$) en fonction de la température T au niveau de la face inférieure (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄)	187
Figure 5.55: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale, ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300\text{K}$, $T_t = 300\text{K}$, Plaque P-FGM)	198
Figure 5.56: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300\text{K}$, $T_t = 300\text{K}$, Plaque P-FGM).....	198
Figure 5.57: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300\text{K}$, $T_t = 400\text{K}$, Plaque P-FGM)	199
Figure 5.58: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300\text{K}$, $T_t = 400\text{K}$, Plaque P-FGM).....	199
Figure 5.59: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300\text{K}$, $T_t = 500\text{K}$, Plaque P-FGM)	200
Figure 5.60: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300\text{K}$, $T_t = 500\text{K}$, Plaque P-FGM).....	200
Figure 5.61: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300\text{K}$, $T_t = 600\text{K}$, Plaque P-FGM)	201
Figure 5.62: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300\text{K}$, $T_t = 600\text{K}$, Plaque P-FGM).....	201
Figure 5.63: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 300\text{K}$, $T_t = 300\text{K}$, Plaque P-FGM)	202
Figure 5.64: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 300\text{K}$, $T_t = 300\text{K}$, Plaque P-FGM).....	202

Figure 5.65: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 300K, T_t = 400K$, Plaque P-FGM)	203
Figure 5.66: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 300K, T_t = 400K$, Plaque P-FGM).....	203
Figure 5.67: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 300K, T_t = 500K$, Plaque P-FGM)	204
Figure 5.68: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 300K, T_t = 500K$, Plaque P-FGM).....	204
Figure 5.69: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 300K, T_t = 600K$, Plaque P-FGM)	205
Figure 5.70: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 300K, T_t = 600K$, Plaque P-FGM).....	205
Figure 5.71: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 300K, T_t = 700K$, Plaque P-FGM)	206
Figure 5.72: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 300K, T_t = 700K$, Plaque P-FGM).....	206
Figure 5.73: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.05, a/b = 1, T_b = 400K, T_t = 400K$, Plaque P-FGM)	207
Figure 5.74: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05, a/b = 1, T_b = 400K, T_t = 400K$, Plaque P-FGM).....	207
Figure 5.75: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.05, a/b = 1, T_b = 500K, T_t = 500K$, Plaque P-FGM)	208
Figure 5.76: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05, a/b = 1, T_b = 500K, T_t = 500K$, Plaque P-FGM).....	208
Figure 5.77: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.05, a/b = 1, T_b = 600K, T_t = 600K$, Plaque P-FGM)	209
Figure 5.78: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05, a/b = 1, T_b = 600K, T_t = 600K$, Plaque P-FGM).....	209
Figure 5.79: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 400K, T_t = 400K$, Plaque P-FGM)	210

Figure 5.80: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 400K, T_t = 400K, \text{Plaque P-FGM}$).....	210
Figure 5.81: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 500K, T_t = 500K, \text{Plaque P-FGM}$)	211
Figure 5.82: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 500K, T_t = 500K, \text{Plaque P-FGM}$).....	211
Figure 5.83: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 600K, T_t = 600K, \text{Plaque P-FGM}$)	212
Figure 5.84: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 600K, T_t = 600K, \text{Plaque P-FGM}$).....	212
Figure 5.85: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 700K, T_t = 700K, \text{Plaque P-FGM}$)	213
Figure 5.86: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 700K, T_t = 700K, \text{Plaque P-FGM}$).....	213
Figure 5.87: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCC, $h/a = 0.05, a/b = 1, \text{gradient de température}$)	215
Figure 5.88: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCC, $h/a = 0.2, a/b = 1, \text{gradient de température}$)	215
Figure 5.89: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM SSSS, $h/a = 0.05, a/b = 1, \text{gradient de température}$)	216
Figure 5.90: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM SSSS, $h/a = 0.2, a/b = 1, \text{gradient de température}$)	216
Figure 5.91: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CSCS, $h/a = 0.05, a/b = 1, \text{gradient de température}$)	217
Figure 5.92: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CSCS, $h/a = 0.2, a/b = 1, \text{gradient de température}$)	217

Figure 5.93: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CFCF, $h/a = 0.05$, $a/b =$ 1, gradient de température)	218
Figure 5.94: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CFCF, $h/a = 0.2$, $a/b =$ 1, gradient de température)	218
Figure 5.95: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCF, $h/a = 0.05$, $a/b =$ 1, gradient de température)	219
Figure 5.96: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCF, $h/a = 0.2$, $a/b =$ 1, gradient de température)	219
Figure 5.97: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCC, $h/a = 0.05$, $a/b =$ $= 1$, température uniforme)	220
Figure 5.98: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCC, $h/a = 0.2$, $a/b =$ 1, température uniforme).....	220
Figure 5.99: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM SSSS, $h/a = 0.05$, $a/b =$ 1, température uniforme).....	221
Figure 5.100: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM SSSS, $h/a = 0.2$, $a/b =$ 1, température uniforme).....	221
Figure 5.101: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CSCS, $h/a = 0.05$, $a/b =$ 1, température uniforme).....	222
Figure 5.102: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CSCS, $h/a = 0.2$, $a/b =$ 1, température uniforme).....	222
Figure 5.103: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CFCF, $h/a = 0.05$, $a/b =$ 1, température uniforme).....	223

Figure 5.104: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CFCF, $h/a = 0.2$, $a/b = 1$, température uniforme).....	223
Figure 5.105: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCF, $h/a = 0.05$, $a/b = 1$, température uniforme).....	224
Figure 5.106: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCF, $h/a = 0.2$, $a/b = 1$, température uniforme).....	224
Tableau 2.1: Coefficients de température du module de Young E (Pa), de la masse volumique ρ (kg/m^3), du coefficient de Poisson ν , du coefficient de dilation thermique α (1/K) et de la conductivité thermique κ (W/mK)	53
Tableau 2.2: Différentes fonctions de forme des théories des plaques isotropes et FGM	73
Tableau 4.1: Coefficients des fonctions trigonométriques hiérarchiques de Ritz :	137
Tableau 5.1: Fréquence fondamentale adimensionnelle d'une poutre en aluminium pour différents rapports L/h	148
Tableau 5.2: Les cinq premières fréquences adimensionnelles d'une poutre FGM symétrique ($\text{ZrO}_2\text{-Al/Al/Al-ZrO}_2$, $L/h = 10$, P-FGM, sans gradient de température)	148
Tableau 5.3: Les cinq premières fréquences adimensionnelles d'une poutre FGM symétrique ($\text{ZrO}_2\text{-Al/Al/Al-ZrO}_2$, $L/h = 10$, P-FGM, encadrée-encadrée avec élévation uniforme de la température)	149
Tableau 5.4: Comparaison entre les cinq premières fréquences (kHz) obtenues en résolvant les équations de mouvement du 6 ^{ème} ordre avec celles obtenues en résolvant les équations de mouvement du 4 ^{ème} ordre (cas appuyée-appuyée, poutre P-FGM symétrique avec $n = 0.5$).....	150
Tableau 5.5: Comparaison entre les cinq premières fréquences (kHz) obtenues en résolvant les équations de mouvement du 6 ^{ème} ordre avec celles obtenues en résolvant les équations de mouvement du 4 ^{ème} ordre (cas libre-libre, poutre P-FGM symétrique avec $n = 0.5$).....	150

Tableau 5.6: Comparaison entre les fréquences fondamentales adimensionnelles obtenues par différentes théories pour différentes lois de distribution des propriétés (poutre FGM symétrique appuyée-appuyée)	151
Tableau 5.7: Comparaison entre les fréquences adimensionnelles du cinquième mode obtenues par différentes théories pour différentes lois de distribution des propriétés (poutre FGM symétrique appuyée-appuyée)	152
Tableau 5.8: Les 5 premières fréquences adimensionnelles d'une poutre FGM symétrique (ZrO ₂ -Al/Al/Al-ZrO ₂ , $L/h = 10$, P-FGM, $n = 2$, température uniforme).....	169
Tableau 5.9: Fréquence fondamentale adimensionnelle d'une poutre en aluminium et d'une poutre FGM pour différents rapports L/h (sans gradient de température)	170
Tableau 5.10: Variation des 1 ^{ères} et 5 ^{èmes} fréquences adimensionnelles pour différentes théories et différentes fonctions de distribution des propriétés (poutre FGM appuyée-appuyée, $L/h = 5$).....	171
Tableau 5.11: Variation des 1 ^{ères} et 5 ^{èmes} fréquences adimensionnelles pour différentes théories et différentes fonctions de distribution des propriétés (poutre FGM appuyée-appuyée, $L/h = 20$).....	171
Tableau 5.12: Les 5 premières fréquences adimensionnelles d'une poutre P-FGM (SUS304-AL ₂ O ₃) soumise à un gradient de température initial ($n = 0.5$, $L/h = 5$, $T_b = 293K$)	173
Tableau 5.13: Les 5 premières fréquences adimensionnelles d'une poutre P-FGM (SUS304-AL ₂ O ₃) soumise à un gradient de température initial ($n = 0.5$, $L/h = 20$, $T_b = 293K$)	174
Tableau 5.14: Comparaison des 5 premières fréquences adimensionnelles d'une poutre P-FGM (SUS304-AL ₂ O ₃) obtenues par différentes fonctions admissibles de Ritz ($n = 0.5$, $L/h = 5$, gradient de température: $T_b = 293K$, $T_t = 313K$).	184
Tableau 5.15: Comparaison des 5 premières fréquences adimensionnelles d'une poutre P-FGM (SUS304-AL ₂ O ₃) obtenues par différentes fonctions admissibles de Ritz ($n = 0.5$, $L/h = 20$, gradient de température: $T_b = 293K$, $T_t = 313K$).	185

Tableau 5.16: Variation des 8 premières fréquences adimensionnelles pour différents rapports h/b (plaque en aluminium SSSS, $a/b = 1$).....	189
Tableau 5.17: Variation des 8 premières fréquences adimensionnelles pour différents rapports h/b (plaque en aluminium CCCC, $a/b = 1$).....	190
Tableau 5.18: Variation des 10 premières fréquences adimensionnelles pour différents rapports h/b (plaque en aluminium FFFF, $a/b = 1$)	191
Tableau 5.19: Variation des 10 premières fréquences (plaque FGM $Al_2O_3/Ti-6Al-4V$, SSSS, $h = 0.005$ m, $a/h = 80$, $a/b = 1$)	192
Tableau 5.20: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles (plaque FGM Al/ZrO_2 , modèle de Mori-Tanaka, $n = 1$, SSSS, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$)	194
Tableau 5.21: Variation des 8 premières fréquences adimensionnelles (plaque FGM $Si_3N_4/SUS304$, modèle P-FGM, $n = 2$, CCCC, $a/b = 1$, $a/h = 10$, $a = 0.2$ m, élévation uniforme de la température)	194
Tableau 5.22: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles (plaque P-FGM $Si_3N_4/SUS304$, SSSS, $a/b = 1$, $a/h = 8$, avec gradient de température)	195
Tableau 5.23: Influence de l'inertie globale de la plaque sur les fréquences de vibration	214
Tableau B.1: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM $Ti-6Al-4V/Si_3N_4$, modèle P-FGM, CCCC, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$, gradient de température: $T_b = 300K$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	235
Tableau B.2: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM $Ti-6Al-4V/Si_3N_4$, modèle P-FGM, SSSS, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$, gradient de température: $T_b = 300K$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	236
Tableau B.3: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM $Ti-6Al-4V/Si_3N_4$, modèle P-FGM, CSCS, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$, gradient de température: $T_b = 300K$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	237
Tableau B.4: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM $Ti-6Al-4V/Si_3N_4$, modèle P-FGM, CFCF,	

$a/b = 1, h/a = 0.05$, gradient de température: $T_b = 300K$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	238
Tableau B.5: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, CCCF, $a/b = 1, h/a = 0.05$, gradient de température: $T_b = 300K$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	239
Tableau B.6: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, CCCC, $a/b = 1, h/a = 0.2$, gradient de température: $T_b = 300K$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	240
Tableau B.7: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, SSSS, $a/b = 1, h/a = 0.2$, gradient de température: $T_b = 300K$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	241
Tableau B.8: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, CSCS, $a/b = 1, h/a = 0.2$, gradient de température: $T_b = 300K$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	242
Tableau B.9: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, CFCF, $a/b = 1, h/a = 0.2$, gradient de température: $T_b = 300K$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	243
Tableau B.10: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, CCCF, $a/b = 1, h/a = 0.2$, gradient de température: $T_b = 300K$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	244
Tableau B.11: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, CCCC, $a/b = 1, h/a = 0.05$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	245
Tableau B.12: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, SSSS,	

$a/b = 1, h/a = 0.05$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	246
Tableau B.13: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, CSCS, $a/b = 1, h/a = 0.05$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	247
Tableau B.14: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, CFCF, $a/b = 1, h/a = 0.05$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	248
Tableau B.15: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, CCCF, $a/b = 1, h/a = 0.05$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)	249
Tableau B.16: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, CCCC, $a/b = 1, h/a = 0.2$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$) ...	250
Tableau B.17: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, SSSS, $a/b = 1, h/a = 0.2$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$) ...	251
Tableau B.18: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, CSCS, $a/b = 1, h/a = 0.2$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$) ...	252
Tableau B.19: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, CFCF, $a/b = 1, h/a = 0.2$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$) ...	253
Tableau B.20: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si ₃ N ₄ , modèle P-FGM, CCCF, $a/b = 1, h/a = 0.2$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$) ...	254

INTRODUCTION

Le monde industriel est en perpétuelle évolution et en quête obsessionnelle de la perfection. Cette évolution et cette perfection ne peuvent se concrétiser sans l'avancée de la science qui met à la disposition de l'industrie les résultats d'une recherche scientifique permettant de concevoir des procédés novateurs et porteurs de développements industriels. Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très porteur car toute pièce, tout composant, toute machine est à la base un matériau, et innover dans cette discipline c'est révolutionner le monde de l'industrie. Depuis la nuit des temps, le moteur de la découverte de nouveaux matériaux a plus ou moins obéi à une double démarche. Cette double démarche est associée aux problèmes que l'homme doit résoudre pour sa vie matérielle d'une part et à son besoin intellectuel de connaître et de comprendre le monde qui l'entoure d'autre part. Il y a donc des matériaux qui ont été conçus pour répondre à un besoin technologique spécifique.

Lorsque les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines de plus en plus sophistiquées et soumises à des contraintes de plus en plus complexes, les matériaux composites sont venus apporter quelques solutions à ces limites. Un matériau composite est un matériau généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Il est constitué d'une matrice dans laquelle sont enrobées des particules ou des fibres qu'on appelle « renfort ». Ainsi, des propriétés telles que la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids, et bien d'autres sont améliorées. Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches, ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème

de délamination dus à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température.

Viennent alors les matériaux à gradient fonctionnel (en anglais : Functionally Graded Materials) qui s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées. Ils peuvent donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de l'autre. C'est ainsi qu'un FGM constitué de métal et de céramique combinera la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique. Ce sont donc des matériaux émergents capables de répondre à des cahiers des charges multicritères, permettant d'allier de bonnes propriétés thermiques et mécaniques. Ces matériaux à gestion de flux thermiques doivent être capables d'assurer et de gérer le transfert de chaleur de manière à ce que les éléments fonctionnels puissent être maintenus à leur température nominale de fonctionnement.

Cette nouvelle classe de matériaux a suscité une attention particulière et un intérêt grandissant ces trois dernières décennies grâce à l'avantage de la continuité des propriétés physiques dans une ou plusieurs directions. Leur utilisation est en progression croissante dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatial où ils peuvent servir de barrières thermiques vue leur composition riche en céramique. Cependant les FGM touchent un large éventail d'applications dans de multiples autres domaines comme ceux de la médecine, de l'électricité, du nucléaire, etc.

Ce sont les Japonais qui, en 1984, ont introduit pour la première fois cette nouvelle philosophie de matériaux intelligents capables de résister à des gradients de température très importants. Depuis, des recherches dans le domaine des FGM sont activement menées dans différents pays du monde. La promotion au rang de matériau de toute matière inerte « découverte » par l'homme implique une maîtrise de l'élaboration, mais aussi un contrôle

parfait des propriétés en relation avec la structure et son comportement. Ainsi, ces recherches sont conduites dans différents axes tels que :

- les procédés d'élaboration et de fabrication des matériaux FGM,
- l'établissement des algorithmes de simulation 3D des procédés de fabrication,
- la détermination expérimentale des propriétés thermomécaniques des FGM,
- l'établissement des bases mathématiques et modélisation des structures FGM,
- l'étude des comportements statique et dynamique des structures FGM,
- l'établissement des modèles de conception 3D des FGM,
- l'établissement de nouveaux modèles d'éléments finis tenant compte des variations continues des propriétés thermomécaniques.

Dans ce travail de recherche, une contribution à l'étude du comportement dynamique des poutres et des plaques FGM sera apportée, ces éléments structuraux étant les constituants de base des structures primaires et secondaires. Les matériaux à gradient fonctionnel étant des matériaux conçus à la base pour pallier aux problèmes induits par un environnement à très haute température, nous nous proposons d'étudier les vibrations libres des poutres et des plaques FGM soumises à une élévation uniforme de température ou à un gradient de température dans la direction de l'épaisseur avec des conditions générales de liaisons externes, et ceci en utilisant des théories de déformation existantes ainsi qu'une nouvelle théorie d'ordre supérieur qui aura été développée dans le cadre de ce travail.

La présente thèse sera donc présentée selon l'organisation qui suit :

Après une introduction générale sur le thème des matériaux à gradient fonctionnel (également appelés matériaux à gradient de propriétés), le premier chapitre sera consacré à une recherche bibliographique détaillée consacrée aux travaux réalisés dans le domaine des structures en FGM, aux théories qui leur sont appliquées et aux méthodes de résolution utilisées pour solutionner les problèmes engendrés. Une attention particulière sera portée aux auteurs ayant travaillé sur les problèmes de vibrations des poutres et des plaques constituées par ces nouveaux matériaux. Le second chapitre sera dédié à la présentation de cette nouvelle gamme de matériaux, aux lois et théories existantes qui leur sont consacrées et qui y seront explicitement formulées. Nous proposerons, dans ce chapitre, une nouvelle théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur. Dans le troisième chapitre sera

exposée la résolution du problème des vibrations libres de la poutre en matériau à gradient fonctionnel soumise à une élévation de température et ce, sous des conditions aux limites générales. La résolution se fera par différentes méthodes dont une méthode analytique développée dans le cadre de cette recherche et la méthode DQM (differential quadrature method). Différents types de FGM y seront traités. Le quatrième chapitre sera consacré à la plaque FGM soumise à un gradient de température dans la direction de l'épaisseur. Les équations relatives seront développées sous une forme unifiée pouvant prendre en compte n'importe quelle théorie de déformation. La résolution se fera par la méthode variationnelle de Ritz. Dans le cinquième chapitre seront présentés les résultats obtenus par l'exécution des différents codes de calculs développés dans le cadre de cette recherche. Ces résultats seront confrontés à ceux de travaux publiés permettant ainsi la validation de nos codes de calculs. Des interprétations seront présentées au fur et à mesure. Enfin, le travail s'achèvera par une conclusion générale relative à la recherche effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

CHAPITRE 1

HISTORIQUE ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

Les matériaux à gradient fonctionnel (functionally graded materials : FGM) sont une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales (Miyamoto, Kaysser et al. [1], Suresh et Mortensen [2]) ou encore l'amélioration du transfert de chaleur (Öchsner, Murch et al. [3]). Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de la mécanique des matériaux. L'intérêt particulier et grandissant envers les matériaux à gradient fonctionnel, pensés et conçus pour la première fois au Japon, est mis en évidence par les innombrables conférences et publications de qualité dédiées à l'analyse, la conception et la fabrication de ces matériaux.

Une question s'impose : Comment ce concept a-t-il germé, et comment l'étude des FGM a-t-elle été lancée ? Aux environs de 1984-1985, dans une université Japonaise, deux chercheurs l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée

du concept FGM, autrement dit d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, principalement pour être à même de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre étant le flux de chaleur énorme frappant la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée de la navette dans l'atmosphère terrestre et en même temps, de protéger l'intérieur contre un surchauffement. Certes, un revêtement céramique aurait pu protéger le fuselage contre les températures qui se développent à la surface, mais on a dû craindre l'action des très grandes contraintes thermoélastiques aux interfaces entre fuselage métallique et sa protection céramique, se rendant compte des différences entre les modules de Young et les conductivités thermiques des deux matériaux. L'idée fût alors de produire une transition douce, donc graduelle entre métal pur et céramique pure appelée matériau à gradient fonctionnel (functionally graded material : FGM). En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de pointe au Japon et actuellement dans le monde entier.

La réussite dans le domaine des matériaux intelligents ne sera possible que par une forte synergie entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Certes, le concept FGM a été proposé à l'origine pour répondre aux exigences du domaine de l'aéronautique et de l'aérospatial mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication des outils industriels qui exigent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique importante. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Leur application dans les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie électrique sera probablement effective dans un futur proche dans notre pays qui a un potentiel énorme dans ce domaine. Les FGM sont également les biomatériaux idéaux pour réparer ou combler les déficiences osseuses éventuelles de notre squelette. Cette technologie est aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs énormes. Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs.

Les poutres et les plaques constituent des éléments de base dans les structures aérospatiales, marines et terrestres, c'est pourquoi un intérêt particulier leur est porté, et bien comprendre leur comportement vibratoire est une étape cruciale dans l'analyse structurale. Etant donné que les matériaux à gradient fonctionnel ont été pensés et conçus pour résister à des conditions thermiques sévères, le travail de recherche proposé est justement consacré à l'étude des vibrations libres des poutres et des plaques FGM soumises à des contraintes thermiques initiales (augmentation uniforme ou gradient de température à travers l'épaisseur).

L'analyse des vibrations des structures a vu le jour lorsque Galilée (1564-1642) a résolu, par des moyens géométriques, la dépendance de la fréquence propre d'un pendule simple à la longueur du pendule. Il mit en place un procédé expérimental permettant l'observation du comportement vibratoire des cordes et des plaques mais n'a jamais pu établir le moindre traitement analytique. Il fût suivi par d'autres chercheurs tels que Mersenne (1588-1648), Sauveur (1635-1716), Hooke (1635-1703), Newton (1642-1727), Taylor (1685-1731), Bernoulli (1700-1782), Euler (1707-1783), d'Alembert (1717-1783), Fourier (1768-1830) et bien d'autres, qui ont tous apporté des contributions de plus ou moins grande importance dans le domaine de l'analyse des vibrations. Aujourd'hui, il est impensable de procéder à l'étude d'une structure sans étudier son comportement vibratoire.

Durant les deux dernières décennies, beaucoup de travaux ont été consacrés aux matériaux à gradient fonctionnel et il est prudent de réduire la recherche bibliographique en se concentrant sur les travaux dédiés aux problèmes des vibrations des poutres et des plaques en FGM. Néanmoins, une partie minimale de cette recherche nous donnera une idée sur ce qui a été réalisé dans l'étude des contraintes résiduelles, ou encore de l'analyse thermomécanique du flambage. Le but ici étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y a encore beaucoup à faire dans cette discipline. Suresh et Mortensen [2] ont publié une recherche bibliographique détaillée sur la technologie des matériaux à gradient fonctionnel en 1998. Birman et Byrd [4] ont également publié une recherche exhaustive sur les travaux dédiés au développement des FGM couvrant la période 1997-2007. Ce chapitre sera consacré aux recherches réalisées durant ces deux dernières décennies.

1.1. Théories de déformations des plaques :

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales catégories : théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaques semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théories d'ordre supérieur applicables aux plaques épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D).

1.1.1. Théorie classique des plaques minces (CPT) :

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces, par Kirchhoff, généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation en cisaillement, appelées poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses de Kirchhoff reprises par Love [5] sont les suivantes :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élanement h/a ou $h/b \leq 0.05$). Elle possède un plan moyen, également appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés. l'inertie de rotation est aussi négligée.

- La contrainte normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.

L'effet de la déformation en cisaillement transverse augmente d'une manière significative lorsque le rapport d'élancement h/a ou h/b est supérieur ou égal à 0.05. Etant donné que cette théorie néglige la flexibilité de cisaillement transverse, ceci conduit à une surestimation de la rigidité de flexion et par voie de conséquence une surestimation des fréquences de vibration et une sous-estimation des déplacements.

1.1.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT) :

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion, une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire (Rayleigh [6]). En 1877, Rayleigh a affirmé qu'il est important d'inclure les inerties de rotation dans toute analyse vibratoire des systèmes. Quarante ans plus tard, les travaux de Timoshenko [7], [8] montrent que la prise en compte des effets de l'inertie de rotation et du cisaillement transverse affecte les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonance calculées, en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système. Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement transverse est proposée par Reissner [9] en 1945 dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand [10] en 1948. C'est cependant l'article de Mindlin [11] , publié trois ans plus tard qui fera date. Vers 1970, Whitney [12] , Whitney et Sun [13], Pagano [14] et Srinivas et Rao [15] ont montré, grâce à leurs travaux respectifs, que les effets du cisaillement sont plus importants pour les plaques stratifiées que pour les plaques isotropes.

Contrairement à la théorie des plaques minces, la théorie de Mindlin suppose que les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et non nécessairement normales à celui-ci après déformation. D'autres variantes de la théorie supposent que ces sections ne restent ni droites, ni normales après déformation. Dans la littérature, trois approches d'approximation pour les plaques épaisses sont répertoriées (Mindlin [11], Reissner [16], Narasimhamurthy [17], Schmidt [18], Levinson [19], Ambartsumyan [20]). L'approche de Reissner suppose un champ de déplacement mixte

contenant les contraintes normales dans le plan et les contraintes de cisaillement. L'approche de Henchy-Mindlin suppose un champ de déplacement alors que l'approche d'Ambartsumyan suppose un champ de contraintes normales et de cisaillement. Etant donné que la théorie des plaques du premier ordre (FSDPT) ne satisfait pas les conditions aux limites au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque (contraintes de traction non nulles), un facteur de correction en cisaillement à travers l'épaisseur est nécessaire. La valeur de ce facteur de correction dépend de la géométrie de la plaque, de la variation du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées.

1.1.3. Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT) :

Pour éviter l'utilisation d'un facteur de correction en cisaillement et pour tenir compte d'hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff, plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées par Reddy [21], Reddy et Phan [22], Reddy [23], [24], Iyengar, Chadrashekhara et al. [25], Iyengar et Pandya [26], Kuznetsov et Kartashov [27], Vlasov [28], Krishna Murty [29], [30], [31], Krishna Murty et Vellaichamy [32]. Elles sont basées sur le développement des déplacements en série de puissance à travers l'épaisseur (selon Reddy [33], Mallikarjuna et Kant [34]). Les hypothèses qui sont à la base du développement de ces théories sont :

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque,
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformation.
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable,
- La contrainte normale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.

La plupart des théories d'ordre supérieur (HSDPT) sont basées sur les approches de Reissner, de Henchy-Mindlin et d'Ambartsumyan. Parmi ces théories, nous pouvons citer celles de : Levinson [19], Reddy [21], Iyengar, Chadrashekhara et al. [25], Iyengar et Pandya [26], Kuznetsov et Kartashov [27], Vlasov [28], Krishna Murty [29], [30], [31], Krishna Murty et Vellaichamy [32], Bhimaraddi et Stevens [35], Kant et Pandya [36], Librescu [37], Ren [38], Touratier [39].

Les théories de Whitney et Sun [13], Reddy [21], Kant [40], Karama, Afaq et al. [41], Karama, Harb et al. [42], Lo, Christensen et al. [43], Lo, Christensen et al. [44], Nelson et Lorch [45], Pagano et Soni [46], Prokopov [47], Sun et Whitney [48] sont applicables aux FGM multicouches et aux plaques FGM métal-céramique monocouche. Elles supposent que les déplacements sont continus à travers l'épaisseur. Dans le cas de la plaque FGM multicouche ceci implique une évaluation de la masse et de la rigidité effective de toute la plaque en termes de masse et de rigidité de chaque couche. Cette approche conduit à une évaluation incorrecte des contraintes bien que celle des fréquences soit bonne. Ceci est dû à la supposition d'un déplacement continu alors qu'en réalité le gradient des déplacements ou le cisaillement transverse et les contraintes normales peuvent être discontinus entre couches de la plaque FGM. Certains chercheurs ont contourné ces problèmes en supposant une approximation du déplacement pour chaque couche séparément tout en assurant une continuité des déplacements à l'interface des couches (théorie zigzag, Reddy [49]).

De nouvelles formulations et théories d'ordre supérieur ont vu le jour ces dernières années. Suite à des travaux remarquables de Carrera, ce dernier a proposé une formulation compacte et unifiée des théories (Carrera et Petrolo [50], D'Ottavio et Carrera [51]). Cependant, les théories du premier ordre (FSDPT) et d'ordre supérieur (HSDPT) ne sont pas pratiques vu le nombre de termes d'ordre supérieur introduits dans la formulation. De nouvelles théories d'ordre supérieur ont aussi été proposées récemment par Aydogdu [52] et El Meiche, Tounsi et al. [53] . Dans le souci de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations existantes, Shimpi [54] a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode sont qu'elle ne nécessite pas de coefficient de correction en cisaillement et qu'elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. La théorie RPT a été ensuite adaptée avec succès aux plaques orthotropes par Shimpi et Patel [55], [56] et par Kim, Thai et al. [57] et à la flexion des plaques FGM par Atmane, Tounsi et al. [58] . La fiabilité de cette méthode a été démontrée par Kim, Thai et al. [57] pour le cas de la flexion statique et pour le cas du flambage d'une plaque composite. Récemment Thai et Kim [59], [60] , et Hadji, Atmane et al. [61] ont adapté la RPT, avec succès, au flambage des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

1.1.4. Théories basées sur l'élasticité tridimensionnelle (3-D) :

L'avantage des solutions basées sur l'élasticité tridimensionnelle est que celle-ci ne nécessite aucune hypothèse restrictive. L'un des précurseurs dans ce domaine est Pagano [54] qui, en 1969, a analysé la flexion cylindrique des composites stratifiés et en 1970 la flexion des plaques rectangulaires sandwiches (Pagano [14]). En raison de la complexité relative à la formulation 3-D, peu d'articles l'utilisant ont été publiés dans le domaine des vibrations libres. Les chercheurs Srinivas et Rao [15], Srinivas, Rao et al. [62], Srinivas, Rao et al. [63] ont été les premiers à développer des solutions pour la flexion, la vibration et le flambage des plaques stratifiées en appuis simples. Grâce aux travaux des précédents auteurs, Wittrick [64] a présenté une solution analytique 3-D d'une plaque rectangulaire en appuis simples pour des problèmes de valeurs propres, de flambage et de vibration libre ainsi que pour des flexions statiques sous l'effet de charges latérales sinusoïdales. Récemment, Vel et Batra [65] ont présenté une solution 3-D exacte des vibrations libres et forcées de plaques rectangulaires FGM en appuis simples. D'autres solutions tridimensionnelles ont été proposées pour étudier les vibrations libres des plaques isotropes, composites stratifiées et FGM pour différentes conditions aux limites : Cheung et Chakrabarti [66], Liew, Hung et al. [67], [68], [69], [70], Liew et Yang [71], Liew et Teo [72], Liew, Teo et al. [73], Cheung et Zhou [74], Zhou, Cheung et al. [75], Zhou, Cheung et al. [76], Li, Iu et al. [77], [78], Uymaz et Aydogdu [79] .

1.2. Etude des contraintes résiduelles :

Ces contraintes peuvent être associées aux techniques de fabrication des structures en matériaux à gradient fonctionnel. Elles peuvent aussi être le résultat de charges thermiques statiques ou dynamiques (cycliques). Ces contraintes surviennent lorsque deux matériaux avec des coefficients de dilatation thermique différents sont collés. Aussi, les contraintes résiduelles ne seront pas étudiées dans ce travail. Elles doivent être prises en considération avant l'intégration du FGM dans un système de protection thermique assujéti à un environnement haute-température. Des contraintes résiduelles importantes peuvent modifier le comportement vibratoire des structures FGM.

Très tôt, des investigations dans ce domaine ont été menées par Drake, Williamson et al. [80], Williamson, Rabin et al. [81] en 1993. Ils ont alors considéré un spécimen en FGM ($\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Ni}$) dans trois configurations différentes, le but de l'étude étant de connaître

l'effet des contraintes résiduelles sur les FGM lorsqu'ils sont refroidis. Giannakopoulos, Suresh et al. [82] ont examiné le comportement des poutres et des plaques FGM sous l'effet de charges thermiques cycliques. Le FGM étudié est le même que celui considéré par Williamson et al. Les auteurs ont analysé des membres structuraux à trois couches dont la couche supérieure est en nickel, la couche inférieure en céramique et la zone médiane est une zone gradée constituée d'un mélange Al_2O_3 -Ni. Des cycles de température ont été imposés induisant une déformation plastique dans les membres structuraux. Des équations analytiques ont été établies afin d'obtenir la distribution des contraintes. Des modèles d'éléments finis ont été développés pour prédire les déformations plastiques cumulées sous l'effet des températures cycliques. Finot, Suresh et al. [83] complétèrent ce travail en conduisant des expérimentations sur différents spécimens FGM. En 1995, Ravichandran [84] a étudié les contraintes résiduelles survenant lors de la fabrication d'un Système FGM sous haute température. Le but de l'étude étant de déterminer l'effet des contraintes résiduelles et de proposer un guide pour des conditions de fabrication optimales. Il a été constaté qu'un matériau avec une fraction volumique linéaire produit moins de contraintes résiduelles. Ainsi, dans un FGM discret, il est préférable d'avoir beaucoup de couches avec des fractions volumiques constantes plutôt que peu de couches avec des changements importants de la fraction volumique. D'autres travaux ont suivi comme ceux de Hill et Lin [85] qui ont mené une étude expérimentale et numérique pour étudier les contraintes résiduelles dans une plaque FGM borure titane-titane.

1.3. Analyse thermoélastique statique :

Un système FGM conçu pour une application donnée doit prouver sa capacité à supporter simultanément des charges thermiques et mécaniques. Dans le présent travail, toutes les études menées prennent en considération la variation de la température due à des contraintes thermiques initiales impliquant des changements des propriétés des matériaux. Ces changements peuvent influencer le comportement vibratoire des structures. Aussi, la réponse quasi statique de n'importe quel membre structural chargé doit être prise en considération avant toute étude dynamique.

Praveen et Reddy [86] ont présenté une analyse du comportement thermoélastique des plaques FGM rectangulaires incluant les effets non linéaires, les déformations en cisaillement transverse et l'inertie de rotation. Reddy, Wang et al. [87] ont étendu cette

théorie des plaques FGM rectangulaires à une formulation du premier ordre de plaques annulaires et circulaires en flexion. Des solutions pour la déflexion, les forces et moments résultants ont été présentées. La théorie originalement formulée par Praveen et Reddy a été par la suite étendue par Reddy [88] , à des relations plus générales des plaques FGM permettant de prendre en considération des déformations du troisième ordre. Reddy a également développé des modèles d'éléments finis en théorie de déformation du troisième ordre incluant les effets thermiques et non linéaires. En 2001 Woo et Meguid [89] ont publié une formulation des grandes déformations des plaques et coques minces en FGM sous des charges thermiques et mécaniques en utilisant la théorie classique des plaques. Vel et Batra [90] étudièrent les petites déformations élastiques des plaques FGM avec des bords en appuis simples. Les champs de déplacements et de températures ont été générés en imposant individuellement ou simultanément des charges mécaniques et thermiques sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Ces champs sont pris sous forme de séries de Taylor et satisfont les équations constitutives d'un matériau thermoélastique isotrope linéaire ainsi que les conditions aux limites. La clé de cette hypothèse est qu'une plaque gradée suivant l'épaisseur a des propriétés de matériau qui varient très lentement et que la plaque est supposée constituée de couches très minces, isotropes, homogènes et parfaitement collées. Les solutions obtenues par les séries en puissance ont alors été comparées à celles générées par les théories classiques, du premier ordre et du troisième ordre des plaques. Récemment, Abrate [91] a démontré que les plaques FGM ont beaucoup de similitudes avec les plaques homogènes. La méthode usuelle pour la détermination des matrices de rigidité en flexion est d'utiliser le plan moyen de la plaque comme surface de référence. Abrate a également montré que le choix judicieux de la surface de référence de telle sorte que le couplage flexion-traction disparaisse simplifie énormément l'analyse.

1.4. Analyse thermomécanique du flambage :

Le flambage des poutres, des plaques et des coques est un problème très important étudié par beaucoup de chercheurs. Ces éléments structuraux sont en général gradés de façon non symétrique par rapport au plan moyen. Il existe alors un couplage flexion-traction. Dû à ce fait, les charges critiques de flambage risquent d'être plus importantes que celles obtenues pour les mêmes membres structuraux en matériau homogène et symétrique. Le flambage des plaques FGM devient très dangereux lorsque celles-ci sont utilisées dans des systèmes de protection thermique.

L'une des premières études sur le flambage des structures FGM a été réalisée par Shen [92] en 2002. Il s'est intéressé au post-flambage des coques cylindriques dans un environnement thermique. La même année, Javaheri et Eslami [93] fournissent des solutions exactes au flambage thermique des plaques FGM rectangulaires gradées dans la direction de l'épaisseur suivant une loi de distribution en puissance d'un mélange métal-céramique. Ils se sont basés sur la théorie classique des plaques. Les charges critiques de flambage sont influencées par les changements de température à travers l'épaisseur. Deux observations importantes ressortent de leur étude :

- La variation de la température critique de flambage d'une plaque FGM est inférieure à celle d'une plaque homogène.
- En augmentant l'index n de la loi de distribution en puissance (voir chapitre 3), la température critique de flambage est réduite.

En 2003, Na et Kim [94] analysèrent le flambage des plaques FGM sous des charges thermiques et mécaniques combinées en utilisant la méthode des éléments finis. Le flambage thermique sous des changements de températures uniformes et non uniformes à travers l'épaisseur a été traité. Il ressort de cette étude que les caractéristiques du flambage thermique des plaques FGM sont très influencées par le champ de température, la distribution de la fraction volumique et les paramètres géométriques du système structural.

En 2004, Wu [95] a analysé le flambage thermique d'une plaque FGM d'épaisseur moyenne avec des bords en appuis simples. Il appliqua la théorie de déformation du premier ordre. Les équations d'équilibre et de flambage ont été résolues analytiquement. Des conclusions identiques à celles de Na et Kim ont été tirées.

L'analyse du post-flambage des plaques avec des propriétés dépendant de la température a été abordée par Shen [96] en 2007. Les équations sont basées sur une théorie des plaques d'ordre supérieur incluant les effets thermiques. Les imperfections géométriques initiales sont prises en considération. Les résultats publiés concernent le post-flambage thermique du plan moyen des plaques FGM symétriques.

En 2010, Bodaghi et Saidi [97] ont analysé le flambage d'une plaque FGM rectangulaire épaisse en se servant de la théorie d'ordre supérieur de Reddy [21] et d'une méthode analytique. Les auteurs ont développé une procédure pour découpler les cinq équations différentielles et obtenir deux équations à résoudre. Pour les conditions

imposées, deux côtés de la plaque sont en appuis simples et la plaque est soumise à différents types de chargements en plan. Les auteurs ont ensuite aisément résolu le problème en se servant de la méthode de Levy [98] .

D'autres études intensives sur le flambage des plaques FGM ont été entreprises par Javaheri et Eslami [99], [100], Shariat, Samsam et al. [101], Shariat, Samsam et al. [102], [103] .

1.5. Etude des vibrations des poutres FGM :

La poutre constituée de matériau à gradient fonctionnel a été relativement négligée en comparaison avec la plaque qui a bénéficié d'une attention particulière de la part des chercheurs. Pour cette raison, il existe relativement peu de travaux consacrés au comportement dynamique de la poutre FGM.

En 2003, Chakraborty, Gopalakrishnan et al. [104] présentèrent un nouvel élément poutre pour étudier le comportement thermoélastique des poutres en matériau à gradient fonctionnel. L'étude est basée sur une théorie de déformation du premier ordre. Les propriétés thermomécaniques sont considérées varier dans la direction de l'épaisseur de la poutre. Aydogdu et Taskin [105] ont par la suite analysé les vibrations libres d'une poutre FGM en appuis simples. Différentes théories de déformation ont été utilisées (théories classique, du premier ordre et d'ordre supérieur). Le module de Young est considéré varier suivant des lois de distribution en puissance et exponentielle. Les fréquences naturelles ont été obtenues en utilisant des solutions de type Navier. Aucune prise en compte de la température n'a été faite dans cette étude. Kapuria, Bhattacharyya et al. [106] ont étudié la flexion et les vibrations libres d'une poutre FGM multicouche en utilisant la théorie zigzag du troisième ordre. Seules les conditions aux limites encastré-libre et encastré-encastré ont été considérées. Ying, Lü et al. [107] ont obtenu des solutions exactes pour la flexion et la vibration libre d'une poutre FGM sur un support élastique Winkler-Pasternak, en utilisant une théorie bidimensionnelle de l'élasticité. Ils ont considéré la poutre orthotrope et les propriétés mécaniques sont supposées varier exponentiellement dans la direction de l'épaisseur. Le problème a été résolu en utilisant la SSP (State Space Procedure).

En 2008, Xiang et Yang [108] étudièrent les vibrations libres et forcées d'une poutre FGM multicouche d'épaisseur variable, sous des contraintes thermiques initiales. La poutre de Timoshenko étudiée a été prise sous les conditions aux limites : encastré-libre,

encastré-encastré et sur appuis simples. Les inerties axiales et de rotation ont été prises en considération. Li [109] a appliqué une approche unifiée pour analyser les comportements statique et dynamique des poutres FGM incluant l'inertie de rotation et la déformation en cisaillement. La même année, Sina, Navazi et al. [110] utilisèrent une méthode analytique pour résoudre le problème des vibrations libres d'une poutre FGM. Les propriétés mécaniques sont supposées varier dans la direction de l'épaisseur suivant une loi de distribution en puissance. Pradhan et Murmu [111] ont présenté une analyse des vibrations thermomécaniques d'une poutre FGM sandwich. La DQM (Differential Quadrature Method) a été utilisée pour la résolution des équations. Une étude paramétrée a été effectuée sur une poutre FGM en appuis simples reposant sur un support élastique.

Dans la majorité des articles mentionnés ci-dessus, l'effet thermique n'a pas été pris en considération, certains auteurs ont juste considéré la poutre dans un champ de température constant. Les méthodes de résolution utilisées sont des méthodes approximatives. Rares sont les méthodes analytiques proposées, particulièrement lorsque les contraintes thermiques sont prises en considération, ce qui compliquerait encore plus l'écriture des équations et rendrait la résolution analytique fastidieuse et très difficile.

1.6. Etude des vibrations des plaques FGM:

Bien que les FGM soient des matériaux relativement nouveaux, beaucoup d'études ont été consacrées à leurs comportements statiques et thermomécaniques. En revanche, peu d'études ont été dédiées aux vibrations libres de ces matériaux. C'est à partir de l'an 2000 que des chercheurs ont commencé à sérieusement s'intéresser à leurs comportements dynamiques. En 1998, Praveen et Reddy [86] ont analysé, par éléments finis, les réponses statique et dynamique non linéaires d'une plaque céramique-métal dans un champ thermique et soumise à des charges dynamiques transversales. En 2000, Reddy [88] a développé des formulations théoriques et leurs modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme.

Yang et Shen [112] ont présenté en 2001, l'étude de la réponse dynamique d'une plaque mince en matériau à gradient fonctionnel soumise à des contraintes initiales. L'étude paramétrique a montré l'effet de l'index de la fraction volumique, de la rigidité du

support élastique, du rapport d'élanement (h/a et/ou h/b), de la durée et de la forme de la charge d'impulsion et des contraintes initiales en membrane, sur la réponse dynamique des plaques FGM. Les solutions ont été obtenues grâce à l'utilisation conjointe de la méthode DQ et de la méthode de Galerkin. Seule la dépendance des propriétés du matériau à la température a été prise en compte.

En se basant sur la méthode des éléments finis, He, Ng et al. [113] ont analysé, en 2001, le contrôle actif de la réponse dynamique de plaques minces en FGM, auxquelles sont collés des actionneurs piézoélectriques et des capteurs. Le problème a été résolu en utilisant la théorie classique des plaques (CPT) et un modèle d'éléments finis, pour finalement analyser l'effet de la fraction volumique sur les réponses statiques et dynamiques pour différentes conditions aux limites. Le modèle du contrôle actif s'est avéré efficace car la réponse dynamique a montré que les amplitudes des vibrations ont été grandement atténuées pour des valeurs de gains appropriées. Une méthode similaire a été proposée par Liew, He et al. [114] en 2001 en se servant de la théorie des plaques du premier ordre (FSDPT) et en prenant en compte une variation de température. Toutes ces études ont été faites en considérant une température constante ($T = 300\text{K}$) exceptée celle de Liew, He et al.

C'est en 2002 qu'il y a eu prise en compte de l'effet de la température par Yang et Shen [115] qui étudièrent les caractéristiques vibratoires de la réponse transitoire d'une plaque FGM pour laquelle les propriétés thermomécaniques dépendent de la température. Le problème a été résolu par une méthode hybride DQM-Galerkin couplée à la procédure de superposition. Il faut souligner que ces auteurs n'ont pas considéré le cas d'une conduction thermique à travers l'épaisseur, par contre les propriétés thermomécaniques dépendent à la fois de la position et de la température. La raison évoquée était que le problème serait devenu bien plus complexe.

Reddy et Chen [116] ont étudié, en 2003, les vibrations harmoniques d'une plaque FGM par la théorie asymptotique tridimensionnelle reposant sur le transfert matricielle. L'étude n'a pas tenu compte de l'effet thermique.

En 2004, Huang et Shen [117] ont présenté une étude des vibrations non linéaires d'une plaque FGM en appuis simples. La conduction thermique et la dépendance des propriétés à la température ont été incluses. La formulation est basée sur une théorie des plaques en cisaillement d'ordre supérieur couplée aux équations de Von-Karman. Les

solutions ont été obtenues analytiquement grâce à une méthode améliorée de la technique des perturbations.

Une solution exacte basée sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) a été publiée en 2004 par Vel et Batra [65] pour l'étude des vibrations libres et forcées d'une plaque FGM en appuis simples. La méthode des séries en puissances a été employée pour résoudre les équations du mouvement des plaques minces et épaisses. Les résultats ont montré l'effet de la variation de la fraction volumique de la céramique et de l'épaisseur (h/a et/ou h/b) sur les fréquences naturelles. La vibration forcée a été étudiée en supposant une variation spatiale sinusoïdale de la pression sur la face supérieure. Qian, Batra et al. [118] ont ensuite exploité cette étude pour valider leurs travaux réalisés en 2003 (Qian, Batra et al. [119]) relatifs à la vibration libre et forcée d'une plaque épaisse incluant la théorie de déformation d'ordre supérieur combinée à la méthode de Pétrov-Galerkin (Liew, Zhao et al. [120]).

En utilisant la méthode de Ritz [121] avec fonction poutre et en se servant de la théorie des plaques d'ordre supérieur de Reddy, Kim [122] a montré, en 2005, l'influence de la composition (concentrations des constituants), de la géométrie et de l'élévation de température sur les caractéristiques vibratoires d'une plaque FGM métal-céramique encadrée dont les propriétés dépendent de la température. Cette dernière est supposée varier uniquement à travers l'épaisseur.

En 2006, les travaux de Ferreira, Batra et al. [123] ont eu pour objet la détermination des fréquences naturelles d'une plaque FGM pour différentes conditions aux limites. Ils ont utilisé la méthode globale de collocation associée à la théorie d'ordre supérieur de Reddy [21], [124] et la technique de Mori-Tanaka (Benveniste [125], Mori et Tanaka [126]) pour approximer les solutions par la MRBF (multiquadratic radial basis functions). Selon ces auteurs, la méthode numérique utilisée est avantageuse par rapport à celle des éléments finis par le fait qu'elle ne nécessite ni la discrétisation du domaine en éléments bidimensionnelles ou tridimensionnelles ni la connexion entre les éléments discrétisés. Cette technique est appelée méthode sans maillage (meshless-method, Liu [127]). La méthodologie a permis d'avoir des fréquences très proches de celles calculées par Vel et Batra [65] obtenues par la méthode tridimensionnelle exacte.

C'est à partir de 2007 que la modélisation par l'élasticité tridimensionnelle pour l'étude des vibrations libres des plaques en matériau à gradient fonctionnel a réellement

commencé à émerger. Uymaz et Aydogdu [79] ont examiné l'influence de la géométrie (a/h et a/b) et de l'index de la fraction volumique sur les fréquences naturelles des plaques FGM minces et épaisses sous différentes conditions aux limites. L'analyse mathématique est basée sur la théorie linéaire des petites déformations. Les déplacements ont été approximés par des polynômes orthogonaux de Chebyshev. Etant donné qu'aucune hypothèse n'a été faite sur le champ des déplacements et sur la distribution des déformations à travers l'épaisseur, cette méthode a permis de fournir des paramètres de fréquence de grande précision pour les plaques moyennement épaisses. La résolution des équations du mouvement a été obtenue grâce à la méthode de Ritz.

Les FGM sandwichs peuvent diminuer très sensiblement les concentrations de contraintes au niveau des interfaces grâce à la variation gradée des propriétés entre l'âme et le revêtement. C'est en 2005 que Zenkour [128] a analysé le flambage et les vibrations libres des plaques FGM sandwichs. En utilisant la théorie des déformations sinusoïdales d'ordre supérieur, il a étudié l'influence du cisaillement transverse, de l'épaisseur de l'âme (relativement à l'épaisseur de la plaque) sur la charge critique de flambage et sur les fréquences propres. Les FGM sandwichs ont aussi fait l'objet d'une étude vibratoire par Li, Iu et al. [77] en 2008. La formulation a été faite sur la base de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Deux cas de plaque ont été étudiés. L'une présentant des revêtements supérieur et inférieur en FGM avec une âme homogène et l'autre avec des revêtements homogènes et une âme en FGM. Les déplacements ont été approximés par les polynômes orthogonaux de Chebyshev. L'étude de la convergence a montré que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans l'épaisseur dépend principalement de l'épaisseur de la plaque, tandis que le nombre de termes de la sommation de Ritz dans les autres directions dépend des conditions aux limites. L'étude paramétrique basée sur les épaisseurs relatives des couches, sur l'index des fractions volumiques et sur la géométrie (h/a et a/b) a montré que la plaque mince est plus sensible aux propriétés des matériaux utilisés que la plaque épaisse. Poursuivant leurs efforts, Li, Iu et al. [78] ont analysé, en 2009, les vibrations libres d'une plaque FGM céramique-métal en appuis simples puis encadrée en incluant trois cas d'environnements thermiques : élévations uniforme, linéaire et non linéaire de la température. La théorie est basée sur l'élasticité tridimensionnelle.

Matsunaga [129] a analysé, en 2008, les vibrations libres et le flambage d'une plaque FGM en se servant d'une théorie des déformations bidimensionnelles. Les déplacements ont été développés sous forme de séries de puissances. Plusieurs théories

d'approximation par troncature ont été appliquées pour résoudre le problème de la plaque FGM en appuis simples. L'auteur a montré que la théorie de déformation 2-D permet de prédire avec une bonne précision, non seulement les fréquences propres et les charges critiques de flambage, mais également la distribution des déplacements et des contraintes dans la plaque FGM. En 2009, Zhao, Lee et al. [130] ont analysé les vibrations libres d'une plaque FGM en utilisant la méthode *kp*-Ritz (element-free kernel particle-Ritz method). Pour tenir compte du cisaillement transverse et de l'inertie de rotation, les auteurs ont utilisé la théorie de déformation des plaques du premier ordre. Les résultats trouvés ont montré que l'index de la fraction volumique compris entre 0 et 5 a une influence significative sur les fréquences et que les effets de la géométrie sur les fréquences sont indépendants de la fraction volumique. Les auteurs ont aussi conclu que les différentes valeurs du coefficient de correction du cisaillement n'ont pas de véritables effets sur les fréquences naturelles lorsque le rapport d'élançement est très largement supérieur à 10.

En utilisant les polynômes orthogonaux de Chebyshev et la méthode de Ritz, Amini, Soleimani et al. [131] ont effectué, en 2009, l'analyse des vibrations libres de plaques FGM reposant sur un support élastique et dont la formulation est basée sur la théorie de l'élasticité 3-D. Grâce à une méthode semi-analytique hybride basée sur la DQM (Differential Quadrature Method) et en utilisant la théorie de l'élasticité tridimensionnelle, Malekzadeh [132] a analysé durant la même année les vibrations d'une plaque FGM reposant sur un support élastique. Les solutions obtenues ont permis de montrer l'influence de la géométrie, des paramètres du support élastique et des conditions aux limites sur les paramètres de fréquence. Le principal résultat concerne la méthode numérique utilisée. En effet, l'application de la DQM dans la direction de l'épaisseur permet de prendre en compte une distribution arbitraire des propriétés à travers l'épaisseur et d'implémenter les effets du support élastique en tant que conditions aux limites sur la surface inférieure, efficacement et d'une manière exacte. Par la suite, Lü, Lim et al. [133] ont présenté des solutions exactes d'une plaque FGM épaisse reposant sur un support élastique, obtenues par la méthode SSA (State Space Approach). En 2010, Atmane, Tounsi et al. [58] ont étudié, par le biais d'une nouvelle théorie d'ordre supérieur, la vibration libre d'une plaque FGM reposant sur un support élastique. Les solutions ont été obtenues en utilisant la méthode de Navier.

En 2011, Huang, McGee III et al. [134] se sont penchés sur le comportement vibratoire libre d'une plaque FGM épaisse fissurée au bord. L'étude emploie la théorie de

Reddy [21], [23] et une nouvelle procédure de Ritz à base de fonctions admissibles spéciales, appelées « fonctions criques ». Celles-ci permettent de correctement tenir compte du comportement de la singularité des contraintes à l'extrémité de la crique en prenant en considération la discontinuité des déplacements et de leurs pentes à travers la crique. Les résultats ont permis de montrer qu'en augmentant l'index de la fraction volumique, les paramètres de fréquence de la plaque FGM métal-céramique (Al/Al₂O₃) diminuent mais que ceux de la plaque (Al/ZrO₂) augmentent. L'utilisation de la loi de mélange de Mori et Tanaka [126] conduit à des paramètres de fréquence plus petits que ceux obtenus par la loi de mélange en puissance (P-FGM). Lorsque la longueur de la crique augmente, les paramètres de fréquence diminuent. Cette diminution n'est pas significative lorsque la crique est petite ($d/a \leq 0.1$). Selon ces auteurs, l'ensemble proposé des fonctions criques de Ritz peut être adapté aux cas de formulations basées sur la théorie de l'élasticité 3-D de corps FGM épais et fissurés. Ces fonctions peuvent également être directement utilisées pour d'autres formes de plaques (circulaire, elliptique, polygonale, trapézoïdale) et dans d'autres méthodes numériques (Galerkin et méthode spectrale). Durant la même année, Hasani Baferani, Saidi et al. [135] ont présenté les solutions des vibrations libres d'une plaque FGM épaisse reposant sur un support élastique. Deux côtés de la plaque sont en appuis simples, les autres sont pris en tant que paramètres (libre, encastré ou appui simple). Les équations obtenues par le principe de Hamilton ont été découplées et résolues analytiquement par la méthode de Levy [98]. Dans leur étude, les déplacements en membrane ont été pris en compte. Les résultats ont montré que le support élastique type Pasternak a un rôle significatif dans l'augmentation de la fréquence naturelle. Il a aussi été observé qu'en augmentant l'index de la fraction volumique, l'effet du support élastique sur les fréquences augmente. Ce phénomène a été expliqué par le fait qu'une augmentation du paramètre de cisaillement du support élastique conduit à une augmentation des déplacements en membrane et qui a pour conséquence d'accroître l'effet de la rigidité en membrane sur les fréquences propres de vibration.

1.7. Synthèse de la recherche bibliographique :

Suite à cette recherche bibliographique, nous remarquons que les matériaux à gradient fonctionnel représentent un axe de recherche relativement nouveau, que depuis l'apparition du concept FGM, beaucoup de chercheurs s'y sont intéressés et d'innombrables travaux ont été publiés mais qu'il reste encore beaucoup à faire. Il est

important de souligner que dans ce chapitre, la branche expérimentale et celle des méthodes et processus de fabrication n'ont pas été abordées et que là aussi l'intérêt est grandissant. De cette synthèse bibliographique, il ressort que :

1. La poutre FGM a été un élément structural négligé et donc peu étudié.
2. La plaque a bénéficié d'un grand intérêt. Elle a été largement étudiée.
3. Plusieurs théories des plaques ont été développées pour modéliser leur comportement mécanique et ramener le problème structural, initialement à trois dimensions, à un problème à deux dimensions de moindre difficulté. Ces théories considèrent le plan neutre (plan ne subissant aucune déformation) comme étant le plan moyen de l'élément structural considéré, ce qui n'est vrai que si ce plan moyen est un plan de symétrie élastique. Il est également important de préciser qu'il n'existe pas de formulation unifiée (valable pour différentes théories de déformation) prenant en charge l'effet des contraintes thermiques
4. Les matériaux à gradient fonctionnel ont été conçus à la base pour servir de barrière thermique d'où l'importance d'étudier les éléments structuraux en FGM dans des environnements thermiques sévères et de prendre en considération les changements conséquents sur leurs propriétés thermoélastiques, ce que beaucoup de travaux publiés ont omis de faire.
5. Plusieurs méthodes d'approximation ont été utilisées dans la résolution des problèmes statiques et dynamiques des poutres et des plaques FGM dont la méthode de Ritz et la DQM (Differential Quadrature Method). Concernant la méthode de Ritz certaines classes de fonctions admissibles n'ont jamais été appliquées telles que les fonctions trigonométriques hiérarchiques, les polynômes orthogonaux de Legendre et les polynômes orthogonaux généraux générés par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Quant à la DQM, elle n'a pas été utilisée dans la résolution des équations des structures FGM non symétriques soumises à un gradient de température lorsque des théories d'ordre supérieur sont utilisées dans la formulation.
6. Le développement de méthodes analytiques étant très important pour la validation des méthodes d'approximation, quelques méthodes analytiques de résolution du problème des vibrations libres de structures FGM ont été publiées. Ces méthodes s'appliquent à des cas de structures simples et n'ont jusqu'ici jamais pris en charge l'environnement thermique.

1.8. Précision sur le sujet de thèse :

Ce travail de recherche sera consacré à l'étude des vibrations libres des poutres et des plaques en matériau à gradient fonctionnel placées dans un environnement thermique. La synthèse bibliographique de la section précédente nous a permis de mettre en place les grandes lignes du travail envisagé :

1. Développer un nouveau champ de déplacements qui permettra d'établir une nouvelle théorie de déformation en cisaillement des poutres et des plaques FGM.
2. Apporter une contribution à l'étude des vibrations libres des poutres FGM placées dans un environnement thermique en développant une méthode analytique pour les poutres symétriques sous des conditions générales de liaisons extérieures.
3. Résoudre le problème des vibrations libres des poutres en FGM non symétriques placées dans un environnement thermique en utilisant la DQM adaptée à une formulation d'ordre supérieur, puis la méthode de Ritz, en appliquant des classes de fonctions qui n'ont pas été utilisées jusque-là sur des structures en FGM.
4. Développer des équations paramétrées de la plaque FGM, soumise à des contraintes thermiques sous une forme unifiée pouvant prendre en considération n'importe quelle théorie de déformation par un simple changement de paramètre.
5. Résoudre le problème des vibrations libres des plaques en FGM placées dans un environnement thermique en tenant compte de différentes théories de déformation basées sur l'élasticité bidimensionnelle y compris la nouvelle théorie développée, en appliquant la méthode de Ritz et ceci pour des conditions aux limites générales.

CHAPITRE 2

LES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL ET LEUR MODELISATION

2.1. Introduction:

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue (figure 2.1) ou discrète (figure 2.2) à travers l'épaisseur (Hirai [136]). Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant délamination et décollement) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautique, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.

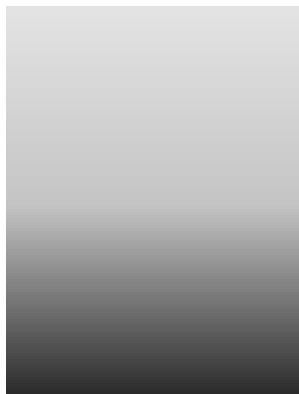


Figure 2.1: Variation continue des propriétés



Figure 2.2: Variation discrète des propriétés

La variation continue des propriétés (figures 2.3 et 2.4) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à

100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux. L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles :

- faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- haute température de fusion ou de décomposition ;
- haut module d'élasticité et haute dureté ;
- charge à la rupture élevée ;
- bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- conservation des propriétés à haute température ;
- faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

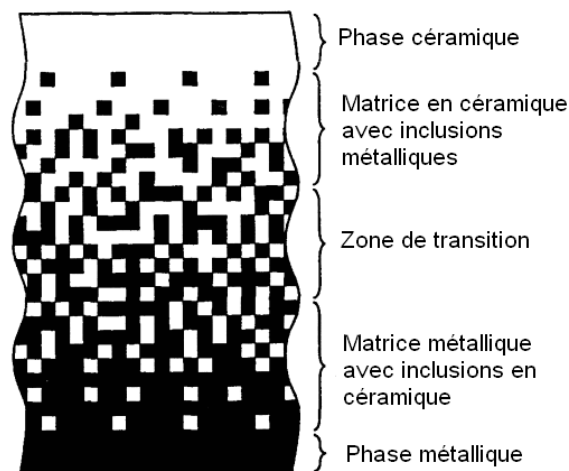


Figure 2.3: Variation continue de la microstructure (schématisée)

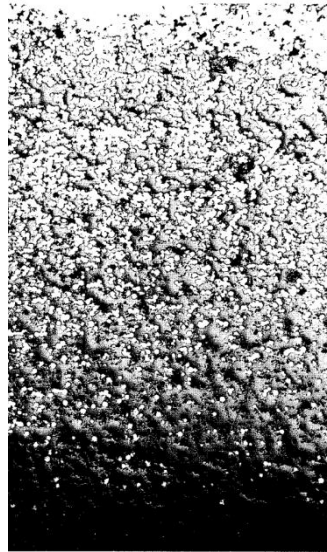


Figure 2.4: Variation continue de la microstructure (photo)

En ajustant la microstructure de transition d'une façon appropriée, il est possible d'obtenir une distribution optimale de la température, de la déformation et des contraintes. Cette possibilité d'ajustement est demandée lors de la conception des structures thermiques aéronautiques et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a aussi été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durée de vie des revêtements pare-feu (Jian, Hashida et al. [137], Kawasaki et Watanabe [138]).

Faire varier la microstructure en assurant un espacement non uniforme (figure 2.5) ou en incluant plusieurs renforcements (figure 2.6) trouve son application dans la réduction des différences entre les propriétés thermomécaniques des différentes couches adjacentes des plaques multicouches.

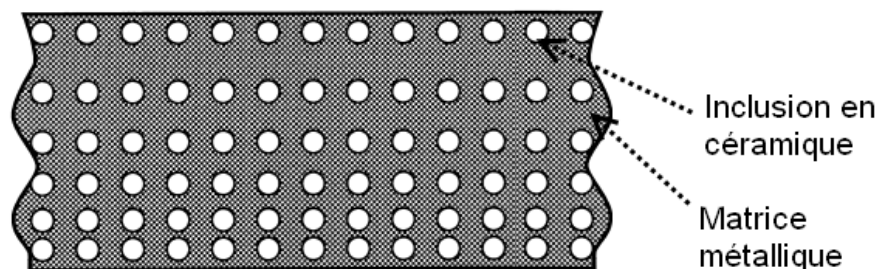


Figure 2.5: Variation discrète de la microstructure avec espacement non-uniforme

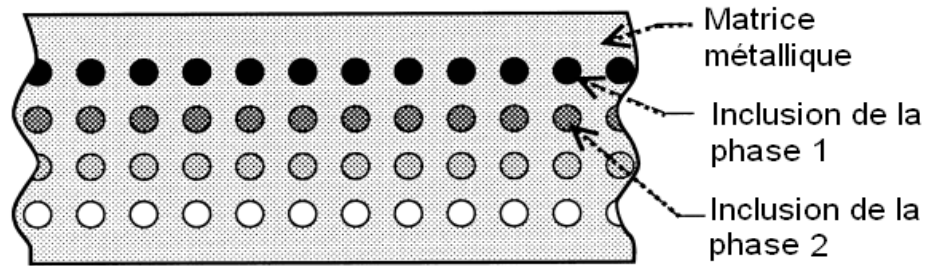


Figure 2.6: Variation multi-phases de la microstructure

La réduction des contraintes thermiques induites entre couches au niveau des bords libres peut être obtenue en appliquant la technique de la variation fonctionnelle des propriétés afin d'obtenir une transition douce entre couches dont les propriétés peuvent être totalement différentes. De même qu'il est possible d'étendre ces possibilités à la réalisation de jonctions efficaces des matériaux dissemblables en formant des joints à gradient fonctionnel (Drake, Williamson et al. [80], Williamson, Rabin et al. [81], Williamson, Rabin et al. [139]). Dans le domaine de la résistance à la rupture, l'introduction d'une deuxième phase permet de créer des champs de contraintes locales de compression dans les zones critiques sujettes à des amorces de criques (Erdogan [140]). De nombreuses autres possibilités d'application des FGM existent. Certaines sont au stade théorique car la réalisation technologique reste encore très coûteuse, d'autres font partie du domaine pratique, tels que les systèmes de conversion thermique (Koizumi [141]) et les implants dentaires (Watari, Yokoyama et al. [142]).

La nature est la première à nous offrir des exemples stupéfiants d'optimisation de la matière (terre, atmosphère, océans) pour une fonction donnée. C'est ainsi que les milieux biologiques (figures 2.7 et 2.8), après des millions d'années d'évolution, présentent des microstructures à gradient de propriétés. Les milieux vivants (Nogata et Takahashi [143], Amada, Ichikawa et al. [144]) sont des milieux adaptatifs à l'environnement (bambou, os, coquillage, les dents, les ailes de certains insectes, etc.) et présentent aussi des microstructures à gradient matériel (composition du matériau) et à gradient structurel (porosité).

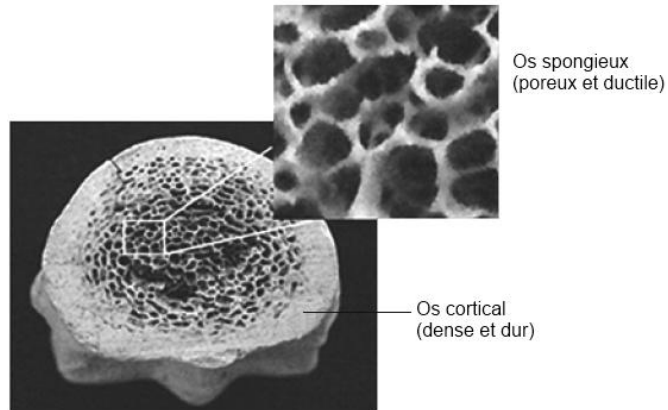


Figure 2.7: Variation de la (micro)structure (porosité) de l'Os

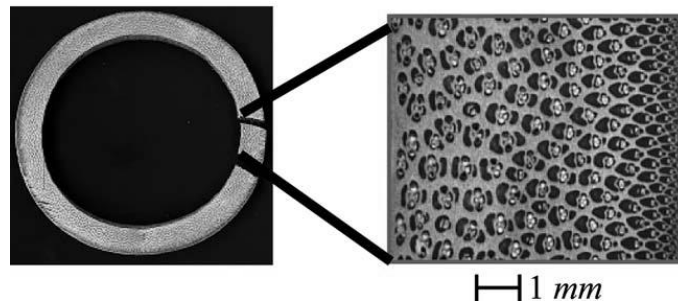


Figure 2.8: Variation de la (micro)structure (porosité) du bambou

2.2. Lois de distribution des propriétés :

Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication des matériaux à gradient fonctionnel est la composition multiphase à travers l'épaisseur. Afin de modéliser correctement ces matériaux, les propriétés doivent dépendre à la fois de la position et de la température du point considéré.

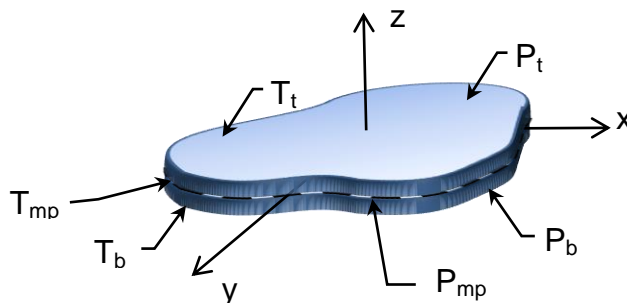


Figure 2.9: Élément structural en FGM

La figure 2.9 représente un élément structural en FGM dont la face supérieure de propriétés P_t est soumise à la température T_t , la face inférieure de propriétés P_b est soumise à la température T_b et la face médiane de propriétés P_{mp} est soumise à la température T_{mp} .

La dépendance des propriétés de la position implique la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt (Shen [145]):

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (2.1)$$

P_i et V_i représentent respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (2.2)$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_1 V_1 + P_2 V_2 \quad (2.3)$$

Avec :

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (2.4)$$

Etant donné que les FGM sont utilisés dans des environnements où le gradient de température de fonctionnement est important, les propriétés thermomécaniques doivent dépendre de la température. C'est ainsi que le module de Young, le coefficient de Poisson, le coefficient de dilation thermique et la conductivité thermique obéissent à la loi P_T non linéaire, fonction de la température T , suivante (Touloukian [146]):

$$P_T = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (2.5)$$

Où: P_0 , P_{-1} , P_1 , P_2 et P_3 sont les coefficients de température qui sont propres à chaque constituant (voir tableau 2.1).

La température en un point de côte z est donnée par :

$$T(z) = T_0 + \Delta T(z) \quad (2.6)$$

Où: $\Delta T(z)$ est l'élévation de la température dépendant de la position dans la direction de l'épaisseur du FGM et T_0 est la température de référence.

Tableau 2.1: Coefficients de température du module de Young E (Pa), de la masse volumique ρ (kg/m^3), du coefficient de Poisson ν , du coefficient de dilation thermique α (1/K) et de la conductivité thermique κ (W/mK)

	P	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3	$P(T = 300\text{K})$
Céramiques							
Si₃N₄	E	0	3,484E+11	-3,07E-04	2,16E-07	-8,95E-11	3,22276E+11
	ν	0	0,24	0	0	0	0,24
	α	0	5,87E-06	9,10E-04	0	0	7,47476E-06
	ρ	0	2370	0	0	0	2370
	κ	0	13,723	-1,03E-03	5,47E-07	-7,88E-11	10,12
Al₂O₃	E	0	3,50E+11	-3,85E-04	4,03E-07	-1,67E-10	3,20235E+11
	ν	0	0,26	0	0	0	0,260
	α	0	6,83E-06	1,84E-04	0	0	7,20334E-06
	ρ	0	3750	0	0	0	3750
	κ	-1123,6	-14,087	-6,23E-03	0	0	64,99
ZrO₂	E	0	1,32E+11	-3,81E-04	-6,13E-08	0	1,1638E+11
	ν	0	0,2882	1,13E-04	0	0	0,298
	α	0	1,33E-05	-1,42E-03	9,55E-07	0	8,7732E-06
	ρ	0	3657	0	0	0	3657
	κ	0	1,7	1,28E-04	6,65E-08	0	1,78
Métaux							
SUS304	E	0	2,01E+11	3,08E-04	-6,53E-07	0	2,07788E+11
	ν	0	0,3262	-2,00E-04	3,80E-07	0	0,318
	α	0	1,23E-05	8,09E-04	0	0	1,5321E-05
	ρ	0	8166	0	0	0	8166
	κ	0	15,379	-1,26E-03	2,09E-06	-7,22E-10	12,14
Ti-6Al-4V	E	0	1,23E+11	-4,59E-04	0	0	1,05698E+11
	ν	0	0,2884	1,12E-04	0	0	0,298
	α	0	7,58E-06	6,64E-04	-3,15E-06	0	6,9415E-06
	ρ	0	4429	0	0	0	4429
	κ	0	1	1,70E-02	0	0	6,11
Nickel	E	0	2,24E+11	-2,79E-04	-4,00E-09	0	2,05098E+11
	ν	0	0,31	0	0	0	0,310
	α	0	9,92E-06	8,71E-04	0	0	1,2512E-05
	ρ	0	8900	0	0	0	8900
	κ	0	187,66	-2,87E-03	4,01E-06	-1,98E-09	83,74

Données extraites de: Shen [145], Reddy et Chin [147]

Sachant que h est l'épaisseur de l'élément structural considéré et afin de prédire les propriétés physiques globales $P(z,T)$, des lois de distribution simples peuvent être utilisées (Chi et Chung [148]):

2.2.1. Loi de mélange en puissance (P-FGM) :

La fraction volumique d'un P-FGM est définie par :

$$V(z) = (z/h + 0.5)^n, \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (2.7)$$

n étant l'index de la fraction volumique du P-FGM.

Et la propriété du P-FGM s'écrit en fonction de la fraction volumique comme suit :

$$P(z, T) = [P_t(T) - P_b(T)]V(z) + P_b(T), \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (2.8)$$

2.2.2. Loi de mélange exponentielle (E-FGM) :

La propriété d'un E-FGM s'écrit comme suit :

$$P(z, T) = P_b(T) \text{Exp}[(z/h + 0.5) \ln(P_t(T)/P_b(T))], \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (2.9)$$

2.2.3. Loi de mélange sinusoïdale (S-FGM) :

La fraction volumique d'un S-FGM est définie par :

$$\begin{aligned} V(z) &= 0.5(1 + 2z/h)^p, & -h/2 \leq z \leq 0 \\ V'(z) &= 1 - 0.5(1 - 2z/h)^p, & 0 \leq z \leq h/2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

p étant l'index de la fraction volumique du S-FGM.

Et la propriété du S-FGM s'écrit en fonction de la fraction volumique comme suit :

$$\begin{aligned} P(z, T) &= [P_t(T) - P_b(T)]V(z) + P_b(T), & -h/2 \leq z \leq 0 \\ P(z, T) &= [P_t(T) - P_b(T)]V'(z) + P_b(T), & 0 \leq z \leq h/2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les fractions volumiques du P-FGM, du S-FGM ainsi que le module de Young obéissant à la loi E-FGM sont représentés graphiquement sur les figures 2.10, 2.11 et 2.12 respectivement.

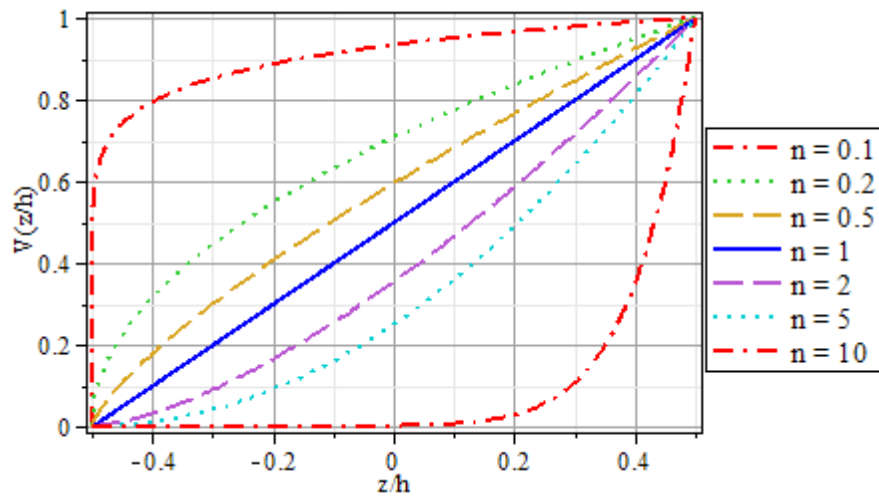


Figure 2.10: Variation de la fraction volumique du P-FGM

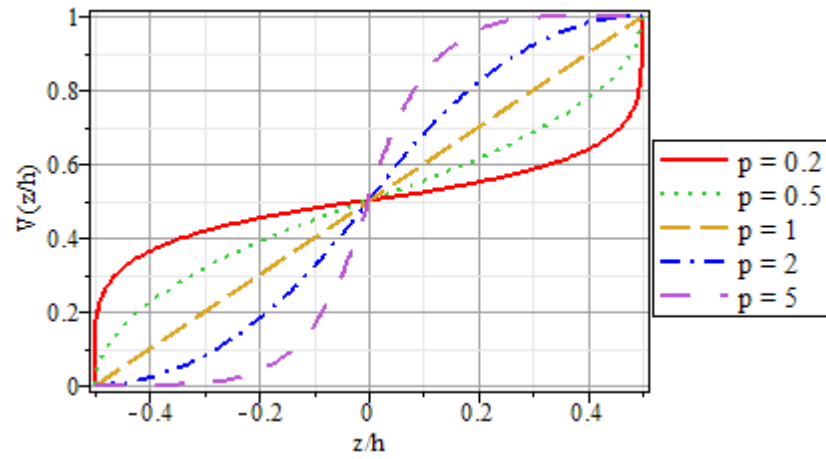


Figure 2.11: Variation de la fraction volumique du S-FGM

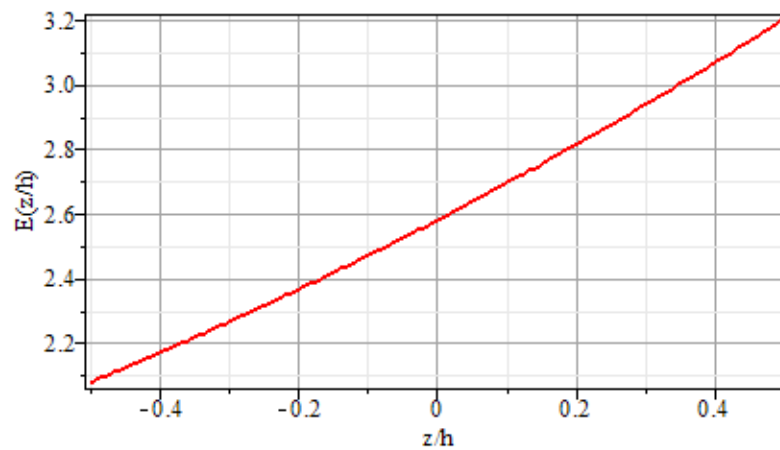


Figure 2.12: Variation du module de Young E ($[Pa] \times 10^{-11}$) du E-FGM (SUS304- Al_2O_3)

Pour le cas d'une poutre ou d'une plaque FGM symétrique, nous avons modifié les équations (2.8), (2.9) et (2.10) pour obtenir (Mahi, Adda Bedia et al. [149]) :

2.2.4. Loi de mélange en puissance (P-FGM) symétrique:

La propriété du P-FGM symétrique s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} P(z, T) &= [P_b(T) - P_{mp}(T)](-2z/h)^n + P_{mp}(T), & -h/2 \leq z \leq 0 \\ P(z, T) &= [P_t(T) - P_{mp}(T)](2z/h)^n + P_{mp}(T), & 0 \leq z \leq h/2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2.5. Loi de mélange exponentielle (E-FGM) symétrique :

La propriété du E-FGM symétrique s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} P(z, T) &= P_{mp}(T) \text{Exp} \left[(-2z/h) \ln(P_b(T)/P_{mp}(T)) \right], & -h/2 \leq z \leq 0 \\ P(z, T) &= P_{mp}(T) \text{Exp} \left[(2z/h) \ln(P_t(T)/P_{mp}(T)) \right], & 0 \leq z \leq h/2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.2.6. Loi de mélange sinusoïdale (S-FGM) symétrique :

La propriété du S-FGM symétrique s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} P(z, T) &= [P_b(T) - P_{mp}(T)] \left[1 - 0.5(2 + 4z/h)^p \right] + P_{mp}(T), & -h/2 \leq z \leq -h/4 \\ P(z, T) &= [P_b(T) - P_{mp}(T)] \left[0.5(-4z/h)^p \right] + P_{mp}(T), & -h/4 \leq z \leq 0 \\ P(z, T) &= [P_t(T) - P_{mp}(T)] \left[0.5(4z/h)^p \right] + P_{mp}(T), & 0 \leq z \leq h/4 \\ P(z, T) &= [P_t(T) - P_{mp}(T)] \left[1 - 0.5(2 - 4z/h)^p \right] + P_{mp}(T), & h/4 \leq z \leq h/2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Où P_t , P_b , P_{mp} sont les propriétés thermomécaniques au niveau des surfaces supérieure, inférieure et médiane et qui sont dépendantes de la température. Il faut noter que la distribution est symétrique lorsque $P_t = P_b$.

n et p sont les index des fractions volumiques qui pilotent le profil de variation des propriétés à travers l'épaisseur.

Les fractions volumiques du P-FGM symétrique, du S-FGM symétrique ainsi que le module de Young obéissant à la loi E-FGM symétrique sont représentés graphiquement sur les figures 2.11, 2.12 et 2.13 respectivement.

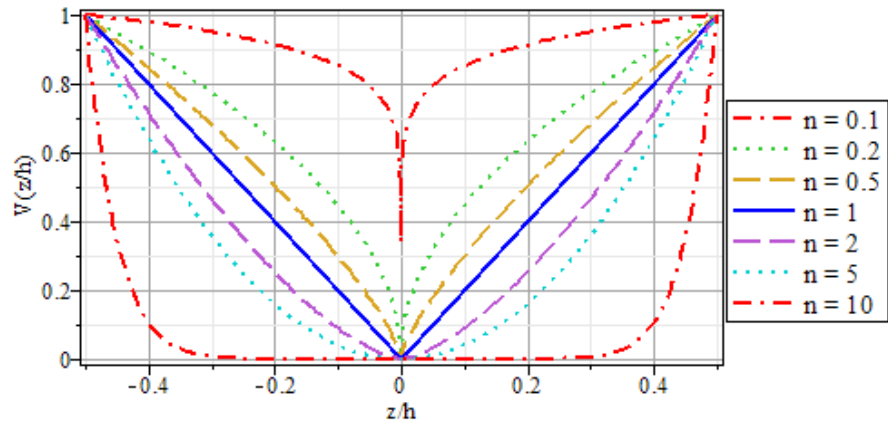


Figure 2.13: Variation de la fraction volumique du P-FGM symétrique

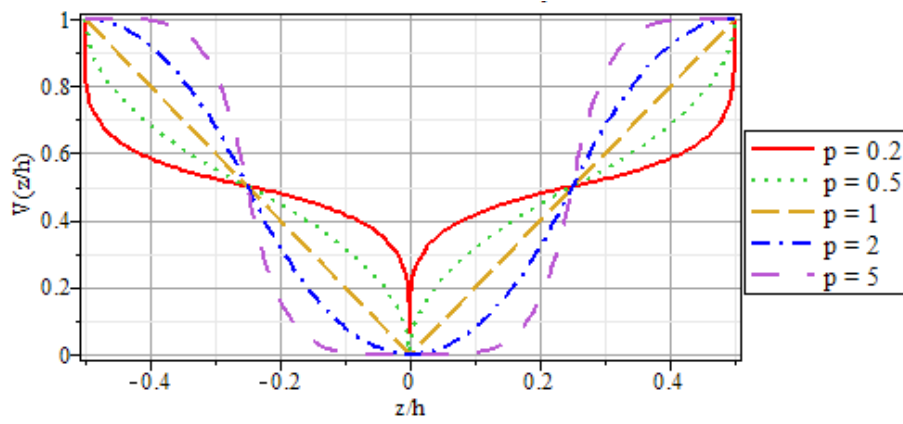


Figure 2.14: Variation de la fraction volumique du S-FGM symétrique

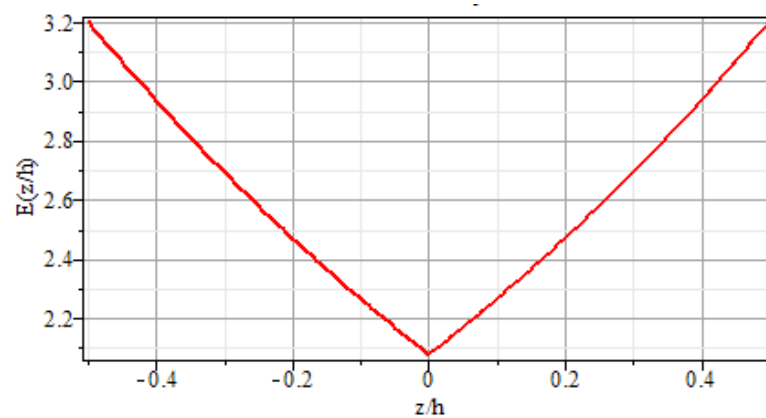


Figure 2.15: Variation du module d'Young E ($[Pa] \times 10^{-11}$) (E-FGM Al_2O_3 -SUS304- Al_2O_3)

En considérant par exemple la loi de variation P-FGM métal-céramique (surface supérieure 100% céramique (indice c) et surface inférieure 100% métal (indice m)), les différentes propriétés s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
 E(z, T) &= [E_c(T) - E_m(T)](z/h + 0.5)^n + E_m(T) \\
 \nu(z, T) &= [\nu_c(T) - \nu_m(T)](z/h + 0.5)^n + \nu_m(T) \\
 \alpha(z, T) &= [\alpha_c(T) - \alpha_m(T)](z/h + 0.5)^n + \alpha_m(T) \\
 \kappa(z, T) &= [\kappa_c(T) - \kappa_m(T)](z/h + 0.5)^n + \kappa_m(T)
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Lorsque $n = 1$, la composition change linéairement à travers l'épaisseur, tandis que lorsque $n = 1/2$ ou 2 , la composition change d'une manière quadratique ou parabolique. Dans le cas par exemple d'un revêtement d'isolation thermique, il est souhaitable d'avoir le maximum de céramique sur la face exposée à de fortes températures pour améliorer l'isolation sans sacrifier les aspects mécaniques des zones gradées. Pour répondre à ce besoin, un profil parabolique (figure 2.16) est tout à fait adapté. D'un autre côté, un profil linéaire peut être un choix optimal pour d'autres types d'applications (figure 2.17).

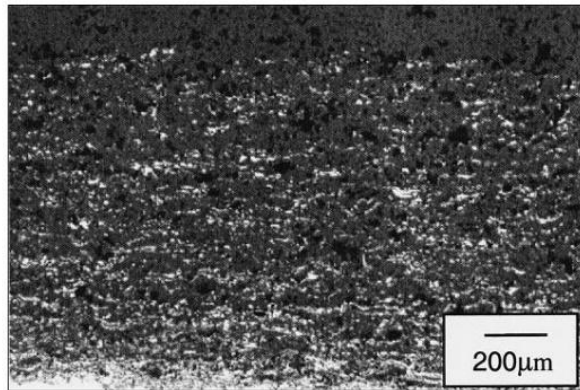


Figure 2.16: Profil parabolique ($n = 2$) d'un FGM Céramique-Métal (PSZ-NiCrAlY)

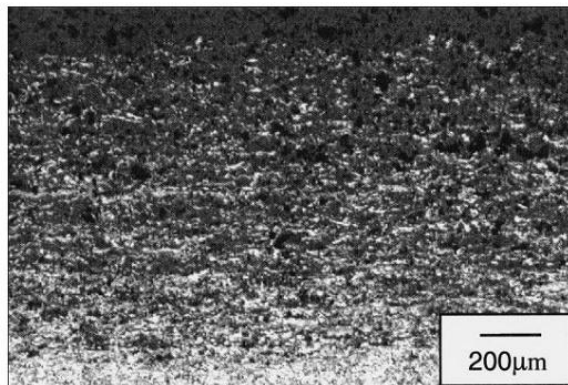


Figure 2.17: Profil linéaire ($n = 1$) d'un FGM Céramique-Métal (PSZ-NiCrAlY)

Dans les deux figures précédentes, PSZ (céramique) représente du zirconne partiellement stabilisé et NiCrAlY (métal) représente un alliage à base de nickel.

2.2.7. Schéma de Mori-Tanaka :

Les lois de mélange (P-FGM, S-FGM et E-FGM) sont pratiques et simples à utiliser mais elles ne permettent pas de connaître la taille, la forme et la distribution des particules au niveau de la microstructure. Plusieurs modèles permettant d'évaluer les propriétés globales, existent. Le plus utilisé est basé sur le schéma de Mori et Tanaka [126] qui permet d'estimer les modules effectifs valables pour des zones de la microstructure où la variation de la matrice (continue) et celle des phases particulières (discontinues) sont bien connues (figure 2.18). Ce modèle tient compte de l'interaction des champs élastiques des inclusions voisines. Il suppose que la phase matrice dénotée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques de la phase particulière dénotée par l'indice 2.

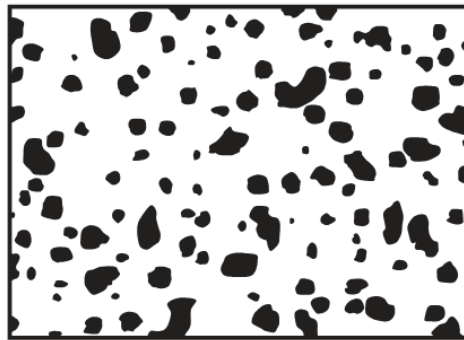


Figure 2.18: Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulaire

Si on note par K le module de compressibilité, par G le module de cisaillement et par V la fraction volumique, les différentes propriétés locales obtenues par le modèle de Mori et Tanaka [126] , pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope, sont alors données par (Vel et Batra [65], Shen [145]):

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(K_2 - K_1)/(K_1 + \frac{4}{3}G_1)} \quad (2.16)$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(G_2 - G_1)/(G_1 + f_1)} \quad (2.17)$$

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{(1/K) - (1/K_1)}{(1/K_2) - (1/K_1)} \quad (2.18)$$

$$\frac{\kappa - \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(\kappa_2 - \kappa_1)/3\kappa_1} \quad (2.19)$$

Où :

$$f_1 = \frac{G_1(9K_1 + 8G_1)}{6(K_1 + 2G_1)} \quad (2.20)$$

α est le coefficient de dilatation thermique et κ est la conductivité thermique

2.2.8. Schéma auto-cohérent de Hill :

La méthode du schéma auto-cohérent de Hill [150] (self-consistent method) suppose que chaque inclusion de renforcement est contenue dans un matériau continu pour lequel les propriétés sont celles d'un composite. Cette méthode ne différencie pas entre la phase matrice et la phase renforcement ; impliquant que le même module global est estimé dans un autre composite où les rôles des deux phases sont permutés. Ceci permet l'estimation du module effectif dans les régions dont le squelette de la microstructure a une forme continue telle que montrée sur la figure 2.19.



Figure 2.19: Matériau FGM à deux phases avec microstructure squelettique

Les modules élastiques effectifs sont donnés par :

$$\frac{g}{K} = \frac{V_1}{K - K_2} + \frac{V_2}{K - K_1} \quad (2.21)$$

$$\frac{\eta}{G} = \frac{V_1}{G - G_2} + \frac{V_2}{G - G_1} \quad (2.22)$$

Où g est défini par :

$$g = \frac{K}{K + (4/3)G} \quad (2.23)$$

Et η est défini par:

$$\eta = \frac{1}{5}(3 - g) \quad (2.24)$$

A partir des équations (2.21) et (2.22) , l'expression du module de compressibilité est obtenue :

$$K = \frac{1}{V_1 / (K_1 + (4/3)G) + V_2 / (K_2 + (4/3)G)} - \frac{4}{3}G \quad (2.25)$$

Le module G est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\left[\frac{V_1 K_1}{(K_1 + (4/3)G)} + \frac{V_2 K_2}{(K_2 + (4/3)G)} \right] + 5 \left[\frac{V_1 G_2}{(G - G_2)} + \frac{V_2 G_1}{(G - G_1)} \right] + 2 = 0 \quad (2.26)$$

Pour les deux schémas précédents, le module de Young et le coefficient de Poisson sont calculés par :

$$E = 9KG / (3K + G) \quad (2.27)$$

$$\nu = (3K - 2G) / 2(3K + G) \quad (2.28)$$

La masse volumique est évaluée à partir de la loi de Voigt (2.3) selon :

$$\rho = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 \quad (2.29)$$

Il est bien connu que le modèle de Mori-Tanaka conduit à une estimation précise des propriétés mécaniques lorsque la continuité de la matrice et la discontinuité des inclusions sont bien définies alors que le modèle de Hill est mieux adapté pour une microstructure squelettique caractérisée par une zone de transition large entre régions où il y a prédominance de l'un ou l'autre des constituants.

2.3. Gradient de température dans l'épaisseur du FGM :

Les matériaux à gradient fonctionnel sont les candidats idéaux pour des applications subissant des gradients de température sévères. C'est pourquoi la prise en compte du facteur température dans l'étude de ces matériaux est de première importance.

Pour évaluer l'influence de la température sur les vibrations libres des poutres et des plaques FGM, nous imposons des valeurs de température T_t et T_b sur les surfaces supérieure et inférieure de la structure respectivement. En résolvant l'équation de conduction thermique suivant l'épaisseur, nous pouvons connaître le gradient de température appliqué.

Pour le cas d'une structure FGM non symétrique, l'équation différentielle de Fourier est donnée par :

$$-\frac{d}{dz} \left[\kappa(z) \frac{dT(z)}{dz} \right] = 0 \quad (2.30)$$

Les conditions aux limites sur la température sont :

$$T(h/2) = T_t, \quad T(-h/2) = T_b \quad (2.31)$$

En tenant compte de ces dernières conditions, la solution de l'équation de Fourier peut être obtenue par :

$$T(z) = T_b + \frac{T_t - T_b}{\int_{-h/2}^{+h/2} \frac{1}{\kappa(z)} dz} \int_{-h/2}^z \frac{1}{\kappa(z)} dz \quad (2.32)$$

La loi de variation (2.32) est représentée sur la figure 2.20 pour différentes températures imposées sur la surface supérieure.

Dans le cas d'une structure FGM symétrique, sachant que les propriétés physiques dépendent de la température, les conditions aux limites doivent être comme suit afin d'assurer un gradient symétrique (Mahi, Adda Bedia et al. [149]) :

$$T(h/2) = T_t, \quad T(0) = T_{mp}, \quad T(-h/2) = T_b \quad (2.33)$$

En appliquant les conditions aux limites ci-dessus, la solution $T(z)$ devient :

$$T(z) = T_b + \frac{T_{mp} - T_b}{\int_{-h/2}^0 \frac{1}{\kappa(z)} dz} \int_{-h/2}^z \frac{1}{\kappa(z)} dz, \quad -h/2 \leq z \leq 0$$

$$T(z) = T_{mp} + \frac{T_t - T_{mp}}{\int_0^{h/2} \frac{1}{\kappa(z)} dz} \int_0^z \frac{1}{\kappa(z)} dz, \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (2.34)$$

Où κ est la conductivité thermique dépendant de la position et de la température. L'élévation locale de la température est:

$$\Delta T(z) = T(z) - T_0 \quad (2.35)$$

La loi de variation de $T(z)$ symétrique est représentée sur la figure 2.21 pour différentes températures imposées sur la surface supérieure/inférieure d'un P-FGM.

Dans le cas où le coefficient κ obéit à la loi des mélanges P-FGM non symétrique, la solution de l'équation de Fourier, en termes de séries polynômiales, s'écrit (Javaheri et Eslami [93]):

$$T(z) = T_b + (T_t - T_b)\eta(z) \quad (2.36)$$

Avec :

$$\eta(z) = \frac{1}{C_{ib}} \left[(z/h + 0.5) - \frac{\kappa_{ib}}{(n+1)\kappa_b} (z/h + 0.5)^{n+1} + \frac{\kappa_{ib}^2}{(2n+1)\kappa_b^2} (z/h + 0.5)^{2n+1} - \frac{\kappa_{ib}^3}{(3n+1)\kappa_b^3} (z/h + 0.5)^{3n+1} + \frac{\kappa_{ib}^4}{(4n+1)\kappa_b^4} (z/h + 0.5)^{4n+1} - \frac{\kappa_{ib}^5}{(5n+1)\kappa_b^5} (z/h + 0.5)^{5n+1} \right] \quad (2.37)$$

Où :

$$C_{ib} = 1 - \frac{\kappa_{ib}}{(n+1)\kappa_b} + \frac{\kappa_{ib}^2}{(2n+1)\kappa_b^2} - \frac{\kappa_{ib}^3}{(3n+1)\kappa_b^3} + \frac{\kappa_{ib}^4}{(4n+1)\kappa_b^4} - \frac{\kappa_{ib}^5}{(5n+1)\kappa_b^5} \quad (2.38)$$

et

$$\kappa_{ib} = \kappa_t - \kappa_b \quad (2.39)$$

Pour le cas d'une poutre ou d'une plaque isotrope, la solution se réduit à :

$$T(z) = \left(\frac{T_t + T_b}{2} \right) + \left(\frac{T_t - T_b}{h} \right) z \quad (2.40)$$

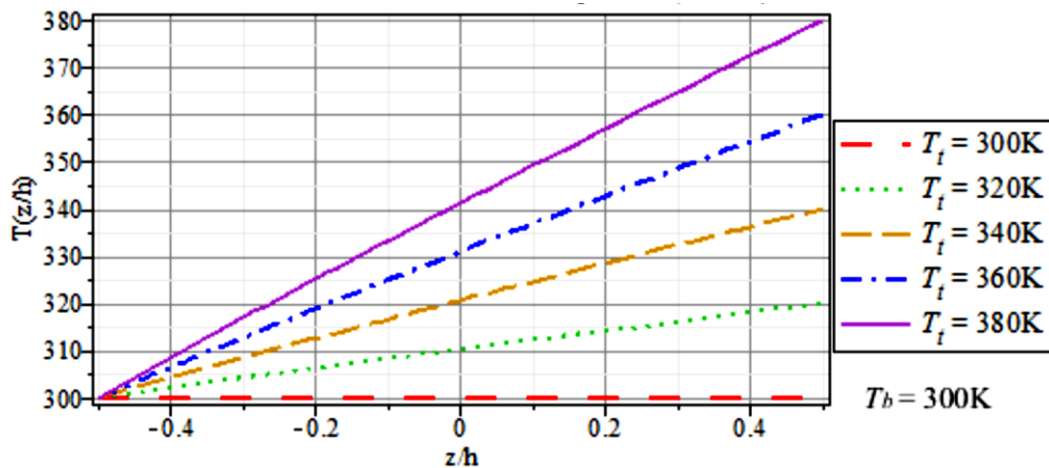


Figure 2.20: Variation de la température à travers l'épaisseur (P-FGM, $n = 0.5$)

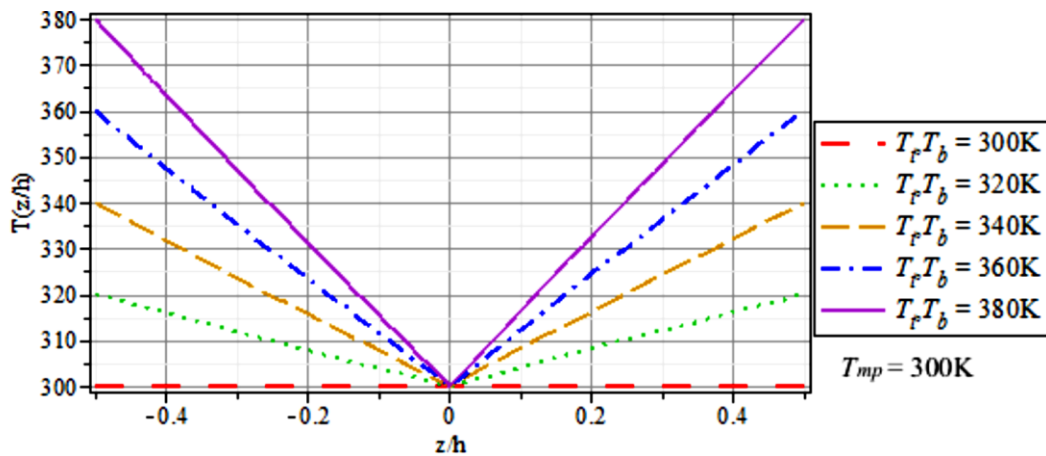


Figure 2.21: Variation de la température à travers l'épaisseur (P-FGM symétrique, $n = 0.5$)

2.4. Influence de la température sur les propriétés thermomécaniques :

Le changement de température provoque des variations plus ou moins importantes des propriétés thermomécaniques des FGM. Les figures 2.22 à 2.25 montrent la variation du module de Young, du coefficient de Poisson, du coefficient de dilatation thermique et de la conductivité thermique à travers l'épaisseur en fonction de la température d'une plaque métal-céramique (SUS304- Al_2O_3). Nous remarquons au passage que l'élévation de la température a plus d'effet sur le module de Young et sur la conductivité thermique que sur les autres propriétés. L'écart de température est plus important au niveau de la face supérieure ($z = h/2$), alors que la face inférieure est maintenue à 300K ; c'est ce qui explique l'écart plus important entre les différentes courbes du module de Young E et les différentes courbes de la conductivité thermique κ lorsqu'on s'approche de la surface supérieure. Cet exemple est pris pour un FGM métal-céramique (SUS304- Al_2O_3) où la face inférieure est à 100% métal et la face supérieure est à 100% céramique. Le profil de température obéit à la loi non linéaire représentée par l'équation (2.32) et la dépendance à la température est calculée par l'équation non linéaire (2.5).

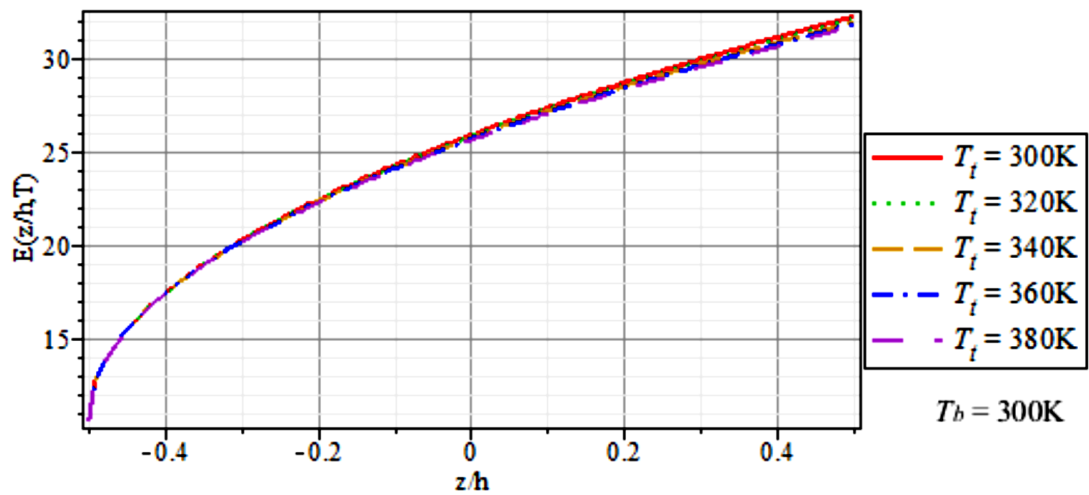


Figure 2.22: Variation du module de Young E ($\text{Pa} \times 10^{-10}$) dans l'épaisseur en fonction de la température T (K) (P-FGM, $n = 0.5$)

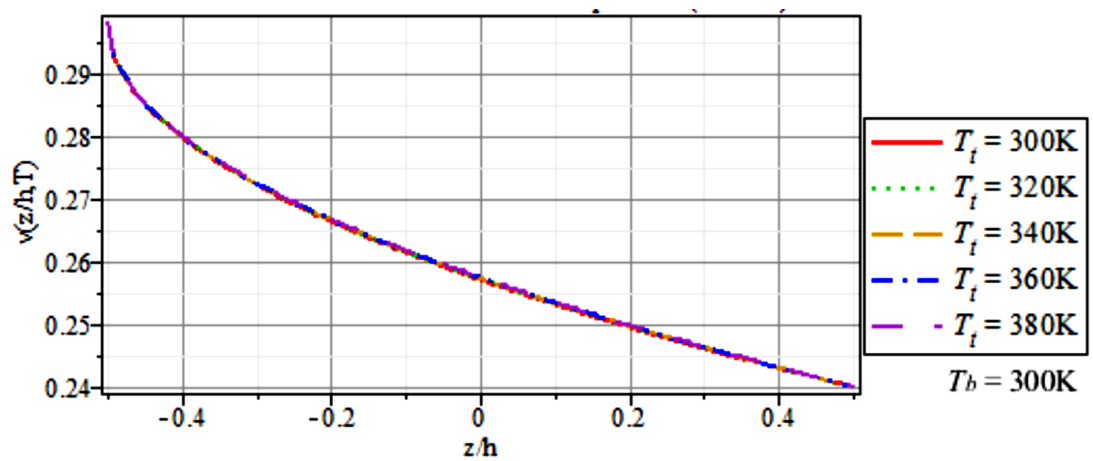


Figure 2.23: Variation du coefficient de Poisson ν dans l'épaisseur en fonction de la température T (K) (P-FGM, $n = 0.5$)

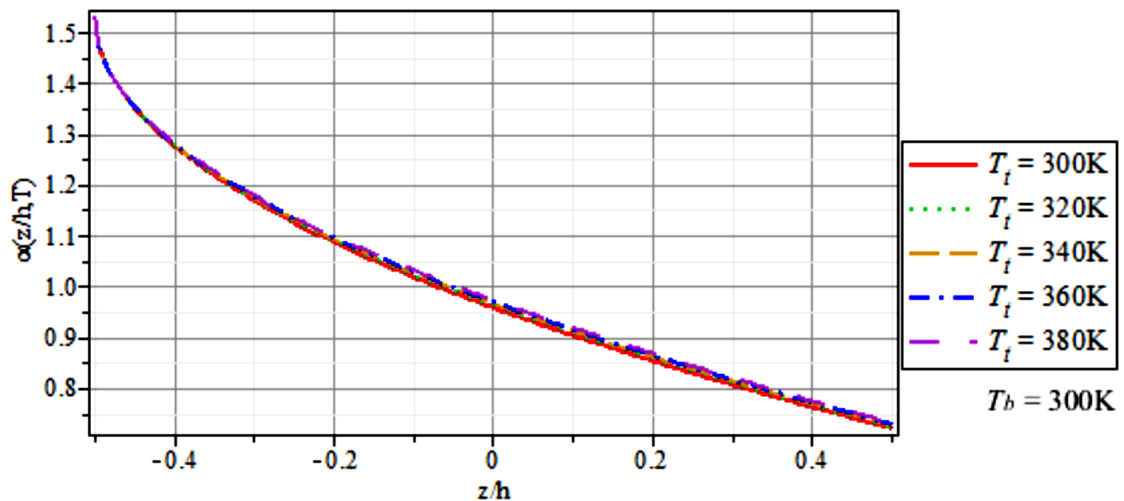


Figure 2.24: Variation du coefficient de dilataion thermique α ($K^{-1} \times 10^5$) dans l'epaisseur en fonction de la temperature T (K) (P-FGM, $n = 0.5$)

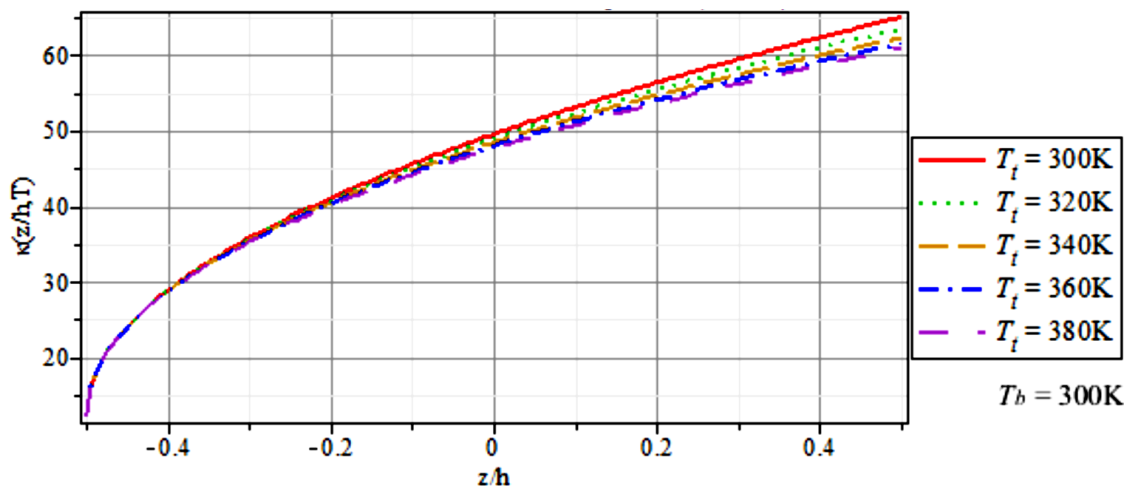


Figure 2.25: Variation de la conductivite thermique κ (W/m K) dans l'epaisseur en fonction de la temperature T (K) (P-FGM, $n = 0.5$)

2.5. Les theories de deformation des plaques:

L'utilisation intensive des plaques isotropes et des plaques composites dans diverses industries, particulierement dans les domaines de l'aeronautique, de l'automobile, et de la construction navale, a stimule les chercheurs a developper des theories capables de decrir correctement leur comportement structural.

L'analyse des plaques est un problème tridimensionnel. Presque toutes les théories développées ont eu pour principal objet la réduction du problème 3-D à un problème 2-D en se servant des hypothèses simplificatrices concernant la cinématique des déformations et l'état des contraintes à travers l'épaisseur. Dans ce qui suit, seules les théories les plus utilisées dans l'analyse des plaques FGM, seront exposées.

2.5.1. Théorie classique des plaques (CPT):

En 1850, Kirchhoff [151], [152] a développé la plus connue des théories des plaques appelée « théorie classique des plaques », basée sur les hypothèses citées dans le chapitre 1. Le champ des déplacements d'un point de coordonnées (x,y,z) à l'instant t s'écrit :

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)\end{aligned}\quad (2.41)$$

Où u, v, w sont les déplacements le long des axes de coordonnées x, y et z d'un point du plan moyen (plan $z = 0$).

Etant donné que les hypothèses de Kirchhoff négligent le cisaillement transverse et l'effet de la déformation axiale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est due essentiellement à la flexion et aux déformations en plan (figure 2.26); ce qui limite la validité de cette théorie aux plaques minces (Ashton et Whitney [153], Timoshenko et Woinowsky-Krieger [154])

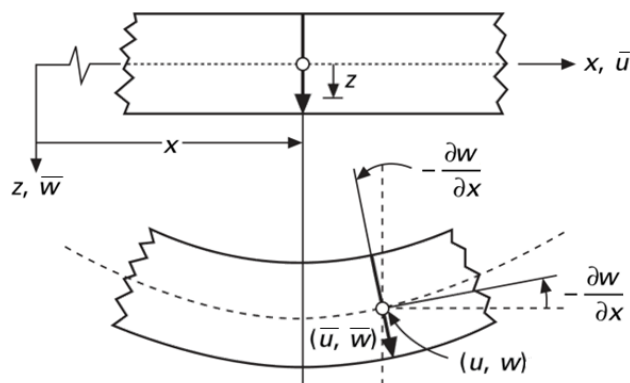


Figure 2.26: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques

2.5.2. Théorie des plaques du premier ordre (FSDPT) :

Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko ([7], [8]) et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff). Cette amélioration consiste à rajouter la déformation en cisaillement transverse dans les hypothèses cinématiques. La distribution de cette déformation est supposée constante dans l'épaisseur. Le champ des déplacements est alors le suivant (figure 2.27):

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)\end{aligned}\quad (2.42)$$

Où u, v, w sont les déplacements le long des coordonnées x, y et z d'un point du plan moyen (plan $z = 0$); ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normale à la section transversale par rapport aux axes y et x respectivement.

La théorie des déformations du premier ordre nécessite un facteur de correction du cisaillement qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites.

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, c'est pourquoi le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est aussi appelé modèle ou poutre de Timoshenko.

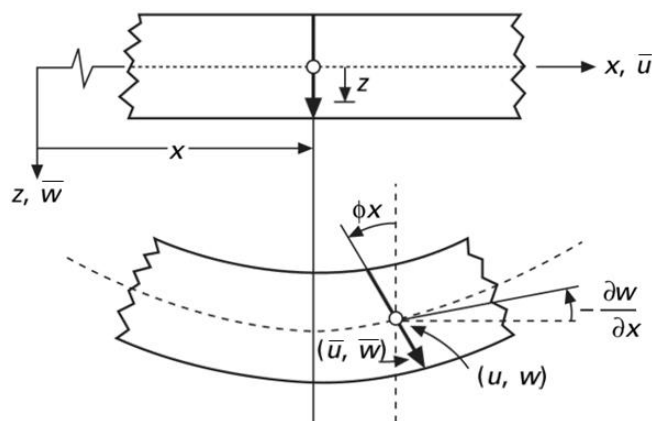


Figure 2.27: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre

2.5.3. Théories des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) :

Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher convenablement un problème donné, il sera alors nécessaire de passer à un schéma d'ordre supérieur (2^{ème} ordre, 3^{ème} ordre, voire plus), dans le développement des déplacements en séries. Par conséquent, ces théories introduisent des fonctions supplémentaires dont les termes sont souvent difficiles à interpréter.

2.5.3.1. Théorie des plaques du second ordre :

Le champ des déplacements de la théorie du second ordre s'exprime par :

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t) + z\phi_z(x, y, t) + z^2\psi_z(x, y, t)\end{aligned}\quad (2.43)$$

Où : $u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$ sont des fonctions inconnues dépendant des coordonnées x et y et du temps t .

Cette théorie apporte une amélioration substantielle par rapport à la théorie du premier ordre tout en nécessitant un facteur de correction comme pour la FSDPT.

2.5.3.2. Théorie des plaques du troisième ordre :

Dans la quête de théories plus raffinées et dans le souci de supprimer les limitations des précédentes théories, de nouvelles théories d'ordre supérieur ont vu le jour. Le champ des déplacements s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) + z^3\chi_x(x, y, t) \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) + z^3\chi_y(x, y, t) \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t) + z\phi_z(x, y, t) + z^2\psi_z(x, y, t) + z^3\chi_z(x, y, t)\end{aligned}\quad (2.44)$$

Où: $u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \chi_x, \chi_y, \chi_z$ sont des fonctions inconnues dépendant des coordonnées x et y et du temps t .

D'autres théories raffinées, basées sur la théorie classique des plaques (CPT) et satisfaisant les conditions de contraintes nulles sur les faces inférieure et supérieure de la plaque ont été développées. Leur champ de déplacements s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} + z \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \phi_x(x, y, t) \\
\bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} + z \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \phi_y(x, y, t) \\
\bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Où: u, v et w sont les déplacements le long des coordonnées x, y et z d'un point du plan moyen (plan $z = 0$); ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normale à la section transversale par rapport aux axes y et x respectivement.

La théorie dominante, utilisée dans les études de flexion, de flambage et de vibrations des plaques FGM est la théorie du troisième ordre de Reddy [21], [23], [49], [88], [124], [155]. Le champ des déplacements de Reddy est le suivant (figure 2.28):

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z \phi_x(x, y, t) + z^3 \left(-\frac{4}{3h^2} \right) \left[\phi_x(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\
\bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z \phi_y(x, y, t) + z^3 \left(-\frac{4}{3h^2} \right) \left[\phi_y(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\
\bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Le champ des déplacements inclut une variation parabolique des déformations en cisaillement transversal et des contraintes qui leurs sont associées. Les contraintes de cisaillement s'annulent au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Cette théorie ne nécessite donc pas de facteur de correction des contraintes puisqu'elle fournit une distribution plus réaliste des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur. Elle fournit également de meilleures précisions par rapport aux théories précédentes quant à la réponse globale des plaques minces et des plaques épaisses et une meilleure estimation des déflexions moyennes, des charges critiques de flambage, des fréquences de vibration et de leurs modes propres associés.

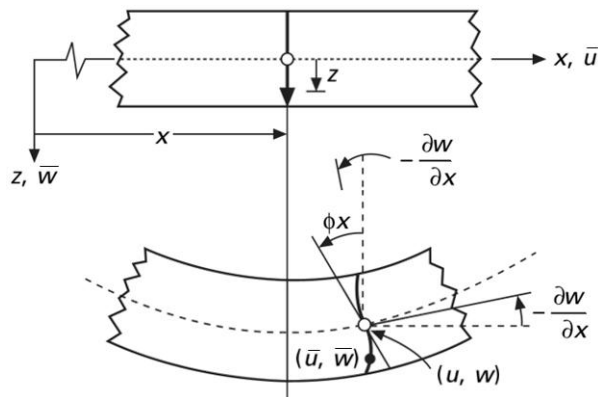


Figure 2.28: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre supérieur

D'autres théories raffinées ont vu le jour plus récemment. Leur champ de déplacements sous la forme unifiée s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi(z) \left[\psi_x(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\
 \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi(z) \left[\psi_y(x, y, t) + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\
 \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Où: $\varphi(z)$ est la fonction de forme pilotant la distribution des déformations de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque. Elle est propre à chaque théorie (tableau 2.2).

Tableau 2.2: Différentes fonctions de forme des théories des plaques isotropes et FGM

Théorie	Intitulé	Fonction de forme $\varphi(z)$	Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z	Coefficient de correction (cisaillement)	Validité
CPT Kirchhoff [151], [152]	Théorie classique des plaques	0	-	-	Plaques minces
FSDPT Mindlin [11]	Théorie de déformation des plaques du 1 ^{er} ordre	z	Constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumian [156]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratique	Non requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner [157]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
TSDPT Touratier [158]	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
ESDPT Karama, Afaq et al. [41]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \text{Exp} \left(-2 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
PSDPT Levinson [19], Reddy [21], Murthy [159]	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu [52]	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z\alpha \frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}, \alpha > 0$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
El Meiche, Tounsi et al. [53]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) - z$ $\left[\cosh \left(\pi / 2 \right) - 1 \right]$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses

Atmane, Tounsi et al. [58]	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\cosh(\pi/2)}{[\cos(\pi/2)-1]} z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z$ $\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z$ $\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi [54] (*)	Théorie raffinée des plaques	$h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses

(*) Pour ce modèle, le champ des déplacements s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + \varphi(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + \varphi(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

2.5.3.3. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques :

Dans la présente thèse, nous proposons une nouvelle théorie de déformation d'ordre supérieur dont le paramétrage permet l'adaptation au problème structural étudié. Les conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sont rigoureusement satisfaites. Aucune restriction n'est portée sur l'épaisseur de la plaque, ce qui permet une étude des poutres, plaques et coques minces et épaisses. La théorie de déformation d'ordre supérieur de Reddy est un cas particulier de cette nouvelle théorie. Cette dernière permet aussi d'approcher la théorie de déformation trigonométrique de Touratier [158] et la théorie de déformation exponentielle de Karama [41] avec une très bonne précision. Elle est basée sur un développement en série d'ordre impair de la coordonnée z , limité au degré 5. Le nombre de variables est identique à celui de la théorie de Reddy (u, v, w, ψ_x, ψ_y).

Le champ de déplacements que nous proposons s'écrit sous la forme (2.47) avec une nouvelle fonction de forme :

$$\varphi(z) = z \left[1 - \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \beta \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \quad (2.49)$$

Où α et β sont les paramètres (réels) de forme de la nouvelle théorie, définis par :

$$\beta = \frac{4}{5}(3\alpha - 4), \quad 0 \leq \alpha \leq 2 \quad (2.50)$$

A partir des équations (2.47), nous dérivons le champ des déformations suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + z \left[1 - \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{4}{5} (3\alpha - 4) \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + z \left[1 - \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{4}{5} (3\alpha - 4) \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \left[\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + z \left[1 - \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{4}{5} (3\alpha - 4) \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\ \gamma_{xz} &= \left[1 - 3\alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 + 4(3\alpha - 4) \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= \left[1 - 3\alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 + 4(3\alpha - 4) \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Les hypothèses sur lesquelles est basée la présente théorie sont les mêmes que celles de la formulation de Reddy [25]. De plus, la fonction de forme est telle que les conditions suivantes sont rigoureusement satisfaites :

- Les contraintes de cisaillement σ_{xz} et σ_{yz} sont nulles au niveau des surfaces supérieure et inférieure, ce qui est vérifié par: $\left. \frac{d\varphi(z)}{dz} \right|_{z=\pm h/2} = 0$
- Le profil des contraintes du cisaillement transverse à travers l'épaisseur est parabolique (figure 2.30),
- La déformation en cisaillement est maximale au niveau du plan moyen ($z = 0$), ce qui est vérifié par: $\left. \frac{d\varphi(z)}{dz} \right|_{z=0} = 1$
- La fonction de forme $\varphi(z)$ et sa dérivée première sont continues à travers l'épaisseur (figures 2.29 et 2.30). Ceci permet d'avoir une continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement le long de l'axe z .

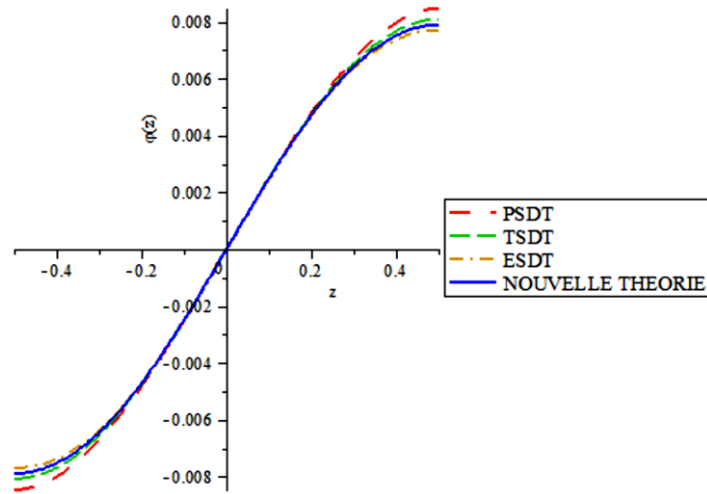


Figure 2.29: Profil de variation de $\varphi(z)$ à travers l'épaisseur ($\alpha = 3/2$)

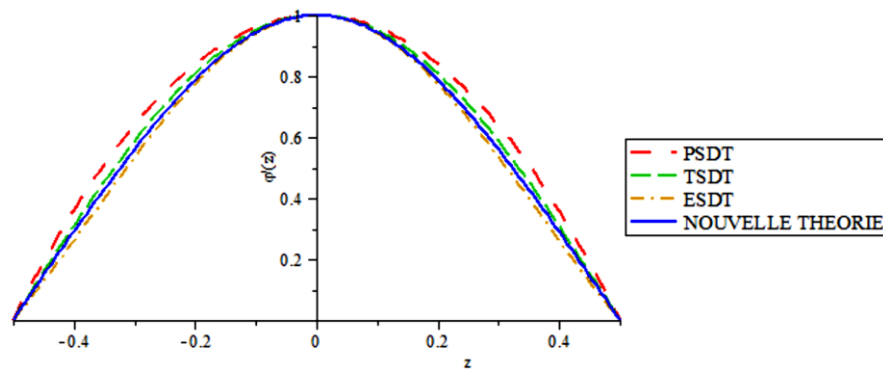


Figure 2.30: Profil de variation de $d\varphi(z)/dz$ à travers l'épaisseur ($\alpha = 3/2$)

Comme nous l'avons souligné plus haut, le paramètre α permet d'adapter la fonction de forme au problème étudié. Les valeurs particulières de α sont les suivantes :

- $\alpha = 4/3$ permet de retrouver exactement la fonction de forme de la théorie de Reddy [21].
- $\alpha = \pi^2/6$ permet d'approcher la théorie de Touratier [158] (TSDPT) avec une bonne précision.
- $\alpha = 2$ permet d'approcher la théorie de Karama [41] (ESDPT) avec une bonne précision.

2.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, les matériaux à gradient fonctionnel ont été clairement définis et les différentes lois de mélange ont été présentées puis adaptées à des éléments structuraux symétriques. Les FGM ayant été conçus principalement pour résister à des environnements thermiques sévères, le paramètre température a été introduit et son influence sur les propriétés thermomécaniques des FGM a été mise en évidence à travers des représentations graphiques. Suite à cela, nous avons présenté différentes théories de déformation des plaques (applicables également aux poutres) en commençant par les théories les plus anciennes telles que la théorie classique et la théorie du premier ordre, en passant par les plus utilisées telle que celle de Reddy et enfin les plus récentes. A la fin du chapitre, nous avons présenté une nouvelle théorie de déformation en cisaillement des plaques qui a été développée dans le cadre de ce travail de recherche. C'est une théorie d'ordre supérieur dont le paramétrage est un atout permettant non seulement d'adapter la théorie au problème structural étudié mais également d'approcher avec une bonne précision des théories existantes telle que la théorie de Touratier ou celle de Karama alors que la théorie de Reddy en est un cas particulier pour une valeur bien définie du paramètre α . Nous appliquerons cette théorie de déformation aux différents éléments structuraux que nous envisageons d'analyser et, pour sa validation, nous comparerons les résultats avec ceux obtenus avec les théories déjà existantes.

CHAPITRE 3

ETUDE DES VIBRATIONS LIBRES DES POUTRES FGM PLACEES DANS UN ENVIRONNEMENT THERMIQUE

3.1. Introduction :

La poutre est un élément structural très important en ingénierie. Dans le domaine de l'aéronautique, elle peut être le longeron d'une aile d'avion ou d'un stabilisateur, une poutre de plancher ou poutre de support du train d'atterrissage. Elle est aussi très présente dans bien des structures terrestres et marines. Malgré cette large utilisation, la poutre reste, dans le domaine de la recherche, un élément structural un peu négligé contrairement aux plaques et aux coques qui jouissent d'un traitement particulier. Ce chapitre sera donc consacré à l'analyse des vibrations libres des poutres en matériau à gradient fonctionnel. Dans une première partie, nous analyserons une poutre FGM symétrique dont les équations seront développées sous une formulation unifiée en termes de la fonction de forme des différentes théories de déformation en cisaillement. Nous prendrons en compte l'effet de la température à travers l'épaisseur de la poutre. Deux procédés de résolution analytique seront proposés. Dans un second lieu, nous présenterons l'analyse des vibrations libres des poutres FGM non-symétriques soumises à des contraintes thermiques initiales et ce en utilisant la DQM (Differential Quadrature Method).

3.2. La poutre FGM symétrique :

Nous considérons une poutre géométriquement symétrique dont la distribution des propriétés est symétrique à travers l'épaisseur (symétrie élastique). Etant donné que les propriétés dépendent de la température, nous assurons également une distribution symétrique du gradient de température en imposant une variation uniforme de la température (mêmes températures sur les surfaces supérieure, inférieure et moyenne tel que montré sur la figure 3.1).

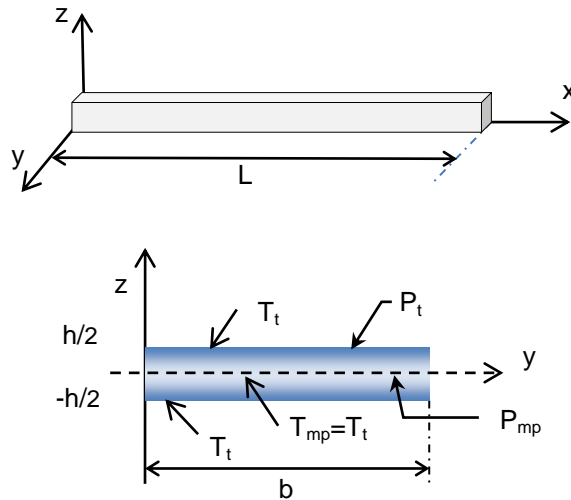


Figure 3.1: Géométrie de la poutre FGM symétrique

3.2.1. Formulation unifiée pour une poutre FGM symétrique

Nous considérons une poutre FGM symétrique de longueur L , de hauteur h constante et de largeur b comme montrée sur la figure 3.1. Les propriétés mécaniques effectives obéissent aux lois des mélanges $P(z, T)$ citées dans le chapitre 2 (P-FGM, E-FGM et S-FGM).

Nous supposons que la poutre a été soumise initialement à une élévation de température $\Delta T(z)$. La contrainte thermique normale engendrée dans la direction x est alors donnée par:

$$\sigma_x^T = -Q_{11} \alpha_x \Delta T(z) \quad (3.1)$$

Où : α_x est le coefficient de dilatation thermique dans la direction x et Q_{11} est le coefficient de rigidité réduite défini dans l'équation (3.5).

Afin d'obtenir une formulation unifiée tenant compte des différentes théories de déformation, le champ des déplacements est écrit comme suit (Mahi, Adda Bedia et al. [149]):

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x, z, t) &= u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \varphi(z) \left(\psi_x(x, t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) \\
\bar{v}(x, z, t) &= 0 \\
\bar{w}(x, z, t) &= w(x, t)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Où u et w sont respectivement le déplacement axial et le déplacement transversal d'un point de la surface médiane ($z = 0$), ψ_x est la rotation autour de l'axe y de la poutre et φ est la fonction de forme de la théorie unifiée.

Le champ des déformations peut être facilement déduit en considérant les relations déformations-déplacements de Green-Lagrange (Reddy [23], [49]) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varphi(z) \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Où ε_x est la déformation axiale le long de l'axe x et γ_{xz} est la déformation en cisaillement transverse.

Les relations constitutives issues de la loi de Hooke généralisée s'écrivent:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= Q_{11} \varepsilon_x, \\
\sigma_{xz} &= Q_{55} \gamma_{xz}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

σ_x étant la contrainte normale dans la direction x ; σ_{xz} , la contrainte de cisaillement dans le plan $(x-z)$. Q_{11} et Q_{55} , les coefficients de rigidité réduite (fonctions de la côte z et de la température T), sont définis par :

$$Q_{11} = \frac{E(z, T)}{1 - \nu^2(z, T)}, \quad Q_{55} = \frac{E(z, T)}{2[1 + \nu(z, T)]} \tag{3.5}$$

Où : $E(z,T)$ et $\nu(z,T)$ sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du point de côte z à la température T .

Les résultantes en forces et moments peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit:

$$\begin{cases} N_x \\ M_x \\ M_x^a \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & B_{11}^a \\ B_{11} & D_{11} & D_{11}^a \\ B_{11}^a & D_{11}^a & D_{11}^{aa} \end{bmatrix} \begin{cases} u_{,x} \\ -w_{,xx} \\ \psi_{x,x} + w_{,xx} \end{cases}, \quad (3.6)$$

$$Q_{xz}^a = A_{55}^a (\psi_x + w_{,x})$$

Où: N_x est la résultante des efforts normaux dans la direction x

Q_{xz}^a est la résultante des efforts de cisaillement transverse d'ordre supérieur

M_x est le moment de flexion

M_x^a est le moment de flexion d'ordre supérieur

Avec :

$$\begin{aligned} (A_{11}, B_{11}, B_{11}^a) &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, \varphi) dz \\ (D_{11}, D_{11}^a, D_{11}^{aa}) &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z^2, \varphi z, \varphi^2) dz \\ A_{55}^a &= b k_{55} \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 dz \end{aligned} \quad (3.7)$$

Où k_{55} est le facteur de correction du cisaillement transverse dans le cas de la théorie du premier ordre.

Les coefficients A_{11} , B_{11} et D_{11} sont les rigidités en traction, de couplage membrane-flexion et de flexion, tandis que le coefficient A_{55}^a est la rigidité de déformation en cisaillement transverse. Les coefficients additionnels de couplage et de flexion B_{11}^a , D_{11}^a et D_{11}^{aa} sont dus à la fonction de forme $\varphi(z)$ introduite précédemment dans le champ des déplacements. Tous ces coefficients dépendent de la température. Nous pouvons noter que le moment de flexion M_x^a d'ordre supérieur est dû à la même fonction de forme $\varphi(z)$.

Comme le coefficient de Poisson ν change dans la direction z , le facteur de correction du cisaillement transverse k_{55} , pour la théorie du premier ordre (FSDBT), est exprimé selon l'expression appropriée suivante (Efraim et Eisenberger [160]) :

$$k_{55} = 5/[6 - (\nu_1 V_1 + \nu_2 V_2)] \quad (3.8)$$

Où V_1 et V_2 sont les fractions volumiques de chaque constituant dans la section entière et ν_1 et ν_2 sont les coefficients de Poisson de chaque constituant dans la section entière.

La formulation pour le cas de la théorie du premier ordre (FSDBT) peut être obtenue en choisissant $\varphi(z) = z$ et en introduisant le facteur de correction du cisaillement transverse k_{55} .

3.2.2. Les équations du mouvement de la poutre FGM symétrique :

Afin d'obtenir les équations du mouvement de la poutre FGM, nous utilisons le principe de Hamilton. Ce principe requiert la définition des énergies de déformation mécanique, cinétique et de déformation thermique.

L'énergie de déformation due aux contraintes mécaniques est donnée par (Reddy [23], [155]) :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (3.9)$$

Où v est le volume de l'élément structural considéré.

L'énergie de déformation thermique due à la contrainte thermique initiale σ_x^T induite par une élévation de température ΔT est donnée par (Kim [122]) :

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x^T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dV \quad (3.10)$$

L'énergie de déformation totale peut alors être obtenue par:

$$U = U_d + U_T \quad (3.11)$$

De même que, l'énergie cinétique d'un corps déformable est exprimée par (Reddy [23], [155]) :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho(z, T) \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV \quad (3.12)$$

Où $\rho(z, T)$ est la masse volumique dépendant de la position et de la température.

Les équations du mouvement peuvent donc être déduites en considérant le principe de Hamilton qui s'écrit (Reddy [23], [155]) :

$$\delta \left[\int_0^t \mathcal{L} dt \right] = 0 \quad (3.13)$$

Où \mathcal{L} est le Lagrangien du système exprimé par:

$$\mathcal{L} = E_c - (U_d + U_T) \quad (3.14)$$

En différenciant les énergies, en appliquant le principe de Hamilton, en procédant par une intégration par parties et en collectant les termes devant δu , δw et $\delta \psi_x$ séparément, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta u : & - \left(I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right) + A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{11}^a \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (B_{11}^a - B_{11}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \\ \delta w : & - I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + A_{55}^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - N_x^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (B_{11}^a - B_{11}) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ & - (D_{11} - 2D_{11}^a + D_{11}^{aa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (D_{11}^a - D_{11}^{aa}) \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3} = 0 \\ \delta \psi_x : & - \left(I_3 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + D_{11}^{aa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - A_{55}^a \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + B_{11}^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (D_{11}^a - D_{11}^{aa}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Etant donné que la poutre considérée est symétrique, le système se réduit à :

$$\begin{aligned}
& -I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\
& -I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (D_{11} - 2D_{11}^a + D_{11}^{aa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (A_{55}^a - N_x^T) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (D_{11}^a - D_{11}^{aa}) \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3} + A_{55}^a \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = 0 \quad (3.16) \\
& -I_3 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - (D_{11}^a - D_{11}^{aa}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - A_{55}^a \frac{\partial w}{\partial x} + D_{11}^{aa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - A_{55}^a \psi_x = 0
\end{aligned}$$

Où :

$$N_x^T = -b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z, T) \alpha(z, T) \Delta T(z) dz \quad (3.17)$$

N_x^T étant la résultante axiale due à l'élévation initiale de la température.

L'inertie axiale I_1 , l'inertie de couplage I_2 et l'inertie de rotation I_3 s'expriment comme suit:

$$(I_1, I_2, I_3) = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z, T) (1, z, z^2) dz \quad (3.18)$$

Les solutions sont recherchées sous forme harmonique:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \psi_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \\ W \\ \Psi_x \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (3.19)$$

Où : ω est la fréquence circulaire de vibration.

U , W et Ψ_x sont les amplitudes des déplacements longitudinal, transversal et de rotation respectivement.

La première équation du système (3.16) étant déjà découplée, les fréquences naturelles longitudinales peuvent être très aisément déduites. Comme la poutre est symétrique et en considérant les différentes conditions aux limites, les fréquences correspondantes sont données par:

Cas libre-libre/encastée-encastée/ appuyée-appuyée/appuyée-libre:

$$\omega_i = i \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{A_{11}}{I_1}} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.20)$$

Cas encadrée-libre/encadrée-appuyée:

$$\omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{A_{11}}{I_1}} \quad (i=1, \dots, N) \quad (3.21)$$

En substituant l'équation (3.19) dans le système (3.16) et en paramétrant judicieusement les deux dernières équations de ce système, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \left(\frac{L}{m}\right) \frac{\partial \Psi_x}{\partial \xi} + \left(\frac{a^2 c^2}{m}\right) W - \left(\frac{c^2 D_1}{mD}\right) \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \left(\frac{c^2 D_2 L}{mD}\right) \frac{\partial^3 \Psi_x}{\partial \xi^3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial \xi^2} + \left(g^2 - \frac{1}{c^2}\right) \Psi_x - \left(\frac{1}{Lc^2}\right) \frac{\partial W}{\partial \xi} - \left(\frac{D_2}{LD}\right) \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Où:

$$\begin{aligned} \xi = x/L, \quad a^2 = I_1 \omega^2 L^4 / D, \quad c^2 = D / L^2 A_{55}^a, \quad g^2 = I_3 \omega^2 L^2 / D, \quad m = (A_{55}^a - N_x^T) / A_{55}^a \\ D = D_{11}^{aa}, \quad D_1 = D_{11} - 2D_{11}^a + D_{11}^{aa}, \quad D_2 = D_{11}^a - D_{11}^{aa}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

En découplant les équations (3.22), nous obtenons enfin:

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{mD} \left(\frac{D_2^2}{D} - D_1\right) \frac{\partial^6 W}{\partial \xi^6} + \left(1 + \frac{D_1 + 2D_2}{mD} - \frac{D_1}{mD} g^2 c^2\right) \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \left(\frac{a^2 c^2}{m} + \frac{1-m}{mc^2} + g^2\right) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \\ - \frac{a^2 c^2}{m} \left(\frac{1}{c^2} - g^2\right) W = 0 \\ \frac{c^2}{mD} \left(\frac{D_2^2}{D} - D_1\right) \frac{\partial^6 \Psi_x}{\partial \xi^6} + \left(1 + \frac{D_1 + 2D_2}{mD} - \frac{D_1}{mD} g^2 c^2\right) \frac{\partial^4 \Psi_x}{\partial \xi^4} + \left(\frac{a^2 c^2}{m} + \frac{1-m}{mc^2} + g^2\right) \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial \xi^2} \\ - \frac{a^2 c^2}{m} \left(\frac{1}{c^2} - g^2\right) \Psi_x = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nous retrouvons la formulation FSDBT en posant $\varphi(z) = z$. Le système d'équations différentielles est alors le suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \left(\frac{L}{m}\right) \frac{\partial \Psi_x}{\partial \xi} + \left(\frac{a^2 c^2}{m}\right) W &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial \xi^2} - \left(\frac{1}{Lc^2}\right) \frac{\partial W}{\partial \xi} + \left(g^2 - \frac{1}{c^2}\right) \Psi_x &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Où :

$$D_1 = D_2 = 0, \quad D_{11}^{aa} = D_{11}^a = D_{11}, \quad D = D_{11} \quad (3.26)$$

3.2.3. Solutions analytiques des équations de mouvement :

Pour résoudre analytiquement les équations (3.24), nous proposons deux méthodes. La première consiste à réduire l'ordre des équations de mouvement et la seconde, à les résoudre analytiquement sans réduire leur ordre.

3.2.3.1. Réduction de l'ordre des équations différentielles

Après analyse du coefficient $(c^2/mD)(D_2^2/D - D_1)$ de l'équation (3.24), nous avons trouvé que, pour le cas de la poutre considérée, son ordre est de 10^{-4} lorsque L/h est égal à 5 et se réduit à 10^{-7} quand L/h est égal à 120. Comparé aux autres coefficients, son ordre est aussi 10^4 à 10^7 fois plus petit ; ce qui permet de négliger ce terme pour obtenir :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{D_1 + 2D_2}{mD} - \frac{D_1}{mD} g^2 c^2\right) \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \left(\frac{a^2 c^2}{m} + \frac{1-m}{mc^2} + g^2\right) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \frac{a^2 c^2}{m} \left(\frac{1}{c^2} - g^2\right) W &= 0 \\ \left(1 + \frac{D_1 + 2D_2}{mD} - \frac{D_1}{mD} g^2 c^2\right) \frac{\partial^4 \Psi_x}{\partial \xi^4} + \left(\frac{a^2 c^2}{m} + \frac{1-m}{mc^2} + g^2\right) \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial \xi^2} - \frac{a^2 c^2}{m} \left(\frac{1}{c^2} - g^2\right) \Psi_x &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Les solutions sont recherchées sous la forme suivante:

$$\begin{cases} W = A_1 \operatorname{ch} \alpha \xi + A_2 \operatorname{sh} \alpha \xi + A_3 \cos \beta \xi + A_4 \sin \beta \xi \\ \Psi_x = B_1 \operatorname{sh} \alpha \xi + B_2 \operatorname{ch} \alpha \xi + B_3 \sin \beta \xi + B_4 \cos \beta \xi \end{cases} \quad (3.28)$$

Où $A_i (i = 1, \dots, 4)$ et $B_i (i = 1, \dots, 4)$ sont les coefficients inconnues des fonctions W et Ψ_x .

α et β sont des paramètres à déterminer.

En posant $q = \partial/\partial \xi$ dans l'équation (3.27), nous obtenons:

$$q^4 + (d^2/A)q^2 - B/A = 0 \quad (3.29)$$

Où:

$$A = 1 + \frac{D_1 + 2D_2}{mD} - \frac{D_1}{mD} g^2 c^2, \quad B = \frac{a^2 c^2}{m} \left(\frac{1}{c^2} - g^2 \right), \quad d^2 = \frac{a^2 c^2}{m} + \frac{1-m}{mc^2} + g^2, \quad (3.30)$$

Les solutions de l'équation caractéristique (3.29) sont alors :

$$\begin{aligned} q_{1,2} &= \pm i \left[\left(d^2 + \sqrt{d^4 + 4AB} \right) / 2A \right]^{1/2}, \\ q_{3,4} &= \pm \left[\left(-d^2 + \sqrt{d^4 + 4AB} \right) / 2A \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ce qui donne :

$$(\alpha, \beta) = \left[\left(\mp d^2 + \sqrt{d^4 + 4AB} \right) / 2A \right]^{1/2} \quad (3.32)$$

Les relations entre A_i et B_i ($i = 1, \dots, 4$) sont trouvées en utilisant les équations couplées (3.22) pour obtenir:

$$B_1 = K_1 A_1, \quad B_2 = K_1 A_2, \quad B_3 = K_2 A_3, \quad B_4 = -K_2 A_4 \quad (3.33)$$

Avec:

$$K_1 = -\frac{m}{L\alpha} \frac{\left(\alpha^2 + \frac{a^2 c^2}{m} - \frac{c^2 D_1}{mD} \alpha^4 \right)}{1 + \frac{c^2 D_2}{D} \alpha^2}, \quad K_2 = -\frac{m}{L\beta} \frac{\left(-\beta^2 + \frac{a^2 c^2}{m} - \frac{c^2 D_1}{mD} \beta^4 \right)}{1 - \frac{c^2 D_2}{D} \beta^2} \quad (3.34)$$

Les expressions finales de W et de Ψ_x sont:

$$\begin{aligned} W &= A_1 \operatorname{ch} \alpha \xi + A_2 \operatorname{sh} \alpha \xi + A_3 \cos \beta \xi + A_4 \sin \beta \xi \\ \Psi_x &= K_1 A_1 \operatorname{sh} \alpha \xi + K_1 A_2 \operatorname{ch} \alpha \xi + K_2 A_3 \sin \beta \xi - K_2 A_4 \cos \beta \xi \end{aligned} \quad (3.35)$$

Les conditions aux limites considérées dans cette étude sont:

$$\begin{aligned}
 \text{SS} \quad & W = N_x = M_x = M_x^a = 0 \Big|_{\xi=0,1} \\
 \text{CC} \quad & W = \Psi_x = 0 \Big|_{\xi=0,1} \\
 \text{FF} \quad & Q_{xz}^a = N_x = M_x = M_x^a = 0 \Big|_{\xi=0,1} \\
 \text{CF} \quad & W = \Psi_x = 0 \Big|_{\xi=0}, \quad Q_{xz}^a = N_x = M_x = M_x^a = 0 \Big|_{\xi=1} \\
 \text{CS} \quad & W = \Psi_x = 0 \Big|_{\xi=0}, \quad W = N_x = M_x = M_x^a = 0 \Big|_{\xi=1} \\
 \text{SF} \quad & W = N_x = M_x = M_x^a = 0 \Big|_{\xi=0}, \quad Q_{xz}^a = N_x = M_x = M_x^a = 0 \Big|_{\xi=1}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

En appliquant les conditions aux limites ci-dessus, nous obtenons les équations exactes suivantes des fréquences propres:

Appuyée-appuyée (SS):

$$\sin \beta = 0 \tag{3.37}$$

Encastrée-Encastrée (CC):

$$2 - 2 \operatorname{ch} \alpha \cos \beta + \left(\frac{K_2^2 - K_1^2}{K_1 K_2} \right) \operatorname{sh} \alpha \sin \beta = 0 \tag{3.38}$$

Libre-Libre (FF):

$$\begin{aligned}
 & 2 - 2 \operatorname{ch} \alpha \cos \beta + \\
 & \frac{2L(\alpha K_1 + \beta K_2) - \frac{K_1 K_2 L^2 (\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha \beta} - \alpha \beta \left(\frac{K_1^2 - K_2^2}{K_1 K_2} \right)}{\alpha \beta + L(-\alpha K_2 + \beta K_1 - K_1 K_2 L)} \operatorname{sh} \alpha \sin \beta = 0
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Encastrée-Libre (CF):

$$\begin{aligned}
 & -(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha K_1 L + \beta K_2 L) + \left(\alpha K_1 L + \beta K_2 L - \alpha \beta \frac{K_1^2 - K_2^2}{K_1 K_2} \right) \text{ch } \alpha \cos \beta \\
 & + (2\alpha\beta + \beta K_1 L - \alpha K_2 L) \text{sh } \alpha \sin \beta = 0
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Encastrée-Appuyée (CS):

$$\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\frac{a^2 c^2}{m} - \beta^2}{\frac{a^2 c^2}{m} + \alpha^2} \right) \text{th } \alpha + \text{tg } \beta = 0 \tag{3.41}$$

Appuyée-Libre (SF):

$$\frac{\alpha}{\beta} \text{th } \alpha + \frac{K_2}{K_1} \left(\frac{K_1 L + \alpha}{K_2 L - \beta} \right) \text{tg } \beta = 0 \tag{3.42}$$

La résolution de ces six dernières équations permet d'obtenir les fréquences propres de la poutre FGM symétrique soumise à des contraintes thermiques initiales pour chaque cas de conditions aux limites.

3.2.3.2. Résolution des équations différentielles du 6^{ème} ordre :

Le système des équations de mouvement (3.24) est réécrit comme suit:

$$\begin{aligned}
 a_1 \frac{\partial^6 W}{\partial \xi^6} + a_2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + a_3 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + a_4 W &= 0 \\
 a_1 \frac{\partial^6 \Psi_x}{\partial \xi^6} + a_2 \frac{\partial^4 \Psi_x}{\partial \xi^4} + a_3 \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial \xi^2} + a_4 \Psi_x &= 0
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Où:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{c^2}{mD} \left(\frac{D_2^2}{D} - D_1 \right), \quad a_2 = 1 + \frac{D_1 + 2D_2}{mD} - \frac{D_1}{mD} g^2 c^2, \\
 a_3 &= \frac{a^2 c^2}{m} + \frac{1-m}{mc^2} + g^2, \quad a_4 = -\frac{a^2 c^2}{m} \left(\frac{1}{c^2} - g^2 \right)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

En posant $q = \partial/\partial\xi$ dans (3.43), nous obtenons:

$$a_1 q^6 + a_2 q^4 + a_3 q^2 + a_4 = 0 \quad (3.45)$$

Le polynôme du 6^{ème} degré précédent peut être factorisé comme suit:

$$(q^4 + s_1 q^2 + s_2)(s_3 q^2 + s_4) = 0 \quad (3.46)$$

Où :

$$s_1 = (a_3 - s_2 a_1)/s_4, \quad s_3 = a_1, \quad s_4 = a_4/s_2 \quad (3.47)$$

s_2 étant la solution de l'équation du 3^{ème} degré suivante :

$$a_1^2 s_2^3 - a_1 a_3 s_2^2 + a_4 a_2 s_2 - a_4^2 = 0 \quad (3.48)$$

Cette équation peut être résolue en négligeant le terme $a_1^2 s_2^3$ car a_1^2 ($\approx 10^{-10}$) est très petit comparé aux coefficients ($a_1 a_3, a_4 a_2, a_4^2$) des autres termes ; la solution sera alors :

$$s_2 = \frac{1}{2} \frac{a_4}{a_1 a_3} \left(a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4 a_1 a_3} \right) \quad (3.49)$$

Si $a_1^2 s_2^3$ n'est pas négligé, la racine s_2 est (les deux autres racines donnent les mêmes solutions):

$$s_2 = \frac{1}{6 a_1} \left(\lambda_1 + 12 \sqrt{3} a_4 \sqrt{\lambda_2} \right)^{1/3} + \frac{2}{3} \frac{a_2 (a_2 - 3 a_4)}{a_1 \left(\lambda_1 + 12 \sqrt{3} a_4 \sqrt{\lambda_2} \right)^{1/3}} + \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_1} \quad (3.50)$$

Avec:

$$\lambda_1 = -36 a_4 a_2^2 + 108 a_4^2 a_1 + 8 a_2^3, \quad \lambda_2 = 4 a_2^3 a_4 - a_2^4 - 18 a_4 a_2^2 a_1 + 27 a_4^2 a_1^2 + 4 a_1 a_2^3 \quad (3.51)$$

Finalement, les six racines de l'équation caractéristique (3.45) sont:

$$q_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4 s_2} \right)^{1/2}, \quad q_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-s_1 - \sqrt{s_1^2 - 4 s_2} \right)^{1/2}, \quad q_{5,6} = \pm \sqrt{-s_4/s_3} \quad (3.52)$$

Après analyse des six racines, nous trouvons que les racines $q_{1,2}$ sont réelles, les racines $q_{3,4}$ sont des complexes conjugués et les racines $q_{5,6}$ sont réelles, ce qui permet d'écrire:

$$(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\mp s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4s_2} \right)^{1/2}, \quad \gamma = \sqrt{-s_4/s_3} \quad (3.53)$$

Le déplacement transverse et la rotation sont:

$$\begin{aligned} W &= A_1 \operatorname{ch} \alpha \xi + A_2 \operatorname{sh} \alpha \xi + A_3 \cos \beta \xi + A_4 \sin \beta \xi + A_5 \operatorname{ch} \gamma \xi + A_6 \operatorname{sh} \gamma \xi \\ \Psi_x &= B_1 \operatorname{sh} \alpha \xi + B_2 \operatorname{ch} \alpha \xi + B_3 \sin \beta \xi + B_4 \cos \beta \xi + B_5 \operatorname{sh} \gamma \xi + B_6 \operatorname{ch} \gamma \xi \end{aligned} \quad (3.54)$$

Où A_i ($i = 1, \dots, 6$) et B_i ($i = 1, \dots, 6$) sont les coefficients inconnus des fonctions W et Ψ_x .

α, β et γ sont des paramètres à déterminer.

Les relations entre A_i et B_i ($i = 1, \dots, 6$) sont trouvées en utilisant les équations couplées (3.22):

$$B_1 = K_1 A_1, \quad B_2 = K_1 A_2, \quad B_3 = K_2 A_3, \quad B_4 = -K_2 A_4, \quad B_5 = K_3 A_5, \quad B_6 = K_3 A_6 \quad (3.55)$$

Où :

$$\begin{aligned} K_1 &= - \left(\alpha^2 + \frac{a^2 c^2}{m} - \frac{c^2 D_1}{mD} \alpha^4 \right) / \frac{L\alpha}{m} \left(1 + \frac{c^2 D_2}{D} \alpha^2 \right), \\ K_2 &= - \left(-\beta^2 + \frac{a^2 c^2}{m} - \frac{c^2 D_1}{mD} \beta^4 \right) / \frac{L\beta}{m} \left(1 - \frac{c^2 D_2}{D} \beta^2 \right), \\ K_3 &= - \left(\gamma^2 + \frac{a^2 c^2}{m} - \frac{c^2 D_1}{mD} \gamma^4 \right) / \frac{L\gamma}{m} \left(1 + \frac{c^2 D_2}{D} \gamma^2 \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Les expressions de W et Ψ_x deviennent:

$$\begin{aligned} W &= A_1 \operatorname{ch} \alpha \xi + A_2 \operatorname{sh} \alpha \xi + A_3 \cos \beta \xi + A_4 \sin \beta \xi + A_5 \operatorname{ch} \gamma \xi + A_6 \operatorname{sh} \gamma \xi \\ \Psi_x &= K_1 A_1 \operatorname{sh} \alpha \xi + K_1 A_2 \operatorname{ch} \alpha \xi + K_2 A_3 \sin \beta \xi - K_2 A_4 \cos \beta \xi + K_3 A_5 \operatorname{sh} \gamma \xi + K_3 A_6 \operatorname{ch} \gamma \xi \end{aligned} \quad (3.57)$$

Les conditions aux limites principales sont libre-libre, encastrée-encastrée et appuyée-appuyée. Les autres conditions du système (3.36) sont des combinaisons de ces trois dernières. En appliquant ces conditions, nous obtenons les équations des fréquences propres suivantes:

Appuyée-appuyée (SS):

$$\sin \beta = 0 \quad (3.58)$$

Encastrée-encastrée (CC):

$$\begin{aligned} C_1 \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \operatorname{sh} \gamma + C_2 \operatorname{sh} \gamma (\operatorname{ch} \alpha \cos \beta - 1) + C_3 \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \gamma \cos \beta - 1) \\ + C_4 \sin \beta (\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \gamma - 1) = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Libre-libre (FF):

$$\begin{aligned} F_1 \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \operatorname{sh} \gamma + F_2 \operatorname{sh} \gamma (\operatorname{ch} \alpha \cos \beta - 1) + F_3 \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \gamma \cos \beta - 1) \\ + F_4 \sin \beta (\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \gamma - 1) = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Encastrée-Libre (CF) :

$$\begin{aligned} (R_1 \cos \beta \operatorname{sh} \alpha - R_2 \sin \beta \operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \gamma + (-R_3 \cos \beta \operatorname{ch} \alpha + R_4 - R_5 \sin \beta \operatorname{sh} \alpha) \operatorname{ch} \gamma \\ + R_6 \cos \beta + R_7 \operatorname{ch} \alpha = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Encastrée-Appuyée (CS):

$$E_1 \operatorname{ch} \alpha \cos \beta \operatorname{sh} \gamma + E_2 \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \operatorname{ch} \gamma + E_3 \operatorname{sh} \alpha \cos \beta \operatorname{ch} \gamma = 0 \quad (3.62)$$

Appuyée-Libre (SF):

$$S_1 \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \operatorname{ch} \gamma + S_2 \operatorname{sh} \alpha \cos \beta \operatorname{sh} \gamma + S_3 \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \operatorname{sh} \gamma = 0 \quad (3.63)$$

Les expressions des constantes des équations caractéristiques précédentes sont :

$$\begin{aligned} C_1 &= -(\beta K_3 + \gamma K_2)^2 - (\alpha K_2 + \beta K_1)^2 + (\alpha K_3 - \gamma K_1)^2 \\ C_2 &= -2(\beta K_3 + \gamma K_2)(\alpha K_3 - \gamma K_1) \\ C_3 &= 2(\alpha K_2 + \beta K_1)(\alpha K_3 - \gamma K_1) \\ C_4 &= 2(\alpha K_2 + \beta K_1)(\beta K_3 + \gamma K_2) \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= \alpha^4 K_2^2 K_3^2 L^2 (\gamma^2 - \beta^2) - 2\alpha^2 \beta \gamma K_2 K_3 [\alpha^2 L (\gamma K_3 + \beta K_2) + \beta^2 \gamma^2] \\
&\quad - \beta^4 K_1^2 K_3^2 L^2 (\alpha^2 + \gamma^2) - 2\alpha \beta^2 \gamma K_1 K_3 [\gamma (\alpha^2 \gamma + \beta^2 L) + \alpha \beta^2 K_1] \\
&\quad - 2K_1 K_2 K_3 L [L (\beta^3 \gamma^3 K_1 + \alpha^3 \beta^3 K_3 + \alpha^3 \gamma^3 K_2) + 2\alpha \beta \gamma (\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 \gamma^2 - \alpha^2 \gamma^2)] \\
&\quad + \gamma^2 K_1 K_2 [\gamma^2 K_1 K_2 L (\alpha^2 - \beta^2) - 2\alpha \beta (\alpha \gamma^2 K_1 L + \alpha^2 \beta^2 - \alpha^2 \gamma^2)] \\
&\quad + \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 [K_1^2 (\gamma^2 - \beta^2) - K_2^2 (\alpha^2 + \gamma^2) + K_3^2 (\alpha^2 - \beta^2)] \\
F_2 &= -2\alpha \beta \gamma^2 (-\gamma K_1 + K_3 \alpha) (\beta K_3 + K_2 \gamma) (\alpha + L K_1) (-\beta + K_2 L) \\
F_3 &= -2\alpha^2 \beta \gamma (K_2 \alpha + \beta K_1) (-K_1 \gamma + \alpha K_3) (-\beta + K_2 L) (\gamma + K_3 L) \\
F_4 &= 2\alpha \beta^2 \gamma (K_2 \alpha + \beta K_1) (K_2 \gamma + \beta K_3) (\alpha + K_1 L) (\gamma + K_3 L)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= \beta (\beta K_1 + \alpha K_2) (\gamma K_2 + \beta K_3) (2\alpha \gamma + \gamma K_1 L + \alpha K_3 L) \\
R_2 &= \alpha (\gamma K_1 - \alpha K_3) (\beta K_1 + \alpha K_2) (-2\beta \gamma + \gamma K_2 L - \beta K_3 L) \\
R_3 &= \alpha K_1 [\beta^2 (\beta K_1 + \alpha K_2) (L K_3 + \gamma) + \gamma^2 (\gamma K_1 - \alpha K_3) (L K_2 - \beta)] \\
&\quad + \alpha^2 [\beta K_2 (\beta K_1 + \alpha K_2) (L K_3 + \gamma) - \gamma K_3 (\gamma K_1 - \alpha K_3) (L K_2 - \beta)] \\
&\quad + \beta \gamma (\gamma K_2 + \beta K_3) (\gamma K_2 + \beta K_3) (L K_1 + \alpha) \\
R_4 &= \gamma (\gamma K_2 + \beta K_3) (\gamma K_1 - \alpha K_3) (\alpha^2 - \beta^2 + \alpha K_1 L + \beta K_2 L) \\
R_5 &= \gamma (\gamma K_2 + \beta K_3) (\gamma K_1 - \alpha K_3) (2\alpha \beta + \beta K_1 L - \alpha K_2 L) \\
R_6 &= \beta (\gamma K_2 + \beta K_3) (\beta K_1 + \alpha K_2) (\alpha^2 + \gamma^2 + \alpha K_1 L + \gamma K_3 L) \\
R_7 &= -\alpha (\gamma K_1 - \alpha K_3) (\beta K_1 + \alpha K_2) (\gamma^2 - \beta^2 + \gamma K_3 L + \beta K_2 L)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
E_1 &= (\beta K_1 + \alpha K_2) \\
E_2 &= (\alpha K_3 - \gamma K_1) \\
E_3 &= -(\gamma K_2 + \beta K_3)
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= -\alpha \beta (\alpha K_2 + \beta K_1) (\gamma + K_3 L) \\
S_2 &= \alpha \gamma (-\alpha K_3 + \gamma K_1) (-\beta + K_2 L) \\
S_3 &= \beta \gamma (\beta K_3 + \gamma K_2) (\alpha + K_1 L)
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Les équations (3.58), (3.59), (3.60), (3.61), (3.62) et (3.63) sont résolues pour obtenir les fréquences naturelles de la poutre FGM symétrique soumise à des contraintes thermiques initiales pour chaque condition aux limites et ceci en utilisant les équations différentielles du sixième ordre. Des comparaisons avec les résultats obtenus par la

résolution des équations différentielles du quatrième ordre seront présentées dans le chapitre 5.

3.3. La poutre FGM non symétrique :

Considérons à présent la poutre FGM non symétrique présentée sur la figure 3.2 et dont la face supérieure est à la température T_t et la face inférieure est à la température T_b . P_t et P_b représentent les propriétés thermomécaniques des faces supérieure et inférieure respectivement.

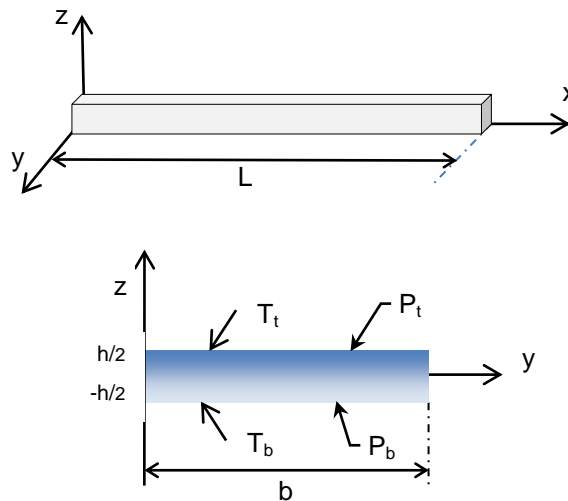


Figure 3.2: Géométrie de la poutre FGM non symétrique

3.3.1. Formulation unifiée pour une poutre FGM non symétrique:

Nous pouvons déduire les équations du mouvement de la poutre FGM en termes de forces et moments thermoélastiques en partant du champ des déplacements (3.2) et en réduisant les équations des énergies ((4.25),(4.39) et (4.47)) ainsi que le système des équations du mouvement de la plaque ((4.78) à (4.82)) au cas d'une poutre FGM. De même que, pour retrouver les résultantes des forces et moments d'une poutre FGM, les expressions (4.22) correspondant au cas d'une plaque FGM sont réduites pour obtenir :

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{11}^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_x &= B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{11}^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$M_x^a = B_{11}^a \frac{\partial u}{\partial x} - D_{11}^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{11}^{aa} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$Q_{xz}^a = A_{55}^a \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Où les différentes rigidités réduites sont celles définies par les équations (3.7).

En réduisant l'équation (4.25) au cas d'une poutre FGM, l'expression finale de l'énergie de déformation en termes d'efforts et moments est:

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ N_x \frac{\partial u}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_x^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + Q_{xz}^a \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dx \quad (3.70)$$

En procédant à la variation de l'équation (3.70), nous obtenons:

$$\delta U_d = \int_0^L \left\{ -\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta w - \frac{\partial M_x^a}{\partial x} \delta \psi_x + \frac{\partial^2 M_x^a}{\partial x^2} \delta w + Q_{xz}^a \delta \psi_x - \frac{\partial Q_{xz}^a}{\partial x} \delta w \right\} dx \quad (3.71)$$

A partir de l'équation (4.39), l'expression finale de l'énergie due à la contrainte thermique initiale est réduite pour le cas d'une poutre FGM à:

$$U_T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ N_x^T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(M_x^T - M_x^{Ta} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 M_x^{Ta} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right. \\ \left. + \left(P_x^T - 2 P_x^{Ta} + P_x^{Taa} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \left(P_x^{Ta} - P_x^{Taa} \right) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\ \left. + P_x^{Taa} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + N_x^T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \quad (3.72)$$

En prenant la variation de l'équation (3.72), nous obtenons :

$$\delta U_T = \int_0^L \left\{ -N_x^T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u - \left(M_x^T - M_x^{Ta} \right) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \delta w - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta u \right) \right. \\ \left. + M_x^{Ta} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \psi_x - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \delta u \right) + \left(P_x^T - 2 P_x^{Ta} + P_x^{Taa} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w \right. \\ \left. - \left(P_x^{Ta} - P_x^{Taa} \right) \left(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3} \delta w - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta \psi_x \right) - P_x^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \delta \psi_x - N_x^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w \right\} dx \quad (3.73)$$

En réduisant l'équation de l'énergie cinétique (4.47) au cas d'une poutre FGM, nous aboutissons à :

$$E_C = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + I_3^{aa} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + 2I_2^a \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + 2(I_2^a - I_2) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right. \\ \left. + 2(I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \quad (3.74)$$

Où : I_2^a, I_3^a, I_3^{aa} sont l'inertie de couplage et les inerties de rotation d'ordre supérieur respectivement.

La variation de l'énergie cinétique de la poutre FGM en vibration libre est directement déduite de l'équation (3.74) pour obtenir :

$$\delta E_c = \int_0^L \left\{ I_1 \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + I_3^{aa} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right) + I_2^a \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right) + (I_2^a - I_2) \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \right. \\ \left. + (I_3^{aa} - I_3^a) \delta \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + I_1 \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \right\} dx \quad (3.75)$$

En intégrant par rapport au temps, en procédant par une intégration par parties, en annulant les variations des déplacements et rotations (virtuels) et en supposant des variations nulles au début et à la fin de l'intervalle temps, nous obtenons :

$$\int_0^t \delta E_c dt = \int_0^t \int_0^L \left\{ -I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u - I_3^{aa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \delta \psi_x - I_2^a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta \psi_x + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \delta u \right) \right. \\ \left. + (I_2^a - I_2) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \delta w - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t^2} \delta u \right) + (I_3^{aa} - I_3^a) \left(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial t^2} \delta w + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \delta \psi_x \right) \right. \\ \left. + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w - I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right\} dx dt \quad (3.76)$$

Finalement, le système d'équations du mouvement de la poutre en termes de forces et moments est :

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial N_x}{\partial x} - N_x^T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - M_x^{Ta} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
& \quad - I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - (I_2^a - I_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t^2} \\
& -\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x^a}{\partial x^2} - \frac{\partial Q_{xz}^a}{\partial x} - (M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3} \\
& \quad + (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_x^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = (I_2^a - I_2) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \\
& \quad + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial t^2} + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
& -\frac{\partial M_x^a}{\partial x} + Q_{xz}^a - M_x^{Ta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P_x^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -I_2^a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
& \quad - I_3^{aa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Etant donné que les coefficients $(I_2^a - I_2)$, $(I_3^{aa} - I_3^a)$ et $(I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa})$ sont très petits (de l'ordre de 10^{-3} , 10^{-5} et 10^{-5} respectivement), les termes associés dans les équations différentielles (3.77) sont négligés sans affecter significativement les résultats. Dans ce cas, les équations du mouvement simplifiées de la poutre FGM deviennent :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N_x}{\partial x} + N_x^T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M_x^{Ta} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - (M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \\
& \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_x^a}{\partial x^2} + \frac{\partial Q_{xz}^a}{\partial x} + (M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3} \\
& \quad - (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_x^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
& \frac{\partial M_x^a}{\partial x} - Q_{xz}^a + M_x^{Ta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P_x^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = I_2^a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
(N_x^T, M_x^T, P_x^T) &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z, T) \alpha(z, T) \Delta T(z) (1, z, z^2) dz, \\
(M_x^{Ta}, P_x^{Ta}, P_x^{Taa}) &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z, T) \alpha(z, T) \Delta T(z) \varphi(z) (1, z, \varphi) dz
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Nous montrerons par la suite, dans le chapitre 5, que les équations de mouvements (3.78) simplifiées fournissent des fréquences naturelles de très bonnes précisions comparées à celles obtenues par d'autres auteurs cités comme référence.

Pour pouvoir utiliser les méthodes d'approximation telles que la DQM (differential quadrature method), les équations du mouvement doivent être écrites en termes de déplacements et rotations. En remplaçant les forces et les moments par leurs expressions respectives (3.69), le système des équations de mouvement peut être encore écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
& (A_{11} + N_x^T) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_{11}^a + M_x^{Ta}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \\
& + \left[(B_{11}^a - B_{11}) - (M_x^T - M_x^{Ta}) \right] \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \left(I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right) \\
& - \left[(B_{11}^a - B_{11}) - (M_x^T - M_x^{Ta}) \right] \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \left[(D_{11}^a - D_{11}^{aa}) + (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \right] \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3} \\
& + A_{55}^a \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \left[(D_{11} - 2D_{11}^a + D_{11}^{aa}) + (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}) \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
& + (A_{55}^a + N_x^T) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \\
& (B_{11}^a + M_x^{Ta}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (D_{11}^{aa} + P_x^{Taa}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - A_{55}^a \psi_x \\
& - \left[(D_{11}^a - D_{11}^{aa}) + (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \right] \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - A_{55}^a \frac{\partial w}{\partial x} = \left(I_3 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Les solutions sont recherchées sous forme de fonctions harmoniques :

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \psi_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \\ W \\ \Psi_x \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \tag{3.81}$$

En paramétrant les équations de mouvement (3.80) et en tenant compte des solutions harmoniques (3.81), nous obtenons enfin:

$$\begin{aligned}
-LA_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - B_1 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} - LB_2 \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial \xi^2} &= L^3 (I_1 U + I_2 \Psi_x) \omega^2 \\
LB_1 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - L^2 A_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - LD_2 \frac{\partial^3 \Psi_x}{\partial \xi^3} - L^3 A_{55}^a \frac{\partial \Psi_x}{\partial \xi} &= L^4 (I_1 W) \omega^2 \\
-LB_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + D_2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + L^2 A_{55}^a \frac{\partial W}{\partial \xi} - LD_3 \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial \xi^2} + L^3 A_{55}^a \Psi_x &= L^3 (I_2 U + I_3 \Psi_x) \omega^2
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Où:

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{x}{L}, \quad A_1 = (A_{11} + N_x^T), \quad A_2 = (A_{55}^a + N_x^T), \\
B_1 &= (B_{11}^a - B_{11}) - (M_x^T - M_x^{Ta}), \quad B_2 = (B_{11}^a + M_x^{Ta}), \\
D_1 &= (D_{11} - 2D_{11}^a + D_{11}^{aa}) + (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}), \\
D_2 &= (D_{11}^a - D_{11}^{aa}) + (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}), \quad D_3 = (D_{11}^{aa} + P_x^{Taa})
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Les conditions aux limites étant les suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{SS} \quad & W = N_x = M_x = M_x^a = 0 \Big|_{\xi=0,1} \\
\text{CC} \quad & U = W = \Psi_x = 0 \Big|_{\xi=0,1} \\
\text{FF} \quad & Q_{xz}^a = N_x = M_x = M_x^a = 0 \Big|_{\xi=0,1} \\
\text{CF} \quad & U = W = \Psi_x = 0 \Big|_{\xi=0}, \quad Q_{xz}^a = N_x = M_x = M_x^a = 0 \Big|_{\xi=1} \\
\text{CS} \quad & U = W = \Psi_x = 0 \Big|_{\xi=0}, \quad W = N_x = M_x = M_x^a = 0 \Big|_{\xi=1} \\
\text{SF} \quad & W = N_x = M_x = M_x^a = 0 \Big|_{\xi=0}, \quad Q_{xz}^a = N_x = M_x = M_x^a = 0 \Big|_{\xi=1}
\end{aligned} \tag{3.84}$$

3.3.2. Résolution des équations de la poutre non symétrique par la DQM :

La DQM (differential quadrature method) est une méthode numérique efficace et très fiable de résolution des problèmes linéaires et non linéaires de la mécanique des structures. En particulier, cette méthode permet très aisément de déterminer les fréquences et modes propres pour n'importe quelles conditions aux limites, y compris mixtes. Elle exige moins d'efforts de programmation que la méthode des éléments finis. Elle a été introduite pour la première fois par Bellman et Casti [161] . Cette méthode a été présentée comme une technique numérique pour la résolution des problèmes aux limites. Depuis, elle n'a cessé de subir des développements et a pu être appliquée à de multiples problèmes d'ingénierie, particulièrement dans l'analyse statique et dynamique des poutres et des

plaques. Comme la méthode générale a présenté des limitations, principalement lors de l'introduction des conditions aux limites générales, un certain nombre de méthodes innovatrices basées sur la DQM a été présenté par de multiples chercheurs. La méthode a, en premier lieu, été utilisée par Bert, Jang et al. [162] pour la résolution de problèmes de mécanique des structures. Ils utilisèrent la "technique- δ " pour imposer les conditions aux limites. Hélas, c'est une technique qui n'a pas été jugée suffisamment efficace car les conditions aux frontières sont satisfaites approximativement. Il est justement important de préciser que le problème à surmonter dans l'application de la DQM est de bien implémenter les conditions aux limites. Pour contrecarrer la faiblesse de la "technique- δ ", Wang et Bert [163] introduisirent une nouvelle approche dans l'application des conditions aux limites en modifiant les matrices de coefficients de pondération (fonctions poids) (MWCM : Modifying Weighting Coefficient Method). Cette approche est jugée bonne dans le cas de la condition aux limites « appuyé-appuyé » mais ne peut pas prendre en charge les conditions aux limites mixtes. Un autre développement de la MWCM pour la résolution d'équations différentielles d'ordre supérieur a été réalisé par Bert et Malik [164] et Chen, Striz et al. [165]. Shu et Du [166] ont rapporté que la MWCM a des limitations et ne peut être utilisée pour toutes les conditions aux limites. Ils ont introduit une nouvelle technique qui consiste à incorporer les conditions aux limites dans les équations discrètes de mouvement, mais cette technique aussi, ne fonctionne que pour des conditions aux limites simples (appuyée-appuyée ou encadrée-encadrée). Par la suite, Shu et Du [167] proposèrent une autre méthode qui couple les équations différentielles aux conditions aux limites. Une approche plus général (GDQ : General Differential Quadrature) a été proposée par les mêmes auteurs pour implémenter les conditions aux limites générales. Les deux conditions physiques en un point limite sont discrétisées par la DQM. Une condition est considérée comme l'équation du point limite lui-même et l'autre condition est prise comme étant l'équation du point intérieur qui lui est directement adjacent. Ces auteurs ont démontré que cette approche pouvait être appliquée à n'importe quel type de conditions aux limites uniformes. Plus tard, Shu et Chen [168] présentèrent un travail sur la sélection optimale des points intérieurs et démontrèrent que le remplacement de l'équation différentielle discrétisée par l'équation de la condition aux limites discrétisée en un point du voisinage immédiat du point limite était le choix optimal conduisant à une bonne précision. Shu et Wang [169] ont montré la facilité d'implémenter les conditions aux limites mixtes et non uniformes lorsque la méthode GDQ est utilisée. Fung [170] a

introduit une autre procédure pour modifier les matrices des coefficients de pondération. Les conditions aux limites sont satisfaites exactement. Cependant, cette approche ne peut pas être utilisée lorsque des dérivées mixtes interviennent dans les conditions aux limites. Une synthèse bibliographique appréciable peut être trouvée dans Bert et Malik [164], Shu [171] et Zong et Zhang [172]. A notre connaissance, la DQM n'a pas encore été appliquée dans l'analyse des vibrations libres des poutres FGM non symétriques en concordance avec une théorie des déformations d'ordre supérieur et prenant en compte toutes les conditions aux limites. C'est justement ce que nous nous appliquerons à faire dans cette partie du travail où la poutre FGM est non symétrique soumise à un gradient de température à travers l'épaisseur alors que le champ de température sera supposé constant dans le plan (x,y) de la poutre. Les propriétés thermomécaniques du matériau dépendent de la température et varient continûment à travers l'épaisseur suivant des fractions volumiques des constituants définies par les lois de distribution (P-FGM), (E-FGM) et (S-FGM).

Afin de résoudre les équations différentielles du mouvement de la poutre FGM non symétrique (3.82), nous utilisons la variante de cette méthode appelée GDQ (general differential quadrature method) en prenant soin de l'adapter afin de tenir compte des moments d'ordre supérieur et des forces de cisaillement.

Dans cette méthode, la $k^{\text{ième}}$ dérivée d'une solution f en n'importe quel point discret i est approximée par (Shu [171]):

$$\left. \frac{\partial^k f}{\partial \xi^k} \right|_{\xi=\xi_i} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(k)} f(\xi_j) \quad (3.85)$$

Où N est le nombre de points discrets le long de l'axe x de la poutre et $C_{ij}^{(k)}$ sont les coefficients de pondération d'ordre k de l'interpolation polynomiale de Lagrange.

Afin d'assurer des caractéristiques de convergence stable et en vue d'obtenir des résultats plus précis, nous choisissons les points de distribution ξ_i générés par la formule d'interpolation normalisée de Chebyshev-Gauss-Lobatto (Shu et Chen [168]):

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right], \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (3.86)$$

Les coefficients d'interpolation des dérivées du premier ordre sont donnés par (Shu [171]):

$$\mathcal{C}_{ij}^{(1)} = \frac{\mathcal{R}^{(1)}(\xi_i)}{(\xi_i - \xi_j)\mathcal{R}^{(1)}(\xi_j)}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, N; i \neq j)$$

$$\mathcal{R}^{(1)}(\xi_k) = \prod_{j=1, j \neq k}^N (\xi_k - \xi_j), \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$
(3.87)

Où :

$$\mathcal{R}(\xi) = \prod_{j=1}^N (\xi - \xi_j)$$
(3.88)

Les coefficients d'interpolation des dérivés d'ordre supérieur sont obtenus à partir de la formule de récurrence suivante (Shu [171]):

$$\mathcal{C}_{ij}^{(k)} = k \left(\mathcal{C}_{ii}^{(k-1)} \mathcal{C}_{ij}^{(1)} - \frac{\mathcal{C}_{ij}^{(k-1)}}{\xi_i - \xi_j} \right), \quad (i, j = 1, 2, \dots, N; k = 2, 3, \dots, N-1; i \neq j)$$

$$\mathcal{C}_{ii}^{(k)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathcal{C}_{ij}^{(k)}, \quad (i = 1, 2, \dots, N; k = 2, 3, \dots, N-1; i = j)$$
(3.89)

Pour la méthode GDQ, le domaine entier de calcul est divisé en deux sous domaines intérieur et extérieur représentés respectivement par les vecteurs $\{\delta_i\}$ et $\{\delta_b\}$, s'écrivant comme suit :

$$\{\delta_i\}^T = \{U_2, \dots, U_{n-1}, W_2, \dots, W_{n-1}, \Psi_{x_2}, \dots, \Psi_{x_{n-1}}\},$$

$$\{\delta_b\}^T = \{U_1, U_n, W_1, W_n, \Psi_{x_1}, \Psi_{x_n}\}$$
(3.90)

Où : $U_2, \dots, U_{n-1}, W_2, \dots, W_{n-1}, \Psi_{x_2}, \dots, \Psi_{x_{n-1}}$ sont les déplacements et rotations des points situés à l'intérieur du domaine ; $U_1, U_n, W_1, W_n, \Psi_{x_1}, \Psi_{x_n}$ sont les déplacements et rotations situés sur le domaine frontière (domaine extérieur). L'indice T dans les équations (3.90) traduit la transposée des vecteurs.

Les conditions aux limites appliquées sont discrétisées dans le domaine frontière en utilisant la formule (3.85). Les résultantes en forces et moments intervenant dans ces conditions sont :

$$\begin{aligned}
N_x &= \frac{A_{11}}{L} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{B_{11}}{L^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + B_{11}^a \left(\frac{1}{L} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \xi} + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right) \\
M_x &= \frac{B_{11}}{L} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{D_{11}}{L^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + D_{11}^a \left(\frac{1}{L} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \xi} + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right) \\
M_x^a &= \frac{B_{11}^a}{L} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{D_{11}^a}{L^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + D_{11}^{aa} \left(\frac{1}{L} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \xi} + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right) \\
Q_{xz}^a &= A_{55}^a \left(\Psi_x + \frac{1}{L} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)
\end{aligned} \tag{3.91}$$

En appliquant la règle (3.85) de la DQM, les expressions (3.91) des résultantes en forces et moments deviennent :

$$\begin{aligned}
N_x &\cong \frac{A_{11}}{L} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} U_j - \frac{B_{11}}{L^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} W_j + B_{11}^a \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} W_j \right) \\
M_x &\cong \frac{B_{11}}{L} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} U_j - \frac{D_{11}}{L^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} W_j + D_{11}^a \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} W_j \right) \\
M_x^a &\cong \frac{B_{11}^a}{L} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} U_j - \frac{D_{11}^a}{L^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} W_j + D_{11}^{aa} \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} W_j \right) \\
Q_{xz}^a &\cong A_{55}^a \left(\Psi_{xi} + \frac{1}{L} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} W_j \right)
\end{aligned} \tag{3.92}$$

$$i = 1, \dots, N$$

En appliquant les règles de la DQM aux conditions aux limites représentées par les équations (3.84) et en tenant compte des équations (3.92), nous aboutissons aux expressions correspondant à chaque condition aux limites.

Poutre appuyée-appuyée:à $\xi = 0$:

$$W_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{A_{11}}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(1)} U_j - \frac{B_{11}}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(2)} W_j + B_{11}^a \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(2)} W_j \right) &= 0 \\ \frac{B_{11}}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(1)} U_j - \frac{D_{11}}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(2)} W_j + D_{11}^a \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(2)} W_j \right) &= 0 \\ \frac{B_{11}^a}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(1)} U_j - \frac{D_{11}^a}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(2)} W_j + D_{11}^{aa} \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(2)} W_j \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.93)$$

à $\xi = 1$:

$$W_N = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{A_{11}}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(1)} U_j - \frac{B_{11}}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(2)} W_j + B_{11}^a \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(2)} W_j \right) &= 0 \\ \frac{B_{11}}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(1)} U_j - \frac{D_{11}}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(2)} W_j + D_{11}^a \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(2)} W_j \right) &= 0 \\ \frac{B_{11}^a}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(1)} U_j - \frac{D_{11}^a}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(2)} W_j + D_{11}^{aa} \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(2)} W_j \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

Poutre à bords libres:à $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{A_{11}}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(1)} U_j - \frac{B_{11}}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(2)} W_j + B_{11}^a \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(2)} W_j \right) &= 0 \\ \frac{B_{11}}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(1)} U_j - \frac{D_{11}}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(2)} W_j + D_{11}^a \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(2)} W_j \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\frac{B_{11}^a}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(1)} U_j - \frac{D_{11}^a}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(2)} W_j + D_{11}^{aa} \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(2)} W_j \right) = 0$$

$$A_{55}^a \left(\Psi_{x1} + \frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{1j}^{(1)} W_j \right) = 0$$

à $\xi = 1$:

$$\frac{A_{11}}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(1)} U_j - \frac{B_{11}}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(2)} W_j + B_{11}^a \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(2)} W_j \right) = 0$$

$$\frac{B_{11}}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(1)} U_j - \frac{D_{11}}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(2)} W_j + D_{11}^a \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(2)} W_j \right) = 0$$

(3.96)

$$\frac{B_{11}^a}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(1)} U_j - \frac{D_{11}^a}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(2)} W_j + D_{11}^{aa} \left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(1)} \Psi_{xj} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(2)} W_j \right) = 0$$

$$A_{55}^a \left(\Psi_{xN} + \frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{Nj}^{(1)} W_j \right) = 0$$

Poutre à bords encastés:

à $\xi = 0$:

$$U_1 = 0, \quad W_1 = 0, \quad \Psi_{x1} = 0 \quad (3.97)$$

à $\xi = 1$:

$$U_N = 0, \quad W_N = 0, \quad \Psi_{xN} = 0 \quad (3.98)$$

Les autres conditions aux limites de la poutre (appuyée-libre, encastée-appuyée, encastée-libre) peuvent être déduites en combinant les conditions aux limites ci-dessus.

Les équations discrétisées obtenues sont ensuite mises sous forme matricielle pour obtenir :

$$[K_{bb}]\{\delta_b\} + [K_{bi}]\{\delta_i\} = \{0\} \quad (3.99)$$

Les indices b et i font référence, respectivement, aux équations discrètes du domaine extérieur (frontière) et du domaine intérieur résultants de la règle (3.85).

Les équations différentielles de mouvement sont, quant à elles, discrétisées dans le domaine intérieur en appliquant la même règle pour obtenir :

$$\begin{aligned} & -\frac{A_1}{L^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} U_j - \frac{B_1}{L^3} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(3)} W_j - \frac{B_2}{L^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} \Psi_{xj} = (I_1 U_i + I_2 \Psi_{xi}) \omega^2 \\ & \frac{B_1}{L^3} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(3)} U_j + \frac{D_1}{L^4} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(4)} W_j - \frac{A_2}{L^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} W_j - \frac{D_2}{L^3} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(3)} \Psi_{xj} \\ & - \frac{A_{55}^a}{L} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} \Psi_{xj} = (I_1 W_i) \omega^2 \\ & - \frac{B_2}{L^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} U_j + \frac{D_2}{L^3} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(3)} W_j + \frac{A_{55}^a}{L} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} W_j - \frac{D_3}{L^2} \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(2)} \Psi_{xj} \\ & + A_{55}^a \Psi_{xi} = (I_2 U_i + I_3 \Psi_{xi}) \omega^2 \\ & i = 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.100)$$

Pour faciliter le traitement, les équations (3.100) sont ensuite mises sous forme matricielle pour obtenir :

$$[K_{ib}]\{\delta_b\} + [K_{ii}]\{\delta_i\} = \omega^2 [M]\{\delta_i\} \quad (3.101)$$

A ce stade, et conformément au principe de la GDQ (Shu et Chen [168]), les équations frontières discrètes des équations différentielles sont remplacées par les équations discrètes des conditions aux limites.

En assemblant les équations matricielles (3.99) et (3.101), nous obtenons le système matriciel complet discret suivant, d'ordre $(3N \times 3N)$:

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_b \\ \delta_i \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.102)$$

Les six premières équations du système (3.102) sont déduites des six conditions aux limites discrétisées aux points extérieurs $(\xi_i, i=1, N)$ et les $(3N-6)$ équations suivantes sont obtenues en discrétisant les équations différentielles gouvernant le mouvement de la poutre dans le domaine intérieur $(2 \leq \xi_i \leq N-1)$.

Le système (3.102) ne peut pas être résolu tel quel car il n'est pas sous la forme standard d'un système aux valeurs propres. Pour ce faire, nous procédons par une sous-structuration puis une élimination du vecteur frontière $\{\delta_b\}$ en combinant les équations matricielles (3.99) et (3.101). Nous obtenons alors le système standard aux valeurs propres suivant :

$$([\mathbb{K}] - \omega^2 [M]) \{\delta_i\} = \{0\} \quad (3.103)$$

Où : \mathbb{K} est la matrice rigidité et M est la matrice masse du système de dimension $(3N-6) \times (3N-6)$.

Avec :

$$[\mathbb{K}] = [K_{ii}] - [K_{ib}] [K_{bb}]^{-1} [K_{bi}] \quad (3.104)$$

Il est à noter que les dimensions des sous matrices $K_{bb}, K_{bi}, K_{ib}, K_{ii}$ sont respectivement (6×6) , $(6) \times (3N-6)$, $(3N-6) \times (6)$ et $(3N-6) \times (3N-6)$.

Le système (3.103) représente la forme généralisée d'un problème aux valeurs propres d'une poutre FGM en vibration libre. La résolution par des méthodes numériques standards permet de calculer les fréquences et vecteurs propres du problème étudié.

3.4. Conclusion :

Dans cette partie du travail, nous avons développé des équations unifiées des poutres en matériau à gradient fonctionnel subissant des contraintes thermiques initiales, ceci d'abord pour la poutre symétrique puis pour la poutre non-symétrique. Cette formulation unifiée permet de prendre en compte n'importe quelle théorie de déformation en cisaillement simplement en introduisant la fonction de forme adéquate correspondant à la théorie de déformation choisie. La nouvelle théorie proposée dans le chapitre 2 a été prise en compte avec un paramètre $\alpha = 3/2$. Une méthode analytique a été proposée pour la résolution du problème des vibrations libres de la poutre symétrique soumise à des contraintes thermiques initiales alors que la DQM a été utilisée pour la résolution du problème de la poutre FGM non symétrique et adaptée au cas de l'utilisation de théories d'ordre supérieur dans la formulation. Des résultats seront présentés, comparés et interprétés dans le chapitre 5.

CHAPITRE 4
ETUDE DES VIBRATIONS LIBRES DES PLAQUES FGM
PLACEES DANS UN ENVIRONNEMENT THERMIQUE

4.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de trouver les relations fondamentales du comportement thermomécanique des plaques FGM soumises au phénomène de dilatation thermique initiale, de les écrire sous une forme unifiée et de les résoudre. Ces relations sont dérivées à partir d'une formulation variationnelle qui met en jeu l'énergie de déformation mécanique, l'énergie de déformation due aux contraintes thermiques initiales et l'énergie cinétique du système en vibration libre. La théorie sous-jacente est basée sur une théorie de déformation d'ordre supérieur unifiée. Ainsi, l'introduction dans les équations de la nouvelle théorie de déformation, présentée dans le chapitre 2, sera facilitée. Pour ce faire, nous considérons une plaque en matériau à gradient fonctionnel dont la face inférieure de propriétés P_b est soumise à la température T_b et la face supérieure de propriétés P_t est soumise à la température T_t et dont les paramètres géométriques sont représentés sur la figure 4.1.

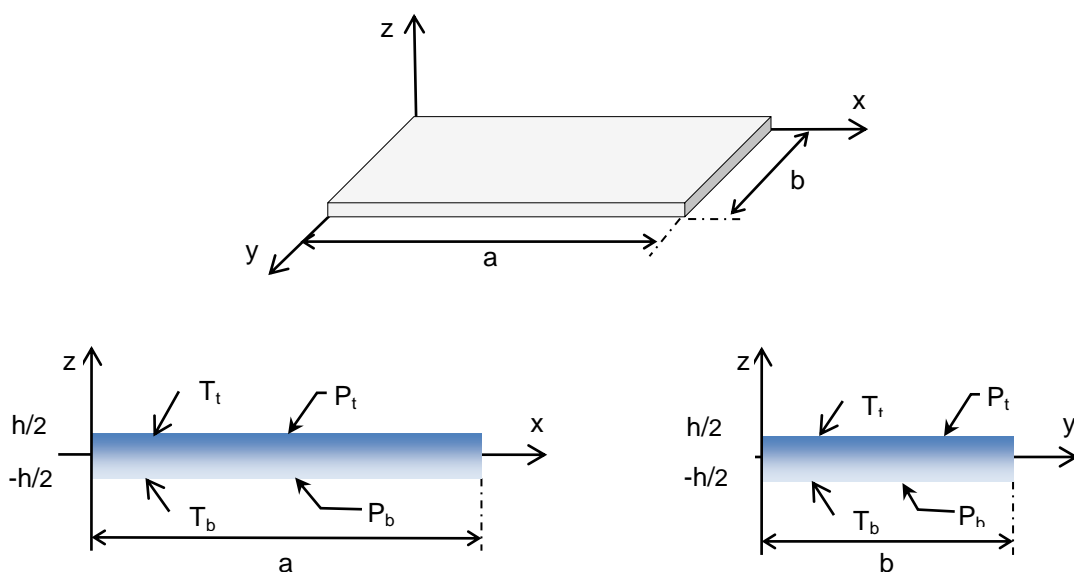


Figure 4.1: Géométrie de la plaque FGM non symétrique

4.2. Formulation unifiée pour la plaque FGM :

Nous considérons le champ de déplacements unifié représenté par les relations (2.47) afin de dériver le champ de déformations associé.

4.3. Champ des déformations en formulation d'ordre supérieur:

Dans le cas général, les relations déformations-déplacements (de Green-Lagrange) sont données par (Reddy [23], [49]) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (4.1)$$

Dans le cadre d'une théorie linéarisée (petites déformations), la relation (4.1) se réduit (en négligeant les termes du 2^{ème} degré) à:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.2)$$

Sous forme explicite, l'équation (4.2) devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.3)$$

En tenant compte des relations (2.47), le champ de déformations (4.3) devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varphi(z) \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varphi(z) \left[\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \varphi(z) \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Les différentes contraintes agissant sur un point matériel sont représentées sur la figure suivante :

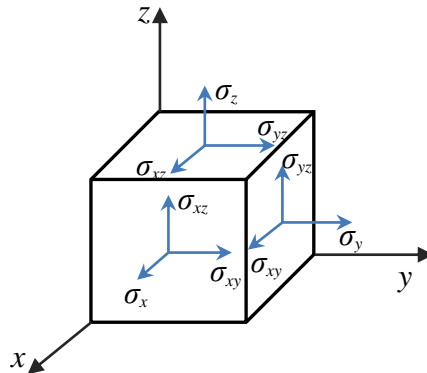


Figure 4.2: Composantes du vecteur des contraintes

Etant donné que la plaque FGM possède deux plans de symétrie (xz) et (yz) et que la contrainte normale σ_z est négligeable dans le volume de la plaque, par rapport aux contraintes σ_x et σ_y , les relations contraintes-déformations peuvent alors s'écrire sous la forme matricielle suivante (Reddy [23], [155]) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Où les coefficients de rigidité réduite (dépendant de la côte z et de la température T) sont donnés par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z, T)}{1 - \nu(z, T)^2} \quad (4.6)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu(z,T)E(z,T)}{1-\nu^2(z,T)}$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z,T)}{2[1+\nu(z,T)]}$$

Où : $E(z,T)$ est le module de Young et $\nu(z,T)$ est le coefficient de Poisson en un point de la plaque.

4.4. Champ des contraintes thermiques initiales :

La plaque FGM est soumise à un gradient de température initial. Les composantes des contraintes thermiques associées à ce gradient sont données par (Kim [122] , Huang et Shen [117]) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^T \\ \sigma_y^T \\ \sigma_{xy}^T \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x(z,T) \\ \alpha_y(z,T) \\ \alpha_{xy}(z,T) \end{Bmatrix} \Delta T(z) \quad (4.7)$$

Où α_x , α_y , α_{xy} sont les coefficients de dilatation thermique dans les directions x et y et dans le plan (xy) respectivement.

4.5. Energie de déformation mécanique :

L'énergie totale de déformation de la plaque FGM est donnée par (Reddy [49]) :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (4.8)$$

Où v est le volume de l'élément plaque considéré.

L'équation (4.8) peut encore être réécrite sous la forme explicite suivante :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dA dz \quad (4.9)$$

A étant la surface de l'élément plaque

Par souci de simplification, nous posons :

$$U_d = \sum_{i=1}^5 U_i \quad (4.10)$$

En considérant l'équation (4.10) et en explicitant chaque terme de l'équation (4.9) grâce aux relations (4.4), nous obtenons :

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \varepsilon_x dAdz = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma_x z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_x \varphi(z) \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} dAdz \quad (4.11)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \varepsilon_y dAdz = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} - \sigma_y z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma_y \varphi(z) \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} dAdz \quad (4.12)$$

$$U_3 = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} \gamma_{xz} dAdz = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dAdz \quad (4.13)$$

$$U_4 = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} \gamma_{yz} dAdz = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dAdz \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} U_5 &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} \gamma_{xy} dAdz \\ &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \varphi(z) \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\} dAdz \end{aligned} \quad (4.15)$$

En fonction des résultantes en forces et moments, les expressions précédentes deviennent :

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_A \left\{ N_x \frac{\partial u}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_x^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} dA \quad (4.16)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_A \left\{ N_y \frac{\partial v}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + M_y^a \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} dA \quad (4.17)$$

$$U_3 = \frac{1}{2} \int_A \left\{ Q_{xz}^a \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dA \quad (4.18)$$

$$U_4 = \frac{1}{2} \int_A \left\{ Q_{yz}^a \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dA \quad (4.19)$$

$$U_5 = \frac{1}{2} \int_A \left\{ Q_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + M_{xy}^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} dA \quad (4.20)$$

Avec :

$$\begin{aligned} (N_x, M_x, M_x^a) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, \varphi) \sigma_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, \varphi) (Q_{11} \varepsilon_x + Q_{12} \varepsilon_y) dz \\ (N_y, M_y, M_y^a) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, \varphi) \sigma_y dz = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, \varphi) (Q_{12} \varepsilon_x + Q_{22} \varepsilon_y) dz \\ (Q_{xy}, M_{xy}, M_{xy}^a) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, \varphi) \sigma_{xy} dz = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, \varphi) (Q_{66} \gamma_{xy}) dz \\ (Q_{xz}^a, Q_{yz}^a) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \left(Q_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), Q_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 dz \end{aligned} \quad (4.21)$$

Où :

N_x , N_y et Q_{xy} sont les résultantes, par unité de longueur, des efforts normaux (suivant x et y) et des efforts de cisaillement dans le plan (xy) , respectivement,

Q_{xz} et Q_{yz} sont les résultantes, par unité de longueur, des efforts de cisaillement dans les plans (xz) et (yz) , respectivement.

M_x et M_y sont les moments de flexion et M_{xy} est le moment de torsion par unité de longueur,

M_x^a et M_y^a sont les moments de flexion d'ordre supérieur et M_{xy}^a est le moment de torsion d'ordre supérieur, par unité de longueur,

Q_{xz}^a et Q_{yz}^a sont les résultantes, par unité de longueur, des efforts de cisaillement d'ordre supérieur dans les plans (xz) et (yz) respectivement.

En développant les expressions (4.21), les résultantes des forces et moments s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
N_x &= A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{11}^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{12}^a \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
N_y &= A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} - B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{22}^a \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
M_x &= B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{11}^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{12}^a \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
M_x^a &= B_{11}^a \frac{\partial u}{\partial x} - D_{11}^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{11}^{aa} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{12}^a \frac{\partial v}{\partial y} - D_{12}^a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{12}^{aa} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
M_y &= B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12}^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}^a \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
M_y^a &= B_{12}^a \frac{\partial u}{\partial x} - D_{12}^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12}^{aa} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{22}^a \frac{\partial v}{\partial y} - D_{22}^a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}^{aa} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
M_{xy} &= B_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{66}^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\
M_{xy}^a &= B_{66}^a \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2D_{66}^a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{66}^{aa} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\
Q_{xy} &= A_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + B_{66}^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\
Q_{xz}^a &= A_{55}^a \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad Q_{yz}^a = A_{44}^a \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Les équations (4.22) peuvent encore s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ M_x \\ M_y \\ M_x^a \\ M_y^a \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & B_{11}^a & B_{12}^a \\ A_{12} & A_{22} & B_{12} & B_{22} & B_{12}^a & B_{22}^a \\ B_{11} & B_{12} & D_{11} & D_{12} & D_{11}^a & D_{12}^a \\ B_{12} & B_{22} & D_{12} & D_{22} & D_{12}^a & D_{22}^a \\ B_{11}^a & B_{12}^a & D_{11}^a & D_{12}^a & D_{11}^{aa} & D_{12}^{aa} \\ B_{12}^a & B_{22}^a & D_{12}^a & D_{22}^a & D_{12}^{aa} & D_{22}^{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ \psi_{x,x} + w_{,xx} \\ \psi_{y,y} + w_{,yy} \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} Q_{xy} \\ M_{xy} \\ M_{xy}^a \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{66} & B_{66} & B_{66}^a \\ B_{66} & D_{66} & D_{66}^a \\ B_{66}^a & D_{66}^a & D_{66}^{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,y} + v_{,x} \\ -2w_{,xy} \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} + 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} Q_{xz}^a \\ Q_{yz}^a \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{55}^a & 0 \\ 0 & A_{44}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_x + w_{,x} \\ \psi_y + w_{,y} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Où les différentes composantes des vecteurs forces et moments appliqués à la plaque sont représentées sur les figures suivantes :

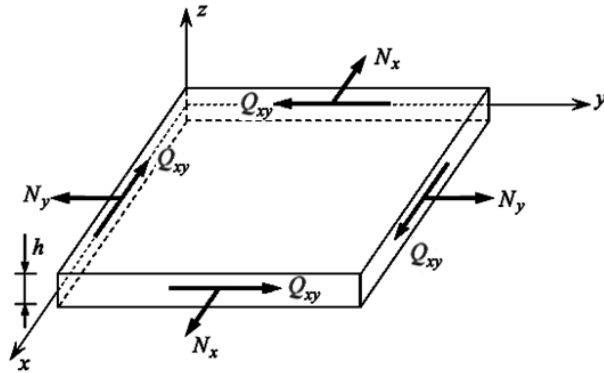


Figure 4.3: Composantes des efforts normaux et de cisaillement en plan

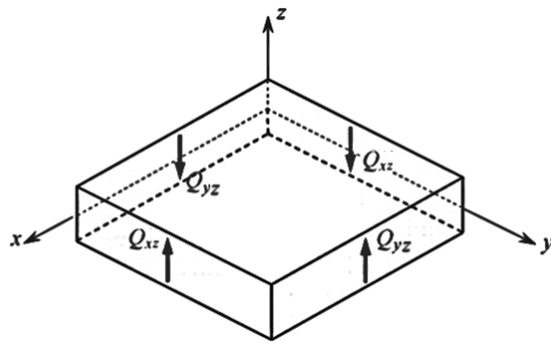


Figure 4.4: Composantes des efforts de cisaillement transverse

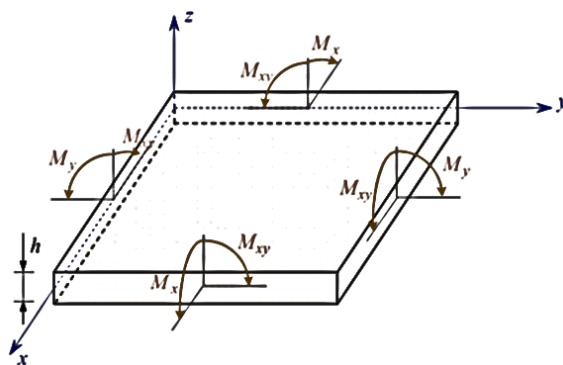


Figure 4.5: Composantes des moments de flexion et de torsion

Les différentes rigidités qui interviennent dans les équations (4.23) sont définies par :

$$\begin{aligned}
(A_{11}, B_{11}, B_{11}^a) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, \varphi) dz, \\
(A_{12}, B_{12}, B_{12}^a) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{12}(1, z, \varphi) dz \\
(D_{11}, D_{11}^a, D_{11}^{aa}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z^2, \varphi z, \varphi^2) dz, \\
(D_{12}, D_{12}^a, D_{12}^{aa}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{12}(z^2, \varphi z, \varphi^2) dz \\
(A_{22}, B_{22}, B_{22}^a) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{22}(1, z, \varphi) dz, \\
(D_{22}, D_{22}^a, D_{22}^{aa}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{22}(z^2, \varphi z, \varphi^2) dz \\
(A_{66}, B_{66}, B_{66}^a) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{66}(1, z, \varphi) dz, \\
(D_{66}, D_{66}^a, D_{66}^{aa}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{66}(z^2, \varphi z, \varphi^2) dz \\
(A_{55}^a, A_{44}^a) &= \int_{-h/2}^{h/2} (k_{55} Q_{55}, k_{44} Q_{44}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 dz
\end{aligned} \tag{4.24}$$

L'expression finale de l'énergie de déformation en termes d'efforts et de moments s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
U_d = \frac{1}{2} \int_A \left\{ N_x \frac{\partial u}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_x^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + N_y \frac{\partial v}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \\
+ M_y^a \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + Q_{xz}^a \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + Q_{yz}^a \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
\left. + Q_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + M_{xy}^a \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.25}$$

4.6. Energie due aux contraintes thermiques initiales :

L'énergie due aux contraintes thermiques initiales est donnée par (Kim [122]) :

$$U_T = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij}^T d_{ij} dv \tag{4.26}$$

v étant le volume de l'élément plaque considéré.

Les contraintes σ_{ij}^T dues au phénomène de dilatation thermique sont définies par les relations (4.7) et les d_{ij} sont leurs déformations associées définies ci-dessous.

Sous forme explicite, la relation (4.26) s'écrit :

$$U_T = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^T d_{xx} + \sigma_y^T d_{yy} + 2\sigma_{xy}^T d_{xy}) dA dz \quad (4.27)$$

Où :

$$\begin{aligned} d_{xx} &= \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \\ d_{yy} &= \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \\ d_{xy} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(z) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - [z - \varphi(z)] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi(z) \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - [z - \varphi(z)] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \varphi(z) \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - [z - \varphi(z)] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \varphi(z) \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - [z - \varphi(z)] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x}, & \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Comme la plaque est isotrope dans le plan (x, y) , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \alpha_x(z, T) &= \alpha_y(z, T) = \alpha(z, T) \\ \alpha_{xy}(z, T) &= 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Les efforts thermiques, moments thermiques et moments thermiques d'ordre supérieur sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} (N_x^T, M_x^T, P_x^T) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^T(1, z, z^2) dz, & (N_y^T, M_y^T, P_y^T) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y^T(1, z, z^2) dz \\ (M_x^{Ta}, P_x^{Ta}, P_x^{Taa}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^T \varphi(1, z, \varphi) dz, & (M_y^{Ta}, P_y^{Ta}, P_y^{Taa}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y^T \varphi(1, z, \varphi) dz \end{aligned} \quad (4.31)$$

En remplaçant les contraintes thermiques par leurs expressions respectives (4.7), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(N_x^T, M_x^T, P_x^T) &= -\int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11} + Q_{12}) \alpha(z, T) \Delta T(z) (1, z, z^2) dz \\
(N_y^T, M_y^T, P_y^T) &= -\int_{-h/2}^{h/2} (Q_{21} + Q_{22}) \alpha(z, T) \Delta T(z) (1, z, z^2) dz \\
(M_x^{Ta}, P_x^{Ta}, P_x^{Taa}) &= -\int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11} + Q_{12}) \alpha(z, T) \Delta T(z) \varphi(1, z, \varphi) dz \\
(M_y^{Ta}, P_y^{Ta}, P_y^{Taa}) &= -\int_{-h/2}^{h/2} (Q_{21} + Q_{22}) \alpha(z, T) \Delta T(z) \varphi(1, z, \varphi) dz
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Par souci de simplification, nous posons :

$$U_T = \sum_{i=1}^5 U_i^T \tag{4.33}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
U_1^T &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ N_x^T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2(M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2M_x^{Ta} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2(P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_x^{Taa} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
U_2^T &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ N_x^T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2(M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2M_x^{Ta} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right. \\
&\quad \left. + (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2(P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_x^{Taa} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right)^2 \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
U_3^T &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ N_y^T \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 2(M_y^T - M_y^{Ta}) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2M_y^{Ta} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + (P_y^T - 2P_y^{Ta} + P_y^{Taa}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2(P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_y^{Taa} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
U_4^T = \frac{1}{2} \int_A \left\{ N_y^T \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - 2(M_y^T - M_y^{Ta}) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_y^{Ta} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right. \\
\left. + (P_y^T - 2P_y^{Ta} + P_y^{Taa}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_y^{Taa} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$U_5^T = \frac{1}{2} \int_A \left\{ N_x^T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^T \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dA \tag{4.38}$$

L'expression finale de l'énergie due aux contraintes thermiques initiales est :

$$\begin{aligned}
U_T = \frac{1}{2} \int_A \left\{ N_x^T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2(M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2M_x^{Ta} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + P_x^{Taa} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 \right. \\
+ (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2(P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
+ N_x^T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2(M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2M_x^{Ta} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + P_x^{Taa} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right)^2 \\
+ (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2(P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
+ N_y^T \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 2(M_y^T - M_y^{Ta}) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2M_y^{Ta} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + P_y^{Taa} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 \\
+ (P_y^T - 2P_y^{Ta} + P_y^{Taa}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2(P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
+ N_y^T \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - 2(M_y^T - M_y^{Ta}) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_y^{Ta} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + P_y^{Taa} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 \\
+ (P_y^T - 2P_y^{Ta} + P_y^{Taa}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
\left. + N_x^T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^T \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.39}$$

4.7.Énergie cinétique :

L'énergie cinétique de la plaque FGM en vibration libre est donnée par (Reddy [23], [49]) :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV \quad (4.40)$$

Où v est le volume de l'élément plaque considéré.

Soit sous forme explicite :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)^2 \right\} dA dz \quad (4.41)$$

En posant :

$$E_c = \sum_{i=1}^3 E_c^i \quad (4.42)$$

Il vient :

$$E_c^1 = \frac{1}{2} \int_A \left\{ I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + I_3^{aa} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + 2I_2^a \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + 2(I_2^a - I_2) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right. \\ \left. + 2(I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 \right\} dA \quad (4.43)$$

$$E_c^2 = \frac{1}{2} \int_A \left\{ I_1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + I_3^{aa} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 + 2I_2^a \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} + 2(I_2^a - I_2) \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right. \\ \left. + 2(I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 \right\} dA \quad (4.44)$$

$$E_c^3 = \frac{1}{2} \int_A \left\{ I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dA \quad (4.45)$$

Avec :

$$\begin{aligned} (I_1, I_2, I_3) &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, z^2) dz, \\ (I_2^a, I_3^a, I_3^{aa}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho \varphi(z) (1, z, \varphi) dz \end{aligned} \quad (4.46)$$

Où :

I_1, I_2, I_3 sont les inerties axiale, de couplage et de rotation respectivement,

I_2^a, I_3^a, I_3^{aa} sont l'inertie de couplage et les inerties de rotation d'ordre supérieur respectivement.

L'expression finale de l'énergie cinétique de la plaque FGM est :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + I_3^{aa} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + 2I_2^a \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + 2(I_2^a - I_2) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + I_1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right. \\ &\quad + I_3^{aa} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 + 2(I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 \\ &\quad + 2I_2^a \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} + 2(I_2^a - I_2) \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + 2(I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \\ &\quad \left. + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dA \end{aligned} \quad (4.47)$$

4.8. Application du principe de Hamilton :

Le principe de Hamilton est un principe général pouvant être appliqué à une large classe de problèmes de mécanique des solides déformables et se traduit par (Reddy [155]) :

$$\delta \left[\int_0^t [E_c - (U_d + U_r)] dt \right] = 0 \quad (4.48)$$

Où : δ représente l'opérateur de variation et t est la variable temps

Ce principe peut être utilisé pour trouver l'ensemble des équations de mouvement et les conditions aux limites pour un état de contrainte et de déformation donné. Pour l'appliquer, il est nécessaire de déterminer la variation de chaque terme de l'énergie.

4.8.1. Variation de l'énergie cinétique :

En procédant à la variation de l'équation (4.40), nous obtenons :

$$\delta E_c = \int_v \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dV \quad (4.49)$$

La variation de l'équation (4.42) donne :

$$\delta E_c = \delta (E_c^1 + E_c^2 + E_c^3) \quad (4.50)$$

En développant l'équation (4.49) et en considérant l'équation (4.50), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta E_c^1 = \int_A & \left\{ I_1 \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + I_3^{aa} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right) + I_2^a \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right) \right. \\ & + (I_2^a - I_2) \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + (I_3^{aa} - I_3^a) \delta \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \\ & \left. + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \right\} dA \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \delta E_c^2 = \int_A & \left\{ I_1 \frac{\partial v}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + I_3^{aa} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right) + I_2^a \delta \left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right) \right. \\ & + (I_2^a - I_2) \delta \left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) + (I_3^{aa} - I_3^a) \delta \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) \\ & \left. + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) \right\} dA \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\delta E_c^3 = \int_A \left\{ I_1 \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \right\} dA \quad (4.53)$$

En intégrant par rapport au temps, en procédant par une intégration par parties, en annulant les variations des déplacements et rotations (virtuels) et en supposant des variations nulles au début et à la fin de l'intervalle temps, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \delta E_c dt = \int_0^t \int_A \left\{ -I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u - I_3^{aa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \delta \psi_x - I_2^a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta \psi_x + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \delta u \right) \right. \\
- I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + (I_2^a - I_2) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \delta w - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t^2} \delta u \right) \\
+ (I_3^{aa} - I_3^a) \left(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial t^2} \delta w + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \delta \psi_x \right) + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w \\
- I_3^{aa} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \delta \psi_y - I_2^a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta \psi_y + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \delta v \right) \\
\left. + (I_3^{aa} - I_3^a) \left(\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y \partial t^2} \delta w + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \delta \psi_y \right) + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w \right\} dAdt
\end{aligned} \quad (4.54)$$

Les contributions dynamiques des termes sources par rapport aux variations $\delta u, \delta v, \delta w, \delta \psi_x$ et $\delta \psi_y$ sont :

$$\begin{aligned}
\delta u : & -I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_2^a \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - (I_2^a - I_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t^2} \\
\delta v : & -I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_2^a \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - (I_2^a - I_2) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t^2} \\
\delta w : & (I_2^a - I_2) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + (I_2^a - I_2) \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial t^2} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial t^2} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y \partial t^2} \\
& + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
\delta \psi_x : & -I_2^a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_3^{aa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \\
\delta \psi_y : & -I_2^a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_3^{aa} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}
\end{aligned} \quad (4.55)$$

4.8.2. Variation de l'énergie de déformation :

En vertu du principe des travaux virtuels (Reddy [155]), la variation de l'équation (4.8) s'écrit comme suit :

$$\delta U_d = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (4.56)$$

D'où :

$$\delta U_d = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dAdz \quad (4.57)$$

En substituant les relations (4.4) dans l'équation (4.57) et en intégrant suivant z , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\delta U_d = \int_A \left\{ N_x \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - M_x \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_x^a \delta \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right. \\
+ N_y \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - M_y \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + M_y^a \delta \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
+ Q_{xz}^a \delta \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + Q_{yz}^a \delta \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + Q_{xy} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
\left. - 2M_{xy} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + M_{xy}^a \delta \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Comme les opérateurs de variation et de différentiation sont commutatifs, nous pouvons donc réarranger l'expression et intégrer par parties selon l'ordre qui convient. En procédant ainsi et en annulant les variations des déplacements et rotations (déplacements et rotations virtuels), nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\delta U_d = \int_A \left\{ -\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta w - \frac{\partial M_x^a}{\partial x} \delta \psi_x \right. \\
+ \frac{\partial^2 M_x^a}{\partial x^2} \delta w - \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \delta w - \frac{\partial M_y^a}{\partial y} \delta \psi_y + \frac{\partial^2 M_y^a}{\partial y^2} \delta w \\
+ Q_{xz}^a \delta \psi_x - \frac{\partial Q_{xz}^a}{\partial x} \delta w + Q_{yz}^a \delta \psi_y - \frac{\partial Q_{yz}^a}{\partial y} \delta w - \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} \delta u - \frac{\partial Q_{xy}}{\partial x} \delta v \\
\left. - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta w + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^a}{\partial x \partial y} \delta w - \frac{\partial M_{xy}^a}{\partial y} \delta \psi_x - \frac{\partial M_{xy}^a}{\partial x} \delta \psi_y \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.59}$$

En intégrant par rapport au temps et en supposant des variations nulles au début et à la fin de l'intervalle temps, les contributions des termes sources de l'énergie de déformation par rapport aux variations δu , δv , δw , $\delta \psi_x$ et $\delta \psi_y$ sont :

$$\begin{aligned}
\delta u : -\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y}, \\
\delta v : -\frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial Q_{xy}}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned} \delta w : & -\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x^a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y^a}{\partial y^2} \\ & -2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^a}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_{xz}^a}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}^a}{\partial y} \\ \delta \psi_x : & -\frac{\partial M_x^a}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}^a}{\partial y} + Q_{xz}^a, \\ \delta \psi_y : & -\frac{\partial M_y^a}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}^a}{\partial x} + Q_{yz}^a \end{aligned}$$

4.8.3. Variation de l'énergie due aux contraintes thermiques initiales:

En procédant à la variation de l'équation (4.26), nous obtenons :

$$\delta U_T = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^T \delta d_{ij} dV \quad (4.61)$$

La variation de l'équation (4.33) donne :

$$\delta U_T = \sum_{i=1}^5 \delta U_i^T \quad (4.62)$$

En développant l'équation (4.61) et en considérant l'équation (4.62), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta U_1^T = \int_A & \left\{ N_x^T \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - (M_x^T - M_x^{Ta}) \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_x^{Ta} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \right. \\ & + (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \delta \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ & \left. + P_x^{Taa} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \right\} dA \quad (4.63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta U_2^T = \int_A & \left\{ N_x^T \frac{\partial u}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - (M_x^T - M_x^{Ta}) \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + M_x^{Ta} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \right. \\
& + (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \delta \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\
& \left. + P_x^{Taa} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
\delta U_3^T = \int_A & \left\{ N_y^T \frac{\partial v}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - (M_y^T - M_y^{Ta}) \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + M_y^{Ta} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right. \\
& + (P_y^T - 2P_y^{Ta} + P_y^{Taa}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - (P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \delta \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\
& \left. + P_y^{Taa} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
\delta U_4^T = \int_A & \left\{ N_y^T \frac{\partial v}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - (M_y^T - M_y^{Ta}) \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + M_y^{Ta} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right. \\
& + (P_y^T - 2P_y^{Ta} + P_y^{Taa}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \delta \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
& \left. + P_y^{Taa} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\delta U_5^T = \int_A \left\{ N_x^T \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + N_y^T \frac{\partial w}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dA \tag{4.67}$$

Comme les opérateurs de variation et de différentiation sont commutatifs, nous pouvons donc réarranger les expressions (4.63) à (4.67) et intégrer par parties selon l'ordre qui convient. En procédant ainsi et en annulant les variations des déplacements et rotations virtuels, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\delta U_1^T = \int_A & \left\{ -N_x^T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u - (M_x^T - M_x^{Ta}) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \delta w - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta u \right) \right. \\
& + M_x^{Ta} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \psi_x - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \delta u \right) + (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w \\
& \left. - (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \left(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3} \delta w - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta \psi_x \right) - P_x^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \delta \psi_x \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
\delta U_2^T = \int_A & \left\{ -N_x^T \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \delta u - (M_x^T - M_x^{Ta}) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \delta w - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \delta u \right) \right. \\
& + M_x^{Ta} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \delta \psi_x - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \delta u \right) + (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w \\
& \left. - (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \left(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial y^2} \delta w - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \delta \psi_x \right) - P_x^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \delta \psi_x \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
\delta U_3^T = \int_A & \left\{ -N_y^T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta v - (M_y^T - M_y^{Ta}) \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \delta w - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \delta v \right) \right. \\
& + M_y^{Ta} \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta \psi_y - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \delta v \right) + (P_y^T - 2P_y^{Ta} + P_y^{Taa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w \\
& \left. - (P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \left(\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2 \partial y} \delta w - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \delta \psi_y \right) - P_y^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \delta \psi_y \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
\delta U_4^T = \int_A & \left\{ -N_y^T \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \delta v - (M_y^T - M_y^{Ta}) \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \delta w - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \delta v \right) \right. \\
& + M_y^{Ta} \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \delta \psi_y - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \delta v \right) + (P_y^T - 2P_y^{Ta} + P_y^{Taa}) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta w \\
& \left. - (P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \left(\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3} \delta w - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \delta \psi_y \right) - P_y^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \delta \psi_y \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\delta U_5^T = \int_A \left\{ -N_x^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y^T \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \delta w dA \tag{4.72}$$

En intégrant par rapport au temps et en supposant des variations nulles au début et à la fin de l'intervalle temps, les contributions des termes sources de l'énergie de déformation thermique par rapport aux variations $\delta u, \delta v, \delta w, \delta \psi_x$ et $\delta \psi_y$ sont :

$$\begin{aligned} \delta u : & -N_x^T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - N_x^T \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - M_x^{Ta} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - M_x^{Ta} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + (M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ & + (M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \delta v : & -N_y^T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - N_y^T \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - M_y^{Ta} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - M_y^{Ta} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + (M_y^T - M_y^{Ta}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\ & + (M_y^T - M_y^{Ta}) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} \delta w : & - (M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - (M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - (M_y^T - M_y^{Ta}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \\ & - (P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2 \partial y} - (P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3} + (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ & + (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa} + P_y^T - 2P_y^{Ta} + P_y^{Taa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - (M_y^T - M_y^{Ta}) \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3} - (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial y^2} \\ & + (P_y^T - 2P_y^{Ta} + P_y^{Taa}) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - N_x^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y^T \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_x : & -M_x^{Ta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} M_x^{Ta} - P_x^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - P_x^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ & + (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_y : & -M_y^{Ta} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_y^{Ta} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - P_y^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - P_y^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + (P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\ & + (P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \end{aligned} \quad (4.77)$$

En rassemblant les contributions des termes sources de chaque énergie, nous obtenons le système final aux cinq équations suivantes :

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} - N_x^T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - N_x^T \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - M_x^{Ta} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - M_x^{Ta} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + (M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\
& + (M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = -I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_2^a \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - (I_2^a - I_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t^2}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial Q_{xy}}{\partial x} - N_y^T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - N_y^T \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - M_y^{Ta} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - M_y^{Ta} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + (M_y^T - M_y^{Ta}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\
& + (M_y^T - M_y^{Ta}) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = -I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_2^a \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - (I_2^a - I_2) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t^2}
\end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x^a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y^a}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^a}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_{xz}^a}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}^a}{\partial y} \\
& - (M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - (M_x^T - M_x^{Ta}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - (M_y^T - M_y^{Ta}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \\
& - (M_y^T - M_y^{Ta}) \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3} - (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial y^2} \\
& - (P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2 \partial y} - (P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3} + (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
& + (P_x^T - 2P_x^{Ta} + P_x^{Taa} + P_y^T - 2P_y^{Ta} + P_y^{Taa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& + (P_y^T - 2P_y^{Ta} + P_y^{Taa}) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - N_x^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y^T \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
& = (I_2^a - I_2) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + (I_2^a - I_2) \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial t^2} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x \partial t^2} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y \partial t^2} \\
& + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial M_x^a}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}^a}{\partial y} + Q_{xz}^a - M_x^{Ta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - M_x^{Ta} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - P_x^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - P_x^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \\
& + (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (P_x^{Ta} - P_x^{Taa}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\
& = -I_2^a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_3^{aa} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial M_y^a}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}^a}{\partial x} + Q_{yz}^a - M_y^{Ta} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_y^{Ta} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - P_y^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - P_y^{Taa} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\
& + (P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (P_y^{Ta} - P_y^{Taa}) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\
& = -I_2^a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - I_3^{aa} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Ces cinq dernières expressions représentent les équations différentielles du mouvement en vibration libre d'une plaque FGM en théorie d'ordre supérieur unifiée et soumise à des contraintes thermiques initiales. Ce système d'équations s'applique aussi bien au cas où la plaque est soumise aux dilations thermiques initiales, qu'au cas où elle ne l'est pas (il suffit dans ce cas d'annuler toutes les résultantes thermiques).

4.9. Méthode variationnelle de Ritz :

Lorsque les solutions exactes du problème de la mécanique des solides ne peuvent être trouvées, des méthodes d'approximation sont utilisées. Parmi ces méthodes, celle de Ritz est basée sur une approche variationnelle. Elle compte parmi les méthodes numériques les plus efficaces et les plus fiables d'obtention de solutions approchées aux problèmes des poutres et plaques isotropes, stratifiées et FGM.

D'après Leissa [173] , le premier article qu'écrivit Ritz pour décrire sa méthode de résolution des problèmes aux valeurs propres et de conditions aux limites a été publié en 1908. Il y décrit non seulement sa méthode mais l'appliqua à différents problèmes statiques et dynamiques. Dans son introduction, il expliqua que les méthodes de résolution des problèmes aux limites étaient, en ce temps-là, impraticables et que ce fût sa première motivation pour développer cette nouvelle méthode.

Etant donné que les poutres et les plaques FGM sont des éléments structuraux déformables continus, la méthode de Ritz est bien adaptée pour l'analyse des vibrations libres de ces structures.

Sur ce qui va suivre, le développement pour aboutir au problème aux valeurs propres obtenu par la méthode de Ritz est valable pour la poutre et pour la plaque FGM.

Dans l'analyse des vibrations libres, le mouvement de la structure est supposé harmonique ; les déplacements et les rotations s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= U(x, y) \sin(\omega t) \\
 v(x, y, t) &= V(x, y) \sin(\omega t) \\
 w(x, y, t) &= W(x, y) \sin(\omega t) \\
 \psi_x(x, y, t) &= \Psi_x(x, y) \sin(\omega t) \\
 \psi_y(x, y, t) &= \Psi_y(x, y) \sin(\omega t)
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

Où : U , V et W sont les amplitudes des déplacements, Ψ_x et Ψ_y sont les amplitudes des rotations. ω est la fréquence circulaire de vibration et t est la variable temps.

Plutôt que de chercher à résoudre de manière approchée les équations différentielles du mouvement, la méthode de Ritz propose de chercher directement la solution approchée qui minimise la fonctionnelle \mathcal{L} (le Lagrangien). Dans cette méthode, les amplitudes des déplacements U , V , W et des rotations Ψ_x et Ψ_y sont approximés comme suit :

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} X_i(x) Y_j(y) \\
 V(x, y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N B_{ij} I_i(x) J_j(y) \\
 W(x, y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{ij} F_i(x) G_j(y) \\
 \Psi_x(x, y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N D_{ij} P_i(x) Q_j(y) \\
 \Psi_y(x, y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N E_{ij} R_i(x) S_j(y)
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Où : $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$ et E_{ij} sont les paramètres indéterminés de Ritz appelés coordonnées généralisées ; $X_i(x), Y_j(y), I_i(x), J_j(y), F_i(x), G_j(y), P_i(x), Q_j(y), R_i(x)$ et $S_j(y)$ sont les fonctions admissibles de Ritz (fonctions tests).

Afin de garantir la convergence, les fonctions admissibles de Ritz doivent satisfaire les conditions suivantes :

- être continues (pour une structure continue),
- être admissibles, c'est-à-dire satisfaire les conditions aux limites géométriques (essentiels), les conditions aux limites naturelles étant déjà incluses dans la formulation variationnelle. Si de plus ces fonctions satisfont ces dernières conditions, la convergence est plus rapide et de meilleurs résultats sont alors obtenus,
- être suffisamment différentiables pour le problème étudié,
- être linéairement indépendantes et former une base complète. Ceci revient à dire qu'elles peuvent représenter exactement (si un nombre suffisant de termes est retenu) les déplacements et les rotations ainsi que leurs dérivées qui apparaissent dans la fonctionnelle représentée par le Lagrangien du système ; dans ce cas, tous les termes d'ordre inférieur des énergies doivent être retenus.

Parmi les fonctions qui répondent au mieux à ces conditions, nous pouvons citer les fonctions polynômiales, les fonctions trigonométriques, les polynômes orthogonaux classiques (Chebyshev et Legendre) et les polynômes orthogonaux généraux obtenus par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (Chakraverty [174] , Bhat [175]).

Une fois les fonctions admissibles choisies, elles sont ensuite injectées dans le Lagrangien du système représenté par la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{L} = E_c - (U_d + U_T) \quad (4.85)$$

Les solutions exactes représentées par des fonctions admissibles satisfaisant les conditions aux limites rendent extrémale la fonctionnelle du système représentée par le Lagrangien \mathcal{L} . Ceci implique que la solution exacte approchant la fonctionnelle du système est caractérisée par un extremum absolu. Les solutions d'approximation de Ritz approchant la même fonctionnelle conduisent à un extremum relatif.

Les paramètres de Ritz sont alors déterminés par les conditions de stationnarité suivantes (Qatu [176] ,Chakraverty [174]) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial A_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial B_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial D_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{Total}}{\partial E_{ij}} = 0, \quad (4.86)$$

$$i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N$$

Où :

$$\mathcal{L}_{Total} = (E_c)_{max} - (U_d + U_T)_{max} \quad (4.87)$$

M étant le nombre de points discrets le long de l'axe x et N étant le nombre de points discrets le long de l'axe y .

Ces conditions conduisent au système d'équations algébriques suivant :

$$[[\mathbb{K}] - \omega^2 [\mathbb{M}]] \{q\} = \{0\} \quad (4.88)$$

Avec :

$$[\mathbb{K}] = \begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} & K^{14} & K^{15} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} & K^{24} & K^{25} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} & K^{34} & K^{35} \\ K^{41} & K^{42} & K^{43} & K^{44} & K^{45} \\ K^{51} & K^{52} & K^{53} & K^{54} & K^{55} \end{bmatrix}, [\mathbb{M}] = \begin{bmatrix} M^{11} & 0 & M^{13} & M^{14} & 0 \\ 0 & M^{22} & M^{23} & 0 & M^{25} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} & M^{34} & M^{35} \\ M^{41} & 0 & M^{43} & M^{44} & 0 \\ 0 & M^{52} & M^{53} & 0 & M^{55} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{Bmatrix}$$

Où la matrice rigidité \mathbb{K} et la matrice masse \mathbb{M} sont d'ordre $(5(M \times N) \times 5(M \times N))$ et K^{ij} et M^{ij} sont des sous matrices de dimension $((M \times N) \times (M \times N))$. Chaque élément de q est une matrice de dimension $((M \times N) \times (M \times N))$ contenant les paramètres de Ritz.

Pour éviter les solutions triviales, le déterminant de la matrice du système (4.88) doit être annulé, ce qui conduit au problème aux valeurs propres standard suivant :

$$\left| [\mathbb{K}] - \omega^2 [\mathbb{M}] \right| = 0 \quad (4.90)$$

Comme nous l'avons souligné plus haut, les déplacements et rotations approximés par Ritz ne conduisent à des fréquences exactes que si les fonctions tests forment une base complète. Dans la pratique, ce n'est pas le cas puisque les séries sont tronquées à un nombre M de termes dans la direction x et à nombre N de termes dans la direction y . Cette troncature conduit à un système plus rigide que ce qu'il est réellement, ce qui implique que les fréquences calculées sont supérieures aux fréquences exactes. Dans ce cas on dit que les fréquences convergent d'une manière monotone du haut du spectre (à partir de la limite supérieure). D'un autre côté, les résultantes en forces et moments et les contraintes obtenues par la méthode de Ritz sont moins précises comparées aux déplacements, rotations et fréquences. Les déflexions moyennes calculées sont par contre inférieures aux solutions exactes (Reddy [155] , Chakraverty [174]).

Il est possible d'ignorer les conditions aux limites naturelles à condition de bien choisir les fonctions admissibles. Comme nous l'avons souligné plus haut, ces fonctions doivent être complètes et le nombre de termes dans les séries doit être suffisant pour garantir une bonne précision. Le nombre de points à utiliser n'est obtenu qu'après un certain nombre de tests effectués avec les fonctions admissibles choisies et ceci pour une configuration type d'une plaque/poutre. Nous allons présenter, dans ce qui va suivre, différentes fonctions admissibles garantissant une convergence rapide en utilisant un nombre de termes faible. Parmi ces fonctions, certaines n'ont pas encore été utilisées dans l'analyse des structures FGM. Nous les avons testées dans notre étude et les solutions obtenues sont excellentes pour toutes les conditions aux limites classiques appliquées pour une structure isotrope et FGM.

4.9.1. Fonctions trigonométriques de Ritz:

Les fonctions trigonométriques simples sont utilisées comme fonctions admissibles. Elles satisfont uniquement les conditions aux limites forcées (géométriques) quand les côtés sont tous en appuis simples. Elles s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} \cos(i\pi x/a) \sin(j\pi y/b) \\
 V(x, y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N B_{ij} \sin(i\pi x/a) \cos(j\pi y/b) \\
 W(x, y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{ij} \sin(i\pi x/a) \sin(j\pi y/b) \\
 \Psi_x(x, y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N D_{ij} \cos(i\pi x/a) \sin(j\pi y/b) \\
 \Psi_y(x, y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N E_{ij} \sin(i\pi x/a) \cos(j\pi y/b)
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

La convergence est rapide car ces fonctions forment aussi une base complète. Les résultats sont aussi bons que ceux obtenus par la méthode de Lévy et par la méthode de Navier puisque ces deux méthodes les utilisent aussi.

Pour une poutre, l'approximation de Ritz avec ces fonctions se réduit à :

$$\begin{aligned}
 U(x) &= \sum_{i=1}^M A_i \cos(i\pi x/a) \\
 W(x) &= \sum_{i=1}^M C_i \sin(i\pi x/a) \\
 \Psi_x(x) &= \sum_{i=1}^M D_i \cos(i\pi x/a)
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

4.9.2. Fonctions trigonométriques hiérarchiques de Ritz:

Ces fonctions ont été proposées, pour la première fois, par Beslin et Nicolas [177] en 1997 pour résoudre un problème spécifique, à savoir la détermination des très hautes fréquences d'une plaque isotrope pour n'importe quelle combinaison de conditions aux limites. Très peu d'auteurs ont utilisé ces fonctions avec la méthode de Ritz. Parmi eux,

nous pouvons citer Barrette, Alain et al. [178] qui les ont appliquées aux plaques isotropes, Satish Kumar et Kee Paik [179] au flambage des plaques isotropes fissurées, Wei, Zhao et al. [180] aux poutres et plaques isotropes, Jaouen, Brouard et al. [181] aux plaques isotropes et très récemment par Dozio [182], [183], [184] aux plaques isotropes et stratifiées. Ces fonctions présentent une grande stabilité pour la détermination des hautes fréquences pour n'importe quelle combinaison de conditions aux limites, en comparaison avec les autres fonctions de Ritz. Elles sont indéfiniment différentiables, leur ordre ne dépend pas de celui des coordonnées spatiales x et y mais plutôt du nombre d'oscillations des termes trigonométriques retenus. Elles sont aussi faciles à programmer et aucune précaution n'est à prendre pour les problèmes d'arrondi. Nous rappelons ici, qu'à ce jour, ces fonctions n'ont jamais été utilisées pour les plaques et poutres FGM.

L'approximation de Ritz pour une fonction F est :

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} \mathcal{X}_i(x) \mathcal{Y}_j(y), \quad (4.93)$$

$$F = (U, V, W, \Psi_x, \Psi_z), \quad \mathcal{A}_{ij} = (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij})$$

Les fonctions trigonométriques ont la forme suivante (Beslin et Nicolas [177]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i(x) &= \sin(a_i x + b_i) \sin(c_i x + d_i) \\ \mathcal{Y}_j(y) &= \sin(a_j y + b_j) \sin(c_j y + d_j) \end{aligned} \quad (4.94)$$

Les coefficients a_m, b_m, c_m, d_m ($m = i, j$) sont donnés dans le tableau suivant :

Tableau 4.1: Coefficients des fonctions trigonométriques hiérarchiques de Ritz :

Ordre m	a_m	b_m	c_m	d_m
1	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$
2	$\pi/4$	$3\pi/4$	$-\pi/2$	$-3\pi/2$
3	$\pi/4$	$-3\pi/4$	$\pi/4$	$-3\pi/4$
4	$\pi/4$	$-3\pi/4$	$\pi/2$	$-3\pi/2$
$m > 4$	$(m-4)\pi/2$	$(m-4)\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$

Les termes à retenir dans les séries trigonométriques dépendent des conditions aux limites considérées :

- Libre : tous les termes sont à retenir ($m \geq 1$)
- Appuyé : $m = 2,4$ et $m \geq 5$
- Encastré : $m \geq 5$

Les autres conditions aux limites sont des combinaisons des précédentes. Les huit premiers termes des fonctions trigonométriques sont représentés sur la figure 4.6 et permettent de faire le choix adéquat des termes à retenir en fonction de la condition au bord considérée.

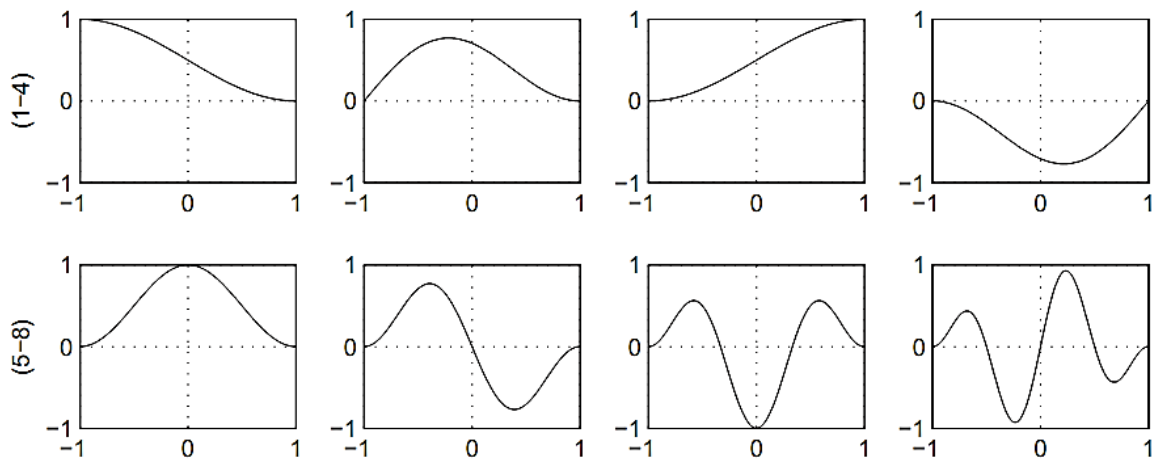


Figure 4.6: Les 8 premiers termes des fonctions trigonométriques hiérarchiques

Pour le cas de la poutre, l'approximation de Ritz s'écrit comme suit :

$$F(x) = \sum_{i=1}^M \mathcal{A}_i \mathcal{X}_i(x), \quad (4.95)$$

$$F = (U, W, \Psi_x), \quad \mathcal{A}_i = (A_i, C_i, D_i)$$

4.9.3. Fonctions polynômiales de Ritz :

Ces fonctions peuvent être utilisées en tant que fonctions admissibles de Ritz car elles sont mathématiquement complètes, mais leur inconvénient vient du fait qu'elles sont

instables lorsque le nombre de termes est grand, affectant les calculs suite aux problèmes d'arrondi. Le principal avantage c'est que nous pouvons les combiner avec les polynômes orthogonaux afin de pouvoir satisfaire les conditions aux limites géométriques (essentiels). C'est ce que nous allons montrer par la suite.

L'approximation de Ritz pour une fonction F , par les fonctions polynômiales est (Reddy [155], Qatu [176], Chakraverty [174]) :

$$F(x, y) = \sum_{i=i_0}^M \sum_{j=j_0}^N \mathcal{A}_{ij} P_i(x) P_j(y), \quad (4.96)$$

$$F = (U, V, W, \Psi_x, \Psi_y), \quad \mathcal{A}_{ij} = (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij})$$

Les fonctions polynômiales s'écrivent comme suit :

$$P_i(x) = x^i (a-x)^q \quad (4.97)$$

$$P_j(y) = y^j (b-y)^s$$

i_0 et j_0 sont choisis (pour chaque déplacement et rotation) de telle façon à satisfaire les conditions aux limites respectivement à $x = 0$ et à $y = 0$.

q et s sont choisis (pour chaque déplacement et rotation) de telle façon à satisfaire les conditions aux limites respectivement à $x = a$ et à $y = b$.

Pour une poutre, l'approximation de Ritz se réduit à :

$$G(x) = \sum_{i=i_0}^M \mathcal{A}_i P_i(x), \quad (4.98)$$

$$G = (U, W, \Psi_x), \quad \mathcal{A}_i = (A_i, C_i, D_i)$$

4.9.4. Polynômes orthogonaux de Ritz :

La méthode de Ritz est basée sur une formulation variationnelle directe. Le choix des fonctions tests est crucial car ce choix a une influence directe sur les caractéristiques de

l'approximation en termes de convergence, de stabilité et de fiabilité des solutions. En particulier, lorsque des solutions précises sont exigées, les polynômes orthogonaux sont actuellement le meilleur choix pour toutes les conditions aux limites y compris quand les bords sont libres. Ces polynômes sont classés d'emblée comme fonctions admissibles car ils répondent aux conditions citées plus haut. Il faut noter ici que malgré les propriétés intéressantes de ces fonctions, leur limite est atteinte pour les modes supérieurs. Seules les fonctions trigonométriques hiérarchiques de Beslin et Nicolas [177] restent valables dans ce cas.

Parmi les fonctions que nous avons retenues, nous pouvons citer les polynômes de Chebyshev (figure 4.7) et de Legendre (figure 4.8) de première espèce dont les expressions sont :

4.9.4.1. Polynômes de Chebyshev :

$$\begin{aligned} P_i(x) &= \cos[(i-1)\arccos(x)], & i &= 1, \dots, M \\ P_j(y) &= \cos[(j-1)\arccos(y)], & j &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.99)$$

Ces polynômes peuvent être obtenus par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} P_1(\zeta) &= 1, & P_2(\zeta) &= \zeta, \\ P_{i+2}(\zeta) &= 2\zeta P_{i+1}(\zeta) - P_i(\zeta), & i &= 1, \dots, M \\ \zeta &= x, y \end{aligned} \quad (4.100)$$

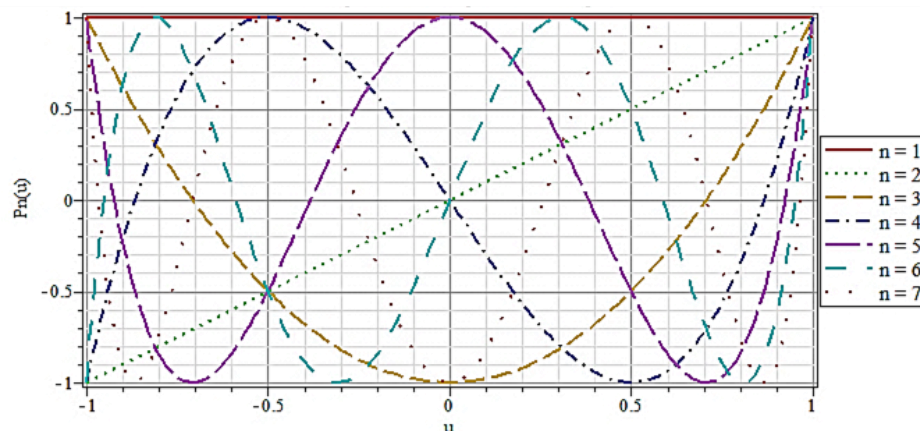


Figure 4.7: Les 7 premiers polynômes de Chebyshev de 1^{ère} espèce

4.9.4.2. Polynômes de Legendre :

$$P_i(x) = \frac{1}{i!2^i} \frac{d^i}{dx^i} \left[(x^2 - 1)^i \right], \quad i = 1, \dots, M$$

$$P_j(y) = \frac{1}{j!2^j} \frac{d^j}{dy^j} \left[(y^2 - 1)^j \right], \quad j = 1, \dots, N$$
(4.101)

Ces polynômes peuvent aussi être obtenus par la formule de récurrence suivante :

$$P_0(\zeta) = 1, \quad P_1(\zeta) = \zeta,$$

$$(i+1)P_{i+1}(\zeta) = (2i+1)\zeta P_i(\zeta) - iP_{i-1}(\zeta), \quad i = 1, \dots, M$$

$$\zeta = x, y$$
(4.102)

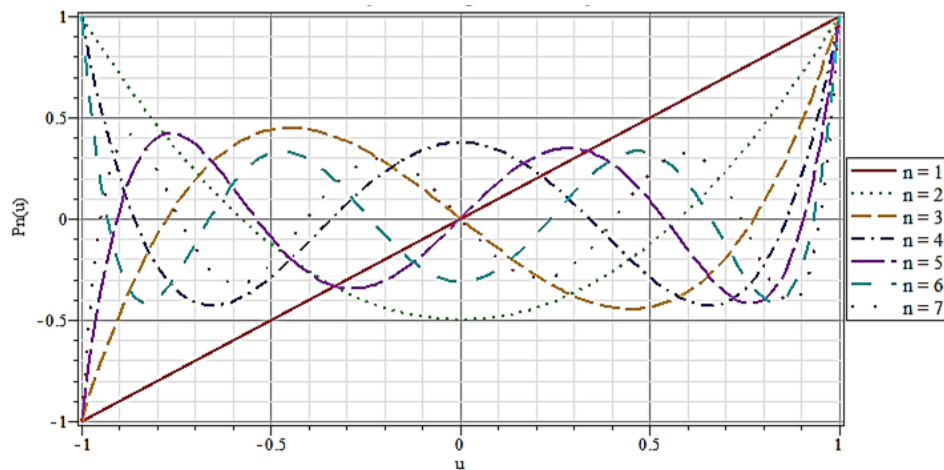


Figure 4.8: Les 7 premiers polynômes de Legendre de 1^{ère} espèce

Une autre classe de polynômes orthogonaux est actuellement très utilisée. Ces polynômes ont une grande flexibilité et peuvent être adaptés aux problèmes étudiés. Ils sont aussi classés en tant que fonctions admissibles et répondent aux conditions citées plus haut. Ils sont générés par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à trois termes (Chakraverty [174] , Bhat [175]) suivant :

$$P_1(\zeta) : \text{choisi}, \quad P_2(\zeta) = (\zeta - \mathcal{B}_2)P_1(\zeta),$$

$$P_k(\zeta) = (\zeta - \mathcal{B}_k)P_{k-1}(\zeta) - C_k P_{k-2}(\zeta), \quad \zeta = x, y, \quad k > 2$$
(4.103)

Avec :

$$\mathcal{B}_k = \frac{\int_0^\ell \mathcal{W}(\zeta) \zeta [P_{k-1}(\zeta)]^2 d\zeta}{\int_0^\ell \mathcal{W}(\zeta) [P_{k-1}(\zeta)]^2 d\zeta}, \quad \mathcal{C}_k = \frac{\int_0^\ell \mathcal{W}(\zeta) \zeta P_{k-1}(\zeta) P_{k-2}(\zeta) d\zeta}{\int_0^\ell \mathcal{W}(\zeta) [P_{k-2}(\zeta)]^2 d\zeta} \quad (4.104)$$

$$\ell = \begin{cases} a & \text{pour } \zeta = x \\ b & \text{pour } \zeta = y \end{cases}$$

$\mathcal{W}(\zeta)$ est appelée fonction de pondération.

Les fonctions polynômiales P_k sont orthogonales par rapport à $\mathcal{W}(\zeta)$ car elles satisfont la condition suivante :

$$\int_0^\ell \mathcal{W}(\zeta) P_k(\zeta) P_l(\zeta) d\zeta \begin{cases} = 0 & \text{pour } k \neq l \\ \neq 0 & \text{pour } k = l \end{cases} \quad (4.105)$$

Si de plus nous divisons chaque membre des équations (4.103) par sa norme définie par :

$$\|P_k(\zeta)\| = \left(\int_0^\ell [P_k(\zeta)]^2 d\zeta \right)^{1/2}, \quad \zeta = x, y \quad (4.106)$$

Nous obtiendrons alors des formes normalisées grâce auxquelles la convergence est plus stable et plus rapide. C'est cette normalisation que nous avons adoptée. Ces formes normalisées sont alors données par:

$$\bar{P}_k(\zeta) = \frac{P_k(\zeta)}{\|P_k(\zeta)\|}, \quad \zeta = x, y \quad (4.107)$$

Les polynômes orthogonaux ne peuvent pas être utilisés en tant que fonctions admissibles sous leur forme originale car ils ne satisfont pas les conditions géométriques forcées. Pour ce faire, il faut combiner les fonctions polynômiales avec les polynômes orthogonaux selon l'équation (4.108).

Pour les polynômes orthogonaux classiques, la forme appropriée de l'approximation de Ritz est :

$$F(x, y) = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y) \sum_{i=i_0}^M \sum_{j=j_0}^N \mathcal{A}_{ij} P_i(x) P_j(y), \quad (4.108)$$

Avec :

$$\begin{aligned} F &= (U, V, W, \Psi_x, \Psi_y), \quad \mathcal{A}_{ij} = (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}) \\ \mathcal{X}(x) &= x^p (a-x)^q \\ \mathcal{Y}(y) &= y^r (b-y)^s \end{aligned} \quad (4.109)$$

Où $\mathcal{X}(x)$ et $\mathcal{Y}(y)$ sont les fonctions polynomiales de degré le plus bas, satisfaisant aux conditions aux limites imposées (le choix porte sur les entiers p, q, r, s). C'est ainsi que les entiers p, q, r et s prennent la valeur 0 pour la condition bord libre, la valeur 1 quand le bord est appuyé et la valeur 2 quand le bord est encastéré.

Pour le cas d'une poutre, l'approximation de Ritz prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathcal{X}(x) \sum_{i=i_0}^M \mathcal{A}_i P_i(x), \\ G &= (U, W, \Psi_x), \quad \mathcal{A}_i = (A_i, C_i, D_i) \end{aligned} \quad (4.110)$$

Lorsque les polynômes orthogonaux sont générés par le procédé de Gram-Schmidt, il suffit que le premier terme de la série soit identique à la fonction polynomiale de degré le plus bas, donc :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \mathcal{X}(x) \\ P_1(y) &= \mathcal{Y}(y) \end{aligned} \quad (4.111)$$

Il faut noter que même si $P_1(x)$ et $P_1(y)$ satisfont les conditions aux limites géométriques et naturelles, les autres termes de la série obtenus par la relation de récurrence à trois termes de Gram-Schmidt ne satisfont que les conditions aux limites géométriques.

4.10. Conclusion :

Dans cette partie du travail, nous avons tenu à présenter une formulation unifiée pour la plaque FGM soumise à des contraintes thermiques initiales. Tous les développements présentés contiennent la fonction de forme φ comme un paramètre que l'on peut changer suivant le choix de la théorie de déformation pour laquelle le chercheur opte. Nous tenons à préciser que le développement des équations est propre à notre travail de recherche. Quant à la résolution du problème des vibrations libres, il est bien connu que les solutions exactes ne peuvent être obtenues que pour un ensemble limité de conditions aux limites et de géométries simples, autrement des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis et la méthode des différences finis sont souvent utilisées. Cependant, pour des structures complexes, ces méthodes aboutissent à des problèmes avec un grand nombre de degrés de liberté. Ce handicap peut être levé en utilisant la méthode de Ritz. Cette méthode procure une très bonne précision dans les résultats, elle est très efficace et contourne les problèmes posés par le grand nombre de degrés de liberté. Le secret de son efficacité réside dans le bon choix des fonctions admissibles qui approximent les solutions et satisfont les conditions aux limites. Il est actuellement admis que la méthode de Ritz est une technique très puissante et fiable utilisée dans la prédiction des fréquences naturelles et des modes propres des structures vibrantes, c'est pourquoi nous l'avons choisie et utilisée dans la résolution du problème des vibrations libres des plaques FGM soumises à des contraintes thermiques initiales.

CHAPITRE 5

RESULTATS, VALIDATIONS ET INTERPRETATIONS

5.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter un ensemble de résultats obtenus suite à l'exécution du programme de calcul que nous avons élaboré. Nous présenterons d'abord les résultats concernant la poutre FGM symétrique en commençant en premier lieu par la validation de la méthode analytique de résolution des équations du mouvement, développée dans le cadre de ce travail, en confrontant nos résultats avec ceux d'articles publiés. Nous exposerons par la suite des tableaux de valeurs et des courbes concernant la poutre FGM symétrique soumise à une élévation uniforme de la température. Nous prendrons en considération plusieurs théories de déformation en cisaillement, plusieurs fonctions de distribution de la matière à travers l'épaisseur et plusieurs conditions aux limites. Le même travail sera ensuite réalisé sur la poutre FGM non symétrique. Les méthodes de résolution utilisées dans ce cas étant la DQM (Differential Quadrature Method) et la méthode de Ritz. En second lieu, nous analyserons les plaques FGM minces et épaisses soumises à des variations uniformes de la température et à des gradients de température à travers l'épaisseur. Différentes théories de déformation en cisaillement des plaques minces et épaisses, différents types de FGM et de multiples conditions aux limites seront pris en considération. La résolution des équations du mouvement de la plaque sera concrétisée grâce à la méthode de Ritz. La nouvelle théorie raffinée développée dans le cadre de ce travail sera introduite dans chacune des études sus-citées. Il est également à noter que dans toute cette étude et pour tous les éléments structuraux étudiés, les influences du rapport d'élancement, de l'index de la fraction volumique des matériaux constituants (céramique et métal), et de l'effet de la température sur les fréquences naturelles seront analysées et interprétées.

5.2.Poutre FGM symétrique :

Dans cette partie du travail, la méthode de résolution utilisée est la méthode analytique développée dans le cadre de cette recherche pour aboutir à des solutions exactes représentées par les équations aux fréquences propres. Dans un premier lieu, le système d'équations différentielles du sixième ordre (équations (3.24)) a été ramené à un système du quatrième ordre (équations (3.27)) dont la résolution analytique a abouti aux équations aux fréquences naturelles pour différentes conditions aux limites (équations (3.37) à (3.42)). Dans un second lieu, le système d'équations différentielles du sixième ordre (équations (3.24)) a été directement résolu pour aboutir aux équations aux fréquences naturelles pour différentes conditions aux limites (équations (3.58) à (3.63)).

L'analyse est conduite en considérant une poutre FGM à deux constituants (100% céramique au niveau du plan moyen et 100% métal au niveau des faces supérieure et inférieure). La largeur b est égale à 0.0254 m. Les températures imposées au niveau des surfaces supérieure, inférieure et moyenne sont comprises entre 293K et 393K. Les propriétés thermomécaniques obéissent aux lois de distribution $P(z,T)$ explicitées dans le chapitre 2 (P-FGM, E-FGM et S-FGM). Ces propriétés sont fonctions de la température. A la température de référence ($T_0 = 300\text{K}$), les propriétés de la céramique (Al_2O_3) et du métal (SUS304) sont les suivantes :

Céramique: $E_c = 320.235 \text{ GPa}$, $\nu_c = 0.26$, $\rho_c = 3750 \text{ kg/m}^3$, $\kappa_c = 10.40 \text{ W/m K}$,
 $\alpha_c = 7.203 \times 10^{-6}/\text{K}$.

Métal: $E_m = 207.788 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0.32$, $\rho_m = 8166 \text{ kg/m}^3$, $\kappa_m = 12.04 \text{ W/m K}$,
 $\alpha_m = 15.321 \times 10^{-6}/\text{K}$.

Pour donner un aperçu de l'effet de la température sur les propriétés de la poutre FGM symétrique, nous présentons les courbes de variation du module de Young E (figure 5.1 et figure 5.2) et du module de cisaillement G (figure 5.3 et figure 5.4) en fonction de la température, au niveau des faces supérieure, inférieure et médiane de la poutre.

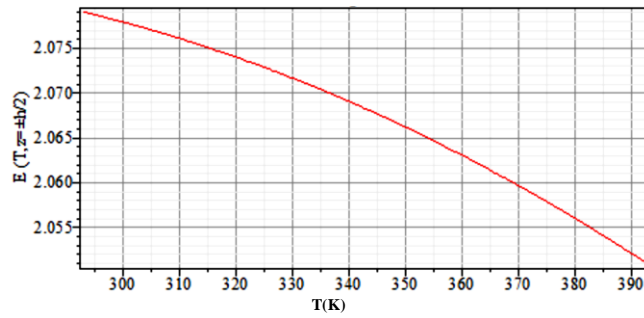


Figure 5.1: Variation du module de Young E ($\text{Pa} \times 10^{-11}$) en fonction de T au niveau des faces externes (Poutre FGM, SUS304- Al_2O_3 -SUS304)

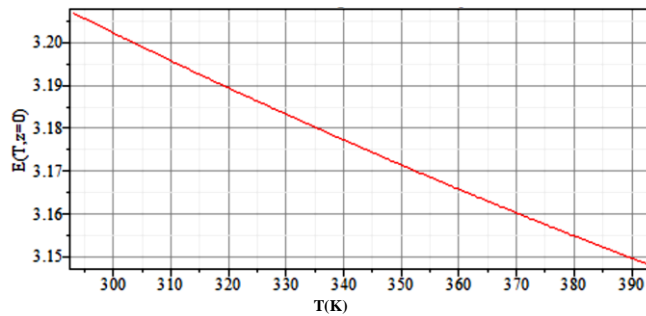


Figure 5.2: Variation du module de Young E ($\text{Pa} \times 10^{-11}$) en fonction de T au niveau du plan neutre (Poutre FGM, SUS304- Al_2O_3 -SUS304)

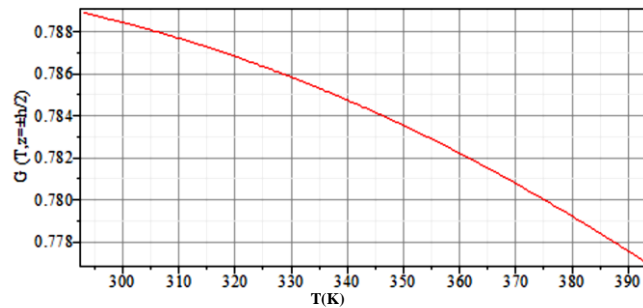


Figure 5.3: Variation du module de cisaillement G ($\text{Pa} \times 10^{-11}$) en fonction de T au niveau des faces externes (Poutre FGM, SUS304- Al_2O_3 -SUS304)

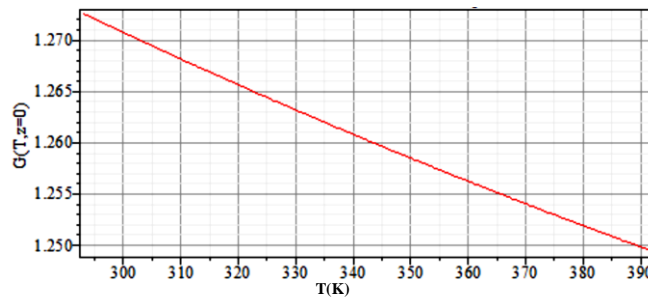


Figure 5.4: Variation du module de cisaillement G ($\text{Pa} \times 10^{-11}$) en fonction de T au niveau du plan neutre (Poutre FGM, SUS304- Al_2O_3 -SUS304)

5.2.1. Validation du code de calcul élaboré pour le cas de poutres FGM symétriques:

Afin de valider la méthode analytique développée dans la cadre de notre travail, une comparaison est faite entre les résultats obtenus en utilisant les théories FSDBT et PSDBT et ceux des références [110] et [108]. Les tableaux 5.1 et 5.2 montrent une très bonne concordance dans les deux cas (poutre isotrope en aluminium pur et poutre FGM ZrO_2 -Al/Al/Al- ZrO_2 sans effet de l'élévation de température). Le tableau 5.3 vient ensuite montrer la validité de notre méthode de résolution dans le cas de la prise en compte de l'effet de la température sur les fréquences naturelles en comparant nos résultats avec ceux de la référence [108].

Tableau 5.1: Fréquence fondamentale adimensionnelle d'une poutre en aluminium pour différents rapports L/h

Poutre	Condition aux limites	Théorie	L/h		
			10	30	100
Aluminium	Appuyée-appuyée	Présente (FSDBT)	2.880	2.924	2.929
		Présente (PSDBT)	2.881	2.924	3.011
		FSDBT1 [110]	2.879	2.922	2.927

Tableau 5.2: Les cinq premières fréquences adimensionnelles d'une poutre FGM symétrique (ZrO_2 -Al/Al/Al- ZrO_2 , $L/h = 10$, P-FGM, sans gradient de température)

Poutre	Mode	$n = 0.2$			$n = 2$			$n = 10$		
		FSDBT	PSDBT	Réf.[108]	FSDBT	PSDBT	Réf. [108]	FSDBT	PSDBT	Réf. [108]
C-F	1	0.121	0.123	0.121	0.110	0.112	0.110	0.104	0.105	0.104
	2	0.718	0.722	0.718	0.655	0.662	0.655	0.618	0.624	0.620
	3	1.700*	1.700*	1.700*	1.624*	1.624*	1.624*	1.586*	1.586*	1.588*
	4	1.861	1.867	1.861	1.708	1.724	1.708	1.616	1.633	1.621
	5	3.327	3.331	3.327	3.069	3.103	3.069	2.913	2.952	2.923
S-S	1	0.336	0.336	0.336	0.306	0.306	0.306	0.288	0.288	0.289
	2	1.271	1.265	1.271	1.161	1.161	1.161	1.095	1.096	1.099
	3	1.700*	1.700*	1.700*	1.624*	1.624*	1.624*	1.586*	1.586*	1.588*
	4	2.638	2.621	2.638	2.424	2.426	2.424	2.294	2.301	2.302
	5	4.280	4.252	4.280	3.952	3.968	3.952	3.754	3.780	3.766
C-C	1	0.715	0.712	0.715	0.655	0.655	0.655	0.618	0.619	0.620
	2	1.802	1.789	1.802	1.659	1.663	1.659	1.573	1.580	1.578
	3	3.206	3.188	3.206	2.968	2.987	2.968	2.825	2.852	2.834
	4	3.401*	3.401*	3.401*	3.249*	3.249*	3.249*	3.171*	3.171*	3.175*
	5	4.807	4.792	4.807	4.468	4.521	4.468	4.267	4.333	4.279

*: mode de vibration longitudinale

C-F: encastrée-libre, S-S: appuyée-appuyée, C-C: encastrée-encastrée.

Tableau 5.3: Les cinq premières fréquences adimensionnelles d'une poutre FGM symétrique (ZrO_2 -Al/Al/Al- ZrO_2 , $L/h = 10$, P-FGM, encastrée-encastrée avec élévation uniforme de la température)

(T_t, T_b, T_{mp}) (K)	Mode	$n = 0.2$		$n = 2$		$n = 10$	
		FSDBT	Réf. [108]	FSDBT	Réf. [108]	FSDBT	Réf. [108]
(323, 323, 323)	1	0.711	0.706	0.651	0.644	0.615	0.609
	2	1.796	1.788	1.654	1.644	1.569	1.563
	3	3.200	3.181	2.963	2.951	2.820	2.816
	4	3.401*	3.401*	3.249*	3.249*	3.171*	3.175*
	5	4.799	4.789	4.462	4.448	4.261	4.258

*: mode de vibration longitudinale

5.2.2. Résultats de l'analyse de la poutre FGM symétrique soumise à des contraintes

thermiques initiales :

Afin de montrer les résultats de l'analyse de la poutre FGM symétrique soumise à des contraintes thermiques initiales, un certain nombre de tableaux et figures sont présentés pour différents cas (théories, géométries, distributions de matière à travers l'épaisseur, élévations de température et conditions aux limites).

L'expression de la fréquence adimensionnelle utilisée dans l'analyse de la poutre est la suivante :

$$\bar{\omega} = \omega(L/h)^2 \sqrt{\rho_m h^2 / E_m} \quad (5.1)$$

Les tableaux 5.4 et 5.5 montrent les valeurs des fréquences naturelles obtenues en résolvant le système d'équations différentielles du sixième et du quatrième ordre pour différentes théories de déformation en cisaillement et pour différents rapports d'élancement, pour le cas d'une poutre P-FGM appuyée-appuyée et complètement libre.

Tableau 5.4: Comparaison entre les cinq premières fréquences (kHz) obtenues en résolvant les équations de mouvement du 6^{ème} ordre avec celles obtenues en résolvant les équations de mouvement du 4^{ème} ordre (cas appuyée-appuyée, poutre P-FGM symétrique avec $n = 0.5$)

Théorie	$L/h = 10$					$L/h = 20$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
PSDBT ¹	2.104	8.115	17.058	27.890	39.773	0.509	2.103	4.679	8.134	12.352
PSDBT ²	2.103	8.134	17.219	28.506	41.340	0.509	2.104	4.676	8.115	12.288
Erreur (%)	0.048	-0.234	-0.944	-2.209	-3.940	0.000	-0.048	0.064	0.234	0.518
ESDBT ¹	2.104	8.141	17.258	28.624	41.610	0.509	2.104	4.681	8.141	12.370
ESDBT ²	2.104	8.118	17.067	27.898	39.759	0.509	2.104	4.678	8.118	12.294
Erreur (%)	0.000	0.283	1.107	2.536	4.448	0.000	0.000	0.064	0.283	0.614
TSDBT ¹	2.103	8.137	17.236	28.558	41.462	0.509	2.103	4.680	8.137	12.359
TSDBT ²	2.104	8.116	17.061	27.891	39.762	0.509	2.104	4.677	8.116	12.290
Erreur (%)	-0.048	0.258	1.015	2.336	4.100	0.000	-0.048	0.064	0.258	0.558

¹ Solutions des équations différentielles du 6ème ordre, ² Solutions des équations différentielles du 4ème ordre.

Tableau 5.5: Comparaison entre les cinq premières fréquences (kHz) obtenues en résolvant les équations de mouvement du 6^{ème} ordre avec celles obtenues en résolvant les équations de mouvement du 4^{ème} ordre (cas libre-libre, poutre P-FGM symétrique avec $n = 0.5$)

Théorie	$L/h = 10$					$L/h = 20$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
PSDBT ¹	4.806	12.484	22.782	34.850	48.128	1.213	3.308	6.353	10.218	14.784
PSDBT ²	4.749	12.358	22.421	33.848	45.866	1.203	3.286	6.315	10.149	14.651
Erreur (%)	1.186	1.009	1.585	2.875	4.700	0.824	0.665	0.598	0.675	0.900
ESDBT ¹	4.822	12.523	22.864	35.015	48.425	1.215	3.315	6.366	10.240	14.821
ESDBT ²	4.756	12.386	22.460	33.833	45.657	1.203	3.289	6.322	10.162	14.671
Erreur (%)	1.369	1.094	1.767	3.376	5.716	0.988	0.784	0.691	0.762	1.012
TSDBT ¹	4.814	12.503	22.821	34.927	48.267	1.214	3.312	6.359	10.228	14.801
TSDBT ²	4.752	12.372	22.440	33.844	45.777	1.203	3.288	6.318	10.155	14.660
Erreur (%)	1.288	1.048	1.670	3.101	5.159	0.906	0.725	0.645	0.714	0.953

¹ Solutions des équations différentielles du 6ème ordre, ² Solutions des équations différentielles du 4ème ordre.

La comparaison entre les résultats obtenus par les deux procédés de résolution montre que le fait de négliger les termes du sixième ordre des équations différentielles de mouvement affecte très peu les fréquences naturelles. Ceci est mis en évidence par la valeur très faible de l'erreur relative. Il est également clair que cette erreur relative décroît lorsque le rapport L/h augmente et qu'elle croît pour les modes supérieurs. De plus, l'erreur

est affectée par le type de conditions aux limites considérées. Elle reste toutefois faible dans tous les cas et quelle que soit la théorie de déformation utilisée.

Les tableaux 5.6 et 5.7 exposent la comparaison entre les fréquences fondamentales adimensionnelles obtenues par différentes théories pour différentes lois de distribution des propriétés de poutres FGM symétriques appuyée-appuyée. En parallèle, la nouvelle théorie raffinée développée dans le cadre de ce travail a également été incluse dans cette comparaison afin de prouver sa validité.

Tableau 5.6: Comparaison entre les fréquences fondamentales adimensionnelles obtenues par différentes théories pour différentes lois de distribution des propriétés (poutre FGM symétrique appuyée-appuyée)

L/h	Théorie	P-FGM		E-FGM	P-FGM	S-FGM		
		$n = 0.5$	$n = 1$	Exp	$n = 1.5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
5	CBT	3.420	3.714	3.777	3.930	3.714	3.662	3.641
	FSDBT	3.206	3.484	3.543	3.687	3.484	3.438	3.419
	PSDBT	3.217	3.496	3.555	3.699	3.498	3.452	3.434
	HSDBT	3.244	3.525	3.584	3.729	3.526	3.476	3.457
	ESDBT	3.220	3.499	3.558	3.702	3.501	3.455	3.437
	TSDBT	3.218	3.498	3.557	3.700	3.499	3.453	3.435
	Présente théorie ($\alpha = 3/2$)	3.217	3.497	3.556	3.700	3.497	3.453	3.435
20	CBT	3.232	3.532	3.601	3.753	3.532	3.481	3.460
	FSDBT	3.217	3.516	3.584	3.735	3.516	3.465	3.444
	PSDBT	3.218	3.517	3.585	3.736	3.518	3.466	3.445
	HSDBT	3.220	3.518	3.586	3.737	3.521	3.467	3.446
	ESDBT	3.218	3.517	3.585	3.736	3.518	3.466	3.445
	TSDBT	3.218	3.517	3.585	3.736	3.518	3.466	3.445
	Présente théorie ($\alpha = 3/2$)	3.218	3.517	3.585	3.736	3.517	3.465	3.445

Tableau 5.7: Comparaison entre les fréquences adimensionnelles du cinquième mode obtenues par différentes théories pour différentes lois de distribution des propriétés (poutre FGM symétrique appuyée-appuyée)

L/h	Théorie	P-FGM		E-FGM	P-FGM	S-FGM		
		$n = 0.5$	$n = 1$	Exp	$n = 1.5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
5	CBT	85.791	93.134	94.692	98.521	93.134	91.843	91.318
	FSDBT	43.447	47.515	48.299	50.357	47.515	47.147	46.996
	PSDBT	46.264	50.757	51.649	53.765	50.763	50.683	50.654
	HSDBT	43.628	47.526	48.231	50.250	47.507	47.001	46.794
	ESDBT	47.047	51.640	52.567	54.680	51.646	51.638	51.638
	TSDBT	46.634	51.175	52.084	54.198	51.181	51.136	51.121
	Présente théorie ($\alpha = 3/2$)	46.464	50.983	51.884	53.999	50.983	50.928	50.907
	20	CBT	85.609	92.957	94.520	98.349	92.957	91.666
FSDBT		77.743	84.506	85.914	89.421	84.506	83.407	82.961
PSDBT		78.155	84.976	86.402	89.897	85.013	83.948	83.531
HSDBT		79.219	86.068	87.501	91.065	86.105	84.905	84.432
ESDBT		78.272	85.094	86.527	90.011	85.132	84.072	83.657
TSDBT		78.206	85.027	86.457	89.946	85.064	84.003	83.587
Présente théorie ($\alpha = 3/2$)		78.181	85.002	86.430	89.922	85.002	83.976	83.560

Il est à noter que du fait de l'utilisation de l'équation (5.1), les évolutions des fréquences naturelles et des fréquences naturelles adimensionnelles se font dans le sens inverse lorsque L/h varie.

Les fréquences naturelles adimensionnelles augmentent lorsque la concentration en céramique augmente pour le cas P-FGM. Dans le cas de la poutre S-FGM, lorsque l'index p augmente, les fréquences adimensionnelles diminuent. Ceci s'explique par le fait que les fréquences naturelles adimensionnelles d'une poutre en pur métal (SUS304) sont plus petites que celles d'une poutre isotrope en pur céramique (Al_2O_3) car le module de Young global de la poutre en métal est inférieur à celui de la poutre en céramique. Nous pouvons conclure que le taux de distribution de la concentration des constituants à travers l'épaisseur a aussi un rôle à jouer dans l'évolution des fréquences naturelles car il influe sur la rigidité globale de la poutre. Cette variation est aussi représentée sur les figures 5.5, 5.6, 5.7 et 5.8. Pour le mode fondamental, les valeurs des fréquences obtenues par les différentes théories sont très proches les unes des autres et sont presque confondues dans le cas d'une poutre mince ($L/h = 20$). Cependant, la différence entre ces valeurs augmente pour les modes supérieurs (figures 5.7 et 5.8). Nous pouvons conclure que les théories FSDBT et HSDBT ne permettent pas une estimation correcte des fréquences pour le cas

d'une poutre FGM épaisse, et ceci quelle que soit la distribution des propriétés des constituants. Il faut également noter que la nouvelle théorie développée dans le cadre de ce travail donne de très bons résultats comparés à ceux obtenus par les autres théories d'ordre supérieur.

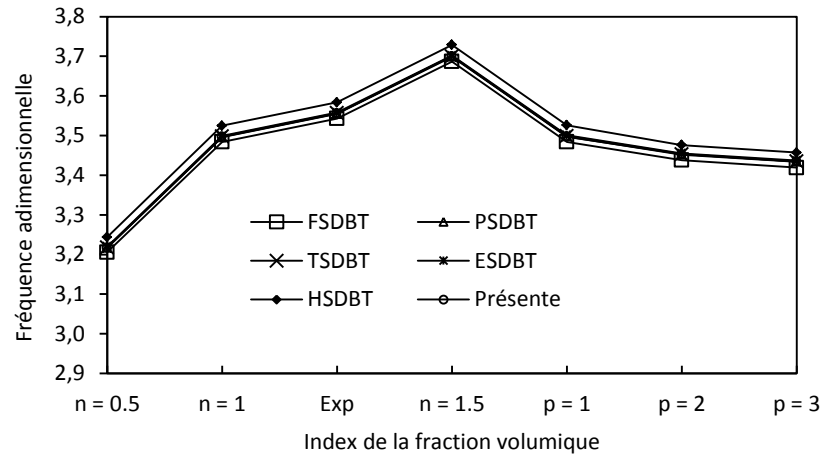


Figure 5.5: Variation de la 1ère fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 5$, $T_b = T_t = 313K$), Poutre FGM symétrique appuyée-appuyée

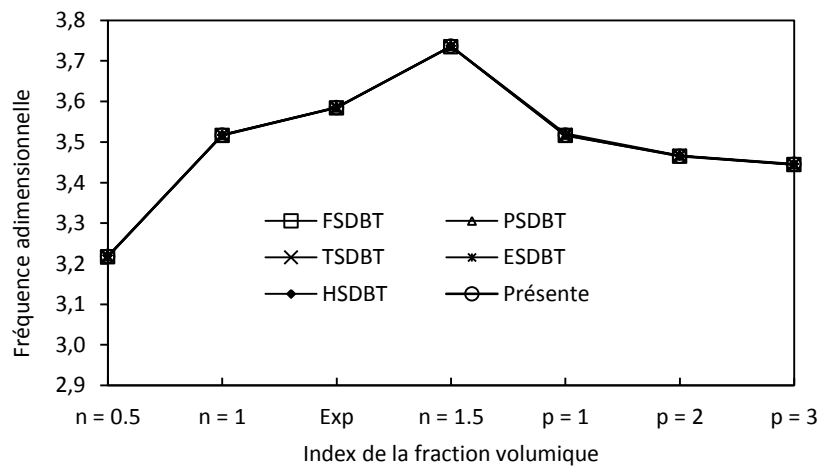


Figure 5.6: Variation de la 1ère fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 20$, $T_b = T_t = 313K$), Poutre FGM symétrique appuyée-appuyée

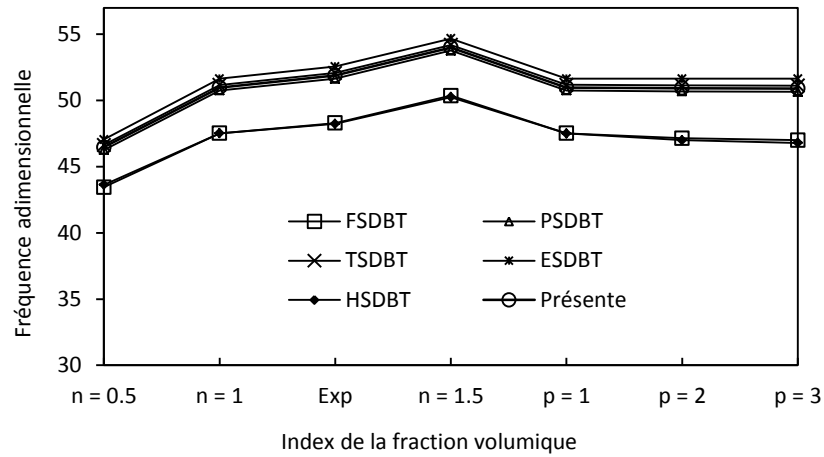


Figure 5.7: Variation de la 5^{ème} fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 5$, $T_b = T_t = 313K$), Poutre FGM symétrique appuyée-appuyée

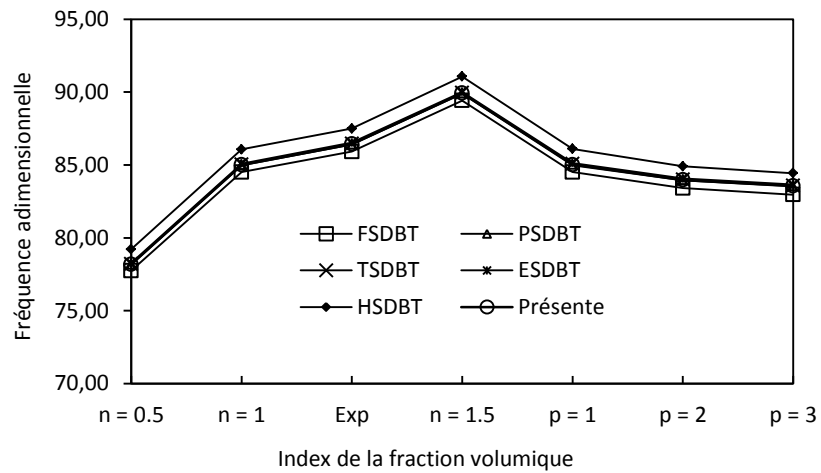


Figure 5.8: Variation de la 5^{ème} fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 20$, $T_b = T_t = 313K$), Poutre FGM symétrique appuyée-appuyée

Les figures 5.9 à 5.14 montrent les valeurs des cinq premières fréquences naturelles obtenues par différentes théories de déformation et pour chaque type de poutre FGM (P-FGM, E-FGM et S-FGM). Nous pouvons remarquer que pour une poutre épaisse ($L/h = 5$), la différence entre les valeurs obtenues par la CBT et par les autres théories augmente pour les modes supérieurs (figures 5.9, 5.11 et 5.13). L'effet de la déformation de cisaillement sur les fréquences propres décroît avec l'augmentation du rapport d'élancement ($L/h = 20$) et ceci quel que soit le type de poutre FGM considérée (figures 5.10, 5.12 et 5.14).

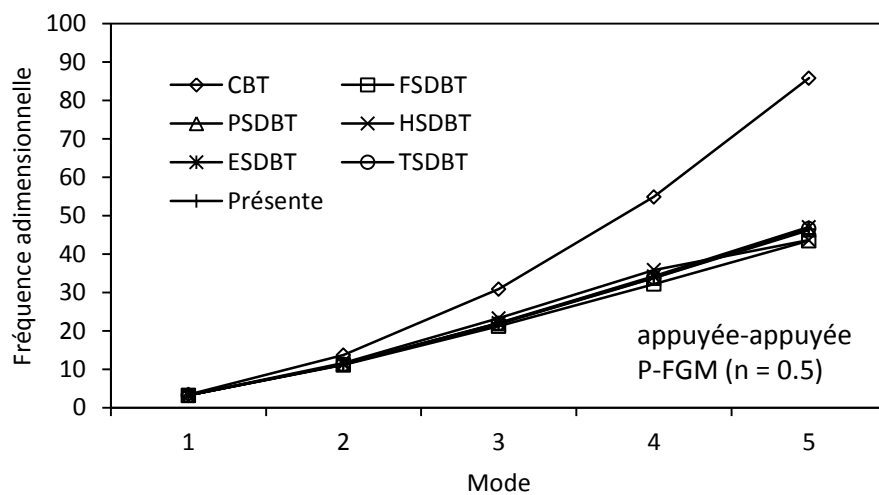


Figure 5.9: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre P-FGM (SUS304- Al_2O_3 -SUS304) appuyée-appuyée ($L/h = 5$, $T_b = T_b = T_t = 313\text{K}$)

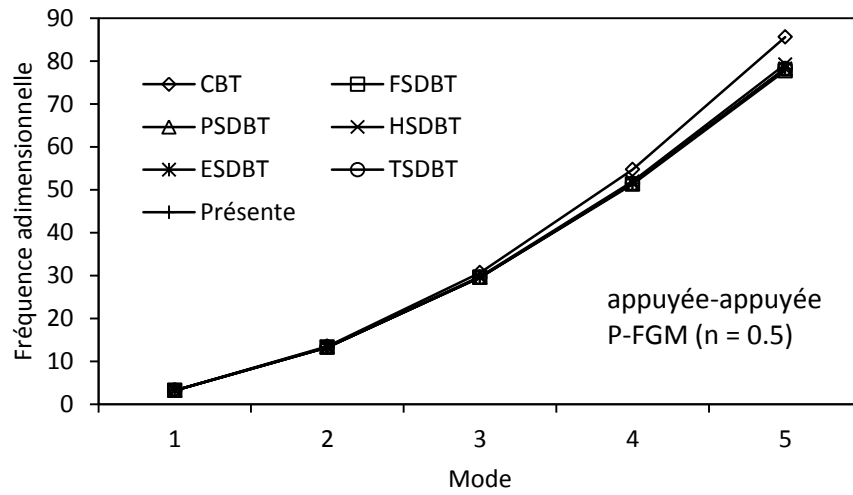


Figure 5.10: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre P-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, ($L/h = 20$, $T_b = T_t = 313K$)

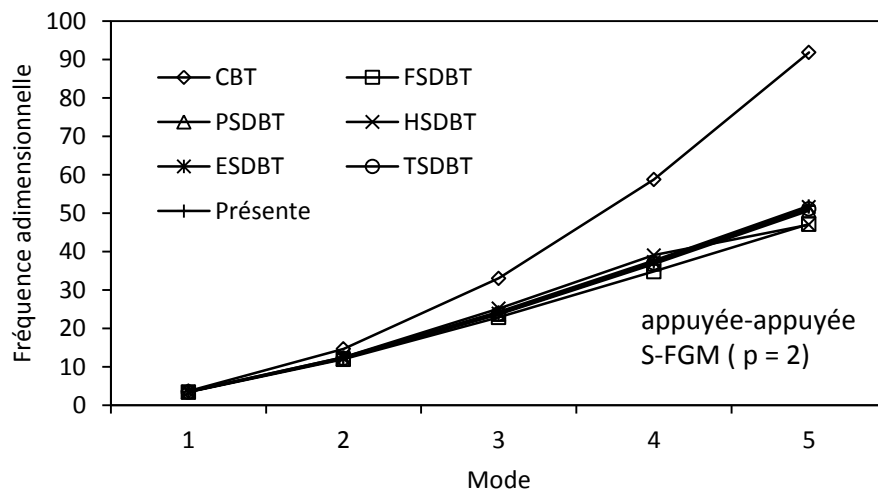


Figure 5.11: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre S-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée ($L/h = 5$, $T_b = T_t = 313K$)

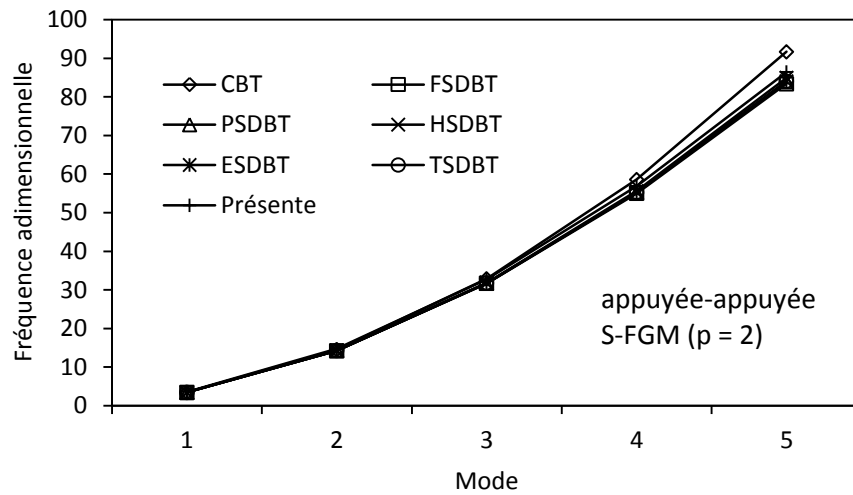


Figure 5.12: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre S-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, ($L/h = 20$, $T_b = T_t = 313K$)

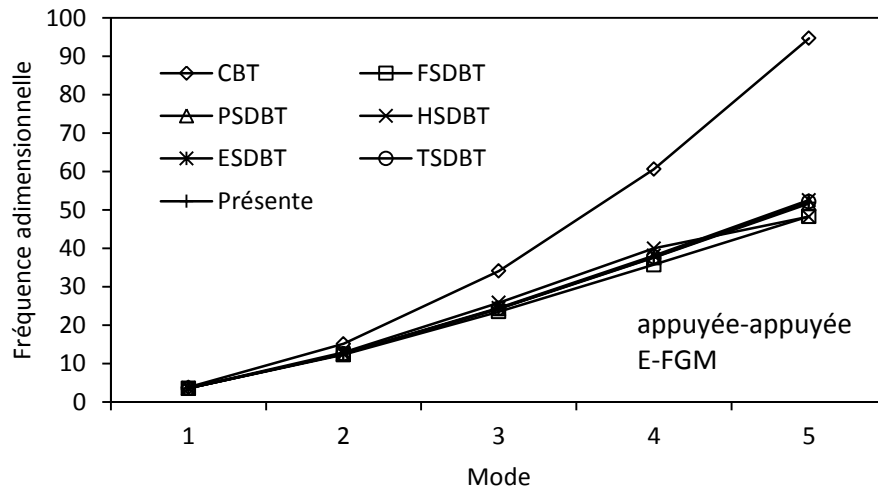


Figure 5.13: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre E-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, ($L/h = 5$, $T_b = T_t = 313K$)

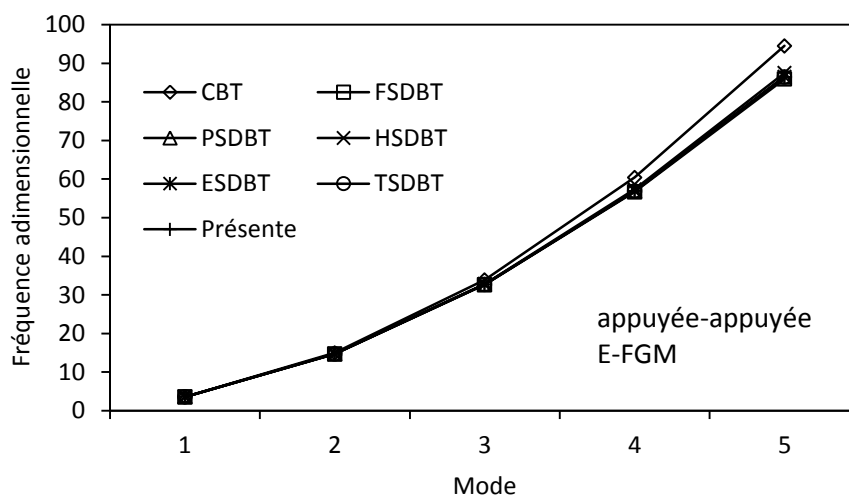


Figure 5.14: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre E-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, ($L/h = 20$, $T_b = T_t = 313K$)

Afin de montrer l'effet de l'élévation de température sur les fréquences naturelles de vibration, des courbes de variation de ces fréquences adimensionnelles en fonction de la température ont été tracées (figures 5.15 à 5.30). Etant donné que les propriétés thermomécaniques de la poutre dépendent de la température, les mêmes valeurs de température sont imposées sur les surfaces inférieure, médiane et supérieure afin de maintenir une distribution symétrique à travers l'épaisseur. Pour les deux types de poutres considérées (P-FGM et S-FGM), les fréquences naturelles adimensionnelles décroissent avec l'augmentation de la température. Nous notons aussi que la fréquence fondamentale décroît plus vite que la fréquence du cinquième mode. La décroissance est encore plus forte lorsque la poutre est longue et mince. Ceci s'explique par le fait que lorsque L/h augmente ou que la température augmente, la rigidité globale de la poutre est amoindrie.

Nous remarquons que les fréquences fondamentales obtenues par les deux théories (FSDBT et PSDBT) coïncident lorsque L/h est égal à 20 quelle que soit l'élévation de la température (dans la plage considérée).

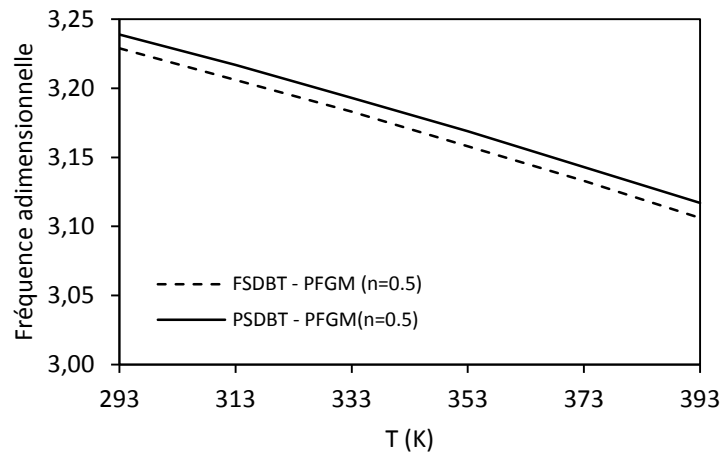


Figure 5.15: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304- Al_2O_3 -SUS304) appuyée-appuyée, $n = 0.5$, $L/h = 5$

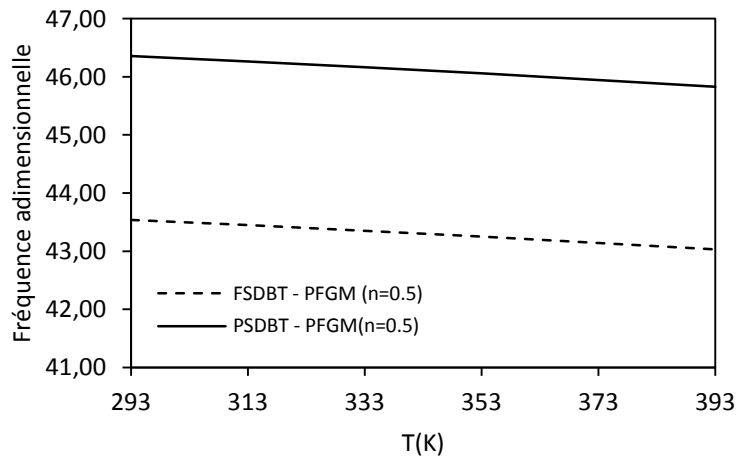


Figure 5.16: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304- Al_2O_3 -SUS304) appuyée-appuyée, $n = 0.5$, $L/h = 5$

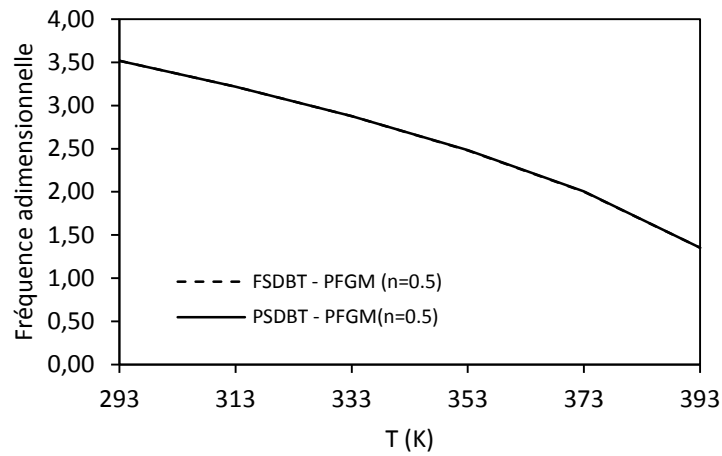


Figure 5.17: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, $n = 0.5$, $L/h = 20$

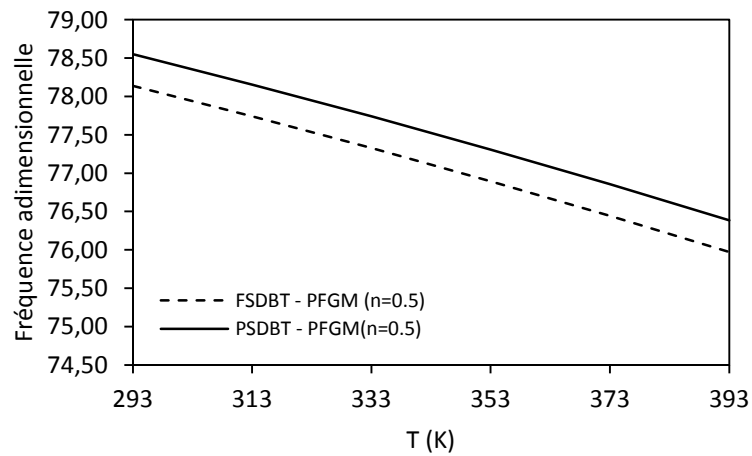


Figure 5.18: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, $n = 0.5$, $L/h = 20$

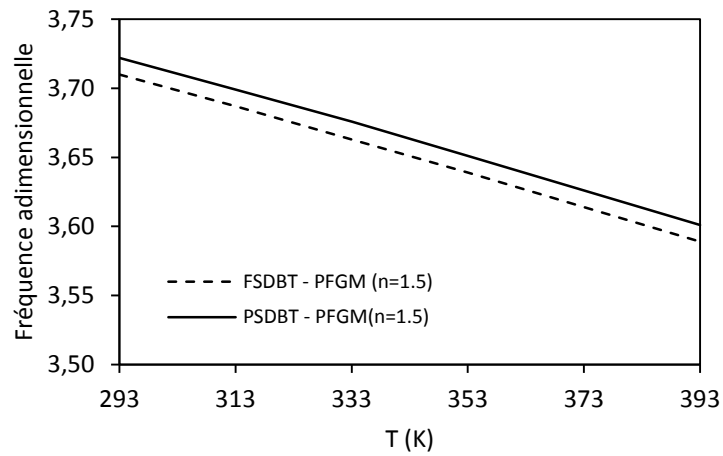


Figure 5.19: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, $n = 1.5$, $L/h = 5$

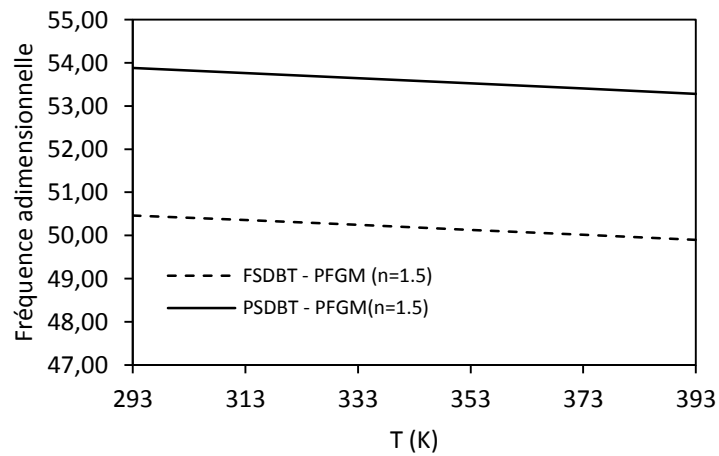


Figure 5.20: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, $n = 1.5$, $L/h = 5$

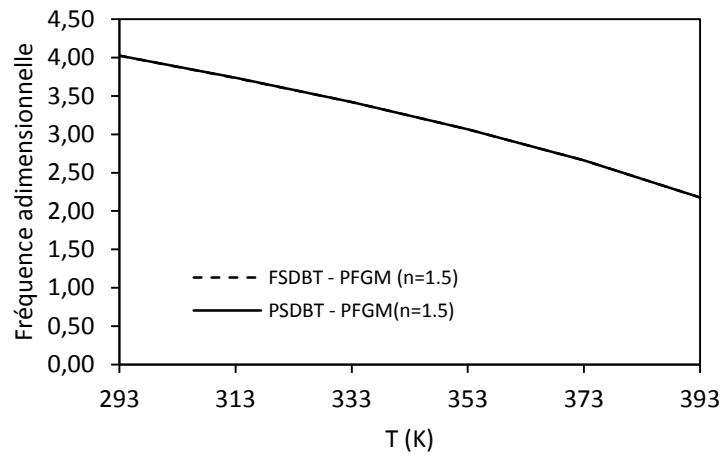


Figure 5.21: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, $n = 1.5$, $L/h = 20$

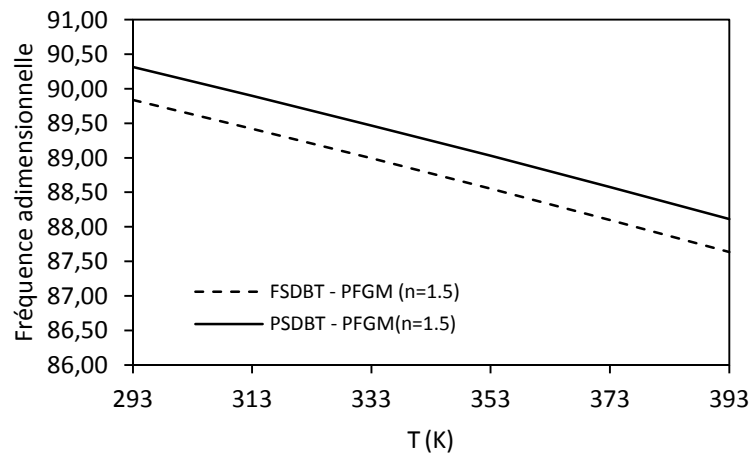


Figure 5.22: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre P-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, $n = 1.5$, $L/h = 20$

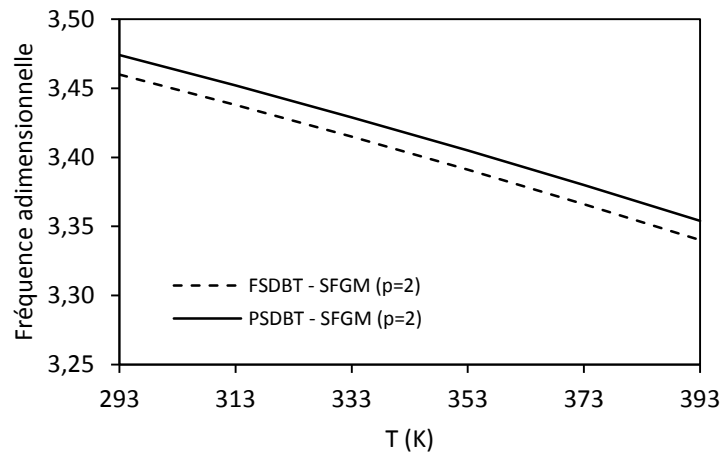


Figure 5.23: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304- Al_2O_3 -SUS304) appuyée-appuyée, $p = 2$, $L/h = 5$

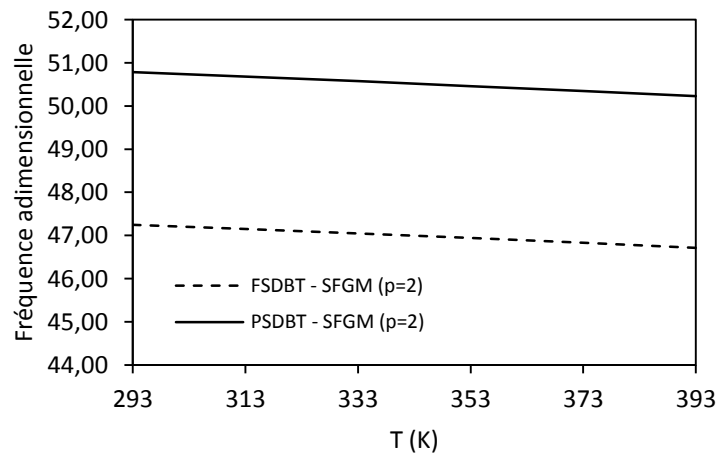


Figure 5.24: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304- Al_2O_3 -SUS304) appuyée-appuyée, $p = 2$, $L/h = 5$

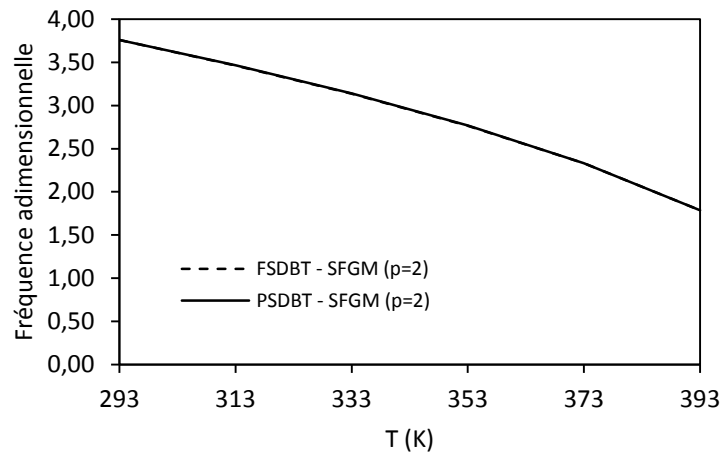


Figure 5.25: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, $p = 2$, $L/h = 20$

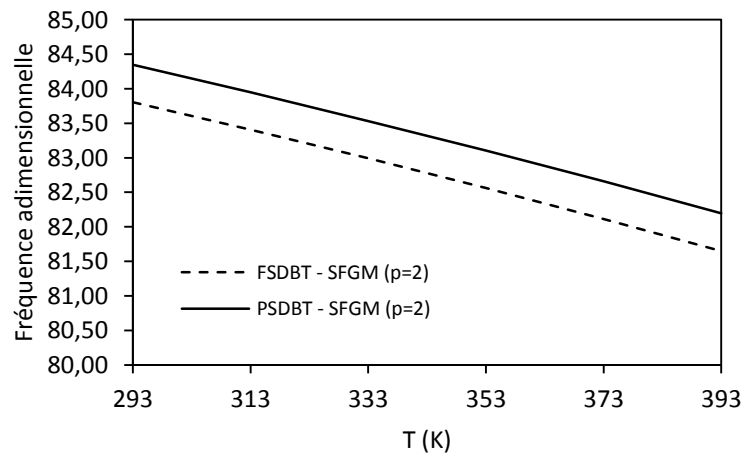


Figure 5.26: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, $p = 2$, $L/h = 20$

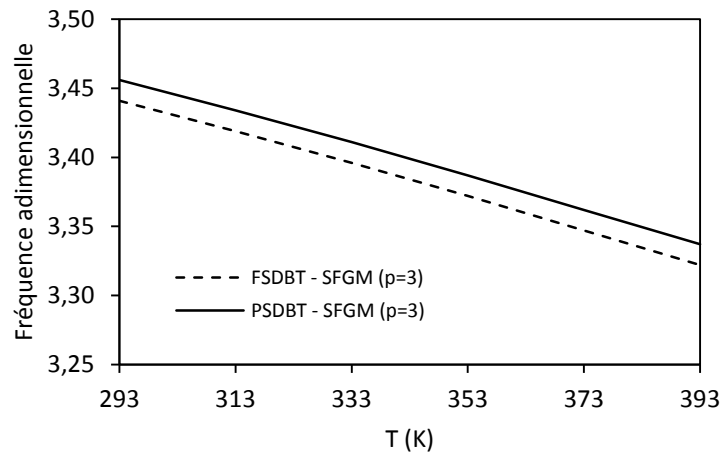


Figure 5.27: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, $p = 3$, $L/h = 5$

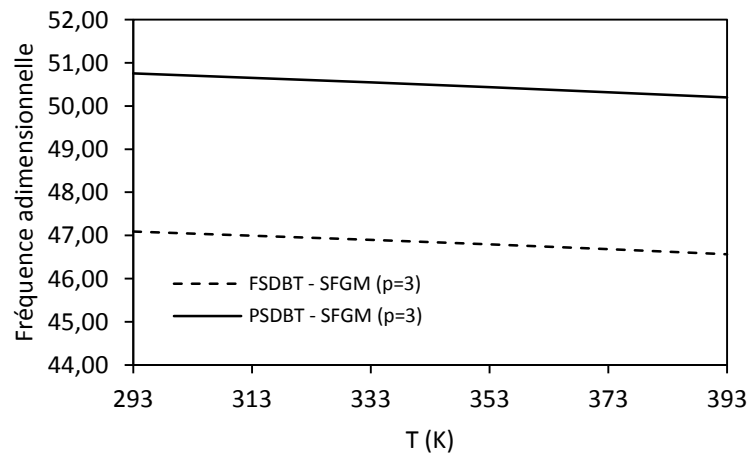


Figure 5.28: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, $p = 3$, $L/h = 5$

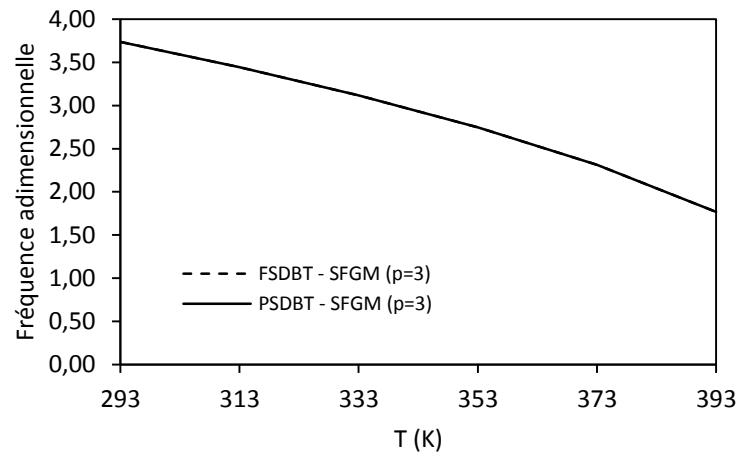


Figure 5.29: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, $p = 3$, $L/h = 20$

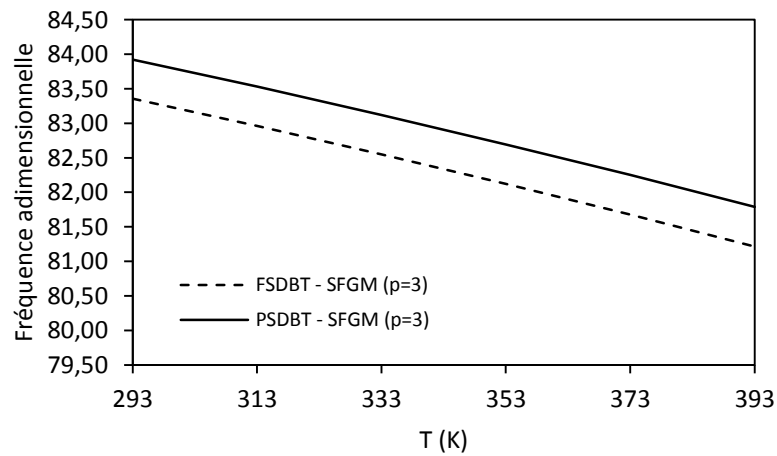


Figure 5.30: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle, théories FSDBT et PSDBT, Poutre S-FGM (SUS304-Al₂O₃-SUS304) appuyée-appuyée, $p = 3$, $L/h = 20$

5.3. Poutre FGM non symétrique

Dans cette partie du travail, la méthode de résolution utilisée est la DQM (differential quadrature method) que nous avons adaptée dans le cadre de cette recherche afin de tenir compte des forces et moments d'ordre supérieur introduits par la formulation unifiée pour aboutir à des fréquences propres fiables et de bonnes précisions.

L'analyse est donc conduite en considérant une poutre FGM à deux constituants (100% céramique au niveau de la face supérieure et 100% métal au niveau de la face inférieure). La largeur b est égale à 0.0254 m. Les températures imposées au niveau des surfaces supérieure et inférieure sont comprises entre 293K et 393K. Les propriétés thermomécaniques obéissent aux lois de distribution $P(z,T)$ explicitées dans le chapitre 2 (P-FGM, E-FGM et S-FGM). Ces propriétés sont fonctions de la température. A la température de référence ($T_0 = 300\text{K}$), les propriétés de la céramique (Al_2O_3) et du métal (SUS304) sont les suivantes :

Céramique: $E_c = 320.235 \text{ GPa}$, $\nu_c = 0.26$, $\rho_c = 3750 \text{ kg/m}^3$, $\kappa_c = 10.40 \text{ W/m K}$,
 $\alpha_c = 7.203 \times 10^{-6}/\text{K}$.

Métal: $E_m = 207.788 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0.32$, $\rho_m = 8166 \text{ kg/m}^3$, $\kappa_m = 12.04 \text{ W/m K}$,
 $\alpha_m = 15.321 \times 10^{-6}/\text{K}$.

Pour donner un aperçu de l'effet de la température sur les propriétés de la poutre FGM non symétrique, nous présentons les courbes de variation du module de Young E (figures 5.31 et 5.32) et du module de cisaillement G (figures 5.33 et 5.34) en fonction de la température, au niveau des faces supérieure et inférieure de la poutre.

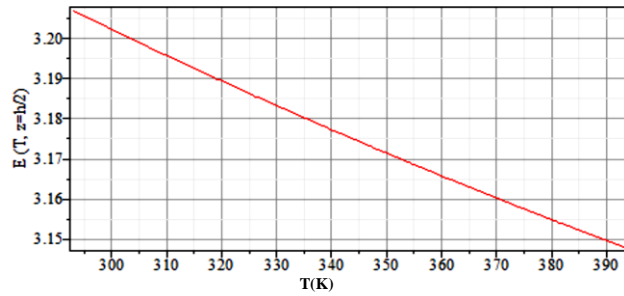


Figure 5.31: Variation du module de Young E ($\text{Pa} \times 10^{-11}$) en fonction de T au niveau de la face supérieure (Poutre FGM, SUS304- Al_2O_3)

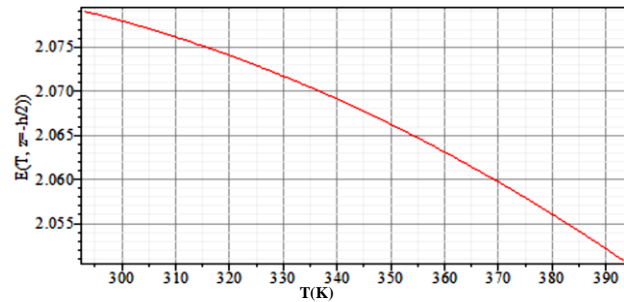


Figure 5.32: Variation du module de Young E ($\text{Pa} \times 10^{-11}$) en fonction de T au niveau de la face inférieure (Poutre FGM, SUS304- Al_2O_3)

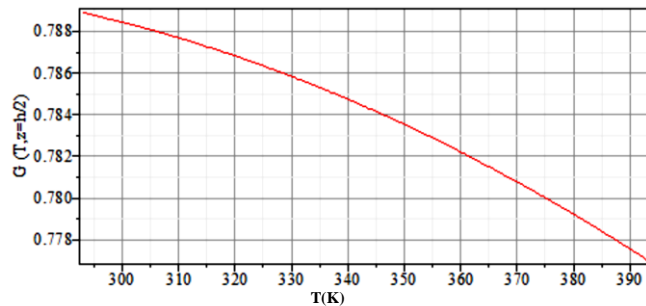


Figure 5.33: Variation du module de cisaillement G ($\text{Pa} \times 10^{-11}$) en fonction de T au niveau de la face supérieure (Poutre FGM, SUS304- Al_2O_3)

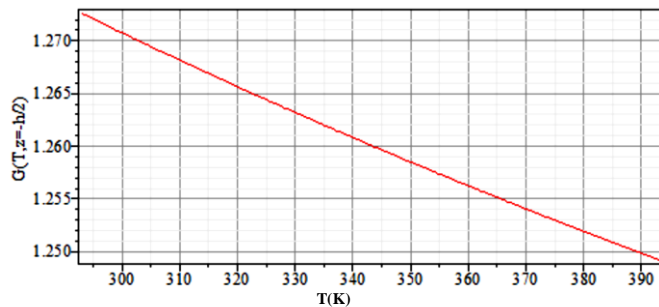


Figure 5.34: Variation du module de cisaillement G ($\text{Pa} \times 10^{-11}$) en fonction de T au niveau de la face inférieure (Poutre FGM, SUS304- Al_2O_3)

5.3.1. Validation du code de calcul élaboré pour le cas de poutres FGM non symétriques :

Afin de valider le procédé utilisé pour la résolution par la DQM, une comparaison est faite entre les résultats obtenus en utilisant les théories FSDBT, PSDBT et ESDBT et ceux des références [108] , [110] , et [105]

Le tableau 5.8 présente les résultats d'une poutre P-FGM ZrO₂-Al/Al/Al-ZrO₂ avec trois conditions aux limites (C-F, S-S et C-C) pour une température de 323K imposée sur les faces supérieure et inférieure. Une bonne concordance des résultats est observée avec ceux de la référence [108] .

Le tableau 5.9 présente les résultats d'une poutre isotrope en aluminium pur appuyée-appuyée puis ceux d'une poutre P-FGM Al-Al₂O₃ avec trois conditions aux limites (C-F, S-S et C-C), pour différents rapports L/h (10, 30 et 100) et sans élévation de température. Les résultats sont comparés avec ceux de la référence [110] . Une bonne concordance est encore une fois observée.

Tableau 5.8: Les 5 premières fréquences adimensionnelles d'une poutre FGM symétrique (ZrO₂-Al/Al/Al-ZrO₂, $L/h = 10$, P-FGM, $n = 2$, température uniforme)

(T_b, T_b)	Mode	C-F		S-S		C-C	
		Présente (FSDBT)	Réf.[108]	Présente (FSDBT)	Réf.[108]	Présente (FSDBT)	Réf.[108]
(323K,323K)	1	0.112	0.110	0.300	0.306	0.651	0.644
	2	0.652	0.655	1.155	1.161	1.654	1.644
	3	1.624*	1.624*	1.624*	1.624*	2.963	2.951
	4	1.703	1.704	2.417	2.424	3.249*	3.249*
	5	3.063	3.069	3.945	3.952	4.462	4.448

*: mode de vibration longitudinale

C-F: encastrée-libre, S-S: appuyée-appuyée, C-C: encastrée-encastrée.

Tableau 5.9: Fréquence fondamentale adimensionnelle d'une poutre en aluminium et d'une poutre FGM pour différents rapports L/h (sans gradient de température)

Poutre	CL	Théorie	L/h		
			10	30	100
Aluminium	S-S	Présente GDQ (FSDBT)	2.901	2.945	2.950
		Présente GDQ (PSDBT)	2.901	2.945	2.950
		FSDBT1 [110]	2.879	2.922	2.927
		FSDBT2 [110]	2.797	2.843	2.848
Al-Al ₂ O ₃ (P-FGM, $n = 0.3$)	S-S	Présente GDQ (FSDBT)	2.672	2.708	2.713
		Présente GDQ (PSDBT)	2.674	2.709	2.713
		FSDBT1 [110]	2.774	2.813	2.817
		FSDBT2 [110]	2.695	2.737	2.742
	C-F	Présente GDQ (FSDBT)	0.962	0.968	0.967
		Présente GDQ (PSDBT)	0.962	0.968	0.967
		FSDBT1 [110]	0.996	1.003	1.003
		FSDBT2 [110]	0.969	0.976	0.977
	C-C	Présente GDQ (FSDBT)	5.803	6.108	6.146
		Présente GDQ (PSDBT)	5.767	6.104	6.146
		FSDBT1 [110]	6.013	6.343	6.384
		FSDBT2 [110]	5.811	6.167	6.212

S-S: appuyée-appuyée, C-F: encastrée-libre, C-C: encastrée-encastrée.

Les tableaux 5.10 et 5.11 présentent les 1^{ères} et 5^{èmes} fréquences adimensionnelles d'une poutre FGM (métal-céramique) appuyée-appuyée pour L/h égal à 5 et pour L/h égal à 20. Trois types de poutres sont analysées (P-FGM, E-FGM et S-FGM) et différents index des fractions volumiques sont pris en compte. Les résultats obtenus par l'application de la DQM pour différentes théories de déformation (FSDBT, PSDBT et ESDBT) sont en accord avec ceux de la référence [105].

Tableau 5.10: Variation des 1^{ères} et 5^{èmes} fréquences adimensionnelles pour différentes théories et différentes fonctions de distribution des propriétés (poutre FGM appuyée-appuyée, $L/h = 5$)

Théorie	$n = 0$		$n = 0,1$		$n = 1$		<i>Exp</i>		$n = 2$		$n = 10$		Métal	
	Présente	Réf. [105]	Présente	Réf. [105]	Présente	Réf. [105]	Présente	Réf. [105]	Présente	Réf. [105]	Présente	Réf. [105]	Présente	Réf. [105]
1 ^{ère} fréquence adimensionnelle														
PSDBT	6.566	6.574	6.242	6.248	4.655	4.659	4.259	4.266	4.096	4.103	3.531	3.548	2.818	2.821
ESDBT	6.569	6.584	6.244	6.258	4.657	4.665	4.261	4.272	4.097	4.109	3.532	3.553	2.819	2.826
FSDBT	6.562	6.563	6.236	6.237	4.652	4.652	4.264	4.263	4.102	4.101	3.560	3.563	2.816	2.816
5 ^{ème} fréquence adimensionnelle														
PSDBT	94.691	92.781	90.765	88.593	69.406	67.088	62.286	60.502	59.91	58.230	46.234	46.290	40.641	39.821
ESDBT	93.505	94.091	90.68	89.810	70.296	67.916	62.57	61.269	60.048	58.962	46.362	46.915	40.132	40.383
FSDBT	90.979	91.163	87.027	87.019	66.605	65.946	60.363	59.658	58.172	57.423	47.188	46.716	39.048	39.127

Tableau 5.11: Variation des 1^{ères} et 5^{èmes} fréquences adimensionnelles pour différentes théories et différentes fonctions de distribution des propriétés (poutre FGM appuyée-appuyée, $L/h = 20$)

Théorie	$n = 0$		$n = 0,1$		$n = 1$		<i>Exp</i>		$n = 2$		$n = 10$		Métal	
	Présente	Réf. [105]	Présente	Réf. [105]	Présente	Réf. [105]	Présente	Réf. [105]	Présente	Réf. [105]	Présente	Réf. [105]	Présente	Réf. [105]
1 ^{ère} fréquence adimensionnelle														
PSDBT	6.931	6.932	6.581	6.581	4.895	4.895	4.494	4.494	4.323	4.323	3.789	3.790	2.975	2.975
ESDBT	6.931	6.933	6.581	6.582	4.895	4.896	4.494	4.495	4.323	4.323	3.789	3.790	2.975	2.975
FSDBT	6.931	6.931	6.581	6.580	4.895	4.895	4.495	4.494	4.323	4.323	3.791	3.791	2.975	2.974
5 ^{ème} fréquence adimensionnelle														
PSDBT	159.155	159.740	151.390	151.895	113.071	113.410	103.279	103.719	99.291	99.749	84.890	85.672	68.309	68.560
ESDBT	159.181	160.121	151.412	152.246	113.080	113.640	103.266	103.928	99.272	99.945	84.856	85.873	68.320	68.723
FSDBT	159.172	159.347	151.340	151.495	113.093	113.170	103.546	103.613	99.617	99.677	86.017	86.089	68.316	68.391

5.3.2. Résultats de l'analyse de la poutre FGM non symétrique soumise à des contraintes thermiques initiales :

Afin de montrer les résultats de l'analyse de la poutre FGM non symétrique soumise à des contraintes thermiques initiales, un certain nombre de tableaux et figures sont présentés pour différents cas (théories, géométries, distributions de matière à travers l'épaisseur, élévation de température et conditions aux limites).

L'expression de la fréquence adimensionnelle utilisée dans l'analyse de la poutre est la suivante :

$$\bar{\omega} = \omega(L/h)^2 \sqrt{\rho_t h^2 / E_t} \quad (5.2)$$

Les tableaux 5.12 et 5.13 montrent les valeurs des cinq premières fréquences naturelles d'une poutre P-FGM SUS304-AL₂O₃ soumise à un gradient de température initial pour des rapports d'élancement L/h égaux à 5 et à 20, ceci pour différentes conditions aux limites. L'influence de l'élévation de température sur les fréquences naturelles dans la plage considérée (313K à 393K) est mise en évidence puisque quelle que soit la poutre considérée et les conditions aux limites imposées, la température a pour effet de rendre la poutre moins rigide (diminution du module de Young E), ce qui se traduit immédiatement par une diminution des fréquences de vibrations. L'influence est plus importante lorsque la poutre est longue et mince ($L/h = 20$). Il est à noter que les propriétés thermomécaniques dépendent de la température, ce qui accentue l'effet de celle-ci sur la rigidité globale de la poutre.

L'effet de la distribution des propriétés sur la fréquence fondamentale et la cinquième fréquence est montré sur les figures 5.35 à 5.38 pour une poutre FGM SUS304-AL₂O₃ non symétrique appuyée-appuyée. La fréquence adimensionnelle décroît lorsque l'index de la fraction volumique (n pour la poutre P-FGM et p pour la poutre S-FGM) croît (diminution de la concentration en céramique et augmentation de la concentration en métal). La diminution de la fraction volumique de la céramique fait décroître le module de Young global de la poutre, ce qui conduit à une diminution de la rigidité globale. Parallèlement, lorsque le rapport d'élancement L/h de la poutre augmente, les fréquences fondamentales calculées par les différentes théories sont très proches les unes des autres.

D'un autre côté, pour les modes supérieurs, les valeurs des fréquences correspondantes calculées par les différentes théories sont de moins en moins proches même si le rapport d'élanement est grand. Ceci s'explique par le fait que l'effet de la déformation en cisaillement est plus prononcé pour les modes supérieurs même si le rapport L/h est important.

Les cinq premières fréquences adimensionnelles obtenues par différentes théories de déformation en cisaillement et pour différents cas de distribution des propriétés (P-FGM, S-FGM et E-FGM) sont représentées sur les figures 5.39 à 5.44 pour les poutres épaisses ($L/h = 5$) et minces ($L/h = 20$) appuyées-appuyées. Pour les poutres épaisses, la différence entre les résultats obtenus par les différentes théories de déformation augmente lorsque le numéro de mode augmente. Parallèlement, l'effet de la déformation en cisaillement sur les fréquences décroît lorsque le rapport L/h croît.

Tableau 5.12: Les 5 premières fréquences adimensionnelles d'une poutre P-FGM

(SUS304- Al_2O_3) soumise à un gradient de température initial ($n = 0.5$, $L/h = 5$, $T_b = 293K$)

CL	Mode	Température T_t (K)				
		313	333	353	373	393
S-S	1	2.190	2.183	2.177	2.171	2.164
	2	7.610	7.598	7.586	7.574	7.563
	3	12.956	12.944	12.932	12.920	12.908
	4	14.656	14.637	14.618	14.599	14.581
	5	22.488	22.461	22.434	22.407	22.381
C-C	1	4.105	4.098	4.092	4.086	4.080
	2	9.368	9.355	9.343	9.331	9.318
	3	12.962	12.950	12.938	12.926	12.914
	4	15.799	15.779	15.760	15.741	15.722
	5	22.991	22.963	22.936	22.910	22.884
F-F	1	4.930	4.923	4.916	4.909	4.902
	2	11.852	11.837	11.822	11.807	11.793
	3	12.997	12.984	12.971	12.959	12.947
	4	20.421	20.395	20.371	20.346	20.323
	5	25.273	25.253	25.233	25.214	25.195
C-F	1	0.808	0.808	0.808	0.808	0.809
	2	4.352	4.345	4.338	4.331	4.325
	3	6.530	6.523	6.517	6.510	6.504
	4	10.488	10.475	10.461	10.448	10.435
	5	17.734	17.713	17.692	17.672	17.652

C-S	1	3.119	3.112	3.106	3.100	3.094
	2	6.500	6.494	6.488	6.481	6.476
	3	8.549	8.536	8.524	8.512	8.501
	4	15.253	15.233	15.214	15.196	15.177
	5	19.302	19.284	19.267	19.250	19.233

S-S: appuyée-appuyée, C-C: encastrée-encastrée, F-F : libre-libre, C-F: encastrée-libre, C-S : encastrée-appuyée.

Tableau 5.13: Les 5 premières fréquences adimensionnelles d'une poutre P-FGM

(SUS304-AL₂O₃) soumise à un gradient de température initial ($n = 0.5$, $L/h = 20$, $T_b = 293K$)

CL	Mode	Température T_t (K)				
		313	333	353	373	393
S-S	1	2.309	2.238	2.166	2.090	2.012
	2	9.167	9.091	9.014	8.937	8.860
	3	20.231	20.144	20.058	19.971	19.885
	4	35.040	34.939	34.839	34.739	34.640
	5	52.946	52.827	52.710	52.593	52.478
C-C	1	5.178	5.136	5.094	5.052	5.009
	2	13.946	13.883	13.820	13.757	13.694
	3	26.554	26.475	26.395	26.316	26.237
	4	42.431	42.333	42.236	42.140	42.044
	5	61.071	60.953	60.836	60.721	60.607
F-F	1	5.330	5.287	5.243	5.199	5.155
	2	14.633	14.567	14.501	14.435	14.368
	3	28.298	28.214	28.130	28.046	27.963
	4	45.888	45.783	45.679	45.576	45.475
	5	66.335	66.208	66.082	65.958	65.836
C-F	1	0.836	0.852	0.868	0.885	0.902
	2	5.169	5.123	5.077	5.030	4.982
	3	14.282	14.218	14.154	14.089	14.025
	4	27.460	27.380	27.300	27.220	27.141
	5	44.081	43.980	43.879	43.780	43.681
C-S	1	3.594	3.541	3.486	3.431	3.374
	2	11.462	11.394	11.325	11.256	11.187
	3	23.335	23.252	23.170	23.088	23.006
	4	38.715	38.616	38.518	38.420	38.323
	5	56.974	56.856	56.739	56.623	56.508

S-S: appuyée-appuyée, C-C: encastrée-encastrée, F-F : libre-libre, C-F: encastrée-libre, C-S : encastrée-appuyée.

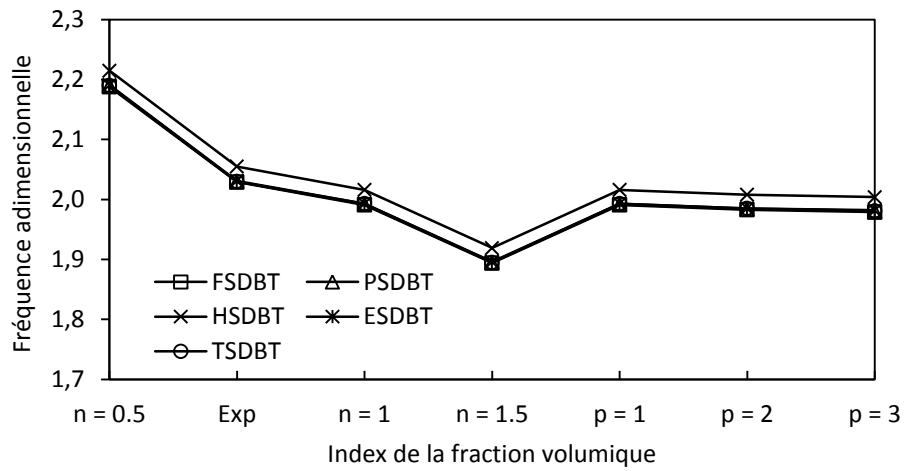


Figure 5.35: Variation de la 1ère fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 5$, $T_b = 293\text{K}$ & $T_t = 313\text{K}$), Poutre FGM appuyée-appuyée

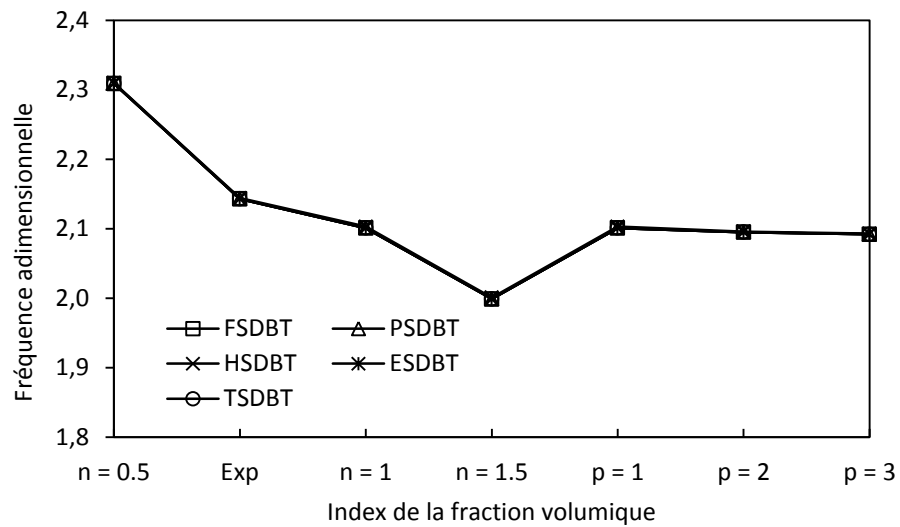


Figure 5.36: Variation de la 1ère fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 20$, $T_b = 293\text{K}$ & $T_t = 313\text{K}$), Poutre FGM appuyée-appuyée

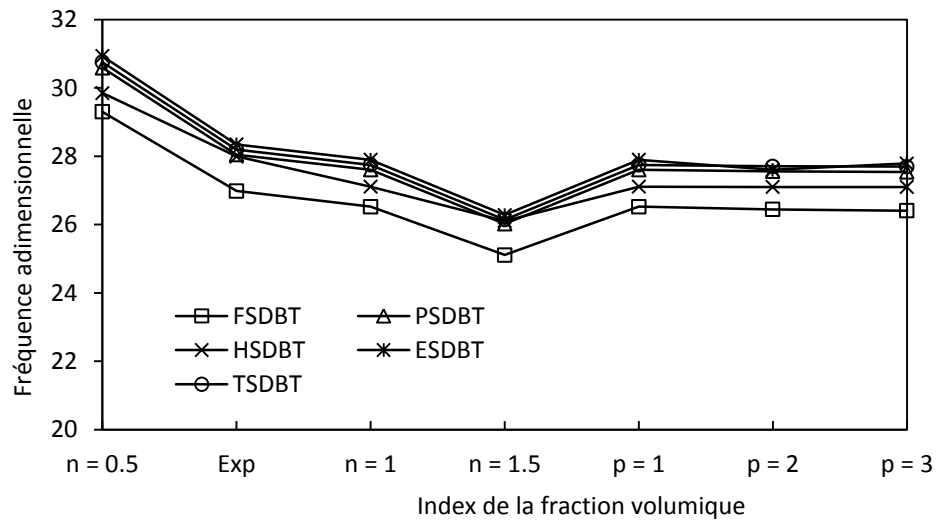


Figure 5.37: Variation de la 5^{ème} fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 5$, $T_b = 293K$ & $T_t = 313K$), Poutre FGM appuyée-appuyée

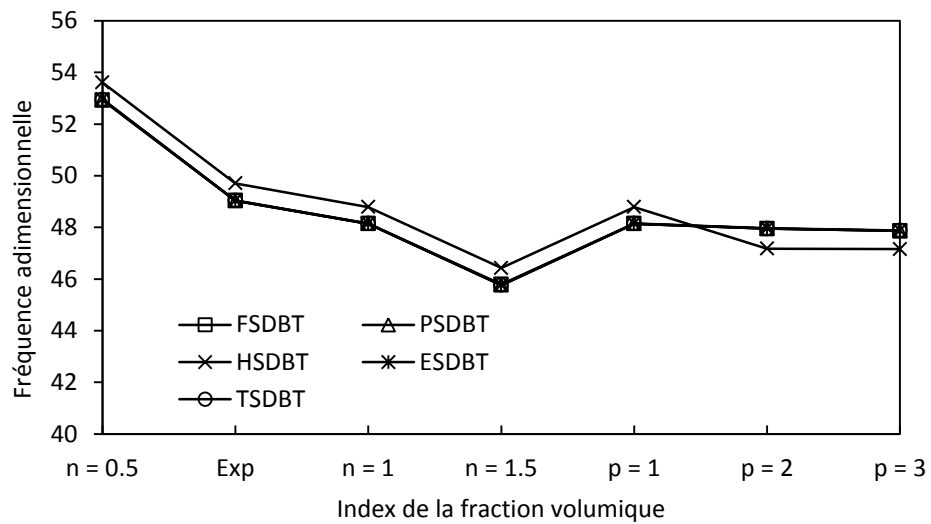


Figure 5.38: Variation de la 5^{ème} fréquence adimensionnelle pour différentes distributions de matière et pour différentes théories ($L/h = 20$, $T_b = 293K$ & $T_t = 313K$), Poutre FGM appuyée-appuyée

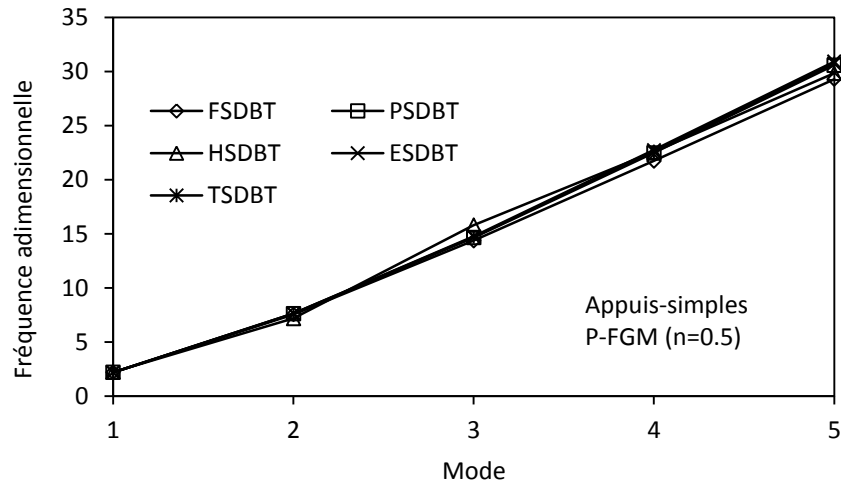


Figure 5.39: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre P-FGM (SUS304-Al₂O₃) appuyée-appuyée, ($L/h = 5$, $T_b = 293\text{K}$ & $T_t = 313\text{K}$)

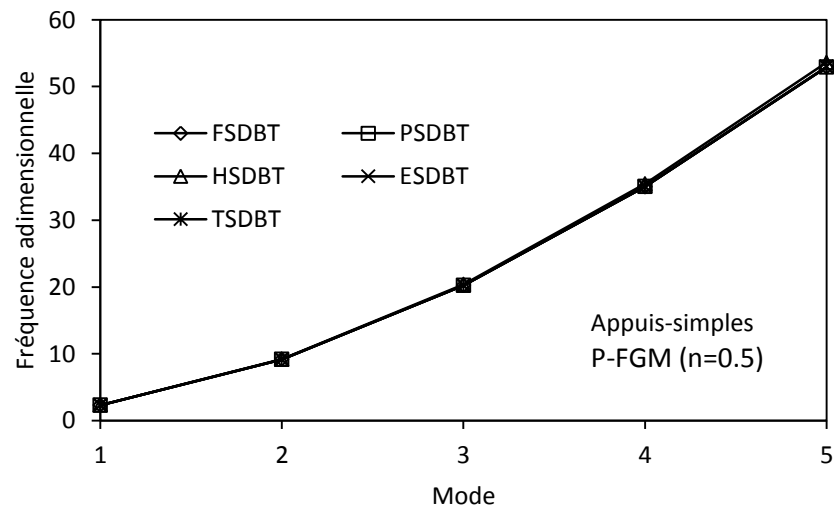


Figure 5.40: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre P-FGM (SUS304-Al₂O₃) appuyée-appuyée, ($L/h = 20$, $T_b = 293\text{K}$ & $T_t = 313\text{K}$)

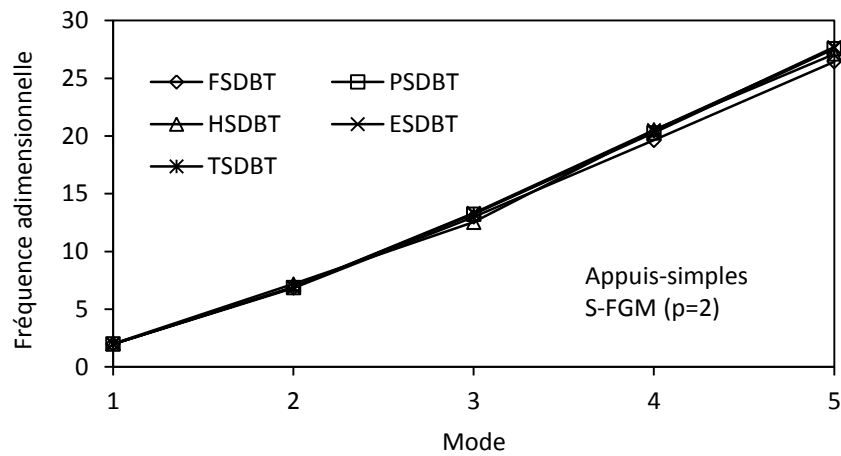


Figure 5.41: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre S-FGM (SUS304- Al_2O_3) appuyée-appuyée, ($L/h = 5$, $T_b = 293\text{K}$ & $T_t = 313\text{K}$)

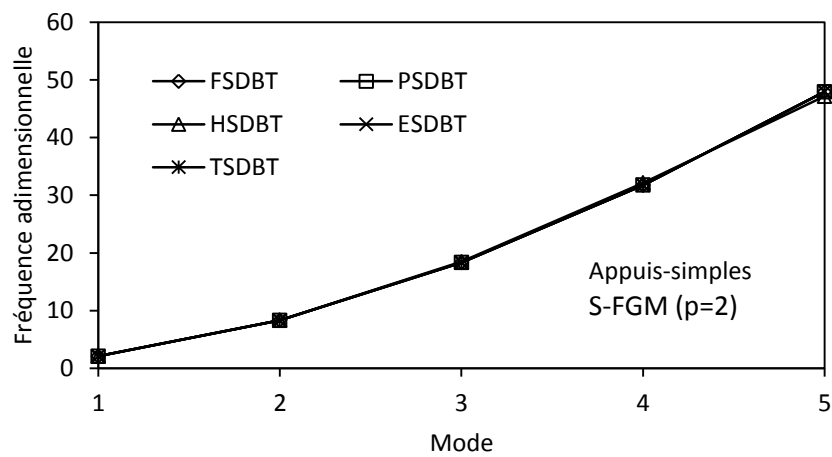


Figure 5.42: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre S-FGM (SUS304- Al_2O_3) appuyée-appuyée, ($L/h = 20$, $T_b = 293\text{K}$ & $T_t = 313\text{K}$)

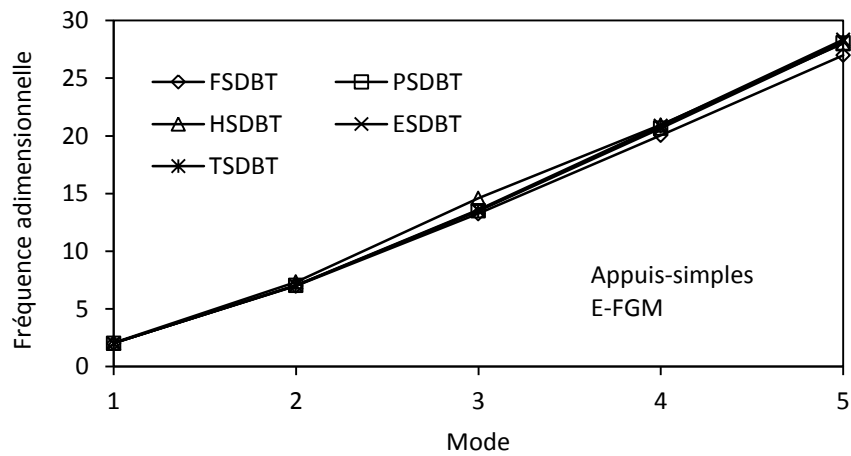


Figure 5.43: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre E-FGM (SUS304- Al_2O_3) appuyée-appuyée, ($L/h = 5$, $T_b = 293\text{K}$ & $T_t = 313\text{K}$)

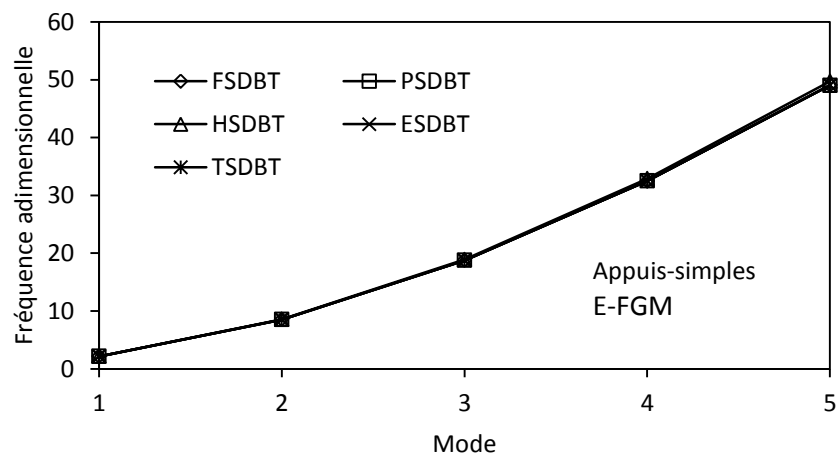


Figure 5.44: Variation des fréquences adimensionnelles pour différentes théories de déformation d'une poutre E-FGM (SUS304- Al_2O_3) appuyée-appuyée, ($L/h = 20$, $T_b = 293\text{K}$ & $T_t = 313\text{K}$)

Pour montrer l'effet de la température sur les fréquences adimensionnelles, quelques résultats numériques sont calculés par la nouvelle théorie ($\alpha = 3/2$) et présentés sur les figures 5.45 et 5.46 pour différentes fonctions de distribution de la matière (P-FGM, E-FGM et S-FGM). La température de la face inférieure de la poutre est maintenue à 293K alors que la température de la face supérieure varie entre 293K et 393K. Comme attendu et quel que soit le type de poutre considérée, les fréquences diminuent avec l'élévation de la température et ceci à cause de la diminution de la rigidité globale de la poutre lorsque la température augmente.

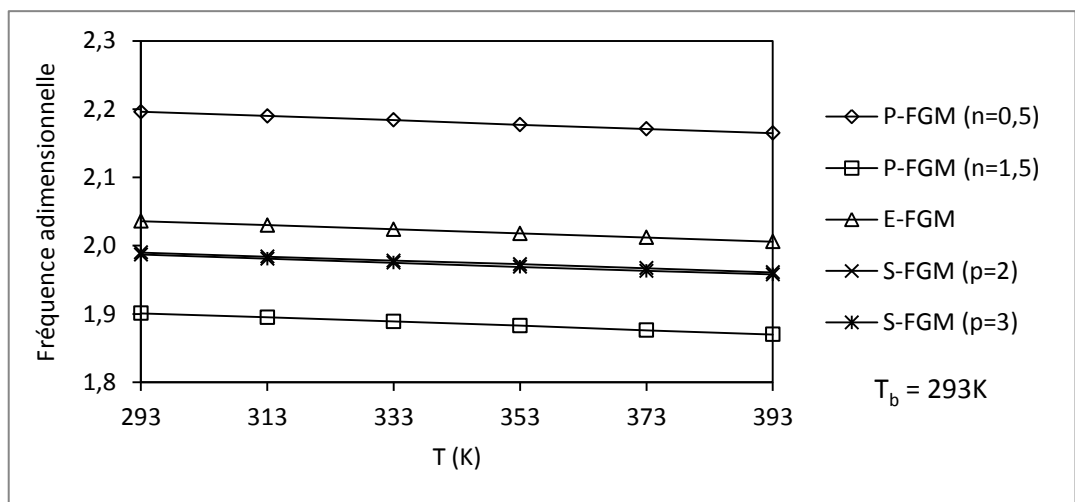


Figure 5.45: Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle (nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$, poutre FGM SUS304-Al₂O₃, appuyée-appuyée, $L/h = 5$)

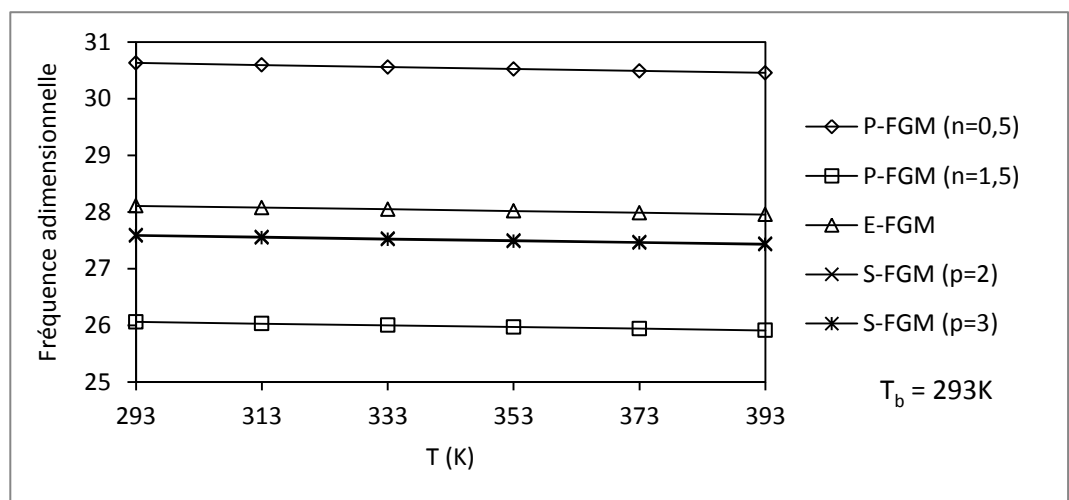


Figure 5.46: Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle (nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$, poutre FGM SUS304-Al₂O₃, appuyée-appuyée, $L/h = 5$)

Les figures 5.47 à 5.50 montrent la variation des 1^{ères} et 5^{èmes} fréquences adimensionnelles en fonction de la température des poutres P-FGM ($n = 0.5$) épaisse ($L/h = 5$) et mince ($L/h = 20$) soumises à diverses conditions aux bords. La température de la face inférieure de la poutre est maintenue à 313K alors que la température de la face supérieure varie entre 313K et 393K. Nous notons que l'élévation de la température a moins d'effet sur les fréquences d'une poutre épaisse et ceci quelles que soient les conditions aux limites considérées. La raison étant que la poutre épaisse et courte est beaucoup plus rigide que la poutre longue et mince. Nous notons également que la dépendance des propriétés de la poutre à la température n'a pas un effet significatif sur les fréquences d'une poutre courte et épaisse.

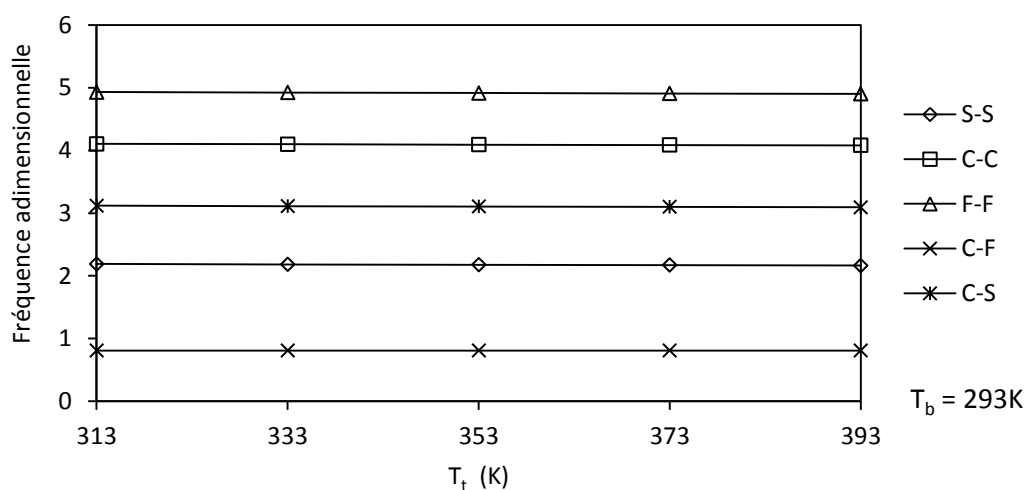


Figure 5.47 : Effet de la température sur la 1^{ère} fréquence adimensionnelle pour différentes conditions aux limites (nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$, poutre P-FGM SUS304- Al_2O_3 , $n = 0.5$, $L/h = 5$)

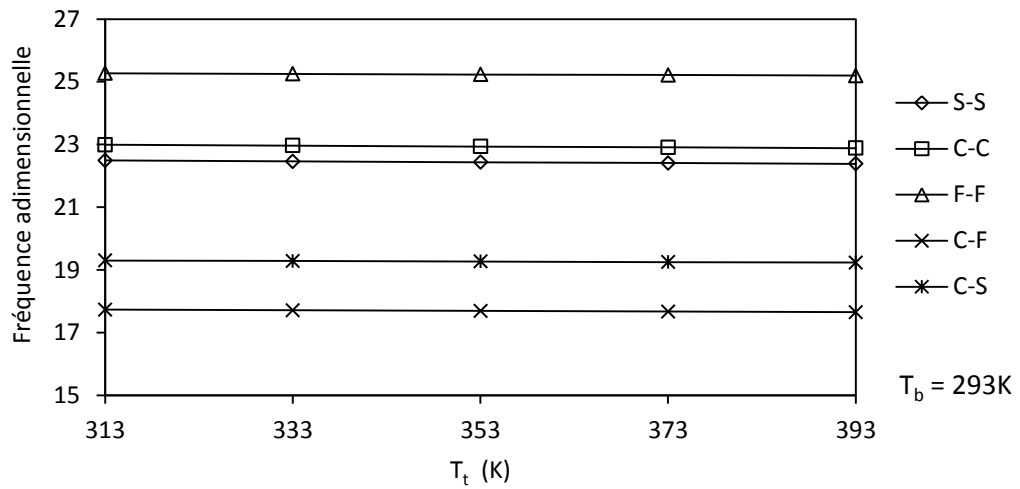


Figure 5.48 : Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle pour différentes conditions aux limites (nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$, poutre P-FGM SUS304- Al_2O_3 , $n = 0.5$, $L/h = 5$)

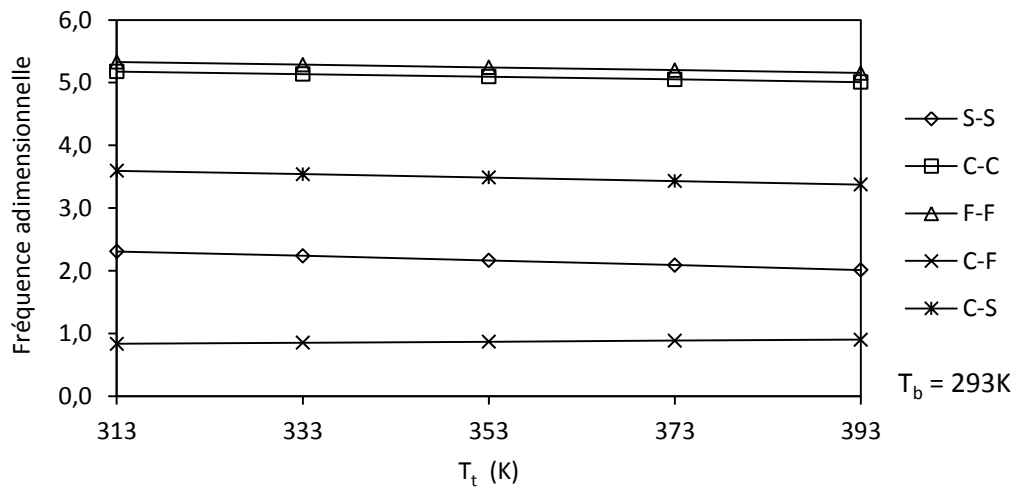


Figure 5.49 : Effet de la température sur la 1ère fréquence adimensionnelle pour différentes conditions aux limites (nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$, poutre P-FGM SUS304- Al_2O_3 , $n = 0.5$, $L/h = 20$)

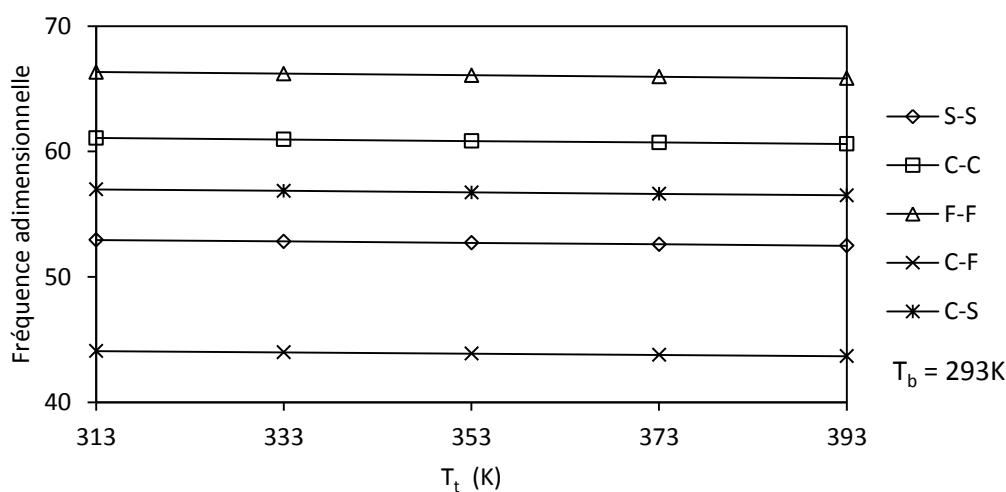


Figure 5.50 : Effet de la température sur la 5ème fréquence adimensionnelle pour différentes conditions aux limites (nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$, poutre P-FGM SUS304- Al_2O_3 , $n = 0.5$, $L/h = 20$)

La méthode de Ritz est un appareil numérique puissant de résolution des problèmes aux valeurs propres des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. Son efficacité dépend étroitement du choix des fonctions admissibles qui satisfont les conditions imposées aux bords. Comme il a été déjà souligné dans le chapitre 4, les fonctions admissibles reposant sur les fonctions trigonométriques hiérarchiques sont très prometteuses. A cet effet, nous avons présenté sur les tableaux 5.14 et 5.15 une comparaison entre les résultats obtenus par la DQM et par la méthode de Ritz reposant sur les fonctions admissibles orthogonales (Gram-Schmidt, Chebyshev, Legendre), les fonctions polynomiales et les fonctions trigonométriques hiérarchiques (8 points). Nous rappelons que ces dernières n'ont jamais été utilisées dans l'étude dynamique des poutres et plaques FGM. Il est facile d'observer que pour cette étude, les fonctions choisies nous font aboutir à des résultats qui corroborent avec ceux obtenus avec la méthode DQ. Il faut noter que les résultats peuvent encore être améliorés en augmentant simplement le nombre de points dans la discrétisation. Selon les références [177] et [178], les fonctions trigonométriques hiérarchiques sont plutôt efficaces dans la détermination des hautes fréquences.

Tableau 5.14: Comparaison des 5 premières fréquences adimensionnelles d'une poutre P-FGM (SUS304-AL₂O₃) obtenues par différentes fonctions admissibles de Ritz ($n = 0.5$, $L/h = 5$, gradient de température: $T_b = 293\text{K}$, $T_t = 313\text{K}$).

Nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$							
Fonctions admissibles de Ritz (8 points)							
Poutre	Mode	DQM	Trigono- hiéarchiques	Gram- Schmidt	Chebyshev	Legendre	Polyno- miales
S-S	1	2.190	2.197	2.190	2.190	2.190	2.190
	2	7.610	7.602	7.610	7.610	7.610	7.610
	3	12.956	12.963	12.957	12.957	12.957	12.957
	4	14.656	14.659	14.658	14.654	14.659	14.656
	5	22.488	22.505	22.609	22.717	22.593	22.604
C-C	1	4.105	3.797	4.275	4.263	4.275	4.275
	2	9.368	8.895	9.880	9.870	9.882	9.880
	3	12.962	12.963	12.963	12.963	12.963	12.963
	4	15.799	15.337	16.678	14.560	16.683	16.680
	5	22.991	22.745	24.085	24.158	24.098	24.040
F-F	1	4.930	4.668	4.667	4.667	4.667	4.667
	2	11.852	10.970	10.971	10.970	10.972	10.970
	3	12.997	12.985	12.985	12.985	12.985	12.985
	4	20.421	18.490	18.807	18.778	18.708	18.807
	5	25.273	25.021	25.244	25.217	25.258	25.239
C-F	1	0.808	0.765	0.805	0.805	0.805	0.805
	2	4.352	4.081	4.345	4.352	4.343	4.343
	3	6.530	6.519	6.520	6.520	6.520	6.520
	4	10.488	9.875	10.448	10.482	10.441	10.464
	5	17.734	16.799	17.549	17.589	17.543	17.224
C-S	1	3.119	3.309	3.181	3.180	3.182	3.012
	2	6.500	6.519	6.501	6.501	6.501	6.499
	3	8.549	9.257	8.794	8.756	8.799	8.360
	4	15.253	16.530	15.706	15.826	15.722	15.008
	5	19.302	19.332	19.302	19.302	19.302	19.305

S-S: appuyée-appuyée, C-C: encastrée-encastrée, F-F: libre-libre, C-F: encastrée-libre, C-S: encastrée-appuyée.

Tableau 5.15: Comparaison des 5 premières fréquences adimensionnelles d'une poutre P-FGM (SUS304-AL₂O₃) obtenues par différentes fonctions admissibles de Ritz ($n = 0.5$, $L/h = 20$, gradient de température: $T_b = 293\text{K}$, $T_t = 313\text{K}$).

Nouvelle théorie: $\alpha = 3/2$							
Fonctions admissibles de Ritz (8 points)							
Poutre	Mode	DQM	Trigono- hiéarchiques	Gram- Schmidt	Chebyshev	Legendre	Polyno- miales
S-S	1	2.309	2.316	2.309	2.309	2.309	2.309
	2	9.167	9.168	9.167	9.167	9.167	9.167
	3	20.231	20.271	20.235	20.157	20.245	20.250
	4	35.040	35.110	36.285	36.220	35.956	36.391
	5	52.057	52.044	52.058	52.058	52.058	52.058
C-C	1	5.178	5.111	5.196	5.196	5.196	5.196
	2	13.946	13.734	14.031	14.031	14.031	14.031
	3	26.554	26.129	26.798	26.815	26.801	26.803
	4	42.431	41.711	43.063	43.241	43.007	43.109
	5	52.057	52.057	52.058	50.188	52.058	52.058
F-F	1	5.330	5.215	5.208	5.208	5.208	5.208
	2	14.633	14.195	14.189	14.186	14.200	14.187
	3	28.298	27.231	28.473	28.426	28.081	28.495
	4	45.888	45.048	48.508	48.277	48.970	47.895
	5	52.069	52.074	52.088	52.087	52.088	52.088
C-F	1	0.836	0.805	0.808	0.808	0.808	0.808
	2	5.169	5.079	5.118	5.119	5.114	5.119
	3	14.282	13.967	14.119	14.126	14.097	14.119
	4	25.989	25.992	26.013	26.013	26.007	26.010
	5	27.460	26.726	27.078	27.121	26.796	27.002
C-S	1	3.594	3.596	3.600	3.600	3.600	3.567
	2	11.462	11.555	11.495	11.494	11.496	11.370
	3	23.335	23.599	23.446	23.430	23.449	23.151
	4	26.034	26.081	26.034	26.034	26.034	26.034
	5	38.715	39.930	39.090	40.570	39.101	39.365

S-S: appuyée-appuyée, C-C: encastrée-encastrée, F-F : libre-libre, C-F: encastrée-libre, C-S : encastrée-appuyée.

5.4. Plaque FGM

Afin d'aboutir à des fréquences propres fiables et de bonnes précisions, nous choisissons, dans cette partie du travail, la méthode de Ritz comme procédé de résolution numérique. Pour ce faire, nous avons sélectionné une classe de fonctions admissibles permettant de trouver de bonnes solutions quelles que soient les conditions aux limites imposées.

L'analyse est conduite en considérant une plaque FGM à deux constituants (100% céramique au niveau de la face supérieure et 100% métal au niveau de la face inférieure). La longueur a est égale à 0.2 m. Les températures imposées au niveau des surfaces supérieure et inférieure sont comprises dans la plage 300K à 700K. Les propriétés thermomécaniques obéissent aux lois de distribution $P(z,T)$ explicitées dans le chapitre 2 (P-FGM, E-FGM et S-FGM). Ces propriétés sont fonctions de la température. A la température de référence ($T_0 = 300\text{K}$), les propriétés de la céramique (Si_3N_4) et du métal (Ti-6Al-4V) sont les suivantes :

Céramique: $E_c = 322.271 \text{ GPa}$, $\nu_c = 0.240$, $\rho_c = 2370 \text{ kg/m}^3$, $\kappa_c = 9.19 \text{ W/m K}$,
 $\alpha_c = 7.474 \times 10^{-6}/\text{K}$.

Métal: $E_m = 105.749 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0.298$, $\rho_m = 4429 \text{ kg/m}^3$, $\kappa_m = 7.82 \text{ W/m K}$,
 $\alpha_m = 8.856 \times 10^{-6}/\text{K}$.

Pour donner un aperçu de l'effet de la température sur les propriétés de la plaque FGM, nous présentons les courbes de variation du module de Young E (figures 5.51 et 5.52) et du module de cisaillement G (figures 5.53 et 5.54) en fonction de la température, au niveau des faces supérieure et inférieure de la plaque FGM.

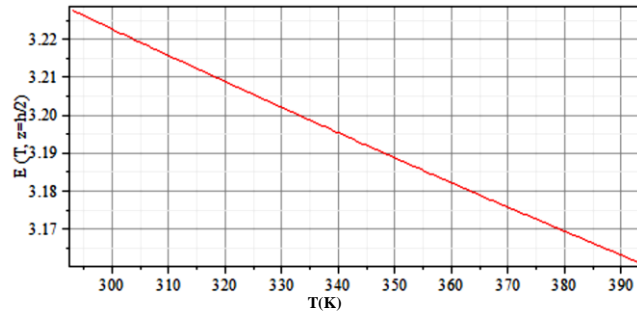


Figure 5.51: Variation du module de Young E ($\text{Pa} \times 10^{-11}$) en fonction de la température T au niveau de la face supérieure (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄)

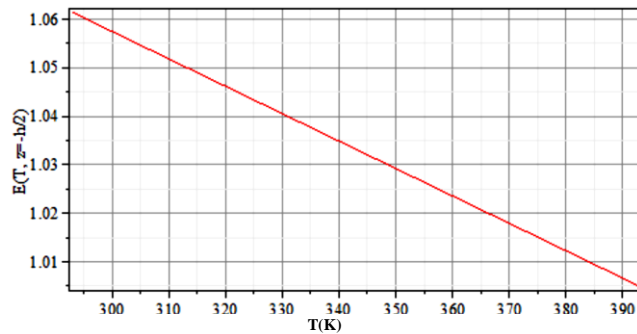


Figure 5.52: Variation du module de Young E ($\text{Pa} \times 10^{-11}$) en fonction de la température T au niveau de la face inférieure (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄)

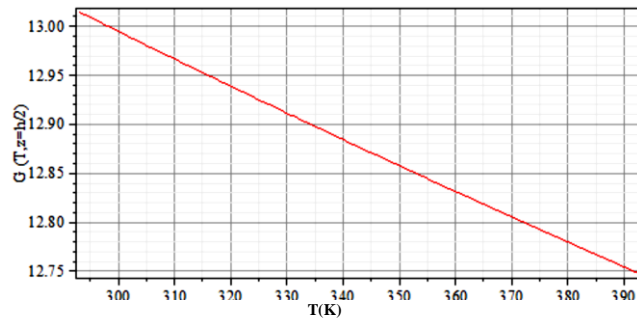


Figure 5.53: Variation du module de cisaillement G ($\text{Pa} \times 10^{-10}$) en fonction de la température T au niveau de la face supérieure (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄)

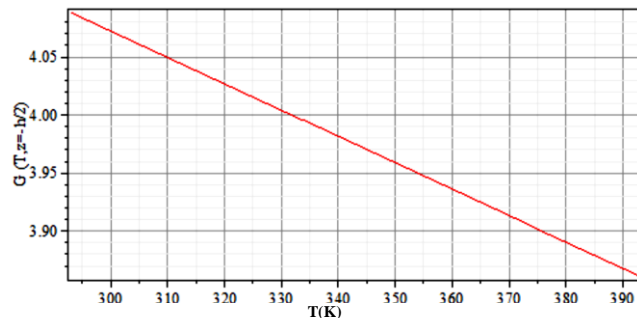


Figure 5.54: Variation du module de cisaillement G ($\text{Pa} \times 10^{-10}$) en fonction de la température T au niveau de la face inférieure (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄)

5.4.1. Validation du code de calcul élaboré pour le cas des plaques isotropes :

Afin de valider le code de calcul élaboré basé sur la méthode de Ritz, nous avons sélectionné deux classes de plaques pour lesquelles des résultats ont été obtenus par certains auteurs. La première classe étant celle des plaques isotropes minces et épaisses. Dans le but de procéder aux comparaisons, nous avons utilisé les mêmes géométries et les mêmes propriétés thermomécaniques que celles citées dans les articles faisant office de support de comparaison.

Le tableau 5.16 présente les résultats d'une plaque isotrope en aluminium pur et en appuis simples pour différents rapports h/b (plaque très mince, épaisse et très épaisse). En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, une discrétisation de 8x8 points a suffi pour avoir de bons résultats comparés à ceux des références citées ([185] , [186] et [187]), y compris ceux obtenus par des méthodes 3-D ([75] , [72] , [63] ,[188] et [189]).

Le tableau 5.17 présente les 8 premières fréquences adimensionnelles d'une plaque isotrope en aluminium dont les quatre côtés sont encastés pour différents rapports h/b (plaque très mince et épaisse). Une bonne convergence a été obtenue pour une discrétisation de 8 x 8 points avec le procédé de Gram-Schmidt. Les résultats sont bons comparés à ceux des références citées ([190] et [191]) y compris ceux obtenus par des méthodes 3-D ([72] , [192] , [193]).

Le tableau 5.18 montre les 10 premières fréquences adimensionnelles d'une plaque isotrope en aluminium dont les quatre côtés sont libres, calculées pour différents rapports h/b (plaque très mince, mince, épaisse et très épaisse). Quelle que soit l'épaisseur de la plaque, tous les résultats sont bons comparés à ceux des références citées ([185] , [186] et [67]) et spécialement à ceux obtenus par les méthodes 3-D ([70] et [193]). Dans cette comparaison, ce sont les polynômes orthogonaux générés par le procédé de Gram-Schmidt que nous avons employés conjointement avec une discrétisation de 8 x 8 points.

Les dix premières fréquences naturelles pour deux cas d'isotropie (métal et céramique) d'une plaque FGM ($Al_2O_3/Ti-6Al-4V$) très mince en appuis simples sont montrées sur le tableau 5.19. De bons résultats ont été obtenus en comparaison avec ceux des références [113] ,[115] et [117] grâce à l'utilisation des polynômes orthogonaux généraux obtenus par le procédé de Gram-Schmidt (discrétisation de 8 x 8 points).

Tableau 5.16: Variation des 8 premières fréquences adimensionnelles pour différents rapports h/b (plaque en aluminium SSSS, $a/b = 1$)

h/b	Source	Fréquences adimensionnelles							
		1	2	3	4	5	6	7	8
0.001	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	1.9999	4.9999	5.0000	7.9998	10.1436	10.1436	13.1241	13.1241
	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 10x10 points	2.0002	4.9999	5.0000	7.9999	10.0123	10.0125	13.0084	13.0110
	Théorie classique [185]	2	5	5	8	10	10	13	13
	Solutions de Ritz 3-D, Chebyshev [75]	1.9972	4.9999	4.9999	7.9996	9.9995	9.9995	13.0000	13.0000
	Solutions DQ 3-D [72]	1.9952	4.9977	5.0081	7.9957	10.0240	10.0290	13.0110	13.0120
0.1	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	1.9317	4.6088	4.6088	6.5234	6.5234	7.0732	8.6203	8.6203
	Théorie d'ordre supérieur [186]	1.9317	4.6088	4.6088	6.5233	6.5233	7.0731	8.6189	8.6189
	Théorie de Mindlin [187]	1.9311	4.6048	4.6048	–	–	7.0637	8.6049	8.6049
	Solutions exactes 3-D [63]	1.9342	4.6222	4.6222	–	–	7.1030	8.6617	8.6617
	Solutions de Ritz 3-D [188]	1.9342	4.6222	4.6222	6.5234	6.5234	7.1030	8.6617	8.6617
	Solutions DQ 3-D [189]	1.9342	4.6250	4.6250	6.5234	6.5234	7.1064	8.6932	8.6932
	Solutions de Ritz 3-D, Chebyshev [75]	1.9342	4.6222	4.6222	6.5234	6.5234	7.1030	8.6617	8.6617
	Solutions DQ 3-D [72]	1.9342	4.6250	4.6250	6.5234	6.5234	7.1064	8.6932	8.6932
0.2	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	1.7683	3.2617	3.2617	3.8693	3.8693	4.6127	5.5984	6.5234
	Théorie de Mindlin [187]	1.7659	–	–	3.8576	3.8576	–	5.5729	6.5809
	Solutions exactes 3-D [63]	1.7557	–	–	3.8991	3.8991	4.6128	5.6527	–
	Solutions de Ritz 3-D [188]	1.7558	3.2617	3.2617	3.8991	3.8991	4.6128	5.6524	6.5234
	Solutions DQ 3-D [189]	1.7558	3.2617	3.2617	3.8999	3.8999	4.6127	5.6533	6.5236
	Solutions de Ritz 3-D, Chebyshev [75]	1.7558	3.2617	3.2617	3.8991	3.8991	4.6128	5.6524	6.5234
	Solutions DQ 3-D [72]	1.7758	3.2617	3.2170	3.8999	3.8999	4.6127	5.6533	6.5236
0.5	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	1.2452	1.3047	1.3047	1.8451	2.3079	2.3079	2.6094	2.6094
	Théorie d'ordre supérieur [186]	1.2451	1.3047	1.3047	1.8451	2.3079	2.3079	2.6094	2.6094
	Solutions exactes 3-D [63]	1.2590	–	–	1.8451	–	–	–	–
	Solutions de Ritz 3-D [188]	1.2590	1.3047	1.3047	1.8451	2.3312	2.3312	2.6094	2.6094
	Solutions de Ritz 3-D, Chebyshev [75]	1.2590	1.3047	1.3047	1.8451	2.3312	2.3312	2.6094	2.6094

Tableau 5.17: Variation des 8 premières fréquences adimensionnelles pour différents rapports h/b (plaque en aluminium CCCC, $a/b = 1$)

h/b	Source	Fréquences adimensionnelles							
		1	2	3	4	5	6	7	8
0.01	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	3.6419	7.4214	7.4214	10.9335	13.2912	13.3554	16.6566	16.6566
	Théorie de Mindlin, Ritz [190]	3.6421	7.4254	7.4254	10.9510	13.2940	13.3560	–	–
	Solutions de Ritz 3-D [192]	3.6490	7.4352	7.4352	10.9530	13.3150	13.3790	16.6820	16.6820
	Solutions DQ 3-D [72]	3.6671	7.4599	7.4705	10.9950	13.3670	13.4300	16.7480	16.7480
	Méthode Ritz-spline 3-D [193]	3.6452	7.4284	7.4284	10.9427	13.3126	13.3764	16.6633	16.6633
0.1	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	3.3078	6.3265	6.3265	8.8856	10.4925	10.5850	12.4783	12.4783
	Théorie classique [191]	3.3099	6.3249	6.3249	8.8977	10.4550	10.5440	–	–
	Théorie de Mindlin, Ritz [190]	3.2954	6.2858	6.2858	8.8098	10.3790	10.4780	12.5530	12.5530
	Solutions de Ritz 3-D [192]	3.3184	6.3402	6.3402	8.8961	10.4900	10.5900	12.5190	12.5190
	Solutions DQ 3-D [72]	3.3282	6.3547	6.3547	8.9135	10.4930	10.5920	12.5240	12.5240
	Méthode Ritz-spline 3-D [193]	3.3182	6.3404	6.3404	8.8961	10.4969	10.5972	12.5182	12.5182
0.2	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	2.7198	4.7860	4.7860	6.2392	6.2392	6.4495	7.3836	7.4322
	Solutions de Ritz 3-D [192]	2.7247	4.7706	4.7706	6.2727	6.2727	6.4163	7.3219	7.4225
	Solutions DQ 3-D [72]	2.7288	4.7762	4.7762	6.2754	6.2754	6.4224	7.3254	7.4258
	Méthode Ritz-spline 3-D [193]	2.7244	4.7702	4.7702	6.2724	6.2724	6.4159	7.3229	7.4235

Tableau 5.18: Variation des 10 premières fréquences adimensionnelles pour différents rapports h/b (plaque en aluminium FFFF, $a/b = 1$)

		Fréquences adimensionnelles										
	h/a	Source	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Très mince	0.01	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	13.454	19.589	24.260	34.759	34.759	61.042	61.042	63.575	69.148	77.068
		Méthode Ritz-spline 3-D [193]	13.419	19.589	24.258	34.669	34.669	61.016	61.016	63.355	68.984	76.932
		Théorie classique exacte [185]	13.489	19.789	24.432	35.024	35.024	61.526	61.526	–	–	–
Min ce	0.05	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	13.198	19.424	24.018	33.893	33.893	59.467	59.467	61.181	66.487	74.224
		Méthode Ritz-spline 3-D [193]	13.147	19.425	24.018	33.727	33.727	59.477	59.477	60.739	66.299	74.104
Epaisse	0.1	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	12.737	18.945	23.329	32.002	32.002	55.385	55.385	55.958	60.731	67.777
		Méthode Ritz-spline 3-D [193]	12.723	18.954	23.345	31.955	31.955	55.490	55.490	55.821	60.760	67.875
		Méthode de Ritz 3-D [70]	12.726	18.955	23.347	31.965	31.965	55.493	55.493	55.853	60.767	67.882
		Méthode de Reddy-Ritz ([186])	12.722	18.944	23.325	31.931	31.931	55.741	55.358	55.358	60.655	67.694
		Méthode Mindlin-Ritz [67]	12.719	18.945	23.323	31.922	31.922	55.351	55.351	55.715	60.632	67.674
	0.2	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	11.710	17.404	21.201	27.608	27.608	40.194	42.810	42.810	45.216	45.297
		Méthode Ritz-spline 3-D [193]	11.710	17.433	21.252	27.647	27.647	40.192	42.775	42.775	45.308	45.526
		Méthode de Ritz 3-D [70]	11.710	17.433	21.252	27.647	27.647	40.191	42.776	42.776	45.310	–
		Méthode Mindlin-Ritz [67]	11.701	17.400	21.194	27.573	27.573	–	–	–	45.105	–
	0.3	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	10.651	15.616	18.846	23.575	23.575	26.796	28.540	28.540	30.351	34.495
		Méthode Ritz-spline 3-D [193]	10.648	15.657	18.914	23.613	23.613	26.793	28.488	28.488	30.351	34.376
	Très épaisse(*)	0.4	Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	9.667	13.939	16.715	20.097	20.283	20.283	21.405	21.405	22.763
Méthode Ritz-spline 3-D [193]			9.658	13.980	16.781	20.093	20.297	20.297	21.333	21.333	22.763	25.697
0.5		Présente (théorie HSDPT de Reddy), 8x8 points	8.798	12.480	14.911	16.078	17.124	17.124	17.651	17.651	18.210	20.697
		Méthode Ritz-spline 3-D [193]	8.780	12.515	14.961	16.072	17.030	17.030	17.631	17.631	18.210	20.451
		Méthode de Ritz 3-D [70]	8.780	12.515	14.962	16.073	17.030	17.030	17.631	17.631	18.211	–

(*) : Limite des théories d'ordre supérieur.

Tableau 5.19: Variation des 10 premières fréquences (plaque FGM $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Ti-6Al-4V}$, SSSS, $h = 0.005$ m, $a/h = 80$, $a/b = 1$)

n	Source	Fréquences naturelles (Hz)									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	145.01	362.22	362.22	579.06	723.56	723.56	939.77	939.77	1228.87	1228.87
	Présente (théorie HSDPT de Reddy)	145.01	362.22	362.22	579.06	723.56	723.56	939.76	939.77	1228.86	1228.86
	He, Ng et al. [113]	144.66	360.53	360.53	569.89	720.57	720.57	919.74	919.74	1225.72	1225.72
	Yang et Shen [115]	143.96	360.07	360.07	568.88	718.22	718.22	916.40	916.40	1207.09	1207.09
	Huang et Shen [117]	144.94	362.04	362.04	578.78	723.06	723.06	939.19	939.19	1226.19	1226.19
2000	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	271.08	677.14	677.14	1082.54	1352.71	1352.71	1756.97	1756.97	2297.57	2297.57
	Présente (théorie HSDPT de Reddy)	271.08	677.14	677.14	1082.54	1352.44	1352.44	1756.74	1756.74	2297.55	2297.55
	He, Ng et al. [113]	268.92	669.40	669.40	1052.49	1338.52	1338.52	1695.23	1695.23	2280.95	2280.95
	Yang et Shen [115]	261.46	653.14	653.14	1044.31	1304.79	1304.79	1694.98	1694.98	2214.34	2214.34
	Huang et Shen [117]	271.03	677.04	677.04	1082.38	1352.24	1352.24	1756.49	1756.49	2294.47	2294.47

Cas spéciaux d'isotropie : $n = 0$, plaque en céramique (Al_2O_3) ; $n = 2000$, plaque en métal (Ti-6Al-4V).

5.4.2. Validation du code de calcul élaboré pour le cas des plaques FGM :

La deuxième classe de plaques utilisée dans le but de valider le code de calcul élaboré basé sur la méthode de Ritz est la classe des plaques FGM. Encore une fois, nous avons utilisé les mêmes géométries et les mêmes propriétés thermomécaniques que celles citées dans les articles faisant office de support de comparaison.

Le tableau 5.20 présente les cinq premières fréquences adimensionnelles d'une plaque FGM (Al/ZrO₂, modèle de Mori-Tanaka) mince en appuis simples. Les résultats sont bons comparés à ceux cités dans les références [88] et [123]. Il est à noter qu'il a fallu uniquement une discrétisation de 8x8 points en employant les polynômes orthogonaux (générés par le procédé de Gram-Schmidt) avec la nouvelle théorie pour bien approcher les résultats de la référence [88] ; alors qu'une discrétisation de 10x10 points avec la théorie HSDPT de Reddy a été nécessaire pour arriver aux mêmes résultats.

Les références [115] et [122], dont les résultats (les huit premières fréquences adimensionnelles) sont reportés dans le tableau 5.21, nous ont permis de valider notre code de calcul et la nouvelle théorie que nous avons développée lorsqu'une élévation uniforme de la température est prise en compte dans le cas d'une plaque FGM Si₃N₄/SUS304 épaisse dont les quatre côtés sont encastés. En employant les polynômes orthogonaux, une discrétisation de 8x8 points seulement a été suffisante pour obtenir des résultats corrects comparés à ceux des références citées ([115] et [122]).

De même que les références [117] et [194], dont les résultats (les cinq premières fréquences adimensionnelles) sont reportés dans le tableau 5.22, nous ont permis de valider notre code de calcul et la nouvelle théorie développée lorsqu'un gradient de température dans la direction de l'épaisseur est pris en compte dans le cas d'une plaque FGM Si₃N₄/SUS304 épaisse dont les quatre côtés sont en appuis simples. Encore une fois et en employant les polynômes orthogonaux, une discrétisation de 8x8 points seulement a été suffisante pour obtenir des résultats corrects comparés à ceux des références citées ([117] et [194]).

Tableau 5.20: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles (plaque FGM Al/ZrO₂, modèle de Mori-Tanaka, $n = 1$, SSSS, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$)

h/a	Source		Fréquences adimensionnelles				
			1	2	3	4	5
0.05	Présente (théorie HSDPT de Reddy)	5x5 points	0.01548	0.03832	0.03832	0.06055	0.10069
		7x7 points	0.01548	0.03821	0.03821	0.06040	0.07586
		10x10 points	0.01548	0.03821	0.03821	0.06040	0.07491
	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	5x5 points	0.01548	0.03832	0.03832	0.06055	0.10045
		7x7 points	0.01548	0.03821	0.03821	0.06040	0.07585
		8x8 points	0.01548	0.03821	0.03821	0.06040	0.07492
	Eléments finis, théorie de Reddy [88] Meshless local Petrov-Galerkin (Ferreira, Batra et al. [123])		0.01548	0.03821	0.03821	0.06040	0.07491
		9x9 points	0.0148	0.0381	0.0382	0.0594	0.0775
		11x11 points	0.0147	0.0375	0.0375	0.0592	0.0749

Tableau 5.21: Variation des 8 premières fréquences adimensionnelles (plaque FGM Si₃N₄/SUS304, modèle P-FGM, $n = 2$, CCCC, $a/b = 1$, $a/h = 10$, $a = 0.2\text{m}$, élévation uniforme de la température)

a/h	ΔT (K)	Source		Fréquences adimensionnelles							
				1	2	3	4	5	6	7	8
10	0	Présente (théorie HSDPT de Reddy)	8x8 points	4.1000	7.8343	7.8350	10.9983	12.9812	13.0975	15.3886	15.3898
		Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	8x8 points	4.1002	7.8355	7.8363	11.0010	12.9839	13.1001	15.3886	15.3899
		Fonctions poutres de Ritz [122]	10x10 points	4.1165	7.9696	7.9696	11.2198	13.1060	13.2089	15.9471	15.9471
		DQ-Galerkin, HSDPT [115]	13x5 points	4.1062	7.8902	7.8902	11.1834	12.5881	13.1867	15.4530	16.0017
300		Présente (théorie HSDPT de Reddy)	8x8 points	3.6442	7.1793	7.1799	10.1891	12.0816	12.2020	14.6707	14.6737
		Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	8x8 points	3.6444	7.1804	7.1811	10.1917	12.0841	12.2044	14.6743	14.6776
		Fonctions poutres de Ritz [122]	10x10 points	3.6593	7.3098	7.3098	10.4021	12.1982	12.3052	14.9090	14.9090
		DQ-Galerkin, HSDPT [115]	13x5 points	3.6636	7.2544	7.2544	10.3924	11.7054	12.3175	14.4520	15.0019
500		Présente (théorie HSDPT de Reddy)	8x8 points	3.2009	6.5302	6.5309	9.3720	11.1625	11.2862	13.6214	13.6237
		Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	8x8 points	3.2010	6.5311	6.5318	9.3743	11.1646	11.2882	13.6252	13.6276
		Fonctions poutres de Ritz [122]	10x10 points	3.2147	6.6561	6.6561	9.5761	11.2708	11.3812	13.8346	13.8346
		DQ-Galerkin, HSDPT [115]	13x5 points	3.2357	6.6281	6.6281	9.5990	10.8285	11.4350	13.4412	13.9756

Tableau 5.22: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles (plaque P-FGM
Si3N4/SUS304, SSSS, $a/b = 1$, $a/h = 8$, avec gradient de température)

T (K)	n	Source	Fréquences adimensionnelles				
			1	2	3	4	5
$T_t = 300$ $T_b = 300$	0	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	12.507	29.258	44.230	53.458	66.372
		Technique des perturbations - HSDPT [117]	12.495	29.131	43.845	52.822	65.281
		Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	-	-	-	-	-
	0.5	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	8.635	20.134	30.454	36.794	45.720
		Technique des perturbations - HSDPT [117]	8.675	20.262	30.359	36.819	45.546
		Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	-	-	-	-	-
	1	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	7.583	17.641	26.679	32.222	40.049
		Technique des perturbations - HSDPT [117]	7.555	17.649	26.606	32.081	39.692
		Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	-	-	-	-	-
	2	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	6.809	15.810	23.895	28.845	35.827
		Technique des perturbations - HSDPT [117]	6.777	15.809	23.806	28.687	35.466
		Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	-	-	-	-	-
10	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	5.870	13.680	20.647	26.602	30.916	
	Technique des perturbations - HSDPT [117]	-	-	-	-	-	
	Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	-	-	-	-	-	
$T_t = 400$ $T_b = 300$	0	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	12.307	28.962	43.847	53.022	65.862
		Technique des perturbations - HSDPT [117]	12.397	29.083	43.835	52.822	65.310
		Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	12.311	29.060	44.094	-	-
	0.5	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	8.476	19.918	30.182	36.510	45.382
		Technique des perturbations - HSDPT [117]	8.615	20.215	30.530	36.824	45.575
		Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	8.276	19.772	30.184	-	-
	1	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	7.434	17.445	26.436	31.979	39.737
		Technique des perturbations - HSDPT [117]	7.474	17.607	26.590	32.088	39.721
		Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	7.302	17.369	26.506	-	-
	2	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	6.666	15.630	23.671	28.622	35.544
		Technique des perturbations - HSDPT [117]	6.693	15.762	23.786	28.686	35.491
		Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	6.572	15.599	23.787	-	-
10	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	5.733	13.506	20.441	26.498	30.664	
	Technique des perturbations - HSDPT [117]	-	-	-	-	-	
	Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	5.646	13.464	20.513	-	-	
$T_t = 600$ $T_b = 300$	0	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	11.888	28.369	43.099	52.176	64.879
		Technique des perturbations - HSDPT [117]	11.984	28.504	43.107	51.998	64.358
		Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	11.888	28.421	43.343	-	-
	0.5	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	8.136	19.470	29.628	35.874	44.670
		Technique des perturbations - HSDPT [117]	8.269	19.784	29.998	36.239	44.901
		Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	7.943	19.327	29.629	-	-
	1	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	7.111	17.029	25.926	31.411	39.103
		Technique des perturbations - HSDPT [117]	7.171	17.213	26.109	31.557	39.114
		Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	6.989	16.959	25.997	-	-
	2	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	6.352	15.231	23.184	28.081	34.927
		Technique des perturbations - HSDPT [117]	6.398	15.384	23.327	28.185	34.918
		Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	6.269	15.207	23.303	-	-
10	Présente (nouvelle théorie, $\alpha = 3/2$)	5.409	13.090	19.934	26.178	30.024	
	Technique des perturbations - HSDPT [117]	-	-	-	-	-	
	Méthode des éléments finis - Mindlin [194]	5.327	13.050	20.004	-	-	

5.4.3. Résultats de l'analyse de la plaque FGM soumise à des contraintes thermiques initiales :

Afin de montrer les résultats de l'analyse de la plaque FGM soumise à des contraintes thermiques initiales, un certain nombre de tableaux et figures sont présentés pour différents cas (théories, géométries, distribution des propriétés à travers l'épaisseur, élévation de la température et conditions aux limites).

L'expression de la fréquence adimensionnelle utilisée dans l'analyse de la plaque FGM est la suivante :

$$\bar{\omega} = \omega \left(\frac{b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{I_m}{D_m}} \right); \quad D_m = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu_m^2)} \quad (5.3)$$

Dans le but d'examiner la variation des fréquences de vibration en fonction du gradient de température à travers l'épaisseur, des résultats relatifs à la plaque FGM en Ti-6Al-4V/Si₃N₄ soumise à différentes conditions aux bords sont reportés sur les tableaux B.1 à B.5 pour le cas de la plaque mince et sur les tableaux B.6 à B.10 pour le cas de la plaque épaisse. De même que le cas d'une élévation uniforme de la température est examiné à travers des tableaux de résultats (sur les tableaux B.11 à B.15 pour le cas de la plaque mince et sur les tableaux B.16 à B.20 pour le cas de la plaque épaisse). Quelles que soient les conditions aux limites et pour n'importe quelle valeur de l'index de la fraction volumique, les fréquences adimensionnelles décroissent quand l'élévation de la température croît, que celle-ci soit uniforme ou pas (gradient).

Un ensemble de courbes a été tracé à partir des tableaux B.1 à B.20 afin de mettre en évidence l'influence des différents paramètres (élévation de température, conditions aux limites, index de la fraction volumique et géométrie de la plaque) sur les fréquences naturelles adimensionnelles de vibration.

Les figures 5.55 à 5.62 concernent la plaque FGM mince soumise à différents gradients de température en maintenant la face inférieure de la plaque à 300K alors que la face supérieure sera sujette à différentes températures allant de 300K à 600K. L'index de la fraction volumique est varié afin d'analyser la plaque FGM avec différentes concentrations

de métal et de céramique, en partant d'une plaque en céramique pure vers une plaque en métal pur. Il est clair que quel que soit le gradient de température considéré, les fréquences adimensionnelles décroissent lorsque la concentration de métal augmente. Ceci s'explique par le fait que le module de Young du métal choisi est largement inférieur au module de Young de la céramique choisie. Ceci est valable pour toutes les conditions aux limites traitées. Les mêmes phénomènes sont observés sur la plaque épaisse et illustrés sur les figures 5.63 à 5.72.

Les figures 5.73 à 5.78 concernent la plaque FGM mince soumise à différentes élévations uniformes de la température en maintenant la face inférieure et la face supérieure de la plaque à la même température allant de 300K à 600K. L'index de la fraction volumique est varié afin d'analyser la plaque FGM avec différentes concentrations de métal et de céramique, en partant d'une plaque en céramique pure vers une plaque en métal pur. Nous constatons qu'une augmentation uniforme de la température a plus d'effet sur les fréquences qu'un gradient de température; elles décroissent plus rapidement. Il en est de même pour la plaque épaisse (figures 5.79 à 5.86). Ceci vient du fait qu'une élévation uniforme de température induit une température plus grande dans l'épaisseur qu'un gradient de température, ce qui rend la plaque encore plus souple.

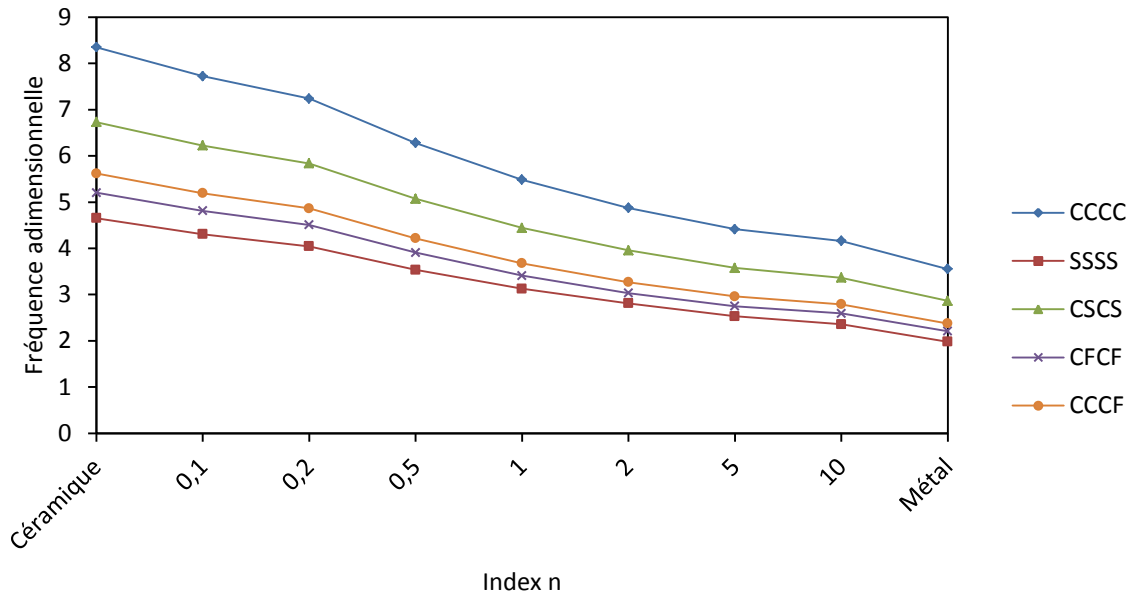


Figure 5.55: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale, ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 300K$, Plaque P-FGM)

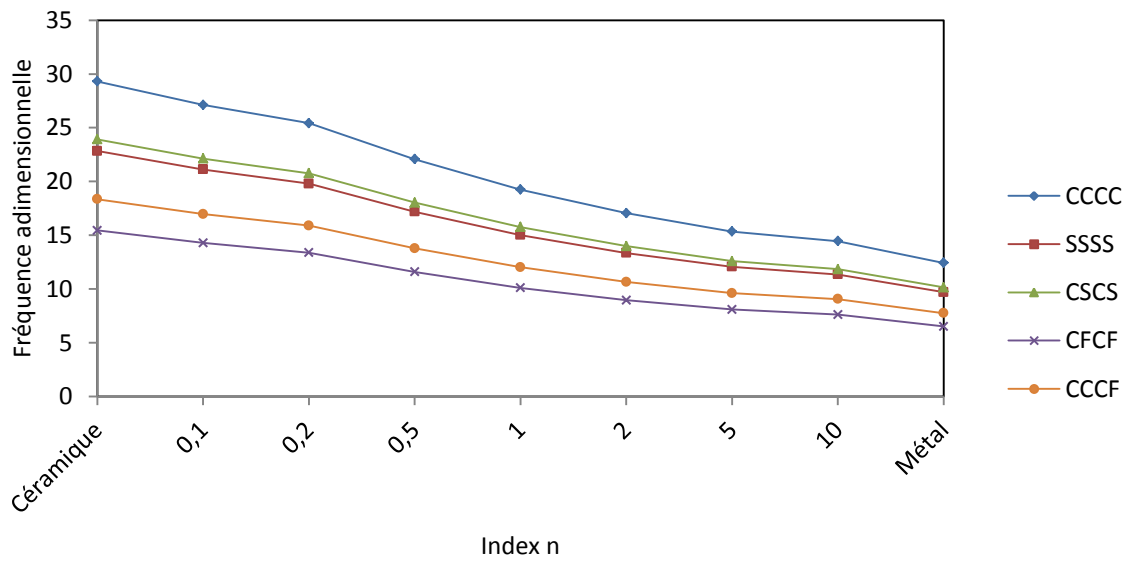


Figure 5.56: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 300K$, Plaque P-FGM)

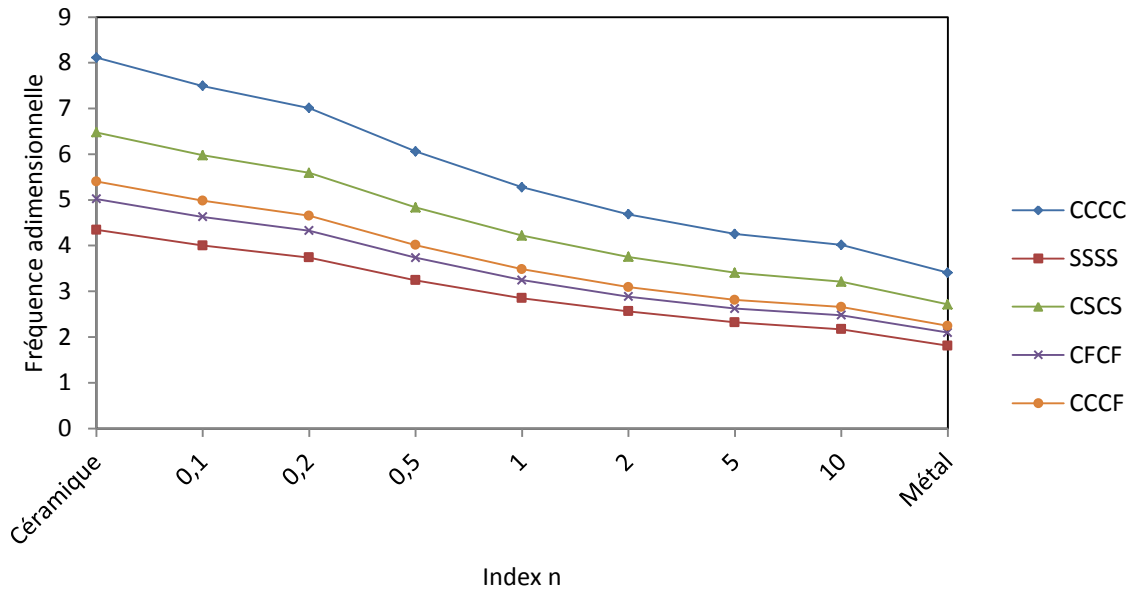


Figure 5.57: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 400K$, Plaque P-FGM)

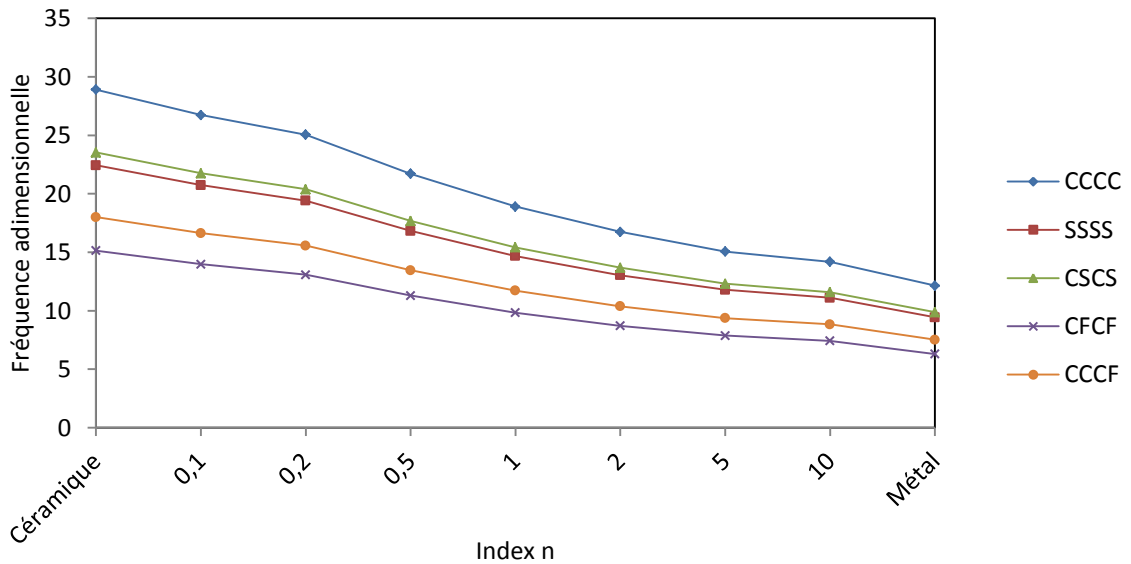


Figure 5.58: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 400K$, Plaque P-FGM)

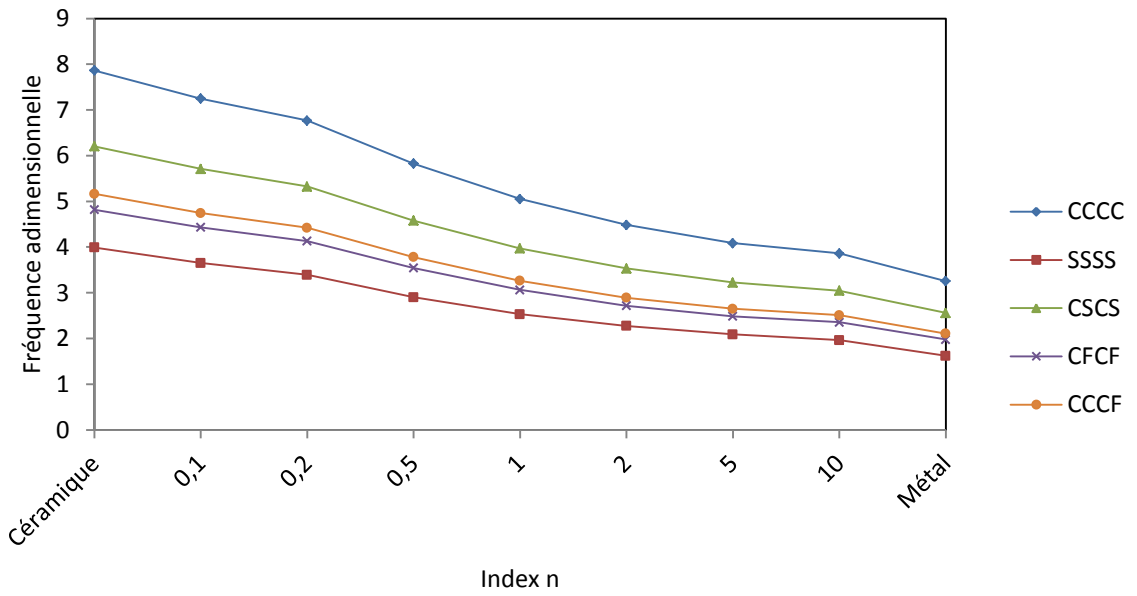


Figure 5.59: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 500K$, Plaque P-FGM)

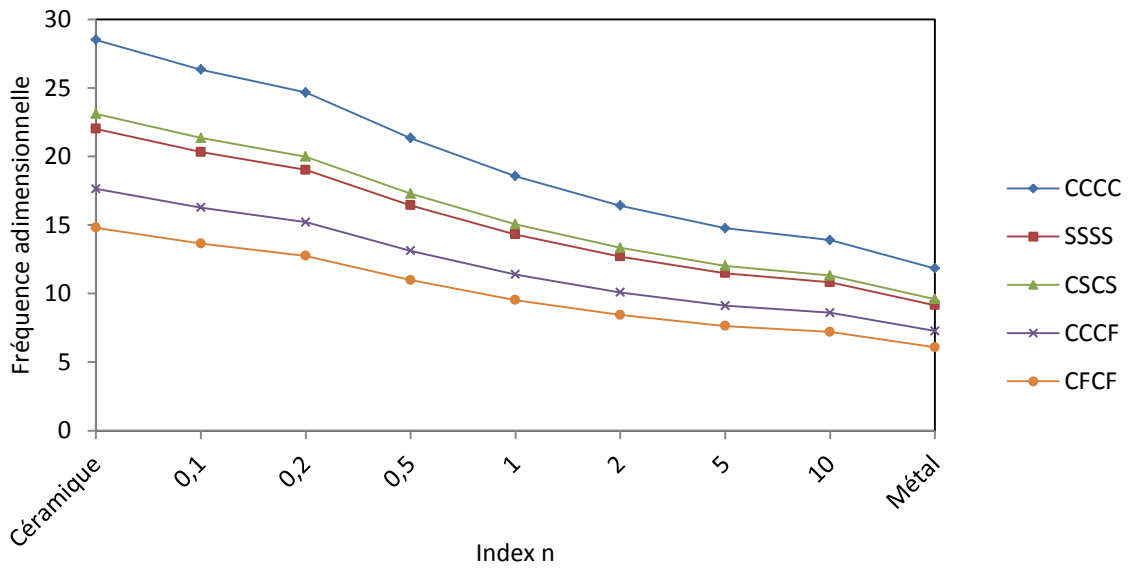


Figure 5.60: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 500K$, Plaque P-FGM)

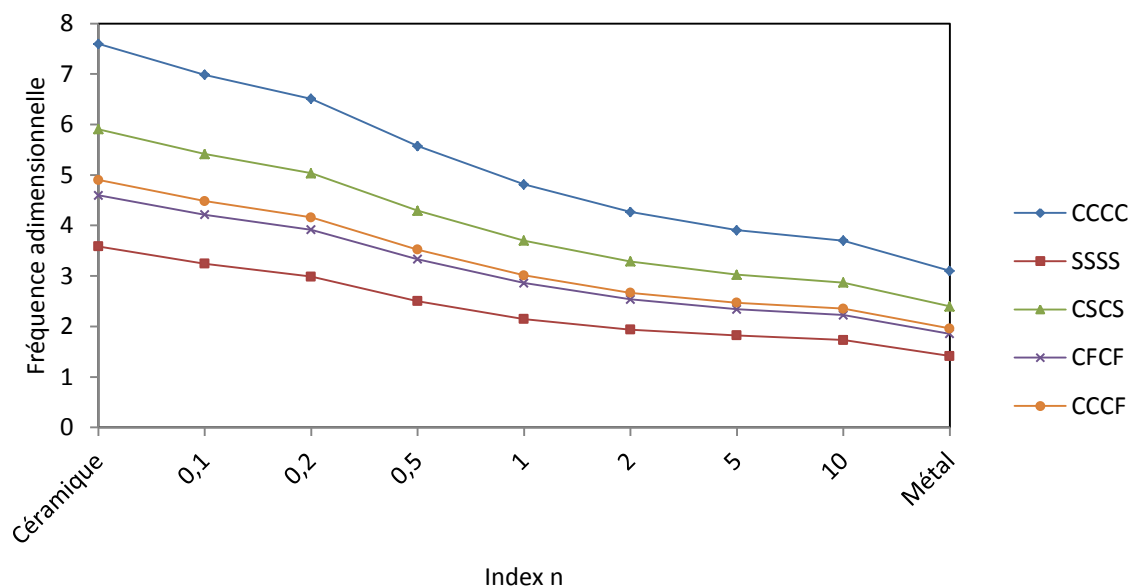


Figure 5.61: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 600K$, Plaque P-FGM)

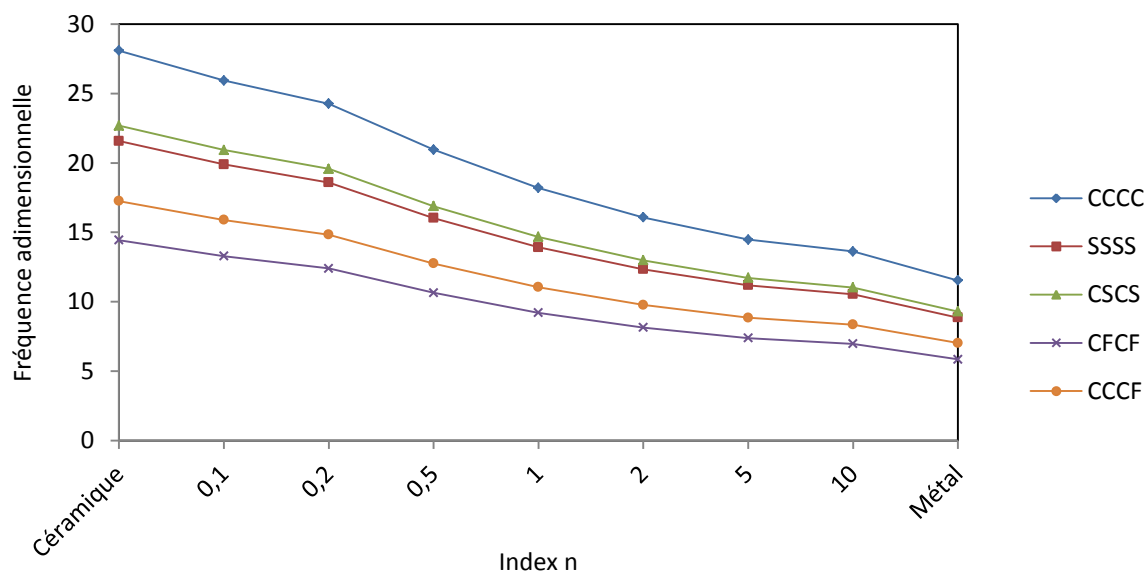


Figure 5.62: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 600K$, Plaque P-FGM)

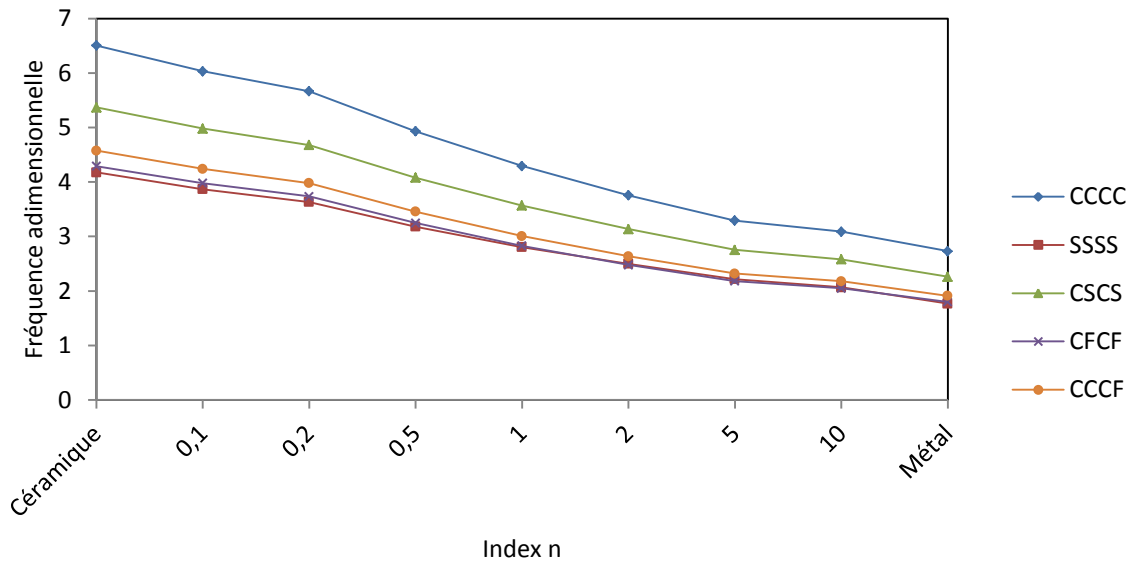


Figure 5.63: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 300K$, Plaque P-FGM)

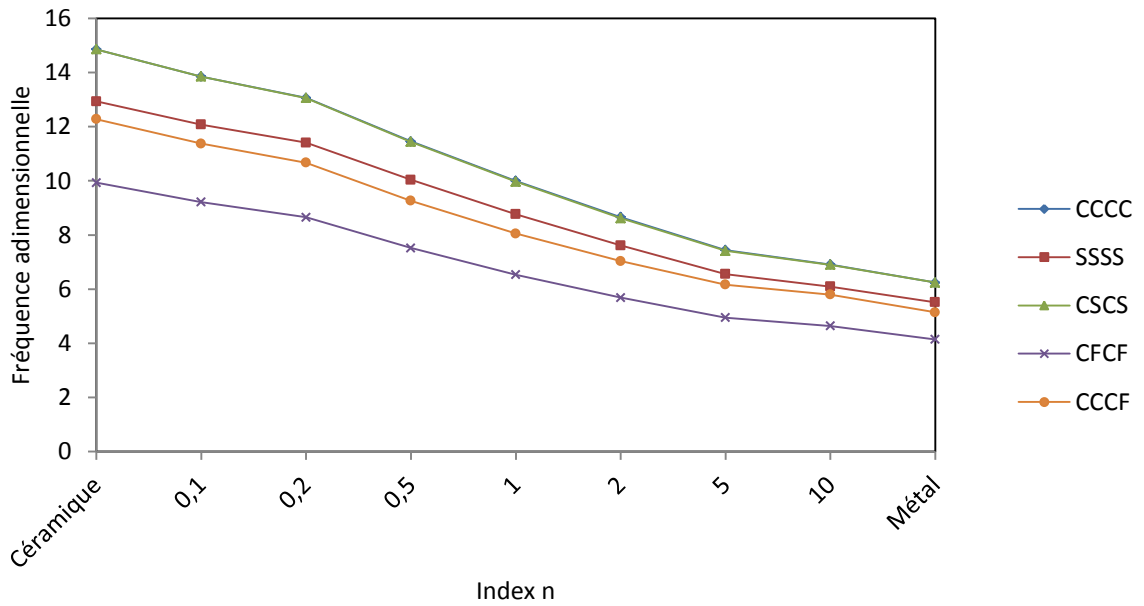


Figure 5.64: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 300K$, Plaque P-FGM)

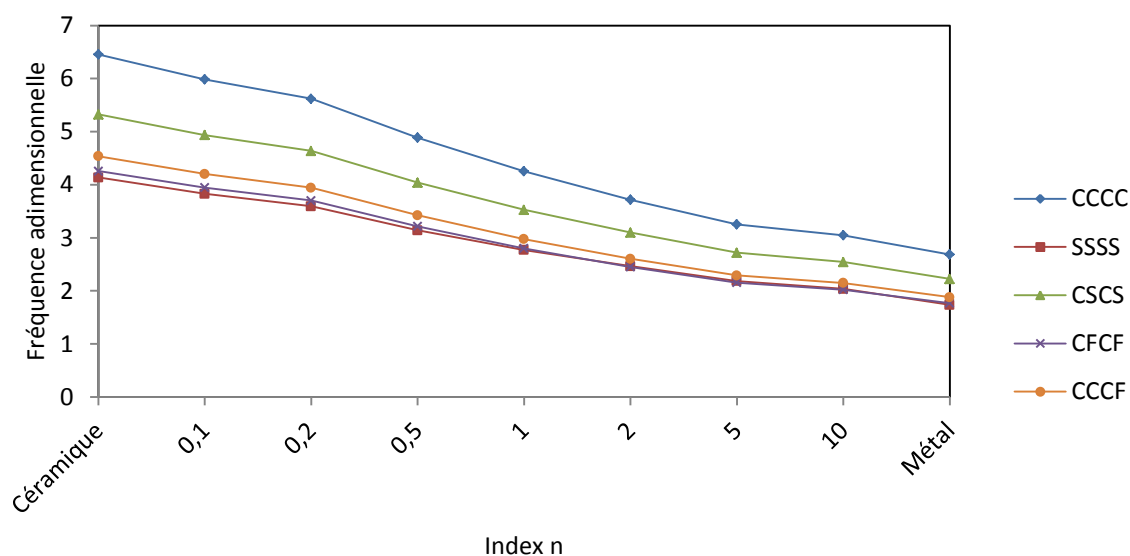


Figure 5.65: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 400K$, Plaque P-FGM)

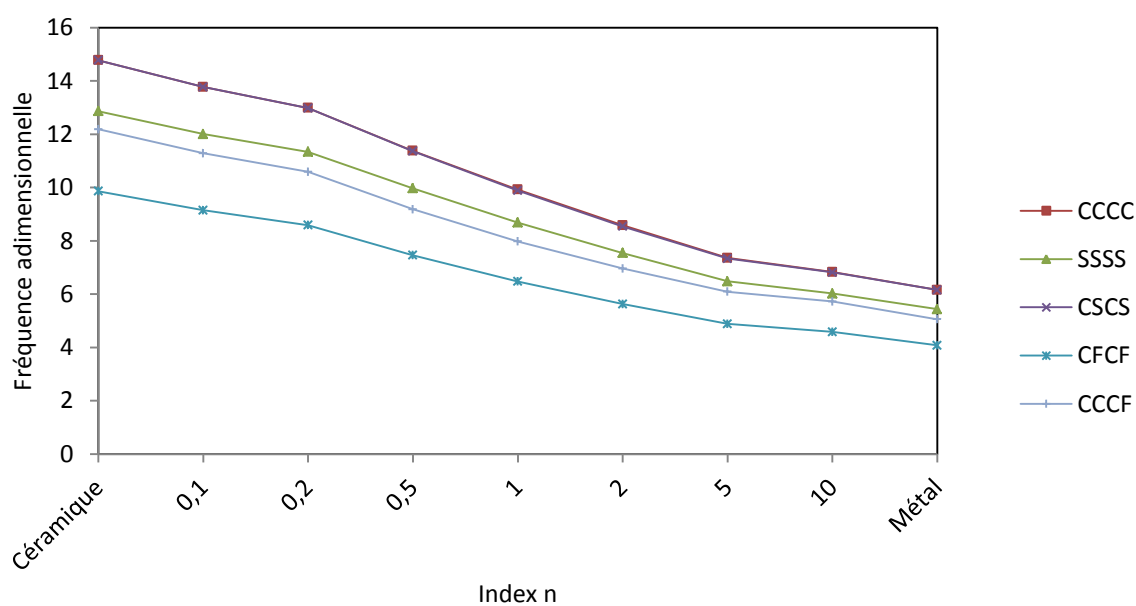


Figure 5.66: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 400K$, Plaque P-FGM)

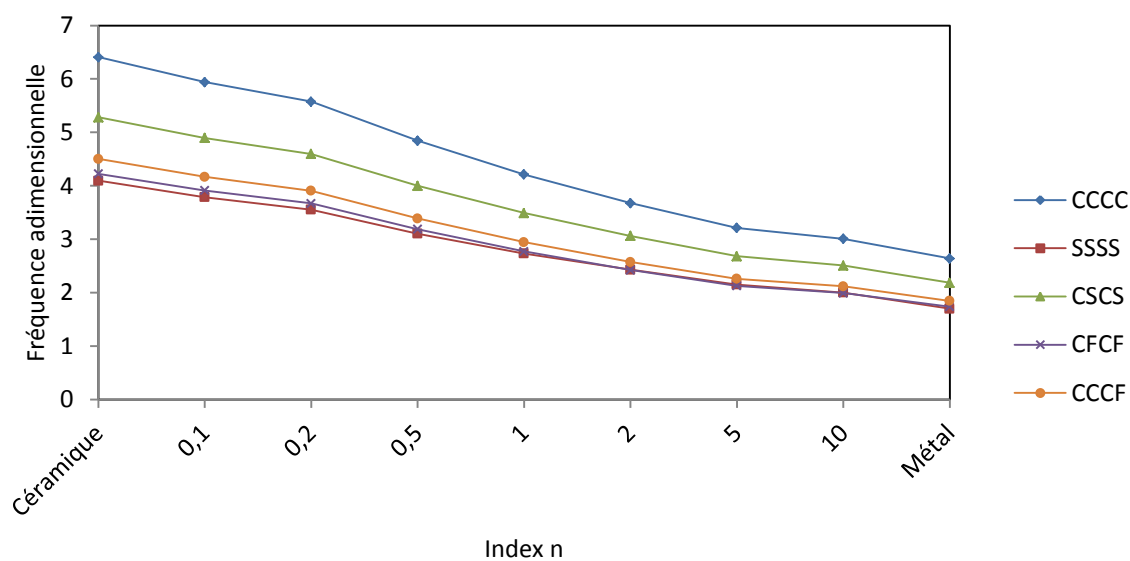


Figure 5.67: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 500K$, Plaque P-FGM)

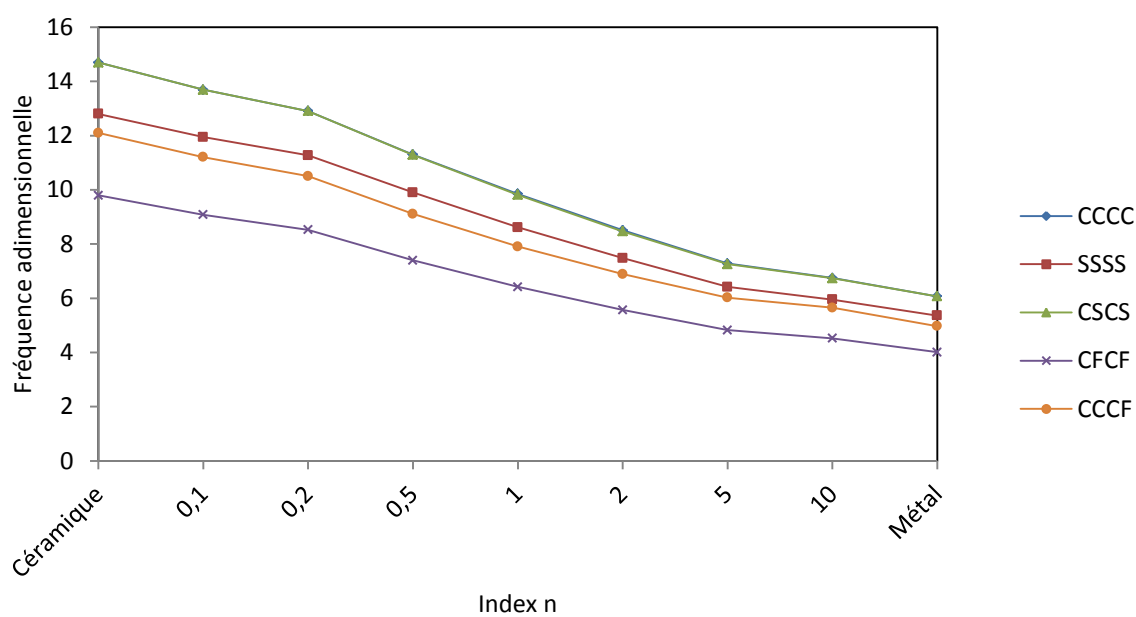


Figure 5.68: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 500K$, Plaque P-FGM)

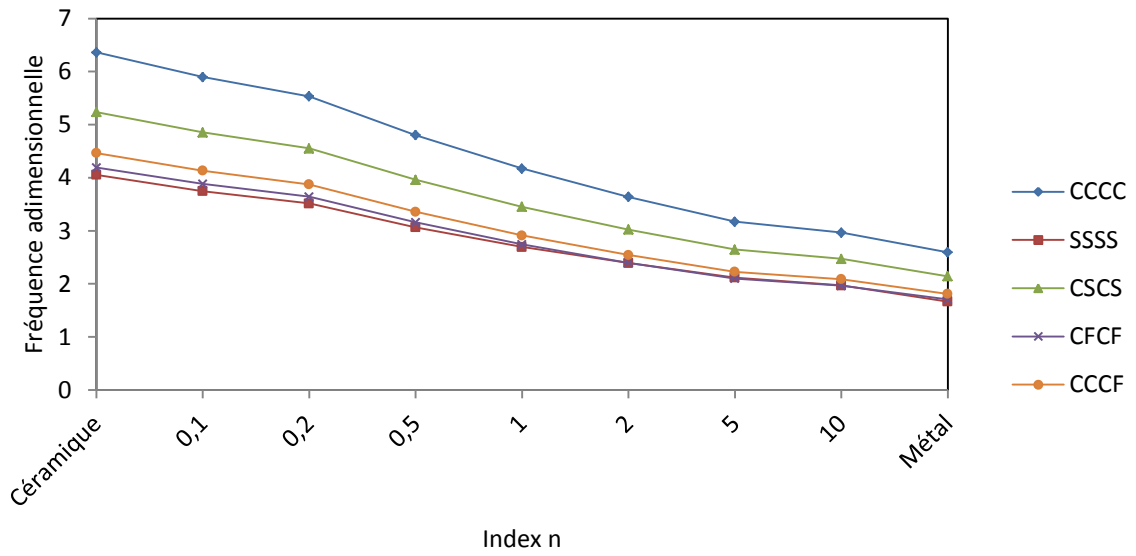


Figure 5.69: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 300K, T_t = 600K, \text{Plaque P-FGM}$)

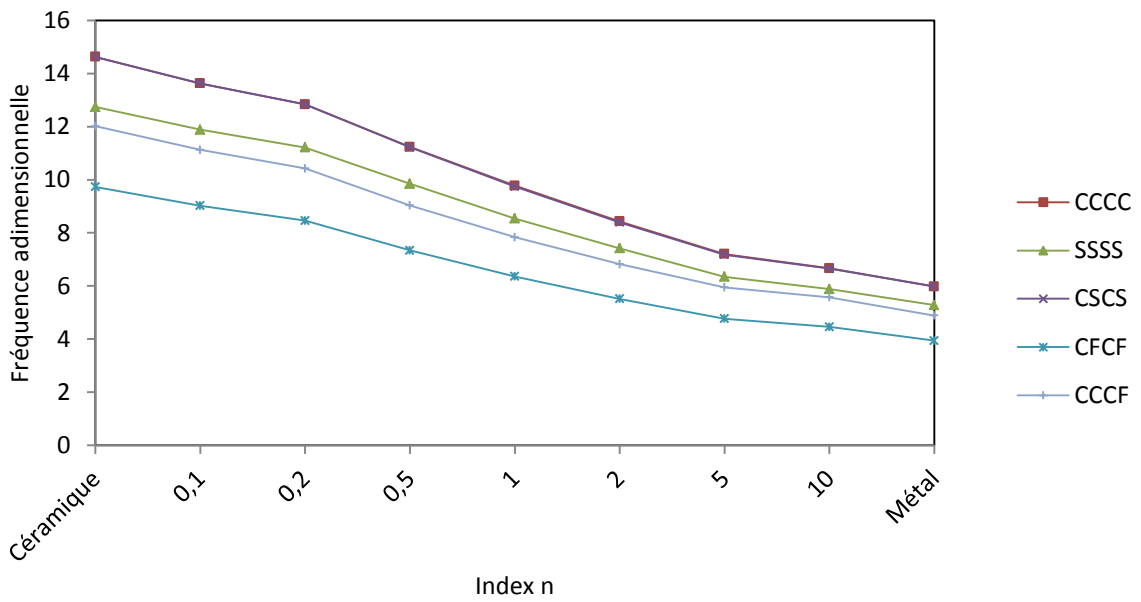


Figure 5.70: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2, a/b = 1, T_b = 300K, T_t = 600K, \text{Plaque P-FGM}$)

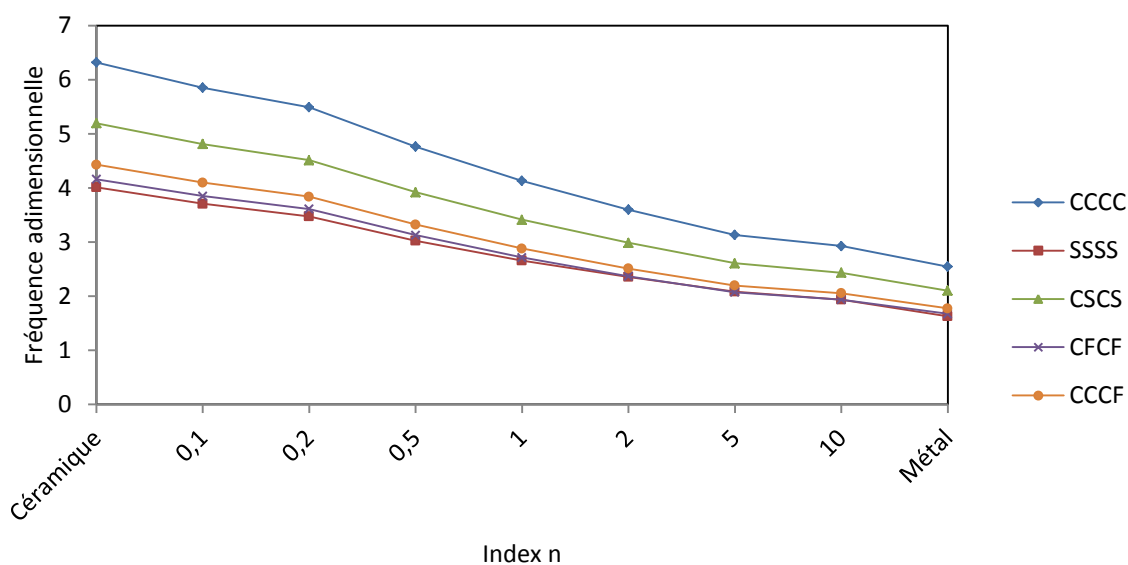


Figure 5.71: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 700K$, Plaque P-FGM)

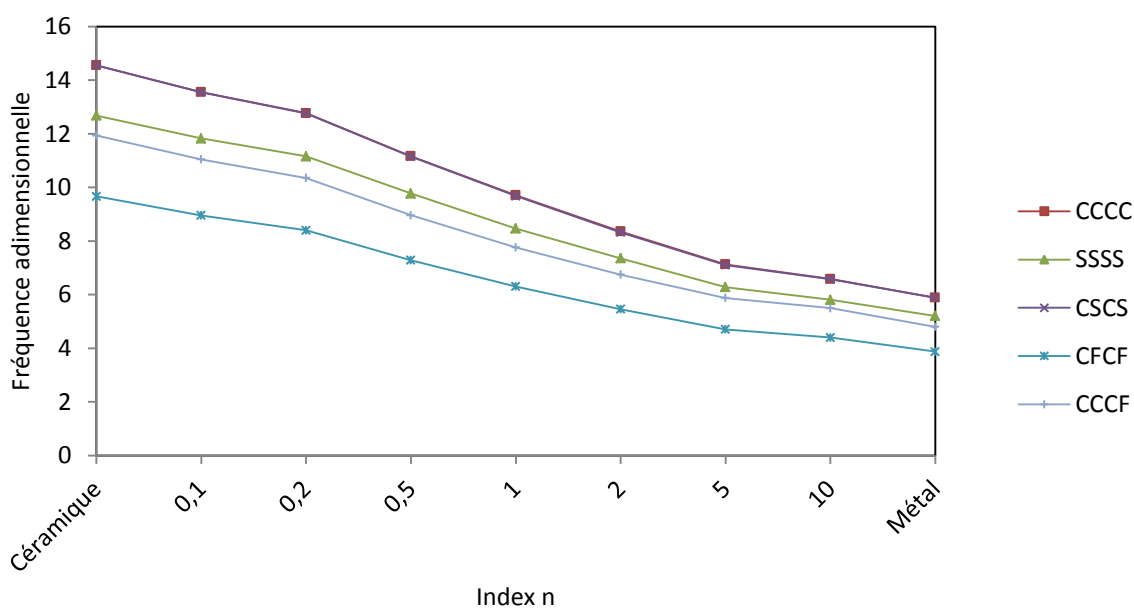


Figure 5.72: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 300K$, $T_t = 700K$, Plaque P-FGM)

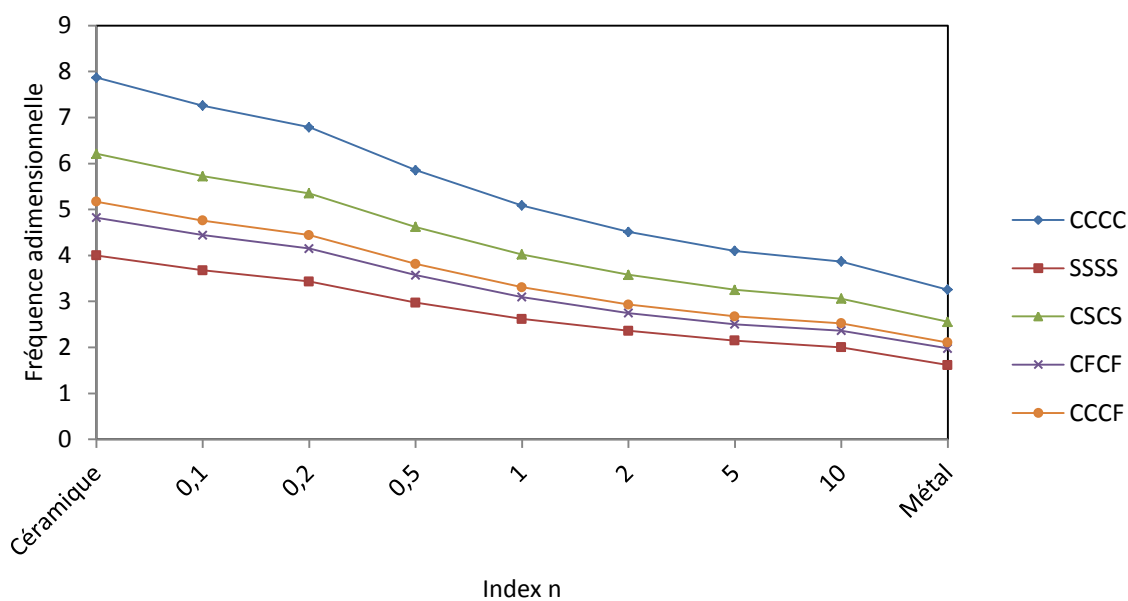


Figure 5.73: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 400K$, $T_t = 400K$, Plaque P-FGM)

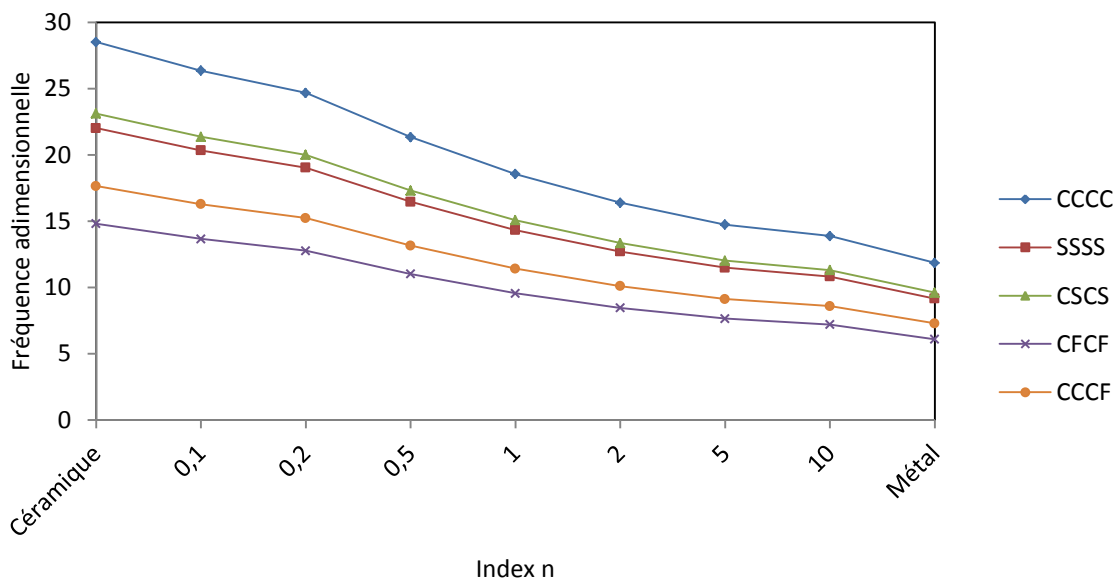


Figure 5.74: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 400K$, $T_t = 400K$, Plaque P-FGM)

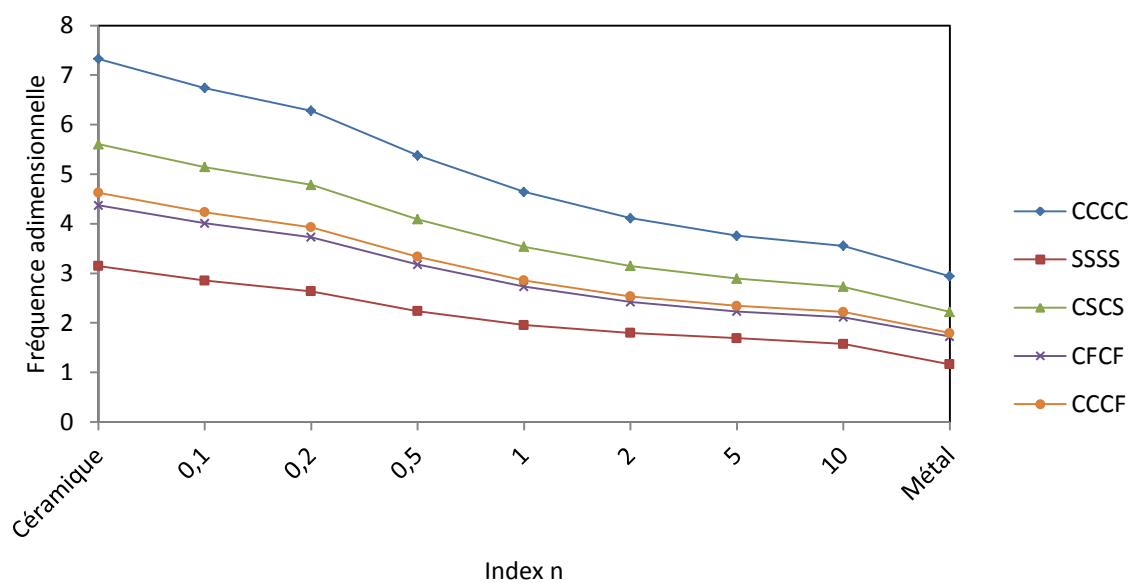


Figure 5.75: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 500K$, $T_t = 500K$, Plaque P-FGM)

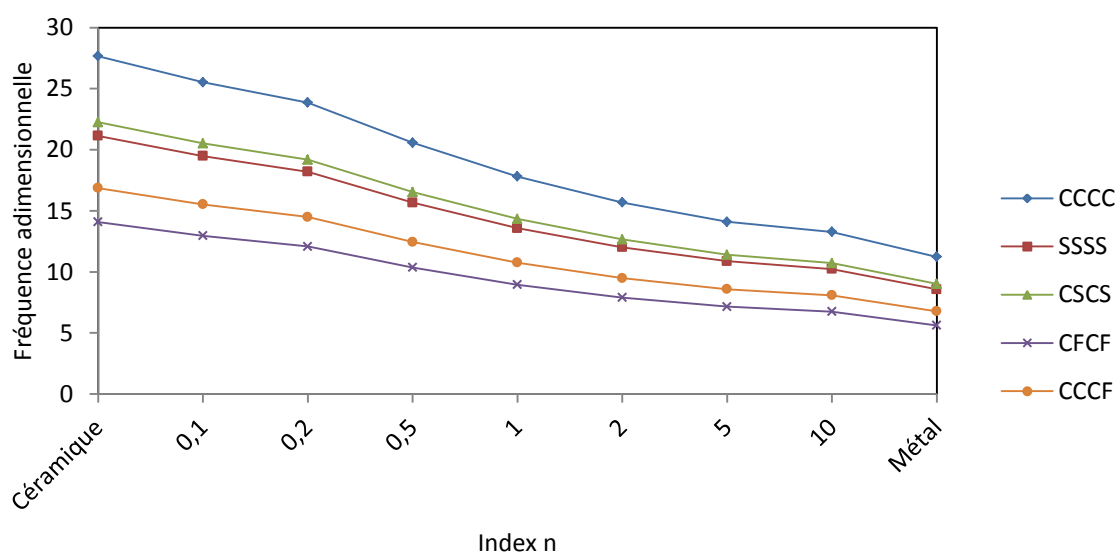


Figure 5.76: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 500K$, $T_t = 500K$, Plaque P-FGM)

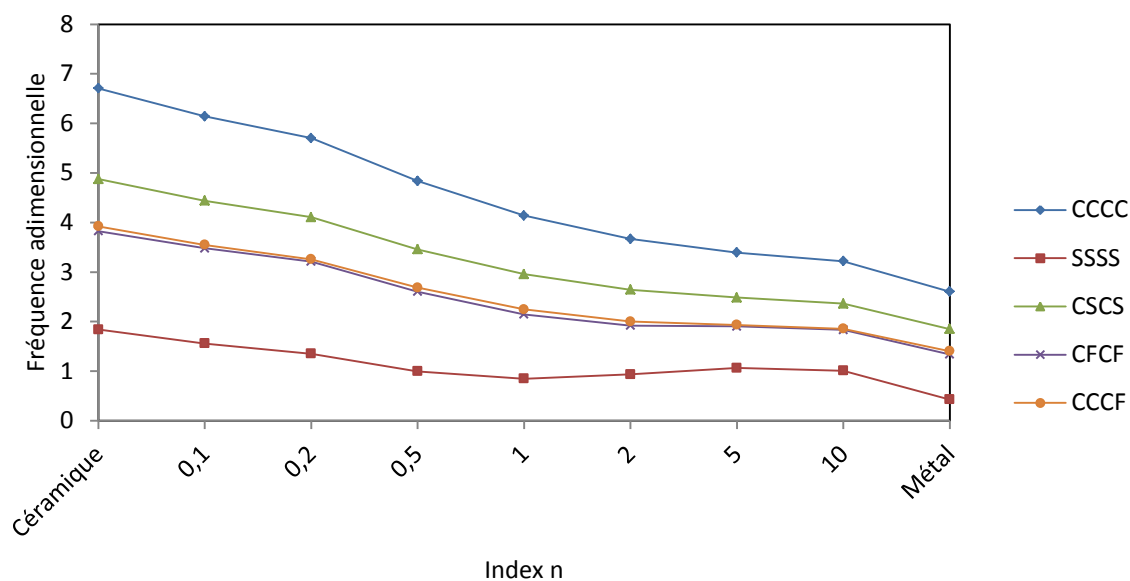


Figure 5.77: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 600K$, $T_t = 600K$, Plaque P-FGM)

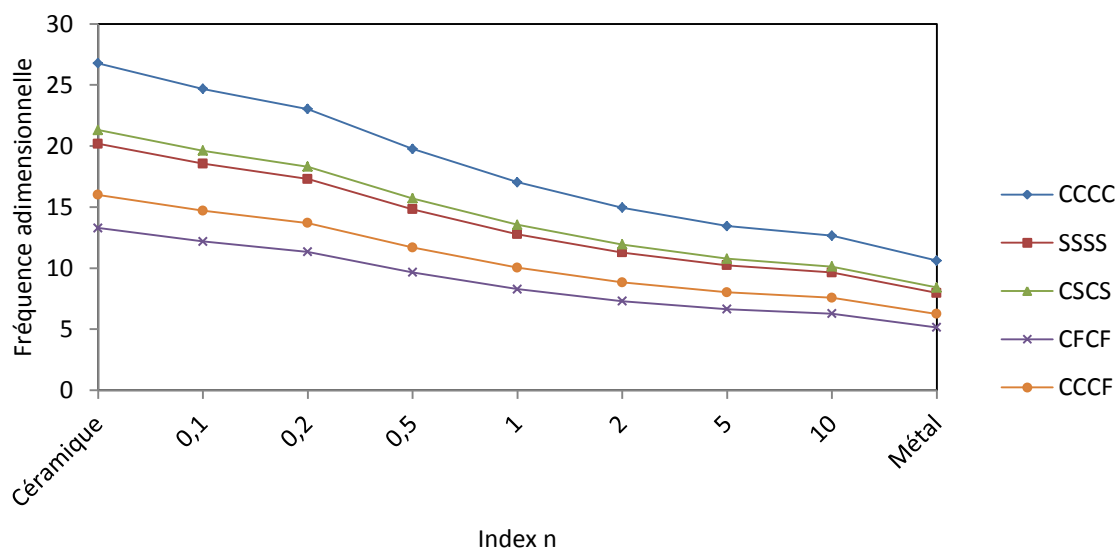


Figure 5.78: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.05$, $a/b = 1$, $T_b = 600K$, $T_t = 600K$, Plaque P-FGM)

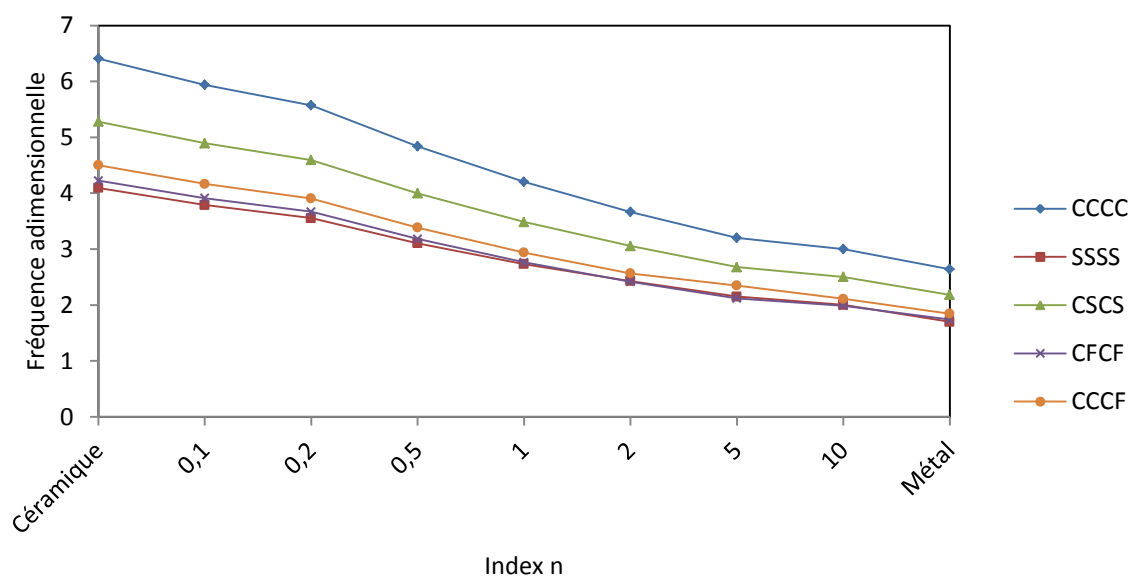


Figure 5.79: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 400K$, $T_t = 400K$, Plaque P-FGM)

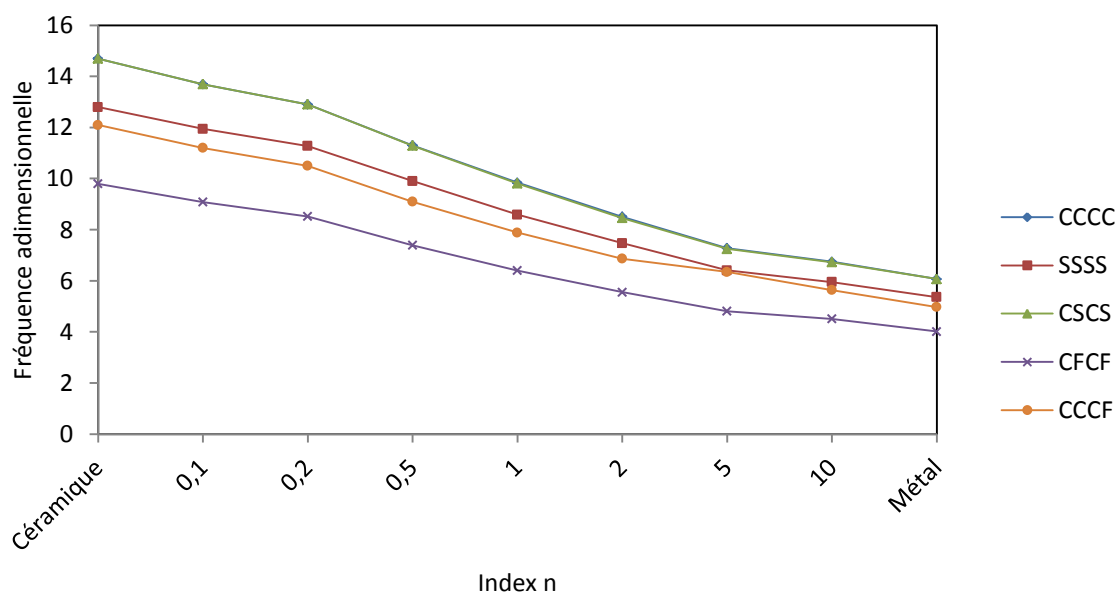


Figure 5.80: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 400K$, $T_t = 400K$, Plaque P-FGM)

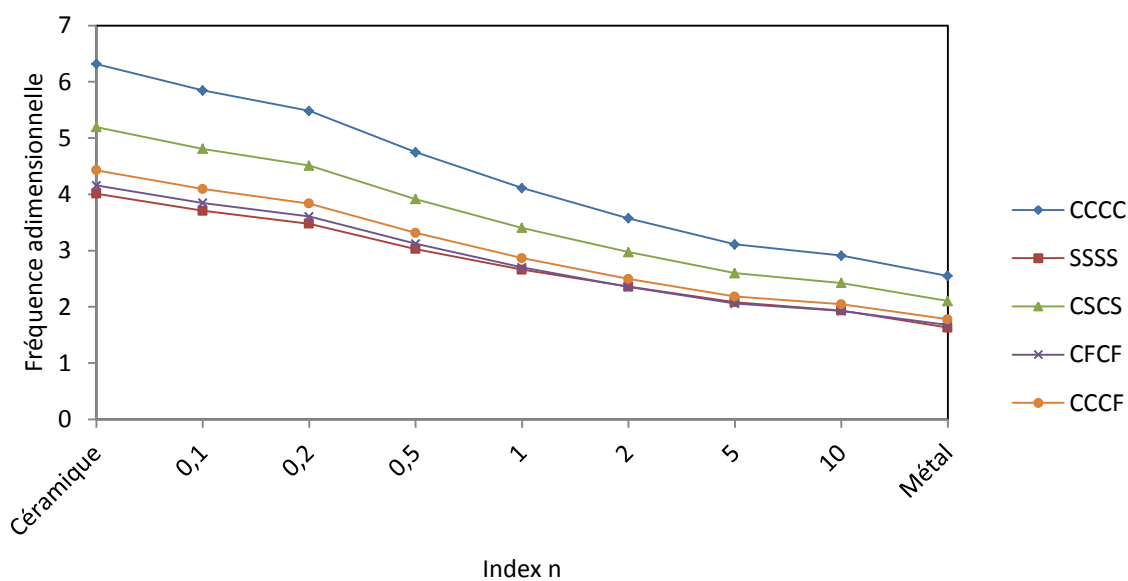


Figure 5.81: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 500K$, $T_t = 500K$, Plaque P-FGM)

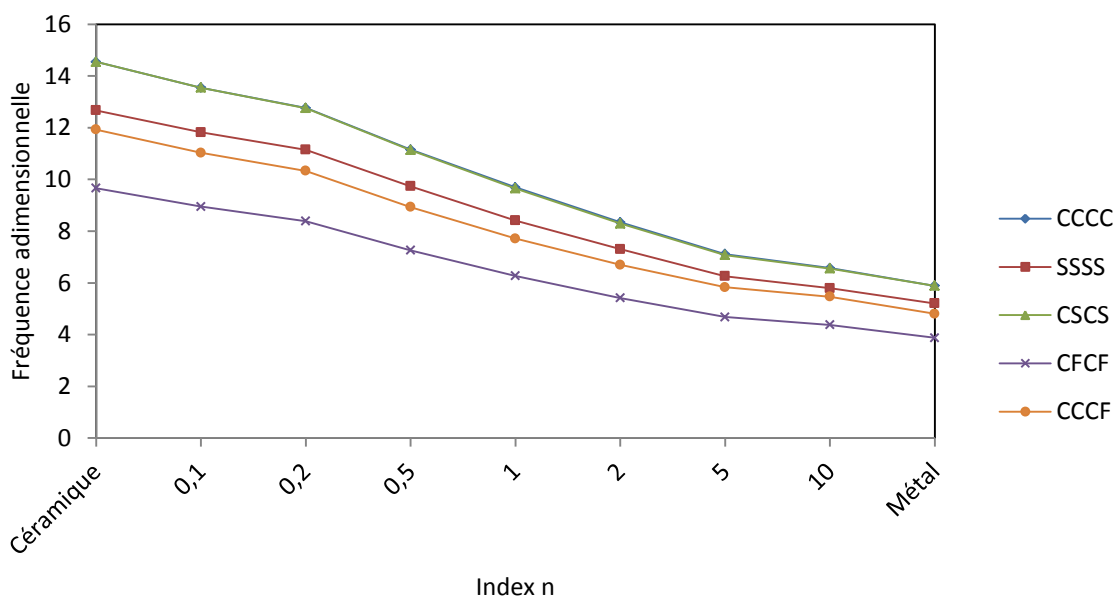


Figure 5.82: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 500K$, $T_t = 500K$, Plaque P-FGM)

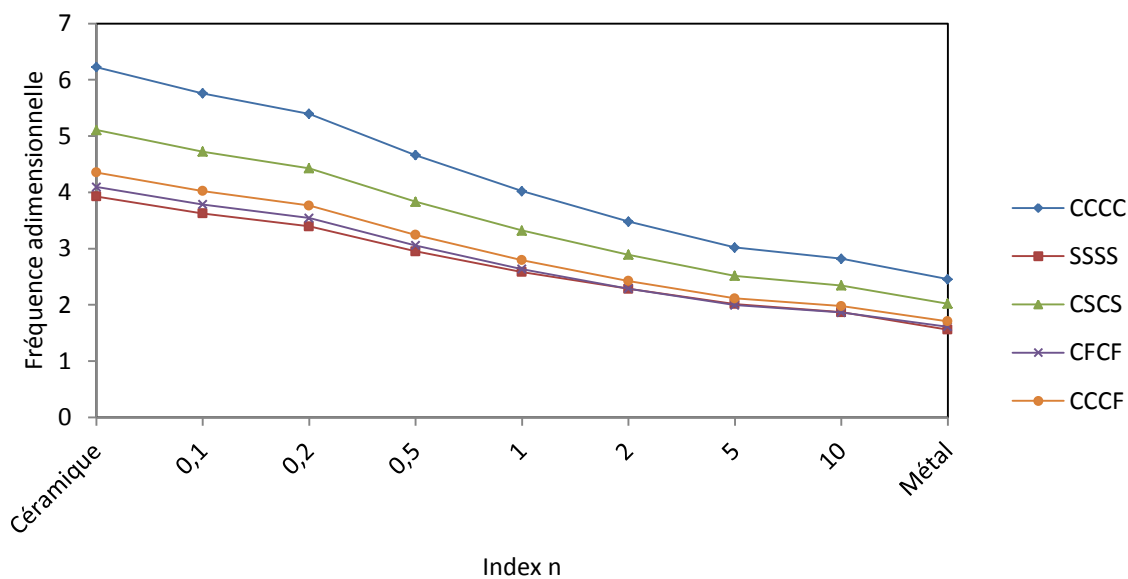


Figure 5.83: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 600K$, $T_t = 600K$, Plaque P-FGM)

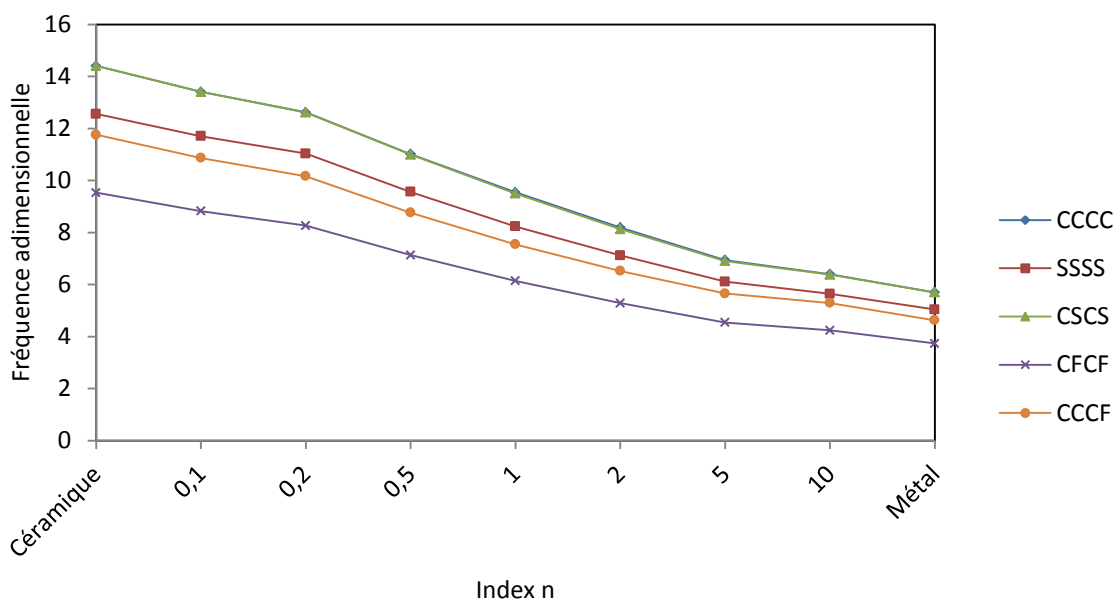


Figure 5.84: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 600K$, $T_t = 600K$, Plaque P-FGM)

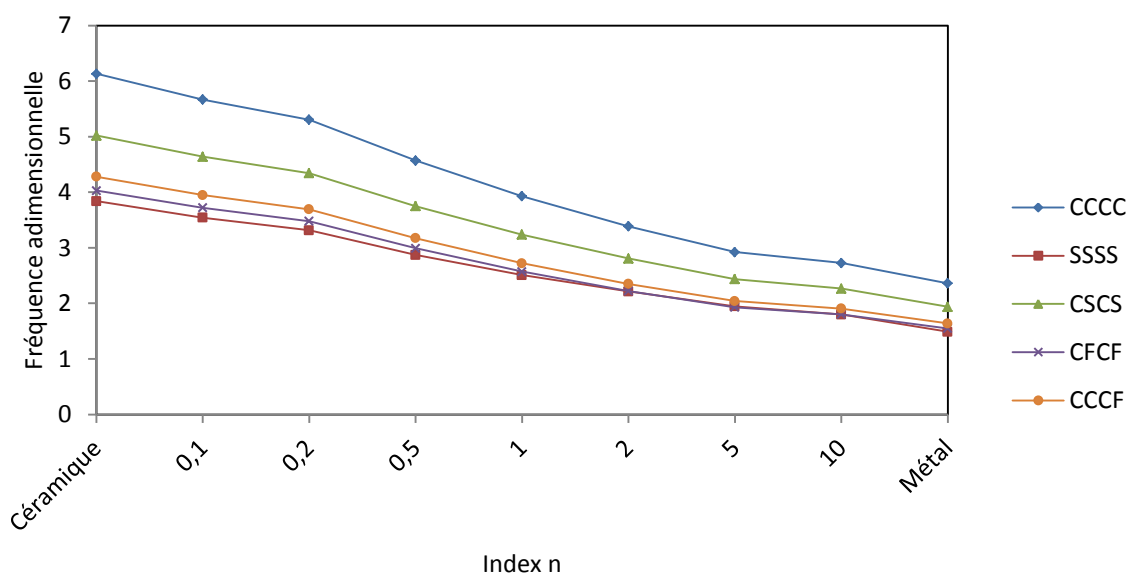


Figure 5.85: Effet de l'index de la fraction volumique sur la fréquence fondamentale ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 700K$, $T_t = 700K$, Plaque P-FGM)

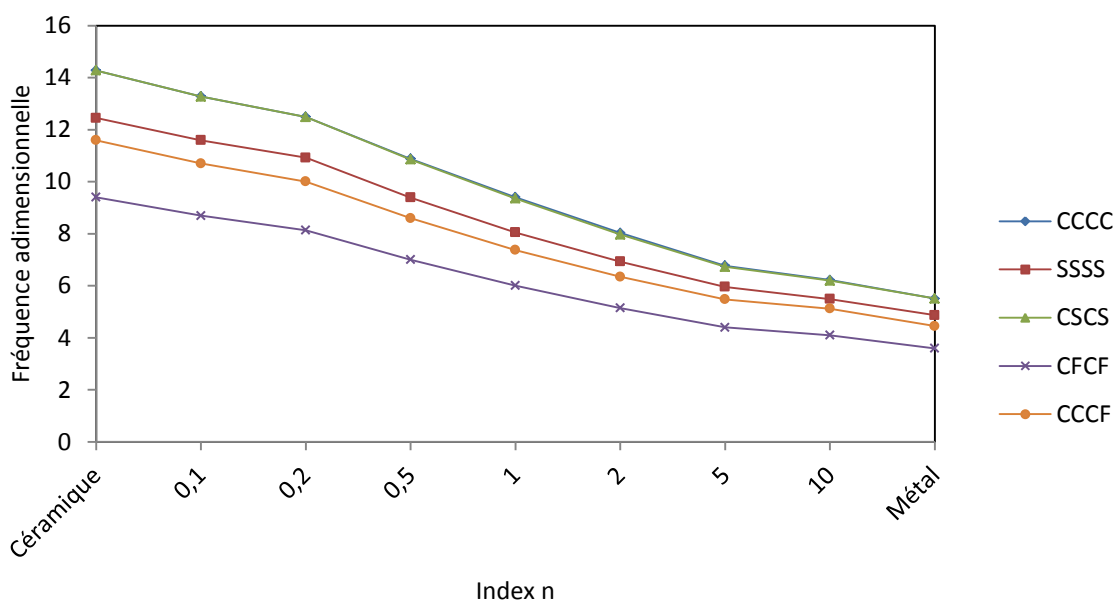


Figure 5.86: Effet de l'index de la fraction volumique sur la 5ème fréquence ($h/a = 0.2$, $a/b = 1$, $T_b = 700K$, $T_t = 700K$, Plaque P-FGM)

En résumé et indépendamment de l'élévation de la température, l'augmentation de la concentration en métal (accroissement de l'index n de la fraction volumique) fait décroître les fréquences de vibration car la rigidité globale de la plaque décroît du fait de l'affaiblissement du module de Young global (puisque dans notre cas, le module de Young de la céramique est trois fois supérieur à celui du métal). Cette diminution des fréquences est accentuée par l'augmentation de l'inertie globale qui est due à l'augmentation de la fraction volumique du métal étant donné que la masse volumique de celui-ci est largement supérieure à celle de la céramique. Le tableau 5.23 montre l'influence de l'inertie globale de la plaque sur les fréquences de vibration lorsque l'index n croît.

Tableau 5.23: Influence de l'inertie globale de la plaque sur les fréquences de vibration

$n = 0.5$		$n = 2$	
$\rho_c = 2370 \text{ kg/m}^3$	$\rho_c = 2370 \text{ kg/m}^3$	$\rho_c = 2370 \text{ kg/m}^3$	$\rho_c = 2370 \text{ kg/m}^3$
$\rho_m = 4429 \text{ kg/m}^3$	$\rho_m = 2370 \text{ kg/m}^3$	$\rho_m = 4429 \text{ kg/m}^3$	$\rho_m = 2370 \text{ kg/m}^3$
Fréquences naturelles (kHz)			
2.05	2.33	1.63	2.05
5.03	5.72	3.92	4.93
5.03	5.72	3.92	4.93
7.97	9.05	6.21	7.81
9.98	11.34	7.75	9.75
9.99	11.35	7.78	9.78

Grâce aux figures 5.87 à 5.96, nous constatons que pour chaque condition aux limites, la diminution des fréquences adimensionnelles lorsque le gradient de la température augmente devient plus évidente pour chaque index de la fraction volumique (concentration des constituants), en passant d'une plaque épaisse à une plaque mince. Il en est de même lorsque la plaque est soumise à une élévation uniforme de température (figures 5.97 à 5.106). Ici la diminution des fréquences adimensionnelles est encore plus flagrante.

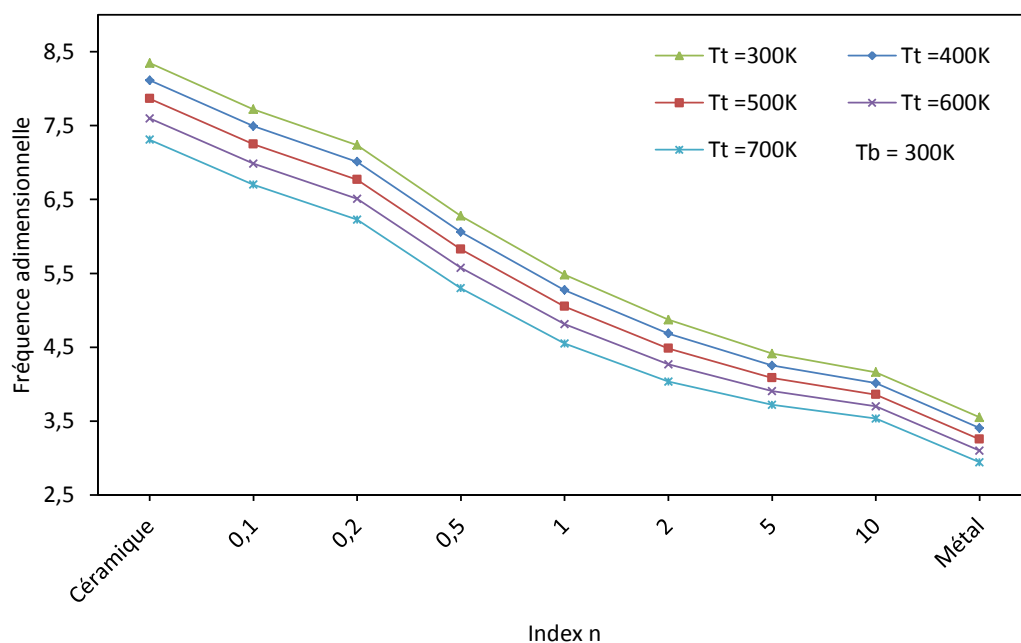


Figure 5.87: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCC, $h/a = 0.05$, $a/b = 1$, gradient de température)

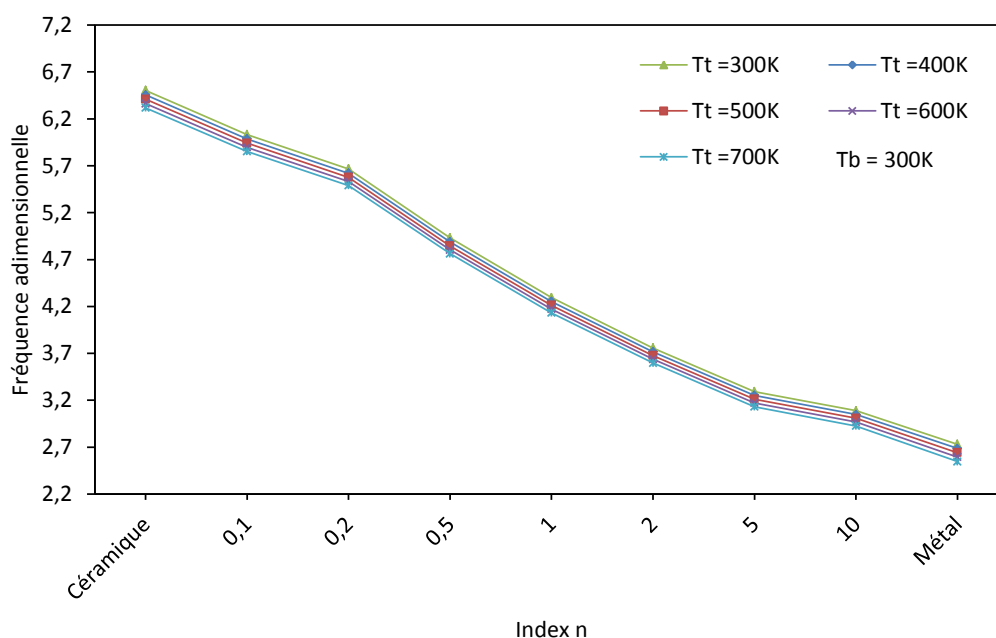


Figure 5.88: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCC, $h/a = 0.2$, $a/b = 1$, gradient de température)

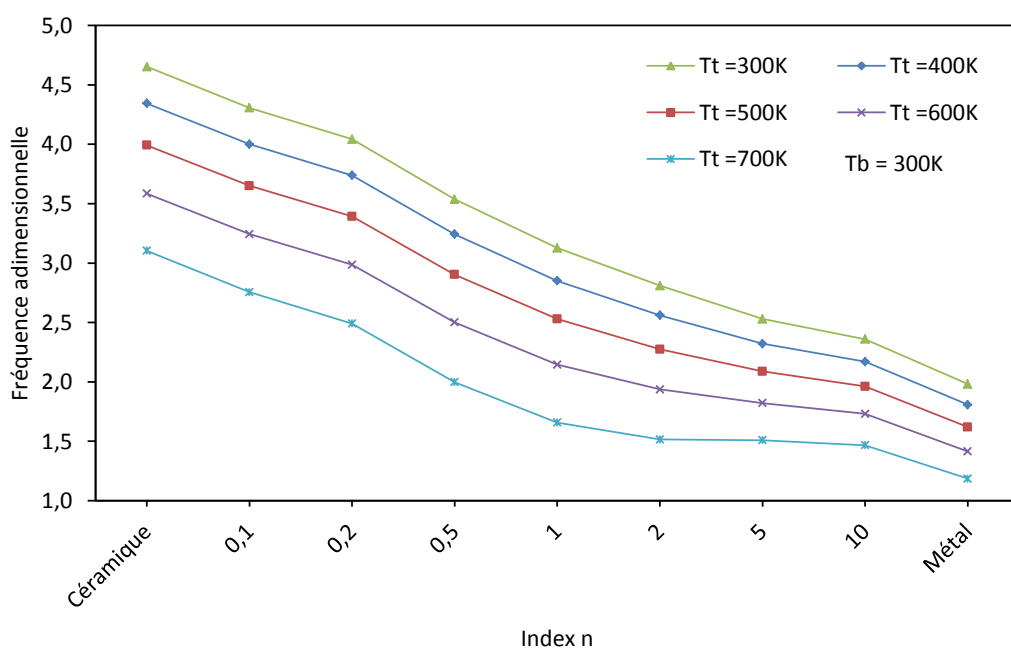


Figure 5.89: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM SSSS, $h/a = 0.05$, $a/b = 1$, gradient de température)

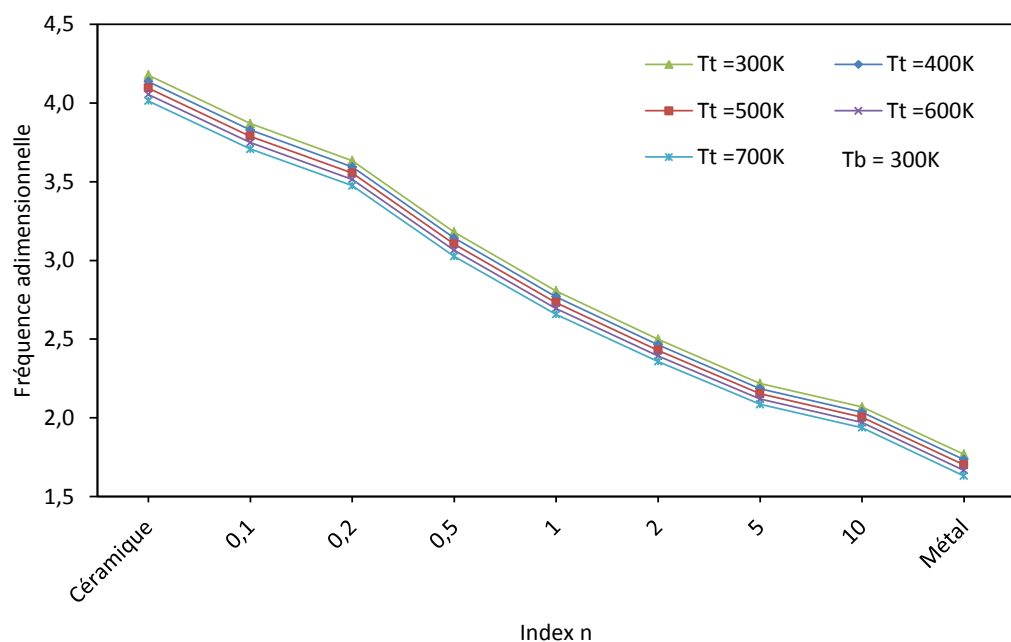


Figure 5.90: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM SSSS, $h/a = 0.2$, $a/b = 1$, gradient de température)

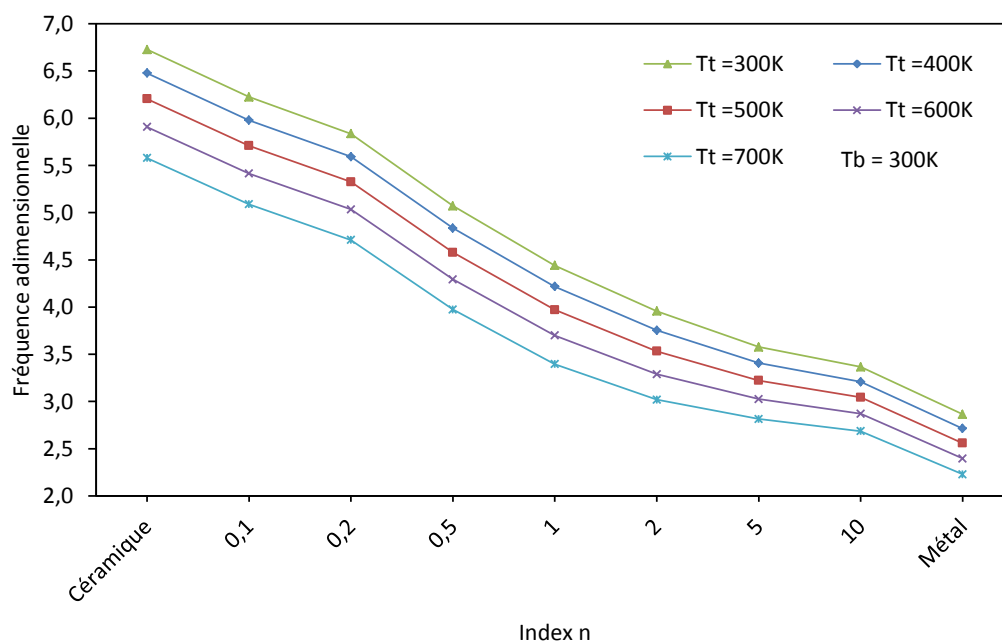


Figure 5.91: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CSCS, $h/a = 0.05$, $a/b = 1$, gradient de température)

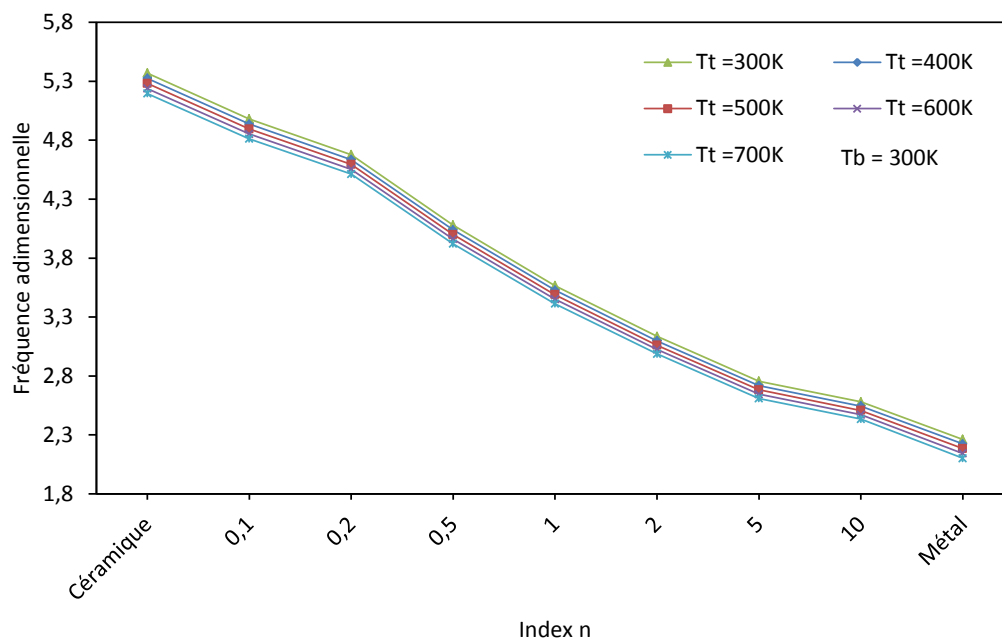


Figure 5.92: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CSCS, $h/a = 0.2$, $a/b = 1$, gradient de température)

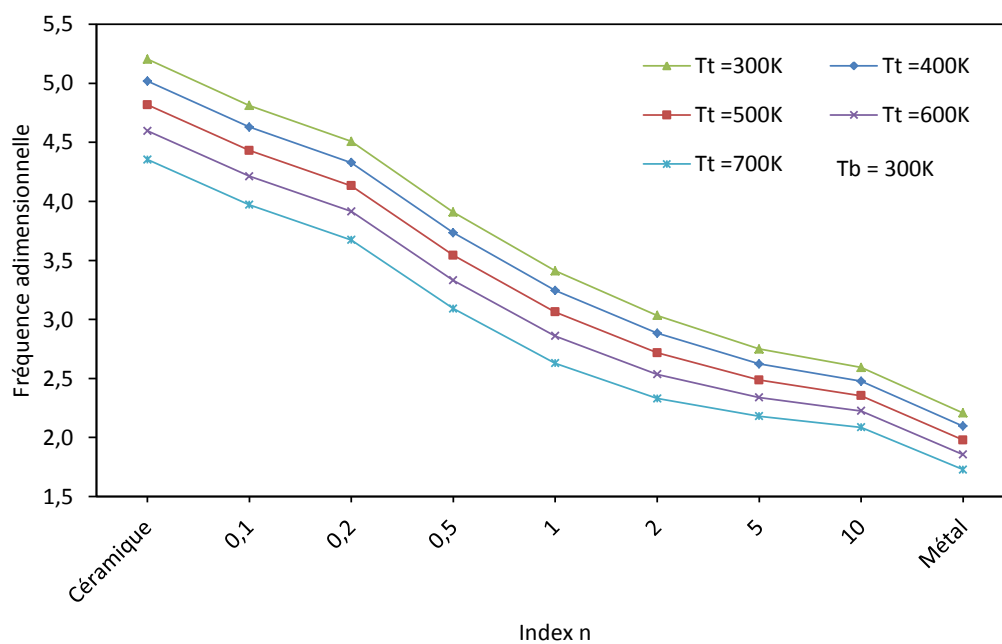


Figure 5.93: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CFCE, $h/a = 0.05$, $a/b = 1$, gradient de température)

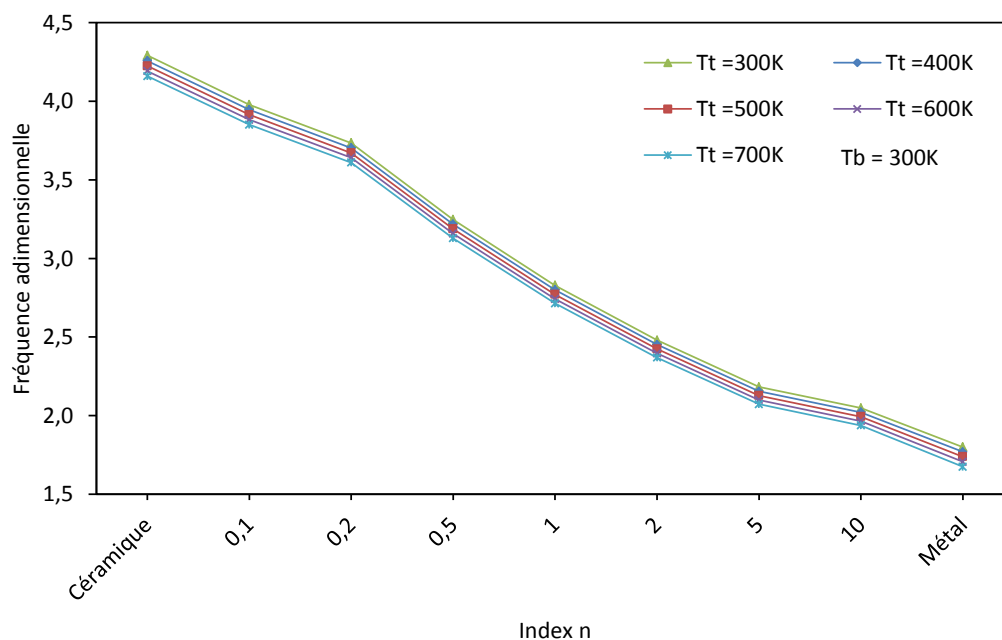


Figure 5.94: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CFCE, $h/a = 0.2$, $a/b = 1$, gradient de température)

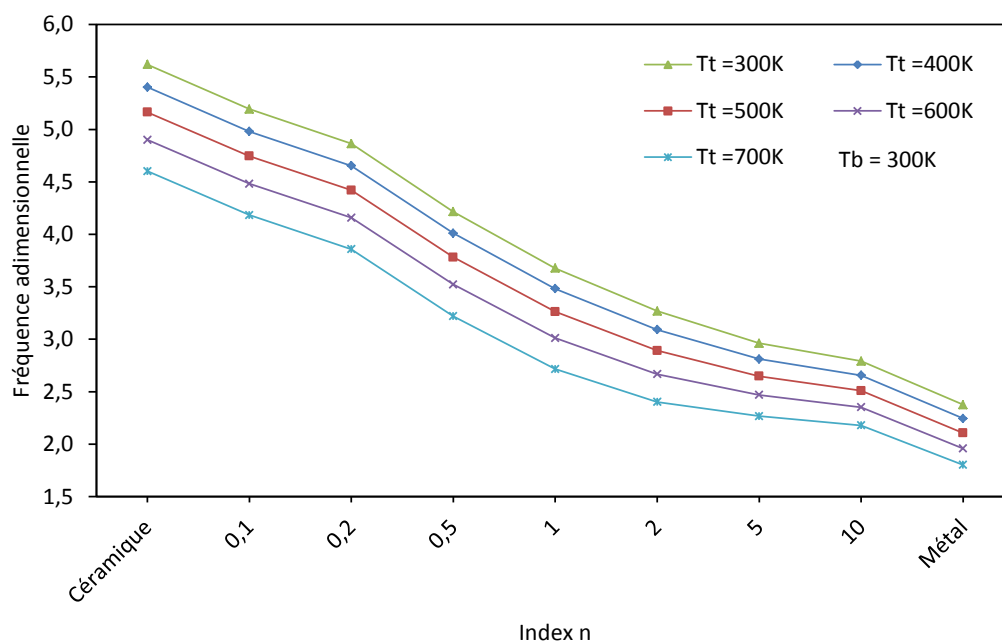


Figure 5.95: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCF, $h/a = 0.05$, $a/b = 1$, gradient de température)

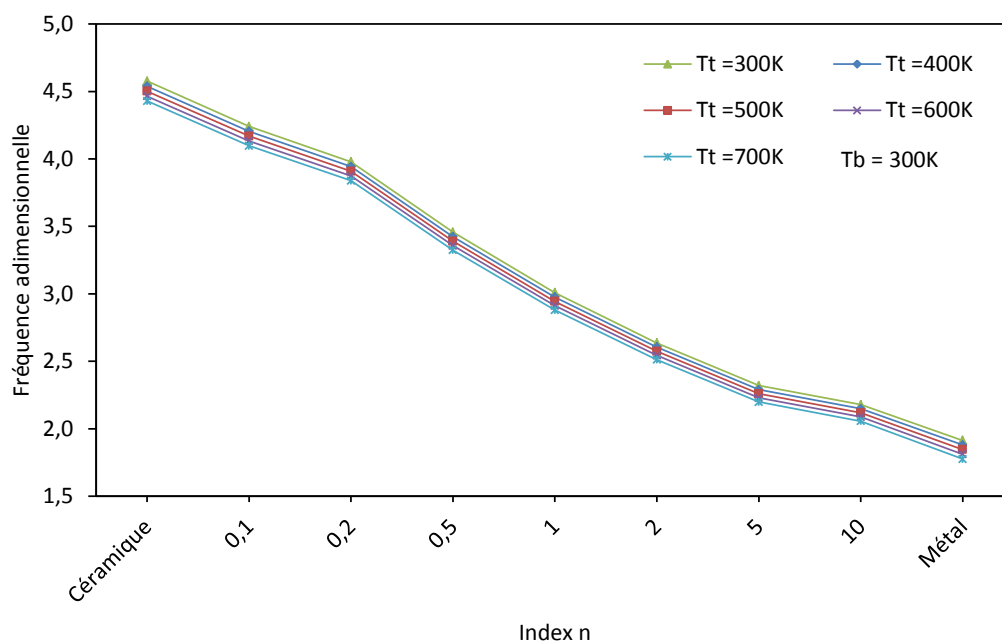


Figure 5.96: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCF, $h/a = 0.2$, $a/b = 1$, gradient de température)

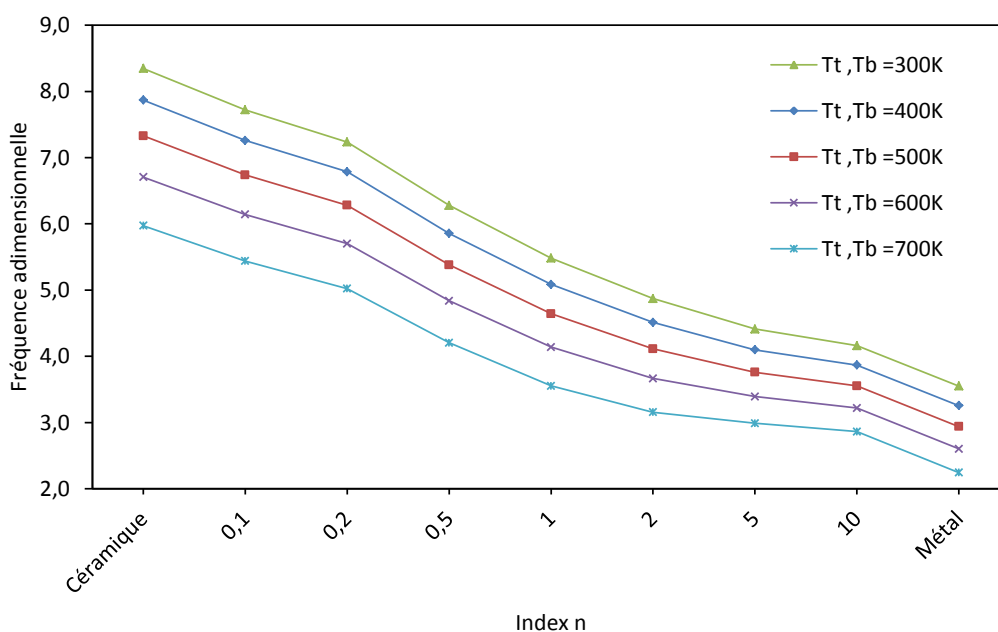


Figure 5.97: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCC, $h/a = 0.05$, $a/b = 1$, température uniforme)

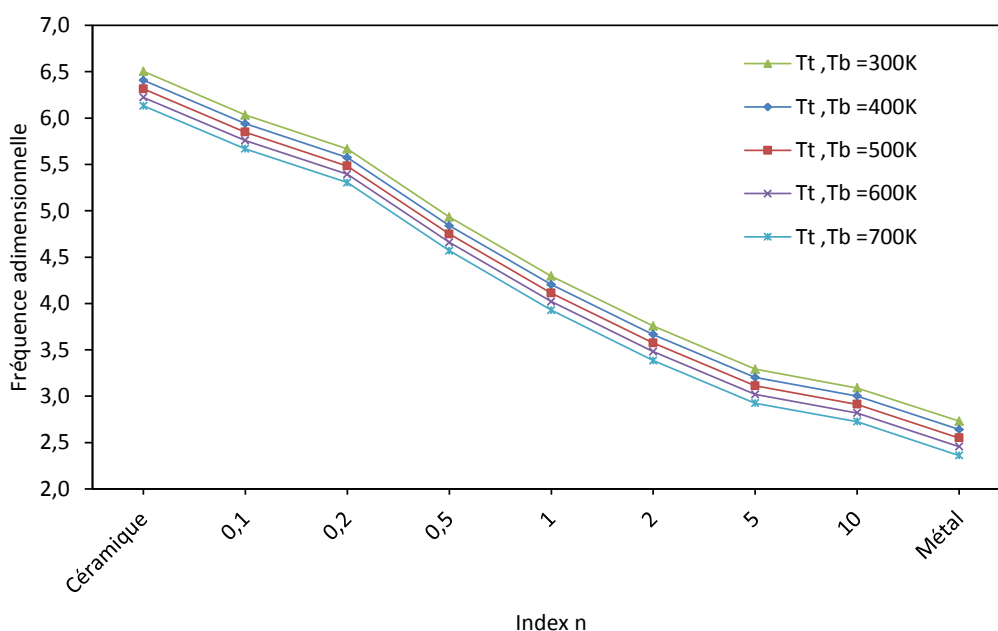


Figure 5.98: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCC, $h/a = 0.2$, $a/b = 1$, température uniforme)

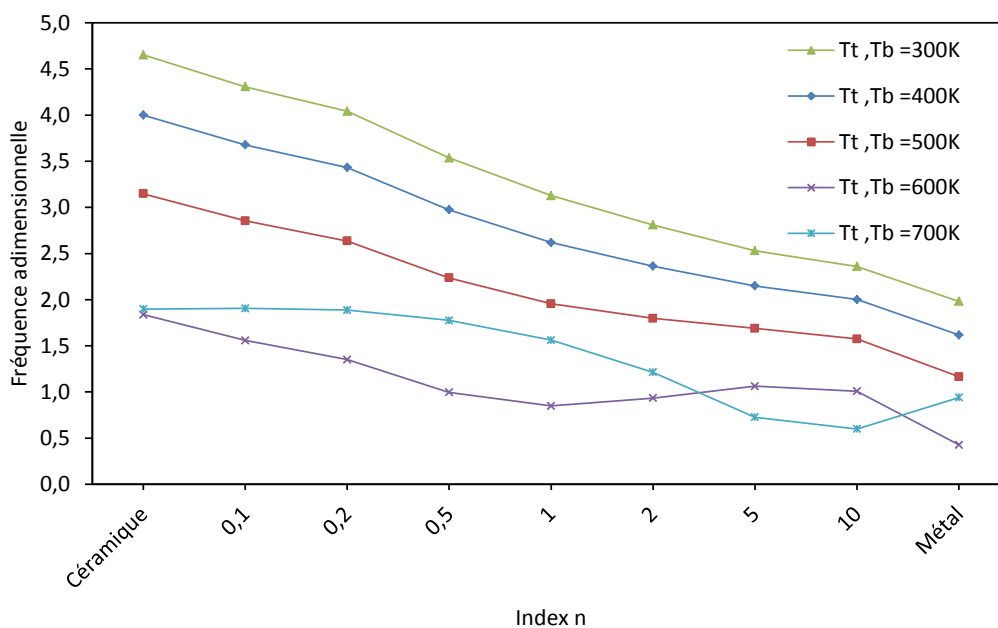


Figure 5.99: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM SSSS, $h/a = 0.05$, $a/b = 1$, température uniforme)

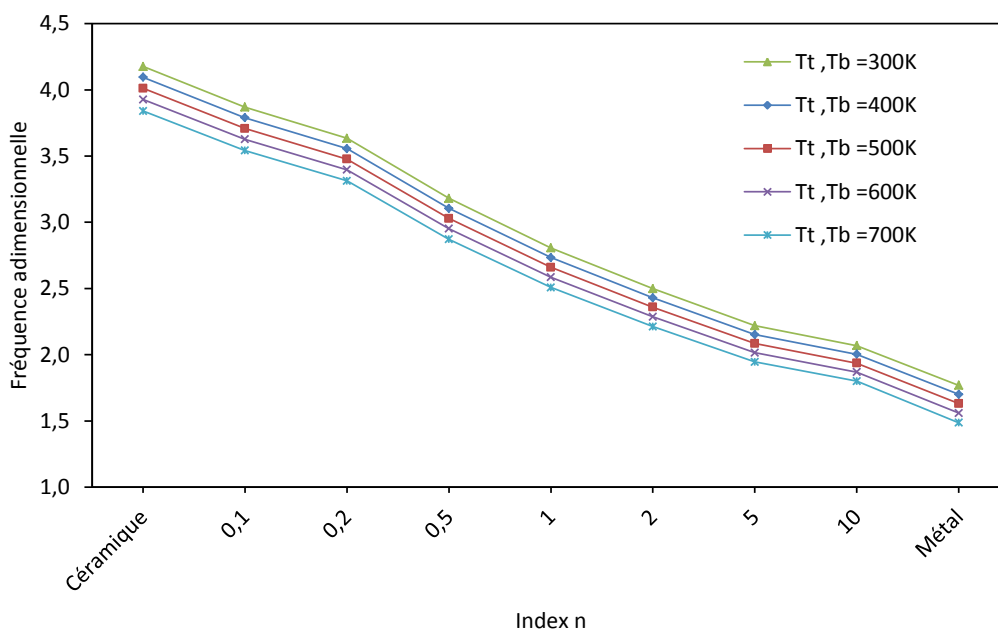


Figure 5.100: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM SSSS, $h/a = 0.2$, $a/b = 1$, température uniforme)

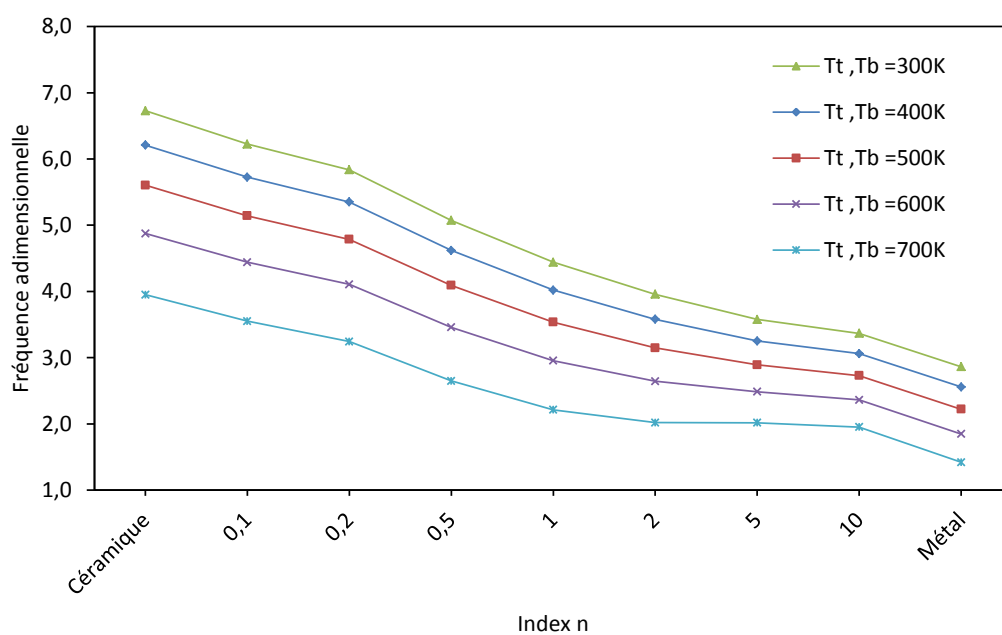


Figure 5.101: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CSCS, $h/a = 0.05$, $a/b = 1$, température uniforme)

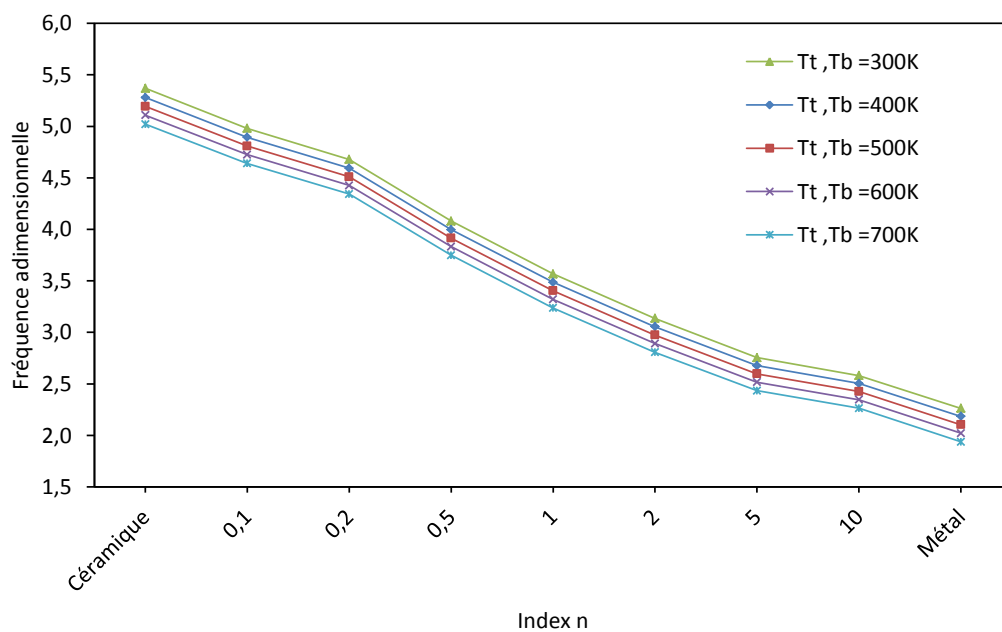


Figure 5.102: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CSCS, $h/a = 0.2$, $a/b = 1$, température uniforme)

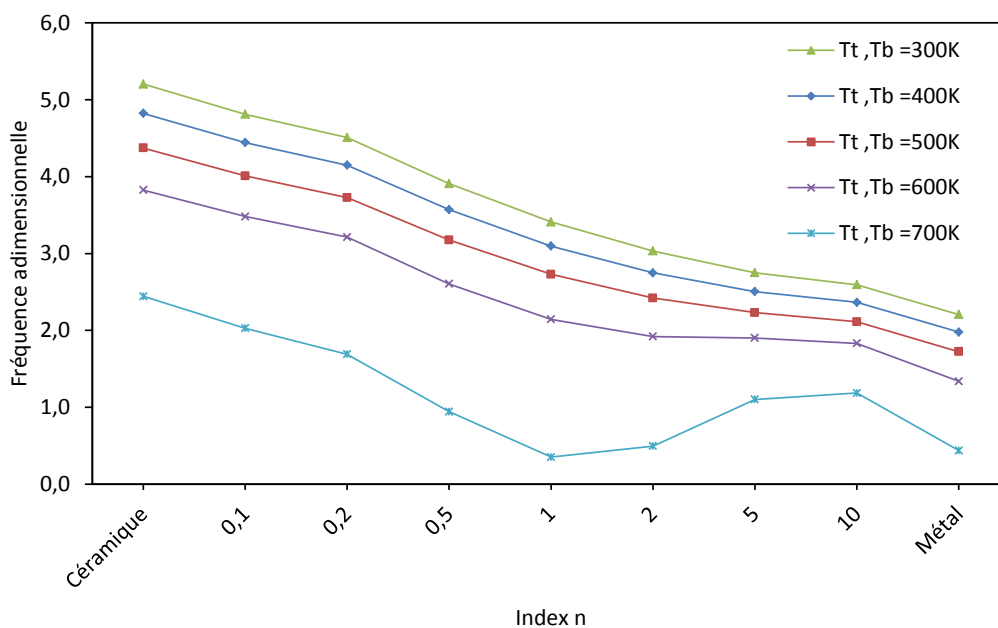


Figure 5.103: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CFCF, $h/a = 0.05$, $a/b = 1$, température uniforme)

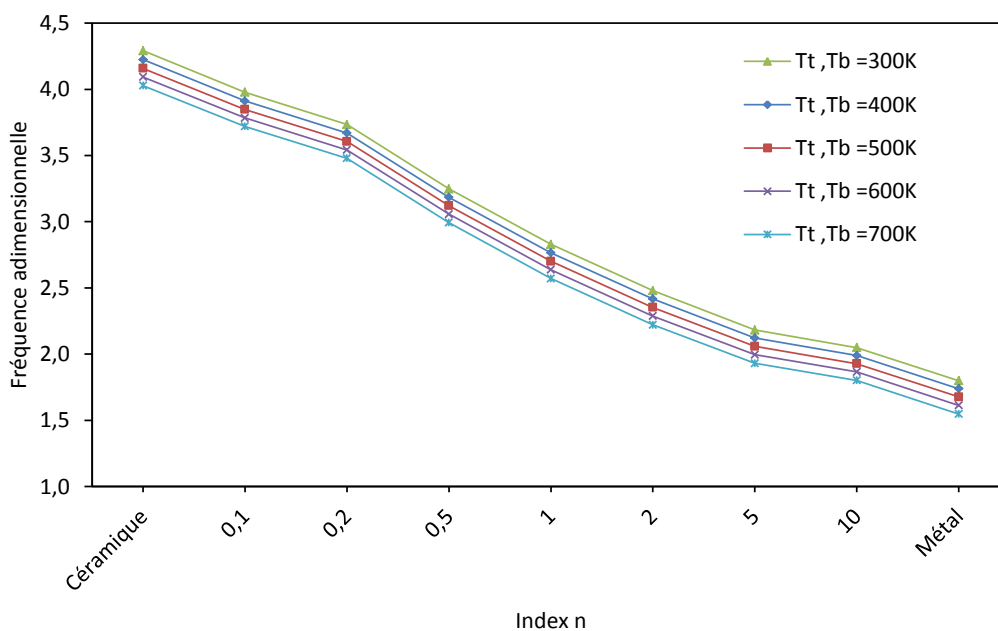


Figure 5.104: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CFCF, $h/a = 0.2$, $a/b = 1$, température uniforme)

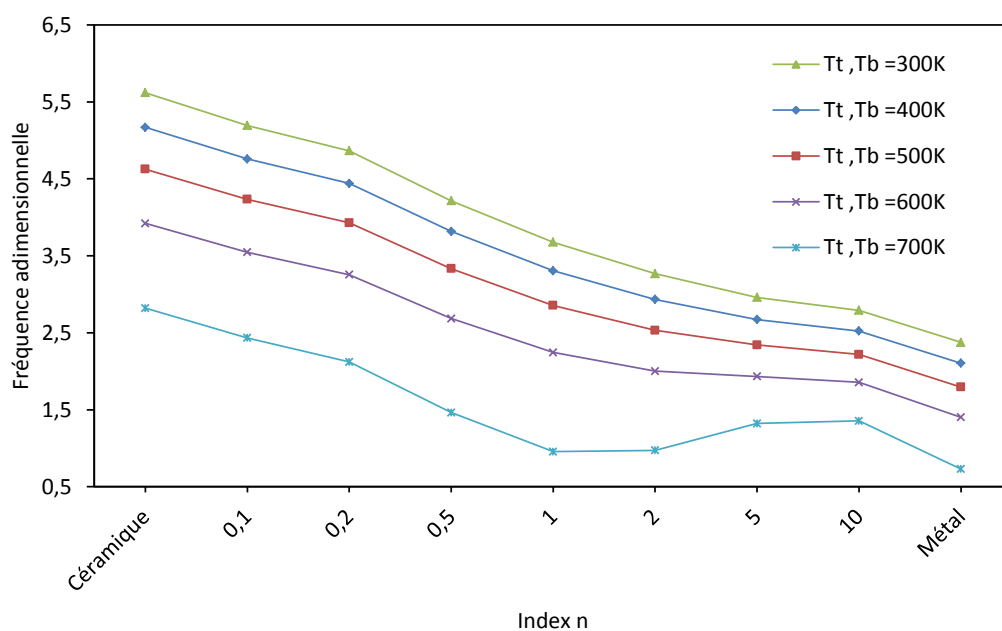


Figure 5.105: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCF, $h/a = 0.05$, $a/b = 1$, température uniforme)

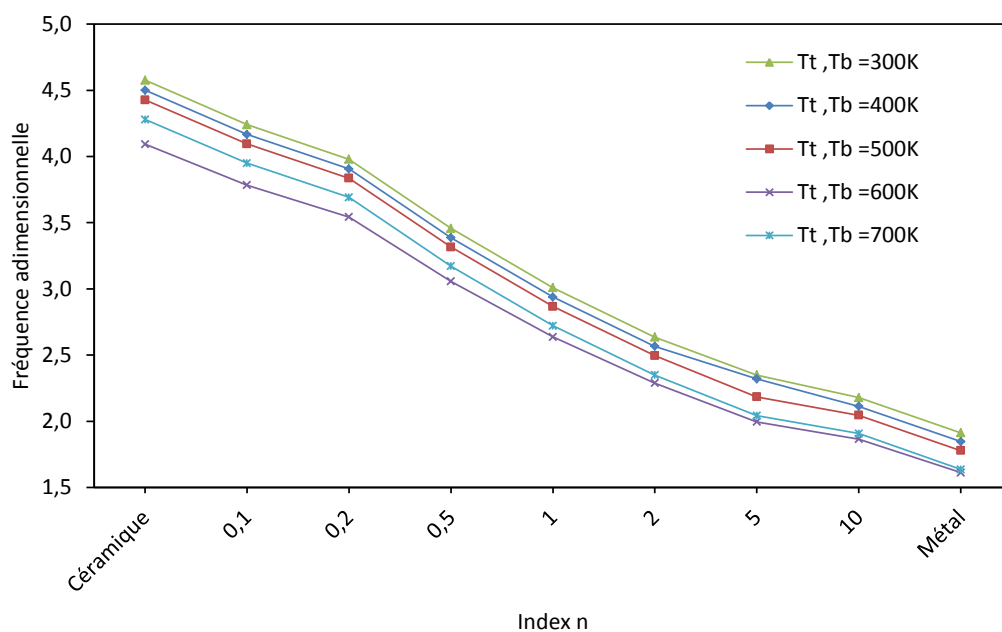


Figure 5.106: Influence de l'index de la fraction volumique sur la fréquence adimensionnelle fondamentale (Plaque P-FGM CCCF, $h/a = 0.2$, $a/b = 1$, température uniforme)

5.5. Conclusion

La méthode analytique développée dans le cadre de ce travail a été validée par comparaison avec des résultats publiés et a elle-même fait l'objet d'une publication internationale.

Des résultats concernant la poutre FGM symétrique soumise à une élévation uniforme de la température ont ensuite été présentés. La comparaison entre les deux variantes de la méthode analytique a montré que lorsque le rapport d'élanement est grand (poutre longue), il n'est pas nécessaire de résoudre les équations différentielles du sixième ordre ; la résolution du système du quatrième ordre sera suffisante. Par contre, lorsque les fréquences d'ordre supérieur sont recherchées (avec une grande précision), il est préférable d'utiliser la première variante de la méthode analytique (résolution des équations différentielles du sixième ordre). Ceci reste valable quelles que soient les conditions aux limites imposées à la poutre puisque tous les cas possibles ont été traités et analysés.

La poutre FGM non symétrique soumise à une élévation uniforme de la température et à un gradient de température dans la direction de l'épaisseur a ensuite été analysée par différentes théories de déformation de la poutre, la méthode de résolution utilisée étant la DQM (Differential Quadrature Method). Le programme de calcul est encore une fois validé par des comparaisons et suite à l'application des différentes théories, il est conclu que quelles que soient les conditions aux limites imposées à la poutre, les fréquences adimensionnelles naturelles diminuent lorsque la température augmente et que l'effet de l'augmentation uniforme de la température est plus important que l'effet d'un gradient de température à travers l'épaisseur. La théorie de déformation d'ordre supérieur développée a été appliquée à la poutre et validée par des comparaisons avec les résultats obtenus en appliquant les autres théories de déformation.

Enfin, nous sommes passés à l'analyse des vibrations libres de la plaque FGM à travers la résolution du problème par la méthode de Ritz. Bien que le code de calcul élaboré traite les cas des plaques E-FGM et S-FGM, seuls les résultats relatifs à la plaque P-FGM ont été présentés (afin de ne pas alourdir plus le chapitre des résultats). Les propriétés thermomécaniques sont considérées dépendantes de la température. Les

déplacements et rotations de la plaque ont été développés en séries polynomiales orthogonales multipliées par des fonctions appropriées satisfaisant les conditions aux limites imposées. Les fréquences propres ont été obtenues grâce à la méthode de Ritz

Une étude paramétrique de la plaque P-FGM a donc été réalisée, tenant compte des variables suivantes :

- l'index n de la fraction volumique (concentration des matériaux constituants),
- le rapport d'élanement (géométrie de la plaque),
- la température imposée à la plaque (uniforme ou non uniforme),
- les conditions aux limites imposées aux bords de la plaque.

L'étude a été menée en tenant compte des différentes théories de déformation en cisaillement de la plaque, y compris la nouvelle théorie développée. Les résultats obtenus et les comparaisons faites ont encore une fois montré la parfaite validité de la présente théorie, ainsi que celle du code de calcul développé.

A partir des résultats exposés, il a été clairement constaté que les fréquences adimensionnelles des vibrations libres des plaques FGM décroissent lorsque l'index de la fraction volumique croît (augmentation de la concentration de métal et diminution de la concentration de céramique).

Il a également été noté que ces fréquences ont une diminution prononcée lorsque la température imposée à la plaque augmente, que cette élévation de température soit uniforme ou bien sous forme d'un gradient à travers l'épaisseur.

La géométrie de la plaque (à travers le rapport d'élanement) est aussi un paramètre à ne pas négliger puisqu'il a été établi que l'élévation de température a plus d'effet sur les fréquences naturelles des plaques minces que sur celles des plaques épaisses.

L'effet des conditions de liaison avec l'extérieur sur les vibrations libres des plaques FGM a également été mis en évidence puisque pour la même géométrie et le même FGM, l'effet de la même élévation de température est différent selon que la plaque soit encadrée, libre, sur appuis simples ou liée par une combinaison de ces trois dernières conditions de liaisons externes.

Les résultats ont révélé que l'effet de la température est plus important dans le cas de la plaque en appuis simples que dans celui de la plaque encastree lorsque celle-ci est mince. Pour la plaque épaisse l'effet de la température est légèrement plus important dans le cas de la plaque en appuis simples que dans celui de la plaque encastree, il reste cependant faible. Une élévation uniforme de la température a plus d'effet sur les fréquences naturelles qu'un gradient de température. Le mode fondamental est plus sensible à l'effet de la température que les modes supérieurs. Une plaque mince avec un index de fraction volumique égal à 1 est plus sensible à la température que celle avec un index égal à 10.

Enfin, nous concluons que toutes ces évolutions des fréquences naturelles des poutres et des plaques FGM sont une conséquence directe de la variation de la rigidité globale et de l'inertie globales de l'élément structural étudié en fonction des paramètres considérés dans notre analyse.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Le comportement dynamique des structures est intimement lié à la forme géométrique, aux propriétés du ou des matériaux constitutants, aux conditions aux limites, aux multiples effets environnementaux et aux théories appliquées pour modéliser le phénomène. En plus, le choix de la bonne méthode de résolution est crucial dans la fiabilité de la prédiction de ce comportement dynamique. Au terme de ce travail, nous pouvons affirmer avoir apporté une contribution à chacun des points sus-cités :

- Différentes formes géométriques ont été étudiées (poutres et plaques) avec différents rapports d'élanement.
- Les éléments structuraux étudiés sont en matériau à gradient fonctionnel métal-céramique et le changement des propriétés globales du FGM à travers l'épaisseur a été pris en considération. De plus, différentes lois de distribution de la matière à travers l'épaisseur ont été analysées (P-FGM, E-FGM, S-FGM).
- De multiples combinaisons de toutes les conditions aux limites concernant les éléments poutres et plaques ont été prises en considération et introduites dans le code de calcul que nous avons élaboré, permettant ainsi d'analyser le comportement vibratoire de ces structures sous différentes liaisons extérieures.
- Quant aux effets environnementaux, il nous a semblé dérisoire d'étudier des structures en FGM (matériaux conçus principalement pour pallier aux problèmes engendrés par des environnements thermiques sévères) sans prendre en considération l'effet des contraintes thermiques sur le comportement vibratoire de ces structures. En effet, notre analyse intègre une élévation uniforme de la température ainsi qu'un gradient de température entre la face inférieure (100% métal) de la plaque ou de la poutre, assujettie à une température relativement basse ou ambiante, et la face supérieure (100% céramique) assujettie à une température bien plus élevée.

- Ayant considéré un FGM en approche monocouche équivalente, différentes théories de déformation ont été appliquées en commençant par la théorie classique applicable aux poutres et aux plaques minces, en passant par la théorie du premier ordre pour les poutres et plaques moyennement épaisses et enfin les théories d'ordre supérieur basées sur des distributions non linéaires des champs de déplacement et de déformation suivant l'épaisseur. Ces théories sont applicables aux poutres et plaques épaisses. De plus nous avons proposé une nouvelle théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur qui présente l'avantage d'une écriture paramétrée et dont la formulation de Reddy en est un cas particulier pour une valeur bien définie du paramètre considéré.
- Concernant les méthodes de résolution, nous en avons présenté et utilisé plusieurs. Tout d'abord, une méthode analytique a été développée dans le cadre de ce travail de recherche. Elle traite la résolution exacte des équations différentielles représentant la poutre FGM symétrique soumise à des contraintes thermiques initiales. Par la suite, la DQM (differential quadrature method) a été adaptée puis appliquée à la résolution des équations de la poutre non symétrique. Enfin, dans les problèmes relatifs à la plaque, nous avons utilisé la méthode de Ritz qui s'est avérée être une méthode très fiable et très efficace.

Nous tenons à préciser que dans ce travail, les équations établies en vertu du principe de Hamilton, ont été développées sous une forme unifiée où la fonction de forme est un paramètre pouvant être changé suivant la théorie appliquée. Ainsi, ces équations restent valables quel que soit le modèle choisi.

Dans le cadre de ce travail, un code de calcul a été élaboré et mis en exécution pour différents cas de structures, différentes conditions aux limites, et des environnements thermiques variés. Les résultats établis et les comparaisons faites ont permis de mettre en exergue plusieurs points :

- La méthode analytique développée est fiable et efficace ; elle donne des solutions exactes au problème de vibrations libres des poutres FGM soumises à des contraintes thermiques initiales et peut servir pour la validation d'éventuelles méthodes d'approximation.

- Le paramètre température est un paramètre crucial qu'il ne faut pas négliger dans l'analyse des vibrations.
- L'élévation de la température a pour effet de diminuer les fréquences de vibration. Cette diminution se fait de plus en plus sentir lorsque la concentration en céramique du mélange constituant la structure est moins importante.
- L'effet de la température est moins important sur les modes supérieurs que sur les modes à basse fréquence.
- La nouvelle théorie de déformation d'ordre supérieur, développée dans le cadre de ce travail, est applicable aux poutres et aux plaques minces et épaisses. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux des autres théories et démontrent sa validité et son efficacité. De plus, le paramétrage de ses équations est un atout faisant d'elle une théorie adaptative.
- Le développement d'équations unifiées, bien que fastidieux, a prouvé son efficacité dans la facilitation du passage d'une théorie de déformation à l'autre par un simple changement de paramètre.
- Le code numérique de calcul développé dans le cadre de ce travail de recherche a été judicieusement paramétré ce qui lui permet d'être très général et de pouvoir traiter de multiples cas de poutres et de plaques minces ou épaisses, isotropes ou FGM, soumises ou pas à des contraintes thermiques initiales et sous des conditions aux limites générales.

Le travail présenté dans le cadre de cette thèse de doctorat peut être développé et enrichi. Nous envisageons, par exemple, de réaliser l'étude du flambage des poutres et des plaques FGM soumises à des contraintes thermiques, sous des conditions aux limites générales. Il est également envisageable d'étendre l'analyse à des éléments structuraux à sections variables et d'élargir l'étude aux coques qui sont des éléments très utilisées et très présents dans les structures spatiales, terrestres et marines. Il sera à ce moment-là probablement nécessaire de passer à la résolution des problèmes posés, en utilisant par exemple la méthode des éléments finis. Il sera aussi très intéressant d'étudier des poutres et des plaques sandwiches et de combiner des matériaux composites stratifiés avec des matériaux à gradient fonctionnel.

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

A	: Surface (m ²)
A_{ij}	: Rigidité en membrane (N/m)
A_{55}^a	: Rigidité de déformation transverse d'ordre supérieur (N/m)
A_{ij}	: Paramètres de Ritz
B_{ij}	: Rigidité de couplage (N.m/m)
B_{ij}^a	: Rigidité de couplage d'ordre supérieur (N.m/m)
B_{ij}	: Paramètres de Ritz
C_{ij}	: Paramètres de Ritz
D_{ij}	: Paramètres de Ritz
D_{ij}	: Rigidité de flexion (N.m ² /m)
D_{ij}^a, D_{ij}^{aa}	: Rigidités de flexion d'ordre supérieur (N.m ² /m)
E	: Module de Young (N/m ²)
E_{ij}	: Paramètres de Ritz
E_c	: Energie cinétique (N.m)
$F_i(x)$: Fonctions admissibles de Ritz
G	: Module de cisaillement (N/m ²)
$G_j(y)$: Fonctions admissibles de Ritz
$I_i(x)$: Fonctions admissibles de Ritz
I_1	: Inertie axiale (Kg.m ⁻¹ /m)
I_2, I_2^a	: Inertie de couplage et inertie de couplage d'ordre supérieur (Kg/m)
I_3, I_3^a, I_3^{aa}	: Inertie de rotation et inerties de rotation d'ordre supérieur respectivement (Kg.m/m)
$J_j(y)$: Fonctions admissibles de Ritz
K	: Module de compressibilité (N/m ²)
K^{ij}	: Sous matrices de \mathbb{K}
$K_{bb}, K_{bi},$ K_{ib}, K_{ii}	: Sous matrices
L	: Longueur de la poutre (m)
M^{ij}	: Sous matrices de \mathbb{M}
$M_x, M_y,$ M_{xy}	: Moments de flexion (N.m/m)
	: Moment de torsion (N.m/m)

M_x^a, M_y^a	: Moments de flexion d'ordre supérieur (N.m/m)
M_x^{Ta}, M_y^{Ta}	: Moments de flexion thermiques d'ordre supérieur (N.m/m)
M_{xy}^a	: Moment de torsion d'ordre supérieur (N.m/m)
M_x^T, M_y^T	: Moments de flexion thermiques (N.m/m)
N_x, N_y	: Résultantes des efforts normaux suivant x et y respectivement (N/m)
N_x^T, N_y^T	: Résultantes des efforts normaux thermiques suivant x et y respectivement (N/m)
P_x^T, P_y^T	: Efforts thermiques d'ordre supérieur (N.m ² /m)
P_x^{Ta}, P_y^{Ta}	: Efforts thermiques d'ordre supérieur (N.m ² /m)
P_x^{Taa}, P_y^{Taa}	
P	: Propriété le long de l'axe z
P_t, P_b, P_{mp}	: Propriétés au niveau des surfaces supérieure, inférieure et médiane de la poutre ou de la plaque FGM respectivement
$P_i(x)$: Fonctions admissibles de Ritz
$P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$: Coefficients de température qui sont propres à chaque constituant
Q_{xz}^a, Q_{yz}^a	: Résultantes des efforts de cisaillement d'ordre supérieur dans les plans (xz) et (yz) respectivement (N/m).
Q_{xz}, Q_{yz}	: Résultantes des efforts de cisaillement dans les plans (xy), (xz) et (yz) respectivement (N/m)
Q_{xy}	
$Q_j(y)$: Fonctions admissibles de Ritz
Q_{ij}	: Coefficients de rigidité réduite (N/m ²)
$R_i(x)$: Fonctions admissibles de Ritz
$S_j(y)$: Fonctions admissibles de Ritz
T	: Température le long de l'axe z (K)
T_t, T_b, T_{mp}	: Températures au niveau des surfaces supérieure, inférieure et médiane de la poutre ou de la plaque FGM respectivement (K)
T_0	: Température de référence (K)
ΔT	: Elévation locale de la température à travers l'épaisseur (K)
U	: Amplitudes des déplacements le long de l'axe x (m)
U_d	: Energie de déformation (N.m)
U_T	: Energie de déformation thermique (N.m)
V	: Amplitudes des déplacements le long de l'axe y (m)
V_i	: Fraction volumique du constituant i
W	: Amplitudes des déplacements le long de l'axe z (m)
$X_i(x)$: Fonctions admissibles de Ritz
$Y_j(y)$: Fonctions admissibles de Ritz

\mathbb{K}	: Matrice de rigidité du système
\mathbb{M}	: Matrice masse du système
\mathcal{Q}	: Vecteur des paramètres de Ritz (coordonnées généralisées)
\mathcal{L}	: Lagrangien du système (N.m)
a	: Longueur de la plaque (m)
b	: Largeur de la poutre ou de la plaque (m)
h	: Epaisseur de la poutre ou de la plaque (m)
k_{44}, k_{55}	: Coefficients de correction de cisaillement
n, p	: Index des fractions volumiques
u	: Déplacement le long de l'axe x d'un point du plan moyen (m)
\bar{u}	: Déplacement le long de l'axe x (m)
v	: Déplacement le long de l'axe y d'un point du plan moyen (m)
\bar{v}	: Déplacement le long de l'axe y (m)
\mathbf{v}	: Volume (m^3)
w	: Déplacement le long de l'axe z d'un point du plan moyen (m)
w_b, w_s	: Déplacements dus à la flexion et au cisaillement respectivement (m)
\bar{w}	: Déplacement le long de l'axe z (m)
x, y, z	: Coordonnées cartésiennes (m)
t	: Variable temps (s)
Ψ_x, Ψ_y	: Amplitudes des rotations de la normale à la section transversale par rapport aux axes y et x respectivement.
α	: Coefficient de dilation thermique ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)
$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$: Coefficients de dilatation thermique globaux dans les directions x et y et dans le plan (xy) respectivement ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)
α, β	: Paramètres de forme de la nouvelle théorie de déformation en cisaillement
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: Déformations de cisaillement dans les plans (xy) , (xz) et (yz) respectivement
δ	: Opérateur de variation
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: Déformations dans les directions des axes x , y et z respectivement
κ	: Conductivité thermique (W/m.K)
κ_m, κ_c	: Conductivité thermique du métal et de la céramique respectivement (W/m.K)
κ_t, κ_b	: Conductivité thermique au niveau des surfaces supérieure et inférieure respectivement (W/m.K)
ν	: Coefficient de Poisson
ρ	: Masse volumique (Kg/m^3)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Contraintes dans les directions des axes x , y et z respectivement (N/m^2)
$\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$: Contraintes de cisaillement dans les plans (xy) , (xz) et (yz) respectivement (N/m^2)
$\sigma_x^T, \sigma_y^T, \sigma_{xy}^T$: Contraintes thermiques dans les directions des axes x , y et z respectivement (N/m^2)

$\varphi(z)$: Fonction de forme du champ de déplacement de la théorie de déformation en cisaillement
ϕ_x, ϕ_y	: Rotations de la normale à la section transversale par rapport aux axes y et x respectivement.
ψ_x, ψ_y	: Rotations de la normale à la section transversale par rapport aux axes y et x respectivement.
ω	: Fréquence circulaire naturelle (Hz)
$\bar{\omega}$: Fréquence naturelle adimensionnelle

CL	Conditions aux limites
CC	: Poutre encastree-encastree
CF	: Poutre encastree-libre
CS	: Poutre encastree-appuyee
FF	: Poutre libre-libre
SF	: Poutre appuyee -libre
SS	: Poutre appuyee- appuyee
CCCC	: Plaque avec 4 bords encastres
CCCF	: Plaque avec 3 bords encastres et 1 libre
CFCF	: Plaque avec 2 bords encastres et 2 libres
CSCS	: Plaque avec 2 bords encastres et 2 en appuis simples
FFFF	: Plaque avec 4 bords libres
SSSS	: Plaque avec 4 bords en appuis simples

CBT	Théorie classique des poutres (classical beam theory)
FSDBT	Théorie de déformation des poutres du premier ordre
PSDBT	Théorie de déformation parabolique des poutres
TSDBT	Théorie de déformation trigonométrique des poutres
ESDBT	Théorie de déformation exponentielle des poutres
HSDBT	Théorie de déformation hyperbolique des poutres

CPT	Théorie classique des plaques (classical plate theory)
FSDPT	Théorie de déformation des plaques du premier ordre
PSDPT	Théorie de déformation parabolique des plaques
TSDPT	Théorie de déformation trigonométrique des plaques
ESDPT	Théorie de déformation exponentielle des plaques
HSDPT	Théorie de déformation des plaques d'ordre supérieur

APPENDICE B

TABLEAUX DES RESULTATS DE LA PLAQUE FGM

Tableau B.1: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CCCC, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$, gradient de température: $T_b = 300K$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_i (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	8.3467	8.1138	7.8649	7.5974	7.3085
	2	16.7088	16.3982	16.0746	15.7354	15.3780
	3	16.7088	16.3983	16.0746	15.7354	15.3781
	4	24.2392	23.8723	23.4950	23.1045	22.6979
	5	29.3085	28.9103	28.5037	28.0859	27.6537
0.1	1	7.7208	7.4925	7.2479	6.9846	6.6995
	2	15.4590	15.1560	14.8396	14.5074	14.1570
	3	15.4591	15.1561	14.8396	14.5074	14.1571
	4	22.4297	22.0728	21.7050	21.3236	20.9262
	5	27.1233	26.7366	26.3409	25.9337	25.5118
0.2	1	7.2355	7.0107	6.7694	6.5091	6.2269
	2	14.4895	14.1921	13.8810	13.5541	13.2090
	3	14.4896	14.1922	13.8811	13.5542	13.2091
	4	21.0253	20.6758	20.3150	19.9405	19.5499
	5	25.4267	25.0485	24.6610	24.2615	23.8475
0.5	1	6.2776	6.0605	5.8268	5.5739	5.2986
	2	12.5733	12.2878	11.9883	11.6730	11.3396
	3	12.5736	12.2880	11.9886	11.6732	11.3399
	4	18.2470	17.9125	17.5663	17.2063	16.8303
	5	22.0683	21.7071	21.3360	20.9527	20.5549
1	1	5.4811	5.2748	5.0526	4.8120	4.5500
	2	10.9743	10.7032	10.4188	10.1194	9.8033
	3	10.9747	10.7036	10.4192	10.1198	9.8036
	4	15.9221	15.6047	15.2758	14.9338	14.5772
	5	19.2531	18.9103	18.5576	18.1933	17.8156
2	1	4.8730	4.6852	4.4839	4.2677	4.0342
	2	9.7421	9.4933	9.2333	8.9613	8.6762
	3	9.7424	9.4936	9.2337	8.9617	8.6765
	4	14.1177	13.8245	13.5218	13.2086	12.8838
	5	17.0590	16.7411	16.4148	16.0791	15.7330
5	1	4.4128	4.2526	4.0841	3.9066	3.7198
	2	8.7959	8.5780	8.3533	8.1219	7.8836
	3	8.7961	8.5782	8.3536	8.1221	7.8838
	4	12.7174	12.4558	12.1885	11.9155	11.6365
	5	15.3458	15.0588	14.7667	14.4696	14.1672
10	1	4.1614	4.0136	3.8599	3.7006	3.5355
	2	8.2918	8.0864	7.8764	7.6623	7.4443
	3	8.2920	8.0865	7.8765	7.6624	7.4444
	4	11.9856	11.7356	11.4818	11.2245	10.9640
	5	14.4607	14.1840	13.9042	13.6213	13.3354
Métal	1	3.5510	3.4055	3.2551	3.1003	2.9420
	2	7.1001	6.8889	6.6724	6.4515	6.2271
	3	7.1001	6.8889	6.6724	6.4515	6.2271
	4	10.2901	10.0269	9.7573	9.4826	9.2035
	5	12.4353	12.1404	11.8385	11.5307	11.2180

Tableau B.2: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, SSSS, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$, gradient de température: $T_b = 300\text{K}$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_i (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	4.6531	4.3433	3.9916	3.5855	3.1032
	2	11.5211	11.1779	10.8104	10.4150	9.9875
	3	11.5211	11.1779	10.8104	10.4151	9.9876
	4	18.2093	17.8291	17.4304	17.0103	16.5655
	5	22.8397	22.4352	22.0153	21.5769	21.1168
0.1	1	4.3062	3.9999	3.6507	3.2443	2.7555
	2	10.6561	10.3193	9.9580	9.5684	9.1462
	3	10.6562	10.3194	9.9581	9.5685	9.1464
	4	16.8453	16.4732	16.0823	15.6699	15.2327
	5	21.1282	20.7336	20.3230	19.8938	19.4428
0.2	1	4.0423	3.7392	3.3921	2.9857	2.4909
	2	9.9870	9.6551	9.2984	8.9133	8.4951
	3	9.9871	9.6553	9.2987	8.9136	8.4955
	4	15.7919	15.4259	15.0411	14.6345	14.2031
	5	19.8032	19.4159	19.0124	18.5901	18.1460
0.5	1	3.5362	3.2423	2.9032	2.5008	1.9974
	2	8.6714	8.3508	8.0052	7.6309	7.2231
	3	8.6717	8.3512	8.0058	7.6317	7.2241
	4	13.7247	13.3724	13.0011	12.6081	12.1907
	5	17.1936	16.8217	16.4335	16.0263	15.5978
1	1	3.1278	2.8503	2.5292	2.1458	1.6581
	2	7.5828	7.2784	6.9501	6.5944	6.2069
	3	7.5831	7.2789	6.9509	6.5956	6.2085
	4	12.0148	11.6804	11.3279	10.9553	10.5599
	5	15.0259	14.6729	14.3042	13.9178	13.5117
2	1	2.8097	2.5604	2.2745	1.9370	1.5150
	2	6.7524	6.4755	6.1787	5.8595	5.5147
	3	6.7527	6.4761	6.1797	5.8609	5.5165
	4	10.6991	10.3930	10.0719	9.7346	9.3796
	5	13.3584	13.0339	12.6964	12.3447	11.9777
5	1	2.5301	2.3213	2.0880	1.8222	1.5088
	2	6.1164	5.8804	5.6319	5.3703	5.0946
	3	6.1165	5.8808	5.6326	5.3712	5.0958
	4	9.6651	9.3986	9.1230	8.8383	8.5442
	5	12.0671	11.7816	11.4883	11.1873	10.8782
10	1	2.3595	2.1703	1.9623	1.7308	1.4666
	2	5.7620	5.5447	5.3186	5.0840	4.8410
	3	5.7621	5.5449	5.3190	5.0845	4.8417
	4	9.0926	8.8429	8.5871	8.3256	8.0589
	5	11.3672	11.0973	10.8221	10.5423	10.2582
Métal	1	1.9821	1.8081	1.6198	1.4144	1.1859
	2	4.9040	4.6919	4.4727	4.2476	4.0175
	3	4.9040	4.6919	4.4728	4.2477	4.0177
	4	7.7452	7.4936	7.2357	6.9727	6.7061
	5	9.7100	9.4317	9.1466	8.8562	8.5617

Tableau B.3: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CSCS, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$, gradient de température: $T_b = 300K$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_i (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	6.7276	6.4768	6.2043	5.9063	5.5781
	2	12.6316	12.2994	11.9462	11.5690	11.1642
	3	15.7984	15.4861	15.1594	14.8158	14.4528
	4	21.3099	20.9401	20.5564	20.1563	19.7366
	5	23.9261	23.5255	23.1110	22.6796	22.2283
0.1	1	6.2242	5.9776	5.7089	5.4143	5.0887
	2	11.6862	11.3607	11.0139	10.6427	10.2437
	3	14.6176	14.3125	13.9926	13.6558	13.2995
	4	19.7206	19.3598	18.9847	18.5930	18.1817
	5	22.1420	21.7512	21.3461	20.9240	20.4818
0.2	1	5.8354	5.5920	5.3263	5.0342	4.7104
	2	10.9545	10.6340	10.2920	9.9256	9.5310
	3	13.7024	13.4026	13.0880	12.7562	12.4049
	4	18.4893	18.1352	17.7666	17.3812	16.9762
	5	20.7609	20.3774	19.9794	19.5642	19.1290
0.5	1	5.0721	4.8364	4.5781	4.2928	3.9746
	2	9.5139	9.2047	8.8740	8.5186	8.1351
	3	11.8960	11.6078	11.3045	10.9841	10.6442
	4	16.0603	15.7203	15.3656	14.9941	14.6033
	5	18.0379	17.6700	17.2871	16.8871	16.4674
1	1	4.4408	4.2169	3.9712	3.6995	3.3957
	2	8.3181	8.0245	7.7104	7.3730	7.0090
	3	10.3907	10.1169	9.8288	9.5245	9.2022
	4	14.0343	13.7114	13.3744	13.0216	12.6510
	5	15.7654	15.4159	15.0521	14.6722	14.2742
2	1	3.9565	3.7533	3.5318	3.2888	3.0195
	2	7.3998	7.1321	6.8472	6.5434	6.2184
	3	9.2295	8.9784	8.7154	8.4394	8.1492
	4	12.4617	12.1644	11.8553	11.5335	11.1979
	5	13.9945	13.6721	13.3379	12.9908	12.6294
5	1	3.5777	3.4060	3.2225	3.0259	2.8146
	2	6.6900	6.4602	6.2196	5.9680	5.7047
	3	8.3312	8.1121	7.8857	7.6520	7.4108
	4	11.2282	10.9657	10.6961	10.4193	10.1352
	5	12.5977	12.3120	12.0191	11.7190	11.4115
10	1	3.3660	3.2091	3.0438	2.8698	2.6864
	2	6.3014	6.0885	5.8683	5.6409	5.4068
	3	7.8495	7.6438	7.4331	7.2179	6.9985
	4	10.5727	10.3242	10.0709	9.8132	9.5517
	5	11.8556	11.5845	11.3085	11.0282	10.7439
Métal	1	2.8640	2.7143	2.5582	2.3962	2.2286
	2	5.3757	5.1659	4.9499	4.7286	4.5032
	3	6.7159	6.5067	6.2920	6.0730	5.8507
	4	9.0574	8.8017	8.5398	8.2731	8.0025
	5	10.1564	9.8768	9.5906	9.2993	9.0039

Tableau B.4: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CFCF, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$, gradient de température: $T_b = 300\text{K}$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_i (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	5.2041	5.0190	4.8176	4.5971	4.3536
	2	6.2207	5.9351	5.6181	5.2625	4.8580
	3	10.2484	9.8034	9.3130	8.7678	8.1554
	4	14.0640	13.7751	13.4720	13.1524	12.8136
	5	15.4578	15.1356	14.7972	14.4398	14.0604
0.1	1	4.8118	4.6298	4.4312	4.2130	3.9708
	2	5.7463	5.4645	5.1506	4.7965	4.3906
	3	9.4678	9.0294	8.5446	8.0034	7.3920
	4	13.0075	12.7251	12.4282	12.1145	11.7815
	5	14.2891	13.9739	13.6421	13.2910	12.9177
0.2	1	4.5079	4.3281	4.1316	3.9151	3.6737
	2	5.3793	5.1006	4.7888	4.4355	4.0276
	3	8.8639	8.4306	7.9499	7.4113	6.7998
	4	12.1883	11.9107	11.6185	11.3093	10.9807
	5	13.3837	13.0738	12.7469	12.4006	12.0318
0.5	1	3.9086	3.7344	3.5429	3.3304	3.0914
	2	4.6573	4.3857	4.0796	3.7291	3.3176
	3	7.6748	7.2536	6.7834	6.2523	5.6425
	4	10.5707	10.3036	10.0215	9.7223	9.4038
	5	11.5977	11.2990	10.9830	10.6473	10.2890
1	1	3.4114	3.2455	3.0627	2.8592	2.6287
	2	4.0589	3.7994	3.5057	3.1669	2.7642
	3	6.6882	6.2864	5.8365	5.3260	4.7356
	4	9.2230	8.9691	8.7009	8.4164	8.1138
	5	10.1105	9.8263	9.5254	9.2057	8.8647
2	1	3.0336	2.8828	2.7177	2.5351	2.3301
	2	3.6037	3.3679	3.1024	2.7982	2.4394
	3	5.9356	5.5706	5.1643	4.7065	4.1815
	4	8.1878	7.9551	7.7105	7.4527	7.1804
	5	8.9676	8.7069	8.4322	8.1421	7.8348
5	1	2.7498	2.6227	2.4863	2.3394	2.1799
	2	3.2615	3.0637	2.8464	2.6050	2.3326
	3	5.3678	5.0611	4.7273	4.3618	3.9577
	4	7.3969	7.1947	6.9851	6.7680	6.5431
	5	8.0942	7.8675	7.6321	7.3878	7.1341
10	1	2.5931	2.4770	2.3542	2.2243	2.0865
	2	3.0740	2.8948	2.7012	2.4909	2.2602
	3	5.0598	4.7814	4.4833	4.1633	3.8183
	4	6.9727	6.7832	6.5887	6.3895	6.1859
	5	7.6280	7.4158	7.1976	6.9737	6.7445
Métal	1	2.2077	2.0956	1.9782	1.8557	1.7278
	2	2.6141	2.4447	2.2642	2.0716	1.8649
	3	4.3098	4.0461	3.7674	3.4734	3.1633
	4	5.9603	5.7678	5.5699	5.3676	5.1619
	5	6.5164	6.3015	6.0803	5.8542	5.6239

Tableau B.5: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CCCF, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$, gradient de température: $T_b = 300\text{K}$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_i (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	5.6190	5.4027	5.1647	4.9000	4.6014
	2	9.3014	8.9563	8.5784	8.1612	7.6966
	3	14.5234	14.2257	13.9134	13.5839	13.2346
	4	17.5359	17.1178	16.6749	16.2036	15.6997
	5	18.3586	18.0064	17.6380	17.2507	16.8413
0.1	1	5.1937	4.9806	4.7452	4.4821	4.1829
	2	8.5974	8.2579	7.8849	7.4716	7.0093
	3	13.4307	13.1397	12.8336	12.5102	12.1667
	4	16.2162	15.8071	15.3728	14.9098	14.4139
	5	16.9757	16.6315	16.2709	15.8911	15.4889
0.2	1	4.8644	4.6537	4.4202	4.1580	3.8577
	2	8.0522	7.7170	7.3477	6.9371	6.4761
	3	12.5837	12.2976	11.9962	11.6773	11.3382
	4	15.1930	14.7907	14.3628	13.9060	13.4162
	5	15.9038	15.5658	15.2110	14.8367	14.4399
0.5	1	4.2155	4.0107	3.7820	3.5224	3.2199
	2	6.9779	6.6526	6.2921	5.8888	5.4322
	3	10.9116	10.6361	10.3451	10.0363	9.7072
	4	13.1732	12.7855	12.3721	11.9296	11.4541
	5	13.7877	13.4626	13.1203	12.7584	12.3740
1	1	3.6774	3.4819	3.2627	3.0120	2.7159
	2	6.0857	5.7757	5.4313	5.0447	4.6053
	3	9.5186	9.2566	8.9797	8.6859	8.3730
	4	11.4913	11.1231	10.7301	10.3096	9.8582
	5	12.0234	11.7143	11.3886	11.0443	10.6789
2	1	3.2683	3.0905	2.8922	2.6669	2.4026
	2	5.4049	5.1230	4.8117	4.4647	4.0739
	3	8.4481	8.2080	7.9553	7.6888	7.4070
	4	10.2017	9.8652	9.5081	9.1284	8.7241
	5	10.6638	10.3799	10.0821	9.7690	9.4390
5	1	2.9610	2.8113	2.6481	2.4684	2.2666
	2	4.8908	4.6527	4.3954	4.1162	3.8117
	3	7.6301	7.4212	7.2046	6.9800	6.7472
	4	9.2209	8.9308	8.6278	8.3117	7.982
	5	9.6206	9.3722	9.1151	8.8493	8.5743
10	1	2.7917	2.6553	2.5091	2.3514	2.1794
	2	4.6109	4.3937	4.1626	3.9165	3.6540
	3	7.1918	6.9961	6.7951	6.5890	6.3783
	4	8.6950	8.4252	8.1465	7.8594	7.5645
	5	9.0672	8.8335	8.5939	8.3487	8.0983
Métal	1	2.3757	2.2449	2.1062	1.9590	1.8015
	2	3.9301	3.7220	3.5031	3.2735	3.0335
	3	6.1467	5.9478	5.7433	5.5342	5.3214
	4	7.4331	7.1637	6.8861	6.6018	6.3122
	5	7.7579	7.5190	7.2736	7.0228	6.7677

Tableau B.6: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CCCC, $a/b = 1$, $h/a = 0.2$, gradient de température: $T_b = 300\text{K}$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_i (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	6.5043	6.4558	6.4088	6.3627	6.3172
	2	11.5120	11.4325	11.3560	11.2818	11.2089
	3	11.5120	11.4325	11.3560	11.2818	11.2089
	4	14.8586	14.7752	14.6971	14.6234	14.5531
	5	14.8586	14.7752	14.6971	14.6234	14.5531
0.1	1	6.0332	5.9865	5.9410	5.8965	5.8523
	2	10.6831	10.6067	10.5330	10.4614	10.3909
	3	10.6836	10.6071	10.5334	10.4617	10.3912
	4	13.8528	13.7712	13.6946	13.6222	13.5529
	5	13.8533	13.7716	13.6951	13.6226	13.5533
0.2	1	5.6661	5.6206	5.5763	5.5328	5.4896
	2	10.0348	9.9606	9.8889	9.8190	9.7502
	3	10.0361	9.9618	9.8901	9.8201	9.7512
	4	13.0623	12.9819	12.9062	12.8345	12.7658
	5	13.0636	12.9831	12.9075	12.8357	12.7669
0.5	1	4.9313	4.8880	4.8458	4.8040	4.7625
	2	8.7317	8.6613	8.5929	8.5259	8.4596
	3	8.7347	8.6642	8.5957	8.5286	8.4623
	4	11.4544	11.3755	11.3008	11.2296	11.1609
	5	11.4573	11.3783	11.3036	11.2323	11.1636
1	1	4.2948	4.2533	4.2125	4.1721	4.1317
	2	7.5915	7.5236	7.4571	7.3917	7.3267
	3	7.5954	7.5274	7.4608	7.3953	7.3302
	4	9.9953	9.9167	9.8418	9.7697	9.6997
	5	9.9989	9.9202	9.8452	9.7731	9.7030
2	1	3.7574	3.7171	3.6772	3.6375	3.5977
	2	6.6067	6.5397	6.4737	6.4081	6.3427
	3	6.6102	6.5431	6.4770	6.4114	6.3459
	4	8.6599	8.5806	8.5041	8.4296	8.3566
	5	8.6630	8.5837	8.5071	8.4326	8.3595
5	1	3.2921	3.2518	3.2116	3.1714	3.1310
	2	5.7388	5.6704	5.6021	5.5337	5.4649
	3	5.7407	5.6722	5.6038	5.5354	5.4666
	4	7.4404	7.3593	7.2796	7.2007	7.1223
	5	7.4421	7.3609	7.2811	7.2023	7.1238
10	1	3.0896	3.0490	3.0084	2.9675	2.9265
	2	5.3851	5.3158	5.2463	5.1764	5.1060
	3	5.3860	5.3166	5.2471	5.1772	5.1068
	4	6.9113	6.8284	6.7460	6.6637	6.5812
	5	6.9121	6.8292	6.7467	6.6644	6.5818
Métal	1	2.7305	2.6860	2.6405	2.5940	2.5465
	2	4.8119	4.7368	4.6600	4.5815	4.5013
	3	4.8119	4.7368	4.6600	4.5815	4.5013
	4	6.2418	6.1548	6.0663	5.9765	5.8853
	5	6.2418	6.1548	6.0663	5.9765	5.8853

Tableau B.7: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, SSSS, $a/b = 1$, $h/a = 0.2$, gradient de température: $T_b = 300\text{K}$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_t (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	4.1770	4.1359	4.0952	4.0543	4.0130
	2	9.2033	9.1333	9.0654	8.9988	8.9327
	3	9.2033	9.1333	9.0654	8.9988	8.9327
	4	11.2772	11.2111	11.1487	11.0893	11.0322
	5	12.9359	12.8651	12.7991	12.7370	12.6780
0.1	1	3.8689	3.8287	3.7887	3.7485	3.7079
	2	8.5220	8.4556	8.3909	8.3272	8.2639
	3	8.5225	8.4561	8.3913	8.3276	8.2643
	4	10.4903	10.4262	10.3656	10.3079	10.2522
	5	12.0788	12.0093	11.9443	11.8830	11.8246
0.2	1	3.6341	3.5944	3.5549	3.5153	3.4752
	2	7.9875	7.9237	7.8612	7.7996	7.7383
	3	7.9888	7.9249	7.8625	7.8009	7.7396
	4	9.8712	9.8086	9.7493	9.6926	9.6378
	5	11.4071	11.3384	11.2740	11.2131	11.1549
0.5	1	3.1803	3.1418	3.1035	3.0650	3.0260
	2	6.9142	6.8548	6.7963	6.7383	6.6804
	3	6.9174	6.8580	6.7996	6.7417	6.6838
	4	8.6052	8.5450	8.4874	8.4321	8.3784
	5	10.0357	9.9680	9.9042	9.8435	9.7699
1	1	2.8060	2.7689	2.7320	2.6948	2.6573
	2	5.9937	5.9374	5.8818	5.8264	5.7708
	3	5.9978	5.9417	5.8861	5.8309	5.7755
	4	7.4503	7.3912	7.3344	7.2793	7.2255
	5	8.7656	8.6878	8.6114	8.5361	8.4612
2	1	2.4992	2.4640	2.4289	2.3937	2.3581
	2	5.2478	5.1937	5.1398	5.0860	5.0319
	3	5.2516	5.1976	5.1439	5.0902	5.0363
	4	6.4068	6.3480	6.2907	6.2347	6.1794
	5	7.6133	7.5453	7.4796	7.4157	7.3531
5	1	2.2186	2.1853	2.1521	2.1188	2.0854
	2	4.6509	4.5969	4.5428	4.4885	4.4338
	3	4.6531	4.5992	4.5452	4.4910	4.4364
	4	5.4940	5.4343	5.3754	5.3168	5.2584
	5	6.5534	6.4835	6.4148	6.3469	6.2794
10	1	2.0684	2.0358	2.0032	1.9706	1.9379
	2	4.3925	4.3375	4.2822	4.2266	4.1705
	3	4.3936	4.3386	4.2834	4.2278	4.1717
	4	5.1107	5.0495	4.9885	4.9274	4.8659
	5	6.0943	6.0226	5.9513	5.8801	5.8087
Métal	1	1.7687	1.7349	1.7006	1.6657	1.6306
	2	3.8752	3.8113	3.7456	3.6782	3.6089
	3	3.8752	3.8113	3.7456	3.6782	3.6090
	4	4.6180	4.5519	4.4845	4.4157	4.3455
	5	5.5133	5.4374	5.3602	5.2815	5.2014

Tableau B.8: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CSCS, $a/b = 1$, $h/a = 0.2$, gradient de température: $T_b = 300\text{K}$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_t (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	5.3689	5.3246	5.2813	5.2385	5.1958
	2	9.5715	9.5000	9.4307	9.3629	9.2958
	3	10.9527	10.8757	10.8015	10.7293	10.6584
	4	14.2116	14.1139	14.0201	13.9291	13.8398
	5	14.8586	14.7752	14.6970	14.6232	14.5527
0.1	1	4.9796	4.9367	4.8946	4.8529	4.8112
	2	8.8706	8.8023	8.7359	8.6707	8.6061
	3	10.1644	10.0902	10.0186	9.9488	9.8801
	4	13.1846	13.0908	13.0005	12.9126	12.8263
	5	13.8523	13.7709	13.6945	13.6222	13.5529
0.2	1	4.6780	4.6360	4.5948	4.5539	4.5130
	2	8.3226	8.2566	8.1923	8.1290	8.0661
	3	9.5489	9.4768	9.4070	9.3388	9.2716
	4	12.3834	12.2924	12.2045	12.1188	12.0345
	5	13.0601	12.9801	12.9048	12.8334	12.7649
0.5	1	4.0797	4.0394	3.9998	3.9604	3.9209
	2	7.2245	7.1625	7.1017	7.0417	6.9818
	3	8.3142	8.2456	8.1789	8.1134	8.0486
	4	10.7778	10.6914	10.6076	10.5255	10.4443
	5	11.4416	11.3637	11.2899	11.2194	11.1514
1	1	3.5669	3.5282	3.4899	3.4517	3.4133
	2	6.2781	6.2189	6.1606	6.1028	6.0449
	3	7.2363	7.1701	7.1052	7.0413	6.9777
	4	9.3793	9.2959	9.2145	9.1343	9.0547
	5	9.9642	9.8871	9.8134	9.7423	9.6732
2	1	3.1356	3.0982	3.0611	3.0240	2.9868
	2	5.4946	5.4372	5.3804	5.3237	5.2668
	3	6.3062	6.2410	6.1766	6.1127	6.0489
	4	8.1779	8.0957	8.0146	7.9343	7.8541
	5	8.6168	8.5393	8.4643	8.3911	8.3192
5	1	2.7554	2.7188	2.6823	2.6457	2.6089
	2	4.8414	4.7840	4.7265	4.6690	4.6110
	3	5.4836	5.4173	5.3512	5.2849	5.2183
	4	7.1193	7.0351	6.9512	6.8672	6.7827
	5	7.4126	7.3332	7.2550	7.1776	7.1006
10	1	2.5805	2.5441	2.5076	2.4710	2.4342
	2	4.5590	4.5007	4.4422	4.3835	4.3243
	3	5.1435	5.0765	5.0094	4.9419	4.8740
	4	6.6809	6.5956	6.5101	6.4242	6.3377
	5	6.8991	6.8176	6.7364	6.6553	6.5738
Métal	1	2.2624	2.2234	2.1836	2.1431	2.1018
	2	4.0285	3.9628	3.8954	3.8264	3.7557
	3	4.5865	4.5142	4.4403	4.3649	4.2879
	4	5.9562	5.8635	5.7687	5.6719	5.5728
	5	6.2418	6.1546	6.0659	5.9755	5.8834

Tableau B.9: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CFCF, $a/b = 1$, $h/a = 0.2$, gradient de température: $T_b = 300\text{K}$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_i (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	4.2914	4.2575	4.2245	4.1920	4.1596
	2	4.9233	4.8785	4.8343	4.7901	4.7455
	3	7.2466	7.2024	7.1606	7.1207	7.0821
	4	7.7002	7.6312	7.5631	7.4952	7.4269
	5	9.9333	9.8633	9.7957	9.7300	9.6653
0.1	1	3.9781	3.9455	3.9135	3.8820	3.8506
	2	4.5574	4.5143	4.4716	4.4288	4.3857
	3	6.7491	6.7053	6.6638	6.6242	6.5858
	4	7.1207	7.0549	6.9895	6.9243	6.8585
	5	9.2149	9.1476	9.0825	9.0191	8.9565
0.2	1	3.7343	3.7024	3.6713	3.6405	3.6098
	2	4.2722	4.2303	4.1886	4.1469	4.1047
	3	6.3647	6.3212	6.2799	6.2403	6.2020
	4	6.6686	6.6049	6.5416	6.4782	6.4141
	5	8.6524	8.5871	8.5238	8.4620	8.4009
0.5	1	3.2474	3.2172	3.1874	3.1579	3.1284
	2	3.7028	3.6631	3.6235	3.5836	3.5432
	3	5.5927	5.5495	5.5084	5.4688	5.4303
	4	5.7674	5.7076	5.6478	5.5877	5.5269
	5	7.5218	7.4599	7.3996	7.3403	7.2816
1	1	2.8285	2.7995	2.7709	2.7424	2.7138
	2	3.2142	3.1763	3.1383	3.1000	3.0612
	3	4.8937	4.8506	4.8093	4.7693	4.7302
	4	5.0008	4.9439	4.8870	4.8295	4.7713
	5	6.5343	6.4746	6.4161	6.3584	6.3009
2	1	2.4797	2.4518	2.4241	2.3964	2.3687
	2	2.8104	2.7741	2.7377	2.7009	2.6636
	3	4.2414	4.1984	4.1566	4.1158	4.0757
	4	4.3821	4.3279	4.2733	4.2183	4.1625
	5	5.6854	5.6268	5.5688	5.5113	5.4538
5	1	2.1821	2.1547	2.1272	2.0998	2.0722
	2	2.4738	2.4387	2.4034	2.3677	2.3317
	3	3.6134	3.5701	3.5275	3.4854	3.4435
	4	3.8879	3.8353	3.7824	3.7291	3.6752
	5	4.9439	4.8843	4.8248	4.7652	4.7052
10	1	2.0486	2.0210	1.9934	1.9657	1.9378
	2	2.3266	2.2918	2.2568	2.2214	2.1858
	3	3.3283	3.2849	3.2418	3.1987	3.1555
	4	3.6688	3.6162	3.5633	3.5100	3.4562
	5	4.6416	4.5813	4.5209	4.4601	4.3988
Métal	1	1.7996	1.7693	1.7383	1.7065	1.6741
	2	2.0458	2.0080	1.9694	1.9299	1.8897
	3	2.9799	2.9365	2.8925	2.8480	2.8030
	4	3.2169	3.1583	3.0982	3.0367	2.9739
	5	4.1427	4.0772	4.0102	3.9417	3.8717

Tableau B.10: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CCCF, $a/b = 1$, $h/a = 0.2$, gradient de température: $T_b = 300\text{K}$, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_i (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	4.5765	4.5388	4.5018	4.4652	4.4287
	2	7.0876	7.0282	6.9700	6.9122	6.8544
	3	9.5672	9.5112	9.4585	9.4084	9.3604
	4	10.2095	10.1373	10.0677	9.9999	9.9332
	5	12.2761	12.1863	12.0993	12.0143	11.9304
0.1	1	4.2404	4.2040	4.1683	4.1328	4.0973
	2	6.5628	6.5059	6.4500	6.3944	6.3387
	3	8.9205	8.8650	8.8126	8.7628	8.7149
	4	9.4691	9.3998	9.3327	9.2673	9.2028
	5	11.3732	11.2873	11.2040	11.1223	11.0415
0.2	1	3.9789	3.9434	3.9085	3.8739	3.8391
	2	6.1521	6.0971	6.0428	5.9887	5.9345
	3	8.4197	8.3645	8.3123	8.2626	8.2147
	4	8.8903	8.8229	8.7577	8.6939	8.6309
	5	10.6696	10.5865	10.5057	10.4263	10.3477
0.5	1	3.4571	3.4234	3.3900	3.3568	3.3234
	2	5.3307	5.2789	5.2275	5.1762	5.1245
	3	7.4104	7.3555	7.3034	7.2534	7.2051
	4	7.7273	7.6635	7.6013	7.5402	7.4796
	5	9.2641	9.1859	9.1094	9.0339	8.9589
1	1	3.0085	2.9762	2.9442	2.9121	2.8798
	2	4.6261	4.5768	4.5276	4.4784	4.4287
	3	6.4925	6.4377	6.3852	6.3345	6.2852
	4	6.7119	6.6505	6.5902	6.5307	6.4714
	5	8.0526	7.9777	7.9040	7.8310	7.7582
2	1	2.6359	2.6048	2.5739	2.5429	2.5116
	2	4.0458	3.9984	3.9510	3.9034	3.8553
	3	5.6361	5.5810	5.5276	5.4756	5.4246
	4	5.8402	5.7798	5.7202	5.6609	5.6017
	5	7.0368	6.9636	6.8912	6.8191	6.7468
5	1	2.3198	2.2894	2.2591	2.2286	2.1978
	2	3.5662	3.5197	3.4730	3.4260	3.3786
	3	4.8156	4.7597	4.7049	4.6506	4.5966
	4	5.0802	5.0189	4.9577	4.8964	4.8347
	5	6.1647	6.0917	6.0187	5.9455	5.8719
10	1	2.1784	2.1481	2.1177	2.0871	2.0563
	2	3.3595	3.3128	3.2659	3.2186	3.1710
	3	4.4443	4.3880	4.3320	4.2762	4.2203
	4	4.7694	4.7075	4.6453	4.5828	4.5198
	5	5.7982	5.7240	5.6496	5.5748	5.4988
Métal	1	1.9128	1.8796	1.8457	1.8110	1.7755
	2	2.9643	2.9126	2.8595	2.8053	2.7499
	3	3.9883	3.9316	3.8741	3.8158	3.7568
	4	4.2527	4.1853	4.1163	4.0459	3.9739
	5	5.1400	5.0570	4.9721	4.8852	4.7963

Tableau B.11: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CCCC, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_b, T_t (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	8.3467	7.8688	7.3279	6.7053	5.9718
	2	16.7088	16.0773	15.3943	14.6471	13.8203
	3	16.7088	16.0773	15.3943	14.6471	13.8203
	4	24.2392	23.4963	22.7102	21.8687	20.9582
	5	29.3085	28.5039	27.6627	26.7726	25.8202
0.1	1	7.7208	7.2593	6.7384	6.1406	5.4382
	2	15.4590	14.8480	14.1885	13.4696	12.6777
	3	15.4591	14.8480	14.1885	13.4696	12.6778
	4	22.4297	21.7097	20.9489	20.1371	19.2627
	5	27.1233	26.3427	25.5274	24.6671	23.7506
0.2	1	7.2355	6.7867	6.2810	5.7018	5.0223
	2	14.4895	13.8937	13.2515	12.5533	11.7867
	3	14.4896	13.8938	13.2516	12.5534	11.7868
	4	21.0253	20.3219	19.5793	18.7885	17.9395
	5	25.4267	24.6633	23.8662	23.0266	22.1348
0.5	1	6.2776	5.8549	5.3799	4.8377	4.2030
	2	12.5733	12.0069	11.3977	10.7381	10.0182
	3	12.5736	12.0072	11.3979	10.7383	10.0185
	4	18.2470	17.5741	16.8640	16.1105	15.3058
	5	22.0683	21.3353	20.5694	19.7646	18.9140
1	1	5.4811	5.0852	4.6424	4.1396	3.5538
	2	10.9743	10.4362	9.8588	9.2364	8.5613
	3	10.9747	10.4366	9.8592	9.2368	8.5617
	4	15.9221	15.2768	14.5960	13.8755	13.1098
	5	19.2531	18.5461	17.8065	17.0305	16.2136
2	1	4.8730	4.5120	4.1127	3.6662	3.1559
	2	9.7421	9.2413	8.7076	8.1376	7.5265
	3	9.7424	9.2417	8.7080	8.1380	7.5268
	4	14.1177	13.5095	12.8702	12.1976	11.4889
	5	17.0590	16.3875	15.6862	14.9536	14.1872
5	1	4.4128	4.0984	3.7589	3.3913	2.9896
	2	8.7959	8.3490	7.8803	7.3898	6.8772
	3	8.7961	8.3493	7.8805	7.3900	6.8774
	4	12.7174	12.1662	11.5938	11.0007	10.3875
	5	15.3458	14.7316	14.0965	13.4412	12.7662
10	1	4.1614	3.8668	3.5529	3.2190	2.8629
	2	8.2918	7.8694	7.4304	6.9769	6.5104
	3	8.2920	7.8695	7.4305	6.9770	6.5105
	4	11.9856	11.4615	10.9212	10.3672	9.8016
	5	14.4607	13.8746	13.2725	12.6568	12.0295
Métal	1	3.5510	3.2553	2.9395	2.6032	2.2439
	2	7.1001	6.6741	6.2308	5.7735	5.3055
	3	7.1001	6.6741	6.2308	5.7735	5.3055
	4	10.2901	9.7604	9.2130	8.6521	8.0822
	5	12.4353	11.8425	11.2314	10.6067	9.9730

Tableau B.12: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, SSSS, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_b, T_t (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	4.6531	4.0001	3.1482	1.8374	1.8981
	2	11.5211	10.8164	10.0170	9.0945	8.0039
	3	11.5211	10.8164	10.0170	9.0945	8.0040
	4	18.2093	17.4344	16.5880	15.6529	14.6076
	5	22.8397	22.0181	21.1355	20.1769	19.1250
0.1	1	4.3062	3.6772	2.8545	1.5580	1.9054
	2	10.6561	9.9761	9.2067	8.3216	7.2779
	3	10.6562	9.9762	9.2068	8.3217	7.2780
	4	16.8453	16.0963	15.2802	14.3821	13.3826
	5	21.1282	20.3332	19.4807	18.5583	17.5508
0.2	1	4.0423	3.4334	2.6355	1.3505	1.8874
	2	9.9870	9.3263	8.5801	7.7235	6.7148
	3	9.9871	9.3264	8.5803	7.7236	6.7151
	4	15.7919	15.0628	14.2698	13.3993	12.4339
	5	19.8032	19.0280	18.1979	17.3019	16.3266
0.5	1	3.5362	2.9738	2.2359	0.9959	1.7764
	2	8.6714	8.0509	7.3525	6.5538	5.6155
	3	8.6717	8.0512	7.3529	6.5544	5.6164
	4	13.7247	13.0357	12.2886	11.4729	10.5740
	5	17.1936	16.4566	15.6691	14.8228	13.9073
1	1	3.1278	2.6184	1.9561	0.8486	1.5612
	2	7.5828	7.0042	6.3565	5.6204	4.7606
	3	7.5831	7.0047	6.3572	5.6215	4.7623
	4	12.0148	11.3661	10.6656	9.9054	9.0740
	5	15.0259	14.3256	13.5790	12.7804	11.9220
2	1	2.8097	2.3628	1.7980	0.9339	1.2137
	2	6.7524	6.2270	5.6459	4.9961	4.2529
	3	6.7527	6.2275	5.6468	4.9974	4.2550
	4	10.6991	10.1011	9.4609	8.7741	8.0338
	5	13.3584	12.7055	12.0139	11.2805	10.5008
5	1	2.5301	2.1495	1.6891	1.0623	0.7268
	2	6.1164	5.6589	5.1652	4.6307	4.0465
	3	6.1165	5.6592	5.1657	4.6316	4.0479
	4	9.6651	9.1337	8.5748	7.9884	7.3738
	5	12.0671	11.4815	10.8701	10.2337	9.5726
10	1	2.3595	2.0015	1.5747	1.0080	0.5993
	2	5.7620	5.3329	4.8756	4.3892	3.8702
	3	5.7621	5.3330	4.8759	4.3896	3.8708
	4	9.0926	8.5897	8.0658	7.5232	6.9638
	5	11.3672	10.8120	10.2373	9.6460	9.0407
Métal	1	1.9821	1.6175	1.1651	0.4269	0.9403
	2	4.9040	4.4727	4.0120	3.5208	2.9947
	3	4.9040	4.4727	4.0120	3.5208	2.9947
	4	7.7452	7.2367	6.7057	6.1561	5.5914
	5	9.7100	9.1488	8.5666	7.9682	7.3584

Tableau B.13: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CSCS, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_b, T_t (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	6.7276	6.2096	5.6036	4.8740	3.9503
	2	12.6316	11.9514	11.1899	10.3253	9.3256
	3	15.7984	15.1625	14.4706	13.7091	12.8611
	4	21.3099	20.5590	19.7533	18.8795	17.9215
	5	23.9261	23.1133	22.2450	21.3073	20.2839
0.1	1	6.2242	5.7247	5.1416	4.4406	3.5515
	2	11.6862	11.0296	10.2965	9.4670	8.5114
	3	14.6176	14.0026	13.3350	12.6029	11.7915
	4	19.7206	18.9938	18.2157	17.3747	16.4572
	5	22.1420	21.3554	20.5167	19.6140	18.6337
0.2	1	5.8354	5.3505	4.7854	4.1064	3.2430
	2	10.9545	10.3162	9.6049	8.8019	7.8792
	3	13.7024	13.1031	12.4536	11.7433	10.9584
	4	18.4893	17.7806	17.0228	16.2058	15.3174
	5	20.7609	19.9938	19.1769	18.2999	17.3507
0.5	1	5.0721	4.6185	4.0912	3.4583	2.6477
	2	9.5139	8.9130	8.2459	7.4963	6.6386
	3	11.8960	11.3276	10.7132	10.0443	9.3095
	4	16.0603	15.3862	14.6668	13.8947	13.0603
	5	18.0379	17.3083	16.5327	15.7037	14.8123
1	1	4.4408	4.0206	3.5349	2.9549	2.2123
	2	8.3181	7.7558	7.1345	6.4408	5.6525
	3	10.3907	9.8526	9.2726	8.6444	7.9588
	4	14.0343	13.3933	12.7106	11.9810	11.1975
	5	15.7654	15.0712	14.3347	13.5509	12.7133
2	1	3.9565	3.5783	3.1475	2.6435	2.0179
	2	7.3998	6.8863	6.3250	5.7071	5.0176
	3	9.2295	8.7308	8.1973	7.6253	7.0090
	4	12.4617	11.8633	11.2298	10.5584	9.8451
	5	13.9945	13.3450	12.6598	11.9363	11.1711
5	1	3.5777	3.2515	2.8906	2.4857	2.0169
	2	6.6900	6.2398	5.7582	5.2431	4.6895
	3	8.3312	7.8875	7.4208	6.9312	6.4179
	4	11.2282	10.6903	10.1287	9.5443	8.9372
	5	12.5977	12.0113	11.4007	10.7668	10.1101
10	1	3.3660	3.0608	2.7279	2.3621	1.9517
	2	6.3014	5.8779	5.4304	4.9593	4.4636
	3	7.8495	7.4303	6.9936	6.5415	6.0753
	4	10.5727	10.0621	9.5336	8.9897	8.4328
	5	11.8556	11.2980	10.7218	10.1299	9.5250
Métal	1	2.8640	2.5576	2.2215	1.8484	1.4192
	2	5.3757	4.9502	4.4998	4.0255	3.5271
	3	6.7159	6.2934	5.8526	5.3969	4.9293
	4	9.0574	8.5419	8.0071	7.4576	6.8975
	5	10.1564	9.5929	9.0093	8.4104	7.8010

Tableau B.14: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CFCF, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_b, T_t (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	5.2041	4.8214	4.3724	3.8256	2.4433
	2	6.2207	5.6250	4.8929	3.9322	3.0855
	3	10.2484	9.3235	8.2068	6.7961	4.8487
	4	14.0640	13.4752	12.8311	12.1180	11.3177
	5	15.4578	14.8009	14.0805	13.2804	12.3789
0.1	1	4.8118	4.4422	4.0091	3.4808	2.0291
	2	5.7463	5.1705	4.4622	3.5275	2.7460
	3	9.4678	8.5746	7.4969	6.1332	4.2363
	4	13.0075	12.4378	11.8160	11.1298	10.3630
	5	14.2891	13.6531	12.9572	12.1867	11.3218
0.2	1	4.5079	4.1486	3.7276	3.2131	1.6902
	2	5.3793	4.8194	4.1298	3.2140	2.4734
	3	8.8639	7.9958	6.9486	5.6204	3.7597
	4	12.1883	11.6330	11.0278	10.3615	9.6191
	5	13.3837	12.7637	12.0861	11.3374	10.4993
0.5	1	3.9086	3.5708	3.1753	2.6042	0.9433
	2	4.6573	4.1313	3.4815	2.6881	1.8969
	3	7.6748	6.8603	5.8774	4.6229	2.8461
	4	10.5707	10.0438	9.4708	8.8425	8.1460
	5	11.5977	11.0090	10.3670	9.6605	8.8730
1	1	3.4114	3.0966	2.7291	2.1447	0.3517
	2	4.0589	3.5702	2.9670	2.2747	1.3366
	3	6.6882	5.9319	5.0218	3.8592	2.1862
	4	9.2230	8.7241	8.1832	7.5929	6.9268
	5	10.1105	9.5530	8.9469	8.2827	7.5166
2	1	3.0336	2.7489	2.4211	1.9207	0.4960
	2	3.6037	3.1644	2.6307	2.0237	1.3407
	3	5.9356	5.2552	4.4489	3.4410	2.0656
	4	8.1878	7.7259	7.2291	6.6926	6.1089
	5	8.9676	8.4515	7.8947	7.2912	6.6312
5	1	2.7498	2.5048	2.2311	1.9025	1.1020
	2	3.2615	2.8859	2.4467	1.9164	1.5042
	3	5.3678	4.7848	4.1173	3.3274	2.3286
	4	7.3969	6.9874	6.5548	6.0984	5.6164
	5	8.0942	7.6365	7.1517	6.6386	6.0944
10	1	2.5931	2.3645	2.1131	1.8310	1.1850
	2	3.0740	2.7246	2.3233	1.8414	1.4853
	3	5.0598	4.5170	3.9060	3.2017	2.3485
	4	6.9727	6.5865	6.1828	5.7628	5.3272
	5	7.6280	7.1964	6.7441	6.2721	5.7809
Métal	1	2.2077	1.9780	1.7232	1.3390	0.4378
	2	2.6141	2.2633	1.8537	1.4294	0.9730
	3	4.3098	3.7662	3.1481	2.4204	1.5182
	4	5.9603	5.5711	5.1634	4.7396	4.3018
	5	6.5164	6.0816	5.6250	5.1488	4.6549

Tableau B.15: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CCCF, $a/b = 1$, $h/a = 0.05$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_b, T_t (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	5.6190	5.1695	4.6257	3.9214	2.8208
	2	9.3014	8.5858	7.7336	6.6841	5.3422
	3	14.5234	13.9167	13.2526	12.5167	11.6896
	4	17.5359	16.6809	15.7301	14.6603	13.4425
	5	18.3586	17.6414	16.8610	16.0011	15.0407
0.1	1	5.1937	4.7590	4.2329	3.5465	2.4338
	2	8.5974	7.9063	7.0843	6.0731	4.7843
	3	13.4307	12.8435	12.2022	11.4938	10.7007
	4	16.2162	15.3900	14.4737	13.4465	12.2827
	5	16.9757	16.2813	15.5272	14.6991	13.7781
0.2	1	4.8644	4.4415	3.9289	3.2554	2.1211
	2	8.0522	7.3805	6.5819	5.5998	4.3515
	3	12.5837	12.0112	11.3869	10.6987	9.9303
	4	15.1930	14.3889	13.4987	12.5033	11.3794
	5	15.9038	15.2266	14.4921	13.6873	12.7949
0.5	1	4.2155	3.8175	3.3336	2.6853	1.4648
	2	6.9779	6.3467	5.5971	4.6754	3.5120
	3	10.9116	10.3681	9.7766	9.1272	8.4054
	4	13.1732	12.4134	11.5748	10.6418	9.5949
	5	13.7877	13.1438	12.4469	11.6862	10.8473
1	1	3.6774	3.3065	2.8557	2.2443	0.9567
	2	6.0857	5.4979	4.8027	3.9515	2.8902
	3	9.5186	9.0038	8.4451	7.8344	7.1593
	4	11.4913	10.7763	9.9903	9.1209	8.1524
	5	12.0234	11.4120	10.7518	10.0345	9.2480
2	1	3.2683	2.9334	2.5324	2.0015	0.9740
	2	5.4049	4.8739	4.2549	3.5118	2.6052
	3	8.4481	7.9714	7.4579	6.9026	6.2968
	4	10.2017	9.5446	8.8293	8.0479	7.1902
	5	10.6638	10.0954	9.4860	8.8303	8.1204
5	1	2.9610	2.6733	2.3412	1.9325	1.3215
	2	4.8908	4.4333	3.9167	3.3235	2.633
	3	7.6301	7.2071	6.7599	6.2873	5.7872
	4	9.2209	8.6427	8.0262	7.3700	6.6723
	5	9.6206	9.1138	8.5794	8.0170	7.4246
10	1	2.7917	2.5235	2.2194	1.8564	1.3551
	2	4.6109	4.1841	3.7099	3.1777	2.5759
	3	7.1918	6.7929	6.3755	5.9406	5.4887
	4	8.6950	8.1514	7.5783	6.9777	6.3516
	5	9.0672	8.5883	8.0884	7.5692	7.0316
Métal	1	2.3757	2.1058	1.7945	1.4035	0.7298
	2	3.9301	3.5025	3.0241	2.4829	1.8754
	3	6.1467	5.7445	5.3228	4.8838	4.4290
	4	7.4331	6.8872	6.3110	5.7083	5.0837
	5	7.7579	7.2753	6.7708	6.2473	5.7080

Tableau B.16: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CCCC, $a/b = 1$, $h/a = 0.2$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_b, T_t (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	6.5043	6.4078	6.3148	6.2236	6.1323
	2	11.5120	11.3543	11.2046	11.0596	10.9162
	3	11.5120	11.3543	11.2046	11.0596	10.9162
	4	14.8586	14.6945	14.5453	14.4069	14.2754
	5	14.8586	14.6945	14.5453	14.4069	14.2754
0.1	1	6.0332	5.9389	5.8477	5.7579	5.6681
	2	10.6831	10.5291	10.3819	10.2389	10.0973
	3	10.6836	10.5295	10.3823	10.2394	10.0978
	4	13.8528	13.6920	13.5446	13.4068	13.2750
	5	13.8533	13.6925	13.5450	13.4073	13.2755
0.2	1	5.6661	5.5731	5.4827	5.3935	5.3042
	2	10.0348	9.8829	9.7370	9.5946	9.4534
	3	10.0361	9.8842	9.7382	9.5959	9.4546
	4	13.0623	12.9037	12.7571	12.6191	12.4865
	5	13.0636	12.9050	12.7583	12.6204	12.4877
0.5	1	4.9313	4.8397	4.7496	4.6599	4.5697
	2	8.7317	8.5819	8.4358	8.2917	8.1479
	3	8.7347	8.5849	8.4388	8.2947	8.1508
	4	11.4544	11.2984	11.1514	11.0108	10.8741
	5	11.4573	11.3013	11.1542	11.0136	10.8769
1	1	4.2948	4.2033	4.1120	4.0201	3.9270
	2	7.5915	7.4412	7.2922	7.1433	6.9934
	3	7.5954	7.4450	7.2960	7.1472	6.9972
	4	9.9953	9.8388	9.6883	9.5418	9.3973
	5	9.9989	9.8424	9.6918	9.5452	9.4007
2	1	3.7574	3.6663	3.5742	3.4807	3.3855
	2	6.6067	6.4556	6.3038	6.1504	5.9945
	3	6.6102	6.4591	6.3072	6.1538	5.9979
	4	8.6599	8.4998	8.3423	8.1860	8.0297
	5	8.6630	8.5028	8.3453	8.1890	8.0327
5	1	3.2921	3.2026	3.1116	3.0188	2.9240
	2	5.7388	5.5879	5.4345	5.2781	5.1184
	3	5.7407	5.5898	5.4363	5.2800	5.1203
	4	7.4404	7.2745	7.1077	6.9391	6.7680
	5	7.4421	7.2762	7.1093	6.9408	6.7696
10	1	3.0896	3.0015	2.9117	2.8200	2.7265
	2	5.3851	5.2353	5.0824	4.9263	4.7666
	3	5.3860	5.2362	5.0833	4.9272	4.7675
	4	6.9113	6.7425	6.5713	6.3970	6.2191
	5	6.9121	6.7433	6.5721	6.3978	6.2199
Métal	1	2.7305	2.6413	2.5498	2.4561	2.3604
	2	4.8119	4.6613	4.5066	4.3481	4.1859
	3	4.8119	4.6613	4.5066	4.3482	4.1859
	4	6.2418	6.0667	5.8867	5.7015	5.5108
	5	6.2418	6.0667	5.8867	5.7015	5.5108

Tableau B.17: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, SSSS, $a/b = 1$, $h/a = 0.2$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_b, T_t (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	4.1770	4.0946	4.0118	3.9274	3.8399
	2	9.2033	9.0641	8.9296	8.7973	8.6646
	3	9.2033	9.0641	8.9296	8.7974	8.6646
	4	11.2772	11.1469	11.0273	10.9152	10.8077
	5	12.9359	12.7968	12.6711	12.5554	12.4460
0.1	1	3.8689	3.7888	3.7082	3.6260	3.5412
	2	8.5220	8.3861	8.2542	8.1241	7.9935
	3	8.5225	8.3866	8.2546	8.1245	7.9940
	4	10.4903	10.3630	10.2451	10.1340	10.0269
	5	12.0788	11.9423	11.8177	11.7019	11.5918
0.2	1	3.6341	3.5556	3.4765	3.3960	3.3131
	2	7.9875	7.8535	7.7227	7.5935	7.4637
	3	7.9888	7.8548	7.7241	7.5948	7.4651
	4	9.8712	9.7458	9.6288	9.5178	9.4103
	5	11.4071	11.2720	11.1476	11.0310	10.9195
0.5	1	3.1803	3.1049	3.0287	2.9511	2.8715
	2	6.9142	6.7818	6.6511	6.5207	6.3892
	3	6.9174	6.7851	6.6544	6.5241	6.3927
	4	8.6052	8.4818	8.3644	8.2513	8.1406
	5	10.0357	9.9013	9.7341	9.5625	9.3907
1	1	2.8060	2.7333	2.6596	2.5845	2.5077
	2	5.9937	5.8607	5.7275	5.5931	5.4567
	3	5.9978	5.8649	5.7318	5.5977	5.4616
	4	7.4503	7.3259	7.2052	7.0866	6.9690
	5	8.7656	8.5870	8.4094	8.2317	8.0523
2	1	2.4992	2.4295	2.3586	2.2865	2.2129
	2	5.2478	5.1146	4.9795	4.8421	4.7017
	3	5.2516	5.1185	4.9837	4.8464	4.7063
	4	6.4068	6.2795	6.1531	6.0268	5.8995
	5	7.6133	7.4718	7.3022	7.1190	6.9326
5	1	2.2186	2.1520	2.0843	2.0156	1.9459
	2	4.6509	4.5207	4.3879	4.2522	4.1134
	3	4.6531	4.5230	4.3903	4.2548	4.1161
	4	5.4940	5.3644	5.2334	5.1005	4.9649
	5	6.5534	6.4075	6.2604	6.1114	5.9595
10	1	2.0684	2.0028	1.9363	1.8688	1.8005
	2	4.3925	4.2652	4.1352	4.0026	3.8670
	3	4.3936	4.2663	4.1364	4.0039	3.8684
	4	5.1107	4.9807	4.8485	4.7138	4.5759
	5	6.0943	5.9468	5.7970	5.6443	5.4880
Métal	1	1.7687	1.7007	1.6309	1.5596	1.4872
	2	3.8752	3.7474	3.6162	3.4819	3.3448
	3	3.8752	3.7474	3.6162	3.4819	3.3448
	4	4.6180	4.4853	4.3489	4.2087	4.0645
	5	5.5133	5.3608	5.2039	5.0425	4.8702

Tableau B.18: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CSCS, $a/b = 1$, $h/a = 0.2$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_b, T_t (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	5.3689	5.2805	5.1940	5.1078	5.0204
	2	9.5715	9.4293	9.2924	9.1581	9.0236
	3	10.9527	10.7999	10.6542	10.5128	10.3725
	4	14.2116	14.0179	13.8341	13.6564	13.4808
	5	14.8586	14.6945	14.5453	14.4069	14.2754
0.1	1	4.9796	4.8935	4.8089	4.7245	4.6390
	2	8.8706	8.7317	8.5974	8.4652	8.3330
	3	10.1644	10.0151	9.8721	9.7328	9.5944
	4	13.1846	12.9954	12.8148	12.6394	12.4659
	5	13.8523	13.6915	13.5439	13.4061	13.2743
0.2	1	4.6780	4.5933	4.5099	4.4265	4.3421
	2	8.3226	8.1857	8.0526	7.9213	7.7898
	3	9.5489	9.4018	9.2600	9.1215	8.9837
	4	12.3834	12.1968	12.0176	11.8429	11.6698
	5	13.0601	12.9013	12.7544	12.6161	12.4832
0.5	1	4.0797	3.9970	3.9148	3.8323	3.7487
	2	7.2245	7.0895	6.9565	6.8241	6.6909
	3	8.3142	8.1693	8.0278	7.8880	7.7482
	4	10.7778	10.5935	10.4139	10.2369	10.0602
	5	11.4416	11.2846	11.1363	10.9943	10.8559
1	1	3.5669	3.4853	3.4033	3.3205	3.2363
	2	6.2781	6.1426	6.0073	5.8711	5.7332
	3	7.2363	7.0912	6.9473	6.8035	6.6584
	4	9.3793	9.1940	9.0106	8.8274	8.6429
	5	9.9642	9.8053	9.6518	9.5018	9.3533
2	1	3.1356	3.0553	2.9740	2.8914	2.8072
	2	5.4946	5.3590	5.2218	5.0826	4.9406
	3	6.3062	6.1607	6.0144	5.8666	5.7164
	4	8.1779	7.9915	7.8042	7.6151	7.4230
	5	8.6168	8.4532	8.2914	8.1301	7.9679
5	1	2.7554	2.6773	2.5979	2.5170	2.4345
	2	4.8414	4.7083	4.5726	4.4342	4.2926
	3	5.4836	5.3386	5.1911	5.0409	4.8875
	4	7.1193	6.9330	6.7438	6.5510	6.3541
	5	7.4126	7.2442	7.0743	6.9021	6.7267
10	1	2.5805	2.5037	2.4254	2.3457	2.2645
	2	4.5590	4.4282	4.2948	4.1587	4.0196
	3	5.1435	4.9995	4.8527	4.7028	4.5496
	4	6.6809	6.4960	6.3075	6.1150	5.9181
	5	6.8991	6.7291	6.5564	6.3804	6.2004
Métal	1	2.2624	2.1842	2.1039	2.0218	1.9381
	2	4.0285	3.8969	3.7619	3.6237	3.4825
	3	4.5865	4.4415	4.2927	4.1402	3.9842
	4	5.9562	5.7704	5.5795	5.3839	5.1837
	5	6.2418	6.0667	5.8867	5.7015	5.5108

Tableau B.19: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CFCF, $a/b = 1$, $h/a = 0.2$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_b, T_t (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	4.2914	4.2239	4.1582	4.0932	4.0275
	2	4.9233	4.8338	4.7448	4.6548	4.5623
	3	7.2466	7.1594	7.0786	7.0022	6.9284
	4	7.7002	7.5623	7.4256	7.2877	7.1462
	5	9.9333	9.7943	9.6617	9.5329	9.4050
0.1	1	3.9781	3.9122	3.8478	3.7839	3.7194
	2	4.5574	4.4703	4.3835	4.2957	4.2057
	3	6.7491	6.6640	6.5846	6.5092	6.4361
	4	7.1207	6.9866	6.8533	6.7187	6.5810
	5	9.2149	9.0791	8.9489	8.8219	8.6958
0.2	1	3.7343	3.6693	3.6056	3.5422	3.4783
	2	4.2722	4.1867	4.1012	4.0147	3.9262
	3	6.3647	6.2811	6.2026	6.1277	6.0548
	4	6.6686	6.5369	6.4055	6.2730	6.1374
	5	8.6524	8.5186	8.3896	8.2633	8.1377
0.5	1	3.2474	3.1836	3.1203	3.0569	2.9927
	2	3.7028	3.6196	3.5359	3.4509	3.3639
	3	5.5927	5.5114	5.4340	5.3593	5.2454
	4	5.7674	5.6390	5.5099	5.3791	5.2861
	5	7.5218	7.3900	7.2612	7.1338	7.0064
1	1	2.8285	2.7649	2.7010	2.6365	2.5709
	2	3.2142	3.1323	3.0491	2.9643	2.8772
	3	4.8937	4.8134	4.7358	4.6133	4.4787
	4	5.0008	4.8737	4.7447	4.6600	4.5849
	5	6.5343	6.4023	6.2712	6.1401	6.0078
2	1	2.4797	2.4167	2.3529	2.2879	2.2214
	2	2.8104	2.7300	2.6478	2.5637	2.4773
	3	4.2414	4.1609	4.0817	3.9974	3.8626
	4	4.3821	4.2567	4.1286	4.0032	3.9247
	5	5.6854	5.5531	5.4198	5.2851	5.1480
5	1	2.1821	2.1210	2.0587	1.9951	1.9302
	2	2.4738	2.3963	2.3170	2.2359	2.1529
	3	3.6134	3.5311	3.4484	3.3653	3.2812
	4	3.8879	3.7672	3.6435	3.5169	3.3873
	5	4.9439	4.8120	4.6779	4.5411	4.4014
10	1	2.0486	1.9886	1.9275	1.8652	1.8017
	2	2.3266	2.2512	2.1740	2.0952	2.0148
	3	3.3283	3.2443	3.1592	3.0728	2.9849
	4	3.6688	3.5515	3.4316	3.3092	3.1843
	5	4.6416	4.5109	4.3775	4.2412	4.1019
Métal	1	1.7996	1.7388	1.6764	1.6125	1.5473
	2	2.0458	1.9700	1.8922	1.8127	1.7318
	3	2.9799	2.8925	2.8027	2.7104	2.6157
	4	3.2169	3.0994	2.9788	2.8555	2.7300
	5	4.1427	4.0113	3.8764	3.7382	3.5968

Tableau B.20: Variation des 5 premières fréquences adimensionnelles en fonction de la température (plaque FGM Ti-6Al-4V/Si₃N₄, modèle P-FGM, CCCF, $a/b = 1$, $h/a = 0.2$, température uniforme, nouvelle théorie avec $\alpha = 3/2$)

n	Mode	T_b, T_t (K)				
		300	400	500	600	700
Céramique	1	4.5765	4.5012	4.4274	4.3538	4.2789
	2	7.0876	6.9691	6.8528	6.7365	6.6181
	3	9.5672	9.4568	9.3554	9.2605	9.1694
	4	10.2095	10.0662	9.9295	9.7966	9.6646
	5	12.2761	12.0975	11.9260	11.7583	11.5910
0.1	1	4.2404	4.1670	4.0947	4.0224	3.9491
	2	6.5628	6.4473	6.3336	6.2199	6.1043
	3	8.9205	8.8125	8.7126	8.6184	8.5277
	4	9.4691	9.3292	9.1950	9.0640	8.9339
	5	11.3732	11.1989	11.0308	10.8659	10.7012
0.2	1	3.9789	3.9065	3.8351	3.7636	3.6910
	2	6.1521	6.0386	5.9265	5.8141	5.7000
	3	8.4197	8.3134	8.2143	8.1203	8.0294
	4	8.8903	8.7523	8.6193	8.4890	8.3594
	5	10.6696	10.4979	10.3314	10.1676	10.0039
0.5	1	3.4571	3.3862	3.3155	3.2443	3.1719
	2	5.3307	5.2198	5.1092	4.9979	4.8846
	3	7.4104	7.3063	7.2076	7.1127	7.0200
	4	7.7273	7.5914	7.4585	7.3271	7.1955
	5	9.2641	9.0951	8.9290	8.7642	8.5988
1	1	3.0085	2.9381	2.8671	2.7951	2.7215
	2	4.6261	4.5163	4.4054	4.2930	4.1783
	3	6.4925	6.3888	6.2887	6.1911	6.0945
	4	6.7119	6.5758	6.4405	6.3051	6.1685
	5	8.0526	7.8833	7.7146	7.5454	7.3743
2	1	2.6359	2.5663	2.4956	2.4234	2.3494
	2	4.0458	3.9372	3.8266	3.7138	3.5983
	3	5.6361	5.5313	5.4282	5.3259	5.2236
	4	5.8402	5.7036	5.5662	5.4270	5.2855
	5	7.0368	6.8672	6.6960	6.5226	6.3462
5	1	2.3198	2.3494	2.1838	2.1137	2.0419
	2	3.5662	3.5983	3.3529	3.2427	3.1299
	3	4.8156	5.2236	4.6001	4.4913	4.3811
	4	5.0802	5.2855	4.8061	4.6651	4.5211
	5	6.1647	6.3462	5.8307	5.6570	5.4792
10	1	2.1784	2.1126	2.0455	1.9770	1.9070
	2	3.3595	3.2563	3.1508	3.0432	2.9334
	3	4.4443	4.3346	4.2234	4.1105	3.9955
	4	4.7694	4.6349	4.4975	4.3573	4.2139
	5	5.7982	5.6345	5.4666	5.2943	5.1184
Métal	1	1.9128	1.8463	1.7779	1.7080	1.6366
	2	2.9643	2.8606	2.7540	2.6450	2.5340
	3	3.9883	3.8740	3.7565	3.6357	3.5115
	4	4.2527	4.1175	3.9788	3.8366	3.6911
	5	5.1400	4.9738	4.8032	4.6285	4.4499

BIBLIOGRAPHIE

1. Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H. et al., e., "Functionally Graded Materials Design". dans Processing and Applications, (1999).
2. Suresh, S. et Mortensen, A., "Fundamentals of Functionally Graded Materials". dans Processing and Thermomechanical Behaviour of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites, (1998), Cambridge, UK: IOM Communications.
3. Öchsner, A., Murch, G.E. et de Lemos, M.J.S., "Cellular and Porous Materials", WILEY-VCH, (2008), 398-417.
4. Birman, V. et Byrd, L.W., "Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures", Applied Mechanics Reviews, (2007), 60, 195-216.
5. Love, A.E.H., "On the small free vibrations and deformations of elastic shells", London: Philosophical trans. of the Royal Society, (1888).
6. Rayleigh, L., "Theory of sound": Dover Pub, (1945).
7. Timoshenko, S., "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars", Philosophical Magazine, (1921), Vol. 41 (series 46) p. 744–746.
8. Timoshenko, S., "On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section", Philosophical Magazine, (1922), Vol. 43 (series 46) p. 125–131.
9. Reissner, E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", Journal of Applied Mechanics-transactions of The ASME, (1945), 69–77.
10. Uflyand, Y.S., "The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates", (1948), 12, 287–300.
11. Mindlin, R.D., "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", ASME J Appl Mech, (1951), 31-38.
12. Whitney, J.M., "The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates", Journal of Composite Materials, (1969), 3, 534–547.
13. Whitney, J.M. et Sun, C.T., "A higher-order theory for extensional motion of laminated composites", Journal of Sound and Vibration, (1973), 85–97.
14. Pagano, J.N., "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", (1970), 4, 20-35.
15. Srinivas, S. et Rao, A.K., "Vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates", (1970), 1463–1481.

16. Reissner, E., "On the analysis of first and second order shear deformation effects for isotropic elastic plates", *ASME J Appl Mech*, (1980), 959-961.
17. Narasimhamurthy, P., "The effect of transverse shear deformation and rotary inertia in wave propagation and vibration of thin elastic plates, In: Proceedings of the 3rd congressional theoretical applied mechanics, Bangalore, India", *Indian Society of Theoretical Applied Mechanics*, Indian Institute of Technology, Kharagpur, (1957), 351-360.
18. Schmidt, R., "A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation", *Indust Math*, (1977), 23-38.
19. Levinson, M., "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates", *Mechanics Research Communications*, (1980), 343-350.
20. Ambartsumyan, S.A., "Theory of anisotropic plates", Stanford: Technomic Publishing Company, (1970).
21. Reddy, J.N., "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", *ASME Journal of Applied Mechanics*, (1984), 745-752.
22. Reddy, J.N. et Phan, N.D., "Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (1985), 2201-2219.
23. Reddy, J.N., "Theory and analysis of elastic plates", Philadelphia: Taylor & Francis, (1999).
24. Reddy, J.N., "Analysis of functionally graded plates", *Int J Numer Method Eng*, (2000), 47(41-43):663-684.
25. Iyengar, S.N.R.K., Chadrashekhara, K. et Sebastian, V.K., "On the analysis of thick rectangular plates", *Z Angew Math Mech*, (1974), 589-591.
26. Iyengar, S.N.R.K. et Pandya, S.K., "Vibration of orthotropic rectangular thick plates", *Int J Solids Struct*, (1982), 149-156.
27. Kuznetsov, N.D. et Kartashov, G.G., "Natural vibrational modes of laminated anisotropic plates and flat shells", *Soviet Appl Mech*, (1981), 334-339.
28. Vlasov, V.Z., "The method of initial function in problems of theory of thick plates and shells.", In: *Ninth congress of international mechanical applications*, (1957), 321-330.
29. Krishna Murty, A.V., "Higher-order theory for vibrations of thick plates", *AIAA Journal*, (1977), 1823-1824.
30. Krishna Murty, A.V., "Toward of consistent plate theory", *AIAA Journal*, (1986), 1047-1048.

31. Krishna Murty, A.V., "Flexural of composite plates", *Composite Structures*, (1987), 161–177.
32. Krishna Murty, A.V. et Vellaichamy, S., "On higher-order shear deformation theory of laminated composite panels", *Composite Structures*, (1987), 247–270.
33. Reddy, J.N., "A review of Refined Theories of Laminated Composite Plates", (1990), 22(7).
34. Mallikarjuna, M. et Kant, T., "A critical Review and Some Results of Recently Developed Refined Theories of Fiber-Reinforced Laminated Composites and Sandwiches ", (1993), 23(4).
35. Bhimaraddi, A. et Stevens, L.K., "A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous and laminated rectangular plates", *Journal of applied mechanics* , *Trans ASME*, (1984), 195–198.
36. Kant, T. et Pandya, B.N., "A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates", *Composite Structures*, (1988), 215–264.
37. Librescu, L., "On the theory of anisotropic elastic shells and plates", *International Journal of Solids and Structures*, (1967), 53–68.
38. Ren, J.G., "A new theory of laminated plate", *Composites Science and Technology*, (1986), 225-239.
39. Touratier, M., "A Refined Theory for Thick Composite Plates", *Mech. Res. Comm.*, (1988), 229-236.
40. Kant, T., "Numerical analysis of thick plates", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (1982), 1-18.
41. Karama, M., Afaq, K. et Mistou, S., "Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *International Journal of Solids and Structures*, (2003), 1525-1546.
42. Karama, M., Harb, B.A., Mistou, S. et Caperaa, S., "Bending, Buckling and Free Vibration of Laminated Composite with a Transverse Shear Stress Continuity Model", *Composites, Part B*, (1998), 29, 223–234.
43. Lo, K.H., Christensen, R.M. et Wu, E.M., "A high-order theory of plate deformation. Part I: homogeneous plates", *ASME Journal of Applied Mechanics*, (1977), 663–668.
44. Lo, K.H., Christensen, R.M. et Wu, E.M., "A high-order theory of plate deformation. Part II: laminated plates", *ASME Journal of Applied Mechanics*, (1977), 669–676.

45. Nelson, R. et Lorch, D., "A refined theory for laminated orthotropic plates", *ASME Journal of Applied Mechanics*, (1974), 177–183.
46. Pagano, N.J. et Soni, S.R., "Global–local laminate variational model", *International Journal of Solids and Structures*, (1983), 207–228.
47. Prokopov, V.K., "Application of the symbolic method to the derivation of the equations of the theory of plates", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, (1965), 1064–1183.
48. Sun, C.T. et Whitney, J.M., "Theories for dynamic response of laminated plates", *AIAA Journal*, (1973), 178–183.
49. Reddy, J.N., "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells - Theory and Analysis, Second Edition", Florida: CRC Press, (2004).
50. Carrera, E. et Petrolo, M., "Guidelines and recommendations to construct theories for metallic and composite plates", (2010), 48(12).
51. D’Ottavio, M. et Carrera, E., "Variable-kinematics approach for linearized buckling analysis of laminated plates and shells", *AIAA Journal*, (2010), 48(9).
52. Aydogdu, M., "A new shear deformation theory for laminated composite plates", *Composite Structures*, (2009), 94–101.
53. El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A., "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *International Journal of Mechanical Sciences*, (2011), 237–247.
54. Shimpi, R.P., "Refined plate theory and its variants", *AIAA Journal*, (2002), 137–146.
55. Shimpi, R.P. et Patel, H.G., "A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis", *International Journal of Solids and Structures*, (2006), 6783–6799.
56. Shimpi, R.P. et Patel, H.G., "Free vibrations of plate using two variable refined plate theory", *Journal of Sound and Vibration*, (2006), 979–999.
57. Kim, S.E., Thai, H.T. et Lee, J., "Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory", (2009), 47(4), 455–462.
58. Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, A.A., "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory", *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, (2010), 113–121.

59. Thai, H.-T. et Kim, S.-E., "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, (2010), 626–633.
60. Thai, H.-T. et Kim, S.-E., "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, (2011), 1738–1746.
61. Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A., "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics*, (2011), 925–942.
62. Srinivas, S., Rao, A.K. et Rao, C.V.J., "Flexure of simply supported thick homogeneous and laminated rectangular plates", (1969), 49, 449–458.
63. Srinivas, S., Rao, C.V.J. et Rao, A.K., "An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, (1970), 12, 187–199.
64. Wittrick, W.H., "Analytical three-dimensional elasticity solutions to some plate problems, and some observations on Mindlin's plate theory", (1987), 23, 441–464.
65. Vel, S.S. et Batra, R.C., "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, (2004), 703-730.
66. Cheung, Y.K. et Chakrabarti, S., "Free vibration of thick, layered rectangular plates by a finite layer method", *Journal of Sound and Vibration*, (1972), 21, 277–284.
67. Liew, K.M., Hung, K.C. et Lim, M.K., "A continuum three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates", *International Journal of Solids and Structures*, (1993), 30, 3357–3379.
68. Liew, K.M., Hung, K.C. et Lim, M.K., "Three-dimensional vibration analysis of rectangular plates: variance of simple support conditions and influence of in-plane inertia", (1994), 31.
69. Liew, K.M., Hung, K.C. et Lim, M.K., "Free vibration studies on stress-free three-dimensional elastic solid", *Journal of Applied Mechanics*, (1995), 62, 159–165.
70. Liew, K.M., Hung, K.C. et Lim, M.K., "Three-dimensional vibration of rectangular plates: effects of thickness and edge constraints", *Journal of Sound and Vibration*, (1995), 182, 709–727.
71. Liew, K.M. et Yang, B., "Three-dimensional elasticity solutions for free vibrations of circular plates - a polynomials Ritz analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (1999), 189-201.

72. Liew, K.M. et Teo, T.M., "Three-dimensional vibration analysis of rectangular plates based on differential quadrature method", *Journal of Sound and Vibration*, (1999), 577–599.
73. Liew, K.M., Teo, T.M. et Han, J.B., "Comparative accuracy of DQ and HDQ methods for three-dimensional vibration analysis of rectangular plates", (1999), 45, 1831-1848.
74. Cheung, Y.K. et Zhou, D., "The Free Vibrations of Tapered Rectangular Plates Using a New Set of Beam Functions with the Rayleigh–Ritz Method", *Journal of Sound and Vibration*, (1999), 703-722.
75. Zhou, D., Cheung, Y.K., Au, F.T.K. et Lo, S.H., "Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method", *International Journal of Solids structures*, (2002), 6339-6353.
76. Zhou, D., Cheung, Y.K., Lo, S.H. et Au, F.T.K., "Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (2004), 1313–1334.
77. Li, Q., Iu, V.P. et Kou, K.P., "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates", *Journal of Sound and Vibration*, (2008), 498-515.
78. Li, Q., Iu, V.P. et Kou, K.P., "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment", *Journal of Sound and Vibration*, (2009), 733–750.
79. Uymaz, B. et Aydogdu, M., "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded plates under various boundary conditions", *Composites of Reinforced Plastics and Composites*, (2007), 26, 1847-1863.
80. Drake, J.T., Williamson, R.L. et Rabin, B.H., "Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part II: Interface Optimization for Residual Stress Reduction", *Journal of Applied Physics*, (1993), 74, 1321-1326.
81. Williamson, R.L., Rabin, B.H. et Drake, J.T., "Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part I: Model Description and Geometrical Effects", *Journal of Applied Physics*, (1993), 74, 1310-1320.
82. Giannakopoulos, A.E., Suresh, S., Finot, M. et Olsson, M., "Elastoplastic Analysis of Thermal Cycling: Layered Materials with Compositional Gradients", *Acta Metallurgica et Materialia*, (1995), 43, 1335-1354.
83. Finot, M., Suresh, S., Bull, C. et Sampath, S., "Curvature Changes During Thermal Cycling of a Compositionally Graded Ni-Al₂O₃ Multi-Layered Material", *Materials Science and Engineering*, (1996), 205, 59-71.

84. Ravichandran, K.S., "Thermal Residual Stresses in a Functionally Graded Material System", *Materials Science and Engineering*, (1995), A-201, 269-276.
85. Hill, R. et Lin, W., "Residual Stress Measurement in a Ceramic-Metallic Graded Material", *Journal of Engineering Materials and Technology*, (2002), 124, 185-191.
86. Praveen, G.N. et Reddy, J.N., "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates", *International Journal of Solids and Structures*, (1998), 4457-4476.
87. Reddy, J.N., Wang, C.M. et Kitipornchai, S., "Axisymmetric Bending of Functionally Graded Circular and Annular Plates", *European Journal of Mechanics and Solids*, (1999), 18, 185-199.
88. Reddy, J.N., "Analysis of functionally graded plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (2000), 47, 663-684.
89. Woo, J. et Meguid, S.A., "Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells", *International Journal of Solids and Structures*, (2001), 38, 7409-7421.
90. Vel, S.S. et Batra, R.C., "Exact Solution for Thermo elastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates", *AIAA Journal*, (2002), 40, 1421-1433.
91. Abrate, S., "Functionally Graded Plates Behave Like Homogeneous Plates", *Composites: Part B*, (2008), 39, 151-158.
92. Shen, H.-S., "Postbuckling Analysis of Axially-Loaded Functionally Graded Cylindrical Shells in Thermal Environments", *Composite Science and Technology*, (2002), 62, 977-987.
93. Javaheri, R. et Eslami, M.R., "Thermal Buckling of Functionally Graded Plates", *AIAA Journal*, (2002), 40, 162-169.
94. Na, K.S. et Kim, J.H., "Three-Dimensional Thermomechanical Buckling of Functionally Graded Materials", *AIAA Journal*, (2005), 47, 1605-1612.
95. Wu, L., "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate", *Composite Structures*, (2004), 64, 211-218.
96. Shen, H.-S., "Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties", *International Journal of Mechanical Sciences*, (2007), 49, 466-478.
97. Bodaghi, M. et Saidi, A.R., "Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory", *Applied Mathematical Modelling*, (2010), 3659-3673.

98. Levy, M., "Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, (1899), 3, 219–306.
99. Javaheri, R. et Eslami, M.R., "Buckling of Functionally Graded Plates Under In-Plane Compressive Loading", *ZAMM*, (2002), 82, 277-283.
100. Javaheri, R. et Eslami, M.R., "Thermal Buckling of Functionally Graded Plates Based on Higher Order Theory", *Journal of Thermal Stresses*, (2002), 25, 603-625.
101. Shariat, Samsam, B.A., Javaheri, R. et Eslami, M.R., "Buckling of Imperfect Functionally Graded Plates Under In-Plane Compressive Loading", *Thin-Walled Structures*, (2005), 43, 1020-1036.
102. Shariat, Samsam, B.A. et Eslami, M.R., "Thermal Buckling of Imperfect Functionally Graded Plates", *International Journal of Solids and Structures*, (2006), 43, 4082-4096.
103. Shariat, Samsam, B.A. et Eslami, M.R., "Buckling of Thick Functionally Graded Plates Under Mechanical and Thermal Loads", *Composite Structures*, (2007), 78, 433-439.
104. Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S. et Reddy, J.N., "A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials", *International Journal of Mechanical Science*, (2003), 45, 519–539.
105. Aydogdu, M. et Taskin, V., "Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges", *Materials and Design*, (2007), 1651–1656.
106. Kapuria, S., Bhattacharyya, M. et Kumar, A.N., "Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: a theoretical model and its experimental validation", *Composite Structures*, (2007), 82, 390-402.
107. Ying, J., Lü, C.F. et Chen, W.Q., "Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations.", *Composite Structures*, (2008), 84, 209-219.
108. Xiang, H.J. et Yang, J., "Free and forced vibration of a laminated FGM Timoshenko beam of variable thickness under heat conduction", *Composites: Part B*, (2007), 39, 292–303.
109. Li, X.-F., "A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams.", *Journal of Sound and Vibration*, (2008), 218, 1210-1229.
110. Sina, S.A., Navazi, H.M. et Haddadpour, H., "An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams", *Materials and Design*, (2008), 30, 741-747.

111. Pradhan, S.C. et Murmu, T., "Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundation using differential quadrature method", *Journal of Sound and Vibration*, (2008), 321, 342-362.
112. Yang, J. et Shen, H.-S., "Dynamic response of initially stressed functionally graded", *Composite Structures*, (2001), 497-508.
113. He, X.Q., Ng, T.Y., Sivashanker, S. et Liew, K.M., "Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators", *International Journal of Solids and Structures*, (2001), 38, 1641–1655.
114. Liew, K.M., He, X.Q., Ng, T.Y. et Sivashanker, S., "Active control of FGM plates subjected to a temperature gradient: modelling via finite element method based on FSDT", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (2001), 52, 1253–1271.
115. Yang, J. et Shen, H.-S., "Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments", *Journal of Sound and Vibration*, (2002), 255:579–602.
116. Reddy, J.N. et Chen, Z.Q., "Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach", *Journal of Engineering Mechanics*, (2003), 129, 896–900.
117. Huang, X.-L. et Shen, H.-S., "Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments", *International Journal of Solids and Structures*, (2004), 41, 2403–2427.
118. Qian, L.F., Batra, R.C. et Chen, L.M., "Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method", *Composite: Part B*, (2004), 685-697.
119. Qian, L.F., Batra, R.C. et Chen, L.M., "Free and Forced Vibrations of Thick Rectangular Plates using Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory and Meshless Petrov-Galerkin (MLPG) Method", *Tech Science Pres, CMES*, (2003), 4, 519-534.
120. Liew, K.M., Zhao, X. et Ferreira, A., "A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells", *Composite Structures*, (2011), 93, 2031–2041.
121. Ritz, V.H.W., "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik", *Journal für Reine und Angewandte Mathematik*, (1908), 135, 1-61.
122. Kim, Y.-W., "Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, (2005), 284:531–549.

123. Ferreira, A., Batra, R., Roque, C., Qian, L. et Jorge, R., "Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method", *Composite Structures*, (2006), 75, 593–600.
124. Reddy, J.N., "A Review of Refined Theories of Laminated Composite Plates", *The Shock and vibration digest*, (1990), 22, 3-17.
125. Benveniste, Y., "A new approach to the application of Mori–Tanaka's theory of composite materials", *Mech Mater*, (1987), 147–157.
126. Mori, T. et Tanaka, K., "Average stress in matrix and average elastic energy of material with misfitting inclusions", *Acta Metall*, (1973), 571–574.
127. Liu, G.R., "Mesh free methods : moving beyond the finite element method": CRC Press LLC, (2003).
128. Zenkour, A.M., "A Comprehensive Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates: Part 2 -Buckling and Free Vibration", *International Journal of Solids and Structures*, (2005), 42, 5243–5258.
129. Matsunaga, H., "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory", *Composite Structures*, (2008), 499–512.
130. Zhao, X., Lee, Y.Y. et Liew, K.M., "Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, (2009), 918– 939.
131. Amini, M.H., Soleimani, M. et Rastgoo, A., "Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation", *Smart Mater Struct*, (2009), 18, 1-9.
132. Malekzadeh, P., "Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations", *Composite Structures*, (2009), 367–373.
133. Lü, C.F., Lim, C.W. et Chen, W.Q., "Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, (2009), 16, 576–584.
134. Huang, C.S., McGee III, O.G. et Chang, M.J., "Vibrations of cracked rectangular FGM thick plates", *Composite Structures*, (2011), 1747–1764.
135. Hasani Baferani, A., Saidi, A.R. et Ehteshami, H., "Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation", *Composite Structures*, (2011), 1842–1853.
136. Hirai, T., "Functional gradient materials", *Processing of ceramics—Part 2*, Weinheim, Germany: VCH Verlagsgesellschaft mbH Publishers; (1996), p. 293–341.

137. Jian, C.Y., Hashida, T., Takahashi, H. et Saito, M., "Thermal shock and fatigue resistance evaluation of functionally graded coatings for gas turbine blades by laser heating method", *Composites Engineering*, (1995), 879–889.
138. Kawasaki, A. et Watanabe, R., "Evaluation of thermomechanical performance for thermal barrier type of sintered functionally graded materials", *Composites Part B, Engineering*, (1997), 29–35.
139. Williamson, R.L., Rabin, B.H. et Byerly, G.E., "FEM study of the effects of interlayers and creep in reducing residual stresses and strains in ceramic–metal joints", *Composites Engineering*, (1995), 851–863.
140. Erdogan, F., "Fracture mechanics of functionally graded materials", *Composites Engineering*, (1995), 753–770.
141. Koizumi, M., "FGM activities in Japan", *Composites Part B*, (1997), 1–4.
142. Watari, F., Yokoyama, A., Saso, F., Uo, M. et Kawasaki, T., "Fabrication and properties of functionally graded dental implant", *Composites Part B, Engineering*, (1997), 5–11.
143. Nogata, F. et Takahashi, H., "Intelligent functionally graded material: bamboo", *Composites Engineering*, (1995), 743–751.
144. Amada, S., Ichikawa, Y., Munekata, T., Nagase, Y. et Shimizu, H., "Fiber texture and mechanical graded structure of bamboo", *Composites Part B, Engineering*, (1997), 13–20.
145. Shen, H.-S., "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, (2009).
146. Touloukian, Y.S., "Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials", New York: McMillan, (1967).
147. Reddy, J.N. et Chin, C.D., "Thermoelastical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates", *Journal of Thermal Stresses*, (1998), 21, 593–626.
148. Chi, S.-H. et Chung, Y.-L., "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis", *International Journal of Solids and Structures*, (2006), 43: 3657-3674.
149. Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. et Mechab, I., "An analytical method for temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded beams with general boundary conditions", *Composite Structures*, (2010), 92, 1877–1887.
150. Hill, R., "A self-consistent mechanics of composite materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, (1995), 213-222.
151. Kirchhoff, G.R., "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe", *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*, (1850), 40, 51-88.

152. Kirchhoff, G.R., "Über die Schwingungen Einer Kriesformigen Elastischen Scheibe", Poggendorffs Annalen, (1850), 81, 258–264.
153. Ashton, J.E. et Whitney, J.M., "Theory of Laminated Plates": Technomic Pub. Co., (1970).
154. Timoshenko, S.P. et Woinowsky-Krieger, S., "Theory of Plates and Shells", New York: McGraw-Hill, (1959).
155. Reddy, J.N., "Energy principles and variational methods in applied mechanics.": John Wiley & Sons. Inc., (2002).
156. Ambartsumian, S.A., "On theory of bending plates", Izv Otd Tech Nauk AN SSSR, (1958), 5, 69–77.
157. Reissner, E., "On transverse bending of plates including the effects of transverse shear deformation", Int J Solids Struct, (1975), 25, 495–502.
158. Touratier, M., "An Efficient Standard Plate Theory", International journal of engineering science, (1991), 901–916.
159. Murthy, M.V.V., "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates": NASA Technical Paper; (1981).
160. Efraim, E. et Eisenberger, M., "Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates", Journal of Sound and Vibration, (2009), 299, 720–738.
161. Bellman, R.E. et Casti, J., "Differential quadrature and long term integration", J . Math. Anal. Appl, (1971), 34, 235-238.
162. Bert, C.W., Jang, S.K. et Striz, A.G., "Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components", AIAA Journal, (1988), 26, 612-618.
163. Wang, X. et Bert, C.W., "A new approach in applying differential quadrature to static and free vibration analysis of beams and plates", Journal of Sound and Vibration, (1993), 162, 566-572.
164. Bert, C.W. et Malik, M., "Differential quadrature method in computational mechanics: A review", Applied Mechanics Reviews, (1996), 49, 1-28.
165. Chen, W.L., Striz, A.G. et Bert, C.W, "A new approach to the differential quadrature method for fourth-order equations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, (1997), 40, 1941-1956.
166. Shu, C. et Du, H., "Implementation of clamped and simply supported boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of beams and plates", International Journal of Solids and Structures, (1997a), 34, 819- 835.

167. Shu, C. et Du, H., "Generalized approach for implementing general boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of plates", *International Journal of Solids and Structures*, (1997b), 34, 837–846.
168. Shu, C. et Chen, W., "On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beam and plates", *Journal of Sound and Vibration*, (1999), 222, 239–257.
169. Shu, C. et Wang, C.M., "Treatment of mixed and non-uniform boundary conditions in GDQ vibration analysis of rectangular plates", *Engineering Structures*, (1999), 21, 125–134.
170. Fung, T.C., "Imposition of boundary conditions by modifying the weighting coefficient matrices in the differential quadrature method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (2003), 56, 405–432.
171. Shu, C., "Differential quadrature and its application in engineering", London, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, (2000).
172. Zong, Z. et Zhang, Y., "Advanced Differential Quadrature Methods, " Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics & Nonlinear Science, CRC Press, (2009).
173. Leissa, A.W., "The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods", *Journal of Sound and Vibration*, (2005), 961–978.
174. Chakraverty, S., "Vibration of Plates", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, (2009).
175. Bhat, R.B., "Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh–Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, (1985), 493–499.
176. Qatu, M.S., "Vibration of Laminated Shells and Plates": Elsevier, (2004).
177. Beslin, O. et Nicolas, J., "A hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions", *Journal of Sound and Vibration*, (1997), 633–655.
178. Barrette, M., Alain, B. et Beslin, O., "Vibration of stiffened plates using hierarchical trigonometric functions", *Journal of Sound and Vibration*, (2000), 727–747.
179. Satish Kumar, Y.V. et Kee Paik, J., "Buckling analysis of cracked plates using hierarchical trigonometric functions", *Thin-Walled Structures*, (2004), 687–700.
180. Wei, G.W., Zhao, Y.B. et Xiang, Y., "A novel approach for the analysis of high-frequency vibrations", *Journal of Sound and Vibration*, (2002), 207–246.

181. Jaouen, L., Brouard, B., Atalla, N. et Langlois, C., "A simplified numerical model for a plate backed by a thin foam layer in the low frequency range", *Journal of Sound and Vibration*, (2005), 681–698.
182. Dozio, L., "Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with arbitrary elastic boundaries", *Mechanics Research Communications*, (2010), 627–635.
183. Dozio, L., "On the use of the Trigonometric Ritz method for general vibration analysis of rectangular Kirchhoff plates", *Thin-Walled Structures*, (2010), 49, 129–144.
184. Dozio, L., "In-plane free vibrations of single-layer and symmetrically laminated rectangular composite plates", *Composite Structures*, (2011), 1787–1800.
185. Leissa, A.W., "The vibration of rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, (1973), 31, 257–293.
186. Lim, C.W., Liew, K.M. et Kitipornchai, S., "Numerical aspects for free vibration of thick plates. Part I: Formulation and verification", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (1998b), 156, 15–29.
187. Mindlin, R.D., Schacknow, A. et Deresiewicz, H., "Flexural vibrations of rectangular plates.", *ASME Journal of Applied Mechanics*, (1956), 23, 430–436.
188. Leissa, A.W. et Zhang, Z.D., "On the three-dimensional vibrations of the cantilevered rectangular parallelepiped", *Journal of Acoustical Society of America*, (1983), 73, 2013–2021.
189. Malik, M. et Bert, C.W., "Three-dimensional elasticity solutions for free vibrations of rectangular plates by the differential quadrature method", *International Journal of Solids and Structures*, (1998), 35, 299–319.
190. Roufael, O.L. et Dawe, D.J., "Vibration analysis of rectangular mindlin plates by the finite strip method", *Computer & Structures*, (1980), 12, 833–842.
191. Gorman, D.J., "Accurate free vibration analysis of clamped Mindlin plates using the method of superposition", *Journal of Sound and Vibration*, (1996), 98, 341–353.
192. Hung, K.C., "A treatise on three dimensional vibration of a class of elastic solids.", Singapore, China: Nanyang Technological University; (1996).
193. Nagino, H., Mikami, T. et Mizusawa, T., "Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, (2008), 317, 329–353.
194. Sundararajan, N., Prakash, T. et Ganapathi, M., "Nonlinear free flexural vibrations of functionally graded rectangular and skew plates under thermal environments", *Finite Elements in Analysis and Design*, (2005), 42, 152–168.

Table des matières

RESUME	1
ملخص.....	2
SUMMARY	3
TABLE DES MATIERES	4
REMERCIEMENTS	6
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX.....	7
INTRODUCTION	23
1. HISTORIQUE ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE.....	27
1.1. Théories de déformations des plaques :	30
1.1.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT) :.....	31
1.1.3. Théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT) :.....	32
1.1.4. Théories basées sur l'élasticité tridimensionnelle (3-D) :	34
1.2. Etude des contraintes résiduelles :	34
1.3. Analyse thermoélastique statique :.....	35
1.4. Analyse thermomécanique du flambage :	36
1.5. Etude des vibrations des poutres FGM :	38
1.6. Etude des vibrations des plaques FGM:.....	39
1.7. Synthèse de la recherche bibliographique :.....	44
1.8. Précision sur le sujet de thèse :	46
2. LES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL ET LEUR MODELISATION	47
2.1. Introduction:.....	47
2.2. Lois de distribution des propriétés :	51
2.2.1. Loi de mélange en puissance (P-FGM) :.....	54
2.2.2. Loi de mélange exponentielle (E-FGM) :.....	54
2.2.3. Loi de mélange sinusoïdale (S-FGM) :	54
2.2.4. Loi de mélange en puissance (P-FGM) symétrique:	56
2.2.5. Loi de mélange exponentielle (E-FGM) symétrique :.....	56
2.2.6. Loi de mélange sinusoïdale (S-FGM) symétrique :.....	56
2.2.7. Schéma de Mori-Tanaka :	59
2.2.8. Schéma auto-cohérent de Hill :	60
2.3. Gradient de température dans l'épaisseur du FGM :.....	62
2.4. Influence de la température sur les propriétés thermomécaniques :	65
2.5. Les théories de déformation des plaques:	67

2.5.1. Théorie classique des plaques (CPT):	68
2.5.2. Théorie des plaques du premier ordre (FSDPT) :	69
2.5.3. Théories des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) :	70
2.6. Conclusion :	77
3. ETUDE DES VIBRATIONS LIBRES DES POUTRES FGM PLACEES DANS UN ENVIRONNEMENT THERMIQUE	78
3.1. Introduction :	78
3.2. La poutre FGM symétrique :	78
3.2.1. Formulation unifiée pour une poutre FGM symétrique	79
3.2.2. Les équations du mouvement de la poutre FGM symétrique :	82
3.2.3. Solutions analytiques des équations de mouvement :	86
3.3. La poutre FGM non symétrique :	94
3.3.1. Formulation unifiée pour une poutre FGM non symétrique:	94
3.3.2. Résolution des équations de la poutre non symétrique par la DQM :	99
3.4. Conclusion :	108
4. ETUDE DES VIBRATIONS LIBRES DES PLAQUES FGM PLACEES DANS UN ENVIRONNEMENT THERMIQUE	109
4.1. Introduction	109
4.2. Formulation unifiée pour la plaque FGM :	110
4.3. Champ des déformations en formulation d'ordre supérieur:	110
4.4. Champ des contraintes thermiques initiales :	112
4.5. Energie de déformation mécanique :	112
4.6. Energie due aux contraintes thermiques initiales :	117
4.7. Energie cinétique :	121
4.8. Application du principe de Hamilton :	122
4.8.1. Variation de l'énergie cinétique :	123
4.8.2. Variation de l'énergie de déformation :	124
4.8.3. Variation de l'énergie due aux contraintes thermiques initiales:	126
4.9. Méthode variationnelle de Ritz :	131
4.9.1. Fonctions trigonométriques de Ritz:	136
4.9.2. Fonctions trigonométriques hiérarchiques de Ritz:	136
4.9.3. Fonctions polynômiales de Ritz :	138
4.9.4. Polynômes orthogonaux de Ritz :	139
4.10. Conclusion :	144
5. RESULTATS, VALIDATION ET INTERPRETATIONS	145
5.1. Introduction :	145

5.2. Poutre FGM symétrique :.....	146
5.2.1. Validation du code de calcul élaboré pour le cas de poutres FGM symétriques:.....	148
5.2.2. Résultats de l'analyse de la poutre FGM symétrique soumise à des contraintes thermiques initiales :	149
5.3. Poutre FGM non symétrique.....	167
5.3.1. Validation du code de calcul élaboré pour le cas de poutres FGM non symétriques : .	169
5.3.2. Résultats de l'analyse de la poutre FGM non symétrique soumise à des contraintes thermiques initiales :	172
5.4. Plaque FGM	186
5.4.1. Validation du code de calcul élaboré pour le cas des plaques isotropes :	188
5.4.2. Validation du code de calcul élaboré pour le cas des plaques FGM :.....	193
5.4.3. Résultats de l'analyse de la plaque FGM soumise à des contraintes thermiques initiales :	196
5.5. Conclusion	225
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	228
A. LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS	231
B. TABLEAUX DES RESULTATS DE LA PLAQUE FGM.....	235
BIBLIOGRAPHIE	255
Table des matières automatique	269