

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Saâd Dahlab-Blida 1



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de :

**Master Académique**

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

**Contrôle optimal des systèmes  
dynamiques**

Présenté par : Karima Khaldi

Soutenu le 24 / 09 / 2020, devant le jury d'examen composé de :

Mr Redhouane FRIHI	MAA	U.S.D. Blida1	Président
Mme Fatiha BOUTAOUS	MCB	U.S.D. Blida1	Promotrice
Mr Mohamed el Amine TALBI	MCB	U.S.D. Blida1	Examineur

Année universitaire : 2019 / 2020

## *Remerciements*

*Avant tout, je remercie « ALLAH » le tout puissant qui m'a donné le courage et la santé pour réaliser ce travail.*

*En second lieu, je remercie mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience, leurs conseils et leur aide durant la préparation de ce travail.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à ma promotrice **F. BOUTAOUS** pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période de préparation de ce mémoire.*

*Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury Mr **R.FRIHI** et Mr **M.A .TALBI** pour l'intérêt à mon travail et de l'avoir examiné.*

*Enfin, je tiens à exprimer mes remerciements et ma gratitude à tous mes enseignants pour leurs efforts fournis durant toute la période de mes études, ainsi qu'à toutes les personnes qui m'ont apporté l'aide et l'assistance nécessaires et qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à l'élaboration de ce travail.*

## *Dédicaces*

*Je dédie ce travail à ...*

*A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,*

*A mes chères sœurs pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral,*

*A mes chers frères pour leur encouragement, surtout mon grand frère Abdelkader,*

*A mes amies avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables, je leurs souhaite de ma part la réussite,*

*A toute ma famille pour le soutien tout au long de mon parcours universitaire.*

## ملخص

الهدف من هذه العمل هو دراسة إمكانية التحكم والتحكم الأمثل للأنظمة الديناميكية الخطية وغير الخطية. أولاً ، سوف ندرس إمكانية التحكم في الأنظمة الديناميكية المستقرة وغير المستقرة في الحالات الخطية وغير الخطية حيث نقدم بأمثلة معيار كالمان الذي يلعب دوراً أساسياً في هذه النظرية. ثم سنعرض مشكلة التحكم الأمثل للأنظمة الديناميكية الخطية وغير الخطية. نعطي النتيجة الرئيسية التي تعطي الشروط اللازمة لتحقيق أمثل للأنظمة الخاضعة للتحكم : إنه مبدأ بونترياجين. الكلمات المفتاحية: الأنظمة الديناميكية الخطية وغير الخطية ، إمكانية التحكم ، التحكم الأمثل. معيار كالمان ، مبدأ بونترياجين.

## **Résumé**

*Le but de ce mémoire est l'étude de la contrôlabilité et du contrôle optimal des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires.*

*D'abord, nous allons étudier la contrôlabilité des systèmes dynamiques stationnaires et non stationnaires dans les cas linéaires et non linéaires où nous présentons avec des exemples le critère de Kalman qui joue un rôle fondamental dans cette théorie.*

*Ensuite nous allons présenter le problème de contrôle optimal des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. Nous donnons le résultat principal qui donne les conditions nécessaires d'optimalité des systèmes contrôlés : c'est le Principe du Maximum de Pontryagin PMP avec des exemples variés d'applications de ce principe.*

**Mots clés :** *Systèmes dynamiques linéaires et non linéaires, contrôlabilité, contrôle optimal. critère de Kalman, principe du maximum de Pontryagin.*

## ***Abstract***

*The aim of this memory is the study of controllability and optimal control of linear and nonlinear dynamic systems.*

*First, we will study the controllability of stationary and non stationary dynamical systems in linear and nonlinear cases where we present with examples the Kalman criterion which plays a fundamental role in this theory.*

*Then we will present the problem of optimal control of linear and nonlinear dynamic systems. We give the main result which gives the necessary conditions for optimality of the controlled systems: it is the Maximum Principle of Pontryagin PMP with various examples of applications of this principle.*

***Keywords :*** *Linear and nonlinear dynamic systems, controllability, optimal control. Kalman criterion, the maximum principle of Pontryagin.*

## Table des matières

Notations .....	8
Introduction .....	9
Chapitre 1 : Rappels des notions de base.....	12
1.1 Rappels d'algèbre linéaire .....	12
1.2 Rappels sur les systèmes de contrôle .....	14
1.2.1 Exemples des systèmes de contrôle .....	15
1.2.2 Les différents types de systèmes de contrôle.....	16
1.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz .....	17
Chapitre 2 : Contrôlabilité des systèmes dynamiques .....	20
2.1 Le problème de contrôlabilité .....	20
2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires .....	22
2.2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires non stationnaires .....	27
2.2 Contrôlabilité des systèmes non linéaires .....	29
2.2.1 Contrôlabilité locale .....	30
Chapitre 3 : Contrôle optimal des systèmes dynamiques .....	32
3.1 Le problème de contrôle optimal .....	32
3.2 Contrôle optimal des systèmes linéaires .....	35
3.2.1 Temps d'optimalité .....	35
3.2.2 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité .....	36
3.3 Contrôle optimal des systèmes non linéaires.....	40
3.3.1 Principe du maximum de Pontryagin (PMP) : La version faible.....	40
3.3.2 Principe du maximum de Pontryagin (PMP) : La version forte.....	42
3.3.3 Principe du maximum de Pontryagin : Cas temps final $T = tf$ est inconnu (libre) .....	44
3.3.4 Principe du Maximum avec Contraintes sur l'état.....	45
Chapitre 4 : Applications du principe de maximum de Pontryagin .....	47
4.1 Systèmes de contrôle linéaires .....	47
4.1.1 Cas de problèmes sans contraintes sur le contrôle .....	47
4.1.2 Cas des problèmes avec contraintes sur le contrôle .....	49
4.2 Cas de systèmes de contrôle non linéaires.....	56
Conclusion générale.....	63
<b>Bibliographie</b> .....	<b>64</b>

## Notations

$max$  : Le maximum.

$min$  : Le minimum.

$lim$  : La limite.

$\mathbb{N}$  : L'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{R}$  : L'ensemble des nombres réels.

$M_{m,n}(\mathbb{R})$  : L'ensemble des matrices à  $m$  lignes et  $n$  colonnes, à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

$A^T$  : Transposée de la matrice  $A$ .

$A^{-1}$  : La matrice inverse de la matrice  $A$ .

$A^*$  : L'adjoint de la matrice  $A$ .

$e^A$  : Matrice exponentielle de la matrice  $A$ .

$I_n$  : La Matrice identité de dimension  $n$ .

$det(A)$  : Déterminant de la matrice  $A$ .

$rg(A)$  : Le rang de la matrice  $A$ .

$p_\lambda(A)$  : Le polynôme caractéristique de de la matrice  $A$ .

$dim(\mathbb{R}^n)$  : La dimension de  $\mathbb{R}^n$ .

$GL_n(\mathbb{K})$  : L'ensemble des matrices inversibles.

$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  : La dérivée de  $x(t)$  par rapport à la variable  $t$ .

$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$  : La dérivée seconde de  $x(t)$  par rapport à la variable  $t$ .

$\nabla f$  : gradient de  $f$ .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  : Le produit scalaire.

$\perp$  : L'orthogonalité.

$C^p(\Omega, \mathbb{K})$  : L'ensemble des applications de  $\Omega$  dans  $\mathbb{K}$ , de classe  $C^p$ .

$L^p(\Omega, \mathbb{K})$  : L'ensemble des applications mesurables de  $\Omega$  dans  $\mathbb{K}$ , de puissance  $p$  intégrables sur  $\Omega$ , pour  $1 \leq p < +\infty$ .

$L^p_{loc}(\Omega, \mathbb{K})$  : L'ensemble des applications mesurables de  $\Omega$  dans  $\mathbb{K}$ , de puissance  $p$  intégrables sur tout compact de  $\Omega$ , pour  $1 \leq p < +\infty$ .



# Introduction

La théorie du contrôle vise à étudier le comportement et les propriétés des systèmes contrôlés (ou commandés), c'est-à-dire, des systèmes dynamiques dépendant d'une variable  $t$  qui représente le plus souvent le temps, sur lesquels on peut agir au moyen d'un contrôle (ou une commande). Cette théorie a beaucoup d'applications dans de différents domaines : par exemple guider une voiture, piloter un avion ou un satellite vers une orbite géostationnaire, optimiser les flux d'information dans un réseau, coder et décoder une image numérique ou un SMS, contrôler le Ph dans des réactions chimiques, contrôler une épidémie ... etc

Parmi les objectifs remarquables de la théorie du contrôle, on cite :

- La stabilisation du système : le rendre insensible à certaines perturbations.
- La contrôlabilité du système : l'amener d'un état initial donné à un état final (cible) en un temps fixé et en respectant certains critères. Les moyens utilisés pour agir sur un système de façon à le diriger vers une cible sont appelés contrôles (commandes).
- Le contrôle optimal du système : Le contrôler de manière à lui faire quelque chose de façon optimale. Autrement dit : déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation.

Le but de ce mémoire est l'étude de ces deux derniers problèmes intéressants qui jouent un rôle important en amélioration de la qualité de la vie quotidienne. On se basera sur l'étude des systèmes de contrôle de dimension finie (ie : décrits par des équations différentielles ordinaires). On signale qu'il existe beaucoup d'études des systèmes de contrôle de dimension infinie qui modélisent des phénomènes physiques à travers des équations aux dérivées partielles (EDP) et dont l'étude devient beaucoup plus difficile, pour des raisons techniques liées à la théorie des équations aux dérivées partielles (voir [1], [7], [8]).

La théorie du contrôle optimal est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol.

Le grand progrès que cette théorie connaît actuellement revient à l'apparition du principe du maximum de Pontryagin, fondé en 1956 (voir [6]) et qui donne une condition nécessaire d'optimalité, permettant ainsi de calculer les trajectoires optimales.

En général, pour étudier un système de contrôle (contrôlé), il est indispensable d'utiliser une description interne du système, c'est-à-dire : une modélisation mathématique du phénomène qu'il représente. C'est l'approche par représentation d'état :

En considérant que le système au temps  $t$  est décrit par son état  $x(t)$ , on peut modéliser l'évolution du vecteur  $x(t)$  au cours du temps par un système commandé (contrôlé) :

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)) & \text{équation dynamique,} \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)) & \text{équation de mesures.} \end{cases}$$

Où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  : s'appelle l'état du système (S).
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$  : s'appelle le contrôle (commande) du système (S), c'est-à-dire le moyen d'action sur le système.
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$  : désigne la sortie, Elle représente ce que l'on observe du système (S), généralement sous la forme de mesures.
- $f$  et  $g$  sont des fonctions susceptibles de prendre presque n'importe quelles formes. La fonction vectorielle  $f$  définie de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$  est continue par morceaux en  $t$ , Lipschitzienne en  $x$  et continue en  $u$ .
- L'équation dynamique ou l'équation différentielle commandée est très souvent représentée par des équations différentielles, des équations intégrales, des équations aux dérivées partielles (EDP), etc ...
- L'équation des mesures est représentée par un ensemble d'équations algébriques appelées équations de sorties ou de mesures.

Ce mémoire se compose de quatre chapitres :

**Au chapitre 1** : nous présentons les notions de base liées à l'étude de la théorie de contrôlabilité et du contrôle optimal des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires.

**Au chapitre 2** : nous présentons une étude détaillée de la théorie de contrôlabilité des Systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. En particulier, nous donnons le critère de Kalman et ses applications dans le cas des systèmes linéaires et la contrôlabilité locale dans le cas des systèmes non linéaires.

**Au chapitre 3** : nous nous intéressons à l'étude du contrôle optimal des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires et on présentera aussi le principe du Maximum de Pontryagin (PMP) avec ses deux versions faible et forte.

**Au chapitre 4** : nous donnons des exemples variés d'applications du Principe du Maximum de Pontryagin à la résolution des quelques problèmes de contrôle optimal linéaires et non linéaires.

Ce travail sera terminé par une conclusion générale sur l'étude du contrôle optimal des systèmes dynamiques.

# Chapitre 1 : Rappels des notions de base

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base qui nous seront utiles pour l'étude de la contrôlabilité et du contrôle optimal des systèmes dynamiques linéaires et des systèmes dynamiques non linéaires. Voir [8].

## 1.1 Rappels d'algèbre linéaire

Soit  $n, m$  et  $p$  des nombres entiers naturels non nuls,  $T$  un nombre réel positif.

**Définition 1.1.1** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée. On appelle *polynôme caractéristique* de la matrice  $A$ , et on note  $P_A(\lambda)$ , le déterminant de la matrice  $A - \lambda I$ .

**Théorème 1.1.1 (Théorème de Hamilton-Cayley).** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée. Alors, son polynôme caractéristique  $P_A(\lambda)$  satisfait la propriété  $P_A(A) = 0$ .

**Proposition 1.1.1** Le rang d'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

**Proposition 1.1.2** Un nombre complexe  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  si, et seulement si, l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Le rang de la matrice  $A - \lambda I$  est strictement inférieur à  $n$ .
2. Le déterminant de la matrice  $A - \lambda I$  est nul :  $|A - \lambda I| = 0$ .

**Définition 1.1.2** On dit que  $v$  est un vecteur propre de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  si  $v$  est un vecteur non nul et

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0.$$

**Définition 1.1.3 (Matrice diagonale)** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée.

La matrice  $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$  est diagonale si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls.

$$\forall i \neq j, a_{i,j} = 0.$$

**Définition 1.1.4 (Matrice inversible)** Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . On dit que la matrice  $A$  est inversible s'il existe une matrice carrée  $B$  d'ordre  $n$  telle que :

$$A \cdot B = I_n.$$

Dans ce cas la matrice  $B$  est unique. Elle est appelée l'inverse de la matrice  $A$  et on écrit :

$$B = A^{-1}.$$

**Définition 1.1.5 (Matrice symétrique)** Une matrice  $A$  est dite symétrique si  $A^T = A$ .

**Définition 1.1.6 (Matrice nilpotente)** Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ . On dit que la matrice  $A$  est nilpotente si :

il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^m = 0$ , alors  $A^k = 0$ , pour tout  $k \geq m$ .

**Définition 1.1.7 (Matrice diagonalisable)** Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable s'il existe une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  où

$$D = \text{diag}([\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n.$$

telles que :

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}.$$

**Définition 1.1.8 (Exponentielle d'une matrice)** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée, d'ordre  $n$ . L'exponentielle de la matrice  $A$ , notée  $e^A$ , est définie par le développement en série entière :

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

### Remarque 1.1.1

- Si la matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est nilpotente, son exponentielle  $e^A$  se calcule directement à partir de son développement en série entière, puisque celui-ci ne comporte alors qu'un nombre fini de termes.
- Si la matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable, pour calculer son exponentielle  $e^A$  on utilise le résultat suivant :

**Proposition 1.1.3** Pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on a :

- $e^A \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .
- L'application exponentielle est de Classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{K}$ .
- Pour toutes matrices  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  qui commutent, i.e.  $AB = BA$ , on a

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

- Si la matrice  $A$  est diagonalisable, alors il existe une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  et une

matrice diagonale  $D$  telle que :

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1},$$

et

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1}.$$

Pour calculer l'exponentielle  $e^A$  pour une matrice quelconque  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , on utilise le résultat suivant.

**Proposition 1.1.4 (Décomposition de Dunford)** Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Alors, il existe une matrice  $D$  diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  et une matrice  $N$  nilpotente, telles que

$$M = D + N \text{ et } DN = ND.$$

De plus, cette décomposition est unique. On écrit

$$e^A = e^{D+N} = e^D e^N.$$

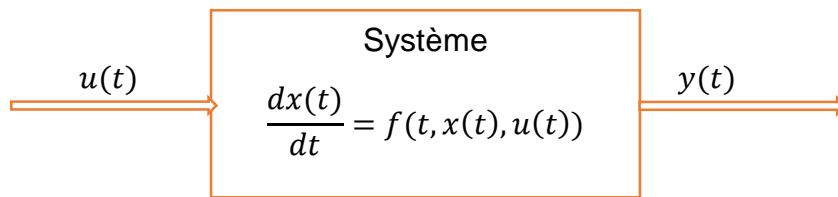
## 1.2 Rappels sur les systèmes de contrôle

### Définition 1.2.1 (Système dynamique)

- Un système est un ensemble d'objets qui réalisent une opération spécifique.
- Un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système, cette loi peut être représentée par des équations.

**Définition 1.2.2 (Système de contrôle (commande))** Un système de contrôle est un système dynamique dont on peut modifier le comportement au cours du temps. On agit sur un tel système au moyen d'un contrôle (ou commande). Le système de contrôle peut être un système mécanique (moteur, satellite), un processus chimique (réacteur, colonne de distillation), un circuit électrique ou électronique, un phénomène physique, etc.

D'un tel système résulte une relation entrée/sortie où l'entrée  $u(t)$  représente la commande, c'est-à-dire le moyen d'action sur le système, et la sortie  $y(t)$  représente ce que l'on observe du système, généralement sous la forme de mesures. Il est représenté par le diagramme suivant (voir Fig 1.1).



**Fig 1.1** : Schéma de représentation d'un système de contrôle

## 1.2.1 Exemples des systèmes de contrôle

### Exemple 1.1.1 Conduite d'un véhicule

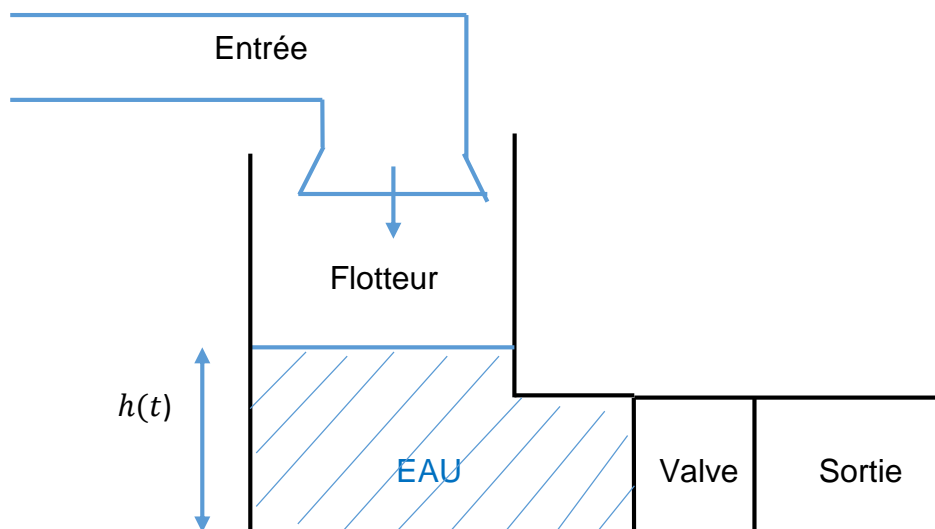
- Le système est un véhicule sur une route.
- La conduite du véhicule représente un système dynamique de contrôle.
- Le contrôle est l'angle du volant, les pressions exercées sur le frein et sur l'accélérateur.
- L'état du système est la position du véhicule sur la route.

### Exemple 1.1.2 Stockage de l'eau dans un réservoir

On considère un réservoir dont le schéma est donné par (Voir Fig 1.2).

Le flotteur régule le niveau de l'eau.

- L'eau dans le réservoir est le système.
- Le contrôle est la position du flotteur.
- L'état du système à chaque instant est un vecteur constitué par la hauteur de l'eau dans le réservoir  $h(t)$ , le débit d'entrée et le débit de sortie de l'eau.



**Fig 1.2** : Exemple d'un système de contrôle.

## 1.2.2 Les différents types de systèmes de contrôle

Il existe plusieurs types de systèmes de contrôle, parmi lesquels on cite :

- Système à temps continu :  $\dot{x} = f(t, x, u)$ .
- Système à temps discret :  $x_{k+1} = f(t_k, x_k, u_k)$ .
- Système à temps variant :  $\dot{x} = f(t, x, u)$ .
- Système à temps invariant :  $\dot{x} = f(x, u)$ .

**Définition 1.2.3 (Système de contrôle linéaire, non linéaire)** *Un système de contrôle est linéaire s'il est régi par un système d'équations différentielles linéaires. Sinon, il est dit non linéaire.*

### Remarque 1.2.1

Les systèmes de contrôle réels, présents dans la nature, sont non linéaires, Dans ce cas l'étude de ces systèmes est beaucoup plus complexe. Pour simplifier leur étude, on les linéarise dès que l'on peut le faire.

**Définition 1.2.4 (Système linéaire stationnaire, non stationnaire)** *Un système de contrôle linéaire est stationnaire s'il a des coefficients constants (indépendant du temps).*

*Si le système de contrôle a des coefficients variables dans le temps alors il est non stationnaire.*

- Les systèmes de contrôle sont de dimension finie, s'ils sont décrits par des équations différentielles ordinaires et modélisent des phénomènes physiques dits « localisés » tels le mouvement d'un solide.
- Les systèmes de contrôle de dimension infinie modélisent des phénomènes « distribués » souvent décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP), tels la conduction thermique dans une barre métallique, la vibration d'une corde tendue.

**Définition 1.2.5 (Trajectoire)** *On considère le système commandé (contrôlé) (1.1) :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

*On appelle trajectoire d'un système de contrôle (1.1) toute fonction régulière*



$t \in [0, T] \mapsto (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  qui vérifie (1.1) sur un intervalle  $[0, T]$  de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.2.6 (Point d'équilibre)** On appelle point d'équilibre du système le système commandé (contrôlé) (1.1), un couple  $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , vérifiant

$$f(x_e, u_e) = 0.$$

**Définition 1.2.7 (Fonction convexe)** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

On dit qu'une fonction  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

**Définition 1.2.8 (Ensemble convexe)** On dit qu'un ensemble  $E$  d'un espace vectoriel est convexe si

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in E.$$

### 1.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz

**Définition 1.3.2 (Problème de Cauchy)**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle problème de Cauchy, le Problème qui s'écrit sous la forme :

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Où

- $f$  est une fonction de  $I \times V$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in I$ .
- L'équation  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  est un système pour  $n \geq 2$ .
- $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  représente la condition initiale du problème de Cauchy (P).

**Définition 1.3.3 (Solution du problème de Cauchy)** On suppose que :

- pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est mesurable.
- pour tout  $x \in V$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est continue.

On appelle solution du problème de Cauchy (P), tout couple  $(J, x(\cdot))$ , où  $J$  est un intervalle tel que  $J \subset I$ ,  $t_0 \in J$  et  $x(\cdot)$  est une fonction absolument continue de  $J$  dans  $V$ ,

vérifiant, pour tout  $t \in J$ ,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) & \text{p.p sur } J \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

**Définition 1.3.3** Une solution  $(J, x(\cdot))$ , est dite maximale si, pour toute autre solution  $(\bar{J}, \bar{x}(\cdot))$ , nous avons  $\bar{J} \subset J$  et  $x(\cdot) = \bar{x}(\cdot)$  sur  $\bar{J}$ .

### **Théorème 1.3.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz usuel)**

Soit le problème de Cauchy (P). On suppose que :

- La fonction  $f$  soit continue sur  $I \times V$ .
- La fonction  $f$  soit lipschitzienne par rapport à  $x$  :

$$\exists M > 0, \forall t \in I, \forall y, z \in V, \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq M \|y - z\|.$$

Alors le problème de Cauchy (P) admet une solution unique définie sur  $I$ .

### **Remarque 1.3.1**

Concernant la résolution des problèmes de contrôle, du fait que les contrôles  $u$  sont en général non continus (par exemple continus par morceaux), alors les hypothèses du théorème de **Cauchy-Lipschitz usuel** doivent être affaiblies. Ainsi, pour assurer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de contrôle, on donne le résultat suivant :

### **Théorème 1.3.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**

On suppose que la fonction  $f: I \times V \rightarrow V$  vérifie les deux hypothèses suivantes :

1.  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à  $x$  au sens suivant :

$$\forall x \in V, \exists r > 0, B(x, r) \subset V, \exists \alpha \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+), \text{ tels que}$$

$$\forall t \in I, \forall y, z \in B(x, r), \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \alpha(t) \|y - z\|,$$

2.  $f$  est localement intégrable par rapport à  $t$ , i.e. :

$$\forall x \in V, \exists \beta \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+) \text{ tels que } \forall t \in I, \|f(t, x)\| \leq \beta(t).$$

*Alors pour toute condition initiale  $(t_0, x_0) \in I \times V$ , il existe une unique solution maximale  $(J, x)$  de problème de Cauchy*

# Chapitre 2 : Contrôlabilité des systèmes dynamiques

La contrôlabilité est une notion fondamentale en théorie du contrôle optimal. Dans ce chapitre, nous présentons les différents résultats permettant de traiter cette théorie très importante, dans les cas linéaire et non linéaire.

Le problème de contrôlabilité consiste à étudier la possibilité d'agir sur un système afin qu'il fonctionne dans un but désiré. En d'autres termes, on cherche la possibilité de transférer l'état d'un système dynamique d'un état initial  $x_0$  vers un état désiré  $x_1$  choisi à priori, et ceci en un temps fixé. Les moyens utilisés pour agir sur un système de façon à le diriger vers une cible sont appelés contrôles (commandes). Voir [8].

## 2.1 Le problème de contrôlabilité

Soit  $T > 0$  un horizon de temps,  $n$  et  $m$  deux nombres entiers naturels non nuls.

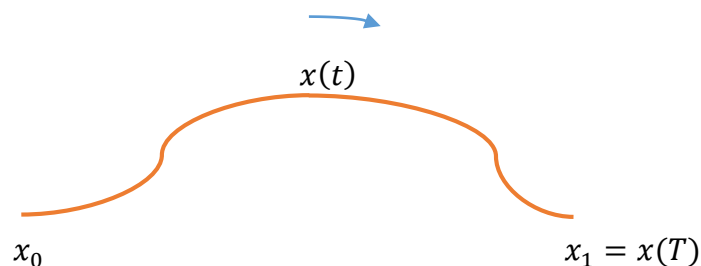
On considère le système différentiel de contrôle (S) suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (S)$$

Avec

- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^1$ .
- $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une commande (contrôle) du système de contrôle
- Ce système est contrôlable s'il existe un contrôle  $u$  tel que : étant donné un point  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , la trajectoire associée à ce contrôle joigne  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  à  $x_1$  en un temps fini  $T$ .

C'est le problème de contrôlabilité. (Voir Fig 2.1)



**Fig 2.1** : Le problème de contrôlabilité.

Pour donner une forme générale de  $f$  dans ce cas, on définit deux fonctions à valeurs matricielles :

$$A : [0, T] \rightarrow M_n(\mathbb{R}); \quad A(t) = \left( A_{i,j}(t) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

et

$$B : [0, T] \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{R}); \quad B(t) = \left( B_{i,j}(t) \right)_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m}.$$

Alors,  $f$  sera sous la forme  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec

$$f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u, \quad \forall (t, x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Donc le système de contrôle précédent peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

On supposera que  $A$  et  $B$  sont des fonctions continues, ce qui veut dire que chacune des composantes de  $A$  et  $B$  sont des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$ .

D'après les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles, pour tout contrôle  $u$  le système (2.1) admet une solution unique  $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)u(s))ds,$$

où  $M(t) \in M_n(\mathbb{R})$  est la résolvante du système linéaire homogène :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t). \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

### Exemples de systèmes de contrôle (commande)

**Exemple 2.1.1** Soit un train suivant une voie, ayant une position  $x(t)$  et possédant une accélération commandée par la relation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u.$$

En posant

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on obtient le système de contrôle sous la forme matricielle :

$$(S_1) \quad \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t),$$

**Exemple 2.1.2**

Soit le système différentiel :

$$(S_2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -x(t) + u(t), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases}$$

Posons

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

D'où, on obtient le système de commande sous la forme matricielle :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

## 2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

On s'intéresse à l'étude de contrôlabilité des systèmes dynamiques stationnaires et non stationnaires dans les cas des systèmes linéaires où on verra le critère de Kalman puis on verra la contrôlabilité locale dans le cas des systèmes non linéaires.

### 2.2.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes (stationnaires)

**Définition 2.1.1** *Le système de contrôle (2.1) est dit autonome lorsque les matrices  $A$  et  $B$  ne dépendent pas de la variable  $t$ . Donc c'est un système d'équations différentielles, à coefficients constants. Dans ce cas  $M(t) = e^{tA}$  et la solution du système (2.1) devient*

$$x(t) = x_u(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

**Définition 2.1.2 (Ensemble accessible)** *L'ensemble des points accessibles à partir de  $x_0$  en un temps  $T > 0$  est défini par :*

$$Acc(x_0, T) = \{x_u(T) / u \in U\}$$

où  $x_u(\cdot)$  est la solution du système (2.1) associée au contrôle  $u$ .

Autrement dit :  $Acc(x_0, T)$  est l'ensemble des extrémités des solutions de (2.1) au temps  $T$ , lorsqu'on fait varier le contrôle  $u$ .

**Théorème 2.1.1.** *Considérons le système de contrôle linéaire dans  $\mathbb{R}^n$  :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Avec

$x(t) \in \mathbb{R}^n$  : le vecteur d'état du système.

$u(t) \in \mathbb{R}^m$  : le vecteur de contrôle (commande)

$A \in M_n(\mathbb{R})$  : la matrice d'état.

$B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$  : la matrice de contrôle.

$T > 0$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Alors pour tout  $t \in [0, T]$ , l'ensemble  $Acc(x_0, t)$  est compact, convexe, et varie continûment avec le temps  $t$  sur  $[0, T]$ .

**Définition 2.1.3** *Le système contrôlé*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

est dit contrôlable en temps  $T$  si  $Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$ . Autrement dit : pour tous  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , il existe un contrôle  $u$  tel que la trajectoire associée relie  $x_0$  à  $x_1$  en temps  $T$ .

On dit que le système est contrôlable (en temps quelconque) depuis  $x_0$  si

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} Acc(x_0, T).$$

### 2.2.1.1 Contrôlabilité cas sans contraintes sur le contrôle : Critère de Kalman

Nous présentons ici un résultat principal qui donne une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité d'un système linéaire autonome. C'est le critère de Kalman (voir [3]):

**Théorème 2.1.2** *On suppose que  $\Omega = \mathbb{R}^m$  (pas de contrainte sur le contrôle).*

*Le système contrôlé*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

est contrôlable en temps  $T$  (quelconque) si, et seulement si, la matrice de contrôlabilité (ou de commandabilité) de **Kalman** :

$$K = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$

est de rang  $n$ . La condition  $\text{rang } K = n$  est appelée condition de Kalman.

On dit que la paire de matrices  $(A, B)$  est contrôlable (commandable).

**Remarque 2.1.1**

La condition de Kalman ne dépend ni de temps  $T$  ni de  $x_0$ . Autrement dit : si un système linéaire autonome est contrôlable en temps  $T$  depuis  $x_0$ , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

**Démonstration.** La preuve du **théorème 2.1.2** est basée le lemme suivant.

**Lemme 2.1.1** *La matrice  $K$  est de rang  $n$  si, et seulement si, l'application linéaire :*

$$\varphi: L^\infty([0, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$u \mapsto \int_0^{T^*} e^{(T^*-t)A} B u(t) dt$$

*est surjective.*

**Preuve du lemme 2.1.1.**

Supposons tout d'abord que  $\text{rang } K < n$  et montrons que  $\varphi$  n'est pas surjective.

L'application  $\varphi$  étant non surjective, il existe un vecteur  $\psi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que  $\psi K = 0$ . Par conséquent

$$\psi B = \psi A B = \dots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Or d'après le théorème d'Hamilton-Cayley (voir chapitre 1), il existe des réels  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  tels que

$$A^n = a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On en déduit par récurrence que pour tout entier  $k$ ,  $\psi A^k B = 0$ . Donc

$$\forall t \in [0, T], \psi e^{tA} B = 0.$$

Par conséquent pour tout contrôle  $u$  on a

$$\psi \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0$$

i.e.  $\psi \varphi(u) = 0$ , donc  $\varphi$  n'est pas surjective.

Réciproquement, si  $\varphi$  n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne  $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tel que : pour tout contrôle  $u$  on ait

$$\psi \int_0^{T^*} e^{(T^*-t)A} B u(t) dt = 0.$$

D'où

$$\forall t \in [0, T], \psi e^{(T-t)A} B = 0.$$

En  $t = T$ , on obtient  $\psi B = 0$ .



Ensuite, en dérivant par rapport à  $t$ , puis en prenant  $t = T$ , on obtient  $\psi AB = 0$ .

Ainsi par dérivations successives on obtient :

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Ainsi  $\psi K = 0$ . Donc  $\text{rang } K < n$

**La preuve** du théorème 2.1.2.

Si la matrice  $K$  est de rang  $n$ , alors d'après le lemme 2.1.1, l'application  $\varphi$  est surjective, i.e.

$$\varphi(L^\infty) = \mathbb{R}^n.$$

Or pour tout contrôle  $u$  l'extrémité au temps  $T$  de la trajectoire associée à  $u$  est :

$$x(T^*) = e^{TA}x_0 + \int e^{(T^*-t)}Bu(t)dt.$$

Alors l'ensemble accessible en temps  $T$  depuis un point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  est

$$\text{Acc}(T^*, x_0) = e^{T^*A}x_0 + \varphi(L^\infty) = \mathbb{R}^n.$$

Donc le système est contrôlable.

Réciproquement si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable en  $x_0$  et l'ensemble accessible en temps  $T$  s'écrit :

$$\text{Acc}(T, x_0) = \varphi(L^\infty) = \mathbb{R}^n.$$

Ce qui prouve que  $\varphi$  est surjective.

Donc d'après le lemme 2.1.1, la matrice  $K$  est de rang  $n$ .

### Exemple 2.1.3

On veut étudier la contrôlabilité du système dynamique :

$$(S_3) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) + u(t), \\ \dot{y}(t) = x(t) - u(t). \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t),$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de contrôlabilité (commandabilité) de Kalman est :

$$K = [B, AB] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le rang de la matrice  $K$  est

$$rg(K) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2) = 2 .$$

Donc le système  $(S_3)$  est contrôlable.

### Exemple 2.1.4

Soit le système de contrôle dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$(S_4) \quad \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t),$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de contrôlabilité (commandabilité) de Kalman est :

$$K = [B, AB, A^2B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le rang de la matrice  $K$  est  $rg(K) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ .

Donc le système  $(S_4)$  n'est pas contrôlable.

#### 2.2.1.2 Contrôlabilité cas avec contraintes sur le contrôle : ensemble atteignable

On considère le système de contrôle linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Où  $A$  et  $B$  sont deux applications  $L^\infty$  sur  $[0, T]$  à valeurs respectivement dans  $M_n(\mathbb{R})$  et  $M_{n,m}(\mathbb{R})$ .

On suppose que le contrôle  $u$  est à valeurs dans un sous-ensemble non vide  $U \subset \mathbb{R}^m$ .

**Définition 2.1.4 (Ensemble atteignable)** L'ensemble des points atteignables à partir de  $x_0$  en un temps  $T > 0$  est défini par

$$\mathcal{A}(x_0, T) = \{x_u(t), u \in U, x_0(0) = x_0\},$$

**Théorème 2.1.3 (Propriétés de l'ensemble atteignable)**

On suppose que  $U$  est un compact convexe non vide. Considérons le système de contrôle linéaire dans  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Soit  $T > 0$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Alors pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\mathcal{A}(x_0, T)$  est compact, convexe, et varie continûment avec  $t$  sur  $[0, T]$ .

**Démonstration :** Voir [8].

### Remarque 2.1.2

Dans le cas où le contrôle  $u$  est contraint, c'est-à-dire s'il appartient à un sous-ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ , on a le résultat suivant :

**Théorème 2.1.4** Soit  $B \in \mathbb{R}^n$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}$  un intervalle contenant 0 dans son intérieur.

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

avec  $u(t) \in \Omega$ . Alors tout point de  $\mathbb{R}^n$  peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la paire de matrices  $(A, B)$  vérifie la condition de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de  $A$  est inférieure ou égale à 0.

## 2.2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires non stationnaires

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas d'un système de contrôle non autonome (non stationnaire), c'est-à-dire dans le cas où les matrices  $A$  et  $B$  dépendent du temps.

**Théorème 2.1.5** Le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

est contrôlable en temps  $T$  si, et seulement si, la matrice

$$C(T) = \int_0^T M(t)^{-1} B(t)B(t)^T (M(t)^{-1})^T dt$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

**Démonstration** Voir [7], [8].

### Remarque 2.1.2

1. Si un système linéaire non stationnaire est contrôlable en temps  $T$  depuis  $x_0$  alors il est contrôlable en temps  $T$  depuis tout point.
2. Si le système est autonome, on a  $M(t) = e^{tA}$  et donc

$$C(T^*) = \int_0^{T^*} e^{tA} B B^T e^{-sA^T} ds.$$

Dans ce cas,  $C(T_1^*)$  est inversible si, et seulement si,  $C(T_1)$  est inversible.

i.e. : la condition de contrôlabilité ne dépend pas de  $T^*$ . Ce qui n'est pas le cas pour le système non stationnaire.

### Exemple 2.1.5

Soit le système  $(S_5)$  défini par la forme matricielle :

$$(S_5) \quad \dot{X}(T) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} u(t).$$

On pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \text{et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

La résolvante du système  $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$  est donnée par la formule  $M(t) = e^{tA}$ .

On a le polynôme caractéristique associé à la matrice  $A$  est

$$P_\lambda(A) = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ .

On cherche une matrice inversible  $P$  formée par les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

D'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale  $D$  telle que :

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}.$$

Ainsi, la matrice diagonale  $D$  est

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

D'où

$$e^{tA} = e^{tPDP^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1}.$$

Un calcul simple permet d'obtenir

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ti} & 0 \\ 0 & e^{-ti} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$M(t)^{-1} B(t)B(t)^T (M(t)^{-1})^T = \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 \\ \sin 2t & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de contrôlabilité au temps  $T^*$  est alors

$$\begin{aligned} C(T^*) &= \int_0^{T^*} e^{-sA} B(s)B(s)^T e^{-sA^T} ds \\ &= \int_0^{T^*} \begin{pmatrix} \cos(2s) & 0 \\ \sin(2s) & 0 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin(2T^*) & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2T^*) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice  $C(T^*)$  est  $\det(C) = 0$ , donc la matrice  $C(T^*)$  n'est pas inversible, Par conséquent le système  $(S_5)$  n'est pas contrôlable.

## 2.2 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Dans cette partie, on considère le système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & \forall t \in I, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Pour les systèmes de contrôle non linéaires, il est impossible d'étudier la contrôlabilité globale, le problème est beaucoup plus compliqué du fait qu'on ne peut pas utiliser la caractérisation de Kalman. Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'étude de la contrôlabilité locale du système au voisinage d'une cible appartenant à l'ensemble atteignable.

**Définition 2.2.1 (Ensemble accessible)** *L'ensemble accessible en temps  $T$  pour le système, noté  $Acc(x_0, T)$ , est l'ensemble des extrémités au temps  $T$  des solutions du système partant de  $x_0$  au temps  $t = 0$ .*

### 2.2.1 Contrôlabilité locale

**Définition 2.2.2** *Soit  $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  un point d'équilibre du système de contrôle. On dit que ce système est localement contrôlable au point d'équilibre  $(x_0, u_0)$  si :*

*pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$ , tel que*

$$\text{pour tout } x_0, x_1 \in B_\eta(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < \eta$$

*il existe une application mesurable  $u: [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que*

$$|u(t) - u_0(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [0, \varepsilon]$$

$$x(\varepsilon) = x_1.$$

**Théorème 2.2.2** *Supposons qu'il existe  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  tel que  $U$  soit un voisinage de  $u_0$  et*

$$f(x_0, u_0) = 0. \text{ Soit } A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) \text{ et } B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0).$$

*Si le.  $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$  alors le système est localement contrôlable en  $(x_0, u_0)$ .*

Voici une autre notion importante permettant d'étudier la contrôlabilité d'un système en se ramenant à un système que l'on sait contrôlable. Il s'agit de la définition suivante :

**Définition 2.2.3 (Systèmes semblables)** *Les systèmes de contrôle linéaires :*

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \quad \text{et} \quad \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2$$

*sont dits semblables s'il existe une matrice inversible  $P$  de taille  $n$  telle que*

$$A_2 = P A_1 P^{-1} \quad \text{et} \quad B_2 = P B_1.$$

**Proposition 2.2.1** *La condition de Kalman est intrinsèque, i.e. :*

$$(B_2, A_2 B_2, \dots, A_2^{n-1} B_2) = P(B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{n-1} B_1).$$

*En particulier, le rang de la matrice de Kalman est invariant par similitude.*

# Chapitre 3 : Contrôle optimal des systèmes dynamiques

Dans n'importe quel domaine : physique, informatique, biomathématiques, astronomie, biologie, chimie, ... etc, réaliser un objectif et tenter de le faire de manière optimale représentent l'objectif principal de la théorie du contrôle optimal qui fait partie de la théorie du contrôle.

Dans le chapitre précédent on a étudié l'existence d'une commande  $u(t)$  telle que la trajectoire  $x(t)$  associée relie un point de l'ensemble de départ  $x_0 \in M_0$  à la cible terminale  $x_1 \in M_1$  en un temps fini. Dans ce chapitre on cherche parmi toutes les trajectoires précédentes celle qui minimise le coût :

$$J(u) = g(T, x_u(T)) + \int_0^T L(t, x_u(t), u(t)) dt.$$

C'est le problème de contrôle optimal. Plus précisément, nous allons nous intéresser à l'étude du contrôle optimal des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires où présentera le principe du Maximum de Pontryagin (PMP). Voir [8].

## 3.1 Le problème de contrôle optimal

Soit  $T > 0$ , un horizon de temps,  $n$  et  $m$  deux nombres entiers non nuls. On considère le système dynamique contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

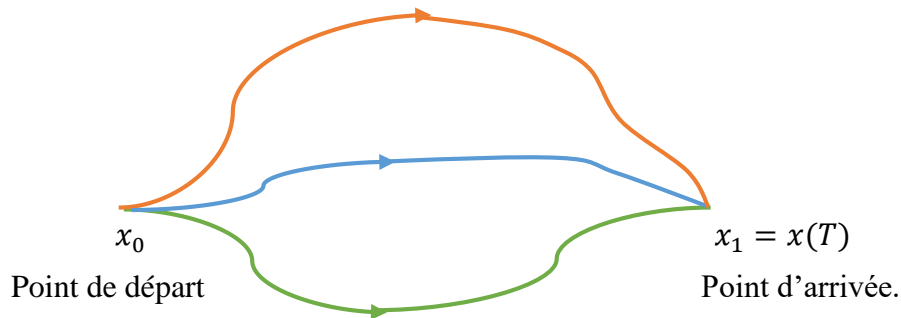
Avec

- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^1$ .
- $x(t)$  : le vecteur d'état du système de contrôle (3.1). En général,  $x(t)$  appartient à une variété différentielle  $M$  de dimension  $n$ , on supposera ici que  $M$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^n$ .
- $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une commande (contrôle) du système de contrôle (3.1).

Le problème de contrôle optimal consiste à chercher :



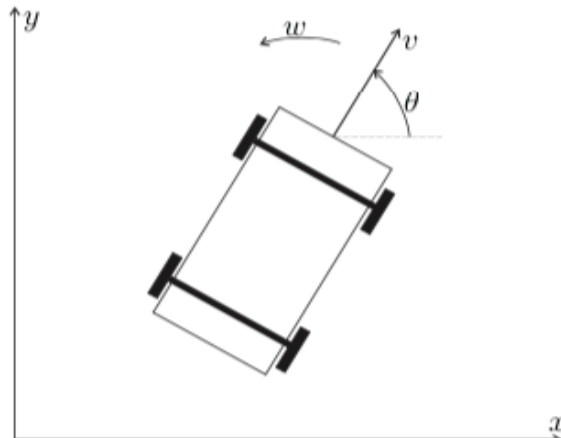
Si le système (3.1) est contrôlable, existe-t-il un contrôle joignant  $x_0$  à  $x_1$  et qui de plus minimise une certaine fonctionnelle  $u \mapsto J(u)$ ? (voir Fig 3.4)



**Fig 3.4 :** Problème de Contrôle optimal.

### Exemple d'un problème de contrôle optimal

#### Exemple 3.2.1 : Problème du parking



**Fig 3.5 :** Régalage de position de la voiture

On se donne  $X_T, Y_T, \theta_0, \theta_T$ .

- Voiture contrôlée (commandée) en vitesse et modélisée par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = v(t)\cos \theta(t), & x(0) = 0, \\ \dot{Y}(t) = v(t)\sin \theta(t), & y(0) = 0, \\ \dot{\theta}(t) = w(t), & \theta(0) = 0. \end{cases}$$

- Contrôles : vitesses linéaires et angulaires  $v$  et  $w$ .
- Problème de contrôle : trouver  $v(\cdot)$  et  $w(\cdot)$  tels que

$$x(T) = X_T, \quad y(T) = Y_T \quad \text{et} \quad \theta(T) = \theta_T.$$

- Problème de contrôle optimal : résoudre le problème ci-dessus en temps minimal  $T$ .

### Définition du problème de contrôle (commande) optimal

En général, le problème de commande optimale est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_u J(T, u) = \min_u g(T, x_u(T)) + \int_0^T L(t, x_u(t), u(t)) dt, \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0 \in M_0, \\ x(T) = x_1 \in M_1, \\ u(t) \in U, \quad t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Où

- $J(T, u)$  : est la fonction coût, critère de qualité ou but du problème (3.2).
- $L: V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  appelée Lagrangien.
- $g: W \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ .
- $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  : une fonction de classe  $C^1$  définit les équations dynamiques.
- $M_0$  et  $M_1$  sont deux variétés de  $\mathbb{R}^n$ ,
- $V$  : un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .
- $W$  : un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

Il existe trois problèmes importants de contrôle optimal :

#### ➤ Problème de Lagrange

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$J(T, u) = \int_0^T L(t, x_u(t), u(t)) dt$$

c'est à dire  $g \equiv 0$ .

#### ➤ Problème de Mayer

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$J(T, u) = g(T, x_u(T)).$$

c'est-à-dire  $L = 0$ , et  $J(T, u)$  est le coût terminal.

#### ➤ Problème de Mayer-Lagrange (Bolza)

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$J(T, u) = g(T, x_u(T)) + \int_0^T L(t, x_u(t), u(t)) dt.$$

Notons que la formulation de Bolza est la plus générale pour la représentation d'un problème de contrôle optimal.

## Résolution d'un problème de contrôle optimal

Nous donnons ici quelques étapes importantes en résolution d'un problème de contrôle optimal :

### • Modélisation mathématique du problème de contrôle optimal

- Différents groupes de variables (état, commande).
- Fonctionnelle de coût (Lagrange 1762, Mayer 1878, Bolza 1913).
- Les équations dynamiques.
- Conditions aux limites (initiales, terminales).
- Contraintes algébriques (inégalités, égalités, ensembles, espaces).
- Ensemble d'hypothèses (continuité, différentiabilité)

### • Méthodes de résolution

- Méthodes directes : Par exemple les méthodes d'optimisation (linéaire ou non linéaire).
- Méthodes indirectes : Par exemple par le principe du maximum de Pontryagin.

## 3.2 Contrôle optimal des systèmes linéaires

### 3.2.1 Temps d'optimalité

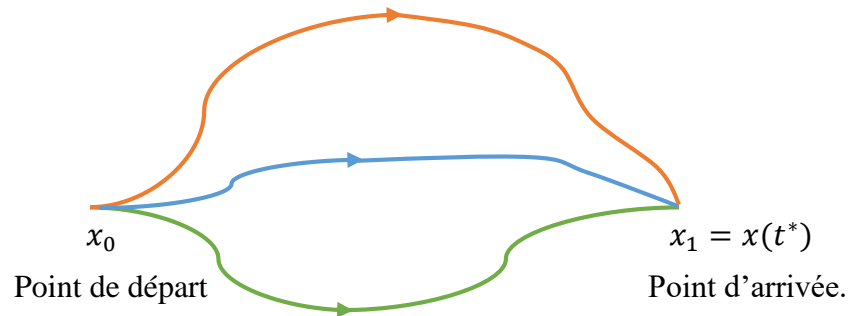
Considérons le système de contrôle dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

où les contrôles  $u$  sont à valeurs dans un compact d'intérieur non vide  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ .

Soit  $x_0$  et  $x_1$  deux points de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons que  $x_1$  soit accessible depuis  $x_0$ .

C'est-à-dire : qu'il existe au moins une trajectoire reliant  $x_0$  à  $x_1$ . Parmi toutes les trajectoires reliant  $x_0$  à  $x_1$ , on veut caractériser celles qui le font en temps minimal  $t^*$  (Voir Fig 3.6).



**Fig 3.6** : Trajectoire temps-optimal.

On a le théorème d'existence suivant. (Voir [8])

**Théorème 3.1.1** *Si le point  $x_1$  est accessible depuis  $x_0$  alors il existe une trajectoire temps minimal reliant  $x_0$  à  $x_1$ .*

**Définition 3.1.1.** *Le contrôle  $u$  est dit extrémal sur  $[0, t]$  si la trajectoire du système de contrôle associée à  $u$  vérifie  $x(t) \in \partial \text{Acc}_\Omega(x_0, t)$ .*

*En particulier, tout contrôle temps-minimal est extrémal. La réciproque est évidemment fausse car l'extrémalité ne fait pas la différence entre la minimalité et la maximalité.*

### 3.2.2 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit extrémal.

**Théorème 3.1.2** *Soit  $T > 0$ . Considérons le système de contrôle linéaire :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

*où le domaine de contraintes  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  sur le contrôle est compact. Le contrôle  $u$  est extrémal sur  $[0, T]$  si, et seulement si il existe une solution non triviale  $p(t)$  de l'équation*

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -p(t)A(t), \quad \text{telle que} \\ p(t)B(t)u(t) &= \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v, \end{aligned} \quad (3.3)$$

*pour presque tout  $t \in [0, T]$ . Le vecteur ligne  $p(t) \in \mathbb{R}^n$  est appelé vecteur adjoint.*

**Remarque 3.2.1**

- Si  $\Omega = [-a, a]$  où  $a > 0$ , la condition signifie que :

$$u(t) = a \operatorname{signe}(p(t)B(t)).$$

La fonction  $\varphi(t) = p(t)B(t)$  est appelée fonction de commutation, et un temps  $t_c$  auquel le contrôle extrémal  $u(t)$  change de signe est appelé un temps de commutation.

- Si  $u$  est extrémal sur  $[0, T]$  alors  $u$  est aussi extrémal sur  $[0, t]$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Proposition 3.2.1** *Considérons dans  $\mathbb{R}^n$  le système linéaire autonome avec contraintes :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & B \in \mathbb{R}^n \\ |u(t)| \leq 1, \end{cases}$$

où la paire de matrices  $(A, B)$  vérifie la condition de Kalman.

1. Si toute valeur propre de  $A$  est réelle, alors tout contrôle extrémal a au plus  $n - 1$  commutations sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Si toute valeur propre de  $A$  a une partie imaginaire non nulle, alors tout contrôle extrémal a un nombre infini de commutations sur  $\mathbb{R}_+$ .

### Système linéaire quadratique :

Dans cette partie on s'intéresse aux systèmes de contrôle linéaires avec un coût quadratique. On considère le système de contrôle linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

muni d'un coût quadratique du type

$$C(u) = x(T)^T Q x(T) + \int_0^T (x(t)^T W(t)x(t) + x(t)^T U(t)u(t)) dt,$$

où  $T > 0$  est fixé, et où, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $U(t) \in M_m(\mathbb{R})$  est symétrique définie positive,  $W(t) \in M_n(\mathbb{R})$  est symétrique positive et  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique positive.

On suppose que les dépendances en  $t$  de  $A, B, W$  et  $U$  sont  $L^\infty$  sur  $[0, T]$ .

Par ailleurs le coût étant quadratique, l'espace naturel des contrôles est  $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ .

Le problème de contrôle optimal est alors le suivant :

**Problème LQ** (linéaire-quadratique).

Un point initial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  étant fixé, l'objectif est de déterminer les trajectoires partant de  $x_0$  qui minimisent le coût  $C(u)$ . Notons que l'on n'impose aucune contrainte sur le point final  $x(T)$ .

Dans toute la suite, on pose :

$\|x(t)\|_W^2 = x^T W(t)x(t)$ ,  $\|u(t)\|_U^2 = u^T U(t)u(t)$  et  $g(x) = x^T Qx$ ,  
de sorte que

$$C(u) = g(x(T)) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

les matrices  $Q, W, U$  sont des matrices de pondération.

### Temps d'optimalité :

Introduisons l'hypothèse suivante sur  $U$ .

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m) \int_0^T \|u(t)\|_U^2 dt \geq \alpha \int_0^T u(t)^T u(t) dt. \quad (3.4)$$

Par exemple cette hypothèse est vérifiée si l'application  $t \rightarrow U(t)$  est continue sur  $[0, T]$  et  $T < +\infty$ , ou encore s'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$  et pour tout vecteur  $v \in \mathbb{R}^m$  on ait  $v^T U(t)v \geq cv^T v$ . On a le théorème suivant :

**Théorème 3.2.2** *Sous l'hypothèse précédente il existe une unique trajectoire minimisante pour le problème LQ elle est unique si la fonction  $C$  est convexe.*

**Proposition 3.2.2** *Considérons le problème de déterminer une trajectoire solution de  $\dot{x}(t) = A(t) + B(t)x(t)$  sur  $[0, +\infty[$  et minimisant le coût :*

$$C(u) = \int_0^{+\infty} (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt.$$

*Si le système est contrôlable en un temps  $T > 0$ , et si l'hypothèse de coercivité (3.4) est vérifiée sur  $[0, +\infty[$ , alors il existe une unique trajectoire minimisante .*

### Remarque 3.2.2

Si l'on suppose de plus que les applications  $A(\cdot)$  et  $B(\cdot)$  sont  $L^2$  sur  $[0, +\infty[$  et si  $W(\cdot)$  vérifie comme  $U$  une hypothèse de coercivité (3.4), alors la trajectoire minimisante tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini.

### Condition d'optimalité

**Théorème 3.2.2.** *La trajectoire  $x$ , associée au contrôle  $u$ , est optimale pour le problème LQ si, et seulement si il existe un vecteur adjoint  $p(t)$  vérifiant pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$\dot{p}(t) = -p(t)A(t) + x(t)^T W(t),$$

Et la condition finale

$$p(T) = -x(T)^T Q.$$

De plus, le contrôle optimal  $u$  s'écrit, pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$u(t) = U(t)^{-1} B(t)^T p(t)^T.$$

### Remarque 3.2.3

Le théorème précédent reste vrai si la fonction  $g$  apparaissant dans le coût est une fonction convexe  $C^1$  quelconque de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , sauf que la condition finale sur le vecteur adjoint

$$p(T) = -x(T)^T Q \quad \text{devient} \quad p(T) = -\frac{1}{2} \nabla g(x(T)),$$

### Remarque 3.2.4

Dans le cas d'un intervalle infini ( $T = +\infty$ ) la condition devient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0.$$

### Remarque 3.2.5

Définissons la fonction  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$H(x, p, u) = p(Ax + Bu) - \frac{1}{2} (x^T W x) + u^T U u.$$

En utilisant la convention que  $p$  est un vecteur ligne de  $\mathbb{R}^n$  alors les équations données par le principe du maximum LQ s'écrivent

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu,$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -pA + x^T W,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

### Exemple 3.2.1

Considérons, pour  $n = m = 1$ , le système de contrôle linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

et le coût  $C(u) = \int_0^T (x(t)^2 + u(t)^2) dt$ , avec  $U = 1$ ,  $Q = 0$  et  $W = 1$ .

Si la trajectoire  $x$  associée au contrôle  $u$  est optimale alors d'après le théorème 3.2.2, on a

$$\dot{p}(t) = -p(t)A(t) + x(t)^T W(t),$$

$$p(T) = -x(T)^T Q.$$

Et le contrôle optimal est donné par :

$$u(t) = U(t)^{-1} B(t)^T p(t)^T.$$

On obtient les équations  $\dot{x} = u$ ,  $\dot{p} = x$ ,  $p(T) = 0$ , avec  $u = p$ .

On en déduit que  $\ddot{x} = x$ , d'où

$$x(t) = x_0 \cosh t + p(0) \sinh t, \quad u(t) = p(t) = x_0 \sinh t + p(0) \cosh t.$$

Or  $p(T) = 0$ , Donc

$$x(t) = x_0 \left( \cosh t - \frac{\sinh T}{\cosh T} \sinh t \right).$$

### 3.3 Contrôle optimal des systèmes non linéaires

#### 3.3.1 Principe du maximum de Pontryagin (PMP) : La version faible

D'abord, nous allons présenter la version faible du principe du maximum de Pontryagin, elle concerne le contrôle optimal des systèmes différentiels sans contraintes sur le contrôle (voir [6]).

##### 3.3.1.1 Le problème de Lagrange

Ce problème simplifié est le suivant. On cherche des conditions nécessaires d'optimalité pour le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.5)$$

où les contrôles  $u(\cdot) \in U$  sont définis sur  $[0, T]$  et les trajectoires associées doivent vérifier les conditions  $x(0) = x_0$ , et  $x(T) = x_1$ .

Le problème est de minimiser un coût de la forme

$$C(u) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt \quad (3.6)$$

où  $T$  est fixé. On a le résultat suivant.



**Théorème 3.3.1 (Principe du maximum faible, cas de Lagrange)** *Si le contrôle  $u$  associé au système de contrôle (3.5) est optimal pour le coût (3.6), alors il existe une application  $p(\cdot)$  absolument continue sur  $[0, T]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , appelée vecteur adjoint, et un réel  $p^0 \leq 0$ , tels que le couple  $(p(\cdot), p^0)$  est non trivial, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout  $t \in [0, T]$  :*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad (3.7)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad (3.8)$$

où

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 L(t, x, u) \quad (3.9)$$

où  $H$  est le Hamiltonien associé au système (3.5) et au coût (3.6).

**Démonstration :** pour la démonstration de ce théorème voir [7], [8].

### 3.3.1.2 Le problème de Mayer-Lagrange

On modifie le problème précédent en introduisant le coût :

$$C(t, u) = g(t, x(t)) + \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt \quad (3.10)$$

où le temps final  $t$  n'est pas fixé. Soit  $M_1$  une variété de  $\mathbb{R}^n$ .

Le problème de contrôle optimal est de déterminer une trajectoire solution du problème de contrôle (3.5) où les contrôles  $u(\cdot)$  sont dans l'ensemble  $U$  des contrôles admissibles tel que  $x(T) \in M_1$ , et de plus  $x(\cdot)$  minimise sur  $[0, T]$  le coût (3.10).

On a le résultat suivant.

### Théorème 3.3.2 (Principe du Maximum faible, cas de Mayer-Lagrange)

*Si le contrôle  $u$  est optimal sur  $[0, T]$  alors il existe une application  $p: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  absolument continue, et un réel  $p^0 \leq 0$ , tels que le couple  $(p(\cdot), p^0)$  est non trivial, et*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad (3.11)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad (3.12)$$

où

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 L(t, x, u) \quad (3.12)$$

*Si de plus le temps final pour joindre la cible  $M_1$  n'est pas fixé, on a la condition au temps final  $T$*

$$H(t, x(t), p(t), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)) \quad (3.13)$$

**Démonstration :** voir [8].

### 3.3.2 Principe du maximum de Pontryagin (PMP) : La version forte

Nous présentons ici, la version forte du principe du maximum de Pontryagin (PMP), qui est très générale, puisqu'elle est valide pour des systèmes différentiels généraux et qu'elle prend en compte des contraintes sur le contrôle. Il s'agit d'un ensemble de conditions nécessaires pour l'optimalité d'une solution d'un problème de contrôle optimal.

#### **Théorème 3.3.3 (Énoncé général du principe du maximum de Pontryagin)**

On considère le système de contrôle dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Où  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$  et les contrôles  $u$  sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle  $[0, t_e(u)[$  de  $\mathbb{R}^+$  et à valeurs dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ .

Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $U$  l'ensemble des contrôles admissibles  $u$  dont les trajectoires associées relient un point initial de  $M_0$  à un point final de  $M_1$  en temps  $t(u) < t_e(u)$ .

Par ailleurs, le coût d'un contrôle  $u$  sur  $[0, T]$  est défini par :

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T L(s, x(s), u(s)) ds,$$

où  $L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont  $C^1$ .

Et  $x(\cdot)$  est la trajectoire associée au contrôle  $u(\cdot)$ .

On considère le problème de contrôle optimal suivant :

Déterminer une trajectoire reliant  $M_0$  à  $M_1$  et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé

ou non. Si le contrôle  $u \in U$  associé à la trajectoire  $x(\cdot)$  est optimal sur  $[0, T]$ , alors il existe une application  $p(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue appelée vecteur adjoint, et un nombre réel  $p^0 \leq 0$ , tels que le couple  $(p(\cdot), p^0)$  est non trivial, et tels que pour presque tout  $t \in [0, T]$

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad (3.14)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad (3.15)$$

où

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 L(t, x, u)$$

est le Hamiltonien associé au système du contrôle, et on a la condition de maximisation presque partout sur  $[0, T]$  :

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v) \quad (3.16)$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible  $M_1$  n'est pas fixé, on a la condition au temps final  $T$

$$\max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)) \quad (3.17)$$

Si de plus  $M_0$  et  $M_1$  (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de  $\mathbb{R}^n$  ayant des espaces tangents en  $x(0) \in M_0$  et  $x(T) \in M_1$ , alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0 \quad (3.18)$$

et

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)}M_1 \quad (3.19)$$

**Démonstration** : voir [8].

### Remarque 3.3.1

Si le contrôle  $u$  est continu au temps  $T$ , la condition (3.17) peut s'écrire

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)).$$

### Remarque 3.3.2

Si la variété  $M_1$  s'écrit sous la forme

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F_1(x) = \dots = F_p(x) = 0\},$$

où les  $F_i$  sont des fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$  (indépendantes puisque  $M_1$  est une variété), alors la condition (3.19) se met sous la forme

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \mid p(T) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla F_i(x(T)) + p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)).$$

**Remarque 3.3.3**

Si le système considéré est autonome, i.e. si  $f$  et  $L$  ne dépendent pas de  $t$ , alors  $H$  ne dépend pas de  $t$  et on a

$$\forall t \in [0, T], \max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p^0, v) = cste.$$

**Remarque 3.3.4**

- La convention  $p^0 \leq 0$  conduit au **principe du maximum**.
- La convention  $p^0 \geq 0$  conduirait au **principe du minimum**.

**Remarque 3.3.5**

Dans le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^m$ , i.e. lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximum (3.16) devient

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Dans ce cas, on retrouve le principe du maximum faible.

**Définition 3.3.1.** Les conditions (3.18) et (3.19) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint. La condition (3.17) est appelée condition de transversalité sur le Hamiltonien.

### 3.3.3 Principe du maximum de Pontryagin : Cas temps final $T = t_f$ est inconnu (libre)

Le problème à résoudre dans ce cas est de la forme :

$$\begin{cases} \min_{t_f > 0} J(t_f, x, u) = \min_{t_f > 0} g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt & (3.20) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f]. \\ x(0) = x_0, \\ u(t) \in U = [0, m], \end{cases}$$

On a le théorème suivant :

**Théorème 3.3.4 (Principe du Maximum de Pontryagin)**

Soit  $(\bar{t}_f, \bar{x}, \bar{u})$  solution du problème (3.20) alors il existe une application  $\bar{p}: t \mapsto \bar{p}(t)$  tel que le système (PMP) suivant soit satisfait :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \nabla_p H(t, \bar{x}(t), \bar{p}(t), p^0, \bar{u}(t)) , \quad \bar{x}(0) = x_0 \quad (3.21)$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = -\nabla_x H(t, \bar{x}(t), \bar{p}(t), p^0, \bar{u}(t)) , \quad \bar{p}(\bar{t}_f) = -\nabla_x g(\bar{t}_f, \bar{x}(\bar{t}_f)) , \quad (3.22)$$

$$H(\bar{t}_f, \bar{x}(\bar{t}_f), \bar{p}(\bar{t}_f), p^0, \bar{u}(\bar{t}_f)) + g(\bar{t}_f, \bar{x}(\bar{t}_f)) , \quad (3.23)$$

$\bar{u}(t)$  est solution du problème

$$\min_{v \in U} (t, \bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \text{ p. p. dans } [0, T]. \quad (2.24)$$

Où

(3.21) : désigne l'équation d'état.

(3.22) : désigne l'équation adjointe.

(3.23) : désigne la condition de transversalité .

### 3.3.4 Principe du Maximum avec Contraintes sur l'état

Le principe du maximum tel qu'il vient d'être énoncé prend en compte des contraintes sur le contrôle, mais ne prend pas en compte d'éventuelles contraintes sur l'état.

Ce problème est en effet beaucoup plus difficile. Il existe plusieurs variantes du principe du maximum avec contraintes sur l'état. La théorie est cependant beaucoup plus compliquée.

(Voir [4], [8]).

Une différence fondamentale avec le principe du maximum classique est que la présence de contraintes sur l'état peut rendre le vecteur adjoint discontinu. On rajoute alors des conditions de saut, ou de jonction.

#### Méthode de pénalisation

Un moyen simple de manipuler des contraintes sur l'état est de résoudre un problème de contrôle optimal modifié, où comme dans le théorie linéaire quadratique, on pondère cette contrainte de manière à la forcer à être vérifiée.

#### Le principe de cette méthode

Supposons qu'on veuille imposer à l'état d'appartenir à un sous-ensemble  $C \subset \mathbb{R}^n$ . Donnons-nous une fonction sur  $\mathbb{R}^n$ , nulle sur  $C$  et strictement positive ailleurs.

Alors, en ajoutant au coût  $C(t, u)$  le scalaire  $\lambda \int_0^{t_1} \varphi(x(t)) dt$ , où  $\lambda > 0$  est un poids que l'on peut choisir assez grand, on espère que la résolution de ce problème de contrôle optimal modifié va forcer la trajectoire à rester dans l'ensemble  $C$ .

En effet, si  $x(t)$  sort de l'ensemble  $C$ , et si  $\lambda$  est grand, alors le coût correspondant est grand, et probablement la trajectoire ne sera pas optimale.

## Chapitre 4 : Applications du principe de maximum de Pontryagin

Dans ce chapitre, nous présentons des exemples illustratifs d'applications du principe de maximum de Pontryagin au calcul du contrôle optimal de quelques systèmes dynamiques dans les cas linéaires et non linéaires.

### 4.1 Systèmes de contrôle linéaires

#### 4.1.1 Cas de problèmes sans contraintes sur le contrôle

##### Exemple 4.1.1

On considère le problème linéaire **sans contraintes** sur le contrôle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_u J(T, u) = -x(1) - y(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt, \\ \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = u(t), \\ x(0) = 1, y(0) = 3, \\ u(t) \in U. \quad t \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Le système (4.1) est de type  $\dot{X} = AX + Bu$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- **Étude de la contrôlabilité du système (4.1)**

On a la matrice de Kalman est  $K = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Et le rang de la matrice de Kalman est  $\text{rang } K = 2$ .

D'où la contrôlabilité du système (4.1).

- Le Hamiltonien associé au système (4.1). est :

$$H(x, u, p_x, p_y, t) = p_x y + p_y u + p^0 \frac{u^2(t)}{2}.$$

Où  $p^0 \leq 0$  et  $p = (p_x, p_y)$  est le vecteur adjoint. Les composantes  $p_x$  et  $p_y$  sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H(x, p, u)}{\partial x} = 0, \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H(x, p, u)}{\partial y} = -p_x. \end{cases}$$

D'où, on obtient

$$\begin{cases} p_x = C_1, & C_1 \in \mathbb{R} \\ p_y = -C_1 t + C_2, & C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Posons  $p^0 = -1$ , alors le Hamiltonien s'écrit sous la forme :

$$H(x, u, p_x, p_y, t) = p_x y + p_y u - \frac{u^2(t)}{2}.$$

• Les conditions de transversalité sont :

$$\begin{cases} p_x(1) = 1, \\ p_y(1) = 1, \end{cases}$$

Alors  $C_1 = 1$ , et  $C_2 = 3$ . Ainsi

$$\begin{cases} p_x(1) = 1, \\ p_y(1) = -t + 3. \end{cases}$$

La condition de maximisation

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, u, p_x, p_y, t) = 0.$$

D'où

$$p_y(t) - u(t) = 0 \Rightarrow p_y(t) = u(t).$$

Donc le contrôle optimal est

$$u^*(t) = -t + 3.$$

Il reste à déterminer les trajectoires  $x^*(t)$  associées au contrôle  $u^*(t)$ . On a

$$\dot{y}(t) = u(t) = -t + 3 \Rightarrow y(t) = -\frac{t^2}{2} + 3t + C_3.$$



et

$$\dot{x}(t) = y(t) = -\frac{t^2}{2} + 3t + C_3. \Rightarrow x(t) = -\frac{t^3}{6} + 3\frac{t^2}{2} + C_3t + C_4.$$

En utilisant les conditions initiales  $x(0) = 1, y(0) = 3$ , on obtient

$$C_3 = 3, \quad C_4 = -\frac{10}{3}.$$

Donc la solution du problème de contrôle (4.1) est

$$\begin{cases} u^*(t) = -t + 3. \\ x^*(t) = -\frac{t^3}{6} + 3\frac{t^2}{2} + 3t - \frac{10}{3}, \\ y^*(t) = -\frac{t^2}{2} + 3t + 3. \end{cases}$$

#### 4.1.2 Cas des problèmes avec contraintes sur le contrôle

##### Exemple 4.1.2

On considère le système de contrôle linéaire avec contraintes :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + u, \\ |u| \leq 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Le but est de joindre en temps minimal la droite  $x = 0$ , puis de rester sur cette droite.

On remarque que si une trajectoire reste dans  $x = 0$ , cela implique que

$$y(t) = -u(t) \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad |y| \leq 1.$$

Réciproquement de tout point  $(0, y)$  avec  $|y| \leq 1$  part une trajectoire restant dans le lieu

$$x = 0, |y| \leq 1. \quad \text{Il suffit de choisir} \quad u(t) = -ye^{-2t}.$$

Par conséquent la cible est

$$M_1 = \{(0, y) \mid |y| \leq 1\}.$$

C'est un compact

Le système (4.2) peut s'écrire sous la forme matricielle  $\dot{X} = AX + Bu$ .

$$\text{Avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- **Étude de la contrôlabilité du système (4.2)**

Le système est linéaire et les deux matrices  $A$  et  $B$  sont indépendantes de la variable du temps  $t$ , donc le système linéaire (4.2) est autonome.

La matrice de Kalman est

$$K = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de la matrice de Kalman est :

$$\text{rang } K = \text{rang } [B, AB] = 2 = n.$$

Par ailleurs les valeurs propres de la matrice  $A$  sont 0 et  $-1$ .

Donc le système linéaire (4.2) est contrôlable.

• **Calcul du contrôle optimal :**

En calculant les trajectoires optimales joignant  $M_1$  à tous point final. Le système extrémal s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - u, \\ \dot{y} = y - u, \\ \dot{p}_x = 0, \\ \dot{p}_y = p_x - p_y. \end{cases}$$

Où  $u(t) = -\text{signe}(p_x(t) + p_y(t))$ .

Par intégration, on obtient

$$\begin{cases} p_x(t) = \text{cste} = p_x \\ p_y(t) = p_x + (p_y(0) - p_x)e^{-t}. \end{cases}$$

En particulier  $p_x + p_y$  est strictement monotone et donc le contrôle  $u$  admet au plus une commutation. Par ailleurs la condition de transversalité impose que si  $x(0) = 0$ ,  $|y(0)| < 1$ .

Alors

$$p_x(0) = \pm 1 \quad \text{et} \quad p_y(0) = 0.$$

Mais  $p_x(t) + p_y(t) = \pm(1 - e^{-t})$  et  $u$  ne commute pas sur  $\mathbb{R}_+$ .

Calculons maintenant les extrémales partant du point  $(0, 1)$ .

La condition de transversalité est :

$$p_x(0) = \cos \alpha, \quad p_y(0) = -\sin \alpha, \quad \text{avec } 0 < \alpha < \pi.$$

Par conséquent

$$u(t) = -\text{signe} (2 \cos \alpha - (\sin \alpha + \cos \alpha)e^{-t})$$

et l'on a une commutation si et seulement s'il existe  $t \geq 0$  tel que

$$e^{-t} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

- Si  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4}$  alors  $\frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} > 1$  donc l'équation ci-dessus n'a pas de solution.

Donc  $u(t) = +1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

- Si  $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ , l'équation a une solution  $t(\alpha) > 0$ , et l'on voit que  $t(\alpha)$  est strictement croissante de  $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$  dans  $[0, +\infty[$ .

Alors, le contrôle vaut  $-1$  sur  $[0, t(\alpha)[$  et  $+1$  ensuite.

- Si  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$ , l'équation n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}_+$  et on trouve

$$u(t) = -1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

### Exemple 4.1.3 : Contrôle d'un tram

L'état du tram (supposé de masse unité) est décrit par sa position  $x(t)$  et sa vitesse  $v(t)$  le long d'un axe unidirectionnel et on contrôle l'accélération du tram sous la forme :

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Posons

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = u(t), \\ |u| \leq 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Le système (4.3) est de type  $\dot{X} = AX + Bu$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- **Étude de la contrôlabilité du système (4.3)**

On a la matrice de Kalman est  $K = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Et le rang de la matrice de Kalman est  $\text{rang } K = 2$ .

D'où la contrôlabilité du système (4.3).

Ainsi, il existe un contrôle  $u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$  amenant le tram de  $x_0$  en  $x_1$  au temps  $T$ .

• **Calcul du contrôle optimal du système (4.3)**

Puisque il existe des contrôles permettant de relier  $x_0$  à  $x_1$ , on cherche maintenant à le faire en temps minimal. Pour cela, on a

$$u(t) = \text{signe}(p(t)B), \quad \text{où } p(t) \in \mathbb{R}^2 \text{ est solution de } \dot{p} = -pA.$$

Posons  $p = (p_x, p_y)$ . Alors  $u(t) = \text{signe}(p_y(t))$  et  $\dot{p}_x = 0$ ,  $\dot{p}_y = -p_x$ , i.e. :

$$p_x = p_{x0}, \quad p_y = p_{y0} - p_{x0}t.$$

On souhaite atteindre la cible  $(0,0)$  en temps minimal.

On introduit l'état adjoint  $p(t) = (p_x(t), p_y(t))$ .

Comme la fonction  $p_y$  est affine en  $t$ , cela nous permet déjà de montrer qu'il y a au plus une commutation et que le contrôle temps-optimal est nécessairement bang-bang.

Pour aller plus loin, on calcule les trajectoires dans l'espace des phases (le plan  $(x, y)$ ).

- Si  $u = +1$ , alors  $x(t) - \frac{1}{2}y(t)^2 = \text{cste}$ .

$$\left(\text{car } \frac{d}{dx} \left(x(t) - \frac{1}{2}y(t)^2\right) = \dot{y}(t) - y(t)\dot{y}(t) = y(t) - y(t)u(t) = 0,\right.$$

les trajectoires sont des paraboles d'axe  $Ox$ , parcourues dans le sens des  $y$  croissants.

- Si  $u = -1$ , alors  $x(t) - \frac{1}{2}y(t)^2 = \text{cste}$ , les trajectoires sont des paraboles d'axe  $-Ox$ , parcourues dans le sens des  $y$  décroissants.

**Exemple 4.1.4**

Considérons le système dans  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = 2y(t) + u(t), \\ |u| \leq 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Le système (4.4) est de type  $\dot{X} = AX + Bu$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- **Étude de la contrôlabilité du système (4.4)**

$$K = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où le rang de la matrice  $K$  est :  $\text{rang } K = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ .

Donc le système (4.4) est contrôlable.

- **Calcul du contrôle optimal du système (4.4)**

On se pose le problème de relier en temps minimal le point origine  $(0,0)$  à tout point  $(a, 0)$ , où  $a \in \mathbb{R}$ . Sans perte de généralité on peut supposer que  $a > 0$ .

### Application du Principe du Maximum.

- Le Hamiltonien du système (4.4) s'écrit sous la forme :

$$H(x, p, u) = p_1 y + p_2(2y + u) + p^0.$$

Par ailleurs le système adjoint s'écrit

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H(x, p, u)}{\partial x} = 0, \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H(x, p, u)}{\partial y} = -p_1 - 2p_2 \end{cases}$$

Notons que puisque le vecteur adjoint  $(p_1, p_2)$  doit être non trivial,  $2p_2$  ne peut s'annuler sur

un intervalle (sinon on aurait également  $p_1 = p_2 = 0$ ).

D'autre part, la condition de maximisation nous donne

$$p_2 u = \max_{|v| \leq 1} p_2(v).$$

Comme  $p_2$  ne s'annule sur aucun intervalle, on en déduit que, presque partout, le contrôle extrémal est  $u = \text{signe}(p_2)$ . On a

$$p_1 = \text{cste}, \quad p_2(t) = -\frac{1}{2}p_1 + C e^{-2t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En particulier  $p_2(t)$  est strictement monotone, donc le contrôle a au plus une commutation.

En posant  $u = \varepsilon = \pm 1$ , puis en intégrant, il vient :

$$x(t) = -\frac{\varepsilon}{2}(t - t_0) + \frac{1}{2}\left(y(t_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)(e^{2(t-t_0)} - 1) + x(t_0).$$

$$y(t) = -\frac{\varepsilon}{2} + \left(y(t_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)e^{2(t-t_0)}.$$

**Exemple 4.1.5 : Contrôle optimal du niveau de glucose dans le sang** (voir [5]).

Considérons un modèle du mécanisme régissant le niveau de glucose dans le sang.

On désigne par  $x(t)$  la quantité du glucose (par exemple exprimée en mg) au temps  $t$  (compté en secondes  $s$ ) à partir de l'instant initial  $t_0 = 0$ .

On suppose que, si on ne fait rien, cette quantité diminue à un taux proportionnel à la quantité présente dans le sang :

$$\dot{x}(t) = -ay(t),$$

où  $a$  est une constante donnée strictement positive. Au départ, le niveau de glucose est

$$x(0) = \alpha \text{ (mg)}.$$

Dans le but de porter le niveau de glucose à celui prescrit de  $x(t_f) = c \neq \alpha$ , du glucose est transfusé dans le sang à raison de  $u(t)$  mg/s, ( $u(t)$  est la vitesse de transfusion, c'est la variable de contrôle). La contrainte sur cette commande est

$$0 \leq u(t) \leq m, \quad t \in [0, t_f].$$

où  $m > 0$  est la valeur maximale de la vitesse de pénétration.

L'évolution de l'état  $x(t)$  se fait donc suivant l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t), \quad t \in [0, t_f].$$

On veut opérer de manière à minimiser la quantité globale de glucose transfusée,

C'est-à-dire : on va minimiser le critère

$$J(t_f, x, u) = \int_0^{t_f} u(s) ds,$$

sachant que le temps final  $t_f > 0$  est inconnu ici. Ainsi le problème se formalise en un problème de régularisation du taux de glycémie linéaire avec contraintes sur le contrôle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{t_f > 0} J(t_f, x, u) = \int_0^{t_f} u(s) ds, \\ \dot{x}(t) = -ax(t) + u(t), \quad t \in [0, t_f]. \\ u(t) \in U = [0, m], \quad t \in [0, t_f]. \\ x(0) = \alpha, x(t_f) = C > \alpha, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Il s'agit de déterminer à la fois :

- le temps final  $t_f > 0$ ,
- la commande optimale  $u : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- l'état du système  $x : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Résolution du problème du contrôle optimal :

- Le Hamiltonien associé à ce problème est

$$H(t, x, u, p) := (1 + p)u - apx.$$

D'où

$$H'_u(t, x, u, p) := 1 + p.$$

- Calcul du minimum de  $H(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p})$ : sur l'intervalle  $[0, m]$  : le contrôle optimal

Du fait que

$$H'_u(t, x, u, p) := 1 + p,$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(t) = 0 \quad \text{si} \quad \bar{p}(t) > -1, \\ \bar{u}(t) = m \quad \text{si} \quad \bar{p}(t) < -1 \\ \bar{u}(t) \text{ est quelconque dans } [0, m] \quad \text{si} \quad \bar{p}(t) = -1. \end{array} \right.$$

- L'équation adjointe :

$$\frac{d\bar{p}}{dt} - a\bar{p}(t) \text{ implique que } \bar{p}(t) = ke^{-at} \quad \text{où } k \text{ est une constante réelle.}$$

- La condition de transversalité :

$$-a\bar{p}(t_f) \bar{x}(t_f) + (1 + \bar{p}(t_f)) \bar{u}(t_f) = 0.$$

Si  $\bar{u}(t_f) = 0$  alors  $\bar{p}(t_f) = 0$ . Alors  $k = 0$ .

D'où  $\bar{u}(t) = 0 = \bar{p}(t)$ . Donc

$$\bar{x}(t) = \alpha e^{-at} \quad \text{et} \quad t_f = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{\alpha}{c}\right).$$

## 4.2 Cas de systèmes de contrôle non linéaires

### Exemple 4.2.1 : Contrôle optimal d'un ressort non linéaire

Ce système est modélisé par le système de contrôle non linéaire avec contraintes sur le contrôle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) - 2x(t)^3 + u(t), \end{cases} \quad (4.6)$$

où on a comme contrôles toutes les fonctions  $u(t)$  continues par morceaux telles que  $|u(t)| \leq 1$ . L'objectif est d'amener le ressort d'une position initiale quelconque  $(x_0, y_0 = \dot{x}_0)$  à sa position d'équilibre  $(0, 0)$  en temps minimal  $t^*$ .

#### Application du Principe du Maximum.

Le Hamiltonien du système précédent s'écrit sous la forme :

$$H(x, p, u) = p_x y + p_y (-x - 2x^3 + u) + p^0$$

et si  $(x, p, u)$  est une extrémale alors on doit avoir :

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y(1 + 6x^2) \quad \text{et} \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\dot{p}_x$$

Notons que puisque le vecteur adjoint  $(p_x, p_y)$  doit être non trivial,  $p_y$  ne peut s'annuler sur un intervalle (sinon on aurait également  $p_x = -\dot{p}_y = 0$ ). Par ailleurs la condition de maximisation nous donne

$$p_y u = \max_{|v| \leq 1} p_y v.$$

Comme  $p_y$  ne s'annule sur aucun intervalle, on en déduit que, presque partout,

$$u(t) = \text{signe } p_y(t).$$



En particulier les contrôles optimaux sont successivement égaux à  $\pm 1$ , c'est le principe bang-bang. Plus précisément, le vecteur adjoint au temps final  $t^*$  tant défini à scalaire multiplicatif près, on peut affirmer

$u(t) = \text{signe } p_y(t)$  où  $p_y$  est la solution de :

$$\begin{cases} \ddot{p}_y(t) + p_y(t)(1 + 6x(t)^2) = 0, \\ p_y(t^*) = \cos \alpha, \dot{p}_y(t^*) = -\sin \alpha \end{cases}$$

le paramètre  $\alpha \in [0, 2\pi[$  étant indéterminé.

En inversant le temps ( $t \rightarrow -t$ ), il est clair que notre problème est équivalent au problème du temps minimal pour le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2x(t)^3 - \text{signe}(p_y(t)) \\ \dot{p}_x(t) = p_x(t) \\ \dot{p}_y(t) = -p_y(t)(1 + 6x(t)^2) \end{cases}$$

Avec  $x(0) = y(0) = 0$ ,  $x(t^*) = x_0, y(t^*) = y_0$ ,  $p_x(0) = \sin \alpha, p_y(0) = \cos \alpha$

où  $\alpha \in [0, 2\pi[$  est à déterminer.

#### **Exemple 4.2.2: Le contrôle optimale d'investissement dans une banque**

Considérons une banque, qui gère une certaine quantité d'argent, et doit répondre aux besoins éventuels de ses clients en leur accordant un emprunt d'argent. Pour cela la banque doit disposer d'argent immédiatement disponible, qui lui rapporte moins d'intérêt que l'argent investi dans des titres financiers. La banque investit donc une partie du capital dans l'achat des titres. Voir [2].

Le problème est de déterminer une politique financière qui réalise un compromis entre quantité d'argent disponible et l'argent investi, tout en maximisant le gain.

Notations :

$x(t)$  : Quantité d'argent disponible au temps  $t$ .

$u(t)$  : La quantité d'argent à réinvestir au temps  $t \geq 0$  avec  $0 \leq u(t) \leq 1$ .

$x_0$  : La quantité d'argent possédée au temps  $t = 0$  avec  $x_0 > 0$ .

$t_f$  : La période du temps désignée.

L'objectif de la banque est de déterminer la commande optimale (le meilleur investissement) sur la période de temps  $[0, t_f]$  pour avoir un **bénéfice maximal**.

La fonction objectif de problème posé est :

$$J(u(t)) = \int_0^{t_f} (1 - u(t))x(t)dt.$$

Où  $t_f$  est un temps final fixé.

Le problème est modélisé à l'aide d'équation différentielle linéaire.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)u(t) \\ |u(t)| \leq 1. \end{cases},$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} J(u(t)) = \int_0^{t_f} (1 - u(t))x(t)dt, & (4.7) \\ \dot{x}(t) = u(t)x(t), \\ 0 \leq u(t) \leq 1, 0 \leq t \leq t_f, \\ x(0) = x_0, p(t_f) = 0. \end{cases}$$

La fonction hamiltonienne associée au système (4.7) :

$$\begin{aligned} H(x(t), p(t), p^0, u(t)) &= p^0(1 - u(t))x(t) + pu(t)x(t) \\ &= (1 - u(t))x(t) + p(t)u(t)x(t) \end{aligned}$$

Le vecteur adjoint :

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), p(t), p^0, u(t))}{\partial x(t)} = u(t)(1 - p(t)) - 1.$$

La résolution de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq u \leq 1} H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) &= \max_{0 \leq u \leq 1} ((1 - u(t))x(t) + p(t)u(t)x(t)) \\ &= \max_{0 \leq u \leq 1} (x(t)u(t)(p(t) - 1)). \end{aligned}$$

Comme  $x(t) \geq 0$  alors *signe de  $u(t) = \text{signe}(p(t) - 1)$* . C'est-à-dire

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } p > 1, \\ 0 & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

$$p(t_f) = 0 \Rightarrow \text{comme } p(t) \text{ est continue} \Rightarrow p(t) \leq 0 \text{ au voisinage de } t_f.$$

C'est-à-dire :  $p(t) \leq 1, t \in v(t_f)$ . Donc :

$$u(t) = 0, t \in v(t_f) \Rightarrow \dot{p}(t) = -1 \Rightarrow p(t) = -t + c$$

Selon la condition de transversalité  $p(t_f) = 0$  alors  $p(t_f) = -t_f + c = 0 \Rightarrow c = t_f$   
d'où  $p(t) = t_f - t, t \in v(t_f)$ .

On a  $p(t) \leq 1 \Rightarrow t_f - t \leq 1, t \in v(t_f)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^0(t) = 0, & t \in [t_f - 1, t_f] \\ u^0(t) = 1, & t \in [0, t_f - 1] \end{cases}$$

Donc

- Pour  $u = 1$

$$\dot{x}(t) = x(t) \Rightarrow x(t) = x_0 e^t, t \in [0, t_f - 1].$$

- Pour  $u = 0$

$$\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow x(t) = cste = x_0 e^{t_f - 1}, t \in [t_f - 1, t_f].$$

Résolution à l'aide du **logiciel MATLAB** :

Le programme suivant est effectué sous MATLAB, on utilise le principe du maximum de Pontryagin

```
function dx = mast2(t,x)
dx = zeros(2,1) ;
dx(1) = x(1)*sign(x(2)-1) ;
dx(2) = (1-x(2))*sign(x(2)-1)-1 ;
function res = mast1(p0)
[T,Y] = ode45('mast2',[0,6],[15,p0(1)]) ;
res = [Y(end,2)]
clear
clc
program12
temps CPU = cputime ;
[p,fval] = fsolve('mat1',20)
[T,y] = ode45('mat20',[0,6],[15,p])
temps CPU = cputime ;
y1 = Y(:,2) ;
u = [] ;
for i = 1 : length(T)
if y1(i) - 1 > 0
u(i) = 1 ;
else
u(i) = 0 ;
end
end
```

u ;

```
figure(4.1)
```

```
plot(T,Y(:,1),'r');
```

```
figure(4.2)
```

```
plot(T,Y(:,2),'k');
```

```
figure(4.3)
```

```
plot(T,u)
```

Après l'exécution on obtient les figures suivantes :

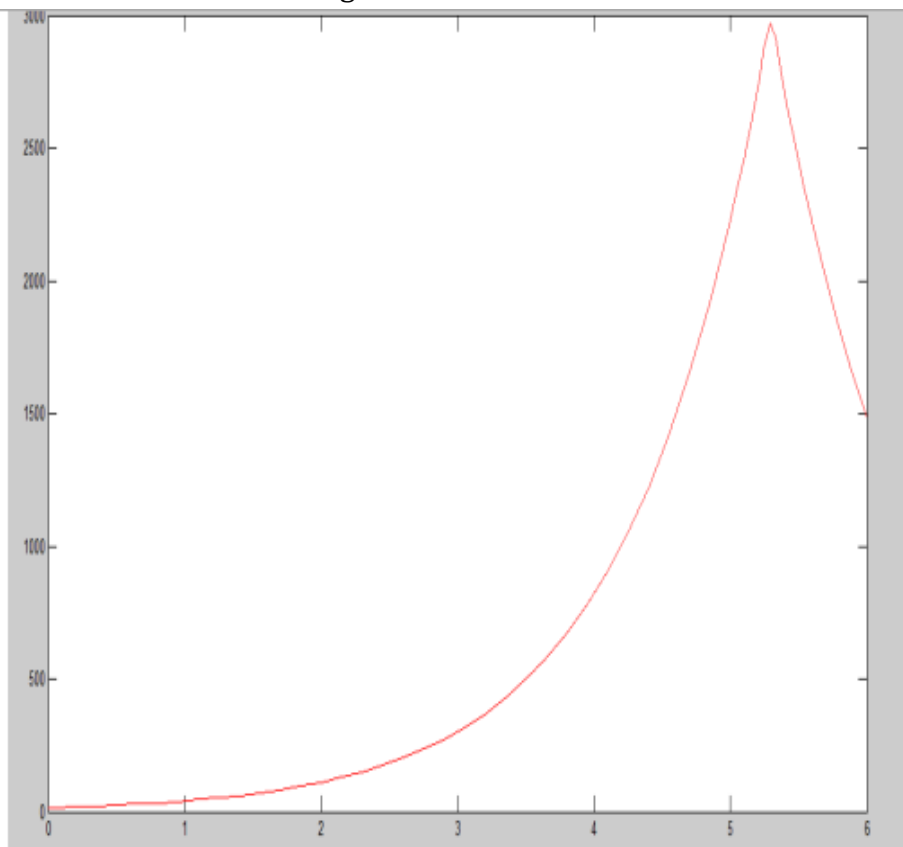


Figure4.1 – L'évolution de la quantité d'argent dans une période d'investissement (6 mois)

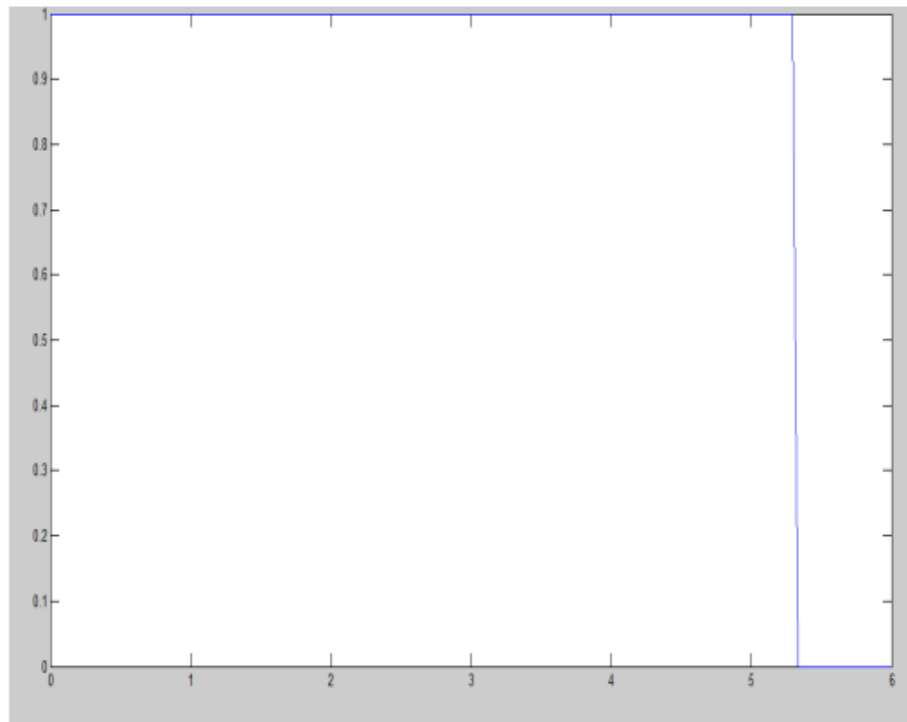


Figure 4.2 – La trajectoire de  $u$  en fonction de temps

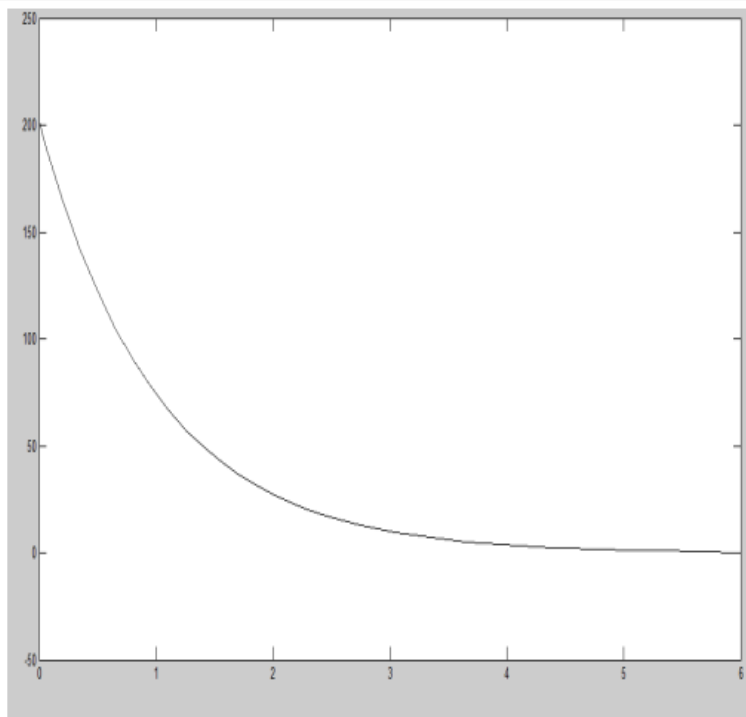


Figure 4.3 – La trajectoire de  $p$  en fonction de temps



## Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons présenté les théories de contrôlabilité (commandabilité) et du contrôle optimal des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires et qui s'appliquent dans beaucoup de domaines : physique, chimie, biologie astronomie, informatique, médecine, ...etc.

D'abord, nous avons étudié la contrôlabilité des systèmes dynamiques stationnaires et instationnaires dans les cas linéaires et non linéaires. Le critère de Kalman qui joue un rôle fondamental dans cette théorie, a été présenté avec des exemples simples sur la contrôlabilité, La notion de contrôlabilité locale a été aussi donnée.

Ensuite nous avons étudié le problème de contrôle optimal des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. Nous avons présenté le résultat principal qui donne les conditions nécessaires d'optimalité des systèmes contrôlés : c'est le Principe du Maximum de Pontryagin PMP (la version forte dans le cas avec contraintes sur le contrôle et la version faible dans le cas sans contraintes). Des exemples variés d'applications de ce principe, ont été donnés au dernier chapitre de ce travail.

## Bibliographie

- [1] M. Bergounioux, Optimisation dans  $\mathbb{R}^n$  et Introduction au Contrôle Optimal des Systèmes Linéaires, Cours et exercices, Université d'Orléans, 2001.
- [2] H.Guenoun, D.Issaounn, Contrôle optimal dans une banque d'investissement, Mémoire de Master, Université de Tizi ousou. 2017.
- [3] R.E. Kalman. Mathematical discription of linear dynamical system siam, journal on control, 1963.
- [4] J.-L. Lions : Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Avant propos de P. Lelong. Dunod, Paris, 1968.
- [5] K. Nachi, Contrôle optimal des EDO linéaires, Département de Mathématiques Université Oran1, Ahmed Ben Bella, mai 2020.
- [6] L. Pontryagin, V. Boltyanski, R. Gamkrelidze, E. Michtchenko, Théorie mathématique des processus optimaux, Editions Mir, Moscou, 1974.
- [7] E. Trélat et T.Haberkorn, Cours d'Automatique, Master de Mathématiques, Université d'Orléans, premier trimestre.
- [8] E. Trélat, Contrôle optimal : Théorie et applications, Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005.