

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique



Université Saad Dahlab de Blida
Faculté de Sciences
Département de mathématique



MEMOIRE DE MASTER

En Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Estimation des options financières

Par méthodes d'échantillonnage

Par

Chambet Hazerdja Amina

Guézzal Fouzia

Devant le jury composé de:

A. Malki	Maitre assistant A, U. de Blida	Promoteur
H. EL Missaoui	Maitre assistant, U. de Blida	Président
L. Boumaout	Maitre assistant A, U. de Blida	Examineur

Résumé

Les options, et spécialement, les options négociables sur actions, ont pris beaucoup d'importance ces dernières années. De ce fait, ce mémoire est principalement centré sur le problème d'évaluation d'une option sur action. Ce dernier est alors résolu en utilisant les techniques de simulation Monte Carlo avec application au calcul d'une option européenne sur un actif financier. Nous considérons aussi l'accélération de la convergence via les méthodes Quasi Monte Carlo.

La MMC est une approche puissante et flexible pour fournir des estimations du prix d'option. Toutefois elle présente l'inconvénient d'une convergence lente. On peut éviter cet inconvénient en utilisant des approches dites MQMC qui est la version alternative déterministe basée sur les séquences à discrécances faibles. Plusieurs applications financières sont basées sur l'utilisation de MQMC.

Les séquences (ou suites) déterministes ont une propriété similaire aux suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d). Utilisées par MMC en ce sens qu'elles sont "bien" dispersées sur l'hyper cube unité. Bien que la MQMC améliore le taux de convergence, toutefois nous ne disposons pas d'estimation pratique de l'erreur. (en réalité nous avons une borne de l'erreur donnée par l'inégalité de Kocsm-Hlawka, de plus cette borne est très difficile à estimer).

Mots clés: option, évaluation, action, Simulation de Monte Carlo, Quasi Monte Carlo, Kocsm-Hlawka.



Liste des figures

Figure 3.1: Convergence de l'algorithme de la simulation MC vers la formule de B&S	43
Figure 3.2: Amplitude de l'intervalle de confiance de MMC en fonction du nombre de simulations	44
Figure 3.3: Ecart de MMC avec le modèle de Black & Scholes	45
Figure 3.4: La comparaison entre la dispersion de 100 points en fonction random et en suite de Van Der corput sur l'hyper cube unité en base 2	48
Figure 3.5: Convergence des méthodes MC et QMC vers la valeur de B&S	52
Figure 3.6: Erreur de simulation de MMC et MQMC	53

Liste des tables

Table 1.1: Effet d'augmentation de certains paramètres du modèle	21
Table 2.1: Propriétés sur les v.a	24
Table 3.1: Convergence de la méthode de Monte Carlo	43
Table 3.2: Convergence de la méthode de Quasi Monte Carlo	52

Dédicace

Je dédie ce modeste mémoire à deux chères personnes qui grâce à dieu et à eux je suis aujourd'hui à ce niveau à mes chers parents mon père et ma mère à qui je souhaite une longue vie.

A ma chère Malak le noor de mes yeux.

A mes frères Kheiredine, Islam et Mohamed et ma soeur Yasmine.

A mon grand père et ma grand mère, à toute ma famille paternelles et maternelles à qui je souhaite tous les belles choses que la vie puisse offrir .

A tout mes amis ainsi mon binôme Fouzia, Djamel et Amira pour le soutien et le bien qu'elles me procurent quotidiennement

Et aussi à une chère défunte Bouchakoure Naima.

Amina.

Dédicace

Mes chers parents, merci de me guider et de m'encourager durant toute ma vie d'études,
et merci de m'avoir aidé de surmonter les difficultés.

Mes sœurs Naima et Hayet,

Mes frères Abdel el kader et Mustapha Lamine,

Toutes ma famille maternelle et paternelle,

A tout les étudiants de département de mathématique pour leur éternelle bonne humeur
et leur sympathie, en particulier Amira, Aicha, Djamel et ma binome Amina.

Fouzia

Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à remercier le dieu, le tout puissant de nous avoir donné la santé, la patience et la volonté pour l'élaboration de ce modeste travail.

Nous remercions vivement notre promoteur M^r A. Malki, pour son aide, son soutien moral et son suivi permanent.

Ainsi, nous remercions tous nos responsables et professeurs au niveau du département mathématique et particulièrement M^r O. Safar pour les efforts et les moyens qu'ils nous ont fournis sans cesse pour la réussite de cette formation.

Nous remercions infiniment le membre de jury M^r Missaoui pour son acceptation d'être notre président, et M^r L. Boumaout d'être notre examinateurs.

Enfin, nous remercions tous qui ont participé de près ou de loin durant le déroulement de ce mémoire.

Liste des symboles et des abréviations	55
Annexe	56

2.4.2	Le mouvement Brownien	28
2.4.3	Le mouvement Brownien géométrique	31
III	MÉTHODES DE CALCUL D'OPTION	32
3.1	Formule de Black & Scholes plate-forme "risque neutre"	32
3.2	Estimation de la volatilité	32
3.3	La Simulation de Monte Carlo	34
3.3.1	Introduction	34
3.3.2	Méthode de Monte-Carlo	35
3.3.3	Algorithme de simulation Monte-Carlo	37
3.3.4	Taux de convergence de la méthode	39
3.3.5	Comparaison entre les valeurs données par l'algorithme de MC et celles données par le modèle de B&S	42
3.3.6	Inconvénient des méthodes de Monte-Carlo	45
3.4	La Simulation de quasi-Monte Carlo	46
3.4.1	Introduction	46
3.4.2	Suite quasi aléatoire ou suite à discrédance faible	47
3.4.3	Méthode de quasi Monte Carlo[26]	49
3.4.4	Comparaison entre les algorithmes de simulation de MC et QMC en référence au modèle de B&S	51
	Conclusion	54

Table de matières

Remerciement	5
Dédicace	6
Dédicace	7
Liste des tables	8
La liste des figures	9
Résumé	10
Abstract	11
Introduction	12
I NOTIONS EN FINANCE	14
1.1 Introduction	14
1.2 Quelques définitions	14
1.2.1 Le marché financier	14
1.2.2 Les produits dérivés	15
1.2.3 Portefeuille	15
1.2.4 Les différents types de portefeuille	15
1.3 Les actifs financiers	16
1.3.1 La notion d'un actif financier (ou d'un titre financier)	16

Abstract

The options, a specially the negotiable options on stocks, have a more and more importance in recent years, for that, this work is centred, mainly, on the problem of option evaluation on a stock. This last problem is solved then by using the techniques of simulation Monte Carlo with application to the calculation of an option to a financial credit. We consider also the acceleration of convergence via the method Quasi Monte Carlo.

The MCM are a powerful and flexible approach to provide estimation of the option price. However it presents the disadvantage of a slow convergence. One can avoid this disadvantage by using approaches known as MQMC which is deterministic alternative based on the weak discrepancies sequences. Several financial applications are based on the use of the QMCM. The deterministic sequences (or series) have a property similar to the series of random variables i.i.d used by MCM in the sense that they are "well" dispersed on all the cubic hyper of unit. Although the QMCM accelerates MCM, it does not allow a practical estimate of the error (actually we have a terminal of the error given by the inequality of Kocsm-Hlawka, moreover this terminal is very difficult to estimate).

Key words: option, option evaluation, stock, Monte Carlo simulation, Quasi Monte Carlo, Kocsm-Hlawka.

Introduction

Les premières applications de la théorie des probabilités aux instruments financiers, comme les options, remontent à 1900, avec les travaux longtemps ignorés du mathématicien Français Louis Bachelier. Une étape importante a été franchie autour des années 1970 grâce notamment aux Américains Paul Samuelson, Robert Merton, Fischer Black et Miron Scholes et a conduit à une formule permettant de fixer le juste prix des options Européennes. La "formule de Black Scholes", aujourd'hui célèbre et très utilisée par les établissements financiers, a été obtenue à l'aide d'outils mathématiques (en particulier le "calcul stochastique" créé vers 1944-1946 par le Japonais Kiyosi Itô) développés en rapport avec le mouvement Brownien.

Les méthodes de type Monte Carlo, Quasi Monte Carlo sont utilisées dans le cadre de la valorisation des instruments financiers où on ne dispose pas de modèle analytique (Closed form), comme l'option Américaine.

Ainsi nous nous intéressons à l'application de la MMC dans un environnement risque-neutre, ce qui permet de simuler le prix du sous-jacent en générant des variables de loi normale centrée réduite en utilisant des variables i.i.d sur $[0,1]$. Ce type de génération doit se faire, de la façon la moins coûteuse. L'inconvénient de cette méthode est l'absence d'un moyen d'estimer l'erreur. Dans ce contexte nous proposons la structure suivante de ce mémoire:

Le premier chapitre présente la terminologie et le contexte des options négociables sur action. Nous développons dans le deuxième chapitre des formulations mathématiques sur les notions de probabilité et de processus stochastique, en particulier le mouvement Brownien. Le troisième chapitre: porte sur l'estimation des options européennes basée sur:

- L'implémentation de la méthode de simulation de Monte Carlo (comme technique probabiliste).
- L'implémentation de la méthode Quasi Monte Carlo (comme technique déterministe).

Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion. Nous indiquons aussi que

les résultats numériques, les tableaux et les figures sont obtenus par programmation sous Matlab7.8

CHAPITRE I

NOTIONS EN FINANCE

1.1 Introduction

La finance est un terme générique qui désigne l'étude de la façon dont les individus, les entreprises et les organisations obtiennent des ressources monétaires et les investissent. Elle se distingue de la comptabilité par sa vocation prospective: la finance prend en compte le risque (couple risque/rendement). Elle s'intéresse donc aux différents acteurs et à la façon dont ils atteignent leurs objectifs par l'utilisation d'outils financiers dédiés.

Ce secteur d'activité comprend notamment la banque, l'assurance et les bourses, l'immobilier, sans oublier les budgets publics. Ses dérivés sont budgétaires, monétaires, et d'une façon générale concrétisent les échanges entre les individus, les peuples, les États, les banques, les entreprises. Au fil du temps ce qui n'était qu'une forme des transactions dont l'origine est le troc est devenu une science humaine. La finance tire parti du développement des télécommunications, de l'internet et contribue à la mondialisation. Elle est le reflet des transactions des acteurs économiques.

En particulier, la finance est un terme appliqué à l'achat ou la vente de titres juridiques donnant à leurs détenteurs des droits spécifiques sur un ensemble de flux monétaires futurs. Ces titres sont appelés actifs financiers ou valeurs mobilières, et comprennent principalement les obligations, les actions et les options.

1.2 Quelques définitions

1.2.1 Le marché financier

Le marché financier est un lieu de rencontre de l'offre et de la demande des capitaux à long terme. Le fonctionnement de marché financier repose sur l'activité de deux compartiments dont les fonctions sont différentes et complémentaires, le marché des émissions de titres ou marché primaire, et le marché boursier ou marché secondaire. Les marchés primaire

et secondaire sont intimement liés car un épargnant ne souhaite acheter des titres sur le premier qu'à la condition de pouvoir les revendre sur le second.

1.2.1.1 Le marché primaire

C'est le marché des émissions de titres nouveaux, ce marché est le plus important pour l'économie dans la mesure où il permet aux entreprises qui le fréquentent de créer des actions afin d'augmenter leur capital ou de financer leur investissements, et à l'état et les collectivités locales de lancer les emprunts à long terme et émettent des obligations représentatives de la créance et des souscripteurs.

1.2.1.2 Le marché secondaire (la bourse)

Le terme de la bourse dérive du nom de la famille Van der Bourse dont l'hôtel, situé à Bruges, a servi XVe siècle de lieu de rencontre aux commerçants locaux et est devenu le symbole d'un marché de capitaux et d'une bourse de marchandises. La bourse désigne un marché public organisé où se négocie toute sorte de produits ou de services.

Le marché secondaire est alors celui où s'échangent les titres déjà émis, c'est en quelque sorte un marché de l'occasion.[1]

1.2.2 Les produits dérivés

Les produits dérivés sont des contrats par lesquels les agents fixent à l'avance le prix auquel ils peuvent acheter ou vendre une certaine quantité d'actif sous-jacent.

1.2.3 Portefeuille

Un portefeuille désigne une collection d'actifs financiers détenus par un établissement ou un individu.

1.2.4 Les différents types de portefeuille

Une caractéristique importante d'un portefeuille est son degré de diversification qui permet d'atteindre un juste milieu entre le risque, la volatilité et la rentabilité du portefeuille, tout en tenant compte de la durée prévue du placement (horizon de temps).

La répartition du portefeuille, tant en types d'actifs qu'en actifs individuels, est un aspect crucial du placement boursier. Perdre de l'argent sur des valeurs boursières est un risque permanent, comme le montre l'éclatement de la bulle internet en 2000/2002.

1.3 Les actifs financiers

1.3.1 La notion d'un actif financier (ou d'un titre financier)

Les titres financiers (on peut dire les valeurs mobilières) sont des titres négociables émis par des personnes morales, publiques ou privées, pour financer leurs projets d'investissement. Ces titres comprennent, des titres représentatifs d'une fraction de capital ou de propriété dans une société (ex., actions) ou d'un titre de créance d'un prêt à moyen ou long terme (ex., obligations).[2]

1.3.2 L'émetteur des valeurs mobilières

En règle générale, ce sont les sociétés par actions qui remplissent un certain nombre de conditions fixées par le code commerce. Celles-ci visent à fournir un maximum de garanties et une meilleure transparence financière pour les souscripteurs de ces valeurs mobilières.[3]

1.3.3 La forme des valeurs mobilières

Les valeurs mobilières peuvent être soit matérialisées par un document appelé certificat d'actions, soit traduites par une inscription en compte ouvert chez un intermédiaire financier habilité (on parle de titre dématérialisé).[3]

1.3.4 Différents types des valeurs mobilières

Il existe plusieurs types des valeurs mobilières, dans notre étude nous nous intéressons aux actions, obligations et warrants.

1.3.4.1 Actions

Une action est un titre de propriétés délivré par une société de capitaux (i.e. une société anonyme ou Société en commandite par actions). Elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital, avec les droits qui y sont associés : intervenir dans la gestion de

l'entreprise et en retirer un revenu appelé dividende. Le détenteur d'actions est qualifié d'actionnaire et l'ensemble des actionnaires constitue l'actionnariat.

1.3.4.2 Obligations

Une obligation est une valeur mobilière qui est un titre de créance représentatif d'un emprunt. En tant que tel, l'obligation est cessible et peut donc faire l'objet d'une cotation sur une Bourse, i.e. un marché secondaire. Dans la pratique, les volumes échangés se négocient principalement de gré à gré.

1.3.4.3 Warrants

Un warrant est un contrat transférable qui confère à son détenteur le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre une quantité donnée d'un actif spécifique, à un prix déterminé d'avance, à la date d'échéance du contrat (warrant européen) ou en tout temps jusqu'à cette date (warrant américain).

1.4 Les options

1.4.1 Définition

L'acheteur d'une option a le droit, mais non l'obligation, d'acheter ou de vendre une quantité donnée d'un actif sous-jacent à un prix déterminé à une date prédéterminée ou avant cette date.

un contrat d'option confère le droit, et non l'obligation, de vendre ou d'acheter un actif financier ou physique, à un prix défini à l'avance ou jusqu'à une date fixée.

1.4.2 Les Types d'options

Les options (put et call) peuvent être divisées en deux sous familles, les options dites à l'européenne et les options dites à l'américaine.

1.4.2.1 Option Américaine

Une option de type Américain ne signifie pas que l'option provient d'Amérique. Une option Américaine peut être négociée dans le monde entier. Le terme se réfère à la façon dont l'option est exercée. Une option Américaine peut être exercée à tout moment pendant la

durée du contrat. Elle peut être exercée quelques jours après que le contrat ait été ouvert, ou elle peut être exercée à la date d'expiration.

1.4.2.2 Option Européenne

Une option de type Européen, contrairement à l'option de type Américain, c'est une option dont la date d'exercice est fixée au préalable qui est souvent la date au delà de laquelle l'option devient sans valeur, c'est aussi la date fixe à laquelle l'acheteur peut exercer son droit (d'achat ou de vente), ou revendre sa option, cette date est fixée au gré de l'acheteur.

1.4.3 Les quatre positions de base

Il existe deux classes d'options (CALL et PUT) et deux types d'opérations (ACHAT et VENTE), ce qui entraîne quatre stratégies possibles:

1.4.3.1 L'achat d'un call

La plus connue et la moins risquée des stratégies, l'acheteur d'une option d'achat a la possibilité d'acheter la quantité d'actif support prévue, au prix fixé au moment de l'achat de l'option (le prix d'exercice), il est clair que puisque c'est un droit et non une obligation, il ne l'exercera que s'il y a clairement intérêt.

Lorsque les cours montent au-dessus du prix d'exercice augmenté du montant de l'option, l'acheteur est gagnant et ses gains sont potentiellement illimités.

En cas de baisse des cours, ses pertes sont strictement limitées au montant de la prime.

1.4.3.2 La vente d'un call

Le vendeur d'une option d'achat (call) est dans la situation inverse de celle décrite ci-dessus: il reçoit immédiatement le prix de l'option en contrepartie duquel il s'engage (sur la durée du contrat) à vendre l'actif sous-jacent si l'acheteur le désire. Son gain est limité au premium et ses pertes sont potentiellement illimitées si le cours de l'actif support monte.

1.4.3.3 L'achat d'un put

L'acheteur d'une option de vente verse le prix de l'option au vendeur et se réserve la possibilité de vendre ou non la quantité d'actif support prévue, au prix d'exercice fixé.

calculer de deux manières différentes:

La volatilité historique: La volatilité historique est souvent calculée comme l'écart type des variations de cours sur une période de temps passée, qui mesure la dispersion de ces variations de cours autour de la moyenne.

La volatilité implicite: La volatilité implicite est calculée à partir du cours des options. Les modèles de valorisation des options, du type Black et Scholes, font intervenir les anticipations de volatilité future. Il est donc possible de déduire ces anticipations du cours des options.

La volatilité historique porte donc sur le passé, alors que la volatilité implicite porte sur l'avenir.

c) Les dividendes

Comme le cours d'une action diminue généralement d'un montant égal au dividende, la valeur de l'option d'achat de cette action sera nécessairement moindre, inversement, la valeur de l'option de vente augmente.

d) Le taux d'intérêt

Une augmentation des taux d'intérêt entraîne une augmentation du prix de l'option d'achat et baisse du prix de l'option de vente.

1.4.4.2 Les paramètres endogènes

Deux facteurs permettent de différencier la valeur des contrats d'une même classe d'options:

a) La durée de vie de l'option

La durée de vie influe à la hausse la prime pour une option d'achat et pour une option de vente.

b) Le prix d'exercice de l'option

L'option d'achat a d'autant plus de chance d'être exercée que le prix d'exercice est faible. La prime est donc une fonction décroissante du prix d'exercice.

L'influence du prix d'exercice sur la valeur de l'option de vente est symétrique par rapport à celle de l'option d'achat. Plus le prix d'exercice est élevé, plus la prime de l'option de vente est élevée.

En cas de hausse des cours de l'actif support, ses pertes sont limitées au prix du premium. Son gain croît proportionnellement à la baisse des cours du support.

1.4.3.4 La vente d'un put

Le vendeur d'une option de vente encaisse le premium mais s'engage à acheter les actifs supports à son acheteur si celui-ci décide d'exercer son droit. En cas de hausse des cours de l'actif support, son gain est limité au prix de l'option. Sa perte sera potentiellement sans limite en cas de baisse des cours du support.

1.4.4 Les composantes qui influent sur la prime des options

Les déterminants de la valeur d'une option

La dynamique des marchés influe à divers niveaux sur la prime des options. Comprendre cette dynamique est essentiel afin d'évaluer l'impact d'une variation de certaines composantes sur la valeur des options, cette valeur dépend de paramètres exogènes et de paramètres endogènes.

1.4.4.1 Les paramètres exogènes

Il y a trois paramètres exogènes qui dépendent du sous-jacent, le quatrième déterminant exogène, le taux d'intérêt, est lié au marché et ne dépend pas du sous-jacent:

a) Le cours de l'action sous-jacente

L'option varie en fonction du cours de l'action, si le cours baisse le Call baisse et le Put monte et si le cours monte, c'est l'inverse qui se produit.

b) La volatilité

Le prix d'exercice et la durée de vie d'une option sont fixés dans le contrat, les cours de l'action et le risque sont observables, la seule inconnue reste la volatilité. La volatilité est une notion qui reste difficile à appréhender, c'est l'écart type annualisé du taux de variation instantané du prix de la valeur. (C'est une mesure de l'instabilité du cours d'un actif financier).

Plus le cours d'une action est volatil, plus le prix des options d'achat et de vente est élevé. Cette volatilité est le déterminant fondamental du prix d'une option, on peut la

D'une manière générale on peut représenter l'effet de l'accroissement de certains paramètres sur le prix d'option dans le tableau suivant:

Déterminants \uparrow	Option d'achat	Option de vente
Cours du sous-jacent S	\uparrow	\downarrow
La volatilité σ	\uparrow	\uparrow
Les dividendes K	\downarrow	\uparrow
Le taux d'intérêt r	\uparrow	\downarrow
La durée de vie de l'option T	\uparrow	\uparrow
Le prix d'exercice E	\downarrow	\uparrow

Table 1: 1 Effet d'augmentation de certains paramètres du modèle

CHAPITRE II

OUTILS PROBABILISTES

2.1 Introduction

Les processus aléatoires d'écrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires en physique, biologie et récemment dans les domaines économique et financier.

2.2 Notions sur les variables aléatoires

2.2.1 Tribu

a) Soit Ω un ensemble fini et \mathcal{A} un sous ensemble de l'ensemble $P(\Omega)$ des parties de Ω

- On dit que \mathcal{A} est une tribu si cet ensemble est stable par les opérations ensemblistes naturelles, plus précisément :
- stabilité par \cap, \cup et passage au complémentaire: si A et B appartiennent à \mathcal{A} , alors $A \cap B, A \cup B$ et A^c appartiennent à \mathcal{A} .
- stabilité par réunion et intersection dénombrables: si pour tout $i \in \mathbb{N}^*, A_i \in \mathcal{A}$ alors: $\cup_{i \geq 1} A_i$ et $\cap_{i \geq 1} A_i$ sont dans \mathcal{A} .
- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$
- Dans le cas particulier $\Omega = \mathbb{R}$, on appelle tribu borélienne la plus petite tribu contenant les intervalles de \mathbb{R} . On la note $B(\mathbb{R})$.

b) Une application X de Ω dans \mathbb{R} est une variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu \mathcal{A} , si pour tout $B \in B(\mathbb{R})$: $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} \in \mathcal{A}$.

On dit alors que X est une variable aléatoire \mathcal{A} -mesurable.

c) Une probabilité P sur (Ω, \mathcal{A}) est une mesure positive de masse totale 1 définie sur \mathcal{A} .

Cela signifie que:

- Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) \in [0, 1]$ est défini,
- $P(\Omega) = 1$,
- Si pour tout entier $i \geq 1$, $A_i \in \mathcal{A}$ et la famille des A_i est disjointe, alors:

$$P(\cup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} P(A_i).$$

Le triplet (Ω, \mathcal{A}, P) s'appelle espace de probabilité.

On voit que pour une variable aléatoire \mathcal{A} -mesurable on peut définir $P(X \in A)$ pour tout A , borélien de \mathbb{R} .

2.2.2 Définition

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable. On appelle variable aléatoire réelle définie sur Ω toute application X de Ω dans \mathbb{R} vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R}, X^{-1}]-\infty, x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}.$$

On distingue deux types de variable aléatoire:

- Les variables aléatoires discrètes qui sont des applications à valeurs dans un ensemble dénombrable.
- Les variables aléatoires continues qui prennent leurs valeurs dans un ensemble non dénombrable.

Soit X une variable aléatoire et x un réel, l'évènement noté $\{X = x\}$ est l'antécédent de x par l'application,

$X = x$: est donc l'ensemble de tous les évènements élémentaires dont l'image par X est égale à x . La probabilité de cet évènement est notée $P(X = x) = P(x)$.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est la fonction qui, à tout réel x associe la probabilité de l'évènement $\{X = x\}$.

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie par:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Si X est une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F . On a alors:

- F est croissante

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- F est continue à droite et possède des limites à gauche

Une variable aléatoire continue possède en général une fonction répartition continue en tout point et dérivable par morceaux. Il est alors commode de la dériver pour obtenir la densité de probabilité, vérifiant:

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \text{ ou bien } f(x) = F'(x), \text{ en supposant } F \text{ dérivable.}$$

f étant définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans $[0, +\infty[$, telle que: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. [4]

2.2.3 Caractéristique d'une variable aléatoire

2.2.3.1 Espérance mathématique

L'espérance mathématique $E(X)$ d'une variable aléatoire X représente la moyenne des valeurs prises par cette variable, pondérées par leurs probabilités.

Pour une v.a. discrète $X = (x_i)_{i=1, \dots, n}$ on a $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$

De même pour le cas continu de densité f on a $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

2.2.3.2 La variance

La variance est une caractéristique qui mesure l'écart par rapport à l'espérance, elle est définie par:

$$\text{var}(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

En pratique nous utilisons l'écart type $\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$

2.2.3.3 Propriétés

- On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- Soit X et Y deux variables aléatoires et a, b deux réels. On a alors:

Opération	Espérance	Variance
$aX + b$	$E(aX + b) = aE(X) + b$	$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$
$X + Y$	$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$	$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ Seulement si X et Y sont indépendants

Table 2: 1 Propriétés sur les v.a

Remarque: Toute v.a. d'espérance nulle et d'écart type 1 est dite variable aléatoire centrée réduite ($E(X) = 0$ et $\sigma_x = 1$).

2.3 Génération de variables aléatoires

2.3.1 Définition et principe de la simulation

La simulation est une technique qui consiste à reproduire le fonctionnement d'un système complexe de manière à pouvoir effectuer des mesures sur le modèle ainsi constitué. Il s'agit donc de mettre au point un modèle de simulation. On décompose le système complexe en éléments décrit par un modèle mathématique en tenant compte les interactions de ces éléments entre eux.

La simulation est donc une technique de résolution de problèmes qui est basée sur des expériences effectuée sur un modèle du système.

Ainsi la simulation est conçue comme une technique expérimentale de la recherche opérationnelle? En effet il s'agit de reproduire une tranche de vie du système réel de manière à pouvoir observer celui-ci. C'est-à-dire que les difficultés essentielles liées à l'utilisation d'un modèle de simulation sont typiquement celles qu'on rencontre lorsqu'on effectue des mesures sur un système ayant un comportement aléatoire: quelle confiance accorder aux résultats numériques obtenus?

La simulation permet de donner des réponses dans les cas où l'analyse mathématique des modèles est impuissante mais les réponses ainsi données ne sont que partielles: il faut veiller à ce que le nombre d'observation soit suffisant pour que les réponses soient significatives. [5]

2.3.2 Génération de nombres aléatoires

Dans tout modèle de simulation on a besoin de tirer la valeur d'une variable aléatoire qui suit une certaine loi, pour cela il existe plusieurs méthodes parmi lesquelles:

- Génération avec les procédés physiques: ils sont très coûteux de plus une fois la suite générée, on ne peut pas la reproduire ce qui complique son teste.
- Générateurs algorithmiques produisent toujours des nombres pseudo aléatoires et la séquence est reproductible, son avantage est la simplicité et souplesse de réalisation

sur ordinateur

Il existe de nombreuses méthodes de génération de séquences pseudo aléatoires, on prend par exemple la méthode des carrés moyens (Van Newman) qui génère des v.a de loi uniforme (voir annexe 06)[7]

2.3.3 Génération d'une variable aléatoire de la loi normale

La loi normale représente de nombreux phénomènes naturels caractérisés par une variable pouvant s'écarter par rapport à une valeur moyenne de manière symétrique avec une probabilité décroissante.

Une v.a X d'espérance μ et d'écart type σ suit une loi normale (ou loi normale Gaussienne, loi de Laplace-Gauss) si sa densité de probabilité est:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in R$$

où $E(X) = \mu$ et $var(X) = \sigma^2$. On note $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$

Une telle variable aléatoire est dite variable gaussienne.

Proposition[9]

Par changement de variable on a: si $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$ et si $Y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, alors $Y \rightsquigarrow N(0, 1)$.

Comme il n'existe pas de formule exacte "calculable" de l'inverse de la fonction de répartition de la loi Normal, on s'intéresse à la méthode de génération suivante:

Méthode de Box-Müller

La méthode de Box-Müller (dite aussi méthode polaire pure) est largement utilisée dans les logiciels de simulations. Elle consiste à générer une v.a de la loi normale à partir de deux v.a réelles indépendantes U_1 et U_2 uniformément distribuées sur $[0, 1]$.

Théorème

Soient X et Y deux v.a réelles.

soient (R, θ) le couple de v.a.r à coordonnées polaires de (X, Y)

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad X = R\cos\theta \quad Y = R\sin\theta \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

R : rayon polaire.

θ : L'angle polaire.

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes:

- X et Y sont deux v.a normales centrées réduites indépendantes.
- θ suit la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$, R^2 suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, R et θ sont indépendantes. (voir annexe 07)

Tandis que R a la densité: $f(r) = re^{-r^2/2}$, alors elle est facile à inverser

$$R = F_R^{-1}(U) = \sqrt{-2 \ln(U)}.$$

L'algorithme (1958)

1. Générer u_1 , réalisation d'une v.a uniforme sur $[0, 1]$,
2. Générer u_2 , réalisation d'une v.a uniforme sur $[0, 1]$,
3. $r = \sqrt{-2 \ln u_1}$,
4. $x_1 = r \cos(2\pi u_2)$, $x_2 = r \sin(2\pi u_2)$
 x_1 et x_2 sont deux réalisations indépendantes d'une v.a normale centrée réduite,
5. On en déduit que:

$y_1 = \mu + \sigma x_1$, $y_2 = \mu + \sigma x_2$, sont deux réalisations indépendantes d'une v.a Normale d'espérance μ et d'écart type σ .

2.4 Calcul stochastique

2.4.1 Processus stochastique

Le processus aléatoire X est une famille de variables aléatoires indexées par un sous ensemble de R ou N , souvent assimilé au temps. C'est donc une fonction de deux variables:

le temps et l'état du monde ω , l'ensemble des états du monde est traditionnellement noté Ω , l'application qui à t associé $X(\omega, t)$ est appelée trajectoire du processus.

Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variable aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty])$ définie sur le même espace de probabilité.

Définition

On appelle processus stochastique à temps continu et à valeur dans un espace (E) muni d'un tribu (ξ) , une famille $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de variables aléatoires sur un espace de probabilité (Ω, A, P) , à valeur dans (E, ξ) .

Remarque

En général t s'interprète comme le temps.

- Un processus C vue comme une fonction aléatoire: à chaque $w \in \Omega$ en fait correspondre la fonction de \mathbb{R}^+ dans E .

$t \rightarrow X_t(w)$ appelée trajectoire de X .

- Un processus peut être considéré comme une application de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ dans (E) . [8]

Un exemple particulièrement important de processus à temps continu est le mouvement Brownien.

2.4.2 Le mouvement Brownien

2.4.2.1 Introduction (bref historique)

En 1827, le botaniste Robert Brown a observé que des petites particules immergées dans un liquide sont perpétuellement en mouvement, lequel est des plus irréguliers. Historiquement, le mouvement Brownien se voulait une tentative pour modéliser ce phénomène.

Aujourd'hui, le Mouvement Brownien (MB) est utilisé dans divers domaines tels l'économie (pour les fluctuations boursières), la théorie de communication, la biologie les sciences administratives et les mathématiques.

En 1900, Louis Bachelier fut le premier qui a utilisé le (MB) pour modéliser la dynamique des cours de bourse, puis Einstein en 1905, pour décrire une particule qui diffuse.

Ce n'est qu'en 1923 que le mathématicien Norbert Wiener construit l'analyse rigoureuse des mathématiques concernant le mouvement Brownien et c'est pourquoi ce processus est aussi connu sous le nom de Wiener.

Pour pouvoir comprendre qu'est-ce qu'un mouvement Brownien, introduisons les concepts de filtration et de tribu.

Définition (Filtration)

Une filtration $F_t, t \in N$ est une famille de sous tribus emboîtées de Ω , qui peut s'interpréter comme l'informations des concepts de filtration et de tribu.

2.4.2.2 Définition d'un mouvement Brownien

Un mouvement Brownien standard $\{W_t, t \geq 0\}$ est un processus stochastique adapté construit sur un espace probabilisé filtré (Ω, F, P) tel que :

1. $\forall \omega \in \Omega, W_0(\omega) = 0$
2. $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_K$, les variables aléatoires $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_K} - W_{t_{K-1}}$ sont indépendantes.
3. $\forall s, t \geq 0$ telque $s < t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est de distribution normale d'espérance 0 et de variance $(t - s)$;
on note: $W_t - W_s \rightsquigarrow N(0, t - s)$;
4. $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \rightarrow W_t(\omega)$ est continue.

Remarque

En général, la filtration utilisée est $F = \{F_t; t \geq 0\}$

Où $F_t = \sigma \{ \{W_s : 0 \leq s \leq t\} \cup N \}$

Est la plus petite tribu pour laquelle les variables aléatoires $W_s : 0 \leq s \leq t$ sont mesurables contenant les ensembles de mesure nulle.

Proposition

La probabilité pour que W_t appartienne à $[x, x + dx]$ est donnée par la densité gaussienne:

$$P(W_t \in [x, x + dx]) = g(t, x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-x^2/2t)dx.$$

La v.a W_t , gaussienne centrée de variance t : est comprise entre les deux nombres

$f_1(t) - 2\sqrt{t}$ et $f_2(t) + 2\sqrt{t}$ avec la probabilité de 95%. [10][11]

2.4.2.3 Quelques propriétés standards

Soit $\{W_t; t \geq 0\}$, un mouvement Brownien standard alors:

- propriété de symétrie: $\{-W_t, t \geq 0\}$ est un Brownien.
- Retournement dans le temps: le processus retourné à l'instant T ; $\hat{W}_t^T = W_T + W_{T-t}$ est un mouvement Brownien sur $[0, T]$.
- Propriété de Markov: vu de la date t , $(\bar{W}_{t+h})_{h \geq 0}$ est un mouvement Brownien issu de la variable aléatoire W_t , en particulier:

$$E(f(W_{t+h}/F_t)) = E(f(X + W_h)) \text{ où } X = W_t \text{ indépendant de } W_s - W_t; t \leq s \leq t + h.$$

2.4.2.4 Equation différentielle stochastique

a) Définition

Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme:

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (2.1)$$

L'inconnue est le processus X . Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution. Il est utile de préciser les données. [8]

Si l'EDS précédente admet une solution, l'on écrira cette dernière sous la forme:

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW \quad (2.2)$$

Des difficultés surgissent quand on cherche à définir l'intégrale d'un élément différentielle dX obéissant à une EDS telle que (2.1), c'est-à-dire à définir les intégrales stochastiques apparaissant dans l'équation (2.2). A cause de cette difficulté on utilise le lemme d'Itô suivant:

b) Proposition (lemme d'Itô)

Soit f une fonction de R^2 dans R , telle que $f(t, X)$ est une fois continument différentiable par rapport à t et deux fois continument différentiable par rapport à X on a alors:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (dX)^2$$

df dénote $f(t + dt, X(t + dt)) - f(t, X(t))$ ceci implique

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(t, X) \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2(t, X) \right] dt + \frac{\partial f}{\partial X} \sigma(t, X) dW.$$

Pour illustrer les règles du calcul différentiel et intégral stochastique exposées précédemment ainsi que les applications financières, nous allons étudier un processus particulier:

le mouvement Brownien géométrique.

2.4.3 Le mouvement Brownien géométrique

Le mouvement Brownien géométrique a été souvent utilisé pour représenter l'évolution des cours dans un marché financier (bourse).

Le mouvement Brownien géométrique unidimensionnel est un processus X obéissant à l'EDS:

$$\frac{dX}{X} = \mu dt + \sigma dW \quad (2.3)$$

où le drift μ et la volatilité σ sont deux constantes données.

Remarque

Le mouvement Brownien géométrique a été souvent utilisé pour représenter les variations du cours des actions. Le log normalité du cours est compatible avec une importante propriété de celui-ci: la valeur d'une action ne peut être négative (responsabilité limitée des actionnaires) cette propriété n'est pas respectée par d'autres lois de distribution, notamment la loi normale. [8][2]

CHAPITRE III

MÉTHODES DE CALCUL D'OPTION

3.1 Formule de Black & Scholes plate-forme "risque neutre"

Pour calculer la valeur de l'option C_t , à l'instant t , il suffit de calculer l'espérance de la valeur de l'option à l'échéance $E(C_T)$. Or, à l'échéance on a:

$C_T = \max(S_T - K, 0)$ qui peut s'écrire:

- Si $S_T \leq K$ alors $C_T = 0$
- Si $S_T > K$ alors $C_T = S_T - K$.

La procédure d'évaluation en risque neutre, découle uniquement, de la condition d'absence de stratégies d'arbitrage non gagnantes, dans ce cas la formule de Black & Scholes est donnée par [13][14]:

$$C_t = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r\tau} \Phi(d_2) \quad (*)$$

Où $d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$ tel que $\tau = T - t$.

$\Phi(x)$ = La valeur de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite au point x .

3.2 Estimation de la volatilité

La pratique la plus courante pour l'évaluation des options européennes est de calculer des paramètres de volatilité implicite à partir de la formule de Black-Scholes ou de volatilité historique à partir de prix observés, pour cela on s'intéresse aux estimateurs suivants:

a) Estimation de la volatilité implicite

Etant donnée que la valeur de l'option à l'instant t est la valeur actualisée du payoff $\max(\phi(S_T - E), 0)$ où $\phi = 1$ pour Call et $\phi = -1$ pour put. Ainsi il existe une et une

seule valeur de σ telle que la valeur théorique de l'option soit égale à sa valeur réelle sur le marché, c'est la volatilité implicite.

Malheureusement on ne peut inverser la formule de Black-Scholes pour avoir une expression de σ en fonction de S , F , r , τ et C . Cependant, on peut procéder de deux façons: la première consiste à utiliser l'algorithme de Newton-Raphson et l'autre l'algorithme par dichotomie.

1. Algorithme de Newton-Raphson

On commence par se fixer une valeur σ_0 . On note $BS(\sigma)$ le prix, d'option, calculé à partir de la formule de Black-Scholes. On a:

$$BS(\sigma) \approx BS(\sigma_0) + (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial BS(\sigma)}{\partial \sigma}(\sigma_0)$$

On notant par $v(\sigma_0)$ la dérivée $\frac{\partial BS(\sigma)}{\partial \sigma}(\sigma_0)$ et en égalisant cette expression au prix de l'option C observée sur le marché on aboutit à une meilleure approximation notée σ_1 de la volatilité implicite.

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \frac{C - BS(\sigma_0)}{v(\sigma_0)}$$

Plus généralement:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{C - BS(\sigma_n)}{v(\sigma_n)}$$

On suppose que la suite ainsi définie converge. Il suffit donc d'implémenter l'algorithme, jusqu'à obtenir une valeur de σ , telle que $BS(\sigma)$ soit aussi proche que l'on souhaite de C .

2. Approche par dichotomie

On utilise le fait que la fonction BS est une fonction croissante de la volatilité.

On considère une plage de valeur $]\sigma_0, \sigma_1[$, telle que $BS(\sigma_0) < P < BS(\sigma_1)$. Ainsi on applique l'algorithme, jusqu'à obtenir une valeur acceptable de σ , (i.e $BS(\sigma)$ soit aussi proche de P que l'on désire[27].) Comme estimation initiale on prend $\sigma_0 = \sqrt{\frac{2|\ln(S/K) + r\tau|}{\tau}}$

b) Estimation de la volatilité historique

Pour estimer la volatilité historique du prix d'un actif, on doit observer le prix de l'actif en question sur une grille temporelle (t_i) de pas constant Δt (le mois par exemple).

En utilisant les notations:

n : nombre d'observations, $S_i = S(t_i)$: le prix de l'actif à l'instant t_i .

$$\mu_i = \log\left(1 + \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}\right) = \log\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \quad \text{pour } i = 1 \dots n.$$

S'agissant de l'estimateur $\hat{\sigma}$ de l'écart type d'une distribution tiré d'un échantillon à n observations de rentabilité $(R_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}})$ ce qui donne:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mu_i - \hat{\mu})^2}$$

$$\text{Où } \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i$$

Remarque

Le choix de la valeur n n'est cependant pas facile, mais plus le nombre de données est grand, meilleure sera l'approximation.[25]

3.3 La Simulation de Monte Carlo

3.3.1 Introduction

La méthode de simulation de Monte Carlo est une technique numérique pour solutionner des problèmes mathématiques en utilisant des échantillons de variables aléatoires i.i.d. Elle est en général applicable à des problèmes de type déterministe, ou bien à des systèmes ayant une ou plusieurs composantes stochastiques.

A l'origine, la méthode de Monte Carlo a été pratiquée sous plusieurs noms génériques tel que «l'échantillonnage statistique».

Le véritable développement de cette méthode s'est produit lors de la seconde guerre mondiale, durant la période des recherches sur la fabrication de la bombe atomique ainsi elle a été utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles.

On a recours à une simulation de Monte-Carlo lorsque le problème :

- est trop complexe pour qu'une résolution par voie purement mathématique soit envisageable.
- est trop volumineux (en particulier, contient un trop grand nombre de variables) pour que les techniques d'approximation numérique puissent conduire à un résultat précis dans un temps acceptable.
- Parmi les problématiques les plus connues que cette méthode a permis de résoudre:
- Le Problème du voyageur de commerce (c'est le problème qui consiste à trouver le plus court chemin qui relie toutes les villes, étant donné un ensemble de villes séparées par des distances données)
- Détermination de la valeur de π (π)
- Détermination de la superficie d'un lac

◇La simulation recouvre aujourd'hui des enjeux considérables dans tous les domaines d'ingénierie (technique, commerciale, financière,...). Nous allons décrire, dans la partie suivante, les deux méthodes permettant la simulation de certains modèles financiers.

3.3.2 Méthode de Monte-Carlo

Le but de la méthode de Monte-Carlo, consiste à simuler des valeurs aléatoires possibles du payoff d'un actif financier. Ce dernier étant modélisé par un mouvement Brownien à une date future. A l'aide de la loi forte des grands nombres et du théorème central limite, on peut estimer la valeur moyenne du prix de l'actif à maturité en utilisant un échantillon de v.a de la loi normale centrée réduite.

La valeur de l'option donnée par la simulation de Monte-Carlo, dans la mesure, où elle est égale à la valeur actualisée de l'espérance des payoffs à l'échéance. Pour une option européenne on a:

$$C_{\mathbb{F}} = e^{-r(T-t)} E(C_T) \quad (3.1)$$

Ainsi, l'estimation de C_T , passe par celle de $E(C_T)$ Nous effectuons M réalisations de C_T *notées* C_T^m ($1 \leq m \leq M$) ensuite nous calculons $\overline{C_T} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C_T^m$ (étant donnée que le meilleur estimateur de l'espérance est la moyenne empirique).
 enfin

$$C_t = e^{-r(T-t)} \overline{C_T}$$

Comme les deux valeurs (à l'échéance et la valeur intrinsèque) d'une option d'achat européenne sont égaux on obtient:

$$C_T^m = \text{Max}(S_T^m - K, 0) \quad (3.2)$$

A chaque réalisation m , on doit estimer la valeur du sous-jacent à l'échéance S_T^m . Ainsi, on peut utiliser une grille temporelle uniforme de pas $\Delta t = \frac{T-t}{N}$ ($N \geq 1$), et par un procédé itératif on estime ce sous-jacent à la fin de l'intervalle de temps. Ce procédé itératif est basé sur la modélisation par des EDS.

Dans ce contexte, nous envisagerons le cas de l'évaluation d'une option d'achat européenne sans dividendes.

Il s'agit donc de simuler la solution de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{cases} X_0 = x \\ dX_T = S_T(rdT + \sigma dW_T) \end{cases} \quad (3.3)$$

X_T : l'inconnue .

σ : la volatilité

dW_t : un mouvement Brownien.

Pour résoudre l'équation (3.3), nous utilisons deux procédures distinguées. La première consiste à utiliser la forme analytique suivante:

$$X_T = x * \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right) \quad (3.4)$$

En simulant le mouvement Brownien par N variables aléatoires $g_i \rightsquigarrow N(0, 1)$ on obtient:

$$S_T = S * \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{\wedge t} \sum_{i=1}^N g_i\right) \quad (3.5)$$

On approche toujours X_T par $X_T^N = S_N$.

(Voir la démonstration dans l'annexe 03).

Dans le cas des options dont le payoff dépend du chemin (trajectoire) on peut utiliser la méthode d'Euler i.e. une deuxième procédure.

En partant de $S_0 = S$, on applique le schéma itératif:

$$S_{m+1} = S_m(1 + r\Delta t + \sigma g_m \sqrt{\Delta t}) \quad ; m = 0, \dots, N - 1 \quad (3.6)$$

Enfin, on simule X_T par $X_T^N = S_N$

On peut interpréter ceci par le fait que, le prix d'un call est égal à l'espérance conditionnelle de sa valeur terminale, sous la probabilité risque neutre:

$$C_t = e^{-r(T-t)} E[\max(S_T - K, 0)] \quad (3.7)$$

où

$$C_t = e^{-r(T-t)} P_T \quad (3.8)$$

avec $P_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(S_{T,i} - K, 0)$

$S_{T,i}$: représente la i ème réalisation de S_T

(dans le cas de put $P_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(K - S_{T,i}, 0)$)

La loi des grands nombres ainsi que le théorème central limite nous assurent la convergence de cette méthode qui se déroule selon l'algorithme suivant sous deux versions (Directe et par étapes):

3.3.3 Algorithme de simulation Monte-Carlo

Cet algorithme nécessite un certain nombre de paramètres.

S_T : valeur de l'actif sous jacent.

C_T : le prix de l'option d'achat.

K : le prix d'exercice ou le prix de levée.

r : le taux d'intérêt sans risque.

T : la date d'exercice (date d'échéance) de l'option

M : nombre de simulation

N : nombre de discrétisation.

$\Delta t = T/N$: pas de discrétisation temporelle.

L'algorithme 1 (Version 1): Par la forme explicite [15].

1. Générer un nombre aléatoire $g \rightsquigarrow N(0, 1)$, $g = RandG(0, 1)$;
2. Répéter, N fois, l'étape (1)
3. Calculer $S_T = S * \exp[(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^N g_i]$
4. Calculer $C = Max(S_T - K, 0)$;
5. Réaliser M étapes du type (1 à 4)
6. Calculer $\bar{C} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M C[i]$;
7. Calculer la valeur de l'option par: $C = \bar{C}e^{-rT}$

N.B. Cet algorithme s'adapte bien aux modèles indépendants de la trajectoire des prix du sous-jacent.

L'algorithme 2 (Version 2): Cet algorithme utilise le schéma de discrétisation d'Euler [15].

1. $S[0] = S_0$;
2. Générer un nombre aléatoire $g \rightsquigarrow N(0, 1)$,
3. Executer la boucle $S[i] = S[i - 1] * (1 + r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}g)$; $i = 1, \dots, N$
4. Répéter, M fois, les étapes 2 et 3
5. Calculer $C_T^{(m)} = Max(S_M[N] - K, 0)$; où $m = 1, \dots, M$

6. Répéter les étapes (1 à 5), M fois;

7. Calculer $\bar{C}_\theta = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C_T^{(m)}$;

8. Le prix de l'option : $C_\theta = \bar{C}_\theta e^{-rT}$;

N.B: Cet algorithme prend en considération les modèles dépendants de la trajectoire de l'actif sous-jacent.

3.3.4 Taux de convergence de la méthode

La qualité de la méthode Monte Carlo est évaluée par sa vitesse de convergence et son erreur. Comme nous pouvons d'observer, on ne peut pas estimer le prochain nombre aléatoire. Cependant, avec un grand ou très grand nombre de variables aléatoires on peut diminuer l'effet de l'aléatoire.

Pour décrire la convergence, on peut utiliser les théorèmes suivants :

3.3.4.1 Théorème de la loi forte des grands nombres[16]

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.i suivants toutes la même loi qu'une variable aléatoire X telle que $E(|X|) < +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = E(X)$$

Ce théorème montre bien que l'estimateur de la méthode de Monte-Carlo est sans biais toutefois on ne peut l'utiliser que pour des variables aléatoires intégrables.

3.3.4.2 Théorème central limite[16]

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2 finies. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - \mu).$$

Alors la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers la loi normale $N(0, 1)$, c'est-à-dire:

$$\forall a, b \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P[a < Z_n < b] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

Dans le théorème central limite, μ est la valeur à estimer. les n valeurs X_1, \dots, X_n constituent un échantillon de mesures aléatoires indépendantes d'espérance μ . La quantité

$(X_1 + \dots + X_n)/n$ est la moyenne empirique de l'échantillon, qui d'après la loi des grands nombres doit converger vers l'espérance μ . Le théorème central limite donne la précision de cette approximation.

Le théorème central limite est utilisé pour des valeurs finies de n . L'idée concrète est, si n est assez grand, la variable centrée réduite Z_n associée à la somme de n variables indépendantes suit approximativement la loi $N(0, 1)$. Si on réalise suffisamment de simulations de Z_n et que l'on trace un histogramme des valeurs obtenues, celui-ci ne sera pas très loin la courbe $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Pas plus loin en tout cas que si on avait simulé des variables aléatoires de loi $N(0, 1)$. Si Z suit la loi $N(0, 1)$, alors $Y = \sigma Z + \mu$ suit la loi $N(\mu, \sigma)$. On peut aussi dire que pour n assez grand une somme de n v.a. indépendantes suit approximativement une loi normale, dont l'espérance et la variance sont respectivement la somme des espérances et la somme des variances des variables que l'on ajoute. Le problème est de savoir à partir de quelle valeur de n (assez grande), on peut avoir la précision désirée. L'approximation est d'autant meilleure que la loi des X_n est plus symétrique.

3.3.4.3 Construction d'intervalle de confiance

L'idée de l'estimation par intervalle de confiance est de définir, autour de la moyenne empirique, un intervalle aléatoire (dépendant des n expériences) qui contienne μ avec une forte probabilité. C'est l'amplitude de cet intervalle qui mesure la précision de l'estimation.

Théorème i.c. [16]

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2 finies. Posons:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2$$

Soit α un réel > 0 (petit). Soit z_α le réel > 0 tel que:

$$\int_{-z_\alpha}^{z_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1 - \alpha$$

Posons

$$\begin{aligned} T_1 &= \bar{X}_n - \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} & T'_1 &= \bar{X}_n - \frac{z_\alpha \sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}} \\ T_2 &= \bar{X}_n + \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} & T'_2 &= \bar{X}_n + \frac{z_\alpha \sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\mu \in [T_1, T_2]] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[\mu \in [T'_1, T'_2]] = 1 - \alpha$$

On dit que les intervalles aléatoires $[T_1, T_2]$ et $[T'_1, T'_2]$ sont des intervalles de confiance pour μ , de niveau de confiance asymptotique $1 - \alpha$.

3.3.4.4 application du théorème i.c en finance

Le nombre M de simulations accomplies dépend de la précision souhaitée. La valeur de chaque option, calculée à la fin de la simulation, constitue un tirage d'une variable aléatoire normale. M simulations constituent, donc, M tirages indépendants de la variable aléatoire C_m qui est le prix de l'option. Soit un échantillon de M variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (C_1, C_2, \dots, C_M) , qui sont, les prix de l'option calculés à la fin de chaque simulation. On désigne par μ la moyenne empirique du prix de l'option et par s son écart-type empirique. Les M variables (C_1, C_2, \dots, C_M) sont indépendantes et identiquement distribuées de la variable parente C_t et, donc, elles ont la même moyenne et le même écart-type. La valeur de l'option, calculée par la simulation de Monte-Carlo, est : $\bar{C}_M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C_m$ qui suit une loi normale de moyenne $E(\bar{C}_M) = \mu$, de variance $V(\bar{C}_M) = \frac{s^2}{M}$ et, donc, un écart type $\sigma(\bar{C}_t) = \frac{s}{\sqrt{M}}$.

Avec un risque α , notons $f_{1-\alpha}$ le fractile d'ordre $(1-\alpha)$ de la loi normale centrée réduite, on peut écrire: $\mu - f_{1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{M}} \leq \bar{C}_t \leq \mu + f_{1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{M}}$.

Ainsi, quand M tend vers l'infini, \bar{C}_t converge vers la moyenne μ de la valeur de l'option qu'on cherche à estimer. La précision de ce calcul est $f_{1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{M}}$.

Il y a un compromis à faire entre la précision et le temps de calcul [15]. En effet, l'efficacité de l'estimateur est: $Eff(\bar{C}_t) = \frac{1}{V(\bar{C}_t) * t\bar{C}_t} = \frac{M}{s^2 * t\bar{C}_t}$ avec $t\bar{C}_t$ est le temps de convergence de l'algorithme.

3.3.5 Comparaison entre les valeurs données par l'algorithme de MC et celles données par le modèle de B&S

Le prix de l'option d'achat européenne C_t est donné par:

$$C_t = e^{-r(T-t)} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(S_{T,i} - K, 0)$$

Pour mettre en évidence la procédure de calcul on considère, l'exemple suivant parmi les plus utilisés en pratique:

1. $S_0 = 100$ le prix d'actif initial.
2. $\sigma = 25\%$ la volatilité.
3. $r = 5\%$ le taux d'intérêt sans risque.
4. $K = 100$ le prix d'exercice.
5. $T = 1$ an la date d'échange de l'option
6. $N = 20$ nombre de discrétisation.

L'ensemble de valeurs de l'option, générées par la simulation de Monte carlo, ainsi que la valeur donnée par le modèle de Black & Scholes ($BS = 12.3360$), sont représentées dans la figure suivante:

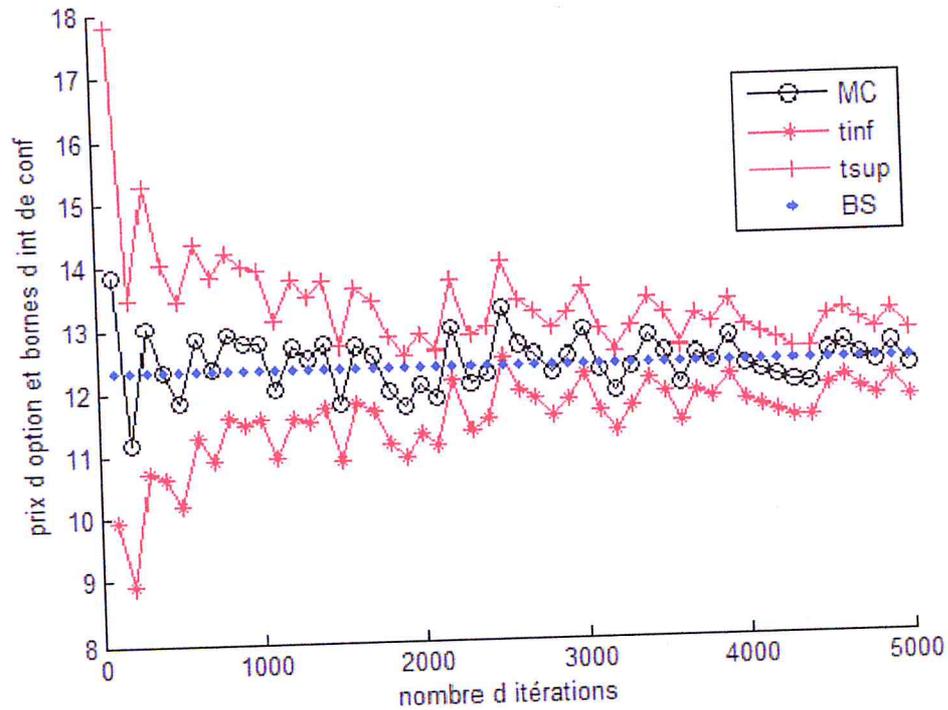


Figure 3.1 Convergence de l'algorithme de la simulation MC vers la formule de B&S

Le tableau suivant présente les précisions et les temps de calcul pour différentes valeurs de la taille de l'échantillon M pour la simulation Monte Carlo (La solution de référence étant bien entendu celle du modèle de Black & Scholes).

La taille de l'échantillon M	valeur d'option d'achat	Ecart absolu avec le BS	temps d'exécution en seconde	Intervalle de confiance
800	11.452764	0.883234	0.1230	[10.24116,12.66437]
900	11.718515	0.624110	0.1712	[10.54913,12.87465]
1200	11.837257	1.498741	0.2885	[10.83412,12.84039]
5800	11.849048	0.486950	20.0148	[11.38086,12.31724]
10000	12.468177	0.312178	96.9121	[12.28028,13.01607]
20000	12.252663	0.083335	728.4818	[11.99689,12.50843]
30000	12.320234	0.015764	1219.6178	[12.06269,12.57776]

Table 3: 1 convergence de la méthode de Monte Carlo

Les résultats montrent bien que l'erreur est de plus en plus petite pour autant que le nombre de simulation ainsi que le temps de calcul sont grands.

A titre d'exemple, avec un niveau de confiance 95% pour $M = 10000$, on consomme

96.9121 secondes pour avoir une précision de l'ordre 0.312178 alors que pour $M = 20000$, on consomme 728.4810 secondes pour atteindre une précision de 0.083335.

On reprend toujours le même exemple, on remarque que, les amplitudes des intervalles de confiance, diminuent avec l'augmentation du nombre de simulations Monte Carlo, comme le montre le graphique suivant:

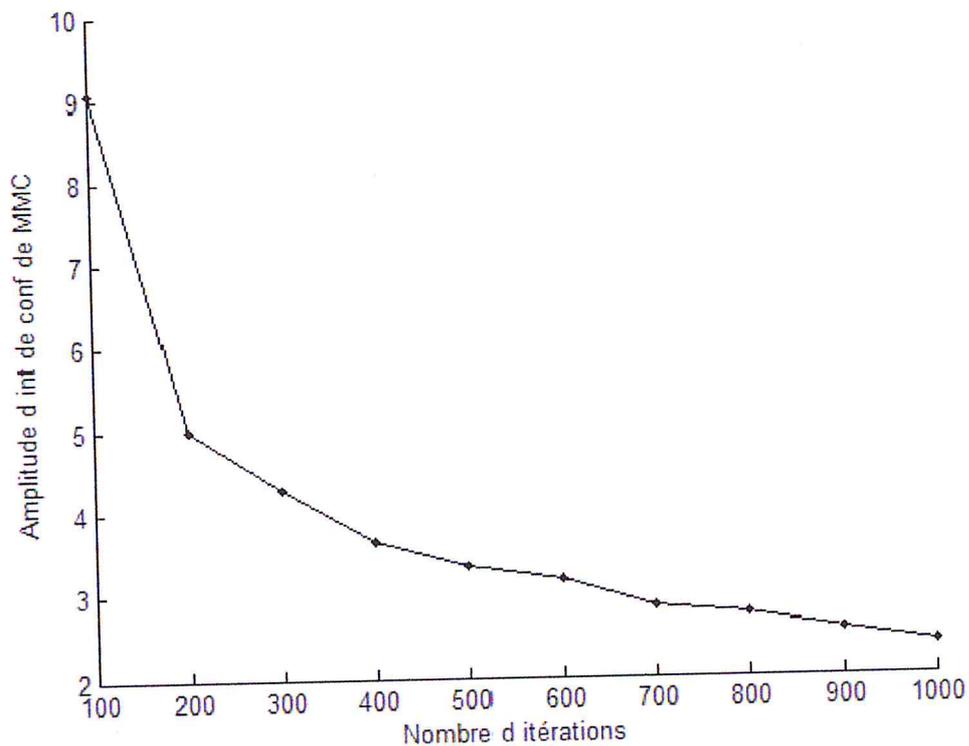


Figure 3 : 2 Amplitude de l'intervalle de confiance de MMC en fonction du nombre de simulations

Dans la figure ci dessus, lorsque le nombre de simulationles M augmente l'erreur d'estimation tend vers 0, ce qui explique la convergence de MMC vers la valeur théorique de Black & Scholes.

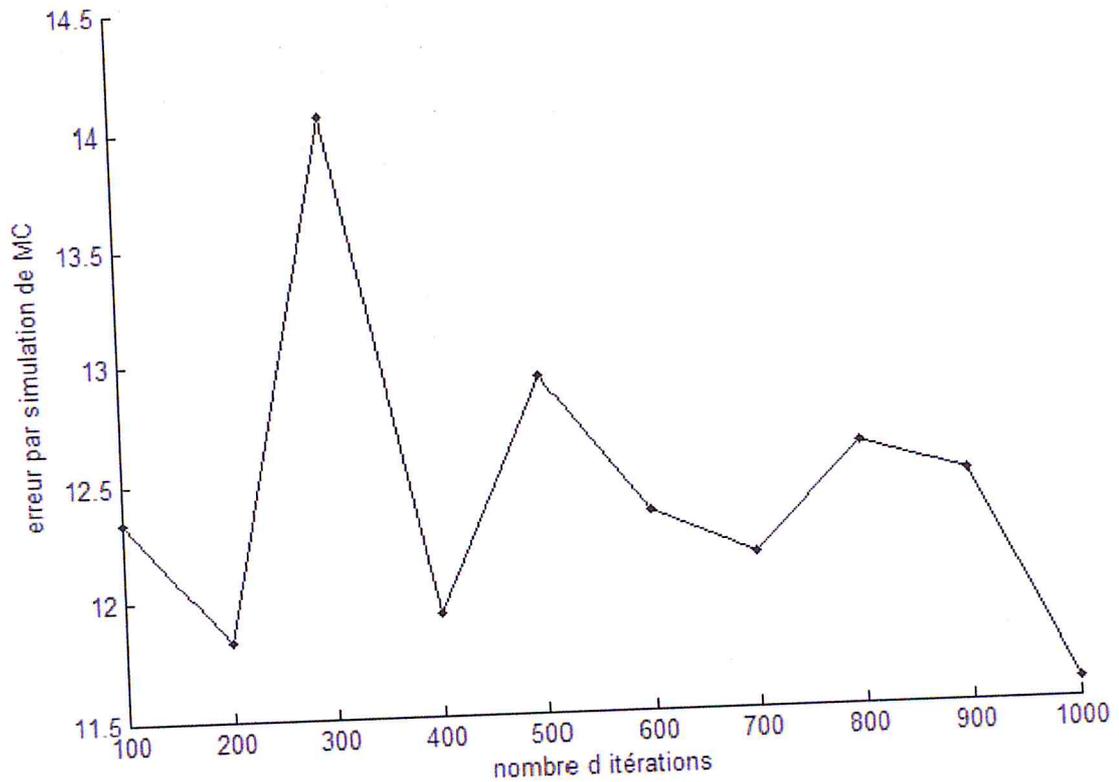


Figure 3 : 3 Ecart de MMC avec le modèle de Black & Scholes

3.3.6 Inconvénient des méthodes de Monte-Carlo

Les méthodes de M.C ont comme grand avantage par rapport aux méthodes d'analyse numérique classique d'avoir une vitesse de convergence en $O(N^{-\frac{1}{2}})$, donc indépendante de la dimension du problème. Néanmoins elle présente certains inconvénients liés à son caractère stochastique:

- Il n'est pas possible de générer des échantillons "réellement" aléatoires (ce problème est atténué par la génération de bonnes suites pseudo aléatoires). [17]
- La vitesse de convergence est lente en moyenne $O(N^{-1/2})$

Tous ces inconvénients nous permettent de poser la question suivante: Est-ce qu'il existe des suites de nombres pour laquelle la convergence soit plus rapide en supprimant l'aspect aléatoire?

La réponse à cette question nous conduit à s'intéresser aux méthodes dites de quasi-Monte Carlo toutefois nous n'avons pas le caractère aléatoire.

3.4 La Simulation de quasi-Monte Carlo

3.4.1 Introduction

Les méthodes de quasi-Monte Carlo sont supposées être plus efficaces et produisent des estimés beaucoup moins oscillants que ceux obtenus par les simulations standards de Monte Carlo. En effet, pour améliorer la précision des estimés, l'approche quasi Monte-carlo (MQMC), utilise une suite de nombres quasi aléatoires choisie judicieusement. Ces séquences sont utilisées de façon à générer des échantillons représentatifs des distributions de probabilités que nous tentons de simuler.

Rappelons qu'une suite de nombres $\{x_n\}$ dans I^s est équirépartie si pour tout sous intervalle $E \subseteq I^s$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N C_E(x_n) = \lambda_s(E)$$

Où C_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E

$$C_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et $\lambda(E)$ est le volume de E

Définition [12]

Notons par I^s l'hypercube-unité à S dimensions. Pour une suite finie x_1, x_2, \dots, x_N de N points de I^s et un ensemble $E \subseteq I^s$ nous introduisons la fonction de comptage

$$A(E; N) = \sum_{n=1}^N C_E(x_n)$$

Définition

Soit Δ une famille de sous ensembles des boréliens de $I^s = [0, 1]^s$ alors la discrétance d'une suite de N points x_1, x_2, \dots, x_N de I^s est définie par

$$D_N(\Delta) = \sup_{E \in \Delta} \left| \frac{A(E; N)}{N} - \lambda_s(E) \right|$$

Théorème .[14]

Soit $f : [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation finie et $x = (x_n, n \geq 1)$ une suite équirépartie sur $[0, 1]^s$. Alors pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right| \leq V(f) D_n^*(x)$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Koksma et Halawka, qui est l'une des bornes de l'erreur les plus connues dans les méthodes de quasi Monte Carlo. Et qui montre que la borne d'erreur est déterminée par le produit de deux quantités: la variation de la fonction à intégrer et la discrétion de la suite utilisée.

3.4.2 Suite quasi aléatoire ou suite à discrétion faible

Dans la méthode de quasi Monte Carlo, on utilise un ensemble de points avec une discrétion très petite, cette suite est appelée suite à discrétion faible ou encore suite quasi aléatoire.

Définition

Une suite x_1, x_2, \dots de I^s vérifiant $D_N^* = O(N^{-1}(\log N)^s)$ est appelée une suite à discrétion faible et les méthodes d'approximation utilisant ces suites sont appelées les méthodes de quasi Monte Carlo.

3.4.2.1 Suite de Van Der Corput

Soit b un entier premier strictement supérieur à 1. Pour tout nombre entier positif n on note a_0, \dots, a_r les coefficients de la décomposition de n en base b .

$n = a_0 + a_1 b + \dots + a_r b^r, a_r > b, 0 < a_i < b$ pour $i = 0, \dots, r - 1$. Ainsi on définit la suite de Van Der Corput en base b par $\phi_b(n) = \frac{a_0}{b} + \frac{a_1}{b^2} + \dots + \frac{a_r}{b^{r+1}}$. La dispersion des points de cette suite sur l'hypercube unité en base $b = 2$, illustrer par la figure suivante:

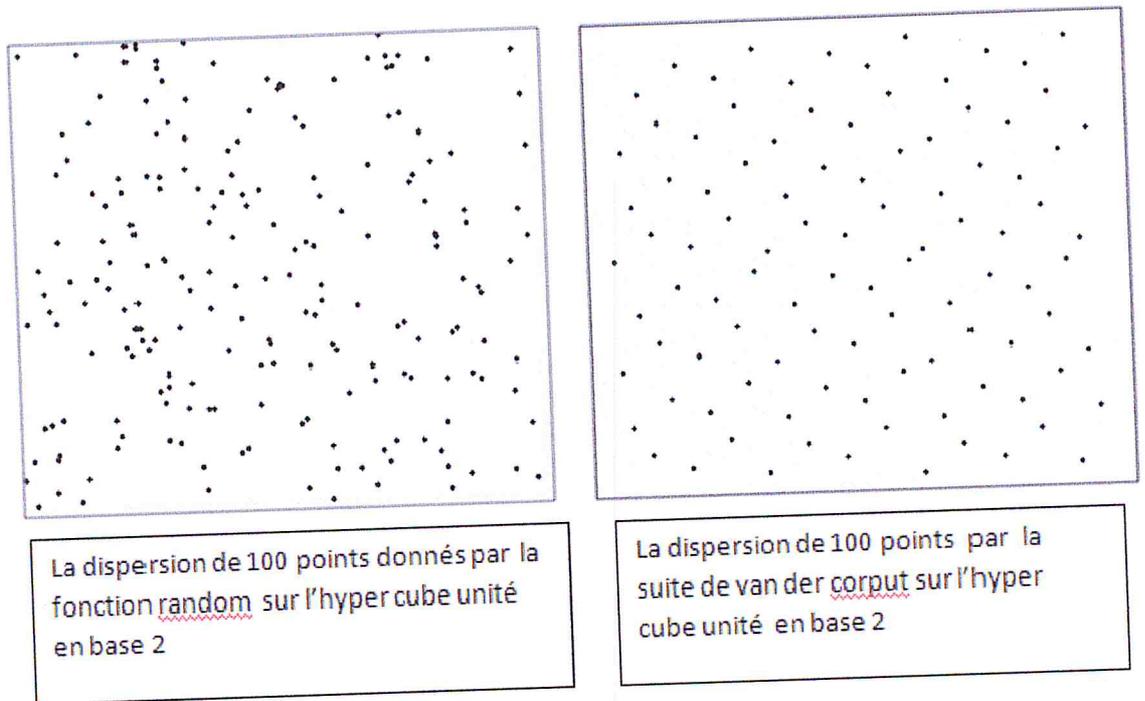


Figure 3.4 Comparasion entre la dispersion de 100 points en fonction random et en suite de Van der Corput sur l'hyper cube unité en base 2

3.4.2.2 Algorithme de construction d'une suite de Van Der Corput

1. $X[0] = 0$; et b : un nombre premier naturel représente la base;
2. Posons $m = i, f = 0, ib = 1/b$;
3. Tant que $m > 0$ Calculer

$$m_1 = \text{int}(m/b)$$

$$e = m - m_1 * b$$

$$f = f + ib * e$$

4. Calculer: $ib - ib/b$

5. Posons: $m = m_1$

3.4.2.3 Exemple numérique sur les suites de Van Der Corput

Soit la suite $(n)_{n \geq 1}$. chaque terme de n peut être exprimé dans la base b par:

$$\phi_b(n) = \frac{a_0}{b} + \frac{a_1}{b^2} + \dots + \frac{a_r}{b^{r+1}} \quad (3.9)$$

est appelée fonction radical inverse.

Pour $(n)_{1, \dots, 10} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ dans la base $b = 2$ on a les valeurs de la suite à discrédance faible suivante:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{5}{16} \right)$$

pour $b = 3$ alors les 12 premiers termes de la suite sont

$$\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{10}{27}, \frac{19}{27} \right)$$

3.4.3 Méthode de quasi Monte Carlo[26]

L'idée fondamentale d'utiliser les suites à discrédance faible dans l'intégration numérique a été introduite durant les années précédentes. Plusieurs études ont été réalisées dans les applications de finance. Birge[23] a constaté que ces suites donnent des résultats très précis dans l'évaluation des prix d'option.

La valeur d'une option européenne C_t , à la date d'échéance T , est égale à sa valeur intrinsèque, à cet instant on peut écrire:

$$C_t = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \max[S_T - K, 0] \phi(z) dz \quad (3.10)$$

Où

$$S_T = S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma z \sqrt{T-t}} \quad (3.11)$$

z : variable aléatoire normale centrée réduite et $\phi(z)$ sa fonction de distribution.

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Si on pose:

$$h(z) = e^{-r(T-t)} \text{Max}(S(z) - k, 0) \quad (3.12)$$

Dans le cas d'un raisonnement risque neutre où le taux d'intérêt r est constant, la valeur de l'option C_t , à l'instant courant t , est donnée par, l'équation:

$$C_t = \int_{-\infty}^{+\infty} h(z)\phi(z)dz \quad (3.13)$$

Soit la suite $X = (x_1, \dots, x_n)$ une suite de Van Der Corput. Effectuant le changement de variable $x = \phi(z)$, on obtient $z = \phi^{-1}(x)$.

Où $z = \phi^{-1}(x)$: est la fonction inverse de la fonction de distribution de la loi normale centrée réduite.

A titre d'exemple, soit $(n)_{n \geq 3}$ une suite de Van der Corput dans la base $b = 2$ est donnée par:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{5}{16} \right)$$

les valeurs correspondentes à z sont:

$$(0, -0.6745, 0.6745, -1.1503, 0.3186, -0.3186, 1.1503, -1.5341, 0.1573, -0.4888)$$

Alors le prix de l'option est écrit par l'intégrale de:

$$C_t = \int_0^1 h(\phi^{-1}(x))dx$$

Posons $h(\phi^{-1}(x)) = f(x)$.

L'algorithme suivant permet de calculer le prix de call européen avec une suite déterministe.

On utilise la relation suivante: $C_t = \int_0^1 f(x)dx$



3.4.3.1 L'algorithme de Quasi Monte Carlo

Les paramètres de modèle:

S_t : Le prix de l'action .

C_t : le prix de l'option de vente.

K : le prix d'exercice ou le prix de levée.

r : le taux d'intérêt sans risque.

T : la date d'exercice (date d'échéance) de l'option

$V_{thé} = C_{BS}$: Le prix d'option donné par la formule de Black & Scholes

M : nombre de simulation.

$\phi_b(n) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b^{-j}$: suite de Van Der Corput en base b .

$z = \phi^{-1}(x)$: Fonction de répartition inverse de la loi normale centrée déduite.

L'algorithme:

1. $S_0 = S$;

2. Calculer: $\phi_b(n) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b^{-j}$

3. Calculer $z = \phi^{-1}(x)$ où $z \rightsquigarrow N(0, 1)$

4. Calculer $S_T = S * \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma z \sqrt{T - t})$;

5. Calculer $C_t = \text{Max}(S_T - K, 0)$;

6. Calculer $\bar{C}_t = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M C[i]$;

7. Le prix de l'option : $C_t = \bar{C} e^{-rT}$.

3.4.4 Comparaison entre les algorithmes de simulation de MC et QMC en référence au modèle de B&S

Pour évaluer l'intégrale $C_t = \int_0^1 f(x) dx$, il suffit de prendre une suite à discrétance faible dans la base $b = 2$ et les paramètres numérique de l'exemple précédent dans la section (3.2.5).

La série de la valeur de l'option, générée par la simulation de QMC, ainsi que celle relative au modèle de B&S et la simulation MC sont représentées dans la figure suivante:

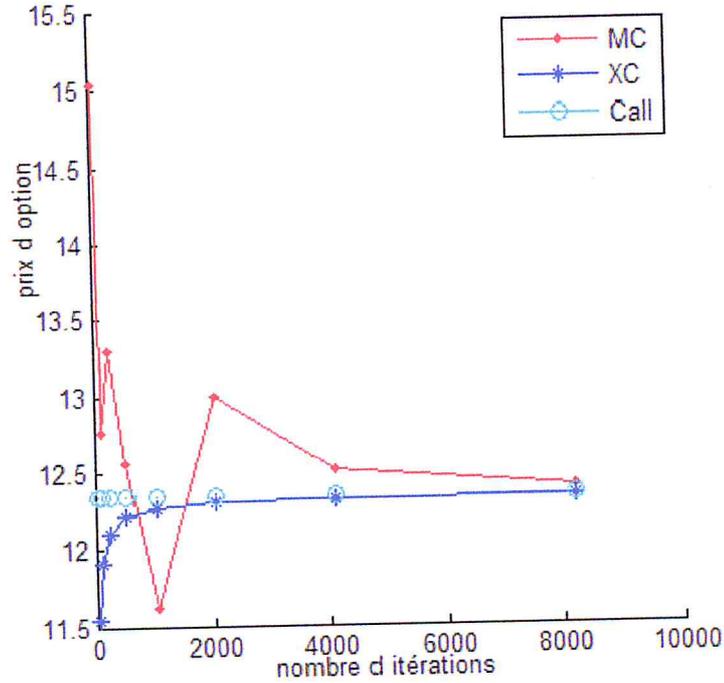


Figure 3.5 Convergence de l'algorithme de QMC vers la formule de B&S, comparée par la MMC

En comparant avec le modèle de Black-Scholes les méthodes Quasi Monte Carlo basées sur les suites de Van der Corput ont un taux de convergence plus grand que celles de Monte Carlo

La taille de l'échantillon <i>n_{sim}</i>	valeur d'option d'achat	Ecart absolu avec le BS	temps d'exécution en seconde
64	11.550557	0.785441	0.1597
256	12.097467	0.238531	0.1701
1024	12.265855	0.070143	0.1749
4096	12.315833	0.020165	0.2102
16384	12.330295	0.005703	0.5888
65536	12.334405	0.001593	9.0352
131072	12.335160	0.000838	80.2668

Table 4: 2 convergence de la méthode de Quasi Monte Carlo

les résultats illustrés dans le tableau ci-dessus, montrent que la méthode quasi Monte Carlo converge beaucoup plus rapidement que les simulations conventionnelles de Monte Carlo.

A titre d'exemple, pour $M = 131072$ on consomme 80.2668 secondes pour avoir une évaluation d'un prix d'un call 12.335160, car la valeur exacte calculée par la formule de B&S est dans ce cas égale à 12.3360, la différence est 0.000838 et l'accord est tout à fait bon. En utilisant l'approche standard de MC pour calculer la même intégrale, on a besoin de 2097152 points pour une valeur 12.335127, pour assurer un intervalle de confiance $[12.30997, 12.36008]$ à 95%

La figure suivante, montre comment l'écart entre le prix du call estimé par MQMC et la valeur théorique est faible, pour un petit nombre d'itérations.

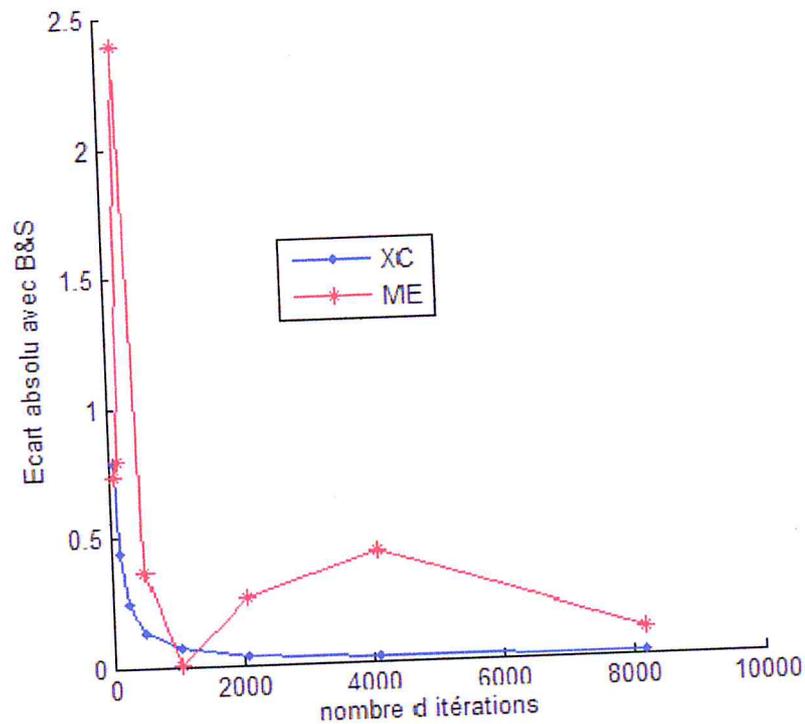


Figure 3.6 erreur de simulation MMC, MQMC

La méthode quasi Monte Carlo qui fait appel aux nombres pseudo aléatoires, et qui donne le même résultat pour un nombre d'itérations donnés. Nous avons constaté que les nombres pseudo aléatoires comportent des forces et des faiblesses. La force est de couvrir rapidement la surface d'intégration. La faiblesse est l'absence d'un moyen pour estimer l'erreur.

Conclusion

Ce projet nous a permis d'élargir nos connaissances dans le domaine de la finance où on a appliquées ce qu'on a appris dans le cursus de formation. Nous nous intéressons en particulier aux méthodes de simulation de type Monte-Carlo, toutes les méthodes proposées peuvent être plus ou moins appropriées pour l'évaluation des options. La méthode de simulation Monte Carlo comporte un avantage certain puisque elle est en mesure d'intégrer facilement les diverses dimensions d'un problème. Cependant, sa vitesse de convergence est très lente. La simulation de type Quasi Monte Carlo est un analogue déterministe des techniques de Monte Carlo, où les suites pseudo aléatoires sont remplacées par des suites à discrétion faible se répartissant plus rapidement uniformément sur le domaine d'étude, permettant ainsi un meilleur "échantillonnage".

Un inconvénient des méthodes de quasi-Monte Carlo concerne l'estimation de l'erreur. Une MMC d'un côté donne aisément un intervalle de confiance par application du théorème de la limite centrale, alors de l'autre côté, une MQMC par l'intermédiaire de la borne de Koksma-Hlawka est supposé fournir une borne plus forte (car non probabiliste) pour majorer l'erreur. Malheureusement, cette borne, composée de la variation de la fonction et de la discrétion de la suite est, dans la plupart du temps, inutile en pratique car la variation est une quantité inconnue, difficile à estimer, et souvent très grande. Certaines techniques ont été examinées de manière à remédier ces inconvénients connues par "randomisation" qui serrent à combiner les meilleurs propriétés des deux méthodes standards, MMC et MQMC.

Liste des symboles et des abréviations

MMC: Méthode Monte Carlo.

MQMC: Méthode Quasi Monte Carlo.

i.i.d: indépendante, identiquement distribuée.

$N(0, 1)$: La loi normale centrée et réduite.

F_x : Fonction de répartition de la variable aléatoire x .

$f(x)$: Fonction densité.

$E(X)$: espérance de X .

$V(X)$: Variance de X .

$X_n \xrightarrow{P.S} X$: convergence presque sûre.

EDS: Equation différentielle stochastique.

BS: Modèle de Black & Scholes

Annexe

Annexe 01: Loi log-normale

Définition: Une variable aléatoire X à valeurs dans $]0, +\infty[$ suit la loi log-normale de paramètres $N(m, \sigma)$ si $Y = \log X$ suit la loi $N(m, \sigma)$.

La densité de X est alors:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right)^2\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

X admet alors une espérance et une variance:

$$E(X) = e^{m+\sigma^2/2} \quad \text{et} \quad V(X) = e^{2m+2\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

Annexe 02: La convergence presque sûre

Définition : Une suite de variables aléatoires X_n converge presque sûre (p.s), vers X si pour presque tout ω ,

$$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

On note $X_n \xrightarrow{p.s} X$.

Annexe 03:

Soit l'équation différentielle stochastique:

$$\frac{dS_t}{S_t} - \mu dt + \sigma dB_t \rightarrow d(\log S_t) - \mu dt + \sigma dB_t$$

Posons $Y_t = \log S_t$, par application de lemme d'Itô, on a:

$$dY_t = \frac{\partial Y_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial Y_t}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \frac{(dS_t)^2}{S_t^2}$$

D'autre part, nous avons d'après la table de multiplication stochastique:

$$\frac{(dS_t)^2}{S_t^2} = \sigma^2 dt$$

$$\Rightarrow dY_t = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \Rightarrow \frac{dS_t}{S_t} = dY_t + \frac{1}{2}\sigma^2 dt \Rightarrow \frac{dS_t}{S_t} = d(\log S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

Et donc:

$$\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} = \log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) + \frac{\sigma^2}{2}T = rT + \sigma B_T \Rightarrow \log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma B_T$$

d'où on a:

$$\frac{S_T}{S_0} = \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma B_T \right\}$$

avec $w_t = \sqrt{T} * g$, $g \rightsquigarrow N(0, 1)$, on trouve:

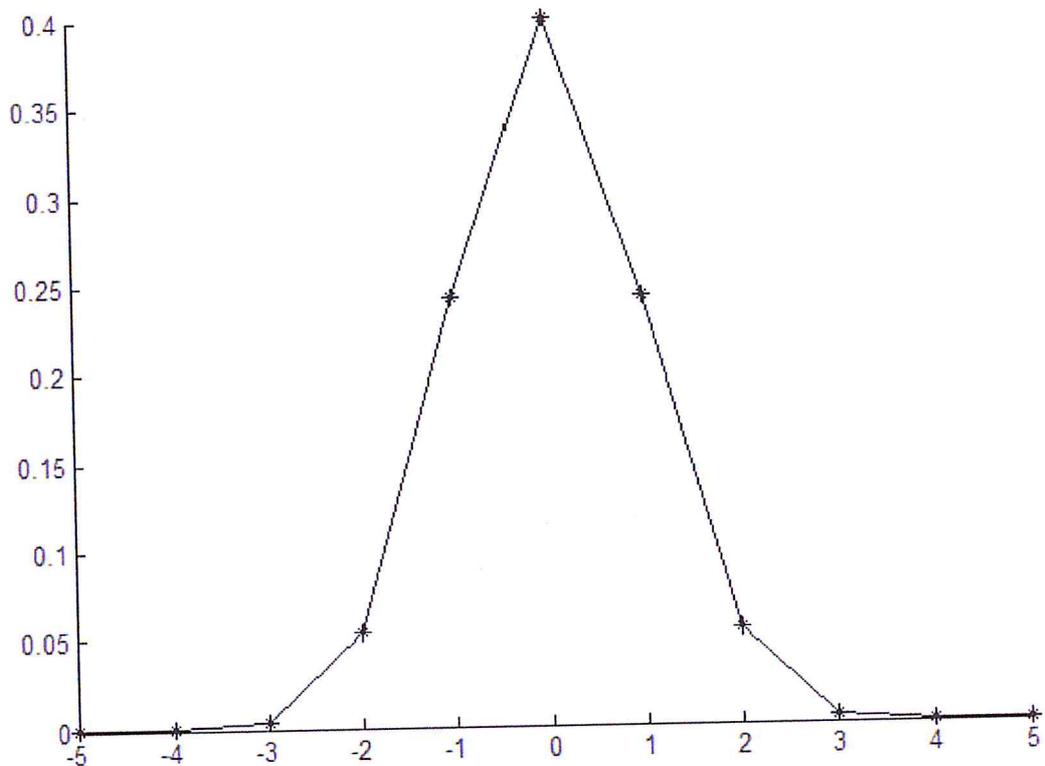
$$S_T = S_0 \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} * g \right]$$

Annexe 04: Définition de l'espace L^1 :

$L^1(\Omega)$: Les espaces de fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} .

$$\|F\|_{L^1} = \int_{\Omega} |F(x)| dx.$$

Annexe 05: La courbe $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ pour $x \in [-5, 5]$



Annexe 06: La méthode de Van Neumann

En 1946, John von Neumann propose un générateur pseudo-aléatoire connu sous le nom de la méthode middle-square (carré médian). Très simple, elle consiste à prendre un

nombre, à l'élever au carré et à prendre les chiffres au milieu comme sortie. Celle-ci est utilisée comme graine pour l'itération suivante.

Exemple:

Soit le nombre « 1111 »

1. $1111^2 = 1234321$

2. on récupère les chiffres du milieu : 3432. C'est la sortie du générateur.

3. $3432^2 = 11778624$

4. on récupère les chiffres du milieu: 7786.

et ainsi de suite. On a pour quatre chiffres: nombres générés entre 0 et 9999.

Annexe 07:

La justification de cette transformation vient de la transformation de la mesure de probabilités de la loi normale en coordonnées polaires:

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{R^2}{2}} R dR d\theta = \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{s}{2}} ds\right) \left(\frac{1}{2\pi} d\theta\right)$$

On posant $s = R^2$

On remarque que

$s \rightsquigarrow \exp(-\frac{1}{2}s)$: s suit une loi exponentielle de paramètre 1/2.

$\theta \rightsquigarrow U([0, 2\pi])$: θ suit une loi uniforme continue sur $[0, 2\pi]$.

REFERENCES

- [1] Yves. S: "Encyclopédie des marchés financiers", édition economica, tomes 1, 1997.
- [2] Patrice Poncet,Roland Portait Serge Hayet "Mathématiques financières,évaluation des actifs et analyse du risque", 2^{ème} édition, édition Dalloz, 1996.
- [3] Phillippe aroyo, Philipe d'arvisenet,Theivy Schwols. "Finance appliqués". Dunvd, Paris 1993.
- [4] Philippe.B: "Loi d'une variable aléatoire réelle", septembre 2003.
- [5] Processus aléatoire: "Technique mathématique de la recherche opérationnelle". Har-mame 1992.
- [6] Carnoma.P: "Simulation de la variable aléatoire", Maitre d'ingénierie mathématique, TP numéro 2 université de Nante année 2004-2005.
- [7] Popier.A: "Méthode de Monte Carlo et simulation de variable aléatoire", 26 septembre 2005.
- [8] Kloeden.P.E et Platen.E: "Numerical solution of stochastic differential equation" Spinger-Verlag 1992.
- [9] Revedy.P: variable aléatoire continue "Loi Normales"extrait du manuel "chapitre 8".
- [10] El Karaoui.L: "Modèles stochastiques et marchés financiers,Majeur de mathématiques appliquées", 21 septembre 2004.
- [11] Ganthier.G: le mouvement Brownien "Les méthodes stochastiques dans les sciences de gestion", 6-640-93, 24 juin 2003.
- [12] Kerkar "Introduction aux méthodes de monte carlo et quasi monte carlo" thèse d'ingénieur

- [13] Black,F.,Scholes,M., "The pricing of options and corporate Liabilitises journal of political (1973).
- [14] Annie,.M., "Méthode de Monte Carlo"Laboratoire de probabilités et aléatoires,universités Paris 6 et Paris 7 (200).
- [15] Yacin,.J., "Evaluations des options et gestion des risqué financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique "thèse de doctorat, université Paris 1 Panthéon-Sorbonne le 20 février (2006).
- [16] Ycart,B., "Méthode de Monte Carlo" université Denis diderot (2000).
- [17] E.D Knuth. "The art of computer programming volume 2",Addison-Wesley,1981
- [18] Abraham,.S.L, "Contribution à la planification de mouvement en robotique, approches probabilistes et approches déterministes "Thèse Doctorat,université Montpellier le 15 juillet (2003).
- [19] Sobol,I.M. "The distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals,"U.S.S.R. computational math. and math.phys.,7,4,86-112. (1967).
- [20] Niederreiter H: "point sets and sequences with small discrepancy", Monatsh., math.104,273-337.(1987).
- [21] Faure,H. "Discrépance de suites associées à un système de numération (en dimension 8): "Acta Arithmetica, XLI 337-351.(1982).
- [22] Birge J.R., "Quasi-Monte Carlo approaches to options pricing, "Technical Report 94-19: Department of Industrial and Operations Engineering, university of Michigan, Ann Arbor, MI 48109 (1994).
- [23] Owen,A.B, "Randomly permuted (t,m:s)-Nets and (t,s)-sequences "in Monte Carlo and Quasi Monte Carlo methods in Scientific Computing, (H.Niederreiter and P.G.-S. Shiue, Eds.), Lecture Notes in Statistics, 106:299-317, Springer-Verlag, New York. (1995).

- [24] Faure, H, "Good permutation, for extreme discrepancy". *Journal of Number Theory* 42, 74-56. (1992).
- [25] Saïmi. N. : "Estimation de la volatilité et filtrage non linéaire". mémoire présenté à l'université du Québec à trois-Rivières, Département de mathématiques et informatique, 2001.
- [26] Slimi Boualem "Equations différentielles stochastiques et évaluations des options en finance" Blida, juin 2008.
- [27] <http://www.google.com/>

```

%Convergence de l'algorithme de la simulation MC vers la formule de B&S
clc;
S0=100;sig=0.25;r=0.05;K=100;T=1;
N=20;delta=T/N;
A=(r-0.5*sig^2)*T;B=sig*sqrt(delta);
beta=norminv(1-0.05/2,0,1);
BS=BlsPrice(S0,K,r,T,sig,0);
% N nombre de pas
% M nombre de réalisations
XM=zeros(1,1);MC=XM;tinf=XM;tsup=XM;
ic=0;
f=zeros(1,1);
tic;
for M=100:100:10000
    ic=ic+1;
    XM(ic)=M;
    som1=0;som2=0;
    for j=1:M
        som=sum(randn(N,1));
        S=S0*exp(A+B*som);
        p=max(S-K,0);
        som1=som1+p;
        som2=som2+p*p;
    end;
    Cbar=som1/M;
    rn=(som2/M)-Cbar*Cbar;
    sn=sqrt(rn/M)*beta;
    binf=Cbar-sn;
    bsup=Cbar+sn;
    C=Cbar*exp(-r*T);
    MC(ic)=C;
    Xinf=binf*exp(-r*T);
    tinf(ic)=Xinf;
    Xsup=bsup*exp(-r*T);
    er=abs(C-BS);
    tsup(ic)=Xsup;
    t1=Xsup-Xinf;
    f(M)=toc;
    fprintf('Erreur(%5d)=%15.12f MC=%15.12f t1=%15.5f t2=%15.5f amplitude=%15.5f \n',M,er,
    C,Xinf,Xsup,t1);
    sum(f)
end;
clf, hold on;
plot(XM,MC,'bo-',XM,tinf,'r*-',XM,tsup,'r+-',XM,BS,'.k')
h = legend('MC','tinf','tsup','BS',4);
set(h,'Interpreter','none')
xlabel('nombre d itérations');
ylabel('prix d option et bornes d int de conf');
hold off;

```

```

%Amplitude de l'intervalle de confiance de MC en fonction de nombre de
%simulation
clc;
S0=100;
sig=0.25;r=0.05;K=100;T=1;
N=20;delta=T/N;
A=(r-0.5*sig^2)*T;B=sig*sqrt(delta);
beta=norminv(1-0.05/2,0,1);
C1=BlsPrice(S0,K,r,T,sig,0);
% N nombre de pas
% M nombre de réalisations
XM=zeros(1,1);XC=XM;XE=XM;
ic=0;
for M=100:100:5000
    t = cputime;
    ic=ic+1;
    XM(ic)=M;
    som1=0;som2=0;
    for j=1:M
        som=sum(randn(N,1));
        S=S0*exp(A+B*som);
        p=max(S-K,0);
        som1=som1+p;
        som2=som2+p*p;
    end;
    Cbar=som1/M;
    rn=(som2/M)-Cbar*Cbar;
    sn=sqrt(rn/M)*beta;
    binf=Cbar-sn;
    bsup=Cbar+sn;
    C=Cbar*exp(-r*T);
    XC(ic)=C;
    Xinf=binf*exp(-r*T);
    Xsup=bsup*exp(-r*T);
    er=abs(C-C1);
    E=(bsup-binf);
    XE(ic)=E;
    e = cputime-t;
    fprintf('Pour M=%5d on a Erreur=%15.12f MC=%15.12f t1=%15.12f t2=%15.12f temps=%15.12f\n',M,er,C,Xinf,Xsup,e);

end;
clf, hold on;
plot(XM,XE,'k.-');
xlabel('Nombre d itérations');
ylabel('Amplitude d int de conf de MMC');
hold off;

```

```
%Ecart de MMC avec le modèle de B&S
clc;
S0=100;
sig=0.25;r=0.05;K=100;T=1;
N=20;delta=T/N;
A=(r-0.5*sig^2)*T;B=sig*sqrt(delta);
C1=BlsPrice(S0,K,r,T,sig,0);
% N nombre de pas
% M nombre de réalisations
XM=zeros(1,1);XC=XM;
ic=0;
for M=100:100:5000
    ic=ic+1;
    XM(ic)=M;
    soml=0;
    for j=1:M
        som=sum(randn(N,1));
        S=S0*exp(A+B*som);
        c=max(S-K,0);
        soml=soml+c;
    end;
    Cbar=soml/M;
    C=Cbar*exp(-r*T);
    e=abs(C-C1);
    XC(ic)=e;
    fprintf('Pour M=%5d on a Erreur=%15.12f C=%15.12f\n',M,e,C);
end;
clf, hold on;
plot(XM,XC,'k.-');
xlabel('nombre d itérations');
ylabel('erreur par simulation de MC');
hold off;
```

```
%Programme de l'algorithme de QMC
clc
T=1;S0=100;K=100;sig=0.25;r=0.05;
B=(sig*sqrt(T));A=((r-0.5*sig^2)*T);C=exp(-r*T);
[Call, Put] = blsprice(S0, K, r, T, sig);
XM=zeros(1,1);XC=XM;Xe=XM;
f=zeros(1,1);
tic;
for i=1:8
    k=i+5;
    nsim=2^k;
    XM(i)=nsim;
    Vop=0;
    n=nsim;m=1;b=2;vdcorput1;
    z=norminv(x,0,1);
    for j=1:nsim,
        S=S0*exp(A+B*z(j));
        Vop=Vop+max(0,S-K);
    end;
    op=(C*Vop)/nsim;
    XC(i)=op;
    er=abs(op-Call);
    Xe(i)=er;
    f(i)=toc;
    fprintf('Erreur(%5d)=%15.12f  XC=%15.12f  \n',nsim,er,op);
    sum(f)
end;
clf, hold on;
plot(XM,MC,'r.-',XM,XC,'b*-',XM,Call,'co-')
h = legend('MC','XC','Call');
set(h,'Interpreter','none')
xlabel('nombre d itérations');
ylabel('prix d option ');
hold off;
```

```
.%Ecart absolu avec B&S
clc
T=1;S0=100;K=100;sig=0.25;r=0.05;
B=(sig*sqrt(T));A=((r-0.5*sig^2)*T);C=exp(-r*T);
[Call, Put] = blsprice(S0, K, r, T, sig);
XM=zeros(1,1);XC=XM;Xe=XM;
f=zeros(1,1);
tic;
for i=1:8
    k=i+5;
    nsim=2^k;
    XM(i)=nsim;
    Vop=0;
    n=nsim;m=1;b=2;vdcorput1;
    z=norminv(x,0,1);
    for j=1:nsim,
        S=S0*exp(A+B*z(j));
        Vop=Vop+max(0,S-K);
    end;
    op=((C*Vop)/nsim);
    XC(i)=op;
    er=abs(op-Call);
    Xe(i)=er;
    f(i)=toc;
    fprintf('Erreur(%5d)=%15.12f  XC=%15.12f  \n',nsim,er,op);
    sum(f)
end;
clf, hold on;
plot(XM,Xe,'b.-',XM,ME,'r*-')
h = legend('Xe','ME');
set(h,'Interpreter','none')
xlabel('nombre d itérations');
ylabel('Ecart absolu avec B&S ');
hold off;
```