

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Recherche Opérationnelle

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA b-COLORATION DANS LES GRAPHS

Par

IKHLEF ESCHOUF Nouredine

Devant le jury composé de :

F. HANNANE	Professeur, U. de Blida	Président
M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida	Promoteur
A. BERRACHEDI	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
H. AIT HADDADENE	Professeur, USTHB, Alger	Examineur
M. CHELLALI	Maître de conférences U. de Blida	Examineur

Blida, avril 2007

RESUME

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. On désigne par $\omega(G)$ et $\beta(G)$ respectivement la taille d'une clique maximum de G et la taille d'un couplage maximum de G .

Parmi les nombreux paramètres de coloration existants, on a étudié un nouveau concept de coloration des sommets, appelé coloration dominante ou b -coloration. La coloration propre des sommets est une attribution de couleurs aux sommets de G de telle sorte que deux sommets adjacents aient toujours des couleurs différentes. Le nombre chromatique, noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs pour lequel G admet une coloration propre. La coloration dominante est une coloration propre telle que toute classe de couleur contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur autre que la sienne. Le nombre b -chromatique, noté $b(G)$, est le nombre maximum de classes de couleurs dans une coloration dominante. Une k -coloration de Grundy d'un graphe G est une coloration propre utilisant k couleurs vérifiant la propriété suivante : chaque sommet v , coloré par une couleur i , $1 \leq i \leq k$, doit être adjacent à au moins $i - 1$ sommets colorés par chacune des couleurs j telles que $1 \leq j \leq i - 1$. Le nombre de Grundy d'un graphe G , noté $\gamma(G)$, est le nombre maximum de couleurs nécessaires pour une coloration de Grundy de G .

Dans ce mémoire, on présente deux nouvelles bornes pour le nombre b -chromatique en fonction de n, ω et β . On caractérise par la suite les graphes bipartis dont le nombre $b(G) = n/2$ ou $(n + 1)/2$ et les graphes tels que $b(G) - \beta(G) = n/2$ ou $(n - 1)/2$. On détermine la valeur exacte du nombre b -chromatique du produit croisé de certains arbres particuliers, on montre aussi que ces graphes sont b -continus. Un graphe G est dit b -continu s'il admet une b -coloration avec k couleurs pour tout k , $\chi(G) \leq k \leq b(G)$. Après avoir remarquer que les deux paramètres $b(G)$ et $\gamma(G)$ sont en général incomparables, on montre que, si G est sans P_4 alors $b(G) \geq \gamma(G)$. On montre aussi que le paramètre $b(G)$ peut être calculé en temps polynomial dans cette classe de graphes. Enfin, on établit un théorème qui caractérise les graphes tels que $b(H) = \gamma(H)$ pour tout sous graphe induit H de G .

ملخص

ليكن $G=(V,E)$ بيانا بسيطا برتبة n بحيث V تمثل مجموعة الرؤوس و E مجموعة الأضلاع. نسمي الوسيطين ω و β زمرة قصوى و كوبلاج أقصى على التوالي.

من بين وسائط تلوين البيانات الموجودة، درسنا مفهوم جديد للتلوين المعروف بالتلوين المسيطر أو b -تلوين. التلوين المسيطر هو تلوين أجود بحيث كل قسم لوني i يحتوي على عنصر مجاور إلى عنصر آخر على الأقل من كل قسم لوني j ، $i \neq j$. العدد اللوني المسيطر، المسمى $b(G)$ ، هو أكبر عدد من الأقسام اللونية في تلوين مسيطر. إن k -تلوين غراندي لبيان G هو تلوين أجود باستعمال k لون بشرط أن يجاور كل رأس v ذو لون i ، $k \geq i \geq 1$ ، $(i-1)$ رأس على الأقل، ملونة بكل لون j ، $i-1 \geq j \geq 1$. عدد غراندي في بيان G ، المسمى $\gamma(G)$ ، هو أكبر عدد من الألوان اللازمة في تلوين غراندي.

في هذا البحث نقدم أولا قيمتين حديثتين جديدتين للعدد b -لوني بدلالة n ، ω و β . بعد ذلك، نميز البيانات الثنائية التصنيف بحيث $b(G) = n/2$ أو $b(G) = (n+1)/2$ وكذلك البيانات التي تحقق العلاقة التالية: $b(G) - \beta(G) = n/2$ أو $b(G) - \beta(G) = (n-1)/2$. ثم نقوم بحساب قيمة العدد $b(G)$ للجداء التقاطعي لبعض الأشجار الخاصة و نبرهن بعد ذلك أن هذه البيانات b -مستمرة. نقول عن بيان أنه b -مستمر إذا كان يقبل b -تلوين ب k لون، من أجل كل k ، $b(G) \leq k \leq \gamma(G)$. بعد أن لاحظنا أن العددين $b(G)$ و $\gamma(G)$ في الحالة العامة غير قابلين للمقارنة، برهنا أن العدد $b(G)$ أكبر من $\gamma(G)$ في حالة البيانات التي لا تحتوي على سلسلة P_4 ثم برهنا أن الوسيط $b(G)$ يمكن حسابه في زمن على شكل دالة كثير حدود و في الأخير أعطينا نظرية أخرى تميز البيانات التي تحقق $\gamma(H) = b(H)$ من أجل كل بيان جزئي مولد H من G .

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a simple graph of order n , with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. By clique number of a graph G we mean the largest order of a complete subgraph in G and denote it by $\omega(G)$. Also $\beta(G)$ stands for the maximum matching in G .

Among all parameters of colouring, we study a recent concept of colouring of vertices, called dominating colouring or b -coloring. A Proper coloring of G is a coloring of the vertices such that any two adjacent vertices have a different colors. The chromatic number $\chi(G)$, is the minimum number of colors in a proper coloring. A dominating colouring of a graph G is a proper coloring of the vertices of G such that every color class contains at least one vertex which has a neighbor in all the other classes. The b -chromatic number, denoted $b(G)$, is the number of the maximum colors classes in a b -coloring of G . A *Grundy* k -coloring of a graph G , is a vertex k -coloring of G such that for each two colors i and j with $i < j$, every vertex of G colored by j has a neighbor with color i . The *Grundy number* $\gamma(G)$, is the largest integer k for which there exists a *Grundy* k -coloring for G .

In this thesis, we give two new bounds for the b -chromatic number in terms of $n, \omega(G)$ and $\beta(G)$. Then, we characterize bipartite graphs with $b(G) = n/2$ or $(n+1)/2$, and also we characterize graphs satisfying $b(G) - \beta(G) = n/2$ or $(n-1)/2$. We determine exact values of the b -chromatic number for the cross product of particular trees, also we show that these graphs are b -continuous. A graph G is called b -continuous if there are b -colorings of G by k colors for all $\chi(G) \leq k \leq b(G)$, where $\chi(G)$ denotes the chromatic number. For a general graph G , the b -chromatic number and Grundy number are incomparables but we prove that if G is P_4 -free, then $b(G) \geq \gamma(G)$, and we also show that $b(G)$ can be calculated in polynomial time in this class of graph. Finally, we characterize all graphs G such that each induced subgraph H of G has $b(H) = \gamma(H)$.

REMERCEMENTS

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur **Mostafa Blidia**, Professeur à l'université de Saad Dahlab Blida, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant de réaliser ce mémoire sous sa direction. Je le remercie également pour ses précieux conseils, sa disponibilité et son aide.

Je remercie Monsieur **Frédéric Maffray**, Directeur de Recherche au CNRS de Grenoble, d'avoir guidé avec gentillesse certains de mes travaux. Je le remercie aussi pour son accueil chaleureux lors de séjour que j'ai effectué au sein du laboratoire Leibniz de Grenoble.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers Monsieur **Farouk Hannane**, Professeur à l'université de Blida, pour la gentillesse avec laquelle il a accepté d'être le président de jury de ce mémoire.

Je remercie les membres de jury : Monsieur **Abdelhafid Berrachedi**, Professeur à l'USTHB, Monsieur **Hacène Ait Haddadène**, Professeur à l'USTHB et Monsieur **Mustapha Chellali**, Maître de conférences à l'université de Saad Dahlab Blida, qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer mon travail, et qui m'ont permis de l'enrichir grâce à leurs précieuses remarques.

Je voudrais aussi remercier toutes les personnes qui m'ont aidé par leur soutien et leur encouragements et qui m'ont permis d'accomplir mon travail à son terme.

Un grand merci à ma famille qui a été là pour m'encourager et me pousser à faire de mon mieux

TABLE DES MATIERES

RESUME	
REMERCIEMENTS	
TABLE DES MATIERES	
LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES	
INTRODUCTION	09
1. GENERALITES SUR LES GRAPHERS	12
1.1. Définitions et notations	12
1.1.1. Graphe et sous graphe	12
1.1.2 Voisinages	14
1.1.3 Degré d'un sommet	14
1.1.4. Chaînes et cycles	14
1.1.5. Distance et diamètre	15
1.1.6. Graphe connexe	15
1.2. Graphes particuliers	15
1.3. Quelques paramètres structurels d'un graphe	17
1.4. Complexité algorithmique	18
2. COLORATION ET b-COLORATION, QUELQUES RESULTATS EXISTANTS	21
2.1. Quelques colorations particulières de graphes	21
2.2.1. Coloration propre et nombre chromatique	22
2.2.2. a-coloration et nombre a-chromatique	23
2.2.3. Coloration de Grundy et nombre de Grundy	23
2.2.4. b-coloration et nombre b-chromatique	23
2.2. Quelques résultats classiques	25
2.2.1. Bornes supérieures de $b(G)$ dans un graphe quelconque	25

2.2.2. Bornes supérieure de $b(G)$ dans un graphe sans $K_{1,t}$	28
2.2.3. Bornes supérieure de $b(G)$ dans un graphe biparti	28
3. BORNES SUR LE NOMBRE b-CHROMATIQUE D'UN GRAPHE	30
3.1. Borne supérieure pour $b(G)$ et caractérisation des graphe bipartis dont $b(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$	30
3.1.1. Borne supérieure de $b(G)$	30
3.1.2. Caractérisation des graphes bipartis dont $b(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$	35
3.1.3. Les arbres tels que $b(G) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$	43
3.1.4. Les arbres tels que $b(G) = \alpha(G)$	43
3.2. Caractérisation des graphes tels que $b(G) - \beta(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$	46
3.4. Problèmes ouverts	50
4. b-COLORATION ET b-CONTINUITÉ DU PRODUIT CROISÉ DE CERTAINS GRAPHE PARTICULIERS	51
4.1. La b-coloration du produit croisé de certains graphes particuliers	51
4.1.1. Modification du m-degré par inclusion de voisinages	53
4.2. La b-continuité de la b-coloration de quelques produits croisés de graphes particuliers	65
5. LES GRAPHE $b\gamma$-PARFAITS	70
5.1. Définitions et notations	70
5.2. Résultats préliminaires	73
5.2. Graphes sans P_4	75
5.2.1 Borne inférieure du nombre b-chromatique	75
5.2.2 Calcul du nombre b-chromatique	76
5.3. Caractérisation des graphes $b\gamma$ -parfaits	78
5.4. Graphes $b\gamma$ -parfaits	83
CONCLUSION	85
REFERENCES	87

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Un graphe G	13
Figure 1.2	Un graphe G et un sous graphe de G	13
Figure 1.3	Un cycle d'ordre 4 et une chaîne de longueur 5	14
Figure 1.4	Un graphe G et son complémentaire	15
Figure 1.5	Un graphe complet à 5 sommets	15
Figure 1.6	Le graphe biparti complet $K_{4,3}$	16
Figure 1.7	Un arbre	16
Figure 1.8	L'étoile $K_{1,n}$	17
Figure 1.9	La griffe	17
Figure 3.1	Une coloration dominante avec 7 couleurs	33
Figure 3.2	(a) Le graphe $K_4 \square P_2$ (b) Le complémentaire de $K_4 \square P_2$	36
Figure 3.3	Les premiers graphes de la famille F_b	41
Figure 3.4	(a) Sous famille F_b^1 (b) Sous famille F_b^2	41
Figure 3.5	(c) Sous famille F_b^3 (d) Sous famille F_b^4	42
Figure 3.6	(e) Sous famille F_b^5 (f) Sous famille F_b^6	42
Figure 3.7	La famille des graphes F_b''	43
Figure 3.8	La famille des graphes F_b'''	44
Figure 3.9	Les arbres d'ordre 2, 4, 6 et 8	45
Figure 3.10	Les arbres d'ordre 1, 3, 5 et 7	45
Figure 4.1	L'union de C_4 et C_3 ($C_4 + C_3$)	52
Figure 4.2	Quatre copies de P_3 ($3P_3$)	52
Figure 4.3	(a) Produit croisé $P_4 \times P_3$ (b) Somme cartésienne $P_4 \square P_3$	52
Figure 4.4	Un graphe $G = P_3 \times P_3$	55
Figure 4.5	(a) Une (2)b-coloration de $P_3 \times P_3$ (b) Une (3)b-coloration de $P_4 \times P_3$	56
Figure 4.6	La b-coloration des graphes $P_4 \times P_4$, $P_6 \times P_3$ et $P_5 \times P_3$	57
Figure 4.7	Une $\{(5), (4) \text{ et } (3)\}$ b-coloration de $P_n \times P_3$, $n \geq 7$	58

Figure 4.8	Une (5)b-coloration du graphe $P_5 \times P_4$	58
Figure 4.9	Une (3)b-coloration de $K_{1,n} \times P_4$ et une (2)b-coloration de $K_{1,n} \times P_3$, avec $n \geq 7$	59
Figure 4.10	Une (3)b-coloration du graphe $K_{1,n} \times P_5$, avec $n \geq 3$	60
Figure 4.11	Une (4)b-coloration du graphe $K_{1,n} \times P_6$, avec $n \geq 3$	60
Figure 4.12	Une (m-2)b-coloration du graphe $K_{1,n} \times P_m$, $n \geq 3$ et $7 \leq m \leq n+5$	62
Figure 4.13	Une (m-2)b-coloration du graphe $K_{1,n} \times P_m$, $n \geq 3$ et $n+6 \leq m \leq 2n+2$	63
Figure 4.14	Une (2n+1)b-coloration du graphe $K_{1,n} \times P_m$, $n \geq 3$ et $m \geq 2n+3$	63
Figure 4.15	(a) Une (4)b-coloration de Q_3 (b) Une (2)b-coloration de Q_3	65
Figure 4.16	La b-coloration des graphes $P_4 \times P_4$ et $P_6 \times P_3$	67
Figure 4.17	Une (4)b-coloration du graphes $P_n \times P_m$, $n \geq 5$ et $m \geq 4$	67
Figure 4.18	Une (3)b-coloration du graphes $P_n \times P_m$, $n \geq 5$ et $m \geq 4$	68
Figure 4.19	Une Une (3)b-coloration du graphe $K_{1,n} \times P_6$, $n \geq 3$	69
Figure 5.1	Le joint $K_1 \vee C_4$	70
Figure 5.2	Le diamant	71
Figure 5.3	(a) Une (5)b-coloration (b) Une 4-coloration de Grundy	76
Figure 5.4	Deux copies de P_3 de sommets disjoints	77
Figure 5.5	Le graphe G_3	78
Figure 5.7	Une chaîne d'ordre 3	79

INTRODUCTION

L'époque moderne soumet l'homme aux contraintes d'un système de relations économiques et sociales très complexe. On constate que de plus en plus d'éléments doivent être pris en compte lors des prises de décision concernant une action donnée (organisation d'une production, d'un réseau de transport, etc...) et que ces prises de décision deviennent l'objet de véritables recherches qui ne peuvent être menées sans l'aide d'outils mathématiques appropriés. C'est ainsi que s'est développé un domaine de mathématiques centré sur l'activité de décision : la *Recherche Opérationnelle*.

Les premiers problèmes, qui marquent le début de la Recherche Opérationnelle, ont été posés pendant la deuxième guerre mondiale. A titre d'exemple, on peut citer le problème de l'implantation optimale des radars de surveillance Britannique qui a été résolu par Blackett et qui a joué un rôle déterminant dans la bataille d'Angleterre.

Après 1945, les méthodes de recherche opérationnelle se sont appliquées aux problèmes économiques et commerciaux. Elles se sont imposées auprès des dirigeants des grands organismes économiques et industriels comme les seuls outils permettant de prévenir aussi objectivement que possible les conséquences de leurs actions. La théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, l'optimisation dans les réseaux, les processus aléatoires, la théorie de jeux, les files d'attente, sont les principales techniques auxquelles recourt la recherche opérationnelle.

La théorie des graphes représente une classe très importante de la recherche opérationnelle, elle constitue un outil très puissant pour schématiser les modèles des liens et relations entre les objets. L'étude des graphes a commencé depuis le 18ième siècle par un problème de curiosité mathématique lorsque Euler a posé le célèbre problème du pont de Königsberg (Kaliningrad). La théorie des graphes est devenue l'un des instruments les plus efficaces pour résoudre de nombreux problèmes discrets que posent de nombreuses théories très utiles. Autrement dit, elle contribue à résoudre de nombreux problèmes concrets de la vie courante.

La théorie des graphes regroupe généralement des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être représentés par un schéma . Ce schéma appelé graphe est constitué par un ensemble de points (sommets) représentant des individus, des objets, des situations, etc ... et qui sont reliés par des flèches ou des lignes (arcs ou arêtes) symbolisant les relations existant entre eux.

Les graphes sont un outil de modélisation naturel, voire indispensable dans de nombreuses disciplines. On peut bien sûr penser aux réseaux rencontrés dans de nombreux domaines des sciences de l'Ingénieur (routes, télécommunications, réseaux électriques, transport, réseaux informatiques, logistique, production) mais aussi dans d'autres sciences (économie, chimie, physique, biologie, etc ...). De plus, l'essor de l'informatique a fortement contribué au développement de la théorie des graphes où les graphes apparaissent comme un outil essentiel dans certains domaines de l'informatique fondamentale (automates, langages, logique par exemple).

Les problèmes de colorations des graphes sont au coeur de la théorie des graphes, et font l'objet, à ce titre, de nombreuses recherches. Au-delà de l'importance théorique liée à leur résolution, ces problèmes trouvent également un intérêt pratique dans la modélisation des problèmes réels issus de l'industrie . La technique de coloration est devenue donc un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver une coloration des sommets (ou arêtes) d'un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité.

Parmi les nombreux paramètres de coloration existants, nous avons étudié un nouveau concept de coloration des sommets d'un graphe assujettie à certaines contraintes. La coloration liée à ce paramètre a pour caractéristiques d'être propre et de maximiser le nombre de couleurs utilisées. La détermination de ce paramètre pour un graphe quelconque étant NP-complète, alors plusieurs études ont été menées sur diverses classes particulières de graphes.

Dans ce mémoire, cinq chapitres fondamentaux sont développés. Nous nous intéressons principalement à la notion de la coloration dominante dans les graphes.

Dans le chapitre un, nous présentons les définitions et les notions de base nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre lui même. Ensuite, nous donnons un aperçu sur la complexité algorithmique en citant quelques définitions de base.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons le thème étudié et nous donnons un état de l'art de la coloration dominante dans les graphes. Après l'introduction de certains types de coloration, nous rappelons les principaux résultats existants sur la b -coloration.

Au chapitre trois, nous présentons deux nouvelles bornes supérieures pour le nombre b -chromatique en fonction d'autres paramètres. Nous caractérisons par la suite les graphes bipartis dont le nombre b -chromatique est égal à $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ et les graphes tels $b(G) - \beta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions la b -coloration et la b -continuité des produits croisés de certains graphes particuliers. Nous donnons d'abord un bref aperçu des principaux résultats de la littérature liée à la b -coloration et la b -continuité de la somme cartésienne de deux graphes. Nous étudions ensuite la b -coloration et la b -continuité du produit croisé de deux étoiles, de deux chaînes et celui d'une étoile et une chaîne.

Le cinquième chapitre est consacré à l'étude des graphes $b\gamma$ -parfaits. En effet, nous présentons d'abord une nouvelle borne inférieure pour le nombre b -chromatique d'un graphe sans P_4 et nous montrons que ce paramètre peut être obtenu en temps polynomial dans cette classe de graphes ensuite, nous donnons un théorème qui caractérise les graphes $b\gamma$ -parfaits. Un graphe G est dit $b\gamma$ -parfait si et seulement si pour tout sous graphe induit H de G le nombre b -chromatique et le nombre de Grundy de H sont égaux.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES GRAPHS

Nous introduisons dans ce chapitre les notations usuelles dans le domaine de la théorie des graphes ainsi que les définitions de bases utilisées tout au long de ce mémoire, ensuite nous faisons une brève présentation sur l'efficacité des algorithmes et de la complexité des problèmes.

Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, nous invitons le lecteur à se référer à l'ouvrage de BERGE [1].

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphe et sous-graphe

Un *graphe* G est la donnée d'un couple (V, E) où V est un ensemble fini non vide dit ensemble des sommets et E est l'ensemble des paires de sommets appelées *arêtes*. Le cardinal de V , appelé *ordre* de G , est noté n . Le cardinal de E est noté m . Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres minuscules: u, v, x, y, a, b , etc. Les arêtes sont notées uv, xy, ab , etc. Deux sommets u et v sont adjacents ou voisins s'ils sont reliés par une arête. Un non voisin u d'un sommet v d'un graphe G est un sommet non adjacent à v . Deux arêtes distinctes sont dites adjacentes si elles ont au moins une extrémité commune. Une arête e sera dite incidente à un sommet v si v est une de ses extrémités; dans ce cas v sera dit incident à e .

Un graphe *simple* est un graphe dont tout couple de sommets est relié par au plus une arête et toute arête de G a ses extrémités distinctes. Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simples et finis.

Au vu de cette définition, il est naturel de représenter graphiquement un graphe où les points du graphique représentent les sommets du graphe et les segments entre deux points représentent les arêtes. Par exemple, la figure 1.1. montre un graphe $G = (V, E)$ avec $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ et $E(G) = \{ab, bc, ca, cd, ad, de\}$.

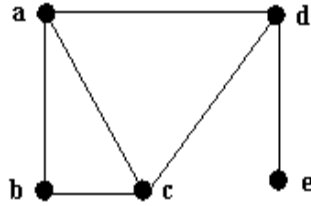


FIGURE 1.1. Un graphe G

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple avec V ensemble des sommets et E ensemble des arêtes, pour un sous-ensemble $A \subset V$, on désigne par $G[A]$ le sous graphe de G engendré par A . Donc, le sous graphe $G[A]$ est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A . Dans ce cas, on dira que l'ensemble des sommets A engendre ou induit le sous-graphe $G[A]$. Voir le sous-graphe induit par $A = \{b, c, d, e\}$ dans la figure 1.2.

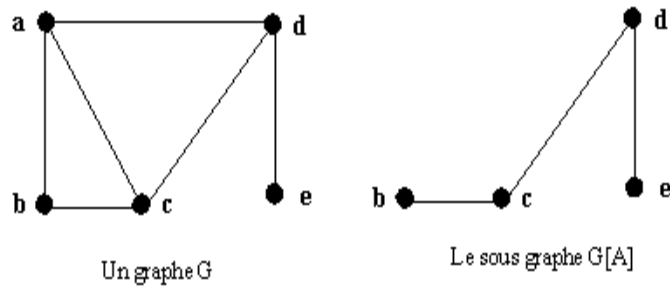


FIGURE 1.2. Un graphe G et un sous graphe de G

1.1.2 Voisinages

Pour un sommet v de G , le voisinage ouvert est défini par l'ensemble suivant $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$ et le voisinage fermé est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. L'ensemble $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ (resp. $N_G[S] = N_G(S) \cup S$) est le voisinage ouvert (resp. fermé) du sous-ensemble $S \subseteq V$. Parfois pour alléger les notations et lorsqu'il n'y a aucune confusion sur le graphe G , les voisinages ouvert et fermé d'un sommet v seront notés simplement par $N(v)$ et $N[v]$ à la place de $N_G(v)$ et $N_G[v]$ respectivement. De même, nous utiliserons les notations $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

1.1.3 Degré d'un sommet

Le *degré* d'un sommet v d'un graphe G , noté $\deg_G(v)$ ou $d(v)$, est le nombre de voisins de ce sommet. Un sommet de degré 0 est dit *sommet isolé* et un sommet de degré 1 est dit *sommet pendant*. On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le *degré maximum* et *minimum* dans G respectivement. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira $\deg(v)$ ou $d(v)$, Δ et δ pour désigner respectivement $\deg_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$.

1.1.4 Chaînes et cycles

Une *chaîne* P_k d'un graphe $G = (V, E)$ de longueur k est une suite $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ de sommets distincts tels que pour chaque $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $v_i v_{i+1}$ soit une arête de G . Les sommets v_1 et v_k sont appelés les extrémités de la chaîne. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite *simple*. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite *élémentaire*. On appelle *cycle* C_k d'ordre k dans un graphe G une chaîne simple de longueur k dont les extrémités initiale et finale sont confondues.

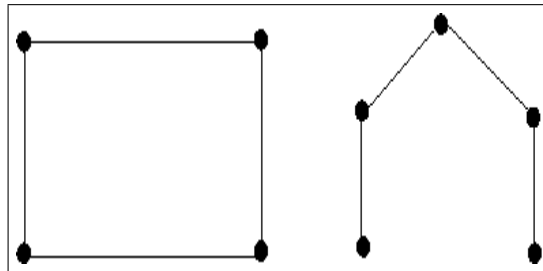


FIGURE 1.3. Un cycle d'ordre 4 et une chaîne de longueur 5

1.1.5 Distance et diamètre

Soient u et v deux sommets d'un graphe G . On appelle *distance* entre u et v , notée $d(u, v)$, la longueur d'une plus courte chaîne entre u et v . Cette chaîne est appelée chaîne *géodésique*. Le *diamètre* du graphe G , noté $Diam(G)$, est défini comme suit:

$$Diam(G) = \underset{u, v \in V}{Max}(d(u, v)).$$

1.1.6 Graphe connexe

On dit qu'un graphe G est *connexe* si pour chaque paire de sommets distincts v et u de $V(G)$, il existe une chaîne joignant v et u . Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.

1.2 Graphes particuliers

Le *graphe complet* d'ordre n , noté K_n , est le graphe simple dans lequel tous les sommets sont de degré $n - 1$. Ainsi deux sommets quelconques de K_n sont adjacents.

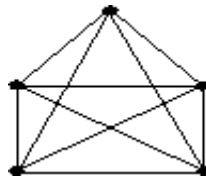


FIGURE 1.4. Un graphe complet à 5 sommets.

Le *graphe complémentaire* de $G = (V, E)$, noté $\bar{G} = (V, \bar{E})$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est exactement V et l'ensemble des arêtes est l'ensemble complémentaire de E par rapport aux arêtes de la clique à $|V|$ sommets, c'est à dire pour toute arête e , $e \in \bar{E} \Leftrightarrow e \in E(K_n) \setminus E$.

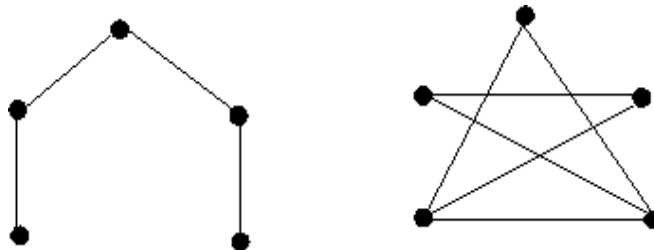


FIGURE 1.5. Un graphe G et son complémentaire

Un graphe G est dit d -régulier si tous ses sommets sont de degré d . Un graphe 3-régulier est aussi appelé cubique. Par exemple, les cycles sont des graphes 2-réguliers; les couplages sont des graphes 1-réguliers; les stables sont des graphes 0-réguliers; les cliques sont des graphes $(n - 1)$ -réguliers.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit k -parti s'il existe une partition de V en k sous ensembles V_1, V_2, \dots, V_k telle que chacun des V_i soit un stable. On appelle graphe biparti si $k = 2$. Un graphe biparti complet est un graphe biparti ayant la propriété supplémentaire que pour tout sommet $v \in V_1$ et $u \in V_2$, $vu \in E$. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$. Un exemple du graphe $K_{4,3}$ est montré dans la figure 1.6.

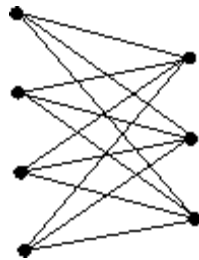


FIGURE 1.6. Le graphe biparti complet $K_{4,3}$.

On appelle *arbre*, et on note par T , un graphe connexe et sans cycles. Un arbre comporte exactement $(n - 1)$ arêtes. On appelle *feuille* d'un arbre, un sommet de degré 1. (Voir la figure 1.7).

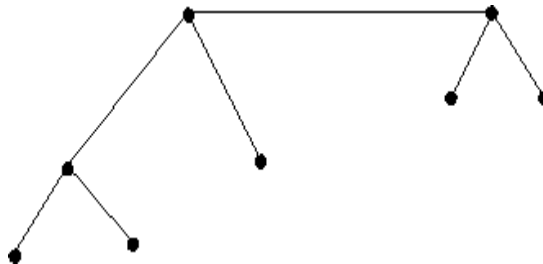
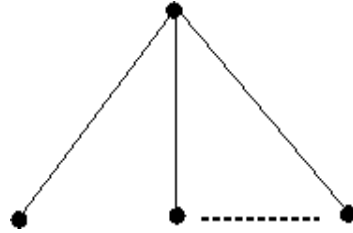


FIGURE 1.7. Un arbre avec cinq feuilles

On appelle *étoile*, et on note par $K_{1,n}$, l'arbre à $n + 1$ sommets ayant n feuilles. Un exemple d'une étoile est montré dans la figure 1.8.

FIGURE 1.8. L'étoile $K_{1,n}$

Etant donné un graphe H , un graphe G est dit sans H si G ne contient pas H comme sous-graphe induit. La notion des sous graphes induits est très importante en théorie des graphes car elle permet de définir des classes de graphes caractérisés par sous-graphes *exclus* ou *interdits*. Par exemple, la classe des graphes bipartis est caractérisée par exclusion des cycles impairs. Parmi la liste des graphes exclus on trouve le $K_{1,3}$ appelé aussi la griffe (voir figure 1.9.).

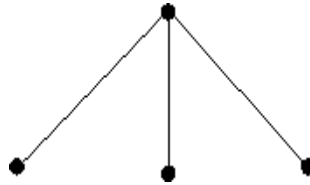


FIGURE 1.9. La griffe

1.3 Quelques paramètres structurels d'un graphe

Nous disons qu'un sous-ensemble A de V est *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$) tel que $G[B]$ vérifie \mathcal{P} .

Nous disons qu'un sous-ensemble A de V est *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie \mathcal{P} et $|A| > |B|$ (resp. $|B| > |A|$) où $|A|$ est le cardinal de l'ensemble A , c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et A un sous ensemble de sommets de V . L'ensemble A est appelé une clique si pour chaque paire de sommets distincts $a, b \in A$, a est adjacent à b . La taille d'une clique est le nombre de sommets de la clique. Une clique de taille p est notée par K_p . Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega(G)$.

La taille d'une partition minimum de l'ensemble des sommets de G en cliques est notée par $\theta(G)$.

Un *stable* d'ordre p dans un graphe G , appelé aussi, *ensemble indépendant*, est un ensemble S_p de p sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal d'un stable maximum de G , noté $\alpha(G)$, est appelé *nombre de stabilité* de G .

Notons que, pour tout graphe G , on a : $\alpha(\overline{G}) = \omega(G)$ et $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$.

Deux arêtes sont indépendantes si elles n'ont pas d'extrémité en commun. Un ensemble M d'arêtes indépendantes de G est appelé *couplage*. Donc, un *couplage* dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes non incidentes deux à deux. On désigne par $\beta(G)$ la taille d'un couplage maximum de G .

1.4 Complexité algorithmique

Quand on parle d'optimisation combinatoire, il vient toujours à l'esprit la complexité des problèmes à traiter, et existence ou pas d'algorithmes efficaces pour les résoudre, l'efficacité est prise dans le sens de la théorie de la complexité.

Le concept d'algorithme a été souvent défini par des termes équivalents plus ou moins précis: méthode, procédé, processus,...etc. Ces termes indiquent l'utilisation de règles ou d'instructions pour obtenir un résultat en un nombre fini d'étapes.

Un *algorithme* de résolution d'un problème (P) donné, est une procédure décomposable en opérations élémentaires (la comparaison, l'affectation, les quatre opérations usuelles, etc ...), transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple ou instance du problème (P) en une chaîne de caractères représentant ses résultats.

La performance d'un algorithme est généralement mesurée selon la relation existante entre la taille de l'exemple traité, exprimée en termes du nombre de caractères nécessaires pour le codage des données, et le temps d'exécution, exprimé en termes du nombre

d'opérations élémentaires. Le codage des données est tel que l'encombrement mémoire nécessaire pour stocker un nombre positif N , est égal au plus petit entier supérieur ou égal à $\log_2(N + 1)$.

En 1965, J. Edmonds a introduit la notion d'algorithme *efficace* ou *polynomial*. Un algorithme est dit polynomial si le nombre d'opérations $f(n)$, nécessaire pour résoudre un exemple de taille n , est borné par un polynôme en n . Autrement dit, il existe deux constantes c et k telles que $f(n) \leq cn^k$. Un tel algorithme est dit de complexité $O(n^k)$.

Un problème est dit polynomial ou appartient à la *classe P* (problèmes déterministes polynomiaux), s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Les problèmes de la classe P sont dits "faciles".

Un problème d'optimisation combinatoire consiste à chercher une meilleure solution parmi un ensemble fini de solutions réalisables. A chaque problème d'optimisation combinatoire, on peut associer un problème de reconnaissance ou de décision. Un problème de décision est un problème dont la réponse attendue est de type oui ou non, c'est à dire, pour un graphe G , peut-on reconnaître par un algorithme polynomial si G appartient à une classe donnée ou non.

Un problème de décision est dit dans *NP* (problèmes non déterministes polynomiaux) (resp. CO-NP) si dans le cas où la réponse est affirmative (resp. négative), on peut produire un certificat qui permet de vérifier en temps polynomial la réponse donnée.

Etant donné que les algorithmes efficaces sont des algorithmes non déterministes, il est clair que $P \subseteq NP$. Mais la classe NP contient des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution. La conjecture $P \neq NP$ demeure cependant ouverte.

On dit qu'un problème de décision (P_1) se réduit en temps polynomial à un problème (P_2), s'il existe un algorithme pour (P_1) qui fait appel à un algorithme de résolution de (P_2) et si cet algorithme de résolution de (P_1) est polynomial lorsque la résolution de (P_2) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de la classe NP est dit NP-complet, si tout problème de la classe NP peut être réduit en temps polynomial à lui. Ainsi, s'il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème NP-complet, alors il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP. Les problèmes NP-complets sont dits "difficiles".

Les problèmes NP-durs sont des problèmes au moins aussi difficiles que les problèmes NP-complets et tout problème d'optimisation combinatoire dont le problème de reconnaissance est NP-complet est NP-dur.

CHAPITRE 2

COLORATIONS ET B-COLORATION, QUELQUES RÉSULTATS EXISTANTS

Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons un bref aperçu sur quelques types de coloration et leurs paramètres que l'on considérera dans ce mémoire. Un certain nombre de résultats théoriques liés à ces définitions sont également introduits. Dans la deuxième partie, nous présentons les principaux résultats de la littérature liés à la b -coloration et au nombre b -chromatique.

2.1 Quelques colorations particulières de graphes

En 1852, le jeune anglais Francis Guthrie s'est demandé s'il est possible de colorer toute carte de géographie avec quatre couleurs en respectant la condition que deux pays voisins ne soient pas recouverts par la même couleur. Ce n'est qu'en 1976 que deux chercheurs américains ont pu répondre affirmativement à la conjecture des quatre couleurs. En effet, à tout pays d'une carte géographique, on associe un sommet du graphe. A deux sommets du graphe, on associe une arête si et seulement si les deux pays correspondants ont une extrémité commune. Une coloration des sommets du graphe est alors équivalente à une coloration des régions. Cette technique de coloration est devenue donc un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes.

Généralement, il s'agit de trouver une coloration des sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité. Une condition naturelle est que le nombre de couleurs utilisées soit minimal.

2.1.1 Coloration propre et nombre chromatique

Définition 2.1. *Une coloration propre est une application c de V dans IN telle que si deux sommets x et y sont adjacents, alors leurs couleurs correspondantes sont différentes $c(x) \neq c(y)$. Une classe de couleur i est un ensemble stable de sommets de V colorés avec la même couleur i . Le nombre minimum de classes de couleur qui partitionnent l'ensemble V est le nombre chromatique, noté $\chi(G)$.*

Le problème de décision lié à ce paramètre est NP-complet dans le cas général. De nombreux travaux ont été menés pour définir des bornes pour le nombre chromatique en fonction d'autres paramètres. Un des résultats classiques en terme de borne du nombre chromatique est donné par Brooks [4].

Théorème 2.2. [4] *Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

et avec égalité si et seulement si on est dans un des deux cas suivants:

- Soit $\Delta(G) \neq 2$ et G admet un sous-graphe $K_{\Delta(G)+1}$ comme composante connexe, où $K_{\Delta(G)+1}$ est le graphe complet d'ordre $\Delta(G) + 1$.
- Soit $\Delta(G) = 2$ et G admet un cycle d'ordre impair comme composante connexe.

Dans [1], Berge a montré que tout graphe G d'ordre n , satisfait $\chi(G)\alpha(G) \geq n$ et $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$. On rappelle aussi l'inégalité de Gaddum et Nordhaus [22], si \overline{G} est le complémentaire du graphe G , on a $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$.

On peut avoir aussi le résultat classique suivant:

Proposition 2.3. *Pour tout graphe G on a : $\chi(G) \geq \omega(G)$, où $\omega(G)$ est la taille d'une clique maximum de G .*

En effet, la coloration de G doit réserver au moins $\omega(G)$ couleurs différentes pour la clique maximum du graphe.

De nombreux paramètres de coloration propre ont été dérivés du nombre chromatique $\chi(G)$, la plupart de ces paramètres minimisent le nombre de couleurs nécessaires à la coloration d'un graphe. Il existe d'autres paramètres qui cherchent à maximiser le nombre de couleur. Parmi ces derniers, on cite le nombre a -chromatique $\psi(G)$, le nombre de *Grundy* $\gamma(G)$ et le nombre b -chromatique $b(G)$. Une manière de réduire le nombre de couleurs est d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleurs en unifiant ou en jumelant des classes de couleurs différentes, d'où l'introduction de la a -coloration et du nombre a -chromatique par Harary, Hedetniemi et Prins en 1967 [12].

2.1.2 a-coloration et nombre a-chromatique

Définition 2.4. *Une a -coloration est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs différentes i et j , le sous graphe engendré par les deux classes de couleurs i et j , contient au moins une arête. Le nombre a -chromatique, noté $\psi(G)$, est le nombre maximum de classes de couleurs dans une a -coloration.*

2.1.3 Coloration de Grundy et nombre de Grundy.

Définition 2.5. *Une k -coloration de Grundy d'un graphe G est une coloration propre utilisant k couleurs vérifiant la propriété suivante : chaque sommet v , coloré par une couleur i , $1 \leq i \leq k$, doit être adjacent à au moins $i - 1$ sommets colorés par chacune des couleurs j telles que $1 \leq j \leq i - 1$. Le nombre de Grundy d'un graphe G , noté $\gamma(G)$, est le nombre maximum de couleurs nécessaires pour une coloration de Grundy de G , pris sur toute les colorations de Grundy de G .*

Ce paramètre a été introduit par C. Christen et S. Selkow [6].

2.1.4 b-coloration et nombre b-chromatique

La définition de la a -coloration présentée précédemment a inspiré Irving et Manlove en 1997 [14, 21] à introduire un autre procédé de coloration. En effet, une autre manière

de réduire le nombre de couleurs est d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleurs en transférant les sommets d'une même classe de couleur dans les autres classes de couleurs. D'où la définition de la coloration dominante.

Définition 2.6. *Une coloration dominante est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur $j \neq i$. Ce sommet est dit sommet b -dominant pour la couleur i (ou sommet de couleur dominante i). Le nombre b -chromatique est le nombre maximum de classes de couleurs dans une coloration dominante. Une coloration dominante avec $b(G)$ couleurs est dite b -coloration.*

Définition 2.7. *Une $(k)b$ -coloration de G est une coloration dominante de G avec k couleurs.*

Définition 2.8. *On appelle système b -dominant S d'un graphe G , l'ensemble des sommets b -dominants dans une coloration dominante tel que $|S| = b(G)$.*

Irving et Manlove ont montré dans [14, 21] que le problème de décision associé au nombre b -chromatique est NP-Complet en général même si on se restreint aux graphes bipartis et que le problème est polynomial pour le cas des arbres.

L'absence d'algorithme polynomial pour la détermination d'un paramètre donné dans un graphe ne cesse d'inciter les chercheurs à établir des bornes qui encadrent le plus possible le paramètre en question. Il est clair que ces bornes n'ont un intérêt que si on arrive à les déterminer en temps polynomial.

Pour qu'un graphe G admette une coloration dominante avec k couleurs, il doit avoir au moins k sommets de degré supérieur à $k - 1$, de cette observation, Irving et Manlove [14, 21] ont défini le m -degré qui donne une borne supérieure du nombre b -chromatique:

Définition 2.9. *Soit les sommets v_1, v_2, \dots, v_n d'un graphe G ordonnés tels que: $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$, où $d(v_i)$ est le degré de v_i . Le m -degré de G , noté $m(G)$ est défini par : $m(G) = \max\{i : d(v_i) \geq i - 1\}$.*

Un sommet v vérifiant $d(v) \geq m(G) - 1$ est dit sommet *dense*.

Dans la section suivante, nous rappelons les principaux résultats classiques de la littérature liés à la b -coloration.

2.2 Quelques résultats classiques

Certaines études ont été réalisées pour borner ou donner la valeur exacte du nombre b -chromatique pour des classes particulières de graphes. Kouider et Mahéo [17] ont donné les valeurs exactes du nombre b -chromatique pour des graphes particuliers: pour le graphe stable $b(S_n) = 1$, pour la chaîne et le cycle $b(P_n) = b(C_n) = 3$ pour tout $n \geq 5$. D'autres résultats sont donnés dans ce qui suit:

2.2.1 Bornes supérieures de $b(G)$ dans un graphe quelconque

Dans [14] et [17] les auteurs ont montré que le m -degré est une borne supérieure du nombre b -chromatique.

Proposition 2.10. [14] [17] *Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble de sommets d'un graphe G ordonnés dans l'ordre décroissant de leur degrés. Alors $b(G) \leq m(G)$*

Preuve. On sait que, dans une coloration dominante de G avec $b(G)$ -couleurs, il existe au moins $b(G)$ sommets de degré au moins $b(G) - 1$. Si $b(G) \geq m(G) + 1$ alors, il existe au moins $b(G)$ sommets de degré supérieur ou égal à $m(G)$. Autrement dit, il y a au moins $m(G) + 1$ sommets de degré supérieur ou égal à $m(G)$, contradiction avec la définition de $m(G)$. \square

La différence entre le m -degré et le nombre b -chromatique d'un graphe G peut être très large.

Exemple 2.11. *Pour K_n on a: $m(K_n) = b(K_n) = n$. Par contre, pour $K_{n,n}$ on a: $m(K_{n,n}) = n$ et $b(K_{n,n}) = 2$, d'où la différence entre $m(G)$ et $b(G)$ peut être très grande.*

Dans [14], R. W. Irving et D. F. Manlove ont remarqué que, le nombre chromatique est une borne inférieure du nombre b -chromatique.

Proposition 2.12. [14] *Toute $\chi(G)$ -coloration est une coloration dominante*

Preuve. Soient C une coloration minimale de G et $S = \{S_1, S_2, \dots, S_\chi\}$ une partition minimale en $\chi(G)$ -classes de couleurs. Si la coloration C n'est pas dominante alors, il existe au moins une classe S_i de couleur i qui ne contient aucun sommet b -dominant. Dans ce cas, les sommets de S_i peuvent être transformés dans les autres classes $S_j, j \neq i$, contradiction avec le fait que C est une coloration minimale. \square

Le corollaire suivant s'en déduit

Corollaire 2.13. *Pour tout graphe G , on a : $b(G) \geq \chi(G)$.*

Toute $b(G)$ -coloration vérifie la définition de la a -coloration. Alors, on peut déduire le corollaire suivant:

Corollaire 2.14. *Pour tout graphe G , on a : $\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G)$.*

La proposition suivante est due à R. W. Irving et D. F. Manlove [14]. Ils montrent que $\Delta(G) + 1$ est une borne supérieure pour le nombre b -chromatique d'un graphe G .

Proposition 2.15. [14] *Tout graphe G satisfait, $b(G) \leq \Delta(G) + 1$, où $\Delta(G)$ est le degré maximum de G*

Preuve. Si x_i est un sommet b -dominant de couleur i alors $d(x_i) \geq b(G) - 1$. Et comme $\Delta(G)$ est le degré maximum de G , alors $\Delta(G) \geq b(G) - 1$. \square

Dans [17], M. Kouider et M. Mahéo fournissent d'autres bornes supérieures.

Proposition 2.16. [17] *Pour tout graphe G de taille m , on a : $b(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}$*

Preuve. Soit donnée une partition en b -coloration de G avec $b(G)$ -couleurs. Alors, il existe au moins une arête entre deux classes de couleur quelconques. Donc, $m \geq C_b^2 = \frac{b(b-1)}{2}$. La résolution de cette inéquation donne la formule de la proposition. \square

Proposition 2.17. [17] Si $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n alors, $b(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$ où $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité.

Preuve. Soit $S = \{S_1, S_2, \dots, S_b\}$ une partition en b -coloration de G avec $b(G)$ couleurs. Comme $|S_i| \leq \alpha(G)$, $1 \leq i \leq b(G)$, alors $n = \sum_{i=1}^{b(G)} |S_i| \leq b(G)\alpha(G)$ \square

Proposition 2.18. [17] Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n et \overline{G} son complémentaire alors, $b(G)b(\overline{G}) \geq n$.

Preuve. Soit $S = \{S_1, S_2, \dots, S_b\}$ une partition en b -coloration de \overline{G} avec $b(\overline{G})$ couleurs. Les stables S_i sont des cliques dans G , donc $|S_i| \leq \chi(G)$, $1 \leq i \leq b(\overline{G})$, d'où, $n = \sum_{i=1}^{b(\overline{G})} |S_i| \leq b(\overline{G})\chi(G) \leq b(\overline{G})b(G)$ \square

Proposition 2.19. [17] Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, $b(K_{n,p}) = 2$, où $K_{n,p}$ est un graphe biparti complet.

Preuve. Soit $V(K_{n,p}) = A \cup B$ avec $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et $B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$. Comme $\chi(K_{n,p}) \leq b(K_{n,p})$, posons $b(K_{n,p}) = h \geq 2$. Supposons que a_1 est un sommet b -dominant de couleur 1 dans une b -coloration de $K_{n,p}$ avec h couleurs. Donc, les couleurs 2, 3, ..., h apparaissent dans B , et tout sommet a_i , $2 \leq i \leq n$ a la couleur 1. En conséquence, un sommet b_j , $1 \leq j \leq p$, ne peut pas dominer une couleur autre que 1, et donc $h = 2$ \square

Proposition 2.20. [17] Si G est un graphe non connexe avec des composantes connexes C_1, C_2, \dots, C_p , $p \geq 2$ alors $b(G) \geq \max\{b(C_i), 1 \leq i \leq p\}$

Preuve. Comme $b(G) \geq b(C_i)$, $1 \leq i \leq p$, alors $b(G) \geq \max\{b(C_i), 1 \leq i \leq p\}$. \square

Remarque 2.21. [17] La différence entre les deux membres de cette inégalité peut être non bornée. En effet, il suffit de considérer le graphe G composé de p étoiles de sommets disjoints, chacune est d'ordre p . On constate aisément que, $b(G) = \max\{b(C_i), 1 \leq i \leq p\} + p - 2$.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons une borne supérieur de $b(G)$ dans le cas d'un graphe sans griffes généralisés ($K_{1,t}$) ensuite nous donnons une deuxième borne supérieure dans le cas d'un graphe biparti. Ces deux bornes ont fait l'objet d'un article co-signé par M. Kouider et M. Zaker [18].

2.2.2 Borne supérieure de $b(G)$ dans un graphe sans $K_{1,t}$

Théorème 2.22. [18] *Si G est un graphe sans $K_{1,t}$ avec $t \geq 3$, alors $b(G) \leq (t - 1)(\chi(G) - 1) + 1$*

Preuve. Soit C une classe de couleur dans une b -coloration de G avec $b(G)$ -couleurs, et soit x un sommet b -dominant quelconque représentant la couleur C . Notons S l'ensemble des sommets voisins à x et de couleurs distinctes. Il est clair que $|S| = b - 1$. Si H représente le sous graphe induit par S alors $\alpha(H) \leq t - 1$, car sinon $S \cup \{x\}$ contient un $K_{1,t}$. Comme $|S| = |V(H)| \leq \alpha(H) \cdot \chi(H)$ et $\chi(H) \leq \chi(G) - 1$ alors, on trouve $b(G) \leq (t - 1)(\chi(G) - 1) + 1$. \square

Les mêmes auteurs ont montré également que cette borne est atteinte.

Proposition 2.23. [18] *Pour tout entier $t \geq 3$ et k , il existe un graphe sans $K_{1,t}$ tel que $\chi(G) = k$ et $b(G) = (t - 1)(k - 1) + 1$.*

Si $t = 3$ alors G est dit sans griffe. Un corollaire immédiat de cette proposition est le suivant:

Corollaire 2.24. *Si G est sans griffe, alors $b(G) \leq 2\chi(G) - 1$*

Dans [5] les auteurs montrent que tout graphe sans griffe avec $\alpha(G) \geq 3$ satisfait l'inégalité suivante: $\chi(G) \leq 2\omega(G)$. En utilisant ce résultat on obtient:

Corollaire 2.25. *tout graphe sans griffe avec $\alpha(G) \geq 3$ satisfait $b(G) \leq 4\omega(G) - 1$*

2.2.3 Borne supérieure de $b(G)$ dans un graphe biparti

Le dernier résultat que nous allons voir est dû à M. Kouider et M. Zaker [18]. Les deux auteurs ont borné le nombre b -chromatique d'un graphe en fonction de son nombre de biclique. Avant de donner ce résultat, nous avons besoin de la définition suivante:

Définition 2.26. *Soit $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graphe biparti. Une biclique $C = U_1 \cup U_2$ est un sous-ensemble de sommets de G telle que $U_1 \subset V_1$ et $U_2 \subset V_2$, et pour chaque sommet*

$x \in U_1$ et $y \in U_2$, l'arête $(x, y) \in E$. En d'autres termes, une biclique est un sous-graphe biparti complet de G . Le nombre biclique de G , noté $t(G)$, est le nombre minimum de graphes bipartis complets mutuellement disjoints qui couvrent les sommets de G .

Exemple 2.27. Si G est un graphe biparti complet alors $t(G) = 1$. Si G est une chaîne d'ordre n alors $t(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$

Nous donnons à présent un théorème qui encadre le nombre b -chromatique d'un graphe en fonction de son nombre de biclique.

Théorème 2.28. [18] Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti d'ordre n , alors $b(G) \leq \lfloor \frac{n-t+4}{2} \rfloor$ où t est le nombre biclique.

Dans [18], les mêmes auteurs ont montré que cette borne est atteinte. En effet, ils ont donné une famille de graphes pour lesquels $b(G) = \lfloor \frac{n-t+4}{2} \rfloor$.

Proposition 2.29. [18] Pour tout entier $p \geq 3$, il existe un graphe biparti G avec $n = 3p - 4$ et le nombre $t = p - 1$ tel que $b(G) = p = \lfloor \frac{n-t+4}{2} \rfloor$.

Après cette exploration des résultats bien connus, nous nous intéressons dans le chapitre suivant à la caractérisation des graphes bipartis dont le nombre b -chromatique égale à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et des graphes tels que $b(G) - \beta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

CHAPITRE 3

BORNES SUR LE NOMBRE b -CHROMATIQUE D'UN GRAPHE.

Dans la première section de ce chapitre, nous présentons une nouvelle borne supérieure sur le nombre b -chromatique ensuite nous caractérisons les graphes bipartis avec $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Une autre caractérisation des graphes tels que $b(G) - \beta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sera présentée dans la deuxième section. Deux problèmes ouverts seront exposés à la fin de ce chapitre.

3.1 Borne supérieure pour $b(G)$ et caractérisation des graphes bipartis dont $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Dans cette partie, on détermine une nouvelle borne supérieure de $b(G)$ et on montre qu'elle est atteinte. On discute cette borne sur certaines classes de graphes et on caractérise les graphes bipartis qui atteignent cette borne. On déduit ensuite une caractérisation pour ceux qui atteignent l'égalité entre $b(G)$ et $\alpha(G)$.

3.1.1 Borne supérieure de $b(G)$

Récemment Kouider et Zaker [18] ont donné une borne supérieure de $b(G)$ dans le cas d'un graphe avec le nombre minimum de cliques partitionnant les sommets connu.

Théorème 3.1. [18] *Soit G un graphe avec $\theta(G) = k$, alors $b(G) \leq \frac{k^2 \omega(G)}{2k-1}$, où $\theta(G)$ est la taille d'une partition minimum de l'ensemble des sommets de G en cliques.*

Les mêmes auteurs [18] ont prouvé aussi qu'il existe une famille de graphes pour lesquels la borne du théorème 3.1 est atteinte.

Proposition 3.2. [18] *Pour tout entier positif $k \geq 2$ et ω divisible par $2k-1$, il existe un graphe G avec $\theta(G) = k$ tel que $b(G) = \frac{k^2 \omega}{2k-1}$ où $\omega(G)$ est la taille maximum d'une clique.*

Dans le paragraphe suivant, on présente nos premiers résultats concernant le nombre b -chromatique. D'abord, on donne une nouvelle borne supérieure de $b(G)$ ensuite on montre que cette borne est atteinte.

Théorème 3.3. [2] *Pour tout graphe G d'ordre n différent d'une clique, on a $b(G) \leq \left\lfloor \frac{n+\omega(G)-1}{2} \right\rfloor$ où $\omega(G)$ est la taille maximum d'une clique.*

Preuve. Posons $\omega(G) = t$, il est clair que G ne contient pas de clique de taille supérieure ou égale à $(t+1)$. Alors, toute b -coloration de G contient au plus $(t-1)$ classes de couleur de taille 1. Soient S_1, \dots, S_b les classes d'une b -coloration de G . Si n_1 désigne le nombre de classes de couleur de taille 1 alors $n_1 \leq (t-1)$, et comme $|V(G)| = n = n_1 + \sum_{i=n_1+1}^b |S_i| \geq n_1 + 2(b - n_1) = 2b - n_1$ alors, $b(G) = b \leq \frac{n+n_1}{2} = \frac{n+t-1}{2} = \frac{n+\omega(G)-1}{2}$.

$b(G)$ étant un entier positif alors, on a l'inégalité du théorème 3.3. \square

Notation: $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière par défaut et $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière par excès.

Si G est une clique d'ordre n , on a $b(G) = n$.

Dans la proposition 3.4, on présente une famille de graphes pour lesquels la borne du théorème 3.3 est atteinte.

Proposition 3.4. *Pour tout entier positif $n \geq 4$, il existe un graphe G d'ordre n tel que $\omega(G) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ et $b(G) = \lfloor \frac{n+\omega(G)-1}{2} \rfloor$*

Preuve. Afin de construire notre graphe, on considère les trois ensembles suivants:

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$ et $C = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ avec $p = q = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ et

$$r = \begin{cases} \frac{n}{3} & \text{si } n \equiv 0 [3] \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil - 2 & \text{si } n \equiv 1 [3] \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1 & \text{si } n \equiv 2 [3] \end{cases}$$

On relie tous les sommets de A (resp. de C) entre eux par des arêtes; et aucun sommet de A n'est adjacent à un sommet de C . Donc, les deux sous graphes engendrés par les

sommets de A et C forment deux cliques de taille respective $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ et $\lceil \frac{n}{3} \rceil - t$ où $t \in \{0, 1, 2\}$. Nous joignons ensuite chaque sommet a_i de A avec un sommet b_j de B par une arête, pour tout $i \neq j$. Il n'y a aucune arête entre les sommets a_i de A et b_i de B , pour tout i . Donc, l'ensemble $A \cup \{b_i\} \setminus \{a_i\}$ engendre une clique de taille $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ pour tout i , $1 \leq i \leq q$. Enfin, si $n \equiv 0 [3]$, nous relierons chaque sommets b_i de B avec un sommet c_j de C par une arête, pour tout i et pour tout $j \neq r$, et le sommet c_r n'est adjacent à aucun sommet de B . Sinon, nous relierons chaque sommets b_i de B avec un sommet c_j de C par une arête, pour tout i et pour tout j . Notons que, les sommets de l'ensemble B forment un stable de taille $\lceil \frac{n}{3} \rceil$. Nous désignons le graphe ainsi construit par G . Il est facile de vérifier que G satisfait les conditions de cette proposition. En effet, d'après cette construction, on constate facilement, que $\omega(G) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Pour montrer que $b(G) = \lfloor \frac{n+\omega(G)-1}{2} \rfloor$, il suffit de colorer le graphe G avec $\lfloor \frac{n+\omega(G)-1}{2} \rfloor$ -couleurs. En effet, on affecte la couleur i aux sommets a_i de A et b_i de B , pour tout i . Si $n \equiv 0 [3]$, on colore les sommets c_i de C par les couleurs $\lceil \frac{n}{3} \rceil + i$, pour tout $i \neq r$ et on attribue au sommet c_r une couleur quelconque $c(r)$, $1 \leq c(r) \leq r$. Sinon, on colore tout sommet c_i de C par la couleur $\lceil \frac{n}{3} \rceil + i$. Il est clair que cette coloration est propre et b -dominante, les sommets b -dominants étant $B \cup C$ si $t \neq 0$, sinon $B \cup C \setminus \{c_r\}$. \square

Remarque 3.5. *La différence entre la borne du théorème 3.3 et celle établie par Kouider et Zaker [18], peut être non bornée. En effet, d'après la proposition 3.4, on a : (i) Si $t = 0$ alors $n = 3p$ et $\omega(G) = \frac{n}{3} = p$. Cependant, il est facile de voir que, les ensembles $(A \setminus \{a_1\}) \cup \{b_1\}$, $\{a_1\} \cup \{b_2\}$, $\{b_3\} \cup (C \setminus \{c_r\})$, $\{c_r\}$ et $\{b_j\}_{4 \leq j \leq q}$ forment une partition en $(q+1)$ -cliques. Comme $\theta(G)$ est le cardinal d'une partition minimum en cliques de G alors $\theta(G) \leq q+1$. D'autre part, l'ensemble $B \cup \{C_r\}$ forme un stable de taille $q+1$. Donc, $\theta(G) \geq \alpha(G) \geq q+1$. D'où, $\theta(G) = q+1 = p+1$. (ii) Si $t = 1$ ou 2 alors, $n = 3(p-1) + t$ et $\omega(G) = \lceil \frac{n}{3} \rceil = p$. On peut facilement montrer que, si $t = 1$ ou 2 alors $\theta(G) = q = p$. En effet, il suffit de remarquer que, les ensembles $(A \setminus \{a_1\}) \cup \{b_1\}$, $\{a_1\} \cup \{b_2\}$, $\{b_3\} \cup C$ et $\{b_j\}_{4 \leq j \leq q}$ forment une partition en p -cliques et $\theta(G) \geq \alpha(G) \geq |B| \geq q$.*

Si $k = \theta(G)$ et $\omega(G) = p$ alors, la différence entre les deux bornes est donnée par l'expression suivante:

$$\frac{k^2\omega(G)}{2k-1} - \frac{n+\omega(G)-1}{2} = \begin{cases} \frac{2p^3-4p^2+1}{4p+2} & \text{si } t = 0 \\ \frac{2p^3-8p^2+10p-3}{4p-2} & \text{si } t = 1 \\ \frac{2p^3-8p^2+8p-2}{4p-2} & \text{si } t = 2 \end{cases}$$

On remarque bien que, pour p assez grand, la différence entre les deux bornes est très large.

Exemple 3.6. Soit G un graphe d'ordre 12 construit d'après la proposition 3.4.

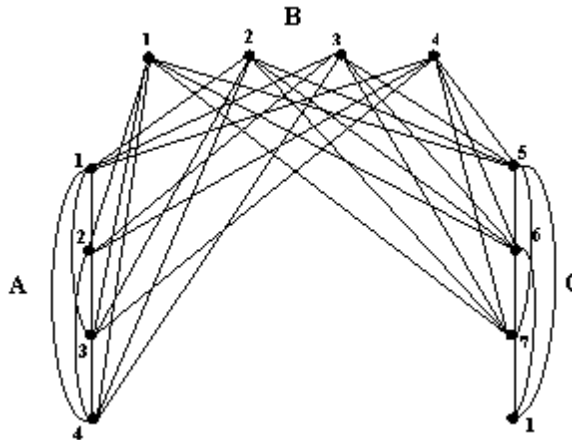


FIGURE 3.1. Une coloration dominante avec 7-couleurs

Dans le graphe de la figure 3.1., $\theta(G) = k = 5$ et $\omega(G) = 4$ d'où la borne $\left\lfloor \frac{k^2\omega}{2k-1} \right\rfloor = 11$ alors que $b(G) = \left\lfloor \frac{n+\omega-1}{2} \right\rfloor = 7$.

Comme conséquence immédiate du théorème 3.3, nous pouvons donner le corollaire suivant

Corollaire 3.7. Si G est un graphe sans triangle (K_3), alors $b(G) \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$

En effet, Il suffit de poser $\omega(G) = 2$ dans l'inégalité du théorème 3.3.

Remarque 3.8. La borne du théorème 3.3 est intéressante dans le cas des graphes parfaits car elle peut être déterminé en temps polynomial. En effet, Lovász et Schrijver [11] ont montré que la détermination des quatre paramètres $\chi(G)$, $\alpha(G)$, $\omega(G)$ et $\theta(G)$ se fait en temps polynomial dans la classe des graphes parfaits. Leur preuve repose sur l'algorithme ellipsoidal de la programmation linéaire.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du corollaire 3.7.

Proposition 3.9. [2] *Tout graphe biparti d'ordre $n \geq 3$, vérifie: $b(G) \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Remarque 3.10. *Si G est un graphe biparti d'ordre n alors, $\alpha(G) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Le corollaire suivant s'en découle

Corollaire 3.11. [2] *Tout graphe biparti d'ordre $n \geq 3$, vérifie: $b(G) \leq \alpha(G)$.*

Remarque 3.12. *Cette dernière borne est meilleure que celle donnée par Kouider et Mahéo [17], puisque $\alpha(G) \geq \frac{n}{2}$ donne $b(G) \leq n + 1 - \alpha(G) \leq \alpha(G) + 1$.*

Dans [9], T. Faik a caractérisé les graphes bipartis connexes tels que $b(G) = 2$. Avant de présenter ce résultat, nous avons besoin de la définition suivante:

Définition 3.13. [9] *Un sommet d'une classe X d'un graphe k -parti $G = (V, E)$ est dit charismatique si et seulement si il a l'ensemble $V \setminus X$ comme voisinage.*

Théorème 3.14. [9] *Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti connexe. $b(G) = 2$ si et seulement si chaque classe de la bipartition contient au moins un sommet charismatique.*

Observation 3.15. *Si G est un graphe biparti connexe d'ordre n avec X et Y les classes de la bipartition, alors $\alpha(G) \geq \max(|X|, |Y|) \geq \frac{n}{2}$.*

On peut déduire le corollaire suivant

Corollaire 3.16. [2] *Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti connexe d'ordre $n \geq 2$. Si $n = b(G) \cdot \alpha(G)$ alors chaque classe de la bipartition contient au moins un sommet charismatique et $|X| = |Y|$.*

Preuve. Si $n = b(G)\alpha(G) \geq b(G) \cdot \frac{n}{2}$ alors $b(G) \leq 2$. Comme G est connexe d'ordre au moins 2 alors $b(G) = \chi(G) = 2$. D'après le théorème 3.14, on peut constater que, chaque classe de la bipartition contient au moins un sommet charismatique, et puisque $\alpha(G) = \frac{n}{b(G)} = \frac{n}{2}$ alors, d'après l'observation 3.15, $\frac{n}{2} = \alpha(G) \geq \max(|X|, |Y|) \geq \frac{n}{2}$ donc $\max(|X|, |Y|) = \frac{n}{2}$ d'où, $\alpha(G) = |X| = |Y|$. \square

3.1.2 Caractérisation des graphes bipartis dont $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Dans cette partie, on caractérise la classe des graphes bipartis atteignant la borne $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. La preuve de ce théorème repose sur les deux lemmes suivants:

Lemme 3.17. [2] *Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti d'ordre n avec $|X| \neq |Y|$. Si G admet une coloration dominante avec $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ couleurs, alors $b(G) = \min(|X|, |Y|) + 1$.*

Preuve. $|X| \neq |Y|$, sans perte de généralité, on peut supposer que $|X| > |Y|$.

Si $n = |V(G)| = |X| + |Y| > 2|Y|$ alors,

$$|Y| < \frac{n}{2} \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \quad (*)$$

Comme $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ alors, $b(G) \geq |Y| + 1$. Si $b(G) \geq |Y| + 2$ alors, il existe au moins deux sommets b -dominants de couleurs distinctes dans X , ceci implique que, toutes les couleurs sont présentes dans Y , d'où $|Y| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, contradiction avec (*). on a bien : $b(G) = |Y| + 1 = \min(|X|, |Y|) + 1$. \square

Lemme 3.18. [2] *Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti d'ordre n avec $|X| > |Y|$. Si G admet une coloration dominante avec $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ couleurs, alors l'ensemble X contient une seule couleur dominante.*

Preuve. Supposons que l'ensemble X contient plus d'une couleur dominante, disons au moins deux couleurs distinctes. Comme le graphe est biparti alors, toutes les couleurs sont présentes dans Y . Donc, d'après le lemme 3.17, $b(G) - 1 = |Y| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, contradiction avec la proposition 3.9. \square

Avant de présenter le résultat principal de ce paragraphe, nous rappelons les deux définitions suivantes:

Définition 3.19. *On appelle non arête uv dans un graphe G toute arête uv dans \overline{G} .*

Définition 3.20. *La somme cartésienne de deux graphes G et H , notée $G \square H$, est le graphe défini par:*

- $V(G \square H) = \{(u, v) : u \in V(G) \text{ et } v \in V(H)\}$

- $E(G \square H) = \{((u_1, v_1), (u_2, v_2)) : (u_1 = u_2 \text{ et } v_1 v_2 \in E(H)) \text{ ou } (v_1 = v_2 \text{ et } u_1 u_2 \in E(G))\}$.

La figure 3.2.a illustre la somme cartésienne de $K_4 \square P_2$ et la figure 3.2.b illustre le complémentaire de $K_4 \square P_2$ ($\overline{K_4 \square P_2}$).

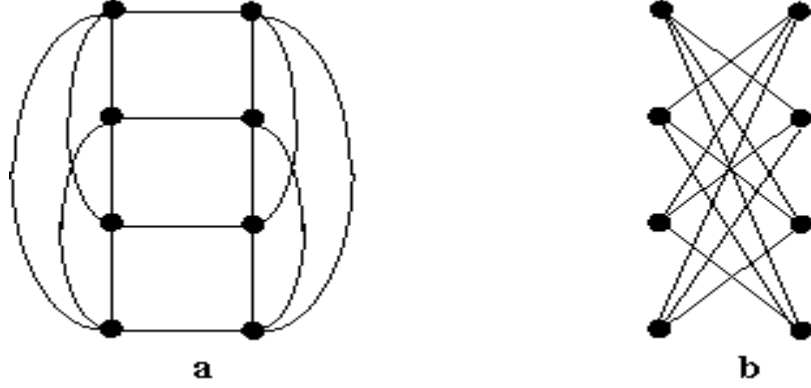


FIGURE 3.2. (a) le Graphe $K_4 \square P_2$ (b) Le complémentaire de $K_4 \square P_2$

On définit maintenant une famille des graphes, notée par \mathcal{F}_b , de la manière suivante:

$$\mathcal{F}_b = \{K_1, P_3, P_4, K_{1,3}, C_4\} \cup \mathcal{F}_b^1 \cup \mathcal{F}_b^2 \cup \mathcal{F}_b^3 \cup \mathcal{F}_b^4 \cup \mathcal{F}_b^5 \cup \mathcal{F}_b^6$$

où:

$$\mathcal{F}_b^1 = \left\{ G = (X, Y, E) : \text{avec } |X| = |Y| = \frac{n}{2}, n \text{ pair } \geq 6 \text{ et } G[X \cup Y] = \overline{K_{\frac{n}{2}} \square P_2} \right\}$$

$$\mathcal{F}_b^2 = \left\{ \begin{array}{l} G = (X, Y, E) : \text{avec } |X| = |Y| = \frac{n}{2}, n \text{ pair } \geq 6, \\ X = A \cup C, Y = B \cup D, |A| = |D| = n_1 \geq 2, G[A \cup B] = K_{n_1, \frac{n}{2} - n_1}, \\ G[A \cup D] = \overline{K_{n_1} \square P_2} \text{ et } G[B \cup C] = \overline{K_{\frac{n}{2} - n_1} \square P_2} \end{array} \right\}$$

Les graphes de la sous famille \mathcal{F}_b^2 peuvent contenir éventuellement des arêtes entre C et D .

$$\mathcal{F}_b^3 = \left\{ \begin{array}{l} G = (X, Y, E) : \text{avec } |X| = |Y| = \frac{n}{2}, n \text{ pair } \geq 6, \\ X = \{x\} \cup (X \setminus \{x\}), Y = \{y\} \cup (Y \setminus \{y\}), \\ G[(X \setminus \{x\}) \cup (Y \setminus \{y\})] = \overline{K_{\frac{n}{2}-1} \square P_2}, N_G(x) = Y \setminus \{y\}, |N_G(y)| \leq \frac{n}{2} - 1 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}_b^4 = \left\{ \begin{array}{l} G = (X, Y, E) : \text{avec } |X| = |Y| + 2 = \frac{n}{2}, n \text{ pair } \geq 6, X = X \setminus \{x, t\}, \\ G[(X \setminus \{x, t\}) \cup Y] = \overline{K_{\frac{n}{2}-1} \square P_2}, N_G(x) = Y, |N_G(t)| \geq 1. \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}_b^5 = \left\{ \begin{array}{l} G = (X, Y, E) : \text{avec } |X| = |Y| + 2 = \frac{n}{2}, n \text{ pair } \geq 6, \\ X = \{x\} \cup \{z, t\} \cup X \setminus (\{x\} \cup \{z, t\}), Y = \{y\} \cup Y \setminus \{y\}, \\ G[X \setminus (\{x\} \cup \{z, t\}) \cup Y \setminus \{y\}] = \overline{K_{\frac{n}{2}-2} \square P_2} \\ N_G(x) = Y, N_G(y) = \{x\} \cup A, \forall v \in B \quad |N_G(v) \cap \{z, t\}| \geq 1 \\ |N_G(z) \cap Y| \geq 1 \text{ et } |N_G(t) \cap Y| \geq 1 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}_b^6 = \left\{ \begin{array}{l} G = (X, Y, E) : \text{avec } |X| = |Y| + 1 = \frac{n+1}{2}, n \text{ impair } \geq 5, \\ X = \{x\} \cup (X \setminus \{x\}), G[(X \setminus \{x\}) \cup Y] = \overline{K_{\frac{n-1}{2}} \square P_2}, N_G(x) = Y \end{array} \right\}$$

Dans la remarque suivante, nous montrons par une simple vérification, qu'à part quelques exceptions, le m -degré d'un graphe G de la famille \mathcal{F}_b est égal à $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Remarque 3.21. *Pour tout graphe de $\mathcal{F}_b \setminus \{C_4\}$, on a $m(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Nous allons présenter maintenant la preuve de notre théorème principal. Il s'agit de donner une caractérisation des graphes bipartis atteignant la borne $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$.

Théorème 3.22. *[2] Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti connexe d'ordre n . $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ si et seulement si $G \in \mathcal{F}_b$.*

Preuve. Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti connexe d'ordre n . Pour montrer la condition suffisante, il suffit d'exhiber une coloration dominante avec $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ couleurs pour tout graphe G de \mathcal{F}_b , car d'après la proposition 3.9, la valeur $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ est une borne supérieure pour le nombre b -chromatique.

Tout d'abord, il est facile de voir que, si $G \in \{K_1, P_3, P_4, K_{1,3}, C_4\}$ alors $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Soient $x_i \in X$ et $y_i \in Y$ deux sommets quelconques de $X \cup Y$. Si $G \in \mathcal{F}_b^1$, on affecte la couleur i aux sommets de la non arête (x_i, y_i) du graphe $G[X \cup Y] = \overline{K_n \square P_2}$, pour $i = 1$ à $\frac{n}{2}$. Chacun des sommets x_i, y_i est un sommet b -dominant pour la couleur i de la $\frac{n}{2}$ -coloration ainsi définie. Si $G \in \mathcal{F}_b^2$, on affecte la couleur i aux sommets de la non arête (x_i, y_i) du sous-graphe $G[A \cup D] = \overline{K_{n_1} \square P_2}$ pour $i = 1$ à n_1 et la couleur j aux sommets de la non arête (x_j, y_j) du sous-graphe $G[B \cup C] = \overline{K_{\frac{n}{2} - n_1} \square P_2}$ pour $j = n_1 + 1$ à $\frac{n}{2}$. Les sommets de $A \cup B$ sont les sommets b -dominants de la $\frac{n}{2}$ -coloration ainsi définie. Si $G \in \mathcal{F}_b^3$, on affecte la couleur i aux sommets de la non arête (x_i, y_i) du sous-graphe $G[(X \setminus \{x\}) \cup (Y \setminus \{y\})] = \overline{K_{\frac{n}{2} - 1} \square P_2}$ pour $i = 1$ à $\frac{n}{2} - 1$ et la couleur $\frac{n}{2}$ au sommet x . Puisque $|N_G(y)| \leq \frac{n}{2} - 1$ alors, une couleur manquante dans le voisinage de y est affectée à y . Les sommets de $Y \cup \{x\}$ sont les sommets b -dominants de la $\frac{n}{2}$ -coloration ainsi définie. Si $G \in \mathcal{F}_b^4$, on affecte la couleur i aux sommets de la non arête (x_i, y_i) du sous-graphe $G[(X \setminus \{x, t\}) \cup Y] = \overline{K_{\frac{n}{2} - 1} \square P_2}$ pour $i = 1$ à $\frac{n}{2} - 1$ et la couleur $\frac{n}{2}$ aux sommets x et t . Les sommets de $Y \cup \{x\}$ sont les sommets b -dominants de la $\frac{n}{2}$ -coloration ainsi définie. Si $G \in \mathcal{F}_b^5$, on affecte la couleur i aux sommets de la non arête (x_i, y_i) du sous-graphe $G[X \setminus (\{x\} \cup \{z, t\}) \cup Y \setminus \{y\}] = \overline{K_{\frac{n}{2} - 2} \square P_2}$ pour $i = 1$ à $\frac{n}{2} - 2$, la couleur $\frac{n}{2} - 1$ aux sommets y, z et t et la couleur $\frac{n}{2}$ au sommet x . Les sommets b -dominants étant $Y \cup \{x\}$. Si $G \in \mathcal{F}_b^6$, on affecte la couleur i aux sommets de la non arête (x_i, y_i) du sous-graphe $G[(X \setminus \{x\}) \cup Y] = \overline{K_{\frac{n-1}{2}} \square P_2}$ pour $i = 1$ à $\frac{n-1}{2}$, la couleur $\frac{n-1}{2} + 1$ au sommet x . Les sommets de $Y \cup \{x\}$ sont les sommets b -dominants de la $\frac{n+1}{2}$ -coloration ainsi définie.

Pour la condition nécessaire supposons que, $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Si $n \leq 4$, on peut vérifier que, les seuls graphes vérifiant $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ sont $K_1, P_3, P_4, K_{1,3}$ et C_4 . Alors, on peut

supposer dans la suite que, $n \geq 5$ et $b(G) \geq 3$. On distingue maintenant deux cas :

Cas 1: Si n est pair alors, $b(G) = \frac{n}{2}$.

Sous cas 1.1: Supposons que $|X| = |Y| = \frac{n}{2}$. Soit $A \subset X$ l'ensemble de tous les sommets b -dominants de couleurs distinctes dans X .

Sous cas 1.1.1: Supposons que $A = X$. Comme $b(G) \geq 3$ alors, toutes les couleurs sont présentes dans Y et correspondent à des sommets distincts. Chaque sommet $x_i \in X$ de couleur i lui correspond un sommet $y_i \in Y$ de couleur i et forcément $d_G(x_i) = d_G(y_i) = \frac{n}{2} - 1$, ce qui donne un graphe biparti complet moins un couplage, c'est à dire, un graphe qui est isomorphe à $\overline{K_{\frac{n}{2}} \square P_2}$ correspondant à un graphe de la sous famille \mathcal{F}_b^1 .

Sous cas 1.1.2: Si $A \neq X$ alors Y contient $\frac{n}{2} - |A|$ sommets dominants de couleurs distinctes, désignons par B cet ensemble de sommets. Soient C et D deux ensembles de X et Y respectivement tels que $C = X \setminus A$ et $D = Y \setminus B$.

– Si $|A| \geq 2$ et $|B| \geq 2$ alors toutes les couleurs sont présentes dans X et dans Y . Chaque couleur d'une même classe de la bipartition correspond à un seul sommet de cette classe. D'où, le graphe biparti obtenu est défini par: $X = A \cup C$ et $Y = B \cup D$ où tous les sommets de A sont reliés à tous les sommets de B , avec $G[A \cup D] = \overline{K_{n_1} \square P_2}$, $|A| = |D| = n_1 \geq 2$ et $G[B \cup C] = \overline{K_{\frac{n}{2} - n_1} \square P_2}$ et éventuellement des arêtes entre C et D ; ce graphe appartient à la sous famille \mathcal{F}_b^2 .

– $|A| = 1$, puisque $b(G) \geq 3$ alors $|B| \geq 2$. Donc, toutes les couleurs sont présentes dans X , et comme $|X| = b(G) = \frac{n}{2}$ alors, chaque couleur est affectée à un seul sommet. Soit x le sommet de A de couleur dominante i . Dans l'ensemble Y on a, $\frac{n}{2} - 1$ couleurs distinctes et différentes de i qui correspondent à $\frac{n}{2} - 1$ sommets reliés au sommet x , ce qui donne le graphe biparti $G = (X, Y, E)$ défini par: $X = \{x\} \cup (X \setminus \{x\})$, $Y = \{y\} \cup (Y \setminus \{y\})$, avec $G[(X \setminus \{x\}) \cup (Y \setminus \{y\})] = \overline{K_{\frac{n}{2} - 1} \square P_2}$, le sommet x est relié à tous les sommets de $Y \setminus \{y\}$ et y est relié à au plus $\frac{n}{2} - 1$ sommet de X , c'est à dire, un graphe biparti appartenant à la sous famille \mathcal{F}_b^3 .

Sous cas 1.2: Si $|X| \neq |Y|$ alors, sans perte de généralité, on peut supposer que $|X| > |Y|$. D'après le lemme 3.17, $b(G) = |Y| + 1$, donc $|Y| = b(G) - 1 = \frac{n}{2} - 1$. Comme $|X| + |Y| = n$ alors $|X| + |Y| = 2|Y| + 2$, donc $|X| = |Y| + 2$. De ce fait, on peut supposer que $|Y| \geq 2$ car sinon $n \leq 4$, contradiction avec notre supposition. D'autre part, d'après le lemme 3.18, il ne peut exister qu'une seule couleur dominante dans X , et puisque $b(G) = |Y| + 1$ alors, tous les sommets de Y sont des sommets b -dominants et de couleurs distinctes. Soit x un sommet de couleur dominante dans X . Comme $b(G) \geq 3$ alors, toutes les couleurs sont présentes dans X et comme $|X| = |Y| + 2 = \frac{n}{2} + 1$ alors, il y a une couleur qui est répétée deux fois dans X , par exemple affectée aux sommets $\{z, t\}$. Si la couleur répétée dans X est la couleur dominante associée à x alors, sans perte de généralité, on peut supposer qu'elle est affectée à $\{x, t\}$, et le graphe G se présente comme suit: $G[(X \setminus \{x, t\}) \cup Y] = \overline{K_n \square P_2}^{\frac{-1}{2}}$ avec $X = \{x, t\} \cup (X \setminus \{x, t\})$ et x est relié à tous les sommets de Y , et t est relié à au moins un sommet de Y pour avoir la connexité, ceci donne un graphe biparti de la sous famille \mathcal{F}_b^4 . Si la couleur répétée dans X est différente de la couleur dominante associée à x alors $x \neq z$ et $x \neq t$, et cette couleur lui correspond dans Y un sommet y qui n'est relié ni à z , ni à t . Dans ce cas, le graphe se présente comme suit: $G[X \setminus (\{x\} \cup \{z, t\}) \cup Y \setminus \{y\}] = \overline{K_n \square P_2}^{\frac{-2}{2}}$ avec $X = \{x\} \cup \{z, t\} \cup X \setminus (\{x\} \cup \{z, t\})$, $Y = \{y\} \cup Y \setminus \{y\}$, et x est relié à tous les sommets de Y , y est relié à tous les sommets de $\{x\} \cup X \setminus (\{x\} \cup \{z, t\})$ et n'est relié à aucun sommet de $\{z, t\}$, et chaque sommet de $Y \setminus \{y\}$ est adjacent à au moins un sommet de $\{z, t\}$, et comme G est connexe alors, les deux sommets z et t sont adjacents à au moins un sommet de Y . Ce qui donne un graphe biparti de la sous famille \mathcal{F}_b^5 .

Cas 2: Si n impair alors $b(G) = \frac{n+1}{2}$, sans perte de généralité, on peut supposer que $|X| > |Y|$. D'après le lemme 3.17, on a $|Y| = b(G) - 1 = \frac{n-1}{2}$. Comme $|X| + |Y| = n$, alors $|X| + |Y| = 2|Y| + 1$. Donc $|X| = |Y| + 1$. De ce fait, on peut supposer que $|Y| \geq 2$ car sinon $n \leq 4$, contradiction avec notre supposition. D'autre part, d'après le lemme 3.18, on ne peut avoir qu'une seule couleur dominante dans X . Ceci implique que, l'ensemble Y contient exactement $b(G) - 1$ sommets b -dominants et de couleur distinctes (c'est à dire, tous les sommets de Y sont b -dominants et de couleur distinctes). En conséquence, il existe un seul sommet b -dominant $x \in X$ qui est relié à tous les sommets de Y et puisque

toutes les couleurs de Y sont aussi présentes dans X alors, tout sommet de Y est adjacent à tous les sommets de X sauf un, autre que x . D'où, le graphe se présente comme suit: $G[(X \setminus \{x\}) \cup Y] = \overline{K_{n-1} \square P_2}$ et x relié à tous les sommets de Y , ce qui donne un graphe appartenant à la sous famille \mathcal{F}_b^6 . \square

On illustre sur les figures suivantes tous les graphes de la famille \mathcal{F}_b :

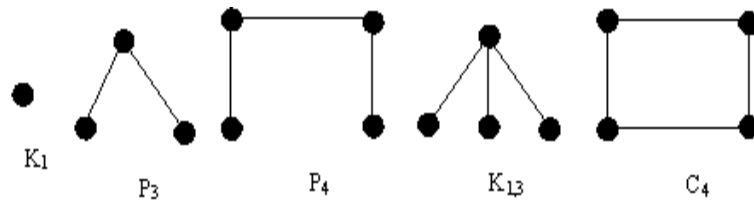


FIGURE 3.3. Les premiers graphes de la famille \mathcal{F}_b

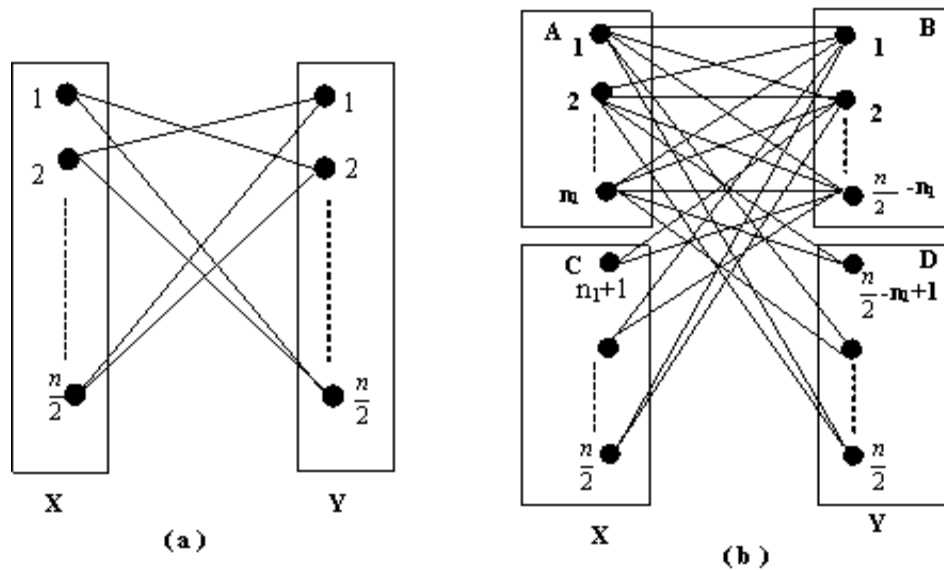


FIGURE 3.4. (a) Sous famille F_1^b (b) Sous famille F_2^b

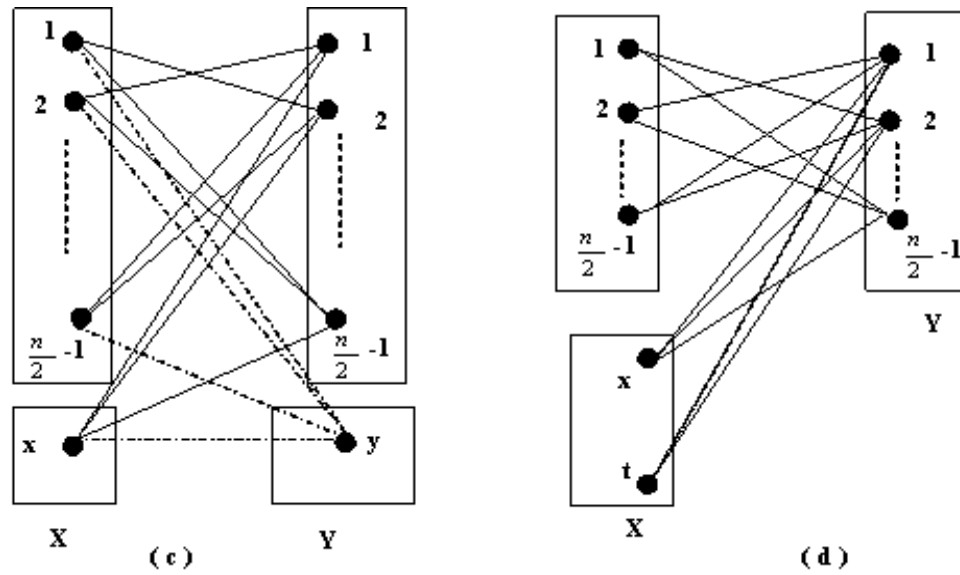


FIGURE 3.5. (c) Sous famille F_3^b (d) Sous famille F_4^b

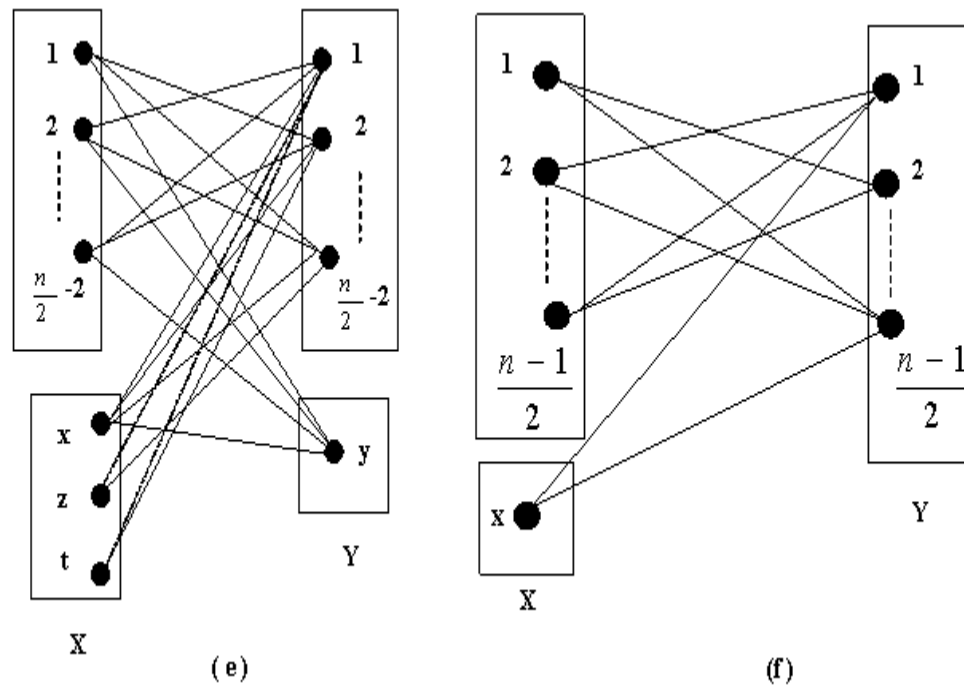


FIGURE 3.6. (e) Sous famille F_5^b (f) Sous famille F_6^b

Soit \mathcal{F}'_b la sous famille de \mathcal{F}_b contenant tous les graphes de \mathcal{F}_b sauf le graphe $K_{1,3}$ et les graphes de \mathcal{F}_b^4 et \mathcal{F}_b^5 . $\mathcal{F}'_b = \mathcal{F}_b \setminus \{K_{1,3}\} \cup \mathcal{F}_b^4 \cup \mathcal{F}_b^5$.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 3.22

Corollaire 3.23. [2] Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti connexe d'ordre n , $b(G) = \alpha(G)$ si et seulement si $G \in \mathcal{F}'_b$.

En effet, soit G un graphe biparti vérifiant $b(G) = \alpha(G)$. D'après la proposition 3.9 et la remarque 3.10 on a, $b(G) = \alpha(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. D'où, le graphe $G \in \mathcal{F}_b$. On peut vérifier que, $\alpha(G) \neq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ pour tout graphe $G \in \{K_{1,3}\} \cup \mathcal{F}_b^4 \cup \mathcal{F}_b^5$. Ceci implique que, $G \in \mathcal{F}_b \setminus \{K_{1,3}\} \cup \mathcal{F}_b^4 \cup \mathcal{F}_b^5 = \mathcal{F}'_b$.

Si G est un graphe de la famille $\mathcal{F}'_b \subset \mathcal{F}_b$ alors, on peut vérifier que, $\alpha(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. En utilisant le théorème 3.22, on trouve $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \alpha(G)$.

3.1.3 Les arbres tels que $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Dans ce paragraphe, nous caractérisons les arbres pour lesquels le nombre b -chromatique est égal à $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Soit $\mathcal{F}_b^i \subset \mathcal{F}_b$ la sous famille d'arbre définie par:

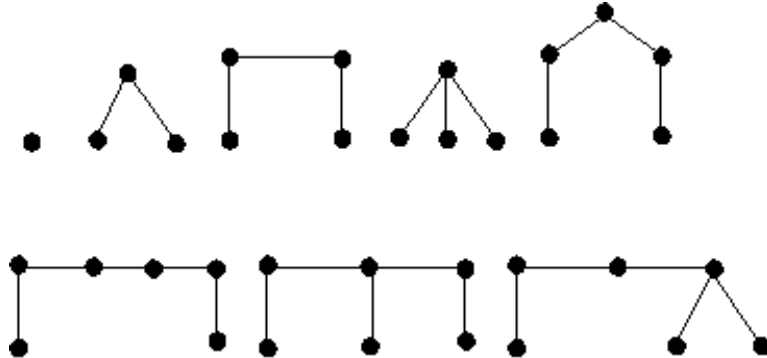


FIGURE 3.7. La famille des graphes \mathcal{F}_b^i

La proposition suivante caractérise les arbres dans lesquels le nombre b -chromatique est égal à $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Proposition 3.24. [2] Soit T un arbre d'ordre n , $b(T) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ si et seulement si $T \in \mathcal{F}_b^i$.

Preuve. Soit T un arbre. Il est clair que, si $T \in \mathcal{F}_b^i$ alors $b(T) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Posons maintenant $b(T) = k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Pour tout sommet x_i de couleur dominante i on a : $d_T(x_i)$

$\geq k - 1$, d'où $2m = \sum_{i=1}^{i=n} d_T(x_i) \geq \sum_{i=1}^{i=k} d_T(x_i) \geq k(k - 1)$. Et comme T est un arbre alors $2(n - 1) \geq k(k - 1)$. Si n est pair alors $k = \frac{n}{2}$ et $k^2 - 5k + 2 \leq 0$, sinon $k = \frac{n+1}{2}$ et $k^2 - 5k + 4 \leq 0$. Dans les deux cas, La résolution de ces deux inéquations donne $k = b(T) \in \{1, 2, 3, 4\}$, donc $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Par une énumération exhaustive de tous les arbres d'ordre inférieur ou égal à 8 (voir figures 3.9. et 3.10.), on peut constater que, les arbres de \mathcal{F}_b^n sont les seuls arbres de \mathcal{F}_b qui vérifient $b(T) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. □

Remarque 3.25. *La proposition 3.24 peut être déduite directement du théorème 3.22. En effet, il suffit de vérifier que, les arbres de \mathcal{F}_b^n sont les seuls arbres de \mathcal{F}_b qui vérifient $b(T) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Les deux figures suivantes illustrent tous les arbres d'ordre inférieur ou égal à 8.

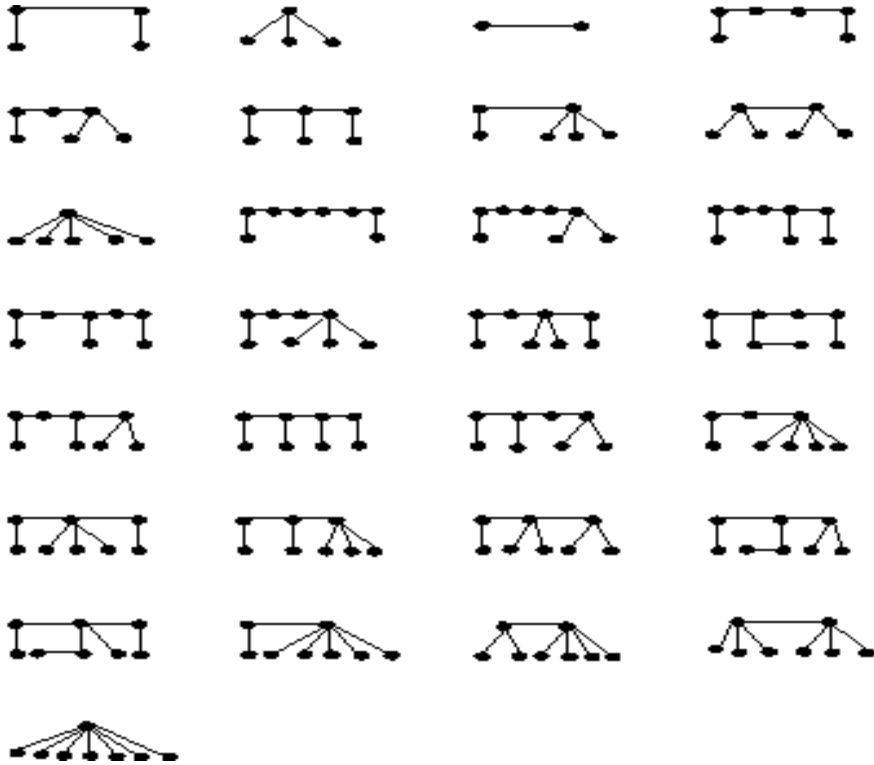


FIGURE 3.9. Les arbres d'ordre 2, 4, 6 et 8

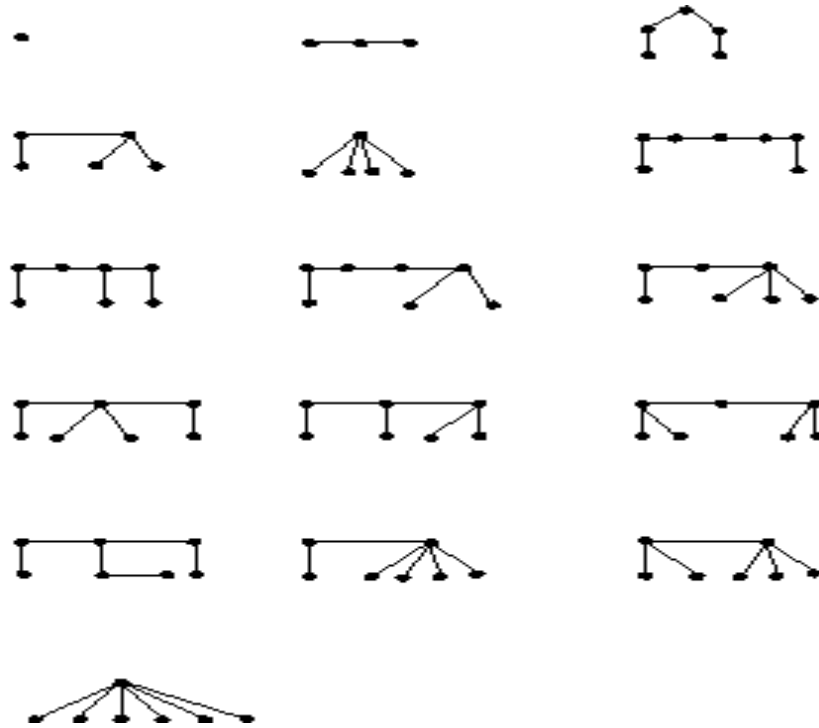
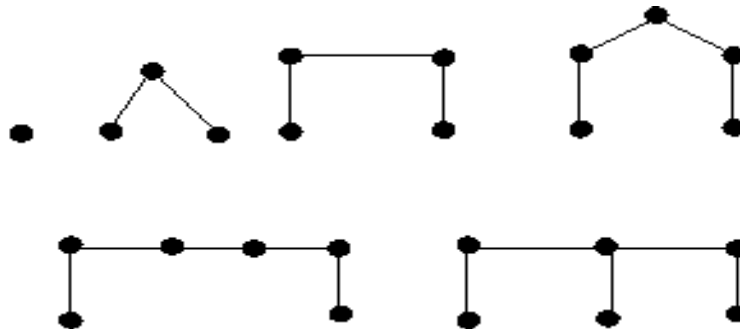


FIGURE 3.10. Les arbres d'ordre 1, 3, 5 et 7

3.1.4 Les arbres tels que $b(G) = \alpha(G)$

Dans ce paragraphe, nous déduisons une autre caractérisation relative aux arbres pour lesquels le nombre b-chromatique est égal à $\alpha(G)$. Soit $\mathcal{F}_b''' \subset \mathcal{F}_b$ la sous famille d'arbre définie par les arbres suivant:

FIGURE 3.8. La famille des graphes \mathcal{F}_b'''

En utilisant le corollaire 3.23, on peut avoir le résultat suivant:

Corollaire 3.26. [2] Soit T un arbre, $b(T) = \alpha(T)$ si et seulement si $T \in \mathcal{F}_b^{\text{iii}}$.

Preuve. On peut vérifier que, les arbres de $\mathcal{F}_b^{\text{iii}}$ sont les seuls arbres de \mathcal{F}_b qui vérifient $b(T) = \alpha(T)$. \square

3.2 Caractérisation des graphes tels que $b(G) - \beta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Dans cette section, on détermine une autre borne supérieure de $b(G)$ en fonction de $\beta(G)$, où $\beta(G)$ est le cardinal d'un couplage maximum de G . On caractérise ensuite les graphes pour lesquels $b(G) - \beta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Nous rappelons d'abord le résultat classique suivant:

Théorème 3.27. Pour tout graphe G d'ordre n , $\beta(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Remarque 3.28. Si G est un graphe complet d'ordre n alors, $\beta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

En utilisant le théorème 3.27, nous pouvons montrer le résultat suivant:

Théorème 3.29. Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n alors, $b(G) \leq 2\beta(G) + 1$.

Preuve. Soit $S = \{V_1, V_2, \dots, V_b\}$ une partition en b -coloration de G avec $b(G)$ -couleurs et soit H un graphe obtenu à partir de G en contractant tous les sommets de V_i , pour tout i . Deux sommets de H sont joints si et seulement s'il existe une arête entre V_i et V_j , $i \neq j$. Il est clair que H est une clique d'ordre $b(G)$. Par construction de H , il est clair que, tout couplage maximum dans H est un couplage dans G . Donc, $\beta(G) \geq \beta(H) = \lfloor \frac{b(G)}{2} \rfloor$. Si $b(G)$ est pair alors, $b(G) \leq 2\beta$ sinon $b(G) \leq 2\beta(G) + 1$. \square

La proposition suivante se déduit facilement du théorème 3.29.

Proposition 3.30. Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n , alors $b(G) - \beta(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Preuve. comme $\omega(G) \leq b(G) \leq 2\beta(G) + 1$ alors $b(G) \leq \left\lfloor \frac{n + \omega(G) - 1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n + 2\beta(G)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \beta(G)$. \square

Nous allons donner maintenant un théorème qui caractérise la classe des graphes pour lesquels $b(G) - \beta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. La preuve de ce théorème nécessite les deux lemmes préliminaires suivants:

Lemme 3.31. *Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n avec $b(G) = n - t$ où $t \in \{0, 1, 2\}$.*

- i) Si $t \in \{0, 1\}$ alors G contient une clique d'ordre $n - t$
- ii) Si $t = 2$ alors G contient une clique de taille $n - 3$ ou $n - 2$.

Preuve. (i) Il est clair que, si $t = 0$ alors, G est un graphe complet d'ordre n . Si $t = 1$ alors, toute b -coloration de G avec $(n - 1)$ -couleurs contient $(n - 2)$ classes de couleur de taille 1 et une seule classe de couleur de taille 2. Donc, G contient une clique de taille $n - 1$.

(ii) Si $t = 2$ alors, on distingue deux cas: (a) Si, dans une b -coloration de G avec $(n - 2)$ -couleurs, on a $(n - 3)$ classes de couleur de taille 1 et une seule classe de couleur de taille 3 alors, G contient une clique de taille $n - 2$. (b) Dans une b -coloration de G avec $(n - 2)$ -couleurs, on a $(n - 4)$ classes de couleur de taille 1 et deux classes de couleur de taille 2. Soit $S = \{V_1, V_2, \dots, V_b\}$ une partition en b -coloration de G avec $(n - 2)$ -couleurs telle que $|S_1| = |S_2| = 2$ et $|S_i| = 1$ pour tout $i \neq 1, 2$. S'il existe deux sommets b -dominants $x \in S_1$, $y \in S_2$ tels que x est adjacent à y alors, G contient une clique de taille $n - 2$ sinon, G contient une clique de taille $n - 3$. \square

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On désigne par $G + \{x\}$, le graphe engendré par les sommets de l'ensemble $V(G) \cup \{x\}$.

Lemme 3.32. *Soient K_{2p} et K_{2p+1} deux graphes complets d'ordre respectif $2p$ et $2p + 1$ et soient $x \notin V(K_{2p}) \cup V(K_{2p+1})$ et $y \notin V(K_{2p+1})$ deux sommets quelconques tels que $G_0 = K_{2p} + \{x\}$, $G_1 = K_{2p+1} + \{x\}$ et $G_2 = K_{2p+1} + \{x, y\}$. Si $\beta(G_i)$ désigne le cardinal d'un couplage maximum de G_i alors, on a:*

- a) $\beta(G_0) = p$.
- b) Si x est un sommet isolé alors $\beta(G_1) = \beta(K_{2p+1}) = p$ sinon, $\beta(G_1) = p + 1$.

c) Si x et y sont deux sommets isolés alors $\beta(G_2) = \beta(K_{2p+1}) = p$ sinon, $\beta(G_2) = p+1$.

Preuve. Soient x et y deux sommets quelconques tels que $x \notin V(K_{2p}) \cup V(K_{2p+1})$ et $y \notin V(K_{2p+1})$.

(a) Si $G_0 = K_{2p} + \{x\}$ alors, tout couplage maximum dans K_{2p} est un couplage dans G_0 . En utilisant la remarque 3.28, on trouve $\beta(G_0) \geq \beta(K_{2p}) = \frac{|K_{2p}|}{2} = p$ et d'après le théorème 3.27, $\beta(G_0) \leq \lfloor \frac{|G_0|}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2p+1}{2} \rfloor = p$. Donc $\beta(G_0) = p$.

(b) Si x n'est adjacent à aucun sommet de K_{2p+1} alors, $\beta(G_1) = \beta(K_{2p+1} + \{x\}) = \beta(K_{2p+1}) = \lfloor \frac{2p+1}{2} \rfloor = p$. S'il est adjacent à tous les sommets de K_{2p+1} alors G_1 est une clique d'ordre $2p+2$, d'où $\beta(G_1) = p+1$. Supposons maintenant qu'il est adjacent à r sommets de K_{2p+1} , $1 \leq r \leq 2p$. Puisque K_{2p+1} est une clique d'ordre impair alors, pour tout couplage maximum C de K_{2p+1} , il existe un seul sommet t de K_{2p+1} non saturé par le couplage C . Deux cas se présentent:

- Si x est adjacent à t alors $C \cup \{(x, t)\}$ est un couplage de G_1 . Donc $\beta(G_1) \geq \lfloor \frac{2p+1}{2} \rfloor + 1 = p+1$. D'autre part, d'après le théorème 3.27, on a $\beta(G_1) \leq \lfloor \frac{|G_1|}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2p+2}{2} \rfloor = p+1$. Donc $\beta(G_1) = p+1$.

- Si x est non adjacent à t alors x est adjacent à un certain sommet u saturé par le couplage C . Soit $v \neq t$ un sommet voisin de u dans K_{2p+1} . Alors, $C \setminus \{(u, v)\} \cup \{(x, u), (v, t)\}$ est un couplage dans G_1 . Donc $\beta(G_1) \geq \lfloor \frac{2p+1}{2} \rfloor + 1 = p+1$. Par le théorème 3.27, on trouve $\beta(G_1) = p+1$.

(c) De la même manière, on remarque que, si les deux sommets x et y sont isolés alors, $\beta(G_2) = \beta(K_{2p+1} + \{x, y\}) = \beta(K_{2p+1}) = p$. Si x (ou y) est adjacent à un sommet t de K_{2p+1} (t non saturé par le couplage C) alors $C \cup \{(x, t)\}$ ou $C \cup \{(y, t)\}$ est un couplage dans G_2 . D'après (b) on a bien $\beta(G_2) = p+1$. Si $t \notin N(x) \cup N(y)$ alors x (ou y) est adjacent à un certain sommet u (saturé par le couplage C). Si $v \neq t$ est un sommet voisin de u , alors $C \setminus \{(u, v)\} \cup \{(x, u), (v, t)\}$ ou $C \setminus \{(u, v)\} \cup \{(y, u), (v, t)\}$ est un couplage dans G_2 . Donc d'après (b), on trouve $\beta(G_2) = p+1$. Si x et y ne sont adjacents à aucun sommet de K_{2p+1} ; et x est adjacent à y alors $C \cup \{(x, y)\}$ est un couplage dans

G_2 , donc $\beta(G_2) \geq \lfloor \frac{2p+1}{2} \rfloor + 1 = p + 1$. Et comme $\beta(G_2) \leq \lfloor \frac{|G_2|}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2p+3}{2} \rfloor = p + 1$ alors $\beta(G_2) = p + 1$. \square

Nous donnons à présent un théorème qui caractérise la classe des graphes tels que $b(G) = \beta(G) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Théorème 3.33. *Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n alors, $b(G) - \beta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ si et seulement si $G = S_2$ ou S_3 ou K_{2p} ou $K_{2p} + \{x\}$ ou $K_{2p-1} + \{y\}$ ou $K_{2p-1} + \{z, w\}$ avec $0 \leq d_G(x) \leq 2p - 1$ et $d_G(y) = d_G(z) = d_G(w) = 0$.*

Preuve. Il est facile de voir la condition suffisante par une simple vérification. Pour la condition nécessaire supposons que, $b(G) - \beta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. D'une part, il est clair que, si $\beta(G) = 0$ alors G est un stable d'ordre 2 ou 3. D'autre part, d'après le théorème 3.29, $b(G) = \beta(G) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq 2\beta(G) + 1$. Donc $\beta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. D'après le théorème 3.27, on constate que, $\beta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ou $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. Si $\beta(G) \neq 0$ alors, deux cas sont à distinguer suivant la valeur de $\beta(G)$.

Cas 1 : $\beta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

- Si n est pair ($n = 2p$) alors, $b(G) = 2p$ et G est un graphe complet d'ordre $2p$, $G = K_{2p}$.
- Sinon, $b(G) = n - 1 = 2p$. D'après le lemme 3.31, le graphe G contient une clique d'ordre $2p$, et il se présente comme suit: $G = K_{2p} + \{x\}$, où $x \notin V(K_{2p})$ est un sommet qui est adjacent à au plus $n - 2$ sommets de K_{2p} car sinon G est une clique de taille n , ceci implique que $b(G) = n$, contradiction.

Cas 2 : $\beta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$.

- Si n est pair alors $b(G) = n - 1 = 2p - 1$ et $\beta(G) = p - 1$. D'après le théorème 3.31, le graphe G contient une clique d'ordre $2p - 1$. Donc $G = K_{2p-1} + \{y\}$ où $y \notin V(K_{2p-1})$ est un sommet isolé dans G car sinon, d'après le lemme 3.32, $\beta(K_{2p-1} + \{y\}) = \frac{2p}{2} = p \neq p - 1$.

- Si n est impair alors, $b(G) = n - 2 = 2p - 1$ et $\beta(G) = p - 1$. D'après le lemme 3.31, G contient une clique de taille $n - 2$ ou $n - 3$. Donc deux sous cas sont à distinguer.

Sous cas 2.1 : Si G contient une clique de taille $n - 2$ alors $G = K_{2p-1} + \{z, w\}$ où $z, w \notin V(K_{n-2})$. Il est clair que, les sommets z et w sont isolés car sinon, d'après le lemme 3.32, $\beta(K_{2p-1} + \{z, w\}) = \lfloor \frac{2p-1}{2} \rfloor + 1 = p \neq p - 1$.

Sous cas 2.2 : Si G contient une clique de taille $n - 3$ alors, G se présente comme suit: $G = K_{n-3} + \{x, y, z\}$ où $x, y, z \notin V(K_{n-3})$ sont adjacents à au plus $n - 4$ sommets de K_{n-3} car sinon, le graphe G contient une clique de taille $n - 2$. Dans ce cas, le m -degré de $K_{n-3} + \{x, y, z\}$ est égal à $n - 3$, ceci implique que, $b(G) \leq n - 3$, contradiction. \square

3.3 Problèmes ouverts

Pour terminer ce chapitre, nous poserons deux questions dont l'une concerne la reconnaissance, en temps polynomial, des graphes bipartis tels que le nombre b -chromatique égale à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et l'autre sur la caractérisation des graphes sans K_3 tels que $b(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Problème 3.34. *Peut-on reconnaître les graphes bipartis tels que $b(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ en un temps polynomial?*

Problème 3.35. *Caractériser les graphes sans K_3 tels que $b(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

CHAPITRE 4

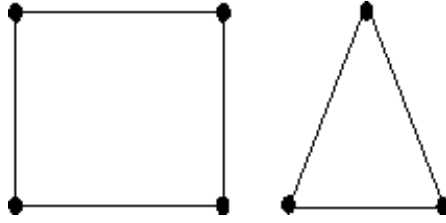
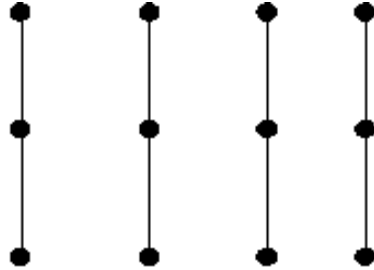
B-COLORATION ET B-CONTINUITÉ DU PRODUIT CROISÉ DE CERTAINS GRAPHES PARTICULIERS

Dans ce chapitre nous étudions la b -coloration et la b -continuité de quelques produits croisés de graphes particuliers. Cette étude est motivée par les résultats encourageants de M. Kouider, M. Mahéo [17] et de T. Faik [10]. Nous donnons d'abord la valeur exacte du nombre b -chromatique du produit croisé de deux graphes dans quelques cas particuliers ensuite nous montrons que ces graphes sont b -continus.

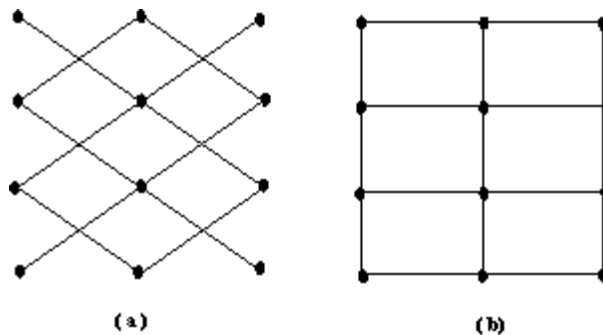
4.1 La b -coloration du produit croisé de certains graphes particuliers

Dans la première partie de cette section, nous rappelons la définition du produit croisé de deux graphes, qu'on appelle parfois produit catégorique ou encore produit classique, et souvent noté par le symbole " \times " ensuite nous donnons un rappel des principaux résultats liés à la b -coloration de la somme cartésienne de certains graphes particuliers et le m -degré modifié. Dans la deuxième partie, nous présentons nos premiers résultats concernant la b -coloration du produit croisé de certains graphes particuliers. Dans la dernière partie, nous abordons la notion de la b -continuité d'un graphe G . Après un bref rappel sur les différents résultats relatifs à la b -continuité, nous proposons une nouvelle étude sur la b -continuité des produits croisés de certains graphes particuliers.

Définition 4.1. *Soient G et H deux graphes disjoints. Alors $G + H$ désigne l'union de G et H . Pour un entier k donné, kG désigne l'union de k copies de G .*

FIGURE 4.1. L'union de C_4 et C_3 ($C_4 + C_3$)FIGURE 4.2. Quatre copies de P_3 ($4P_3$)

Définition 4.2. Soient $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$ deux graphes, le produit croisé de G et H , noté $G \times H$, est le graphe ayant $\{(u, v) : u \in V(G), v \in V(H)\}$ comme ensemble de sommets et dont l'ensemble d'arêtes est donné par la propriété suivante: les sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) de $G \times H$ sont adjacents si et seulement si u_1 est adjacent à u_2 dans G et v_1 est adjacent à v_2 dans H .

FIGURE 4.3. (a) Produit croisé $P_4 \times P_3$ (b) Somme cartésienne $P_4 \square P_3$

Nous rappelons maintenant quelques résultats et remarques concernant la b -coloration de la somme cartésienne de deux graphes. Dans [17], M. Kouider et M. Mahéo ont montré les résultats suivants:

Proposition 4.3. [17] Si $K_{1,n}$, P_n , K_n sont respectivement l'étoile d'ordre $n+1$, la chaîne d'ordre n et le graphe complet d'ordre n , alors:

- $b(K_{1,n} \square K_{1,n}) = n + 2$ si $n \geq 2$.
- $b(K_{1,n} \square P_k) = \min(k, n + 3)$, $n \geq 3$, $k \geq 4$ sauf le cas $k = n + 3, k = n + 4$ où $b(K_{1,n} \square P_k) = n + 2$
- $n \leq b(K_n \square K_p) \leq p(p - 1)$ si $p \leq n < p(p - 1)$, et $b(K_n \square K_p) = n$ si $n \geq p(p - 1)$.

Proposition 4.4. [17] $b(G \square H) \geq \max(b(G), b(H))$

Proposition 4.5. [17] Soient G et H deux graphes tels que G a un système b -dominant stable avec $b(G)$ couleurs, et H a un système b -dominant stable avec $b(H)$ couleurs. Alors $b(G \square H) \geq (b(G) + b(H) - 1)$, et le graphe $G \square H$ a un système b -dominant stable avec $(b(G) + b(H) - 1)$ -couleurs.

4.1.1 Modification du m -degré par inclusion de voisinages

Nous présentons dans ce paragraphe la notion du m -degré modifié, qui fournira une nouvelle borne supérieure du nombre b -chromatique et qui nous sera utile pour déterminer la valeur exacte du nombre b -chromatique du produit croisé de certains graphes particuliers. D'abord, nous rappelons encore une fois la définition du m -degré.

Définition 4.6. Soit les sommets v_1, v_2, \dots, v_n d'un graphe G ordonnés tels que: $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$, où $d(v_i)$ est le degré de v_i . Le m -degré de G , noté $m(G)$ est défini par : $m(G) = \max\{i : d(v_i) \geq i - 1\}$.

Un sommet v vérifiant $d(v) \geq m(G) - 1$ est dit sommet *dense*.

Observation 4.7. [9] Lors du calcul du m -degré, nous ne prenons pas en compte la relation entre les sommets denses, en terme d'inclusion de voisinages. Or, comme le montre la proposition suivante, si le voisinage d'un sommet u est inclus dans le voisinage d'un autre sommet v , alors si u est b -dominant, le sommet v l'est aussi, et pour la même couleur. Ainsi il est inutile de prendre en compte à la fois u et v dans l'ensemble des sommets candidats à la b -dominance.

Proposition 4.8. [9] Soit $G = (V, E)$ un graphe et u et v deux sommets de G tels que $\Gamma(u) \subseteq \Gamma(v)$. Soit G' le graphe induit $V \setminus \{u\}$. Alors:

1. Toute $(k)b$ -coloration de G' peut être étendue à G .
2. $b(G') \leq b(G)$.
3. Pour toute b -coloration de G , si u est b -dominant, alors v est b -dominant et pour la même couleur.

Soient $G = (V, E)$ un graphe de n sommets, et un ordre (v_1, v_2, \dots, v_n) des sommets de V de G , tel que $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ où d_i est le degré du sommets v_i . Nous supprimons de la liste (v_1, v_2, \dots, v_n) les sommets v_i pour lesquels il existe j , avec $j < i$, tel que $\Gamma(v_i) \subseteq \Gamma(v_j)$.

Définition 4.9. [9] Nous appelons *séquence réduite* la liste des sommets $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ restants et *séquence réduite des degrés*, la séquence $d_{i_1} \geq d_{i_2} \geq \dots \geq d_{i_k}$.

Remarque 4.10.

- La liste $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ dépend de l'ordre choisi pour la liste initiale (au cas où plusieurs sommets auraient le même degré).
- La séquence des degrés modifiée $d_{i_1} \geq d_{i_2} \geq \dots \geq d_{i_k}$ est la même quel que soit le choix de la liste initiale (v_1, v_2, \dots, v_n) .

En utilisant la séquence des degrés modifiée, nous allons améliorer le m -degré.

Définition 4.11. [9] Soit $d_{i_1} \geq d_{i_2} \geq \dots \geq d_{i_k}$ la séquence des degrés modifiée d'un graphe G . On appelle le m -degré modifié et on note par $m'(G) = \max\{j : d_{i_j} \geq j - 1\}$.

Dans [9] T. Faik montre que le m -degré modifié est une borne supérieure du nombre b -chromatique.

Proposition 4.12. [9] Pour tout graphe G , nous avons $b(G) \leq m'(G)$.

Nous donnons un exemple où le m -degré modifié nous permet de déterminer le nombre b -chromatique.

Exemple 4.13. Soit $G = P_3 \times P_3$ un graphe donné par la figure suivante:

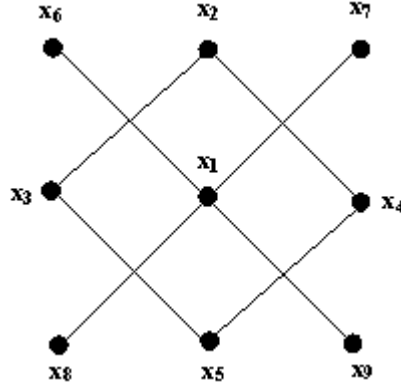


Figure 4.4. Un graphe $G = P_3 \times P_3$

La séquence des degrés est $d(x_1) > d(x_2) = d(x_3) = d(x_4) = d(x_5) > d(x_6) = d(x_7) = d(x_8) = d(x_9)$. Nous supprimons les sommets x_5, x_4, x_7, x_8 et x_9 car $\Gamma(x_5) \subseteq \Gamma(x_2)$, $\Gamma(x_4) \subseteq \Gamma(x_3)$, $\Gamma(x_7) \subseteq \Gamma(x_6)$, $\Gamma(x_8) \subseteq \Gamma(x_6)$ et $\Gamma(x_9) \subseteq \Gamma(x_6)$. La séquence des degrés modifiée est $d(x_1) > d(x_2) > d(x_6)$. Ainsi $b(G) \leq m'(G) = 2 \leq m(G) = 3$. Comme $\chi(G) = 2$ alors $b(G) = 2$.

Nous présentons maintenant un nouveau résultat qui nous permettra de déterminer la valeur exacte du nombre b -chromatique du produit croisé de deux étoiles, de deux chaînes et celui d'une étoile et une chaîne.

Proposition 4.14. Si on note $K_{1,n}$ l'étoile à $n+1$ sommets et P_n la chaîne à n sommets, alors

a) Pour tout $n, m \geq 3$, $b(K_{1,n} \times K_{1,m}) = 2$

$$b) b(P_n \times P_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 1 \text{ et } m = 1 \\ 2 & \text{si } n = 2, 3 \text{ et } m = 2, 3 \\ 3 & \text{si } (n \geq 4 \text{ et } m = 2) \text{ ou } (n = 4, 5 \text{ et } m = 3) \\ 4 & \text{si } (n = 6 \text{ et } m = 3) \text{ ou } (n = 4 \text{ et } m = 4) \\ 5 & \text{si } (n \geq 7 \text{ et } m = 3) \text{ ou } (n \geq 5 \text{ et } m \geq 4) \end{cases}$$

$$c) \text{ Pour tout } n \geq 3, b(K_{1,n} \times P_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 2 & \text{si } m = 2, 3 \\ 3 & \text{si } m = 4 \\ \min(m - 2, 2n + 1) & \text{si } m \geq 5 \end{cases}$$

Preuve. L'idée générale de la preuve consiste premièrement à déterminer une borne supérieure k pour le paramètre $b(G)$; deuxièmement à construire une b -coloration c de k couleurs.

a) Il est clair que, pour tout $n \geq 3$ et $m \geq 3$, $b(K_{1,n} \times K_{1,m}) = b(K_{1,nm} + K_{n,m}) = 2$ où $K_{1,nm}$ est une étoile à $nm + 1$ sommets et $K_{n,m}$ est un graphe biparti complet.

b) De même, il est facile de voir que, $b(P_n \times P_1) = b(S_n) = 1$ et $b(P_3 \times P_2) = b(P_3 + P_3) = b(P_2 \times P_2) = b(P_2 + P_2) = 2$. Le graphe $P_3 \times P_3$ a un seul sommet de degré 4, quatre sommets de degré deux et quatre sommets de degré un, alors le m -degré modifié de $P_3 \times P_3$ est égal à 2, donc $b(P_3 \times P_3) \leq 2$. Comme il existe une b -coloration de $P_3 \times P_3$ avec deux couleurs (voir figure 4.5.a) alors $b(P_3 \times P_3) = 2$.

- Il est clair aussi que, pour tout $n \geq 4$, $b(P_n \times P_2) = b(P_n + P_n) = 3$. Puisque le graphe $P_4 \times P_3$ a deux sommets de degré 4, six sommets de degré deux et quatre sommets de degré un, alors le m -degré de $P_4 \times P_3$ est égal à 3. D'où $b(P_4 \times P_3) \leq 3$. D'autre part, il existe une b -coloration de $P_4 \times P_3$ avec trois couleurs (voir figure 4.5.b). Donc $b(P_4 \times P_3) = 3$.

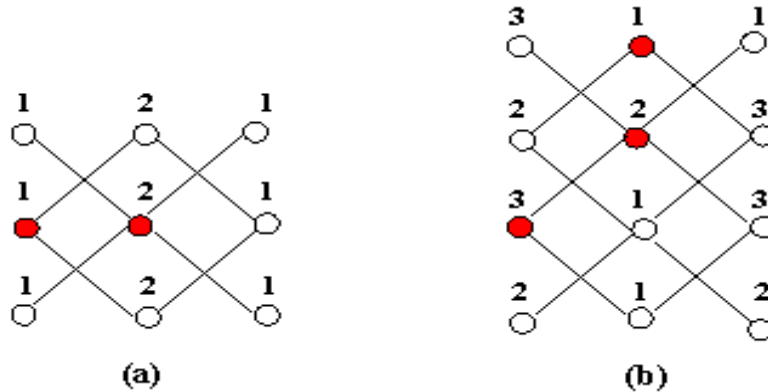


FIGURE 4.5. (a) Une $(2)b$ -coloration du graphe $P_3 \times P_3$ (b) Une $(3)b$ -coloration du graphe $P_4 \times P_3$

- Le graphe $P_5 \times P_3$ a trois sommets de degré 4 , huit sommets de degré deux et quatre sommets de degré un, alors $m(P_5 \times P_3) = 3$. Donc $b(P_5 \times P_3) \leq 3$. D'autre part, il existe une b -coloration de $P_5 \times P_3$ avec trois couleurs (voir figure 4.6.c). D'où $b(P_5 \times P_3) = 3$.
- Le graphe $P_6 \times P_3$ a quatre sommets de degré 4 , dix sommets de degré deux et quatre sommets de degré un, alors le m -degré de $P_6 \times P_3$ est égal à 4. Donc $b(P_6 \times P_3) \leq 4$. Et puisqu' il existe une b -coloration de $P_6 \times P_3$ avec quatre couleurs(voir figure 4.6.b) alors $b(P_6 \times P_3) = 4$.

□

Le graphe $P_4 \times P_4$ a quatre sommets de degré 4, huit sommets de degré deux et quatre sommets de degré un, alors $m(P_4 \times P_4) = 4$. Donc $b(P_4 \times P_4) \leq 4$. D'autre part, il existe une b -coloration de $P_4 \times P_4$ avec quatre couleurs (voir figure 4.6.a), alors $b(P_4 \times P_4) = 4$.

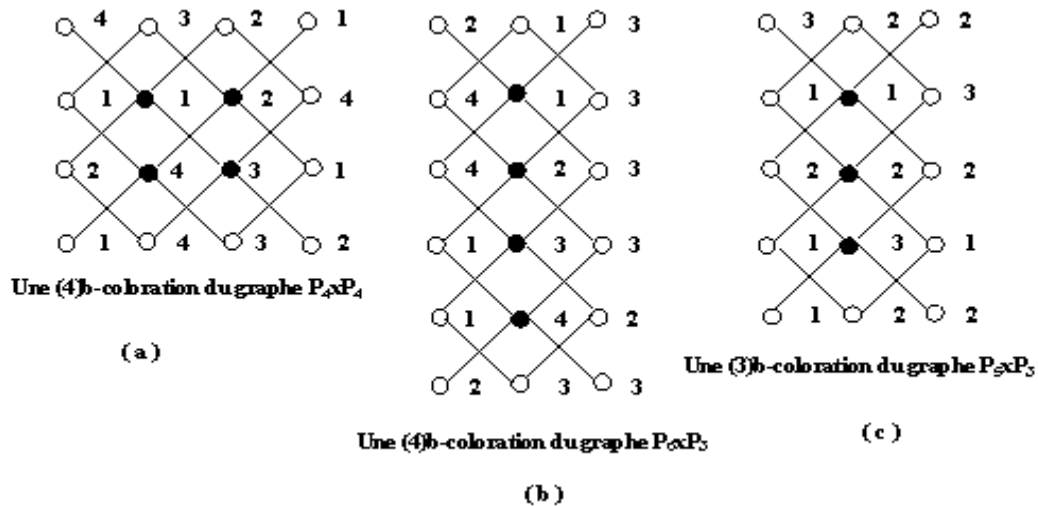


FIGURE 4.6. La b -coloration des graphes $P_4 \times P_4$, $P_6 \times P_3$ et $P_5 \times P_3$

- On peut voir aussi que, pour $n \geq 7$, $\Delta(P_n \times P_3) = 4$. En utilisant la proposition 1.14, on peut conclure que: $b(P_n \times P_3) \leq 5$. Et comme le graphe $P_n \times P_3$ admet une b -coloration avec cinq couleurs (voir figure 4.7.a) alors $b(P_n \times P_3) = 5$.

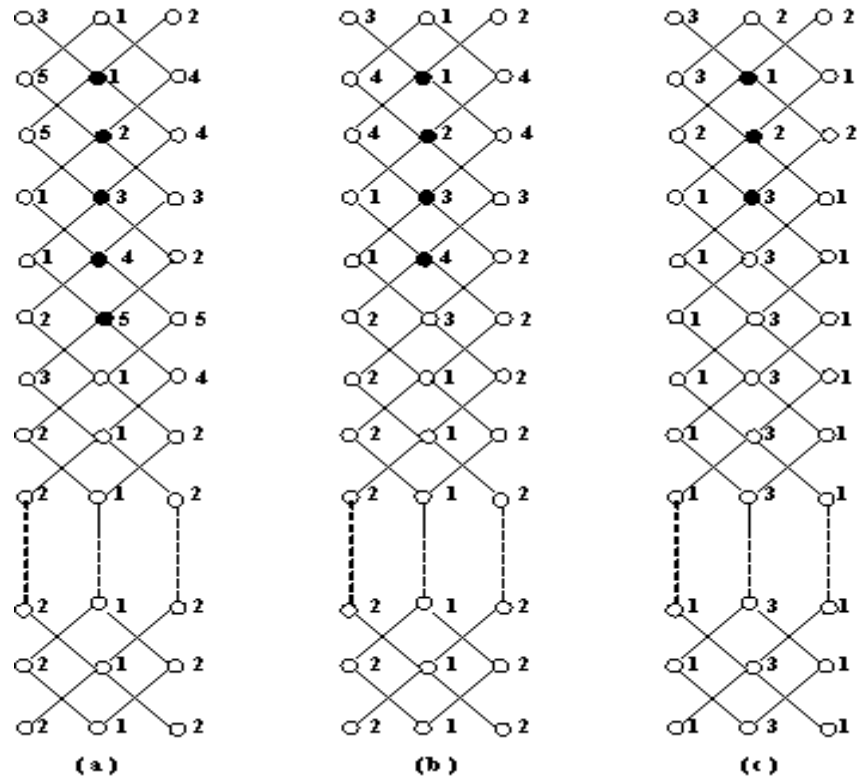


FIGURE 4.7. (a) $(5)b$ -coloration de $P_n \times P_3$ (b) $(4)b$ -coloration de $P_n \times P_3$
(c) $(3)b$ -coloration de $P_n \times P_3$, pour $n \geq 7$

- Puisque pour tout $n \geq 5$ et $m \geq 4$, $\Delta(P_n \times P_m) = 4$ alors $b(P_n \times P_m) \leq 5$. Il existe une b -coloration de $P_n \times P_m$ avec cinq couleurs. En effet, il suffit de colorer le graphe $P_5 \times P_4$ (voir figure 4.8.), ensuite on fait étendre cette coloration au graphe tout entier. Alors $b(P_n \times P_m) = 5$.

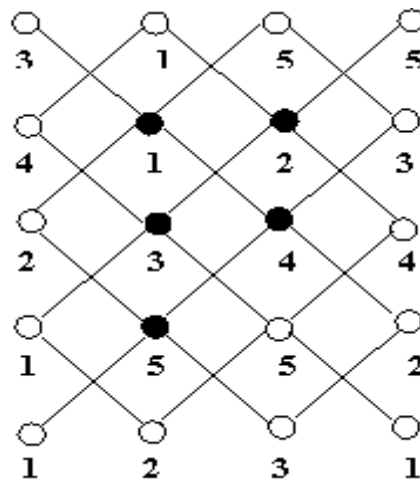


FIGURE 4.8. Une $(5)b$ -coloration du graphe $P_5 \times P_4$

c) Il est facile de constater que, $b(K_{1,n} \times P_1) = b(S_{n+1}) = 1$ où S_{n+1} est un stable d'ordre $n + 1$, $b(K_{1,n} \times P_2) = b(K_{1,n} + K_{1,n}) = 2$ et $b(K_{1,n} \times P_3) = b(K_{1,2n} + K_{2,n}) = 2$.

- Le graphe $K_{1,n} \times P_4$ a deux sommets de degré $2n$, 2 sommets de degré n , $2n$ sommets de degré 2 et $2n$ sommets de degré 1. Soit $V = \{x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, \dots, z_{2n}, w_1, w_2, \dots, w_{2n}\}$ l'ensemble des sommets du graphe $K_{1,n} \times P_4$ où x_i, y_i, z_i et w_i , sont les sommets de degré $2n, n, 2$ et 1 respectivement. La séquence des degrés dans l'ordre décroissant est $d(x_1) \geq d(x_2) \geq d(y_1) \geq d(y_2) \geq d(z_1) \geq \dots \geq d(z_{2n}) \geq d(w_1) \geq d(w_2) \geq \dots \geq d(w_{2n})$. Comme $\Gamma(y_j) \subseteq \Gamma(x_i), i \neq j$, $\Gamma(w_i) \subseteq \Gamma(z_k)$, pour tout $i, 1 \leq i \leq n$, $n + 1 \leq k \leq 2n$, et $\Gamma(w_j) \subseteq \Gamma(z_t)$, pour tout $j, n + 1 \leq j \leq 2n$, $1 \leq t \leq n$ alors, la séquence réduite des degrés modifiée du graphe $K_{1,n} \times P_m$ est $d(x_1) \geq d(x_2) \geq d(z_1) \geq \dots \geq d(z_{2n})$. Le m -degré modifié du $K_{1,n} \times P_4$ est égal à 3, donc $b(K_{1,n} \times P_4) \leq 3$. Puisqu'il existe une $(3)b$ -coloration du graphe $K_{1,n} \times P_4$ (voir figure 4.9.) alors $b(K_{1,n} \times P_4) = 3$.

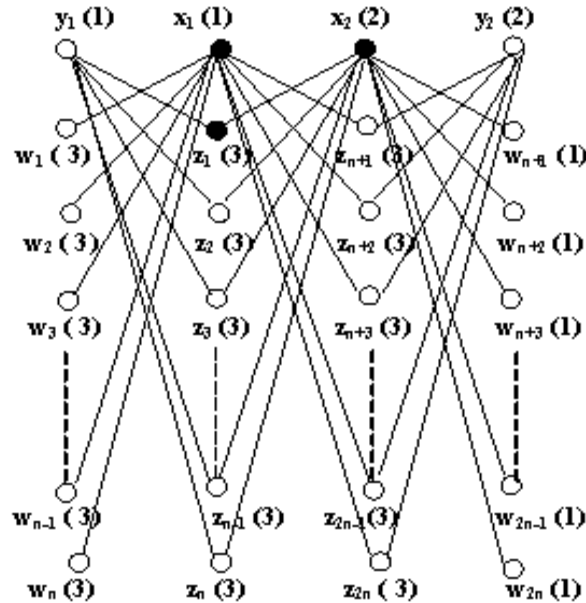


FIGURE 4.9. Une $3(b)$ -coloration du graphe $K_{1,n} \times P_4$, $n \geq 3$ (la valeur entre parenthèse représente la couleur du sommet)

- De même, le graphe $K_{1,n} \times P_5$ a trois sommets de degré $2n$, deux sommets de degré n , $3n$ sommets de degré 2 et $2n$ sommets de degré 1. Le m -degré modifié du $K_{1,n} \times P_5$ est égal à 3. D'autre part, il existe une $(3)b$ -coloration du graphe $K_{1,n} \times P_5$ (voir figure 4.10.), donc $b(K_{1,n} \times P_5) = 3$.

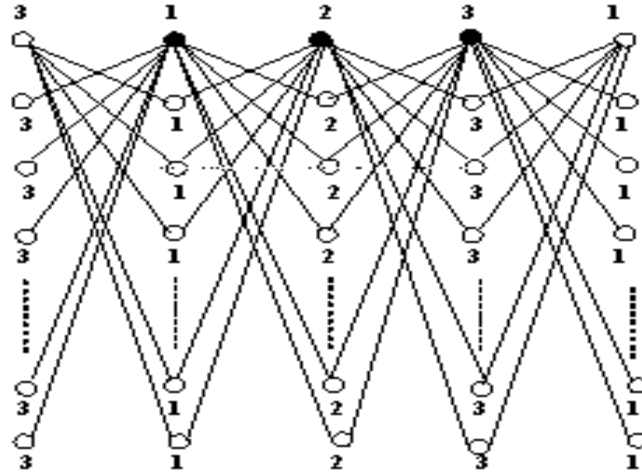


FIGURE 4.10. Une $(3)b$ -coloration du graphe $K_{1,n} \times P_5$, $n \geq 3$

- Le graphe $K_{1,n} \times P_6$ a quatre sommets de degré $2n$, deux sommets de degré n , $4n$ sommets de degré 2 et $2n$ sommets de degré 1. Le m -degré modifié du $K_{1,n} \times P_6$ est égal à 4. D'autre part, il existe une $(4)b$ -coloration du graphe $K_{1,n} \times P_6$ (voir figure 4.11.). D'où $b(K_{1,n} \times P_6) = 4$.

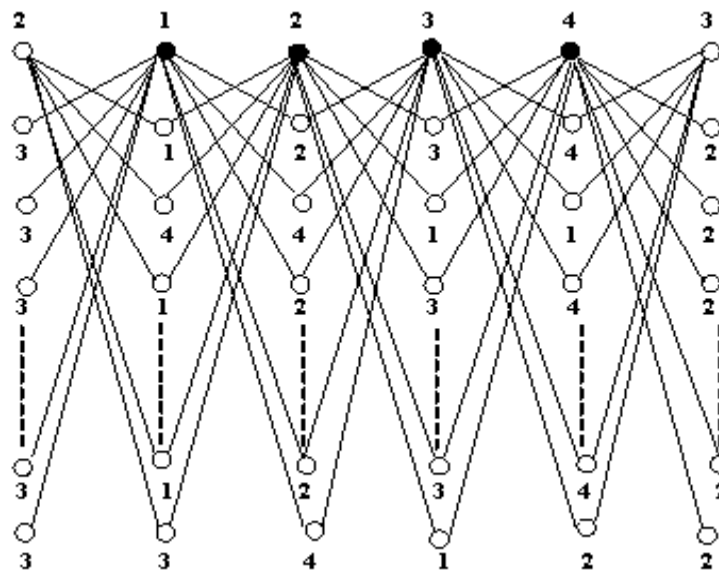


FIGURE 4.11. Une $(4)b$ -coloration du graphe $K_{1,n} \times P_6$, $n \geq 3$

- Pour $n \geq 3$ et $7 \leq m \leq 2n + 2$, le graphe $K_{1,n} \times P_m$ a $(m - 2)$ sommets de degré $2n$, 2 sommets de degré n , $n(m - 2)$ sommets de degré 2 et $2n$ sommets de degré 1. Le m -degré modifié de $K_{1,n} \times P_m$ est égal à $m - 2$. Donc, $b(K_{1,n} \times P_m) \leq m - 2$. Pour montrer que $b(K_{1,n} \times P_m) = m - 2$, il suffit de construire une $(m - 2)b$ -coloration c de $K_{1,n} \times P_m$. Soit (x_i, y_j) un sommet de $K_{1,n} \times P_m$ où x_i et y_j , $1 \leq i \leq n + 1$, $1 \leq j \leq m$ sont deux sommets de $K_{1,n}$ et P_m respectivement. Alors, deux cas sont à distinguer:

Cas 1 : Pour tout m , $7 \leq m \leq n + 5$, et $n \geq 3$, on utilise la procédure BCOLOR1.

Procédure de b -coloration BCOLOR1 (voir figure 4.12.)

1. Poser $c(x_1, y_1) = 2$, $c(x_1, y_m) = m - 3$, et pour tout j , $2 \leq j \leq m - 1$, $c(x_1, y_j) = j - 1$
2. Pour tout i , $2 \leq i \leq m - 4$, $c(x_i, y_1) = i$
3. Pour tout i , $m - 3 \leq i \leq n + 1$, $c(x_i, y_1) = m - 2$
4. Pour tout i , $2 \leq i \leq n + 1$ et pour tout j , $2 \leq j \leq m$,
Poser $c(x_i, y_j) = c(x_i, y_{j-1}) + 1$, aller en (4.1.)
4.1. Si $c(x_i, y_j) = m - 1$ alors poser $c(x_i, y_j) = 1$, aller en (4.).

Il est clair que cette coloration est propre et b -chromatique, les sommets b -dominants étant (x_1, y_j) , $2 \leq j \leq m - 1$.

Cas 2 : Pour tout m , $n + 6 \leq m \leq 2n + 2$, $n \geq 4$, on utilise la procédure BCOLOR2.

Procédure de b -coloration BCOLOR2 (voir figure 4.13.)

1. Poser $c(x_1, y_1) = c(x_1, y_3) = m - 2$ et $c(x_1, y_2) = 1$
2. Pour tout j , $4 \leq j \leq m$, $c(x_1, y_j) = \begin{cases} c(x_1, y_{j-2}) + 1 & \text{si } j \text{ est pair} \\ c(x_1, y_{j-2}) - 1 & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases}$
3. Pour tout i , $2 \leq i \leq n + 1$
 - 3.1. $c(x_i, y_1) = c(x_i, y_2) = 2i - 2$
 - 3.2. Si $c(x_i, y_1) \geq m - 2$ alors poser $k = i$ et aller à 4.
4. Pour tout i , $k \leq i \leq n + 1$ poser $c(x_i, y_1) = c(x_i, y_2) = m - 3$.
5. Pour tout i , $2 \leq i \leq n + 1$, et pour tout j , $3 \leq j \leq m$

5.1. Si j est impair alors poser $c(x_i, y_j) = c(x_i, y_{j-2}) + 1$, aller en (5.1.1)

5.1.1 Si $c(x_i, y_j) = (m - 1)$ alors poser $c(x_i, y_j) = 1$, aller en (5.)

5.2. Si j est pair alors poser $c(x_i, y_j) = c(x_i, y_{j-2}) - 1$, aller en (5.2.1.)

5.2.1. Si $c(x_i, y_j) = 0$ alors poser $c(x_i, y_j) = m - 2$, aller en (5.)

Cette coloration est aussi propre et b -chromatique, les sommets b -dominants étant (x_1, y_j) , $2 \leq j \leq m - 1$.

- Si $m \geq 2n + 3$ alors, d'après la proposition 2.15, on a $b(K_{1,n} \times P_m) \leq \Delta(K_{1,n} \times P_m) + 1 = 2n + 1$. Afin de montrer que $b(K_{1,n} \times P_m) = 2n + 1$, nous construisons une $(2n + 1)b$ -coloration c de $K_{1,n} \times P_m$ de la manière suivante:

Procédure de b -coloration BCOLOR3 (voir figure 4.14.)

1. $c(x_1, y_1) = 2n + 1$, $c(x_1, y_2) = 1$, $c(x_1, y_3) = 2n + 1$.

2. Pour tout j , $4 \leq j \leq 2n + 3$, $c(x_1, y_j) = \begin{cases} c(x_1, y_{j-2}) + 1 & \text{si } j \text{ est pair} \\ c(x_1, y_{j-2}) - 1 & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases}$

3. Pour tout i , $2 \leq i \leq n + 1$, $c(x_i, y_1) = c(x_i, y_2) = 2i - 2$

4. Pour tout i , $2 \leq i \leq n + 1$ et pour tout j , $3 \leq j \leq 2n + 3$

4.1. Si j est impair alors poser $c(x_i, y_j) = c(x_i, y_{j-2}) + 1$, aller en (4.1.1)

4.1.1. Si $c(x_i, y_j) = 2n + 2$ alors poser $c(x_i, y_j) = 1$, aller en (4.)

4.2. Si j est pair alors poser $c(x_i, y_j) = c(x_i, y_{j-2}) - 1$, aller en (4.2.1)

4.2.1. Si $c(x_i, y_j) = 0$ alors poser $c(x_i, y_j) = 2n + 1$, aller en (4.).

5. Pour colorer le reste des sommets du graphe, il suffit de faire des copies des deux dernières colonnes.

De même, il est facile de vérifier que cette coloration est propre et b -chromatique, les sommets b -dominants étant (x_1, y_j) , $2 \leq j \leq 2n + 2$.

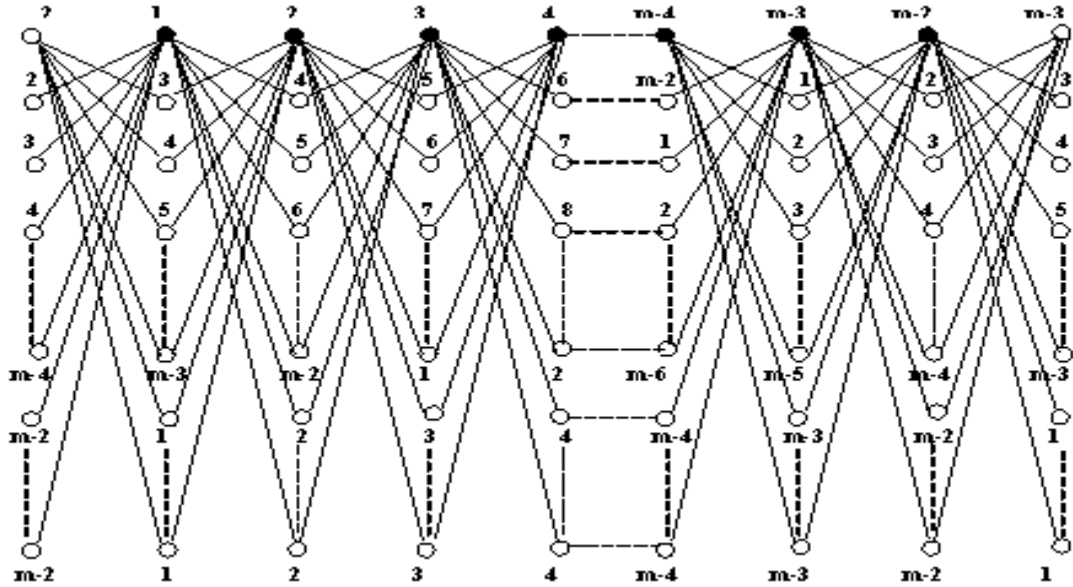


FIGURE 4.12. Une $(m-2)b$ -coloration du graphe $K_{1,n} \times P_m$, $n \geq 3$, $7 \leq m \leq n+5$

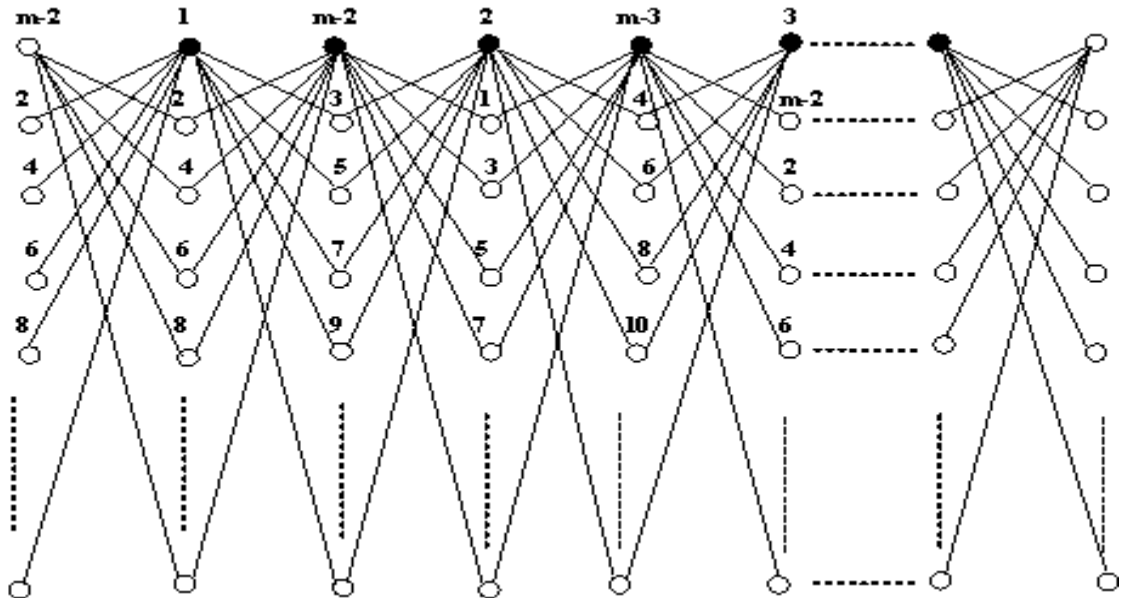


FIGURE 4.13. Une $(m-2)b$ -coloration du graphe $K_{1,n} \times P_m$, $n \geq 3$,
 $n+6 \leq m \leq 2n+2$

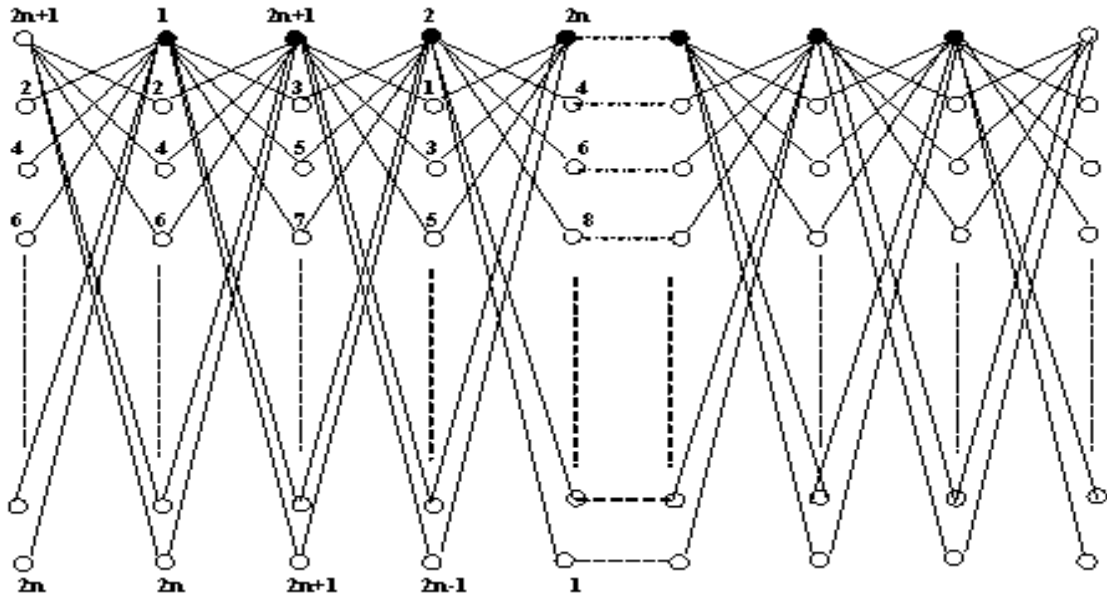


FIGURE 4.14. Une $(2n + 1)b$ -coloration du graphe $K_{1,n} \times P_m$, $n \geq 3$, $m \geq 2n + 3$

Remarque 4.15. Soient $K_{1,n}$ et $K_{1,m}$ les étoiles d'ordre respectif $n + 1$ et $m + 1$ et soient P_n et P_m les chaînes d'ordre respectif n et m , alors:

a) Pour tout $n, m \geq 3$, $b(K_{1,n} \times K_{1,m}) < b(K_{1,n}) \times b(K_{1,m})$

b) Pour tout n, n on a:

- $b(P_n \times P_m) < b(P_n) \times b(P_m)$ si $(n, m) \notin \{(1, 1), (4, 4)\}$
- $b(P_n \times P_m) = b(P_n) \times b(P_m)$ si $(n, m) \in \{(1, 1), (4, 4)\}$

c) Pour tout $n \geq 3$, on a :

- $b(K_{1,n} \times P_m) > b(K_{1,n}) \times b(P_m)$ si $m \geq 9$
- $b(K_{1,n} \times P_m) < b(K_{1,n}) \times b(P_m)$ si $m \leq 7$
- $b(K_{1,n} \times P_m) = b(K_{1,n}) \times b(P_m)$ si $m = 8$

En effet, D'après la proposition 4.14, on a: (a) Pour tout $n, m \geq 3$, $b(K_{1,n} \times K_{1,m}) = 2 < b(K_{1,n}) \times b(K_{1,m}) = 4$.

(b) Il est clair que, $b(P_1 \times P_1) = 1 = b(P_1) \times b(P_1)$ et $b(P_4 \times P_4) = 4 = b(P_4) \times b(P_4)$, et on peut facilement vérifier que si $(n, m) \notin \{(1, 1), (4, 4)\}$ alors, $b(P_n \times P_m) < b(P_n) \times b(P_m)$.

(c) Si $n \geq 3$ alors trois cas se présentent:

(c.1) Si $m \geq 9$ alors, on distingue deux sous cas: (c.1.1) Si $b(K_{1,n} \times P_m) = m - 2 \geq 7$ alors $b(K_{1,n}) \times b(P_m) = 6 < b(K_{1,n} \times P_m)$. (c.1.2) Si $b(K_{1,n} \times P_m) = 2n + 1 \geq 7$ alors $b(K_{1,n}) \times b(P_m) = 6 < b(K_{1,n} \times P_m)$.

(c.2) Si $m \leq 7$ alors, on distingue deux sous cas: (c.2.1) Si $m \in \{5, 7\}$ alors $b(K_{1,n} \times P_m) \leq 5$. Donc $b(K_{1,n} \times P_m) < b(K_{1,n}) \times b(P_m) = 6$. (c.2.2) Si $m \leq 4$ alors $b(K_{1,n} \times P_m) \leq 3$. Donc $b(K_{1,n} \times P_m) < b(K_{1,n}) \times b(P_m) = 4$.

(c.3) $b(K_{1,n} \times P_8) = b(K_{1,n}) \times b(P_8) = 6$.

4.2 La b-continuité de la b-coloration de quelques produits

croisés de graphes particuliers

Certains graphes possèdent une particularité très intéressante de la b -coloration. En effet, il existe des graphes qui peuvent avoir des b -colorations utilisant respectivement p et q couleurs, alors qu'ils n'admettent pas de b -coloration intermédiaire. Dans [14], les auteurs ont remarqué que l'hypercube de dimension trois admet une b -coloration avec 2 et 4 couleurs respectivement, mais il n'admet pas de b -coloration avec 3 couleurs. Dans [10], T. Faik a appelé cette propriété " b -continuité de la b -coloration des graphes". Dans cette section, nous présentons les nouveaux résultats concernant la b -continuité de la b -coloration des produits croisés de deux graphes dans quelques cas particuliers.

Afin d'éclaircir la notion de la b -continuité, nous commençons d'abord par une brève présentation de quelques définitions et résultats relatifs à celle-ci.

Définition 4.16. On appelle b -spectre, noté $S_b(G)$, d'un graphe G l'ensemble des entiers k pour lesquels G admet une b -coloration avec k couleurs.

Remarque 4.17. Si le b -spectre d'un graphe G est un intervalle, on dit que G est b -continu.

Définition 4.18. Un graphe G est dit b -continu s'il admet une $(k)b$ -coloration pour tout k , avec $\chi(G) < k < b(G)$.

Dans le but de se familiariser avec le concept de la b -continuité de la b -coloration des graphes, prenons par exemple l'hypercube (Q_3) de dimension trois (voir figure 4.12.). Nous pouvons facilement vérifier que Q_3 admet une $(2)b$ -coloration et $(4)b$ -coloration, mais il n'admet pas une $(3)b$ -coloration. Donc, l'hypercube de dimension trois n'est pas b -continu.

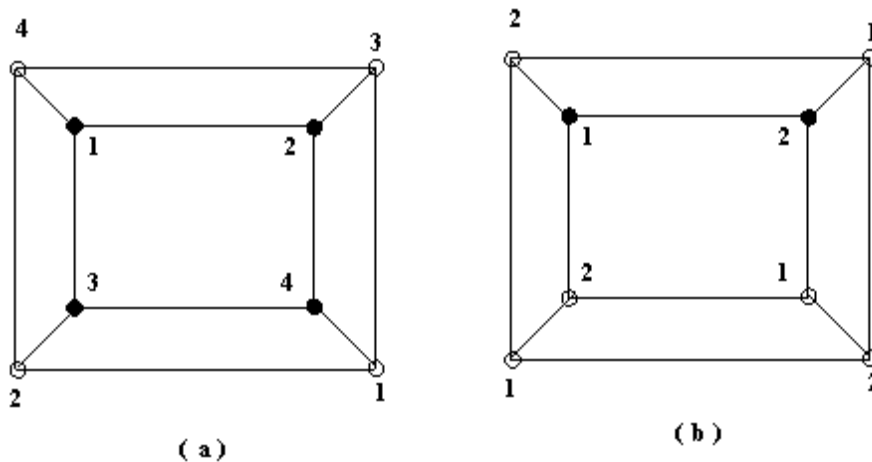


FIGURE 4.15. (a) Une $(4)b$ -coloration de Q_3 (b) Une $(2)b$ -coloration de Q_3

Nous rappelons les résultats suivants:

Proposition 4.19. [10] Soient $K_{1,n}$ l'étoile d'ordre $n + 1$ et P_m la chaîne d'ordre m .

(a) Soit $m \geq n \geq 2$. Le graphe $K_{1,n} \square K_{1,m}$ est b -continu.

(b) Soient $n \geq 3$ et $m \geq 2$. Le graphe $K_{1,n} \square P_m$ est b -continu.

Proposition 4.20. [10] Soient P_n et P_m les chaînes d'ordre respectif $n \geq 2$ et $m \geq 2$. Le graphe $P_n \square P_m$ est b -continu.

Proposition 4.21. [10] Soient C_n et C_m les cycles d'ordre respectif $n \geq 3$ et $m \geq 3$. Le graphe $C_n \square C_m$ est b -continu.

Nous montrons maintenant la b -continuité du produit croisé de deux étoiles, de deux chaînes et la b -continuité du produit croisé d'une étoile et une chaîne.

Proposition 4.22. Soient $K_{1,n}$ et $K_{1,m}$ les étoiles d'ordre respectif $n+1 \geq 4$ et $m+1 \geq 4$ et soient P_p et P_q les chaînes d'ordre respectif $p \geq 1$ et $q \geq 1$.

(a) Le graphe $K_{1,n} \times K_{1,m}$ est b -continu.

(b) Le graphe $P_p \times P_q$ est b -continu.

Preuve. Tout d'abord, Il est clair que les graphes suivants : $K_{1,n} \times K_{1,m}$, $n \geq 3$, $m \geq 3$, $P_n \times P_1$, $n \geq 1$, $P_2 \times P_2$, $P_2 \times P_3$, $P_3 \times P_3$, $P_4 \times P_3$, $P_5 \times P_3$ et $P_n \times P_2$, $n \geq 4$ sont b -continus car $b(K_{1,n} \times K_{1,m}) = \chi(K_{1,n} \times K_{1,m}) = 2$, $b(P_n \times P_1) = b(S_n) = \chi(P_n \times P_1) = 1$, $b(P_2 \times P_3) = b(P_2 \times P_2) = b(P_3 \times P_3) = \chi(P_2 \times P_3) = \chi(P_2 \times P_2) = \chi(P_3 \times P_3) = 2$, $b(P_4 \times P_3) = 3 > \chi(P_4 \times P_3) = 2$, $b(P_5 \times P_3) = 3 > \chi(P_5 \times P_3) = 2$ et pour $n \geq 4$, $b(P_n \times P_2) = b(P_n + P_n) = 3 > \chi(P_n + P_n)$.

- De même, les graphes $P_6 \times P_3$ et $P_4 \times P_4$ sont b -continus car pour tout entier k , $\chi(P_6 \times P_3) = \chi(P_4 \times P_4) = 2 < k < b(P_6 \times P_3) = b(P_4 \times P_4) = 4$, il existe une b -coloration avec k -couleurs des graphes $P_6 \times P_3$ et $P_4 \times P_4$ (voir figures 4.16.).
- Les graphes $P_n \times P_3$, $n \geq 7$ et $P_p \times P_q$, $p \geq 5$, $q \geq 5$ sont aussi b -continus car pour tout k , $\chi(P_n \times P_3) = \chi(P_p \times P_q) = 2 < k < b(P_n \times P_3) = b(P_p \times P_q) = 5$, il existe une b -coloration avec k -couleurs des graphes $P_n \times P_3$, $n \geq 7$ et $P_p \times P_q$, $p \geq 5$, $q \geq 5$ (voir figures 4.7., 4.17. et 4.18.).

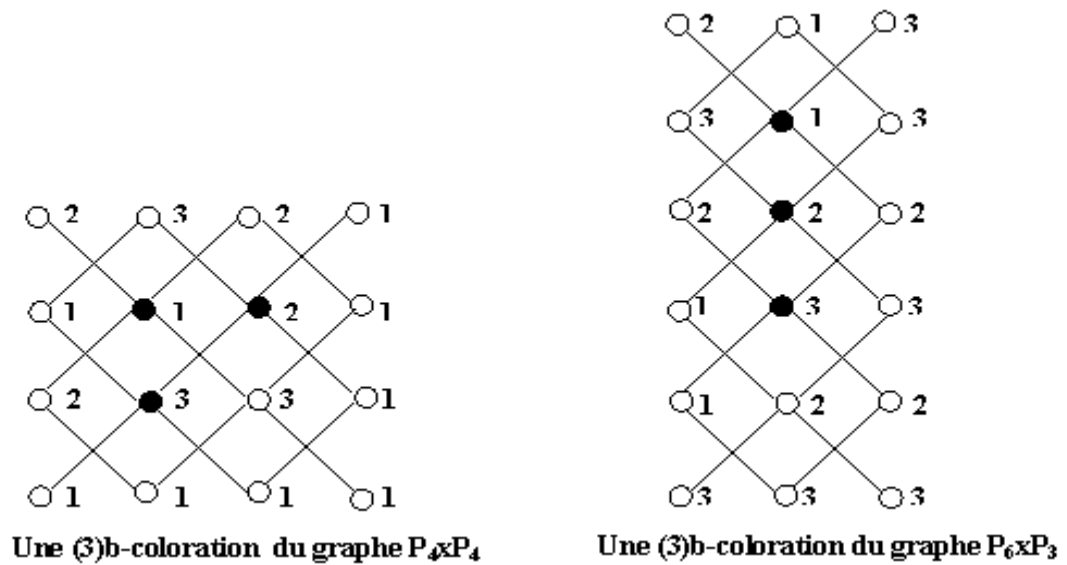


FIGURE 4.16. La b -coloration des graphes $P_4 \times P_4$ et $P_6 \times P_3$

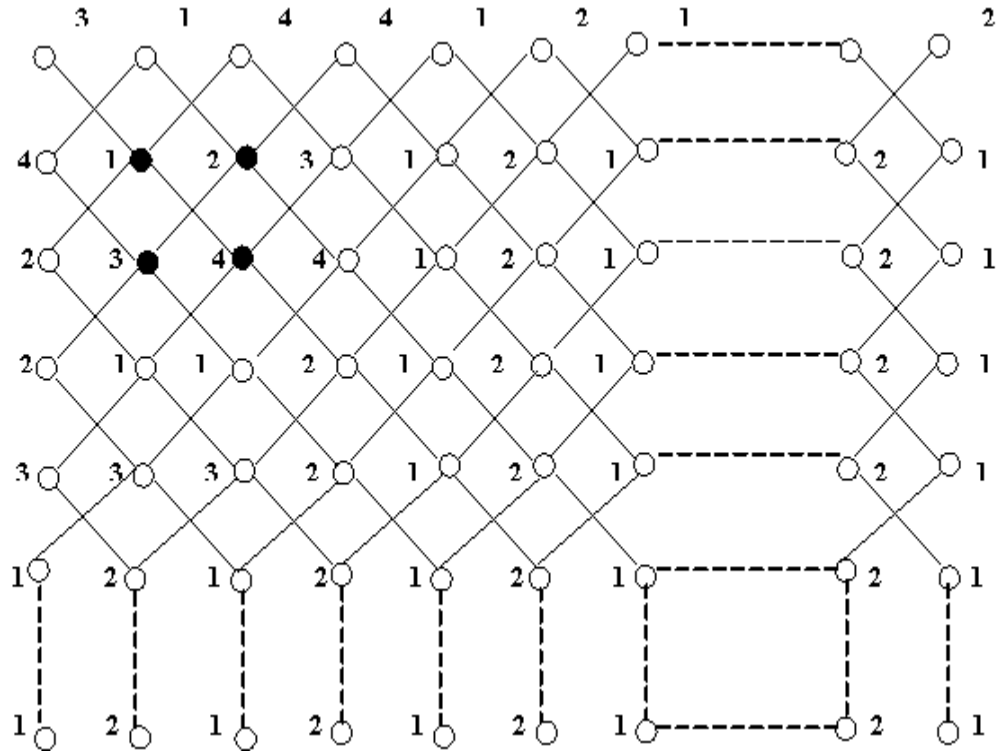


Figure 4.17. Une $(4)b$ -coloration du graphe $P_n \times P_m$, $n \geq 5$, $m \geq 4$

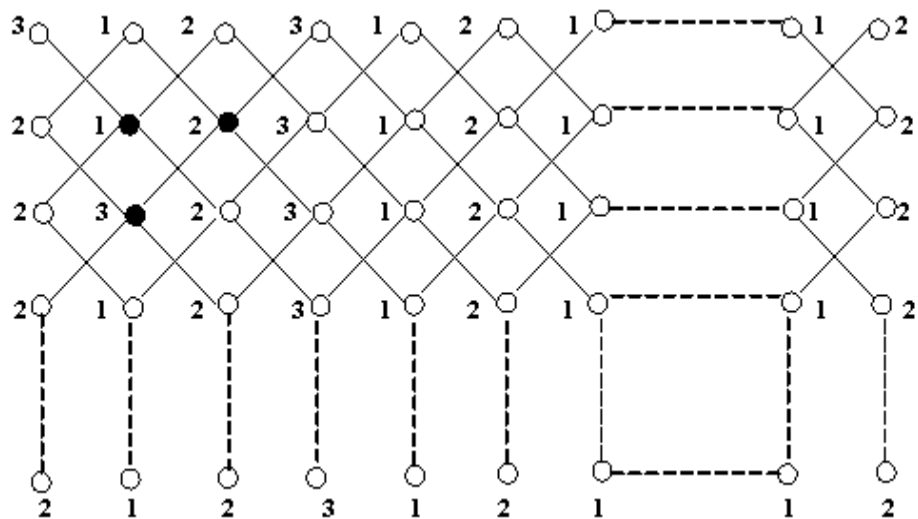


FIGURE 4.18. Une $(3)b$ -coloration du graphe $P_n \times P_m$, $n \geq 5$, $m \geq 4$

□

Notre deuxième résultat relatif à la b -continuité du produit croisé d'une étoile et une chaîne est donné par la proposition suivante:

Proposition 4.23. Soit $K_{1,n}$ l'étoile d'ordre $n + 1 \geq 4$ et P_m la chaîne d'ordre $m \geq 1$ alors, le graphe $K_{1,n} \times P_m$ est b -continu.

Preuve. Posons $G_i = K_{1,n} \times P_i$. Il est clair que, pour tout $n \geq 3$ et pour tout i , $1 \leq i \leq 5$, les graphes G_i sont b -continus car $\chi(G_i) = 2 \leq b(G_i) \leq 3$.

- Le graphe $K_{1,n} \times P_6$, $n \geq 3$ est aussi b -continu, car pour tout k , $\chi(K_{1,n} \times P_6) = 2 < k < b(K_{1,n} \times P_6) = 4$, $K_{1,n} \times P_6$ admet une b -coloration avec k -couleurs (voir figure 4.19.).
- Pour $m \geq 7$ et $n \geq 3$, le graphe $K_{1,n} \times P_m$ est b -continu car pour tout k , $2 < k < b(K_{1,n} \times P_m)$, il existe une $(k)b$ -coloration c du graphe $K_{1,n} \times P_m$. En effet, pour déterminer une $(k)b$ -coloration du graphe $K_{1,n} \times P_m$, il suffit de suivre les deux étapes suivantes:

Etape 1 : Déterminer une $(k)b$ -coloration c du sous graphe $K_{1,n} \times P_{k+2}$.

- Si $5 \leq k \leq n + 3$, on utilise la procédure BCOLOR1.
- Si $n + 4 \leq k \leq 2n$, on utilise la procédure BCOLOR2.

Etape 2 : Pour étendre cette $(k)b$ -coloration au graphe $K_{1,n} \times P_m$, il suffit de faire des copies des deux dernières colonnes.

Donc, le graphe le graphe $K_{1,n} \times P_m$, est b -continu, pour tout $m \geq 1$ et $n \geq 3$ \square

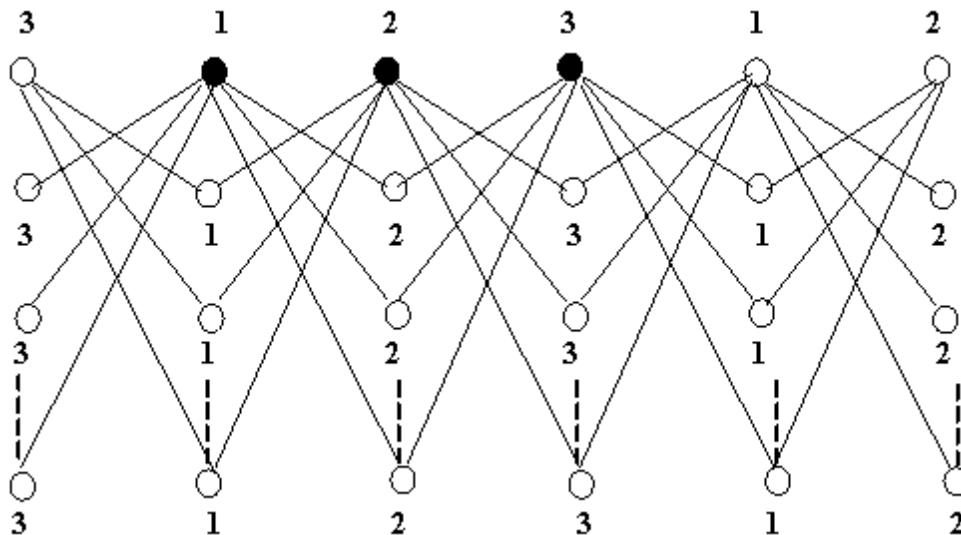


FIGURE 4.19. Une $(3)b$ -coloration du graphe $K_{1,n} \times P_6$, $n \geq 3$

CHAPITRE 5

LES GRAPHES $b\gamma$ -PARFAITS

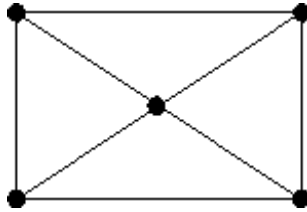
Les travaux présentés dans ce chapitre ont été partiellement réalisés en collaboration avec F.Maffray [3].

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier la notion des graphes $b\gamma$ -parfaits. En général, pour un graphe G quelconque, le nombre b -chromatique et le nombre de Grundy sont incomparables. Par exemple, $\gamma(2D) = 3 < b(2D) = 4$ et $\gamma(P_4) = 3 > b(P_4) = 2$, où $2D$ et P_4 désignent respectivement, l'union de deux diamants et une chaîne d'ordre 4. Il est intéressant donc de comparer ces deux paramètres pour des classes de graphes particulières et de caractériser la famille des graphes pour lesquels $b(H) = \gamma(H)$ pour tout sous graphe induit H de G . Dans ce chapitre, on détermine d'abord une borne inférieure pour le nombre b -chromatique d'un graphe G sans P_4 ensuite on montre que ce paramètre peut être obtenu en temps polynomial dans cette classe de graphes enfin, on caractérise la classe des graphes $b\gamma$ -parfaits

5.1 Définitions et notations

Avant de présenter notre premier résultat, nous avons besoin de rappeler les définitions et les notations nécessaires qui nous seront utiles dans la suite de ce chapitre. Un certain nombre de résultats théoriques liés à ces définitions sont également introduits.

Définition 5.1. *On appelle joint de deux graphes G et H , noté $G \vee H$, le graphe obtenu en prenant une copie de G et une copie de H et en reliant tous les sommets de G à tous les sommets de H .*

FIGURE 5.1. Le joint $K_1 \vee C_4$

Définition 5.2. Un graphe G est dit sans H , si G ne contient pas H comme sous-graphe induit.

Définition 5.3. Un graphe G est dit P_4 -sparse, si tout sous-graphe à 5 sommets de G contient au plus un P_4 .

Définition 5.4. Le diamant noté D (ou $K_4 - e$) est le graphe obtenu après avoir enlevé une arête à la clique d'ordre quatre.

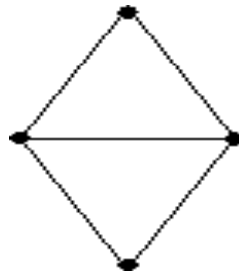


FIGURE 5.2. Le diamant

Définition 5.5. Une k -coloration de Grundy d'un graphe G est une coloration propre utilisant k couleurs vérifiant la propriété suivante : chaque sommet v , coloré par une couleur i , $1 \leq i \leq k$, doit être adjacent à au moins $i - 1$ sommets colorés par chacune des couleurs j telles que $1 \leq j \leq i - 1$. Le nombre de Grundy d'un graphe G , noté $\gamma(G)$, est le nombre maximum de couleurs nécessaires pour une coloration de Grundy de G , pris sur toute les colorations de Grundy de G .

Il est clair que toute coloration de Grundy vérifie la définition de la coloration propre. On peut déduire alors:

Corollaire 5.6. Pour tout graphe G on a, $\chi(G) \leq \gamma(G)$, où $\chi(G)$ et $\gamma(G)$ désignent respectivement, le nombre chromatique et le nombre de Grundy.

Définition 5.7. *Pour deux nombres distincts α et β de $\{\omega, \chi, b, \gamma\}$, un graphe G est dit $\alpha\beta$ -parfait si et seulement si $\alpha(H) = \beta(H)$ pour tout sous graphe induit H de G .*

Par exemple, un graphe G est dit $b\gamma$ -parfait si et seulement si $b(H) = \gamma(H)$ pour tout sous graphe induit H de G .

La notion des graphes $b\chi$ -parfaits a été introduite récemment par Hoàng et Kouider [13] et a fait l'objet d'un article publié par les mêmes auteurs dans lequel ils ont caractérisé les graphes bipartis $b\chi$ -parfaits.

Théorème 5.8. [13] *Soit G un graphe biparti. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. G est $b\chi$ -parfait
2. G ne contient pas de chaîne P_5 induite, ne contient pas trois copies distinctes de P_3 et ne contient pas un P_4 induit et un P_3 induit.

Les mêmes auteurs ont également montré que si un graphe G ne contient pas deux graphes induits isomorphes à K_2 et ne contient pas le complémentaire d'une chaîne P_5 comme sous graphe induit alors G est $b\chi$ -parfait. Ils ont aussi caractérisé les graphes P_4 -sparse $b\chi$ -parfaits.

Théorème 5.9. [13] *Soit G un graphe P_4 -sparse. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. G est $b\chi$ -parfait
2. G est sans $2D$, sans $3P_3$ et sans $(P_4 + P_3)$.

Nous rappelons aussi deux autres résultats importants établis par C. A. Christen et Stanley M. Selkow [6] et S. Klein, M. Kouider [16] dont lesquels ils ont caractérisé les graphes $\gamma\omega$ -parfaits et les graphes $b\omega$ -parfaits respectivement.

Théorème 5.10. [6] *Pour tout graphe G , les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) G est $\gamma\omega$ -parfait.
- (ii) G est $\gamma\chi$ -parfait.
- (iii) G ne contient pas un sous graphe induit isomorphe à une chaîne d'ordre 4.

Théorème 5.11. [16] Soit G un graphe sans P_4 alors, on a l'équivalence suivante:

- (i) $b(H) = \omega(H)$, pour tout sous graphe induit H de G
- (ii) G est sans $2D$ et sans $3P_3$.

Nous rappelons maintenant les résultats suivants qui nous seront utiles pour caractériser les graphes $b\gamma$ -parfaits.

Lemme 5.12. [13] Soit donné un entier $k \geq 1$ et soient G_1 et K_k deux graphes de sommets disjoints où K_k est une clique d'ordre k , et soit $G = G_1 + K_k$. Alors $b(G) = \max(b(G_1), k)$.

Lemme 5.13. [13] Soient G_1 et G_2 deux graphes de sommets disjoints. Alors le joint $G_1 \vee G_2$ a $b(G_1 \vee G_2) = b(G_1) + b(G_2)$.

Dans [17], M. Kouider et M. Mahéo ont donné d'autres résultats relatifs à la b -coloration des graphes bipartis complets et graphes non connexes.

Proposition 5.14. [17] Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on $b(K_{n,p}) = 2$, où $K_{n,p}$ est un graphe biparti complet.

Proposition 5.15. [17] Si G est un graphe non connexe avec les composantes connexes C_1, C_2, \dots, C_p , alors on $b(G) \geq \max(b(C_i), 1 \leq i \leq p)$.

5.2 Résultats préliminaires

Nous présentons dans cette section quelques résultats relatifs à la coloration dominante et la coloration de Grundy.

Lemme 5.16. [3] Soient G_1 et G_2 deux graphes bipartis complets et de sommets disjoints, et soit $G = G_1 + G_2$. Alors, $b(G) = 2$.

Preuve. Si G est un graphe biparti complet connexe alors, d'après la proposition 5.14, $b(G) = 2$. Supposons maintenant que $G = G_1 + G_2$ avec G_1 et G_2 deux graphes bipartis complets. D'après la proposition 5.15 on a, $b(G) \geq \max(b(G_i), 1 \leq i \leq 2)$. Si

$b(G) > \max(b(G_i), 1 \leq i \leq 2) = 2$ alors G_1 (ou G_2) contient deux sommets b -dominants. Supposons que G_1 contient deux sommets b -dominants. Comme $G_1 = (X_1, Y_1, E_1)$ est un graphe biparti complet alors, on distingue deux cas:

Cas 1 : Les deux sommets b -dominants appartient à la même bipartition X_1 . Puisque $b(G) \geq 3$ alors, toutes les couleurs apparaissent dans Y_1 . Comme G_1 est biparti complet alors, la coloration obtenue n'est pas propre.

Cas 2 : Les deux sommets b -dominants n'appartient pas à la même bipartition. Comme $b(G) \geq 3$ et G_1 est un graphe biparti complet alors, la coloration obtenue n'est pas propre. \square

Remarque 5.17. *Si $G_1, G_2, \dots, G_p, p \geq 3$ sont des graphes bipartis complets alors $b(G_1 + G_2 + \dots G_p) \geq 2$. Par exemple, $b(3P_3) = 3$.*

Lemme 5.18. *[3] Soient G_1 et G_2 deux graphes de sommets disjoints. Alors le joint $G_1 \vee G_2$ a $\gamma(G_1 \vee G_2) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$.*

Preuve. Il est clair que, dans toute coloration de $G_1 \vee G_2$, aucune couleur ne peut apparaître dans G_1 et G_2 à la fois. Donc $\gamma(G_1 \vee G_2) \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$. Si dans une coloration de Grundy de $G_1 \vee G_2$, $\gamma(G_1 \vee G_2) > \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$ alors, on aura plus de $\gamma(G_1)$ -couleurs (ou $\gamma(G_2)$ -couleurs) qui se présentent dans une coloration de Grundy de G_1 (ou G_2), contradiction avec la définition de $\gamma(G_1)$ (ou $\gamma(G_2)$). \square

Lemme 5.19. *[3] Soient G_1 et G_2 deux graphes de sommets disjoints, et soit $G = G_1 + G_2$. Alors, on a:*

$$(i) \gamma(G) = \gamma(G_1 + G_2) = \max\{\gamma(G_1), \gamma(G_2)\}.$$

$$(ii) \text{ Si } G_2 \text{ est une clique d'ordre } k \text{ alors on a: } \gamma(G) = \max\{\gamma(G_1), k\}.$$

Preuve. *i)* Soient G_1 et G_2 deux graphes de sommets disjoints, et soit $G = G_1 + G_2$. Tout d'abord, il est clair que $\gamma(G) = \gamma(G_1 + G_2) \geq \max\{\gamma(G_1), \gamma(G_2)\}$. Soit donnée une coloration de Grundy de G avec $\gamma(G)$ couleurs et supposons que $\gamma(G) = \gamma(G_1 + G_2) > \max\{\gamma(G_1), \gamma(G_2)\}$. Si $\max\{\gamma(G_1), \gamma(G_2)\} = \gamma(G_1)$ alors, sans perte de généralité, on peut supposer que, les couleurs $1, 2, \dots, \gamma(G_1)$ apparaissent dans G_1 . Ceci implique que

les couleurs $\gamma(G_1) + 1, \gamma(G_1) + 2, \dots, \gamma(G)$ apparaissent dans G_2 car sinon on aura une contradiction avec la définition de $\gamma(G_1)$. De ce fait, il existe au moins une couleur c , $1 \leq c \leq \gamma(G_1)$ qui ne figure pas dans G_2 , sinon $\gamma(G_2) \geq \gamma(G_1) + 1$; contradiction avec le fait que $\gamma(G_1) = \max\{\gamma(G_1), \gamma(G_2)\}$. En conséquence, tous les sommets de couleurs $\gamma(G_1) + 1, \gamma(G_1) + 2, \dots, \gamma(G)$ sont adjacents à un certain sommet de G_1 de couleur c . Contradiction avec la non connexité de G .

ii) il est facile de vérifier que, si G_2 est une clique d'ordre k alors on a $\gamma(G) = \max\{\gamma(G_1), k\}$ □

5.3 Graphes sans P_4

Nous montrons dans cette section que, le nombre b -chromatique d'un graphe G sans P_4 est borné inférieurement par le nombre de *Grundy* et nous prouvons aussi que ce paramètre peut être calculé en temps polynomial dans cette classe de graphe.

5.3.1 Borne inférieure du nombre b -chromatique

Nous rappelons d'abord le théorème de D. Seinsche [23].

Théorème 5.20. [23] *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors les deux conditions sont équivalentes:*

- (1) G est sans P_4
- (2) Pour tout ensemble A de V tel que $|A| \geq 2$, ou bien $G[A]$ ou bien son complémentaire est non connexe.

Théorème 5.21. [3] *Si $G = (V, E)$ est un graphe sans P_4 alors $\gamma(G) \leq b(G)$.*

Preuve. Nous montrons ce théorème par induction sur le nombre de sommets de G . Tout d'abord, il est clair que, la proposition est triviale pour $|V| = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour tout ordre k , $k \leq |V| - 1$. Comme G sans P_4 alors d'après le théorème 5.20, on distingue deux cas:

Cas 1: Si \overline{G} est non connexe alors G est le joint de deux graphes G_1 et G_2 . D'après les lemmes 5.13 et 5.18, $b(G) = b(G_1 \vee G_2) = b(G_1) + b(G_2) \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2) = \gamma(G_1 \vee G_2) = \gamma(G)$.

Cas 2: Si G est non connexe alors G est l'union de p composantes connexes, $p \geq 2$. D'après la proposition 5.15, $b(G) = b(G_1 + G_2 + \dots + G_p) \geq \max\{b(G_i) ; 1 \leq i \leq p\} \geq \max\{\gamma(G_i) ; 1 \leq i \leq p\} = \gamma(G)$. \square

Remarque 5.22. *La réciproque est fautive. En effet, dans la figure 3, $b(G) = 5 > \gamma(G) = 4$ alors que G contient un P_4 induit.*

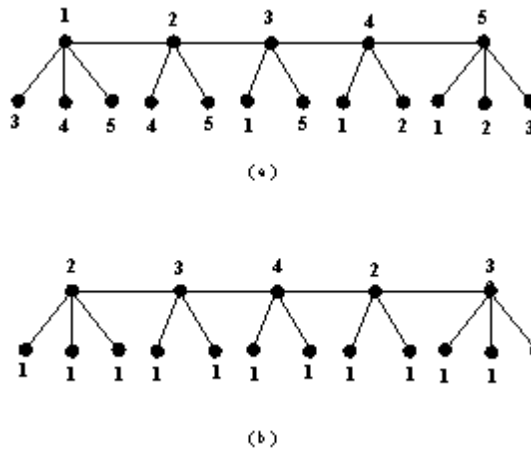


FIGURE 5.3.(a) Une $(5)b$ -coloration . (b) Une 4-coloration de Grundy

5.3.2 Calcul du nombre b -chromatique

Dans [3], nous avons montré comment calculer le nombre b -chromatique d'un graphe G sans P_4 . Pour cela, nous avons posé quelques définitions supplémentaires.

Dans une coloration donnée, nous disons qu'un sommet est un b -sommet s'il a un voisin dans chaque classe de couleur autre que la sienne; et nous disons qu'une classe de couleur est une b -classe si elle contient un b -sommet. Pour tout entier q tel que $\chi(G) \leq q \leq |V(G)|$, soit $h(G, q)$ le nombre maximum de b -classes dans les colorations ayant exactement q couleurs.

Avec cette notation, on voit que $b(G) = \max\{q \mid h(G, q) = q\}$. Par le théorème de Seinche [23], trois cas se présentent.

Cas 1: G a un seul sommet. Dans ce cas on a $q = 1$ et $h(G, 1) = 1$.

Cas 2: G n'est pas connexe. Danc G est l'union de deux graphes G_1, G_2 . Montrons que $h(G, q) = \min\{q, h(G_1, q) + h(G_2, q)\}$.

Il est clair que $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$. Considérons une coloration c de G qui a q couleurs et $r = h(G, q)$ b -classes. Pour $j = 1, 2$, soit r_j le nombre des b -classes de c qui sont incluses dans G_j ; donc $r = r_1 + r_2$. Supposons que $r_j > 0$. Donc G_j contient un b -sommet u . Puisque u a des voisins de toutes les couleurs autres que $c(u)$, et puisque tous ses voisins sont dans G_j , le graphe G_j a des sommets de toutes les q couleurs, et tous les b -sommets de c qui sont dans G_j sont des b -sommets de la restriction de c à G_j , d'où $h(G_j, q) \geq r_j$. On en déduit que $h(G, q) = r = r_1 + r_2 \leq h(G_1, q) + h(G_2, q)$.

Réciproquement, pour $j = 1, 2$, soit c_j une coloration de G_j avec q couleurs et $r_j = h(G_j, q)$ b -classes. Quitte à renommer les couleurs, on peut supposer que les b -classes de c_1 sont les couleurs $1, \dots, r_1$ et que les b -classes de c_2 sont $q - r_2 + 1, \dots, q$. Par conséquent, en combinant c_1 et c_2 nous obtenons une coloration de G avec q couleurs et $\min\{q, r_1 + r_2\}$ b -classes. Donc $h(G, q) \geq \min\{q, h(G_1, q) + h(G_1, q)\}$. Les deux inégalités impliquent l'égalité annoncée.

Cas 3: \overline{G} n'est pas connexe. Donc G est le joint de deux graphes G_1, G_2 . Montrons que $h(G, q) = \max\{h(G_1, q_1) + h(G_2, q_2) \mid q_1 \geq \chi(G_1), q_2 \geq \chi(G_2), q_1 + q_2 = q\}$.

Il est clair que $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$. Considérons une coloration c de G qui a q couleurs et $r = h(G, q)$ b -classes. Pour $j = 1, 2$, soient q_j et r_j respectivement le nombre de couleurs et de b -classes de c qui se trouvent dans G_j . Puisqu'une couleur ne peut pas être présente à la fois dans G_1 et dans G_2 , on a $q = q_1 + q_2$ et $r = r_1 + r_2$. Tout b -sommet de c qui se trouve dans G_j est un b -sommet de la restriction de c à G_j , d'où $r_j \leq h(G_j, q_j)$ ($j = 1, 2$). Donc $h(G, q) = r_1 + r_2 \leq h(G_1, q_1) + h(G_2, q_2)$.

Réciproquement, soient q_1, q_2 deux entiers tels que $q_1 \geq \chi(G_1), q_2 \geq \chi(G_2)$ et $q_1 + q_2 = q$. Pour $j = 1, 2$, posons $r_j = h(G_j, q_j)$ et soit c_j une coloration de G_j avec q_j couleurs et r_j b -classes. En attribuant des ensembles de couleurs disjoints à c_1 et à c_2 , leur combinaison

est une coloration c de G avec q couleurs. Puisque chaque sommet de G_1 est adjacent à chaque sommet de G_2 , il suit que tout sommet de G_1 qui est b -sommet de c_1 est aussi b -sommet de c . Donc c possède $r_1 + r_2$ b -classes. Puisque ceci est vrai pour tous les choix possibles de q_1, q_2 , nous obtenons $h(G, q) \geq \max\{h(G_1, q_1) + h(G_2, q_2) \mid q_1 \geq \chi(G_1), q_2 \geq \chi(G_2), q_1 + q_2 = q\}$. Les deux inégalités impliquent l'égalité annoncée.

On observe que les opérations ci-dessus prennent un temps polynomial. Dans le cas 2, le calcul de $h(G, q)$ est immédiat à partir de $h(G_1, q)$ et $h(G_2, q)$. Dans le cas 3, on a au plus $|V(G)|$ couples (q_1, q_2) à examiner. De plus, chacun des cas 2 et 3 réduit le calcul de $h(G, q)$ au calcul sur deux sous-graphes disjoints. On a donc au plus $|V(G)|$ occurrences des cas 2 et 3. Au total, le temps de calcul est donc $O(|V(G)|^2)$ pour chaque valeur de q , et donc $O(|V(G)|^3)$ pour toutes les valeurs possibles et pour en déduire la valeur de $b(G)$.

5.4 Caractérisation des graphes $b\gamma$ -parfaits

Nous nous intéressons dans cette section à l'étude des graphes $b\gamma$ -parfaits. Nous introduisons d'abord un théorème qui caractérise les graphes $b\gamma$ -parfaits ensuite nous déduisons deux autres résultats concernant les graphes bipartis $b\gamma$ -parfait et les graphes sans P_4 $b\gamma$ -parfait.

Lemme 5.23. [3] Soient G et H deux graphes sans P_4 et sans $3P_3$ avec $G = G_1 + G_2$ et $H = G_2 + G_3$, où G_1 est un graphe biparti complet, G_2 est un graphe qui contient un diamant et G_3 est le joint d'un seul sommet x_0 avec p cliques de sommets disjoints, $p \geq 2$.

Alors, on a :

- i) $b(G) = \max\{b(G_1), b(G_2)\}$
- ii) $b(H) = \max\{b(G_2), b(G_3)\}$.

Preuve. i) Tout d'abord, il est clair que $b(G_1) = 2$ et $b(G_2) = k \geq 3$. Supposons que $b(G) = l > \max\{b(G_1), b(G_2)\} = k$. Soient u_1, u_2, \dots, u_l , les sommets b -dominants de G de couleurs $1, 2, \dots, l$. Si G_2 contient l sommets b -dominants de couleurs distinctes alors, $b(G) = l > \max\{2, l\} = l$, contradiction. Donc G_2 contient au plus $l - 1$ sommets

b -dominants de couleurs distinctes; et comme G_1 est un graphe biparti complet et $l > 3$ alors, il ne peut contenir qu'un seul sommet b -dominant. Sans perte de généralité, on peut supposer que, le seul sommet b -dominant dans G_1 est u_l de couleur l . Ainsi, le graphe G_2 contient exactement $l - 1$ sommets b -dominants u_1, u_2, \dots, u_{l-1} de couleurs $1, 2, \dots, l - 1$ différentes de la couleur l . Aucun sommet de G_2 de couleur l ne peut être adjacent à tous les sommets u_1, u_2, \dots, u_{l-1} , sinon il sera b -dominant de couleur l , et $b(G_2) = l$, contradiction.

On montre maintenant qu'il existe dans G_2 deux sommets b -dominants u_i et u_j de couleur i et j , $i \neq j$ (voir figure 5.4), tels que u_i est adjacent à un sommet $v \in V(G_2)$ de couleur l et u_j est adjacent à un autre sommet $w \in V(G_2)$ de couleur l où u_i est non adjacent à w et u_j ; et u_j est non adjacent à v .

En effet, il suffit de prendre un sommet v de couleur l qui a le plus de voisins b -dominants de couleurs distinctes dans G_2 . Comme v ne peut pas être adjacent à tous les sommets b -dominants alors, il existe un sommet b -dominant u_j de couleur j adjacent à un autre sommet w de couleur l et non adjacent à v . Dans ce cas, il existe un sommet $u_i \in N(v)$ tel que u_i est non adjacent à w , un tel sommet existe sinon on a une contradiction avec le choix de v . Comme le graphe G est sans P_4 alors, u_i n'est pas adjacent à u_j , sinon $[vu_iu_jw]$ serait un P_4 . D'autre part, le sommet v ne peut pas être adjacent à tous les voisins de u_i , sinon v serait un sommet b -dominant de couleur l . Donc il existe un sommet x voisin de u_i et non voisin de v . De même pour le sommet u_j , il existe un sommet y voisin de u_j et non voisin de w . Si $x = y$ alors $[vu_ixu_jw]$ serait un P_5 , contradiction. Donc $x \neq y$; le sommet x ne peut pas être adjacent aux sommets u_j, w et y sinon $[u_jxu_iv]$, $[wxu_iv]$ et $[xyu_jw]$ induisent dans chacun des cas un P_4 . De même, y n'est pas relié aux sommets u_i et v . Donc G_2 contient un $2P_3$, $[xu_iv]$ et $[wu_jy]$; d'où le graphe G contient un $3P_3$ induit, contradiction. Donc on a bien $b(G) = \max\{b(G_1), b(G_2)\}$

ii) Il est facile de constater que, le m -degré de G_3 (voir figure 5.5) est égal à $\omega(G_3)$, donc $b(G_3) = \omega(G_3)$. Si $b(H) = l > \max\{b(G_2), b(G_3)\} = \max\{b(G_2), \omega(G_3)\} = k$ alors $\omega(G_3) \leq l - 1 = b(H) - 1$. Dans ce cas, on peut vérifier que, pour tout sommet z de G_3 , $z \neq x_0$, $d(z) \leq \omega(G_3) - 1 \leq b(H) - 2$. En conséquence, aucun sommet de G_3

autre que x_0 ne peut être un sommet b -dominant. Ceci implique que G_2 contient $l - 1$ sommets b -dominants. En utilisant un raisonnement similaire à (i), on peut montrer que, $b(H) = \max\{b(G_2), b(G_3)\}$.

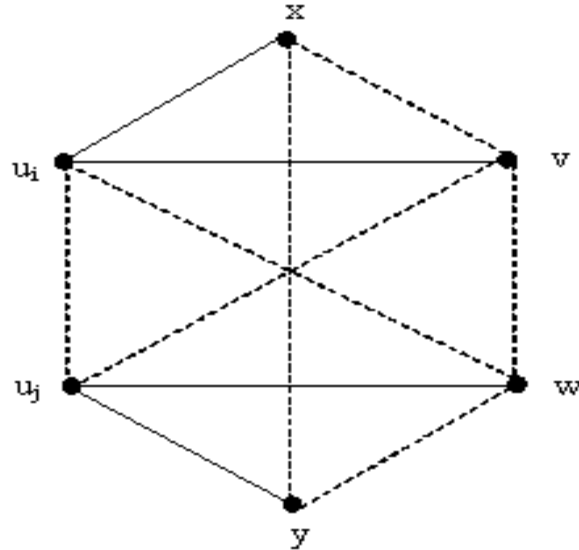


Figure 5.4. Deux copies de P_3 de sommets disjoints

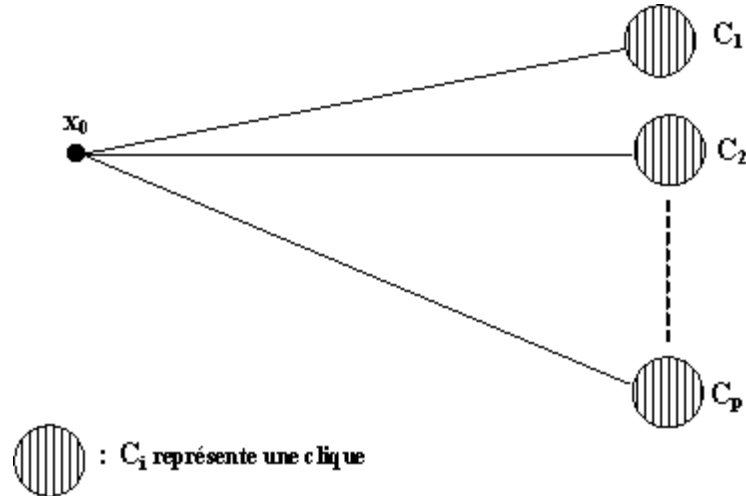


Figure 5.5. Le graphe G_3

□

Définition 5.24. Un graphe G est dit $b\gamma$ -imparfait minimal, si tout sous graphe propre $H \subset G$ est $b\gamma$ -parfait et le graphe G n'est pas $b\gamma$ -parfait.

On présente maintenant un théorème qui caractérise les graphes $b\gamma$ -parfaits.

Théorème 5.25. [3] Soit $G = (V, E)$ un graphe, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes

i) G est $b\gamma$ -parfait

ii) G est sans P_4 , sans $3P_3$ et sans $2D$.

Preuve. (i) \Rightarrow (ii), $b(P_4) = 2 < \gamma(P_4) = 3$, $b(3P_3) = 3 > \gamma(3P_3) = 2$ et $b(2D) = 4 > \gamma(2D) = 3$. Si G est $b\gamma$ -parfait alors, il ne doit pas contenir les graphes isomorphes à P_4 , $3P_3$ et $2D$ comme sous graphes induits.

(ii) \Rightarrow (i), soit G un graphe sans P_4 , sans $3P_3$ et sans $2D$ et supposons que G est $b\gamma$ -imparfait minimal. Comme G est sans P_4 alors d'après le théorème de Seinsche [23], on distingue deux cas:

Cas 1: Si \overline{G} est non connexe alors G est le joint de deux graphes G_1 et G_2 . D'après les lemmes 5.13 et 5.18, on a: $b(G) = b(G_1 \vee G_2) = b(G_1) + b(G_2)$ et $\gamma(G) = \gamma(G_1 \vee G_2) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) = \gamma(G)$. Puisque G_1 et G_2 sont $b\gamma$ -parfaits alors $b(G) = \gamma(G)$; contradiction avec le fait que G est $b\gamma$ -imparfait minimal.

Cas 2: Si G n'est pas connexe alors, il contient k composantes connexes G_1, G_2, \dots, G_k , $k \geq 2$. Deux sous cas sont à distinguer.

Cas 2.1: $k \geq 3$. Comme G est sans $3P_3$ alors, il existe une composante connexe sans P_3 (G_3 par exemple). Ceci implique que G_3 est une clique. D'après les lemmes 5.12 et 5.19, $b(G) = \max\{b(G_3), b(G - G_3)\}$ et $\gamma(G) = \max\{\gamma(G_3), \gamma(G - G_3)\}$. Comme G_3 et $G - G_3$ sont $b\gamma$ -parfaits alors $b(G) = \gamma(G)$; contradiction.

Cas 2.2: $k = 2$. Puisque G est sans $2D$ alors, on peut supposer que G_1 est sans diamant, et on peut supposer aussi que G_1 n'est pas une clique (sinon voir le cas où $k \geq 3$). En conséquence, le graphe G_1 contient une chaîne P_3 . Comme G_1 est sans P_4 alors, il est le joint de deux graphes $G[A]$ et $G[B]$ où $A, B \subset V(G_1)$ et $A \cap B = \emptyset$. Les graphes $G[A]$ et $G[B]$ sont sans P_3 induit car sinon G_1 contient un diamant. Par conséquent, la chaîne existante dans G_1 est de la forme suivante (voir figure 5.6):

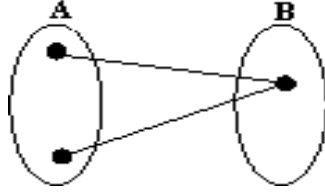


Figure 5.6. Une chaîne d'ordre 3

L'ensemble B est un stable car sinon G_1 contient un diamant. Selon la taille de B , on distingue alors les deux sous cas suivants:

Cas 2.2.1: Si $|B| \geq 2$ alors A est un stable sinon G_1 contient un diamant. Ainsi, G_1 est un graphe biparti complet. D'après la proposition 5.14 et le lemme 5.19, on a $b(G_1) = 2$ et $\gamma(G_1) = 2$.

- Si G_2 est sans diamant alors, on peut montrer de la même façon qu'il est biparti complet. Donc $b(G_2) = \gamma(G_2) = 2$. D'après les lemmes 5.16 et 5.19, $b(G) = b(G_1 + G_2) = \max\{b(G_1), b(G_2)\} = 2$, et $\gamma(G) = \gamma(G_1 + G_2) = \max\{\gamma(G_1), \gamma(G_2)\} = 2$. Comme G_1 et G_2 sont $b\gamma$ -parfaits alors $b(G) = \gamma(G)$; contradiction.

- Si G_2 contient un diamant alors, en utilisant le lemme 5.23, on trouve $b(G) = \max\{b(G_1), b(G_2)\}$. D'après le lemme 5.19, on a $\gamma(G) = \max\{\gamma(G_1), \gamma(G_2)\}$. D'où $b(G) = \gamma(G)$; contradiction.

Cas 2.2.2: Si $|B| = 1$ alors l'ensemble A est sans P_3 . En conséquence, l'ensemble A est l'union de p cliques de sommets disjoints, $p \geq 2$.

- Si G_2 est sans diamant alors, il est de même structure que G_1 . On peut vérifier que $b(G_1) = \omega(G_1)$, $b(G_2) = \omega(G_2)$, et $b(G_3) = \omega(G_3)$ de plus, le m -degré de G est égal à $\omega(G)$. De ce fait, $b(G) = \omega(G) = \max\{\omega(G_1), \omega(G_2)\} = \max\{b(G_1), b(G_2)\}$, et d'après le lemme 5.19, on a $\gamma(G) = \max\{\gamma(G_1), \gamma(G_2)\}$, donc $b(G) = \gamma(G)$; contradiction.

- Si G_2 contient un diamant alors, d'après le lemme 5.23, $b(G) = \max\{b(G_1), b(G_2)\}$, et comme $\gamma(G) = \max\{\gamma(G_1), \gamma(G_2)\}$ alors $b(G) = \gamma(G)$; contradiction. \square

Les deux corollaires suivants sont des conséquences directes du théorème 5.25.

Corollaire 5.26. [3] *Soit G un graphe biparti. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

- i) G est $b\gamma$ -parfait*
- ii) G est sans P_4 et sans $3P_3$.*

Preuve. Un graphe biparti est sans diamant. Donc, d'après le théorème 5.25, les deux assertions sont équivalentes. \square

Corollaire 5.27. [3] *Soit G un graphe sans P_4 alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) G est $b\omega$ -parfait*
- (ii) G est $b\gamma$ -parfait*
- (iii) G est sans $2D$ et sans $3P_3$*

Preuve. $(i) \implies (ii)$. Soient G un graphe $b\omega$ -parfait et H un sous graphe induit de G . Comme G est sans P_4 alors H est sans P_4 . Donc, d'après le théorème 5.21, $\omega(H) \leq \gamma(H) \leq b(H)$. En conséquence, $\gamma(H) = b(H)$

$(ii) \implies (iii)$, $b(2D) = 4 > \gamma(2D) = 3$ et $b(3P_3) = 3 > \gamma(3P_3) = 2$. Si G est $b\gamma$ -parfait alors, il ne doit pas contenir les graphes isomorphes à $2D$ et $3P_3$ comme sous graphes induits.

$(iii) \implies (ii)$ D'après le théorème 5.11, on a le résultat désiré. \square

5.5 Graphes $b\psi$ -parfaits

Nous déduisons dans cette section une caractérisation des graphes $b\psi$ -parfaits.

Définition 5.28. *Une a -coloration (ou coloration complète) est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs distinctes i et j , il existe deux sommets adjacents de couleur i et j . Le nombre a -chromatique, noté $\psi(G)$, est le nombre maximum de classes de couleurs dans une a -coloration.*

Dans [6], C.A. Christen et S.M. Selkow ont caractérisé les graphes $\psi\chi$ -parfaits.

Théorème 5.29. [6] *Pour tout graphe G , les assertions suivantes sont équivalentes:*

- i) G est $\psi\chi$ -parfait
- ii) G ne contient aucun sous graphe induit isomorphe à l'un des graphes suivant: $P_4, P_3 + P_2$ et $3P_2$.

En utilisant les théorèmes 5.25 et 5.29, on peut déduire le corollaire suivant:

Corollaire 5.30. [3] *Soit G un graphe, alors les trois assertions suivantes sont équivalentes:*

- i) G est $b\psi$ -parfait
- ii) G est sans P_4 , sans $3P_2$ et sans $P_3 + P_2$
- iii) G est $\psi\chi$ -parfait

Preuve. (i) \Rightarrow (ii), $b(P_4) = 2 < \psi(P_4) = 3$, $b(3P_2) = 2 < \psi(3P_2) = 3$ et $b(P_3 + P_2) = 2 < \psi(P_3 + P_2) = 3$. Si G est $b\psi$ -parfait alors, il ne doit pas contenir les graphes isomorphes à $P_4, 3P_2$ et $P_3 + P_2$ comme sous graphes induits.

(ii) \Rightarrow (iii), d'après le théorème 5.29.

(iii) \Rightarrow (i), trivial, car pour tout graphe G , $\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G)$. □

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés principalement à la notion de la coloration dominante dans les graphes.

En l'absence de valeurs exactes du nombre b -chromatique d'un graphe G , on est amené généralement à déterminer des bornes inférieures et supérieures qui l'encadre le mieux possible et à caractériser les graphes pour lesquels ces bornes sont atteintes.

En effet, dans un premier temps, nous avons donné une nouvelle borne supérieure pour ce paramètre en fonction de n et $\omega(G)$ et nous avons montré qu'elle est atteinte pour une famille de graphes particulière. Ce résultat, nous a permis de caractériser une nouvelle classe de graphes dont le nombre b -chromatique est égal à $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$. Ensuite, nous avons présenté une autre borne supérieure pour $b(G)$ en fonction de n et $\beta(G)$. A partir de ce résultat, nous avons introduit une nouvelle caractérisation de graphes tels que $b(G) - \beta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Dans un second temps, nous avons étudié la b -coloration et la b -continuité du produit croisé de certains graphes particuliers. D'abord, nous avons donné la valeur exacte du produit croisé de deux étoiles, de deux chaînes et celui d'une étoile et une chaîne. Ensuite, nous avons montré que ces graphes sont b -continus.

Enfin, nous avons présenté une nouvelle borne inférieure pour le nombre b -chromatique d'un graphe sans P_4 , et nous avons montré que ce paramètre peut être obtenu en temps polynomial dans cette classe de graphes. Ensuite, pour une notion nouvellement introduite, nous avons pu établir un théorème qui nous a permis de caractériser les graphes $b\gamma$ -parfaits.

Biens que ces résultats et ceux qui ont été obtenus bien avant soient importants, nous sommes loin de répondre au nombreuses questions ou d'aborder les différents problèmes que présente la notion de la coloration dominante. De ce fait, nous avons laissé, tout au long de ce mémoire, deux problèmes non encore résolus. Nous proposons d'étudier ces deux questions dont l'une concerne la reconnaissance, en temps polynomial, des graphes

bipartis tels que le nombre b -chromatique égale à $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ et l'autre sur la caractérisation des graphes sans triangle tels que $b(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

RÉFÉRENCES

- [1] C. Berge. Graphs, North Holland, 1985.
- [2] M. Blidia et N. Ikhlef Eschouf, Bornes sur le nombre b -chromatique d'un graphe, communication acceptée pour le colloque international sur l'optimisation et les systèmes d'information COSI'06, USTHB, soumis à RAIRO.
- [3] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf et F. Maffray, Caractérisation des graphes $b\gamma$ -parfaits, soumis à COSI'07, USTO
- [4] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 :194-197, (1941)
- [5] M. Chundovsky and P. D. Seymour, The structure of claw-free graphs, manuscrit 2004.
- [6] C.Christen, S. Selkow, Some Perfect Coloring Properties of Graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B27, 49-59 (1979).
- [7] B. Effantin and H. Kheddouci. The b -chromatic number of some power graphs. Discrete Math. Theor. Comput. Sc. , 6: 45-54 (2003).
- [8] B. Effantin and H. Kheddouci. Exact values for b -chromatic number of a power complete k -ary tree. A paraître dans Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, (2003).
- [9] T. Faik. About the b -continuity of graphs. Electronic Notes in Discrete Mathematics 17: 151-156, 2004.
- [10] T. Faik. La b -continuité des b -colorations: complexité, propriétés structurelles et algorithmes. Thèse d'université, université de PARIS-SUD U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY, 2005.

- [11] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver. Polynomial algorithms for perfect graphs. In : Topics on Perfect graphs (Ann. Discrete Math. 21), ed. par C. Berge and V. Chvátal, pp. 325-356. Amsterdam, North-Holland, 1984.
- [12] F. Harary, S. Hedetniemi and G. Prins. An Interpolation theorem for graphical homomorphisms, Port. Math. 26 : 453-462, (1967).
- [13] C.T. Hoàng and M. Kouider. On the b -dominating coloring of graphs. Discrete Applied Mathematics, 152: 176-186, (2005).
- [14] R. W. Irving and D. F. Manlove. The b -chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math. 91: 127-141, (1999).
- [15] J. Kratochvíl, J. Kara and M. Voigt. b -continuity. Technical report, University Ilmenau, Faculty for Mathematics and Natural Sciences, (2004).
- [16] S. Klein, M. Kouider, b -coloration and P_4 -free graphs, manuscript.
- [17] M. Kouider and M. Mahéo. Some bounds for the b -chromatic number of a graph. Discrete Math., 256: 267-277, (2002).
- [18] M. Kouider and M. Zaker. Bounds for the b -chromatic number of some families of graphs. arXiv:math.Co/0506167 v1 9 Jun 2005.
- [19] J. Kratochvíl, Z. Tuza and M. Voigt. On the b -chromatic number of graphs. Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin, 2573, 310-320, (2002).
- [20] L. Lovász. Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. Discrete Math., 2: 253-267, (1972).
- [21] D. F. Manlove. Minimaximal and maximinimal optimisation problems: a partial order-based approach. PhD thesis, technical report tr-1998-27 of the Computing Science Department of Glasgow University, 1998.
- [22] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, 63: 175-177, (1956).

- [23] D. Seince. On a property of the class of n -colorable graphs, J.Comb. Theory Ser. B 16 (1974), 191-193.